MATHEMATISCHE WERKBANK

Wolfgang Soergel

25. April 2024

Inhaltsverzeichnis

A Einstimmung und Grundbegriffe 5

1 Einstimmung 7

2 Mengen und Verknüpfungen 27

B Algebra 101

3 Lineare Algebra 1 103

4 Lineare Algebra 2 333

5 Elementargeometrie 621

6 Algebra und Zahlentheorie 701

7 Kommutative Algebra und Geometrie 913

8 Nichtkommutative Algebra und Symmetrie 1223

9 Affine Algebraische Gruppen 1355

C Analysis 1541

10 Analysis 1 1543

11 Reste Analysis 1 1789

12 Analysis 2 1837

13 Analysis 3 2121

14 Funktionentheorie 1 **2341**

D Topologie 2475

15 Topologie und kompakte Gruppen **2479**

16 Fundamentalgruppe und Überlagerung **2595**

17 Singuläre Homologietheorie **2753**

18 Kategorielle Produktstrukturen **2983**

19 Garbenkohomologie **3089**

20 Derivierte Kategorien und Funktoren **3353**

21 Grothendieck's sechs Funktoren **3489**

E Lie-Theorie 3769

22 Mannigfaltigkeiten und Liegruppen **3771**

23 Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme **3969**

24 Halbeinfache Liealgebren **4089**

25 Kategorie $\mathcal{O}$ **4235**

F Prüfungsfragen 4293

26 Typische Prüfungsfragen **4295**

Literaturverzeichnis **4303**

Index **4311**

Teil A

Einstimmung und Grundbegriffe

Kapitel 1

Einstimmung

Inhalt

1.1 Einstimmung **8**

1.1.1 Vollständige Induktion und binomische Formel . . 8

1.1.2 Fibonacci-Folge und Vektorraumbegriff 16

1.1 Einstimmung

1.1.1 Vollständige Induktion und binomische Formel

Satz 1.1.1.1. *Für jede natürliche Zahl* $n \geq 1$ *gilt* $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beispiel 1.1.1.2. Im Fall $n = 5$ behauptet unser Satz $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 5 \times 6/2$ und in diesem Fall stimmt das schon mal: Beide Seiten sind 15. Man bemerke, daß wir beim Rechnen mit Symbolen wie etwa $n(n + 1)$ die Multiplikationssymbole weggelassen haben, die nur beim Rechnen mit durch Ziffern dargestellten Zahlen wichtig sind.

Beweis. Bei diesem Beweis sollen Sie gleichzeitig das Beweisprinzip der **vollständigen Induktion** lernen. Wir bezeichnen mit $A(n)$ die Aussage, daß die Formel im Satz für ein gegebenes n gilt, und zeigen:

Induktionsbasis: Die Aussage $A(1)$ ist richtig. In der Tat gilt $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Induktionsschritt: Aus der Aussage $A(n)$ folgt die Aussage $A(n + 1)$. In der Tat, unter der Annahme, daß unsere Formel für ein gegebenes n gilt, der sogenannten **Induktionsannahme** oder **Induktionsvoraussetzung**, rechnen wir

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) &= \tfrac{n(n+1)}{2} + \tfrac{2(n+1)}{2} \\ &= \tfrac{(n+2)(n+1)}{2} \\ &= \tfrac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

und folgern so, daß die Formel auch für $n + 1$ gilt.

Es ist damit klar, daß unsere Aussage $A(n)$ richtig ist alias daß unsere Formel gilt für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ □

1.1.1.3. Das Zeichen □ deutet in diesem Text das Ende eines Beweises an und ist in der neueren Literatur weit verbreitet. Buchstaben in Formeln werden in der Mathematik üblicherweise kursiv notiert, so wie etwa das n oder auch das A im vorhergehenden Beweis. Nur Buchstaben oder Buchstabenkombinationen, die stets dasselbe bedeuten sollen, schreibt man nicht kursiv, wie etwa $\sin$ für den Sinus oder $\log$ für den Logarithmus.

1.1.1.4. Der vorhergehende Beweis stützt sich auf unser intuitives Verständnis der natürlichen Zahlen. Man kann das Konzept der natürlichen Zahlen auch formal einführen und so die natürlichen Zahlen in gewisser Weise „besser“ verstehen. Das wird in 2.1.6.11 und ausführlicher in 3.4.1.6 diskutiert. Das Wort „Induktion“ meint eigentlich „Hervorrufen“, so wie etwa das Betrachten einer Wurst die

Ausschüttung von Spucke induziert alias uns den Mund wässrig macht. Im Zusammenhang der vollständigen Induktion ist es dahingehend zu verstehen, daß die Richtigkeit unserer Aussage $A(1)$ die Richtigkeit von $A(2)$ induziert, die Richtigkeit von $A(2)$ hinwiederum die Richtigkeit von $A(3)$, die Richtigkeit von $A(3)$ die Richtigkeit von $A(4)$, und immer so weiter.

1.1.1.5. Es herrscht keine Einigkeit in der Frage, ob man die Null eine natürliche Zahl nennen soll. In diesem Text ist stets die Null mit gemeint, wenn von natürlichen Zahlen die Rede ist. Wollen wir die Null dennoch ausschließen, so sprechen wir wie oben von einer „natürlichen Zahl $n \geq 1$“.

1.1.1.6. Ich will kurz begründen, warum es mir natürlich scheint, auch die Null eine natürliche Zahl zu nennen: Hat bildlich gesprochen jedes Kind einer Klasse einen Korb mit Äpfeln vor sich und soll seine Äpfel zählen, so kann es ja durchaus vorkommen, daß in seinem Korb gar kein Apfel liegt, weil es zum Beispiel alle seine Äpfel bereits gegessen hat. In der Begrifflichkeit der Mengenlehre ausgedrückt, die wir in 2.1.1 einführen werden, muß man die leere Menge endlich nennen, wenn man erreichen will, daß jede Teilmenge einer endlichen Menge wieder endlich ist. Will man dann zusätzlich erreichen, daß die Kardinalität jeder endlichen Menge eine natürliche Zahl ist, so darf man die Null nicht aus den natürlichen Zahlen herauslassen.

1.1.1.7. Man kann sich den Satz anschaulich, wie in nebenstehendem Bild angedeutet, klar machen als eine Formel für die Fläche des Querschnitts durch eine Treppe der Länge n mit Stufenabstand und Stufenhöhe Eins. In der Tat bedeckt ein derartiger Querschnitt ja offensichtlich ein halbes Quadrat der Kantenlänge n nebst n halben Quadraten der Kantenlänge Eins. Ein weiterer Beweis geht so:

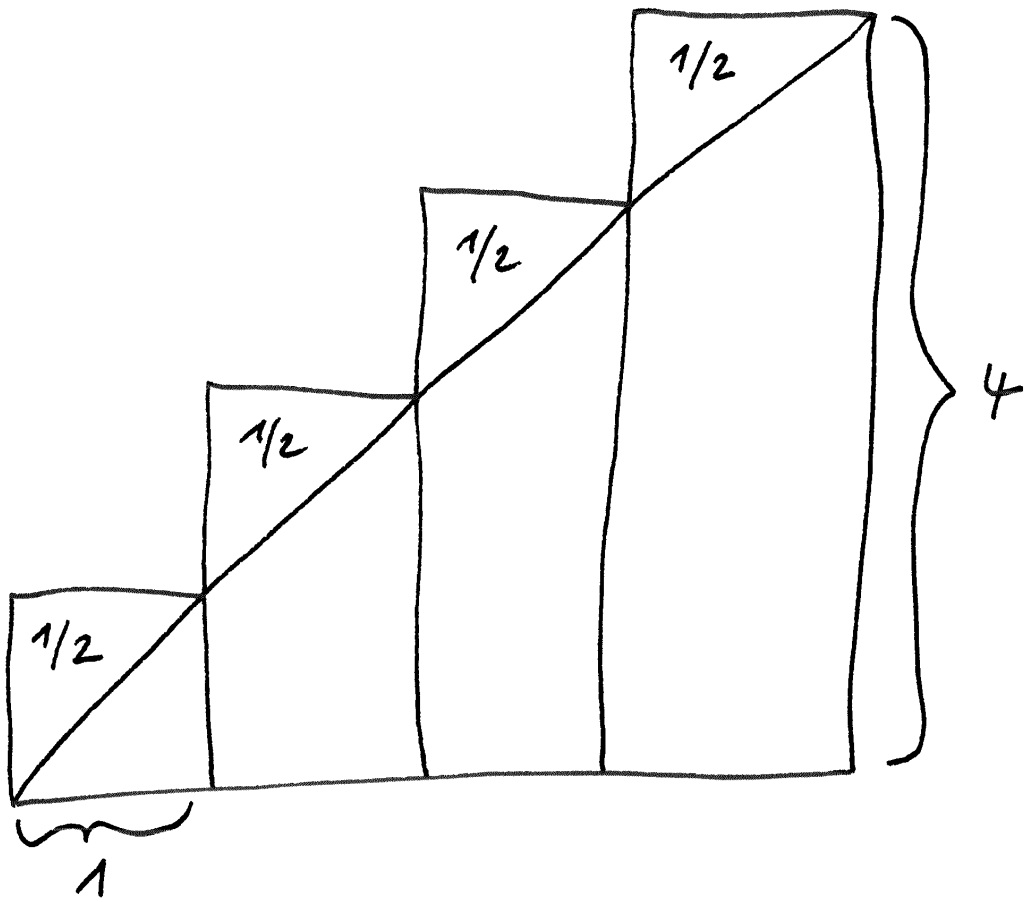
$$\begin{array}{rcccccccc} 1+2+3+\ldots+n & = & 1/2 & + & 2/2 & + & 3/2 & +\ldots & +n/2 \\ & & +n/2 & & +(n-1)/2 & & +(n-2)/2 & +\ldots & +1/2 \\ & = & \frac{n+1}{2} & + & \frac{n+1}{2} & + & \frac{n+1}{2} & +\ldots & +\frac{n+1}{2} \\ & = & n(n+1)/2 & & & & & & \end{array}$$

Ich will letzteren Beweis benutzen, um eine neue Notation einzuführen.

Definition 1.1.1.8. Gegeben $a_1, a_2, \ldots, a_n$ schreiben wir

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Das Symbol $\sum$ ist ein großes griechisches S und steht für „Summe“. Das Symbol $:=$ deutet an, daß die Bedeutung der Symbole auf der doppelpunktbehafteten Seite des Gleichheitszeichens durch den Ausdruck auf der anderen Seite unseres



Die Gesamtfläche dieses Treppenquerschnitts ist offensichtlich
$4^2/2 + 4/2 = 4 \cdot 5/2$

Gleichheitszeichens definiert ist. Im obigen und ähnlichen Zusammenhängen heißen $a_1, \ldots, a_n$ die **Summanden** und i der **Laufindex**, da er eben etwa in unserem Fall von 1 bis n läuft und anzeigt alias „indiziert“, welcher Summand gemeint ist.

1.1.1.9 (**Zur Sprache in der Mathematik**). Das Wort „Definition“ kommt aus dem Lateinischen und bedeutet „Abgrenzung“. In Definitionen versuchen wir, die Bedeutung von Symbolen und Begriffen so klar wie möglich festzulegen. Sie werden merken, daß man in der Mathematik die Angwohnheit hat, in Definitionen Worte der Umgangssprache wie Menge, Gruppe, Körper, Unterkörper, Abbildung etcetera „umzuwidmen“ und ihnen ganz spezielle und meist nur noch entfernt mit der umgangssprachlichen Bedeutung verwandte neue Bedeutungen zu geben. In mathematischen Texten sind dann überwiegend diese umgewidmeten Bedeutungen gemeint. In dieser Weise baut die Mathematik also wirklich ihre eigene Sprache auf, bei der jedoch die Grammatik und auch nicht ganz wenige Wörter doch wieder von den uns geläufigen Sprachen übernommen werden. Das muß insbesondere für den Anfänger verwirrend sein, der sich auch bei ganz harmlos daherkommenden Wörtern stets wird fragen müssen, ob sie denn nun umgangssprachlich gemeint sind oder vielmehr bereits durch eine Definition auf eine mehr oder weniger andere und viel genauere Bedeutung festgelegt wurden. Um hier zu helfen, habe ich mir große Mühe mit dem Index gegeben, den Sie ganz am Schluß dieses Skriptums finden und in dem alle an verschiedenen Stellen eingeführten oder umgewidmeten und dort fett gedruckten Begriffe verzeichnet sein sollten. Und an dieser Stelle muß ich Sie schon bitten, das Wort „Index“ nicht als Laufindex mißzuverstehen!

Beispiel 1.1.1.10. In der $\sum$-Notation liest sich der in 18.2.4.18 gegebene Beweis so:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^n i &= \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} \\
&\quad \text{und nach Indexwechsel } i = n+1-k \text{ hinten} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{n+1-k}{2} \\
&\quad \text{dann mache } k \text{ zu } i \text{ in der zweiten Summe} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{n+1-i}{2} \\
&\quad \text{und nach Zusammenfassen beider Summen} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{n+1}{2} \\
&\quad \text{ergibt sich offensichtlich} \\
&= n\left(\tfrac{n+1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Beispiel 1.1.1.11. Einen anderen Beweis derselben Formel liefert die Gleichungskette:

$$(n+1)^2 = \sum_{i=0}^n (i+1)^2 - i^2 = \sum_{i=0}^n 2i + 1 = 2\sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n 1 = n + 1 + 2\sum_{i=0}^n i$$

Definition 1.1.1.12. In einer ähnlichen Bedeutung wie das Symbol $\sum$ verwendet man auch das Symbol $\prod$, ein großes griechisches P, für „Produkt“ und schreibt

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 a_2 \ldots a_n$$

Die $a_1, \ldots, a_n$ heißen in diesem und ähnlichen Zusammenhängen die **Faktoren** des Produkts.

Definition 1.1.1.13. Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ definieren wir die Zahl $n!$ (sprich: n **Fakultät**) durch die Formel

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Wir treffen zusätzlich die Vereinbarung $0! := 1$ und haben also $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ und so weiter.

1.1.1.14 (**Allgemeinere Summen und Produkte**). Wir vereinbaren, daß Produkten, bei denen die obere Grenze des Laufindex um Eins kleiner ist als seine untere Grenze, der Wert 1 zugewiesen werden soll, also etwa $1 = \prod_{i=1}^{0} i = 0!$. Ebenso vereinbaren wir auch, daß Summen, bei denen die obere Grenze des Laufindex um Eins kleiner ist als seine untere Grenze, der Wert 0 zugewiesen werden soll, so daß wir in Erweiterung unserer Formel 1.1.1.1 etwa schreiben könnten $0 = \sum_{i=1}^{0} i$. Der Sinn dieser Erweiterungen zeigt sich darin, daß damit Formeln wie $\sum_{i=k}^{l} a_i = \sum_{i=k}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{l} a_i$ auch für $m = k - 1$ richtig bleiben. Man mag sogar noch weiter gehen und die Definition von Summen und Produkten auf beliebige untere und obere Grenzen so erweitern, daß diese Formeln richtig bleiben, zumindest wenn alle Summanden ein Negatives beziehungsweise alle Faktoren einen Kehrwert haben. In dieser Allgemeinheit ist die fragliche Notation jedoch nur beim kontinuierlichen Analogon $\int$ des Summenzeichens üblich, wie in 10.5.2.10 ausgeführt werden wird.

Satz 1.1.1.15 (**Bedeutung der Fakultät**). *Es gibt genau $n!$ Möglichkeiten, n voneinander verschiedene Objekte in eine Reihenfolge zu bringen.*

Beispiel 1.1.1.16. Es gibt genau $3! = 6$ Möglichkeiten, die drei Buchstaben a, b und c in eine Reihenfolge zu bringen, nämlich

$$\begin{array}{ccc} abc & bac & cab \\ acb & bca & cba \end{array}$$

In gewisser Weise stimmt unser Satz sogar für $n = 0$: In der Terminologie, die wir in 10.2.3 einführen, gibt es genau eine Anordnung der leeren Menge.

Beweis. Hat man n voneinander verschiedene Objekte, so hat man n Möglichkeiten, ein Erstes auszusuchen, dann $(n-1)$ Möglichkeiten, ein Zweites auszusuchen und so weiter, bis schließlich nur noch eine Möglichkeit bleibt, ein Letztes auszusuchen. Insgesamt haben wir also wie behauptet $n!$ mögliche Reihenfolgen. □

Definition 1.1.1.17. Wir definieren für beliebiges n und jede natürliche Zahl k den **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ (sprich: n **über** k) durch die Regeln

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{k-j} = \frac{n(n-1)\dots \quad (n-k+1)}{k(k-1)\dots \qquad 1} \text{ für } k \geq 1 \text{ und } \binom{n}{0} := 1.$$

Der Sonderfall $k = 0$ wird im Übrigen auch durch unsere allgemeine Formel gedeckt, wenn wir unsere Konvention 1.1.1.14 beherzigen. Im Lichte des folgenden Satzes schlage ich vor, die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ statt „n über k“ inhaltsreicher „k aus n“ zu sprechen.

1.1.1.18. Die Bezeichnung als Binomialkoeffizienten leitet sich von dem Auftreten dieser Zahlen als Koeffizienten in der „binomischen Formel“ 1.1.1.23 ab.

Satz 1.1.1.19 (**Bedeutung der Binomialkoeffizienten**). *Gegeben natürliche Zahlen n und k gibt es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n voneinander verschiedenen Objekten k Objekte auszuwählen.*

Beispiel 1.1.1.20. Es gibt genau $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6$ Möglichkeiten, aus den vier Buchstaben a, b, c, d zwei auszuwählen, nämlich

$$\begin{array}{lll} a,b & b,c & c,d \\ a,c & b,d & \\ a,d & & \end{array}$$

Beweis. Wir haben n Möglichkeiten, ein erstes Objekt auszuwählen, dann $n-1$ Möglichkeiten, ein zweites Objekt auszuwählen, und so weiter, also insgesamt $n(n-1)\dots(n-k+1)$ Möglichkeiten, k Objekte *der Reihe nach* auszuwählen. Auf die Reihenfolge, in der wir ausgewählt haben, kommt es uns aber gar nicht an, jeweils genau $k!$ von unseren $n(n-1)\dots(n-k+1)$ Möglichkeiten führen nach 1.1.1.15 also zur Auswahl derselben k Objekte. Man bemerke, daß unser Satz auch im Extremfall $k = 0$ noch stimmt, wenn wir ihn geeignet interpretieren: In der Terminologie, die wir gleich einführen werden, besitzt in der Tat jede Menge genau eine nullelementige Teilmenge, nämlich die leere Menge. □

1.1.1.21. Offensichtlich gilt für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq k$ die Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Das folgt einerseits sofort aus der formalen Definition und ist andererseits auch klar nach der oben erklärten Bedeutung der Binomialkoeffizienten: Wenn wir aus n Objekten k Objekte auswählen, so bleiben $n-k$ Objekte übrig. Es gibt demnach gleichviele Möglichkeiten, k Objekte auszuwählen, wie es Möglichkeiten gibt, $n-k$ Objekte auszuwählen. Wir haben weiter $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ sowie $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ für jede natürliche Zahl $n \geq 1$.

Definition 1.1.1.22. Wie in der Schule setzen wir $a^k := \prod_{i=1}^{k} a$ und sprechen diesen usdruck „a hoch k“. In Worten ist also gemeint „das Produkt von k-mal dem Faktor a“. Im Lichte von 1.1.1.14 verstehen wir insbesondere $a^0 := 1$.

Satz 1.1.1.23. *Für jede natürliche Zahl n gilt die* **binomische Formel**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

1.1.1.24. Man beachte, wie wichtig unsere Konvention $a^0 = 1$ und insbesondere auch ihr Spezialfall $0^0 = 1$ für die Gültigkeit dieser Formel ist.

1.1.1.25. Die Bezeichung „binomische Formel“ leitet sich ab von der Vorsilbe „bi“ für Zwei, wie etwa in englisch „bicycle“ für „Zweirad“ alias „Fahrrad“, und dem lateinischen Wort „nomen“ für „Namen“. Mit den beiden „Namen“ sind hier a und b gemeint. Mehr dazu wird in 10.3.2.37 erklärt.

Erster Beweis. Beim Ausmultiplizieren erhalten wir das Monom $a^k b^{n-k}$ so oft, wie es Möglichkeiten gibt, aus unseren n Faktoren $(a+b)$ die k Faktoren auszusuchen, „in denen wir beim Ausmultiplizieren das a nehmen“. Dieses Argument werden wir in 2.1.2.11 noch besser formulieren. □

Zweiter Beweis. Dieser Beweis ist eine ausgezeichnete Übung im Umgang mit unseren Symbolen und mit der vollständigen Induktion. Er scheint mir jedoch auch in einer für Beweise durch vollständige Induktion typischen Weise wenig durchsichtig. Zunächst prüfen wir für beliebiges n und jede natürliche Zahl $k \geq 1$ die Formel

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

durch explizites Nachrechnen. Dann geben wir unserer Formel im Satz den Namen $A(n)$ und prüfen die Formel $A(0)$ und zur Sicherheit auch noch $A(1)$ durch Hinsehen. Schließlich gilt es, den Induktionsschritt durchzuführen, als da heißt,

$A(n+1)$ aus $A(n)$ zu folgern. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&\quad \text{und mit der Induktionsvoraussetzung} \\
&= (a+b)\textstyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&\quad \text{und durch Ausmultiplizieren} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&\quad \text{und Indexwechsel } k = i-1 \text{ in der ersten Summe} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&\quad \text{dann mit } k \text{ statt } i \text{ und Absondern von Summanden} \\
&= a^{n+1}b^0 + \textstyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1} + \\
&\qquad + \textstyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\, a^k b^{n-k+1} + a^0 b^{n+1} \\
&\quad \text{und nach Zusammenfassen der mittleren Summen} \\
&= a^{n+1}b^0 + \textstyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1} + a^0 b^{n+1} \\
&\quad \text{und Einbeziehen der abgesonderten Summanden} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

und folgern so tatsächlich $A(n+1)$ aus $A(n)$. □

1.1.1.26. Die Formel $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ für $k \geq 1$ kann man zur effektiven Berechnung der Binomialkoeffizienten mit dem sogenannten **Pascal'schen Dreieck** benutzen: Im Schema

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

seien die Einsen an den Rändern vorgegeben und eine Zahl in der Mitte berechne sich als die Summe ihrer beiden oberen „Nachbarn". Dann stehen in der $(n+1)$-ten Zeile der Reihe nach die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \ldots$, bis $\binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{n} = 1$. Wir haben also zum Beispiel nach der untersten Zeile in obigem Ausschnitt des Pascal'schen Dreiecks

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Übungen

Ergänzende Übung 1.1.1.27. Man zeige: Ist p eine Primzahl und n nicht durch p teilbar und $e \geq 0$ eine natürliche Zahl, so ist

$$\binom{p^e n}{p^e}$$

auch nicht durch p teilbar. Hinweis: Man möge bei der Lösung dieser Übung bereits die Erkenntnis verwenden, daß eine Primzahl ein Produkt nur teilen kann, wenn sie einen der Faktoren teilt. Ein Beweis dieser Tatsache wird in 3.4.4.15 nachgeholt.

Übung 1.1.1.28. Man finde und beweise eine Formel für $\sum_{i=1}^{n} i^2$. Hinweis: Man suche zunächst eine Formel für $\sum_{i=1}^{n} i^3 - (i-1)^3$ und beachte $i^3 - (i-1)^3 = 3i^2 - 3i + 1$.

Ergänzende Übung 1.1.1.29. Man zeige, daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Formel der Gestalt $\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0$ gilt mit $a_\kappa \in \mathbb{Q}$.

1.1.2 Fibonacci-Folge und Vektorraumbegriff

1.1.2.1. Ich beginne mit einigen Beispielen für eine mathematische Struktur, die ihnen im weiteren Verlauf des Studiums als „Vektorraum“ geläufig werden wird.

Beispiel 1.1.2.2. Die **Fibonacci-Folge**

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21, \ldots$$

entsteht, indem man mit $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ beginnt und dann jedes weitere Folgenglied als die Summe seiner beiden Vorgänger bildet, in Formeln

$$f_{i+2} := f_{i+1} + f_i$$

Wir suchen nun für die Glieder f_i dieser Folge eine geschlossene Darstellung. Dazu vereinbaren wir, daß wir Folgen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ mit $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$ **Folgen vom Fibonacci-Typ** nennen wollen. Kennen wir die beiden ersten Glieder einer Folge vom Fibonacci-Typ, so legt das natürlich bereits die gesamte Folge fest. Nun bemerken wir, daß für jede Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ vom Fibonacci-Typ und jedes α auch die Folge $\alpha x_0, \alpha x_1, \alpha x_2, \ldots$ vom Fibonacci-Typ ist, und daß für jede weitere Folge $y_0, y_1, y_2, \ldots$ vom Fibonacci-Typ auch die gliedweise Summe $(x_0 + y_0), (x_1 + y_1), (x_2 + y_2), \ldots$ eine Folge vom Fibonacci-Typ ist. Der Trick ist dann, danach zu fragen, für welche β die Folge $x_i := \beta^i$ vom Fibonacci-Typ ist. Das ist ja offensichtlich genau dann der Fall, wenn gilt

$\beta^2 = \beta + 1$, als da heißt für $\beta_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Für beliebige c, d ist mithin die Folge

$$x_i = c\beta_+^i + d\beta_-^i$$

vom Fibonacci-Typ, und wenn wir c und d bestimmen mit $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$, so ergibt sich eine explizite Darstellung unserer Fibonacci-Folge. Wir suchen also c und d mit

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & c + d \\ 1 & = & c\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right) + d\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right) \end{array}$$

und folgern leicht $c = -d$ und $1 = c\sqrt{5}$ alias $c = 1/\sqrt{5} = -d$. Damit ergibt sich schließlich für unsere ursprüngliche Fibonacci-Folge die explizite Darstellung

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i$$

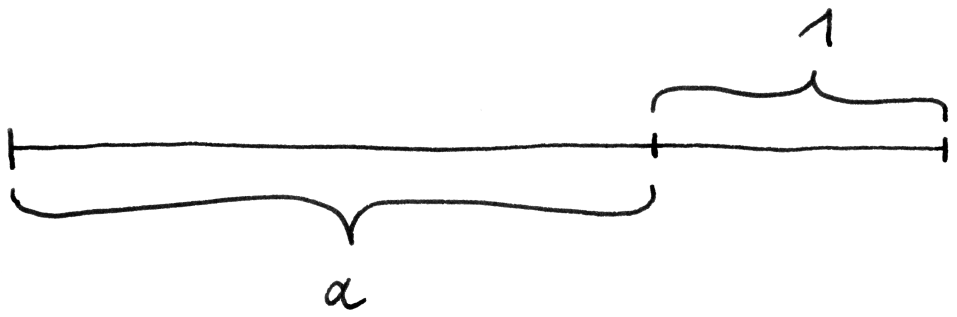
Im übrigen ist der zweite Summand hier immer kleiner als $1/2$, so daß wir f_i auch beschreiben können als diejenige ganze Zahl, die am nächsten am ersten Summanden liegt. Es wäre rückblickend natürlich ein Leichtes gewesen, diese Formel einfach zu „raten“, um sie dann mit vollständiger Induktion 1.1.1.1 zu beweisen. Diese Art mathematischer Zaubertricks halte ich jedoch für unehrenhaft. Ich denke, unsere Aufgabe als Mathematiker besteht darin, Verständnis zu erzeugen und nicht Bewunderung. Ich werde deshalb stets nach Kräften versuchen, das Tricksen zu vermeiden, auch wenn die Beweise dadurch manchmal etwas länger werden sollten. Eine Möglichkeit, auch den letzten verbleibenden Trick aus den vorhergehenden Überlegungen zu eliminieren, zeigt 3.5.5.18. Die bei unserer Lösung auftretende reelle Zahl $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ ist im Übrigen auch bekannt als „goldener Schnitt“ aus Gründen, die in nebenstehendem Bild diskutiert werden. In 10.3.6.13 dürfen Sie dann zur Übung zeigen, daß der Quotient zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen gegen den goldenen Schnitt strebt, daß also genauer und in Formeln für unsere Fibonacci-Folge $f_0, f_1, f_2, \ldots$ von oben gilt

$$\lim_{i\to\infty} \frac{f_{i+1}}{f_i} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Beispiel 1.1.2.3. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 3x + 3y + 7z & = & 0 \\ 4x + y + 5z & = & 0 \end{array}$$

Wie man die Menge L aller Lösungen (x, y, z) ermittelt, sollen sie später in dieser Vorlesung lernen. Zwei Dinge aber sind a priori klar:



Der **goldene Schnitt** ist das Verhältnis, in dem eine Strecke geteilt werden muß, damit das Verhältnis vom größeren zum kleineren Stück gleich dem Verhältnis des Ganzen zum größeren Stück ist, also die positive Lösung der Gleichung $a/1 = (1+a)/a$ alias $a^2 - a - 1 = 0$, also $a = (1+\sqrt{5})/2$.

1. Sind (x, y, z) und (x', y', z') Lösungen, so ist auch ihre komponentenweise Summe $(x + x', y + y', z + z')$ eine Lösung;

2. Ist (x, y, z) eine Lösung und α eine reelle Zahl, so ist auch das komponentenweise Produkt $(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ eine Lösung.

Beispiel 1.1.2.4. Wir betrachten die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die zweimal differenzierbar sind und der Differentialgleichung

$$f'' = -f$$

genügen. Lösungen sind zum Beispiel die Funktionen $\sin, \cos$, die Nullfunktion oder auch die Funktionen $f(x) = \sin(x+a)$ für konstantes a. Wie man die Menge L aller Lösungen beschreiben kann, sollen Sie in der Analysis lernen. Zwei Dinge aber sind a priori klar:

1. Mit f und g ist auch die Funktion $f + g$ eine Lösung;

2. Ist f eine Lösung und α eine reelle Zahl, so ist auch αf eine Lösung.

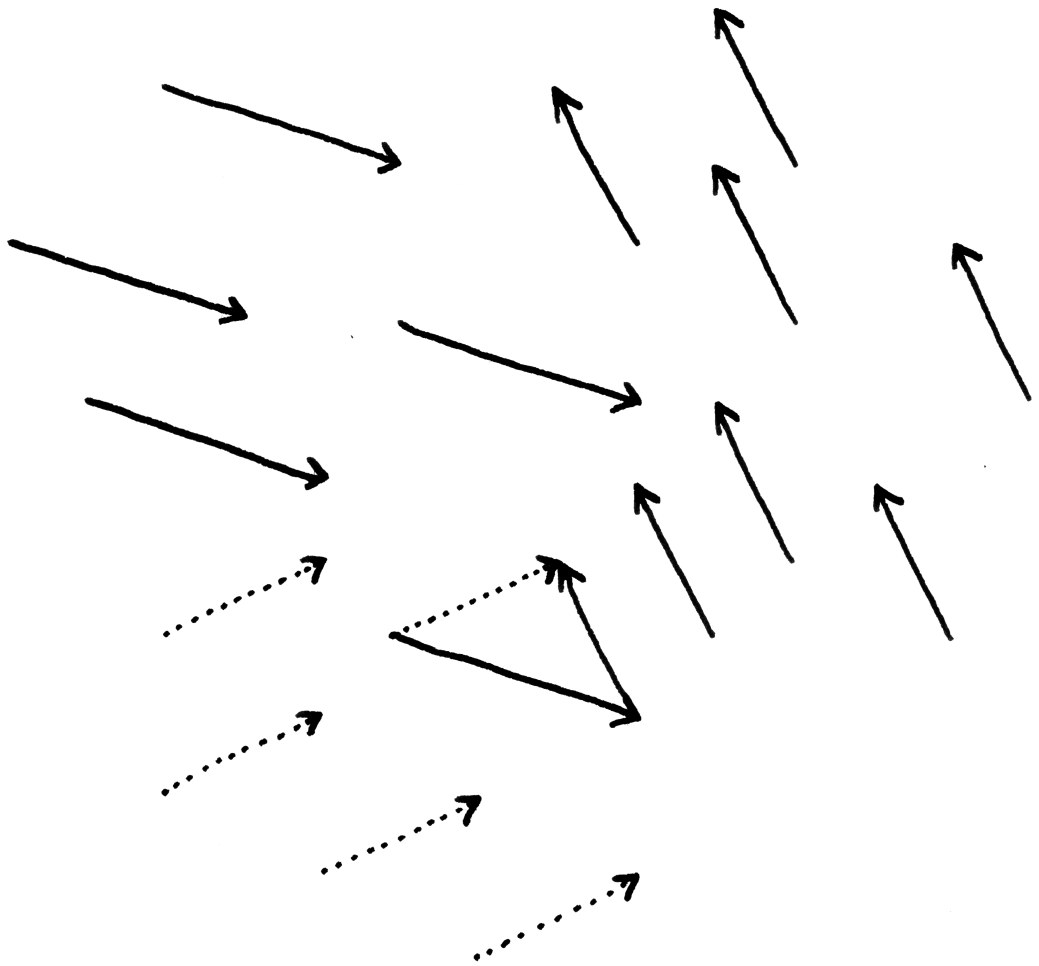
Beispiel 1.1.2.5. Wir betrachten die Gesamtheit aller Parallelverschiebungen der Tafelebene. Graphisch stellen wir solch eine Parallelverschiebung dar durch einen Pfeil von irgendeinem Punkt zu seinem Bild unter der Verschiebung. Im nebenstehenden Bild stellen etwa alle gepunktelten Pfeile dieselbe Parallelverschiebung dar. Was für ein Ding diese Gesamtheit P aller Parallelverschiebungen eigentlich ist, scheint mir recht undurchsichtig, aber einiges ist a priori klar:

1. Sind p und q Parallelverschiebungen, so ist auch ihre „Hintereinanderausführung“ $p \circ q$, sprich „p nach q“, eine Parallelverschiebung.

2. Ist α eine reelle Zahl und p eine Parallelverschiebung, so können wir eine neue Parallelverschiebung αp bilden, das „α-fache von p“. Bei negativen Vielfachen vereinbaren wir hierzu, daß damit eine entsprechende Verschiebung in die Gegenrichtung gemeint ist.

3. Führen wir eine neue Notation ein und schreiben für die Hintereinanderausführung $p \dot{+} q := p \circ q$, so gelten für beliebige Parallelverschiebungen p, q, r der Tafelebene und beliebige reelle Zahlen α, β die Formeln

$$\begin{array}{rcl} (p \dot{+} q) \dot{+} r & = & p \dot{+} (q \dot{+} r) \\ p \dot{+} q & = & q \dot{+} p \\ \alpha(\beta p) & = & (\alpha\beta)p \\ (\alpha + \beta)p & = & (\alpha p) \dot{+} (\beta p) \\ \alpha(p \dot{+} q) & = & (\alpha p) \dot{+} (\alpha q) \end{array}$$



Die Hintereinanderausführung der beiden Parallelverschiebungen der Tafel- oder hier vielmehr der Papierebene, die durch die durchgezogenen Pfeile dargestellt werden, wird die durch die gepunktelten Feile dargestellt.

Will man sich die Gesamtheit aller Parallelverschiebungen der Tafelebene anschaulich machen, so tut man im Übrigen gut daran, einen Punkt als „Ursprung“ auszuzeichnen und jede Parallelverschiebung mit dem Punkt der Tafelebene zu identifizieren, auf den unsere Parallelverschiebung diesen Ursprung abbildet.

Beispiel 1.1.2.6. Analoges gilt für die Gesamtheit der Parallelverschiebung des Raums unserer Anschauung und auch für die Gesamtheit aller Verschiebungen einer Geraden und, mit noch mehr Mut, für die Gesamtheit aller Zeitspannen.

1.1.2.7. Die Formeln unserer kleinen Formelsammlung von 1.1.2.5.3 gelten ganz genauso auch für die Lösungsmenge unserer Differentialgleichung $f'' = -f$, wenn wir $f \dot{+} g := f + g$ verstehen, für die Lösungsmenge unseres linearen Gleichungssystems, wenn wir

$$(x, y, z) \dot{+} (x', y', z') := (x + x', y + y', z + z')$$

als „komponentenweise Addition“ verstehen, und für die Menge aller Folgen vom Fibonacci-Typ, wenn wir ähnlich die Summe $\dot{+}$ zweier Folgen erklären. Ein wesentliches Ziel der Vorlesungen über lineare Algebra ist es, einen abstrakten Formalismus aufzubauen, dem sich alle diese Beispiele unterordnen. Dadurch soll Zweierlei erreicht werden:

1. Unser abstrakter Formalismus soll uns dazu verhelfen, die uns als Augentieren und Nachkommen von Ästehüpfern angeborene räumliche Anschauung nutzbar zu machen zum Verständnis der bis jetzt gegebenen Beispiele und der vielen weiteren Beispiele von Vektorräumen, denen Sie im Verlauf Ihres Studiums noch begegnen werden. So werden sie etwa lernen, daß man sich die Menge aller Folgen vom Fibonacci-Typ durchaus als Ebene vorstellen darf und die Menge aller Folgen mit einem vorgegebenem Folgenglied an einer vorgegebenen Stelle als eine Gerade in dieser Ebene. Suchen wir also alle Folgen vom Fibonacci-Typ mit zwei vorgegebenen Folgengliedern, so werden wir im allgemeinen genau eine derartige Lösung finden, da sich eben zwei Geraden aus einer Ebene im allgemeinen in genau einem Punkt schneiden. In diesem Licht betrachtet soll der abstrakte Formalismus uns also helfen, a priori unanschauliche Fragestellungen der Anschauung zugänglich zu machen. Ich denke, diese Nähe zur Anschauung ist auch der Grund dafür, daß die lineare Algebra meist an den Anfang des Studiums gestellt wird: Von der Schwierigkeit des Formalismus her gesehen gehört sie nämlich keineswegs zu den einfachsten Gebieten der Mathematik. Hier würde ich eher an Gruppentheorie oder Graphentheorie oder dergleichen denken.

2. Unser abstrakter Formalismus soll so unmißverständlich sein und seine Spielregeln so klar, daß Sie in die Lage versetzt werden, alles nachzuvollziehen und mir im Prinzip und vermutlich auch in der Realität Fehler nachzuweisen. Schwammige Begriffe wie „Tafelebene“ oder „Parallelverschiebung des Raums“ haben in

einem solchen Formalismus keinen Platz mehr. In diesem Licht betrachtet verfolgen wir mit dem Aufbau des abstrakten Formalismus auch das Ziel einer großen Vereinfachung durch die Reduktion auf die Beschreibung einiger weniger Aspekte der uns umgebenden in ihrer Komplexität schwer faßbaren Wirklichkeit.

Die lineare Algebra hat in meinen Augen mindestens drei wesentliche Aspekte: Einen **geometrischen Aspekt**, wie ihn das Beispiel 1.1.2.5 der Gesamtheit aller Parallelverschiebungen illustriert; einen **algorithmischen Aspekt**, unter den ich das Beispiel 1.1.2.3 der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems und insbesondere explizite Verfahren zur Bestimmung dieser Lösungsmenge einordnen würde; und einen **abstrakt-algebraischen Aspekt**, zu dem etwa die folgende Definition 1.1.2.8 gehört, eine Art gedankliches Skelett, das Algorithmik und Geometrie verbindet und Brücken zu vielen weiteren Anwendungen schafft, die man dann als das Fleisch auf diesem Gerippe ansehen mag. Ich will im Verlauf meiner Vorlesungen zur linearen Algebra versuchen, diese drei Aspekte zu einer Einheit zu fügen. Ich hoffe, daß Sie dadurch in die Lage versetzt werden, eine Vielzahl von Problemen mit den verbundenen Kräften Ihrer räumlichen Anschauung, Ihrer algorithmischen Rechenfähigkeiten und Ihres abstrakt-logischen Denkens anzugehen. Als Motivation für den weiteren Fortgang der Vorlesungen über lineare Algebra beschreibe ich nun das „Rückgrat unseres Skeletts“ und formuliere ohne Rücksicht auf noch unbekannte Begriffe und Notationen die abstrakte Definition eines reellen Vektorraums.

Definition 1.1.2.8. Ein **reeller Vektorraum** ist ein Tripel bestehend aus den folgenden drei Dingen:

1. Einer Menge V;
2. Einer Verknüpfung $V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v \dot{+} w$, die die Menge V zu einer abelschen Gruppe macht;
3. Einer Abbildung $\mathbb{R} \times V \to V$, $(\alpha, v) \mapsto \alpha v$,

derart, daß für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} \alpha(\beta v) & = & (\alpha\beta)v \\ (\alpha + \beta)v & = & (\alpha v) \dot{+} (\beta v) \\ \alpha(v \dot{+} w) & = & (\alpha v) \dot{+} (\alpha w) \\ 1v & = & v \end{array}$$

Hier ist nun viel zu klären: Was ist eine Menge? Eine Verknüpfung? Eine abelsche Gruppe? Eine Abbildung? Was bedeuten die Symbole $\times$, $\to$, $\mapsto$, $\in$, $\mathbb{R}$? Wir beginnen in der nächsten Vorlesung mit der Klärung dieser Begriffe und Notationen.

1.1.2.9. Bereits hier will ich die Symbole α und β erklären: Sie heißen „Alpha“ und „Beta“ und sind die beiden ersten Buchstaben des griechischen Alphabets, das ja hinwiederum selbst nach ihnen benannt ist. Bei der Darstellung von Mathematik hilft es, viele verschiedene Symbole und Symbolfamilien zur Verfügung zu haben. Insbesondere werden die griechischen Buchstaben oft und gerne verwendet. Ich schreibe deshalb hier zum Nachschlagen das griechische Alphabet auf. In der ersten Spalte stehen der Reihe nach die griechischen Kleinbuchstaben, dahinter die zugehörigen Großbuchstaben, dann ihr lateinisches Analogon soweit vorhanden, und schließlich, wie man diesen griechischen Buchstaben auf Deutsch benennt und spricht.

α	A	a	alpha
β	B	b	beta
γ	Γ	g	gamma
δ	Δ	d	delta
ϵ, ε	E	e	epsilon
ζ	Z	z	zeta
η	H	ä	eta
θ, ϑ	Θ	th	theta
ι	I	i	iota
κ	K	k	kappa
λ	Λ	l	lambda
μ	M	m	my, sprich „mü“
ν	N	n	ny, sprich „nü“
ξ	Ξ	x	xi
o	O	o	omikron, „kurzes o“
π	Π	p	pi
ρ, ϱ	P	r	rho
σ, ς	Σ	s	sigma
τ	T	t	tau
υ	Υ	y	ypsilon
ϕ, φ	Φ	f	phi
χ	X	ch	chi
ψ	Ψ	ps	psi
ω	Ω	oh	omega, „langes o“

Übungen

Übung 1.1.2.10. Ein Kredit von 10000 Euro wird am Ende jeden Jahres mit einem jährlichen Zinssatz von 5% auf die jeweilige Restschuld verzinst und der Kreditnehmer zahlt zu Beginn jeden Jahres 1000 Euro zurück. Man finde eine ge-

schlossene Formel für die Restschuld am Ende des n-ten Jahres. Hinweis: Man mag es mit dem Ansatz $x_n = c\beta^n + \alpha$ versuchen.

Übung 1.1.2.11. Kann man für jede Folge $x_0, x_1, \ldots$ vom Fibonacci-Typ Zahlen c, d finden mit $x_i = c\beta_+^i + d\beta_-^i$ für alle i? Finden Sie eine geschlossene Darstellung für die Glieder der Folge, die mit $0, 0, 1$ beginnt und dem Bildungsgesetz $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} - 2x_{n-3}$ gehorcht.

Übung 1.1.2.12. Die Fibonnacci-Folge erfüllt die Identität $f_0^2 + f_1^2 + \ldots + f_k^2 = f_k f_{k+1}$ für alle $k \geq 0$.

Übung 1.1.2.13. Wer Alles mit φl μ kaπrt, hat eine gρßηt gηn.
Wer Hausis nur koπrt, steht am P$\rho\beta$g hintan.

Gestern standen wir noch vor einem tiefen Abgrund,
aber heute haben wir einen gρßen Schritt nach vorne gηn

Liebe ist, wenn sich der τsendste Kuss noch wie der erste anφlt.

Nach dem Takt, den man tρmmelt, wird auch gηnzt.

Vorgηn und nachβcht
hat manchem schon gρß Leid gebracht.

Was mit wenigem abgηn werden kann,
muss nicht mit φlem gηn werden.

Als ich eine ρse brach,
und mir in den φnger stach...

τsend Freunde sind zu wenig,
ein Feind jedoch ist zu φl

Kapitel 2

Mengen und Verknüpfungen

Inhalt

2.1 Naive Mengenlehre und Kombinatorik 30

2.1.1 Mengen 30

2.1.2 Teilmengen 33

2.1.3 Mengenoperationen 35

2.1.4 Abbildungen 43

2.1.5 Verknüpfung von Abbildungen 46

2.1.6 Ergänzungen zur Mengenlehre* 51

2.1.7 Logische Symbole und Konventionen 55

2.2 Algebraische Grundbegriffe 58

2.2.1 Mengen mit Verknüpfung 58

2.2.2 Gruppen 66

2.2.3 Homomorphismen 72

2.2.4 Körper 79

2.2.5 Aufbau des Zahlensystems* 84

2.2.6 Verbände und Boole'sche Algebren* 85

2.3 Zur Darstellung von Mathematik* 87

2.3.1 Herkunft einiger Symbole 87

2.3.2 Grundsätzliches zur Formulierung 87

2.3.3 Sprache und Mathematik 89

2.3.4 Terminologisches zur leeren Menge* 92

2.4 Philosophisches und Didaktisches 94

2.4.1 Was ist Mathematik? 94
2.4.2 Didaktische Gedanken 97
2.5 Danksagung 99

In diesen Abschnitten habe ich Notationen und Begriffsbildungen zusammengefaßt, von denen ich mir vorstelle, daß sie zu Beginn des Studiums in enger Abstimmung zwischen den beiden Grundvorlesungen erklärt werden könnten.

2.1 Naive Mengenlehre und Kombinatorik

2.1.1 Mengen

2.1.1.1. Beim Arbeiten mit reellen Zahlen oder räumlichen Gebilden reicht auf der Schule ein intuitives Verständnis meist aus, und wenn die Intuition in die Irre führt, ist ein Lehrer zur Stelle. Wenn Sie jedoch selbst unterrichten oder etwas beweisen wollen, reicht dieses intuitive Verständnis nicht mehr aus. Im folgenden werden deshalb zunächst der Begriff der reellen Zahlen und der Begriff des Raums zurückgeführt auf Grundbegriffe der Mengenlehre, den Begriff der rationalen Zahlen und elementare Logik. Bei der Arbeit mit diesen Begriffen führt uns die Intuition nicht so leicht in die Irre, wir geben uns deshalb mit einem intuitiven Verständnis zufrieden und verweisen jeden, der es noch genauer wissen will, auf eine Vorlesung über Logik. Wir beginnen mit etwas naiver Mengenlehre, wie sie von Georg Cantor in den Jahren 1874 bis 1897 begründet wurde und von der der berühmte Mathematiker David Hilbert einmal sagte: „Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können“. Natürlich gab es auch vor der Mengenlehre schon hoch entwickelte Mathematik: Beim Tod von Carl Friedrich Gauß im Jahre 1855 gab es diese Theorie noch gar nicht und Fourier fand seine „Fourierentwicklung“ sogar bereits zu Beginn des 19.-ten Jahrhunderts. Er behauptete auch gleich in seiner „Théorie analytique de la chaleur“, daß sich jede beliebige periodische Funktion durch eine Fouriereihe darstellen lasse, aber diese Behauptung stieß bei anderen berühmten Mathematikern seiner Zeit auf Ablehnung und es entstand darüber ein heftiger Disput. Erst in besagtem „Paradies der Mengenlehre“ konnten die Fourier's Behauptung zugrundeliegenden Begriffe soweit geklärt werden, daß dieser Disput nun endgültig beigelegt ist. Ähnlich verhält es sich auch mit vielen anderen Fragestellungen. Da die Mengenlehre darüber hinaus auch vom didaktischen Standpunkt aus eine äußerst klare und durchsichtige Darstellung mathematischer Sachverhalte ermöglicht, hat sie sich als Grundlage der höheren Mathematik und der Ausbildung von Mathematikern an Universitäten schnell durchgesetzt und ist nun weltweit das „Alphabet der Sprache der Mathematik“. Man wird an Universitäten sogar geradezu dazu erzogen, alle Mathematik in der Sprache der Mengenlehre zu fassen und geometrischen Argumenten keine Beweiskraft zuzugestehen. Ich halte das bei der Ausbildung von Mathematikern auch für angemessen. Bei der Mathematik-Ausbildung im allgemeinen scheint mir dieses Vorgehen dahingegen nicht zielführend: In diesem Kontext sollte man meines Erachtens nicht mit demselben Maß messen, auch ohne alle Mengenlehre geometrisch erklärte Begriffe wie Gerade und Kreis, Ebene und Raum, als wohldefinierte Objekte der Mathematik zulassen und geometrischen Argumenten Beweiskraft zugestehen.

2.1.1.2. Im Wortlaut der ersten Zeilen des Artikels „Beiträge zur Begründung der

transfiniten Mengenlehre (Erster Aufsatz)“ von Georg Cantor, erschienen im Jahre 1895, hört sich die Definition einer Menge so an:

> Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Verbinden wir mit einer Menge eine geometrische Vorstellung, so nennen wir ihre Elemente auch **Punkte** und die Menge selbst einen **Raum**. Ein derartiges Herumgerede ist natürlich keine formale Definition und birgt durchaus verschiedene Fallstricke, vergleiche 2.1.3.9. Das Ziel dieser Vorlesung ist aber auch nicht eine formale Begründung der Mengenlehre, wie Sie sie in der Logik kennenlernen können. Sie sollen vielmehr die Bedeutung dieser Worte intuitiv erfassen wie ein Kleinkind, das Sprechen lernt: Indem sie mir und anderen Mathematikern zuhören, wie wir mit diesen Worten sinnvolle Sätze bilden, uns nachahmen, und beobachten, welchen Effekt Sie damit hervorrufen. Unter anderem dazu sind die Übungsgruppen da.

Ergänzung 2.1.1.3. Bei der Entwicklung der Mathematik aus der Umgangssprache durch fortgesetztes Zuspitzen und Umwidmen des Wortschatzes muß ich an den Baron von Münchhausen denken, wie er sich an seinen eigenen Haaren aus dem Sumpf zieht. Schon verblüffend, daß es klappt. Aber bei Kleinkindern, die Sprechen lernen, ist es ja noch viel verblüffender, wie sie die Bedeutung von Worten erfassen, ohne daß man sie ihnen in Worten erklären kann.

Beispiele 2.1.1.4. Endliche Mengen kann man durch eine vollständige Liste ihrer Elemente in geschweiften Klammern angeben, zum Beispiel in der Form

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Diese geschweiften Klammern heißen auch **Mengenklammern**. Die Elemente dürfen mehrfach genannt werden und es kommt nicht auf die Reihenfolge an, in der sie genannt werden. Wir haben also $\{1, 1, 2\} = \{2, 1\}$. Die Aussage „x ist Element von X“ wird mit $x \in X$ abgekürzt, ihre Verneinung „x ist nicht Element von X“ mit $x \notin X$. Zum Beispiel gilt $1 \in \{2, 1\}$ und $3 \notin \{2, 1\}$. Es gibt auch die sogenannte **leere Menge** $\emptyset = \{\ \}$, die gar kein Element enthält. Andere Beispiele sind die Mengen

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ der **natürlichen Zahlen**,

$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ der **ganzen Zahlen** und

$\mathbb{Q} := \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ der **rationalen Zahlen**.

Der Name letzterer Menge kommt von lateinisch „ratio“ für „Verhältnis“, der Buchstabe $\mathbb{Q}$ steht für „Quotient“. Man beachte, daß wir auch hier Elemente mehrfach genannt haben, es gilt ja $p/q = p'/q'$ genau dann, wenn $pq' = p'q$. Auf Deutsch bezeichnet man die rationalen Zahlen auch als **Bruchzahlen**, da man sich etwa ein Viertel eines Kekses als den Anteil denken kann, der entsteht, wenn man besagten Keks in vier gleiche Teile zerbricht. Einen Leitfaden zu einem formaleren Aufbau des Zahlensystems können Sie in 2.2.5.1 finden.

Ergänzung 2.1.1.5 (**Herkunft des Gleichheitszeichens**). Das Gleichheitszeichen $=$ scheint auf ein 1557 von Robert Recorde publiziertes Buch zurückzugehen und soll andeuten, daß das, was auf der linken und rechten Seite dieses Zeichens steht, so gleich ist wie die beiden Strichlein, die das uns heute so selbstverständliche Gleichheitszeichen bilden. Davor schrieb man statt einem Gleichheitszeichen meist ae für „äquivalent“.

Ergänzung 2.1.1.6 (**Diskussion der Notation**). In Texten, in deren Konventionen die Null keine natürliche Zahl ist, verwendet man meist die abweichenden Notationen $\mathbb{N}$ für die Menge $\{1, 2, \ldots\}$ und $\mathbb{N}_0$ für die Menge $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Die in diesem Text verwendete Notation $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ stimmt mit der internationalen Norm ISO 31-11 überein.

2.1.1.7. Die Bedeutung der Symbole $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ ist in der Mathematik weitgehend einheitlich. Man verwendet diesen Schrifttypus auch sonst gerne für Symbole, die in ihrer Bedeutung über große Teile der Mathematik hinweg einheitlich verwendet werden. Bei der Bedeutung von $\mathbb{N}$ ist man allerdings nie ganz sicher, ob die Null mitgemeint ist. In den Konventionen dieses Textes gilt $0 \in \mathbb{N}$.

2.1.1.8. Eine Menge, die nur endlich viele Elemente hat, nennen wir eine **endliche Menge**. Eine präzisere Definition dieses Konzepts wird in 3.4.1.2 gegeben. Wir vereinbaren bereits hier, daß wir auch die leere Menge endlich nennen. Die Zahl der Elemente einer endlichen Menge X nennen wir ihre **Kardinalität** oder **Mächtigkeit** und notieren sie

$$|X|$$

oder $\operatorname{card}(X)$. In der Literatur findet man auch die Notation $\sharp X$. Für endliche Mengen X ist demnach ihre Kardinalität stets eine natürliche Zahl $|X| \in \mathbb{N}$ und $|X| = 0$ ist gleichbedeutend zu $X = \emptyset$. Ist X unendlich, so schreiben wir bis auf weiteres kurzerhand $|X| = \infty$ und ignorieren in unserer Notation, daß auch unendliche Mengen „verschieden groß“ sein können. Für ein Beispiel für „verschieden große unendliche Mengen“ siehe 10.2.5.2 und für eine genauere Diskussion des Begriffs der Kardinalität vergleiche 6.5.3.1.

2.1.2 Teilmengen

Definition 2.1.2.1. Eine Menge Y heißt **Teilmenge** einer Menge X, wenn jedes Element von Y auch ein Element von X ist. Man schreibt dafür $Y \subset X$ oder $X \supset Y$.

Beispiel 2.1.2.2. Die leere Menge Teilmenge jeder Menge, in Formeln $\emptyset \subset X$. $\{x\} \subset X$ ist gleichbedeutend zu $x \in X$. Es gilt $\emptyset \subset \{2, 1\} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2.1.2.3 (**Elemente und Teilmengen**). Es ist im Kontext der Mengenlehre wichtig, bei einer Menge X sorgfältig zu unterscheiden zwischen ihren Elementen und ihren Teilmengen. Gegeben ein Element $x \in X$ ist für uns das Element $x \in X$ etwas anderes als die Teilmenge $\{x\} \subset X$, die nur aus dem einzigen Element x besteht. Gegeben eine Menge X mit einer Teilmenge $Y \subset X$ sage ich auch, X **umfaßt** Y. Gegeben ein Element $x \in X$ sage ich, x **gehört zu** X. Andere Sprechweisen möchte ich ungern auf eine so präzise Bedeutung festlegen. Gegeben eine Teilmenge $Y \subset X$ kann man sagen, „Y sei enthalten in X“ oder „Y liege in X“, und gegeben ein Element $x \in X$ kann man auch sagen, „x sei enthalten in X“ oder „x liege in X“. Was genau gemeint ist, gilt es dann aus dem Kontext zu erschließen.

2.1.2.4 (**Diskussion der Notation**). Gegeben eine Menge X verwenden wir die Schreibweise $Y \subsetneq X$ als Abkürzung für $(Y \subset X$ und $Y \neq X)$. Eine von der ganzen Menge verschiedene Teilmenge Y einer Menge X nennen wir auch eine **echte Teilmenge von** X. Bei diesen Notationen folgen wir Cantor und Bourbaki, die sehr viel später festgelegte internationalen Norm ISO 31-11 weicht jedoch davon ab. In der folgenden Tabelle stellen wir diese beiden Konventionen einander gegenüber.

Cantor und Bourbaki	Norm ISO 31-11	Bedeutung
$\subset$	$\subseteq$	ist Teilmenge von
$\subsetneq$	$\subset$	ist echte Teilmenge von

Ich ziehe die Konvention von Cantor und Bourbaki vor, weil ich sie gewohnt bin und weil man sehr oft Teilmengen zu betrachten hat und nur vergleichsweise selten echte Teilmengen. Ich muß jedoch zugeben, daß die in diesem Text gewählte Notation $\subset, \subsetneq$ mit den üblichen Notationen $\leq, <$ für Ungleichungen weniger gut zusammenpaßt als die Konvention nach ISO 31-11.

2.1.2.5. Oft bildet man neue Mengen als Teilmengen bestehender Mengen. Gebräuchlich ist dazu eine Notation, bei der man zwischen den Mengenklammern hinter einem senkrechten Strich dazuschreibt, welche zusätzliche Eigenschaft die

Elemente einer Teilmenge haben sollte, so daß man Teilmengen Y einer Menge X angeben kann in der Form

$$Y = \{x \in X \mid x \text{ hat eine zusätzlich noch gewisse Eigenschaft}\}$$

Zum Beispiel gilt $\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 0\}$, lies „die Menge der natürlichen Zahlen ist die Teilmenge der Menge der ganzen Zahlen bestehend aus allen ganzen Zahlen, die ≥ 0 sind“, und $\{0, 1\} = \{a \in \mathbb{N} \mid a^2 = a\}$.

Definition 2.1.2.6. Es ist auch erlaubt, die „Menge aller Teilmengen“ einer gegebenen Menge X zu bilden. Sie heißt die **Potenzmenge von** X und wird $\mathcal{P}(X)$ oder $\mathrm{Pot}(X)$ notiert.

Beispiel 2.1.2.7. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ kann man als die Menge aller möglichen Ausgänge einer Versuchsanordnung interpretieren, bei der man dreimal eine Münze wirft. Dazu mag man etwa jedem Ausgang die Menge der Wurfnummern zuordnet, bei denen Wappen herauskam. So würde etwa dem Ausgang WZW die Teilmenge $\{1, 3\}$ zugeordnet.

2.1.2.8 (**Kardinalität der Potenzmenge**). Ist X eine endliche Menge, so ist auch ihre Potenzmenge endlich und es gilt die Formel $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$. Für die drei-elementige Menge $X = \{1, 2, 3\}$ besteht ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ zum Beispiel aus $8 = 2^3$ Elementen und wir haben genauer

$$\mathcal{P}(X) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$$

Die Teilmenge $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$, die nur aus dem Element 1 besteht, ist also ein Element der Potenzmenge $\{1\} \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$. Das Element 1 ist dahingegen kein Element der Potenzmenge, sondern ein Element der ursprünglichen Menge $1 \in \{1, 2, 3\}$.

Satz 2.1.2.9 (**Bedeutung der Binomialkoeffizienten**). *Gegeben natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$ gibt der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ die Zahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an. In Formeln ausgedrückt haben wir unter der Annahme $|X| = n$ also*

$$|\{Y \subset X \mid |Y| = k\}| = \binom{n}{k}$$

Beweis. Vollständige Induktion über n. Für $n = 0$ gilt die Aussage, denn eine nullelementige Menge hat genau eine k-elementige Teilmenge falls $k = 0$ und keine k-elementige Teilmenge falls $k \geq 1$. Nehmen wir nun an, die Aussage sei für ein n schon bewiesen. Eine $(n + 1)$-elementige Menge X schreiben wir als $X = M \cup \{x\}$ mit dem gleich in 2.1.3.1 formal eingeführten Vereingungszeichen $\cup$, wo M eine n-elementige Menge ist und $x \notin M$. Ist $k = 0$, so gibt es genau

eine k-elementige Teilmenge von $M \cup \{x\}$, nämlich die leere Menge. Ist $k \geq 1$, so gibt es in $M \cup \{x\}$ nach Induktionsannahme genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen, die x nicht enthalten. Die k-elementigen Teilmengen dahingegen, die x enthalten, ergeben sich durch Hinzunehmen von x aus den $(k-1)$-elementigen Teilmengen von M, von denen es gerade $\binom{n}{k-1}$ gibt. Insgesamt hat $M \cup \{x\}$ damit also genau $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ Teilmengen mit genau k Elementen. □

2.1.2.10. Wieder scheint mir dieser Beweis in der für vollständige Induktion typischen Weise undurchsichtig. Ich ziehe deshalb den in 1.1.1.19 gegebenen weniger formellen Beweis vor. Man kann auch diesen Beweis formalisieren und verstehen als Spezialfall der sogenannten „Bahnformel“, vergleiche 4.5.2.3.

2.1.2.11 (**Variante zum Beweis der binomischen Formel**). Wir geben nun die versprochene präzise Formulierung unseres ersten Beweises der binomischen Formel 1.1.1.23. Wir rechnen dazu

$$(a+b)^n = \sum_{Y \subset \{1,2,\ldots,n\}} a^{|Y|} b^{n-|Y|}$$

Die rechte Seite soll hier in Verallgemeinerung der in 1.1.1.8 eingeführten Notation bedeuten, daß wir für jede Teilmenge Y von $\{1, 2, \ldots, n\}$ den angegebenen Ausdruck $a^{|Y|} b^{n-|Y|}$ nehmen und alle diese Ausdrücke aufsummieren. Dann fassen wir gleiche Summanden zusammen und erhalten mit 2.1.2.9 die binomische Formel.

Übungen

Übung 2.1.2.12. Es gilt $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$.

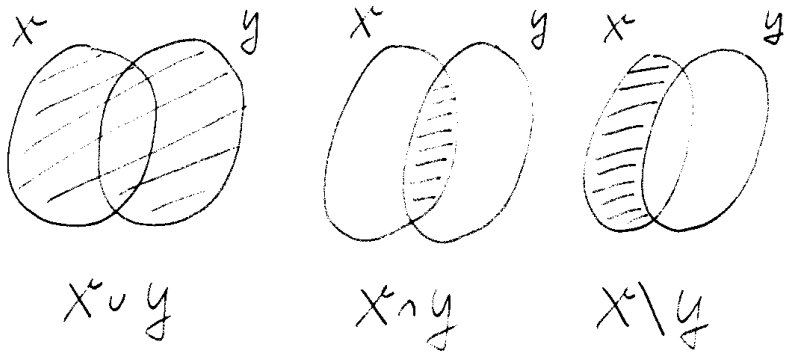
Übung 2.1.2.13. Man zeige $(a+b+c)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} a^i b^j c^k$.

2.1.3 Mengenoperationen

Definition 2.1.3.1. Wir erinnern, daß wir $:=$ als Abkürzung für „ist definiert als“ verwenden und daß „oder“ in der Mathematik stets das „nichtausschließende oder“ meint. Gegeben zwei Mengen X, Y können wir unter anderem auf folgende Weisen neue Mengen bilden:

1. Die **Vereinigung** $X \cup Y := \{z \mid z \in X \text{ oder } z \in Y\}$, zum Beispiel ist $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$;

2. Den **Schnitt** oder auch **Durchschnitt** $X \cap Y := \{z \mid z \in X \text{ und } z \in Y\}$, zum Beispiel ist $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$;



Van-de-Ven-Diagramme für Vereinigung, Schnitt und Differenz

3. Die **Differenz** $X \backslash Y := \{z \in X \mid z \notin Y\}$, zum Beispiel haben wir $\{1,2\} \backslash \{2,3\} = \{1\}$. Man schreibt statt $X \backslash Y$ auch $X - Y$. Ist Y eine Teilmenge von X, so heißt $X \backslash Y$ das **Komplement** von Y in X oder ausführlicher die **Komplementmenge**;

4. Das **Produkt** $X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$ oder ausführlicher **kartesische Produkt**. Es gilt also $(x,y) = (x',y')$ genau dann, wenn gilt $x = x'$ und $y = y'$. Zum Beispiel haben wir

$$\{1,2\} \times \{1,2,3\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$$

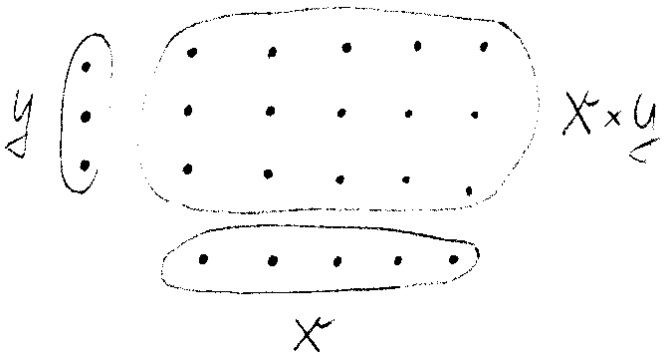
Oft benutzt man für das Produkt $X \times X$ einer Menge X mit sich selbst die Abkürzung $X^2 := X \times X$ und nennt das die Menge aller **angeordneten Paare** von Elementen von X.

2.1.3.2. Eine gute Anschauung für die ersten drei Operationen liefern die sogenannten **van-de-Ven-Diagramme**, wie sie die nebenstehenden Bilder zeigen. Sie sind allerdings nicht zu genau zu hinterfragen, denn ob die Punkte auf einem Blatt Papier im Sinne von Cantor „bestimmte wohlunterschiedene Objekte unserer Anschauung“ sind, scheint mir nicht ohne weiteres so klar. Wenn man jedoch jedes der schraffierten Gebiete im Bild als die Menge aller darin liegenden Kreuzungspunkte auf einem dazugedachten Millimeterpapier auffaßt und keine dieser Kreuzungspunkte auf den Begrenzungslinien liegen, so können sie wohl schon als eine Menge im Cantor'schen Sinne angesehen werden.

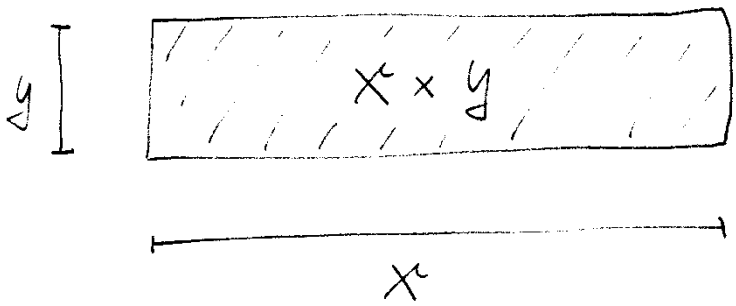
2.1.3.3. Zwei Teilmengen einer gegebenen Menge, die kein gemeinsames Element haben, heißen **disjunkt**. Äquivalent dazu ist die Bedingung, daß ihr Schnitt die leere Menge ist.

2.1.3.4 (**Mehrdeutigkeiten mit dem Komma als Trenner**). Die Verwendung des Kommas als Trenner ist hier problematisch, da $(1,2)$ nun zweierlei bedeuten kann: Zum einen ein Element des kartesischen Produkts $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, zum anderen aber auch den eingeklammerten Dezimalbruch $1{,}2$. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen. In diesem Text werden Dezimalbrüche nur selten vorkommen. In deutschen Schulbüchern verwendet man für angeordnete Paare meist die abweichende Notation $(x|y)$, um auch Paare von Dezimalbrüchen unmißverständlich notieren zu können.

2.1.3.5 (**Diskussion der Terminologie**). Die Bezeichnung als „Schnitt“ kommt wohl her von der Vorstellung des Schnitts zweier Geraden, wenn man sie als Teilmengen der Ebene denkt und diese hinwiederum als ein Blatt Papier, das man längs der einen Gerade entzweischneiden kann. Der Punkt, an dem die andere Gerade entzweigeschnitten wird, ist dann der Schnittpunkt und der Schnitt unserer beiden Geraden besteht genau aus diesem einen Punkt.



Anschauliche Darstellung des Produkts einer Menge mit fünf und einer Menge mit drei Elementen. Hier wird ein Paar (x, y) dargestellt durch einen Punkt, der über x und neben y liegt.



Dies Bild muß anders interpretiert werden als das Vorherige. Die Mengen X und Y sind nun zu verstehen als die Mengen der Punkte der vertikalen und horizontalen Geradensegmente und ein Punkt des Quadrats meint das Element $(x, y) \in X \times Y$, das in derselben Höhe wie $y \in Y$ senkrecht über $x \in X$ liegt.

2.1.3.6 (**Mengenlehre und das Bilden von Begriffen**). Wir werden in unserer naiven Mengenlehre die ersten drei Operationen „Vereinigung“, „Schnitt“ und „Differenz“ aus 2.1.3.1 nur auf Teilmengen einer gemeinsamen Obermenge anwenden, die uns in der einen oder anderen Weise bereits zur Verfügung steht. Die Potenzmenge und das kartesische Produkt dahingegen benutzen wir, um darüber hinaus neue Mengen zu erschaffen. Diese Konstruktionen erlauben es, im Rahmen der Mengenlehre so etwas wie Abstraktionen zu bilden: Wenn wir uns etwa die Menge T aller an mindestens einem Tag der Weltgeschichte lebenden oder gelebt habenden Tiere als eine Menge im Cantor'schen Sinne denken, so würden wir Konzepte wie „männlich“ oder „Hund“ oder „Fleischfresser“ formal als Teilmengen dieser Menge alias als Elemente von $\mathcal{P}(T)$ formalisieren. Das Konzept „ist Kind von“ würde dahingegen formalisiert als eine Teilmenge $K \subset T \times T$ des kartesischen Produkts unserer Menge T mit sich selbst alias als ein Element $K \in \mathcal{P}(T \times T)$, nämlich als die Teilmenge

$$K := \{(x, y) \in T \times T \mid x \text{ ist Kind von } y\}$$

2.1.3.7. Für das Rechnen mit Mengen überlegt man sich die folgenden Regeln, die ich gleich mit ihren üblichen Bezeichnungen angebe:

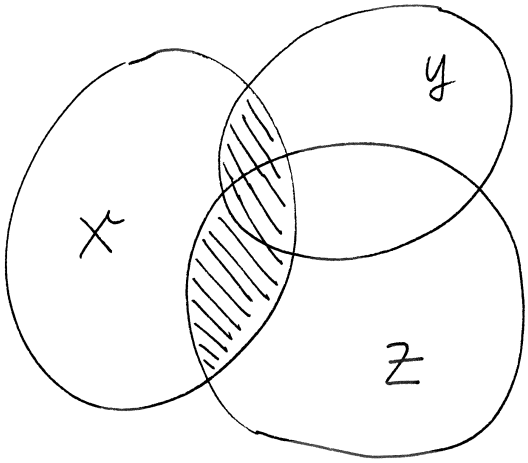
Assoziativgesetze:	$X \cap (Y \cap Z)$	$=$	$(X \cap Y) \cap Z$
	$X \cup (Y \cup Z)$	$=$	$(X \cup Y) \cup Z$
Distributivgesetze:	$X \cup (Y \cap Z)$	$=$	$(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
	$X \cap (Y \cup Z)$	$=$	$(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
de Morgan'sche Regeln:	$X \backslash (Y \cup Z)$	$=$	$(X \backslash Y) \cap (X \backslash Z)$
	$X \backslash (Y \cap Z)$	$=$	$(X \backslash Y) \cup (X \backslash Z)$
Komplement der Differenzmenge:	$X \backslash (X \backslash Y)$	$=$	$X \cap Y$

Eine gute Anschauung für diese Regeln liefern die van-de-Ven-Diagramme, wie die nebenstehenden Bilder zeigen. Das liegt daran, daß alle acht möglichen Lagen in Bezug auf unsere drei Mengen in diesen Diagrammen als Flächen zu sehen sind.

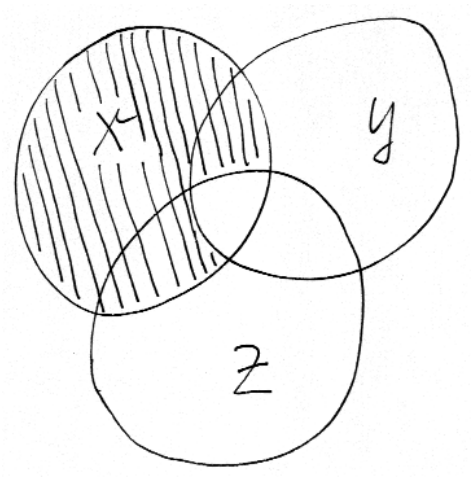
2.1.3.8. Ich zeige beispielhaft die Regel $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$. Es reicht, statt der Gleichheit die beiden Inklusionen $\subset$ und $\supset$ zu zeigen.

Ich beginne mit $\subset$. Sicher gilt $(Y \cap Z) \subset Y$, also auch $X \cup (Y \cap Z) \subset X \cup Y$. Ebenso zeigt man $X \cup (Y \cap Z) \subset X \cup Z$ und damit folgt schon mal $\subset$.

Bleibt noch $\supset$ zu zeigen. Das will mir nur durch Betrachtung von Elementen gelingen. Gegeben $a \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ gilt entweder $a \in X$ oder $a \notin X$. Falls $a \in X$ haben wir eh $a \in X \cup (Y \cap Z)$. Falls $a \notin X$ folgt aus $a \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$



$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

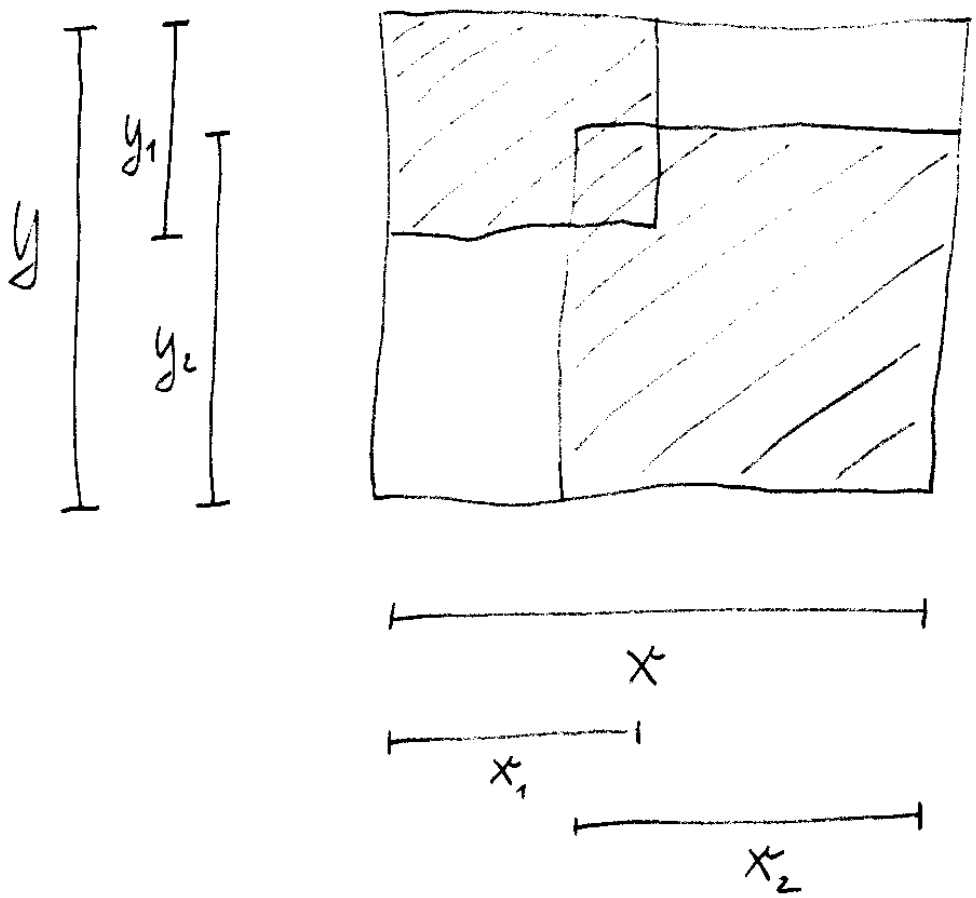


$$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$$

erst $a \in (X \cup Y)$ und dann $a \in Y$ und weiter erst $a \in (X \cup Z)$ und dann $a \in Z$, also $a \in Y \cap Z \subset X \cup (Y \cap Z)$. Wir haben somit gezeigt, daß jedes Element a von $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ auch zu $X \cup (Y \cap Z)$ gehört. Damit folgt die behauptete Inklusion $\supset$.

Ergänzung 2.1.3.9 (**Das Russell'sche Paradoxon**). Ich will nicht verschweigen, daß der in diesem Abschnitt dargestellte naive Zugang zur Mengenlehre durchaus begriffliche Schwierigkeiten mit sich bringt: Zum Beispiel darf die Gesamtheit $\mathcal{M}$ aller Mengen nicht als Menge angesehen werden, da wir sonst die „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten", gegeben durch die formelhafte Beschreibung $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{M} \mid A \notin A\}$, bilden könnten. Für diese Menge kann aber weder $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ noch $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$ gelten. Diese Art von Schwierigkeiten kann erst ein formalerer Zugang klären und auflösen, bei dem man unsere naiven Vorstellungen durch Ketten von Zeichen aus einem wohlbestimmten endlichen Alphabet ersetzt und unsere Vorstellung von Wahrheit durch die Verifizierbarkeit vermittels rein algebraischer „erlaubter Manipulationen" solcher Zeichenketten, die in „Axiomen" festgelegt werden. Diese Verifikationen kann man dann durchaus auch einer Rechenmaschine überlassen, so daß wirklich auf „objektivem" Wege entschieden werden kann, ob ein „Beweis" für die „Richtigkeit" einer unserer Zeichenketten in einem vorgegebenen axiomatischen Rahmen stichhaltig ist. Allerdings kann in derartigen Systemen von einer Zeichenkette algorithmisch nur entschieden werden, ob sie eine „sinnvolle Aussage" ist, nicht aber, ob sie „bewiesen" werden kann. Noch viel stärker zeigt der Unvollständigkeitssatz von Gödel, daß es in einem derartigen axiomatischen Rahmen, sobald er reichhaltig genug ist für eine Beschreibung des Rechnens mit natürlichen Zahlen, stets sinnvolle Aussagen gibt derart, daß entweder sowohl die Aussage als auch ihre Verneinung oder aber weder die Aussage noch ihre Verneinung bewiesen werden können. Mit diesen und ähnlichen Fragestellungen beschäftigt sich die Logik.

Vorschau 2.1.3.10 (**Weitere Konstruktionen der Mengenlehre**). Um mich nicht dem Vorwurf auszusetzen, während des Spiels die Spielregeln ändern zu wollen, sei bereits hier erwähnt, was noch hinzukommen soll. Die einzigen grundlegenden Konstruktionen, die noch fehlen, sind das Bilden der „disjunkten Vereinigung" und des „kartesischen Produkts" zu einer „beliebigen Mengenfamilie" in 4.7.7.17 und 4.7.7.7. In 11.1.1.2 besprechen wir weiter Schnitt und Vereinigung einer „beliebigen Familie von Teilmengen einer gegebenen Menge". In 3.1.9 werden einige weniger offensichtliche Argumentationen im Zusammenhang mit dem sogenannten „Zorn'schen Lemma" erläutert, die meines Erachtens bereits an den Rand dessen gehen, was man in unserem informellen Rahmen der naiven Mengenlehre als Argumentation noch vertreten kann. In 3.4.1 wird die Konstruktion der natürlichen Zahlen im Rahmen der Mengenlehre diskutiert, insbesondere geben wir erst dort eine formale Definition des Begriffs einer endlichen Menge. Sicher ist es in



Aus $X = X_1 \cup X_2$ und $Y = Y_1 \cup Y_2$ folgt noch lange nicht
$X \times Y = (X_1 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2)$

gewisser Weise unbefriedigend, das Fundament des Hauses der Mathematik erst fertigzustellen, wenn bereits erste Stockwerke stehen und bewohnt sind. Andererseits will ich aber auch vermeiden, daß Sie mir auf einem gewaltigen Fundament, das die ganze Mathematik tragen kann, im ersten Winter(semester) jämmerlich erfrieren.

2.1.3.11 (**Der Sinn von Genauigkeit und sorgfältiger Sprache**). Ich könnte mir gut vorstellen, daß verschiedene meiner Leser denken, diese ganze Pedanterie sei doch eigentlich überflüssig und jetzt sollten wir doch einfach mal fröhlich losrechnen wie das in der Schule ja auch sehr gut ging. Ich will hier erklären, warum Pedanterie in diesem Zusammenhang wichtig ist. Viele von Ihnen werden wissen, wie man mit einem einfachen Blatt Papier zum Mond kommt: 42-mal Falten und draufsteigen, das war's schon. So ähnlich ist es in der Mathematik: Etwas völlig Banales wie die naive Mengenlehre wird in den etwa dreißig Vorlesungsdoppelstunden des Wintersemesters jedes Mal von neuem gefaltet und wenn Sie dann am Ende des Wintersemesters zurückblicken, kann Ihnen schon leicht schwindlig werden. Das funktioniert mit wirklichem Papier nur eingeschränkt, aber wenn man sehr festes und glattes „Gedankenpapier“ nimmt, und solches Gedankenpapier ist eben gerade die Mengenlehre, dann klappt es verblüffend gut. Man muß dazu aber mit der Herstellung dieses Gedankenpapiers ebenso wie beim Falten sorgfältig sein bis zur Pedanterie, denn auch die kleinste Ungeschicklichkeit vervielfacht sich bei diesem Vorgehen mit derselben Schnelligkeit wie die gedankliche Höhe und bringt, eh man sich's versieht, alles zum Einsturz.

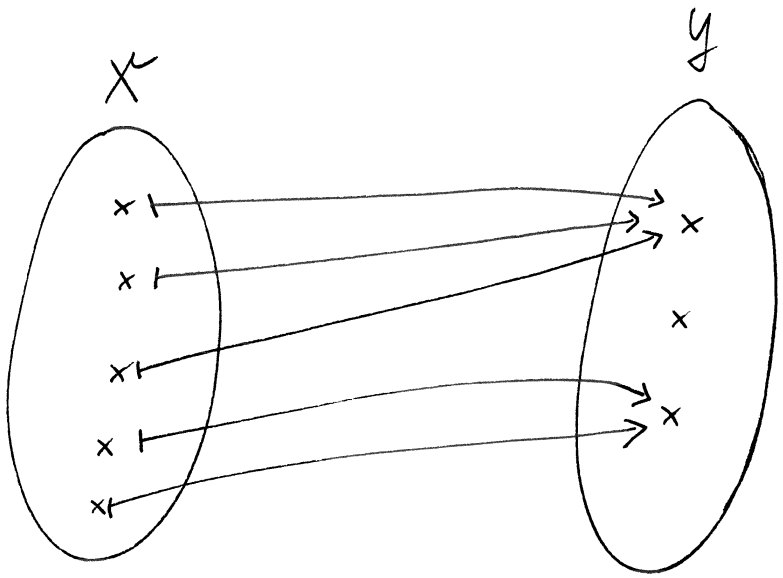
Übungen

Übung 2.1.3.12. Sind X und Y endliche Mengen, so gilt für die Kardinalitäten $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$ und $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.

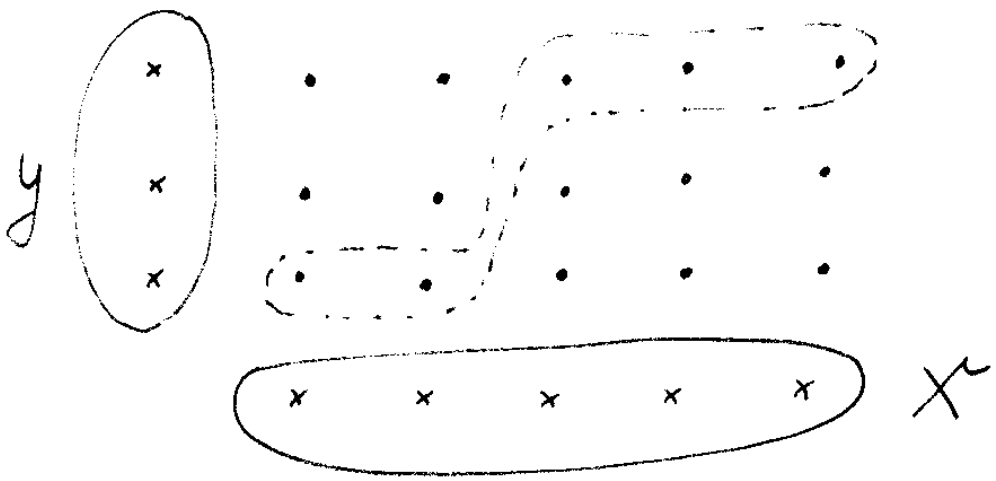
2.1.4 Abbildungen

Definition 2.1.4.1. Seien X, Y Mengen. Eine **Abbildung** $f : X \to Y$ ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet, das **Bild** von x unter f, auch genannt der **Wert** von f an der Stelle x. Man spricht dann auch vom **Auswerten** der Funktion f an der Stelle x oder vom **Einsetzen** von x in f und schreibt manchmal abkürzend $f(x) = fx$.

2.1.4.2. Wem das zu vage ist, der mag die alternative Definition vorziehen, nach der eine **Abbildung** $f : X \to Y$ eine Teilmenge $f \subset X \times Y$ ist derart, daß es für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt mit $(x, y) \in f$. Dies eindeutig bestimmte y schreiben wir dann $f(x)$ und sind auf einem etwas formaleren Weg wieder an



Eine Abbildung einer Menge mit fünf in eine mit drei Elementen



Der Graph der oben angegebenen Abbildung, wobei das X oben mit dem X hier identifiziert wurde durch „Umkippen nach Rechts“

demselben Punkt angelangt. In unseren Konventionen nennen wir besagte Teilmenge den **Graphen von** f und notieren sie mit dem Symbol Γ (sprich: Gamma), einem großen griechischen G, und schreiben

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

Definition 2.1.4.3. Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so nennen wir X ihren **Definitionsbereich** und Y ihren **Wertebereich**. Zwei Abbildungen nennen wir gleich, wenn sie denselben Definitionsbereich X, denselben Wertebereich Y und dieselbe Abbildungsvorschrift $f \subset X \times Y$ haben.

2.1.4.4 (**Die Notationen $\to$ und $\mapsto$**). Wir notieren Abbildungen oft in der Form

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

und in verschiedenen Verkürzungen dieser Notation. Zum Beispiel sprechen wir von „einer Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ von der Menge der natürlichen Zahlen in sich selber“ oder „der Abbildung $n \mapsto n^3$ von der Menge der natürlichen Zahlen in sich selber“. Wir benutzen unsere zwei Arten von Pfeilen $\to$ und $\mapsto$ auch im allgemeinen in derselben Weise.

Beispiel 2.1.4.5. Für jede Menge X haben wir die **identische Abbildung** oder **Identität**

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id} = \mathrm{id}_X: & X & \to & X \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

Ein konkreteres Beispiel für eine Abbildung ist das Quadrieren

$$\begin{array}{rccc} q: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & n^2 \end{array}$$

Beispiel 2.1.4.6. Gegeben zwei Mengen X, Y erklärt man die **Projektionsabbildungen** oder **Projektionen** $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ beziehungsweise $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ durch die Vorschrift $(x, y) \mapsto x$ beziehungsweise $(x, y) \mapsto y$. In manchen Zusammenhängen notiert man sie auch abweichend pr_1 und pr_2 für die „Projektion auf die erste beziehungsweise zweite Komponente“.

Definition 2.1.4.7. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

1. Gegeben eine Teilmenge $A \subset X$ erklären wir das **Bild von** A **unter** f, eine Teilmenge $f(A) \subset Y$, durch

$$f(A) := \{y \in Y \mid \text{Es gibt } x \in A \text{ mit } f(x) = y\}$$

2. Gegeben eine Teilmenge $B \subset Y$ erklären wir das **Urbild von** B **unter** f, eine Teilmenge von $f^{-1}(B) \subset X$, durch

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

2.1.4.8. Das Bild von ganz X nennen wir das **Bild von** f und notieren es $\mathrm{im}(f) := f(X)$. Das Kürzel im steht für französisch und englisch **image**.

Beispiel 2.1.4.9. Für unsere Abbildung $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n^2$ des Quadrierens von eben könnten wir die Menge aller Quadratzahlen schreiben als

$$q(\mathbb{Z}) = \{a^2 \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

Ebenso wäre $\{2a \mid a \in \mathbb{N}\}$ eine mögliche formelmäßige Darstellung der Menge aller geraden natürlichen Zahlen, und $\{ab \mid a, b \in \mathbb{N}, a \geq 2, b \geq 2\}$ wäre eine formelmäßige Darstellung der Menge aller natürlichen Zahlen, die nicht prim und auch nicht Null oder Eins sind.

2.1.4.10. Eine Abbildung, deren Bild aus höchstens einem Element besteht, nennen wir eine **konstante Abbildung**. Eine Abbildung, deren Bild aus genau einem Element besteht, nennen wir eine **einwertige Abbildung**. Eine einwertige Abbildung ist also eine konstante Abbildung mit nichtleerem Definitionsbereich.

2.1.4.11 (**Konstanten und konstante Abbildungen**). Gegeben ein festes $c \in Y$ schreiben wir oft auch kurz c für die konstante Abbildung $X \to Y$ gegeben durch $x \mapsto c$ für alle $x \in X$. Damit verbunden ist die Hoffnung, daß aus dem Kontext klar wird, ob im Einzelfall die Abbildung $c : X \to Y$ oder das Element $c \in Y$ gemeint sind.

2.1.4.12. Gegeben eine Abbildung $f : X \to Y$ ist formal f^{-1} eine Abbildung $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ in der Gegenrichtung auf den Potenzmengen. Besteht B nur aus einem Element x, so schreiben wir auch $f^{-1}(x)$ statt $f^{-1}(\{x\})$ und nennen diese Menge die **Faser von** f **über** x oder **bei** x. Das Quadrieren q aus 2.1.4.9 hat etwa die Faser $q^{-1}(1) = \{1, -1\}$ bei 1 und die Faser $q^{-1}(-1) = \emptyset$ bei -1.

2.1.4.13 (**Diskussion der Notation**). Die Notation $f^{-1}(B)$ für das Urbild einer Menge unter einer Abbildung führt leicht zu Verwirrung, da man a^{-1} aus der Schule als alternative Notation für den Bruch $a^{-1} = 1/a$ gewohnt ist. Diese beiden Notationen sind nur entfernt verwandt und werden beide in der Mathematik durchgehend verwendet. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

2.1.5 Verknüpfung von Abbildungen

Definition 2.1.5.1. Sind drei Mengen X, Y, Z gegeben und dazwischen Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$, so definieren wir die **Verknüpfung** unserer

Abbildungen f und g, eine Abbildung $g \circ f : X \to Z$, durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & X & \to & Z \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

2.1.5.2 (**Diskussion der Notation**). Die Notation $g \circ f$, sprich „g nach f“, für „erst f, dann g“ ist gewöhnungsbedürftig, erklärt sich aber durch die offensichtliche Formel $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Ich sage, $g \circ f$ entstehe aus g durch **Vorschalten von** f und aus f durch **Nachschalten von** g. Oft kürzt man auch $g \circ f$ mit gf ab. Mit dieser Abkürzung muß man jedoch sorgsam umgehen, da im Fall von zwei Abbildungen f, g von derselben Menge in einen Zahlbereich, etwa $f, g : X \to \mathbb{Q}$, der Ausdruck fg vielmehr für die Abbildung $x \mapsto f(x)g(x)$ reserviert ist, das sogenannte „punktweise Produkt“ unserer beiden Funktionen.

Beispiel 2.1.5.3. Betrachten wir zusätzlich zum Quadrieren $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die Abbildung $t : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x + 1$, so gilt $(q \circ t)(x) = (x + 1)^2$ aber $(t \circ q)(x) = x^2 + 1$.

Definition 2.1.5.4. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

1. f heißt **injektiv** oder eine **Injektion**, wenn aus $x \neq x'$ folgt $f(x) \neq f(x')$. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß es für jedes $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Injektionen schreibt man oft $\hookrightarrow$.

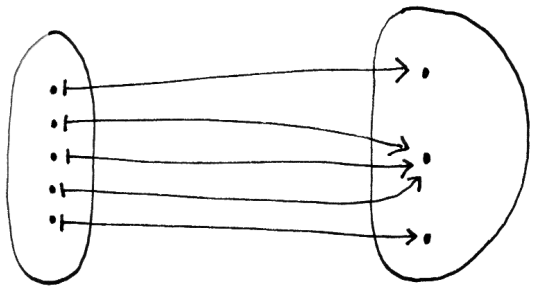
2. f heißt **surjektiv** oder eine **Surjektion**, wenn es für jedes $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Surjektionen schreibt man manchmal $\twoheadrightarrow$.

3. f heißt **bijektiv** oder eine **Bijektion**, wenn f injektiv und surjektiv ist. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß es für jedes $y \in Y$ genau ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Bijektionen schreibt man oft $\xrightarrow{\sim}$.

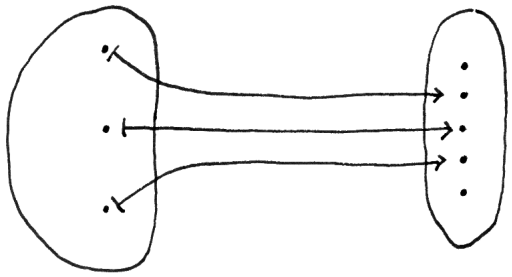
2.1.5.5. Ist $X \subset Y$ eine Teilmenge, so ist die **Einbettung** oder **Inklusion** $i : X \to Y$, $x \mapsto x$ stets injektiv. Ist $g : Y \to Z$ eine Abbildung und $X \subset Y$ eine Teilmenge, so nennen wir die Verknüpfung $g \circ i$ von g mit der Inklusion auch die **Einschränkung** von g auf X und notieren sie

$$g \circ i =: g|X = g|_X : X \to Z$$

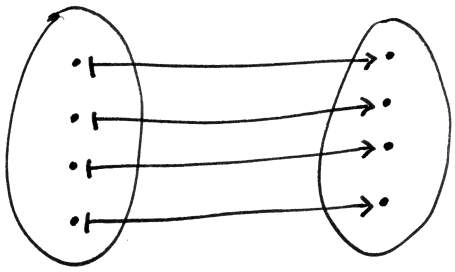
Oft bezeichnen wir eine Einschränkung aber auch einfach mit demselben Buchstaben g in der Hoffnung, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, welche Abbildung genau gemeint ist. Das ist nicht ganz unproblematisch: So ist etwa unsere Abbildung $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n^2$ nicht injektiv, ihre Restriktion zu einer Abbildung $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist aber durchaus injektiv.



Eine Surjektion



Eine Injektion



Eine Bijektion

2.1.5.6 (**Surjektion auf das Bild**). Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so ist die Abbildung $f : X \to f(X), x \mapsto f(x)$ stets surjektiv. Der Leser möge entschuldigen, daß wir hier zwei verschiedene Abbildungen mit demselben Symbol f bezeichnet haben. Das wird noch öfter vorkommen. Überhaupt ignorieren wir, gegeben Mengen X, Y und eine Teilmenge $Z \subset Y$, im folgenden meist den Unterschied zwischen einer „Abbildung von X nach Y, deren Bild in Z enthalten ist“ und einer „Abbildung von X nach Z“.

Beispiele 2.1.5.7. Unsere Abbildung $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n^2$ ist weder injektiv noch surjektiv. Die Identität $\mathrm{id} : X \to X$ ist stets bijektiv. Sind X und Y endliche Mengen, so gibt es genau dann eine Bijektion von X nach Y, wenn X und Y dieselbe Kardinalität haben, in Formeln $|X| = |Y|$.

Satz 2.1.5.8. *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.*

1. *Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv;*
2. *Sind g und f injektiv, so auch $g \circ f$;*
3. *Genau dann ist g injektiv, wenn für beliebige Abbildungen $f_1, f_2 : X \to Y$ aus $g \circ f_1 = g \circ f_2$ schon folgt $f_1 = f_2$.*

Beweis. Übung. Besonders elegant ist es, zunächst die letzte Aussage zu zeigen, und dann die vorderen Aussagen ohne weitere Betrachtung von Elementen zu folgern. □

2.1.5.9 (**Universelle Eigenschaft von Injektionen**). Sei $i : Y \hookrightarrow X$ eine injektive Abbildung und $\varphi : Z \to X$ eine beliebige Abbildung. Genau dann gibt es eine Abbildung $\tilde{\varphi} : Z \to Y$ mit $i \circ \tilde{\varphi} = \varphi$, wenn gilt $\mathrm{im}(\varphi) \subset \mathrm{im}(i)$. Nach dem Vorhergehenden ist diese Abbildung $\tilde{\varphi}$ dann sogar eindeutig bestimmt.

Satz 2.1.5.10. *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.*

1. *Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv;*
2. *Sind g und f surjektiv, so auch $g \circ f$;*
3. *Genau dann ist f surjektiv, wenn für beliebige Abbildungen $g_1, g_2 : Y \to Z$ aus $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ schon folgt $g_1 = g_2$.*

Beweis. Übung. Besonders elegant ist es, zunächst die letzte Aussage zu zeigen, und dann die vorderen Aussagen ohne weitere Betrachtung von Elementen zu folgern. □

2.1.5.11 (**Universelle Eigenschaft von Surjektionen**). Sei $s : X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung und $\varphi : X \to Z$ eine beliebige Abbildung. Offensichtlich gibt es genau dann eine Abbildung $\bar{\varphi} : Y \to Z$ mit $\bar{\varphi} \circ s = \varphi$, wenn φ auf den Fasern von s konstant ist. Nach dem Vorhergehenden ist diese Abbildung $\bar{\varphi}$ dann sogar eindeutig bestimmt. Diese Erkenntnis ist insbesondere für die Algebra relevant.

2.1.5.12. Ist $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ eine bijektive Abbildung, so ist offensichtlich die Menge $\{(f(x), x) \in Y \times X \mid x \in X\}$ im Sinne von 2.1.4.2 eine Abbildung oder, vielleicht klarer, der Graph einer Abbildung $Y \to X$. Diese Abbildung in die Gegenrichtung heißt die **Umkehrabbildung** oder **Umkehrfunktion** auch die **inverse Abbildung** zu f und wird mit $f^{-1} : Y \to X$ bezeichnet. Offensichtlich ist mit f auch f^{-1} eine Bijektion.

2.1.5.13 (**Diskussion der Notation**). Mit dem vorhergehenden haben wir schon eine dritte mögliche Bedeutung für das Symbol f^{-1} kennengelernt. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

Beispiel 2.1.5.14. Die Umkehrabbildung unserer Bijektion $t : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x + 1$ ist die Abbildung $t^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x - 1$.

Satz 2.1.5.15 (**Bedeutung der Fakultät**). *Sind X und Y zwei Mengen mit je n Elementen, so gibt es genau $n!$ bijektive Abbildungen $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.*

Beweis. Sei $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Wir haben n Möglichkeiten, ein Bild für x_1 auszusuchen, dann noch $(n-1)$ Möglichkeiten, ein Bild für x_2 auszusuchen, und so weiter, bis schließlich nur noch 1 Element von Y als mögliches Bild von x_n in Frage kommt. Insgesamt gibt es also $n(n-1)\cdots 1 = n!$ Möglichkeiten für f. Da wir $0! = 1$ vereinbart hatten, stimmt unser Satz auch für $n = 0$. □

Übungen

Übung 2.1.5.16. Gegeben eine Bijektion $f : X \to Y$ ist $g = f^{-1}$ die einzige Abbildung $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Ebenso ist auch $h = f^{-1}$ die einzige Abbildung $h : Y \to X$ mit $h \circ f = \mathrm{id}_X$.

Ergänzende Übung 2.1.5.17. Gegeben endliche Mengen X, Y gibt es genau $|Y|^{|X|}$ Abbildungen von X nach Y und unter diesen Abbildungen sind genau $|Y|(|Y| - 1)(|Y| - 2)\ldots(|Y| - |X| + 1)$ Injektionen.

Übung 2.1.5.18. Sind Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gegeben, so haben wir $(g \circ f)(A) = g(f(A))$ für jede Teilmenge $A \subset X$ und umgekehrt auch $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ für jede Teilmenge $C \subset Z$.

Ergänzende Übung 2.1.5.19. Sei X eine Menge mit n Elementen und seien natürliche Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ gegeben mit $n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_r$. Man zeige: Es

gibt genau $n!/(\alpha_1! \cdots \alpha_r!)$ Abbildungen $f : X \to \{1, \ldots, r\}$, die jedes i genau α_i-mal als Wert annehmen, in Formeln

$$\frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} = \operatorname{card}\{f \mid |f^{-1}(i)| = \alpha_i \text{ für } i = 1, \ldots r\}$$

Ergänzung 2.1.5.20. Manche Autoren bezeichnen die Zahlen aus der vorherigen Übung 2.1.5.19 als **Multinomialkoeffizienten** und verwenden die Notation

$$\binom{n}{\alpha_1; \ldots; \alpha_r} := \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!}$$

Mich überzeugt diese Notation nicht, da sie im Gegensatz zur Notation für Binomialkoeffizienten nichts kürzer macht.

Ergänzende Übung 2.1.5.21. Man zeige die Formel

$$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n} \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r}$$

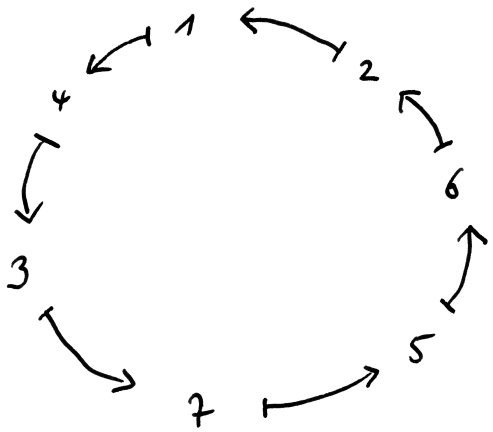
Hier ist zu verstehen, daß wir für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n$ den angegebenen Ausdruck nehmen und alle diese Ausdrücke aufsummieren.

Ergänzende Übung 2.1.5.22. Eine **zyklische Anordnung** einer endlichen Menge M ist eine Abbildung $z : M \to M$ derart, daß wir durch mehrmaliges Anwenden von z auf ein beliebiges Element $x \in M$ jedes Element $y \in M$ erhalten können. Man zeige, daß es auf einer n-elementigen Menge mit $n \geq 1$ genau $(n-1)!$ zyklische Anordnungen gibt. Die Terminologie „zyklische Anordnung“ ist etwas unglücklich, da unsere Struktur nun beim besten Willen keine Anordnung im Sinne von 10.2.3 ist. Andererseits ist aber das Angeben einer Anordnung auf einer endlichen Menge M schon auch etwas Ähnliches.

Ergänzende Übung 2.1.5.23. Sei X eine Menge mit $n \geq 1$ Elementen und sei m eine natürliche Zahl. Man zeige, daß es genau $\binom{n+m-1}{n-1}$ Abbildungen $f : X \to \mathbb{N}$ gibt mit $\sum_{x \in X} f(x) = m$. Hinweis: Man denke sich $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ und veranschauliche sich dann f als eine Folge auf $f(1)$ Punkten gefolgt von einem Strich gefolgt von $f(2)$ Punkten gefolgt von einem Strich und so weiter, insgesamt also eine Folge aus $n + m - 1$ Symbolen, davon m Punkten und $n - 1$ Strichen.

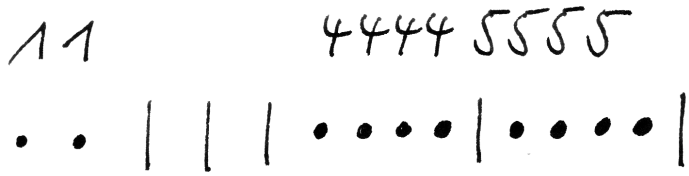
2.1.6 Ergänzungen zur Mengenlehre*

2.1.6.1 (**Kommutativität kartesischer Produkte**). Ich insistiere darauf, daß gegeben Mengen X, Y die kartesischen Produkte $X \times Y$ und $Y \times X$ für uns verschiedene Mengen sind. Es gibt zwischen diesen kartesischen Produkten zwar die ausgezeichneten Bijektionen $\tau_{X,Y} : X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X$ mit $(x, y) \mapsto (y, x)$ und $\tau_{Y,X}$ ist stets die Umkehrabbildung zu $\tau_{X,Y}$, aber $\tau_{X,X}$ muß keineswegs die Identität auf X^2 sein, das gilt vielmehr nur für $|X| \leq 1$.



Versuch der graphischen Darstellung einer zyklischen Anordnung auf der Menge $\{1, 2, \ldots, 7\}$. Die Pfeile $\mapsto$ sollen jeweils den Effekt der Abbildung z veranschaulichen.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	0	0	4	4	0



Eine Abbildung $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{N}$ im Fall $n = 6$ mit Wertesumme $m = 10$ und die Veranschaulichung nach der Vorschrift aus Übung 10.1.4.25 als Folge bestehend aus m Punkten und $n - 1$ Strichen.

Vorschau 2.1.6.2. In 6.5.3.6 zeigen wir den Satz von Schröder-Bernstein: Sind X und Y Mengen und gibt es sowohl eine Injektion $f : X \hookrightarrow Y$ als auch eine Injektion $g : Y \hookrightarrow X$, so gibt es sogar eine Bijektion $b : X \xrightarrow{\sim} Y$.

Definition 2.1.6.3. Die Menge aller Abbildungen von X nach Y bezeichne ich mit

$$\mathrm{Ens}(X, Y)$$

nach der französischen Übersetzung **ensemble** des deutschen Begriffs „Menge“.

2.1.6.4 (**Diskussion der Terminologie**). Üblicher ist statt unserem $\mathrm{Ens}(X, Y)$ die Notation Y^X. Noch gebräuchlicher ist in der deutschen Literatur die Bezeichnung $\mathrm{Abb}(X, Y)$ für die Menge aller Abbildungen von X nach Y. Ich will jedoch in 4.7.1.4 die „Kategorie aller Mengen“ wie Gabriel [Gab62] mit Ens bezeichnen und für je zwei Objekte X, Y einer Kategorie $\mathcal{C}$ die Menge aller „Morphismen“ von X nach Y mit $\mathcal{C}(X, Y)$. Das erklärt die hier gewählte Bezeichnung für Mengen von Abbildungen.

2.1.6.5 (**Exponentialgesetz**). Gegeben drei Mengen X, Y, Z erhalten wir eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(X, \mathrm{Ens}(Y, Z))$$

durch die Vorschrift $f \mapsto f(x, \ )$ mit der Notation $f(x, \ )$ für die Abbildung $y \mapsto f(x, y)$. Etwas vage formuliert ist also eine Abbildung $X \times Y \to Z$ von einem kartesischen Produkt $X \times Y$ in eine weitere Menge Z dasselbe wie eine Abbildung, die jedem $x \in X$ eine Abbildung $Y \to Z$ zuordnet, und umgekehrt natürlich auch dasselbe wie eine Abbildung, die jedem $y \in Y$ eine Abbildung $X \to Z$ zuordnet. In der exponentiellen Notation liest sich das besonders suggestiv als kanonische Bijektion $Z^{(X \times Y)} \xrightarrow{\sim} (Z^X)^Y$. Wegen dieser Notation zitiert man diese Aussage auch als das **Exponentialgesetz**. In wieder anderen Worten sind also die in der Schule derzeit so beliebten „Funktionen mit Parameter“ nichts anderes als „Funktionen von zwei Variablen, bei denen eine der beiden Variablen als Parameter bezeichnet wird“.

Vorschau 2.1.6.6. Später bezeichnen wir eine Abbildung $X \times Y \to Z$ auch als eine 2-**Multiabbildung** und notieren sie $X \curlyvee Y \to Z$ mit dem als reinem Trenner zu verstehenden Symbol $\curlyvee$ und erklären allgemeiner „r-Multiabbildungen“ für beliebiges $r \in \mathbb{N}$ sowie deren „Multiverknüpfung“, aber alles zu seiner Zeit.

Ergänzung 2.1.6.7 (**Unmögliche Surjektionen**). Eine Abbildung $f : X \to \mathcal{P}(X)$ von einer Menge in ihre Potenzmenge kann nie surjektiv sein. In der Tat, betrachten wir in X die Teilmenge $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$, so kann es kein $y \in X$ geben mit $f(y) = A$, denn für solch ein y hätten wir entweder $y \in A$ oder $y \notin A$, und aus $y \in A$ alias $y \in f(y)$ folgte $y \notin A$, wohingegen aus $y \notin A$ alias $y \notin f(y)$ folgte $y \in A$. Ordnen wir etwa jedem Menschen die Menge aller der Menschen

zu, die er liebt, und betrachten die Menge aller Menschen, die sich nicht selbst lieben, so wird diese Menge für keinen Menschen genau aus all den Menschen bestehen, die er liebt.

Ergänzung 2.1.6.8. Gegeben eine Menge X mag man sich eine Abbildung $X \to \mathbb{N}$ veranschaulichen als eine „Menge von Elementen von X, in der jedes Element mit einer wohlbestimmten Vielfachheit vorkommt". Aufgrund dieser Vorstellung nennen wir eine Abbildung $X \to \mathbb{N}$ auch eine **Multimenge** von Elementen von X. Unter der **Kardinalität einer Multimenge** verstehen wir die Summe über die Werte der entsprechenden Abbildung an allen Stellen $x \in X$, aufgefaßt als ein Element von $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$. Ich notiere Multimengen durch Mengenklammern mit einem vorgestellten unteren Index μ. So wäre etwa ${}_\mu\{5, 5, 5, 7, 7, 1\}$ eine Multimenge von natürlichen Zahlen der Kardinalität 6. Diese Notation ist aber nicht gebräuchlich. Die Gesamtheit aller endlichen Multimengen von Elementen einer Menge X notiere ich auch $\mathbb{N}X$. Eine Multimenge der Kardinalität Zwei von Elementen einer Menge X nenne ich ein **ungeordnetes Paar** von Elementen von X.

2.1.6.9. Gegeben $S \supset T$ eine Menge mit einer Teilmenge und $f : S \to S$ eine Selbstabbildung von S sagen wir, T sei **stabil unter** f und f **stabilisiert** T, wenn gilt $f(T) \subset T$. Gilt sogar $f(T) = T$, so sagen wir, T **werde von** f **festgehalten**. Gilt noch stärker $f(t) = t \ \forall t \in T$, so sagen wir, T **werde von** f **punktweise festgehalten**.

Beispiel 2.1.6.10. Für jede Menge X mag man die **Mengenabbildung** $X \hookrightarrow \mathcal{P}(X)$, $x \mapsto \{x\}$ betrachten. Ihr Bild ist die Menge

$$\mathcal{P}_1(X) \subset \mathcal{P}(X)$$

aller einelementigen Teilmengen von X. Die Umkehrabbildung der so entstehenden Bijektion $X \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_1(X)$ notieren wir $\mathrm{elt} : \mathcal{P}_1(X) \to X$ und nennen sie die **Elementabbildung**. Sie ordnet jeder einelementigen Teilmenge von X ihr einziges Element zu.

Vorschau 2.1.6.11 (**Formalisierung des Begriffs der natürlichen Zahlen**). Wir werden in 3.4.1 zeigen, daß es Paare (N, s) gibt bestehend aus einer Menge N und einer injektiven Abbildung $s : N \to N$ derart, daß $N \backslash s(N)$ aus genau einem Element o besteht und daß jede s-stabile Teilmenge von N, die o enthält, bereits ganz N sein muß. Weiter werden wir zeigen, daß solch ein Paar im Wesentlichen eindeutig bestimmt ist in dem Sinne, daß es für jedes weitere derartige Paar (N', s') genau eine Bijektion $\varphi : N \xrightarrow{\sim} N'$ gibt mit $s'\varphi = \varphi s$. Im Rahmen der ganz naiven Mengenlehre kann man solch ein Paar unmittelbar angeben als $(\mathbb{N}, s)$ mit $s : n \mapsto (n + 1)$. Bei einem etwas formaleren Aufbau der Mathematik aus der Mengenlehre mag man umgekehrt von derartigen Paaren ausgehen und so zu

einer Definition von $\mathbb{N}$ und der Addition auf $\mathbb{N}$ gelangen, vergleiche 3.4.1 folgende. Hier liegt auch der Schlüssel für eine formale Rechtfertigung des Prinzips der vollständigen Induktion.

Vorschau 2.1.6.12. Sie sehen bereits an dieser Stelle, wie problematisch der Begriff der Gleichheit im Grunde genommen ist und wie nah er an der Wurzel mathematischen Denkens liegt. Um ein besonders einfaches Beispiel zu bemühen, mag man sich fragen, ob je zwei einelementige Mengen gleich sind. Unsere Antwort hier muß lauten: Natürlich nicht, zwei einelementige Teilmengen einer gegebenen Menge etwa sind genau dann gleich, wenn sie dasselbe Element enthalten. Allerdings gibt es andererseits zwischen je zwei einelementigen Mengen genau eine Bijektion, eine einelementige Menge ist also „eindeutig bis auf eindeutige Bijektion“.

Übungen

Ergänzende Übung 2.1.6.13. Gegeben eine fest gedachte Menge Y können wir für jede weitere Menge A eine Abbildung $\mathrm{ev}_A : A \to \mathrm{Ens}(\mathrm{Ens}(A, Y), Y)$, genannt die **Evaluations-** oder **Auswertungsabbildung**, erklären durch die Vorschrift $\mathrm{ev}_A : a \mapsto (f \mapsto f(a))$. Man zeige, daß für jede Menge X die Komposition

$$\mathrm{Ens}(X, Y) \to \mathrm{Ens}(\mathrm{Ens}(\mathrm{Ens}(X, Y), Y), Y) \to \mathrm{Ens}(X, Y)$$

von $\mathrm{ev}_{\mathrm{Ens}(X,Y)}$ mit dem Vorschalten $(\circ\, \mathrm{ev}_X)$ von ev_X die Identität auf $\mathrm{Ens}(X, Y)$ ist. Später werden Sie diese Aussage möglicherweise als die „Dreiecksidentität“ im Kontext „adjungierter Funktoren“ in 16.4.8.1 verstehen lernen.

2.1.7 Logische Symbole und Konventionen

2.1.7.1. In der mathematischen Fachsprache meint **oder** immer, daß auch beides erlaubt ist. Wir haben diese Konvention schon benutzt bei der Definition der Vereinigung in 2.1.3.1 durch die Vorschrift $X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ oder } z \in Y\}$. Zum Beispiel haben wir $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$. In diesem Zusammenhang muß ich die schöne Geschichte erzählen von dem Logiker, der seinem Freund erzählt, er habe ein Kind bekommen. Der Freund fragt: „Ist es ein Junge oder ein Mädchen?“ worauf der Logiker antwortet: „Ja!“

Ergänzung 2.1.7.2 (**Herkunft des Vereinigungssymbols**). In den „Arithmetes principia“ von Guiseppe Peano scheint das Symbol $\cup$ zum ersten Mal vorzukommen, allerdings als Symbol für „oder“. Peano schreibt: „Signum $\cup$ legitur *vel*“ und „vel“ heißt „oder“ auf lateinisch. Der Kontext legt nahe, daß $\cup$ an den Buchstaben

v erinnern soll. Das Symbol $\vee$ hatte Peano schon als Symbol für „verum“ verbraucht. In der Bedeutung der Vereinigung zweier Mengen habe ich das Symbol zuerst bei Bourbaki gesehen.

2.1.7.3. Sagt man der mathematischen Fachsprache, es gebe ein Objekt mit diesen und jenen Eigenschaften, so ist stets gemeint, daß es *mindestens ein* derartiges Objekt geben soll. Hätten wir diese Sprachregelung rechtzeitig vereinbart, so hätten wir zum Beispiel das Wörtchen „mindestens“ in Teil 2 von 10.1.4.8 bereits weglassen können. Sagt ihnen also ein Mathematiker, er habe einen Bruder, so kann es auch durchaus sein, daß er noch weitere Brüder hat! Will man in der mathematischen Fachsprache Existenz und Eindeutigkeit gleichzeitig ausdrücken, so sagt man, es gebe **genau ein** Objekt mit diesen und jenen Eigenschaften. Sagt ihnen also ein Mathematiker, er habe genau einen Bruder, so können sie sicher sein, daß er nicht noch weitere Brüder hat.

2.1.7.4. Die folgenden Abkürzungen erweisen sich als bequem und werden häufig verwendet:

$\forall$	für alle (ein umgedrehtes A wie „alle“)
$\exists$	es gibt (ein umgedrehtes E wie „existiert“)
$\exists!$	es gibt genau ein
$\ldots \Rightarrow \cdots$	aus ... folgt $\cdots$
$\ldots \Leftarrow \cdots$	... folgt aus $\cdots$
$\ldots \Leftrightarrow \cdots$	... ist gleichbedeutend zu $\cdots$

Ist zum Beispiel $f : X \to Y$ eine Abbildung, so können wir unsere Definitionen injektiv, surjektiv, und bijektiv etwas formaler so schreiben:

$$\begin{array}{lcl} f \text{ injektiv} & \Leftrightarrow & ((f(x) = f(z)) \Rightarrow (x = z)) \\ f \text{ surjektiv} & \Leftrightarrow & \forall y \in Y \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y \\ f \text{ bijektiv} & \Leftrightarrow & \forall y \in Y \exists! x \in X \text{ mit } f(x) = y \end{array}$$

2.1.7.5. In den Zeiten des Bleisatzes war es nicht einfach, neue Symbole in Druck zu bringen. Irgendwelche Buchstaben verdreht zu setzen, war jedoch unproblematisch. So entstanden die Symbole $\forall$ und $\exists$. Sie heißen **Quantoren**.

2.1.7.6. Bei den „für alle“ und „es gibt“ kommt es in der mathematischen Fachsprache, anders als in der weniger präzisen Umgangssprache, entscheidend auf die Reihenfolge an. Man betrachte zum Beispiel die beiden folgenden Aussagen:

„Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es $m \in \mathbb{N}$ so daß gilt $m \geq n$“

„Es gibt $m \in \mathbb{N}$ so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $m \geq n$“

Offensichtlich ist die Erste richtig, die Zweite aber falsch. Weiter mache man sich klar, daß die „für alle“ und „es gibt“ bei Verneinung vertauscht werden. Äquivalent sind zum Beispiel die beiden folgenden Aussagen

„Es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $n^2 = 2$“

„Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt nicht $n^2 = 2$“

2.1.7.7. Wollen wir zeigen, daß aus einer Aussage A eine weitere Aussage B folgt, so können wir ebensogut zeigen: Gilt B nicht, so gilt auch A nicht. In formelhafter Schreibweise haben wir also

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{nicht } B) \Rightarrow (\text{nicht } A))$$

Wollen wir zum Beispiel zeigen $(g \circ f \text{ surjektiv}) \Rightarrow (g \text{ surjektiv})$, so reicht es, wenn wir uns überlegen: Ist g nicht surjektiv, so ist $g \circ f$ erst recht nicht surjektiv. Oder ein Beispiel aus dem täglichen Leben: Die Aussage (Wenn ein Mensch ein Kind gebiert, ist er eine Frau) ist gleichbedeutend zur Aussage (Wenn ein Mensch keine Frau ist, gebiert er auch keine Kinder). Nicht folgern kann man dahingegen die Aussage (Wenn ein Mensch kein Kind gebiert, ist er keine Frau).

2.1.7.8. In der Literatur findet man oft die Abkürzung **oBdA** für „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“.

2.2 Algebraische Grundbegriffe

Auf der Schule versteht man unter einer „reellen Zahl“ meist einen unendlichen Dezimalbruch, wobei man noch aufpassen muß, daß verschiedene unendliche Dezimalbrüche durchaus dieselbe reelle Zahl darstellen können, zum Beispiel gilt in den reellen Zahlen ja

$$0{,}99999\ldots = 1{,}00000\ldots$$

Diese reellen Zahlen werden dann addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert ohne tiefes Nachdenken darüber, wie man denn zum Beispiel mit den eventuell unendlich vielen Überträgen bei der Addition und Subtraktion umgehen soll, und warum dann Formeln wie $(a + b) - c = a + (b - c)$ wirklich gelten, zum Beispiel für $a = b = c = 0{,}999\ldots$. Dieses tiefe Nachdenken wollen wir im Folgenden vom Rest der Vorlesung abkoppeln und müssen dazu sehr präzise formulieren, welche Eigenschaften für die Addition, Multiplikation und Anordnung in „unseren“ reellen Zahlen gelten sollen. In der Terminologie, die in den folgenden Abschnitten eingeführt wird, werden wir die reellen Zahlen charakterisieren als einen angeordneten Körper, in dem jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke sogar eine größte untere Schranke besitzt. Von dieser Charakterisierung ausgehend erklären wir dann, welche reelle Zahl ein gegebener unendlicher Dezimalbruch darstellt, und errichten das Gebäude der Analysis. In demselben Begriffsgebäude modellieren wir auch den Anschauungsraum, vergleiche 3.3.1.9 und 4.1.6.4. Um diese Charakterisierungen und Modellierungen verständlich zu machen, führen wir zunächst einige grundlegende algebraische Konzepte ein, die Ihnen im weiteren Studium der Mathematik noch oft begegnen werden.

2.2.1 Mengen mit Verknüpfung

Definition 2.2.1.1. Eine **Verknüpfung** $\top$ **auf einer Menge** X ist eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \to & X \\ (x, y) & \mapsto & x \top y \end{array}$$

Jedem angeordneten Paar (x, y) mit $x, y \in X$ wird also ein Element $(x \top y) \in X$ zugeordnet.

2.2.1.2. Das unverfängliche Symbol $\top$ benutze ich, um mich an dieser Stelle noch nicht implizit auf einen der Standardfälle Addition oder Multiplikation festlegen zu müssen. Das Wort „Verknüpfung“ erhält damit eine gegenüber 2.1.5.1 erweiterte Bedeutung: Statt der Verknüpfung von zwei Abbildungen kann damit auch allgemeiner eine abstrakte Verknüpfung auf einer beliebigen Menge gemeint sein. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2
3	0	1	2	3	3
4	0	1	2	3	4

Man kann Verknüpfungen auf endlichen Mengen darstellen durch ihre **Verknüpfungstafel**. Hier habe ich etwa die Verknüpfungstafel der Verknüpfung $\min$ auf der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ angegeben. Eigentlich muß man sich dazu einigen, ob im Kästchen aus der Spalte m und der Zeile n nun $m \top n$ oder vielmehr $n \top m$ stehen soll, aber bei einer kommutativen Verknüpfung wie $\min$ kommt es darauf zum Glück nicht an.

und	Wahr	Falsch
Wahr	Wahr	Falsch
Falsch	Falsch	Falsch

oder	Wahr	Falsch
Wahr	Wahr	Wahr
Falsch	Wahr	Falsch

Die Wahrheitstafeln für „und“ und „oder“. Gemeint ist hier wie stets in der Mathematik das „nichtausschließende oder“. Sagen wir, es gelte A oder B, so ist insbesondere auch erlaubt, daß beides gilt. Bei der Wahrheitstafel für das „ausschließende oder“ müßte oben links als Verknüpfung von „Wahr“ mit „Wahr“ ein „Falsch“ stehen.

Beispiele 2.2.1.3.

1. Die Addition von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (m,n) & \mapsto & m+n \end{array}$$

2. Die Multiplikation von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (m,n) & \mapsto & m \cdot n \end{array}$$

3. Die Zuordnung $\min$, die jedem Paar von natürlichen Zahlen die kleinere zuordnet, wenn sie verschieden sind, und eben diese Zahl $\min(n,n) = n$, wenn sie gleich sind, ist eine Verknüpfung

$$\begin{array}{cccc} \min: & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (m,n) & \mapsto & \min(m,n) \end{array}$$

4. Eine Abbildung $Z \to Z$ von einer Menge Z in sich selbst nennen wir eine **Selbstabbildung von** Z. Wir kürzen die Menge aller Selbstabbildungen einer Menge Z Z mit $\mathrm{Ens}(Z) := \mathrm{Ens}(Z,Z)$ ab. Die Verknüpfung von Abbildungen liefert eine Verknüpfung auf der Menge $\mathrm{Ens}(Z)$ aller Selbstabbildungen von Z, in Formeln

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ens}(Z) \times \mathrm{Ens}(Z) & \to & \mathrm{Ens}(Z) \\ (f,g) & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

5. Die Subtraktion von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (m,n) & \mapsto & m-n \end{array}$$

6. Jede Verknüpfung $\top$ auf einer Menge induziert eine Verknüpfung auf ihrer Potenzmenge vermittels der Vorschrift

$$U \top V := \{u \top v \mid u \in U,\ v \in V\}$$

7. Gegeben Mengen mit Verknüpfung $(X, \top)$ und $(Y, \perp)$ erklären wir die **komponentenweise Verknüpfung** auf ihrem Produkt $X \times Y$ durch die Vorschrift $((x,y),(x',y')) \mapsto ((x \top x'),(y \perp y'))$.

8. Logische Operationen wie „und“, „oder“, „impliziert“ können als Verknüpfungen auf der zweielementigen Menge $\{\mathrm{Wahr}, \mathrm{Falsch}\}$ aufgefaßt werden. Die zugehörigen Verknüpfungstabellen heißen **Wahrheitstafeln**. Bei einem formalen Zugang werden diese Tafeln, wie sie für „und“ und „oder“ auf der vorhergehenden Seite zu finden sind, zur Definition der jeweiligen Begriffe.

2.2.1.4. Sei $(X, \top)$ eine Menge mit Verknüpfung.

1. Gegeben Elemente $a, b \in X$ sagen wir, a ist ein **Linksteiler** von b, wenn es $d \in X$ gibt mit $a \top d = b$. Analog erklären wir **Rechtsteiler**;

2. Ein Element $a \in X$ heißt **linkskürzbar**, wenn die Verknüpfung mit a eine Injektion $(a\cdot) : X \hookrightarrow X$ liefert. Analog erklären wir die Eigenschaft **rechtskürzbar**. Ein Element, das linkskürzbar und rechtskürzbar ist, nennen wir **kürzbar**. Ein nicht kürzbares Element nennen wir **nichtkürzbar**.

Beispiel 2.2.1.5. Die kürzbaren Elemente von $(\mathbb{Z}, \cdot)$ sind alle von Null verschiedenen Elemente. In $(\mathbb{Z}, +)$ sind alle Elemente kürzbar. Die linkskürzbaren Elemente von $\mathrm{Ens}(Z)$ sind die Surjektionen. Die rechtskürzbaren Elemente von $\mathrm{Ens}(Z)$ sind die Injektionen.

2.2.1.6. Sei $(X, \top)$ eine Menge mit Verknüpfung. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **abgeschlossen unter der Verknüpfung**, wenn aus $x, y \in U$ folgt $x \top y \in U$. Natürlich ist in diesem Fall auch $(U, \top)$ eine Menge mit Verknüpfung. Man spricht dann von der **auf U induzierten Verknüpfung**. Zum Beispiel ist $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ abgeschlossen unter der Addition, aber $\mathbb{Z}\backslash\{0\} \subset \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ ist nicht abgeschlossen unter der durch die Division gegebenen Verknüpfung $(m, n) \mapsto m/n$.

Definition 2.2.1.7. Eine Verknüpfung $\top$ auf einer Menge X heißt **assoziativ**, wenn gilt $x \top (y \top z) = (x \top y) \top z \ \forall x, y, z \in X$. Sie heißt **kommutativ** oder **abelsch**, wenn gilt $x \top y = y \top x \ \forall x, y \in X$. Gilt für zwei vorgegebene Elemente die Identität $x \top y = y \top x$, so sagen wir, daß diese beiden Elemente **kommutieren**.

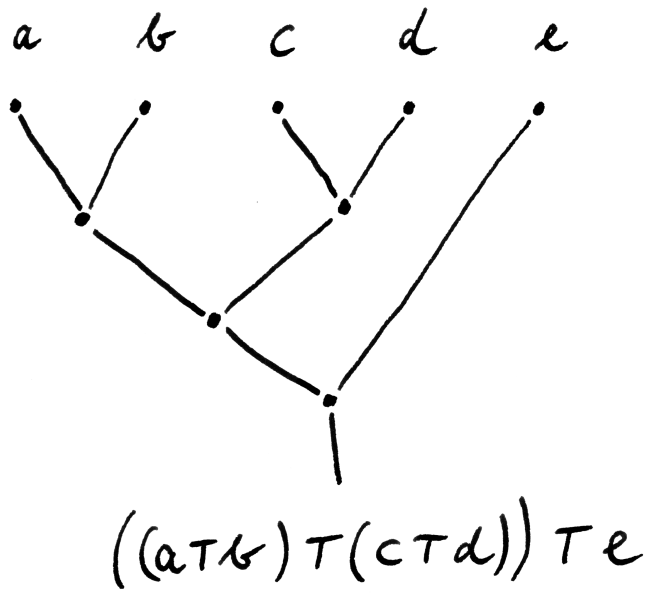
2.2.1.8 (**Diskussion der Terminologie**). Die Bezeichnung „abelsch“ ehrt den norwegischen Mathematiker Nils Henrik Abel.

Beispiele 2.2.1.9. Von unseren Beispielen sind die ersten Drei assoziativ und kommutativ, das Vierte ist assoziativ aber nicht kommutativ falls Z mehr als ein Element hat, das Fünfte ist weder assoziativ noch kommutativ.

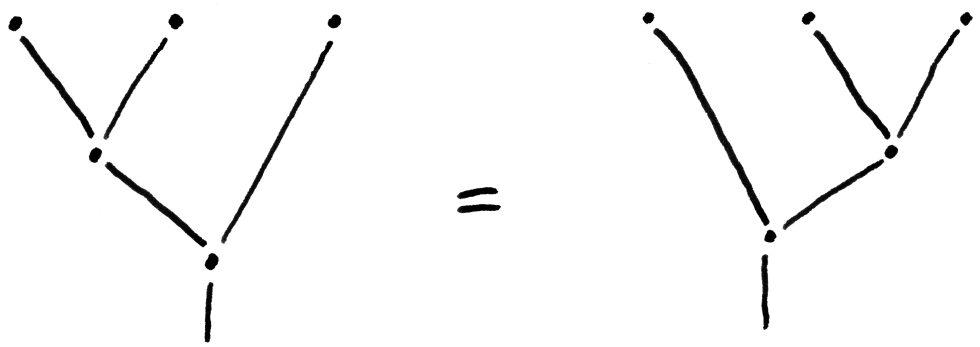
2.2.1.10. Ist eine Verknüpfung $\top$ auf einer Menge A assoziativ, so liefern auch ungeklammerte Ausdrücke der Form $a_1 \top a_2 \top \ldots \top a_n$ wohlbestimmte Elemente von A, und zwar ist genauer das Resultat unabhängig davon, wie wir die Klammern setzen. Um diese Erkenntnis zu formalisieren, vereinbaren wir für einen ungeklammerten Ausdruck die „von hinten hochgeklammerte“ Interpretation

$$a_1 \top a_2 \top \ldots \top a_n := a_1 \top (a_2 \top (\ldots (a_{n-1} \top a_n) \ldots))$$

und zeigen dann das folgende Lemma.



Mögliche „Klammerungen“ mag man sich graphisch wie oben angedeutet veranschaulichen. Die Assoziativität bedeutet dann graphisch so etwas wie



Das Gleichheitszeichen meint nur, daß beide Klammerungen stets dasselbe liefern, wenn wir oben drei Elemente unserer Menge mit Verknüpfung einfüllen.

Lemma 2.2.1.11 (Assoziativität macht Klammern überflüssig). *Gegeben eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung* $(A, \top)$ *und* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in A$ *gilt mit der von hinten hochgeklammerten Interpretation für ungeklammerte Ausdrücke*

$$(a_1 \top \ldots \top a_n) \top (b_1 \top \ldots \top b_m) = a_1 \top \ldots \top a_n \top b_1 \top \ldots \top b_m$$

Beweis. Wir folgern mit den Definitionen für die erste Gleichheit und dem Assoziativgesetz für die zweite Gleichheit die Identität

$$\begin{aligned} (a_1 \top \ldots \top a_n) \top (b_1 \top \ldots \top b_m) &= (a_1 \top (a_2 \top \ldots \top a_n)) \top (b_1 \top \ldots \top b_m) \\ &= a_1 \top ((a_2 \top \ldots \top a_n) \top (b_1 \top \ldots \top b_m)) \end{aligned}$$

und sind fertig mit vollständiger Induktion über n. □

2.2.1.12. Das Wort „Lemma“, im Plural „Lemmata“, kommt vom griechischen Wort $\lambda\alpha\mu\beta\alpha\nu\epsilon\iota\nu$ für „nehmen“ und bezeichnet in der Mathematik kleinere Resultate oder auch Zwischenschritte von größeren Beweisen, denen der Autor außerhalb ihres engeren Kontexts keine größere Bedeutung zumißt.

Vorschau 2.2.1.13. Die Zahl der Möglichkeiten, einen Ausdruck in $n + 1$ Faktoren so zu klammern, daß in jedem Schritt nur die Verknüpfung von je zwei Elementen zu berechnen ist, heißt die **n-te Catalan-Zahl** und wird C_n notiert. Die ersten Catalan-Zahlen sind $C_0 = C_1 = 1$, $C_2 = 2$ und $C_3 = 5$: Die fünf möglichen Klammerungen von 4 Elementen sind etwa $(ab)(cd)$, $a(b(cd))$, $a((bc)d)$, $((ab)c)d$ und $(a(bc))d$. Im allgemeinen zeigen wir in 10.6.3.8, daß sich die Catalan-Zahlen durch die Binomial-Koeffizienten 1.1.1.17 ausdrücken lassen vermittels der amüsanten Formel

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

2.2.1.14. Gegeben eine Menge mit assoziativer und kommutativer Verknüpfung $(A, \top)$ kommt es beim Verknüpfen noch nicht einmal auf die Reihenfolge an. Sind genauer $a_1, \ldots, a_n$ mit $n \geq 1$ gegeben und ist $\sigma : \{1, \ldots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, n\}$ eine bijektive Abbildung, so gilt

$$a_1 \top \ldots \top a_n = a_{\sigma(1)} \top \ldots \top a_{\sigma(n)}$$

Wir betrachten das als offensichtlich und schreiben keinen Beweis aus.

Definition 2.2.1.15 (Iterierte Verknüpfungen). Sei $(X, \top)$ eine Menge mit Verknüpfung. Ist $n \in \{1, 2, \ldots\}$ eine von Null verschiedene natürliche Zahl und $x \in X$, so schreiben wir

$$\underbrace{x \top x \top \ldots \top x}_{n\text{-mal}} =: n^{\top} x$$

Ich erinnere daran, daß wir in 2.2.1.10 für derartige Ausdrücke im Zweifelsfall die Interpretation als „von hinten hochgeklammerte Verknüpfung“ vereinbart hatten.

2.2.1.16. Wird unsere Verknüpfung $+$ notiert, so schreibt man statt n^+x meist kurz nx. Wird unsere Verknüpfung mit einem runden Symbol wie etwa $*$ notiert, so schreibt man statt n^*x meist kurz x^n oder etwas ausführlicher x^{*n} oder $x^{(*n)}$.

2.2.1.17 (**Iterationsregeln**). Sei $(A, \top)$ eine Menge mit assoziativer Verknüpfung. Sind m, n zwei von Null verschiedene natürliche Zahlen, so erhalten wir mithilfe unseres Lemmas 2.2.1.11 zur Überflüssigkeit von Klammern bei assoziativen Verknüpfungen die Regeln $(n+m)^\top a = (n^\top a)\top(m^\top a)$ und $(nm)^\top a = n^\top(m^\top a)$. Ist unsere Verknüpfung außerdem auch noch kommutativ, so gilt zusätzlich die Regel $n^\top(a\top b) = (n^\top a)\top(n^\top b)$. Wenn man es ganz genau nimmt, muß man für einen formalen Beweis die formale Einführung der natürlichen Zahlen 3.4.1.5 abwarten, wo Sie das dann als Übung 3.4.1.39 behandeln dürfen.

Definition 2.2.1.18. Gegeben eine Menge mit Verknüpfung $(X, \top)$ heißt ein Element $e \in X$ ein **neutrales Element** von $(X, \top)$, wenn gilt

$$e\top x = x\top e = x \quad \forall x \in X$$

2.2.1.19 (**Eindeutigkeit neutraler Elemente**). In einer Menge mit Verknüpfung $(X, \top)$ kann es höchstens ein neutrales Element e geben, denn für jedes weitere Element e' mit $e'\top x = x\top e' = x \quad \forall x \in X$ haben wir $e' = e'\top e = e$. Wir dürfen also den bestimmten Artikel verwenden und in einer Menge mit Verknüpfung von *dem* neutralen Element reden und es mit e_X bezeichnen.

Definition 2.2.1.20. Ein **Monoid** ist eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung, in der es ein neutrales Element gibt.

2.2.1.21. Das Wort „Monoid“ ist wohl von griechisch „$\mu o\nu o\varsigma$“ für „allein“ abgeleitet: Ein Monoid besitzt nur eine einzige Verknüpfung. Für ein kommutatives Monoid schlage ich die abkürzende Bezeichnung **Abmonoid** vor, mit der Vorsilbe „Ab“ für „abelsch“.

2.2.1.22 (**Additiv und multiplikativ notierte Monoide**). Notiert man in einem Monoid M die Verknüpfung mit dem Symbol $+$, so notiert man das neutrale Element meist 0_M oder abkürzend 0 und nennt es das **Null-Element** oder abkürzend die **Null** und spricht von einem **additiv notierten Monoid**. Nur kommutative Monoide werden additiv notiert. Notiert man in einem Monoid M die Verknüpfung mit einem eher runden Symbol wie $\cdot$ oder $\circ$ oder $*$ oder auch einfach durch Hintereinanderschreiben, so notiert man das neutrale Element oft 1_M oder abkürzend 1 und nennt es das **Eins-Element** oder abkürzend die **Eins** und spricht von einem **multiplikativ notierten Monoid**.

Beispiele 2.2.1.23. Die natürlichen Zahlen bilden mit der Addition ein Monoid $(\mathbb{N}, +)$ mit neutralem Element 0. Sie bilden auch mit der Multiplikation ein Monoid $(\mathbb{N}, \cdot)$ mit neutralem Element 1. Für jede Menge Z ist die Menge $\mathrm{Ens}(Z)$ der Selbstabbildungen von Z mit der Verknüpfung $\circ$ von Abbildungen als Verknüpfung ein Monoid mit neutralem Element id_Z. Die leere Menge ist *kein* Monoid, ihr fehlt das neutrale Element. Jede einelementige Menge ist mit der einzig möglichen Verknüpfung ein Monoid.

2.2.1.24 (**Nullfach iterierte Verknüpfung in Monoiden**). Ist $(M, \top)$ ein Monoid, so erweitern wir unsere Notation $n^\top a$ aus 2.2.1.15 auf alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, indem wir

$$0^\top a := e_M$$

als das neutrale Element e_M von M verstehen, für alle $a \in M$. Damit gelten unsere Iterationsregeln 7.7.3.11 dann sogar für alle $n, m \in \mathbb{N}$, vergleiche 3.4.1.29.

2.2.1.25 (**Notationen für nullfach iterierte Verknüpfung**). Sei ein Monoid M gegeben. Wird seine Verknüpfung $+$ notiert, so schreibt man auch für $n = 0$ statt n^+x meist kurz nx und meint also mit $0x$ das neutrale Element von M, in Formeln

$$0x := 0_M$$

Wird seine Verknüpfung mit einem runden Symbol wie etwa $*$ notiert, so schreibt man auch für $n = 0$ statt n^*x meist kurz x^n oder etwas ausführlicher x^{*n} oder $x^{(*n)}$ und meint insbesondere mit x^0 das neutrale Element von M, in Formeln

$$x^0 := 1_M$$

2.2.1.26 (**Summen- und Produktzeichen**). Gegeben eine Abbildung $I \to M$, $i \mapsto a_i$ von einer endlichen Menge in ein additiv beziehungsweise multiplikativ notiertes Abmonoid M vereinbaren wir die Notationen

$$\sum_{i \in I} a_i \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \prod_{i \in I} a_i$$

für die „Verknüpfung aller a_i mit $i \in I$“. Ist I die leere Menge, so vereinbaren wir, daß dieser Ausdruck das neutrale Element von M bedeuten möge, also 0 beziehungsweise 1. Für die konstante Abbildung $I \to \mathbb{N}$, $i \mapsto 1$ haben wir zum Beispiel

$$\sum_{i \in I} 1 = |I|$$

Unsere Konvention 1.1.1.14 für mit einem Laufindex notierte Summen beziehungsweise Produkte verwenden wir bei kommutativen Monoiden analog.

Ergänzung 2.2.1.27. Gegeben eine Menge mit Verknüpfung $(M, \top)$ kann man die Assoziativität und die Existenz eines neutralen Elements dahingehend zusammenfassen, daß wir für jedes $r \geq 0$ ausgezeichnete „Multiverknüpfungen" $M^{\times r} \to M$ zur Verfügung haben, die eine gewisse „Multiassoziativität" erfüllen, die ich hier nicht genauer ausschreiben will. Das neutrale Element ist dabei die „Multiverknüpfung des Nulltupels". In diesem Licht betrachtet gehören bei einer Verknüpfung die Forderungen der Assoziativität und der Existenz eines neutralen Elements zusammen. Ich schlage vor, eine Verknüpfung mit diesen beiden Eigenschaften **unitärassoziativ** zu nennen. Ein Monoid ist damit eine Menge mit einer unitärassoziativen Verknüpfung.

Übungen

Übung 2.2.1.28. Sei Z eine Menge. Das Schneiden von Teilmengen ist eine Verknüpfung

$$\begin{array}{rccc} \cap : & \mathcal{P}(Z) \times \mathcal{P}(Z) & \to & \mathcal{P}(Z) \\ & (A, B) & \mapsto & A \cap B \end{array}$$

auf der Potenzmenge. Dasselbe gilt für die Vereinigung und das Bilden der Differenzmenge. Welche dieser Verknüpfungen sind kommutativ oder assoziativ? Welche besitzen neutrale Elemente?

Ergänzende Übung 2.2.1.29. Man gebe die Wahrheitstafeln für $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ an. Bezeichne weiter $\neg : \{\mathrm{Wahr}, \mathrm{Falsch}\} \to \{\mathrm{Wahr}, \mathrm{Falsch}\}$ die „Verneinung". Man zeige, daß die Formel

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$$

beim Einsetzen beliebiger Wahrheitswerte aus $\{\mathrm{Wahr}, \mathrm{Falsch}\}$ für A und B stets den Wert Wahr ausgibt, in Übereinstimmung mit unseren eher intuitiven Überlegungen in 2.1.7.7.

2.2.2 Gruppen

2.2.2.1. Ich empfehle, bei der Lektüre dieses Abschnitts die Tabelle nach 2.2.2.13 gleich mitzulesen, die die Bedeutungen der nun folgenden Formalitäten in den zwei gebräuchlichsten Notationssystemen angibt. In diesen Notationssystemen sollten alle Formeln aus der Schulzeit vertraut sein. Ich erinnere daran, daß wir ein Monoid definiert hatten als eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung, für die es in unserer Menge ein neutrales Element gibt.

Definition 2.2.2.2. 1. Ist $(M, \top)$ ein Monoid und $a \in M$ ein Element, so nennen wir ein weiteres Element $\bar{a} \in M$ **invers zu** a, wenn gilt $a \top \bar{a} = e =$

$\bar{a}\top a$ für $e \in M$ das neutrale Element unseres Monoids. Ein Element eines Monoids, das ein Inverses besitzt, heißt **invertierbar**;

2. Eine **Gruppe** ist ein Monoid, in dem jedes Element ein Inverses besitzt;

3. Eine **kommutative Gruppe** oder **abelsche Gruppe** ist eine Gruppe, deren Verknüpfung kommutativ ist.

Beispiele 2.2.2.3. Von unseren Beispielen 2.2.1.3 für Mengen mit Verknüpfung oben ist nur $(\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe, und diese Gruppe ist kommutativ. Ein anderes Beispiel für eine kommutative Gruppe ist die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung, ein weiteres die Menge $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ der von Null verschiedenen rationalen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung. Auch jedes einelementige Monoid ist eine Gruppe.

2.2.2.4. Der Begriff einer „Gruppe“ wurde von Évariste Galois (1811-1832) in die Mathematik eingeführt. Er verwendet den Begriff „Gruppe von Transformationen“ sowohl in der Bedeutung einer „Menge von bijektiven Selbstabbildungen einer gegebenen Menge“ als auch in der Bedeutung einer „Menge von bijektiven Selbstabbildungen einer gegebenen Menge, die abgeschlossen ist unter Verknüpfung und Inversenbildung“, und die damit in der Tat ein Beispiel für eine Gruppe im Sinne der obigen Definition bildet. Unsere obige Definition 2.2.2.2 geht auf eine Arbeit von Arthur Cayley aus dem Jahre 1854 mit dem Titel „On the theory of groups as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$“ zurück und wurde damit formuliert, bevor Cantor die Sprache der Mengenlehre entwickelte. Die Terminologie „abelsche Gruppe“ wurde zu Ehren des norwegischen Mathematikers Niels Hendrik Abel eingeführt.

Lemma 2.2.2.5. *Jedes Element eines Monoids besitzt höchstens ein Inverses.*

Beweis. Aus $a\top\bar{a} = e$ und $b\top a = e$ folgt durch Anwenden von $b\top$ auf die erste Gleichung mit dem Assoziativgesetz sofort $\bar{a} = b$. □

2.2.2.6. Wir dürfen also den bestimmten Artikel benutzen und von nun an von *dem* Inversen eines Elements eines Monoids und insbesondere auch einer Gruppe reden. Gegeben ein invertierbares Element ist offensichtlich auch sein Inverses invertierbar und das Inverse des Inversen ist wieder das ursprüngliche Element, in Formeln $\bar{\bar{a}} = a$.

2.2.2.7. Beim Beweis von Lemma 2.2.2.5 haben wir stärker gezeigt: Besitzt ein Element eines Monoids ein „Rechtsinverses“ und ein „Linksinverses“, so stimmen diese überein.

Lemma 2.2.2.8. *Sind a und b invertierbare Elemente eines Monoids, so ist auch $a\top b$ invertierbar mit Inversem $\overline{(a\top b)} = \bar{b}\top\bar{a}$.*

	123	213	312	321	132	231
123	123	213	312	321	132	231
213	213	123	321	312	231	132
312	312	132	231	213	321	123
321	321	231	132	123	312	213
132	132	312	213	231	123	321
231	231	321	123	132	213	312

Die Verknüpfungstafel der Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$. Eine solche Permutation σ habe ich dargestellt durch das geordnete Zahlentripel $\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)$, und im Kästchen aus der Zeile τ und der Spalte σ steht $\tau \circ \sigma$.

Beweis. In der Tat rechnen wir schnell $(a\top b)\top(\bar{b}\top\bar{a}) = e = (\bar{b}\top\bar{a})\top(a\top b)$. Diese Formel ist auch aus dem täglichen Leben vertraut: Wenn man sich morgends zuerst die Strümpfe anzieht und dann die Schuhe, so muß man abends zuerst die Schuhe ausziehen und dann die Strümpfe. □

2.2.2.9 (**Gruppe der invertierbaren Elemente eines Monoids**). Die invertierbaren Elemente eines Monoids bilden insbesondere stets eine unter der Verknüpfung abgeschlossene Teilmenge. Diese Teilmenge enthält offensichtlich das neutrale Element und ist folglich mit der induzierten Verknüpfung eine Gruppe. Für die Gruppe der invertierbaren Elemente eines multiplikativ notierten Monoids M verwenden wir die Notation $M^\times$. Zum Beispiel haben wir $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$. Dieses Kreuz soll nicht als x gelesen werden, es ist vielmehr ein mißbrauchtes Multiplikationssymbol.

Beispiel 2.2.2.10. Für jede Menge Z ist die Menge aller Bijektionen von Z auf sich selbst eine Gruppe, mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung. Wir notieren diese Gruppe $\mathrm{Ens}^\times(Z)$ in Übereinstimmung mit unserer Konvention 2.2.2.9, schließlich handelt es sich um die Gruppe der invertierbaren Elemente des Monoids $\mathrm{Ens}(Z)$. Ihre Elemente heißen die **Permutationen von** Z. Die Gruppe der Permutationen einer Menge Z ist für $|Z| > 2$ nicht kommutativ. Das Inverse einer Bijektion ist ihre Umkehrabbildung.

Definition 2.2.2.11 (Negativ iterierte Verknüpfung invertierbarer Elemente). Ist $(M, \top)$ ein Monoid und $a \in M$ invertierbar, so erweitern wir unsere Notation $n^\top a$ aus 2.2.1.24 weiter auf alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$, indem wir für n negativ setzen $n^\top a := (-n)^\top \bar{a}$.

2.2.2.12 (**Iterationsregeln**). Gegeben ein invertierbares Element a eines Monoids gelten offensichtlich sogar für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ die Regeln $(n+m)^\top a = (n^\top a)\top(m^\top a)$ und $(nm)^\top a = n^\top(m^\top a)$. Sind a, b invertierbare Elemente eines Monoids mit $ab = ba$, so gilt zusätzlich $n^\top(a\top b) = (n^\top a)\top(n^\top b)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wenn man es ganz genau nehmen will, muß man hierfür die formale Einführung der ganzen Zahlen 3.4.2.12 abwarten.

2.2.2.13. Bei additiv geschriebenen Monoiden bezeichnet man das Inverse von a, sofern es existiert, meist als das **Negative** von a und notiert es $-a$. Bei multiplikativ notierten kommutativen Monoiden verwendet man die Bruchnotation $1/a$ und b/a aus nebenstehender Tabelle, falls a invertierbar ist. Bei nichtkommutativen multiplikativ notierten Monoiden benutzt man für das Inverse von a die von der im folgenden erklärten allgemeinen Notation a^n abgeleitete Notation a^{-1}. Die nebenstehende Tabelle faßt die üblichen Notationen für unsere abstrakten Begriffsbildungen in diesem Kontext zusammen und gibt unsere allgemeinen Resultate und Konventionen in diesen Notationen wieder.

abstrakt	additiv	multiplikativ
$a \top b$	$a + b$	$a \cdot b$, $a \circ b$, ab
e	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\bar{b}$	$-b$	$\hat{1}/b, b^{-1}$
$a \top \bar{b}$	$a - b$	$a/b, ab^{-1}$
$n^\top a$	na	a^n
$e \top a = a \top e = a$	$\hat{0} + a = a + \hat{0} = a$	$\hat{1} \cdot a = a \cdot \hat{1} = a$
$a \top \bar{a} = e$	$a - a = \hat{0}$	$a/a = \hat{1}$
$\bar{\bar{a}} = a$	$-(-a) = a$	$\hat{1}/(\hat{1}/a) = a$
$(-1)^\top a = \bar{a}$	$(-1)a = -a$	$a^{-1} = \hat{1}/a$
$\overline{(a \top b)} = \bar{b} \top \bar{a}$	$-(a + b) = (-b) + (-a)$	$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, $\hat{1}/ab = (\hat{1}/b)(\hat{1}/a)$
$\overline{(a \top \bar{b})} = b \top \bar{a}$	$-(a - b) = b - a$	$\hat{1}/(a/b) = b/a$
$n^\top (m^\top a) = (nm)^\top a$	$n(ma) = (nm)a$	$(a^m)^n = a^{nm}$
$(m + n)^\top a = (m^\top a) \top (n^\top a)$	$(m + n)a = (ma) + (na)$	$a^{(m+n)} = (a^m)(a^n)$
$\overline{n^\top a} = (-n)^\top a$	$-(na) = (-n)a$	$(a^n)^{-1} = a^{-n}$
$0^\top a = e$	$0a = \hat{0}$	$a^0 = \hat{1}$
$n^\top (a \top b) = (n^\top a) \top (n^\top b)$	$n(a + b) = (na) + (nb)$	$(ab)^n = (a^n)(b^n)$

Konventionen und Formeln in verschiedenen Notationssystemen. Bereits diese Tabelle muß mit einigen Hintergedanken gelesen werden, weil die Symbole $+, -$ darin in zweierlei Bedeutung vorkommen: Manchmal meinen sie konkrete Operationen in $\mathbb{Z}$, manchmal stehen sie aber auch für Verknüpfung, Inversenbildung und neutrale Elemente in abstrakten Monoiden. Ich habe den Symbolen $0, 1$ einen Hut aufgesetzt und $\hat{0}, \hat{1}$ geschrieben, wenn sie neutrale Elemente in abstrakten Monoiden bedeuten. Das werde ich aber nicht durchhalten.

2.2.2.14 (**Notationen für negativ iterierte Verknüpfung**). Sei ein Monoid M gegeben und sei $x \in M$ invertierbar. Wird unser Monoid additiv notiert, so schreibt man auch für negatives $n \in \mathbb{Z}$ statt n^+x meist kurz nx und meint also mit nx das Negative von $(-n)x$. Wird unser Monoid multiplikativ notiert, also mit einem runden Symbol wie etwa $*$, so schreibt man auch für negatives $n \in \mathbb{Z}$ statt n^*x meist kurz x^n oder etwas ausführlicher x^{*n} oder $x^{(*n)}$ und meint also mit x^n das Inverse von x^{-n}.

Beispiel 2.2.2.15. Im Fall einer bijektiven Abbildung $f : Z \xrightarrow{\sim} Z$ ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : Z \xrightarrow{\sim} Z$ das Inverse f^{-1} des invertierbaren Elements f des Monoids $\mathrm{Ens}(Z)$. Ebenso ist im Fall einer von Null verschiedenen rationalen Zahl $a \in \mathbb{Q}$ ihr Inverses im multiplikativen Monoid $\mathbb{Q}$ der Kehrbruch $1/a = a^{-1}$. Unsere Konvention verträgt sich also recht gut mit verschiedenen anderen Konventionen, die Sie bereits kennen mögen.

Übungen

Übung 2.2.2.16. Ein Element a eines Monoids M ist invertierbar genau dann, wenn es $b, c \in M$ gibt mit $b \top a = e = a \top c$ für e das neutrale Element.

Übung 2.2.2.17 (**Kürzen**). Sind a, b, c Elemente einer Gruppe, so folgt aus $a \top b = a \top c$ bereits $b = c$. Ebenso folgt aus $b \top a = c \top a$ bereits $b = c$. Dasselbe gilt allgemeiner in einem beliebigen Monoid, wenn wir a invertierbar annehmen.

Ergänzende Übung 2.2.2.18. Seien M ein Monoid und e sein neutrales Element. Man zeige: Unser Monoid ist genau dann eine Gruppe, wenn es für jedes $a \in M$ ein $\bar{a} \in M$ gibt mit $\bar{a} \top a = e$, und dies Element $\bar{a}$ ist dann notwendig das Inverse von a in M. Noch Mutigere zeigen: Ist A eine Menge mit assoziativer Verknüpfung und existiert ein $e \in M$ mit $e \top a = a \ \forall a \in M$ sowie für jedes $a \in M$ ein $\bar{a} \in M$ mit $\bar{a} \top a = e$, so ist M eine Gruppe. Hinweis: Man zeige, daß $\bar{a} \top$ bijektiv ist.

Ergänzende Übung 2.2.2.19. Gegeben eine Menge Z ist ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(Z)$ mit der Verknüpfung $A + B := (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ eine abelsche Gruppe.

Ergänzende Übung 2.2.2.20. Gegeben Gruppen G, H können wir das kartesische Produkt $G \times H$ zu einer Gruppe machen, indem wir darauf die komponentenweise Verknüpfung $(g, h)(g', h') := (gg', hh')$ betrachten.

Übung 2.2.2.21. Ein endliches Monoid $(M, \top)$, in dem für jedes Element $a \in M$ die Multiplikationsabbildung eine Injektion $(a \top) : M \hookrightarrow M$ ist, muß bereits eine Gruppe sein.

2.2.3 Homomorphismen

Didaktische Anmerkung 2.2.3.1. Ich habe diesen Abschnitt einmal erst später im Zusammenhang mit der Diskussion von linearen Abbildungen besprochen und habe es bereut.

Definition 2.2.3.2. Eine Menge mit einer völlig beliebigen, nicht notwendig assoziativen Verknüpfung heißt ein **Magma**. Gegeben Magmas $(X, \top)$ und $(Y, \perp)$ verstehen wir unter einem **Homomorphismus von Mengen mit Verknüpfung** oder auch **Homomorphismus von Magmas** eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ derart, daß gilt $\varphi(a \top b) = \varphi(a) \perp \varphi(b)$ für alle $a, b \in X$. Die Menge aller solchen Homomorphismen von Magmas bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Mag}(X, Y)$$

Beispiel 2.2.3.3. Sei Z eine Menge und $\mathcal{P}(Z)$ ihre Potenzmenge. Wir betrachten auf $\mathcal{P}(Z)$ die Verknüpfung $(A, B) \mapsto A \backslash B$. Ist $Z \hookrightarrow W$ eine Injektion, so ist die auf den Potenzmengen induzierte Abbildung ein Homomorphismus von Magmas

$$(\mathcal{P}(Z), \backslash) \to (\mathcal{P}(W), \backslash)$$

2.2.3.4. Sind unsere beiden Mengen mit Verknüpfung Monoide, so verstehen wir unter einem **Monoidhomomorphismus** einen Homomorphismus von Mengen mit Verknüpfung, der das neutrale Element auf das neutrale Element abbildet. Gegeben Monoide M und N bezeichnen wir die Menge aller Monoidhomomorphismen von M nach N mit

$$\mathrm{Mon}(M, N) := \{\varphi \in \mathrm{Mag}(M, N) \mid \varphi(e_M) = e_N\}$$

Ergänzung 2.2.3.5. Die beiden Bedingungen an einen Monoidhomomorphismus $\varphi : M \to N$ können in der in 2.2.1.27 eingeführten Terminologie dahingehend zusammengefaßt werden, daß die beiden Abbildungen $M^{\times r} \to M \to N$ und $M^{\times r} \to N^{\times r} \to N$, die durch φ und unsere Multiverknüpfungen gegeben werden, für alle $r \geq 0$ übereinstimmen sollen.

Beispiel 2.2.3.6. Gegeben Monoide M, N kann $\mathrm{Mon}(M, N) \subset \mathrm{Mag}(M, N)$ eine echte Teilmenge sein. Zum Beispiel ist die Abbildung $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, \cdot)$, die jede ganze Zahl auf die Null wirft, ein Homomorphismus von Mengen mit Verknüpfung, aber kein Monoidhomomorphismus.

2.2.3.7. Gegeben ein Monoid M und eine Gruppe G gilt stets

$$\mathrm{Mag}(M, G) = \mathrm{Mon}(M, G)$$

Jeder Homomorphismus φ von Mengen mit Verknüpfung von einem Monoid in eine Gruppe bildet also das neutrale Element auf das neutrale Element ab. In der

Tat folgt das aus $\varphi(e) = \varphi(e \cdot e) = \varphi(e) \cdot \varphi(e)$ durch Kürzen. Einen Homomorphismus zwischen zwei Gruppen, in Formeln eine Abbildung $\varphi : H \to G$ mit $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für alle $a, b \in H$, nennen wir einen **Gruppenhomomorphismus**. Gegeben Gruppen H und G bezeichnen wir die Menge aller Gruppenhomomorphismen von H nach G mit

$$\mathrm{Grp}(H, G)$$

Die neue Notation hat gegenüber den beiden bereits eingeführten alternativen Notationen $\mathrm{Mag}(H, G)$ und $\mathrm{Mon}(H, G)$ den Vorteil, uns daran zu erinnern, daß wir es mit Gruppen zu tun haben.

Definition 2.2.3.8. Ein **Isomorphismus** ist ein Homomorphismus ϕ mit der Eigenschaft, daß es einen Homomorphismus ψ in die Gegenrichtung gibt derart, daß beide Kompositionen $\psi \circ \phi$ und $\phi \circ \psi$ die Identität sind. Zwei Gruppen oder Monoide oder Magmas heißen **isomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Isomorphismus gibt.

2.2.3.9. Die Terminologie kommt von griechisch „$\mu o \rho \varphi \eta$“ für „Gestalt, Struktur“ und griechisch „$o \mu o \iota \varsigma$“ für „gleich, ähnlich“. Auf deutsch könnte man statt Homomorphismus auch „strukturerhaltende Abbildung“ sagen. Das Wort „Isomorphismus“ wird analog gebildet mit griechisch „$\iota \sigma o \varsigma$“ für „gleich“.

2.2.3.10. In den Fällen der obigen Definition ist offensichtlich jeder bijektive Homomorphismus bereits ein Isomorphismus. Im weiteren Verlauf dieser Vorlesungen werden ihnen aber auch Arten von Homomorphismen begegnen, für die das nicht mehr richtig oder nicht einmal eine sinnvolle Aussage ist. Der erste derartige Fall wird Ihnen in diesen Vorlesungen in 3.1.4.8 begegnen: Im Kontext teilgeordneter Mengen muß eine bijektive monoton wachsende Abbildung keineswegs ein „Isomorphismus von teilgeordneten Mengen“ sein alias eine monoton wachsende Umkehrabbildung besitzen.

Ergänzung 2.2.3.11. Den Begriff eines Homomorphismus verwendet man auch im Fall von Mengen ohne Verknüpfung: Unter einem **Homomorphismus von Mengen** versteht man schlicht eine Abbildung, unter einem **Isomorphismus von Mengen** eine Bijektion.

Beispiel 2.2.3.12 (**Gruppen mit höchstens zwei Elementen**). Je zwei Gruppen mit genau einem Element sind isomorph und es gibt zwischen ihnen genau einen Isomorphismus. Je zwei Gruppen mit genau zwei Elementen sind isomorph und es gibt zwischen ihnen genau einen Isomorphismus, der eben das neutrale Element auf das neutrale Element wirft und das nichtneutrale Element auf das nichtneutrale Element.

Beispiel 2.2.3.13 (**Dreielementige Gruppen**). Je zwei Gruppen mit genau drei Elementen sind isomorph und es gibt zwischen ihnen genau zwei Isomorphismen. Um das zu sehen, beschreiben wir eine endliche Menge mit Verknüpfung durch ihre Verknüpfungstabelle, die im Fall einer Gruppe auch **Gruppentafel** heißt. Zum Beispiel bilden diejenigen Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$, die nicht genau eines unserer drei Elemente festhalten, unter der Hintereinanderausführung eine Gruppe mit der Gruppentafel

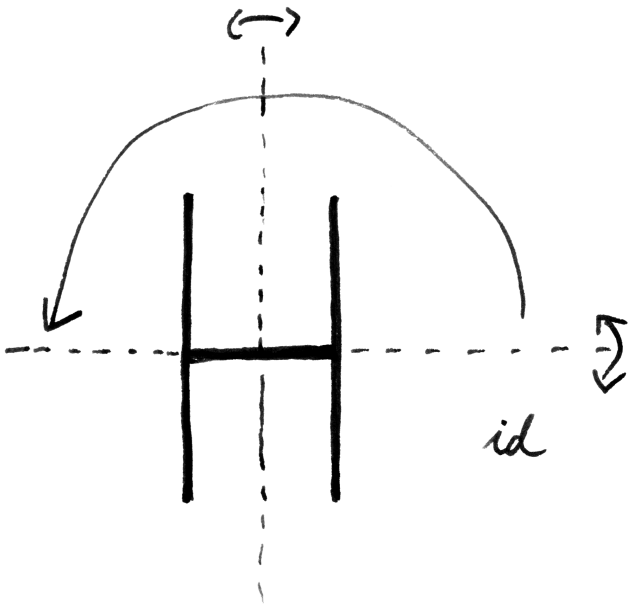
	1	ζ	η
1	1	ζ	η
ζ	ζ	η	1
η	η	1	ζ

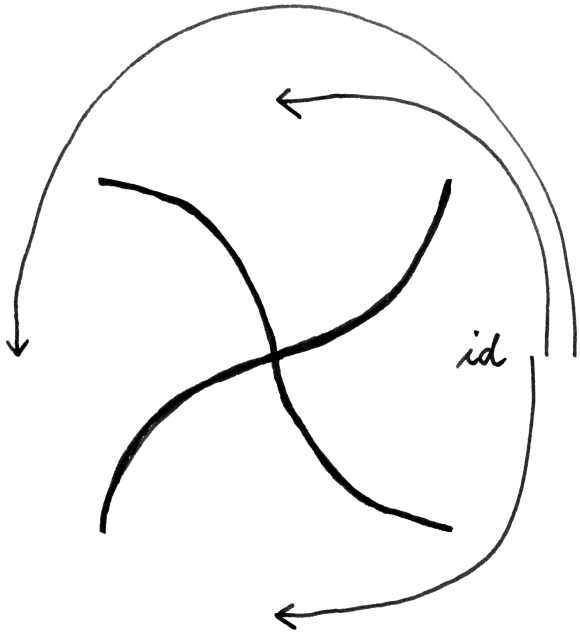
Bei einer Gruppentafel muß nach der Kürzungsregel 2.2.2.17 in jeder Spalte und in jeder Zeile jedes Element genau einmal vorkommen. Man sieht so recht leicht, daß jede weitere Gruppe G mit genau drei Elementen zu der durch die obige Verknüpfungstafel gegebenen Gruppe isomorph sein muß. Anschaulich denke ich mir diese Gruppe meist als die Gruppe aller Drehungen der Ebene, die ein gleichseitiges Dreieck in sich selbst überführen. Der Nachweis, daß es zwischen je zwei dreielementigen Gruppen genau zwei Isomorphismen gibt, sei dem Leser zur Übung überlassen.

Beispiel 2.2.3.14 (**Vierelementige Gruppen**). Man sieht durch die Untersuchung von Verknüpfungstafeln recht leicht, daß es bis auf Isomorphismus höchstens zwei vierelementige Magmas mit neutralem Element gibt, in denen die Kürzungsregeln gelten in dem Sinne, daß in jeder Zeile und Spalte der Verknüpfungstafel jedes Element genau einmal vorkommt. Durch Betrachtung der nebenstehenden Bilder oder Interpretation als spezielle Permutationen einer geeigneten endlichen Menge überzeugt man sich auch leicht, daß diese Magmas sogar Gruppen sind, die sich dadurch unterscheiden, ob jedes Element sein eigenes Inverses ist oder nicht. Sie heißen im ersten Fall die **Klein'sche Vierergruppe** und im zweiten Fall die **vierelementige zyklische Gruppe**. Man mag zur Übung zeigen, daß es zwischen je zwei Klein'schen Vierergruppen genau sechs Isomorphismen gibt und zwischen zwei vierelementigen zyklischen Gruppen genau zwei Isomorphismen.

Definition 2.2.3.15. Eine Teilmenge eines Monoids heißt ein **Untermonoid**, wenn sie abgeschlossen ist unter der Verknüpfung und wenn sie zusätzlich das neutrale Element enthält.

Definition 2.2.3.16. Eine Teilmenge einer Gruppe heißt eine **Untergruppe**, wenn sie abgeschlossen ist unter der Verknüpfung und der Inversenbildung und wenn sie zusätzlich das neutrale Element enthält. Ist G eine multiplikativ geschriebene





Die vier Symmetrien des Buchstabens H und des Sonnenrads, das wohl nicht zuletzt auch wegen seiner Symmetriegruppe so unvermittelt an furchtbare Zeiten der deutschen Geschichte erinnert.

Gruppe, so ist eine Teilmenge $U \subset G$ also eine Untergruppe genau dann, wenn in Formeln gilt: $a, b \in U \Rightarrow ab \in U$, $a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U$ sowie $1 \in U$.

Ergänzung 2.2.3.17 (**Unter-was-auch-immer**). Die Begriffsbildungen eines Untermonoids und einer Untergruppe können als Spezialfälle eines allgemeineren Begriffsschemas verstanden werden. Danach wäre ein Untermonoid zu definieren als eine Teilmenge eines Monoids, die so mit einer Monoidstruktur versehen werden kann, daß die Einbettung ein Monoidhomomorphismus ist. Ebenso wäre eine Untergruppe zu definieren als eine Teilmenge eine Gruppe, die so mit einer Gruppenstruktur versehen werden kann, daß die Einbettung ein Gruppenhomomorphismus ist. Da diese Definitionen jedoch für Anwendungen erst aufgeschlüsselt werden müssen, haben ich die aufgeschlüsselten Fassungen als Definition genommen und überlasse den Nachweis der Äquivalenz zu den eben gegebenen Definitionen dem Leser zur Übung. Mehr dazu wird in 4.7.3.12 erklärt.

Beispiele 2.2.3.18. In jeder Gruppe ist die einelementige Teilmenge, die nur aus dem neutralen Element besteht, eine Untergruppe. Wir nennen sie die **triviale Untergruppe**. Ebenso ist natürlich die ganze Gruppe stets eine Untergruppe von sich selber. Unsere kleinen Gruppen von eben lassen sich formal gut beschreiben als Untergruppen von Permutationsgruppen. Stellt man eine Permutation σ der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ dar, indem man $\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ hintereinanderschreibt – bei $n \leq 9$ mag das angehen – so ist unsere dreielementige Gruppe die Untergruppe $\{123, 231, 312\}$ der entsprechenden Permutationsgruppe, oder ganz pedantisch isomorph dazu, unsere Klein'sche Vieregruppe die Untergruppe $\{1234, 2143, 4321, 3412\}$ der entsprechenden Permutationsgruppe und unsere vierelementige zyklische Gruppe die Untergruppe $\{1234, 4123, 3412, 2341\}$.

Ergänzung 2.2.3.19. Eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung heißt auch **Halbgruppe**. Gegeben Halbgruppen A und B schreiben wir $\mathrm{Halb}(A, B)$ statt $\mathrm{Mag}(A, B)$ für die Menge aller mit der Verknüpfung verträglichen Abbildungen von A nach B, als da heißt, aller **Halbgruppenhomomorphismen**. Wieder hat diese Notation den Vorteil, uns daran zu erinnern, daß wir es mit Halbgruppen zu tun haben. Für jede Halbgruppe A liefert die Vorschrift $\varphi \mapsto \varphi(1)$ eine Bijektion

$$\mathrm{Halb}(\mathbb{N}_{\geq 1}, A) \xrightarrow{\sim} A$$

Hierbei fassen wir $\mathbb{N}_{\geq 1}$ vermittels der Addition als Halbgruppe auf. Ein formaler Beweis muß auf eine formale Definition der natürlichen Zahlen warten und ist in 3.4.1.5 enthalten.

Ergänzung 2.2.3.20. Betrachten wir die Menge $\mathbb{M}$ „aller möglichen Klammerungen von einem oder mehr Symbolen“ im Sinne von 2.2.1.13 und darauf die durch „Hintereinanderschreiben“ erklärte Verknüpfung sowie das Element $* \in \mathbb{M}$, das

die einzig mögliche Verklammerung von einem einzigen Symbol meint, so liefert für jedes Magma X die Vorschrift $\varphi \mapsto \varphi(*)$ eine Bijektion

$$\mathrm{Mag}(\mathbb{M}, X) \xrightarrow{\sim} X$$

Übungen

Übung 2.2.3.21 (**Injektivität und Kern**). Gegeben ein Gruppenhomomorphismus oder allgemeiner ein Monoidhomomorphismus $\varphi : G \to H$ erklärt man den **Kern von** φ als das Urbild des neutralen Elements, in Formeln

$$\ker \varphi := \{g \in G \mid \varphi(g) = e\}$$

Man zeige, daß $\ker \varphi$ stets eine Untergruppe beziehungsweise ein Untermonoid von G ist. Man zeige weiter, daß im Gruppenfall φ genau dann injektiv ist, wenn sein Kern nur aus dem neutralen Element besteht.

Übung 2.2.3.22. Das Bild eines Monoids unter einem Monoidhomomorphismus ist stets ein Untermonoid. Das Urbild eines Untermonoids unter einem Monoidhomomorphismus ist stets ein Untermonoid.

Übung 2.2.3.23. Jeder Monoidhomomorphismus $M \to N$ bildet invertierbare Elemente auf invertierbare Elemente ab und induziert so einen Gruppenhomomorphismus $M^\times \to N^\times$.

Übung 2.2.3.24. Das Bild einer Untergruppe unter einem Gruppenhomomorphismus ist stets eine Untergruppe. Das Urbild einer Untergruppe unter einem Gruppenhomomorphismus ist stets eine Untergruppe.

Übung 2.2.3.25. Gegeben eine Menge Z ist das Bilden des Komplements ein Monoidhomomorphismus $(\mathcal{P}(Z), \cap) \to (\mathcal{P}(Z), \cup)$.

Übung 2.2.3.26. Die Multiplikation mit 5 ist ein Gruppenhomomorphismus von additiven Gruppen $(5\cdot) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Übung 2.2.3.27 (**Induzierte Verknüpfung**). Sei $(X, \top)$ eine Menge mit Verknüpfung. Gegeben eine Injektion $U \hookrightarrow X$ gibt es höchstens eine Verknüpfung auf U derart, daß unsere Injektion ein Homomorphismus ist. Wenn es solch eine Verknüpfung gibt, heißt unsere Injektion **an die Verknüpfung angepaßt** und die fragliche Verknüpfung auf U die **auf** U **induzierte Verknüpfung**. Die Einbettung einer Teilmenge ist genau dann angepaßt, wenn unsere Teilmenge abgeschlossen ist unter der Verknüpfung im Sinne von 2.2.1.6. Die Eigenschaften der Assoziativität und Kommutativität übertragen sich auf die induzierte Verknüpfung.

Übung 2.2.3.28 (**Koinduzierte Verknüpfung**). Sei $(X, \top)$ eine Menge mit Verknüpfung. Gegeben eine Surjektion $X \twoheadrightarrow Q$ gibt es höchstens eine Verknüpfung

auf Q derart, daß unsere Surjektion ein Homomorphismus ist. Wenn es solch eine Verknüpfung gibt, heißt unsere Surjektion **an die Verknüpfung angepaßt** und die fragliche Verknüpfung auf Q die **auf Q koinduzierte Verknüpfung**. Zum Beispiel ist die Surjektion $\mathbb{N} \twoheadrightarrow \{0, 1, \ldots, 9\}$, die jeder Zahl die letzte Ziffer ihrer Dezimaldarstellung zuordnet, angepaßt sowohl an die Addition als auch an die Multiplikation. Mehr dazu in 3.5.2.4.

Übung 2.2.3.29 (**Eigenschaften einer koinduzierten Verknüpfung**). Die Eigenschaften der Assoziativität und Kommutativität übertragen sich auf die koinduzierte Verknüpfung. Das Bild des Einselements ist ein Einselement für die koinduzierte Verknüpfung, das Bild des Inversen ein Inverses. Jede koinduzierte Verknüpfung zu einer angepaßten Surjektion von einer Gruppe auf eine Menge macht besagte Menge zu einer Gruppe.

Ergänzende Übung 2.2.3.30 (**Universelle Eigenschaft der natürlichen Zahlen**). Man zeige, daß für jedes Monoid M die Vorschrift $\varphi \mapsto \varphi(1)$ eine Bijektion

$$\mathrm{Mon}(\mathbb{N}, M) \xrightarrow{\sim} M$$

liefert. Ein Monoidhomomorphismus vom additiven Monoid der natürlichen Zahlen in ein beliebiges weiteres Monoid ist also in Worten festgelegt und festlegbar durch das Bild des Elements $1 \in \mathbb{N}$. Hinweis: Man erinnere 2.2.1.24. Wenn man es ganz genau nimmt, muß man für diese Übung die formale Einführung der natürlichen Zahlen 3.4.1.5 abwarten.

Übung 2.2.3.31 (**Universelle Eigenschaft der ganzen Zahlen**). Man zeige, daß für jede Gruppe G die Vorschrift $\varphi \mapsto \varphi(1)$ eine Bijektion

$$\mathrm{Grp}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} G$$

liefert. Ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der ganzen Zahlen in irgendeine weitere Gruppe ist also in Worten festgelegt und festlegbar durch das Bild des Elements $1 \in \mathbb{Z}$. Hinweis: Man erinnere 2.2.2.12. Man beachte, daß die 1 nicht das neutrale Element der Gruppe $\mathbb{Z}$ meint, die hier vielmehr als additive Gruppe zu verstehen ist. Man gebe explizit den Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $1 \mapsto 5$ an. Man gebe explizit den Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ mit $1 \mapsto 5$ an. Wenn man es ganz genau nehmen will, muß man für diese Übung die formale Einführung der ganzen Zahlen 3.4.2.12 abwarten.

Übung 2.2.3.32. Jeder Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ vertauscht mit Inversenbildung, in Formeln $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}\ \forall a \in G$.

Ergänzende Übung 2.2.3.33. Gegeben eine Verknüpfung $X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto xy$ auf einer Menge X erklärt man die **opponierte Verknüpfung** durch die Vorschrift $(x, y) \mapsto yx$. Oft schreibt man auch X^{opp} für die Menge X, versehen

mit der opponierten Verknüpfung, und x° für das Element $x \in X$, aufgefaßt als Element von X^{opp}. Das hat den Vorteil, daß man sich das Verknüpfungssymbol sparen kann, die Definition der opponierten Verknüpfung läßt sich schreiben als $y^\circ x^\circ := (xy)^\circ$. Man zeige: Gegeben eine Gruppe G liefert das Bilden des Inversen stets einen Gruppenisomorphismus $G^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} G$, $g^\circ \mapsto g^{-1}$ zwischen der **opponierten Gruppe** und der ursprünglichen Gruppe.

Ergänzende Übung 2.2.3.34. Jede Halbgruppe A kann man zu einem Monoid $\tilde{A}$ erweitern, indem man noch ein Element hinzunimmt und ihm die Rolle des neutralen Elements zuweist. Für jedes weitere Monoid M liefert dann das Vorschalten der Einbettung $A \hookrightarrow \tilde{A}$ eine Bijektion

$$\mathrm{Mon}(\tilde{A}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Halb}(A, M)$$

Übung 2.2.3.35. Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ von Gruppen ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn ihr Graph $\Gamma(\varphi) \subset G \times H$ eine Untergruppe des Produkts ist.

Übung 2.2.3.36. Jede Verknüpfung von Homomorphismen von Magmas ist wieder ein Homomorphismus von Magmas. Sind also in Formeln $g : U \to V$ und $f : V \to W$ Homomorphismen, so ist auch $f \circ g : U \to W$ ein Homomorphismus.

Übung 2.2.3.37. Gegeben ein surjektiver Homomorphismus $g : U \twoheadrightarrow V$ von Magmas und eine Abbildung $f : V \to W$ in ein weiteres Magma ist f genau dann ein Homomorphismus, wenn die Verknüpfung $f \circ g : U \to W$ ein Homomorphismus ist. Gegeben ein injektiver Homomorphismus von Magmas $f : V \hookrightarrow W$ und eine Abbildung $g : U \twoheadrightarrow V$ von einem weiteren Magma nach V ist g genau dann ein Homomorphismus, wenn die Verknüpfung $f \circ g : U \to W$ ein Homomorphismus ist.

2.2.4 Körper im Sinne der Algebra

2.2.4.1. Die algebraische Struktur eines Körpers wird den Hauptbestandteil unseres Axiomensystems für die reellen Zahlen in 10.2.4 bilden. Gleichzeitig bildet sie die Grundlage für die Modellierung des Raums unserer Anschauung in der linearen Algebra.

Definition 2.2.4.2. Ein **Körper** $(K, +, \cdot)$ (englisch **field**, französisch **corps**) ist eine Menge K mit zwei kommutativen assoziativen Verknüpfungen, genannt die **Addition** $+$ und die **Multiplikation** $\cdot$ des Körpers, derart daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. $(K, +)$ ist eine Gruppe, die **additive Gruppe** des Körpers;

2. Die vom neutralen Element der Addition $0_K \in K$ verschiedenen Elemente von K bilden eine unter der Multiplikation abgeschlossene Teilmenge, und diese Teilmenge $K \backslash \{0_K\}$ ist unter der Multiplikation ihrerseits eine Gruppe, die **multiplikative Gruppe** des Körpers;

3. Es gilt das **Distributivgesetz**

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a, b, c \in K$$

Beispiele 2.2.4.3. Ein erstes Beispiel ist der Körper der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Ein anderes Beispiel ist der zweielementige Körper mit den durch die Axiome erzwungenen Rechenregeln, der fundamental ist in der Informatik. Die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bilden keinen Körper, da $(\mathbb{Z} \backslash \{0\}, \cdot)$ keine Gruppe ist, da es nämlich in $\mathbb{Z} \backslash \{0\}$ nur für 1 und -1 ein multiplikatives Inverses gibt. Es gibt keinen einelementigen Körper, da das Komplement seines Nullelements die leere Menge sein müßte: Dies Komplement kann dann aber unter der Multiplikation keine Gruppe sein, da es kein neutrales Element haben könnte.

Ergänzung 2.2.4.4 (**Ursprung der Terminologie**). Der Begriff „Körper“ ist in diesem Zusammenhang wohl zu verstehen als „besonders gut unter den verschiedensten Rechenoperationen abgeschlossener Zahlbereich“, in Analogie zu geometrischen Körpern wie Kugeln oder Zylindern, die man entsprechend als „besonders gut in sich geschlossene Bereiche des Raums“ ansehen könnte. Die Bezeichnung als „Distributivgesetz“ rührt daher, daß uns dieses Gesetz erlaubt, beim Multiplizieren eines Elements mit einer Summe den „Faktor auf die Summanden zu verteilen“. Das Wort „distribution“ für Verteilung von Nahrungsmitteln und dergleichen auf Französisch und Englisch kommt von demselben lateinischen Wortstamm, auf die auch unsere Bezeichnung „Distributivgesetz“ zurückgeht.

2.2.4.5 (**Weglassen von Multiplikationssymbolen**). Beim Rechnen mit Buchstaben werden wir meist $ab := a \cdot b$ abkürzen. Das wäre beim Rechnen mit durch Ziffernfolgen dargestellten Zahlen wenig sinnvoll, da man dann nicht wissen könnte, ob 72 nun als „Zweiundsiebzig“ oder vielmehr als „Sieben mal Zwei“ zu verstehen sein soll. Beim Einsetzen von Zahlen für die Buchstaben müssen also wieder Multiplikationssymbole eingefügt werden.

Ergänzung 2.2.4.6 (**Weglassen von Additionssymbolen**). In der Schule und außerhalb der Mathematik ist es üblich, $1 + \frac{1}{2}$ mit $1\frac{1}{2}$ abzukürzen und „Anderthalb Stunden“ zu sagen oder „Dreieinviertel Pfund“. In diesem Fall wird also ein Additionssymbol weggelassen. Das ist jedoch in der höheren Mathematik nicht üblich. In der gesprochenen Sprache ist es ja noch viel merkwürdiger: Neunzehnhundertvierundachzig versteht jeder, in Symbolen geschrieben sieht $9\ 10\ 100\ 4 + 80$ dahingegen ziemlich sinnlos aus, und statt der üblichen Interpretation

$((9+10)100)+4+80$ wären durchaus auch andere Interpretationen denkbar. In der gesprochenen Sprache scheint eher eine Konvention befolgt zu werden, nach der die Operationen der Reihe nach auszuführen sind wie bei einem Taschenrechner, wobei eine Multiplikation gemeint ist, wenn die zuerst genannte Zahl die Kleinere ist, und eine Addition, wenn sie die Größere ist. Nur die Zahlen von 13 bis 19 scheinen dieser Regel nicht zu gehorchen. Kein Wunder, daß es Erstklässlern schwer fällt, sich den Zahlenraum zu erschließen, wenn sie zuvor dieses Dickicht von Konventionen durchdringen müssen.

2.2.4.7 (**Punkt vor Strich**). Wir vereinbaren zur Vermeidung von Klammern die Regel „Punkt vor Strich“, so daß also zum Beispiel unter zusätzlicher Beachtung unserer Konvention des Weglassens von Multiplikationssymbolen, in diesem Fall das Weglassen des Punktes, das Distributivgesetz kürzer in der Form $a(b+c) = ab + ac$ geschrieben werden kann.

2.2.4.8 (**Multiplikation mit Null**). In jedem Körper K gilt $a0_K = 0_K \quad \forall a \in K$. Man folgert das aus $a0_K + a0_K = a(0_K + 0_K) = a0_K$ durch Hinzuaddieren von $-(a0_K)$ auf beiden Seiten. Für das neutrale Element der multiplikativen Gruppe des Körpers vereinbaren wir die Bezeichnung 1_K. Nach dem Vorhergehenden gilt $1_K b = b$ auch für $b = 0_K$, mithin für alle $b \in K$. Folglich ist $(K, \cdot)$ ein Monoid mit neutralem Element 1_K und der Menge aller von Null verschiedenen Elemente als Gruppe der invertierbaren Elemente, in Formeln $K \backslash \{0_K\} = K^\times$.

2.2.4.9 (**Binomische Formel**). Für alle a, b in einem Körper K und alle $n \geq 0$ gilt die binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}$$

Um das einzusehen prüft man, daß wir bei der Herleitung nach 1.1.1.23 nur Körperaxiome verwandt haben. Man beachte hierbei unsere Konvention $0_K^0 = 1_K$ aus 2.2.1.25, angewandt auf das Monoid $(K, \cdot)$. Die Multiplikation mit den Binomialkoeffizienten in dieser Formel ist zu verstehen als wiederholte Addition im Sinne der Bezeichnungskonvention na aus 2.2.1.16, angewandt auf den Spezialfall der additiven Gruppe unseres Körpers.

Lemma 2.2.4.10 (Folgerungen aus den Körperaxiomen). *In jedem Körper K gelten die folgenden Aussagen und Formeln:*

1. $ab = 0_K \quad \Rightarrow \quad (a = 0_K$ *oder* $b = 0_K)$;
2. $-a = (-1_K)a \quad \forall a \in K$;
3. $(-1_K)(-1_K) = 1_K$;
4. $(-a)(-b) = ab \quad \forall a, b \in K$;
5. $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ *für alle* $a, c \in K$ *und* $b, d \in K^\times$;
6. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ *für alle* $a \in K$ *und* $b, c \in K^\times$;
7. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ *für alle* $a, c \in K$ *und* $b, d \in K^\times$;
8. $m(ab) = (ma)b$ *für alle* $m \in \mathbb{Z}$ *und* $a, b \in K$.

Beweis.

1. In der Tat folgt aus $(a \neq 0_K$ und $b \neq 0_K)$ schon $(ab \neq 0_K)$ nach den Körperaxiomen.
2. In der Tat gilt $a+(-1_K)a = 1_K a+(-1_K)a = (1_K+(-1_K))a = 0_K a = 0_K$, und $-a$ ist ja gerade definiert als das eindeutig bestimmte Element von K mit der Eigenschaft $a + (-a) = 0_K$.
3. In der Tat gilt nach dem Vorhergehenden $(-1_K)(-1_K) = -(-1_K) = 1_K$.
4. Um das nachzuweisen ersetzen wir einfach $(-a) = (-1_K)a$ und $(-b) = (-1_K)b$ und verwenden $(-1_K)(-1_K) = 1_K$.
5. Das ist klar.
6. Das ist klar.
7. Das wird bewiesen, indem man die Brüche auf einen Hauptnenner bringt und das Distributivgesetz anwendet.
8. Das folgt durch wiederholtes Anwenden des Distributivgesetzes.

□

2.2.4.11 (**Minus mal Minus gibt Plus**). Die Frage, wie das Produkt zweier negativer Zahlen zu bilden sei, war lange umstritten. Mir scheint der vorhergehende Beweis das überzeugendste Argument für „Minus mal Minus gibt Plus“ : Es sagt salopp gesprochen, daß man diese Regel vereinbaren muß, wenn man beim Rechnen das Ausklammern ohne alle Einschränkungen erlauben will.

2.2.4.12 (**Ganze Zahlen und allgemeine Körper**). Für jeden Körper K und $n \in \mathbb{Z}$ setzen wir $n_K := n^+ 1_K = n 1_K$ in unserer Notation 2.2.2.11 beziehungsweise ihrer für additiv notierte Monoide vereinbarten Abkürzung. Für $n \in \mathbb{N}$ bedeutet das explizit $n_K := 1_k + \ldots + 1_K$ mit n Summanden. Nach der ersten Iterationsregel in 2.2.2.12 gilt stets $(n+m)_K = n_K + m_K$ und aus dem Distributivgesetz folgt leicht $n_K \cdot a = n^+ a$ oder abgekürzt $n_K a = na$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $a \in K$. Mit der zweiten Iterationsregel in 2.2.2.12 folgt weiter für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ die Identität $n_K m_K = (nm)_K$ über die Gleichungskette

$$n_K \cdot m_K = n^+ m_K = n^+(m^+ 1_K) = (nm)^+ 1_K = (nm)_K$$

Oft schreibt man deshalb kurz n, wenn eigentlich n_K gemeint ist, und insbesondere kürzt man eigentlich immer 0_K ab durch 0 und 1_K durch 1. Man beachte jedoch, daß für verschiedene ganze Zahlen $n \neq m$ durchaus $n_K = m_K$ gelten kann: Ist etwa K ein Körper mit zwei Elementen, so gilt $n_K = 0_K$ für gerades n und $n_K = 1_K$ für ungerades n. Vom höheren Standpunkt wird das alles nocheinmal in 3.5.1.11 ausführlicher diskutiert werden.

Ergänzung 2.2.4.13. Den Begriff eines Homomorphismus verwendet man bei Mengen mit mehr als einer Verknüpfung analog. Zum Beispiel ist ein **Körperhomomorphismus** φ von einem Körper K in einen Körper L definiert als eine Abbildung $\varphi : K \to L$ derart, daß gilt $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ und $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für alle $a, b \in K$ sowie $\varphi(1) = 1$. Die Bedingung $\varphi(1) = 1$ ist nur nötig, um den Fall der Nullabbildung auszuschließen. In anderen Worten mag man einen Körperhomomorphismus auch definieren als eine Abbildung, die sowohl für die Addition als auch für die Multiplikation ein Monoidhomomorphismus ist. Unter einem **Körperisomorphismus** verstehen wir wieder einen Körperhomomorphismus ϕ mit der Eigenschaft, daß es einen Körperhomomorphismus ψ in die Gegenrichtung gibt mit $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ und $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$. Wieder ist jeder bijektive Körperhomomorphismus bereits ein Körperisomorphismus.

Übungen

Übung 2.2.4.14. Ist K ein Körper derart, daß es kein $x \in K$ gibt mit $x^2 = -1$, so kann man die Menge $K \times K = K^2$ zu einem Körper machen, indem man die Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{array}{rcl} (a,b) + (c,d) & := & (a+c, b+d) \\ (a,b) \cdot (c,d) & := & (ac - bd, ad + bc) \end{array}$$

Die Abbildung $K \to K^2$, $a \mapsto (a, 0)$ ist dann ein Körperhomomorphismus. Kürzen wir $(a, 0)$ mit a ab und setzen $(0, 1) = \mathrm{i}$, so gilt $\mathrm{i}^2 = -1$ und $(a, b) = a + b\,\mathrm{i}$ und die Abbildung $a + b\,\mathrm{i} \mapsto a - b\,\mathrm{i}$ ist ein Körperisomorphismus $K^2 \xrightarrow{\sim} K^2$.

2.2.4.15. Auf die in der vorhergehenden Übung 2.2.4.14 erklärte Weise können wir etwa aus dem Körper $K = \mathbb{R}$ der „reellen Zahlen“, sobald wir ihn kennengelernt haben, direkt den Körper $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen** konstruieren. Unser Körperisomorphismus gegeben durch die Vorschrift $a + b\,\mathrm{i} \mapsto a - b\,\mathrm{i}$ heißt in diesem Fall die **komplexe Konjugation** und wird auch $z \mapsto \bar{z}$ notiert. Man beachte, wie mühelos das alles in der Sprache der Mengenlehre zu machen ist. Als die komplexen Zahlen erfunden wurden, gab es noch keine Mengenlehre und beim Rechnen beschränkte man sich auf das Rechnen mit „reellen“ Zahlen, ja selbst das Multiplizieren zweier negativer Zahlen wurde als eine fragwürdige Operation angesehen, und das Ziehen einer Quadratwurzel aus einer negativen Zahl als eine rein imaginäre Operation. In gewisser Weise ist es das ja auch geblieben, aber die Mengenlehre liefert eben unserer Imagination eine wunderbar präzise Sprache, in der wir uns auch über imaginierte Dinge unmißverständlich austauschen können. Man kann dieselbe Konstruktion auch allgemeiner durchführen, wenn man statt -1 irgendein anderes Element eines Körpers K betrachtet, das kein Quadrat ist. Noch allgemeinere Konstruktionen zur „Adjunktion höherer Wurzeln“ oder sogar der „Adjunktion von Nullstellen polynomialer Gleichungen“ können Sie in der Algebra kennenlernen, vergleiche etwa 17.7.2.5. In 3.2.7 diskutieren wir die komplexen Zahlen ausführlicher.

Ergänzende Übung 2.2.4.16. Ein Körperhomomorphismus ist stets injektiv.

2.2.5 Aufbau des Zahlensystems*

2.2.5.1. Der Aufbau des Zahlensystems

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

erscheint in diesem Text nur in einer Abfolge von Nebenbemerkungen und soll an dieser Stelle zusammenfassend dargestellt werden.

1. Die Konstruktion der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ aus Grundbegriffen der Mengenlehre diskutiere ich in 3.4.1.5. Kurz wurde das auch schon in 2.1.6.11 angerissen. Eine vollständig überzeugende Diskussion dieser Struktur ist meines Erachtens nur im Rahmen der Logik möglich.

2. Die Konstruktion der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ aus den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, ja der einhüllenden Gruppe eines beliebigen kommutativen Monoids wird in 3.4.2.12 erklärt. Nach 10.2.4.6 gibt es dann genau eine Multiplikation auf $\mathbb{Z}$, die unsere Multiplikation auf $\mathbb{N}$ fortsetzt und $\mathbb{Z}$ zu einem Ring macht.

3. Die Konstruktion des Körpers der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ aus dem Integritätsbereich der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, ja des Quotientenkörpers eines beliebigen

kommutativen Integritätsbereichs wird in 3.5.5.2 ausgeführt. Die Anordnung auf $\mathbb{Q}$ dürfen Sie selbst in 3.5.5.19 konstruieren.

4. Die Konstruktion des angeordneten Körpers der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ aus dem angeordneten Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ wird zur Beginn der Analysis in 10.2.4.3 erklärt.

5. Die Konstruktion des Körpers der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ aus dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ wurde in 2.2.4.14 angerissen und wird in 3.2.7 ausführlicher behandelt.

2.2.5.2 (**Gewinne und Verluste beim Aufbau des Zahlensystems**). Oft wird der Aufbau des Zahlensystems als eine Geschichte immer neuer Gewinne erzählt: Beim Übergang von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$ gewinnt man die Lösbarkeit aller Gleichungen des Typs $a + x = b$, beim Übergang von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ die Lösbarkeit aller Gleichungen des Typs $ax = b$ für $a \neq 0$, beim Übergang von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ die Lösbarkeit aller Gleichungen des Typs $x^a = b$ für $a, b > 0$, und nach Übergang von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ besitzen sogar alle nichtkonstanten Polynome Nullstellen. Hier ist nur anzumerken, daß man die Lösbarkeit aller Gleichungen des Typs $x^a = b$ für $a, b > 0$ auch schon in einem abzählbaren Unterkörper von $\mathbb{R}$ erreichen könnte und daß der eigentliche Grund für den Übergang zu $\mathbb{R}$ analytischer Natur ist: Man gewinnt so den Zwischenwertsatz 10.3.3.8. Man kann den Aufbau des Zahlensystems aber auch als eine Geschichte immer neuer Verluste erzählen: Beim Übergang von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$ verliert man die Existenz eines kleinsten Elements, beim Übergang von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ die Existenz unmittelbarer Nachfolger, beim Übergang von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ die Abzählbarkeit, und beim Übergang von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ die Anordnung. Man kann noch weiter gehen zum Schiefkörper der sogenannten Quaternionen $\mathbb{H} \supset \mathbb{C}$ aus 3.5.6.3, dabei verliert man die Kommutativität der Multiplikation, oder sogar zu den sogenannten Oktaven $\mathbb{O} \supset \mathbb{H}$ aus 6.3.12.4, bei denen die Multiplikation nicht einmal mehr assoziativ ist.

2.2.6 Verbände und Boole'sche Algebren*

Definition 2.2.6.1. Eine **Boole'sche Algebra** ist ein Tripel $(B, \wedge, \vee)$ bestehend aus einer Menge mit zwei assoziativen kommutativen Verknüpfungen derart, daß gilt:

1. Mit jeder unserer Verknüpfungen wird B ein Monoid. Man notiert 1 das neutrale Element zu $\wedge$ und 0 das neutrale Element zu $\vee$;

2. Jede unserer beiden Verknüpfungen ist „distributiv über der anderen", in Formeln $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ und $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

3. Zu jedem $a \in B$ existiert $c \in B$ mit $a \wedge c = 0$ und $a \vee c = 1$. Man zeigt mühelos, daß dies Element c durch a eindeutig bestimmt ist, und notiert es $c = \neg a$ oder $c = \bar{a}$.

Ein **Homomorphismus von Boole'schen Algebren** ist eine Abbildung, die für beide Monoidstrukturen ein Homomorphismus von Monoiden ist. Gegeben Boole'sche Algebren B, C notieren wir $\mathrm{Boole}(B, C)$ die Menge aller Homomorphismen von B nach C.

2.2.6.2. Ein typisches Beispiel einer Boole'schen Algebra erhält man, indem man für eine beliebige Menge X das Tripel $(\mathrm{Pot}(X), \cap, \cup)$ bestehend aus ihrer Potenzmenge mit den Operationen Schnitt und Vereinigung betrachtet. In dieser Situation haben wir $1 = X$ sowie $0 = \emptyset$ und $\neg A = X \backslash A$ ist die Komplementmenge.

Definition 2.2.6.3. Ein **Verband** ist ein Tripel $(B, \wedge, \vee)$ bestehend aus einer Menge mit zwei assoziativen kommutativen Verknüpfungen derart, daß die **Absorptionsgesetze** $a \wedge (a \vee b) = a$ und $a \vee (a \wedge b) = a$ gelten für alle $a, b \in B$.

Beispiel 2.2.6.4. Als Übung 2.2.6.7 dürfen Sie zeigen, daß jede Boole'sche Algebra ein Verband ist.

Vorschau 2.2.6.5. Wir werden in 10.2.3.9 sehen, daß eine teilgeordnete Menge, in der jede zweielementige Teilmenge ein Supremum und ein Infimum hat, zu einem Verband wird, wenn wir $a \vee b := \sup\{a, b\}$ und $a \wedge b := \inf\{a, b\}$ setzen, und daß wir so genau alle Verbände erhalten.

Übungen

Übung 2.2.6.6. Man zeige für jedes Element a einer Boole'schen Algebra die Identitäten $a \wedge 0 = 0$ und $a \vee 1 = 1$. Hinweis: Man gehe von $1 = a \vee (\bar{a} \wedge 1)$ aus und verwende Distributivität.

Übung 2.2.6.7. Man zeige, daß jede Boole'sche Algebra ein Verband ist. Hinweis: Man gehe von $(b \wedge 0) \vee a = a$ nach 2.2.6.6 aus und verwende die Distributivität.

Übung 2.2.6.8. Man zeige für jedes Element a eines Verbandes $a \wedge a = a$ und $a \vee a = a$. Hinweis: Absorptionsgesetze mit $b = a \wedge a$ oder $b = a \vee a$.

2.3 Zur Darstellung von Mathematik*

2.3.1 Herkunft einiger Symbole

2.3.1.1. Ich habe versucht, etwas über die Herkunft einiger mathematischer Symbole in Erfahrung zu bringen, die schon aus der Schule selbstverständlich sind.

2.3.1.2. Das Pluszeichen $+$ ist wohl ein Auschnitt aus dem Symbol &, das hinwiederum enstanden ist durch Zusammenziehen der beiden Buchstaben im Wörtchen „et“, lateinisch für „und“.

2.3.1.3. Die Dezimaldarstellung der natürlichen Zahlen kam Mitte des vorigen Jahrtausends aus Indien über die Araber nach Italien. Bis dahin rechnete man in Europa in römischer Notation. Sie müssen nur versuchen, in dieser Notation zwei größere Zahlen zu multiplizieren, um zu ermessen, welchen wissenschaftlichen und auch wirtschaftlichen Fortschritt der Übergang zur Dezimaldarstellung bedeutete. Das Beispiel der Dezimaldarstellung zeigt in meinen Augen auch, wie entscheidend das sorgfältige Einbeziehen trivialer Spezialfälle, manchmal als „Theorie der leeren Menge“ verspottet, für die Eleganz der Darstellung mathematischer Sachverhalte sein kann: Sie wurde ja eben dadurch erst ermöglicht, daß man ein eigenes Symbol für „gar nichts“ erfand! Ich denke, daß der Aufbau eines effizienten Notationssystems, obwohl er natürlich nicht denselben Stellenwert einnehmen kann wie die Entwicklung mathematischer Inhalte, dennoch in der Lehre ein wichtiges Ziel sein muß. In diesem Text habe ich mir die größte Mühe gegeben, unter den gebräuchlichen Notationen diejenigen auszuwählen, die mir am sinnvollsten schienen, und sie soweit wie möglich aufzuschlüsseln. Wo es mir sinnvoll schien, habe ich auch nicht gezögert, neue Notationen einzuführen.

2.3.1.4. Das Wort von der „Theorie der leeren Menge“ scheint auf Carl Ludwig Siegel zurückzugehen, der einmal gesagt haben soll: „Ich habe Angst, dass die Mathematik vor dem Ende des Jahrhunderts zugrunde geht, wenn dem Trend nach sinnloser Abstraktion – die Theorie der leeren Menge, wie ich es nenne – nicht Einhalt geboten wird“.

2.3.1.5. Die Herkunft der logischen Symbole $\exists$ und $\forall$ als umgedrehte E und A haben wir bereits in 2.1.7.4 erwähnt. Sie wurden von Cantor in seiner Mengenlehre zuerst verwendet. Die Symbole $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ wurden früher als fette Buchstaben gedruckt und zunächst nur beim Tafelanschrieb in der hier gegebenen Gestalt wiedergegeben, da man fetten Druck an der Tafel nicht gut darstellen kann.

2.3.2 Grundsätzliches zur Formulierung

2.3.2.1 (**Redundanz**). Es scheint mir wichtig, sich beim Schreiben über Mathematik immer vor Augen zu halten, daß die mathematische Terminologie und For-

melsprache sehr wenig Redundanz aufweisen. Auch kleinste Fehler oder Ungenauigkeiten können dadurch schon zu den größten Mißverständnissen führen. Ich plädiere deshalb dafür, die Redundanz künstlich zu erhöhen und nach Möglichkeit alles dreimal zu sagen: Einmal in mathematischer Terminologie, einmal in Formeln, und dann noch einmal in weniger formellen Worten und mit Bildern.

2.3.2.2 (**Versprachlichung**). Ich halte es für ebenso wichtig wie delikat, den mathematischen Inhalten griffige Bezeichnungen zu geben. Wir wollen uns ja auch mit anderen Mathematikern unterhalten können, die nicht dasselbe Buch gelesen haben. Sogar dann, wenn ich nur mit mir selbst und einem einzigen Buch beschäftigt bin und bei einem Beweis, den ich gerade verstehen will, ganz präzise „Theorem 4.2“ zitiert wird, stört es mich: Ich muß blättern, bin abgelenkt und mein Verstehen wird gebremst. Darüber hinaus kann ich mir Dinge viel besser merken, die griffige Bezeichnungen haben. Diese Bezeichnungen wirken wie Garderobenhaken im Kopf, an denen man Inhalte aufhängen und wiederfinden kann. Delikat ist, daß die Wahl einer Bezeichnung oft auch eine politische und historische Dimension hat. Delikat ist weiter, daß bei vielen üblichen Bezeichnungen verschiedene Varianten für ihre genaue Bedeutung im Umlauf sind. Ich versuche beides nach bestem Wissen und Gewissen offenzulegen.

2.3.2.3 (**Generalvoraussetzungen**). Ich selber lese keineswegs immer alles von vorne bis hinten durch und merke mir das bereits Gelesene. Vielmehr suche oft, um nicht zu sagen meist, nur gezielt spezielle Resultate, und lese dazu eher diagonal. Ich habe es deshalbnach Kräften vermieden, Generalvoraussetzungen einzustreuen, von der Art „von nun an bis zum Ende des Abschnitts sind alle unsere topologischen Räume Hausdorff“ und dergleichen. Wenn das einmal bei speziellen Themen zu umständlich werden sollte, will ich strikt die Regel befolgen, daß Generalvoraussetzungen für eine Gliederungsstufe entweder direkt nach der Überschrift besagter Gliederungsstufe stehen müssen, oder aber direkt vor dem Beginn des ersten Abschnitts der nächsttieferen Gliederungsstufe, im Anschluß an die Vorrede, und dann als eigener Abschnitt „Generalvoraussetzungen“.

2.3.2.4 (**Definition-Satz-Beweis**). Das Schema Definition-Satz-Beweis scheint mir für die Darstellung von Mathematik sehr gut geeignet und auch zum Lesen und Lernen äußerst effektiv, wenn es richtig angewendet wird: Wenn nämlich die Sätze so formuliert werden, daß ihre Aussagen auch für sich genommen schon sinnvoll und verständlich sind, sofern man die entsprechenden Definitionen parat hat. Dann kann man dieses Schema verstehen als eine Anleitung zum diagonalen Lesen. Demselben Ziel dient die Abstufung der Sätze durch die Bezeichnung als Satz, Korollar, Proposition, Lemma und dergleichen: Sie soll dem Leser zu erlauben, etwa durch Konzentration auf die Sätze eine schnelle Orientierung über die wesentlichen Aussagen und Resultate zu gewinnen. Diese Form ersetzt zu einem gewissen Maße, was man im Deutschunterricht lernt. Ich empfehle, mathemati-

sche Texte und Vorträge nicht mit einer Gliederung zu beginnen und auch nicht mit einem Schlußwort zu beenden, da das in Anbetracht der in der Mathematik eh üblichen Strukturierung durch das Schema „Definition-Satz-Beweis“ leicht dazu führt, daß die strukturellen Elemente im Vergleich zum eigentlichen Inhalt unverhältnismäßig viel Raum einnehmen.

2.3.2.5 (**Andere nummerierte Passagen**). In diesem Text gibt es auch viele Passagen, die einfach nur nummeriert sind. Hier handelt es sich meist um kleinere Aussagen mit Beweis, die mir für die „große Form“ Definition-Satz-Beweis zu unbedeutend oder zu offensichtlich schienen. Andere Textpassagen sind als *Ergänzung* oder *Ergänzende Übung* ausgewiesen: Damit ist gemeint, daß sie im unmittelbaren Zusammenhang ohne Schaden übersprungen werden können, daß sie jedoch aus dem vorhergehenden heraus verständlich sein sollten. Wieder andere Textpassagen sind als *Vorschau* oder *Weiterführende Übung* ausgewiesen: Damit ist gemeint, daß sie im unmittelbaren Zusammenhang ohne Schaden übersprungen werden können und daß ihr Verständnis Kenntnisse voraussetzt, bei denen nicht davon ausgehe, daß sie dem Leser an der entsprechenden Stelle bereits zur Verfügung stehen.

2.3.2.6 (**Satzzeichen in mathematischen Texten**). Satzzeichen wie Punkt und Komma stören aus meiner Sicht die Ästhetik von aus dem Text herausgestellten Formeln. Ich will deshalb die Regel aufstellen und befolgen, daß eine aus dem Text herausgestellte Formel stets mit einem nicht gedruckten Punkt dahinter zu denken ist, wenn der Text mit ihr aufhört oder wenn es darunter mit einem Großbuchstaben weitergeht. Ich werde den Fall vermeiden, daß hinter eine aus dem Text herausgestellte Formel nach den Regeln der Grammatik ein Komma gehören müßte.

2.3.2.7 (**Eigennamen in mathematischen Texten**). Ich übernehme aus dem Englischen den Apostroph bei Eigennamen und schreibe also zum Beispiel Zorn’sches Lemma. In der deutschen Literatur sind stattdessen Kapitälchen üblich, wie etwa ZORNsches Lemma, aber diese Hervorhebung im Schriftbild scheint mir ungebührlich viel Aufmerksamkeit zu binden.

2.3.3 Sprache und Mathematik

2.3.3.1. In diesem Abschnitt habe ich gesammelt, was mir beim Erklären von Mathematik und Schreiben über Mathematik besonders schwer fällt.

2.3.3.2 (**Umgangssprache versus mathematische Fachsprache**). Die mathematische Terminologie widmet freimütig Worte der Umgangssprache um und gibt ihnen präzise mathematische Bedeutungen, die mal mehr und mal weniger zur Ursprungsbedeutung verwandt sind. Man denke zum Beispiel an die Worte Menge, Abbildung, Gruppe, Ring, Körper. Mit dem Adjektiv **schmutzig** betone ich,

daß ein Wort umgangssprachlich zu verstehen ist und nicht als ein Begriff der allein auf der Mengenlehre basierenden aseptisch steril perfekten Ideenwelt der reinen Mathematik.

2.3.3.3. Im Gegensatz zu dem, was in der Schule im Deutschunterricht gelernt wird, ist Wortwiederholung beim mathematischen Schreiben und Reden richtig und wichtig.

2.3.3.4 (**Erweiterung oder Zuspitzung durch Ergänzungen**). Bereits erklärte Begriffe werden in der mathematischen Fachsprache durch Ergänzungen mal spezifiziert, mal abgeschwächt, und manchmal sogar beides zugleich. Der noch wenig informierte Leser kann nur schwer erraten, was im Einzelfall zutrifft. So ist ein Primkörper etwas Spezielleres als ein Körper, ein Schiefkörper etwas Allgemeineres, und ein Erweiterungskörper „etwas mit zusätzlichen Daten“. Ein lokal kompakter Raum ist etwas allgemeineres als ein kompakter Raum. Eine universelle Überlagerung ist etwas Spezielleres als eine Überlagerung und eine verzweigte Überlagerung etwas Allgemeineres, das aber nur im Spezialfall von Flächen überhaupt sinnvoll definiert ist. Ein Borelmaß ist etwas Spezielleres als ein Maß und ein signiertes Maß etwas Allgemeineres. Eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist etwas Allgemeineres als eine Mannigfaltigkeit, eine glatte Mannigfaltigkeit dahingegen eine spezielle Art von Mannigfaltigkeit, und ich könnte noch lange so fortfahren. Das führt leicht zu Verwirrung, aber ich habe auch keine Lösung.

2.3.3.5 (**Bestimmte und unbestimmte Artikel**). Problematisch scheint mir in mathematischen Texten die Verwendung bestimmter und unbestimmter Artikel, und ich bin fast neidisch auf die russische Sprache, die diese Unterscheidung nicht kennt. Sind mathematische Strukturen „eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus“, wie Gruppen mit zwei Elementen oder Mengen mit einem Element, so fällt mir die Verwendung des bestimmten Artikels leicht. Häufig sind mathematische Strukturen jedoch nur „eindeutig bis auf nicht-eindeutigen Isomorphismus“: Etwa Mengen mit fünf Elementen, Gruppen mit drei Elementen oder Vektorräume gegebener Dimension über einem vorgegebenen Köper. Soll man dann den bestimmten oder den unbestimmten Artikel verwenden? Hier ist die Terminologie uneinheitlich: Man sagt üblicherweise „ein fünfdimensionaler reeller Vektorraum, eine abzählbar unendliche Menge“ aber „die euklidische Ebene, der Zerfällungskörper, der algebraische Abschluß, die universelle Überlagerung“, ohne daß ich dafür triftige Gründe ausmachen könnte. Vielleicht wäre es eine gute Idee, für nur bis auf nichteindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte mathematische Objekte die bestimmten Artikel mit einer „abschwächenden Schlange“ in der Form „dẽr, dĩe, dãs“ zu verwenden.

2.3.3.6 (**Existenz in Definitionen**). Ich plädiere dafür, in mathematischen Texten die Formulierungen „Es existiert“ und „Es gibt“ ausschließlich in ihrer Bedeutung als Quantoren zu verwenden, da es sonst leicht zu Mißverständnissen kommen

kann. Insbesondere plädiere ich sehr dafür, diese Formulierungen zu vermeiden, wenn es in Definitionen um die Vorstellung der „Ausgangsdaten“ geht. Die folgenden Beispiele mögen das illustrieren.

Mißverständlich: Eine Gruppe ist eine Menge, auf der es eine assoziative Verknüpfung gibt derart, daß es ein neutrales Element gibt und zu jedem Element ein Inverses.

Klarer: Eine Gruppe ist eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung derart, daß es ein neutrales Element gibt und zu jedem Element ein Inverses.

Pedantisch: Eine Gruppe ist ein Paar bestehend aus einer Menge und einer assoziativen Verknüpfung auf dieser Menge derart, daß es ein neutrales Element gibt und zu jedem Element ein Inverses.

In der Tat gibt es ja auf jeder nichtleeren Menge eine assoziative Verknüpfung, die sie zu einer Gruppe macht. Eine Gruppe ist aber keineswegs eine Menge mit gewissen Eigenschaften, sondern eine Menge mit Verknüpfung mit gewissen Eigenschaften. Das Ausgangsdatum bei dieser Definition ist in anderen Worten und ganz pedantisch formuliert ein Paar bestehend aus einer Menge zusammen mit mit einer Verknüpfung auf dieser Menge. Ich gebe zu, daß man auch die „klare“ Definition falsch verstehen könnte, aber an dieser Stelle würde ich dieser Formulierung wegen ihrer Kürze doch der Vorzug gegenüber der „pedantischen“ Formulierung einräumen.

Mißverständlich: Ein Körper heißt angeordnet, wenn es auf ihm eine Anordnung gibt derart, daß...

Klarer: Ein angeordneter Körper ist ein Körper mit einer Anordnung derart, daß...

Pedantisch: Ein angeordneter Körper ist ein Paar bestehend aus einem Körper mit einer Anordnung auf der ihm zugrundeliegenden Menge derart, daß...

Zur Verdeutlichung zum Abschluß noch ein Beispiel, in dem die mißverständliche Formulierung die korrekte Formulierung einer anderen Eigenschaft ist:

Mißverständlich: Eine Mannigfaltigkeit heißt orientiert, wenn es auf ihr eine Orientierung gibt.

Klarer: Eine orientierte Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit mit einer Orientierung.

Pedantisch: Eine orientierte Mannigfaltigkeit ist ein Paar bestehend aus einer Mannigfaltigkeit mit einer Orientierung auf unserer Mannigfaltigkeit.

Hier ist die erste Formulierung in der Tat bei der üblichen Interpretation von „es gibt“ als Quantor die Definition einer orientierbaren, nicht die einer orientierten Mannigfaltigkeit.

2.3.3.7 (**Kampf dem Index**). Beim Schreiben von Mathematik in Formeln hat man oft mit der Schwierigkeit zu kämpfen, daß die wesentliche Information sich in Indizes verstecken will und die besonders wesentliche Information in Subindizes. Dem gilt es bewußt entgegenzuarbeiten.

2.3.4 Terminologisches zur leeren Menge*

Vorschau 2.3.4.1. Ich finde es oft schwierig, die leere Menge terminologisch korrekt einzubinden. Das ist aber ebenso wichtig wie der Beckenrand beim Schwimmbad, den man ja auch nicht wegläßt, obwohl man nachher nur im Wasser schwimmen will. Ich finde auch, daß das Bourbaki, den ich an sich sehr schätze, oft mißlungen ist. Meine Konventionen sind wie folgt:

1. Die leere Menge ist nach 10.3.2.1 ein Intervall. So sind beliebige Schnitte von Intervallen wieder Intervalle;

2. Die leere Menge ist nach 3.3.5.2 konvex. So sind beliebige Schnitte konvexer Mengen wieder konvex;

3. Die leere Menge ist *nicht* zusammenhängend. Die Zusammenhangskomponenten eines topologischen Raums sind seine maximalen zusammenhängenden Teilmengen und die leere Menge hat gar keine Zusammenhangskomponente. So hat für einen topologischen Raum mit nur endlich vielen Zusammenhangskomponenten der Vektorraum der stetigen Abbildungen in den Körper mit zwei Elementen als Dimension gerade die Zahl der Zusammenhangskomponenten. Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind damit genau die *nichtleeren* Intervalle und nur jede *nichtleere* konvexe Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums ist zusammenhängend;

4. Die Wirkung einer Gruppe G auf der leeren Menge ist nach 4.5.1.7 *nicht* transitiv. Damit läßt sich jede G-Menge bis auf Reihenfolge und Isomorphismus eindeutig als eine disjunkte Vereinigung von transitiven G-Mengen darstellen;

5. Die leere Menge ist nach 3.3.1.1 *kein* affiner Raum. Sie läßt ja nach der vorhergehenden Konvention auch keine transitive Operation eines Vektorraums zu. Daß damit der Schnitt zweier affiner Teilräume nicht notwendig wieder ein affiner Teilraum ist, nehme ich als kleineres Übel in Kauf;

6. Eine Abbildung von der leeren Menge in eine beliebige weitere Menge ist konstant, aber nicht einwertig, vergleiche 2.1.4.10;

2.4 Philosophisches und Didaktisches

In diesen Abschnitten habe ich einige Gedanken zur Mathematik und zum Unterrichten von Mathematik gesammelt, die nicht zum logisch kohärenten Aufbau des Stoffes selber beitragen und teilweise auch stark persönlich gefärbt sind.

2.4.1 Was ist Mathematik?

2.4.1.1. Das Wort „Mathematik“ kommt vom griechischen „$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\varsigma$“, das sich hinwiederum ableitet von „$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha$“ für „der Lerngegenstand, die Wissenschaft“ nach dem Verb „$\mu\alpha\nu\vartheta\alpha\nu\omega$“ für „lernen, verstehen“. Das Anhängen der Endung „-$\iota\kappa o\varsigma$“ oder im Anschluß an einen Vokal „-$\tau\iota\kappa o\varsigma$“ hat eine ähnliche Bedeutung wie im Deutschen das Anhängen von „-ig“ oder „-lich“ beziehungsweise „-tlich“, etwa wie in Mut $\mapsto$ mutig, Haar $\mapsto$ haarig, wohnen $\mapsto$ wohnlich oder eigen $\mapsto$ eigentlich. In diesem Sinne wäre die wörtliche Übersetzung von „$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\varsigma$“ also „das Lernige“ oder „das Verständliche“. Platon verwendet den Begriff „$\tau o\ \mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\nu$“ im Sinne von „der Forschungsgegenstand“ in Sophista 219c:2 und Timaeus 88c:1. In der hellenistischen Zeit verengte sich die Bedeutung ein erstes Mal und bezeichnete etwas, was wir heute eher als „Mathematik und Naturwissenschaften“ bezeichnen würden. Erst in neuerer Zeit verengte sich die Bedeutung weiter auf das, was wir heute unter Mathematik verstehen

2.4.1.2. Ich würde die heutige Mathematik in einem ersten Ansatz beschreiben als die „Wissenschaft von den einfachsten Begriffen“: Wieviel einfacher sind doch Zahlen und ihre Rechenregeln, Geraden und Ebenen, selbst Abbildungen zwischen Mengen im Vergleich zu Pflanzen und Menschen, Hass und Liebe, ja selbst Luft und Wasser! Diese einfachsten Begriffe müssen nun jedoch mit der größten Vorsicht und Präzision gehandhabt werden, damit uns unsere an den Umgang mit Pflanzen und Menschen, Hass und Liebe, Luft und Wasser gewöhnte Intelligenz nicht in die Irre führt. Die eigentliche Mathematik besteht dann darin, diese einfachsten Begriffe zu größeren Theorien zu kombinieren, und die eigentlichen Einsichten entstehen auch erst in dieser Gesamtschau. Ich sehe darin eine Affinität zur Musik, in der man ja auch von einfachsten Geräuschen, in der Klassik etwa von den Tönen der Tonleiter, ausgeht und diese einfachsten Grundbausteine zu Kompositionen kombiniert, deren Sinnhaftigkeit sich erst in der Gesamtschau erschließt. Auf einen Gegensatz zur Musik will ich im nächsten Absatz noch ausführlicher zu sprechen kommen: Während auch die schönste Musik meines Erachtens vom Komponisten nicht entdeckt sondern vielmehr erschaffen wird, scheint es sich mir bei der Mathematik gerade umgekehrt zu verhalten. Sicher gibt es sozusagen „komponierte“ mathematische Artikel, aber die mathematischen Inhalte selbst lassen sich von Menschenhand nicht formen und wollen entdeckt werden.

2.4.1.3. In diesem Zusammenhang will ich auf eine gerne diskutierte Frage eingehen: Wird Mathematik eigentlich entdeckt oder entwickelt? Aus meiner eigenen Erfahrung mit dieser widerspenstigen Materie und auch der Erfahrung beim Erklären von Beweisen scheint es mir offensichtlich, daß mathematische Inhalte „objektiv da sind“, also unabhängig vom menschlichen Subjekt existieren und entdeckt werden. Was jedoch entwickelt werden muß ist eine Sprache, die es uns ermöglicht, uns über diese Inhalte zu verständigen und sie zu nutzen. Hier kam und kommt es durchaus zu parallelen Entwicklungen, man denke etwa an die beiden Notationen $\dot{x}$ und $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ für die Ableitung, an den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ einer Zufallsvariable X in der Wahrscheinlichkeitstheorie, der ja nichts anderes ist als das Integral $\int f$ einer Funktion f in der Analysis, und nicht zuletzt an die verschiedenen Notationen für die natürlichen Zahlen durch römische Buchstaben oder arabische Ziffern.

2.4.1.4. Bildlich gesprochen scheint mir die Mathematik wie eine weitverzweigte Höhle, voller Wunder und wertvoller Mineralien, die wir Mathematiker einerseits erkunden und andererseits erschließen. Die Höhle selbst ist objektiv vorhanden und es gilt, immer weiter in sie vorzudringen und Neues zu entdecken und Neues wie Bekanntes nutzbar zu machen. Wo und wie dann jedoch Treppen und Wege und Lampen angebracht werden und eventuell sogar eine kleine Eisenbahn zum Transport der Mineralien, darin haben wir große Freiheit und in diesem Sinne wird Mathematik auch entwickelt. Natürlich sind diese beiden Aufgaben eng miteinander verwoben und wie weit wir selbst vordringen können hängt ganz wesentlich davon ab, wie weit unsere Vorläufer gekommen sind und wie weit sie die Höhle bereits zugänglich gemacht haben.

2.4.1.5. Die im vorhergehenden dargelegte Auffassung vom Sinn und Wesen der Mathematik bezeichnet man wegen ihrer engen Verwandtschaft mit Plato's Ideenlehre auch als „platonisch“. Barry Mazur fordert in seinem Aufsatz [Maz08] die Platoniker auf, zu erklären, warum Beweise denn uns als Mathematikern so wichtig sein sollten, wenn es nur um das Erkennen einer unabhängig von uns existierenden Wirklichkeit geht. Dieser Aufforderung will ich gerne nachkommen. Ich fasse Beweise auf als Beiträge zum großen Projekt, die Welt der mathematischen Inhalte dem menschlichen Verstand zugänglich zu machen. Mir scheint es in diesem Sinne eine wichtige Aufgabe, auch für bereits bewiesene Erkenntnisse möglichst glatte und für menschliche Gehirne transparente Beweise zu finden, aufzuschreiben und öffentlich zugänglich zu machen. Was das Beweisen angeht, gibt es auch durchaus verschiedene Ansätze: Anschauliche Beweise aus der Schulgeometrie, etwa für den Satz des Pythagoras oder andere elementargeometrische Sätze, wären um im Bild zu bleiben eher ein Art Wegesystem für Fußgänger, wohingegen sich professionelle Mathematiker seit etwa 1900 meist auf einem aus Mengenlehre aufgebauten Schienennetz bewegen, das zwar große an-

fängliche Investitionen erfordert, danach aber dem Verstand ein sehr schnelles, sicheres und tiefes Eindringen ermöglicht. Allerdings fällt es unseren durch die Bequemlichkeit dieses Zugangs verwöhnten Studenten meist bitter schwer, dann an interessanten und noch nicht erschlossenen Stellen wieder auszusteigen und sich zu Fuß weiter fortzubewegen oder gar selbst Schienen zu legen. Rechnergestützte Beweise sind für mich wie eine Erkundung mit Robotern nicht in derselben Weise befriedigend wie der persönliche Augenschein, aber wenn man an interessante Stellen partout nicht selbst hingelangen kann, sind doch schöne von Robotern geschossene Bilder allemal besser als gar nichts.

2.4.1.6. Die Mathematik wird insbesondere von Außenstehenden oft als eine tote Wissenschaft erlebt, in der „alles schon seit dreihundert Jahren bekannt sei“. Dieser Eindruck mag damit zusammenhängen, daß Mathematik durchaus „verholzt“ in dem Sinne, daß sie einen festen Stamm an Wissen und kodifizierter Sprache ausbildet. Das aber ermöglicht es unserer Wissenschaft auch gerade wieder, hoch hinaus zu wachsen, und damit das gelingen kann, müssen wir uns alle Mühe geben, in der mathematischen Terminologie keine Sprachverwirrung einreißen zu lassen.

2.4.1.7. Beim Erlernen dieser Wissenschaft soll man, so denke ich, nach Kräften versuchen, sich aller seiner gedanklichen Fähigkeiten zu bedienen. Geeignet für das Durchdringen mathematischer Sachverhalte scheinen mir insbesondere die räumliche oder noch besser die räumlich-zeitliche Anschauung, das abstrakte logische Denken und das formale Umformen von Zeichenketten auf Papier. Hilfreich kann auch unsere sprachliche Intelligenz sein: Bereits kleine Kinder lernen ja das Zählen, indem sie zunächst „Eins-Zwei-Drei-Vier-Fünf“ memorieren wie „Abrakadabra Simsalabim“, und ältere lernen ähnlich den Satz des Pythagoras oder die binomischen Formeln.

2.4.1.8. Die Mathematik schöpft große Kraft aus abstrakten Theorien, und nur allzuoft wollen diese ihre Herkunft verbergen und verkleiden sich als zufällig zusammengewürfelte Haufen aus Daten und Axiomen. Man darf sich davon nicht in die Irre führen lassen. Meist sind das vielmehr sehr sorgfältig konstruierte und in immer neuen Versionen an zahlreichen Beispielen erprobte Maschinen, die es einem erlauben, wie in einem Flugzeug mit großer Bequemlichkeit große Wegstrecken zurückzulegen und dabei die meisten konkreten Schwierigkeiten am Boden zu ignorieren. Das alles ist jedoch nur sinnvoll, wenn auch das Starten und das Landen gelingt, und das Herrichten von Start- und Landebahnen kann auch leicht so viel Arbeit bedeuten, daß das ganze Fliegen dadurch uninteressant wird. Bei mancher Theorie habe ich sogar den Eindruck, daß man nur startet aber nie mehr landet, oder noch schlimmer, daß man weder starten noch landen kann, sondern einfach nur sinnlos herumfliegt, aber das mag auch an meiner mangelnden Kenntnis der jeweiligen Theorie liegen – ich nenne besser keine Beispiele.

2.4.2 Didaktische Gedanken

2.4.2.1 (**Warum Vorlesungen?**). Warum hören und halten wir in der Mathematik eigentlich Vorlesungen? In der Zeit, in der das Drucken von Büchern noch nicht möglich oder zumindest schwierig und teuer war, mag es sinnvoll gewesen sein, einfach ein Buch vorzulesen, das dann in mehreren Kopien mitgeschrieben werden konnte: In Klöstern wurden etwa die Schriften der Antike und des Christentums lange Zeit auf diese Weise vor dem Vergessen und dem Zerfall gerettet. In der Zeit von Internet und Kopiergeräten kann es jedoch nicht mehr das Ziel einer Vorlesung sein, daß die beteiligten Studenten Mitschriften anfertigen, aus denen sie dann den Stoff lernen: Zu viel wird in solchen Vorlesungen falsch verstanden und falsch abgeschrieben, als daß ich nicht eher das Lernen aus Büchern empfehlen würde. Für den andauernden Erfolg der Vorlesung als Unterrichtsform fallen mir verschiedene Gründe ein.

1. Der Mensch ist nicht gern allein. Es lernt sich besser gemeinsam, man kann sich in der Pause und nach der Vorlesung untereinander über das Gelernte und das nicht Verstandene unterhalten und auch einfach so mal treffen. Die Pause dient insbesondere nicht allein zum Pinkeln oder zum Aufrechterhalten der Konzentration, und es ist doppelt schade, wenn sie ausfällt.

2. Die Vorlesung gibt einen gewissen Rhytmus vor, in dem gelernt und nicht Gelerntes ignoriert und auf später verschoben wird. Anfänger lernen aus Büchern leicht so, wie ganz kleine Kinder spaziergehen: Jeder Kieselstein ist interessant und eine Pause zur ausführlichen Betrachtung wert. Ganz zu Anfang ist das ja auch richtig so, aber dann muß doch die Vorlesung etwas schieben, damit es auch vorangeht.

3. Die Studenten müssen, insbesondere in der Mathematik, regelmäßig davon überzeugt werden, daß prinzipiell durchaus verständlich ist, was sie da lernen sollen, daß es sich nicht um eine Art Zauberformeln handelt, die von Generation zu Generation nur abgeschrieben werden. Sie von der Verständlichkeit des Stoffes zu überzeugen gelingt besonders gut durch das Entwickeln aus dem Kopf an der Tafel. Ein Beamer oder das Auflegen vorbereiteter Folien oder das Ablesen eines vorbereiteten Manuskripts wirken im Vergleich wesentlich weniger überzeugend.

2.4.2.2 (**Welche Übungen?**). Ich denke, daß man die Mathematik nicht erlernen kann, ohne Übungsaufgaben zu lösen. Allerdings sollten diese zu großen Teilen viel elementarer sein als die in diesem und den folgenden Texten vorgeschlagenen Übungen. Diese dienen eher dazu, ergänzenden Stoff in knapper Form zu präsentieren und sollen auf den Übungsblättern nur einen Teil der Übungen ausmachen.

Insbesondere in den Grundvorlesungen müssen ihnen auch nicht wenig mehr algorithmische Übungen zur Seite gestellt werden, von der Art: Löse dieses lineare Gleichungssystem, invertiere jene Matrix, zerlege dieses Polynom in irreduzible Faktoren und dergleichen mehr.

2.5 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Markus Junker, Dominic Maier, Dimitri Guefack, Pascal Soergel.

Teil B

Algebra

Kapitel 3

Lineare Algebra 1: Vektorräume, Polynome, Eigenwerte

Inhalt

3.1 Gleichungssysteme und Vektorräume 106

3.1.1 Lösen linearer Gleichungssysteme 106

3.1.2 Vektorräume 116

3.1.3 Endliche Produkte von Mengen 121

3.1.4 Ordnungen und Teilordnungen* 126

3.1.5 Untervektorräume 128

3.1.6 Lineare Unabhängigkeit und Basen 132

3.1.7 Dimension eines Vektorraums 137

3.1.8 Austauschsatz von Steinitz* 142

3.1.9 Auswahlaxiom und Zorn'sches Lemma* 143

3.2 Lineare Abbildungen 151

3.2.1 Homomorphismen und Isomorphismen 151

3.2.2 Dimensionsformel für lineare Abbildungen 156

3.2.3 Räume von linearen Abbildungen 160

3.2.4 Lineare Abbildungen $K^n \to K^m$ und Matrizen . . . 165

3.2.5 Eigenschaften von Matrizen 173

3.2.6 Lineare Abbildungen und Matrizen 179

3.2.7 Komplexe Zahlen 184

3.2.8 Möbiusfunktion* 192

3.2.9 Dualräume und transponierte Abbildungen 193
3.2.10 Ergänzungen zu linearen Abbildungen* 203
3.3 Affine Räume 204
3.3.1 Affine Räume und affine Abbildungen 204
3.3.2 Affine Teilräume 209
3.3.3 Affine Räume und ihre Geraden 213
3.3.4 Baryzentrische Koordinaten* 218
3.3.5 Lineare und affine Ungleichungen* 221
3.3.6 Endlich erzeugte Kegel* 232
3.4 Zahlen 239
3.4.1 Konstruktion der natürlichen Zahlen* 239
3.4.2 Äquivalenzrelationen und ganze Zahlen 248
3.4.3 Untergruppen der Gruppe der ganzen Zahlen . . . 251
3.4.4 Primfaktorzerlegung 253
3.5 Ringe und Polynome 260
3.5.1 Ringe 260
3.5.2 Restklassenringe des Rings der ganzen Zahlen . . . 263
3.5.3 Polynome 271
3.5.4 Polynome als Funktionen* 280
3.5.5 Quotientenkörper und Partialbruchzerlegung . . . 285
3.5.6 Quaternionen* 292
3.6 Determinanten und Eigenwerte 296
3.6.1 Das Signum einer Permutation 296
3.6.2 Determinante und ihre Bedeutung 300
3.6.3 Charakterisierung der Determinante 306
3.6.4 Rechenregeln für Determinanten 310
3.6.5 Orientierung 315
3.6.6 Eigenwerte und Eigenvektoren 321
3.7 Danksagung 331

Die Bezeichnung „Algebra“ kommt von arabisch „al-jabr“, das in der Medizin das Wiedereinrenken eines Gelenks bezeichnete und in der Mathematik für eine Umformung stand, die man heute das „Herüberschaffen durch Subtraktion“ eines Terms von der einen auf die andere Seite einer Gleichung nennen würde. In diesem Zusammenhang wurde wohl auch das Rechnen mit negativen Zahlen entwickelt. Der im folgenden vorgestellte Teil der Algebra heißt „linear“, da das einfachste der darin untersuchten Gleichungssysteme dem geometrischen Problem entspricht, den Schnittpunkt zweier Geraden alias Linien zu bestimmen. Ich habe mir bei der Darstellung die größte Mühe gegeben, die abstrakte Sprache der Mengenlehre und unsere räumliche Anschauung zu einer Einheit zu fügen, ohne dabei die algorithmischen Aspekte zu kurz kommen zu lassen.

3.1 Gleichungssysteme und Vektorräume

In diesem Abschnitt will ich aufzeigen, inwiefern uns die räumliche Anschauung beim Verständnis der Theorie linearer Gleichungssysteme helfen kann und in welcher Weise die Theorie abstrakter Vektorräume eine Brücke zwischen diesen beiden Begriffswelten schafft.

3.1.1 Lösen linearer Gleichungssysteme

3.1.1.1. Ich erinnere aus 2.2.4.2 die Definition eines Körpers, die dort in größerer Ausführlichkeit besprochen wird.

Definition 3.1.1.2. Ein **Körper** $(K, +, \cdot)$ ist eine Menge K mit zwei kommutativen assoziativen Verknüpfungen, genannt die **Addition** $+$ und die **Multiplikation** $\cdot$ des Körpers, die meist schlicht durch Zusammenschreiben $a \cdot b = ab$ notiert wird, derart daß mit der Konvention „Punkt vor Strich“ die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. $(K, +)$ ist eine Gruppe, die **additive Gruppe** des Körpers;
2. Die vom neutralen Element der Addition $0_K \in K$ verschiedenen Elemente von K bilden eine unter der Multiplikation abgeschlossene Teilmenge und diese Teilmenge $K \backslash \{0_K\}$ ist unter der Multiplikation ihrerseits eine Gruppe, die **multiplikative Gruppe** des Körpers;
3. Es gilt das **Distributivgesetz**

$$a(b + c) = ab + ac \quad \forall a, b, c \in K$$

Ergänzung 3.1.1.3. Fordert man hier nicht die Kommutativität der Multiplikation und fordert zusätzlich das „Distributivgesetz für die Multiplikation von rechts“ $(b+c)a = ba+ca \quad \forall a, b, c \in K$, das im Fall einer kommutativen Multiplikation ja schon aus den anderen Axiomen folgte, so heißt unsere Struktur ein **Schiefkörper**.

3.1.1.4. Sei K ein Körper. Ich rate, zunächst einmal an den Körper $K = \mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen oder den Körper $K = \mathbb{R}$ der reellen Zahlen zu denken. Ich werde im folgenden, weil ich selber meist an diese beiden Fälle denke, Elemente eines allgemeinen Körpers K oft als „Zahlen“ bezeichnen. Gegeben seien n Gleichungen in m Unbekannten alias **Variablen** $x_1, \ldots, x_m$ von der Gestalt

$$\begin{array}{lll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \ldots & +a_{1m}x_m \quad = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \ldots & +a_{2m}x_m \quad = b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \ldots & +a_{nm}x_m \quad = b_n \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 &= 1 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\
4x_1 + 6x_2 + x_3 &= 8
\end{aligned}
$$

Ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten.

Hierbei denken wir uns $a_{ij}, b_i \in K$ fest vorgegeben und $x_j \in K$ gesucht. Der in mathematischer Formelsprache geübte Leser wird das bereits erkannt haben, denn es ist allgemeine Konvention, Buchstaben vom Anfang des Alphabets für „bekannte Unbestimmte“ zu verwenden und Buchstaben vom Ende des Alphabets für „gesuchte Unbestimmte“. Eine Gesamtheit von mehreren zu erfüllenden Gleichungen bezeichnet man als **Gleichungssystem**. Ein Gleichungssystem des obigen Typs nennt man ein **lineares Gleichungssystem**. Linear heißt es, weil darin keine komplizierteren Ausdrücke in den Variablen wie Quadrate x_1^2 oder Produkte von Variablen $x_1x_2x_3$ vorkommen. Die a_{ij} heißen in diesem und ähnlichen Zusammenhängen **Koeffizienten** von lateinisch „coefficere“ für deutsch „mitwirken“. Gesucht ist eine Beschreibung aller m-Tupel $(x_1, \ldots, x_m)$ von Elementen von K derart, daß alle n obigen Gleichungen gleichzeitig erfüllt sind. In der Begrifflichkeit und Notation, wie wir sie gleich in 3.1.3.8 einführen, bildet die Gesamtheit aller m-Tupel $(x_1, \ldots, x_m)$ von Elementen von K eine neue Menge K^m. In dieser Terminologie suchen wir also eine möglichst explizite Beschreibung der Teilmenge $L \subset K^m$ derjenigen m-Tupel, die alle unsere n Gleichungen erfüllen. Sie heißt die **Lösungsmenge** L unseres Gleichungssystems.

3.1.1.5. Sind alle b_i auf der rechten Seite unserer Gleichungen Null, so heißt unser lineares Gleichungssystem **homogen**. Das lineare Gleichungssystem, das aus einem inhomogenen System in der oben angegebenen Notation entsteht, indem man alle b_i zu Null setzt, heißt das zugehörige **homogenisierte** Gleichungssystem.

3.1.1.6 (**Schwierigkeiten der Notation**). In obigem Gleichungssystem ist a_{12} nicht als a-Zwölf zu verstehen, sondern als a-Eins-Zwei. Sicher wäre es präziser gewesen, die beiden Bestandteile unserer Doppelindizes durch ein Komma zu trennen und $a_{1,2}$ und dergleichen zu schreiben. Das hätte unser Gleichungssystem aber weniger übersichtlich gemacht. Man muß beim Schreiben und Verstehen von Mathematik oft einen Ausgleich zwischen einer präzisen aber unübersichtlichen und einer übersichtlichen aber unpräzisen Darstellung suchen. An dieser Stelle schien mir das Weglassen der Kommata der bessere Weg. Einem Menschen etwas verständlich zu machen ist eben eine andere Aufgabe als einen Computer zu programmieren. Beim Programmieren eines Computers kommt es an erster Stelle auf die Eindeutigkeit der Anweisungen an und alles andere ist nebensächlich. Beim Schreiben und Erklären für Menschen kommt es dahingegen eher auf die Übersichtlichkeit an und bei Mehrdeutigkeiten kann man erwarten, daß sie vom Leser aus dem Kontext heraus aufgelöst werden und oft noch nicht einmal auffallen. Insbesondere in der Physik ist es üblich, einen der Indizes hochzustellen, also a_1^2 statt a_{12} zu schreiben, aber das kann auch wieder leicht als das Quadrat $(a_1)^2$ einer Zahl a_1 mißverstanden werden. Ich würde am liebsten ${}^1a_2$ schreiben und eine Zeile unseres Gleichungssystems entsprechend als ${}^1a_1{}^1x + {}^1a_2{}^2x + \ldots + {}^1a_m{}^mx = {}^1b$, aber das schien mir zu viel Umgewöhnung auf einmal. Man beachte auch, daß bei Ma-

$$2y - 17z = 0$$
$$4x + 22y + z = 0$$

Ein homogenes lineares Gleichungssystem, mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten, bei dem ich die Unbekannten statt mit x_1, x_2, x_3 zur Abwechslung einmal x, y, z notiert habe. Es ist beim Rechnen meist sinnvoll, eine Notation mit möglichst wenig Indizes zu verwenden.

$$0x = 1$$

Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit einer Gleichung und einer Unbekannten und leerer Lösungsmenge.

trizen die Konventionen anders bei Koordinaten. Bei Matrizen wächst üblicherweise der erste Index nach unten der zweite Index nach rechts, bei Koordinaten dahingegen der erste Index nach rechts und der zweite Index nach oben.

3.1.1.7. Um die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems zu bestimmen, kann man den **Gauß-Algorithmus** verwenden. Er basiert auf der elementaren Erkenntnis, daß sich die Lösungsmenge nicht ändert, wenn wir in einer der beiden folgenden Weisen zu einem neuen Gleichungssystem übergehen:

1. Wir ersetzen eine unserer Gleichungen durch ihre Summe mit einem Vielfachen einer anderen unserer Gleichungen;

2. Wir vertauschen zwei unserer Gleichungen.

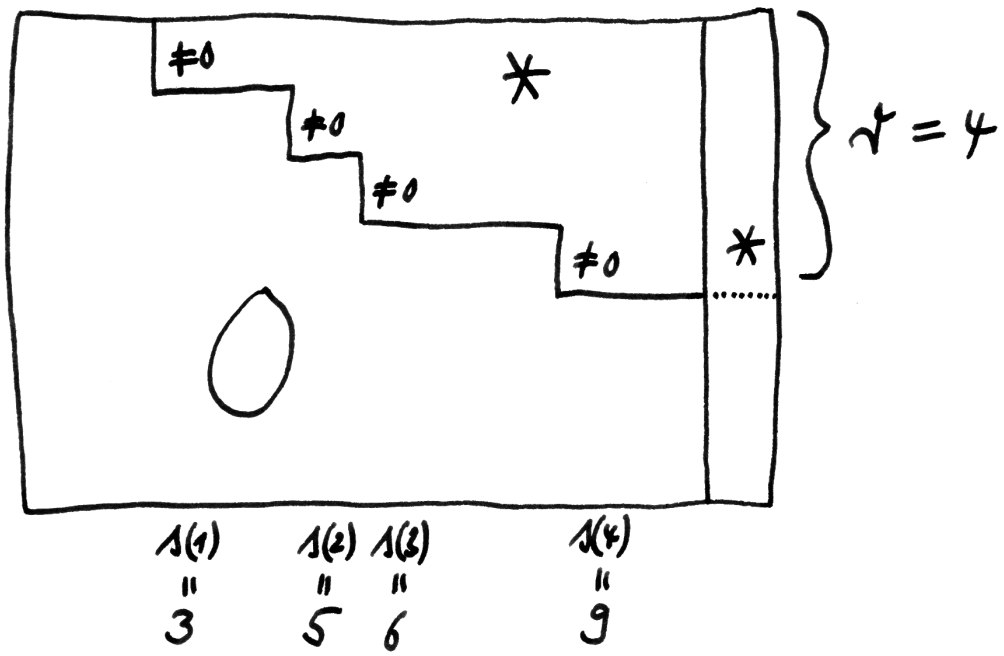
Der noch zu besprechende Gauß-Algorithmus beschreibt, wie wir mithilfe dieser beiden Operationen, also ohne die Lösungsmenge zu ändern, zu einem Gleichungssystem übergehen können, das **Zeilenstufenform** hat. Nebenstehendes Bild mag aufschlüsseln, was das anschaulich bedeuten soll. Formal sagen wir, ein Gleichungssystem „habe Zeilenstufenform“, wenn man ein $r \geq 0$ und Indizes $1 \leq s(1) < s(2) < \ldots < s(r) \leq m$ so angeben kann, daß in unserem Gleichungssystem gilt $a_{i,s(i)} \neq 0$ für $1 \leq i \leq r$ und daß $a_{\nu\mu} \neq 0$ nur gelten kann, wenn es ein i gibt mit $\nu \leq i$ und $\mu \geq s(i)$.

3.1.1.8. Es ist üblich und erspart Schreibarbeit, die Symbole für die Variablen sowie die Pluszeichen und Gleichheitszeichen bei Rechnungen im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen wegzulassen und stattdessen ein Gleichungssystem der oben beschriebenen Art abzukürzen durch seine **erweiterte Koeffizientenmatrix**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

Die Spezifikation „erweitert“ weist auf die letzte Spalte der b_i hin. Die Matrix der a_{ij} für sich genommen heißt die **Koeffizientenmatrix** unseres Gleichungssystems.

3.1.1.9 (**Gauß-Algorithmus**). Der Gauß-Algorithmus zum Bestimmen der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems funktioniert so: Sind alle Koeffizienten in der ersten Spalte Null, so ignorieren wir die erste Spalte und machen mit der auf diese Weise entstehenden Matrix weiter. Ist ein Koeffizient in der ersten Spalte von Null verschieden, so bringen wir ihn durch eine Zeilenvertauschung an die oberste Stelle. Ziehen wir dann geeignete Vielfache der obersten Zeile von den anderen Zeilen ab, so gelangen wir zu einem System, bei dem in der ersten



Ein System in Zeilenstufenform ist ein System der obigen Gestalt, bei dem im Teil mit den Koeffizienten a_{ij} wie angedeutet unterhalb solch einer „Treppe mit der Stufenhöhe Eins aber mit variabler Breite der Stufen“ nur Nullen stehen, vorn an den Stufenabsätzen aber von Null verschiedene Einträge. Hier ist r die Zahl der Stufen. An die durch den senkrechten Strich abgetrennte letzte Spalte mit den gewünschten Ergebnissen b_i werden hierbei keinerlei Bedingungen gestellt. Das Symbol unten links ist eine Null. Die Symbole $*$ oben rechts deuten an, daß unerheblich ist, was dort steht.

Spalte unterhalb des obersten Eintrags nur noch Nullen stehen. Für das weitere ignorieren wir dann die oberste Zeile und die erste Spalte und machen mit der auf diese Weise entstehenden Matrix weiter. Offensichtlich können wir so jedes lineare Gleichungssystem auf Zeilenstufenform bringen, ohne seine Lösungsmenge zu ändern.

3.1.1.10 (**Lösungsmenge bei Zeilenstufenform**). Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in Zeilenstufenform ist schnell bestimmt: Ist eine der Zahlen $b_{r+1}, \ldots, b_n$ nicht Null, so besitzt es gar keine Lösung. Gilt dahingegen $b_{r+1} = \ldots = b_n = 0$, so können wir Zahlen x_μ für μ verschieden von den Spaltenindizes $s(1), \ldots, s(r)$ der Stufen beliebig vorgeben und finden für jede solche Vorgabe der Reihe nach eindeutig bestimmte Zahlen $x_{s(r)}, x_{s(r-1)}, \ldots, x_{s(1)}$ derart, daß das entstehende m-Tupel $(x_1, \ldots, x_m)$ eine Lösung unseres Gleichungssystems ist.

3.1.1.11. Eine Abbildung $A : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\} \to Z$ der Produktmenge in eine Menge Z heißt ganz allgemein eine $(n \times m)$**-Matrix mit Einträgen in** Z. Gegeben solch eine Matrix A schreibt man meist A_{ij} oder a_{ij} statt $A(i, j)$ und veranschaulicht sich die Abbildung A als ein rechteckiges Arrangement von Elementen von Z wie eben im Fall $Z = K$. Das a_{ij} heißt dann der **Eintrag** unserer Matrix in der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Das i heißt der **Zeilenindex**, da es angibt alias „indiziert“, in welcher Zeile unser Eintrag a_{ij} steht. Entsprechend nennt man das j den **Spaltenindex** unseres Matrixeintrags. Ich erinnere daran, daß wir für beliebige Mengen X, Y die Menge aller Abbildungen von X nach Y mit $\mathrm{Ens}(X, Y)$ bezeichnen. Die Menge aller $(n \times m)$-Matrizen mit Koeffizienten in einer Menge Z notieren wir

$$\mathrm{Mat}(n \times m; Z) := \mathrm{Ens}(\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}, Z)$$

Im Fall $n = m$ sprechen wir von einer **quadratischen Matrix** und kürzen unsere Notation ab zu $\mathrm{Mat}(n; Z) := \mathrm{Mat}(n \times n; Z)$. Manchmal werden wir sogar für beliebige Mengen X, Y, Z eine Abbildung $X \times Y \to Z$ als eine $(X \times Y)$**-Matrix mit Einträgen in** Z ansprechen.

Ergänzung 3.1.1.12 (**Ursprung der Terminologie**). Die Bezeichnung „Matrix“ wurde meines Wissens vom englischen Mathematiker Joseph Sylvester in einem 1851 bei George Bell, Fleet Street erschienenen Artikel mit dem Titel „An essay on canonical forms, supplement to a sketch of a memoir on elimination, transformation and canonical forms“ in die Mathematik eingeführt. Die Bezeichnung scheint auf das lateinische Wort „matrix“ für deutsch „Gebärmutter“ hervorzugehen. Sylvester benutzt Matrizen mit einer Zeile mehr als Spalten und betrachtet die „Determinanten“ der quadratischen Matrizen, die durch Streichen je einer Zeile entstehen. Die Determinante führen wir erst in 3.6.2.1 ein.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 1 & 8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 = 8 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{l} x_3 = -8 \\ x_2 = -2 \\ x_1 = 7 \end{array}$$

Ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten und seine Lösung mit dem Gauß-Algorithmus. Für gewöhnlich wird beim Anwenden des Gauß-Algorithmus ein Vertauschen der Zeilen gar nicht nötig sein. Gibt es weiter genausoviele Gleichungen wie Unbekannte, so werden wir für gewöhnlich so wie in obigem Beispiel genau eine Lösung erwarten dürfen.

Satz 3.1.1.13 (**Lösungsmengen inhomogener linearer Gleichungssysteme**). *Ist die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems nicht leer, so erhalten wir alle Lösungen, indem wir zu einer fest gewählten Lösung unseres Systems eine beliebige Lösung des zugehörigen homogenisierten Systems komponentenweise addieren.*

Beweis. Ist $c = (c_1, \ldots, c_m)$ eine Lösung unseres linearen Gleichungssystems und $d = (d_1, \ldots, d_m)$ eine Lösung des homogenisierten Systems, so ist offensichtlich die komponentenweise Summe $c \dot{+} d = (c_1 + d_1, \ldots, c_m + d_m)$ eine Lösung des ursprünglichen Systems. Ist andererseits $c' = (c'_1, \ldots, c'_m)$ eine weitere Lösung unseres linearen Gleichungssystems, so ist offensichtlich die komponentenweise Differenz $d = (c'_1 - c_1, \ldots, c'_m - c_m)$ eine Lösung des homogenisierten Systems, für die gilt $c' = c \dot{+} d$ mit unserer komponentenweisen Addition $\dot{+}$ aus 1.1.2.7. □

3.1.1.14 (**Unabhängigkeit der Stufenzahl vom Lösungsweg**). Die vorstehenden Überlegungen zeigen, wie man die Lösungsmenge jedes linearen Gleichungssystems bestimmen kann. Man erhält dabei nach 3.1.1.10 im Fall einer nichtleeren Lösungsmenge durch die Transformation auf Zeilenstufenform sogar eine ausgezeichnete Bijektion zwischen t-Tupeln von Elementen von K und besagter Lösungsmenge, für $t = m - r$ die Zahl der Variablen abzüglich der „Zahl der Stufen“, die eben jeder Vorgabe von x_j für j verschieden von den „Spaltenindizes der Stufen“ $j \neq s(1), \ldots, s(r)$ die durch diese Vorgabe eindeutig bestimmte Lösung zuordnet. Der Gauß-Algorithmus gibt uns allerdings nicht vor, welche Zeilenvertauschungen wir unterwegs verwenden sollen. Damit stellt sich die Frage, ob wir unabhängig von der Wahl dieser Zeilenvertauschungen stets bei derselben Matrix in Zeilenstufenform ankommen. Das ist nun zwar nicht richtig, aber dennoch sind die „Breiten der einzelnen Stufen“ alias die Spaltenindizes $s(i)$ der Stufen unabhängig von allen Wahlen. In der Tat lassen sie sich auch direkt beschreiben, indem wir im zugehörigen homogenisierten Gleichungssystem unsere Variablen von hinten durchgehen und jeweils fragen: Gibt es für jedes $(x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_m)$, das zu einer Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ergänzbar ist, nur ein x_j derart, daß auch $(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_m)$ zu einer Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ergänzbar ist? Genau dann lautet die Antwort „ja“, wenn in der j-ten Spalte eine neue Stufe beginnt.

3.1.1.15 (**Unabhängigkeit der Stufenzahl von der Variablenreihung**). Nun könnten wir auch vor dem Anwenden des Gauß-Algorithmus zuerst unsere Variablen umnummerieren alias die Spalten unserer Koeffizientenmatrix vertauschen. Wir erhielten wieder eine Bijektion zwischen u-Tupeln von Elementen von K mit der Lösungsmenge wie eben. Die Frage, der wir uns als nächstes zuwenden wollen, lautet nun: Gilt stets $u = t$, in anderen Worten, landen wir bei einer Zeilenstufenform mit derselben Zahl von Stufen, wenn wir zuerst die Spalten unseres Systems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \leftsquigarrow \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{l} x_3 \text{ freier Parameter,} \\ x_2 = x_3/4 \\ x_1 = 1 - (3/4)x_3 \end{array}$$

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten, dessen Lösungsmenge nach unser allgemeinen Theorie für jedes x_3 genau einen Punkt (x_1, x_2, x_3) enthält, und zwar haben wir wegen der zweiten Gleichung $x_2 = x_3/4$ und dann wegen der ersten Gleichung $x_1 = 1 - (3/4)x_3$, so daß die allgemeine Lösung lautet $(1 - (3/4)\lambda, \lambda/4, \lambda)$ für variables λ.

willkürlich vertauschen, bevor wir den Gauß-Algorithmus durchführen? Die Antwort lautet wieder „Ja“, aber hierzu ist mir kein ganz elementares Argument mehr eingefallen. Darüber war ich sogar ganz froh: Diese Frage kann so nämlich zur Motivation der Entwicklung der abstrakten Theorie der Vektorräume dienen, mit der wir an dieser Stelle beginnen. Wir führen in diesem Rahmen den auch in vielen anderen Zusammenhängen äußerst nützlichen Begriff der „Dimension“ eines „Vektorraums“ ein, und zeigen in 3.2.1.11, daß die Stufenzahl unabhängig von allen Wahlen als die „Dimension des Lösungsraums“ des zugehörigen homogenisierten Gleichungssystems beschrieben werden kann. Zunächst jedoch führen wir einige weitere Begriffe ein, die wir dabei und auch darüber hinaus noch oft brauchen werden.

3.1.2 Vektorräume

Definition 3.1.2.1. Ein **Vektorraum** V **über einem Körper** K ist ein Paar bestehend aus einer abelschen Gruppe $V = (V, \dot{+})$ und einer Abbildung

$$\begin{array}{ccc} K \times V & \to & V \\ (\lambda, \vec{v}) & \mapsto & \lambda\vec{v} \end{array}$$

derart, daß für alle $\lambda, \mu \in K$ und $\vec{v}, \vec{w} \in V$ die folgenden Identitäten gelten:

$$\begin{array}{ccc} \lambda(\vec{v} \dot{+} \vec{w}) & = & (\lambda\vec{v}) \dot{+} (\lambda\vec{w}) \\ (\lambda + \mu)\vec{v} & = & (\lambda\vec{v}) \dot{+} (\mu\vec{v}) \\ \lambda(\mu\vec{v}) & = & (\lambda\mu)\vec{v} \\ 1_K\vec{v} & = & \vec{v} \end{array}$$

Wie bei der Axiomatik eines Körpers 2.2.4.2 heißen die ersten beiden Gesetze die **Distributivgesetze**. In Analogie zu der Sprechweise bei Mengen mit Verknüpfung heißt das dritte Gesetz das **Assoziativgesetz**.

3.1.2.2. Die Elemente eines Vektorraums nennt man meist **Vektoren**. Die Elemente des Körpers heißen in diesem Zusammenhang oft **Skalare** und der Körper selber der **Grundkörper**. Die Abbildung $(\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda\vec{v}$ heißt die **Multiplikation mit Skalaren** oder auch die **Operation des Körpers** K **auf** V. Sie ist nicht zu verwechseln mit dem „Skalarprodukt“, das wir in 4.1.1.2 einführen und das aus zwei Vektoren einen Skalar macht. Ich habe oben aus didaktischen Gründen die Addition von Vektoren $\dot{+}$ notiert, um sie von der Addition von Körperelementen zu unterscheiden, aber das werde ich nicht lange durchhalten. Mit der auch in diesem Zusammenhang allgemein üblichen Konvention „Punkt vor Strich“ und der zu $+$ vereinfachten Notation für die Addition von Vektoren und der Abkürzung $1_K = 1$ für das multiplikativ neutrale Element des Grundkörpers können unsere

Vektorraumaxiome dann etwas übersichtlicher geschrieben werden als die Forderung, daß für alle Skalare λ, μ und alle Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ gelten möge

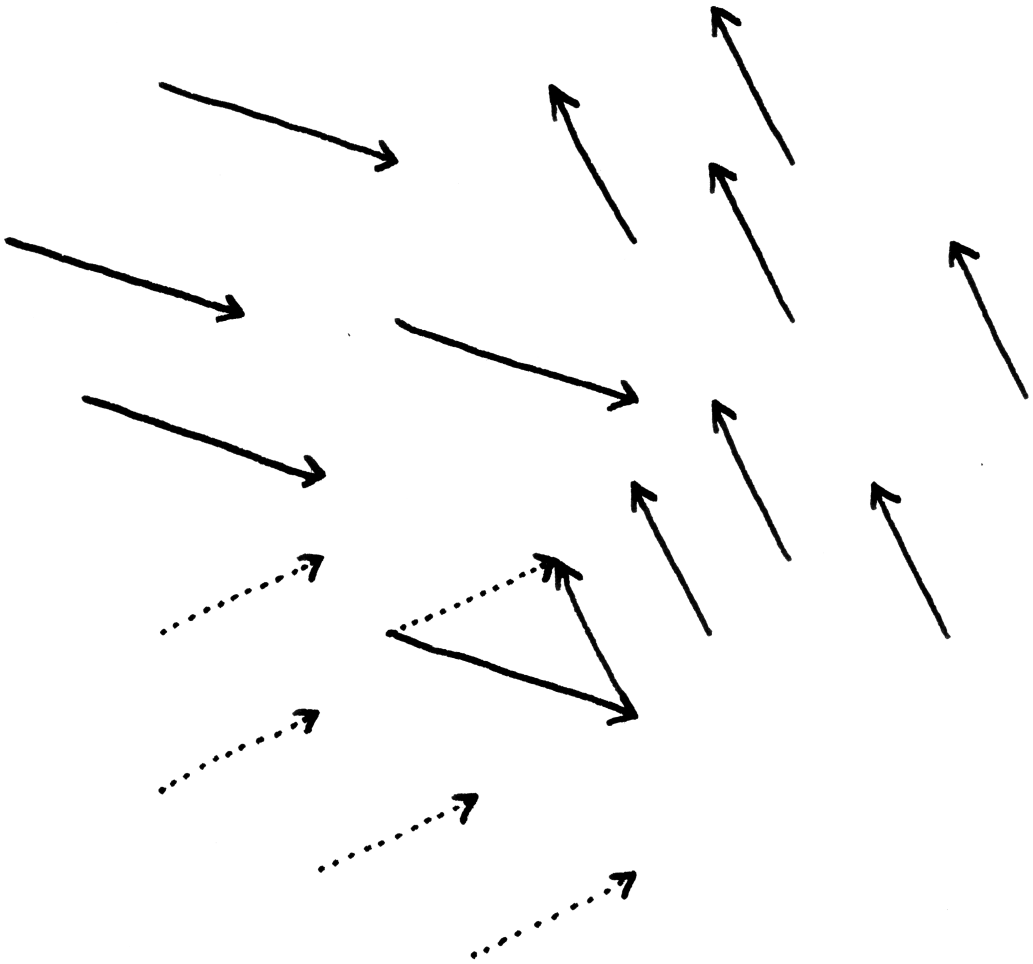
$$\begin{array}{rcl} \lambda(\vec{v}+\vec{w}) & = & \lambda\vec{v}+\lambda\vec{w} \\ (\lambda+\mu)\vec{v} & = & \lambda\vec{v}+\mu\vec{v} \\ \lambda(\mu\vec{v}) & = & (\lambda\mu)\vec{v} \\ 1\vec{v} & = & \vec{v} \end{array}$$

Ich habe aus didaktischen Gründen bis hierher Vektoren stets mit einem Pfeil notiert, das halte ich wohl etwas länger durch, aber auf Dauer werden Sie sich auch den Pfeil selbst dazudenken müssen. Das neutrale Element der abelschen Gruppe V notieren wir $\vec{0}$ und nennen es den **Nullvektor**. Die letzte Bedingung $1\vec{v} = \vec{v}$ schließt zum Beispiel den Fall aus, daß wir für V irgendeine von Null verschiedene abelsche Gruppe nehmen und dann einfach $\lambda\vec{v} = \vec{0}$ setzen für alle $\lambda \in K$ und $\vec{v} \in V$.

Beispiel 3.1.2.3 (**Die schmutzige Anschauung**). Ich stelle mir als Vektorraum gerne wie in 1.1.2.5 ausgeführt die Menge V aller Parallelverschiebungen der schmutzigen Ebene oder auch die Menge V der Parallelverschiebungen des schmutzigen Raums der Anschauung vor, mit der „Hintereinanderausführung“ als Addition und der offensichtlichen Multiplikation mit reellen Skalaren. Diese Mengen von Parallelverschiebungen nenne ich den **schmutzigen Richtungsraum** der Ebene beziehungsweise des Raums. Graphisch mag man diese Parallelverschiebungen alias Vektoren durch Pfeile in der Ebene oder oder im Raum darstellen und ihre Addition wie in nebenstehendem Bild veranschaulichen. Das ist nur leider im mathematischen Sinne kein recht eigentlich wohldefiniertes Beispiel: Schon die Frage, ob diese Parallelverschiebungen eigentlich „wohlunterschiedene Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens“ sind, und wie man sie eigentlich zu definieren hätte, scheint mir nicht so einfach und eindeutig zu beantworten. So bin ich in der schizophrenen Lage, daß mir dieses Beispiel einerseits besonders nahrhaft und motivierend scheint, daß es aber andererseits für unsere rein auf Mengenlehre aufgebaute aseptisch steril perfekte Mathematik zu schmutzig ist, um als echtes Beispiel durchzugehen.

Ergänzung 3.1.2.4. Wann immer ich einen Begriff mit dem Zusatz „der Anschauung“ oder „anschaulich“ oder „schmutzig“ versehe, soll gemeint sein, daß er nicht in einem mathematisch wie auch immer präzise definierten Sinne zu verstehen ist, also nicht als ein Gebilde der Mengenlehre, sondern eben anschaulich.

Beispiel 3.1.2.5 (**Funktionenräume als Vektorräume**). Gegeben eine Menge X und ein Körper K ist die Menge $\mathrm{Ens}(X, K)$ aller Abbildungen $X \to K$ ein K-Vektorraum, wenn man die Addition durch $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ erklärt und die Multiplikation mit Skalaren durch $(\lambda f)(x) := \lambda(f(x))$. Insbesondere erhält



Die Hintereinanderausführung der beiden Parallelverschiebungen der Tafel- oder hier vielmehr der Papierebene, die durch die durchgezogenen Pfeile dargestellt werden, wird die durch die gepunktelten Feile dargestellt.

so auch die Menge $\mathrm{Mat}(n \times m; K)$ aller $(n \times m)$-Matrizen mit Einträgen in einem Körper K aus 3.1.1.11 die Struktur eines K-Vektorraums.

Beispiel 3.1.2.6 (**Lösungsmengen als Vektorräume**). Gegeben ein homogenes lineares Gleichungssystem in n Variablen wird seine Lösungsmenge L ein K-Vektorraum, wenn wir sie mit der komponentenweisen Addition $\dot{+}$ und der komponentenweisen Multiplikation mit Skalaren versehen.

Ergänzung 3.1.2.7. Im Fall eines Schiefkörpers K muß man an dieser Stelle mehr aufpassen. Lösungen eines linearen Gleichungssystems bleiben dann nur nur Lösungen, wenn man sie von rechts mit Skalaren multipliziert. Das führt zur Erkenntnis, daß man in diesem Fall „Rechtsvektorräume“ und „Linksvektorräume“ unterscheiden muß und die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, bei dem die Koeffizienten von links an die Variablen daranmultipliziert werden, einen Rechtsvektorraum bildet.

Ergänzung 3.1.2.8 (**Ursprung der Terminologie**). Die Bezeichnung als „Vektor“ kommt von lateinisch „vehere“ für „fahren, transportieren“. Sie rührt von unserem Beispiel 1.1.2.5 der Gesamtheit aller Parallelverschiebungen der Ebene oder des Raums her, die ja in gewisser Weise Punkte transportieren. Auf Deutsch könnte man diese Intuition wiedergeben, indem man statt von Vektoren etwa von „Schiebern“ redet. Beim Gedanken an eine Vorlesung über die „Lehre von der Schieberei“ bin ich aber doch glücklicher mit der gewohnten, vom Latein geprägten Terminologie. Die Bezeichnung „Skalare“ für Elemente des zugrundeliegenden Körpers kommt von dem lateinischen Wort „scala“ für „Leiter“ und hat sich von dort über eine Bezeichnung für das Metermaß entwickelt zu einer Bezeichnung für das, was man auf einer Meßskala ablesen kann, als da heißt zu einer Bezeichnung für reelle Zahlen. In Mathematik und Physik werden nun aber nicht nur reelle Vektorräume betrachtet, und so überträgt man dann dieses Wort weiter und verwendet es auch im allgemeinen als Bezeichnung für die Elemente des jeweiligen Grundkörpers.

3.1.2.9 (**Produkt mit dem Skalar Null**). Gegeben ein Vektorraum V und ein Vektor $\vec{v} \in V$ gilt $0_K\vec{v} = \vec{0}$. Multipliziert man also einen beliebigen Vektor mit dem Skalar Null, erhält man stets den Nullvektor. In der Tat finden wir mit dem zweiten Distributivgesetz $0_K\vec{v} = (0_K + 0_K)\vec{v} = 0_K\vec{v} \dot{+} 0_K\vec{v}$ und Subtraktion von $0_K\vec{v}$ alias Addition seines Negativen $-0_K\vec{v}$ auf beiden Seiten liefert $\vec{0} = 0_K\vec{v}$.

3.1.2.10 (**Produkt mit dem Skalar minus Eins**). Gegeben ein Vektorraum V und ein Vektor $\vec{v} \in V$ gilt $(-1_K)\vec{v} = -\vec{v}$. Multipliziert man also in Worten das Negative der Eins des Grundkörpers mit einem beliebigen Vektor, so erhält man das Negative von besagtem Vektor. In der Tat finden wir mit der letzten und der zweiten Formel aus der Definition $\vec{v} \dot{+} (-1_K)\vec{v} = 1_K\vec{v} \dot{+} (-1_K)\vec{v} = (1_K + (-1_K))\vec{v} = 0_K\vec{v} = \vec{0}$. Damit ist $(-1_K)\vec{v}$ in der Tat das additive Inverse von $\vec{v}$.

Beispiel 3.1.2.11. Gegeben ein Körper K ist die abelsche Gruppe $V = K$ mit der durch die Multiplikation von K gegebenen Multiplikation mit Skalaren ein K-Vektorraum.

Beispiel 3.1.2.12. Gegeben ein Körper K wird jede einelementige Menge V vermittels der offensichtlichen Operationen zu einem K-Vektorraum. Wir sprechen dann von einem **Nullvektorraum**, weil er eben nur aus dem Nullvektor besteht, und verwenden oft auch den bestimmten Artikel und sprechen von *dem* Nullvektorraum, da er ja „im wesentlichen" eindeutig bestimmt ist. Wir bezeichnen diesen Vektorraum und allgemeiner die einelementige Gruppe gerne mit 0. Dieses Symbol muß in der Mathematik für die verschiedensten Dinge herhalten.

Beispiel 3.1.2.13. Die additive Gruppe $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist in offensichtlicher Weise ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Ist allgemeiner $\varphi : K \to L$ ein Körperhomomorphismus, so wird die additive Gruppe L ein K-Vektorraum vermittels der Multiplikation mit Skalaren $\lambda a := \varphi(\lambda)a$.

Beispiel 3.1.2.14 (**Prozentrechnung**). Bei der Prozentrechnung geht man stets implizit von einem eindimensionalen reellen Vektorraum aus. Wenn man etwa sagt, 80% einer Pralinenschachtel sei Luft, so mag man sich im formalen Rahmen dieser Vorlesung einen eindimensionalen reellen Vektorraum V denken, dessen Elemente gewisse „Volumina" sind, und darin einen Vektor $v \in V$, das „Volumen der Pralinenschachtel", und will sagen, daß $(80/100)v$ das in der Schachtel von Luft eingenommene Volumen ist. Oft gibt man den fraglichen eindimensionalen Vektorraum auh explizit an und spricht von **Volumenprozent** oder **Gewichtsprozent** oder dergleichen. Den Vektorraum der Volumina diskutieren wir noch ausführlich in 4.6.1.16. Es sollte aber auch hier schon zumindest anschaulich klar sein, daß man Volumina addieren und mit Skalaren multiplizieren kann und daß man so, wenn man formal auch noch negative Volumina zuläßt, einen eindimensionalen reellen Vektorraum erhält alias daß alle Rechenregeln aus unserer Definition eines Vektorraums 3.1.2.1 gelten.

Übungen

Übung 3.1.2.15 (**Produkt mit dem Nullvektor**). Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper K zeige man für alle $\lambda \in K$ die Identität $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. Weiter zeige man, daß aus $\lambda\vec{v} = \vec{0}$ folgt $\lambda = 0$ oder $\vec{v} = \vec{0}$.

Übung 3.1.2.16. Gegeben ein Körper K und ein K-Vektorraum V und ein Vektor $\vec{v} \in V$ eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gilt mit unserer Notation n_K aus 2.2.4.12 stets $n_K\vec{v} = n\vec{v}$ oder ausgeschrieben in unserer Notation 2.2.2.11 für iterierte Verknüpfungen $(n^+1_K)\vec{v} = n^+\vec{v}$. Hinweis: Die Fälle $n = 0$ und $n = (-1)$ dieser Aussage wurden bereits in 3.1.2.9 und 3.1.2.10 besprochen.

Ergänzende Übung 3.1.2.17. Für eine vorgegebene abelsche Gruppe $(V, +)$ gibt es höchstens eine Abbildung $\mathbb{Q} \times V \to V$ derart, daß sie mit dieser Abbildung als Multiplikation mit Skalaren ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum wird.

Ergänzende Übung 3.1.2.18. Eine Gruppe, in der jedes Element sein eigenes Inverses ist, kann auf genau eine Weise mit der Struktur eines Vektorraums über dem Körper mit zwei Elementen versehen werden. Ein Beispiel ist unsere Gruppe aus 2.2.2.19.

Übung 3.1.2.19. Gegeben eine Menge X und ein Körper K und ein K-Vektorraum V ist auch die Menge $\mathrm{Ens}(X, V)$ aller Abbildungen $X \to V$ ein K-Vektorraum, wenn man sie mit der Addition gegeben durch $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und mit der Multiplikation mit Skalaren gegeben durch $(\lambda f)(x) := \lambda(f(x))$ versieht. Das verallgemeinert unser Beispiel 3.1.2.5.

Ergänzende Übung 3.1.2.20. Ist $\varphi : L \to K$ ein Körperhomomorphismus und V ein K-Vektorraum, so wird die abelsche Gruppe V mit der durch die Formel $\lambda\vec{v} := \varphi(\lambda)\vec{v}$ erklärten Multiplikation mit Skalaren aus L ein L-Vektorraum. Man sagt dann, dieser L-Vektorraum entstehe durch **Restriktion der Skalare** aus dem K-Vektorraum V.

3.1.3 Endliche Produkte von Mengen

3.1.3.1 (**Längere kartesische Produkte**). Bis jetzt hatten wir nur das kartesische Produkt $X \times Y$ von zwei Mengen X und Y betrachtet. Ebenso kann man auch für mehr Mengen $X_1, \ldots, X_n$ das kartesische Produkt

$$X_1 \times \ldots \times X_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$$

einführen. Die Elemente von so einem Produkt bezeichnet man als **angeordnete n-Tupel** oder auch einfach als **Tupel**. In diesem Zusammenhang heißen 2-Tupel auch **Paare** oder genauer **angeordnete Paare** und 3-Tupel **Tripel** oder genauer **angeordnete Tripel**. Die x_i heißen die **Komponenten** unseres Tupels $(x_1, \ldots, x_n)$. Die Mengen X_i heißen die **Faktoren** unseres kartesischen Produkts. Wir vereinbaren, daß wir das „leere Produkt“ als die einelementige Menge interpretieren.

3.1.3.2. Im deutschsprachigen Raum verwendet man auf der Schule für Tupel vielfach auch die alternative Notation $(x_1| \ldots |x_n)$. Das geschieht, um Verwechslungen zwischen 2-Tupeln von natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen zu vermeiden, die ja im deutschsprachigen Raum als „Kommazahlen“ notiert werden.

3.1.3.3 (**Abbildungen in ein Produkt**). Für ein kartesisches Produkt von Mengen hat man stets die **Projektionsabbildungen** oder **Projektionen**

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{pr}_i : & X_1 \times \ldots \times X_n & \to & X_i \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$$

Wir erhalten dann für jede weitere Menge Z eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ens}(Z, X_1 \times \ldots \times X_n) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ens}(Z, X_1) \times \ldots \times \mathrm{Ens}(Z, X_n) \\ f & \mapsto & (\mathrm{pr}_1 \circ f, \ldots, \mathrm{pr}_n \circ f) \end{array}$$

zwischen Abbildungen in das Produkt und Tupeln von Abbildungen in seine Faktoren. Die Umkehrung dieser **kanonischen Bijektion** notieren wir sozusagen gar nicht. Gegeben Abbildungen $f_i : Z \to X_i$ notieren wir genauer die Abbildung $f : Z \to X_1 \times \ldots \times X_n$ von Z in das kartesische Produkt der X_i gegeben durch die Vorschrift $z \mapsto (f_1(z), \ldots, f_n(z))$ schlicht

$$f = (f_1, \ldots, f_n)$$

In der exponentiellen Schreibweise geschrieben liest sich unsere Bijektion ganz suggestiv als eine Bijektion $(X_1 \times \ldots \times X_n)^Z \xrightarrow{\sim} X_1^Z \times \ldots \times X_n^Z$. Besonders wichtig ist die **diagonale Einbettung** oder **Diagonale**

$$\begin{array}{rccc} \Delta := \Delta_X := (\mathrm{id}, \mathrm{id}) : & X & \to & X \times X \\ & x & \mapsto & (x, x) \end{array}$$

Vorschau 3.1.3.4 (**Abbildungen aus kartesischen Produkten**). Eine Abbildung $f : X_1 \times \ldots \times X_n \to Z$ von einem kartesischen Produkt in eine beliebige Menge Z nennen wir auch eine n**-Multiabbildung** und notieren sie gerne

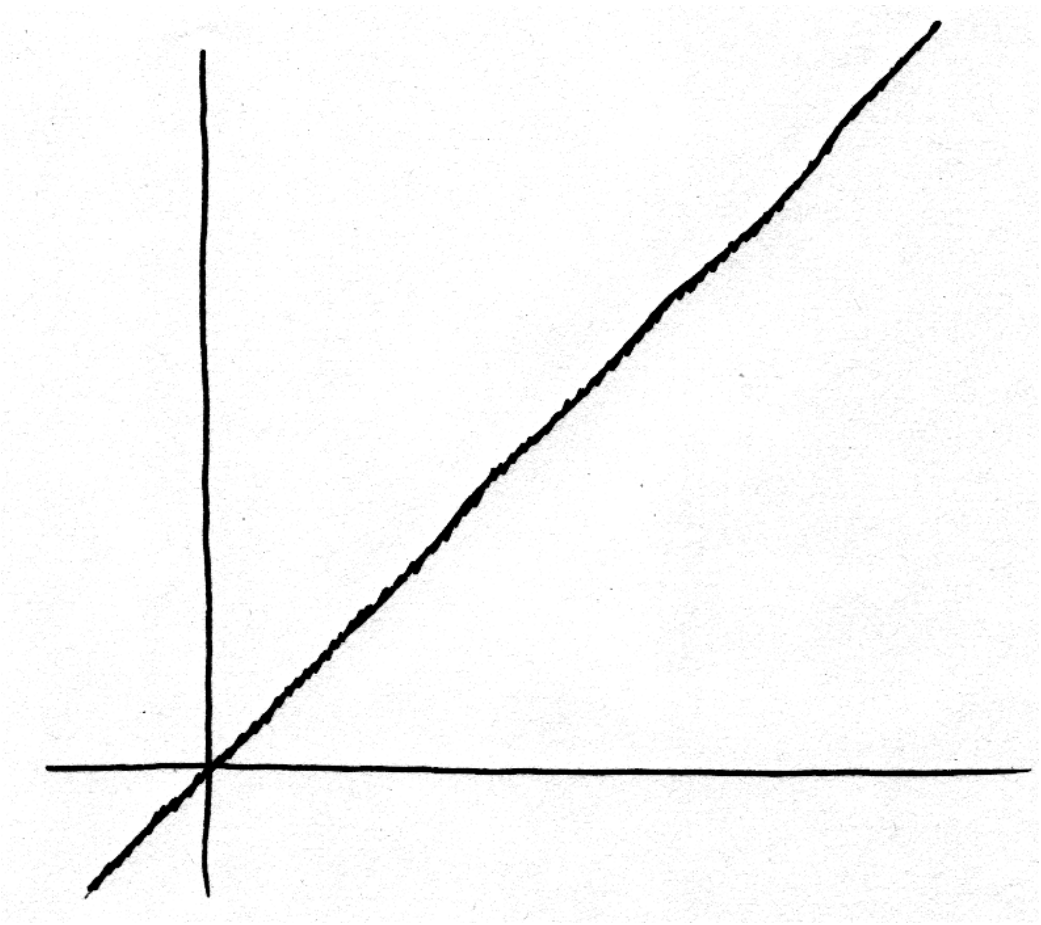
$$f : X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_n \to Z$$

Unter einer 0**-Multiabbildung nach** Z verstehen wir in diesem Kontext ein Element von Z. Solche Multiabbildungen lassen sich dann in offensichtlicher Weise „multiverknüpfen“, aber das soll erst in 18.1.2.12 weiter formalisiert werden.

Ergänzung 3.1.3.5 (**Kartesisches Produkt von Abbildungen**). Sind ein weiteres Produkt von der Form $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$ sowie Abbildungen $f_i : X_i \to Y_i$ gegeben, so können wir insbesondere die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \ldots \times X_n & \to & Y_1 \times \ldots \times Y_n \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) \end{array}$$

betrachten. Wir notieren sie $f_1 \times \cdots \times f_n := (f_1 \,\mathrm{pr}_1, \ldots, f_n \,\mathrm{pr}_n)$ mit der im Sinne der in 3.1.3.3 eingeführten Notation zu verstehenden rechten Seite. Man beachte, daß im allgemeinen keineswegs alle Abbildungen $X_1 \times \ldots \times X_n \to Y_1 \times \cdots \times Y_n$ von dieser Form sind. Das kartesische Produkt von Surjektionen ist stets wieder surjektiv. Das kartesische Produkt von Injektionen ist stets wieder injektiv.



Das Bild der diagonalen Einbettung $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, t)$.

Ergänzung 3.1.3.6 (**Assoziativität kartesischer Produkte**). Gegeben drei Mengen X, Y, Z mag man sich nun die Frage stellen, inwieweit die drei Mengen $(X \times Y) \times Z$, $X \times (Y \times Z)$ und $X \times Y \times Z$ übereinstimmen, und allgemeiner, inwieweit „das kartesische Produkt $\times$ assoziativ ist". Wir werden derartige Fragen später im Rahmen der Kategorientheorie ausführlicher diskutieren. Hier sei nur bemerkt, daß zum Beispiel alle unsere drei Tripelprodukte wohlbestimme Projektionen pr_X, pr_Y und pr_Z auf X, Y und Z haben und daß es eindeutig bestimmte Bijektionen zwischen ihnen gibt, die mit diesen drei Projektionen verträglich sind. Wegen dieser „Eindeutigkeit bis auf eindeutige Bijektionen" werden wir uns erlauben, die drei fraglichen Tripelprodukte schlicht als gleich anzusehen. In derselben Weise verfahren wir in analogen Situationen mit mehr Faktoren.

3.1.3.7 (**Einelementige Menge**). In derselben Weise sprechen auch mit einem bestimmten Artikel von „der" einelementigen Menge. Wir notieren sie manchmal ens, da es sich um das „finale Objekt der Kategorie Ens der Mengen" handelt, aber das brauchen Sie hier noch nicht zu verstehen. Das einzige Element der einelementigen Menge notieren wir gerne $*$ und haben also in Formeln

$$\mathrm{ens} = \{*\}$$

3.1.3.8 (**Tupel von Elementen einer Menge**). Das kartesische Produkt von n Kopien einer Menge X kürzt man meist ab mit

$$X^n$$

Die Elemente von X^n sind also n-Tupel von Elementen aus X. Es ist sinnvoll und allgemeine Konvention, diese Notation auf den Fall $n = 0$ dadurch auszudehnen, daß man X^0 als die einelementige Menge auffaßt, in Formeln $X^0 = \mathrm{ens}$, so daß wir für alle $n, m \geq 0$ eine kanonische Bijektion $X^n \times X^m \xrightarrow{\sim} X^{n+m}$ erhalten. Wenn ich Verwechslungen mit anderen Notationen befürchte, die Sie später kennenlernen werden, schreibe ich statt X^n auch ausführlicher $X^{\times n}$.

Beispiele 3.1.3.9 (**Der Vektorraum der n-Tupel**). Einige Beispiele für Vektorräume wurden bereits in 1.1.2 diskutiert. Besonders wichtig ist das Beispiel des Vektorraums

$$V = K^n$$

über einem vorgegebenen Körper K. Hier verwenden wir die Notation 3.1.3.8, die Elemente von K^n sind also n-Tupel von Elementen des Körpers K. Wir notieren die Komponenten dieser n-Tupel im folgenden der Übersichtlichkeit halber untereinander, nicht wie zuvor nebeneinander und durch Kommata getrennt. Die

Addition von Vektoren und Multiplikation mit Skalaren seien gegeben durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \dot{+} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$$

für $\lambda, v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n \in K$. Die Erste unserer Gleichungen definiert die Summe zweier n-Tupel, also die Addition in unserem Vektorraum $V = K^n$, indem sie diese durch die Addition im Körper K ausdrückt. Die zweite Gleichung leistet dasselbe für die Multiplikation mit Skalaren. An dieser Stelle gebe ich einen ersten Teil meiner didaktischen Notation auf und schreibe von nun an $+$ statt $\dot{+}$. Gegeben $\vec{v} \in K^n$ schreibe ich seine Komponenten $v_1, v_2, \ldots, v_n$ und versehe sie nicht mit Pfeilen, da sie ja Elemente des Grundkörpers sind. Wenn irgendwo einmal $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ stehen sollte, so sind nicht die n Komponenten eines n-Tupels $\vec{v}$ gemeint, sondern vielmehr n Vektoren eines Vektorraums. Sobald ich die Pfeil-Notation aufgegebe, muß der Leser aus dem Kontext erschließen, was im Einzelfall jeweils gemeint ist.

Übungen

Übung 3.1.3.10. Gegeben ein Körper K und K-Vektorräume $V_1, \ldots, V_n$ können wir das kartesische Produkt $V_1 \times \ldots \times V_n$ zu einem K-Vektorraum machen, indem wir die Addition sowie die Multiplikation mit Skalaren komponentenweise definieren. In Formeln sieht das dann so aus wie 3.1.3.9, nur daß wir den v_i und w_i Pfeile aufsetzen und statt $v_i, w_i \in K$ wie dort nun $\vec{v}_i, \vec{w}_i \in V_i$ nehmen müssen. Den so entstehenden Vektorraum notieren wir auch

$$V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$$

und nennen ihn das **Produkt** oder auch die **direkte Summe** der V_i. Insbesondere ist K^n die direkte Summe $K \oplus \ldots \oplus K$ von n Kopien des K-Vektorraums K.

Übung 3.1.3.11. Seien $f : X \to Y$ und $g : Z \to W$ Abbildungen und

$$f \times g : X \times Z \to Y \times W$$

ihr Produkt. Ist $f \times g$ surjektiv und gilt $W \neq \emptyset$, so ist f surjektiv. Ist $f \times g$ injektiv und gilt $Z \neq \emptyset$, so ist f injektiv.

3.1.4 Ordnungen und Teilordnungen*

3.1.4.1. Bei den Inhalten dieses Abschnitts hoffe ich, daß sie rechtzeitig in der Analysis besprochen werden, so daß sie in der linearen Algebra übersprungen werden können. Ich habe ihn aus 10.2.3 kopiert, wo zusätzlich noch Supremum und Infimum besprochen werden.

Definition 3.1.4.2. Eine **Relation** R auf einer Menge X ist eine Teilmenge $R \subset X \times X$ des kartesischen Produkts von X mit sich selbst, also eine Menge von Paaren von Elementen von X. Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir in diesem Zusammenhang meist xRy. Eine Relation R heißt eine **Ordnungsrelation** oder eine **Teilordnung** oder eine **partielle Ordnung**, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

1. **Transitivität:** $(xRy$ und $yRz) \Rightarrow xRz$;
2. **Antisymmetrie:** $(xRy$ und $yRx) \Rightarrow x = y$;
3. **Reflexivität:** xRx für alle $x \in X$.

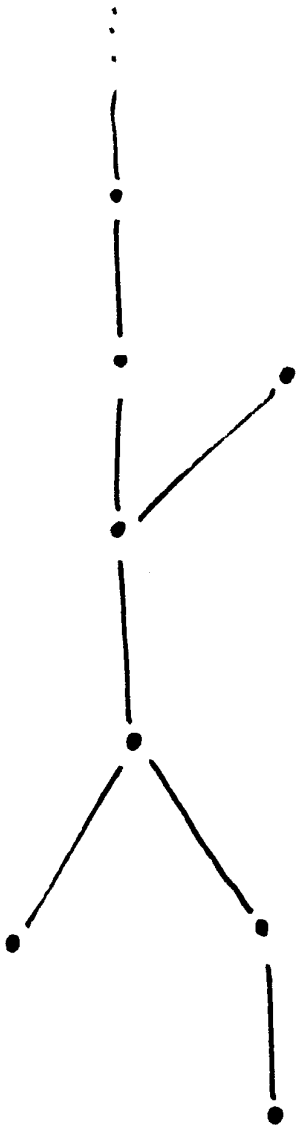
Eine Teilordnung heißt eine **Ordnung** oder **Anordnung**, wenn wir zusätzlich haben

4. **Totalität:** Für alle $x, y \in X$ gilt xRy oder yRx.

3.1.4.3 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißt eine Teilordnung auch eine **Halbordnung** oder kurz eine „Ordnung“. Wir verstehen jedoch unter einer Ordnung stets eine Ordnungsrelation, die auch die Eigenschaft der Totalität besitzt. Auf Englisch benutzt man für eine teilgeordnete Menge alias „partially ordered set“ gerne die Abkürzung **poset**. Eine Ordnung in unserem Sinne heißt in der Literatur auch eine **totale Ordnung** oder eine **lineare Ordnung**.

Vorschau 3.1.4.4. Allgemeiner versteht man unter einer **Relation** R **zwischen einer Menge** X **und einer Menge** Y eine Teilmenge $R \subset X \times Y$. In diesem Sinne sind dann auch unsere Abbildungen aus 2.1.4.2 spezielle Relationen. In Teilen der Literatur heißen derartige Relationen auch „Korrespondenzen“. Noch allgemeiner betrachtet man auch für $n \geq 0$ und Mengen $X_1, \ldots, X_n$ Teilmengen $R \subset X_1 \times \ldots \times X_n$ und nennt sie n**-stellige Relationen**, aber das ist für uns vorerst noch nicht relevant.

3.1.4.5. Bei einer Ordnungsrelation R schreibt man meist $x \leq y$ statt xRy und statt $x \leq y$ schreibt man dann oft auch $y \geq x$. Weiter kürzt man ($x \leq y$ und $x \neq y$) ab mit $x < y$ und ebenso ($x \geq y$ und $x \neq y$) mit $x > y$. Auf jeder angeordneten Menge definieren wir Verknüpfungen $\max$ und $\min$ in offensichtlicher Verallgemeinerung von 2.2.1.3.



Eine teilgeordnete Menge mit zwei minimalen und einem maximalen Element, die weder ein kleinstes noch ein größtes Element besitzt. Die Darstellung ist in der Weise zu verstehen, daß die fetten Punkte die Elemente unserer Menge bedeuten und daß ein Element größer ist als ein anderers genau dann, wenn es von diesem „durch einen aufsteigenden Weg erreicht werden kann“.

Definition 3.1.4.6. Sei $(Y, \leq)$ eine teilgeordnete Menge.

1. Ein Element $g \in Y$ heißt ein **größtes Element von** Y, wenn gilt $g \geq y \; \forall y \in Y$. Ein Element $g \in Y$ heißt ein **maximales Element von** Y, wenn es kein $y \in Y$ gibt mit $y > g$.

2. Ein Element $k \in Y$ heißt ein **kleinstes Element von** Y, wenn gilt $k \leq y \; \forall y \in Y$. Ein Element $k \in Y$ heißt ein **minimales Element von** Y, wenn es kein $y \in Y$ gibt mit $y < k$.

3.1.4.7. Jede teilgeordnete Menge besitzt höchstens ein größtes und höchstens ein kleinstes Element. Wir dürfen deshalb den bestimmten Artikel verwenden und von **dem** größten beziehungsweise kleinsten Element reden. Besitzt eine teilgeordnete Menge ein größtes beziehungsweise ein kleinstes Element, so ist dies auch ihr einziges maximales beziehungsweise minimales Element. Im allgemeinen kann es jedoch maximale beziehungsweise minimale Elemente in großer Zahl geben, zumindest dann, wenn unsere Teilordnung keine Anordnung ist. Es kann auch durchaus passieren, daß es überhaupt kein minimales oder maximales Element gibt, und zwar selbst dann, wenn unsere teilgeordnete Menge nicht die leere Menge ist.

3.1.4.8. Gegeben teilgeordnete Mengen $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ versteht man unter einem **Homomorphismus von teilgeordneten Mengen** oder gleichbedeutend einer **monoton wachsenden Abbildung** eine Abbildung $\phi : X \to Y$ mit $x \leq z \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(z)$. Wie immer erklärt man einen Isomorphismus als einen Homomorphismus ϕ mit der Eigenschaft, daß es einen Homomorphismus ψ in die Gegenrichtung gibt derart, daß $\psi \circ \phi$ und $\phi \circ \psi$ die Identität sind. Man beachte, daß in diesem Fall ein bijektiver Homomorphismus keineswegs ein Isomorphismus zu sein braucht.

3.1.5 Untervektorräume

Definition 3.1.5.1. Eine Teilmenge U eines Vektorraums V heißt ein **Untervektorraum** oder **Teilraum**, wenn U den Nullvektor enthält und wenn aus $\vec{u}, \vec{v} \in U$ und $\lambda \in K$ folgt $\vec{u} + \vec{v} \in U$ sowie $\lambda \vec{u} \in U$.

3.1.5.2. Statt zu fordern, daß unsere Teilmenge den Nullvektor enthält, reicht es wegen 3.1.2.9 schon aus, in obiger Definition zu fordern, daß unsere Teilmenge nicht leer ist. Diese Definitionsvariante wird oft vorgezogen, da sie zumindest prinzipiell leichter nachzuprüfen ist. Ich mag sie nicht, da sie noch ferner von der „eigentlich richtigen Definition“ ist, die ich in der folgenden Bemerkung erläutern will.

Ergänzung 3.1.5.3 (**Untervektorräume vom höheren Standpunkt**). Die vom höheren Standpunkt aus „richtige“ Definition eines Untervektorraums lautet wie folgt: Sei K ein Körper. Eine Teilmenge eines K-Vektorraums heißt ein Untervektorraum, wenn sie so mit der Struktur eines K-Vektorraums versehen werden kann, daß die Einbettung ein „Homomorphismus K-Vektorräumen“ wird. Ich kann diese „bessere“ Definition hier noch nicht geben, da wir Homomorphismen von K-Vektorräumen erst in 3.2.1.1 kennenlernen. Sie ist leider auch komplizierter. Sie scheint mir dennoch besser, da man in derselben Weise auch korrekte Definitionen von Untermonoiden, Untergruppen, Unterkörpern und Unter-was-nicht-noch-all-für-Strukturen erhält, die Sie erst später kennenlernen werden. Genaueres diskutieren wir in 4.7.3.12.

3.1.5.4 (**Lösungsmengen als Untervektorräume**). Unter einem homogenen linearen Gleichungssystem über einem gegebenen Körper K versteht man, wie in 3.1.1.5 besprochen, ein System von Gleichungen der Gestalt

$$\begin{array}{lcll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1m}x_m & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2m}x_m & = 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \dots & +a_{nm}x_m & = 0 \end{array}$$

Die Homogenität bedeutet, daß rechts nur Nullen stehen. Die Lösungsmenge eines solchen homogenenen Gleichungssystems ist offensichtlich ein Untervektorraum $L \subset K^m$.

3.1.5.5 (**Untervektorräume des schmutzigen Richtungsraums der Ebene**). Das nun folgende Geschwafel darf nicht als Teil des formalen Aufbaus der Theorie mißverstanden werden. Ich erinnere an den schmutzigen Richtungsraum 3.1.2.3 der Ebene alias die Menge aller Parallelverschiebungen der Ebene mit ihrer Struktur als reeller Vektorraum. Seine Untervektorräume sind (1) der Nullraum, (2) die Teilmengen, die aus allen Verschiebungen bestehen, die eine vorgegebene Gerade in sich selbst überführen, und (3) der ganze Richtungsraum. Will man diese Untervektorräume graphisch darstellen, ist es hilfreich, einen festen Punkt der Ebene willkürlich als „Ursprung“ auszuzeichnen und die Menge derjenigen Punkte zu schwarz zu machen, die wir aus diesem festen Punkt durch Verschiebungen mit Vektoren unseres Untervektorraums erhalten können. Dann entsprechen die Untervektorräume den folgenden Teilmengen der Ebene: (1) Der einelementigen Teilmenge, die nur aus unserem Ursprung besteht, (2) allen Geraden, die unseren Ursprung enthalten, und (3) der ganzen Ebene.

3.1.5.6 (**Untervektorräume des schmutzigen Richtungsraums des Raums**). Das nun folgende Geschwafel darf nicht als Teil des formalen Aufbaus der Theorie mißverstanden werden. Ich erinnere an den schmutzigen Richtungsraum 3.1.2.3

des Raums alias die Menge aller Parallelverschiebungen des Raums mit ihrer Struktur als reeller Vektorraum. Seine Untervektorräume sind (1) der Nullraum, der nur aus der Identitätsverschiebung besteht, (2) die Teilmengen, die aus allen Verschiebungen bestehen, die eine vorgegebene Gerade in sich selbst überführen, (3) die Teilmengen, die aus allen Verschiebungen bestehen, die eine vorgegebene Ebene in sich selbst überführen, und (4) der ganze Richtungsraum.

Proposition 3.1.5.7 (Von einer Teilmenge erzeugter Untervektorraum). *Gegeben eine Teilmenge T eines Vektorraums V über einem Körper K gibt es unter allen Untervektorräumen von V, die T umfassen, einen kleinsten Untervektorraum*

$$\langle T \rangle = \langle T \rangle_{\text{lin}} = \langle T \rangle_K \subset V$$

Er kann beschrieben werden als die Menge aller Vektoren $\alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_r \vec{v}_r$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$ und $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in T$ zusammen mit dem Nullvektor im Fall $T = \emptyset$.

3.1.5.8. Ein Ausdruck der Gestalt $\alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_r \vec{v}_r$ heißt eine **Linearkombination** der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$. Hierbei sind nur endliche Summen erlaubt. Der kleinste T umfassende Untervektorraum $\langle T \rangle \subset V$ heißt der **von T erzeugte Untervektorraum** Untervektorraum oder der **von T aufgespannte Untervektorraum** oder auch das **Erzeugnis von T** oder der **Spann von T** oder die **lineare Hülle von T**. Wenn wir den Nullvektor als die „leere Linearkombination von $r = 0$ Vektoren“ verstehen, was hiermit vereinbart sei, so besteht das Erzeugnis von T demnach auch im Fall $T = \emptyset$ genau aus allen Linearkombinationen von Vektoren aus T.

Ergänzung 3.1.5.9. Andere übliche Notationen für den von einer Teilmenge T eines Vektorraums erzeugten Untervektorraum sind $\operatorname{span}(T)$ und $\operatorname{lin}(T)$.

Beweis. Es ist klar, daß die Linearkombinationen von Vektoren aus T einen Untervektorraum von V bilden, der T umfaßt. Es ist ebenso klar, daß jeder Untervektorraum von V, der T umfaßt, auch alle Linearkombinationen von Vektoren aus T enthalten muß. □

Definition 3.1.5.10. Eine Teilmenge eines Vektorraums heißt ein **Erzeugendensystem** unseres Vektorraums, wenn ihr Erzeugnis der ganze Vektorraum ist. Ein Vektorraum, der ein endliches Erzeugendensystem besitzt, heißt **endlich erzeugt**. Manche Autoren verwenden gleichbedeutend die vielleicht noch präzisere Terminologie **endlich erzeugbar**.

Beispiel 3.1.5.11 (**Erzeugnis in der schmutzigen Anschauung**). Ich erinnere an unsere Identifikation 3.1.5.6 des schmutzigen Vektorraums aller Parallelverschiebungen des Raums mit der Menge aller Punkte des Raums durch Auszeichnung eines festen Punktes als Ursprung. Dem Erzeugnis des Nullvektors entspricht unter dieser Identifikation die nur aus dem Ursprung bestehende Teilmenge; dem

Erzeugnis eines von Null verschiedenen Vektors entspricht die anschauliche Gerade durch den Ursprung und den Endpunkt des Pfeils, der vom Ursprung ausgehend unseren Vektor darstellt; und dem Erzeugnis zweier Vektoren, von denen keiner ein Vielfaches des anderen ist, entspricht die anschauliche Ebene, auf der unser fester Punkt und die Endpunkte der beiden Pfeile liegen, die vom Ursprung ausgehend unsere Vektoren darstellen.

3.1.5.12 (**Schnitt von Untervektorräumen**). Der Schnitt von zwei Untervektorräumen eines gegebenen Vektorraums ist offensichtlich wieder ein Untervektorraum.

Definition 3.1.5.13. Gegeben eine Menge X erinnere ich an die Menge aller Teilmengen $\mathcal{P}(X) := \{U \mid U \subset X\}$ von X, die sogenannte **Potenzmenge von** X. Da es mich verwirrt, über Mengen von Mengen zu reden, werde ich Teilmengen von $\mathcal{P}(X)$ nach Möglichkeit als **Systeme von Teilmengen von** X ansprechen. Gegeben ein solches Mengensystem $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ bildet man zwei neue Teilmengen von X, den **Schnitt** und die **Vereinigung** der Mengen aus unserem System $\mathcal{U}$, durch die Vorschriften

$$\begin{aligned} \textstyle\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U &:= \{x \in X \mid \text{ Es gibt } U \in \mathcal{U} \text{ mit } x \in U\} \\ \textstyle\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U &:= \{x \in X \mid \text{ Für alle } U \in \mathcal{U} \text{ gilt } x \in U\} \end{aligned}$$

Insbesondere ist der Schnitt über das leere System von Teilmengen von X ganz X und die Vereinigung über das leere System von Teilmengen von X die leere Menge. Um den Schnitt über ein leeres Mengensystem zu bilden, muß man also spezifizieren, das leere System von Teilmengen welcher Menge man nun betrachtet. Bei allen anderen Operationen kommt es dahingegen nicht darauf an.

3.1.5.14 (**Erzeugnis als Schnitt**). Jeder Schnitt von Untervektorräumen eines Vektorraums ist offensichtlich wieder ein Untervektorraum. Betrachten wir für eine Teilmenge T eines Vektorraums V über einem Körper K den Schnitt aller Untervektorräume von V, die T umfassen, so erhalten wir offensichtlich den kleinsten Untervektorraum von V, der T umfaßt. Wir erhalten so einen von 3.1.5.7 unabhängigen Beweis für die Existenz solch eines kleinsten Untervektorraums. Dieser Beweis hat den Vorteil, sich leichter auf andere Arten von Strukturen verallgemeinern zu lassen.

Übungen

Übung 3.1.5.15. Sei K ein Körper. Man zeige, daß der K-Vektorraum K genau zwei Untervektorräume besitzt.

Ergänzende Übung 3.1.5.16. Eine Teilmenge eines Vektorraums heißt ganz allgemein eine **Hyperebene** oder präziser **lineare Hyperebene**, wenn unsere Teilmenge ein echter Untervektorraum ist, der zusammen mit einem einzigen weiteren Vektor unseren ursprünglichen Vektorraum erzeugt. Man zeige, daß eine Hyperebene sogar zusammen mit *jedem* Vektor außerhalb besagter Hyperebene unseren ursprünglichen Vektorraum erzeugt.

Übung 3.1.5.17. Gegeben ein Vektorraum über dem Körper mit zwei Elementen ist jede Untergruppe bereits ein Untervektorraum.

Übung 3.1.5.18. Sei V ein Vektorraum mit zwei Untervektorräumen U, W. Ist $U \cup W$ ein Untervektorraum, so gilt $U \subset W$ oder $W \subset U$.

3.1.6 Lineare Unabhängigkeit und Basen

Definition 3.1.6.1. Eine Teilmenge L eines Vektorraums heißt **linear unabhängig**, wenn für paarweise verschiedene Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in L$ und beliebige Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$ aus $\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_r\vec{v}_r = \vec{0}$ bereits folgt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$.

3.1.6.2. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß keiner der Vektoren unserer Teilmenge **redundant** ist in dem Sinne, daß er sich als eine Linearkombination der anderen schreiben läßt. Der Nullvektor ist dabei in jeder Teilmenge redundant: Selbst wenn er der einzige Vektor ist, läßt er sich noch als die leere Linearkombination schreiben.

Definition 3.1.6.3. Eine Teilmenge L eines Vektorraums heißt **linear abhängig**, wenn sie nicht linear unabhängig ist, wenn es also ausgeschrieben paarweise verschiedene Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in L$ und Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$ gibt derart, daß nicht alle α_i Null sind und dennoch gilt $\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_r\vec{v}_r = \vec{0}$.

Beispiele 3.1.6.4. Die leere Menge ist in jedem Vektorraum linear unabhängig. Eine einelementige Teilmenge ist linear unabhängig genau dann, wenn sie nicht aus dem Nullvektor besteht: Für das Produkt des Nullvektors mit dem Skalar 1 gilt nämlich $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$, und nach unseren Annahmen gilt in einem Körper stets $1 \neq 0$, also ist die aus dem Nullvektor bestehende Menge nicht linear unabhängig. Daß jede andere einelementige Teilmenge linear unabhängig ist, folgt andererseits aus unserer Erkenntnis 3.1.2.15, daß das Produkt von einem Vektor mit einem Skalar nur dann Null ist, wenn entweder der Vektor Null ist oder der Skalar.

Beispiel 3.1.6.5. Denken wir uns wie in 3.1.5.6 den schmutzigen Raum der Anschauung mit einem ausgezeichneten Ursprung als reellen Vektorraum, so sind drei Vektoren linear unabhängig genau dann, wenn sie nicht „zusammen mit unserem Ursprung in einer anschaulichen Ebene liegen“.

Definition 3.1.6.6. Eine **Basis eines Vektorraums** ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

Beispiel 3.1.6.7. Denken wir uns wie in 3.1.5.6 den schmutzigen Raum der Anschauung mit einem ausgezeichneten Ursprung als reellen Vektorraum, so ist jede Menge von drei Vektoren, die nicht zusammen mit unserem Ursprung in einer anschaulichen Ebene liegen, eine Basis. Die leere Menge ist eine Basis des Nullvektorraums.

3.1.6.8. Gegeben Mengen A und I bezeichnet man eine Abbildung $I \to A$ ganz allgemein auch als eine **durch I indizierte Familie von Elementen von A** und benutzt die Notation

$$(a_i)_{i \in I}$$

Diese Sprechweise und Notation für Abbildungen verwendet man insbesondere dann, wenn man der Menge I eine untergeordnete Rolle zugedacht hat. Im Fall $I = \emptyset$ spricht man von der **leeren Familie** von Elementen von A.

3.1.6.9 (**Linear unabhängige Familien**). Manchmal ist es praktisch und führt zu einer übersichtlicheren Darstellung, Varianten unserer Begriffe zu verwenden, die sich statt auf Teilmengen unseres Vektorraums auf Familien von Vektoren $(\vec{v}_i)_{i \in I}$ beziehen. Eine derartige Familie heißt ein Erzeugendensystem, wenn die Menge $\{\vec{v}_i \mid i \in I\}$ ein Erzeugendensystem ist. Sie heißt **linear unabhängig** oder ganz pedantisch **linear unabhängig als Familie**, wenn für beliebige paarweise verschiedene Indizes $i(1), \ldots, i(r) \in I$ und beliebige Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$ aus $\alpha_1 \vec{v}_{i(1)} + \ldots + \alpha_r \vec{v}_{i(r)} = \vec{0}$ bereits folgt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$. Der wesentliche Unterschied zur Begrifflichkeit für Teilmengen liegt darin, daß bei einer Familie ja für verschiedene Indizes die zugehörigen Vektoren durchaus gleich sein könnten, was aber durch die Bedingung der linearen Unabhängigkeit dann doch wieder ausgeschlossen wird. Eine Familie von Vektoren, die nicht linear unabhängig ist, nennen wir eine **linear abhängige Familie**. Eine erzeugende und linear unabhängige Familie nennt man wieder eine **Basis** oder ausführlicher eine **durch $i \in I$ indizierte Basis**.

3.1.6.10. Besonders oft werden wir später Basen betrachten, die durch eine Menge der Gestalt $\{1, \ldots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ indiziert sind. Hier ist dann der wesentliche Unterschied zu einer Basis im Sinne von 3.1.6.6, daß wir zusätzlich festlegen, welcher Basisvektor der Erste, welcher der Zweite und so weiter sein soll. In der Terminologie aus 3.1.4 bedeutet das gerade, daß wir eine Anordnung auf unserer Basis festlegen. Wollen wir das besonders hervorheben, so sprechen wir von einer **angeordneten Basis**.

Beispiel 3.1.6.11. Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten in unserem Vektorraum K^n der n-Tupel die Vektoren

$$\vec{\mathrm{e}}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

mit einer Eins an der i-ten Stelle und Nullen sonst. Dann bilden $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ eine angeordnete Basis von K^n, die sogenannte **Standardbasis** des K^n. Wir notieren diese Standardbasis $\mathcal{S}(n)$.

Satz 3.1.6.12 (über Linearkombinationen von Basiselementen). *Seien V ein Vektorraum über einem Körper K und $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in V$ Vektoren. Genau dann ist die Familie der $\vec{v}_i$ eine Basis von V, wenn das Auswerten von Linearkombinationen eine Bijektion $\Phi : K^r \xrightarrow{\sim} V$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \mapsto \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_r\vec{v}_r$ liefert.*

3.1.6.13. Bezeichnet $\mathcal{A} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)$ unsere angeordnete Familie, so notieren wir unsere Abbildung auch $\Phi = \Phi_{\mathcal{A}} : K^r \to V$.

Beweis. Ausführlicher gilt für unsere Abbildung Φ sogar:

$$\begin{array}{lcllcl}
(\vec{v}_i)_{1\le i\le r} \text{ ist Erzeugendensystem} & \Leftrightarrow & \Phi \text{ ist eine Surjektion} & K^r & \twoheadrightarrow & V \\
(\vec{v}_i)_{1\le i\le r} \text{ ist linear unabhängig} & \Leftrightarrow & \Phi \text{ ist eine Injektion} & K^r & \hookrightarrow & V \\
(\vec{v}_i)_{1\le i\le r} \text{ ist Basis} & \Leftrightarrow & \Phi \text{ ist eine Bijektion} & K^r & \xrightarrow{\sim} & V
\end{array}$$

Hier folgt die erste Äquivalenz direkt aus den Definitionen. Um bei der zweiten Äquivalenz die Implikation $\Leftarrow$ einzusehen, muß man nur bemerken, daß Φ den Nullvektor auf Null wirft und folglich kein anderer Vektor aus K^r von Φ auf Null geworfen werden kann. Um bei der zweiten Äquivalenz die Implikation $\Rightarrow$ einzusehen, argumentieren wir durch Widerspruch: Wäre Φ nicht injektiv, so gäbe es $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \neq (\beta_1, \ldots, \beta_r)$ mit demselben Bild $\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_r\vec{v}_r = \beta_1\vec{v}_1 + \ldots + \beta_r\vec{v}_r$. Dann aber wäre

$$(\alpha_1 - \beta_1)\vec{v}_1 + \ldots + (\alpha_r - \beta_r)\vec{v}_r = \vec{0}$$

eine nichttriviale Darstellung der Null als Linearkombination der $\vec{v}_i$ und dann könnten unsere Vektoren nicht linear unabhängig gewesen sein. Die letzte Äquivalenz schließlich ist eine direkte Konsequenz der ersten beiden. □

Satz 3.1.6.14 (Extremalcharakterisierungen von Basen). *Für eine Teilmenge eines Vektorraums sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Teilmenge ist eine Basis alias ein linear unabhängiges Erzeugendensystem;*
2. *Unsere Teilmenge ist minimal unter allen Erzeugendensystemen;*
3. *Unsere Teilmenge ist maximal unter allen linear unabhängigen Teilmengen.*

3.1.6.15. Die Begriffe minimal und maximal sind hier zu verstehen im Sinne von 3.1.4.6 in Bezug auf Inklusionen zwischen Teilmengen, nicht etwa in Bezug auf

die Zahl der Elemente. Um das zu betonen, spricht man auch gerne von einem **verkürzbaren Erzeugendensystem**, wenn man eben daraus noch so einen Vektor weglassen kann, daß es ein Erzeugendensystem bleibt, und von einer **verlängerbaren linear unabhängigen Teilmenge**, wenn man so einen Vektor dazunehmen kann, daß sie linear unabhängig bleibt. Ein minimales Erzeugendensystem nennen wir folgerichtig auch ein **unverkürzbares Erzeugendensystem** und eine maximale linear unabhängige Teilmenge eine **unverlängerbare linear unabhängige Teilmenge**.

3.1.6.16 (**Existenz von Basen**). Unsere Minimalcharakterisierung 3.1.6.14 von Basen impliziert insbesondere, daß jeder endlich erzeugte Vektorraum eine endliche Basis besitzt: Wir lassen einfach aus einem endlichen Erzeugendensystem so lange Vektoren weg, bis wir bei einem unverkürzbaren Erzeugendensystem angekommen sind. Mit raffinierteren Methoden der Mengenlehre kann man stärker den **Basisexistenzsatz** zeigen, nach dem überhaupt jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Wir diskutieren das in 3.1.9.20.

Beweis. (1⇔2) Es gilt zu zeigen: Ein Erzeugendensystem ist linear unabhängig genau dann, wenn es unverkürzbar ist. Es ist gleichbedeutend zu zeigen: Ein Erzeugendensystem ist linear abhängig genau dann, wenn es verkürzbar ist. Ist $E \subset V$ ein Erzeugendensystem und ist E linear abhängig, so gilt eine Relation $\lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_r\vec{v}_r = \vec{0}$ mit $r \geq 1$, mit den $\vec{v}_i \in E$ paarweise verschieden und mit allen $\lambda_i \neq 0$, aus der wir folgern

$$\vec{v}_1 = -\lambda_1^{-1}\lambda_2\vec{v}_2 - \ldots - \lambda_1^{-1}\lambda_r\vec{v}_r \in \langle E\backslash\vec{v}_1\rangle$$

Damit ist auch $E\backslash\vec{v}_1$ bereits ein Erzeugendensystem und E war verkürzbar. Ist umgekehrt E verkürzbar, so gibt es $\vec{v} \in E$ derart, daß $E\backslash\vec{v}$ immer noch ein Erzeugendensystem ist. Insbesondere existiert eine Darstellung

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n$$

mit $n \geq 0$ und $\vec{v}_i \in E\backslash\vec{v}$ paarweise verschieden. Daraus folgt $\vec{v} - \lambda_1\vec{v}_1 - \ldots - \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$ und E war linear abhängig.

(1⇔3) Es gilt zu zeigen: Eine linear unabhängige Teilmenge ist ein Erzeugendensystem genau dann, wenn sie unverlängerbar ist. Wir argumentieren wieder durch Widerspruch. Ist $L \subset V$ linear unabhängig und kein Erzeugendensystem, so ist für jedes $\vec{v} \in V\backslash\langle L\rangle$ auch $L \cup \{\vec{v}\}$ linear unabhängig und L war verlängerbar. Ist umgekehrt L verlängerbar, so gibt es einen Vektor $\vec{v}$ derart, daß auch $L \cup \{\vec{v}\}$ linear unabhängig ist, und dann kann L kein Erzeugendensystem gewesen sein, denn dieser Vektor $\vec{v}$ kann nicht zu seinem Erzeugnis gehört haben. □

Satz 3.1.6.17 (**Extremalcharakterisierungen von Basen, Variante**). *Sei V ein Vektorraum.*

1. *Ist $L \subset V$ eine linear unabhängige Teilmenge und ist E minimal unter allen Erzeugendensystemen unseres Vektorraums mit $E \supset L$, so ist E eine Basis unseres Vektorraums V;*

2. *Ist $E \subset V$ ein Erzeugendensystem und ist L maximal unter allen linear unabhängigen Teilmengen unseres Vektorraums mit $L \subset E$, so ist L eine Basis unseres Vektorraums V.*

3.1.6.18. Die Begriffe minimal und maximal sind hier genau wie in 3.1.6.14 zu verstehen im Sinne von 3.1.4.6 in Bezug auf Inklusionen zwischen Teilmengen, nicht etwa in Bezug auf die Zahl ihrer Elemente.

Beweis. (1) Wäre E keine Basis, so gäbe es zwischen seinen Vektoren eine nichttriviale Relation $\lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_r\vec{v}_r = \vec{0}$ mit $r \geq 1$, den $\vec{v}_i \in E$ paarweise verschieden und allen $\lambda_i \neq 0$. Hier können nicht alle $\vec{v}_i$ zu L gehören, da das ja linear unabhängig angenommen war. Ein $\vec{v}_i$ gehört also zu $E \backslash L$ und kann als Linearkombination der anderen Elemente von E geschrieben werden. Dann aber ist $E \backslash \{\vec{v}_i\}$ auch schon ein Erzeugendensystem und E war nicht minimal.

(2) Wäre L keine Basis, so wäre L kein Erzeugendensystem und es gäbe notwendig auch einen Vektor $\vec{v} \in E$, der nicht im Erzeugnis von L läge. Nehmen wir ihn zu L hinzu, so erhalten wir eine echt größere linear unabhängige Teilmenge und L war nicht maximal. □

3.1.6.19 (**Lineare Unabhängigkeit und Erzeugen bei abelschen Gruppen**). In der Hoffnung, daß es zum Verständnis beiträgt, will ich kurz ausführen, inwiefern die Analoga der vorhergehenden Aussagen im Fall abelscher Gruppen im allgemeinen nicht mehr gelten. Eine Teilmenge L einer abelschen Gruppe M heißt **linear unabhängig**, wenn für beliebige paarweise verschiedene Elemente $m_1, \ldots, m_r \in L$ und beliebige ganze Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{Z}$ aus $\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_r m_r = 0$ bereits folgt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$. Sie heißt ein **Erzeugendensystem**, wenn sich jedes Gruppenelement als endliche Linearkombination von Elementen von L mit ganzzahligen Koeffizienten schreiben läßt. Sie heißt eine **Basis**, wenn sie ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist. In der zweielementigen Gruppe ist dann die leere Menge die einzige linear unabhängige Teilmenge und das Komplement der Null das einzige minimale Erzeugendensystem und es gibt keine Basis. Weiter besitzt abelsche Gruppe $\mathbb{Z}$ zwar eine Basis, etwa die Menge $\{1\}$, aber mit $\{2, 3\}$ auch ein minimales Erzeugendensystem, das nicht linear unabhängig ist ist, und mit $\{2\}$ eine maximale linear unabhängige Teilmenge, die kein Erzeugendensystem ist.

Übungen

Übung 3.1.6.20. Eine zweielementige Teilmenge eines Vektorraums ist linear unabhängig genau dann, wenn keiner ihrer beiden Vektoren ein Vielfaches des anderen ist.

Übung 3.1.6.21. Eine Teilmenge eines Vektorraums ist linear abhängig genau dann, wenn sich mindestens einer ihrer Vektoren als eine Linearkombination der übrigen schreiben läßt.

Übung 3.1.6.22. Man zeige, daß im Vektorraum $\mathrm{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ das Erzeugnis der beiden Funktionen $\sin, \cos$ aus allen Funktionen besteht, die sich in der Form $x \mapsto A\sin(x + \varphi)$ schreiben lassen für $A \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. In diesem Zusammenhang ist A wohlbestimmt und heißt die **Amplitude**. Im Fall $A \neq 0$ ist φ auch wohlbestimmt und heißt die **Phase**.

3.1.7 Dimension eines Vektorraums

Satz 3.1.7.1 (Hauptabschätzung der linearen Algebra). *In einem vorgegebenen Vektorraum V hat eine linear unabhängige Teilmenge nie mehr Elemente als ein Erzeugendensystem. Ist also in Formeln $L \subset V$ eine linear unabhängige Teilmenge und $E \subset V$ ein Erzeugendensystem, so gilt stets*

$$|L| \leq |E|$$

Beweis. Sei K unser Grundkörper. Seien $E = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\}$ ein Erzeugendensystem und $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ Vektoren. Dann können wir die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ als Linearkombinationen der Vektoren unseres Erzeugendensystems schreiben. In Formeln ausgedrückt können wir also Skalare $a_{ij} \in K$ finden mit

$$\begin{array}{ccccccccc} \vec{v}_1 & = & a_{11}\vec{w}_1 & + & a_{21}\vec{w}_2 & + & \cdots & + & a_{m1}\vec{w}_m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \vec{v}_n & = & a_{1n}\vec{w}_1 & + & a_{2n}\vec{w}_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\vec{w}_m \end{array}$$

Für $x_1, \ldots, x_n \in k$ ist damit $x_1\vec{v}_1 + \ldots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$ gleichbedeutend zu

$$\left(\sum x_i a_{1i}\right)\vec{w}_1 + \ldots + \left(\sum x_i a_{mi}\right)\vec{w}_m = \vec{0}$$

und gilt a forteriori, wenn die Koeffizienten aller $\vec{w}_j$ verschwinden, also für jede Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1a_{11} & + & x_2a_{12} & + & \cdots & + & x_na_{1n} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ x_1a_{m1} & + & x_2a_{12} & + & \cdots & + & x_na_{mn} & = & 0 \end{array}$$

Im Fall $n > m$ hat dieses Gleichungssystem weniger Gleichungen hat als Unbekannte und der Gauß-Algorithmus 3.1.1.9 liefert dafür mindestens eine von Null verschiedene Lösung $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Dann aber kann die Familie der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ nicht linear unabhängig sein. □

3.1.7.2 (**Diskussion alternativer Zugänge**). Die Terminologie „Hauptabschätzung der linearen Algebra“ für diese Aussage ist unüblich. Wir verwenden bei ihrer Formulierung unsere Konvention, nach der wir für alle unendlichen Mengen X schlicht $|X| = \infty$ setzen. Damit macht der Satz also nur für endlich erzeugte Vektorräume überhaupt eine Aussage. Er gilt aber auch mit einer feineren Interpretation von $|X|$ als „Kardinalität“. Genauer folgt aus dem „Zorn'schen Lemma“ die Existenz einer Injektion $L \hookrightarrow E$, wie in 3.1.8.3 in größerer Allgemeinheit diskutiert wird. Man benötigt dazu den „Austauschsatz von Steinitz“ 3.1.8.2, der auch einen oft gewählten alternativen Zugang zur Hauptabschätzung der linearen Algebra liefert. Der Kern des Arguments ist jedoch bei beiden Zugängen derselbe.

Korollar 3.1.7.3 (**Basisergänzungssatz**). *Ist M eine linear unabhängige Teilmenge in einem endlich erzeugten Vektorraum und E ein Erzeugendensystem, so läßt sich M durch Hinzunahme von Vektoren aus E zu einer Basis unseres Vektorraums ergänzen.*

Vorschau 3.1.7.4. Mit raffinierteren Methoden der Mengenlehre kann man diesen Satz sogar für jeden beliebigen, nicht notwendig endlich erzeugten Vektorraum zeigen. Wir diskutieren das in 3.1.9.20.

Beweis. Nach der Maximalcharakterisierung 3.1.6.17 von Basen ist jede linear unabhängige Teilmenge L unseres Vektorraums, die maximal ist unter allen linear unabhängigen Teilmengen L mit $L \subset (M \cup E)$, bereits eine Basis. Nach der Hauptabschätzung 3.1.7.1 kann man M auch tatsächlich zu einer maximalen linear unabhängigen Teilmenge von $M \cup E$ vergrößern. □

Korollar 3.1.7.5 (**Kardinalitäten von Basen**). *Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine endliche Basis, und je zwei seiner Basen haben gleich viele Elemente.*

Vorschau 3.1.7.6. In 6.5.3.4 wird mit raffinierteren Methoden der Mengenlehre gezeigt, daß es auch im Fall eines nicht notwendig endlich erzeugten Vektorraums für je zwei seiner Basen eine Bijektion zwischen der einen Basis und der anderen Basis gibt.

Beweis. Wie bereits in 3.1.6.16 erwähnt, erhalten wir eine endliche Basis, wenn wir ein beliebiges endliches Erzeugendensystem durch das Streichen von Vektoren zu einem unverkürzbaren Erzeugendensystem verkleinern. Gegeben zwei Basen B und B' eines Vektorraums haben wir nach der Hauptabschätzung 3.1.7.1 außerdem stets $|B| \leq |B'| \leq |B|$. □

Definition 3.1.7.7. Die Kardinalität einer und nach 3.1.7.5 jeder Basis eines endlich erzeugten Vektorraums V heißt die **Dimension** von V und wird $\dim V$ notiert. Ist K ein Körper und wollen wir betonen, daß wir die Dimension als K-Vektorraum meinen, so schreiben wir

$$\dim V = \dim_K V$$

Ist der Vektorraum nicht endlich erzeugt, so schreiben wir $\dim V = \infty$ und nennen V **unendlichdimensional** und ignorieren für gewöhnlich die durchaus möglichen feineren Unterscheidungen zwischen verschiedenen Unendlichkeiten. Derlei Feinheiten werden erst in 6.5.3.4 besprochen.

Ergänzung 3.1.7.8 (**Verschiedene Bedeutungen des Wortes „Dimension“**). In der Physik wird der Begriff der „Dimension“ leider auch noch in einer völlig anderen Bedeutung verwendet: Physikalische Dimensionen wären im physikalischen Sinne etwa die Länge, die Zeit, die Masse, die Frequenz und dergleichen mehr. In der hier entwickelten Sprache würde man so eine physikalische Dimension wohl am ehesten als einen „eindimensionalen reellen Vektorraum“ modellieren, vielleicht noch mit einer ausgezeichneten „Orientierung“. Ich kann nur hoffen, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, welcher Dimensionsbegriff im Einzelfall jeweils gemeint ist.

3.1.7.9. Der Nullraum hat als Basis die leere Menge. Seine Dimension ist folglich Null. Allgemeiner hat für jeden Körper K die Standardbasis aus 3.1.6.11 des Vektorraums K^n genau n Elemente und das zeigt

$$\dim_K K^n = n$$

Korollar 3.1.7.10 (**Kardinalitätskriterien für Basen**). *Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum.*

1. *Jede linear unabhängige Teilmenge $L \subset V$ hat höchstens $\dim V$ Elemente und im Fall $|L| = \dim V$ ist L bereits eine Basis;*

2. *Jedes Erzeugendensystem $E \subset V$ hat mindestens $\dim V$ Elemente und im Fall $|E| = \dim V$ ist E bereits eine Basis.*

Beweis. Nach der Hauptabschätzung 3.1.7.1 gilt für L eine linear unabhängige Teilmenge, B eine Basis und E ein Erzeugendensystem von V stets

$$|L| \leq |B| \leq |E|$$

Gibt es ein endliches Erzeugendensystem, so muß im Fall $|L| = |B|$ mithin L eine unverlängerbare linear unabhängige Teilmenge und damit nach der Maximalcharakterisierung 3.1.6.14 eine Basis sein. Im Fall $|B| = |E|$ muß E in derselben Weise ein unverkürzbares Erzeugendensystem und damit nach der Minimalcharakterisierung 3.1.6.14 eine Basis sein. □

Korollar 3.1.7.11 (Dimensionsabschätzung für Untervektorräume). *Ein echter Untervektorraum eines endlichdimensionalen Vektorraums ist stets auch endlich erzeugt und hat darüber hinaus eine echt kleinere Dimension.*

Beweis. Ist in Formeln $U \subset V$ ein Untervektorraum eines endlichdimensionalen Vektorraums, so behaupten wir mithin $\dim U \leq \dim V$ und behaupten zusätzlich, daß aus $\dim U = \dim V < \infty$ folgt $U = V$. Nach der Hauptabschätzung 3.1.7.1 gibt es in U eine unverlängerbare linear unabhängige Teilmenge und jede derartige Teilmenge hat höchstens $\dim V$ Elemente. Jede derartige Teilmenge ist aber nach der Maximalcharakterisierung 3.1.6.14 notwendig eine Basis von U und das zeigt $\dim U \leq \dim V$. Gilt hier Gleichheit, so ist wieder nach der Hauptabschätzung 3.1.7.1 jede Basis von U auch eine Basis von V und das zeigt $U = V$. □

Satz 3.1.7.12 (Dimensionssatz). *Gegeben ein Vektorraum V und darin Teilräume $U, W \subset V$ gilt*

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$$

3.1.7.13. Wir verwenden hier die bereits in 2.2.1.3 eingeführte Notation $U + W$ für den Teilraum $U + W := \{\vec{u} + \vec{w} \mid \vec{u} \in U,\ \vec{w} \in W\}$ von V. Wir beweisen diesen Satz in 3.2.2.9 noch ein zweites Mal als Korollar der Dimensionsformel für lineare Abbildungen.

Beispiel 3.1.7.14. Denken wir uns wie in 3.1.5.6 den Raum der schmutzigen Anschauung mit einem ausgezeichneten festen Punkt als Vektorraum, so entsprechen die zweidimensionalen Untervektorräume den anschaulichen Ebenen durch unseren festen Punkt und je zwei verschiedene zweidimensionale Untervektorräume U, W spannen den ganzen Raum auf, $\dim(U + W) = 3$. Zwei verschiedene Ebenen durch unseren festen Punkt schneiden sich nun offensichtlich in einer anschaulichen Geraden, und das entspricht genau der Aussage unseres Satzes, die in diesem Fall zur Identität $3 + 1 = 2 + 2$ spezialisiert.

Beweis. Sind U oder W unendlichdimensional, so ist das eh klar. Sonst wählen wir eine Basis $s_1, \ldots, s_d$ von $U \cap W$ und ergänzen sie erst durch $u_1, \ldots, u_r \in U$ zu einer Basis von U und dann weiter durch $w_1, \ldots, w_t \in W$ zu einer Basis von $U + W$. Wir haben gewonnen, wenn wir zeigen können, daß bei derartigen Wahlen bereits $s_1, \ldots, s_d, w_1, \ldots, w_t$ eine Basis von W ist. Dazu reicht es zu zeigen, daß diese Menge W erzeugt. Sicher können wir jedes $w \in W$ schreiben als Linearkombination

$$\begin{aligned} w \quad = \quad & \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r \\ & + \mu_1 s_1 + \ldots + \mu_d s_d \\ & \quad + \nu_1 w_1 + \ldots + \nu_t w_t \end{aligned}$$

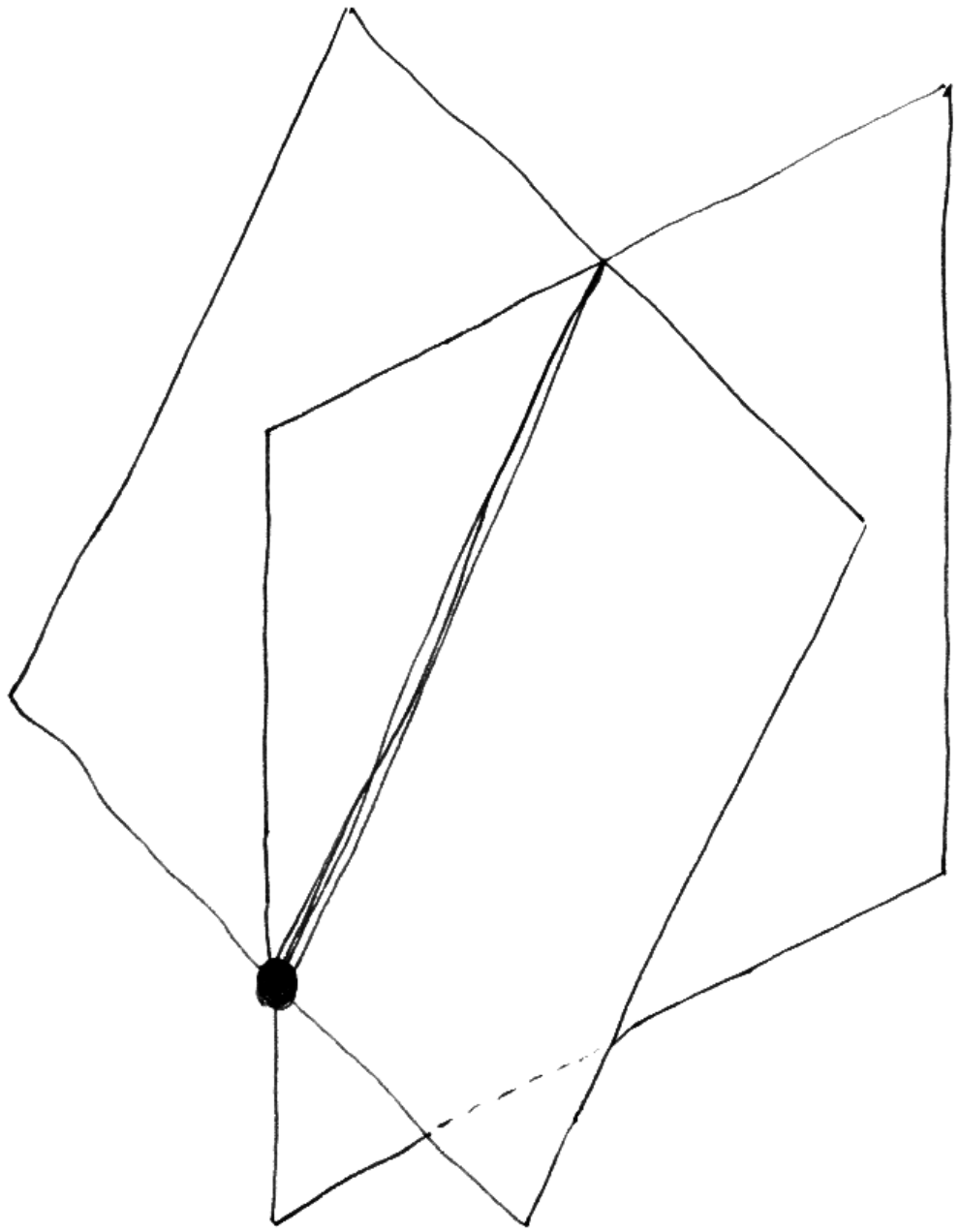


Illustration zum Dimensionssatz nach 3.1.7.14: Zwei verschiedene Ebenen im Raum, die beide einen ausgezeichneten festen Punkt enthalten, schneiden sich in einer Geraden.

Dabei gilt jedoch offensichtlich $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r \in W \cap U$. Dieser Ausdruck läßt sich damit auch als Linearkombination der s_i schreiben, so daß w selbst auch als Linearkombination der s_i und w_j geschrieben werden kann, was zu zeigen war. Im übrigen muß dann auch bei der obigen Darstellung bereits gelten $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$, aber das ist für unseren Beweis schon gar nicht mehr von Belang. $\square$

Übungen

Übung 3.1.7.15. Man zeige, daß jeder eindimensionale Vektorraum genau zwei Untervektorräume besitzt.

Übung 3.1.7.16. Gegeben K-Vektorräume V und W mit Basen $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$ zeige man, daß die Paare $(v_i, 0)$ zusammen mit den Paaren $(0, w_j)$ eine Basis von $V \oplus W$ bilden. Insbesondere gilt für die Dimension des kartesischen Produkts die Formel

$$\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W)$$

Gegeben K-Vektorräume $V_1, \ldots, V_n$ gilt allgemeiner für die Dimension ihres kartesischen Produkts die Formel

$$\dim(V_1 \oplus \ldots \oplus V_n) = \dim(V_1) + \ldots + \dim(V_n)$$

Ergänzende Übung 3.1.7.17. Wir erinnern die Körper $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ aus 2.2.4.15. Natürlich kann jeder $\mathbb{C}$-Vektorraum V auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefaßt werden. Wir notieren diesen $\mathbb{R}$-Vektorraum $V^{\mathbb{R}}$ und nennen ihn die **Reellifizierung** von V. Man zeige $\dim_{\mathbb{R}} V^{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$.

3.1.8 Austauschsatz von Steinitz*

3.1.8.1. Einen anderen Zugang zur Hauptabschätzung der linearen Algebra 3.1.7.1 liefert der folgende Austauschsatz von Steinitz, der sogar eine etwas feinere Aussage liefert. Im hier verfolgten Zugang zur linearen Algebra ist er entbehrlich. Mir scheint insbesondere seine Variante 6.5.3.5 relevant, da es mit ihr gelingt, auch im Fall eines nicht endlich erzeugten Vektorraums die Existenz einer Bijektion zwischen je zweien seiner Basen zu zeigen. Derlei Feinheiten gehören jedoch eher nicht in eine Grundvorlesung. Ich habe den Austauschsatz hier dennoch besprochen, da er beim üblichen Aufbau der Theorie eine wichtige Rolle spielt und deshalb auch in Prüfungen oft danach gefragt wird.

Satz 3.1.8.2 (**Austauschsatz von Steinitz**). *Ist V ein Vektorraum, $L \subset V$ eine endliche linear unabhängige Teilmenge und $E \subset V$ ein Erzeugendensystem, so gibt es eine Injektion $\varphi : L \hookrightarrow E$ derart, daß auch $(E \backslash \varphi(L)) \cup L$ ein Erzeugendensystem von V ist.*

3.1.8.3. Wir können also in anderen Worten die Vektoren unserer linear unabhängigen Teilmenge so in unser Erzeugendensystem hineintauschen, daß es ein Erzeugendensystem bleibt. Mit raffinierteren Methoden der Mengenlehre kann obiger Austauschsatz auch ohne die Voraussetzung L endlich gezeigt werden. Der Beweis in dieser Allgemeinheit wird in 6.5.3.5 skizziert.

Beweis. Der Austauschsatz folgt leicht induktiv aus dem Austauschlemma 3.1.8.4, das wir im Anschluß beweisen: Dies Lemma erlaubt uns nämlich, die Elemente von L der Reihe nach in E hineinzutauschen. □

Lemma 3.1.8.4 (Austauschlemma von Steinitz). *Seien V ein Vektorraum und darin $E \supset M$ ein Erzeugendensystem mit einer linear unabhängigen Teilmenge. Ist $\vec{w} \in V \backslash M$ ein Vektor außerhalb von M derart, daß auch $M \cup \{\vec{w}\}$ linear unabhängig ist, so gibt es $\vec{e} \in E \backslash M$ derart, daß auch $(E \backslash \vec{e}) \cup \{\vec{w}\}$ ein Erzeugendensystem von V ist.*

Beweis. Da E ein Erzeugendensystem von V ist, können wir $\vec{w}$ als Linearkombination von Vektoren aus E schreiben, sagen wir

$$\vec{w} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \ldots + \lambda_r \vec{e}_r$$

mit paarweise verschiedenen $\vec{e}_i \in E$ und allen Koeffizienten verschieden von Null. Da $M \cup \{\vec{w}\}$ linear unabhängig ist, können hier nicht alle $\vec{e}_i$ bereits zu M gehören. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir also $\vec{e}_1 \notin M$ annehmen. Nun schreiben wir unsere Identität um zu

$$\vec{e}_1 = \lambda_1^{-1}(\vec{w} - \lambda_2 \vec{e}_2 - \ldots - \lambda_r \vec{e}_r)$$

und sehen so, daß auch $(E \backslash \vec{e}_1) \cup \{\vec{w}\}$ ein Erzeugendenystem ist. □

3.1.9 Auswahlaxiom und Zorn'sches Lemma*

3.1.9.1. Wir erinnern an einige Begriffe im Zusammenhang mit teilgeordneten Mengen aus 3.1.4, deren genaue Bedeutung im folgenden wesentlich ist. Ein Element einer teilgeordneten Menge $x \in X$ heißt **maximal**, wenn es keine Elemente oberhalb von x gibt. Ein Element einer teilgeordneten Menge $x \in X$ heißt das **größte Element von** X, wenn alle anderen Elemente unterhalb von x liegen.

3.1.9.2. Es kann also in einer teilgeordneten Menge viele maximale Elemente geben, aber nicht mehr als ein größtes Element. Falls es ein größtes Element gibt, so ist dies auch das einzige maximale Element. Gibt es andererseits genau ein maximales Element und ist X endlich, so ist dies maximale Element notwendig das größte Element.

3.1.9.3. Seien $X \supset Y$ eine teilgeordnete Menge mit einer Teilmenge. Ein Element $o \in X$ heißt eine **obere Schranke von** Y, wenn gilt $o \geq y \; \forall y \in Y$. Gibt es eine kleinste derartige obere Schranke, so heißt sie das **Supremum von** Y **in** X und wird $\sup Y = \sup_X Y$ notiert.

3.1.9.4. Eine Teilmenge einer teilgeordneten Menge heißt eine **Kette**, wenn sie total geordnet ist, wenn also darin je zwei Elemente vergleichbar sind. Eine teilgeordnete Menge heißt **induktiv teilgeordnet**, wenn darin jede Kette eine obere Schranke besitzt, und **streng induktiv teilgeordnet**, wenn darin jede Kette eine kleinste obere Schranke besitzt.

3.1.9.5. Eine induktiv teilgeordnete Menge ist nie leer, denn die leere Menge ist stets eine Kette und besitzt folglich eine obere Schranke. In der Literatur sagt man meist einfacher „induktiv geordnet“ und „streng induktiv geordnet“.

Satz 3.1.9.6 (Fixpunktsatz von Bourbaki). *Gegeben eine streng induktiv teilgeordnete Menge $(S, \leq)$ besitzt jede Abbildung $f : S \to S$ mit der Eigenschaft $f(s) \geq s \; \forall s \in S$ mindestens einen Fixpunkt.*

Beweis. Sicher besitzt S ein kleinstes Element $k \in S$, nämlich das Supremum der leeren Menge, die ja stets eine Kette ist. Eine Teilmenge $T \subset S$ heiße ein f**-Turm** oder kurz **Turm**, wenn gilt

1. Ist $K \subset T$ eine Kette, so gehört auch $\sup_S K$ zu T;
2. Aus $t \in T$ folgt $f(t) \in T$, als da heißt, T ist stabil unter f.

Insbesondere gehört also das Supremum der leeren Menge alias das kleinste Element von S zu jedem Turm. Der Schnitt über alle Türme in S ist sicher der bezüglich Inklusion **kleinste Turm** $R \subset S$. Gegeben ein Turm $T \subset S$ heiße weiter ein Element $e \in T$ eine **Engstelle von** T, wenn für alle $a \in T$ gilt $(a < e) \Rightarrow (f(a) \leq e)$. Ist $e \in T$ eine Engstelle eines Turms, so ist auch

$$T_e := \{a \in T \mid a \leq e \text{ oder } f(e) \leq a\}$$

ein Turm. Hier folgt $f(T_e) \subset T_e$ aus der Definition einer Engstelle und die Supremumseigenschaft ist auch offensichtlich erfüllt. Per definitionem gilt $T_e \subset T$. Für jede Engstelle $e \in R$ des kleinsten Turms R gilt insbesondere

$$R_e = R$$

Eine Engstelle von R ist also mit jedem Element von R vergleichbar. Wir zeigen nun, daß unser kleinster Turm R überhaupt nur aus Engstellen besteht. Dazu reicht es zu zeigen, daß die Menge seiner Engstellen $E \subset R$ auch ihrerseits wieder ein Turm ist. Prüfen wir also unsere beiden Eigenschaften. Die kleinste obere

Schranke einer Kette von Engstellen eines Turms ist offensichtlich auch selbst wieder eine Engstelle unseres Turms. Bleibt nur noch $f(E) \subset E$ zu prüfen. Für jede Engstelle $e \in E$ unseres kleinsten Turms R gilt jedoch wie bereits erwähnt $R_e = R$. Damit ist auch $f(e)$ eine Engstelle von R, denn für $a \in R = R_e$ folgt aus $a < f(e)$ offensichtlich $f(e) \not\leq a$ und so $a \leq e$, also entweder $a < e$ oder $a = e$. Im ersten Fall $a < e$ folgt weiter $f(a) \leq e$, weil e bereits als Engstelle von R angenommen war, wohingegen im zweiten Fall $a = e$ eh klar ist, daß gilt $f(a) \leq f(e)$, ja sogar $f(a) = f(e)$. Damit gilt also $e \in E \Rightarrow f(e) \in E$ alias $f(E) \subset E$ und E ist in der Tat wieder ein Turm. Da R der kleinste Turm war, folgern wir

$$E = R$$

Für alle $e \in R$ gilt folglich $R_e = R$ und für jedes $a \in R$ gilt damit $a \leq e$ oder $e \leq a$, ja sogar $f(e) \leq a$. Mithin ist unser kleinster Turm R eine Kette und deren kleinste obere Schranke ist dann notwendig das größte Element von R und ein Fixpunkt von f. □

Ergänzung 3.1.9.7. Anschaulich mag man sich unsere teilgeordnete Menge S mit der Abbildung f vorstellen als eine mathematische Beschreibung für mehr oder weniger geordnetes Schlangestehen, etwa um in ein Flugzeug zu gelangen. In dieser Interpretation wäre S eine Menge möglicher Standplätze und die Abbildung f wäre eine Vorschrift, die unsere Flugreisenden in jedem Zeitschritt von einem Standplatz zu einem besseren Standplatz vorrücken oder aber stehenbleiben läßt. Eine Engstelle einer beliebigen unter f stabilen Teilmenge $R \subset S$ wäre etwa ein Standplatz direkt vor einem Drehkreuz, an dem die Bordkarten eingesammelt werden und an dem alle Reisenden, die auf Standplätzen aus R stehen, einzeln vorbeigehen müssen, wenn sie denn überhaupt ins Flugzeug kommen wollen.

Ergänzung 3.1.9.8. Dieser Unterabschnitt ist nur motivierendes Geschwätz und muß bei einem streng logischen Aufbau übersprungen werden. Aber sei's drum! In unserem kleinsten Turm liegen natürlich das kleinste Element k und dann auch $f(k), f^2(k), f^3(k) \ldots$ Wird diese Folge stationär, etwa bei $f^n(k) = f^{n+1}(k)$, so ist diese endliche Menge der kleinste Turm. Wird sie nicht stationär, so gehört ihr Supremum $s = \sup\{f^n(k)\}$ nicht zu den Folgengliedern, gehört aber auch zu unserem kleinsten Turm, ebenso wie auch $f(s), f^2(s), f^3(s) \ldots$ Wird diese Folge stationär, etwa bei $f^n(s) = f^{n+1}(s)$, so ist die Vereinigung der Glieder unserer beiden Folgen der kleinste Turm. Sonst gehört das Supremum $s_1 = \sup\{f^n(s)\}$ unserer zweiten Folge wieder nicht zu den Folgengliedern, gehört aber auch zu unserem kleinsten Turm, ebenso wie auch $f(s_1), f^2(s_1), f^3(s_1) \ldots$ Terminiert „dieser Prozess“, so liefert er den kleinsten Turm als Vereinigung endlich vieler Folgen, der letzten davon endlich. Sonst bilden wir die Folge $s = s_0, s_1, \ldots$ und auch deren Supremum $t = \sup\{s_n\}$ gehört zu unserem kleinsten Turm, ebenso

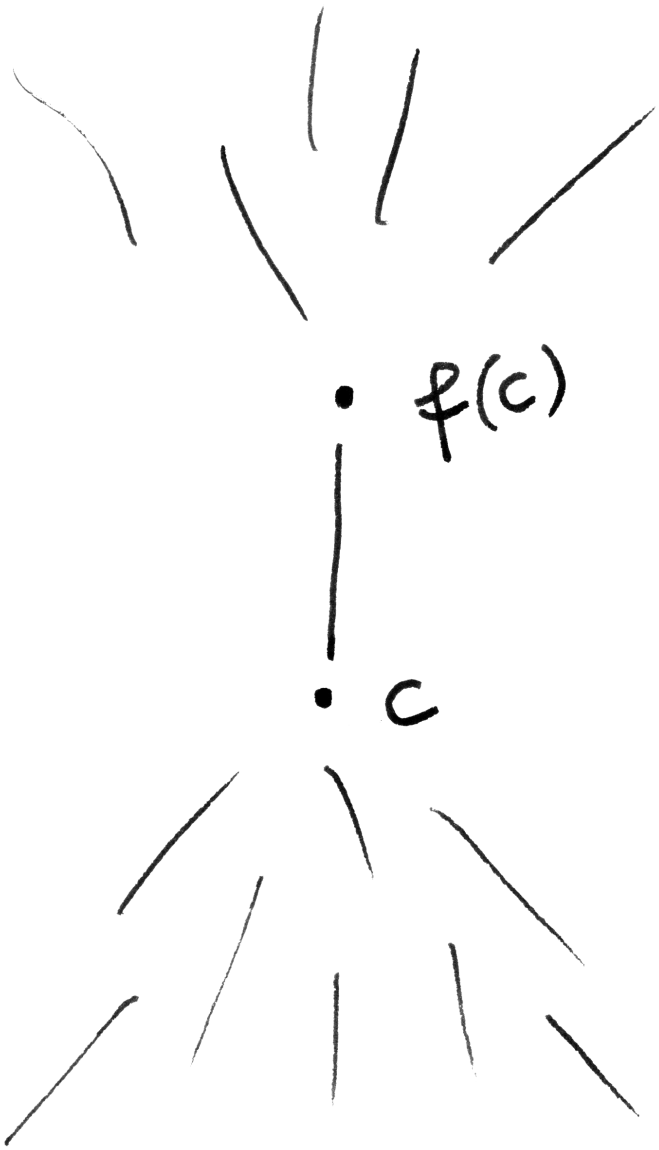


Illustration im Fall, daß unsere Engstelle des kleinsten Turms $c \in R$ kein Fixpunkt von f ist. Die Teilordnung wird hier vage durch Striche angedeutet, die von kleineren zu größeren Elementen aufsteigen.

wie $f(t), f^2(t), f^3(t) \ldots$ Na ja, und dann geht es irgendwie immer so weiter und wird recht unübersichtlich, weshalb diese Überlegungen beim Nachweis, daß der kleinste Turm eine Kette sein muß, auch nicht direkt zum Ziel führen und wir den obigen etwas komplizierterem Weg gegangen sind.

Lemma 3.1.9.9 (**Auswahlaxiom**). *Für jede surjektive Abbildung $f : X \twoheadrightarrow Y$ von Mengen existiert eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.*

3.1.9.10. So eine Abbildung g heißt ein **Rechtsinverses** oder auch ein **Schnitt**. Vom Standpunkt der naiven Mengenlehre aus, den wir bisher stets eingenommen haben und den wir auch weiterhin einnehmen werden, kann man dieses Lemma mühelos beweisen: Man wählt halt zu jedem Element $y \in Y$ ein Element $x \in X$ aus mit $f(x) = y$ und nennt dies Element $g(y)$. Wenn man jedoch die Mengenlehre wie bei Zermelo und Fraenkel in einer Formelsprache formalisiert, so läßt sich die Aussage dieses Lemmas nicht formal aus den nach Zermelo und Fraenkel üblicherweise zugrundegelegten anderen Axiomen herleiten, die wir zwar ihrerseits auch nie formalisiert haben, die wir aber ständig in intuitiver Weise benutzen. Daher rührt die Bezeichnung unseres Lemmas als „Axiom“. Wir werden das Auswahlaxiom hier für die Herleitung des „Zorn'schen Lemmas“ 3.1.9.15 benötigen, von dem man sogar zeigen kann, daß es zum Auswahlaxiom äquivalent ist.

Lemma 3.1.9.11 (**Auswahlaxiom, Variante**). *Gegeben eine Menge X gibt es stets eine Abbildung $a : \mathcal{P}(X)\backslash\emptyset \to X$ mit $a(T) \in T \ \forall T \in \mathcal{P}(X)$.*

3.1.9.12. In Worten wählt die Abbildung a also in jeder nichtleeren Teilmenge $T \subset X, T \neq \emptyset$ von X ein Element aus. Man nennt solch eine Abbildung deshalb auch eine **Auswahlfunktion**.

3.1.9.13. Vom Standpunkt der naiven Mengenlehre aus, den wir bisher stets eingenommen haben und den wir auch weiterhin einnehmen werden, kann man diese Variante genauso mühelos beweisen: Man wählt halt in jeder nichtleeren Teilmenge $T \subset X$ ein Element aus und nennt es $a(T)$. Die etwas schwächere Forderung, daß es für jede Folge $X_0, X_1, \ldots$ nichtleerer Teilmengen einer Menge X eine Folge von Elementen $x_0, x_1, \ldots$ gibt mit $x_i \in X_i \ \forall i$, mag man das „Folgenauswahlaxiom“ nennen. Es wird häufig bereits zu Beginn der ersten Grundvorlesung der Analysis verwendet, zum Beispiel beim Nachweis, daß jede folgenstetige Funktion das ε-δ-Kriterium erfüllt.

3.1.9.14. Man sieht leicht, daß die beiden hier vorgestellten Varianten des Auswahlaxioms äquivalent sind. Um die Erste aus der Zweiten herzuleiten, betrachtet man schlicht die Familie der Fasern von f. Um die Zweite aus der Ersten herzuleiten, betrachtet man für eine beliebige Menge X im Produkt $X \times \mathcal{P}(X)$ die Teilmenge $Y = \{(x, T) \mid x \in T\}$ und die durch die Projektion auf die zweite Koordinate $(x, T) \mapsto T$ gegebene Abbildung $Y \to \mathcal{P}(X)$. Sie induziert eine

Surjektion $Y \twoheadrightarrow \mathcal{P}(X)\backslash\emptyset$, und verknüpfen wir einen Schnitt dieser Surjektion mit der Projektion auf die erste Koordinate $(x, T) \mapsto x$, so erhalten wir eine Auswahlfunktion $\mathcal{P}(X)\backslash\emptyset \to X$.

Lemma 3.1.9.15 (Zorn'sches Lemma). *Sei $(X, \leq)$ eine teilgeordnete Menge. Besitzt jede total geordnete Teilmenge $Y \subset X$ eine obere Schranke in X, so gibt es in unserer teilgeordneten Menge X mindestens ein maximales Element.*

Ergänzung 3.1.9.16. Es reicht nicht aus, im Zorn'schen Lemma nur die Existenz einer oberen Schranke für jede monoton wachsende Folge zu fordern, vergleiche 3.1.9.19.

Beweis. Das Zorn'sche Lemma besagt in unserer Terminologie, daß jede induktiv teilgeordnete Menge ein maximales Element besitzt. Wir zeigen das zunächst nur für eine streng induktiv teilgeordnete Menge $(S, \leq)$. In der Tat finden wir mit dem Auswahlaxiom 3.1.9.11 eine Abbildung $f : S \to S$ mit $f(s) \geq s \ \forall s \in S$ und $f(s) = s$ nur für s maximal. Diese Abbildung muß nach dem Fixpunktsatz von Bourbaki 3.1.9.6 einen Fixpunkt haben und dieser Fixpunkt ist notwendig ein maximales Element von S. Ist $(X, \leq)$ eine beliebige induktiv teilgeordnete Menge, so betrachten wir die bezüglich Inklusion teilgeordnete Menge $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ der Ketten von X. Diese Menge $\mathcal{S}$ ist dann sogar streng induktiv teilgeordnet, das Supremum über ein total geordnetes System $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ alias eine Kette von Ketten ist einfach ihre Vereinigung $\sup \mathcal{K} = \bigcup_{C \in \mathcal{K}} C$. Nach der bereits bewiesenen Aussage gibr es also ein maximales Element von $\mathcal{S}$ alias eine maximale Kette $C_{\max}$ in X. Eine obere Schranke einer solchen maximalen Kette $C_{\max}$ alias ihr größtes Element ist dann notwendig ein maximales Element von X. $\square$

3.1.9.17. Gegeben eine Menge X bezeichne wie üblich $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge, als da heißt die Menge aller Teilmengen von X. Teilmengen von $\mathcal{P}(X)$ werde ich oft als **Systeme von Teilmengen von** X ansprechen. Besonders häufig benutzt man das Zorn'sche Lemma in der folgenden Gestalt:

Korollar 3.1.9.18. *Ist M eine Menge und $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(M)$ ein System von Teilmengen von M, das mit jedem bezüglich Inklusion total geordneten Teilsystem auch die Vereinigungsmenge des besagten Teilsystems enthält, so besitzt $\mathcal{X}$ ein bezüglich Inklusion maximales Element.*

3.1.9.19. Hier verwenden wir die Konvention 3.1.5.13, nach der die Vereinigung über überhaupt keine Teilmenge einer Menge die leere Menge ist. Insbesondere folgt aus unseren Annahmen, daß die leere Menge zu $\mathcal{X}$ gehört. Es reicht hier nicht, nur die Stabilität unter Vereinigungen von aufsteigenden Folgen in unserem Mengensystem zu fordern: So bilden etwa alle abzählbaren Teilmengen einer

überabzählbaren Menge ein Mengensystem, das zwar stabil ist unter Vereinigungen von aufsteigenden Folgen, das aber keine maximalen Elemente besitzt. Wir nennen ein System $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen einer gegebenen Menge X **stabil unter aufsteigenden Vereinigungen**, wenn es mit jedem total geordneten Teilsystem auch die Vereinigungsmenge des besagten Teilsystems enthält. In dieser Terminologie kann unser Korollar dann dahingehend formuliert werden, daß jedes System von Teilmengen einer gegebenen Menge, das stabil ist unter aufsteigenden Vereinigungen, mindestens ein maximales Element besitzt.

Beweis. Wir können das Zorn'sche Lemma auf die teilgeordnete Menge $\mathcal{X}$ anwenden, denn für jede Kette in $\mathcal{X}$ gehört nach Annahme die Vereinigung ihrer Mitglieder auch zu $\mathcal{X}$, und diese Vereinigung ist offensichtlich eine obere Schranke unserer Kette. Sie ist sogar eine kleinste obere Schranke, so daß wir nur die erste Hälfte von unserem Beweis des Zorn'schen Lemmas wirklich brauchen. □

Satz 3.1.9.20 (**Basisexistenzsatz und Basisergänzungssatz**). *Jeder Vektorraum besitzt eine Basis. Ist allgemeiner $M \subset E$ eine linear unabhängige Teilmenge in einem Erzeugendensystem eines Vektorraums, so gibt es stets eine Basis B unseres Vektorraums mit $M \subset B \subset E$.*

3.1.9.21. Bereits der Basisexistenzsatz ist hochgradig nichtkonstruktiv. Ich bin etwa außerstande, Ihnen für irgendeinen Körper K, und sei es der Körper $K = \mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen, eine Basis des K-Vektorraums $\mathrm{Ens}(\mathbb{N}, K)$ hinzuschreiben. Geeignet verstanden ist das sogar prinzipiell unmöglich. Mehr dazu mögen Sie in der Logik lernen.

Beweis. Sei V unser Vektorraum und $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(V)$ das System aller linear unabhängigen Teilmengen A mit $M \subset A \subset E$, teilgeordnet durch Inklusion. Wir zeigen zunächst, daß $\mathcal{X}$ stabil ist unter aufsteigenden Vereinigungen. Ist in der Tat $\mathcal{Y}$ ein total geordnetes System von linear unabhängigen Teilmengen von V, so ist auch $\bigcup_{A \in \mathcal{Y}} A$ linear unabhängig, denn sind $v_1, \ldots, v_r \in \bigcup_{A \in \mathcal{Y}} A$ paarweise verschieden, so gibt es ein $A \in \mathcal{Y}$ mit $v_1, \ldots, v_r \in A$ und folglich verschwindet keine nichttriviale Linearkombination der v_i. Also ist $\mathcal{X}$ stabil unter aufsteigenden Vereinigungen und nach dem vorhergehenen Korollar 3.1.9.18 gibt es damit ein maximales Element von $\mathcal{X}$ alias eine linear linear unabhängige Teilmenge $A_{\max} \subset V$, die M umfaßt und maximal ist unter allen linear unabhängigen Teilmengen A mit $A \subset E$. Diese Teilmenge muß dann aber nach der Maximalcharakterisierung 3.1.6.17 eine Basis von V sein. □

Übungen

Übung 3.1.9.22. Gegeben eine teilgeordnete Menge besitzt jede nichtleere Teilmenge ein maximales Element genau dann, wenn jede monoton wachsende Folge

stagniert.

Übung 3.1.9.23. Man zeige, daß es auf jeder Menge eine Anordnung gibt.

3.2 Lineare Abbildungen

3.2.1 Homomorphismen und Isomorphismen

Definition 3.2.1.1. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **linear** und genauer K**-linear**, wenn für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned} f(\vec{v} + \vec{w}) &= f(\vec{v}) + f(\vec{w}) \\ f(\lambda\vec{v}) &= \lambda f(\vec{v}) \end{aligned}$$

Lineare Abbildungen heißen auch **Homomorphismen von K-Vektorräumen**.

Definition 3.2.1.2. Eine lineare Abbildung ϕ heißt ein **Isomorphismus von Vektorräumen**, wenn es eine lineare Abbildung ψ in die Gegenrichtung gibt derart, daß beide Kompositionen $\psi \circ \phi$ und $\phi \circ \psi$ die Identität sind. Gibt es zwischen zwei Vektorräumen einen Isomorphismus, so heißen sie **isomorph**. Ein Homomorphismus von einem Vektorraum in sich selber heißt ein **Endomorphismus** unseres Vektorraums. Ein Isomorphismus von einem Vektorraum in sich selber heißt ein **Automorphismus** unseres Vektorraums.

3.2.1.3. Die Automorphismen eines Vektorraums V bilden mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe. Sie heißt die **allgemeine lineare Gruppe** oder auch die **Automorphismengruppe** unseres Vektorraums V und wird notiert

$$\mathrm{GL}(V) = \mathrm{Aut}(V)$$

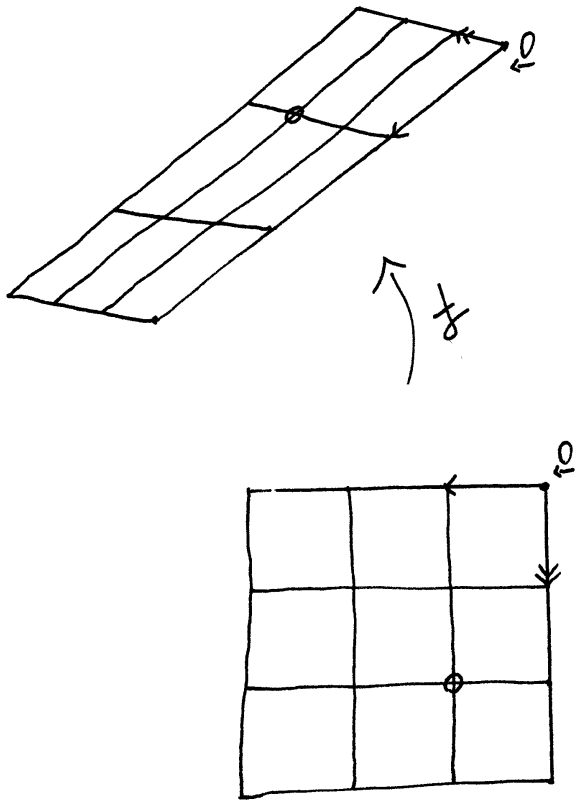
nach der englischen Bezeichnung **general linear group**. Wenn wir betonen wollen, daß wir K-lineare Automorphismen meinen, schreiben wir auch $\mathrm{Aut}_K(V)$.

3.2.1.4. Jede lineare Abbildung bildet den Nullvektor auf den Nullvektor ab, denn für $f : V \to W$ linear gilt $f(\vec{0}) = f(\vec{0} + \vec{0}) = f(\vec{0}) + f(\vec{0})$ und Addition des Negativen von $f(\vec{0})$ auf beiden Seiten liefert die Behauptung. Man zeigt auch leicht per Induktion über n, daß gegeben $f : V \to W$ linear gilt

$$f(\lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \ldots + \lambda_n f(\vec{v}_n)$$

für beliebige $\lambda_i \in K$ und $\vec{v}_i \in V$.

Didaktische Anmerkung 3.2.1.5. Ich denke, an dieser Stelle mag auch der Abschnitt 2.2.3 über Homomorphismen von Magmas und Monoiden und Gruppen besprochen werden, ergänzt um Homomorphismen von Körpern. Besser wäre es aber, diesen Abschnitt schon früher zu besprechen. Dann kann man hier an 2.2.3.7 erinnern, wonach sogar überhaupt jeder Gruppenhomomorphismus das neutrale Element auf das neutrale Element werfen muß.



Eine lineare Abbildung des Richtungsraums der Papierebene auf sich selbst. Sie ist sogar ein Automorphismus.

3.2.1.6 (**Herkunft der Terminologie**). Die Herkunft eines Teils dieser Terminologie haben wir bereits in 2.2.3.9 diskutiert. „Linear“ heißen unsere Abbildungen vermutlich, weil im Fall $\mathbb{R}$-linearer Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ihre Graphen Geraden alias gerade Linien sind. Allerdings sind auch allgemeiner die Graphen der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax+b$ gerade Linien, und diese Abbildungen sind in unserem Sinne nur linear im Fall $b = 0$. Auf der Schule haben Sie möglicherweise diese Funktionen auch im Fall $b \neq 0$ „linear“ genannt, aber in der mathematischen Fachsprache heißen besagte Funktionen nur im Fall $b = 0$ linear und sonst „affin“. Das Wort „Endomorphismus“ kommt von griechisch „$\varepsilon\nu\delta o\nu$“ für deutsch „drinnen“, und das Wort „Automorphismus“ von „$\alpha\upsilon\tau o\varsigma$“ für deutsch „selbst“.

Beispiele 3.2.1.7. Die Projektionen auf die Faktoren $\mathrm{pr}_i : K^n \to K$ sind linear. Die Abbildung $K^2 \to K$ gegeben durch $(x, y) \mapsto ax + by$ ist linear für beliebige aber feste $a, b \in K$. Gegeben ein Vektorraum V und ein Vektor $\vec{v} \in V$ ist die Abbildung $K \to V$ gegeben durch $\lambda \mapsto \lambda\vec{v}$ linear. Jede lineare Abbildung von K in einen K-Vektorraum ist von dieser Gestalt. Das Quadrieren $K \to K$ ist nicht linear, es sei denn, K ist ein Körper mit zwei Elementen, so daß das Quadrieren mit der Identität zusammenfällt.

Beispiele 3.2.1.8. Gegeben Vektorräume V, W sind die Projektionsabbildungen $\mathrm{pr}_V : (V \oplus W) \to V$ und $\mathrm{pr}_W : (V \oplus W) \to W$ linear. Dasselbe gilt allgemeiner für die Projektionen $\mathrm{pr}_i : V_1 \oplus \ldots \oplus V_n \to V_i$. Ebenso sind die **kanonischen Injektionen** $\mathrm{in}_V : V \to (V \oplus W)$, $v \mapsto (v, 0)$ und $\mathrm{in}_W : W \to (V \oplus W)$, $w \mapsto (0, w)$ linear und dasselbe gilt allgemeiner für die analog definierten Injektionen $\mathrm{in}_i : V_i \to V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$.

3.2.1.9. Das Bild eines Erzeugendensystems unter einer surjektiven linearen Abbildung ist ein Erzeugendensystem. Das Bild einer linear unabhängigen Teilmenge unter einer injektiven linearen Abbildung ist eine linear unabhängige Teilmenge.

Satz 3.2.1.10 (**Klassifikation von Vektorräumen durch ihre Dimension**). *Gegeben eine natürliche Zahl n ist ein Vektorraum über einem Körper K genau dann isomorph zu K^n, wenn er die Dimension n hat.*

Beweis. Natürlich gehen unter einem Vektorraumisomorphismus Erzeugendensysteme in Erzeugendensysteme, linear unabhängige Teilmengen in linear unabhängige Teilmengen und Basen in Basen über. Sind also zwei Vektorräume isomorph, so haben sie auch dieselbe Dimension. Hat umgekehrt ein Vektorraum V eine angeordnete Basis $B = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ aus n Vektoren, so liefert die Vorschrift $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n$ etwa nach 3.1.6.12 einen Vektorraumisomorphismus $K^n \xrightarrow{\sim} V$. $\square$

3.2.1.11 (**Stufenzahl nach Durchführen des Gauß-Algorithmus**). Nun können wir auch unsere Ausgangsfrage 3.1.1.15 lösen, ob die „Zahl der freien Parameter“ bei unserer Darstellung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems eigentlich wohlbestimmt ist oder präziser, ob beim Anwenden des Gauss-Algorithmus dieselbe Zahl von Stufen entsteht, wenn wir zuvor die Variablen umnummerieren alias die Spalten vertauschen. Wenn wir das für homogene Systeme zeigen können, so folgt es offensichtlich für beliebige Systeme. Bei homogenen Systemen ist jedoch die Lösungsmenge $L \subset K^m$ ein Untervektorraum und wir erhalten einen Vektorraumisomorphismus $L \xrightarrow{\sim} K^{m-r}$ durch „Streichen aller Einträge, bei denen eine neue Stufe beginnt“, also durch Weglassen von $x_{s(1)}, x_{s(2)}, \ldots, x_{s(r)}$ aus einem m-Tupel $(x_1, \ldots, x_m) \in L$. Damit erhalten wir für die Zahl r der Stufen die von allen Wahlen unabhängige Beschreibung als Zahl der Variablen abzüglich der Dimension des Lösungsraums, in Formeln $r = m - \dim_K L$.

Übungen

Übung 3.2.1.12. Ein Punkt, der unter einer Abbildung auf sich selbst abgebildet wird, heißt ein **Fixpunkt** besagter Abbildung. Gegeben eine Abbildung $f : X \to X$ notiert man die Menge ihrer Fixpunkte auch

$$X^f := \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

Man zeige: Gegeben ein Vektorraum V und ein Endomorphismus $f \in \operatorname{End} V$ bildet die Menge der von f festgehaltenen Vektoren alias aller **Fixvektoren von** f stets einen Untervektorraum $V^f \subset V$.

Übung 3.2.1.13. Jede Verknüpfung von Vektorraumhomomorphismen ist wieder ein Vektorraumhomomorphismus. Sind also in Formeln $g : U \to V$ und $f : V \to W$ Vektorraumhomomorphismen, so ist auch $f \circ g : U \to W$ ein Vektorraumhomomorphismus.

Übung 3.2.1.14. Gegeben ein surjektiver Vektorraumhomomorphismus $g : U \twoheadrightarrow V$ und eine Abbildung $f : V \to W$ in einen weiteren Vektorraum ist f genau dann linear, wenn die Verknüpfung $f \circ g : U \to W$ linear ist. Gegeben ein injektiver Vektorraumhomomorphismus $f : V \hookrightarrow W$ und eine Abbildung $g : U \twoheadrightarrow V$ von einen weiteren Vektorraum nach V ist g genau dann linear, wenn die Verknüpfung $f \circ g : U \to W$ linear ist. Hinweis: 2.2.3.37.

Übung 3.2.1.15. Ist $f : V \to W$ ein bijektiver Vektorraumisomorphismus, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ ein Vektorraumhomomorphismus und f ist folglich ein Isomorphismus.

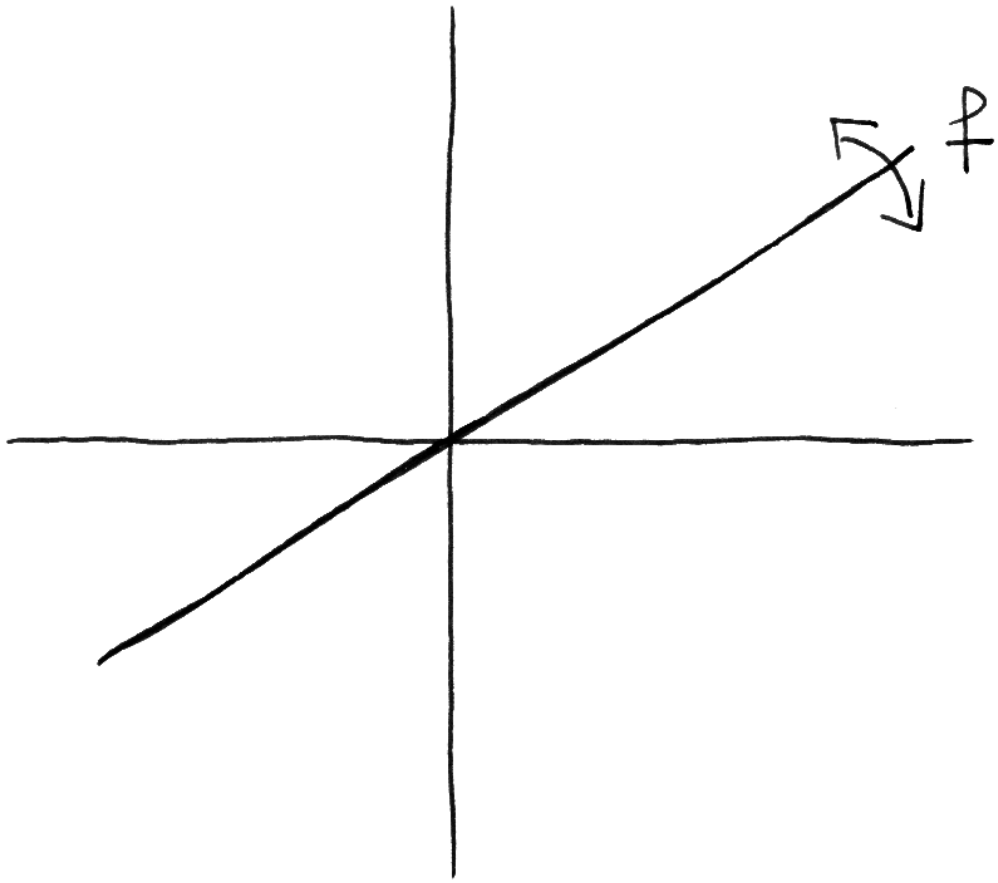


Illustration zu Übung 3.2.1.12, nach der die Fixpunktmenge jedes Endomorphismus eines Vektorraums ein Untervektorraum ist. Zum Beispiel ist die Spiegelung an einer Ursprungsgerade eine lineare Abbildung und ihre Fixpunktmenge ist in der Tat ein Untervektorraum, nämlich besagte Ursprungsgerade.

Übung 3.2.1.16. Wieviele Untervektorräume besitzt der $\mathbb{R}^2$, die unter der Spiegelung $(x, y) \mapsto (x, -y)$ in sich selber überführt werden? Welche Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ werden unter der Spiegelung $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ in sich selber überführt?

Ergänzende Übung 3.2.1.17. Eine Gruppe, in der jedes Element sein eigenes Inverses ist, kann nach 3.1.2.18 auf genau eine Weise mit der Struktur eines Vektorraums über dem Körper mit zwei Elementen versehen werden. Ein Beispiel ist unsere Gruppe aus 2.2.2.19 mit den Teilmengen einer Menge Z als Elementen. Man zeige, daß dieser Vektorraum isomorph ist zum Vektorraum aller Abbildungen der Menge Z in der Körper mit zwei Elementen.

Übung 3.2.1.18. Eine Abbildung $f : V \to W$ von Vektorräumen ist genau dann linear, wenn ihr Graph $\Gamma(f) \subset V \times W$ ein Untervektorraum des Produkts ist.

3.2.2 Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Lemma 3.2.2.1. *Das Bild eines Untervektorraums unter einer linearen Abbildung ist ein Untervektorraum. Das Urbild eines Untervektorraums unter einer linearen Abbildung ist ein Untervektorraum.*

Beweis. 1. Sei $f : V \to W$ unsere lineare Abbildung. Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Wir müssen zeigen, daß auch $f(U) \subset V$ ein Untervektorraum ist. Da f ein Homomorphismus der zugrundeliegenden additiven Gruppen ist, ist $f(U)$ schon mal eine additive Untergruppe von W nach 2.2.3.24. Da U ein Untervektorraum ist, gilt weiter $\lambda\vec{u} \in U$. Dann folgt mit der Linearität $\lambda\vec{w} = \lambda f(\vec{u}) = f(\lambda\vec{u}) \in f(U)$. Also hat $f(U)$ alle von einem Untervektorraum geforderten Eigenschaften.

2. Sei $f : V \to W$ unsere lineare Abbildung. Sei $Z \subset W$ ein Untervektorraum. Da f ein Homomorphismus der zugrundeliegenden additiven Gruppen ist, ist $f^{-1}(Z) := \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) \in Z\}$ schon mal eine additive Untergruppe von V nach 2.2.3.24. Gegeben $\vec{v} \in f^{-1}(Z)$ und $\lambda \in K$ gilt weiter $f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v}) \in Z$ wegen der Linearität und da Z ein Untervektorraum ist. Aus der Definition des Urbilds folgt $\lambda\vec{v} \in f^{-1}(Z)$. Also hat $f^{-1}(Z)$ alle von einem Untervektorraum geforderten Eigenschaften. □

3.2.2.2. Das **Bild** einer linearen Abbildung $f : V \to W$ alias die Teilmenge $(\operatorname{im} f) := f(V) \subset W$ ist nach 3.2.2.1 ein Untervektorraum von W.

3.2.2.3. Das Urbild des Nullvektors unter einer linearen Abbildung $f : V \to W$ notiert man auch

$$(\ker f) := f^{-1}(0) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

und nennt es den **Kern** der linearen Abbildung f. Der Kern ist nach 3.2.2.1 ein Untervektorraum von V. Wir hatten ihn in 2.2.3.21 sogar bereits für beliebige Gruppenhomomorphismen eingeführt.

Lemma 3.2.2.4 (Verschwindender Kern bedeutet Injektivität). *Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist injektiv genau dann, wenn ihr Kern Null ist.*

Beweis. Das sollten sie in Übung 2.2.3.21 bereits für beliebige Gruppenhomomorphismen zeigen. Hier geben wir das Argument nocheinmal in unserem Spezialfall. Liegen im Kern außer dem Nullvektor von V noch andere Vektoren, so werden verschiedene Vektoren aus V unter f auf den Nullvektor von W abgebildet und unsere Abbildung ist nicht injektiv. Ist umgekehrt unsere Abbildung nicht injektiv, so gibt es $v \neq v_1$ in V mit $f(v) = f(v_1)$ und es folgt $f(v - v_1) = 0$ aber $v - v_1 \neq 0$. Mit $v - v_1$ liegt also ein von Null verschiedener Vektor im Kern, der folglich nicht der Nullraum sein kann. □

Satz 3.2.2.5. *Für jede lineare Abbildung $f : V \to W$ von Vektorräumen gilt die* **Dimensionsformel**

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$$

Beweis. Ist V endlich erzeugt, so ist auch $(\operatorname{im} f)$ endlich erzeugt, da ja für jedes Erzeugendensystems $E \subset V$ sein Bild $f(E)$ ein Erzeugendensystem von $f(V) = \operatorname{im} f$ ist. Ebenso ist mit V auch $(\ker f)$ endlich erzeugt, nach 3.1.7.11 ist ja sogar jeder Untervektorraum eines endlich erzeugten Vektorraums endlich erzeugt. Gilt also umgekehrt $\dim(\ker f) = \infty$ oder $\dim(\operatorname{im} f) = \infty$, so folgt $\dim V = \infty$ und unser Satz gilt in diesen beiden Fällen. Wir brauchen ihn also nur noch in dem Fall zu zeigen, daß $(\ker f)$ und $(\operatorname{im} f)$ beide endlichdimensional sind. In diesem Fall folgt er aus dem anschließenden präziseren Lemma 3.2.2.6. Alternativ kann man auch mit Übung 3.2.2.12 argumentieren. □

Lemma 3.2.2.6. *Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Ist A eine Basis ihres Kerns, B eine Basis ihres Bildes und $g : B \to V$ eine Wahl von Urbildern unserer Basis des Bildes, so ist $g(B) \cup A$ eine Basis von V.*

3.2.2.7. Wir zeigen sogar stärker: Erzeugt A den Kern und B das Bild, so erzeugt $g(B) \cup A$ ganz V. Sind A und B linear unabhängig, so auch $g(B) \cup A$.

Beweis. Gegeben $\vec{v} \in V$ haben wir $f(\vec{v}) = \lambda_1 \vec{w}_1 + \ldots + \lambda_r \vec{w}_r$ mit $\vec{w}_i \in B$. Offensichtlich liegt dann $\vec{v} - \lambda_1 g(\vec{w}_1) - \ldots - \lambda_r g(\vec{w}_r)$ im Kern von f und so folgt, daß $g(B) \cup A$ ganz V erzeugt. Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen nehmen wir an, es gelte

$$\lambda_1 g(\vec{w}_1) + \ldots + \lambda_r g(\vec{w}_r) + \mu_1 \vec{v}_1 + \ldots + \mu_s \vec{v}_s = 0$$

mit den $\vec{v}_i \in A$ und $\vec{w}_j \in B$ paarweise verschieden. Wenden wir f an, so folgt $\lambda_1\vec{w}_1 + \ldots + \lambda_r\vec{w}_r = 0$ und damit $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit der $\vec{w}_i$. Setzen wir diese Erkenntnis in die ursprüngliche Gleichung ein, so folgt weiter $\mu_1 = \ldots = \mu_s = 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{v}_j$. □

Korollar 3.2.2.8 (**Isomorphismus durch Dimensionsvergleich**). *Jede injektive lineare Abbildung zwischen Vektorräumen derselben endlichen Dimension ist ein Isomorphismus. Jede surjektive lineare Abbildung zwischen Vektorräumen derselben endlichen Dimension ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei $f : V \to W$ unsere lineare Abbildung. Ist f injektiv, so folgt $\ker f = 0$ und dann $\dim(\mathrm{im} f) = \dim V = \dim W$ aus der Dimensionsformel und so $\mathrm{im} f = W$ mit 3.1.7.11. Ist f surjektiv, so folgt erst $\ker f = 0$ aus der Dimensionsformel und dann die Injektivität aus 3.2.2.4. □

Korollar 3.2.2.9 (**Dimensionssatz**). *Gegeben ein Vektorraum V mit Teilräumen $U, W \subset V$ gilt*

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$$

Beweis. Wir haben diesen Satz bereits in 3.1.7.12 sozusagen zu Fuß bewiesen. Mit unserer Dimensionsformel 3.2.2.5 können wir nun noch einen alternativen Beweis geben. Betrachtet man nämlich die lineare Abbildung

$$f : U \oplus W \to V$$

gegeben durch $f(u, w) = u + w$, so gilt $(\mathrm{im}\, f) = U + W$ und die Abbildung $d \mapsto (d, -d)$ definiert einen Isomorphismus $(U \cap W) \xrightarrow{\sim} \ker f$. Die Formel 3.1.7.16 für die Dimension der direkten Summe in Verbindung mit der Dimensionsformel liefert so

$$\dim U + \dim W = \dim(U \oplus W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W) \qquad \square$$

Definition 3.2.2.10. Zwei Untervektorräume U, W eines Vektorraums V heißen **komplementär**, wenn die Addition eine Bijektion

$$U \times W \xrightarrow{\sim} V$$

liefert. Als lineare Abbildung ist das unter Verwendung der in 3.1.3.10 eingeführten Notation dann sogar ein Vektorraumisomorphismus $+ : U \oplus W \xrightarrow{\sim} V$. Des weiteren sagt man in dieser Situation, W sei ein **Vektorraumkomplement** oder kurz **Komplement von U in V**.

3.2.2.11 (**Vektorraumkomplement und Komplementmenge**). Man unterscheide sorgfältig zwischen Vektorraumkomplement und Komplementmenge: Komplementäre Untervektorräume sind keineswegs disjunkt, sondern schneiden sich im Nullvektor, und die Vereinigung komplementärer echter Untervektorräume ist auch nie der ganze Ausgangsraum, sondern nur ein Erzeugendensystem desselben. Auf französisch spricht man von einem „sousespace supplémentaire“, das ist noch deutlicher. Allerdings werden sich beide Begriffe in 4.7.7.16 als Ausprägungen von „Koprodukten“ erweisen, und das ist zumindest eine gewisse Rechtfertigung für diese möglicherweise verwirrende Terminologie.

Übungen

Übung 3.2.2.12. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Man zeige: Ist $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s$ eine Basis des Kerns $\ker f$ und $\vec{v}_{s+1}, \ldots, \vec{v}_n$ eine Erweiterung zu einer linear unabhängigen Teilmenge $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ von V, so ist die Familie $f(\vec{v}_{s+1}), \ldots, f(\vec{v}_n)$ linear unabhängig in W. Ist unsere Erweiterung sogar eine Basis von V, so ist unsere Familie eine Basis des Bildes von f.

Übung 3.2.2.13. Man zeige: Zwei Untervektorräume U, W eines Vektorraums V sind komplementär genau dann, wenn gilt $V = U + W$ und $U \cap W = 0$.

Ergänzende Übung 3.2.2.14. Die Menge aller Untervektorräume eines gegebenen Vektorraums bildet mit den Verknüpfungen $+$ und $\cap$ als $\vee$ und $\wedge$ einen Verband im Sinne von 2.2.6.3 und in diesem Verband gilt zuätzlich

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge (a \vee c))$$

für alle a, b, c. Ein Verband mit dieser Eigenschaft heißt **modular**. Gleichbedeutend ist die Forderung $(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c)$ für alle a, b, c mit $a \vee c = c$. Mit demselben Beweis wird in einer später eingeführten Terminologie folgen, daß die Untermoduln eines gegebenen Moduls einen modularen Verband bilden, und daher rührt auch die Terminologie. Mit einem Verband ist auch der duale Verband modular, wie man durch Einsetzen von $a \wedge c$ für a erkennt.

Ergänzende Übung 3.2.2.15. Ein Verband $(B, \wedge, \vee)$ ist genau dann modular, wenn wir für je zwei Elemente $a, b \in B$ in Bezug auf die in 10.2.3.9 beschriebene Ordnungrelation zueinander inverse Bijektionen zwischen den Intervallen $[a \wedge b, b]$ und $[a, a \vee b]$ erhalten durch die Regeln $w \mapsto a \vee w$ und $v \mapsto v \wedge b$. Hinweis: Man setze ein Element $w \in [a, a \vee b]$ an als $w = (a \vee c) \wedge (a \vee b)$ und transportiere es hin und zurück. Dualitätsbetrachtungen liefern den Rest der Behauptung.

Übung 3.2.2.16. Man zeige: Zwei Untervektorräume U, W eines endlichdimensionalen Vektorraums V sind komplementär genau dann, wenn gilt $V = U + W$ und $\dim U + \dim W \leq \dim V$. Hinweis: 3.1.7.16.

Übung 3.2.2.17. Der Kern einer von Null verschiedenen linearen Abbildung in den Grundkörper ist stets eine Hyperebene im Sinne von 3.1.5.16.

Ergänzende Übung 3.2.2.18. Sei $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums. Man zeige, daß $\ker(\varphi^2) = \ker \varphi$ gleichbedeutend ist zu $+ : \ker \varphi \oplus \operatorname{im} \varphi \xrightarrow{\sim} V$.

Ergänzende Übung 3.2.2.19. Ein Element f einer Menge mit Verknüpfung heißt **idempotent** genau dann, wenn in multiplikativer Notation gilt $f^2 = f$. Die idempotenten Endomorphismen eines Vektorraums entsprechen eineindeutig seinen Zerlegungen in eine direkte Summe von zwei komplementären Teilräumen. Gegeben ein Vektorraum V liefert genauer die Abbildung $f \mapsto (\operatorname{im} f, \ker f)$ eine Bijektion

$$\{f \in \operatorname{End} V \mid f^2 = f\} \xrightarrow{\sim} \left\{ (I, J) \in \mathcal{P}(V)^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} I, J \subset V \text{ sind Teilräume} \\ \text{und als solche komplementär} \end{array} \right\}$$

Für die Umkehrabbildung unserer Bijektion sagt man, sie ordne unserem Paar (I, J) komplementärer Teilräume die **Projektion von** V **auf** I **längs** J zu.

Übung 3.2.2.20. Sei $p : V \twoheadrightarrow W$ eine surjektive lineare Abbildung. Man zeige: Genau dann ist ein Teilraum $U \subset V$ komplementär zu $\ker p$, wenn p einen Isomorphismus $p : U \xrightarrow{\sim} W$ induziert.

3.2.3 Räume von linearen Abbildungen

3.2.3.1. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Die Menge aller Homomorphismen von V nach W notieren wir

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) = \operatorname{Hom}(V, W) \subset \operatorname{Ens}(V, W)$$

Lemma 3.2.3.2 (Lineare Abbildungen und Basen). *Seien V, W Vektorräume über einem Körper K und sei $B \subset V$ eine Basis. So liefert das Einschränken von Abbildungen eine Bijektion*

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ens}(B, W)$$

Jede lineare Abbildung ist also in Worten festgelegt und festlegbar durch ihre Werte auf einer Basis.

Beweis im Fall einer endlichen Basis. Seien $f, g : V \to W$ linear. Gilt $f(\vec{v}) = g(\vec{v})$ für alle $\vec{v} \in B$, so folgt $f(\lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_r \vec{v}_r) = g(\lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_r \vec{v}_r)$ für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ und $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in B$ und damit $f(\vec{v}) = g(\vec{v})$ für alle $\vec{v}$ im Erzeugnis von B alias für alle $\vec{v} \in V$. Das zeigt die Injektivität der im Lemma betrachteten Einschränkungsabbildung sogar allgemeiner für jedes Erzeugendensystem B von

V. Ist B zusätzlich eine Basis und ist umgekehrt eine Abbildung von Mengen $g : B \to W$ gegeben, so können wir sie zu einer linearen Abbildung $\tilde{g} : V \to W$ ausdehnen wie folgt: Jeder Vektor $\vec{v} \in V$ läßt sich ja nach 3.1.6.12 eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren schreiben, etwa $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_r\vec{v}_r$ mit paarweise verschiedenen $\vec{v}_i \in B$. Wir können nun schlicht $\tilde{g}$ definieren durch die Vorschrift

$$\tilde{g}(\vec{v}) := \lambda_1 g(\vec{v}_1) + \ldots + \lambda_r g(\vec{v}_r)$$

Man sieht leicht, daß dann $\tilde{g}$ linear ist und auf der Basis zu g einschränkt. □

3.2.3.3. Im Fall einer unendlichen Basis funktioniert derselbe Beweis, nur sollten wir noch genauer sagen, was wir meinen mit der Aussage, jeder Vektor $\vec{v} \in V$ lasse sich eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren schreiben. Dazu entwickeln wir die Terminologie des „freien Vektorraums über einer Menge“.

3.2.3.4 (**Freie Vektorräume und ihre universelle Eigenschaft**). Seien X eine Menge und K ein Körper. Die Menge $\mathrm{Ens}(X, K)$ aller Abbildungen $f : X \to K$ mit der punktweisen Addition und Multiplikation mit Skalaren ist offensichtlich ein K-Vektorraum. Darin bilden alle Abbildungen, die nur an endlich vielen Stellen von Null verschiedene Werte annehmen, einen Untervektorraum

$$K\langle X\rangle \subset \mathrm{Ens}(X, K)$$

Dieser Vektorraum $K\langle X\rangle$ heißt der **freie Vektorraum über der Menge** X. Gegeben $x \in X$ bezeichne $\delta_x : X \to K$ die Abbildung mit $\delta_x(x) = 1$ und $\delta_x(y) = 0$ für $y \neq x$. So ist die sogenannte **kanonische Einbettung** $\mathrm{can} : X \to K\langle X\rangle$ gegeben durch $x \mapsto \delta_x$ offensichtlich eine Basis im Sinne einer Familie von $K\langle X\rangle$. Weiter liefert für jeden K-Vektorraum V das Vorschalten der kanonischen Einbettung can eine Bijektion

$$(\circ\,\mathrm{can}) : \mathrm{Hom}_K(K\langle X\rangle, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(X, V)$$

In der Tat kann man in diesem Fall eine Umkehrabbildung leicht angeben durch die Vorschrift $\phi \mapsto \Phi$ mit

$$\Phi : a \mapsto \sum_{\{x|a(x)\neq 0\}} a(x)\phi(x)$$

Wir sagen dann auch, die lineare Abbildung $\Phi : K\langle X\rangle \to V$ entstehe aus der Abbildung $\phi : X \to V$ durch **lineare Fortsetzung**.

3.2.3.5 (**Notationen im Zusammenhang mit freien Vektorräumen**). Ein Element $a \in K\langle X\rangle$ des freien Vektorraums über einer Menge X fassen wir am liebsten als „formale Linearkombination von Elementen von X“ auf und notieren

es statt $\sum_{\{x|a(x)\neq 0\}} a(x)\delta_x$ lieber $\sum_{x\in X} a_x x$ mit der Indexnotation $a(x) = a_x$ für Abbildungen, der Abkürzung $\delta_x = x$ und der Konvention, daß bei unendlichen Summen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Summanden eben nur die Summe der von Null verschiedenen Summanden gemeint sein soll. In dieser Notation wirkt dann die kanonische Einbettung wie die Einbettung einer Teilmenge. Weiter wird in dieser Notation die lineare Fortsetzung Φ einer Abbildung $\phi : X \to V$ beschrieben durch die hoffentlich suggestivere Formel

$$\Phi : \sum_{x\in X} a_x x \quad \mapsto \quad \sum_{x\in X} a_x \phi(x)$$

Im Fall der Menge $X = \{\sharp, \flat, \natural\}$ wäre ein typisches Element von $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ etwa der Ausdruck

$$\frac{1}{2}\,\sharp - \frac{7}{5}\,\flat + 3\,\natural$$

Im Fall einer endlichen Menge $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ schreiben wir statt dem etwas umständlichen $K\langle\{x_1, \ldots, x_n\}\rangle$ auch abkürzend $K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Unseren Vektorraum von eben hätten wir also auch mit $\mathbb{Q}\langle\sharp, \flat, \natural\rangle$ bezeichnen können. Wenn wir betonen wollen, daß X für eine Menge von Erzeugern und nicht etwa einen einzigen Erzeuger steht, schreiben wir statt $K\langle X\rangle$ genauer $K\langle_! X\rangle$. Manchmal lassen wir auch die eckigen Klammern weg und schreiben statt $K\langle X\rangle$ einfach KX.

Satz 3.2.3.6 (Linearkombinationen von Basiselementen, Variante). *Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $(\vec{v}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren aus V. So sind gleichbedeutend:*

1. *Die Familie $(\vec{v}_i)_{i\in I}$ ist eine Basis von V;*
2. *Die durch lineare Fortsetzung von $\phi : I \to V$, $i \mapsto \vec{v}_i$ nach 3.2.3.4 entstehende lineare Abbildung ist ein Isomorphismus $\Phi : K\langle I\rangle \xrightarrow{\sim} V$.*

Beweis. Ausführlicher gilt sogar:

$(\vec{v}_i)_{i\in I}$ ist Erzeugendensystem	$\Leftrightarrow$	Φ ist eine Surjektion	$K\langle I\rangle \twoheadrightarrow V$
$(\vec{v}_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig	$\Leftrightarrow$	Φ ist eine Injektion	$K\langle I\rangle \hookrightarrow V$
$(\vec{v}_i)_{i\in I}$ ist eine Basis	$\Leftrightarrow$	Φ ist eine Bijektion	$K\langle I\rangle \xrightarrow{\sim} V$

Der Beweis ist mutatis mutandis derselbe wie im in 3.1.6.12 behandelten Fall einer endlichen Familie, mit einigen Vereinfachungen, die die bereits entwickelte Theorie ermöglicht. Das Bild von Φ ist offensichtlich der von unserer Familie erzeugte Untervektorraum. Andererseits ist Φ nach 3.2.2.4 genau dann injektiv, wenn gilt $\ker(\Phi) = 0$. Diese Bedingung bedeutet aber nach unseren Definitionen genau die lineare Unabhängigkeit unserer Familie. $\square$

Beweis von Lemma 3.2.3.2 im allgemeinen. Ist V ein K-Vektorraum und $B \subset V$ eine Basis, so liefert die lineare Ausdehnung der Einbettung $\phi : B \hookrightarrow V$ nach 3.2.3.6 einen Isomorphismus $\Phi : K\langle B\rangle \xrightarrow{\sim} V$. Wir erhalten so für jeden weiteren K-Vektorraum Bijektionen

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(K\langle B\rangle, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(B, W)$$

durch Vorschalten von Φ und can. Deren Verknüpfung alias das Vorschalten der Einbettung $B \hookrightarrow V$ ist also auch eine Bijektion, und das war genau die Behauptung. $\square$

3.2.3.7. Die folgende Definition mit den zugehörigen Übungen ist dazu gedacht, die Diskussion der Determinante und allgemeinerer multilinearer Abbildungen vorzubereiten. An dieser Stelle ist es wesentlich, daß wir über einem Körper und nicht etwa über einem Schiefkörper arbeiten.

Definition 3.2.3.8. Seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K. Eine Abbildung $F : U \times V \to W$ alias 2-Multiabbildung $F : U \curlyvee V \to W$ heißt **bilinear**, wenn sie für jedes feste $v \in V$ linear ist in $u \in U$ und für jedes feste $u \in U$ linear in $v \in V$. In Formeln bedeutet das

$$\begin{aligned} F(u+a, v) &= F(u, v) + F(a, v) \\ F(\lambda u, v) &= \lambda F(u, v) \\ F(u, v+b) &= F(u, v) + F(u, b) \\ F(u, \mu v) &= \mu F(u, v) \end{aligned}$$

für alle $\lambda, \mu \in K$ und $u, a \in U$ und $v, b \in V$. Die Menge aller solchen bilinearen Abbildungen notieren wir

$$\mathrm{Mod}_K(U \curlyvee V, W) = \mathrm{Hom}_K^{(2)}(U \times V, W) \subset \mathrm{Ens}(U \times V, W)$$

Mir gefällt die erste Notation besser, in der $\curlyvee$ ein neues Trennsymbol ist und Mod_K die „Schmelzkategorie der K-Moduln“ meint, die wir später einführen werden. Diese Notation ist jedoch unüblich. Eine bilineare Abbildung $V \times V \to K$ in den Grundkörper heißt eine **Bilinearform auf** V. Die Menge, ja den Vektorraum aller Bilinearformen auf V notieren wir $\mathrm{Bil}(V)$.

Übungen

Übung 3.2.3.9. Seien U, V, W Vektorräume und $A \subset U$ sowie $B \subset V$ jeweils Basen. So liefert die Einschränkung eine Bijektion

$$\mathrm{Mod}_K(U \curlyvee V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(A \times B, W)$$

In Worten ist also eine bilineare Abbildung festgelegt und festlegbar durch ihre Werte auf Paaren von Basisvektoren. Hinweis: Man orientiere sich am Beweis von 3.2.3.2.

Ergänzende Übung 3.2.3.10. Seien $(X, \leq)$ eine teilgeordnete Menge und K ein Körper. Seien für alle $x \in X$ Abbildungen $f_x : X \to K$ gegeben mit $f_x(x) \neq 0$ und $f_x(y) \neq 0 \Rightarrow y \geq x$. Man zeige, daß dann die Familie $(f_x)_{x \in X}$ linear unabhängig ist im Vektorraum $\mathrm{Ens}(X, K)$ aller Abbildungen von X nach K.

Weiterführende Übung 3.2.3.11. Man zeige, daß für eine unendliche Menge X weder der Vektorraum $\mathrm{Ens}(X, K)$ noch der freie Vektorraum $K\langle X \rangle$ über X endlich erzeugt sind.

Übung 3.2.3.12 (**Homomorphismen aus direkten Summen**). Gegeben Vektorräume $V_1, \ldots, V_n, W$ liefert die Vorschrift $f \mapsto (f \circ \mathrm{in}_i)_i$ einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}(V_1 \oplus \ldots \oplus V_n, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V_1, W) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Hom}(V_n, W)$$

Die Umkehrabbildung ordnet einem Tupel linearer Abbildungen $f_i : V_i \to W$ die lineare Abbildung $f : V_1 \oplus \ldots \oplus V_n \to W$ zu mit

$$f(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) := f_1(\vec{v}_1) + \ldots + f_n(\vec{v}_n)$$

Wir notieren diese Abbildung auch $f = (f_1, \ldots, f_n)$ und denken sie uns als eine "Zeilenmatrix von linearen Abbildungen", die auf die "Spaltenmatrix von Vektoren" $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)^\top$ angewandt wird. Es erweist sich in diesem und ähnlichen Kontexten als bequem, Elemente von direkten Summen als Spaltenvektoren zu denken.

Übung 3.2.3.13 (**Homomorphismen in direkte Summen**). Gegeben Vektorräume $V, W_1, \ldots, W_n$ liefert die Vorschrift $g \mapsto (\mathrm{pr}_i \circ g)_i$ einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}(V, W_1 \oplus \ldots \oplus W_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, W_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Hom}(V, W_n)$$

Die Umkehrabbildung ordnet einem Tupel linearer Abbildungen $g_i : V \to W_i$ die lineare Abbildung $g : V \to W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$ zu mit $g(\vec{v}) = (g_1(\vec{v}), \ldots, g_n(\vec{v}))$. Wir notieren diese Abbildung auch $g = (g_1, \ldots, g_n)^\top$ und denken sie uns als eine "Spaltenmatrix von linearen Abbildungen", die aus einem Vektor $\vec{v}$ eine Spalte von Vektoren macht, die wir dann als Elemente der direkten Summe auffassen.

Übung 3.2.3.14 (**Der Hom-Raum und seine Dimension**). Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Man zeige, daß $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ein Untervektorraum der Menge $\mathrm{Ens}(V, W)$ aller Abbildungen von V nach W mit ihrer Vektorraumstruktur aus 3.2.3.4 ist. Man zeige für die Dimension von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ die Formel

$$\dim \mathrm{Hom}_K(V, W) = (\dim V)(\dim W)$$

unter der Konvention $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$. Diese Formel ist insofern mit Vorsicht zu genießen, als sie bei einer feineren Interpretation der Dimension als Kardinalität im Fall unendlichdimensionaler Räume ihre Gültigkeit verliert. Hinweis: 3.2.3.2.

Übung 3.2.3.15. Man zeige, daß für je drei Vektorräume U, V, W über einem Körper die Verknüpfung $\mathrm{Hom}(U, V) \times \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(U, W)$ von linearen Abbildungen bilinear ist. Hier sind unsere Homomorphismenräume zu verstehen mit ihrer in 3.2.3.14 erklärten Vektorraumstruktur.

Übung 3.2.3.16 (**Exponentialgesetz für lineare Abbildungen**). Gegeben Vektorräume U, V, W über einem Körper induziert die Identifikation $\mathrm{Ens}(U \times V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(U, \mathrm{Ens}(V, W))$ aus dem Exponentialgesetz 2.1.6.5 einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}^{(2)}(U \times V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W))$$

zwischen dem Raum der bilinearen Abbildungen $U \times V \to W$ und dem Raum der linearen Abbildungen $U \to \mathrm{Hom}(V, W)$.

3.2.4 Lineare Abbildungen $K^n \to K^m$ und Matrizen

Satz 3.2.4.1 (Lineare Abbildungen und Matrizen). *Gegeben ein Körper K und natürliche Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ erhalten wir eine Bijektion zwischen der Menge der linearen Abbildungen $K^n \to K^m$ und der Menge der K-wertigen Matrizen mit m Zeilen und n Spalten*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{M}: & \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Mat}(m \times n; K) \\ & f & \mapsto & [f] \end{array}$$

durch die Vorschrift, die jeder linearen Abbildung f ihre **darstellende Matrix** $\mathrm{M}(f) := [f]$ *zuordnet. Die darstellende Matrix wird dabei ihrerseits dadurch erklärt, daß in ihren Spalten die Bilder unter f der Vektoren der Standardbasis des K^n stehen, in Formeln*

$$[f] := (f(\mathrm{e}_1)|f(\mathrm{e}_2)|\ldots|f(\mathrm{e}_n))$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus unserer Erkenntnis 3.2.3.2, daß eine lineare Abbildung festgelegt wird durch ihre Werte auf den Vektoren einer Basis, die ihrerseits beliebig vorgegeben werden können. □

Beispiel 3.2.4.2. Die Matrix der Identität auf K^n ist die **Einheitsmatrix**

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_n := [\mathrm{id}] = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

mit Einträgen $\mathrm{I}_{i,j} = \delta_{i,j}$ in der unter der Bezeichnung **Kroneckerdelta** bekannten und allgemein gebräuchlichen Konvention

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist allgemeiner $n \geq m$, so ist die Matrix des „Weglassens der überzähligen Koordinaten“ $f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_m)$ gerade

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & 0 \ldots 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix des „Vertauschens der Koordinaten“ $g : K^2 \to K^2$, $(x, y) \mapsto (y, x)$ schließlich ist

$$[g] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 3.2.4.3. Gegeben natürliche Zahlen $m, n, l \in \mathbb{N}$ und ein Körper K und Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(n \times m; K), B \in \mathrm{Mat}(m \times l; K)$ definieren wir ihr **Produkt** $A \circ B = AB \in \mathrm{Mat}(n \times l; K)$ durch die Formel

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{m} A_{ij} B_{jk}$$

Diese Formel drückt den Eintrag der Produktmatrix AB in der i-ten Zeile und k-ten Spalte durch die Einträge der Matrizen A und B aus. In Worten gilt es, jeweils den j-ten Eintrag der i-ten Zeile von A mit dem j-ten Eintrag der k-ten Spalte von B zu multiplizieren, und die Summe dieser m Produkte ist dann der Eintrag der Produktmatrix AB in der i-ten Zeile und k-ten Spalte. Manchmal schreiben wir die Produktmatrix auch ausführlicher $AB = A \circ B$. Die **Matrixmultiplikation** liefert eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mat}(n \times m; K) \times \mathrm{Mat}(m \times l; K) & \to & \mathrm{Mat}(n \times l; K) \\ (A \quad , \quad B) & \mapsto & AB \end{array}$$

3.2.4.4. In der Terminologie aus 3.2.3.8 ist unsere Matrixmultiplikation eine bilineare Abbildung, wie man unschwer einsieht. Den Ursprung dieser auf den ersten Blick vielleicht absonderlich anmutenden Definition des Produkts zweier Matrizen und unserer leicht mit dem Verknüpfen von Abbildungen zu verwechselnden alternativen Notation $AB = A \circ B$ erklärt der folgende Satz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 14 & 12 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 29 & 26 & 18 \end{pmatrix}$$

Produkt zweier Matrizen. Der gestrichelt eingekringelte Eintrag 4 in der zweiten Zeile und dritten Spalte auf der rechten Seite etwa ergibt sich aus der gestrichelt eingekringelten zweiten Zeile des ersten Faktors und der gestrichelt eingekringelten dritten Spalte des zweiten Faktors vermittels der Rechnung $4 = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 6$.

Satz 3.2.4.5 (Verknüpfen von Abbildungen und Matrixprodukt). *Gegeben lineare Abbildungen $g : K^l \to K^m$ und $f : K^m \to K^n$ ist die Matrix ihrer Verknüpfung das Produkt der zugehörigen Matrizen, in Formeln*

$$[f \circ g] = [f] \circ [g]$$

Beweis. Sei (a_{ij}) die Matrix $[f]$ und (b_{jk}) die Matrix $[g]$. Wir notieren die Standardbasen von K^n, K^m und K^l als $\vec{u}_i, \vec{v}_j$ und $\vec{w}_k$ in der Hoffnung, daß die folgende Rechnung dadurch transparenter wird, daß wir nicht für die Standardbasis in allen drei Räumen die sonst eigentlich übliche Notation $\vec{\mathrm{e}}_r$ verwenden. Weiter schreiben wir die Skalare hinter die Vektoren, was wir bei konsequenter Arbeit mit einem Schiefkörper eh hätten tun müssen und was in jedem Fall die Formeln transparenter macht. In dieser Notation haben wir also

$$\begin{array}{rclcl} g(\vec{w}_k) & = & (b_{*k}) & = & \vec{v}_1 b_{1k} + \ldots + \vec{v}_m b_{mk} \\ f(\vec{v}_j) & = & (a_{*j}) & = & \vec{u}_1 a_{1j} + \ldots + \vec{u}_n a_{nj} \end{array}$$

und folgern

$$\begin{array}{rcl} (f \circ g)(\vec{w}_k) & = & f(\vec{v}_1 b_{1k} + \ldots + \vec{v}_m b_{mk}) \\ & = & f(\vec{v}_1) b_{1k} + \ldots + f(\vec{v}_m) b_{mk} \\ & = & \sum_{j=1}^m f(\vec{v}_j) b_{jk} \\ & = & \sum_{j=1}^m \big(\sum_{i=1}^n \vec{u}_i a_{ij} \big) b_{jk} \\ & = & \sum_{i=1}^n \vec{u}_i \big(\sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} \big) \end{array}$$

Andererseits sind ja die Einträge (c_{ik}) der Matrix $[f \circ g]$ gerade definiert durch die Identität $(f \circ g)(\vec{w}_k) = \vec{u}_1 c_{1k} + \ldots + \vec{u}_n c_{nk}$, und durch einen Koeffizientenvergleich folgt für die Einträge c_{ik} von $[f \circ g]$ wie gewünscht $c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk}$. □

Proposition 3.2.4.6 (Rechnen mit Matrizen). *Für die Matrixmultiplikation gelten die folgenden Rechenregeln:*

$$\begin{array}{rcl} (A + A')B & = & AB + A'B \\ A(B + B') & = & AB + AB' \\ \mathrm{I}B & = & B \\ A\mathrm{I} & = & A \\ (AB)C & = & A(BC) \end{array}$$

für beliebige $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ und $A, A' \in \mathrm{Mat}(n \times m; K)$, $B, B' \in \mathrm{Mat}(m \times l; K)$, $C \in \mathrm{Mat}(l \times k; K)$ und $\mathrm{I} = \mathrm{I}_m$ die $(m \times m)$-Einheitsmatrix.

Erster Beweis. Stures Rechnen, ich führe nur zwei Teile beispielhaft aus. Wir haben $(A\mathrm{I})_{ij} = \sum_k A_{ik}\mathrm{I}_{kj} = \sum_k A_{ik}\delta_{kj} = A_{ij}$ und das zeigt $A\mathrm{I} = A$. Für die nächste Rechnung verwende ich einmal andere Notationen und nehme $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ als Laufindizes. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
((AB)C)_{\nu\kappa} &= \textstyle\sum_{\lambda=1}^{l}(AB)_{\nu\lambda}C_{\lambda\kappa} \\
&= \textstyle\sum_{\lambda=1}^{l}\left(\sum_{\mu=1}^{m} A_{\nu\mu}B_{\mu\lambda}\right)C_{\lambda\kappa} \\
&= \textstyle\sum_{\lambda,\mu=1}^{l,m} A_{\nu\mu}B_{\mu\lambda}C_{\lambda\kappa} \\
(A(BC))_{\nu\kappa} &= \textstyle\sum_{\mu=1}^{m} A_{\nu\mu}(BC)_{\mu\kappa} \\
&= \textstyle\sum_{\mu=1}^{m} A_{\nu\mu}\left(\sum_{\lambda=1}^{l} B_{\mu\lambda}C_{\lambda\kappa}\right) \\
&= \textstyle\sum_{\mu,\lambda=1}^{m,l} A_{\nu\mu}B_{\mu\lambda}C_{\lambda\kappa}
\end{aligned}$$

und das zeigt $(AB)C = A(BC)$. □

Zweiter Beweis. Wir können unsere Rechenregeln für Matrizen auch mit 3.2.4.1 und 3.2.4.5 auf die entsprechenden Regeln für lineare Abbildungen zurückführen. Um zum Beispiel $(AB)C = A(BC)$ zu zeigen, betrachten wir die linearen Abbildungen a, b, c mit den entsprechenden Matrizen im Sinne von 3.2.4.1, finden mit 3.2.4.5 sofort

$$\begin{aligned}
(AB)C &= ([a]\circ[b])\circ[c] = [a\circ b]\circ[c] = [(a\circ b)\circ c] \\
A(BC) &= [a]\circ([b]\circ[c]) = [a]\circ[b\circ c] = [a\circ(b\circ c)]
\end{aligned}$$

und die Behauptung ergibt sich aus der für die Verknüpfung von Abbildungen offensichtlichen Identität $(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)$. □

3.2.4.7 (**Lineare Abbildungen $K^m \to K^n$ als Matrixmultiplikationen**). Mit dem Formalismus der Matrixmultiplikation können wir auch die Umkehrung unserer Bijektion $\mathrm{Hom}_K(K^m, K^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}(n\times m; K)$, $f \mapsto [f]$ aus 3.2.4.1, bei der jeder linearen Abbildung ihre darstellende Matrix zugeordnet wird, elegant beschreiben. Dazu müssen wir nur die Elemente von K^m beziehungsweise K^n als Spaltenvektoren auffassen und einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n\times m; K)$ die durch Matrixmultiplikation gegebene Abbildung $(A\circ) : \mathrm{Mat}(m\times 1; K) \to \mathrm{Mat}(n\times 1; K)$ alias

$$(A\circ) : K^m \to K^n$$

zuordnen. Das folgt unmittelbar aus den Definitionen. Statt $A\circ x$ schreibt man dann auch einfacher schlicht Ax. Die Umkehrabbildung zu $f \mapsto [f]$ kann mit diesen Konventionen also in der Form $A \mapsto (x \mapsto Ax)$ für $x \in K^m$ dargestellt werden, oder noch knapper in der Form $A \mapsto (A\circ)$. Auf die Dauer sollte einem diese Identifikation von linearen Abbildungen $K^m \to K^n$ und Matrizen eh so

in Fleisch und Blut übergehen, daß man unterschiedslos A schreiben und damit beides gleichzeitig meinen kann.

3.2.4.8 (**Lineare Abbildungen als Matrixmultiplikationen, Variante**). Gegeben ein Körper K liefert für jeden K-Vektorraum V das Auswerten auf dem Element $1 \in K$ eine Bijektion $\mathrm{Hom}(K, V) \xrightarrow{\sim} V$. Deren Umkehrabbildung kann explizit beschrieben werden als die Abbildung

$$V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(K, V)$$

gegeben durch $\vec{v} \mapsto (\cdot\vec{v})$ mit $(\cdot\vec{v}) : \lambda \mapsto \lambda\vec{v}$. Im Spezialfall $V = K^m$ ist für $\vec{v} \in K^m$ die darstellende Matrix $[\cdot\vec{v}]$ von $(\cdot\vec{v}) : K \to K^m$ offensichtlich gerade $\vec{v}$ selber, aufgefaßt als Spaltenmatrix. Wir notieren diese Spaltenmatrix abkürzend

$$[\vec{v}]$$

oder später auch einfach nur noch $\vec{v}$. Ist nun $f : V \to W$ linear, so gilt auch ganz allgemein sicher $f \circ (\cdot\vec{v}) = (\cdot f(\vec{v}))$, denn diese beiden linearen Abbildungen $K \to W$ nehmen auf dem Erzeuger $1 \in K$ denselben Wert $f(\vec{v})$ an. Im Spezialfall $W = K^n$ folgern wir für das Produkt der darstellenden Matrizen aus der vorhergehenden Bemerkung 3.2.4.7 nocheinmal die Identität

$$[f] \circ [\vec{v}] = [f(\vec{v})]$$

von Spaltenvektoren, diesmal aber als Konsequenz unseres Satzes 3.2.4.5 über die Matrix einer Verknüpfung.

Ergänzung 3.2.4.9. Gegeben eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times m; K)$ definiert man die **transponierte Matrix** $A^\top \in \mathrm{Mat}(m \times n; K)$ durch die Vorschrift $(A^\top)_{ij} = A_{ji}$. Anschaulich gesprochen entsteht also $A^\top$ aus A durch „Spiegeln an der Hauptdiagonalen“. Zum Beispiel ist die Transponierte eines Spaltenvektors alias einer $(n \times 1)$-Matrix ein **Zeilenvektor** alias eine $(1 \times n)$-Matrix. Natürlich gilt $(A^\top)^\top = A$. Viele Autoren verwenden für die transponierte Matrix auch die alternative Notation ${}^tA$.

3.2.4.10 (**Zeilenvektoren versus Spaltenvektoren**). An dieser Stelle will ich kurz auf die Frage eingehen, „ob denn Elemente eines K^n nun eigentlich Zeilenvektoren oder Spaltenvektoren sein sollen“. A priori sind Elemente eines K^n halt n-Tupel und wie wir sie schreiben ist egal. Wenn wir jedoch eine Matrix davormultiplizieren wollen, ist es wichtig, unsere n-Tupel als Spaltenvektoren alias Spaltenmatrizen aufzufassen. Da das oft vorkommt, plädiere ich dafür, sich n-Tupel grundsätzlich als Spalten zu denken. Allerdings ist es in einem durchlaufenden Text ungeschickt, Spaltenvektoren auch als solche zu schreiben. Da fügen

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 7 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Die transponierte Matrix erhält man durch eine „Spiegelung an der Hauptdiagonalen“.

sich Zeilenvektoren einfach viel besser ein. Wenn ich dennoch auf Spaltenvektoren bestehen will, schreibe ich sie im Text als „zu transponierende Zeilenvektoren“, als da heißt, in der Form $(x_1, \ldots, x_n)^\top$. Oft schreibe ich aber auch einfach $(x_1, \ldots, x_n)$ und der Leser muß aus dem Kontext erschließen, was genau gemeint ist, wenn es denn darauf überhaupt ankommen sollte.

3.2.4.11. Eine alternative Notation mag besser sein, in der $(x_1, \ldots, x_n)$ im Zweifelsfall einen Spaltenvektor meint und $(x_1| \ldots |x_n)$ stets einen Zeilenvektor. Im vorliegenden Text wird diese Konvention jedoch nicht durchgehalten.

Ergänzung 3.2.4.12 (**Homomorphismen zwischen direkten Summen**). Gegeben Vektorräume $V_1, \ldots, V_m$ und $W_1, \ldots, W_n$ über einem Körper k liefern die Identifikationen 3.2.3.12 und 3.2.3.13 zusammen eine natürliche Identifikation

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(V_1 \oplus \ldots \oplus V_m, W_1 \oplus \ldots \oplus W_n) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(V_j, W_i) \\ f & \mapsto & (\mathrm{pr}_i \circ f \circ \mathrm{in}_j)_{ij} \end{array}$$

Wir werden die Elemente einer endlichen direkten Summe oft als Spaltenvetoren auffassen und die Homomorphismen zwischen direkten Summen als Matrizen von Homomorphismen zwischen den Summanden. So fassen wir ein Element (f_{ij}) des rechten Produkts oben auf als eine Matrix von Homomorphismen, mit $f_{11}, f_{21}, \ldots, f_{n1}$ als erster Spalte, $f_{12}, f_{22}, \ldots, f_{n2}$ als zweiter Spalte und so weiter. Diese Darstellung als Matrix erlaubt es dann, die Komposition solcher Homomorphismen mit dem Formalismus der Matrixmultiplikation zu berechnen: Entspricht genauer einer weiteren linearen Abbildung $g : U_1 \oplus \ldots \oplus U_l \to V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ die Matrix der $g_{jk} = \mathrm{pr}_j \circ g \circ \mathrm{in}_k : U_k \to V_j$, so entspricht der Verknüpfung $f \circ g$ die Matrix mit Einträgen

$$\left(\sum_j f_{ij} \circ g_{jk} \right) : U_k \to W_i$$

Sind speziell alle unsere Vektorräume irgendwelche k^a, so erhalten wir insbesondere, daß das Produkt zweier multiplizierbarer Matrizen auch berechnet werden kann, indem man sie „in verträglicher Weise“ als Blockmatrizen auffaßt und dann diese Blockmatrizen nach den Regeln der Matrixmultiplikation „multipliziert, als ob die Blöcke Zahlen wären“.

Übungen

Übung 3.2.4.13. Man zeige, daß die Abbildung M aus 3.2.4.1 sogar ein Vektorraumisomorphismus ist für die Vektorraumstruktur 3.2.3.14 auf dem Raum der Homomorphismen und die Vektorraumstruktur 3.1.2.19 auf der Menge der Matrizen.

Übung 3.2.4.14. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Man zeige, daß die linearen Abbildungen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft $fg = gf$ einen Untervektorraum des Homomorphismenraums $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ bilden und gebe eine Basis dieses Untervektorraums des Homomorphismenraums an.

Übung 3.2.4.15. Man zeige für das Produkt transponierter Matrizen die Formel

$$(AB)^\top = B^\top A^\top$$

3.2.5 Eigenschaften von Matrizen

3.2.5.1. Eine Matrix mit gleichviel Zeilen wie Spalten heißt **quadratisch**. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bilden die zugehörigen quadratischen Matrizen mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung ein Monoid, das wir abkürzend

$$\mathrm{Mat}(n; K) := \mathrm{Mat}(n \times n; K)$$

notieren. Die invertierbaren Elemente dieses Monoids heißen die **invertierbaren** oder gleichbedeutend auch die **regulären** $(n \times n)$**-Matrizen**. In Formeln heißt eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n; K)$ also invertierbar, wenn es eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n; K)$ gibt mit $AB = \mathrm{I} = BA$. Diese Matrix B heißt dann auch ihre **Inverse**. Im Einklang mit unseren allgemeinen Konventionen für multiplikativ notierte Monoide notieren wir diese Matrix A^{-1} und nennen sie die **inverse Matrix zu** A. Die invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen in einem Körper K bilden mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe, die **allgemeine lineare Gruppe der** $(n \times n)$**-Matrizen**, die man notiert als

$$\mathrm{GL}(n; K) := \mathrm{Mat}(n; K)^\times$$

in Anlehnung an die englische Bezeichnung **general linear group**.

Lemma 3.2.5.2 (**Invertierbarkeit a priori nicht quadratischer Matrizen**). *Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(m \times n; K)$ eine nicht notwendig quadratische Matrix.*

1. *Gilt $n \geq m$ und gibt es $B \in \mathrm{Mat}(n \times m; K)$ mit $BA = \mathrm{I}$, so gilt $n = m$ und A ist invertierbar;*

2. *Gilt $n \leq m$ und gibt es $B \in \mathrm{Mat}(n \times m; K)$ mit $AB = \mathrm{I}$, so gilt $n = m$ und A ist invertierbar.*

Beweis. Gibt es B mit $BA = \mathrm{I}$, so ist die durch BA gegebene lineare Abbildung injektiv, also ist die durch A gegebene lineare Abbildung injektiv, also ist sie unter der Annahme $n \geq m$ nach Dimensionsvergleich ein Isomorphismus. Gibt es B mit $AB = \mathrm{I}$, so ist die durch AB gegebene lineare Abbildung surjektiv, also ist die durch A gegebene lineare Abbildung surjektiv, also ist sie unter der Annahme $n \leq m$ nach Dimensionsvergleich ein Isomorphismus. □

3.2.5.3 (**Lineare Gleichungssysteme und Matrixalgebra**). Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{lll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1m}x_m & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2m}x_m & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \dots & +a_{nm}x_m & = b_n \end{array}$$

können wir in unseren neuen Notationen zur Gleichung von Spaltenvektoren

$$Ax = b$$

abkürzen, wobei links das Produkt der Koeffizientenmatrix A mit dem Spaltenvektor x gemeint ist. Gesucht ist das Urbild von $b \in K^n$ unter der linearen Abbildung $(A\circ) : K^m \to K^n$. Die Lösung des homogenisierten Systems ist genau der Kern dieser linearen Abbildung, und die Erkenntnis 3.1.1.13, nach der die allgemeine Lösung eines inhomogenen Systems die Summe einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems mit einer allgemeinen Lösung des homogenisierten Systems ist, erweist sich als ein Spezialfall der Beschreibung 3.3.2.14 der Fasern linearer Abbildungen. Die Operationen des Gauß-Algorithmus können wir in diesem Rahmen wie folgt interpretieren: Bezeichnet

$$E_{ij}$$

die **Basismatrix** mit dem Eintrag Eins in der i-ten Zeile und j-ten Spalte und Nullen sonst, so kann für $i \neq j$ das Gleichungssystem, das durch Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile entsteht, in Matrixschreibweise dargestellt werden als

$$(\mathrm{I} + \lambda E_{ij})Ax = (\mathrm{I} + \lambda E_{ij})b$$

Wegen $(\mathrm{I} - \lambda E_{ij})(\mathrm{I} + \lambda E_{ij}) = \mathrm{I}$ hat es offensichtlich dieselbe Lösungsmenge wie das ursprüngliche System. Bezeichnet weiter P_{ij} für $i \neq j$ die Matrix zu der linearen Abbildung $K^m \xrightarrow{\sim} K^m$, die die i-te Koordinate mit der j-ten Koordinate vertauscht und sonst alles so läßt wie es ist, so kann das Gleichungssystem, das durch Vertauschen der i-ten Zeile mit der j-ten Zeile entsteht, in Matrixschreibweise dargestellt werden als

$$P_{ij}Ax = P_{ij}b$$

Wegen $P_{ij}P_{ij} = \mathrm{I}$ hat es offensichtlich dieselbe Lösungsmenge wie das ursprüngliche System.

3.2.5.4. Man lasse sich durch die terminologische Inkonhärenz nicht verwirren: E_{ij} und P_{ij} sind an dieser Stelle Matrizen, nicht wie vorher Einträge von Matrizen.

3.2.5.5. Unter einer **Elementarmatrix** verstehen wir eine quadratische Matrix, die sich in höchstens einem Eintrag von der Einheitsmatrix unterscheidet. Mit Ausnahme der Matrizen, die entstehen, wenn man in der Einheitsmatrix eine Eins durch eine Null ersetzt, sind alle Elementarmatrizen mit Einträgen in einem Körper invertierbar.

Ergänzung 3.2.5.6 (**Diskussion der Terminologie**). Es herrscht in der Literatur keine Einigkeit in der Frage, was man genau unter einer Elementarmatrix zu verstehen hat. Manche Quellen bezeichnen zusätzlich zu unseren Elementarmatrizen auch noch die Permutationsmatrizen P_{ij} als Elementarmatrizen, andere Quellen insbesondere im Zusammenhang mit der sogenannten „K-Theorie“ hinwiederum lassen nur solche Matrizen zu, die sich von der Einheitsmatrix in höchstens einem Eintrag außerhalb der Diagonale unterscheiden. Ich schlage vor, diese letzteren Matrizen **spezielle Elementarmatrizen** zu nennen, da sie genau die Elementarmatrizen sind, die zur speziellen linearen Gruppe 4.1.4.5 gehören.

3.2.5.7. Eine Matrix, die nur auf der Diagonalen von Null verschiedene Einträge hat, und zwar erst einige Einsen und danach nur noch Nullen, nennen wir eine Matrix in **Smith-Normalform**.

Satz 3.2.5.8 (**Transformation auf Smith-Normalform**). *Gegeben ein Körper K und eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times m; K)$ gibt es invertierbare Matrizen P, Q derart, daß PAQ eine Matrix in Smith-Normalform ist.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der anschließenden technischen Variante 3.2.5.9. In 3.2.6.11 geben wir einen noch alternativen eigenständigen Beweis. □

Proposition 3.2.5.9 (**Transformation auf Smith-Normalform, Variante**). *Gegeben ein Körper K und eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times m; K)$ gibt es invertierbare Elementarmatrizen $S_1, \ldots, S_n, T_1, \ldots, T_m$ derart, daß $S_n \ldots S_1 A$ Zeilenstufenform hat und $S_n \ldots S_1 A T_1 \ldots T_m$ Smith-Normalform.*

Beweis. Zunächst einmal beachten wir, daß die Permutationsmatrizen P_{ij} mit $i \neq j$ sich als Produkte von Elementarmatrizen schreiben lassen, wir haben etwa

$$P_{ij} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, 1, \ldots, 1)(\mathrm{I} + E_{ij})(\mathrm{I} - E_{ji})(\mathrm{I} + E_{ij})$$

Hier soll die (-1) an der j-ten Stelle stehen und $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ meint die **Diagonalmatrix** mit Einträgen $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $a_{ii} = \lambda_i$. Dann beachte man, daß die Rechtsoperation von Elementarmatrizen das Ausführen von Spaltenoperationen bedeutet. Damit folgt unsere Proposition aus dem Gauß-Algorithmus. □

Korollar 3.2.5.10. *Jede quadratische Matrix mit Einträgen in einem Körper läßt sich als ein Produkt von Elementarmatrizen darstellen.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix in Smith-Normalform

Ergänzung 3.2.5.11. Der Beweis zeigt sogar, daß es für jedes n ein N gibt derart, daß sich jede $(n \times n)$-Matrix als ein Produkt von höchstens N Elementarmatrizen darstellen läßt.

Beweis. Nach 3.2.5.9 können wir invertierbare Elementarmatrizen S_i, T_j finden derart, daß $S_n \dots S_1 A T_1 \dots T_m$ die Gestalt $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ hat. Die letztere Matrix schreiben wir leicht als Produkt von nun nicht mehr invertierbaren diagonalen Elementarmatrizen, in Formeln etwa $S_n \dots S_1 A T_1 \dots T_m = D_1 \dots D_r$ und folgern

$$A = S_1^{-1} \dots S_n^{-1} D_1 \dots D_r T_m^{-1} \dots T_1^{-1} \qquad \square$$

3.2.5.12 (**Invertieren von Matrizen**). Um die Inverse einer $(n \times n)$-Matrix A zu berechnen, kann man wie folgt vorgehen: Man schreibt die Einheitsmatrix I daneben und wendet dann auf die $(n \times 2n)$-Matrix $(A|\mathrm{I})$ Zeilenoperationen an, einschließlich des Multiplizierens einer Zeile mit einem von Null verschiedenen Skalar, bis man A erst in Zeilenstufenform gebracht und dann sogar zur Einheitsmatrix gemacht hat. Dann steht in der rechten Hälfte unserer $(n \times 2n)$-Matrix die Inverse zu A. In der Tat, sind unsere Zeilenumformungen etwa gegeben durch das Davormultiplizieren der Matrizen $S_1, S_2, \dots, S_t$, so steht nach diesen Umformungen da

$$(S_t \dots S_2 S_1 A | S_t \dots S_2 S_1 \mathrm{I})$$

und wenn dann gilt $S_t \dots S_2 S_1 A = \mathrm{I}$, so folgt $S_t \dots S_2 S_1 \mathrm{I} = S_t \dots S_2 S_1 = A^{-1}$. Dasselbe Verfahren funktioniert auch, wenn wir statt mit Zeilen- mit Spaltenumformungen arbeiten. Es ist nur nicht erlaubt, diese zu mischen, denn aus $S_t \dots S_1 A T_1 \dots T_r = \mathrm{I}$ folgt keineswegs $S_t \dots S_1 T_1 \dots T_r = A^{-1}$.

Definition 3.2.5.13. Gegeben eine Matrix $A \in \operatorname{Mat}(n \times m; K)$ heißt die Dimension des von ihren Spaltenvektoren aufgespannten Untervektorraums von K^n der **Spaltenrang** unserer Matrix. Analog heißt die Dimension des von ihren Zeilenvektoren aufgespannten Untervektorraums von K^m der **Zeilenrang** unserer Matrix.

Satz 3.2.5.14. *Für jede Matrix stimmen Zeilenrang und Spaltenrang überein, in Formeln gilt also* $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\top)$.

3.2.5.15. Diese gemeinsame Zahl heißt dann der **Rang** oder auf englisch **rank** unserer Matrix und wird $\operatorname{rg} A$ notiert. Ist der Rang einer Matrix so groß wie für Matrizen derselben Gestalt möglich, sind also entweder die Spalten oder die Zeilen linear unabhängig, so sagt man, unsere Matrix habe **vollen Rang**.

Beweis. Der Spaltenrang einer Matrix $A \in \operatorname{Mat}(n \times m; K)$ kann interpretiert werden als die Dimension des Bildes von

$$(A\circ) : K^m \to K^n$$

Diese Interpretation zeigt sofort, daß PAQ denselben Spaltenrang hat wie A für beliebige invertierbare Matrizen P, Q. Durch Transponieren erkennen wir, daß PAQ auch denselben Zeilenrang hat wie A für beliebige invertierbare Matrizen P, Q. Nun finden wir jedoch nach 3.2.5.8 invertierbare Matrizen P, Q mit PAQ in Smith-Normalform. Dann stimmen natürlich Zeilenrang und Spaltenrang von PAQ überein, und dasselbe folgt für unsere ursprüngliche Matrix A. □

Definition 3.2.5.16. Ganz allgemein nennt man die Dimension des Bildes einer linearen Abbildung auch den **Rang** unserer linearen Abbildung. Dieser Rang kann unendlich sein, es gibt aber auch zwischen unendlichdimensionalen Vektorräumen durchaus von Null verschiedene Abbildungen endlichen Ranges.

Übungen

Übung 3.2.5.17. Gegeben lineare Abbildungen $f : U \to V$ und $g : V \to W$ zeige man, daß der Rang ihrer Verknüpfung $g \circ f$ sowohl beschränkt ist durch den Rang von f als auch durch den Rang von g.

Übung 3.2.5.18. Man gebe eine ganzzahlige (3×3)-Matrix vom Rang Zwei ohne Eintrag Null an, bei der je zwei Spalten linear unabhängig sind.

Übung 3.2.5.19. Eine quadratische Block-obere Dreiecksmatrix ist invertierbar genau dann, wenn alle Blöcke auf der Diagonalen invertierbar sind. Hinweis: 3.2.4.12.

Ergänzende Übung 3.2.5.20. Die Automorphismengruppe eines zweidimensionalen Vektorraums über einem zweielementigen Körper ist isomorph zur Gruppe der Permutationen von drei Elementen, in Formeln $\mathrm{GL}(2; \mathbb{F}_2) \cong \mathcal{S}_3$.

Ergänzende Übung 3.2.5.21. Eine quadratische Blockmatrix

$$\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$$

ist invertierbar, wenn W_{22} und $W_{11} - W_{12}W_{22}^{-1}W_{21}$ invertierbar sind. Hinweis: Multipliziere von rechts erst mit $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & W_{22}^{-1} \end{pmatrix}$ und dann mit $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ -W_{21} & \mathrm{I} \end{pmatrix}$.

Übung 3.2.5.22. Sei K ein Körper und sei n fest vorgegeben. Gegeben $i, j \leq n$ mit $i \neq j$ bilden die speziellen Elementarmatrizen mit von Null verschiedenem Eintrag höchstens in der i-ten Zeile und j-ten Spalte eine Untergruppe $U_{ij} \subset \mathrm{GL}(n; K)$ eine Untergruppe und wir erhalten einen Gruppenisomorphismus $U_{ij} \xrightarrow{\sim} K$ in die additive Gruppe durch die Vorschrift $A \mapsto A_{ij}$.

Übung 3.2.5.23. Gegeben ein Körper K erhält man einen injektiven Monoidhomomorphismus $\mathcal{S}_n \hookrightarrow \mathrm{Mat}(n; K)$ durch die Vorschrift $\sigma \mapsto \sum E_{\sigma(i),i}$. Die Matrizen im Bild dieses Monoidhomomorphismus heißen die **Permutationsmatrizen** und wir notieren sie gerne abkürzend auch σ.

3.2.6 Lineare Abbildungen und Matrizen

3.2.6.1. Die im folgenden verwendeten Notationen ${}_{\mathcal{B}}[v]$ und ${}_{\mathcal{A}}[f]_{\mathcal{B}}$ habe ich Urs Hartl abgeschaut. Ähnlich wie die geschickt gewählten Steckverbindungen, die man bei Computerzubehör gewohnt ist, sorgen sie dafür, daß man fast nichts mehr falsch machen kann.

Satz 3.2.6.2 (Abstrakte lineare Abbildungen und Matrizen). *Seien K ein Körper und V, W Vektorräume über K mit angeordneten Basen $\mathcal{A} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m)$ und $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)$. Ordnen wir jeder linearen Abbildung $f : V \to W$ die* **darstellende Matrix** *${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$ zu mit Einträgen a_{ij}, die durch die Identitäten $f(\vec{v}_j) = a_{1j}\vec{w}_1 + \ldots + a_{nj}\vec{w}_n$ gegeben werden, so erhalten wir eine Bijektion, ja sogar einen Vektorraumisomorphismus*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : & \mathrm{Hom}_K(V, W) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Mat}(n \times m; K) \\ & f & \mapsto & {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}} \end{array}$$

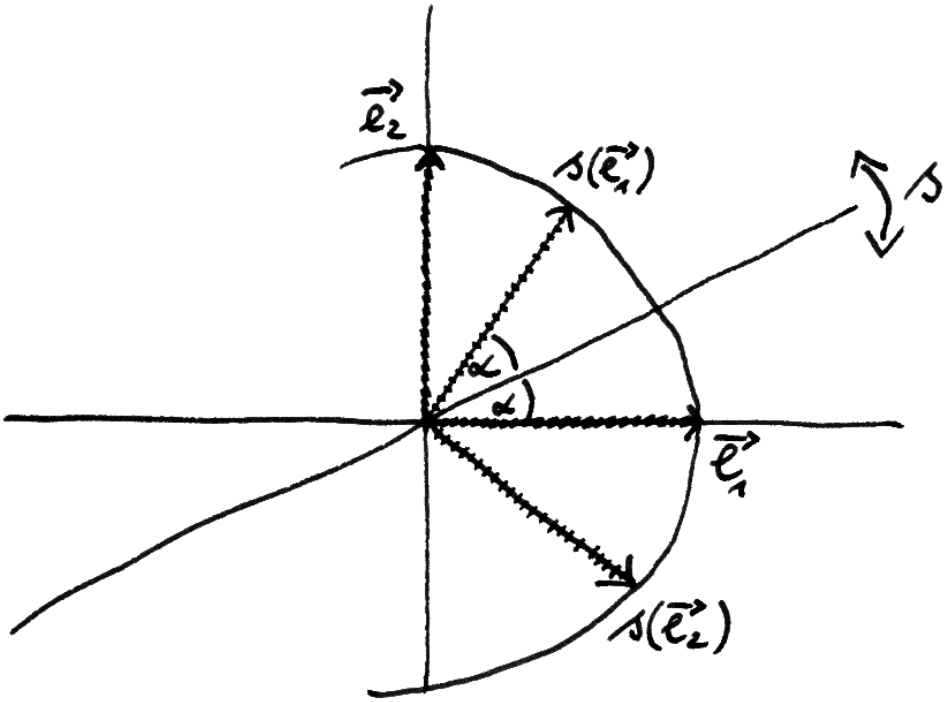
3.2.6.3. Wir nennen $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$ die **darstellende Matrix der Abbildung f in Bezug auf die Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$**. In Worten ausgedrückt stehen in ihren Spalten die Koordinaten der Bilder der Vektoren der Basis $\mathcal{A}$ des Ausgangsraums in Bezug auf die Basis $\mathcal{B}$ des Zielraums. Beliebt ist statt ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$ und $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ auch die ausführlichere Notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$. Die Matrix einer linearen Abbildung $f : K^m \to K^n$ in Bezug auf die jeweiligen Standardbasen $\mathcal{S}(m)$, $\mathcal{S}(n)$ nach 3.1.6.11 ist genau unsere darstellende Matrix $[f]$ aus 3.2.4.1, in Formeln gilt also

$$[f] = {}_{\mathcal{S}(n)}[f]_{\mathcal{S}(m)}$$

Wir vereinbaren allgemeiner, daß wir bei unserer Notation Standardbasen hinfort auch weglassen dürfen. Für eine lineare Abbildung $f : K^m \to W$ schreiben wir also abkürzend ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{S}(m)} = {}_{\mathcal{B}}[f]$ und für eine lineare Abbildung $f : V \to K^n$ entsprechend ${}_{\mathcal{S}(n)}[f]_{\mathcal{A}} = [f]_{\mathcal{A}}$.

Ergänzung 3.2.6.4. Wenn wir die Matrixmultiplikation in der offensichtlichen Weise erweitern zur Definition des Produkts einer Matrix mit einer Spaltenmatrix von Vektoren, so können wir die definierende Gleichung der darstellenden Matrix $M = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$ auch schreiben in der Form

$$\begin{pmatrix} f(\vec{v}_1) \\ \vdots \\ f(\vec{v}_m) \end{pmatrix} = M^{\top} \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vdots \\ \vec{w}_n \end{pmatrix}$$



Die Matrix der anschaulichen Spiegelung $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an einer Gerade mit dem Winkel α zur x-Achse hat die Gestalt

$$[s] = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

mit den Bildern der Vektoren der Standardbasis in den Spalten. Zum Beispiel hat $s(\vec{e}_1)$ die x-Koordinate $\cos 2\alpha$ und die y-Koordinate $\sin 2\alpha$ und das erklärt bereits die erste Spalte unserer Matrix. Bei $s(\vec{e}_2)$ scheint mir einsichtig, daß die x-Koordinate von $s(\vec{e}_2)$ die y-Koordinate von $s(\vec{e}_1)$ ist und die y-Koordinate von $s(\vec{e}_2)$ das Negative der x-Koordinate von $s(\vec{e}_1)$. Das erklärt dann auch die zweite Spalte unserer Matrix.

Beweis. Wir könnten hier eine Variation unseres Beweises von 3.2.4.5 ein weiteres Mal ausschreiben, aber stattdessen erinnern wir einfacher unsere Isomorphismen $\Phi_{\mathcal{A}} : K^m \xrightarrow{\sim} V$ und $\Phi_{\mathcal{B}} : K^n \xrightarrow{\sim} W$ aus 3.1.6.13 und beachten, daß unsere Definition der darstellenden Matrix gleichbedeutend ist zur Identität

$$_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}} = [\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} f \Phi_{\mathcal{A}}]$$

Damit können wir unsere Abbildung dann schreiben als die Komposition von Bijektionen

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_K(V,W) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_K(K^m,K^n) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Mat}(n \times m; K) \\ f & \mapsto & \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} f \Phi_{\mathcal{A}} & & \end{array}$$

mit unserer Abbildung : $g \mapsto [g]$ aus 3.2.4.1 rechts, die eben jeder Abbildung $g : K^m \to K^n$ ihre darstellende Matrix zuordnet. □

Satz 3.2.6.5 (Darstellende Matrix einer Verknüpfung). *Gegeben ein Körper K und K-Vektorräume U, V, W endlicher Dimension mit angeordneten Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ und lineare Abbildungen $f : U \to V$ und $g : V \to W$ ist die darstellende Matrix der Verknüpfung das Produkt der darstellenden Matrizen, in Formeln*

$$_{\mathcal{C}}[g \circ f]_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{C}}[g]_{\mathcal{B}} \circ {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$$

Erster Beweis. Wir können die Behauptung nach Erinnern aller Notationen umschreiben zu $[\Phi_{\mathcal{C}}^{-1} g f \Phi_{\mathcal{A}}] = [\Phi_{\mathcal{C}}^{-1} g \Phi_{\mathcal{B}}] \circ [\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} f \Phi_{\mathcal{A}}]$, und in dieser Form folgt sie offensichtlich aus dem in 3.2.4.5 behandelten Spezialfall. □

Zweiter Beweis. Wir könnten auch expliziter vorgehen und den Beweis von 3.2.4.5 nocheinmal wiederholen mit der alternativen Interpretation von $\vec{u}_i, \vec{v}_j$ und $\vec{w}_k$ als den Vektoren unserer angeordneten Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. □

Definition 3.2.6.6. Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V mit einer angeordneten Basis $\mathcal{A} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ notieren wir die Inverse unserer Bijektion $\Phi_{\mathcal{A}} : K^n \xrightarrow{\sim} V$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^\top \mapsto \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n$ in der Form

$$\vec{v} \mapsto {}_{\mathcal{A}}[\vec{v}]$$

Der Spaltenvektor $_{\mathcal{A}}[\vec{v}]$ heißt die **Darstellung des Vektors $\vec{v}$ in der Basis $\mathcal{A}$.**

Satz 3.2.6.7 (Darstellung des Bildes eines Vektors). *Gegeben endlichdimensionale Räume V, W mit angeordneten Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gilt für jeden Vektor $v \in V$ die Identität*

$$_{\mathcal{B}}[f(v)] = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}} \circ {}_{\mathcal{A}}[v]$$

Beweis. Hier wird bei genauerer Betrachtung nur die Gleichheit von Spaltenvektoren $[\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(f(v))] = [(\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} f \Phi_{\mathcal{A}})] \circ [\Phi_{\mathcal{A}}^{-1} v]$ behauptet, die aus 3.2.4.7 folgt. □

Ergänzung 3.2.6.8. Betrachtet man zu einem beliebigen Vektor $v \in V$ die lineare Abbildung $(\cdot v) : K \to V$, $\lambda \mapsto \lambda v$, und bezeichnet mit $\mathcal{S}(1)$ die Standardbasis $(1) = (\mathrm{e}_1)$ des K-Vektorraums K, die wir ja eh aus der Notation weglassen wollten, so ergibt sich die Identität ${}_{\mathcal{A}}[v] = {}_{\mathcal{A}}[\cdot v]_{\mathcal{S}(1)}$. Wegen $(\cdot f(v)) = f \circ (\cdot v)$ können wir damit den vorhergehenden Satz 3.2.6.7 auch auffassen als den Spezialfall ${}_{\mathcal{B}}[\cdot f(v)]_{\mathcal{S}(1)} = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}} \circ {}_{\mathcal{A}}[\cdot v]_{\mathcal{S}(1)}$ von Satz 3.2.6.5 über die darstellende Matrix einer Verknüpfung.

Definition 3.2.6.9. Gegeben zwei angeordnete Basen $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_n)$ eines Vektorraums V nennt man die darstellende Matrix der Identität

$$ {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{A}} $$

in diesen Basen die **Basiswechselmatrix**. Ihre Einträge a_{ij} werden per definitionem gegeben durch die Gleichungen $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i$.

3.2.6.10 (**Änderung der darstellenden Matrix bei Basiswechsel**). Offensichtlich ist ${}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}} = I$ die Einheitsmatrix. Nach 3.2.6.5 ist damit die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}$ invers zur Basiswechselmatrix in der Gegenrichtung ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}}$, in Formeln ${}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{-1} = {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}}$. Haben wir nun eine lineare Abbildung $f : V \to W$ und angeordnete Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ von V und angeordnete Basen $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ von W, so folgt aus 3.2.6.5 die Identität ${}_{\mathcal{D}}[f]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{D}}[\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}} \circ {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{A}} \circ {}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}$. Sind noch spezieller $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei angeordnete Basen ein- und desselben Vektorraums V und ist $f : V \to V$ ein Endomorphismus von V, so erhalten wir unmittelbar die Identität ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}} \circ {}_{\mathcal{A}}[f]_{\mathcal{A}} \circ {}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}$ alias

$$ N = T^{-1} M T $$

für $N = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ und $M = {}_{\mathcal{A}}[f]_{\mathcal{A}}$ die darstellenden Matrizen bezüglich unserer beiden Basen und $T = {}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}$ die Basiswechselmatrix.

Satz 3.2.6.11 (Smith-Normalform). *Gegeben eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen $f : V \to W$ existieren stets angeordnete Basen $\mathcal{A}$ von V und $\mathcal{B}$ von W derart, daß die darstellende Matrix ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$ nur auf der Diagonale von Null verschiedene Einträge hat, und zwar erst einige Einsen und danach nur noch Nullen.*

Beweis. Das folgt sofort aus 3.2.2.6: Wir wählen zunächst eine angeordnete Basis $(w_1, \ldots, w_r)$ des Bildes von f, dazu Urbilder $v_1, \ldots, v_r$ in V, ergänzen diese durch eine angeordnete Basis des Kerns von f zu einer angeordneten Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V, und ergänzen unsere angeordnete Basis des Bildes zu einer angeordneten Basis $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ von W. In diesen Basen hat dann die Matrix von f offensichtlich die behauptete Gestalt. □

Definition 3.2.6.12. Die **Spur** einer endlichen quadratischen Matrix ist definiert als die Summe ihrer Diagonaleinträge. Auf englisch und französisch sagt man **trace**, und ich werde die Spur einer Matrix A notieren als

$$\mathrm{tr}(A)$$

Vorschau 3.2.6.13. Eine vielleicht natürlichere Definition der Spur wird in 4.6.1.46 erklärt. Im Rahmen der Analysis werden wir die Spur in 12.1.6.14 als das Differential der Determinante an der Einheitsmatrix wiedersehen.

Übungen

Übung 3.2.6.14. Gegeben ein K-Vektorraum V mit einer angeordneten Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ liefert die Zuordnung, die jeder weiteren angeordneten Basis $\mathcal{B}$ die Basiswechselmatrix von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ zuordnet, eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \{\text{angeordnete Basen von } V\} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{GL}(n;K) \\ \mathcal{B} & \mapsto & {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}} \end{array}$$

Ergänzende Übung 3.2.6.15. Ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines Vektorraums heißt **nilpotent**, wenn es $d \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^d = 0$. Sei $f : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums. Man zeige, daß unser Vektorraum eine angeordnete Basis $\mathcal{B}$ besitzt derart, daß die Matrix ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ von f in Bezug auf diese Basis eine obere Dreiecksmatrix ist mit Nullen auf der Diagonalen. Man zeige umgekehrt auch, daß für jede derartige $(n \times n)$-Matrix D gilt $D^{n-1} = 0$. Hinweis: Man betrachte die Teilräume $\ker(f) \subset \ldots \subset \ker(f^{d-1}) \subset \ker(f^d) = V$, beginne mit einer Basis von $\ker(f)$ und ergänze sie sukzessive zu einer Basis von V. Eine stärkere Aussage in dieser Richtung werden wir als 4.3.4.2 zeigen.

Übung 3.2.6.16. Man zeige $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ wann immer A eine $(m \times n)$-Matrix ist und B eine $(n \times m)$-Matrix. Man folgere daraus weiter die Identität $\mathrm{tr}(BAB^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$ wann immer A eine $(n \times n)$-Matrix ist und B eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix. Insbesondere kann man jedem Endomorphismus f eines endlichdimensionalen Vektorraums V über einem Körper K seine **Spur**

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(f|V) = \mathrm{tr}_K(f|V)$$

zuordnen als die Spur seiner Matrix in Bezug auf eine und jede Basis. Gegeben endlichdimensionale Vektorräume V, W und lineare Abbildungen $f : V \to W$ und $g : W \to V$ zeige man auch $\mathrm{tr}(fg) = \mathrm{tr}(gf)$.

Ergänzende Übung 3.2.6.17. Leser, die schon mit dem Inhalt des Abschnitts 3.2.7 über komplexe Zahlen vertraut sind, mögen zeigen: Ist $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums, so gilt für seine Spur auf dem zugrundeliegenden reellen Vektorraum $\operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(f|V) = 2 \operatorname{Re} \operatorname{tr}_{\mathbb{C}}(f|V)$.

Ergänzende Übung 3.2.6.18. Ist L ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $A : L \to L$ eine K-lineare Abbildung, so gilt

$$\operatorname{tr}((A\circ)|\operatorname{End}_K L) = (\dim_K L) \operatorname{tr}(A|L)$$

Ergänzung 3.2.6.19. Gegeben ein Endomorphismus f von endlichem Rang eines Vektorraums V erklärt man die **Spur**

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr}(f|V)$$

von f als die Spur der Verknüpfung $\operatorname{im} f \hookrightarrow V \twoheadrightarrow \operatorname{im} f$ im Sinne unserer Definition 3.2.6.16 für die Spur eines Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums. Aus 3.2.6.16 folgt unmittelbar, daß diese Definition im Fall eines endlichdimensionalen Raums V dieselbe Spur liefert wie unsere ursprüngliche auf den endlichdimensionalen Fall beschränkte Definition 3.2.6.12.

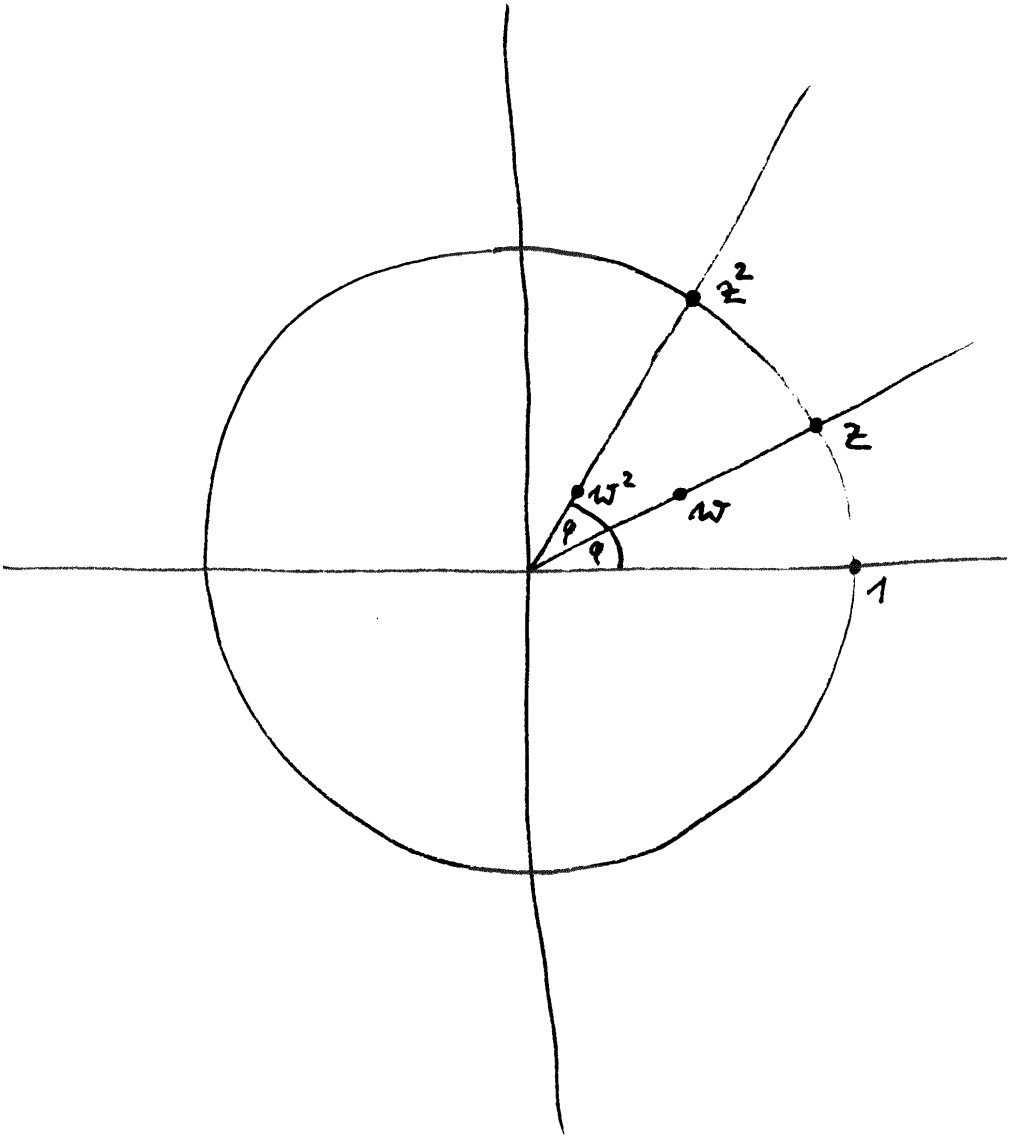
Ergänzende Übung 3.2.6.20. Sind V, W Vektorräume und $f : V \to W$ sowie $g : W \to V$ lineare Abbildungen und ist eine unserer Abbildungen von endlichem Rang, so gilt $\operatorname{tr}(fg) = \operatorname{tr}(gf)$. Hinweis: Der endlichdimensionale Fall kann nach 3.2.6.16 vorausgesetzt werden.

Ergänzende Übung 3.2.6.21. Gegeben ein Endomorphismus f von endlichem Rang eines Vektorraums mit der Eigenschaft $f^2 = af$ für ein Element a des Grundkörpers gilt stets $\operatorname{tr}(f) = a \dim(\operatorname{im} f)$. Hinweis: 3.2.2.19.

Übung 3.2.6.22. Man finde alle Matrizen $A \in \operatorname{Mat}(2; \mathbb{R})$ mit $A \circ A = I$ der Einheitsmatrix und beschreibe geometrisch die linearen Abbildungen, die durch diese Matrizen A beschrieben werden.

3.2.7 Komplexe Zahlen

3.2.7.1. Viele mathematische Zusammenhänge werden bei einer Behandlung im Rahmen der sogenannten „komplexen Zahlen“ besonders transparent. Ich denke hier etwa an die Integration rationaler Funktionen 10.5.10, die Normalform orthogonaler Matrizen 4.1.11.3 oder die Lösung der Schwingungsgleichung 10.7.3.1. Die abschreckenden Bezeichnungen „komplexe Zahlen“ oder auch „imaginäre Zahlen“ für diesen ebenso einfachen wie konkreten Körper haben historische Gründe: Als Mathematiker in Italien bemerkten, daß man polynomiale Gleichungen der Grade Drei und Vier lösen kann, wenn man so tut, als ob man aus (-1)



Anschauung für das Quadrieren komplexer Zahlen in ihrer anschaulichen Interpretation als Punkte der komplexen Zahlenebene

eine Quadratwurzel ziehen könnte, gab es noch keine Mengenlehre und erst recht nicht den abstrakten Begriff eines Körpers 2.2.4.2. Das Rechnen mit Zahlen, die keine konkreten Interpretationen als Länge oder Guthaben oder zumindest als Schulden haben, schien eine „imaginäre“ Angelegenheit, ein bloßer Trick, um zu reellen Lösungen reeller Gleichungen zu kommen.

3.2.7.2. In diesem Abschnitt werden die komplexen Zahlen nur als algebraische Struktur diskutiert. Für die Diskussion der analytischen Aspekte, insbesondere die komplexe Exponentialfunktion und ihre Beziehung zu den trigonometrischen Funktionen, verweise ich auf die Analysis, insbesondere auf 10.4.5. Die hier gegebene Konstruktion der komplexen Zahlen als Menge aller Matrizen zu Drehstreckungen der Ebene paßt unter didaktischen Aspekten gut hierher, weil gleichzeitig der Zusammenhang zwischen Matrizen und linearen Abbildungen angewandt und eingeübt werden kann.

Satz 3.2.7.3 (**Charakterisierung der komplexen Zahlen**). *1. Es gibt Tripel*

$$(\mathbb{C}, \mathrm{i}, \kappa)$$

bestehend aus einem Körper $\mathbb{C}$, einem Element $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ und einem Körperhomomorphismus $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ derart, daß gilt $\mathrm{i}^2 = -1$ und daß i und 1 eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$ bilden in Bezug auf die durch $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(a, z) \mapsto \kappa(a)z$ auf $\mathbb{C}$ gegebene Struktur als $\mathbb{R}$-Vektorraum;

2. Derartige Tripel sind eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Ist genauer $(\mathbb{C}', \mathrm{i}', \kappa')$ ein weiteres derartiges Tripel, so gibt es genau einen Körperhomomorphismus $\varphi : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}'$ mit $\varphi : \mathrm{i} \mapsto \mathrm{i}'$ und $\varphi \circ \kappa = \kappa'$ und der ist stets ein Isomorphismus.

Definition 3.2.7.4. Wir wählen für den weiteren Verlauf der Vorlesung ein festes Tripel $(\mathbb{C}, \mathrm{i}, \kappa)$ der im Satz beschriebenen Art. Wegen der im zweiten Teil des Satzes formulierten „Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus“ erlauben wir uns den bestimmten Artikel und nennen $\mathbb{C}$ den **Körper der komplexen Zahlen**. Weiter kürzen wir für reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ stets $\kappa(a) = a$ ab und gehen sogar so weit, die reellen Zahlen vermittels κ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ aufzufassen.

Ergänzung 3.2.7.5 (**Zur Eindeutigkeit der komplexen Zahlen**). Man beachte, daß $\mathbb{C}$ als Körper ohne weitere Daten im Gegensatz zum Körper der reellen Zahlen 10.2.4.21 keineswegs eindeutig ist bis auf eindeutigen Isomorphismus. Genauer gibt es überabzählbar viele Körperisomorphismen $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, überabzählbar viele nicht-bijektive Körperhomomorphismen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und auch überabzählbar viele Körperhomomorphismen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, wie etwa in 7.5.6.15 ausgeführt wird. Zeichnet man jedoch einen Körperhomomorphismus $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aus derart, daß

$\mathbb{C}$ darunter zu einem endlichdimensionalem $\mathbb{R}$-Vektorraum wird, und versieht $\mathbb{C}$ mit der dazugehörigen „natürlichen Topologie“ im Sinne von 11.2.3.15, so wird κ seinerseits durch diese Topologie festgelegt als der einzige im Sinne von **??** „stetige“ Körperhomomorphismen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, und es gibt in Bezug auf unsere Topologie nur genau zwei „stetige“ Körperhomomorphismen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die Identität und die sogenannte „komplexe Konjugation“, die wir demnächst kennenlernen werden.

3.2.7.6. Ich hoffe, Sie werden schnell merken, daß sich viele Fragestellungen bei Verwendung dieser sogenannt komplexen Zahlen sehr viel leichter lösen lassen und daß die komplexen Zahlen auch der Anschauung ebenso zugänglich sind wie die reellen Zahlen. Früher schrieb man „complex“, deshalb die Bezeichnung $\mathbb{C}$. Unser i ist eine „Wurzel aus (-1)“, und weil es so eine Wurzel in den reellen Zahlen nicht geben kann, notiert man sie i wie „imaginär“.

Ergänzung 3.2.7.7. Für feinere Untersuchungen finde ich es praktisch, auch Paare (K, κ) zu betrachten, die aus einem Körper K nebst einem Körperhomomorphismus $\kappa : \mathbb{R} \to K$ bestehen derart, daß es einen Körperisomorphismus $a : K \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ gibt, der mit den vorgegebenen Einbettungen von $\mathbb{R}$ verträglich ist. Auch bei solch einem Paar notiere ich den Körper K gerne $\mathbb{C}$ und fasse die Einbettung von $\mathbb{R}$ als Einbettung einer Teilmenge auf und notiere sie nicht. Ich rede dann von einem Körper von **vergeßlichen komplexen Zahlen**, da es sich dabei salopp gesprochen um eine „Kopie von $\mathbb{C}$ handelt, die vergessen hat, welche ihrer beiden Wurzeln von (-1) sie als i auszeichnen wollte“.

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Jedes Element $z \in \mathbb{C}$ läßt sich ja nach Annahme und mit der Abkürzung $\kappa(x) = x$ eindeutig schreiben in der Form $z = a + b\,\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ haben in dieser Notation die Gestalt

$$\begin{aligned}(a + b\,\mathrm{i}) + (c + d\,\mathrm{i}) &= (a + c) + (b + d)\,\mathrm{i}\\ (a + b\,\mathrm{i})(c + d\,\mathrm{i}) &= (ac - bd) + (ad + bc)\,\mathrm{i}\end{aligned}$$

Damit ist auch bereits die im zweiten Teil formulierte Eindeutigkeitsaussage gezeigt. Natürlich kann man auch die Existenz direkt anhand dieser Rechenregeln prüfen. So gewinnt man an Unabhängigkeit von der linearen Algebra, verliert aber an Anschauung und muß die Körperaxiome ohne Einsicht nachrechnen. Das sollten Sie bereits als Übung 2.2.4.14 durchgeführt haben. Alternativ kann man die im ersten Teil behauptete Existenz mit mehr Kenntnissen in linearer Algebra und weniger Rechnung auch einsehen, wie es im folgenden ausgeführt werden soll. Man betrachtet dazu die Menge $\mathbb{C}$ aller reellen (2×2)-Matrizen der Gestalt

$$\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{Mat}(2; \mathbb{R})$$

Anschaulich gesagt sind das genau die Matrizen zu Drehstreckungen der Ebene, die den Ursprung festhalten. Die Addition und Multiplikation von Matrizen induzieren offensichtlich eine Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$, man prüft mühelos die Körperaxiome 2.2.4.2 und erhält so einen Körper $\mathbb{C}$. Die Drehung um einen rechten Winkel oder vielmehr ihre Matrix

$$\mathrm{i} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat natürlich die Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = -1$, und die Abbildung $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\kappa : a \mapsto \operatorname{diag}(a, a)$ ist ein Körperhomomorphismus derart, daß das Tripel $(\mathbb{C}, \mathrm{i}, \kappa)$ die geforderten Eigenschaften besitzt. $\square$

3.2.7.8. Es ist allgemein üblich, komplexe Zahlen mit z zu bezeichnen und als $z = x + y\,\mathrm{i}$ zu schreiben mit $x, y \in \mathbb{R}$. Man mag sich die komplexe Zahl $z = x + y\,\mathrm{i}$ vorstellen als den Punkt (x, y) der Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$. Wenn wir diese Vorstellung evozieren wollen, reden wir von der **komplexen Zahlenebene**. Unter dieser Identifikation von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ bedeutet für $w \in \mathbb{C}$ die Additionsabbildung $(w+) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto w + z$ anschaulich die Verschiebung um den Vektor w. Die Multiplikationsabbildung $(w\cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto wz$ dahingegen bedeutet anschaulich diejenige Drehstreckung, die $(1, 0)$ in w überführt.

3.2.7.9. Gegeben eine komplexe Zahl $z = x + y\,\mathrm{i}$ nennt man x ihren **Realteil** $\operatorname{Re} z := x$ und y ihren **Imaginärteil** $\operatorname{Im} z := y$. Wir haben damit zwei Funktionen

$$\operatorname{Re}, \operatorname{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

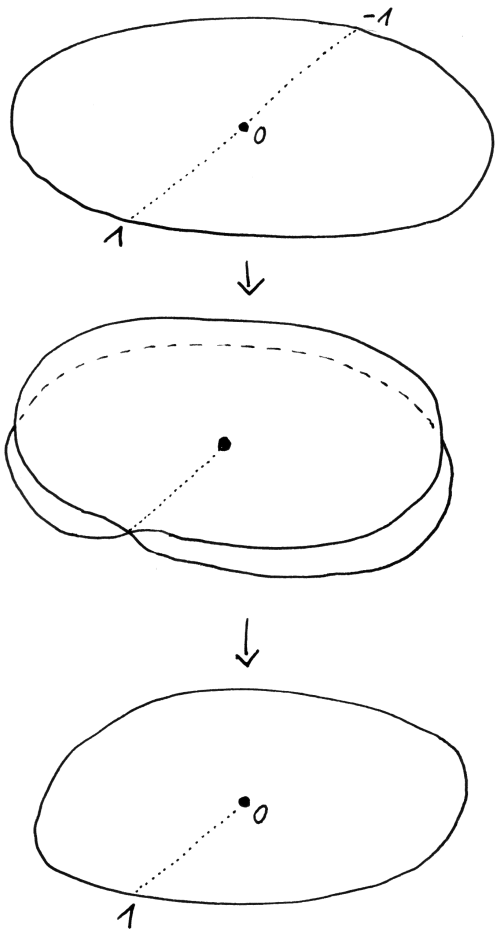
definiert und es gilt $z = \operatorname{Re} z + \mathrm{i} \operatorname{Im} z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Man definiert weiter die **Norm** $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + y\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ durch $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Im Fall einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist diese Norm genau unser Absolutbetrag aus 10.2.2.12, in Formeln $|x| = |x|$. In der Anschauung der komplexen Zahlenebene bedeutet die Norm einer komplexen Zahl ihren Abstand vom Ursprung.

3.2.7.10 (**Diskussion der Terminologie**). Bei rechtem Lichte besehen scheint mir an dieser Terminologie absonderlich, daß der Imaginärteil einer komplexen Zahl darin eine reelle Zahl ist, aber so hat es sich nun einmal eingebürgert.

3.2.7.11. Stellen wir uns $|z|$ vor als den Streckfaktor der Drehstreckung $(z\cdot)$, so wird anschaulich klar, daß für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten muß

$$|zw| = |z||w|$$

Besonders bequem rechnet man diese Formel nach, indem man zunächst für $z = x + y\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ die **konjugierte komplexe Zahl** $\bar{z} = x - y\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ einführt. Im



Dies Bild soll zusätzliche Anschauung für die Abbildung $z \mapsto z^2$ der komplexen Zahlenebene auf sich selbst vermitteln. Es stellt diese Abbildung dar als die Komposition einer Abbildung der Einheitskreisscheibe auf eine räumliche sich selbst durchdringende Fläche, gegeben in etwa durch eine Formel der Gestalt $z \mapsto (z^2, \varepsilon(\operatorname{Im} z))$ in $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ für geeignetes monotones und in einer Umgebung von Null streng monotones ε, gefolgt von einer senkrechten Projektion auf die ersten beiden Koordinaten. Das hat den Vorteil, daß im ersten Schritt nur Punkte der reellen Achse identifiziert werden, was man sich leicht wegdenken kann, und daß der zweite Schritt eine sehr anschauliche Bedeutung hat, eben die senkrechte Projektion.

Bild der komplexen Zahlenebene bedeutet das komplexe Konjugieren anschaulich die Spiegelung an der reellen Achse. Nun prüft man durch explizite Rechnung unschwer die Formeln

$$\begin{aligned} \overline{z+w} &= \bar{z}+\bar{w} \\ \overline{z\cdot w} &= \bar{z}\cdot\bar{w} \\ |z|^2 &= z\bar{z} \end{aligned}$$

Dann rechnet man einfach

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$$

In der Terminologie aus 2.2.4.13 ist $z \mapsto \bar{z}$ ein Körperisomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Offensichtlich gilt auch $\bar{\bar{z}} = z$ und ebenso offensichtlich gilt $|z| = |\bar{z}|$.

3.2.7.12. Die Formel $\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$ kann man auch prüfen, indem man davon ausgeht, daß beide Seiten offensichtlich $\mathbb{R}$-bilineare Abbildungen $\mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definieren. Deren Gleichheit kann nach 3.2.3.9 auf Basen geprüft werden. Es reicht also, sie für $z, w \in \{1, \mathrm{i}\}$ nachzuweisen, und das ist schnell getan.

3.2.7.13. Wir können den Realteil und den Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$ mithilfe der konjugierten komplexen Zahl ausdrücken als

$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2\,\mathrm{i}}$$

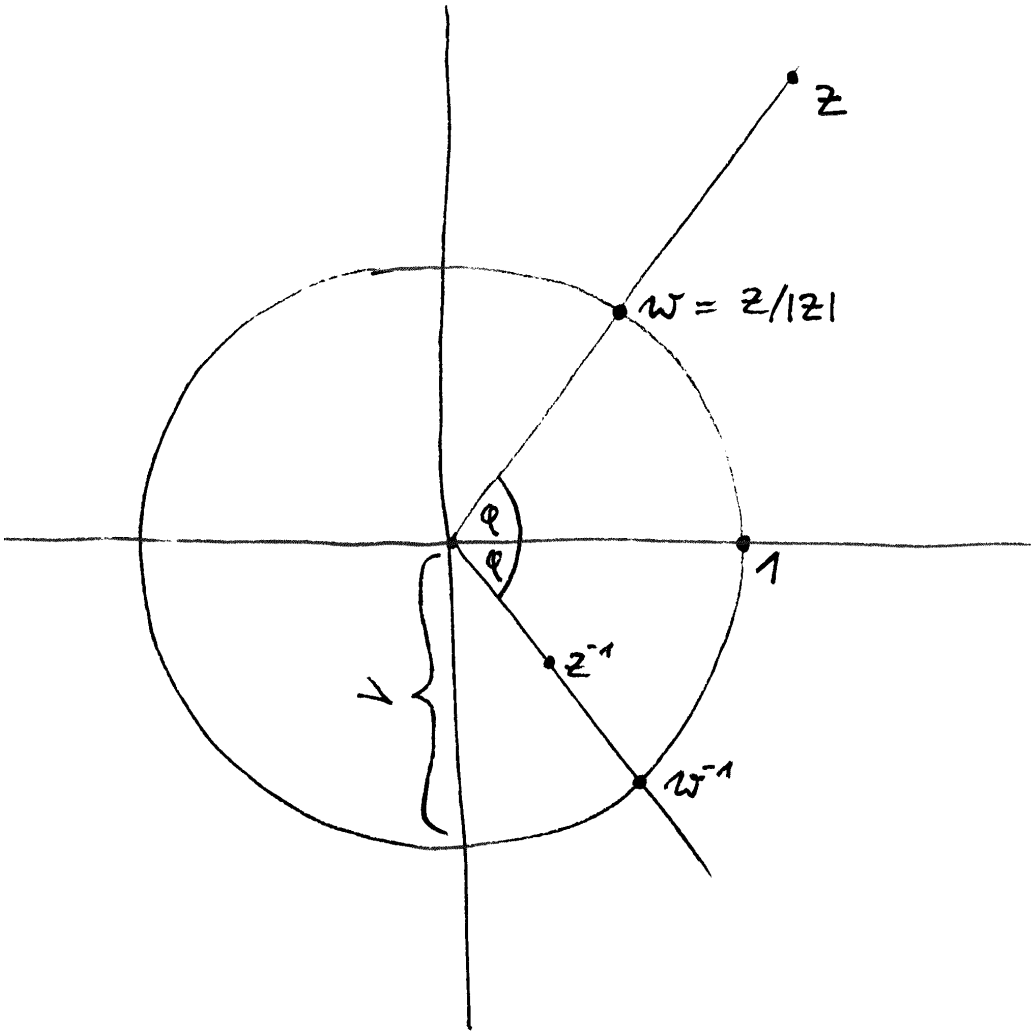
Weiter gilt offensichtlich $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, und für komplexe Zahlen z der Norm $|z| = 1$ ist die konjugierte komplexe Zahl genau das Inverse, in Formeln $|z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = z^{-1}$. Im Bild der komplexen Zahlenebene kann man das Bilden des Inversen einer von Null verschiedenen komplexen Zahl anschaulich interpretieren als die „Spiegelung“ oder präziser **Inversion** am Einheitskreis $z \mapsto z/|z|^2$ gefolgt von der Spiegelung an der reellen Achse $z \mapsto \bar{z}$. Der Einheitskreis $S^1 := \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$ ist insbesondere eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe des Körpers der komplexen Zahlen und die Multiplikation liefert einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{R}_{>0} \times S^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times$. Wir nennen S^1 die **Kreisgruppe**. Im Fall eines vergeßlichen Körpers von komplexen Zahlen notiere ich die Untergruppe der Elemente der Norm Eins $\mathrm{U}(1)$, da uns in diesem Fall keine ausgezeichnete Bijektion mit $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mehr zur Verfügung steht.

3.2.7.14. Für unsere Norm komplexer Zahlen aus 3.2.7.9 gilt offensichtlich

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Da in einem Dreieck eine einzelne Seite nicht länger sein kann als die beiden anderen zusammengenommen, erwarten wir weiter die **Dreiecksungleichung**

$$|z+w| \le |z| + |w|$$



Anschauung für das Invertieren komplexer Zahlen

Formal mag man sie prüfen, indem man beide Seiten quadriert, wodurch die äquivalente Behauptung $(z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \leq z\bar{z} + 2|z||w| + w\bar{w}$ entsteht, und dann vereinfacht zu immer noch äquivalenten Behauptung $2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq 2|z\bar{w}|$. Die Abschätzungen $\operatorname{Re}(u) \leq |u|$ und $\operatorname{Im}(u) \leq |u|$ sind aber für jede komplexe Zahl u auch formal offensichtlich.

Ergänzung 3.2.7.15. Für eine Diskussion der analytischen Aspekte der komplexen Zahlen, insbesondere die komplexe Exponentialfunktion und ihre Beziehung zu den trigonometrischen Funktionen, verweise ich auf die Analysis 10.4.5.

Übungen

Übung 3.2.7.16. Man bestimme Real- und Imaginärteil einer Quadratwurzel von i. Man bestimme Real- und Imaginärteil einer Quadratwurzel von $1+\mathrm{i}$.

Übung 3.2.7.17. Gegeben eine von Null verschiedene komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}\,y$ zeige man für Real- und Imaginärteil ihrer Inversen die Formeln $\operatorname{Re}(z^{-1}) = x/(x^2+y^2)$ und $\operatorname{Im}(z^{-1}) = -y/(x^2+y^2)$.

Übung 3.2.7.18. Eine Teilmenge von $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ heißt ein **verallgemeinerter Kreis**, wenn sie entweder ein Kreis

$$\mathrm{K}(a;r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a|^2 = r^2\}$$

ist für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ oder aber eine reelle affine Gerade vereinigt mit dem Punkt ∞. Man prüfe, daß die Selbstabbildung von $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ mit $z \mapsto z^{-1}$ für $z \in \mathbb{C}^\times$ und $0 \mapsto \infty$ und $\infty \mapsto 0$ verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreise überführt.

3.2.8 Möbiusfunktion*

3.2.8.1. Gegeben $(X, \leq)$ eine endliche teilgeordnete Menge betrachten wir die $(X \times X)$-Matrix A mit Einträgen $a_{x,y} = 1$ falls $x \leq y$ und Null sonst. Zählen wir die Elemente von X auf als $x_1, x_2, \ldots, x_n$ derart, daß gilt $x_i \leq x_j \Rightarrow i \leq j$, so wird A eine obere Dreiecksmatrix mit ganzzahligen Einträgen und Einsen auf der Diagonalen. Diese Matrix ist also invertierbar und ihre Inverse A^{-1} ist ebenfalls ein obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. Besitzt X ein kleinstes Element $x_1 = k$, so nennt man die oberste Zeile von A^{-1} die **Möbiusfunktion** unserer teilgeordneten Menge

$$\begin{array}{rccc} \mu: & X & \to & \mathbb{Z} \\ & y & \mapsto & (A^{-1})_{k,y} \end{array}$$

Sie wird demnach charakterisiert duch die Formeln

$$\mu(k) = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{y \leq z} \mu(y) = 0 \text{ falls } z > k.$$

Analoges gilt allgemeiner für jede teilgeordnete Menge X, die man aufzählen kann als $x_1, x_2, \ldots$ mit $x_i \leq x_j \Rightarrow i \leq j$.

3.2.8.2. Ist $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ mit der üblichen Ordnung, so haben wir $\mu(0) = 1, \mu(1) = -1$ und $\mu(n) = 0$ für $n \geq 2$. Ist $X = \mathbb{N}_{\geq 1} = \{1, 2, \ldots\}$ mit der durch das Teilen gegebenen Ordung $a \leq b \Leftrightarrow a|b$, so erhalten wir die **Möbiusfunktion der Zahlentheorie**

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ enthält einen Primfaktor mindestens zweimal;} \\ 1 & n \text{ ist quadratfrei mit gerade vielen Primfaktoren;} \\ -1 & n \text{ ist quadratfrei mit ungerade vielen Primfaktoren.} \end{cases}$$

Dieser Fall kann im übrigen auch als das Produkt von abzählbar vielen Kopien des zuvor behandelten Falls verstanden werden. Speziell haben wir in diesem Fall also

$$\mu(1) = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{d|n} \mu(d) = 0 \text{ falls } n > 1.$$

Übungen

Ergänzende Übung 3.2.8.3 (**Kehrwerte der Riemann'schen ζ-Funktion**). Mit μ der Möbiusfunktion der Zahlentheorie zeige man, daß für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 1$ die Inversen der Werte der Riemann'schen ζ-Funktion geschrieben werden können als

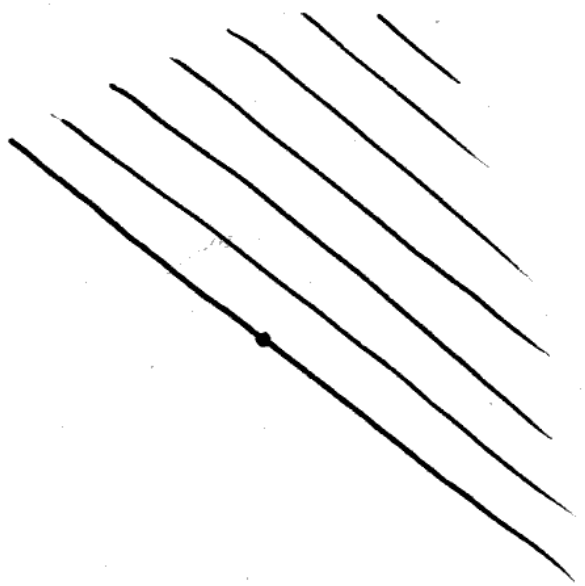
$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

Übung 3.2.8.4. Man bestimme die Inverse der $(n \times n)$-Matrix gegeben durch $a_{ij} = 1$ für $i \leq j$ und $a_{ij} = 0$ für $i > j$.

3.2.9 Dualräume und transponierte Abbildungen

Definition 3.2.9.1. Gegeben ein Körper K und ein K-Vektorraum V nennt man eine lineare Abbildung $V \to K$ eine **Linearform auf** V oder einen **Kovektor**. Die Menge aller solchen Linearformen bildet nach 3.2.3.14 einen Untervektorraum $\operatorname{Hom}_K(V, K) \subset \operatorname{Ens}(V, K)$ im Vektorraum aller Abbildungen von V nach K. Man nennt diesen Vektorraum aller Linearformen den **Dualraum von** V. Wir verwenden dafür die beiden Notationen

$$V^* = V^\top := \operatorname{Hom}_K(V, K)$$



Versuch der graphischen Darstellung eines Kovektors in der Ebene. Sei Wert auf einem Vektor wäre zu verstehen als die Zahl der von unserem Vektorpfeil gekreuzten Linien, beziehungsweise das Negative der Zahl der von seinem Negativen gekreuzten Linien, wenn er in die falsche Richtung geht. Natürlich ist der Wert nicht immer ganzzahlig, das Bild ist deshalb nur mäßig brauchbar. Man sieht aber gut, welche Vektorraumautomorphismen unseren Kovektor festhalten.

3.2.9.2 (**Diskussion der Notation**). Üblich für den Dualraum ist die Notation V^*. Im Zusammenhang mir darstellenden Matrizen und dergleichen schien mir jedoch die Notation $V^\top$ suggestivere Formeln zu liefern, weshalb ich diese sonst eher unübliche Notation in diesem Zusammenhang vorziehe.

3.2.9.3. Die Bezeichnung als **Form** für Abbildungen mit Werten im Grundkörper ist allgemein üblich: Wir kennen bis jetzt nur Linearformen, später werden aber noch Bilinearformen und quadratische Formen und Multilinearformen hinzukommen. Über die Herkunft dieser Bezeichnungsweise weiß ich wenig. Vermutlich steckt derselbe Wortstamm wie bei dem Wort „Formel“ dahinter.

Beispiel 3.2.9.4 (**Frequenzraum als Dualraum des Raums der Zeitspannen**). Denken wir uns die Menge aller Zeitspannen als reellen Vektorraum, so können wir uns den Dualraum dieses Vektorraums denken als die Gesamtheit aller „Frequenzen“ oder vielleicht besser, weil man ja eigentlich nicht von negativen Frequenzen reden kann, als den Raum aller möglichen „Drehgeschwindigkeiten von Drehungen um eine feste Achse mit vorgegebenem positiven Drehsinn“. Dann entpräche eine Drehgeschwindigkeit der Linearform, die jeder Zeitspanne die Zahl der in dieser Zeitspanne erfolgten Umdrehungen zuordnet. An dieser Stelle möchte ich Sie am liebsten wieder einmal davon überzeugen, daß das Abstrakte das eigentlich Konkrete ist.

3.2.9.5 (**Koordinatenfunktionen zu einer Basis als Kovektoren**). Gegeben ein Vektorraum V und eine Basis $B \subset V$ erhalten wir im Dualraum $V^\top$ eine linear unabhängige Familie von Linearformen $(b^\top)_{b\in B}$, indem wir $b^\top = b_B^\top : V \to K$ erklären durch

$$b^\top(c) = \delta_{bc}\ \forall c \in B$$

Die Linearformen $b^\top$ heißen die **Koordinatenfunktionen** oder kurz **Koordinaten** zu unserer Basis B. Vielfach werden sie auch b^* notiert. Ist etwa $V = \mathbb{R}^n$ und $B = \mathcal{S}(n) = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ die Standardbasis, so wird $\vec{e}_i^\top : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die „Projektion auf die i-te Koordinate“ $\vec{e}_i^\top = \mathrm{pr}_i : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$, die man oft auch einfach $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ notiert und die „i-te Koordinatenfunktion“ nennt. Man beachte, daß solch eine Koordinatenfunktion $b^\top$ keineswegs nur vom Basisvektor b abhängt, auch wenn die Notation das suggerieren mag, sondern vielmehr von der ganzen Basis B. Wenn man es ganz genau nehmen will, sollte man also $b^\top = (b; B)^\top$ schreiben.

Beispiel 3.2.9.6 (**Dualraum eines K^n**). In der Literatur findet man oft die Aussage, daß der Dualraum des Raums der Spaltenvektoren der Länge n der Raum der Zeilenvektoren der Länge n sei. Das kann man so sehen, wenn man den kanonischen Isomorphismus $\mathrm{Mat}(1 \times n; K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(K^n, K)$ aus 3.2.4.7 soweit verinnerlicht hat, daß man beide Seiten schlicht als gleich ansieht.

Beispiel 3.2.9.7 (**Dualraum des Richtungsraums zum Raum der Anschauung**). Denken wir uns wie in 3.1.5.6 den Raum der Anschauung mit einem ausgezeichneten festen Punkt als reellen Vektorraum, so liefert jeder von Null verschiedene Vektor eine Linearform auf unserem Vektorraum vermittels der anschaulich zu verstehenden Vorschrift „projiziere jeden weiteren Vektor orthogonal auf die Gerade durch den gegebenen Vektor und nimm die Zahl, mit der man den den gegebenen Vektor multiplizieren muß, um die Projektion zu erhalten“. Diese Entsprechung hat nur den Nachteil, daß der doppelte Vektor die halbe Linearform liefert und daß überhaupt die Addition von Vektoren keineswegs der Addition von Linearformen entspricht. Wählt man eine feste anschaulich zu verstehende Längeneinheit, so kann man den Raum der Linearformen auf dem Raum der Vektoren in unserem Bild identifizieren mit dem Raum der Vektoren selber, indem man jedem Vektor als Linearform dieselbe Linearform wie oben zuordnet, nur noch zusätzlich geteilt durch das Quadrat seiner Länge. In anderen Worten kann diese Linearform auch beschrieben werden als „beliebigem Vektor ordne zu Länge der Projektion mal Länge des gegebenen Vektors“. Diese Identifikation entspräche dann einem Vektorraumisomorphismus. Es ist vielleicht die Möglichkeit dieser Identifikation, die es uns so schwer macht, eine Anschauung für den Dualraum zu entwickeln. Sie benutzt jedoch die „euklidische Struktur“ des Raums der Anschauung, die das Reden über orthogonale Projektionen eigentlich erst ermöglicht und die wir in erst in 4.1.3 oder noch besser in 4.1.6 mathematisch modellieren werden. Formal diskutieren wir obige Identifikation dann in 4.6.4.11. Auf allgemeinen Vektorräumen stehen uns keine orthogonalen Projektionen zur Verfügung und der Dualraum kann dann nicht mehr so leicht mit dem Ausgangsraum identifiziert werden.

3.2.9.8. Gegeben ein k-Vektorraum V haben wir stets eine kanonische bilineare Abbildung $V \times V^\top \to k$, die **Auswertungsabbildung**, auch genannt die **kanonische Paarung** von Vektoren mit Kovektoren.

3.2.9.9 (**Dimension des Dualraums**). Ist V ein Vektorraum und $B \subset V$ eine Basis, so liefert nach 3.2.3.2 das Einschränken von Abbildungen eine Bijektion $V^\top \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ens}(B, K)$, der man leicht ansieht, daß sie sogar ein Vektorraumisomorphismus sein muß. Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum stimmt insbesondere seine Dimension mit der Dimension seines Dualraums überein, in Formeln

$$\dim V^\top = \dim V$$

3.2.9.10. Ist B eine Basis eines endlichdimensionalen Vektorraums V, so muß unsere linear unabhängige Familie $B^\top := (b^\top)_{b \in B}$ der zugehörigen Koordinatenfunktionen aus 3.2.9.5 nach 3.1.7.10 eine Basis des Dualraums $V^\top$ sein, da die Zahl ihrer Elemente mit der Dimension des Dualraums übereinstimmt. Man nennt dann $B^\top$ die **duale Basis** zur Basis B. Insbesondere besteht die duale Basis zur

Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ genau aus den üblichen Koordinatenfunktionen, in Formeln $\mathcal{S}(n)^\top = (\mathrm{pr}_i)_{i=1}^n$.

Beispiel 3.2.9.11. Wir kehren nocheinmal zu unserem Beispiel 3.2.9.4 zurück. Dort hatten wir besprochen, inwiefern man sich den Dualraum der Gesamtheit aller Zeitspannen als den Raum aller Drehgeschwindigkeiten denken mag. Die zur Basis „Minute“ der Gesamtheit aller Zeitspannen „duale Basis“, die wir gleich in allgemeinen Dualräumen einführen werden, bestünde dann aus dem Vektor „eine Umdrehung pro Minute in positivem Drehsinn“, den man üblicherweise **Umin** notiert.

Vorschau 3.2.9.12 (**Dualräume unendlichdimensionaler Vektorräume**). Im Fall eines unendlichdimensionalen Vektorraums ist wieder nach 3.2.3.14 auch sein Dualraum unendlichdimensional, aber dessen Dimension ist „noch unendlicher“ als die Dimension des Ausgangsraums in einem Sinne, der in 6.5.3.14 präzisiert wird.

Definition 3.2.9.13. Gegeben eine K-linare Abbildung $f : V \to W$ erklären wir die **duale** oder auch **transponierte Abbildung**

$$f^\top : W^\top \to V^\top$$

als das „Vorschalten von f“, in Formeln $f^\top(\lambda) := \lambda \circ f : V \to K$ für jede Linearform $\lambda : W \to K$.

3.2.9.14. Man beachte, daß die duale Abbildung „in die umgekehrte Richtung“ geht. Oft wird die duale Abbildung auch $f^* : W^* \to V^*$ notiert. Nicht selten schreibt man auch ein kleines t als Index oben links und notiert die duale alias transponierte Abbildung ${}^t f$.

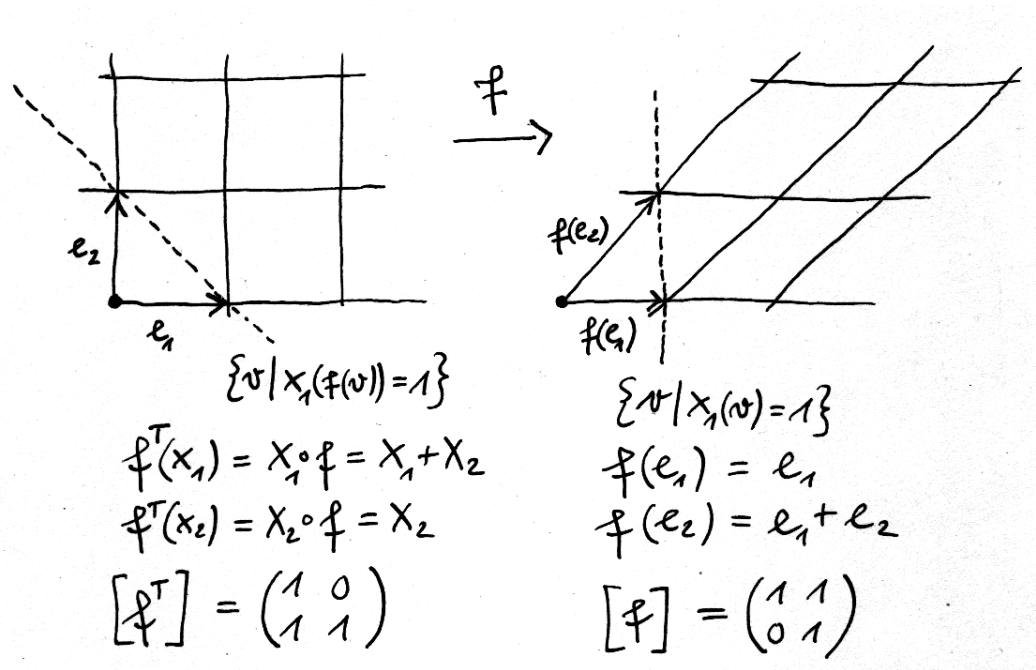
3.2.9.15 (**Verknüpfung und Transponieren**). Sicher gilt stets $\mathrm{id}_V^\top = \mathrm{id}_{V^\top} : V^\top \to V^\top$. Man prüft auch leicht für eine Verknüpfung $f \circ g$ von linearen Abbildungen die Identität

$$(f \circ g)^\top = g^\top \circ f^\top$$

In der Tat bedeutet das Vorschalten von $f \circ g$ nichts anderes, als erst f und dann g vorzuschalten.

Proposition 3.2.9.16 (**Matrix der dualen Abbildung**). *Gegeben eine lineare Abbildung $f : V \to W$ von endlichdimensionalen Vektorräumen mit angeordneten Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ist die darstellende Matrix der dualen Abbildung $f^\top : W^\top \to V^\top$ bezüglich der dualen Basen $\mathcal{B}^\top, \mathcal{A}^\top$ gerade Transponierte der Matrix von f, in Formeln*

$${}_{\mathcal{A}^\top}[f^\top]_{\mathcal{B}^\top} = ({}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}})^\top$$



Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, deren Matrix in einer Basis $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$, und die Matrix der dualen Abbildung auf der dualen Basis alias der Effekt des Vorschaltens unserer Abbildung auf den Koordinatenfunktionen $x_1, x_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

3.2.9.17. Diese Identität ist der Grund dafür, daß ich für den Dualraum vorzugsweise die Notation mit einem hochgestellten $\top$ verwenden will. Die dualen Basen sind dabei mit der offensichtlichen Anordnung zu verstehen.

Beweis. Seien $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_n)$ unsere angeordneten Basen. Die Matrixeinträge a_{ij} der darstellenden Matrix ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$ sind festgelegt durch die Identität von Vektoren $f(v_j) = \sum_i a_{ij} w_i$. Die Matrixeinträge b_{ji} der darstellenden Matrix ${}_{\mathcal{A}^\top}[f^\top]_{\mathcal{B}^\top}$ sind festgelegt durch die Identität von Linearformen $f^\top(w_i^\top) = \sum_j b_{ji} v_j^\top$. Es gilt zu zeigen $b_{ji} = a_{ij}$. Um das zu sehen, werten wir diese Identität von Linearformen auf den Vektoren v_k aus und erhalten

$$b_{ki} = \sum_j b_{ji} v_j^\top(v_k) = (f^\top(w_i^\top))(v_k) = w_i^\top(f(v_k)) = w_i^\top \left(\sum_l a_{lk} w_l \right) = a_{ik}$$

Das aber war gerade zu zeigen. □

3.2.9.18 (**Auswerten als Matrixmultiplikation**). Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit einer angeordneten Basis $\mathcal{A}$. Eine Linearform $\lambda \in V^\top$ wird als lineare Abbildung $\lambda : V \to k$ beschrieben durch eine Zeilenmatrix $[\lambda]_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{S}(1)}[\lambda]_{\mathcal{A}}$. Für das Auswerten unserer Linearform λ auf einem Vektor $v \in V$ erhalten wir dann

$$\lambda(v) = [\lambda]_{\mathcal{A}} \circ {}_{\mathcal{A}}[v]$$

unter der offensichtlichen Identifikation von Elementen unseres Grundkörpers mit (1×1)-Matrizen. Erinnern wir dann noch für $v \in V$ an die lineare Abbildung $(\cdot v) : K \to V$ mit $\alpha \mapsto \alpha v$ und an unsere Identität ${}_{\mathcal{A}}[\cdot v]_{\mathcal{S}(1)} = {}_{\mathcal{A}}[v]$, so kann auch obige Formel interpretiert werden als der Spezialfall

$${}_{\mathcal{S}(1)}[\lambda \circ (\cdot v)]_{\mathcal{S}(1)} = {}_{\mathcal{S}(1)}[\lambda]_{\mathcal{A}} \circ {}_{\mathcal{A}}[\cdot v]_{\mathcal{S}(1)}$$

der allgemeinen Formel 3.2.6.5 für die Matrix der Verknüpfung zweier linearer Abbildungen.

3.2.9.19 (**Darstellung einer Linearform in der dualen Basis**). Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit einer angeordneten Basis $\mathcal{A}$. Eine Linearform $\lambda \in V^\top$ kann auch als Element des Dualraums in Bezug auf die duale Basis dargestellt werden durch die Spaltenmatrix ${}_{\mathcal{A}^\top}[\lambda]$. Es ist nun nicht schwer, die Formel

$${}_{\mathcal{A}^\top}[\lambda] = ([\lambda]_{\mathcal{A}})^\top$$

zu prüfen. Ich bin bei dieser Formel noch etwas unglücklich, das λ auf der linken Seite nicht transponiert zu sehen. Dieser Anschein von Inkonsistenz kommt dadurch zustande, daß wir in unserer Formel links λ als Vektor auffassen und rechts als lineare Abbildung. Erinnern wir, daß die Spaltenmatrix eines Vektors v

ja auch die Matrix der vom Grundkörper mit seiner Standardbasis ausgehenden linearen Abbildung $(\cdot v)$ ist, und beachten, daß die Abbildung $(\cdot\lambda) : k \to V^\top$ bis auf die offensichtliche Identifikation $k \xrightarrow{\sim} k^\top$ genau die transponierte Abbildung zu $\lambda : V \to k$ ist, so erhalten wir

$$_{\mathcal{A}^\top}[\lambda] = {}_{\mathcal{A}^\top}[\cdot\lambda]_{\mathcal{S}(1)} = {}_{\mathcal{A}^\top}[\lambda^\top]_{\mathcal{S}(1)^\top}$$

Wir erkennen die Übereinstimmung mit unserer allgemeinen Formel 3.2.9.16 für die Matrix der dualen Abbildung, indem wir die linke Seite obiger Formel in dieser Weise umformen und ihre rechte Seite ausschreiben zu $\left({}_{\mathcal{S}(1)}[\lambda]_{\mathcal{A}}\right)^\top$.

Beispiel 3.2.9.20 (**Transport von Linearformen unter Isomorphismen**). Gegeben ein Vektorraumisomorphismus $f : V \xrightarrow{\sim} W$ ist die duale Abbildung ein Vektorraumisomorphismus $f^\top : W^\top \xrightarrow{\sim} V^\top$ und ihre Inverse ist ein Vektorraumisomorphismus $(f^\top)^{-1} : V^\top \xrightarrow{\sim} W^\top$. Dieser Isomorphismus leistet, was man sich anschaulich vielleicht am ehesten unter dem „Transport einer Linearform“ vorstellt: Gegeben $v \in V$ und $\lambda \in V^\top$ nimmt $(f^\top)^{-1}(\lambda)$ auf $f(v)$ denselben Wert an wie λ auf v. Betrachten wir etwa die Scherung $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, y)$ mit der Matrix $[f] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$und $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Offensichtlich bleibt die y-Koordinate eines Punktes unter solch einer Scherung unverändert, $(f^\top)^{-1}(\vec{e}_2^\top) = \vec{e}_2^\top$, und die x-Koordinate des Urbildpunkts entspricht der Differenz zwischen x-Koordinate und y-Koordinate des Bildpunkts, $(f^\top)^{-1}(\vec{e}_1^\top) = \vec{e}_1^\top - \vec{e}_2^\top$. Das entspricht auch unseren Formeln, nach denen $f^\top$ bezüglich der Basis $(\vec{e}_1^\top, \vec{e}_2^\top)$ dargestellt wird durch die transponierte Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, was genau die Formel $(f^\top)^{-1} : \vec{e}_1^\top \mapsto \vec{e}_1^\top - \vec{e}_2^\top$ und $(f^\top)^{-1} : \vec{e}_2^\top \mapsto \vec{e}_2^\top$ beinhaltet.

3.2.9.21 (**Anschauung für den Transport von Linearformen**). Eine von Null verschiedene Linearform $\lambda : V \to K$ mag man sich veranschaulichen, indem man sich den affinen Teilraum $\lambda^{-1}(1)$ vorstellt, auf dem sie den Wert Eins annimmt. In dieser Anschauung ist die Multiplikation von Linearformen mit von Null verschiedenen Skalaren noch einigermasen sichtbar, für die Addition von Linearformen oder die Nullform versagt sie jedoch grandios. Dahingegen ist in dieser Anschauung für einen Automorphismus $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ der Effekt des Inversen $(f^\top)^{-1}$ der transponierten Abbildung auf Linearformen gut verständlich.

Definition 3.2.9.22. Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Der Dualraum des Dualraums von V heißt sein **Bidualraum** und wird $(V^\top)^\top =: V^{\top\top}$ notiert oder in der Literatur meist V^{**}. Wir erklären die **kanonische Einbettung in den Bidualraum** alias **Evaluationsabbildung**

$$\mathrm{ev} = \mathrm{ev}_V : V \hookrightarrow V^{\top\top}$$

als die Vorschrift, die jedem Vektor $v \in V$ das „Evaluieren auf v“ zuordnet. In Formeln ist $\mathrm{ev}(v) \in V^{\top\top}$ also definiert als die lineare Abbildung $\mathrm{ev}(v) : V^\top \to K$ mit $\lambda \mapsto \lambda(v)$.

3.2.9.23 (**Injektivität der Evaluationsabbildung**). Die Injektivität der kanonischen Abbildung $V \to V^{\top\top}$ ergibt sich aus der Erkenntnis, daß es für jeden von Null verschiedenen Vektor $v \neq 0$ eine Linearform $\lambda \in V^\top$ gibt mit $\lambda(v) \neq 0$. Man kann das etwa zeigen, indem man den Satz 3.2.10.3 über die Fortsetzbarkeit linearer Abbildungen bemüht oder auch, indem man v zu einer Basis B von V ergänzt und dann $\lambda = v^\top$ wählt. Im Fall unendlichdimensionaler Räume brauchen wir jedoch in jedem Fall den Basiserweiterungssatz in seiner vollen Allgemeinheit 3.1.9.20. Man kann ohne die ihm zugrundeliegenden raffinierteren Methoden der Mengenlehre noch nicht einmal zeigen, daß es auf einem beliebigen von Null verschiedenen Vektorraum überhaupt irgendeine von Null verschiedene Linearform gibt.

3.2.9.24 (**Bidualraum im endlichdimensionalen Fall**). Im Fall eines endlichdimensionalen Vektorraums V zeigt ein Dimensionsvergleich unmittelbar, daß die Evaluationsabbildung einen Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} V^{\top\top}$ liefern muß. Manchmal wird diese Erkenntnis als Gleichung $V = V^{\top\top}$ geschrieben, aber das ist dann mit einigen Hintergedanken zu lesen, denn gleich sind diese beiden Mengen ja keineswegs. Den Hauptbestandteil dieser Hintergedanken macht die folgende Bemerkung explizit.

3.2.9.25. Gegeben Mengen X, Y, Z, W und Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : X \to Z$ und $h : Y \to W$ und $l : Z \to W$ mit $h \circ f = l \circ g$ sagt man auch, man habe ein **kommutatives Rechteck**

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ Z \arrow[r, "l"] & W \end{tikzcd}$$

Ich finde diese Darstellung sehr viel übersichtlicher.

3.2.9.26 (**Kanonische Einbettung und bitransponierte Abbildung**). Gegeben eine lineare Abbildung $f : V \to W$ kommutiert das Rechteck

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{ev}_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{\top\top} \arrow[d, "f^{\top\top}"] \\ W \arrow[r, "\mathrm{ev}_W"] & W^{\top\top} \end{tikzcd}$$

In Worten ausgedrückt gilt mithin die Identität $\mathrm{ev}_W \circ f = f^{\top\top} \circ \mathrm{ev}_V$ von Abbildungen $V \to W^{\top\top}$. Um das zu sehen, muß man nur für alle $v \in V$ die Identität $f^{\top\top}(\mathrm{ev}_V(v)) = \mathrm{ev}_W(f(v))$ in $W^{\top\top}$ prüfen. Dazu gilt es zu zeigen, daß beide Seiten auf allen $\lambda \in W^\top$ denselben Wert annehmen, daß also gilt

$$(f^{\top\top}(\mathrm{ev}_V(v)))(\lambda) = (\mathrm{ev}_W(f(v)))(\lambda)$$

alias $((\mathrm{ev}_V\, v) \circ f^\top)(\lambda) = \lambda(f(v))$ alias $(\mathrm{ev}_V\, v)(\lambda \circ f) = \lambda(f(v))$. Das ist jedoch klar.

3.2.9.27 (**Diskussion der Terminologie**). Meines Erachtens ist es diese letzte Erkenntnis 3.2.9.26, die die Bezeichnung von $V^\top$ als „Dualraum von V" eigentlich erst verständlich macht. „Dual" kommt ja vom selben Wortstamm wie „Zwei", und die letzte Erkenntnis formalisiert die Intuition, daß der Bidualraum im Fall endlichdimensionaler Vektorräume „im wesentlichen dasselbe" ist wie der Ausgangsraum. Etwas formaler werden wir in 4.7.4.9 mit der dort eingeführten Begrifflichkeit die obige Erkenntnis dahingehend aussprechen können, daß für jeden Körper K die Evaluationsabbildungen eine „Isotransformation des Identitätsfunktors auf der Kategorie der endlichdimensionalen K-Vektorräume zum Bidualraumfunktor" bilden.

3.2.9.28. Oft verwende ich für das Auswerten einer Linearform $\lambda \in V^\top$ auf einem Vektor $v \in V$ auch die symmetrischeren Notationen $\langle \lambda, v \rangle$ oder sogar $\langle v, \lambda \rangle$.

Übungen

Ergänzende Übung 3.2.9.29. Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine endliche Familie von Linearformen $f_1, \ldots, f_n \in V^\top$ ist linear unabhängig genau dann, wenn sie eine Surjektion $(f_1, \ldots, f_n) : V \twoheadrightarrow K^n$ liefert.

Übung 3.2.9.30. Gegeben Vektorräume V, W liefern die transponierten Abbildungen zu den kanonischen Injektionen nach 3.2.1.8 auf den Dualräumen einen Isomorphismus $(\mathrm{in}_V^\top, \mathrm{in}_W^\top) : (V \oplus W)^\top \xrightarrow{\sim} V^\top \oplus W^\top$. Analoges gilt für allgemeinere endliche Summen.

Übung 3.2.9.31. Für endlichdimensionale Vektorräume V ist die kanonische Einbettung aus Dimensionsgründen stets ein Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} V^{\top\top}$. Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V zeige man, daß unter der kanonischen Identifikation $\mathrm{ev}_V : V \xrightarrow{\sim} V^{\top\top}$ jede Basis B ihrer Bidualen entspricht, in Formeln

$$\mathrm{ev}_V(b) = (b^\top)^\top \quad \forall b \in B$$

Ergänzende Übung 3.2.9.32. Man zeige: Gegeben ein Vektorraum V ist die Verknüpfung

$$V^\top \xrightarrow{\mathrm{ev}_{V^\top}} V^{\top\top\top} \xrightarrow{\mathrm{ev}_V^\top} V^\top$$

der Auswertungsabbildung zum Dualraum von V mit der Transponierten der Auswertungsabbildung von V die Identität auf dem Dualraum von V. Hinweis: 2.1.6.13 mag helfen. Vom höheren Standpunkt 16.4.3.10 hängt das damit zusammen, daß „der Dualraumfunktor sein eigener Adjungierter ist".

Übung 3.2.9.33. Sei K ein Körper. Wir erhalten Isomorphismen $\mathrm{Mat}(n \times m; K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}(m \times n; K)^\top$ durch die Vorschrift $A \mapsto (B \mapsto \mathrm{tr}(AB))$.

Übung 3.2.9.34 (**Spur einer transponierten Abbildung**). Genau dann hat eine lineare Abbildung endlichen Rang, wenn ihre transponierte Abbildung endlichen Rang hat. Ein Endomorphismus endlichen Ranges eines Vektorraums hat stets dieselbe Spur wie der transponierte Endomorphismus des Dualraums.

3.2.10 Ergänzungen zu linearen Abbildungen*

Satz 3.2.10.1. *In einem Vektorraum besitzt jeder Untervektorraum ein Komplement.*

Beweis. Der Beweis benötigt im unendlichdimensionalen Fall das Zorn'sche Lemma. Seien $V \supset U$ unser Raum mit seinem Untervektorraum. Ist unser Raum V endlich erzeugt, so ist auch U endlich erzeugt nach 3.1.7.11. Wir finden nach 3.1.6.16 eine Basis L von U und können sie nach 3.1.7.3 zu einer Basis B von V ergänzen. Das Erzeugnis des Komplements $B \backslash L$ ist dann der gesuchte komplementäre Teilraum. Ist unser Raum V beliebig, so funktioniert derselbe Beweis, wenn wir die beiden letzten beiden Verweise durch Verweise auf den allgemeinen Basisexistenz- und Ergänzungssatz 3.1.9.20 ersetzen. □

Proposition 3.2.10.2.

1. *Für jede injektive lineare Abbildung $f : V \hookrightarrow W$ existiert ein* **Linksinverses***, als da heißt, eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$;*

2. *Für jede surjektive lineare Abbildung $f : V \twoheadrightarrow W$ existiert ein* **Rechtsinverses***, als da heißt, eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$.*

Beweis. Der Beweis beider Aussagen benötigt im unendlichdimensionalen Fall das Zorn'sche Lemma. Um Teil 1 zu zeigen, wählen wir mit 3.2.10.1 ein Komplement $U \subset W$ von $f(V)$ und definieren $g : W \to V$ durch die Vorschrift $g(u + f(v)) = v \ \forall u \in U, v \in V$. Das ist erlaubt, da nach unsern Annahmen die Abbildung $(u, v) \mapsto u + f(v)$ eine Bijektion $U \times V \xrightarrow{\sim} W$ induziert. Um Teil 2 zu zeigen, wählen wir ein Komplement $U \subset V$ von $\ker f$ und prüfen, daß f einen einen Isomorphismus $U \xrightarrow{\sim} W$ induziert. Dessen Inverses liefert unmittelbar das gesuchte Rechtsinverse von f. □

Übungen

Übung 3.2.10.3. Jede lineare Abbildung von einem Untervektorraum U eines Vektorraums V in einen weiteren Vektorraum $f : U \to W$ läßt sich zu einer linearen Abbildung $\tilde{f} : V \to W$ auf den ganzen Raum V fortsetzen. Hinweis: 3.2.10.2.

3.3 Affine Räume

3.3.1 Affine Räume und affine Abbildungen

Definition 3.3.1.1. Ein **affiner Raum** oder kurz **Raum** über einem Körper K ist ein Tripel

$$E = (E, \vec{E}, a)$$

bestehend aus einer Menge E, einer abelschen Untergruppe $\vec{E} \subset \mathrm{Ens}^{\times} E$ der Gruppe der Permutationen von E sowie einer Abbildung $a : K \times \vec{E} \to \vec{E}$ derart, daß gilt:

1. Die Menge E ist nicht leer und das Auswerten liefert für alle $p \in E$ eine Bijektion $\vec{E} \xrightarrow{\sim} E$, $\vec{v} \mapsto \vec{v}(p)$;

2. Mit der Abbildung $a : K \times \vec{E} \to \vec{E}$ als der Multiplikation mit Skalaren wird $\vec{E}$ ein K-Vektorraum.

Die Elemente von E heißen die **Punkte** unseres affinen Raums. Die Elemente von $\vec{E}$ heißen **Translationen** oder **Richtungsvektoren** unseres affinen Raums. Den Vektorraum $\vec{E}$ nennen wir den **Richtungsraum** unseres affinen Raums und notieren ihn auch $\vec{E} = \mathrm{Richt}(E)$. Das Resultat der Operation einer Translation $\vec{v} \in \vec{E}$ auf einem Punkt $p \in E$ notieren wir $\vec{v} + p := \vec{v}(p)$ oder auch $p + \vec{v}$.

3.3.1.2 (**Diskussion der Notation und Terminologie**). Die leere Menge kann in unseren Konventionen nie ein affiner Raum sein. Unser Richtungsraum wird in manchen Quellen der **Differenzraum** genannt. Vielfach findet man auch die begriffliche Variante eines **affinen Raums über einem vorgegebenen Vektorraum**. Darunter versteht man dann eine Menge E mit einer „freien transitiven Wirkung“ des vorgegebenen Vektorraums. Ich ziehe die oben gegebene Definition vor, da sie jeden Bezug auf einen bereits vorgegebenen Vektorraum vermeidet und den Raum unserer Anschauung dadurch meines Erachtens überzeugender modellieren kann.

Ergänzung 3.3.1.3. Die Notation des Richtungsraums mit einem Pfeil steht in Konflikt zu unserer Notation aus 12.8.3.6, nach der das Versehen mit einem Pfeil bei Mannigfaltigkeiten die Wahl einer Orientierung andeutet. Was im Einzelfall jeweils gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen.

3.3.1.4. Unter der **Dimension** eines affinen Raums verstehen wir die Dimension seines Richtungsraums. Ein affiner Raum über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen heißt auch ein **reeller affiner Raum** oder kurz **reeller Raum**.

3.3.1.5. Ein affiner Raum hat die Dimension Null genau dann, wenn er aus einem einzigen Punkt besteht. Affine Räume der Dimension Eins heißen **affine Geraden**. Affine Räume der Dimension Zwei heißen **affine Ebenen**.

3.3.1.6 (**Einige Formeln für affine Räume**). Ist E ein affiner Raum, so liefert nach Annahme für jedes $p \in E$ das Anwenden der Richtungsvektoren auf besagten Punkt eine Bijektion $\vec{E} \xrightarrow{\sim} E$, $\vec{v} \mapsto \vec{v} + p$ und es gilt $\vec{0} + p = p$ sowie $\vec{u} + (\vec{v} + p) = (\vec{u} + \vec{v}) + p$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$ und $p \in E$. Flapsig gesprochen ist also ein affiner Raum ein „Vektorraum, bei dem man den Ursprung vergessen hat“. Gegeben $p, q \in E$ erklären wir

$$p - q \in \vec{E}$$

als denjenigen Richtungsvektor $\vec{u} \in \vec{E}$ mit $p = \vec{u} + q$. Das erklärt auch die alternative Bezeichnung des Richtungsraums als „Differenzraum“.

Ergänzung 3.3.1.7. In Schulbüchern verwendet man für die Punkte eines affinen Raums meist Großbuchstaben $A, B, C, \ldots$ und schreibt

$$\overrightarrow{AB}$$

für den Richtungsvektor, der A nach B schiebt und den wir hier $B - A$ notieren. In einem didaktischen Kontext mag man statt $p - q$ auch $p \leftarrow q$ schreiben wollen.

3.3.1.8 (**Vektorräume als affine Räume**). Jeder Vektorraum V kann als ein affiner Raum aufgefaßt werden, indem wir als Translationen die durch die Addition von festen Vektoren gegebenen Abbildungen nehmen, so daß unsere Gruppe von Translationen das Bild des injektiven Gruppenhomomorphismus $V \hookrightarrow \mathrm{Ens}^{\times}(V)$, $v \mapsto (v+)$ wird. Die Vektorraumstruktur auf der Gruppe der Translationen erklären wir dabei dadurch, daß dieser Gruppenhomomorphismus einen Vektorraumisomorphismus auf sein Bild liefern soll. Insbesondere erhalten wir damit eine kanonische Identifikation

$$\mathrm{trans} : V \xrightarrow{\sim} \vec{V} = \mathrm{Richt}(V)$$

zwischen unserem Vektorraum und dem Richtungsraum des dazu gebildeten affinen Raums. Diese Identifikation scheint mir derart kanonisch, daß ich sie in Sprache und Notation oft so behandeln werde, als seien diese beiden Vektorräume schlicht gleich.

Beispiel 3.3.1.9 (**Der Raum unserer Anschauung als affiner Raum**). Es scheint mir besonders sinnfällig, den schmutzigen „Raum unserer Anschauung“ mathematisch als einen dreidimensionalen reellen affinen Raum

$$\mathbb{E}$$

zu modellieren. Dieses Modell werden wir in 4.1.6.2 folgende noch um die Vorgabe einer ausgezeichneten „Bewegungsgruppe“ und je nach Kontext einer ausgezeichneten „Orientierung“ erweitern und so den „Anschauungsraum“ formal als

ein Gebilde der Mengenlehre definieren. Die endgültige Definition muß aber noch auf die Einführung dieser Begriffe warten. Der Buchstabe $\mathbb{E}$ soll an das französische Wort „espace“ für „Raum“ erinnern. Unser „Raum unserer Anschauung“ ist der „Raum der klassischen Mechanik“. Manche Punkte dieses Raums können wir uns direkt als Kirchturmspitzen, Zimmerecken und dergleichen denken, die Übrigen gilt es sich vorzustellen. Die „affinen Geraden“ entsprechen unseren Sichtlinien. Wir ignorieren dabei, daß die Erde sich um sich selber dreht und dabei gleichzeitig um die Sonne rast, die sich hinwiederum mit unvorstellbarer Geschwindigkeit um das Zentrum der Milchstraße bewegt, und ich könnte noch eine Weile so weitermachen. Den zum Raum unserer Anschauung gehörigen Richtungsraum denke ich mir als die Gesamtheit aller „Parallelverschiebungen des Raums der Anschauung“. In 3.3.3.3 werden Sie lernen, in welchem Sinne die Bedingung, daß unsere Sichtlinien gerade den „affinen Geraden“ entsprechen sollen, die Struktur als reeller affiner Raum bereits eindeutig festlegt. Daß wir als Grundkörper für die Modellierung des Raums der Anschauung den Körper der reellen Zahlen nehmen, hat analytische Gründe: Im Kern liegen sie darin, daß für diesen Körper der Zwischenwertsatz 10.3.3.8 gilt. Deshalb modellieren reelle Vektorräume, insbesondere wenn es später auch um Drehungen, Winkel im Bogenmaß und dergleichen gehen wird, unsere geometrische Anschauung besser als etwa Vektorräume über den rationalen Zahlen. Überspitzt könnte man sagen, daß im Gegensatz zu früher, als die mathematische Modellierung der Ebene mithilfe der euklidischen Axiome an den Anfang gestellt wurde, die Mathematik seit dem Anfang des 20.-ten Jahrhunderts mit der Modellierung der Gerade beginnt, genauer mit der Axiomatik des Körpers der reellen Zahlen 10.2.4.

Beispiel 3.3.1.10. Man mag sich die Schreibfläche einer in jeder Richtung unbegrenzten Tafel als einen zweidimensionalen reellen affinen Raum denken. Daß dieses Beispiel schmutzig ist, versteht sich von selbst.

Beispiel 3.3.1.11. Die schmutzige Menge aller **Zeitpunkte der klassischen Mechanik** mag man mathematisch als einen eindimensionalen reellen affinen Raum

$$\mathbb{T}$$

modellieren. Dieses Modell für die „Zeit“ werden wir in 3.6.5.11 noch durch die Vorgabe einer ausgezeichneten „Orientierung“ erweitern. Der Buchstabe $\mathbb{T}$ soll an das lateinische Wort „tempus“ für „Zeit“ erinnern. Ein Richtungsvektor dieses affinen Raums wäre etwa die Vorschrift: Man warte von einem vorgegebenen Zeitpunkt sieben Ausschläge eines bestimmten Pendels ab, dann erreicht man den um besagte Translation verschobenen Zeitpunkt. Die Elemente des Richtungsraums $\vec{\mathbb{T}}$ dieses affinen Raums mag man sich als **Zeitspannen** denken, wobei jedoch auch „negative Zeitspannen“ zugelassen sind. Die Flugbahn einer Fliege etwa würden wir durch eine Abbildung $\mathbb{T} \to \mathbb{E}$ oder genauer, da Fliegen ja sterblich sind, durch die Abbildung von einer geeigneten Teilmenge $I \subset \mathbb{T}$ nach $\mathbb{E}$ beschreiben.

Beispiel 3.3.1.12. Ein Vektor des Homomorphismenraums $\mathrm{Hom}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{\mathbb{E}})$ vom Vektorraum der Zeitspannen in den Richtungsraum des Anschauungsraums modelliert, was man in der Physik eine **vektorielle Geschwindigkeit** nennt.

Definition 3.3.1.13. Eine Abbildung $\varphi : E \to F$ zwischen affinen Räumen über demselben Körper heißt eine **affine Abbildung**, wenn es eine lineare Abbildung zwischen den zugehörigen Richtungsräumen $\vec{\varphi} : \vec{E} \to \vec{F}$ gibt mit

$$\varphi(p) - \varphi(q) = \vec{\varphi}(p - q) \;\; \forall p, q \in E$$

Diese lineare Abbildung $\vec{\varphi}$ ist dann durch φ eindeutig bestimmt und heißt der **lineare Anteil** oder **Richtungsanteil** $\mathrm{Richt}(\varphi) := \vec{\varphi}$ unserer affinen Abbildung. Die Menge aller affinen Abbildungen von einem affinen Raum E in einen weiteren affinen Raum F über demselben Grundkörper K notieren wir

$$\mathrm{Aff}(E, F) = \mathrm{Aff}_K(E, F)$$

Eine bijektive affine Abbildung heißt ein **Isomorphismus von affinen Räumen**. Die Menge aller Isomorphismen von E nach F notieren wir $\mathrm{Aff}^\times(E, F)$. Ein Isomorphismus von einem affinen Raum auf sich selbst heißt ein **Automorphismus** oder auch eine **Affinität** des besagten affinen Raums. Die Gruppe aller Affinitäten eines affinen Raums E notieren wir $\mathrm{Aff}^\times(E) := \mathrm{Aff}^\times(E, E)$.

Beispiel 3.3.1.14 (**Affine Abbildungen zwischen Vektorräumen**). Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen Vektorräumen ist affin als Abbildung zwischen den dazu gebildeten affinen Räumen genau dann, wenn es eine lineare Abbildung $\vec{\varphi} : V \to W$ und einen Punkt $w \in W$ gibt mit

$$\varphi(v) = w + \vec{\varphi}(v)$$

für alle $v \in V$. Jede affine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ hat also die Gestalt $v \mapsto Av + b$ für $A \in \mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dabei ist $A = [\vec{\varphi}]$ die Matrix des Richtungsanteils und $b = \varphi(0)$ das Bild des Ursprungs.

Beispiel 3.3.1.15 (**Affine Selbstabbildungen einer Gerade**). Die affinen Abbildungen einer Gerade auf sich selber sind anschaulich gesprochen alle Streckungen von einem gegebenem Fixpunkt aus, alle Verschiebungen und alle konstanten Abbildungen, die man auch als Streckungen mit Streckfaktor Null auffassen kann. Im reellen Fall sind im Graphenbild aus der Schule die affinen Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau diejenigen Abbildungen, deren Graph eine Gerade ist und die auf der Schule meist als „lineare Abbildungen“ bezeichnet werden.

Übungen

Übung 3.3.1.16. Die Verknüpfung affiner Abbildungen ist affin und der lineare Anteil einer Verknüpfung affiner Abbildungen ist die Verknüpfung ihrer linearen Anteile, in Formeln $\vec{\varphi} \circ \vec{\rho} = \overrightarrow{\varphi \circ \rho}$.

Übung 3.3.1.17. Eine Abbildung $\varphi : E \to F$ zwischen affinen Räumen ist genau dann affin, wenn es einen Punkt $p \in E$ und eine lineare Abbildung $\vec{\varphi} : \vec{E} \to \vec{F}$ zwischen den zugehörigen Richtungsräumen gibt mit

$$\varphi(p + \vec{v}) = \varphi(p) + \vec{\varphi}(v) \;\; \forall \vec{v} \in \vec{E}$$

Übung 3.3.1.18 (**Affine Abbildungen mit der Identität als linearem Anteil**). Die Richtungsvektoren eines affinen Raums sind genau alle seine affinen Selbstabbildungen, deren linearer Anteil die Identität ist. In Formeln gilt für einen affinen Raum E also

$$\vec{E} = \{\varphi \in \mathrm{Aff}(E, E) \mid \vec{\varphi} = \mathrm{id}_{\vec{E}}\}$$

Übung 3.3.1.19 (**Affine Abbildungen mit Null als linearem Anteil**). Die affinen Abbildungen mit verschwindendem linearen Anteil sind genau die konstanten Abbildungen. Gegeben affine Räume E, F über demselben Körper gilt also in Formeln

$$\{\varphi \in \mathrm{Aff}(E, F) \mid \vec{\varphi} = 0\} \;=\; \{\varphi \in \mathrm{Ens}(E, F) \mid \varphi \text{ ist konstant}\}$$

Übung 3.3.1.20. Gegeben ein affiner Raum E und ein Punkt $p \in E$ zeige man, daß die Abbildung $E \to E$ gegeben durch $p + \vec{v} \mapsto p - \vec{v} \;\; \forall \vec{v} \in \vec{E}$ affin ist. Sie heißt die **Punktspiegelung an** p. Allgemeiner zeige man, daß für alle Skalare λ aus dem Grundkörper die Abbildung $E \to E$ gegeben durch $p + \vec{v} \mapsto p + \lambda\vec{v}$ affin ist. Sie heißt die **Streckung** oder auch **Homothetie mit Zentrum** p **und Streckfaktor** λ.

Übung 3.3.1.21. Beschreiben Sie in schmutzigen Worten affine Abbildungen $\mathbb{T} \to \mathbb{E}$ des affinen Raums der Zeiten in den Anschauungsraum. Natürlich ist das keine mathematische Übung im eigentlichen Sinne!

Übung 3.3.1.22 (**Produkt affiner Räume**). Gegeben affine Räume $X_1, \ldots, X_n$ gibt es auf ihrem kartesischen Produkt $X_1 \times \ldots \times X_n$ genau eine Struktur als affiner Raum derart, daß alle Projektionen pr_i affin sind. Des weiteren liefern dann die linearen Anteile der Projektionen einen Isomorphismus

$$(\vec{\mathrm{pr}}_1, \ldots, \vec{\mathrm{pr}}_n) : \mathrm{Richt}(X_1 \times \ldots \times X_n) \xrightarrow{\sim} \vec{X}_1 \times \ldots \times \vec{X}_n$$

zwischen dem Richtungsraum des Produkts und dem Produkt der Richtungsräume der Faktoren.

Beispiel 3.3.1.23. Bezeichnet $\mathbb{E}$ den Raum unserer Anschauung, mutig gedacht für einen fest auf der Sonne stehenden Beobachter, so mag man jede mögliche Konstellation von Erde und Mond als einen Punkt von $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ modellieren.

Übung 3.3.1.24 (**Vorübung für affine Teilräume**). Gegeben ein injektiver Homomorphismus von affinen Räumen $\varphi : F \hookrightarrow E$ zeige man, daß sein linearer Anteil $\vec{\varphi}$ einen Vektorraumisomorphismus $\vec{\varphi} : \vec{F} \xrightarrow{\sim} \{\vec{v} \in \vec{E} \mid \vec{v} + \varphi(F) = \varphi(F)\}$ induziert.

3.3.2 Affine Teilräume

Definition 3.3.2.1. Sei E ein affiner Raum. Eine Teilmenge $F \subset E$ heißt ein **affiner Teilraum**, wenn F so mit der Struktur eines affinen Raums $(F, \vec{F}, b)$ versehen werden kann, daß die Einbettung eine affine Abbildung ist. Übung 3.3.1.24 zeigt, daß diese Struktur als affiner Raum auf unserer Teilmenge F dann eindeutig bestimmt ist und daß die Richtungsvektoren von F genau die Einschränkungen derjenigen Richtungsvektoren von E sind, die F stabilisieren.

3.3.2.2. Gegeben $F \subset E$ ein affiner Teilraum eines affinen Raums bezeichnen wir mit $\vec{F}$ sowohl den Richtungsraum von F als auch sein Bild in $\vec{F} \subset \vec{E}$ unter dem Richtungsanteil der Einbettung und nennen auch dieses Bild den **Richtungsraum von** F. Offensichtlich gilt dann $F = p + \vec{F}$ für jeden Punkt $p \in F$. Umgekehrt ist auch für jeden Punkt $p \in E$ und jeden Untervektorraum $W \subset \vec{E}$ die Teilmenge $p + W$ ein affiner Teilraum von E.

Beispiel 3.3.2.3. Die affinen Teilräume des $\mathbb{R}^3$ sind genau: Alle einelementigen Teilmengen, alle Geraden $G = p + \mathbb{R}\vec{v}$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$, alle Ebenen $P = p + \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}$ mit $\vec{v}, \vec{w}$ linear unabhängig, sowie der ganze $\mathbb{R}^3$.

3.3.2.4. Eine Teilmenge eines affinen Raums heißt eine **Gerade** oder genauer eine **affine Gerade**, wenn sie ein affiner Teilraum der Dimension Eins ist. Eine Teilmenge eines affinen Raums heißt eine **Ebene** oder genauer eine **affine Ebene**, wenn sie ein affiner Teilraum der Dimension Zwei ist. Eine Teilmenge eines affinen Raums heißt **kollinear**, wenn sie in einer Geraden enthalten ist.

3.3.2.5. Ein nichtleerer Schnitt von affinen Teilräumen eines affinen Raums ist stets wieder ein affiner Teilraum. Weiter ist der Richtungsraum des Schnitts der Schnitt der Richtungsräume, wenn wir alle diese Richtungsräume wie in 3.3.2.2 als Teilmengen des Richtungsraums unseres ursprünglichen Raums betrachten. Sie mögen den Beweis als Übung 3.3.2.19 ausschreiben.

Definition 3.3.2.6. Gegeben eine nichtleere Teilmenge $T \neq \emptyset$ eines affinen Raums gibt es nach 3.3.2.5 einen kleinsten affinen Teilraum $\langle T \rangle_{\mathrm{aff}}$, der sie umfaßt. Wir bezeichnen ihn als den **von unserer Teilmenge erzeugten** affinen Teilraum. Ein

Erzeugendensystem eines affinen Raums ist eine nichtleere Teilmenge, die ihn erzeugt.

3.3.2.7. Man beachte, daß in unserer Terminologie insbesondere auch in einem einpunktigen affinen Raum die leere Teilmenge kein Erzeugendensystem ist.

3.3.2.8 (**Explizite Beschreibung affiner Erzeugnisse**). Man mag den von einer nichtleeren Teilmenge $T \neq \emptyset$ eines affinen Raums E erzeugten affinen Teilraum $\langle T \rangle_{\text{aff}}$ auch beschreiben als

$$\langle T \rangle_{\text{aff}} = T + \langle p - q \mid p, q \in T \rangle_{\text{lin}}$$

In Worten nehme man also den Untervektorraum des Richtungsraums von $\vec{E}$, der von allen zwei Punkte unserer Teilmenge ineinander überführenden Vektoren erzeugt wird, und lasse seine Vektoren auf Punkte unserer Teilmenge los: Alle Punkt, die man so erhalten kann, bilden einen affinen Teilraum, da ja offensichtlich gilt $T + \langle p - q \mid p, q \in T \rangle_{\text{lin}} = t + \langle p - q \mid p, q \in T \rangle_{\text{lin}}$ für alle $t \in T$.

3.3.2.9 (**Anschauliche Interpretation linearer Gleichungssysteme**). Wählen wir im Anschauungsraum $\mathbb{E}$ einen festen Punkt p als **Ursprung** und eine angeordnete Basis $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ seines Richtungsraums, so erhalten wir eine Bijektion

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}$$

vermittels der Abbildungsvorschrift $(x, y, z) \mapsto p + x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3$. Die Abbildungen $\mathbb{E} \to \mathbb{R}$, die jedem Punkt die Komponenten seines Urbilds unter dieser Identifikation zuordnen, heißen auch **Koordinaten** und in ihrer Gesamtheit ein **Koordinatensystem auf** $\mathbb{E}$. Unter jeder derartigen Identifikation des $\mathbb{R}^3$ mit dem Raum unserer Anschauung kann man sich die Lösungsmenge einer homogenen linearen Gleichung in drei Unbekannten als eine Ebene durch den Ursprung denken, wenn man einmal von der „Nullgleichungen“ absieht, und die Lösungsmenge einer nicht notwendig homogenen linearen Gleichung in drei Unbekannten als eine affine Ebene, wenn man wieder von dem Fall der „Nullgleichung“ absieht, bei denen die Koeffizienten von x, y, z alle drei verschwinden. Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ohne Nullgleichung kann man sich demnach veranschaulichen als den Schnitt einiger affiner Ebenen, eben der Lösungsmengen seiner einzelnen Gleichungen. So sieht man auch anschaulich ein, daß die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ohne Nullgleichung mit zwei Gleichungen in drei Veränderlichen im Allgemeinen einen eindimensionalen Lösungsraum haben wird, da sich eben zwei Ebenen im Raum im Allgemeinen in einer Gerade schneiden, daß aber als Lösungsraum auch die leere Menge in Frage kommt, als Schnitt zweier paralleler Ebenen, und eine Ebene, wenn nämlich die Lösungsräume unserer beiden Gleichungen übereinstimmen.

3.3.2.10. Eine Teilmenge eines affinen Raums heißt eine **Hyperebene** oder genauer eine **affine Hyperebene**, wenn sie ein echter affiner Teilraum ist, der zusammen mit einem einzigen weiteren Punkt unseren ganzen affinen Raum affin erzeugt.

Definition 3.3.2.11. Zwei affine Teilräume $T, S \subset E$ eines affinen Raums E heißen **parallel**, wenn sie disjunkt sind und im Richtungsraum $\vec{E}$ gilt $\vec{T} \subset \vec{S}$ oder $\vec{S} \subset \vec{T}$.

3.3.2.12 (**Diskussion der Terminologie**). Die Konventionen scheinen in der Literatur nicht ganz eindeutig zu sein. Die hier gegebene Definition von Parallelität hat den Vorteil, die üblichen Definitionen für die Parallelität von Geraden oder Ebenen im zweidimensionalen wie im dreidimensionalen Raum zu liefern. Allerdings hat sie den Nachteil, daß ein Punkt zu jedem Teilraum parallel ist, der ihn nicht enthält, was meinem Sprachempfinden eigentlich zuwiderläuft.

Ergänzung 3.3.2.13. Der Begriff „parallel“ kommt aus dem Griechischen und heißt „nebeneinander“.

Übungen

Übung 3.3.2.14 (**Fasern linearer Abbildungen**). Gegeben eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gilt für alle $v \in V$ die Identität $f^{-1}(f(v)) = v + \ker f$ von Teilmengen von V. Für alle $w \in W$ ist mithin die Faser $f^{-1}(w)$ entweder leer oder aber ein affiner Teilraum von V.

Übung 3.3.2.15 (**Urbilder affiner Teilräume**). Ist $f : V \to W$ eine affine Abbildung, so ist für jeden affinen Teilraum $A \subset W$ sein Urbild $f^{-1}(A)$ entweder leer oder aber ein affiner Teilraum von V. Das verallgemeinert die vorhergehende Übung 3.3.2.14.

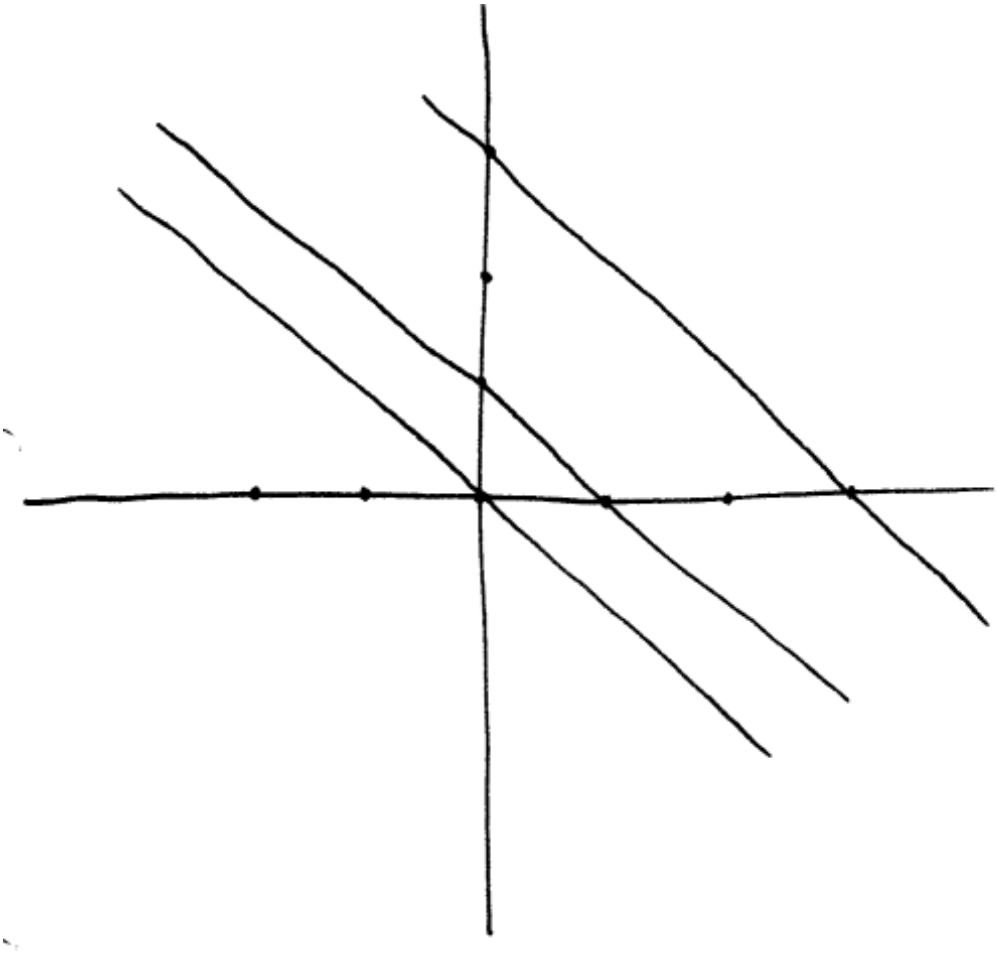
Übung 3.3.2.16. Durch je zwei verschiedene Punkte eines affinen Raums geht genau eine Gerade, als da heißt, es gibt genau einen affinen Teilraum der Dimension Eins, der unsere beiden Punkte enthält. Bringt man also Kimme und Korn in eine Sichtlinie mit dem Ziel, so ist das Gewehr bereits auf das Ziel ausgerichtet.

Übung 3.3.2.17. Durch je drei Punkte eines affinen Raums, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, geht genau eine Ebene. Insbesondere wird also ein dreibeiniger Hocker nie kippeln.

Übung 3.3.2.18. Der von einer nichtleeren endlichen Teilmenge T eines affinen Raums erzeugte Teilraum hat höchstens die Dimension $|T| - 1$.

Übung 3.3.2.19 (**Richtungsraum eines Schnitts**). Gegeben ein affiner Raum E und affine Teilräume $F, G \subset E$ mit nichtleerem Schnitt $F \cap G \neq \emptyset$ ist der Richtungsraum ihres Schnitts der Schnitt ihrer Richtungsräume, in Formeln

$$\operatorname{Richt}(F \cap G) = \operatorname{Richt}(F) \cap \operatorname{Richt}(G)$$



Die Fasern der durch $(x, y) \mapsto x + y$ gegebenen linearen Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu den Werten $0, 1$ und 3.

Man zeige immer unter der Annahme, daß besagter Schnitt nicht leer ist, dasselbe auch allgemeiner für den Schnitt eines beliebigen Systems affiner Teilräume.

Übung 3.3.2.20 (**Erzwungene Schnitte**). Gegeben ein affiner Raum E und affine Teilräume $F, G \subset E$ gilt

$$\vec{F} + \vec{G} = \vec{E} \;\Rightarrow\; F \cap G \neq \emptyset$$

Übung 3.3.2.21 (**Dimension eines affinen Erzeugnisses**). Gegeben zwei endlichdimensionale affine Teilräume A, B eines affinen Raums E gilt für die Dimension des affinen Erzeugnisses C ihrer Vereinigung die Formel

$$\dim C = \begin{cases} \dim A + \dim B - \dim(A \cap B) & \text{falls } A \cap B \neq \emptyset; \\ \dim A + \dim B - \dim(\vec{A} \cap \vec{B}) + 1 & \text{falls } A \cap B = \emptyset. \end{cases}$$

Übung 3.3.2.22 (**Kodimension eines Schnitts**). Ist E ein endlichdimensionaler affiner Raum und vereinbaren wir die Notation $\operatorname{codim}(A \subset E) := \dim E - \dim A$ für die Dimensionsdifferenz, die sogenannte **Kodimension von** A **in** E, so gilt unter der Annahme $A \cap B \neq \emptyset$ die Abschätzung

$$\operatorname{codim}((A \cap B) \subset E) \leq \operatorname{codim}(A \subset E) + \operatorname{codim}(B \subset E)$$

Die Kodimension des Schnitts ist also höchstens die Summe der Kodimensionen der sich schneidenden Teilräume.

Vorschau 3.3.2.23. In der kommutativen Algebra 7.5.9.15 können Sie lernen, wie man diese Abschätzung für die Kodimension eines Schnitts auf Nullstellenmengen polynomialer Gleichungssysteme verallgemeinern kann, wenn der Grundkörper algebraisch abgeschlossen ist. So etwas wie zwei Sphären im Raum, die sich in einem Punkt berühren, kann es also im Komplexen nicht geben: Da kann der Schnitt der Nullstellenmengen zweier Polynome in drei Variablen $f, g \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ nie isolierte Punkte haben.

Übung 3.3.2.24. Eine Abbildung $f : E \to F$ von affinen Räumen ist genau dann affin, wenn ihr Graph $\Gamma(f) \subset E \times F$ ein affiner Teilraum des Produkts unserer beiden Räume ist.

3.3.3 Affine Räume und ihre Geraden

Satz 3.3.3.1 (Charakterisierung affiner Abbildungen im Reellen). *Eine injektive Abbildung von einem mindestens zweidimensionalen reellen affinen Raum in einen weiteren reellen affinen Raum ist affin genau dann, wenn das Bild jeder Geraden wieder eine Gerade ist.*

3.3.3.2. Dieselbe Charakterisierung gilt allgemeiner über jedem Grundkörper, dessen einziger Körperautomorphismus die Identität ist. Wir diskutieren mehr dazu in 3.3.3.5.

3.3.3.3 (**Bezug zum schmutzigen Raum unserer Anschauung**). Die affinen Geraden des Raums unserer Anschauung denke ich mir als Sichtlinien: Drei Punkte liegen auf einer Geraden genau dann, wenn man sich so hinstellen kann, daß man sie hintereinander sieht. Der vorhergehende Satz 3.3.3.1 zeigt, daß im Fall reeller affiner Räume ab der Dimension Zwei die Kenntnis aller Geraden auch umgekehrt bereits die Struktur als reeller affiner Raum festlegt: Haben nämlich zwei Strukturen als affiner reeller Raum auf derselben Menge dieselben Geraden, und gibt es in besagtem Raum mehr als nur eine Gerade, so ist nach 3.3.3.1 die Identität auf unserer Menge ein Morphismus von affinen Räumen zwischen unserer Menge einmal mit der einen Struktur als affiner Raum und ein andermal mit der anderen Struktur als affiner Raum. Dann aber müssen diese beiden Strukturen bereits übereinstimmen. Anschaulich gesprochen legt also im Raum unserer Anschauung „die Kenntnis der Sichtlinien bereits fest, welche Abbildungen als Parallelverschiebungen anzusehen sind“. Explizit kann man das wie folgt einsehen: Zunächst legt die Kenntnis der Sichtlinien alias Geraden fest, welche Teilmengen die Bezeichung als „Ebene“ verdienen; Dann vereinbart man, zwei Geraden „parallel“ zu nennen, wenn sie in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden; Und schließlich kann man dann Parallelverschiebungen charakterisieren als diejenigen bijektiven Abbildungen, die jede Gerade bijektiv auf sich selbst oder aber bijektiv in eine parallele Gerade überführen. An dieser Stelle möchte ich Sie am liebsten wieder einmal davon überzeugen, daß das Abstrakte das eigentlich Konkrete ist.

Beweis. Wir zeigen den Satz zunächst unter der Annahme, daß sowohl unser Ausgangsraum als auch der Raum, in den abgebildet wird, beide die Dimension Zwei haben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir dann annehmen, daß es sich bei beiden Räumen um den $\mathbb{R}^2$ handelt, und indem wir unsere Abbildung noch mit einer geeigneten Verschiebung verknüpfen, dürfen wir sogar annehmen, daß sie den Ursprung festhält. Diesen Fall behandeln wir als eigenständiges Lemma.

Lemma 3.3.3.4. *Eine injektive Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\Phi(0) = 0$, unter der das Bild jeder affinen Geraden wieder eine affine Gerade ist, muß linear sein.*

Beweis. Indem wir eine geeignete lineare Abbildung dahinterhalten, dürfen daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unser Φ die Vektoren e_1 und e_2 der Standardbasis festhält. Unter dieser Zusatzannahme zeigen wir nun, daß Φ sogar die Identität ist. Zunächst gibt es sicher Abbildungen $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(a\mathrm{e}_i) = \psi_i(a)\,\mathrm{e}_i$. Da wir Φ injektiv angenommen haben, müssen unter Φ parallele alias sich nicht schneidende Geraden parallel bleiben. Die Gerade durch

$a\mathrm{e}_1$ und $a\mathrm{e}_2$ für $a \neq 0,1$ ist parallel zu der durch e_1 und e_2, also ist für $a \neq 0,1$ auch die Gerade durch $\Phi(a\mathrm{e}_1) = \psi_1(a)\,\mathrm{e}_1$ und $\Phi(a\mathrm{e}_2) = \psi_2(a)\,\mathrm{e}_2$ parallel zu der durch $\Phi(\mathrm{e}_1) = \mathrm{e}_1$ und $\Phi(\mathrm{e}_2) = \mathrm{e}_2$. Es folgt $\psi_1(a) = \psi_2(a)$ für $a \neq 0,1$. Für $a = 0,1$ ist das eh klar und wir notieren diese Abbildung nun $\psi := \psi_1 = \psi_2$. Natürlich gilt $\psi(0) = 0$ und $\psi(1) = 1$. Da man die Addition von linear unabhängigen Vektoren durch Parallelogramme darstellen kann, gilt $\Phi(v+w) = \Phi(v) + \Phi(w)$ falls v und w linear unabhängig sind. Wir erhalten für $a \in \mathbb{R}$ damit

$$\Phi(\mathrm{e}_1 + a\,\mathrm{e}_2) \quad = \quad \mathrm{e}_1 + \psi(a)\,\mathrm{e}_2$$

wegen der linearen Unabhängigkeit im Fall $a \neq 0$ und im Fall $a = 0$ wegen $\psi(0) = 0$. Daraus folgt sofort die Erste der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \Phi(\mathrm{e}_1 + (a+b)\,\mathrm{e}_2) &= \mathrm{e}_1 + \psi(a+b)\,\mathrm{e}_2 \\ \Phi(\mathrm{e}_1 + a\,\mathrm{e}_2 + b\,\mathrm{e}_2) &= \mathrm{e}_1 + \psi(a)\,\mathrm{e}_2 + \psi(b)\,\mathrm{e}_2 \end{aligned}$$

Die Zweite folgt hier, indem wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b \neq 0$ annehmen und erst den letzten Summanden abspalten. Es folgt sofort $\psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b)$. Da für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $b \neq 0,1$ die Gerade durch e_1 und $a\mathrm{e}_2$ parallel ist zu der durch $b\mathrm{e}_1$ und $ba\mathrm{e}_2$ folgt auch $\psi(ba) = \psi(b)\psi(a)$ erst für alle $a, b \neq 0,1$, dann aber wegen $\psi(0) = 0$ und $\psi(1) = 1$ sogar für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Da nach 10.2.4.3 oder besser 10.2.4.21 die Identität der einzige Körperhomomorphismus $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist, folgt $\psi = \mathrm{id}$. Da wie bereits erwähnt gilt $\Phi(v+w) = \Phi(v) + \Phi(w)$ falls v und w linear unabhängig sind, folgt sofort $\Phi = \mathrm{id}$. □

Um nun Satz 3.3.3.1 zu zeigen, sei $\Phi : E \hookrightarrow F$ unsere injektive Abbildung von reellen affinen Räumen, unter der das Bild jeder Geraden eine Gerade ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß E und F reelle Vektorräume sind und daß gilt $\Phi(\vec{0}) = \vec{0}$. Unter diesen stärkeren Annahmen zusammen mit der Annahme $\dim E \geq 2$ folgern wir nun sogar die Linearität von Φ. Gegeben $v, w \in E$ linear unabhängig kann offensichtlich die von v und w aufgespannt Ursprungsebene dargestellt werden als die Vereinigung des Ursprungs mit allen affinen Geraden, die durch einen Punkt von $\mathbb{R}v$ und einen Punkt von $\mathbb{R}w$ laufen, so daß also in Formeln ausgedrückt gilt

$$\langle v, w\rangle = \bigcup_{u \in \mathbb{R}v,\ x \in \mathbb{R}w} \langle u, x\rangle_{\mathrm{aff}}$$

Gegeben $v, w \in E$ linear unabhängig müssen auch $\Phi(v)$ und $\Phi(w)$ linear unabhängig sein, da sonst die zwei verschiedenen Geraden $\mathbb{R}v$ und $\mathbb{R}w$ bijektiv auf dieselbe Gerade abgebildet würden im Widerspruch zur Injektivität von Φ. Da Φ

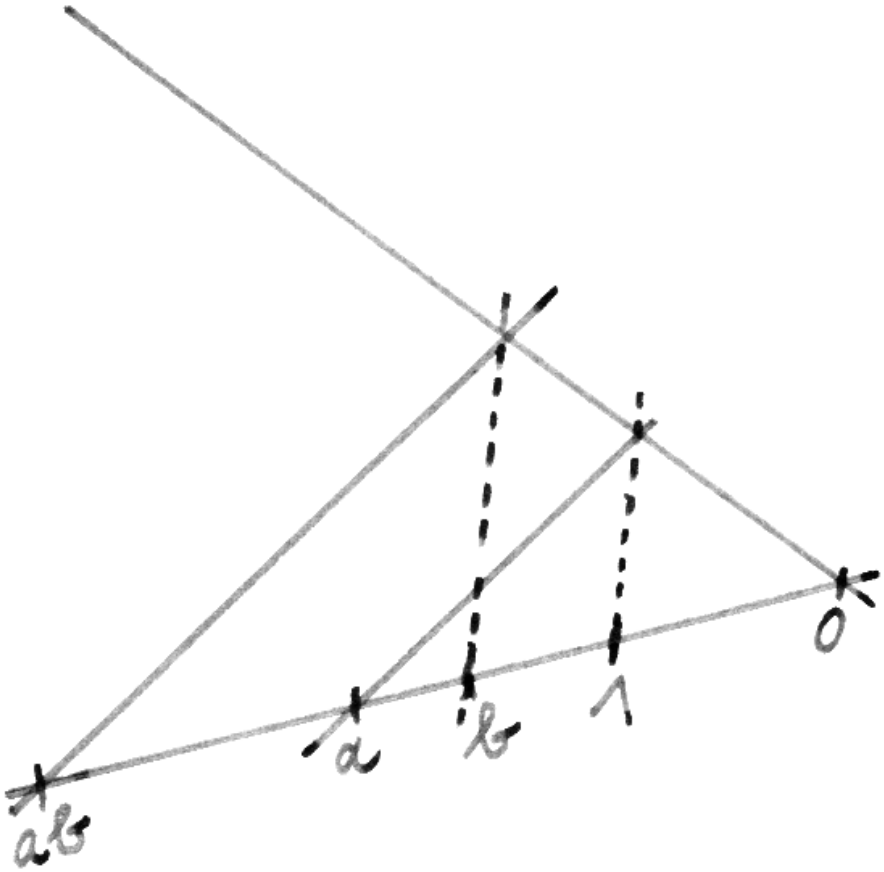
Geraden auf Geraden abbildet, folgt $\Phi(\langle v, w\rangle) = \langle \Phi(v), \Phi(w)\rangle$. Von der mithin von Φ induzierten Bijektion

$$\Phi : \langle v, w\rangle \xrightarrow{\sim} \langle \Phi(v), \Phi(w)\rangle$$

wissen wir aber nun bereits, daß sie linear sein muß, daß also in Formeln ausgedrückt gilt $\Phi(u + x) = \Phi(u) + \Phi(x)$ und $\Phi(\lambda u) = \lambda\Phi(u)$ für alle $u, x \in \langle v, w\rangle$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Da aber in einem Vektorraum der Dimension mindestens Zwei je zwei Vektoren u, x in einem gemeinsamen zweidimensionalen Teilraum liegen, zeigt das bereits die Linearität von Φ selbst. $\square$

Ergänzung 3.3.3.5. Geht man den Beweis von Lemma 3.3.3.4 nocheinmal durch, so erkennt man, daß er auch die folgende feinere Aussage zeigt: Sind K, L Körper und ist $\Phi : K^2 \hookrightarrow L^2$ eine Injektion mit $\Phi(0) = 0$, unter der das Bild jeder affinen Geraden wieder eine affine Gerade ist, so ist Φ ein Gruppenhomomorphismus und es gibt einen Körperisomorphismus $\psi : K \xrightarrow{\sim} L$ mit $\Phi(\lambda\vec{v}) = \psi(\lambda)\Phi(\vec{v})$ für alle $\lambda \in K$ und $\vec{v} \in K^2$. Salopp gesprochen ist also unsere Abbildung Φ „linear bis auf einen Körperisomorphismus“. Geht man den Beweis von Lemma 3.3.3.4 ein drittes Mal durch, so erkennt man, daß er dasselbe sogar zeigt für Schiefkörper K, L mit der Maßgabe, daß wir unter Geraden in K^2 Teilmengen der Gestalt $p + vK$ verstehen für $p, v \in K^2$ mit $v \neq 0$.

Ergänzung 3.3.3.6 (**Von der Geometrie zur Algebra**). Geht man den Beweis von Satz 3.3.3.1 im Lichte von 3.3.3.5 nocheinmal durch, so erkennt man, daß er auch die folgende feinere Aussage zeigt: Haben zwei Strukturen $(E, \vec{E}, a)$ und $(E, \vec{E}', a')$ auf ein- und derselben Menge E als zweidimensionaler affiner Raum über Körpern K beziehungsweise K' dieselben Geraden, so gilt $\vec{E} = \vec{E}'$ und es gibt genau einen Körperisomorphismus $\varphi : K \xrightarrow{\sim} K'$ mit $a(\lambda, \vec{v}) = a'(\varphi(\lambda), \vec{v})$ für alle $\lambda \in K$ und $\vec{v} \in \vec{E}$. Flapsig gesagt kennt also ein weißes Blatt Papier zusammen mit einem Lineal bereits den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen! Gegeben eine Menge E von „Punkten“ und eine Teilmenge $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(E)$ ihrer Potenzmenge, deren Elemente $G \in \mathcal{G}$ „Geraden“ heißen, kann man auch eine Liste von geometrisch sinnvollen Forderungen angeben, die genau dann erfüllt sind, wenn unsere Menge E so mit der Struktur eines zweidimensionalen affinen Raums über einem Körper versehen werden kann, daß $\mathcal{G}$ aus allen zugehörigen affinen Geraden besteht. Die einfachsten dieser Forderungen sind, daß durch je zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade gehen soll und daß sich je zwei Geraden in höchstens einem Punkt schneiden. Die zusätzlichen Forderungen werden in 5.1.2 besprochen. In dieser Weise lassen sich die Körperaxiome 2.2.4.2 sogar geometrisch rechtfertigen.



Wie man auf einer Gerade der Papierebene mit zwei verschiedenen als Null und Eins ausgezeichneten Punkten zwei beliebige Punkte multipliziert, wenn man nur ein Lineal zur Verfügung hat, das aber „unendlich lang“ ist in dem Sinne, daß man durch einen gegebenen Punkt die zu einer gegebenen Gerade parallele Gerade zeichnen kann.

3.3.4 Baryzentrische Koordinaten*

3.3.4.1. Gegeben ein affiner Raum E über einem Körper K der Charakteristik Null $\operatorname{char} K = 0$ und eine nichtleere endliche Teilmenge $\emptyset \neq T \subset E$ erklärt man den **Schwerpunkt** $\operatorname{Bar}(T)$ **von** T als den eindeutig bestimmten Punkt $\operatorname{Bar}(T) = s \in E$ mit

$$\sum_{e \in T} (e - s) = \vec{0}$$

Das ist gleichbedeutend dazu, daß für einen und jeden Punkt $p \in E$ gilt

$$\sum_{e \in T} (e - p) = \sum_{e \in T} (e - p) - \sum_{e \in T} (e - s)$$

und mit offensichlichen weiteren Umformungen sehen wir, daß es auch äquivalent ist zur Identität

$$\sum_{e \in T} (e - p) = |T|(s - p)$$

Daß zeigt einerseits die Eindeutigkeit des Schwerpunkts und andererseits auch dessen Existenz, da wir ja einen Schwerpunkt s von T finden können, indem wir von einem beliebigen Punkt $p \in E$ ausgehen und $s := p + |T|^{-1} \sum_{e \in T} (e - p)$ nehmen. Nach griechisch „$\beta\alpha\rho\upsilon\varsigma$“ für „schwer“ heißt der Schwerpunkt auch das **Baryzentrum**.

3.3.4.2. Gegeben ein Körper K, ein affiner Raum E über K, Punkte $e_0, \ldots, e_n \in E$ und Skalare $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_0 + \ldots + \lambda_n \neq 0$ erklärt man allgemeiner den **Schwerpunkt**

$$s = \operatorname{Bar}((e_0, \lambda_0), \ldots, (e_n, \lambda_n))$$

der Punkte e_i **mit den Gewichten** λ_i durch die Bedingung $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (e_i - s) = \vec{0}$. Ich lasse hier die Indize bei Null beginnen, um besonders deutlich zu machen, daß der Fall einer leeren Familie ausgeschlossen ist, auch wenn das unsere Bedingung $\sum \lambda_i \neq 0$ bereits impliziert. Um die Existenz und Eindeutigkeit des Schwerpunkts mit Gewichten zu zeigen, prüft man wie zuvor für jeden Punkt $p \in E$, daß die Schwerpunkteigenschaft von $s \in E$ gleichbedeutend ist zur Identität

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (e_i - p) = \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \right) (s - p)$$

Daraus folgt analog wie im Fall ohne Gewichte die Existenz und Eindeutigkeit.

3.3.4.3 (**Affines Erzeugnis als Menge von Schwerpunkten**). Gegeben eine nichtleere Teilmenge $T \subset E$ eines affinen Raums kann ihr affines Erzeugnis offensichtlich beschrieben werden als die Menge aller Schwerpunkte zu gewichteten endlichen Teilmengen. Man erkennt das besonders leicht, indem man bei der zuvor gegebenen Beschreibung des Schwerpunkts $p \in T$ wählt.

3.3.4.4 (**Eigenschaften des Schwerpunkts**). Offensichtlich bleibt der Schwerpunkt derselbe, wenn man alle Gewichte mit demselben von Null verschiedenen Körperelement $\alpha \in K^\times$ multipliziert, in Formeln

$$\mathrm{Bar}((e_0, \lambda_0), \ldots, (e_n, \lambda_n)) = \mathrm{Bar}((e_0, \alpha\lambda_0), \ldots, (e_n, \alpha\lambda_n))$$

Offensichtlich bleibt der Schwerpunkt derselbe, wenn man Punkte mit Gewicht Null wegläßt. Offensichtlich hängt der Schwerpunkt auch im Fall einer nichtleeren gewichteten Punktfamilie nicht von der Reihenfolge ab. Wir können also sinnvoll

$$\mathrm{Bar}((e_i, \lambda_i)_{i \in I})$$

erklären, wann immer $(e_i, \lambda_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von gewichteten Punkten ist und nur für endlich viele $i \in I$ gilt $\lambda_i \neq 0$ und zusätzlich $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$.

Definition 3.3.4.5. Eine Teilmenge eines affinen Raums heißt **affin unabhängig**, wenn sie nicht leer ist und sich keiner ihrer Punkte als gewichteter Schwerpunkt von endlich vielen anderen ihrer Punkte schreiben läßt.

Definition 3.3.4.6. Eine Familie von Punkten eines affinen Raums heißt **affin unabhängig** oder ganz pedantisch **affin unabhängig als Familie**, wenn sie nicht leer ist und wenn sich für keinen Index der zugehörige Punkt als gewichteter Schwerpunkt der Punkte zu endlich vielen anderen Indizes schreiben läßt.

Lemma 3.3.4.7 (**Affine und lineare Unabhängigkeit**). *Gegeben eine nichtleere Teilmenge T eines affinen Raums E sind gleichbedeutend:*

1. *Die Menge T ist affin unabhängig;*
2. *Es gibt ein $p \in T$ derart, daß die Menge der Vektoren $\{t - p \mid t \in T \backslash p\}$ in $\vec{E}$ linear unabhängig ist;*
3. *Für alle $p \in T$ ist die Menge $\{t - p \mid t \in T \backslash p\}$ in $\vec{E}$ linear unabhängig.*

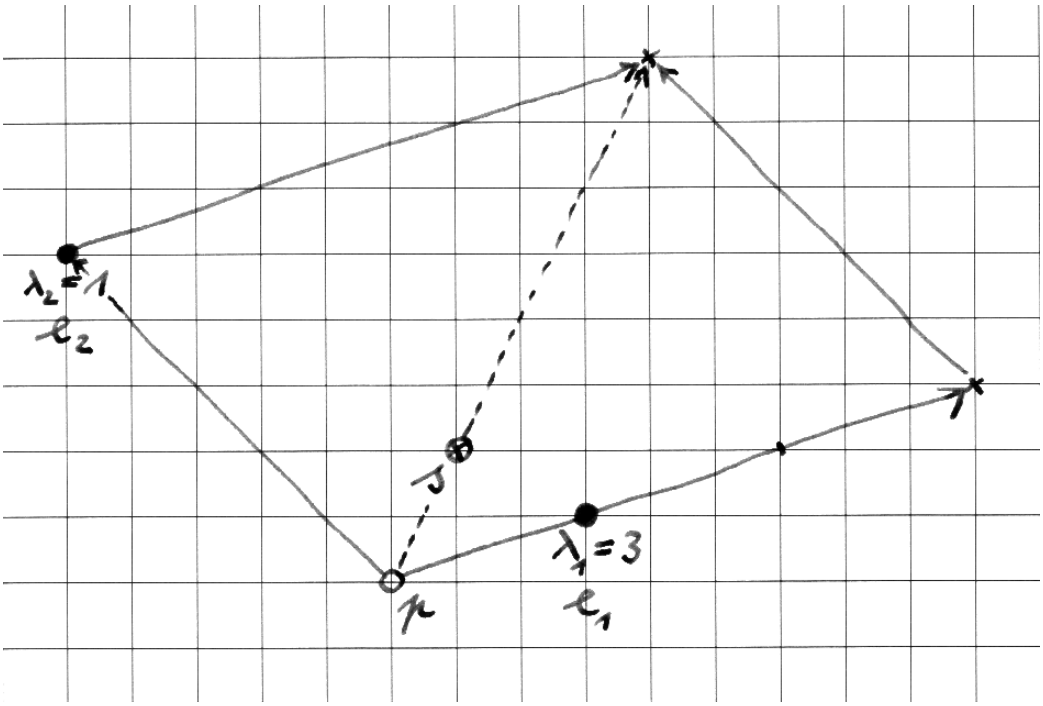
Analoges gilt für Familien.

Beweis. Übung. □

3.3.4.8. Sind $e_0, \ldots, e_n$ paarweise verschiedene Elemente einer endlichen affin unabhängigen Teilmenge eines affinen Raums E, so folgt aus

$$\mathrm{Bar}((e_0, \lambda_0), \ldots, (e_n, \lambda_n)) = \mathrm{Bar}((e_0, \mu_0), \ldots, (e_n, \mu_n))$$

bereits, daß es $\alpha \in K^\times$ gibt mit $\mu_i = \alpha\lambda_i \ \forall i$. Läßt sich ein Punkt als gewichteter Schwerpunkt zu geeigneten Gewichten auf einer affin unabhängigen Teilmenge



Zwei fette Punkte der Gewichte 3 und 1 und ihr Schwerpunkt s nebst seiner Bestimmung mithilfe eines beliebigen weiteren Punktes p.

darstellen, so ist diese Darstellung mithin eindeutig, wenn wir zusätzlich Gesamtgewicht Eins fordern. Ist also in Formeln E ein affiner Raum und $T \subset E$ ein affin unabhängiges Erzeugendensystem von E, so liefert das Bilden der gewichteten Schwerpunkte eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} \{\sum a_t t \in KT \mid \sum a_t = 1\} & \tilde{\to} & E \\ \sum a_t t & \mapsto & \mathrm{Bar}((t, a_t)_{t \in T}) \end{array}$$

Für $p = \mathrm{Bar}((t, a_t))$ heißen die a_t dann die **baryzentrischen Koordinaten von** p in Bezug auf unser affin unabhängiges Erzeugendensystem T.

Übungen

Übung 3.3.4.9. Zeigen Sie, daß sich die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, dessen baryzentrische Koordinaten in Bezug auf die drei Ecken des Dreiecks jeweils $(1/3)$ sind, und daß dieser Punkt alle drei Seitenhalbierenden in zwei Stücke teilt, von denen eines doppelt so lang ist wie das Andere. Kür: Rechnen Sie nach, daß dieser Punkt auch der Schwerpunkt des Dreiecks ist, wenn sie es aus Papier ausschneiden. Das braucht aber eher analytische Fertigkeiten.

Übung 3.3.4.10. Bestimmen Sie in $\mathbb{R}^3$ die baryzenrischen Koordinaten des Punktes $(1, 1, 1)$ in Bezug auf die drei Vektoren der Standardbasis und den Ursprung.

3.3.5 Lineare und affine Ungleichungen*

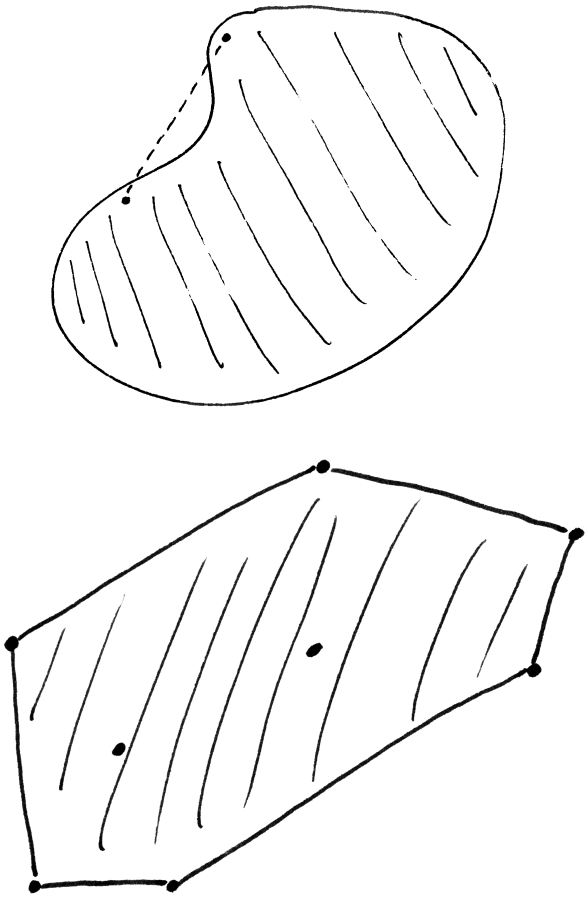
Definition 3.3.5.1. Gegeben Punkte p, q in einem affinen Raum E über einem angeordneten Körper schreiben wir

$$[p, q] := \{p + \lambda(q - p) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

und nennen diese Menge im Fall $p \neq q$ das die Punkte p und q verbindende **Geradensegment**.

Definition 3.3.5.2. Eine Teilmenge eines affinen Raums über einem angeordneten Körper heißt **konvex**, wenn sie mit je zwei Punkten auch das ganze diese verbindende Geradensegment enthält.

Definition 3.3.5.3. Sei E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper. Offensichtlich ist der Schnitt einer beliebigen Familie konvexer Teilmengen von E wieder konvex. Gegeben eine Teilmenge $T \subset E$ bezeichnet man die kleinste konvexe Teilmenge des fraglichen affinen Raums, die T umfaßt, auch als die **konvexe Hülle von** T. Natürlich existiert solch eine kleinste konvexe Teilmenge, wir



Eine nicht konvexe Teilmenge der Ebene und eine endliche Teilmenge der Ebene, dargestellt durch fette Punkte, mit ihrer konvexen Hülle, dargestellt als schraffierter Bereich.

können sie etwa konstruieren als den Schnitt aller konvexen Teilmengen, die T umfassen. Wir verwenden für die konvexe Hülle von T die Notation

$$\mathrm{konv}(T)$$

Beispiel 3.3.5.4. Gegeben zwei Punkte in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper ist ihre konvexe Hülle genau das verbindende Geradensegment, in Formeln $[p, q] = \mathrm{konv}(p, q)$.

Definition 3.3.5.5. Seien V ein Vektorraum über einem angeordneten Körper und $T \subset V$ eine Teilmenge. Wir sagen, ein Vektor $v \in V$ **läßt sich aus** T **positiv linear kombinieren**, wenn er eine Darstellung

$$v = \lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n$$

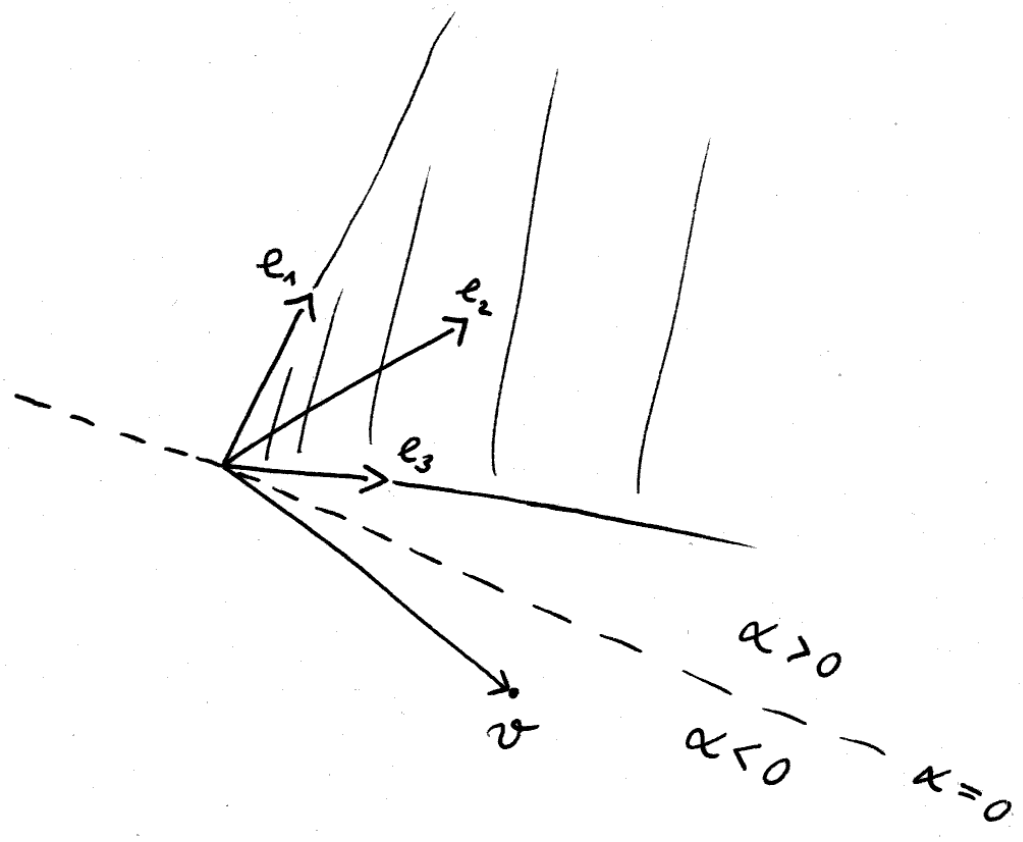
besitzt mit $\lambda_i > 0$ und $t_i \in T$ und $n \geq 0$. Die leere Linearkombination mit $n = 0$ verstehen wir hier wie immer als den Nullvektor, der sich also in unseren Konventionen aus jeder Teilmenge positiv linear kombinieren läßt. Die Menge aller positiven Linearkombinationen aus Vektoren von T notieren wir $\langle T \rangle_{>0}$.

3.3.5.6. Zum Beispiel ist die Menge der aus der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ positiv linear kombinierbaren Vektoren der abgeschlossene positive Quadrant: Die Punkte im Inneren erhalten wir mit $n = 2$, die vom Ursprung verschiedenen Punkte auf den Rändern mit $n = 1$ und den Ursprung mit $n = 0$. Statt $\alpha_i > 0$ hätten wir in der Definition also gleichbedeutend auch $\lambda_i \geq 0$ schreiben können. Wenn wir aber im folgenden von einer **positiven Linearkombination** reden, so meinen wir stets positive und nicht etwa nur nichtnegative Koeffizienten.

Proposition 3.3.5.7 (Satz von Caratheodory). *Seien $V \supset T$ ein Vektorraum über einem angeordneten Körper mit einer ausgezeichneten Teilmenge. Läßt sich ein Vektor $v \in V$ aus T positiv linear kombinieren, so läßt er sich bereits aus einer linear unabhängigen Teilmenge von T positiv linear kombinieren.*

Beweis. Sei $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ eine Darstellung von v als positive Linearkombination von Elementen von T. Sie die v_i linear abhängig, so ist $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in k^n$ ein Punkt aus dem positiven Quadranten einer ganzen affinen Gerade von Lösungen. Der Punkt, an dem diese affine Gerade den positiven Quadranten verläßt, ist dann eine kürzere Darstellung von v als positive Linearkombination von Elementen von T. □

Satz 3.3.5.8 (Hauptsatz über lineare Ungleichungen). *Ist V ein Vektorraum über einem angeordneten Körper und $T \subset V$ ein endliches Erzeugendensystem, so gilt für jeden Vektor $v \in V$ genau eine der beiden folgenden Aussagen:*



Eine Menge $T = \{e_1, e_2, e_3\}$ von drei Vektoren des Richtungsraums der Papierebene, die bis auf ihre Bezeichnung nichts mit der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ zu tun haben, sowie ein Vektor v außerhalb der Menge ihrer positiven Linearkombinationen, der sich nach unserem Satz durch eine Hyperebene $\ker \alpha$, in diesem Fall die gestrichelt eingezeichnete Gerade, von unserer Menge aller positiven Linearkombinationen abtrennen läßt.

1. *Der Vektor v läßt sich aus T positiv linear kombinieren;*

2. *Es gibt eine Linearform $\alpha \in V^\top$ mit $\alpha(t) \geq 0 \ \forall t \in T$ und $\alpha(v) < 0$ und der Eigenschaft, daß $\ker \alpha$ von seinem Schnitt mit T erzeugt wird.*

3.3.5.9. Lassen wir in unserem Satz die Forderung fallen, daß die endliche Teilmenge T den Vektorraum V erzeugt, so können wir ihn immer noch auf das Erzeugnis von T anwenden und ein so gefundenes α dann irgendwie linear auf ganz V fortsetzen. Wir können wir dann nur nicht mehr sicherstellen, daß $\ker \alpha$ von seinem Schnitt mit T erzeugt wird.

3.3.5.10. Der Satz und der hier gegebene Beweis stammen von Weyl [Wey35]. Im Fall des Grundkörpers $\mathbb{R}$ geht er bereits auf Farkas zurück und heißt mancherorts das **Lemma von Farkas**. Eine algorithmische Darstellung des Beweises und mehr zur praktischen Bedeutung unseres Satzes in der linearen Optimierung findet man in [Sch86].

3.3.5.11 (**Der Hauptsatz über lineare Ungleichungen in Koordinaten**). Spezialisieren wir den Satz oder genauer 3.3.5.9 zu $V = \mathbb{R}^n$, dessen Elemente wir als Spaltenvektoren auffassen, und besteht unsere endliche Menge T aus den m Spaltenvektoren einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times m; \mathbb{R})$, so folgt, daß für einen Spaltenvektor $v = b = (b_1, \ldots, b_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ genau eine der folgenden Aussagen gilt:

1. Es gibt einen Spaltenvektor $x \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^m$ mit $b = Ax$;

2. Es gibt $y = (y_1, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ mit $y^\top A \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^m$ und $y^\top b < 0$.

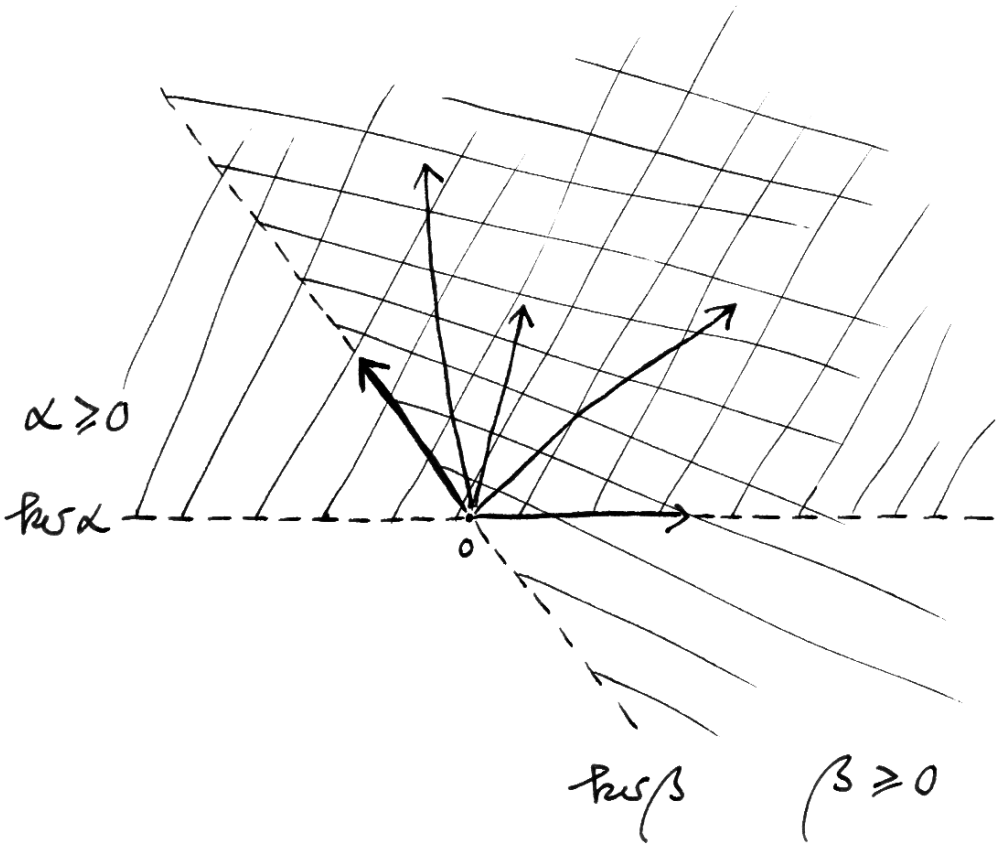
Unser α ist in diesem Fall der Zeilenvektor $y^\top = (y_1, \ldots, y_n)$.

3.3.5.12 (**Variante zum Hauptsatz über lineare Ungleichungen**). Besteht unsere endliche Menge T aus den m Spaltenvektoren einer Matrix $C \in \mathrm{Mat}(n \times m; \mathbb{R})$ und ihren Negativen sowie den Vektoren der Standardbasis, so erhalten wir aus 3.3.5.8, daß für einen Spaltenvektor $b = (b_1, \ldots, b_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ genau eine der folgenden Aussagen gilt:

1. Es gibt einen Spaltenvektor $x \in \mathbb{R}^m$ mit $Cx \leq b$ in dem Sinne, daß diese Ungleichung koordinatenweise richtig ist;

2. Es gibt $y = (y_1, \ldots, y_n)^\top \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ mit $y^\top C = 0$ und $y^\top b < 0$.

Beispiel 3.3.5.13. Man denke sich einen Ikosaeder mit einer Ecke im Urprung, und denke sich E als seine Eckenmenge. In diesem Fall hätte die Menge der positiven Linearkombinationen von Vektoren aus T die Gestalt eines eckigen Kegels mit fünf Flächen, die übrigends genau die Kerne der „extremen Stützen von T“ aus dem gleich folgenden Beweis sind.



Eine Menge von fünf Vektoren der Ebene, eingezeichnet als Pfeile, nebst der Menge aller positiven Linearkombinationen von Teilmengen unserer fünf Vektoren, eingezeichnet als der kreuzweise schraffierte Bereich, zu dem auch der gestrichelt eingezeichnete Rand hinzuzurechnen ist. Die beiden gestrichelt eingezeichneten Geraden sind die Kerne extremer Stützen, in diesem Fall gibt es bis auf Multiplikation mit positiven Skalaren genau zwei extreme Stützen. Einfach schraffiert die Bereiche, auf denen jeweils eine dieser extremen Stützen nichtnegativ ist.

3.3.5.14 (**Der Fall positiver Linearkombinationen unendlicher Mengen**). Gegeben eine Gerade in der Ebene $\mathbb{R}^2$, die die Menge der Punkte mit rationalen Koordinaten $\mathbb{Q}^2$ nur im Nullpunkt trifft, betrachte man in $\mathbb{Q}^2$ einen der beiden zugehörigen Halbräume mitsamt der Null. Dieser durch den Ursprung ergänzte Halbraum ist eine konvexe Teilmenge T von $\mathbb{Q}^2$, die von überhaupt keinem Punkt aus ihrem Komplement durch eine Gerade des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^2$ getrennt werden kann. Unser Hauptsatz über lineare Ungleichungen ist also für unendliches T im allgemeinen nicht mehr richtig. Betrachten wir jedoch abgeschlossene konvexe Kegel T im Sinne von 3.3.6.1 in reellen Banach-Räumen, so gibt es für jeden Vektor v im Komplement eine stetige Linearform, die auf besagtem Kegel nichtnegativ ist, auf dem Vektor aber negativ: Dieser Satz ist eine Variante der grundlegenden Trennungssätze aus der Funktionalanalysis, der sogenannten „Trennungssätze von Hahn-Banach“.

Beweis. Eine Linearform $\alpha \in V^\top \backslash 0$ mit $\alpha(t) \geq 0 \ \forall t \in T$ nennen wir eine **Stütze** von T. Wird zusätzlich $\ker \alpha$ erzeugt von $(\ker \alpha) \cap T$, so nennen wir α eine **extreme Stütze** von T. Wir notieren $\mathrm{Ex}(T) = \mathrm{Ex}_V(T)$ die Menge der extremen Stützen von T. Der Satz behauptet in diesen Notationen

$$\langle T \rangle_{>0} = \{v \in V \mid \alpha(v) \geq 0 \ \forall \alpha \in \mathrm{Ex}(T)\}$$

Die Inklusion $\subset$ ist offensichtlich. Um auch $\supset$ zu zeigen, argumentieren wir mit vollständiger Induktion über die Dimension. Im Fall $\dim V = 0$ bestehen beide Seiten nur aus dem Nullvektor und unsere Aussage gilt. Im allgemeinen betrachten wir einen festen Vektor $v \in V$ und zeigen

$$\big(\alpha(v) \geq 0 \ \forall \alpha \in \mathrm{Ex}(T)\big) \Rightarrow v \in \langle T \rangle_{>0}$$

durch eine Fallunterscheidung mit der Induktionsannahme.

Erster Fall: Es gibt eine extreme Stütze $\alpha \in \mathrm{Ex}(T)$ mit $\alpha(v) = 0$. In diesem Fall wenden wir die Induktionsannahme auf $(T \cap \ker \alpha) \subset \ker \alpha$ an. Dazu zeigen wir zunächst, daß jede extreme Stütze $\beta \in \mathrm{Ex}_{\ker \alpha}(T \cap \ker \alpha)$ Restriktion einer extremen Stütze $\hat{\beta} \in \mathrm{Ex}(T)$ ist. Sicher läßt sich ja $\beta \in (\ker \alpha)^\top$ ausdehnen zu einer Linearform $\tilde{\beta} \in V^\top$. Dann muß $\tilde{\beta} + \mu\alpha$ für hinreichend großes μ eine Stütze von T sein und eine extreme Stütze von T, wenn wir μ dabei kleinstmöglich wählen. Für dieses μ ist $\hat{\beta} = \tilde{\beta} + \mu\alpha$ die gesuchte Ausdehnung von β zu einer extremen Stütze von T. Insgesamt folgt mit der Induktionsannahme nun sogar $v \in \langle T \cap \ker \alpha \rangle_{>0}$.

Zweiter Fall: Es gibt keine extreme Stütze $\alpha \in \mathrm{Ex}(T)$ mit $\alpha(v) = 0$, aber es gibt zumindest überhaupt eine extreme Stütze $\beta \in \mathrm{Ex}(T)$. In diesem Fall finden wir $t \in T$ mit $\beta(t) > 0$ und betrachten das größte $\lambda \in k$ mit $\alpha(v - \lambda t) \geq 0 \ \forall \alpha \in \mathrm{Ex}(T)$. Nach unseren Annahmen gibt es solch ein λ und es gilt $\lambda > 0$

und $v - \lambda t$ liegt im Kern einer extremen Stütze. Der bereits behandelte Fall liefert $v - \lambda t \in \langle T \rangle_{>0}$ und es folgt sofort $v \in \langle T \rangle_{>0}$.

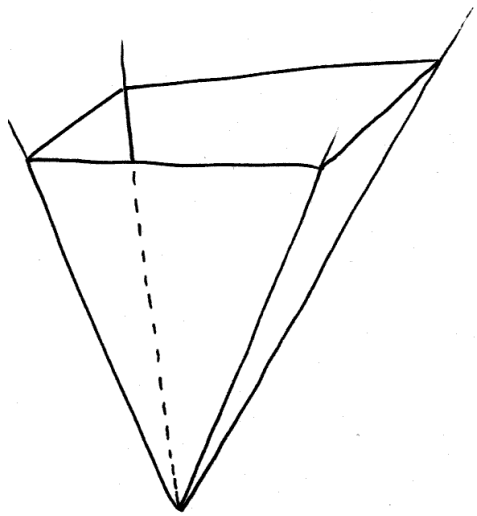
Dritter Fall: Unsere Menge T hat überhaupt keine extremen Stützen $\mathrm{Ex}(T) = \emptyset$. In diesem Fall müssen wir $\langle T \rangle_{>0} = V$ zeigen. Wir dürfen $V \neq 0$ annehmen und wählen unter allen $\alpha \in V^\top \backslash 0$ mit $\ker \alpha = \langle T \cap \ker \alpha \rangle$ ein α aus, für das die Kardinalität von $T^+ = T^+(\alpha) := \{t \in T \mid \alpha(t) \geq 0\}$ größtmöglich wird. Nach Annahme finden wir dennoch ein $t^- \in T$ mit $\alpha(t^-) < 0$ und dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha(t^-) = -1$ annehmen. Dann betrachten wir die Projektion $\pi : v \mapsto v + \alpha(v)t^-$ von V auf $\ker \alpha$ längs t^-. Hätte $\pi(T^+)$ eine extreme Stütze $\beta \in \mathrm{Ex}_{\ker \alpha}(\pi(T^+))$, so könnten wir diese durch die Vorschrift $\hat{\beta}(t^-) = 0$ fortsetzen zu einer Linearform $\hat{\beta} \in V^\top$ mit $\hat{\beta}|T^+ \geq 0$ und $\hat{\beta}(t^-) = 0$. Dann wäre auch $\ker \hat{\beta}$ erzeugt von seinem Schnitt mit T, im Widerspruch zur Wahl von α. Also hat $\pi(T^+)$ keine extreme Stütze und nach Induktionsvoraussetzung läßt sich jeder Vektor aus $\ker \alpha$ positiv linear aus $\pi(T^+)$ kombinieren. Also läßt sich jedes $v \in V$ schon mal aus T linear kombinieren unter der Einschränkung, daß nur der Koeffizient vor t^- negativ sein darf. Weiter gibt es aber auch mindestens ein $t^+ \in T$ mit $\alpha(t^+) > 0$, sonst wäre ja $-\alpha$ eine extreme Stütze von T. Schreiben wir $-t^+$ in unserer eingeschränkten Weise und wenden α an, so erkennen wir, daß der Koeffizient von t^- positiv sein muß. Nach geeigneter Umformung stellen wir $-t^-$ dar als positive Linearkombination von Elementen von T^+. Damit läßt sich nun offensichtlich jeder Vektor aus V positiv linear aus T, ja sogar aus $T^+ \cup \{t^-\}$ kombinieren. □

Proposition 3.3.5.15 (Satz von Caratheodory im Affinen). *Ist $E \supset T$ ein affiner Raum über einem angeordneten Körper k mit einer ausgezeichneten Teilmenge, so liegt jeder Punkt aus der konvexen Hülle von T bereits in der konvexen Hülle einer endlichen affin unabhängigen Teilmenge von T.*

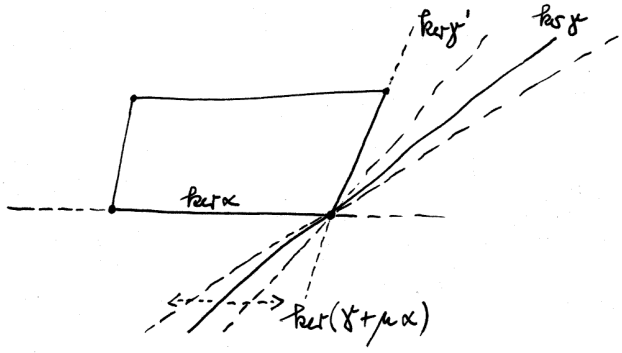
Beweis. Jeder Punkt $p \in \mathrm{konv}(T)$ der konvexen Hülle von T läßt sich schreiben als Schwerpunkt einer nichtleeren endlichen Teilmenge $p_0, \ldots, p_n$ mit positiven Gewichten $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ und $\lambda_0 + \ldots + \lambda_n = 1$. Sind unsere Punkte affin abhängig, so gehört diese Lösung sogar zu einer ganzen affinen Gerade von Lösungen $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in k^{n+1}$, also von Tupeln mit der Summe Eins und mit

$$p = \mathrm{Bar}((p_i, \lambda_i))$$

Die Stelle, an der unsere affine Gerade den positiven Quadranten $(k_{>0})^{n+1}$ verläßt, ist dann eine Darstellung von p als Schwerpunkt einer kleineren endlichen Teilmenge mit positiven Gewichten. □



Ein Kegel im Raum mit vier $\mathbb{R}_{>0}$-Bahnen von extremen Stützen, deren Kerne von den vier Flächen unseres Kegels erzeugt werden. Die obere viereckige Fläche habe ich nur eingezeichnet, um das Bild plastischer aussehen zu lassen. Unser $\ker \alpha$ aus dem Beweis ist die Vorderfläche.



Ein Schnitt durch obige Figur, der zeigen soll, wie man im Beweis die fortgesetzte extreme Stütze γ in $\ker \alpha$ zu einer extremen Stütze γ' verwackelt.

Eine Menge von neun Punkten der affinen Ebene, eingezeichnet als fette Punkte, nebst ihrer konvexen Hülle, einem unregelmäßigen Fünfeck, zu dem auch der gestrichelt eingezeichnete Rand hinzuzurechnen ist. Man erkennt, daß dieses Fünfeck wie in 3.3.5.17 besprochen in der Tat genau der Schnitt derjenigen „abgeschlossenen Halbebenen“ ist, die unsere neun Punkte umfassen und deren „begrenzende Hyperebene“, in unserem Fall jeweils eine der gestrichelt eingezeichneten Geraden, von ihrem Schnitt mit T affin erzeugt wird.

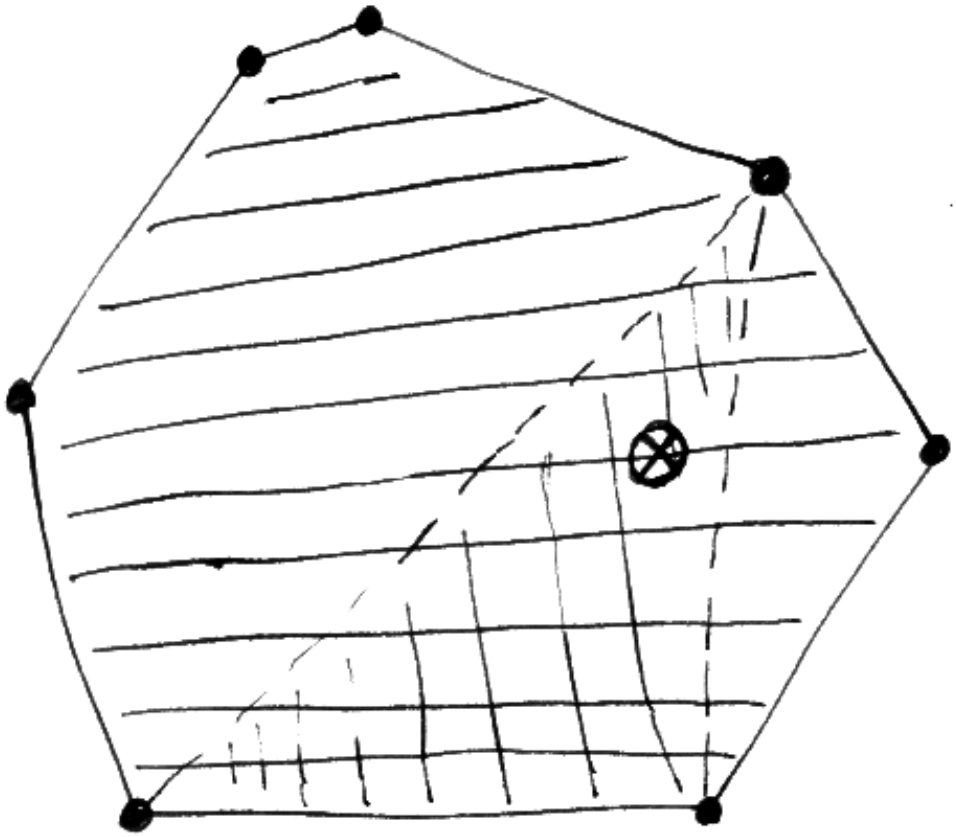


Illustration zum Satz von Caratheodory. Die konvexe Hülle der sieben fetten Punkte T ist das schraffierte Siebeneck, und jeder Punkt aus diesem Siebeneck liegt in der Tat auf einem Dreieck, dessen drei Ecken Ecken unseres Siebenecks sind.

Korollar 3.3.5.16 (Hauptsatz über affine Ungleichungen). *Ist T ein endliches Erzeugendensystem eines affinen Raums E über einem angeordneten Körper k, so gilt für jedes $p \in E$ genau eine der beiden folgenden Aussagen:*

1. *Der Punkt p liegt in der konvexen Hülle von T;*
2. *Es gibt eine affine Abbildung $\alpha : E \to k$ mit $\alpha(e) \geq 0 \; \forall e \in T$ und $\alpha(p) < 0$ und der Eigenschaft, daß die Nullstellenmenge von α von ihrem Schnitt mit T erzeugt wird.*

3.3.5.17. Ist also E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper und $T \subset E$ eine endliche Teilmenge, die unseren affinen Raum erzeugt, so ist die konvexe Hülle von T anschaulich gesprochen genau der Schnitt aller abgeschlossenen Halbräume, die T umfassen und deren begrenzende Hyperebene von ihrem Schnitt mit T erzeugt wird. Diese Formulierung ist meiner Anschauung besonders gut zugänglich.

3.3.5.18. Eine Teilmenge eines affinen Raums über einem angeordneten Körper, die die konvexe Hülle einer endlichen Teilmenge ist, heißt ein **Polytop** oder genauer ein **konvexes Polytop**. Eine Teilmenge eines affinen Raums über einem angeordneten Körper, die man als Schnitt einer endlichen Familie abgeschlossener Halbräume schreiben kann, heißt ein **Polyeder** oder genauer ein **konvexer Polyeder**. In einem endlichdimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper ist in dieser Terminologie nach unserem Hauptsatz über affine Ungleichungen jedes Polytop ein Polyeder.

3.3.5.19. Die Terminologie, die bei Wikipedia angegeben wird, ist etwas anders. Insbesondere wird dort von Polytopen oder Polyedern nicht a priori die Konvexität gefordert.

Beweis. Wir identifizieren unseren affinen Raum mit einer affinen nichtlinearen Hyperebene in einem Vektorraum. Das Korollar folgt dann unmittelbar aus dem Hauptsatz über lineare Ungleichungen 3.3.5.8. □

3.3.6 Endlich erzeugte Kegel*

Definition 3.3.6.1. Ein **Kegel** in einem Vektorraum V über einem angeordneten Körper k ist eine Teilmenge $C \subset V$, die den Ursprung enthält und stabil ist unter der Multiplikation mit nichtnegativen Skalaren. Einen konvexen Kegel nennen wir einen **Konvexkegel**. Ein Kegel, der keine Gerade umfaßt, heißt ein **spitzer Kegel**.

3.3.6.2. Auf Englisch sagt man **cone** für „Kegel“ und **strongly convex cone** für „spitzer Konvexkegel“.

3.3.6.3. Ein Teilmenge C in einem Vektorraum V über einem angeordneten Körper k ist genau dann ein Konvexkegel, wenn sie den Ursprung enthält und stabil ist unter Addition und unter der Multiplikation mit nichtnegativen Skalaren. In Formeln ausgedrückt kann ein Konvexkegel also charakterisiert werden als eine Teilmenge $C \subset V$ mit den Eigenschaften $0 \in C$ und $v, w \in C \Rightarrow v + w \in C$ und $v \in C \Rightarrow \lambda v \in C \; \forall \lambda \in k_{\geq 0}$.

3.3.6.4. Natürlich ist jeder Schnitt von Kegeln wieder ein Kegel und jeder Schnitt von Konvexkegeln wieder ein Konvexkegel. Der kleinste Konvexkegel, der eine gegebene Menge von Vektoren umfaßt, heißt der von dieser Menge **erzeugte Konvexkegel**. Er besteht genau aus allen Vektoren, die sich aus unserer Menge positiv linear kombinieren lassen.

3.3.6.5. Man beachte den Unterschied zwischen dem von einer Menge erzeugten Kegel und dem von derselben Menge erzeugten Konvexkegel.

Definition 3.3.6.6. Gegeben eine Teilmenge $T \subset V$ eines Vektorraums über einem angeordneten Körper definieren wir im Dualraum $V^\top$ unseres Vektorraums ihre **Polarenmenge** $T^\circ \subset V^\top$ durch die Vorschrift

$$T^\circ := \{\lambda \in V^\top \mid \lambda(e) \leq 1 \quad \forall e \in T\}$$

3.3.6.7. Die Polarenmenge eines Kegels C ist offensichtlich ein Konvexkegel und kann beschrieben werden durch die Formel

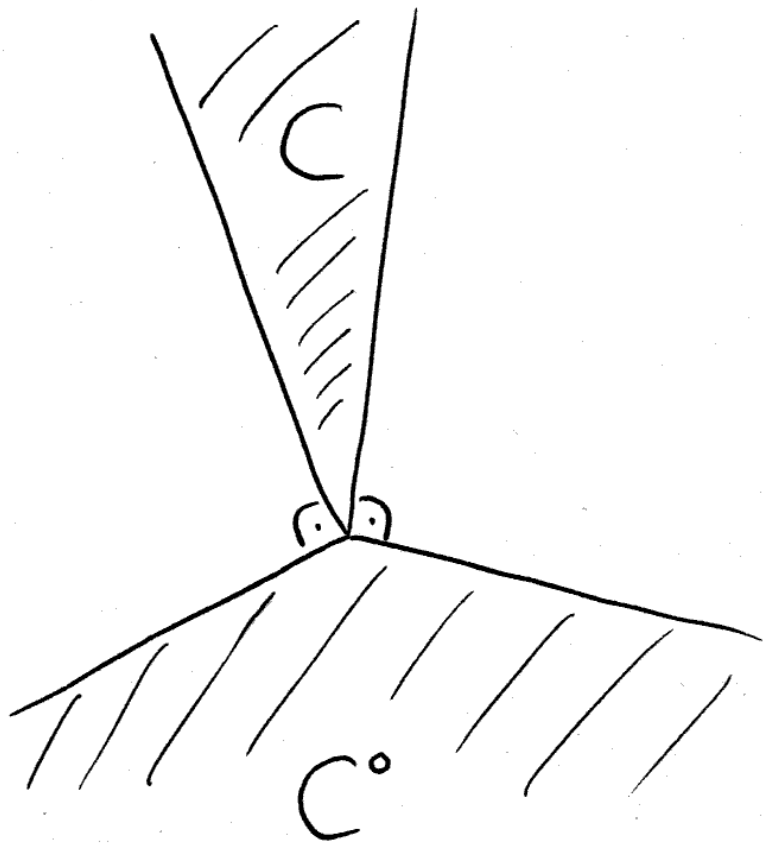
$$C^\circ = \{\lambda \in V^\top \mid \lambda(c) \leq 0 \quad \forall c \in C\}$$

Die Polarenmenge eines Kegels nennt man auch den **dualen Kegel**. Daß diese Terminologie sinnvoll ist, zeigt der folgende Satz.

Satz 3.3.6.8 (von Farkas über duale Kegel). *Ist C ein endlich erzeugter Konvexkegel in einem endlichdimensionalen Vektorraum V über einem angeordneten Körper, so ist auch seine Polarenmenge $C^\circ \subset V^\top$ ein endlich erzeugter Konvexkegel und der kanonische Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} V^{\top\top}$ induziert eine Bijektion*

$$C \xrightarrow{\sim} C^{\circ\circ}$$

3.3.6.9. Ein Konvexkegel in einem Vektorraum über einem angeordneten Körper heißt ein **polyedrischer Konvexkegel**, wenn er ein Polyeder ist, wenn er also als Schnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume geschrieben werden kann. In einem endlichdimensionalen Vektorraum über einem angeordneten Körper sind nach dem Satz von Farkas die endlich erzeugten Konvexkegel genau die polyedrischen Konvexkegel.



Ein Konvexkegel und sein dualer Kegel im Richtungsraum $\vec{P}$ der Papierebene P, den wir dazu vermittels eines unter allen Kongruenzbewegungen invarianten Skalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle$ durch $\mathrm{can} : \vec{P} \xrightarrow{\sim} \vec{P}^\top$, $v \mapsto \langle v,\ \rangle$ mit seinem Dualraum identifiziert haben, so daß wir erhalten

$$\mathrm{can}^{-1}(C^\circ) = \{v \mid \langle v, c\rangle \leq 0\ \forall c \in C\}$$

Ein Punkt der Papierebene stellt dabei denjenigen Richtungsvektor dar, der vom „Zentrum“ unseres Bildes zum entsprechenden Punkt schiebt.

Beweis. Wir identifizieren im folgenden $V^{\top\top}$ und V vermittels des kanonischen Isomorphismus. Für jede Teilmenge $T \subset V$ gilt $T \subset T^{\circ\circ}$ und für einen endlich erzeugten Konvexkegel C haben wir nach dem Hauptsatz über lineare Ungleichungen 3.3.5.8 auch $C \supset C^{\circ\circ}$, mithin $C = C^{\circ\circ}$. Es bleibt nur zu zeigen, daß auch C° ein endlich erzeugter Konvexkegel ist. Wir zeigen dazu erst einmal, daß wir endlich viele Gleichungen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in V^\top$ finden können mit

$$C = \{v \in V \mid \lambda_i(v) \geq 0 \quad \forall i\}$$

Sei in der Tat $T \subset C$ ein endliches Erzeugendensystem unseres Konvexkegels C. Erzeugt T schon ganz V als Vektorraum, so folgt unsere Behauptung aus dem Hauptsatz über lineare Ungleichungen 3.3.5.8, genauer seiner allerletzten Aussage. Andernfalls gilt es eben, geeignete Linearformen, $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ auf dem von C erzeugten Untervektorraum W zu wählen, diese auf V fortzusetzen, und noch genügend auf W verschwindende Linearformen hinzuzunehmen. Die Linearformen $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_r \in V^\top$ erzeugen nun per definitionem einen Konvexkegel $K \subset V^\top$ mit $K^\circ = C$, und wegen $K = K^{\circ\circ} = C^\circ$ folgt, daß auch C° endlich erzeugt ist. □

Korollar 3.3.6.10 (Charakterisierungen spitzer Konvexkegel). *Für einen endlich erzeugten Konvexkegel in einem endlichdimensionalen Vektorraum über einem angeordneten Körper sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Konvexkegel ist spitz;*
2. *Es gibt eine Linearform auf unserem Vektorraum, die auf dem Konvexkegel mit Ausnahme des Ursprungs echt positiv ist;*
3. *Die Polarenmenge unseres Konvexkegels erzeugt den Dualraum unseres Vektorraums.*

3.3.6.11. Die Bedingung „endlich erzeugt“ ist hier wesentlich. Zum Beispiel wäre die Menge aller Punkt in $\mathbb{Q}^2$ echt unterhalb der x-Achse mitsamt dem Ursprung ein spitzer Konvexkegel, dessen Polarenmenge nicht den ganzen Dualraum erzeugt.

Beweis. Für einen beliebigen Kegel C umfaßt C° eine Gerade genau dann, wenn C nicht den ganzen Raum erzeugt. Mit 3.3.6.8 folgt $(1) \Leftrightarrow (3)$. Die Implikation $(2) \Rightarrow (1)$ ist offensichtlich. Um schließlich $(3) \Rightarrow (2)$ zu zeigen wählen wir nach 3.3.6.8 ein endliches Erzeugendensystem der Polarenmenge unseres Konvexkegels und betrachten die Summe seiner Elemente. Verschwindet diese Summe an einem Punkt des Kegels, so verschwinden dort überhaupt alle Linearformen auf unserem Vektorraum und damit ist besagter Punkt der Ursprung. □

Übungen

Übung 3.3.6.12 (**Konvexe Hülle und Baryzentrum**). Gegeben ein affiner Raum E über einem angeordneten Körper und eine Teilmenge $T \subset E$ ist die konvexe Hülle von T genau die Menge aller Schwerpunkte zu nichtleeren endlichen mit positiven Gewichten versehenen Teilmengen von T.

Übung 3.3.6.13. Man schreibe in Formeln und beweise: Ein System von endlich vielen homogenen linearen Ungleichungen über einem angeordneten Körper hat genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn es keine nichttriviale lineare Abhängigkeit mit nichtnegativen Koeffizienten zwischen unseren Linearformen gibt.

Übung 3.3.6.14 (**Lineare Fortsetzung positivlinearer Abbildungen**). Gegeben ein Konvexkegel in einem Vektorraum über einem angeordneten Körper $C \subset V$, der den ganzen Vektorraum erzeugt, in Formeln $V = \langle C \rangle$, läßt sich jede Abbildung $\varphi : C \to W$ in einen weiteren Vektorraum mit $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ sowie $\varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v)$ für alle $v, w \in C$ und $\alpha > 0$ auf genau eine Weise zu einer linearen Abbildung $V \to W$ fortsetzen. Wir nennen eine Abbildung $\varphi : C \to W$ mit diesen Eigenschaften **positivlinear**.

Ergänzende Übung 3.3.6.15 (**Duale Kegel unter Körpererweiterung**). Seien $K \supset k$ ein angeordneter Körper mit einem Teilkörper, den wir mit der induzierten Anordnung versehen. Sei V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum, $C \subset V$ ein endlich erzeugter Konvexkegel, und $C_K \subset V_K$ der davon erzeugte Konvexkegel im zu Skalaren K erweiterten Vektorraum $V_K = V \otimes_k K$. So stimmt der duale Kegel zum Kegel C_K unter der kanonischen Identifikation $(V_K)^\top \xrightarrow{\sim} (V^\top)_K$ überein mit dem Erzeugnis in $(V^\top)_K$ des dualen Kegels $C^\circ \subset V^\top$ von C. In Formeln gilt also

$$(C_K)^\circ = (C^\circ)_K$$

Übung 3.3.6.16. Gegeben eine Teilmenge T eines affinen Raums über einem angeordneten Körper k bezeichne $\operatorname{konv}(T)$ ihre konvexe Hülle. Ist T die Standardbasis des k^n und $W \subset k^n$ ein affiner Teilraum, so zeige man, daß ein Punkt p extrem ist im Schnitt $W \cap \operatorname{konv}(T)$ genau dann, wenn er für mindestens eine Teilmenge $T' \subset T$ der einzige Punkt von $W \cap \operatorname{konv}(T')$ ist.

Übung 3.3.6.17. Sei k ein angeordneter Körper. Gegeben Kegel C, D in einem k-Vektorraum gilt für die dualen Kegel offensichtlich $(C + D)^\circ = C^\circ \cap D^\circ$. Für endlich erzeugte Konvexkegel C, D in einem endlichdimensionalen k-Vektorraum V folgere man mit dem Satz 3.3.6.8 über duale Kegel

$$(C \cap D)^\circ = C^\circ + D^\circ$$

Gegeben endlich viele Linearformen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V^*$ hat insbesondere der Konvexkegel $C := \{v \mid \alpha_i(v) \geq 0 \ \forall i\}$ als dualen Kegel C° den Kegel aller negativen

Linearkombinationen der α_i, in Formeln

$$C^\circ = \{\textstyle\sum_i x_i\alpha_i |\, x_i \leq 0 \ \forall i\}$$

Übung 3.3.6.18 (**Starker Dualitätssatz der linearen Optimierung**). Ungleichungen zwischen Vektoren des $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{R}^m$ sind im folgenden stets komponentenweise zu verstehen. Seien $A \in \mathrm{Mat}(n \times m; \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Man zeige, daß für $d \in \mathbb{R}$ gleichbedeutend sind:

1. Unser d ist das Maximum der linearen Funktion $x \mapsto c^\top x$ auf der Menge $\{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax \leq b\}$;

2. Unser d ist das Kleinste aller $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\{x \in \mathbb{R}^m \mid c^\top x \leq \delta\} \supset \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax \leq b\}$;

3. Unser d ist das Kleinste aller $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\{(x,t) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (c^\top | -\delta)\binom{x}{t} \leq 0\} \supset \{(x,t) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \left(\begin{smallmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\binom{x}{t} \leq 0\}$;

4. Unser d ist das Kleinste aller $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}_{\geq 0}(-c^\top|\delta) \subset \{(y^\top|\gamma)\left(\begin{smallmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \mid (y,\gamma) \in \mathbb{R}^{n+1}, (y,\gamma) \leq 0\}$;

5. Unser d ist das Kleinste aller $\delta \in \mathbb{R}$, für das $y \geq 0$ und $\gamma \geq 0$ existieren mit $(-c^\top|\delta) = (-y^\top A | y^\top b + \gamma)$;

6. Unser d ist das Minimum der linearen Funktion $y \mapsto y^\top b$ auf der Menge $\{y \in \mathbb{R}^n \mid y \geq 0 \text{ und } c^\top = y^\top A\}$.

Beim Übergang zwischen 3 und 4 benötigt man Übung 3.3.6.17, die anderen Übergänge sind elementar. Die Äquivalenz von 1 und 6 heißt der **starke Dualitätssatz**.

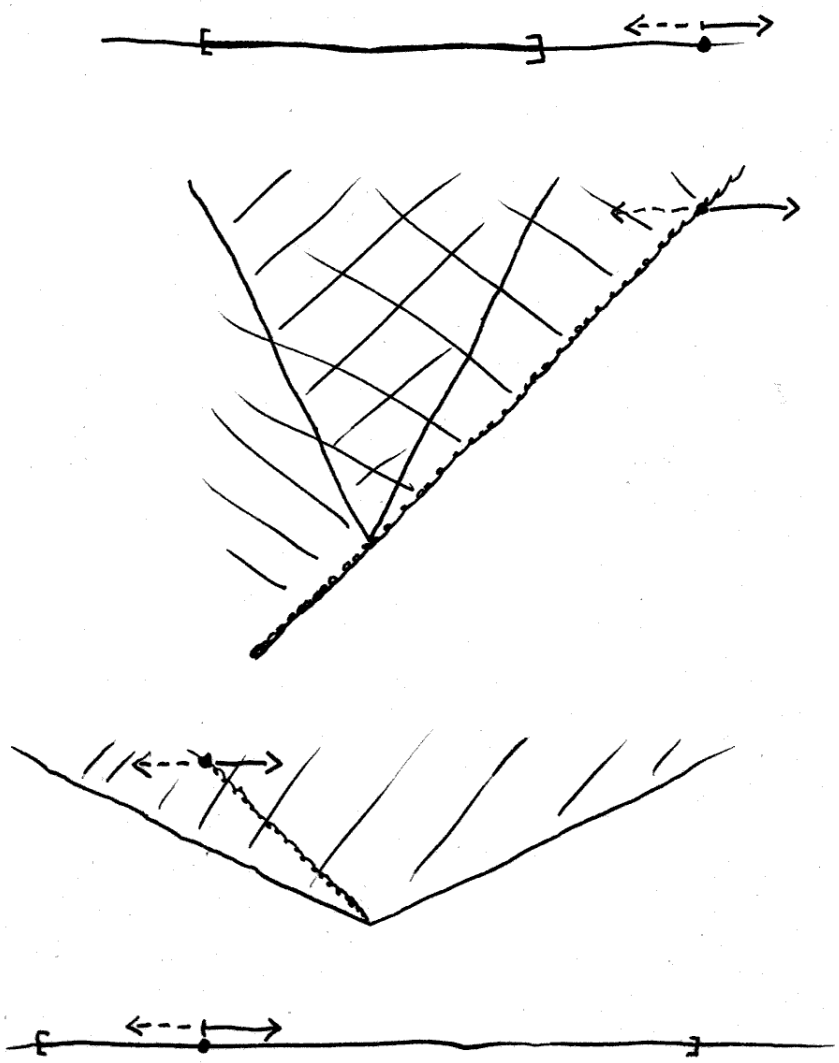


Illustration zum starken Dualitätssatz. Die Frage des Maximums wird übersetzt in eine Frage nach dem Enthaltensein von Kegeln und dualisiert durch Übergang zu den dualen Kegeln. Der duale Kegel zu einem Halbraum ist dabei ein Strahl.

3.4 Zahlen

3.4.1 Konstruktion der natürlichen Zahlen*

3.4.1.1. Im folgenden diskutiere ich die Beschreibung der natürlichen Zahlen im Rahmen der naiven Mengenlehre. Eine vollständig überzeugende Diskussion dieser Struktur ist meines Erachtens nur im Rahmen der Logik möglich.

3.4.1.2. Führt man die Mengenlehre axiomatisch ein, so definiert man eine Menge als **unendlich**, wenn es eine injektive aber nicht bijektive Abbildung von unserer Menge in sich selbst gibt. Eine Menge heißt **endlich**, wenn sie nicht unendlich ist. Die Existenz einer unendlichen Menge ist eines der Axiome der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre, wir nennen es das **Unendlichkeitsaxiom**. Bei Zermelo und Fraenkel ist diese Axiomatik noch formaler und präziser, aber so weit gehen wir hier nicht.

3.4.1.3. Es ist klar, daß jede Menge mit einer unendlichen Teilmenge auch selbst unendlich sein muß. Es folgt, daß jede Teilmenge einer endlichen Menge wieder endlich ist. Es ist klar, daß eine unendliche Menge unendlich bleibt, wenn wir ihr ein Element wegnehmen: Wir können ja unsere injektive aber nicht bijektive Abbildung leicht so abändern, daß ein vorgegebenes Element auf sich selber abgebildet wird. Es folgt, daß die Vereinigung einer endlichen Menge mit einer einelementigen Menge wieder endlich ist.

Ergänzung 3.4.1.4 (**Maximale Elemente endlicher teilgeordneter Mengen**). Jede nichtleere endliche teilgeordnete Menge $(E, \leq)$ besitzt mindestens ein maximales Element. Diese Erkenntnis haben wir bereits mehrfach als intuitiv klar verwendet, etwa im Beweis 10.2.4.10 der Tatsache, daß zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen immer noch eine rationale Zahl liegt, oder beim Beweis des Basisexistenzsatzes für endlich erzeugte Vektorräume 3.1.6.16, aber das war noch vor der Formalisierung des Begriffs einer endlichen Menge. Etwas formaler können wir durch Widerspruch argumentieren. In der Tat könnten wir andernfalls eine Abbildung $f : E \to E$ finden, die jedem Element ein echt größeres Element zuordnet. Halten wir dann $a \in E$ fest, so erhielten wir eine injektive aber nicht surjektive Abbildung von $\{x \in E \mid x \geq a\}$ zu sich selbst, und dieser Widerspruch zeigt die Behauptung.

Satz 3.4.1.5 (Die natürlichen Zahlen).

1. *Es gibt Paare (N, s) aus einer Menge N und einer injektiven Abbildung $s : N \hookrightarrow N$ derart, daß $N \backslash s(N)$ aus einem einzigen Element o besteht und daß jede s-stabile Teilmenge von N, die o enthält, bereits ganz N sein muß;*

2. *Sei (N, s) solch ein Paar. Ist dann (X, x, f) ein Tripel bestehend aus einer Menge X, einem Element $x \in X$ und einer Abbildung $f : X \to X$, so gibt es genau eine Abbildung $\psi : N \to X$ mit $\psi(o) = x$ und $\psi s = f\psi$;*

3. *Ein Paar (N, s) wie im ersten Teil ist im wesentlichen eindeutig bestimmt. Ist genauer (N', s') ein weiteres derartiges Paar und $\{o'\} = N' \backslash s'(N')$, so ist die eindeutig bestimmte Abbildung $\psi : N \to N'$ mit $s'\psi = \psi s$ und $\psi(o) = o'$ eine Bijektion.*

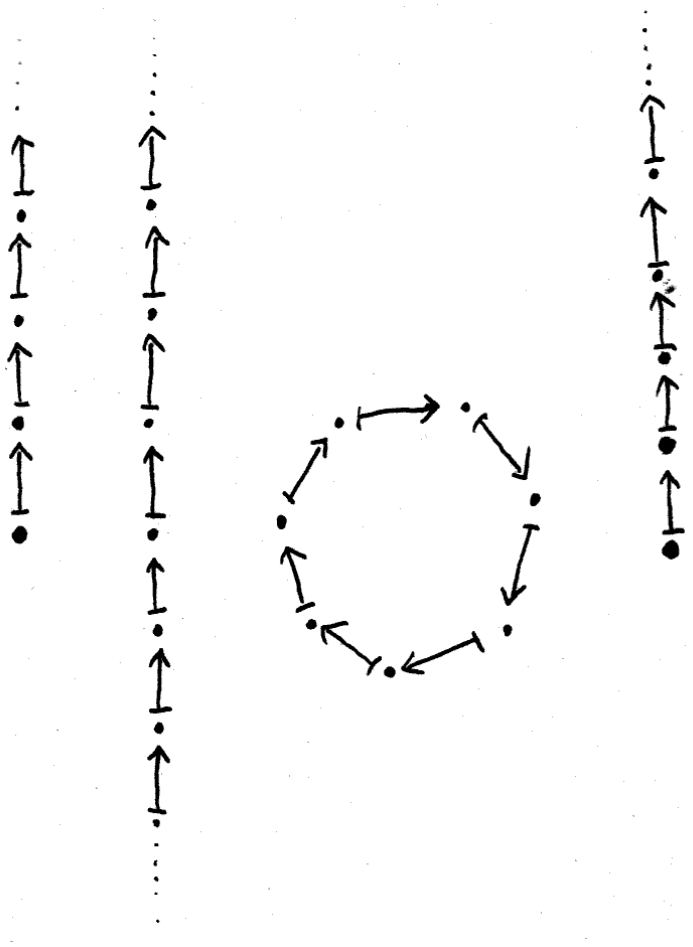
3.4.1.6. Sobald der Satz bewiesen ist, halten wir ein derartiges Paar ein für allemal fest, verwenden dafür die Notation $(\mathbb{N}, s)$, erlauben uns aufgrund der Eindeutigkeit den bestimmten Artikel und nennen $\mathbb{N}$ die Menge der **natürlichen Zahlen**. Gegeben $a \in \mathbb{N}$ heißt $s(a)$ der **Nachfolger** oder genauer der **unmittelbare Nachfolger** von a. Die Notation s steht für „successor". Wir vereinbaren für das eindeutig bestimmte Element von $\mathbb{N}$, das kein Nachfolger ist und daß oben o hieß, die Notation $0 \in \mathbb{N}$ und die Bezeichnung **Null**.

3.4.1.7. Gegeben eine Menge X und zwei Abbildungen $\psi, \phi : \mathbb{N} \to X$ mit $\psi(0) = \phi(0)$ und $\big(\psi(b) = \phi(b)\big) \Rightarrow \big(\psi(s(b)) = \phi(s(b))\big)$ folgt $\psi = \phi$. In der Tat bedeuten unsere Annahmen, daß die Teilmenge $\{b \in \mathbb{N} \mid \psi(b) = \phi(b)\}$ das Element $0 \in \mathbb{N}$ enthält und stabil ist unter s und also aufgrund der charakterisierenden Eigenschaft der natürlichen Zahlen ganz $\mathbb{N}$ sein muß. Diese Umformulierung der Definition 3.4.1.6 heißt das **Prinzip der vollständigen Induktion**.

3.4.1.8. Die in diesem Satz gegebene Charakterisierung und im folgenden Beweis durchgeführte Konstruktion der natürlichen Zahlen gehen auf einen berühmten Artikel von Richard Dedekind zurück mit dem Titel „Was sind und was sollen die Zahlen?". Eine alternative Charakterisierung besprechen wir in 6.5.2.2.

Beweis. 1. Nach dem Unendlichkeitsaxiom 3.4.1.2 finden wir eine Menge A nebst einer injektiven Abbildung $s : A \hookrightarrow A$ und einem Element $o \in A \backslash s(A)$. Unter allen Teilmengen $M \subset A$ mit $o \in M$ und $s(M) \subset M$ gibt es sicher eine kleinste, nämlich den Schnitt N aller derartigen Teilmengen. Für diese gilt dann notwendig $N \subset \{o\} \cup s(N)$, da die rechte Seite auch eine mögliche Teilmenge M mit unseren Eigenschaften ist. Da die andere Inklusion eh klar ist, folgt $N = \{o\} \cup s(N)$. So haben wir bereits ein mögliches Paar (N, s) gefunden.

2. Gegeben (X, x, f) wie oben betrachten wir die Gesamtheit aller Teilmengen $G \subset N \times X$ mit $(o, x) \in G$ und $(n, y) \in G \Rightarrow (s(n), f(y)) \in G$. Sicher gibt es eine kleinste derartige Teilmenge $G_{\min} = \Gamma$, nämlich den Schnitt aller möglichen derartigen Teilmengen G. Wir zeigen nun, daß Γ der Graph einer Funktion ist. Dazu betrachten wir die Teilmenge M aller $m \in N$ derart, daß es genau ein $y \in X$ gibt mit $(m, y) \in \Gamma$. Sicher gilt $o \in M$, denn gäbe es $y \in X$ mit $x \neq y$ und $(o, y) \in \Gamma$, so könnten wir (o, y) ohne Schaden aus Γ entfernen im Widerspruch zur Minimalität von Γ. Ist ähnlich $m \in M$, so zeigen wir in derselben Weise $s(m) \in M$. Also gilt $M = N$ und Γ ist der Graph einer Funktion $f : N \to X$ mit den gewünschten Eigenschaften. Finden wir eine weitere Funktion mit den



Versuch der graphischen Darstellung einer Menge mit einer injektiven aber nicht surjektiven Abbildung in sich selbst.

gewünschten Eigenschaften, so ist deren Graph auch ein mögliches G und wir folgern erst $G \supset \Gamma$ und dann $G = \Gamma$.

3. Nach Teil 2 gibt es auch genau eine Abbildung $\varphi : N' \xrightarrow{\sim} N$ mit $s\varphi = \varphi s'$ und $\varphi : o' \mapsto o$. Nach Teil 2, diesmal der Eindeutigkeitsaussage, gilt dann $\psi\phi = \mathrm{id}$ und $\phi\psi = \mathrm{id}$. Also ist unser ψ in der Tat eine Bijektion. □

3.4.1.9. In unseren natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, s)$ erklären wir die **Eins** als den Nachfolger der Null und setzen in Formeln

$$1 := s(0)$$

3.4.1.10 (**Potenzen von Abbildungen**). Sei (X, x, f) ein Tripel bestehend aus einer Menge X, einem Element $x \in X$ und einer Abbildung $f : X \to X$. Für die Werte der Abbildung $\psi : \mathbb{N} \to X$ aus Teil 2 vereinbaren wir die Notation

$$f^n(x) := \psi(n)$$

Unser $f^n(x)$ wird also in Formeln charakterisiert durch $f^0(x) = x$ und $f^{s(n)}(x) = f(f^n(x))$. Indem wir es für alle $x \in X$ betrachten, erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Abbildung

$$f^n : X \to X$$

Wir nennen f^n die **n-te Potenz von** f. Per definitionem gilt $f^0 = \mathrm{id}$ und $f^1 = f$. Vollständige Induktion zeigt $\mathrm{id}^n = \mathrm{id}$ für alle n.

Lemma 3.4.1.11. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n = s^n(0)$.*

Beweis. Wir argumentieren mit vollständiger Induktion über n. Für $n = 0$ sind beide Seiten 0 und die Behauptung stimmt. Gilt die Formel für ein n, so folgt $s(n) = s(s^n(0)) = s^{s(n)}(0)$ mit der ersten Gleichung durch Anwenden von s und der zweiten nach der definitorischen Gleichung $f(f^n(x)) = f^{s(n)}(x)$ für Potenzen 3.4.1.10. Damit ist unsere Behauptung bewiesen. □

3.4.1.12 (**Funktorialität von Potenzen**). Gegeben eine Abbildung $h : X \to Y$ und Abbildungen $f : X \to X$ sowie $g : Y \to Y$ mit $hf = gh$ gilt

$$hf^n = g^n h$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. In der Tat reicht es, für alle $x \in X$ die Identität $hf^n(x) = g^n h(x)$ zeigen. Beide Seiten sind aber als Funktionen von n Abbildungen $\psi : \mathbb{N} \to Y$ mit demselben Wert $\psi(0) = h(x)$ für $n = 0$ und derselben charakterisierenden Eigenschaft $\psi s = g\psi$. Für je zwei Selbstabbildungen $f, g : X \to X$ einer Menge mit $fg = gf$ folgern wir $gf^a = f^a g$ und $g^b f^a = f^a g^b$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$.

Definition 3.4.1.13. Für die Menge der natürlichen Zahlen mit Nachfolgerabbildung $(\mathbb{N}, s)$ aus 3.4.1.6 erklären wir die **Addition** $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto a + b$ durch die Vorschrift

$$a + b := s^a(b)$$

3.4.1.14. Wir finden $0 + b = s^0(b) = \mathrm{id}(b) = b$ und $1 + b = s^1(b) = s(b)$ für alle $b \in \mathbb{N}$. Anderersits finden wir $b + 0 = s^b(0) = b$ nach 3.4.1.11.

Lemma 3.4.1.15. *Die Addition natürlicher Zahlen ist eine kommutative Verknüpfung mit der Null als neutralem Element.*

Beweis. Aus der Funktorialität von Potenzen 3.4.1.12 folgt $s^a s^b = s^b s^a$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$. Werten wir beide Seiten auf 0 aus, so erhalten wir mit 3.4.1.11 die Kommtativität $s^a(b) = s^b(a)$. Daß 0 ein neutrales Element ist alias die Identitäten $0 + b = b = b + 0$ kennen wir bereits aus 3.4.1.14. □

Lemma 3.4.1.16 (Produkt von Potenzen und Addition). *Gegeben eine Menge X und eine Abbildung $f : X \to X$ und $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $f^{a+b} = f^a f^b$.*

3.4.1.17. Es folgt, daß die Addition natürlicher Zahlen assoziativ ist, denn gegeben $a, b, c \in \mathbb{N}$ finden wir $s^{(a+b)+c} = (s^a s^b)s^c = s^a s^b s^c = s^a(s^b s^c) = s^{a+(b+c)}$ und Auswerten bei 0 liefert die Behauptung.

Beweis. Wir zeigen das durch vollständige Induktion über a. Im Fall $a = 0$ ist es klar. Für den Induktionsschritt wenden wir f an und finden von der Mitte ausgehend

$$f^{s(a)+b} = f^{s(a+b)} = f f^{a+b} = f(f^a f^b) = (f f^a) f^b = f^{s(a)} f^b$$

Hier nutzen wir nach rechts die Assoziativität der Verknüpfung von Abbildungen und nach links die Identität $s(a) + b = s^{s(a)}(b) = s(s^a(b)) = s(a + b)$. □

Satz 3.4.1.18 (Eigenschaften der Addition natürlicher Zahlen). *Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit der Verknüpfung $+$ ein kommutatives Monoid, in dem die* **Kürzungsregel** $(a + b = c + b) \Rightarrow (a = c)$ *gilt sowie die Regel* $(a + b = 0) \Rightarrow (a = b = 0)$.

Beweis. Kommutativität, neutrales Element und Assoziativität haben wir bereits in 3.4.1.15 und 3.4.1.17 erledigt. Was unsere Kürzungsregel angeht, enthält für $a \neq c$ die Menge aller b mit $a + b \neq c + b$ sicher $b = 0$ und ist stabil unter s, enthält also alle $b \in \mathbb{N}$. Aus $a + b = 0$ folgt zu guter Letzt $a = 0$, weil ja sonst die Null gar nicht im Bild der Abbildung $(a+) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ liegt, und dann folgt auch $b = 0$ nach der Kürzungsregel. □

Satz 3.4.1.19 (Anordnung auf den natürlichen Zahlen). *Sei $(\mathbb{N}, s)$ die Menge der natürlichen Zahlen mit Nachfolgerabbildung aus 3.4.1.6 und Addition aus 3.4.1.18. Die Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$ gegeben durch die Vorschrift*

$$(a \leq b) \Leftrightarrow (\exists c \in \mathbb{N} \text{ mit } a + c = b)$$

ist eine Anordnung auf $\mathbb{N}$. Für diese Anordnung ist $0 \in \mathbb{N}$ das kleinste Element und jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.

Beweis. Bis auf die allerletzte Aussage folgt das alles leicht aus den in 3.4.1.18 gezeigten Eigenschaften der Addition. Ist nun $A \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge ohne kleinstes Element, so ist $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq a \ \forall a \in A\}$ stabil unter s und enthält die Null, ist also ganz $\mathbb{N}$, und es folgt $A = \emptyset$. □

Satz 3.4.1.20 (Zählen endlicher Mengen). *Eine Menge X ist genau dann endlich, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $\mathbb{N}_{<n} \xrightarrow{\sim} X$ gibt. Dies n ist dann wohlbestimmt und heißt die* **Kardinalität** *von X und wird $n = |X|$ notiert.*

Beweis. Daß es eine Injektion $\mathbb{N}_{<a} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}_{<b}$ nur für $a \leq b$ geben kann, zeigt man leicht durch Induktion. Das zeigt die Eindeutigkeit von n. Umgekehrt liefert das Zorn'sche Lemma ein maximales Paar bestehend aus einem $a \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ und einer injektiven Abbildung $\mathbb{N}_{<a} \hookrightarrow X$. Ist X endlich, so haben wir notwendig $a \neq \infty$ und unsere maximale injektive Abbildung muß eine Bijektion $\mathbb{N}_{<a} \xrightarrow{\sim} X$ gewesen sein. □

Lemma 3.4.1.21 (Potenzen einer Verknüpfung kommutierender Abbildungen). *Gegeben Abbildungen $f, g : X \to X$ mit $fg = gf$ gilt für alle $a \in \mathbb{N}$ die Identität $(fg)^a = f^a g^a$.*

Beweis. Durch vollständige Induktion. Der Fall $a = 0$ ist offensichtlich. Für den Induktionsschritt verwenden wir die Assoziativität der Verknüpfung von Abbildungen implizit, schalten wir fg auf beiden Seiten nach und entwickeln mit der Funktorialität von Potenzen 3.4.1.12 von der Mitte ausgehend

$$(fg)^{s(a)} = (fg)(fg)^a = fgf^a g^a = ff^a gg^a = f^{s(a)} g^{s(a)}$$ □

Lemma 3.4.1.22 (Iterierte Potenzen). *Gegeben eine Abbildung $f : X \to X$ gilt für alle $a, b \in \mathbb{N}$ die Identität*

$$(f^a)^b = (f^b)^a$$

Beweis. Induktion über a. Der Fall $a = 0$ ist offensichtlich. Für den Induktionsschritt schalten wir auf beiden Seiten f^b nach und finden von der Mitte ausgehend

$$(f^{s(a)})^b = (ff^a)^b = f^b (f^a)^b = f^b (f^b)^a = (f^b)^{s(a)}$$

Nach links haben wir dabei die Regel 3.4.1.21 für Potenzen einer Verknüpfung kommutierender Abbildungen verwendet. Das Kommutieren von f und f^a folgt aus der Funktorialität 3.4.1.12 von Potenzen. □

Satz 3.4.1.23 (Multiplikation natürlicher Zahlen). *Sei $(\mathbb{N}, s)$ die Menge der natürlichen Zahlen mit Nachfolgerabbildung aus 3.4.1.6 und bezeichne $+$ ihre Addition aus 3.4.1.18. Die Verknüpfung*

$$(a, b) \mapsto ab = a \cdot b := (b+)^a(0)$$

ist kommutativ mit neutralem Element dem Nachfolger $1 = s(0)$ der Null. Weiter folgt aus $a \neq 0$ und $b \neq 0$ bereits $ab \neq 0$.

3.4.1.24 (**Produkt mit Null**). Wir folgern $a \cdot 0 = (0+)^a(0) = \mathrm{id}^a(0) = \mathrm{id}(0) = 0$ wegen der Neutralität von Null für die Addition und unseren Erkenntnissen 3.4.1.10 zu Potenzen der Identität.

Beweis. Per definitionem gilt $(b+) = s^b$, also $ab = (b+)^a(0) = (s^b)^a(0)$. Sind weder a noch b Null, so ist das ein echter Nachfolger der Null und folglich nicht Null. Die Kommutativität der Multiplikation erhalten wir, indem wir die Identität $(s^a)^b = (s^b)^a$ aus 3.4.1.22 auf 0 anwenden. Um die Eins als neutral zu erkennen, erinnern wir $(1+) = s$ aus 3.4.1.14 und rechnen $a \cdot 1 = (1+)^a(0) = s^a(0) = a$. Mit der Kommutativität der Multiplikation folgt, daß 1 in der Tat neutral ist für die Multiplikation. □

Lemma 3.4.1.25 (Iterierte Potenzen und Multiplikation). *Gegeben eine Abbildung $f : X \to X$ und $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $(f^a)^b = f^{ab}$.*

Beweis. Induktion über a. Im Fall $a = 0$ ist die Aussage klar wegen unseren Erkenntnissen $f^0 = \mathrm{id}$ und $\mathrm{id}^b = \mathrm{id}$ aus 3.4.1.10 und dem Verschwinden des Produkts mit Null 3.4.1.24. Für den Induktionsschritt rechnen wir $b+ab = (b+)((b+)^a(0)) = (b+)^{s(a)}(0) = s(a)b$ und damit

$$(f^{s(a)})^b = (ff^a)^b = f^b(f^a)^b = f^b f^{ab} = f^{b+ab} = f^{s(a)b}$$

nach Definition, der Regel für Potenzen von Verknüpfungen 3.4.1.21, der Induktionsannahme und der Regel für Produkte von Potenzen 3.4.1.16. Wir verwenden dabei implizit unsere stehende Vereinbarung „Punkt vor Strich“. □

3.4.1.26 (**Assoziativität der Multiplikation**). Gegeben $a, b, c \in \mathbb{N}$ finden wir mit unserer Formel für iterierte Potenzen 3.4.1.25 von der Mitte ausgehend die Identität

$$s^{a(bc)} = (s^a)^{bc} = \left((s^a)^b\right)^c = \left(s^{ab}\right)^c = s^{(ab)c}$$

Wenden wir beide Seiten auf $0 \in \mathbb{N}$ an, ergibt sich mit 3.4.1.11 wie gewünscht die Assoziativität der Multiplikation $a(bc) = (ab)c$. Unter der Multiplikation ist $\mathbb{N}$ also ein kommutatives Monoid mit der Eins als neutralem Element.

3.4.1.27 (**Distributivgesetz**). Wir finden mit unseren Regeln zum Produkt von Potenzen 3.4.1.16 beziehungsweise zu iterierten Potenzen 3.4.1.25 die Identitäten

$$s^{ab+ac} = s^{ab}s^{ac} = (s^a)^b(s^a)^c = (s^a)^{b+c} = s^{a(b+c)}$$

Das Distributivgesetz $ab + ac = a(b + c)$ ergibt sich, indem wir beide Seiten auf die Null anwenden und 3.4.1.11 beachten.

3.4.1.28. Zusammenfassend haben wir so auf unserer Menge mit Nachfolgerabbildung $(\mathbb{N}, s)$ ein Element Null ausgezeichnet als das einzige Element, das kein Nachfolger ist, und ein Element Eins als dessen Nachfolger. Wir haben weiter auf $\mathbb{N}$ eine Addition und Multiplikation eingeführt und gezeigt, daß beide assoziative und kommutative Verknüpfungen sind mit neutralen Elementen Null beziehungsweise Eins und daß das Distributivgesetz gilt.

3.4.1.29 (**Potenzgesetze**). Gegeben ein multiplikativ notiertes Monoid M und $a \in \mathbb{N}$ erklären wir für jedes $m \in M$ seine a**-te Potenz**

$$m^a := (m\cdot)^a(1_M)$$

als den Wert der a-ten Potenz der Linksmultiplikation mit m auf dem neutralen Element. Sie dürfen als Übung zeigen, daß es am Ergebnis nichts ändert, wenn wir stattdessen mit der Rechtsmultiplikation arbeiten. Im Spezialfall des Monoids $\mathrm{Ens}(X)$ aller Selbstabbildungen einer Menge erhalten wir unsere Potenzen von Selbstabbildungen aus 3.4.1.6 zurück. Gegeben ein multiplikativ notiertes Monoid M übersetzen sich unsere Regeln für das Potenzieren von Selbstabbildungen in die Regeln $m^0 = 1_M$, $m^1 = m$, $m^{a+b} = m^a m^b$, $(m^a)^b = m^{ab}$ und, im Fall von kommutierenden $m, n \in M$, die Zusatzregel $(mn)^a = m^a n^a$ in unserem Monoid. Im Fall eines additiv notierten Monoids, das nach unseren Konventionen stets als kommutativ angenommen wird, erhalten wir dahingegen die Regeln $0m = 0_M$, $1m = m$, $(a + b)m = am + bm$, $b(am) = (ab)m$ und $a(m + n) = am + an$. All diese Regeln gelten insbesondere auch für $\mathbb{N}$ selbst, auf dem wir ja sogar zwei Strukturen als kommutatives Monoid erklärt hatten, die additive und die multiplikative Struktur. Letztere Formeln hatten wir in diesem Fall auch bereits zuvor bereits gezeigt.

Satz 3.4.1.30 (Teilen mit Rest). *Sei $(\mathbb{N}, s)$ die Menge der natürlichen Zahlen mit Nachfolgerabbildung und Addition, Multiplikation und Anordnung wie in 3.4.1.23 und 3.4.1.19. Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$ mit $b \neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte $c, d \in \mathbb{N}$ mit $a = bc + d$ und $d < b$.*

Beweis. Übung. □

3.4.1.31. Die Nachfolger von 0 notieren wir der Reihe nach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und nennen sie der Reihe nach **Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs, Sieben,**

Acht, Neun. Den Nachfolger von Neun nennen wir **Zehn** und notieren ihn vorerst $\mathrm{Z} \in \mathbb{N}$. Dann vereinbaren wir für $a_0, a_1, \ldots, a_r \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ die **Dezimaldarstellung**

$$a_r \ldots a_1 a_0 := a_r \mathrm{Z}^r + \ldots + a_1 \mathrm{Z}^1 + a_0 \mathrm{Z}^0$$

So erhalten wir insbesondere für unsere natürliche Zahl Zehn die Dezimaldarstellung $\mathrm{Z} = 10 = 1\mathrm{Z}^1 + 0\mathrm{Z}^0$. Wenn ganz allgemein eine endliche Folge der Symbole $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ohne Punkt und Komma nebeneinandersteht und nichts anderes gesagt wird, ist davon auszugehen, daß eine natürliche Zahl in Dezimaldarstellung gemeint ist. In diesem Kontext dürfen Multiplikationssymbole natürlich nicht, wie sonst üblich, einfach weggelassen werden. Schließlich gilt es zu zeigen, daß jede natürliche Zahl eine eindeutig bestimmte Dezimaldarstellung hat mit $r > 0 \Rightarrow a_r \neq 0$, was wieder dem Leser zur Übung überlassen sei.

3.4.1.32 (**Zahldarstellungen**). Gegeben eine beliebige natürliche Zahl $b > 1$ hat jede natürliche Zahl n genau eine Darstellung der Form

$$n = a_r b^r + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_r \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ und $r > 0 \Rightarrow a_r \neq 0$. Wenn wir Symbole alias Ziffern für die Elemente dieser Menge vereinbaren, so können wir die Sequenz von Ziffern $a_r \ldots a_0$ als Darstellung der Zahl n interpretieren. Wir sagen dann auch, sie **stelle n im b-adischen System dar** und schreiben

$$a_r \ldots a_0 = [a_r, \ldots, a_0]_b = n$$

Wenn aber ganz links nicht eine Darstellung zur Basis zehn gemeint sein sollte, muß man das deutlich dazusagen. Das zehnadische Sytem heißt das **Dezimalsystem** und man spricht dann auch von der **Dezimaldarstellung** einer natürlichen Zahl und wir haben etwa

$$[2, 5, 5]_{10} = 255$$

Bei $b \leq 10$ wählt man als Ziffern meist die ersten b üblichen Ziffern des Dezimalsystems. Das 2-adische Sytem heißt das **Dualsystem** und man spricht dann auch von der **Binärdarstellung** einer natürlichen Zahl. So wäre

$$1010 = [1, 0, 1, 0]_2 = 2^3 + 2^1 = 10$$

die Darstellung der Zahl Zehn im Dualsystem, wo ganz links dazugesagt werden muß, daß 1010 als Binärdarstellung gemeint ist. Gebräuchlich sind auch Darstellungen im 16-adischen Sytem alias **Hexadezimalsystem** mit den üblicherweise verwendten Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}$. So hätten wir zum Beispiel

$$\mathrm{FF} = [\mathrm{F}, \mathrm{F}]_{16} = 15 \cdot 16 + 15 = 255$$

und müssen ganz links dazusagen, daß FF als Hexadesimaldarstellung gemeint ist. Wenn aber in so einer Ziffernfolge die ersten sechs Buchstaben des Alphabets als Großbuchstaben auftauchen, liegt der Verdacht einer Zahl in Hexadesimaldarstellung nahe.

Übungen

Übung 3.4.1.33. Man zeige, daß gilt $s(a) \neq a$ für alle $a \in \mathbb{N}$.

Übung 3.4.1.34. Man führe den Beweis für das Teilen mit Rest 3.4.1.30 aus.

Übung 3.4.1.35. Man zeige, daß die Vereinigung einer endlichen Menge mit einer einelementigen Menge wieder endlich ist. Man zeige durch vollständige Induktion über a, daß für alle $a \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathbb{N}_{<a} := \{n \in \mathbb{N} \mid n < a\}$ endlich ist. Daß umgekehrt jede endliche Menge in Bijektion zu genau einer dieser Mengen ist, zeigen wir formal erst in 6.5.2.3, obwohl wir es natürlich schon oft verwendet haben und weiter verwenden müssen. Der Beweis ist nicht schwer, aber alles zu seiner Zeit.

Übung 3.4.1.36. Gegeben eine endliche Menge X und eine Abbildung $f : X \to X$ und $x \in X$ zeige man, daß es natürliche Zahlen $n \neq m$ gibt mit $f^n(x) = f^m(x)$. Ist also X eine nichtleere endliche Menge und $f : X \to X$ eine Abbildung, so gibt es $y \in X$ und $r \geq 1$ mit $f^r(y) = y$.

Übung 3.4.1.37. Gegeben eine Menge X und eine Abbildung $f : \mathbb{N} \times X \to X$ und ein Element $a \in X$ gibt es genau eine Folge $\mathbb{N} \to X$, $n \mapsto x_n$ mit $x_0 = a$ und $x_{n+1} = f(n, x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Übung 3.4.1.38. Gegeben ein multiplikativ notiertes Monoid M und $a \in \mathbb{N}$ zeige man $(m\cdot)^a(1_M) = (\cdot m)^a(1_M)$.

Übung 3.4.1.39. Man zeige die Iterationsregeln 7.7.3.11 für Mengen mit einer assoziativen Verknüpfung.

3.4.2 Äquivalenzrelationen und ganze Zahlen

3.4.2.1. Unter einer **Relation** R auf einer Menge X verstehen wir wie in 3.1.4.2 eine Teilmenge $R \subset X \times X$ des kartesischen Produkts von X mit sich selbst, also eine Menge von Paaren von Elementen von X. Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir in diesem Zusammenhang meist xRy.

Definition 3.4.2.2. Eine Relation $R \subset X \times X$ auf einer Menge X heißt eine **Äquivalenzrelation**, wenn für alle Elemente $x, y, z \in X$ gilt:

1. **Transitivität:** (xRy und yRz) $\Rightarrow xRz$;

2. **Symmetrie:** $xRy \Leftrightarrow yRx$;

3. **Reflexivität:** xRx.

3.4.2.3. Ist eine Relation symmetrisch und transitiv und ist jedes Element in Relation zu mindestens einem weiteren Element, so ist unsere Relation bereits reflexiv. Ein Beispiel für eine Relation, die symmetrisch und transitiv ist, aber nicht reflexiv, wäre etwa die „leere Relation“ $R = \emptyset$ auf einer nichtleeren Menge $X \neq \emptyset$.

Beispiel 3.4.2.4. Gegeben eine Abbildung $f : X \to Z$ erhalten wir eine Äquivalenzrelation auf X durch die Vorschrift $(x \sim y) \Leftrightarrow (f(x) = f(y))$. Die Äquivalenzlassen sind dann genau die nichtleeren Fasern von f. Wir werden demnächst zeigen, daß jede Äquivalenzrelation auf diese Weise beschrieben werden kann.

3.4.2.5. Gegeben eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge X betrachtet man für $x \in X$ die Menge $A(x) := \{z \in X \mid z \sim x\}$ und nennt sie die **Äquivalenzklasse von** x. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt eine **Äquivalenzklasse** für unsere Äquivalenzrelation genau dann, wenn es ein $x \in X$ gibt derart, daß $A = A(x)$ die Äquivalenzklasse von x ist. Ein Element einer Äquivalenzklasse nennt man auch einen **Repräsentanten** der Klasse. Eine Teilmenge $Z \subset X$, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, heißt ein **Repräsentantensystem**. Aufgrund der Reflexivität gilt $x \in A(x)$, und man sieht leicht, daß für $x, y \in X$ die folgenden drei Aussagen gleichbedeutend sind:

1. $x \sim y$;

2. $A(x) = A(y)$;

3. $A(x) \cap A(y) \neq \emptyset$.

3.4.2.6. Gegeben eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge X bezeichnen wir die Menge aller Äquivalenzklassen, eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$, mit

$$(X/\!\sim) := \{A(x) \mid x \in X\}$$

und haben eine kanonische Abbildung $\mathrm{can} : X \to (X/\!\sim)$, $x \mapsto A(x)$. Diese kanonische Abbildung ist eine Surjektion und ihre Fasern sind genau die Äquivalenzklassen unserer Äquivalenzrelation.

3.4.2.7. Ist $f : X \to Z$ eine Abbildung mit $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$, so gibt es nach der universellen Eigenschaft von Surjektionen 2.1.5.11 genau eine Abbildung $\bar{f} : (X/\!\sim) \to Z$ mit $f = \bar{f} \circ \mathrm{can}$. Wir zitieren diese Eigenschaft manchmal als die **universelle Eigenschaft des Raums der Äquivalenzklassen**. Sagt man, eine Abbildung $g : (X/\!\sim) \to Z$ sei **wohldefiniert** durch eine Abbildung $f : X \to Z$, so ist gemeint, daß f die Eigenschaft $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$ hat und daß man $g = \bar{f}$ setzt.

3.4.2.8. Gegeben auf einer Menge X eine Relation $R \subset X \times X$ gibt es eine kleinste Äquivalenzrelation $T \subset X \times X$, die R umfaßt. Man kann diese Äquivalenzrelation entweder beschreiben als den Schnitt aller Äquivalenzrelationen, die R umfassen, oder auch als die Menge T aller Paare (x, y) derart, daß es ein $n \geq 0$ gibt und Elemente $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ von X mit $x_\nu R x_{\nu-1}$ oder $x_{\nu-1} R x_\nu$ für alle ν mit $1 \leq \nu \leq n$. Wir nennen T auch die **von der Relation R erzeugte Äquivalenzrelation auf X**.

Beispiel 3.4.2.9. Denken wir uns die Menge X als die „Menge aller Tiere“ und R als die Relation „könnten im Prinzip miteinander fruchtbaren Nachwuchs zeugen“, so wären die Äquivalenzklassen unter der von dieser Relation erzeugten Äquivalenzrelation eine mathematische Fassung dessen, was Biologen unter einer „Tierart“ verstehen würden.

Beispiel 3.4.2.10. Gegeben eine Menge X und eine Abbildung $f : X \to X$ betrachten wir die von der Relation $f(x) \sim x$ erzeugte Äquivalenzrelation. Man zeigt unschwer, daß sie explizit beschrieben werden kann durch

$$(x \sim y) \Leftrightarrow (\exists m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } f^n(x) = f^m(y)).$$

Beispiel 3.4.2.11. Gegeben $M \supset N$ ein kommutatives Monoid mit einem Untermonoid erhält man eine Äquivalenzrelation auf der Menge $M \times N$ durch die Vorschrift

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow (\exists x \in N \text{ mit } atx = bsx)$$

Hier sind Symmetrie und Reflexivität offensichtlich. Um die Transitivität zu prüfen, müssen wir etwas rechnen: Gilt außerdem $(b, t) \sim (c, r)$, also $bry = cty$ für ein $y \in N$, so folgt $atxry = bsxry = ctysx$ und damit in der Tat $(a, s) \sim (c, r)$. Die Menge der Äquivalenzklassen notieren wir

$$N^{-1}M := (M \times N)/\!\sim$$

und notieren $s\backslash a$ die Äquivalenzklasse von (a, s). Man prüft, daß es auf $N^{-1}M$ eine Verknüpfung gibt mit $(s\backslash a)(t\backslash b) = (st\backslash ab)$ und daß $N^{-1}M$ mit dieser Verknüpfung ein kommutatives Monoid wird und $\mathrm{can} : M \to N^{-1}M$ gegeben durch $a \mapsto 1\backslash a$ ein Monoidhomomorphismus, unter dem jedes $s \in N$ auf ein invertierbares Element von $N^{-1}M$ abgebildet wird. Offensichtlich ist can genau dann ein Injektion $M \hookrightarrow N^{-1}M$, wenn N aus kürzbaren Elementen von M besteht. Schließlich induziert das Vorschalten von can für jedes weitere Monoid L eine Bijektion

$$\mathrm{Mon}(N^{-1}M, L) \xrightarrow{\sim} \{\varphi \in \mathrm{Mon}(M, L) \mid \varphi(N) \subset L^\times\}$$

wir sagen, das Monoid $N^{-1}M$ „gehe aus M durch formales Invertieren der Elemente von N hervor“. Im Spezialfall $N = M$ ist insbesondere $M^{-1}M$ stets eine Gruppe. Sie heißt die **einhüllende Gruppe** des kommutativen Monoids M.

3.4.2.12 (**Konstruktion des Rings der ganzen Zahlen**). Die einhüllende Gruppe unseres Monoids $(\mathbb{N}, +)$ der natürlichen Zahlen aus 3.4.1.18 heißt die additive Gruppe

$$\mathbb{Z}$$

der **ganzen Zahlen**. Aufgrund der Kürzungsregel 3.4.1.18 ist die kanonische Abbildung in diesem Fall eine Injektion $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$. Man prüft leicht, daß wir auf $\mathbb{Z}$ eine Anordnung erhalten durch die Vorschrift $(a \leq b) \Leftrightarrow$ (Es gibt $c \in \mathbb{N}$ mit $a+c = b$). Diese Anordnung hat die Eigenschaft $(a \leq b) \Rightarrow (a + x \leq b + x)$ und $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Nach 3.4.1.23 induziert unsere Multiplikation auf $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine Multiplikation auf $\mathbb{Z}_{>0}$ und diese ist nach 3.4.1.27 distributiv über der Addition. Aus 10.2.4.6 folgt dann schließlich, daß sich unsere Multiplikation auf $\mathbb{Z}_{>0}$ aus 3.4.1.23 auf eine und nur eine Weise zu einer kommutativen und über $+$ distributiven Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ fortsetzen läßt. Von dieser Multiplikation ist a posteriori dann auch klar, daß sie unsere Multiplikation auf $\mathbb{N} \supset \mathbb{Z}_{>0}$ fortsetzt. Wenn wir in 3.5.1.1 lernen, was ein „Ring“ ist, werden sich unsere ganzen Zahlen mit dieser Addition und Multiplikation als eines der ersten Beispiele für einen Ring erweisen.

Ergänzung 3.4.2.13. Gegeben Relationen $R \subset X \times X$ und $S \subset Y \times Y$ ist auch das Bild von $(R \times S) \subset (X \times X) \times (Y \times Y)$ unter der durch Vertauschen der mittleren Einträge gegebenen Identifikation $(X \times X) \times (Y \times Y) \xrightarrow{\sim} (X \times Y) \times (X \times Y)$ eine Relation. Wir notieren diese Relation auf dem Produkt kurz $R \times S$. Sind R und S Äquivalenrelationen, so auch $R \times S$.

Übungen

Ergänzende Übung 3.4.2.14. Ist G eine Gruppe und $H \subset G \times G$ eine Untergruppe, die die Diagonale umfaßt, so ist H eine Äquivalenzrelation.

3.4.3 Untergruppen der Gruppe der ganzen Zahlen

Definition 3.4.3.1. Eine Teilmenge einer Gruppe heißt eine **Untergruppe**, wenn sie abgeschlossen ist unter der Verknüpfung und der Inversenbildung und zusätzlich das neutrale Element enthält. Ist G eine multiplikativ geschriebene Gruppe, so ist eine Teilmenge $U \subset G$ also eine Untergruppe, wenn in Formeln gilt: $a, b \in U \Rightarrow ab \in U$, $a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U$ sowie $1 \in U$.

Ergänzung 3.4.3.2. Nach der reinen Lehre sollte eine Teilmenge einer Gruppe eine „Untergruppe“ heißen, wenn sie so mit der Struktur einer Gruppe versehen werden kann, daß die Einbettung ein Gruppenhomomorphismus wird. Da diese Definition jedoch für Anwendungen erst aufgeschlüsselt werden muß, haben wir gleich die aufgeschlüsselte Fassung als Definition genommen und überlassen den

Nachweis der Äquivalenz zur Definition nach der reinen Lehre dem Leser zur Übung.

Beispiele 3.4.3.3. In jeder Gruppe ist die einelementige Teilmenge, die nur aus dem neutralen Element besteht, eine Untergruppe. Wir nennen sie die **triviale Untergruppe**. Ebenso ist natürlich die ganze Gruppe stets eine Untergruppe von sich selber. Gegeben ein Vektorraum V ist die Menge aller Automorphismen eine Untergruppe $\mathrm{Aut}(V) \subset \mathrm{Ens}^\times(V)$ der Gruppe aller Permutationen der zugrundeliegenden Menge.

Satz 3.4.3.4 (Untergruppen der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen). *Jede Untergruppe $H \subset \mathbb{Z}$ ist von der Form $H = m\mathbb{Z}$ für genau ein $m \in \mathbb{N}$. Die Abbildungsvorschrift $m \mapsto m\mathbb{Z}$ liefert mithin eine Bijektion*

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \{H \subset \mathbb{Z} \mid H \textit{ ist Untergruppe von } \mathbb{Z}\}$$

Beweis. Im Fall $H = \{0\}$ ist $m = 0$ die einzige natürliche Zahl mit $H = m\mathbb{Z}$. Gilt $H \neq \{0\}$, so enthält H echt positive Elemente. Sei dann $m \in H$ das kleinste echt positive Element von H. Wir behaupten $H = m\mathbb{Z}$. Die Inklusion $H \supset m\mathbb{Z}$ ist hier offensichtlich. Aber gäbe es $n \in H \setminus m\mathbb{Z}$, so könnten wir n mit Rest teilen durch m und also schreiben $n = ms + r$ für geeignete $s, r \in \mathbb{Z}$ mit $0 < r < m$. Es folgte $r = n - ms \in H$ im Widerspruch zur Minimalität von m. Das zeigt die Surjektivität unserer Abbildung. Die Injektivität ist offensichtlich. □

3.4.3.5. Der Schnitt über eine beliebige Familie von Untergruppen einer gegebenen Gruppe ist selbst wieder eine Untergruppe. Für eine Teilmenge T einer Gruppe G definieren wir die **von T erzeugte Untergruppe**

$$\langle T \rangle \subset G$$

als die kleinste Untergruppe von G, die T umfaßt. Natürlich gibt es so eine kleinste Untergruppe, nämlich den Schnitt über alle Untergruppen von G, die T umfassen. Für $T \neq \emptyset$ können wir $\langle T \rangle$ konkret beschreiben als die Menge aller endlichen Produkte von Elementen aus T und deren Inversen. Für $T = \emptyset$ besteht $\langle T \rangle$ dahingegen nur aus dem neutralen Element. Ist T durch einen Ausdruck in Mengenklammern gegeben, so lassen wir diese meist weg und schreiben also zum Beispiel kürzer $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ statt $\langle \{a_1, \ldots, a_n\} \rangle$. Ob der Ausdruck $\langle T \rangle$ in einem speziellen Fall die von einer Menge T erzeugte Untergruppe oder vielmehr die von der einelementigen Menge mit einzigem Element T erzeugte Untergruppe meint, muß der Leser meist selbst aus dem Kontext erschließen. Schreiben wir jedoch $\langle {}_!T \rangle$, so ist stets zu verstehen, daß T eine Menge von Erzeugern und nicht einen einzelnen Erzeuger meint.

3.4.3.6. Ist V ein k-Vektorraum und $T \subset V$ eine Teilmenge, so muß der Leser von nun an aus dem Kontext erschließen, ob mit $\langle T \rangle$ die von T erzeugte Untergruppe oder der von T erzeugte Untervektorraum gemeint ist. Zur Unterscheidung schreiben wir manchmal $\langle T \rangle_{\mathbb{Z}}$ für die von T erzeugte Untergruppe und $\langle T \rangle_k$ für den von T erzeugten Untervektorraum.

Übungen

Ergänzende Übung 3.4.3.7. Eine endliche nichtleere Teilmenge einer Gruppe, die mit je zwei Elementen auch die Verknüpfung der beiden enthält, ist notwendig bereits eine Untergruppe.

Übung 3.4.3.8. Sind $H, K \subset G$ zwei Untergruppen einer Gruppe mit $H \cap K = 1$, so induziert die Verknüpfung eine Injektion $H \times K \hookrightarrow G$.

Übung 3.4.3.9. Wieviele Untergruppen hat die additive Gruppe eines zweidimensionalen Vektorraums über dem Körper mit zwei Elementen? Wieviele Untergruppen hat die additive Gruppe eines n-dimensionalen Vektorraums über dem Körper mit zwei Elementen?

Ergänzende Übung 3.4.3.10. Sei G eine Gruppe und $\varphi : G \to G$ ein Gruppenhomomorphismus. Man zeige: Gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ die Geichheit $\ker \varphi^n = \ker \varphi^{n+1}$, so folgt $\ker \varphi^n = \ker \varphi^{n+1} = \ker \varphi^{n+2} = \ldots$

Übung 3.4.3.11. Ist $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so gilt die Formel $|G| = |\operatorname{im} \varphi| \cdot |\ker \varphi|$. Man bemerke, daß diese Formel im Fall linearer Abbildungen von Vektorräumen über endlichen Körpern äquivalent ist zur Dimensionsformel.

3.4.4 Primfaktorzerlegung

Definition 3.4.4.1. Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl ≥ 2, die sich nicht als das Produkt von zwei echt kleineren natürlichen Zahlen erhalten läßt.

Beispiel 3.4.4.2. Die Primzahlen unterhalb von 50 sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

3.4.4.3. Eine Möglichkeit, alle Primzahlen zu finden, ist das sogenannte **Sieb des Eratosthenes**: Man beginnt mit der kleinsten Primzahl, der Zwei. Streicht man alle Vielfachen der Zwei, als da heißt, alle geraden Zahlen, so ist die erste Zahl unter den Übrigen die nächste Primzahl, die Drei. Streicht man nun auch noch alle Vielfachen der Drei, so ist die erste Zahl unter den Übrigen die nächste Primzahl, die Fünf, und so weiter. „Der Erste“ heißt auf lateinisch „Primus“ und auf griechisch ähnlich und es könnte sein, daß die Bezeichnung „Primzahl“ daher rührt.

Satz 3.4.4.4 (**Existenz einer Primfaktorzerlegung**). *Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ kann als ein Produkt von Primzahlen $n = p_1 p_2 \ldots p_r$ dargestellt werden.*

3.4.4.5. Der Satz gilt in unserer Terminologie auch für die Zahl $n = 1$, wenn wir auch Produkte der Länge $r = 0$ erlauben und erinnern, daß nach unseren Konventionen die Eins durch das „leere Produkt“ mit $r = 0$ dargestellt wird. Eine Primzahl p ist darin als das Produkt $p = p_1$ mit nur einem Faktor zu verstehen.

Beweis. Das ist klar mit vollständiger Induktion: Ist eine Zahl nicht bereits selbst prim, so kann sie als Produkt echt kleinerer Faktoren geschrieben werden, von denen nach Induktionsannahme bereits bekannt ist, daß sie Primfaktorzerlegungen besitzen. □

Satz 3.4.4.6. *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis. Durch Widerspruch. Gäbe es nur endlich viele Primzahlen, so könnten wir deren Produkt betrachten und dazu Eins hinzuzählen. Die so neu entstehende Zahl müßte dann wie jede von Null verschiedene natürliche Zahl nach 3.4.4.4 eine Primfaktorzerlegung besitzen, aber keine unserer endlich vielen Primzahlen käme als Primfaktor in Frage. □

Ergänzung 3.4.4.7. Noch offen (2019) ist die Frage, ob es auch unendlich viele **Primzahlzwillinge** gibt, als da heißt, Paare von Primzahlen mit der Differenz Zwei, wie zum Beispiel $5, 7$ oder $11, 13$ oder $17, 19$. Ebenso offen ist die Frage, ob jede gerade Zahl $n > 2$ die Summe von zwei Primzahlen ist. Die Vermutung, daß das richtig sein sollte, ist bekannt als **Goldbach-Vermutung**. Bekannt ist, daß es unendlich viele Paare von Primzahlen mit einem Abstand ≤ 246 gibt.

Satz 3.4.4.8 (**Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung**). *Die Darstellung einer natürlichen Zahl $n \geq 1$ als ein Produkt von Primzahlen $n = p_1 p_2 \ldots p_r$ ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren. Nehmen wir zusätzlich $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_r$ an, so ist unsere Darstellung mithin eindeutig.*

3.4.4.9. Dieser Satz ist einer von vielen Gründen, aus denen man bei der Definition des Begriffs einer Primzahl die Eins ausschließt, obwohl das die Definition verlängert: Hätten wir der Eins erlaubt, zu unseren Primzahlen dazuzugehören, so wäre der vorhergehende Satz in dieser Formulierung falsch. In obigem Satz ist $r \geq 0$ gemeint, genauer ist die Eins das leere Produkt und Primzahlen werden durch ein Produkt mit nur einem Faktor dargestellt.

Beweis. Der Beweis dieses Satzes braucht einige Vorbereitungen. Ich bitte Sie, gut aufzupassen, daß wir bei diesen Vorbereitungen den Satz über die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung nirgends verwenden, bis er dann im Anschluß an Lemma 3.4.4.15 endlich bewiesen werden kann. □

Definition 3.4.4.10. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen. Wir sagen a **teilt** b oder a **ist ein Teiler von** b und schreiben $a|b$, wenn es $c \in \mathbb{Z}$ gibt mit $ac = b$.

Definition 3.4.4.11. Sind ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ nicht beide Null, so gibt es eine größte ganze Zahl $c \in \mathbb{Z}$, die sie beide teilt. Diese Zahl heißt der **größte gemeinsame Teiler** von a und b. Ganze Zahlen a und b heißen **teilerfremd**, wenn sie außer ± 1 keine gemeinsamen Teiler besitzen. Insbesondere sind also $a = 0$ und $b = 0$ nicht teilerfremd.

Satz 3.4.4.12 (über den größten gemeinsamen Teiler). *Gegeben zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, die nicht beide Null sind, kann ihr größter gemeinsamer Teiler c als eine ganzzahlige Linearkombination unserer beiden Zahlen dargestellt werden. Es gibt also in Formeln $r, s \in \mathbb{Z}$ mit*

$$c = ra + sb$$

Teilt weiter $d \in \mathbb{Z}$ sowohl a als auch b, so teilt d auch den größten gemeinsamen Teiler von a und b.

3.4.4.13. Der letzte Teil dieses Satzes ist einigermaßen offensichtlich, wenn man die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung als bekannt voraussetzt. Da wir besagte Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung jedoch erst aus besagtem zweiten Teil ableiten werden, ist es wichtig, auch für den zweiten Teil dieses Satzes einen eigenständigen Beweis zu geben.

Beweis. Man betrachte die Teilmenge $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ar + bs \mid r, s \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$. Sie ist offensichtlich eine von Null verschiedene Untergruppe von $\mathbb{Z}$. Also ist sie nach unserer Klassifikation 3.4.3.4 der Untergruppen von $\mathbb{Z}$ von der Form $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z} = \hat{c}\mathbb{Z}$ für genau ein $\hat{c} > 0$ und es gilt:

i. $\hat{c}$ teilt a und b. In der Tat haben wir ja $a, b \in \hat{c}\mathbb{Z}$;

ii. $\hat{c} = ra + sb$ für geeignete $r, s \in \mathbb{Z}$. In der Tat haben wir ja $\hat{c} \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$;

iii. (d teilt a und b) $\Rightarrow$ (d teilt $\hat{c}$).

Daraus folgt sofort, daß $\hat{c}$ der größte gemeinsame Teiler von a und b ist, und damit folgt dann der Satz. □

3.4.4.14 (**Notation für größte gemeinsame Teiler**). Gegeben $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ können wir mit der Notation 3.4.3.5 kürzer schreiben

$$a_1\mathbb{Z} + \ldots + a_n\mathbb{Z} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$$

Üblich ist hier auch die Notation $(a_1, \ldots, a_n)$, die jedoch oft auch n-Tupel von ganzen Zahlen bezeichnet, also Elemente von $\mathbb{Z}^n$, und in der Analysis im Fall $n =$

2 meist ein offenes Intervall. Es gilt dann aus dem Kontext zu erschließen, was jeweils gemeint ist. Sind a und b nicht beide Null und ist c ihr größter gemeinsamer Teiler, so haben wir nach dem Vorhergehenden $\langle a, b\rangle = \langle c\rangle$. Wir benutzen von nun an diese Notation. Über die Tintenersparnis hinaus hat sie den Vorteil, auch im Fall $a = b = 0$ sinnvoll zu bleiben.

Lemma 3.4.4.15 (von Euklid). *Teilt eine Primzahl ein Produkt von zwei ganzen Zahlen, so teilt sie einen der Faktoren.*

3.4.4.16 (**Diskussion der Terminologie**). Dies Lemma findet sich bereits in Euklid's Elementen in Buch VII als Proposition 30.

3.4.4.17. Wenn wir die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung als bekannt voraussetzen, so ist dies Lemma offensichtlich. Diese Argumentation hilft aber hier nicht weiter, da sie voraussetzt, was wir gerade erst beweisen wollen. Sicher ist Ihnen die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung aus der Schule und ihrer Rechenerfahrung wohlvertraut. Um die Schwierigkeit zu sehen, sollten Sie vielleicht selbst einmal versuchen, einen Beweis dafür anzugeben. Im übrigen werden wir in 6.2.4.8 sehen, daß etwa im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ das Analogon zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung nicht mehr richtig ist.

Beweis. Sei p unsere Primzahl und seien $a, b \in \mathbb{Z}$ gegeben mit $p|ab$. Teilt p nicht a, so folgt für den größten gemeinsamen Teiler $\langle p, a\rangle = \langle 1\rangle$, denn die Primzahl p hat nur die Teiler ± 1 und $\pm p$. Der größte gemeinsame Teiler von p und a kann aber nicht p sein und muß folglich 1 sein. Nach 3.4.4.12 gibt es also $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $1 = rp + sa$. Es folgt $b = rpb + sab$ und damit $p|b$, denn p teilt natürlich rpb und teilt nach Annahme auch sab. □

Beweis der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung 3.4.4.8. Zunächst bemerken wir, daß aus Lemma 3.4.4.15 per Induktion dieselbe Aussage auch für Produkte beliebiger Länge folgt: Teilt eine Primzahl ein Produkt, so teilt sie einen der Faktoren. Seien $n = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s$ zwei Primfaktorzerlegungen derselben Zahl $n \geq 1$. Da p_1 unser n teilt, muß es damit eines der q_i teilen. Da auch dies q_i prim ist, folgt $p_1 = q_i$. Wir kürzen den gemeinsamen Primfaktor und sind fertig per Induktion. □

3.4.4.18. Ich erkläre am Beispiel $a = 160, b = 625$ den sogenannten **euklidischen Algorithmus**, mit dem man den größten gemeinsamen Teiler c zweier positiver natürlicher Zahlen a, b bestimmen kann nebst einer Darstellung $c = ra + rb$. In unseren Gleichungen wird jeweils geteilt mit Rest.

$$\begin{array}{rrcr} 160 = 1\cdot & 145 & + & 15 \\ 145 = 9\cdot & 15 & + & 10 \\ 15 = 1\cdot & 10 & + & 5 \\ 10 = 2\cdot & 5 & + & 0 \end{array}$$

Daraus folgt für den größten gemeinsamen Teiler $\langle 625, 160\rangle = \langle 160, 145\rangle = \langle 145, 15\rangle = \langle 15, 10\rangle = \langle 10, 5\rangle = \langle 5, 0\rangle = \langle 5\rangle$. Die vorletzte Zeile liefert eine Darstellung $5 = x \cdot 10 + y \cdot 15$ unseres größten gemeinsamen Teilers $5 = \mathrm{ggT}(10, 15)$ als ganzzahlige Linearkombination von 10 und 15. Die vorvorletzte Zeile eine Darstellung $10 = x' \cdot 15 + y' \cdot 145$ und nach Einsetzen in die vorherige Gleichung eine Darstellung $5 = x(x' \cdot 15 + y' \cdot 145) + y \cdot 15$ unseres größten gemeinsamen Teilers $5 = \mathrm{ggT}(15, 145)$ als ganzzahlige Linearkombination von 15 und 145. Indem wir so induktiv hochsteigen, erhalten wir schließlich für den größten gemeinsamen Teiler die Darstellung $5 = -11 \cdot 625 + 43 \cdot 160$.

Ergänzung 3.4.4.19. Gegeben eine positive natürliche Zahl n bezeichne $\mathrm{rad}(n)$ das Produkt ohne Vielfachheiten aller Primzahlen, die n teilen. Die **ABC-Vermutung** besagt, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Tripel von paarweise teilerfremden positiven natürlichen Zahlen a, b, c geben soll mit $a + b = c$ und

$$c > (\mathrm{rad}(abc))^{1+\varepsilon}$$

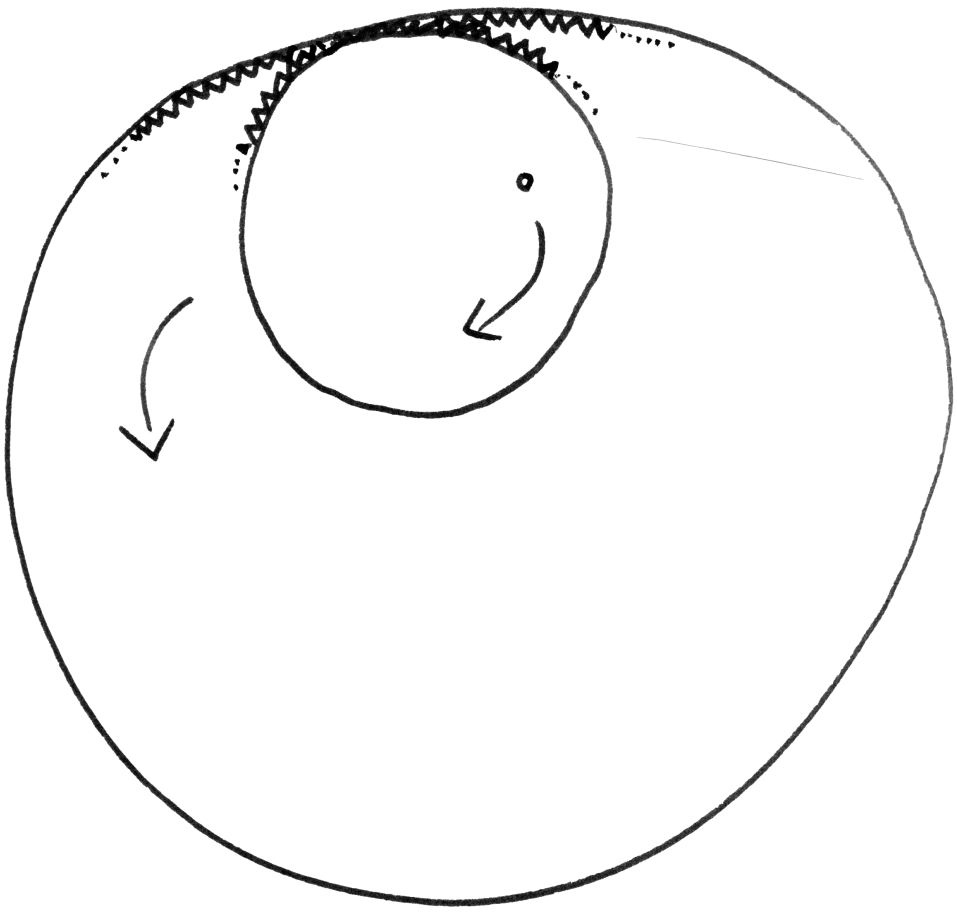
Es soll also salopp gesprochen sehr selten sein, daß für teilerfremde positive natürliche Zahlen a, b mit vergleichsweise kleinen Primfaktoren ihre Summe auch nur kleine Primfaktoren hat. Der Status der Vermutung ist zur Zeit (2019) noch ungeklärt. Man kann zeigen, daß es unendlich viele Tripel von paarweise teilerfremden positiven natürlichen Zahlen $a < b < c$ gibt mit $a + b = c$ und $c \geq \mathrm{rad}(abc)$. Diese sind jedoch bereits vergleichsweise selten, so gibt es etwa nur 120 mögliche Tripel mit $c < 10000$.

Übungen

Übung 3.4.4.20. Man berechne den größten gemeinsamen Teiler von 3456 und 436 und eine Darstellung desselben als ganzzahlige Linearkombination unserer beiden Zahlen.

Übung 3.4.4.21. Gegeben zwei von Null verschiedene natürliche Zahlen a, b nennt man die kleinste von Null verschiedene natürliche Zahl, die sowohl ein Vielfaches von a als auch ein Vielfaches von b ist, das **kleinste gemeinsame Vielfache** von a und b und notiert sie $\mathrm{kgV}(a, b)$. Man zeige in dieser Notation die Formel $\mathrm{kgV}(a, b)\,\mathrm{ggT}(a, b) = ab$.

Ergänzende Übung 3.4.4.22. Beim sogenannten „Spirographen“, einem Zeichenspiel für Kinder, kann man an einem innen mit 105 Zähnen versehenen Ring ein Zahnrad mit 24 Zähnen entlanglaufen lassen. Steckt man dabei einen Stift durch ein Loch außerhalb des Zentrums des Zahnrads, so entstehen dabei die köstlichsten Figuren. Wie oft muß das Zahnrad auf dem inneren Zahnkranz umlaufen, bevor solch eine Figur fertig gemalt ist?



Der Spirograph aus Übung 3.4.4.22

Ergänzende Übung 3.4.4.23. Berechnen Sie, wieviele verschiedene Strophen das schöne Lied hat, dessen erste Strophe lautet:

> Tomatensalat Tomatensalat Tooo-
> -matensalat Tomatensaaaaaaaa-
> -lat Tomatensalat Tomatensalat
> Tomatensalat Tomatensaaaaaaa-

3.5 Ringe und Polynome

3.5.1 Ringe

Definition 3.5.1.1. Ein **Ring**, französisch **anneau**, ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen $(R, +, \cdot)$ derart, daß gilt:

1. $(R, +)$ ist eine kommutative Gruppe;
2. $(R, \cdot)$ ist ein Monoid; ausgeschrieben heißt das nach 2.2.1.20, daß auch die Verknüpfung $\cdot$ assoziativ ist und daß es ein Element $1 = 1_R \in R$ mit der Eigenschaft $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in R$ gibt, das **Eins-Element** oder kurz die **Eins** unseres Rings;
3. Es gelten die Distributivgesetze, als da heißt, für alle $a, b, c \in R$ gilt

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) \end{aligned}$$

Die beiden Verknüpfungen heißen die **Addition** und die **Multiplikation** in unserem Ring. Das Element $1 \in R$ aus unserer Definition ist wohlbestimmt als das neutrale Element des Monoids $(R, \cdot)$, vergleiche 2.2.1.19. Ein Ring, dessen Multiplikation kommutativ ist, heißt ein **kommutativer Ring** und bei uns in unüblicher Verkürzung ein **Kring**.

3.5.1.2. Wir schreiben meist kürzer $a \cdot b = ab$ und vereinbaren die Regel „Punkt vor Strich“, so daß zum Beispiel das erste Distributivgesetz auch übersichtlicher in der Form $a(b + c) = ab + ac$ geschrieben werden kann.

Beispiel 3.5.1.3. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden mit der üblichen Multiplikation und Addition nach 3.4.2.12 einen kommutativen Ring.

3.5.1.4 (**Ursprung der Terminologie**). Der Begriff „Ring“ soll zum Ausdruck bringen, daß diese Struktur nicht in demselben Maße „geschlossen“ ist wie ein Körper, da wir nämlich nicht die Existenz von multiplikativen Inversen fordern. Er wird auch im juristischen Sinne für gewisse Arten weniger geschlossenener Körperschaften verwendet. So gibt es etwa den „Ring deutscher Makler“ oder den „Ring deutscher Bergingenieure“.

3.5.1.5 (**Diskussion der Terminologie**). Eine Struktur wie in der vorhergehenden Definition, bei der nur die Existenz eines Einselements nicht gefordert wird, bezeichnen wir im Vorgriff auf 7.1.5.7 als eine **assoziative $\mathbb{Z}$-Algebra**. In der Literatur wird jedoch auch diese Struktur oft als „Ring“ bezeichnet, sogar bei der von mir hochgeschätzten Quelle Bourbaki. Die Ringe, die eine Eins besitzen, heißen in dieser Terminologie „unitäre Ringe“.

Ergänzung 3.5.1.6. Allgemeiner als in 3.2.6.15 erklärt heißt ein Element a eines beliebigen Ringes, ja einer beliebigen assoziativen $\mathbb{Z}$-Algebra **nilpotent**, wenn es $d \in \mathbb{N}$ gibt mit $a^d = 0$.

Beispiele 3.5.1.7. Die einelementige Menge mit der offensichtlichen Addition und Multiplikation ist ein Ring, der **Nullring**. Jeder Körper ist ein Ring. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden einen Ring. Ist R ein Ring und X eine Menge, so ist die Menge $\mathrm{Ens}(X, R)$ aller Abbildungen von X nach R ein Ring unter punktweiser Multiplikation und Addition. Ist R ein Ring und $n \in \mathbb{N}$, so bilden die $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen in R einen Ring $\mathrm{Mat}(n; R)$ unter der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen; im Fall $n = 0$ erhalten wir den Nullring, im Fall $n = 1$ ergibt sich R selbst. Ist A eine abelsche Gruppe, so bilden die Gruppenhomomorphismen von A in sich selbst, die sogenannten **Endomorphismen** von A, einen Ring mit der Verknüpfung von Abbildungen als Multiplikation und der punktweisen Summe als Addition. Man notiert diesen Ring

$$\mathrm{End}A$$

und nennt ihn den **Endomorphismenring der abelschen Gruppe** A. Ähnlich bilden auch die Endomorphismen eines Vektorraums V über einem Körper k einen Ring $\mathrm{End}_k V$, den sogenannten **Endomorphismenring von** V. Oft notiert man auch den Endomorphismenring eines Vektorraums abkürzend $\mathrm{End}V$ in der Hoffnung, daß aus dem Kontext klar wird, daß die Endomorphismen von V als Vektorraum gemeint sind und nicht die Endomorphismen der V zugrundeliegenden abelschen Gruppe. Will man besonders betonen, daß die Endomorphismen als Gruppe gemeint sind, so schreibt man manchmal auch $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}} A$ aus Gründen, die erst in 7.1.3.4 erklärt werden. Ich verwende für diesen Ring zur Vermeidung von Indizes lieber die Notation $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}} A = \mathrm{Ab}A$, die sich aus den allgemeinen kategorientheoretischen Konventionen 4.7.1.6 ergibt.

Definition 3.5.1.8. Eine Abbildung $\varphi : R \to S$ von einem Ring in einen weiteren Ring heißt ein **Ringhomomorphismus**, wenn gilt $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ sowie $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für alle $a, b \in R$. In anderen Worten ist ein Ringhomomorphismus also eine Abbildung, die sowohl für die Addition als auch für die Multiplikation ein Monoidhomomorphismus ist. Die Menge aller Ringhomomorphismen von einem Ring R in einen Ring S notieren wir

$$\mathrm{Ring}(R, S)$$

Ergänzung 3.5.1.9. Von Homomorphismen zwischen $\mathbb{Z}$-Algebren können wir natürlich nicht fordern, daß sie das Einselement auf das Einselement abbilden. Wir sprechen dann von **Algebrenhomomorphismen**. In der Terminologie, in der unsere assoziativen $\mathbb{Z}$-Algebren als Ringe bezeichnet werden, werden unsere Ringhomomorphismen „unitäre Ringhomomorphismen“ genannt.

Proposition 3.5.1.10. *Für jeden Ring R gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$, in Formeln $|\operatorname{Ring}(\mathbb{Z}, R)| = 1$.*

Beweis. Nach 2.2.3.31 gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus von additiven Gruppen $\varphi : \mathbb{Z} \to R$, der die $1 \in \mathbb{Z}$ auf $1_R \in R$ abbildet. Wir müssen nur noch zeigen, daß er mit der Multiplikation verträglich ist, in Formeln $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$. Mit 3.5.1.15 zieht man sich leicht auf den Fall $n, m > 0$ zurück. In diesem Fall beginnt man mit der Erkenntnis $\varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1) = 1_R = 1_R \cdot 1_R = \varphi(1)\varphi(1)$ und argumentiert von da aus mit vollständiger Induktion und dem Distributivgesetz. □

3.5.1.11 (**Ganze Zahlen und allgemeine Ringe**). Gegeben ein Ring R notieren wir den Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$ aus 3.5.1.10 manchmal $n \mapsto n_R$ und meist $n \mapsto n$. Ich will kurz diskutieren, warum das ungefährlich ist. Gegeben $r \in R$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt nämlich stets $nr = n_R r = r n_R$, wobei nr in Bezug auf die Struktur von R als additive abelsche Gruppe verstehen, also $nr = n^+ r = r + r \ldots + r$ mit n Summanden falls $n \geq 1$ und so weiter, wie in der Tabelle 2.2.2.13 und in 2.2.2.11 ausgeführt wird. Unsere Gleichung $nr = n_R r = r n_R$ bedeutet dann hinwiederum, daß es auf den Unterschied zwischen n_R und n meist gar nicht ankommt. Deshalb führt es auch selten zu Mißverständnissen, wenn wir statt n_R nur kurz n schreiben.

3.5.1.12. Eine Teilmenge eines Rings heißt ein **Teilring**, wenn sie eine additive Untergruppe und ein multiplikatives Untermonoid ist. Ist also R unser Ring, so ist eine Teilmenge $T \subset R$ genau dann ein Teilring, wenn gilt $0_R, 1_R \in T$, $a \in T \Rightarrow (-a) \in T$ sowie $a, b \in T \Rightarrow a + b, ab \in T$. Wir diskutieren diesen Begriff hier nur im Vorbeigehen, da er in dieser Vorlesung nur eine Nebenrolle spielt.

Übungen

Übung 3.5.1.13 (**Quotientenring**). Gegeben ein Ring R und eine Surjektion $R \twoheadrightarrow Q$ von R auf eine Menge Q, die an die Multiplikation und Addition von R angepaßt ist im Sinne von 2.2.3.28, ist Q mit der koinduzierten Addition und Multiplikation auch wieder ein Ring.

Ergänzende Übung 3.5.1.14. Auf der abelschen Gruppe $\mathbb{Z}$ gibt es genau zwei Verknüpfungen, die als Multiplikation genommen die Addition zu einer Ringstruktur ergänzen.

Übung 3.5.1.15. Man zeige, daß in jedem Ring R gilt $0a = 0 \ \forall a \in R$; $-a = (-1)a \ \forall a \in R$; $(-1)(-1) = 1$; $(-a)(-b) = ab \ \forall a, b \in R$.

Übung 3.5.1.16. Gegeben eine Überdeckung einer endlichen Menge X durch Teilmengen $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ zeige man die **Einschluß-Ausschluß-Formel**

$$0 = \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i \in I} X_i\right|$$

mit der Interpretation des leeren Schnitts als X. Im Fall $n = 3$ etwa können wir das ausschreiben zu

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cup Y| - |X \cup Z| - |Y \cup Z| + |X \cup Y \cup Z|$$

Hinweis: Sogar im Fall einer beliebigen Menge X mit beliebigen Teilmengen X_i mag man deren charakteristische Funktionen mit χ_i bezeichnen und im Ring der $\mathbb{Z}$-wertigen Funktionen auf X das Produkt $(1-\chi_1)\dots(1-\chi_n)$ ausmultiplizieren.

Übung 3.5.1.17. Für jeden Ring R gibt es höchstens einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Q} \to R$, in Formeln $|\operatorname{Ring}(\mathbb{Q}, R)| \leq 1$.

3.5.2 Restklassenringe des Rings der ganzen Zahlen

Definition 3.5.2.1. Gegeben $G \supset H$ eine Gruppe mit einer Untergruppe definieren wir den **Quotienten** G/H, eine Teilmenge $G/H \subset \mathcal{P}(G)$, durch die Vorschrift

$$G/H := \{L \subset G \mid \exists g \in G \text{ mit } L = gH\}$$

Die Teilmenge $gH \subset G$ heißt die **H-Linksnebenklasse von g in G**. Unser Quotient ist also die Menge aller H-Linksnebenklassen in G. Jedes Element einer Linksnebenklasse heißt auch ein **Repräsentant** besagter Linksnebenklasse. Eine Teilmenge $R \subset G$ derart, daß die Vorschrift $g \mapsto gH$ eine Bijektion $R \xrightarrow{\sim} G/H$ induziert, heißt ein **Repräsentantensystem** für die Menge der Linksnebenklassen.

Vorschau 3.5.2.2. Diese Konstruktion wird in 4.4.1.2 noch sehr viel ausführlicher diskutiert werden.

Beispiel 3.5.2.3. Im Fall der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$ mit der Untergruppe $m\mathbb{Z}$ haben wir speziell $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{L \subset \mathbb{Z} \mid \exists a \in \mathbb{Z} \text{ mit } L = a + m\mathbb{Z}\}$. Die Linksnebenklasse von a heißt in diesem Fall auch die **Restklasse von a modulo m**, da zumindest im Fall $a \geq 0$ und $m > 0$ ihre nichtnegativen Elemente genau alle natürlichen Zahlen sind, die beim Teilen durch m denselben Rest lassen wie a. Wir notieren diese Restklasse auch $\bar{a}$. Natürlich ist $\bar{a} = \bar{b}$ gleichbedeutend zu $a - b \in m\mathbb{Z}$. Gehören a und b zur selben Restklasse, in Formeln $a + m\mathbb{Z} = b + m\mathbb{Z}$, so nennen wir sie **kongruent modulo** m und schreiben

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Offensichtlich gibt es für $m > 0$ genau m Restklassen modulo m, in Formeln $|\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}| = m$, und wir haben genauer

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$$

Da in dieser Aufzählung keine Nebenklassen mehrfach genannt werden, ist die Teilmenge $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ also ein Repräsentantensystem für die Menge von Nebenklassen $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Ein anderes Repräsentantensystem wäre $\{1, \ldots, m\}$, ein Drittes $\{1, \ldots, m-1, 7m\}$.

Satz 3.5.2.4 (**Restklassenring**). *Für alle $m \in \mathbb{Z}$ gibt es auf der Menge $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ genau eine Struktur als Ring derart, daß die Abbildung $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit $a \mapsto \bar{a}$ ein Ringhomomorphismus ist.*

3.5.2.5. Das ist dann natürlich die Struktur als Quotientenring im Sinne unserer Übung 3.5.1.13.

Beweis. Daß es höchstens eine derartige Ringstruktur gibt, es eh klar. Zu zeigen bleibt nur deren Existenz. Nach 2.2.1.3 induziert jede Verknüpfung auf einer Menge A eine Verknüpfung auf ihrer Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$. Für die so von der Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{Z}$ induzierte Verknüpfung $+$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ gilt offensichtlich

$$\bar{a} + \bar{b} = (a + m\mathbb{Z}) + (b + m\mathbb{Z}) = (a + b) + m\mathbb{Z} = \overline{a + b} \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

Insbesondere induziert unsere Verknüpfung $+$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und $a \mapsto \bar{a}$ ist für diese Verknüpfungen ein Morphismus von Magmas alias Mengen mit Verknüpfung. Ebenso können wir auf $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ eine Verknüpfung $\odot = \odot_m$ einführen durch die Vorschrift

$$T \odot S := T \cdot S + m\mathbb{Z} := \{ab + mr \mid a \in T, b \in S, r \in \mathbb{Z}\}$$

Wieder prüft man für die so erklärte Multiplikation mühelos die Formel

$$\bar{a} \odot \bar{b} = \overline{ab}$$

Daß $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit unseren beiden Verknüpfungen ein Ring wird und $a \mapsto \bar{a}$ ein Ringhomomorphismus, folgt ohne weitere Schwierigkeiten aus der Surjektivität der natürlichen Abbildung $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ alias Übung 3.5.1.13. $\square$

3.5.2.6. Wir geben wir die komische Notation $\odot$ nun auch gleich wieder auf und schreiben stattdessen $\bar{a} \cdot \bar{b}$ oder noch kürzer $\bar{a}\bar{b}$. Auch die Notation $\bar{a}$ werden wir meist zu a vereinfachen, wie wir es ja in 3.5.1.11 eh schon vereinbart hatten.

Beispiel 3.5.2.7. Modulo $m = 2$ gibt es genau zwei Restklassen: Die Elemente der Restklasse von 0 bezeichnet man üblicherweise als **gerade Zahlen**, die Elemente der Restklasse von 1 als **ungerade Zahlen**. Der Ring $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit diesen beiden Elementen $\bar{0}$ und $\bar{1}$ ist offensichtlich sogar ein Körper.

Beispiel 3.5.2.8 (**Der Ring $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ der Uhrzeiten**). Den Ring $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ könnte man als „Ring von Uhrzeiten“ ansehen. Er hat die zwölf Elemente $\{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{11}\}$ und wir haben $\overline{11} + \bar{5} = \overline{16} = \bar{4}$ alias „5 Stunden nach 11 Uhr ist es 4 Uhr“. Weiter haben wir in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ etwa auch $\bar{3} \cdot \bar{8} = \overline{24} = \bar{0}$. In einem Ring kann es also durchaus passieren, daß ein Produkt von zwei von Null verschiedenen Faktoren Null ist.

Vorschau 3.5.2.9. Sei $m \geq 1$ eine natürliche Zahl. Eine Restklasse modulo m heißt eine **prime Restklasse**, wenn sie aus zu m teilerfremden Zahlen besteht. Wir zeigen in 14.6.2.1, daß es in jeder primen Restklasse unendlich viele Primzahlen gibt. Im Fall $m = 10$ bedeutet das zum Beispiel, daß es jeweils unendlich viele Primzahlen gibt, deren Dezimaldarstellung mit einer der Ziffern $1, 3, 7$ und 9 endet.

Proposition 3.5.2.10 (**Teilbarkeitskriterien über Quersummen**). *Eine natürliche Zahl ist genau dann durch Drei beziehungsweise durch Neun teilbar, wenn ihre Quersumme durch Drei beziehungsweise durch Neun teilbar ist.*

Beweis. Wir erklären das Argument nur an einem Beispiel. Das ist natürlich im Sinne der Logik kein Beweis. Dies Vorgehen schien mir aber in diesem Fall besonders gut geeignet, dem Leser den Grund dafür klarzumachen, aus dem unsere Aussage im Allgemeinen gilt. Und das ist es ja genau, was ein Beweis in unserem mehr umgangssprachlichen Sinne leisten soll! Also frisch ans Werk. Per definitionem gilt

$$1258 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8$$

Offensichtlich folgt

$$1258 \equiv 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8 \pmod 3$$

Da 10 kongruent ist zu 1 modulo 3 erhalten wir daraus

$$1258 \equiv 1 + 2 + 5 + 8 \pmod 3$$

Insbesondere ist die rechte Seite durch Drei teilbar genau dann, wenn die linke Seite durch Drei teilbar ist. Das Argument für Neun statt Drei geht genauso. □

3.5.2.11. In $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ gilt zum Beispiel $\bar{3} \cdot \bar{5} = \bar{3} \cdot \bar{1}$. In allgemeinen Ringen dürfen wir also nicht kürzen. Dies Phänomen werden wir nun begrifflich fassen. Dazu vereinbaren wir, daß bei Ringen unsere allgemeinen Konventionen 2.2.1.4 zu Kürzbarkeit und Teilen stets in Bezug auf die Multiplikation zu verstehen sein sollen. Wir schreiben das auch noch aus.

Definition 3.5.2.12.

1. Gegeben ein Ring R und Elemente $a, b \in R$ sagen wir, a **teilt** b oder auch a ist ein **Teiler von** b und schreiben $a|b$, wenn es $d \in R$ gibt mit $ad = b$. Ist unser Ring nicht kommutativ, so nennen wir a genauer einen **Linksteiler** von b und erklären analog **Rechtsteiler**;

2. Ein Element $a \in R$ eines Rings heißt **linkskürzbar**, wenn die Multiplikation mit a eine Injektion $(a\cdot) : R \hookrightarrow R$ liefert. Analog erklären wir die Eigenschaft **rechtskürzbar**. Ein Element, das linkskürzbar und rechtskürzbar ist, nennen wir **kürzbar**. Ein nicht kürzbares Element nennen wir **nichtkürzbar**;

3. Ein Ring heißt ein **Integritätsring** oder **Integritätsbereich**, wenn er nicht der Nullring ist und das Produkt von je zwei von Null verschiedenen Elementen von Null verschieden ist. Einen kommutativen Integritätsring nennen wir auch einen **Integritätskring**.

Beispiel 3.5.2.13. Die nichtkürzbaren Elemente in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ sind $0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$.

3.5.2.14 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißen die nichtkürzbaren Elemente eines Rings meist die „Nullteiler“. Mir gefiel diese Terminologie nicht, da ja nach unseren sonstigen Definitionen alle Elemente eines Rings Teiler der Null sind.

3.5.2.15 (**Kürzen in Ringen**). Sei R ein Ring. Natürlich ist der Gruppenhomomorphismus $(a\cdot) : R \to R$ genau dann injektiv, wenn sein Kern Null ist, wenn also gilt $ax = 0 \Rightarrow x = 0$.

Definition 3.5.2.16. Ein Element a eines Rings R heißt **invertierbar** oder genauer **invertierbar in** R oder auch eine **Einheit von** R, wenn es bezüglich der Multiplikation invertierbar ist im Sinne von 2.2.2.2, wenn es also $b \in R$ gibt mit $ab = ba = 1$. Die Menge der invertierbaren Elemente eines Rings bildet unter der Multiplikation eine Gruppe, die man die **Gruppe der Einheiten von** R nennt und gemäß unserer allgemeinen Konventionen 8.2.2.9 mit $R^\times$ bezeichnet.

Beispiel 3.5.2.17. Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen hat genau zwei Einheiten, nämlich 1 und (-1). In Formeln haben wir also $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$. Dahingegen sind die Einheiten im Ring $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen genau alle von Null verschiedenen Elemente, in Formeln $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q}\backslash 0$.

3.5.2.18. Eine Einheit eines Krings teilt alle Elemente unseres Krings und ist sogar dasselbe wie ein Teiler der Eins.

Definition 3.5.2.19. Zwei Elemente eines Krings heißen **teilerfremd**, wenn sie außer Einheiten keine gemeinsamen Teiler haben.

3.5.2.20. Allgemeiner mag man eine Teilmenge eines Krings **teilerfremd** nennen, wenn es keine Nichteinheit unseres Krings gibt, die alle Elemente unserer Teilmenge teilt.

3.5.2.21 (**Kürzbare Elemente endlicher Kringe**). In einem endlichen Kring R sind die Einheiten genau die kürzbaren Elemente. In der Tat ist in diesem Fall die Multiplikation $(a\cdot) : R \to R$ genau dann injektiv, wenn sie bijektiv ist.

Beispiel 3.5.2.22. Die Einheiten von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ sind mithin genau $1, 5, 7, 11$. Man prüft unschwer, daß sogar jedes dieser Elemente sein eigenes Inverses ist. Mithin ist die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ des Uhrzeitenrings gerade unsere Klein'sche Vierergruppe. Im allgemeinen ein Inverses zu a in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ zu finden, läuft auf die Lösung der Gleichung $ax = 1 + my$ hinaus, von der wir bereits gesehen hatten, daß der euklidische Algorithmus das leisten kann.

3.5.2.23 (**Ursprung der Terminologie**). A priori meint eine Einheit in der Physik das, was ein Mathematiker eine Basis eines eindimensionalen Vektorraums nennen würde. So wäre etwa die Sekunde s eine Basis des reellen Vektorraums $\vec{\mathbb{T}}$ aller Zeitspannen aus 3.3.1.11. In Formeln ausgedrückt bedeutet das gerade, daß das Daranmultiplizieren von s eine Bijektion $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{T}}$ liefert. Mit den Einheiten eines kommutativen Ringes R verhält es sich nun genauso: Genau dann ist $u \in R$ eine Einheit, wenn das Daranmultiplizieren von u eine Bijektion $R \xrightarrow{\sim} R$ liefert. Daher rührt dann wohl auch die Terminologie.

Ergänzung 3.5.2.24. In der Chemie rechnet man oft mit **mol** und versteht darunter seit 2019 genau $6{,}02214076 \cdot 10^{23}$ und verwendet das als eine Einheit. Mathematisch gesehen sollte man das eigentlich eine Zahl nennen, aber natürlich ist $\mathbb{R}$ auch ein eindimensionaler reeller Vektorraum und in diesem Sinne mag man auch alle von Null verschiedenen Elemente von $\mathbb{R}$ Einheiten. Diese Konvention war früher noch sinnvoller, als man ein Mol als die Zahl der Kohlenstoffatome in einem Gramm des Standardisotops von Kohlenstoff erklärte und nicht so genau sagen konnte, wie viele Atome das nun genau sind.

3.5.2.25. Ein Körper kann in dieser Begrifflichkeit definiert werden als ein Integritätsring, in dem jedes von Null verschiedene Element eine Einheit ist.

Proposition 3.5.2.26 (Endliche Primkörper). *Sei $m \in \mathbb{N}$. Genau dann ist der Restklassenring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ein Körper, wenn m eine Primzahl ist.*

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m \geq 2$. Ist m keine Primzahl, so gibt es $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a < m$ und $b < m$ aber $ab = m$. Dann gilt in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ offensichtlich $\bar{a} \neq 0$ und $\bar{b} \neq 0$, aber ebenso offensichtlich gilt $\bar{a}\bar{b} = 0$ und $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ hat von Null verschiedene nicht invertierbare Elemente. Damit kann $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ kein Körper sein. Ist dahingegen $m = p$ eine Primzahl, so folgt aus dem Satz von Euklid 3.4.4.15, daß $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Integritätsring ist. Dann aber sind nach 3.5.2.21 alle seine von Null verschiedenen Elemente Einheiten und $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist folglich ein Körper. □

3.5.2.27 (**Terminologie und Notation**). Die Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für Primzahlen p sowie der Körper $\mathbb{Q}$ sind die „kleinstmöglichen Körper“ in einem Sinne, der in 6.3.1.6 präzisiert wird. Man nennt diese Körper deshalb auch **Primkörper**. Die endlichen Primkörper werden meist

$$\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

notiert, mit einem $\mathbb{F}$ für „field“ oder „finite“. Die Notation $\mathbb{F}_q$ verwendet man allerdings auch allgemeiner mit einer echten Primzahlpotenz q im Index als Bezeichnung für „den endlichen Körper mit q Elementen“, den wir erst in 6.3.7.1 kennenlernen werden, und der weder als Ring noch als abelsche Gruppe isomorph ist zu $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Ergänzung 3.5.2.28. Ich bespreche kurz das **Verfahren von Diffie-Hellman** zum öffentlichen Vereinbaren geheimer Schlüssel. Wir betrachten dazu das des folgende Schema:

Geheimbereich Alice	Öffentlicher Bereich	Geheimbereich Bob
	Bekanntgemacht wird eine Gruppe G und ein Element $g \in G$.	
Alice wählt $a \in \mathbb{N}$, berechnet g^a und macht es öffentlich.		Bob wählt $b \in \mathbb{N}$, berechnet g^b und macht es öffentlich.
	g^a, g^b	
Nach dem öffentlichen Austausch berechnet Alice $(g^b)^a = g^{ba} = g^{ab}$.		Nach dem öffentlichen Austauch berechnet Bob $(g^a)^b = g^{ab} = g^{ba}$.

Das Gruppenelement $g^{ba} = g^{ab}$ ist der gemeinsame hoffentlich geheime Schlüssel. Der Trick hierbei besteht darin, geeignete Paare (G, g) und eine geeignete Zahl a so zu finden, daß die Berechnung von g^a unproblematisch ist, daß jedoch kein schneller Algorithmus bekannt ist, der aus der Kenntnis von G, g und g^a ein mögliches a bestimmt, der also, wie man auch sagt, einen **diskreten Logarithmus von** g^a **zur Basis** g findet. Dann kann Alice g^a veröffentlichen und dennoch a geheim halten und ebenso kann Bob g^b veröffentlichen und dennoch b geheim halten. Zum Beispiel kann man für G die Einheitengruppe $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ des Primkörpers zu einer großen Primzahl p nehmen. Nun ist es natürlich denkbar, daß man aus der Kenntnis von g^a und g^b direkt g^{ab} berechnen kann, ohne zuvor a zu bestimmen, aber auch für die Lösung dieses sogenannten **Diffie-Hellman-Problems** ist in diesem Fall kein schneller Algorithmus bekannt. Mit den derzeitig verfügbaren Rechenmaschinen können also Alice und Bob mit einer Rechenzeit von unter einer Minute einen geheimen Schlüssel vereinbaren, dessen Entschlüsselung auf derselben Maschine beim gegenwärtigen Stand der veröffentlichten Forschung Millionen von Jahren bräuchte. Allerdings ist auch wieder nicht bewiesen, daß es etwa Fall der Einheitengruppe eines großen Primkörpers nicht doch einen effizienten Algorithmus zur Lösung des Diffie-Hellman-Problems geben könnte. Wenn wir Pech haben, sind die mathematischen Abteilungen irgendwelcher Geheimdienste

schon längst so weit.

Vorschau 3.5.2.29. Statt mit der Einheitengruppe endlicher Körper arbeitet man in der Praxis auch oft mit sogenannten „elliptischen Kurven“ alias Lösungsmengen kubischer Gleichungen, deren Gruppengesetz Sie in einer Vorlesung über algebraische Geometrie kennenlernen können.

Definition 3.5.2.30. Gegeben ein Ring R gibt es nach 3.5.1.10 genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$. Dessen Kern alias das Urbild der Null ist nach 2.2.3.24 eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ und hat nach 3.4.3.4 folglich die Gestalt $m\mathbb{Z}$ für genau ein $m \in \mathbb{N}$. Diese natürliche Zahl m nennt man die **Charakteristik des Rings** R und notiert sie $m = \operatorname{char} R$.

3.5.2.31 (**Bestimmung der Charakteristik eines Rings**). Um die Charakteristik eines Rings R zu bestimmen, müssen wir anders gesagt sein Einselement $1 \in R$ nehmen und bestimmen, wiewiele Summanden wir mindestens brauchen, damit gilt $1 + 1 + \ldots + 1 = 0$ mit einer positiven Zahl von Summanden links. Kriegen wir da überhaupt nie Null heraus, so ist die Charakteristik Null, wir haben also etwa $\operatorname{char} \mathbb{Z} = \operatorname{char} \mathbb{Q} = \operatorname{char} \mathbb{R} = \operatorname{char} \mathbb{C} = 0$. Gilt bereits $1 = 0$, so ist die Charakteristik 1 und wir haben den Nullring vor uns. Für $p \in \mathbb{N}$ gilt allgemein $\operatorname{char}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p$.

3.5.2.32 (**Die Charakteristik eines Körpers ist stets prim**). Es ist leicht zu sehen, daß die Charakteristik eines Körpers, wenn sie nicht Null ist, stets eine Primzahl sein muß: Da der Nullring kein Körper ist, kann die Charakteristik nicht 1 sein. Hätten wir aber einen Körper der Charakteristik $m = ab > 0$ mit natürlichen Zahlen $a < m$ und $b < m$, so wären die Bilder von a und b in unserem Körper von Null verschiedene Elemente mit Produkt Null. Widerspruch!

Ergänzung 3.5.2.33. Im Körper $\mathbb{F}_7$ ist (-1) kein Quadrat, wie man durch Ausprobieren schnell prüft. Einen Körper mit 49 Elementen kann man deshalb nach 2.2.4.15 zum Beispiel erhalten, indem man analog wie bei der Konstruktion der komplexen Zahlen aus den reellen Zahlen formal eine Wurzel aus (-1) adjungiert.

Übungen

Ergänzende Übung 3.5.2.34. Gegeben eine abelsche Gruppe V und ein Körper K induziert die kanonische Identifikation $\operatorname{Ens}(K \times V, V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ens}(K, \operatorname{Ens}(V, V))$ aus 2.1.6.5 eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Strukturen als } K\text{-Vektorraum} \\ \text{auf der abelschen Gruppe } V \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Ringhomomorphismen} \\ K \to \operatorname{Ab} V \end{array} \right\}$$

Wir verwenden hier unsere alternative Notation $\operatorname{Ab} V$ für den Endomorphismenring der abelschen Gruppe V, um jede Verwechslung mit dem Endomorphismenring als Vektorraum auszuschließen.

Übung 3.5.2.35. Man finde das multiplikative Inverse der Nebenklasse von 22 im Körper $\mathbb{F}_{31}$. Hinweis: Euklidischer Algorithmus.

Ergänzende Übung 3.5.2.36. Man konstruiere einen Körper mit 49 Elementen und einen Körper mit 25 Elementen. Hinweis: 2.2.4.14 und 2.2.4.15.

Ergänzende Übung 3.5.2.37. Sei R ein Kring, dessen Charakteristik eine Primzahl p ist, für den es also einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to R$ gibt. Man zeige, daß dann der sogenannte **Frobenius-Homomorphismus** $F : R \to R, a \mapsto a^p$ ein Ringhomomorphismus von R in sich selber ist. Hinweis: Man verwende, daß die binomische Formel 2.2.4.9 offensichtlich in jedem Kring gilt, ja sogar für je zwei Elemente a, b eines beliebigen Rings mit $ab = ba$.

Ergänzende Übung 3.5.2.38. Wieviele Untergruppen hat die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? Wieviele Untergruppen hat die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

Ergänzende Übung 3.5.2.39. Eine natürliche Zahl ist durch 11 teilbar genau dann, wenn ihre „alternierende Quersumme“ durch 11 teilbar ist.

Ergänzende Übung 3.5.2.40. Eine natürliche Zahl, die kongruent zu sieben ist modulo acht, kann nicht eine Summe von drei Quadraten sein.

Ergänzende Übung 3.5.2.41. Eine Zahl mit einer Dezimaldarstellung der Gestalt $abcabc$ wie zum Beispiel 349349 ist stets durch 7 teilbar.

Ergänzende Übung 3.5.2.42. Es kann in Ringen durchaus Elemente a geben, für die es zwar ein b gibt mit $ba = 1$ aber kein c mit $ac = 1$: Man denke etwa an Endomorphismenringe unendlichdimensionaler Vektorräume. Wenn es jedoch b und c gibt mit $ba = 1$ und $ac = 1$, so folgt bereits $b = c$ und a ist eine Einheit.

Übung 3.5.2.43. Jeder Ringhomomorphismus macht Einheiten zu Einheiten. Jeder Ringhomomorphismus von einem Körper in einen vom Nullring verschiedenen Ring ist injektiv.

Übung 3.5.2.44. Sei p eine Primzahl. Eine abelsche Gruppe G kann genau dann mit der Struktur eines $\mathbb{F}_p$-Vektorraums versehen werden, wenn in additiver Notation gilt $pg = 0$ für alle $g \in G$, und die fragliche Vektorraumstruktur ist dann durch die Gruppenstruktur eindeutig bestimmt.

Ergänzende Übung 3.5.2.45. Wieviele Untervektorräume hat ein zweidimensionaler Vektorraum über einem Körper mit fünf Elementen? Wieviele angeordnete Basen?

Ergänzende Übung 3.5.2.46. Gegeben ein Vektorraum über einem endlichen Primkörper sind seine Untervektorräume genau die Untergruppen der zugrundeliegenden abelschen Gruppe.

Ergänzende Übung 3.5.2.47. Man zeige: In jedem endlichen Körper ist das Produkt aller von Null verschiedenen Elemente (-1). Hinweis: Man zeige zunächst,

daß nur die Elemente ± 1 ihre eigenen Inversen sind. Als Spezialfall erhält man die Kongruenz $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ für jede Primzahl p. Diese Aussage wird manchmal auch als **Satz von Wilson** zitiert. Ist $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ keine Primzahl, so zeigt man im übrigen leicht $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.

Übung 3.5.2.48. Gegeben $m \geq 1$ sind die Einheiten des Restklassenrings $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ genau die Restklassen derjenigen Zahlen a mit $0 \leq a < m$, die zu m teilerfremd sind, in anderen Worten die primen Restklassen. In Formeln haben wir also $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times = \{\bar{a} \mid 0 \leq a < m,\ \langle m, a\rangle = \langle 1\rangle\}$. Hinweis: 3.4.4.12.

Übung 3.5.2.49. Man zeige für Binomialkoeffizienten im Körper $\mathbb{F}_p$ die Identität $\binom{p-1}{i} = (-1)^i$.

3.5.3 Polynome

3.5.3.1. Ist R ein Ring, so bildet die Menge $R[X]$ aller „formalen Ausdrücke“ der Gestalt $a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ mit $a_i \in R$ unter der offensichtlichen Addition und Multiplikation einen Ring, den **Polynomring über R in einer Variablen X**, und wir haben eine offensichtliche Einbettung $\mathrm{can} : R \hookrightarrow R[X]$. Die Herkunft der Bezeichnung diskutieren wir in 10.3.2.37. Die a_ν heißen in diesem Zusammenhang die **Koeffizienten** unseres Polynoms, genauer heißt a_ν der **Koeffizient von** X^ν. Das X heißt die **Variable** unseres Polynoms und kann auch schon mal mit einem anderen Buchstaben bezeichnet werden. Besonders gebräuchlich sind hierbei Großbuchstaben vom Ende des Alphabets. Diese Beschreibung des Polynomrings ist hoffentlich verständlich, sie ist aber nicht so exakt, wie eine Definition es sein sollte. Deshalb geben wir auch noch eine exakte Variante.

Definition 3.5.3.2. Sei R ein Ring. Wir bezeichnen mit $R[X]$ die Menge aller Abbildungen $\varphi : \mathbb{N} \to R$, die nur an endlich vielen Stellen von Null verschiedene Werte annehmen, und definieren auf $R[X]$ eine Addition und eine Multiplikation durch die Regeln

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(n) &:= \varphi(n) + \psi(n) \\ (\varphi \cdot \psi)(n) &:= \textstyle\sum_{i+j=n} \varphi(i)\psi(j) \end{aligned}$$

Mit diesen Verknüpfungen wird $R[X]$ ein Ring, der **Polynomring über** R. Ordnen wir jedem $a \in R$ die Abbildung $\mathbb{N} \to R$ zu, die bei 0 den Wert a annimmt und sonst den Wert Null, so erhalten wir eine Einbettung, ja einen injektiven Ringhomomorphismus

$$\mathrm{can} : R \hookrightarrow R[X]$$

Wir notieren ihn schlicht $a \mapsto a$ und nennen die Polynome im Bild dieser Einbettung **konstante Polynome**. Bezeichnen wir weiter mit X die Abbildung $\mathbb{N} \to R$, die bei 1 den Wert 1 annimmt und sonst nur den Wert Null, so können wir jede

Abbildung $\varphi \in R[X]$ eindeutig schreiben in der Form $\varphi = \sum_\nu \varphi(\nu) X^\nu$ und sind auf einem etwas formaleren Weg wieder am selben Punkt angelangt.

Ergänzung 3.5.3.3. Im Fall eines Körpers K ist insbesondere $K[X]$ als Gruppe per definitionem der freie K-Vektorraum $K[X] := K\langle\mathbb{N}\rangle$ über der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.

3.5.3.4. Die wichtigste Eigenschaft eines Polynomrings ist, daß man „für die Variable etwas einsetzen darf". Das wollen wir nun formal aufschreiben.

Proposition 3.5.3.5 (Einsetzen in Polynome). *Seien R ein Kring und $b \in R$ ein Element. So gibt es genau einen Ringhomomorphismus*

$$\mathrm{E}_b : R[X] \to R$$

mit $\mathrm{E}_b(X) = b$ und $\mathrm{E}_b \circ \mathrm{can} = \mathrm{id}_R$. Wir nennen E_b den **Einsetzungshomomorphismus zu** b.

Beweis. Dieser eindeutig bestimmte Ringhomomorphismus E_b ist eben gegeben durch die Vorschrift $\mathrm{E}_b(a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0) = a_n b^n + \ldots + a_1 b + a_0$. □

3.5.3.6. Es ist üblich, das Bild unter dem Einsetzungshomomorphismus E_b eines Polynoms $P \in R[X]$ abzukürzen als

$$P(b) := \mathrm{E}_b(P)$$

Ich verwende später meist die Notation $\mathrm{E}_b = \delta_b$, die die Interpretation als „Dirac-Maß" anklingen läßt.

3.5.3.7. Unsere übliche Darstellung einer Zahl in Ziffernschreibweise läuft darauf hinaus, die Koeffizienten eines Polynoms anzugeben, das an der Stelle 10 die besagte Zahl als Wert ausgibt, also etwa $7258 = P(10)$ für $P(X)$ das Polynom $7X^3 + 2X^2 + 5X + 8$.

3.5.3.8. Es geht auch noch allgemeiner, man darf etwa über einem Körper auch quadratische Matrizen in Polynome einsetzen. Um das zu präzisieren, vereinbaren wir die Sprechweise, daß zwei Elemente b und c eines Rings **kommutieren**, wenn gilt $bc = cb$. Das bedeutet also, daß sie in Bezug auf die Multiplikation kommutieren im Sinne von 2.2.1.7.

Proposition 3.5.3.9 (Einsetzen in Polynome, Variante). *Seien $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $b \in S$ ein Element derart, daß b für alle $a \in R$ mit $\varphi(a)$ kommutiert. So gibt es genau einen Ringhomomorphismus*

$$\mathrm{E}_{\varphi,b} = \mathrm{E}_b : R[X] \to S$$

mit $\mathrm{E}_b(X) = b$ und $\mathrm{E}_b \circ \mathrm{can} = \varphi$. Wir nennen $\mathrm{E}_{\varphi,b}$ den **Einsetzungshomomorphismus zu** b **über** φ.

Beweis. Dieser eindeutig bestimmte Ringhomomorphismus E_b ist gegeben durch die Vorschrift $\mathrm{E}_b(a_nX^n+\ldots+a_1X+a_0) := \varphi(a_n)b^n+\ldots+\varphi(a_1)b+\varphi(a_0)$. $\square$

3.5.3.10. Es ist auch in dieser Allgemeinheit üblich, das Bild unter dem Einsetzungshomomorphismus $\mathrm{E}_{\varphi,b}$ eines Polynoms $P \in R[X]$ abzukürzen als

$$P(b) := \mathrm{E}_{\varphi,b}(P)$$

So schreiben wir im Fall eines Krings R zum Beispiel $P(A)$ für die Matrix, die beim Einsetzen einer quadratischen Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n;R)$ in das Polynom P ensteht. In diesem Fall hätten wir $S = \mathrm{Mat}(n;R)$ und φ wäre der Ringhomomorphismus, der jedem $a \in R$ das a-fache der Einheitsmatrix zuordnet.

3.5.3.11 (**Wechsel der Koeffizienten**). Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so erhalten wir einen Ringhomomorphismus $\varphi = \varphi_{[X]} : R[X] \to S[X]$ der zugehörigen Polynomringe durch das „Anwenden von φ auf die Koeffizienten“. Formal können wir ihn als das „Einsetzen von X für X über φ“ beschreiben, also als den Ringhomomorphismus $\varphi_{[X]} = \mathrm{E}_{\varphi,X}$.

Definition 3.5.3.12. Seien R ein Kring und $P \in R[X]$ ein Polynom. Ein Element $a \in R$ heißt eine **Nullstelle** oder auch eine **Wurzel** von P, wenn gilt $P(a) = 0$.

Definition 3.5.3.13. Sei R ein Ring. Jedem Polynom $P \in R[X]$ ordnen wir seinen **Grad** $\operatorname{grad} P \in \mathbb{N} \sqcup \{-\infty\}$ (englisch **degree**, französisch **degré**) durch die Vorschrift

$$\begin{array}{ll} \operatorname{grad} P = n & \text{für } P = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0 \text{ mit } a_n \neq 0; \\ \operatorname{grad} P = -\infty & \text{für } P \text{ das Nullpolynom.} \end{array}$$

Für ein von Null verschiedenes Polynom $P = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$ mit $n = \operatorname{grad} P$ nennt man $a_n \in R\backslash 0$ seinen **Leitkoeffizienten**. Den Leitkoeffizienten des Nullpolynoms erklären wir als die Null von R. Ein Polynom heißt **normiert**, wenn sein Leitkoeffizient 1 ist. Das Nullpolynom ist demnach nur über dem Nullring normiert, hat aber auch dort den Grad $-\infty$. Auf Englisch heißen unsere normierten Polynome **monic polynomials**. Ein Polynom vom Grad Eins heißt **linear**, ein Polynom vom Grad Zwei **quadratisch**, ein Polynom vom Grad Drei **kubisch**.

Lemma 3.5.3.14 (Grad eines Produkts). *Ist R ein Integritätsring, so ist auch der Polynomring $R[X]$ ein Integritätsring und der Grad eines Produkts ist die Summe der Grade der Faktoren, in Formeln*

$$\operatorname{grad}(PQ) = \operatorname{grad} P + \operatorname{grad} Q$$

Beweis. Ist R ein Integritätsring, so ist offensichtlich der Leitkoeffizient von PQ das Produkt der Leitkoeffizienten von P und von Q. $\square$

Lemma 3.5.3.15 (Polynomdivision mit Rest). *Sei R ein Ring. Gegeben Polynome $P, Q \in R[X]$ mit Q normiert gibt es eindeutig bestimmte Polynome A, B mit $P = AQ + B$ und* $\operatorname{grad} B \leq (\operatorname{grad} Q) - 1$.

Beispiel 3.5.3.16. Die Polynomdivision mit Rest des Polynoms $X^4 + 2X^2$ durch $X^2 + 2X + 1$ liefert

$$\begin{aligned} X^4 + 2X^2 &= X^2(X^2 + 2X + 1) - 2X^3 + X^2 \\ &= X^2(X^2 + 2X + 1) - 2X(X^2 + 2X + 1) + 5X^2 + 2X \\ &= (X^2 - 2X + 5)(X^2 + 2X + 1) - 8X - 5 \end{aligned}$$

Beweis. Ich habe mir bei der Formulierung des Lemmas Mühe gegeben, daß es auch im Fall des Nullrings $R = 0$ richtig ist, wenn wir $-\infty - 1 = -\infty$ verstehen. Für den Beweis dürfen wir damit annehmen, daß R nicht der Nullring ist. Wir suchen ein Polynom A mit $\operatorname{grad}(P - AQ)$ kleinstmöglich. Gälte dennoch $\operatorname{grad}(P - AQ) \geq (\operatorname{grad}(Q))$, sagen wir $B := P - AQ = aX^r + \ldots + c$ mit $a \neq 0$ und $r > d = \operatorname{grad}(Q)$, so hätte $P - (A + aX^{r-d})Q$ echt kleineren Grad als B, im Widerspruch zur Wahl von A. Das zeigt die Existenz. Für den Nachweis der Eindeutigkeit gehen wir aus von einer weiteren Gleichung $P = A'Q + B'$ mit $\operatorname{grad} B' < d$. Es folgt zunächst $(A - A')Q = B' - B$ und wegen der offensichtlichen Formel für den Grad des Produkts eines beliebigen Polynoms mit einem normierten Polynom weiter $A - A' = 0$ und dann auch $B' - B = 0$. □

Korollar 3.5.3.17 (Abspalten von Linearfaktoren bei Nullstellen). *Sei R ein Ring und $P \in R[X]$ ein Polynom. Genau dann ist $\lambda \in R$ eine Nullstelle von P, wenn das Polynom $(X - \lambda)$ das Polynom P teilt, in Formeln*

$$P(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; (X - \lambda)|P$$

Beweis. Nach Lemma 3.5.3.15 über die Division mit Rest finden wir ein Polynom $A \in R[X]$ und eine Konstante $b \in R$ mit $P = A(X - \lambda) + b$. Einsetzen von λ für X liefert dann $b = 0$. □

3.5.3.18. Der im Sinne von 3.5.3.13 lineare Faktor $(X - \lambda)$ unseres Polynoms heißt auch ein **Linearfaktor**, daher der Name des Korollars.

Satz 3.5.3.19 (Zahl der Nullstellen eines Polynoms). *Ist K ein Körper oder allgemeiner ein kommutativer Integritätsring, so hat ein von Null verschiedenes Polynom $P \in K[X]$ höchstens* $\operatorname{grad} P$ *Nullstellen in K.*

Beweis. Ist $\lambda \in K$ eine Nullstelle, so finden wir nach 3.5.3.17 eine Darstellung $P = A(X - \lambda)$ mit $\operatorname{grad} A = \operatorname{grad} P - 1$. Eine von λ verschiedene Nullstelle von P ist für K ein Integritätsring notwendig eine Nullstelle von A und der Satz folgt mit Induktion. □

Beispiel 3.5.3.20. In einem Körper K oder allgemeiner einem kommutativer Integritätsring gibt es zu jedem Element $b \in K$ höchstens zwei Elemente $a \in K$ mit $a^2 = b$. Ist nämlich a eine Lösung dieser Gleichung, so gilt $X^2 - b = (X - a)(X + a)$, und wenn wir da für X etwas von $\pm a$ Verschiedenes einsetzen, kommt sicher nicht Null heraus.

Ergänzung 3.5.3.21. Die Kommutativität ist hierbei wesentlich. In 3.5.6.4 werden wir den sogenannten „Schiefkörper der Quaternionen“ einführen, einen Ring, der außer der Kommutativität der Multiplikation alle unsere Körperaxiome erfüllt. In diesem Ring hat die Gleichung $X^2 = -1$ dann offensichtlich die sechs Lösungen $\pm\,\mathrm{i}$, $\pm\,\mathrm{j}$, $\pm\,\mathrm{k}$ und nicht ganz so offensichtlich 22.1.6.9 sogar unendlich viele Lösungen.

3.5.3.22. Ist K ein Körper oder allgemeiner ein Kring, $P \in K[X]$ ein Polynom und $\lambda \in K$ eine Nullstelle von P, so nennen wir das Supremum über alle $n \in \mathbb{N}$ mit $(X - \lambda)^n | P$ die **Vielfachheit der Nullstelle** λ oder auch ihre **Ordnung**. Das Nullpolynom hat insbesondere an jeder Stelle eine Nullstelle der Vielfachheit ∞ und gar keine Nullstelle bei λ ist dasselbe wie eine „Nullstelle der Vielfachheit Null“. Durch Abspalten von Nullstellen wie in 3.5.3.17 zeigt man, daß im Fall eines Körpers oder allgemeiner eines kommutativen Integritätsrings auch die Zahl der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen eines von Null verschiedenen Polynoms beschränkt ist durch seinen Grad.

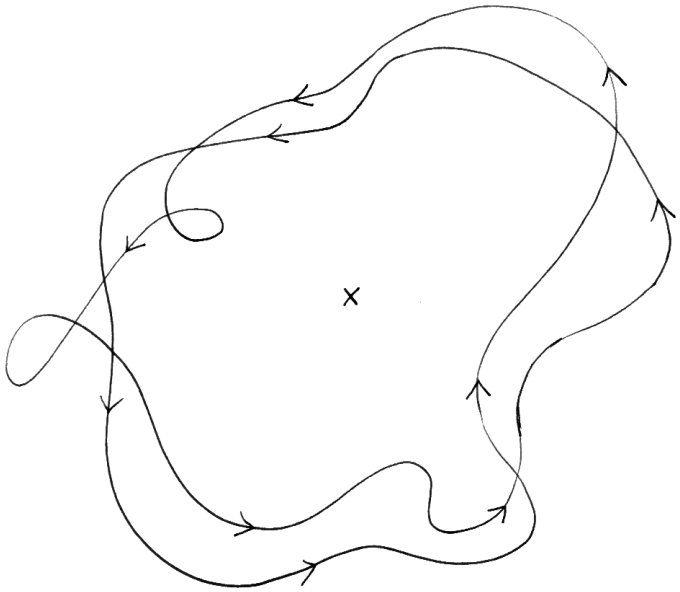
Definition 3.5.3.23. Ein Körper K heißt **algebraisch abgeschlossen**, wenn jedes nichtkonstante Polynom $P \in K[X] \backslash K$ mit Koeffizienten in unserem Körper K eine Nullstelle in unserem Körper K hat.

Beispiel 3.5.3.24. Der Körper $K = \mathbb{R}$ ist nicht algebraisch abgeschlossen, denn das Polynom $X^2 + 1$ hat keine reelle Nullstelle.

Vorschau 3.5.3.25. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen. Das ist die Aussage des sogenannten **Fundamentalsatzes der Algebra**, für den wir mehrere Beweise geben werden: Einen besonders elementaren Beweis nach Argand in der Analysis in 10.5.1.7, einen sehr eleganten mit den Methoden der Funktionentheorie in 14.3.1.8, und einen mehr algebraischen Beweis, bei dem die Analysis nur über den Zwischenwertsatz eingeht, in 6.4.3.8. Mir selbst gefällt der noch wieder andere Beweis mit den Mitteln der Topologie 16.1.7.16 am besten, da er meine Anschauung am meisten anspricht. Er wird in analytischer Verkleidung bereits in 12.7.8.17 vorgeführt. Eine heuristische Begründung wird in nebenstehendem Bild gegeben.

Satz 3.5.3.26. *Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper, so hat jedes von Null verschiedene Polynom $P \in K[X] \backslash 0$ eine* **Zerlegung in Linearfaktoren** *der Gestalt*

$$P = c(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$$



Heuristische Begründung für den Fundamentalsatz der Algebra. Ein Polynom n-ten Grades wird eine sehr große Kreislinie in der komplexen Zahlenebene mit Zentrum im Ursprung abbilden auf einen Weg in der komplexen Zahlenebene, der „den Ursprung n-mal umläuft“. Angedeutet ist etwa das Bild einer sehr großen Kreislinie unter einem Polynom vom Grad Zwei. Schrumpfen wir nun unsere sehr große Kreislinie zu immer kleineren Kreislinien bis auf einen Punkt, so schrumpfen auch diese Wege zu einem konstanten Weg zusammen. Unsere n-fach um einen etwa am Ursprung aufgestellten Pfahl laufende Seilschlinge kann jedoch offensichtlich nicht auf einen Punkt zusammengezogen werden, ohne daß wir sie über den Pfahl heben, anders gesagt: Mindestens eines der Bilder dieser kleineren Kreislinien muß durch den Ursprung laufen, als da heißt, unser Polynom muß auf mindestens einer dieser kleineren Kreislinien eine Nullstelle habe. In 12.7.8.20 oder besser 16.1.7.16 werden wir diese Heuristik zu einem formalen Beweis ausbauen.

mit $n \geq 0$, $c \in K^\times$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Darüber hinaus ist diese Zerlegung eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren.

3.5.3.27. Gegeben eine Nullstelle μ von P ist in diesem Fall die Zahl der Indizes i mit $\lambda_i = \mu$ die Vielfachheit der Nullstelle μ. In der Sprache der Multimengen aus 2.1.6.8 erhalten wir für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper K eine Bijektion zwischen der Menge aller „endlichen Multimengen von Elementen von K“ und der Menge aller normierten Polynome mit Koeffizienten in K, indem wir einer Multimenge ${}_\mu\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ das Polynom $(X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$ zuordnen.

Beweis. Ist P ein konstantes Polynom, so ist nichts zu zeigen. Ist P nicht konstant, so gibt es nach Annahme eine Nullstelle $\lambda \in K$ von P und wir finden genau ein Polynom $\tilde{P}$ mit $P = (X - \lambda)\tilde{P}$. Der Satz folgt durch vollständige Induktion über den Grad von P. □

Korollar 3.5.3.28 (**Faktorisierung reeller Polynome**). *Jedes von Null verschiedene Polynom P mit reellen Koeffizienten besitzt eine Zerlegung in Faktoren der Gestalt*

$$P = c(X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_r)(X^2 + \mu_1 X + \nu_1) \ldots (X^2 + \mu_s X + \nu_s)$$

mit $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_s, \nu_1, \ldots, \nu_s \in \mathbb{R}$ derart, daß die quadratischen Faktoren keine reellen Nullstellen haben. Diese Zerlegung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren.

Beweis. Da unser Polynom invariant ist unter der komplexen Konjugation, müssen sich seine mit ihren Vielfachheiten genommenen komplexen Nullstellen so durchnummerieren lassen, daß $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ reell sind und daß eine gerade Zahl nicht reeller Nullstellen übrigbleibt mit $\lambda_{r+2t-1} = \bar{\lambda}_{r+2t}$ für $1 \leq t \leq s$ und $r, s \geq 0$. Die Produkte $(X - \lambda_{r+2t-1})(X - \lambda_{r+2t})$ haben dann reelle Koeffizienten, da sie ja invariant sind unter der komplexen Konjugation, haben jedoch keine reellen Nullstellen. □

Vorschau 3.5.3.29. In der Algebra 6.2.4.1 können Sie lernen, inwiefern sowohl die vorhergehenden Aussagen über die Faktorisierung von Polynomen als auch die Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen Spezialfälle eines allgemeinen Satzes über die „Faktorialität euklidischer Ringe“ sind.

3.5.3.30 (**Polynomringe in mehreren Variablen**). Ähnlich wie den Polynomring in einer Variablen 3.5.3.2 konstruiert man auch Polynomringe in mehr Variablen über einem gegebenen Grundring R. Ist die Zahl der Variablen endlich, so kann man induktiv definieren

$$R[X_1, \ldots, X_n] = (R[X_1, \ldots, X_{n-1}])[X_n]$$

Man kann aber auch für eine beliebige Menge I den Polynomring $R[X_i]_{i\in I}$ bilden als die Menge aller „endlichen formalen Linearkombinationen mit Koeffizienten aus R von endlichen Monomen in den X_i“. Ich verzichte an dieser Stelle auf eine formale Definition.

Ergänzung 3.5.3.31. Bei Hochster kann man ein Beispiel für nichtisomorphe kommutative Ringe $A \ncong B$ finden, deren Polynomringe in einer Variablen doch isomorph sind, $A[T] \cong B[T]$. Die Konstruktion eines derartigen Beispiels ist aber bereits höhere Mathematik und für uns an dieser Stelle nicht relevant.

Übungen

Übung 3.5.3.32. Welche Matrix entsteht beim Einsetzen der quadratischen Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ in das Polynom $X^2 + 1$?

Ergänzende Übung 3.5.3.33. Man zeige, daß jede Nullstelle $\alpha \in \mathbb{C}$ eines normierten Polynoms mit komplexen Koeffizienten $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ die Abschätzung $|\alpha| \leq 1 + |a_{n-1}| + \ldots + |a_0|$ erfüllt. Hinweis: Sonst gilt erst $|\alpha| > 1$ und dann $|\alpha|^n > |a_{n-1}\alpha^{n-1}| + \ldots + |a_0|$. Umgekehrt zeige man auch, daß aus der Abschätzung $|\alpha| \leq C$ für alle komplexen Wurzeln die Abschätzung $|a_k| \leq \binom{n}{k} C^{n-k}$ für die Koeffizienten folgt.

Übung 3.5.3.34. Ist $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $\mu \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, so gilt $P(\mu) = 0 \Rightarrow P(\bar{\mu}) = 0$. Ist also eine komplexe Zahl Nullstelle eines Polynoms mit reellen Koeffizienten, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl eine Nullstelle desselben Polynoms.

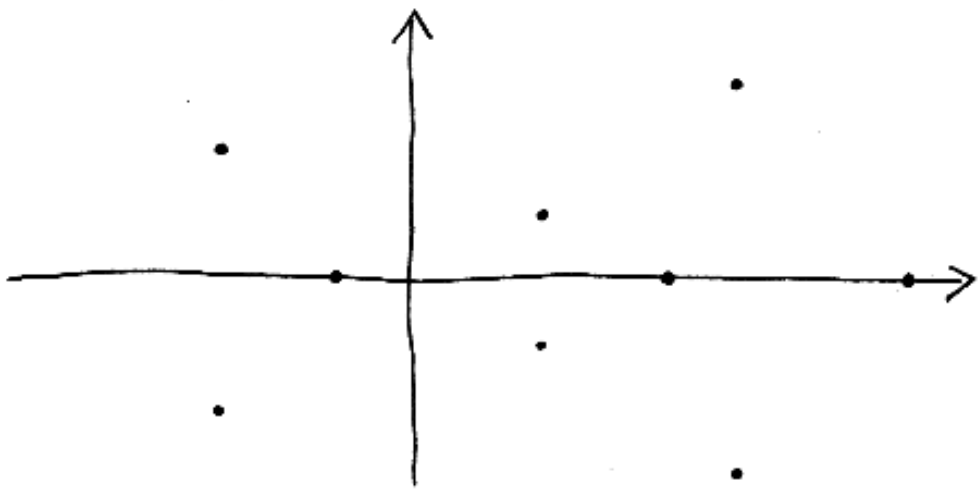
Ergänzende Übung 3.5.3.35. Seien k, K kommutative Ringe, $i : k \to K$ ein Ringhomomorphismus und $i : k[X] \to K[X]$ der induzierten Ringhomomorphismus zwischen den zugehörigen Polynomringen. Man zeige: Ist $\lambda \in k$ eine Nullstelle eines Polynoms $P \in k[X]$, so ist $i(\lambda) \in K$ eine Nullstelle des Polynoms $i(P)$.

Ergänzende Übung 3.5.3.36. Ist K ein Integritätsbereich, so induziert die kanonische Einbettung $K \hookrightarrow K[X]$ auf den Einheitengruppen eine Bijektion $K^\times \xrightarrow{\sim} K[X]^\times$. Im Ring $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$ aber ist etwa auch $\bar{1} + \bar{2}X$ eine Einheit.

Übung 3.5.3.37. Man zeige, daß es in einem endlichen Körper $\mathbb{F}$ einer von 2 verschiedenen Charakteristik genau $(|\mathbb{F}| + 1)/2$ Quadrate gibt, wohingegen in einem endlichen Körper der Charakteristik 2 jedes Element das Quadrat eines weiteren Elements ist.

Übung 3.5.3.38. Man zerlege das Polynom $X^4 + 2$ in $\mathbb{R}[X]$ in der in 3.5.3.28 beschriebenen Weise in ein Produkt quadratischer Faktoren ohne Nullstelle.

Ergänzende Übung 3.5.3.39. Ein reelles Polynom hat bei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine mehrfache Nullstelle genau dann, wenn auch seine Ableitung bei λ verschwindet.



Die komplexen Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten, die nicht reell sind, tauchen immer in Paaren aus einer Wurzel und ihrer komplex Konjugierten auf, vergleiche auch Übung 3.5.3.34.

Ergänzende Übung 3.5.3.40. Gegeben ein reelles Polynom, dessen komplexe Nullstellen bereits sämtlich reell sind, ist jede Nullstelle seiner Ableitung reell und wenn sie keine Nullstelle der Funktion selbst ist, eine einfache Nullstelle der Ableitung. Hinweis: Zwischen je zwei Nullstellen unserer Funktion muß mindestens eine Nullstelle ihrer Ableitung liegen.

Ergänzende Übung 3.5.3.41. Man zeige: Die rationalen Nullstellen eines normierten Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten $P \in \mathbb{Z}[X]$ sind bereits alle ganz. In Formeln folgt aus $P(\lambda) = 0$ für $\lambda \in \mathbb{Q}$ also bereits $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Ergänzende Übung 3.5.3.42. Gegeben ein Ring R bilden auch die **formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in** R der Gestalt $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ mit $a_n \in R$ einen Ring, der meist $R[\![X]\!]$ notiert wird. Man gebe eine exakte Definition dieses Rings und zeige, daß seine Einheiten genau diejenigen Potenzreihen sind, deren konstanter Term eine Einheit in R ist, in Formeln

$$R[\![X]\!]^\times = R^\times + XR[\![X]\!]$$

Man verallgemeinere die Definition und Beschreibung der Einheiten auf Potenzreihenringe $R[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ in mehreren Variablen und konstruiere einen Ringisomorphismus

$$(R[\![X_1, \ldots, X_n]\!])[\![X_{n+1}]\!] \xrightarrow{\sim} R[\![X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}]\!]$$

Ergänzende Übung 3.5.3.43. Gegeben ein Ring R bilden auch die **formalen Laurentreihen mit Koeffizienten in** R der Gestalt $\sum_{n \geq -N} a_n X^n$ mit $a_n \in R$ und $N \in \mathbb{N}$ einen Ring, der meist $R(\!(X)\!)$ notiert wird. Man gebe eine exakte Definition dieses Rings und zeige, daß im Fall $R \neq 0$ seine Einheiten genau diejenigen von Null verschiedenen Reihen sind, bei denen der Koeffizient der kleinsten mit von Null verschiedenem Koeffizienten auftauchenden Potenz von X eine Einheit in R ist, in Formeln

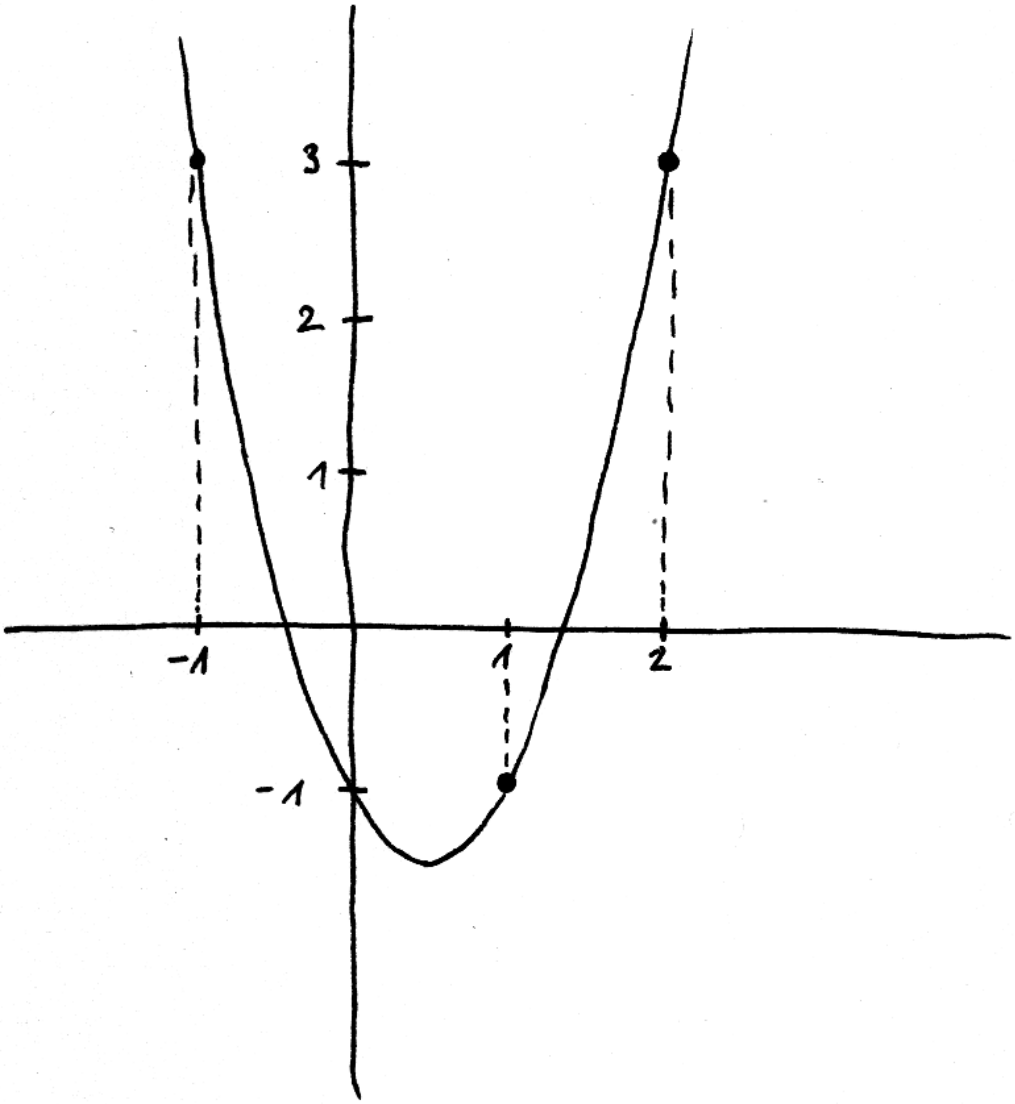
$$R(\!(X)\!)^\times = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} X^n R[\![X]\!]^\times$$

Insbesondere ist im Fall eines Körpers K auch $K(\!(X)\!)$ ein Körper.

Ergänzung 3.5.3.44. Wir verwenden hier die Terminologie, nach der bei **formalen Laurentreihen** im Gegensatz zu den Laurentreihen der Funktionentheorie nur endlich viele Terme mit negativen Exponenten erlaubt sind.

3.5.4 Polynome als Funktionen*

Lemma 3.5.4.1 (Interpolation durch Polynome). *Seien K ein Körper und $x_0, \ldots, x_n \in K$ paarweise verschiedene* **Stützstellen** *und $y_0, \ldots, y_n \in K$ beliebig vorgegebene Werte. So gibt es genau ein Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n$ mit $P(x_0) = y_0, \ldots, P(x_n) = y_n$.*



Das Polynom $P(X) = 2X^2 - 2X - 1$ mit reellen Koeffizienten, das die an den Stützstellen $-1, 1, 2$ vorgegebenen Werte $3, -1, 3$ interpoliert.

Beweis. Zunächst ist sicher $(X - x_1) \dots (X - x_n) =: A_0(X)$ ein Polynom vom Grad n, das bei $x_1, \dots, x_n$ verschwindet und an allen anderen Stellen von Null verschieden ist, insbesondere auch bei x_0. Dann ist $L_0(X) := A_0(X)/A_0(x_0)$ ein Polynom vom Grad n, das bei x_0 den Wert Eins annimmt und bei $x_1, \dots, x_n$ verschwindet. In derselben Weise konstruieren wir auch Polynome $L_1(X), \dots, L_n(X)$ und erhalten ein mögliches Interpolationspolynom als

$$P(X) = y_0 L_0(X) + \dots + y_n L_n(X) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\prod_{j \neq i}(X - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$$

Das zeigt die Existenz. Ist Q eine weitere Lösung derselben Interpolationsaufgabe vom Grad $\leq n$, so ist $P - Q$ ein Polynom vom Grad $\leq n$ mit $n + 1$ Nullstellen, eben bei den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$. Wegen 3.5.3.19 muß dann aber $P - Q$ das Nullpolynom sein, und das zeigt die Eindeutigkeit. □

3.5.4.2. Um die bisher eingeführten algebraischen Konzepte anschaulicher zu machen, will ich sie in Bezug setzen zu geometrischen Konzepten. Ist K ein Kring, so können wir jedem Polynom $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ die Funktion $\tilde{f} : K^n \to K$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ zuordnen. Wir erhalten so einen Ringhomomorphismus

$$K[X_1, \dots, X_n] \to \mathrm{Ens}(K^n, K)$$

Dieser Homomorphismus ist im Allgemeinen weder injektiv noch surjektiv. Schon für $n = 1$, $K = \mathbb{R}$ läßt sich ja keineswegs jede Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch ein Polynom beschreiben, also ist sie in diesem Fall nicht surjektiv. Im Fall eines endlichen Körpers K kann weiter für $n \geq 1$ unsere K-lineare Auswertungsabbildung vom unendlichdimensionalen K-Vektorraum $K[X_1, \dots, X_n]$ in den endlichdimensionalen K-Vektorraum $\mathrm{Ens}(K^n, K)$ unmöglich injektiv sein. Wir haben jedoch den folgenden Satz.

Satz 3.5.4.3 (Polynome als Funktionen). *1. Ist K ein unendlicher Körper, ja allgemeiner ein unendlicher Integritätskring, so ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Auswertungsabbildung eine Injektion $K[X_1, \dots, X_n] \hookrightarrow \mathrm{Ens}(K^n, K)$;*

2. Ist K ein endlicher Körper, so ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Auswertungsabbildung eine Surjektion $K[X_1, \dots, X_n] \twoheadrightarrow \mathrm{Ens}(K^n, K)$. Den Kern dieser Surjektion beschreibt Übung 4.4.3.19.

Beweis. 1. Durch Induktion über n. Der Fall $n = 0$ ist eh klar. Für $n = 1$ folgt die Behauptung aus der Erkenntnis, das jedes von Null verschiedene Polynom in $K[X]$ nur endlich viele Nullstellen in K haben kann. Der Kern der Abbildung

$$K[X] \to \mathrm{Ens}(K, K)$$

besteht also nur aus dem Nullpolynom. Für den Induktionsschritt setzen wir $X_n = Y$ und schreiben unser Polynom in der Gestalt

$$P = a_d Y^d + \ldots + a_1 Y + a_0$$

mit $a_i \in K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$. Halten wir $(x_1, \ldots, x_{n-1}) = x \in K^{n-1}$ fest, so ist $a_d(x)Y^d + \ldots + a_1(x)Y + a_0(x) \in K[Y]$ das Nullpolynom nach dem Fall $n = 1$. Also verschwinden $a_d(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ für alle $x \in K^{n-1}$, mit Induktion sind somit alle a_i schon das Nullpolynom und wir haben $P = 0$.

2. Das bleibt dem Leser überlassen. Man mag sich beim Beweis an 3.5.4.1 orientieren. Wir folgern in 6.2.3.8 eine allgemeinere Aussage aus dem abstrakten chinesischen Restsatz. □

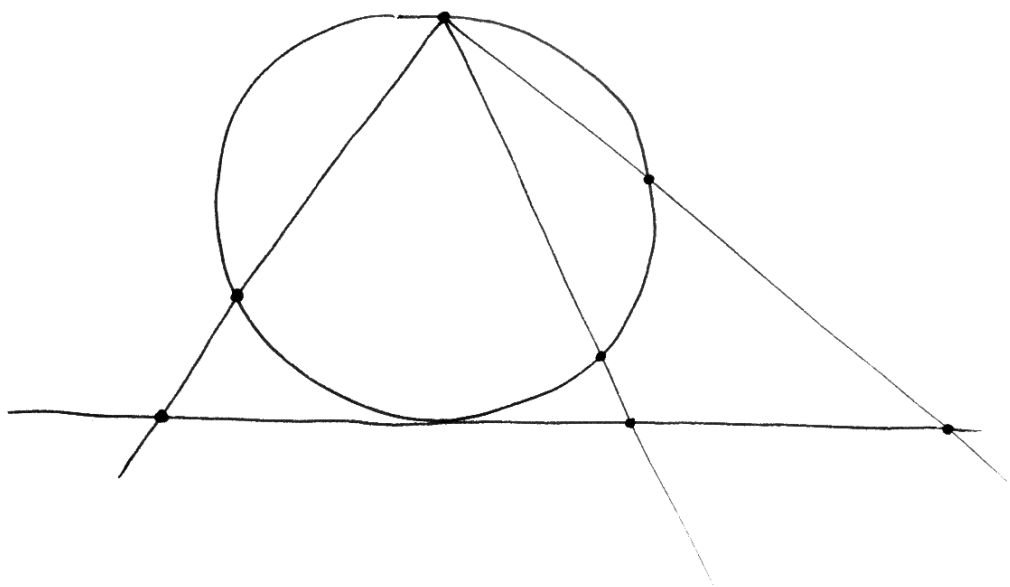
Übungen

Ergänzende Übung 3.5.4.4. Man zeige, daß jeder algebraisch abgeschlossene Körper unendlich ist. Hinweis: Im Fall $1 \neq -1$ reicht es, Quadratwurzeln zu suchen. Man zeige, daß jedes nichtkonstante Polynom $P \in K[X, Y]$ in zwei Veränderlichen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper unendlich viele Nullstellen in K^2 hat.

Ergänzende Übung 3.5.4.5 (**Nullstellensatz für Hyperebenen**). Sei K ein unendlicher Körper. Verschwindet ein Polynom im Polynomring in d Variablen über K auf einer affinen Hyperebene in K^d, so wird es von jeder linearen Gleichung besagter Hyperebene geteilt. Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit mag man unsere Hyperebene als eine der Koordinatenhyperebenen annehmen. Man zeige auch allgemeiner: Verschwindet ein Polynom in d Veränderlichen über einem unendlichen Körper auf der Vereinigung der paarweise verschiedenen affinen Hyperebenen $H_1, \ldots, H_n \subset K^d$, so wird es vom Produkt der linearen Gleichungen unserer Hyperebenen geteilt.

Ergänzende Übung 3.5.4.6 (**Pythagoreische Zahlen**). Man zeige: Stellen wir eine Lampe oben auf den Einheitskreis und bilden jeden von $(0, 1)$ verschiedenen Punkt des Einheitskreises ab auf denjenigen Punkt der Parallelen zur x-Achse durch $(0, -1)$, auf den sein Schatten fällt, so entsprechen die Punkte mit rationalen Koordinaten auf dem Einheitskreis genau den Punkten mit rationalen Koordinaten auf unserer Parallelen. Hinweis: Hat ein Polynom in $\mathbb{Q}[X]$ vom Grad drei zwei rationale Nullstellen, so ist auch seine dritte Nullstelle rational. Geben wir das Bild vom Schattenwurf auf und nehmen den Schnitt des Lichtstrahls mit der x-Achse, so steht eine explizite Formel für die Umkehrabbildung in 10.5.8.20.

Ergänzung 3.5.4.7. Unter einem **pythagoreischen Zahlentripel** versteht man ein Tripel (a, b, c) von positiven natürlichen Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$, die also als



Wir stellen eine Lampe oben auf den Einheitskreis und bilden jeden von $(0,1)$ verschiedenen Punkt des Einheitskreises ab auf denjenigen Punkt der Parallelen zur x-Achse durch $(0,-1)$, auf den sein Schatten fällt. So entsprechen nach Übung 3.5.4.6 die Punkte mit rationalen Koordinaten auf dem Einheitskreis genau den Punkten mit rationalen Koordinaten auf unserer Parallelen. Ein Tripel $a,b,c \in \mathbb{Z}$ mit $a^2+b^2=c^2$ heißt ein **pythagoreisches Zahlentripel**. Die pythagoreischen Zahlentripel mit größtem gemeinsamen Teiler $\langle a,b,c\rangle = \langle 1\rangle$ und $c>0$ entsprechen nun offensichtlich eineindeutig den Punkten mit rationalen Koordinaten auf dem Einheitskreis vermittels der Vorschrift $(a,b,c) \mapsto (a/c, b/c)$. In dieser Weise liefert unser Bild also einen geometrischen Zugang zur Klassifikation der pythagoreischen Zahlentripel.

Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks auftreten können. Es scheint mir offensichtlich, daß die Bestimmung aller pythagoreischen Zahlentripel im wesentlichen äquivalent ist zur Bestimmung aller Punkte mit rationalen Koordinaten auf dem Einheitskreis, also aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$.

Übung 3.5.4.8. Man zeige, daß die Menge der Polynome in $\mathbb{Q}[X]$, die an allen Punkten aus $\mathbb{N}$ ganzzahlige Werte annehmen, übereinstimmt mit der Menge aller Linearkombinationen mit ganzzahligen Koeffizienten der mithilfe der Binomialkoeffizienten gebildeten Polynome

$$\binom{X}{k} := \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k(k-1)\dots 1} \quad \text{falls } k \geq 1 \text{ und } \binom{X}{0} := 1.$$

Hinweis: Man berechne die Werte unserer Polynome bei $X = 0, 1, 2, \dots$ Die Übung zeigt, daß diejenigen Polynome in $\mathbb{Q}[X]$, die an allen Punkten aus $\mathbb{N}$ ganzzahlige Werte annehmen, sogar an allen Punkten aus $\mathbb{Z}$ ganzzahlige Werte annehmen müssen. Sie heißen **ganzwertige** oder **numerische Polynome**. Man zeige weiter für jedes Polynom in $\mathbb{Q}[X]$ vom Grad $d \geq 0$, das an fast allen Punkten aus $\mathbb{N}$ ganzzahlige Werte annimmt, daß es ein ganzwertiges Polynom sein muß und daß das $(d!)$-fache seines Leitkoeffizienten mithin eine ganze Zahl sein muß.

Ergänzende Übung 3.5.4.9. Man zeige, daß die Menge aller Polynome mit rationalen Koeffizienten in $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_r]$, die an allen Punkten aus $\mathbb{N}^r$ ganzzahlige Werte annehmen, übereinstimmt mit der Menge aller Linearkombinationen mit ganzzahligen Koeffizienten von Produkten der Gestalt

$$\binom{X_1}{k_1} \dots \binom{X_r}{k_r}$$

mit $k_1, \dots, k_r \geq 0$. Hinweis: Man argumentiere wie in 3.5.4.8.

3.5.5 Quotientenkörper und Partialbruchzerlegung

3.5.5.1. Die Konstruktion des Körpers $\mathbb{Q}$ der Bruchzahlen aus dem Integritätsbereich $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen hatten wir bisher noch nicht formal besprochen. Hier holen wir das gleich in größerer Allgemeinheit nach und zeigen, wie man zu jedem Integritätsbereich seinen „Quotientenkörper“ konstruieren kann.

Definition 3.5.5.2. Gegeben ein kommutativer Integritätsbereich R konstruieren wir seinen **Quotientenkörper**

$$\mathrm{Quot}(R)$$

wie folgt: Wir betrachten die Menge $R \times (R \backslash 0)$ und definieren darauf eine Relation $\sim$ durch die Vorschrift

$$(a, s) \sim (b, t) \text{ genau dann, wenn gilt } at = bs.$$

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, wie man leicht prüft. Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen mit $\mathrm{Quot}(R)$ und die Äquivalenzklasse von (a, s) mit $\frac{a}{s}$ oder a/s. Dann definieren wir auf $\mathrm{Quot}(R)$ Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ durch die Regeln

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \quad \text{und} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

und überlassen dem Leser den Nachweis, daß diese Verknüpfungen wohldefiniert sind und $\mathrm{Quot}(R)$ zu einem Körper machen und daß die Abbildung $\mathrm{can} : R \to \mathrm{Quot}(R)$, $r \mapsto r/1$ ein injektiver Ringhomomorphismus ist. Er heißt die **kanonische Einbettung** unseres Integritätsbereichs in seinen Quotientenkörper.

Ergänzung 3.5.5.3. Auf Englisch bezeichnet man den Quotientenkörper als **fraction field** und auf Französisch als **corps de fractions**. Dort verwendet man folgerichtig statt unserer Notation $\mathrm{Quot}(R)$ die Notation $\mathrm{Frac}(R)$. Die noch allgemeinere Konstruktion der „Lokalisierung“ lernen wir erst in 7.4.4 kennen.

Beispiel 3.5.5.4. Der Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ wird formal definiert als der Quotientenkörper des Rings der ganzen Zahlen, in Formeln

$$\mathbb{Q} := \mathrm{Quot}\,\mathbb{Z}$$

Sicher wäre es unter formalen Aspekten betrachtet eigentlich richtig gewesen, diese Definition schon viel früher zu geben. Es schien mir jedoch didaktisch ungeschickt, gleich am Anfang derart viel Zeit und Formeln auf die exakte Konstruktion einer Struktur zu verwenden, die Ihnen bereits zu Beginn ihres Studiums hinreichend vertraut sein sollte. Wie bereits bei rationalen Zahlen nennt man auch im allgemeinen bei einem Bruch g/h das g den **Zähler** und das h den **Nenner** des Bruchs.

Satz 3.5.5.5 (Universelle Eigenschaft des Quotientenkörpers). *Sei R ein kommutativer Integritätsbereich. Ist $\varphi : R \to A$ ein Ringhomomorphismus, unter dem jedes von Null verschiedene Element von R auf eine Einheit von A abgebildet wird, so faktorisiert φ eindeutig über $\mathrm{Quot}\,R$, es gibt also in Formeln genau einen Ringhomomorphismus $\tilde{\varphi} : \mathrm{Quot}\,R \to A$ mit $\varphi(r) = \tilde{\varphi}(r/1)\ \forall r \in R$.*

Beweis. Für jedes mögliche $\tilde{\varphi}$ muß gelten $\tilde{\varphi}(r/s) = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$. Das zeigt bereits die Eindeutigkeit von $\tilde{\varphi}$. Um auch seine Existenz zu zeigen, betrachten wir die Abbildung $\hat{\varphi} : R \times (R \backslash 0) \to A$ gegeben durch $\hat{\varphi}(r, s) = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$ und prüfen, daß sie konstant ist auf Äquivalenzklassen. Dann muß sie nach 3.4.2.6 eine wohlbestimmte Abbildung $\mathrm{Quot}\,R \to A$ induzieren, von der der Leser leicht selbst prüfen wird, daß sie ein Ringhomomorphismus ist. $\square$

3.5.5.6 (**Brüche mit kontrollierten Nennern**). Gegeben ein kommutativer Integritätsbereich R und eine Teilmenge $S \subset R\backslash 0$ betrachten wir im Quotientenkörper von R den Teilring

$$S^{-1}R := \{(r/s) \in \operatorname{Quot} R \mid s \text{ ist ein Produkt von Elementen von } S\}$$

Hierbei ist die Eins auch als Produkt von Elementen von S zu verstehen, eben als das leere Produkt. Insbesondere erhalten wir eine Einbettung $R \hookrightarrow S^{-1}R$ durch $r \mapsto (r/1)$. Ist nun $\varphi : R \to A$ ein Ringhomomorphismus, unter dem jedes Element von S auf eine Einheit von A abgebildet wird, so faktorisiert φ mit demselben Beweis wie zuvor eindeutig über $S^{-1}R$, es gibt also in Formeln genau einen Ringhomomorphismus $\tilde{\varphi} : S^{-1}R \to A$ mit $\varphi(r) = \tilde{\varphi}(r/1)\ \forall r \in R$.

Beispiel 3.5.5.7 (**Auswerten rationaler Funktionen**). Ist K ein Körper, so bezeichnet man den Quotientenkörper des Polynomrings mit $K(X) := \operatorname{Quot} K[X]$ und nennt ihn den **Funktionenkörper zu** K und seine Elemente **rationale Funktionen**. Man lasse sich durch die Terminologie nicht verwirren, Elemente dieses Körpers sind per definitionem formale Ausdrücke und eben gerade keine Funktionen. Inwiefern man sie zumindest für unendliches K doch als Funktionen verstehen darf, soll nun ausgeführt werden. Gegeben $\lambda \in K$ betrachten wir dazu die Menge $S_\lambda := \{P \mid P(\lambda) \neq 0\}$ aller Polynome, die bei λ keine Nullstelle haben, und bezeichnen mit

$$K[X]_\lambda := S_\lambda^{-1} K[X] \subset K(X)$$

der Teilring aller Quotienten von Polynomen, die sich darstellen lassen als ein Bruch, dessen Nenner bei λ keine Nullstelle hat. Auf diesem Teilring ist das Auswerten bei λ nach 3.5.5.6 ein wohlbestimmter Ringhomomorphismus $K[X]_\lambda \to K$, den wir notieren als $f \mapsto f(\lambda)$. Er ist der einzige derartige Ringhomomorphismus mit $X \mapsto \lambda$. Gegeben $f \in K(X)$ heißen die Punkte $\lambda \in K$ mit $f \notin K[X]_\lambda$ die **Polstellen von** f und das kleinste n mit $(X - \lambda)^n f \in K[X]_\lambda$ heißt die **Polstellenordnung von** f **bei** λ. Natürlich hat jedes Element $f \in K(X)$ höchstens endlich viele Polstellen. Für jede rationale Funktion $f \in K(X)$ erklärt man ihren **Definitionsbereich** $D(f) \subset K$ als die Menge aller Punkte $a \in K$, die keine Polstellen von f sind. Durch „Kürzen von Nullstellen“ überzeugt man sich leicht, daß jede rationale Funktion so als Quotient $f = g/h$ geschrieben werden kann, daß Zähler und Nenner keine gemeinsamen Nullstellen in K haben, und daß dann die Polstellen gerade die Nullstellen des Nenners sind. Vereinbart man, daß f diesen Stellen als Wert ein neues Symbol ∞ zuweisen soll, so erhält man für jeden unendlichen Körper K sogar eine wohlbestimmte Injektion $K(X) \hookrightarrow \operatorname{Ens}(K, K \sqcup \{\infty\})$.

3.5.5.8. In der Schule mögen Sie gelernt haben, daß etwa die Funktion x/x bei $x = 0$ nicht definiert ist. Von unserem Standpunkt aus ist das nicht so klar. Es

gibt einerseits den Begriff einer Funktion als einer Abbildung, und um eine Abbildung anzugeben müssen bei uns im Prinzip Definitionsbereich, Wertebereich und Abbildungsvorschrift gleich mit angegeben werden, und die Abbildungsvorschrift $x \mapsto x/x$ kann in der Tat bei $x = 0$ nicht sinnvoll in der Art „setze erst $x = 0$ für die Variable ein und führe dann die vorgeschriebenen Operationen im Körper $\mathbb{R}$ aus“ ausgewertet werden. Im Sinne unserer obigen Definition gilt im Funktionenköper $\mathbb{R}(X)$ dahingegen $1 = X/X$ und die Null gehört durchaus zum Defintionsbereich dieser rationalen Funktion im in 3.5.5.7 erklärten Sinne.

Ergänzung 3.5.5.9. Es ist sogar richtig, daß jede rationale Funktion eine eindeutige maximal gekürzte Darstellung mit normiertem Nenner hat. Um das einzusehen, benötigt man ein Analogon der eindeutigen Primfaktorzerlegung für Polynomringe, das wir für allgemeines K erst in 6.2.4.19 zeigen.

3.5.5.10. Wir erinnern aus 3.5.3.42 und 3.5.3.43 die Ringe der Potenzreihen und der Laurentreihen. Gegeben ein Körper K liefert die Verknüpfung von Einbettungen $K[X] \hookrightarrow K[\![X]\!] \hookrightarrow K(\!(X)\!)$ offensichtlich einen Ringhomomorphismus und nach der universellen Eigenschaft 3.5.5.5 mithin eine Einbettung $K(X) \hookrightarrow K(\!(X)\!)$. Das Bild von $(1 - X)^{-1}$ unter dieser Einbettung wäre etwa die „formale geometrische Reihe“ $1 + X + X^2 + X^3 + \ldots$

Ergänzung 3.5.5.11. Sei K ein Körper. Ist $p \in K$ fest gewählt und $K(T) \xrightarrow{\sim} K(X)$ der durch $T \mapsto (X + p)$ gegebene Isomorphismus, so bezeichnet man das Bild von $f \in K(T)$ unter der Komposition $K(T) \xrightarrow{\sim} K(X) \hookrightarrow K(\!(X)\!)$ auch als die **Laurententwicklung von f um den Entwicklungspunkt** p. Meist schreibt man in einer Laurententwicklung statt X auch $(T - p)$. So wäre die Laurententwicklung von $f = T^2/(T - 1)$ um den Entwicklungspunkt $T = 1$ etwa die endliche Laurentreihe $(T - 1)^{-1} + 2 + (T - 1)$.

Satz 3.5.5.12 (Partialbruchzerlegung). *Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper K wird eine K-Basis des Funktionenkörpers $K(X)$ gebildet von erstens den Potenzen der Variablen $(X^n)_{n\geq 1}$ mitsamt zweitens den Potenzen der Inversen der Linearfaktoren $((X - a)^{-n})_{n\geq 1,\, a\in K}$ zuzüglich drittens der Eins $1 \in K(X)$.*

3.5.5.13. Eine Darstellung einer rationalen Funktion als Linearkombination der Elemente dieser Basis nennt man eine **Partialbruchzerlegung** unserer rationalen Funktion. Anschaulich scheint mir zumindest die lineare Unabhängigkeit der behaupteten Basis recht einsichtig: Polstellen an verschiedenen Punkten können sich ebensowenig gegenseitig aufheben wie Polstellen verschiedener Ordnung an einem vorgegebenen Punkt. Alle rationalen Funktionen mag man auffassen als Funktionen auf der projektiven Gerade $\mathbb{P}^1 K$ aus 5.1.4.18 und die $(X^n)_{n\geq 1}$ als Funktionen, die „eine Polstelle der Ordnung n im Unendlichen haben“. Das ist

auch der Grund dafür, daß ich die 1 im Satz oben extra aufgeführt habe und nicht stattdessen einfach kürzer $(X^n)_{n\geq 0}$ schreibe.

3.5.5.14. Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper, so sind die Polstellen eines Elements $f \in K(X)$ im Sinne von 20.3.4.1 genau die Elemente $a \in K$ mit der Eigenschaft, daß für ein $n \geq 1$ der Term $(X-a)^{-n}$ mit von Null verschiedenem Koeffizienten in der Partialbruchzerlegung von f auftritt.

Ergänzung 3.5.5.15. In Büchern zur Analysis findet man oft eine Variante dieses Satzes für den Körper $K = \mathbb{R}$: In diesem Fall werden die im Satz beschriebenen Elemente ergänzt zu einer Basis durch die Elemente $1/((X-\lambda)(X-\bar{\lambda}))^n$ und die Elemente $X/((X-\lambda)(X-\bar{\lambda}))^n$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit positivem Imaginärteil und $n \geq 1$ beliebig, wie der Leser zur Übung selbst zeigen mag. Eine Verallgemeinerung auf den Fall eines beliebigen Körpers K wird in 6.3.7.16 diskutiert.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß unsere Familie den Funktionenkörper als K-Vektorraum erzeugt. Sei also $f \in K(X)$ dargestellt als Quotient von zwei Polynomen $f = P/Q$ mit $Q \neq 0$. Wir argumentieren mit Induktion über den Grad von Q. Ist Q konstant, so haben wir schon gewonnen. Sonst besitzt Q eine Nullstelle $\mu \in K$ und wir können schreiben $Q(x) = (X-\mu)^m \tilde{Q}(x)$ mit $m \geq 1$ und $\tilde{Q}(\mu) \neq 0$. Dann nehmen wir $c = P(\mu)/\tilde{Q}(\mu)$ und betrachten die Funktion

$$\frac{P}{Q} - \frac{c}{(X-\mu)^m} = \frac{P - c\tilde{Q}}{(X-\mu)^m \tilde{Q}}$$

Aufgrund unserer Wahl von c hat der Zähler auf der rechten Seite eine Nullstelle bei $X = \mu$, wir können im Bruch also $(X-\mu)$ kürzen, und eine offensichtliche Induktion über dem Grad des Polynoms Q beendet den Beweis. Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit betrachten wir eine Linearkombination unserer Basis in spe, die die Nullfunktion darstellt. Sei $c(X-a)^{-n}$ ein Summand darin mit $n \geq 1$ größtmöglich für die gewählte Polstelle a. So multiplizieren wir mit $(X-a)^n$ und werten aus bei a im Sinne von 3.5.5.6 und finden, daß schon $c = 0$ gegolten haben muß. So argumentieren wir alle Polstellen weg, und daß die nichtnegativen Potenzen von X linear unabhängig sind folgt ja schon aus der Definition des Polynomrings. □

3.5.5.16 (**Berechnung einer Partialbruchzerlegung**). Will man konkret eine Partialbruchzerlegung bestimmen, so rate ich dazu, mit einer Polynomdivision zu beginnen und $P = AQ + R$ zu schreiben mit Polynomen A und R derart, daß der Grad von R echt kleiner ist als der Grad von Q. Wir erhalten $P/Q = A + R/Q$, und in der Partialbruchzerlegung von R/Q tritt dann kein polynomialer Summand mehr auf. Die Polstellen-Summanden gehören dann alle zu Nullstellen von Q und ihr Grad ist beschränkt durch die Vielfachheit der entsprechenden Nullstelle von

Q. Nun setzen wir die Koeffizienten unserer Linearkombination als Unbestimmte an, für die wir dann ein lineares Gleichungssystem erhalten, das wir mit den üblichen Verfahren lösen.

Beispiel 3.5.5.17. Wir bestimmen von $(X^4 + 2X^2)/(X^2 + 2X + 1)$ die Partialbruchzerlegung. Die Polynomdivision haben wir bereits in 3.5.3.16 durchgeführt und $X^4 + 2X^2 = (X^2 - 2X + 5)(X^2 + 2X + 1) - 8X - 5$ erhalten, so daß sich unser Bruch vereinfacht zu

$$\frac{X^4 + 2X^2}{X^2 + 2X + 1} = X^2 - 2X + 5 - \frac{8X + 5}{X^2 + 2X + 1}$$

Jetzt zerlegen wir den Nenner in Linearfaktoren $X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2$ und dürfen nach unserem Satz über die Partialbruchzerlegung

$$\frac{8X + 5}{(X + 1)^2} = \frac{a}{X + 1} + \frac{b}{(X + 1)^2}$$

ansetzen, woraus sich ergibt $8X + 5 = aX + a + b$ und damit $a = 8$ und $b = -3$. Die Partialbruchzerlegung unserer ursprünglichen Funktion hat also die Gestalt

$$\frac{X^4 + 2X^2}{X^2 + 2X + 1} = X^2 - 2X + 5 - \frac{8}{X + 1} + \frac{3}{(X + 1)^2}$$

3.5.5.18 (**Geschlossene Darstellung der Fibonacci-Zahlen**). Wir bilden die sogenannte **erzeugende Funktion** der Fibonacci-Folge alias die formale Potenzreihe $f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$ mit den Fibonacci-Zahlen aus 1.1.2.2 als Koeffizienten. Die Rekursionsformel für Fibonacci-Zahlen $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ liefert unmittelbar $xf(x) + x^2 f(x) = f(x) - x$. Wir folgern $(1 - x - x^2)f(x) = x$. Umgekehrt hat jede formale Potenzreihe, die diese Identität erfüllt, die Fibonacci-Zahlen als Koeffizienten. Es gilt also, die Funktion $x/(1-x-x^2)$ in eine Potenzreihe zu entwickeln. Dazu erinnern wir Satz 3.5.5.12 über die Partialbruchzerlegung, schreiben $x^2 + x - 1 = (x + \alpha)(x + \beta)$ mit $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und dürfen $x/(1 - x - x^2) = a/(x + \alpha) + b/(x + \beta)$ ansetzen. Zur Vereinfachung der weiteren Rechnungen erinnern wir $\alpha\beta = -1$ und variieren unseren Ansatz zu $x/(1 - x - x^2) = c/(1 - x\alpha) + d/(1 - x\beta)$. Das führt zu $c + d = 0$ alias $c = -d$ und $\alpha c + \beta d = -1$ alias $c = 1/(\beta - \alpha) = 1/\sqrt{5}$. Die Entwicklung unserer Brüche in eine geometrische Reihe nach 3.5.5.10 liefert damit im Ring der formalen Potenzreihen die Identität

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \sum_{i\geq 0} \frac{(x\alpha)^i}{\sqrt{5}} - \frac{(x\beta)^i}{\sqrt{5}}$$

und für den Koeffizienten von x^i alias die i-te Fibonacci-Zahl f_i ergibt sich wie in 1.1.2.2 die Darstellung

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i$$

Übungen

Übung 3.5.5.19. Man zeige: Besitzt ein kommutativer Integritätsbereich R eine Anordnung $\leq$, unter der er im Sinne von 10.2.2.8 ein angeordneter Ring wird, so besitzt sein Quotientenkörper $\operatorname{Quot} R$ genau eine Struktur als angeordneter Körper, für die die kanonische Einbettung $R \hookrightarrow \operatorname{Quot} R$ mit der Anordnung verträglich alias monoton wachsend ist. Speziell erhalten wir so die übliche Anordnung auf $\mathbb{Q} = \operatorname{Quot} \mathbb{Z}$.

Ergänzende Übung 3.5.5.20. Gegeben ein unendlicher Körper K und eine von Null verschiedene rationale Funktion $f \in K(X)^\times$ sind die Polstellen von f genau die Nullstellen von $(1/f)$, als da heißt, die Stellen aus dem Definitionsbereich von $(1/f)$, an denen diese Funktion den Wert Null annimmt. Fassen wir genauer f als Abbildung $f : K \to K \sqcup \{\infty\}$ auf, so entspricht $(1/f)$ der Abbildung $a \mapsto f(a)^{-1}$, wenn wir $0^{-1} = \infty$ und $\infty^{-1} = 0$ vereinbaren.

Übung 3.5.5.21. Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper, so nimmt eine von Null verschiedene rationale Funktion $f \in K(X)^\times$ auf ihrem Definitionsbereich fast jeden Wert an gleichviel Stellen an, genauer an $n = \max(\operatorname{grad} g, \operatorname{grad} h)$ Stellen für $f = g/h$ eine unkürzbare Darstellung als Quotient zweier Polynome. In anderen Worten haben unter $f : D(f) \to K$ fast alle Punkte $a \in K$ genau n Urbilder.

Übung 3.5.5.22. Sei $P \in \mathbb{Q}(X)$ gegeben. Man zeige: Gibt es eine Folge ganzer Zahlen aus dem Definitionsbereich unserer rationalen Funktion $a_n \in \mathbb{Z} \cap D(P)$ mit $a_n \to \infty$ und $P(a_n) \in \mathbb{Z}$ für alle n, so ist P bereits ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Übung 3.5.5.23. Sei K ein Köper und seien $f, g \in K(X)$ gegeben. Man zeige: Gibt es unendlich viele Punkte aus dem gemeinsamen Definitionsbereich $D(f) \cap D(g)$, an denen f und g denselben Wert annehmen, so gilt bereits $f = g$ in $K(X)$.

Ergänzende Übung 3.5.5.24. Man zeige, daß im Körper $\mathbb{Q}(\!(X)\!)$ jede formale Potenzreihe mit konstantem Koeffizienten Eins eine Quadratwurzel besitzt. Die Quadratwurzel von $(1+X)$ kann sogar durch die binomische Reihe 10.6.1.23 explizit angegeben werden, aber das sieht man leichter mit den Methoden der Analysis.

Übung 3.5.5.25. Man bestimme die Partialbruchzerlegung von $1/(1+X^4)$ in $\mathbb{C}(X)$.

Übung 3.5.5.26. Man zeige, daß bei einem Bruch $P(T)/(T^n(T-1)^m)$ mit Zähler $P(T) \in \mathbb{Z}[T]$ auch alle Koeffizienten bei der Partialbruchzerlegung ganze Zahlen sind.

Übung 3.5.5.27. Man bearbeite nocheinmal die Übungen 1.1.2.10 und 1.1.2.11.

Übung 3.5.5.28 (**Verknüpfung rationaler Funktionen**). Ist K ein Körper und $P \in K[X]$ ein von Null verschiedenes Polynom, so liegt jede Nullstelle von P im größeren Körper $K(Y) \supset K$ bereits im Teilkörper K. Gegeben $f \in K(X)$ gehört mithin jedes $g \in K(Y)\backslash K$ zum Definitionsbereich von f und wir können mithin setzen

$$f \circ g := f(g) \in K(Y)$$

Man zeige, daß die K-linearen Körperhomomorphismen $\varphi : K(X) \to K(Y)$ alle die Gestalt $\varphi : f \mapsto f \circ g$ haben für $g = \varphi(X) \in K(Y)\backslash K$. Sind f und g beide nicht konstant, so ist auch $f \circ g$ nicht konstant. Gegeben $f, g, h \in K(X)\backslash K$ zeige man die Assoziativität $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. Unsere Abbildung $K(X) \to \mathrm{Ens}(K, K \sqcup \{\infty\})$ kann zu einer Abbildung $K(X) \to \mathrm{Ens}(K \sqcup \{\infty\})$ fortgesetzt werden, indem wir für $f = P/Q$ den Wert $f(\infty)$ erklären als den Quotienten a_n/b_n der Leitkoeffizienten, falls P und Q denselben Grad n haben, und ∞ falls der Grad von P größer ist als der von Q, und 0 falls er kleiner ist. So erhalten wir einen Monoidhomomorphismus $(K(X), \circ) \to (\mathrm{Ens}(K \sqcup \{\infty\}), \circ)$, der im Fall eines unendlichen Körpers K injektiv ist.

Übung 3.5.5.29 (**Quotientenkörper von Ringen formaler Potenzreihen**). Gegeben ein kommutativer Integritätsbereich R zeige man, daß die universelle Eigenschaft des Quotientenkörpers einen Körperisomorphismus

$$\mathrm{Quot}(R[\![X]\!]) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Quot}\, R)(\!(X)\!)$$

induziert. Induktiv erhalten wir so etwa für jeden Körper K einen Körperisomorphismus

$$\big(K(\!(X)\!)\big)(\!(Y)\!) \xrightarrow{\sim} \big(K(\!(Y)\!)\big)(\!(X)\!)$$

Zum Beispiel ist $(X - Y)^{-1} = X^{-1}(1 - Y/X)^{-1} = \sum_{n \geq 0} X^{-n-1}Y^n$ die Darstellung eines Elements auf der linken Seite, das auf der rechten Seite auf den Ausdruck $\sum_{n \geq 0} -Y^{-n-1}X^n$ abgebildet wird.

3.5.6 Quaternionen*

3.5.6.1. Dieser Abschnitt ist für den Rest der Vorlesung unerheblich. Allerdings gehören die Quaternionen zur mathematischen Allgemeinbildung.

Definition 3.5.6.2. Ein **Schiefkörper** ist ein Ring R, der nicht der Nullring ist und in dem alle von Null verschiedenen Elemente Einheiten sind. Auf englisch

sagt man **skew field**, auf französisch **corps gauche**. Gleichbedeutend spricht man auch von einem **Divisionsring**.

Satz 3.5.6.3 (Quaternionen). *Es gibt Fünftupel* $(\mathbb{H}, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}, \kappa)$ *bestehend aus einem Ring* $\mathbb{H}$*, Elementen* $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k} \in \mathbb{H}$ *und einem Ringhomomorphismus* $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ *derart, daß gilt*

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{i}\,\mathrm{j}\,\mathrm{k} = -1$$

und $\kappa(a)q = q\kappa(a)\ \forall a \in \mathbb{R}$*,* $q \in \mathbb{H}$ *und daß* $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ *eine Basis von* $\mathbb{H}$ *bilden für die durch die Vorschrift* $\mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$*,* $(a, q) \mapsto \kappa(a)q$ *auf* $\mathbb{H}$ *gegebene Struktur als* $\mathbb{R}$*-Vektorraum. Des weiteren ist in einem derartigem Fünftupel der Ring* $\mathbb{H}$ *ein Schiefkörper.*

3.5.6.4. Ein derartiges Fünftupel ist im wesentlichen eindeutig bestimmt in der offensichtlichen Weise. Um das zu sehen beachten wir, daß durch Multiplikation der letzten Gleichung von rechts mit k folgt $\mathrm{i}\,\mathrm{j} = \mathrm{k}$ und durch Invertieren beider Seiten weiter $\mathrm{j}\,\mathrm{i} = -\,\mathrm{k}$. Von da ausgehend erhalten wir unmittelbar die Formeln

$$\mathrm{i}\,\mathrm{j} = \mathrm{k} = -\,\mathrm{j}\,\mathrm{i}, \quad \mathrm{j}\,\mathrm{k} = \mathrm{i} = -\,\mathrm{k}\,\mathrm{j}, \quad \mathrm{k}\,\mathrm{i} = \mathrm{j} = -\,\mathrm{i}\,\mathrm{k},$$

und so die Eindeutigkeit. Wegen dieser Eindeutigkeit erlauben wir uns den bestimmten Artikel und nennen $\mathbb{H}$ den Schiefkörper der **Quaternionen**, da er nämlich als Vektorraum über den reellen Zahlen die Dimension Vier hat, oder auch den Schiefkörper der **Hamilton'schen Zahlen** nach seinem Erfinder Hamilton. Weiter kürzen wir für reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ meist $\kappa(a) = a$ ab. Jedes Element $q \in \mathbb{H}$ hat also die Gestalt

$$q = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$$

mit wohlbestimmten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$ mit $a + b\mathrm{i}_{\mathbb{C}} \mapsto a + b\mathrm{i}$ ist ein Ringhomomorphismus und wir machen auch für komplexe Zahlen meist in der Notation keinen Unterschied zwischen unserer Zahl und ihrem Bild in $\mathbb{H}$ unter obiger Einbettung. In 6.3.12.2 diskutieren wir, warum und in welcher Weise $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ bis auf Isomorphismus die einzigen Schiefkörper endlicher Dimension „über dem Körper $\mathbb{R}$" sind.

3.5.6.5. Auch die Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$ mit $a + b\mathrm{i}_{\mathbb{C}} \mapsto a + b\mathrm{j}$ oder mit $a + b\mathrm{i}_{\mathbb{C}} \mapsto a + b\mathrm{k}$ sind Ringhomomorphismen, und wir werden bald sehen, daß es sogar unendlich viele $\mathbb{R}$-lineare Ringhomomorphismen, ja eine ganze 3-Sphäre von $\mathbb{R}$-linearen Ringhomomorphismen $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$ gibt.

3.5.6.6. Hamilton war von seiner Entdeckung so begeistert, daß er eine Gedenktafel an der Dubliner Broom Bridge anbringen ließ, auf der zu lesen ist: „Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{i}\,\mathrm{j}\,\mathrm{k} = -1$ & cut it on a stone of this bridge".

Beweis. Bezeichne $\mathbb{H}$ die Menge aller komplexen (2×2)-Matrizen der Gestalt

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & -y \\ \bar{y} & \bar{z} \end{pmatrix} \middle| \, z, y \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathrm{Mat}(2; \mathbb{C})$$

Die Addition und Multiplikation von Matrizen induziert offensichtlich eine Addition und Multiplikation auf $\mathbb{H}$ und wir erhalten eine Einbettung $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$ vermittels $z \mapsto \mathrm{diag}(z, \bar{z})$. Das Bilden der konjugierten transponierten Matrix definiert einen Antiautomorphismus $q \mapsto \bar{q}$ von $\mathbb{H}$, in Formeln $\overline{qw} = \bar{w}\bar{q}$, und $q\bar{q}$ ist für $q \neq 0$ stets positiv und reell. Folglich ist $\mathbb{H}$ ein Schiefkörper. Wir fassen $\mathbb{C}$ meist als Teilmenge von $\mathbb{H}$ auf vermittels der eben erklärten Einbettung, aber vorerst unterscheiden wir noch zwischen den komplexen Zahlen $1_\mathbb{C}$, $\mathrm{i}_\mathbb{C}$ und den Matrizen $1 = \mathrm{diag}(1_\mathbb{C}, 1_\mathbb{C})$, $\mathrm{i} = \mathrm{diag}(\mathrm{i}_\mathbb{C}, -\mathrm{i}_\mathbb{C})$. Unser $\mathbb{H}$ hat dann über $\mathbb{R}$ die Basis $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ mit $\mathrm{i} := \mathrm{diag}(\mathrm{i}_\mathbb{C}, -\mathrm{i}_\mathbb{C})$ und

$$\mathrm{j} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathrm{k} := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}_\mathbb{C} \\ \mathrm{i}_\mathbb{C} & 0 \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{i}\,\mathrm{j}\,\mathrm{k} = -1 \qquad \square$$

3.5.6.7. Jede zyklische Vertauschung von $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ liefert einen Automorphismus der Quaternionen. Die Konjugation $q \mapsto \bar{q}$ aus der im Beweis gegebenen Konstruktion hat in der Basis $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ die Gestalt

$$\overline{a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}} = a - b\,\mathrm{i} - c\,\mathrm{j} - d\,\mathrm{k}$$

und hat wie bereits erwähnt die Eigenschaft $\overline{qw} = \bar{w}\bar{q}$. Gegeben ein Quaternion $q = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$ nennt man $a = (q + \bar{q})/2$ seinen **Realteil** und schreibt $a = \mathrm{Re}(q)$. Für $q = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$ ist $q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ und man setzt $|q| = \sqrt{q\bar{q}}$ und nennt diese reelle Zahl den **Betrag** unseres Quaternions. Offensichtlich kann für $q \neq 0$ sein Inverses durch die Formel $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$ angegeben werden. Offensichtlich gilt dann $|qw| = |q||w|$ für alle $q, w \in \mathbb{H}$ und die Gruppe aller Quaternionen der Länge Eins besteht genau aus allen unitären (2×2)-Matrizen mit Determinante Eins. Darin enthalten ist die Untergruppe der acht Quaternionen $\{\pm 1, \pm\,\mathrm{i}, \pm\,\mathrm{j}, \pm\,\mathrm{k}\}$, die sogenannte **Quaternionengruppe**, von deren Multiplikationstabelle Hamilton bei seiner Konstruktion ausgegangen war.

Vorschau 3.5.6.8. Gegeben ein Kring R mitsamt einem selbstinversen Ringhomomorphismus $R \to R$, $r \mapsto \bar{r}$ und einem Element $v \in R$ mit $\bar{v} = v$ bildet allgemeiner die Menge aller (2×2)-Matrizen der Gestalt

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & vy \\ \bar{y} & \bar{z} \end{pmatrix} \middle| \, z, y \in R \right\} \subset \mathrm{Mat}(2; R)$$

einen Teilring des Matrizenrings. Derartige Ringe heißen **Quaternionenringe**.

3.5.6.9. Es gibt außer der Identität nur einen $\mathbb{R}$-linearen Körperhomomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, nämlich die komplexe Konjugation. Im Fall der Quaternionen liefert dahingegen jede von Null verschiedene Quaternion $q \in \mathbb{H}^\times$ einen $\mathbb{R}$-linearen Ringhomomorphismus $\operatorname{int} q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $w \mapsto qwq^{-1}$, und $\operatorname{int} q = \operatorname{int} q'$ impliziert bereits $\mathbb{R}q = \mathbb{R}q'$.

Übungen

Übung 3.5.6.10. Man zeige, daß es für jedes Quaternion q mit Realteil $\operatorname{Re} q = 0$ und Betrag $|q| = 1$ einen $\mathbb{R}$-linearen Ringhomomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$ gibt mit $\mathrm{i}_{\mathbb{C}} \mapsto q$.

Ergänzende Übung 3.5.6.11. Man zeige: Sind zwei natürliche Zahlen jeweils eine Summe von vier Quadraten, so auch ihr Produkt. Diese Erkenntnis ist ein wichtiger Schritt bei einem Beweis des sogenannten **Vier-Quadrate-Satzes** von Lagrange, nach dem jede natürliche Zahl eine Summe von vier Quadratzahlen ist, etwa $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2$ oder $23 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$.

3.6 Determinanten und Eigenwerte

3.6.1 Das Signum einer Permutation

3.6.1.1. Wir beginnen hier mit dem Studium der sogenannten „symmetrischen Gruppen“. Mehr dazu können Sie später in 6.1.5 lernen.

Definition 3.6.1.2. Die Gruppe aller Permutationen alias bijektiven Selbstabbildungen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ notieren wir

$$\mathcal{S}_n := \mathrm{Ens}^\times\{1, 2, \ldots, n\}$$

Sie heißt auch die n**-te symmetrische Gruppe**. Nach 2.1.5.15 hat diese Gruppe $|\mathcal{S}_n| = n!$ Elemente. Viele Autoren verwenden statt $\mathcal{S}_n$ auch die alternative Notation Σ_n. Eine Permutation, die zwei Elemente unserer Menge vertauscht und alle anderen Elemente festhält, heißt eine **Transposition**.

Definition 3.6.1.3. Ein **Fehlstand** einer Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ist ein Paar (i, j) mit $1 \le i < j \le n$ aber $\sigma(i) > \sigma(j)$. Die Zahl der Fehlstände heißt die **Länge** $l(\sigma)$ unserer Permutation, in Formeln

$$l(\sigma) := |\{(i, j) \mid i < j \text{ aber } \sigma(i) > \sigma(j)\}|$$

Das **Signum** einer Permutation ist definiert als die Parität der Zahl ihrer Fehlstände, in Formeln

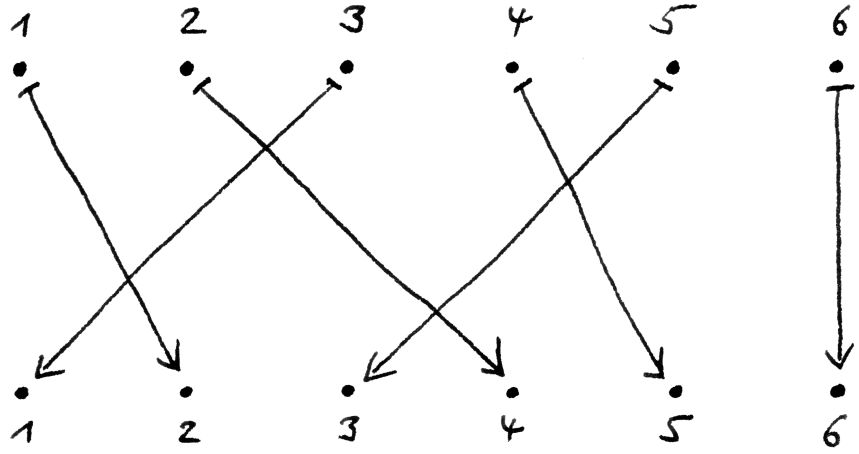
$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{l(\sigma)}$$

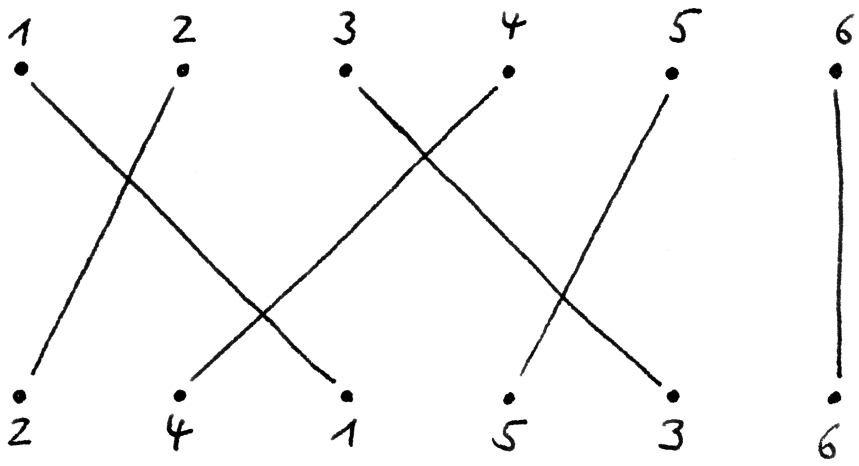
Eine Permutation mit Signum $+1$ alias gerader Länge heißt eine **gerade Permutation**, eine Permutation mit Signum -1 alias ungerader Länge eine **ungerade Permutation**.

Beispiel 3.6.1.4. Die Identität von $\mathcal{S}_n$ ist jeweils die einzige Permutation der Menge $\{1, \ldots, n\}$ der Länge Null. Die Transposition, die die Zahlen i und j vertauscht, hat die Länge $2|i - j| - 1$, wie auch nebenstehendes Bild zeigt, und ist insbesondere stets ungerade.

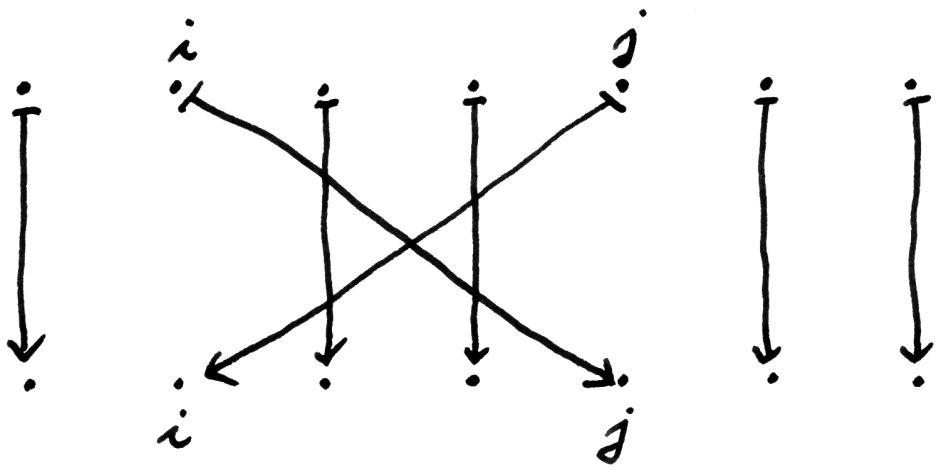
Lemma 3.6.1.5 (**Multiplikativität des Signums**). *Für jede natürliche Zahl n ist unser Signum ein Gruppenhomomorphismus $\mathrm{sgn} : \mathcal{S}_n \to \{1, -1\}$ von der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$ in die zweielementige Gruppe der Vorzeichen, in Formeln gilt also*

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau) \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$$





Diese Bilder illustrieren zwei mögliche Anschauungen für die Länge einer Permutation, in diesem Fall der Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_6$ mit $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 1$, $4 \mapsto 5$, $5 \mapsto 3$ und $6 \mapsto 6$: Im oberen Bild ist die Länge ganz offensichtlich die „Zahl der Kreuzungen von Abbildungspfeilen“, in unserem Fall haben wir also $l(\sigma) = 4$. Im unteren Bild habe ich unter jede Zahl n jeweils $\sigma(n)$ geschrieben und dann gleiche Zahlen verbunden, und hier ist ähnlich $l(\sigma) = 4$ gerade die „Zahl der Kreuzungen solcher Verbindungslinien“. Der Leser sei ermutigt, sich auch die Produktformel für das Signum 3.6.1.5 mithilfe dieser Bilder anschaulich zu machen.



Die Transposition, die i und j vertauscht, hat genau $2|i-j|-1$ Fehlstände. Insbesondere ist jede Transposition ungerade.

Gar kein Beweis. Wir interpretieren Fehlstände als „Kreuzungspunkte“. Hängen wir zwei unserer Bilder aneinander, so ist anschaulich klar, daß sich die Zahl der Fehlstände der Komposition alias die „Zahl Kreuzungspunkte nach dem Glattziehen“ von der Summe der Zahlen der Fehlstände der Faktoren alias der „Zahl Kreuzungspunkte vor dem Glattziehen“ nur um eine gerade Zahl unterscheiden kann. □

Erster Beweis. Wir vereinbaren speziell für diesen Beweis für das Vorzeichen einer von Null verschiedenen ganzen Zahl $a \in \mathbb{Z}\backslash 0$ die Notation $[a] := a/|a| \in \{1, -1\}$. Damit können wir das Signum einer Permutation σ dann auch schreiben als

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} [\sigma(j) - \sigma(i)]$$

Für eine beliebige weitere Permutation τ finden wir dann

$$\prod_{i<j} [\sigma\tau(j) - \sigma\tau(i)] = \prod_{i<j} \frac{[\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))]}{[\tau(j) - \tau(i)]} \prod_{i<j} [\tau(j) - \tau(i)]$$

Da nun aber für eine beliebige weitere Permutation τ auch die $\{\tau(j), \tau(i)\}$ für $i < j$ genau die zweielementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ durchlaufen, gilt für eine beliebige weitere Permutation τ auch die Formel

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{[\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))]}{[\tau(j) - \tau(i)]}$$

Das zeigt die Behauptung. □

Zweiter Beweis. Wir betrachten den Polynomring $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ aus 3.5.3.30. Für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ erklären wir für diesen Ring einen Ringhomomorphismus $\sigma : \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] \to \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ zu sich selber vermittels der Vertauschung der Variablen, in Formeln $\sigma : X_i \mapsto X_{\sigma(i)}$. Dann gilt für jedes Polynom P sicher $\tau(\sigma P) = (\tau\sigma)P$. Betrachten wir nun speziell das Polynom

$$P = \prod_{i<j} (X_i - X_j)$$

Offensichtlich gilt $\sigma P = \operatorname{sgn}(\sigma)P$. Damit folgt aber unmittelbar die von der Mitte aus zu entwickelnde Gleichungskette

$$\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)P = \tau(\sigma P) = (\tau\sigma)P = \operatorname{sgn}(\tau\sigma)P$$

Daraus folgt dann die Behauptung. □

Ergänzung 3.6.1.6. Für jedes n bilden die geraden Permutationen als Kern eines Gruppenhomomorphismus nach 2.2.3.21 eine Untergruppe von $\mathcal{S}_n$. Diese Gruppe heißt die **alternierende Gruppe** und wird A_n notiert.

Übungen

Übung 3.6.1.7. Die Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, die i ganz nach vorne schiebt ohne die Reihenfolge der übrigen Elemente zu ändern, hat $(i-1)$ Fehlstände und folglich das Signum $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{i-1}$.

Übung 3.6.1.8. Jede Permutation einer endlichen angeordneten Menge läßt sich darstellen als eine Verknüpfung von Transpositionen benachbarter Elemente.

Ergänzende Übung 3.6.1.9. Ist T eine endliche Menge, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus

$$\operatorname{sign} : \operatorname{Ens}^{\times}(T) \to \{1, -1\}$$

derart, von der Gruppe der Permutationen von T in die zweielementige Gruppe der Vorzeichen derart, daß jede Transposition auf (-1) abgebildet wird. Im Fall $|T| \geq 2$ ist das sogar der einzige surjektive Gruppenhomomorphismus zwischen besagten Gruppen. Wir nennen unseren Gruppenhomomorphismus auch in dieser Allgemeinheit das **Signum** und kürzen ihn wieder mit $\operatorname{sign} = \operatorname{sgn}$ ab. Auch in dieser Allgemeinheit nennen wir eine Permutation mit Signum $+1$ **gerade**, und eine Permutation mit Signum -1 **ungerade**. Es ist allerdings nicht mehr sinnvoll, in dieser Allgemeinheit von der „Länge“ einer Permutation zu reden.

Übung 3.6.1.10. Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ wird erzeugt von der Transposition τ der Elemente 1 und 2 zusammen mit der „zyklischen Vertauschung“ $\sigma : i \mapsto i+1$ für $1 \leq i < n$ und $n \mapsto 1$. Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_5$ wird sogar erzeugt von der „zyklischen Vertauschung“ und einer beliebigen weiteren Transposition τ. Mutige zeigen stärker: Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_p$ für eine beliebige Primzahl p wird erzeugt von der „zyklischen Vertauschung“ und einer beliebigen weiteren Transposition τ.

Übung 3.6.1.11. Man gebe einen Gruppenisomorphismus $\mathcal{S}_3 \xrightarrow{\sim} \operatorname{GL}(2; \mathbb{F}_2)$ an.

Übung 3.6.1.12. Eine Permutation einer Menge, die „von vier Elementen unserer Menge erst Zwei vertauscht und dann auch noch die anderen beiden vertauscht“, heißt eine **Doppeltranspositionen**. Man zeige, daß in der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_4$ die drei Doppeltranspositionen zusammen mit dem neutralen Element eine Untergruppe bilden, die isomorph ist zur Klein'schen Vierergruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3.6.2 Determinante und ihre Bedeutung

Definition 3.6.2.1. Seien K ein Kring und $n \in \mathbb{N}$. Die **Determinante** ist die Abbildung $\det : \operatorname{Mat}(n; K) \to K$ von den quadratischen Matrizen mit Einträgen

in unserem Kring in besagten Kring selbst, die gegeben wird durch die Vorschrift

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \det A := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Summiert wird über alle Permutationen von n und der Vorfaktor $\operatorname{sgn}(\sigma)$ meint das Signum der Permutation σ nach 3.6.1.3. Unsere Formel heißt die **Leibniz-Formel**. Für den Extremfall $n = 0$ der „leeren Matrix“ ist zu verstehen, daß ihr die Determinante 1 zugeordnet wird: Formal gibt es genau eine Permutation der leeren Menge, deren Signum ist Eins, und dies Signum wird multipliziert mit dem leeren Produkt, das nach unseren Konventionen auch den Wert Eins hat.

3.6.2.2 (**Herkunft der Terminologie**). Wie wir in 3.6.4.2 sehen werden, bestimmt alias determiniert die Determinante, ob ein quadratisches lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Daher rührt die Terminologie.

Beispiele 3.6.2.3. Wir erhalten etwa

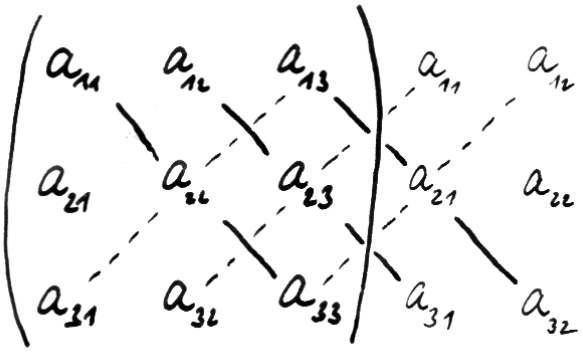
$$\begin{aligned} \det(a) &= a \\ \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= ad - cb \\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{matrix} \end{aligned}$$

Im Fall der (3×3)-Matrizen heißt das manchmal die **Jägerzaunformel** aus einem Grund, den die nebenstehende Abbildung illustriert. Für $n \geq 4$ macht die Berechnung der Determinante anhand der Leibniz-Formel als Summe von $n! \geq 24$ Termen keinen Spaß mehr. Wir besprechen in 3.6.3.9, wie man in diesen Fällen geschickter vorgehen kann.

Beispiel 3.6.2.4 (**Determinanten von Dreiecksmatrizen**). Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt ihrer Diagonaleinträge. In der Tat ist die Identität die einzige Permutation σ mit $\sigma(i) \leq i$ für alle i, folglich trägt im Fall einer oberen Dreiecksmatrix in der Leibniz-Formel nur der Summand mit $\sigma = \mathrm{id}$ zur Determinante bei. Dasselbe gilt für untere Dreiecksmatrizen.

Lemma 3.6.2.5. *Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht beim Transponieren, in Formeln*

$$\det A^\top = \det A$$



Um die Determinante einer (3×3)-Matrix zu berechnen mag man die erste und zweite Spalte danebenschreiben und dann die Produkte der drei Dreierdiagonalen nach rechts unten addieren und davon die Produkte der drei Dreierdiagonalen nach rechts oben abziehen. Diese Eselsbrücke heißt auch die „Jägerzaunformel“. Für (4×4)-Matrizen liefert aber die analoge Regel nicht mehr die Determinante!

Beweis. Per definitionem gilt $\det A^\top = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}\dots a_{\sigma(n)n}$. Ist nun $\tau = \sigma^{-1}$ die inverse Permutation, so haben wir $\operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)$ und darüber hinaus $a_{1\tau(1)}\dots a_{n\tau(n)} = a_{\sigma(1)1}\dots a_{\sigma(n)n}$, denn diese Produkte unterscheiden sich nur in der Reihenfolge ihrer Faktoren. Damit ergibt sich dann wie behauptet

$$\det A^\top = \sum_{\tau\in\mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)}\dots a_{n\tau(n)} \qquad \square$$

3.6.2.6 (**Schmutzige Anschauung: Betrag der Determinante und Volumen**). Vor der weiteren Entwicklung der Theorie will ich nun zunächst die anschauliche Bedeutung der Determinante einer Matrix mit reellen Einträgen diskutieren. Ich beginne mit der anschaulichen Bedeutung des Betrags der Determinante und beschränke mich dazu erst einmal auf den Fall $n = 2$. Hoffentlich ist anschaulich klar, daß jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ einen „Flächenveränderungsfaktor“ $c(L)$ haben sollte, daß es also dazu eine reelle Konstante $c(L) \geq 0$ geben sollte derart, daß „das Bild unter L eines Flächenstücks U der Fläche $\operatorname{vol}(U)$ die Fläche $\operatorname{vol}(LU) = c(L)\operatorname{vol}(U)$ hat“. Formal zeigt das die Transformationsformel 13.1.8.1, die für besagte Konstante auch gleich die Formel

$$c(L) = |\det L|$$

liefert. Ich will diese Formel im folgenden heuristisch begründen. Anschaulich ist hoffentlich klar, daß unsere durch die Vorschrift $L \mapsto c(L)$ gegebene „Flächenveränderungsfaktorabbildung“ $c : \operatorname{Mat}(2;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die folgenden Eigenschaften haben sollte:

1. Sie sollte „multiplikativ“ sein, in Formeln $c(LM) = c(L)c(M)$;
2. Die Streckung einer Achse sollte die Fläche eines Flächenstücks genau durch Multiplikation mit dem Betrag des Streckfaktors ändern, in Formeln $c(\operatorname{diag}(a,1)) = c(\operatorname{diag}(1,a)) = |a|$;
3. Scherungen sollten Flächen unverändert lassen, in Formeln $c(D) = 1$ für D eine obere oder untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonale.

Da sich nun nach 3.2.5.10 jede Matrix als Produkt von Elementarmatrizen darstellen läßt, kann es höchstens eine Abbildung $c : \operatorname{Mat}(2;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ geben, die diese drei Eigenschaften hat. In 3.6.4.1 werden wir für unsere Determinante die „Multiplikationsformel“ $\det(LM) = \det(L)\det(M)$ zeigen, und zusammen mit unserer Formel 3.6.2.4 für die Determinante einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix wird dann auch umgekehrt klar, daß $M \mapsto |\det M|$ eine Abbildung mit unseren drei Eigenschaften ist. Das beendet unsere heuristische Argumentation für die Stichhaltigkeit der Anschauung als Flächenveränderungsfaktor für den

$$\det\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = (\det A)(\det B)$$

Die Determinante einer block-oberen Dreiecksmatrix ist, wie Sie in Übung 3.6.2.9 zeigen, das Produkt der Determinanten ihrer Blöcke auf der Diagonalen. Dieses Bild illustriert den Fall von nur zwei Blöcken auf der Diagonalen. Das Symbol unten links ist eine Null, das Symbol $*$ deutet an, daß unerheblich ist, was da steht.

Betrag der Determinante von reellen (2×2)-Matrizen. In höheren Dimensionen liefert dieselbe Argumentation analoge Resultate, insbesondere kann der Betrag der Determinante einer (3×3)-Matrix aufgefaßt werden als der Faktor, um den die zugehörige lineare Abbildung Volumina ändert. Damit sollte auch anschaulich klar werden, warum $\det L \neq 0$ gleichbedeutend ist zur Invertierbarkeit von L, was wir im allgemeinen als 3.6.4.2 zeigen.

3.6.2.7 (**Schmutzige Anschauung: Determinantenvorzeichen und Drehsinn**). Das Vorzeichen der Determinante einer invertierbaren reellen (2×2)-Matrix zeigt anschaulich gesprochen an, „ob die dadurch gegebene lineare Selbstabbildung der Ebene $\mathbb{R}^2$ den Drehsinn erhält oder umkehrt". Formal prüft man leicht, daß $\mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$ genau zwei „Wegzusammenhangskomponenten" hat, nämlich die Matrizen mit positiver Determinante und die mit negativer Determinante. Dasselbe gilt für $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ und $n \geq 1$ beliebig, vergleiche 12.7.5.19. Im Fall allgemeiner angeordneter Körper wird diese anschauliche Erkenntnis ihrerseits unsere Definition 3.6.5.2 einer „Orientierung" auf einem Vektorraum über einem angeordneten Körper motivieren. Um die Beziehung zwischen Drehsinn und Determinante heuristisch zu begründen, können wir ähnlich argumentieren wie zuvor: Zunächst einmal führen wir ganz heuristisch eine angepaßte Notation ein und erklären für eine invertierbare lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \tilde{\to} \mathbb{R}^2$ ein Vorzeichen $\varepsilon(L)$ durch die Vorschrift

$$\varepsilon(L) = \begin{cases} 1 & L \text{ erhält den Drehsinn;} \\ -1 & L \text{ kehrt den Drehsinn um.} \end{cases}$$

In Formeln ausgedrückt behaupten wir dann also

$$\varepsilon(L) = \det L / |\det L|$$

Diese Formel will ich im folgenden heuristisch begründen. Anschaulich ist hoffentlich klar, daß unser $\varepsilon : \mathrm{GL}(2;\mathbb{R}) \to \{1, -1\}$ die folgenden Eigenschaften haben sollte:

1. Es sollte „multiplikativ" sein, in Formeln $\varepsilon(LM) = \varepsilon(L)\varepsilon(M)$;

2. Die Streckung einer Achse sollte den Drehsinn genau durch die Multiplikation mit dem Vorzeichen des Streckfaktors ändern, in Formeln sollte für $a \in \mathbb{R}^\times$ also gelten $\varepsilon(\mathrm{diag}(a,1)) = \varepsilon(\mathrm{diag}(1,a)) = a/|a|$;

3. Scherungen sollten den Drehsinn nicht ändern, in Formeln sollte also gelten $\varepsilon(D) = 1$ für D eine obere oder untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonale.

Da sich nun nach 3.2.5.10 jede invertierbare Matrix als Produkt von invertierbaren Elementarmatrizen darstellen läßt, kann es höchstens eine Abbildung ε :

$\mathrm{GL}(2;\mathbb{R}) \to \{1,-1\}$ geben, die diese drei Eigenschaften hat. In 3.6.4.1 werden wir die „Multiplikationsformel“ $\det(LM) = \det(L)\det(M)$ für unsere Determinante zeigen, und zusammen mit unserer Formel 3.6.2.4 für die Determinante einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix wird dann umgekehrt auch klar, daß $M \mapsto \det M/|\det M|$ eine Abbildung mit unseren drei Eigenschaften ist. Das beendet unsere heuristische Argumentation für die Stichhaltigkeit der Anschauung $\det M/|\det M| = \varepsilon(L)$ für das Vorzeichen der Determinante von invertierbaren (2×2)-Matrizen. In höheren Dimensionen liefert eine analoge Argumentation analoge Resultate. So zeigt etwa das Vorzeichen der Determinante einer invertierbaren Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ an, ob sie die „Händigkeit“ erhält oder vielmehr „Rechtsgewinde und Linksgewinde vertauscht“.

Ergänzung 3.6.2.8 (**Händigkeit und Spiegel**). Amüsant ist in diesem Zusammenhang die naive Frage, warum ein Spiegel „rechts und links vertauscht, aber nicht oben und unten“. Die Antwort lautet, daß ein Spiegel ebensowenig rechts und links vertauscht wie oben und unten, sondern vielmehr vorne und hinten. Wir versuchen nur unbewußt, uns so gut wie möglich mit unserem Spiegelbild zu identifizieren, indem wir hinter den Spiegel treten, in Formeln also durch eine $180°$-Drehung im Raum um eine geeignete vertikale Achse im Spiegel. Dann stellen wir fest, daß das zwar fast gelingt aber nicht ganz, und daß genauer die Verknüpfung der Spiegelung am Spiegel mit dieser Drehung gerade eine Spiegelung ist, die rechts und links vertauscht.

Übungen

Übung 3.6.2.9. Die Determinante einer block-oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt der Determinanten ihrer Blöcke auf der Diagonalen. Hinweis: Man variiere das Argument für 3.6.2.4.

Übung 3.6.2.10. Man betrachte die $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen (-1) oberhalb der Diagonalen und 1 auf und unterhalb der Diagonalen und zeige, daß ihre Determinante $n!$ ist.

3.6.3 Charakterisierung der Determinante

Definition 3.6.3.1. Seien V, U Vektorräume über einem Körper K. Eine bilineare Abbildung $F : V \times V \to U$ heißt **symmetrisch**, wenn gilt

$$F(v,w) = F(w,v) \quad \forall v,w \in V$$

Eine bilineare Abbildung $F : V \times V \to U$ heißt **alternierend**, wenn gilt

$$F(v,v) = 0 \quad \forall v \in V$$

3.6.3.2 (**Herkunft der Bezeichnung „alternierend“**). Gegeben eine bilineare Abbildung $F : V \times V \to U$ mit der Eigenschaft $F(v,v) = 0 \quad \forall v \in V$, die also im Sinne unserer Definition 3.6.3.1 alternierend ist, gilt stets

$$F(v,w) = -F(w,v) \quad \forall v,w \in V$$

In der Tat haben wir

$$\begin{aligned} 0 &= F(v+w, v+w) \\ &= F(v, v+w) + F(w, v+w) \\ &= F(v,v) + F(v,w) + F(w,v) + F(w,w) \\ &= F(v,w) + F(w,v) \end{aligned}$$

Gilt umgekehrt $F(v,w) = -F(w,v)\ \forall v,w \in V$, so folgt $F(v,v) = -F(v,v)$ alias $(1_K + 1_K)F(v,v) = 0_K$ für alle $v \in V$, und haben wir $1_K + 1_K \neq 0_K$ alias $\operatorname{char} K \neq 2$, so folgt daraus auch wieder $F(v,v) = 0$.

3.6.3.3. Man mag eine bilineare Abbildung $F : V \times V \to U$ **antisymmetrisch** nennen, wenn gilt $F(v,w) = -F(w,v)$ für alle v, w. Damit sind allerdings in Charakteristik Zwei symmetrische Bilinearformen dasselbe wie antisymmetrische Bilinearformen.

Definition 3.6.3.4. Seien $V_1, \ldots, V_n, W$ Vektorräume über einem Körper K. Eine Abbildung $F : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ alias Multiabbildung $F : V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_n \to W$ heißt **multilinear**, wenn für alle j und alle für $i \neq j$ beliebig aber fest gewählten $v_i \in V_i$ die Abbildung $V_j \to W$, $v_j \mapsto F(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$ linear ist. Für die Menge aller derartigen multilinearen Abbildungen verwenden wir analog zum Fall bilinearer Abbildungen die beiden Notationen

$$\operatorname{Hom}_K(V_1 \curlyvee V_2 \curlyvee \ldots \curlyvee V_n, W) = \operatorname{Hom}^{(n)}(V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n, W)$$

Im Fall $n = 2$ erhalten wir unsere bilinearen Abbildungen aus 3.2.3.8. Im Fall $n = 1$ erhalten wir unsere linearen Abbildungen. Im Fall $n = 0$ verwenden wir die Notationen $\operatorname{Hom}_K(\curlyvee, W) = \operatorname{Hom}_K^{(0)}(\{*\}, W)$ für die Menge aller 0-multilinearen Abbildungen vom leeren Produkt nach W alias aller beliebigen Abbildungen von der einelementigen Menge $\operatorname{ens} = \{*\}$ nach W. Das Auswerten bei $*$ liefert damit eine Bijektion $\operatorname{Hom}_K(\curlyvee, W) \xrightarrow{\sim} W$. Wir werden sie in der Notation oft so behandeln, als seien diese Mengen schlicht gleich.

Definition 3.6.3.5. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Eine multilineare Abbildung $F : V \times \ldots \times V \to W$ heißt **alternierend**, wenn sie auf jedem n-Tupel verschwindet, in dem zwei Einträge übereinstimmen, wenn also in Formeln gilt

$$(\exists i \neq j \text{ mit } v_i = v_j) \quad \Rightarrow \quad F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots v_n) = 0$$

Wir verwenden für den Raum aller derartigen alternierenden multilinearen Abbildungen die Notation $\mathrm{Alt}^n(V, W)$. Ist $W = K$ der Grundkörper, so sprechen wir von **Multilinearformen** und verwenden die abkürzende Notation $\mathrm{Alt}^n(V) := \mathrm{Alt}^n(V, K)$.

3.6.3.6. Sei $F : V \times \ldots \times V \to W$ eine alternierende multilineare Abbildung. Mit 3.6.3.2 folgt, daß sich das Vorzeichen von F ändert, wann immer man zwei Einträge vertauscht, in Formeln

$$F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -F(v_1, \ldots, v_j, n \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

Im Fall eines Grundkörpers einer von Zwei verschiedenen Charakteristik erhält man wieder mit 3.6.3.2 auch die umgekehrte Implikation.

Satz 3.6.3.7 (Charakterisierung der Determinante). *Ist K ein Körper, so ist die Determinante die einzige Abbildung $\det : \mathrm{Mat}(n; K) \to K$, die multilinear und alternierend ist als Funktion der n Spaltenvektoren und die der Einheitsmatrix die Eins zuordnet.*

Beweis. Daß unsere in 3.6.2.1 durch die Leibniz-Formel definierte Determinante multilinear ist und der Einheitsmatrix die Eins zuordnet, scheint mir offensichtlich. Stimmen weiter zwei Spalten einer Matrix überein, so verschwindet ihre Determinante, denn für $\tau \in \mathcal{S}_n$ die Transposition der entsprechenden Indizes gilt $a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} = a_{1\tau\sigma(1)} \ldots a_{n\tau\sigma(n)}$ und $\mathrm{sgn}(\sigma) = -\mathrm{sgn}(\tau\sigma)$, so daß sich in der Leibniz-Formel die entsprechenden Terme gerade wegheben. Unsere durch die Leibniz-Formel gegebene Abbildung hat also die geforderten Eigenschaften, und es gilt nur noch zu zeigen, daß es keine weiteren Abbildungen $d : \mathrm{Mat}(n; K) \to K$ mit den besagten Eigenschaften gibt. Nach 3.6.3.10 ist nun eine multilineare Abbildung festgelegt und festlegbar durch ihre Werte auf Tupeln von Basisvektoren. Insbesondere kennen wir aber unsere multilineare Abbildung d bereits, wenn wir ihre Werte

$$d(\mathrm{e}_{\sigma(1)}| \ldots |\mathrm{e}_{\sigma(n)})$$

kennen für alle Abbildungen $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Ist d zusätzlich alternierend, so gilt $d(\mathrm{e}_{\sigma(1)}| \ldots |\mathrm{e}_{\sigma(n)}) = 0$, falls σ nicht injektiv ist, und für jede Transposition τ haben wir $d(\mathrm{e}_{\sigma\tau(1)}| \ldots |\mathrm{e}_{\sigma\tau(n)}) = -d(\mathrm{e}_{\sigma(1)}| \ldots |\mathrm{e}_{\sigma(n)})$. Da nach 3.6.1.8 die Transpositionen die symmetrische Gruppe erzeugen, folgt daraus

$$d(\mathrm{e}_{\sigma(1)}| \ldots |\mathrm{e}_{\sigma(n)}) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma) d(\mathrm{e}_1| \ldots |\mathrm{e}_n) & \sigma \in \mathcal{S}_n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Erfüllt d dann auch noch unsere Bedingung $d(\mathrm{e}_1| \ldots |\mathrm{e}_n) = 1$ für die Determinante der Einheitsmatrix, so folgt sofort $d = \det$. □

3.6.3.8 (**Multilineare alternierende Funktionen auf Matrizen**). Im allgemeinen folgt über einem beliebigen Körper K mit den Argumenten des vorhergehenden Beweises für jede Abbildung $d : \mathrm{Mat}(n; K) \to K$, die multilinear und alternierend ist als Funktion der n Spaltenvektoren, die Formel

$$d = d(\mathrm{e}_1 | \ldots | \mathrm{e}_n) \det$$

Das brauchen wir für den vorhergehenden Beweis zwar schon gar nicht mehr zu wissen, es wird sich aber beim Beweis der Multiplikativität der Determinante als hilfreich erweisen.

3.6.3.9 (**Berechnung der Determinante**). Will man die Determinante einer Matrix explizit ausrechnen, so empfiehlt es sich bei größeren Matrizen, sie zunächst mit dem Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform zu bringen: Addieren wir ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen, ändert sich die Determinante nach 3.6.3.7 ja nicht, und vertauschen wir zwei Zeilen, so ändert sich nur ihr Vorzeichen. Bei einer Matrix in Zeilenstufenform ist dann nach 3.6.2.4 die Determinante schlicht das Produkt der Diagonaleinträge.

Übungen

Übung 3.6.3.10. Gegeben Vektorräume $V_1, V_2, \ldots, V_n, W$ über einem festen Körper und $B_i \subset V_i$ jeweils eine Basis liefert die Restriktion eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_K^{(n)}(V_1 \times \ldots \times V_n, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(B_1 \times \ldots \times B_n, W)$$

oder in unseren Notationen für multilineare Abbildungen und Multiabbildungen gleichbedeutend

$$\mathrm{Hom}_K(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_n, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(B_1 \curlyvee \ldots \curlyvee B_n, W)$$

Jede multilineare Abbildung ist also festgelegt und festlegbar durch die Bilder von Tupeln von Basisvektoren. Den Spezialfall $n = 1$ kennen wir bereits aus 3.2.3.2, den Spezialfall $n = 2$ aus 3.2.3.9, im Fall $n = 0$ ist die Aussage eh tautologisch.

Übung 3.6.3.11. Gegeben ein Körper K und ein K-Vektorraum der endlichen Dimension $\dim V = n \geq 0$ ist der Raum der alternierenden multilinearen Abbildungen $V^n \to K$ eindimensional.

Übung 3.6.3.12 (**Multiverknüpfung multilinearer Abbildungen**). Man zeige: Gegeben ein Körper K und natürliche Zahlen $n \geq 0$ und $m(1), \ldots, m(n) \geq 0$ und K-Vektorräume $W, V_1, \ldots, V_n, U_{1,1}, \ldots U_{1,m(1)}, \ldots, U_{n,m(n)}$ und multilineare Abbildungen $f : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ sowie $g_i : U_{i,1} \times \ldots \times U_{i,m(i)} \to V_i$ ist auch die Abbildung $f \circ (g_1 \times \ldots \times g_n)$ vom Produkt der $U_{i,j}$ nach W multilinear. Oder nein, das ist scheußlich auszuschreiben: Man behandle nur den Fall $n = 3$, $m(1) = m(2) = 2, m(3) = 0$.

3.6.4 Rechenregeln für Determinanten

Satz 3.6.4.1 (Multiplikativität der Determinante). *Sei K ein Kring. Gegeben quadratische Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n; K)$ gilt*

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

Erster Beweis. Wir notieren $\mathcal{T}_n := \mathrm{Ens}(\{1, \ldots, n\})$ die Menge aller Abbildungen $\kappa : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ und rechnen

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \textstyle\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_i (AB)_{i\sigma(i)} \\
&= \textstyle\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_i \sum_j a_{ij} b_{j\sigma(i)} \\
&= \textstyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n,\, \kappa \in \mathcal{T}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\kappa(1)} b_{\kappa(1)\sigma(1)} \ldots a_{n\kappa(n)} b_{\kappa(n)\sigma(n)} \\
&= \textstyle\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_n} a_{1\kappa(1)} \ldots a_{n\kappa(n)} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{\kappa(1)\sigma(1)} \ldots b_{\kappa(n)\sigma(n)} \\
&= \textstyle\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_n} a_{1\kappa(1)} \ldots a_{n\kappa(n)} \det(B_\kappa)
\end{aligned}$$

mit der Vereinbarung, daß B_κ diejenige Matrix bezeichnet, deren Zeilen der Reihe nach die Zeilen mit den Indizes $\kappa(1), \ldots, \kappa(n)$ der Matrix B sind. Aus 3.6.3.7 folgt aber $\det B_\kappa = 0$ falls $\kappa \notin \mathcal{S}_n$ und $(\det B_\kappa) = \operatorname{sgn}(\kappa)(\det B)$ falls $\kappa \in \mathcal{S}_n$. Damit erhalten wir dann $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ wie gewünscht. □

Zweiter Beweis im Körperfall. Die Formel ist klar, wenn die Zweite der beiden Matrizen eine Elementarmatrix ist, also eine Matrix, die sich von der Einheitsmatrix in höchstens einem Eintrag unterscheidet. In der Tat entspricht in diesem Fall die Rechtsmultiplikation mit besagter Matrix einer Spaltenoperation. Unsere Formel folgt im allgemeinen, da nach 3.2.5.10 jede Matrix ein Produkt von Elementarmatrizen ist. □

Dritter Beweis im Körperfall. Man hält die Matrix A fest und betrachtet die beiden Abbildungen $\mathrm{Mat}(n; K) \to K$ gegeben durch $B \mapsto \det(A)\det(B)$ und $B \mapsto \det(AB)$. Beide sind multilinear und alternierend als Funktion der Spalten von B, und beide ordnen der Einheitsmatrix $B = \mathrm{I}$ den Wert $\det(A)$ zu. Aus 3.6.3.8 folgt damit unmittelbar, daß unsere beiden Abbildungen übereinstimmen. Dieser Beweis funktioniert auch für beliebige Kringe, sobald wir die Theorie linearer und multilinearer Abbildungen entsprechend verallgemeinert haben. □

Vierter Beweis im Körperfall. Im Rahmen der allgemeinen Theorie der Multilinearformen geben wir einen alternativen Beweis in 12.8.1.16 sowie ähnlich aber in einem noch größeren Rahmen in 4.6.5.16. □

Ableitung des Falls beliebiger Kringe aus dem Fall eines Körpers. Man betrachte die $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen X_{ij} und Y_{ij} im Polynomring $\mathbb{Z}[X_{ij}, Y_{ij}]$

über $\mathbb{Z}$ in $2n^2$ Veränderlichen. Als kommutativer Integritätsbereich liegt dieser Polynomring in einem Körper, eben in seinem Quotientenkörper, weshalb man aus dem Körperfall folgern kann, daß die Multiplikationsformel auch für Matrizen mit Einträgen in diesem Ring gelten muß, und insbesondere für die eben beschriebenen Matrizen. Dann aber gilt sie auch, wenn wir für die Variablen irgendwelche Elemente irgendeines Krings einsetzen. □

Satz 3.6.4.2 (**Determinantenkriterium für Invertierbarkeit**). *Die Determinante einer quadratischen Matrix mit Einträgen in einem Körper ist von Null verschieden genau dann, wenn unsere Matrix invertierbar ist.*

Beweis. In Formeln behaupten wir für einen Körper K und eine beliebige quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n; K)$ also

$$\det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ invertierbar}$$

Ist A invertierbar, so gibt es eine Matrix $B = A^{-1}$ mit $AB = I$. Mit der Multiplikationsformel folgt $(\det A)(\det B) = \det I = 1$ und folglich $\det A \neq 0$. Das zeigt die Implikation $\Leftarrow$. Ist A nicht invertierbar, so hat A nicht vollen Rang, die Familie der Spaltenvektoren von A ist demnach linear abhängig. Wir können also einen Spaltenvektor, ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Ersten, durch die Anderen ausdrücken, etwa $a_{*1} = \lambda_2 a_{*2} + \ldots + \lambda_n a_{*n}$. Dann folgt mit den Eigenschaften multilinear und alternierend jedoch

$$\begin{aligned}
\det A &= \det(\lambda_2 a_{*2} + \ldots + \lambda_n a_{*n} | a_{*2} | \ldots | a_{*n}) \\
&= \lambda_2 \det(a_{*2} | a_{*2} | \ldots | a_{*n}) \; + \ldots + \; \lambda_n \det(a_{*n} | a_{*2} | \ldots | a_{*n}) \\
&= \lambda_2 0 + \ldots + \lambda_n 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit ist auch die andere Implikation $\Rightarrow$ gezeigt. □

3.6.4.3 (**Determinante eines Endomorphismus**). Aus der Multiplikationsformel folgt sofort $\det(T^{-1}) = (\det T)^{-1}$ für jede invertierbare Matrix T und damit ergibt sich für jede weitere quadratische Matrix M die Identität $\det(T^{-1}MT) = \det M$. Nach 3.2.6.10 gilt für einen Endomorphismus $f : V \to V$ eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem Körper K und $N = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ und $M = {}_{\mathcal{A}}[f]_{\mathcal{A}}$ die darstellenden Matrizen bezüglich zwei angeordneten Basen und $T = {}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}$ die Basiswechselmatrix nun

$$N = T^{-1}MT$$

Folglich hängt die Determinante einer darstellenden Matrix von f nicht von der Wahl der zur Darstellung gewählten angeordneten Basis ab, in Formeln gilt also

$\det({}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}) = \det({}_{\mathcal{A}}[f]_{\mathcal{A}})$ für je zwei angeordnete Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V. Diesen Skalar notieren wir von nun an

$$\det f = \det(f|V) = \det_K(f|V)$$

und nennen ihn die **Determinante des Endomorphismus** f. Dem einzigen Automorphismus des Nullraums ist insbesondere die Determinante 1 zuzuordnen.

Satz 3.6.4.4 (Laplace'scher Entwicklungssatz). *Gegeben eine $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$ und feste k, l bezeichne $A\langle k, l\rangle$ die* **Streichmatrix***, die aus A durch Streichen der k-ten Zeile und l-ten Spalte entsteht. So gilt für jedes feste i die* **Entwicklung der Determinante nach der i-ten Zeile**

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \ \det A\langle i, j\rangle$$

und für jedes feste j die **Entwicklung nach der j-ten Spalte**

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \ \det A\langle i, j\rangle$$

3.6.4.5. Der folgende Beweis verwendet zwar die Sprache der Vektorräume, das Argument funktioniert jedoch ganz genauso statt für Matrizen mit Einträgen in einem Körper auch für Matrizen mit Einträgen in einem Kring.

Beweis. Wegen $\det A = \det A^\top$ reicht es, die erste unserer beiden Formeln zu zeigen. Wir wissen bereits, daß sich die Determinante einer quadratischen Matrix nur um den Faktor $(-1)^{j-1}$ ändert, wenn wir die j-te Spalte ganz nach vorne schieben, ohne die Reihenfolge der übrigen Spalten zu ändern. Es reicht also, unsere Formel für die Entwicklung nach der ersten Spalte zu zeigen, was im folgenden Beweis insbesondere die Notation vereinfacht. Wir schreiben unsere Matrix als Tupel von Spaltenvektoren $A = (a_{*1}|a_{*2}|\ldots|a_{*n})$ und schreiben den ersten Spaltenvektor als Linearkombination der Standardbasisvektoren

$$a_{*1} = a_{11}\mathrm{e}_1 + \ldots + a_{n1}\mathrm{e}_n$$

Die Multilinearität der Determinante liefert sofort die erste Gleichung der Gleichungskette

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \det(\mathrm{e}_i|a_{*2}|\ldots|a_{*n}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i-1} \det A\langle i, 1\rangle$$

Die zweite Gleichung sehen wir ein, indem wir in der Matrix $(\mathrm{e}_i|a_{*2}|\ldots a_{*n})$ die i-te Zeile ganz nach oben schieben, ohne die Reihenfolge der übrigen Zeilen zu ändern, um dann die Formel 3.6.2.9 für die Determinante von Block-oberen-Dreiecksmatrizen anzuwenden. □

Satz 3.6.4.6 (**Cramer'sche Regel**). *Bildet man zu einer quadratischen Matrix A mit Einträgen in einem Kring die sogenannte* **adjunkte Matrix** $A^\sharp$ *mit den Einträgen $A^\sharp_{ij} = (-1)^{i+j} \det A\langle j, i\rangle$ für $A\langle j, i\rangle$ die entsprechende Streichmatrix nach 3.6.4.4, so gilt*

$$A \circ A^\sharp = (\det A) \cdot I$$

3.6.4.7 (**Diskussion der Terminologie**). Diese adjunkte Matrix ist nicht zu verwechseln mit der adjungierten Abbildung aus 18.2.4.11, mit der sie außer der Bezeichnung rein gar nichts zu tun hat. Man beachte auch die Indexvertauschung: In der i-ten Zeile und j-ten Spalte der adjungierten Matrix steht bis auf ein „schachbrettartig verteiltes Vorzeichen" die Determinante der Matrix, die entsteht, wenn man die j-te Zeile und i-te Spalte der ursprünglichen Matrix streicht.

3.6.4.8. Meist versteht man unter der **Cramer'schen Regel** die Formel

$$x_i = \frac{\det(a_{*1}|\ldots|b_*|\ldots|a_{*n})}{\det(a_{*1}|\ldots|a_{*i}|\ldots|a_{*n})}$$

für die Lösung des Gleichungssystems $x_1 a_{*1} + \ldots + x_i a_{*i} \ldots + x_n a_{*n} = b_*$, wenn es denn eindeutig lösbar ist. Hier ist im Zähler wie angedeutet die i-te Spalte a_{*i} der Koeffizientenmatrix durch den Vektor b_* zu ersetzen. Besagte Formel ergibt sich unmittelbar durch Einsetzen der alternativen Darstellung von b_* als Linearkombination der Spalten in die Determinante im Zähler. Setzen wir in dieser Formel für b_* die Vektoren der Standardbasis ein, so erhalten wir die Einträge der inversen Matrix in der Form, in der sie auch im Satz beschrieben werden. Diese Formel wirkt zwar explizit, ist jedoch in der Praxis völlig unbrauchbar.

Beweis. Es gilt zu zeigen

$$\sum_i (-1)^{i+j} a_{ki} \det A\langle j, i\rangle = \delta_{kj}(\det A)$$

Im Fall $k = j$ folgt das direkt aus unserer Entwicklung der Determinante nach der j-ten Zeile 3.6.4.4. Im Fall $k \neq j$ steht die Formel für die Entwicklung nach der j-ten Zeile der Determinante der Matrix $\tilde{A}$ da, die aus A entsteht beim Ersetzen der j-ten Zeile durch die k-te Zeile. Da diese Matrix jedoch zwei gleiche Zeilen hat und damit Determinante Null, gilt unsere Formel auch in diesem Fall. □

Korollar 3.6.4.9 (**Invertierbarkeit ganzzahliger Matrizen**). *Eine quadratische Matrix mit Einträgen in einem Kring besitzt genau dann eine Inverse mit Einträgen in besagtem Kring, wenn ihre Determinante eine Einheit ist.*

3.6.4.10. Eine quadratische Matrix mit ganzzahligen Einträgen besitzt insbesondere genau dann eine Inverse mit ganzzahligen Einträgen, wenn ihre Determinante

1 oder -1 ist, und eine quadratische Matrix mit Einträgen im Polynomring über einem Körper besitzt genau dann eine Inverse mit polynomialen Einträgen, wenn ihre Determinante ein von Null verschiedenes konstantes Polynom ist.

Beweis. Sei K unser Kring. Gegeben Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n; K)$ mit $AB = I$ gilt natürlich $(\det A)(\det B) = \det I = 1$ und damit ist $\det A$ eine Einheit in K. Ist umgekehrt $\det A$ eine Einheit in K, so liefert nach der Cramer'schen Regel 3.6.4.6 die Formel $B = (\det A)^{-1} A^\sharp$ eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n; K)$ mit $AB = I$. Indem wir dies Argument auf die transponierte Matrix anwenden und das Resultat wieder transponieren, finden wir auch $C \in \mathrm{Mat}(n; K)$ mit $CA = I$. Durch Multiplizieren der zweiten Gleichung mit B von rechts folgt sofort $B = C$, folglich ist A in der Tat invertierbar in $\mathrm{Mat}(n; K)$ im Sinne von 2.2.2.2. $\square$

Übungen

Übung 3.6.4.11. Gegeben Endomorphismen f, g eines endlichdimensionalen Vektorraums gilt $\det(fg) = (\det f)(\det g)$.

Ergänzende Übung 3.6.4.12. Man zeige die Formel für die **Vandermonde-Determinante**

$$\det \begin{pmatrix} 1 & X_0 & X_0^2 & \dots & X_0^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & X_n & X_n^2 & \dots & X_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le n} (X_i - X_j)$$

Hinweis: Ich empfehle, vom Nullstellensatz für Hyperebenen 3.5.4.5 und dem Fall des Grundkörpers $\mathbb{Q}$ auszugehen.

Übung 3.6.4.13. Sei K ein Körper. Für jedes r versteht man unter den **r-Minoren** unserer Matrix die Determinanten aller derjenigen $(r \times r)$-Matrizen, die wir aus unserer Matrix durch das Streichen von Zeilen und Spalten erhalten können. Man zeige: Die Matrizen vom Rang $< r$ in $\mathrm{Mat}(m \times n; K)$ sind genau diejenigen Matrizen, bei denen alle r-Minoren verschwinden.

Ergänzende Übung 3.6.4.14. Jeder komplexe Vektorraum V kann auch als reeller Vektorraum aufgefaßt werden. Man zeige im endlichdimensionalen Fall die Formel $\det_{\mathbb{R}}(f|V) = |\det_{\mathbb{C}}(f|V)|^2$. Eine Verallgemeinerung auf allgemeinere Körpererweiterungen wird in 7.8.3.12 diskutiert.

Ergänzende Übung 3.6.4.15 (**Determinante geeignet geblockter Matrizen**). Es seien n^2 paarweise kommutierende Matrizen $A_{11}, \dots, A_{nn}$ mit m Zeilen und Spalten und Einträgen in einem Kring R gegeben. Wir bilden die $(mn \times mn)$-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Man zeige, daß gilt

$$\det B = \det \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} \dots A_{n\sigma(n)} \right)$$

Hinweis: Ist A_{11} die Einheitsmatrix, so folgt die Behauptung durch Nullen der ersten Blockspalte und Induktion. Ist $\det(A_{11})$ kürzbar, so folgt die Aussage durch Multiplizieren mit $\operatorname{diag}(A_{11}^\sharp, I, \dots, I)$ für $A_{11}^\sharp$ die adjunkte Matrix zu A_{11}. Im allgemeinen kann man eine weitere Variable X einführen und A_{11} durch die Matrix $A_{11} + XI$ ersetzen, deren Determinante ein normiertes Polynom in $R[X]$ und deshalb kürzbar ist. Nachher setze man dann $X = 0$.

Übung 3.6.4.16 (**Determinante geeignet geblockter Matrizen, Variante**). Man zeige dieselbe Formel wie in 3.6.4.15 auch für den Fall, daß die Matrizen A_{ij} alle obere Dreiecksmatrizen sind. Hinweis: Wir betrachten diejenige Abbildung

$$f : \{1, \dots, mn\} \to \{1, \dots, m\}$$

die verträglich ist mit der Restklassenabbildung beider Mengen auf $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, und beachten, daß für eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{mn}$ mit $f(\sigma(i)) \leq f(i)\ \forall i$ notwendig Gleichheit gilt für alle i.

Ergänzende Übung 3.6.4.17 (**Satz von Hensel**). Seien ein Körper K und ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathrm{GL}(n; K) \to K^\times$ gegeben. Man zeige, daß es einen Gruppenhomomorphismus $\alpha : K^\times \to K^\times$ gibt mit $\varphi = \alpha \circ \det$. Hinweis: Je zwei Elementarmatrizen A, B mit genau einem von Null verschiedenen Eintrag an derselben Stelle außerhalb der Diagonalen sind zueinander konjugiert, als da heißt, es gibt eine invertierbare Matrix C mit $CAC^{-1} = B$.

3.6.5 Orientierung

3.6.5.1. Wir verwandeln nun unsere anschauliche Interpretation 3.6.2.7 des Vorzeichens der Determinante in eine formale Definition. Gegeben ein Element $a \neq 0$ eines angeordneten Körpers K bezeichne $\operatorname{sign}(a) \in \{1, -1\}$ das Vorzeichen von a, also $\operatorname{sign}(a) = 1$ für $a > 0$ und $\operatorname{sign}(a) = -1$ für $a < 0$.

Definition 3.6.5.2. Eine **Orientierung** eines endlichdimensionalen Vektorraums V über einem angeordneten Körper ist eine Vorschrift ε, die jeder angeordneten Basis $\mathcal{A}$ unseres Vektorraums ein Vorzeichen $\varepsilon(\mathcal{A}) \in \{+1, -1\}$ zuordnet und zwar so, daß für je zwei angeordnete Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ die Determinante der Basiswechselmatrix das Vorzeichen $\varepsilon(\mathcal{A})\varepsilon(\mathcal{B})$ hat, in Formeln

$$\varepsilon(\mathcal{A})\varepsilon(\mathcal{B}) = \operatorname{sign}(\det {}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}})$$

Das Vorzeichen $\varepsilon(\mathcal{A})$ nennen wir die **Orientierung der angeordneten Basis** $\mathcal{A}$ unseres orientierten Vektorraums. Eine angeordnete Basis der Orientierung $+1$ in einem orientierten Vektorraum nennen wir eine **verträglich orientierte Basis**, eine angeordnete Basis der Orientierung -1 eine **unverträglich orientierte Basis**. Sprechen wir von der **durch eine angeordnete Basis gegebenen Orientierung**, so meinen wir diejenige Orientierung, die besagter Basis das Vorzeichen $+1$ zuordnet. Gegeben ein angeordneter Körper K bezeichnen wir diejenige Orientierung des K^n als die **Standardorientierung**, die der Standardbasis mit ihrer Standardanordnung das Vorzeichen $+1$ zuordnet. Unter der **Standardorientierung des Nullraums** verstehen wir diejenige Orientierung, die der einzigen angeordneten Basis $\emptyset$ das Vorzeichen $+1$ zuordnet.

3.6.5.3. Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem angeordneten Körper erklären wir seine **Orientierungsmenge**

$$\mathrm{or}(V)$$

als die zweielementige Menge seiner beiden Orientierungen nach 3.6.5.2. Jeder Vektorraumisomorphismus $f : V \xrightarrow{\sim} W$ liefert eine Bijektion $\mathrm{or}(f) : \mathrm{or}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}(W)$ vermittels der von f zwischen den Mengen der angeordneten Basen beider Räume induzierten Bijektion. Es gilt dann $\mathrm{or}(f \circ g) = \mathrm{or}(f) \circ \mathrm{or}(g)$ und $\mathrm{or}(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$. Weiter gilt für jeden Automorphismus $f : V \xrightarrow{\sim} V$ offensichtlich

$$\mathrm{or}(f) = \mathrm{id}_{\mathrm{or}(V)} \;\Leftrightarrow\; (\det f) > 0$$

In Worten sind also die orientierungserhaltenden Automorphismen genau die mit positiver Determinante und entsprechend die orientierungsumkehrenden Automorphismen genau die mit negativer Determinante.

3.6.5.4. Unter einer **Orientierung eines endlichdimensionalen affinen Raums** E über einem angeordneten Körper verstehen wir eine Orientierung seines Richtungsraums und setzen $\mathrm{or}(E) := \mathrm{or}(\vec{E})$ sowie $\mathrm{or}(\varphi) := \mathrm{or}(\vec{\varphi})$ für jeden Isomorphismus $\varphi : E \xrightarrow{\sim} F$ endlichdimensionaler affiner Räume über unserem angeordneten Körper.

Vorschau 3.6.5.5. In der Topologie werden wir jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V auch seine „topologische Orientierungsmenge“ zuordnen als die Menge $\mathrm{or}^{\mathrm{top}}(V)$ der beiden Erzeuger der relativen Homologie $\mathrm{H}(V, V\backslash 0)$. Ähnlich werden wir auch jedem endlichdimensionalen reellen affinen Raum seine „topologische Orientierungsmenge“ zuordnen. In diesem Kontext nennen wir die hier eingeführten Begriffe präziser die **algebraischen Orientierungsmengen** und verwenden dafür die Notation $\mathrm{or}^{\mathrm{alg}}$.

Bemerkung 3.6.5.6 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur findet man vielfach eine Definition, bei der eine Orientierung eines reellen Vektorraums als

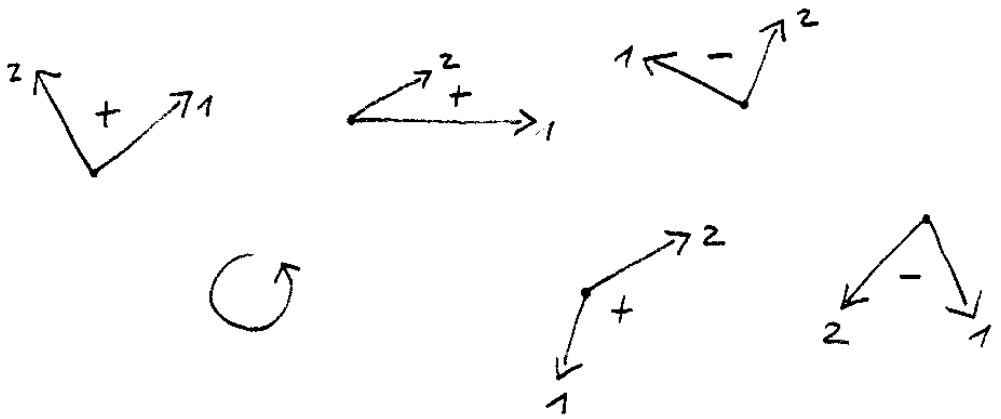
eine Äquivalenzklasse von Basen unter einer geeigneten Äquivalenzrelation erklärt wird. Diese Definition liefert dasselbe außer im Fall des Nullraums. In diesem Fall scheint mir die hier gegebene Definition, die auch dem Nullraum zwei verschiedene Orientierungen erlaubt, das sinnvollere Konzept.

Beispiel 3.6.5.7. Eine Orientierung einer reellen Gerade anzugeben bedeutet anschaulich, auf dieser Gerade eine „Richtung“ auszuwählen, eben die Richtung, in die diejenigen Vektoren zeigen, die verträglich orientierte Basen ihres Richtungsraums bilden. Wir nennen diese Vektoren dann kurzerhand **positive Vektoren** und denken uns unsere Gerade mit derjenigen Anordnung versehen, für die die Addition positiver Vektoren Elemente vergrößert. Mit diesen Konventionen können wir für einen orientierten eindimensionalen Vektorraum L die Menge der positiven Vektoren mit $L_{>0}$ bezeichnen. Analog vereinbaren wir für die Elemente von $L_{<0}$ die Bezeichnung **negative Vektoren** und nennen die Elemente von $L_{\geq 0}$ die **nichtnegativen Vektoren**.

Beispiel 3.6.5.8. Der schmutzige Raum unserer Anschauung aus 3.3.1.9 besitzt die **Rechte-Hand-Orientierung**, in der Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der entspannten rechten Hand als schmutzige angeordnete Basis des Richtungsraums aufgefaßt eine verträgliche angeordnete Basis bilden. Mit der linken Hand erhalten wir in derselben Weise die andere Orientierung, die **Linke-Hand-Orientierung**. Daß diese Orientierungen sich nicht ändern, egal wie wir uns drehen und wenden und auf den Kopf stellen, mag man als Illustration oder Konsequenz unserer Erkenntnis 3.6.5.16 sehen, daß zwei angeordnete Basen eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums dieselbe Orientierung liefern genau dann, wenn sie sich „im Raum der Basen stetig ineinander deformieren lassen“.

Beispiel 3.6.5.9. Denken wir uns die Tafelebene als einen schmutzigen zweidimensionalen reellen affinen Raum, so dürfen wir uns eine Orientierung der Tafelebene anschaulich als die Auszeichnung eines **Drehsinns** denken, nämlich den Drehsinn mit der Eigenschaft, daß bei Drehung in diesem Drehsinn der erste Vektor einer positiv orientierten angeordneten Basis ihres Richtungsraums zuerst in ein positives Vielfaches des zweiten Vektors gedreht wird und erst dann in ein negatives Vielfaches. Wenn, wie etwa bei der Tafelebene oder bei einem vor uns liegenden Blatt Papier, zusätzlich klar ist, „von welcher Seite man auf die Ebene gucken soll“, so mag man diese beiden Orientierungen als **im Uhrzeigersinn** und **im Gegenuhrzeigersinn** ansprechen. Ist unsere Ebene dahingegen eine Glasscheibe und die Betrachter stehen auf beiden Seiten, so legt man eine Orientierung besser fest, indem man einen Drehsinn als Kreispfeil mit einem Wachsstift einzeichnet.

Vorschau 3.6.5.10. In 16.1.8.5 werden wir einen Drehsinn formal definieren als die „Auswahl eines Erzeugers der Fundamentalgruppe vom Komplement des Ur-



Angeordnete Basen des Raums der Richtungsvektoren der Papierebene mit den Vorzeichen, die der Orientierung „im Gegenuhrzeigersinn“ entsprechen

sprungs“. Man kann dann trefflich darüber streiten, wie natürlich die hier skizzierte Identifikation zwischen Drehsinn und Orientierung ist und ob nicht die entgegengesetzte Identifikation genauso natürlich wäre, aber alles zu seiner Zeit.

Definition 3.6.5.11. Wir fixieren von nun an ein für allemal einen eindimensionalen orientierten reellen affinen Raum

$$\mathbb{T}$$

und nennen ihn die **mathematische Zeit** oder kurz **Zeit**.

3.6.5.12 (**Die schmutzige Anschauung**). Ich denke mir $\mathbb{T}$ als die Menge aller Zeitpunkte und denke mir die ausgezeichnete Orientierung in der Weise, daß jeder Richtungsvektor, der einen Zeitpunkt auf einen „späteren“ Zeitpunkt schiebt, eine positiv orientierte Basis bildet. Das mag aber jeder halten wie er will, Sie dürfen etwa bei den Elementen von $\mathbb{T}$ etwa auch an unendlich viele verschiedene Gemüse denken, oder an was auch immer. Den Richtungsraum $\vec{\mathbb{T}}$ bezeichnen wir als den Raum aller **Zeitspannen**, seine positiv orientierten Vektoren nennen wir **Zeiteinheiten**. Sie modellieren die Zeiteinheiten der Physik wie etwa die **Sekunde** $\mathrm{s} \in \vec{\mathbb{T}}$.

3.6.5.13 (**Herkunft der Zeiteinheiten**). Die Einteilung eines Tages in vierundzwanzig Stunden und die Einteilung dieser Stunden in je sechzig Minuten geht wohl auf die Babylonier zurück, die angeblich mit ihren Händen bis 60 zählten, indem sie mit jedem der 5 Finger der rechten Hand der Reihe nach die 12 Fingerglieder der linken Hand an den Fingern mit Ausnahme des Daumens berührten. Die Einteilung jeder Minute in wiederum 60 Sekunden bot sich dann als natürliche Verfeinerung an.

3.6.5.14 (**Orientierung des Dualraums**). Jede Orientierung auf einem Vektorraum induziert eine Orientierung auf seinem Dualraum vermittels der Vorschrift, daß die Duale einer orientierten angeordneten Basis eine orientierte angeordnete Basis des Dualraums sein soll. Die Elemente des positiven Teils $\vec{\mathbb{T}}^\top_{>0}$ des Dualraums des Raums $\vec{\mathbb{T}}$ der Zeitspannen nennt man **Frequenzen**. Eine solche Frequenz ist etwa der einzige Vektor $\mathrm{s}^\top$ der dualen Basis zur orientierten Basis der Sekunde $\mathrm{s} \in \vec{\mathbb{T}}$. Statt $\mathrm{s}^\top$ schreibt man meist s^{-1} oder Hz und nennt diese Frequenz ein **Hertz** nach dem Physiker Heinrich Rudolf Hertz.

Ergänzung 3.6.5.15. Die hier getroffene Wahl für die Orientierung des Dualraums ist im Fall höherer Dimension nicht vollständig kanonisch, aber ich sehe keine andere Möglichkeit, als sich auf eine Wahl festzulegen. Es ist jedoch wichtig, diese Wahl passend zu gewissen weiteren ebenso unkanonischen Wahlen im Zusammenhang mit den sogenannten „äußeren Potenzen“ zu treffen, die Sie später kennen lernen werden. Wir diskutieren das in 4.6.5.18 noch ausführlich. Unsere

Wahl wird im eindimensionalen Fall durch die in 4.6.1.15 für die Orientierung von Tensorpotenzen orientierter eindimensionaler Räume getroffenen Wahlen verallgemeinert.

Vorschau 3.6.5.16 (**Orientierung und Stetigkeit**). Zwei angeordnete Basen eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums liefern dieselbe Orientierung genau dann, wenn sie sich „stetig ineinander deformieren lassen“ alias in derselben „Wegzusammenhangskomponente“ im Sinne von 12.7.5.14 des Raums aller angeordneten Basen liegen. Man kann sich davon etwa mithilfe der Iwasawa-Zerlegung 4.1.11.9 überzeugen. Auch die präzise Formulierung und der formale Beweis wird Ihnen davon ausgehend leicht gelingen, sobald Sie in der Analysis die Grundtatsachen über Stetigkeit in mehreren Veränderlichen kennengelernt haben. Eine äquivalente Aussage dürfen Sie in der Analysis als Übung 12.7.5.19 zeigen. Der in meinen Augen natürlichste Zugang zu diesem Resultat verwendet Methoden der Topologie und wird in 15.2.3.14 diskutiert.

3.6.5.17 (**Zusammengesetzte Orientierung**). Sei $f : V \twoheadrightarrow W$ eine surjektive lineare Abbildung endlichdimensionaler Vektorräume über einem angeordneten Körper und sei $U := \ker f \subset V$ ihr Kern. So gibt es genau eine Abbildung $\operatorname{or}(U) \times \operatorname{or}(W) \to \operatorname{or}(V)$, $(\varepsilon, \eta) \mapsto \varepsilon\eta$ mit der Eigenschaft, daß gegeben eine angeordnete Basis $\mathcal{A}$ des Kerns U und eine angeordnete Basis $\mathcal{B}$ des Bildes W und eine Wahl $\tilde{\mathcal{B}}$ von Urbildern letzterer Basisvektoren in V für die durch Hintereinanderschreiben erhaltene angeordnete Basis $(\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{B}})$ von V gilt

$$(\varepsilon\eta)(\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{B}}) = \varepsilon(\mathcal{A})\eta(\mathcal{B})$$

Diese 2-Multiabbildung alias „Funktion in zwei Variablen“ ist **antikonstant** in dem Sinne, daß sich der Wert ändert, wann immer wir einen Eintrag in einem der beiden Faktoren ihres Definitionsbereichs ändern. Wir nennen Orientierungen $\varepsilon, \eta, \theta$ auf U, W, V **verträglich**, wenn gilt $\varepsilon\eta = \theta$, und nennen θ die **zusammengesetzte Orientierung**. Wenn wir hier von unseren drei Orientierungen beliebige Zwei festlegen, gibt es mithin stets genau eine Möglichkeit, die Dritte verträglich zu wählen. Die so durch Orientierungen auf U und V festgelegte Orientierung auf W nennen wir die **Quotientenorientierung**. Gegeben Orientierungen auf zwei endlichdimensionalen Vektorräumen U, W erhalten wir auch auf $U \oplus W$ eine Orientierung als die zusammengesetzte Orientierung für die offensichtliche kurze exakte Sequenz $U \hookrightarrow U \oplus W \twoheadrightarrow W$. Wir nennen sie die **Produktorientierung**.

Beispiel 3.6.5.18 (**Orientierungsverträglichkeiten im Anschauungsraum**). Wir denken uns im schmutzigen Raum der Anschauung von einer schmutzigen Tafel und betrachten die orthogonale Projektion des Raums auf unsere Tafel. Der Kern ihres linearen Anteils ist der eindimensionale Raum aller Richtungsvektoren, die auf der Tafel senkrecht stehen. Geben wir ihm die **Nach-vorne-Orientierung**,

in der die uns entgegenkommenden Richtungsvektoren positiv sind, so sind diese Nach-vorne-Orientierung, die Rechte-Hand-Orientierung des Raums und die Gegenuhrzeigersinn-Orientierung der Tafelebene verträglich im Sinne von 3.6.5.17.

Vorschau 3.6.5.19. In 21.6.6.11 vereinbaren wir auch eine Konvention für die „Schnittorientierung“ auf dem Schnitt eines angeordneten Paars zweier orientierter Teilräume eines orientierten Raums unter der Voraussetzung, daß die Summe unserer Teilräume der ganze Raum ist.

3.6.5.20. Unsere Definition der zusammengesetzten Orientierung ist in der Weise willkürlich, als es nicht mehr und nicht weniger natürlich gewesen wäre, die Abbildung $\mathrm{or}(W) \times \mathrm{or}(U) \to \mathrm{or}(V)$, $(\eta, \varepsilon) \mapsto \eta\varepsilon$ zu betrachten mit der Eigenschaft $(\eta\varepsilon)(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{A}) = \eta(\mathcal{B})\varepsilon(\mathcal{A})$ und sie zu benutzen, um die Verträglichkeit zu definieren. Ich sehe an dieser Stelle keine andere Möglichkeit, als einmal willkürlich eine Wahl zu treffen. Unsere Wahl mag man salopp „Kern vorne“ nennen. Es ist jedoch wichtig, diese Wahl passend zu gewissen ebenso unkanonischen Wahlen im Zusammenhang mit den sogenannten „äußeren Potenzen“ zu treffen, die Sie später kennen lernen werden. Das wird in 4.6.5.18 diskutiert.

Übungen

Übung 3.6.5.21 (**Orientierung affiner Räume durch Erzeugendensysteme**). Gegeben ein endlichdimensionaler affiner Raum E über einem angeordneten Körper und ein minimales affines Erzeugendensystem $p_1, \ldots, p_n$ von E vereinbaren wir, daß wir unter der **zu** $p_1, \ldots, p_n$ **gehörigen Orientierung von** E die durch die angeordnete Basis $p_2 - p_1, \ldots, p_n - p_1$ des Richtungsraums gegebene Orientierung verstehen wollen. Man zeige, daß sich für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ die zu $p_{\sigma(1)}, \ldots, p_{\sigma(n)}$ gehörigen Orientierung von E nur um das Vorzeichen $\mathrm{sgn}(\sigma)$ von der zu $p_1, \ldots, p_n$ gehörigen Orientierung unterscheidet.

3.6.6 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 3.6.6.1. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums über einem Körper K. Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt ein **Eigenwert von** f, wenn es einen von Null verschiedenen Vektor $v \neq 0$ aus V gibt mit

$$f(v) = \lambda v$$

Jeder derartige von Null verschiedene Vektor heißt ein **Eigenvektor von** f **zum Eigenwert** λ. Die Menge aller Eigenvektoren zum Eigenwert λ bildet zusammen mit dem Nullvektor einen Untervektorraum von V, den **Eigenraum** $\mathrm{Eig}(f; \lambda)$ **von** f **zum Eigenwert** λ.

Beispiel 3.6.6.2 (**Eigenvektoren zu den Eigenwerten Null und Eins**). Ein Eigenvektor zum Eigenwert Eins einer linearen Abbildung ist dasselbe wie ein vom Nullvektor verschiedener Fixvektor unserer Abbildung. Ein Eigenvektor zum Eigenwert Null einer linearen Abbildung ist dasselbe wie ein vom Nullvektor verschiedenes Element des Kerns unserer Abbildung.

Beispiel 3.6.6.3 (**Die schmutzige Anschauung**). Zunächst zwei nicht ganz mathematisch ausformulierte Beispiele: Die Drehung des Richtungsraums der Papierebene um den rechten Winkel im Uhrzeigersinn besitzt keinen reellen Eigenwert. Eine Spiegelung des Richtungsraums der Papierebene an einer Geraden besitzt stets Eigenvektoren zum Eigenwert Eins, nämlich alle Richtungsvektoren der Spiegelachse, und Eigenvektoren zum Eigenwert (-1), die der Leser selbst finden mag. Für das Ableiten, aufgefaßt als Endomorphismus des Raums aller reellen polynomialen Funktionen, ist der einzige Eigenwert die Null und die zugehörigen Eigenvektoren sind genau die von Null verschiedenen konstanten Polynome.

Satz 3.6.6.4 (Existenz von Eigenwerten). *Jeder Endomorphismus eines von Null verschiedenen endlichdimensionalen Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper besitzt einen Eigenwert.*

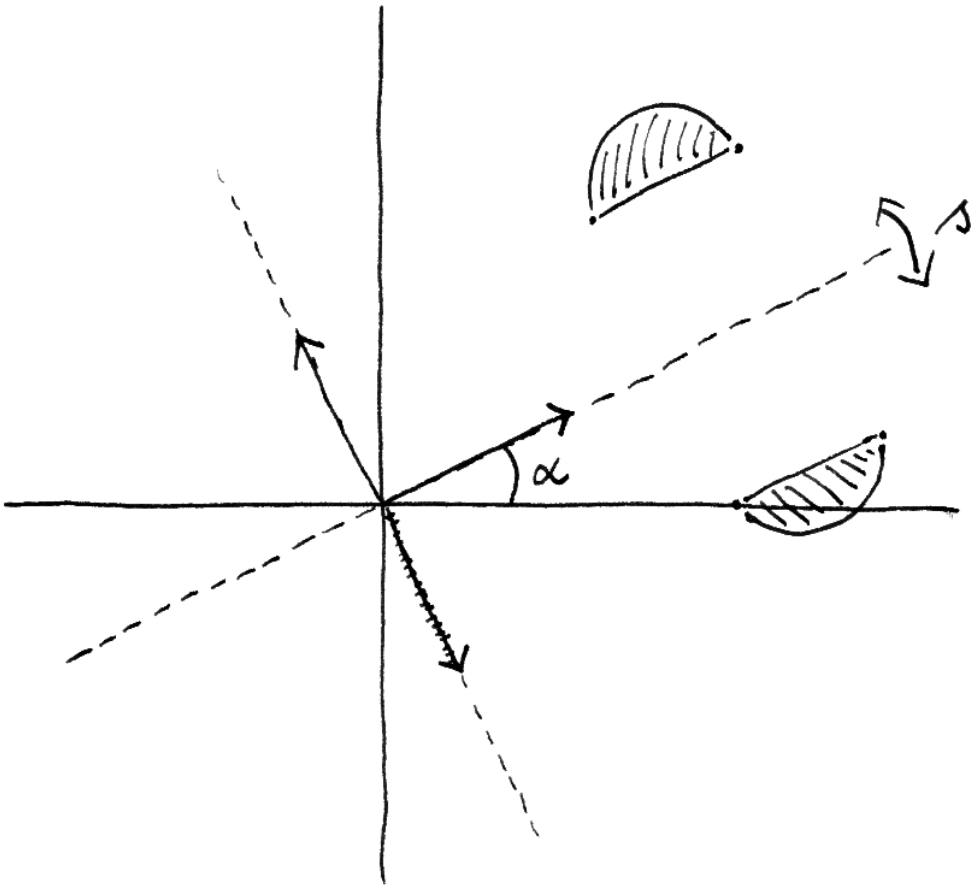
3.6.6.5. Auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}[T]$ der Polynome besitzt der Endomorphimus „Multipliziere mit T“ keine Eigenwerte. Die Annahme endlicher Dimension ist also wesentlich für die Gültigkeit unseres Satzes. Die Drehung des Richtungsraums der Papierebene um einen von $0°$ und $180°$ verschiedenen Winkel – hier noch nicht formal eingeführt aber doch wohl anschaulich klar gesagt – besitzt auch keinen reellen Eigenwert. Die Annahme eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers ist also auch wesentlich. Für den Beweis entwickeln wir zunächst unsere Theorie etwas weiter und geben dann den Beweis im Anschluß an 3.6.6.9.

Definition 3.6.6.6. Seien K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(n; K)$ eine quadratische Matrix mit Koeffizienten in K. Bezeichne $\mathrm{I} \in \mathrm{Mat}(n; K)$ die Einheitsmatrix. Das Polynom $\det(A - T\mathrm{I})$ aus dem Polynomring $K[T]$ heißt das **charakteristische Polynom der Matrix** A. Es wird mit einem griechischen χ notiert in der Form

$$\chi_A(T) := \det(A - T\mathrm{I})$$

Satz 3.6.6.7 (Eigenwerte und charakteristisches Polynom). *Seien K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(n; K)$ eine quadratische Matrix mit Koeffizienten in K. So sind die Eigenwerte des durch unsere Matrix gegebenen Homomorphismus $A : K^n \to K^n$ genau die Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms χ_A.*

Beweis. Bezeichnet $\mathrm{I} \in \mathrm{Mat}(n; K)$ die Einheitsmatrix, so haben wir für $\lambda \in K$



Die anschauliche Spiegelung s an der gestrichelt einegezeichneten Achse ist eine lineare Abbildung $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit den Eigenwerten ± 1. Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind alle von Null verschiedenen Vektoren der Spiegelachse, Eigenvektoren zum Eigenwert -1 sind alle von Null verschiedenen Vektoren, die auf der Spiegelachse senkrecht stehen. Die Matrix unserer Abbildung in Standardbasis ist nach dem Bild bei 3.2.6.4 die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

mit charakteristischem Polynom
$\chi_A(T) = (T - \cos 2\alpha)(T + \cos 2\alpha) - \sin^2 2\alpha = T^2 - 1.$

die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
(\lambda \text{ ist Eigenwert von } A) &\Leftrightarrow \exists v \neq 0 \text{ mit } Av = \lambda v \\
&\Leftrightarrow \exists v \neq 0 \text{ mit } (A - \lambda \mathrm{I})v = 0 \\
&\Leftrightarrow \ker(A - \lambda \mathrm{I}) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0
\end{aligned}$$

□

3.6.6.8. Es ist üblich, bei charakteristischen Polynomen die Variable mit λ zu bezeichen. Ich werde dieser Konvention von hier an meist folgen.

3.6.6.9. Sei K ein Körper und $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums. Mit demselben Argument wie in 3.6.4.3 sehen wir, daß bezüglich jeder angeordneten Basis von V die darstellende Matrix von f dasselbe charakteristische Polynom hat, in Formeln $\det({}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} - \lambda\,\mathrm{id}) = \det({}_{\mathcal{A}}[f]_{\mathcal{A}} - \lambda\,\mathrm{id})$ für je zwei angeordnete Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V. Dies Polynom notieren wir dann

$$\chi_f = \chi_f(\lambda) = \mathrm{char}(f|V)$$

und nennen es das **charakteristische Polynom des Endomorphismus** f. Die Eigenwerte von f sind nach 3.6.6.6 genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_f von f.

Beweis von Satz 3.6.6.4. Satz 3.6.6.4 besagt, daß jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen von Null verschiedenen Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper einen Eigenwert besitzt. Um das zu zeigen, müssen wir nur bemerken, daß das charakteristische Polynom unseres Endomorphismus nicht konstant ist, da unser Raum nämlich nach Annahme nicht der Nullraum ist. Im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers besitzt es also stets eine Nullstelle, und die ist dann nach 3.6.6.9 auch bereits der gesuchte Eigenwert. □

3.6.6.10. Das charakteristische Polynom einer Block-oberen-Dreiecksmatrix ist nach 3.6.2.9 das Produkt der charakteristischen Polynome ihrer Blöcke auf der Diagonalen.

Proposition 3.6.6.11 (Trigonalisierbarkeit). *Gegeben ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums $f : V \to V$ über einem Körper K sind gleichbedeutend:*

1. *Der Vektorraum V besitzt eine angeordnete Basis $\mathcal{B}$, bezüglich derer die Matrix ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ von f obere Dreiecksgestalt hat. Man sagt dann auch, f sei* **trigonalisierbar***;*

2. *Das charakteristische Polynom χ_f von f zerfällt bereits im Polynomring $K[\lambda]$ vollständig in Linearfaktoren.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$ ist klar nach unserer Formel 3.6.2.4 für die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix: Hat ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ obere Dreiecksgestalt mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so haben wir ja $\chi_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda)$. Um $2 \Rightarrow 1$ zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V = K^n$ annehmen, so daß f durch die Multiplikation mit einer Matrix A gegeben ist. Zu zeigen ist dann die Existenz von $B \in \mathrm{GL}(n; K)$ mit $B^{-1}AB = D$ von oberer Dreiecksgestalt: Die Spaltenvektoren der Matrix B bilden dann nämlich die gesuchte Basis $\mathcal{B}$. Wir argumentieren mit vollständiger Induktion über n. Für $n \geq 1$ gibt es nach Voraussetzung eine Nullstelle λ_1 von χ_A und dann nach 3.6.6.7 ein $c_1 \in K^n \backslash 0$ mit $Ac_1 = \lambda_1 c_1$. Ergänzen wir c_1 durch $c_2, \ldots, c_n$ zu einer Basis von K^n und betrachten die Matrix $C = (c_1 | \ldots | c_n)$, so gilt

$$AC = C \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & H \end{array} \right)$$

mit $H \in \mathrm{Mat}((n-1) \times (n-1); K)$. Nach unseren Erkenntnissen 3.6.2.9 zur Determinante von Block-oberen-Dreiecksmatrizen haben wir dann $\chi_H = (\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda)$ und per Induktion finden wir $F \in \mathrm{GL}(n-1; K)$ mit $F^{-1}HF$ von oberer Dreiecksgestalt. Bilden wir nun $\tilde{F} = \mathrm{diag}(1, F)$, so ist offensichtlich auch $\tilde{F}^{-1}(C^{-1}AC)\tilde{F}$ von oberer Dreiecksgestalt und die Matrix $B = C\tilde{F}$ löst unser Problem. □

Proposition 3.6.6.12 (Charakterisierung nilpotenter Matrizen). *Eine Matrix mit Koeffizienten in einem Körper ist nilpotent genau dann, wenn ihr charakteristisches Polynom nur aus dem Leitterm besteht. In Formeln ist also $A \in \mathrm{Mat}(n; K)$ nilpotent genau dann, wenn gilt $\chi_A(\lambda) = (-\lambda)^n$.*

Beweis. Ist unsere Matrix nilpotent, so ist sie nach 3.2.6.15 konjugiert zu einer oberen Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonalen und unsere Behauptung folgt aus 3.6.6.10. Besteht umgekehrt das charakteristische Polynom nur aus dem Leitterm, so existiert nach 3.6.6.11 oder zumindest seinem Beweis eine invertierbare Matrix $B \in \mathrm{GL}(n; K)$ mit $B^{-1}AB$ von oberer Dreiecksgestalt mit Nullen auf der Diagonale. Daraus folgt jedoch unmittelbar erst $(B^{-1}AB)^n = 0$ und dann $A^n = 0$. □

Ergänzung 3.6.6.13. Alternative Argumente für die Rückrichtung beim Beweis der Proposition liefern der Satz von Cayley-Hamilton 3.6.6.20 und der Satz über die Hauptraumzerlegung 4.3.2.13.

Definition 3.6.6.14. Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n; K)$ heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}(n; K)$ gibt mit $S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonal.

Definition 3.6.6.15. Ein Endomorphismus eines Vektorraums heißt **diagonalisierbar**, wenn unser Vektorraum von den Eigenvektoren des besagten Endomorphismus erzeugt wird. Im Fall eines endlichdimensionalen Vektorraums ist das gleichbedeutend dazu, daß unser Vektorraum V eine angeordnete Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ besitzt, für die die Matrix unserer Abbildung Diagonalgestalt hat, in Formeln ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. In der Tat bedeutet das ja gerade $f(v_i) = \lambda_i v_i$.

3.6.6.16 (**Diagonalisierbare Endomorphismen und ihre Matrizen**). Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Der durch Multiplikation mit einer Matrix $A \in \operatorname{Mat}(n; K)$ gegebene Endomorphismus des K^n ist genau dann diagonalisierbar, wenn die Matrix A diagonalisierbar ist. In der Tat, genau dann ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des K^n aus Eigenvektoren $Av_i = \lambda_i v_i$, wenn die Matrix $S = (v_1 | \ldots | v_n)$ mit den v_i in den Spalten invertierbar ist mit $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonal.

Beispiel 3.6.6.17. Eine nilpotente Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie die Nullmatrix ist. Die folgende Proposition zeigt unter anderem, daß jede $(n \times n)$-Matrix, deren charakteristisches Polynom n paarweise verschiedene Nullstellen hat, diagonalisierbar sein muß. Salopp gesprochen sind also „komplexe quadratische Matrizen für gewöhnlich diagonalisierbar“.

Proposition 3.6.6.18 (**Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren**). *Sei f ein Endomorphismus eines Vektorraums und seien $v_1, \ldots, v_n$ Eigenvektoren von f zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. So sind unsere Eigenvektoren linear unabhängig.*

Beweis. Der Endomorphismus $(f - \lambda_2 \operatorname{id}) \ldots (f - \lambda_n \operatorname{id})$ macht $v_2, \ldots, v_n$ zu Null, nicht aber v_1. Gegeben $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit $x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = 0$ folgt demnach durch Anwenden unseres Endomorphismus $x_1 = 0$. Ebenso zeigt man $x_2 = \ldots = x_n = 0$. □

Variante des Beweises. Durch Widerspruch. Sei sonst $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ein Gegenbeispiel mit der kleinstmöglichen Anzahl von Vektoren. So gilt sicher $n \geq 2$ und gegeben eine lineare Abhängigkeit $x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = 0$ müssen alle x_i verschieden sein von Null. Dann aber folgte durch Anwenden von $(f - \lambda_1 \operatorname{id})$ die lineare Abhängigkeit der Vektoren $v_2, \ldots, v_n$ im Widerspruch zu unserer Annahme. □

Lemma 3.6.6.19 (**Restriktion diagonalisierbarer Endomorphismen**). *Die Restriktion eines diagonalisierbaren Endomorphismus auf einen unter besagtem Endomorphismus stabilen Teilraum ist stets wieder diagonalisierbar.*

Beweis. Sei $f : V \to V$ unser Endomorphismus und $W \subset V$ ein unter f stabiler Teilraum. Gegeben $v \in W$ haben wir nach Annahme eine Darstellung

$v = v_1 + \ldots + v_n$ mit $v_i \in V$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Dann gilt wegen $(f - \lambda_i \,\mathrm{id})v_i = 0$ aber

$$(f - \lambda_2 \,\mathrm{id}) \ldots (f - \lambda_n \,\mathrm{id})v = (\lambda_1 - \lambda_2) \ldots (\lambda_1 - \lambda_n)v_1 \in W$$

und folglich $v_1 \in W$. Ebenso zeigt man auch $v_2, \ldots, v_n \in W$. Mithin wird auch W von Eigenvektoren erzeugt. □

Satz 3.6.6.20 (Cayley-Hamilton). *Setzt man eine quadratische Matrix in ihr eigenes charakteristisches Polynom ein, so erhält man die Nullmatrix.*

3.6.6.21. Ich gebe zwei Beweise. Der Erste baut auf der algebraischen Abgeschlossenheit des Körpers der komplexen Zahlen auf und damit auf noch unbewiesenen Tatsachen. Der Zweite ist in gewisser Weise elementarer, scheint mir aber wenig transparent. Ein alternativer Beweis, der in meinen Augen mehr Einsicht vermittelt, wird in 7.2.4.15 angedeutet.

Beweis mit dem Fundamentalsatz der Algebra. Wir beginnen mit dem Fall einer komplexen Matrix E. Nach 3.6.6.11 ist sie trigonalisierbar. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß sie bereits obere Dreiecksgestalt hat. Sind dann $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ihre Diagonaleinträge und betrachten wir die von den ersten k Vektoren der Standardbasis aufgespannten Untervektorräume $\mathbb{C}^k \times 0 \subset \mathbb{C}^n$, so gilt $(E - \lambda_k)(\mathbb{C}^k \times 0) \subset \mathbb{C}^{k-1} \times 0$ für alle k. Damit ist klar, daß das Produkt aller $(E - \lambda_k)$ alias $\chi_E(E)$ den ganzen Vektorraum $\mathbb{C}^n$ annulliert. Jetzt betrachten wir den Fall der Matrix E über dem Polynomring $\mathbb{Z}[X_{ij}]$ in n^2 Variablen mit Einträgen den Variablen, in Formeln $E_{ij} = X_{ij}$. Setzen wir diese Matrix in ihr eigenes charakteristisches Polynom ein, so erhalten wir ein Polynom aus $\mathbb{Z}[X_{ij}]$, das nach dem vorhergehenden die Nullfunktion auf $\mathbb{C}^{n^2}$ liefert. Nach 3.5.4.3 ist es also schon selbst das Nullpolynom und der Satz folgt. □

Beweis ohne den Fundamentalsatz der Algebra. Gegeben eine quadratische Matrix A mit Koeffizienten in einem Kring gibt es nach 3.6.4.6 eine weitere Matrix $A^\sharp$ mit Koeffizienten in demselben Kring derart, daß im Ring der quadratischen Matrizen mit Einträgen in unserem Kring gilt

$$A^\sharp A = (\det A) \cdot \mathrm{I}$$

für I die Einheitsmatrix. Nehmen wir speziell den Kring $K[t]$ und die Matrix $A = F - t\mathrm{I}$ für eine vorgegebene Matrix $F \in \mathrm{Mat}(n; K)$, so erhalten wir in $\mathrm{Mat}(n; K[t])$ die Gleichung

$$A^\sharp(F - t\mathrm{I}) = \chi_F(t) \cdot \mathrm{I}$$

$$\left(\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & & & 2 & & & 3 & & \\
 & 1 & & & 2 & & & 3 & \\
 & & 1 & & & 2 & & & 3 \\
\hline
0 & & & 5 & & & 4 & & \\
 & 0 & & & 5 & & & 4 & \\
 & & 0 & & & 5 & & & 4 \\
\hline
7 & & & 8 & & & 6 & & \\
 & 7 & & & 8 & & & 6 & \\
 & & 7 & & & 8 & & & 6
\end{array}\right) - \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & 0 & 7 & & & & & & \\
2 & 5 & 8 & & & & & & \\
3 & 4 & 6 & & & & & & \\
\hline
 & & & 1 & 0 & 7 & & & \\
 & & & 2 & 5 & 8 & & & \\
 & & & 3 & 4 & 6 & & & \\
\hline
 & & & & & & 1 & 0 & 7 \\
 & & & & & & 2 & 5 & 8 \\
 & & & & & & 3 & 4 & 6
\end{array}\right)\right)\left(\begin{array}{c}
1 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 1 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1
\end{array}\right) = 0$$

$(F - fE)(\mathrm{e}_1^\top, \ldots, \mathrm{e}_n^\top)^\top = 0$ am Beispiel einer Matrix F mit drei Zeilen und Spalten. Alle nicht ausgeschriebenen Einträge der obigen Matrizen sind als Null zu verstehen.

Bezeichne nun $f : K^n \to K^n$ die durch Multiplikation von Spaltenvektoren mit der zu F transponierten Matrix $F^\top$ gegebene lineare Abbildung. Wenden wir auf beide Seiten unserer Gleichung von Matrizen den Ringhomomorphismus $K[t] \to \operatorname{End}_K K^n$ mit $t \mapsto f$ an, so erhalten wir in $\operatorname{Mat}(n; \operatorname{End}_K K^n)$ alias $\operatorname{Mat}(n^2; K)$ die Gleichung

$$A^\sharp(F - f\mathrm{I}) = \chi_F(f) \cdot \mathrm{I}$$

Betrachten wir nun die Standardbasis $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ aus Spaltenvektoren des K^n und wenden beide Seiten dieser Gleichung an auf den Vektor $(\mathrm{e}_1^\top, \ldots, \mathrm{e}_n^\top)^\top$, aufgefaßt als Spaltenvektor in K^{n^2}, so ergibt auf der linken Seite schon die Multiplikation mit $(F - f\mathrm{I})$ den Nullvektor, denn bei

$$(F - f\mathrm{I})(\mathrm{e}_1^\top, \ldots, \mathrm{e}_n^\top)^\top$$

steht im i-ten Block von K^{n^2} genau $F_{i1}\,\mathrm{e}_1 + \ldots + F_{in}\,\mathrm{e}_n - f(\mathrm{e}_i) = 0$. Also wird die rechte Seite auch Null und es folgt $\chi_F(f)\,\mathrm{e}_1 = \ldots = \chi_F(f)\,\mathrm{e}_n = 0$. Hier ist zwar χ_F a priori das charakteristische Polynom der zu einer Matrix von f transponierten Matrix, aber das stimmt nach 3.6.2.5 mit dem charakteristischen Polynom von f überein. □

Proposition* 3.6.6.22. *Seien f ein Endomorphismus eines Vektorraums V über einem Körper K und $P \in K[X]$ ein normiertes Polynom ohne mehrfache Nullstellen, das in K vollständig in Linearfaktoren zerfällt und f annulliert, in Formeln $P(f) = 0$. So ist f diagonalisierbar und seine Eigenwerte sind Nullstellen von P.*

Beweis. Man wähle einen festen Vektor $v \in V$ und suche dazu einen normierten Teiler $Q = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_r)$ von P kleinstmöglichen Grades r mit $Q(f) : v \mapsto 0$. Dann ist $E := \langle v, f(v), f^2(v), \ldots f^{r-1}(v) \rangle$ ein unter f stabiler Untervektorraum von V. Andererseits ist $(f - \lambda_2) \ldots (f - \lambda_r)v$ nach Annahme nicht Null und folglich ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ_1 in E. In derselben Weise finden wir auch Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Da Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind nach 3.6.6.18, ist damit $f|_E$ diagonalisierbar und v eine Summe von Eigenvektoren von f. Die Proposition folgt. □

Übungen

Übung 3.6.6.23. Seien K ein Körper und $A \in \operatorname{Mat}(n; K)$ eine quadratische Matrix mit Koeffizienten in K. Man zeige, daß das charakteristische Polynom von A die Gestalt

$$\chi_A(T) = (-T)^n + \operatorname{tr}(A)(-T)^{n-1} + \ldots + \det(A)$$

hat, in Worten also den Leitkoeffizienten $(-1)^n$, als nächsten Koeffizienten bis auf ein Vorzeichen die Spur von A, und als konstanten Term die Determinante von A.

Übung 3.6.6.24. Jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums mit negativer Determinante besitzt einen negativen reellen Eigenwert. Hinweis: Zwischenwertsatz. Man zeige weiter, daß er im zweidimensionalen Fall zusätzlich auch noch einen positiven reellen Eigenwert besitzt.

Ergänzende Übung 3.6.6.25. Jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ungerader Dimension besitzt einen reellen Eigenwert. Ist die Determinante unseres Endomorphismus positiv, so besitzt er sogar einen positiven reellen Eigenwert.

Ergänzende Übung 3.6.6.26. Sind $k \subset K$ Körper und ist k algebraisch abgeschlossen und gilt $\dim_k K < \infty$, so folgt $K = k$. Hinweis: Man betrachte für alle $a \in K$ die durch Multiplikation mit a gegebene k-lineare Abbildung $(a\cdot) : K \to K$ und deren Eigenwerte.

Ergänzende Übung 3.6.6.27. Gegeben ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums gibt es stets eine Basis derart, daß die zugehörige Matrix Block-obere Dreiecksgestalt hat mit höchstens Zweierblöcken auf der Diagonalen.

Übung 3.6.6.28. Sei ein diagonalisierbarer Endomorphismus eines vierdimensionalen Vektorraums gegeben, dessen Eigenwerte paarweise verschieden sind. Wieviele unter unserem Endomorphismus stabile Untervektorräume besitzt unser Vektorraum?

Übung 3.6.6.29 (**Endomorphismen, deren Quadrat die Identität ist**). Sei V ein Vektorraum über einem Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik und $r : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $r^2 = \mathrm{id}_V$. So ist r diagonalisierbar und alle seine Eigenwerte sind ± 1. Fordern wir zusätzlich $\dim V = 2$ und $r \neq \mathrm{id}_V$, so hat r die Eigenwerte 1 und (-1) und die Determinante $\det(r) = -1$. Hinweis: $v = (v + r(v))/2 + (v - r(v))/2$.

Ergänzende Übung 3.6.6.30 (**Jordanform für** (2×2)**-Matrizen**). Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Man zeige, daß es für jede quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2; K)$ eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}(2; K)$ gibt derart, daß $P^{-1}AP$ eine der beiden Gestalten

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{hat.}$$

Übung 3.6.6.31. Gegeben zwei quadratische Matrizen A, B derselben Größe gilt $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Hinweis: Man erinnere beim Beweis der Multiplikativität der Determinante 3.6.4.1 das Argument zur Herleitung des Falls eines beliebigen Krings aus dem Körperfall.

3.7 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Judith Bender, Anna Staron, Markus Junker, Olaf Schnürer, Bernhard Krötz, Pascal Soergel. Besonders danke ich Veronika Thierfelder, deren fundamentale allgemeine Ratschläge zur Darstellung mir sehr geholfen haben.

Kapitel 4

Lineare Algebra 2: Bilinearformen, Symmetrie, Universelles

Inhalt

4.1 Skalarprodukt und Geometrie 336

4.1.1 Skalarprodukt und die Ebene von Euklid 336

4.1.2 Invariante Skalarprodukte zu Drehspiegelgruppen . 343

4.1.3 Geometrie von Skalarprodukträumen 348

4.1.4 Orthogonale und unitäre Abbildungen 357

4.1.5 Euklidische Räume 361

4.1.6 Euklidischer Raum und Anschauung* 365

4.1.7 Zweistrahlen und Winkel 371

4.1.8 Winkelmaße und Winkel im Dreieck 376

4.1.9 Kreuzprodukt und Spatprodukt 383

4.1.10 Abstandserhaltende Abbildungen 385

4.1.11 Normalformen und Matrixzerlegungen 391

4.1.12 Selbstadjungierte Endomorphismen 398

4.2 Allgemeine Bilinearformen 414

4.2.1 Fundamentalmatrix 414

4.2.2 Hauptachsentransformation 417

4.2.3 Klassifikation symmetrischer Bilinearformen 420

4.2.4 Satz von Witt* 432

4.2.5 Alternierende Bilinearformen 433

4.2.6 Relativistische Raumzeit* 435
4.2.7 Relativistische Längeneinheiten* 441
4.2.8 Affine Struktur durch Lichtkegel* 443
4.3 Hauptraumzerlegung und Jordanzerlegung 448
4.3.1 Motivation durch Differentialgleichungen* 448
4.3.2 Hauptraumzerlegung 449
4.3.3 Jordanzerlegung 455
4.3.4 Jordan'sche Normalform 459
4.4 Quotienten 468
4.4.1 Nebenklassen 468
4.4.2 Normalteiler und Nebenklassengruppen 471
4.4.3 Zyklische Gruppen 476
4.4.4 Endlich erzeugte abelsche Gruppen 482
4.4.5 Quotientenvektorräume 494
4.4.6 Exakte Sequenzen 497
4.4.7 Mehr zu exakten Sequenzen* 500
4.5 Symmetrie* 504
4.5.1 Gruppenwirkungen 504
4.5.2 Bahnformel 514
4.5.3 Konjugationsklassen 516
4.5.4 Endliche Untergruppen von Bewegungsgruppen . . 518
4.5.5 Diskussion der Eulerformel* 534
4.5.6 Bruhatzerlegung* 536
4.6 Multilineare Algebra 540
4.6.1 Tensorprodukte 540
4.6.2 Multiverknüpfung multilinearer Abbildungen* . . . 552
4.6.3 Bezug zur physikalischen Terminologie* 554
4.6.4 Geometrie in euklidischen Vektorräumen 557
4.6.5 Alternierende Tensoren und äußere Potenzen . . . 563
4.7 Kategorien und Funktoren* 574
4.7.1 Kategorien 574
4.7.2 Funktoren 581
4.7.3 Objekte mit Zusatzstrukturen* 586

4.7.4 Transformationen 589
4.7.5 Natürliche Konstruktionen in der Geometrie . . . 596
4.7.6 Köcher* 598
4.7.7 Produkte und Koprodukte in Kategorien 602
4.7.8 Produkte und Summen von Vektorräumen* 607
4.7.9 Algebren* 610
4.7.10 Yonedalemma* 613
4.7.11 Universen* 617
4.8 Danksagung 619

4.1 Skalarprodukt und Geometrie

4.1.1 Skalarprodukt und die Ebene von Euklid

4.1.1.1. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Ich erinnere daran, daß man unter einer **Bilinearform auf** V eine bilineare Abbildung $s : V \times V \to K$ versteht. Ich erinnere weiter daran, daß eine Bilinearform **symmetrisch** heißt, wenn gilt

$$s(v, w) = s(w, v) \quad \forall v, w \in V$$

Definition 4.1.1.2. Eine symmetrische Bilinearform s auf einem reellen Vektorraum V heißt **positiv definit**, wenn gilt

$$v \neq 0 \;\Rightarrow\; s(v, v) > 0$$

Ein **Skalarprodukt** auf einem reellen Vektorraum ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform. Ein reeller Vektorraum mit einem ausgezeichneten Skalarprodukt heißt ein **Skalarproduktraum**. Die **Norm** eines Vektors v in einem Skalarproduktraum (V, s) erklärt man als die nichtnegative reelle Zahl

$$\|v\| = \|v\|_s := \sqrt{s(v, v)}$$

4.1.1.3 (**Diskussion der Terminologie**). Das Skalarprodukt trägt seinen Namen, da es aus zwei Vektoren einen Skalar macht. Es darf nicht verwechselt werden mit der „Multiplikation mit Skalaren“ aus der Axiomatik eines Vektorraums, die aus einem Skalar und einem Vektor einen Vektor macht. Für Skalarprodukte sind auch die Notationen $s(v, w) = \langle v, w\rangle = v \cdot w = vw$ gebräuchlich.

Beispiel 4.1.1.4. Auf $V = \mathbb{R}^n$ erklärt man das **Standard-Skalarprodukt** durch die Vorschrift

$$\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle := v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n$$

für $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$. Im Formalismus der Matrixmultiplikation und mit unserer Interpretation von Elementen des $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren und Elementen von $\mathbb{R}$ als (1×1)-Matrizen können wir das Standardskalarprodukt auch schreiben als das Produkt $\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = \vec{v}^\top \circ \vec{w}$ eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor.

4.1.1.5. Sei V ein reeller Vektorraum. Gegeben eine Bilinearform s auf V und ein Automorphismus $g \in \mathrm{GL}(V)$ von V sagen wir, unsere Bilinearform s sei **invariant unter** g und unser Automorphismus g **erhalte** s, wenn gilt

$$s(gv, gw) = s(v, w) \quad \forall v, w \in V$$

Ist $G \subset \mathrm{GL}(V)$ eine Untergruppe, so heißt eine Bilinearform G**-invariant**, wenn sie unter allen Elementen $g \in G$ invariant ist. Die Gruppe aller Automorphismen eines reellen Vektorraums V, die die Bilinarform s erhalten, notieren wir

$$\mathrm{O}(V,s) := \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid s(gv,gw) = s(v,w)\ \forall v,w \in V\}$$

Ist s ein Skalarprodukt, so heißen die s erhaltenden Automorphismen **orthogonal** und $\mathrm{O}(V,s)$ heißt die **orthogonale Gruppe** von (V,s). Im Fall des $\mathbb{R}^n$ mit seinem Standardskalarprodukt s bezeichnet $\mathrm{O}(n) := \{[g] \mid g \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n,s)\}$ für die Menge aller Matrizen orthogonaler Automorphismen alias aller **orthogonalen Matrizen**.

Beispiel 4.1.1.6. Die einzigen orthogonalen Automorphismen von $\mathbb{R}$ mit seinem Standardskalarprodukt sind die Identität und die Multiplikation mit (-1). In Formeln haben wir also $\mathrm{O}(1) = \{1,-1\}$. Wir verzichten hier darauf, in der Notation einen Unterschied zwischen Zahlen und (1×1)-Matrizen zu machen.

Beispiel 4.1.1.7. Wir zeigen

$$\mathrm{O}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} \middle| \, c^2 + d^2 = 1 \right\}$$

Man kann das ohne alle Theorie mühelos nachrechnen. Etwas konzeptueller mag man bemerken, daß für $g \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ ja gelten muß $\langle g(\mathrm{e}_1), g(\mathrm{e}_1)\rangle = \langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_1\rangle = 1$ und folglich $g(\mathrm{e}_1) = (c,d)^\top$ mit $c^2 + d^2 = 1$ in der ersten Spalte unserer Matrix $[g]$. Ebenso muß gelten $g(\mathrm{e}_2) = (a,b)^\top$ mit $a^2 + b^2 = 1$. Und da schließlich auch gelten muß $\langle g(\mathrm{e}_1), g(\mathrm{e}_2)\rangle = \langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2\rangle = 0$, folgt zusätzlich $ca + db = 0$. Das läßt für die zweite Spalte unserer Matrix $[g]$ nur noch die beiden Möglichkeiten $\pm(-d,c)^\top$ offen. Da es umgekehrt ausreicht, die Bedingung $\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = \langle g\vec{v}, g\vec{w}\rangle$ für $\vec{v}, \vec{w}$ aus einem Erzeugendensystem zu prüfen, sagen wir dem Erzeugendensystem der beiden Vektoren der Standardbasis, folgt die Behauptung. Anschaulich mag man sich die Elemente der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(2) \cong \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ als „Drehungen“ und „Spiegelungen“ der Ebene $\mathbb{R}^2$ vorstellen, die den Ursprung festhalten. Wir diskutieren das später noch ausführlich.

4.1.1.8 (**Geometrie durch Symmetrie**). Ich erwarte, daß Sie aus der Schule eine gewisse Vertrautheit mit dem Standardskalarprodukt mitbringen und wissen, daß salopp gesprochen „Senkrechtstehen Skalarprodukt Null bedeutet“ und daß „die Norm eines Vektors seine Länge bedeutet“. Das kann man sich, wenn man auf der Papierebene eine Längeneinheit und ein Paar von aufeinander senkrecht stehenden und orientierten Geraden wählt und die Papierebene darüber mit dem $\mathbb{R}^2$ identifiziert, auch mit Hilfe des Satzes von Pythagoras leicht klarmachen. Mir scheint jedoch eine andere Modellierung der Papierebene sinnvoller und unserer Anschauung besser zugänglich, bei der man stattdessen von der Vorgabe einer ausgezeichneten Gruppe von „Kongruenzen“ ausgeht und die Begriffe Senkrechtstehen, Skalarprodukt und Länge sowie ihre Beziehungen untereinander daraus entwickelt. Das mag auch gleich als eine erste Illustration für die Bedeutung

von „Symmetrien“ alias „strukturerhaltenden Selbstabbildungen“ in der Geometrie dienen. Wir werden im folgenden, von diesen Symmetrien oder in unserem Fall Kongruenzen ausgehend, sogar den Satz des Pythagoras selbst nocheinmal in der Sprache der Mengenlehre herleiten.

Definition 4.1.1.9. Eine Teilmenge A eines reellen affinen Raums E heißt eine **Halbgerade**, wenn es einen Punkt $p \in E$ und einen von Null verschiedenen Richtungsvektor $\vec{v} \in \vec{E} \backslash 0$ gibt mit

$$A = p + \mathbb{R}_{\geq 0}\vec{v}$$

Definition 4.1.1.10. Eine Untergruppe $K \subset \mathrm{Aff}^{\times}(E)$ der Automorphismengruppe einer reellen affinen Ebene E heißt eine **Kongruenzgruppe**, wenn sie alle Translationen enthält, in Formeln $\vec{E} \subset K$, und wenn es für je zwei Halbgeraden $A, B \subset E$ genau zwei Elemente $k, h \in K$ gibt mit

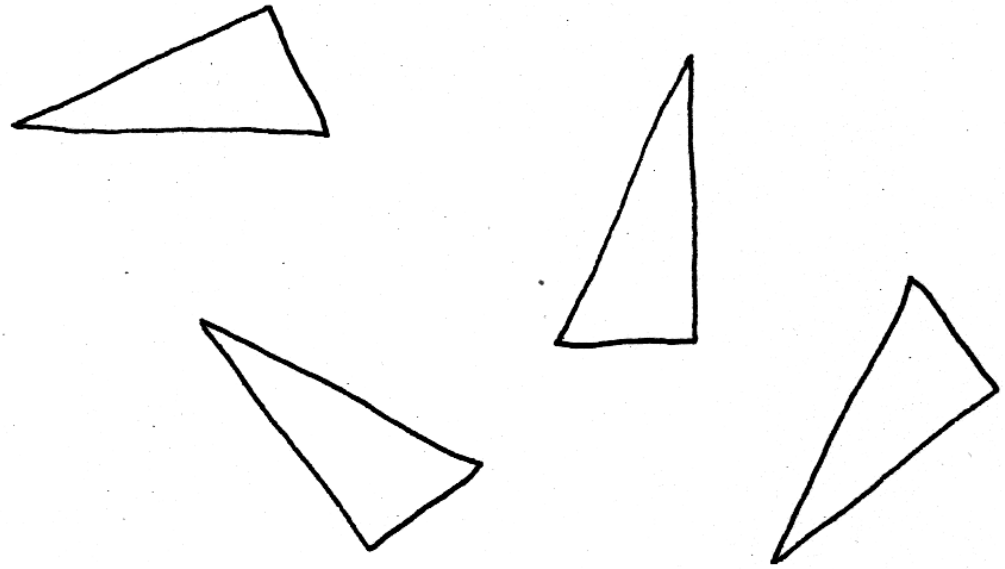
$$k(A) = B = h(A)$$

Eine **Kongruenzebene** (E, K) ist ein zweidimensionaler reeller affiner Raum E mit einer ausgezeichneten Kongruenzgruppe K. Die Elemente unserer Kongruenzgruppe nennen wir die **Kongruenzen** unserer Kongruenzebene.

4.1.1.11. Unter einem **invarianten Skalarprodukt** einer Kongruenzebene (E, K) verstehen wir ein unter der Gruppe $\vec{K}$ der linearen Anteile aller Kongruenzen invariantes Skalarprodukt auf ihrem Richtungsraum $\vec{E}$.

4.1.1.12 (**Diskussion der Terminologie**). Unsere Kongruenzebenen sind unsere erste axiomatische Beschreibung der schmutzigen Papierebene. Wir werden noch zwei weitere äquivalente axiomatische Beschreibungen dieser Struktur einführen, die eher algebraischen „euklidischen Ebenen“ alias „zweidimensionalen euklidischen Räme“ aus 4.1.5.1 und besonders nah an der geometrischen Anschauung und der Axiomatik von Euklid selbst die „fasteuklidischen Ebenen mit Paralellenaxiom“ aus 5.1.1.17.

Vorschau 4.1.1.13. In 4.1.2.9 zeigen wir, daß es zu jeder Kongruenzebene (E, K) ein invariantes Skalarprodukt s gibt und daß sich je zwei invariante Skalarprodukte zu ein- und derselben Kongruenzebene höchstens um eine positive multiplikative Konstante unterscheiden. In 4.1.2.11 zeigen wir, daß die Kongruenzen sich dann umgekehrt charakterisieren lassen als alle Affinitäten, deren linearer Anteil in Bezug auf dieses Skalarprodukt s orthogonal ist. Daraus mögen Sie in Übung 4.1.2.13 folgern, daß je zwei Kongruenzebenen in einer dort genauer präzisierten Weise isomorph sind.



Einige Dreiecke in der Papierebene, die durch Kongruenzen ineinander überführt werden können. Man nennt sie deshalb auch **kongruente Dreiecke**.

4.1.1.14. Orientierungserhaltende Kongruenzen einer beliebig vorgegebenen Kongruenzebene heißen **gleichsinnige Kongruenzen** und orientierungsumkehrende Kongruenzen **gegensinnige Kongruenzen**. Sie werden in 4.1.2.14 zeigen, daß jede gleichsinnige Kongruenz entweder eine Translation ist oder genau einen Fixpunkt hat. Sie weden dort auch zeigen, inwiefern man sie sich im letzteren Fall als eine „Drehung“ vorstellen darf. Andererseits werden sie in 4.1.2.15 zeigen, daß jede gegensinnige Kongruenz genau eine affine Gerade stabilisiert, und werden erklären, inwiefern man sie sich als eine „Gleitspiegelung“ vorstellen darf. Spiegelungen fassen wir dabei als spezielle Gleitspiegelungen auf.

4.1.1.15 (**Die schmutzige Anschauung**). Man mag bei einer Kongruenzebene an eine unendlich ausgedehnte Pappe denken und bei einer Kongruenz an eine anschauliche Bewegung im Raum, die diese Pappe in sich selber überführt. Gleichsinnige Kongruenzen erhält man, indem man sich die Pappe als auf einem Tisch liegend denkt und sie auf dem Tisch verschiebt oder dreht, ohne sie dabei vom Tisch hochzuheben. Gegensinnige Kongruenzen erhält man, indem man die Pappe auf irgendeine Weise umdreht. An dieser Stelle möchte ich Sie am liebsten wieder einmal davon überzeugen, daß das Abstrakte das eigentlich Konkrete ist.

4.1.1.16 (**Norm als Länge**). Gegeben eine Kongruenzebene (E, K) mit invariantem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ gilt für die zugehörige Norm $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ offensichtlich

$$\|p - q\| = \|k(p) - k(q)\| \quad \forall p, q \in E, k \in K$$

sowie $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ für jeden reellen Skalar λ. In der schmutzigen Papierebene entspricht folglich $\|p - q\|$ der Zahl, die wir als Abstand zwischen den Punkten p und q messen, wenn wir ein Lineal anlegen alias mit einer Kongruenzabbildung entsprechend bewegen, und wenn wir zusätzlich unser Lineal dadurch eichen, daß wir damit für einen fest vorgegebenen Richtungsvektor $m \neq 0$ die Länge $\|m\| = 1$ messen.

Satz 4.1.1.17 (Senkrechtstehen und Skalarprodukt). *Gegeben eine Kongruenzebene (E, K) mit invariantem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und Richtungsvektoren $v, w \in \vec{E}$ sind gleichbedeutend:*

1. *Es gibt eine Kongruenz $\varphi \in K$ mit $\vec{\varphi}(v) = -v$ und $\vec{\varphi}(w) = w$;*
2. *Es gilt $\langle v, w\rangle = 0$.*

4.1.1.18. Die erste dieser Bedingungen knüpft an unsere geometrische Anschauung an. Wir nennen im folgenden zwei Richtungsvektoren **geometrisch senkrecht**, wenn sie diese Bedingung erfüllen. Die zweite dieser Bedingungen ist Ihnen vermutlich bereits aus der Schule vertraut. Wir formulieren sie gleich als Definition und nennen Vektoren v, w in einem Skalarproduktraum **algebraisch**

senkrecht oder gleichbedeutend **orthogonal**, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet.

4.1.1.19 (**Ursprung der Terminologie**). Das Wort „senkrecht“ kommt her von „senken“, speziell dem Hinablassen eines Gewichts oder „Senkbleis“ an einem Faden, um die Vertikale zu bestimmen. Vom Begriff des „senkrecht Stehens einer Säule auf dem Boden“ zum „senkrecht Stehen eines Vektors auf einem anderen“ ist es dann nur noch ein kleiner Schritt. Das Wort „orthogonal“ ist griechisch für „rechtwinklig“, und zwar ist „gon“ derselbe Wortstamm wie „Knie“ und meint hier „Winkel“, wohingegen „ortho“ für „recht, richtig“ steht wie etwa in „Orthographie“ für „Rechtschreibung“.

Beweis. Gibt es eine Kongruenz φ mit $\vec{\varphi}(v) = -v$ und $\vec{\varphi}(w) = w$, so folgt für unser invariantes Skalarprodukt

$$\langle v, w\rangle = \langle \vec{\varphi}(v), \vec{\varphi}(w)\rangle = \langle -v, w\rangle$$

und damit $\langle v, w\rangle = 0$. Im Fall $w \neq 0$ gibt es umgekehrt für alle $p \in E$ genau eine nichttriviale Kongruenz $\varphi \in K\backslash\mathrm{id}$, die die Halbgerade $p + \mathbb{R}_{\geq 0}w$ festhält. Aus $\varphi(p) = p$ folgt $\vec{\varphi} \neq \mathrm{id}$. Andererseits gilt notwendig $\varphi^2 = \mathrm{id}$ und folglich $(\vec{\varphi})^2 = \mathrm{id}$. Nach 3.6.6.29 hat $\vec{\varphi}$ also die Eigenwerte 1 und (-1) und beide Eigenräume sind eindimensional. Nach der bereits bewiesenen Implikation umfaßt der (-1)-Eigenraum den Untervektorraum $\{v \in \vec{E} \mid \langle v, w\rangle = 0\}$. Aus Dimensionsgründen muß er dann bereits mit diesem Untervektorraum zusammenfallen und wir haben für alle $v, w \in \vec{E}$ mit $\langle v, w\rangle = 0$ und $w \neq 0$ eine Kongruenz φ gefunden mit $\vec{\varphi}(v) = -v$ und $\vec{\varphi}(w) = w$. Im Fall $w = 0$ können wir dasselbe Argument für irgendeinen Vektor $w_1 \in \vec{E}\backslash 0$ mit $\langle v, w_1\rangle = 0$ anwenden und das so konstruierte φ erfüllt dann natürlich auch $\vec{\varphi}(w) = 0 = w$. □

Satz 4.1.1.20 (**Pythagoras**). *Zwei Vektoren v, w des Richtungsraums einer Kongruenzebene mit invariantem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ stehen genau dann aufeinander geometrisch senkrecht, wenn für die zugehörige Norm $\|\ \|$ gilt*

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

Beweis. Per definitionem gilt $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$. Aus der Bilinearität und Symmetrie des Skalarprodukts folgern wir für beliebige Richtungsvektoren v, w die Identität

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$$

Aus 4.1.1.17 wissen wir bereits, daß das geometrische Senkrechtstehen gleichbedeutend ist zum algebraischen Senkrechtstehen alias dem Verschwinden des Skalarprodukts. Der Satz folgt. □

Ergänzung 4.1.1.21 (**Bezug zum geometrischen Beweis**). Der auf der Schule übliche geometrische Zugang zum Satz von Pythagoras durch Flächenvergleich ist uns dadurch verbaut, daß in unserem formalen Aufbau das Konzept einer Fläche noch gar nicht zur Verfügung steht. In der schmutzigen Anschauung mag man jedoch $\langle v, w\rangle$ verstehen als die „orientierte Fläche $\langle v, w\rangle = \mathrm{vol}(v, w')$ des Parallelogramms mit den Kantenvektoren v, w' für w' den Vektor, der aus w durch Drehung um einen rechten Winkel gegen den Uhrzeigersinn entsteht". In dieser Anschauung bedeutet die Bilinearität des Skalarprodukts dann insbesondere die „Invarianz von Flächen unter Scherungen". So erweist sich unsere algebraische Rechnung als eine Übersetzung der in der Schule üblichen und adäquaten anschaulichen Argumentation in den hier entwickelten Formalismus.

Ergänzung 4.1.1.22. Ich will kurz auf die naheliegende Frage eingehen, warum man nicht anstelle des Skalarprodukts einfacher die Zuordnung betrachtet, die je zwei Vektoren einer euklidischen Ebene die Fläche des von ihnen aufgespannten Parallelogramms zuordnet. Die Schwierigkeit dabei ist, daß diese Zuordnung nicht bilinear wäre, man kann also nur schöne algebraische Formeln erwarten für die Zuordnung, die je zwei Vektoren einer euklidischen Ebene die „orientierte Fläche" des von ihnen aufgespannten Parallelogramms zuordnet. Diese Zuordnung kann durchaus durch einen einfachen algebraischen Ausdruck beschrieben werden, sie hängt aber von der Wahl einer Orientierung ab und ist nicht symmetrisch, sondern vielmehr schiefsymmetrisch. Bei der zuvor beschriebenen geometrischen Bedeutung des Skalarprodukts geht dahingegen die Wahl einer Orientierung zweimal ein und kürzt sich weg, so daß es im Endeffekt von dieser Wahl doch nicht abhängt.

Ergänzung 4.1.1.23 (**Allgemeinere Grundkörper als die reellen Zahlen**). Bei den hier und im folgenden ausgeführten Überlegungen mag man ein tieferes Verständnis aus der Frage gewinnen, inwieweit sie sich auch über allgemeineren angeordneten Körpern durchführen lassen. Für die meisten Resultate müssen wir nur fordern, daß alle nichtnegativen Elemente des fraglichen angeordneten Körpers Quadrate sind. Sobald es aber um Winkelmaße gehen wird, benötigen wir analytische Hilfsmittel und müssen mit dem Körper der reellen Zahlen arbeiten oder eine große Künstlichkeit der Konstruktionen und Argumente in Kauf nehmen.

Übungen

Übung 4.1.1.24 (**Die komplexe Zahlenebene als Kongruenzebene**). Man zeige, daß die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ zu einer Kongruenzebene werden, wenn wir als Kongruenzen diejenigen Abbildungen auszeichnen, die eine der beiden Gestalten $z \mapsto az + b$ oder $z \mapsto a\bar{z} + b$ haben mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $|a| = 1$. Man zeige, daß die Formel $\langle z, w\rangle := \mathrm{Re}\, \bar{z}w$ ein invariantes Skalarprodukt auf $\vec{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$

liefert, für dessen Norm gilt $\|z\| = |z|$. Man mag mit mehr Mut weiter zeigen, daß unsere Kongruenzen genau alle Abbildungen $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind mit $|k(p) - k(q)| = |p - q| \; \forall p, q \in \mathbb{C}$.

Übung 4.1.1.25. Gegeben ein reeller Skalarproduktraum V mit Skalarprodukt $\langle \; , \; \rangle$ verwendet man üblicherweise die Notation $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Man zeige in einem reellen Skalarproduktraum die Äquivalenz

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle v, w \rangle = 0$$

Man zeige weiter in einem reellen Skalarproduktraum die **Parallelogrammregel**, nach der die Summe der Quadrate der vier Seiten eines Parallelogramms gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen ist, in Formeln

$$2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 = \|v - w\|^2 + \|v + w\|^2$$

Übung 4.1.1.26 (**Rechtfertigung der Konstruktion der Mittelsenkrechte**). Seien E eine reelle affine Ebene und $\langle \; , \; \rangle$ ein Skalarprodukt auf ihrem Richtungsraum. Gegeben paarweise verschiedene Punkte $a, b, c, d \in E$ mit $\|a - c\| = \|a - d\|$ und $\|b - c\| = \|b - d\|$ zeige man, daß $(a - b)$ senkrecht steht auf $(c - d)$. Gilt hier sogar $\|a - c\| = \|a - d\| = \|b - c\| = \|b - d\|$, so zeige man, daß der Schnittpunkt p der Geraden $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ durch a und b beziehungsweise c und d denselben Abstand zu allen unseren vier Punkten a, b, c, d hat, in Formeln $\|a - p\| = \|b - p\| = \|c - p\| = \|d - p\|$.

4.1.2 Invariante Skalarprodukte zu Drehspiegelgruppen

Definition 4.1.2.1. Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Teilmenge $A \subset V$ heißt ein **Strahl**, wenn es einen Vektor $v \in V \backslash 0$ gibt mit $A = \mathbb{R}_{\geq 0} v$.

Definition 4.1.2.2. Gegeben ein zweidimensionaler reeller Vektorraum Z heiße eine Untergruppe $O \subset \mathrm{GL}(Z)$ eine **Drehspiegelgruppe**, wenn es für je zwei Strahlen $A, B \subset Z$ genau zwei Elemente $k, h \in O$ gibt mit $k(A) = B = h(A)$. Die Elemente einer ausgezeichneten Drehspiegelgruppe nennen wir im folgenden **Drehspiegelungen**.

Beispiel 4.1.2.3. Gegeben ein zweidimensionaler reeller Vektorraum Z mit Skalarprodukt s ist die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(Z, s)$ eine Drehspiegelgruppe. Ich überlasse es dem Leser, dafür einen Beweis auszuschreiben.

4.1.2.4. Sei (Z, O) ein zweidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichneter Drehspiegelgruppe. Für alle $v \in Z \backslash 0$ gibt es dann nach Annahme genau ein nichttriviales Element $r_v \in O \backslash \mathrm{id}$ mit $r_v(\mathbb{R}_{\geq 0} v) = \mathbb{R}_{\geq 0} v$. Es folgt erst $r_v^2 = \mathrm{id}$ und dann $r_v(v) = v$. Aus $r_v^2 = \mathrm{id}$ folgt andererseits, daß r_v die Eigenwerte 1 und (-1) hat. Wir nennen r_v die **Spiegelung zu** v. Die Notation mag an „Reflektion“ erinnern, der Buchstabe s ist schon für Skalarprodukte vergeben.

Lemma 4.1.2.5 (**Drehspiegelungen mit negativer Determinante**). *Sei (Z, O) ein zweidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichneter Drehspiegelgruppe. So sind die Drehspiegelungen mit negativer Determinante genau die Spiegelungen, in Formeln*

$$\{k \in O \mid \det(k) < 0\} = \{r_v \mid v \in Z \backslash 0\}$$

Beweis. Ein Automorphismus r eines zweidimensionalen reellen Vektorraums mit negativer Determinante muß nach 3.6.6.24 einen positiven und einen negativen Eigenwert haben. Ist r unsere Drehspiegelung und v ein Eigenvektor von r zum positiven Eigenwert, so muß r die einzige nichttriviale Drehspiegelung sein, die den Strahl $\mathbb{R}_{\geq 0} v$ festhält. □

Lemma 4.1.2.6. *Sei (Z, O) ein zweidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichneter Drehspiegelgruppe. So werden je zwei Strahlen $A, B \subset Z$ durch genau eine Spiegelung aus O miteinander vertauscht.*

Beweis. Sicher gibt es stets eine Drehspiegelung k, die A in B überführt, und eine Spiegelung r, die A festhält. Dann hat von den beiden Drehspiegelungen r und kr, die A in B überführen, genau eine negative Determinante, und diese ist nach 4.1.2.5 die gesuchte Spiegelung. □

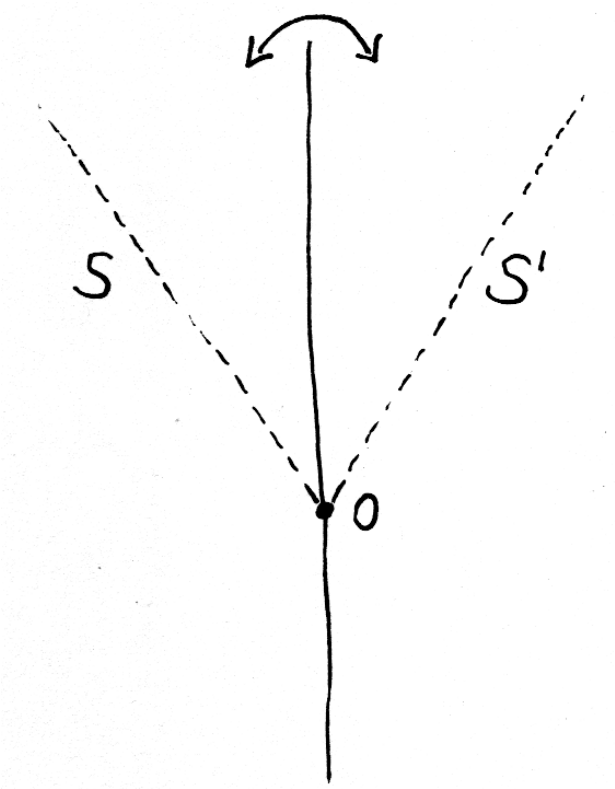
4.1.2.7 (**Einführen einer Norm**). Sei (Z, O) ein zweidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichneter Drehspiegelgruppe. Sei $m \in Z \backslash 0$ ein fest gewählter von Null verschiedener Vektor. Für jeden weiteren von Null verschiedenen Vektor $v \in Z \backslash 0$ gibt es offensichtlich genau eine Drehspiegelung $d \in O$ mit positiver Determinante, die den Strahl $\mathbb{R}_{\geq 0} v$ auf den Strahl $\mathbb{R}_{\geq 0} m$ abbildet. Wir können also eine positive reelle Zahl $\|v\|_m = \|v\|$ definieren durch die Forderung

$$d(v) = \|v\| m$$

Wir nennen diese positive reelle Zahl die **durch m bestimmte Norm** oder kurz die **m-Norm von v**. Vereinbaren wir zusätzlich $\|0\| = 0$, so gilt offensichtlich $\|\mu v\| = \mu \|v\|$ für alle Vektoren $v \in Z$ und alle nichtnegativen reellen Zahlen $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Offensichtlich gilt auch $\|kv\| = \|v\|$ für alle Drehspiegelungen $k \in O$ und wir haben für $v, w \in Z$ sogar

$$\|v\| = \|w\| \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in O \text{ mit } k(v) = w.$$

Satz 4.1.2.8 (**Invariante Skalarprodukte zu Drehspiegelgruppen**). *Sei (Z, O) ein zweidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichneter Drehspiegelgruppe. So gibt es auf Z ein O-invariantes Skalarprodukt und jede O-invariante Bilinearform auf Z ist ein Vielfaches dieses Skalarprodukts.*



Je zwei Strahlen in einem zweidimensionalen reellen Vektorraum mit ausgezeichneter Drehspiegelgruppe werden durch eine Spiegelung vertauscht. Der ausgezeichnete Punkt stellt den Ursprung dar.

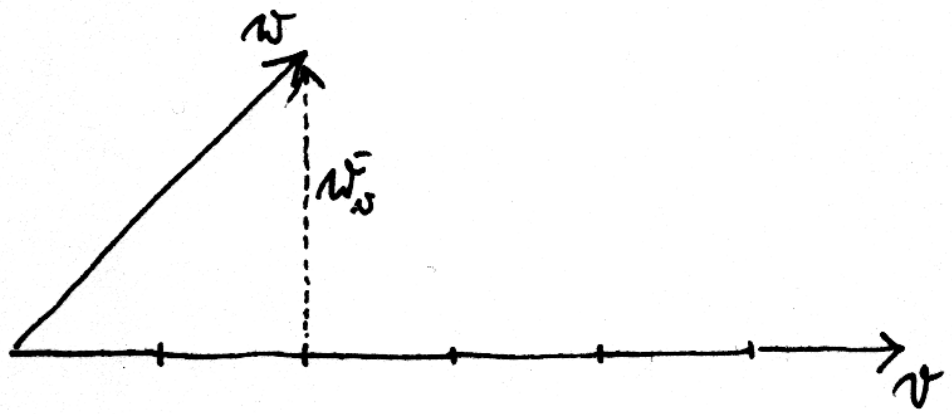


Illustration der Definition von $\alpha_v(w)$. Im Bild hätten wir etwa $\alpha_v(w) = 1/3$.

Beweis. Gegeben Vektoren $v, w \in Z$ mit $v \neq 0$ erklären wir einen Skalar $\alpha_v(w) \in \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$\alpha_v(w)v = (w + r_v w)/2$$

Das ist sinnvoll, da die rechte Seite offensichtlich ein Fixpunkt der Spiegelung r_v ist und folglich ein Vielfaches von v sein muß. Die rechte Seite ist genauer der Fixpunktanteil von w bei seiner Zerlegung $w = w_v^+ + w_v^-$ in Eigenvektoren von r_v zu den Eigenwerten ± 1. Mit dieser Notation gilt also

$$\alpha_v(w)v = w_v^+$$

In der schmutzigen Anschauung mag man sich w_v^+ als das Bild von w unter der „orthogonalen Projektion auf die Gerade $\mathbb{R}v$" vorstellen, wie Sie sie möglicherweise in der Schule bereits kennengelernt haben. Jetzt halten wir einen Vektor $m \in Z \backslash 0$ fest und erklären eine Abbildung $Z \times Z \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$ durch die Vorschrift

$$\langle v, w \rangle := \begin{cases} \|v\|^2 \alpha_v(w) & v \neq 0; \\ 0 & v = 0. \end{cases}$$

Wir zeigen im folgenden, daß das ein invariantes Skalarprodukt ist. Offensichtlich gilt $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$ und $w \mapsto \langle v, w \rangle$ ist linear für alle v. Ist weiter $k \in O$ eine Drehspiegelung, so gilt $kr_v = r_{kv}k$, denn beide Abbildungen haben dieselbe Determinante und bilden v auf kv ab. Daraus folgt $\alpha_v(w) = \alpha_{kv}(kw)$ vermittels der Umformungen

$$\alpha_v(w)kv = (kw + kr_v w)/2 = (kw + r_{kv}kw)/2 = \alpha_{kv}(kw)kv$$

Es folgt die Invarianz $\langle v, w \rangle = \langle kv, kw \rangle$ für alle $k \in O$. Um schließlich zu zeigen, daß auch $v \mapsto \langle v, w \rangle$ linear ist für alle w, reicht es, die Symmetrie $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ zu prüfen. Es reicht, das für $v \neq 0 \neq w$ zu prüfen. Es reicht sogar, das unter der zusätzlichen Voraussetzung $\|v\| = \|w\|$ zu prüfen, denn offensichtlich gilt stets $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = \langle v, \lambda w \rangle$. Damit dürfen wir nach 4.1.2.6 annehmen, daß es eine Spiegelung $r \in O$ gibt mit $rv = w$ und $r^2 = \mathrm{id}$. Es folgt $rw = v$ und so die gewünschte Symmetrie $\langle v, w \rangle = \langle rv, rw \rangle = \langle w, v \rangle$. Damit liefert unsere Konstruktion in der Tat das gesuchte invariante Skalarprodukt. Um die Eindeutigkeit bis auf Skalar zu zeigen, wählen wir $v \in Z \backslash 0$ und einen Eigenvektor w von r_v zum Eigenwert -1 derart, daß es eine Drehspiegelung $d \in O$ gibt mit $dv = w$. Für jede invariante Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ gilt dann

$$\langle v, w \rangle = \langle r_v v, r_v w \rangle = \langle v, -w \rangle = -\langle v, w \rangle$$

und damit $\langle v, w \rangle = 0$. Weiter gilt $\langle v, v \rangle = \langle dv, dv \rangle = \langle w, w \rangle$ und so

$$\langle av + bw, xv + yw \rangle = (ax + by)\langle v, v \rangle$$

Das zeigt die behauptete Eindeutigkeit bis auf Skalar. $\square$

Korollar 4.1.2.9 (**Invariante Skalarprodukte zu Kongruenzebenen**). *Zu jeder Kongruenzebene gibt es ein invariantes Skalarprodukt und jede invariante Bilinearform ist ein Vielfaches dieses Skalarprodukts.*

Beweis. Gegeben eine Kongruenzebene (E, K) ist offensichtlich $\vec{K} \subset \mathrm{GL}(\vec{E})$ eine Drehspiegelgruppe. Damit folgt die Behauptung aus Satz 4.1.2.8 über invariante Skalarprodukte zu Drehspiegelgruppen. □

Proposition 4.1.2.10 (**Drehspiegelgruppe als orthogonale Gruppe**). *Sei (Z, O) ein zweidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichneter Drehspiegelgruppe und s ein O-invariantes Skalarprodukt. So ist unsere Drehspiegelgruppe die orthogonale Gruppe zu s, in Formeln*

$$O = \mathrm{O}(Z, s)$$

Beweis. Per definitionem haben wir $O \subset \mathrm{O}(Z, s)$ und nach 4.1.2.3 ist auch $\mathrm{O}(Z, s)$ eine Drehspiegelgruppe. Beide Gruppen haben also dieselben Elemente mit negativer Determinante, nämlich unsere Spiegelungen r_v mit $v \in Z \backslash 0$. Sie mögen als Übung 4.1.2.12 zeigen, daß jede Drehspiegelgruppe von ihren Spiegelungen erzeugt wird. Das beendet dann den Beweis. □

Korollar 4.1.2.11 (**Kongruenzgruppe als orthogonalaffine Gruppe**). *Gegeben ein invariantes Skalarprodukt s zu einer Kongruenzebene (E, K) sind die Kongruenzen genau alle Affinitäten mit s-orthogonalem linearen Anteil, in Formeln*

$$K = \{\varphi \in \operatorname{Aff} E \mid \vec{\varphi} \in \mathrm{O}(s)\}$$

Beweis. Weil unsere Kongruenzgruppe nach Annahme alle Richtungsvektoren enthält, haben wir schon mal $K = \{\varphi \in \operatorname{Aff} E \mid \vec{\varphi} \in \vec{K}\}$. Damit folgt das Korollar direkt aus unserer Proposition 4.1.2.10. □

Übungen

Übung 4.1.2.12. Jede Drehspiegelgruppe wird von ihren Spiegelungen erzeugt.

Übung 4.1.2.13 (**Eindeutigkeit von Kongruenzebenen**). Ein **Isomorphismus von Kongruenzebenen** (E, K) und (F, L) ist ein Isomorphismus $\varphi : E \xrightarrow{\sim} F$ von affinen Räumen, unter dem sich die jeweils ausgezeichneten Kongruenzgruppen entsprechen, in Formeln $L = \varphi K \varphi^{-1}$. Man zeige, daß je zwei Kongruenzebenen E, F isomorph sind. Man zeige genauer, daß es für beliebige Paare von je zwei verschiedenen Punkten $(p, q) \in E \times E$ sowie $(b, d) \in F \times F$ genau zwei Isomorphismen $\phi, \psi : E \xrightarrow{\sim} F$ von Kongruenzebenen gibt, die (p, q) in (b, d) überführen. Man mag etwa zeigen, daß jedes Beispiel zu dem in 4.1.1.24 gegebenen Beispiel isomorph sein muß.

Übung 4.1.2.14 (**Gleichsinnige Kongruenzen**). Die einzige gleichsinnige Kongruenz einer Kongruenzebene mit mehr als einem Fixpunkt ist die Identität. Jede gleichsinnige Kongruenz einer Kongruenzebene ohne Fixpunkt ist eine Translation. Jede gleichsinnige Kongruenz unserer Kongruenzebene $\mathbb{C}$ aus 4.1.1.24 mit Fixpunkt p hat die Gestalt $p + z \mapsto p + \lambda z$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$.

Übung 4.1.2.15 (**Gegensinnige Kongruenzen**). Jede gegensinnige Kongruenz einer Kongruenzebene stabilisiert genau eine reelle affine Gerade. Jede gegensinnige Kongruenz unserer Kongruenzebene $\mathbb{C}$ aus 4.1.1.24, die $\mathbb{R}$ stabilisiert, hat die Gestalt $z \mapsto a + \bar{z}$ für $a \in \mathbb{R}$.

Übung 4.1.2.16 (**Ähnlichkeiten**). Ein Isomorphismus einer Kongruenzebene mit sich selber heißt eine **Ähnlichkeitsabbildung** oder **Ähnlichkeit**. Man zeige, daß die Ähnlichkeiten unserer Kongruenzebene $\mathbb{C}$ aus 4.1.1.24 genau alle Abbildungen sind, die eine der beiden Gestalten $z \mapsto az + b$ oder $z \mapsto a\bar{z} + b$ haben mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$. Man folgere, daß alle Ähnlichkeiten einer Kongruenzebene, die keine Kongruenzen sind, genau einen Fixpunkt haben müssen, und argumentiere heuristisch, daß sie entweder „Drehstreckungen“ oder „Spiegelstreckungen“ sein müssen.

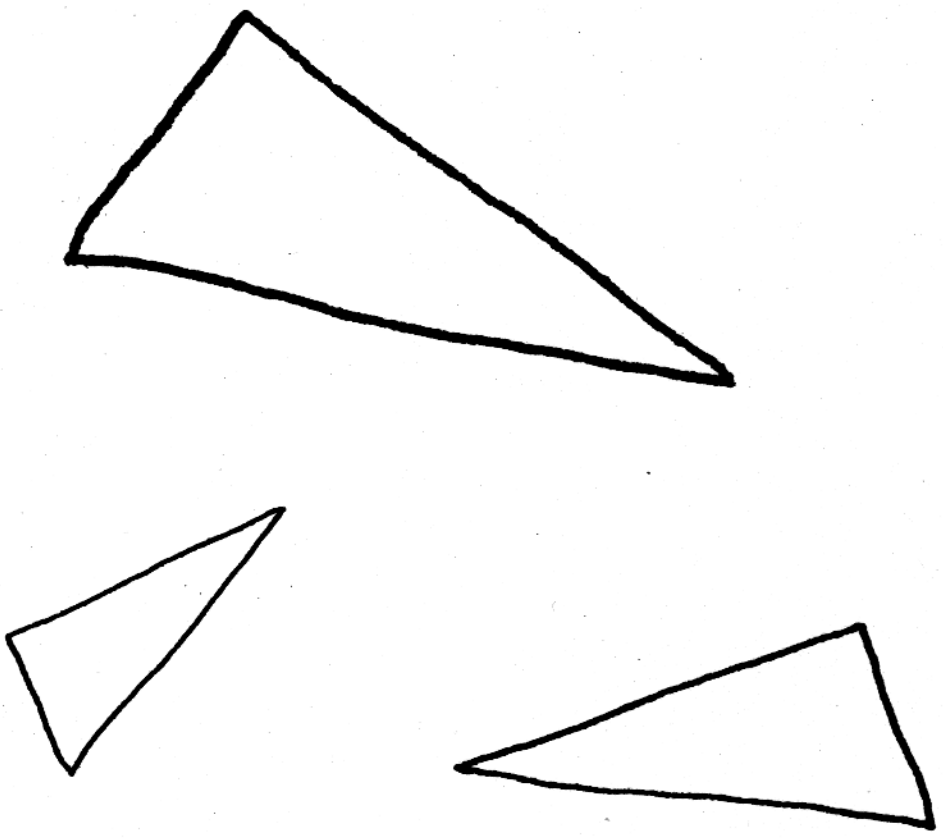
4.1.3 Geometrie von Skalarprodukträumen

4.1.3.1. Im Vorhergehenden haben wir aus der räumlichen Anschauung heraus den Begriff des Skalarprodukts entwickelt. Im folgenden bauen wir umgekehrt für allgemeine Vektorräume mit Skalarprodukt eine sich an dieser räumlichen Anschauung orientierende Begrifflichkeit auf und zeigen, wie sich viele im Raum unserer Anschauung offensichtliche Tatsachen algebraisch formalisieren und auf diesen Kontext verallgemeinern lassen. Ich schreibe eine Weile wieder Vektoren mit Pfeil, damit man die i-te Komponente v_i eines Vektors $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ und den i-ten Vektor $\vec{v}_i$ einer Familie $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ von Vektoren besser auseinanderhalten kann.

4.1.3.2. Ich beginne mit Erinnerungen einiger grundlegender Begriffe. Gegeben ein Körper K und ein K-Vektorraum V heißt eine bilineare Abbildung $b : V \times V \to K$ wie in 3.2.3.8 eine **Bilinearform auf** V. Wie in 3.6.3.1 heißt eine Bilinearform b **symmetrisch**, wenn gilt $b(\vec{v}, \vec{w}) = b(\vec{w}, \vec{v})$ für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$. Ist K ein angeordneter Körper, so heißt eine Bilinearform b wie in 4.1.1.2 **positiv definit**, wenn gilt $\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow b(\vec{v}, \vec{v}) > 0$. Ein **Skalarprodukt** auf einem Vektorraum über einem angeordneten Körper ist wie in 4.1.1.2 eine symmetrische positiv definite Bilinearform.

Beispiel 4.1.3.3. Auf $V = \mathbb{R}^n$ erhält man ein Skalarprodukt durch die Vorschrift

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle := v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n$$



Einige Dreiecke, die durch Ähnlichkeiten im Sinne von **??** ineinander überführt werden können. Man nennt sie deshalb auch **ähnliche Dreiecke**.

für $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$. Es heißt das **Standard-Skalarprodukt**. Man findet für das Standardskalarprodukt oft die alternative Notation $\vec{v} \cdot \vec{w}$. Im Formalismus der Matrixmultiplikation und mit unserer Interpretation von Elementen des $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren und Elementen von $\mathbb{R}$ als reellen (1×1)-Matrizen können wir es auch schreiben als Produkt eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle := \vec{v}^\top \circ \vec{w}$.

4.1.3.4 (**Motivation für Skalarprodukte im Komplexen**). Für die nun folgende Erweiterung des Begriffs eines Skalarprodukts ins Komplexe kenne ich keine anschauliche Begründung. Es wird sich jedoch erweisen, daß das Zusammenwirken der algebraischen Abgeschlossenheit der komplexen Zahlen mit den Positivitätseigenschaften eines Skalarprodukts Resultate liefert, die auch interessante Konsequenzen für reelle Vektorräume haben. Beispiele dafür sind die Sätze über die Normalform orthogonaler Matrizen 4.1.11.3 oder über die Hauptachsentransformation 4.2.2.7.

Definition 4.1.3.5. Ein **Skalarprodukt** auf einem komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{C}$, $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ derart, daß für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ und $\langle \vec{v}, \lambda \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$;
2. $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ und $\langle \mu \vec{v}, \vec{w} \rangle = \bar{\mu} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. Bei Herausziehen eines Skalars μ im ersten Eintrag muß also besagter Skalar konjugiert werden;
3. $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \overline{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}$, insbesondere also $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \in \mathbb{R}$;
4. $\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$.

4.1.3.6. Nebenbei bemerkt folgt hier 2 schon aus 1 und 3, aber es kann auch nicht schaden, diese Formeln nochmal explizit hinzuschreiben. Ganz allgemein heißt eine Abbildung $f : V \to W$ von komplexen Vektorräumen **schieflinear**, wenn gilt $f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$ und $f(\mu \vec{v}) = \bar{\mu} f(\vec{v})$ für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\mu \in \mathbb{C}$. Die ersten beiden Teile unserer Definition können also dahingehend zusammengefaßt werden, daß unser Skalarprodukt schieflinear ist im ersten Eintrag und linear im zweiten. Eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{C}$, die nur diese beiden Bedingungen 1 und 2 erfüllt, nennt man eine **Sesquilinearform**. Gilt zusätzlich 3, so heißt die Sesquilinearform **hermitesch** nach dem französischen Mathematiker Hermite. Das Standardbeispiel ist $V = \mathbb{C}^n$ mit dem Skalarprodukt $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \bar{v}_1 w_1 + \ldots + \bar{v}_n w_n$ für $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$. Mithilfe der Matrixmultiplikation kann dies Skalarprodukt auch geschrieben werden als

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \overline{\vec{v}}^\top \circ \vec{w}$$

Der Strich über einer Matrix mit komplexen Einträgen meint dabei das komplexe Konjugieren aller Einträge.

4.1.3.7 (**Diskussion der Terminologie**). Viele Autoren verwenden die abweichende Konvention, nach der im komplexen Fall ein Skalarprodukt linear im ersten und schieflinear im zweiten Eintrag sein soll. Ich ziehe die hier gegebene Konvention vor, da dann bei der Interpretation von $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ als „$\vec{v}$ auf $\vec{w}$ angewendet" dieses Anwenden von $\vec{v}$ linear ist. In der physikalischen Literatur findet man meist die abweichende Notation $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$.

Definition 4.1.3.8. Einen reellen beziehungsweise komplexen Vektorraum mit Skalarprodukt nennen wir einen reellen beziehungsweise komplexen **Skalarproduktraum**. In einem reellen oder komplexen Skalarproduktraum definiert man die **Skalarproduktnorm** oder kurz **Norm** $\|\vec{v}\| \in \mathbb{R}$ eines Vektors $\vec{v}$ durch die Formel

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

Vektoren $\vec{v}$ der Norm $\|\vec{v}\| = 1$ heißen **normal**. Mit dem **Abstand** zwischen zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ meinen wir die Norm $\|\vec{v} - \vec{w}\|$ ihrer Differenz. Zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ heißen **orthogonal** und man schreibt $\vec{v} \perp \vec{w}$, wenn gilt $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$. Man sagt dann auch, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ **stehen senkrecht aufeinander**. Manchmal verwendet man das Symbol $\perp$ auch für allgemeinere Teilmengen A, B eines Skalarproduktraums und schreibt $A \perp B$ als Abkürzung für die Aussage $(\vec{v} \perp \vec{w}\ \forall \vec{v} \in A, \vec{w} \in B)$.

4.1.3.9. In einem reellen oder komplexen Skalarproduktraum gilt $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$ für alle Vektoren $\vec{v}$ und alle Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ beziehungsweise $\lambda \in \mathbb{C}$. In der Tat haben wir ja

$$\|\lambda \vec{v}\|^2 = \langle \lambda \vec{v}, \lambda \vec{v} \rangle = \bar{\lambda} \lambda \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = |\lambda|^2 \|\vec{v}\|^2$$

4.1.3.10. Einen komplexen Skalarproduktraum nennt man einen **unitären Raum** und im Kontext der Definition allgemeiner Hilberträume auch einen **Prähilbertraum** oder im endlichdimensionalen Fall einen **endlichdimensionalen Hilbertraum**.

Vorschau 4.1.3.11 (**Diskussion der Terminologie**). Einen reellen Skalarproduktraum nennt man vielfach einen „euklidischen Vektorraum". Ich schließe mich dieser Terminologie nicht an und erkläre stattdessen einen euklidischen Vektorraum in 4.1.5.1 als einen reellen Vektorraum mit einem „nur bis auf einen Skalar eindeutig bestimmten Skalarprodukt".

4.1.3.12. Stehen zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ eines Skalarproduktraums senkrecht aufeinander, so gilt der **Satz des Pythagoras**

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$$

In der Tat folgt ja aus $\vec{v} \perp \vec{w}$ schon

$$\langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle$$

Im Reellen gilt hier auch die Umkehrung. Im Komplexen ist dahingegen die Identität $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$ gleichbedeutend zu $\mathrm{Re}\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = 0$.

Definition 4.1.3.13. Eine Familie $(\vec{v}_i)_{i \in I}$ von Vektoren eines Skalarproduktraums heißt ein **Orthonormalsystem**, wenn die Vektoren $\vec{v}_i$ alle die Norm 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen, wenn also in Formeln mit dem Kroneckerdelta aus 3.2.4.2 gilt

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Ein Orthonormalsystem, das eine Basis ist, heißt eine **Orthonormalbasis**.

4.1.3.14. Eine Teilmenge T eines Skalarproduktraums heißt ein **Orthonormalsystem** beziehungsweise eine **Orthonormalbasis**, wenn die Vektoren von T alle die Norm 1 haben, paarweise aufeinander senkrecht stehen und im Fall einer Orthonormalbasis zusätzlich eine Basis bilden. Das bedeutet in anderen Worten, daß unsere Teilmenge als durch sich selbst indizierte Familie die jeweilige in 4.1.3.13 für Familien formulierte Eigenschaft hat.

4.1.3.15. Ist V ein Skalarproduktraum und $(\vec{v}_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem und $\vec{w} = \sum \lambda_i \vec{v}_i$ die Darstellung eines Vektors $\vec{w} \in V$, so erhalten wir durch Davormultiplizieren von $\vec{v}_j$ sofort $\lambda_j = \langle \vec{v}_j, \vec{w} \rangle$. Insbesondere ist jedes Orthonormalsystem linear unabhängig.

Proposition 4.1.3.16. *Jeder endlichdimensionale reelle oder komplexe Skalarproduktraum besitzt eine Orthonormalbasis.*

Beweis. Ist unser Raum der Nullraum, so tut es die leere Menge. Sonst finden wir einen von Null verschiedenen Vektor und erhalten, indem wir ihn mit dem Kehrwert seiner Norm multiplizieren, sogar einen Vektor $\vec{v}_1$ der Norm Eins. Die lineare Abbildung $\langle \vec{v}_1, \ \rangle$ ist nicht die Nullabbildung und hat folglich nach der Dimensionsformel 3.2.2.5 als Kern einen Untervektorraum einer um Eins kleineren Dimension. Eine offensichtliche Induktion beendet den Beweis. $\square$

4.1.3.17. Gegeben ein Skalarproduktraum V und eine Teilmenge $T \subset V$ setzen wir

$$T^\perp := \{v \in V \mid v \perp t \ \ \forall t \in T\}$$

und nennen diese Menge den **Orthogonalraum** von T in V. Offensichtlich ist der Orthogonaleraum einer beliebigen Teilmenge $T \subset V$ ein Untervektorraum von V.

Proposition 4.1.3.18 (Orthogonales Komplement). *Gegeben ein Skalarproduktraum V und ein endlichdimensionaler Untervektorraum $U \subset V$ ist der Orthogonalraum von U in V auch ein Vektorraumkomplement, in Formeln*

$$V = U \oplus U^\perp$$

Ergänzung 4.1.3.19. Die Proposition gilt auch für Skalarprodukträume über einem beliebigen angeordneten Körper. Der Beweis muß für diesen Fall allerding umgeschrieben werden, da in dieser Allgemeinheit auch ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum nicht notwendig eine Orthonormalbasis hat.

Beweis. Natürlich gilt $U \cap U^\perp = 0$. Es reicht also zu zeigen, daß jeder Vektor $\vec{w} \in V$ dargestellt werden kann als

$$\vec{w} = \vec{p} + \vec{r}$$

mit $\vec{p} \in U$ und $\vec{r} \in U^\perp$. Nach 4.1.3.16 besitzt nun U eine Orthonormalbasis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Machen wir den Ansatz $\vec{p} = \sum \lambda_i \vec{v}_i$, so folgt $\langle \vec{v}_i, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}_i, \vec{p} \rangle = \lambda_i$ und damit die Eindeutigkeit von $\vec{p}$. Andererseits steht aber mit diesen λ_i der Vektor $\vec{r} = \vec{w} - \sum \lambda_i \vec{v}_i$ auch tatsächlich senkrecht auf allen $\vec{v}_i$, denn wir finden

$$\langle \vec{v}_j, \vec{r} \rangle = \langle \vec{v}_j, \vec{w} \rangle - \sum \lambda_i \langle \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle = \langle \vec{v}_j, \vec{w} \rangle - \lambda_j = 0 \qquad \square$$

4.1.3.20. Sagen wir von zwei Untervektorräumen eines Skalarproduktraums, sie seien **orthogonal**, so ist gemeint, daß jeder Vektor des einen Teilraums zu jedem Vektor des anderen Teilraums orthogonal ist.

4.1.3.21. Gegeben $U \subset V$ ein Untervektorraum eines Skalarproduktraums verstehen wir unter einem **orthogonalen Komplement** von U in V einen Untervektorraum $W \subset V$, der sowohl ein Vektorraumkomplement ist als auch orthogonal zu U. Wenn es ein derartiges orthogonales Komplement gibt, muß es offensichtlich der Orthogonalraum $W = U^\perp$ sein. Es kann aber im Fall unendlichdimensionaler Skalarprodukträume durchaus vorkommen, daß der Orthogonalraum von U kein Vektorraumkomplement ist und daß damit der Untervektorraum U kein orthogonales Komplement besitzt. Ein Beispiel dafür gibt Übung 4.1.3.29.

4.1.3.22. Besitzt ein Untervektorraum eines Skalarproduktraums $U \subset V$ ein orthogonales Komplement, haben wir also $V = U \oplus U^\perp$, so kann jeder Vektor $\vec{w} \in V$ eindeutig geschrieben werden als $\vec{w} = \vec{p} + \vec{r}$ mit $\vec{p} \in U$ und $\vec{r} \in U^\perp$. Die Abbildung $\vec{w} \mapsto \vec{p}$ ist dann offensichtlich linear und heißt die **orthogonale Projektion** auf den Untervektorraum U. Sie ist in der Terminologie von 3.2.2.19 die Projektion auf U längs $U^\perp$. Man beachte, daß die orthogonale Projektion von $\vec{w}$ auf U genau derjenige Punkt $\vec{p}$ unseres Untervektorraums U ist, der den kleinsten Abstand zu $\vec{w}$ hat. Für jeden Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ aus unserem Untervektorraum gilt nämlich nach Pythagoras

$$\|(\vec{p} + \vec{v}) - \vec{w}\|^2 = \|\vec{p} - \vec{w}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 > \|\vec{p} - \vec{w}\|^2$$

Vorschau 4.1.3.23. Man beachte, daß unsere orthogonale Projektion mit Ausnahme des Extremfalls $U = V$ keineswegs eine orthogonal Abbildung im Sinne von 4.1.4.1 ist.

Satz 4.1.3.24. *1. Für beliebige Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ eines reellen oder komplexen Skalarproduktraums gilt die* **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig sind;

2. Für beliebige Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ eines reellen oder komplexen Skalarproduktraums gilt die **Dreiecksungleichung**

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn einer unserer Vektoren ein nichtnegatives Vielfaches des anderen ist, in Formeln $\vec{v} \in \mathbb{R}_{\geq 0}\vec{w}$ oder $\vec{w} \in \mathbb{R}_{\geq 0}\vec{v}$.

Ergänzung 4.1.3.25. Dieser Satz zeigt insbesondere, daß unsere Skalarproduktnorm auch im Sinne der Analysis 11.2.3.2 eine Norm ist.

4.1.3.26 (**Verschiedene Ansätze zum Beweis der Dreiecksungleichung**). Man mag versucht sein, die Dreiecksungleichung zu beweisen, indem man eine Ecke des Dreiecks orthogonal auf die gegenüberliegende Kante projiziert und bemerkt, daß die beiden anderen Kanten dabei nach Pythagoras nur kürzer werden können. Leider führt diese anschaulich besonders überzeugende Beweisidee bei der Ausformulierung in ein unangenehmes Dickicht von Fallunterscheidungen, so daß ich die im folgenden gegebene weniger anschauliche Darstellung vorgezogen habe.

Beweis. Um Teil 1 zu zeigen, nehmen wir zunächst $\|\vec{v}\| = 1$ an. Das Bild $\vec{p}$ eines weiteren Vektors $\vec{w}$ unter der orthogonalen Projektion auf die Gerade $\mathbb{R}\vec{v}$ wird dann nach 4.1.3.18 oder genauer seinem Beweis gegeben durch die Formel $\vec{p} = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{v}$. Erklären wir $\vec{r}$ durch $\vec{w} = \vec{p} + \vec{r}$, so steht demnach oder auch nach elementarer Rechnung $\vec{r}$ senkrecht auf $\vec{v}$ und wir erhalten unter Zuhilfenahme des Pythagoras

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle|^2 = \|\vec{p}\|^2 \leq \|\vec{p}\|^2 + \|\vec{r}\|^2 = \|\vec{w}\|^2$$

Das zeigt die Ungleichung $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$ mit Gleichheit genau dann, wenn gilt $\vec{r} = \vec{0}$ alias wenn $\vec{w}$ ein Vielfaches von $\vec{v}$ ist. Diese Ungleichung muß aber offensichtlich erhalten bleiben, wenn wir darin $\vec{v}$ durch ein Vielfaches ersetzen, und so erhalten wir dann für beliebige Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ eines beliebigen Skalarproduktraums die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$ mit

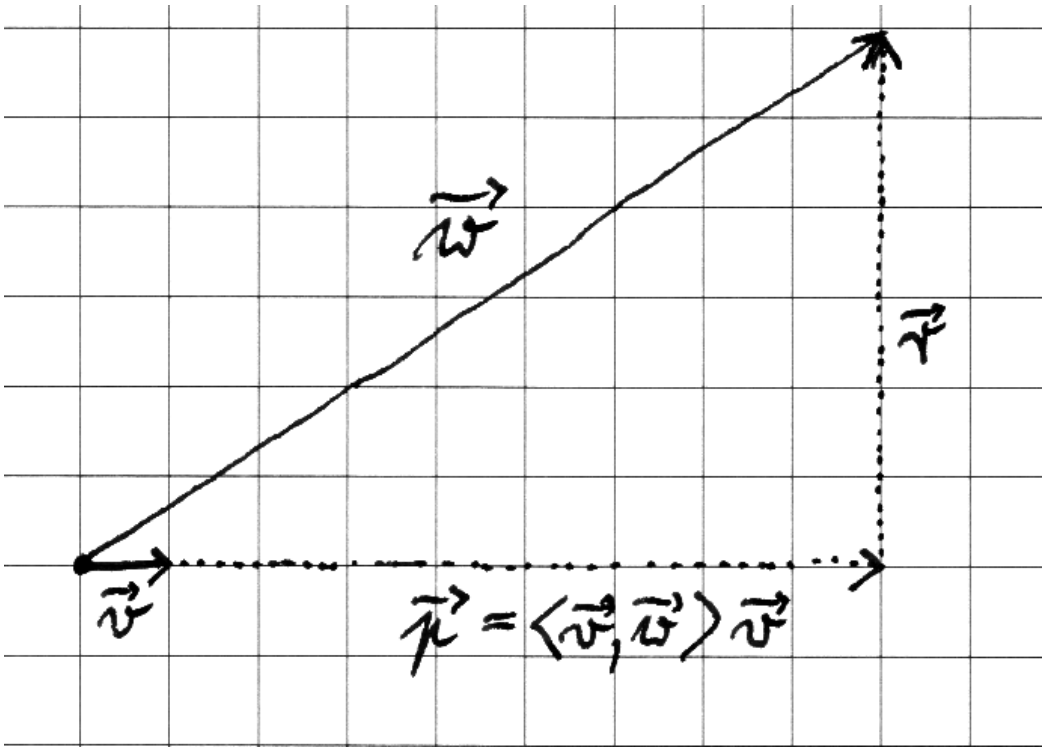


Illustration zum Beweis der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung. Wir haben darin $\vec{v} = (1, 0)$, $\vec{w} = (9, 6)$, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 9$, $\vec{p} = (9, 0)$, $\vec{r} = (0, 6)$.

Gleichheit genau dann, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig sind. Daraus hinwiederum ergibt sich, indem man beide Seiten quadriert, sofort die Dreiecksungleichung $\|\vec{v}+\vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$. Der Beweis der letzten Aussage von Teil 2 sei dem Leser zur Übung überlassen. □

Alternativer Beweis der Ungleichung von Cauchy-Schwarz. Man findet

$$f(t) := \langle \vec{v}+t\vec{w}, \vec{v}+t\vec{w}\rangle = \langle \vec{v},\vec{v}\rangle + 2t\,\mathrm{Re}\langle \vec{v},\vec{w}\rangle + t^2\langle \vec{w},\vec{w}\rangle \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Aus $\langle \vec{w},\vec{w}\rangle = 0$ folgt $\mathrm{Re}\langle \vec{v},\vec{w}\rangle = 0$ für alle $\vec{v}$. Haben wir $\langle \vec{w},\vec{w}\rangle \neq 0$, so findet man das Minimum unserer Funktion von t mit Hilfe der Bedingung $f'(t_0) = 0$ bei $t_0 = -\mathrm{Re}\langle \vec{v},\vec{w}\rangle/\|\vec{w}\|^2$. Aus $f(t_0) \geq 0$ folgt dann unmittelbar die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung. Ich selbst ziehe den anderen Beweis vor, weil er meine Anschauung mehr anspricht und ähnlich für alle angeordneten Grundkörper funktioniert. Der zweite Beweis läßt sich dahingegen leichter auf „positiv semidefinite hermitesche Formen" verallgemeinern. □

4.1.3.27. Ist V ein Skalarproduktraum und $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ ein endliches Orthonormalsystem, so gilt für jeden Vektor $\vec{w} \in V$ die sogenannte **Bessel'sche Ungleichung**

$$\|\vec{w}\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle \vec{v}_i,\vec{w}\rangle|^2$$

In der Tat ist nach Pythagoras für jeden Vektor $\vec{w} \in V$ seine orthogonale Projektion $\vec{p}$ auf den von unserem Orthonormalsystem erzeugten Teilraum höchstens so lang wie der Vektor selbst, in Formeln $\|\vec{w}\| \geq \|\vec{p}\|$ alias $\|\vec{w}\|^2 \geq \|\vec{p}\|^2$. Setzen wir in diese Erkenntnis unsere Darstellung $\vec{p} = \sum \langle \vec{v}_i,\vec{w}\rangle \vec{v}_i$ der orthogonalen Projektion aus dem Beweis von 4.1.3.18 ein, so ergibt sich unsere Ungleichung.

Übungen

Übung 4.1.3.28. Gegeben ein Skalarproduktraum V mit einem endlichdimensionalen Untervektorraum $U \subset V$ gilt $U = (U^\perp)^\perp$.

Ergänzende Übung 4.1.3.29 (**Schwierigkeiten mit orthogonalen Projektionen**). Man zeige, daß die Menge $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) \subset \mathrm{Ens}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ aller reellen Folgen $a_0, a_1, \ldots$ mit $\sum a_i^2 < \infty$ im Raum aller Folgen einen Untervektorraum bildet und daß wir auf diesem Untervektorraum durch die Vorschrift $\langle (a_i),(b_i)\rangle = \sum a_i b_i$ ein Skalarprodukt einführen können. Dann betrachte man in $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ den Untervektorraum U aller Folgen mit höchstens endlich vielen von Null verschiedenen Folgengliedern und zeige $U^\perp = 0$. Insbesondere ist in diesem Fall $U^\perp$ kein orthogonales Komplement zu U. Proposition 4.1.3.18 gilt also im allgemeinen nicht mehr, wenn wir unendlichdimensionale Untervektorräume U betrachten. Sie gilt jedoch wieder und sogar genau dann, wenn besagte Untervektorräume U zusätzlich „vollständig" sind, vergleiche 13.2.8.2.

Übung 4.1.3.30. Man zeige, daß die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung allgemeiner für jede hermitesche Sesquilinearform gilt, bei der das Produkt eines Vektors mit sich selbst nie negativ ist.

Übung 4.1.3.31. Ist V ein reeller Skalarproduktraum und $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ eine Orthonormalbasis und $\Phi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$ der zugehörige Vektorraumisomorphismus nach 3.1.6.13, so entspricht unter Φ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ dem vorgegebenen Skalarprodukt auf V, in Formeln $\langle x, y\rangle = \langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dasselbe gilt entsprechend im Komplexen und auch allgemeiner für Orthonormalsysteme, bei denen Φ dann den Homomorphismus $x \mapsto x_1\vec{v}_1 + \ldots + x_n\vec{v}_n$ meint und kein Isomorphismus zu sein braucht.

Übung 4.1.3.32. Man zeige, daß für einen Skalarproduktraum über einem beliebigen angeordneten Körper immer noch die Variante

$$\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle^2 \leq \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle\langle \vec{w}, \vec{w}\rangle$$

der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung gilt mit Gleichheit genau dann, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig sind.

4.1.4 Orthogonale und unitäre Abbildungen

Definition 4.1.4.1. Eine Abbildung $f : V \to W$ von Skalarprodukträumen heißt **skalarproduktverträglich** oder **orthogonal** im Reellen und **unitär** im Komplexen, wenn sie linear ist und das Skalarprodukt erhält, in Formeln

$$\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle \quad \forall v, w \in V$$

4.1.4.2. Bisher hatten wir die Orthogonalität linearer Abbildungen nur im Fall von Automorphismen von Skalarprodukträumen eingeführt. In der vorgehenden Definition dehnen wir diesen Begriff auf den Fall von Homomorphismen zwischen Skalarprodukträumen aus.

Lemma 4.1.4.3 (Kriterien für die Orthogonalität einer linearen Abbildung). *Für eine lineare Abbildung von einem endlichdimensionalen reellen oder komplexen Skalarproduktraum in einen weiteren Skalarproduktraum über demselben Grundkörper sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Abbildung überführt* eine *Orthonormalbasis des Ausgangsraums in ein Orthonormalsystem;*
2. *Unsere Abbildung überführt* jede *Orthonormalbasis des Ausgangsraums in ein Orthonormalsystem;*
3. *Unsere Abbildung ist orthogonal beziehungsweise unitär.*

Beweis. $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ sind offensichtlich und wir müssen nur noch $1 \Rightarrow 3$ zeigen. Bezeichne dazu $f : V \to W$ unsere Abbildung und $B \subset V$ eine Orthonormalbasis, die es nach 4.1.3.16 geben muß, da wir den Ausgangsraum unserer Abbildung endlichdimensional angenommen hatten. Es gilt zu zeigen $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle \ \forall v, w \in V$. Wir wissen nach Annahme bereits, daß das gilt für alle $v, w \in B$. Da beide Seiten bilinear beziehungsweise sesquilinear sind als Abbildungen $V \times V \to \mathbb{R}$ beziehungsweise $V \times V \to \mathbb{C}$, folgt es dann jedoch leicht für alle $v, w \in V$. □

Definition 4.1.4.4. Gegeben ein reeller Skalarproduktraum V bilden die orthogonalen Automorphismen von V eine Untergruppe der $\mathrm{GL}(V)$, die wir $\mathrm{O}(V)$ notieren. Gegeben ein komplexer Skalarproduktraum V bilden die unitären Automorphismen von V eine Untergruppe der $\mathrm{GL}(V)$, die wir $\mathrm{U}(V)$ notieren.

Definition 4.1.4.5. Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem Körper K bilden die Automorphismen von V mit Determinante Eins eine Untergruppe der Gruppe aller Automorphismen von V. Sie heißt die **spezielle lineare Gruppe** zu V und wird

$$\mathrm{SL}(V) \subset \mathrm{GL}(V)$$

notiert. Im Fall $V = K^n$ schreibt man auch $\mathrm{SL}(n; K) \subset \mathrm{GL}(n; K)$.

Definition 4.1.4.6. Für jeden endlichdimensionalen reellen Skalarproduktraum V bezeichne $\mathrm{SO}(V) \subset \mathrm{GL}(V)$ die Untergruppe aller orthogonalen Automorphismen mit Determinante Eins. Sie heißt die **spezielle orthogonale Gruppe von** V.

Definition 4.1.4.7. Für einen endlichdimensionalen komplexen Skalarproduktraum V bezeichnet $\mathrm{SU}(V) \subset \mathrm{GL}(V)$ die Untergruppe aller unitären Automorphismen mit Determinante Eins. Sie heißt die **spezielle unitäre Gruppe von** V.

Satz 4.1.4.8 (Klassifikation endlichdimensionaler Skalarprodukträume). *1. Zwischen je zwei reellen Skalarprodukträumen derselben endlichen Dimension gibt es einen orthogonalen Isomorphismus. Zu jeder Dimension gibt es einen reellen Skalarproduktraum;*

2. Zwischen je zwei komplexen Skalarprodukträumen derselben endlichen Dimension gibt es einen unitären Isomorphismus. Zu jeder Dimension gibt es einen komplexen Skalarproduktraum.

Beweis. Wir wählen mit 4.1.3.16 in beiden Räumen jeweils eine Orthonormalbasis und erklären unseren Isomorphismus durch die Vorschrift, daß er von einer beliebig gewählten Bijektion zwischen den entsprechenden Basen herkommen soll. Nach 4.1.4.3 ist er dann orthogonal beziehungsweise unitär. □

Satz 4.1.4.9. *1.* **(Matrizen orthogonaler Endomorphismen).** *Eine Matrix* $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ *beschreibt einen orthogonalen Endomorphismus des* $\mathbb{R}^n$ *mit seinem Standardskalarpodukt genau dann, wenn ihre Transponierte ihre Inverse ist. In Formeln gilt also*

$$(A\circ) \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow A^\top A = I$$

2. **(Matrizen unitärer Endomorphismen).** *Eine Matrix* $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$ *beschreibt einen unitären Endomorphismus des* $\mathbb{C}^n$ *mit seinem Standardskalarpodukt genau dann, wenn die Konjugierte ihrer Transponierten ihre Inverse ist. In Formeln gilt also*

$$(A\circ) \in \mathrm{U}(\mathbb{C}^n) \Leftrightarrow \bar{A}^\top A = I$$

Beispiel 4.1.4.10. Eine komplexe (1×1)-Matrix ist unitär genau dann, wenn ihr einziger Eintrag eine komplexe Zahl vom Absolutbetrag Eins ist, also in der komplexen Zahlenebene auf dem Einheitskreis liegt.

Beweis. Wir zeigen gleich den komplexen Fall. Die Identität $\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle$ ist nach unserer Interpretation des Skalarprodukts in Termen der Matrixmultiplikation in 4.1.3.6 gleichbedeutend zu $(\overline{Av})^\top(Aw) = \bar{v}^\top w$ alias zu $\bar{v}^\top \bar{A}^\top A w = \bar{v}^\top w$. Gilt $\bar{A}^\top A = I$, so stimmt das natürlich für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$. Stimmt es umgekehrt für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$, so insbesondere auch für die Vektoren der Standardbasis $\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j$. Damit erhalten wir von der Mitte ausgehend die Gleichungskette $(\bar{A}^\top A)_{ij} = \mathrm{e}_i^\top \bar{A}^\top A\, \mathrm{e}_j = \mathrm{e}_i^\top \mathrm{e}_j = \delta_{ij}\ \forall i, j$ alias $\bar{A}^\top A = I$. □

Definition 4.1.4.11. Eine reelle Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ heißt **orthogonal**, wenn gilt $A^\top A = I$. Eine komplexe Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$ heißt **unitär**, wenn gilt $\bar{A}^\top A = I$. Der vorhergehende Satz 4.1.4.9 oder auch direkte Rechnung zeigen, daß diese Matrizen Untergruppen von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ beziehungsweise $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ bilden. Sie heißen die **orthogonale Gruppe** beziehungsweise die **unitäre Gruppe**. Man notiert sie

$$\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \mid A^\top A = I\}$$
$$\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C}) \mid \bar{A}^\top A = I\}$$

Die Notation $\mathrm{O}(n)$ kennen wir bereits aus 4.1.1.5. Die Elemente der orthogonalen beziehungsweise unitären Gruppen mit Determinante Eins bilden jeweils Untergruppen. Sie heißen die die **spezielle orthogonale Gruppe** beziehungsweise die **spezielle unitäre Gruppe**. Man notiert sie

$$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det A = 1\}$$
$$\mathrm{SU}(n) := \{A \in \mathrm{U}(n) \mid \det A = 1\}$$

Die Gruppe $\mathrm{SU}(2)$ heißt auch die **Spingruppe**.

4.1.4.12 (**Betrag der Determinante orthogonaler oder unitärer Matrizen**). Die Determinante einer unitären oder orthogonalen Matrix hat stets den Betrag Eins. In der Tat folgt aus $\bar{A}^\top A = I$ unmittelbar

$$1 = \det(\bar{A}^\top A) = \det(\bar{A}^\top)\det(A) = \det(\bar{A})\det(A) = \overline{\det(A)}\det(A)$$

Wir können insbesondere $\mathrm{SO}(n)$ auch als die Gruppe aller orientierungserhaltenden orthogonalen Automorphismen des $\mathbb{R}^n$ beschreiben.

4.1.4.13 (**Eigenwerte orthogonaler oder unitärer Matrizen**). Jeder Eigenwert eines unitären oder orthogonalen Endomorphismus eines Skalarproduktraums hat den Betrag Eins, da derartige Abbildungen die Normen von Vektoren erhalten.

Satz 4.1.4.14 (**Satz vom Fußball**). *Jede orthogonale Selbstabbildung eines dreidimensionalen reellen euklidischen Vektorraums, die die Orientierung erhält, hat mindestens einen von Null verschiedenen Fixvektor.*

4.1.4.15. Anschaulich gesprochen ist unsere Abbildung demnach eine Drehung um eine Drehachse, eben um die von einem Fixvektor erzeugte Gerade. Wird bei einem Fußballspiel der Ball also vor dem Anpfiff zur zweiten Halbzeit wieder in die Mitte gelegt, so befinden sich zwei gegenüberliegende Punkte auf dem Ball jeweils an genau derselben Stelle wie vor dem Anpfiff zur ersten Halbzeit.

Beweis. Sei $D : V \to V$ unsere Abbildung. Das charakteristische Polynom von D hat den Leitterm $-\lambda^3$ und den konstanten Term $\det(D) = 1$. Nach dem Zwischenwertsatz hat es also mindestens eine positive reelle Nullstelle. Da nach 4.1.4.13 als reelle Eigenwerte einer orthogonalen Abbildung nur ± 1 in Frage kommen, muß diese positive reelle Nullstelle bei 1 liegen. Also ist 1 ein Eigenwert von D und D hat einen Fixvektor. □

Übungen

Übung 4.1.4.16 (**Variante zum Satz vom Fußball**). Jede orthogonale Selbstabbildung eines dreidimensionalen reellen Skalarproduktraums, die die Orientierung nicht erhält, besitzt einen Eigenvektor zum Eigenwert (-1). Hinweis: Man erinnere den Beweis des Satzes vom Fußball 4.1.4.14.

Übung 4.1.4.17. Die von den speziellen Elementarmatrizen in $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ erzeugte Untergruppe ist die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$. Hinweis: Im Fall $n = 2$ ist etwas Arbeit nötig, der allgemeine Fall ist dann nicht mehr schwer.

Übung 4.1.4.18 (**Orthogonale Endomorphismen des $\mathbb{R}^3$**). Die Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ besteht anschaulich gesprochen aus allen Drehungen des „Koordinatenraums“ um den Ursprung. Ist genauer V ein dreidimensionaler reeller Skalarproduktraum,

so hat jedes $U \in \mathrm{SO}(V)$ in einer geeigneten Orthonormalbasis eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$$

mit $s^2 + c^2 = 1$. Hinweis: Satz vom Fußball 4.1.4.14. Man zeige weiter, etwa mit Hilfe von 4.1.4.16: Nicht orientierungstreue orthogonale Selbstabbildungen des $\mathbb{R}^3$ können stets dargestellt werden als eine Drehung gefolgt von einer Spiegelung an der zur Drehachse senkrechten Ebene. In anderen Worten haben sie in einer geeigneten Orthonormalbasis für geeignete s, c mit $s^2 + c^2 = 1$ eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$$

Übung 4.1.4.19. Man zeige, daß wir einen Isomorphismus $S^1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}(2)$ erhalten durch die Abbildungsvorschrift $z \mapsto {}_{(1,\mathrm{i})}[z\cdot]_{(1,\mathrm{i})}$ alias die Abbildung, die $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$ die Matrix der $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $(z\cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bezüglich der angeordneten $\mathbb{R}$-Basis $(1, \mathrm{i})$ des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ zuordnet.

Übung 4.1.4.20. Gegeben ein zweidimensionaler reeller Skalarproduktraum Z ist die Gruppe $\mathrm{SO}(Z)$ kommutativ und für $s \in \mathrm{O}(Z) \setminus \mathrm{SO}(Z)$ gilt $s^2 = 1$ sowie $srs^{-1} = r^{-1}\ \forall r \in \mathrm{SO}(Z)$. Hinweis: Wenn man eine geometrische Argumentation sucht, mag es geschickt sein, mit dem Beweis der letzteren Aussagen zu beginnen.

Übung 4.1.4.21. Gegeben zwei Strahlen in einem reellen Skalarproduktraum gibt es stets einen orthogonalen Automorphismus unseres Raums, der den einen Strahl in den anderen überführt.

4.1.5 Euklidische Räume

4.1.5.1. Eine **euklidische Struktur** auf einem reellen Vektorraum V ist ein eindimensionaler Untervektorraum $S \subset \mathrm{Bil}(V)$, der mindestens ein Skalarprodukt enthält. Einen **euklidischen Vektorraum** erklären wir als einen reellen Vektorraum mit einer ausgezeichneten euklidischen Struktur. Uner einem **euklidischen Raum** verstehen wir einen reellen affinen Raum mit einer ausgezeichneten euklidischen Struktur auf seinem Richtungsraum. Eine **euklidische Ebene** (E, S) ist ein zweidimensionaler euklidischer Raum.

4.1.5.2 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur versteht man unter einem „euklidischen Vektorraum“ für gewöhnlich das, was wir einen Skalarproduktraum nennen, also einen reellen Vektorraum mit einem ausgezeichneten Skalarprodukt. Ich denke jedoch, daß die hier gewählte Terminologie Euklid eher gerecht wird, in

dessen wegweisender geometrisch-axiomatischer Modellierung der Ebene keine „Strecke der Länge Eins“ vorkommt.

Vorschau 4.1.5.3. In anderen Zusammenhängen werden wir später auch euklidische Räume über beliebigen angeordneten Körpern betrachten. In der linearen Algebra will ich diesen Begriff jedoch auf den Fall des Grundkörpers der reellen Zahlen beschränken. Wenn das besonders betont werden soll, rede ich von einem „reellen euklidischen Raum“.

4.1.5.4. Gegeben ein euklidischer Vektorraum (V, S) setzen wir ganz allgemein $\mathrm{O}(V, S) = \mathrm{O}(V, s)$ für ein und jedes Skalarprodukt $s \in S$ und nennen diese Gruppe die **orthogonale Gruppe** unseres euklidischen Vektorraums. Die Elemente dieser Gruppe nennen wir die **orthogonalen Automorphismen von** V. Gegeben ein euklidischer Raum (E, S) verstehen wir unter einem **orthogonalaffinen Automorphismus von** E eine Affinität mit orthogonalem linearen Anteil und notieren die Gruppe aller orthogonalaffinen Automorphismen $\mathrm{O}_{\mathrm{aff}}(E, S)$.

Beispiele 4.1.5.5. Ein nulldimensionaler reeller Vektorraum besitzt gar keine euklidische Struktur. Ein eindimensionaler reeller Vektorraum besitzt genau eine euklidische Struktur. Zweidimensionale euklidische Räume diskutieren wir gleich in 4.1.5.7. Ein besonders relevantes schmutziges Beispiel für einen dreidimensionalen euklidischen Raum wird der „Raum unserer Anschauung“ werden mit der in 4.1.6 konstruierten euklidischen Struktur der „unter allen Bewegungen invarianten Bilinearformen“. Die Vorgabe einer euklidischen Struktur erlaubt im allgemeinen die Definition von Winkeln und von „orthogonalen Projektionen“. Sie erlaubt es jedoch nicht, Vektoren in natürlicher Weise eine reelle Zahl als ihre „Norm“ zuzuordnen. Vielmehr muß dazu erst eine „Längeneinheit“ gewählt werden, wie in 4.1.5.12 genauer diskutiert wird.

4.1.5.6 (**Drehspiegelgruppen und euklidische Strukturen**). Für jeden zweidimensionalen reellen Vektorraum Z erhalten wir zueinander inverse Bijektionen

$$\{\text{Euklidische Strukturen } S \subset \mathrm{Bil}(Z)\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \{\text{Drehspiegelgruppen } O \subset \mathrm{GL}(Z)\}$$

dadurch, daß wir jeder euklidischen Struktur S ihre orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(Z, S)$ zuordnen und umgekehrt jeder Drehspiegelgruppe O die Menge S_O der unter allen Gruppenelementen invarianten Bilinearformen. Diese Aussage ist nur eine Umformulierung von Satz 4.1.2.8 über invariante Skalarprodukte zu Drehspiegelgruppen und Proposition 4.1.2.10 von Drehspiegelgruppen als orthogonale Gruppen in der Terminologie der euklidischen Strukturen.

4.1.5.7 (**Kongruenzebenen und euklidische Ebenen**). Für jeden zweidimensionalen reellen affinen Raum E erhalten wir zueinander inverse Bijektionen

$$\{\text{Euklidische Strukturen } S \subset \mathrm{Bil}(\vec{E})\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \{\text{Kongruenzgruppen } K \subset \mathrm{Aff}^{\times}(E)\}$$

dadurch, daß wir jeder Struktur S ihre orthogonalaffine Gruppe $\mathrm{O}_{\mathrm{aff}}(E, S)$ zuordnen und umgekehrt jeder Kongruenzgruppe K die Menge $S_{\vec{K}}$ der unter ihren linearen Anteilen invarianten Bilinearformen. Diese Aussage ist nur eine Umformulierung von Korollar 4.1.2.9 über invariante Skalarprodukte zu Kongruenzgruppen und Korollar 4.1.2.11 von Kongruenzgruppen als orthogonalaffine Gruppen in unsere neue Terminologie der euklidischen Strukturen. In diesem Sinne sind unsere beiden Konzepte also zwei Seiten derselben Medaille. Die eine ist algebraischen Rechnungen besser zugänglich, die andere spricht eher die geometrische Anschauung an.

4.1.5.8. Eine lineare Abbildung von euklidischen Vektorräumen heißt **euklidisch**, wenn sie injektiv ist und jedes Skalarprodukt der euklidischen Struktur des Zielraums zu einem Skalarprodukt der euklidischen Struktur des Ausgangsraums einschränkt. Jeder von Null verschiedene Teilraum eines euklidischen Vektorraums besitzt genau eine euklidische Struktur, für die die Einbettung eine euklidische Abbildung wird. Sie heißt die auf unserem Teilraum **induzierte euklidische Struktur**. Einen euklidischen Automorphismus eines euklidischen Vektorraums nennen wir eine **lineare Ähnlichkeitsabbildung**.

4.1.5.9. Unter einem **Morphismus von euklidischen Räumen** verstehen wir eine affine Abbildung, deren linearer Anteil euklidisch ist. Einen Automorphismus eines euklidischen Raums nennen wir eine **Ähnlichkeitsabbildung** oder kurz eine **Ähnlichkeit**.

4.1.5.10. Eine **Betragswurzel** aus einem eindimensionalen reellen Vektorraum F ist ein Paar $(L, \pm q)$ bestehend aus einem eindimensionalen orientierten reellen Vektorraum L und einer bis auf Vorzeichen wohlbestimmten bilinearen Abbildung $\pm q : L \times L \to F$ mit $l \neq 0 \Rightarrow \pm q(l, l) \neq 0$. Genauer verstehen wir hier unter einer „bis auf Vorzeichen wohlbestimmten bilinearen Abbildung“ eine Menge aus zwei bilinearen Abbildungen, von denen die eine die Negative der anderen ist. Eine Betragswurzel eines eindimensionalen reellen Vektorraums ist eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Ist genauer $(L', \pm q')$ ein zweites Paar wie oben, so gibt es genau einen orientierungsverträglichen Isomorphismus $i : L \xrightarrow{\sim} L'$ mit $\pm q'(il, il) = \pm q(l, l)$ für alle $l \in L$. Unsere Betragswurzel verdient mithin einen bestimmten Artikel und eine Notation. Ich verwende die Notation

$$L := \sqrt{|F|}$$

für die Betragswurzel von F. Diejenige Abbildung $F \to L_{\geq 0}$, die $f \in F$ das $l \in L_{\geq 0}$ mit $\pm q(l, l) = f$ zuordnet, notieren wir $l = \sqrt{|f|}$ und nennen l die **Betragswurzel von** f.

Vorschau 4.1.5.11. Allgemeiner kann man analog für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}_{>0}$ eine Vorschrift angeben, die jedem eindimensiona-

len reellen Vektorraum F in natürlicher Weise einen orientierten eindimensionalen reellen Vektorraum $\varphi(F)$ zuordnet und jedem Vektor $f \in F$ einen Vektor $\varphi(v) \in \varphi(F)_{\geq 0}$. Das soll jedoch hier nicht weiter ausgeführt werden.

4.1.5.12 (**Längen von Vektoren in euklidischen Vektorräumen**). Gegeben eine euklidische Struktur S auf einem reellen Vektorraum $V \neq 0$ notieren wir die Betragswurzel ihres Dualraums

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}(V) = \mathbb{L}(V, S) := \sqrt{|S^\top|}$$

und nennen sie die **Längengerade** unseres euklidischen Vektorraums V. Jeder Vektor $v \in V$ liefert ein Element $\lambda_v \in S^\top$ durch die Vorschrift $\lambda_v(s) := s(v, v)$. Dessen Betragswurzel nennen wir die **Länge** $\|v\| \in \mathbb{L}_{\geq 0}$ von v und setzen also in Formeln

$$\|v\| := \sqrt{|\lambda_v|}$$

Damit gilt offensichtlich $\|gv\| = \|v\|\ \forall g \in \mathrm{O}(V, S)$ und $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

4.1.5.13. Für jede euklidische lineare Abbildung $f : V \to W$ von euklidischen Vektorräumen gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\mathbb{L}(f) : \mathbb{L}(V) \to \mathbb{L}(W)$$

mit $\|v\| \mapsto \|f(v)\|\ \forall v \in V$. Sie ist stets ein Isomorphismus, den wir insbesondere verwenden, um die Längengerade jedes von Null verschiedenen Untervektorraums eines euklidischen Vektorraums stillschweigend mit der Längengerade des ursprünglichen Vektorraums zu identifizieren.

4.1.5.14. Unter der **Längengerade eines euklidischen Raums** verstehen wir die Längengerade seines Richtungsraums.

Beispiel 4.1.5.15. Ist Z ein zweidimensionaler reeller Vektorraum und $m \in Z \backslash 0$ ein fester von Null verschiedener Vektor, so gilt für unsere Norm $\|v\|_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ aus 4.1.2.7 in der zugehörigen Längengerade $\mathbb{L}(Z)$ per definitionem die Identität

$$\|v\| = \|v\|_m \|m\|$$

4.1.5.16 (**Terminologisches zum Begriff einer Drehung**). Wir vereinbaren, daß wir von nun an unter einer **Drehung** einen orientierungserhaltenden orthogonalaffinen Automorphismus eines euklidischen Raums der Dimension Zwei oder Drei verstehen wollen, der mindestens einen Fixpunkt hat. Unter einer **linearen Drehung** oder auch kurz **Drehung** verstehen wir einen orientierungserhaltenden orthogonalen Automorphismus eines euklidischen Vektorraums V der Dimension Zwei oder Drei alias in der in 4.1.4.6 eingeführten Terminologie und Notation ein Element seiner speziellen orthogonalen Gruppe $\mathrm{SO}(V)$. Im dreidimensionalen Fall nennen wir jede von einer Drehung punktweise festgehaltene Gerade eine

Drehachse unserer Drehung. Im zweidimensionalen Fall nennen wir jeden von einer Drehung festgehaltenen Punkt ein **Drehzentrum** unserer Drehung und wissen aus 4.1.2.14, daß jede gleichsinnige Kongruenz eine Drehung oder eine Verschiebung sein muß.

Übungen

Übung 4.1.5.17 (**Vorbereitung für Winkel**). Gegeben ein euklidischer Isomorphismus $\varphi : Y \xrightarrow{\sim} Z$ von zweidimensionalen euklidischen Vektorräumen betrachten wir den induzierten Gruppenisomorphismus $\mathrm{O}(\varphi) : \mathrm{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}(Z)$ gegeben durch $r \mapsto \varphi \circ r \circ \varphi^{-1}$. Gegeben zwei Isomorphismen $\varphi, \psi : Y \xrightarrow{\sim} Z$ mit orientierungserhaltender Verknüpfung $\varphi \circ \psi^{-1} : Z \xrightarrow{\sim} Z$ zeige man, daß sie denselben Isomorphismus

$$\mathrm{O}(\varphi) = \mathrm{O}(\psi) : \mathrm{SO}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}(Z)$$

zwischen den jeweiligen Drehgruppen induzieren. Andernfalls zeige man $\mathrm{O}(\varphi) = \mathrm{O}(\psi) \circ \mathrm{inv}$ für $\mathrm{inv} : \mathrm{SO}(Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}(Z)$ das Invertieren. Hinweis: 4.1.4.20.

Übung 4.1.5.18. Gegeben ein endlichdimensionaler euklidischer Raum E und darin eine affine Hyperebene $H \subset V$ gibt es genau einen orthogonalen Automorphismus $s : E \to E$ mit unserer Hyperebene als Fixpunktmenge, in Formeln mit $H = E^s$. Diese Abbildung s heißt die **orthogonale Spiegelung an der Hyperebene** H oder kürzer die **Spiegelung an** H.

4.1.6 Euklidischer Raum und Anschauung*

4.1.6.1. Ich erinnere an die Begriffsbildung einer Kongruenzebene 4.1.1.10. Im folgenden will ich erklären, wie man in ähnlicher Weise eine Modellierung des schmutzigen Raums unserer Anschauung aus dem Bewegungsbegriff heraus entwickeln kann.

Definition 4.1.6.2. Unter einer **Bewegungsgruppe** eines dreidimensionalen reellen affinen Raums R verstehen wir eine alle Translationen umfassende Untergruppe B seiner Automorphismengruppe, in Formeln

$$\vec{R} \subset B \subset \mathrm{Aff}^\times R$$

derart, daß es für je zwei Paare (F, H) und (F', H') von Teilmengen von R bestehend aus einer Halbebene und einer Halbgerade auf ihrem Rand genau einen Automorphismus $b \in B$ gibt, der sie ineinander überführt, also mit $bF = F'$ und $bH = H'$. In Formeln meinen wir hier Paare (F, H) von Teilmengen $H \subset F \subset R$, die in der Gestalt $H = p + \mathbb{R}_{\geq 0}\vec{v}$ und $F = p + \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}_{\geq 0}\vec{w}$ geschrieben werden

können, mit $p \in R$ einem Punkt und $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{R}$ linear unabhängigen Richtungsvektoren. Die Elemente einer Bewegungsgruppe nennen wir **Bewegungen**. Unter einem **Bewegungsraum** verstehen wir ein Paar (R, B) bestehend aus einem dreidimensionalen reellen affinen Raum R und einer ausgezeichneten Bewegungsgruppe $B \subset \mathrm{Aff}^\times R$.

4.1.6.3 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur wird der Begriff einer „Bewegung“ vielfach auch verwendet für gewisse Selbstabbildungen von euklidischen Räumen, die die Orientierung nicht erhalten. Unsere Bewegungen werden in dieser Terminologie als „eigentliche Bewegungen“ bezeichnet.

4.1.6.4 (**Bezug zur Anschauung**). Man mag sich den „schmutzigen Raum $\mathbb{E}$ unserer Anschauung“ als einen Bewegungsraum denken. Die Elemente von $\mathbb{E}$ sind dabei „alle möglichen Orte im Raum“. Manche dieser Orte können direkt als Kirchturmspitzen, Zimmerecken und dergleichen angegeben werden, die Übrigen gilt es sich vorzustellen. Affine Geraden in $\mathbb{E}$ denke man sich als Sichtlinien, wie in 3.3.1.9 und 3.3.3.3 besprochen. Bei Bewegungen denke man an, nun, eben anschauliche Bewegungen. Kippen wir etwa einen Stuhl um, so werden die Enden der Stuhlbeine, die Ecken der Sitzfläche, ja überhaupt alle seine Punkte jeweils in andere Punkte des Raums unserer Anschauung überführt, und diese Abbildung läßt sich, das entspricht zumindest unserer Erfahrung, zu einer bijektiven Selbstabbildung des Raums unserer Anschauung fortsetzen, die Sichtlinien in Sichtlinien überführt und die nach 3.3.3.1 folglich einer affinen Abbildung $\mathbb{E} \to \mathbb{E}$ entsprechen muß. Unsere ausgezeichnete Bewegungsgruppe B modelliert die Menge aller derartigen Selbstabbildungen des Raums unserer Anschauung. Unsere Bedingung an eine Bewegungsgruppe aus 4.1.6.2 bedeutet anschaulich, daß man etwa jedes Messer aus einer festen Position heraus durch genau eine Bewegung in eine Position bringen kann, in der der Übergang vom Griff zur Klinge an einer vorgegebenen Stelle stattfindet, die Messerspitze in eine vorgegebene Richtung zeigt und der Schnitt den Raum entlang einer vorgegebenen Halbebene zerteilen würde. An dieser Stelle möchte ich Sie am liebsten wieder einmal davon überzeugen, daß das Abstrakte das eigentlich Konkrete ist und daß der in der Schule erlernte Koordinatenzirkus von der Realität viel weiter entfernt ist.

Ergänzung 4.1.6.5. Ich wage die Vermutung, daß Säuglinge nicht zuletzt deshalb so gerne herumgetragen und herumgefahren werden, weil ihnen das eine genauere Untersuchung dieser bemerkenswerten mathematischen Struktur ermöglicht, die der Raum unserer Anschauung nun einmal ist. Bewegen Sie nur einmal selbst den Kopf hin und her und versuchen Sie, von Ihrer jahrelangen Erfahrung zu abstrahieren und neu zu entdecken, in wie interessanter Weise sich dabei die Sinneseindrücke im Auge ändern!

Satz 4.1.6.6 (**Euklidische Strukturen und Bewegungsgruppen**). *Gegeben ein*

dreidimensionaler reeller affiner Raum R erhalten wir zueinander inverse Bijektionen

$$\{\text{Euklidische Strukturen } S \subset \mathrm{Bil}(\vec{R})\} \xleftrightarrow{\sim} \{\text{Bewegungsgruppen } B \subset \mathrm{Aff}^\times(R)\}$$

dadurch, daß wir jeder euklidischen Struktur S auf $\vec{R}$ als Bewegungsgruppe die Gruppe $B_S := \mathrm{SO}_{\mathrm{aff}}(R, S)$ aller orientierungserhaltenden orthogonalaffinen Affinitäten von R zuordnen und umgekehrt jeder Bewegungsgruppe B die Menge S aller darunter invarianten Bilinearformen auf dem Richtungsraum.

Beweis. Daß unsere Konstruktion jeder euklidischen Struktur auf $\vec{R}$ eine Bewegungsgruppe zuordnet, scheint mir offensichtlich. Daß man aus dieser Bewegungsgruppe die euklidische Struktur zurückgewinnen kann, daß also unsere Abbildung von links nach rechts injektiv ist, mag man daraus erkennen, daß die Restriktionen aller Bewegungen, die eine vorgegebene affine Ebene stabilisieren, auf besagte Ebene notwendig eine Kongruenzgruppe der besagten affinen Ebene bilden und so auf dem Richtungsraum dieser affinen Ebene nach 4.1.5.7 eine euklidische Struktur induzieren. Eine euklidische Struktur auf einem reellen Vektorraum der Dimension mindestens Zwei wird aber offensichtlich durch ihre Restriktionen auf alle zweidimensionalen Untervektorräume bereits eindeutig festgelegt. Es bleibt damit nur noch zu zeigen, daß unsere Abbildung surjektiv ist. Das leistet der im Anschluß bewiesene Satz 4.1.6.9. □

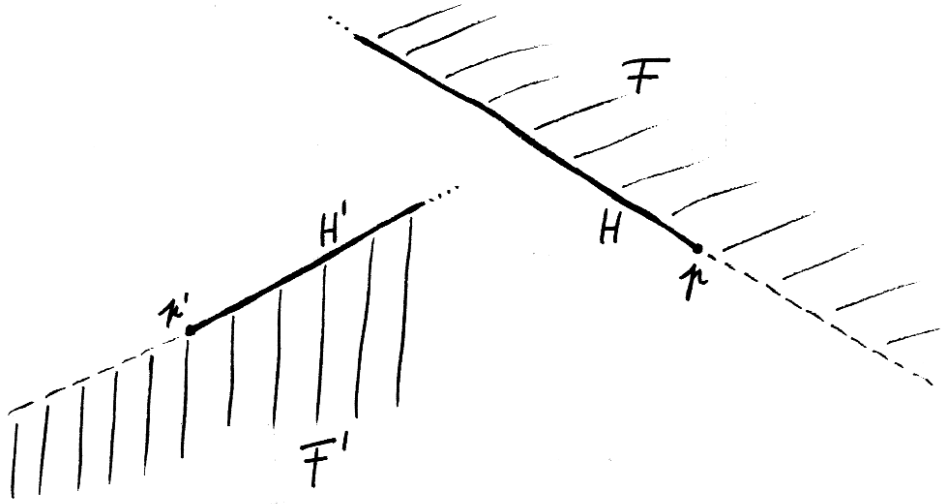
Definition 4.1.6.7. Sei V ein dreidimensionaler reeller Vektorraum. Eine **Halbraumfahne in** V ist ein Paar (H, A) von Teilmengen bestehend aus einer Halbebene und einem Strahl auf ihrem Rand. In Formeln ausgedrückt soll es also linear unabhängige Vektoren $v, w \in V$ geben mit $H = \mathbb{R}_{\geq 0}v + \mathbb{R}w$ und $A = \mathbb{R}_{\geq 0}w$.

Definition 4.1.6.8. Sei V ein dreidimensionaler reeller Vektorraum. Eine Untergruppe $D \subset \mathrm{GL}(V)$ heiße eine **Drehungsgruppe**, wenn es für je zwei Halbraumfahnen in V genau ein Element $d \in D$ gibt, das sie ineinander überführt. Die Elemente einer ausgezeichneten Drehungsgruppe sprechen wir im folgenden als **Drehungen** an.

Satz 4.1.6.9 (Drehungsgruppen und euklidische Strukturen). *Gegeben ein dreidimensionaler reeller Vektorraum V erhalten wir zueinander inverse Bijektionen*

$$\{\text{Euklidische Strukturen } S \subset \mathrm{Bil}(V)\} \xleftrightarrow{\sim} \{\text{Drehungsgruppen } D \subset \mathrm{GL}(V)\}$$

dadurch, daß wir jeder euklidischen Struktur S ihre spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(V, S)$ zuordnen und umgekehrt jeder Drehungsgruppe D die Menge S_D der unter all ihren Elementen invarianten Bilinearformen.



Zwei Paare von Teilmengen des Raums bestehend aus je einer Halbebene und einer Halbgerade auf ihrem Rand.

Beweis. Der Nachweis, daß $\mathrm{SO}(V, S)$ in der Tat eine Drehungsgruppe ist, bleibe dem Leser überlassen. Um zu sehen, daß gegeben ein unter einer Drehungsgruppe invariantes Skalarprodukt jede invariante Bilinearform ein skalares Vielfaches desselben ist, muß man nur bemerken, daß die einen zweidimensionalen Teilraum stabilisierenden Elemente einer Drehungsgruppe auf diesem Teilraum eine Drehspiegelgruppe induzieren und nach 4.1.5.6 folglich die Restriktion einer invarianten Bilinearform auf jeden zweidimensionalen Teilraum ein skalares Veilfaches der Restriktion unseres invarianten Skalarprodukts ist. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß es für jede Drehungsgruppe mindestens ein invariantes Skalarprodukt gibt. Das zeigen wir nach einigen Vorbereitungen in 4.1.6.14. □

Lemma 4.1.6.10. *Sei (V, D) ein dreidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichneter Drehungsgruppe. Gegeben ein Vektor $v \in V \backslash 0$ gibt es genau eine nichttriviale Drehung $r_v \in D \backslash \mathrm{id}$ mit $r_v(v) = v$ und $r_v^2 = \mathrm{id}$, und diese Drehung hat einen zweidimensionalen Eigenraum zum Eigenwert (-1). Wir nennen r_v die* **Achsenspiegelung an der Ursprungsgerade** $\mathbb{R}v$.

4.1.6.11. In der schmutzigen Anschauung kann r_v beschrieben werden als die Drehung um die von v erzeugte Gerade mit dem Winkel $180°$.

Beweis. Wie bereits erwähnt ist es klar, daß alle Drehungen, die einen zweidimensionalen Teilraum $Z \subset V$ stabilisieren, auf Z eine Drehspiegelgruppe im Sinne von 4.1.2.2 induzieren. Sei nun r eine nichttriviale Drehung mit $r(v) = v$ und $r^2 = \mathrm{id}$. Nach 3.6.6.29 ist r diagonalisierbar mit Eigenwerten ± 1. Da r nichttrivial ist mit positiver Determinante, müssen seine Eigenwerte mit Multiplizitäten $1, -1, -1$ sein. Folglich ist $\mathbb{R}v$ der Eigenraum von r zum Eigenwert Eins und in jedem zweidimensionalen Teilraum, der v enthält, muß auch ein Eigenvektor zum Eigenwert (-1) liegen. Damit muß r jede derartige Ebene auf sich selbst abbilden und darauf unsere Spiegelung aus dem Beweis von 4.1.5.6 induzieren, die wir dort r_v notiert hatten. Das zeigt die Eindeutigkeit von r und unsere Behauptung über den (-1)-Eigenraum. Um die Existenz zu zeigen, wählen wir $w \in V$ linear unabhängig zu v und betrachten die Drehung $r = r_{v,w}$, die die Halbraumfahne $(\mathbb{R}v + \mathbb{R}_{\geq 0}w, \mathbb{R}_{\geq 0}v)$ in die Halbraumfahne $(\mathbb{R}v - \mathbb{R}_{\geq 0}w, \mathbb{R}_{\geq 0}v)$ überführt. Offensichtlich gilt $r^2 = \mathrm{id}$ und nach 3.6.6.29 ist dann r diagonalisierbar mit Eigenwerten ± 1. Sicher ist v ein Eigenvektor von r zu einem positiven Eigenwert, also zum Eigenwert Eins, also ein Fixvektor. Das zeigt dann auch die in unserem Lemma behauptete Existenz der Achsenspiegelung r_v. □

Lemma 4.1.6.12. *Sei (V, D) ein dreidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichneter Drehungsgruppe. Gegeben $t \in D$ und $m \in V$ folgt aus $tm \in \mathbb{R}_{\geq 0}m$ dann bereits $tm = m$.*

4.1.6.13. In der schmutzigen Anschauung entspricht das der Erkenntnis, daß beim Drehen um eine Achse besagte Achse weder gestreckt noch gestaucht wird.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $m \neq 0$ annehmen. Dann betrachten wir die Achsenspiegelung r_m nach 4.1.6.10 und wählen im zweidimensionalen Teilraum Z der Fixpunkte von $(-r_m)$ einen Vektor $w \neq 0$. Wegen $tr_m = r_m t$ gilt dann auch $tw \in Z$. Nach 4.1.2.6 werden je zwei Strahlen in einem zweidimensionalen Vektorraum mit ausgezeichneter Drehspiegelgruppe durch eine Spiegelung vertauscht, es gibt also $u \in Z \backslash 0$ mit $r_u(\mathbb{R}_{\geq 0} w) = \mathbb{R}_{\geq 0} tw$. Andererseits zeigt unsere Diskussion des Senkrechtstehens in Kongruenzebenen 4.1.1.17 bereits $r_u(m) = -m$ und $r_w(m) = -m$. Es folgt $r_u r_w = t$, da beide Abbildungen $\mathbb{R}_{\geq 0} m$ festhalten und $\mathbb{R}_{\geq 0} w$ in $\mathbb{R}_{\geq 0} tw$ überführen. So erhalten wir schließlich $tm = r_u r_w m = m$. □

Lemma 4.1.6.14 (**Existenz invarianter Skalarprodukte**). *Sei (V, D) ein dreidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichneter Drehungsgruppe. So gibt es auf V ein D-invariantes Skalarprodukt.*

Beweis. Wir wählen einen Vektor $m \in V \backslash 0$. Für jeden zweidimensionalen Teilraum $Z \subset V$ und jede Drehung $d \in D$ mit $d(m) \in Z$ gibt es nach 4.1.5.6 genau ein Skalarprodukt auf Z, das invariant ist unter allen Drehungen, die Z stabilisieren, und das $d(m)$ die Norm Eins gibt. Lemma 4.1.6.12 zeigt, daß dies Skalarprodukt auf Z nicht von der Wahl von d abhängt. Folglich sind alle diese Skalarprodukte Einschränkungen eines wohldefinierten Skalarprodukts auf V. Die Konstruktion zeigt weiter, daß für jede Drehung $d \in D$ und jeden zweidimensionalen Teilraum $Z \subset V$ die Abbildung $d : Z \xrightarrow{\sim} d(Z)$ verträglich ist mit den jeweiligen Skalarprodukten. Folglich ist unser Skalarprodukt auf V invariant unter D. □

Ergänzung 4.1.6.15 (**Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen**). Ich skizziere Analoga unserer Sätze 4.1.5.6 und 4.1.6.9 für reelle Vektorräume beliebiger endlicher Dimension. Man mag für jeden reellen Vektorraum V endlicher Dimension n eine **vollständige Halbraumfahne** erklären als eine Folge von Teilmengen $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset V$ derart, daß es linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ gibt mit $F_i = \mathbb{R}v_1 + \ldots + \mathbb{R}v_{i-1} + \mathbb{R}_{\geq 0} v_i$. Eine Untergruppe $O \subset \mathrm{GL}(V)$ mag man dann eine **Drehspiegelgruppe** nennen, wenn es für je zwei vollständige Halbraumfahnen genau ein $k \in O$ gibt, das die eine Fahne in die andere überführt. Man mag weiter eine **fastvollständige Halbraumfahne** erklären als eine Folge von Teilmengen $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_{n-1} \subset V$ derart, daß es linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_{n-1} \in V$ gibt mit $F_i = \mathbb{R}v_1 + \ldots + \mathbb{R}v_{i-1} + \mathbb{R}_{\geq 0} v_i$. Eine Untergruppe $D \subset \mathrm{GL}(V)$ mag man weiter eine **Drehungsgruppe** nennen, wenn es für je zwei fastvollständige Halbraumfahnen genau ein Element $d \in D$

gibt, die die eine Fahne in die andere überführt. In dieser Allgemeinheit zeigen unsere Argumente, daß es für jede Drehspiegelgruppe bis auf konstante Vielfache genau ein invariantes Skalarprodukt gibt, und daß im Fall einer von Zwei verschiedenen Dimension dasselbe auch für jede Drehungsgruppe gilt. Im ebenen Fall gilt das jedoch nur unter der zusätzlichen Annahme, daß unsere Drehungsgruppe eine im Sinne der Topologie „abgeschlossene“ Untergruppe ist. Wählen wir genauer ein Komplement $V \subset \mathbb{R}$ des $\mathbb{Q}$-Untervektorraums $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, so finden wir einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong V \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ und dann auch einen Gruppenisomorphismus $S^1 \cong V \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Es gibt mithin durchaus unstetige nichttriviale Gruppenhomomorphismen $\psi : S^1 \to \mathbb{R}_{>0}$ für S^1 die Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrag Eins, und dann bilden alle Abbildungen der Gestalt $z \mapsto \psi(a)z$ mit $a \in S^1$ eine Drehungsgruppe in $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ im Sinne der obigen Definition, für die kein invariantes Skalarprodukt existiert. Mehr dazu findet man in [Pic49, Bae50] und unter dem Stichwort des **Helmholtz'schen Raumproblems**.

4.1.7 Zweistrahlen und Winkel

4.1.7.1. Unter einem **Zweistrahl** in einem Vektorraum V über einem angeordneten Körper verstehen wir ein ungeordnetes Paar alias eine zweielementige Multimenge ${}_{\mu}\{A, B\}$ von Strahlen. Unter einem **angeordneten Zweistrahl** verstehen wir ein Paar (A, B) von Strahlen.

4.1.7.2. Gegeben ein zweidimensionaler euklidischer Vektorraum Z ist die Gruppe seiner orientierungserhaltenden orthogonalen Selbstabbildungen alias linearen Drehungen $\mathrm{SO}(Z)$ nach 4.1.4.20 kommutativ und für jeden angeordneten Zweistrahl (A, B) in Z gibt es genau ein Element $d \in \mathrm{SO}(Z)$ mit $d(A) = B$.

4.1.7.3. Wir betrachten die Zuordnung W, die jedem orientierten zweidimensionalen euklidischen Vektorraum (Z, ε) die Gruppe seiner linearen Drehungen zuordnet. Wir nennen diese Gruppe die **Winkelgruppe von** (Z, ε) und notieren sie

$$\mathrm{W}(Z, \varepsilon) := \mathrm{SO}(Z)$$

Wir notieren $\mathrm{W}(Z, \varepsilon)$ im Gegensatz zu $\mathrm{SO}(Z)$ additiv. Wir bezeichnen die Elemente unserer Gruppen je nachdem, ob wir ihre Verknüpfung multiplikativ oder additiv notieren, als **Drehungen** oder als **Winkel** und noch genauer als **konkrete Winkel**. Einen Winkel $k \in \mathrm{W}(Z, \varepsilon)$ nennen wir **positiv** beziehungsweise **negativ**, wenn für ein und jedes $v \in Z \backslash 0$ das Paar $(v, k(v))$ in Bezug auf die Orientierung ε eine positiv orientierte beziehungsweise eine negativ orientierte Basis von Z ist. Wir bezeichnen die Menge der nicht negativen Winkel mit

$$\mathrm{W}(Z, \varepsilon)^+ \subset \mathrm{W}(Z, \varepsilon)$$

Es gibt zwei Winkel, die weder negativ noch positiv sind, nämlich den Nullwinkel und einen weiteren Winkel, den wir später genauer diskutieren und den „gestreckten Winkel“ nennen werden.

Beispiel 4.1.7.4 (**Winkelgruppe der Zahlenebene**). Wir erinnern den Körper der komplexen Zahlen und genauer das bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte Tripel $(\mathbb{C}, \mathrm{i}, \kappa)$ aus 3.2.7.4 mit $\kappa : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Wir erinnern auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ das Skalarprodukt $\langle z, w\rangle := \operatorname{Re} \bar{z}w$ und versehen $\mathbb{C}$ mit der dadurch bestimmten euklidischen Struktur. Wir versehen den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ mit seiner **Standardorientierung** st, für die $(1, \mathrm{i})$ eine positiv orientierte angeordnete Basis ist. Die Abbildung, die jedem $z \in S^1$ die Multiplikation $(z\cdot)$ zuordnet, liefert dann einen Isomorphismus $S^1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}(\mathbb{C}, \mathrm{st})$ der Kreisgruppe mit der Winkelgruppe von $\mathbb{C}$ und eine Bijektion

$$\{z \in S^1 \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}(\mathbb{C}, \mathrm{st})^+$$

zwischen dem „abgeschlossenen oberen Halbkreis“ und der Menge der nichtnegativen Winkel von $(\mathbb{C}, \mathrm{st})$.

4.1.7.5 (**Abstrakte Winkel**). Nach 4.1.5.17 induzieren je zwei orientierungserhaltende mit den euklidischen Strukturen verträgliche Isomorphismen zwischen zweidimensionalen orientierten euklidischen Vektorräumen (Y, η) und (Z, ε) denselben Isomorphismus $\mathrm{W}(Y, \eta) \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}(Z, \varepsilon)$ zwischen ihren Winkelgruppen. Dieser Isomorphismus induziert darüber hinaus eine Bijektion $\mathrm{W}(Y, \eta)^+ \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}(Z, \varepsilon)^+$ zwischen den jeweiligen Teilmengen nichtnegativer Winkel. Das Datum aus einer Gruppe mit ausgezeichneter Teilmenge $\mathrm{W}(Z, \varepsilon)^+ \subset \mathrm{W}(Z, \varepsilon)$ ist folglich eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Es verdient damit eine Notation und einen Namen. Ich schlage dafür die Notationen

$$\mathbb{W}^+ \subset \mathbb{W}$$

vor und nenne $\mathbb{W}$ die **abstrakte Winkelgruppe** und $\mathbb{W}^+$ die **abstrakte Winkelmenge**. Elemente von $\mathbb{W}$ heißen **Winkel**, Elemente von $\mathbb{W}^+$ **nichtnegative Winkel** und Elemente von $\mathbb{W} \backslash \mathbb{W}^+$ **negative Winkel**. Das einem abstrakten Winkel $\vartheta \in \mathbb{W}$ durch die Wahl einer Orientierung ε von Z zugeordnete Element von $\mathrm{SO}(Z)$ nenne ich die **Drehung um den Winkel** ϑ und notiere es $\mathrm{R}_\vartheta = \mathrm{R}_\vartheta^{(\varepsilon)}$ mit einem R für „Rotation“. Jedem angeordneten Zweistrahl (A, B) in einem orientierten zweidimensionalen euklidischen Vektorraum (Z, ε) ordnen wir dann ein wohlbestimmtes Element

$$\vartheta = \measuredangle(A, B) \in \mathbb{W}$$

der abstrakten Winkelgruppe zu als dasjenige $\vartheta \in \mathbb{W}$ mit $\mathrm{R}_\vartheta(A) = B$. Wir nennen diesen Winkel ϑ den **gerichteten Winkel von** A **nach** B. Jedem Zweistrahl ${}_\mu\{A, B\}$ in einem beliebigen euklidischen Vektorraum ordnen wir weiter

ein wohlbestimmtes Element

$$\vartheta = \angle(A, B) \in \mathbb{W}^+$$

der Winkelmenge zu als denjenigen eindeutig bestimmten nichtnegativen Winkel $\vartheta \in \mathbb{W}^+$, für den es einen zweidimensionalen Teilraum Z und eine Orientierung ε von Z gibt mit $A, B \subset Z$ und $\mathrm{R}_\vartheta^{(\varepsilon)}(A) = B$. Wir nennen dies Element ϑ der Winkelmenge den **von den Strahlen A und B eingeschlossenen Winkel**.

4.1.7.6. Die Zuordnung, die jedem zweidimensionalen euklidischen Vektorraum Z die Gruppe $\mathrm{SO}(Z)$ seiner orientierungserhaltenden Automorphismen zuordnet, liefert keine bis auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmte Gruppe $\mathbb{SO}$, weil manche euklidischen Isomorphismen von Z zu sich selber, genauer die orientierungsumkehrenden Isomorphismen, das Invertieren $\mathrm{inv} : \mathrm{SO}(Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}(Z)$ induzieren.

4.1.7.7. Wir erklären eine Abbildung $|\ \ | : \mathbb{W} \to \mathbb{W}^+$ durch die Vorschrift

$$|\alpha| := \begin{cases} \alpha & \alpha \in \mathbb{W}^+; \\ -\alpha & \alpha \notin \mathbb{W}^+, \end{cases}$$

und nennen $|\alpha|$ den **Betrag des Winkels** α. Für jeden angeordneten Zweistrahl (A, B) in einem orientierten zweidimensionalen euklidischen Vektorraum gilt dann

$$\angle(A, B) = |\measuredangle(A, B)|$$

4.1.7.8 (**Additivität von Winkeln**). Gegeben Strahlen A, B, C in einem zweidimensionalen orientierten euklidischen Vektorraum gilt in der Winkelgruppe $\mathbb{W}$ offensichtlich die Identität

$$\measuredangle(A, B) + \measuredangle(B, C) = \measuredangle(A, C)$$

4.1.7.9. Mit der Standardorientierung auf $\mathbb{C}$ liefern unsere Konstruktionen aus 4.1.7.4 unmittelbar einen Isomorphismus

$$\mathrm{wk} : S^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{W}$$

zwischen der Kreisgruppe und der Winkelgruppe, den **Standardisomorphismus** von der Kreisgruppe zur Winkelgruppe. Er induziert eine Bijektion $\mathrm{wk} : \{z \in S^1 \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{W}^+$, wir nennen sie die **Standardbijektion**. Die Umkehrabbildung des Standardisomorphismus ist ein Isomorphismus $\mathrm{kw} := \mathrm{wk}^{-1}$ von der Winkelgruppe in die Kreisgruppe, also in Formeln

$$\mathrm{kw} : \mathbb{W} \xrightarrow{\sim} S^1$$

Wir nennen ihn den **Standardisomorphismus** von der Winkelgruppe zur Kreisgruppe. Unsere allgemeinen Erkenntnisse 3.5.3.19 über Nullstellen von Polynomen zeigen, daß es für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ höchstens n Winkel $\vartheta \in \mathbb{W}$ gibt mit $n\vartheta = 0$. Eine genauere Untersuchung des Körpers der komplexen Zahlen zeigt, daß es sogar stets genau n derartige Winkel gibt.

4.1.7.10 (**Einige spezielle Winkel**). Wir diskutieren nun die wichtigsten Winkel und die zugehörigen Elemente der Kreisgruppe.

1. Das neutrale Element der Winkelgruppe nennen wir den **Nullwinkel** $0 \in \mathbb{W}$. Es gehört zur Menge $\mathbb{W}^+$ der nichtnegativen Winkel. Unter unserem Standardisomorphismus $\mathrm{kw} : \mathbb{W} \xrightarrow{\sim} S^1$ entspricht dies Element der komplexen Zahl 1. Für einen Zweistrahl ${}_\mu\{A, B\}$ in einem euklidischen Vektorraum ist $\angle(A, B) = 0$ gleichbedeutend zu $A = B$.

2. Man sieht mithilfe unseres Isomorphismus $\mathrm{kw} : \mathbb{W} \xrightarrow{\sim} S^1$ aus 4.1.7.9, daß es in der Winkelgruppe genau ein Element ϑ gibt mit $2\vartheta = 0$ aber $\vartheta \neq 0$. Es heißt der **gestreckte Winkel** γ und gehört auch zur Menge $\mathbb{W}^+$ der nichtnegativen Winkel. Unter unserem Standardisomorphismus $\mathrm{kw} : \mathbb{W} \xrightarrow{\sim} S^1$ entspricht dies Element der komplexen Zahl -1. Für einen Zweistrahl ${}_\mu\{A, B\}$ in einem euklidischen Vektorraum ist $\angle(A, B)$ der gestreckte Winkel genau dann, wenn gilt $A = -B$.

3. Man sieht mithilfe unseres Isomorphismus $\mathrm{kw} : \mathbb{W} \xrightarrow{\sim} S^1$ aus 4.1.7.9, daß es in der Winkelgruppe genau zwei Elemente α gibt mit $4\alpha = 0$ aber $2\alpha \neq 0$, und daß genau Eines davon in der Winkelmenge liegt. Dies Element der Winkelmenge $\rho \in \mathbb{W}^+$ heißt der **rechte Winkel**. Unter unserem Standardisomorphismus $\mathrm{kw} : \mathbb{W} \xrightarrow{\sim} S^1$ entspricht der rechte Winkel der komplexen Zahl i. Für einen Zweistrahl ${}_\mu\{A, B\}$ in einem euklidischen Vektorraum ist $\angle(A, B)$ der rechte Winkel genau dann, wenn gilt $A \perp B$ alias $v \perp w \ \forall v \in A, w \in B$ im Sinne von 4.1.5.1.

4.1.7.11 (**Sinus und Cosinus**). Für den $\mathbb{R}^2$ mit seiner Standardorientierung und seinem Standardskalarprodukt erhalten wir per definitionem einen kanonischen Isomorphismus $\mathbb{W} \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$, $\vartheta \mapsto \mathrm{R}_\vartheta$. Wir erklären Abbildungen **Sinus** und **Cosinus** $\sin, \cos : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$\mathrm{R}_\vartheta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

4.1.7.12. Der Cosinus induziert offensichtlich eine Bijektion $\cos : \mathbb{W}^+ \xrightarrow{\sim} [-1, 1]$ zwischen unserer Winkelmenge und dem reellen Intervall $[-1, 1]$. Der rechte Winkel hat offensichtlich $\cos(\rho) = 0$ als Cosinus, der Nullwinkel $\cos(0) = 1$ und der

gestreckte Winkel $\cos(\gamma) = -1$. Für alle Winkel $\vartheta \in \mathbb{W}$ gilt $\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$ und für alle nichtnegativen Winkel $\vartheta \in \mathbb{W}^+$ gilt $\sin\vartheta \geq 0$ und mithin $\sin\vartheta = \sqrt{1-\cos^2\vartheta}$.

4.1.7.13. Unser kanonischer Isomorphismus $\mathbb{W} \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$, $\vartheta \mapsto \mathrm{R}_\vartheta$ wird in diesen Notationen gegeben durch die Vorschrift

$$\vartheta \mapsto \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Unser Standardisomorphismus mit der Kreisgruppe $\mathrm{kw} : \mathbb{W} \xrightarrow{\sim} S^1$ wird in diesen Notationen gegeben durch die Vorschrift $\vartheta \mapsto \cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta$.

Vorschau 4.1.7.14 (**Bezug zur Analysis**). In der Analysis 10.4.5.12 führt man Sinus und Cosinus meist als Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein. Wenn ich auf dem Unterschied zu unseren hier erklärten Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ bestehen will, unterscheide ich zwischen dem „analytischen“ und dem „geometrischen“ Sinus beziehungsweise Cosinus und notiere Erstere $\sin_{\mathrm{a}}, \cos_{\mathrm{a}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Letztere $\sin_{\mathrm{g}}, \cos_{\mathrm{g}} : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$. Per definitionem gilt dann für die Komposition

$$\mathrm{wk} \circ u : \mathbb{R} \to \mathbb{W}$$

der Umlaufabbildung $u : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto \exp \mathrm{i}t$ mit unserem Standardisomorphismus $\mathrm{wk} : S^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{W}$ aus 4.1.7.9 die Beziehung

$$\sin_{\mathrm{a}} = \sin_{\mathrm{g}} \circ \mathrm{wk} \circ u \quad \text{und} \quad \cos_{\mathrm{a}} = \cos_{\mathrm{g}} \circ \mathrm{wk} \circ u.$$

Mehr dazu besprechen wir in 4.1.8.1 im Zusammenhang mit Winkelmaßen.

4.1.7.15 (**Winkel zwischen Vektoren**). Wir erklären den **Winkel**

$$\angle(v, w) \in \mathbb{W}^+$$

zwischen zwei von Null verschiedenen Vektoren $v \neq 0 \neq w$ eines euklidischen Vektorraums als den von den zugehörigen Strahlen $\mathbb{R}_{\geq 0}v$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}w$ im Sinne von 4.1.7.5 eingeschlossenen Winkel. Wir zeigen nun für diesen Winkel und ein beliebiges Skalarprodukt der vorgegebenen euklidischen Struktur die Formel

$$\cos_{\mathrm{g}}(\angle(v, w)) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}$$

Per definitionem reicht es, sie für zweidimensionale Skalarprodukträume zu zeigen. Weiter reicht es, sie für Vektoren der Norm Eins zu zeigen. Da beide Seiten gleich bleiben, wenn wir unsere Vektoren durch ihre Bilder unter einem Isomorphismus von Skalarprodukträumen ersetzen, dürfen wir sogar annehmen, daß unser Skalarproduktraum die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ ist mit $\langle z, w\rangle = \mathrm{Re}(\bar{z}w)$ und daß gilt $z = 1$. In diesem Fall ist die Behauptung jedoch offensichtlich.

Vorschau 4.1.7.16. In 4.6.4.6 werden wir das kanonische „flächenwertige Skalarprodukt“ eines euklidischen Vektorraums kennenlernen und sehen, wie man die reelle Zahl $\langle v, w\rangle/(\|v\|\|w\|)$ aus 4.1.7.15 auch und in besonders natürlicher Weise als einen „Quotient von zwei Flächen“ verstehen kann.

Übungen

Übung 4.1.7.17 (**Ähnliche Zweistrahlen und Winkel**). Zwei angeordnete Zweistrahlen (A, B) und (A', B') in orientierten zweidimensionalen euklidischen Vektorräumen Z, Z' lassen sich genau dann durch einen orientierungserhaltenden Isomorphismus euklidischer Vektorräume ineinander überführen, wenn sie denselben gerichteten Winkel einschließen, wenn also gilt

$$\measuredangle(A, B) = \measuredangle(A', B')$$

Von zwei Zweistrahlen ${}_\mu\{A, B\}$ und ${}_\mu\{A', B'\}$ in endlichdimensionalen euklidischen Vektorräumen Z, Z' läßt sich genau dann einer der beiden durch eine euklidische lineare Abbildung in den anderen überführen, wenn sie denselben ungerichteten Winkel einschließen, wenn also gilt

$$\angle(A, B) = \angle(A', B')$$

4.1.8 Winkelmaße und Winkel im Dreieck

4.1.8.1 (**Allgemeine Winkelmaße**). Wir versehen die Winkelgruppe $\mathbb{W}$ mit der induzierten Topologie 11.1.1.13 zur natürlichen Topologie 11.2.3.15 auf dem Endomorphismenraum eines zweidimensionalen reellen Vektorraums. Aus der Analysis 10.4.5.8 wissen wir, daß es stetige nichtkonstante Gruppenhomomorphismen

$$w : \mathbb{R} \to \mathbb{W}$$

von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die Winkelgruppe gibt, daß alle derartigen Gruppenhomomorphismen surjektiv sind und daß sich je Zwei von ihnen nur um das Vorschalten der Multiplikation mit einer von Null verschiedenen reellen Zahl unterscheiden. Jeder derartige Gruppenhomomorphismus hat weiter, immer nach 10.4.5.8, einen Kern der Gestalt $\mathbb{Z}b$ für wohlbestimmtes $b > 0$ und induziert mithin Bijektionen

$$w : [0, b) \xrightarrow{\sim} \mathbb{W}$$

Diese Bijektionen kann man verwenden, um Elemente der Winkelgruppe durch reelle Zahlen zu beschreiben. Man beschränkt sich hierbei in der Mathematik

meist auf Gruppenhomomorphismen w mit der Eigenschaft, daß für einen orientierten zweidimensionalen euklidischen Vektorraum V und einen Vektor $\vec{v} \in V$ ungleich Null und hinreichend kleines $t > 0$ das Paar $\big(\vec{v}, w(t)(\vec{v})\big)$ eine positiv orientierte Basis ist. Derartige Gruppenhomomorphismen werden durch obiges b bereits eindeutig festgelegt. Die Umkehrabbildung der zugehörigen Bijektion heißt dann das durch b gegebene **Winkelmaß**.

.

4.1.8.2 (**Gebräuchliche Winkelmaße**).

1. Auf der Schule wird der Gruppenhomomorphismus w meist so gewählt, daß $b = 360$ die kleinste positive Zahl ist, die auf die Identität abgebildet wird. Das hat den Vorteil, daß alle $n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n \leq 6$ Teiler von 360 sind, so daß die Winkelmaße vieler Winkel in einfachen geometrischen Figuren natürliche Zahlen werden. Man deutet das Anwenden dieses Gruppenhomomorphismus durch ein hochgestelltes $^\circ$ an, also etwa $w : 45 \mapsto 45^\circ$, und spricht von **Grad**. Die Umkehrabbildung notieren wir $\mathrm{Grad} : \mathbb{W} \xrightarrow{\sim} [0, 360)$.

2. Bei Vermessungsarbeiten wird der Gruppenhomomorphismus w meist so gewählt, daß $b = 400$ die kleinste positive Zahl ist, die auf die Identität abgebildet wird. Dabei wird üblicherweise „im Uhrzeigersinn“ gemessen, als da heißt, wenn man eine Uhr so auf die Erde legt, daß man sie von oben lesen kann, hat der Winkel von zwölf Uhr nach drei Uhr in dieser Konvention das Winkelmaß 100. Die Wahl 400 hat den Vorteil, daß einem rechten Winkel als Winkelmaß die Zahl 100 entspricht. Das ist beim Arbeiten mit Digitalanzeigen besonders praktisch. Man deutet das Anwenden dieses Gruppenhomomorphismus durch ein nachgestelltes gon an, und spricht von **Neugrad** oder **Gon**.

3. Beim Bedienen eines Taschenrechners arbeitet man oft mit einer Wahl des Gruppenhomomorphismus w, die zusätzlich zu ihrer Verträglichkeit mit der Orientierung dadurch ausgezeichnet ist, daß der „Geschwindigkeitsvektor“ von $t \mapsto w(t)(\vec{v})$ für alle t und $\vec{v}$ dieselbe Länge hat wie $\vec{v}$. Das bedeutet dann die Wahl $b = 2\pi$, und hier ist das $\pi = 3{,}1415\ldots$ aus der Analysis gemeint, also das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser einer Kreislinie nach 10.3.4.1. Für diese Wahl gilt die Beziehung $\cos_{\mathrm{g}} \circ w = \cos_{\mathrm{a}}$ zwischen geometrischem und analytischem Cosinus und die analoge Beziehung für den Sinus. Man deutet das Anwenden dieses Gruppenhomomorphismus durch ein nachgestelltes rad an und spricht von **Radian** oder deutsch **Bogenmaß**.

4. In der Mathematik ist es üblich, zwar mit der Wahl $b = 2\pi$ zu arbeiten, also im eben eingeführten Bogenmaß, informell aber so zu tun, als ob man die

Wahl $b = 2$ getroffen habe und dies durch das Symbol π andeute. Die dabei entstehenden Ausdrücke haben den Vorteil, daß sie informell besonders gut verständlich sind. Sie haben den Nachteil, daß man aus dem Kontext erschließen muß, ob ein Winkel $\alpha \in \mathbb{W}$ oder vielmehr eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ gemeint ist.

5. Es gibt Bestrebungen, eine neue Konvention einzuführen, bei der man statt mit π mit $\tau := 2\pi$ arbeitet.

Zum Beispiel sind die Bezeichnungen für einen im Gegenuhrzeigersinn orientierten rechten Winkel in den verschiedenen Notationssystemen

$$90^\circ = 300\,\mathrm{gon} = \pi/2 = \tau/4 \approx 1{,}5708\,\mathrm{rad}$$

4.1.8.3 (**Unsere Konventionen**). Wir arbeiten im folgenden mit $b = 2\pi$ und verwenden die Bijektion $w : (-\pi, \pi] \xrightarrow{\sim} \mathbb{W}$, die von unserem Gruppenhomomorphismus $w = \mathrm{wk} \circ u : \mathbb{R} \to \mathbb{W}$ aus 4.1.7.14 induziert wird. Wir erinnern an die in 4.1.7.14 erklärten Identitäten $\cos_{\mathrm{g}} \circ \mathrm{wk} \circ u = \cos_{\mathrm{a}}$ und $\sin_{\mathrm{g}} \circ \mathrm{wk} \circ u = \sin_{\mathrm{a}}$. Die Umkehrabbildung zu $w : (-\pi, \pi] \xrightarrow{\sim} \mathbb{W}$ notieren wir

$$\mathrm{Rad} : \mathbb{W} \xrightarrow{\sim} (-\pi, \pi]$$

mit Rad als Abkürzung für **Radian**. Damit haben wir also $\cos_{\mathrm{a}} \circ \mathrm{Rad} = \cos_g$ und $\sin_{\mathrm{a}} \circ \mathrm{Rad} = \sin_g$ und $\mathrm{Rad}(0{,}56\,\mathrm{rad}) = 0{,}56$. Gegeben ein angeordneter Zweistrahl (A, B) bezeichnet mithin

$$\mathrm{Rad}\,\measuredangle(A, B) \in (-\pi, \pi]$$

das Bogenmaß des zugehörigen Elements der Winkelgruppe. Gegeben linear unabhängige Vektoren v, w ist ihr Winkelmaß $\mathrm{Rad}\,\measuredangle(v, w)$ positiv genau dann, wenn sie eine positiv orientierte Basis bilden, und für $v \neq 0$ haben wir $\mathrm{Rad}\,\measuredangle(v, -v) = \pi$. Schließlich gilt in unseren Konventionen für jeden Winkel $\alpha \in \mathbb{W}$ auch noch die Beziehung $\mathrm{Rad}\,|\alpha| = |\,\mathrm{Rad}\,\alpha|$.

4.1.8.4 (**Terminologie**). Im folgenden werden wir oft einfach nur **Winkel** sagen und es dem Leser überlassen, aus dem Kontext zu erschließen, ob damit Zweistrahlen, angeordnete Zweistrahlen, Elemente von Winkelgruppen, Elemente von Winkelmengen oder auch eines der üblichen Winkelmaße gemeint sind. Oft läßt man auch die Spezifizierung des Winkelmaßes aus der Notation weg und hofft, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, ob ein abstrakter Winkel oder sein Maß gemeint ist, und in letzterem Fall, nach welcher Konvention denn nun gemessen werden soll.

Beispiel 4.1.8.5. Die drei Vektoren der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bilden ein gleichseitiges Dreieck und der Winkel an jeder Ecke sollte folglich das Bogenmaß $\pi/3$ haben. In der Tat finden wir für $v = \mathrm{e}_3 - \mathrm{e}_1$ und $w = \mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_1$ als Skalarprodukt $\langle v, w\rangle = 1$ und wegen $\|v\| = \|w\| = \sqrt{2}$ ergibt sich für den Winkel in der Tat $\cos\angle(v, w) = 1/2$ und $\operatorname{Rad}\angle(v, w) = \pi/3$.

4.1.8.6. Unter einem **Dreieck** in einem affinen Raum verstehen wir eine Menge von drei nicht kollinearen Punkten. Standardmäßig bezeichnen man diese Punkte mit A, B, C und nennt sie die **Ecken** des Dreiecks. Für ein Dreieck in einer euklidischen Ebene E notieren wir

$$\alpha := \angle(B - A)(C - A)$$

seinen **Winkel bei** A und notieren analog β, γ seine Winkel bei B, C.

Proposition 4.1.8.7 (Winkelsumme im Dreieck). *Gegeben ein Dreieck in einer euklidischen Ebene ist die Summe seiner drei Winkel der gestreckte Winkel.*

Beweis. Sei E unsere euklidische Ebene. Seien $A, B, C \in E$ die Ecken unseres Dreiecks. Wir kürzen die „Kantenvektoren“ ab zu $\vec{a} := B - C$, $\vec{b} := C - A$ und $\vec{c} := A - B$. Wählen wir eine Orientierung auf $\vec{E}$, so wissen wir wegen der Additivität 4.1.7.8 der orientierten Winkel bereits

$$\measuredangle(\vec{a}, -\vec{b}) + \measuredangle(-\vec{b}, \vec{c}) + \measuredangle(\vec{c}, -\vec{a}) = \measuredangle(\vec{a}, -\vec{a})$$

Wenn wir in der Mitte beide Vektoren negativ machen, ändert sich der orientierte Winkel nicht. Wir haben also etwas übersichtlicher auch

$$\measuredangle(\vec{a}, -\vec{b}) + \measuredangle(\vec{b}, -\vec{c}) + \measuredangle(\vec{c}, -\vec{a}) = \measuredangle(\vec{a}, -\vec{a})$$

Andererseits gilt $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Aus dieser Identität folgt, daß $(\vec{a}, -\vec{b}), (\vec{b}, -\vec{c})$ und $(\vec{c}, -\vec{a})$ drei gleich orientierte Basen sind, da die entsprechenden Basiswechselmatrizen alle positive Determinante haben. Wir können also, indem wir andernfalls die andere Orientierung wählen, alle drei positiv orientiert annehmen. Dann aber stimmen die orientierten mit den nichtorientierten Winkeln überein und wir erhalten

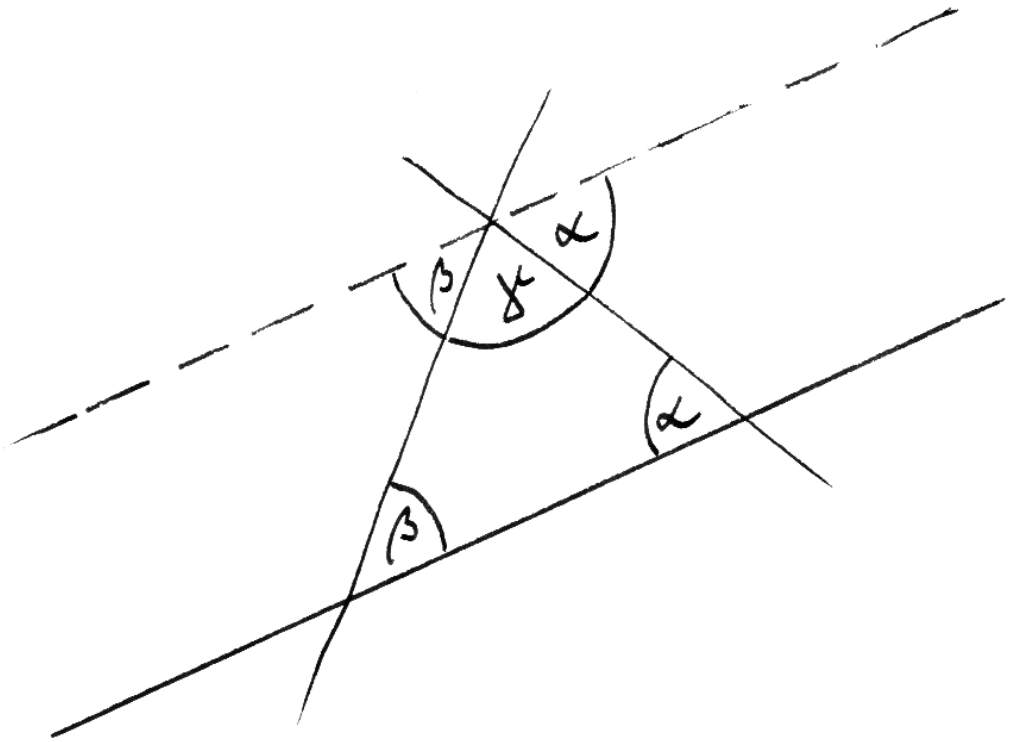
$$\gamma + \alpha + \beta = \angle(\vec{a}, -\vec{a}) \qquad \square$$

4.1.8.8. Aus unserer Gleichung $\alpha + \beta + \gamma = \angle(\vec{a}, -\vec{a})$ in der Winkelgruppe $\mathbb{W}$ folgt

$$\operatorname{Rad}\gamma + \operatorname{Rad}\alpha + \operatorname{Rad}\beta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$$

Für jeden Winkel ϑ eines Dreiecks gilt aber offensichtlich auch $\operatorname{Rad}(\vartheta) \in (0, \pi)$. Da damit alle drei Summanden links zu $(0, \pi)$ gehören müssen und da weiter gilt $(0, 3\pi) \cap (\pi + 2\pi\mathbb{Z}) = \{\pi\}$, folgt sogar

$$\operatorname{Rad}\alpha + \operatorname{Rad}\beta + \operatorname{Rad}\gamma = \pi$$



Der auf der Schule übliche Beweis dafür, daß die Winkelsumme im Dreieck $180°$ beträgt.

Natürlich können wir genausogut mit dem Gradmaß $\mathrm{Grad} : \mathbb{W}^+ \xrightarrow{\sim} [0, 180]$ arbeiten und erhalten so die äquivalente Aussage

$$\mathrm{Grad}\,\alpha + \mathrm{Grad}\,\beta + \mathrm{Grad}\,\gamma = 180$$

Sie entspricht vermutlich am ehesten dem, was Sie in der Schule gelernt haben.

4.1.8.9 (**Weitere Notationen für Dreiecke**). Gegeben ein Dreieck mit den Ecken A, B, C in einer euklidischen Ebene E bezeichne

$$a := \|B - C\|$$

je nach Kontext die m-Norm $a \in \mathbb{R}$ der der Ecke A gegenüberliegenden Seite für fest gewähltes $m \in \vec{E}\backslash 0$ oder ihre abstrakte Länge $a \in \mathbb{L}(\vec{E})$ im Sinne von 4.1.5.12. Meist wird es auf diesen Unterschied gar nicht ankommen und wir reden unterschiedslos von der „Seitenlänge". Analog erklären wir die Seitenlängen b und c.

4.1.8.10. Gegeben ein Dreieck mit den Ecken A, B, C in einer euklidischen Ebene E mit einem rechten Winkel bei C gilt

$$\cos(\beta) = a/c$$

In der Tat gibt es nach 4.1.2.13 einen Isomorphismus von euklidischen Ebenen $E \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $B \mapsto 0$ und $C \mapsto \mathrm{e}_1$. Nach einer Streckung dürfen wir annehmen, daß A auf dem Einheitskreis zu liegen kommt und C auf $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{e}_1$. Dann gilt also $c = 1$ und $a = \cos(\beta)$ nach unserer Definition des Cosinus.

4.1.8.11. Dreiecke $\{A, B, C\}$ und $\{A', B', C'\}$ in einer euklidischen Ebene heißen **kongruent**, wenn es eine Kongruenz k gibt mit $k(\{A, B, C\}) = \{A', B', C'\}$. Ein Dreieck mit einer Anordnung seiner Ecken nenne ich ein **angeordnetes Dreieck** und notiere es (A, B, C). Angeordnete Dreiecke (A, B, C) und (A', B', C') in einer euklidischen Ebene heißen **angeordnet kongruent**, wenn es eine Kongruenz k gibt mit $k(A, B, C) = (A', B', C')$.

Übungen

Übung 4.1.8.12. Man zeige den **Cosinus-Satz** $a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$ für jedes Dreieck mit positiven Seitenlängen a, b, c und jeweils den entsprechenden Seiten gegenüberliegenden nichtorientierten Winkeln α, β, γ. Man zeige in denselben Notationen auch den **Sinus-Satz**

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Hinweis: Man wähle eine Seite als horizontale Seite aus und berechne die Höhe unseres Dreiecks auf verschiedene Weisen. Hier meinen a, b, c die m-Normen der

jeweiligen Seiten in Bezug auf einen festen von Null verschiedenen Richtungsvektor m.

Übung 4.1.8.13. Je zwei angeordnete Dreiecke (A, B, C) und (A', B', C') einer euklidischen Ebene mit zwei gleichen Seiten $a = a'$ sowie $b = b'$ und gleichem eingeschlossenen Winkel $\gamma = \gamma'$ sind angeordnet kongruent. Gilt statt $\gamma = \gamma'$ eine der Gleichheiten $\alpha = \alpha'$ oder $\beta = \beta'$, so brauchen unsere angeordneten Dreiecke nicht kongruent sein.

Übung 4.1.8.14. Je zwei angeordnete Dreiecke (A, B, C) und (A', B', C') einer euklidischen Ebene mit gleichen Seiten $c = c'$ sowie gleichen anliegenden Winkeln $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ sind angeordnet kongruent. Dasselbe gilt auch unter der Annahme ($c = c'$ und $\alpha = \alpha'$ und $\gamma = \gamma'$). Hinweis: Sinussatz und vorhergehende Übungen.

Übung 4.1.8.15. Je zwei angeordnete Dreiecke (A, B, C) und (A', B', C') einer euklidischen Ebene mit drei gleichen Seiten $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ sind angeordnet kongruent. Hinweis: Cosinussatz und vorhergehende Übungen.

Übung 4.1.8.16. Gegeben Strahlen F, G, H in einem orientierten zweidimensionalen euklidischen Vektorraum liefert die Additivität der orientierten Winkel 4.1.7.8 für ihre Bogenmaße die Regel

$$\operatorname{Rad} \measuredangle(F, G) + \operatorname{Rad} \measuredangle(G, H) \ \in \ \operatorname{Rad} \measuredangle(F, H) + 2\pi\mathbb{Z}$$

Übung 4.1.8.17. Gegeben von Null verschiedene Vektoren v, w in einem orientierten zweidimensionalen reellen euklidischen Vektorraum haben wir stets die Alternative $\operatorname{Rad} \measuredangle(v, w) + \operatorname{Rad} \measuredangle(w, -v) = \pm\pi$.

Ergänzende Übung 4.1.8.18 (**Winkelsumme im Vieleck**). Sei in einer orientierten euklidischen Ebene E eine sich periodisch wiederholende Folge $p_0, \ldots, p_n = p_0, p_{n+1} = p_1, \ldots$ mit $p_1, \ldots, p_n$ paarweise verschieden gegeben derart, daß die halboffenen Segmente $[p_{i-1}, p_i)$ für $1 \le i \le n$ paarweise disjunkt sind. Es gebe einen Richtungsvektor $\vec{v} \neq 0$ derart, daß $p_0 + \mathbb{R}_{>0}\vec{v}$ keines unserer Segmente trifft und daß $(\vec{v}, p_1 - p_0)$ eine positiv orientierte Basis von $\vec{E}$ ist. So gilt in unseren Konventionen 4.1.8.3 die Identität

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Rad} \measuredangle(p_i - p_{i-1}, p_{i+1} - p_i) = 2\pi$$

Hinweis: Gibt es zwei Ecken $p_r \neq p_s$ derart, daß das offene Segment (p_r, p_s) keines unserer Segmente $[p_{i-1}, p_i]$ trifft und daß alle Ecken in ein- und derselben abgeschlossenen Halbebene zur Gerade durch p_r und p_s liegen, so führt „Zerlegen in zwei Polygonzüge durch Einfügen einer doppelten Kante $[p_r, p_s]$“ zusammen mit vollständiger Induktion zum Ziel. Gibt es keine zwei derartigen Ecken, so

erkennt man „unschwer“, daß unser Polygonzug „konvex“ ist in dem Sinne, daß für je zwei Ecken $p_r \neq p_s$ mit $s \neq r \pm 1$ das offene Segment (p_r, p_s) keines unserer Segmente $[p_{i-1}, p_i]$ trifft, und dann kommen wir wieder durch „Zerlegen in zwei Polygonzüge“ und Induktion ans Ziel.

4.1.9 Kreuzprodukt und Spatprodukt

Satz 4.1.9.1. *Gegeben ein dreidimensionaler orientierter reeller Skalarproduktraum V gibt es genau eine alternierende bilineare Abbildung $V \times V \to V$ mit der Eigenschaft $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \mapsto \vec{v}_3$ für jede orientierte Orthonormalbasis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Sie heißt das* **Kreuzprodukt** *wegen der für unsere Abbildung allgemein gebräuchlichen Notation*

$$(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \times \vec{w}$$

4.1.9.2. Aus der Definition folgt sofort, daß $(\vec{v} \times \vec{w})$ auf $\vec{v}$ und $\vec{w}$ senkrecht steht, indem wir etwa eine angeordnete Orthonormalbasis derart wählen, daß $\vec{v}$ und $\vec{w}$ im Erzeugnis der ersten beiden Basisvektoren liegen.

4.1.9.3 (**Diskussion von Varianten des Begriffs und der Terminologie**). Eine mit den benötigten Einheiten versehene Variante des Kreuzprodukts für dreidimensionale euklidische Vektorräume diskutieren wir in 4.6.4.9. Andere Autoren bezeichnen unser Kreuzprodukt als **Vektorprodukt**, da es als Resultat eben Vektoren liefert im Gegensatz zum Skalarprodukt, das Skalare liefert. Ich habe für das Kreuzprodukt alias Vektorprodukt auch schon die alternative Notation $[\vec{v}, \vec{w}]$ gesehen, die aber erst im Kontext von 22.1.3.7 ihre Verträglichkeit mit an wieder anderer Stelle üblichen Notationen zeigt. Noch seltener sieht man die Notation $\vec{v} \wedge \vec{w}$, die hinwiederum in 4.6.5.29 ihre Verträglichkeit mit dem dort eingeführten „Dachprodukt“ $\wedge$ zeigt. Ich mag diese letzte Notation nicht, denn das Dachprodukt in seiner üblichen Definition ist im Gegensatz zu unserem Kreuzprodukt durchaus assoziativ.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir anehmen, V sei der $\mathbb{R}^3$ mit seinem Standard-Skalarprodukt und seiner Standard-Orientierung. Wenn es in diesem Fall überhaupt eine bilineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den im Satz geforderten Eigenschaften gibt, dann muß diese offenichtlich durch die Vorschrift

$$\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

gegeben werden. Es bleibt damit nur noch zu zeigen, daß die durch diese Formel definierte bilineare Abbildung, die wir schon mal $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \times \vec{w}$ notieren und

für den Rest dieses Beweises das **konkrete Kreuzprodukt** nennen, auch wirklich die im Satz geforderte Eigenschaft hat. In Anbetracht der Jägerzaunformel 3.6.2.3 gilt für unser konkretes Kreuzprodukt offensichtlich schon mal die Identität

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w})$$

Umgekehrt legt aber diese Eigenschaft für alle $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, ja sogar schon für $\vec{u} = \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ auch bereits den Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ fest. Daraus folgern wir hinwiederum für alle Drehungen $A \in \mathrm{SO}(3)$ die Identität

$$(A\vec{v}) \times (A\vec{w}) = A(\vec{v} \times \vec{w})$$

In der Tat folgt diese Identität von Vektoren, wenn wir zeigen können, daß die Skalarprodukte beider Seiten mit allen Vektoren $\vec{u}$ oder auch mit allen Vektoren $A\vec{u}$ übereinstimmen. Dafür rechnen wir einfach $\langle A\vec{u}, A(\vec{v} \times \vec{w}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w}) = \det A(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w}) = \det(A\vec{u}|A\vec{v}|A\vec{w}) = \langle A\vec{u}, (A\vec{v}) \times (A\vec{w}) \rangle$. Also gilt in der Tat $A(\vec{v} \times \vec{w}) = (A\vec{v}) \times (A\vec{w})$ für alle $A \in \mathrm{SO}(3)$. Da sich aber je zwei orientierte Orthonormalbasen des $\mathbb{R}^3$ durch eine Drehung $A \in \mathrm{SO}(3)$ ineinander überführen lassen, folgt unmittelbar, daß unser konkretes Kreuzprodukt die im Satz geforderte Eigenschaft hat. □

Ergänzung 4.1.9.4. Für den Ausdruck $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w})$ aus dem vorhergehenden Beweis mit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ findet man manchmal auch die Notation $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ und die Bezeichnung als **Spatprodukt**, die darauf anspielt, daß diese Determinante ja nach 3.6.2.6 bis auf ein Vorzeichen gerade das Volumen des durch die fraglichen drei Vektoren gegebenen Parallelpipeds angibt. Die Kristalle des Feldspats haben aber nun oft die Gestalt eines Parallelpipeds, weswegen derartige Körper auch als **Spate** bezeichnet werden. In 4.6.4.3 diskutieren wir eine Variante des Spatprodukts für beliebige dreidimensionale euklidische Vektorräume.

4.1.9.5 (**Die schmutzige Anschauung für das Kreuzprodukt**). Setzen wir im Fall eines linear unabhängigen Paares $(\vec{v}, \vec{w})$ in obiger Formel $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w})$ für die Beziehung von Kreuzprodukt, Skalarprodukt und Determinante den Vektor

$$\vec{u} = (\vec{v} \times \vec{w})/\|\vec{v} \times \vec{w}\|$$

ein, so erkennen wir aus der anschaulichen Bedeutung 3.6.2.6 der Determinante als Volumen, daß wir uns die Länge von $\vec{v} \times \vec{w}$ gerade als das Volumen des von $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten Spats alias die Fläche des von $\vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten Parallelograms denken dürfen. Damit erkennen wir, daß das Kreuzprodukt anschaulich wie folgt interpretiert werden kann: Für $\vec{v}, \vec{w}$ linear abhängig gilt $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$; Sonst ist $\vec{v} \times \vec{w}$ der Vektor, der senkrecht steht auf $\vec{v}$ und $\vec{w}$, dessen Länge der anschaulichen Fläche des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms entspricht, und dessen Richtung dadurch festgelegt wird, daß $(\vec{v} \times \vec{w}, \vec{v}, \vec{w})$ eine orientierte Basis ist.

Übungen

Übung 4.1.9.6 (**Einzigkeit des Kreuzprodukts**). Man zeige: Gegeben ein dreidimensionaler reeller Skalarproduktraum V bilden die bilinearen Abbildungen $\varphi : V \times V \to V$ mit der Eigenschaft $\varphi(Av, Aw) = A\varphi(v, w)$ für alle $v, w \in V$ und $A \in \mathrm{SO}(V)$ einen eindimensionalen Untervektorraum des Vektorraums aller Abbildungen $V \times V \to V$. Es besteht insbesondere keine Hoffnung, neben dem Kreuzprodukt noch weitere „geometrisch bedeutsame" bilineare Verknüpfungen auf V zu finden. Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei V der $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Es gibt eine Drehung mit $\mathrm{e}_1 \mapsto \mathrm{e}_2$ und $\mathrm{e}_2 \mapsto -\mathrm{e}_1$. Man folgere, daß φ alternierend sein muß. Es gibt eine Drehung mit $\mathrm{e}_1 \mapsto \mathrm{e}_2$ und $\mathrm{e}_2 \mapsto \mathrm{e}_1$ und Drehachse $\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_1$. Man folgere, daß $\varphi(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$ auf $\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_1$ senkrecht stehen muß.

Übung 4.1.9.7. Gegeben ein dreidimensionaler orientierter reeller Skalarproduktraum zeige man $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w}$.

4.1.10 Abstandserhaltende Abbildungen

Proposition 4.1.10.1. *Gegeben reelle Skalarprodukträume V, W ist eine Abbildung $f : V \to W$ linear und orthogonal genau dann, wenn sie den Ursprung auf den Ursprung abbildet und alle Abstände erhält, in Formeln $f(0) = 0$ und*

$$\|f(v) - f(w)\| = \|v - w\| \quad \forall v, w \in V$$

4.1.10.2. Man beachte, daß die Linearität von f nicht vorausgesetzt, sondern vielmehr aus unseren Annahmen gefolgert wird.

Beweis. Zunächst beachten wir die **Polarisierungsidentität**

$$2\langle v, w \rangle = \|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2$$

oder für diesen Beweis besser ihre Variante $2\langle v, w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - w\|^2$. Da unsere Abbildung den Ursprung und alle Abstände erhält, erhält sie auch die Norm aller Vektoren, und wir folgern schon einmal

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in V$$

Um weiter $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ zu zeigen, beachten wir

$$\langle f(\lambda v) - \lambda f(v), f(u) \rangle = \langle \lambda v, u \rangle - \lambda \langle v, u \rangle = 0$$

für alle $u \in V$ und folgern $\langle f(\lambda v) - \lambda f(v), z \rangle = 0$ für alle z im Erzeugnis des Bildes $f(V)$. Nehmen wir dann speziell $z = f(\lambda v) - \lambda f(v)$, so ergibt sich erst $\|f(\lambda v) - \lambda f(v)\|^2 = 0$ und dann $f(\lambda v) = \lambda f(v)$. In derselben Weise finden wir

$$\langle f(v + w) - f(v) - f(w), f(u) \rangle = \langle v + w, u \rangle - \langle v, u \rangle - \langle w, u \rangle = 0$$

für alle $u \in V$ und folgern $f(v+w) = f(v) + f(w)$, womit dann auch die Linearität von f gezeigt wäre. □

4.1.10.3. Ein **affiner Skalarproduktraum** ist ein Paar bestehend aus einem reellen affinen Raum und einem Skalarprodukt auf seinem Richtungsraum. Gegeben zwei Punkte p, q definieren wir dann ihren **Abstand** alias ihre **Distanz** als die Norm des zugehörigen Richtungsvektors, in Formeln

$$d(p,q) := \|p - q\|$$

Eine Abbildung $f : E \to E'$ zwischen affinen Skalarprodukträumen, die alle Abstände erhält, nennt man auch **isometrisch** oder eine **Isometrie**. Die Terminologie geht auf griechisch $\iota\sigma o\varsigma$ für deutsch „gleich“ zurück. In Formeln fordern wir von einer Isometrie also

$$d(f(p), f(q)) = d(p,q) \;\; \forall p, q \in E$$

Ergänzung 4.1.10.4. Dieselbe Begriffsbildung verwendet man auch allgemeiner für Abbildungen zwischen sogenannten „metrischen Räumen“, wie sie etwa in 11.1.3.1 erklärt werden. Ist eine Isometrie bijektiv, so spricht man von einem **isometrischen Isomorphismus**.

Ergänzung 4.1.10.5 (**Diskussion der Terminologie**). Ich habe auch schon die alternative Terminologie gesehen, in der nur unsere isometrischen Isomorphismen als „Isometrien“ bezeichnet werden und unsere Isometrien als „isometrische Abbildungen“.

Satz 4.1.10.6 (**Isometrien zwischen affinen Skalarprodukträumen**). *Eine Abbildung zwischen affinen Skalarprodukträumen ist eine Isometrie genau dann, wenn sie affin ist mit orthogonalem linearen Anteil.*

Beweis. Sei $\varphi : E \to F$ unsere Abbildung und sei $p \in E$ beliebig gewählt. Erklären wir $\vec{\varphi}_p : \vec{E} \to \vec{F}$ durch $\varphi(p + \vec{v}) = \varphi(p) + \vec{\varphi}_p(\vec{v})$, so bildet $\vec{\varphi}_p : \vec{E} \to \vec{F}$ offensichtlich den Ursprung auf den Ursprung ab und erhält alle Abstände. Nach der Proposition 4.1.10.1 ist folglich $\vec{\varphi}_p$ linear und orthogonal und nach 3.3.1.17 ist damit φ affin mit orthogonalem linearem Anteil. Der Beweis der Gegenrichtung kann dem Leser überlassen bleiben. □

4.1.10.7 (**Diskussion der Terminologie**). Aus der Schule kennen Sie vermutlich bereits **Punktspiegelungen** an einem Punkt p, die durch die Vorschrift $p + \vec{v} \mapsto p - \vec{v}$ gegeben werden. Wir wollen jedoch vereinbaren, daß mit **Spiegelungen** stets lineare oder affine Abbildungen mit einer Fixpunktmenge der Kodimension Eins gemeint sind, deren Quadrat die Identität ist. Punktspiegelungen heißen zwar verwirrenderweise ähnlich, sind aber nur im eindimensionalen Fall Spiegelungen in unserem Sinne.

4.1.10.8. Gegeben ein euklidischer Raum E verstehen wir unter dem **Abstand** zweier Punkte $p, q \in E$ das Element $\|p - q\| \in \mathbb{L}(\vec{E})$ der zugehörigen Längengerade. Eine Selbstabbildung $f : E \to E$ heißt **abstandserhaltend**, wenn gilt

$$\|p - q\| = \|f(p) - f(q)\| \ \forall p, q \in E$$

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die abstandserhaltenden Selbstabbildungen eines endlichdimensionalen euklidischen Raums genau seine orthogonalaffinen Automorphismen aus 4.1.5.4 sind. Insbesondere sind die abstandserhaltenden Selbstabbildungen einer euklidischen Ebene nach 4.1.5.7 genau ihre Kongruenzen.

Satz 4.1.10.9 (Abstandserhaltende Selbstabbildungen euklidischer Räume). *Jede abstandserhaltende Selbstabbildung $\varphi : E \to E$ eines endlichdimensionalen euklidischen Raums E läßt sich eindeutig darstellen als die Hintereinanderausführung*

$$\varphi = (+\vec{w}) \circ d$$

einer abstandserhaltenden Selbstabbildung $d : E \to E$ mit Fixpunkt gefolgt von einer Verschiebung um einen Richtungsvektor $\vec{w}$, der unter dieser abstandserhaltenden Selbstabbildung d invariant ist, in Formeln $\vec{d}(\vec{w}) = \vec{w}$.

4.1.10.10. Gegeben eine abstandserhaltende Selbstabbildung φ eines endlichdimensionalen euklidischen Raums E gibt es also in Formeln ausgedrückt genau ein Paar $(d, \vec{w})$ bestehend aus einer abstandserhaltenden Selbstabbildung d mit mindestens einem Fixpunkt sowie einem Richtungsvektor $\vec{w}$ derart, daß gilt

$$\varphi = (+\vec{w}) \circ d \quad \text{und} \quad \vec{d}(\vec{w}) = \vec{w}.$$

Offensichtlich gilt dann sogar $\varphi = (+\vec{w}) \circ d = d \circ (+\vec{w})$. Natürlich haben d und φ denselben linearen Anteil, in Formeln $\vec{d} = \vec{\varphi}$. Jede abstandserhaltende Selbstabbildung kann also nochmal anders gesagt dargestellt werden durch eine Abbildungsvorschrift der Gestalt $\varphi(p + \vec{u}) = p + A(\vec{u}) + \vec{w}$ mit $p \in E$ und $A \in \mathrm{O}(\vec{E})$ orthogonal und $\vec{w} \in \vec{E}^A$ einem Fixvektor von A.

Beweis. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung. Gegeben ein orthogonaler Automorphismus f eines endlichdimensionalen Skalarproduktraums V ist der Fixpunktraum $\ker(f - \mathrm{id}) = V^f$ das orthogonale Komplement von $\mathrm{im}(f - \mathrm{id})$ in V, in Formeln

$$V^f = \mathrm{im}(f - \mathrm{id})^\perp$$

In der Tat zeigt die Dimensionsformel 3.2.2.5 in Verbindung mit 4.1.3.18, daß es ausreicht, die Inklusion $V^f \subset \mathrm{im}(f - \mathrm{id})^\perp$ zu zeigen. Aus $f(\vec{w}) = \vec{w}$ folgt aber offensichtlich $\langle \vec{w}, f(\vec{v}) - \vec{v} \rangle = \langle f(\vec{w}), f(\vec{v}) \rangle - \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = 0$ für alle $\vec{v} \in V$. Nun beginnt der eigentliche Beweis. Natürlich kann man für einen beliebigen Punkt

$q \in E$ stets einen Vektor $\vec{v} \in \vec{E}$ finden mit $\varphi(q) = q + \vec{v}$ und folglich $\varphi(q + \vec{u}) = q + \vec{v} + \vec{\varphi}(\vec{u})\ \forall \vec{u} \in \vec{E}$. Gegeben ein Richtungsvektor $\vec{w}$ besitzt damit $(-\vec{w}) \circ \varphi$ genau dann einen Fixpunkt, wenn es $\vec{u} \in \vec{E}$ gibt mit

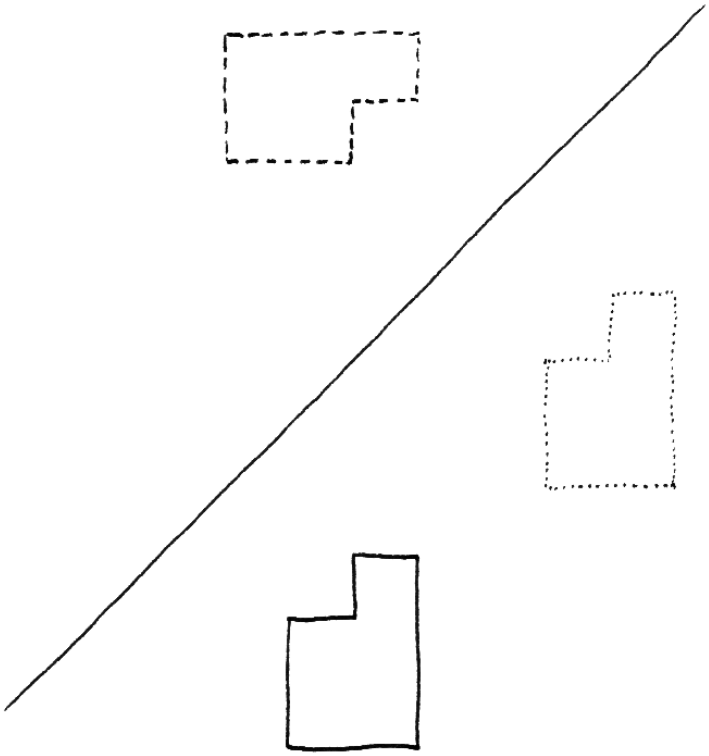
$$q + \vec{u} = q + \vec{v} + \vec{\varphi}(\vec{u}) - \vec{w}$$

alias $(\vec{u} - \vec{\varphi}(\vec{u})) + \vec{w} = \vec{v}$. Wegen der Zerlegung $\vec{E} = \operatorname{im}(\vec{\varphi} - \mathrm{id}) \oplus \vec{E}^{\vec{\varphi}}$ aus unserer Vorüberlegung gibt es also genau ein $\vec{w} \in \vec{E}^{\vec{\varphi}}$ derart, daß $(-\vec{w}) \circ \varphi$ einen Fixpunkt hat. □

Beispiel 4.1.10.11 (**Abstandserhaltende Selbstabbildungen der Gerade**). Jede abstandserhaltende Selbstabbildung einer Gerade ist entweder eine Verschiebung $x \mapsto x + a$ oder eine Spiegelung $x \mapsto b - x$: In der Tat, ist der lineare Anteil unserer Selbstabbildung die Identität, so handelt es sich nach 4.1.10.10 um eine Verschiebung; ist ihr linearer Anteil dahingegen das Negative der Identität, so muß in der Darstellung nach 4.1.10.10 der Vektor $\vec{w}$ der Nullvektor sein und wir haben für ein festes p eine Abbildung der Gestalt $p + u \mapsto p - u$ vor uns. Diese Abbildung mag man als eine Spiegelung am Punkt p auffassen, sie kann etwas weniger geometrisch auch in der Form $x \mapsto 2p - x$ geschrieben werden.

Beispiel 4.1.10.12 (**Abstandserhaltende Selbstabbildungen der Ebene**). Jede abstandserhaltende Selbstabbildung einer euklidischen Ebene ist entweder (1) eine Verschiebung oder (2) eine von der Identität verschiedene Drehung um einen Punkt oder (3) eine **Gleitspiegelung**, als da heißt eine Spiegelung an einer Gerade gefolgt von einer Verschiebung in Richtung eben dieser Gerade. In der Tat erhalten wir nach 4.1.10.10 unseren Fall (1) für die Abbildungen mit der Identität als linearem Anteil; Fall (2) für die Abbildungen mit einer von der Identität verschiedenen Drehung als linearem Anteil; und Fall (3) für die Abbildungen mit einer Spiegelung als linearem Anteil. Die Spiegelung an einer Gerade finden wir in unserer Liste als spezielle Gleitspiegelung wieder.

Beispiel 4.1.10.13 (**Abstandserhaltende Selbstabbildungen des Raums**). Jede abstandserhaltende Selbstabbildung eines dreidimensionalen euklidischen Raums ist entweder (1) eine **Verschraubung** alias eine nichttriviale Drehung um eine Achse gefolgt von einer Verschiebung in Richtung eben dieser Achse, oder (2) eine **Drehspiegelung** alias eine Drehung um eine Achse gefolgt von einer Spiegelung an einer Ebene senkrecht zu besagter Achse, oder (3) eine **Gleitspiegelung** alias eine Spiegelung an einer Ebene gefolgt von einer Verschiebung um einen Richtungsvektor besagter Ebene. In der Tat erhalten wir nach 4.1.10.10 unseren Fall (1) für die Abbildungen mit einer Drehung als linearem Anteil; Fall (2) für die Abbildungen mit linearem Anteil bestehend aus einem nichttrivialen Drehblock und einem Eintrag (-1) auf der Diagonalen; und Fall (3) für die Abbildungen mit einer Spiegelung an einer Ebene als linearem Anteil. Die Verschiebungen



Das Bild der durchgezeichneten Figur unter einer Verschiebung (gepunktelt) und unter einer Gleitspiegelung (gestrichelt). Durchgezogen eingezeichnet ist auch die Gerade, längs derer die Gleitspiegelung geschieht. Unsere Gleitspiegelung ist natürlich, wie von unserem Satz 4.1.10.9 vorhergesagt, die Verknüpfung einer Isometrie mit mindestens einem Fixpunkt, hier einer Spiegelung, mit einer Translation in einer unter dem linearen Anteil dieser Isometrie invarianten Richtung, hier in Richtung der Spiegelachse.

finden wir in unserer Liste als spezielle Verschraubungen wieder, die Identität als eine spezielle Verschiebung, und die Spiegelung an einer Ebene als eine spezielle Gleitspiegelung.

Übungen

Übung 4.1.10.14. Man betrachte die komplexe Zahlenebene als euklidische Ebene und betrachte die Drehung d mit Fixpunkt $p \in \mathbb{C}$ im Uhrzeigersinn um den rechten Winkel, in Formeln gegeben durch $d : p + z \mapsto p + \mathrm{i}z$. Man schreibe für einen beliebigen Richtungsvektor $w \in \mathbb{C}$ die Verknüpfung $(w+) \circ d$ wieder als eine Drehung. Was ist der Fixpunkt dieser neuen Drehung?

Übung 4.1.10.15. Jeder zweidimensionale reelle affine Raum E mit einem Skalarprodukt auf seinem Richtungsraum wird zu einer euklidischen Ebene, wenn wir als Kongruenzen alle Abbildungen $k : E \to E$ nehmen mit

$$\|k(p) - k(q)\| = \|p - q\| \ \forall p, q \in \mathbb{R}$$

Übung 4.1.10.16 (**Dreispiegelungssatz**). Man zeige, daß sich jedes Element der Kongruenzgruppe einer euklidischen Ebene als Verknüpfung von einer, zwei oder drei Spiegelungen darstellen läßt.

Übung 4.1.10.17. Welcher Fall im vorhergehenden Beispiel 4.1.10.13 deckt die sogenannten **räumlichen Punktspiegelungen** ab, die für einen festen Punkt p durch die Vorschrift $p + \vec{v} \mapsto p - \vec{v}$ gegeben werden?

Ergänzende Übung 4.1.10.18. Sei E ein euklidischer Raum. Man zeige:

1. Eine bijektive affine Abbildung $\varphi : E \xrightarrow{\sim} E$ ist genau dann eine Ähnlichkeitsabbildung, wenn für jeden orientierungserhaltenden abstandserhaltenden Automorphismus g von E auch $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ abstandserhaltend ist;

2. Eine bijektive affine Abbildung $\varphi : E \to E$ ist genau dann eine Ähnlichkeitsabbildung, wenn sie alle Winkel zwischen Strahlen im Richtungsraum im Sinne von 4.1.7.15 erhält;

3. Jede Ähnlichkeit mit einem Fixpunkt $p \in E$ läßt sich eindeutig darstellen als die Verknüpfung eines abstandserhaltenden Automorphismus, der besagten Punkt p festhält, mit einer Streckung oder Stauchung der Gestalt $p + \vec{v} \mapsto p + \lambda\vec{v}$ für wohlbestimmtes $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$;

4. Jede Ähnlichkeit, die nicht abstandserhaltend ist, besitzt genau einen Fixpunkt.

Hinweis: Letztere Aussage kann man besonders elegant mit dem Banach'schen Fixpunktsatz 12.3.1.10 einsehen.

4.1.11 Normalformen und Matrixzerlegungen

Satz 4.1.11.1 (Spektralsatz für unitäre Automorphismen). *Gegeben ein unitärer Automorphismus eines endlichdimensionalen komplexen Skalarproduktraums existiert stets eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.*

Beweis. Ist unser Raum der Nullraum, so tut es die leere Menge. Sonst finden wir nach 3.6.6.4 einen Eigenvektor und durch Renormieren natürlich auch einen Eigenvektor der Länge Eins. Da unser Automorphismus unitär ist, erhält er auch den Orthogonalraum dieses Eigenvektors und induziert auf diesem Orthogonalraum eine unitäre Abbildung. Mit Induktion über die Dimension finden wir in unserem Orthogonalraum eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, und durch Hinzunehmen unseres ursprünglichen Eigenvektors der Länge Eins erhalten wir daraus die gesuchte Orthonormalbasis aus Eigenvektoren des ganzen Raums. □

Korollar 4.1.11.2. *Für jede unitäre Matrix $U \in \mathrm{U}(n)$ gibt es eine weitere unitäre Matrix $B \in \mathrm{U}(n)$ mit $B^{-1}UB = \operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_n)$, wobei $z_i \in S^1 \subset \mathbb{C}$ komplexe Zahlen der Länge Eins sind.*

Beweis. Man findet solch eine Matrix B, indem man eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ nach 4.1.11.1 als die Spalten von B nimmt: Dann gilt ja sicher $UB = \operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_n)B$ und die Matrix B ist unitär nach Lemma 4.1.4.3. □

Satz 4.1.11.3 (Normalform für orthogonale Matrizen). *Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Skalarproduktraum V und eine orthogonale Selbstabbildung $U : V \to V$ gibt es stets eine angeordnete Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, bezüglich derer die Matrix ${}_{\mathcal{B}}[U]_{\mathcal{B}}$ unserer Abbildung eine blockdiagonale Gestalt der Form*

$$\operatorname{diag}\left(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} c_r & -s_r \\ s_r & c_r \end{pmatrix}\right)$$

hat mit $1 > c_1 \geq \ldots \geq c_r > -1$ und $c_i^2 + s_i^2 = 1$. Unter den angegebenen Einschränkungen wird umgekehrt besagte blockdiagonale Matrix durch unsere orthogonale Abbildung U bereits eindeutig festgelegt.

4.1.11.4. Dieser Satz beinhaltet den Satz vom Fußball 4.1.4.14 und seine Variante 4.1.4.16 sowie die in 4.1.1.6 und 4.1.4.18 betrachteten Resultate, die sich schlicht als die Fälle $n \leq 3$ des obigen Satzes erweisen.

Beweis. Der Drehblock zu (c_ρ, s_ρ) hat die komplexen Eigenwerte $c_\rho \pm \mathrm{i}\, s_\rho$, und das zeigt bereits die behauptete Eindeutigkeit. Die Existenz ist klar im Fall $\dim_{\mathbb{R}} V \leq 2$ nach unserer Diskussion der Gruppe $\mathrm{O}(2)$ aus 4.1.1.6. Zu beachten ist hierbei, daß jede ebene Spiegelung in einer geeigneten Orthonormalbasis die darstellende

Matrix $\operatorname{diag}(1,-1)$ hat und jede ebene Drehung in einer geeigneten Orthonormalbasis als darstellende Matrix entweder $\operatorname{diag}(1,1)$ oder $\operatorname{diag}(-1,-1)$ oder einen Drehblock wie oben. Die Existenz folgt mit Induktion im allgemeinen, sobald wir zeigen, daß es unter der Voraussetzung $V \geq 0$ in V stets einen von Null verschiedenen unter U invarianten Teilraum der Dimension ≤ 2 gibt, indem wir dann nämlich die Induktionsannahme auf diesen Teilraum und sein orthogonales Komplement anwenden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir von jetzt an $V = \mathbb{R}^n$ mit $n \neq 0$ annehmen und uns U als reelle Matrix denken. Nun hat U wegen $n \neq 0$ stets einen Eigenvektor $v = (v_1, \ldots, v_n)^\top \in \mathbb{C}^n$, sagen wir $Uv = \lambda v$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann folgt für $\bar{v} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)^\top$ sofort $U\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$ und das komplexe Erzeugnis $\langle v, \bar{v}\rangle_{\mathbb{C}}$ dieser beiden Vektoren ist sicher auch ein U-stabiler Teilraum von $\mathbb{C}^n$ der Dimension Eins oder Zwei. Der Schnitt $\langle v, \bar{v}\rangle_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n$ ist also ein U-stabiler Teilraum von $\mathbb{R}^n$ einer Dimension ≤ 2. Dieser Schnitt ist aber auch nicht Null, denn er enthält sowohl $v + \bar{v}$ als auch $\mathrm{i}(v - \bar{v})$, die wegen $v \neq 0$ nicht beide verschwinden können. □

4.1.11.5. Der vorhergehende Beweis illustriert in meinen Augen sehr gut, wie wunderbar unsere Theorie durch ihre Erweiterung ins Komplexe vereinfacht wird. Ich selbst kenne jedenfalls keinen vergleichbar transparenten Beweis der obigen Klassifikation, der ohne die komplexen Zahlen auskommt.

Satz 4.1.11.6 (Gram-Schmidt). *Seien $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängige Vektoren eines reellen oder komplexen Skalarproduktraums. So existiert in unserem Skalarproduktraum genau ein Orthonormalsystem $w_1, \ldots, w_k$ mit*

$$w_i \in \mathbb{R}_{>0} v_i + \langle v_{i-1}, \ldots, v_1\rangle \quad \forall i$$

Ergänzung 4.1.11.7 (**Bezug zur Definition einer Bewegungsgruppe**). Ist V ein dreidimensionaler reeller Skalarproduktraum, so gibt es zu je zwei Tripeln bestehend aus einem Halbraum, einer Halbebene auf seinem Rand und einem Strahl auf deren Rand genau eine orthogonale Abbildung, die das eine Tripel in das andere überführt. Etwas präziser und in Formeln meinen wir hier Tripel von Teilmengen (H, E, A) von V derart, daß es linear unabhängige Vektoren v_1, v_2, v_3 gibt mit $A = \mathbb{R}_{\geq 0} v_1$ und $E = \mathbb{R}_{\geq 0} v_2 + \mathbb{R} v_1$ und $H = \mathbb{R}_{\geq 0} v_3 + \mathbb{R} v_2 + \mathbb{R} v_1$. In der Tat sagt uns Gram-Schmid, daß jedes solche Tripel (H, E, A) durch genau eine Orthonormalbasis w_1, w_2, w_3 beschrieben werden kann. Der letzte Vektor w_3 wird dabei im übrigen durch die beiden anderen bereits bis auf ein Vorzeichen festgelegt, und Analoges gilt in beliebiger endlicher Dimension. Das zeigt den Bezug des Satzes von Gram-Schmid zu unserer Definition einer Bewegungsgruppe 4.1.6.8.

Beweis. Nach 4.1.3.18 können wir v_i eindeutig zerlegen als $v_i = p_i + r_i$ mit p_i der orthogonalen Projektion von v_i auf $\langle v_{i-1}, \ldots, v_1\rangle$ und r_i im orthogonalen Komplement dieses Teilraums. Wegen der linearen Unabhängigkeit der v_i gilt

hier $r_i \neq 0$. Für die Vektoren $w_i := r_i/\|r_i\|$ gilt dann $w_j \in \langle v_j, \ldots, v_1\rangle$ und $w_i \perp \langle v_{i-1}, \ldots, v_1\rangle$ und damit $\langle w_i, w_j\rangle = 0$ für $i > j$. Da andererseits auch gilt $\langle w_i, w_i\rangle = 1$ nach Konstruktion, bilden sie in der Tat ein Orthonormalsystem, und unsere Konstruktion zeigt zusätzlich

$$w_i = v_i/\|r_i\| - p_i/\|r_i\| \in \mathbb{R}_{>0} v_i + \langle v_{i-1}, \ldots, v_1\rangle$$

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, bemerken wir zunächst $w_j \in \langle v_j, \ldots, v_1\rangle$ und folgern mit Dimensionsbetrachtungen $\langle w_j, \ldots, w_1\rangle = \langle v_j, \ldots, v_1\rangle$. So folgt

$$\langle w_i\rangle = \langle v_{i-1}, \ldots, v_1\rangle^\perp \cap \langle v_i, \ldots, v_1\rangle$$

Diese Bedingung legt w_i fest bis auf Multiplikation mit einem Skalar der Länge Eins. Es ist dann klar, daß w_i durch die zusätzliche Bedingung im Satz sogar eindeutig festgelegt wird. □

4.1.11.8 (**Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt**). In Worten läuft der Beweis wie folgt ab: Gegeben ist eine endliche angeordnete linear unabhängige Teilmenge unseres Skalarproduktraums. Wir beginnen mit dem ersten Vektor und normieren ihn auf Länge Eins. Dann nehmen wir uns den zweiten Vektor vor, machen ihn senkrecht zum ersten Vektor, indem wir seine orthogonale Projektion auf die vom ersten Vektor erzeugte Gerade von ihm abziehen, und normieren den so entstehenden Vektor wieder auf Länge Eins. Dann nehmen wir uns den dritten Vektor vor, machen ihn senkrecht zu den ersten beiden Vektoren, indem wir seine orthogonale Projektion auf die von den ersten beiden Vektoren erzeugte Ebene von ihm abziehen, und normieren den so entstehenden Vektor wieder auf Länge Eins. Und so machen wir immer weiter, bis wir alle Eingaben verarbeitet haben. Mit dem Normieren eines von Null verschiedenen Vektors ist dabei das Multiplizieren unseres Vektors mit dem Inversen seiner Länge gemeint. Wir schreiben das nun noch in Formeln mit den Notationen des vorhergehenden Satzes. Für unsere Basen gilt sicher $\langle w_{i-1}, \ldots, w_1\rangle \subset \langle v_{i-1}, \ldots, v_1\rangle$ und Dimensionsvergleich liefert sogar die Gleichheit dieser Erzeugnisse. Nach der Formel für orthogonale Projektionen aus dem Beweis von 4.1.3.18 können wir also die w_i induktiv bestimmen durch die Formeln

$$\begin{aligned}
r_1 &= v_1 \\
w_1 &= r_1/\|r_1\| \\
&\vdots \\
r_i &= v_i - \textstyle\sum_{\nu=1}^{i-1} \langle w_\nu, v_i\rangle w_\nu \\
w_i &= r_i/\|r_i\| \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Das ist das **Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren** oder etwas ungewöhnlich aber genauer **Orthonormalisierungsverfahren**.

Korollar 4.1.11.9 (Iwasawa-Zerlegung für $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$). *Bezeichne $A \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ die Menge aller Diagonalmatrizen mit positiven Einträgen auf der Diagonale und $N \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale. So liefert die Multiplikation eine Bijektion*

$$\mathrm{O}(n) \times A \times N \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$$

Ergänzung 4.1.11.10. Eine Zerlegung einer Matrix M als Produkt $M = QR$ mit Q orthogonal und R einer oberen Dreiecksmatrix gibt es auch für nicht notwendig invertierbare Matrizen. Sie wird als **QR-Zerlegung** bezeichnet, läßt sich nach Householder effektiv berechnen, und spielt eine wichtige Rolle in der Numerik.

Beweis. Sicher gilt $A \cap N = \{I\}$, folglich definiert die Multiplikation eine Injektion

$$A \times N \hookrightarrow \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$$

Deren Bild AN ist eine Untergruppe, die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonaleinträgen, und wegen $\mathrm{O}(n) \cap AN = \{I\}$ definiert die Multiplikation schon mal eine Injektion $\mathrm{O}(n) \times AN \hookrightarrow \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$. Es bleibt, deren Surjektivität zu zeigen. Dazu betrachten wir in $\mathbb{R}^n$ die Standardbasis $\mathcal{S}$, eine beliebige angeordnete Basis $\mathcal{B}$ und die im Gram-Schmidt-Verfahren daraus entstehende angeordnete Orthonormalbasis $\mathcal{A}$. Unser Satz liefert für die zugehörige Basiswechselmatrix obere Dreiecksgestalt mit positiven Diagonaleinträgen, in Formeln

$${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}} \in AN$$

Aus der Identität ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}} \circ {}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{S}} = {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{S}}$ folgt dann die Surjektivität der Multiplikation $AN \times \mathrm{O}(n) \to \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$. Invertieren liefert den Rest. □

Korollar 4.1.11.11 (Iwasawa-Zerlegung für $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$). *Bezeichne $A \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ die Menge aller Diagonalmatrizen mit reellen positiven Einträgen auf der Diagonale und $N \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale. So liefert die Multiplikation eine Bijektion*

$$\mathrm{U}(n) \times A \times N \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$$

Beweis. Der Beweis geht analog wie im reellen Fall 4.1.11.9. □

Definition 4.1.11.12. Eine Matrix M heißt **symmetrisch**, wenn sie mit ihrer eigenen Transponierten übereinstimmt, in Formeln $M^\top = M$. Eine symmetrische Matrix $M \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ heißt **positiv definit**, wenn gilt $x^\top M x \leq 0 \Rightarrow x = 0$. Sie heißt **positiv semidefinit**, wenn gilt $x^\top M x \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Korollar* 4.1.11.13 (Cholesky-Zerlegung). *Gegeben eine positiv definite symmetrische Matrix $M \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ gibt es genau eine untere Dreiecksmatrix L mit positiven Diagonaleinträgen und der Eigenschaft*

$$M = LL^\top$$

4.1.11.14. Das L steht hier für englisch „lower triangular".

Beweis. Wir betrachten auf dem $\mathbb{R}^n$ das durch die Vorschrift $s(x,y) := x^\top My$ erklärte Skalarprodukt $s = s_M$. Wenden wir nun das Gram-Schmidt-Verfahren in Bezug auf dies neue Skalarprodukt an auf die Standardbasis $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ des $\mathbb{R}^n$, so erhalten wir eine neue Basis $w_1, \ldots, w_n$ des $\mathbb{R}^n$ mit $w_i^\top M w_j = \delta_{i,j}$ und $w_i \in \mathbb{R}_{>0}\,\mathrm{e}_i + \langle \mathrm{e}_{i-1}, \ldots, \mathrm{e}_1 \rangle$. Die Matrix $N := (w_1 | \ldots | w_n)$ mit den w_i in den Spalten ist also eine obere Dreiecksmatrix mit der Eigenschaft $N^\top M N = I$. Mit $L = (N^\top)^{-1}$ ergibt sich dann die gesuchte Zerlegung. Deren Eindeutigkeit zeigt man, indem man den Beweis rückwärts liest. □

Ergänzung 4.1.11.15. Das Invertieren einer oberen Dreiecksmatrix N mit positiven Diagonaleinträgen ist im Prinzip unproblematisch. Bei der numerischen Berechnung der Cholesky-Zerlegung empfiehlt es sich jedoch, das Invertieren gleich mit dem Algorithmus des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens zu verschmelzen. Mehr dazu mögen Sie in der Numerik lernen.

Übungen

Übung 4.1.11.16. Eine lineare Abbildung von komplexen Skalarprodukträumen ist unitär genau dann, wenn sie die Norm aller Vektoren erhält. Hinweis: Man beginne mit einer Variante der Polarisierungsidentität.

Übung 4.1.11.17. Man zeige: Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Skalarproduktraum V und darin eine lineare Hyperebene $H \subset V$ gibt es genau eine orthogonale lineare Abbildung $s : V \to V$ mit unserer Hyperebene als Fixpunktmenge, in Formeln $H = V^s$. Diese Abbildung s heißt die **orthogonale Spiegelung an der Hyperebene** H oder auch kürzer die **Spiegelung an** H.

Übung 4.1.11.18. Man zeige, daß sich zwei Vektoren eines endlichdimensionalen reellen Skalarproduktraums genau dann durch eine orthogonale Abbildung ineinander überführen lassen, wenn sie dieselbe Länge haben.

Übung 4.1.11.19 (**Zeichnen eines Würfels**). Man zeige: Zeichnet man einen massiven Würfel so, daß an einer Ecke alle drei angrenzenden Flächen zu sehen sind, so treffen sich auf dem Papier die drei von dieser Ecke ausgehenden Kanten jeweils in einem **echt stumpfen Winkel**, also einem Winkel mit negativem geometrischen Cosinus. Zeichnet man also ein räumliches Koordinatensystem perspektivisch korrekt von einem Punkt des positiven Oktanten $(\mathbb{R}_{>0})^3$ aus gesehen, so

müssen sich je zwei positive Koordinatenachsen in einem echt stumpfen Winkel treffen.

Ergänzende Übung 4.1.11.20. Jede orthogonale Selbstabbildung mit Determinante (-1) eines dreidimensionalen reellen Skalarproduktraums ist die Verknüpfung einer Drehung um eine Achse mit einer Spiegelung an der zu dieser Achse senkrechten Hyperebene.

Ergänzende Übung 4.1.11.21. Jede bezüglich Inklusion maximale kommutative Untergruppe der Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ ist entweder die Gruppe aller Drehungen um eine Achse oder konjugiert zur Gruppe aller Diagonalmatrizen aus $\mathrm{SO}(3)$.

Übung 4.1.11.22. Sei V ein reeller Skalarproduktraum. Man zeige:

1. Eine endliche Familie $v_1, \ldots, v_n$ von Vektoren von V ist orthonormal genau dann, wenn die zugehörige Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \to V$ orthogonal ist für das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

2. Gegeben endliche angeordnete Basen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ von V mit $\mathcal{A}$ orthonormal ist $\mathcal{B}$ orthonormal genau dann, wenn die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}}$ orthogonal ist. Hinweis: Man betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} V & V \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{R}^n \arrow[l, "{}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}}"'] \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{A}}"'] \end{tikzcd}$$

Man formuliere und zeige auch die analogen Aussagen im Komplexen.

Übung 4.1.11.23. Ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen komplexen Skalarproduktraums ist genau dann unitär, wenn er diagonalisierbar ist und wenn zusätzlich alle Eigenwerte den Betrag Eins haben.

Ergänzende Übung 4.1.11.24. Bezeichne $R^x_\varphi \in \mathrm{SO}(3)$ die Drehung um die x-Achse $\mathbb{R}\mathrm{e}_1$ mit dem Winkel mit Bogenmaß φ, in Formeln

$$R^x_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Bezeichne $R^z_\varphi \in \mathrm{SO}(3)$ die Drehung um die z-Achse $\mathbb{R}\mathrm{e}_3$ mit dem Winkel mit Bogenmaß φ, in Formeln

$$R^z_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man zeige: Jede Drehung $U \in \mathrm{SO}(3)$ läßt sich darstellen als

$$U = R^z_\varphi R^x_\psi R^z_\vartheta$$

mit $\psi \in [0, \pi]$ und $\varphi, \vartheta \in [0, 2\pi)$, und unter der Voraussetzung $\mathrm{e}_3 \neq \pm U(\mathrm{e}_3)$ ist diese Darstellung sogar eindeutig. Die fraglichen Winkel heißen dann die **Euler'schen Winkel** unserer Drehung U. Hinweis: Aus der Anschauung, deren Formalisierung Ihnen überlassen bleiben möge, finden wir $\psi \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $R^z_\varphi R^x_\psi(\mathrm{e}_3) = U(\mathrm{e}_3)$. Es folgt $U^{-1} R^z_\varphi R^x_\psi = R^z_{-\vartheta}$ für geeignetes $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

Ergänzende Übung 4.1.11.25 (**Spingruppe und Quaternionen**). Wir erhalten einen Isomorphismus $\mathrm{SU}(2) \xrightarrow{\sim} \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$ der Spingruppe mit der Gruppe der Quaternionen der Norm Eins, indem wir bemerken, daß bei unserer Konstruktion der Quaternionen im Beweis von 3.5.6.3 beide Seiten dieselbe Untergruppe von $\mathrm{Mat}(2; \mathbb{C})$ sind.

Ergänzende Übung 4.1.11.26 (**Spingruppe und Drehgruppe**). Sei $\mathfrak{su}(2) := \{A \in \mathrm{Mat}(2; \mathbb{C}) \mid A + \bar{A}^\top = 0,\ \operatorname{tr} A = 0\}$ der dreidimensionale reelle Vektorraum der schiefhermiteschen spurlosen (2×2)-Matrizen. Man zeige: Die Vorschrift $\langle A, B \rangle := -\operatorname{tr}(AB)$ liefert ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{su}(2)$ und wir erhalten einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\rho : \mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(\mathfrak{su}(2))$ mit Kern $\pm I$ durch die Vorschrift $\rho(U) : A \mapsto UAU^{-1}$. Insbesondere gibt es also einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$$

mit Kern $\pm I$. Hinweis: Um die Surjektivität zu zeigen, kann man den Satz 4.1.11.24 über die Eulerschen Winkel verwenden und zeigen, daß die von den drei Einbettungen $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$ mit $\mathrm{i}_\mathbb{C} \mapsto \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ nach 4.1.11.25 induzierten Einbettungen $S^1 \hookrightarrow \mathrm{SU}(2)$ unter Nachschalten von ρ die Kreislinie surjektiv auf die Gruppen der Drehungen um drei paarweise orthogonale Achsen in $\mathfrak{su}(2)$ abbilden. Ein konzeptionelles Argument wird in 22.1.5.2 ausgeführt.

Übung 4.1.11.27. Man zeige: Für jede komplexe quadratische Matrix A gibt es eine unitäre Matrix U derart, daß UAU^{-1} obere Dreiecksgestalt hat. Hinweis: Trigonalisierbarkeit und Gram-Schmidt.

Ergänzende Übung 4.1.11.28. Man zeige, daß die orthogonale Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Skalarproduktraums von Spiegelungen an Hyperebenen erzeugt wird. Hinweis: Normalform 4.1.11.3.

Ergänzende Übung 4.1.11.29 (**Iwasawa-Zerlegung für** $\mathrm{SL}(n; \mathbb{C})$). Bezeichne $A \subset \mathrm{SL}(n; \mathbb{C})$ die Menge aller Diagonalmatrizen mit reellen positiven Einträgen auf der Diagonale und $N \subset \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale. So liefert die Multiplikation eine Bijektion

$$\mathrm{SU}(n) \times A \times N \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}(n; \mathbb{C})$$

Hinweis: Man gehe vom Fall 4.1.11.11 der $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ aus.

Übung 4.1.11.30. Gegeben eine nicht notwendig quadratische Matrix A mit Einträgen in einem angeordneten Körper haben A und $A^\top A$ denselben Rang.

Übung 4.1.11.31 (**Ausgleichsrechnung**). Gegeben $A \in \mathrm{Mat}(m \times n;\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^m$ nimmt die Funktion $x \mapsto \|Ax - b\|$ genau an denjenigen Stellen $x \in \mathbb{R}^n$ ihr Minimum an, für die gilt $A^\top Ax = A^\top b$. Hinweis: Nach 4.1.11.30 ist letztere Gleichung stets lösbar. Man prüfe nun für beliebige x, b, h die Identität

$$\|A(x+h) - b\|^2 - \|Ax - b\|^2 = \|Ah\|^2 + 2h^\top(A^\top Ax - A^\top b)$$

In typischen Anwendungen ist $Ax = b$ ein überbestimmtes und deshalb unlösbares Gleichungssystem, etwa mit einer Proportionalitätskonstanten x als einziger Variablen, die man aus einer durch Meßfehler gestörten Meßreihe bestimmen will. Hat A den Rang n, so ist unser Minimum x sogar eindeutig bestimmt, wie man obiger Identität auch leicht ansieht. Etwas allgemeiner könnten wir für Meßwerte $(a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)$ Koeffizienten x_1, x_2 so suchen, daß $a \mapsto x_1 + x_2 a$ unsere Meßreihe $a_i \mapsto b_i$ möglichst gut beschreibt. Hier ist zu beachten, daß wir statt $x \mapsto ax + b$ wie üblich die Buchstaben ganz anders verwenden.

4.1.12 Selbstadjungierte Endomorphismen

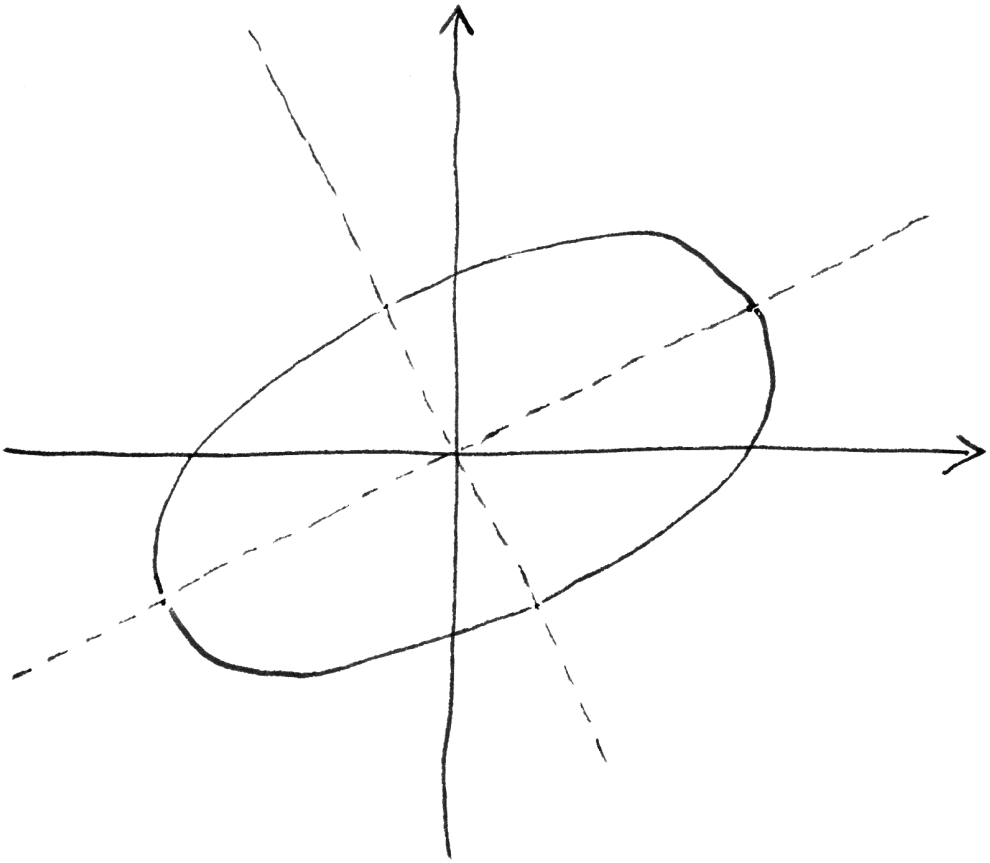
Satz 4.1.12.1 (**Hauptachsentransformation**). *Gegeben eine* **homogene quadratische Form** *auf dem $\mathbb{R}^n$ alias eine Funktion $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Gestalt $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \le j} c_{ij} x_i x_j$ gibt es stets eine Drehung $U \in \mathrm{SO}(n)$ und Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit*

$$(q \circ U)(y_1, \ldots, y_n)^\top = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

Des weiteren ist die Multimenge ${}_\mu\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ durch q bereits eindeutig bestimmt.

4.1.12.2. Dieser Satz wird sich als ein einfaches Korollar des Spektralsatzes erweisen und soll der Motivation dienen. Wir gegen den Beweis im Anschluß an 4.1.12.20. In 4.2.2.7 diskutieren wir Hauptachsentransformationen noch ausführlicher.

4.1.12.3 (**Anschauung für Hauptachsentransformationen**). Man kann sich die Bedeutung dieses Satzes auf zwei Weisen veranschaulichen: Entweder „aktiv“ in dem Sinne, daß der Graph unserer Funktion q unter der Drehung U^{-1} oder präziser der Abbildung $U^{-1} \times \mathrm{id}$ in den Graphen unserer Linearkombination von Quadraten übergeht; Oder „passiv“ in dem Sinne, daß unsere Funktion beim Einführen neuer Koordinaten mit Koordinatenachsen in Richtung der Spaltenvektoren von U in den neuen Koordinaten ausgedrückt die fragliche Form annimmt, in Formeln $q(y_1\vec{v}_1 + \ldots + y_n\vec{v}_n) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$ für $\vec{v}_i$ die Spalten von U, also für



Dieses Bild zeigt die Ellipse, auf der die positiv definite quadratische Form $17x^2 - 12xy + 8y^2$ bei einer geeigneten Wahl des Maßstabs den Wert Eins annimmt. Gestrichelt sind die Hauptachsen eingetragen, die in diesem Fall die Richtungsvektoren $(2, 1)$ und $(-1, 2)$ haben.

$U = (\vec{v}_1 | \ldots | \vec{v}_n)$ und folglich $U(y_1, \ldots, y_n)^\top = y_1\vec{v}_1 + \ldots + y_n\vec{v}_n$. Die Menge der von den Spalten der Matrix U erzeugten Geraden heißen dann ein System von **Hauptachsen** für unsere quadratische Form q. Die Multimenge der λ_i nennen wir die Multimenge der **Eigenwerte** unserer quadratischen Form.

Beispiel 4.1.12.4 (**Transformation einer Hyperbel auf ihre Hauptachsen**). Die Identität $xy = (1/4)((x+y)^2 - (x-y)^2)$ zeigt, daß im Fall der quadratischen Form $q(x, y) = xy$ die Hauptachsen gerade die Diagonale die Nebendiagonale sind, also die Ursprungsgeraden mit den Gleichungen $x = \pm y$. Mögliche Drehungen U, die unsere Form auf ihre Hauptachsen transformieren, sind also die Drehungen um die Winkel $45° + n \cdot 90°$ mit $n = 0, 1, 2, 3$. Eine Matrix für eine derartige Drehung ist

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} & -\sqrt{2}^{-1} \\ \sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix}$$

Schreiben wir genauer $x = x_1$ und $y = x_2$, so nimmt unsere Form die Gestalt $q(x_1, x_2) = x_1x_2$ an und für den Koordinatenwechsel $(x_1, x_2)^\top = U(y_1, y_2)^\top$ alias $x_1 = 2^{-1/2}y_1 - 2^{-1/2}y_2$ und $x_2 = 2^{-1/2}y_1 + 2^{-1/2}y_2$ oder gleichbedeutend $U^{-1}(x_1, x_2)^\top = (y_1, y_2)^\top$ alias $y_1 = 2^{-1/2}x_1 + 2^{-1/2}x_2$ und $y_2 = 2^{-1/2}x_1 - 2^{-1/2}x_2$ ergibt sich

$$q(x_1, x_2) = x_1x_2 = \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2$$

Definition 4.1.12.5. Gegeben Skalarprodukträume V, W heißen lineare Abbildungen $f : V \to W$ und $g : W \to V$ zueinander **adjungiert**, wenn gilt

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, g(w)\rangle \quad \forall v \in V, w \in W$$

4.1.12.6. Ich kann für das Konzept adjungierter Abbildungen leider keinerlei Anschauung anbieten. Die adjungierte Abbildung darf nicht mit der adjungierten oder besser adjunkten Matrix aus 3.6.4.6 verwechselt werden, mit der sie außer der Bezeichnung rein gar nichts zu tun hat.

4.1.12.7 (**Eindeutigkeit von Adjungierten**). Jede lineare Abbildung f zwischen Skalarprodukträumen hat höchstens eine Adjungierte: Sind nämlich g, h beide adjungiert zu f, so folgt $\langle v, g(w) - h(w)\rangle = 0 \ \forall v, w$ und insbesondere für $v = g(w) - h(w)$ und damit $g(w) = h(w) \ \forall w$.

4.1.12.8 (**Adjungierte in Koordinaten**). Versehen wir $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ jeweils mit dem Standardskalarprodukt, so wird für $A \in \mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{R})$ die adjungierte Abbildung zu $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch die transponierte Matrix als $A^\top : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Ebenso wird im Komplexen die adjungierte Abbildung zu $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ gegeben durch $\bar{A}^\top : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$. In der Tat finden wir mühelos

$$\langle Ax, y\rangle = (\overline{Ax})^\top y = \bar{x}^\top \bar{A}^\top y = \langle x, \bar{A}^\top y\rangle \quad \forall x \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^n$$

4.1.12.9 (**Existenz von Adjungierten im endlichdimensionalen Fall**). Wir folgern aus der Klassifikation endlichdimensionaler Skalarprodukträume 4.1.4.8 mithilfe der vorhergehenden Bemerkung, daß jede lineare Abbildung von endlichdimensionalen reellen oder komplexen Skalarprodukträumen genau eine Adjungierte besitzt.

4.1.12.10 (**Eine Abbildung ohne Adjungierte im Unendlichdimensionalen**). Wir betrachten den freien $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = W$ über $\mathbb{N}$ mit der Basis $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und dem Skalarprodukt, für das diese Basis ein Orthonormalsystem ist. Die lineare Abbildung $f : V \to V$ mit $\mathrm{e}_n \mapsto (\mathrm{e}_1 + \ldots + \mathrm{e}_n)$ besitzt keine Adjungierte, denn diese müßte e_1 auf einen Vektor $v \in V$ werfen mit $\langle v, \mathrm{e}_n\rangle = 1$ für alle n und solch einen Vektor gibt es nicht.

Definition 4.1.12.11. Ein Endomorphismus eines reellen oder komplexen Skalarproduktraums heißt **selbstadjungiert**, wenn er zu sich selbst adjungiert ist.

4.1.12.12 (**Anschauung für selbstadjungierte Endomorphismen**). Die „schiefadjungierten“ alias zu ihrem Negativen adjungierten Endomorphismen eines endlichdimensionalen Skalarproduktraums V mag man sich als die Richtungsvektoren des „Tangentialraums im neutralen Element an die Gruppe der unitären Automorphismen“ vorstellen. Ist in der Tat $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(V)$ eine differenzierbare Abbildung mit $\gamma(0) = \mathrm{id}$ und $\langle\gamma(t)v, \gamma(t)w\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$ und alle Zeiten t, so folgt

$$\langle\gamma'(0)v, w\rangle + \langle v, \gamma'(0)w\rangle = 0$$

für alle $v, w \in V$ alias $\gamma'(0)$ schiefadjungiert. Ist umgekehrt A schiefadjungiert, gilt also für die darstellende Matrix A bezüglich einer Orthonormalbasis $A+\bar{A}^\top = 0$, so ist $\gamma : t \mapsto \exp(tA)$ ein Weg mit

$$\gamma(t)\overline{\gamma(t)^\top} = \exp(tA)\overline{\exp(tA)^\top} = \exp(tA + t\bar{A}^\top) = \exp(0) = \mathrm{I}$$

für alle t, der mithin ganz in der unitären Gruppe verläuft. Das gibt hoffentlich eine gewisse Vorstellung für schiefadjungierte Endomorphismen und macht anschaulich klar, daß sie mit einem vorgegebenen Teilraum auch dessen orthogonales Komplement stabilisieren. Selbstadjungierte Endomorphismen sind dann die i-fachen der schiefadjungierten Endomorphismen, und mehr als die so vererbte Anschauung kann ich für diese Bedingung auch nicht anbieten. Geometrisch aber liefert der Spektralsatz oder besser sein Korollar 4.1.12.38 eine sehr explizite Beschreibung: Die selbstadjungierten Endomorphismen eines endlichdimensionalen Skalarproduktraums sind genau diejenigen Endomorphismen, die in einer geeigneten Orthogonalbasis durch eine Diagonalmatrix mit reellen Einträgen dargestellt werden.

4.1.12.13 (**Symmetrisch beziehungsweise hermitesch heißt selbstadjungiert**). Eine reelle $(n \times n)$-Matrix A beschreibt eine selbstadjungierte Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in Bezug auf das Standardskalarprodukt genau dann, wenn sie symmetrisch ist, in Formeln $A = A^\top$. Das folgt sofort aus 4.1.12.7. Eine komplexe $(n \times n)$-Matrix A beschreibt ähnlich eine selbstadjungierte Abbildung $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ in Bezug auf das Standardskalarprodukt genau dann, wenn sie die Identität $A = \bar{A}^\top$ erfüllt. Solche Matrizen heißen auch **hermitesch**.

Lemma 4.1.12.14 (**Selbstadjungierte Abbildungen in Orthonormalbasen**). *Sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. So sind gleichbedeutend:*

1. *Die Abbildung f ist selbstadjungiert;*
2. *Es gibt eine angeordnete Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V derart, daß die Matrix ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ hermitesch ist;*
3. *Für jede angeordnete Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V ist die Matrix ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ hermitesch.*

Beweis. (1)⇒(3): Die Einträge a_{ji} unserer Matrix sind definiert durch die Vorschrift $f(v_i) = \sum_j a_{ji} v_j$. Im Fall einer Orthonormalbasis folgt $a_{ji} = \langle v_j, f(v_i) \rangle$. Ist dann f selbstadjungiert, so folgt

$$a_{ji} = \langle v_j, f(v_i) \rangle = \langle f(v_j), v_i \rangle = \overline{\langle v_i, f(v_j) \rangle} = \overline{a_{ij}}$$

(3)⇒(2) bietet keine Schwierigkeiten. Um (2)⇒(1) zu zeigen bemerken wir, daß die Identität $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$ für alle v, w folgt, sobald wir sie für alle v, w aus einer festen Basis $\mathcal{B}$, ja aus einem beliebigen Erzeugendensystem zeigen können. Das aber folgt dann aus der Hermitizität der Matrix von f mit der Rechnung, die wir bereits durchgeführt haben. □

Satz 4.1.12.15 (**Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen**). *Für jeden selbstadjungierten Endomorphismus eines reellen oder komplexen endlichdimensionalen Skalarproduktraums besitzt unser Vektorraum eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, und auch im komplexen Fall sind alle Eigenwerte eines selbstadjungierten Endomorphismus reell.*

4.1.12.16. Einen noch allgemeineren Spektralsatz für „normale“ Endomorphismen dürfen Sie später als Übung 4.3.2.19 selbst beweisen. Er enthält sowohl den Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen als auch den Spektralsatz für unitäre Endomorphismen als Spezialfälle.

Erster Beweis. Sei V unser Skalarproduktraum und $f : V \to V$ selbstadjungiert. Gegeben $0 \neq v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $f(v) = \lambda v$ folgern wir von der Mitte ausgehend die Gleichungskette

$$\bar{\lambda}\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle f(v), v\rangle = \langle v, f(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$$

und daraus folgt bereits $\lambda \in \mathbb{R}$. Weiter ist das orthogonale Komplement $v^\perp$ eines Eigenvektors v stabil unter f, denn aus $\langle v, w\rangle = 0$ folgt $\langle v, f(w)\rangle = \langle f(v), w\rangle = \bar{\lambda}\langle v, w\rangle = 0$. Bis hierher brauchen wir noch nicht einmal V als endlichdimensional vorraussetzen. Nun können wir den Beweis im Komplexen mit Induktion beenden: Im Fall $V = 0$ ist der Satz klar. Sonst finden wir einen Eigenvektor v_1 von f, den wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit normiert annehmen dürfen. Dann wenden wir auf die auf seinem orthogonalen Komplement induzierte Abbildung $f : v_1^\perp \to v_1^\perp$ die Induktionsvoraussetzung an und finden darin eine Orthonormalbasis $v_2, \ldots, v_n$ aus Eigenvektoren von f. Damit ist $v_1, \ldots, v_n$ die gesuchte Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f und der komplexe Fall ist erledigt. Im reellen Fall überlegen wir uns zunächst, daß die darstellende Matrix von f in Bezug auf eine Orthonormalbasis von V symmetrisch sein muß. Diese Matrix hat im Fall $\dim_\mathbb{R} V > 0$, wenn sie also nicht die (0×0)-Matrix ist, mindestens einen komplexen Eigenwert, und da sie auch einen selbstadjungierten Endomorphismus eines komplexen Vektorraums darstellt, muß dieser Eigenwert nach unseren Überlegungen zu Beginn des Beweises sogar reell sein. Zu diesem Eigenwert finden wir dann wieder einen Eigenvektor aus V, und der Beweis läuft von da an wie im komplexen Fall. □

Zweiter Beweis im Reellen. Man betrachte auf $V\backslash 0$ die zu f gehörige quadratische Form $q(v) := \langle f(v), v\rangle$ und die zum Skalarprodukt gehörige quadratische Form $n(v) := \langle v, v\rangle = \|v\|^2$ und deren Quotienten

$$v \mapsto R(v) := \frac{q(v)}{n(v)}$$

Sie heißt der **Raleigh-Quotient**, deshalb der Buchstabe R. Schränken wir diese Funktion ein auf die Einheitssphäre $\{v \mid \|v\| = 1\}$, so nimmt sie dort nach Heine-Borel 11.2.1.10 und 11.2.1.13 ihr Maximum an, etwa an einer Stelle v_+. Da unsere Funktion konstant ist auf jeder Geraden durch den Nullpunkt, muß sie an derselben Stelle auch als Funktion $V\backslash 0 \to \mathbb{R}$ ihr Maximum annehmen. Wir betrachten nun für $w \in V$ die für hinreichend kleines $t \in \mathbb{R}$ wohldefinierte Funktion $t \mapsto R(v_+ + tw)$, ausgeschrieben

$$R(v_+ + tw) = \frac{q(v_+ + tw)}{n(v_+ + tw)} = \frac{\langle f(v_+ + tw), v_+ + tw\rangle}{\langle v_+ + tw, v_+ + tw\rangle}$$

Sie ist offensichtlich differenzierbar, folglich muß ihre Ableitung bei $t = 0$ verschwinden. Dann verschwindet also, wenn wir diese Ableitung mithilfe der Quotientenregel berechnen, auch der Zähler, und wir folgern

$$(\langle f(w), v_+\rangle + \langle f(v_+), w\rangle)\langle v_+, v_+\rangle - 2\langle f(v_+), v_+\rangle\langle v_+, w\rangle = 0$$

für alle $w \in V$. Mithilfe der Selbstadjungiertheit von f folgern wir insbesondere

$$w \perp v_+ \quad \Rightarrow \quad w \perp f(v_+)$$

Das liefert offensichtlich $f(v_+) \in \mathbb{R}v_+$ und wir haben einen Eigenvektor gefunden. Der Rest des Arguments läuft von da an wie beim ersten Beweis. □

4.1.12.17 (**Vergleich beider Beweise**). Der zweite Beweis vermeidet zwar den Fundamentalsatz der Algebra, benutzt jedoch einen wesentlichen Teil derjenigen Resultate aus der reellen Analysis, aus denen wir in 10.5.1.7 auch den Fundamentalsatz der Algebra herleiten. Anschaulich scheint mir die im zweiten Beweis versteckte Erkenntnis recht klar: Durch den Punkt der Ellipse $\{v \mid \langle f(v), v\rangle = 1\}$, der am nächsten am Ursprung liegt, geht in der Tat eine Hauptachse. Dasselbe gilt natürlich für den Punkt, der dem Ursprung am fernsten liegt, als da heißt, der kleinstmögliche Wert des Raleigh-Quotienten ist auch ein Eigenwert und jede Stelle, an der er angenommen wird, ist ein Eigenvektor unseres selbstadjungierten Operators zu diesem Eigenwert.

Korollar 4.1.12.18 (**Spektralsatz für hermitesche Matrizen**). *Für jede hermitesche Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$ gibt es eine unitäre Matrix mit Determinante Eins $U \in \mathrm{SU}(n)$ derart, daß $\bar{U}^\top AU = U^{-1}AU$ diagonal ist mit reellen Einträgen.*

4.1.12.19. Die Gleichung $U^\top AU = U^{-1}AU$ folgt aus unserer Identität $\bar{U}^\top = U^{-1}$, die ja für jede unitäre Matrix U gilt.

Beweis. Nach dem Spektralsatz für selbstadjungierte Abbildungen 4.1.12.15 finden wir eine Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ zu reellen Eigenwerten. Die Matrix $U := (v_1| \ldots |v_n)$ ist also unitär mit $AU = U\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ für $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Indem wir notfalls noch eine Spalte einer komplexen Zahl vom Betrag Eins multiplizieren, können wir sogar um $\det U = 1$ erreichen. □

Korollar 4.1.12.20 (**Spektralsatz für reelle symmetrische Matrizen**). *Gegeben eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ gibt es stets eine orthogonale Matrix mit Determinante Eins $U \in \mathrm{SO}(n)$ derart, daß $U^\top AU = U^{-1}AU$ diagonal ist.*

Beweis. Wie im komplexen Fall in 4.1.12.18. □

Beweis des Satzes über Hauptachsentransformationen 4.1.12.1. Für unsere quadratische Form $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \le j} c_{ij} x_i x_j$ finden wir eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n; \mathbb{R})$ mit

$$q(x) = x^\top A x$$

für den Spaltenvektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$, indem wir als diagonale Matrixeinträge $a_{ii} = c_{ii}$ nehmen und außerhalb der Diagonalen $a_{ij} = a_{ji} = c_{ij}/2$ setzen. Nach dem Spektralsatz für symmetrische Matrizen 4.1.12.20 gibt es dann eine Drehung $U \in \mathrm{SO}(n)$ mit $U^{-1}AU = U^\top AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ für geeignete $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, nämlich für die Eigenwerte von A mit ihren Vielfachheiten. Es folgt

$$q(Uy) = y^\top U^\top AUy = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

In 4.2.2.7 gebe ich noch einen zweiten Beweis, der ohne Koordinaten auskommt und mir dadurch transparenter scheint. □

Definition 4.1.12.21. Eine hermitesche Matrix $P \in \mathrm{Mat}(n; \mathbb{C})$ heißt **positiv definit**, wenn gilt $x \neq 0 \Rightarrow \bar{x}^\top P x > 0$. Sie heißt **positiv semidefinit**, wenn gilt $\bar{x}^\top P x \ge 0 \; \forall x \in \mathbb{C}^n$.

Beispiel 4.1.12.22. Gegeben eine beliebige Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n; \mathbb{C})$ ist $\bar{A}^\top A$ stets positiv semidefinit, denn es gilt $\bar{x}^\top \bar{A}^\top A x = \overline{Ax}^\top A x \ge 0 \; \forall x \in \mathbb{C}^n$. Gegeben eine invertierbare Matrix $A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ zeigt dasselbe Argument, daß $\bar{A}^\top A$ positiv definit ist.

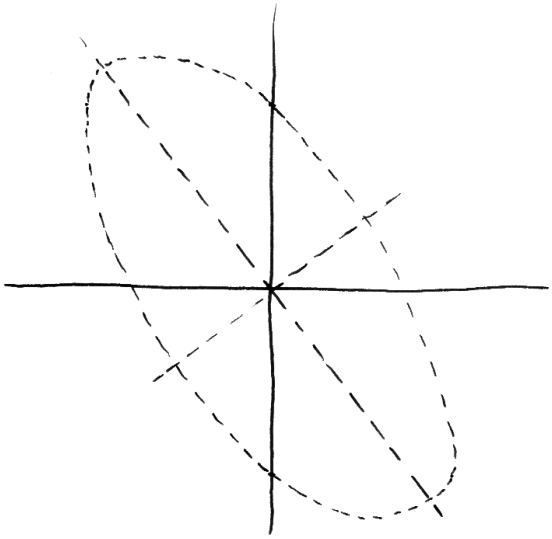
Satz 4.1.12.23 (Polarzerlegung von Automorphismen). *Sei $n \in \mathbb{N}$.*

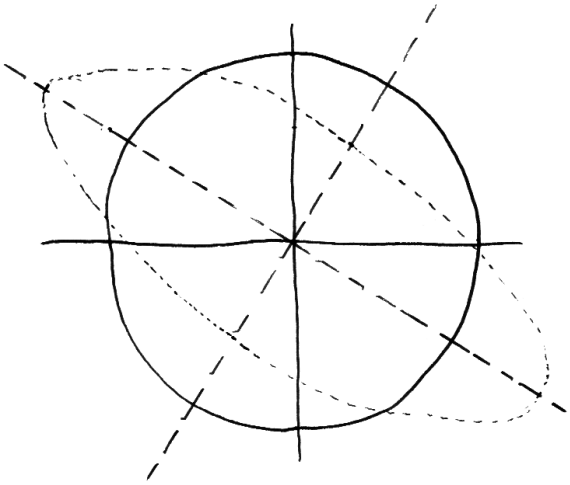
1. *Jede Matrix $A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ besitzt eine eindeutige Darstellung als Produkt $A = UP$ mit $U \in \mathrm{O}(n)$ orthogonal und P symmetrisch positiv definit;*

2. *Jede Matrix $A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ besitzt eine eindeutige Darstellung als Produkt $A = UP$ mit $U \in \mathrm{U}(n)$ unitär und P hermitesch positiv definit.*

4.1.12.24. Offensichtlich bilden die Determinanten der Polarzerlegung einer invertierbaren Matrix die Polarzerlegung ihrer Determinante. So erhalten wir Polarzerlegungen in $\mathrm{SL}(n; \mathbb{R})$ und $\mathrm{SL}(n; \mathbb{C})$. In dieser und noch größerer Allgemeinheit heißt sie oft **Cartan-Zerlegung**. Ich will jedoch lieber auch ganz allgemein von der Polarzerlegung reden, da diese Terminologie so viel Anschauung transportiert.

Beispiele 4.1.12.25. Im Fall $\mathrm{GL}(1; \mathbb{R})$ ist das die Zerlegung $a = (a/|a|) \cdot |a|$ einer von Null verschiedenen reellen Zahl als das Produkt von einem Vorzeichen mit einer positiven reellen Zahl. Im Fall $\mathrm{GL}(1; \mathbb{C})$ ist es die Zerlegung $a = (a/|a|) \cdot |a|$ einer von Null verschiedenen komplexen Zahl als das Produkt von einer komplexen Zahl auf dem Einheitskreis mit einer positiven reellen Zahl. Dieser Fall hat





Die Polarzerlegung der Scherung $(x, y) \mapsto (x, y - x)$ stellt diese Abbildung dar als Verknüpfung einer Streckung beziehungsweise Stauchung längs orthogonaler Achsen mit einer Drehung. Im unteren Bild sieht man durchgezogen den Einheitskreis, und gestrichelt sein Bild unter dem selbstadjungiertem Faktor der Verscherung nebst den Hauptachsen, längs derer der Einheitskreis dabei gestreckt beziehungsweise gestaucht wird. Im oberen Bild sieht man dann den verscherten Einheitskreis alias die mit dem orthogonalen Faktor der Verscherung verdrehte Ellipse aus dem unteren Bild. Auch noch gestrichelt eingezeichnet sind die Hauptachsen dieser Ellipse.

wohl auch unserer Zerlegung ihren Namen gegeben. Im Fall $\mathrm{GL}(3;\mathbb{R})$ beschreibt A eine Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Nimmt man die Abbildung A als orientierungserhaltend an, so mag man sich ihre Polarzerlegung dahingehend denken, daß sich unsere Abbildung in eindeutiger Weise darstellen läßt als Verknüpfung einer Abbildung, die entlang geeigneter paarweise orthogonaler Koordinatenachsen dehnt oder staucht, mit einer Abbildung, die dreht. Wenden wir etwa A auf den mit Schaumgummi oder was auch immer gefüllt gedachten Raum an, so ist allein der positiv definite Faktor P für die Materialspannungen verantwortlich: Eine Kugel unseres Materials wird bei Anwenden von A „erst mit P zu einem Ellipsoid verzerrt und dann noch mit U gedreht“.

Beweis. Wir zeigen das im reellen Fall, im Komplexen muß man nur von jeder transponierten Matrix zusätzlich noch die komplex Konjugierte nehmen. Wir beginnen mit dem Nachweis der Eindeutigkeit. Gegeben eine Zerlegung $A = UP$ wie oben haben wir sicher $A^\top A = P^\top U^\top UP = P^\top P = P^2$. Jede Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von P ist also auch eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $A^\top A$ und P muß die Matrix sein, die auf Eigenvektoren von $A^\top A$ zum Eigenwert λ jeweils operiert durch den Skalar $\sqrt{\lambda}$. Das zeigt die Eindeutigkeit unserer Zerlegung. Andererseits folgt aus $A^\top Av = \lambda v$ sofort $v^\top A^\top Av = \lambda\|v\|^2 = \|Av\|^2$ und somit $\lambda > 0$. Wir können also P symmetrisch und positiv definit finden mit $P^2 = A^\top A$. Für $U = AP^{-1}$ folgt dann $U^\top U = P^{-1}A^\top AP^{-1} = I$ und folglich ist U orthogonal. □

4.1.12.26. Jetzt diskutieren wir dasselbe nocheinmal koordinatenfrei und in etwas größerer Allgemeinheit.

Definition 4.1.12.27. Ein selbstadjungierter Endomorphismus P eines Skalarproduktraums V mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ heißt **positiv definit**, wenn gilt $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, Px\rangle > 0$. Er heißt **positiv semidefinit**, wenn gilt $\langle x, Px\rangle \geq 0\ \forall x \in V$.

4.1.12.28. Im endlichdimensionalen Fall ist das gleichbedeutend dazu, daß alle Eigenwerte positiv beziehungsweise nichtnegativ sind. Die Begriffsbildung ist aber auch im Fall unendlichdimensionaler Räume relevant.

Definition 4.1.12.29. Unter einer **partiellen Isometrie** von Skalarprodukträumen versteht man eine lineare Abbildung, deren Restriktion auf den Orthogonalraum ihres Kerns isometrisch ist.

Satz* 4.1.12.30 (Polar-Zerlegung von Endomorphismen). *Jeder Endomorphismus A eines endlichdimensionalen Skalarproduktraums V besitzt eine eindeutige Darstellung als Produkt $A = UP$ mit P selbstadjungiert positiv semidefinit und U einer partiellen Isometrie derart, daß gilt* $(\ker U)^\perp = \operatorname{im} P$.

4.1.12.31. Dieser Satz gilt sowohl für komplexe als auch für reelle Vektorräume. Er verallgemeinert unseren Satz 4.1.12.23 über die Polarzerlegung von Automorphismen. Natürlich gibt es für diesen Satz auch eine Fassung für Matrizen und für den vorhergehenden Satz 4.1.12.23 auch eine Fassung für Automorphismen abstrakter endlichdimensionaler Skalarprodukträume. In 13.4.5.15 zeigen wir sogar eine Fassung im unendlichdimensionalen Fall, genauer für sogenannte „beschränkte Operatoren auf Hilberträumen". Eine Verallgemeinerung in eine wieder andere Richtung ist die sogenannte „Singulärwertzerlegung" 4.2.3.29, für die ich jedoch kein so schönes Eindeutigkeitskriterium kenne.

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Gegeben eine derartige Zerlegung $A = UP$ können wir sicher auch eine orthogonale Abbildung M finden mit $A = MP$. Es folgt $\bar{A}^\top A = P^2$ und folglich ist P eindeutig bestimmt als die einzige positiv semidefinite selbstadjungierte Abbildung P mit $P^2 = \bar{A}^\top A$. Dann ist auch U eindeutig festgelegt auf dem Bild $(\operatorname{im} P)$, und unsere letzte Bedingung impliziert $U = 0$ auf $(\operatorname{im} P)^\perp$ und legt damit auch U eindeutig fest. Um die Existenz zu zeigen, gehen wir diese Argumentation rückwärts durch. Das Argument des vorhergehenden Beweises zeigt, daß es ein selbstadjungiertes positiv semidefinites P gibt mit $P^2 = \bar{A}^\top A$. Wegen $\langle Av, Av\rangle = \langle v, \bar{A}^\top Av\rangle = \langle v, P^2 v\rangle = \langle Pv, Pv\rangle$ gilt $\ker A = \ker P$. Das ist aber auch das orthogonale Komplement des Bildes $U := \operatorname{im} P$. Bezeichnet also $Q : V \twoheadrightarrow U$ die orthogonale Projektion auf U und $J : U \hookrightarrow V$ die Einbettung, so haben wir mithin $A = AJQ$. Nun induziert P einen Isomorphismus $P_U : U \xrightarrow{\sim} U$ und wir können die Komposition $C = AJP_U^{-1} : U \to V$ betrachten. Dann gilt einerseits $CQP = CP_UQ = AJQ = A$ und andererseits ist C isometrisch. Dann ist $U = CQ$ eine partielle Isometrie mit den gewünschten Eigenschaften. □

Ergänzung 4.1.12.32 (**Existenz von Adjungierten, koordinatenfrei**). Lineare Abbildungen f, g zwischen komplexen Skalarprodukträumen sind in anderen Formeln ausgedrückt genau dann zueinander adjungiert, wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{can}_V"] \arrow[d, "f"'] & V^\top \arrow[d, "g^\top"] \\ W \arrow[r, "\mathrm{can}_W"] & W^\top \end{tikzcd}$$

kommutiert, mit $g^\top : V^\top \to W^\top$ der „transponierten" alias „dualen" Abbildung zu $g : W \to V$ und $\mathrm{can}_V : V \to V^\top$ der Abbildung $v \mapsto \langle v, \ \rangle$ und can_W analog definiert. Diese „kanonischen" Abbildungen can landen zwar wie behauptet im Dualraum, da unsere Skalarprodukte linear sind im zweiten Eintrag, sie sind jedoch selbst nur im reellen Fall linear und im komplexen Fall vielmehr schieflinear im Sinne von 4.1.3.6. Man überzeugt sich dennoch leicht, daß diese kanonischen Abbildungen im endlichdimensionalen Fall Bijektionen sein müssen,

und da die Verknüpfung einer linearen und einer schieflinearen Abbildung schieflinear ist und die Verknüpfung von zwei schieflinearen Abbildung linear, liefert das einen alternativen Beweis für die Existenz und Eindeutigkeit der adjungierten Abbildung im endlichdimensionalen Fall. Noch bequemer wird die Argumentation, wenn man wie im nächsten Abschnitt den komplex konjugierten Vektorraum einführt.

Ergänzung 4.1.12.33. Zu jedem komplexen Vektorraum V bilden wir den **komplex konjugierten Vektorraum** $\overline{V}$, indem wir die additive Gruppe von V nehmen, die Operation von $a \in \mathbb{C}$ auf $v \in V$ jedoch abändern zu einer Operation $a \cdot v$, die mit der ursprünglichen Operation av verknüpft ist durch die Formel $a \cdot v = \bar{a}v$ alias $\bar{a} \cdot v = av$. Es ist in diesem Zusammenhang praktisch, für jedes Element $v \in V$ dasselbe Element in seiner Eigenschaft als Element des komplex konjugierten Vektorraums $\bar{v} \in \overline{V}$ zu notieren, so daß wir unseren Punkt für die neue Operation der Skalare gleich wieder weglassen können und unsere zweite Formel besonders suggestiv in der Form

$$\bar{a}\bar{v} = \overline{av}$$

geschrieben werden kann. Für jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f : V \to W$ von komplexen Vektorräumen ist dieselbe Abbildung auch eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\overline{V} \to \overline{W}$ der komplex konjugierten Räume. Wir bezeichnen diese Abbildung dennoch mit einem neuen Symbol $\bar{f} : \overline{V} \to \overline{W}$ und nennen sie die **konjugierte Abbildung**. Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ angeordnete Basen von V und W, so hat die konjugierte Abbildung die konjugierte Matrix, in Formeln

$${}_{\bar{\mathcal{B}}}[\bar{f}]_{\bar{\mathcal{A}}} = \overline{{}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}}$$

Hier kriegen die Basen wie die einzelnen Vektoren einen Querstrich, um daran zu erinnern, daß sie im konjuguierten Vektorraum zu verstehen sind. Eine koordinatenfreie Konstruktion der adjungierten Abbildung erhält man nun wie folgt: Jedes Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf V liefert eine injektive $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{can}: & \overline{V} & \hookrightarrow & V^\top \\ & \bar{v} & \mapsto & \langle v,\ \rangle \end{array}$$

des konjugierten Raums zu V in den Dualraum von V. Lineare Abbildungen f, g zwischen komplexen Skalarprodukträumen sind in diesem Formalismus adjungiert genau dann, wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \overline{V} \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & V^\top \arrow[d, "g^\top"] \\ \overline{W} \arrow[r, "\mathrm{can}"] & W^\top \end{tikzcd}$$

kommutiert, mit $g^\top : V^\top \to W^\top$ der „transponierten“ alias „dualen“ Abbildung zu $g : W \to V$. Im endlichdimensionalen Fall sind unsere kanonischen Abbildungen can in den Horizontalen jedoch nach Dimensionsvergleich Isomorphismen. In diesem Fall liefert also das obige kommutative Diagramm auch einen alternativen Beweis für die Existenz und Eindeutigkeit adjungierter Abbildungen.

Übungen

Übung 4.1.12.34 (**Inhomogene reelle quadratische Formen**). Gegeben eine Polynomfunktion vom Grad höchstens Zwei mit reellen Koeffizienten alias eine Abbildung $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \le j} c_{ij} x_i x_j + \sum_i b_i x_i + a$$

gibt es eine Isometrie $B : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit

$$(q \circ B)(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_k y_k^2 + \mu y_n + \nu$$

für geeignetes k und geeignete reelle $\lambda_i \neq 0$ und $\mu \ge 0$ und $(k = n \Rightarrow \mu = 0)$ und $(\mu > 0 \Rightarrow \nu = 0)$. Unter den gegebenen Annahmen sind zusätzlich die Multimenge der λ_i sowie μ und ν eindeutig bestimmt. Man sagt dann, die **quadratische Form q gehe unter unserer Bewegung B in ihre Standardform über**. Im Fall $n \neq 1$ können wir zusätzlich erreichen, daß B orientierungserhaltend ist. Hinweis: Man mag unser μ beschreiben als das Minimum der Norm des Gradienten und, wenn dieses Minimum Null ist, unser ν als den Wert an einer kritischen Stelle.

Übung 4.1.12.35. Man finde eine Bewegung, die die Quadrik $xy + 3x$ in ihre Standardform 4.1.12.34 überführt.

Übung 4.1.12.36. Man zeige, daß sich die Nullstellenmenge einer inhomogenen reellen quadratischen Form $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$ in zwei Variablen stets als Urbild des Doppelkegels $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ unter einer Isometrie $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ schreiben läßt, es sei denn, die Nullstellenmenge unserer quadratischen Form ist leer oder besteht aus zwei parallelen Geraden.

Übung 4.1.12.37. Bei einem unitären Isomorphismus zwischen Skalarprodukträumen ist die adjungierte Abbildung die inverse Abbildung.

Ergänzende Übung 4.1.12.38. Man zeige: Ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Skalarproduktraums ist genau dann selbstadjungiert, wenn es dazu eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren gibt und alle Eigenwerte reell sind.

Übung 4.1.12.39. Gegeben eine symmetrische positiv definite reelle $(n \times n)$-Matrix A hat die Funktion $y \mapsto \langle y, Ay \rangle / 2 - \langle b, y \rangle$ ihr einziges globales Minimum bei der Lösung der Gleichung $Ax = b$.

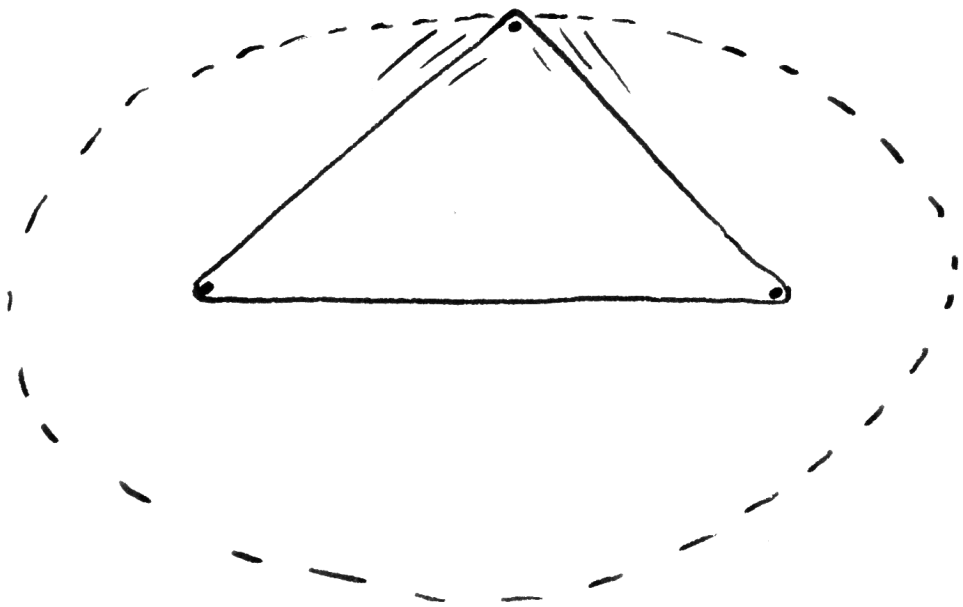
4.1.12.40 (**Elliptische Beete**). Gärtner erstellen elliptische Beete wie folgt: Sie schlagen zwei Pfosten ein, legen eine Seilschlinge darum, und fahren mit einem dritten Pfosten soweit außen, wie die Seilschlinge es erlaubt, um die beiden fest eingeschlagenen Pfosten herum. Eine einfache Rechnung zeigt, daß man so die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung und, da unsere Lösungsmenge beschränkt ist und nicht nur aus einem Punkt besteht, notwendig eine Ellipse erhält: Wenn man definieren müßte, welche Teilmengen einer affinen reellen Ebene denn nun Ellipsen heißen sollen, würde man nämlich genau diese Eigenschaft zur Definition erheben, und 4.1.12.34 zeigt, daß das auch unserer Anschauung entspricht, nach der eine Ellipse eine „zusammengedrückte Kreislinie“ sein sollte. Die beiden Pfosten heißen die **Brennpunkte** unserer Ellipse. Das hat hinwiederum mit dem Grenzfall der Parabel zu tun, zu dem wir gelangen, indem wir einen Pfosten vom anderen Pfosten weg auf geradem Wege ins Unendliche schieben und gleichzeitig das Seil so verlängern, daß immer gleich viel Spiel bleibt. Wäre die Ellipse ein Spiegel, so sollte anschaulich klar sein, daß sich das von einer Laterne auf einem der Pfosten ausgesandte Licht beim anderen Pfosten wieder sammeln muß. Im Grenzfall der Parabel wird sich folglich parallel aus der Richtung des unendlich fernen Pfostens einfallendes Licht beim anderen Pfosten sammeln und ihn, wenn auf dem unendlich fernen Pfosten statt einer Laterne die Sonne steht, möglicherweise sogar entzünden: Deshalb heißt er der Brennpunkt der Parabel, und von diesem Beispiel überträgt man das Wort auf Ellipsen und von dort weiter auf Hyperbeln, bei denen statt der Summe die Differenz der Abstände zu den beiden „Brennpunkten“ konstant ist.

Übung 4.1.12.41 (**Polar-Zerlegung von Endomorphismen, Variante**). Sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum. Man zeige, daß jeder Endomorphismus $A \in \operatorname{End} V$ auch eine eindeutige Darstellung als Produkt $A = P'U'$ besitzt mit P' selbstadjungiert positiv semidefinit und U' einer partiellen Isometrie derart, daß gilt $\operatorname{im} U' = (\ker P')^{\perp}$.

Übung 4.1.12.42. Man gebe eine von Null verschiedene komplexe symmetrische nilpotente (2×2)-Matrix an. Gibt es auch eine von Null verschiedene reelle symmetrische nilpotente (2×2)-Matrix?

Ergänzende Übung 4.1.12.43. Bezeichne $S \subset \operatorname{Mat}(n; \mathbb{R})$ den Untervektorraum der symmetrischen Matrizen. Gegeben eine symmetrische Matrix $P \in S$ betrachte man die lineare Abbildung $f_P : S \to S$ gegeben durch die Vorschrift $f_P : A \mapsto PAP$. Man zeige für die Determinante von f_P im Sinne von 3.6.4.3 die Formel $\det(f_P) = (\det P)^{n+1}$. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall zurück, daß P diagonal ist.

Übung 4.1.12.44. Man zeige, daß vier paarweise verschiedene Elemente der Zahlenkugel $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ genau dann ein reelles Doppelverhältnis haben, wenn sie auf einem gemeinsamen verallgemeinerten Kreis liegen.



Konstruktion elliptischer Beete

Übung 4.1.12.45 (**Reelle Formen und schieflineare Involutionen**). Unter einer **reellen Form eines komplexen Vektorraums** V versteht man einen reellen Untervektorraum $V_{\mathbb{R}} \subset V$ derart, daß $V_{\mathbb{R}}$ ganz V als $\mathbb{C}$-Vektorraum erzeugt und daß jede über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Teilmenge unseres Untervektorraums $V_{\mathbb{R}}$ auch über $\mathbb{C}$ linear unabhängig ist in V. Unter einer **schieflinearen Involution** eines komplexen Vektorraums V versteht man eine schieflineare Abbildung $\bar{\theta} : V \to V$ mit $\bar{\theta}^2 = \mathrm{id}_V$. Man zeige: Gegeben ein komplexer Vektorraum V liefert die Vorschrift, die jeder schieflinearen Involution von V ihre Fixpunktmenge zuordnet, eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{schieflineare Involutionen} \\ \bar{\theta} : V \to V \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \text{reelle Formen} \\ V_{\mathbb{R}} \subset V \end{array} \right\} \\ \bar{\theta} & \mapsto & V^{\bar{\theta}} \end{array}$$

4.2 Allgemeine Bilinearformen

4.2.1 Fundamentalmatrix

Definition 4.2.1.1. Gegeben ein Körper K und ein K-Vektorraum V erinnern wir daran, daß wir in 4.1.3 bilineare Abbildungen $b : V \times V \to K$ in den Grundkörper auch **Bilinearformen auf** V genannt hatten. Die Menge aller Bilinearformen auf einem K-Vektorraum V notieren wir

$$\mathrm{Bil}_K(V) = \mathrm{Bil}(V)$$

Sie bilden einen Untervektorraum im Vektorraum $\mathrm{Ens}(V \times V, K)$ aller Abbildungen von $V \times V$ nach K. In der alternativen in 3.2.3.8 eingeführten Notation hätten wir $\mathrm{Bil}_K(V) = \mathrm{Hom}^{(2)}(V \times V, K)$.

Satz 4.2.1.2 (**Fundamentalmatrix einer Bilinearform auf** K^n**).** *Gegeben ein Körper K und eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir eine Bijektion*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{F}: & \mathrm{Bil}(K^n) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Mat}(n;K) \\ & b & \mapsto & [b] \end{array}$$

dadurch, daß wir jeder Bilinearform b ihre **Fundamentalmatrix** $\mathrm{F}(b) := [b]$ *zuordnen, deren Einträge die Werte unserer Bilinearform auf Paaren von Vektoren der Standardbasis sind, in Formeln $[b]_{ij} := b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j)$. Die Umkehrabbildung kann beschrieben werden durch die Abbildungsvorschrift $F \mapsto b_F$ mit $b_F(v, w) = v^\top F w$.*

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus Übung 3.2.3.9, nach der eine bilineare Abbildung festgelegt und festlegbar ist durch ihre Werte auf Paaren von Basisvektoren. Um unsere Beschreibung der Umkehrabbildung zu prüfen, reicht es aus, für jede Matrix F die Identität $[b_F] = F$ alias $b_F(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j) = F_{ij}\ \forall i, j$ zu zeigen. Das hinwiederum folgt unmittelbar aus $b_F(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j) = F_{ij} = \mathrm{e}_i^\top F \mathrm{e}_j$. □

Satz 4.2.1.3 (**Fundamentalmatrix einer Bilinearform im Abstrakten**)**.** *Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem Körper K erhalten wir für jede angeordnete Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V eine Bijektion*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{F}_{\mathcal{A}}: & \mathrm{Bil}(V) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Mat}(n;K) \\ & b & \mapsto & [b] = [b]_{\mathcal{A},\mathcal{A}} \end{array}$$

dadurch, daß wir jeder Bilinearform b ihre **Fundamentalmatrix** $\mathrm{F}_{\mathcal{A}}(b) := [b]$ *bezüglich unserer Basis $\mathcal{A}$ zuordnen vermittels der Vorschrift $[b]_{ij} = b(v_i, v_j)$. Die Umkehrabbildung kann in diesem Fall beschrieben werden durch die Abbildungsvorschrift $F \mapsto b_F$ mit*

$$b_F(v, w) = {}_{\mathcal{A}}[v]^\top \circ F \circ {}_{\mathcal{A}}[w]$$

Beweis. Die erste Aussage folgt wieder unmittelbar aus der Erkenntnis 3.2.3.9, daß eine bilineare Abbildung festgelegt und festlegbar ist durch ihre Werte auf Paaren von Basisvektoren. Für die zweite Aussage zeigen wir nun zur Abwechslung einmal $b_{\mathrm{F}(b)} = b$ alias $b_{\mathrm{F}(b)}(v, w) = b(v, w)$ für alle v, w. Dazu müssen wir ja nur zeigen $b_{\mathrm{F}(b)}(v_i, v_j) = b(v_i, v_j)$ für alle i, j alias

$$ {}_{\mathcal{A}}[v_i]^\top \circ \mathrm{F}_{\mathcal{A}}(b) \circ {}_{\mathcal{A}}[v_j] = (\mathrm{F}_{\mathcal{A}}(b))_{ij} $$

Das ist jedoch klar wegen ${}_{\mathcal{A}}[v_i] = \mathrm{e}_i$. □

4.2.1.4 (**Notationsfragen**). Die Notation $[b]_{\mathcal{A},\mathcal{A}}$ für die darstellende Matrix hat den Vorteil, daß sie sich als Spezialisierung eines noch allgemeineren Falls verstehen läßt. Wir können etwa für Vektorräume U, V mit angeordneten Basen $\mathcal{A} = (u_1, \ldots, u_n)$ und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_m)$ eine bilineare Abbildung $b : U \times V \to K$ beschreiben durch eine $(n \times m)$-Matrix $[b] = [b]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ mit Einträgen $[b]_{ij} = b(u_i, v_j)$. Ist noch allgemeiner $b : U \times V \to W$ eine bilineare Abbildung in einen weiteren Vektorraum und sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen unserer Räume, so erhalten wir eine Abbildung

$$ {}_{\mathcal{C}}[b]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [b] : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to K $$

durch die Vorschrift, daß $[b](u_i, v_j, w_k)$ der Koeffizient von w_k bei einer Darstellung des Vektors $b(u_i, v_k) \in W$ in der Basis $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_l\}$ von W sein möge. Da sich solch ein „Zahlenwürfel“ alias „räumliche Matrix“ eh schlecht hinschreiben läßt, hilft die Wahl einer Anordnung der Basen auch nicht mehr weiter und ich bin zu einer Darstellung übergegangen, die die Wahl derartiger Anordnungen nicht benötigt. Wie es noch allgemeiner geht, besprechen wir in 4.2.1.10.

4.2.1.5. Wenn man viel zu rechnen hat, mag es praktisch sein, Matrizen von Bilinearformen als $[b]_{ij}$ zu indizieren und Matrizen von linearen Abbildungen zur Unterscheidung anders als zuvor ${}^k[f]_j$ und Skalare systematisch von rechts an Vektoren zu schreiben, also $f(\vec{v}_j) = \sum_i \vec{w}_k \, {}^k[f]_j$ für $f : V \to W$ und entsprechende Basen sowie $b(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = [b]_{ij}$ und für allgemeinere bilineare Abbildungen $b : U \times V \to W$ entsprechend

$$ b(\vec{u}_i, \vec{v}_j) = \sum_k \vec{w}_k \, {}^k[b]_{ij} $$

Für eine lineare Abbildung $f : W \to X$ ergäbe sich dann etwa die angenehm übersichtliche Formel ${}^l[f \circ b]_{ij} = \sum_k {}^l[f]_k {}^k[b]_{ij}$. Die Darstellung eines Vektors $v \in V$ wäre $v = \sum \vec{v}_j \, {}^j[v]$ und die lineare Abbildung $b(\,, v)$ mit $u \mapsto b(u, v)$ hätte die Matrix ${}^k[b(\,, v)]_i = \sum_j {}^k[b]_{ij} {}^j[v]$. Die Darstellung einer Linearform $\lambda : U \to K$ schließlich wäre der Zeilenvektor mit Einträgen $[\lambda]_i = \lambda(\vec{u}_i)$ und das Auswerten auf $u = \sum \vec{u}_j \, {}^j[u]$ wäre $\lambda(u) = \sum [\lambda]_i \, {}^i[u]$.

4.2.1.6 (**Fundamentalmatrizen symmetrischer Bilinearformen**). Eine Bilinearform ist symmetrisch genau dann, wenn ihre Fundamentalmatrix bezüglich einer gegebenen Basis symmetrisch ist. Ist also in Formeln V ein K-Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine angeordnete Basis von V und $b : V \times V \to K$ eine Bilinearform, so gilt

$$b \text{ symmetrisch} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{F}_{\mathcal{B}}(b) \text{ symmetrisch}$$

In der Tat, ist $(v_1, \ldots, v_n)$ unsere angeordnete Basis, so gilt für symmetrisches b ja $b(v_i, v_j) = b(v_j, v_i)$ und damit die Identität $F_{ij} = F_{ji}$ für die Einträge $F_{ij} = b(v_i, v_j)$ der Fundamentalmatrix $F = \mathrm{F}_{\mathcal{B}}(b)$. Bezeichnet ganz allgemein $\tau : V \times V \xrightarrow{\sim} V \times V$ das Vertauschen $\tau : (v, w) \mapsto (w, v)$, so haben wir für jede Bilinearform b offensichtlich die Identität $\mathrm{F}_{\mathcal{B}}(b \circ \tau) = \mathrm{F}_{\mathcal{B}}(b)^\top$. Ist also die Fundamentalmatrix symmetrisch, in Formeln $\mathrm{F}_{\mathcal{B}}(b)^\top = \mathrm{F}_{\mathcal{B}}(b)$, so folgt mit 4.2.1.3 sofort $b \circ \tau = b$ alias b symmetrisch.

4.2.1.7 (**Fundamentalmatrizen alternierender Bilinearformen**). Eine Bilinearform ist alternierend genau dann, wenn ihre Fundamentalmatrix bezüglich einer gegebenen Basis antisymmetrisch ist und auf der Diagonale verschwindet. Wir nennen derartige quadratische Matrizen auch **alternierend**.

Proposition 4.2.1.8 (Fundamentalmatrix und Basiswechsel). *Gegeben ein Körper K und ein endlichdimensionaler K-Vektorraum V mit zwei angeordneten Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gilt zwischen den Fundamentalmatrizen einer Bilinearform $b \in \mathrm{Bil}(V)$ in Bezug auf unsere beiden Basen die Beziehung*

$$_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^\top \circ \mathrm{F}_{\mathcal{A}}(b) \circ {}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} = \mathrm{F}_{\mathcal{B}}(b)$$

4.2.1.9. Man berechnet also in Worten gesagt die Fundamentalmatrix einer Bilinearform bezüglich einer Basis aus ihrer Fundamentalmatrix bezüglich einer anderen Basis, indem man von rechts die Basiswechselmatrix dranmultipliziert und von links ihre Transponierte.

Beweis. Gegeben $v, w \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
b(v, w) &= {}_{\mathcal{B}}[v]^\top \circ \mathrm{F}_{\mathcal{B}}(b) \circ {}_{\mathcal{B}}[w] \\
b(v, w) &= {}_{\mathcal{A}}[v]^\top \circ \mathrm{F}_{\mathcal{A}}(b) \circ {}_{\mathcal{A}}[w] \\
&= \left({}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} \circ {}_{\mathcal{B}}[v]\right)^\top \circ \mathrm{F}_{\mathcal{A}}(b) \circ {}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} \circ {}_{\mathcal{B}}[w] \\
&= {}_{\mathcal{B}}[v]^\top \circ {}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^\top \circ \mathrm{F}_{\mathcal{A}}(b) \circ {}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} \circ {}_{\mathcal{B}}[w]
\end{aligned}$$

Gilt für Matrizen $F, G \in \mathrm{Mat}(n \times m; K)$ jedoch $v^\top F w = v^\top G w$ für alle Spaltenvektoren $v \in K^n$, $w \in K^m$, so folgt durch Einsetzen der Vektoren der Standardbasis $F = G$. Damit liefern unsere Gleichungen die gewünschte Identität ${}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^\top \circ \mathrm{F}_{\mathcal{A}}(b) \circ {}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} = \mathrm{F}_{\mathcal{B}}(b)$. □

Ergänzung 4.2.1.10. Seien K ein Körper oder allgemeiner ein Kring und $r \geq 0$ eine natürliche Zahl und $M_1, \ldots, M_r, N$ Mengen. Wir setzen

$$\mathrm{Mat}_K(M_1 \curlyvee \ldots \curlyvee M_r, N) := \left\{ \begin{array}{c} \text{Abbildungen} \\ T : M_1 \times \ldots \times M_r \times N \to K \\ \text{derart, daß es für beliebige } m_1, \ldots, m_r \\ \text{höchstens endlich viele } n \text{ gibt mit} \\ \text{mit } T(m_1, \ldots, m_r, n) \neq 0 \end{array} \right\}$$

und nennen derartige Abbildungen **Multimatrizen**. Gegeben K-Vektorräume V_1, $\ldots$, V_r, W mit Basen $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_r, \mathcal{B}$ erhalten wir dann eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_K(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_K(\mathcal{A}_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{A}_r, \mathcal{B})$$

durch die Vorschrift $f \mapsto [f]$ mit der Multimatrix $[f] = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_r}$ gegeben durch

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_r) = \sum_{w \in \mathcal{B}} [f](v_1, v_2, \ldots, v_r, w)\, w$$

für beliebige Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_r) \in \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_r$ von Basisvektoren. All unsere bisherigen Matrixbildungen ordnen sich dieser allgemeinen Konvention unter. In der üblichen Weise hinschreiben lassen sich unsere Multimatrizen aber nur in wenigen Spezialfällen:

1. Im Fall einer linearen Abbildung zwischen endlichdimensionalen Räumen und nach Wahl einer Anordnung auf beiden Basen, das sind dann unsere Matrizen ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$ linearer Abbildungen. Im Spezialfall einer Abbildung in den Grundkörper mit seiner Standardbasis $\mathcal{S}(1)$ erhalten wir unsere Darstellung ${}_{\mathcal{S}(1)}[f]_{\mathcal{A}} = [f]_{\mathcal{A}}$ einer Linearform als Zeilenmatrix;

2. Im Fall einer bilinearen Abbildung in den Grundkörper $b : V_1 \times V_2 \to K$ von endlichdimensionalen Räumen und nach Wahl einer Anordnung auf beiden Basen, das sind dann Matrizen ${}_{\mathcal{S}(1)}[b]_{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2}$ mit der Konvention für die Zeilen und Spalten, daß sie als $[b]_{i,j} := [b](v_i, w_j, 1)$ dargestellt werden sollen. Im Spezialfall $V_1 = V_2 = V$ und $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$ erhalten wir dann unsere Fundamentalmatrix $\mathrm{F}_{\mathcal{A}}(b) = {}_{\mathcal{S}(1)}[b]_{\mathcal{A},\mathcal{A}} = [b]_{\mathcal{A},\mathcal{A}}$;

3. Im Fall einer 0-linearen Abbildung in einen endlichdimensionalen Vektorraum V mit angeordneter Basis $\mathcal{B}$ erhalten wir unsere Darstellung ${}_{\mathcal{B}}[v]$ eines Vektors $v \in V$ als Spaltenmatrix.

4.2.2 Hauptachsentransformation

Definition 4.2.2.1. Gegeben ein Körper K und ein K-Vektorraum V versteht man unter einer **homogenen quadratischen Form auf** V oder kurz **quadratischen**

Form eine Abbildung $q : V \to K$ derart, daß es eine Bilinearform b auf V gibt mit $q(v) = b(v, v)$.

4.2.2.2. Gegeben ein Körper K heißt eine quadratische Form auf dem K^n auch eine **quadratische Form über K in n Variablen**. Eine quadratische Form über $\mathbb{Q}$ in drei Variablen wäre etwa $x^2 + 6xy + zx - 13z^2$.

Ergänzung 4.2.2.3 (**Quadratische Formen und kritische Stellen**). In der Analysis, etwa in 12.2.4.10, können Sie lernen, wie man eine hinreichend differenzierbare Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ etwa um den Ursprung bis zu zweiter Ordnung approximieren kann durch eine polynomiale Funktion vom Totalgrad höchstens Zwei alias die Summe einer Konstanten mit einer Linearform und einer quadratischen Form. Ist die fragliche Linearform Null alias hat der Graph unserer Funktion am Ursprung eine horizontale Tangentialebene alias hat unsere Funktion am Ursprung eine „kritische Stelle“, so wird sie dort bis zur Ordnung Zwei approximiert durch die fragliche quadratische Form plus die Konstante. So führt uns das Studium von Funktionen mehrerer Veränderlichen in der Umgebung ihrer kritischen Stellen ganz natürlich auf das Studium quadratischer Formen.

4.2.2.4 (**Quadratische Formen und symmetrische Bilinearformen**). Ist die Charakteristik des Grundkörpers K ungleich Zwei, so liefert für jeden K-Vektorraum V die Vorschrift „werte auf zweimal demselben Vektor aus“ eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{symmetrische Bilinearformen} \\ \text{auf dem Vektorraum } V \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \text{quadratische} \\ \text{Formen auf } V \end{array} \right\} \\ a & \mapsto & (v \mapsto a(v, v)) \end{array}$$

In der Tat liefern dann die Bilinearform b und die symmetrische Bilinearform a mit $a(v, w) := (b(v, w) + b(w, v))/2$ dieselbe quadratische Form, mithin ist unsere Abbildung surjektiv. Weiter wird die symmetrische Bilinearform a durch q eindeutig bestimmt vermittels der Relation $2a(v, w) = q(v + w) - q(v) - q(w)$, mithin ist unsere Abbildung auch injektiv. Wir nennen über einem Körper einer Charakteristik ungleich Zwei eine quadratische Form **nichtausgeartet**, wenn die zugehörige symmetrische Bilinearform nichtausgeartet ist.

4.2.2.5 (**Bilinearformen und lineare Abbildungen**). Übung 3.2.3.16 liefert uns für jeden Vektorraum V einen kanonischen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bil}(V) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(V, V^\top) \\ a & \mapsto & \hat{a} \end{array}$$

zwischen dem Raum der Bilinearformen auf V und dem Raum der linearen Abbildungen von V in seinen Dualraum $V^\top$, gegeben durch die Abbildungsvorschrift $a \mapsto \hat{a}$ mit $\hat{a} : w \mapsto a(\ , w)$ alias $(\hat{a}(w))(v) = a(v, w)$.

4.2.2.6 (**Bilinearformen und selbstadjungierte Endomorphismen**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Skalarproduktraum E erhalten wir eine natürliche Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{selbstadjungierte} \\ \text{Endomorphismen von } E \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \text{symmetrische} \\ \text{Bilinearformen auf } E \end{array} \right\} \\ f & \mapsto & (a : (v, w) \mapsto \langle f(v), w \rangle) \end{array}$$

Bezeichnet in der Tat s unser Skalarprodukt, so ist unser $\hat{s}$ aus 4.2.2.5 offensichtlich eine Injektion und damit ein Isomorphismus $\hat{s} : E \xrightarrow{\sim} E^\top$. Gegeben eine weitere Bilinearform a können wir den Endomorphismus $f := \hat{s}^{-1} \circ \hat{a}$ von E bilden und erhalten so eine Bijektion $\operatorname{Bil}(E) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End} E$. Formal wird f charakterisiert durch die Formel $\langle f(v), w \rangle = a(v, w)$ für alle w. Insbesondere ist der Endomorphismus f genau dann selbstadjungiert, wenn die Bilinearform a symmetrisch ist.

Satz 4.2.2.7 (**Hauptachsentransformation abstrakt**). *Gegeben eine quadratische Form $q : E \to \mathbb{R}$ auf einem endlichdimensionalen reellen Skalarproduktraum E gibt es stets eine Orthonormalbasis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ von E und Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit*

$$q(y_1\vec{v}_1 + \ldots + y_n\vec{v}_n) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 \quad \forall y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$$

4.2.2.8. Den Spezialfall $E = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt hatten wir bereits in 4.1.12.1 diskutiert. Die von den $\vec{v}_i$ erzeugten Geraden nennen wir wieder ein System von **Hauptachsen** für unsere**??** quadratische Form q. Beim Beweis wird sich wieder herausstellen, daß die Multimenge der λ_i durch unsere quadratische Form eindeutig bestimmt ist. Wir nennen sie die Multimenge der **Eigenwerte** unserer quadratischen Form. Weiter wird sich herausstellen, daß die von den Hauptachsen zu einem festen Eigenwert erzeugten Teilräume eindeutig bestimmt sind. Wir nennen sie die **Eigenräume** unserer quadratischen Form. Sowohl die Hauptachsen als auch die Eigenwerte hängen hierbei von dem auf dem zugrundeliegenden Vektorraum gewählten Skalarprodukt ab.

Vorschau 4.2.2.9 (**Hauptachsentransformation für euklidische Vektorräume**). Gegeben eine quadratische Form q auf einem endlichdimensionalen euklidischen Vektorraum V gibt es stets eine Zerlegung in paarweise orthogonale Teilräume $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ und „inverse Flächen“ $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{L}^{-2}$ mit

$$q(v_1 + \ldots + v_r) = \lambda_1 \|v_1\|^2 + \ldots + \lambda_r \|v_r\|^2$$

für beliebige $v_i \in V_i$. Gilt außerdem $\lambda_1 > \ldots > \lambda_r$ und $V_i \neq 0 \ \forall i$, so werden die V_i und die λ_i durch unsere quadratische Form q bereits eindeutig festgelegt

und wir nennen wieder die V_i die **Eigenräume** und die λ_i die **Eigenwerte** unserer quadratischen Form auf unserem euklidischen Vektorraum und die Dimensionen der V_i die **Vielfachheiten** der jeweiligen Eigenwerte. Diese Umformulierung von 4.2.2.7 wird Ihnen leicht fallen, sobald Sie sich mit dem entsprechenden Formalismus vertraut gemacht haben, wie er etwa in 4.6.1.16 erklärt wird.

Erster Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, E sei der $\mathbb{R}^n$ mit seinem Standardskalarprodukt. In diesem Fall hatten wir den Satz bereits als 4.1.12.1 bewiesen. Allerdings war der dort gegebene Beweis in meinen Augen zu sehr von Koordinaten abhängig, um transparent zu sein. Ich gebe deshalb hier noch einen zweiten Beweis, der mir natürlicher scheint. □

Zweiter Beweis. In diesem Beweis notieren wir Vektoren wieder ohne Pfeil. Nach 4.2.2.4 finden wir zu unserer quadratischen Form q eine symmetrische Bilinearform a mit $q(v) = a(v, v)\ \forall v \in E$, und nach 4.2.2.6 finden wir zu a weiter einen selbstadjungierten Endomorphismus f von E mit $a(v, w) = \langle f(v), w\rangle\ \forall v, w \in E$. Der Spektralsatz 4.1.12.15 liefert uns dann eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von E aus Eigenvektoren von f, so daß also gilt $f(v_i) = \lambda_i v_i$ für geeignete $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Unser Satz folgt unmittelbar. □

4.2.3 Klassifikation symmetrischer Bilinearformen

4.2.3.1. Unter einer **Klassifikation** einer gewissen Art von mathematischen Strukturen versteht man im allgemeinen die Angabe einer Liste von „Standardstrukturen“ derart, daß jede Struktur der vorgegebenen Art zu genau einer der Strukturen besagter Liste „isomorph“ ist. Oft sind derartige Listen sehr schwer anzugeben, und man ist schon froh, wenn man eine Liste von „Standardstrukturen“ angeben kann derart, daß jede Struktur der vorgegebenen Art zu mindestens einer der Strukturen besagter Liste „isomorph“ ist. Meist wird in der Darstellung das jeweilige Konzept von Isomorphie nicht explizit gemacht und muß vom Leser erraten werden. In der Sprache der Kategorientheorie **??** können wir das viel genauer sagen: Eine Klassifikation der Objekte einer Kategorie bedeutet die Angabe eines Repräsentantensystems für die Isomorphieklassen von Objekten unserer Kategorie.

Beispiel 4.2.3.2 (**Klassifikation endlich erzeugter Vektorräume**). Für die Struktur eines endlich erzeugten Vektorraums über einem vorgegebenen Körper K bilden die Vektorräume K^n für $n \in \mathbb{N}$ eine solche Liste, denn jeder endlich erzeugte K-Vektorraum ist isomorph zu genau einem K^n. Man sagt deshalb auch, die endlich erzeugten Vektorräume seien „klassifiziert durch ihre Dimension“. Ähnlich und noch einfacher werden die endlichen Mengen klassifiziert durch ihre Kardi-

nalität. Ähnlich aber schwieriger werden die endlich erzeugten reellen oder komplexen Skalarprodukträume klassifiziert durch ihre Dimension.

Beispiel 4.2.3.3 (**Klassifikation endlicher Gruppen**). Die Klassifikation endlicher Gruppen haben wir in 2.2.3.9 begonnen: Bis auf Isomorphie gibt es nur je eine Gruppe G der Kardinalitäten $|G| = 1, 2, 3$. Dahingegen gibt es bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Kardinalität Vier.

Beispiel 4.2.3.4 (**Klassifikation linearer Abbildungen**). Lineare Abbildungen zwischen endlich erzeugten Vektorräumen werden „klassifiziert durch die Dimensionen der beteiligten Vektorräume und den Rang der Abbildung". Nennen wir genauer lineare Abbildungen $f : V \to W$ und $f' : V' \to W'$ „isomorph", wenn es Vektorraumisomorphismen $\phi : V \xrightarrow{\sim} V'$ und $\psi : W \xrightarrow{\sim} W'$ gibt mit $\psi f = f'\phi$, so daß also das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi", "\wr"'] & W \arrow[d, "\psi", "\wr"'] \\ V' \arrow[r, "f'"] & W' \end{tikzcd}$$

kommutiert, so ist jede lineare Abbildung isomorph zu genau einer linearen Abbildung $K^n \to K^m$ mit einer Matrix in Smith-Normalform nach 3.2.5.7.

4.2.3.5 (**Klassifikation der symmetrischer Bilinearformen**). Im folgenden sollen grundlegende Resultate zur Klassifikation symmetrischer Bilinearformen über einem vorgegebenen Körper K vorgestellt werden. Klassifiziert werden sollen genauer Paare (V, a) bestehend aus einem endlichdimensionalen Vektorraum V mit einer symmetrischen Bilinearform $a : V \times V \to K$, wobei zwei derartige Paare (V, a) und (V', a') isomorph heißen, wenn es einen Vektorraumisomorphismus $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V'$ gibt mit $a(v, w) = a'(\varphi(v), \varphi(w))$ für alle $v, w \in V$. Eine derartige Klassifikation ist eng mit der Struktur des Körpers verknüpft und im allgemeinen schwierig. Wir geben zumindest im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers einer Charakteristik ungleich Zwei in 4.2.3.14 sowie im Fall $K = \mathbb{R}$ in 4.2.3.23 Klassifikationen an. Die Klassifikation im Fall $K = \mathbb{Q}$ ist ein interessantes Problem der Zahlentheorie.

4.2.3.6 (**Physikalische Motivation**). In der speziellen Relativitätstheorie modelliert man die Welt, in der wir leben, als einen vierdimensionalen reellen affinen Raum X aller „Raum-Zeit-Punkte" alias „Ereignisse". Wählen wir ein räumliches Koordinatensystem und einen Beginn der Zeitrechnung und eine Zeiteinheit, so können wir X mit dem $\mathbb{R}^4$ identifizieren und jedes Ereignis wird spezifiziert durch eine Zeitkoordinate und drei Raumkoordinaten, also durch ein Viertupel von reellen Zahlen (t, x, y, z). Das Licht breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus. Genau dann wird also eine Explosion am Raumzeitpunkt $p = (t, x, y, z)$ gesehen bei $p' = (t', x', y', z')$, wenn gilt

$$t' \geq t \quad \text{und} \quad c^2(t' - t)^2 - (x' - x)^2 - (y' - y)^2 - (z' - z)^2 = 0$$

für c die Lichtgeschwindigkeit. Betrachten wir auf dem Raum $\mathbb{R}^4$ die sogenannte **Lorentzmetrik** alias die symmetrische Bilinearform l mit der Fundamentalmatrix $\operatorname{diag}(c^2, -1, -1, -1)$, so kann die Zweite unserer Bedingungen auch umgeschrieben werden zur Bedingung $l(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ für $\vec{v} = p' - p$. Wenn Sie bereits die Definition einer Metrik kennen, seien Sie gewarnt, daß diese Lorentzmetrik im Sinne der in der Mathematik üblichen Terminologie keine Metrik ist. Nun vergessen wir wieder unsere Koordinaten und modellieren die Welt, in der wir leben, als einen vierdimensionalen reellen affinen Raum X mitsamt einer symmetrischen Bilinearform

$$l : \vec{X} \times \vec{X} \to \mathbb{R}$$

auf seinem Richtungsraum. Wir fordern, daß deren Fundamentalmatrix bezüglich mindestens einer Basis die oben angegebene Gestalt hat und daß sie die Ausbreitung des Lichts in der Weise beschreibt, daß $l(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ gleichbedeutend ist dazu, daß eine Explosion am Raumzeitpunkt $p \in X$ entweder bei $p + \vec{v}$ oder bei $p - \vec{v}$ gesehen werden kann. Manchmal nennt man die Menge $\{\vec{v} \mid l(\vec{v}, \vec{v}) = 0\}$ auch den **Lichtkegel** und seine Elemente **lichtartige Vektoren**. Wir werden später zeigen, daß jede weitere symmetrische Bilinearform l' mit der Eigenschaft $l'(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow l(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ bereits ein Vielfaches von l sein muß. Die Wahl eines möglichen l bedeutet die Wahl einer Längeneinheit oder gleichbedeutend einer Zeiteinheit in der speziellen Relativitätstheorie. Das ist jedoch nicht, was an dieser Stelle diskutiert werden soll. Wir stellen uns die viel einfachere Frage, ob unsere Bilinearform nicht etwa bezüglich einer anderen Basis zum Beispiel $\operatorname{diag}(1, 1, 1, -1)$ als Fundamentalmatrix haben könnte. Das geht nun zwar nicht, aber wir wollen eben unter anderem verstehen, warum es nicht geht, und entwickeln dazu die Anfänge der allgemeinen Theorie der symmetrischen Bilinearformen.

4.2.3.7 (**Klassifikation quadratischer Formen**). In Charakteristik ungleich Zwei ist nach 4.2.2.4 die Klassifikation symmetrischer Bilinearformen gleichbedeutend zur Klassifikation quadratischer Formen. Genauer meinen wir hier die Klassifikation von Paaren (V, q) bestehend aus einem endlichdimensionalen Vektorraum V mit einer quadratischen Form $q : V \to K$, wobei zwei derartige Paare (V, q) und (V', q') isomorph heißen mögen, wenn es einen Vektorraumisomorphismus $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V'$ gibt mit $q(v) = q'(\varphi(v))$ für alle $v \in V$.

4.2.3.8 (**Klassifikation quadratischer Formen auf der reellen Ebene**). Über dem Körper $K = \mathbb{R}$ kann jede quadratische Form in zwei Variablen durch linearen Koordinatenwechsel in genau eine der folgenden fünf Formen überführt werden: Den „parabolischen Topf“ $x^2 + y^2$, die „Sattelfläche“ $x^2 - y^2$, den „umgestülpten parabolischen Topf“ $-x^2 - y^2$, das „Tal“ x^2, das „umgestülpte Tal“ $-x^2$ und die „Ebene“ 0. Formal sagt uns das der Trägheitssatz von Sylvester 4.2.3.23.

4.2.3.9 (**Klassifikation quadratischer Formen auf der komplexen Ebene**). Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K kann jede quadratische Form in

zwei Variablen durch linearen Koordinatenwechsel in genau eine der folgenden drei Formen überführt werden: Das Produkt linear unabhängiger Linearformen xy, das Quadrat einer von Null verschiedenen Linearform x^2, und die Nullform 0. In der Tat hat unsere Form Gestalt $ax^2 + bxy + cy^2$ mit $a, b, c \in K$. Ist $a \neq 0$, so setzen wir $y = 1$, faktorisieren das so entstehende Polynom in einer Variablen, und finden uns in einem der beiden ersten Fälle wieder. Ist $c \neq 0$, so machen wir es analog. Der Fall $a = c = 0$ ist eh einfach. Dasselbe gilt allgemeiner mit demselben Beweis, wenn das Quadrieren eine Surjektion $K \twoheadrightarrow K$ ist und K nicht die Charakteristik Zwei hat.

4.2.3.10 (**Klassifikation quadratischer Formen auf Skalarprodukträumen**). Lassen wir nur orthogonale Koordinatenwechsel zu, so kann jede quadratische Form auf $\mathbb{R}^2$ in genau eine Form der Gestalt $\lambda x^2 + \mu y^2$ überführt werden mit $\lambda \leq \mu$ reell: Das sagt uns der Satz über die Hauptachsentransformation 4.2.2.7, der auch seinerseits ein Klassifikationsproblem löst: Die Klassifikation quadratischer Formen auf endlichdimensionalen reellen Skalarprodukträumen. Hier sind die zu klassifizierenden Strukturen Tripel (V, s, q) mit V einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum, $s : V \times V \to \mathbb{R}$ einem Skalarprodukt und $q : V \to \mathbb{R}$ einer quadratischen Form. Zwei derartige Tripel (V, s, q) und (V', s', q') heißen isomorph, wenn es einen Vektorraumisomorphismus $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V'$ gibt mit $s(v, w) = s'(\varphi(v), \varphi(w))$ und $q(v) = q'(\varphi(v))$ für alle $v, w \in V$. Die Klassifikation derartiger Tripel leistet also wie gesagt der Satz über die Hauptachsentransformation 4.2.2.7.

Satz 4.2.3.11 (Existenz einer Orthogonalbasis). *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit* $\operatorname{char} K \neq 2$. *So gibt es für jede symmetrische Bilinearform a auf V eine* **Orthogonalbasis** *alias eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V mit*

$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad a(v_i, v_j) = 0$$

4.2.3.12. Der Wortbestandteil „orthogonal“ möge Sie nicht dazu verleiten, sich hier für b ein Skalarprodukt vorzustellen. Dieser Fall wurde eh bereits durch 4.1.3.16 erledigt. Sie mögen stattdessen etwa an die Nullform $b = 0$ denken oder an die Lorentzmetrik 4.2.3.6.

Beweis. Gilt für jeden Vektor $v \in V$ bereits $a(v, v) = 0$, so folgt $2a(v, w) = a(v + w, v + w) - a(v, v) - a(w, w) = 0$ für alle v, w. Wegen $2 \neq 0$ in K folgt $a = 0$ und jede Basis ist orthogonal. Sonst gibt es einen Vektor $v_1 \in V$ mit $a(v_1, v_1) \neq 0$. Dann ist

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V & \to & K \\ & w & \mapsto & a(v_1, w) \end{array}$$

eine lineare Abbildung mit $v_1 \notin \ker \varphi$. Aus Dimensionsgründen gilt sicher $Kv_1 \oplus \ker \varphi = V$. Mit Induktion über die Dimension dürfen wir annehmen, daß $\ker \varphi$ eine Orthogonalbasis $(v_2, \ldots, v_n)$ besitzt. Dann ist aber $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ eine Orthogonalbasis von V. □

Definition 4.2.3.13. Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und b eine Bilinearform auf V, so erklären wir den **Rang** von b als den Rang einer Fundamentalmatrix

$$\operatorname{rg}(b) = \operatorname{rg} \mathrm{F}_{\mathcal{B}}(b)$$

in Bezug auf eine und jede angeordnete Basis $\mathcal{B}$ von V. Nach unserer Formel 4.2.1.8 für die Umrechnung zwischen den Fundamentalmatrizen zu verschiedenen Basen hängt diese Zahl in der Tat nicht von der Basis $\mathcal{B}$ ab.

4.2.3.14 (**Klassifikation komplexer quadratischer Formen**). Ist K ein Körper einer Charakteristik $\operatorname{char} K \neq 2$ und ist das Quadrieren $x \mapsto x^2$ eine Surjektion $K \twoheadrightarrow K$ und ist V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform, so können wir die im Satz 4.2.3.11 gefundene Orthogonalbasis offensichtlich sogar dahingehend abändern, daß die Fundamentalmatrix die Gestalt $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ hat. Die Zahl der Einsen ist hierbei wohldefiniert als der Rang unserer Bilinearform. Insbesondere werden also komplexe quadratische Formen klassifiziert durch ihren Rang und die Dimension des zugrundeliegenden Vektorraums.

Definition 4.2.3.15. Eine Bilinearform auf einem Vektorraum V heißt **nichtausgeartet**, wenn es für jedes $v \in V \backslash 0$ ein $w \in W$ gibt mit $b(v, w) \neq 0$ und umgekehrt auch für jedes $w \in W \backslash 0$ ein $v \in V$ mit $b(v, w) \neq 0$. Andernfalls heißt unsere Bilinearform **ausgeartet**.

Definition 4.2.3.16. Gegeben ein Körper K und ein K-Vektorraum V und eine Bilinearform $b : V \times V \to K$ erklären wir den **Ausartungsraum** alias das **Radikal von** V als den Untervektorraum

$$\operatorname{rad} b := \{v \in V \mid b(w, v) = 0 \quad \forall w \in V\}$$

Wir werden dieses Konzept im wesentlichen nur für symmetrische oder alternierende Bilinearformen verwenden und verzichten deshalb darauf, unseren Ausartungsraum feiner „Rechtsausartungsraum“ zu nennen und zusätzlich noch einen „Linksausartungsraum“ einzuführen.

Satz 4.2.3.17 (Rang und Dimension des Radikals). *Der Rang und die Dimension des Radikals einer Bilinearform b auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V sind verknüpft durch die Beziehung*

$$\operatorname{rg}(b) + \dim(\operatorname{rad}(b)) = \dim V$$

4.2.3.18. Eine Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum ist insbesondere genau dann nichtausgeartet, wenn sie maximalen Rang hat.

Beweis. Ist $\mathcal{B}$ eine angeordnete Basis von V, so können wir $\mathrm{F}_{\mathcal{B}}(b)$ auch verstehen als die Matrix der Abbildung $\hat{b} : V \to V^\top$, die jedem $w \in V$ die Linearform „paare mit w unter b“ alias $(\hat{b}(w))(v) := b(v, w)$ zuordnet. Genauer und in Formeln haben wir

$$_{\mathcal{B}^\top}[\hat{b}]_{\mathcal{B}} = \mathrm{F}_{\mathcal{B}}(b)$$

In der Tat, setzen wir $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und machen den Ansatz $\hat{b}(v_i) = a_{1i}v_1^\top + \ldots + a_{ni}v_n^\top$, so liefert das Auswerten der Linearformen auf beiden Seiten dieser Gleichung auf dem Basisvektor v_j die Identität $b(v_i, v_j) = (\hat{b}(v_j))(v_i) = a_{ij}$ und damit die Gleichheit aller Einträge unserer beiden Matrizen. Insbesondere gilt $\mathrm{rg}(b) = \mathrm{rg}(\hat{b}) = \dim(\operatorname{im}\hat{b})$. Wegen $\mathrm{rad}(b) = \ker(\hat{b})$ folgt unsere Identität damit aus der Dimensionsformel 3.2.2.5, angewandt auf die lineare Abbildung $\hat{b} : V \to V^\top$. □

Ergänzung 4.2.3.19. Die Identität $_{\mathcal{B}^\top}[\hat{b}]_{\mathcal{B}} = \mathrm{F}_{\mathcal{B}}(b)$ aus dem vorhergehenden Beweis liefert auch einen zweiten Zugang zu unserer Formel 4.2.1.8 über das Verhalten der Fundamentalmatrix unter Basiswechsel: Wir rechnen einfach

$$\mathrm{F}_{\mathcal{B}}(b) = {}_{\mathcal{B}^\top}[\hat{b}]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}^\top}[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}^\top} \circ {}_{\mathcal{A}^\top}[\hat{b}]_{\mathcal{A}} \circ {}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} = ({}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}})^\top \circ \mathrm{F}_{\mathcal{A}}(b) \circ {}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}$$

unter Verwendung unserer Formel 3.2.9.16 für die Matrix der transponierten Abbildung.

Ergänzung 4.2.3.20 (**Bilinearformen und lineare Abbildungen**). Übung 3.2.3.16 liefert uns wie in 4.2.2.5 für jeden Vektorraum V einen kanonischen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bil}(V) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(V, V^\top) \\ b & \mapsto & \hat{b} \end{array}$$

zwischen dem Raum der Bilinearformen auf V und dem Raum der linearen Abbildungen von V in seinen Dualraum $V^\top$, gegeben durch die Abbildungsvorschrift $b \mapsto \hat{b}$ mit $\hat{b} : w \mapsto b(\ \ , w)$ alias $(\hat{b}(w))(v) = b(v, w)$. In 12.7.3.13 verwende ich die alternative Notation $\hat{b} = \mathrm{can}_b^2$ und betrachte zusätzlich auch noch $\mathrm{can}_b^1 : V \to V^\top$ gegeben durch $v \mapsto b(v,\ )$.

Definition 4.2.3.21. Eine quadratische Form $q : V \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Vektorraum V heißt

1. **positiv definit**, wenn gilt $v \neq 0 \Rightarrow q(v) > 0$;
2. **positiv semidefinit**, wenn gilt $q(v) \geq 0 \quad \forall v \in V$;

3. **negativ definit**, wenn gilt $v \neq 0 \Rightarrow q(v) < 0$;
4. **negativ semidefinit**, wenn gilt $q(v) \leq 0 \quad \forall v \in V$;
5. **indefinit**, wenn es $v, w \in V$ gibt mit $q(v) > 0$ und $q(w) < 0$.

Dieselben Bezeichnungen verwendet man auch für reelle symmetrische Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(n; \mathbb{R})$, wenn die zugehörige quadratische Form $q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $q_A(v) = v^\top A v$ die entsprechende Eigenschaft hat. Allgemeiner verwenden wir sie auch im Fall eines beliebigen angeordneten Grundkörpers. Positive definite Matrizen kennen wir bereits aus 4.1.12.21 im Fall von reellen symmetrischen und, über die hier diskutierte Terminologie hinausgehend, im Fall von komplexen hermiteschen Matrizen.

4.2.3.22 (**Prüfen von Definitheitseigenschaften**). Um die Definitheitseigenschaften einer reellen symmetrischen quadratischen Matrix zu bestimmen, bringt man sie am einfachsten durch Basiswechsel in Diagonalgestalt, wie im Beweis von 4.2.3.11 erklärt. Bei kleineren Matrizen kann auch das Hauptminoren-Kriterium 4.2.3.25 schnell zum Ziel führen.

Satz 4.2.3.23 (Sylvester'scher Trägheitssatz). *Gegeben ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit einer symmetrischen Bilinearform a gibt es stets eine angeordnete Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, in der die Fundamentalmatrix von a die Gestalt*

$$\mathrm{F}_{\mathcal{B}}(a) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0)$$

annimmt. Die Zahl der Einsen, Minus-Einsen und Nullen wird hierbei durch besagte Bilinearform bereits eindeutig festgelegt.

4.2.3.24. Die Differenz zwischen der Zahl der Minus-Einsen und der Zahl der Einsen heißt in diesem Kontext die **Signatur** unserer symmetrischen Bilinearform. Ich nenne das Tripel (p, m, n) aus der Zahl der Einsen, der Minus-Einsen und der Nullen den **Typ** unserer quadratischen Form. Die Signatur ist dann $p - m$ und der Rang $p + m$. Das Supremum über die Dimensionen aller „negativ definiten" Teilräume, also das m, nennt man den **Index** unserer Bilinearform. Er ist auch im Fall unendlichdimensionaler Vektorräume über einem angeordneten Körper mit einer symmetrischen Bilinearform noch sinnvoll definiert, kann aber dann den Wert ∞ annehmen.

Beweis. Die Existenz einer Basis mit den geforderten Eigenschaften folgt unmittelbar aus der Existenz einer Orthogonalbasis 4.2.3.11, indem wir deren Vektoren mit geeigneten Skalaren multiplizieren. Die Zahl der Nullen ist wohlbestimmt als die Dimension des Radikals V_0. Ich behaupte, daß die Zahl der Einsen beziehungsweise Minus-Einsen beschrieben werden kann als die jeweils maximal mögliche

Dimension für einen Teilraum, auf dem unsere Bilinearform positiv definit beziehungsweise negativ definit ist. Sind in der Tat $V_+ \subset V$ und $V_- \subset V$ Teilräume der maximal möglichen Dimension mit dieser Eigenschaft, ja sogar irgendwelche Teilräume mit dieser Eigenschaft, so folgt $V_- \cap V_0 = 0$ und $V_+ \cap (V_- \oplus V_0) = 0$ und damit

$$\dim V_+ + \dim V_- + \dim V_0 \leq \dim V$$

Für jede Orthogonalbasis B bezeichne nun B_+, B_- und B_0 die Teilmenge derjenigen Basisvektoren, deren Paarung mit sich selber eine positive Zahl beziehungsweise eine negative Zahl beziehungsweise Null ergibt. So haben wir natürlich

$$|B_+| + |B_-| + |B_0| = \dim V$$

Da aber wegen der Maximalität von $V_\pm$ offensichtlich gilt $|B_\pm| \leq \dim V_\pm$ und da $|B_0| \leq \dim V_0$ eh klar ist, muß bei diesen letzten Ungleichungen überall Gleichheit gelten. □

Satz 4.2.3.25 (**Hauptminoren-Kriterium für positive Definitheit**). *Eine reelle symmetrische $(n \times n)$-Matrix ist positiv definit genau dann, wenn für alle $l \leq n$ die quadratische Untermatrix, die man durch Wegstreichen der letzten l Spalten und der untersten l Zeilen erhält, eine positive Determinante hat.*

4.2.3.26. Unser Kriterium wird auch als **Hurwitz-Kriterium** zitiert. Es gilt mit demselben Beweis auch für Matrizen mit Einträgen in einem beliebigen angeordneten Körper. Die naheliegende Verallgemeinerung mit positiv semidefinit und nichtnegativen Determinanten gilt nicht, wie schon das Beispiel der Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(0, -1)$ zeigt. Weitere Definitheitskriterien speziell für Matrizen mit nichtnegativen Einträgen außerhalb der Diagonalen findet man in 23.1.10.

Beweis. Wählen wir eine Orthogonalbasis der zu unserer Matrix gehörigen symmetrischen Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$, so hat die Determinante der zugehörigen diagonalen Fundamentalmatrix nach unserer Transformationsformel 4.2.1.8 für die Fundamentalmatrizen zu verschiedenen Basen dasselbe Vorzeichen wie die Determinante unserer Ausgangsmatrix. Ist also unsere Ausgangsmatrix nicht positiv definit und hat positive Determinante, so existiert ein zweidimensionaler Teilraum, auf dem sie negativ definit ist. Dieser Teilraum schneidet die Hyperebene $(\mathbb{R}^{n-1} \times 0) \subset \mathbb{R}^n$ nach dem Dimensionssatz 3.2.2.9 nicht nur in Null. Ist also unsere Ausgangsmatrix nicht positiv definit und hat positive Determinante, so ist die quadratische Untermatrix, die man durch Wegstreichen der letzten Spalte und der untersten Zeile erhält, nicht positiv definit. Eine offensichtliche Induktion beendet den Beweis. □

Satz 4.2.3.27 (**Satz über Hauptachsentransformationen, Variante**). *Gegeben ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit zwei symmetrischen Bilinearformen,*

von denen die Erste ein Skalarprodukt ist, besitzt unser Vektorraum eine Basis, die sowohl orthonormal ist für die erste als auch orthogonal für die zweite Bilinearform.

4.2.3.28. Ist also in Formeln V unser endlichdimensionaler reeller Vektorraum und s ein Skalarprodukt auf V und a eine weitere symmetrische Bilinearform, so besitzt V eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ mit $s(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ und $a(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$. Dieselbe Aussage gilt mit demselben Beweis auch für endlichdimensionale komplexe Vektorräume mit zwei hermiteschen Bilinearformen, von denen die erste ein Skalarprodukt ist.

Beweis. Das ist nur eine Umformulierung des Satzes über Hauptachsentransformationen 4.2.2.7. Es ist aber schneller, den Beweis zu wiederholen. Wir finden nach 4.2.2.6 einen bezüglich unseres Skalarprodukts s selbstadjungierten Endomorphismus A von V mit

$$a(v, w) = s(Av, w) \;\; \forall v, w \in V$$

Nach dem Spektralsatz 4.1.12.15 besitzt V eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ in Bezug auf s aus Eigenvektoren von A. Sie leistet das Gewünschte. □

Korollar 4.2.3.29 (Singulärwertzerlegung). *Gegeben eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen reellen oder komplexen Skalarprodukträumen gibt es stets eine Orthonormalbasis des Definitionsbereichs, die auf eine Familie von paarweise orthogonalen Vektoren des Wertebereichs abgebildet wird.*

4.2.3.30. In geeigneten Orthonormalbasen ist die Matrix unserer Abbildung mithin eine Diagonalmatrix mit nichtnegativen Einträgen auf der Diagonalen. Diese Einträge sind wohldefiniert als die Quadratwurzeln der Eigenwerte des Produkts unserer Abbildung mit ihrer Adjungierten. Sie heißen die **Singulärwerte** unserer Abbildung.

4.2.3.31. Die Singulärwertzerlegung verallgemeinert unsere Polarzerlegungen von Automorphismen 4.1.12.23 und Endomorphismen 4.1.12.30: Wir erhalten genauer eine Polarzerlegung aus einer Singulärwertzerlegung, indem wir „zunächst die Vektoren unserer Orthonormalbasis mit einer positiv semidefiniten Abbildung auf die Länge ihrer Bilder strecken oder stauchen, und die so auf die richtige Länge gebrachten Vektoren durch eine Drehung in die richtigen Richtungen bringen“.

4.2.3.32. In der Sprache der Matrizen ausgedrückt besagt unser Korollar, daß es für jede reelle beziehungsweise komplexe Matrix A orthogonale beziehungsweise unitäre quadratische Matrizen C, K gibt derart, daß $CAK = D$ diagonal ist mit nichtnegativen Einträgen. Diese Einträge sind dann wieder wohldefiniert und heißen die **Singulärwerte** unserer Matrix. Die Darstellung als Produkt $A = C^{-1}DK^{-1}$ schließlich heißt eine **Singulärwertzerlegung** unserer Matrix A.

Beweis. Sei $f : V \to W$ unsere Abbildung. Wir betrachten auf V zusätzlich zum Skalarprodukt $s = s_V$ die positiv semidefinite symmetrische beziehungsweise hermitesche Bilinearform $a(u, v) := s_W(f(u), f(v))$. Die vorhergehenden Varianten 4.2.3.27 und 4.2.3.28 des Satzes über Hauptachsentransformationen liefern dann unmittelbar die Behauptung. □

4.2.3.33 (**Gram'sche Determinante und Volumen**). Gegeben ein reeller Skalarproduktraum V mit Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heißt die quadratische Matrix mit den Skalarprodukten $\langle v_i, v_j \rangle$ als Einträgen auch die **Gram'sche Matrix** unserer Vektoren und ihre Determinante die **Gram'sche Determinante**. Bilden unsere Vektoren eine Basis, so ist die Gram'sche Matrix die Fundamentalmatrix unseres Skalarprodukts bezüglich dieser Basis. Sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig, so ist die Gram'sche Determinante offensichtlich Null. Sind sie linear unabhängig, so mag man die Wurzel der Gram'schen Determinante in der schmutzigen Anschauung als das „Volumen des von den Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in ihrem Erzeugnis aufgespannten Parallelpipeds" verstehen. Sei in der Tat ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V = \mathbb{R}^n$ mit seinem Standardskalarprodukt. Für die Matrix $M := (v_1 | \ldots | v_n)$ mit unseren Vektoren in den Spalten bedeutet dann, wie bereits in 3.6.2.6 diskutiert, in der schmutzigen Anschauung $|\det M|$ das Volumen unseres Parallelpipeds. Unsere Gram'sche Matrix aber ist in diesem Fall gerade das Produkt $M^\top M$ und dessen Determinante ergibt sich zu $\det(M^\top M) = (\det M)^2$ wie behauptet.

Übungen

Übung 4.2.3.34. Ist s ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum über einem angeordneten Körper und $v_1, \ldots, v_n$ eine endliche Familie von Vektoren von V, so ist die Matrix $(s(v_i, v_j))_{ij}$ positiv semidefinit. Es reicht hierfür sogar, die Bilinearform s symmetrisch und positiv semidefinit anzunehmen. Hinweis: Man betrachte den Beweis von Satz 4.2.3.29 zur Singulärwertzerlegung.

Ergänzende Übung 4.2.3.35. Unter einer **bilinearen Paarung** von zwei Vektorräumen V, W über demselben Grundkörper K versteht man eine bilineare Abbildung $b : V \times W \to K$. Solch eine Paarung heißt **nichtausgeartet**, wenn es für jedes $v \in V \backslash 0$ ein $w \in W$ gibt mit $b(v, w) \neq 0$ und umgekehrt auch für jedes $w \in W \backslash 0$ ein $v \in V$ mit $b(v, w) \neq 0$. Andernfalls heißt unsere Paarung **ausgeartet**. Man zeige das **Lemma von Mackey**: Gegeben eine nichtausgeartete Paarung $b : V \times W \to K$ zwischen zwei Vektorräumen V, W unendlicher Dimension mit abzählbarer Basis gibt es stets eine Basis $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von V und eine Basis $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von W derart, daß gilt $b(v_i, w_j) = \delta_{ij}$. Hinweis: Man beginne mit zwei beliebigen Basen und wechsle geeignet Basen.

Ergänzende Übung 4.2.3.36. Gegeben zwei Vektorräume V, W mit einer bilinearen Paarung $b : V \times W \to K$ und eine Teilmenge $T \subset W$ setzen wir ganz allgemein

$$T^\perp := \{v \in V \mid b(v,t) = 0 \quad \forall t \in T\}$$

und nennen $T^\perp$ wie in 4.1.3.17 den **Orthogonalraum von** U. Gegeben zwei Vektorräume V, W mit einer nichtausgearteten Paarung $b : V \times W \to K$ und ein Untervektorraum $U \subset W$ zeige man für die Dimension des Orthogonalraums $U^\perp$ von U die Formel $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

Ergänzende Übung 4.2.3.37 (**Restriktionen reeller quadratischer Formen**). Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer quadratischen Form alias symmetrischen Bilinearform s und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum der Kodimension $\operatorname{codim}(U \subset V) = 1$. Sei (V, s) vom Typ (p, m, n) in der Terminologie aus 4.2.3.24. So gibt es für den Typ von U nur die vier Alternativen $(p-1, m, n), (p, m-1, n), (p, m, n-1)$ und $(p-1, m-1, n+1)$. Des weiteren werden von diesen Alternativen alle, die keine negativen Einträge haben, auch tatsächlich realisiert. Hinweis: Am einfachsten ist der Fall $U^\perp + U = V$. Sonst gilt $V^\perp \subset U^\perp \subset U$ und man unterscheidet die Fälle $V^\perp = U^\perp$ und $V^\perp \neq U^\perp$. Im zweiten Fall wählt man $v \in V \backslash U$ beliebig und findet $w \in U^\perp$ mit $s(v, w) \neq 0$. Dann ist die Form nichtausgeartet auf $\langle v, w\rangle$ und das orthogonale Komplement $\langle v, w\rangle^\perp$ dieser Ebene ist auch ein Vektorraumkomplement und der Fall ist erledigt. Im ersten Fall kann man zu $U/U^\perp \subset V/U^\perp$ übergehen. Da dann die Form auf $U/U^\perp$ nicht ausgeartet ist, ist wieder das orthogonale Komplement ein Vektorraumkomplement und das Argument ist schnell fertig.

Ergänzende Übung 4.2.3.38 (**Signatur auf Subquotienten**). Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer nichtausgearteten quadratischen Form alias symmetrischen Bilinearform s und sei $S \subset V$ ein Untervektorraum, auf dem die Restriktion unserer Bilinearform verschwindet. So hat die auf $S^\perp/S$ induzierte Form dieselbe Signatur wie die ursprüngliche Form. Hinweis: Man mag sich mit Induktion auf den Fall $\dim S = 1$ zurückziehen und diesen Fall auf die vorhergehende Übung 4.2.3.37 zurückführen.

Ergänzende Übung 4.2.3.39. Man zeige, daß im Raum aller invertierbaren symmetrischen reellen quadratischen Matrizen zwei Matrizen genau dann zu derselben Wegzusammenhangskomponente gehören, wenn sie denselben Typ im Sinne von 4.2.3.24 haben.

Ergänzende Übung 4.2.3.40. Gegeben zwei verschiedene Punkte der Ebene $p, q \in \mathbb{R}^2$ und eine positive Zahl $b < \|p - q\|$ zeige man, daß die Punkte $r \in \mathbb{R}^2$ mit $\|r - p\| - \|r - q\| = b$ einen Hyperbelast bilden, als da heißt, daß die Menge dieser Punkte unter einer geeigneten Bewegung in die Menge der Lösungen mit positiver x-Koordinate eines Gleichungssystems der Gestalt $x^2 - \mu y^2 = c$ mit

μ, c positiv übergeht. Gegeben zwei verschiedene Punkte der Ebene $p, q \in \mathbb{R}^2$ und eine positive Zahl $a > \|p - q\|$ zeige man weiter, daß die Punkte $r \in \mathbb{R}^2$ mit $\|r - p\| + \|r - q\| = a$ eine Ellipse bilden, als da heißt, daß die Menge dieser Punkte unter einer geeigneten Bewegung in die Menge der Lösungen eines Gleichungssystems der Gestalt $x^2 + \mu y^2 = c$ mit μ, c positiv übergeht. So erstellen übrigends Gärtner elliptische Beete: Sie rammen zwei Pflöcke ein, legen um diese eine Seilschlaufe und fahren mit einem dritten Pflock in der Schlaufe um diese beiden Pflöcke herum, soweit außen wie möglich.

Übung 4.2.3.41 (**Inhomogene quadratische Formen**). Man zeige: Gegeben eine Polynomfunktion vom Grad höchstens Zwei mit Koeffizienten in einem Körper K mit $\operatorname{char} K \neq 2$, also eine Abbildung $q : K^n \xrightarrow{\sim} K$ der Gestalt

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \leq j} c_{ij} x_i x_j + \sum_i b_i x_i + a$$

gibt es entweder einen Automorphismus von affinen Räumen $D : K^n \to K^n$ mit

$$(q \circ D)(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 + c$$

oder einen Automorphismus von affinen Räumen $D : K^n \to K^n$ mit

$$(q \circ D)(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1} y_{n-1}^2 + y_n$$

für geeignete $\lambda_i, c \in K$. Hier können wir sogar erreichen, daß alle λ_i in einem vorgegebenen Repräsentantensystem des Quotienten $K^\times/(K^\times)^2$ disjunkt vereinigt mit der Null liegen, im Fall $K = \mathbb{R}$ also etwa in $\{-1, 0, 1\}$ oder im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers in $\{0, 1\}$.

Übung 4.2.3.42 (**Klassifikation inhomogener quadratischer Formen**). Gegeben ein Körper K und ein affiner Raum E über K verstehen wir unter einer **inhomogenen quadratischen Form auf** E eine Abbildung $Q : E \to K$, die sich schreiben läßt in der Gestalt $Q(p + \vec{v}) = q(\vec{v}) + a(p + \vec{v})$ mit $q : \vec{E} \to K$ einer quadratischen Form auf $\vec{E}$ und $a : E \to K$ affin. Man diskutiere die Klassifikation inhomogener quadratischer Formen auf endlichdimensionalen affinen Räumen über den Körpern $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. Hinweis: 4.2.3.41.

Übung 4.2.3.43 (**Klassifikation von Geradenpaaren im Raum**). Man zeige, daß die möglichen Vorgaben bestehend aus einem ungeordneten Paar von Geraden in einem dreidimensionalen affinen Raum über einem festen Körper in genau vier Isomorphieklassen zerfallen. In der Schule lernt man diese man üblicherweise als „gleich, parallel, sich schneidend und windschief“ kennen.

4.2.4 Satz von Witt*

4.2.4.1. Seien (V, a) und (W, b) Vektorräume mit symmetrischen Bilinearformen. Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt **isometrisch**, wenn gilt

$$a(u, v) = b(f(u), f(v)) \quad \forall u, v \in V$$

Satz 4.2.4.2 (von Witt). *Seien K ein Körper einer Charakteristik $\operatorname{char} K \neq 2$ und V ein K-Vektorraum endlicher Dimension und $b : V \times V \to K$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform. Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum und $\varphi : U \hookrightarrow V$ eine isometrische Injektion, so gibt es eine Fortsetzung von φ zu einem isometrischen Isomorphismus $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V$.*

Beispiel 4.2.4.3. Ist etwa der $\mathbb{R}^4$ versehen mit der Lorentzmetrik, so können je zwei von Null verschiedene lichtartige Vektoren ineinander überführt werden durch einen Automorphismus, der die Lorentzmetrik erhält.

Beweis. Es reicht, die Existenz einer Fortsetzung von φ auf einen echt größeren Teilraum nachzuweisen. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: Die Einschränkung $b : U \times U \to K$ unserer Form ist ausgeartet. Dann gibt es $u \in U \backslash 0$ mit $b(u, v) = 0 \quad \forall v \in U$. Wir suchen zunächst ein $u_1 \in V$ mit $b(u, u_1) = 1$ und finden es, da b auf V nicht ausgeartet ist. Indem wir notfalls u_1 durch $u_1 + \lambda u$ mit $\lambda \in K$ ersetzen, dürfen wir $b(u_1, u_1) = 0$ annehmen, und nach Annahme gilt $u_1 \notin U$. Ebenso finden wir $u_2 \in V$ mit $b(u_2, \varphi(v)) = b(u_1, v)$ für alle $v \in U$, ja sogar für alle $v \in V$. Wieder können wir, indem wir notfalls u_2 durch $u_2 + \mu\varphi(u)$ ersetzen, $b(u_2, u_2) = 0$ annehmen. Dann aber können wir φ ausdehnen auf $U + \langle u_1 \rangle$ durch die Vorschrift $\varphi(u_1) = u_2$. Das erledigt den Fall, daß b auf U ausgeartet ist.

Fall 2: Die Einschränkung von b auf U ist nichtausgeartet. In diesem Fall argumentieren wir mit Induktion über $\dim_K U$. Für die Induktionsbasis sei $U = \langle u \rangle$ eindimensional. Dann gilt also $b(u, u) \neq 0$ und ebenso $b(\varphi(u), \varphi(u)) \neq 0$. Gälte $b(u + \varphi(u), u + \varphi(u)) = 0 = b(u - \varphi(u), u - \varphi(u))$, so folgte $2b(u, u) + 2b(u, \varphi(u)) = 0 = 2b(u, u) - 2b(u, \varphi(u))$ und damit $4b(u, u) = 0$ alias $b(u, u) = 0$. Da das nicht sein kann, dürfen wir, indem wir notfalls φ durch $-\varphi$ ersetzen, für $v := u - \varphi(u)$ annehmen, daß gilt $b(v, v) \neq 0$. Dann betrachten wir die lineare Abbildung $s = s_v$ mit $s(v) = -v$ und $s(w) = w \quad \forall w \in v^\perp$. Sie ist isometrisch und hat die Eigenschaft $s : u + \varphi(u) \mapsto u + \varphi(u)$ und $s : u - \varphi(u) \mapsto \varphi(u) - u$ und folglich $s : u \mapsto \varphi(u)$. Diese Abbildung dehnt folglich φ sogar orthogonal auf ganz V aus. Für den Induktionsschritt sei $\dim_K U > 1$. Dann können wir sicher $U = W \oplus W_U^\perp$ zerlegen mit $W \neq 0 \neq W_U^\perp$, wobei mit $W_U^\perp$ der Orthogonalraum in U gemeint ist. Zu unserem $\varphi : U \hookrightarrow V$ gibt es nach Induktionsannahme einen mit der Bilinarform verträglichen Automorphismus $s : V \xrightarrow{\sim} V$ mit $s|W = \varphi|W$.

Also ist $s^{-1} \circ \varphi : U \hookrightarrow V$ die Identität auf W und seine Restriktion zu einer Einbettung $W_U^\perp \hookrightarrow W^\perp$ läßt sich wieder nach Induktion zu einem isometrischen Isomorphismus $t : W^\perp \xrightarrow{\sim} W^\perp$ ausdehnen. Dann ist $(\mathrm{id}_W \oplus t) : V \xrightarrow{\sim} V$ eine Ausdehnung von $s^{-1} \circ \varphi$ und damit $s \circ (\mathrm{id}_W \oplus t)$ die gesuchte Ausdehnung von φ. $\square$

Übungen

Übung 4.2.4.4 (**Variante des Satzes von Witt für ausgeartete Bilinearformen**). Man gebe ein Gegenbeispiel zum Satz von Witt an im Fall einer ausgearteten symmetrischen Bilinearform. Man zeige andererseits, daß die Aussage des Satzes weiter gilt, wenn wir ausgeartete Bilinearformen b erlauben, dafür aber zusätzlich $U \cap \mathrm{rad}(b) = \varphi(U) \cap \mathrm{rad}(b) = 0$ fordern.

4.2.5 Alternierende Bilinearformen

4.2.5.1. Man erinnere aus 3.6.3.1, daß eine Bilinearform **alternierend** heißt, wenn Null herauskommt, sobald wir zweimal denselben Vektor einsetzen. Ich kann für dieses Konzept leider keine Anschauung anbieten.

Satz 4.2.5.2 (**Klassifikation alternierender Bilinearformen**). *Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem Körper K und eine alternierende Bilinearform $\omega : V \times V \to K$ besitzt V stets eine angeordnete Basis $\mathcal{B}$, bezüglich derer die Fundamentalmatrix von ω die Gestalt*

$$\mathrm{F}_{\mathcal{B}}(\omega) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Die Zahl der Zweierblöcke hängt hierbei nicht von der Wahl der Basis ab.

Vorschau 4.2.5.3. Eine Variante für freie abelsche Gruppen mit alternierender nicht ausgearteter Bilinearform wird in 7.2.9.1 bewiesen.

Beweis. Ist unsere Form nicht Null, so finden wir $v, w \in V$ mit $\omega(v, w) \neq 0$. Durch Multiplikation von v mit einem Skalar erreichen wir sogar $\omega(v, w) = 1$

und damit $\omega(w, v) = -1$. Diese beiden Vektoren v, w können wir schon einmal als die ersten beiden Vektoren unserer Basis in spe festhalten. Wir betrachten nun die Linearformen $\omega(v, \ ) : V \to K$ und $\omega(w, \ ) : V \to K$. Sie sind beide nicht Null und ihre Kerne sind verschieden, genauer liegt v im Kern der ersten, nicht aber der zweiten Abbildung und w im Kern der Zweiten, nicht aber der Ersten. Für den Schnitt

$$S = \{u \in V \mid \omega(v, u) = 0 = \omega(w, u)\}$$

haben wir also $\dim S = \dim V - 2$ und $(Kv \oplus Kw) \cap S = 0$. Aus Dimensionsgründen folgt

$$V = (Kv \oplus Kw) \oplus S$$

und eine offensichtliche Induktion über die Dimension beendet den Beweis der Existenz. Die Zahl der Nullen nach den Zweierkästchen kann beschrieben werden als die Dimension des Radikals unserer Bilinearform und ist deshalb ebenso wie die Zahl der Zweierkästchen von der Wahl der Basis unabhängig. □

4.2.5.4. Eine im Sinne von 4.2.3.35 nichtausgeartete alternierende Bilinearform heißt auch eine **symplektische Form**, und ein mit einer symplektischen Form versehener Vektorraum heißt ein **symplektischer Vektorraum**. Symplektische Vektorräume spielen in der Hamilton'schen Mechanik eine wichtige Rolle. Nach 4.2.5.2 ist die Dimension eines endlichdimensionalen symplektischen Vektorraums stets gerade.

Übungen

Übung 4.2.5.5. In einem endlichdimensionalen symplektischen Vektorraum können je zwei von Null verschiedene Vektoren durch einen die symplektische Form erhaltenden Automorphismus ineinander überführt werden.

Übung 4.2.5.6. Gegeben eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V über einem Körper der Charakteristik Zwei existiert stets eine Zerlegung in paarweise orthogonale Teilräume $V = V_d \oplus V_a$ derart, daß die Restriktion auf V_d eine Orthogonalbasis besitzt und die Restriktion auf V_a alternierend ist. Man zeige durch ein dreidimensionales Beispiel, daß selbst im Fall nichtausgearteter Formen die Dimensionen von V_d und V_a durch unsere Bilinearform keineswegs eindeutig festgelegt werden.

Ergänzende Übung 4.2.5.7. Gegeben eine alternierende Bilinearform ω auf einem Vektorraum V der Dimension $2n$ zeige man, daß man eine alternierende $(2n)$-Multilinearform $\omega^{\wedge n}$ auf V erklären kann durch die Vorschrift

$$\omega^{\wedge n}(v_1, \ldots, v_{2n}) := \sum_{\sigma \in R} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}) \ldots \omega(v_{\sigma(2n-1)}, v_{\sigma(2n)})$$

mit $R \subset \mathcal{S}_{2n}$ der Menge aller Permutationen von $\{1, \ldots, 2n\}$ mit den Eigenschaften $\sigma(2i-1) < \sigma(2i)$ für alle i und $\sigma(1) < \sigma(3) < \ldots < \sigma(2n-1)$. Für $g \in \mathrm{GL}(V)$ zeige man $(\omega \circ (g \times g))^{\wedge n} = (\det g)\omega^{\wedge n}$. Weiter zeige man, daß für ω eine symplektische Form die Multilinearform $\omega^{\wedge n}$ von Null verschieden ist. Sobald Sie einmal mit dem Dachprodukt $\wedge$ in der äußeren Algebra $\bigwedge V^*$ vertraut sind, können Sie $\omega^{\wedge n}$ auch als die n-te Potenz $\omega^{\wedge n} = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ in der äußeren Algebra verstehen, daher die Notation.

Ergänzende Übung 4.2.5.8. Sei K ein Körper. Gegeben eine alternierende Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2n; K)$ alias eine Matrix mit $A = -A^\top$ und mit Nullen auf der Diagonale erklären wir ihre **Pfaff'sche Determinante** $\mathrm{Pf}(A)$ mithilfe ihrer alternierenden Bilinearform $\omega_A(v, w) := v^\top A w$ und der zugehörigen Multilinearform $\omega_A^{\wedge n}$ aus 4.2.5.7 durch die Identität

$$\omega_A^{\wedge n} = \mathrm{Pf}(A) \det$$

im eindimensionalen Raum $\mathrm{Alt}^{2n}(K^{2n})$ aller Multilinearformen auf dem K^{2n}. Für $B \in \mathrm{Mat}(2n; K)$ folgere man

$$\mathrm{Pf}(B^\top A B) = (\det B)\,\mathrm{Pf}(A)$$

Weiter zeige man $\mathrm{Pf}(S) = 1$ für $S \in \mathrm{Mat}(2n; K)$ die blockdiagonale Matrix mit n Blöcken $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und folgere, daß das Quadrat der Paff'schen Determinante die übliche Determinante ist, in Formeln

$$\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A)$$

Ergänzende Übung 4.2.5.9. Gegeben ein symplektischer Vektorraum (V, ω) heißt ein Vektorraumautomorphismus $g : V \xrightarrow{\sim} V$ **symplektisch**, wenn gilt $\omega(gv, gw) = \omega(v, w)\ \forall v, w \in V$. Man zeige, daß jeder symplektische Automorphismus g eines endlichdimensionalen symplektischen Vektorraums die Determinante $\det(g) = 1$ hat. Hinweis: 4.2.5.7.

Ergänzende Übung 4.2.5.10. Gegeben ein Vektorraum V erhalten wir eine symplektische Form ω auf $V \oplus V^*$ durch die Vorschrift

$$\omega((v, \phi), (w, \psi)) := \phi(w) - \psi(v)$$

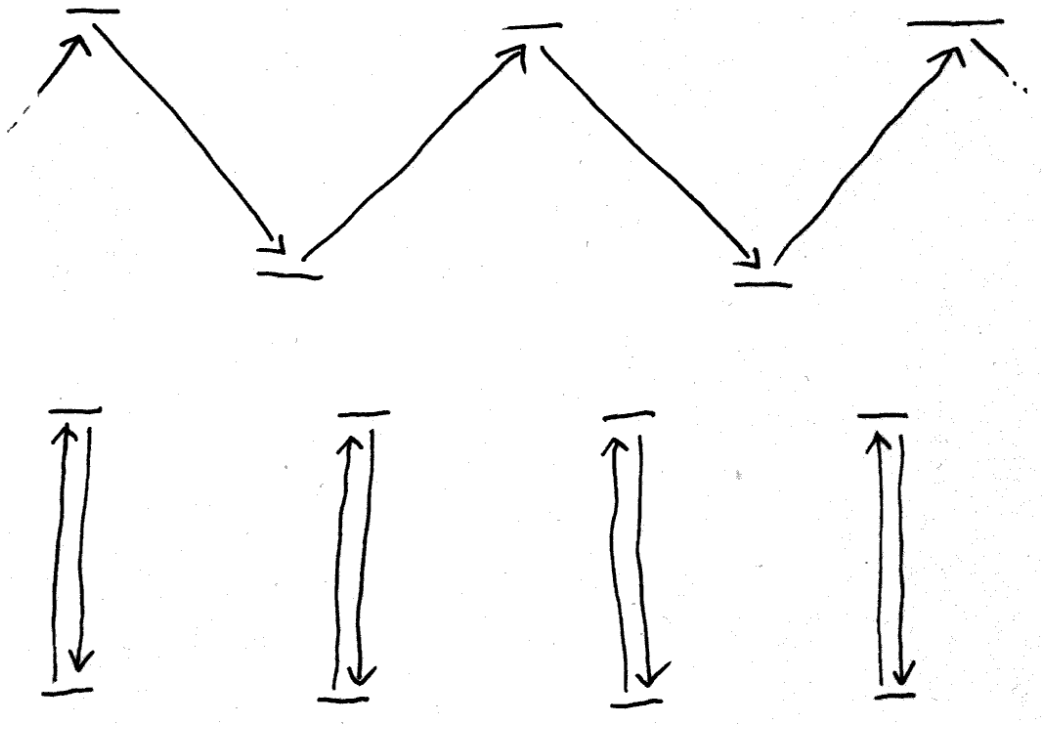
4.2.6 Relativistische Raumzeit*

4.2.6.1 (**Erinnerungen zu klassischem Raum und klassischer Zeit**). In der Modellierung von Zeit und Raum für die Belange der Newton'schen Mechanik in **??** oder 4.1.6.4 haben wir erst einmal ignoriert, daß die Erde sich um sich selber dreht

und dabei gleichzeitig um die Sonne rast, die sich hinwiederum mit unvorstellbarer Geschwindigkeit um das Zentrum der Milchstraße bewegt, und so weiter, und sind schlicht von einem dreidimensionalen affinen Raum ausgegangen, von dessen Punkten man einige ganz explizit als Kirchturmspitzen, Zimmerecken und dergleichen angeben kann. Dann haben wir eine Gruppe von „Bewegungen“ unseres Raums postuliert und verwendet, um den eindimensionalen Raum der Längen einzuführen, in dem das Pariser Urmeter eine Basis auszeichnet. Zusätzlich haben wir einen orientierten eindimensionalen affinen Raum aller „Zeitpunkte“ postuliert und in dessen Richtungsraum die Basis „Sekunde“ mithilfe von Tag und ausgezeichnet. In diesem Rahmen ist dann schon klar, was gemeint ist, wenn wir sagen, die Lichtgeschwindigkeit betrage so in etwa $300\ 000$ Kilometer pro Sekunde.

4.2.6.2 (**Motivation für relativistische Raumzeit**). Sobald wir jedoch dies alles nicht mehr ignorieren, ist es plötzlich gar nicht mehr so klar: Es gibt dann sozusagen gar keinen „festen Raum“ mehr, in dem unsere Lichtgeschwindigkeit konstant sein könnte, sondern „alles ist relativ“. Denken wir uns etwa zwei Raketen, die in entgegengesetzter Richtung aneinander vorbeifliegen, und einen Lichtstrahl, der in Richtung der einen Rakete zwischen ihnen hindurchsaust. Müßte in diesem Fall nicht von den beiden Besatzungen für diesen Lichtstrahl eine unterschiedliche Geschwindigkeit gemessen werden? Statt im weiteren stets von „Rakete Eins“ und „Rakete Zwei“ zu reden, denken wir uns der Klarheit der Darstellung halber lieber den einen Beobachter in einem sehr langen Zug und nennen ihn den Schaffner, und denken uns den anderen Beobachter auf einem Bahnhof, durch den der besagte Zug fährt, und nennen ihn den Bahnhofsvorsteher. Der Schaffner mißt seinen Zug sorgfältig aus und setzt sich genau in die Mitte. Gerade zu dem Zeitpunkt, zu dem sich Schaffner und Bahnhofsvorsteher gegenüberstehen, sehen beide auch noch die Vorder- und die Rücklichter des Zuges aufleuchten. Daraus ziehen sie jedoch unterschiedliche Schlüsse. Der Schaffner sagt: Na klar, die sind gleichzeitig angegangen. Der Bahnhofsvorsteher dahingegen meint: Als diese Lampen ihr Licht ausgesandt haben, das ist ja nun eine kleine Weile her, war die Lokomotive noch näher am Bahnhof als der Schlußwagen, folglich müssen die Lichter des Schlußwagens etwas früher angegangen sein, damit ihr Licht dennoch meine Augen zur selben Zeit erreichen konnte wie das Licht aus den Lampen der Lokomotive. Wer hat aber denn nun recht? Unmittelbar würde man wohl erst einmal sagen: Der Bahnhofsvorsteher hat recht, denn er bewegt sich nicht; Dann aber erinnert man sich, daß ja auch der Bahnhof selbst durchs Weltall rast und daß es sich auch um unsere zwei Raketen handeln könnte, und dann fällt uns die Entscheidung möglicherweise schon nicht mehr so leicht, wer von beiden denn nun recht hat.

4.2.6.3 (**Das Konzept einer absoluten Zeit muß aufgegeben werden**). Die „Re-



Dies Bild zeigt eine ruhende und eine bewegte „Lichtuhr“, bestehend aus zwei Spiegeln und einem Zähler, der zählt, wie oft ein Lichtstrahl dazwischen hin- und hersaust. Offensichtlich scheint die bewegte Lichtuhr langsamer zu gehen als die Zeit im im Koordinatensystem der ruhenden Lichtuhr. Hier müssen wir uns denken, daß im ruhenden Koordinatensystem ganz viele Lichtuhren aufgestellt und synchronisiert wurden wie oben schematisch dargestellt. Der Beobachter im bewegten System wird jedoch einwenden, daß von seinem Gesichtspunkt aus diese ganzen Uhren keineswegs synchron gehen.

lativitätstheorie“ löst diesen Widerspruch wie folgt auf: Beide haben recht und wir müssen unsere Vorstellung von einer „absoluten Zeit“ aufgeben. Was für den einen Beobachter gleichzeitig ist, ist es für den anderen noch lange nicht! Präziser modelliert man in der Relativitätstheorie Raum und Zeit gemeinsam als eine Menge von „Raum-Zeit-Punkten“ oder „Ereignissen“. Das Aufleuchten eines Vorderlichts unseres Zuges etwa wäre solch ein Ereignis, oder auch das Aufleuchten eines Rücklichts. Jeder unserer beiden Beobachter ordnet jedem derartigen Ereignis in einer Weise, die wir noch ausführlich diskutieren werden, vier reelle Zahlen zu: Drei Raumkoordinaten und eine Zeitkoordinate. Und in unserem speziellen Fall würde eben der Schaffner den beiden fraglichen Aufleucht-Ereignissen dieselbe Zeitkoordinate zuordnen, der Bahnhofsvorsteher dahingegen verschiedene Zeitkoordinaten.

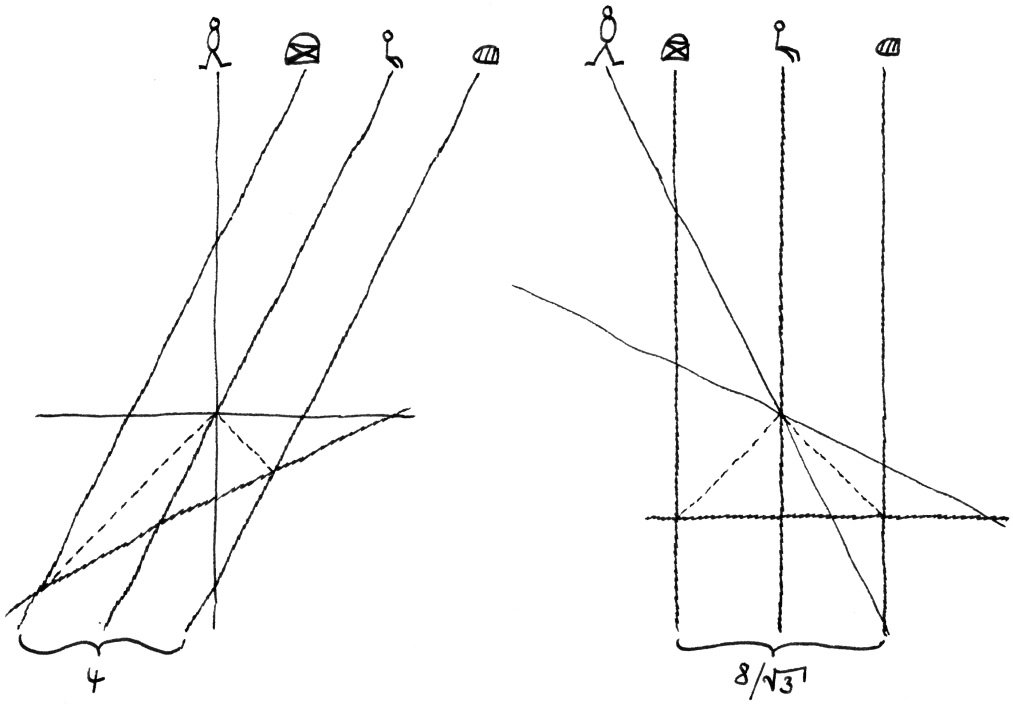
4.2.6.4 (**Längenkontraktion**). Das hat hinwiederum auch für die Längenmessung Konsequenzen: Der Bahnhofsvorsteher würde ja wohl vernünftigerweise die Länge des Zuges erklären, indem er gleichzeitig in seinem Sinne die Ortskoordinaten von Lokomotive und Schlußwagen bestimmt und die Differenz bildet. Er wird dabei eine kürzere Länge erhalten als der Schaffner, der seinerseits behaupten würde, der Bahnhofsvorsteher habe etwas früher den Ort der Lokomotive bestimmt und erst etwas später den Ort des Schlußwagens. Wie ist es aber nun um die Breite des Zuges bestellt? Nun, beide messen in der Tat dieselbe Breite für unseren Zug, was die absonderliche Konsequenz hat, daß der Bahnhofsvorsteher mit vollem Recht behaupten wird, ein Zollstock, mit dem der Schaffner die Breite des Zuges gemessen hat, verkürze sich, wenn der Schaffner ihn nun in Richtung des Zuges dreht, um damit die Länge des Zuges auszumessen. Man mache sich jedoch auch bewußt, daß ein Zollstock ja genau genommen aus einer großen Menge von Atomen besteht, deren wechselseitige Position durch elektromagnetische Kräfte bestimmt wird, also in gewisser Weise durch den Austausch von Lichtsignalen. Nach diesen informellen Vorüberlegungen beginnen wir nun mit der präzisen Formulierung.

4.2.6.5. In der **Relativitätstheorie** modelliert man Raum und Zeit zusammen als eine Menge

$$X$$

Deren Elemente heißen **Raum-Zeit-Punkte** oder auch **Ereignisse**. Die Menge X selbst nennt man die **Raumzeit**. Die Bewegung einer Fliege etwa wird durch eine Teilmenge von X beschrieben. Ort und Zeit einer Klausur wird beschrieben durch ein Element von X oder, da eine Klausur ja eine Weile dauert und in einem nicht ganz kleinen Hörsaal stattfindet, vielleicht auch eher durch eine Teilmenge von X. Die Ausbreitung des Lichts modellieren wir durch eine Teilmenge

$$\mathcal{L}^+ \subset X^2$$



Diese Bilder stellen die Sichtweisen des Bahnhofsvorstehers und des Schaffners in 4.2.6.3 dar. Beide benutzen Einheiten, in denen die Lichtgeschwindigkeit Eins ist. Die Lichtbewegung ist jeweils gestrichelt eingetragen. Im linken Schaubild hat der Bahnhofsvorsteher Ort gegen Zeit aufgetragen von Rücklicht, Schaffner und Vorderlicht, wobei seine Zeitachse senkrecht nach oben zeigt und seine Ortsachse waagerecht nach rechts. Der Zug fährt halbe Lichtgeschwindigkeit, und die Zackenlinie durch die beiden „Lampen-gehen-an-Punkte“ besteht aus Ereignissen, denen der Schaffner allen dieselbe Zeitkoordinate geben würde, sagen wir die Zeitkoordinate Null. Das rechte Schaubild hat der Schaffner gezeichnet. Beide wählen ihre Orts- und Zeitkoordinaten $(x(p), t(p)) \in \mathbb{R}^2$ für den Bahnhofsvorsteher beziehungsweise $(x'(p), t'(p)) \in \mathbb{R}^2$ für den Schaffner eines Ereignisses p derart, daß für je zwei Ereignisse p, q gilt

$$(x(p) - x(q))^2 - (t(p) - t(q))^2 = (x'(p) - x'(q))^2 - (t'(p) - t'(q))^2$$

Sie finden so die Umrechnung $x' = (\sqrt{1+b^2})x + bt$ und $t' = bx + (\sqrt{1+b^2})t + 4/\sqrt{3}$ mit $b = -\sqrt{1/3}$. Wie Sie sehen, scheint dem Schaffner sein Zug um den Faktor $2/\sqrt{3}$ länger als dem Bahnhofsvorsteher.

Wir denken uns diese Teilmenge in der schmutzigen Anschauung als die Menge aller Paare von Raum-Zeit-Punkten $(p, q) \in X^2$ derart, daß eine am Raum-Zeitpunkt p stattfindende Explosion am Raum-Zeitpunkt q gesehen würde. Wir sagen dann, q liege **kausal lichtartig zu** p. Um mathematische Präzision zu erreichen, vereinbaren wir explizit $(p, p) \in \mathcal{L}^+ \ \forall p \in X$.

4.2.6.6. In der **speziellen Relativitätstheorie** nimmt man zusätzlich an, daß X so mit der Struktur eines vierdimensionalen reellen affinen Raums versehen werden kann, daß die folgenden beiden Verträglichkeiten zwischen $\mathcal{L}^+$ und dieser Struktur gelten: Erstens soll $\mathcal{L}^+$ stabil sein unter der diagonalen Operation des Richtungsraums $\vec{X}$ auf X^2. Liegt also q kausal lichtartig zu p, so soll auch $q + v$ kausal lichtartig zu $p + v$ liegen für jeden Richungsvektor $v \in \vec{X}$. Und zweitens soll die Menge der **kausal lichtartigen Vektoren**

$$\vec{\mathcal{L}}^+ := \{v \in \vec{X} \mid (p, p + v) \in \mathcal{L}^+ \ \forall p \in X\}$$

die „Hälfte einer Quadrik vom Typ $(1, 1, 1, -1)$“ sein, es soll also in Formeln linear unabhängige Linearformen $x, y, z, t : \vec{X} \to \mathbb{R}$ geben mit

$$\vec{\mathcal{L}}^+ = \{v \in \vec{X} \mid x(v)^2 + y(v)^2 + z(v)^2 - t(v)^2 = 0,\ t(v) \geq 0\}$$

Einen Vektor, der entweder selbst kausal lichtartig ist oder dessen Negatives kausal lichtartig ist, heißt **lichtartig**. Die Elemente der konvexen Hülle der Menge der kausal lichtartigen Vektoren nennt man dann **kausal**, ihre Negativen **antikausal**, die weder kausalen noch antikausalen Vektoren **raumartig** und die weder raumartigen noch lichtartigen Vektoren **zeitartig**. In unserer Terminologie ist also der Nullvektor weder raumartig noch zeitartig. Die Bezeichnung als „kausaler Vektor“ soll das fundamentale Postulat zum Ausdruck bringen, daß ein Ereignis nur Ereignisse beeinflussen kann, die von ihm aus durch die Addition derartiger Vektoren erreichbar sind, daß also „keine Wirkung schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausgeübt werden kann“.

Übungen

Übung 4.2.6.7 (**Der Schaffner will den Zollstock in einen Gulli werfen**). Nehmen wir in 4.2.6.4 einmal an, der Zollstock des Schaffners sei etwas länger als der Durchmesser eines offenen Gullis auf dem Bahnhof. Der Schaffner streckt den Arm aus dem Fenster und läßt den Zollstock genau zum richtigen Zeitpunkt genau waagerecht runterfallen. Paßt er dann dank Längenkontraktion doch durch die Öffnung des Gullis, oder eben nicht? Wie beschreibt der Bahnhofsvorsteher, was er sieht?

4.2.7 Relativistische Längeneinheiten*

4.2.7.1. Die Papierebene haben wir in 4.1.1.10 als Kongruenzebene durch die Angabe einer ausgezeichneten Gruppe von Kongruenzen modelliert und haben gesehen, wie dieses Datum eine euklidische Struktur 4.1.5.1 auf dem Richtungsraum liefert und damit nach 4.1.5.12 eine Gerade von Längeneinheiten. Für den Anschauungsraum der klassischen Mechanik kann man genauso vorgehen, vergleiche 4.1.6. Im Fall des Raumzeit gehen wir stattdessen davon aus, daß wir in ihrem Richtungsraum den Lichtkegel kennen, und zeigen im folgenden, wie man davon ausgehend eine „pseudoeuklidische Struktur“ erklären kann, aus der wir dann ein Gerade von „relativistischen Längeneinheiten“ konstruieren.

Lemma 4.2.7.2 (Bestimmung quadratischer Formen aus ihren Nullstellen). *Haben zwei nichtausgeartete indefinite quadratische Formen auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum dieselben Nullstellen, so sind sie linear abhängig alias gleich bis auf eine multiplikative Konstante.*

Beweis. Sicher reicht es zu zeigen, daß jede quadratische Form $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die für $0 < s < n$ auf der Nullstellenmenge $\mathcal{L}$ des Polynoms $x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 \ldots - x_n^2$ verschwindet, ein skalares Vielfaches dieses Polynoms sein muß. Schränken wir unsere Form auf die Ebene ein, auf der alle Koordinaten außer x_1 und x_n verschwinden, so wird sie nach 3.5.4.5 ein skalares Vielfaches von $x_1^2 - x_n^2 = (x_1 + x_n)(x_1 - x_n)$. Schränken wir unsere Form allgemeiner auf eine Ebene $\{r\vec{v} + t\vec{w}\}$ ein mit $\vec{v} \in \mathbb{R}^s \times 0$ und $\vec{w} \in 0 \times \mathbb{R}^{n-s}$ Vektoren der euklidischen Norm $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$, so gibt es aus demselben Grund $a(\vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}^\times$ mit

$$q(r\vec{v} + t\vec{w}) = a(\vec{v}, \vec{w})(r^2 - t^2)$$

von $r^2 - t^2 = (r + t)(r - t)$. Auswerten auf $\vec{v}$ zeigt $a(\vec{v}, \vec{w}_1) = a(\vec{v}, \vec{w}_2)$ für alle $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ und Auswerten auf $\vec{w}$ zeigt ebenso $a(\vec{v}_1, \vec{w}) = a(\vec{v}_2, \vec{w})$ für alle $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Die Behauptung folgt. □

4.2.7.3. Unter einer **bilinearen Struktur** auf einem reellen Vektorraum V verstehen wir einen eindimensionalen Untervektorraum $S \subset \mathrm{Bil}(V)$ im Raum der Bilinearformen auf V. Ein **bilinear strukturierter Vektorraum** ist ein Paar (V, S) aus einem reellen Vektorraum mit einer bilinearen Struktur S. Den **Nullkegel** in einem strukturierten Vektorraum (V, S) erklären wir als die Menge aller Vektoren $v \in V$ mit $s(v, v) = 0 \ \forall s \in S$. Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ von bilinear strukturierten Vektorräumen $(V, S), (W, T)$ heißt **strukturverträglich**, wenn die Bilinearformen aus S genau die Rückzüge von Bilinearformen aus T sind. Einen strukturverträglichen Automorphismus eines bilinear strukturierten Vektorraums nennen wir eine **lineare Ähnlichkeitsabbildung**.

4.2.7.4. Eine bilineare Struktur S, deren von Null verschiedene Elemente nichtausgeartete symmetrische Bilinearformen sind, nennen wir eine **pseudoeukliditische Struktur**. Ist auf dem eindimensionalen Raum S zusätzlich eine Orientierung ausgezeichnet, reden wir von einer **orientiert pseudoeuklidischen Struktur**. Gegeben eine pseudoeuklidische Struktur S, deren von Null verschiedene Elemente einen Typ (m, n) haben mit $m \neq n$, erklären wir ihre **Standardorientierung** als diejenige Orientierung von S, die die Formen mit $m > n$ als positiv orientiert auszeichnet.

Beispiel 4.2.7.5. Der Richtungsraum der „Raumzeit der speziellen Relativitätstheorie" trägt eine nach 4.2.7.2 durch den Lichtkegel wohlbestimmte pseudoeuklidische Struktur S. Gegeben $s \in S$ vom Typ $(3, 1)$ gilt für einen Richtungsvektor v ganz allgemein

$$\begin{aligned} s(v,v) > 0 &\quad\Leftrightarrow\quad v \text{ ist raumartig} \\ s(v,v) = 0 &\quad\Leftrightarrow\quad v \text{ ist lichtartig} \\ s(v,v) < 0 &\quad\Leftrightarrow\quad v \text{ ist zeitartig} \end{aligned}$$

4.2.7.6. Gegeben ein bilinear strukturierter Vektorraum (V, S) erklären wir seine **Längengerade** $\mathbb{L} = \mathbb{L}(V, S)$ wie im euklidischen Fall als die Betragswurzel 4.1.5.10 aus dem Dualraum von S, in Formeln

$$\mathbb{L}(V, S) := \sqrt{|S^\top|}$$

Die Längengerade ist also ein orientierter eindimensionaler reeller Vektorraum. Wie im euklidischen Fall erklären wir die **Länge**

$$\| \ \| : V \to \mathbb{L}$$

durch die Vorschrift $\|v\| := \sqrt{|\lambda_v|}$ für $\lambda_v : S \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s \mapsto s(v, v)$ und haben $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\| \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Für jede strukturverträgliche Abbildung $f : V \to W$ von bilinear strukturierten Vektorräumen gibt es genau eine lineare Abbildung $\mathbb{L}(f) : \mathbb{L}(V) \to \mathbb{L}(W)$ mit $\|v\| \mapsto \|f(v)\| \ \forall v \in V$.

Beispiel 4.2.7.7. Die positiven Elemente der Längengerade des Richtungsraums der Raumzeit der speziellen Relativitätstheorie heißen **relativistische Zeiteinheiten** oder gleichbedeutend **relativistische Längeneinheiten**.

4.2.7.8. Einen linearen Automorphismus eines bilinear strukturierten Vektorraums (V, S) nennen wir **orthogonal**, wenn er jede Bilinearform $s \in S$ erhält. Die Gruppe aller orthogonalen Automorphismen eines von (V, S) nennen wir seine **orthogonale Gruppe** und notieren sie

$$\mathrm{O}(V) = \mathrm{O}(V, S)$$

Ist V darüber hinaus endlichdimensional, so erklären wir weiter seine **spezielle orthogonale Gruppe**

$$\mathrm{SO}(V) = \mathrm{SO}(V, S)$$

als die Untergruppe $\mathrm{SO}(V) \subset \mathrm{O}(V)$ aller orientierungserhaltenden orthogonalen Automorphismen von V. Im Fall einer pseudoeuklidischen Struktur haben offensichtlich alle Elemente von $\mathrm{O}(V)$ bereits die Determinante ± 1.

4.2.7.9. Gegeben ein reeller affiner Raum E mit einer bilinearen Struktur auf seinem Richtungsraum nennen wir diejenigen Affinitäten, deren Richtungsanteil orthogonal ist, die **orthogonalen Affinitäten**. Die Gruppe aller orthogonalen Affinitäten notieren wir $\mathrm{O}_{\mathrm{aff}}(E)$ und nennen sie die **orthogonalaffine Gruppe**. Diejenigen Affinitäten, deren Richtungsanteil eine lineare Ähnlichkeit ist, nennen wir **Ähnlichkeiten**. Die Gruppe der Ähnlichkeiten notieren wir $\mathrm{GO}_{\mathrm{aff}}(E)$.

Übungen

Übung 4.2.7.10. Gegeben der Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ mit der symmetrischen Bilinearform $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1$ zeige man, daß die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(V)$ beschrieben werden kann als

$$\mathrm{O}(V) \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R}^\times \right\}$$

Man verwendet vielfach die Notation $\mathbb{R}^{p+q}$ für den Vektorraum $\mathbb{R}^{p+q}$ mit der symmetrischen Bilinearform zur Fundamentalmatrix $\mathrm{diag}(\mathrm{I}_p, -\mathrm{I}_q)$ und die Notation $\mathrm{O}(p,q) := \mathrm{O}(\mathbb{R}^{p+q})$. Man zeige, daß die eben beschriebene Gruppe $\mathrm{O}(V)$ isomorph ist zu $\mathrm{O}(1,1)$. Man mag die ersteren Elemente oben „hyperbolische Rotationen“ nennen und die letzteren Elemente „hyperbolische Spiegelungen“.

4.2.8 Affine Struktur durch Lichtkegel*

Satz 4.2.8.1 (Alexandroff). *Auf einer Menge X mit einer Relation $\mathcal{L}^+ \subset X^2$ existiert höchstens eine Struktur als reeller affiner Raum der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} X = 4$ derart, daß es linear unabhängige Linearformen x, y, z, t auf dem zugehörigen Richtungsraum $\vec{X}$ gibt mit*

$$\mathcal{L}^+ = \{(p, p+v) \mid v \in \vec{X} \textit{ mit } x(v)^2 + y(v)^2 + z(v)^2 - t(v)^2 = 0 \textit{ und } t(v) \geq 0\}$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der anschließenden Proposition 4.2.8.3. □

4.2.8.2. Dieser Satz sagt uns, daß in der speziellen Relativitätstheorie die Struktur der Raumzeit als reeller affiner Raum bereits durch die Vorgabe der Lichtkegel eindeutig bestimmt ist. Eine analoge Aussage für die klassische Mechanik ist Satz 3.3.3.1, nach dem die Struktur des Raums der klassischen Mechanik als reeller affiner Raum bereits durch die Vorgabe der Sichtlinien eindeutig bestimmt ist.

Proposition 4.2.8.3. *Man betrachte auf $X := \mathbb{R}^4$ die Relation*

$$\mathcal{L}^+ := \{(p, p + (x, y, z, t)^\top) \in X^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0,\ t \geq 0\}$$

Alle Bijektionen $\phi : X \xrightarrow{\sim} X$, die diese Relation festhalten, die also in Formeln die Eigenschaft $(\phi \times \phi)(\mathcal{L}^+) = \mathcal{L}^+$ haben, sind affin.

Beweis. Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. Geraden mit lichtartigem Richtungsvektor können allein mithilfe der Daten $(X, \mathcal{L}^+)$ beschrieben werden als die maximalen Teilmengen $L \subset X$ mit der Eigenschaft, daß für alle $p, q \in L$ gilt $(p, q) \in \mathcal{L}^+$ oder $(q, p) \in \mathcal{L}^+$. Unsere Bijektion ϕ überführt folglich Geraden mit lichtartigem Richtungsvektor in ebensolche.

2. Gegeben ein Ereignis $p \in X$ bezeichne $\mathcal{L}_p^+ := \{x \in X \mid (p, x) \in \mathcal{L}^+\}$ den „vom Ereignis p ausgehenden Lichtkegel“ und $\mathcal{L}_p^- := \{x \in X \mid (x, p) \in \mathcal{L}^+\}$ den „beim Ereignis p endenden inversen Lichtkegel“ und

$$\mathcal{L}_p := \mathcal{L}_p^+ \cup \mathcal{L}_p^-$$

den „beidseitigen Lichtkegel zu p“. Von einem Punkt p ausgehende Lichtstrahlen können allein mithilfe der Daten $(X, \mathcal{L}^+)$ beschrieben werden als Schnitte des von p ausgehenden Lichtkegels mit durch p laufenden Geraden mit lichtartigem Richtungsvektor. Bei einem Punkt p ankommende Lichtstrahlen können ebenso allein mithilfe der Daten $(X, \mathcal{L}^+)$ beschrieben werden als Schnitte des bei p endenden inversen Lichtkegels mit durch p laufenden Geraden mit lichtartigem Richtungsvektor.

3. Auf der Raumzeit X betrachten wir die kleinste transitive und reflexive Relation $\mathcal{K}^+$ im Sinne von 10.2.2.1, die die Relation $\mathcal{L}^+$ umfaßt. Explizit haben wir also $(p, q) \in \mathcal{K}^+$ genau dann, wenn es eine Sequenz $p = p_0, p_1, \ldots, p_n = q$ von Ereignissen gibt mit $(p_{i-1}, p_i) \in \mathcal{L}^+$ für $i = 1, \ldots, n$. Es scheint mir klar, daß $(p, q) \in \mathcal{K}^+$ gleichbedeutend ist dazu, daß $q - p$ kausal ist. Wann also q kausal zu p liegt oder umgekehrt, ist auch bereits durch die Daten $(X, \mathcal{L}^+)$ festgelegt. Wann weder das eine noch das andere gilt, wann also p raumartig zu q liegt, ist mithin auch bereits durch die Daten $(X, \mathcal{L}^+)$ festgelegt.

4. Wir zeigen nun, daß auch Geraden mit raumartigem Richtungsvektor allein mithilfe der Daten $(X, \mathcal{L}^+)$ beschrieben werden können. Gegeben zwei verschiedene Punkte $p, q \in X$ mit raumartigem Verbindungsvektor $q - p$ setzen wir dazu

$$N(p, q) := \{r \in X \mid \mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q \cap \mathcal{L}_r = \emptyset\}$$

In der anschließenden Bemerkung 4.2.8.4 geben wir eine explizite Beschreibung dieser Menge $N(p, q)$. Sie zeigt, daß ein Punkt $r \in X \backslash \{p, q\}$ genau dann auf

der Geraden durch p und q liegt, wenn gilt $r \in N(p,q)$ und wenn es zusätzlich weder einen von r ausgehenden noch einen bei r ankommenden Lichtstrahl gibt, der ganz in $N(p,q)$ enthalten ist. Das zeigt, daß auch Geraden mit raumartigem Richtungsvektor allein mithilfe der Daten $(X, \mathcal{L}^+)$ beschrieben werden können.

5. Zu je zwei Geraden mit raumartigem Richtungsvektor, die sich in genau einem Punkt p treffen, bildet nun die Vereinigung aller raumartigen Geraden, die unsere beiden vorgegebenen Geraden in verschiedenen Punkten treffen, zusammen mit p eine affine Ebene in X, und wir erhalten so alle affinen Ebenen in X. Also macht unsere Bijektion ϕ affine Ebenen zu affinen Ebenen und damit beliebige affine Geraden alias Schnitte verschiedener affiner Ebenen mit mindestens zwei Punkten zu affinen Geraden. Dann aber muß unsere Abbildung nach 3.3.3.1 bereits affin sein. □

4.2.8.4. Hier holen wir die explizite Beschreibung der Menge $N(p,q)$ nach, die im vorhergehenden Beweis benötigt wurde. Gegeben $r \in X \backslash \{p,q\}$ sind wir in genau einem der folgenden Fälle:

1. r liegt auf einer Gerade mit p und q. Dann gilt offensichtlich $r \in N(p,q)$;

2. r spannt mit p und q eine affine Ebene auf, deren von Null verschiedene Richtungsvektoren sämtlich raumartig sind. Dann gilt offensichtlich $r \notin N(p,q)$;

3. r spannt mit p und q eine affine Ebene auf, auf deren Richtungsraum unsere Bilinearform ausgeartet ist. Für derartige r gilt $r \in N(p,q) \Leftrightarrow r \in \mathcal{L}_p \cup \mathcal{L}_q$. Um das zu sehen, müssen wir etwas rechnen. Da unsere Fragestellung unter Streckungen invariant ist, dürfen wir nach der Variante 4.2.4.4 des Satzes von Witt ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p = (0,0,0,0), q = (2,0,0,0)$ und $r = (x,0,t,t)$ annehmen mit $t \neq 0$. Dann ist $r \in N(p,q)$ gleichbedeutend zur Unlösbarkeit des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \tau^2 &= 0 \\ (\lambda - 2)^2 + \mu^2 + \nu^2 - \tau^2 &= 0 \\ (\lambda - x)^2 + \mu^2 + (\nu - t)^2 - (\tau - t)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der obersten Gleichung von den beiden anderen erhalten wir das äquivalente System

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \tau^2 &= 0 \\ \lambda &= 1 \\ x^2 - 2\lambda x + t^2 - 2\nu t - t^2 + 2\tau t &= 0 \end{aligned}$$

und weiter das äquivalente System

$$\begin{aligned} 1 + \mu^2 + (\nu + \tau)(\nu - \tau) &= 0 \\ x^2 - 2x &= 2t(\nu - \tau) \end{aligned}$$

und schließlich das äquivalente System

$$1 + \mu^2 + (\nu + \tau)(x^2 - 2x)/2t = 0$$

Dies System aber ist unlösbar für $x^2 - 2x = 0$ und lösbar sonst, was genau unserer Behauptung entspricht.

4. r spannt mit p und q eine affine Ebene auf, auf deren Richtungsraum unsere Bilinearform indefinit ist. In diesem Fall zeigen wir

$$r \in N(p,q) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} r \text{ liegt raumartig zum einen und kausal oder} \\ \text{antikausal zum anderen unserer beiden Punkte } p, q, \\ \text{liegt jedoch mit keinem der beiden auf einer Lichtgerade.} \end{array}$$

Der Nachweis geschieht wieder durch Rechnung. Diesmal dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p = (0,0,0,0), q = (2,0,0,0)$ und $r = (x,0,0,t)$ mit $t \neq 0$ annehmen. Dann ist $r \in N(p,q)$ äquivalent zur Unlösbarkeit des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \tau^2 & = & 0 \\ (\lambda - 2)^2 + \mu^2 + \nu^2 - \tau^2 & = & 0 \\ (\lambda - x)^2 + \mu^2 + \nu^2 - (\tau - t)^2 & = & 0 \end{array}$$

Wie zuvor gelangen wir durch Subtraktion der ersten Gleichungen von den anderen zum äquivalenten Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 1 + \mu^2 + \nu^2 - \tau^2 & = & 0 \\ x^2 - 2x + 2\tau t - t^2 & = & 0 \end{array}$$

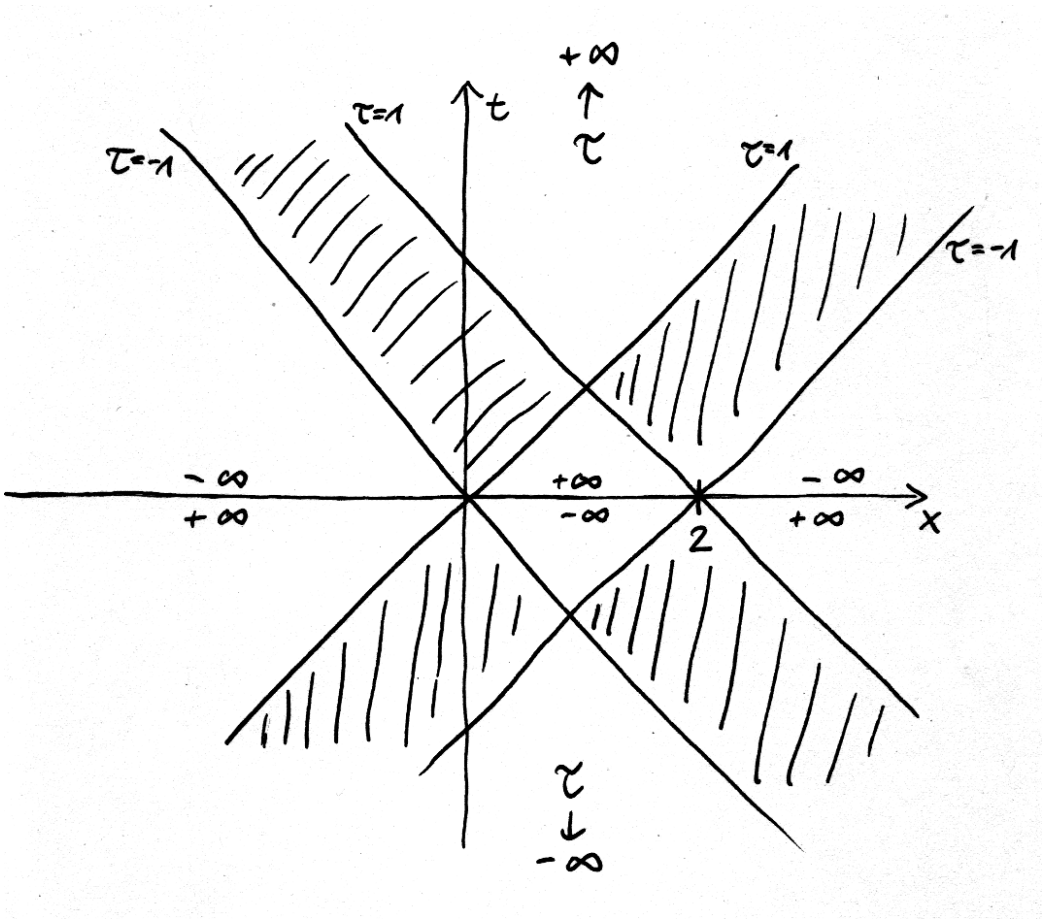
Die zweite Gleichung liefert $\tau = (t^2 + 2x - x^2)/2t$ und das System ist genau dann lösbar wenn für dies $\tau = \tau(x,t)$ gilt $\tau^2 \geq 1$. Suchen wir die $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ mit $t \neq 0$ und $\tau(x,t) = 1$, so ergibt sich

$$2(t - x) = (t - x)(t + x)$$

alias $t = x$ oder $t = 2 - x$. Suchen wir die $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ mit $t \neq 0$ und $\tau(x,t) = -1$, so ergibt sich analog

$$-2(t + x) = (t - x)(t + x)$$

alias $t = -x$ oder $t = x - 2$. Wir erhalten auf diese Weise nebenstehendes Bild für die Stellen, an denen τ den Wert Eins beziehungsweise Minus Eins annimmt. Es folgt, daß τ^2 in den offenen schraffierten Bereichen kleiner ist als Eins, so daß wir dort keine Lösungen haben. Ebenso folgt, daß τ^2 in allen übrigen Bereichen größer als Eins ist, so daß wir dort Lösungen haben. Keine Lösungen finden wir also genau dann, wenn r strikt raumartig zu einem unserer Punkte p, q und strikt zeitartig zum anderen liegt.



BlahBlah

4.3 Hauptraumzerlegung und Jordanzerlegung

4.3.1 Motivation durch Differentialgleichungen*

4.3.1.1. Wie in 10.7.2.3 im Reellen und beim Beweis von 10.7.3.6 im Komplexen besprochen wird, erklärt man die Exponentialabbildung auf komplexen quadratischen Matrizen durch die Exponentialreihe

$$\begin{array}{rccc} \exp: & \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C}) & \to & \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C}) \\ & A & \mapsto & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \end{array}$$

Wie dort besprochen wird, spielt diese Abbildung eine zentrale Rolle bei der Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Ist genauer $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$ eine quadratische Matrix und $c \in \mathbb{C}^n$ ein Spaltenvektor, so gibt es genau eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ mit Anfangswert $\gamma(0) = c$ und $\dot\gamma(t) = A\gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, nämlich die Abbildung

$$\gamma(t) = \exp(tA)c$$

Fast noch grundlegender zeigen wir in 22.1.4.3, und diesen Beweis könnten Sie mit den Kenntnissen von Analysis 2 auch jetzt schon verstehen, daß jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(V)$ in die Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen oder komplexen Vektorraums V die Gestalt $\varphi(t) = \exp(tA)$ hat für genau ein $A \in \mathrm{End}\, V$. Es ist also wichtig, die Exponentialabbildung für Matrizen $A \mapsto \exp A$ zu verstehen.

4.3.1.2. Um die Exponentialabbildung für Matrizen $A \mapsto \exp A$ zu verstehen bemerkt man zunächst die Formel $\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$ für invertierbares P. Sie folgt direkt aus der Definition. Des weiteren erklären wir in 10.7.2.4, warum für kommutierende quadratische Matrizen A, B stets gilt

$$\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$$

In 4.3.3.1 werden wir im folgenden die „Jordan-Zerlegung“ herleiten, nach der sich jede komplexe quadratische Matrix A auf genau eine Weise zerlegen läßt als eine Summe $A = D+N$ mit D diagonalisierbar und N nilpotent und $DN = ND$. Ist zusätzlich P invertierbar mit $PDP^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, so folgt

$$\begin{array}{rcl} \exp A & = & (\exp D)(\exp N) \\ & = & P^{-1} \exp(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))P \ \exp N \\ & = & P^{-1}\, \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n})P \ \exp N \\ \\ \exp tA & = & P^{-1}\, \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{t\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{t\lambda_n})P \ \exp tN \end{array}$$

Hierbei bricht die Reihe für $\exp tN$ ab und wir erhalten so ein recht befriedigendes qualitatives Bild und mit der „Jordan'schen Normalform“ 4.3.4.5 und etwas mehr Rechnen auch eine sehr explizite Beschreibung der Lösungen unserer Differentialgleichung $\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t)$ und für stetige Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$.

Übungen

Ergänzende Übung 4.3.1.3. Die Exponentialabbildung von reellen Matrizen liefert eine Bijektion

$$\exp : \{\text{symmetrische Matrizen}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{positiv definite symmetrische Matrizen}\}$$

4.3.2 Hauptraumzerlegung

Definition 4.3.2.1. Gegeben ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines Vektorraums V und ein Skalar λ aus dem Grundkörper K erklären wir den **Eigenraum von** f **zum Eigenwert** λ durch

$$\mathrm{Eig}(f;\lambda) = \mathrm{Eig}(f|V;\lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id})$$

und den **Hauptraum von** f **zum Eigenwert** λ durch

$$\mathrm{Hau}(f;\lambda) = \mathrm{Hau}(f|V;\lambda) := \bigcup_{n\geq 0} \ker(f - \lambda\,\mathrm{id})^n$$

Der Eigenraum zum Eigenwert λ besteht also aus allen Eigenvektoren zum Eigenwert λ und dem Nullvektor. Die Elemente des Hauptraums zum Eigenwert λ heißen die **Hauptvektoren zum Eigenwert** λ. Der Nullvektor ist insbesondere ein Hauptvektor zu jedem Eigenwert. Ist $\lambda \in K$ kein Eigenwert von f, so haben wir $\mathrm{Eig}(f;\lambda) = 0$ und offensichtlich oder nach 4.3.2.6 auch $\mathrm{Hau}(f;\lambda) = 0$.

4.3.2.2 (**Eigenräume zu den Eigenwerten Null und Eins**). Der Eigenraum zum Eigenwert Null einer linearen Abbildung $f : V \to V$ ist ihr Kern

$$\mathrm{Eig}(f|V;0) = \ker f$$

Der Eigenraum zum Eigenwert Eins einer linearen Abbildung $f : V \to V$ besteht aus den Fixpunkten unserer Abbildung, in Formeln

$$\mathrm{Eig}(f|V;1) = V^f$$

Beispiel 4.3.2.3 (**Hauptraum zum Eigenwert Null und Nilpotenz**). Der Hauptraum zum Eigenwert Null des durch Ableiten gegebenen Endomorphismus des Raums der Polynomfunktionen $\partial : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ ist der ganze Raum, in Formeln $\operatorname{Hau}(\partial; 0) = \mathbb{R}[t]$. Allgemeiner hat ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines Vektorraums die Eigenschaft $\operatorname{Hau}(f; 0) = V$ genau dann, wenn es für jeden Vektor $v \in V$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^n(v) = 0$. Ein Endomorphismus f eines Vektorraums mit dieser Eigenschaft heißt **lokal nilpotent**. Der Hauptraum zum Eigenwert Null des durch Ableiten gegebenen Endomorphismus $\partial : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$ des Raums der glatten reellwertigen Funktionen $\mathcal{C}^\infty := \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ auf der reellen Zahlengeraden besteht aus den Polynomfunktionen, in Formeln

$$\operatorname{Hau}(\partial|\mathcal{C}^\infty; 0) = \mathbb{R}[t]$$

Präziser zeigt man in der Analysis, daß eine glatte Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann durch ein Polynom vom Grad höchstens n dargestellt werden kann, wenn ihre $(n+1)$-te Ableitung die Nullfunktion ist.

Definition 4.3.2.4. Gegeben eine Abbildung $f : X \to X$ von einer Menge in sich selbst nennen wir eine Teilmenge $Y \subset X$ **stabil unter** f, wenn gilt $f(Y) \subset Y$ alias $x \in Y \Rightarrow f(x) \in Y$.

4.3.2.5 (**Stabilität der Haupt- und Eigenräume**). Gegeben ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines Vektorraums V sind alle seine Eigenräume und Haupträume Untervektorräume. Sie sind auch offensichtlich stabil unter unserem Endomorphismus f, ja sogar unter jedem Endomorphismus $g : V \to V$, der mit f kommutiert. Ist noch allgemeiner $g : V \to W$ eine lineare Abbildung und sind $x \in \operatorname{End} V$ und $y \in \operatorname{End} W$ gegeben mit $gx = yg$, so gilt

$$g(\operatorname{Eig}(x; \lambda)) \subset \operatorname{Eig}(y; \lambda) \qquad \text{und} \qquad g(\operatorname{Hau}(x; \lambda)) \subset \operatorname{Hau}(y; \lambda).$$

4.3.2.6 (**Verschwinden von Haupt- und Eigenräumen**). Ist der Hauptraum zu einem Eigenwert λ nicht Null, so ist auch der zugehörige Eigenraum nicht Null. Ist in der Tat ein Vektor $v \neq 0$ gegeben mit $(f - \lambda \operatorname{id})^n v = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so gibt es auch ein kleinstmögliches derartiges $n \geq 1$, und dann ist $(f - \lambda \operatorname{id})^{n-1} v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Proposition 4.3.2.7 (Direktheit der Summe der Haupträume). *Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper K und ein Endomorphismus $f : V \to V$ von V und paarweise verschiedene Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ liefern die Einbettungen der Haupträume eine Injektion*

$$\operatorname{Hau}(f; \lambda_1) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Hau}(f; \lambda_r) \hookrightarrow V$$

Vorschau 4.3.2.8. In 4.7.8.8 will ich erklären, in welchem Sinne das sogar gilt, wenn wir alle Skalare $\lambda \in K$ gleichzeitig betrachten.

Beweis. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung und zeigen zunächst für $\lambda \neq \mu$, daß ein Hauptvektor $v \neq 0$ zum Eigenwert λ nie ein Eigenvektor zum Eigenwert μ sein kann. In der Tat hätten wir sonst für hinreichend großes n eine Identität der Gestalt

$$0 = (f - \lambda \operatorname{id})^n(v) = (\mu - \lambda)^n(v)$$

und es folgte $v = 0$. In anderen Worten induziert $(f - \mu \operatorname{id})$ für $\lambda \neq \mu$ eine Injektion

$$(f - \mu \operatorname{id}) : \operatorname{Hau}(f; \lambda) \hookrightarrow \operatorname{Hau}(f; \lambda)$$

auf dem Hauptraum zu λ. Seien nun $v_1, \ldots, v_r$ Hauptvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Es gilt zu zeigen, daß aus $v_1 + \ldots + v_r = 0$ folgt $v_1 = \ldots = v_r = 0$. Sicher finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(f - \lambda_i \operatorname{id})^n v_i = 0$ für alle i. Wenden wir nun $(f - \lambda_2 \operatorname{id})^n \ldots (f - \lambda_r \operatorname{id})^n$ auf unsere Identität $v_1 + \ldots + v_r = 0$ an, so folgt bereits $(f - \lambda_2 \operatorname{id})^n \ldots (f - \lambda_r \operatorname{id})^n(v_1) = 0$ und damit nach unserer Vorüberlegung zu Injektionen auf Haupträumen $v_1 = 0$. Dasselbe Argument zeigt $v_i = 0$ für alle i. □

Beispiel 4.3.2.9 (**Lineare Unabhängigkeit der Funktionen** $t^n e^{\lambda t}$). Wir zeigen, daß im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{C}^\infty := \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ der glatten reellwertigen Funktionen die Funktionen $t \mapsto t^n e^{\lambda t}$ eine linear unabhängige Familie $(t^n e^{\lambda t})_{(n,\lambda) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}}$ bilden. In der Tat, betrachten wir den durch das Ableiten gegebenen Endomorphismus $\partial : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$, so liegen alle $t^n e^{\lambda t}$ für festes λ im λ-Hauptraum $\operatorname{Hau}(\partial; \lambda)$. Wegen 4.3.2.7 reicht es also, für jedes feste λ die lineare Unabhängigkeit der $t^n e^{\lambda t}$ zu zeigen. Diese folgt hinwiederum unmittelbar aus unserer Erkenntnis 3.5.3.19, daß ein reelles Polynom nur dann überall den Wert Null annimmt, wenn es das Nullpolynom ist. In derselben Weise zeigt man auch, daß im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Funktionen $t \mapsto t^n e^{\lambda t}$ für komplexe λ eine linear unabhängige Familie $(t^n e^{\lambda t})_{(n,\lambda) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}}$ bilden, vergleiche 10.7.4.2.

Satz 4.3.2.10 (Fitting-Zerlegung). *Gegeben ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums besitzt der Hauptraum zum Eigenwert Null genau ein unter unserem Endomorphismus stabiles Komplement und die Restriktion unseres Endomorphismus auf dies Komplement ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Bezeichnet $f : V \to V$ unseren Endomorphismus, so zeigen wir zunächst, daß für hinreichend großes $n \gg 0$ unser Vektorraum V in die direkte Summe

$$(\ker f^n) \oplus (\operatorname{im} f^n) \xrightarrow{\sim} V$$

zerfällt. Die Bilder der f^ν bilden in der Tat für wachsendes ν eine monoton fallende Folge von Untervektorräumen. Da V nach Annahme endliche Dimension hat, gibt es eine Stelle n, ab der diese Folge konstant wird. Für dieses n muß die Surjektion $f^n : (\operatorname{im} f^n) \twoheadrightarrow (\operatorname{im} f^{2n})$ aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus sein, also haben wir $(\ker f^n) \cap (\operatorname{im} f^n) = 0$, und nochmaliger Dimensionsvergleich mit der Dimensionsformel 3.2.2.5 zeigt über 3.2.2.16 die behauptete Zerlegung. Sie heißt die **Fitting-Zerlegung**. Ab derselben Stelle n muß aus Dimensionsgründen auch die aufsteigende Folge der Untervektorräume $(\ker f^\nu)$ stagnieren, so daß gilt $(\ker f^n) = \operatorname{Hau}(f; 0)$. Ist schließlich $W \subset V$ ein f-stabiler Teilraum mit $W \cap (\ker f^n) = 0$, so folgt $f(W) = W$ und damit $W \subset (\operatorname{im} f^n)$. Das zeigt die behauptete Eindeutigkeit. □

Proposition 4.3.2.11 (Hauptraumdimension als Nullstellenordnung). *Gegeben ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums stimmt die Dimension jedes Hauptraums überein mit der Vielfachheit des entsprechenden Eigenwerts als Nullstelle des charakteristischen Polynoms.*

4.3.2.12. Man nennt diese Vielfachheit auch die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwerts, im Gegensatz zu seiner **geometrischen Vielfachheit**, unter der man die Dimension des zugehörigen Eigenraums versteht.

Beweis. Sei $f : V \to V$ unser Endomorphismus und λ ein Skalar. Die Fitting-Zerlegung zu $(f - \lambda \operatorname{id})$ zerlegt V in die direkte Summe des λ-Hauptraums und eines f-stabilen Komplements

$$V = \operatorname{Hau}(f; \lambda) \oplus W$$

derart, daß λ kein Eigenwert von $f : W \to W$ ist. Auf dem Hauptraum ist $(f - \lambda \operatorname{id})$ nilpotent. Nach 3.2.6.15 finden wir also darin eine Basis, bezüglich derer die Matrix von $(f - \lambda \operatorname{id})$ obere Dreiecksgestalt hat mit Nullen auf der Diagonalen. Bezüglich derselben Basis hat die Matrix von f obere Dreiecksgestalt mit lauter Einträgen λ auf der Diagonalen. Ergänzen wir diese Basis durch eine Basis des Komplements W zu einer Basis von V, so ist die zugehörige Matrix von $f : V \to V$ blockdiagonal. Unsere Formel 3.6.6.10 für die Determinante einer blockdiagonalen Matrix liefert dann für das charakteristische Polynom die Darstellung

$$\chi_f(T) = (\lambda - T)^d \cdot \chi_{f|W}(T)$$

für $d := \dim \operatorname{Hau}(f; \lambda)$ die Dimension des λ-Hauptraums und $\chi_{f|W}(T)$ ein Polynom ohne Nullstelle bei λ. □

Satz 4.3.2.13 (Hauptraumzerlegung). *Ein Vektorraum endlicher Dimension über einem algebraisch abgeschlossenen Körper zerfällt unter jedem Endomorphismus in die direkte Summe seiner Haupträume.*

4.3.2.14. Ist $f : V \to V$ unser Endomorphismus und sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seine Eigenwerte, so gilt also in Formeln $\mathrm{Hau}(f; \lambda_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Hau}(f; \lambda_n) \xrightarrow{\sim} V$ unter der durch die Addition gegebenen Abbildung.

4.3.2.15. Der Satz gilt mit dem ersten Beweis auch, wenn wir statt der algebraischen Abgeschlossenheit des Grundkörpers nur voraussetzen, daß das charakteristische Polynom unseres Endomorphismus über unserem Körper vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Erster Beweis. Der Satz folgt mit der Direktheit der Summe der Haupträume 4.3.2.7 und Dimensionsvergleich unmittelbar aus Proposition 4.3.2.11, nach der die Dimensionen der Haupträume mit den Vielfachheiten der entsprechenden Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms zusammenfallen. □

Zweiter Beweis. Gegeben ein Skalar λ zeigt die Fittingzerlegung, wenn wir sie auf $(f - \lambda\,\mathrm{id})$ anwenden, daß der Hauptraum $\mathrm{Hau}(f; \lambda)$ ein f-stabiles Komplement hat. Mit Induktion über die Dimension folgt, daß unser Vektorraum von seinen Haupträumen erzeugt wird. Die Direktheit der Summe der Haupträume kennen wir schon aus 4.3.2.7. □

Übungen

Ergänzende Übung 4.3.2.16. Ein Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper zerfällt unter einem Endomorphismus in die direkte Summe seiner Haupträume genau dann, wenn unser Endomorphismus **lokal endlich** ist, als da heißt, jeder Vektor liegt in einem endlichdimensionalen unter unserem Endomorphismus stabilen Teilraum.

Ergänzende Übung 4.3.2.17. Gegeben ein diagonalisierbarer Endomorphismus f eines Vektorraums V und ein unter f stabiler Teilraum $W \subset V$ gilt stets $f(W) = W \cap f(V)$. Man gebe auch ein Gegenbeispiel für allgemeines f.

Ergänzende Übung 4.3.2.18 (**Simultane Eigenvektoren**). Für jede Menge von paarweise kommutierenden trigonalisierbaren Endomorphismen eines von Null verschiedenen endlichdimensionalen Vektorraums gibt es mindestens einen simultanen Eigenvektor. Hinweis: 4.3.2.5

Übung 4.3.2.19 (**Spektralsatz für normale Endomorphismen**). Ein Endomorphismus eines Skalarproduktraums heißt **normal**, wenn er einen Adjungierten besitzt und mit seinem Adjungierten kommutiert. Man zeige: Ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen komplexen Skalarproduktraums ist genau dann normal, wenn es dazu eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren gibt. Hinweis: Kommutierende Endomorphismen stabilisieren die Eigenräume aller beteiligten Endomorphismen. Ist A^* adjungiert zu A, so sind $A + A^*$ und $\mathrm{i}(A - A^*)$ selbstadjungiert. Alternativer Zugang: Man beginne mit einem gemeinsamen Eigenvektor

von A und A^* und wiederhole von dort ausgehend den Beweis des Spektralsatzes für selbstadjungierte Endomorphismen.

Ergänzende Übung 4.3.2.20. Gegeben ein Vektorraum mit einem lokal endlichen Endomorphismus besitzt der Hauptraum zu Null stets genau ein unter besagtem Endomorphismus stabiles Komplement.

Ergänzung 4.3.2.21 (**Ein Nullhauptraum ohne stabiles Komplement**). Betrachten wir Vektorräume unendlicher Dimension, so besitzt der Hauptraum zum Eigenwert Null eines Endomorphismus im allgemeinen kein unter besagtem Endomorphismus stabiles Komplement mehr. Betrachten wir zum Beispiel den Vektorraum V aller Abbildungen von der Menge $\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \geq j\}$ in unseren Grundkörper und den Endomorphismus, der „jede Zeile eins nach unten rückt und die unterste Zeile zu Null macht“. Der Hauptraum H zum Eigenwert Null besteht aus allen Funktionen, die nur auf endlich vielen Zeilen von Null verschieden sind. Nun betrachten wir den Vektor $v \in V$ mit

$$v(i,j) = \begin{cases} 1 & i = 2j; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sein Bild ist im in 4.4.5.4 diskutierten Quotientenvektorraum $\bar{v} \in V/H$ ein von Null verschiedener Vektor, der im Bild jeder Potenz unseres Endomorphismus liegt. In V selbst gibt es jedoch keinen derartigen von Null verschiedenen Vektor, folglich kann $H \subset V$ kein unter unserem Endomorphismus stabiles Komplement besitzen.

4.3.3 Jordanzerlegung

Satz 4.3.3.1 (**Jordanzerlegung**). *Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und $x \in \operatorname{End} V$ ein Endomorphismus von V. So gibt es genau eine Zerlegung $x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$ mit x_{s} diagonalisierbar, x_{n} nilpotent und $x_{\mathrm{s}}x_{\mathrm{n}} = x_{\mathrm{n}}x_{\mathrm{s}}$.*

4.3.3.2. Statt den Grundkörper algebraisch abgeschlossen anzunehmen, reicht für die Gültigkeit unseres Satzes auch die Annahme aus, daß das charakteristische Polynom unseres Endomorphismus über unserem Körper vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Der Beweis bleibt derselbe.

4.3.3.3. Daß der Endomorphismus jetzt plötzlich x heißt, obwohl er sonst immer f hieß, hat keine tieferen Gründe. Es hat jedoch den Vorteil, den Buchstaben f freizumachen für andere lineare Abbildungen.

4.3.3.4. Der untere Index s bei x_{s} steht für **semisimple**, die deutsche Übersetzung dafür ist **halbeinfach**. In der Situation des Satzes heißt x_{s} der **halbeinfache** und x_{n} der **nilpotente Anteil** von x. Die Zerlegung aus dem Satz bezeichnet man genauer auch als **additive Jordan-Zerlegung**, wenn man Verwechslungen mit der „multiplikativen Jordan-Zerlegung“ aus 4.3.3.20 befürchtet.

Vorschau 4.3.3.5. Ganz allgemein heißt ein Endomorphismus x eines k-Vektorraums V **halbeinfach**, wenn V mit der Struktur als $k[T]$-Modul, bei der die Variable T durch x operiert, halbeinfach ist im Sinne von 8.2.3.1 alias die Summe seiner einfachen Untermoduln. Mit den dort eingeführten Methoden zeigt man leicht, daß das gleichbedeutend dazu ist, daß unser Endomorphismus x „nach Erweiterung der Skalare zum algebraischen Abschluß“ diagonalisierbar ist. Ersetzen wir im Satz die Bedingung „diagonalisierbar“ durch die Bedingung „halbeinfach“, so bleibt er auch ohne alle Forderungen an das charakteristische Polynom gültig für im Sinne von 6.3.9.21 „vollkommene“ Grundkörper, wie Sie im Rahmen der sogenannten „Galoistheorie“ als Übung 6.4.1.27 zeigen mögen.

Beweis. Gegeben ein Endomorphismus x eines Vektorraums endlicher Dimension über einem algebraisch abgeschlossenen Körper erklären wir einen weiteren Endomorphismus x_{s} durch die Vorschrift, daß er auf dem Hauptraum $\operatorname{Hau}(x;\lambda)$ von x zum Eigenwert λ jeweils durch die Multiplikation mit λ operieren soll. Dann ist x_{s} diagonalisierbar, und setzen wir $x_{\mathrm{n}} = x - x_{\mathrm{s}}$, so ist x_{n} nilpotent und x_{s} kommutiert mit x und dann auch mit x_{n}. Das zeigt die Existenz unserer Zerlegung. Ist $x = s + n$ eine weitere Zerlegung mit s diagonalisierbar, n nilpotent und $sn = ns$, so folgt zunächst $sx = xs$ und dann, da s die Haupträume von x stabilisieren muß, auch $sx_{\mathrm{s}} = x_{\mathrm{s}}s$. So erkennen wir, daß x, s, n, x_{s} und x_{n} paarweise kommutieren. Natürlich ist dann $x_{\mathrm{n}} - n$ nilpotent. Da s die Haupträume von x stabilisiert und da nach 3.6.6.19 auch die Restriktion von s auf besagte Haupträume

diagonalisierbar ist, folgt aus der Definition von x_{s}, daß auch $x_{\mathrm{s}} - s$ diagonalisierbar sein muß. Aus $x_{\mathrm{n}} - n = s - x_{\mathrm{s}}$ folgt dann aber sofort, daß beide Seiten Null sein müssen. Das zeigt die Eindeutigkeit unserer Zerlegung. □

Ergänzung 4.3.3.6 (**Halbeinfacher Anteil als Wert eines Polynoms**). In der Situation des Satzes lassen sich x_{s} und x_{n} sogar als Polynome in x ohne konstanten Term ausdrücken, als da heißt, es gibt $P, Q \in T\mathbb{C}[T]$ mit $x_{\mathrm{s}} = P(x)$ und $x_{\mathrm{n}} = Q(x)$. In der Tat, falls N so groß ist, daß gilt $\mathrm{Hau}(x;\lambda) = \ker(x-\lambda)^N$ für alle λ, so erhält man ein mögliches P aus dem chinesischen Restsatz 6.2.3.4 als simultane Lösung der Kongruenzen $P \equiv \lambda \pmod{(T-\lambda)^N}$ für alle Eigenwerte λ von x und für $\lambda = 0$, und ein mögliches Q ist dann $T - P(T)$. Ich mag die in der Literatur übliche Argumentation mit diesen Polynomen nicht, sie sind mir zu willkürlich. Stattdessen ziehe ich die Argumentation mit der Funktorialität der Jordan-Zerlegung vor, die im Anschluß diskutiert wird.

Satz 4.3.3.7 (**Funktorialität der Jordan-Zerlegung**). *Gegeben eine lineare Abbildung von endlichdimensionalen Vektorräumen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $f : V \to W$ und $x \in \operatorname{End} V$ sowie $y \in \operatorname{End} W$ Endomorphismen folgt aus $fx = yf$ bereits $fx_{\mathrm{s}} = y_{\mathrm{s}}f$ und $fx_{\mathrm{n}} = y_{\mathrm{n}}f$.*

Beweis. Aus $fx = yf$ folgt zunächst $f(\mathrm{Hau}(x;\lambda)) \subset \mathrm{Hau}(y;\lambda)$. Nach der im Beweis von 4.3.3.1 gegebenen Beschreibung der Jordan-Zerlegung impliziert das unmittelbar $fx_{\mathrm{s}} = y_{\mathrm{s}}f$ und dann auch $fx_{\mathrm{n}} = y_{\mathrm{n}}f$. □

4.3.3.8. Stabilisiert speziell ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper einen vorgegebenen Teilraum, so stabilisieren nach 4.3.3.7 auch sein halbeinfacher und sein nilpotenter Anteil besagten Teilraum.

Ergänzung 4.3.3.9. Unsere Sätze über die Jordan-Zerlegung 4.3.3.1 und deren Funktorialität 4.3.3.7 gelten analog, wenn man statt der Endlichdimensionalität der darin auftauchenden Vektorräume nur fordert, daß die fraglichen Endomorphismen x und y im Sinne von 4.3.2.16 lokal endlich sein sollen, und von x_{n} und y_{n} schwächer nur fordert, daß sie im Sinne von 4.3.2.3 lokal nilpotent sein sollen.

Übungen

Übung 4.3.3.10. Gegeben kommutierende Endomorphismen x, y eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper gilt $(x+y)_{\mathrm{s}} = x_{\mathrm{s}} + y_{\mathrm{s}}$ und $(x+y)_{\mathrm{n}} = x_{\mathrm{n}} + y_{\mathrm{n}}$.

Weiterführende Übung 4.3.3.11. Gegeben x, y kommutierende lokal endliche Endomorphismen eines Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. ist auch $x+y$ lokal endlich und es gilt $(x+y)_{\mathrm{s}} = x_{\mathrm{s}} + y_{\mathrm{s}}$ sowie $(x+y)_{\mathrm{n}} = x_{\mathrm{n}} + y_{\mathrm{n}}$.

Ergänzende Übung 4.3.3.12 (**Operatornorm und Spektralradius**). Sei x ein Endomorphismus eines von Null verschiedenen endlichdimensionalen komplexen normierten Vektorraums V im Sinne von 11.2.3.2. Bezeichne $\| \ \|$ die zugehörige Operatornorm auf $\operatorname{End} V$ im Sinne von 11.2.3.16. Man zeige, daß die Folge $\sqrt[n]{\|x^n\|}$ für $n \to \infty$ gegen das Maximum der Beträge der Eigenwerte alias den **Spektralradius** von x strebt. Hinweis: Zunächst folgere man aus 11.2.3.13, daß der fragliche Grenzwert nicht von der auf unserem Vektorraum gewählten Norm abhängt. Dann behandle man den diagonalisierbaren Fall mithilfe der Maximumsnorm in Bezug auf eine geeignete Basis. Schließlich behandle man den allgemeinen Fall mithilfe der Jordan-Zerlegung und erinnere 10.4.3.16.

Ergänzende Übung 4.3.3.13 (**Bilder halbeinfacher Anteile**). Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und ein Endomorphismus $x : V \to V$ haben wir stets

$$\operatorname{im} x \supset \operatorname{im} x_{\mathrm{s}}$$

Hinweis: Das Bild von x_{s} ist genau die Summe der Haupträume zu von Null verschiedenen Eigenwerten und das Bild von x umfaßt offensichtlich diese Summe. Alternativ erkennt man $\operatorname{im} x \supset \operatorname{im}(x_{\mathrm{s}}^N)$ für hinreichend großes N durch Entwicklung von $x_{\mathrm{s}}^N = (x - x_{\mathrm{n}})^N$ nach der binomischen Formel und Ausklammern von x, und die Behauptung folgt wegen $\operatorname{im} x_{\mathrm{s}} = \operatorname{im} x_{\mathrm{s}}^N$.

Ergänzende Übung 4.3.3.14 (**Automorphismen der Ordnung Zwei**). Jeder Endomorphismus der Ordnung zwei eines Vektorraums über einem Körper einer von zwei verschiedenen Charakteristik ist diagonalisierbar. Hinweis: Später zeigen wir das als 8.1.1.14. Jeder Endomorphismus der Ordnung vier eines komplexen Vektorraums ist diagonalisierbar. Hinweis: Man zerlege zunächst in Eigenräume unter dem Quadrat unseres Endomorphismus. Allgemeiner werden Sie in 4.3.3.15 zeigen, daß jeder Endomorphismus endlicher Ordnung eines komplexen Vektorraums diagonalisierbar ist.

Ergänzende Übung 4.3.3.15 (**Automorphismen endlicher Ordnung**). Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null. Sei V ein K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Automorphismus „endlicher Ordnung“, als da heißt, es gebe $n \geq 1$ mit $\varphi^n = \mathrm{id}$. So ist V die direkte Summe der Eigenräume von φ. Allgemeiner zeige man das auch unter der schwächeren Voraussetzung, daß die Charakteristik kein Teiler der Ordnung n unseres Automorphismus ist. Hinweis: Man behandle zunächst den endlichdimensionalen Fall mithilfe der Jordan-Zerlegung und beachte dabei, daß nach 3.4.3.10 höhere Potenzen eines nilpotenten Endomorphismus stets größere Kerne haben müssen, solange nicht beide fraglichen Potenzen bereits Null sind. Fortgeschrittene erkennen einen Spezialfall des Satzes von Maschke 8.4.1.1.

Ergänzende Übung 4.3.3.16. Gegeben ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper besteht ein Hauptraum des transponierten Endomorphismus des Dualraums genau aus allen Linearformen, die auf allen Haupträumen zu anderen Eigenwerten des ursprünglichen Endomorphismus verschwinden.

Ergänzung 4.3.3.17. Ein Endomorphismus f eines Vektorraums heißt **unipotent**, wenn $(f - \mathrm{id})$ nilpotent ist. Ein Endomorphismus f eines Vektorraums heißt **lokal unipotent**, wenn $(f - \mathrm{id})$ lokal nilpotent ist. Oft wird aber hier das Wörtchen „lokal“ auch weggelassen.

Ergänzende Übung 4.3.3.18. Ein unipotenter Endomorphismus endlicher Ordnung eines Vektorraums über einem Körper der Charakteristik Null ist bereits die Identität. Hinweis: 4.3.3.15.

Ergänzende Übung 4.3.3.19. Das Produkt von zwei kommutierenden nilpotenten Endomorphismen ist nilpotent. Das Produkt von zwei kommutierenden unipotenten Endomorphismen ist unipotent. Das Produkt von zwei kommutierenden halbeinfachen Endomorphismen ist halbeinfach.

Ergänzende Übung 4.3.3.20 (**Multiplikative Jordan-Zerlegung**). Jeder Automorphismus x eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper läßt sich auf genau eine Weise darstellen als Produkt $x = x_\mathrm{u} x_\mathrm{s}$ mit x_s halbeinfach alias „semisimple“ alias diagonalisierbar, x_u unipotent und $x_\mathrm{u} x_\mathrm{s} = x_\mathrm{s} x_\mathrm{u}$. Hinweis: Ist $x = x_\mathrm{s} + x_\mathrm{n}$ die additive Jordan-Zerlegung, so betrachte man $x = x_\mathrm{s}(\mathrm{id} + x_\mathrm{s}^{-1} x_\mathrm{n})$. Man zeige weiter, daß dieselbe Aussage auch für lokal endliche Automorphismen eines beliebigen Vektorraums gilt, diesmal mit x_u lokal unipotent, und zeige die zu 4.3.3.7 analogen Funktorialitätseigenschaften.

Ergänzende Übung 4.3.3.21. Gegeben ein Endomorphismus A eines endlichdimensionalen komplexen Vektorraums V liegt $\mathbb{Z}$ im Kern des Gruppenhomomorphismus $\varphi_A : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(V)$ gegeben durch $t \mapsto \exp(tA)$ genau dann, wenn A diagonalisierbar ist mit sämtlichen Eigenwerten aus $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$. Weiter ist φ_A genau dann nicht injektiv, wenn A diagonalisierbar ist mit rein imaginären Eigenwerten, und wenn der von seinen Eigenwerten aufgespannte $\mathbb{Q}$-Vektorraum höchstens die Dimension Eins hat.

Ergänzende Übung 4.3.3.22 (**Schmelzfunktorialität der Jordanzerlegung**). Gegeben über einem algebraisch abgeschlossenen Körper eine multilineare Abbildung $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_r \to W$ sowie lokal endliche Endomorphismen $x_i \in \operatorname{End} V_i$ und $y \in \operatorname{End} W$ mit $\varphi \circ (x_1 \times \ldots \times x_r) = y \circ \varphi$ gilt auch

$$\varphi \circ ((x_1)_\mathrm{s} \times \ldots \times (x_r)_\mathrm{s}) = y_\mathrm{s} \circ \varphi$$

Das gilt sogar für $r = 0$ und bedeutet in diesem Fall, daß für jeden Vektor $w \in W$ gilt $yw = w \;\Rightarrow\; y_\mathrm{s} w = w$.

4.3.4 Jordan'sche Normalform

Definition 4.3.4.1. Gegeben $r \geq 1$ definieren wir eine $(r \times r)$-Matrix $\mathrm{J}(r)$, genannt der **nilpotente Jordan-Block der Größe** r, durch die Vorschrift $\mathrm{J}(r)_{i,j} = 1$ für $j = i + 1$ und $\mathrm{J}(r)_{i,j} = 0$ sonst. Insbesondere ist also $\mathrm{J}(1)$ die (1×1)-Matrix mit dem einzigem Eintrag Null.

Satz 4.3.4.2 (**Normalform nilpotenter Endomorphismen**). *Gegeben ein nilpotenter Endomorphismus N eines endlichdimensionalen Vektorraums gibt es stets eine angeordnete Basis $\mathcal{B}$ derart, daß die Matrix unseres Endomorphismus in dieser Basis blockdiagonal ist mit nilpotenten Jordanblöcken auf der Diagonalen, in Formeln*

$$_{\mathcal{B}}[N]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\mathrm{J}(r_1), \ldots, \mathrm{J}(r_n))$$

Die positiven natürlichen Zahlen $r_1, \ldots, r_n$ sind hierbei durch unseren nilpotenten Endomorphismus eindeutig bestimmt bis auf Reihenfolge.

Ergänzung 4.3.4.3 (**Klassifikation nilpotenter Endomorphismen**). Der vorhergehende Satz leistet im Sinne von 4.2.3.1 die Klassifikation aller Paare (V, N) bestehend aus einem endlichdimensionalen Vektorraum V über einem fest vorgegebenen Körper mitsamt einem nilpotenten Endomorphismus N. Zwei Paare (V, A) und (W, B) bestehend aus einem k-Vektorraum mit einem Endomorphismus nennen wir dazu „isomorph" und schreiben $(V, A) \cong (W, B)$, wenn es einen Isomorphismus $\phi : V \xrightarrow{\sim} W$ gibt mit $B \circ \phi = \phi \circ A$, so daß wir also ein kommutatives Diagramm erhalten der Gestalt

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\phi", "\wr"'] & V \arrow[d, "\phi", "\wr"'] \\ W \arrow[r, "B"] & W \end{tikzcd}$$

Für jeden Körper k werden in diesem Sinne also die Paare bestehend aus einem endlichdimensionalen k-Vektorraum und einem nilpotenten Endomorphismus desselben klassifiziert durch endliche Multimengen von positiven natürlichen Zahlen.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist unproblematisch: Ist $N : V \to V$ unser nilpotenter Endomorphismus mit Matrix $\mathrm{diag}(\mathrm{J}(r_1), \ldots, \mathrm{J}(r_n))$, so finden wir für $n \geq 1$ unmittelbar

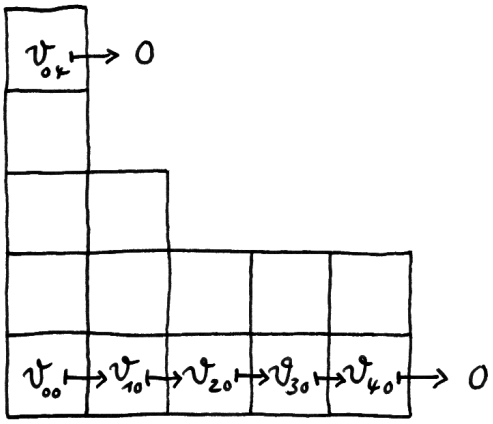
$$\dim(\mathrm{im}\, N^{n-1}) - \dim(\mathrm{im}\, N^n) = |\{i \mid r_i \geq n\}|$$

Die Kenntnis aller dieser Zahlen legt aber die Multimenge der r_i bereits fest. Die Existenz folgt unmittelbar aus Lemma 4.3.4.4, das wir gleich im Anschluß beweisen. $\square$

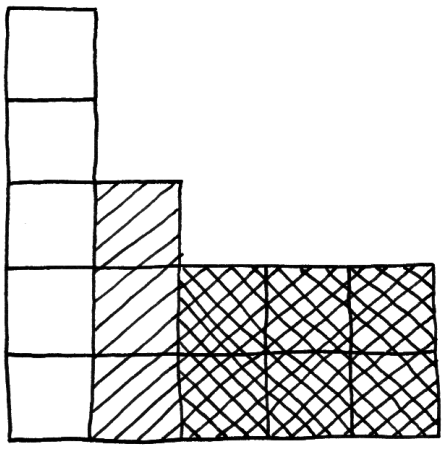
$$J(r) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{r} \Bigg\} r$$

Der nilpotente Jordan-Block $\mathrm{J}(r)$ der Größe r. Steht auf der Diagonalen statt der Nullen ein Skalar λ, so nennen wir die entsprechende Matrix einen **Jordan-Block der Größe r zum Eigenwert λ** und notieren diese Matrix

$$\mathrm{J}(r;\lambda) := \mathrm{J}(r) + \lambda I_r$$



Ich denke mir eine nilpotente Abbildung gerne in der hier gezeigten Weise. Die Kästchen stehen für Basisvektoren, unser Vektorraum hätte also die Dimension 14. Die Abbildung schiebt jedes Kästchen um eins nach links beziehungsweise nach Null, wenn es dabei aus unserem Bild herausfällt. Die Matrix dieser Abbildung hat in der geeignet angeordneten Kästchenbasis offensichtlich Normalform, und die Längen der Zeilen entsprechen hierbei den Größen der Jordanblöcke.



Schraffiert eine Basis des Bildes von N, kreuzweise schraffiert eine Basis des Bildes von N^2. Die Höhe der zweiten Spalte ist also genau $\dim(\operatorname{im} N) - \dim(\operatorname{im} N^2)$.

Lemma 4.3.4.4. *Ist $N : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums V, so gibt es eine Basis B von V derart, daß $B \sqcup \{0\}$ stabil ist unter N und daß jedes Element von B unter N höchstens ein Urbild in B hat. Wir nennen solch eine Basis eine* **Jordan-Basis**.

Beweis. Wir betrachten die Sequenz

$$\ker N \hookrightarrow V \twoheadrightarrow \operatorname{im} N$$

Mit Induktion über die Dimension von V dürfen wir annehmen, daß wir für das Bild von N eine derartige Basis bereits gefunden haben, sagen wir die Basis A. Jetzt ergänzen wir $\{a \in A \mid N(a) = 0\}$ durch irgendwelche $b_1, \ldots, b_s$ zu einer Basis des Kerns von N und wählen Urbilder $c_1, \ldots, c_r \in V$ für die Elemente von $A \backslash N(A)$ und behaupten, daß

$$B = A \cup \{b_1, \ldots, b_s\} \cup \{c_1, \ldots, c_r\}$$

eine Basis von V ist mit den geforderten Eigenschaften. Nach Konstruktion ist $B \sqcup \{0\}$ stabil unter N und jedes Element von B hat unter N höchstens ein Urbild in B. Wir müssen also nur noch zeigen, daß B eine Basis von V ist. Dazu schreiben wir B als die Vereinigung der beiden Mengen

$$\begin{aligned} \{a \in A \mid N(a) \neq 0\} \quad &\cup \quad \{c_1, \ldots, c_r\} \\ \{a \in A \mid N(a) = 0\} \quad &\cup \quad \{b_1, \ldots, b_s\} \end{aligned}$$

und bemerken, daß die erste Menge ein System von Urbildern unter N für unsere Basis A von $(\operatorname{im} N)$ ist, wohingegen die zweite eine Basis von $(\ker N)$ ist. Damit ist unsere große Vereinigung eine Basis von V nach 3.2.2.6. $\square$

Korollar 4.3.4.5 (Jordan'sche Normalform). *Gegeben ein Endomorphismus f eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper gibt es eine angeordnete Basis $\mathcal{B}$ unseres Vektorraums derart, daß die Matrix unseres Endomorphismus bezüglich dieser Basis blockdiagonal ist mit Jordan-Blöcken auf der Diagonale, in Formeln*

$${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\mathrm{J}(r_1; \lambda_1), \ldots, \mathrm{J}(r_t; \lambda_t))$$

Die Jordan-Blöcke auf der Diagonale sind hierbei durch unseren Endomorphismus wohlbestimmt bis auf Reihenfolge.

$$b_1 \mapsto 0$$

$$b_2 \mapsto 0$$

$$c_1 \mapsto \bullet \mapsto 0$$

$$c_2 \mapsto \bullet \mapsto \bullet \mapsto 0$$

$$c_3 \mapsto \bullet \mapsto \bullet \mapsto 0$$

$$c_4 \mapsto \bullet \mapsto \bullet \mapsto \bullet \mapsto \bullet \mapsto 0$$

Zum Beweis von 4.3.4.4. Die fetten Punkte stellen die Elemente der Basis A des Bildes $\operatorname{im} N$ dar. Die c_i zusammen mit den $a \in A$ mit $N(a) \neq 0$ bilden ein System von Urbildern unter N der Elemente von A.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{matrix}} & \\ 0 & & \boxed{7} \end{pmatrix}$$

Ein Matrix in Jordan'scher Normalform mit drei Jordanblöcken. Genau dann hat eine komplexe (6×6)-Matrix A diese Jordan'sche Normalform, wenn ihr charakteristisches Polynom eine einfache Nullstelle bei 7 und eine fünffache Nullstelle bei 5 hat und $\ker(A - 5I)$ zweidimensional ist sowie $\ker(A - 5I)^2$ vierdimensional.

4.3.4.6 (**Jordan'sche Normalform als Lösung eines Klassifikationsproblems**). Dieser Satz leistet im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers K im Sinne von 4.2.3.1 die Klassifikation der endlichdimensionalen K-Vektorräume mit einem ausgezeichneten Endomorphismus, in Bezug auf den in 4.3.4.3 erklärten Isomorphie-Begriff. Genauer werden solche Daten „klassifiziert durch endliche Multimengen von Paaren aus $(K \times \mathbb{N}_{\geq 1})$". Man beachte den fundamentalen Unterschied zur „Smith-Normalform" 3.2.6.11.

Ergänzung 4.3.4.7 (**Das Klassifikationsproblem für allgemeine Grundkörper**). Im Fall eines beliebigen Grundkörpers K wird die entsprechende Klassifikationsaufgabe in 7.2.4.8 gelöst: Endlichdimensionale K-Vektorräume mit einem ausgezeichneten Endomorphismus werden in Bezug auf den in 4.3.4.3 erklärten Isomorphiebegriff „klassifiziert durch endliche Multimengen von Elementen des Produkts $((\operatorname{irnp} K[X]) \times \mathbb{N}_{\geq 1})$" mit der Notation $\operatorname{irnp} K[X]$ für die Menge aller irreduziblen normierten Polynome aus $K[X]$.

4.3.4.8. Unser Korollar 4.3.4.5 gilt mit demselben Beweis auch, wenn wir statt der algebraischen Abgeschlossenheit des Grundkörpers nur voraussetzen, daß das charakteristische Polynom unseres Endomorphismus über unserem Körper vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Gegeben eine quadratische Matrix ist die explizite Berechnung einer „Jordan-Basis" im allgemeinen nicht ganz einfach. Hierzu gibt es auch Algorithmen, mit denen ich Sie jedoch nicht belasten will, da die explizite Berechnung einer Jordan-Basis in der Praxis selten gebraucht wird. Wichtig an diesem Korollar sind vielmehr die darin enthaltenen strukturellen Aussagen über Endomorphismen von Vektorräumen.

Beweis. Sei f unser Endomorphismus. Der Satz über die Hauptraumzerlegung 4.3.2.13 zeigt, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, daß es einen Skalar λ gibt, für den $(f - \lambda \operatorname{id})$ nilpotent ist. Der Satz über die Normalform nilpotenter Endomorphismen 4.3.4.2 beendet dann den Beweis. □

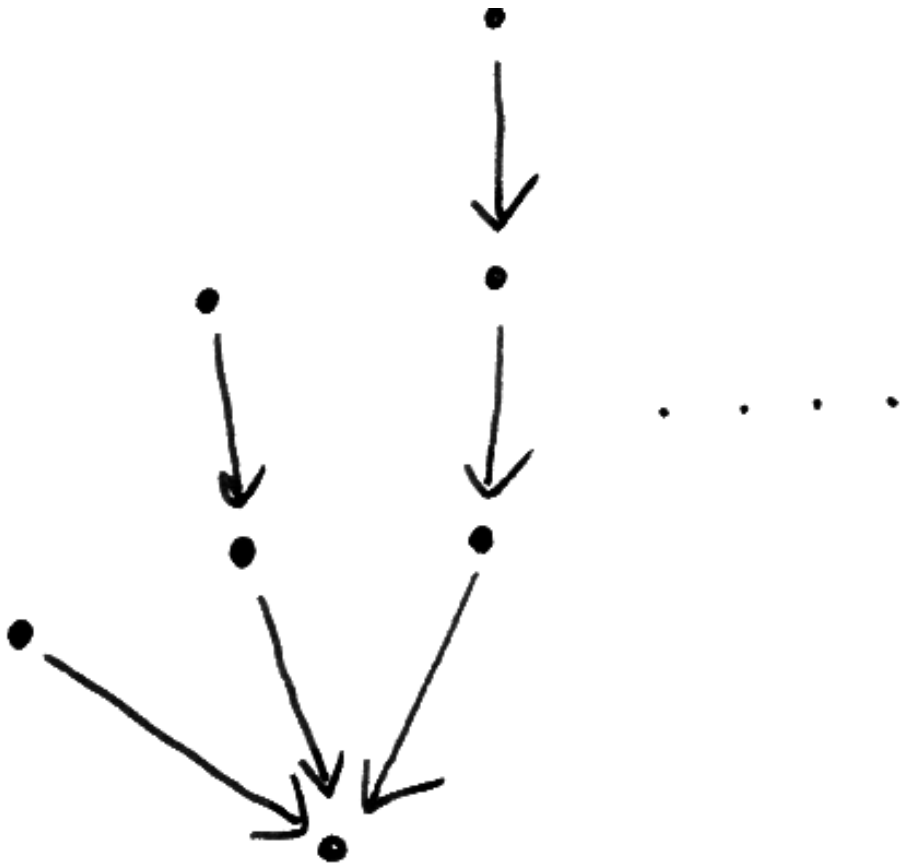
Ergänzung 4.3.4.9 (**Beispiele für lokal nilpotente Endomorphismen**). Lemma 4.3.4.4 über die Existenz einer Jordan-Basis gilt sogar ohne die Voraussetzung, daß V endlichdimensional ist. Um das zu zeigen, müssen wir nur die Induktion statt über die Dimension von V über die Nilpotenzordnung von N laufen lassen und 3.1.9.20 verwenden. Für einen lokal nilpotenten Endomorphismus N findet man jedoch im Allgemeinen keine Jordan-Basis mehr, nebenstehendes Bild zeigt ein Gegenbeispiel. Im Fall abzählbarer Dimension kann man noch zeigen, daß es stets eine Jordan-Basis gibt, wenn der Schnitt der Bilder aller Potenzen Null ist. Das beruht auf dem „Satz von Ulm" aus der Logik. Im Fall beliebiger Dimension gilt auch das nicht mehr, ja wir finden im allgemeinen noch nicht einmal eine Basis B derart, daß $B \sqcup \{0\}$ unter N stabil ist. Betrachten wir zum Beispiel den Raum V aller Abbildungen von der Menge $\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \geq j\}$ nach $\mathbb{R}$, die nur in endlich

vielen Zeilen nicht identisch Null sind, und den Endomorphismus $N : V \to V$, der „jede Zeile um eins nach unten drückt und die nullte Zeile annulliert“, in Formeln $(N(f))(i,j) = f(i,j+1)$ falls $i > j$ und $(N(f))(i,j) = 0$ falls $i = j$. Sicher hat V/NV eine abzählbare Basis, so daß $A := B \backslash NB$ abzählbar sein müßte. Andererseits ist in unserem Beispiel der Schnitt der Bilder aller Potenzen $\bigcap \operatorname{im} N^n$ der Nullraum, und das zeigt $B \sqcup \{0\} = A \cup NA \cup N^2A \cup \ldots$ im Widerspruch dazu, daß V selbst keine abzählbare Basis besitzt. Das alles habe ich in Diskussion mit Martin Ziegler gelernt.

Übungen

Übung 4.3.4.10 (**Jacobson-Morozov**). Sei $N : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus eines Vektorraums V. So besitzt V genau eine endliche Filtrierung $(V^{\geq r})_{r \in \mathbb{Z}}$ derart, daß für alle r gilt $N(V^{\geq r}) \subset V^{\geq r+2}$ und für alle $r \in \mathbb{N}$ zusätzlich

$$N^r : V^{\geq -r}/V^{\geq -r+1} \xrightarrow{\sim} V^{\geq r}/V^{\geq r+1}$$



Eine Basis mit der Eigenschaft aus Lemma 4.3.4.4 nennen wir auch eine **Jordan-Basis**. Dieses Bild zeigt einen lokal nilpotenten Endomorphismus, für den keine Jordan-Basis existiert. Die fetten Punkte stehen für Basisvektoren, die Pfeile zeigen, wie sie abgebildet werden. Wir erhalten so eine lokal nilpotente Abbildung, bei der der Schnitt der Bilder aller Potenzen nicht Null ist. Dennoch ist kein Element des zugehörigen Vektorraums „unendlich divisibel“, folglich kann es in diesem Fall keine Jordan-Basis geben.

4.4 Quotienten

In diesem Abschnitt wird die Gruppentheorie weiter ausgebaut. Insbesondere lernen Sie die Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen kennen. Man versteht unter solch einer Klassifikation die Angabe einer Liste von endlich erzeugten abelschen Gruppen derart, daß jede endlich erzeugte abelsche Gruppe zu genau einer Gruppe dieser Liste isomorph ist. Die Klassifikation endlich erzeugter Vektorräume über einem vorgegebenen Körper K kennen Sie bereits: Jeder solche Vektorraum K ist isomorph zu genau einem K^n mit $n \in \mathbb{N}$, und dieses n heißt dann auch die Dimension des K-Vektorraums V. Wir werden sehen, daß die Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen raffinierter ist.

4.4.1 Nebenklassen

4.4.1.1. Ist $(G, \perp)$ eine Menge mit Verknüpfung und sind $A, B \subset G$ Teilmengen, so schreiben wir $A \perp B = \{a \perp b \mid a \in A,\ b \in B\} \subset G$ und erhalten auf diese Weise eine Verknüpfung auf der Menge aller Teilmengen von G, der sogenannten Potenzmenge $\mathcal{P}(G)$. Ist unsere ursprüngliche Verknüpfung assoziativ, so auch die induzierte Verknüpfung auf der Potenzmenge. Wir kürzen in diesem Zusammenhang oft die einelementige Menge $\{a\}$ mit a ab, so daß also zum Beispiel $a \perp B$ als $\{a\} \perp B$ zu verstehen ist.

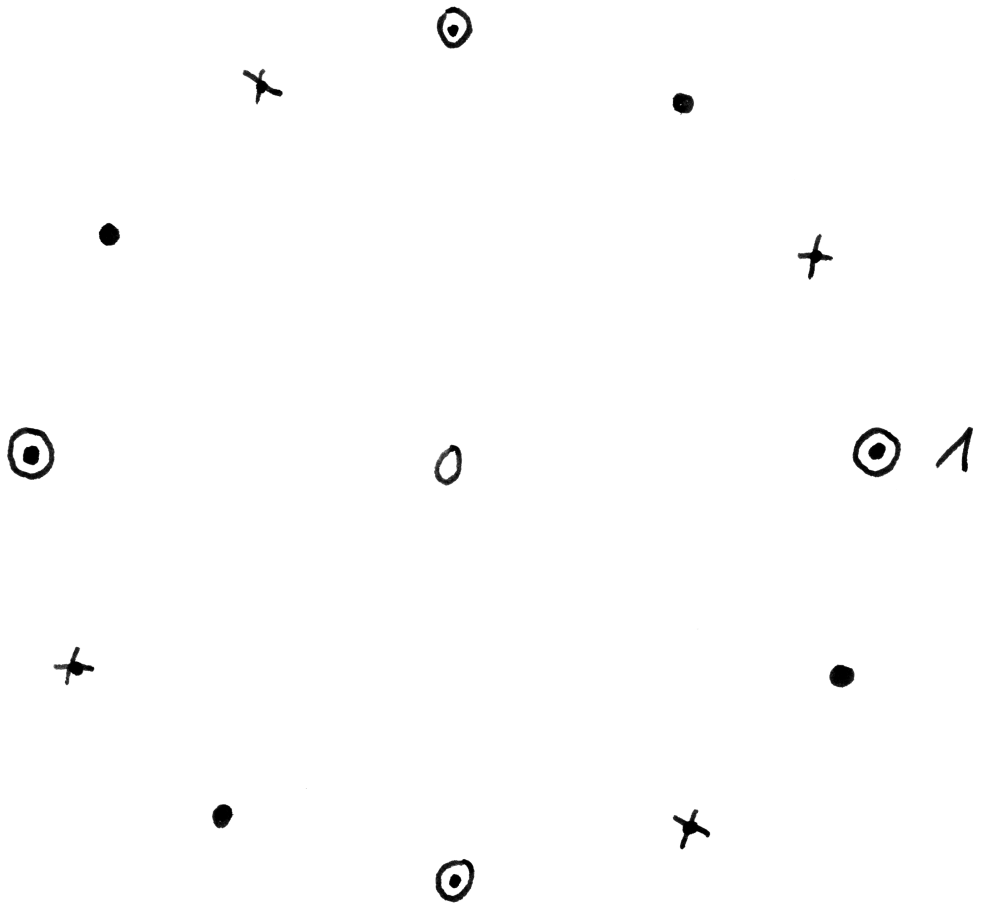
Definition 4.4.1.2. Ist G eine Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe und $g \in G$ ein Element, so nennen wir die Menge gH die **Linksnebenklasse von** g **unter** H und die Menge Hg die **Rechtsnebenklasse von** g **unter** H. Diese Nebenklassen sind also Teilmengen von G. Ein Element einer Nebenklasse nennt man einen **Repräsentanten** der besagten Nebenklasse. Weiter betrachten wir in G die beiden Mengensysteme

$$\begin{aligned} G/H &= \{gH \mid g \in G\} \\ H\backslash G &= \{Hg \mid g \in G\} \end{aligned}$$

aller Links- beziehungsweise Rechtsnebenklassen von H in G. Die Elemente von G/H und von $H\backslash G$ sind also Teilmengen von G. Die Symbole G/H sowie $H\backslash G$ bezeichnen dementsprechend Teilmengen der Potenzmenge $\mathcal{P}(G)$ von G.

4.4.1.3 (**Disjunktheit der Nebenklassen**). Gegeben $G \supset H$ eine Gruppe mit einer Untergruppe sind die H-Rechtsnebenklassen in G paarweise disjunkt. In der Tat folgt aus $g \in xH$ alias $g = xh$ für $h \in H$ bereits $gH = xhH = xH$. Analoges gilt für die Linksnebenklassen.

Beispiel 4.4.1.4. Im Fall $G = \mathbb{Z} \supset H = m\mathbb{Z}$ haben wir die Menge der Nebenklassen $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ bereits in 3.5.2.4 diskutiert und sogar selbst mit der Struktur einer Gruppe, ja sogar mit der Struktur eines Rings versehen. Im allgemeinen trägt



Die drei Nebenklassen der Gruppe $\{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$ der vierten Einheitswurzeln in der Gruppe der zwölften Einheitswurzeln. Da diese Gruppe kommutativ ist, fallen hier Rechtsnebenklassen und Linksnebenklassen zusammen.

G/H nur dann eine natürliche Gruppenstruktur, wenn wir an unsere Untergruppe H zusätzliche Forderungen stellen, vergleiche 4.4.2.

Satz 4.4.1.5 (Lagrange). *Gegeben eine endliche Gruppe teilt die Kardinalität jeder Untergruppe die Kardinalität der ganzen Gruppe. Ist G eine endliche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe, so gilt genauer*

$$|G| = |H| \cdot |G/H| = |H| \cdot |H \backslash G|$$

Beweis. Jedes Element von G gehört zu genau einer Links- beziehungsweise Rechtsnebenklasse unter H, und jede dieser Nebenklassen hat genau $|H|$ Elemente. □

4.4.1.6. In anderen Worten kann man diesen Beweis etwa im Fall der Linksnebenklassen auch dahingehend formulieren, daß alle Fasern der offensichtlichen Abbildung $\mathrm{can} : G \to G/H$ genau $|H|$ Elemente haben, denn diese Fasern sind gerade die Linksnebenklassen von H in G.

Definition 4.4.1.7. Gegeben eine Gruppe G mit einer Untergruppe H heißt die Zahl $|G/H|$ der Restklassen auch der **Index von H in G**.

Übungen

Ergänzende Übung 4.4.1.8. Haben zwei Untergruppen ein- und derselben Gruppe endlichen Index, so hat auch ihr Schnitt endlichen Index.

Ergänzende Übung 4.4.1.9. Seien $G \supset H$ eine Gruppe und eine Untergruppe. Man zeige, daß es eine Bijektion zwischen G/H und $H \backslash G$ gibt.

Ergänzende Übung 4.4.1.10. Haben zwei endliche Untergruppen einer Gruppe teilerfremde Kardinalitäten, so besteht ihr Schnitt nur aus dem neutralen Element.

Übung 4.4.1.11. Sei $\varphi : G \to L$ ein Gruppenhomomorphismus und seien $H \subset G$ sowie $H' \subset G'$ Untergruppen. Gilt $\varphi(H) \subset H'$, so gibt es genau eine Abbildung $\bar{\varphi} : G/H \to G'/H'$ derart, daß im Diagramm

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & G/H \arrow[d] \\ H' \arrow[r] & G' \arrow[r] & G'/H' \end{tikzcd}$$

auch das rechte Rechteck kommutiert, und die nichtleeren Fasern dieser Abbildung $\bar{\varphi}$ sind die Mengen $\bar{\varphi}^{-1}(\varphi(g)H') = \{gxH \mid x \in \varphi^{-1}(H')\}$ und haben insbesondere alle dieselbe Kardinalität wie $\varphi^{-1}(H')/H$. Sind weiter zwei der vertikalen Abbildungen unseres Diagramms Bijektionen, so auch die Dritte. Allgemeinere Aussagen liefert später das Neunerlemma 4.4.7.5.

Ergänzende Übung 4.4.1.12 (**Zu unipotenten oberen Dreiecksmatrizen**). Sei R ein Ring und $n \geq 2$. Gegeben $i, j \leq n$ mit $i \neq j$ betrachten wir die Untergruppen $U_{ij} := \mathrm{I} + RE_{ij} \subset \mathrm{GL}(n; R)$ und die Untergruppe $U \subset \mathrm{GL}(n; R)$ aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einträgen in R. Man zeige, daß das Aufmultiplizieren in beliebiger aber fest gewählter Reihenfolge stets eine Bijektion

$$\prod_{i<j} U_{ij} \xrightarrow{\sim} U$$

induziert. Hinweis: Man betrachte rechts die Folge von Untergruppen $U_\nu := \{A \mid A_{ij} = 0 \text{ für } 0 < |i-j| \leq \nu\}$ und verwende 4.4.1.11. Allgemeiner zeige man, daß für jede Permutation $w \in \mathcal{S}_n$ die Multiplikation bei beliebiger aber fester Reihenfolge der Faktoren eine Bijektion $\prod_{i<j,\, w(i)<w(j)} U_{ij} \xrightarrow{\sim} U \cap w^{-1}Uw$ liefert. Hinweis: Natürlich gilt stets $U_{w(i)w(j)}w = wU_{ij}$.

4.4.2 Normalteiler und Nebenklassengruppen

Satz 4.4.2.1 (Universelle Eigenschaft surjektiver Gruppenhomomorphismen). *Seien G eine Gruppe, $s : G \twoheadrightarrow Q$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus und $\varphi : G \to H$ ein beliebiger Gruppenhomomorphismus. Genau dann existiert ein Gruppenhomomorphismus $\bar{\varphi} : Q \to H$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ s$, wenn gilt* $\ker(\varphi) \supset \ker(s)$.

4.4.2.2. Dieser Gruppenhomomorphismus $\bar{\varphi}$ ist dann natürlich eindeutig bestimmt. In diesem Sinne kann man unseren Satz auch dahingehend zusammenfassen, daß das Vorschalten eines surjektiven Gruppenhomomorphismus $s : G \twoheadrightarrow Q$ für jede weitere Gruppe H eine Bijektion

$$(\circ s) : \mathrm{Grp}(Q, H) \xrightarrow{\sim} \{\varphi \in \mathrm{Grp}(G, H) \mid \ker(\varphi) \supset \ker(s)\}$$

liefert. Der Übersichtlichkeit halber stelle ich die in diesem Satz auftauchenden Gruppen und Morphismen auch noch wieder anders in einem Diagramm dar:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, two heads, "s"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Q \arrow[d, dashed, "\bar{\varphi}"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Man sagt dann, φ **faktorisiere in eindeutiger Weise über** s.

Beweis. Offensichtlich gilt $s^{-1}(s(x)) = x \ker(s)$ für alle $x \in G$. Die Fasern von unseres surjektiven Gruppenhomomorphismus s sind also genau die Nebenklassen unter $\ker(s)$. Damit ist φ konstant auf den Fasern von s und wir finden nach der universellen Eigenschaft von Surjektionen 2.1.5.11 schon einmal genau eine Abbildung $\bar{\varphi}$ wie behauptet. Man prüft ohne weitere Schwierigkeiten, daß sie sogar ein Gruppenhomomorphismus sein muß. $\square$

Beispiel 4.4.2.3. Wir haben etwa

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, two heads, "\mathrm{can}"] \arrow[dr, "\varphi : n \mapsto \mathrm{i}^n"'] & \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \arrow[d, dashed, "\bar{\varphi}"] \\ & \mathbb{C}^\times \end{tikzcd}$$

oder in Worten: Die Abbildung $\varphi : n \mapsto \mathrm{i}^n$ faktorisiert über $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ und induziert so einen Gruppenhomomorphismus $\bar{\varphi} : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times$, $\bar{n} \mapsto \mathrm{i}^n$.

4.4.2.4 (**Surjektive Gruppenhomomorphismen mit demselben Kern**). Gegeben eine Gruppe G und zwei surjektive Gruppenhomomorphismus $s : G \twoheadrightarrow Q$ und $t : G \twoheadrightarrow P$ mit demselben Kern $\ker(s) = \ker(t)$ sind die Gruppenhomomorphismen $\bar{t} : Q \to P$ mit $\bar{t} \circ s = t$ und $\bar{s} : P \to Q$ mit $\bar{s} \circ t = s$ nach 4.4.2.1 zueinander inverse Isomorphismen $Q \xrightarrow{\sim} P \xrightarrow{\sim} Q$. Salopp gesprochen wird also bei einem surjektiven Gruppenhomomorphismus „das Ziel bereits durch die Ausgangsgruppe und den Kern festgelegt bis auf eindeutigen Isomorphismus“.

4.4.2.5. Die vorstehenden Überlegungen legen die Frage nahe, welche Untergruppen einer gegebenen Gruppe denn als Kerne von von unserer Gruppe ausgehenden Gruppenhomomorphismen in Frage kommen. Das diskutieren wir im folgenden.

Definition 4.4.2.6. Eine Untergruppe N einer Gruppe G heißt **normal** oder auch ein **Normalteiler von** G, wenn in G die N-Rechtsnebenklassen mit den N-Linksnebenklassen übereinstimmen, wenn also gilt

$$gN = Ng \; \forall g \in G$$

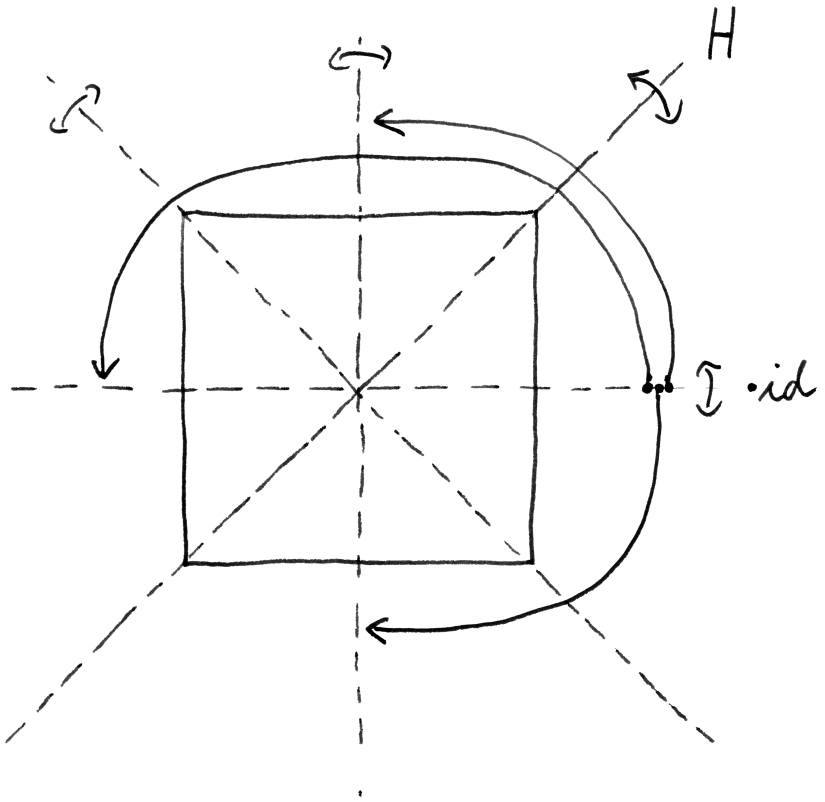
Die Aussage „$N \subset G$ ist ein Normalteiler“ kürzt man oft ab mit $N \lhd G$.

Beispiele 4.4.2.7. In einer kommutativen Gruppe ist jede Untergruppe ein Normalteiler. In der Gruppe $\mathcal{S}_3$ der Permutationen von 3 Elementen ist die Untergruppe $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_3$ aller Permutationen, die die dritte Stelle festhalten, kein Normalteiler.

4.4.2.8 (**Diskussion der Terminologie**). Normal zu sein ist für eine Untergruppe etwas ganz Besonderes. In diesem Licht betrachtet ist unsere Terminologie gewöhnungsbedürftig. Aber gut, vielleicht ist ja bei Menschen auch normal zu sein etwas ganz Besonderes.

4.4.2.9. Man sieht leicht, daß der Kern eines Gruppenhomomorphismus stets ein Normalteiler sein muß. Wir zeigen nun, daß auch umgekehrt jeder Normalteiler der Kern eines surjektiven Gruppenhomomorphismus ist.

Satz 4.4.2.10. *Seien G eine Gruppe und $N \subset G$ ein Normalteiler. So gilt:*



Die acht Symmetrien des Quadrats. Eine Linksnebenklasse gH der von der Spiegelung an der Nordost-Diagonalen erzeugten Untergruppe besteht aus den beiden Symmetrien des Quadrats, die die obere rechte Ecke in eine vorgegebene weitere Ecke überführen. Eine Rechtsnebenklasse Hg besteht dahingegen aus den beiden Symmetrien des Quadrats, bei denen die obere rechte Ecke von einer vorgegebenen weiteren Ecke herkommt. Insbesondere ist H kein Normalteiler in der Gruppe der acht Symmetrien des Quadrats.

1. *Die Menge G/N der Nebenklassen ist abgeschlossen unter der induzierten Verknüpfung auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(G)$ von G und wird mit dieser Verknüpfung eine Gruppe, die* **Nebenklassengruppe** *oder auch der* **Quotient von G nach N***;*

2. *Die Abbildung $G \twoheadrightarrow G/N$, die jedem Element seine Nebenklasse zuordnet, ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern N.*

Beweis. Es gilt $(gN)(g_1N) = gNg_1N = gg_1NN = gg_1N$, also ist unsere Menge stabil unter der Verknüpfung. Das Assoziativgesetz gilt eh, das neutrale Element ist N, und das Inverse zu gN ist $g^{-1}N$. Die zweite Aussage ist eh klar. □

Beispiel 4.4.2.11. Die Nebenklassengruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ kennen wir bereits aus 3.5.2.4, wo wir darauf sogar noch eine Multiplikation erklärt hatten, die sie zu einem Ring macht. Sie hat genau m Elemente.

Satz 4.4.2.12 (**Isomorphiesatz**). *Jeder Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von Gruppen induziert einen Isomorphismus $\bar{\varphi} : G/\ker\varphi \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}\varphi$.*

Beispiel 4.4.2.13. In unserem Beispiel 4.4.2.3 liefert uns der Isomorphiesatz einen Isomorphismus $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \{\mathrm{i}^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}^\times$.

Beispiel 4.4.2.14. Die Abbildung $\varphi = 2\,\mathrm{can} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, $n \mapsto (2n + 10\mathbb{Z})$ hat den Kern $\ker\varphi = 5\mathbb{Z}$ und das Bild $\operatorname{im}\varphi = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} \subset \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Der Isomorphiesatz liefert in diesem Fall also einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$$

Beweis. Das folgt sofort aus unserern Erkenntnissen 4.4.2.4 über surjektive Gruppenhomomorphismen mit demselben Kern, denn wir finden surjektive Gruppenhomomorphismen von G auf beide Seiten, die ein kommutatives Dreieck entstehen lassen und denselben Kern haben. □

Korollar 4.4.2.15 (**Noether'scher Isomorphiesatz**). *Ist G eine Gruppe und sind $K \subset H \subset G$ zwei Normalteiler von G, so induziert die Komposition von kanonischen Abbildungen $G \twoheadrightarrow (G/K) \twoheadrightarrow (G/K)/(H/K)$ einen Isomorphismus*

$$G/H \xrightarrow{\sim} (G/K)/(H/K)$$

4.4.2.16. Ist G eine Gruppe und sind $K \subset H \subset G$ Untergruppen mit K normal in H, so werden wir bald $(G/K)/(H/K)$ als „Raum der Bahnen einer Operation der Gruppe H/K auf der Menge G/K" verstehen können, und unsere Abbildung ist dann immer noch wohldefiniert und nach 4.5.1.26 eine Bijektion.

Beweis. Nach unserern Erkenntnissen 4.4.2.4 über surjektive Gruppenhomomorphismen mit demselben Kern4.4.2.4 reicht es zu zeigen, daß unsere Kompsition den Kern H hat. Das ist jedoch klar. □

Übungen

Übung 4.4.2.17. Man zeige, daß in der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_4$ die Doppeltranspositionen aus 3.6.1.12 zusammen mit dem neutralen Element einen Normalteiler $D \subset \mathcal{S}_4$ bilden, und konstruiere einen Isomorphismus $\mathcal{S}_4/D \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_3$.

Ergänzende Übung 4.4.2.18. Sei $m \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Man zeige, daß die Vorschrift $\varphi \mapsto \varphi(\bar{1})$ für eine beliebige Gruppe G eine Bijektion

$$\mathrm{Grp}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} \{g \in G \mid g^m = 1\}$$

liefert. Man beachte, daß hierbei $\bar{1}$ nicht das neutrale Element der additiv notierten Gruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ bezeichnet, sondern die Nebenklasse der Eins, einen Erzeuger, wohingegen $1 \in G$ das neutrale Element der multiplikativ notierten Gruppe G meint. Wieviele Gruppenhomomorphismen gibt es von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Übung 4.4.2.19. Gegeben ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \twoheadrightarrow \bar{G}$ und ein Normalteiler $\bar{N} \subset \bar{G}$ mit Urbild $\varphi^{-1}(\bar{N}) = N \subset G$ induziert φ einen Gruppenisomorphismus

$$\varphi : G/N \xrightarrow{\sim} \bar{G}/\bar{N}$$

Übung 4.4.2.20. Der Kern eines Gruppenhomomorphismus ist stets ein Normalteiler. Allgemeiner ist das Urbild eines Normalteilers unter einem Gruppenhomomorphismus stets ein Normalteiler, und das Bild eines Normalteilers unter einem surjektiven Gruppenhomomorphismus ist wieder ein Normalteiler.

Ergänzende Übung 4.4.2.21. Jede Untergruppe vom Index Zwei ist ein Normalteiler.

Ergänzende Übung 4.4.2.22. Jede Untergruppe von endlichem Index umfaßt einen Normalteiler von endlichem Index.

Ergänzende Übung 4.4.2.23. Man nennt einen Gruppenhomomorphismus $A \to A''$ **linksspaltend**, wenn er ein Rechtsinverses besitzt, und nennt solch ein Rechtsinverses dann eine **Spaltung**. Man zeige: Jeder linksspaltende Gruppenhomomorphismus ist surjektiv. Ist $\varphi : A \to A''$ ein Homomorphismus von abelschen Gruppen, $A' \subset A$ sein Kern und $\psi : A'' \to A$ ein Rechtsinverses von φ alias $\varphi\psi = \mathrm{id}$, so erhalten wir vermittels der Vorschrift $(a', a'') \mapsto a' + \psi(a'')$ einen Isomorphismus $A' \times A'' \xrightarrow{\sim} A$. Verallgemeinerungen auf den Fall nichtabelscher Gruppen besprechen wir in 6.1.2.10.

Ergänzende Übung 4.4.2.24. Man nennt einen Gruppenhomomorphismus $A' \to A$ **rechtsspaltend**, wenn er ein Linksinverses besitzt, und nennt solch ein Linksinverses dann eine **Spaltung**. Man zeige: Jeder rechtsspaltende Gruppenhomomorphismus ist injektiv. Ist $\psi : A' \to A$ ein Homomorphismus von abelschen Gruppen und $\phi : A \to A'$ ein Linksinverses alias $\phi\psi = \mathrm{id}$ und $A'' \subset A$ dessen Kern, so ist ϕ linksspaltend und wir erhalten für $A'' := \ker \phi$ wie in 4.4.2.23 einen Isomorphismus $A' \times A'' \xrightarrow{\sim} A$.

Ergänzende Übung 4.4.2.25. Jede Surjektion von einer abelschen Gruppe auf $\mathbb{Z}^r$ besitzt ein Rechtsinverses. Man gebe ein Beispiel für einen surjektiven Gruppenhomomorphismus, der kein Rechtsinverses besitzt.

Übung 4.4.2.26. Man zeige, daß das Multiplizieren von Matrizen mit Spaltenvektoren eine Bijektion $\mathrm{Mat}(n \times m; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Grp}(\mathbb{Z}^m, \mathbb{Z}^n)$, $A \mapsto (A\circ)$ zwischen der Menge aller $(n \times m)$-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen und der Menge aller Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ liefert.

Ergänzende Übung 4.4.2.27. Seien A, B, C abelsche Gruppen. Eine Abbildung $\varphi : A \times B \to C$ heißt **biadditiv**, wenn jedes feste $b \in B$ einen Gruppenhomomorphismus $A \to C$, $a \mapsto \varphi(a, b)$ liefert und jedes feste $a \in A$ einen Gruppenhomomorphismus $B \to C$, $b \mapsto \varphi(a, b)$. Man zeige: Gegeben eine biadditive Abbildung $\varphi : A \times B \to C$ und surjektive Homomorphismen $s : A \twoheadrightarrow P$ sowie $t : B \twoheadrightarrow Q$ mit $\varphi(\ker(s) \times B) = 0 = \varphi(A \times \ker(t))$ gibt es genau eine biadditive Abbildung $\bar{\varphi} : P \times Q \to C$ derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "s \times t"'] & C \arrow[d, equal] \\ P \times Q \arrow[r, dashed, "\bar{\varphi}"] & C \end{tikzcd}$$

Analog erklärt man multiadditive Abbildungen für abelsche Gruppen und zeigt für diese eine analoge Aussage.

4.4.3 Zyklische Gruppen

Definition 4.4.3.1. Eine Gruppe heißt **zyklisch**, wenn sie im Sinne von 3.4.3.5 von einem einzigen Element erzeugt wird.

Definition 4.4.3.2. Sei g ein Element einer Gruppe G. Die **Ordnung** $\operatorname{ord} g$ von g ist die kleinste natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $g^n = 1_G$. Gibt es kein solches n, so setzen wir $\operatorname{ord} g = \infty$ und sagen, g habe **unendliche Ordnung**.

4.4.3.3. In jeder Gruppe ist das einzige Element der Ordnung 1 das neutrale Element. Elemente der Ordnung ≤ 2 heißen auch **Involutionen**.

Proposition 4.4.3.4 (**Struktur zyklischer Gruppen**). *Ist G eine Gruppe und $g \in G$ ein Element, so stimmt die Ordnung von g überein mit der Kardinalität der von g erzeugten Untergruppe, in Formeln $\operatorname{ord} g = |\langle g \rangle|$. Genauer gilt:*

1. *Hat g unendliche Ordnung, so ist die Abbildung $\nu \mapsto g^\nu$ ein Isomorphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \langle g \rangle$;*

2. *Hat g endliche Ordnung $\operatorname{ord} g = n$, so induziert $\nu \mapsto g^\nu$ einen Isomorphismus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \langle g \rangle$.*

Beweis. Wir betrachten den Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to G$, $\nu \mapsto g^\nu$. Nach dem Isomorphiesatz 4.4.2.12 haben wir einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}/\ker\varphi \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}\varphi = \langle g \rangle$$

Nach der Klassifikation 3.4.3.4 der Untergruppen von $\mathbb{Z}$ ist $\ker\varphi$ von der Form $\ker\varphi = n\mathbb{Z}$ für eindeutig bestimmtes $n \in \mathbb{N}$, und dann gilt notwendig $n = \operatorname{ord} g$ für g von endlicher Ordnung beziehungsweise $n = 0$ für g von unendlicher Ordnung. □

4.4.3.5. Motiviert durch diese Proposition nennt man die Kardinalität einer Gruppe oft die **Ordnung der Gruppe**. Wir haben mit unserer Proposition im Übrigen auch bewiesen, daß jede Gruppe mit genau 5 Elementen isomorph ist zu $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, denn für jedes vom neutralen Element verschiedene Element unserer Gruppe ist $\langle g \rangle$ eine Untergruppe mit mindestens zwei Elementen, also nach Lagrange bereits die ganze Gruppe. Wir formulieren das gleich noch allgemeiner.

Ergänzung 4.4.3.6 (**Diskussion der Notation**). Für die endlichen zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $n \geq 1$ sind viele alternative Notationen gebräuchlich. Ich kenne insbesondere die alternativen Notationen C_n, Z_n und $\mathbb{Z}_n$, von denen ich die letzte am wenigsten mag, da sie im Fall einer Primzahl $n = p$ auch für die sogenannten p-adischen Zahlen benutzt wird.

Korollar 4.4.3.7. *Jede Gruppe von Primzahlordnung ist zyklisch. Ist genauer p eine Primzahl und G eine Gruppe mit $|G| = p$ Elementen, so gibt es für jedes Element $g \in G \backslash 1_G$ genau einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} G$ mit $\bar{1} \mapsto g$.*

Beweis. Nach dem Satz von Lagrange 4.4.1.5 teilt die Ordnung jeder Untergruppe die Ordnung der ganzen Gruppe. Eine Gruppe von Primzahlordnung hat also nur genau zwei Untergruppen, nämlich die einelementige Untergruppe, die nur aus dem neutralen Element besteht, und die ganze Gruppe als Untergruppe von sich selbst. Die von einem Element, das nicht das neutrale Element ist, erzeugte Untergruppe muß also notwendig bereits die ganze Gruppe sein. □

Korollar 4.4.3.8. *Bei einer endlichen Gruppe G teilt die Ordnung jedes Elements $g \in G$ die Ordnung der ganzen Gruppe und es gilt mithin*

$$g^{|G|} = 1$$

Beweis. Man wende den Satz von Lagrange 4.4.1.5 an auf die von unserem Element erzeugte Untergruppe. Es folgt, daß $r := \operatorname{ord} g = |\langle g \rangle|$ ein Teiler von $|G|$ ist, $|G| = ra$ mit $a \in \mathbb{N}$. Damit erhalten wir aber

$$g^{|G|} = g^{ra} = (g^r)^a = 1^a = 1$$ □

Korollar 4.4.3.9. *Ist p eine Primzahl, so gilt für alle ganzen Zahlen $a \in \mathbb{Z}$ die* **Fermat'sche Kongruenz**

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Beweis. Die multiplikative Gruppe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ des Körpers $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ hat genau $p-1$ Elemente, nach 4.4.3.8 gilt also $b^{p-1} = 1$ für alle $b \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. Es folgt $b^p = b$ für alle $b \neq 0$, und für $b = 0$ gilt diese Gleichung eh. Mit $b = a + p\mathbb{Z}$ ergibt sich dann die Behauptung. □

4.4.3.10. Gibt es natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$, die

bei Division durch 6 Rest 4 lassen,

bei Division durch 13 Rest 2, und

bei Division durch 11 Rest 9?

Da $\langle 6, 13\rangle = \langle 13, 11\rangle = \langle 6, 11\rangle = \langle 1\rangle$ lautet die Antwort ja, wie man aus dem anschließenden Korollar 4.4.3.13 folgert.

Satz 4.4.3.11. *Ist $m = ab$ ein Produkt von zwei zueinander teilerfremden positiven natürlichen Zahlen, so liefert die Abbildung $\kappa : n \mapsto (n + a\mathbb{Z}, n + b\mathbb{Z})$ einen Isomorphismus*

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$$

4.4.3.12. Übung 4.4.4.25 zeigt, daß die fraglichen Gruppen im Fall nicht teilerfremder Faktoren auch nicht isomorph sind.

Beweis. Der Kern unserer Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \kappa : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & (n + a\mathbb{Z}, n + b\mathbb{Z}) \end{array}$$

besteht aus allen $n \in \mathbb{Z}$, die durch a und b teilbar sind, also aus allen Vielfachen von m. Unser Isomorphiesatz 4.4.2.12 liefert mithin einen Isomorphismus $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}\kappa$. Daraus folgt hinwiederum $\operatorname{im}\kappa = \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$, da unsere Untergruppe $\operatorname{im}\kappa$ bereits selbst $m = ab$ Elemente hat. □

Korollar 4.4.3.13 (Chinesischer Restsatz). *Ist $m = q_1 \ldots q_s$ ein Produkt von paarweise teilerfremden ganzen Zahlen, so liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus*

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/q_s\mathbb{Z}$$

Beweis. Das folgt induktiv aus dem in 4.4.3.11 behandelten Fall $s = 2$. Die Details mag der Leser als Übung selbst ausführen. □

Ergänzung 4.4.3.14. Ein Element endlicher Ordnung in einer Gruppe heißt ein **Torsionselement**. Eine Gruppe, in der alle Elemente außer dem neutralen Element unendliche Ordnung haben, heißt **torsionsfrei**. Zum Beispiel sind die abelschen Gruppen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ torsionsfrei. Die Menge aller Torsionselemente ist in jeder abelschen Gruppe A eine Untergruppe, die **Torsionsuntergruppe** A_{tor}. In der Tat folgt, wenn wir unsere Gruppe einmal additiv notieren, für $x, y \in A$ aus $nx = 0$ und $my = 0$ bereits $nm(x + y) = 0$.

Satz 4.4.3.15 (Primzahltorsion in abelschen Gruppen). *Gegeben eine abelsche Gruppe A gilt:*

1. *Für jede Primzahl p ist die Teilmenge $A(p)$ aller Elemente von p-Potenz-Ordnung eine Untergruppe;*

2. *Sind $p_1, \ldots, p_r$ paarweise verschiedene Primzahlen, so liefert das Verknüpfen einen injektiven Gruppenhomomorphismus*

$$A(p_1) \times \ldots \times A(p_r) \hookrightarrow A$$

3. *Das Bild unseres Gruppenhomomorphismus aus Teil 2 besteht genau aus den Elementen von A, deren Ordnung endlich ist und von keinen von p_i verschiedenen Primzahlen geteilt wird.*

Vorschau 4.4.3.16. Dieser Satz wird sich in 7.4.8.1 ebenso wie der Satz 4.3.2.7 über die Direktheit der Summe der Haupträume als Spezialfall desselben allgemeinen Resultats zu „Moduln über Kringen“ erweisen.

Beweis. (1) Wir notieren unsere abelsche Gruppe A additiv. Gegeben $x, y \in A$ der Ordnungen p^r und p^s liefert die Vorschrift $(n, m) \mapsto nx + my$ einen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} \to A$. Offensichtlich landet er sogar in $A(p)$ und sein Bild enthält x und y. Das zeigt die erste Behauptung.

(2) Es gilt zu zeigen, daß der Kern Null ist. Sei sonst $(x_1, \ldots, x_r)$ im Kern aber nicht Null. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $x_1 \neq 0$ annehmen. die Gleichung

$$-x_1 = x_2 + \ldots + x_r$$

zeigt dann $(p_2 \ldots p_r)^N x_1 = 0$ für hinreichend großes N, im Widerspruch zu unserer Annahme, daß die Ordnung von x_1 eine Potenz von p_1 sein soll.

(3) Es reicht, das für zyklische Torsionsgruppen zu zeigen. In diesem Fall folgt es aber unmittelbar aus dem chinesischen Restsatz. □

Korollar 4.4.3.17 (Primzerlegung endlicher abelscher Gruppen). *Sei E eine endliche abelsche Gruppe.*

1. *Gegeben eine Primzahl p ist die Teilmenge $E(p)$ aller Elemente, deren Ordnung eine p-Potenz ist, eine Untergruppe von p-Potenzordnung;*

2. *Sind $p_1, \ldots, p_r$ die paarweise verschiedenen Primzahlen, die in der Primfaktorzerlegung von $|E|$ mindestens einmal vorkommen, so liefert die Verknüpfung einen Gruppenisomorphismus*

$$E(p_1) \times \ldots \times E(p_r) \xrightarrow{\sim} E$$

Beweis. Unser Korollar folgt unmittelbar aus Satz 4.4.3.15 über Primzahltorsion in abelschen Gruppen mit Ausnahme der Aussage, daß $E(p)$ eine Gruppe von p-Potenzordnung ist. Das folgt aber für alle endlichen abelschen Gruppen, in denen jedes Element p-Potenzordnung hat, durch Induktion über die Gruppenordnung. Unser Korollar wird alternativ auch unmittelbar aus dem Klassifikationssatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen 4.4.4.5 folgen. □

Ergänzung 4.4.3.18 (**Satz von Cauchy im abelschen Fall**). Teilt eine Primzahl p die Ordnung einer endlichen abelschen Gruppe E, so gibt es insbesondere in E ein Element der Ordnung p : In der Tat ist dann $E(p)$ nicht trivial; es gibt darin also ein vom neutralen Element verschiedenes Element a; dessen Ordnung ist etwa p^r mit $r \geq 1$; und dann ist in additiver Notation $p^{r-1}a$ das gesuchte Element der Ordnung p. Dieselbe Aussage gilt auch für beliebige endliche Gruppen und heißt der „Satz von Cauchy“, aber der Beweis ist dann schwieriger, vergleiche 4.5.1.35 oder 6.1.4.8.

Übungen

Ergänzende Übung 4.4.3.19 (**Polynomfunktionen über endlichen Körpern**). Sei k ein endlicher Körper mit $|k| = q$ Elementen. Man zeige $a^q = a$ für alle $a \in k$. Man zeige weiter, daß der Kern unserer Surjektion $k[X_1, \ldots, X_n] \to \mathrm{Ens}(k^n, k)$ aus 3.5.4.3 genau aus denjenigen Polynomen besteht, die sich als Summe $P_1(X_1^q - X_1) + \ldots + P_n(X_n^q - X_n)$ der Produkte von irgendwelchen Polynomen $P_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$ mit den Polynomen $(X_i^q - X_i)$ schreiben lassen. Hinweis: Unsere Summen von Produkten bilden einen Untervektorraum, zu dem der Untervektorraum aller Polynome, in denen kein X_i in der Potenz q oder höher vorkommt, komplementär ist.

Übung 4.4.3.20 (**Untergruppen zyklischer Gruppen**). Man zeige: Jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist zyklisch. Genauer haben wir für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Teiler } d \in \mathbb{N} \text{ von } m\} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{Untergruppen von } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\} \\ d & \mapsto & d\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \end{array}$$

Man folgere, daß jede echte, als da heißt von der ganzen Gruppe verschiedene Untergruppe einer zyklischen Gruppe von Primzahlpotenzordnung $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ in der Untergruppe $p\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ enthalten sein muß. Hinweis: 3.4.3.4.

Ergänzende Übung 4.4.3.21. Man zeige: Jede endlich erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Q}$ ist zyklisch.

Ergänzende Übung 4.4.3.22. Man zeige, daß die additive Gruppe aller Gruppenhomomorphismen $\mathrm{Grp}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ unter punktweiser Addition isomorph ist zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, für alle $n \geq 1$.

Übung 4.4.3.23. Man gebe alle Zahlen an, die bei Division durch 6 Rest 4 lassen, bei Division durch 13 Rest 2, und bei Division durch 11 Rest 9. Hinweis: Der euklidische Algorithmus liefert schon mal Lösungen, wenn ein Rest 1 ist und die anderen Null.

Übung 4.4.3.24. Man zeige, daß es in einer zyklischen Gruppe der Ordnung n genau dann Elemente der Ordnung d gibt, wenn d ein Teiler von n ist.

Übung 4.4.3.25. Gibt es ein Vielfaches von 17, dessen letzte Ziffern 39 lauten?

Ergänzende Übung 4.4.3.26. Gegeben x, y zwei Elemente endlicher Ordnung in einer abelschen Gruppe G teilt die Ordnung ihres Produkts das kleinste gemeinsame Vielfache ihrer Ordnungen, und sind die Ordnungen von x und y teilerfremd, so gilt sogar $\mathrm{ord}(xy) = (\mathrm{ord}\, x)(\mathrm{ord}\, y)$.

Ergänzende Übung 4.4.3.27. In jeder endlichen abelschen Gruppe wird die maximal von einem Gruppenelement erreichte Ordnung geteilt von den Ordnungen aller Gruppenelemente. Hinweis: Bezeichnet $M \subset \mathbb{N}$ die Menge aller Ordnungen von Elementen unserer Gruppe, so enthält M mit jeder Zahl auch alle ihre Teiler. Weiter enthält M nach 4.4.3.26 mit je zwei teilerfremden Zahlen auch ihr Produkt.

Übung 4.4.3.28 (**Verallgemeinerte Fermat'sche Kongruenz**). Gegeben Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ und eine Zahl e mit $e \equiv 1 \pmod{(p_i - 1)}$ $\forall i$ zeige man für alle $a \in \mathbb{Z}$ die Kongruenz $a^e \equiv a \pmod{(p_1 \ldots p_r)}$. Hinweis: Man folgere das zunächst im Fall $r = 1$ aus dem Kleinen Fermat. Für den allgemeinen Fall kombiniere man den Chinesischen Restsatz mit dem Kleinen Fermat.

Ergänzung 4.4.3.29 (**Verschlüsselung nach dem RSA-Verfahren**). Ich will versuchen, das sogenannte **RSA-Verfahren** nach Rivest, Shamir und Adleman zum öffentlichen Vereinbaren geheimer Schlüssel anhand des folgenden Schemas zu erklären.

Geheimbereich Alice	Öffentlicher Bereich	Geheimbereich Bob
Alice wählt zwei große Primzahlen p, q und berechnet das Produkt $N = pq$. Sie wählt Zahlen $s, t \in \mathbb{N}$ mit $st \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$. Sie macht N und t öffentlich.		
	N, t	
		Bob wählt eine Restklasse $a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, berechnet a^t, und macht es öffentlich.
	$a^t \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$	
Alice berechnet $(a^t)^s = a$.		

Die Restklasse $a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ist dann der gemeinsame geheime Schlüssel. Die behauptete Gleichheit von Restklassen $(a^t)^s = a$ prüft man mit Hilfe des Ringisomorphismus

$$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$$

In $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ haben wir ja $a^x = a$ wann immer gilt $x \equiv 1 \pmod{p-1}$. In $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ haben wir ebenso $a^x = a$ wann immer gilt $x \equiv 1 \pmod{q-1}$. Falls beides gilt und erst recht falls gilt $x \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$ haben wir also $a^x = a$ in $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Diese Identität ist ein Spezialfall unserer verallgemeinerten Fermat'schen Kongruenz 4.4.3.28. Der Trick beim RSA-Verfahren besteht darin, daß alle derzeit bekannten Verfahren zum Faktorisieren einer großen Zahl wie N sehr viel Rechenzeit brauchen. Es ist also möglich, N zu veröffentlichen und dennoch p, q geheim zu halten, die hinwiederum für die Berechnung von s benötigt werden. Des weiteren braucht es mit allen derzeit bekannten Verfahren auch sehr viel Rechenzeit, um aus a^t auf a zurückzuschließen, also eine „t-te Wurzel modulo N“ zu finden.

4.4.4 Endlich erzeugte abelsche Gruppen

Proposition 4.4.4.1. *Jede Untergruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe ist endlich erzeugt, und für die Untergruppe benötigt man höchstens soviele Erzeuger wie für die ganze Gruppe.*

Ergänzung 4.4.4.2. Eine Untergruppe einer nicht abelschen endlich erzeugten Gruppe muß im allgemeinen keineswegs endlich erzeugt sein. Ein Beispiel geben wir in 16.4.5.15.

Beweis. Induktion über die Zahl der Erzeuger. Im Fall einer zyklischen Gruppe wissen wir nach 4.4.3.20 oder eigentlich 3.4.3.4 bereits, daß auch jede Untergruppe zyklisch ist. Sei nun unsere Gruppe X additiv notiert und sei $x_0, \ldots, x_n$ ein Erzeugendensystem. Sei $Y \subset X$ eine Untergruppe. Nach 4.4.3.20 ist $Y \cap \langle x_0 \rangle$ zyklisch, etwa erzeugt von y_0. Nach Induktionsannahme ist das Bild von Y in $X/\langle x_0 \rangle$ endlich erzeugt, etwa von den Nebenklassen $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ gewisser Elemente $y_1, \ldots, y_n \in Y$. Der Leser wird nun in Anlehnung an den Beweis von 3.2.2.6 unschwer zeigen können, daß $y_0, y_1, \ldots, y_n$ bereits ganz Y erzeugen. □

4.4.4.3. Unter einer **Primzahlpotenz** oder kurz **Primpotenz** verstehen wir eine natürliche Zahl der Gestalt $q = p^e$ für p prim und $e \geq 0$. Unter einer **echten Primzahlpotenz** verstehen wir eine von 1 verschiedene Primzahlpotenz. Gegeben eine Primzahl p verstehen wir unter einer p**-Potenz** eine natürliche Zahl der Gestalt $q = p^e$ für p prim und $e \geq 0$. Die beiden folgenden Sätze geben zwei **Klassifikationen der endlich erzeugten abelschen Gruppen**.

Satz 4.4.4.4 (Klassifikation durch Teilerfolgen). *Für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe X gibt es genau ein $s \geq 0$ und ein s-Tupel von von 1 verschiedenen natürlichen Zahlen $(a_1, \ldots, a_s) \in \{0, 2, 3, \ldots\}^s$ mit $a_i | a_{i+1}$ für $1 \leq i < s$ derart, daß gilt*

$$X \cong \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/a_s\mathbb{Z}$$

Satz 4.4.4.5 (Klassifikation durch Rang und Primzahlpotenzen). *Für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe X gibt es echte Primzahlpotenzen $q_1, \ldots, q_t$ und eine natürliche Zahl $r \in \mathbb{N}$ mit*

$$X \cong \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/q_t\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$$

Die Zahl r wird durch X eindeutig festgelegt und heißt der **Rang** *von X. Wir notieren sie $r = \operatorname{rang}(X)$. Die Primzahlpotenzen q_τ sind eindeutig bis auf Reihenfolge.*

Vorschau 4.4.4.6. Die zweite Klassifikation wird sich in 7.2.4.8 zusammen mit der Jordan'schen Normalform als Spezialfall derselben Klassifikation von „Moduln über Hauptidealringen“ erweisen. Auch die erste Klassifikation läßt sich in dieser Allgemeinheit formulieren und beweisen, vergleiche 7.2.4.5.

4.4.4.7. Es wird im zweiten Satz nicht gefordert, daß die Primzahlpotenzen paarweise verschieden sein sollen. Ich erinnere daran, daß wir in 2.1.6.8 eine Multimenge von Elementen einer Menge P erklärt hatten als eine Abbildung $P \to \mathbb{N}$. In diesem Sinne werden also die endlich erzeugten abelschen Gruppen klassifiziert durch ihren Rang, eine natürliche Zahl, zusammen mit einer endlichen Multimenge von echten Primzahlpotenzen.

4.4.4.8 (**Übergang zwischen beiden Klassifikationen**). Um von der Darstellung im ersten Klassifikationssatz zu der im Zweiten überzugehen, kann man sich auf den Fall endlicher Gruppen beschränken, indem man die Nullen an der Ende der Folge der a_i abschneidet, die eben für den Faktor $\mathbb{Z}^r$ verantwortlich sind. Die anderen a_i zerlegt man in ein Produkt von echten Primzahlpotenzen, und die zugehörigen Faktoren $\mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}$ zerfallen dann nach dem chinesischen Restsatz entsprechend in ein Produkt zyklischer Gruppen von Primzahlpotenzordnung. Um von der Darstellung im zweiten Klassifikationssatz zu der im Ersten überzugehen, kann man sich wieder auf den Fall endlicher Gruppen beschränken. Gegeben ein Produkt zyklischer Gruppen von Primzahlpotenzordnung betrachtet man zunächst von jeder dabei auftauchenden Primzahl die höchste jeweils vorkommende Potenz und multipliziert diese zusammen: Das gibt a_s. Dann streicht man alle „verbrauchten“ Potenzen und macht genauso weiter.

Korollar 4.4.4.9. *Jede endliche abelsche Gruppe ist ein endliches Produkt von zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung, und die dabei auftretenden echten Primzahlpotenzen und ihre Vielfachheiten sind wohlbestimmt bis auf Reihenfolge. In Formeln erhalten wir so eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Endliche Multimengen} \\ \textit{von echten Primzahlpotenzen} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Endliche abelsche Gruppen} \\ \textit{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \\ {}_{\mu}\{q_1, q_2, \ldots, q_t\} & \mapsto & \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q_2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/q_t\mathbb{Z} \end{array}$$

4.4.4.10. Man beachte bei den vorhergehenden Sätzen, daß die Faktoren keineswegs eindeutig sind „als Untergruppen unserer abelschen Gruppe“. Partielle Eindeutigkeitsaussagen liefern 4.4.3.15 und 4.4.3.17. Die Beweise werden uns bis zum Ende des Abschnitts beschäftigen. Eine erste wesentliche Zutat ist der gleich folgende Elementarteilersatz 4.4.4.13.

Beispiel 4.4.4.11. Die Gruppen $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sind nicht isomorph, denn sie entsprechen den beiden unterschiedlichen Multimengen von Primzahlpotenzen ${}_{\mu}\{9, 9, 4\}$ und ${}_{\mu}\{3, 27, 4\}$ oder alternativ den beiden unterschiedlichen Teilerfolgen $9|36$ und $3|108$. Man kann das aber auch ohne alle Theorie unschwer einsehen: Die zweite Gruppe enthält Elemente der Ordnung 27, die erste nicht. Der Beweis, daß die explizit angegebenen Gruppen in unseren Klassifikationssätzen jeweils paarweise nicht isomorph sind, verfeinert diese Grundidee.

4.4.4.12 (**Endlich erzeugte torsionsfreie abelsche Gruppen**). Jede endlich erzeugte torsionsfreie abelsche Gruppe ist nach jeder unserer beiden Klassifikationen 4.4.4.4 und 4.4.4.5 isomorph zu $\mathbb{Z}^r$ für genau ein $r \in \mathbb{N}$.

Satz 4.4.4.13 (Elementarteilersatz). *1. Gegeben eine nicht notwendig quadratische Matrix A mit ganzzahligen Einträgen gibt es stets quadratische ganzzahlig invertierbare Matrizen mit ganzzahligen Einträgen P und Q derart, daß $B := PAQ$ eine Matrix mit Nullen außerhalb der Diagonalen ist, in der die Diagonaleinträge weiter vorn jeweils die Diagonaleinträge weiter hinten teilen, in Formeln $i \neq j \Rightarrow B_{i,j} = 0$ und $B_{i,i} | B_{i+1,i+1}\ \forall i$;*

2. Wir können durch geeignete Wahl von P und Q sogar zusätzlich erreichen, daß alle Diagonaleinträge nichtnegativ sind, und unter dieser Zusatzannahme werden besagte Diagonaleinträge durch die Matrix A bereits eindeutig festgelegt.

4.4.4.14. Ich nenne die Multimenge der Diagonaleinträge von B die Multimenge der **Elementarteiler der Matrix** A. Den Beweis der analogen Aussage für Polynomringe dürfen Sie selbst als Übung 4.4.4.30 ausarbeiten. Eine gemeinsame Verallgemeinerung für sogenannte „Hauptidealringe“ wird in 7.2.4.1 dargestellt.

Beweis. Wir beginnen mit dem Nachweis der Existenz. Ist A die Nullmatrix, so ist nichts zu zeigen. Sonst finden wir P, Q invertierbar derart, daß PAQ oben links einen positiven Eintrag hat. Es gibt dann natürlich auch $P_{\min}, Q_{\min}$ derart, daß $P_{\min}AQ_{\min}$ den kleinstmöglichen positiven Eintrag hat unter allen PAQ mit positivem Eintrag dort. Dann teilt dieser Eintrag notwendig alle anderen Einträge der ersten Spalte, da wir sonst durch Zeilenoperationen, genauer durch Subtraktion eines Vielfachen der ersten Zeile von einer anderen Zeile, Multiplikation einer Zeile mit -1 und Vertauschung zweier Zeilen, einen noch kleineren positiven Eintrag oben links erzeugen könnten. Ebenso teilt unser Eintrag auch alle anderen Einträge in der ersten Zeile. Durch entsprechende Zeilen- und Spaltenoperationen können wir also zusätzlich die erste Zeile und Spalte bis auf den ersten Eintrag als genullt annehmen. Teilt nun unser positiver Eintrag oben links nicht alle anderen Einträge unserer Matrix, sagen wir nicht den Eintrag $a_{i,j}$ mit $i \neq 1 \neq j$, so könnten wir durch Addieren der ersten Zeile zur i-ten Zeile gefolgt von einer Subtraktion eines Vielfachen der ersten Spalte von von der j-ten Spalte einen noch kleineren positiven Eintrag an der Stelle (i, j) erzeugen, und ihn durch Zeilen- und Spaltenvertauschung in die linke obere Ecke bringen im Widerspruch zu unserer Annahme. Also teilt unser positiver Eintrag oben links alle anderen Einträge unserer Matrix und eine offensichtliche Induktion beendet den Beweis der Existenz. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, betrachten wir für jedes r die sogenannten **r-Minoren** unserer Matrix. Man versteht darunter die Determinanten aller derjenigen $(r \times r)$-Matrizen, die wir aus unserer Matrix durch das Streichen von Zeilen und Spalten erhalten können. Dann bemerken wir, daß sich für gegebenes $r \geq 1$ der größte gemeinsame Teiler G_r aller $(r \times r)$-Minoren unter Zeilen- und Spal-

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 8 \\ 18 & 16 & 24 & 38 \\ 16 & 12 & 8 & 16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 8 \\ 10 & 10 & 20 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 20 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 10 & 20 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Elementarteiler einer ganzzahligen Matrix durch ganzzahlige ganzzahlig invertierbare Zeilen- und Spaltenoperationen. Wir finden die Elementarteiler 2, 10, 0 jeweils mit der Vielfachheit Eins.

tenoperationen nicht ändert. Folglich sind die $G_r = d_1 \ldots d_r$ wohlbestimmt durch A, und dasselbe gilt dann auch für die d_i. $\square$

4.4.4.15 (**Herkunft der Terminologie**). Der Begriff der „Minoren einer Matrix" wurde meines Wissens in einer Arbeit von Arthur Cayley in Crelles Journal im Jahre 1855, Band 50, Seite 282, mit dem Titel „Sept différents mémoires d'analyse. No 3: Remarques sur la notation des fonctions algébriques" eingeführt. Cayley war mit Sylvester befreundet, auf den wie bereits in 3.1.1.12 erwähnt die Verwendung des Begriffs einer „Matrix" in der Mathematik zurückgeht.

Beweis der Klassifikationen 4.4.4.4 und 4.4.4.5. Wir notieren die abelsche Gruppe X im folgenden additiv. Gegeben ein Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_n$ von X erklären wir durch die Vorschrift $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Z}^n \twoheadrightarrow X$$

Dessen Kern ist nach 4.4.4.1 wieder eine endlich erzeugte abelsche Gruppe K, für die wir wieder einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}^m \twoheadrightarrow K$ finden können. Mit der Notation ψ für die Komposition $\mathbb{Z}^m \twoheadrightarrow K \hookrightarrow \mathbb{Z}^n$ erhalten wir also einen Isomorphismus abelschen Gruppen

$$\mathbb{Z}^n / \operatorname{im} \psi \cong X$$

Genau wie bei Vektorräumen überlegt man sich, daß die Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ genau die Multiplikationen von links mit ganzzahligen $(n \times m)$-Matrizen sind, falls Elemente aus $\mathbb{Z}^m$ beziehungsweise $\mathbb{Z}^n$ als Spaltenvektoren aufgefaßt werden, vergleiche 4.4.2.26. Weiter überlegt man sich, daß auch in dieser Situation die Verknüpfung von Homomorphismen der Multiplikation von Matrizen entspricht. Bezeichnet nun A die Matrix unserer Abbildung $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$, und wählen wir P und Q wie im Elementarteilersatz, so ergibt sich ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^m \arrow[r, "A"] & \mathbb{Z}^n \arrow[d, "P", "\wr"'] \\
\mathbb{Z}^m \arrow[u, "Q", "\wr"'] \arrow[r, "D"] & \mathbb{Z}^n
\end{tikzcd}$$

für eine nicht notwendig quadratische Diagonalmatrix D mit nichtnegativen Einträgen $d_1 | d_2 | \ldots | d_r$ für $r = \min(m, n)$. In anderen Worten bildet der Gruppenisomorphismus $P : \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^n$ in dieser Situation $\operatorname{im} \psi = \operatorname{im} A$ bijektiv auf $\operatorname{im} D$ ab und wir erhalten Isomorphismen

$$X \cong \mathbb{Z}^n / \operatorname{im} \psi = \mathbb{Z}^n / \operatorname{im} A \cong \mathbb{Z}^n / \operatorname{im} D$$

Für die Diagonalmatrix D mit Diagonaleinträgen d_i ist aber klar, daß $\mathbb{Z}^n/\operatorname{im} D$ isomorph ist zu einem Produkt der Gruppen $\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$ mit soviel Kopien von $\mathbb{Z}$, wie es in unserer Matrix D mehr Spalten als Zeilen gibt, also mit $(n-r)$ Kopien von $\mathbb{Z}$. Formaler kann das auch mit dem allgemeinen Resultat 4.4.6.13 begründet werden, nach dem „Produkte exakter Sequenzen wieder exakt sind". Lassen wir von unserer Folge $d_1|d_2|\ldots|d_r$ nun alle Einsen vorne weg und ergänzen am Ende $(n-r)$ Nullen, so erhalten wir eine Folge $a_1|\ldots|a_s$ wie in der Klassifikation durch Teilerfolgen 4.4.4.4 gefordert, und die Existenz dort ist gezeigt. Mit dem Chinesischen Restsatz 4.4.3.13 folgt dann auch sofort die Existenzaussage der Klassifikation durch Primzahlpotenzen 4.4.4.5. Um die Eindeutigkeit in unseren Klassifikationen zu zeigen bemerken wir, daß für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe X und jede Primzahl p und alle $n \geq 1$ der Quotient $p^{n-1}X/p^nX$ nach 3.5.2.44 ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}_p$ ist. Wir notieren seine Dimension

$$D_p^n(X) := \dim_{\mathbb{F}_p}(p^{n-1}X/p^nX)$$

Alternativ mag man $D_p^n(X)$ auch als die eindeutig bestimmte natürliche Zahl $D \in \mathbb{N}$ mit $|p^{n-1}X/p^nX| = p^D$ charakterisieren. Man sieht nun leicht oder folgert formal mit 4.4.6.13 die Formel $D_p^n(X \times Y) = D_p^n(X) + D_p^n(Y)$ für je zwei endlich erzeugte abelsche Gruppen X und Y. Für zyklische Gruppen $X \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ finden wir schließlich

$$D_p^n(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } p^n \text{ teilt } a; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Tat ist das klar für $a = p^m$, für a teilerfremd zu p ist es eh klar, und mit dem Chinesischen Restsatz 4.4.3.11 folgt es im allgemeinen. Für jede Zerlegung $X \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/d_t\mathbb{Z}$ finden wir also

$$D_p^n(X) = |\{i \mid p^n \text{ teilt } d_i\}|$$

Für $X \cong \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/q_t\mathbb{Z}$ wie in 4.4.4.5 finden wir insbesondere mit den Notationen von dort

$$D_p^n(X) = r + |\{i \mid p^n \text{ teilt } q_i\}|$$

Wenden wir diese Erkenntnis an auf alle Primzahlen p, so folgt die im Satz behauptete Eindeutigkeit ohne weitere Schwierigkeiten: Wir erhalten genauer für jede Primzahl p und jedes $n \geq 1$ die nur von unserer Gruppe abhängenden Darstellungen $|\{i \mid q_i = p^n\}| = D_p^n(X) - D_p^{n+1}(X)$ und $r = \lim_{n\to\infty} D_p^n(X)$ für die Zahl der zyklischen Faktoren von vorgegebener Primzahlpotenzordnung und den Rang r des freien Anteils. Die Eindeutigkeit in 4.4.4.4 hinwiederum kann man leicht aus der Eindeutigkeit in 4.4.4.5 folgern: Verschiedene Teilerfolgen führen offensichtlich zu verschiedenen Multimengen von echten Primzahlpotenzen oder verschiedenen Rängen. □

Definition 4.4.4.16. Gegeben eine Gruppe G heißt die kleinste Zahl $e \geq 1$ mit $g^e = 1 \quad \forall g \in G$ der **Exponent** unserer Gruppe. Gibt es kein solches e, so sagen wir, die Gruppe habe unendlichen Exponenten.

Satz 4.4.4.17 (**Endliche Gruppen von Einheitswurzeln**). *Jede endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe eines Körpers ist zyklisch.*

4.4.4.18. Die Elemente ζ endlicher Ordnung in der multiplikativen Gruppe eines Körpers sind per definitionem genau diejenigen Elemente, die eine Gleichung der Gestalt $\zeta^n = 1$ erfüllen. Man nennt sie deshalb auch die **Einheitswurzeln** des Körpers.

Beispiel 4.4.4.19. Um uns auf den gleich folgenden Beweis einzustimmen zeigen wir zunächst beispielhaft, daß jede 18-elementige Untergruppe der multiplikativen Gruppe eines Körpers zyklisch ist. Nach 4.4.4.4 muß unsere Gruppe ja isomorph sein zu genau einer der beiden Gruppen $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Es gilt also nur, die zweite Möglichkeit auszuschließen. Im zweiten Fall gäbe es jedoch in unserer Gruppe 8 Elemente der Ordnung drei und 9 Elemente, deren Ordnung drei teilt, und das steht im Widerspruch dazu, daß das Polynom $X^3 - 1$ in unserem Körper höchstens drei Nullstellen haben kann.

Beweis. In jeder endlichen kommutativen Gruppe wird die maximale von einem Gruppenelement erreichte Ordnung n geteilt von den Ordnungen aller Gruppenelemente, zum Beispiel nach dem Klassifikationssatz 4.4.4.4 oder direkter nach Übung 4.4.3.27. Wäre eine endliche Untergruppe E der multiplikativen Gruppe eines Körpers nicht zyklisch, so gäbe es also $n < |E|$ mit $\zeta^n = 1 \ \forall \zeta \in E$ im Widerspruch dazu, daß das Polynom $X^n - 1$ in unserem Körper höchstens n Nullstellen haben kann. $\square$

Ergänzung 4.4.4.20 (**Nichtspalten der Einbettung der Torsionsuntergruppe**). Gegeben eine abelsche Gruppe A bilden die Elemente endlicher Ordnung nach 4.4.3.14 stets eine Untergruppe $A_{\text{tor}} \subset A$ und der Quotient A/A_{tor} ist offensichtlich torsionsfrei. Allerdings gibt es im Gegensatz zum Fall endlich erzeugter abelscher Gruppen im allgemeinen keinen Gruppenisomorphismus zwischen A und $A_{\text{tor}} \times (A/A_{\text{tor}})$. Betrachten wir etwa in der Gruppe A aller Folgen a_n mit $a_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, die wir später einmal $A = \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ notieren, das Element

$$v = (\overline{p^0}, 0, \overline{p^1}, 0, \overline{p^2}, 0, \ldots),$$

So ist v kein Torsionselement und seine Nebenklasse $\bar{v} \in A/A_{\text{tor}}$ ist folglich nicht Null und für alle $i \geq 0$ gibt es $w = w_i \in A/A_{\text{tor}}$ mit $p^i w = v$. Das einzige Element von A, das in dieser Weise „durch alle p-Potenzen teilbar ist“, ist jedoch die Null. Folglich existiert kein Gruppenisomorphismus zwischen A und $A_{\text{tor}} \times (A/A_{\text{tor}})$. Dies Beispiel ist im übrigen eine Variation von 4.3.2.21.

Übungen

Übung 4.4.4.21. Sei k ein Körper. Die Matrizen vom Rang $< r$ in $\mathrm{Mat}(m \times n; k)$ sind genau die Matrizen, bei denen alle r-Minoren verschwinden.

Ergänzende Übung 4.4.4.22. Der Rang einer endlich erzeugten abelschen Gruppe X kann beschrieben werden als die Dimension des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathrm{Grp}(X, \mathbb{Q})$ aller Gruppenhomomorphismen von X nach $\mathbb{Q}$, mit seiner Vektorraumstruktur als Teilraum des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathrm{Ens}(X, \mathbb{Q})$.

Ergänzende Übung 4.4.4.23. Man gebe ein dreielementiges bezüglich Inklusion minimales Erzeugendensystem der Gruppe $\mathbb{Z}$ an.

Übung 4.4.4.24 (**Untergruppen freier endlich erzeugter abelscher Gruppen**). Gegeben eine Untergruppe $U \subset \mathbb{Z}^n$ gibt es stets einen Automorphismus φ von $\mathbb{Z}^n$ und $0 \leq r \leq n$ und positive natürliche Zahlen $d_1|d_2|\ldots|d_r$ mit $\varphi(U) = \langle d_1\mathrm{e}_1, d_2\mathrm{e}_2, \ldots, d_r\mathrm{e}_r\rangle$. Eine analoge Aussage für Polynomringe in einer Veränderlichen mögen Sie selber formulieren und beweisen. Eine gemeinsame Verallgemeinerung für „Hauptidealringe“ diskutueren wir in 7.2.4.19.

Ergänzende Übung 4.4.4.25. Gegeben $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gibt es einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ genau dann, wenn a und b teilerfremd sind.

Ergänzende Übung 4.4.4.26. Man zeige, daß für jede nichttriviale zyklische Gruppe gerader Ordnung $2n$ in additiver Notation die Multiplikation mit n als Bild die einzige Untergruppe mit zwei Elementen hat und als Kern die einzige Untergruppe vom Index Zwei. Des weiteren zeige man, daß es nur einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von unserer zyklischen Gruppe gerader Ordnung auf „die“ zweielementige Gruppe gibt.

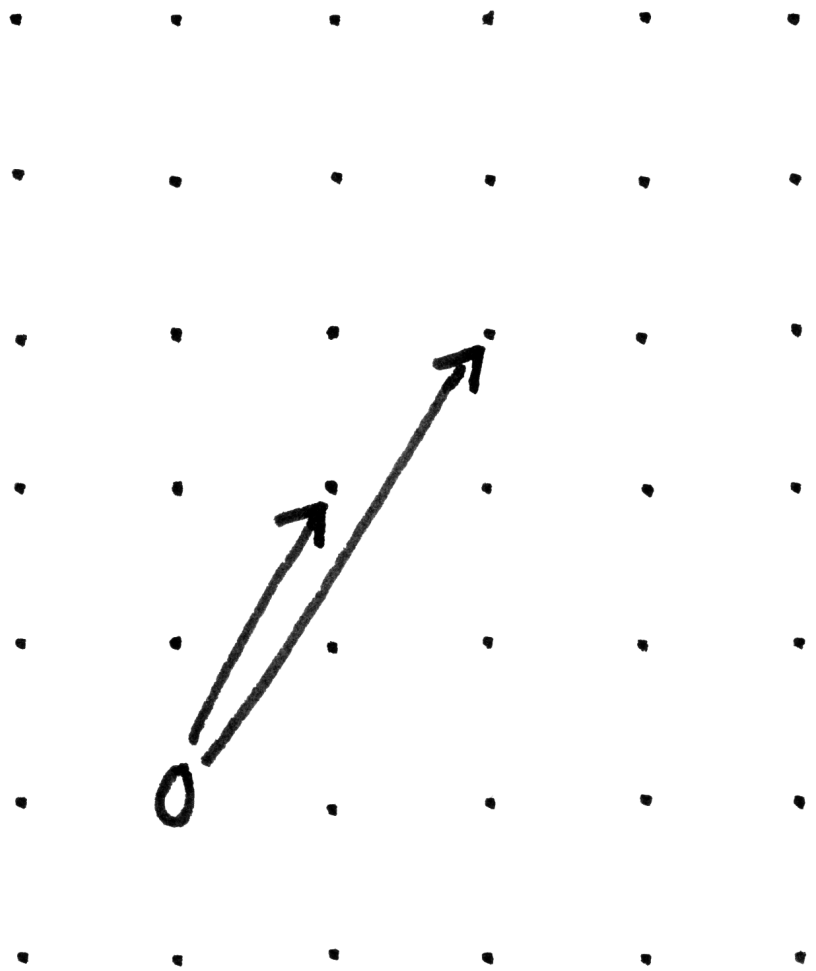
Ergänzende Übung 4.4.4.27. Man berechne die Elementarteiler der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Ergänzende Übung 4.4.4.28. Man zeige, daß jede von Null verschiedene Zeilenmatrix als einzigen Elementarteiler den größten gemeinsamen Teiler der Matrixeinträge hat.

Ergänzende Übung 4.4.4.29. Sind $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, in Formeln $\langle a, b\rangle = \langle 1\rangle$, so läßt sich das Element $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ ergänzen zu einem Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}^2$. Man formuliere und zeige auch die analoge Aussage für $\mathbb{Z}^n$.

Ergänzende Übung 4.4.4.30 (**Smith-Zerlegung**). Gegeben eine nicht notwendig quadratische Matrix A mit Einträgen im Polynomring $k[X]$ mit Koeffizienten in



Ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}^2$

einem Körper k zeige man: (1) Es gibt quadratische im Matrizenring über $k[X]$ invertierbare Matrizen mit polynomialen Einträgen P und Q derart, daß $B = PAQ$ eine Matrix mit Nullen außerhalb der Diagonalen ist, in der die Diagonaleinträge weiter vorn jeweils die Diagonaleinträge weiter hinten teilen, in Formeln $i \neq j \Rightarrow B_{i,j} = 0$ und $B_{i,i} | B_{i+1,i+1}\ \forall i$; (2) Wir können durch geeignete Wahl von P und Q sogar zusätzlich erreichen, daß alle von Null verschiedenen Diagonaleinträge normiert sind, und unter dieser Zusatzannahme werden besagte Diagonaleinträge durch die Matrix A bereits eindeutig festgelegt.

Vorschau 4.4.4.31. Die Smith-Zerlegung aus der vorhergehenden Übung wird sich in 7.2.4.1 als ein Spezialfall des „Elementarteilersatzes für Hauptidealringe“ erweisen. Die Smith-Zerlegung ist der Schlüssel zum vertieften Verständnis der Jordan'schen Normalform und liefert auch Verallgemeinerungen über nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen Körpern, vergleiche etwa 7.2.4.11 folgende.

Übung 4.4.4.32 (**Einheitengruppen von Restklassenringen**). Nach dem chinesischen Restsatz kennen wir die Einheitengruppen $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$, sobald wir sie für jede Primzahlpotenz m kennen. In dieser Übung sollen sie zeigen:

$$(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/p^{r-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} & p \text{ ist eine ungerade Primzahl, } r \geq 1; \\ \mathbb{Z}/2^{r-2}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & p = 2,\ r \geq 2. \end{cases}$$

Man beachte, daß hier links die Multiplikation als Verknüpfung zu verstehen ist, rechts dahingegen die Addition. Hinweis: Nach 4.4.4.17 ist $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ stets zyklisch. Bei ungeradem p gehe man von der Abbildung $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ aus und zeige, daß sie surjektiv ist und daß die Restklasse von $1 + p$ den Kern erzeugt. Dazu beachte man, daß für alle $b \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 1$ gilt $(1 + p^n + bp^{n+1})^p \in 1 + p^{n+1} + p^{n+2}\mathbb{Z}$. Dann beachte man, daß diese Formel unter der stärkeren Annahme $n \geq 2$ auch für $p = 2$ gilt, und folgere, daß der Kern der Abbildung $(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$ für $r \geq 2$ von der Restklasse von 5 erzeugt wird. In diesem Fall kann eine Spaltung unserer Abbildung leicht explizit angegeben werden.

Übung 4.4.4.33. Gibt es eine Potenz von 17, deren Dezimaldarstellung mit den Ziffern 37 endet?

Übung 4.4.4.34 (**Primitivwurzeln in Restklassenringen**). Man zeige, daß für $m \geq 2$ die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ des Restklassenrings $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ zyklisch ist genau dann, wenn m eine Potenz einer ungeraden Primzahl oder das Doppelte einer Potenz einer ungeraden Primzahl oder Zwei oder Vier ist. Hinweis: Man beachte 4.4.4.32, den chinesischen Restsatz 4.4.3.11, und die Tatsache, daß eine zyklische Gruppe nie $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ als Quotienten haben kann. Ein Erzeuger der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ heißt im übrigen auch eine **Primitivwurzel modulo** m und die vorhergehende Aussage darüber, modulo welcher natürlichen Zahlen m Primitivwurzeln existieren, wird als der **Satz von Euler** zitiert. Bis heute (2011)

ungelöst ist die **Vermutung von Artin**, nach der die 2 modulo unendlich vieler Primzahlen eine Primitivwurzel sein sollte.

Ergänzende Übung 4.4.4.35. Eine Untergruppe eines endlichdimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraums heißt ein **$\mathbb{Z}$-Gitter**, wenn sie von einer Basis unseres $\mathbb{Q}$-Vektorraums erzeugt wird. Man zeige: Eine endlich erzeugte Untergruppe eines endlichdimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{Z}$-Gitter genau dann, wenn sie besagten Vektorraum als $\mathbb{Q}$-Vektorraum erzeugt. Ist $\Gamma \subset V$ ein $\mathbb{Z}$-Gitter eines endlichdimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraums und $\varphi : V \twoheadrightarrow W$ eine surjektive lineare Abbildung, so ist $\varphi(\Gamma)$ ein $\mathbb{Z}$-Gitter in W. Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, so ist $U \cap \Gamma$ ein $\mathbb{Z}$-Gitter in U.

Übung 4.4.4.36 (**Klassifikation ganzzahliger symmetrischer Bilinearformen**). Die Klassifikation von Paaren (Γ, s) bestehend aus einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppe Γ und einer symmetrischen biadditiven Abbildung $s : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{Z}$ ist eine interessante Aufgabe. Man zeige, daß sich für Γ vom Rang zwei und s positiv definit stets ein Repräsentant $(\mathbb{Z}^2, s)$ finden läßt, dessen quadrierte Längenfunktion die Gestalt $ax^2 + 2bxy + cy^2$ hat mit $0 \le 2b \le a \le c$. Hinweis: Man suche in Γ ein von Null verschiedenes Element v kleinstmöglicher Länge; Man zeige, daß es sich zu einer Basis von Γ ergänzen läßt, sagen wir durch einen weiteren Vektor u; Man mache nun für den verbesserten zweiten Basisvektor w den Ansatz $w = \pm(u + nv)$. Hat zusätzlich die Fundamentalmatrix von s die Determinante Eins, so finden wir unmittelbar $a = 1$, $b = 0$ und $c = 1$ und damit gibt es bis auf Isomorphismus nur ein mögliches Paar mit diesen Eigenschaften, nämlich $\mathbb{Z}^2$ mit dem Standardskalarprodukt.

Ergänzung 4.4.4.37. In der Literatur wird statt der in 4.4.4.36 erklärten Aufgabe oft implizit die Klassifikation von Tripeln (Γ, s, ω) besprochen mit dem zusätzlichen Datum einer Orientierung ω. Dann läßt sich in derselben Weise zumindest noch $-a < 2b \le a < c$ oder $0 \le 2b \le a = c$ erreichen. Hat zusätzlich die Fundamentalmatrix von s die Determinante Eins, so finden wir immer noch $a = 1$, $b = 0$ und $c = 1$ und damit gibt es bis auf Isomorphismus nur ein mögliches Tripel mit diesen Eigenschaften.

Übung 4.4.4.38 (**Ternäre ganzzahlige symmetrische Bilinearformen**). Zur Klassifikation von Paaren (Γ, s) bestehend aus einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppe Γ vom Rang drei und einer positiv definiten symmetrischen biadditiven Abbildung $s : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{Z}$ zeige man ähnlich, daß sich stets ein Repräsentant $(\mathbb{Z}^3, s)$ finden läßt, für dessen Fundamentalmatrix gilt

$$0 \le 2m_{13} \le 2m_{12} \le m_{11} < 2\sqrt[3]{\det M}$$

Hinweis: Man suche in Γ ein von Null verschiedenes Element v kleinstmöglicher Länge; Man zeige, daß es sich zu einer Basis von Γ ergänzen läßt, sagen

wir durch weitere Vektoren u_1, u_2; Man mache nun für die verbesserten weiteren Basisvektoren w_1, w_2 den Ansatz $w_i = \pm(u_i + n_i v)$. So erreicht man die ersten Ungleichungen. Für die letzte Ungleichung beachte man, daß $\sqrt{\det M}$ nach 12.4.3.5 das Volumen des von einer und jeder Basis von Γ im Skalarproduktraum $V := \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ aufgespannten Parallelpipeds ist. Hat die Kugel mit Radius r mindestens das Volumen der Grundmasche, in Formeln $4\pi r^3/3 \geq \sqrt{\det M}$, so können die Kugeln um die Punkte aus Γ nicht paarweise disjunkt sein und es gibt einen von Null verschiedenen Gittervektor der Länge $\leq 2r$. So einen Vektor gibt es also für $(2r)^6(\pi/6)^2 \geq \det M$ alias $(2r)^2 \geq (6/\pi)^{2/3}\sqrt[3]{\det M}$ und wir finden $m_{11} < 2\sqrt[3]{\det M}$. Hat zusätzlich die Fundamentalmatrix von s die Determinante Eins, so finden wir unmittelbar einen Repräsentanten mit $m_{11} = 1$ und $m_{12} = m_{13} = 0$ und sehen mit 4.4.4.36, daß es bis auf Isomorphismus nur ein mögliches Paar mit diesen Eigenschaften gibt, nämlich $\mathbb{Z}^3$ mit dem Standardskalarprodukt.

Ergänzung 4.4.4.39. In der Literatur wird statt der in 4.4.4.38 erklärten Aufgabe oft implizit die Klassifikation von Tripeln (Γ, s, ω) besprochen mit dem zusätzlichen Datum einer Orientierung ω. Das verkompliziert dann die Argumentation und die Ergebnisse. Mit expliziten aber weniger anschaulichen Abschätzungen läßt sich darüber hinaus unschwer $m_{11} < (4/3)\sqrt[3]{\det M}$ zeigen.

Ergänzung 4.4.4.40 (**Symmetrische Bilinearformen und quadratische Formen**). Gegeben ein Kring K und ein K-Modul V verstehe ich unter einer **quadratischen Form auf** V wie im Fall eines Körpers K aus 4.2.2.1 eine Abbildung $q : V \to K$ derart, daß es eine Bilinearform b auf V gibt mit $q(v) = b(v, v)$. In der Literatur versteht man darunter auch oft eine symmetrische Bilinearform, aber die natürliche Abbildung $s \mapsto q_s$ von symmetrischen Bilinearformen zu quadratischen Formen gegeben durch $q_s(v) := s(v, v)$ ist nur dann eine Bijektion, wenn die Zwei in K invertierbar ist, in Formeln $2 \in K^\times$. In unserer Terminologie ist etwa XY eine quadratische Form über $\mathbb{Z}$, die nicht von einer symmetrischen Bilinearform herkommt.

4.4.5 Quotientenvektorräume

Satz 4.4.5.1 (Universelle Eigenschaft surjektiver Homomorphismen). *Seien $s : V \twoheadrightarrow Q$ eine surjektive lineare Abbildung und $\varphi : V \to W$ eine beliebige lineare Abbildung. Genau dann existiert ein Homomorphismus $\bar{\varphi} : Q \to W$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ s$, wenn gilt* $\ker(\varphi) \supset \ker(s)$.

4.4.5.2. Dieser Homomorphismus $\bar{\varphi}$ ist dann natürlich eindeutig bestimmt. In diesem Sinne kann man diesen Satz auch dahingehend zusammenfassen, daß das Vorschalten eines surjektiven Homomorphismus $s : V \twoheadrightarrow Q$ für jeden weiteren

Vektorraum W eine Bijektion

$$(\circ s) : \mathrm{Hom}_k(Q, W) \xrightarrow{\sim} \{\varphi \in \mathrm{Hom}_k(V, W) \mid \ker(\varphi) \supset \ker(s)\}$$

liefert. Der Übersichtlichkeit halber stelle ich die in diesem Satz auftauchenden Gruppen und Morphismen auch noch wieder anders in einem Diagramm dar:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, two heads, "s"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Q \arrow[d, dashed, "\bar{\varphi}"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Man formuliert diesen Satz auch mit den Worten, φ **faktorisiere in eindeutiger Weise über** s.

Beweis. Offensichtlich ist φ konstant auf den Fasern von s. Damit finden wir schon mal eine Abbildung $\bar{\varphi}$ wie behauptet. Man prüft leicht, daß sie ein Homomorphismus ist. □

4.4.5.3 (**Surjektive Homomorphismen mit gleichem Kern**). Gegeben ein Vektorraum V und zwei surjektive Homomorphismus $s : V \twoheadrightarrow Q$ und $t : V \twoheadrightarrow P$ mit demselben Kern $\ker(s) = \ker(t)$ sind die Homomorphismen $\bar{t} : Q \to P$ mit $\bar{t} \circ s = t$ und $\bar{s} : P \to Q$ mit $\bar{s} \circ t = s$ nach 4.4.5.1 offensichtlich zueinander inverse Isomorphismen $Q \xrightarrow{\sim} P \xrightarrow{\sim} Q$. Salopp gesprochen wird also bei einem surjektiven Homomorphismus „das Ziel bereits durch den Ausgangsraum und den Kern festgelegt bis auf eindeutigen Isomorphismus“.

Satz 4.4.5.4 (**Quotientenvektorraum**). *Sei k ein Körper. Gegeben $V \supset U$ ein k-Vektorraum mit einem Teilraum existiert auf der Restklassengruppe V/U aus 4.4.2.10 genau eine Struktur als k-Vektorraum $k \times V/U \to V/U$ derart, daß die kanonische Projektion*

$$\mathrm{can} : V \twoheadrightarrow V/U$$

aus 4.4.2.10 eine k-lineare Abbildung wird. Mit dieser Vektorraumstruktur heißt V/U der **Quotient von** V **nach** U.

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} k \times \mathcal{P}(V) & \to & \mathcal{P}(V) \\ (\lambda\ ,\ A) & \mapsto & \lambda.A := \lambda A + U \end{array}$$

Für $A = v + U$ finden wir $\lambda.A = \lambda A + U = \lambda v + U$, so daß unsere Abbildung eine Abbildung $k \times V/U \to V/U$ induziert, die die Eigenschaft $\overline{\lambda v} = \lambda.\bar{v}$ hat für alle $\lambda \in k$, $v \in V$. Damit folgt sofort, daß unsere Abbildung $k \times V/U \to V/U$ auf der abelschen Gruppe V/U eine Struktur als k-Vektorraum definiert, und daß

die Projektion $V \twoheadrightarrow V/U$ für diese Struktur k-linear ist. Umgekehrt ist auch klar, daß das die einzige Struktur als k-Vektorraum auf der abelschen Gruppe V/U ist, für die die Projektion $V \twoheadrightarrow V/U$ eine k-lineare Abbildung sein kann. □

Zweiter Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} k \times V \arrow[r, "m"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ k \times V/U \arrow[r, dashed, "\bar{m}"] & V/U \end{tikzcd}$$

mit der Skalarmultiplikation in der oberen Horizontalen. Nach Übung 4.4.2.27 und wegen $m(k \times U) \subset U$ gibt es genau eine biadditive Abbildung in der unteren Horizontalen, die dies Diagramm zum Kommutieren bringt. Daß die Nebenklassengruppe V/U mit dieser Abbildung als Skalarmultiplikation ein k-Vektorraum mit den geforderten Eigenschaften ist, prüft man dann ohne weitere Schwierigkeiten. □

4.4.5.5 (**Isomorphiesatz für Vektorräume**). Jeder Vektorraumhomomorphismus $f : V \to W$ induziert einen Vektorraumisomorphismus $V/\ker f \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f$. Das folgt unmittelbar aus dem Isomorphiesatz für Gruppen 4.4.2.12.

4.4.5.6. Gegeben Vektorräume $V \supset W \supset U$ induziert die Komposition von kanonischen Abbildungen $V \twoheadrightarrow V/U \twoheadrightarrow (V/U)/(W/U)$ einen Vektorraumisomorphismus $V/W \xrightarrow{\sim} (V/U)/(W/U)$. Das folgt unmittelbar aus dem Noether'schen Isomorphiesatz 4.4.2.15.

Definition 4.4.5.7. Gegeben $V \supset U$ ein Vektorraum mit einem Untervektorraum heißt die Dimension des Quotienten V/U auch die **Kodimension von** U **in** V und wird notiert als $\operatorname{codim}(U \subset V) := \dim(V/U)$.

4.4.5.8. Ist V endlichdimensional, so haben wir nach dem Isomorphiesatz 4.4.5.5 und der Dimensionsformel 3.2.2.5 die Identität

$$\operatorname{codim}(U \subset V) = \dim(V) - \dim(U)$$

Es gibt aber auch in unendlichdimensionalen Räumen durchaus Teilräume endlicher Kodimension. Eine Teilmenge eines Vektorraums ist eine lineare Hyperebene im Sinne von 3.1.5.16 genau dann, wenn sie ein Untervektorraum der Kodimension Eins ist.

Übungen

Übung 4.4.5.9 (**Auf Quotienten induzierte multilineare Abbildungen**). Gegeben eine bilineare Abbildung $b : V \times W \to L$ und surjektive lineare Abbildungen $s : V \twoheadrightarrow P$ und $t : W \twoheadrightarrow Q$ mit der Eigenschaft $b(\ker(s) \times W) = 0 = b(V \times \ker(t))$ gibt es genau eine bilineare Abbildung $\bar{b} : P \times Q \to L$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "s\times t"'] & L \arrow[d, equal] \\ P \times Q \arrow[r, "\bar{b}"] & L \end{tikzcd}$$

kommutiert. Analoges gilt für multilineare Abbildungen.

Übung 4.4.5.10. Gegeben ein Vektorraum V mit Untervektorräumen U, W zeige man, daß sich jede Linearform auf V, die auf $U \cap W$ verschwindet, schreiben läßt als Summe einer Linearform, die auf U verschwindet, und einer Linearform, die auf W verschwindet.

Übung 4.4.5.11 (**Simultane Trigonalisierbarkeit**). Eine Menge von paarweise kommutierenden trigonalisierbaren Endomorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraums ist stets simultan trigonalisierbar, als da heißt, es gibt eine Basis, bezüglich derer alle unsere Endomorphismen eine Matrix von oberer Dreiecksgestalt haben. Hinweis: Existenz eines simultanen Eigenvektors 4.3.2.18 und vollständige Induktion durch betrachen des Quotienten nach dem davon erzeugten Teilraum.

Ergänzende Übung 4.4.5.12 (**Quotienten affiner Räume**). Gegeben eine surjektive affine Abbildung von affinen Räumen $\varphi : E \twoheadrightarrow F$ zeige man, daß jede affine Abbildung $\eta : E \to G$ mit $\ker \vec{\eta} \supset \ker \vec{\varphi}$ in eindeutiger Weise über φ faktorisiert. Gegeben ein affiner Raum E und ein Teilraum $U \subset \vec{E}$ zeige man andererseits, daß es eine surjektive affine Abbildung $\varphi : E \twoheadrightarrow F$ gibt mit $\ker \vec{\varphi} = U$. Man mag F konstruieren als den Bahnenraum von U in E und mag diesen affinen Raum E/U notieren. Die zu diesem Datum gehörige surjektive affine Abbildung mag $\mathrm{can} : E \twoheadrightarrow E/U$ notiert werden.

4.4.6 Exakte Sequenzen

4.4.6.1. Beim Arbeiten mit Quotienten ermöglicht der Formalismus der „exakten Sequenzen“ oft besonders transparente Formulierungen. Wir führen deshalb im folgenden auch diese Sprache ein.

Definition 4.4.6.2. Eine Menge mit einem ausgezeichneten Element heißt eine **bepunktete Menge**. Das ausgezeichnete Element einer bepunkteten Menge heißt der **Basispunkt**.

Definition 4.4.6.3. Eine Sequenz $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ von bepunkteten Mengen mit basispunkterhaltenden Abbildungen heißt **exakt**, wenn das Urbild in Y des ausgezeichneten Punktes $z \in Z$ mit dem Bild von $X \to Y$ zusammenfällt, in Formeln $f(X) = g^{-1}(z)$. Eine längere Sequenz von bepunkteten Mengen heißt exakt, wenn sie an jeder Stelle exakt ist.

Beispiel 4.4.6.4. Sei ens die einelementige Menge. Eine Sequenz $X \to Y \to \mathrm{ens}$ ist exakt genau dann, wenn ihre erste Abbildung surjektiv ist. Eine Sequenz $\mathrm{ens} \to Y \to Z$ ist exakt genau dann, wenn ihre zweite Abbildung injektiv ist.

Definition 4.4.6.5. Eine **kurze exakte Sequenz** von bepunkteten Mengen ist eine Sequenz $X \to Y \to Z$ derart, daß die Sequenz $\mathrm{ens} \to X \to Y \to Z \to \mathrm{ens}$ exakt ist oder gleichbedeutend, daß $X \to Y \to Z$ exakt ist sowie $X \to Y$ injektiv und $Y \to Z$ surjektiv. Wir notieren kurze exakte Sequenzen meist

$$X \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow Z$$

4.4.6.6 (**Exakte Sequenzen von Gruppen**). Eine Gruppe fassen wir in diesem Kontext stets auf als eine bepunktete Menge mit dem neutralen Element als ausgezeichnetem Punkt. Eine Sequenz von Gruppen und Gruppenhomomorphismen

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

heißt also exakt, wenn das Bild der ersten Abbildung zusammenfällt mit dem Kern der zweiten Abbildung, in Formeln $\operatorname{im} f = \ker g$.

Beispiel 4.4.6.7. Für jeden Homomorphismus $x : M \to N$ von additiv notierten abelschen Gruppen ist die Sequenz

$$0 \to (\ker x) \to M \to N \to (N/\operatorname{im} x) \to 0$$

exakt. Man nennt wegen dieser Symmetrie den Quotienten nach dem Bild auch den **Kokern** unseres Morphismus von abelschen Gruppen. Wir verwenden für den Kokern die Notation $\operatorname{cok} x := (N/\operatorname{im} x)$.

4.4.6.8. Die Dimensionsformel 3.2.2.5 kann in dieser Terminologie auch dahingehend formuliert werden, daß für jede kurze exakte Sequenz $V' \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V''$ von Vektorräumen gilt

$$\dim V = \dim V' + \dim V''$$

Definition 4.4.6.9. Gegeben Sequenzen $A \xrightarrow{r} B \xrightarrow{s} C$ und $A' \xrightarrow{r'} B' \xrightarrow{s'} C'$ verstehen wir unter einem **Homomorphismus von Sequenzen** ein Tripel (f, g, h) von Homomophismen derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{r} & B & \xrightarrow{s} & C \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ A' & \xrightarrow{r'} & B' & \xrightarrow{s'} & C' \end{array}$$

Solch ein Morphismus heißt ein **Isomorphismus von Sequenzen**, wenn alle drei vertikalen Abbildungen f, g und h Isomorphismen sind. Je nach Kontext meinen wir mit Homomorphismen hier Vektorraumhomomorphismen, Gruppenhomomorphismen oder schlicht Abbildungen.

4.4.6.10. Gegeben eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen $A \overset{r}{\hookrightarrow} B \overset{s}{\twoheadrightarrow} C$ sind gleichbedeutend: (1) r besitzt ein Linksinverses, (2) s besitzt ein Rechtsinverses und (3) es gibt einen Isomorphismus der Gestalt $(\mathrm{id}_A, f, \mathrm{id}_C)$ von unserer Sequenz mit der Sequenz

$$A \overset{\mathrm{in}_1}{\hookrightarrow} A \oplus C \overset{\mathrm{pr}_2}{\twoheadrightarrow} C$$

Das ist eine Umformulierung der Übungen 4.4.2.23 und 4.4.2.24. Eine kurze exakte Sequenzen mit diesen Eigenschaften heißt eine **spaltende** kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Die kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit der Multiplikation mit Zwei als erster Abbildung spaltet nicht.

4.4.6.11 (**Kurze exakte Sequenzen von Vektorräumen spalten**). Arbeiten wir speziell mit Vektorräumen, so finden wir mit 3.2.10.1 für jeden Untervektorraum $N \subset A$ einen zu N komplementären Teilraum U und nach 3.2.2.20 induziert die kanonische Abbildung einen Isomorphismus $U \xrightarrow{\sim} A/N$. In diesem Fall erhalten wir also zusätzlich einen Isomorphismus von kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccc} N & \hookrightarrow & N \oplus U & \twoheadrightarrow & U \\ \| & & \wr\downarrow g & & \wr\downarrow h \\ N & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A/N \end{array}$$

Implizit ist dabei zu verstehen, daß die Morphismen der oberen Horizontale die kanonische Injektion und Projektion sein sollen.

4.4.6.12 (**Die Duale einer kurzen exakten Sequenz ist exakt**). Gegeben eine kurze exakte Sequenz von Vektorräumen ist auch die duale Sequenz eine kurze exakte Sequenz. Das ist in der Tat offensichtlich im Fall einer kurzen exakten Sequenz der Gestalt $N \hookrightarrow N \oplus U \twoheadrightarrow U$ und folgt dann mit 4.4.6.11 im allgemeinen. Speziell ist die Transponierte einer Injektion eine Surjektion und die Transponierte einer Surjektion eine Injektion.

Übungen

Übung 4.4.6.13 (**Quotienten und Produkte**). Gegeben zwei Sequenzen von bepunkteten Mengen $A \to B \to C$ und $A' \to B' \to C'$ ist ihr **Produkt**

$$(A \times A') \to (B \times B') \to (C \times C')$$

exakt genau dann, wenn die beiden Ausgangssequenzen exakt sind. Analoges gilt sowohl für das Produkt als auch für die direkte Summe einer beliebigen Familie von Sequenzen von bepunkteten Mengen. Diese Aussage präzisiert unter anderem die etwas vage Aussage, daß das „Bilden von Produkten mit dem Bilden von Quotienten kommutiert“.

Ergänzende Übung 4.4.6.14 (**Additivität der Spur**). Gegeben ein kommutatives Diagramm von endlichdimensionalen Vektorräumen mit zweimal derselben kurzen exakten Zeile

$$\begin{array}{ccccc} V' & \hookrightarrow & V & \twoheadrightarrow & V'' \\ f' \downarrow & & f \downarrow & & f'' \downarrow \\ V' & \hookrightarrow & V & \twoheadrightarrow & V'' \end{array}$$

gilt für die Spuren der Vertikalen die Identität $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(f') + \operatorname{tr}(f'')$. Hat allgemeiner im Fall beliebiger Vektorräume der Homomorphismus f endlichen Rang, so haben auch f' und f'' endlichen Rang, und unter dieser Voraussetzung gilt für die Spuren der Vertikalen auch wieder die Identität $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(f') + \operatorname{tr}(f'')$.

4.4.7 Mehr zu exakten Sequenzen*

Proposition 4.4.7.1 (**Exakte Vektorraumsequenzen bis auf Isomorphismus**). *Jede exakte drei-Term-Sequenz von Vektorräumen ist isomorph zu einer Sequenz der Gestalt*

$$\begin{tikzcd} \begin{smallmatrix} V_2 \\ \oplus \\ V_3 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} V_1 \\ \oplus \\ V_2 \end{smallmatrix} \arrow[l, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)"'] & \begin{smallmatrix} V_0 \\ \oplus \\ V_1 \end{smallmatrix} \arrow[l, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)"'] \end{tikzcd}$$

4.4.7.2. Wir verwenden hier die Matrixnotation 3.2.4.12.

Beweis. Sei $C \xleftarrow{r} B \xleftarrow{s} A$ unsere Sequenz. Wir setzen $V_0 := \ker s$ und wählen ein Komplement $V_1 \subset A$ zu V_0. Dann induziert s einen Isomorphismus $s : V_1 \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} s = \ker r$ und wir wählen ein Komplement $V_2 \subset B$ zu $\ker r$. Nun induziert r einen Isomorphismus $r : V_2 \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} r$ und wir wählen ein Komplement $V_3 \subset C$ zu $\operatorname{im} r$. Insgesamt erhalten wir dann mit der Notation i_ν für die Einbettung von V_ν ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \begin{smallmatrix} V_2 \\ \oplus \\ V_3 \end{smallmatrix} \arrow[d, "(r,i_3)"', "\wr"] & \begin{smallmatrix} V_1 \\ \oplus \\ V_2 \end{smallmatrix} \arrow[l, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[d, "(s,i_2)"', "\wr"] & \begin{smallmatrix} V_0 \\ \oplus \\ V_1 \end{smallmatrix} \arrow[l, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[d, "(i_0,i_1)"', "\wr"] \\ C & B \arrow[l] & A \arrow[l] \end{tikzcd}$$

□

Korollar 4.4.7.3 (**Erhaltung der Exaktheit unter** Hom)**.** *Gegeben eine exakte Sequenz $U \xrightarrow{r} V \xrightarrow{s} W$ von Vektorräumen erhalten wir für jeden weiteren Vektorraum L exakte Sequenzen*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(W,L) & \xrightarrow{\circ s} & \mathrm{Hom}(V,L) & \xrightarrow{\circ r} & \mathrm{Hom}(U,L) \\ \mathrm{Hom}(L,U) & \xrightarrow{r\circ} & \mathrm{Hom}(L,V) & \xrightarrow{s\circ} & \mathrm{Hom}(L,W) \end{array}$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der vorhergehenden Proposition 4.4.7.1 zusammen mit der Erkenntnis, daß das Bilden des Homomorphismenraums, wie in 3.2.3.12 und 3.2.3.13 ausgeführt wird, „mit endlichen direkten Summen vertauscht“. □

4.4.7.4 (**Die Duale einer exakten Sequenz ist exakt**). Nehmen wir in diesem Korollar als L den Grundkörper, so folgt insbesondere, daß jede exakte Sequenz von Vektorräumen beim Dualisieren wieder eine exakte Sequenz liefert.

Lemma 4.4.7.5 (**Neunerlemma**)**.** *Sei gegeben ein Diagramm von Gruppen mit kurzen exakten Zeilen der Gestalt*

$$\begin{array}{ccccc} A' & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & B'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C' & \hookrightarrow & C & \twoheadrightarrow & C'' \end{array}$$

und seien die senkrechten Kompositionen jeweils trivial. Sei unser Diagramm **kommutativ** *in dem Sinne, daß alle vier Quadrate „kommutieren“, daß also die Komposition $A' \to A \to B$ übereinstimmt mit der Komposition $A' \to B' \to B$ etcetera. Sind unter diesen Voraussetzungen zwei der Spalten kurze exakte Sequenzen, so auch die dritte.*

4.4.7.6. Wir brauchen gar nicht zu fordern, daß die Abbildungen der rechten Vertikale Gruppenhomomorphismen sind, und noch nicht einmal, daß sie Gruppen sind, wenn wir nur annehmen, daß alle Horizontalen als Sequenzen von bepunkteten Mengen isomorph sind zu Sequenzen der Gestalt $H \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/H$ für eine Gruppe G mit einer Untergruppe H und dem neutralen Element von G als ausgezeichnetem Punkt in der Mitte. Der Beweis bleibt derselbe und 4.4.1.11 zeigt, daß auch in der rechten Spalte alle nichtleeren Fasern gleich viele Elemente haben. Die letzte Aussage von 4.4.1.11 etwa ist ein Spezialfall des so verallgemeinerten Neunerlemmas.

4.4.7.7. Das Neunerlemma kann als eine Verallgemeinerung des Noether'schen Isomorphiesatzes 4.4.2.15 verstanden werden, den man im Fall $A' = A$ zurückgewinnt. Im Fall abelscher Gruppen werden Sie eine noch allgemeinere Aussage

eventuell später einmal als „lange exakte Homologiesequenz“ 17.2.2.2 kennenlernen. Der folgende Beweis ist ein schönes Beispiel für eine Beweismethode, die als **Diagrammjagd** bekannt ist.

Beweis. Es ist einfacher, eine allgemeinere Aussage zu zeigen: Sei ein kommutatives Diagramm von Gruppen mit kurzen exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "\partial"'] & {} \arrow[d, "\partial"'] & {} \arrow[d, "\partial"'] \\
X_{i+1} \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "\partial"'] & Y_{i+1} \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\partial"'] & Z_{i+1} \arrow[d, "\partial"'] \\
X_i \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "\partial"'] & Y_i \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\partial"'] & Z_i \arrow[d, "\partial"'] \\
X_{i-1} \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "\partial"'] & Y_{i-1} \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\partial"'] & Z_{i-1} \arrow[d, "\partial"'] \\
{} & {} & {}
\end{tikzcd}$$

gegeben derart, daß die Komposition aufeinanderfolgender Pfeile in den Spalten jeweils einwertig ist. Sind dann zwei der Spalten exakt, so auch die Dritte. Das Neunerlemma folgt durch die Erweiterung seines Diagramms durch triviale Gruppen nach oben und unten. Wir schreiben den Beweis gleich so auf, daß auch für die allgemeinere Situation 4.4.7.6 funktioniert, und notieren dazu die ausgezeichneten Punkte der rechten Spalte mit $\bar{1}$. Wir diskutieren die drei Fälle der Reihe nach.

Fall 1: Die letzten beiden Spalten sind exakt und es gilt, die Exaktheit der ersten bei X_i zu zeigen. Sei also $x_i \in X_i$ mit $\partial x_i = 1$. Für $y_i := fx_i$ folgt $\partial y_i = 1$, also $y_i = \partial y_{i+1}$. Für $z_{i+1} := gy_{i+1}$ folgt weiter $\partial z_{i+1} = \bar{1}$, also $z_{i+1} = \partial z_{i+2}$. Wir finden nun y_{i+2} mit $gy_{i+2} = z_{i+2}$, also $g\partial y_{i+2} = z_{i+1} = gy_{i+1}$, woraus für $\tilde{y}_{i+1} := (\partial y_{i+2})^{-1} y_{i+1}$ folgt $y_i = \partial \tilde{y}_{i+1}$ und $g\tilde{y}_{i+1} = \bar{1}$. Dann aber gibt es $\tilde{x}_{i+1}$ mit $f\tilde{x}_{i+1} = \tilde{y}_{i+1}$ und es folgt $f\partial\tilde{x}_{i+1} = y_i$ und somit $\partial\tilde{x}_{i+1} = x_i$.

Fall 2: Die beiden äußeren Spalten sind exakt und es gilt, die Exaktheit der mittleren bei Y_i zu zeigen. Sei $y_i \in Y_i$ mit $\partial y_i = 1$. Für $z_i := gy_i$ folgt $\partial z_i = \bar{1}$, also gibt es z_{i+1} mit $\partial z_{i+1} = z_i$ und dann y_{i+1} mit $gy_{i+1} = z_{i+1}$ und $g\partial y_{i+1} = z_i = gy_i$. Für $\tilde{y}_i := (\partial y_{i+1})^{-1} y_i$ folgt also $\partial\tilde{y}_i = 1$ und $g\tilde{y}_i = \bar{1}$. Also gibt es $\tilde{x}_i$ mit $f\tilde{x}_i = \tilde{y}_i$ und notwendig $\partial\tilde{x}_i = 1$, also $\tilde{x}_i = \partial\tilde{x}_{i+1}$ und $\tilde{y}_i = \partial f\tilde{x}_{i+1}$. So erhalten wir schließlich $y_i = \partial(y_{i+1} f(\tilde{x}_{i+1}))$.

Fall 3: Die ersten beiden Spalten sind exakt und es gilt, die Exaktheit der letzten bei z_i zu zeigen. Sei also $\partial z_i = \bar{1}$. Sicher gibt es y_i mit $gy_i = z_i$ und es folgt

$g\partial y_i = \bar{1}$, also gibt es x_{i-1} mit $fx_{i-1} = \partial y_i$. Es folgt $f\partial x_{i-1} = 1$, also $\partial x_{i-1} = 1$, also gibt es x_i mit $\partial x_i = x_{i-1}$. Für $\tilde{y}_i := y_i(fx_i)^{-1}$ folgt $\partial \tilde{y}_i = 1$ und $g(\tilde{y}_i) = z_i$. Also gibt es $\tilde{y}_{i+1}$ mit $\tilde{y}_i = \partial \tilde{y}_{i+1}$ und dann gilt $z_i = \partial g \tilde{y}_{i+1}$. □

Übungen

Übung 4.4.7.8. Man folgere den Noether'schen Isomorphiesatz 4.4.2.15 aus dem Neunerlemma.

4.5 Symmetrie*

Symmetrie ist ein grundlegendes Konzept in Mathematik und Physik. Wir haben es bei der Modellierung des Anschauungsraums bereits in Aktion gesehen. Hier soll es in einem allgemeineren und formaleren Rahmen diskutiert und mit andersartigen Beispielen illustriert werden.

4.5.1 Gruppenwirkungen

Definition 4.5.1.1. Eine **Operation** oder **Wirkung** eines Monoids M auf einer Menge X ist eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} M \times X & \to & X \\ (g,x) & \mapsto & gx \end{array}$$

derart, daß gilt $g(hx) = (gh)x$ für alle $g, h \in M$, $x \in X$ sowie $ex = x$ für das neutrale Element $e \in M$ und alle $x \in X$. Eine Menge mit einer Operation eines Monoids M nennt man eine M-**Menge**. Die Aussage „X ist eine M-Menge“ schreiben wir in Formeln

$$M \backslash X$$

4.5.1.2. Die erste Eigenschaft werde ich auch als die **Assoziativität** der Operation ansprechen und beide Eigenschaften zusammen als **Unitärassoziativität**. Ich ziehe die Bezeichnung als Operation an dieser Stelle vor, da das Wort „Wirkung“ in der Physik in einer anderen Bedeutung verwendet wird.

Ergänzung 4.5.1.3. In derselben Weise erklärt man noch allgemeiner auch den Begriff der **Operation einer Menge** Ω **auf einer Menge** X als einer Abbildung $\Omega \times X \to X$, von der nichts weiter zu fordern ist.

Beispiele 4.5.1.4.

1. Das Anwenden einer Abbildung definiert für jede Menge X eine Operation $\mathrm{Ens}(X) \times X \to X$ des Monoids $\mathrm{Ens}(X)$ auf X und eine Operation $\mathrm{Ens}^\times(X) \times X \to X$ der Gruppe $\mathrm{Ens}^\times(X)$ auf X. Insbesondere operiert so die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ auf der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$.

2. Das Anwenden einer linearen Abbildung definiert für jeden Vektorraum V eine Operation $\mathrm{End}(V) \times V \to V$ des Monoids $\mathrm{End}(V)$ auf V und eine Operation $\mathrm{GL}(V) \times V \to V$ der Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ auf V.

3. Jedes Monoid M operiert vermittels seiner Verknüpfung $M \times M \to M$ auf sich selbst.

4. Jedes Monoid M operiert auf jeder Menge X vermittels der **trivialen Operation** $ax = x \; \forall a \in M, x \in X$.

5. Ist M ein Monoid und X eine M-Menge und $N \subset M$ ein Untermonoid, so ist X auch eine N-Menge in offensichtlicher Weise. Ist allgemeiner X eine M-Menge und $N \to M$ ein Monoidhomomorphismus, so kann X in offensichtlicher Weise mit einer Operation von N versehen werden.

6. Ist X ein M-Menge, so ist auch die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ eine M-Menge in natürlicher Weise.

4.5.1.5. Gegeben ein Monoid M und eine Menge X induziert das Exponentialgesetz $\mathrm{Ens}(M \times X, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(M, \mathrm{Ens}(X, X))$ aus 2.1.6.5 eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Operationen des Monoids } M \\ \text{auf der Menge } X \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Monoidhomomorphismen} \\ M \to \mathrm{Ens}(X) \end{array} \right\}$$

In gewisser Weise ist also eine Operation eines Monoids M auf einer Menge X „dasselbe“ wie ein Monoidhomomorphismus $M \to \mathrm{Ens}(X)$. Ist G eine Gruppe, so erhalten wir insbesondere eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Operationen der Gruppe } G \\ \text{auf der Menge } X \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Gruppenhomomorphismen} \\ G \to \mathrm{Ens}^{\times}(X) \end{array} \right\}$$

In gewisser Weise ist also eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge X „dasselbe“ wie ein Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Ens}^{\times}(X)$.

4.5.1.6. Ist ganz allgemein $X \times Y \to Z$ eine Abbildung, etwa $(x, y) \mapsto x \top y$, und sind $A \subset X$ und $B \subset Y$ Teilmengen, so notieren wir $(A \top B) \subset Z$ die Teilmenge

$$(A \top B) = \{x \top y \mid x \in A,\ y \in B\}$$

Wir haben diese Notationen in Spezialfällen bereits oft verwendet, zum Beispiel, wenn wir das Erzeugnis eines Vektors in einem reellen Vektorraum als $\langle v \rangle = \mathbb{R}v$ schreiben, oder wenn wir das Erzeugnis von zwei Teilräumen U, W eines Vektorraums V als $U + W$ schreiben.

Definition 4.5.1.7. Sei X eine Menge mit einer Operation eines Monoids M, also eine M-Menge.

1. Die Menge aller **Fixpunkte von** M **in** X notiert man

$$X^M := \{x \in X \mid ax = x\ \forall a \in M\}$$

   In vielen Situationen nennt man die Fixpunkte auch **Invarianten**.

2. Der **Fixator** oder auch **Stabilisator** eines Punktes $x \in X$ ist die Menge

$$M_x := \{a \in M \mid ax = x\}$$

   Sie ist ein Untermonoid von M. Im Fall einer Gruppenwirkung ist sie sogar eine Untergruppe und heißt die **Standgruppe** oder **Isotropiegruppe** des Punktes x.

3. Gegeben eine Teilmenge $Y \subset X$ unterscheiden wir zwischen ihrem **Stabilisator** $\{a \in M \mid aY \subset Y\}$, ihrem **Fixator** oder **mengenweisen Fixator** $\{a \in M \mid aY = Y\}$ und schließlich ihrem **punktweisen Fixator** $\{a \in M \mid ay = y \ \forall y \in Y\}$. Alle drei sind Untermonoide und die letzten beiden im Fall einer Gruppenoperation sogar Untergruppen. Den Fixator nennen wir insbesondere im Fall, daß Y mehr als nur ein Element besitzt und daß eine Gruppe operiert, die **Symmetriegruppe von** Y. Natürlich kann der Fixator von $Y \subset X$ auch beschrieben werden als der Fixator des Punktes $Y \in \mathcal{P}(X)$ für die auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ induzierte Operation. Wir notieren ihn M_Y.

4. Eine M-Menge X heißt **frei**, wenn es eine Teilmenge $Z \subset X$ gibt derart, daß die Operation $M \times X \to X$ eine Bijektion $M \times Z \xrightarrow{\sim} X$ induziert. Sie mögen als Übung zeigen, daß eine Menge mit Gruppenwirkung genau dann frei ist, wenn die Standgruppen aller ihrer Punkte trivial sind, in Formeln $(gx = x$ für ein $x \in X) \Rightarrow (g = e)$.

5. Für $Z \subset X$, $N \subset M$ schreiben wir kurz NZ für die Menge $NZ := \{bz \mid b \in N, z \in Z\}$. Für jede Teilmenge $Z \subset X$ ist MZ eine M-Menge in offensichtlicher Weise. Eine Teilmenge $Z \subset X$ heißt N**-stabil**, wenn gilt $NZ \subset Z$, wenn also N im Stabilisator der Teilmenge Z liegt. Ist $N = G$ eine Untergruppe von M, so wird jede G-stabile Teilmenge Z sogar von allen Elementen von G festgehalten, in Formeln

$$(GZ \subset Z) \Rightarrow (g(Z) = Z \ \forall g \in G)$$

6. Sei $x \in X$. Die Menge

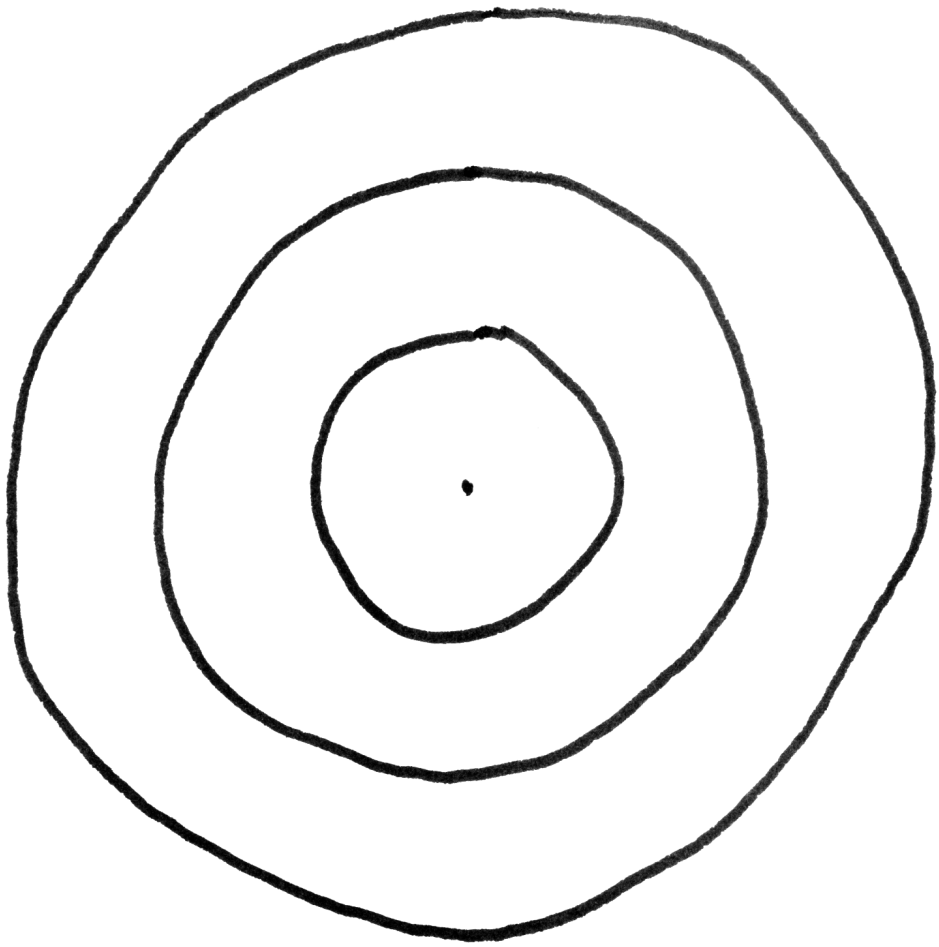
$$Mx := \{ax \mid a \in M\} \subset X$$

heißt die **Bahn** von x. Auf Englisch und Französisch sagt man dazu **orbit**.

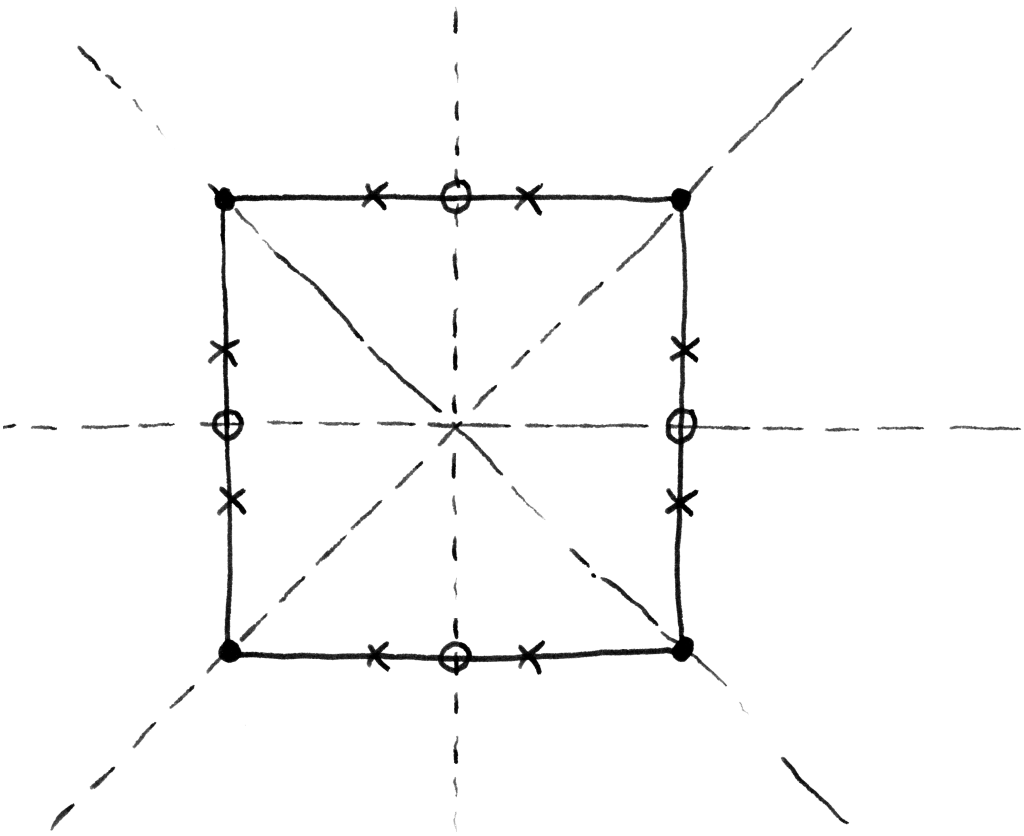
7. Eine Operation heißt **transitiv**, wenn es ein $x \in X$ gibt mit $X = Mx$. Im Fall einer Gruppenwirkung gilt dann $X = Gx$ für alle $x \in X$ und X heißt ein **homogener Raum** für G.

8. Eine Menge X mit einer freien transitiven Operation einer Gruppe G heißt ein **prinzipaler homogener** G**-Raum** oder auch ein G**-Torsor**.

4.5.1.8. Ist G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe, so sind per definitionem die Rechtsnebenklassen von H in G genau die Bahnen der durch Multiplikation gegebenen Operation von H auf G.



Einige Bahnen von S^1 auf $\mathbb{C}$



Einige Bahnen der Symmetriegruppe eines Quadrats

4.5.1.9. Ist G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe, so ist die Menge der Linksnebenklassen $X = G/H$ eine G-Menge in offensichtlicher Weise.

Beispiele 4.5.1.10. In jedem eindimensionalen Vektorraum über einem Körper k bilden die von Null verschiedenen Vektoren einen Torsor über der multiplikativen Gruppe $k^\times$ unseres Körpers. Jeder affine Raum ist ein Torsor über seinem Richtungsraum. Jede Menge mit genau zwei Elementen ist in natürlicher Weise ein $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-Torsor. Jede Gruppe G kann in offensichtlicher Weise aufgefaßt werden als ein G-Torsor.

4.5.1.11 (**Diskussion der Terminologie**). Die Wirkung eines Monoids auf der leeren Menge ist in unseren Konventionen nicht transitiv. Hier sind jedoch auch andere Konventionen gebräuchlich, zum Beispiel nennt Bourbaki die Wirkung einer Gruppe auf der leeren Menge durchaus transitiv. Noch mehr Terminologie zu Mengen mit Gruppenwirkung führen wir in 16.3.2 ein.

Ergänzung 4.5.1.12 (**Begriff eines Torsors, Varianten**). Es gibt auch Varianten des Torsor-Begriffs, bei denen man nicht auf eine vorgegebene Gruppe Bezug nimmt.

1. Man kann einen **Torsor** definieren als eine Menge X mitsamt einer ausgezeichneten Untergruppe $G \subset \mathrm{Ens}^\times(X)$, die frei und transitiv auf X wirkt.

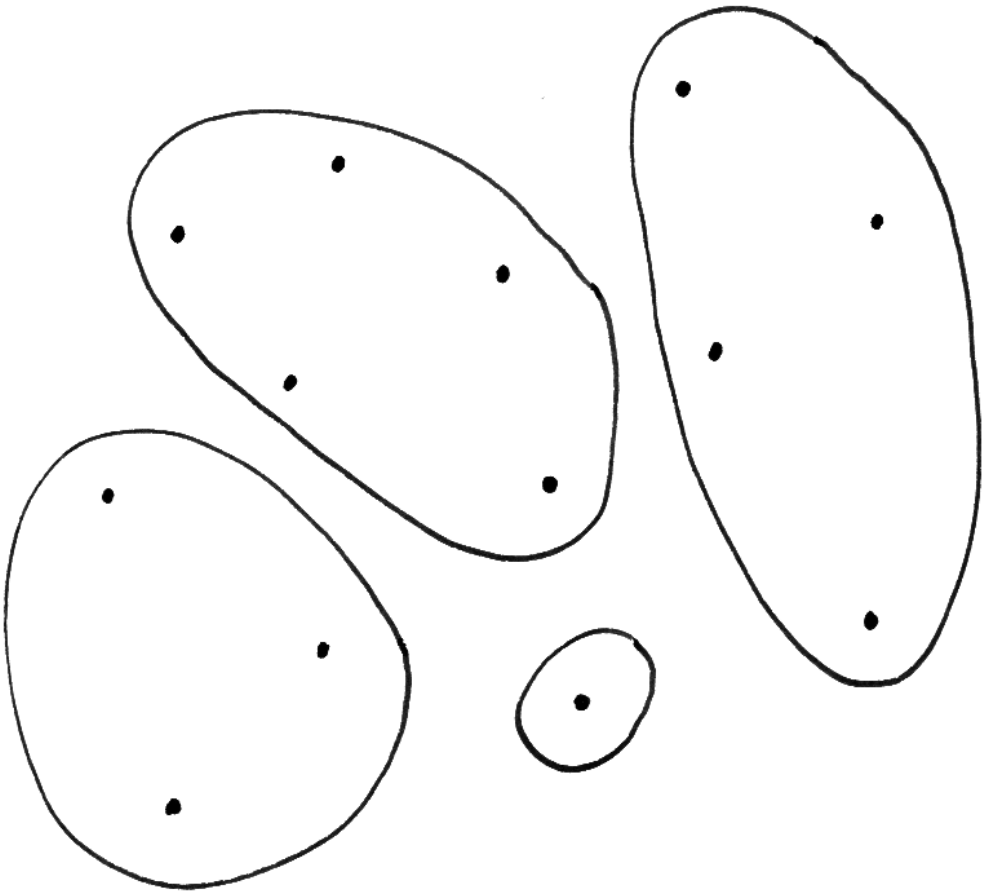
2. Man kann einen Torsor auch definieren als eine Menge X nebst einer Äquivalenzrelation auf $X \times X$ mit gewissen Eigenschaften, die ich hier nicht ausschreibe. Von der üblichen Definition aus gesehen erklären wir dabei die Äquivalenzrelation dadurch, daß ihre Äquivalenzklassen genau die Graphen der durch die Gruppenelemente gegebenen Selbstabbildungen von X sind.

3. Man kann einen Torsor schließlich auch definieren kann als eine Menge X nebst einer Abbildung $\varphi : X \times X \times X \to X$ mit gewissen Eigenschaften, die ich hier nicht ausschreibe. Von der üblichen Definition aus gesehen setzen wir dazu $\varphi(x, gx, y) = gy$.

Lemma 4.5.1.13 (**Zerlegung in Bahnen**). *Gegeben eine Menge mit Gruppenoperation sind je zwei Bahnen entweder gleich oder disjunkt.*

Ergänzung 4.5.1.14. Im Fall der Operation eines Monoids gibt im allgemeinen keine Zerlegung in Bahnen: Man betrachte für ein Gegenbeispiel etwa die Operation durch Addition des additiven Monoids $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$.

4.5.1.15. Unter einer **Partition einer Menge** X versteht man ein System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von paarweise disjunkten nichtleeren Teilmengen, deren Vereinigung ganz X ist. In dieser Terminologie besagt unser Lemma also, daß die Bahnen unter der Operation einer Gruppe auf einer Menge eine Partition besagter Menge bilden.



Eine Partition einer Menge mit dreizehn Elementen durch vier Teilmengen.

Beweis. Sei $G\backslash X$ unsere Menge mit Gruppenoperation. Wegen unserer Forderung $ex = x$ an eine Gruppenoperation liegt jedes $x \in X$ in einer G-Bahn, nämlich in der G-Bahn Gx. Andererseits folgt aus $Gx \cap Gy \neq \emptyset$ schon $Gx = Gy$: In der Tat liefert $gx = hy$ wegen $Gg = G$ unter Verwendung der Assoziativitätsbedingung an eine Gruppenoperation ja $Gx = Ggx = Ghy = Gy$. Die Bahnen sind also auch paarweise disjunkt. □

Definition 4.5.1.16. Gegeben eine Menge mit Gruppenoperation bezeichnet man das Mengensystem der Bahnen auch als den **Bahnenraum**. Ist $G\backslash X$ unsere Menge mit Gruppenoperation, so ist der Bahnenraum in Formeln ausgedrückt also die Teilmenge $\{Gx \mid x \in X\} \subset \mathcal{P}(X)$ der Potenzmenge von X. Wir notieren den Bahnenraum meist $G\backslash X$ oder $X/_l G$ oder X/G. Wir haben eine kanonische Surjektion $\mathrm{can} : X \twoheadrightarrow G\backslash X$, $x \mapsto Gx$, die jedem Element von X seine Bahn zuordnet.

4.5.1.17 (**Diskussion der Notation**). Alle Notationen für den Bahnenraum haben ihre Tücken: Die Notation $G\backslash X$ könnte auch die in 2.1.2.6 eingeführte Differenzmenge bedeuten, die Notation X/G hinwiederum könnte auch für den Bahnenraum einer Rechtsoperation stehen, wie wir ihn gleich einführen werden. Was im Einzelfall gemeint ist, muß aus dem Kontext erschlossen werden. Die Notation $X/_l G$ vermeidet zwar diese Probleme, ist aber unüblich und umständlich.

Beispiel 4.5.1.18. Wir betrachten die Menge $X = \mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit der Operation von $G = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ durch Multiplikation. Die Standgruppen sind $G_x = 1$ falls $x \neq 0$ und $G_0 = S^1$. Die Bahnen sind genau alle Kreise um den Nullpunkt mit Radius $r \geq 0$. Die Einbettung $\mathbb{R}_{\geq 0} \hookrightarrow \mathbb{C}$ induziert eine Bijektion mit dem Bahnenraum $\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\sim} (S^1\backslash\mathbb{C})$.

4.5.1.19 (**Universelle Eigenschaft des Bahnenraums**). Gegeben eine Menge mit Gruppenoperation $G\backslash X$ und eine Abbildung in eine weitere Menge $\varphi : X \to Y$ mit der Eigenschaft $\varphi(gx) = \varphi(x)$ für alle $g \in G, x \in X$ existiert genau eine Abbildung $\bar{\varphi} : G\backslash X \to Y$ mit $\bar{\varphi} \circ \mathrm{can} = \varphi$, im Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G\backslash X \arrow[d, dotted, "\bar{\varphi}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

In der Tat können und müssen wir $\bar{\varphi}(Gx)$ als das einzige Element der Menge $\varphi(Gx)$ definieren. Das ist ein Spezialfall der universellen Eigenschaft von Surjektionen 2.1.5.11. Man mag es auch als einen Spezialfall der universellen Eigenschaft des Raums der Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation im Sinne von 3.4.2.6 verstehen.

Definition 4.5.1.20. Sei X eine Menge und M ein Monoid. Eine **Rechtsoperation von** M **auf** X ist eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} X \times M & \to & X \\ (x,a) & \mapsto & xa \end{array}$$

derart, daß $x(ab) = (xa)b$ für alle $a, b \in M$, $x \in X$, und daß gilt $xe = x$ für das neutrale Element $e \in M$ und alle $x \in X$. Eine Menge mit einer Rechtsoperation eines Monoids M nennt man auch eine M-**Rechtsmenge**.

Beispiel 4.5.1.21. Ist M ein Monoid und X eine M-Menge und E eine weitere Menge, so wird der Abbildungsraum $\mathrm{Ens}(X, E)$ zu einer M-Rechtsmenge vermittels der Operation „durch Vorschalten“ $(fa)(x) := f(ax)$.

4.5.1.22 (**Beziehung von Rechts- und Linksoperationen**). Ist G eine Gruppe, so wird jede G-Rechtsmenge X zu einer G-Menge durch die Operation $gx = xg^{-1}$, die Begriffsbildung einer G-Rechtsmenge ist also für Gruppen in gewisser Weise obsolet. Sie dient im wesentlichen dem Zweck, in manchen Situationen suggestivere Notationen zu ermöglichen. Unsere Begriffe für Linksoperationen wie Bahn, Standgruppe et cetera verwenden wir analog auf für Rechtsoperationen. Den Bahnenraum notieren wir in diesem Fall stets X/G. Die kanonische Abbildung $X \twoheadrightarrow X/G$ hat dann offensichtlich eine zu 4.5.1.19 analoge universelle Eigenschaft.

4.5.1.23. Unter dem Exponentialgesetz $\mathrm{Ens}(X \times M, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(M, \mathrm{Ens}(X, X))$ aus 2.1.6.5 entsprechen die Rechtsoperationen eines Monoids M auf einer Menge X gerade den Monoidhomomorphismen $M^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ens}^{\times}(X)$. Hierbei meint M^{opp} das opponierte Monoid nach 2.2.3.33, die entsteht, indem wir die Menge M mit der opponierten Verknüpfung $a^{\circ}b^{\circ} = (ba)^{\circ}$ versehen. In diesem Sinne ist also eine M-Rechtsoperation dasselbe wie eine Linksoperation von M^{opp}.

Ergänzung 4.5.1.24. Sei G eine Gruppe. Eine freie transitive G-Rechtsmenge nennen wir einen G-**Rechtstorsor** oder auch kurz einen G-**Torsor** in der Hoffnung, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, ob im jeweils vorliegenden Fall eine Menge mit freier und transitiver Rechts- oder mit freier und transitiver Linksoperation gemeint ist.

4.5.1.25 (**Operationen auf dem projektiven Raum**). Wir erinnern für einen Körper K und $n \in \mathbb{N}$ aus 5.1.4.18 den projektiven Raum

$$\mathbb{P}^n K := (K^{n+1} \backslash 0)/K^{\times}$$

Sicher operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(n+1; K)$ auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^n K$. Die offensichtliche Operation von $\mathrm{GL}(2; K)$ auf $\mathbb{P}^1 K$ entspricht unter unserer Identifikation von $K \sqcup \{\infty\}$ mit $\mathbb{P}^1 K$ durch $x \mapsto \langle 1, x \rangle$ und $\infty \mapsto \langle 0, 1 \rangle$ der Operation

von $\mathrm{GL}(2;K)$ auf $K \sqcup \{\infty\}$, unter der eine Matrix durch die Transformation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : x \mapsto \frac{c+dx}{a+bx}$$

wirkt. Der Punkt ∞ muß hier mit etwas Sorgfalt ins Spiel gebracht werden und ich schreibe nicht alle Fälle aus. Man sie jedoch leicht erschließen, wenn man weiß, daß diese Operation im Fall $K = \mathbb{R}$ stetig ist für die natürliche Topologie aus 5.1.4.19. Zum Beispiel geht ∞ im Fall $b \neq 0$ nach d/b.

Übungen

Übung 4.5.1.26 (**Noether'scher Isomorphiesatz, Variante**). Seien $H \supset N$ eine Gruppe mit einem Normalteiler und X eine Menge mit H-Operation. So gibt es auf dem Bahnenraum X/N genau eine Operation der Quotientengruppe H/N mit der Eigenschaft $(hN)(Nx) = Nhx$. Ist speziell $G \supset H \supset N$ eine Gruppe mit zwei Untergruppen und ist N ein Normalteiler in H, so induziert die Komposition $G \twoheadrightarrow G/N \twoheadrightarrow (G/N)/(H/N)$ eine Bijektion $G/H \xrightarrow{\sim} (G/N)/(H/N)$.

Übung 4.5.1.27. Unter der Operation von $\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{Q})$ auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^n\mathbb{Q}$ operiert bereits die Gruppe $\mathrm{SL}(n;\mathbb{Z})$ aller $(n \times n)$-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen und Determinante Eins transitiv. Hinweis: 4.4.4.29.

Übung 4.5.1.28. Ist E ein affiner Raum über einem Körper der Charakteristik Null und $G \subset \mathrm{Aff}^\times E$ eine endliche Untergruppe seiner Automorphismengruppe, so besitzt G stets einen Fixpunkt in E. Hinweis: Man betrachte den Schwerpunkt einer Bahn.

Übung 4.5.1.29 (**Smith-Normalformen als Bahnrepräsentanten**). Sei K ein Körper. Man zeige, daß wir eine Operation der Gruppe $\mathrm{GL}(n;K) \times \mathrm{GL}(m;K)$ auf der Menge $\mathrm{Mat}(n \times m;K)$ erhalten durch die Vorschrift $(A,B)M = AMB^{-1}$. Man zeige weiter, daß die Bahnen unserer Operation genau die nichtleeren Fasern der durch den Rang gegebenen Abbildung $\mathrm{rk} : \mathrm{Mat}(n \times m;K) \to \mathbb{N}$ sind. Hinweis: Smith-Normalform 3.2.6.11.

Übung 4.5.1.30 (**Jordan-Normalformen als Bahnrepräsentanten**). Sei K ein Körper. Man zeige, daß wir eine Operation der Gruppe $\mathrm{GL}(n;K)$ auf der Menge $\mathrm{Mat}(n;K)$ erhalten durch die Vorschrift $A.M := AMA^{-1}$. Man zeige, wie für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K die Theorie der Jordan'schen Normalform eine Bijektion liefert zwischen dem Bahnenraum zu dieser „Operation durch Konjugation" und der Menge aller endlichen Multimengen von Paaren aus $\mathbb{N}_{\geq 1} \times K$, deren erste Komponenten sich zu n aufaddieren.

Ergänzende Übung 4.5.1.31. Sei K ein Körper. Man zeige, daß der Teilraum der quadratischen Formen $Q \subset \mathrm{Ens}(K^n, K)$ stabil ist unter der Rechtsoperation der

Gruppe $\mathrm{GL}(n;K)$ durch Vorschalten auf $\mathrm{Ens}(K^n,K)$. Man diskutiere, inwiefern die Frage nach der Klassifikation der quadratischen Formen im wesentlichen die Frage nach einem Repräsentantensystem für die Bahnen dieser Operation ist.

Ergänzende Übung 4.5.1.32. Man gebe für jedes ungerade n einen Gruppenisomorphismus $\mathrm{SO}(n)\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\xrightarrow{\sim}\mathrm{O}(n)$ an; Man zeige, daß es für gerades n keinen derartigen Isomorphismus gibt.

Ergänzende Übung 4.5.1.33. Ein Gitter in $\mathbb{C}$ ist eine Untergruppe $\Gamma\subset\mathbb{C}$, die man als Gruppenerzeugnis einer $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$ erhalten kann. Auf der Menge Gitt aller Gitter in $\mathbb{C}$ operiert $\mathbb{C}^\times$ in offensichtlicher Weise. Man zeige, daß es genau zwei $\mathbb{C}^\times$-Bahnen in Gitt gibt, deren Elemente nichttriviale Isotopiegruppen haben, nämlich die Bahnen der beiden Gitter $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\mathrm{i}$ und $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3}$.

Ergänzende Übung 4.5.1.34. Man finde ein Repräsentantensystem für die Bahnen unter der offensichtlichen Wirkung von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{Z})\times\mathrm{GL}(m;\mathbb{Z})$ auf dem Matrizenraum $\mathrm{Mat}(n\times m;\mathbb{Q})$. Hinweis: 4.4.4.13.

Übung 4.5.1.35. In dieser Übung sollen Sie den **Satz von Cauchy** zeigen: Jeder Primfaktor der Ordung einer endlichen Gruppe tritt auch als Ordnung eines Elements besagter Gruppe auf. Man zeige der Reihe nach:

1. Für eine Primzahl p und $G=\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}_p)$ und die Untergruppe $N\subset G$ der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen ist p kein Teiler von $|G/N|$ und $|N|$ eine Potenz von p;

2. Jede endliche Untergruppe $\Gamma\subset G$ ohne Elemente der Ordnung p operiert mit trivialen Standgruppen auf G/N, folglich muß ihre Ordnung $|\Gamma|$ zu p teilerfremd sein;

3. Jede endliche Gruppe Γ läßt sich als Untergruppe in $\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}_p)$ für $n=|\Gamma|$ oder kanonischer in $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_p\langle\Gamma\rangle)$ einbetten.

Einen anderen Beweis, bei dem vollständig innerhalb der Gruppentheorie argumentiert wird, können Sie in 6.1.4.8 finden. Er scheint mir jedoch im ganzen eher komplizierter.

4.5.2 Bahnformel

Lemma 4.5.2.1 (Bahnen als Quotienten). *Seien G eine Gruppe, X eine G-Menge und $x\in X$ ein Punkt. So induziert die Abbildung $G\to X$, $g\mapsto gx$ eine Bijektion*

$$G/G_x\xrightarrow{\sim}Gx$$

zwischen dem Quotienten nach der Standgruppe von x und der Bahn von x.

Beweis. Für jede G_x-Linksnebenklasse $L \subset G$ im Sinne von 4.4.1.2 besteht die Menge Lx nur aus einem Punkt, für $L = gG_x$ haben wir genauer $Lx = gG_x x = \{gx\}$. Die Abbildung im Lemma wird nun definiert durch die Bedingung, daß sie jeder Nebenklasse $L \in G/G_x$ das einzige Element von Lx zuordnet. Diese Abbildung ist offensichtlich surjektiv. Sie ist aber auch injektiv, denn aus $gG_x x = hG_x x$ folgt $gx = hx$, also $h^{-1}g \in G_x$, also $gG_x = hG_x$. □

Zweiter Beweis. Die durch das Anwenden auf $x \in X$ gegebene Abbildung $G \twoheadrightarrow Gx$ und die kanonische Surjektion $G \twoheadrightarrow G/G_x$ sind Surjektionen mit denselben Fasern. Die Behauptung folgt so aus 2.1.5.11. □

4.5.2.2. Ist G eine endliche Gruppe und X eine G-Menge, so folgt mit dem vorhergehenden Lemma 4.5.2.1 aus dem Satz von Lagrange 4.4.1.5 für alle $x \in X$ insbesondere die sogenannte **Bahnformel**

$$|G| = |G_x| \cdot |Gx|$$

Die Kardinalität jeder Bahn teilt also die Kardinalität der ganzen Gruppe, und die Kardinalität der Standgruppen ist konstant auf den Bahnen. Genauer prüft man für beliebiges G die Formel $G_{gx} = gG_x g^{-1}$ für $g \in G$, $x \in X$. Ist weiter X endlich und $X = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$ seine Zerlegung in Bahnen und $x(i) \in X_i$ jeweils ein Element, so folgt

$$|X| = |X_1| + \ldots + |X_n| = |G|/|G_{x(1)}| + \ldots + |G|/|G_{x(n)}|$$

Beispiel 4.5.2.3. Seien $k \leq n$ natürliche Zahlen. Auf der Menge X aller k-elementigen Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ operiert die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ transitiv. Die Standgruppe des Punktes $x \in X$, der durch die k-elementige Teilmenge $\{1, 2, \ldots, k\}$ gegeben wird, ist isomorph zu $\mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_{n-k}$. Die Bahnformel liefert folglich $|X| = n!/(k!(n-k)!)$ in Übereinstimmung mit unseren Erkenntnissen aus 1.1.1.19. Ähnlich kann man auch die in 2.1.5.19 diskutierten Formeln für die Multinomialkoeffizienten herleiten.

Beispiel 4.5.2.4 (**Zahl der Drehsymmetrien eines Würfels**). Wir können unsere Bahnformel auch umgekehrt anwenden. Nehmen wir zum Beispiel an, wir wollten die Drehungen zählen, die einen Würfel in sich überführen. Die Gruppe G dieser Drehungen operiert sicher transitiv auf der Menge E der acht Ecken des Würfels und die Standgruppe jeder Ecke p hat drei Elemente. Wir folgern $|G| = |G_p| \cdot |E| = 3 \cdot 8 = 24$.

Übungen

Ergänzende Übung 4.5.2.5. Sind Q, H Untergruppen einer Gruppe G, so induziert die Einbettung $Q \hookrightarrow G$ eine Bijektion $Q/(Q \cap H) \xrightarrow{\sim} QH/H$. Gemeint ist auf

der rechten Seite der Bahnenraum der Operation von rechts durch Multiplikation der Gruppe H auf der Teilmenge $QH \subset G$.

Ergänzende Übung 4.5.2.6. Ist G eine Gruppe und X eine G-Menge und Y eine G-Rechtsmenge, so erklärt man ihr **balanciertes Produkt**

$$Y \times_{/G} X$$

als die Menge aller G-Bahnen in $Y \times X$ unter der Operation $g(y, x) = (yg^{-1}, gx)$. Man zeige: Sind P, Q Untergruppen einer Gruppe G mit Schnitt $S := P \cap Q$, so induziert die Multiplikation eine Bijektion

$$P \times_{/S} Q \xrightarrow{\sim} PQ$$

Ergänzende Übung 4.5.2.7. Ist in der Bruhat-Zerlegung 4.5.6.1 der Köper k ein endlicher Körper $k = \mathbb{F}_q$, so wird die Kardinalität der Doppelnebenklasse BxB für $x \in \mathcal{S}_n$ und B die oberen Dreicksmatrizen gegeben durch die Formel

$$|BxB| = |B|q^{l(x)}$$

mit $l(x)$ der Zahl der Fehlstände der Permutation x. Hinweis: Man wende auf die $(B \times B)$-Bahnen von $x \in \mathcal{S}_n \subset G$ die Bahnformel an.

4.5.3 Konjugationsklassen

Definition 4.5.3.1. Ist G eine Gruppe und $x \in G$ ein Element, so ist die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{int}_x : & G & \to & G \\ & g & \mapsto & xgx^{-1} \end{array}$$

ein Isomorphismus der Gruppe G mit sich selber. Er heißt die **Konjugation mit** x. Ganz allgemein nennt man einen Isomorphismus einer Gruppe mit sich selber auch einen **Automorphismus** der Gruppe. Die Automorphismen einer Gruppe G bilden selber eine Gruppe mit der Verknüpfung von Abbildungen als Verknüpfung. Sie heißt die **Automorphismengruppe** von G und wir verwenden für sie die beiden Notationen $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Grp}^{\times}(G)$. Diejenigen Automorphismen einer Gruppe, die sich als Konjugation mit einem geeigneten Gruppenelement schreiben lassen, heißen **innere Automorphismen** und auf englisch **interior automorphisms**, daher die Notation int. Sicher gilt $\mathrm{int}_x \circ \mathrm{int}_y = \mathrm{int}_{xy}$, folglich ist $\mathrm{int} : x \mapsto \mathrm{int}(x) := \mathrm{int}_x$ ein Gruppenhomomorphismus $\mathrm{int} : G \to \mathrm{Grp}^{\times}(G)$ und insbesondere eine Operation der Gruppe G auf der Menge G, die **Operation durch Konjugation**

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & \mathrm{int}_x(y) = xyx^{-1} \end{array}$$

Die Bahnen dieser Operation heißen die **Konjugationsklassen** unserer Gruppe.

Beispiele 4.5.3.2. Die Konjugationsklassen in einer kommutativen Gruppe sind einelementig. Die Theorie der Jordan'schen Normalform beschreibt die Konjugationsklassen in $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$, vergleiche 4.5.1.30.

Übungen

Ergänzende Übung 4.5.3.3. Sei A eine zyklische Gruppe der Ordnung $n \in \mathbb{N}$. So gibt es genau einen Ringisomorphismus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \operatorname{End} A$, und dieser Ringisomorphismus induziert einen Isomorphismus zwischen der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ und der Automorphismengruppe von A.

Ergänzende Übung 4.5.3.4. Man gebe jeweils ein Repräsentantensystem an für die Konjugationsklassen der Gruppe aller Isometrien des affinen Skalarproduktraums $\mathbb{R}^2$ und der Untergruppe ihrer orientierungserhaltenden Isometrien.

Ergänzende Übung 4.5.3.5. Wir betrachten die Gruppen $G \supset K$ der Ähnlichkeiten und der Kongruenzen einer euklidischen Ebene. Man zeige, daß K stabil ist unter der Konjugation mit $g \in G$ und daß die Konjugationsklassen von G, die in K enthalten sind, wie folgt beschrieben werden können:

1. Die Identität bildet für sich allein eine Konjugationsklasse;
2. Alle Verschiebungen, die nicht die Identität sind, bilden eine Konjugationsklasse;
3. Alle Spiegelungen an affinen Geraden bilden eine Konjugationsklasse;
4. Alle Gleitspiegelungen, die keine Spiegelungen sind, bilden eine Konjugationsklasse;
5. Für jeden Winkel θ mit $0 < \theta \leq 180°$ bilden alle Drehungen um einen beliebigen Punkt und um einen Winkel mit dem Betrag θ eine Konjugationsklasse.

Darüber hinaus gibt es keine weiteren Konjugationsklassen von G in K. Hinweis: 4.1.10.12.

Ergänzende Übung 4.5.3.6. Wir betrachten die Gruppen $G \supset B$ der Ähnlichkeiten und der Bewegungen eines dreidimensionalen euklidischen Raums. Man zeige, daß B stabil ist unter der Konjugation mit $g \in G$ und daß die Konjugationsklassen von G, die in B enthalten sind, wie folgt beschrieben werden können:

1. Die Identität bildet für sich allein eine Konjugationsklasse;
2. Alle Verschiebungen, die nicht die Identität sind, bilden eine Konjugationsklasse;

3. Für jeden Winkel θ mit $0 < \theta \leq 180°$ bilden alle Drehungen um eine beliebige Achse und um einen Winkel mit dem Betrag θ eine Konjugationsklasse;

4. Für jeden Winkel θ mit $0 < \theta \leq 180°$ bilden alle Verschraubungen um einen Winkel mit dem Betrag θ, die keine Drehungen sind, eine Konjugationsklasse.

Darüber hinaus gibt es keine weiteren Konjugationsklassen von G in B. Hinweis: 4.1.10.13.

4.5.4 Endliche Untergruppen von Bewegungsgruppen

4.5.4.1. Die orthogonalaffinen orientierungserhaltenden Automorphismen eines euklidischen Raums R der Dimension drei nennen wir seine **Bewegungen**. Die Gruppe B aller Bewegungen von R nennen wir die **Bewegungsgruppe von** R. Gegeben eine Teilmenge des Raums $T \subset R$ nennen wir eine Bewegung $b \in B$ mit $b(T) = T$ eine **Symmetriebewegung von** T. Die Symmetriebewegungen einer Teilmenge $T \subset R$ bilden eine Untergruppe seiner Bewegungsgruppe. Bis auf Isomorphismus gibt es nur einen dreidimensionalen euklidischen Raum und man mag sich darunter den Anschauungsraum denken. Der folgende Satz ist in dieser Anschauung und in Bezug auf die aus der Schule bekannten platonischen Körper formuliert in der Hoffnung, daß er durch diesen Stilbruch verständlicher wird. Das exakte Formulieren im Rahmen der in dieser Vorlesung entwickelten Sprache holen wir später nach.

Satz 4.5.4.2 (**Endliche Untergruppen von Bewegungsgruppen**). *Jede endliche Untergruppe der Bewegungsgruppe ist genau eine der folgenden Gruppen:*

1. *Eine* **zyklische Gruppe** C_k *mit* $k \geq 1$ *Elementen, bestehend aus allen Drehungen zu einer festen Drehachse um Winkel der Gestalt* $2\pi n/k$. *Der Fall* $k = 1$ *deckt hier den Fall der trivialen Gruppe ab, die nur aus der Identität besteht.*

2. *Eine* **Diedergruppe** D_k *mit* $2k$ *Elementen für* $k \geq 2$. *Im Fall* $k > 2$ *ist das die Gruppe aller Symmetriebewegungen eines ebenen gleichseitigen* k*-Ecks, aufgefaßt als räumliche Figur. Im Fall* $k = 2$ *ist es die Gruppe aller derjenigen Drehungen, die von einem Paar sich schneidender orthogonaler Geraden jede in sich überführen.*

3. *Eine* **Tetraedergruppe** T *aller* 12 *Symmetriebewegungen eines Tetraeders.*

4. *Eine* **Würfelgruppe** W *aller* 24 *Symmetriebewegungen eines Würfels.*

5. *Eine* **Ikosaedergruppe** I *aller* 60 *Symmetriebewegungen eines Ikosaeders.*

4.5.4.3. Will man diesen Satz einem Laien erklären, der mit dem Gruppenbegriff nicht vertraut ist, so mag man nach 3.4.3.7 auch einfacher von endlichen Mengen von Bewegungen reden, die mit je zwei Bewegungen stets auch deren Hintereinanderausführung enthalten. Vom mathematischen Standpunkt aus mag man das Resultat als eine Aufzählung der „Konjugationsklassen von endlichen Untergruppen der Bewegungsgruppe“ ansehen, also der Bahnen unter der Operation durch Konjugation unserer Bewegungsgruppe auf der Menge ihrer endlichen Untergruppen. Die endlichen Untergruppen der Isometriegruppe des Anschauungsraums werden in 4.5.4.25 diskutiert.

4.5.4.4. Das Evozieren der platonischen Körper stellt insofern einen Stilbruch dar, als wir uns zumindest implizit darauf verständigt hatten, alle unsere Überlegungen ausschließlich im Rahmen der Mengenlehre durchzuführen. Ein möglicher **Würfel** ist schnell beschrieben, man mag als Ecken für irgendeine Orthonormalbasis $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ die acht Vektoren $\pm\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 \pm \vec{v}_3$ nehmen, im $\mathbb{R}^3$ also etwa $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Die Ecken eines **Tetraeders** erhält man, wenn man nur die vier Ecken dieses Würfels nimmt, bei denen das Produkt der Koordinaten Eins ist. Den **Ikosaeder** besprechen wir in 4.5.4.12 noch ausführlich. Zu den fünf sogenannten „platonischen Körpern“ rechnet man außer diesen dreien noch den **Oktaeder** und den **Dodekaeder**. Die Eckenmenge eines Oktaeders bilden etwa die drei Vektoren der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ mitsamt ihren Negativen. Die Eckenmenge eines Dodekaeders mag man anschaulich als die Menge der „Flächenmitten eines Ikosaeders“ beschreiben und formal als die Menge der „Pole der Polordnung drei“ im Sinne des gleich folgenden Beweises im Fall der Symmetriegruppe eines Ikosaeders. Die Bezeichnungen Tetraeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder für die platonischen Körper außer dem Würfel kommen von den griechischen Worten für die Anzahlen 4, 8, 12 und 20 ihrer Flächen und dem griechischen Wort $\varepsilon\delta\rho\alpha$ für „Sitz“ und dann auch „Sitzfläche“ her. Man findet für den Würfel wegen seiner 6 Flächen manchmal auch die Bezeichnung „Hexaeder“. „Dieder“ heißt eigentlich „Zweiflach“, womit wohl gemeint ist, daß er in gewisser Weise zwei Flächen hat, da man ihn ja wie einen Bierdeckel von beiden Seiten verschieden anmalen könnte.

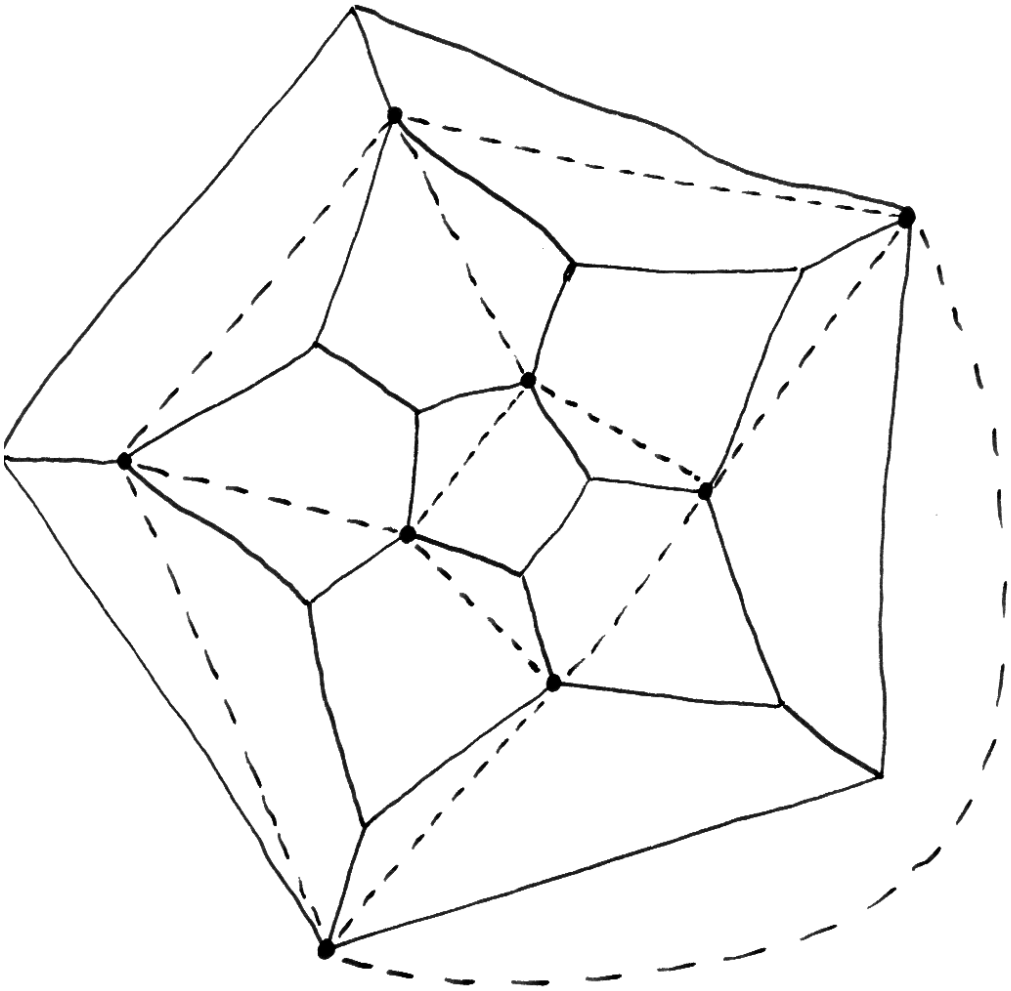
4.5.4.5. Die Diedergruppe D_4 mag man sich auch als die Gruppe aller acht räumlichen Bewegungen veranschaulichen, die einen Bierdeckel in sich überführen. Sie wird deshalb auch die **Bierdeckelgruppe** genannt.

Ergänzung 4.5.4.6 (**Beziehungen zur Kritallographie**). Unser Satz 4.5.4.2 ist ein möglicher Ausgangspunkt der Kristallographie: Unter einem n**-dimensionalen Kristall** verstehen wir hier eine Teilmenge K eines n-dimensionalen euklidischen Raums E, etwa die Menge der Orte der Atome eines Kristallgitters, mit der Eigenschaft, daß (1) die Translationen aus ihrer Symmetriegruppe den Richtungsraum

aufspannen und daß es (2) eine positive untere Schranke gibt für die Längen aller von Null verschiedenen Translationen aus besagter Symmetriegruppe. Die zweite Eigenschaft schließt etwa den Fall aus, daß unsere Teilmenge einfach der ganze besagte Raum ist. Unter der **Punktgruppe** P eines Kristalls verstehen wir die Untergruppe $P \subset \mathrm{O}(\vec{E})$ aller linearen Anteile von Symmetrien unseres Kristalls, unter seiner **Drehgruppe** $D \subset \mathrm{SO}(\vec{E})$ die Menge aller orientierungserhaltenden Elemente der Punktgruppe. Man zeigt, daß die Punktgruppe eines Kristalls stets endlich sein muß, und daß als Drehgruppen von räumlichen, als da heißt dreidimensionalen Kristallen nur die Gruppen C_k und D_k mit $k \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ sowie die Tetraedergruppe und die Würfelgruppe auftreten können. Die Einteilung nach Drehgruppen entspricht in etwa, aber leider nicht ganz genau, der in der Kristallographie gebräuchlichen Einteilung in die sieben **Kristallsysteme**. Genauer entsprechen dem „kubischen System“ die Würfelgruppe und die Tetraedergruppe, dem „tetragonalen System“ die Drehgruppen C_4 und D_4, dem „hexagonalen System“ die Drehgruppen C_6 und D_6, dem „trigonalen System“ die Drehgruppen C_3 und D_3, aber das „orthorhombische“, „monokline“ und „trikline System“ lassen sich erst anhand ihrer Punktgruppen unterscheiden. Auch in den übrigen Fällen liefert die Punktgruppe eine feinere Klassifikation. Für sie gibt es 32 Möglichkeiten, nach denen die Kristalle in die sogenannten **Kristallklassen** eingeteilt werden. Die eigentliche Klassifikation beschreibt alle als Symmetriegruppen von räumlichen Kristallen möglichen Bewegungsgruppen des Anschauungsraums bis auf Konjugation mit orientierungstreuen Automorphismen des unserem euklidischen Raum zugrundeliegenden affinen Raums. Das darf nicht dahingehend mißverstanden werden, daß diese Automorphismengruppe durch Konjugation auf der Menge der möglichen Symmetriegruppen räumlicher Kristalle operieren würde, aber in vielen Fällen sind eben doch zwei derartige Symmetriegruppen konjugiert zueinander, und dann betrachtet man sie als zur selben Klasse gehörig. Es gibt im Raum genau 230 Kristallklassen. Erlaubt man auch Konjugation mit nicht orientierungstreuen Automorphismen, so sinkt die Zahl der Klassen auf 219. Das **achtzehnte Hilbert'sche Problem** fragte unter anderem danach, ob es analog in jeder Dimension nur endlich viele Möglichkeiten für wesentlich verschiedene Kristalle gibt. Bieberbach konnte dafür einen Beweis geben.

4.5.4.7 (**Beziehungen zwischen den Symmetriegruppen platonischer Körper**). Eine Würfelgruppe kann auch als die Gruppe aller Symmetriebewegungen desjenigen Oktaeders aufgefaßt werden, dessen Ecken die Mittelpunkte der Flächen des Würfels sind. Ähnlich kann eine Ikosaedergruppe auch als Gruppe aller Symmetriebewegungen eines Dodekaeders aufgefaßt werden. Die Kantenmitten eines Tetraeders bilden die Ecken eines Oktaeders, so erhält man eine Einbettung der Tetraedergruppe in die Würfelgruppe.

4.5.4.8 (**Symmetriegruppen platonischer Körper als abstrakte Gruppen**). Die



Einer der fünf eingeschriebenen Würfel eines Dodekaeders, mit gestrichelt eingezeichneten Kanten.

Diedergruppe D_2 ist isomorph zur Klein'schen Vierergruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Sie kann vielleicht übersichtlicher auch beschrieben werden als die Gruppe aller Drehungen, die von einem Tripel paarweise orthogonaler Geraden jede in sich überführen. Neben der Identität liegen darin also die Drehungen um $180°$ um jede dieser drei Geraden. Die Tetraedergruppe kann man in die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_4$ einbetten vermittels ihrer Operation auf den Ecken des Tetraeders. Wir erhalten so einen Isomorphismus der Tetraedergruppe mit der alternierenden Gruppe A_4 aller geraden Permutationen von vier Elementen. Die Würfelgruppe operiert auf der Menge der vier räumlichen Diagonalen des Würfels und wir erhalten so einen Isomorphismus $W \cong \mathcal{S}_4$. Die Ikosaedergruppe operiert auf der Menge der fünf eingeschriebenen Würfel eines Dodekaeders, von denen einer in nebenstehendem Bild schematisch dargestellt ist. Mit etwas Geduld kann man direkt einsehen, daß diese Operation einen Isomorphismus der Ikosaedergruppe I mit der alternierenden Gruppe A_5 aller geraden Permutationen von 5 Elementen liefert. In 6.1.2.5 werden wir erklären, wie man das auch mit weniger Geduld aber mehr Gruppentheorie einsehen kann, und in 6.1.6.10 werden wir zusätzlich einen Isomorphismus dieser Gruppe mit der Gruppe $\mathrm{SL}(2;\mathbb{F}_5)/\{\pm\,\mathrm{id}\}$ herleiten.

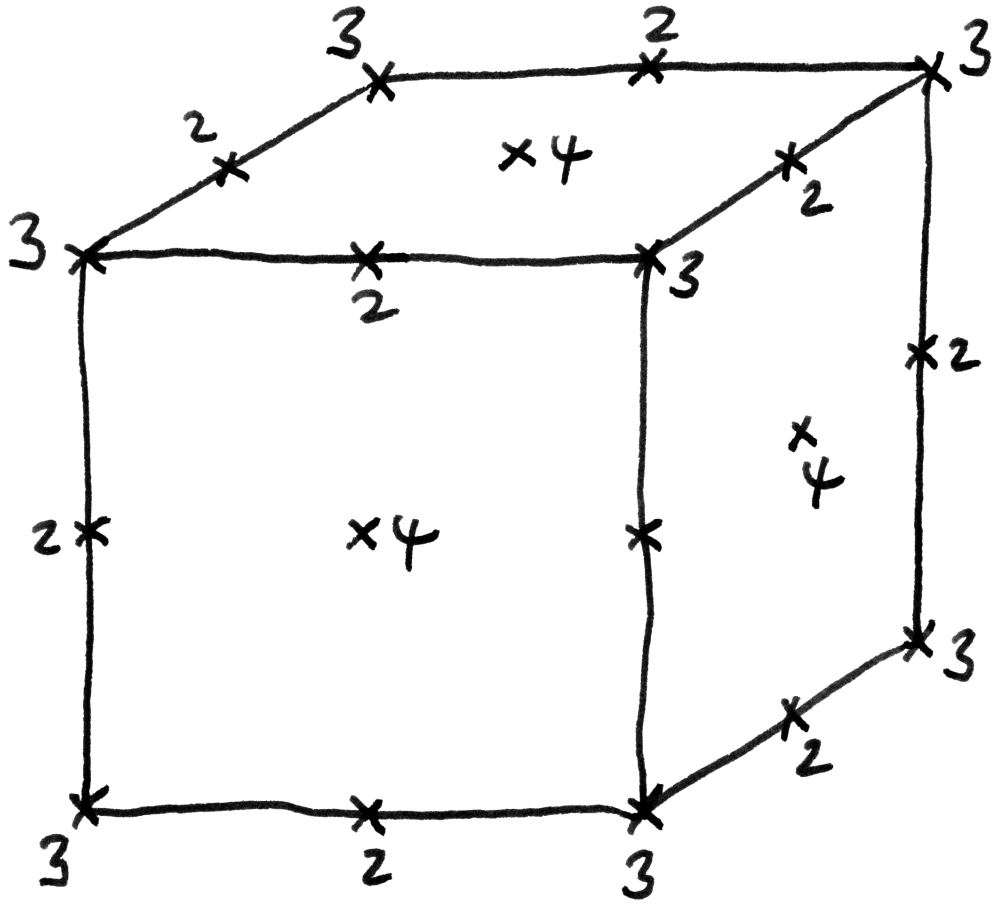
Beweis von Satz 4.5.4.2. Nach 4.5.1.28 besitzt jede endliche Gruppe von Automorphismen eines reellen affinen Raums mindestens einen Fixpunkt, genauer ist der Schwerpunkt 3.3.4.2 jeder Bahn ein Fixpunkt. Folglich reicht es, die endlichen Untergruppen der Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ zu klassifizieren. Sei also $G \subset \mathrm{SO}(3)$ eine endliche Untergruppe. Für jede nichttriviale Drehung $g \in \mathrm{SO}(3)\backslash 1$ erklären wir ihre „Pole“ als die beiden Schnittpunkte ihrer Drehachse mit der Einheitssphäre S^2. Sei P die Menge aller Pole von Elementen von $G\backslash 1$. Natürlich ist P eine endliche Menge und G operiert auf P. Wir zählen nun die Menge

$$M := \{(g,p) \in G \times S^2 \mid g \neq 1, gp = p\}$$

aller Paare (g,p) mit $g \in G\backslash 1$ und p einem Pol von g auf zwei Weisen. Einerseits gehört jedes von 1 verschiedene Gruppenelement $g \in G\backslash 1$ zu genau zwei Polen, andererseits gehört jeder Pol $p \in P$ mit Standgruppe G_p zu genau $|G_p| - 1$ von 1 verschiedenen Gruppenelementen. Zusammen erhalten wir so

$$2(|G| - 1) = |M| = \sum_{p \in P} (|G_p| - 1)$$

Sei nun $P = P_1 \sqcup \ldots \sqcup P_r$ die Bahnzerlegung von P und seien $p_i \in P_i$ fest gewählt. Die Standgruppe von p_i habe sagen wir $n_i \geq 2$ Elemente. Die zugehörige Bahn hat dann $|P_i| = |G|/n_i$ Elemente und alle Standgruppen zu Polen $p \in P_i$ haben $|G_p| = n_i$ Elemente. Die Kardinalität der Standgruppe eines Pols nennen wir abkürzend auch die **Polordnung**. Insbesondere ist also n_i die Polordnung des Pols



Die „von vorne sichtbaren“ Pole der Würfelgruppe mit den Kardinalitäten der jeweiligen Standgruppen

p_i. Fassen wir dann die Pole jeder Bahn in unserer Summe zu einem Summanden zusammen, so können wir in unserer Gleichung die rechte Seite umformen zu $\sum_{i=1}^{r}(|G|/n_i)(n_i-1)$ und Wegteilen von $|G|$ liefert die Gleichung

$$2-\frac{2}{|G|}=\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{n_i}\right)$$

Jeder Summand auf der rechten Seite ist mindestens $1/2$, der Ausdruck links ist aber kleiner als 2. Es kommen also nur bis zu drei Bahnen von Polen in Betracht. Wir machen nun eine Fallunterscheidung nach der Zahl r der Bahnen von Polen.

Fall 0: Es gibt überhaupt keine Pole. In diesem Fall besteht G nur aus dem neutralen Element und wir haben die triviale Gruppe C_1 vor uns.

Fall 1: Ganz P ist eine Bahn. Das ist unmöglich, denn es muß gelten $|G|\geq 2$ wenn es überhaupt Pole geben soll, und damit hätten wir $2-\frac{2}{|G|}\geq 1>1-\frac{1}{n_1}$ im Widerspruch zu unserer Gleichung.

Fall 2: Es gibt genau zwei Bahnen P_1 und P_2 in P. Wir haben dann

$$\frac{2}{|G|}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}$$

Natürlich haben wir $n_i\leq|G|$ und damit notwendig $n_1=n_2=|G|$. Alle Pole werden also von der Gruppe festgehalten, es gibt folglich nur zwei Pole, die sich notwendig gegenüberliegen müssen. Damit sind wir im Fall der zyklischen Gruppen C_k mit $k=n_1=n_2>1$.

Fall 3: Es gibt genau drei Bahnen P_1, P_2 und P_3 in P, wir haben also

$$\frac{2}{|G|}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}-1$$

Wir dürfen annehmen $n_1\leq n_2\leq n_3$. Sicher gilt dann $n_1=2$, sonst wäre die rechte Seite ≤ 0. Haben wir auch $n_2=2$, so kann n_3 beliebige Werte annehmen und wir haben $|G|=2n_3$. Die Bahn P_3 besteht dann aus zwei Polen, die sich notwendig gegenüberliegen müssen, da sonst bereits die Bewegung eines dieser beiden Pole mit einer nichttrivialen Drehung und den anderen ein drittes Element der Bahn P_3 liefern würde. Alle Gruppenelemente permutieren die beiden Pole aus P_3 und unsere Gruppe wird damit eine Diedergruppe. Bleibt der Fall $n_2>2$. Hier sind $(2,4,4)$ und $(2,3,6)$ unmöglich für (n_1,n_2,n_3), da ja gilt $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. Also bleiben nur die Fälle $(2,3,3),(2,3,4)$ und $(2,3,5)$ und man berechnet leicht die zugehörigen Gruppenordnungen zu $12,24$, und 60.

Den Stand unseres Beweises bis hierher können wir wie folgt zusammenfassen: Wir haben eine Abbildung konstruiert – man mag sie die **Bahnpolordnungsabbildung** nennen – die jeder endlichen Untergruppe der Drehgruppe eine endliche Multimenge natürlicher Zahlen zuordnet, und haben gezeigt, daß in ihrem Bild höchstens die folgenden Multimengen liegen:

$$\emptyset,\ {}_\mu\{k,k\} \text{ und } {}_\mu\{2,2,k\} \text{ für } k \geq 2,\ {}_\mu\{2,3,3\},\ {}_\mu\{2,3,4\},\ \text{ und } {}_\mu\{2,3,5\}.$$

Wir müssen nun noch zeigen, daß (1) die angegebenen Multimengen genau das Bild unserer Bahnpolordnungsabbildung sind, und daß (2) je zwei Drehgruppen mit demselben Bild unter der Bahnpolordnungsabbildung zueinander konjugiert sind. Wenn wir das alles gezeigt haben, so folgt, daß die Bahnpolordnungsabbildung eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{endliche Untergruppen} \\ \text{der Drehgruppe } \mathrm{SO}(3), \\ \text{bis auf Konjugation} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \emptyset,\ {}_\mu\{k,k\} \text{ und } {}_\mu\{2,2,k\} \text{ für } k \geq 2, \\ {}_\mu\{2,3,3\},\ {}_\mu\{2,3,4\},\ {}_\mu\{2,3,5\} \end{array} \right\}$$

liefert. Zusammen mit der beim Beweis erzeugten Anschauung zeigt das dann unseren Satz. Die Existenz endlicher Untergruppen der Drehgruppe mit derartigen Polbahnen und Polordnungen scheint mir anschaulich klar. Zum Beispiel hat die Würfelgruppe drei Polbahnen, als da sind: Eine Bahn aus den 8 Ecken zur Polordnung 3; eine Bahn aus den auf Länge Eins normierten 12 Mittelpunkten der Kanten, zur Polordnung 2; und eine Bahn aus den auf Länge Eins normierten 6 Mittelpunkten der Flächen, zur Polordnung 4. Diese Anschauung läßt sich auch leicht zu einem formalen Beweis präzisieren in allen Fällen mit Ausnahme des Ikosaeder-Falls $(2,3,5)$. In diesem Fall folgt die Existenz formal erst aus 4.5.4.12. Daß je zwei zyklische Gruppen derselben endlichen Ordnung und je zwei Diedergruppen derselben endlichen Ordnung in der Drehgruppe zueinander konjugiert sind, scheint mir offensichtlich. Die folgenden beiden Lemmata 4.5.4.10 und 4.5.4.11 zeigen, daß auch je zwei Gruppen mit gegebenen Bahnpolordnungen oder, wie wir von jetzt an abkürzend sagen werden, zu gegebenem **Typ** $(2,3,n)$ in der Drehgruppe zueinander konjugiert sind. Damit vervollständigen sie den Beweis unseres Satzes. □

4.5.4.9. Man mag eine Teilmenge eines dreidimensionalen euklidischen Raums eine **platonische Eckenmenge** nennen, wenn die Gruppe ihrer Symmetriebewegungen endlich ist und transitiv auf unserer Teilmenge operiert und jedes ihrer Elemente von mindestens drei Symmetriebewegungen festgehalten wird. Man mag einen **platonischen Körper** erklären als die konvexe Hülle einer platonischen Eckenmenge. Unsere Überlegungen zeigen dann, daß es bis auf Ähnlichkeit in unserem Raum genau fünf platonische Körper gibt.

Lemma 4.5.4.10. *1. Jede endliche Untergruppe einer Drehgruppe von einem der beiden Typen $(2,3,4)$ oder $(2,3,5)$ ist maximal unter allen endlichen Untergruppen der Drehgruppe;*

2. Eine endliche Drehgruppe von einem der Typen $(2,3,n)$ mit $n \geq 3$ kann beschrieben werden als der Stabilistor jeder ihrer beiden kleineren Bahnen von Polen.

Beweis. Nach unseren bisherigen Erkenntnissen kommen bei endlichen Drehgruppen für die Paare (Ordnung eines Pols, Kardinalität seiner Bahn) nur die Paare $(n,1)$, $(n,2)$, $(2,n)$, $(3,4)$, $(3,8)$, $(3,20)$, $(4,6)$ und $(5,12)$ in Frage. Für jeden Pol müssen sich bei Übergang zu einer echt größeren Gruppe nach der Bahnformel entweder seine Polordnung oder die Kardinalität seiner Bahn oder beide vervielfachen. Das ist aber bei $(4,6)$ und $(5,12)$ unmöglich und wir erhalten die erste Behauptung. In den drei Fällen der zweiten Behauptung enthält weiter jede Bahn von Polen mindestens drei Punkte, also auch zwei verschiedene sich nicht gegenüberliegende Punkte. Folglich operiert sogar der Stabilisator in $\mathrm{SO}(3)$ der Bahn P_i treu auf P_i und ist insbesondere endlich. Nun muß P_i auch unter diesem Stabilisator eine Bahn von Polen sein. Wenn die Symmetriegruppe von P_i größer sein will als die Drehgruppe, von der wir ausgegangen sind, muß sie also an den Polen aus P_i größere Polordnungen haben. Wieder ist das unmöglich bei $(3,4)$, $(3,8)$, $(3,20)$, $(4,6)$ und $(5,12)$. □

Lemma 4.5.4.11. *Sind zwei endliche Drehgruppen vom selben Typ $(2,3,n)$ mit $n \geq 3$ gegeben und sind P_3 und $\tilde{P}_3$ jeweils zugehörige Polbahnen kleinstmöglicher Kardinalität, so gibt es eine Drehung, die P_3 in $\tilde{P}_3$ überführt.*

Beweis. Für die Operation der Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ auf Paaren von Vektoren (p,q) durch $g(p,q) := (gp, gq)$ ist klar, daß die Standgruppe jedes linear unabhängigen Paars trivial ist. Gegeben eine endliche Untergruppe $G \subset \mathrm{SO}(3)$ und eine Bahn von Polen P_i ist insbesondere die Standgruppe eines Paars (p,q) mit $p \neq \pm q$ trivial. Nach dieser Vorüberlegung betrachten wir die drei Fälle der Reihe nach.

Im Fall $(2,3,3)$ haben wir $|P_3| = 4$. Folglich gibt es in $P_3 \times P_3$ ein Paar mit trivialer Standgruppe, das also eine 12-elementige Bahn hat, die wegen $|P_3 \times P_3| = 16$ notwendig aus allen (p,q) mit $p \neq q$ bestehen muß. Je zwei verschiedene Punkte aus P_3 haben also denselben Abstand. Ich hoffe, daß damit sowohl die Aussage des Lemmas im Fall $n = 3$ klar wird als auch, daß die Punkte aus P_3 die Ecken eines Tetraeders bilden.

Im Fall $(2,3,4)$ haben wir $|P_3| = 6$. Folglich gibt es in $P_3 \times P_3$ ein Paar mit trivialer Standgruppe, das also eine 24-elementige Bahn hat, die wegen $|P_3 \times P_3| = 36$ notwendig aus allen (p,q) mit $p \neq \pm q$ bestehen muß. Die anderen Bahnen müssen

aus Paaren mit nichttrivialer Standgruppe bestehen, und da die Bahn der sechs Paare der Gestalt (p, p) noch nicht genug Elemente liefert, muß auch noch eine Bahn aus Paaren der Gestalt $(p, -p)$ vorkommen. Wir sehen so einerseits, daß P_3 stabil ist unter Punktspiegelung am Ursprung, und andererseits, daß je zwei voneinander verschiedene Pole aus P_3, die sich nicht gegenüberliegen, denselben Abstand haben. So erkennen wir hoffentlich sowohl die Aussage des Lemmas im Fall $n = 4$ als auch, daß die Elemente von P_3 die Ecken eines Oktaeders bilden müssen.

Im Fall $(2, 3, 5)$ haben wir $|P_3| = 12$ und $|P_3 \times P_3| = 144$. Wieder haben wir an Bahnen in $|P_3 \times P_3|$ die zwölfelementige Bahn aller Paare (p, p), möglicherweise noch eine zwölfelementige Bahn aller Paare $(p, -p)$, und daneben nur Bahnen mit 60 Elementen. Es folgt, daß $P_3 \times P_3$ in vier Bahnen zerfällt, und zwar die Bahn der Paare gleicher Pole, die Bahn der Paare von sich gegenüberliegenden Polen, und zwei weitere Bahnen von Polpaaren. Nehmen wir irgendeinen Pol $p \in P_3$, so bilden die Bilder von jedem Pol $q \in P_3$ mit $q \neq \pm p$ unter den Drehungen aus unserer Gruppe mit Fixpunkt p ein regelmäßiges Fünfeck, denn die Polordnung der Pole aus P_3 war ja 5. Für zwei verschiedene Ecken eines regelmäßigen Fünfecks gibt es zwei Möglichkeiten für ihren Abstand, deren Verhältnis nebenbei bemerkt nach 10.4.5.30 oder elementargeometrischen Überlegungen gerade der goldene Schnitt ist. Unsere beiden 60-elementigen Bahnen müssen sich also im Abstand zwischen den Polen ihrer Paare unterscheiden. Zu jedem Pol aus P_3 gibt es damit außer dem Pol selbst und dem gegenüberliegenden Pol noch 5 „nahe“ Pole und 5 „weite“ Pole. Nun bilden zwei sich gegenüberliegende Pole aus P_3 mit jedem weiteren Pol ein Dreieck, das nach dem Satz des Thales bei diesem weiteren Pol einen rechten Winkel hat, wobei dieser Pol notwendig zu einem von unseren beiden sich gegenüberliegenden Polen nah sein muß und zum anderen weit, da ja zu jedem unserer sich gegenüberliegenden Pole von den zehn verbleibenden Polen fünf nah und fünf weit sein müssen. Da unser Dreieck eine Hypothenuse der Länge 2 hat, wird dadurch der Abstand zwischen nahen Polen und der zwischen weiten Polen bereits vollständig beschrieben und hängt insbesondere nicht von unserer Gruppe ab. Damit erkennen wir, daß im Fall $(2, 3, 5)$ die Bahn P_3 bestehen muß aus (1) zwei gegenüberliegenden Punkten N und $S = -N$ sowie (2) zwei regelmäßigen Fünfecken der fünf zu N nahen Pole und der fünf zu S nahen Pole mit jeweils von der speziellen Gruppe unabhängigem Abstand der Ecken dieser Fünfecke zu den jeweiligen Polen. Jede Ecke des „nördlichen“ Fünfecks muß aber auch einer Ecke des „südlichen“ Fünfecks gegenüberliegen. Unser Lemma folgt unmittelbar. □

Lemma 4.5.4.12 (Existenz der Ikosaedergruppe). *Es gibt endliche Untergruppen der Drehgruppe* $\mathrm{SO}(3)$ *mit Elementen der Ordnungen drei und fünf.*

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(S^2)$ aller gleichseitigen Dreiecke mit Ecken auf der Einheitssphäre, die nicht in einer Ebene mit dem Ursprung liegen,

formal also

$$\mathcal{D} = \left\{ \{a,b,c\} \;\middle|\; \begin{array}{c} a,b,c \in \mathbb{R}^3,\ \|a\| = \|b\| = \|c\| = 1, \\ \|a-b\| = \|b-c\| = \|c-a\|, \\ \langle a,b,c\rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3. \end{array} \right\}$$

Gegeben ein Dreieck $\Delta \in \mathcal{D}$ und eine Ecke $a \in \Delta$ definieren wir das **umgeklappte Dreieck** $\Delta^a \in \mathcal{D}$ als das eindeutig bestimmte gleichseitige Dreieck $\Delta^a \in \mathcal{D}$ mit $\Delta \cap \Delta^a = \{b,c\}$. Definieren wir zu einem Dreieck $\Delta \in \mathcal{D}$ die Menge

$$\mathcal{D}(\Delta)$$

als die kleinste Teilmenge $\mathcal{D}(\Delta) \subset \mathcal{D}$, die Δ enthält und stabil ist unter dem Umklappen von Dreiecken, so gilt offensichtlich $\mathcal{D}(\Delta) = \mathcal{D}(\Delta')$ für alle $\Delta' \in \mathcal{D}(\Delta)$. Ist $r \in \mathrm{O}(3)$ orthogonal, so gilt sicher $\{ra, rb, rc\}^{ra} = r(\{a,b,c\}^a)$ für jedes Dreieck $\{a,b,c\} \in \mathcal{D}$, das mit r gedrehte Dreieck am Bild $r(a)$ der Ecke a umklappen liefert also dasselbe wie das an der Ecke a umgeklappte Dreieck mit r drehen, und insbesondere gilt $r(\mathcal{D}(\Delta)) = \mathcal{D}(r\Delta)$. Haben wir nun zusätzlich $|(r\Delta) \cap \Delta| \geq 2$, so folgt $r\Delta \in \mathcal{D}(\Delta)$ und damit $\mathcal{D}(r\Delta) = \mathcal{D}(\Delta)$. Nach diesen Vorüberlegungen gehen wir nun aus von einem regelmäßigen Fünfeck, bilden darauf die Pyramide mit Spitze N und aufsteigenden Kanten von derselben Länge wie die Kanten des Fünfecks, und schrumpfen oder strecken diese Pyramide so, daß wir sie als „Polkappe“ in die Einheitssphäre legen können. Dann gehen offensichtlich die fünf gleichseitigen Dreiecke dieser Polkappe durch Umklappen auseinander hervor. Bezeichne $\mathcal{D}^* \subset \mathcal{D}$ die kleinste unter Umklappen stabile Menge von Dreiecken, die diese fünf Dreiecke umfaßt. Wir zeigen im folgenden, daß $\mathcal{D}^*$ endlich ist: Dann bilden alle Drehungen, die $\mathcal{D}^*$ in sich überführen, offensichtlich eine endliche Untergruppe der Drehgruppe mit Elementen der Ordnungen drei und fünf und wir sind fertig. Um zu zeigen, daß $\mathcal{D}^*$ endlich ist, bilden wir zu $\mathcal{D}^*$ einen Graphen im Sinne von 4.5.4.22 wie folgt: Als Graphenecken nehmen wir alle fünfelementigen Teilmengen von $\mathcal{D}^*$ vom Typ „Polkappe“, die also aus einem festen Dreieck mit ausgezeichneter Ecke durch wiederholtes Umklappen unter Festhalten dieser einen ausgezeichneten Ecke gewonnen werden können. Nun verbinden wir zwei verschiedene derartige Graphenecken durch eine Graphenkante genau dann, wenn sie mindestens ein Dreieck gemeinsam haben. So erhält man aus $\mathcal{D}^*$ einen zusammenhängenden Graphen mit den Eigenschaften aus Übung 4.5.4.22: Jede Graphenecke hat genau fünf Nachbarn, und je zwei benachbarte Graphenecken haben genau zwei gemeinsame Nachbarn. Nach Übung 4.5.4.22 ist ein zusammenhängender Graph mit diesen Eigenschaften jedoch endlich und damit muß auch unsere Menge von Dreiecken $\mathcal{D}^*$ endlich gewesen sein. □

Ergänzung 4.5.4.13. Die obigen Überlegungen kann man dahingehend zusammenfassen, daß gegeben ein gleichseitiges Dreieck $\Delta = \{a,b,c\}$, für das es eine

Drehung r um die Ursprungsgerade durch a gibt mit $r^5 = \mathrm{id}$ und $r : b \mapsto c$, die Menge $\mathcal{D}(\Delta)$ der daraus durch Umklappen entstehenden Dreiecke endlich ist. Die hier geforderte Eigenschaft hat sicher jedes Dreieck, das anschaulich gesprochen „Fläche eines Ikosaeders“ ist. Es gibt aber auch noch andere gleichseitige Dreiecke mit dieser Eigenschaft, nämlich diejenigen gleichseitigen Dreiecke, die anschaulich gesprochen die „Diagonale unseres Ausgangsfünfecks“ als Seitenlänge haben.

Ergänzung 4.5.4.14. Mit welchen platonischen Körpern kann man den Raum füllen? Ich vermute, das geht nur mit Würfeln: Die anderen sollten als Winkel zwischen an einer Kante angrenzenden Flächen nie einen Winkel der Gestalt $2\pi/n$ haben.

Ergänzung 4.5.4.15. Vielleicht ist es vernünftig, platonische Körper zu definieren über die Mengen ihrer Ecken, die man wohl wie folgt charakterisieren kann: Man definiere für eine endliche Teilmenge E des Raums ihre **Abständezahl** $A(E)$ als die Zahl der möglichen von Null verschiedenen verschiedenen Abstände zwischen ihren Elementen. Eine endliche Teilmenge E einer Sphäre heißt nun Tetraeder bei $|E| = 4$, $A(E) = 1$, Würfel bei $|E| = 8$, $A(E) = 3$, Oktaeder bei $|E| = 6$, $A(E) = 2$, Ikosaeder bei $|E| = 12$, $A(E) = 3$, Dodekaeder bei $|E| = 20$, $A(E) = 4$. Stimmt das eigentlich? Möglicherweise sollte man bei allen außer dem Tetraeder noch fordern, daß E stabil ist unter Punktspiegelung am Ursprung.

Übungen

Übung 4.5.4.16. Man berechne den Cosinus des Winkels zwischen zwei Seitenflächen eines Tetraeders. Hinweis: Man argumentiere, daß die Normalenvektoren auf die Flächen eines Tetraeders die Ecken eines Tetraeders bilden. Man bemerke, daß die Standardbasisvektoren im $\mathbb{R}^4$ einen Tetraeder bilden. Wieviele Tetraeder kann man längs einer gemeinsamen Kante zusammenlegen? Bleibt dann noch Luft? Hier mag ein Taschenrechner helfen.

Weiterführende Übung 4.5.4.17. Gegeben ein zusammenhängender ebener Graph, bei dem an jeder Ecke drei Kanten ankommen, leite man aus der Eulerschen Formel $E - K + F = 2$ her, daß es eine Fläche mit höchstens fünf Kanten geben muß. Hier haben wir die unbeschränkte Fläche mitgezählt.

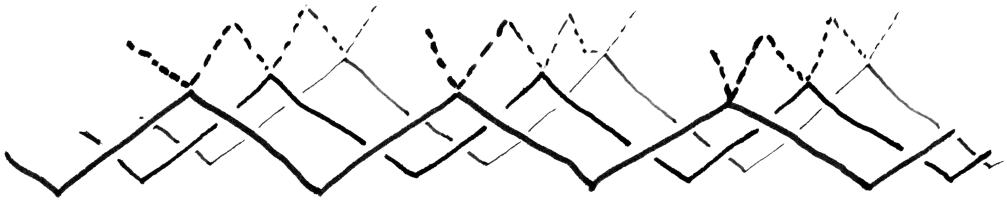
Ergänzende Übung 4.5.4.18 (**Kristallgitter des Diamants**). Seien $v_1, \ldots, v_4$ Richtungsvektoren des dreidimensionalen Anschauungsraums, die vom Schwerpunkt eines Tetraeders zu seinen vier Ecken zeigen. Wir betrachten alle Linearkombinationen $\sum_{i=1}^4 n_i v_i$ mit $\sum_{i=1}^4 n_i \in \{0, 1\}$ und behaupten, daß diese Linearkombinationen gerade die Punkte beschreiben, an denen in einem Diamant die Kohlenstoffatome sitzen. In der Tat sind unsere Linearkombinationen paarweise verschieden, die „einzige“ Relation $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$ unserer Vektoren

führt aufgrund unserer Einschränkungen nicht zu Mehrdeutigkeiten, und unsere Linearkombinationen lassen sich auch beschreiben als die Elemente des von den Richtungsvektoren $v_1 - v_2, v_1 - v_3$ und $v_1 - v_4$ erzeugten Gitters mitsamt dem um v_1 verschobenen Gitter. Jeder Punkt hat vier nächste Nachbarn, der Nullpunkt etwa $v_1, \ldots, v_4$, und zu diesen ist er gebunden im Diamantkristall. Anschaulich mag man sich eine Lage von parallelen horizontalen Zick-Zack-Linien denken, die Zick-Zacks darin nach oben und unten, dann eine weitere horizontale Lage senkrecht dazu, bei denen die Tiefpunkte immer gerade die Hochpunkte der Lage darunter berühren, und so weiter, und schließlich an jedem dieser Berührungspunkte ein Kohlenstoffatom.

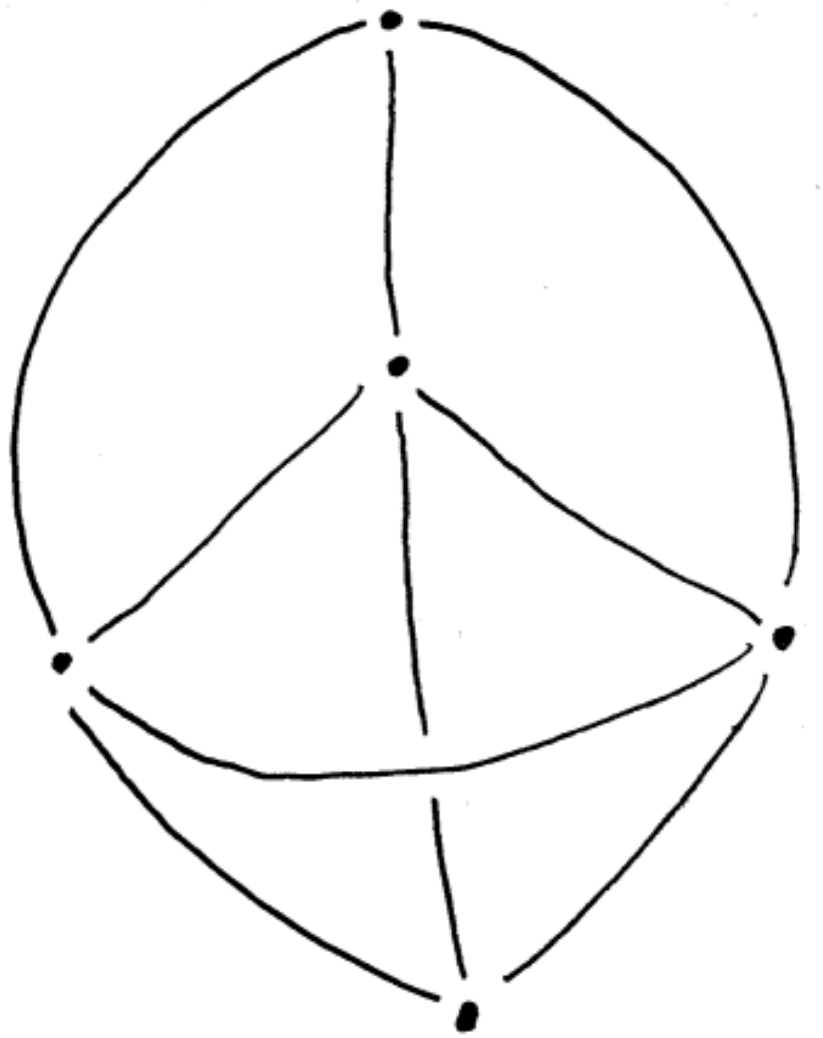
Ergänzende Übung 4.5.4.19. Man konstruiere einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\mathcal{S}_4 \twoheadrightarrow \mathcal{S}_3$. Hinweis: Geometrisch mag man sich die $\mathcal{S}_4$ nach 4.5.4.8 als die Gruppe der Symmetriebewegungen eines Würfels denken und den fraglichen Gruppenhomomorphismus konstruieren über die Operation dieser Gruppe auf der Menge der drei Mittelsenkrechten auf den Flächen des Würfels. Später werden wir verstehen, daß dieser Homomorphismus etwas ganz besonderers ist: Surjektive nicht bijektive Gruppenhomomorphismen $\mathcal{S}_n \twoheadrightarrow G$ einer symmetrischen Gruppe auf irgendeine andere Gruppe gibt es unter der Annahme $n \geq 5$ nur für $|G| = 2$ und dann jeweils nur genau Einen, vergleiche 6.1.6.9.

Ergänzende Übung 4.5.4.20. Die Multiplikation definiert einen Isomorphismus zwischen der Gruppe aller Symmetrien aus $\mathrm{O}(3)$ eines Ikosaeders und dem Produkt der Gruppe seiner Symmetriebewegungen mit der zweielementigen Gruppe, die von der Punktspiegelung am Ursprung erzeugt wird. Insbesondere ist die „nichtorientierte Ikosaedergruppe“ keineswegs isomorph zur symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_5$.

4.5.4.21. Unter einem **Graphen** oder genauer einem **kombinatorischen Graphen** (ungerichtet, ohne mehrfache Kanten, ohne Schleifen) verstehen wir ein Paar (E, K) bestehend aus einer Menge E und einem System $K \subset \mathcal{P}(E)$ von zweielementigen Teilmengen von E. Die Elemente von E heißen die **Ecken** unseres Graphen, die Elemente von K seine **Kanten**. Zwei verschiedene Ecken, die zu einer gemeinsamen Kante gehören, heißen **benachbart**. Ein **Isomorphismus** zwischen zwei Graphen ist eine Bijektion zwischen ihren Eckenmengen, die eine Bijektion zwischen ihren Kantenmengen induziert. Zwei Graphen heißen **isomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Isomorphismus gibt. Die Äquivalenzklassen der kleinsten Äquivalenrelation auf der Eckenmenge eines Graphen, unter der benachbarte Elemente äquivalent sind, heißen die **Zusammenhangskomponenten** unseres Graphen. Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn er aus einer einzigen Zusammenhangskomponente besteht.



Versuch einer graphischen Darstellung der räumlichen Struktur des Diamantkristalls. Die durchgezogenen und gestrichelten Linien sind nur der Transparenz halber verschiedenartig gezeichnet und bedeuten die Bindungen zwischen den Kohlenstoffatomen, die jeweils an den Ecken der Zick-Zack-Linien sitzen. Die hier gezeichnete Struktur gilt es nun übereinanderzuschichten, so daß sich jeweils die Ecken treffen.



Ein zusammenhängender Graph mit fünf Punkten, von denen drei vier Nachbarn haben und zwei nur drei Nachbarn. Die beiden Punkte „auf halber Höhe auf dem Rand“ haben drei gemeinsame Nachbarn.

Übung 4.5.4.22. Man zeige: Ein zusammenhängender Graph, in dem jede Ecke genau fünf (vier, drei) Nachbarn besitzt und je zwei benachbarte Ecken genau zwei gemeinsame Nachbarn, ist notwendig endlich und sogar isomorph zu jedem weiteren Graphen mit diesen beiden Eigenschaften. Den so charakterisierten Graphen mag man den „Kantengraphen des Ikosaeders (Oktaeders, Tetraeders)“ nennen. Hinweis: Ausprobieren.

Übung 4.5.4.23 (**Endliche Untergruppen der** $\mathrm{SU}(2)$). Man zeige, daß die Gruppe $\mathrm{SU}(2)$ nur zwei Elemente g besitzt mit $g^2 = 1$, nämlich $g = \pm\,\mathrm{id}$. Man zeige, daß jede endliche Untergruppe ungerader Kardinalität n von $\mathrm{SU}(2)$ konjugiert ist zur Untergruppe $\{\mathrm{diag}(\zeta^r, \zeta^{-r}) | 1 \le r \le n\}$ für $\zeta = \exp(2\pi\mathrm{i}/n)$. Man zeige, daß die endlichen Untergruppen gerader Kardinalität von $\mathrm{SU}(2)$ genau die Urbilder von endlichen Untergruppen von $\mathrm{SO}(3)$ unter unserer Surjektion $\mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$ aus 4.1.11.26 sind, die wir nach 4.5.4.2 bereits kennen. Das benötigt den Satz von Cauchy 4.5.1.35.

Übung 4.5.4.24 (**Ikosaeder**). Es gibt in der Einheitssphäre zwölfelementige Teilmengen, die stabil sind unter der Drehung mit den Winkeln $\pm 2\pi/5$ um die Ursprungsgeraden durch jeden ihrer Punkte, und je zwei derartige Teilmengen lassen sich durch eine Drehung ineinander überführen.

Übung 4.5.4.25 (**Endliche Untergruppen der Isometriegruppe des Raums**). Jede Wahl eines von Null verschiedenen Richtungsvektors versieht den Anschauungsraum mit einer Metrik. Alle diese Metriken unterscheiden sich nur um eine positive reelle Konstante und liefern folglich dieselben Isometrien. Die Gruppe aller Isometrien des Anschauungsraums ist damit wohldefiniert. Sie kann im übrigen auch beschrieben werden als die von allen Bewegungen und allen Punktspiegelungen erzeugte Gruppe von Selbstabbildungen. Diejenigen Isometrien des Anschauungsraums, die eine gegebene Teilmenge festhalten, nenne ich ihre **Isometriesymmetrien** oder im folgenden auch kurz **Symmetrien**. Man zeige, daß jede endliche Untergruppe der Gruppe der Isometrien alias abstandserhaltenden Selbstabbildungen des Anschauungsraums konjugiert ist zu genau einer Untergruppe der folgenden Liste:

1. Der Gruppe aller Symmetrien beziehungsweise Symmetriebewegungen eines Tetraeders, Würfels, oder Ikosaeders, insgesamt 6 Fälle mit den Kardinalitäten 24, 12, 48, 24, 120, 60;

2. Der Gruppe aller Symmetrien bzw. Symmetriebewegungen eines regelmäßigen k-eckigen Bierdeckels, $k \ge 3$, also 2 Fälle für jedes k von Gruppen der Kardinalitäten $4k$ und $2k$;

3. Der Gruppe aller Symmetrien beziehungsweise Symmetriebewegungen einer regelmäßigen k-eckigen Schale, $k \ge 3$, also 2 Fälle für jedes k von Gruppen der Kardinalitäten $2k$ und k;

4. Der Gruppe aller Symmetrien beziehungsweise Symmetriebewegungen, die von einem Tripel bestehend aus drei durch einen gemeinsamen Punkt laufenden paarweise orthogonalen Geraden jede der drei Geraden stabilisieren und eine beziehungsweise zwei dieser Geraden punktweise festhalten. In Formeln übersetzt und nach den entsprechenden Identifikationen also einer der Untergruppen $\operatorname{diag}(\pm 1, 1, 1)$, $\operatorname{diag}(\pm 1, \pm 1, 1)$, $\operatorname{diag}(\pm 1, \pm 1 \pm 1)$ oder ihrer Schnitte mit der Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$, insgesamt 6 Fälle mit den Kardinalitäten $2, 1, 4, 2, 8, 4$;

Übung 4.5.4.26 (**Existenz des Ikosaeders, Alternative**). Die Würfelgruppe ist isomorph zur Gruppe $\mathcal{S}_4$ aller Permutationen seiner Raumdiagonalen. Die Drehungen an Raumdiagonalen erzeugen darin die Untergruppe A_4 aller geraden Permutationen seiner Raumdiagonalen. Es gibt zwei Möglichkeiten, jeder Fläche des Würfels ein Paar von parallelen Kanten derselben Fläche so zuzuordnen, daß diese Wahl stabil ist unter A_4. Jetzt sollen einige der Kanten des Ikosaeders in der Mitte der Flächen unseres Würfels liegen, parallel zu den jeweils ausgewählten beiden Kanten, und nun muß man nur noch ihre Länge so bestimmen, daß die Abstände zwischen „benachbarten Kantenenden“ gleich der Kantenlängen sind. Man muß dann allerdings noch etwas argumentieren, um zu zeigen, daß die so gewonnene Menge von „Ecken des Ikosaeders“ Symmetrien der Ordnung fünf hat.

4.5.5 Diskussion der Eulerformel*

4.5.5.1. Indem man bei unseren platonischen Körpern die Zahlen E, K, F der Ecken, Kanten und Flächen bestimmt, prüft man unmittelbar in allen fünf Fällen die **Eulerformel**

$$E - K + F = 2$$

Diese Beziehung gilt allgemeiner für jede „kompakten konvexen dreidimensionalen Polyeder“, nur habe ich gar nicht definiert, was das eigentlich sein soll, und habe selbst bei den platonischen Körpern nur definiert, was für Teilmengen des Raums nun diesen Namen verdienen sollen, und nicht, wie denn nun die „Kanten“ oder „Flächen“ dieser Gebilde definiert werden sollen, die wir bereits so unbekümmert gezählt haben. Eine Formalisierung des Begriffs eines „dreidimensionalen konvexen Polyeders“ und seiner „Ecken, Kanten und Flächen“ wird in 3.3.5.18 ausgeführt, aber das schien mir hier unangemessen und sogar irreführend, da unsere Eulerformel anderer Natur ist. Im folgenden formuliere ich sehr präzise eine sehr allgemeine Fassung dieser Formel, gebe jedoch statt eines Beweises nur einige sehr unvollkommene heuristische Argumente.

4.5.5.2. Ich erinnere den Begriff eines Homöomorphismus aus 12.3.4.3. Man bemerke, daß $\mathbb{R}^2$ nicht homöomorph ist zu $\mathbb{R}^1$. In $\mathbb{R}^2$ ist nämlich das Komplement

jedes Punktes zusammenhängend, in $\mathbb{R}^1$ dahingegen ist das Komplement jedes Punktes unzusammenhängend.

Satz 4.5.5.3 (**Topologische Eulerformel**). *Sei $S^2 = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$ eine Zerlegung der Einheitssphäre $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ in endlich viele paarweise disjunkte Teilmengen A_i, die die beiden folgenden Eigenschaften hat:*

1. *Für jeden Index i ist $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_i$ abgeschlossen in S^2;*
2. *Jedes A_i ist homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^1$ oder $\mathbb{R}^0$ alias einem Punkt.*

So gilt die **Euler-Formel** $E - K + F = 2$ *für E, F und K die Zahl der jeweils zu $\mathbb{R}^0, \mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^2$ homöomorphen A_i.*

4.5.5.4. Die Bezeichnungen E, K und F stehen für „Ecken, Kanten und Flächen“. Man prüft die Formel leicht explizit für die durch die Zentralprojektion eines platonischen Körpers auf die Einheitssphäre gegebene Zerlegung derselben in die Bilder seiner Ecken, Kanten und Flächen. Besitzt allgemeiner ein lokal kompakter Hausdorffraum X eine Zerlegung

$$X = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$$

in endlich viele paarweise disjunkte Teilmengen derart, daß für jeden Index i gilt $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_i \not\subset X$ und daß jedes A_i homöomorph ist zu $\mathbb{R}^{d(i)}$ für ein $d(i) \geq 0$, so ist $\sum_i (-1)^{d(i)}$ unabhängig von der Wahl einer derartigen Zerlegung. Den Beweis der topologischen Euler-Formel 4.5.5.3 und auch dieser allgemeineren Aussage für beliebige lokal kompakte Hausdorffräume können Sie in 19.4.8.22 finden. Er benötigt vertiefte Kenntnisse in Topologie.

4.5.5.5 (**Diskussion einiger nicht erlaubter Zerlegungen**). Um die Aussage des Satzes herauszuarbeiten, will ich einige nicht erlaubte Zerlegungen angeben. Betrachten wir die ganze Einheitssphäre als eine einzige Fläche, so gilt unsere Formel sicher nicht. Die Einheitssphäre ist aber auch nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^2$, zum Beispiel, da sie kompakt ist. Zerlegen wir die Einheitssphäre in den Äquator und die beiden Hemisphären, so gilt unsere Formel ebensowenig. Der Äquator ist aber auch nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^1$, zum Beispiel, da er kompakt ist. Zerlegen wir den Äquator in einen Punkt und eine Kante, so gelten unserer Annahmen und unsere Formel. Malen wir noch einen zweiten in derselben Weise zerlegten Äquator daneben, so wird sie wieder falsch. Das liegt daran, daß die „ringförmige Fläche“ zwischen unseren beiden Äquatoren nicht homöomorph ist zu $\mathbb{R}^2$, was hier nicht formal gezeigt werden soll. Verbinden wir aber die beiden ausgewählten Punkte auf unseren beiden Äquatoren noch durch eine Kante, so wir unsere Formel wieder richtig und die Bedingungen des Satzes sind auch wieder erfüllt.

4.5.5.6 (**Heuristische Begründung der Eulerformel**). Wir gehen aus von der Zerlegung der Einheitssphäre in einen Punkt und sein Komplement. In diesem Fall gilt die Eulerformel. Jetzt argumentieren wir induktiv und gehen von einer Zerlegung der Einheitssphäre in Ecken, Kanten und Flächen aus, in der wir die Eulerformel bereits geprüft haben.

1. Ergänzen wir eine Ecke, indem wir eine bereits existierende Kante in zwei Kanten zerteilen, so entsteht eine neue Zerlegung mit einer zusätzlichen Ecke und einer zusätzlichen Kante.

2. Ergänzen wir eine Kante, indem wir zwei Ecken auf dem Rand einer bereits vorhandenen Fläche innerhalb dieser Fläche durch eine Kante verbinden, so entsteht eine neue Zerlegung mit einer zusätzlichen Kante und einer zusätzlichen Fläche, da ja unsere Fläche von unserer neuen Kante in zwei Teile geschnitten wird.

Induktiv folgt so die Eulerformel für alle Zerlegungen der Einheitssphäre in Ecken, Kanten und Flächen, die wir auf diese Weise induktiv konstruieren können. Die Schwäche der vorhergehenden Argumentation ist zusätzlich zur allgemeinen Unschärfe der darin verwendeten Begriffe, daß nicht klar ist, welche Zerlegungen der Einheitssphäre in Ecken, Kanten und Flächen wir denn mit dem im Beweis beschriebenen Verfahren induktiv erreichen können. Da aber diese Fragen nur mit dem Aufbau eines entsprechend starken Begriffsapparats befriedigend geklärt werden können, will ich sie hier nicht weiter verfolgen.

4.5.6 Bruhatzerlegung*

Satz 4.5.6.1 (Bruhatzerlegung). *Gegeben ein Kring R und eine natürliche Zahl $n \geq 1$ zerfällt die Gruppe $\mathrm{GL}(n; R)$ unter der beidseitigen Operation der Untergruppe der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen $B \subset \mathrm{GL}(n; R)$ in die disjunkte Vereinigung*

$$\mathrm{GL}(n; R) = \bigsqcup_{w \in \mathcal{S}_n} BwB$$

der Doppelnebenklassen der Permutationsmatrizen.

Beweis. Multiplikation mit oberen Dreicksmatrizen von rechts bedeutet solche Spaltenoperationen, bei denen eine Spalte mit einem invertierbaren Skalar multipliziert oder ein Vielfaches einer Spalte zu einer Spalte weiter rechts addiert wird. Ähnlich bedeutet die Multiplikation mit oberen Dreicksmatrizen von links solche Zeilenoperationen, bei denen eine Zeile mit einem invertierbaren Skalar multipliziert oder ein Vielfaches einer Zeile zu einer Zeile weiter oben addiert wird. Also besteht für jede Permutationsmatrix w die Nebenklasse Bw aus gewissen

„Zahnlückenmatrizen“ und die Nebenklasse wB aus gewissen „Regaleinräummatrizen“, wie nebenstehendes Bild andeuten mag. Man erkennt so einerseits, daß aus $Bw \cap vB \neq \emptyset$ folgt $v(i) \leq w(i)$ für $1 \leq i \leq n$, wobei wir unsere Permutationsmatrizen nun als echte Permutationen aufgefaßt haben. Das zeigt $v = w$ und wir erkennen, daß die Doppelnebenklassen BwB für $w \in \mathcal{S}_n$ paarweise disjunkt sind. Andererseits können wir eine beliebige invertierbare Matrix g durch Davormultiplizieren von $b \in B$ stets in eine Regaleinräummatrix transformieren: Wir beginnen dazu mit der ersten Spalte, nehmen darin den tiefsten von Null verschiedenen Eintrag, und benutzen Zeilenoperationen „nach oben“, um alle Einträge darüber auch auszuräumen. Dann streichen wir die Zeile dieses Eintrags und machen immer so weiter. Das zeigt, daß die Doppelnebenklassen BwB auch die ganze Gruppe überdecken. □

4.5.6.2. Für die meisten Matrizen g wird der tiefste von Null verschiedene Eintrag jedesmal in der untersten noch nicht gestrichenen Zeile auftauchen. Dann liegt die Matrix in der Doppelnebenklasse $Bw_\circ B$ der Permutationsmatrix mit Einsen in der Nebendiagonalen und Nullen sonst. Die zugehörige Permutation $w_\circ \in \mathcal{S}_n$ ist die Permutation, die „die Reihenfolge umdreht“. Diese Doppelnebenklasse heißt die **dicke Zelle**.

Ergänzung 4.5.6.3. Sei weiter $w_\circ$ die Permutationsmatrix mit Einsen in der Nebendiagonalen und Nullen sonst, der also die Permutation $w_\circ \in \mathcal{S}_n$ entspricht, die „die Reihenfolge umdreht“. Dann besteht $L := w_\circ B w_\circ$ genau aus allen invertierbaren unteren Dreiecksmatrizen. Die mit $w_\circ$ verschobene dicke Zelle kann also auch beschrieben werden als

$$w_\circ B w_\circ B = LB$$

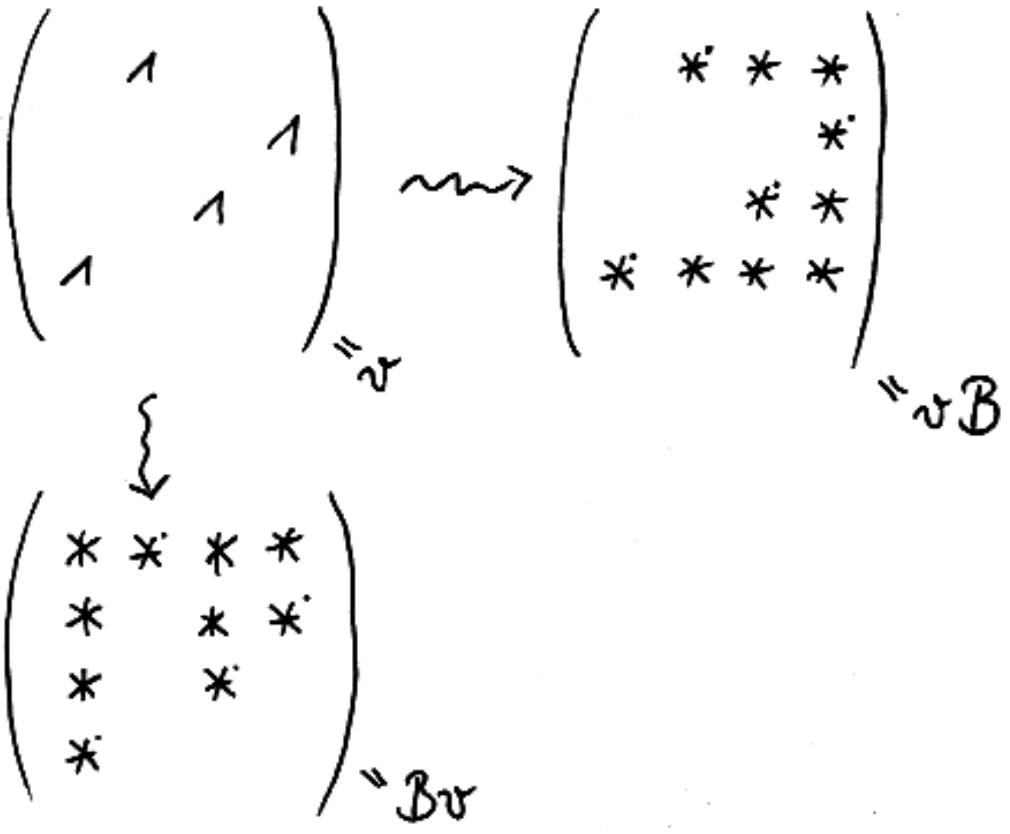
Bezeichnet $U := \mathrm{U}(n; R)$ die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale, so besteht $L \cap U$ nur aus der Einheitsmatrix und wir haben $LU = LB$. Mithin liefert die Multiplikation eine Bijektion

$$L \times U \xrightarrow{\sim} LB$$

auf die mit $w_\circ$ verschobene dicke Zelle. In der Numerik nennt man diese Darstellung einer Matrix aus der verschobenen dicken Zelle LB als Produkt einer unteren mit einer oberen Dreiecksmatrix die **LR-Zerlegung** für „Links-Rechts“ oder **LU-Zerlegung** für „lower-upper“. Allgemeiner zeigt man, daß für eine beliebige Permutation $w \in \mathcal{S}_n$ die Abbildung $(a, u) \mapsto awu$ eine Bijektion

$$L \times (U \cap w^{-1}Uw) \xrightarrow{\sim} LwB$$

liefert. Die Surjektivität folgt hierbei in den Notationen von 4.4.1.12 aus der Erkenntnis, daß das Aufmultiplizieren in einer beliebigen aber festen Reihenfolge eine Bijektion $\prod_{i<j,\, w(i)>w(j)} U_{ij} \times (U \cap w^{-1}Uw) \xrightarrow{\sim} U$ liefert und daß gilt $wU_{ij} = U_{w(i)w(j)}w \in Lw$ für alle Faktoren des großen Produkts.



Die Nebenklassen einer Permutationsmatrix unter der Operation der oberen Dreiecksmatrizen. Das Symbol $*$ steht für einen beliebigen Matrixeintrag, das Symbol $*^{\cdot}$ für einen invertierbaren Matrixeintrag.

Übungen

Übung 4.5.6.4. Seien R ein Ring. Wir betrachten in $\mathrm{GL}(n;R)$ die Untergruppen B, U und $U^- := w_\circ U w_\circ$ der obereren Dreiecksmatrizen, oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale und unteren Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale. Man zeige, daß für jedes $w \in \mathcal{S}_n$ die Abbildung $(b,u) \mapsto bwu$ eine Bijektion

$$B \times (U \cap w^{-1}U^- w) \xrightarrow{\sim} BwB$$

induziert. Man zeige: Für je zwei Permutationen $v, w \in \mathcal{S}_n$ mit $l(vw) = l(v) + l(w)$ für $l(\sigma)$ wie in 3.6.1.3 die Zahl der Fehlstände einer Permutation σ liefert die Multiplikation eine Bijektion

$$BvB \times_{/B} BwB \xrightarrow{\sim} BvwB$$

des balancierten Produkts nach 4.5.2.6 unserer Doppelnebenklassen mit einer weiteren Doppelnebenklasse. Ist dahingegen $s \in \mathcal{S}_n$ eine Permutation mit nur einem Fehlstand und $w \in \mathcal{S}_n$ beliebig und gilt $l(sw) \leq l(w)$, so haben wir $l(sw) = l(w) - 1$ und

$$BsBwB = BswB \sqcup BwB$$

Übung 4.5.6.5. Genau dann besitzt eine invertierbare quadratische Matrix mit Koeffizienten in einem Kring eine LU-Zerlegung, wenn alle Untermatrizen, die durch Streichen von hinteren Spalten und gleichviel unteren Zeilen entstehen, alle auch invertierbar sind.

4.6 Multilineare Algebra

4.6.1 Tensorprodukte

Satz 4.6.1.1. *Seien $r \geq 0$ eine natürliche Zahl und $V_1, \ldots, V_r$ Vektorräume über einem Körper K. So gilt:*

1. *Es gibt ein Paar (T, τ) bestehend aus einem K-Vektorraum T und einer multilinearen Abbildung $\tau : V_1 \times \ldots \times V_r \to T$ derart, daß für jeden weiteren K-Vektorraum W das Vorschalten von τ eine Bijektion*

$$(\circ\tau) : \mathrm{Hom}_K(T, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K^{(r)}(V_1 \times \ldots \times V_r, W)$$

   zwischen der Menge aller linearen Abbildungen $T \to W$ und der Menge aller multilinearen Abbildungen $V_1 \times \ldots \times V_r \to W$ induziert. Wir nennen solch ein $\tau : V_1 \times \ldots \times V_r \to T$ eine **universelle multilineare Abbildung***;*

2. *Gegeben ein weiteres derartiges Paar (S, σ) existiert genau eine lineare Abbildung $c : T \to S$ mit $c \circ \tau = \sigma$ und genau eine lineare Abbildung $d : S \to T$ mit $d \circ \sigma = \tau$ und diese Abbildungen sind zueinander inverse Isomorphismen zwischen T und S.*

Beweis der Eindeutigkeit 4.6.1.1.2. Die Existenz und Eindeutigkeit von c folgt sofort aus der universellen Eigenschaft von (T, τ). Die Existenz und Eindeutigkeit von d folgt ebenso aus der universellen Eigenschaft von (S, σ). Schließlich gilt $(d \circ c) \circ \tau = \tau = \mathrm{id}_T \circ \tau$ und damit folgt $d \circ c = \mathrm{id}_T$ wieder nach der universellen Eigenschaft von τ. Die Identität $c \circ d = \mathrm{id}_S$ zeigt man genauso. □

4.6.1.2. Unsere Paare sind nach Teil 2 „eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus“, wenn sie denn existieren. Insbesondere kommt es auf die genaue Konstruktion ebensowenig an wie auf die genaue Konstruktion der natürlichen oder der reellen Zahlen. Solch ein Paar verdient damit eine eigene Notation und den bestimmten Artikel. Man nennt T das **Tensorprodukt der** V_i und notiert es im Fall $r > 0$ als

$$T := V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$$

und notiert die universelle multilineare Abbildung $(v_1, \ldots, v_r) \mapsto v_1 \otimes \ldots \otimes v_r$. Im Fall $r = 1$ nimmt man üblicherweise $T = V_1$ und wählt als universelle multilineare alias 1-lineare alias lineare Abbildung die Identität, so daß es nicht drauf ankommt, ob V_1 das Tensorprodukt mit nur einem Faktor oder eben den Vektorraum V_1 bezeichnet. Im Fall $r = 0$ nimmt man üblicherweise als $T = K$ den Grundkörper und wählt als universelle multilineare alias 0-lineare alias beliebige Abbildung $\mathrm{ens} \to K$ vom leeren Produkt alias der einelementigen Menge nach K die Abbildung $* \mapsto 1$.

4.6.1.3 (**Arbeiten in Strukturen bis auf eindeutigen Isomorphismus**). Ich will nicht verschweigen, daß es durchaus seine Tücken hat, mit bis auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmten Objekten zu arbeiten. Es bedeutet, die definierenden Eigenschaften nie aus den Augen zu verlieren, und das erfordert eine gewisse Übung. In manchen Situationen haben wir diese Übung bereits. Wenn wir etwa

$$2 \cdot 2 = 4$$

behaupten, könnten wir uns daran erinnern, daß die natürlichen Zahlen nach 3.4.1.5 ja eigentlich nur ein bis auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmtes Paar (N, s) aus einer Menge N und einer Abbildung $s : N \to N$ mit gewissen Eigenschaften sind; daß zu diesen Eigenschaften die Forderung gehört, daß nur ein Element von N nicht im Bild von s liegt; daß wir für dies Element die Notation 0 vereinbart hatten; daß wir die Notationen $1 := s(0)$, $2 := s(1)$, $3 := s(2)$ und $4 := s(3)$ vereinbart hatten; und so weiter. Wir bewegen uns hier also in einem System von Konstruktionen und Konventionen, das allein aus den Daten und Eigenschaften aufgebaut ist, die unsere Struktur der natürlichen Zahlen bis auf eindeutigen Isomorphismus charakterisieren. Bei der Arbeit mit anderen bis auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmten Objekten wie etwa unseren Tensorprodukten verhält es sich genauso. Es fehlt Ihnen nur möglicherweise noch die Übung und mir kann es leicht passieren, daß ich manche Konstruktionen und Konventionen nicht explizit genug einführe und bespreche.

Erster Beweis der Existenz 4.6.1.1.1. Um die Existenz in Teil 1 zu zeigen wählen wir Basen $B_i \subset V_i$ und bemerken, daß die offensichtlichen Abbildungen Bijektionen

$$\mathrm{Hom}_K^{(r)}(V_1 \times \ldots \times V_r, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(B_1 \times \ldots \times B_r, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(K\langle B_1 \times \ldots \times B_r\rangle, W)$$

liefern. Wir können also als Tensorprodukt den freien Vektorraum über dem Produkt der Basen $T := K\langle B_1 \times \ldots \times B_r\rangle$ nehmen mit derjenigen multilinearen Abbildung τ, die dadurch charakterisiert wird, daß sie Tupel von Basisvektoren $(b_1, \ldots, b_r)$ auf das Element $\mathrm{can}(b_1, \ldots, b_r)$ des freien Vektorraums wirft. □

4.6.1.4 (**Basen allgemeiner Tensorprodukte**). Gegeben Vektorräume $V_1, \ldots, V_r$ über einem Körper K und Basen $B_i \subset V_i$ bilden die Tensoren $b_1 \otimes \ldots \otimes b_r$ mit $b_i \in B_i$ eine Basis des Tensorprodukts $V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$. Das folgt sofort aus dem vorhergehenden Beweis. Speziell folgt $\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W)$.

Zweiter Beweis der Existenz 4.6.1.1.1. Ich gebe noch einen alternativen Beweis für die Existenz universeller multilinearer Abbildungen, der ohne den Basisexistenzsatz und damit ohne Auswahlaxiom und Zorn'sches Lemma auskommt und mir natürlicher und im Grunde auch einfacher scheint. Er benötigt jedoch die

Kontruktion des Quotientenvektorraums, die wir erst in 4.4.5.4 kennenlernen. Der Einfachkeit halber schreibe ich die Details nur für bilineare Abbildungen aus. Wir beginnen mit dem freien K-Vektorraum $K\langle V \times W\rangle$ über der Menge $V \times W$. Darin betrachten wir den Untervektorraum $U \subset K\langle V \times W\rangle$, der erzeugt wird von allen Ausdrücken

$$\begin{array}{l}(v+v',w)-(v,w)-(v',w)\\(\lambda v,w)-\lambda(v,w)\\(v,w+w')-(v,w)-(v,w')\\(v,\lambda w)-\lambda(v,w)\end{array}$$

für $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ und $\lambda \in K$. Schließlich definieren wir T als den Quotientenvektorraum

$$T := K\langle V \times W\rangle / U$$

und erklären $\tau : V \times W \to T$ als die Abbildung, die jedem Paar (v, w) die Nebenklasse $\tau(v, w) := \mathrm{can}(v, w) + U$ von $\mathrm{can}(v, w)$ zuordnet. Die Bilinearität von τ folgt dann unmittelbar aus der Definition des herausgeteilten Untervektorraums U. Um die im Satz behauptete universelle Eigenschaft nachzuweisen, arbeiten wir mit dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r] \arrow[dr] & K\langle V \times W\rangle \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[dl] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Für jede Abbildung $b : V \times W \to R$ gibt es nach der universellen Eigenschaft des freien Vektorraums über einer vorgegebenen Menge genau eine K-lineare Abbildung $\tilde{b} : K\langle V \times W\rangle \to R$ mit $\tilde{b} \circ \mathrm{can} = b$. Ist hier b bilinear, so gilt offensichtlich $\tilde{b}(U) = 0$, also gibt es nach der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraums genau eine lineare Abbildung $\hat{b} : T \to R$ mit $\hat{b}\tau(v, w) = b(v, w)$. Diese Abbildung $\hat{b}$ ist eindeutig bestimmt durch b, da die $\tau(v, w)$ das Tensorprodukt als Vektorraum erzeugen. □

4.6.1.5 (**Elemente von Tensorprodukten**). Bereits unsere universellen bilinearen Abbildungen $V \times W \to V \otimes W, (v, w) \mapsto v \otimes w$ sind im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv. Genauer sind sie nur injektiv im Fall $V = W = 0$, denn es gilt ja stets $\lambda v \otimes w = v \otimes \lambda w$. Weiter sind sie nur surjektiv, wenn einer der beiden Räume eine Dimension ≤ 1 hat. Im Fall $V = \mathbb{R}^2$ und $W = \mathbb{R}^2$ etwa können wir unsere universelle bilineare Abbildung als eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ auffassen, die auf den Teilmengen $\{(\lambda v, \lambda^{-1} w) \mid \lambda \in \mathbb{R}^\times\}$ konstant ist, und für eine derartige Abbildung ist hoffentlich zumindest anschaulich klar, daß sie nicht surjektiv sein kann. Formal behandeln Sie das in Übung 4.6.1.31.

4.6.1.6 (**Tensorpotenzen**). Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper K und eine natürliche Zahl $r \in \mathbb{N}$ vereinbaren wir

$$V^{\otimes r} := \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r \text{ Faktoren}}$$

und verstehen insbesondere $V^{\otimes 0} := K$ im Sinne von 4.6.1.2. Gegeben $v \in V$ schreiben wir kurz $v^{\otimes r} := v \otimes \ldots \otimes v$ für das Bild von $(v, \ldots, v)$ unter der universellen multilinearen Abbildung $V^{\times r} \to V^{\otimes r}$ und verstehen im Sinne von 4.6.1.2 insbesondere $v^{\otimes 0} := 1 \in K$.

Beispiel 4.6.1.7 (**Tensorprodukte und physikalische Einheiten**). Wir betrachten den schmutzigen Raum unserer Anschauung als einen dreidimensionalen euklidischen affinen Raum $\mathbb{E}$. Dessen schmutzige Längengerade $\mathbb{L}$ besitzt die beiden Basen Meter m und Kilometer km und es gilt $\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$. In $\mathbb{L}^{\otimes 2}$ erhalten wir mithin $(\mathrm{km})^{\otimes 2} = 10^6\,\mathrm{m}^{\otimes 2}$. In unserem Formalismus ist also in der Tat und wie es sich gehört ein Quadratkilometer eine Million Quadratmeter. Es ist üblich, in diesem Kontext die Klammern und Tensorzeichen wegzulassen, so daß unsere Identität die möglicherweise besser vertraute Gestalt

$$\mathrm{km}^2 = 10^6\,\mathrm{m}^2$$

annimmt. Allgemeiner gilt für zwei beliebige Vektoren v, w eines eindimensionalen Vektorraums L mit $v = \lambda w$ im Tensorquadrat $L^{\otimes 2}$ aufgrund der Bilinearität der universellen bilinearen Abbildungen die Identität $v^{\otimes 2} = \lambda^2 (w^{\otimes 2})$.

4.6.1.8 (**Lineare Abbildungen aus Tensorprodukten**). Seien V, W Vektorräume. Die Elemente der Gestalt $v \otimes w$ erzeugen das Tensorprodukt als Vektorraum und sogar als abelsche Gruppe. Geben wir eine Abbildung von einem Tensorprodukt in einen Vektorraum R an durch eine Vorschrift der Gestalt $v \otimes w \mapsto b(v, w)$, so ist der Leser implizit gefordert, die Bilinearität der Abbildung $b : V \times W \to R$ zu prüfen, und gemeint ist dann eigentlich die durch die universelle Eigenschaft definierte lineare Abbildung $\hat{b} : V \otimes W \to R$. Analoge Vereinbarungen treffen wir für Abbildungen aus Tensorprodukten mit einer beliebigen Zahl von Faktoren.

Definition 4.6.1.9. Sind $f : V \to V'$ und $g : W \to W'$ lineare Abbildungen, so definieren wir eine lineare Abbildung $f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W'$ durch die Vorschrift

$$(f \otimes g)(v \otimes w) := f(v) \otimes g(w)$$

in unserer Konvention 4.6.1.8. Wir nennen $f \otimes g$ das **Tensorprodukt der Abbildungen** f **und** g. Analog erklären wir das Tensorprodukt einer beliebigen endlichen Familie von linearen Abbildungen. Gegeben eine lineare Abbildung $f : V \to W$ verwenden wir weiter die Abkürzung $f^{\otimes r} := (f \otimes \ldots \otimes f) : V^{\otimes r} \to W^{\otimes r}$.

Proposition 4.6.1.10 (**Assoziativität von Tensorprodukten**). *Sind $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume und $0 \leq i \leq j \leq \ldots \leq k \leq n$ Indizes, so liefert die Abbildungsvorschrift $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto (v_1 \otimes \ldots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \ldots \otimes v_j) \otimes \ldots \otimes (v_{k+1} \otimes \ldots \otimes v_n)$ einen Isomorphismus*

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \xrightarrow{\sim} (V_1 \otimes \ldots \otimes V_i) \otimes (V_{i+1} \otimes \ldots \otimes V_j) \otimes \ldots \otimes (V_{k+1} \otimes \ldots \otimes V_n)$$

4.6.1.11. Die Abbildungsvorschrift ist hier im Sinne unserer Vereinbarung 4.6.1.8 zu lesen. Leere Tensoren sind zu verstehen als das ausgezeichnete Element des leeren Tensorprodukts alias die Eins des Grundkörpers. Ich habe statt $0 = i_0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_r = n$ etwas weniger korrekt $0 \leq i \leq j \leq \ldots \leq k \leq n$ geschrieben um Subindizes zu vermeiden.

Beweis. Wir prüfen leicht, daß unsere Abbildung eine Bijektion zwischen einer Basis des Ausgangsraums und einer Basis des Zielraums induziert. □

Proposition 4.6.1.12 (**Kommutativität von Tensorprodukten**). *Sind $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume und ist $\sigma \in \mathcal{S}_n$ eine Permutation, so liefert die Abbildungsvorschrift $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}$ einen Isomorphismus*

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \xrightarrow{\sim} V_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes V_{\sigma(n)}$$

Beweis. Wir prüfen leicht, daß unsere Abbildung eine Bijektion zwischen einer Basis des Ausgangsraums und einer Basis des Zielraums induziert. □

4.6.1.13 (**Identifikationen zwischen längeren Tensorausdrücken**). Wir sehen mit 4.6.1.10, daß es bei Tensorprodukten mit mehreren Faktoren „nicht auf eventuelle Klammerung ankommt und Faktoren K weggelassen werden dürfen“. Präziser formuliert erhalten wir so natürliche Isomorphismen zwischen verschiedenen Tensorprodukten mit mehreren Faktoren. Unter Verwendung der Vertauschungsisomorphismen 4.6.1.12 erkennen wir weiter, daß es hier auch auf die Reihenfolge der Tensorfaktoren nicht ankommt. Das alles ist in dieser Situation noch derart explizit, daß mir eine stärkere Formalisierung unangemessen scheint. Der entsprechende Formalismus ist der einer „Schmelzkategorie“, der in Ansätzen in 4.6.2 und im Vollausbau in 18.1.1 folgende besprochen wird.

4.6.1.14 (**Negative Tensorpotenzen im eindimensionalen Fall**). Im Fall eines eindimensionalen Vektorraums L über einem Körper K erklären wir die r-te Tensorpotenz von L sogar für alle $r \in \mathbb{Z}$, indem wir unsere Definition 4.6.1.6 für nichtnegative Tensorpotenzen ergänzen durch die Vorschrift, daß negative Tensorpotenzen zu verstehen sein mögen als die entsprechenden positiven Potenzen des Dualraums, in Formeln

$$L^{\otimes r} := (L^\top)^{\otimes(-r)} \quad \text{für } r < 0.$$

Erklären wir dann weiter für jedes $l \in L\backslash 0$ und $r < 0$ den Vektor $l^{\otimes r} \in L^{\otimes r}$ als $l^{\otimes r} := (l^\top)^{\otimes r}$ mit $l^\top \in L^\top$ definiert durch $l^\top(l) = 1$, so haben wir $(\lambda l)^{\otimes r} = \lambda^r (l^{\otimes r})$ für alle $\lambda \in K^\times$ und $r \in \mathbb{Z}$ und es gibt für beliebige $r, s \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmte Isomorphismen

$$L^{\otimes r} \otimes L^{\otimes s} \tilde{\to} L^{\otimes (r+s)}$$

mit der Eigenschaft $l^{\otimes r} \otimes l^{\otimes s} \mapsto l^{\otimes (r+s)}$ für alle $l \in L\backslash 0$. Schließlich gibt es in diesem Fall zu jedem Isomorphismus $f : L \tilde{\to} M$ für alle $r \in \mathbb{Z}$ einen ausgezeichneten Isomorphismus $f^{\otimes r} : L^{\otimes r} \tilde{\to} M^{\otimes r}$ mit $l^{\otimes r} \mapsto f(l)^{\otimes r}$ für alle $l \in L\backslash 0$. Es ist auch in diesem Zusammenhang üblich, die Abkürzung $l^r := l^{\otimes r}$ sowie $L^r := L^{\otimes r}$ zu verwenden. Insbesondere ist damit l^{-1} die duale Basis zu l.

4.6.1.15 (**Orientierung von Tensorpotenzen**). Gegeben ein orientierter eindimensionaler Vektorraum L über einem angeordneten Körper erhält man aus jeder Orientierung von L eine Orientierung aller Tensorpotenzen $L^{\otimes r}$ durch die Vorschrift, daß für $l \in L_{>0}$ ein positiver Vektor auch seine Potenzen l^r positiv sein sollen. Die damit auf den geraden Potenzen $L^{\otimes 2r}$ gegebene Orientierung hängt dann noch nicht einmal von der auf L gewählten Orientierung ab. Im Fall des Dualraums L^{-1} eines eindimensionalen Raums stimmt diese Orientierung mit der in 3.6.5.14 erklärten Orientierung eines Dualraums überein.

Beispiel 4.6.1.16 (**Beispiele für Tensorpotenzen**). In der schmutzigen Anschauung mag man sich die positiven Elemente einiger Tensorpotenzen der Längengerade $\mathbb{L}$ wie folgt vorstellen: Elemente von $\mathbb{L}^{\otimes 2}$ als Flächenmaße, Elemente von $\mathbb{L}^{\otimes 3}$ als Volumenmaße, Elemente von $\mathbb{L}^{\otimes(-1)}$ als „lineare Dichten“ wie etwa die Belegung eines Wanderwegs mit Personen pro Länge, Elemente von $\mathbb{L}^{\otimes(-2)}$ als „Flächendichten“ wie etwa die Bevölkerungsdichte in Personen pro Fläche, und Elemente von $\mathbb{L}^{\otimes(-3)}$ als „Volumendichten“ wie etwa die Dichte eines Gases in Zahl der Moleküle pro Volumen.

Beispiel 4.6.1.17. Wir erinnern den Richtungsraum $\vec{\mathbb{T}}$ der Zeitachse und seine Basis s mit dem Namen **Sekunde** ebenso wie seine Basis min mit dem Namen **Minute** und seine Basis std mit dem Namen **Stunde**. Zwischen diesen Basen besteht die Relation $\mathrm{min} = 60\mathrm{s}$ und $60\mathrm{min} = \mathrm{std}$. Den Raum

$$\vec{\mathbb{T}}^\top \otimes \mathbb{L} = \mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^{-1}$$

oder vielmehr seine nichtnegativen Elemente in Bezug auf die offensichtliche Orientierung nennen wir **absolute Geschwindigkeiten**. Mit der Abkürzung $\mathrm{m/s} := \mathrm{m} \otimes \mathrm{s}^{-1}$ und ihren Analoga gelten in diesem Raum etwa die Identitäten

$$\mathrm{m/s} = 3600\mathrm{m}/3600\mathrm{s} = 3{,}6\mathrm{km/std}$$

4.6.1.18 (**Matrix des Tensorprodukts linearer Abbildungen**). Gegeben Vektorräume V, W mit angeordneten Basen $\mathcal{A} = (v_1, \dots v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ bilden wir in $V \otimes W$ die angeordnete Basis

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \quad := \quad & (v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, \dots, v_1 \otimes w_m, \\ & v_2 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2, \dots, v_2 \otimes w_m, \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \\ & v_n \otimes w_1, v_n \otimes w_2, \dots, v_n \otimes w_m) \end{aligned}$$

Gegeben zusätzlich weitere Vektorräume V', W' mit angeordneten Basen $\mathcal{A}' = (v'_1, \dots, v'_{n'})$ und $\mathcal{B}' = (w'_1, \dots, w'_{m'})$ und lineare Abbildungen $f : V \to V'$ und $g : W \to W'$ können wir die Matrix ${}_{\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'}[f \otimes g]_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ von $f \otimes g$ in den Basen $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und $\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'$ wie folgt durch die Matrizen $A = {}_{\mathcal{A}'}[f]_{\mathcal{A}}$ und $B = {}_{\mathcal{B}'}[g]_{\mathcal{B}}$ ausdrücken: Haben wir etwa $A = (a_{ij})$, so wird

$${}_{\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'}[f \otimes g]_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}} \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n'1}B & \dots & a_{n'n}B \end{pmatrix}$$

Auf der rechten Seite ist die Matrix geblockt geschrieben, es handelt sich ja eigentlich um eine $(n'm' \times nm)$-Matrix. Sie heißt auch das **Kronecker-Produkt** der Matrizen A und B und wird $A \otimes B$ notiert, so daß wir unsere Identität oben also auch schreiben können in der Form

$${}_{\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'}[f \otimes g]_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}} = {}_{\mathcal{A}'}[f]_{\mathcal{A}} \otimes {}_{\mathcal{B}'}[g]_{\mathcal{B}}$$

Um diese Identität zu prüfen beginnen wir mit den Identitäten

$$f(v_i) = \sum_j a_{ji} v'_j \quad \text{und} \quad g(w_k) = \sum_l b_{lk} w'_l$$

und folgern

$$(f \otimes g)(w_i \otimes w_k) = \sum_{j,l} a_{ji} b_{lk} v'_j \otimes w'_l$$

Die Einträge der Matrix von $f \otimes g$ sind also alle Produkte von einem Eintrag der Matrix von f mit einem Eintrag der Matrix von g. Daß diese Einträge dann auch noch an den oben beschriebenen Stellen der Matrix von $f \otimes g$ stehen, mag sich der Leser am einfachsten selbst überlegen.

Proposition 4.6.1.19 (**Adjunktion von Tensor und Hom**). *Gegeben Vektorräume U, V, W erhalten wir durch die Vorschrift $f \mapsto \tilde{f}$ mit $\tilde{f}(u \otimes v) = (f(u))(v)$ einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(U \otimes V, W)$$

Vorschau 4.6.1.20. Diese Aussage bedeutet in einer Terminologie, die Sie in dieser Vorlesung nicht mehr lernen werden, daß „die Funktoren $\otimes V$ und $\mathrm{Hom}(V, \ )$ zueinander adjungiert sind“. Ich verwende in diesem Kontext gerne die alternative Notation $(V \Rrightarrow W) := \mathrm{Hom}(V, W)$.

Beweis. Beide Seiten sind in offensichtlicher und mit der angegebenen Abbildung verträglicher Weise in Bijektion zur Menge $\mathrm{Hom}^{(2)}(U \times V, W)$ aller bilinearen Abbildungen $U \times V \to W$. □

Satz 4.6.1.21 (Homomorphismenräume als Tensorprodukt). *Gegeben ein Körper K liefert für beliebig vorgegebene K-Vektorräume V, W die Abbildungsvorschrift $f \otimes w \mapsto (v \mapsto f(v)w)$ eine Bijektion*

$$\mathrm{can} : V^\top \otimes W \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid \mathrm{rg}(f) < \infty\}$$

zwischen dem Tensorprodukt des Dualraums von V mit W und dem Raum aller Homomorphismen endlichen Ranges.

Beispiel 4.6.1.22. Unsere vektoriellen Geschwindigkeiten aus 3.3.1.12 können wir mithin auch verstehen als Elemente des Tensorprodukts $\vec{\mathbb{T}}^{-1} \otimes \vec{\mathbb{E}} = \mathrm{Hom}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{\mathbb{E}})$ des Richtungsraums $\vec{\mathbb{E}}$ unseres Anschauungsraums $\mathbb{E}$ mit dem Dualraum des Raums der Zeitspannen.

4.6.1.23. Das Bild der Verknüpfung $V^\top \times W \to V^\top \otimes W \hookrightarrow \mathrm{Hom}(V, W)$ besteht genau aus allen Homomorphismen vom Rang Eins oder Null.

4.6.1.24. Ist $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine Basis von V und $v_1^\top, \ldots, v_n^\top \in V^\top$ die duale Basis von $V^\top$, so können wir im Satz die inverse Abbildung explizit angeben durch die Vorschrift $f \mapsto v_1^\top \otimes f(v_1) + \ldots + v_n^\top \otimes f(v_n)$. Ist zusätzlich $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W, so wird $v_i^\top \otimes w_j$ abgebildet auf diejenige lineare Abbildung, deren Matrix in Bezug auf die gegebenen Basen die Basismatrix E_{ji} aus 3.2.5.3 ist, in Formeln

$${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{can}(v_i^\top \otimes w_j)]_{\mathcal{A}} = E_{ji}$$

für $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ unsere angeordneten Basen von V und W. Im Fall endlichdimensionaler Räume kann der Satz also leicht mit Basen überprüft werden. Der Beweis gilt den unendlichdimensionalen Fällen.

Beweis. Wir beginnen mit der Injektivität. Jeder Tensor auf der linken Seite kann offensichtlich in der Form $f_1 \otimes w_1 + \ldots + f_r \otimes w_r$ dargestellt werden mit den w_i linear unabhängig. Geht er nach Null, so folgt $f_1(v)w_1 + \ldots + f_r(v)w_r = 0$ für alle $v \in V$. Daraus aber folgt $f_1(v) = \ldots = f_r(v) = 0$ für alle $v \in V$ und damit $f_1 = \ldots = f_r = 0$ und unser Tensor war schon Null. Das zeigt die Injektivität. Unsere kanonischen Abbildung landet im Unterraum der Homomorphismen endlichen

Ranges, da ja das Bild von $\mathrm{can}(f_1 \otimes w_1 + \ldots + f_r \otimes w_r)$ stets im Erzeugnis $\langle w_1, \ldots, w_r \rangle$ der w_i liegt. Es liegt aber sogar jeder Homomorphismus endlichen Ranges $\varphi : V \to W$ im Bild von can, denn ist $w_1, \ldots, w_r$ eine Basis von $\operatorname{im} \varphi$ und setzten wir $f_i := w_i^\top \circ \varphi$, so gilt offensichtlich

$$\mathrm{can}(f_1 \otimes w_1 + \ldots + f_r \otimes w_r) = \varphi \qquad \square$$

Korollar 4.6.1.25 (Tensorprodukt und Dualität). *Gegeben Vektorräume V, W liefert die Abbildung $f \otimes g \mapsto (v \otimes w \mapsto f(v)g(w))$ eine Injektion*

$$V^\top \otimes W^\top \hookrightarrow (V \otimes W)^\top$$

vom Tensorprodukt der Dualräume in den Dualraum des Tensorprodukts. Sie ist ein Isomorphismus genau dann, wenn einer unserer beiden Räume endlichdimensional ist.

4.6.1.26. Im Fall endlichdimensionaler Räume kann das Korollar leicht mit Basen überprüft werden. Der Beweis gilt den unendlichdimensionalen Fällen. Im Fall eines eindimensionalen Raums L liefert uns die Korollar induktiv natürliche Isomorphismen $L^{\otimes(-r)} \xrightarrow{\sim} (L^{\otimes r})^\top$.

Beweis. Wir argumentieren mit dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes W)^\top \arrow[r, equal] & \mathrm{Hom}(V \otimes W, K) \\
 & \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(W, K)) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[d, equal] \\
V^\top \otimes W^\top \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}(V, W^\top)
\end{tikzcd}$$

Der vertikale Isomorphismus kommt aus 4.6.1.19, die horizontale Injektion aus 4.6.1.21. Daß deren Komposition genau die im Korollar beschriebene Abbildung ist, mag der Leser selbst prüfen. $\square$

Übungen

Übung 4.6.1.27 (**Orientierter Flächeninhalt**). Sei V ein orientierter zweidimensionaler euklidischer Vektorraum mit Längengerade $\mathbb{L}$. Man zeige, daß es genau eine alternierende bilineare Abbildung

$$\omega : V \times V \to \mathbb{L}^{\otimes 2}$$

gibt mit $\omega(v, w) = \|v\| \otimes \|w\|$ wann immer $v \perp w$ orthogonale Vektoren sind und (v, w) eine orientierte Basis von V.

Übung 4.6.1.28. Gegeben Vektorräume U, V, W kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U^\top \otimes V \otimes V^\top \otimes W \arrow[r, hook] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(U,V) \otimes \operatorname{Hom}(V,W) \arrow[d] \\ U^\top \otimes W \arrow[r, hook] & \operatorname{Hom}(U,W) \end{tikzcd}$$

mit den von den kanonischen Injektionen 4.6.1.21 induzierten Horizontalen, dem Verknüpfen von linearen Abbildungen als rechter Vertikale, und in der linken Vertikalen der Verknüpfung

$$U^\top \otimes V \otimes V^\top \otimes W \to U^\top \otimes K \otimes W \xrightarrow{\sim} U^\top \otimes W$$

der vom Auswerten $\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev} \otimes \mathrm{id}$ induzierten Abbildung gefolgt vom Isomorphismus $U^\top \otimes K \otimes W \xrightarrow{\sim} U^\top \otimes W$, $f \otimes \lambda \otimes w \mapsto \lambda(f \otimes w)$. Die eben erklärte Abbildung in der linken Vertikalen bezeichnet man in dieser und ähnlichen Situationen auch als die **Verjüngung von Tensoren**.

Übung 4.6.1.29. Gegeben Vektorräume W, V, V' liefert $w \otimes (v, v') \mapsto (w \otimes v, w \otimes v')$ einen Isomorphismus $W \otimes (V \oplus V') \xrightarrow{\sim} (W \otimes V) \oplus (W \otimes V')$. Analoges gilt auch für den ersten Tensorfaktor.

Übung 4.6.1.30. Besitzt ein von Null verschiedenes Element eines Tensorprodukts eine Darstellung der Gestalt $v \otimes w$, so sind seine möglichen Darstellungen dieser Gestalt genau alle Ausdrücke $\lambda v \otimes \lambda^{-1} w$ mit $\lambda \in K^\times$ einer Einheit des Grundkörpers K.

Übung 4.6.1.31. Seien V, W Vektorräume über demselben Grundkörper. Man zeige, daß die universelle bilineare Abbildung $V \times W \to V \otimes W$ genau dann surjektiv ist, wenn einer der beiden beteiligten Räume eine Dimension ≤ 1 hat. Hinweis: 4.6.1.23.

Übung 4.6.1.32. Gegeben ein topologischer Raum X und ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V zeige man, daß die offensichtliche Abbildung einen Vektorraumisomorphismus $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} V \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, V)$ induziert. Hier bezeichnet $\mathcal{C}(X, V)$ den Raum aller stetigen Abbildungen von X nach V.

Ergänzende Übung 4.6.1.33. Jede exakte Sequenz von Vektorräumen bleibt beim Darantensorieren eines weiteren Vektorraums exakt. Hinweis: 4.4.7.1, oder alternativ 4.7.8.11 und 4.4.6.13.

Übung 4.6.1.34. Gegeben ein Endomorphismus $f \in \operatorname{End} V$ eines Vektorraums mit $f \otimes f = \mathrm{id}$ in $\operatorname{End}(V \otimes V)$ gilt $f = \pm \mathrm{id}$.

Ergänzende Übung 4.6.1.35. Gegeben ein Körper K und K-Vektorräume V, W und Endomorphismen endlichen Ranges $f \in \operatorname{End} V$ und $g \in \operatorname{End} W$ hat auch $f \otimes g \in \operatorname{End}(V \otimes W)$ endlichen Rang und es gilt

$$\operatorname{tr}(f \otimes g) = \operatorname{tr}(f) \operatorname{tr}(g)$$

Ergänzende Übung 4.6.1.36. Hinweis: 3.6.4.15. Gegeben ein Körper K und endlichdimensionale K-Vektorräume V, W der Dimensionen n, m und Endomorphismen $f \in \operatorname{End} V$ und $g \in \operatorname{End} W$ gilt

$$\det(f \otimes g) = (\det(f))^m (\det(g))^n$$

Ergänzende Übung 4.6.1.37 (**Tensorprodukt und Orientierung**). Seien V ein Vektorraum und L ein eindimensionaler Vektorraum über demselben angeordeneten Körper. Gegeben eine Orientierung ε von V und eine Orientierung η von L gibt es genau eine Orientierung $\varepsilon \otimes \eta$ von $V \otimes L$ mit

$$(\varepsilon \otimes \eta)(v_1 \otimes l, \ldots, v_n \otimes l) = \varepsilon(v_1, \ldots, v_n)\eta(l)^n$$

für jede angeordnete Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V und jede angeordnete Basis alias jeden von Null verschiedenen Vektor $l \in L$.

Übung 4.6.1.38 (**Evaluationspaarung im Tensorkalkül**). Für jeden Vektorraum V über einem Körper K definiert das Auswerten oder lateinisierend „Evaluieren“ eine bilineare Abbildung, die **Evaluationspaarung** $\operatorname{ev} : V^\top \times V \to K$, $(\xi, v) \mapsto \xi(v)$. Man zeige, daß sie unter dem Isomorphismus aus 4.6.1.19 einerseits der Identität auf $V^\top$ entspricht und andererseits, wenn wir die Faktoren vertauschen, der Evaluation $\operatorname{ev} : V \to V^{\top\top}$ aus 3.2.9.22.

Ergänzende Übung 4.6.1.39. Gegeben ein Körper K induziert die Multiplikation einen Isomorphismus $K[X] \otimes_K K[Y] \xrightarrow{\sim} K[X, Y]$ zwischen dem Tensorprodukt zweier Polynomringe in einer Variablen und dem Polynomring in zwei Variablen.

Ergänzende Übung 4.6.1.40. Die Multiplikation induziert einen Isomorphismus von reellen Vektorräumen $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[X] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[X]$. Analoges gilt, wenn man $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ ersetzt durch ein beliebiges Paar $K \supset k$ bestehend aus einem Körper mit einem Teilkörper.

Ergänzende Übung 4.6.1.41. Gegeben Vektorräume V, W über einem Körper K und ein Untermonoid $G \subset \operatorname{End}(W)$ ist die offensichtliche lineare Abbildung ein Isomorphismus $V \otimes (W^G) \xrightarrow{\sim} (V \otimes W)^G$. Der obere Index G steht hier für den Teilraum der G-Invarianten.

Ergänzende Übung 4.6.1.42. Gegeben Körper $k \subset K$ und ein k-Vektorraum V wird $V_K = K \otimes_k V$ in offensichtlicher Weise ein K-Vektorraum. Man sagt, er entstehe aus V durch **Erweiterung der Skalare**. Die „kanonische“ k-lineare Abbildung $\operatorname{can} : V \to V_K$, $v \mapsto 1 \otimes v$ hat dann die universelle Eigenschaft, daß für jeden K-Vektorraum W das Vorschalten von $\operatorname{can} : V \to V_K$ eine Bijektion

$$\operatorname{Hom}_K(V_K, W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_k(V, W)$$

liefert. Weiter ist das Bild unter can jeder k-Basis von V eine K-Basis von V_K, und gegeben ein weiterer k-Vektorraum W induziert die k-lineare Abbildung $V \otimes_k W \to V_K \otimes_K W_K$, $v \otimes w \mapsto \mathrm{can}(v) \otimes \mathrm{can}(w)$ einen Isomorphismus

$$(V \otimes_k W)_K \xrightarrow{\sim} V_K \otimes_K W_K$$

Ist V oder K endlichdimensional über k, so liefert auch die k-lineare Abbildung $\mathrm{Hom}_k(V, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_K, W_K)$ gegeben durch $f \mapsto \mathrm{id} \otimes f$ einen Isomorphismus

$$(\mathrm{Hom}_k(V, W))_K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(V_K, W_K)$$

und insbesondere „vertauscht das Erweitern der Skalare mit dem Bilden des Dualraums“ sowohl unter der Annahme $\dim_k K < \infty$ als auch unter der Annahme $\dim_k V < \infty$. In voller Allgemeinheit vertauschen diese Operationen jedoch nicht. Im Spezialfall $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ bezeichnet man $V_{\mathbb{C}}$ als **Komplexifizierung** von V.

Ergänzende Übung 4.6.1.43. Ist V ein k-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus endlichen Ranges und $k \subset K$ eine Körpererweiterung, so gilt $\mathrm{tr}_k(f|V) = \mathrm{tr}_K(\mathrm{id} \otimes f|V_K)$.

Ergänzung 4.6.1.44. Ein alternativer vom Tensorprodukt unabhängiger Zugang zur Komplexifizierung wird in 22.2.2.13 erklärt. Etwas allgemeiner können wir, nun wieder mit unserem Tensorprodukt, für jeden Körperhomomorphismus $\varphi : k \hookrightarrow K$ zu einem k-Vektorraum V den k-Vektorraum $K \otimes_k^{\varphi} V$ erklären. Ist speziell φ die komplexe Konjugation $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so erhalten wir einen Isomorphismus $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}}^{c} V \xrightarrow{\sim} \overline{V}$ mit unserem komplex konjugierten Vektorraum $\overline{V}$ aus 4.1.12.33 vermittels der Abbildungsvorschrift $1 \otimes v \mapsto \bar{v}$.

Ergänzende Übung 4.6.1.45. Gegeben ein Vektorraum V und eine Teilmenge $T \subset V$ setzen wir $T^{\perp} = \{f \in V^{\top} \mid f(t) = 0 \quad \forall t \in T\}$. Ist V endlichdimensional und $W \subset V$ ein Teilraum, so zeige man, daß unter der Identifikation $\mathrm{End}\, V \xrightarrow{\sim} V \otimes V^{\top}$ die Identität id_V stets im Teilraum $W \otimes V^{\top} + V \otimes W^{\perp}$ landet.

Ergänzende Übung 4.6.1.46. Gegeben ein endlichdimensionaler K-Vektorraum V kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i^{\top} & \in & V \otimes V^{\top} & \xrightarrow{\mathrm{ev}} & K \\ \downarrow & & \downarrow\wr & & \| \\ \mathrm{id} & \in & \mathrm{End}\, V & \xrightarrow{\mathrm{tr}} & K \end{array}$$

Hier meint $v_1, \ldots, v_n$ eine beliebige Basis von V und $v_1^{\top}, \ldots, v_n^{\top}$ die duale Basis von $V^{\top}$ und die mittlere Vertikale die in 4.6.1.21 erklärte Injektion und ev das Auswerten im Sinne von 4.6.1.38. Die lineare Abbildung $K \to V \otimes V^{\top}$ mit $1 \mapsto \sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i^{\top}$ nennen wir auch die **Expansion der Identität** und notieren sie

$$\mathrm{ex} : K \to V \otimes V^{\top}$$

Hat V unendliche Dimension, so kommutiert das rechte Quadrat immer noch, wenn wir unten links nur Endomorphismen endlichen Ranges betrachten und ihre Spur wie in 3.2.6.19 nehmen. Allerdings sind dann unser Tensorausdruck und unsere Expansion der Identität nicht mehr sinnvoll definiert und die Identität gehört auch nicht mehr zu den Endomorphismen endlichen Ranges.

Ergänzende Übung 4.6.1.47. Gegeben Mengen X, Y und ein beliebiger Körper K liefert die offensichtliche Abbildung $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ gegeben durch die Vorschrift $(f \boxtimes g)(x, y) := f(x)g(y)$ eine Injektion

$$\mathrm{Ens}(X, K) \otimes \mathrm{Ens}(Y, K) \hookrightarrow \mathrm{Ens}(X \times Y, K)$$

Man mag sich dazu auf 4.6.1.25 stützen. Alternativ mag man auch unabhängig zeigen, daß für $g_1, \ldots, g_n \in \mathrm{Ens}(Y, K)$ linear unabhängig und $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Ens}(X, K)$ beliebig aus $\sum f_i(x)g_i(y) = 0$ für alle x, y bereits folgt, daß alle f_i die Nullfunktion sein müssen. Betrachtet man hier statt einem Körper K einen Kring, so ist die analoge Aussage im allgemeinen nicht mehr richtig, vergleiche 7.2.7.2.

Ergänzende Übung 4.6.1.48. Gegeben Vektorräume V, V', W, W' liefert das Tensorieren von Abbildungen eine Injektion

$$\mathrm{Hom}(V, V') \otimes \mathrm{Hom}(W, W') \hookrightarrow \mathrm{Hom}(V \otimes W, V' \otimes W')$$

Hinweis: Man mag V und W als direkte Summe eindimensionaler Räume schreiben und 4.7.8.12 anwenden. Alternative: Man mag ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unsere Vektorräume frei sind über den Mengen X, X', Y, Y', und kann dann unter Verwendung von 4.6.1.47 beide Seiten in verträglicher Weise einbetten in den Raum $\mathrm{Ens}(X \times X' \times Y \times Y', K)$ aller Abbildungen von besagtem Produkt in den Grundkörper K.

Übung 4.6.1.49. Bezeichne $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$ die Vertauschung der Tensorfaktoren. Man zeige, daß in Charakteristik Zwei der Teilraum der τ-Invarianten erzeugt wird von allen $(v \otimes w + w \otimes v)$ zusammen mit allen $(v \otimes v)$. Man zeige, daß in anderer Charakteristik Erstere ausreichen.

Übung 4.6.1.50. Bezeichne $\sigma : V \otimes V \otimes V \to V \otimes V \otimes V$ die zyklische Vertauschung der Tensorfaktoren. Man zeige, daß in Charakteristik Drei der Teilraum der σ-Invarianten erzeugt wird von allen $(u \otimes v \otimes w + v \otimes w \otimes u + w \otimes u \otimes v)$ zusammen mit allen $(v \otimes v \otimes v)$. Man zeige, daß in anderer Charakteristik Erstere ausreichen.

4.6.2 Multiverknüpfung multilinearer Abbildungen*

Beispiel 4.6.2.1. Gegeben Vektorräume U', U'', U, V, W und eine bilineare Abbildung $f : U \times V \to W$ sowie eine bilineare Abbildung $g : U' \times U'' \to U$ erhalten

wir offensichtlich eine trilineare Abbildung

$$U' \times U'' \times V \to W$$

durch die Vorschrift $(u', u'', v) \mapsto f(g(u', u''), v)$. Gegeben zusätzlich ein ausgezeichneter Vektor $v \in V$ erhalten wir eine bilineare Abbildung

$$U' \times U'' \to W$$

durch die Vorschrift $(u', u'') \mapsto f(g(u', u''), v)$. Diese Konstruktionen sind beide Spezialfälle für die „Multiverknüpfung" multilinearer Abbildungen, die wir im folgenden besprechen.

4.6.2.2 (**Notation für multilineare Abbildungen**). Seien K ein Körper, $n \geq 0$ eine natürliche Zahl und $V_1, \ldots, V_n, W$ Vektorräume über K. Wir verwenden im folgenden für Mengen von multilinearen Abbildungen die alternative Notation

$$\mathrm{Mod}_K(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_n, W) := \mathrm{Hom}_K^{(n)}(V_1 \times \ldots \times V_n, W)$$

Da durch die Verwendung des Symbols $\curlyvee$ als Trenner keine Verwechslungsgefahr mit linearen Abbildungen aus dem Produktvektorraum besteht, können wir den oberen Index (n) auf der linken Seite weglassen. Im Fall $n = 0$ notieren wir diese Menge $\mathrm{Mod}_K(\curlyvee, W)$. Das Kürzel Mod_K steht für „K-Modul", ein Synonym für „K-Vektorraum".

4.6.2.3 (**Multiverknüpfung multilinearer Abbildungen**). Seien K ein Körper und $n, m \geq 0$ und $U_1, \ldots, U_m, V_1, \ldots, V_n, W$ Vektorräume über K. Seien f eine multilineare Abbildung

$$f \in \mathrm{Mod}_K(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_n, W)$$

und $\varphi : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine Abbildung und

$$g_i \in \mathrm{Mod}_K(U_{\varphi^{-1}(i)}, V_i)$$

multilineare Abbildungen von der auf die Faser $\varphi^{-1}(i)$ eingeschränkte Familie mit der induzierten Anordnung. Ausgeschrieben meinen wir also

$$g_i \in \mathrm{Mod}_K(U_{\nu(1)} \curlyvee \ldots \curlyvee U_{\nu(r)}, V_i)$$

für $\nu(1) < \ldots < \nu(r)$ die der Größe nach geordneten Elemente der Faser $\varphi^{-1}(i)$. So erklären wir in der hoffentlich offensichtlichen Weise die **Multiverknüpfung** unserer multilinearen Abbildungen, eine multilineare Abbildung

$$f \circ (\varphi, g_1 \curlyvee \ldots \curlyvee g_n) \in \mathrm{Mod}_K(U_1 \curlyvee \ldots \curlyvee U_m, W)$$

Die Symbole $\curlyvee$ sind dabei auch links nur als Trenner zu verstehen, die andeuten, daß wir mit Multiverknüpfungen arbeiten. Ist φ monoton wachsend und surjektiv, so lassen wir es gerne aus der Notation weg. Unsere trilineare Abbildung aus obigen Beispiel hieße dann $f \circ (g \curlyvee \mathrm{id}_V)$ und unsere letzte bilineare Abbildung wäre die Multiverknüpfung $f \circ (g \curlyvee v)$ für $v \in \mathrm{Mult}_K(\curlyvee, V)$ das Bild von v unter der kanonischen Bijektion $V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mult}_K(\curlyvee, V)$. Die Multiverknüpfung multilinearer Abbildungen ist „assoziativ" in einer hoffentlich offensichtlichen Weise, die ich an dieser Stelle nicht weiter formalisieren will.

4.6.2.4 (**Multiverknüpfung universeller multilinearer Abbildungen**). Sei K ein Körper. Viele unserer Regeln für das Rechnen mit Tensorprodukten lassen sich zusammenfassen als einfache Konsequenzen der Tatsache, daß jede Multiverknüpfung universeller multilinearer Abbildungen wieder universell ist. Sind also in der obigen Notation f und alle g_i universell, so auch $f \circ (\varphi, g_1 \curlyvee \ldots \curlyvee g_n)$. Zum Beispiel ist die Identität $\mathrm{id}_V : V \to V$ universell 1-linear und der Morphismus $1 : * \to K$ universell 0-linear und $\tau : V \times K \to V \otimes K$ universell bilinear. Es folgt, daß auch $\tau \circ (\mathrm{id}_V \curlyvee 1)$ universell 1-linear alias ein Isomorphismus ist, als da heißt, die Abbildung $V \to V \otimes K$ gegeben durch $v \mapsto v \otimes 1$ ist ein Isomorphismus. Das zeigt dann auch, daß das Vorschalten der 0-linearen Abbildung $* \to K$ für jeden Vektorraum W eine Bijektion $\mathrm{Mod}_K(V \curlyvee K, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_K(V, W)$ liefert. Einen für diese und ähnliche Situationen maßgeschneiderten formalen Rahmen bilden die „Schmelzkategorien", die in 18.1.1 eingeführt werden.

4.6.3 Bezug zur physikalischen Terminologie*

4.6.3.1 (**Diskussion der Notation**). Im folgenden verwende ich die in der Physik übliche Notation mit oberen und unteren Indizes und der Konvention, daß üblicherweise die Summationsindizes einmal oben und einmal unten auftreten.

4.6.3.2 (**Kontravariante Tensoren erster Stufe sind Vektoren**). Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Unter einem **kontravarianten physikalischen Tensor erster Stufe zu** V verstehen wir eine Vorschrift T, die jeder angeordneten Basis $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)$ von V ein Zahlentupel $(T(\mathcal{B})^k)_{k=1}^n$ so zuordnet, daß für jede weitere angeordnete Basis $\mathcal{A} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ von V mit den Einträgen A_k^i der Basiswechselmatrix gegeben durch $\vec{w}_k = \sum_i A_k^i \vec{v}_i$ gilt

$$T(\mathcal{A})^i = \sum_k T(\mathcal{B})^k A_k^i \qquad \text{alias} \qquad T(\mathcal{B})^k = \sum_i T(\mathcal{A})^i (A^{-1})_i^k$$

mit den Einträgen der inversen Matrix rechts. Für jeden Vektor $\vec{u}$ erhalten wir einen derartigen kontravarianten Tensor erster Stufe $T = T_{\vec{u}}$ durch die Vorschrift, daß jeder angeordneten Basis dasjenige Tupel $(T(\mathcal{B})^k)$ zuordnet werden möge,

das gegeben wird durch $\vec{u} = \sum T(\mathcal{B})^k \vec{w}_k$. In der Tat gilt dann

$$\vec{u} = \sum_k T(\mathcal{B})^k \vec{w}_k = \sum_{k,i} T(\mathcal{B})^k A_k^i \vec{v}_i = \sum_i T(\mathcal{A})^i \vec{v}_i$$

und somit $T(\mathcal{A})^i = \sum_k T(\mathcal{B})^k A_k^i$. Unsere Abbildung $\vec{u} \mapsto T_{\vec{u}}$ liefert sogar, wie man leicht prüft, eine Bijektion zwischen der Menge V und der Menge aller kontravarianten Tensoren erster Stufe zu V.

4.6.3.3 (**Kovariante Tensoren erster Stufe sind Kovektoren**). Seien K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Ein **kovarianter physikalischer Tensor erster Stufe zu** V ist eine Vorschrift T, die jeder angeordneten Basis $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)$ von V ein Zahlentupel $(T(\mathcal{B})_k)_{k=1}^n$ so zuordnet, daß für jede weitere angeordnete Basis $\mathcal{A} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ von V mit den Einträgen A_k^i der Basiswechselmatrix gegeben durch $\vec{w}_k = \sum_i A_k^i \vec{v}_i$ gilt

$$T(\mathcal{B})_k = \sum_i A_k^i T(\mathcal{A})_i$$

Für jede Linearform $\lambda : V \to K$ alias jedes Element des Dualraums $\lambda \in V^\top$ erhalten wir einen derartigen kovarianten Tensor erster Stufe $T = T_\lambda$ durch die Vorschrift, daß jeder angeordneten Basis dasjenige Tupel $(T(\mathcal{B})_k)$ zuordnet werden möge, das gegeben wird durch die Koeffizienten der Darstellung von λ in der dualen Basis, in Formeln $\lambda = \sum_k T(\mathcal{B})_k \vec{w}_k^\top$. In der Tat gilt dann

$$T(\mathcal{B})_k = \lambda(\vec{w}_k) = \sum_i A_k^i \lambda(\vec{v}_i) = \sum_i A_k^i T(\mathcal{A})_i$$

Unsere Abbildung $\lambda \mapsto T_\lambda$ liefert sogar, wie man leicht prüft, eine Bijektion zwischen dem Dualraum $V^\top$ und der Menge aller kovarianten Tensoren erster Stufe zu V.

4.6.3.4 (**Kovariante Tensoren zweiter Stufe sind Bilinearformen**). Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Ein **kovarianter physikalischer Tensor zweiter Stufe zu** V ist eine Vorschrift T, die jeder angeordneten Basis $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)$ von V ein Zahlentupel $(T(\mathcal{B})_{kl})_{k,l=1}^n$ so zuordnet, daß für jede weitere angeordnete Basis $\mathcal{A} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ von V mit den Einträgen A_k^i der Basiswechselmatrix gegeben durch $\vec{w}_k = \sum_i A_k^i \vec{v}_i$ gilt

$$T(\mathcal{B})_{kl} = \sum_{i,j} A_l^j A_k^i T(\mathcal{A})_{ij}$$

Für jede bilineare Abbildung $b : V \to K$ erhalten wir einen derartigen kovarianten Tensor zweiter Stufe $T = T_b$ durch die Vorschrift, daß jeder angeordneten Basis

dasjenige Tupel $(T(\mathcal{B})_{kl})$ zuordnet werden möge, das gegeben wird durch die Vorschrift $T(\mathcal{B})_{kl} := b(\vec{w}_k, \vec{w}_l)$. In der Tat gilt dann

$$T(\mathcal{B})_{kl} = b(\vec{w}_k, \vec{w}_l) = \sum_{i,j} A^i_k A^j_l b(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \sum_{i,j} A^i_k A^j_l T(\mathcal{A})_{ij}$$

Unsere Abbildung $b \mapsto T_b$ liefert sogar, wie man leicht prüft, eine Bijektion zwischen dem Raum $\mathrm{Hom}^{(2)}_K(V \times V, K)$ von bilinearen Abbildungen und der Menge aller kovarianten Tensoren zweiter Stufe zu V.

4.6.3.5 (**Kontravariante Tensoren zweiter Stufe sind duale Bilinearformen**). Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Ein **kontravarianter physikalischer Tensor zweiter Stufe** ist eine Vorschrift T, die jeder angeordneten Basis $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)$ von V ein Zahlentupel $(T(\mathcal{B})^{kl})^n_{k,l=1}$ so zuordnet, daß für jede weitere angeordnete Basis $\mathcal{A} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ von V mit den Einträgen A^i_k der Basiswechselmatrix gegeben durch $\vec{w}_k = \sum_i A^i_k \vec{v}_i$ gilt

$$T(\mathcal{A})^{ij} = \sum_{k,l} A^i_k A^j_l T(\mathcal{B})^{kl} \qquad \text{alias} \qquad T(\mathcal{B})^{kl} = \sum_{i,j} (A^{-1})^k_i (A^{-1})^l_j T(\mathcal{A})^{ij}$$

Für jede bilineare Abbildung $\beta : V^\top \times V^\top \to K$ erhalten wir einen derartigen kovarianten Tensor zweiter Stufe $T = T_\beta$ durch die Vorschrift, daß jeder angeordneten Basis dasjenige Tupel $(T(\mathcal{B})^{kl})$ zuordnet werden möge, das gegeben wird durch die Vorschrift $T(\mathcal{B})^{kl} := \beta(\vec{w}^\top_k, \vec{w}^\top_l)$. In der Tat folgt aus $\vec{w}_k = \sum_i A^i_k \vec{v}_i$ bereits $\vec{v}^\top_i(\vec{w}_k) = A^i_k$ alias $\vec{v}^\top_i = \sum_k A^i_k \vec{w}^\top_k$ und somit

$$T(\mathcal{A})^{ij} = \beta(\vec{v}^\top_i, \vec{v}^\top_j) = \sum_{k,l} A^i_k A^j_l \beta(\vec{w}^\top_k, \vec{w}^\top_l) = \sum_{k,l} A^i_k A^j_l T(\mathcal{B})^{kl}$$

Unsere Abbildung $b \mapsto T_\beta$ liefert sogar, wie man leicht prüft, eine Bijektion zwischen dem Raum $\mathrm{Hom}^{(2)}_K(V^\top \times V^\top, K)$ von bilinearen Abbildungen und der Menge aller kontravarianten Tensoren zweiter Stufe zu V. Zusammen mit 4.6.1.25 erhalten wir dann auch eine Bijektion zwischen $V \otimes V$ und der Menge aller kontravarianten Tensoren zweiter Stufe zu V.

4.6.3.6 (**Ko-kontravariante Tensoren zweiter Stufe sind Endomorphismen**). Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Ein **ko-kontravarianter physikalischer Tensor zweiter Stufe zu** V ist eine Vorschrift T, die jeder angeordneten Basis $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)$ ein Zahlentupel $(T(\mathcal{B})^l_k)^n_{k,l=1}$ so zuordnet, daß für jede weitere angeordnete Basis $\mathcal{A} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ von V mit den Einträgen A^i_k der Basiswechselmatrix gegeben durch $\vec{w}_k = \sum_i A^i_k \vec{v}_i$ gilt

$$T(\mathcal{B})^l_k = \sum_{i,j} (A^{-1})^l_j A^i_k T(\mathcal{A})^j_i$$

Für jede lineare Abbildung $f : V \to V$ erhalten wir einen derartigen ko-kontravarianten Tensor zweiter Stufe $T = T_f$ durch die Vorschrift, daß jeder angeordneten Basis dasjenige Tupel $(T(\mathcal{B})^l_k)$ zuordnet werden möge, das gegeben wird durch die Vorschrift $f(\vec{w}_k) = \sum_l T(\mathcal{B})^l_k \vec{w}_l$. In der Tat gilt dann

$$\sum_l T(\mathcal{B})^l_k \vec{w}_l = f(\vec{w}_k) = \sum_i A^i_k f(\vec{v}_i) = \sum_{i,j} A^i_k T(\mathcal{A})^j_i \vec{v}_j = \sum_{i,j,l} A^i_k T(\mathcal{A})^j_i (A^{-1})^l_j \vec{w}_l$$

Unsere Abbildung $f \mapsto T_f$ liefert sogar, wie man leicht prüft, eine Bijektion zwischen der Menge $\mathrm{End}_K(V)$ aller Endomorphismen von V und der Menge aller ko-kontravarianten Tensoren zweiter Stufe zu V.

4.6.3.7 (**Allgemeine physikalische Tensoren als multilineare Abbildungen**). Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Gegeben $r, s \geq 0$ definiert man einen **r-ko-s-kontravarianten physikalischen Tensor zu** V als eine Vorschrift T, die jeder angeordneten Basis $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)$ ein von r unteren und s oberen Indizes aus $1, \ldots, n$ abhängendes Zahlentupel so zuordnet, daß die Tupel zu verschiedenen angeordneten Basen in einer Weise zusammenhängen, die ich hier nur noch im Fall $r = 2$ und $s = 1$ ausführe: In diesem Fall fordert man, daß für jede weitere angeordnete Basis $\mathcal{A} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ von V mit den Einträgen A^i_k der Basiswechselmatrix gegeben durch $\vec{w}_k = \sum_i A^i_k \vec{v}_i$ gilt

$$T(\mathcal{B})^m_{kl} = \sum_{i,j,p} (A^{-1})^m_p A^i_k A^j_l T(\mathcal{A})^p_{ij}$$

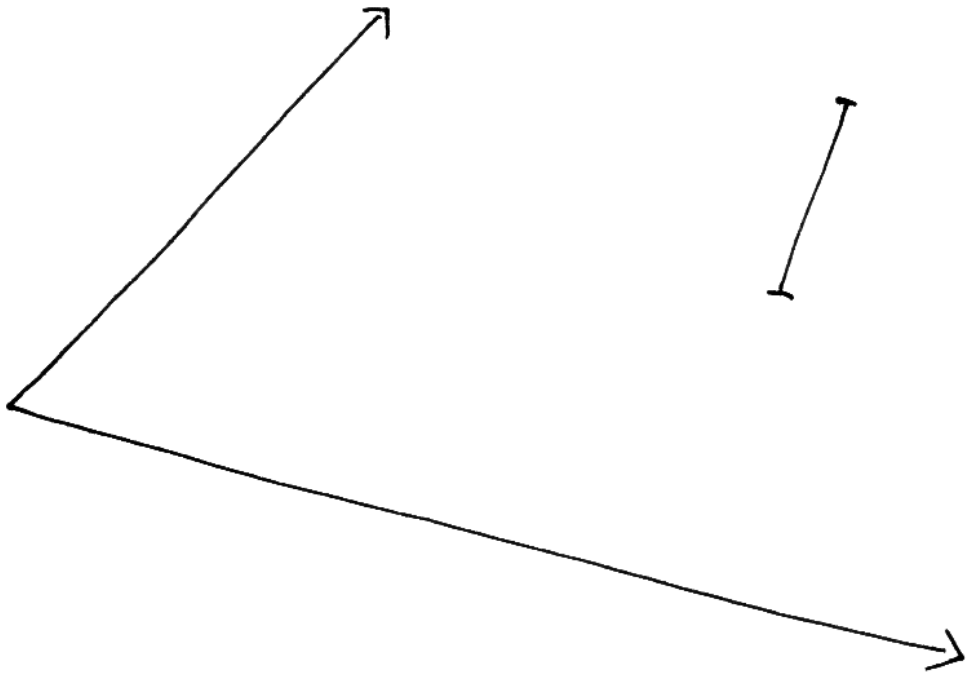
Wie zuvor kann man jeder multilinearen Abbildung $u : V^r \times (V^\top)^s \to K$ einen r-ko-s-kontravarianten Tensor T_u zuordnen, der in unserem Spezialfall $(r, s) = (2, 1)$ gegeben wird durch $T_u(\mathcal{B})^m_{kl} = u(\vec{w}_k, \vec{w}_l, \vec{w}^\top_m)$, und wieder erhalten wir so eine Bijektion zwischen der Menge $\mathrm{Hom}^{(r+s)}_K(V^r \times (V^\top)^s, K)$ von multilinearen Abbildungen und der Menge aller r-ko-s-kontravarianten Tensoren zweiter Stufe zu V. Alternativ erhalten wir mit unserem Satz 4.6.1.25 auch zu jedem Element von $t \in (V^\top)^{\otimes r} \otimes V^{\otimes s}$ einen r-ko-s-kontravarianten Tensor T_t, der in unserem Spezialfall $(r, s) = (2, 1)$ gegeben wird durch

$$t = \sum_{m,k,l} T_t(\mathcal{B})^m_{kl}\ \vec{w}^\top_k \otimes \vec{w}^\top_l \otimes \vec{w}_m$$

Auch diese Zuordnung ist bijektiv und erklärt den Zusammenhang der beiden Tensorbegriffe.

4.6.4 Geometrie in euklidischen Vektorräumen

4.6.4.1. Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem angeordneten Körper K erinnern wir seine zweielementige Orientierungsmenge $\mathrm{or}(V)$ aus



Das folgende ist eine nicht ganz mathematische Übung: Man schätze ab, ob das durch die eingezeichnete Längeneinheit und die anschauliche Kongruenzgruppe gegebene Skalarprodukt der beiden hier gezeichneten Vektoren größer ist als Zehn. Man verwende dabei nur ein Papier mit einer geraden Kante, das man kniffen darf, um einen rechten Winkel zu erzeugen, einen Bleistift zum Abtragen von Längen, und Augenmaß. Man beachte, wie hierbei die Kongruenzgruppe zu Anwendung kommt.

3.6.5.3 und erklären seine **Orientierungsgerade** als den eindimensionalen Vektorraum

$$\mathrm{or}_K(V) := \{a : \mathrm{or}(V) \to K \mid \text{Die Summe der beiden Werte von } a \text{ ist Null}\}$$

Wir erhalten eine Injektion $\mathrm{or}(V) \hookrightarrow \mathrm{or}_K(V)$, indem wir jeder Orientierung $\varepsilon \in \mathrm{or}(V)$ diejenige Funktion $a \in \mathrm{or}_K(V)$ mit $f(\varepsilon) = 1$ zuordnen. Besagte Injektion behandeln wir von nun an in der Notation wie die Einbettung einer Teilmenge. Für jeden Vektorraumisomorphismus $f : V \xrightarrow{\sim} W$ läßt sich unsere Bijektion $\mathrm{or}(f)$ zwischen den Orientierungsmengen auf genau eine Weise zu einem Isomorphismus $\mathrm{or}_K(f) : \mathrm{or}_K(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_K(W)$ ihrer Orientierungsgeraden ausdehnen.

4.6.4.2. Ich erinnere an den Begriff 4.1.5.12 eines euklidischen Vektorraums V mit seiner Längengerade $\mathbb{L} = \mathbb{L}(V)$.

4.6.4.3. Für jeden endlichendimensionalen euklidischen Vektorraum V gibt es genau eine alternierende Abbildung mit $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto \varepsilon \otimes \|v_1\| \otimes \ldots \otimes \|v_n\|$ für eine und jede angeordnete Basis $v_1, \ldots, v_n$ der Orientierung ε aus paarweise orthogonalen Vektoren, die **geometrische Volumenform**

$$\omega : V^{\otimes n} \to \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)^{\otimes n}$$

In der Tat hat jede orthogonale Matrix die Determinante ± 1 und das zeigt, daß eine alternierende Abbildung, die diese Eigenschaft für eine Basis aus paarweise orthogonalen Vektoren hat, sie für jede solche Basis haben muß. Den Fall $n = 2$ haben Sie im orientierten Fall bereits in Übung 4.6.1.27 diskutiert. Im Fall $n = 3$ notieren wir unsere Abbildung

$$u \otimes v \otimes w \mapsto \langle u, v, w \rangle$$

und nennen sie das **geometrische Spatprodukt**. Für jeden euklidischen Homomorphismus $f : V \to W$ von euklidischen Vektorräumen derselben Dimension n kommutiert weiter das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V^{\otimes n} \arrow[r] \arrow[d, "f^{\otimes n}"'] & \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)^{\otimes n} \arrow[d, "\mathrm{or}_{\mathbb{R}}(f) \otimes \mathbb{L}(f)^{\otimes n}"] \\
W^{\otimes n} \arrow[r] & \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(W) \otimes \mathbb{L}(W)^{\otimes n}
\end{tikzcd}$$

Diese Erkenntnis bringt die Natürlichkeit unserer Konstruktion formal zum Ausdruck und rechtfertigt die Bezeichnung „geometrisch“. Mehr dazu diskutieren wir im Zusammenhang mit „Transformationen von Funktoren“ in 4.7.4.8.

4.6.4.4. Das Tensorquadrat der Längengerade eines euklidischen Vektorraums nennen wir seine **Gerade von Flächeneinheiten** oder kurz seine **Flächengerade**.

Vorschau 4.6.4.5 (**Flächen- und Volumenmaße**). Gegeben ein euklidischer Raum E endlicher Dimension n mit Längengerade $\mathbb{L}$ ordnen wir in 12.4.5.15 jeder kompakten k-Fastfaltigkeit $M \subset E$ ein Volumen $\int_M 1 \in \mathbb{L}^{\otimes k}$ so zu, daß für beliebige paarweise orthogonale von Null verschiedene Richtungsvektoren $v_1, \ldots, v_k \in \vec{E}$ und jeden Punkt $p \in E$ der kompakten k-Fastfaltigkeit $M := p + [0,1]v_1 + \ldots + [0,1]v_k$ das Volumen $\int_M 1 = \|v_1\| \otimes \ldots \otimes \|v_k\| \in \mathbb{L}^{\otimes k}$ zugeordnet wird und im Fall $\dim E = 3$ der Sphäre $S := \{q \in E \mid \|q - p\| = l\}$ mit Zentrum $p \in E$ und Radius $l \in \mathbb{L}$ die Fläche $\int_S 1 = 4\pi l^{\otimes 2}$. Auch in der Mathematik werden also salopp gesprochen „Flächen in Quadratmetern gemessen“.

4.6.4.6. Für jeden euklidischen Vektorraum V erklären wir sein **geometrisches Skalarprodukt** als die eindeutig bestimmte symmetrische bilineare Abbildung

$$\langle\ ,\ \rangle = \langle\ ,\ \rangle_V : V \times V \to \mathbb{L}^{\otimes 2}$$

in seine Flächengerade derart, daß für jeden Vektor $v \in V$ gilt $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$. Es kann beschrieben werden durch die Polarisierungsidentität $\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$ oder auch durch die Formel

$$\langle a\mathrm{e}_1 + \ldots + c\mathrm{e}_n, x\mathrm{e}_1 + \ldots + z\mathrm{e}_n\rangle = (ax + \ldots + cz)l^2$$

für beliebige paarweise orthogonale Vektoren $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ derselben Länge $\|\mathrm{e}_1\| = \ldots = \|\mathrm{e}_n\| = l \in \mathbb{L}$. Für jeden euklidischen Homomorphismus $f : V \to W$ von euklidischen Vektorräumen kommutiert dann das Diagramm

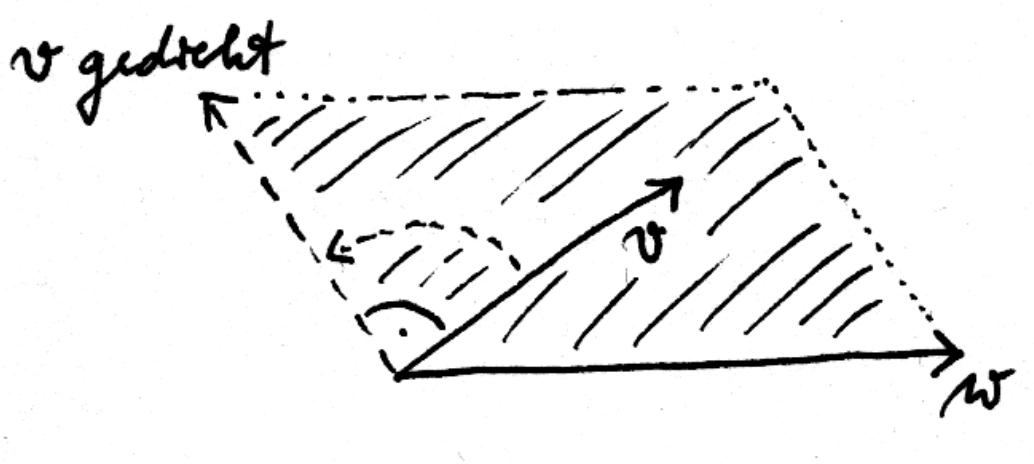
$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[r, "\langle\ ,\ \rangle_V"] \arrow[d, "f \times f"'] & \mathbb{L}(V)^{\otimes 2} \arrow[d, "\mathbb{L}(f)^{\otimes 2}"] \\ W \times W \arrow[r, "\langle\ ,\ \rangle_W"] & \mathbb{L}(W)^{\otimes 2} \end{tikzcd}$$

Es bringt die Natürlichkeit unserer Konstruktion formal zum Ausdruck und rechtfertigt die Bezeichnung „geometrisch“. Mehr dazu diskutieren wir im Zusammenhang mit „Transformationen von Funktoren“ in 4.7.4.8.

4.6.4.7 (**Pythagoras**). In einem euklidischen Vektorraum sind zwei Vektoren v, w genau dann orthogonal, wenn in der zugehörigen Flächengerade $\mathbb{L}^{\otimes 2}$ gilt

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2$$

In der Tat folgt das unmittelbar aus der entsprechenden Aussage für Skalarprodukträume. Insbesondere gilt es für den Richtungsraum einer Kongruenzebene.



Anschauliche Bedeutung des geometrischen Skalarprodukts $\langle v, w \rangle$ als Fläche

4.6.4.8 (**Zusätzliche Anschauung für das Skalarprodukt**). Man mag sich das geometrische Skalarprodukt $\langle v, w\rangle$ im Fall eines zweidimensionalen euklidischen Vektorraums V vorstellen, indem man eine der beiden Drehungen um einen rechten Winkel auswählt, sie r nennt, und dann bemerkt, daß $\langle v, w\rangle = \omega(rv, w)$ der orientierte Flächeninhalt von (rv, w) im Sinne von 4.6.4.3 ist für diejenige Orientierung $\varepsilon = \varepsilon_r$ von V, die mit r verträglich ist in der Weise, daß (ru, u) für alle $u \neq 0$ eine positiv orientierte Basis von V ist.

4.6.4.9 (**Kreuzprodukt für dreidimensionale euklidische Vektorräume**). Gegeben ein dreidimensionaler euklidischer Vektorraum V mit Längengerade $\mathbb{L}$ gibt es genau eine alternierende bilineare Abbildung

$$\times = \times_V : V \times V \to V \otimes \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}$$

mit der Eigenschaft $(v_1, v_2) \mapsto v_3 \otimes \varepsilon \otimes l$ für jede angeordnete Orthogonalbasis v_1, v_2, v_3 der Orientierung ε aus Vektoren derselben Länge $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = l \in \mathbb{L}$. Wir nennen sie das **geometrische Kreuzprodukt** und notieren sie wieder $(v, w) \mapsto v \times w$. Für jeden euklidischen Homomorphismus $f : V \to W$ von euklidischen Vektorräumen kommutiert dann das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V \times V \arrow[r, "\times_V"] \arrow[d, "f\times f"'] & V \otimes \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V) \arrow[d, "f\otimes \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(f)\otimes \mathbb{L}(f)"] \\
W \times W \arrow[r, "\times_W"] & W \otimes \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(W) \otimes \mathbb{L}(W)
\end{tikzcd}$$

Es bringt die Natürlichkeit unserer Konstruktion formal zum Ausdruck und rechtfertigt die Bezeichnung „geometrisch“. Mehr dazu diskutieren wir im Zusammenhang mit „Transformationen von Funktoren“ in 4.7.4.8.

4.6.4.10 (**Spezialisierungen des geometrischen Kreuzprodukts**). Jede Orientierung auf V induziert andererseits einen Isomorphismus $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V)$ und unser geometrisches Kreuzprodukt vereinfacht sich so im Fall eines dreidimensionalen orientierten euklidischen Vektorraums zu einem Kreuzprodukt der Gestalt

$$V \times V \to V \otimes \mathbb{L}$$

Jedes Skalarprodukt aus der euklidischen Struktur eines euklidischen Vektorraums induziert einen Isomorphismus $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}$ und unser geometrisches Kreuzprodukt vereinfacht sich so im Fall eines dreidimensionalen Skalarproduktraums zu einem Kreuzprodukt der Gestalt

$$V \times V \to V \otimes \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V)$$

Im Fall eines dreidimensionalen orientierten Skalarproduktraums schließlich greifen beide Vereinfachungen und wir erhalten noch einmal unser bereits in 4.1.9.1

betrachtetes Kreuzprodukt $V \times V \to V$. Im Fall $V = \mathbb{R}^3$ mit seiner Standardorientierung und seinem Standardskalarprodukt schließlich spezialisiert dieses Kreuzprodukt zu dem aus der Schule bekannten Kreuzprodukt

$$(x, y, z) \times (a, b, c) = (yc - yb, za - xc, xb - ya)$$

Übungen

Übung 4.6.4.11. Man diskutiere, inwiefern das geometrische Skalarprodukt für jeden endlichdimensionalen euklidischen Vektorraum V einen natürlichen Isomorphismus

$$V^\top \xrightarrow{\sim} V \otimes \mathbb{L}(V)^{\otimes(-2)}$$

induziert. Man drücke dessen Natürlichkeit durch ein kommutatives Rechteck aus.

Übung 4.6.4.12. Man zeige, daß 4.6.4.3 für pseudoeuklidische Vektorräume V einer endlichen Dimension unverändert gilt: Es gibt immer noch genau eine alternierende multilineare Abbildung

$$V^{\otimes n} \to \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)^{\otimes n}$$

mit $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto \varepsilon \otimes \|v_1\| \otimes \ldots \otimes \|v_n\|$ für eine und jede angeordnete Basis $v_1, \ldots, v_n$ der Orientierung ε aus paarweise orthogonalen Vektoren. Die Längengerade $\mathbb{L}(V)$ und die Längen $\|v\|$ sind dabei die in 4.2.7.6 erklärten.

4.6.5 Alternierende Tensoren und äußere Potenzen

4.6.5.1 (**Alternierende multilineare Abbildungen**). Gegeben Vektorräume V, C über einem Körper K und $r \geq 0$ bezeichne

$$\mathrm{Alt}_K(V^{\times r}, C) \subset \mathrm{Hom}_K^{(r)}(V^{\times r}, C)$$

den Teilraum der alternierenden multilinearen Abbildungen. Ich erinnere daran, daß eine multilineare Abbildung von mehreren Kopien ein- und desselben Vektorraums in einen weiteren Vektorraum **alternierend** heißt, wenn sie den Nullvektor ausgibt, wann immer man sie auf einem Tupel mit zwei oder mehr gleichen Einträgen auswertet. Wir vereinbaren zusätzlich wie in 12.8.1.1 die Abkürzung $\mathrm{Alt}_K^r(V) := \mathrm{Alt}_K(V^{\times r}, K)$ für den Raum der alternierenden Multilinearformen. Statt „alternierend multilinear“ sagen meist kürzer nur „alternierend“. Die Determinante kann als ein Element $\det \in \mathrm{Alt}_K^n(K^n)$ aufgefaßt werden.

Satz 4.6.5.2. *1. Gegeben $r \geq 0$ und ein Vektorraum V über einem Körper K existiert ein Paar (A, α) bestehend aus einem K-Vektorraum A und einer*

alternierenden Abbildung $\alpha : V^{\times r} \to A$ derart, daß für jeden weiteren K-Vektorraum C das Vorschalten von α eine Bijektion

$$(\circ\alpha) : \mathrm{Hom}_K(A, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}_K(V^{\times r}, C)$$

zwischen der Menge aller linearen Abbildungen $A \to C$ und der Menge aller alternierenden Abbildungen $V^{\times r} \to C$ induziert. Wir nennen solch ein $\alpha : V^{\times r} \to A$ eine **universelle r-alternierende Abbildung***;*

2. *Gegeben eine weitere universelle r-alternierende Abbildung $\beta : V^{\times r} \to B$ existiert genau eine lineare Abbildung $c : A \to B$ mit $c \circ \alpha = \beta$ und genau eine lineare Abbildung $d : B \to A$ mit $d \circ \beta = \alpha$ und diese Abbildungen sind zueinander inverse Isomorphismen zwischen A und B.*

4.6.5.3 (**Notation für äußere Potenzen**). Der Beweis von Teil 2 ist identisch zum Beweis der Eindeutigkeit im Fall des Tensorprodukts zweier Vektorräume. Unsere Paare sind also „eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus“, wenn sie existieren. Insbesondere kommt es auf die genaue Konstruktion ebensowenig an wie auf die genaue Konstruktion der natürlichen oder der reellen Zahlen. So eine universelle r-alternierende Abbildung $\alpha : V^{\times r} \to A$ verdient damit den bestimmten Artikel und eine Notation. Man nennt A die **r-te äußere Potenz von** V und notiert diesen Vektorraum

$$\bigwedge^r V$$

und $(v_1, \ldots, v_r) \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ die universelle alternierende Abbildung für $r \geq 1$. Im Fall $r = 1$ wählen wir stets $\bigwedge^1 V := V$ mit der Identität als universeller 1-linearer Abbildung $\alpha : V^{\times 1} \to V$, so daß unsere Notation auch in diesem Fall nicht zweideutig wird. Im Fall $r = 0$ wählen wir üblicherweise $\bigwedge^0 V := K$ mit der durch $* \mapsto 1_K$ bestimmten 0-alternierenden alias beliebigen Abbildung $\alpha : \mathrm{ens} = V^{\times 0} \to K$.

Beweis. Es bleibt nur Teil 1 zu zeigen. Dazu bilden wir in der r-ten Tensorpotenz von V das Erzeugnis $J_r \subset V^{\otimes r}$ aller Tensoren mit zwei oder mehr gleichen Einträgen und betrachten die Verknüpfung $\alpha : V \times \ldots \times V \to V^{\otimes r} \twoheadrightarrow V^{\otimes r}/J_r$ der kanonischen multilinearen Abbildung mit der kanonischen Abbildung auf den Quotienten. Aufgrund der universellen Eigenschaften von Tensorprodukt und Quotient erhalten wir Isomorphismen

$$\mathrm{Alt}(V^{\times r}, C) \xleftarrow{\sim} \{g \in \mathrm{Hom}(V^{\otimes r}, C) \mid g(J_r) = 0\} \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V^{\otimes r}/J_r, C)$$

So sehen wir, daß α die geforderte universelle Eigenschaft hat. $\square$

4.6.5.4 (**Dachprodukt**). Sei V ein Vektorraum. Gegeben $r, s \geq 0$ gibt es genau eine bilineare Abbildung

$$\bigwedge^r V \times \bigwedge^s V \quad \to \quad \bigwedge^{r+s} V$$

derart, daß mit dem Zusammentensorieren von Tensoren in der oberen Horizontale und besagter Abbildung in der unteren Horizontale das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V^{\otimes r} \times V^{\otimes s} \arrow[r] \arrow[d] & V^{\otimes(r+s)} \arrow[d] \\ \bigwedge^r V \times \bigwedge^s V \arrow[r] & \bigwedge^{r+s} V \end{tikzcd}$$

kommutiert. Man folgert das unschwer aus Übung 4.4.5.9 zu auf Quotienten induzierten multilinaren Abbildungen, da die obere Horizontale unseres Diagramms sowohl $J_r \times V^{\otimes s}$ als auch $V^{\otimes r} \times J_s$ auf Teilmengen von J_{r+s} abbildet. Unsere so konstruierte bilineare Abbildung $\bigwedge^r V \times \bigwedge^s V \to \bigwedge^{r+s} V$ notieren wir $\bar{\wedge}$. Per definitionem gilt

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) \,\bar{\wedge}\, (w_1 \wedge \ldots \wedge w_q) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_p \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_q$$

für alle $v_i, w_j \in V$. Wir folgern die Assoziativität $(\omega \,\bar{\wedge}\, \eta) \,\bar{\wedge}\, \xi = \omega \,\bar{\wedge}\, (\eta \,\bar{\wedge}\, \xi)$ für alle $\omega \in \bigwedge^r V$, $\eta \in \bigwedge^s V$ und $\xi \in \bigwedge^t V$, da allgemein multilineare und hier trilineare Abbildungen übereinstimmen, wenn sie auf Tupeln von Erzeugern dieselben Werte annehmen. Wir folgern weiter $v_1 \wedge \ldots \wedge v_p = v_1 \,\bar{\wedge}\, \ldots \,\bar{\wedge}\, v_p$ für alle $v_i \in V$, wobei wir rechts implizit unsere Identifikation $V = \bigwedge^1 V$ aus 4.6.5.3 verwendet haben. Dadurch wird insbesondere unsere Notation $\bar{\wedge}$ obsolet und wir dürfen und werden sie zu $\wedge$ vereinfachen ohne Mehrdeutigkeiten befürchten zu müssen. Die Verknüpfung $(\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$ heißt das **Dachprodukt**, englisch **wedge-product**, französisch **produit extérieur**. Dafür gilt $v \wedge w = -w \wedge v$ und sogar stärker $v \wedge v = 0$ für alle $v, w \in V$.

Definition 4.6.5.5. Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $\leq$ eine Anordnung von I. Gegeben eine endliche Teilmenge $R \subset I$ mit $|R| = r$ erklären wir $v_R \in \bigwedge^r V$ als das Dachprodukt

$$v_R := v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}$$

für $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ die der Größe nach geordneten Elemente von R. Im Extremfall $r = 0$ vereinbaren wir $v_\emptyset := 1 \in K = \bigwedge^0 V$.

Proposition 4.6.5.6 (**Basis und Dualraum für äußere Potenzen**). *Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $r \geq 0$. So gilt:*

1. *Es existiert genau eine bilineare Abbildung*

$$\beta : \bigwedge^r (V^\top) \times \bigwedge^r V \to K$$

mit $((f_1 \wedge \ldots \wedge f_r), (w_1 \wedge \ldots \wedge w_r)) \mapsto \det(f_i(w_j))$*;*

2. *Diese bilineare Abbildung ist eine nichtausgeartete Paarung;*

3. *Ist* $(v_i)_{i \in I}$ *eine Basis von* V *und wählen wir auf der Indexmenge* I *eine Anordnung, so bilden die Monome* v_R *mit* $R \subset I$ *und* $|R| = r$ *eine Basis der* r*-ten äußeren Potenz* $\bigwedge^r V$*.*

4.6.5.7. Man beachte, daß unsere Abbildung von äußeren Potenzen des Dualraums zum Dualraum der äußeren Potenzen gewisse unkanonische Vorzeichenwahlen beinhaltet. Hier wären auch andere sinnvolle Wahlen von Vorzeichen denkbar, aber man muß sich halt einmal auf eine Konvention festlegen.

Beispiel 4.6.5.8. Eine Basis von $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ besteht etwa aus den sechs Dachprodukten $\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_3, \mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_4, \mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_3, \mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_4$ und $\mathrm{e}_3 \wedge \mathrm{e}_4$.

4.6.5.9. Im Zweifelsfall interpretieren wir $\bigwedge^r V^\top$ im folgenden als $\bigwedge^r (V^\top)$. Unsere nichtausgeartete Paarung aus 4.6.5.6 induziert in der üblichen Weise eine natürliche Injektion $\bigwedge^r (V^\top) \hookrightarrow (\bigwedge^r V)^\top$. In Verbindung mit unserem kanonischen Isomorphismus $(\bigwedge^r V)^\top \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^r(V)$ aus 4.6.5.3 induziert sie damit auch eine natürliche Injektion

$$\bigwedge^r (V^\top) \hookrightarrow \mathrm{Alt}^r(V)$$

Im endlichdimensionalen Fall $\dim V < \infty$ zeigt ein Dimensionsvergleich unter Verwendung der vorhergehenden Proposition, daß alle diese Injektionen Isomorphismen sind. Im allgemeinen gilt das jedoch nicht.

Beweis. 1. Unsere Abbildungsvorschrift definiert offensichtlich eine bilineare Abbildung

$$(V^\top)^{\otimes r} \times V^{\otimes r} \to K$$

Diese bilineare Abbildung verschwindet offensichtlich auf allen Paaren, bei denen rechts oder links zwei Tensorfaktoren gleich sind. Nach Übung 4.4.5.9 zu auf Quotienten induzierten multilinearen Abbildungen induziert sie folglich die Abbildung, deren Existenz in der Proposition behauptet wird.

3. Alle Tensoren $v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}$ für $i_1, \ldots, i_r \in I$ beliebig erzeugen nach 4.6.1.4 die r-te Tensorpotenz $V^{\otimes r}$. Alle Dachprodukte $v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}$ erzeugen folglich die r-te äußere Potenz $\bigwedge^r V$. Beim Umordnen derartiger Dachprodukte ändert sich höchstens das Vorzeichen, und kommt ein Vektor doppelt vor, ist das fragliche Dachprodukt eh Null. Folglich erzeugen die Dachprodukte $v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}$

mit $i_1 < \ldots < i_r$ unsere r-te äußere Potenz, und es bleibt nur, ihre lineare Unabhängigkeit nachzuweisen. Dazu betrachten wir die Koordinatenfunktionen $f_i := v_i^\top \in V^\top$ zu unserer Basis und aus den Eigenschaften der Determinante folgt für je zwei r-elementige Teilmengen $R, S \subset I$ unmittelbar

$$\beta(f_S, v_R) = \begin{cases} 1 & \text{falls } S = R; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das impliziert die lineare Unabhängigkeit der v_R.

2. Der vorherige Punkt zeigt auch die lineare Unabhängigkeit der f_S und zeigt so, daß unsere Paarung im Fall eines endlichdimensionalen Raums V nichtausgeartet ist. Der allgemeine Fall folgt daraus ohne weitere Schwierigkeiten. □

4.6.5.10 (**Dimensionen der äußeren Potenzen**). Aus 4.6.5.6 folgt für einen Vektorraum V endlicher Dimension $\dim V = d < \infty$ sofort, daß die Dimensionen seiner äußeren Potenzen durch Binomialkoeffizienten gegeben werden und daß genauer gilt

$$\dim \bigwedge^r V = \binom{d}{r}$$

Insbesondere gilt $\dim \bigwedge^d V = 1$ und $\bigwedge^r V = 0$ für $r > d$. Man schreibt deshalb im endlichdimensionalen Fall oft $\bigwedge^{\max} V := \bigwedge^{\dim V} V$. Dieser Vektorraum ist natürlich stets eindimensional.

4.6.5.11 (**Zugang zu äußeren Potenzen über angeordnete Basen**). Im Rückblick erkennen wir, daß gegeben ein Körper K und ein K-Vektorraum V mit einer angeordneten Basis $(\mathcal{B}, \leq)$ eine alternierende multilineare Abbildung $V^{\times r} \to C$ in einen weiteren Vektorraum C durch ihre Werte auf streng monoton wachsenden r-Tupeln von Basisvektoren festgelegt und festlegbar ist. Bezeichnet also $\mathcal{B}_<^{\times r}$ die Menge aller derartigen Tupel von Basisvektoren, so liefert in Formeln ausgedrückt die Restriktion eine Bijektion

$$\mathrm{Alt}^r(V^{\times r}, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(\mathcal{B}_<^{\times r}, C)$$

Wir hätten die Theorie auch ähnlich wie im Fall von Tensorprodukten beliebiger Länge in der Weise entwickeln können, daß wir zunächst diese Aussage beweisen, um dann zu folgern, daß der freie Vektorraum $K\langle \mathcal{B}_<^{\times r} \rangle$ zusammen mit der von der kanonischen Einbettung $\mathrm{can} : \mathcal{B}_<^{\times r} \to K\langle \mathcal{B}_<^{\times r} \rangle$ unter obiger Bijektion induzierten alternierenden Abbildung

$$\alpha : V^{\times r} \to K\langle \mathcal{B}_<^{\times r} \rangle$$

eine universelle r-alternierende Abbildung ist. Dieser Zugang hat den Vorteil, daß unsere Proposition 4.6.5.6 über Basen äußerer Potenzen zu einer Tautologie wird. Sie hat den Nachteil, daß es etwas unangenehm ist, den Nachweis obiger Bijektion in Formeln auszuschreiben.

4.6.5.12 (**Äußere Potenzen und alternierende Tensoren**). Gegeben ein Vektorraum V definiert jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ einen Endomorphismus seiner r-ten Tensorpotenz $[\sigma] : V^{\otimes r} \xrightarrow{\sim} V^{\otimes r}$ durch das „Permutieren der Tensorfaktoren", in Formeln $[\sigma] : v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \mapsto v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(r)}$. Wir schreiben diese Operation auch $[\sigma] : t \mapsto t^\sigma$. Diese Endomorphismen liefern eine Rechtsoperation, in Formeln $t^{\sigma\circ\tau} = (t^\sigma)^\tau$. Um das einzusehen, können wir etwa das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ens}(\{1,\ldots,n\},V) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\circ\sigma"] & V^n \arrow[r] & V^{\otimes n} \arrow[d, "{[\sigma]}"] \\
\mathrm{Ens}(\{1,\ldots,n\},V) \arrow[r, "\sim"] & V^n \arrow[r] & V^{\otimes n}
\end{tikzcd}$$

betrachten. Unter **alternierenden Tensoren** versteht man diejenigen Elemente von $V^{\otimes r}$, die beim Vertauschen von zwei Tensorfaktoren ihr Vorzeichen wechseln, in Formeln die Elemente des Teilraums

$$(V^{\otimes r})^{\mathrm{sgn}} := \{t \in V^{\otimes r} \mid t^\sigma = (\mathrm{sgn}\,\sigma)t \ \ \forall \sigma \in \mathcal{S}_r\}$$

Nehmen wir nun zusätzlich an, daß unser Grundkörper Charakteristik Null oder eine Charakteristik größer als r hat, so können wir den sogenannten **Alternator** $\mathrm{alt} : V^{\otimes r} \to (V^{\otimes r})^{\mathrm{sgn}}$ erklären durch die Abbildungsvorschrift

$$t \mapsto \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_r} \mathrm{sgn}(\sigma)t^\sigma$$

Wir haben $\mathrm{alt}(t) = t$ für jeden alternierenden Tensor t, für die Inklusion des Teilraums der alternierenden Tensoren $\mathrm{inkl} : (V^{\otimes r})^{\mathrm{sgn}} \hookrightarrow V^{\otimes r}$ gilt also $\mathrm{alt} \circ \mathrm{inkl} = \mathrm{id}$, insbesondere ist unser Alternator alt surjektiv. Bezeichne $\mathrm{proj} : V^{\otimes r} \twoheadrightarrow \bigwedge^r V$ die kanonische Projektion. Sicher verschwindet alt auf $J_r = \ker(\mathrm{proj})$, folglich faktorisiert alt über eine wohlbestimmte Abbildung $\bigwedge^r V \to (V^{\otimes r})^{\mathrm{sgn}}$. Andererseits faktorisiert auch die kanonische Projektion $\mathrm{proj} : V^{\otimes r} \twoheadrightarrow \bigwedge^r V$ über alt als $\mathrm{proj} = \mathrm{proj} \circ \mathrm{inkl} \circ \mathrm{alt}$. Zusammen folgt $\ker(\mathrm{alt}) = \ker(\mathrm{proj})$. Damit muß $\mathrm{proj} \circ \mathrm{inkl}$ surjektiv und injektiv sein und ist folglich in der Tat ein Isomorpismus

$$(V^{\otimes r})^{\mathrm{sgn}} \xrightarrow{\sim} \bigwedge^r V$$

4.6.5.13 (**Zugang zu äußeren Potenzen über alternierende Tensoren**). Manche Autoren machen es sich im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null bei der Definition der äußeren Algebra eines Vektorraums V bequem, setzen schlicht $\bigwedge^r V =:= (V^{\otimes r})^{\mathrm{sgn}}$ und erklären das Dachprodukt entsprechend durch die Formel $\omega \wedge \eta := \mathrm{alt}(\omega \otimes \eta)$. Das hat allerdings über die Einschränkungen an die Charakteristik hinaus den Nachteil, daß die Assoziativität des äußeren Produkts,

die wir sozusagen gratis erhalten haben, nun durch wenig transparente Rechnungen nachgewiesen werden muß. In der Physik werden Ausdrücke der Gestalt $\mathrm{alt}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)$ auch **Slater-Determinanten** genannt, da der Alternator an die Leibniz-Formel für Determinanten erinnert.

Ergänzung 4.6.5.14 (**Beziehung zum Dachprodukt der Analysis**). Man beachte, daß sich im Fall eines endlichdimensionalen Vektorraums V unser Isomorphismus $(\bigwedge^r V)^\top \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^r(V)$ aus 4.6.5.3 mithilfe unserer Proposition 4.6.5.6 zu einem Isomorphismus $\bigwedge^r(V^\top) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^r(V)$ verlängern läßt. Mit den durch diese Isomorphismen gegebenen Vertikalen und dem Dachprodukt in der oberen Horizontalen und dem Dachprodukt, wie wir es im Rahmen des Stokes'schen Satzes in 12.8.1.9 direkt einführen, in der unteren Horizontalen kommutiert dann das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^r V^\top \times \bigwedge^s V^\top \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \bigwedge^{r+s} V^\top \arrow[d, "\wr"'] \\
\mathrm{Alt}^r(V) \times \mathrm{Alt}^s(V) \arrow[r] & \mathrm{Alt}^{r+s}(V)
\end{tikzcd}$$

Die hier gegebene Konstruktion des Dachprodukts benötigt zwar den größeren begrifflichen Aufwand, scheint mir aber durchsichtiger als die im Rahmen des Beweises von 12.8.1.9 gegebene direkte Konstruktion. Die dort gegebene direkte Konstruktion funktioniert erfreulicherweise ohne alle Einschränkungen an die Charakteristik, liefert aber nur für die Graßmann-Algebra des Dualraums eines endlichdimensionalen Vektorraums eine direkte Beschreibung.

Vorschau 4.6.5.15. Vom höheren Standpunkt aus mag man $\bigwedge V$ mit Dachprodukt und Shuffle-Koprodukt als ein Biabmonoid der Schmelzkategorie gsMod_k verstehen und $\mathrm{Alt}\, V = \bigoplus \mathrm{Alt}^n V$ als das duale Objekt mit seiner Algebrenstruktur und der Isomorphismus $\bigwedge(V^\top) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}\, V$ im endlichdimensionalen Fall ist das eigentlich besondere. Mehr dazu wird in 18.2.2.21 erklärt.

4.6.5.16 (**Maximale äußere Potenz und Determinante**). Jede lineare Abbildung $f : V \to W$ induziert vermittels der universellen Eigenschaft lineare Abbildungen $\bigwedge^r f : \bigwedge^r V \to \bigwedge^r W$. Natürlich gilt auch $\bigwedge^r(f \circ g) = (\bigwedge^r f) \circ (\bigwedge^r g)$ und $\bigwedge^r(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$. Ist speziell $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums, so ist $\bigwedge^{\max} f : \bigwedge^{\max} V \to \bigwedge^{\max} V$ ein Endomorphismus eines eindimensionalen Vektorraums alias ein Skalar. Wir zeigen nun, daß dieser Skalar genau die Determinante von f ist, in Formeln

$$\bigwedge^{\max} f = \det f$$

Ist etwas allgemeiner $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen derselben endlichen Dimension n und sind $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ sowie $\mathcal{B} =$

$(w_1, \ldots, w_n)$ angeordnete Basen, so gilt

$$(\textstyle\bigwedge^n f)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = \det({}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}) w_1 \wedge \ldots \wedge w_n$$

In der Tat folgt aus $f(v_i) = \sum a_{ji} w_j$ mit kurzer Rechnung

$$\begin{aligned}
(\textstyle\bigwedge f)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) &= f(v_1) \wedge \ldots \wedge f(v_n) \\
&= (\textstyle\sum a_{j1} w_j) \wedge \ldots \wedge (\sum a_{ln} w_l) \\
&= \textstyle\sum_{\sigma:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}} a_{\sigma(1)1} w_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge a_{\sigma(n)n} w_{\sigma(n)} \\
&= \textstyle\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n} w_1 \wedge \ldots \wedge w_n \\
&= (\det(a_{ji})) w_1 \wedge \ldots \wedge w_n
\end{aligned}$$

Die Multiplikationsregel für Determinanten folgt mit diesen Erkenntnissen unmittelbar aus der Relation $\bigwedge^{\max}(f \circ g) = (\bigwedge^{\max} f) \circ (\bigwedge^{\max} g)$. Daß die Determinante eines Endomorphismus $f : V \to V$ verschwindet, falls dieser nicht vollen Rang hat, kann man in diesem Formalismus auch wie folgt einsehen: Man schreibt f als Verknüpfung $V \twoheadrightarrow \operatorname{im} f \hookrightarrow V$, und unter der Annahme $d = \dim V > \dim(\operatorname{im} f)$ folgt $\bigwedge^d(\operatorname{im} f) = 0$, womit dann auch die Komposition $\bigwedge^d V \to \bigwedge^d(\operatorname{im} f) \to \bigwedge^d V$ die Nullabbildung sein muß.

Ergänzung 4.6.5.17. Für einen K-Vektorraum V endlicher Dimension $\dim V = n$ liefert das Dachprodukt nichtausgeartete Paarungen $\bigwedge^d V \times \bigwedge^{n-d} V \to \bigwedge^n V$ im Sinne von 4.2.3.35, denn wir haben $v_I \wedge v_J = \pm v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$, falls I das Komplement von J ist, und Null sonst. Jeder Isomorphismus $\omega : \bigwedge^n V \xrightarrow{\sim} K$ liefert also insbesondere einen Isomorphismus $\hat{\omega} : \bigwedge^{n-1} V \cong V^\top$ gegeben durch $(\hat{\omega}(\eta))(v) = \omega(\eta \wedge v)$.

Ergänzung 4.6.5.18 (**Äußere Potenzen und Orientierung**). Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem angeordneten Körper erhalten wir eine Bijektion

$$\operatorname{or}(V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{or}(\textstyle\bigwedge^{\max} V)$$

durch die Vorschrift $\varepsilon \mapsto \varepsilon^\wedge$ mit $\varepsilon^\wedge(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = \varepsilon(v_1, \ldots, v_n)$ für eine und jede angeordnete Basis von V. Es verhält sich nun so, daß es im Rückblick eigentlich richtiger gewesen wäre, diese Bijektion zu einer Definition des Orientierungsbegriffs zu machen. Das wäre nur aus didaktischen Gründen problematisch gewesen. Dafür müssen wir nun den Preis zahlen, daß verschiedene Veträglichkeiten zwischen leicht unkanonischen Wahlen zu prüfen sind, als da wären:

1. Ist $U \hookrightarrow V \twoheadrightarrow W$ eine kurze exakte Sequenz endlichdimensionaler k-Vektorräume und sind ε, η Orientierungen auf U und W mit Elementen $\hat{\varepsilon}, \hat{\eta}$ der zugehörigen offenen Halbgeraden in den jeweiligen äußeren Potenzen, so entspricht die zusammengesetzte Orientierung $\varepsilon\eta$ auf V aus 3.6.5.17 der

offenen Halbgerade vom Bild von $\hat{\varepsilon} \otimes \hat{\eta}$ unter dem kanonischen Isomorphismus $\bigwedge^{\max} U \otimes \bigwedge^{\max} W \xrightarrow{\sim} \bigwedge^{\max} V$ aus 4.6.5.26;

2. Ist V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum und ε eine Orientierung auf V und $\hat{\varepsilon}$ ein Element der zugehörigen offenen Halbgeraden in $\bigwedge^{\max}(V)$ und η die zu ε duale Orientierung auf dem Dualraum $V^\top$ nach 3.6.5.14 und $\hat{\eta}$ ein Element der zugehörigen offenen Halbgeraden in $\bigwedge^{\max}(V^\top)$, so ist unter unserer ausgezeichneten Paarung $\bigwedge^{\max}(V^\top) \times \bigwedge^{\max} V \to k$ aus 4.6.5.6 das Bild von $(\hat{\eta}, \hat{\varepsilon})$ positiv.

4.6.5.19 (**Kanonische Form maximalen Grades**). Gegeben ein orientierter n-dimensionaler reeller Vektorraum V mit einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform t kann man im eindimensionalen Raum $\bigwedge^n V$ ein von Null verschiedenes Element $\omega = \omega_t$ auszeichnen durch die Bedingung, daß gilt

$$\omega = \varepsilon v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$$

für jede angeordnete Basis $v_1, \ldots, v_n$ der Orientierung ε mit $|t(v_i, v_j)| = \delta_{ij}$. In der Tat erfüllt die Basiswechselmatrix A zwischen zwei derartigen Basen eine Gleichung der Gestalt $A^\top JA = J'$ mit $\det J = \det J' \neq 0$ im allgemeinen, so daß der Multiplikationssatz für Determinanten $\det A = \pm 1$ liefert. Das Vorzeichen ergibt sich dann aus den jeweiligen Orientierungen.

4.6.5.20. Ist V ein n-dimensionaler pseudoeuklidischer Vektorraum mit Längengerade $\mathbb{L}$ im Sinne von 4.2.7.6, so können wir ähnlich ein kanonisches Element

$$\omega \in \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \bigwedge^n(V) \otimes \mathbb{L}^{\otimes(-n)}$$

erklären durch $\omega = \varepsilon \otimes (v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) \otimes \|v_1\|^{-1} \otimes \ldots \otimes \|v_n\|^{-1}$ für eine und jede angeordnete Basis $v_1, \ldots, v_n$ aus paarweise orthogonalen Vektoren mit ε der durch besagte Basis gegebenen Orientierung.

Übungen

Übung 4.6.5.21 (**Partielles Einsetzen in alternierende Formen**). Gegeben ein Vektorraum V und eine Linearform $\lambda \in V^\top$ zeige man, daß es für alle $n \geq 0$ genau eine lineare Abbildung

$$i_\lambda : \bigwedge^{n+1} V \to \bigwedge^n V$$

gibt mit $i_\lambda(v_0 \wedge \ldots \wedge v_n) = \sum (-1)^\nu \lambda(v_\nu) v_0 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_\nu \wedge \ldots \wedge v_n$. Um mit Beschränkungen der Indizes keinen Ärger zu kriegen, vereinbaren wir $\bigwedge^n V = 0$ für $n < 0$ und setzen i_λ in der einzig möglichen Weise zu allen $n \in \mathbb{Z}$ fort. Man zeige in dieser Situation $i_\lambda^2 = 0$ und zeige für alle $v \in V$ die Identität $(v\wedge) \circ i_\lambda +$

$i_\lambda \circ (v\wedge) = (\lambda(v)\cdot)$ von Endomorphismen der äußeren Algebra. Weiter setzen wir auch $\mathrm{Alt}^n(V) = 0$ für $n < 0$ und man zeige für $v \in V$ die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} \bigwedge^{n+1} V^\top \arrow[r, "i_{\mathrm{ev}(v)}"] \arrow[d] & \bigwedge^n V^\top \arrow[d] \\ \mathrm{Alt}^{n+1}(V) \arrow[r, "i_v"] & \mathrm{Alt}^n(V) \end{tikzcd}$$

mit der durch $(i_v\eta)(v_1, \ldots, v_n) := \eta(v, v_1, \ldots, v_n)$ gegebenen beziehungsweise $i_v = 0$ für $n < 0$ unteren Horizontale und den Vertikalen aus 4.6.5.9 und zeige $i_v^2 = 0$ sowie die Identität $(\lambda\wedge)\circ i_v + i_v \circ (\lambda\wedge) = (\lambda(v)\cdot)$ von Endomorphismen der Algebra der alternierenden Formen. Der Buchstabe i steht für englisch **insertion**. Auf Deutsch heißen diese Abbildungen **Einsetzungshomomorphismen**.

Übung 4.6.5.22. Gegeben ein Vektorraum V und $\omega \in \bigwedge^r V$ und $\eta \in \bigwedge^s V$ gilt $\omega \wedge \eta = (-1)^{rs}\eta \wedge \omega$.

Ergänzende Übung 4.6.5.23. (Hinweis: 4.6.5.16). Gegeben eine $(n \times m)$-Matrix A und eine $(m \times n)$-Matrix B kann man die Determinante der $(n \times n)$-Matrix AB bestimmen wie folgt: Für jede n-elementige Teilmenge $I \subset \{1, \ldots m\}$ mit Elementen $i_1 < \ldots < i_n$ möge A_I gerade aus den Spalten von A der Indizes $i_1, \ldots, i_n$ bestehen und B^I aus den Zeilen von B der Indizes $i_1, \ldots, i_n$. So gilt die **Cauchy-Binet-Formel**

$$\det(AB) = \sum_{|I|=n} (\det A_I)(\det B^I)$$

Übung 4.6.5.24. Gegeben ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}\, V$ eines Vektorraums mit $f^{\otimes r} = \mathrm{id} : V^{\otimes r} \to V^{\otimes r}$ für ein $r \geq 1$ gilt $f = \zeta\,\mathrm{id}$ mit $\zeta^r = 1$. Hinweis: 4.6.1.34.

Ergänzende Übung 4.6.5.25. Sei V ein Vektorraum. Man zeige: Das Erzeugnis $J_r \subset V^{\otimes r}$ aller Tensoren mit zwei gleichen Einträgen fällt zusammen mit dem Erzeugnis $J'_r \subset V^{\otimes r}$ aller Tensoren mit zwei benachbarten gleichen Einträgen.

Weiterführende Übung 4.6.5.26. Ist $U \hookrightarrow V \twoheadrightarrow W$ eine kurze exakte Sequenz endlichdimensionaler Vektorräume, so induziert mit der Notation $d = \dim W$ das Dachprodukt $\bigwedge^{\max} U \otimes \bigwedge^d V \to \bigwedge^{\max} V$ einen Isomorphismus

$$\bigwedge^{\max} U \otimes \bigwedge^{\max} W \xrightarrow{\sim} \bigwedge^{\max} V$$

Wir nennen ihn den **kanonischen Isomorphismus**, aber man bemerke, daß an dieser Stelle auch andere sinnvolle Wahlen von Vorzeichen möglich wären. Auf eine solche Wahl muß man sich aber halt mal einigen und die hier getroffene Wahl ist verträglich mit unserem Begriff 3.6.5.17 der „zusammengesetzten Orientierung“.

Ergänzende Übung 4.6.5.27. Sei $L \hookrightarrow V \twoheadrightarrow W$ eine kurze exakte Sequenz von Vektorräumen mit $\dim L = 1$. So faktorisiert für alle $m \geq 1$ das Dachprodukt $L \otimes \bigwedge^{m-1} V \to \bigwedge^m V$ über $L \otimes \bigwedge^{m-1} W$ und wir erhalten so eine kurze exakte Sequenz

$$L \otimes \bigwedge^{m-1} W \hookrightarrow \bigwedge^m V \twoheadrightarrow \bigwedge^m W$$

Hinweis: Man mag mit vollständiger Induktion über m argumentieren.

Ergänzende Übung 4.6.5.28. Gegeben ein endlichdimensionaler symplektischer Vektorraum (V, ω) der Dimension $2n$ zeige man für die in 4.2.5.7 erklärte $(2n)$-Multilinearform $\omega^{(n)}$ auf V die Identität

$$n!\omega^{(n)} = \omega^{\wedge n}$$

Ergänzende Übung 4.6.5.29 (**Kreuzprodukt als Dachprodukt**). Gegeben ein dreidimensionaler euklidischer Vektorraum V mit Längengerade $\mathbb{L}$ nach 4.1.5.12 und Orientierungsgerade $\mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V)$ betrachte man die Komposition von Isomorphismen

$$\bigwedge^2 V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\left(V, \bigwedge^3 V\right) \xrightarrow{\sim} V^\top \otimes \mathbb{L}^{\otimes 3} \otimes \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{L} \otimes \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes V$$

Hier werde die erste Abbildung durch $\eta \mapsto \eta\wedge$ gegeben, die zweite durch das Spatprodukt 4.6.4.3 zusammen mit der Darstellung 4.6.1.21 von Homomorphismenräumen als Tensorprodukt und die dritte vom Isomorphismus $V^\top \xrightarrow{\sim} V \otimes \mathbb{L}^{\otimes(-2)}$ aus 4.6.4.11. Man zeige, daß die Verknüpfung der Abbildung $V \times V \to \bigwedge^2 V$, $(v, w) \mapsto v \wedge w$ mit obiger Identifikation gerade unser Kreuzprodukt aus 4.6.4.9 ist.

Übung 4.6.5.30. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen komplexen Vektorraums. Man zeige für den k-ten Koeffizienten a_k des charakteristischen Polynoms die Formel

$$a_k = (-1)^k \operatorname{tr}\left(\bigwedge^k f \,\middle|\, \bigwedge^k V\right)$$

Hinweis: Man ziehe ich auf den Fall einer oberen Dreiecksmatrix zurück. Die Formel gilt auch für beliebige Körper, da mag man sich mit einer Einbettung in einen algebraisch abgeschlossenen Körper behelfen, die nach 6.3.11.5 stets existiert.

4.7 Kategorien und Funktoren*

Viele Konstruktionen der linearen und insbesondere der multilinearen Algebra, wie etwa Dualräume, Tensorpotenzen oder äußere Potenzen, zeigen erst in der Sprache der Kategorientheorie ihre wahre Natur. Es geht bei diesen Konstruktionen nämlich keineswegs darum, irgendwelche neuen Vektorräume zu konstruieren: Wir wissen ja bereits aus 3.2.1.10, daß wir hier zumindest im Fall endlicher Dimension nichts wesentlich Neues finden können. Vielmehr geht es darum, zusammen mit diesen neuen Vektorräumen auch neue lineare Abbildungen zu konstruieren, wie etwa bei Dualräumen die transponierten Abbildungen. Erst zusammen mit diesen zusätzlichen Konstruktionen erhält man nützliche und anwendbare Begriffsbildungen.

Die Sprache der Kategorien und Funktoren liefert für derartige Konstruktionen einen begrifflichen Rahmen. Sie ist ähnlich ausdrucksstark, grundlegend und elegant wie die Sprache der Mengenlehre, auf der sie aufbaut, und gehört meines Erachtens in den Rucksack jeder Mathematikerin und jedes Mathematikers. Ich bin sogar der Ansicht, daß die „naive Mengenlehre“ aus den Grundvorlesungen am besten durch eine axiomatische Beschreibung der „Kategorie aller Mengen“ wie etwa in [LR03] formalisiert wird. So formal will ich bei der hier gegebenen Darstellung jedoch nicht werden und arbeite deshalb weiter auf der Grundlage der naiven Mengenlehre. Eine ausführlichere Behandlung der Kategorientheorie findet man zum Beispiel in [Mac98].

4.7.1 Kategorien

Definition 4.7.1.1. Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ ist ein Datum bestehend aus

a. einer Menge $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ von **Objekten**;

b. einer Menge $\mathcal{C}(X,Y)$ von **Morphismen** für je zwei Objekte $X,Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$;

c. einer Abbildung $\mathcal{C}(X,Y)\times\mathcal{C}(Y,Z)\to\mathcal{C}(X,Z),\ (f,g)\mapsto g\circ f$ für je drei Objekte $X,Y,Z\in\mathcal{C}$, genannt die **Verknüpfung** von Morphismen,

derart, daß folgende Axiome erfüllt sind:

1. Die Verknüpfung ist **assoziativ**, es gilt also $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$ für Morphismen f,g und h, wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind;

2. Für jedes Objekt $X\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ gibt es einen Morphismus $\operatorname{id}_X\in\mathcal{C}(X,X)$, die **Identität auf** X, so daß gilt $\operatorname{id}_X\circ f = f$ und $g\circ\operatorname{id}_X = g$ für Morphismen f und g wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind. Die üblichen Argumente zeigen, daß es für jedes X höchstens einen derartigen Morphismus

geben kann, womit auch die Verwendung des bestimmten Artikels gerechtfertigt wäre.

4.7.1.2. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ Objekte. Statt $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ sagen wir auch, f sei ein **Morphismus von** X **nach** Y und schreiben kurz

$$f : X \to Y$$

Statt id_X schreiben wir oft nur id. Statt $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ schreiben wir oft kürzer $X \in \mathcal{C}$.

4.7.1.3. Wir fordern nicht, daß die Morphismenmengen $\mathcal{C}(X, Y)$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ paarweise disjunkt sein sollen. Wir erklären dahingegen die Menge aller Morphismen von $\mathcal{C}$ als die disjunkte Vereinigung

$$\operatorname{Mor}(\mathcal{C}) := \bigsqcup_{X,Y \in \mathcal{C}} \mathcal{C}(X, Y)$$

Beispiel 4.7.1.4 (**Kategorie der Mengen**). Als erstes Beispiel hätte ich gerne die Kategorie $\mathcal{C} := \mathrm{Ens}$ aller Mengen eingeführt. Das ist jedoch nicht möglich, da die „Gesamtheit aller Mengen“, wie in 2.1.3.9 ausgeführt wird, nicht als Menge angesehen werden darf. Um diese Untiefen der Logik zu umschiffen, betrachten wir feiner ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ alias eine Menge $\mathfrak{U}$ von Mengen und erklären die Kategorie $\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ aller Mengen $X \in \mathfrak{U}$. Ihre Objekte sind beliebige Mengen $X \in \mathfrak{U}$, in Formeln

$$\operatorname{Ob}(\mathfrak{U}\mathrm{Ens}) := \mathfrak{U}$$

Für je zwei Objekte alias je zwei Mengen $X, Y \in \mathfrak{U}$ erklären wir die Morphismenmenge als die Menge aller Abbildungen von X nach Y, in Formeln

$$\mathfrak{U}\mathrm{Ens}(X, Y) := \mathrm{Ens}(X, Y)$$

Die Verknüpfung ordnet jedem Paar (f, g) von Abbildungen ihre Komposition $g \circ f$ zu. Daß diese Daten unsere Axiome erfüllen, scheint mir offensichtlich. Unser $\mathrm{id}_X \in \mathfrak{U}\mathrm{Ens}(X, X)$ ist die identische Abbildung $\mathrm{id}_X(x) = x \ \forall x \in X$.

Vorschau 4.7.1.5 (**Mengen, Klassen, Universen**). In vielen Quellen umschifft man die in 4.7.1.4 angesprochenen Untiefen der Logik, indem man nicht fordert, daß die Objekte einer Kategorie eine Menge bilden, sondern stattdessen, daß sie eine „Klasse“ bilden sollen. Das hat den Vorteil, daß man die Kategorie aller Mengen bilden kann. Es hat den Nachteil, daß man den Begriff einer Klasse einführen muß und erklären muß, wie man damit umgeht. Statt mit „Klassen“ werden wir zu gegebener Zeit mit „Universen“ arbeiten, die in 4.7.11.3 eingeführt werden. Für unsere Bedürfnisse läuft das auf dasselbe hinaus und erspart uns die Vertreibung aus dem Paradies der Mengenlehre. Ich werde aber oft kategorientheoretische Sprache auch in einem weiteren Sinn als „Metasprache“ verwenden und dabei derartige Feinheiten kurzerhand ignorieren.

Kategorie	Morphismen	Kürzel
{Mengen}	alle Abbildungen	Ens
{teilgeordnete Mengen}	monoton wachsende Abbildungen	Ord
{Monoide}	Morphismen von Monoiden	Mon
{Gruppen}	Gruppenhomomorphismen	Grp
{abelsche Gruppen}	Gruppenhomomorphismen	Ab
{topologische Räume}	stetige Abbildungen	Top
{bepunktete Mengen}	Abbildungen, die den Basispunkt erhalten	Ens^*
{bepunktete Räume}	stetige Abbildungen, die den Basispunkt erhalten	Top^*
{K-Vektorräume}	K-lineare Abbildungen	K-Mod, Mod_K
{Affine Räume über K}	affine Abbildungen	K-Aff, Aff_K
{nicht unitäre Ringe}	Rng-Homomorphismen	Rng
{Ringe}	Ringhomomorphismen	Ring
{kommutative Ringe}	Ringhomomorphismen	Kring
{K-Algebren}	K-Algebren-Homomorphismen	K-Alg, Alg_K
{K-Ringalgebren}	K-Ringalgebren-Homomorphismen	K-Ralg, Ralg_K
{K-Kringalgebren}	K-Kringalgebren-Homomorphismen	K-Kralg, Kralg_K

Hier einige Beispiele von Kategorien. Als Verknüpfung von Morphismen ist für die Kategorien dieser Liste stets die Komposition von Abbildungen gemeint. Um logische Abstürze zu vermeiden, müssen wir uns genauer stets ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ dazudenken, aus dem die zugrundeliegende Menge der jeweiligen Struktur kommen muß und das wir in der Notation meist unterschlagen. Wenn wir es doch notieren wollen, schreiben wir

$$\mathfrak{U}\mathrm{Mod}_K$$

und dergleichen. Wir denken uns das Mengensystem $\mathfrak{U}$ meist als ziemlich riesig und fordern zumindest implizit für gewöhnlich, daß es unter dem Bilden von Teilmengen stabil sein möge und die reellen Zahlen enthält. Etwas genauer werden wir zu gegebener Zeit oft fordern, daß es ein „Universum“ sein soll.

Beispiel 4.7.1.6. Zu jedem Monoid M können wir die Kategorie $[M]$ mit einem einzigen Objekt $*$ bilden, deren Morphismen die Elemente von besagtem Monoid sind mit der Verknüpfung in unserem Monoid als Verknüpfung von Morphismen. Wir nennen sie die **Ein-Objekt-Kategorie** unseres Monoids. Umgekehrt ist für jedes Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ die Menge $\mathcal{C}(X, X)$ mit der von der Kategorienstruktur herkommenden Verknüpfung ein Monoid. In diesem Sinne ist also eine Kategorie mit einem einzigen Objekt nichts anderes als ein Monoid. Das Monoid der Morphismen von einem Objekt X zu sich selber in einer Kategorie $\mathcal{C}$ nennen wir das Monoid der **Endomorphismen** von X und kürzen es in Zukunft oft ab mit

$$\mathcal{C}(X) := \mathcal{C}(X, X)$$

Beispiel 4.7.1.7. Sei K ein Körper oder allgemeiner ein Ring. Wir erklären die **Matrixkategorie** $\mathrm{Mat} = \mathrm{Mat}_K = \mathrm{Mat}(K)$ über K durch die Vorschriften

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Mat}_K) := \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \mathrm{Mat}_K(m, n) := \mathrm{Mat}(n \times m; K)$$

mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung von Morphismen. Die Axiome sind erfüllt aufgrund unserer Rechenregeln 3.2.4.6 für die Matrixmultiplikation.

Beispiel 4.7.1.8 (**Teilgeordnete Menge als Kategorie**). Jede teilgeordnete Menge $(A, \leq)$ kann als Kategorie aufgefaßt werden wie folgt: Objekte sind die Elemente von A; Morphismen gibt es jeweils einen von einem Element zu jedem kleineren und zu sich selber; und die Verknüpfung von Morphismen ist die einzig Mögliche.

Beispiel 4.7.1.9 (**Kategorie der Vektorräume**). Als nächstes Beispiel hätte ich gerne die Kategorie $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}_K$ aller Vektorräume über einem Körper K eingeführt. Die Notation Mod_K für Vektorräume über K steht dabei für ihre alternative Bezeichnung als K**-Moduln**. Wieder gerät man dabei in Untiefen der Logik. Um diese zu umschiffen betrachten wir wieder ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ und erklären dazu eine Kategorie

$$\mathfrak{U}\mathrm{Mod}_K$$

Als Objekte dieser Kategorie nehmen wir alle K-Vektorräume, deren Grundmenge zu unserem Mengensystem $\mathfrak{U}$ gehört. Für je zwei Vektorräume $V, W \in \mathfrak{U}\mathrm{Mod}_K$ erklären wir die Morphismenmenge als die Menge aller linearen Abbildungen, in Formeln

$$\mathfrak{U}\mathrm{Mod}_K(V, W) := \mathrm{Hom}_K(V, W)$$

Die Verknüpfung ordnet wieder jedem Paar (f, g) von Abbildungen ihre Komposition $g \circ f$ zu. Die Axiome sind offensichtlich erfüllt.

4.7.1.10 (**Verwendung des Symbols** Hom). Das Symbol „Hom“ für Mengen von Morphismen versuche ich nach Möglichkeit zu vermeiden: Ich will es reservieren

für die sogenannten „internen Hom-Räume“. Darunter versteht man Vorschriften, die in sehr speziellen Situationen zwei Objekten einer Kategorie ein Drittes zuordnen, im Fall der Vektorräume etwa die Morphismenmenge mit ihrer natürlichen Vektorraumstruktur. Wenn die Morphismenmenge als Menge gemeint ist, sollte ich $\mathrm{Mod}_K(V, W)$ schreiben, aber das halte ich im Fall der Vektorräume nicht durch. Das Kürzel „Mod“ mit etwelchen oberen und unteren Indizes wird stets für Kategorien von abelschen Gruppen mit Zusatzstrukturen stehen, meist Operationen von Ringen oder Gruppen. Gehen diese Zusatzstrukturen aus dem Kontext hervor, so lasse ich die entsprechenden Indizes auch manchmal weg. Für abelsche Gruppen ohne Zusatzstrukturen benutze ich stets das Kürzel „Ab“.

Definition 4.7.1.11.

1. Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ in einer Kategorie heißt ein **Isomorphismus** oder **Iso** und als Adjektiv **iso**, wenn es einen Morphismus $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Wir notieren Isomorphismen oft $f : X \xrightarrow{\sim} Y$;

2. Zwei Objekte X und Y einer Kategorie heißen **isomorph**, wenn es einen Iso $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ gibt. Man schreibt dann auch kurz $X \cong Y$.

Beispiele 4.7.1.12. Isomorphismen in der Kategorie der Mengen nennt man Bijektionen, Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume Homöomorphismen, Isomorphismen in der Kategorie der Vektorräume Vektorraumisomorphismen.

4.7.1.13. Eine Kategorie, in der alle Morphismen Isomorphismen sind, heißt ein **Gruppoid**. Eine Kategorie, in denen es außer den Identitäten keine Morphismen gibt, heißt **diskret**. Natürlich ist jede diskrete Kategorie ein Gruppoid.

4.7.1.14 (**Diskussion des Begriffs eines Isomorphismus**). Bisher hatten wir verschiedentlich Isomorphismen abweichend erklärt als bijektive Homomorphismen, zum Beispiel bei Gruppen, Körpern, Vektorräumen und affinen Räumen. In allen diesen Fällen sollte es jedoch klar sein, daß die Umkehrabbildung im Sinne der Mengenlehre auch selbst wieder ein Homomorphismus ist, so daß wir in der Tat auch Isomorphismen im Sinne der Kategorientheorie vor uns haben. Ein typisches Beispiel für eine Kategorie von „Mengen mit Zusatzstrukturen“, in der bijektive Homomorphismen keine Isomorphismen zu sein brauchen, ist die Kategorie der teilgeordneten Mengen.

4.7.1.15. Viele mathematische Fragestellungen lassen sich in der Sprache der Kategorientheorie dahingehend formulieren, daß man einen Überblick über alle Objekte einer Kategorie gewinnen will, wobei man zwischen isomorphen Objekten nicht unterscheidet. Formal will man also für eine gegebene Kategorie $\mathcal{C}$ die Menge aller Äquivalenzklassen von Objekten

$$\mathcal{C}/\cong$$

unter der Äquivalenzrelation der Isomorphie beschreiben. Man spricht dann auch von **Isomorphieklassen** von Objekten und nennt Fragestellungen dieser Art **Klassifikationsprobleme**. Zum Beispiel werden die endlich erzeugten Vektorräume über einem fest vorgegebenen Körper klassifiziert durch ihre Dimension, die endlich erzeugten abelschen Gruppen durch die Sätze 4.4.4.4 und 4.4.4.5, die endlichen Mengen durch ihre Kardinalität 2.1.1.8, und beliebige Mengen, vorsichtshalber aus einem fest vorgegebenen Mengensystem, ebenfalls durch ihre Kardinalität 6.5.3.1.

4.7.1.16. Unter einer **Unterkategorie** einer Kategorie versteht man ein Paar bestehend aus einer Teilmenge der Objektmenge nebst Teilmengen der Morphismenmengen für je zwei Objekte unserer Teilmenge der Objektmenge derart, daß die offensichtlichen Bedingungen erfüllt sind. Eine Unterkategorie heißt **voll**, wenn die fraglichen Teilmengen der Morphismenmengen jeweils aus allen Morphismen in der ursprünglichen Kategorie bestehen.

4.7.1.17. Zu jeder Kategorie $\mathcal{C}$ erklären wir eine Unterkategorie, die **Isomorphismenkategorie** $\mathcal{C}^\times$ von $\mathcal{C}$, durch die Vorschrift, daß sie dieselben Objekte haben soll, aber nur die Isomorphismen von $\mathcal{C}$ als Morphismen. Die Menge aller Isomorphismen von einem Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ in ein Objekt Y derselben Kategorie notieren wir folgerichtig $\mathcal{C}^\times(X,Y)$. Die Isomorphismen von einem Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ auf sich selber heißen die **Automorphismen** von X. Sie bilden stets eine Gruppe, die **Automorphismengruppe** $\mathcal{C}^\times(X)$ von X. Für die Automorphismengruppe $\mathrm{Mod}_k^\times(V)$ eines k-Vektorraums V hatten wir die Notation $\mathrm{GL}(V)$ vereinbart, für die Automorphismengruppe $\mathrm{Ens}^\times(X)$ einer Menge X die Bezeichnung als „Gruppe der Permutationen von X“.

Definition 4.7.1.18. Ein Objekt F einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **final**, wenn es für alle $X \in \mathcal{C}$ genau einen Morphismus von X nach F gibt, in Formeln

$$|\mathcal{C}(X,F)| = 1 \quad \forall X \in \mathcal{C}$$

Definition 4.7.1.19. Ein Objekt K einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **initial** oder gleichbedeutend **kofinal**, wenn es für alle $Y \in \mathcal{C}$ genau einen Morphismus von K nach Y gibt, in Formeln

$$|\mathcal{C}(K,Y)| = 1 \quad \forall Y \in \mathcal{C}$$

Beispiele 4.7.1.20 (**Finale und initiale Objekte in Kategorien von Mengen**). Ist $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem, das nicht nur aus der leeren Menge besteht, so sind die finalen Objekte von $\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ genau die einpunktigen Mengen aus $\mathfrak{U}$. Ist $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem, das nicht nur aus einelementigen Mengen besteht, so ist die leere Menge ist das einzige kofinale Objekt von $\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$, wenn sie denn zu unserem Mengensystem $\mathfrak{U}$ dazugehört.

4.7.1.21 (**Weitere Notationen**). Zwischen je zwei finalen beziehungsweise kofinalen Objekten gibt es offensichtlich genau einen Isomorphismus. Wir erlauben uns deshalb, etwas lax von *dem* finalen beziehungsweise *dem* kofinalen Objekt zu reden, und bezeichnen „das“ finale Objekt mit $\mathrm{pt} = \mathrm{pt}(\mathcal{C})$ für „Punkt“ oder $\mathrm{fin}(\mathcal{C})$ und Morphismen dahin mit fin für „final“. Meist verwenden wir als Bezeichnung des finalen Objekts die kleingeschriebene Bezeichnung der Kategorie, etwa top für den einelementigen topologischen Raum oder ens für die einelementige Menge. Morphismen vom finalen Objekt zu einem beliebigen Objekt notieren wir gerne em wie „embedding“ mit einem Index, der angibt, welcher Morphismus genau gemeint ist. Gegeben eine Menge X und ein Element $x \in X$ meint etwa $\mathrm{em}_x : \mathrm{ens} \to X$ die Einbettung der einelementigen Menge mit Bild x. Wir bezeichnen mit $\mathrm{ini} = \mathrm{ini}(\mathcal{C})$ das initiale Objekt einer Kategorie $\mathcal{C}$, wenn es denn ein solches gibt.

Übungen

Übung 4.7.1.22. Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ in einer Kategorie ist ein Isomorphismus genau dann, wenn er ein **Rechtsinverses** und ein **Linksinverses** besitzt, wenn es also Morphismen $g, h \in \mathcal{C}(Y, X)$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $h \circ f = \mathrm{id}_X$, und unter diesen Voraussetzungen gilt bereits $g = h$. Wir nennen diesen Morphismus dann den **inversen Morphismus zu** f und notieren ihn f^{-1}. Derartige Rechtsinverse bezeichnet man auch oft als **Schnitt** oder **Spaltung**. Allgemeiner nennt man jeden Morphismus **rechtsspaltend**, der ein Linksinverses besitzt, und jeden Morphismus **linksspaltend**, der ein Rechtsinverses besitzt

Übung 4.7.1.23. Kann ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ in einer Kategorie sowohl durch Vorschalten eines Morphismus $g \in \mathcal{C}(W, X)$ als auch durch Nachschalten eines Morphismus $h \in \mathcal{C}(Y, Z)$ zu einem Isomorphismus gemacht werden, so muß er bereits selbst ein Isomorphismus gewesen sein.

Übung 4.7.1.24. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $f : X \to Y$ ein Morphismus. Man zeige, daß f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn das Vorschalten von f für jedes weitere Objekt Z eine Bijektion $\mathcal{C}(Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, Z)$ induziert. Man zeige dual, daß f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn das Nachschalten von f für jedes weitere Objekt Z eine Bijektion $\mathcal{C}(Z, X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Z, Y)$ induziert. Allgemeinere Aussagen in dieser Richtung macht das sogenannte Yoneda-Lemma 4.7.10.2.

Übung 4.7.1.25. Man finde finale und kofinale Objekte in den Kategorien der Gruppen, Ringe, topologischen Räume und Vektorräume aus einem vorgegebenen Mengensystem $\mathfrak{U}$.

4.7.2 Funktoren

Definition 4.7.2.1. Ein **Funktor** $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von einer Kategorie $\mathcal{A}$ in eine Kategorie $\mathcal{B}$ ist ein Datum bestehend aus

a. einer Abbildung $F = F_{\mathrm{Ob}} : \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$, $X \mapsto FX$;

b. einer Abbildung $F = F_{X,Y} : \mathcal{A}(X,Y) \to \mathcal{B}(FX,FY)$, $f \mapsto Ff$ für je zwei Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$,

derart, daß gilt:

1. $F(f \circ g) = (Ff) \circ (Fg)$ für beliebige verknüpfbare Morphismen f und g aus der Kategorie $\mathcal{A}$;

2. $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{FX}$ für jedes Objekt $X \in \mathcal{A}$.

Ich nenne in diesem Zusammenhang $\mathcal{A}$ die **Ausgangskategorie** und $\mathcal{B}$ die **Zielkategorie** des Funktors F.

Beispiel 4.7.2.2. Gegeben ein Körper K erhalten wir einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mat}_K & \to & \mathrm{Mod}_K \\ n & \mapsto & K^n \\ A\downarrow & \mapsto & (A\circ)\downarrow \\ m & \mapsto & K^m \end{array}$$

von der Matrixkategorie 4.7.1.7 über K in die Kategorie der K-Vektorräume, indem wir wie angedeutet jedem Objekt n der Matrixkategorie den Vektorraum K^n zuordnen und jeder Matrix die durch diese Matrix gegebene lineare Abbildung. Wir nennen ihn den **Realisierungsfunktor**.

Beispiel 4.7.2.3 (**Der Richtungsraum als Funktor**). Wir erklären die Kategorie $\mathrm{Aff} = \mathrm{Aff}_K$ der affinen Räume über einem gegebenen Körper K. Als Objekte nehmen wir unsere affinen Räume, als Morphismen affine Abbildungen. Das Bilden des Richtungsraums $\mathrm{Richt} : E \mapsto \vec{E}$ ist dann zusammen mit der Zuordnung, die jeder affinen Abbildung $\varphi : E \to F$ ihren linearen Anteil $\vec{\varphi} : \vec{E} \to \vec{F}$ zuordnet, ein Funktor

$$\mathrm{Richt} : \mathrm{Aff}_K \to \mathrm{Mod}_K$$

Beispiel 4.7.2.4 (**Die Längengerade als Funktor**). Wir erklären die Kategorie Euk der euklidischen Vektorräume. Objekte sind wie in 4.1.5.1 reelle Vektorräume mit einer $\mathbb{R}_{>0}$-Bahn von Skalarprodukten, Morphismen die euklidischen Abbildungen nach 4.1.5.8. Unsere Konstruktion 4.1.5.12 der Längengerade eines euklidischen Raums und der zwischen Längengeraden induzierten Abbildungen ist dann ein Funktor

$$\mathbb{L} : \mathrm{Euk} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}$$

4.7.2.5. Man gibt bei einem Funktor F meist nur die Abbildung $X \mapsto FX$ auf den Objekten an in der Hoffnung, daß vom Leser erraten werden kann, welche Abbildung $f \mapsto Ff$ auf den Morphismen gemeint ist.

4.7.2.6. Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ haben wir den **Identitätsfunktor** $\mathrm{Id} = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ von besagter Kategorie zu sich selber. Sind $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ Funktoren, so ist auch $G \circ F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ ein Funktor.

Lemma 4.7.2.7 (**Funktoren erhalten Isomorphie**). *Ein Funktor bildet stets Isomorphismen auf Isomorphismen ab. Insbesondere haben isomorphe Objekte unter einem Funktor stets isomorphe Bilder.*

Beweis. Sei F unser Funktor. Mithilfe unserer Bedingung $F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ schließen wir:

$$\begin{aligned} f \text{ ist Isomorphismus} \quad &\Rightarrow \text{ Es gibt } g \text{ mit } f \circ g = \mathrm{id} \text{ und } g \circ f = \mathrm{id} \\ &\Rightarrow (Ff) \circ (Fg) = \mathrm{id} \text{ und } (Fg) \circ (Ff) = \mathrm{id} \\ &\Rightarrow Ff \text{ ist Isomorphismus.} \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.7.2.8. Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ bildet man die **opponierte Kategorie** $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$. Man setzt dazu

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} := \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{C}^{\mathrm{opp}}(X, Y) := \mathcal{C}(Y, X)$$

und erklärt die Verknüpfung von Morphismen in $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ als die vertauschte Verknüpfung. Wir notieren einen Morphismus f als f°, wenn er in der opponierten Kategorie aufgefaßt werden soll, und haben also in Formeln $g^\circ \circ f^\circ := (f \circ g)^\circ$.

Beispiel 4.7.2.9 (**Bilden des Dualraums als Funktor**). Sei K ein Körper. Das Bilden des Dualraums mit dem Bilden der transponierten Abbildung auf dem Niveau der Homomorphismen ist auf den ersten Blick ein Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mod}_K & \to & \mathrm{Mod}_K^{\mathrm{opp}} \\ V & \mapsto & V^\top \\ f \downarrow & \mapsto & \uparrow f^\top \\ W & \mapsto & W^\top \end{array}$$

von der Kategorie der K-Vektorräume in ihre eigene opponierte Kategorie, vergleiche 3.2.9.15. Wenn wir es allerdings genau nehmen und ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ festhalten, so werden wir auf diese Weise im allgemeinen nur einen Funktor

$$\mathfrak{U}\mathrm{Mod}_K \to \mathfrak{V}\mathrm{Mod}_K^{\mathrm{opp}}$$

für ein eventuell größeres Mengensystem $\mathfrak{V}$ erhalten. Als konkretes Beispiel beachte man, daß über einem endlichen Körper der Dualraum eines abzählbaren Vektorraums im allgemeinen nicht mehr abzählbar ist. Ist jedoch unser Mengensystem $\mathfrak{U}$ ein „Universum“ im Sinne von 4.7.11.3 und gehört die Grundmenge unseres Körpers K zu $\mathfrak{U}$, so ist $\mathfrak{U}\mathrm{Mod}_K$ sogar stabil unter dem Dualraumfunktor.

Definition 4.7.2.10. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}^{\mathrm{opp}}$ heißt auch ein **kontravarianter Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$**.

4.7.2.11. Ausgeschrieben besteht ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ demnach aus einer Abbildung $F : \operatorname{Ob}\mathcal{A} \to \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ sowie für je zwei Objekte $X, Y \in \mathcal{A}$ einer Abbildung $F : \mathcal{A}(X,Y) \to \mathcal{B}(FY, FX)$ derart, daß gilt $F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ und $F(f \circ g) = Fg \circ Ff$ für alle verknüpfbaren Morphismen f, g.

Beispiel 4.7.2.12. Gegeben Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bildet man ihr **Produkt**, eine weitere Kategorie $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, wie folgt: Man setzt $\operatorname{Ob}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) := \operatorname{Ob}\mathcal{A} \times \operatorname{Ob}\mathcal{B}$, erklärt Morphismen in der Produktkategorie als Paare von Morphismen in den Ausgangskategorien, und erklärt die Verknüpfung von Morphismen in der Produktkategorie in der offensichtlichen Weise.

Beispiel 4.7.2.13. Das Bilden des Homomorphismenraums ist ein Funktor

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Mod}_K^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{Mod}_K & \to & \mathrm{Mod}_K & & \\
(V,W) & \mapsto & \mathrm{Hom}_K(V,W) & \ni & h \\
(f^\circ, g) \downarrow & \mapsto & \downarrow & & \downarrow \\
(V',W') & \mapsto & \mathrm{Hom}_K(V',W') & \ni & g \circ h \circ f
\end{array}$$

Hier sollte der ganz rechte vertikale Pfeil eigentlich ein $\mapsto$ sein, was ich aber mit meinem Schreibprogramm nicht hingekriegt habe. Die Notation $\mathrm{Hom}_K(V,K)$ betont, daß wir besagte Menge von Morphismen mit ihrer Vektorraumstruktur betrachten wollen.

Ergänzendes Beispiel 4.7.2.14. Das Bilden des Tensorprodukts ist ein Funktor

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Mod}_K \times \mathrm{Mod}_K & \to & \mathrm{Mod}_K \\
(V,W) & \mapsto & V \otimes W \\
(f,g) \downarrow & \mapsto & f \otimes g \downarrow \\
(V',W') & \mapsto & V' \otimes W'
\end{array}$$

Ergänzendes Beispiel 4.7.2.15. Das Bilden der r-ten Tensorpotenz nach 4.6.1.6 ist ein Funktor $\mathrm{Mod}_K \to \mathrm{Mod}_K$, $V \mapsto V^{\otimes r}$, $f \mapsto f^{\otimes r}$. Das Bilden der r-ten äußeren Potenz nach 4.6.5.3 ist ein Funktor $\mathrm{Mod}_K \to \mathrm{Mod}_K$, $V \mapsto \bigwedge^r V$ mit $f \mapsto \bigwedge^r f$ nach 4.6.5.16.

Beispiel 4.7.2.16. Das „Vergessen der Gruppenstruktur“ ist ein Funktor $v : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Ens}$ von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der Mengen. Es gibt noch viele weitere derartige **Vergiß-Funktoren**.

Beispiel 4.7.2.17. Jeder Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ liefert in offensichtlicher Weise einen Funktor $F^{\mathrm{opp}} : \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{B}^{\mathrm{opp}}$ zwischen den zugehörigen opponierten Kategorien. Oft notiert man ihn auch einfach F.

Beispiel 4.7.2.18. Gegeben ein Körper K bezeichne Modf_K mit f für „finitely generated“ die Kategorie der endlich erzeugten K-Vektorräume und $\mathrm{Modf}_K^\times$ die zugehörige Isomorphismenkategorie. Gegeben ein angeordneter Körper K ist das Bilden der Orientierungsmenge nach 3.6.5.3 ein Funktor

$$\mathrm{or} : \mathrm{Modf}_K^\times \to \mathrm{Ens}^\times$$

Definition 4.7.2.19.

1. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt **treu**, wenn er Injektionen $F : \mathcal{A}(A, A') \hookrightarrow \mathcal{B}(FA, FA')$ auf den Morphismen induziert, für alle $A, A' \in \mathcal{A}$.

2. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt **voll**, wenn er auf den Morphismenmengen Surjektionen $F : \mathcal{A}(A, A') \twoheadrightarrow \mathcal{B}(FA, FA')$ induziert, für alle $A, A' \in \mathcal{A}$.

3. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt **volltreu**, wenn er voll und treu ist, wenn er also er Bijektionen $F : \mathcal{A}(A, A') \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(FA, FA')$ auf den Morphismenmengen induziert. Ich notiere volltreue Funktoren gerne $\overset{\sim}{\hookrightarrow}$.

4. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt **essentiell surjektiv**, wenn er eine Surjektion auf Isomorphieklassen von Objekten induziert, wenn es also in Formeln für alle $B \in \mathcal{B}$ ein $A \in \mathcal{A}$ gibt mit $FA \cong B$.

5. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt eine **Äquivalenz von Kategorien**, wenn er volltreu und essentiell surjektiv ist. Ich notiere Äquivalenzen von Kategorien $\xrightarrow{\approx}$. Die doppelte Schlange soll andeuten, daß dieser Begriff schwächer ist als der Begriff eines Isomorphismus von Kategorien, wie er im Anschluß eingeführt wird.

6. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt ein **Isomorphismus von Kategorien**, wenn er bijektiv ist auf Objekten und auf Morphismen, wenn er also ein Isomorphismus ist in der Kategorie der Kategorien aus **??**. Ich notiere Isomorphismen von Kategorien $\xrightarrow{\sim}$.

Beispiel 4.7.2.20. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ erhalten wir einen Isomorphismus von Kategorien $[\mathcal{C}(X)] \xrightarrow{\sim} \{X\}$ zwischen der Ein-Objekt-Kategorie des Monoids der Endomorphismen von X und der vollen Unterkategorie von $\mathcal{C}$ mit dem einzigen Objekt X, indem wir die Identität auf den Morphismenmengen und die einzig mögliche Abbildung auf den Objektmengen nehmen.

Beispiel 4.7.2.21. Sei K ein Körper. Wir betrachten die Kategorie Modf_K aller endlichdimensionalen K-Vektorräume mit linearen Abbildungen als Morphismen. Dann ist unser Realisierungsfunktor $n \mapsto K^n$ aus 4.7.2.2 eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Mat}_K \xrightarrow{\approx} \mathrm{Modf}_K$$

zwischen unserer Matrixkategorie Mat_K und der Kategorie der endlich erzeugten K-Vektorräume, aber unser Funktor ist natürlich kein Isomorphismus von Kategorien. Diese Aussage faßt eine Vielzahl von Aussagen der linearen Algebra zusammen und illustriert meines Erachtens recht gut die Kraft und Eleganz der Sprache der Kategorientheorie.

Ergänzendes Beispiel 4.7.2.22 (**Die Matrixkategorie eines Mengensystems**). Gegeben ein Körper K und ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ bilden wir die **abstrakte Matrixkategorie** $\mathfrak{U}\mathrm{Mat}_K$ wie folgt: Objekte sind alle Mengen aus $\mathfrak{U}$, in Formeln $\mathrm{Ob}(\mathfrak{U}\mathrm{Mat}) := \mathfrak{U}$. Die Morphismenmengen erklären wir durch die Vorschrift

$$\mathfrak{U}\mathrm{Mat}_K(X,Y) := \left\{ T : X \times Y \to K \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Für jedes } x \in X \text{ gilt} \\ T(x,y) = 0 \text{ für fast alle } y \in Y \end{array} \right\}$$

Zumindest im Fall, daß $\mathfrak{U}$ keine überabzählbaren Mengen enthält, mag man sich als Elemente dieser Morphismenmengen Matrizen mit möglicherweise unendlich vielen Zeilen und Spalten aber höchstens endlich vielen von Null verschiedenen Einträgen in jeder Spalte denken. Die Verknüpfungen werden in der hoffentlich offensichtlichen Weise durch Summation über gleiche Indizes erklärt. Wir erhalten dann einen Funktor $\mathfrak{U}\mathrm{Mat}_K \to \mathrm{Mod}_K$, der auf Objekten durch die Konstruktion freier Vektorräume $X \mapsto K\langle X\rangle$ über den entsprechenden Mengen gegeben wird und auf Morphismen leicht vom Leser erraten werden kann. Ist $\mathfrak{U}$ ein „Universum“ im Sinne von 4.7.11.3, das den Körper K enthält, so erweist sich dieser Funktor sogar als eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathfrak{U}\mathrm{Mat}_K \xrightarrow{\approx} \mathfrak{U}\mathrm{Mod}_K$$

4.7.2.23. Gegeben ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ verstehen wir unter einer **$\mathfrak{U}$-Kategorie** eine Kategorie $\mathcal{C}$, bei der für alle Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ die Morphismenmenge zu unserem Mengensystem $\mathfrak{U}$ gehört, in Formeln $\mathcal{C}(X,Y) \in \mathfrak{U}$.

4.7.2.24. Die Menge aller Funktoren von einer Kategorie $\mathcal{A}$ in eine Kategorie $\mathcal{B}$ notieren wir

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A},\mathcal{B})$$

Sie ist eine Teilmenge $\mathrm{Cat}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \subset \mathrm{Ens}(\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}, \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}) \times \mathrm{Ens}(\mathrm{Mor}\,\mathcal{A}, \mathrm{Mor}\,\mathcal{B})$. In 19.5.1.21 werden wir eine Kategorie erklären, deren Objekte gerade die Funktoren $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ alias die Elemente von $\mathrm{Cat}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ sind, aber alles zu seiner Zeit.

Beispiel 4.7.2.25. Gegeben ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ und eine $\mathfrak{U}$-Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ ist die Zuordnung $Y \mapsto \mathcal{C}(X,Y)$ ein Funktor $\mathcal{C}(X,\ ) : \mathcal{C} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ und die Zuordnung $Y \mapsto \mathcal{C}(Y,X)$ ein Funktor $\mathcal{C}(\ ,X) : \mathcal{C} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}}$.

Beispiel 4.7.2.26 (**Funktoren zwischen Einobjektkategorien**). Gegeben Monoide G, H und die zugehörigen Einobjekttategorien $[G], [H]$ nach 4.7.1.6 erhalten

wir in der offensichtlichen Weise eine Bijektion zwischen der Menge aller Monoidhomomorphismen $G \to H$ und der Menge aller Funktoren $[G] \to [H]$, in Formeln also eine Bijektion

$$\mathrm{Mon}(G, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}([G], [H])$$

Übungen

Übung 4.7.2.27. Hat ein Funktor sogar die Eigenschaft, daß alle Morphismen, die er auf Isomorphismen abbildet, bereits zuvor Isomorphismen gewesen sein müssen, so nennt man ihn **konservativ**. Man gebe Beispiele für konservative und nichtkonservative Funktoren.

Übung 4.7.2.28. Jede Äquivalenz von Kategorien induziert eine Bijektion zwischen den zugehörigen Isomorphieklassen von Objekten. Zum Beispiel werden die endlichdimensionalen k-Vektorräume klassifiziert durch ihre Dimension, alias durch Elemente von $\mathbb{N}$, alias durch Isomorphieklassen der Matrixkategorie.

Übung 4.7.2.29 (**Zwei aus Drei für Äquivalenzen von Kategorien**). Seien $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Sind zwei der drei Funktoren F, G, GF Äquivalenzen von Kategorien, so auch der Dritte.

Übung 4.7.2.30. Bilden wir zu einer Kategorie eine volle Unterkategorie, indem wir aus jeder Isomorphieklasse von Objekten ein Objekt willkürlich auswählen, so ist der Einbettungsfunktor eine Äquivalenz von Kategorien.

Übung 4.7.2.31. Sind in einer Kategorie $\mathcal{C}$ je zwei Objekte isomorph, so ist für jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ der offensichtliche Funktor eine Äquivalenz von Kategorien

$$[\mathcal{C}(X)] \xrightarrow{\approx} \mathcal{C}$$

zwischen der Ein-Objekt-Kategorie des Endomorphismenmonoids $\mathcal{C}(X)$ von X und unserer Kategorie.

Übung 4.7.2.32. Gegeben Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ liefert jedes Paar (F, G) von Funktoren $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ einen wohlbestimmten Funktor in die Produktkategorie $(F, G) : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \times \mathcal{C}$.

4.7.3 Objekte mit Zusatzstrukturen*

4.7.3.1. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ erklären wir eine $(\mathcal{S}, v)$**-Struktur auf** X als eine Äquivalenzklasse von Paaren (S, φ) bestehend aus einem Objekt $S \in \mathcal{S}$ und einem Isomorphismus $\varphi : v(S) \xrightarrow{\sim} X$ mit der Maßgabe, daß (S, φ) äquivalent ist zu (T, ψ), wenn es einen Isomorphismus $i : S \xrightarrow{\sim} T$ gibt mit $\varphi = \psi \circ v(i)$.

Beispiel 4.7.3.2. Sei $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem. Wir erhalten für jede Menge $X \in \mathfrak{U}$ eine offensichtliche Bijektion zwischen der Menge aller Verknüpfungen auf X, die X zu einer Gruppe machen, und der Menge aller $(\mathfrak{U}\mathrm{Grp}, v)$-Strukturen auf X für $v : \mathfrak{U}\mathrm{Grp} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ der Vergißfunktor.

Beispiel 4.7.3.3. Sei $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem. Wir erhalten für jede Menge $X \in \mathfrak{U}$ eine offensichtliche Bijektion zwischen der Menge aller Verknüpfungen auf X, die X zu einer abelschen Gruppe machen, und der Menge aller $(\mathfrak{U}\mathrm{Ab}, v)$-Strukturen auf X für $v : \mathfrak{U}\mathrm{Ab} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ der Vergißfunktor.

Beispiel 4.7.3.4. Sei $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem. Wir erhalten für jede Menge $X \in \mathfrak{U}$ eine offensichtliche Bijektion zwischen der Menge aller Topologien auf X und der Menge aller $(\mathfrak{U}\mathrm{Top}, v)$-Strukturen auf X für $v : \mathfrak{U}\mathrm{Top} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ der Vergißfunktor.

Beispiel 4.7.3.5. Seien k ein Körper und $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem. Wir erhalten für jede abelsche Gruppe $X \in \mathfrak{U}\mathrm{Ab}$ eine offensichtliche Bijektion zwischen der Menge aller Abbildungen $k \times X \to X$, die als Multiplikation mit Skalaren die Gruppe X zu einem k-Vektorraum machen, und der Menge aller $(\mathfrak{U}\mathrm{Mod}_k, v)$-Strukturen auf X für $v : \mathfrak{U}\mathrm{Mod}_k \to \mathfrak{U}\mathrm{Ab}$ der Vergißfunktor.

4.7.3.6. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ und ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ von Objekten mit $(\mathcal{S}, v)$-Struktur sagen wir, unser Morphismus sei **verträglich mit der $(\mathcal{S}, v)$-Struktur**, wenn für beliebige Wahlen von Repräsentanten (S, φ) und (T, ψ) der jeweiligen $(\mathcal{S}, v)$-Strukturen auf X und Y unser f das Bild unter v eines Morphismus $F : S \to T$ ist, genauer $f = \psi \circ v(F) \circ \varphi^{-1}$. Offensichtlich ist die Identität auf einem Objekt mit jeder $(\mathcal{S}, v)$-Struktur auf besagtem Objekt verträglich und die Verknüpfung von verträglichen Morphismen ist wieder verträglich. Die so erklärte Kategorie der **Objekte von $\mathcal{C}$ mit $(\mathcal{S}, v)$-Struktur** notieren wir

$$\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$$

Wir erhalten eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{S} \xrightarrow{\approx} \mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$ durch die Vorschrift $S \mapsto (S, \mathrm{id}_{v(S)})$.

Beispiel 4.7.3.7. Gegeben ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ ist unsere Äquivalenz aus 4.7.3.6 sogar ein Isomorphismus

$$\mathfrak{U}\mathrm{Grp} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U}\mathrm{Ens}_{(\mathfrak{U}\mathrm{Grp},v)}$$

zwischen der Kategorie aller Mengen $G \in \mathfrak{U}$ mit einer Verknüpfung, die sie zu einer Gruppe macht, und der Kategorie aller Mengen $G \in \mathfrak{U}$ versehen mit einer Äquivalenzklasse von Paaren (S, φ) bestehend aus einem Objekt $S \in \mathfrak{U}\mathrm{Grp}$ zusammen mit einer Bijektion von Mengen $\varphi : S \xrightarrow{\sim} G$ unter der in 4.7.3.1 gegebenen Äquivalenzrelation. Dasselbe gilt für das Vergessen der Topologie $v : \mathfrak{U}\mathrm{Top} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ oder das Vergessen der Operation der Skalare $v : \mathfrak{U}\mathrm{Mod}_k \to \mathfrak{U}\mathrm{Ab}$

in der Kategorie der Moduln über einem Ring k und überhaupt in allen konkreten Anwendungen, die mir in den Sinn kommen.

4.7.3.8. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ nennen wir einen Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$ **initial**, wenn für alle $W \in \mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$ gilt

$$\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}(W, X) = \{e \in \mathcal{C}(W, X) \mid fe \in \mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}(W, Y)\}$$

Initiale Morphismen heißen oft **Einbettungen**. Es ist klar, daß jede Verknüpfung initialer Morphismen initial ist und daß eine Verknüpfung von zwei Morphismen in $\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$ nur dann initial sein kann, wenn der erste initial ist. Einen Morphismus in $\mathcal{S}$ nennen wir v**-initial**, wenn er unter v einen $(\mathcal{S}, v)$-initialen Morphismus induziert.

Beispiel 4.7.3.9. Sei $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem. Im Fall der $\mathfrak{U}$-Mengen mit $(\mathfrak{U}\mathrm{Grp}, v)$-Struktur sind genau die injektiven mit der Struktur verträglichen Abbildungen initial. Ist in der Tat $f : X \hookrightarrow Y$ ein Gruppenhomomorphismus und W eine Gruppe, so ist eine Abbildung $e : W \to X$ genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn $fe : W \to Y$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

4.7.3.10. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ und ein Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ und eine $(\mathcal{S}, v)$-Struktur auf Y gibt es höchstens eine $(\mathcal{S}, v)$-Struktur auf X derart, daß f initial wird. In der Tat, repräsentieren (S, φ) und (T, ψ) zwei derartige Strukturen, so muß die Identität auf X verträglich sein sowohl als Morphismus $(X, S, \varphi) \to (X, T, \psi)$ als auch als Morphismus in die Gegenrichtung und daraus folgt leicht, daß diese beiden Daten dieselbe Struktur repräsentieren. Wir nennen sie die **induzierte Struktur** oder die **initiale Struktur** auf X.

Beispiel 4.7.3.11. Sei $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem. Im Fall der $\mathfrak{U}$-Mengen mit $(\mathfrak{U}\mathrm{Top}, v)$-Struktur alias topologischen Räume aus $\mathfrak{U}$ heißt unsere induzierte Struktur die Initialtopologie und im Fall der Einbettung einer Teilmenge auch die induzierte Topologie oder Spurtopologie oder Teilraumtopologie. In dieser Situation gibt es stets eine initiale Struktur.

Beispiele 4.7.3.12. Sei $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem. Im Fall des Vergessens der Verknüpfung $v : \mathfrak{U}\mathrm{Grp} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ existiert eine induzierte Struktur genau für diejenigen Abbildungen, die injektiv sind und deren Bild eine Untergruppe ist. Die induzierte Struktur ist dann die induzierte Gruppenstruktur. Eine Teilmenge $X \subset Y$ einer Menge Y mit $(\mathcal{S}, v)$-Struktur nennt man ganz allgemein ein $(\mathcal{S}, v)$**-Unterobjekt**, wenn sie eine induzierte Struktur besitzt. Beispiele sind Untergruppen, Untervektorräume, affine Teilräume, Unterringe und so weiter.

4.7.3.13. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ ist auch $v^{\mathrm{opp}} : \mathcal{S}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ ein treuer Funktor und wir erhalten in der offensichtlichen Weise einen Isomorphismus von Kategorien

$$(\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)})^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\mathrm{opp}}_{(\mathcal{S}^{\mathrm{opp}}, v^{\mathrm{opp}})}$$

Morphismen $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$ mit f° initial in Bezug auf die jeweiligen $(\mathcal{S}^{\mathrm{opp}}, v^{\mathrm{opp}})$-Strukturen nennen wir **final**. Ausgeschrieben bedeutet das, daß für jedes weitere Objekt $Z \in \mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$ gilt

$$\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}(Y,Z) = \{g \in \mathcal{C}(Y,Z) \mid gf \in \mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}(X,Z)\}$$

Finale Morphismen heißen oft **Quotienten**. Es ist klar, daß jede Verknüpfung finaler Morphismen final ist und daß eine Verknüpfung von zwei Morphismen in $\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$ nur dann final sein kann, wenn der zweite final ist. Einen Morphismus in $\mathcal{S}$ nennen wir v**-final**, wenn er unter v einen $(\mathcal{S},v)$-finalen Morphismus induziert.

4.7.3.14. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ und ein Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ und eine $(\mathcal{S},v)$-Struktur auf X gibt es höchstens eine $(\mathcal{S},v)$-Struktur auf Y derart, daß f final wird. Wir nennen sie die **koinduzierte Struktur** oder die **finale Struktur** auf Y.

Beispiel 4.7.3.15. Sei $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem. Im Fall der $\mathfrak{U}$-Mengen mit $(\mathfrak{U}\mathrm{Top}, v)$-Struktur alias topologischen Räume heißt unsere koinduzierte Struktur die Finaltopologie und insbesondere im Fall von surjektiven Abbildungen auch die Quotiententopologie.

Beispiele 4.7.3.16. Sei $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem. Im Fall des Vergessens der Verknüpfung $v : \mathfrak{U}\mathrm{Grp} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ existiert eine koinduzierte Struktur genau für diejenigen Abbildungen von einer Gruppe in eine Menge, die faktorisieren in einen surjektiven Gruppenhomomorphismus gefolgt von einer Bijektion, und die koinduzierte Struktur ist die von einer und jeder derartigen Bijektion induzierte Gruppenstruktur.

Vorschau 4.7.3.17. In 15.1.6.16 und 15.1.7.8 führen wir allgemeiner „gesamthaft initiale“ und „gesamthaft finale“ Familien ein.

Übungen

Übung 4.7.3.18. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$, der zusätzlich konservativ ist, kann die Identität auf einem Objekt $X \in \mathcal{C}$ nicht für zwei unterschiedliche $(\mathcal{S},v)$-Strukturen (S,φ) und (T,ψ) auf X ein Morphismus $(X,S,\varphi) \to (X,T,\psi)$ sein.

4.7.4 Transformationen

4.7.4.1. Bis hierher hat sich unsere Theorie noch in leidlich vertrauten Bahnen bewegt: Wir haben eben eine neue Art von Strukturen erklärt, die Kategorien, und dazwischen strukturerhaltende Abbildungen alias Morphismen betrachtet, die Funktoren. Insoweit paßt alles noch in den strukturellen Rahmen, an den man in

der linaren Algebra durch das Studium von Vektorräumen und linearen Abbildungen oder Gruppen und Gruppenhomomorphismen gewöhnt worden ist. Das Neue bei der Kategorientheorie ist nun, daß es auch „Morphismen zwischen Morphismen“ gibt. Sie heißen „Transformationen von Funktoren“ und sind das Thema dieses Abschnitts.

Definition 4.7.4.2. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien und $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktoren. Eine **Transformation** $\tau : F \Rightarrow G$ ist eine Vorschrift, die jedem Objekt $X \in \mathcal{A}$ einen Morphismus $\tau_X \in \mathcal{B}(FX, GX)$ zuordnet derart, daß für jeden Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{A}$ das Rechteck

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\ FY \arrow[r, "\tau_Y"] & GY \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{B}$ kommutiert. In Formeln meint das die Gleichheit $(Gf) \circ \tau_X = \tau_Y \circ (Ff)$ in der Morphismenmenge $\mathcal{B}(FX, GY)$. Ob ein Doppelpfeil eine Transformation von Funktoren oder vielmehr eine Implikation meint, muß der Leser aus dem Kontext erschließen. Sind alle τ_X Isomorphismen, so nenne ich τ eine **Isotransformation** und notiere sie $\tilde{\Rightarrow}$, aber diese Terminologie ist nicht gebräuchlich. In der Literatur spricht man eher von einem **Isomorphismus von Funktoren** oder auch von einer **Äquivalenz von Funktoren**. Gibt es zwischen zwei Funktoren eine Isotransformation, so heißen sie **isomorph**.

4.7.4.3 (**Diskussion der Doppelpfeil-Notation**). Ich finde die Notation von Transformationen durch Doppelpfeile didaktisch hilfreich in derselben Weise wie die Notation $\vec{v}$ für Vektoren am Anfang der linearen Algebra. Andererseits werden wir sie nicht konsequent durchhalten können und das ist auch nicht sinnvoll, denn wie in 19.5.1.21 erklärt können auch die Transformationen als Morphismen einer Kategorie aufgefaßt werden, der „Funktorkategorie“.

4.7.4.4 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißen unsere Transformationen meist „natürliche Transformationen“. Diese Terminologie schien mir jedoch unnötig umständlich und entspricht auch nicht meinem Sprachempfinden: Ich möchte zum Beispiel unter der „natürlichen“ Transformation des Identitätsfunktors auf der Kategorie aller $\mathbb{R}$-Vektorräume in den Bidualraumfunktor gerne die in 4.7.4.9 gegebene Transformation verstehen, die zwar keineswegs die einzige Transformation zwischen diesen Funktoren ist, aber vielleicht schon die „natürlichste“.

Beispiel 4.7.4.5 (**Die Länge als Transformation**). Ich betrachte den Vergißfunktor und den Längengeradenfunktor 4.7.2.4 von der Kategorie der euklidischen Vektorräume in die Kategorie der reellen Vektorräume. Schalten wir noch einen

weiteren Vergißfunktor nach, so werden sie zu Funktoren $\mathrm{Euk} \to \mathrm{Ens}$. Unsere in 4.1.5.12 erklärten Längenabbildungen $\| \ \|_V : V \to \mathbb{L}(V)$ bilden dann in ihrer Gesamtheit eine Transformation $\mathrm{verg} \Rightarrow \mathbb{L}$ zwischen Funktoren $\mathrm{Euk} \to \mathrm{Ens}$. Ob ich nämlich erst einen Vektor vermittels eines Homomorphismus von euklidischen Vektorräumen in einen weiteren euklidischen Vektorraum abbilde und dann seine Länge in Bezug auf den Bildraum nehme, oder erst seine Länge nehme und diese vermittels des auf den Längengeraden induzierten Homomorphismus zu einer Länge in Bezug auf den Bildraum mache, es kommt beidesmal dasselbe heraus.

Beispiel 4.7.4.6 (**Winkelmaße als Transformationen**). Wir betrachten den Funktor $\mathrm{W} : \mathrm{KongEb} \to \mathrm{Grp}$, der jeder Kongruenzebene (E, K) ihre Winkelgruppe $\mathrm{W}(E) := \vec{K}^+$ zuordnet, also die Gruppe ihrer orientierungserhaltenden Richtungskongruenzen. Unsere Winkelmaße aus 4.1.8.1 können wir auffassen als Transformationen

$$\mathrm{or}_{\mathbb{R}} \circ \mathrm{Richt} \Rightarrow \mathrm{W}$$

von Funktoren $\mathrm{KongEb} \to \mathrm{Grp}$ alias „natürliche“ Gruppenhomomorphismen $\mathrm{or}_{\mathbb{R}}(\vec{E}) \to \mathrm{W}(E)$ von der Orientierungsgerade in die Winkelgruppe.

4.7.4.7. Winkelmaße sind etwas grundsätzlich anderes als Einheiten. Ein Winkelmaß in einer Kongruenzebene anzugeben bedeutet, ein Winkelmaß in allen Kongruenzebenen anzugeben. Eine Längeneinheit in einer Kongruenzebene anzugeben bedeutet dahingegen keineswegs, eine Längeneinheit in allen Kongruenzebenen anzugeben.

Beispiel 4.7.4.8 (**Das kanonische Skalarprodukt als Transformation**). Unsere kanonischen Skalarprodukte $\langle \ , \ \rangle_V : V \otimes V \to \mathbb{L}(V)^{\otimes 2}$ für euklidische Vektorräume aus 4.6.4.6 bilden in ihrer Gesamtheit eine Transformation

$$\mathrm{verg}^{\otimes 2} \Rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$$

zwischen Funktoren $\mathrm{Euk} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}$ von der Kategorie der euklidischen Vektorräume in die Kategorie der $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Beispiel 4.7.4.9 (**Evaluation als Transformation**). Gegeben ein Körper K bezeichne $B : \mathrm{Mod}_K \to \mathrm{Mod}_K$ den **Bidualraumfunktor**, der jedem K-Vektorraum V seinen Bidualraum $BV := V^{\top\top}$ zuordnet. So bilden die Evaluationsabbildungen $\mathrm{ev}_V : V \to V^{\top\top}$, $v \mapsto (f \mapsto f(v))$ in ihrer Gesamtheit eine Transformation

$$\mathrm{ev} : \mathrm{Id} \Rightarrow B$$

und eine Isotransformation zwischen den Restriktionen dieser Funktoren auf die Kategorie der endlichdimensionalen K-Vektorräume, vergleiche 3.2.9.26. Oft formalisiert man Situationen dieser Art nicht bis ins Letzte aus und spricht von **kanonischen Abbildungen** beziehungsweise **kanonischen Isomorphismen**, wenn

bei formalerer Betrachtung Abbildungen $\tau_X : FX \to GX$ oder Isomorphismen $\tau_X : FX \xrightarrow{\sim} GX$ gemeint sind, die in ihrer Gesamtheit eine Transformation beziehungsweise Isotransformation von Funktoren $\tau : F \overset{\sim}{\Rightarrow} G$ bilden.

Beispiel 4.7.4.10 (**Dualraum und Transponieren**). Seien K ein Körper und $D : \mathrm{Mod}_K \to \mathrm{Mod}_K^{\mathrm{opp}}$ der **Dualraumfunktor**, der jedem Raum seinen Dualraum zuordnet. Sei weiter Mat_K die Matrixkategorie aus 4.7.1.7 und $T : \mathrm{Mat}_K \to \mathrm{Mat}_K^{\mathrm{opp}}$ der Funktor, der die Objekte festhält und Matrizen transponiert. Sei schließlich $R : \mathrm{Mat}_K \to \mathrm{Mod}_K$ unser Realisierungsfunktor $n \mapsto K^n$ aus 4.7.2.2 und bezeichne R^{opp} den entsprechenden Funktor zwischen den jeweils opponierten Kategorien. So erhalten wir eine Isotransformation

$$\tau : R^{\mathrm{opp}}T \overset{\sim}{\Rightarrow} DR$$

durch die Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl alias jedem Objekt $n \in \mathrm{Mat}_K$ den offensichtlichen Isomorphismus $\tau_n : K^n \xrightarrow{\sim} (K^n)^\top$ zuordnet. Es kann hilfreich sein, durch Doppelpfeile in Diagrammen von Kategorien und Funktoren klarzumachen, zwischen welchen Funktoren eine Transformation gemeint ist. So wäre etwa in diesem Beispiel unser τ ein möglicher Doppelpfeil im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mat}_K \arrow[r, "T"] \arrow[d, "R"'] & \mathrm{Mat}_K^{\mathrm{opp}} \arrow[d, "R^{\mathrm{opp}}"] \arrow[dl, Rightarrow, "\tau", "\sim"'] \\
\mathrm{Mod}_K \arrow[r, "D"] & \mathrm{Mod}_K^{\mathrm{opp}}
\end{tikzcd}$$

Beispiel 4.7.4.11 (**Tensor und Hom**). Die natürlichen Abbildungen

$$\mathrm{can} : V^\top \otimes_K W \to \mathrm{Hom}_K(V, W)$$

aus 4.6.1.21 für K-Vektorräume V, W liefern eine Transformation zwischen den durch diese Vorschriften gegebenen Funktoren

$$\mathrm{Mod}_K^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{Mod}_K \to \mathrm{Mod}_K$$

4.7.4.12 (**Kategorien von Funktoren**). Sind $\tau : F \Rightarrow G$ und $\sigma : G \Rightarrow H$ Transformationen, so ist auch $\sigma \circ \tau : F \Rightarrow H$ gegeben durch $(\sigma \circ \tau)_X := \sigma_X \circ \tau_X$ für jedes Objekt X der Ausgangskategorie von F eine Transformation. Des weiteren gibt es für jeden Funktor F die **identische Transformation** $\mathrm{id} = \mathrm{id}_F$ von besagtem Funktor zu sich selber, gegeben durch $(\mathrm{id}_F)_X := \mathrm{id}_{FX}$ für jedes Objekt X der Ausgangskategorie unseres Funktors. Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien, so bilden die Funktoren $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sogar selbst eine Kategorie, mit Funktoren als Objekten und Transformationen als Morphismen und der eben erklärten Verknüpfung von Transformationen als Verknüpfung von Morphismen. Ich verwende für diese **Funktorkategorie** verschiedene Notationen. Erst einmal dieselbe Notation $\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ wie

für die Menge der Objekte, dann die Notation $\underline{\mathrm{Cat}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ wenn es darum geht, die Zusatzstruktur als Kategorie zu betonen, weiter die Notation $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$, weil es sich um einen Spezialfall von „internem Hom“ erweisen wird, und als besonders kurze Form die exponentielle Notation $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$, so daß etwa für Funktoren $F,G:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ die Menge der Transformationen

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A},\mathcal{B})(F,G)=\mathcal{B}^{\mathcal{A}}(F,G)$$

notiert werden kann. Wenn die Kategorien selber durch größere Ausdrücke gegeben werden, sind für die Menge der Transformationen auch abkürzende Notationen wie etwa $\mathrm{Trans}(F,G)$ sinnvoll und üblich. Unsere Isotransformationen sind genau die Isomorphismen der Funktorkategorie.

Ergänzung 4.7.4.13 (**Exponentialgesetz für Kategorien**). Man zeige, daß man für je drei Kategorien $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ eine Bijektion

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A},\underline{\mathrm{Cat}}(\mathcal{B},\mathcal{C}))\xrightarrow{\sim}\mathrm{Cat}(\mathcal{A}\times\mathcal{B},\mathcal{C})$$

erhält durch die Vorschrift $F\mapsto\tilde{F}$ mit $\tilde{F}(A,B)=(F(A))(B)$ auf Objekten und eine vom Leser zu spezifizierende Vorschrift auf Morphismen. Man baut diese auch leicht zu einem Isomorphismus von Kategorien aus, und das folgt alternativ auch aus allgemeinen Aussagen zu „internem Hom“, wie sie etwa in 18.1.5.12 diskutiert werden.

Beispiel 4.7.4.14. Seien $F,G:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ Funktoren und $\tau:F\Rightarrow G$ eine Transformation. Gegeben ein weiterer Funktor $H:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ erhalten wir in offensichtlicher Weise eine Transformation $H\tau:HF\Rightarrow HG$. Gegeben ein weiterer Funktor $K:\mathcal{D}\to\mathcal{A}$ erhalten wir in offensichtlicher Weise ebenso eine Transformation $\tau K:FK\Rightarrow GK$. Offensichtlich liefern diese Konstruktionen ihrerseits Funktoren $\mathrm{Cat}(\mathcal{A},\mathcal{B})\to\mathrm{Cat}(\mathcal{A},\mathcal{C})$ und $\mathrm{Cat}(\mathcal{A},\mathcal{B})\to\mathrm{Cat}(\mathcal{D},\mathcal{B})$ zwischen den entsprechenden Funktorkategorien, die wir als das **Nachschalten von** H beziehungsweise **Vorschalten von** K bezeichnen.

4.7.4.15 (**Schwierigkeiten der Notation**). Die Notationen τK und $H\tau$ führen leicht zu Verwirrung, sobald nicht aus der Art der Symbole heraus klar ist, welche Symbole Funktoren und welche Transformationen darstellen. Ich kenne keine generelle Lösung für diese Schwierigkeiten der Notation. In diesem Abschnitt habe ich versucht, eine gewisse Übersichtlichkeit dadurch zu erreichen, daß ich systematisch lateinische Großbuchstaben für Funktoren und kleine griechische Buchstaben für Transformationen verwende.

Übungen

Übung 4.7.4.16. Gegeben ein Körper K zeige man, daß der Funktor $\mathrm{Modf}_K^\times\to\mathrm{Modf}_K^\times$ von der Isomorphiekategorie der endlichdimensionalen K-Vektorräume

zu sich selber, der jedem Raum seinen Dualraum zuordnet und jedem Isomorphismus die Inverse der transponierten Abbildung $\varphi \mapsto (\varphi^\top)^{-1}$, nicht isomorph ist zum Identitätsfunktor. Hinweis: Man passe im Fall des Körpers mit zwei Elementen besonders gut auf.

Übung 4.7.4.17. Seien K ein Körper und $\mathrm{Id} : \mathrm{Mod}_K \to \mathrm{Mod}_K$ der Identitätsfunktor. Man bestimme alle Transformationen von diesem Funktor zu sich selber. Ebenso bestimme man alle Transformationen von diesem Funktor zum Bidualraumfunktor.

Übung 4.7.4.18. Sind zwei Funktoren isomorph und ist der eine eine Äquivalenz von Kategorien, so auch der andere.

Übung 4.7.4.19. Man diskutiere, inwiefern die in 4.6.5.3 für jeden Vektorraum V konstruierten kanonischen Isomorphismen $(\bigwedge^r V)^\top \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^r(V)$ eine Isotransformation bilden. Idem für die in 4.6.5.9 für jeden endlichdimensionalen Vektorraum V konstruierten kanonischen Isomorphismen $\bigwedge^r(V^\top) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^r(V)$.

Übung 4.7.4.20. Gegeben ein Monoid G heißt eine Abbildung $\phi : X \to Y$ von G-Mengen **äquivariant**, wenn gilt $\phi(gx) = g\phi(x)$ für alle $g \in G$ und $x \in X$. Die G-Mengen mit den äquivarianten Abbildungen als Morphismen bilden dann eine Kategorie, für die ich die beiden Notationen $G\text{-}\mathrm{Ens} = \mathrm{Ens}_{G\backslash}$ verwende. Bilden wir zu unserem Monoid G die Ein-Objekt-Kategorie $[G]$, so liefert der hoffentlich offensichtliche Funktor einen Isomorphismus von Kategorien

$$G\text{-}\mathrm{Ens} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}([G], \mathrm{Ens})$$

Ergänzende Übung 4.7.4.21 (**Komplexifizierung einer Reellifizierung**). Wir erhalten eine Isotransformation zwischen Funktoren $\mathrm{Mod}_\mathbb{C} \to \mathrm{Mod}_\mathbb{C}$ vermittels der Abbildungen $i_V : \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} V \xrightarrow{\sim} V \oplus \overline{V}$ gegeben durch $\alpha \otimes v \mapsto (\alpha v, \alpha \bar{v})$ in den Notationen 4.1.12.33. Die inverse Isotransformation wird beschrieben durch die Abbildungsvorschrift

$$(v, \bar{w}) \quad \mapsto \quad (1/2) \otimes (v + w) - (\mathrm{i}/2) \otimes (\mathrm{i}v - \mathrm{i}w)$$

Im übrigen bildet unser Isomorphismus oben den Eigenraum $\mathrm{Eig}(1 \otimes \mathrm{i} | \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} V; \mathrm{i})$ isomorph auf V ab und den Eigenraum $\mathrm{Eig}(1 \otimes \mathrm{i} | \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} V; -\mathrm{i})$ isomorph auf $\overline{V}$. Der schieflineare Automorphismus $\alpha \otimes v \mapsto \bar{\alpha} \otimes v$ von $\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} V$ schließlich entspricht unter unserem Isomorphismus dem schieflinearen Automorphismus $(v, \bar{w}) \mapsto (w, \bar{v})$ von $V \oplus \overline{V}$.

Ergänzende Übung 4.7.4.22. Wir erhalten eine Isotransformation zwischen Funktoren $\mathrm{Mod}_\mathbb{C} \to \mathrm{Mod}_\mathbb{C}^{\mathrm{opp}}$ vermittels der Abbildungen $\overline{V^\top} \xrightarrow{\sim} \overline{V}^\top$ gegeben durch $\bar{\varphi} \mapsto \bar{c} \circ \varphi$ in den Notationen 4.1.12.33, mit $\bar{c} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der komplexen Konjugation. Diese Identifikation scheint mir so kanonisch, daß ich auch oft $\bar{\varphi}$ statt $\bar{c} \circ \varphi$ schreiben werde.

Ergänzung 4.7.4.23 (**Dualraum und Restriktion der Skalare**). Gegeben ein komplexer Vektorraum V erklären wir einen natürlichen Isomorphismus

$$\operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}}(V^\top) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^\top$$

zwischen der Reellifizierung seines Dualraums und dem Dualraum seiner Reellifizierung durch die Vorschrift $\lambda \mapsto 2\mathrm{Re}\lambda$. Es kommutiert dann das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}}(V^\top) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "i_{V^\top}"', "\wr"] & \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (\operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^\top \arrow[r, "\sim"] & (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^\top \\
V^\top \oplus \overline{V^\top} \arrow[rr, "\sim"] & & V^\top \oplus \overline{V}^\top \arrow[u, "i_V^\top"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$

Hier kommen die Vertikalen von 4.7.4.21 her, unten ist die von 4.7.4.22 gelieferte Abbildung $(\lambda, \bar{\mu}) \mapsto (\lambda, \bar{c} \circ \mu)$ gemeint mit $\bar{c} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der komplexen Konjugation, und in der oberen Horizontale die Abbildung, die aus obiger Identifikation $\operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}}(V^\top) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^\top$ unter der Komplexifikation entsteht, gefolgt von der Identifikation $(W^\top)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} (W_{\mathbb{C}})^\top$ aus 4.6.1.42. Der Faktor 2 zu Beginn scheint mir nicht nur angemessen, da er obiges Diagramm zum Kommutieren bringt, sondern auch, da man allgemeiner für jede „endliche separable Körpererweiterung“ vernünftigerweise einen natürlichen Isomorphismus $\operatorname{res}_K^k(V^\top) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{res}_K^k V)^\top$ erklärt durch die Vorschrift $\lambda \mapsto \mathrm{S}_K^k \circ \lambda$ mit $\mathrm{S}_K^k : K \to k$ der Spur aus 7.8.3.1.

Ergänzende Übung 4.7.4.24. Gegeben ein Körper K erhalten wir eine Isotransformation von Funktoren $\mathrm{Mod}_K \times \mathrm{Mod}_K \to \mathrm{Mod}_K$ vermittels der durch das Dachprodukt gegebenen Abbildungen

$$\bigoplus_{i+j=k} \bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W \xrightarrow{\sim} \bigwedge^k (V \oplus W)$$

Zusammen mit Übung 4.7.4.21 erhalten wir insbesondere Isotransformationen von Funktoren $\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}$ alias für komplexe Vektorräume V kanonische Isomorphismen $\bigoplus_{i+j=k} \bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j \overline{V} \xrightarrow{\sim} \bigwedge^k (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V)$.

Ergänzende Übung 4.7.4.25. Gegeben Funktoren $F, F' : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G, G' : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ sowie Transformationen $\alpha : F \Rightarrow F'$ und $\beta : G \Rightarrow G'$ gilt die Gleichheit $\beta F' \circ G\alpha = G'\alpha \circ \beta F$ von Transformationen $GF \Rightarrow G'F'$. Wir notieren diese Transformation auch $\alpha * \beta : GF \Rightarrow G'F'$ und nennen sie die **Juxtaposition** unserer beiden Transformationen. Unsere Identität ist auch gleichbedeutend zu der Aussage, daß das Nachschalten einen Funktor $\mathrm{Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \to \mathrm{Cat}(\mathcal{B}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$ liefert, oder auch in ausführlicherer Notation das Vorschalten einen Funktor

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathrm{Cat}(\mathrm{Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{C}), \mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{C}))$$

Übung 4.7.4.26. Man zeige: Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist genau dann eine Äquivalenz von Kategorien, wenn es eine Äquivalenz von Kategorien in die Gegenrichtung $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ gibt nebst einer Isotransformation $\tau : \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \overset{\sim}{\Rightarrow} GF$. Die Äquivalenz G oder genauer das Paar (G, τ) heißt dann ein **quasiinverser Funktor zu** F. Man zeige weiter: Zu jedem Paar (G, τ) wie eben gibt es genau eine Isotransformation $\eta : FG \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ mit $(\eta F) \circ (F\tau) = \mathrm{id}_F$.

Übung 4.7.4.27. Man zeige: Genau dann ist ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine Äquivalenz von Kategorien, wenn es einen Funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ gibt derart, daß FG isomorph ist zum Identitätsfunktor auf $\mathcal{B}$ und GF isomorph zum Identitätsfunktor auf $\mathcal{A}$.

Übung 4.7.4.28. Man zeige: Gegeben eine Äquivalenz von Kategorien $F : \mathcal{A} \overset{\approx}{\to} \mathcal{B}$ und ein Funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ nebst einer Isotransformation $\tau : FG \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ ist auch G eine Äquivalenz von Kategorien und (G, τ) quasiinvers zu F.

Übung 4.7.4.29 (**Äquivalenzen von Funktorkategorien**). Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien und ist $K : \mathcal{A}' \overset{\approx}{\to} \mathcal{A}$ eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Vorschalten von K eine Äquivalenz von Funktorkategorien

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \overset{\approx}{\to} \mathrm{Cat}(\mathcal{A}', \mathcal{B})$$

Ist ähnlich $H : \mathcal{B} \overset{\approx}{\to} \mathcal{B}'$ eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Nachschalten von H eine Äquivalenz von Funktorkategorien

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \overset{\approx}{\to} \mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}')$$

4.7.5 Natürliche Konstruktionen in der Geometrie

4.7.5.1 (**Kanonische Skalarprodukte als Transformationen**). Wir interessieren uns nun für die Kategorie Euk der euklidischen Vektorräume und für Funktoren

$$\mathrm{Euk} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}$$

Beispiele sind das Vergessen der euklidischen Struktur verg oder das Bilden der Längengerade $\mathbb{L}$ oder Tensorpotenzen dieser Funktoren wie etwa $\mathrm{verg}^{\otimes r}$ oder $\mathbb{L}^{\otimes r}$. Unsere kanonischen Skalarprodukte sind Transformationen

$$\mathrm{verg}^{\otimes 2} \Rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$$

von Funktoren alias Morphismen in der Funktorkategorie $\mathrm{Cat}(\mathrm{Euk}, \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}})$.

4.7.5.2 (**Kanonische Skalarprodukte brauchen Einheiten**). Wir betrachten den konstanten Funktor $\mathrm{C}_{\mathbb{R}} : \mathrm{Euk} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}$, der jedem euklidischen Vektorraum den

reellen Vektorraum $\mathbb{R}$ zuordnet und jeder euklidischen linearen Abbildung die Identität. Wir zeigen, daß es außer der Nulltransformation keine Transformation

$$\mathrm{verg}^{\otimes 2} \Rightarrow \mathrm{C}_{\mathbb{R}}$$

gibt. In der Tat ist die Multiplikation mit jeder reellen Zahl $\lambda \neq 0$ für jeden euklidischen Vektorraum V eine euklidische Abbildung $(\lambda\cdot) : V \to V$ und jede bilineare Abbildung $\eta : V \times V \to \mathrm{C}_{\mathbb{R}}$ mit $\eta(v, w) = \eta(\lambda v, \lambda w)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^\times$ ist offensichtlich Null. Salopp gesprochen gibt es also „kein kanonisches Skalarprodukt auf euklidischen Räumen mit Werten in den reellen Zahlen“.

4.7.5.3 (**Kanonische Spatprodukte als Transformation**). Nun halten wir $n \in \mathbb{N}_{>0}$ fest und interessieren uns für die Kategorie Euk_n der n-dimensionalen euklidischen Vektorräume und die Funktorkategorie $\mathrm{Cat}(\mathrm{Euk}_n, \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}})$. Zu dieser Funktorkategorie gehören etwa die Funktoren $\mathrm{verg}^{\otimes n} : V \mapsto V^{\otimes n}$ und $\mathrm{or}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{L}^{\otimes n} : V \mapsto \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)^{\otimes n}$ und eine Transformation $\tau : \mathrm{verg}^{\otimes n} \Rightarrow \mathrm{or}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{L}^{\otimes n}$ wird gegeben wird durch die Gesamtheit der in 4.6.4.3 konstruierten linearen Abbildungen $\tau_V : V^{\otimes n} \to \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)^{\otimes n}$ und im Fall $n = 3$ speziell durch unsere kanonischen Spatprodukte

$$\langle\ ,\ ,\ \rangle : V^{\otimes 3} \to \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)^{\otimes 3}$$

Man überzeugt sich unschwer, daß wir auf diese Weise sogar für jedes n eine Isotransformation $\tau : \bigwedge^n \mathrm{verg} \overset{\approx}{\Rightarrow} \mathrm{or}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{L}^{\otimes n}$ erhalten.

4.7.5.4 (**Kanonische Kreuzprodukte als Transformation**). Das Kreuzprodukt ist eine Transformation $\times : \mathrm{verg}^{\otimes 2} \Rightarrow \mathrm{verg} \otimes \mathrm{or}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{L}$ alias ein Morphismus in der Funktorkategorie $\mathrm{Cat}(\mathrm{Euk}_3, \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}})$, der gegeben wird durch die in 4.6.4.9 konstruierten Morphismen

$$\times : V \otimes V \to V \otimes \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)$$

4.7.5.5 (**Klassifikationsfragen und Gruppenhomomorphismen**). Um die Funktorkategorie $\mathrm{Cat}(\mathrm{Euk}_n, \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}})$ für vorgegebenes n besser zu verstehen, mag man von der Erkenntnis ausgehen, daß in der Kategorie Euk_n der n-dimensionalen euklidischen Vektorräume je zwei Objekte isomorph sind und nach 4.7.2.31 folglich der Einbettungsfunktor eine Äquivalenz

$$[\mathrm{Euk}(\mathbb{R}^n)] \overset{\approx}{\to} \mathrm{Euk_n}$$

ist. Die Automorphismengruppe des $\mathbb{R}^n$ mit seiner Standardstruktur als euklidischer Raum ist nun die Gruppe $\mathrm{GO}(n) := \mathbb{R}^\times \mathrm{O}(n) = \mathrm{Euk}(\mathbb{R}^n)$ aller seiner **linearen Ähnlichkeiten**. Wir können so unsere Äquivalenz von oben umschreiben zu einer Äquivalenz $[\mathrm{GO}(n)] \overset{\approx}{\to} \mathrm{Euk_n}$. Bezeichnet andererseits $\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}^{d\text{-dim}}$ die

Kategorie der d-dimensionalen reellen Vektorräume, so erhalten wir ebenso eine Äquivalenz $[\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(d)] \xrightarrow{\approx} \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}^{d\text{-dim}}$. Weil nach 4.7.4.29 Äquivalenzen von Kategorien Äquivalenzen von Funktorkategorien induzieren, erhalten wir so Äquivalenzen von Kategorien

$$\mathrm{Cat}(\mathrm{Euk}_n, \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}^{d\text{-dim}}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Cat}([\mathrm{GO}(n)], \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}^{d\text{-dim}}) \xleftarrow{\approx} \mathrm{Cat}([\mathrm{GO}(n)], [\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(d)])$$

und damit nach 4.7.2.28 Bijektionen zwischen den jeweiligen Mengen von Isomorphieklassen. Objekte von $\mathrm{Cat}([\mathrm{GO}(n)], [\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(d)])$ sind nun Monoidhomomorphismen $\mathrm{GO}(n) \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(d)$ alias Gruppenhomomorphismen $\mathrm{GO}(n) \to \mathrm{GL}(d;\mathbb{R})$, und zwei solche Gruppenhomomorphismen ϕ, ψ sind isomorphe Objekte genau dann, wenn es $A \in \mathrm{GL}(d;\mathbb{R})$ gibt mit $(\mathrm{int}\, A) \circ \phi = \psi$. So erkennen wir zum Beispiel, daß Funktoren, die jedem n-dimensionalen euklidischen Vektorraum einen eindimensionalen Vektorraum zuordnen, klassifiziert werden durch die Menge aller Gruppenhomomorphismen $\mathrm{GO}(n) \to \mathbb{R}^\times$. Die folgende Tabelle gibt einige Beispiele für solche Funktoren in die Kategorie der eindimensionalen reellen Vektorräume und die zugehörigen Gruppenhomomorphismen.

Funktoren	$\mathrm{Euk}_n \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}^{1\text{-dim}}$	Morphismen	$\mathrm{GO}(n) \to \mathbb{R}^\times$
konstanter Funktor	$\mathrm{C}_{\mathbb{R}}$	konstanter	1
Maximalpotenz	$\bigwedge^n$	Determinante	$\det$
Orientierungsgerade	$\mathrm{or}_{\mathbb{R}}$		$\det / \lvert \det \rvert$
Längengerade	$\mathbb{L}$		$\sqrt[n]{\lvert \det \rvert}$

Übungen

Ergänzende Übung 4.7.5.6. Gibt es für zweidimensionale euklidische Vektorräume V nichttriviale natürliche Gruppenhomomorphismen $\mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V) \to \mathrm{O}(V)$ von der Orientierungsgerade in die orthogonale Gruppe?

4.7.6 Köcher*

4.7.6.1. Der Begriff einer Transformation ist in noch größerer Allgemeinheit natürlich und sinnvoll, wie hier kurz skizziert werden soll.

Definition 4.7.6.2. Ein **Köcher** ist ein Datum $\mathcal{Q} = (P, E, a, e)$ bestehend aus zwei Mengen P, E und zwei Abbildungen $a, e : P \to E$. Wir nennen die Elemente von E die **Ecken** oder auch **Punkte** des Köchers und die Elemente von P seine **Pfeile**. Für einen Pfeil $\vec{p} \in P$ nennen wir $a(\vec{p})$ seinen **Anfangspunkt** und $e(\vec{p})$

seinen **Endpunkt**. Ein **Morphismus** F von unserem Köcher in einen weiteren Köcher (P', E', a', e') ist ein Paar bestehend aus einer Abbildung $F : P \to P'$ und einer Abbildung $F : E \to E'$ derart, daß gilt $Fa = a'F$ und $Fe = e'F$. Wir erhalten so die Kategorie der Köcher

$$\mathrm{Car}$$

Ähnlich wie bei Kategorien schreiben wir auch gerne abkürzend $\mathcal{Q}$ für die Eckenmenge eines Köchers $\mathcal{Q} = (P, E, a, e)$ und $\mathcal{Q}(x, y)$ für die Menge der Pfeile mit Anfangspunkt x und Endpunkt y.

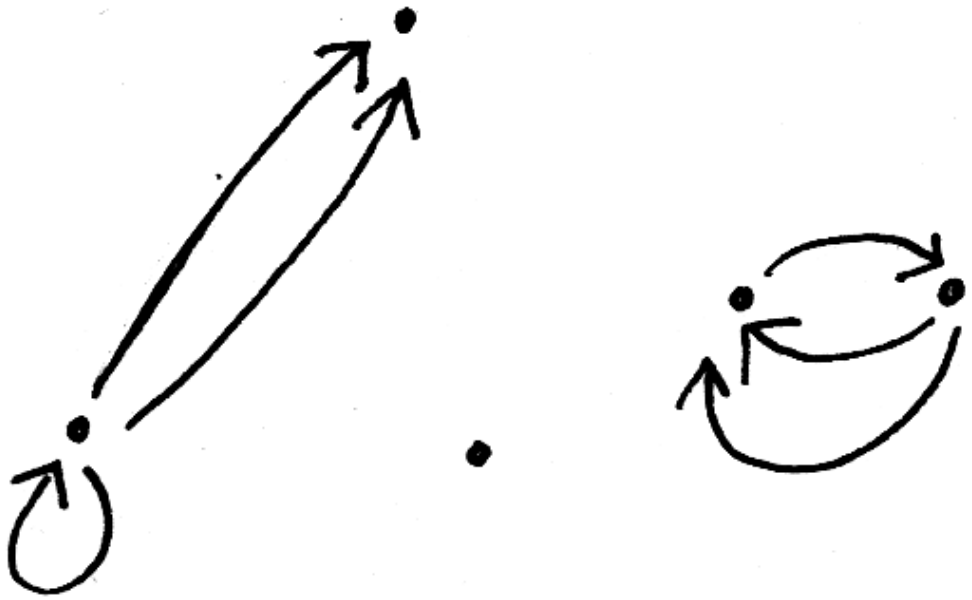
4.7.6.3. Auf Englisch sagt man **quiver**, auf Französisch **carquois**. Auf Englisch heißen die Ecken **vertices** und die Pfeile **arrows** oder **edges**.

4.7.6.4. Jede Kategorie liefert einen Köcher, mit den Objekten als Ecken und den Morphismen als Pfeilen. Zu jeder Menge Ω bilden wir den **Ein-Punkt-Köcher** $[\Omega]$, mit nur einem Punkt $*$ und für jedes $\omega \in \Omega$ einem Pfeil von diesem Punkt zu sich selbst. Ein Köcher heißt **endlich**, wenn er nur endlich viele Punkte und Pfeile hat. Manche Autoren nennen einen Köcher auch ein **Diagrammschema**. Ein Köchermorphismus von einem Köcher in eine Kategorie heißt eine **Darstellung unseres Köchers** in besagter Kategorie oder auch eine **Realisierung unseres Diagrammschemas** in besagter Kategorie oder, wenn wir auf das zugrundeliegende Diagrammschema nicht Bezug nehmen wollen, ein **Diagramm** in besagter Kategorie.

Ergänzung 4.7.6.5. Bezeichne $\rightrightarrows$ die Kategorie mit zwei Objekten Pf, Ec und vier Morphismen, von denen Zwei die Identitäten sind und Zwei von Pf nach Ec gehen und „Anfang“ und „Ziel“ heißen mögen. Dann kann die Kategorie der Köcher verstanden werden als die Funktorkategorie $\mathrm{Cat}(\rightrightarrows, \mathrm{Ens})$.

Ergänzung 4.7.6.6. Eine **Verknüpfung auf einem Köcher** $\mathcal{Q}$ ist eine Sammlung von Abbildungen $\mathcal{Q}(x, y) \times \mathcal{Q}(y, z) \to \mathcal{Q}(x, z)$ für alle $x, y, z \in \mathcal{Q}$. Einen Köcher mit Verknüpfung nennen wir auch einen **Magmaoid**. Ein **Morphismus von Magmaoiden** ist ein Köchermorphismus, der mit den jeweiligen Verknüpfungen verträglich ist. Eine Kategorie ist in dieser Terminologie Magmaoid, das noch zusätzliche Eigenschaften hat, die man „Assoziativität“ und „Existenz von Identitätspfeilen“ nennen mag und die wir zur Bedingung **unitärasoziativ** zusammenfassen.

Definition 4.7.6.7. Seien $\mathcal{Q}$ ein Köcher, $\mathcal{B}$ eine Kategorie und $F, G : \mathcal{Q} \to \mathcal{B}$ Köchermorphismen. Eine **Transformation** $\tau : F \Rightarrow G$ ist eine Vorschrift, die jeder Ecke $x \in \mathcal{Q}$ einen Morphismus $\tau_x \in \mathcal{B}(F(x), G(x))$ zuordnet derart, daß



Veranschaulichung eines endlichen Köchers mit 5 Ecken und 6 Pfeilen.

für jeden Pfeil $\vec{p} : x \to y$ in unserem Köcher $\mathcal{Q}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{\tau_x} & G(x) \\ {\scriptstyle F(\vec{p})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(\vec{p})} \\ F(y) & \xrightarrow{\tau_y} & G(y) \end{array}$$

in unserer Kategorie $\mathcal{B}$ kommutiert. Sind alle τ_x Isomorphismen, so heißt τ eine **Isotransformation**. Die Menge aller Transformationen bezeichnen wir mit $\mathrm{Car}(\mathcal{Q}, \mathcal{B})(F, G)$ oder $\mathrm{Trans}_{\mathcal{Q}\to\mathcal{B}}(F, G)$ oder abkürzend mit $\mathrm{Trans}_{\mathcal{Q}}(F, G)$ oder auch nur mit $\mathrm{Trans}(F, G)$.

4.7.6.8. Wie in 19.5.1.21 die Funktoren bilden für jeden Köcher $\mathcal{Q}$ und jede Kategorie $\mathcal{C}$ die Köchermorphismen $\mathcal{Q} \to \mathcal{C}$ die Objekte einer Kategorie $\mathrm{Car}(\mathcal{Q}, \mathcal{C})$ mit Transformationen als Morphismen.

Beispiel 4.7.6.9. Seien K ein Körper und $\downarrow$ der Köcher mit zwei Punkten und einem Pfeil vom einen zum anderen. Die Isomorphieklassen in der Kategorie von Köchermorphismen $\mathrm{Car}(\downarrow, \mathrm{Modf}_K)$ werden durch die Theorie der Smith-Normalform 3.2.5.7 bestimmt: Die Dimensionen der beiden beteiligten Vektorräume sowie der Rang der linearen Abbildung legen eine Darstellung dieses Köchers in endlichdimensionalen Vektorräumen bereits bis auf Isomorphie eindeutig fest.

Beispiel 4.7.6.10. Seien K ein Körper und $\circlearrowleft$ der Köcher mit einem Punkt und einem Pfeil von diesem Punkt zu sich selber. Die Isomorphieklassen in der Kategorie $\mathrm{Car}(\circlearrowleft, \mathrm{Modf}_K)$ werden zumindest im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers K bestimmt durch die Theorie der Jordan'schen Normalform 4.3.4.5.

Übungen

Übung 4.7.6.11. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ Köcher und $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Kategorien. Ist $K : \mathcal{A}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ ein Isomorphismus von Köchern, so liefert das Vorschalten von K einen Isomorphismus von Kategorien

$$\mathrm{Car}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Car}(\mathcal{A}', \mathcal{B})$$

Ist ähnlich $H : \mathcal{B} \xrightarrow{\approx} \mathcal{B}'$ eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Nachschalten von H eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Car}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Car}(\mathcal{A}, \mathcal{B}')$$

Übung 4.7.6.12. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{Q}$ Köcher und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{Q}$ ein Köchermorphismus, der für je zwei Ecken $x, y \in \mathcal{C}$ eine Surjektion $\mathcal{C}(x, y) \twoheadrightarrow \mathcal{Q}(x, y)$ induziert. Gegeben eine Verknüpfung auf $\mathcal{C}$ gibt es höchstens eine Verknüpfung auf $\mathcal{Q}$ derart, daß

F ein Morphismus von Magmaoiden wird. Wenn es solch eine Verknüpfung gibt, heißt unser Köchermorphismus **angepaßt an die Verknüpfung** und die fragliche Verknüpfung auf $\mathcal{Q}$ die **auf $\mathcal{Q}$ koinduzierte Verknüpfung**. Ist unser Magmaoid $\mathcal{C}$ eine Kategorie, so auch der Köcher $\mathcal{Q}$ mit der koinduzierten Verknüpfung.

4.7.7 Produkte und Koprodukte in Kategorien

Definition 4.7.7.1. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und X, Y Objekte von $\mathcal{C}$. Ein **Produkt** von X und Y ist ein Datum (P, p, q) bestehend aus (1) einem Objekt $P \in \mathcal{C}$ und (2) Morphismen $p : P \to X$ und $q : P \to Y$, den sogenannten **Projektionen**, derart daß gilt: Ist $Z \in \mathcal{C}$ ein Objekt und sind $a : Z \to X$, $b : Z \to Y$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $c : Z \to P$ mit $p \circ c = a$ und $q \circ c = b$. Wir notieren diesen Morphismus dann $c = (a, b)$ oder, ganz pedantisch und wenn wir ihn von den Morphismen aus einem Koprodukt absetzen wollen, als Spalte $c = (a, b)^\top$.

Beispiele 4.7.7.2. In der Kategorie der Mengen ist das sogenannte kartesische Produkt $P = X \times Y$ mit p, q den üblichen Projektionsabbildungen ein Produkt von X und Y. Analoges gilt in der Kategorie der Vektorräume, der Gruppen, der Ringe, der Monoide, der abelschen Gruppen, und vielen weiteren Strukturen der Bauart „Menge mit ausgezeichneten Verknüpfungen und speziellen Elementen“.

4.7.7.3 (**Eindeutigkeit von Produkten**). Produkte in Kategorien sind im wesentlichen eindeutig, falls sie existieren. Sind genauer (P, p, q) und $(\tilde{P}, \tilde{p}, \tilde{q})$ zwei mögliche Produkte der Objekte X und Y, so gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft von P genau ein $c : \tilde{P} \to P$ mit $p \circ c = \tilde{p}$ und $q \circ c = \tilde{q}$ und ebenso genau ein $d : P \to \tilde{P}$ mit $\tilde{p} \circ d = p$ und $\tilde{q} \circ d = q$. Weiter gibt es auch genau ein $f : P \to P$ mit $p \circ f = p$ und $q \circ f = q$, und da sowohl $f = \mathrm{id}$ als auch $f = c \circ d$ diese Bedingung erfüllen, folgt $c \circ d = \mathrm{id}$. Ebenso erhalten wir $d \circ c = \mathrm{id}$, mithin sind c und d zueinander inverse Isomorphismen. Aufgrund dieser Eindeutigkeit sprechen wir ab jetzt meist von *dem* Produkt und notieren es

$$(X \times Y, \mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y)$$

oder auch noch ausführlicher $X \times^{\mathcal{C}} Y$. Morphismen in das Produkt schreiben wir auch (a, b). Sind schließlich Morphismen $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ gegeben und existieren die Produkte $X \times Y$ und $X' \times Y'$, so benutzen wir die Abkürzung $(f \circ \mathrm{pr}_X, g \circ \mathrm{pr}_Y) = f \times g$ und nennen diesen Morphismus den **Produktmorphismus**

$$f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$$

Definition 4.7.7.4. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor. Sind in $\mathcal{A}$ Morphismen $p : P \to X$ und $q : P \to Y$ gegeben, so erhalten wir Morphismen $Fp : FP \to FX$ und

$Fq : FP \to FY$ in $\mathcal{B}$. Wenn das Produkt $FX \times FY$ existiert, erhalten wir so auch einen Morphismus $(Fp, Fq) : FP \to FX \times FY$. Wenn schließlich auch das Produkt $X \times Y$ existiert, so erhalten wir, indem wir es als unser P nehmen, in unserer ausführlichen Notation einen natürlichen Morphismus

$$F(X \times^{\mathcal{A}} Y) \to FX \times^{\mathcal{B}} FY$$

4.7.7.5. Der Morphismus von eben muß im allgemeinen kein Isomorphismus sein. Im Fall des Vergißfunktors von Vektorräumen über einem vorgegebenen Körper zu Mengen ist er jedoch stets ein Isomorphismus von Mengen alias eine bijektive Abbildung.

4.7.7.6. Produkte können auch für allgemeine Familien von Objekten ein- und derselben Kategorie erklärt werden, wie im folgenden ausgeführt werden soll. Wir besprechen dies Konzept zunächst im Fall der Kategorie der Mengen.

4.7.7.7 (**Produkte von Mengen, Variante**). Allgemeiner als in 3.1.3.1 diskutiert kann man auch für eine beliebige Familie von Mengen $(X_i)_{i\in I}$ eine neue Menge bilden als die Menge aller Tupel $(x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \in X_i$ für alle $i \in I$. Diese **Produktmenge** notiert man

$$\prod_{i\in I} X_i$$

und die Projektionsabbildungen werden mit $\mathrm{pr}_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ oder ähnlich bezeichnet. Wieder können wir für beliebige Abbildungen $f_i : Z \to X_i$ eine Abbildung $f = (f_i)_{i\in I} : Z \to \prod_{i\in I} X_i$ definieren durch die Vorschrift $f(z) = (f_i(z))_{i\in I}$ und jede Abbildung von einer Menge Z in ein Produkt ist von dieser Form mit $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f$. In Formeln ausgedrückt liefert das Nachschalten der Projektionen also für jede Menge Z eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ens}\left(Z, \prod_{i\in I} X_i\right) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i\in I} \mathrm{Ens}(Z, X_i) \\ f & \mapsto & (\mathrm{pr}_i \circ f) \end{array}$$

Definition 4.7.7.8. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten von $\mathcal{C}$. Ein **Produkt** der X_i ist ein Datum $(P, (p_i)_{i\in I})$ bestehend aus (1) einem Objekt $P \in \mathcal{C}$ und (2) Morphismen $p_i : P \to X_i$, den sogenannten **Projektionen**, derart daß gilt: Ist $Y \in \mathcal{C}$ ein Objekt und sind $q_i : Y \to X_i$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $q : Y \to P$ mit $p_i \circ q = q_i \ \forall i \in I$. Wir notieren diesen Morphismus dann $q = (q_i)_{i\in I}$ oder ganz pedantisch auch schon mal $q = (q_i)^{\top}_{i\in I}$.

Beispiele 4.7.7.9. In der Kategorie der Mengen ist $P = \prod_{i\in I} X_i$ mit p_i den üblichen Projektionsabbildungen ein Produkt der X_i. Produkte in der Kategorie der Vektorräume diskutieren wir in 4.7.8.4.

Beispiel 4.7.7.10 (**Nichtexistenz übergroßer Produkte in** $\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$). Wählen wir ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ und betrachten präziser die Kategorie $\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ der Mengen aus $\mathfrak{U}$, so wird es im allgemeinen beliebige durch eine Menge I indizierte Produkte in $\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ nicht geben. Enthält zum Beispiel $\mathfrak{U}$ eine Menge Z mit mindestens zwei Elementen, so überlegt man sich leicht, daß etwa ein Produkt $\prod_{i\in\mathfrak{U}} Z$ in $\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ nicht existieren kann.

Beispiel 4.7.7.11 (**Nichtexistenz übergroßer Produkte im allgemeinen**). Ist allgemein $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $I := \bigsqcup_{X,Y\in\mathcal{C}} \mathcal{C}(X,Y)$ die Menge der Morphismen von $\mathcal{C}$ und gibt es Objekte Z, W mit mindestens zwei Morphismen $|\mathcal{C}(Z,W)| \geq 2$, so kann das Produkt $P := \prod_{i\in I} W$ in $\mathcal{C}$ nicht existieren, da wir $|\mathcal{C}(Z,P)| \geq |\mathcal{P}(I)|$ hätten und die Kardinalität der Menge aller Morphismen in ganz $\mathcal{C}$ nach Annahme $|I|$ ist und da stets gilt $|I| < |\mathcal{P}(I)|$.

4.7.7.12 (**Eindeutigkeit von Produkten, Variante**). Produkte in Kategorien sind im wesentlichen eindeutig, falls sie existieren. Sind genauer $(P,(p_i))$ und $(\tilde{P},(\tilde{p}_i))$ zwei mögliche Produkte der Objekte X_i, so gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft von P genau ein $\tilde{p} : \tilde{P} \to P$ mit $p_i \circ \tilde{p} = \tilde{p}_i$ und ebenso genau ein $p : P \to \tilde{P}$ mit $\tilde{p}_i \circ p = p_i$. Weiter gibt es auch genau ein $f : P \to P$ mit $p_i \circ f = p_i$, und da sowohl $f = \mathrm{id}$ als auch $f = \tilde{p} \circ p$ diese Bedingung erfüllen, folgt $\tilde{p} \circ p = \mathrm{id}$. Ebenso erhalten wir $p \circ \tilde{p} = \mathrm{id}$, mithin sind p und $\tilde{p}$ zueinander inverse Isomorphismen. Aufgrund dieser Eindeutigkeit sprechen wir ab jetzt meist von *dem* Produkt und notieren es

$$\left(\prod_{i\in I} X_i, (\mathrm{pr}_i)_{i\in I}\right)$$

oder $\prod^{\mathcal{C}}$, wenn wir auch noch die Kategorie $\mathcal{C}$ spezifizieren wollen, oder im Fall endlicher angeordneter Familien $X_1 \times \ldots \times X_n$ und benutzen für die Projektionen manchmal auch die Notation pr_{X_i}. Morphismen in das Produkt schreiben wir im Fall endlicher angeordneter Familien auch $(q_1, \ldots, q_n)$ oder ganz pedantisch als Spalte $(q_1, \ldots, q_n)^\top$.

4.7.7.13 (**Umindizierung**). Die Frage der Abhängigkeit eines Produkts von der Wahl der Indexmenge ist subtiler als es auf den ersten Blick scheinen mag. Natürlich liefert jede Umindizierung vermittels einer Bijektion zwischen der Indexmenge und einer weiteren Menge einen ausgezeichneten Isomorphismus zwischen den jeweiligen Produkten. Jedoch liefert die Umindizierung vermittels einer Permutation der Indexmenge im allgemeinen nicht die Identität auf dem jeweiligen Produkt.

4.7.7.14 (**Produkte über leere Familien**). Das Produkt über eine leere Familie von Mengen erklärt man als „die“ einpunktige Menge. Damit wird das Bilden von Produkten von Mengen „assoziativ“ in der Weise, daß wir bei einer Familie

$(I_j)_{j\in J}$ von Indexmengen mit disjunkter Vereinigung $I = \bigsqcup_j I_j$ stets eine kanonische Bijektion

$$\prod_{i\in I} X_i \xrightarrow{\sim} \prod_{j\in J}\left(\prod_{i\in I_j} X_i\right)$$

haben. Das Produkt über eine leere Familie in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$ verstehen wir analog als „das“ finale Objekt, da dann die offensichtliche Abbildung auch in diesem Fall Bijektionen $\mathcal{C}(Y, \prod_{i\in I} X_i) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathcal{C}(Y, X_i)$ liefert. Wenn wir sagen, eine Kategorie **habe endliche Produkte**, so meinen wir stets implizit, daß auch die Existenz eines finalen Objekts mit gefordert sein soll.

4.7.7.15. Produkte in der opponierten Kategorie heißen „Koprodukte“. Im folgenden schreiben wir das aus.

Definition 4.7.7.16. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten aus $\mathcal{C}$. Ein **Koprodukt** der X_i ist ein Datum $(K, (\mathrm{in}_i)_{i\in I})$ bestehend aus einem Objekt $K \in \mathcal{C}$ und Morphismen $\mathrm{in}_i : X_i \to K$ derart, daß gilt: Ist $Z \in \mathcal{C}$ ein Objekt und sind $f_i : X_i \to Z$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $f : K \to Z$ mit $f \circ \mathrm{in}_i = f_i \ \forall i \in I$. Wir notieren diesen Morphismus dann auch $(f_i)_{i\in I}$ und hoffen, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, wann damit ein Morphismus aus einem Koprodukt und wann ein Morphismus in ein Produkt gemeint ist. Wenn es drauf ankommt, mag ein Morphismus in ein Produkt eben als Spalte mit einem hochgestellten $\top$ notiert werden und ein Morphismus aus einem Koprodukt als Zeile. Wir notieren Koprodukte $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ oder ausführlicher $\bigsqcup^{\mathcal{C}}_{i\in I} X_i$ und bei endlich vielen Faktoren auch $X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$. Ein leeres Koprodukt ist dasselbe wie ein initiales Objekt.

Beispiel 4.7.7.17 (**Disjunkte Vereinigungen von Mengen**). Das Koprodukt in der Kategorie der Mengen über eine beliebige Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Mengen heißt ihre **disjunkte Vereinigung**

$$\bigsqcup_{i\in I} X_i := \bigcup_{i\in I} (X_i \times \{i\})$$

Das Anhängen der Indizes auf der rechten Seite ist hier nur eine Vorsichtsmaßnahme für den Fall, daß unsere Mengen nicht disjunkt gewesen sein sollten. Jede derartige disjunkte Vereinigung ist versehen mit Inklusionsabbildungen $\mathrm{in}_j : X_j \to \bigsqcup_{i\in I} X_i$. Weiter können wir für beliebige Abbildungen $f_i : X_i \to Z$ in eine Menge Z die Abbildung $f : \bigsqcup_{i\in I} X_i \to Z$ bilden durch die Vorschrift $f(x) = f_i(x)$ für $x \in X_i$, und jede Abbildung der disjunkten Vereinigung in eine Menge Z ist von dieser Form mit $f_i = f \circ \mathrm{in}_i$. In Formeln ausgedrückt liefert das Vorschalten der Injektionen also für jede Menge Z eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ens}\left(\bigsqcup_{i\in I} X_i, Z\right) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i\in I} \mathrm{Ens}(X_i, Z) \\ f & \mapsto & (f \circ \mathrm{in}_i) \end{array}$$

Die disjunkte Vereinigung von endlich vielen Mengen $X_1, \ldots, X_n$ notieren wir auch $X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$.

4.7.7.18 (**Notationen für disjunkte Vereinigungen**). Gegeben eine Menge X und darin eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Teilmengen schreiben wir statt $\bigcup_{i \in I} X_i$ auch $\bigsqcup_{i \in I} X_i$, wenn wir zusätzlich andeuten wollen, daß unsere Teilmengen paarweise disjunkt sind. In der Tat ist die Eigenschaft, paarweise disjunkt zu sein, ja gleichbedeutend dazu, daß die offensichtliche Abbildung $\bigsqcup_{i \in I} X_i \to X$ eine Bijektion $\bigsqcup_{i \in I} X_i \xrightarrow{\sim} \bigcup_{i \in I} X_i$ liefert. In derselben Weise verwenden wir bei endlich vielen Teilmengen $X_1, \ldots, X_n$ einer gegebenen Menge die Notation $X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$. In der Literatur werden statt $\sqcup$ alternativ auch die Symbole $\dot\cup$ und $\uplus$ verwendet.

Vorschau 4.7.7.19. Das Koprodukt in der Kategorie der Vektorräume über einem vorgegebenen Körper heißt auch die „direkte Summe“ und wird in 4.7.8.4 besprochen.

4.7.7.20. Wie in 4.7.7.4 im Fall von zwei Faktoren besprochen erhalten wir für einen Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Objekten von $\mathcal{A}$, wenn Produkte der X_i und der FX_i existieren, einen natürlichen Morphismus

$$F\left(\prod X_i\right) \to \prod FX_i$$

Ist er „stets“ ein Isomorphismus, so sagen wir metasprachlich, der Funktor F sei **verträglich mit beliebigen Produkten**. Gilt das nur für Produkte endlicher Familien, so sagen wir, unser Funktor sei **verträglich mit endlichen Produkten**. Bereits die Verträglichkeit mit endlichen Produkten schließt die Eigenschaft mit ein, daß finale Objekte auf finale Objekte abgebildet werden. Dual erklären wir die Verträglichkeit mit beliebigen beziehungsweise endlichen Koprodukten.

Beispiel 4.7.7.21. Sei K ein Körper. Der vergeßliche Funktor $v : \mathrm{Mod}_K \to \mathrm{Ens}$ ist verträglich mit beliebigen Produkten, aber nicht mit beliebigen, nicht einmal mit endlichen, ja noch nicht einmal mit dem leeren Koprodukt. Mehr dazu diskutieren wir im folgenden Abschnitt 4.7.8.

Vorschau 4.7.7.22. Für die algebraisch Gebildeten unter Ihnen sei bemerkt, daß in der Kategorie Kring der kommutativen Ringe das Tensorprodukt über $\mathbb{Z}$ im Sinne von 7.2.6 ein Koprodukt ist, sofern die Multiplikation auf $A \otimes B$ durch $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ erklärt wird und die kanonischen Morphismen durch $a \mapsto a \otimes 1$ und $b \mapsto 1 \otimes b$.

Übungen

Übung 4.7.7.23. Man präzisiere und zeige die „Assoziativität“ von Produkten, die die Formel $(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z)$ andeutet.

Übung 4.7.7.24. Man zeige, daß in der Kategorie der kommutativen Monoide das Produkt $M \times N$ zusammen mit $\mathrm{in}_1 : M \to M \times N$, $m \mapsto (m, 0)$ und $\mathrm{in}_2 : N \to M \times N$, $m \mapsto (0, n)$ ein Koprodukt ist.

4.7.8 Produkte und Summen von Vektorräumen*

Definition 4.7.8.1. Gegeben eine Familie $(V_i)_{i \in I}$ von Vektorräumen über einem Körper K bilden wir zwei neue K-Vektorräume, ihr **Produkt** $\prod V_i$ und ihre **direkte Summe** oder kurz **Summe** $\bigoplus V_i$ durch die Regeln

$$\begin{aligned} \textstyle\prod_{i \in I} V_i &:= \{(v_i)_{i \in I} \mid v_i \in V_i\} \\ \textstyle\bigoplus_{i \in I} V_i &:= \{(v_i)_{i \in I} \mid v_i \in V_i \text{ und nur endlich viele } v_i \text{ sind nicht null}\} \end{aligned}$$

Die Vektorraumstruktur ist dabei komponentenweise zu verstehen. Dieselben Konstruktionen sind auch im Fall von Gruppen sinnvoll, wenn wir „null“ als das jeweilige neutrale Element verstehen, und wir werden beide Konstruktionen auch in diesem Kontext verwenden.

4.7.8.2. Für eine endliche Familie von Gruppen oder Vektorräumen $V_1, \ldots, V_s$ stimmen die direkte Summe und das Produkt überein. Wir benutzen dann alternativ die beiden Notationen

$$V_1 \oplus \ldots \oplus V_s = V_1 \times \ldots \times V_s$$

Wir zeigen im folgenden, daß die direkte Summe ein Koprodukt in der Kategorie der Vektorräume ist. Die allgemeine Notation $\sqcup$ für Koprodukte benutzen wir für Vektorräume aber nur ungern und verwenden sie in konkreten Situationen vorzugsweise für das Koprodukt von Mengen alias deren disjunkte Vereinigung.

Beispiel 4.7.8.3 (**Summe und Produkt konstanter Familien**). Im Fall der konstanten Familie $(K)_{x \in X}$ erhalten wir einen Isomorphismus des freien Vektorraums über X im Sinne von 3.2.3.4 mit unserer direkten Summe

$$K\langle X \rangle \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x \in X} K$$

vermittels der Abbildungsvorschrift $\sum_{x \in X} a_x x \mapsto (a_x)_{x \in X}$. Auch im Fall einer allgemeineren konstanten Familie $(V)_{x \in X}$ erhalten wir einen Vektorraumisomorphismus

$$\mathrm{Ens}(X, V) \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in X} V$$

vermittels der Abbildungsvorschrift $f \mapsto (f(x))_{x \in X}$.

4.7.8.4 (**Universelle Eigenschaften von Summe und Produkt**). Das Produkt beziehungsweise die Summe haben im Fall von Vektorräumen oder allgemeiner von abelschen Gruppen die folgenden Eigenschaften: Die offensichtlichen Einbettungen und Projektionen sind Homomorphismen

$$\mathrm{in}_i : V_i \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \mathrm{pr}_i : \prod_{i\in I} V_i \twoheadrightarrow V_i$$

und ist V ein weiterer K-Vektorraum, so induzieren die durch Vorschalten der in_i bezihungsweise Nachschalten der pr_i gegebenen Abbildungen Bijektionen, ja sogar Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_K\left(\bigoplus_{i\in I} V_i, V\right) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_K(V_i, V) \\ f & \mapsto & (f \circ \mathrm{in}_i)_{i\in I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_K\left(V, \prod_{i\in I} V_i\right) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_K(V, V_i) \\ f & \mapsto & (\mathrm{pr}_i \circ f)_{i\in I} \end{array}$$

Im Fall nichtabelscher Gruppen ist nur die Zweite dieser Abbildungen eine Bijektion. Ich gebe zu, daß das Symbol in_i nun in zweierlei Bedeutung verwendet wird: Einmal bei Mengen für die Einbettung in eine disjunkte Vereinigung und ein andermal bei Vektorräumen für die Einbettung in eine direkte Summe. Was jeweils gemeint ist, muß aus dem Kontext erschlossen werden. Betrachten wir im Fall des ersten Isomorphismus speziell den Fall $V = K$, so erhalten wir einen Isomorphismus zwischen dem Dualraum einer direkten Summe und dem Produkt der Dualräume der Summanden.

4.7.8.5. Gegeben eine Familie $(V_i)_{i\in I}$ von Untervektorräumen eines Vektorraums V bezeichnet man den von ihrer Vereinigung erzeugten Untervektorraum auch als ihre **Summe** und notiert ihn $\sum_{i\in I} V_i$. Diese Summe kann auch interpretiert werden als das Bild des natürlichen Homomorphismus $\bigoplus_{i\in I} V_i \to V$ von der direkten Summe nach V. Ist dieser Homomorphismus injektiv, so sagen wir, die **Summe der Untervektorräume V_i sei direkt**.

4.7.8.6. Untervektorräume V_1, V_2 eines Vektorraums V sind komplementär als Untervektorräume genau dann, wenn die durch die Einbettungen gegebene lineare Abbildung aus ihrem Koprodukt in der Kategorie der Vektorräume alias ihrer direkten Summe ein Isomorphismus $V_1 \sqcup V_2 = V_1 \oplus V_2 \xrightarrow{\sim} V$ ist. Da Koprodukte eh nur wohlbestimmt sind bis auf eindeutigen Isomorphismus, schreiben wir im Fall komplementärer Untervektorräume auch abkürzend $V_1 \oplus V_2 = V$.

Übungen

Ergänzende Übung 4.7.8.7 (**Basis einer direkten Summe**). Ist $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektorräumen und $B_i \subset V_i$ jeweils eine Basis, so ist die Vereinigung

$\bigcup_{i\in I} \mathrm{in}_i(B_i)$ der Bilder ihrer Basen eine Basis der direkten Summe $\bigoplus_{i\in I} V_i$. Diese Basis ist auch in offensichtlicher Bijektion zur disjunkten Vereinigung von Basen $\bigsqcup_{i\in I} B_i$.

Ergänzende Übung 4.7.8.8. Man zeige, daß für jeden Endomorphismus f eines Vektorraums V über einem Körper K die Einbettungen der Haupträume eine Injektion

$$\bigoplus_{\lambda\in K} \mathrm{Hau}(f;\lambda) \hookrightarrow V$$

liefern. Der Hauptraum $\mathrm{Hau}(f;\lambda)$ ist hier im Fall, daß λ kein Eigenwert von f ist, als der Nullraum zu verstehen.

Ergänzende Übung 4.7.8.9. Ich erinnere daran, daß ein Endomorphismus eines Vektorraums nach 3.6.6.15 diagonalisierbar heißt, wenn unser Vektorraum von den Eigenvektoren des besagten Endomorphismus erzeugt wird. Man zeige, daß ein Endomorphismus f eines Vektorraums V über einem Körper K genau dann diagonalisierbar ist, wenn V in die Summe seiner Eigenräume zerfällt, in Formeln

$$\bigoplus_{\lambda\in K} \mathrm{Eig}(f;\lambda) \xrightarrow{\sim} V$$

wobei der Eigenraum $\mathrm{Eig}(f;\lambda)$ in dem Fall, daß λ kein Eigenwert ist, als der Nullraum zu verstehen ist.

Ergänzende Übung 4.7.8.10. Seien V ein Vektorraum und $T \subset \mathrm{End}\, V$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum seines Endomorphismenraums, der aus diagonalisierbaren und paarweise kommutierenden Endomorphismen besteht. So besitzt V unter T eine **simultane Eigenraumzerlegung**

$$V = \bigoplus_{\lambda\in T^*} V_\lambda$$

in die **simultanen Eigenräume** $V_\lambda := \{v \in V \mid xv = \lambda(x)v \ \forall x \in T\}$. Hinweis: Sei $x_0, \ldots, x_n$ eine Basis von T. Da x_0 diagonalisierbar ist, zerfällt V in Eigenräume unter x_0. Da die x_i für $i \geq 1$ mit x_0 kommutieren, stabilisieren sie dessen Eigenräume. Nach 3.6.6.19 sind die x_i auch auf diesen Eigenräumen diagonalisierbar. Eine Induktion beendet den Beweis.

Ergänzende Übung 4.7.8.11. Gegeben ein Vektorraum V und eine Familie von Vektorräumen $(W_i)_{i\in I}$ liefert die kanonische Abbildung stets einen Isomorphismus

$$V \otimes \left(\bigoplus W_i\right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus (V \otimes W_i)$$

Analoges gilt für den anderen Tensorfaktor. Für jeden K-Vektorraum V ist in anderen Worten der Funktor $V\otimes : \mathrm{Mod}_K \to \mathrm{Mod}_K$ verträglich mit beliebigen Koprodukten.

Ergänzende Übung 4.7.8.12. Gegeben ein Vektorraum V und eine Familie von Vektorräumen $(W_i)_{i\in I}$ liefert die kanonische Abbildung stets eine Injektion

$$V \otimes \left(\prod W_i\right) \hookrightarrow \prod (V \otimes W_i)$$

Sie ist jedoch im allgemeinen kein Isomorphismus. Genauer ist sie nur dann ein Isomorphismus, wenn entweder V endlichdimensional ist oder wenn nur für endlich viele i der zugehörige Vektorraum W_i von Null verschieden ist. Diese Übung sagt insbesondere, daß für jeden K-Vektorraum V der Funktor $V\otimes : \mathrm{Mod}_K \to \mathrm{Mod}_K$ mit endlichen Produkten verträglich ist, und daß für jeden endlichdimensionalen K-Vektorraum V der Funktor $V\otimes : \mathrm{Mod}_K \to \mathrm{Mod}_K$ mit beliebigen Produkten verträglich ist. Hinweis: Man folgere aus 4.6.1.21 die Injektivität der Komposition $V \otimes W \to V^{\top\top} \otimes W \to \mathrm{Hom}(V^\top, W)$ und bette beide Seiten verträglich ein in $\prod \mathrm{Hom}(V^\top, W_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V^\top, \prod W_i)$.

4.7.9 Algebren*

4.7.9.1. Sei K ein Körper. Ganz allgemein bezeichnet man einen K-Vektorraum A mit einer bilinearen Verknüpfung $A \times A \to A$ als eine K-**Algebra** und versteht unter einem **Algebrenhomomorphismus** in eine weitere K-Algebra eine K-lineare Abbildung, die mit den jeweiligen Verknüpfungen verträglich ist. Gegeben zwei K-Algebren A, B bezeichnen wir mit $\mathrm{Alg}_K(A, B)$ die Menge der Algebrenhomomorphismen von A nach B.

4.7.9.2. Ist die Verknüpfung einer Algebra assoziativ, so spricht man von einer **assoziativen Algebra**. Üblich ist in diesem Zusammenhang die Konvention, daß man eine Algebra stets als assoziativ versteht, wenn aus dem Kontext nichts anderes hervorgeht. Gibt es für diese Verknüpfung ein neutrales Element, so spricht man von einer **unitären Algebra** und nennt das fragliche Element das **Eins-Element**. Eine Algebra ist also genau dann assoziativ und unitär, wenn die zugrundeliegende Menge mit der Vektorraum-Addition als Addition und der bilinearen Verknüpfung als Multiplikation ein Ring ist. Ich schlage deshalb vor, derartige Algebren **Ringalgebren** und im Fall, daß sie auch noch kommutativ sind, **Kringalgebren** zu nennen. Unter einem **Homomorphismus von Ringalgebren** verstehen wir einen Algebrenhomomorphismus, der auch ein Ringhomomorphismus ist. Wir können diese Abbildungen sowohl charakterisieren als Algebrenhomomorphismen, die das Einselement auf das Einselement werfen, als auch als Ringhomomorphismen, die über dem Grundkörper linear sind. Wir vereinbaren für die Menge der Ringalgebrenhomomorphismen von einer K-Ringalgebra A in eine K-Ringalgebra B die Notation $\mathrm{Ralg}_K(A, B)$. Sind beide beteiligten Algebren sogar Kringalgebren, so schreiben wir für diese Menge auch $\mathrm{Kralg}_K(A, B)$.

Beispiel 4.7.9.3. Sei K ein Körper. Der Polynomring $K[X]$ ist eine K-Ringalgebra, ja eine K-Kringalgebra. Dasselbe gilt für Polynomringe in mehreren Variablen. Gegeben ein K-Vektorraum V ist der Endomorphismenring $\operatorname{End} V$ eine K-Ringalgebra. Dasselbe gilt für die Matrizenringe $\operatorname{Mat}(n;K)$. Eine weder assoziative noch unitäre Algebra wäre etwa $\operatorname{Mat}(n;K)$ mit der bilinearen Verknüpfung $(A,B) \mapsto [A,B] := AB - BA$. Der Vektorraum $\operatorname{Mat}(n;K)$ mit dieser Verknüpfung gehört zu einem speziellen Typ von Algebren, den sogenannten „Lie-Algebren". Mit dieser Struktur heißt er auf englisch die „general linear Lie-algebra" und wird $\mathfrak{gl}(n;K)$ notiert. Die Lie-Algebren spielen eine zentrale Rolle beim Studium von abgeschlossenen Untergruppen der $\operatorname{GL}(n;\mathbb{R})$ und ganz allgemein beim Studium von „kontinuierlicher Symmetrie".

4.7.9.4 (**Diskussion der Terminologie**). Für den Begriff einer Algebra sind in der Literatur leider auch viele andere Konventionen gebräuchlich, bei denen mehr oder weniger der oben explizit aufgeführten zusätzlichen Eigenschaften bereits für eine Algebra implizit mit gefordert werden.

4.7.9.5. Eine **Unteralgebra** einer Algebra ist ein unter der Verknüpfung stabiler Untervektorraum. Eine **Unterringalgebra** einer Ringalgebra ist ein unter der Verknüpfung stabiler Untervektorraum, der das Eins-Element enthält. Beide Begriffsbildungen ordnen sich der allgemeinen Begriffsbildung 4.7.3.12 eines Unterobjekts unter.

4.7.9.6. Sei V ein Vektorraum. Die direkte Summe

$$\bigwedge V = \bigoplus_{r\geq 0} \bigwedge^r V$$

der äußeren Potenzen von V wird mit dem „bilinear erweiterten" Dachprodukt aufgrund der Assoziativität des Dachprodukts eine Ringalgebra mit Eins-Element $1 \in K = \bigwedge^0 V$. Sie heißt die **äußere Algebra** oder auch **Graßmann-Algebra** des Vektorraums V. Die übliche Identifikation $V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^1 V$ notieren wir kurzerhand $v \mapsto v$ und behandeln sie auch sprachlich als Gleichheit. Gegeben $v \in V$ gilt in $\bigwedge^2 V$ wegen $v \otimes v \in J_2$ natürlich $v \wedge v = 0$. Mit 3.6.3.2 folgt daraus in der Graßmann-Algebra die Identität

$$v \wedge w = -w \wedge v \quad \forall v, w \in V$$

Gegeben eine lineare Abbildung $f : V \to W$ liefern die auf den äußeren Potenzen induzierten Abbildungen $\bigwedge^r f : \bigwedge^r V \to \bigwedge^r W$ in ihrer Gesamtheit einen Ringhomomorphismus

$$\bigwedge f : \bigwedge V \to \bigwedge W$$

Natürlich gilt auch $\bigwedge(f \circ g) = (\bigwedge f) \circ (\bigwedge g)$ und $\bigwedge(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$.

Ergänzung 4.7.9.7. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Eine weitere Ringalgebra, die man jedem K-Vektorraum in natürlicher Weise zuordnen kann, ist die sogenannte **Tensoralgebra** $\mathrm{T}_K V$ **über** V. Sie ist definiert als

$$\mathrm{T}(V) = \mathrm{T}_K V = \mathrm{Ten}_K V := \bigoplus_{r \geq 0} V^{\otimes r} = K \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots$$

mit der K-bilinearen Multiplikation „Zusammentensorieren“, die festgelegt wird durch die Vorschrift $(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) \cdot (w_1 \otimes \dots \otimes w_t) := (v_1 \otimes \dots v_r \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_t)$. Für die K-lineare Einbettung $\tau : V \hookrightarrow \mathrm{T}_K V$ des zweiten Summanden gilt dabei die folgende universelle Eigenschaft: Ist A eine K-Ringalgebra und $\varphi : V \to A$ eine K-lineare Abbildung, so gibt es genau einen Homomorphismus von K-Ringalgebren $\hat{\varphi} : \mathrm{T}_K V \to A$ mit $\varphi = \hat{\varphi} \circ \tau$, im Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathrm{T}_K V \arrow[d, dashed, "\exists! \hat{\varphi}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

In der Tat sieht man leicht, daß die Vorschrift $\hat{\varphi}(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) := \varphi(v_1) \dots \varphi(v_r)$ das einzig mögliche $\hat{\varphi}$ liefert. In wieder anderen Worten liefert also das Vorschalten der kanonischen Einbettung für jede K-Ringalgebra A eine Bijektion

$$\mathrm{Ralg}_K(\mathrm{T}V, A) \xrightarrow[\sim]{\circ\tau} \mathrm{Hom}_K(V, A)$$

Ist $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Basis von V, so bilden nach 4.6.1.4 die „nichtkommutierenden Monome in den x_λ“ alias die Tensoren $x_{\lambda(1)} \otimes \dots \otimes x_{\lambda(r)}$ für beliebige $r \in \mathbb{N}$ und beliebige Abbildungen $\lambda : \{1, 2, \dots, r\} \to \Lambda$ eine K-Basis der Tensoralgebra $\mathrm{T}V$. Das „leere Monom“ mit $r = 0$ steht dabei für das Einselement. In diesem Sinne kann man die Tensoralgebra also salopp gesprochen auch als einen „Polynomring in nichtkommutierenden Variablen“ auffassen. Mehr dazu wird in 8.3.7.5 erklärt.

Vorschau 4.7.9.8. Es gibt noch eine dritte Ringalgebra, die man jedem Vektorraum V in natürlicher Weise zuordnen kann. Diese sogenannte „symmetrische Algebra“ $\mathrm{S}V$ diskutieren wir in 7.3.5.1. In 7.3.5.7 diskutieren wir auch die Beschreibung der Graßmann-Algebra vom höheren Standpunkt als „Quotient der Tensoralgebra $\mathrm{T}V$ nach dem von allen $v \otimes v$ mit $v \in V$ erzeugten Ideal“.

Übungen

Ergänzende Übung 4.7.9.9. Sei K ein Körper. Man zeige, daß in der Kategorie der K-Kringalgebren das Tensorprodukt ein Koprodukt ist, sofern die Multiplikation

auf $A \otimes B$ durch $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ erklärt wird und die kanonischen Morphismen durch $a \mapsto a \otimes 1$ und $b \mapsto 1 \otimes b$. Man zeige weiter, daß die analoge Aussage in der Kategorie der K-Ringalgebren nicht richtig ist.

Ergänzende Übung 4.7.9.10. Sei K ein Körper. Man zeige, daß der auf Objekten durch $X \mapsto \mathrm{Ens}(X, K)$ gegebene Funktor

$$\{\text{Endliche Mengen}\} \to \{K\text{-Kringalgebren}\}^{\mathrm{opp}}$$

verträglich ist mit endlichen Produkten.

4.7.10 Yonedalemma*

4.7.10.1. Einen Funktor von einer Kategorie $\mathcal{C}$ in eine Kategorie von Mengen nennen wir kurz einen **Mengenfunktor auf** $\mathcal{C}$. Gegeben ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ und eine $\mathfrak{U}$-Kategorie bildet die Menge aller Funktoren $\mathcal{C} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ mit Transformationen als Morphismen eine Kategorie $\mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})$. Jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ liefert einen derartigen Mengenfunktor $\check{X} = X^\vee$ gegeben durch $\check{X} : A \mapsto \mathcal{C}(X, A)$.

Proposition 4.7.10.2 (Yoneda-Lemma). *Seien $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem, $\mathcal{C}$ eine $\mathfrak{U}$-Kategorie, $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $F : \mathcal{C} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ ein Mengenfunktor auf $\mathcal{C}$. So liefert die Abbildungsvorschrift $\tau \mapsto \tau_X(\mathrm{id}_X)$ eine Bijektion*

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})(\check{X}, F) \xrightarrow{\sim} F(X)$$

zwischen der Menge aller Transformationen $\check{X} \Rightarrow F$ und der Menge $F(X)$.

Vorschau 4.7.10.3. Sie mögen als Übung 4.7.10.16 zeigen, inwiefern diese Bijektionen natürlich sind in X und F.

4.7.10.4. Die zur Kategorie dieser Mengenfunktoren auf $\mathcal{C}$ opponierte Kategorie

$$\mathcal{C}^\vee = \mathcal{C}^\vee_{\mathfrak{U}} := \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})^{\mathrm{opp}}$$

kann man als eine „Vervollständigung“ von $\mathcal{C}$ interpretieren. In der Tat liest sich unser Yoneda-Lemma in dieser Notation als eine Bijektion $\mathcal{C}^\vee(F, \check{X}) \xrightarrow{\sim} F(X)$. Spezialisieren wir zu $F = \check{Y}$, so erhalten wir eine Bijektion $\mathcal{C}^\vee(\check{Y}, \check{X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Y, X)$, von der man leicht zeigt, daß sie zur offensichtlichen Abbildung $\mathcal{C}(Y, X) \to \mathcal{C}^\vee(\check{Y}, \check{X})$ invers ist. So folgt, daß die Vorschrift $X \mapsto \check{X}$ einen volltreuen Funktor $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\vee$ induziert, die **Yoneda-Einbettung**. Im weiteren lassen wir das Mengensystem $\mathfrak{U}$ wieder in den Hintergrund treten und ignorieren es meist in unserer Notation.

4.7.10.5 (**Diskussion der Notation**). Die hier verwendeten Notationen $\mathcal{C}^\vee$ und das in 4.7.10.11 eingeführte $\mathcal{C}^\wedge$ sind genau umgekehrt wie in [KS90]. Dafür stimmt die Notation $\mathcal{C}^\wedge$ dann mit der in [Gro72] verwendeten Notation überein, und auch die Autoren von [KS90] verwenden in [KS00] letztere Notation, die mit der unseren übereinstimmt.

4.7.10.6 (**Das Yonedalemma im Fall einer Einobjektkategorie**). Im Spezialfall einer Einobjektkategorie $\mathcal{C} = [G]$ ist das Yonedalemma besonders leicht einzusehen: Es besagt dann im Lichte von 4.7.4.20, daß die äquivarianten Abbildungen von einem Monoid G in eine beliebige G-Menge F festgelegt sind und festgelegt werden können durch das Bild des neutralen Elements.

Beweis. Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die andere Richtung. Für beliebiges $a \in F(X)$ betrachten wir dazu die Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} \tau_Y : & \mathcal{C}(X,Y) & \to & F(Y) \\ & f & \mapsto & (Ff)(a) \end{array}$$

Man prüft ohne Schwierigkeiten, daß sie eine Transformation $\tau : \check{X} \Rightarrow F$ bilden, die wir mit $\hat{\tau}(a)$ bezeichnen. Jetzt gilt es nur noch zu zeigen, daß die Abbildung $a \mapsto \hat{\tau}(a)$ invers ist zu unserer Abbildung $\tau \mapsto \hat{a}(\tau) := \tau_X(\mathrm{id}_X)$ aus der Proposition. Dafür müssen wir also prüfen, daß gilt $a = \hat{a}(\hat{\tau}(a))$ für alle $a \in F(X)$ und $\tau = \hat{\tau}(\hat{a}(\tau))$ für alle Transformationen $\tau : \check{X} \Rightarrow F$. Das überlassen wir dem Leser. □

Definition 4.7.10.7.

1. Diejenigen Mengenfunktoren auf $\mathcal{C}$, die isomorph sind zu Mengenfunktoren im Bild von $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^\vee$, heißen **darstellbare Funktoren**.

2. Ist genauer ein Mengenfunktor $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ isomorph zu $\check{X} = \mathcal{C}(X, \ )$ für ein $X \in \mathcal{C}$, so sagen wir, der **Funktor F werde dargestellt durch das Objekt X**.

3. Ist noch genauer $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ ein Mengenfunktor und $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $a \in F(X)$ ein Element, das unter der Bijektion aus dem Yoneda-Lemma einer Isotransformation $\mathcal{C}(X, \ ) \xrightarrow{\sim} F$ entspricht, so sagen wir, der **Funktor F werde strikt dargestellt durch das Paar** (X, a). Ausgeschrieben bedeutet das, daß die Vorschrift $f \mapsto (Ff)(a)$ für alle $Y \in \mathcal{C}$ eine Bijektion $\mathcal{C}(X,Y) \xrightarrow{\sim} F(Y)$ liefert. Oft lassen wir das „strikt“ aber auch weg.

Beispiel 4.7.10.8. Der Vergißfunktor $\mathrm{Mod}_K \to \mathrm{Ens}$ von den K-Vektorräumen in die Mengen wird dargestellt durch das Paar $(K, 1)$ oder auch durch jeden anderen eindimensionalen Vektorraum zusammen mit einem beliebigen von Null verschiedenen Element.

Beispiel 4.7.10.9. Der Vergißfunktor $\mathrm{Grp} \to \mathrm{Ens}$ von den Gruppen in die Mengen wird strikt dargestellt durch das Paar $(\mathbb{Z}, 1)$ oder auch durch jedes andere Paar (Z, e) bestehend aus einer unendlich zyklischen Gruppe und einem Erzeuger derselben.

Beispiel 4.7.10.10 (**Das Tensorprodukt als Darstellung eines Funktors**). Seien K ein Körper und V, W zwei K-Vektorräume. Der Funktor der bilinearen Abbildungen $\mathrm{Mod}_K \to \mathrm{Ens}$, $L \mapsto \mathrm{Hom}_K^{(2)}(V \times W, L)$ wird strikt dargestellt durch das Paar $(V \otimes W, \tau)$ mit $\tau : V \times W \to V \otimes W$ der kanonischen bilinearen Abbildung aus 4.6.1.2. Diese Aussage ist eine Umformulierung der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts aus 4.6.1.1.

4.7.10.11. In derselben Weise kann man für jede $\mathfrak{U}$-Kategorie $\mathcal{C}$ auch die Kategorie

$$\mathcal{C}^\wedge = \mathcal{C}^\wedge_{\mathfrak{U}} := \mathrm{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})$$

aller kontravarianten Funktoren $\mathcal{C} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ betrachten und erhält mit $X \mapsto \mathcal{C}(\ , X)$ eine volltreue Einbettung $\mathcal{C} \xhookrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\wedge$, die **Ko-Yoneda-Einbettung**. Wieder heißen die Funktoren im Bild dieser Einbettung **darstellbare Funktoren** oder, wenn wir es ganz genau nehmen wollen, **kodarstellbare Funktoren**. Die Objekte von $\mathcal{C}^\wedge$ werden Sie später vielleicht einmal unter der Bezeichnung als „mengenwertige Prägarben auf $\mathcal{C}$“ wiedertreffen. Notieren wir wieder zu $X \in \mathcal{C}$ mit $\hat{X} \in \mathcal{C}^\wedge$ den zugehörigen Funktor $\hat{X} : A \mapsto \mathcal{C}(A, X)$, so liefert diesmal das Auswerten auf id_X eine Bijektion $\mathcal{C}^\wedge(\hat{X}, F) \xrightarrow{\sim} F(X)$.

4.7.10.12. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ kann man leicht explizite Isomorphismen von Kategorien $(\mathcal{C}^\vee)^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\mathrm{opp}})^\wedge$ und $(\mathcal{C}^\wedge)^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\mathrm{opp}})^\vee$ angeben. In diesem Sinne sind unsere beiden Konzepte zueinander dual.

Vorschau 4.7.10.13. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist die volltreue Einbettung $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\wedge$ verträglich mit Produkten, wann immer diese in $\mathcal{C}$ existieren. Ebenso ist die volltreue Einbettung $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\vee$ verträglich mit Koprodukten, wann immer diese in $\mathcal{C}$ existieren. Mehr dazu wird in 20.3.1.4 diskutiert.

Vorschau 4.7.10.14. Ein Zugang zu der von Grothendieck konstruierten Kategorie der **Schemata** ist es, diese Kategorie zu realisieren als volle Unterkategorie der Kategorie $\mathrm{Kring}^\vee$, die wir erhalten, wenn wir die Kategorie der kommutativen Ringe mit der nötigen Sorgfalt bei Fragen der Mengenlehre in der oben erklärten Weise vervollständigen. Der affine Raum der Dimension n wird dann zum Beispiel definiert als der Funktor, der jedem kommutativen Ring R die Menge R^n zuordnet, und der projektive Raum der Dimension n als der Funktor, der jedem kommutativen Ring R die Menge derjenigen direkten Summanden D des R-Moduls R^{n+1} zuordnet, die „vom Rang Eins“ sind in dem Sinne, daß „bei jedem Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ ihre Lokalisierung $D_\mathfrak{p}$ ein freier $R_\mathfrak{p}$-Modul vom Rang Eins

ist“. Man kann mit Schemata so effizient und geometrisch arbeiten, daß sie mittlerweile zum eigentlichen Arbeitspferd der sogenannten „algebraischen Geometrie“ geworden sind.

Übungen

Übung 4.7.10.15 (**Yoneda-Einbettungen und Exponentialgesetz**). Das Exponentialgesetz 4.7.4.13 spezialisiert zu Bijektionen

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{C}, \mathrm{Ens}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathrm{Ens}))$$

In der Mitte betrachten wir nun den Mengenfunktor $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}} : (X, Y) \mapsto \mathcal{C}(X, Y)$ der Morphismen. Man prüfe, daß er rechts der Koyonedaeinbettung $\mathcal{C} \xhookrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\wedge}$ aus 4.7.10.11 entspricht und links dem Opponierten der Yonedaeinbettung $\mathcal{C} \xhookrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\vee}$.

Übung 4.7.10.16 (**Natürlichkeit im Yoneda-Lemma**). Man zeige, daß für jede Kategorie $\mathcal{C}$ die Bijektionen des Yoneda-Lemmas 4.7.10.2 eine Isotransformation zwischen den beiden Wegen im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens}) & \to & \mathrm{Ens} \\ \uparrow & & \| \\ \mathcal{C} \times \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens}) & \to & \mathrm{Ens} \end{array}$$

liefern, also zwischen den beiden Funktoren $\mathcal{C} \times \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})$, die durch $(X, F) \mapsto \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})(\check{X}, F)$ und $(X, F) \mapsto F(X)$ gegeben werden. Insbesondere liefern sie dann auch eine Isotransformation zwischen den Funktoren $\mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ens}$ gegeben durch $(X, Y) \mapsto \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})(\check{X}, \check{Y})$ und $(X, Y) \mapsto \check{Y}(X) = \mathcal{C}(Y, X)$ und wir sehen so ein weiteres Mal, daß $X \mapsto \check{X}$ eine volltreue Einbettung $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})$ ist.

Übung 4.7.10.17 (**Eindeutigkeit darstellender Objekte**). Wird ein Mengenfunktor $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ strikt dargestellt durch das Paar (X, a) und durch das Paar (Y, b), so gibt es genau einen Isomorphismus $i : X \xrightarrow{\sim} Y$ mit der Eigenschaft $F(i) : a \mapsto b$.

Übung 4.7.10.18. Welche Mengenfunktoren werden durch finale und initiale Objekte dargestellt oder kodargestellt?

Übung 4.7.10.19. Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum, und $U \subset V$ ein Teilraum. Welchen Mengenfunktor stellt der Quotient V/U dar?

Übung 4.7.10.20. Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum. Welchen Mengenfunktor stellt die Tensoralgebra dar?

Ergänzende Übung 4.7.10.21. Welchen Mengenfunktor stellt das Produkt im Sinne von 4.7.10.7 dar?

Ergänzende Übung 4.7.10.22. Seien K ein endlicher Körper und Mat_K die Matrixkategorie aus 4.7.1.7 und $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem derart, daß Mat_K eine $\mathfrak{U}$-Kategorie ist. Wir betrachten die Yonedaeinbettung

$$\mathrm{Mat}_K \hookrightarrow \mathrm{Cat}(\mathrm{Mat}_K^{\mathrm{opp}}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})$$

Gilt $X \in \mathfrak{U} \Rightarrow |X| < \infty$, so induziert sie eine Äquivalenz von Mat_K mit der vollen Unterkategorie aller mit endlichen Produkten verträglichen Funktoren rechts. Gibt es zwar unendliche, aber keine überabzählbaren Mengen $X \in \mathfrak{U}$, so ist die volle Unterkategorie aller mit endlichen Produkten verträglichen Funktoren aus $\mathrm{Cat}(\mathrm{Mat}_K^{\mathrm{opp}}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})$ äquivalent zur Kategorie aller abzählbaren K-Vektorräume. Analoge Aussagen gelten für andere Kardinalitäten und mutatis mutandis auch für unendliche Körper.

4.7.11 Universen*

4.7.11.1. Um diese Leitplanken zur Vermeidung logischer Abstürze zu beschreiben, erfinde ich das Wort **Mengel** als zusammenfassende Bezeichnung für Mengen und Elemente von Mengen, die ja in unserer Terminologie selbst wieder Mengen sein dürfen, aber eben nicht sein müssen. Diese Terminologie ist allerdings nicht gebräuchlich.

Ergänzung 4.7.11.2. Baut man die Mengenlehre im Rahmen der Logik systematisch auf, vergleiche etwa [Ebb94], so verwendet man statt unserem „Mengel“ schlicht das Wort **Menge**. Aufgrund der Vereinbarung, daß zwei Mengen gleich sind genau dann, wenn sie dieselben Elemente haben, kann es dann nur eine einzige Menge geben, die kein Element hat. Man notiert sie $\emptyset$.

Definition 4.7.11.3. Ein **Universum** ist eine Menge $\mathfrak{U}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $x \in M$ und $M \in \mathfrak{U}$ implizieren zusammen $x \in \mathfrak{U}$;
2. $x \in \mathfrak{U} \Rightarrow \{x\} \in \mathfrak{U}$;
3. $A \in \mathfrak{U} \Rightarrow \mathcal{P}(A) \in \mathfrak{U}$;
4. Gegeben $I \in \mathfrak{U}$ und eine Abbildung $f : I \to \mathfrak{U}$ gilt $\left(\bigcup_{i \in I} f(i)\right) \in \mathfrak{U}$.

Ergänzung 4.7.11.4 (**Diskussion der Terminologie**). Diese Definition steht fast genauso bei Grothendieck [Gro72, Exposé I]. Abweichend will Grothendieck nur die leere Menge nicht als Universum zulassen und fordert statt unserer zweiten Bedingung scheinbar stärker $x, y \in \mathfrak{U} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathfrak{U}$. Da jedoch für jedes nichtleere Universum gilt $\emptyset \in \mathfrak{U}$ und folglich $\{\emptyset\} \in \mathfrak{U}$ und $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathfrak{U}$, ergibt sich das wegen $\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\}$ aus dem letzten Axiom, angewandt auf die Abbildung $f : \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \to \mathfrak{U}$ mit $f(\emptyset) = \{x\}$ und $f(\{\emptyset\}) = \{y\}$.

4.7.11.5 (**Elemente eines Universums versus Teilmengen eines Universums**). Gegeben ein Universum $\mathfrak{U}$ gilt es genau zu unterscheiden zwischen Mengeln $x \in \mathfrak{U}$, die Elemente des Universums sind, die also in unserer Terminologie 2.1.2.3 zu unserem Universum gehören, und Mengeln $M \subset \mathfrak{U}$, die nur Teilmengen des Universums sind. Nach dem ersten Axiom ist jedes Element eines Universums, wenn es denn eine Menge ist, auch eine Teilmenge besagten Universums, aber das Umgekehrte gilt nicht. Die Formel $M := \{x \in \mathfrak{U} \mid x \notin x\}$ definiert dann eine Teilmenge $M \subset \mathfrak{U}$, die kein Element von $\mathfrak{U}$ zu sein braucht, und die Formel $A := \{M \subset \mathfrak{U} \mid M \notin M\}$ definiert eine Menge A, die keine Teilmenge von $\mathfrak{U}$ zu sein braucht, so daß keine dieser beiden Formeln auf den in 2.1.3.9 beschriebenen Widerspruch führt.

4.7.11.6 (**Stabilitäten eines Universums**). Wenn wir mit Kuratowski $(x, y) := \{x, \{y\}\}$ setzen, erhalten wir sofort $x, y \in \mathfrak{U} \Rightarrow (x, y) \in \mathfrak{U}$. Das Produkt von je zwei Mengen, die Elemente unseres Universums sind, ist auch selbst Element unseres Universums, zum Beispiel indem wir die Vereinigung erst über alle $x \in X$ und dann über alle $y \in Y$ der Mengen $\{(x, y)\}$ bilden. Weiter ist mit je zwei Mengen $X, Y \in \mathfrak{U}$ auch die Menge der Abbildungen $\mathrm{Ens}(X, Y)$ Element von $\mathfrak{U}$ und dasselbe gilt für jedes Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ mit $I \in \mathfrak{U}$ und $X_i \in \mathfrak{U}$ für alle $i \in I$. Ebenso folgt, daß jede Teilmenge eines Elements unseres Universums wieder ein Element unseres Universums ist.

4.7.11.7. Gegeben $M \in \mathfrak{U}$ ein Element eines Universums haben wir stets $M \subset \mathfrak{U}$. Es kann also keine injektive Abbildung $\mathfrak{U} \hookrightarrow M$ geben, denn dann müßte es eine injektive Abbildung $\mathcal{P}(M) \hookrightarrow M$ geben und die gibt es nicht. Die Kardinalität eines Universums ist also stets echt größer als die Kardinalität eines jeden seiner Elemente.

4.7.11.8 (**Existenz von Universen**). Die Annahme, daß jede Menge Element eines Universums ist, müssen wir der Mengenlehre als zusätzliches Axiom hinzufügen. Es scheint nicht auf Widersprüche zu führen, hat aber die bemerkenswerte Konsequenz, daß es zu jeder Menge ein kleinstes Universum gibt, zu dem sie als Element gehört, eben den Schnitt aller Universen, zu denen sie als Element gehört. Insbesondere ist natürlich auch jedes Universum Element eines Universums. Gegeben ein Körper k und ein Universum $\mathfrak{U}$ mit $k \in \mathfrak{U}$ können wir dann auf der Kategorie $k\text{-}\mathfrak{U}\mathrm{Mod}$ der k-Vektorräume, deren zugrundeliegende Menge zu $\mathfrak{U}$ gehört, in der Tat den Dualraumfunktor erklären.

4.7.11.9. Das kleinste Universum, das die leere Menge als Element enthält, besteht aus endlichen Mengen.

4.8 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Ulrich Derenthal, Patrick Säring, Rolf-Dieter Frank, ...

Kapitel 5

Elementargeometrie

Inhalt

5.1 Inzidenzgeometrie 622

5.1.1 Axiomatik der euklidischen Ebene 622

5.1.2 Affine Inzidenzebenen 635

5.1.3 Parallelprojektion und Zentralprojektion 654

5.1.4 Projektive Räume 658

5.1.5 Projektivitäten und Fotographien 670

5.1.6 Die Sätze von Desargues und Pappos 673

5.1.7 Punkt-Geraden-Dualität 675

5.2 Möbiusgeometrie und hyperbolische Ebene 678

5.2.1 Kreisspiegelungen 678

5.2.2 Möbiustransformationen 683

5.2.3 Möbiusgeometrie und komplexe Zahlen 687

5.2.4 Die hyperbolische Ebene 690

5.2.5 Möbiusgeometrie in beliebigen Dimensionen 694

5.3 Danksagung 699

5.1 Inzidenzgeometrie

5.1.1 Axiomatik der euklidischen Ebene

Definition 5.1.1.1. Eine **Inzidenzgeometrie** ist ein Paar (X, G) bestehend aus einer Menge X mit einem System von Teilmengen $G \subset \mathcal{P}(X)$ derart, daß jedes $g \in G$ mindestens zwei Elemente hat und daß es für je zwei Elemente $x, y \in X$ mit $x \neq y$ genau ein $g \in G$ gibt mit $x, y \in g$.

5.1.1.2. Wir nennen die Elemente von X die **Punkte** unserer Inzidenzgeometrie und die Elemente von G ihre **Geraden**. Wir notieren $\overline{xy}$ die eindeutig bestimmte Gerade durch zwei verschiedene Punkte x und y. In der damit frisch eingeführten Terminologie ausgedrückt fordern wir in unserer Definition einer Inzidenzgeometrie also, daß auf jeder Gerade mindestens zwei Punkte liegen und daß durch je zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade geht.

5.1.1.3 (**Ursprung der Terminologie**). Bei der Diskussion der „Punkt-Geraden-Dualität projektiver Inzidenzebenen“ in 5.1.7, die Punkte zu Geraden macht und Geraden zu Punkten, ist es geschickt und üblich, statt ein Punkt „liegt auf einer Geraden“ zu sagen, der Punkt „indiziere mit der Geraden“. Daher rührt die Bezeichnung als „Inzidenzgeometrie“.

Beispiel 5.1.1.4. Gegeben ein Körper oder auch ein Schiefkörper L wird $X := L^n$ eine Inzidenzgeometrie, wenn wir als Geraden alle Teilmengen der Gestalt $g = p + Lv$ auszeichnen für $p, v \in L^n$ mit $v \neq 0$.

Beispiel 5.1.1.5. Diejenigen unter Ihnen, die die Terminologie affiner Räume bereits kennen, sehen unmittelbar: Jeder affine Raum X über einem Körper L wird eine Inzidenzgeometrie, wenn wir als Geraden alle affinen Geraden auszeichnen. Das ist im wesentlichen auch nur das vorangegangene Beispiel, aber in koordinatenfreier Terminologie.

5.1.1.6. Eine Menge von Punkten einer Inzidenzgeometrie, die auf einer gemeinsamen Geraden liegen, heißt **kollinear**. Eine Menge von Geraden einer Inzidenzgeometrie, die einen Punkt gemeinsam haben, heißt **konfluent**. Eine Menge von drei nicht kollinearen Punkten heißt ein **Dreieck**.

Definition 5.1.1.7. Eine **Zwischenrelation** auf einer Inzidenzgeometrie (X, G) ist eine Teilmenge $Z \subset X^3$, die aus kollinearen Tripeln besteht und die die beiden im folgenden erklärten Eigenschaften „verträgliche Anordnungen“ und „Axiom von Pasch“ hat.

Verträgliche Anordnungen: Auf jeder Gerade $g \in G$ gibt es eine Anordnung $\leq$ derart, daß für $x, y, z \in g$ gilt $(x, y, z) \in Z$ genau dann, wenn $x \leq y \leq z$ oder $x \geq y \geq z$.

So eine Anordnung auf einer Gerade heißt **mit der Zwischenrelation verträglich**. Wir bilden weiter für $p, q \in X$ die Menge $[p, q] := \{x \in X \mid (p, x, q) \in Z\}$ und nennen sie die **Strecke mit Endpunkten** p, q. Es gibt in unserer Terminologie also auch Strecken, die nur aus einem einzigen Punkt bestehen. In dieser Begrifflichkeit fordern wir dann weiter:

Axiom von Pasch: Gegeben Punkte $p, q, r \in X$ trifft jede Gerade $g \in G$ von den drei Strecken $[p, q]$, $[q, r]$ und $[r, p]$ entweder keine oder mindestens zwei.

5.1.1.8. Manche Quellen nennen eine Inzidenzgeometrie mit ausgezeichneter Zwischenrelation eine „angeordnete Inzidenzgeometrie".

Beispiel 5.1.1.9 (**Zwischenrelation auf affiner Ebene zu angeordnetem Körper**). Es ist leicht zu sehen, daß wir für jeden angeordneten Körper L eine Zwischenrelation auf L^2 erhalten durch die Vorschrift, daß $(x, y, z) \in Z$ gleichbedeutend ist zu $y = \lambda x + \mu z$ mit $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ und $\lambda + \mu = 1$. Weiter erhalten wir die Anordnung auf unserem Körper L zurück, indem wir einen affinen Isomorphismus von L mit irgendeiner Gerade von L^2 wählen und diejenige mit der Zwischenrelation verträgliche Anordnung auf besagter Gerade zurückziehen, für die die zurückgezogene Anordnung die Eigenschaft $0 < 1$ hat.

5.1.1.10. Gegeben eine Inzidenzgeometrie (X, G) mit Zwischenrelation Z heiße eine Teilmenge $A \subset X$ eine **Halbgerade**, wenn es eine Gerade $g \in G$ gibt und einen Punkt $p \in g$ und eine mit unserer Zwischenrelation verträgliche Anordnung $\leq$ auf g mit $A = \{x \in g \mid x \leq p\}$.

Definition 5.1.1.11. Gegeben eine Inzidenzgeometrie X mit Zwischenrelation Z verstehen wir unter einer **Kongruenzgruppe von** (X, Z) eine Gruppe K von Automorphismen von (X, Z) derart, daß je zwei Halbgeraden von X durch genau zwei Automorphismen aus K ineinander überführt werden. In Formeln fordern wir also, daß es für je zwei Halbgeraden $A, B \subset X$ genau zwei Elemente $h, k \in K$ gibt mit

$$h(A) = B = k(A)$$

Die Automorphismen aus K nennen wir in diesem Zusammenhang **Kongruenzen** und das Tripel (X, Z, K) eine **Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen**.

5.1.1.12. Wir sagen, eine Zwischenrelation auf einer Inzidenzgeometrie habe die **Supremumseigenschaft**, wenn für jede Anordnung einer Gerade, die mit der Zwischenrelation verträglich ist, jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt.

Definition 5.1.1.13. Eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen, in der es eine Gerade gibt und in der die Supremumseigenschaft erfüllt ist, nennen wir eine **fasteuklidische Geometrie**.

5.1.1.14. Wir sagen, eine fasteuklidische Geometrie erfülle das **Parallelenaxiom**, wenn es zu jeder Gerade g und jedem Punkt $p \notin g$ höchstens eine Gerade h durch p gibt mit $h \cap g = \emptyset$.

5.1.1.15 (**Diskussion der Terminologie**). In einer allgemeinen Inzidenzgeometrie nenne ich Geraden, die sich nicht schneiden, **disjunkt**. In speziellen Situationen wie etwa unserer Inzidenzgeometrie L^2 und erst recht $\mathbb{R}^2$ sind zwei Geraden genau dann disjunkt, wenn sie parallel sind im Sinne von 3.3.2.11. Daher rührt oben die Bezeichnung als Parallelenaxiom. In Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation erlaube ich mir dieselbe Terminologie und nenne zwei Geraden **parallel**, wenn sie disjunkt sind.

Beispiel 5.1.1.16. Der $\mathbb{R}^2$ ist eine fasteuklidische Geometrie, wenn wir als Kongruenzen alle Abbildungen der Gestalt $v \mapsto Av + b$ nehmen mit $A \in \mathrm{O}(2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Dieses Beispiel ist unser Standardmodell für eine fasteuklidische Geometrie mit Parallelenaxiom.

Satz 5.1.1.17 (**Charakterisierung der euklidischen Ebene**). *Je zwei fasteuklidische Geometrien mit Parallelenaxiom sind zueinander isomorph und sind insbesondere isomorph zu unserem Standardmodell* $\mathbb{R}^2$.

5.1.1.18. Der Beweis füllt diesen Abschnitt und wird in 5.1.1.46 zum Abschluß gebracht. Genauer zeigen wir, daß unsere Inzidenzgeometrie der $\mathbb{R}^2$ sein muß und stützen uns für den Rest des Beweises auf Sätze, die wir bereits in der linearen Algebra bewiesen hatten. Die hier gegebene Axiomatik für die euklidische Ebene ist eine Variante der Hilbert-Axiomatik. Sie ist recht ähnlich zu einer Variante der Hilbert-Axiomatik aus einer unveröffentlichten Arbeit von Maximilian Gerhards und zu den Anmerkungen in [Fil93], Abschnitt 2.7.2, Bewegungsaxiome B1 bis B4.

Beispiel 5.1.1.19. Gegeben ein echter Teilkörper $L \subsetneq \mathbb{R}$, in dem jedes positive Element eine Wurzel besitzt, erfüllt die Inzidenzgeometrie L^2 aus 5.1.1.9 mit der offensichtlichen Zwischenrelation und als Kongruenzen allen affinen Automorphismen, deren Richtungsanteil das Standardskalarprodukt erhält, alle unsere Axiome mit Ausnahme der Supremumseigenschaft.

Lemma 5.1.1.20 (**Geraden, keine Ecke eines Dreiecks treffen**). *Gegeben ein Dreieck in einer Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation trifft jede Gerade, die durch keine Ecke unseres Dreiecks geht, von unserem Dreieck entweder genau zwei Kanten oder gar keine Kante.*

Beweis. Sei $\{x, y, z\}$ unser Dreieck. Unsere Gerade g treffe $[x, y]$ in p und $[x, z]$ in q. Die Gerade $\overline{zp}$ trifft $[x, y]$ in p und trifft $[x, q]$ nicht, folglich trifft sie $[y, q]$, und dieser Schnittpunkt kann offensichtlich nicht q sein. Ebenso trifft die Gerade

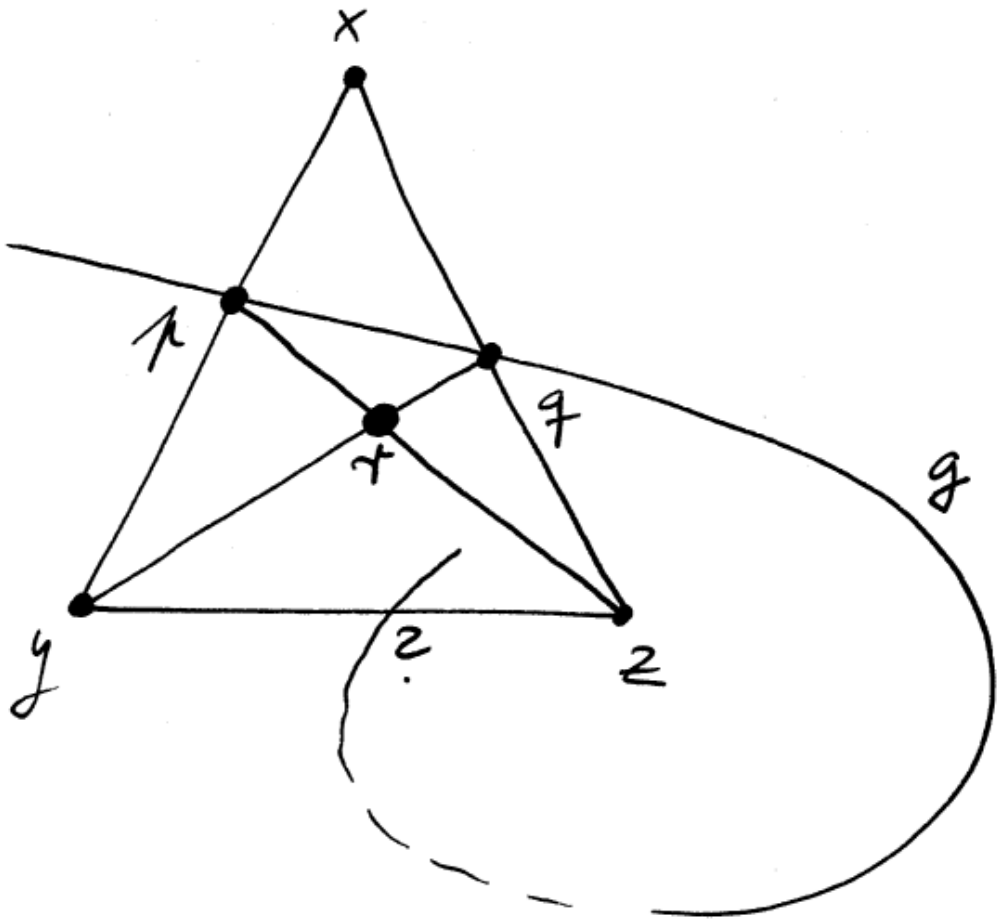


Illustration zu Lemma 5.1.1.20

$\overline{yq}$ das Segment $[z, p]$, und dieser Schnittpunkt kann offensichtlich nicht p sein. Damit treffen sich $[z, p]$ und $[y, q]$, sagen wir in r mit $r \neq p$ und $r \neq q$. Träfe g die dritte Kante $[y, z]$ unseres ursprünglichen Dreiecks, so träfe g auch $[r, y]$ oder $[r, z]$. Das steht aber im Widerspruch zu $q \notin [r, y]$ und $p \notin [r, z]$. □

5.1.1.21 (**Halbebenen in Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation**). In einer Inzidenzgeometrie X mit Zwischenrelation erhalten wir auf dem Komplement jeder Gerade g eine Äquivalenzrelation durch die Vorschrift $(x \sim y) \Leftrightarrow [x, y] \subset X \backslash g$. Deren Äquivalenzklassen nennen wir die **Halbebenenalkoven** g. Nach Lemma 5.1.1.20 über Geraden, die keine Ecke eines Dreiecks treffen, gibt es zu jeder Gerade höchstens zwei Halbebenenalkoven. Die Vereinigung eines Halbebenenalkoven zu einer Gerade g mit der Gerade selbst nennen wir eine **Halbebene** zu g.

5.1.1.22 (**Konvexität in Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation**). In einer Inzidenzgeometrie X mit Zwischenrelation nennen wir eine Teilmenge $T \subset X$ **konvex**, wenn gilt $x, y \in T \Rightarrow [x, y] \subset T$. Offensichtlich ist jeder Schnitt von konvexen Teilmengen konvex. Gegeben eine Gerade $g \subset X$ sind die Halbebenenalkoven zu g genau die maximalen konvexen Teilmengen von $X \backslash g$.

Lemma 5.1.1.23 (**Unendlichkeit von Halbgeraden**). *Gegeben eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen hat jede Halbgerade unendlich viele Punkte und jede Kongruenz, die eine Halbgerade bijektiv auf sich selber abbildet, hält besagte Halbgerade sogar punktweise fest.*

5.1.1.24. Insbesondere gibt es zu jeder Halbgerade A genau eine nichttriviale Kongruenz s_A, die sie festhält und damit auch punktweise festhält. Wir nennen sie die **Spiegelung von** A. Damit gibt es auch zu jeder Gerade g genau eine nichttriviale Kongruenz s_g, die sie punktweise festhält, nämlich $s_A = s_g$ für jede Halbgerade $A \subset g$. Wir nennen sie die **Spiegelung an** g. Diejenigen Kongruenzen k, für die es eine Gerade g gibt mit $k = s_g$, heißen **Spiegelungen**.

5.1.1.25 (**Existenz eines Dreiecks**). Da Spiegelungen nach Annahme nie die Identität sind, impliziert in einer Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen die Existenz einer Gerade bereits die Existenz eines Tripels nicht kollinearer Punkte alias eines Dreiecks. Ebenso sehen wir, daß es zu jeder Gerade genau zwei Halbebenen geben muß.

Beweis. Nach unserer Definition einer Inzidenzgeometrie hat jede Gerade mindestens zwei Punkte. Gibt es eine Gerade, so gibt es folglich auch eine Halbgerade mit mindestens zwei Punkten. Also hat jede Halbgerade mindestens zwei Punkte. Es folgt, daß eine und damit jede Halbgerade eine weitere Halbgerade als echte Teilmenge enthält. Daraus folgt weiter, daß jede Halbgerade unendlich viele Punkte haben muß und daß davon nur einer nicht zwischen zwei anderen

liegt. Seien nun g eine Gerade und $\leq$ eine mit der Zwischenrelation verträgliche Anordnung auf g. Seien weiter $x \in g$ ein Punkt und $A := \{z \in g \mid z \geq x\}$ eine der beiden zugehörigen Halbgeraden. Sei schließlich $k \in K \backslash \mathrm{id}$ die nichttriviale Kongruenz mit $k(A) = A$. Natürlich gilt $k(x) = x$ und $k^2 = \mathrm{id}$ und k ist streng monoton wachsend auf g. Gäbe es einen Punkt $z \in A$ mit $k(z) \neq z$, so könnten wir $k(z) > z$ annehmen und es folgte $k(k(z)) > k(z) > z$ im Widerspruch zu $k^2 = \mathrm{id}$. Folglich gilt $k(z) = z \; \forall z \in A$. □

5.1.1.26. Gegeben eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen gibt es insbesondere auf jeder Halbgerade nur genau einen Punkt, der nicht zwischen zwei anderen Punkten unserer Halbgerade liegt. Er heiße der **Endpunkt** unserer Halbgerade.

Lemma 5.1.1.27 (Unendlichkeit von Geradensegmenten). *Gegeben eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen liegt auf der Strecke $[p, q]$ zwischen je zwei verschiedenen Punkten $p \neq q$ stets ein weiterer Punkt, der von beiden verschieden ist.*

Beweis. Aus der Existenz eines Dreiecks 5.1.1.25 folgt, daß es eine Halbgerade A mit Endpunkt p gibt, die nicht kollinear ist mit der Halbgerade B mit Endpunkt p, auf der q liegt. Auf A finden wir von p verschiedene und untereinander verschiedene Punkte $x \neq y$ mit (x, y, p) in unserer Zwischenrelation. Auf der Gerade $\overline{xq}$ finden wir einen Punkt r, der nicht zur Kante $[x, q]$ des Dreiecks $\{p, q, x\}$ gehört. Die Gerade $\overline{ry}$ muß dann $[p, q]$ treffen, kann aber weder p noch q enthalten. □

Lemma 5.1.1.28 (Spiegelungen vertauschen Halbebenen). *In einer Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen werden von der Spiegelung s_g an einer Gerade g die beiden nach 5.1.1.25 zugehörigen Halbebenen vertauscht.*

Beweis. Wir argumentieren durch Widerspruch. Wir finden sicher $x \in X \backslash g$ mit $y := s_g(x) \neq x$. Werden die beiden Halbebenen nicht vertauscht, so kann die Gerade $h := \overline{xy}$ unsere Gerade g nicht treffen, da mit einem eventuellen Schnittpunkt z nur genau eine der Zwischenrelationen (z, x, y) und (z, y, x) gelten könnte im Widerspruch dazu, daß s_g unsere Zwischenrelation erhält. Das Komplement unserer beiden Geraden zerfällt also in die disjunkte Vereinigung

$$X \backslash (g \cup h) = H_g \sqcup S \sqcup H_h$$

eines Halbebenenalkoven zu g, des Streifens zwischen unseren beiden Geraden alias dem Schnitt des anderen Halbebenenalkoven zu g mit einem Halbebenenalkoven zu h sowie dem anderen Halbebenenalkoven zu h. Gegeben $p \in g$ können wir sicher $q \in g \backslash p$ so wählen, daß x und q auf verschiedenen Seiten von $\overline{py}$ liegen.

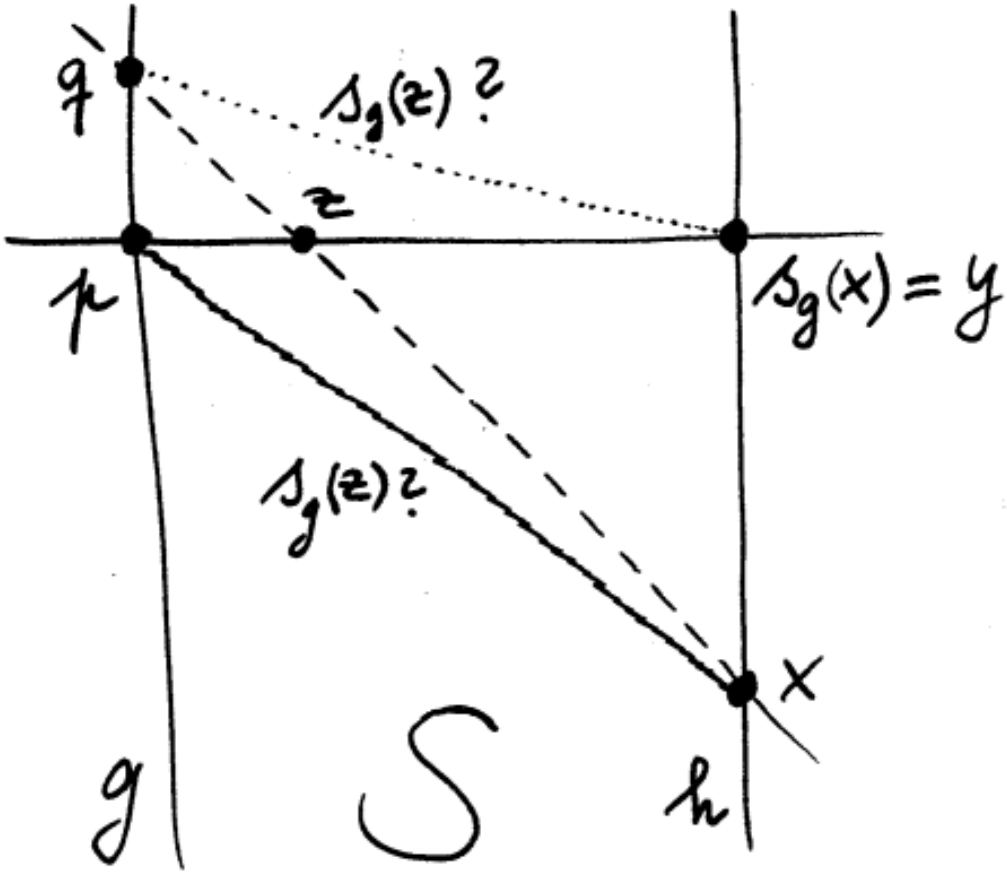


Illustration zu Lemma 5.1.1.28

Dann trifft $[q, x]$ die Gerade $\overline{py}$ notwendig in einem Punkt z des Streifens S, da dieser Schnittpunkt ja weder q noch x sein kann. Es folgt $z \in [p, y]$. Nun ist $s_g(z)$ notwendig im Schnitt von $[p, x]$ mit $[q, y]$. Dieser Schnitt ist aber leer, da $[q, y] \backslash y$ und $[p, x] \backslash p$ in verschiedenen Halbebenenalkoven zu $\overline{py}$ liegen. Widerspruch! $\square$

5.1.1.29. In einer Inzidenzgeometrie X mit Zwischenrelation und Kongruenzen sagen wir, die **Gerade** h **stehe senkrecht auf der Geraden** g und schreiben in Formeln $h \perp g$, wenn gilt $h \neq g$ und $s_g(h) = h$. Weil Spiegelungen nach 5.1.1.28 Halbebenen vertauschen, müssen sich unsere Geraden dann schneiden.

5.1.1.30. In einer Inzidenzgeometrie X mit Zwischenrelation und Kongruenzen seien zwei verschiedene sich schneidende Geraden $g \neq h, g \cap h \neq \emptyset$ gegeben. Wir betrachten die gröbste Partition von X, die die beiden Partitionen in die jeweilige Gerade und ihre beiden Halbebenenalkoven verfeinert. Sie hat neun Stücke: Den Schnittpunkt, die vier davon ausgehenden Halbgeraden längs g und h vermindert um ihren Endpunkt, die wir **Halbgeradenfacetten** nennen, sowie vier weitere Stücke, die wir **Winkelalkoven** nennen. Daß diese Stücke auch in der Tat alle nicht leer sind, wie wir es von einer Partition stets fordern, folgt aus der Unendlichkeit von Halbgeraden 5.1.1.23 und Geradensegmenten 5.1.1.27. Alle diese Stücke sind konvex. Wir nennen zwei Stücke **benachbart**, wenn ihre Vereinigung auch konvex ist. Der kombinatorische Graph im Sinne von 4.5.4.21 mit den Stücken unserer Partition als Ecken und jeweils einer Kante zwischen zwei benachbarten Stücken hat die Gestalt eines „Rades mit 8 Speichen“, die das einelementige Stück abwechselnd verbinden mit einer Halbgeradenfacette und einem Winkelalkoven.

Lemma 5.1.1.31 (Eigenschaften des Senkrechtstehens). *Gegeben eine Inzidenzgeometrie X mit Zwischenrelation und Kongruenzen gilt:*

1. *Zu jeder Gerade $g \subset X$ und jedem Punkt $x \in X$ gibt es genau eine Gerade h durch x mit $h \perp g$, das* **Lot durch** x **auf** g*;*

2. *Gegeben Geraden $g \neq h$ in X gilt $h \perp g$ genau dann, wenn die zugehörigen Spiegelungen kommutieren, in Formeln $s_h s_g = s_g s_h$;*

3. *Gegeben Geraden g, h in X gilt $(h \perp g) \Leftrightarrow (g \perp h)$;*

4. *Stehen Geraden h_1 und h_2 senkrecht auf einer Geraden g in verschiedenen Punkten $x_1 \neq x_2$ von g, so gilt $h_1 \cap h_2 = \emptyset$.*

Beweis. Für $x \notin g$ ist offensichtlich die Gerade durch x und $s_g(x)$ die einzige zu g senkrechte Gerade durch x. Mit Kongruenzen folgt, daß es auch durch jeden Punkt $x \in g$ mindestens eine zu g senkrechte Gerade h gibt. Jede weitere Gerade

durch x muß durch zwei im kombinatorischen Graphen aus 5.1.1.30 gegenüberliegende Winkelalkoven zu g, h gehen und kann folglich nicht unter s_g stabil sein. Das zeigt die erste Aussage. Es folgt weiter $s_g s_h s_g = s_h$, da beide Kongruenzen die Halbebenen von h vertauschen und die Halbgeraden auf h mit Endpunkt x stabilisieren. Umgekehrt folgt aus $s_g s_h s_g = s_h$ aber auch, daß s_g die Menge der Fixpunkte von s_h stabilisiert, also $s_g(h) = h$, und somit die zweite Aussage. Die dritte Aussage folgt unmittelbar aus der zweiten Aussage. Die letzte Aussage folgt, da für jeden Schnittpunkt auch sein Bild unter der Spiegelung s_g an g ein Schnittpunkt sein müßte. □

5.1.1.32 (**Existenz von Parallelen und Paralellogramme**). Insbesondere gibt es in jeder Inzidenzgeometrie X mit Zwischenrelation und Kongruenzen zu jeder Gerade g durch jeden Punkt x außerhalb dieser Gerade stets mindestens eine Parallele: Wir fällen mit 5.1.1.31 das Lot h von unserem Punkt x auf unsere Gerade g und errichten dann wieder mit 5.1.1.31 auf diesem Lot die Senkrechte g' durch besagten Punkt x. Die so erhaltene Gerade g' ist nach 5.1.1.31 parallel zu unserer ursprünglichen Gerade. Das Parallelenaxiom fordert, daß es in dieser Situation auch nicht mehr als eine Parallele gibt. Nehmen wir zusätzlich auch noch das Parallelenaxiom an, so ist unsere eben konstruierte Parallele sogar die einzige Parallele zu g durch x. Das bedeutet, daß wenn wir zwei parallele Geraden gegeben haben und von einem beliebigen Punkt der einen das Lot auf die andere fällen, daß dieses Lot dann auf unseren beiden parallelen Geraden senkrecht stehen muß.

5.1.1.33 (**Verschiebungen längs Geraden**). Sei (X, K) eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen. Gegeben eine Gerade g untersuchen wir die Gruppe $K_{|g} \subset K$ aller Kongruenzen, die sowohl g als auch die beiden Halbebenen zu g nach 5.1.1.25 stabilisieren. Wir nennen sie **halbebenenerhaltend**. Diejenigen halbebenenerhaltenden Kongruenzen v, die beide mit der Zwischenrelation verträglichen Anordnungen auf g erhalten, in Formeln $x \leq y \Rightarrow v(x) \leq v(y)$, bilden eine Untergruppe

$$\vec{g} \subset K_{|g}$$

vom Index Zwei. Offensichtlich operiert $\vec{g}$ frei und transitiv auf g. Wir nennen die Elemente dieser Gruppe **Verschiebungen längs** g.

Lemma 5.1.1.34 (Richtung einer Verschiebung). *Seien X eine fasteuklidische Geometrie und $g \subset X$ eine Gerade und $\leq$ eine mit der Zwischenrelation verträgliche Anordnung auf g. Gegeben eine nichttriviale Verschiebung $v \neq \mathrm{id}$ längs g gilt dann entweder $v(x) > x \ \forall x \in g$ oder $v(x) < x \ \forall x \in g$.*

Beweis. In der Tat seien sonst $p, q \in g$ gegeben mit $v(p) > p$ und $v(q) < q$. Indem wir andernfalls v durch v^{-1} ersetzen, dürfen wir $p < q$ annehmen und finden also $p < v(p) < v(q) < q$. Induktiv sehen wir, daß die $v^n(p)$ streng monoton

wachsen und die $v^n(q)$ streng monoton fallen, wobei aber stets gilt $v^n(p) < v^n(q)$. Dann besitzen die $v^n(p)$ aber nach der Supremumseigenschaft eine kleinste obere Schranke $z := \sup\{v^n(p) \mid n \in \mathbb{N}\}$ und z ist ein Fixpunkt von v im Widerspruch dazu, daß wir v nichttrivial angenommen hatten. □

Lemma 5.1.1.35 (Halbebenenerhaltende Nichtverschiebungen). *Gegeben eine fasteuklidische Geometrie X und eine Gerade $g \subset X$ sind alle Nichtverschiebungen aus $K_{|g}$ ihre eigenen Inversen.*

Beweis. Gegeben $k \in K_{|g} \backslash \vec{g}$ gilt es, $k^2 = \mathrm{id}$ zu zeigen. Klar ist, daß k jede verträgliche Anordnung auf g umkehrt und daß k^2 jede verträgliche Anordnung auf g erhält, in Formeln $k^2 \in \vec{g}$. Es reicht damit zu zeigen, daß k^2 als die Identität auf g operiert. Sonst gäbe es aber $x \in g$ mit $k^2(x) \neq x$. Sei $\leq$ diejenige mit der Zwischenrelation verträgliche Anordnung auf g mit $x < k(x)$. Dann folgt $k(x) > k^2(x)$ und indem wir notfalls zu k^{-1} übergehen, dürfen wir zusätzlich $k^2(x) < x$ annehmen. Dann folgt $k^3(x) > k(x)$ und insgesamt

$$k^2(x) < x < k(x) < k^3(x)$$

Das Anwenden der Verschiebung k^2 verkleinert also x und vergrößert $k(x)$ und dieser Widerspruch zu 5.1.1.34 beendet den Beweis. □

Lemma 5.1.1.36 (Vertauschen von Punkten durch Spiegelungen). *Sei X eine fasteuklidische Geometrie. Gegeben zwei verschiedene Punkte $x \neq y$ gibt es stets genau eine Spiegelung $s \in K$, die x und y vertauscht, und diese stabilisiert beide Halbebenen zu $\overline{xy}$.*

Beweis. Wir setzen $g := \overline{xy}$. Es gibt in $K_{|g}$ genau eine Nichtverschiebung s mit $s : x \mapsto y$, nämlich eine der beiden Kongruenzen, die die Halbgerade durch y mit Endpunkt x auf die Halbgerade durch x mit Endpunkt y abbildet. Es reicht zu zeigen, daß s eine Spiegelung ist. Nach 5.1.1.35 gilt schon mal $s^2 = \mathrm{id}$ und insbesondere $s : y \mapsto x$. Sei z ein Punkt außerhalb von g. Bezeichne $T := \Delta(x, y, z) \subset X$ die Dreiecksfläche zu unserem Dreieck, einen Schnitt von drei Halbebenen und gleichbedeutend die konvexe Hülle von $\{x, y, z\}$. Aus dieser Teilmenge können wir die Ecken unseres Dreiecks zurückgewinnen als die eindeutig bestimmten Punkte, bei deren Entfernung unsere Teilmenge jeweils konvex bleibt. Wegen $s^2 = \mathrm{id}$ gilt entweder $s(T) = T$ und damit $s(z) = z$ oder $s(T) \not\subset T$ und damit $s(z) \notin T$. Dann muß aber $s(z)$ entweder auf der falschen Seite von $\overline{xz}$ liegen und $\overline{ys(z)}$ trifft $\overline{xz}$, oder $s(z)$ muß auf der falschen Seite von $\overline{yz}$ liegen und $\overline{xs(z)}$ trifft $\overline{yz}$. In beiden Fällen ist so ein Schnittpunkt w ein Fixpunkt unserer Kongruenz s außerhalb von g. Nach 5.1.1.31 gibt es eine Gerade h durch w mit $h \perp g$ und dann gilt offensichtlich $s(h) = h$. Weiter hält s eine Halbgerade A von h mit dem Schnittpunkt von g und h als Endpunkt fest, in Formeln $s(A) = A$, und es folgt $s = s_h$. □

5.1.1.37. Gegeben eine Gerade g in einer fasteuklidischen Geometrie (X, K) und dazu eine ausgezeichnete Halbebene H liefert das Bilden des Endpunkts eine Bijektion zwischen g und der Menge $g_H^\perp$ aller Halbgeraden mit Endpunkt in g, die auf g senkrecht stehen und in H enthalten sind. Zu je zwei Halbgeraden $A, B \in g_H^\perp$ sind die beiden Kongruenzen $k \in K$ mit $k(A) = B$ nach 5.1.1.36 mithin (1) eine Verschiebung aus $\vec{g}$ und (2) eine Spiegelung aus $K_{|g}$, die ihrerseits die Gestalt $k = s_C$ hat für genau ein $C \in g_H^\perp$.

Lemma 5.1.1.38 (Gruppe halbebenenerhaltender Kongruenzen). *Seien eine fasteuklidische Geometrie (X, K) und eine Gerade $g \subset X$ gegeben. So gilt:*

1. *Alle Nichtverschiebungen aus $K_{|g}$ sind Spiegelungen und diese Spiegelungen erzeugen $K_{|g}$;*
2. *Jede Verschiebung aus $\vec{g}$ ist das Quadrat einer weiteren Verschiebung aus $\vec{g}$ und konjugieren wir eine Verschiebung mit einer Spiegelung aus $K_{|g}$, so erhalten wir die inverse Verschiebung;*
3. *Die Gruppe der Verschiebungen längs einer Gerade ist kommutativ.*

Beweis. 1. Nach 5.1.1.37 werden je zwei Halbgeraden $A, B \in g_H^\perp$ von einer Spiegelung $s \in K_{|g}$ vertauscht. Die zweite Kongruenz, die A in B überführt, ist $ss_A = s_B s$ und ist offensichtlich eine Verschiebung. Nach 5.1.1.37 haben wir damit alle Elemente von $K_{|g}$ untersucht.

2. Sei $v \in \vec{g}$ eine Verschiebung und sei $A \in g_H^\perp$ beliebig. Sei s die Spiegelung, die A und $v(A)$ vertauscht, und sei $B \in g_H^\perp$ bestimmt durch $s = s_B$. Für die Verschiebung $\varphi \in \vec{g}$ mit $\varphi(A) = B$ behaupten wir dann $\varphi^2 = v$. Um das zu sehen betrachten wir die Spiegelung σ, die A und B vertauscht. Natürlich ist dann $\tau := s_B \sigma s_B$ die Spiegelung, die $v(A)$ und B vertauscht. Aus $\varphi = s_B \sigma$ folgt so $\varphi = \tau s_B$ und $\varphi^2(A) = v(A)$. Das zeigt $\varphi^2 = v$. Aus $\varphi = \sigma s_A$ folgt weiter $s_A \varphi s_A = s_A \sigma = \sigma s_B = \varphi^{-1}$ und damit auch $s_A v s_A = v^{-1}$.

3. Die Konjugation mit einer beliebigen Spiegelung aus $K_{|g}$ ist ein Automorphismus von $\vec{g}$ und bildet jedes Element auf sein Inverses ab. Das zeigt, daß $\vec{g}$ kommutativ sein muß. □

5.1.1.39. Wir nennen zwei Halbebenen in einer fasteuklidischen Geometrie **zwischenäquivalent**, wenn die eine in der anderen enthalten ist oder umgekehrt. Der Leser mag zur Übung zeigen, daß das in der Tat eine Äquivalenzrelation ist.

Proposition 5.1.1.40 (Verschiebungsgruppe bei Parallelenaxiom). *Sei (X, K) eine fasteuklidische Geometrie mit Parallelenaxiom. So gilt:*

1. *Die Verschiebungen längs paralleler Geraden sind dieselben, in Formeln $g \| h \Rightarrow \vec{g} = \vec{h}$;*

2. *Alle Verschiebungen längs irgendwelcher Geraden bilden eine kommutative Untergruppe $\vec{X} \subset K$, die frei und transitiv auf der Menge X der Punkte unserer Geometrie operiert.*

5.1.1.41. Wir notieren die Gruppe $\vec{X}$ der Verschiebungen einer fasteuklidischen Geometrie X mit Parallelenaxiom additiv. Wir setzen weiter $v + x := v(x)$ für $v \in \vec{X}$ und $x \in X$.

Beweis. Nach 5.1.4.9 besteht $\vec{g}$ genau aus allen Kongruenzen, die wir als Verknüpfung von zwei Spiegelungen an zu g senkrechten Geraden schreiben können. Unter der Annahme des Parallelenaxioms sind nach 5.1.1.32 die zu g senkrechten Geraden dieselben wie die zu h senkrechten Geraden. Das zeigt Teil 1. In einer fasteuklidischen Geometrie mit Parallelenaxiom kann man die Verschiebungen beschreiben als die Gesamtheit aller Kongruenzen, die jede Halbebene in eine dazu zwischenäquivalente Halbebene überführen. Es dann klar, daß es für jedes Paar von Punkten nur genau eine Verschiebung gibt, die den einen in den anderen überführt. Daraus hinwiederum folgt die Kommutativität mit unseren Erkenntnissen 5.1.1.32 zu Parallelogrammen beziehungsweise der Kommutativität der Gruppe der Verschiebungen längs einer Geraden. □

Lemma 5.1.1.42 (Angeordnete Gruppen als Untergruppen der reellen Zahlen). *Sei A eine angeordnete Gruppe, in der keine nichttriviale zyklische Untergruppe eine obere Schranke hat und in der jedes Element das Quadrat eines weiteren Elements ist. So gibt es für jedes $a \in A$ oberhalb des neutralen Elements genau einen ordnungserhaltenden Gruppenhomomorphismus $A \to (\mathbb{R}, +)$ mit $a \mapsto 1$, und dieser Gruppenhomomorphismus ist injektiv.*

5.1.1.43. Die Bedingung, daß jedes Element das Quadrat eines anderen sein soll, ist nach einem Satz von Hölder hier überflüssig. Allerdings wird der Beweis dann schwieriger.

Beweis. Wir setzen A nicht als abelsch voraus, notieren es aber dennoch additiv, um das Kleingedruckte klein zu halten. Gegeben $x \in A$ und $b \in A_{>0}$ positiv erklären wir $\lfloor x : b \rfloor \in \mathbb{Z}$ als die größte ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit $x \geq nb$. Sicher gilt $\lfloor x + y : b \rfloor \in \lfloor x : b \rfloor + \lfloor y : b \rfloor + \{0, 1\}$ sowie $\lfloor x : b \rfloor \in 2\lfloor x : 2b \rfloor + \{0, 1\}$. Für unser ausgezeichnetes Element $a = a_0 \in A_{>0}$ finden wir nach Annahme genau eine Folge (a_n) in A mit $2a_n = a_{n-1}$ für $n \geq 1$. Jetzt erklären wir eine Abbildung $\varphi : A \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) = [x : a] := \lim_{n \to \infty} \frac{\lfloor x : a_n \rfloor}{2^n}$$

Der Grenzwert existiert, da der Abstand vom n-ten zum vorhergehenden Folgenglied entweder Null oder $1/2^n$ ist. Die Abbildung ist nach dem Vorhergehenden

offensichtlich ein mit den jeweiligen Anordnungen verträglicher Gruppenhomomorphismus und offensichtlich der Einzige, der das Element $a \in A_{>0}$ auf $1 \in \mathbb{R}$ wirft. Wäre ihr Kern nicht trivial, so müßte er ein nichttriviales Element $x > 0$ enthalten, und dann gäbe es ein n mit $2^n x \geq a$ und a forteriori $x \geq a_n$ und $\varphi(x) \geq 1/2^n$ im Widerspruch zu $\varphi(x) = 0$. Also ist φ ein injektiver ordnungserhaltender Gruppenhomomorphismus. □

5.1.1.44 (**Vektorraumstruktur der Verschiebungsgruppe längs einer Gerade**). Gegeben eine Gerade g in einer fasteuklidischen Geometrie induziert jede mit der Zwischenordnung verträgliche Anordnung unserer Gerade eine Anordnung auf der Gruppe $\vec{g}$ der Verschiebungen längs unserer Gerade. Eine zyklische Untergruppe $H \subset \vec{g}$ mit oberer Schranke müßte eine kleinste obere Schranke s haben und für jedes $h \in H$ wäre dann auch $s + h$ eine kleinste obere Schranke, also $s + h = s$ und $h = \mathrm{id}$. Das vorhergehende Lemma 5.1.1.42 zeigt somit, daß unsere Gruppe $\vec{g}$ als angeordnete Gruppe isomorph ist zu $\mathbb{R}$ und daß es auf $\vec{g}$ genau eine Struktur als $\mathbb{R}$-Vektorraum gibt, für die alle diese Isomorphismen lineare Abbildungen sind.

Proposition 5.1.1.45 (**Vektorraumstruktur der Verschiebungsgruppe**). *Gegeben eine fasteuklidische Geometrie X mit Parallelenaxiom besitzt die Gruppe der Verschiebungen $\vec{X}$ genau eine Struktur als reeller Vektorraum derart, daß für jede Gerade g die Einbettung der Untergruppe $\vec{g} \subset \vec{X}$ linear ist in Bezug auf die in 5.1.1.44 auf $\vec{g}$ erklärte Struktur als reeller Vektorraum. In Bezug auf diese Struktur gilt* $\dim_{\mathbb{R}} \vec{X} = 2$.

Beweis. Um die behauptete Vektorraumstruktur auf $\vec{X}$ zu erhalten, müssen wir nur noch für je zwei Verschiebungen $v, w \in \vec{X}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ zeigen

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$$

Das ist klar für $\lambda \in \mathbb{Z}$. Da jede Verschiebung genau eine Wurzel alias Hälfte hat, folgt es für jeden Bruch $\lambda \in \mathbb{Z}[2^{-1}]$ mit einer Zweierpotenz im Nenner. Um es im allgemeinen zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß v und w nicht zu derselben Untergruppe $\vec{g}$ gehören. Dann erhalten wir für jeden Punkt $p \in X$ eine Bijektion $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} X$ durch die Vorschrift $(\mu, \nu) \mapsto p + \mu v + \nu w$. Unter dieser Bijektion werden Halbebenen zu Parallelen der Koordinatenachsen auf Halbebenen abgebildet und zwischenäquivalente Halbebenen zu Parallelen der Koordinatenachsen auf zwischenäquivalente Halbebenen. Damit werden auch abgeschlossene Quader in $\mathbb{R}^2$ auf konvexe Teilmengen von X abgebildet. Für $\lambda \in [2^{-n}a, 2^{-n}(a+1)]$ mit $a \in \mathbb{Z}$ liegen dann sowohl $p + \lambda(v + w)$ als auch $p + \lambda v + \lambda w$ im Bild des Quaders $[2^{-n}a, 2^{-n}(a+1)]^2$. Da das für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt die behauptete Gleichheit. □

Satz 5.1.1.46 (**Charakterisierung der euklidischen Ebene**). *Je zwei fasteuklidische Geometrien mit Parallelenaxiom sind zueinander isomorph und sind insbesondere isomorph zu unserem Standardmodell* $\mathbb{R}^2$.

Beweis. Nach 5.1.1.45 ist unsere Inzidenzgeometrie eine reelle affine Ebene. Nach Annahme bilden die Elemente unserer Kongruenzgruppe Geraden auf Geraden ab, sind nach 3.3.3.1 also Affinitäten. Folglich kommt unsere Struktur von einer Kongruenzebene im Sinne von 4.1.1.10 her. Wir wissen aber bereits, etwa aus 4.1.2.13, daß je zwei Kongruenzebenen isomorph sind. □

Vorschau 5.1.1.47. In 5.2.4.3 konstruieren wir eine fasteuklidische Geometrie, in der das Parallelenaxiom nicht gilt, die sogenannte „hyperbolische Geometrie". Die Frage nach der Existenz solcher „nichteuklidischer Geometrien" hat die Mathematik lange umgetrieben.

5.1.2 Affine Inzidenzebenen

Definition 5.1.2.1. Eine **affine Inzidenzebene** ist eine Inzidenzgeometrie (X, G) mit den beiden folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

1. (**Parallelenaxiom**) Gegeben $g \in G$ und $x \in X \backslash g$ gibt es genau ein $h \in G$ mit $x \in h$ und $h \cap g = \emptyset$;

2. (**Dreieck**) Es gibt in unserer Inzidenzgeometrie ein Dreieck, also eine Menge von drei nicht kollinearen Punkten.

5.1.2.2. Im Kontext fasteuklidischer Ebenen konnten wir das zugehörige Parallelenaxiom schwächer fassen als die Forderung 5.1.1.14 nach der Existenz von höchstens einer Parallele. Diese schächere Forderung liefert jedoch im Kontext allgemeiner Inzidenzgeometrien keine interessante Theorie mehr.

5.1.2.3. Geraden in einer affinen Inzidenzebene, die sich nicht schneiden, nennt man **parallel**. Mit diesen Worten können wir die erste Bedingung dahingehend umformulieren, daß es gegeben eine Gerade und ein Punkt außerhalb besagter Geraden genau eine Parallele durch besagten Punkt zu besagter Gerade gibt. Unsere affinen Inzidenzebenen heißen „affin", um sie von den „projektiven" Inzidenzebenen zu unterscheiden, von denen wir in dieser Vorlesung einige Beispiele, aber keine formale Definition sehen werden. Wir beschäftigen uns im folgenden mit der Frage, unter welchen Zusatzannahmen eine affine Inzidenzebene sogar eine affine Ebene im Sinne der linearen Algebra ist.

Beispiel 5.1.2.4. Gegeben ein Körper oder auch ein Schiefkörper K ist unsere Inzidenzgeometrie $X = K^2$ aus 5.1.1.4 eine affine Inzidenzebene. Wir nennen diese Struktur die **affine Standardinzidenzebene über dem Schiefkörper** K.

Definition 5.1.2.5. Unter einem **Isomorphismus von Inzidenzgeometrien** oder gleichbedeutend einer **Kollineation** versteht man eine Bijektion der zugrundeliegenden Punktmengen, die eine Bijektion zwischen den jeweiligen Mengen von Geraden induziert. Zwei Inzidenzgeometrien heißen **isomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Isomorphismus gibt. Ein Isomorphismus einer Inzidenzgeometrie mit sich selber heißt ein **Automorphismus** unserer Inzidenzgeometrie.

Beispiel 5.1.2.6. Im Fall des Körpers mit zwei Elementen besteht die zugehörige affine Standardinzidenzbene aus vier Punkten und ihre Geraden sind alle zweielementigen Teilmengen, so daß es insgesamt genau sechs Geraden gibt. Man überlegt sich leicht, daß jede affine Inzidenzebene, in der es eine Gerade mit nur einer einzigen Parallele gibt, zu dieser vierelementigen Inzidenzebene isomorph sein muß.

Beispiel 5.1.2.7. Für diejenigen unter Ihnen, die die Terminologie affiner Räume bereits kennen, sei bemerkt, daß für jeden zweidimensionalen affinen Raum X über einem Körper K unsere Inzidenzgeometrie aus 5.1.1.5 eine affine Inzidenzebene ist und daß jede Wahl eines Koordinatensystems bestehend aus einem ausgezeichneten Punkt und zwei linear unabhängigen Richtungsvektoren eine Kollineation $K^2 \xrightarrow{\sim} X$ liefert.

5.1.2.8. Sei (X, G) eine affine Inzidenzebene. Wir überlegen uns, daß die Relation „gleich oder parallel“ eine Äquivalenzrelation auf G ist. In der Tat, haben zwei Parallelen zu einer gegebenen Geraden einen Schnittpunkt, so müssen sie beide die eindeutig bestimmte Parallele durch diesen Schnittpunkt sein. Wir notieren diese Äquivalenzrelation im folgenden

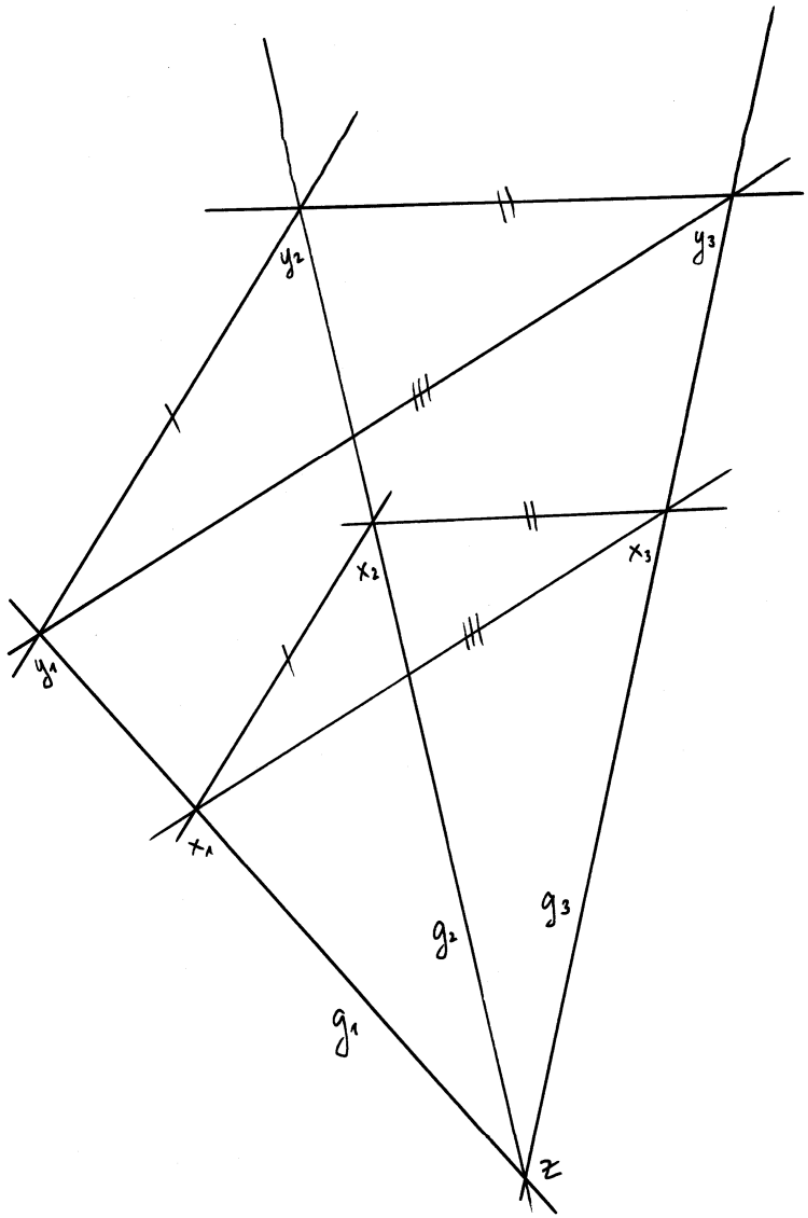
$$\parallel$$

Definition 5.1.2.9. Wir sagen, eine affine Inzidenzebene habe die **Desargues-Eigenschaft**, wenn gegeben drei paarweise verschiedene Geraden g_1, g_2, g_3 mit einem gemeinsamen Punkt z und für $i \in \{1, 2, 3\}$ Punkte $x_i, y_i \in g_i \backslash z$ stets gilt

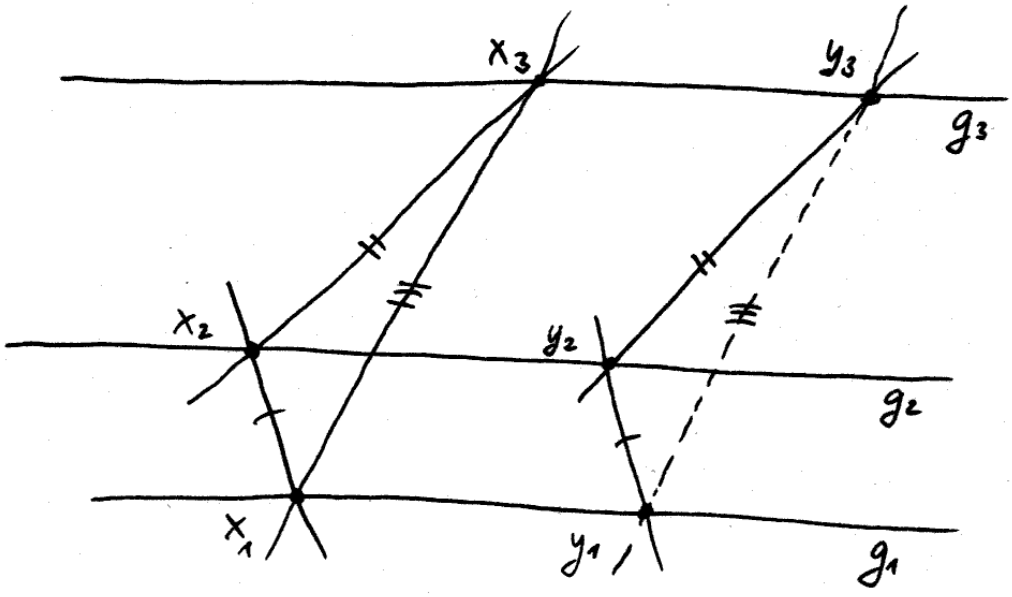
$$(\overline{x_1x_2} \parallel \overline{y_1y_2} \text{ und } \overline{x_2x_3} \parallel \overline{y_2y_3}) \Rightarrow \overline{x_1x_3} \parallel \overline{y_1y_3}$$

Satz 5.1.2.10 (**Desargueseigenschaft und Koordinatisierung**). *Eine affine Inzidenzebene hat genau dann die Desargueseigenschaft, wenn sie isomorph ist zur affinen Standardinzidenzebene K^2 über einem Schiefkörper K.*

5.1.2.11. Dieser Satz ist in meinen Augen eine besonders schöne Illustration der innigen Beziehung zwischen Geometrie und Algebra. Wir schicken dem Beweis ein Lemma voraus.



Die Desargueseigenschaft besagt, daß in jeder Situation der hier dargestellten Art die Parallelität der beiden eingestrichenen und der beiden zweigestrichenen Geraden die Parallelität der beiden dreigestrichenen Geraden impliziert.



Skizze zur ausgearteten Desargueseigenschaft 5.1.2.12

Lemma 5.1.2.12 (**Ausgeartete Desargueseigenschaft**). *Sei X eine affine Inzidenzebene mit der Desargueseigenschaft. Gegeben drei paarweise verschiedene parallele Geraden g_1, g_2, g_3 und Punkte $x_i, y_i \in g_i$ gilt dann*

$$(\overline{x_1x_2} \parallel \overline{y_1y_2} \text{ und } \overline{x_2x_3} \parallel \overline{y_2y_3}) \Rightarrow \overline{x_1x_3} \parallel \overline{y_1y_3}$$

Vorschau 5.1.2.13. Die Aussage des Lemmas kann als ein Analogon der Desargueseigenschaft verstanden werden, bei der der Punkt z ein „unendlich ferner Punkt“ ist. Im Rahmen des Studiums projektiver Ebenen werden wir diese Intuition zu einer präzisen Aussage machen und sie als eine Konsequenz der sehr viel stärkeren „projektiven Desargueseigenschaft“ verstehen lernen.

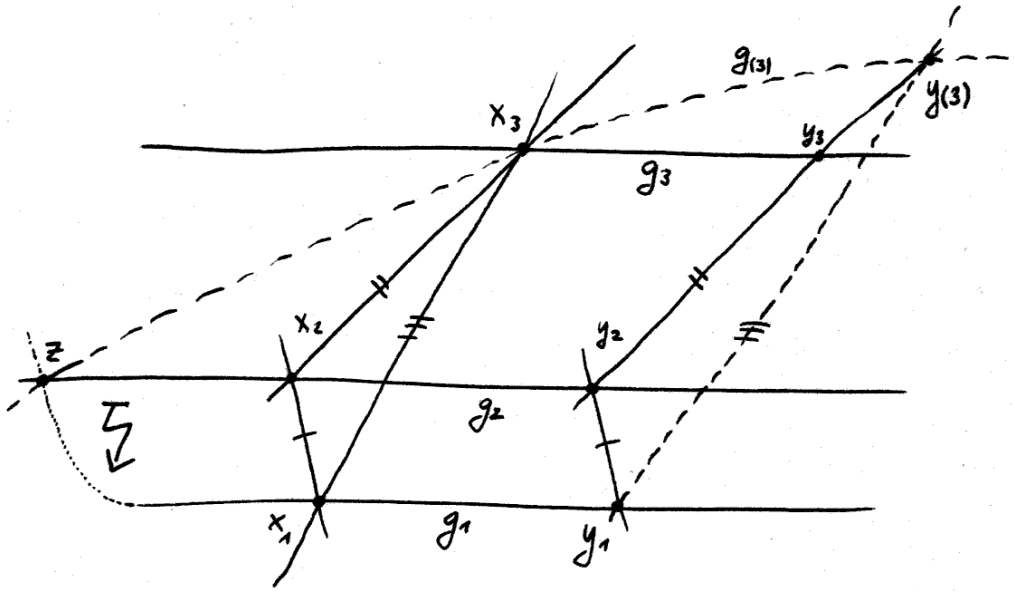
Beweis. Sind die x_i kollinear, so ist das eh klar. Anderfalls können wir $y_{(3)}$ erklären durch $\overline{x_1x_3} \| \overline{y_1y_{(3)}}$ und $y_{(3)} \in \overline{y_2y_3}$. Die Gerade $g_{(3)} := \overline{x_3y_{(3)}}$ schneidet g_2 in einem Punkt z, und dann müßte g_1 auch durch z gehen im Widerspruch zu unseren Annahmen. □

Beweis des Koordinatisierungssatzes 5.1.2.10. Um zu sehen, daß die Standardinzidenzebene über einem Schiefkörper stets die Desargueseigenschaft hat, dürfen wir als Schnittpunkt z unserer drei Geraden den Ursprung $(0,0) \in K^2$ annehmen. Weiter beachten wir $\lambda g \parallel g$ für jede Gerade g und alle $\lambda \in K^\times$. Für das $\lambda \in K$ mit $\lambda x_1 = y_1$ folgt dann aus $\overline{x_1x_2} \parallel \overline{y_1y_2}$ sofort $\lambda x_2 = y_2$ und aus $\overline{x_2x_3} \parallel \overline{y_2y_3}$ weiter $\lambda x_3 = y_3$ und so schließlich $\overline{x_1x_3} \parallel \overline{y_1y_3}$. Um umgekehrt zu zeigen, daß jede affine Inzidenzebene mit der Desargueseigenschaft isomorph ist zur Standardinzidenzebene über einem Schiefkörper, gehen wir in mehreren Schritten vor.

1.a. Unter einem **Parallelogramm** in einer affinen Inzidenzebene X verstehen wir ein Quadrupel von Punkten $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \in X^4$ derart, daß es Paare von Geraden $g_1 \parallel g_2$ und $h_1 \parallel h_2$ gibt mit $h_i \nparallel g_j$ und $h_i \cap g_j = x_{ij}$. Hier verwenden wir unsere Notation $\parallel$ für „gleich oder parallel“. Gegeben eine affine Inzidenzebene X betrachten wir auf der Menge X^2 aller Punktpaare aus X die **Parallelogrammrelation** $\sim$ mit $(x,y) \sim (x',y')$, wenn unsere vier Punkte ein Parallelogramm (x,y,x',y') bilden. Die Parallelogrammrelation ist sicher symmetrisch und reflexiv. Bezeichne $\approx$ die davon erzeugte Äquivalenzrelation, die **Parallelogrammäquivalenz**. Per definitionem gilt also $(x,y) \approx (x',y')$ genau dann, wenn es eine endliche Folge von Punktpaaren (x_i, y_i) gibt mit

$$(x,y) = (x_0,y_0) \sim \ldots \sim (x_n,y_n) = (x',y')$$

1.b. Wir überlegen uns, daß sich unter der Annahme der Desargueseigenschaft je zwei parallelogrammäquivalente Punktpaare $(x,y) \approx (x',y')$ auch durch einen



Skizze zum Beweis der ausgearteten Desargueseigenschaft 5.1.2.12

„Zweisprung von Parallelogrammen“ verbinden lassen, als da heißt durch eine Folge wie oben der Länge $n \leq 2$. Dazu vereinbaren wir die Notation $g_i := \overline{x_i y_i}$. Gilt $g_i = g_{i+1}$, so folgt $(x_i, y_i) = (x_{i+1}, y_{i+1})$ und wir können unsere Folge verkürzen. Sind die Geraden g_i, g_{i+1}, g_{i+2} paarweise verschieden, so folgt aus Lemma 5.1.2.12 bereits $(x_i, y_i) \sim (x_{i+2}, y_{i+2})$ und wir können unsere Folge auch verkürzen. Haben wir schließlich $g_i = g_{i+2} \neq g_{i+1} = g_{i+3}$, so können wir, da der Fall der vierelementigen Ebene eh unproblematisch ist, mit 5.1.2.6 annehmen, daß es eine weitere Gerade g gibt mit $g \parallel g_i$ aber $g_i \neq g \neq g_{i+1}$. Es gibt dann nach Lemma 5.1.2.12 Punkte $x''', y''' \in g$ mit $(x_\nu, y_\nu) \sim (x''', y''')$ für $i \leq \nu \leq i+3$ und wir können unsere Folge auch wieder verkürzen. Damit ist klar, daß wie behauptet je zwei äquivalente Paare durch eine Folge mit höchstens einem Zwischenschritt verbunden werden können.

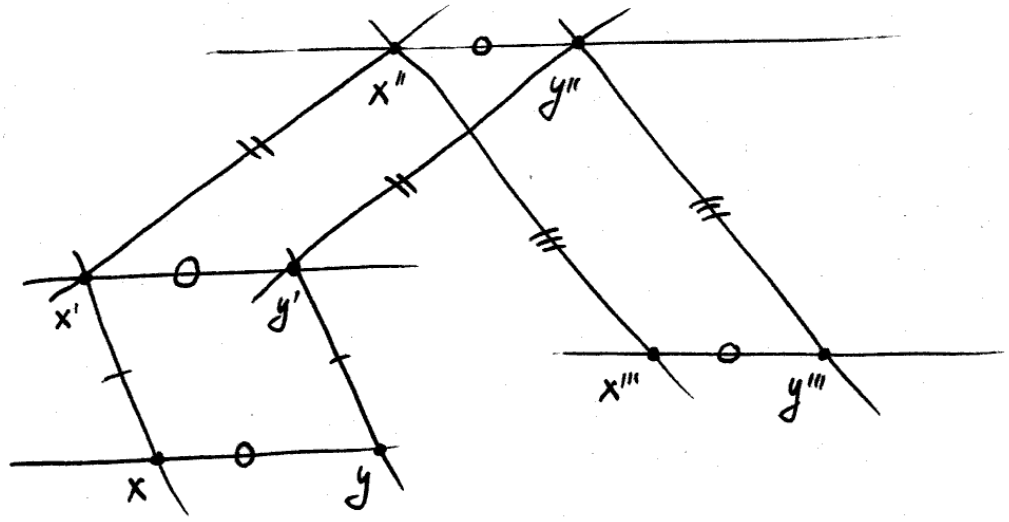
1.c. Es folgt, daß die Äquivalenzklassen unserer Äquivalenzrelation Graphen von Abbildungen $X \to X$ sind. Die Abbildung zu einem Punktepaar (x, y) notiere ich $\overrightarrow{xy} = \overleftarrow{yx}$ und nenne sie die **Verschiebung** zu unserem Punktepaar. Ich behaupte, daß unsere Verschiebungen eine Untergruppe der Automorphismengruppe unserer Inzidenzebene bilden. Es ist klar, daß $\overleftarrow{yx} \circ \overleftarrow{xy} = \mathrm{id}_X$ die Identität auf X sein muß. Es ist auch klar, daß jede Verschiebung Geraden in Geraden überführt. Folglich sind alle unsere Verschiebungen Automorphismen unserer Inzidenzebene. Die Identität ist die Verschiebung $\overleftarrow{xx}$ und so bleibt nur zu zeigen, daß die Verknüpfung von zwei Verschiebungen stets wieder eine Verschiebung ist. Sind x, y, z kollinear, so folgt $\overleftarrow{zy} \circ \overleftarrow{yx} = \overleftarrow{zx}$ direkt aus den Definitionen. Andernfalls folgt

$$(\overleftarrow{zy} \circ \overleftarrow{yx})(p) = \overleftarrow{zx}(p)$$

für jeden Punkt p auf keiner der drei Geraden $\overline{zy}, \overline{yx}, \overline{zx}$ aus der ausgearteten Desargues-Eigenschaft 5.1.2.12 und für jeden Punkt $p \in \overline{zy}$ aus den Definitionen und für jeden Punkt auf einer der beiden anderen Geraden aus dieser Erkenntnis zusammen mit $\overleftarrow{yx} \circ \overleftarrow{xy} = \mathrm{id}_X$. Unsere Verschiebungen bilden folglich in der Tat eine Gruppe von Automorphismen unserer Inzidenzebene.

1.d. Wir zeigen, daß unsere Gruppe von Verschiebungen kommutativ ist. Liegen $x, y, z \in X$ nicht auf einer Geraden, so ergänzen wir sie zu einem Parallelogramm (x, y, z, w) und die Definitionen zeigen $\overleftarrow{zy} \circ \overleftarrow{yx} = \overleftarrow{zx} = \overleftarrow{zw} \circ \overleftarrow{wx}$ und $\overleftarrow{zy} = \overleftarrow{wx}$ und $\overleftarrow{zw} = \overleftarrow{yx}$ und die Kommutativität $\overleftarrow{zy} \circ \overleftarrow{yx} = \overleftarrow{yx} \circ \overleftarrow{zy}$ folgt. Liegen alle drei Punkte auf einer Geraden, so finden wir w außerhalb und schreiben $\overleftarrow{yx} = \overleftarrow{yw} \circ \overleftarrow{wx}$ und beide Verschiebungen rechts kommutieren mit $\overleftarrow{yz}$, also auch ihre Verknüpfung. So sehen wir, daß unsere Gruppe kommutativ sein muß. Wir schreiben ihre Verknüpfung von nun an $+$ und notieren unsere Gruppe $\vec{X}$.

1.e. Wir bemerken, daß jeder Isomorphismus $\varphi : X \xrightarrow{\sim} Y$ von affinen Inzidenze-



Skizze zur Parallelogrammäquivalenz

benen mit Desargueseigenschaft einen Isomorphismus $\vec{\varphi} : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$ zwischen den zugehörigen Gruppen von Verschiebungen induziert mit

$$\vec{\varphi} : \overrightarrow{xy} \mapsto \overrightarrow{\varphi(x)\varphi(y)}$$

2. Sei weiter X eine affine Inzidenzebene. Wir halten einen Punkt $o \in X$ willkürlich fest. Unter einem o-**Trapez** in X verstehen wir dann ein Quadrupel von Punkten $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \in (X \backslash o)^4$ derart, daß es Geraden h_1, h_2 durch o und Geraden $g_1 \parallel g_2$ gibt mit $h_i \cap g_j = x_{ij}$. Nun betrachten wir auf der Menge $P := \{(x, y) \in (X \backslash o)^2 \mid x, y, o \text{ sind kollinear}\}$ die Relation $\sim$ mit $(x, y) \sim (x', y')$, wenn unsere vier Punkte (x, y, x', y') ein o-Trapez bilden. Diese Relation ist sicher symmetrisch und reflexiv. Bezeichne $\approx$ die davon erzeugte Äquivalenzrelation. Genau wie zuvor zeigen wir, daß unter der Annahme der Desargueseigenschaft ihre Äquivalenzklassen die Graphen von bijektiven Abbildungen $(X \backslash o) \xrightarrow{\sim} (X \backslash o)$ sind, und daß die Fortsetzungen dieser Bijektionen durch die Vorschrift $o \mapsto o$ die einzigen Automorphismen ψ unserer Inzidenzebene sind mit Fixpunkt o und $\psi(g) \parallel g$ für jede Gerade g. Diese Automorphismen bilden dann natürlich auch eine Gruppe von Automorphismen unserer affinen Ebene, die wir die **Homothetien mit Zentrum** o nennen und $\mathcal{H}_o = \mathcal{H}$ notieren.

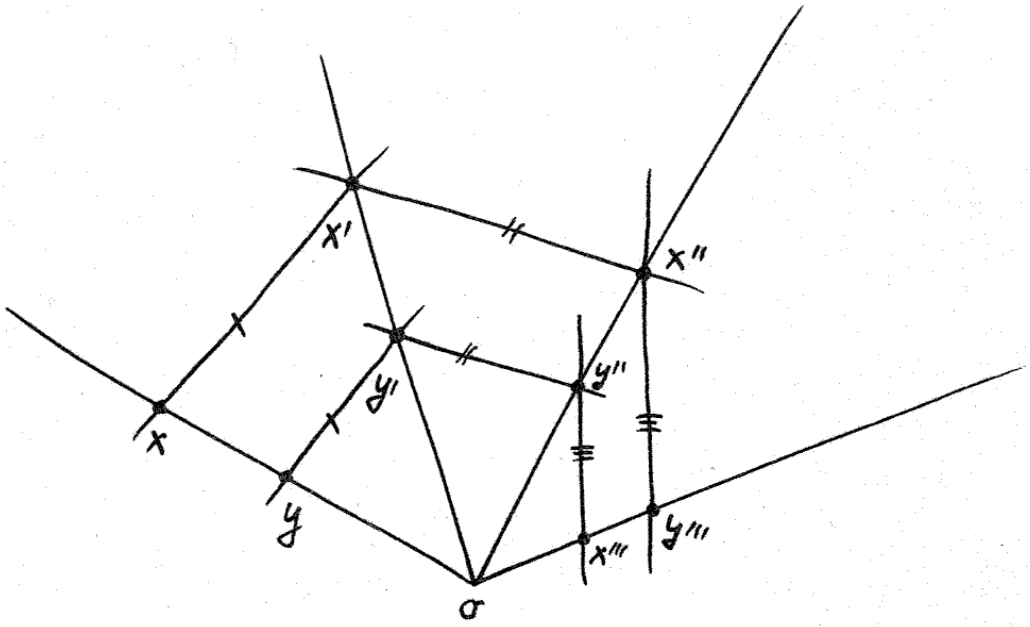
3. Sei X eine affine Inzidenzebene mit der Desargueseigenschaft. Gegeben ein Punkt $o \in X$ erhalten wir eine Bijektion $X \xrightarrow{\sim} \vec{X}$ durch die Vorschrift $x \mapsto \overrightarrow{ox}$. Wir erklären eine Verknüpfung $+_o$ auf X durch die Vorschrift, daß sie unter unserer Injektion der Addition in $\vec{X}$ entsprechen soll. So wird $(X, +_o)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element o. Jede Gerade $K \subset X$ mit $o \in K$ ist offensichtlich eine Untergruppe und jeder Isomorphismus $\varphi : X \xrightarrow{\sim} Y$ von Inzidenzebenen ein Gruppenisomorphismus

$$\varphi : (X, +_o) \xrightarrow{\sim} (Y, +_{\varphi(o)})$$

4. Sei X eine affine Inzidenzebene mit der Desargueseigenschaft. Gegeben eine Gerade $K \subset X$ und zwei Punkte $\imath \neq o$ in K liefert das Anwenden auf $\imath \in K$ offensichtlich eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_o & \xrightarrow{\sim} & K \backslash o \\ \psi & \mapsto & \psi(\imath) \end{array}$$

zwischen unserer Gruppe von Homothetien und dem Komplement des Punktes o in unserer Geraden K. Die Umkehrabbildung notieren wir $\lambda \mapsto (\lambda *) = (\lambda *_{\imath,o})$.



Skizze zur Äquivalenzrelation durch iterierte o-Trapeze

Vereinbaren wir zusätzlich $o * x = o$ für alle $x \in X$, so erhalten wir eine Verknüpfung

$$* : K \times X \to X$$

mit $\imath * x = x$. Für diese Verknüpfung gilt $\lambda * (\mu * x) = (\lambda * \mu) * x$ für alle $\lambda, \mu \in K$ und alle $x \in X$, was wir nur für $x = \imath$ prüfen müssen und dann für alle x folgern können. Unsere Verknüpfung induziert eine Verknüpfung $K \times K \to K$ und darunter ist $K \backslash o$ abgeschlossen und wird offensichtlich eine Gruppe mit neutralem Element $\imath$. Da alle Homothetien Automorphismen unserer Inzidenzebene sind, die o festhalten, liefern sie Gruppenhomomorphismen $\lambda * : (X, +_o) \xrightarrow{\sim} (X, +_o)$ und es folgt

$$\lambda * (x +_o y) = (\lambda * x) +_o (\lambda * y)$$

für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in K \backslash o$ und dann offensichtlich sogar für alle $\lambda \in K$. Um zu zeigen, daß K mit diesen Verknüpfungen ein Schiefkörper wird, müssen wir nur noch die Distributivität für die Multiplikation von rechts auf K zeigen.

5. Seien X eine affine Inzidenzebene mit der Desargueseigenschaft, $K \subset X$ eine Gerade und $\imath \neq o$ zwei Punkte aus K. Wir kürzen $+_o = +$ und $*_{\imath,o} = *$ ab. Das nebenstehende Bild zeigt $(\imath + \lambda) * x = x + \lambda * x$ für alle $x \in X \backslash K$ und $\lambda \in K \backslash \{o, -\imath\}$. Indem wir in derselben Weise „von unseren drei Punkten auf der Gerade $\overline{ox}$ ausgehen und mit Parallelen auf die Gerade K zurückgehen“, folgt dasselbe für alle $x \in X \backslash o$. Mit explizitem Prüfen der zusätzlichen Fälle, das dem Leser zur Übung überlassen sei, folgt es für alle $x \in X$ und $\lambda \in K$. Zusammen mit der Assoziativität erhalten wir so die Distributivität

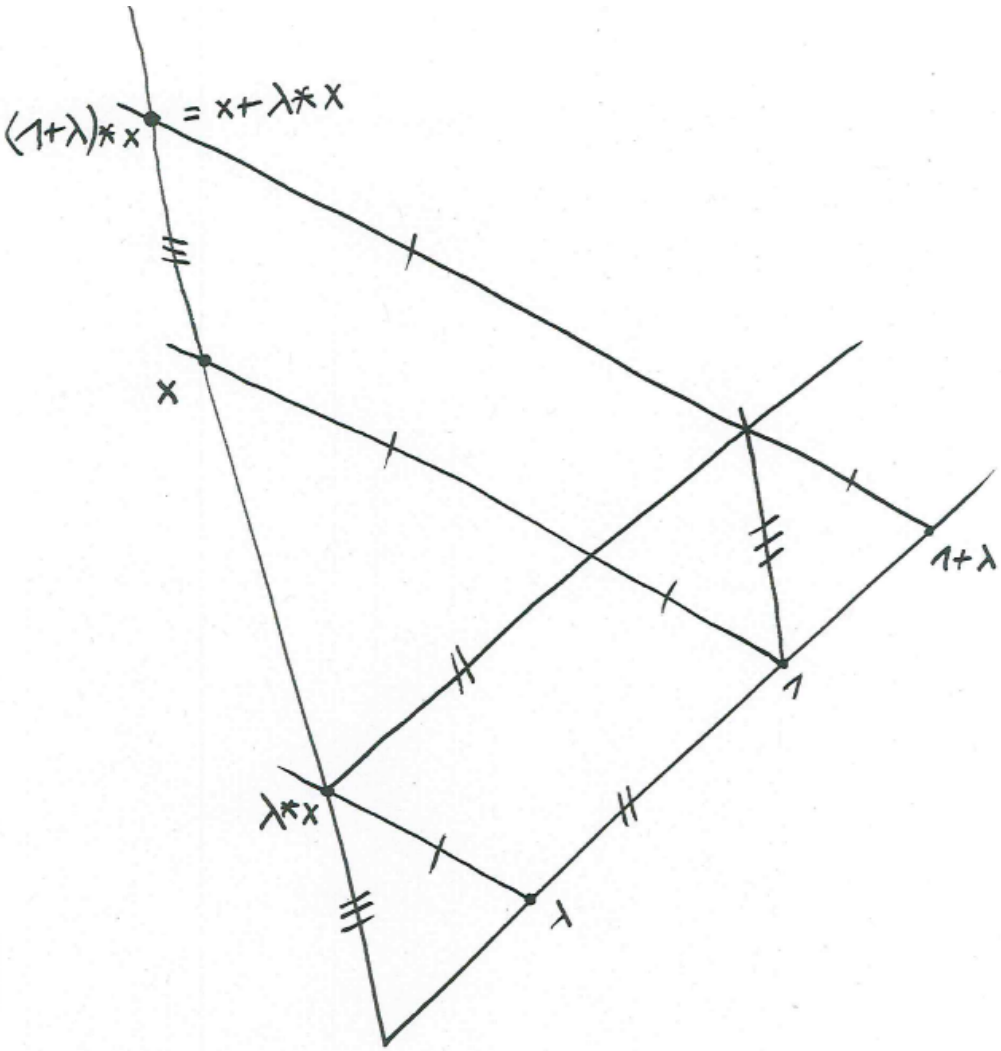
$$(\mu + \lambda) * x = \mu * x + \lambda * x$$

für alle $x \in X$ und $\lambda, \mu \in K$. Insbesondere wird unsere Gerade K mit $+$ als Addition und $*$ als Multiplikation ein Schiefkörper.

6. Seien weiter X eine affine Inzidenzebene mit der Desargueseigenschaft und $K \subset X$ eine Gerade mit zwei ausgezeichneten Punkten $\imath \neq o$ und der zugehörigen Struktur als Schiefkörper. Für $x \neq o$ liefert sicher $\lambda \mapsto \lambda * x$ eine Bijektion $K \xrightarrow{\sim} \overline{ox}$. Gegeben $x, y \in X$ derart, daß x, y, o nicht kollinear ist, erhalten wir damit eine Bijektion und sogar einen Gruppenisomorphismus

$$\begin{array}{ccc} K^2 & \xrightarrow{\sim} & X \\ (\lambda, \mu) & \mapsto & \lambda * x \ + \ \mu * y \end{array}$$

Offensichtlich entsprechen unter φ die eindimensionalen Untervektorräume von K^2 eineindeutig den Geraden durch o in X. Verschiebung zeigt dann, daß unter dieser Bijektion die Geraden von X den affinen Geraden von K^2 entsprechen. $\square$



Skizze zum Beweis einer Distributivität beim Beweis der Koordinatisierbarkeit von affinen Ebenen mit der Desargueseigenschaft

5.1.2.14. Gegeben Schiefkörper K, L und eine Kollineation $\varphi : K^2 \xrightarrow{\sim} L^2$ induziert die Abbildung $\mathrm{Ens}^\times(K^2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}^\times(L^2)$ gegeben durch $\pi \mapsto \varphi \circ \pi \circ \varphi^{-1}$ einen Gruppenisomorphismus $\vec{\varphi}$ zwischen den jeweiligen Richtungsräumen und es gibt genau einen Ringisomorphismus alias Schiefkörperisomorphismus

$$\tilde{\varphi} : K \xrightarrow{\sim} L$$

mit $\vec{\varphi}(\lambda\vec{v}) = \tilde{\varphi}(\lambda)\vec{\varphi}(\vec{v})$ für alle $\lambda \in K$. Diese Aussage ist in den Konstruktionen des obigen Beweises enthalten und erlaubt uns, mit einem bestimmten Artikel von **dem Koordinatenschiefkörper** einer affinen Inzidenzebene mit der Desargueseigenschaft zu reden.

Definition 5.1.2.15. Wir sagen, eine affine Inzidenzebene habe die **Pappos-Eigenschaft**, wenn gegeben Geraden g, h und für $i \in \{1, 2, 3\}$ Punkte $x_i \in g \backslash h$ und $y_i \in h \backslash g$ stets gilt

$$(\overline{x_1 y_2} \parallel \overline{x_2 y_1} \text{ und } \overline{x_2 y_3} \parallel \overline{x_3 y_2}) \Rightarrow \overline{x_1 y_3} \parallel \overline{x_3 y_1}$$

5.1.2.16. Sie dürfen als Übung 5.1.2.27 zeigen, daß diese Eigenschaft für beliebige Geraden g, h bereits folgt, wenn wir sie nur für sich schneidende Geraden fordern.

5.1.2.17. Unter einer **Papposebene** verstehen wir eine affine Inzidenzebene mit der Papposeigenschaft und der Desargueseigenschaft.

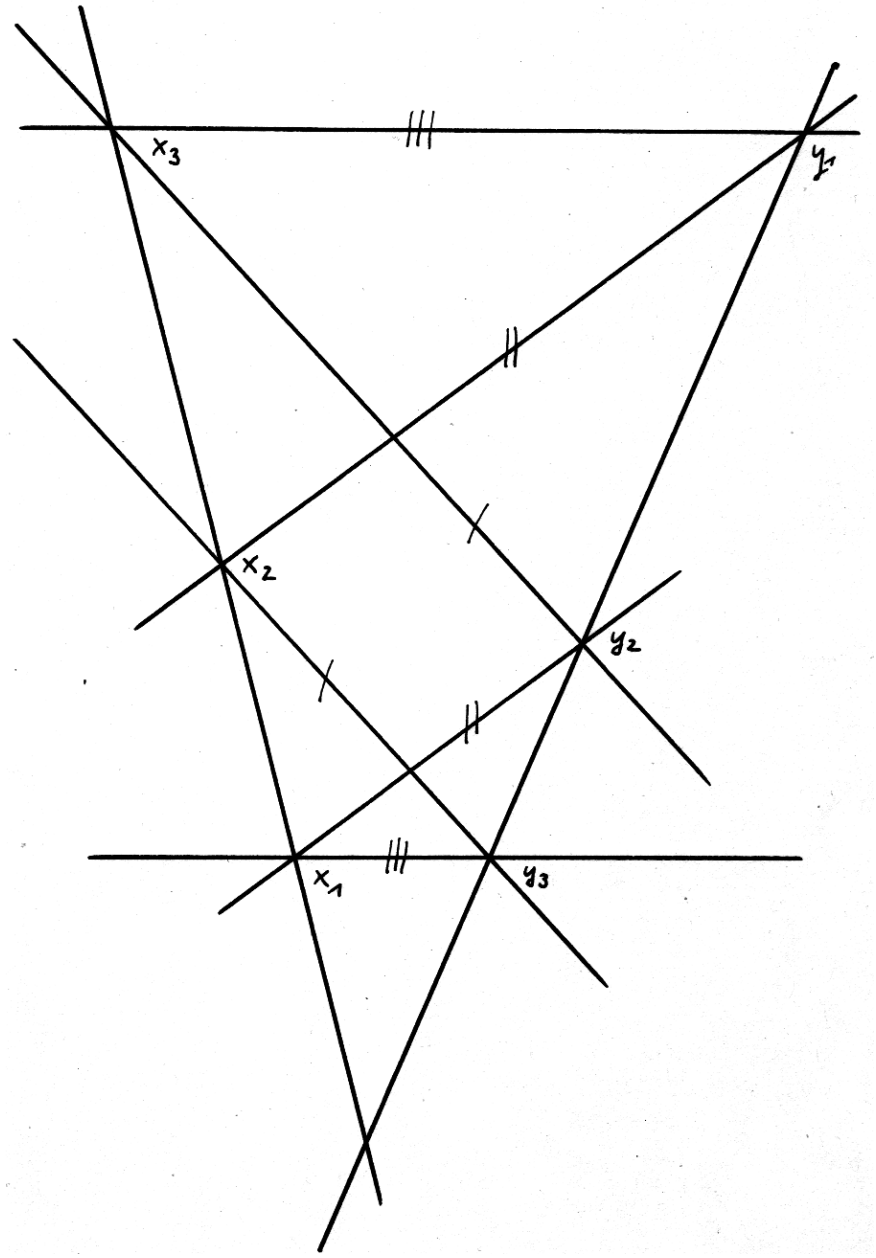
5.1.2.18. Es ist nicht schwer zu sehen, daß eine affine Inzidenzebene mit der Desargueseigenschaft genau dann die Papposeigenschaft hat, wenn ihr nach 5.1.2.14 bis auf Isomorphismus wohlbestimmter Koordinatenschiefkörper kommutativ ist. Hierfür muß man nur die Streckfaktoren der Streckungen untersuchen, die die verschiedenen Parallelen in der Papposeigenschaft ineinander überführen. Der im folgenden bewiesene Satz von Hessenberg 5.1.2.19 zeigt sogar, daß die Papposeigenschaft bereits die Desargueseigenschaft impliziert.

Satz* 5.1.2.19 (Hessenberg). *Jede affine Inzidenzebene mit der Papposeigenschaft hat auch die Desargueseigenschaft.*

Beweis. Gegeben eine Konstellation aus drei paarweise verschiedene Geraden g_1, g_2, g_3 mit einem gemeinsamen Punkt z und für $i \in \{1, 2, 3\}$ Punkte $x_i, y_i \in g_i \backslash z$ mit $\overline{x_1 x_2} \parallel \overline{y_1 y_2}$ und $\overline{x_2 x_3} \parallel \overline{y_2 y_3}$ gilt es, aus der Papposeigenschaft

$$\overline{x_1 x_3} \parallel \overline{y_1 y_3}$$

zu folgern. Wir sagen dann, „Desargues gelte für diese Konstellation“. Wenn die x_i kollinear sind, so folgt auch ohne Pappos bereits, daß die y_i kollinear sind und



Die Papposeigenschaft besagt, daß in jeder Situation der hier dargestellten Art die Parallelität der beiden eingestrichenen und der beiden zweigestrichenen Geraden die Parallelität der beiden dreigestrichenen Geraden impliziert.

damit gilt Desargues für die gegebene Konstellation. Wir dürfen also zusätzlich annehmen, daß die x_i und dann auch die y_i jeweils nicht kollinear sind. Gilt $\overline{x_1x_3} \parallel g_2$ und $\overline{y_1y_3} \parallel g_2$, so folgt wieder Desargues für die gegebene Konstellation auch ohne Pappos. Wir dürfen also zusätzlich auch noch annehmen, daß $\overline{y_1y_3}$ nicht zu g_2 parallel ist. Jetzt betrachten wir die zu g_2 parallele Gerade g durch x_3 und setzen

$$p := g \cap g_1 \qquad q := g \cap \overline{y_1y_3} \qquad \text{und} \quad r := \overline{qy_2} \cap \overline{x_2x_3}$$

und holen das Argument dafür nach, daß auch r sinnvoll definiert ist. Wir haben nämlich $q \notin \overline{y_2y_3}$, da die y_i nicht kollinear sind und damit andernfalls $q = y_3$ folgern würde im Widerspruch dazu, daß y_3 nicht auf g liegen kann. Damit gilt schon mal $q \neq y_2$ und $\overline{qy_2}$ ist eine wohldefinierte Gerade. Diese Gerade schließlich ist nicht parallel zu $\overline{x_2x_3}$, da sie nicht parallel ist zu $\overline{y_2y_3}$, da eben gilt $q \notin \overline{y_2y_3}$. Damit ist also auch r sinnvoll definiert. Jetzt wenden wir dreimal Pappos an.

1. Wir betrachten die Geraden $\overline{rq}$ sowie g_3 und darauf die Punkte r, y_2, q sowie y_3, x_3, z. Wir bemerken $r \neq x_3$, da sonst x_3, q und y_2 kollinear wären und wir $g = g_2$ folgern könnten im Widerspruch zu $x_3 \notin g_2$. Wir haben nun $r \notin g_3$ wegen $x_2 \notin g_3$ und $y_2 \notin g_3$ nach Annahme und $q \notin g_3$, da sonst folgte $q = x_3$ und wieder x_3, q und y_2 kollinear wären, was ja nicht sein kann. Andererseits haben wir $y_3 \notin \overline{rq}$, weil die y_i nicht kollinear sind, und $x_3 \notin \overline{rq}$, weil $x_3 \neq q$, und $z \notin \overline{rq}$, weil g_2 nicht parallel ist zu $\overline{rq}$. Nun haben wir $\overline{rx_3} \parallel \overline{y_2y_3}$ und $\overline{y_2z} \parallel \overline{qx_3}$ und mit Pappos folgt

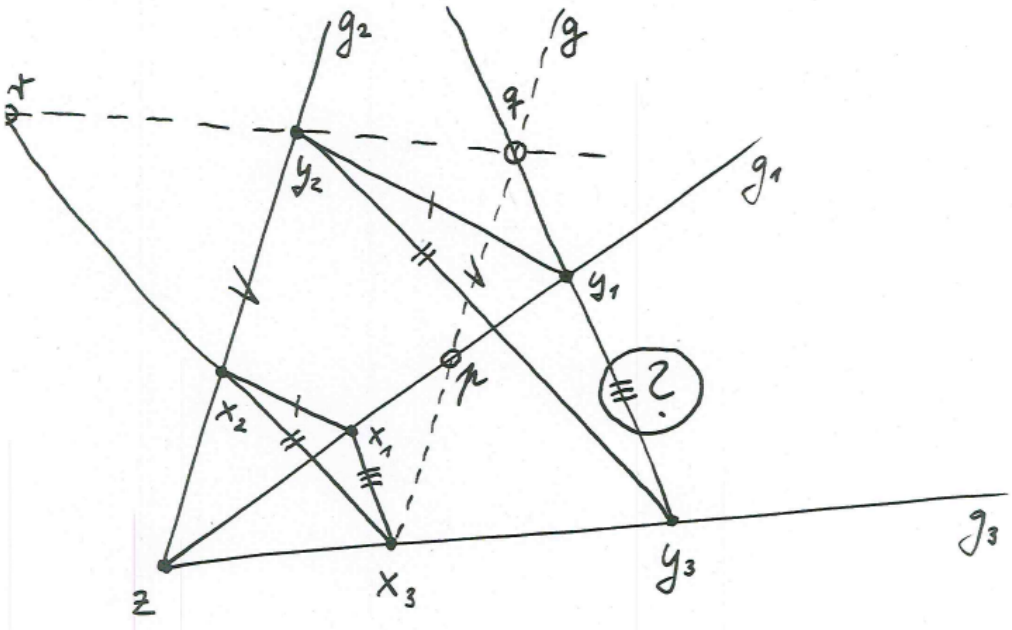
$$\overline{rz} \parallel \overline{qy_3}$$

2. Wir betrachten die Geraden $\overline{ry_2}$ sowie g_1 und darauf die Punkte r, q, y_2 sowie y_1, z, p. Wir haben $r \notin g_1$ wegen $\overline{rz} \parallel \overline{qy_3} = \overline{y_1y_3}$. Wir haben $q \notin g_1$, da sonst folgte $q = y_1$ und dann die y_i kollinear wären. Wir haben $y_2 \notin g_1$ nach Annahme. Wir haben weiter $z \notin \overline{ry_2}$, weil g_2 nicht parallel ist zu $\overline{ry_2} = \overline{qy_2}$. Haben wir außerdem $y_1, p \notin \overline{ry_2}$, so können wir aus $\overline{rz} \parallel \overline{qy_1}$ und $\overline{qp} \parallel \overline{y_2z}$ mit Pappos folgern

$$\overline{rp} \parallel \overline{y_2y_1}$$

   Haben wir andererseits $p \in \overline{ry_2}$ oder $y_1 \in \overline{ry_2}$, so folgt $p = q = y_1$. Auch in diesem Fall haben wir jedoch $r \neq p$, da sonst gälte $r \in g$ und folglich $r = x_3$. Auch in diesem Fall ist also $\overline{rp}$ eine wohlbestimmte Gerade und wir haben sogar $\overline{rp} = \overline{y_2y_1}$ und a forteriori $\overline{rp} \parallel \overline{y_2y_1}$.

3. Wir betrachten die Geraden $\overline{x_2x_3}$ sowie g_1 und darauf die Punkte x_3, x_2, r sowie z, p, x_1. Nach Annahme gilt $x_3, x_2 \notin g_1$ und $r \notin g_1$ hatten wir bereits geprüft. Unsere Annahmen zeigen auch unmittelbar $z, x_1 \notin \overline{x_2x_3}$. Aus $p \in \overline{x_2x_3}$ schließlich folgte $p = x_3$ und das ist unmöglich wegen $x_3 \notin g_1$. Wegen



Skizze zum Beweis des Satzes von Hessenberg

$\overline{x_3p} \parallel \overline{x_2z}$ und $\overline{x_2x_1} \parallel \overline{rp}$, letzeres nach dem vorhergehenden, folgern wir mit Pappos

$$\overline{x_3x_1} \parallel \overline{rz}$$

Zusammen zeigen der erste und dritte Teil $\overline{x_3x_1} \parallel \overline{rz} \parallel \overline{qy_3} = \overline{y_1y_3}$. $\square$

5.1.2.20 (**Anordnung des Koordinatenkörpers und Geometrie**). Sei X eine Papposebene mit Zwischenrelation Z. Es ist zunächst einmal klar, daß für jede Verschiebung φ und jede Gerade g mit $\varphi(g) \neq g$ und $x, y, z \in g$ mit $(x, y, z) \in Z$ auch gilt $(\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)) \in Z$. Daraus folgt dieselbe Aussage auch im Fall $\varphi(g) = g$ und wir sehen, daß jede Verschiebung die Zwischenrelation erhält. Insbesondere muß jede Verschiebung, die eine Gerade stabilisiert, die beiden Anordnungen auf unserer Gerade, die mit der Zwischenrelation verträglich sind, entweder festhalten oder vertauschen. Diejenigen Verschiebungen, die sie festhalten, bilden eine Untergruppe vom Index höchstens Zwei. Haben also Geraden mehr als zwei Punkte, so gibt es eine von der Identität verschiedene Verschiebung, die unsere Gerade und beide Anordnungen festhält. Es folgt, daß unser Koordinatenkörper, wenn er denn mehr als zwei Elemente hat, die Charakteristik Null haben muß. Dann aber ist jede Verschiebung, die eine Gerade stabilisiert, das Quadrat einer weiteren Verschiebung, die dieselbe Gerade stabilisiert, und hält folglich jede der beiden mit unserer Zwischenrelation verträglichen Anordnungen fest. Ebenso ist für jede Homothetie ψ mit Zentrum o klar, daß aus $(o, x, \psi(x)) \in Z$ für ein $x \in X \backslash o$ folgt $(o, y, \psi(y)) \in Z$ für alle $y \in X \backslash o$ und daß ebenso aus $(o, \psi(x), x) \in Z$ für ein $x \in X \backslash o$ folgt $(o, \psi(y), y) \in Z$ für alle $y \in X \backslash o$. Die Homothethien $\psi \in \mathcal{H}_o$ mit $(x, o, \psi(x)) \in Z \Rightarrow x = o$ bilden also eine Untergruppe. Halten wir also eine Gerade K fest und zeichnen auf ihr zwei verschiedene Punkte $o \neq \iota$ aus und versehen K mit der beim Beweis des Koordinatisierungssatzes konstruierten Struktur eines Körpers, so macht diejenige mit der Zwischenrelation verträgliche Anordnung von K, für die zusätzlich gilt $o < \iota$, unser K zu einem angeordneten Körper, wenn K mehr als zwei Elemente hat. Ergänzen wir nun o zu einem nicht kollinearen Tripel x, y, o und betrachten die zugehörige Bijektion $K^2 \xrightarrow{\sim} X$ aus dem Beweis des Koordinatisierungssatzes, so sieht man leicht, daß die durch unsere Anordnung auf K gegebene Zwischenordnung auf K^2 der Zwischenordnung auf X entsprechen muß. Wir erhalten also eine Bijektion auf Isomorphieklassen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Angeordnete} \\ \text{Körper} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Papposebenen mit Zwischenrelation} \\ \text{und mehr als zwei Punkten auf jeder Gerade} \end{array} \right\}$$

$$K \qquad \mapsto \qquad K^2$$

Schließlich prüft man, daß gegeben angeordnete Körper K, L eine Kollineation $K^2 \xrightarrow{\sim} L^2$ genau dann die jeweiligen Zwischenrelationen ineinander überführt,

wenn der ihr nach 5.1.2.14 zugeordnete Körperisomorphismus die jeweiligen Anordnungen ineinander überführt. So erhält man auch für jeden Körper K mit mehr als zwei Elementen eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Anordnungen} \\ \text{auf dem Körper } K \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Zwischenrelationen} \\ \text{auf der Papposebene } K^2 \end{array} \right\}$$

Satz 5.1.2.21 (**Geometrische Charakterisierung reeller Inzidenzebenen**). *Genau dann kann eine Papposebene, deren Geraden mehr als zwei Punkte haben, mit einer Zwischenrelation versehen werden, die die Supremumseigenschaft hat, wenn sie isomorph ist zu $\mathbb{R}^2$. Des weiteren ist in diesem Fall die fragliche Zwischenrelation bereits eindeutig bestimmt.*

Beweis. Nach dem Vorhergehenden finden wir einen Isomorphismus von Inzidenzebenen $X \xrightarrow{\sim} K^2$ für einen Körper K und unserer Zwischenrelation entspricht eineindeutig eine Anordnung auf K. Hat unsere Zwischenrelation zusätzlich die Supremumseigenschaft, so erfüllt die fragliche Anordnung auf K alle Axiome 10.2.4.3, die den Körper der reellen Zahlen charakterisieren. Unsere affine Inzidenzebene ist folglich isomorph zu $\mathbb{R}^2$, und da es auf dem Körper $\mathbb{R}$ nur eine einzige Körperanordnung gibt, ist die fragliche Zwischenrelation bereits durch die Struktur als Inzidenzgeometrie eindeutig bestimmt. □

Übungen

Übung 5.1.2.22. Man zeige, daß eine affine Inzidenzebene, in der es eine Gerade mit nur einer einzigen Parallele gibt, isomorph sein muß zu $\mathbb{F}_2^2$.

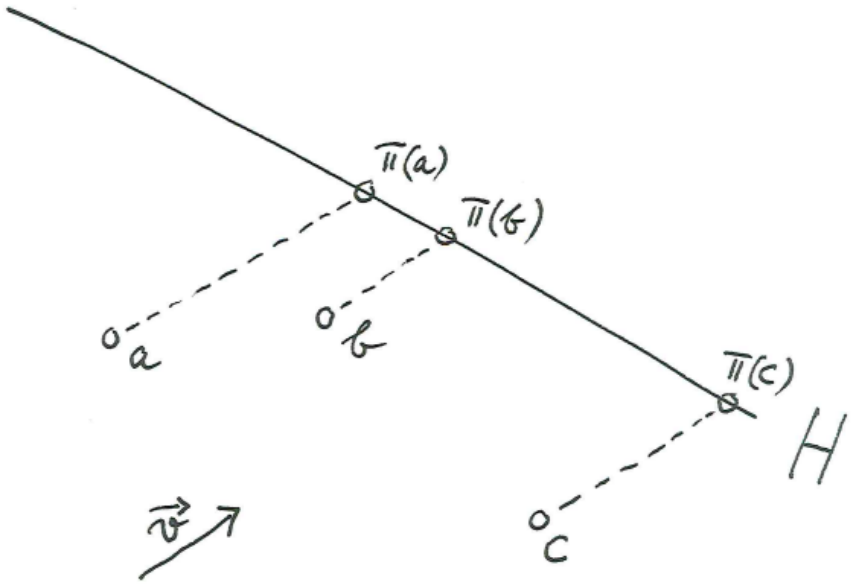
Übung 5.1.2.23. Man zeige, daß für jeden Schiefkörper K die Punktmenge K^2 mit den in 5.1.2.7 beschriebenen Geraden eine affine Inzidenzebene ist und daß diese affine Inzidenzebene die affine Desargues-Eigenschaft hat.

Übung 5.1.2.24. Man prüfe die Formel $(-\imath) * x +_o x = o$, deren Nachweis im Beweis des Koordinatisierungssatzes noch offen geblieben war.

Übung 5.1.2.25. Man zeige, daß es in einer affinen Inzidenzebene zwischen je zwei Geraden eine Bijektion gibt. Salopp gesprochen haben also „je zwei Geraden gleich viele Punkte“.

Übung 5.1.2.26. Gibt es in einer affinen Inzidenzebene eine endliche Gerade mit genau n Punkten, so hat unsere affine Inzidenzebene genau n^2 Punkte und $n^2 + n$ Geraden.

Übung 5.1.2.27. Man zeige, daß die Papposeigenschaft für parallele Geraden bereits folgt, wenn wir sie nur für sich schneidende Geraden fordern. Hinweis: Man mag sich am Beweis der analogen Aussage 5.1.2.12 in Bezug auf die Desargueseigenschaft orientieren.



Eine Parallelprojektion

5.1.3 Parallelprojektion und Zentralprojektion

5.1.3.1. Je nach Vorkenntnissen müssen hier erst einmal affine Räume und affine Teilräume etwa im Umfang von 3.3.1, 3.3.2 besprochen werden. Die Annahme endlicher Dimension ist im folgenden meist überflüssig und dient nur dazu, die Darstellung zu vereinfachen. Besonders wichtig ist die Erkenntnis, daß in einem affinen Raum der Schnitt einer Gerade mit einem weiteren affinen Teilraum entweder leer ist oder ein Punkt oder die ganze Gerade. Ist unser affiner Teilraum eine Hyperebene H und $\vec{v}$ der Richtungsvektor unserer Gerade g, so folgt des weiteren aus $\vec{v} \notin \vec{H}$ bereits $|g \cap H| = 1$.

5.1.3.2. Gegeben $E \supset H$ ein endlichdimensionaler affiner Raum mit einer Hyperebene sowie ein Vektor $\vec{v} \in \vec{E} \backslash \vec{H}$ erklären wir die **Parallelprojektion in Richtung** $\vec{v}$ von E auf H als die eindeutig bestimmte Abbildung

$$\pi = \pi_{\vec{v}} = \pi_{\vec{v},H} : E \to H$$

mit der Eigenschaft $\pi(e) \in e + \langle \vec{v} \rangle$.

5.1.3.3. Gegeben $E \supset H$ ein endlichdimensionaler affiner Raum mit einer Hyperebene sowie ein Punkt $q \in E \backslash H$ erklären wir die **Zentralprojektion mit Zentrum** q von E auf H als die eindeutig bestimmte Abbildung

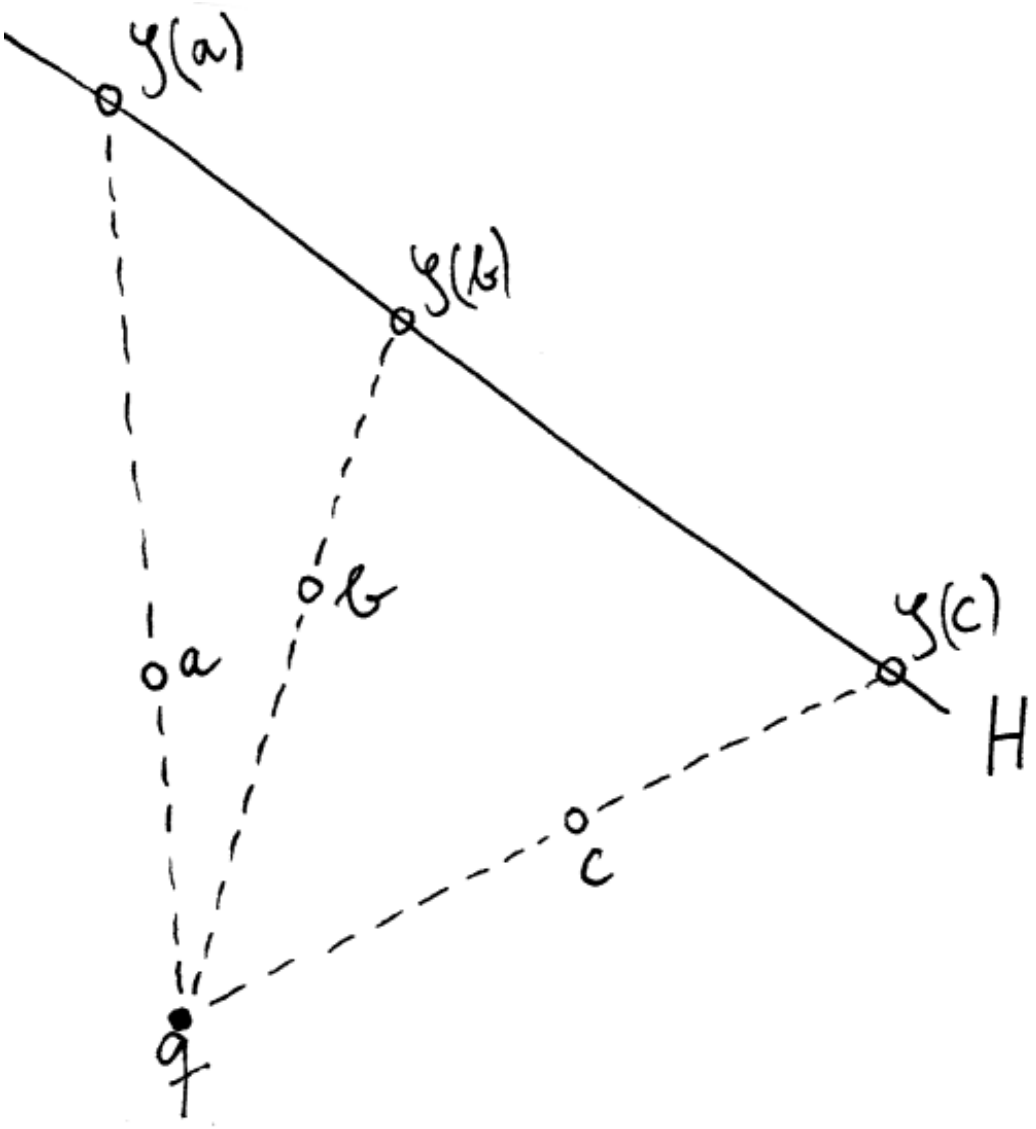
$$\zeta = \zeta_q = \zeta_{q,H} : E \backslash (q + \vec{H}) \to H$$

mit $q, e, \zeta(e)$ kollinear. Die Menge $E \backslash (q + \vec{H})$ nennen wir den **Definitionsbereich** unserer Zentralprojektion, die Hyperebene H ihre **Bildebene**, das Zentrum q auch den **Augpunkt**.

Beispiel 5.1.3.4 (**Foto als Zentralprojektion**). Ein schmutziges Beispiel für eine Zentralprojektion ist das Fotographieren mit einer Lochkamera und in erster Näherung überhaupt jedes Foto. In diesem Fall ist die Linse oder besser das Loch der Augpunkt. Etwas genauer gesagt erhält man beim Fotographieren eine auf die „Punkte vor der Linse“ eingeschränkte Zentralprojektion und unsere Kamera projiziert auch von diesen Punkten nur einen Ausschnitt auf einen Auschnitt der Hyperebene H, nämlich auf die Bildplatte unseres Fotoapparats.

Satz 5.1.3.5 (**Bilder von Geraden unter Zentralprojektionen**). *Als das Bild einer Gerade unter einer Zentralprojektion, genauer als das Bild ihres Schnittes mit dem Definitionsbereich unserer Zentralprojektion können wir erhalten: Eine Gerade, bei der ein Punkt fehlt, der* **Fluchtpunkt***; Eine Gerade; Einen Punkt; und die leere Menge.*

Beweis. Wie das Bild einer Gerade aussieht, hängt nur davon ab, ob sie den Augpunkt trifft und ob sie die Bildebene in genau einem Punkt trifft, wie es die folgende Tabelle präzisiert.



Eine Zentralprojektion

	trifft Augpunkt	trifft Augpunkt nicht
trifft Bildebene in genau einem Punkt	Punkt	Gerade ohne einen Punkt
trifft Bildebene nicht in genau einem Punkt	leer	Gerade

Wir überlegen uns nun, daß diese Tabelle korrekt ist. Seien dazu $E \supset H$ unser endlichdimensionaler affiner Raum mit der Bildebene und $q \in E \backslash H$ der Augpunkt und $\zeta_q : E \backslash (q + \vec{H}) \to H$ die Zentralprojektion. Gegeben eine Gerade $g \subset E$ ist klar, daß $\zeta_q(g \backslash (q + \vec{H}))$ im Schnitt $\langle g, q \rangle_{\text{aff}} \cap H$ des affinen Erzeugnisses von q und g mit der Bildebene H enthalten sein muß. Indem wir E durch $\langle g, q \rangle_{\text{aff}}$ ersetzen, ziehen wir uns darauf zurück, den Fall $\dim E \leq 2$ zu betrachten. In diesem Fall aber kann man die Aussage anhand einer Zeichnung mühelos einsehen. □

5.1.3.6 (**Fluchtpunkte in Fotographien**). Bei Fluchtpunkten in Fotographien etwa von Eisenbahngleisen sieht man als Bild eines Gleises üblicherweise nur eine Halbgerade, die im Fluchtpunkt endet. Das liegt daran, daß wir mit der Kamera „nur nach vorne fotographieren“, während unsere mathematische Zentralprojektion auch die „Gleise hinter dem Betrachter“ noch ins Bild projiziert.

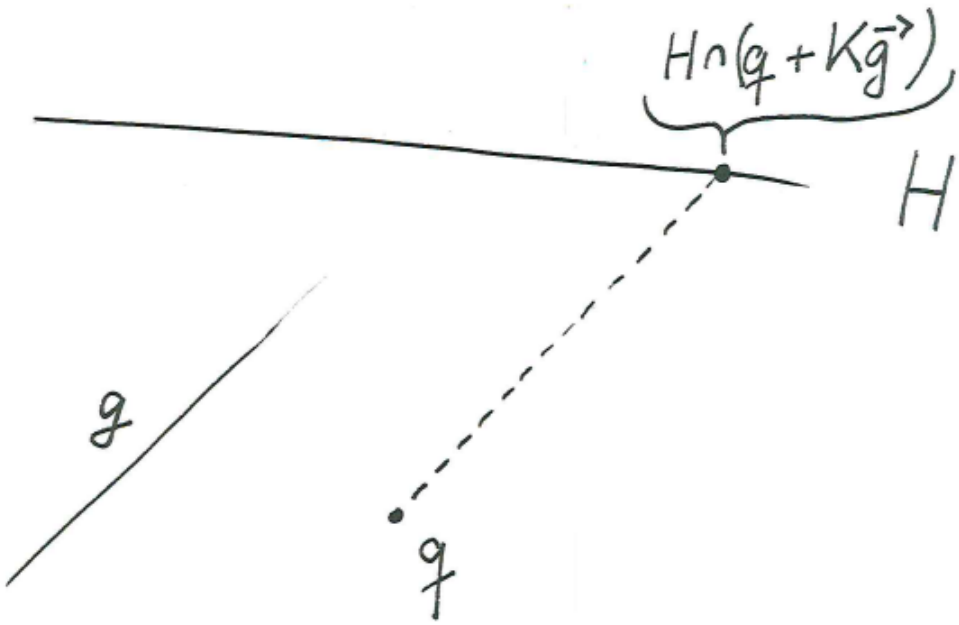
Ergänzung 5.1.3.7. Der Satz gilt unverändert auch ohne die Annahme endlicher Dimension. Ein mit Quotientenräumen geübter Leser wird keine Schwierigkeiten haben, unseren Beweis auf diesen Fall zu verallgemeinern.

5.1.3.8 (**Ein Fußballfeld und seine Fotographie**). Jetzt denken wir uns einmal, wir fotographierten ein Fußballfeld. Formal und in Koordinaten ausgedrückt betrachten wir Einbettungen $i, j : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ der Gestalt $i : (x, y)^\top \mapsto A(0, x, y)^\top + \vec{v}$ und $j : (x, y)^\top \mapsto B(0, x, y)^\top + \vec{w}$ für $A, B \in \mathrm{SO}(3)$ Drehmatrizen und $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ Vektoren und wählen als Augpunkt einen Punkt $q \in \mathbb{R}^3$, der weder im Bild von i noch im Bild von j liegt, also weder in der Fotoplatte alias Bildebene $H := j(\mathbb{R}^2)$ noch auf dem Fußballfeld alias der **Urebene** $U := i(\mathbb{R}^2)$. Die „partiell definierte Abbildung“

$$\phi := j^{-1} \zeta_{q,H} i : \mathbb{R}^2 \dashrightarrow \mathbb{R}^2$$

beschreibt dann die „Umrechnung zwischen dem durch i mit Koordinaten versehenen Fußballfeld $i(\mathbb{R}^2)$ und seiner durch j mit Koordinaten versehenen Fotographie $j(\mathbb{R}^2)$“. Ihr Definitionsbereich ist genauer $i^{-1}(\mathbb{R}^3 \backslash (q + \vec{H}))$. Wir nennen sie eine **Fototransformation**.

Beispiel 5.1.3.9. Betrachten wir etwa $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$ und $j : (x, y) \mapsto (1, x, y)$ und $q = (0, 0, 0)$, so wird die Zentralprojektion $\zeta_q = \zeta$ auf die Ebene $j(\mathbb{R}^2) = \{(x, y, z) \mid x = 1\}$ gegeben durch $(x, y, z) \mapsto (1, y/x, z/x)$ und



Das Bild unter einer Zentralprojektion einer zur Projektionsebene nicht parallelen und mit dem Projektionszentrum nicht inzidenten Gerade g ist eine Gerade abzüglich eines Punktes, genauer abzüglich des Fluchtpunkts.

ist nicht definiert auf den Punkten „neben der Linse“, also den Punkten mit $x = 0$. So finden wir in diesem Fall

$$\phi(x, y) = j^{-1}\zeta(x, y, 1) = j^{-1}(1, y/x, 1/x) = (y/x, 1/x)$$

Vorschau 5.1.3.10 (**Umrechnen von Fotographien**). Im folgenden wollen wir salopp gesagt zeigen, daß die partiell definierten Abbildungen, die durch das wiederholte Fotographieren von Fotographien entstehen, genau alle partiell definierten Abbildungen sind, die durch Formeln der Gestalt

$$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}} \\ \\ \frac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}} \end{pmatrix}$$

gegeben werden mit (a_{ij}) einer invertierbaren (3×3)-Matrix. Um das korrekt formulieren zu können, erweitern wir unsere Ebene durch Hinzunahme geeigneter „unendlich ferner Punkte“ in der Weise, daß unsere partiell definierten Abbildungen zu global definierten Abbildungen werden, den sogenannten „Projektivitäten“. Eine entsprechend präzisierte Aussage zeigen wir dann als Satz 5.1.5.4.

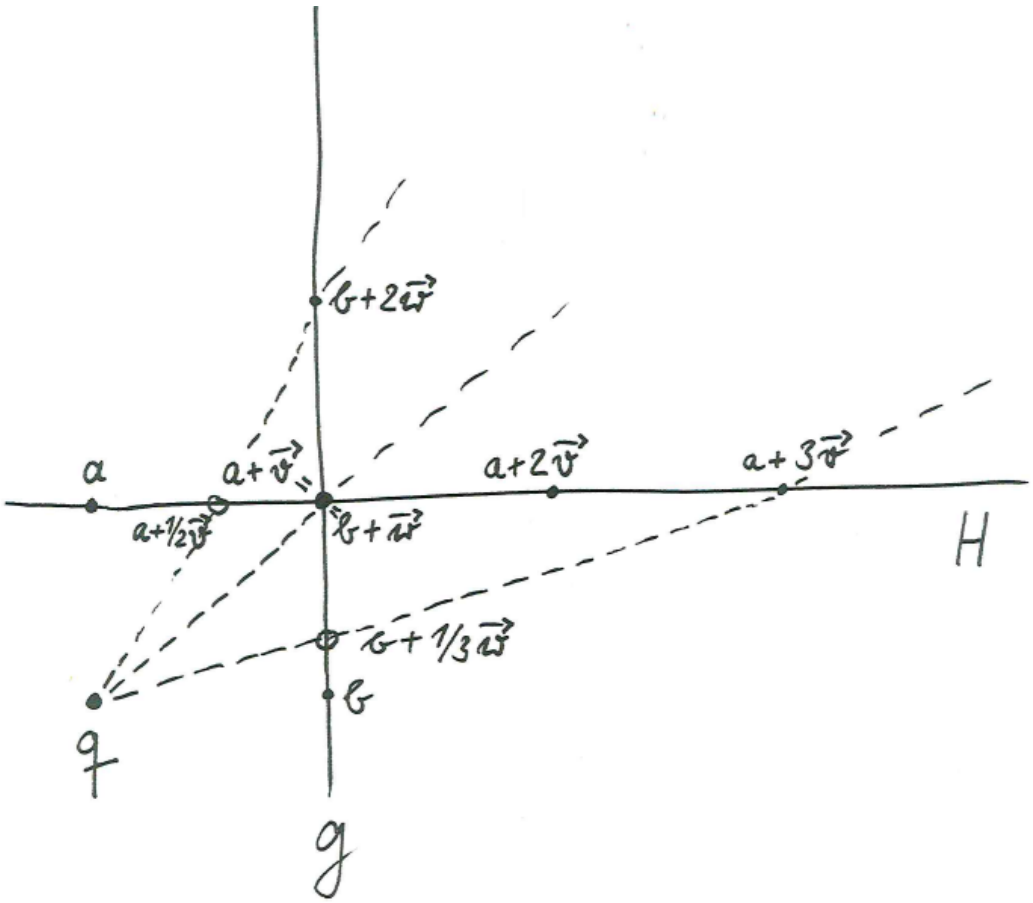
5.1.4 Projektive Räume

5.1.4.1 (**Projektivisierung von Vektorräumen**). Gegeben ein Körper K und ein K-Vektorraum V bezeichnen wir die Menge aller Ursprungsgeraden in V mit

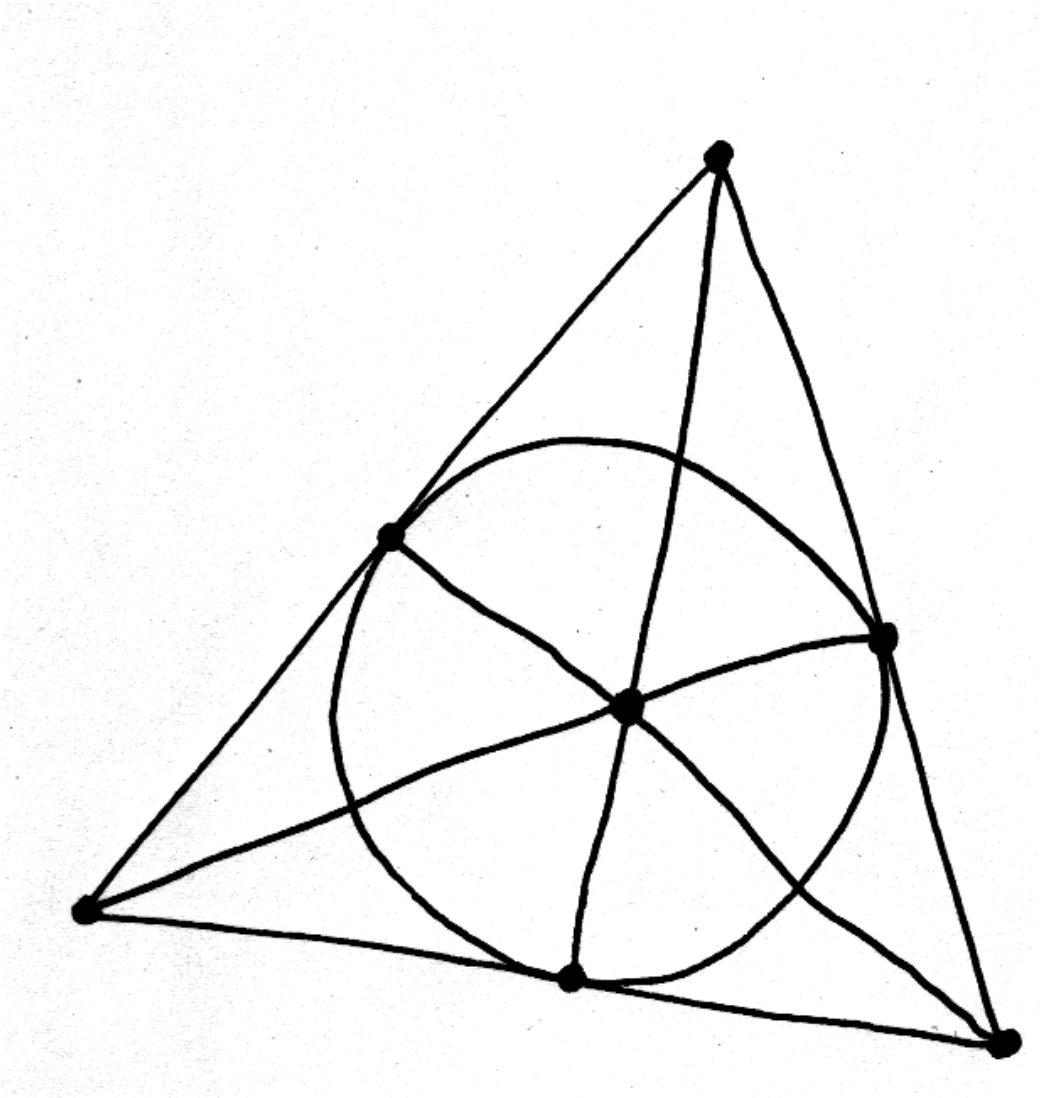
$$\mathbb{P}V = \mathbb{P}_K V := \{L \subset V \mid L \text{ ist ein eindimensionaler Untervektorraum}\}$$

Wir nennen diese Menge die **Projektivisierung des Vektorraums** V. Jeder Punkt von $\mathbb{P}V$ hat die Gestalt $\langle v \rangle$ für $v \in V \backslash 0$ und wir haben $\langle v \rangle = \langle w \rangle$ genau dann, wenn es $\lambda \in K^\times$ gibt mit $\lambda v = w$. Eine Teilmenge $g \subset \mathbb{P}V$ heißt eine **projektive Gerade**, wenn sie aus allen eindimensionalen Untervektorräumen in einem zweidimensionalen Untervektorraum $V_g \subset V$ besteht. Offensichtlich wird die Projektivisierung $\mathbb{P}V$ von V so zu einer Inzidenzgeometrie, als da heißt, durch je zwei verschiedene Punkte von $\mathbb{P}V$ geht genau eine projektive Gerade und jede projektive Gerade hat mindestens zwei Punkte.

Beispiele 5.1.4.2. Ist V der Nullvektorraum, so ist $\mathbb{P}V$ leer. Ist V eindimensional, so besteht $\mathbb{P}V$ aus einem einzigen Punkt. Man mag sich $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ veranschaulichen als eine „Sphäre, bei der gegenüberliegende Punkte jeweils als derselbe Punkt zu denken sind“. Um zusätzliche Anschauung bereitzustellen, bespreche ich nun die alternative Interpretation der Inzidenzgeometrien $\mathbb{P}V$ als „projektive Vervollständigungen affiner Räume“.



Die von einer Zentralprojektion von einer Geraden auf eine andere Gerade induzierte Abbildung. Bei der hier angegebenen Situation und Parametrisierung ist $a \in H$ der Fluchtpunkt und $b \in g$ die Definitionslücke unserer Zentralprojektion ζ_q und die davon auf dem Definitionsbereich induzierte Abbildung ist $b + x\vec{w} \mapsto a + (1/x)\vec{v}$.



Die projektive Ebene $\mathbb{P}^2\mathbb{F}_2$ über dem Körper mit zwei Elementen hat sieben Punkte und sieben Geraden.

5.1.4.3 (**Projektive Vervollständigung affiner Räume**). Gegeben ein affiner Raum E über einem Körper K können wir die disjunkte Vereinigung

$$\mathbb{V}E := E \sqcup \mathbb{P}\vec{E}$$

von E mit der Projektivisierung $\mathbb{P}\vec{E}$ seines Richtungsraums $\vec{E}$ mit einer Struktur als Inzidenzgeometrie versehen, indem wir folgende Teilmengen als Geraden auszeichnen:

1. Die Teilmengen $g \sqcup \{\vec{g}\}$ für $g \subset E$ eine affine Gerade;
2. Die projektiven Geraden $l \subset \mathbb{P}\vec{E}$ nach 5.1.4.1.

Wir nennen diese Inzidenzgeometrie die **projektive Vervollständigung von** E. Die Punkte von $\mathbb{P}\vec{E}$ heißen die **unendlich fernen Punkte** unserer Vervollständigung, die eben gerade entsteht, indem wir zu unserem affinen Raum noch diese unendlich fernen Punkte mit hinzunehmen. Die Geraden dieser Vervollständigung, soweit sie nicht nur aus unendlich fernen Punkten bestehen, entstehen, indem wir zu einer affinen Gerade jeweils noch einen unendlich fernen Punkt hinzunehmen. Ist E zweidimensional, so gibt es in $\mathbb{V}E$ eine einzige Gerade aus unendlich fernen Punkten, nämlich die **unendlich ferne Gerade**, die genau aus allen unendlich fernen Punkten besteht.

5.1.4.4 (**Projektive Vervollständigung als Projektivisierung**). Gegeben ein affiner Raum E über einem Körper K und eine affine Einbettung $i : E \hookrightarrow V$ als eine den Ursprung vermeidende affine Hyperebene in einem K-Vektorraum erhalten wir durch die Abbildungsvorschrift $e \mapsto \langle i(e) \rangle$ und $\langle \vec{v} \rangle \mapsto \langle \vec{i}(\vec{v}) \rangle$ offensichtlich eine Kollineation

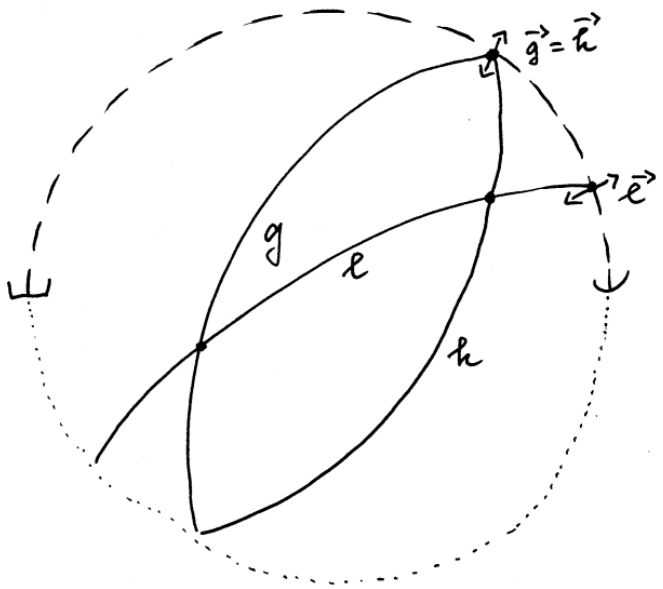
$$\mathbb{V}E \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}V$$

5.1.4.5. Im Spezialfall $E = K^n$ wählen wir standardmäßig die durch das Davorschreiben einer 1 als erster Koordinate gegebene affine Einbettung $K^n \hookrightarrow K^{n+1}$ als eine den Ursprung vermeidende Hyperebene und setzen $\mathbb{P}^n K := \mathbb{P}(K^{n+1})$ und nennen für $n \geq 0$ diese Inzidenzgeometrie den **n-dimensionalen projektiven Raum über dem Körper** K. Wir erhalten so unsere **Standardidentifikation**

$$s : K^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}K = \mathbb{V}K^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n K$$

Im Fall $n = 1$ notiert man das Bild des einzigen Punktes von $\mathbb{P}^0 K$ ebenso wie sein Bild in $\mathbb{P}^1 K$ meist ∞. Damit wird unsere Standardidentifikation in diesm Fall eine Bijektion $s : K \sqcup \{\infty\} = \mathbb{V}K \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 K$ und wir erhalten, wenn wir kurzerhand K mit seinem Bild identifizieren, eine mit den nötigen Hintergedanken zu verstehende Zerlegung

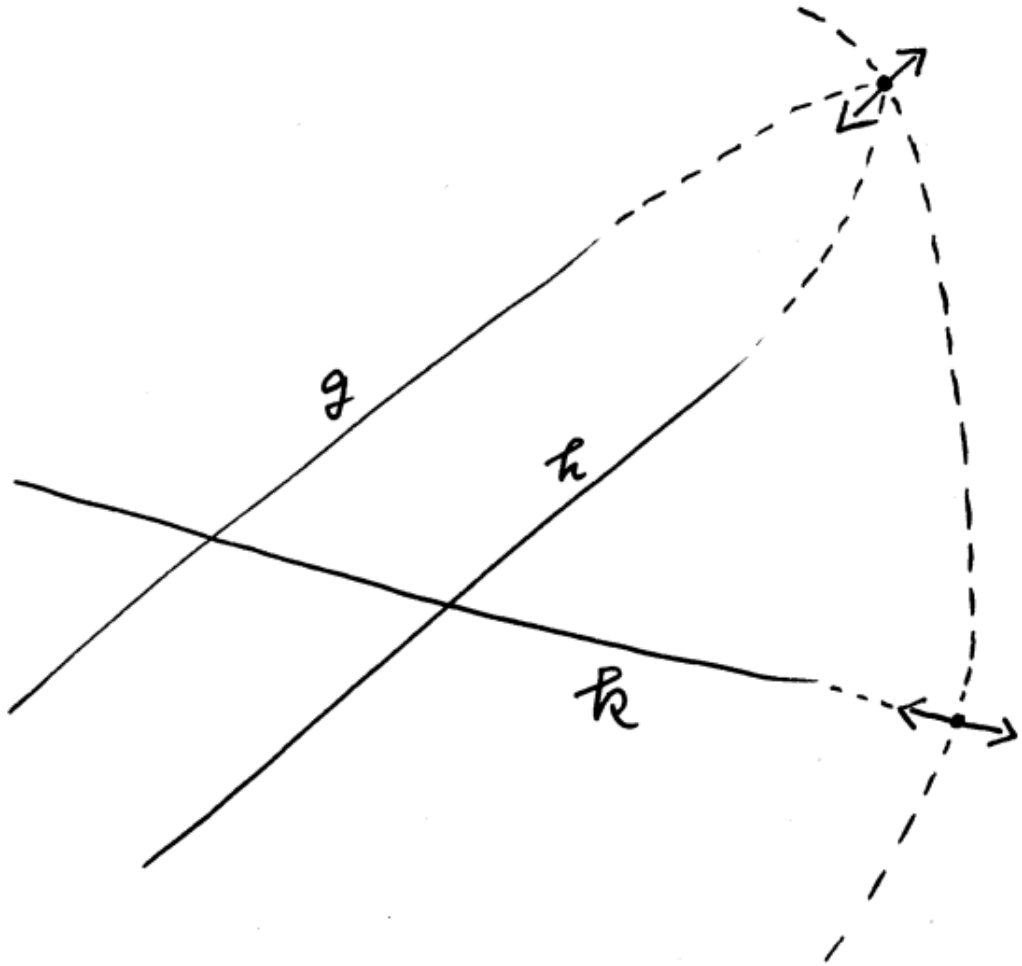
$$K \sqcup \{\infty\} = \mathbb{P}^1 K$$



Versuch einer graphischen Darstellung von $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$. Jede Ursprungsgerade im $\mathbb{R}^3$ geht durch einen Punkt der oberen Hemisphäre in der Einheitssphäre. Nun lassen wir aus dieser Hemisphäre auch noch an ihrem Rand den halben Äquator weg und betrachten genauer die Menge

$$H := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0,\ z = 0 \Rightarrow y \geq 0,\ z = y = 0 \Rightarrow x \geq 0\}$$

Dann erhalten wir eine Bijektion $\mathbb{P}^2\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} H$, indem wir jeder Ursprungsgerade ihren Schnittpunkt mit H zuordnen. Weiter liefert die Zentralprojektion mit Augpunkt in $(0, 0, -1)$ auf die xy-Ebene eine Bijektion von H mit der Einheitskreisscheibe, von der man dabei denselben halben Äquator am Rand wegzulassen hat. Die Bilder der projektiven Geraden unter der Verknüpfung dieser Bijektionen sind die Schnitte unserer halbentrandeten Einheitskreisscheibe mit beliebigen Kreisen oder Geraden durch gegenüberliegende Punkte auf dem Einheitskreis. Die unendlich ferne Gerade entspricht dem Schnitt mit dem Einheitskreis. Im Bild sind zwei parallele Geraden g, h eingezeichnet sowie eine weitere Gerade l und gestrichelt die unendlich ferne Gerade.



Versuch einer graphischen Darstellung von $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ in der Art des Kubismus. Hier habe ich die zwei unendlich fernen Punkte zu drei affinen Geraden durch bepunktete Doppelpfeile symbolisiert. Bei dieser Darstellung kommt es nur auf die Richtung der Doppelpfeile an, nicht auf die Stelle, an der sie auf's Papier gemalt sind, noch auf ihre Länge, und jeder Doppelpfeil symbolisiert den durch seine Richtung gegebenen unendlich fernen Punkt. Wie im Kubismus stellen verschiedene Teile dieses Bildes verschiedene Aspekte der reell projektiven Ebene dar und es gibt keine gemeinsame Perspektive oder globale Regel, der sich all diese Darstellungen unterordnen ließen.

5.1.4.6. Unter einer **Einbettung von Inzidenzgeometrien** verstehen wir eine injektive Abbildung $X \hookrightarrow Y$ der zugehörigen Punktmengen derart, daß Teilmengen von X mit mindestens drei Elementen genau dann kollinear sind, wenn ihre Bilder in Y kollinear sind.

Beispiele 5.1.4.7. Jede bijektive Einbettung von Inzidenzgeometrien ist eine Kollineation. Jeder injektive Vektorraumhomomorphismus $W \hookrightarrow V$ induziert eine Einbettung von Inzidenzgeometrien $\mathbb{P}W \hookrightarrow \mathbb{P}V$. Im Fall eines Untervektorraums $W \subset V$ ist das die Einbettung einer Teilmenge $\mathbb{P}W \subset \mathbb{P}V$. Gegeben ein affiner Raum E sind sowohl $E \hookrightarrow \mathbb{V}E$ als auch $\mathbb{P}\vec{E} \hookrightarrow \mathbb{V}E$ Einbettungen von Inzidenzgeometrien. Jede injektive affine Abbildung $F \hookrightarrow E$ von affinen Räumen ist eine Einbettung von Inzidenzgeometrien und induziert eine Einbettung $\mathbb{V}E \hookrightarrow \mathbb{V}F$ zwischen ihren projektiven Vervollständigungen. Ist $E \subset F$ ein affiner Teilraum, so behandeln wir die zugehörige Einbettung der projektiven Vervollständigungen in unserer Notation auch als eine Einbettung $\mathbb{V}E \subset \mathbb{V}F$ von Mengen. Gegeben eine affine Gerade $g \subset E$ ist insbesondere $\mathbb{V}g = g \sqcup \{\vec{g}\}$ ihre Vervollständigung zu einer projektiven Gerade.

5.1.4.8. Sei V ein Vektorraum. Eine Teilmenge $P \subset \mathbb{P}V$ seiner Projektivisierung heißt eine **projektive Hyperebene**, wenn sie aus allen eindimensionalen Untervektorräumen eines Untervektorraums $W \subset V$ der Kodimension Eins besteht, wenn also in Formeln gilt $P = \mathbb{P}W$ für $\operatorname{codim}(W \subset V) = 1$.

Lemma 5.1.4.9 (**Schnitte von Geraden und projektiven Hyperebenen**). *Gegeben V ein Vektorraum, $\mathbb{P}V$ seine Projektivisierung und $P \subset \mathbb{P}V$ eine projektive Hyperebene trifft jede projektive Gerade $g \subset \mathbb{P}V$, die nicht in unserer projektiven Hyperebene P enthalten ist, besagte projektive Hyperebene in genau einem Punkt.*

5.1.4.10. Der Punkt ist hierbei, daß im Projektiven der Schnitt einer Gerade mit einer Hyperebene nie leer sein kann. Das steht im Gegensatz zur Situation im Affinen, bei der das ja durchaus möglich ist.

Beweis. Wir haben per definitionem $g = \mathbb{P}V_g$ und $P = \mathbb{P}W$ mit $\dim V_g = 2$ und $\operatorname{codim}(W \subset V) = 1$. Dann folgt aus $V_g \not\subset W$ bereits $\dim(V_g \cap W) = 1$, denn wäre der Schnitt Null, so könnte W keine Hyperebene gewesen sein. Dieser eindimensionale Untervektorraum $(V_g \cap W) \subset V$ ist dann als Punkt des projektiven Raums $\mathbb{P}V$ aufgefaßt der gesuchte Schnittpunkt. $\square$

5.1.4.11. Gegeben in der Projektivisierung $\mathbb{P}V$ eines Vektorraums V eine projektive Hyperebene $P \subset \mathbb{P}V$ sowie ein Punkt $q \in \mathbb{P}V \backslash P$ im Komplement unserer Hyperebene erklären wir die **Projektion mit Zentrum q auf die Hyperebene P** als die durch die Eigenschaft $\{\pi_q(x)\} = \overline{qx} \cap P$ nach 5.1.4.9 eindeutig bestimmte Abbildung

$$\pi_q : \mathbb{P}V \backslash q \to P$$

Hier meint $\overline{qx}$ die Gerade durch q und x in der Inzidenzgeometrie $\mathbb{P}V$. In anderen Worten wird also $\pi_q(x) \in P$ durch die Bedingung festgelegt, daß q, x und $\pi_q(x)$ kollinear sind. Wenn wir besonders betonen wollen, daß wir diesen Projektionsbegriff meinen, sprechen wir von einer **projektiven Projektion**.

Proposition 5.1.4.12 (**Projektive Projektionen projektiver Geraden**). *Unter der projektiven Projektion eines projektiven Raums auf eine projektive Hyperebene wird jede projektive Gerade, die nicht durch das Zentrum der Projektion geht, bijektiv auf eine projektive Gerade abgebildet.*

Vorschau 5.1.4.13. In 5.1.4.15 wird sich erweisen, in welchem Sinn dieser Satz als eine Verbesserung unseres Satzes 5.1.3.5 über die Bilder von Geraden unter Zentralprojektionen in affinen Räumen verstanden werden kann.

Beweis. Seien $V \supset W$ ein Vektorraum mit einer Hyperebene und $q \in \mathbb{P}V \backslash \mathbb{P}W$ ein Punkt und $\pi = \pi_q : \mathbb{P}V \backslash q \to \mathbb{P}W$ die projektive Projektion. Gegeben $\vec{v} \in V$ mit $\langle \vec{v} \rangle = q$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "\pi_{\vec{v}}"] & V \backslash \langle \vec{v} \rangle \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathbb{P}V \backslash q \arrow[d, "\pi_q"] \\
W & W \backslash 0 \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads] & \mathbb{P}W
\end{tikzcd}$$

mit einer Parallelprojektion ganz links. Diese Parallelprojektion ist eine lineare Abbildung und bildet folglich Untervektorräume von V, die $\langle \vec{v} \rangle$ nicht umfassen, auf Untervektorräume von W derselben Dimension ab. Mithin bildet unsere Projektion π_q jede projektive Gerade in $\mathbb{P}V$, die nicht durch q läuft, bijektiv auf eine projektive Gerade in $\mathbb{P}W$ ab. □

Proposition 5.1.4.14 (**Projektionen in projektiven Vervollständigungen**). *Seien $E \supset H$ ein affiner Raum mit einer Hyperebene und $q \in \mathbb{V}E \backslash \mathbb{V}H$ ein Punkt. So gibt es für alle $e \in \mathbb{V}E \backslash q$ genau ein Element $\pi_q(e) \in \mathbb{V}H$ mit q, e und $\pi_q(e)$ kollinear, und die durch die Vorschrift $e \mapsto \pi_q(e)$ erklärte* **projektive Projektion**

$$\pi = \pi_q : \mathbb{V}E \backslash q \to \mathbb{V}H$$

bildet projektive Geraden in $\mathbb{V}E$, die nicht durch q gehen, bijektiv auf projektive Geraden in $\mathbb{V}H$ ab.

Beweis. Offensichtlich gibt es stets ein Paar $V \supset W$ aus einem Vektorraum mit einem Teilraum der Kodimension Eins und eine Kollineation $\mathbb{V}E \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}V$, unter dem $\mathbb{V}H$ bijektiv auf $\mathbb{P}W$ abgebildet wird. Damit folgen unsere Behauptungen unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen für projektive Räume 5.1.4.9 und 5.1.4.12. □

5.1.4.15 (**Zentralprojektion als Einschränkung einer projektiven Projektion**). Gegeben ein affiner Raum E mit einer Hyperebene $H \subset E$ und ein Punkt $q \in E \backslash H$ erhalten wir für die Zentralprojektion ζ_q ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} E\backslash(q+\vec{H}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\zeta_q"] & \mathbb{V}E\backslash q \arrow[d, "\pi_q"] \\ H \arrow[r, hook] & \mathbb{V}H \end{tikzcd}$$

5.1.4.16 (**Nocheinmal Bilder von Geraden unter Zentralprojektionen**). Nach unseren Erkenntnissen in 5.1.4.14 werden unter projektiven Projektionen Geraden von $\mathbb{V}E$, die nicht durch den Augpunkt q laufen, bijektiv auf Geraden in $\mathbb{V}H$ abgebildet. Das liefert einen alternativen Zugang zu unserem Satz 5.1.3.5 über Bilder von affinen Geraden unter Zentralprojektionen. Gegeben eine Gerade $g \subset E\backslash q$ wird ihre Vervollständigung $\mathbb{V}g \subset \mathbb{V}E\backslash q$ nach 5.1.4.14 unter π_q bijektiv auf eine projektive Gerade

$$\pi_q(\mathbb{V}g) \subset \mathbb{V}H$$

abgebildet. Jetzt gibt es nach 5.1.4.9 nur die beiden Möglichkeiten $\pi_q(\mathbb{V}g) \subset \mathbb{P}\vec{H}$ oder $|\pi_q(\mathbb{V}g) \cap \mathbb{P}\vec{H}| = 1$, und im letzteren Fall ist dieser eindeutige Schnittpunkt entweder $\pi_q(\vec{g})$ oder eben ein anderer Punkt. Im ersten Fall trifft g den Definitionsbereich unserer Zentralprojektion ζ_q überhaupt nicht. Im zweiten Fall wird g bijektiv auf eine Gerade in H abgebildet. Im dritten Fall haben wir $\pi_q(\vec{g}) \in H$ und dieses Bild des unendlich fernen Punktes ist der Fluchtpunkt zu g.

5.1.4.17 (**Parallelprojektion als Einschränkung einer projektiven Projektion**). Gegeben ein affiner Raum E mit einer Hyperebene $H \subset E$ und ein Richtungsvektor $\vec{v} \in \vec{E}\backslash\vec{H}$ mit zugehörigem unendlich fernen Punkt $q := \langle\vec{v}\rangle \in \mathbb{V}E$ erhalten wir für die Parallellprojektion $\pi_{\vec{v}}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_{\vec{v}}"] & \mathbb{V}E\backslash q \arrow[d, "\pi_q"] \\ H \arrow[r, hook] & \mathbb{V}H \end{tikzcd}$$

Zusmmen mit 5.1.4.15 sehen wir so, daß sowohl Parallelprojektionen wie auch Zentralprojektionen beide Einschränkungen projektiver Projektionen zwischen den jeweiligen Vervollständigungen sind.

5.1.4.18 (**Homogene Koordinaten**). Gegeben $x_0, x_1, \ldots, x_n \in K$ nicht alle Null bezeichnen wir die Gerade durch den Ursprung und den Punkt mit den Koordinaten $x_0, x_1, \ldots, x_n$, aufgefaßt als Punkt des n-dimensionalen projektiven Raums, mit

$$\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle := \langle(x_0, x_1, \ldots, x_n)\rangle$$

Üblich sind auch die Schreibweisen $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ und $(x_0; x_1; \ldots; x_n)$ für diesen Punkt des projektiven Raums $\mathbb{P}^n K$. Unsere Standardeinbettung $K^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n K$ wird gegeben durch $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \langle 1, x_1, \ldots, x_n \rangle$.

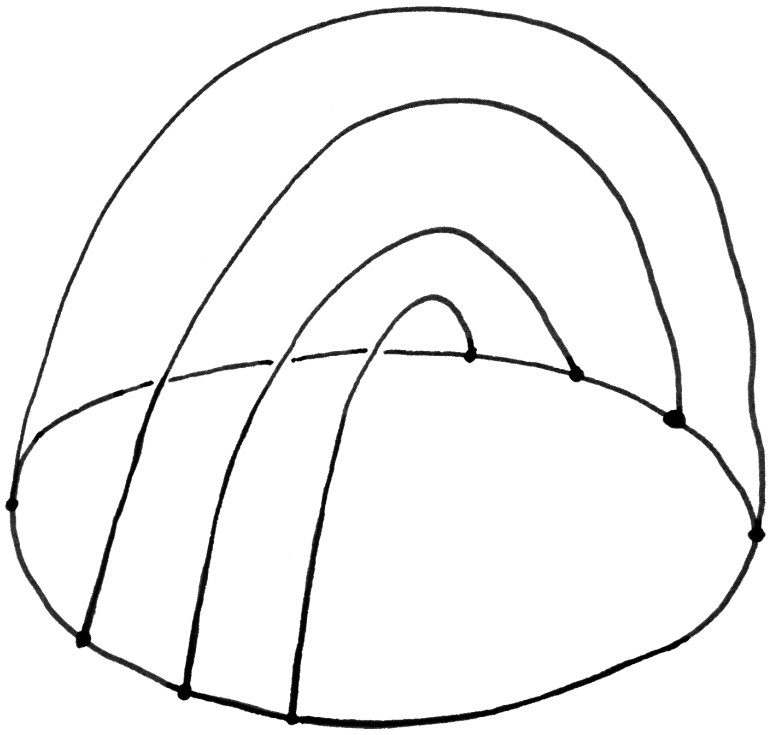
Vorschau 5.1.4.19. Die projektiven Räume $\mathbb{P}V$ zu endlichdimensionalen reellen oder komplexen Vektorräumen V können mit einer Topologie versehen werden durch die Vorschrift, daß eine Teilmenge offen sein soll genau dann, wenn ihr Urbild in $V \backslash 0$ offen ist. Mehr zu dieser sogenannten „Quotiententopologie" diskutieren wir in 15.2.3. Bereits hier sei erwähnt, daß es für diese Topologien stetige Bijektionen mit stetiger Umkehrung gibt, die $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ mit der Kreislinie S^1 und $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit der Kugelschale S^2 identifizieren. Deshalb heißt die komplexe projektive Gerade $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ auch die **Riemann'sche Zahlenkugel**. Genauer erhalten wir eine derartige Identifikation für $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$, indem wir eine Kugelschale auf die komplexe Zahlenebene legen, eine Lampe an den höchsten Punkt P stellen und jeden Punkt der Kugelschale, der nicht gerade der höchste Punkt ist, auf seinen Schatten in der Ebene $\mathbb{C}$ abbilden, den höchsten Punkt P jedoch auf ∞. Für $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ verfährt man analog. Weiter ist $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ nach 15.2.3.8 homöomorph ist zu einer Kugelschale, in die man ein kreisrundes Loch geschnitten hat, um dort ein Möbiusband einzukleben. Um das präzise zu verstehen und zu beweisen, braucht es jedoch eine gewisse Übung im Umgang mit den Grundbegriffen der mengentheoretischen Topologie.

Proposition* 5.1.4.20. *Gegeben ein endlicher Körper $\mathbb{F}$ gibt es eine zyklische Gruppe von Automorphismen der Inzidenzgeometrie $\mathbb{P}^2\mathbb{F}$, die frei und transitiv sowohl auf der Menge der Punkte als auch auf der Menge der Geraden operiert.*

Beweis. Wir betrachten für eine Primzahlpotenz q die Körpererweiterung $\mathbb{F}_{q^3}/\mathbb{F}_q$. Dann ist $\mathbb{F}_{q^3}$ ein dreidimensionaler $\mathbb{F}_q$-Vektorraum und wir erhalten so eine Untergruppe $\mathbb{F}_{q^3}^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}(3; \mathbb{F}_q)$, die frei und transitiv auf dem Komplement des Ursprungs operiert. Als multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers ist sie zyklisch nach 4.4.4.17. Der Quotient $\mathbb{F}_{q^3}^\times/\mathbb{F}_q^\times$ ist dann auch zyklisch und operiert frei und transitiv auf $\mathbb{P}^2\mathbb{F}_q$ und bildet Geraden auf Geraden ab. Weiter ist die Spurform unserer Körpererweiterung $\mathbb{F}_{q^3}/\mathbb{F}_q$ nach Übung 6.4.1.36 nicht ausgeartet und induziert einen $\mathbb{F}_{q^3}^\times$-äquivarianten Isomorphismus von $\mathbb{F}_q$-Vektorräumen $\mathbb{F}_{q^3} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^3}, \mathbb{F}_q)$. So sehen wir, daß $\mathbb{F}_{q^3}^\times$ auch frei und transitiv auf der Menge der von Null verschiedenen $\mathbb{F}_q$-Linearformen auf $\mathbb{F}_{q^3}$ operiert und $\mathbb{F}_{q^3}^\times/\mathbb{F}_q^\times$ folglich frei und transitiv auf der Menge der Geraden in $\mathbb{P}^2\mathbb{F}_q$. $\square$

Übungen

Übung 5.1.4.21. Gegeben ein affiner Raum E sind zwei affine Geraden $g, h \subset E$ genau dann gleich oder parallel, wenn sie sich im Unendlichen schneiden. Genau-



Versuch einer Darstellung der reell-projektiven Ebene $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ als topologischer Raum. Unten denke man sich an die Kreislinie eine Hemisphäre angeklebt, oben verbindet man je zwei gegenüberliegende Punkte des Einheitskreises durch einen Bogen mit variierender mittlerer Höhe. So entsteht eine sich selbst durchdringende räumliche Fläche, bei der man sich die Selbstdurchdringung leicht wegdenken kann. Man nennt sie auch die **Kreuzhaube**.

er und in Formeln gilt also

$$g \| h \;\Leftrightarrow\; \mathbb{V}g \cap \mathbb{V}h \cap \mathbb{P}\vec{E} \neq \emptyset$$

Übung 5.1.4.22. Gegeben ein Vektorraum V und im projektiven Raum $\mathbb{P}V$ zwei projektive Hyperebenen $U, H \subset \mathbb{P}V$ sowie ein Punkt $q \in \mathbb{P}V \backslash (H \cup U)$ im Komplement ihrer Vereinigung induziert unsere Projektion aus 19.1.5.7 eine Bijektion

$$\pi_q : U \xrightarrow{\sim} H$$

Ergänzende Übung 5.1.4.23 (**Linearisierung**). Sei E ein affiner Raum über einem Körper K. Jede affine Einbettung $i : E \hookrightarrow V$ als affine den Ursprung vermeidende Hyperebene in einen Vektorraum V hat die universelle Eigenschaft, daß für jeden K-Vektorraum W das Vorschalten von i eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aff}_K(E, W)$$

induziert. Eine solche affine Einbettung ist folglich eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir nennen sie die **Linearisierung von** E. Jede Linearisierung von E liefert offensichtlich eine Bijektion $(E \times K^\times) \sqcup \vec{E} \xrightarrow{\sim} V$ durch $(e, \lambda) \mapsto \lambda i(e)$ und $\vec{v} \mapsto \vec{\imath}(\vec{v})$. Man gebe Formeln an für diejenige Verknüpfung auf $(E \times K^\times) \sqcup \vec{E}$, die unter dieser Bijektion der Addition von Vektoren in V entspricht.

Ergänzende Übung 5.1.4.24. Sei K ein Körper. Man zeige, daß die Homothetien und Translationen bereits alle Permutationen von K^2 sind, die sich so zu Kollineationen von $\mathbb{V}K^2$ fortsetzen lassen, daß die unendlich ferne Gerade punktweise festgehalten wird. Hinweis: Nach 3.3.3.5 sind alle Kollineationen $K^2 \xrightarrow{\sim} L^2$ die von einem Körperisomorphismus von $K \xrightarrow{\sim} L$ induzierte Abbildung gefolgt von einer bijektiven K-linearen Abbildung und einer Translation.

Übung 5.1.4.25. Gegeben ein Körper K scheiden sich je zwei verschiedene Geraden von $\mathbb{P}^2K$ in genau einem Punkt.

Übung 5.1.4.26 (**Kartenspiel zu endlicher projektiver Ebene**). Ich habe zu Hause ein Spiel mit gut 50 Karten und 8 Symbolen auf jeder Karte derart, daß je zwei Karten genau ein Symbol gemeinsam haben. Es gilt dann, als erster das Symbol zu nennen, das die erste Karte vom Kartenstapel eines Spielers mit dem in der Mitte liegenden Ablagestapel gemeinsam hat, und dann darf man seine Karte in der Mitte ablegen. Wer als Erster alle Karten seines eigenen Stapels in der Mitte abgelegt hat, hat gewonnen. Können Sie so ein Spiel entwerfen? Mit wievielen Karten kriegen Sie es maximal hin? Wieviele Symbole verwenden Sie dabei?

5.1.5 Projektivitäten und Fotographien

5.1.5.1. Gegeben ein Körper K induziert der offensichtliche Gruppenhomomorphismus $\mathrm{GL}(n+1;K) \to \mathrm{Ens}^\times(K^{n+1})$ einen natürlichen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{GL}(n+1;K) \to \mathrm{Ens}^\times(\mathbb{P}^n K)$. Dessen Bild heißt die **projektive Gruppe**

$$\mathrm{PGL}(n+1;K) \subset \mathrm{Ens}^\times(\mathbb{P}^n K)$$

Die Elemente der projektiven Gruppe heißen **Projektivitäten**. Der Kern der Surjektion $\mathrm{GL}(n+1;K) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(n+1;K)$ besteht aus allen invertierbaren skalaren Matrizen, wie Sie als Übung 5.1.5.8 selbst zeigen dürfen. So liefert unsere Surjektion einen Isomorphismus $\mathrm{GL}(n+1;K)/K^\times\mathrm{I} \xrightarrow{\sim} \mathrm{PGL}(n+1;K)$.

5.1.5.2. Offensichtlich sind alle Projektivitäten Kollineationen. Offensichtlich gibt es für je zwei projektive Geraden in einem projektiven Raum eine Projektivität, die sie ineinander überführt.

5.1.5.3 (**Vervollständigte Fototransformationen**). Wir erinnern aus 5.1.3.8 unsere Fototransformationen $\phi := j^{-1}\zeta_{q,H} i : \mathbb{R}^2 \dashrightarrow \mathbb{R}^2$ zu Einbettungen $i, j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ der Gestalt $i : (x,y)^\top \mapsto A(0,x,y)^\top + \vec{v}$ und $j : (x,y)^\top \mapsto B(0,x,y)^\top + \vec{w}$ für $A, B \in \mathrm{SO}(3)$ Drehmatrizen und $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ Vektoren und einem Augpunkt $q \in \mathbb{R}^3$, der weder im Bild von i noch im Bild von j liegt. Sicher erhalten wir dieselben Fototransformationen, wenn wir uns auf den Fall beschränken, daß $q = 0$ der Ursprung des Koordinatensystems ist. Dann induzieren i und j Bijektionen $\hat{\imath}, \hat{\jmath} : \mathbb{VR}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^2\mathbb{R}$, die für gewöhnlich von unseren Standardidentifikationen abweichen, und unsere partiell definierte Fototransformation ist eine Einschränkung der Bijektion

$$\hat{\phi} := \hat{\jmath}^{-1}\hat{\imath} : \mathbb{VR}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{VR}^2$$

Wir nennen auch diese Bijektionen **Fototransformationen** oder, wenn wir sie von unseren partiell definierten Fototransformationen aus 5.1.3.8 unterscheiden wollen, **vervollständigte Fototransformationen**. Sie sind stets Kollineationen.

Satz 5.1.5.4 (Projektive Gruppe und Fotographien). *Die von den vervollständigten Fototransformationen erzeugte Untergruppe $F \subset \mathrm{Ens}^\times(\mathbb{VR}^2)$ entspricht unter unserer Standardidentifikation $s : \mathbb{VR}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ der projektiven Gruppe, in Formeln*

$$sFs^{-1} = \mathrm{PGL}(3;\mathbb{R})$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Inklusion $\subset$. In der Tat bilden ja nach Annahme und in den Notationen aus 5.1.5.3 die Vektoren $i(0,0)$, $i(1,0)$ und $i(0,1)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und dasselbe gilt für die Vektoren $j(0,0)$, $j(1,0)$ und $j(0,1)$. Für den linearen Automorphismus $L \in \mathrm{GL}(3;\mathbb{R})$, der die Erste dieser Basen in die

Zweite überführt, kommutieren sicher die Diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, equal] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "L"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, hook, "j"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{V}\mathbb{R}^2 \arrow[r, "\hat{\imath}", "\sim"'] \arrow[d, equal] & \mathbb{P}^2\mathbb{R} \arrow[d, "L"] \\ \mathbb{V}\mathbb{R}^2 \arrow[r, "\hat{\jmath}", "\sim"'] & \mathbb{P}^2\mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Es folgt $\hat{\jmath}\hat{\imath}^{-1} \in \mathrm{PGL}(3;\mathbb{R})$ und wegen $s = \hat{\sigma}$ für $\sigma : (x,y) \mapsto (1,x,y)$ auch $s(\hat{\jmath}^{-1}\hat{\imath})s^{-1} = (\hat{\sigma}\hat{\jmath}^{-1})(\hat{\imath}\hat{\sigma}^{-1}) \in \mathrm{PGL}(3;\mathbb{R})$. Um die andere Inklusion $\supset$ zu zeigen, bemerken wir zunächst $s(\hat{\sigma}^{-1}\hat{\imath})s^{-1} = \hat{\imath}\hat{\sigma}^{-1} \in sFs^{-1}$ für alle i, und dies Element der projektiven Gruppe hinwiederum wird nach unseren Diagrammen repräsentiert durch die lineare Abbildung L, die $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2$ und $\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_3$ auf $i(0,0)$, $i(1,0)$ und $i(0,1)$ wirft. Geht etwa das zweite Tripel durch eine „Verschiebung der Fotoplatte gegen das Gemälde um $\lambda\mathrm{e}_2$“ aus dem ersten Tripel hervor, so daß in Formeln $\mathrm{e}_1 + \lambda\mathrm{e}_2, \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + \lambda\mathrm{e}_2, \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_3 + \lambda\mathrm{e}_2$ unser zweites Tripel ist, so wird die zugehörige Projektivität induziert durch die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Weiter sehen wir, daß auch die Projektivitäten zu Permutationsmatrizen alle zu sFs^{-1} gehören, indem wir für eine Permutation $\tau \in \mathcal{S}_3$ eben $\mathrm{e}_{\tau(1)}, \mathrm{e}_{\tau(1)} + \mathrm{e}_{\tau(2)}$ und $\mathrm{e}_{\tau(1)} + \mathrm{e}_{\tau(3)}$ als unser zweites Tripel nehmen. Die Untergruppe $sFs^{-1} \subset \mathrm{PGL}(3;\mathbb{R})$ umfaßt damit die Klassen aller speziellen Elementarmatrizen. Da aber die speziellen Elementarmatrizen nach 4.1.4.17 bereits die ganze spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(3;\mathbb{R})$ erzeugen, folgt $sFs^{-1} = \mathrm{PGL}(3;\mathbb{R})$. □

Satz 5.1.5.5 (**Projektive Gruppe und Kollineationen**). *Die Gruppe aller Kollineationen in* $\mathrm{Ens}^{\times}(\mathbb{P}^2\mathbb{R})$ *ist genau die projektive Gruppe* $\mathrm{PGL}(3;\mathbb{R})$.

5.1.5.6. Salopp gesprochen sind also unsere „Umrechnungen zwischen verschiedenen Fotographien“ aus 5.1.5.4 genau diejenigen Permutationen der reell-projektiven Ebene, die Geraden in Geraden überführen.

Ergänzung 5.1.5.7. Dasselbe sollte auch in allen endlichen höheren Dimensionen gelten mit im wesentlichen demselben Beweis. Als neue Zutat gilt es nur zu zeigen, daß jede maximale echte Teilmenge eines $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$, die mit je zwei verschiedenen Punkten auch die ganze projektive Gerade durch sie umfaßt, eine projektive Hyperebene ist.

Beweis. Es ist klar, daß die projektive Gruppe $\mathrm{PGL}(3;\mathbb{R})$ aus Kollineationen besteht. Gegeben eine Kollineation $k : \mathbb{P}^2\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ wird andererseits die unendlich ferne Gerade $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ auf eine Gerade abgebildet und wir finden ein Element

$g \in \mathrm{PGL}(3;\mathbb{R})$ derart, daß gk die unendlich ferne Gerade stabilisiert. Dann induziert gk nach 3.3.3.1 eine affine Abbildung auf dem Komplement $\mathbb{R}^2$ der unendlich fernen Gerade, und indem wir g geeignet abändern, dürfen wir annehmen, daß gk auf diesem Komplement die Identität ist. Eine derartige Kollineation muß aber auch auf der unendlich fernen Geraden die Identität sein und so folgt $k = g^{-1}$. $\square$

Übungen

Übung 5.1.5.8. Ein Automorphismus eines Vektorraums, der jeden eindimensionalen Untervektorraum stabilisiert, ist ein skalares Vielfaches der Identität.

Übung 5.1.5.9. Gegeben in einem projektiven Raum zwei Paare $(g_i, x_i)_{i=1,2}$ aus einer eine Gerade und einen Punkt außerhalb dieser Gerade gibt es stets eine Projektivität, die das eine Paar in das andere ineinander überführt. Idem für einen Punkt auf einer Gerade. Idem für zwei verschiedene Punkte auf einer Gerade.

Übung 5.1.5.10. Sei K ein Körper. Man zeige: Gegeben zwei Tripel von paarweise verschiedenen Ursprungsgeraden in der Ebene K^2 gibt es stets eine lineare Abbildung, die das eine Tripel in das andere überführt, und diese lineare Abbildung ist eindeutig bestimmt bis auf einen Skalar.

Übung 5.1.5.11. Sei K ein Körper. Die vorhergehende Übung zeigt, daß es für jedes Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) von paarweise verschiedenen Punkten der projektiven Gerade $\mathbb{P}^1 K$ genau ein Element $g \in \mathrm{PGL}(2;K)$ gibt, das es in ein Quadrupel der Gestalt $(x, 0, 1, \infty)$ überführt. Man zeige, daß hier x im Fall, daß keiner unserer ursprünglichen Punkte ∞ ist, gegeben wird durch die Formel

$$x = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} \Big/ \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4}$$

Übung 5.1.5.12. Sei K ein Körper. Wir erinnern an die kanonische Bijektion $K \sqcup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 K$ aus 5.1.4.18 mit $z \mapsto \langle 1, z\rangle$ und $\infty \mapsto \langle 0, 1\rangle$. Man zeige: Gegeben zwei Tripel von paarweise verschiedenen Geraden in der Ebene K^2 gibt es stets eine lineare Abbildung, die das eine Tripel in das andere überführt, und diese lineare Abbildung ist eindeutig bestimmt bis auf einen Skalar. Für unsere Operation von $\mathrm{PGL}(2;K)$ auf $(\mathbb{P}^1 K)^3$ liefert demnach die Vorschrift $g \mapsto g(0, 1, \infty)$ eine Bijektion

$$\mathrm{PGL}(2;K) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{P}^1 K)^3 \backslash \Delta$$

für Δ die „dicke Diagonale“ alias die Menge aller Tripel mit mindestens zwei gleichen Einträgen. Man definiert das **Doppelverhältnis**

$$b : (\mathbb{P}^1 K)^4 \backslash \Delta \xrightarrow{\sim} K \backslash \{0, 1\}$$

auf der Menge aller Quadrupel mit vier paarweise verschiedenen Einträgen durch die Vorschrift, daß jedem derartigen Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) derjenige eindeutig

bestimmte Punkt $x \in K$ zugeordnet werden soll, für den es ein $g \in \mathrm{GL}(2;K)$ gibt mit $g : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x, 0, 1, \infty)$. Man zeige für dies Doppelverhältnis im Fall, daß keiner unserer vier Punkte der Punkt ∞ ist, die Formel

$$b(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} \Big/ \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4}$$

Sie erklärt auch die Herkunft der Bezeichnung als Doppelverhältnis. Im Fall, daß einer unserer vier Punkte ∞ ist, gilt unsere Formel dem Sinne nach immer noch, muß aber mit einer gewissen Sorgfalt interpretiert werden.

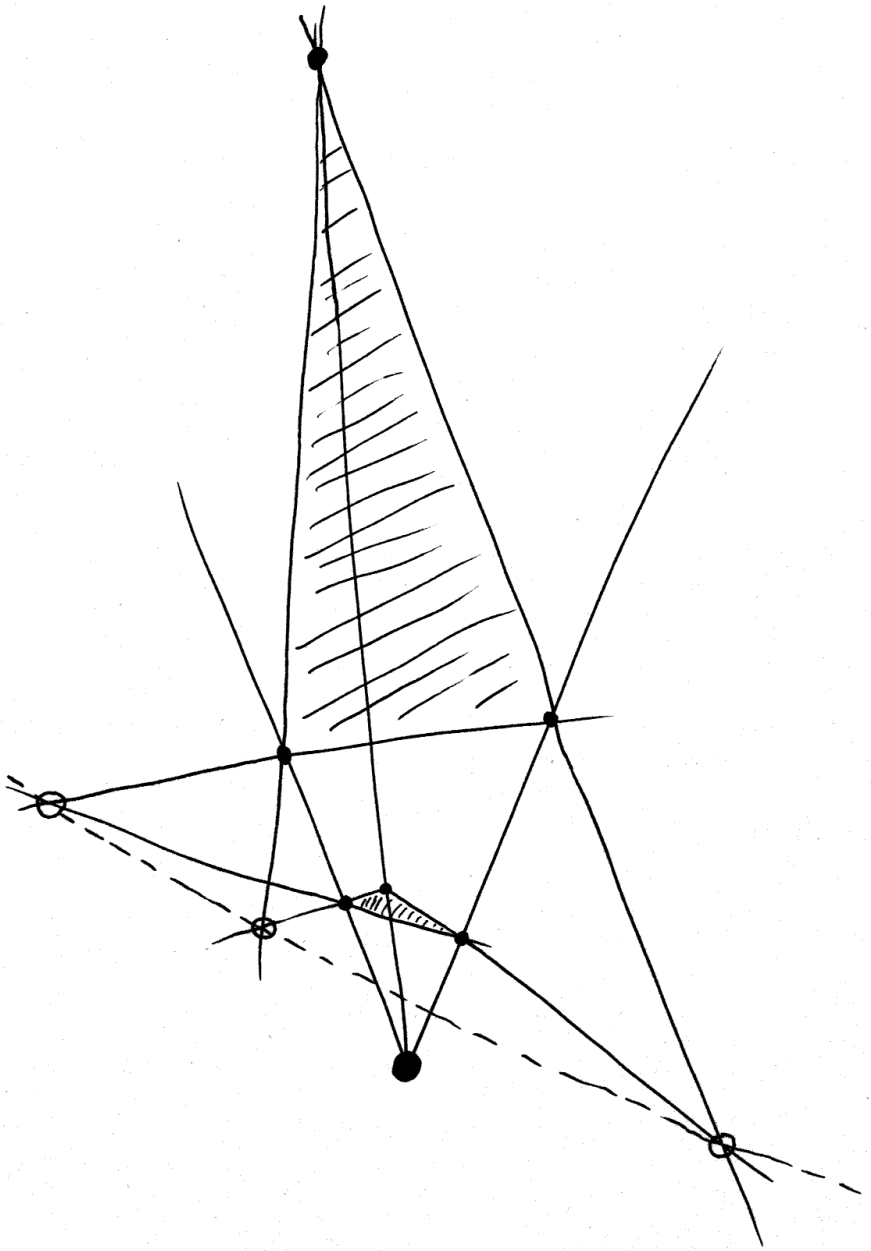
Weiterführende Übung 5.1.5.13. Ich bin ziemlich sicher, daß die vervollständigten Fototransformationen eine offene dichte Teilmenge der projektiven Gruppe $\mathrm{PGL}(3;\mathbb{R})$ bilden. Daraus würde unmittelbar folgen, daß jedes Element der projektiven Gruppe als Verknüpfung von zwei vervollständigten Fototransformationen dargestellt werden kann. Ich hätte gerne eine etwas explizitere Beschreibung derjenigen Elemente der projektiven Gruppe, die keine vervollständigten Fototransformationen sind. Ich erwarte, daß sich insbesondere die meisten Scherungen nicht als Fototransformationen realisieren lassen.

5.1.6 Die Sätze von Desargues und Pappos

5.1.6.1 (**Motivation durch Fotographie**). Ich erinnere an die Desargueseigenschaft 5.1.2.9 und die Papposeigenschaft 5.1.2.15 für affine Inzidenzebenen. Wir wissen, daß sie für $\mathbb{R}^2$ und allgemeiner für jede zweidimensionale affine Ebene über einem Körper gelten und diese sogar charakterisieren. Wenn wir nun die Figur zu einem dieser Sätze auf ein Papier malen und dies Papier von irgendwoher mit einer Lochkamera fotographieren, bleiben salopp gesprochen in unserer Fotographie Geraden immer noch Geraden, aber parallele Geraden bleiben nicht parallel. Vielmehr schneiden sich die Bilder paralleler Geraden in ihrem gemeinsamen Fluchtpunkt und alle diese Fluchtpunkte von parallelen Geraden in Ebene des Papiers, das sagen wir auf einem Tisch liegt, bilden ihrerseits eine Gerade, den Horizont. Diese Erkenntnis führt uns zur Formulierung und dem Beweis der beiden folgenden Sätze.

Satz 5.1.6.2 (von Desargues). *Seien in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2K$ über einem Körper K drei paarweise verschiedene projektive Geraden g_1, g_2, g_3 mit einem gemeinsamen Punkt z gegeben und für $i \in \{1,2,3\}$ Punkte $x_i, y_i \in g_i \backslash z$ mit $x_i \neq y_i$. So sind die Schnittpunkte $\overline{x_1x_2} \cap \overline{y_1y_2}$ und $\overline{x_2x_3} \cap \overline{y_2y_3}$ und $\overline{x_1x_3} \cap \overline{y_1y_3}$ kollinear.*

Beweis. Wir bezeichnen unsere drei Schnittpunkte mit dem jeweils fehlenden Index als s_3, s_1 und s_2. Fallen zwei dieser Schnittpunkte zusammen, so bleibt eh



Der Satz von Desargues besagt, daß die drei als hohle Kreise dargestellten Schnittpunkte stets auf einer hier gestrichelt gezeichneten Gerade liegen.

nichts mehr zu zeigen. Sonst betrachten wir die projektive Gerade $l := \overline{s_3 s_1}$ durch die ersten beiden unserer Schnittpunkte und finden nach 5.1.5.2 eine Kollineation, die l in die projektive Gerade der unendlich fernen Punkte transformiert. Liegt keiner der Punkte x_i, y_i auf l, so verwandelt sich unser Satz von Desargues unter dieser Kollineation in die Desargueseigenschaft aus 5.1.2.9 falls $z \notin l$ beziehungsweise die ausgeartete Desargueseigenschaft aus 5.1.2.12 falls $z \in l$ und wir sind fertig. Nun argumentieren wir noch, warum keiner der Punkte x_i, y_i auf l liegen kann. Der Schnittpunkt $s_3 := \overline{x_1 x_2} \cap \overline{y_1 y_2}$ kann weder auf g_1 noch auf g_2 liegen, höchstens auf g_3. Analog kann s_1 nicht auf g_2 und g_3 liegen, höchstens auf g_1. So folgt schon einmal $l \neq g_i$ für alle i. Hätten wir nun etwa $x_1 \in l$, so folgte $x_1 = l \cap g_1 = s_3$ und so $g_1 = \overline{y_1 y_2}$ im Widerspruch zu unseren Annahmen. Analog argumentieren wir für die anderen Punkte x_i, y_i. □

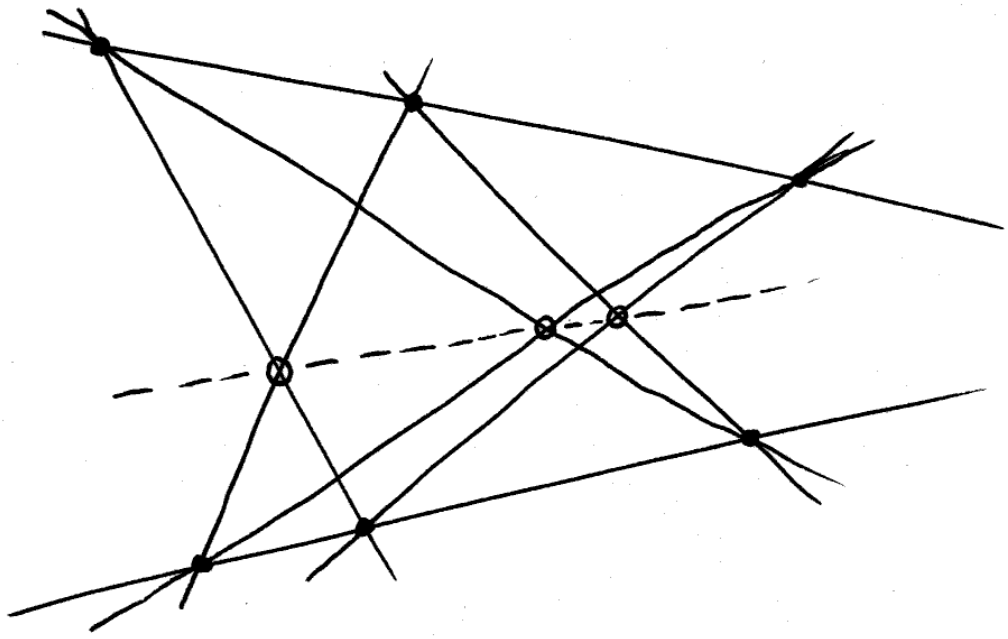
Satz 5.1.6.3 (von Pappos). *Seien in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2 K$ über einem Körper K Geraden g, h gegeben und für $i \in \{1, 2, 3\}$ paarweise verschiedene Punkte $x_i \in g \backslash h$ und $y_i \in h \backslash g$. So sind die Schnittpunkte $\overline{x_1 y_2} \cap \overline{x_2 y_1}$ und $\overline{x_2 y_3} \cap \overline{x_3 y_2}$ und $\overline{x_1 y_3} \cap \overline{x_3 y_1}$ kollinear.*

5.1.6.4. Salopp ausgedrückt sagt unsere Eigenschaft: Gegeben zwei verschiedene Geraden und ein Sechseck, dessen Ecken abwechselnd auf der einen und auf der anderen Gerade liegen, sind die drei Schnittpunkte jeweils gegenüberliegender Kantengeraden unseres Sechsecks kollinear.

Beweis. Wir bezeichnen unsere drei Schnittpunkte mit dem jeweils fehlenden Index als s_3, s_1 und s_2. Fallen zwei dieser Schnittpunkte zusammen, so bleibt eh nichts mehr zu zeigen. Sonst betrachten wir die projektive Gerade $l := \overline{s_3 s_1}$ durch die ersten beiden unserer Schnittpunkte und finden nach 5.1.5.2 eine Kollineation, die l in die projektive Gerade der unendlich fernen Punkte transformiert. Liegt keiner der Punkte x_i, y_i auf l, so verwandelt sich unser Satz von Pappos unter dieser Kollineation in die Papposeigenschaft aus 5.1.2.15 und wir sind fertig. Nun argumentieren wir noch, warum keiner der Punkte x_i, y_i auf l liegen kann. Der Schnittpunkt $s_3 := \overline{x_1 y_2} \cap \overline{x_2 y_1}$ kann nicht auf g liegen, da wir sonst $x_1 = s_3 = x_2$ haben müßten. Wir folgern $l \neq g$ und ebenso $l \neq h$. Weiter finden wir $l \neq \overline{x_1 y_2}$, da wir sonst $s_1 = y_2 \in h$ haben müßten. Also gilt $l \cap \overline{x_1 y_2} = \{s_3\}$ und so $x_1 \notin l$. Analog argumentieren wir für die anderen Punkte x_i, y_i. □

5.1.7 Punkt-Geraden-Dualität

Definition 5.1.7.1. Eine **Inzidenzstruktur** ist ein Datum (X, G, I) bestehend aus zwei Mengen X und G und einer Teilmenge $I \subset X \times G$. Statt $(x, g) \in I$ schreiben wir auch xIg oder gIx und sagen x **inzidiert mit** g und g **inzidiert mit** x.



Der Satz von Pappos besagt, daß die drei als hohle Kreise dargestellten Schnittpunkte stets auf einer hier gestrichelt gezeichneten Gerade liegen.

Gegeben zwei Inzidenzstrukturen (X, G, I) und (X', G', I') verstehen wir unter einem **Isomorphismus von Inzidenzstrukturen** ein Paar (φ, ψ) bestehend aus einer Bijektion $\varphi : X \xrightarrow{\sim} X'$ und einer Bijektion $\psi : G \xrightarrow{\sim} G'$ derart, daß gilt $(\varphi \times \psi)(I) = I'$.

Beispiel 5.1.7.2. Jeder Inzidenzgeometrie (X, G) können wir eine Inzidenzstruktur (X, G, I) zuordnen durch die Vorschrift $I := \{(x, g) \mid x \in g\}$. Gegeben eine weitere Inzidenzgeometrie (X', G') ist darüber hinaus eine Abbildung $\psi : X \to X'$ genau dann eine Kollineation, wenn sie sich zu einem Isomorphismus der zugehörigen Inzidenzstrukturen fortsetzen läßt, und diese Fortsetzung ist dann eindeutig bestimmt.

Beispiel 5.1.7.3. Gegeben eine Inzidenzstruktur (X, G, I) betrachten wir die Vertauschungsabbildung $\tau : X \times G \xrightarrow{\sim} G \times X$ gegeben durch $\tau(x, g) := (g, x)$ und nennen $(G, X, \tau(I))$ die **duale Inzidenzstruktur**.

Satz 5.1.7.4 (Punkt-Geraden-Dualität). *Seien V ein dreidimensionaler Vektorraum und V^* sein Dualraum.*

1. *Wir erhalten eine Bijektion φ zwischen $\mathbb{P}(V^*)$ und der Menge der projektiven Geraden in $\mathbb{P}(V)$ durch die Abbildungsvorschrift $\langle\lambda\rangle \mapsto \mathbb{P}(\ker \lambda)$;*

2. *Wir erhalten eine Bijektion φ_* zwischen $\mathbb{P}(V)$ und der Menge der projektiven Geraden in $\mathbb{P}(V^*)$ durch die Abbildungsvorschrift $\langle v\rangle \mapsto \mathbb{P}(\ker \mathrm{ev}(v))$;*

3. *Das Paar $(\varphi, \varphi_*^{-1})$ ist ein Isomorphismus zwischen der Inzidenzstruktur zur Inzidenzgeometrie $\mathbb{P}(V^*)$ und dem Dualen der Inzidenzstruktur zur Inzidenzgeometrie $\mathbb{P}(V)$.*

Beweis. Ganz allgemein liefert für jeden endlichdimensionalen Vektorraum V die Vorschrift $U \mapsto U^\perp$ eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen der Menge aller Untervektorräume von V und der Menge aller Untervektorräume von V^*. Der Satz folgt. $\square$

5.2 Möbiusgeometrie und hyperbolische Ebene

5.2.1 Kreisspiegelungen

5.2.1.1. Unter einer **euklidischen Ebene** verstehen wir wie in 4.1.5.1 ein Paar $E = (E, S)$ bestehend aus einem zweidimensionalen reellen affinen Raum E und einer $\mathbb{R}_{>0}$-Bahn S von Skalarprodukten auf seinem Richtungsraum.

5.2.1.2. Wir hatten in 4.1.5.12 jedem euklidischen Vektorraum (V, S) einen orientierten eindimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{L} = \mathbb{L}(V)$ zugeordnet und ihn seine **Längengerade** genannt. Weiter hatten wir eine **Längenabbildung**

$$\| \ \| : V \to \mathbb{L}$$

erklärt. Unter dem Nachschalten eines beliebigen orientierungserhaltenden Isomorphismus $\mathbb{L} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ wird diese Abbildung zur Norm eines Skalarprodukts der euklidischen Struktur S. Im Fall des Richtungsraums $\vec{E}$ unserer euklidischen Ebene nennen wir $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\vec{E})$ die **Längengerade unserer euklidischen Ebene**.

5.2.1.3. Seien E eine euklidische Ebene und $\mathbb{L}$ ihre Längengerade. Wir setzen

$$\hat{E} := E \sqcup \{\infty\}$$

und nennen diese Menge die **erweiterte Ebene**. Eine Teilmenge $K \subset \hat{E}$ heißt ein **verallgemeinerter Kreis**, wenn sie entweder ein Kreis in E ist, also von der Gestalt

$$K = \mathrm{K}(c; r) := \{x \in E \mid \|x - c\| = r\}$$

für $c \in E$ und $r \in \mathbb{L}_{>0}$, oder eine affine Gerade g disjunkt vereinigt mit der einpunktigen Menge $\{\infty\}$. Im ersten Fall sprechen wir von einem **echten Kreis**. Im zweiten Fall sprechen wir von einer **erweiterten Gerade** und verwenden dafür die Notation $K = \hat{g} := g \sqcup \{\infty\}$.

5.2.1.4. Sei E eine euklidische Ebene. Jedem verallgemeinerten Kreis $K \subset \hat{E}$ ordnen wir eine Abbildung

$$s_K : \hat{E} \to \hat{E}$$

der erweiterten Ebene in sich selber zu, die wir die **Spiegelung an unserem Kreis** oder **Kreisspiegelung** oder auch **Inversion** nennen, und zwar die übliche orthogonale Spiegelung $E \to E$ an der Geraden mit der Zusatzregel $\infty \mapsto \infty$ im Fall, daß unser verallgemeinerter Kreis eine erweiterte Gerade $\hat{g}$ ist, und die **Inversion**

$$c + \vec{v} \quad \mapsto \quad c + (r/\|\vec{v}\|)^2 \vec{v} \quad \text{für } \vec{v} \neq 0$$

mit der Zusatzregel $c \mapsto \infty$ und $\infty \mapsto c$ im Fall eines echten Kreises $K = \mathrm{K}(c; r)$. Es ist leicht zu sehen, daß auch im Fall einer echten Kreises K Zentrum und Radius und damit auch die Kreisspiegelung s_K bereits durch die Teilmenge $K \subset E$ eindeutig festgelegt werden.

5.2.1.5. Offensichtlich gibt es für je zwei verschiedene Punkte einer erweiterten euklidischen Ebene eine Kreisspiegelung, die sie vertauscht.

5.2.1.6. Man beachte den fundamentalen Unterschied zwischen der hier betrachteten erweiterten Ebene $\hat{E} = E \sqcup \{\infty\}$ und der projektiven Vervollständigung $\mathbb{V}E$ von E aus 5.1.4.3, bei der eine ganze projektive Gerade aus unendlich fernen Punkten zu E mit hinzugenommen wird. Wir werden im weiteren Verlauf sehen, daß unsere erweiterte Ebene $\hat{E}$ hier vielmehr eine Variante der komplex-projektiven Gerade alias Riemann'schen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ ist.

Lemma 5.2.1.7 (**Kreisspiegelungen erhalten Kreise**). *Jede Kreisspiegelung auf einer erweiterten euklidischen Ebene macht verallgemeinerte Kreise zu verallgemeinerten Kreisen.*

Beweis. Das war bereits Übung 3.2.7.18. Es reicht, es für die Kreispiegelung am Einheitskreis im Fall $E = \mathbb{R}^2$ zu zeigen. Die Schnitte unserer verallgemeinerten Kreise mit $\mathbb{R}^2$ sind die Nullstellenmengen in $\mathbb{R}^2$ von Gleichungen der Gestalt

$$p\langle x, x\rangle - 2\langle x, v\rangle + q$$

für $v \in \mathbb{R}^2$ und $p, q \in \mathbb{R}$ mit $\langle v, v\rangle > pq$. Gegeben $x \neq 0$ gilt aber für $y := x/\langle x, x\rangle$ nach kurzer Rechnung

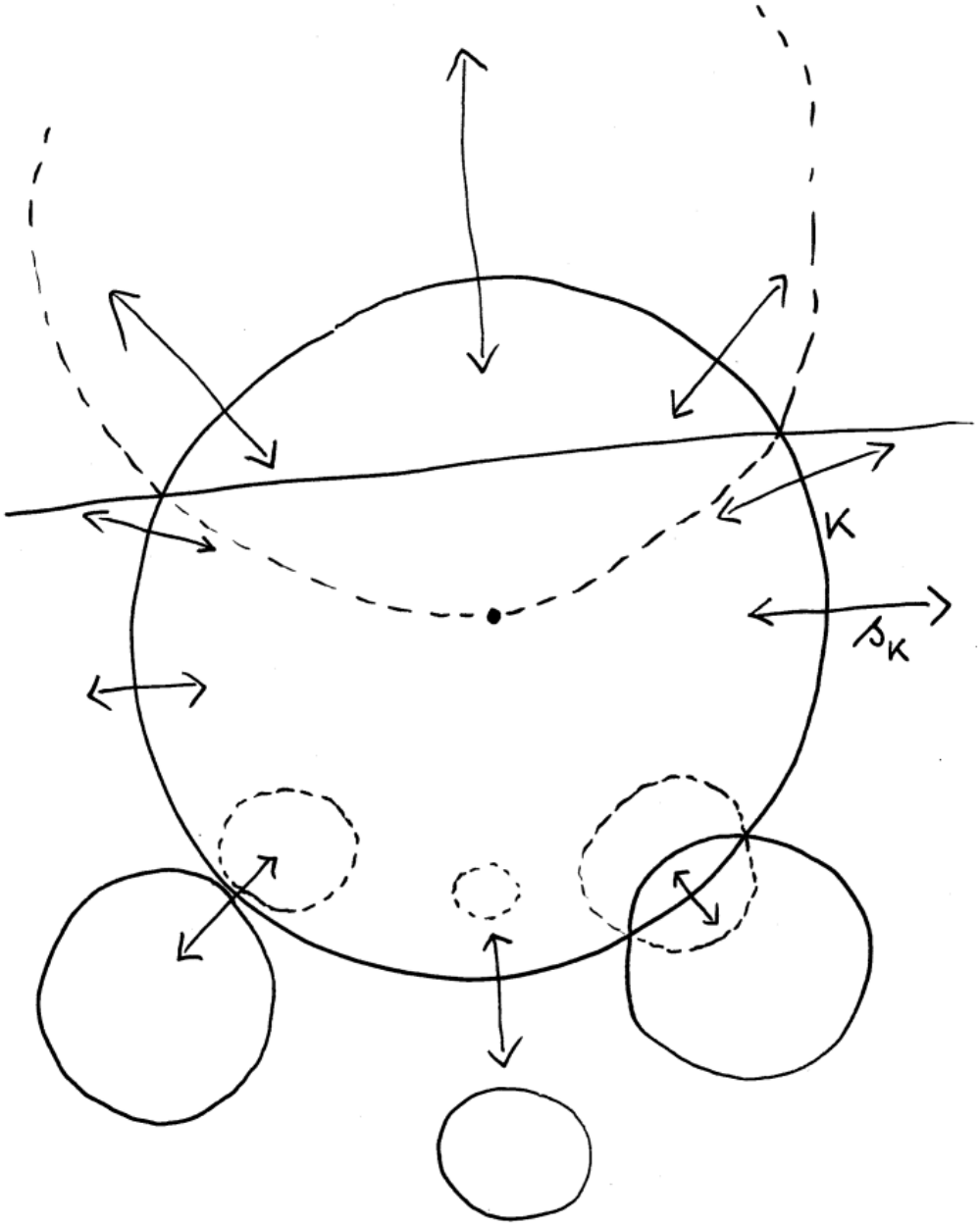
$$p\langle x, x\rangle - 2\langle x, v\rangle + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q\langle y, y\rangle - 2\langle y, v\rangle + p = 0$$

Daß das mit den Punkten 0 und ∞ auch paßt, prüft man leicht explizit. □

Beispiel 5.2.1.8. Eine Kreisspiegelung an einem echten Kreis macht jeden verallgemeinerten Kreis, der durch sein Zentrum geht, zu einem verallgemeinerten Kreis, der durch ∞ geht, mithin zu einer erweiterten Geraden.

5.2.1.9 (**Kreisspiegelungen mit Zirkel und Lineal**). Sei E eine euklidische Ebene. Gegeben ein Kreis K mit Zentrum c und ein Punkt $p \in E$ außerhalb unseres Kreises können wir sein Bild unter der Kreisspiegelung s_K mit Zirkel und Lineal konstruieren. Wir zeichnen dazu die Gerade $\overline{pc}$ durch p und c und den Kreis L durch p und c mit Zentrum auf $\overline{pc}$, so daß gilt $\{p, c\} = \overline{pc} \cap L$. Dann ist notwendig $s_K(L)$ die Gerade durch die beiden Punkte von $K \cap L$ und wir haben $\{s_K(p)\} = \overline{pc} \cap s_K(L)$. Indem wir diese Konstruktion umgekehren, erhalten wir auch eine Konstruktion für die Bildpunkte unter s_K von Punkten innerhalb unseres Kreises.

5.2.1.10. Sei E eine euklidische Ebene. Gegeben ein verallgemeinerter Kreis $K \subset \hat{E}$ zerfällt $E \backslash K$ in zwei Wegzusammenhangskomponenten. Nehmen wir im Fall



Eine Kreisspiegelung sowie einige verallemeinerte Kreise und ihre Bilder unter besagter Kreisspiegelung

$\infty \notin K$ zur unbeschränkten Komponente noch den Punkt ∞ hinzu, so erhalten wir für jeden verallgemeinerten Kreis $K \subset \hat{E}$ eine Partition

$$\hat{E} = K \sqcup K^b \sqcup K^u$$

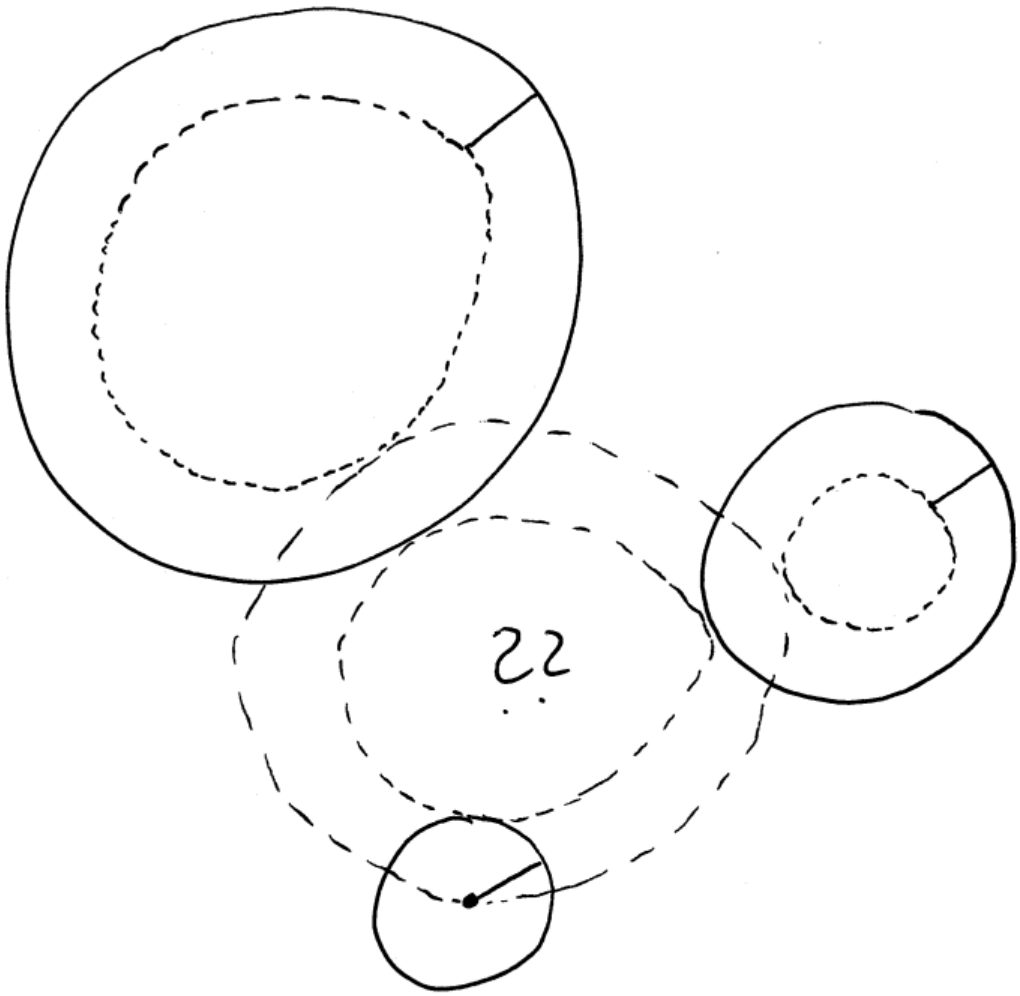
mit $s_K : K^b \xrightarrow{\sim} K^u$. Im Fall eines echten Kreises meint K^u die unbeschränkte Komponente zusammen mit dem Punkt ∞ und K^b die beschränkte Komponente. Ansonsten sei die Indizierung willkürlich gewählt. Es wäre natürlicher, für jeden verallgemeinerten Kreis $K \subset \hat{E}$ und jeden Punkt $p \in \hat{E} \backslash K$ gleich die disjunkte Zerlegung $\hat{E} = K \sqcup K^{\ni p} \sqcup K^{\not\ni p}$ einzuführen, aber so weit will ich hier nicht gehen.

5.2.1.11. Sei E eine euklidische Ebene. Gegeben verallgemeinerte Kreise $K, L \subset \hat{E}$ sind wir in genau einem der folgenden vier Fälle:

1. Es gilt $K \cap L = \emptyset$ und L ist entweder in K^u oder in K^b enthalten. Wir sagen, die Kreise sind **disjunkt**;
2. Es gilt $|K \cap L| = 1$ und L liegt entweder in $K \cup K^u$ oder in $K \cup K^b$. Wir sagen, die Kreise **berühren sich**;
3. Es gilt $|K \cap L| = 2$ und L trifft K, K^u und K^b. Wir sagen, die Kreise **schneiden sich transversal**;
4. Es gilt $K = L$. Wir sagen, die Kreise **sind gleich**.

Insbesondere ist klar, daß sich zwei verallgemeinerte Kreise genau dann berühren, wenn sich ihre Bilder unter einer beliebigen Kreisspiegelung berühren. Ich verzichte auf einen formalen Beweis der in der obigen Fallunterscheidung enthaltenen Behauptungen in der Erwartung, daß sich der Leser davon leicht selbst in der von ihm gewünschten Ausführlichkeit und Exaktheit wird überzeugen können.

5.2.1.12 (**Apollonisches Problem**). Es geht erst einmal ganz salopp gesprochen darum, Kreise zu konstruieren, die drei verschiedene vorgegebene Kreise berühren. Manchmal gibt es gar keine Lösung, wenn nämlich ein Kreis die beiden anderen trennt. Es kann bis zu acht Lösungen geben. Ich diskutiere nun beispielhaft den Fall, daß wir drei paarweise disjunkte echte Kreise vor uns haben, von denen keiner in einem anderen enthalten ist. Wir suchen einen verallgemeinerten Kreis, der sie alle berührt und so, daß sie alle in derselben Komponente seines Komplements liegen. Indem wir die Radien unserer drei vorgegebenen Kreise um den Radius des kleinsten schrumpfen, können wir uns auf den ausgearteten Fall zurückziehen, daß mindestens einer unserer drei Ausgangskreise ein Punkt ist. Indem wir eine Kreisspiegelung an einem Kreis mit Zentrum in diesem besagten Punkt durchführen, wird der gesuchte Kreis eine zu suchende Gerade und wir können uns weiter auf das Problem zurückziehen, gemeinsame Tangenten an zwei vorgegebene Kreise zu finden. Das aber ist nun nicht mehr weiter schwierig.



Kreisschrumpfung zur Lösung des Appollonischen Problems

5.2.2 Möbiustransformationen

5.2.2.1. Sei E eine euklidische Ebene. Wir erinnern an ihre Vervollständigung $\hat{E} := E \sqcup \{\infty\}$ und an verallgemeinerte Kreise $K \subset \hat{E}$ und an die Spiegelung an einem verallgemeinerten Kreis $s_K : \hat{E} \to \hat{E}$. Eine Verknüpfung von Spiegelungen an verallgemeinerten Kreisen heißt eine **Möbiustransformation**. Die Möbiustransformationen bilden eine Untergruppe

$$\mathrm{Möb} = \mathrm{Möb}(\hat{E}) \subset \mathrm{Ens}^\times(\hat{E})$$

der Gruppe der Permutationen der erweiterten Ebene $\hat{E} = E \sqcup \{\infty\}$. Alle Möbiustransformationen machen nach 5.2.1.7 verallgemeinerte Kreise zu verallgemeinerten Kreisen.

Satz 5.2.2.2 (**Möbiustransformationen, die den Punkt ∞ festhalten**). *Sei E eine euklidische Ebene. Die Möbiustransformationen von $\hat{E}$, die den Punkt ∞ festhalten, sind genau alle Fortsetzungen durch $\infty \mapsto \infty$ von Ähnlichkeiten von E.*

5.2.2.3. Der folgende Beweis zeigt allgemeiner für eine euklidische Ebene E, daß jede bijektive Selbstabbildung von $\hat{E}$ mit Fixpunkt ∞, die verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreisen überführt, eine Fortsetzung durch $\infty \mapsto \infty$ einer Ähnlichkeit von E sein muß. Insbesondere sind mit 5.2.1.5 alle bijektiven Selbstabbildungen von $\hat{E}$, die verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreise überführen, bereits Möbiustransformationen.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $E = \mathbb{R}^2$. Alle Ähnlichkeiten von $\mathbb{R}^2$ liefern, wenn man sie durch die Vorschrift $\infty \mapsto \infty$ fortsetzt, Möbiustransformationen. In der Tat erhält man alle Kongruenzen durch sukzessive Spiegelungen an Geraden und alle Streckungen mit positivem Streckfaktor als Verknüpfung der Kreisspiegelungen an zwei konzentrischen echten Kreisen. Sei nun umgekehrt φ eine Möbiustransformation mit $\varphi(\infty) = \infty$. So überführt die induzierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \tilde{\to} \mathbb{R}^2$ Geraden in Geraden und ist damit nach 3.3.3.1 schon einmal affin. Wir finden andererseits eine Ähnlichkeit $\psi : \mathbb{R}^2 \tilde{\to} \mathbb{R}^2$ derart, daß $\psi\varphi$ sowohl $(0,0)$ als auch $(1,0)$ festhält. Da dann $\psi\varphi$ affin ist und $(0,0)$ festhält, muß $\psi\varphi$ linear sein. Da $\psi\varphi$ außerdem $(1,0)$ festhält und echte Kreise in echte Kreise überführt, muß $\psi\varphi$ Längen von Vektoren erhalten und ist damit eine orthogonale Abbildung, genauer die Identität oder die Spiegelung an der x-Achse. Also ist auch φ eine Ähnlichkeit. $\square$

Lemma 5.2.2.4. *Je zwei verallgemeinerte Kreise können durch eine Möbiustransformation ineinander überführt werden.*

Beweis. Je zwei erweiterte Geraden können offensichtlich ineinander überführt werden, und jeder echte Kreis kann in eine erweiterte Gerade überführt werden durch eine Kreisspiegelung an einem echten Kreis mit Zentrum auf unserem echten Kreis. □

Proposition 5.2.2.5 (**Charakterisierung von Kreispiegelungen**). *Jede Möbiustransformation, die einen vorgegebenen verallgemeinerten Kreis K punktweise festhält, ist die Kreisspiegelung s_K an besagtem Kreis oder die Identität.*

Beweis. Da sich nach 5.2.2.4 je zwei verallgemeinerte Kreise durch eine Möbiustransformation ineinander überführen lassen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, unser K sei eine erweiterte Gerade. Nach 5.2.2.2 müssen wir also nur zeigen, daß alle Ähnlichkeiten, die eine erweiterte Gerade punktweise festhalten, entweder die Identität oder die Spiegelung an besagter Gerade sind. Das ist aber klar. □

Korollar 5.2.2.6. *Gegeben eine Möbiustransformation φ und ein verallgemeinerter Kreis K gilt $\varphi s_K \varphi^{-1} = s_{\varphi(K)}$.*

Beweis. Beide Seiten sind Möbiustransformationen, die nicht die Identität sind und den verallgemeinerten Kreis $\varphi(K)$ punktweise festhalten. Das Korollar folgt so aus der Charakterisierung von Kreispiegelungen 5.2.2.5. □

Korollar 5.2.2.7. *Gegeben eine Möbiustransformation φ und ein verallgemeinerter Kreis K ist $\varphi(K) = K$ gleichbedeutend zu $\varphi s_K = s_K \varphi$.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Korollar 5.2.2.6. □

Definition 5.2.2.8. Sei E eine euklidische Ebene. Gegeben verallgemeinerte Kreise $K, L \subset \hat{E}$ sagen wir, K **stehe senkrecht auf** L und schreiben $K \perp L$, wenn gilt $K \neq L$ und $s_K s_L = s_L s_K$.

5.2.2.9 (**Bezug zur Anschauung**). Nach 5.2.2.7 ist $s_K s_L = s_L s_K$ gleichbedeutend zur Bedingung $s_K(L) = L$, die vielleicht besser unserem anschaulichen Begriff von Senkrechtstehen entspricht, die aber weniger symmetrisch ist.

5.2.2.10 (**Bezug zur Differentialgeometrie**). Wenn Sie etwa aus 12.3.2.6 wissen, welche Teilmengen $M \subset E$ „eindimensionale $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltigkeiten“ heißen, und etwa aus 12.6.5.2, wie für jeden Punkt $p \in M$ solch einer Untermannigfaltigkeit der „Tangentialraum“ $\mathrm{T}_p M \subset \vec{E}$ erklärt wird, so werden Sie unschwer erkennen, daß die Schnitte unserer verallgemeinerten Kreise mit E eindimensionale $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltigkeiten sind und daß zwei verallgemeinerte Kreise K, L genau dann aufeinander senkrecht stehen im Sinne der obigen Definition, wenn sie mindestens einen Schnittpunkt in E haben und wenn für jeden Punkt $p \in K \cap L$ mit $p \neq \infty$ gilt $\mathrm{T}_p K \perp \mathrm{T}_p L$.

Proposition 5.2.2.11. *Sei E eine euklidische Ebene. Sind $K, L \subset \hat{E}$ verallgemeinerte Kreise mit $K \perp L$ und ist φ eine Möbiustransformation, so gilt auch $\varphi(K) \perp \varphi(L)$.*

Vorschau 5.2.2.12. Wenn Sie bereits etwas mit den Anfängen der Funktionentheorie vertraut sind, mag Ihnen bekannt sein, daß alle biholomorphen Abbildungen „winkeltreu“ sind. Mit den Resultaten des folgenden Abschnitts oder Grundkenntnissen in Differentialgeometrie folgt leicht, daß auch alle Möbiustransformationen „winkeltreu“ sind. Ich will aber an dieser Stelle nicht diskutieren, was das nun ganz genau bedeuten soll.

Beweis. Kommutieren die Kreisspiegelungen s_K und s_L, so gilt dasselbe für die Kreisspiegelungen $s_{\varphi(K)} = \varphi s_K \varphi^{-1}$ und $s_{\varphi(L)} = \varphi s_L \varphi^{-1}$. □

5.2.2.13. Gegeben zwei disjunkte verallgemeinerte Kreise K, L verstehen wir unter einer **geschlossenen Kreiskette zwischen K und L** eine Familie

$$M_1, \ldots, M_n$$

von verallgemeinerten Kreisen, die alle K und L berühren und so, daß M_i und M_{i+1} sich für $i = 1, \ldots, n-1$ jeweils auch untereinander berühren und daß M_n auch M_1 berührt, daß aber M_i und M_j sonst disjunkt sind.

Satz 5.2.2.14 (Kreiskettensatz von Steiner). *Seien zwei disjunkte Kreise gegeben. Gehört ein Kreis, der sie beide berührt, zu einer geschlossenen Kreiskette zwischen unseren beiden disjunkten Kreisen, so gehört jeder Kreis, der sie beide berührt, zu einer geschlossenen Kreiskette zwischen unseren beiden disjunkten Kreisen.*

5.2.2.15. In diesem Satz und seinem Beweis sind Kreise, wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, stets im verallgemeinerten Sinne zu verstehen. Wenn man den Satz auf den Fall von zwei echten Kreisen K, L spezialisiert, von denen einer im anderen liegt, in Formeln $L \subset K^b$, so muß man das noch nicht einmal dazusagen.

Beweis. Für zwei disjunkte konzentrische echte Kreise ist das klar. Für zwei beliebige disjunkte Kreise gilt es offensichtlich genau dann, wenn es für ihre Bilder unter irgendeiner Möbiustransformation gilt. Es reicht also zu zeigen, daß wir für je zwei disjunkte Kreise eine Möbiustransformation finden, die sie in konzentrische echte Kreise überführt. Das schließlich leistet das folgende Lemma 5.2.2.16. □

Lemma 5.2.2.16. *Zu je zwei disjunkten verallgemeinerten Kreisen K, L finden wir eine Möbiustransformation, die sie in konzentrische echte Kreise überführt.*

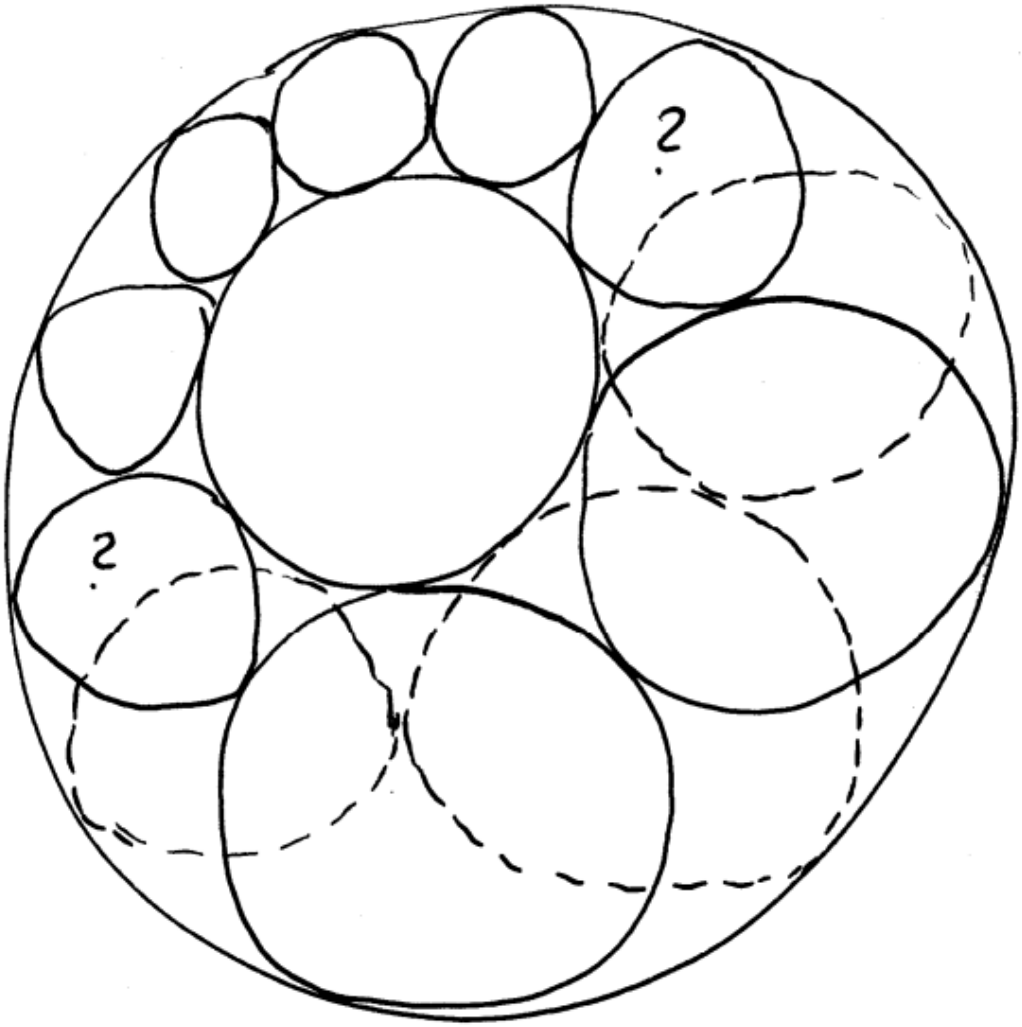


Illustration zum Kreiskettensatz. Da sich die durchgezogen eingezeichnete Kreiskette schließt, muß sich auch die nur teilweise und gestrichelt eingezeichnete Kreiskette schließen und muß dann ebenfalls aus acht Kreisen bestehen.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß L eine erweiterte Gerade ist. Dann ist notwendig K ein echter Kreis. Nun finden wir sicher eine erweiterte Gerade A mit $A \perp L$ durch das Zentrum von K, also mit $A \perp K$. Außerdem finden wir mit elementaren Konstruktionen einen echten Kreis B mit Zentrum in $A \cap L$, der auf K senkrecht steht. Für jede Inversion s an einem Punkt von $A \cap B$ sind dann $s(A)$ und $s(B)$ aufeinander senkrechte erweiterte Geraden, die beide auf $s(K)$ und $s(L)$ senkrecht stehen. Damit aber sind $s(K)$ und $s(L)$ konzentrische echte Kreise. □

Übungen

5.2.2.17. Die folgenden vier Übungen 5.2.2.18, 5.2.2.19, 5.2.2.20 und 5.2.2.21 werden wir bei unserer Konstruktion 5.2.4.5 einer nichteuklidischen Ebene benötigen.

Übung 5.2.2.18. Gegeben ein verallgemeinerter Kreis L und zwei Punkte p, q gibt es stets einen verallgemeinerten Kreis K, der durch unsere beiden Punkte geht und auf L senkrecht steht. Unter der Annahme $p \neq q, s_L(q)$ ist K eindeutig bestimmt.

Übung 5.2.2.19. Gegeben zwei verallgemeinerte Kreise $K \perp L$ und zwei Punkte $p, q \in L \backslash K$ gibt es stets eine Möbiustransformation, die unsere beiden verallgemeinerten Kreise stabilisiert und den einen Punkt auf den anderen abbildet.

Übung 5.2.2.20. Gegeben zwei verallgemeinerte Kreise, die beide auf einem Dritten senkrecht stehen, gibt es stets eine Möbiustransformation, die den Dritten stabilisiert und den Ersten auf den Zweiten abbildet.

Übung 5.2.2.21. Es gibt genau zwei Möbiustransformationen von $\mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$, die sowohl die erweiterte x-Achse als auch das Stück $\{(0, y) \mid 0 < y \leq 1\}$ der y-Achse stabilisieren.

5.2.3 Möbiusgeometrie und komplexe Zahlen

5.2.3.1. Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ von komplexen Vektorräumen heißt **schieflinear**, wenn sie ein Homomorphismus der zugrundeliegenden additiven Gruppen ist und wenn zusätzlich für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in V$ gilt

$$\varphi(\lambda v) = \bar{\lambda}\varphi(v)$$

5.2.3.2 (**Projektivisierte schieflineare Automorphismen**). Bezeichne $\gamma : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ die schieflineare Abbildung $\gamma : (w, z) \mapsto (\bar{w}, \bar{z})$. Die Gruppe

$$\mathrm{GL}(2; \mathbb{C})\langle\gamma\rangle := \mathrm{GL}(2; \mathbb{C}) \sqcup \mathrm{GL}(2; \mathbb{C})\gamma \ \subset \mathrm{Ens}^{\times}(\mathbb{C}^2)$$

aller linearen oder schieflinearen Automorphismen des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}^2$ operiert offensichtlich auf der Menge $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ aller Ursprungsgeraden in $\mathbb{C}^2$ und wir erhalten in Formeln einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})\langle\gamma\rangle \to \mathrm{Ens}^\times(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$$

Unter der Bijektion $\hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit $z \mapsto \langle 1, z\rangle$ und $\infty \mapsto \langle 0, 1\rangle$ wird daraus ein Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})\langle\gamma\rangle \to \mathrm{Ens}^\times(\hat{\mathbb{C}})$$

Man sieht leicht ein, daß unter unserer Operation die Untergruppe $\mathrm{GL}(2;\mathbb{R})\langle\gamma\rangle$ die erweiterte Gerade $\hat{\mathbb{R}} \subset \hat{\mathbb{C}}$ stabilisiert. Unser γ wird zur Spiegelung an der erweiterten Gerade $\hat{\mathbb{R}}$ und eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ liefert die Abbildung $\hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{C}}$ mit $z \mapsto (c+dz)/(a+bz)$ falls $z \neq \infty$ und $a + bz \neq 0$ sowie gewissen Sonderregeln an den verbleibenden Stellen.

Satz 5.2.3.3 (**Möbiustransformationen und Projektivitäten**). *Der in 5.2.3.2 konstruierte Gruppenhomomorphismus* $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})\langle\gamma\rangle \to \mathrm{Ens}^\times(\hat{\mathbb{C}})$ *induziert einen surjektiven Gruppenhomomorphismus*

$$\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})\langle\gamma\rangle \twoheadrightarrow \mathrm{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$$

auf die Gruppe der Möbiustransformationen. Der Kern dieses Homomorphismus ist die Gruppe $\mathbb{C}^\times\mathrm{I}$ *aller von Null verschiedenen skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß unser Gruppenhomomorphismus in der Gruppe der Möbiustransformationen landet. Es reicht zu zeigen, daß er irgendwelche Erzeuger unserer Gruppe $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})\langle\gamma\rangle$ auf Möbiustransformationen abbildet. Erzeuger sind etwa die Elementarmatrizen sowie γ oder auch die Matrizen $\mathrm{diag}(\lambda,\mu)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sowie γ. Von den letzteren Erzeugern geht $\mathrm{diag}(\lambda,\mu)$ auf eine Drehstreckung und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ auf die Translation $z \mapsto z+1$, beide erweitert um $\infty \mapsto \infty$, die nach 5.2.2.2 beide Möbiustransformationen sind. Weiter geht $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ auf die Abbildung $z \mapsto z^{-1}$ alias die Kreispiegelung am Einheitskreis gefolgt von der Spiegelung an der erweiterten Gerade $\hat{\mathbb{R}} \subset \hat{\mathbb{C}}$, also auch auf eine Möbiustransformation. Und schließlich geht γ auf die Spiegelung an der erweiterten Gerade $\hat{\mathbb{R}} \subset \hat{\mathbb{C}}$ und wir sehen so, daß unser Gruppenhomomorphismus in der Tat in $\mathrm{Möb}(\mathbb{C})$ landet. Um zu sehen, daß er surjektiv ist, bemerken wir, daß in seinem Bild die Inversion am Einheitskreis liegt sowie alle Streckungen und Translationen, mithin alle Inversionen an echten Kreisen. Weiter bemerken wir, daß in seinem Bild die Spiegelung an einer erweiterten Geraden liegt sowie alle Drehungen um den Ursprung und alle Translationen, mithin alle Spiegelungen an erweiterten

Geraden. Folglich ist unser Gruppenhomomorphismus surjektiv. Es bleibt, den Kern zu betimmen. Nun kann ein schieflinearer Automorphismus φ von $\mathbb{C}^2$ nicht alle Geraden stabilisieren, denn aus $\varphi(1,0) = (\lambda, 0)$ und $\varphi(0,1) = (0,\mu)$ folgt $\varphi(1,1) = (\lambda,\mu)$, also $\lambda = \mu$ und dann $\varphi(\mathrm{i},1) = \lambda(-\mathrm{i},1)$ und das zeigt, daß die Gerade mit Richtungsvektor $(\mathrm{i},1)$ nicht stabilisiert wird, wenn die Geraden mit den Richtungsvektor $(1,0)$, $(0,1)$ und $(1,1)$ stabilisiert werden. Im Kern können also nur lineare Automorphismen liegen, und von denen wissen wir bereits aus 5.1.5.8, daß genau die skalaren Matrizen als die Identität auf der projektiven Gerade operieren. □

5.2.3.4. Sei E eine euklidische Ebene. Jede Möbiustransformation $\varphi : \hat{E} \to \hat{E}$ induziert eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : E\backslash\{\varphi^{-1}(\infty)\} \to E$ und die Funktionaldeterminante dieser Abbildung hat keine Nullstelle. Sie ist also entweder an jeder Stelle positiv oder an jeder Stelle negativ. Es ist klar, daß wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Möb}(\hat{E}) \twoheadrightarrow \{+1,-1\}$$

erhalten, indem wir jeder Möbiustransformation das Vorzeichen dieser Funktionaldeterminante zuordnen. Dessen Kern bezeichnen wir mit $\mathrm{Möb}^+(\hat{E})$ und nennen seine Elemente **orientierungserhaltende Möbiustranformationen**. Das Komplement des Kerns bezeichnen wir mit $\mathrm{Möb}^-(\hat{E})$ und nennen seine Elemente **orientierungsumkehrende Möbiustranformationen**. Natürlich haben wir dann eine Zerlegung

$$\mathrm{Möb}(\hat{E}) = \mathrm{Möb}^+(\hat{E}) \sqcup \mathrm{Möb}^-(\hat{E})$$

Alle Kreisspiegelungen sind orientierungsumkehrende Möbiustranformationen. Man prüft leicht, daß unser Gruppenhomomorphismus aus Satz 5.2.3.3 einen Isomorphismus

$$\mathrm{PGL}(2;\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$$

der projektiven Gruppe mit der Gruppe der orientierungserhaltenden Möbiustranformationen induziert. Salopp gesprochen sind also die orientierungserhaltenden Möbiustransformationen das Analogon im komplex-eindimensionalen Fall unserer Fototransformationen 5.1.5.4 im reell-zweidimensionalen Fall, wo wir einen Isomorphismus $\mathrm{PGL}(3;\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} F$ angegeben hatten.

Übungen

Übung 5.2.3.5 (**Stabilisator von $\mathbb{P}^1\mathbb{R} \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ in den Möbiustransformationen**). Bezeichne $\hat{\mathbb{R}} \subset \hat{\mathbb{C}}$ die durch $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ bestimmte erweiterte Gerade in der erweiterten euklidischen Ebene zu $\mathbb{C}$ und $\mathrm{Möb}_{\hat{\mathbb{R}}}(\hat{\mathbb{C}}) \subset \mathrm{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ die Gruppe aller Möbiustransformationen, die diese erweiterte Gerade stabilisieren. Man zeige,

daß unser Gruppenhomomorphismus $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})\langle\gamma\rangle \twoheadrightarrow \mathrm{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ aus 5.2.3.3 einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{GL}(2;\mathbb{R})\langle\gamma\rangle \twoheadrightarrow \mathrm{Möb}_{\hat{\mathbb{R}}}(\hat{\mathbb{C}})$$

mit Kern $\mathbb{R}^\times\mathrm{I}$ induziert. Hinweis: Nach 5.2.2.7 besteht das Bild aus denjenigen Möbiustransformationen, die mit dem Bild von γ kommutieren.

5.2.3.6. Im folgenden bezeichnet $\mathbb{H}$ nicht den Schiefkörper der Quaternionen, sondern die offene obere Halbebene in der komplexen Zahlenebene. Ich hoffe, der Leser kann aus dem Kontext erschließen, was jeweils gemeint ist.

Übung 5.2.3.7 (**Stabilisator einer Hemisphäre der Zahlenkugel**). Bezeichne $\mathbb{H} := \{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \mid y > 0\} \subset \mathbb{C}$ die durch die reelle Achse begrenzte offene obere Halbebene und $\mathrm{Möb}_{\mathbb{H}}(\hat{\mathbb{C}})$ die Gruppe aller Möbiustransformationen, die diese offene Halbebene stabilisieren. Wir setzen $\tau := \mathrm{diag}(1,-1)$. Man zeige, daß unser surjektiver Gruppenhomomorphismus $\mathrm{GL}(2;\mathbb{R})\langle\gamma\rangle \twoheadrightarrow \mathrm{Möb}_{\hat{\mathbb{R}}}(\hat{\mathbb{C}})$ aus 5.2.3.5 einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})\langle\tau\gamma\rangle \twoheadrightarrow \mathrm{Möb}_{\mathbb{H}}(\hat{\mathbb{C}})$$

mit Kern $\pm\,\mathrm{I}$ induziert, wobei das Bild von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ gerade $\mathrm{Möb}_{\mathbb{H}}(\hat{\mathbb{C}}) \cap \mathrm{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$ ist und $\tau\gamma$ der Spiegelung an der imaginären Achse $\mathbb{R}\mathrm{i}$ entspricht. Explizit wird diese Operation von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})\langle\tau\gamma\rangle$ auf $\mathbb{H}$ gegeben durch die Formeln

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{c+dz}{a+bz} \qquad \text{und} \qquad (\tau\gamma)z = -\bar{z}.$$

Übung 5.2.3.8 (**Die Hemisphäre als homogener Raum**). Man zeige, daß die in 5.2.3.7 konstruierte Operation von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$ transitiv ist und daß $\mathrm{SO}(2)$ die Standgruppe von i ist. Unsere Operation induziert mithin eine Bijektion

$$\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\,\mathrm{SO}(2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$$

A forteriori induziert die in 5.2.3.7 konstruierte Operation von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})\langle\tau\gamma\rangle$ auf $\mathbb{H}$ eine Bijektion $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})\langle\tau\gamma\rangle/\,\mathrm{SO}(2)\langle\tau\gamma\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$ und die Fixpunktmenge von $\tau\gamma$ ist die offene halbe imaginäre Achse $\mathbb{H}^{\tau\gamma} = \mathrm{i}\mathbb{R}_{>0}$. Im übrigen induziert die Operation von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ auf $\mathrm{i} \in \mathbb{H}$ eine Bijektion der Untergruppe $\{\mathrm{diag}(\lambda,\lambda^{-1}) \mid \lambda \in \mathbb{R}_{>0}\}$ mit unserer Fixpunktmenge $\mathbb{H}^{\tau\gamma}$.

5.2.4 Die hyperbolische Ebene

5.2.4.1. Über zweitausend Jahre lang wurde die Geometrie nach einem axiomatischen Aufbau gelehrt, den Euklid in seinen „Elementen“ niedergelegt hat. Dieses

Buch war auch ein Modell für den axiomatischen Aufbau einer Theorie überhaupt und spielte damit eine zentrale Rolle beim Aufbau der modernen Mathematik. Als Grundlage für die heutige Mathematik reichen jedoch Euklid's Definitionen wie etwa „Ein Punkt ist, was keine Teile hat“ oder „Eine Linie ist eine breitenlose Länge“ nicht mehr aus. Stattdessen bauen wir die heutige Mathematik seit Cantor auf den Begriffen der Mengenlehre auf. Natürlich sind die Grundbegriffe der naiven Mengenlehre ähnlich vage, aber hier existiert mittlerweile in der Logik ein solider Unterbau, auf den man sich im Notfall stützen kann. Eine Formalisierung der Ebene des Euklid im Rahmen der Mengenlehre sind unsere fasteuklidischen Ebenen mit Parallelenaxiom aus 5.1.1.17. Wir haben dort auch gezeigt, daß und wie die Strukturen auf einer Menge X als fasteuklidische Ebene mit Parallelenaxiom eineindeutig den Strukturen auf derselben Menge X als euklidische Ebene im Sinne der linearen Algebra 4.1.5.1 entsprechen.

5.2.4.2. Über Jahrhunderte ist versucht worden, das Parallelenaxiom aus den anderen Axiomen von Euklid herzuleiten, bis man im 19.-ten Jahrhundert Geometrien fand, die alle Axiome von Euklid mit Ausnahme des Parallelenaxioms erfüllen. Sie heißen die **nichteuklidischen Geometrien**. Wir geben nun eine unserer Axiomatik angepaßte Präzisierung für die Behauptung der Existenz nichteuklidischer Geometrien.

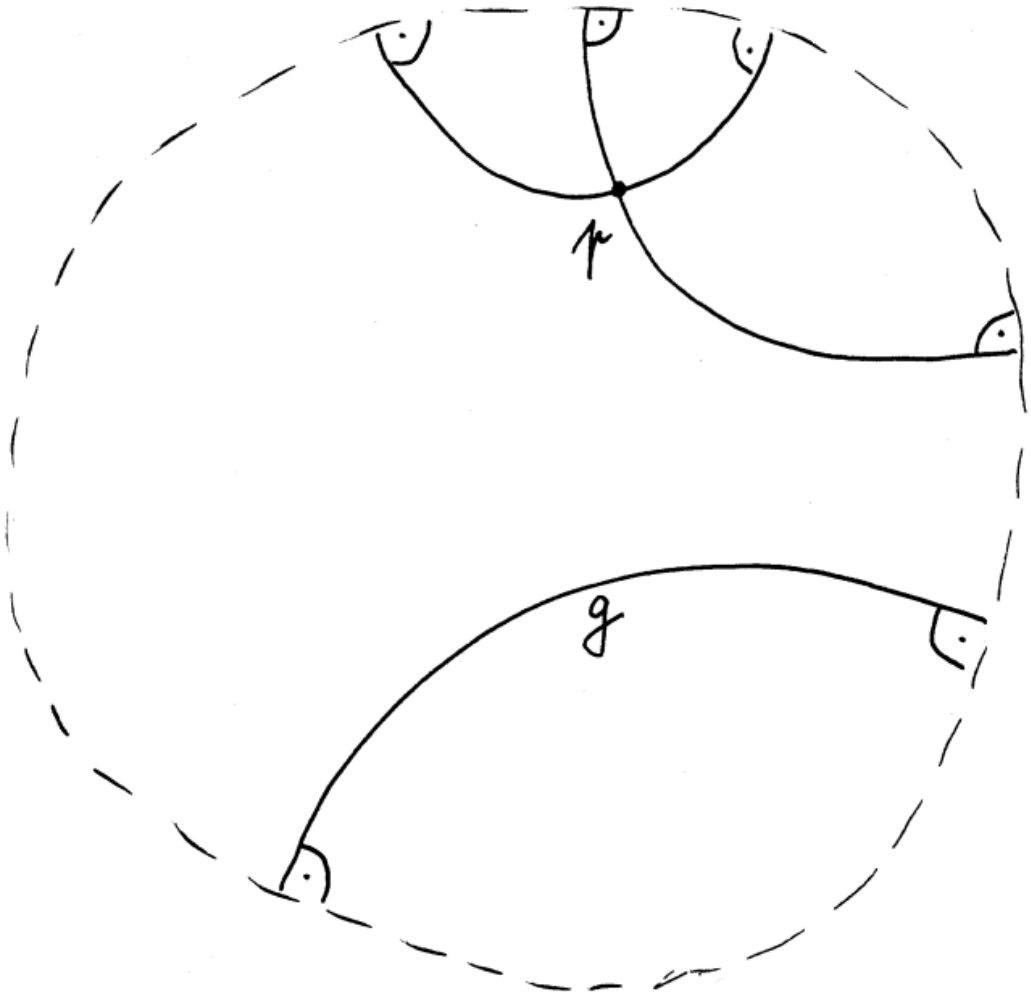
Satz 5.2.4.3 (**Nichteuklidische Geometrien**). *Es gibt fasteuklidische Geometrien, in denen das Parallelenaxiom nicht gilt.*

5.2.4.4. Der Beweis besteht in der Konstruktion eines Beispiels, ja einer ganzen Klasse von paarweise isomorphen Beispielen, die unter dem Oberbegriff der **hyperbolischen Ebene** zusammengefaßt werden. Für den Beweis unseres Satzes reicht natürlich eines dieser Beispiele bereits aus. Die anderen Beispiele aber helfen, diese Struktur besser zu verstehen.

5.2.4.5 (**Kreisscheibenmodell der hyperbolischen Ebene**). Als Punktmenge X nehmen wir alle Punkte der offenen Einheitskreisscheibe

$$X := \{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

Als Geraden nehmen wir alle Schnitte mit der offenen Einheitskreisscheibe von solchen verallgemeinerten Kreisen alias gewöhnlichen Kreisen oder Geraden, die auf dem Einheitskreis senkrecht stehen. Nach 5.2.2.18 ist das eine Inzidenzgeometrie. Als Zwischenrelation nehmen wir die Offensichtliche und verzichten auf das formale Prüfen der Eigenschaften, das keine wesentlichen Schwierigkeiten aufwirft und dem Leser leicht selbst gelingen wird. Als Gruppe K von Kongruenzen schließlich nehmen wir die Gruppe aller Möbiustransformationen, die die offene Einheitskreisscheibe in sich selber überführen. Mit den Übungen 5.2.2.19



Kreisscheibe von Poincaré mit einer Gerade g und einem Punkt p außerhalb dieser Gerade und zwei verschiedenen Parallelen zu g durch den Punkt p

und 5.2.2.20 und 5.2.2.21 sieht man leicht, daß es für je zwei Halbgeraden A, B in X genau zwei Transformationen $h, k \in K$ gibt mit $h(A) = k(A) = B$. Daß es in dieser Inzidenzgeometrie durch einen Punkt außerhalb einer Geraden mehr als eine Parallele zu besagter Geraden gibt, ist offensichtlich. Dieses Modell der hyperbolischen Ebene heißt die **Kreisscheibe von Poincaré**.

5.2.4.6 (**Halbebenenmodell der hyperbolischen Ebene**). Die offene Einheitskreisscheibe können wir mithilfe einer Möbiustransformation bijektiv mit der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ identifizieren. Unter einer und jeder solchen Identifikation entsprechen die Möbiustransformationen den Möbiustransformationen. Weiter entsprechen die verallgemeinerten Kreise, die senkrecht auf dem Einheitskreis stehen, den verallgemeinerten Kreisen, die senkrecht auf der erweiterten reellen Achse stehen. Wir erhalten so ein weiteres Modell derselben Struktur, die **obere Halbebene von Poincaré**

$$X = \mathbb{H}$$

Im Bild der Kreisscheibe sind die durch Rotation gegebenen Automorphismen besonders gut zu sehen, im Bild der oberen Halbebene die durch Translation in Richtung der reellen Achse gegebenen Automorphismen. Für die Kongruenzgruppe K liefert 5.2.3.7 in diesem Modell einen Gruppenisomorphismus $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} K^+$ mit den Notationen $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R}) := \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\pm\mathrm{I}$ und $K^+ := K \cap \mathrm{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$.

5.2.4.7 (**Gruppentheoretisches Modell der hyperbolischen Ebene**). Das Modell der oberen Halbebene führt mit unseren Bijektionen aus 5.2.3.8 zum **gruppentheoretischen Modell** als die Nebenklassenmenge

$$X := \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\,\mathrm{SO}(2)$$

oder äquivalent $X := \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})\langle\tau\gamma\rangle/\,\mathrm{SO}(2)\langle\tau\gamma\rangle$. In diesem Modell ist unsere Kongruenzgruppe K das Bild des durch Linksmultiplikation gegebenen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})\langle\tau\gamma\rangle \to \mathrm{Ens}^\times(X)$. Eine erste Gerade ist die Fixpunktmenge $X^{\tau\gamma}$, die anderen Geraden sind die Bilder dieser Gerade unter K. In diesem Modell sind alle Automorphismen gut zu sehen, aber die Struktur als Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation ist weniger offensichtlich und ich kann sie von unserem Kenntnisstand aus nur über die Isomorphie mit den anderen Modellen begründen.

5.2.4.8 (**Hyperboloidmodell der hyperbolischen Ebene**). Die Gruppe $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ operiert durch Konjugation auf dem reellen Vektorraum $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{R})$ aller reellen (2×2)-Matrizen mit Spur Null. Man prüft unschwer, daß die Standgruppe von $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gerade $\mathrm{SO}(2)$ ist und die Bahn dieses Elements unter $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ die Menge aller spurlosen Matrizen A der Gestalt $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right)$ mit $\mathrm{tr}(A^2) = 2(a^2 + bc) = -2$ und $b > 0$. Diese Bahn ist also ein Hyperboloid und ebenfalls in Bijektion zu

$\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$. Daher mag auch die Bezeichnung als **hyperbolische Ebene** rühren. In Hyperboloidmodell kann man die Inzidenzstruktur gut sehen, die Geraden sind in diesem Fall genau alle nichtleeren Schnitte von zweidimensionalen Untervektorräumen von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{R})$ mit unserem Hyperboloid. Das Hyperboloidmodell ist jedoch schwer zu zeichnen, da es sich um eine Fläche im dreidimensionalen Raum handelt. Führen wir neue Koordinaten ein durch $a = x$, $b = y + z$ und $c = y - z$, so wird unser Hyperboloid gegeben durch die Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ und die Zusatzbedingung $z > 0$, wir haben also in Formeln

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}$$

Diese Definition verallgemeinern wir in **??** zur Definition des „n-dimensionalen hyperbolischen Raums“, einer speziellen „riemannschen Mannigfaltigkeit“.

5.2.4.9 (**Klein'sches Modell der hyperbolischen Ebene**). Es ist klar, daß die Zentralprojektion mit Augpunkt im Ursprung auf die affine Ebene $\{(x, y, 1)\}$ unser Hyperboloid bijektiv mit der offenen Kreisscheibe $\{(x, y, 1) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ identifiziert. Unter dieser Bijektion entsprechen die Geraden unserer Inzidenzstruktur den mehrpunktigen Schnitten von Geraden mit der besagten Kreisscheibe alias den „Sehnen“. Insbesondere ist dies Modell verschieden von der Kreisscheibe von Poincaré. Es heißt das **Klein'sche Modell** der hyperbolischen Ebene. In diesem Modell ist die Inzidenzstruktur mit Zwischenrelation besonders gut zu sehen, aber die meisten Kongruenzen sind eher schwer zu sehen.

5.2.5 Möbiusgeometrie in beliebigen Dimensionen

5.2.5.1 (**Spiegelungen an verallgemeinerten Sphären**). Sei E ein endlichdimensionaler euklidischer Raum mit Längengerade $\mathbb{L}$. Wir setzen $\hat{E} := E \sqcup \{\infty\}$. Eine Teilmenge

$$K \subset \hat{E}$$

heiße eine **verallgemeinerte Sphäre**, wenn sie entweder eine Sphäre in E ist, also $K = \mathrm{K}(c; r) := \{x \in E \mid \|x - c\| = r\}$ für $c \in E$ und $r \in \mathbb{L}_{>0}$, oder aber eine affine Hyperebene disjunkt vereinigt mit der einpunktigen Menge $\{\infty\}$. Im ersten Fall sprechen wir von einer **echten Sphäre**, im Zweiten von einer **erweiterten Hyperebene**. Die Bezeichnung K rührt von der alternativen Bezeichnung einer Sphäre als „Kugelschale“ her. Jeder verallgemeinerten Sphäre K ordnen wir eine Abbildung

$$s_K : \hat{E} \to \hat{E}$$

zu, die wir die **Spiegelung an unserer verallgemeinerten Sphäre** nennen, und zwar die übliche Spiegelung $E \to E$ mit der Zusatzregel $\infty \mapsto \infty$ im Fall, daß

unsere verallgemeinerte Sphäre eine Hyperebene ist, und die **Inversion**

$$y \mapsto c + \frac{r^2}{\|y-c\|^2}(y-c)$$

mit der Zusatzregel $c \mapsto \infty$ und $\infty \mapsto c$ im Fall einer echten Sphäre $K = \mathrm{K}(c;r)$. Die von Spiegelungen an verallgemeinerten Sphären erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Ens}^\times(\hat{E})$ heißt die **Möbiusgruppe** $\mathrm{Möb}(\hat{E})$ und ihre Elemente heißen **Möbiustransformationen**. Die von allen Verknüpfungen von zwei solchen Spiegelungen erzeugte Untergruppe heißt die Gruppe der **orientierungserhaltenden Möbiustransformationen**. Sie besteht genau aus denjenigen Möbiustransformationen, deren Differential 12.1.3.1 an jeder Stelle von E, die nicht gerade nach ∞ abgebildet wird, die Orientierung erhält.

5.2.5.2 (**Möbiustransformationen erhalten verallgemeinerte Sphären**). Möbiustransformationen überführen verallgemeinerte Sphären stets in verallgemeinerte Sphären. Man erkennt das, indem man die Argumentation aus 5.2.1.7 wiederholt. Andererseits zeigt man wie in 5.2.2.4 auch in beliebiger Dimension leicht, daß sich je zwei verallgemeinerte Sphären durch eine Möbiustransformation ineinander überführen lassen.

5.2.5.3 (**Identifikation der erweiterten Ebene mit einer Sphäre**). Gegeben ein euklidischer Raum mit einer Hyperebene $E \supset H$ induziert die Inversion an jeder echten Sphäre $K \subset E$, deren Mittelpunkt nicht auf H liegt, eine Bijektion

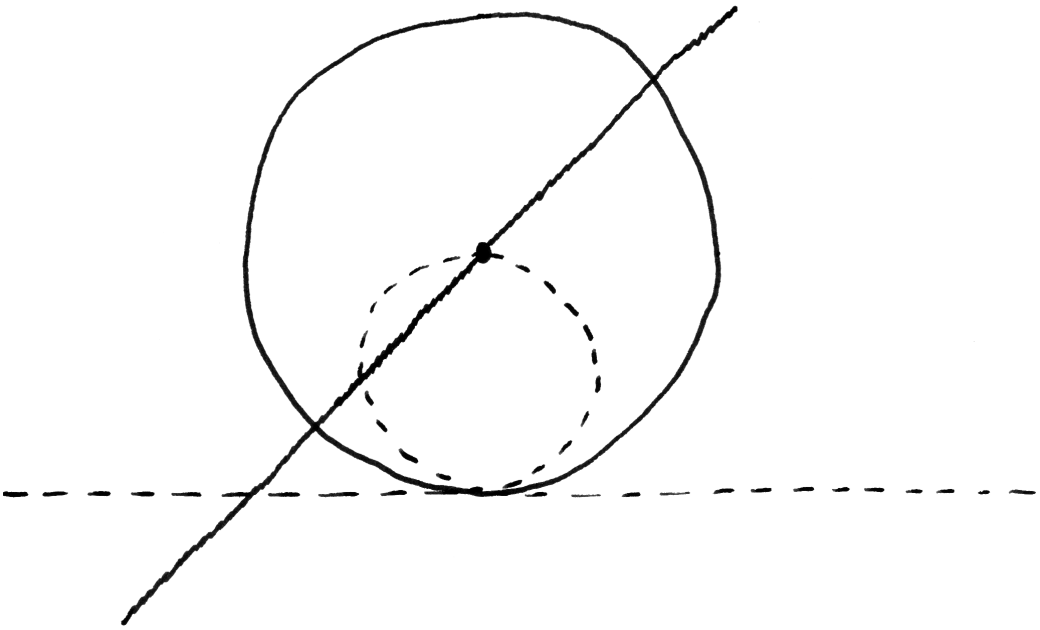
$$\hat{H} \xrightarrow{\sim} L$$

von der erweiterten Hyperebene $\hat{H} = H \sqcup \{\infty\}$ mit einer echten Sphäre $L \subset E$. Man prüft unschwer, daß es genau eine Topologie auf $\hat{H}$ gibt, für die alle diese Bijektionen Homöomorphismen sind. So versehen wir unsere erweiterten Räume und insbesondere auch $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ mit einer Topologie. Will man an diese Vorstellung appellieren, so nennt man $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ die **Riemann'sche Zahlenkugel**.

5.2.5.4 (**Kreise auf der Riemann'sche Zahlenkugel**). Unter jeder der Identifikationen $S^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$ aus 5.2.5.3 entsprechen die anschaulichen Kreise auf der Einheitssphäre genau unseren verallgemeinerten Kreisen in $\mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$. In der Tat haben wir unsere Identifikation ja als die Restriktion einer Möbiustransformation auf $\mathbb{R}^3 \sqcup \{\infty\}$ konstruiert, und diese muß mehrpunktige Schnitte von zwei verallgemeinerten Sphären auf ebensolche abbilden.

Übungen

Übung 5.2.5.5 (**Reelle Formen und verallgemeinerte Kreise**). Man zeige: Unter der Komposition $\mathrm{Pot}(\mathbb{C}^2) \to \mathrm{Pot}(\mathbb{C}^2\backslash 0) \to \mathrm{Pot}(\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pot}(\mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\})$



Der gestrichelte Kreis wird durch die „stereographische Projektion“ mit der gestrichelten Geraden identifiziert. Demnächst werden Sie diese Abbildung auch als „Inversion“ am durchgezogenen Kreis verstehen lernen. Diese Inversion hält jeden Punkt auf dem durchgezogenen Kreis fest und wirft sein Zentrum nach ∞. Folglich vertauscht die Inversion am durchgezogenen Kreis den gestrichelten Kreis mit der gestrichelten Geraden. Die gezackte Gerade oder vielmehr der zugehörige verallgemeinerte Kreis wird von besagter Inversion auf sich selbst geworfen, folglich wirkt unsere Inversion auf den Punkten des gestrichelten Kreises wie die stereographische Projektion.

der offensichtlichen Abbildungen wird das System $\mathrm{ReFo} \subset \mathrm{Pot}(\mathbb{C}^2)$ der reellen Formen nach 4.1.12.45 von $\mathbb{C}^2$ auf das System $\mathrm{VerKr} \subset \mathrm{Pot}(\mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\})$ der verallgemeinerten Kreise abgebildet. Hinweis: Das System der verallgemeinerten Kreise ist die Bahn der erweiterten x-Achse in $\mathrm{Pot}(\mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\})$ unter der Gruppe der Möbiustransformationen. Unter der so gegebenen Surjektion $\mathrm{ReFo} \twoheadrightarrow \mathrm{VerKr}$ oder ausgeschrieben

$$\big\{\text{Reelle Formen von } \mathbb{C}^2\big\} \twoheadrightarrow \big\{\text{Verallgemeinerte Kreise in } \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}\big\}$$

werden zwei reelle Formen genau dann auf denselben verallgemeinerten Kreis abgebildet, wenn sie durch die Multiplikation mit einer von Null verschiedenen komplexen Zahl auseinander hervorgehen.

Übung 5.2.5.6. Man zeige, daß Inversionen Winkel erhalten in dem Sinne, daß ihr Differential an jedem vom Zentrum der Inversion verschiedenen Punkt Winkel erhält. Hinweis: Es reicht zu zeigen, daß *eine* Orthonormalbasis unter dem Differential an jedem festen Punkt eine mit einem festen Faktor skalierte Orthonormalbasis wird. Man betrachte hierzu Orthonormalbasen, bei denen ein Vektor die Richtung vom Zentrum der Inversion zu unserem festen Punkt angibt. Alternativ löst das auch 12.1.6.18 in sogar noch größerer Allgemeinheit.

Ergänzende Übung 5.2.5.7. Sei E ein endlichdimensionaler euklidischer Raum. Die Möbiustransformationen $\hat{E} \to \hat{E}$ mit Fixpunkt ∞ sind genau die Fortsetzungen der Ähnlichkeiten von E durch die Vorschrift $\infty \mapsto \infty$. Hinweis: Mithilfe von 3.3.3.1 folgere man dann, daß unsere Abbildung auf E affin sein muß. Mit 4.1.10.18 folgere man dann, daß diese affine Abbildung eine Ähnlichkeit sein muß.

Ergänzende Übung 5.2.5.8. Sei E ein endlichdimensionaler euklidischer Raum einer Dimension $\dim E \geq 2$. Man zeige, daß jede bijektive Abbildung $\hat{E} \xrightarrow{\sim} \hat{E}$ mit der Eigenschaft, daß das Bild jeder verallgemeinerten Sphäre eine verallgemeinerte Sphäre ist, bereits eine Möbiustransformation sein muß. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall zurück, daß ∞ ein Fixpunkt unserer Abbildung ist, so daß man 5.2.5.7 anwenden kann.

Ergänzende Übung 5.2.5.9. Wir betrachten für $n \geq 1$ das Anfügen einer Null $\mathbb{R}^n \sqcup \{\infty\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \sqcup \{\infty\}$. Man zeige, daß eine Selbstabbildung von $\mathbb{R}^n \sqcup \{\infty\}$ eine Möbiustransformation ist genau dann, wenn sie sich zu einer Möbiustransformation auf $\mathbb{R}^{n+1} \sqcup \{\infty\}$ fortsetzen läßt. Hinweis: Will man direkte Rechnung vermeiden, mag man mit 5.2.5.8 argumentieren.

Ergänzende Übung 5.2.5.10. Hält eine Möbiustransformation auf $\mathbb{R}^n \sqcup \{\infty\}$ für $n \geq 1$ eine verallgemeinerte Sphäre punktweise fest, so ist sie entweder die Identität oder aber die Inversion an besagter verallgemeinerter Sphäre. Hinweis: 5.2.5.7

Ergänzende Übung 5.2.5.11. Man betrachte die **stereographische Projektion** der Einheitssphäre auf die xy-Ebene vermehrt um einen Punkt ∞, die jedem Punkt außer dem Nordpol $n = (0, 0, 1)$ den Schnittpunkt mit der xy-Ebene der Geraden durch diesem Punkt und den Nordpol zuordnet, und die den Nordpol auf ∞ wirft. Sie kann verstanden werden als Restriktion der Inversion an derjenigen Sphäre mit Zentrum im Nordpol, die die xy-Ebene im Einheitskreis schneidet. Mit der vorhergehenden Übung 5.2.5.6 erkennt man so, daß unter der stereographischen Projektion Kreise auf der Einheitssphäre als Schnitte der Einheitssphäre mit anderen Sphären übergehen in verallgemeinerte Kreise in der xy-Ebene, und daß die stereographische Projektion Winkel erhält.

Ergänzende Übung 5.2.5.12 (**Möbiustransformationen als Liegruppe**). Gegeben $p, q \in \mathbb{N}$ erklären wir $\mathrm{O}(p, q) \subset \mathrm{GL}(p + q; \mathbb{R})$ als die Gruppe aller derjenigen Matrizen, die die quadratische Form $f = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2$ auf $\mathbb{R}^{p+q}$ invariant lassen. Den Spezialfall $\mathrm{O}(1, 1)$ haben wir bereits in 4.2.7.10 recht explizit beschrieben. Die Gruppe $\mathrm{O}(p, q)$ stabilisiert den Nullkegel N aller Vektoren, auf denen unsere quadratische Form verschwindet, und induziert eine Operation auf dem Quotienten $(N \backslash 0)/\mathbb{R}_{>0}$. Da die Einbettung $S^{p-1} \times S^{q-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ offensichtlich eine Bijektion $S^{p-1} \times S^{q-1} \xrightarrow{\sim} (N \backslash 0)/\mathbb{R}_{>0}$ induziert, erbt die linke Seite eine Operation von $\mathrm{O}(p, q)$. Speziell erhalten wir eine Operation der Gruppe $\mathrm{O}(n + 1, 1)$ auf $S^n \times S^0$. Bezeichnet $\mathrm{O}(n + 1, 1)^+$ die Untergruppe der Matrizen, die beide Komponenten von $S^n \times S^0$ stabilisieren, so erhalten wir eine Operation von $\mathrm{O}(n+1, 1)^+$ auf S^n. Man erinnere die stereographische Projektion $\mathrm{ster} : S^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \sqcup \{\infty\}$ und zeige, daß wir einen Isomorphismus

$$\varphi : \mathrm{O}(n + 1, 1)^+ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Möb}(\mathbb{R}^n \sqcup \{\infty\})$$

angeben können durch die Vorschrift $\mathrm{ster}(gx) = \varphi(g)\,\mathrm{ster}(x)$. Vergleiche auch 15.2.2.22. Unsere Gruppe $\mathrm{O}(n + 1, 1)^+$ operiert auch auf dem Komplement des Nullkegels und stabilisiert darin die Teilmenge $I := \{x \mid f(x) < 0, x_{n+2} > 0\}$ und den zugehörigen Quotienten $I/\mathbb{R}_{>0}$, der mit dem „$(n + 1)$-dimensionalen hyperbolischen Raum“ aus **??** identifiziert werden kann.

Ergänzende Übung 5.2.5.13. Gegeben $c, s \in \mathbb{R}$ mit $c^2 - s^2 = 1$ gehört die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} c & s \\ s & c \end{smallmatrix}\right)$ zu $\mathrm{O}(1, 1)$ und folglich gehört die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$$

zu $\mathrm{O}(2, 1)$. Man prüfe durch explizite Rechnung, daß die Operation unserer Matrix auf dem projektivisierten Lichtkegel unter seiner Identifikation mit S^1 durch $(x, y) \mapsto \langle x, y, 1\rangle$ und der Identifikation $S^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$ mit der stereographischen Projektion gegeben durch $(x, y) \mapsto x/(1 - y)$ mit ihrer Inversen $t \mapsto (2t/(1 + t^2), (1 - t^2)/(1 + t^2))$ der Streckung um den Faktor $a = c - s$ entspricht.

5.3 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich . . . . Bei der Behandlung von Fragen der Inzidenzgeometrie war mir ein Skript von Hubert Kiechle sehr hilfreich.

Kapitel 6

Algebra und Zahlentheorie

Inhalt

6.1 Mehr zu Gruppen 704

6.1.1 Die Frage nach der Klassifikation 704

6.1.2 Kompositionsreihen 706

6.1.3 p-Gruppen 710

6.1.4 Sylowsätze 713

6.1.5 Symmetrische Gruppen 719

6.1.6 Alternierende Gruppen* 725

6.2 Mehr zu Ringen 730

6.2.1 Quotientenringe 730

6.2.2 Teilringe 735

6.2.3 Abstrakter chinesischer Restsatz 736

6.2.4 Euklidische Ringe und Primfaktorzerlegung 740

6.2.5 Primelemente und maximale Ideale* 747

6.2.6 Irreduzible im Ring der Gauß'schen Zahlen 749

6.2.7 Primfaktorzerlegung in Polynomringen 755

6.2.8 Kreisteilungspolynome 760

6.2.9 Symmetrische Polynome 763

6.2.10 Schranke von Bézout* 769

6.3 Mehr zu Körpern 777

6.3.1 Grundlagen und Definitionen 777

6.3.2 Körpererweiterungen 778

6.3.3 Elemente von Körpererweiterungen 780
6.3.4 Endliche Körpererweiterungen 783
6.3.5 Notationen für Erzeugung** 786
6.3.6 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal 787
6.3.7 Endliche Körper 793
6.3.8 Zerfällungskörper 797
6.3.9 Vielfachheit von Nullstellen 805
6.3.10 Satz vom primitiven Element 815
6.3.11 Algebraischer Abschluß* 820
6.3.12 Schiefkörper über den reellen Zahlen* 827
6.4 Galoistheorie 829
6.4.1 Galoiserweiterungen 829
6.4.2 Anschauung für die Galoisgruppe* 837
6.4.3 Zwischenkörper durch Untergruppen 841
6.4.4 Galoisgruppen von Kreisteilungskörpern 847
6.4.5 Quadratisches Reziprozitätsgesetz 852
6.4.6 Radikalerweiterungen 862
6.4.7 Lösung kubischer Gleichungen 870
6.4.8 Einheitswurzeln und reelle Radikale* 876
6.5 Verallgemeinerungen ins Unendliche* 879
6.5.1 Ordinalzahlen 879
6.5.2 Wohlordnung und natürliche Zahlen 881
6.5.3 Dimension als Kardinalität 882
6.5.4 Anwendungen in der Analysis* 887
6.6 Ergänzungen zur Körpertheorie* 891
6.6.1 Tensorprodukte von Körpern 891
6.6.2 Allgemeiner Translationssatz 893
6.6.3 Krull-Topologie 895
6.6.4 Formen von Vektorräumen und Algebren 896
6.6.5 Kummer-Theorie 901
6.7 Vorlesung Algebra und Zahlentheorie WS 19/20 905
6.8 Vorlesung Algebra und Zahlentheorie WS 16/17 908
6.9 Danksagung 912

Die Abschnitte bis zur Galois-Theorie einschließlich sollten in etwa den Standardstoff einer Algebra-Vorlesung für das dritte Semester abdecken. Ich habe mich bei der Entwicklung der Theorie besonders darum bemüht, die Verwendung des Zorn'schen Lemmas zu vermeiden. Mein Ziel war es, dem falschen Eindruck entgegenzuwirken, unsere Sätze über die Auflösbarkeit von polynomialen Gleichungen oder die Bestimmung quadratischer Reste oder die Konstruierbarkeit regelmäßiger Vielecke basierten auf Subtilitäten der Mengenlehre. Insbesondere wird der algebraische Abschluß in den Beweisen nicht verwendet und der Begriff eines maximalen Ideals spielt nur eine Nebenrolle. Ich bedanke mich bei vielen Freiburger Studierenden für Hinweise, die mir geholfen haben, die Darstellung zu klären und zu glätten und Fehler zu beheben.

6.1 Mehr zu Gruppen

6.1.1 Die Frage nach der Klassifikation

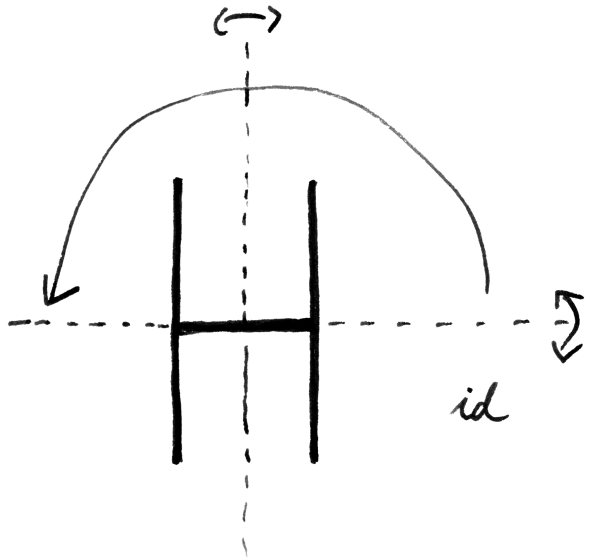
6.1.1.1. Ich erinnere an die Definition 2.2.2.2. Eine **Gruppe** ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto ab$ derart, daß für alle $a, b, c \in G$ gilt $(ab)c = a(bc)$, daß es ein Element $1 \in G$ gibt mit $1a = a1 = a \ \forall a \in G$, und daß es für alle $a, b \in G$ ein Element $c \in G$ gibt mit $ac = b$. Gegeben eine weitere Gruppe H ist ein **Gruppenhomomorphismus** $\varphi : G \to H$ eine Abbildung von G nach H mit $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für alle $a, b \in G$. Die Menge aller Gruppen homomorphismen von G nach H notiere ich $\mathrm{Grp}(G, H)$.

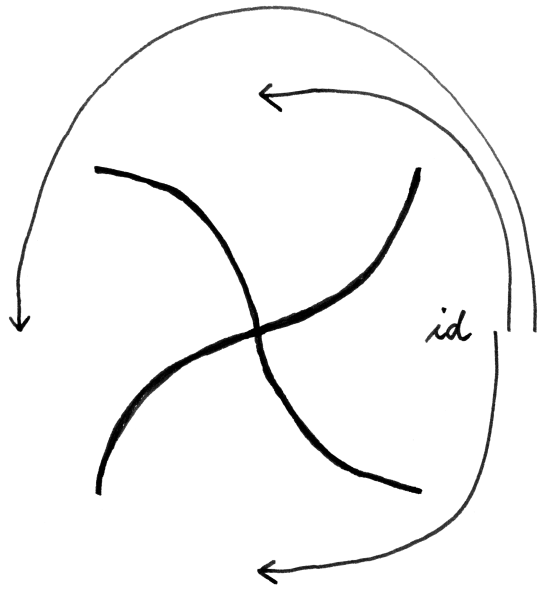
6.1.1.2. Wir wollen im folgenden der Frage nachgehen, welche endlichen Gruppen „es überhaupt gibt“. Wir nennen zwei Gruppen **isomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Isomorphismus als da heißt einen bijektiven Homomorphismus gibt. Die Frage, welche endlichen Gruppen es überhaupt gibt, können wir dann konkret fassen als die folgende Aufgabe: Man gebe eine Liste von endlichen Gruppen an derart, daß jede beliebige endliche Gruppe isomorph ist zu genau einer Gruppe dieser Liste. In mathematischer Terminologie ist das die Frage nach der **Klassifikation der endlichen Gruppen**.

Beispiel 6.1.1.3. Für Gruppen mit höchstens 4 Elementen können wir diese Aufgabe noch ohne alle Theorie auf direktem Wege lösen. Eine endliche Menge mit Verknüpfung beschreiben wir dazu durch ihre Verknüpfungstabelle, die im Fall einer Gruppe auch **Gruppentafel** heißt. Zum Beispiel bilden die dritten Einheitswurzeln 1, $\zeta = \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,/3)$ und $\eta = \exp(4\pi\,\mathrm{i}\,/3)$ in $\mathbb{C}$ unter der Multiplikation eine Gruppe mit der Gruppentafel

	1	ζ	η
1	1	ζ	η
ζ	ζ	η	1
η	η	1	ζ

Bei einer Gruppentafel muß nach der Kürzungsregel 2.2.2.17 in jeder Spalte und in jeder Zeile jedes Element genau einmal vorkommen. Man sieht so recht leicht, daß es bis auf Isomorphismus nur eine Gruppe G gibt mit $|G|$ Elementen für $|G| = 1, 2, 3$. Man sieht so auch, daß es für $|G| = 4$ bis auf Isomorphismus genau zwei Möglichkeiten gibt, die sich dadurch unterscheiden, ob jedes Element sein eigenes Inverses ist oder nicht: Je nachdem haben wir, bis auf Isomorphismus, die sogenannte **Klein'sche Vierergruppe** $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ oder die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ vor uns.





Die vier Symmetrien des Buchstabens H und des Sonnenrads, das wohl nicht zuletzt auch wegen seiner Symmetriegruppe so unvermittelt an furchtbare Zeiten der deutschen Geschichte erinnert.

6.1.1.4. Warum interessieren wir uns überhaupt für Gruppen? Stellen wir uns doch einmal eine ebene Figur vor, zum Beispiel eine stilisierte Blüte, einen Buchstaben, oder allgemein eine beliebige Teilmenge der Ebene $A \subset \mathbb{R}^2$. Unter einer „Symmetriebewegung“ oder kurz **Symmetrie** unserer Figur verstehen wir eine abstandserhaltende Selbstabbildung g der Ebene, die unsere Figur in sich selber überführt, in Formeln $gA = A$. Alle Symmetrien unserer Figur bilden unter der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe, die **Symmetriegruppe** der Figur. Bei den meisten Figuren besteht die Symmetriegruppe nur aus einem Element, der Identität, aber ein Herz hat schon zwei Symmetrien, die Identität und eine Spiegelung. Der Buchstabe H hat sogar 4 Symmetrien, ebensoviele wie das Sonnenrad, aber die Symmetriegruppen dieser beiden Figuren sind nicht isomorph. In diesem Sinne kann man das Konzept einer Gruppe interpretieren als eine Formalisierung der Idee eines „abstrakten Symmetrietyps“.

6.1.2 Kompositionsreihen

6.1.2.1. Ich erinnere an Restklassen 4.4.1, Normalteiler 4.4.2, Gruppenwirkungen 4.5.1.1, Bahnformel 4.5.2 und Konjugationsklassen 4.5.3.

Definition 6.1.2.2. Eine Gruppe heißt **einfach**, wenn sie nicht nur aus dem neutralen Element besteht, aber außer dem neutralen Element und der ganzen Gruppe keine weiteren Normalteiler hat.

Beispiele 6.1.2.3. Beispiele einfacher Gruppen sind die zyklischen Gruppen von Primzahlordnung und die sogenannten **alternierenden Gruppen**

$$A_r := \ker(\mathrm{sgn} : \mathcal{S}_r \to \{\pm 1\})$$

aller geraden Permuationen von r Objekten unter der Annahme $r \geq 5$, wie wir als Satz 6.1.6.2 zeigen werden. Nicht zeigen werden wir, daß die alternierende Gruppe A_5 die kleinste nichtabelsche einfache Gruppe ist. Diese Gruppe ist übrigends genau unsere Ikosaedergruppe aus 4.5.4.2 aller Drehsymmetrien eines Ikosaeders, was wir im anschließenden Satz 6.1.2.5 zeigen.

Ergänzung 6.1.2.4. Alle endlichen einfachen Gruppen sind seit etwa 1980 bekannt, ihre Klassifikation ist jedoch schwierig und man kann nur hoffen, daß zukünftige Forschungen noch substantielle Vereinfachungen der Argumente erlauben. Eine wesentliche Zutat ist ein berühmter Satz von **Feit-Thompson**, nach dem jede endliche einfache nicht abelsche Gruppe eine gerade Ordnung haben muß.

Satz 6.1.2.5. *Die Ikosaedergruppe ist einfach und isomorph zur alternierenden Gruppe A_5.*

Beweis. Ein Ikosaeder hat 12 Ecken, 20 Flächen und 30 Kanten. Jedes Paar von gegenüberliegenden Ecken liefert vier Elemente der Ordnung 5 in I, macht 24 Elemente der Ordnung 5. Jedes Paar von gegenüberliegenden Flächen liefert zwei Elemente der Ordnung 3 in I, macht 20 Elemente der Ordnung 3. Jedes Paar von gegenüberliegenden Kanten liefert ein Element der Ordnung 2 in I, macht 15 Elemente der Ordnung 2. Zusammen mit dem neutralen Element haben wir damit alle Gruppenelemente aufgelistet, denn es gilt

$$60 = 1 + 15 + 20 + 24$$

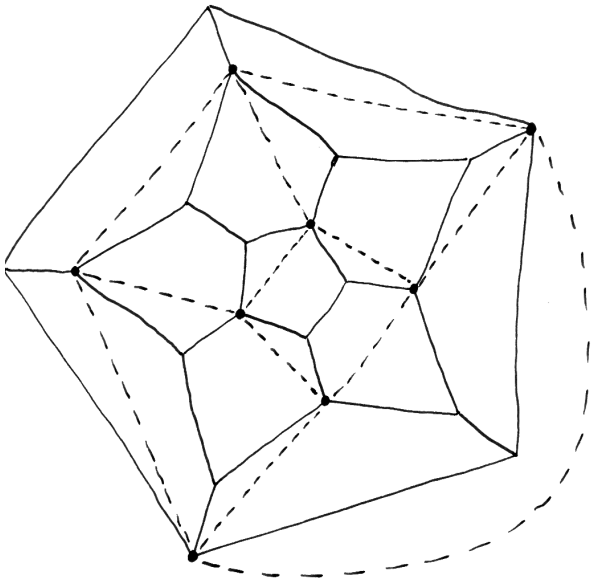
Da je zwei Kanten des Ikosaeders durch eine Drehsymmetrie des Ikosaeders ineinander überführt werden können, bilden die 15 Elemente der Ordnung 2 eine Konjugationsklasse: Sind in der Tat K und L Kanten und d_k, d_L die nichttrivialen Drehsymmetrien, die sie jeweils in sich selbst überführen, und ist g eine Drehsymmetrie mit $g(K) = L$, so gilt $d_K = g^{-1} d_L g$. Ähnlich sieht man, daß alle 20 Elemente der Ordnung 3 eine Konjugationsklasse bilden. Für die Elemente der Ordnung 5 kann das nicht gelten, denn 24 ist kein Teiler von 60. Mit ähnlichen Überlegungen erkennt man jedoch, daß die 24 Elemente der Ordnung 5 zerfallen in zwei Konjugationsklassen von je 12 Elementen, bestehend aus Drehungen einmal um Winkel $\pm\frac{2\pi}{5}$ und ein andermal $\pm\frac{4\pi}{5}$. Die Kardinalitäten der Konjugationsklassen sind also genau die Summanden auf der rechten Seite der Gleichung

$$60 = 1 + 15 + 20 + 12 + 12$$

Gäbe es nun in I einen echten Normalteiler N, so müßte die Ordnung von N ein Teiler sein von 60 und eine Summe von Kardinalitäten von Konjugationsklassen, darunter die Konjugationsklasse des neutralen Elements. Die einzigen solchen Zahlen sind aber 1 und 60, folglich ist die Ikosaedergruppe I einfach. Man überlegt sich nun anhand der nebenstehenden Zeichnung, daß es genau fünf Möglichkeiten gibt, aus den 20 Ecken eines Dodekaeders, die ja gerade die Flächenmitten eines Ikosaeders bilden, 8 Ecken so auszusuchen, daß sie die Ecken eines Würfels bilden: Auf der Menge dieser 5 einbeschriebenen Würfel operiert unsere Gruppe dann natürlich auch. Wir erhalten so einen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : I \to \mathcal{S}_5$$

Der Kern von $\operatorname{sgn} \circ \varphi : I \to \{+1, -1\}$ ist ein von 1 verschiedener Normalteiler von I, es folgt $\ker(\operatorname{sgn} \circ \varphi) = I$ und φ induziert einen Gruppenhomomorphismus nach $A_5 = \ker(\operatorname{sgn}) \subset \mathcal{S}_5$. Der Kern von $\varphi : I \to \mathcal{S}_5$ ist ein von I verschiedener Normalteiler von I, es folgt $\ker \varphi = 1$, und durch Abzählen folgt dann, daß φ einen Isomorphismus $\varphi : I \xrightarrow{\sim} A_5$ induziert. $\square$



Einer der fünf eingeschriebenen Würfel eines Dodekaeders, mit gestrichelt eingezeichneten Kanten. Diese Würfel entsprechen im übrigen auch eineindeutig den 2-Sylows unserer Ikosaedergruppe: Diese sind genau die vierelementigen Diedergruppen, die von den drei durch die Flächenmitten eines festen Würfels stechenden Geraden jede in sich überführen. Wenn Sie dieser Anschauung nicht so recht trauen, wofür ich durchaus Sympathie hätte, können Sie auch abstrakt die „Symmetriegruppe des Graphen mit den durchgezogenen Kanten“ betrachten. Sie würde den „Dreh- und Spiegelsymmetrien“ eines Ikosaeders entsprechen, aber wenn Sie zusätzlich an jeder Ecke auf der Menge der von ihr ausgehenden Kanten in der Terminologie 2.1.5.22 die zyklische Anordnung „im Uhrzeigersinn“ festlegen, so wird die Gruppe derjenigen Symmetrien unseres Graphen, die diese zyklischen Anordnungen respektieren, genau die Ikosaedergruppe werden.

Definition 6.1.2.6. Eine **Kompositionsreihe** einer Gruppe G ist eine Folge von Untergruppen

$$G = G_r \supset G_{r-1} \supset \ldots \supset G_0 = 1$$

derart, daß jede Gruppe unserer Folge ein Normalteiler in der nächstgrößeren Gruppe ist und daß die sukzessiven Quotienten einfach sind, daß also in Formeln G_i/G_{i-1} einfach ist für $1 \leq \mathrm{i} \leq r$. Die Gruppen G_i/G_{i-1} heißen die **Subquotienten** der Kompositionsreihe.

Satz 6.1.2.7 (Jordan-Hölder). *Je zwei Kompositionsreihen einer endlichen Gruppe haben dieselbe Länge und bis auf Reihenfolge isomorphe Subquotienten, die man die* **Kompositionsfaktoren** *unserer Gruppe nennt. Ist genauer G eine endliche Gruppe und sind $G = M_r \supset \ldots \supset M_0 = 1$ und $G = N_s \supset \ldots \supset N_0 = 1$ Kompositionsreihen von G, so haben wir $r = s$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ mit $N_i/N_{i-1} \cong M_{\sigma(i)}/M_{\sigma(i)-1}$ für alle i.*

Beispiel 6.1.2.8. Jede abelsche Gruppe mit n Elementen hat als Kompositionsfaktoren die zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ für $n = p_1 \ldots p_r$ die Primfaktorzerlegung von n. Jeder endlichdimensionale Vektorraum V über $\mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p hat insbesondere als Kompositionsfaktoren $\dim V$ Kopien von $\mathbb{F}_p$. Die Kompositionsfaktoren der symmetrischen Gruppen $\mathcal{S}_r$ werden wird in 6.1.6.2 und 6.1.6.3 diskutieren: Ab $r = 5$ ist der Kern des Signums ein einfacher Normalteiler und unsere Gruppe hat folglich nur zwei Kompositionsfaktoren: Diesen Normalteiler und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Beweis. Wir zeigen das durch Induktion über die Gruppenordnung. Seien

$$\begin{array}{ccccccc} G & \supset & M & \supset & \ldots & \supset & 1 \\ G & \supset & N & \supset & \ldots & \supset & 1 \end{array}$$

zwei Kompositionsreihen. Gilt $M = N$, so folgt der Satz per Induktion. Sonst ist das Bild von M in G/N ein von 1 verschiedener Normalteiler, und da G/N einfach ist, liefert die offensichtliche Abbildung notwendig eine Surjektion $M \twoheadrightarrow G/N$ und einen Isomorphismus $M/(M \cap N) \xrightarrow{\sim} G/N$. Ebenso erhalten wir auch $N/(M \cap N) \xrightarrow{\sim} G/M$. Deuten wir mit $(M \cap N) \supset \ldots \supset 1$ eine Kompositionsreihe des Schnitts an, so hat die Gruppe G also Kompositionsreihen

$$\begin{array}{ccccccccc} G & \supset & M & \supset & & & \ldots & \supset & 1 \\ G & \supset & M & \supset & (M \cap N) & \supset & \ldots & \supset & 1 \\ G & \supset & N & \supset & (M \cap N) & \supset & \ldots & \supset & 1 \\ G & \supset & N & \supset & & & \ldots & \supset & 1 \end{array}$$

Je zwei in dieser Liste benachbarte Kompositionsreihen haben aber nun nach Induktionsvoraussetzung und den oben erwähnten Isomorphismen bis auf Reihenfolge dieselben Subquotienten. $\square$

Übungen

Ergänzende Übung 6.1.2.9. Man zeige die Aussage des Satzes von Jordan-Hölder 6.1.2.7, ohne die Endlichkeit der Gruppe vorauszusetzen. Man zeige auch, daß in einer Gruppe mit Kompositionsreihe eine absteigende Folge von Untergruppen, die jeweils echte Normalteiler in der nächstgrößeren Untergruppe sind, höchstens so lang sein kann wie besagte Kompositionsreihe.

Ergänzende Übung 6.1.2.10 (**Semidirektes Produkt**). Seien $\varphi : G \twoheadrightarrow B$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $N := \ker \varphi$ und $\sigma : B \hookrightarrow G$ eine Spaltung von φ, also ein Gruppenhomomorphismus mit $\sigma \circ \varphi = \mathrm{id}_B$. Man zeige, daß dann die Abbildung $(n, b) \mapsto n\sigma(b)$ eine Bijektion $N \times B \xrightarrow{\sim} G$ liefert und daß die Verknüpfung von G unter dieser Bijektion derjenigen Verknüpfung auf $N \times B$ entspricht, die gegeben wird durch

$$(m, a)(n, b) = (m \operatorname{int}_{\sigma(a)}(n), ab) \quad \forall m, n \in N \text{ und } a, b \in B.$$

Sind umgekehrt N, B Gruppen und $\tau : B \to \mathrm{Grp}^{\times} N, a \mapsto \tau_a$ ein Gruppenhomomorphismus von B in die Automorphismengruppe von N, so wird $N \times B$ mit der Verknüpfung

$$(m, a)(n, b) := (m\tau_a(n), ab) \quad \forall m, n \in N \text{ und } a, b \in B$$

zu einer Gruppe. Diese Gruppe heißt das **semidirekte Produkt von** N **mit** B **über** τ und wird notiert als

$$N \rtimes B = N \rtimes_\tau B$$

Ergänzung 6.1.2.11. Ist speziell eine Gruppe N ein Produkt von n Kopien einer festen Gruppe $N = A^n = A \times \ldots \times A$ und operiert eine weitere Gruppe B darauf durch Vertauschung der Faktoren, also in hoffentlich offensichtlicher Weise vermittels eines Gruppenhomomorphismus $B \to \mathcal{S}_n$, so bezeichnet man das zugehörige semidirekte Produkt als **Kranzprodukt** und notiert es $N \rtimes B =: A \wr B$.

Ergänzende Übung 6.1.2.12. Man zeige, daß die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_4$ isomorph ist zum semidirekten Produkt der $\mathcal{S}_3$ mit der Klein'schen Vierergruppe $\mathbb{F}_2^2$ in Bezug auf einen und jeden Isomorphismus $\mathcal{S}_3 \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(2; \mathbb{F}_2)$.

6.1.3 p-Gruppen

Definition 6.1.3.1. Das **Zentrum** einer Gruppe G ist die Menge

$$\mathrm{Z}(G) := \{x \in G \mid xg = gx \quad \forall g \in G\}$$

derjenigen Gruppenelemente, die mit allen anderen Gruppenelementen kommutieren.

6.1.3.2. Offensichtlich ist das Zentrum ein Normalteiler, was im Übrigen auch die alternative Beschreibung $\mathrm{Z}(G) = \ker(\mathrm{int} : G \to \mathrm{Grp}^\times(G))$ als Kern eines Gruppenhomomorphismus in den Notationen aus 4.5.3 sofort zeigt.

Definition 6.1.3.3. Die Standgruppe von $g \in G$ unter der Operation von G auf sich selbst durch Konjugation heißt der **Zentralisator** $\mathrm{Z}_G(g)$ von g, in Formeln

$$\mathrm{Z}_G(g) = \{x \in G \mid xgx^{-1} = g\}$$

6.1.3.4. Ist G eine endliche Gruppe, $G = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ ihre Zerlegung in Konjugationsklassen und $g_i \in C_i$ jeweils ein Element, so liefert die Bahnformel 4.5.2.2 die sogenannte **Klassengleichung**

$$\begin{aligned} |G| &= |C_1| + \ldots + |C_r| \\ &= |G|/|\mathrm{Z}_G(g_1)| + \ldots + |G|/|\mathrm{Z}_G(g_r)| \end{aligned}$$

Die einelementigen Konjugationsklassen sind dabei genau die Konjugationsklassen der Elemente des Zentrums.

Definition 6.1.3.5. Sei p eine Primzahl. Eine p**-Gruppe** ist eine endliche Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von p ist. Die triviale Gruppe hat p^0 Elemente und ist damit nach unserer Konvention 4.4.4.3 eine p-Gruppe für jede Primzahl p.

Proposition 6.1.3.6. *Jede nichttriviale p-Gruppe hat nichttriviales Zentrum.*

Beweis. Wir zerlegen unsere Gruppe in Konjugationsklassen $G = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$. Nach der Bahnformel sind alle Kardinalitäten von Konjugationsklassen $|C_i|$ Teiler von $|G|$, also p-Potenzen. Die einelementigen Konjugationsklassen gehören dabei genau zu den Elementen des Zentrums von G und wir folgern

$$|G| \equiv |\mathrm{Z}(G)| \pmod{p}$$

Da nun das Zentrum stets mindestens ein Element hat, nämlich das neutrale Element, muß es im Fall einer nichttrivialen p-Gruppe sogar mindestens p Elemente haben. □

Korollar 6.1.3.7. *Ist die Ordnung einer Gruppe das Quadrat einer Primzahl p, so ist die besagte Gruppe abelsch, in Formeln:*

$$|G| = p^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{Z}(G) = G$$

Beweis. Nach der vorhergehenden Proposition 6.1.3.6 hat das Zentrum unserer Gruppe mindestens p Elemente. Gäbe es nun außerhalb des Zentrums noch ein Element unserer Gruppe, so müßte dieses Element zusammen mit dem Zentrum eine kommutative Untergruppe mit mehr als p Elementen erzeugen, und diese wäre dann nach dem Satz von Lagrange 4.4.1.5 bereits die ganze Gruppe. □

Satz 6.1.3.8 (**Struktur von p-Gruppen**). *Ist G eine p-Gruppe, so gibt es in G eine Kette $G = G_r \supset G_{r-1} \supset \ldots \supset G_0 = 1$ von Normalteilern von G mit $|G_i/G_{i-1}| = p$ für alle i. Zusätzlich können wir sogar erreichen, daß G_i/G_{i-1} jeweils im Zentrum von G/G_{i-1} liegt.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über die Gruppenordnung. Ist G nicht trivial, in Formeln $G \neq 1$, so hat G nach 6.1.3.6 nichttrivales Zentrum $\mathrm{Z}(G) \neq 1$. Indem wir von irgendeinem nichttrivialen Element des Zentrums eine geeignete Potenz nehmen, finden wir im Zentrum sogar ein Element x der Ordnung p. Die von x erzeugte Untergruppe $G_1 = \langle x \rangle$ ist also isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, und da x im Zentrum liegt, ist G_1 ein Normalteiler in G. Nach Induktion finden wir nun im Quotienten $\bar{G} := G/G_1$ eine Kette $\bar{G} = \bar{G}_l \supset \ldots \supset \bar{G}_1 \supset \bar{G}_0 = 1$ wie gewünscht. Dann nehmen wir $G_i := \mathrm{can}^{-1}(\bar{G}_{i-1})$ für $\mathrm{can} : G \twoheadrightarrow \bar{G}$ die Projektion. Wegen 4.4.2.20 erhalten wir so eine Kette von Normalteilern von G. Wegen 4.4.1.6 haben wir $|G_i| = p|\bar{G}_{i-1}| = p^i$. Damit hat G_i/G_{i-1} genau p Elemente. $\square$

6.1.3.9. Eine Gruppe G heißt **auflösbar**, wenn es eine Folge von Untergruppen $G = G_r \supset G_{r-1} \supset G_{r-2} \supset \ldots \supset G_0 = 1$ gibt mit G_{i-1} normal in G_i und G_i/G_{i-1} abelsch für $1 \leq i \leq r$. Aus 6.1.3.16 wird folgen, daß wir dann sogar solch eine Folge finden können, bei der jedes G_i bereits in ganz G normal ist. Die Terminologie „auflösbar“ kommt von der Beziehung dieses Begriffs zum Auflösen von Gleichungen her und wird erst im Licht von Satz 6.4.6.22 verständlich. Bemerkung 6.1.6.3 zeigt, daß die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_4$ auflösbar ist. Eine nichtabelsche einfache Gruppe kann nie auflösbar sein. Alle Gruppen mit weniger als 60 Elementen sind auflösbar, und die Ikosaedergruppe alias die Gruppe der geraden Permutationen von 5 Elementen ist bis auf Isomorphsmus die einzige nichtauflösbare Gruppe mit 60 Elementen. Beides werden wir aber hier nicht zeigen.

Übungen

Übung 6.1.3.10. Eine Gruppe G heißt **nilpotent**, wenn es eine Folge $G = G_r \supset G_{r-1} \supset G_{r-2} \supset \ldots \supset G_0 = 1$ von Untergruppen von G gibt derart, daß G_i/G_{i-1} für $1 \leq i \leq r$ im Zentrum von G/G_{i-1} liegt. Jede endliche p-Gruppe ist nilpotent nach 6.1.3.8. Natürlich können wir zu jeder Gruppe G die Gruppe $G/\mathrm{Z}(G)$ konstruieren. Man zeige: Eine Gruppe ist nilpotent genau dann, wenn wiederholtes Anwenden dieser Konstruktion in endlich vielen Schritten von unserer Gruppe zur trivialen Gruppe führt.

Ergänzende Übung 6.1.3.11. Diese Übung soll die Herkunft der Bezeichnung „nilpotent“ erklären. Gegeben Elemente a, b einer Gruppe G setzt man $(a, b) :=$

$aba^{-1}b^{-1}$ und nennt dies Element den **Kommutator von** a **und** b. Gegeben Teilmengen A, B einer Gruppe bezeichnen wir mit $\langle(A, B)\rangle$ die von den Kommutatoren erzeugte Untergruppe. Vielfach wird sie auch vereinfacht (A, B) notiert. Jetzt definiert man induktiv die **absteigende Zentralreihe** einer Gruppe G durch

$$G^0 := G, G^1 := \langle(G, G)\rangle, \ldots, G^{i+1} := \langle(G^i, G)\rangle, \ldots$$

Man zeige, daß eine Gruppe genau dann nilpotent ist, wenn ihre absteigende Zentralreihe nach endlich vielen Schritten bei der trivialen Gruppe landet, wenn also in Formeln gilt $G^i = 1$ für $i \gg 0$.

Übung 6.1.3.12. Eine Gruppe G heißt **überauflösbar**, wenn es eine Folge $G = G_r \supset G_{r-1} \supset G_{r-2} \supset \ldots \supset G_0 = 1$ von Normalteilern von G gibt mit G_i/G_{i-1} zyklisch für $1 \leq i \leq r$. Man zeige: Jede endliche nilpotente Gruppe ist überauflösbar.

Ergänzende Übung 6.1.3.13. Jede Untergruppe einer nilpotenten Gruppe ist nilpotent. Für jedes n ist die Gruppe der oberen $(n \times n)$-Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale und Einträgen in irgendeinem Ring nilpotent.

Ergänzende Übung 6.1.3.14. Man bestimme das Zentrum der Gruppe $\mathrm{GL}(n; k)$ für $n \in \mathbb{N}$ und k ein Körper. Man bestimme das Zentrum der Symmetriegruppe eines Quadrats.

Übung 6.1.3.15. Jede Untergruppe einer auflösbaren Gruppe ist auflösbar. Gegeben $G \supset N$ eine Gruppe mit Normalteiler ist die ganze Gruppe G auflösbar genau dann, wenn N und G/N auflösbar sind. Hinweis: 4.4.2.19.

Ergänzende Übung 6.1.3.16. Gegeben eine Gruppe G erklärt man ihre **derivierte Gruppe** als $\mathcal{D}G := \langle(G, G)\rangle$ und setzt induktiv $\mathcal{D}^{i+1}G := \mathcal{D}(\mathcal{D}^i G)$. Man zeige, daß eine Gruppe genau dann auflösbar ist, wenn ihre höheren derivierten Gruppen irgendwann trivial werden, wenn also in Formeln gilt $\mathcal{D}^i G = 1$ für $i \gg 0$. Man zeige weiter, daß alle höheren derivierten Gruppen $\mathcal{D}^i G$ Normalteiler von G sind.

6.1.4 Sylowsätze

Definition 6.1.4.1. Seien G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Eine Untergruppe $P \subset G$ heißt eine p**-Sylowuntergruppe** oder kurz p**-Sylow von** G, wenn ihre Kardinalität $|P|$ die höchste p-Potenz ist, die die Gruppenordnung $|G|$ teilt.

Beispiel 6.1.4.2. Eine 2-Sylow in der Gruppe der 24 Drehsymmetrien eines Würfels ist per definitionem eine Untergruppe mit 8 Elementen. Zum Beispiel wäre jede Untergruppe, die die Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender

Flächen stabilisiert, eine solche 2-Sylow. Die einzige 5-Sylow in derselben Gruppe wäre in unserer Terminologie die einelementige Untergruppe. Viele Autoren verstehen aber auch abweichend unter Sylowuntergruppen nur diejenigen Untergruppen, die wir in unserer Terminologie als „nichttriviale Sylowuntergruppen“ ansprechen würden.

6.1.4.3. Die Operation durch Konjugation einer Gruppe G auf sich selber induziert eine Operation unserer Gruppe auf ihrer Potenzmenge $\mathcal{P}(G)$, die wir auch als „Konjugation“ ansprechen. Im folgenden verwenden wir oft die davon auf der Teilmenge $\mathcal{U}(G) \subset \mathcal{P}(G)$ aller Untergruppen induzierte Operation. Insbesondere heißen also zwei Untergruppen $H, K \subset G$ **zueinander konjugiert**, wenn es $g \in G$ gibt mit $H = gKg^{-1}$.

Satz 6.1.4.4 (Sätze von Sylow). *Seien G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl und p^r die größte p-Potenz, die die Gruppenordnung $|G|$ teilt. So gilt:*

1. *Unsere Gruppe G besitzt Untergruppen der Ordnung p^r alias p-Sylows;*
2. *Je zwei p-Sylows von G sind zueinander konjugiert;*
3. *Jede Untergruppe von G, deren Ordnung eine p-Potenz ist, liegt in einer p-Sylow von G;*
4. *Die Zahl der p-Sylows von G ist ein Teiler von $|G|/p^r$ und kongruent zu 1 modulo p.*

Beispiel 6.1.4.5. Ist G eine endliche abelsche Gruppe, so gibt es insbesondere genau eine p-Sylow für alle p. Wir kennen diese Untergruppe schon aus Proposition 4.4.3.17: Es ist die Untergruppe $G(p)$ aller Elemente von G, deren Ordnung eine p-Potenz ist.

Beispiel 6.1.4.6. Im Fall der Gruppe der 24 Drehsymmetrien eines Würfels liefern die drei Paare gegenüberliegender Flächen drei paarweise verschiedene 2-Sylows, bestehend aus allen Drehsymmetrien, die das jeweilige Paar in sich überführen. Das müssen dann auch bereits alle 2-Sylows alias alle 8-elementigen Untergruppen dieser Gruppe sein, wie man unschwer aus Teil 2 oder auch aus Teil 4 des vorhergehenden Satzes folgern kann.

Beweis. 1. Wir argumentieren durch Induktion über $|G|$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß p die Ordnung unserer Gruppe teilt. Ist $G = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_s$ die Zerlegung in Konjugationsklassen und $g_i \in C_i$ für $1 \leq i \leq t$ jeweils ein Element aus jeder Konjugationsklasse mit mehr als einem Element, so liefert die Bahnformel nach 6.1.3.4 die Klassengleichung

$$|G| = |G|/|\mathrm{Z}_G(g_1)| + \ldots + |G|/|\mathrm{Z}_G(g_t)| + |\,\mathrm{Z}(G)|$$

Teilt p die Ordnung $|\,\mathrm{Z}(G)|$ des Zentrums von G, so gibt es nach 4.4.3.18 in $\mathrm{Z}(G)$ ein Element g der Ordnung p. Nach der Induktionsannahme finden wir nun eine p-Sylow von $G/\langle g\rangle$, und deren Urbild in G ist notwendig eine p-Sylow von G. Gilt sonst $p \nmid |\,\mathrm{Z}(G)|$, so finden wir auch ein i mit $p \nmid |G|/|\mathrm{Z}_G(g_i)|$ und dann folgt die Behauptung direkt aus der Induktionsannahme angewendet auf die Gruppe $\mathrm{Z}_G(g_i)$.

5. Vor dem weiteren Fortgang des Beweises ergänzen wir nun unseren Satz um einen technischeren Teil 5, der dann als nächstes bewiesen wird. Bezeichne $\mathcal{S}$ die Menge aller p-Sylows von G. Sicher operiert G auf $\mathcal{S}$ durch Konjugation. Wir vereinbaren als Notation für den weiteren Verlauf des Beweises die folgenden Konventionen: Bezeichnen wir eine Sylow durch einen kleinen Buchstaben, so fassen wir sie primär als ein Element $x \in \mathcal{S}$ auf und notieren die mit $g \in G$ konjugierte Sylow gx. Bezeichnen wir eine Sylow jedoch durch einen großen Buchstaben, so fassen wir sie primär als eine Teilmenge $P \subset G$ auf und notieren die mit $g \in G$ konjugierte Sylow gPg^{-1}. Ich ergänze nun mit diesen Notationen den Satz um die folgende technische Aussage:

5. *Ist $H \subset G$ eine p-Gruppe und $y = Q \in \mathcal{S}$ ein Fixpunkt von H in der Menge aller p-Sylows von G, so gilt $H \subset Q$.*

In der Tat besagt die Fixpunkteigenschaft $hQh^{-1} = Q \;\forall h \in H$. Mithin ist $HQ = QH$ eine Untergruppe von G. Ihre Ordnung ist $|QH| = |QH/H| \cdot |H|$. Nun ist QH/H unter der Operation von Q durch Linksmultiplikation eine einzige Q-Bahn und damit ist $|QH/H|$ eine p-Potenz. Da auch $|H|$ eine p-Potenz ist, muß QH eine p-Gruppe sein. Es folgt $QH = Q$, also $H \subset Q$. Nun beweisen wir die restlichen Teile des Satzes.

2&3. Sei eine p-Sylow $P = x$ gegeben. Für ihre Standgruppe G_x gilt $G_x \supset P$, also ist nach der Bahnformel 4.5.2.2 die Kardinalität $|Gx|$ der Bahn $Gx \subset \mathcal{S}$ von x teilerfremd zu p. Sei weiter $H \subset G$ eine Untergruppe von p-Potenzordnung. Sicher zerfällt Gx in Bahnen unter H, und die Ordnung jeder solchen Bahn muß eine p-Potenz sein. Folglich gibt es in Gx einen Fixpunkt y von H. Nach dem eben bewiesenen Teil 5 ist dieser Fixpunkt $y = Q$ eine p-Sylow Q mit $Q \supset H$, und wegen $y \in Gx$ gibt es $g \in G$ mit $gPg^{-1} = Q$.

4. Nach Teil 5 gibt es nur einen Fixpunkt unserer Sylow P auf der Menge aller p-Sylows $\mathcal{S}$, nämlich den Punkt $x = P$ selber. Alle anderen P-Bahnen in $\mathcal{S}$ haben als Kardinalität eine echte p-Potenz, und das zeigt $|\mathcal{S}| \equiv 1 \pmod{p}$. Die Standgruppe G_x von $x \in \mathcal{S}$ umfaßt schließlich unsere Sylow $P = x$. Da nun je zwei p-Sylows konjugiert sind alias ganz $\mathcal{S}$ ein homogener G-Raum ist, folgt auch, daß $|\mathcal{S}| = |G/G_x|$ ein Teiler ist von $|G/P|$. $\square$

Ergänzung 6.1.4.7. Ein alternativer Beweis des ersten Teils geht so: Man betrach-

tet das System $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(G)$ aller Teilmengen unserer Gruppe mit p^r Elementen. Die Gruppe G operiert auf $\mathcal{M}$ durch Konjugation. Hat der Stabilisator von einem $M \in \mathcal{M}$ genau p^r Elemente, so ist er eine p-Sylow. Sonst haben alle Stabilisatoren weniger Elemente und damit alle Bahnen eine durch p teilbare Kardinalität: Widerspruch dazu, daß nach expliziter Rechnung die Kardinalität von $\mathcal{M}$ teilerfremd ist zu p, vergleiche 1.1.1.27.

Satz 6.1.4.8 (von Cauchy über Gruppenelelemente von Primzahlordnung). *Jeder Primfaktor der Ordung einer endlichen Gruppe tritt auch als Ordnung eines Elements besagter Gruppe auf.*

6.1.4.9. Man beachte, daß wir diese Aussage im Fall abelscher Gruppen bereits in 4.4.3.18 bewiesen hatten, und daß wir sie in diesem Fall ihrerseits beim Beweis der Sylowsätze verwendet haben. Einen alternativen Beweis konnten Sie als Übung 4.5.1.35 ausarbeiten. Allgemeinere Teiler der Ordung einer endlichen Gruppe müssen keineswegs als Ordnung eines Elements besagter Gruppe auftreten. So gibt es etwa in der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_5$ keine Untergruppe mit 15 Elementen, was Sie als Übung gleich zeigen können. Ebenso sieht man leicht ein, daß die alternierende Gruppe A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 hat. Teilt jedoch eine Primzahlpotenz die Ordnung einer Gruppe, so gibt es eine Untergruppe mit besagter Primzahlpotenz als Ordnung: Das folgt ähnlich wie im anschließenden Beweis leicht aus den Sylowsätzen zusammen mit unseren Erkenntnissen zur Struktur von p-Gruppen 6.1.3.8.

Beweis. Sei p unser Primfaktor. Man findet zunächst nach 6.1.4.4 in unserer Gruppe eine p-Sylow. Darin findet man ein Element, das nicht das neutrale Element ist. Dieses erzeugt eine zyklische Untergruppe, die isomorph ist zu $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ für $r \geq 1$. Darin ist dann die Nebenklasse von p^{r-1} das gesuchte Element der Ordnung p. □

Proposition 6.1.4.10. *Jede Gruppe mit genau sechs Elementen ist entweder zyklisch oder isomorph zur symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_3$.*

Beweis. Sei G unsere Gruppe der Ordnung $|G| = 6$. Wir finden nach dem Satz von Cauchy 6.1.4.8 Elemente $a, b \in G$ der Ordnungen 2 und 3. Nach Übung 3.4.3.8 zum Satz von Lagrange gilt $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$, also liefert die Multiplikation eine Bijektion

$$\langle a \rangle \times \langle b \rangle \xrightarrow{\sim} G$$

Sicher kann unter diesen Umständen ba weder eine Potenz von a noch eine Potenz von b sein. Gilt $ba = ab$, so ist unsere Gruppe kommutativ und folglich isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Gilt $ba = ab^2$, so legt diese Gleichung schon die ganze Gruppenstruktur fest und wir haben die $\mathcal{S}_3$ vor uns. □

Korollar 6.1.4.11. *Jede Gruppe der Ordnung 15 ist zyklisch.*

Beweis. Die Zahl der 3-Sylows teilt 5 und ist kongruent zu 1 modulo 3. Es gibt also genau eine 3-Sylow und damit genau zwei Elemente der Ordnung 3. Ähnlich gibt es genau eine 5-Sylow und damit genau 4 Elemente der Ordnung 5. Zusammen mit dem neutralen Element sind das nur 7 Elemente. Die übrigen 8 Elemente haben notwendig die Ordnung 15. □

Ergänzung 6.1.4.12 (**Gruppen mit höchstens** 15 **Elementen**). Mit den folgenden Übungen können Sie die Klassifikation der Gruppen mit höchstens 15 Elementen zu Ende bringen. Gruppen mit $2, 3, 5, 7, 11$ oder 13 Elementen sind ja zyklisch nach 4.4.3.5. Gruppen mit 4 oder 9 Elementen sind abelsch nach 6.1.3.7 und werden damit durch 4.4.4.5 klassifiziert. Gruppen mit 6 Elementen hatten wir in 6.1.4.10 diskutiert. Für Gruppen mit 10 oder 14 Elementen funktioniert dieselbe Argumentation, wie Sie als Übung 6.1.4.15 ausarbeiten dürfen. Gruppen mit 8 Elementen klassifizieren wir in 6.1.4.13, Gruppen mit 12 Elementen klassifizieren Sie in 6.1.4.19, und jede Gruppe mit 15 Elementen ist zyklisch nach 6.1.4.11. Bei Gruppen mit 16 Elementen fängt es aber an, unübersichtlich zu werden, es gibt von ihnen bereits 14 Isomorphieklassen.

Ergänzung 6.1.4.13 (**Gruppen mit** 8 **Elementen**). Es gibt 5 Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung acht, als da wären die drei abelschen Gruppen $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, die Diedergruppe der Ordnung acht sowie die **Quaternionengruppe** der acht Quaternionen $\{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{j}, \pm \mathrm{k}\}$ nach 3.5.6.4. Um das einzusehen, kann man argumentieren wie folgt: Jede nichtabelsche Gruppe der Ordnung acht besitzt nach 3.1.2.18 Elemente der Ordnung vier, also nach 4.4.2.21 einen zyklischen Normalteiler der Ordnung vier. Gibt es eine Involution außerhalb dieses Normalteilers, so sehen wir schnell, daß unsere Gruppe ein semidirektes Produkt $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sein muß für die einzige nichttriviale Operation, so daß wir eine Diedergruppe vor uns haben. Sonst haben alle Elemente außerhalb unseres Normalteilers die Ordnung vier und in unserer Gruppe bleibt nur noch Platz für ein einziges Element der Ordnung zwei. Unsere Gruppe ist also die Vereinigung von drei zyklischen Gruppen der Ordnung vier, und der Schnitt dieser Gruppen ist auch der Schnitt von je zweien unter ihnen und ist zyklisch von der Ordnung zwei und zentral. Bezeichne 1 das neutrale Element und -1 das andere Element dieses Schnitts. Wählen wir i und j Erzeuger von zwei verschiedenen zyklischen Untergruppen der Ordnung vier, so müssen $\mathrm{i}\,\mathrm{j}$ und auch $\mathrm{k} := (-1)\,\mathrm{i}\,\mathrm{j}$ die dritte zyklische Untergruppe der Ordnung vier erzeugen, denn diese Elemente sind weder eine Potenz von i noch eine Potenz von j. Von hier aus ist leicht zu sehen, daß wir gerade die Quaternionengruppe vor uns haben.

Ergänzung 6.1.4.14. Jede Gruppe der Ordnung 18 ist auflösbar. In der Tat gibt es nur eine 3-Sylow, die ist notwendig normal, und wir sind fertig.

Übungen

Ergänzende Übung 6.1.4.15. Für jede Primzahl p gibt es bis auf Isomorphismus genau zwei Gruppen der Ordnung $2p$, eine zyklische Gruppe und eine Diedergruppe. Hinweis: Man erinnere die Argumentation im Fall $p = 3$ und interessiere sich für die Anzahl der 2-Sylows.

Ergänzende Übung 6.1.4.16. Sind $p > q$ Primzahlen und ist q kein Teiler von $p - 1$, so ist jede Gruppe der Ordnung pq zyklisch. Hinweis: 6.1.4.11.

Ergänzende Übung 6.1.4.17 (**Struktur endlicher nilpotenter Gruppen**). Man zeige: In einer endlichen nilpotenten Gruppe ist jede Sylow ein Normalteiler. Insbesondere gibt es zu jeder Primzahl p nur eine Sylow, die aus allen Elementen von p-Potenzordnung besteht. Hinweis: Vollständige Induktion über die Gruppenordnung. Man zeige weiter, daß in einer endlichen nilpotenten Gruppe Elemente aus verschiedenen Sylowuntergruppen kommutieren und daß unsere Gruppe isomorph ist zum Produkt ihrer nichttrivialen Sylowuntergruppen.

Ergänzende Übung 6.1.4.18 (**Funktorialität semidirekter Produkte**). Seien A, M, B, N Gruppen und $\kappa : A \to \mathrm{Grp}^\times M$ sowie $\tau : B \to \mathrm{Grp}^\times N$ Gruppenhomomorphismen. Wie bei der Definition semidirekter Produkte in 6.1.2.10 schreiben wir $(\kappa(a))(m) =: ({}^a m)$ und $(\tau(b))(n) =: ({}^b n)$. Seien weiter $\psi : A \to B$ und $\varphi : M \to N$ Gruppenhomomorphismen mit ${}^{\psi(a)}\varphi(m) = \varphi({}^a m)$ für alle $a \in A$ und alle $m \in M$ alias $\tau(\psi(a)) \circ \varphi = \varphi \circ \kappa(a)$ für alle $a \in A$. So ist $\varphi \times \psi$ ein Homomorphismus der semidirekten Produkte

$$(\varphi \times \psi) : M \rtimes A \to N \rtimes B$$

Speziell haben wir$N \rtimes_\tau B \cong N \rtimes_\kappa B$ im Fall $\kappa = (\operatorname{int} \varphi) \circ \tau$ für einen Automorphismus $\varphi \in \mathrm{Grp}^\times N$ der Gruppe N.

Ergänzende Übung 6.1.4.19 (**Gruppen mit** 12 **Elementen**). In dieser Übung sollen Sie zeigen, daß es bis auf Isomorphismus genau 5 Gruppen der Ordnung 12 gibt: Die beiden abelschen Gruppen $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, die Diedergruppe D_6, die alternierende Gruppe A_4 und ein semidirektes Produkt $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, für das mir keine konkrete Interpretation eingefallen ist. Ich rate, der Reihe nach folgendes zu zeigen:

1. In einer Gruppe mit 12 Elementen gibt es entweder nur eine 2-Sylow oder nur eine 3-Sylow. Hinweis: Mehr Platz ist nicht vorhanden.

2. Schreiben wir im folgenden $\rtimes$ nur für semidirekte Produkte, die nicht gewöhnliche Produkte sind, so gehört jede Gruppe mit 12 Elementen zu einer der sechs Typen

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \ltimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \end{array}$$

3. Vom letzten dieser Typen existiert keine Gruppe, von jedem anderen Typ existiert bis auf Isomorphismus genau eine, und diese fünf Gruppen sind paarweise nicht isomorph. Hinweis: Man beachte 6.1.4.18 und beachte auch, daß für den Fall, in dem es von beiden Typen von Sylow nur eine gibt, die Gruppe kommutativ sein muß: Sind H, K die beiden Sylows, so gilt dann ja $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K$ für alle $h \in H, k \in K$.

Ergänzende Übung 6.1.4.20. Man zeige, daß die 2-Sylow in der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_4$ der Drehsymmetrien eines Würfels isomorph ist zur Diedergruppe der Ordnung 8.

Ergänzende Übung 6.1.4.21. Gegeben in einer endlichen Gruppe G zwei Sylow-Untergruppen P, Q gilt stets $\{p \in P \mid pQp^{-1} = Q\} = P \cap Q$. Hinweis: Die Lösung ist im Beweis der Sylowsätze versteckt.

Übung 6.1.4.22. Seien $G \supset N$ eine endliche Gruppe mit einem Normalteiler und sei p prim. Man zeige: Genau dann ist eine Untergruppe $P \subset G$ eine p-Sylow von G, wenn $P \cap N$ eine p-Sylow von N ist und das Bild von P in G/N eine p-Sylow von G/N.

Übung 6.1.4.23. Eine Gruppe mit 30 Elementen kann nie einfach sein. Hinweis: Entweder besitzt sie nur eine 3-Sylow oder nur eine 5-Sylow.

6.1.5 Symmetrische Gruppen

Definition 6.1.5.1. Eine **Partition** λ **einer natürlichen Zahl** $n \in \mathbb{N}$ ist eine monoton fallende Folge von natürlichen Zahlen $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ derart, daß fast alle Folgenglieder verschwinden und die von Null verschiedenen Folgenglieder sich zu n aufsummieren. Die Menge aller Partitionen von n notieren wir $\mathcal{P}_n$.

Beispiel 6.1.5.2. Die Zahl 5 hat genau sieben Partitionen. Salopp können wir sie beschreiben als die Zerlegungen

$$\begin{aligned}
5 &= 5 \\
5 &= 4+1 \\
5 &= 3+2 \\
5 &= 3+1+1 \\
5 &= 2+2+1 \\
5 &= 2+1+1+1 \\
5 &= 1+1+1+1+1
\end{aligned}$$

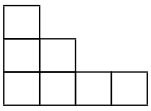
Hier haben wir nur die von Null verschiedenen Folgenglieder aufgeschrieben und sie durch $+$ getrennt. Formal meinen wir zum Beispiel im vierten Fall die Folge $3, 1, 1, 0, 0, \ldots$. Zur Abkürzung verwendet man auch oft die sogenannte **exponentielle Schreibweise**, in der unsere Partitionen von 5 der Reihe nach als 5, 41, 32,

31^2, 2^21, 21^3 und 1^5 geschrieben würden. Sie ist allerdings nur für Partitionen von Zahlen ≤ 9 geschickt.

Ergänzung 6.1.5.3. Eine in vielen Zusammenhängen geschickte Art, sich Partitionen zu veranschaulichen, sind die sogenannten Youngdiagramme. Unter einem **Youngdiagramm** verstehen wir eine endliche Teilmenge $Y \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$((i,j) \in Y \text{ und } i' \leq i \text{ und } j' \leq j) \quad \Rightarrow \quad (i',j') \in Y$$

Die Elemente von Y nennen wir die **Kästchen** unseres Youngdiagramms und stellen uns ein Element (i,j) vor als das Kästchen auf einem Rechenpapier, bei dem die Koordinaten der linken unteren Ecke gerade (i,j) sind. Zum Beispiel stellt das Bild

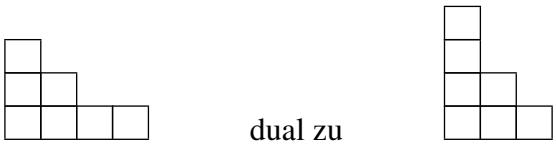


die Menge $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(2,0),(3,0)\}$ dar. In der Praxis denke ich bei Youngdiagrammen stets an Bilder dieser Art.

Ergänzung 6.1.5.4. Jedes Youngdiagramm Y mit n Kästchen im Sinne von 6.1.5.3 liefert zwei Partitionen der Zahl n, die Partition durch die Zeilenlängen $z(Y)$ und die Partition durch die Spaltenlängen $s(Y)$. Bezeichnet $\mathcal{Y}_n$ die Menge aller Youngdiagramme mit n Kästchen und $\mathcal{P}_n$ die Menge aller Partitionen der Zahl n, so erhalten wir auf diese Weise zwei Bijektionen

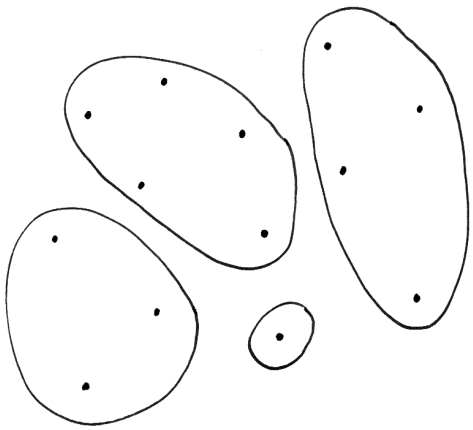
$$\mathcal{P}_n \overset{z}{\underset{\sim}{\leftarrow}} \mathcal{Y}_n \overset{s}{\underset{\sim}{\rightarrow}} \mathcal{P}_n$$

die zusammen eine selbstinverse Bijektion $\mathcal{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_n$ liefern. Diese Bijektion notieren wir $\lambda \mapsto \lambda'$ und nennen λ' die **duale Partition zu** λ. Zum Beispiel ist die duale Partition zu $3,2$ die Partition $2,2,1$ und die duale Partition zu $3,2,1,1$ ist $4,2,1$, im Bild also ist



6.1.5.5. Unter einer **Partition einer Menge** X verstehen wir wie in 4.5.1.15 ein System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von paarweise disjunkten nichtleeren Teilmengen, deren Vereinigung ganz X ist. Die Menge aller Partitionen einer gegebenen Menge X notieren wir $\mathcal{P}_X$. Hat X genau n Elemente, so erhalten wir, indem wir die Kardinalitäten der Teilmengen unserer Mengensysteme der Größe nach aufführen und danach Nullen anhängen, eine offensichtliche Surjektion

$$\mathcal{P}_X \twoheadrightarrow \mathcal{P}_n$$



Eine Partition einer Menge mit dreizehn Elementen durch vier Teilmengen. Die im Sinne von 6.1.5.5 zugehörige Partition der Zahl 13 wäre $13 = 5 + 4 + 3 + 1$.

Eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_7$, unter der die Bilder der Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ der Reihe nach gerade $2, 5, 3, 4, 1, 7, 6$ sind. Die zugehörige Partition der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ist durch die gestrichelten Linien angedeutet und wäre in Formeln die Zerlegung $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 5\} \cup \{6, 7\} \cup \{3\} \cup \{4\}$. Die zugehörige Partition der Zahl 7 ist $7 = 3 + 2 + 1 + 1$.

6.1.5.6. Jede Permutation $\sigma \in \mathrm{Ens}^\times(X)$ einer Menge X liefert eine Partition von X, nämlich die Partition in die Bahnen der von σ erzeugten Untergruppe $\langle\sigma\rangle = \{\sigma^r \mid r \in \mathbb{Z}\}$. Im Fall $|X| = n < \infty$ erhalten wir durch Verknüpfung dieser Abbildung $\mathrm{Ens}^\times(X) \to \mathcal{P}_X$ mit der in 6.1.5.5 diskutierten Abbildung $\mathcal{P}_X \twoheadrightarrow \mathcal{P}_n$ die sogenannte **Zykellängenabbildung** $\mathrm{Ens}^\times(X) \to \mathcal{P}_n$. Im Fall $X = \{1, \ldots, n\}$ ist das eine Abbildung $\mathcal{S}_n \to \mathcal{P}_n$.

6.1.5.7. Ich erinnere an die Operation durch Konjugation einer Gruppe auf sich selber aus 4.5.3.1 und an ihre Bahnen, die Konjugationsklassen.

Satz 6.1.5.8 (Konjugationsklassen in den symmetrischen Gruppen). *Ist X eine endliche Menge mit $|X| = n$ Elementen, so sind die Fasern der Zykellängenabbildung*

$$\mathrm{Ens}^\times(X) \to \mathcal{P}_n$$

genau die Konjugationsklassen in der Permutationsgruppe $\mathrm{Ens}^\times(X)$.

Ergänzung 6.1.5.9. Eine analoge Aussage gilt mit demselben Beweis auch für eine beliebige Menge X.

Beweis. Seien Permutationen $\sigma, \tau \in \mathrm{Ens}^\times(X)$ gegeben. Ist $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ die Partition von X in die Bahnen von $\langle\sigma\rangle$, so ist

$$X = \tau(X_1) \cup \ldots \cup \tau(X_r)$$

die Partition in die Bahnen von $\langle\tau\sigma\tau^{-1}\rangle$, folglich ist die Zykellängenabbildung konstant auf Konjugationsklassen. Die Zykellängenabbildung ist auch offensichtlich surjektiv. Um schließlich zu zeigen, daß je zwei Permutationen mit denselben Zykellängen konjugiert sind, seien etwa $\sigma, \kappa \in \mathrm{Ens}^\times(X)$ unsere beiden Permutationen und

$$\begin{aligned} X &= X_1 \cup \ldots \cup X_r \\ X &= Y_1 \cup \ldots \cup Y_r \end{aligned}$$

die Zerlegungen in Bahnen unter $\langle\sigma\rangle$ und $\langle\kappa\rangle$ mit $|X_i| = |Y_i| = r_i$. Gegeben $z \in X_i$ und $u \in Y_i$ haben wir dann

$$\begin{aligned} X_i &= \{z, \sigma(z), \sigma^2(z), \ldots, \sigma^{r_i}(z) = z\} \\ Y_i &= \{u, \kappa(u), \kappa^2(u), \ldots, \kappa^{r_i}(u) = u\} \end{aligned}$$

Definieren wir also $\tau : X_i \xrightarrow{\sim} Y_i$ durch $\tau(\sigma^\nu(z)) = \kappa^\nu(u)$, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"'] & X_i \arrow[d, "\tau"] \\ Y_i \arrow[r, "\kappa"] & Y_i \end{tikzcd}$$

Setzen wir dann alle diese $\tau : X_i \xrightarrow{\sim} Y_i$ zusammen zu $\tau : X \xrightarrow{\sim} X$, so gilt ebenso $\kappa\tau = \tau\sigma$ alias $\kappa = \tau\sigma\tau^{-1}$. $\square$

Definition 6.1.5.10. Hat $\langle\sigma\rangle$ außer einer p-elementigen Bahn nur einelementige Bahnen, so nennt man σ einen p**-Zykel**. Die Zweizykel heißen auch **Transpositionen**.

6.1.5.11 (**Zykelschreibweise für Permutationen**). Eine Möglichkeit, Permutationen zu notieren, besteht darin, unter jedes Element sein Bild zu schreiben, also etwa

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Eine andere Möglichkeit ist die Notation als Produkt paarweise disjunkter Zykel. Ein p-Zykel σ wird notiert in der Form $\sigma = (z, \sigma(z), \sigma^2(z), \ldots, \sigma^{p-1}(z))$ wobei $\sigma^p(z) = z$ zu verstehen ist. In **Zykelschreibweise** hätten wir für unsere Permutation τ von eben etwa

$$\tau = (1,6)(2,4,3)(5)$$

und das ist so zu verstehen, daß jedes Element auf das dahinterstehende abgebildet wird, außer wenn es direkt vor einer Klammer steht: Dann wird es auf das erste Element innerhalb seiner Klammer abgebildet. Oft werden Fixpunkte nicht mit notiert, so daß wir also auch schreiben könnten

$$\tau = (1,6)(2,4,3)$$

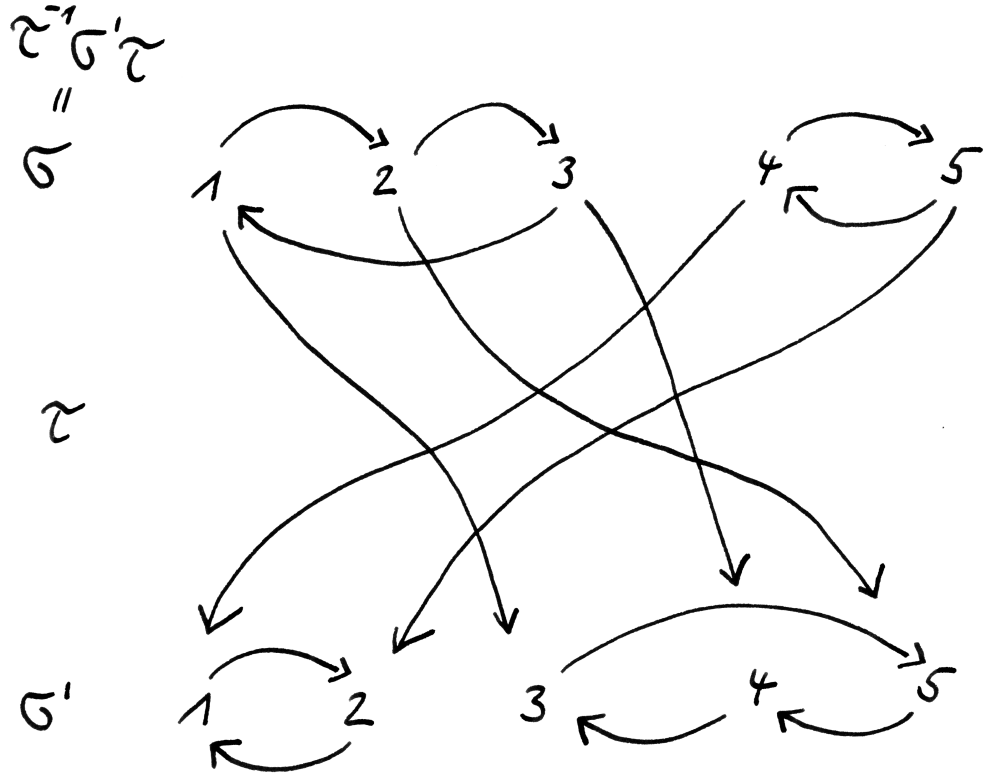
Das ist übrigends auch das Produkt der Transposition $\kappa = (1,6)$ mit den Dreizykel $\rho = (2,4,3)$ und wir haben $\tau = \kappa\rho = \rho\kappa$, was die Sinnhaftigkeit unserer Notation zeigt. Zwei Zykel heißen **disjunkt** genau dann, wenn jedes Element von einem der beiden festgehalten wird. Ganz allgemein kommutieren disjunkte Zykel, so gilt etwa $(1,6)(2,3,4) = (2,3,4)(1,6)$ in $\mathcal{S}_6$.

Übungen

Ergänzende Übung 6.1.5.12 (**Partitionen und nilpotente Matrizen**). Gegeben ein n-dimensionaler Vektorraum V bildet für jeden nilpotenten Endomorphismus $N \in \operatorname{End} V$ die Folge der Dimensionen $\dim(\operatorname{im} N^r / \operatorname{im} N^{r+1})$ eine Partition von n, und die Fasern der so konstruierten Abbildung

$$\{N \in \operatorname{End} V \mid N \text{ nilpotent}\} \to \mathcal{P}_n$$

sind genau die Bahnen der Operation von $\mathrm{GL}(V)$ durch Konjugation auf der Menge der nilpotenten Endomorphismen von V.



Zwei Permutationen $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_5$, die dieselbe Partition $5 = 3 + 2$ liefern, und eine Permutation τ, die sie ineinander konjugiert.

Übung 6.1.5.13. Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_5$ besitzt genau sieben Konjugationsklassen.

Ergänzende Übung 6.1.5.14. Das Signum eines p-Zykels ist stets $(-1)^{p+1}$.

Übung 6.1.5.15. Man zeige unabhängig von unseren geometrischen Betrachtungen zur Ikosaedergruppe 6.1.2.5, daß es in der alternierenden Gruppe A_5 genau 5 Konjugationsklassen gibt, die die Kardinalitäten 20, 15, 12, 12 und 1 haben. Man folgere, daß die alternierende Gruppe A_5 einfach ist.

Ergänzende Übung 6.1.5.16 (**Zentralisatoren in symmetrischen Gruppen**). Seien X eine endliche Menge und $\sigma \in \mathcal{S} := \operatorname{Ens}^\times X$ eine Permutation von X. Ihr Zentralisator $\mathrm{Z}_{\mathcal{S}}(\sigma)$ nach 6.1.3.3 operiert auf dem Bahnenraum von $\langle\sigma\rangle$ und jede Permutation des Bahnenraums $X/\langle\sigma\rangle$, die die Kardinalitäten von Bahnen erhält, kann durch ein Element unseres Zentralisators realisiert werden. Hat unser σ jeweils $n(i)$ Zykel der Länge i und keinen Zykel einer Länge $> r$, so hat das Bild von $\mathrm{Z}_{\mathcal{S}}(\sigma) \to \operatorname{Ens}^\times(X/\langle\sigma\rangle)$ also genau $n(1)!n(2)!\ldots n(r)!$ Elemente. Der Kern hinwiederum besteht aus denjenigen Elementen des Zentralisators, die jede Bahn von $\langle\sigma\rangle$ auf sich selber abbilden, und davon gibt es offensichtlich $1^{n(1)}\ldots r^{n(r)}$ Stück. Zusammen erhalten wir mit 3.4.3.11 so

$$|\mathrm{Z}_{\mathcal{S}}(\sigma)| = \prod_{i=1}^{r} n(i)!i^{n(i)}$$

6.1.6 Alternierende Gruppen*

6.1.6.1. Die Abbildung sgn, die jeder Permutation $\tau \in \mathcal{S}_r$ ihr Signum zuordnet, ist ein Gruppenhomomorphismus $\operatorname{sgn} : \mathcal{S}_r \to \{1, -1\}$. Der Kern dieses Gruppenhomomorphismus, d.h. die Gruppe aller geraden Permutationen von r Objekten, heißt die r-te **alternierende Gruppe** und wird notiert als

$$A_r = \ker(\operatorname{sgn} : \mathcal{S}_r \to \{1, -1\})$$

Satz 6.1.6.2. *Die alternierenden Gruppen A_r sind einfach für $r \geq 5$.*

6.1.6.3. In der alternierenden Gruppe A_4 bilden die drei Doppeltranspositionen zusammen mit dem neutralen Element einen Normalteiler, der isomorph ist zur Klein'schen Vierergruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Insbesondere ist A_4 nicht einfach. Die Gruppen A_1 und A_2 sind trivial, $A_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist jedoch auch noch einfach. Daß A_5 einfach ist, kann man wie beim Beweis der Einfachkeit der Ikosaedergruppe unmittelbar einsehen, indem man die Kardinalitäten der Konjugationsklassen berechnet. Dem Beweis des Satzes im allgemeinen schicken wir zwei Lemmata voraus.

6.1.6.4. Hat das Erzeugnis $\langle\sigma\rangle$ einer Permutation σ genau zwei zweielementige und sonst nur einelementige Bahnen, so heißt σ eine **Doppeltransposition**. Hat $\langle\sigma\rangle$ genau zwei dreielementige und sonst nur einelementige Bahnen, so nennen wir σ einen **Doppeldreizykel**.

Lemma 6.1.6.5. *Die symmetrischen Gruppen $\mathcal{S}_r$ werden von den Transpositionen erzeugt, die alternierenden Gruppen A_r von den Dreizykeln.*

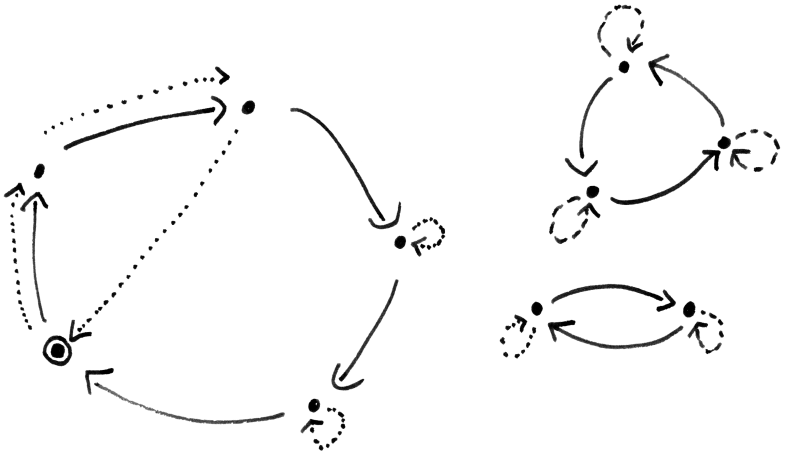
Beweis. Die erste Aussage war Übung 3.6.1.8. Die Zweite folgt daraus, daß man jede Doppeltransposition als Produkt von zwei Dreizykeln schreiben kann, $(ab)(cd) = (abc)(bcd)$, und daß das Produkt von zwei nicht kommutierenden Transpositionen ein Dreizykel ist, $(ab)(ac) = (acb)$. Jedes Produkt einer geraden Zahl von Transpositionen läßt sich demnach auch als ein Produkt von Dreizykeln darstellen. □

Lemma 6.1.6.6. *Für $r \geq 5$ wird die alternierende Gruppe A_r nicht nur erzeugt von den Dreizykeln, sondern auch von den Doppeltranspositionen. Des weiteren sind für $r \geq 5$ je zwei Doppeltranspositionen und je zwei Dreizykel auch schon in A_r konjugiert.*

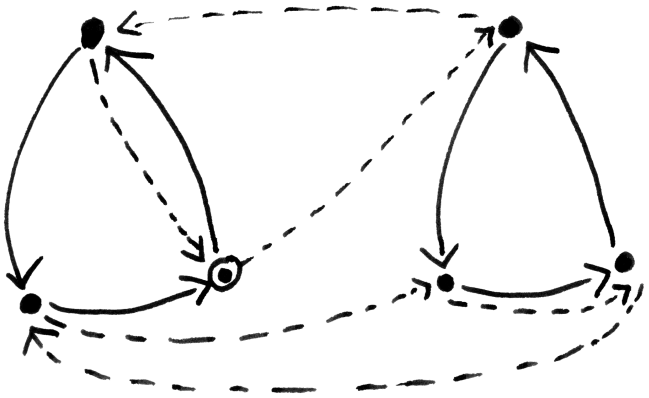
Beweis. Jeder Dreizykel kann als Verknüpfung von zwei Transpositionen seiner drei Elemente dargestellt werden. Haben wir noch zwei weitere Elemente zur Verfügung, so können wir diese beiden Transpositionen durch das Verknüpfen mit der Vertauschung dieser beiden Elemente zu Doppeltranspositionen machen. Das zeigt die erste Aussage. Zwei Doppeltranspositionen $(ab)(cd)$ und $(a'b')(c'd')$ sind konjugiert unter jeder Permutation τ mit $a \mapsto a', \ldots, d \mapsto d'$ und auch unter $\tau \circ (ab)$. Entweder τ oder $\tau \circ (ab)$ ist aber stets gerade. Zwei Dreizykel (abc) und $(a'b'c')$ sind konjugiert unter jeder Permutation τ mit $a \mapsto a', \ldots, c \mapsto c'$ und insbesondere auch unter $\tau \circ (de)$ für (de) disjunkt von (abc). Entweder τ oder $\tau \circ (de)$ ist aber stets gerade. Das zeigt die zweite Aussage. □

Beweis von 6.1.6.2. Sei ab jetzt r beliebig und $N \subset A_r$ ein nichttrivialer Normalteiler. Nach dem vorhergehenden Lemma 6.1.6.6 reicht es zu zeigen, daß es in N entweder eine Doppeltransposition oder einen Dreizykel gibt. Dazu zeigen wir, wie man zu jedem nichttrivialen Element $g \in N$, das weder eine Doppeltransposition noch ein Dreizykel ist, ein anderes nichttriviales Element $\tilde{g} \in N$ mit noch mehr Fixpunkten konstruieren kann. Indem wir zu Potenzen von g übergehen, können wir g von Primzahlordnung annehmen.

Ist $\operatorname{ord} g \geq 5$, so wählen wir einen Zykel von g und betrachten einen Dreizykel h, der von einem festen Ausgangspunkt auf dem Zykel von g zwei Schritte mitläuft um dann wieder zum Ausgangspunkt zurückzukehren. Dann ist unser Ausgangspunkt ein Fixpunkt von $\tilde{g} = h^{-1}g^{-1}hg$ und wir haben ein nichttriviales $\tilde{g} \in N$ gefunden, das mehr Fixpunkte hat als g.



Die durchgezogenen Pfeile stellen eine Permutation g der Ordnung ≥ 5 auf der Menge der fetten Punkte dar, die gestrichelten Pfeile den im Beweis beschriebenen Dreizykel h, der umrandete Punkt unseren „Ausgangspunkt“.



Die durchgezogenen Pfeile stellen einen Doppeldreizykel g auf der Menge der fetten Punkte dar, die gestrichelten Pfeile den im Beweis beschriebenen dazu konjugierten Doppeldreizykel h, der umrandete Punkt einen Fixpunkt von hg.

Ist $\operatorname{ord} g = 3$ und ist g kein Dreizykel, so muß g ein Produkt sein von mindestens zwei disjunkten Dreizykeln. Dann stimmen die Konjugationsklassen von g in A_r und in $\mathcal{S}_r$ überein, da es nämlich eine ungerade Permutation gibt, die mit g kommutiert, zum Beispiel eine geeignete „Dreifachtransposition zwischen zwei Dreizykeln von g". Es ist nun ein Leichtes, in $\mathcal{S}_6$ zwei Doppeldreizykel zu finden derart, daß ihr Produkt nicht trivial ist und dennoch einen Fixpunkt hat. Wenn wir also einen Doppeldreizykel von g auf der zugehörigen 6-elementigen Menge konjugieren zu einem geeigneten anderen Doppeldreizykel, so erhalten wir ein $h \in N$ derart, daß hg nicht trivial ist und mehr Fixpunkte hat als g.

Ist schließlich $\operatorname{ord} g = 2$ und g keine Doppeltransposition, so muß g ein Produkt sein von mindestens zwei disjunkten Doppeltranspositionen. Wieder stimmen dann die Konjugationsklassen von g in A_r und in $\mathcal{S}_r$ überein, da es eine ungerade Permutation gibt, die mit g kommutiert, zum Beispiel eine „Transposition aus einer Doppeltransposition von g". Wir finden also $h \in N$ derart, daß h auf einer vierelementigen Teilmenge eine andere Doppeltransposition ist als g und außerhalb dieser vierelementigen Teilmenge mit g übereinstimmt. Dann ist hg die dritte Doppeltransposition auf unserer vierelementigen Teilmenge und die Identität außerhalb, ist also einerseits nicht trivial und hat andererseits mehr Fixpunkte als g. $\square$

Übungen

Übung 6.1.6.7. Man zeige, daß die Gruppe aller jeweils nur endlich viele Elemente bewegenden geraden Permutationen einer unendlichen Menge eine einfache aber nicht endlich erzeugte Gruppe ist.

Ergänzende Übung 6.1.6.8. Man zeige für $r \geq 5$, daß A_r der einzige nichttriviale echte Normalteiler von $\mathcal{S}_r$ ist. Man bestimme alle Kompositionsreihen aller symmetrischen Gruppen.

6.1.6.9. Nach der vorhergehenden Übung ist für $r \geq 5$ jeder Gruppenhomomorphismus von der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_r$ in eine weitere Gruppe entweder injektiv oder konstant oder hat denselben Kern wie das Signum. Salopp gesprochen kann es also kein „verbessertes Signum" geben.

Ergänzende Übung 6.1.6.10. In dieser Übung sollen Sie zeigen, daß die Gruppe $\mathrm{SL}(2;\mathbb{F}_5)$ genau fünf 2-Sylows besitzt und daß die Operation dieser Gruppe auf der Menge ihrer 2-Sylows einen Isomorphismus

$$\mathrm{SL}(2;\mathbb{F}_5)/\{\pm\,\mathrm{id}\} \xrightarrow{\sim} A_5$$

mit der sogenannten „alternierenden Gruppe" aller geraden Permutationen einer fünfelementigen Menge induziert. Den Quotienten auf der linken Seite notiert man auch $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{F}_5)$, er liegt als Untergruppe vom Index 2 in der Gruppe

$\mathrm{PGL}(2;\mathbb{F}_5)$ aller von invertierbaren Matrizen induzierten Automorphismen der projektiven Gerade alias dem Quotienten von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{F}_5)$ nach der Gruppe der vier darin enthaltenen Diagonalmatrizen. Ich rate, der Reihe nach folgendes zu zeigen:

1. Jedes Element der Ordnung 4 in $\mathrm{SL}(2;\mathbb{F}_5)$ ist diagonalisierbar und der Normalisator seines Erzeugnisses ist eine 2-Sylow. Jede 2-Sylow enthält 6 Elemente der Ordnung 4.

2. Es gibt in $\mathrm{SL}(2;\mathbb{F}_5)$ genau dreißig Elemente der Ordnung 4 und fünf 2-Sylows, und der Schnitt von je zwei verschiedenen 2-Sylows besteht nur aus $\pm\,\mathrm{id}$.

3. Jede 2-Sylow von $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{F}_5)$ ist eine Klein'sche Vierergruppe und operiert nach 6.1.4.21 frei auf der Menge der vier anderen 2-Sylows. Vom Bild unseres Homomorphismus $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{F}_5) \to \mathcal{S}_5$ wissen wir damit, daß es alle Doppeltranspositionen enthält und aus höchstens 60 Elementen besteht. Nach 6.1.6.6 muß dieses Bild folglich die A_5 sein.

Ergänzung 6.1.6.11. Genau dann ist jede gerade Permutation von n Objekten ein Produkt von zwei l-Zykeln, falls gilt $3n/4 \le l$. Edward Bertram: Even permutations as a product of two conjugate cycles. J. Combinatorial Theory Ser. A, 12: S. 368-380, 1972.

6.2 Mehr zu Ringen

6.2.1 Quotientenringe

6.2.1.1. Wir erinnern die grundlegenden Definitionen zu Ringen aus 3.5.1. Unter einem **Ring** versteht man eine Menge mit zwei Verknüpfungen $(R, +, \cdot)$ derart, daß $(R, +)$ eine abelsche Gruppe ist und $(R, \cdot)$ ein Monoid und daß für alle $a, b, c \in R$ die Distributivgesetze $a(b + c) = ab + ac$ sowie $(a + b)c = ac + bc$ gelten.

6.2.1.2. Das neutrale Element des multiplikativen Monoids eines Rings notiert man meist $1_R = 1$. Ein typisches Beispiel ist der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation als Verknüpfung. Ebenfall typisch ist der Ring $\mathrm{Mat}(n; R)$ der $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen aus einem beliebigen Ring R mit der Addition und Multiplikation von Matrizen als Verknüpfung.

6.2.1.3. Eine Abbildung $\varphi : R \to S$ von einem Ring in einen anderen heißt ein **Ringhomomorphismus**, wenn sie sowohl ein Gruppenhomomorphismus ist für die zugrundeliegenden additiven Gruppen als auch ein Monoidhomomorphismus ist für die zugrundeliegenden multiplikativen Monoide.

6.2.1.4. Wir fordern von einem Monoidhomomorphismus stets, daß er das neutrale Element auf das neutrale Element abbildet. Insbesondere fordern wir damit von einem Ringhomomorphismus stets $\varphi(1_R) = 1_S$. Die Menge aller Ringhomomorphismen von einem Ring R in einen Ring S notieren wir $\mathrm{Ring}(R, S)$.

6.2.1.5. Die Stärke der Ringtheorie liegt unter anderem darin, daß es sehr viele Vefahren gibt, die zu einem gegebenen Ring einen weiteren Ring konstruieren, und daß man auf diese neuen Ringe dann wieder alle bereits bekannten Sätze anwenden kann. Beispiele sind das Bilden von Polynomringen, Potenzreihenringen 3.5.3.42 und Matrizenringen. Wir besprechen im folgenden zusätzlich das Bilden von Restklassenringen.

Satz 6.2.1.6 (Universelle Eigenschaft surjektiver Ringhomomorphismen). *Seien $s : R \twoheadrightarrow Q$ ein surjektiver Ringhomomorphismus und $\varphi : R \to S$ ein beliebiger Ringhomomorphismus. Genau dann existiert ein Ringhomomorphismus $\bar{\varphi} : Q \to S$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ s$, wenn gilt $\ker(\varphi) \supset \ker(s)$.*

6.2.1.7. Dieser Homomorphismus $\bar{\varphi}$ ist dann natürlich eindeutig bestimmt. In diesem Sinne kann man diesen Satz auch dahingehend zusammenfassen, daß das Vorschalten eines surjektiven Homomorphismus $s : R \twoheadrightarrow Q$ für jeden weiteren Ring S eine Bijektion

$$(\circ s) : \mathrm{Ring}(Q, S) \xrightarrow{\sim} \{\varphi \in \mathrm{Ring}(R, S) \mid \ker(\varphi) \supset \ker(s)\}$$

liefert. Der Übersichtlichkeit halber stelle ich die in diesem Satz auftauchenden Ringe und Morphismen auch noch wieder anders in einem Diagramm dar:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, two heads, "s"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Q \arrow[d, dashed, "\bar{\varphi}"] \\ & S \end{tikzcd}$$

Man formuliert diesen Satz auch mit den Worten, φ **faktorisiere in eindeutiger Weise über** s.

Beweis. Offensichtlich ist φ konstant auf den Fasern von s. Damit, oder auch indem wir die universelle Eigenschaft von surjektiven Gruppenhomomorphismen 4.4.2.1 zitieren, finden wir schon mal eine Abbildung $\bar{\varphi}$ wie behauptet. Man prüft leicht, daß sie ein Ringhomomorphismus ist. □

6.2.1.8 (**Surjektive Ringhomomorphismen mit gleichem Kern**). Gegeben ein Ring R und zwei surjektive Ringhomomorphismen $s : R \twoheadrightarrow Q$ und $t : R \twoheadrightarrow P$ mit demselben Kern $\ker(s) = \ker(t)$ sind die Ringhomomorphismen $\bar{t} : Q \to P$ mit $\bar{t} \circ s = t$ und $\bar{s} : P \to Q$ mit $\bar{s} \circ t = s$ nach 6.2.1.6 offensichtlich zueinander inverse Isomorphismen $Q \xrightarrow{\sim} P \xrightarrow{\sim} Q$. Salopp gesprochen wird also bei einem surjektiven Ringhomomorphismus „das Ziel bereits durch den Ausgangsraum und den Kern festgelegt bis auf eindeutigen Isomorphismus“.

Definition 6.2.1.9. Sei R ein Ring. Ein **Ideal von** R ist eine Teilmenge $I \subset R$ mit der Eigenschaft, daß I eine Untergruppe ist von $(R, +)$ und daß zusätzlich gilt $RI \subset I$ und $IR \subset I$.

6.2.1.10. Anders gesagt ist also Teilmenge $I \subset R$ eines Rings ein Ideal genau dann wenn gilt $0 \in I$, $a, b \in I \Rightarrow a + b \in I$, $a \in I \Rightarrow (-a) \in I$ sowie $r \in R, a \in I \Rightarrow ra, ar \in I$. Die Bedingung $(-a) \in I$ ist dabei sogar überflüssig, weil ja eh gilt $(-a) = (-1)a$ für alle $a \in R$. Weiter kann die Bedingung $0 \in I$ durch die Bedingung $I \neq \emptyset$ ersetzt werden, da ja gilt $0 = 0b$ für alle $b \in R$.

Beispiele 6.2.1.11. Ein Ideal von $\mathbb{Z}$ ist dasselbe wie eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$, die Ideale von $\mathbb{Z}$ sind also nach 3.4.3.4 genau die Teilmengen der Gestalt $\mathbb{Z}m$ für $m \in \mathbb{N}$. Für ein beliebiges Element a in einem kommutativen Ring R ist die Menge Ra aller Vielfachen von a ein Ideal. Der ganze Ring R und $\{0\}$ sind stets Ideale.

6.2.1.12. Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so ist $\ker \varphi := \varphi^{-1}(0)$ ein Ideal von R. Man versteht bei Ringhomomorphismen den Kern stets in Bezug auf die additive Struktur. Allgemeiner ist das Urbild von einem Ideal unter einem Ringhomomorphismus stets wieder ein Ideal, und desgleichen das Bild eines Ideals unter einem *surjektiven* Ringhomomorphismus.

Proposition 6.2.1.13. *Seien R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal. So gibt es einen von R ausgehenden surjektiven Ringhomomorphismus mit I als Kern.*

6.2.1.14. Nach 6.2.1.8 ist ein surjektiver Ringhomomorphismus mit Kern I eindeutig bis auf das Nachschalten eines eindeutigen Isomorphismus. Wir notieren ihn

$$\mathrm{can} = \mathrm{can_q} : R \twoheadrightarrow R/I$$

Vorsichtig veranlagte Leser mögen unter R/I alternativ das im folgenden Beweis konstruierte explizite Beispiel für solch einen Ringhomomorphismus verstehen. Das Bild in R/I von $a \in R$ bezeichnet man auch oft mit $\mathrm{can}(a) = \bar{a}$. Man nennt R/I einen **Restklassenring** oder **Quotientenring** oder abkürzend **Quotienten** oder auch einen **Faktorring**. Er darf nicht verwechselt werden mit dem Quotientenkörper eines kommutativen Integritätsbereichs, wie er in 3.5.5.2 eingeführt wurde.

Beispiel 6.2.1.15. Den Spezialfall der Restklassenringe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ kennen wir bereits aus 3.5.2.4. Ich ziehe im allgemeinen die Bezeichnung als Quotientenring vor.

Beweis. Wir gehen aus von der Surjektion $q : R \twoheadrightarrow R/I$ auf die Quotientengruppe in Bezug auf die additive Struktur. Dann gibt es genau eine bilineare Abbildung $\bar{m} : R/I \times R/I \to R/I$ derart, daß mit der Multiplikation m in der oberen Horizontale das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \times R \arrow[r, "m"] \arrow[d, "q\times q"'] & R \arrow[d, "q"] \\ R/I \times R/I \arrow[r, dashed, "\bar{m}"] & R/I \end{tikzcd}$$

kommutiert, denn $q \circ m$ ist konstant auf den Fasern von $q \times q$. In der Tat haben wir $(r+i)(s+j) = rs+is+rj+ij \in rs+I$ für alle $i, j \in I$ und $r, s \in R$. In größerer Allgemeinheit haben Sie das möglicherweise bereits als Übung 4.4.2.27 geprüft. Es ist dann leicht zu sehen, daß $\bar{m}$ als Multiplikation die Nebenklassengruppe R/I zu einem Ring macht. □

6.2.1.16. Ganz allgemein ist ein Schnitt von Idealen eines Rings R stets wieder ein Ideal. Gegeben eine Teilmenge $T \subset R$ bezeichen wir mit $\langle T \rangle \subset R$ das kleinste Ideal von R, das T umfaßt, und nennen es das **von T erzeugte Ideal**. Wir können $\langle T \rangle$ entweder beschreiben als den Schnitt aller Ideale, die T umfassen, oder als die Menge aller endlichen Ausdrücke

$$\langle T \rangle = \{a_1 t_1 b_1 + \ldots + a_n t_n b_n \mid n \geq 0,\ a_i, b_i \in R,\ t_i \in T\}$$

Hierbei ist der leere Ausdruck mit $n = 0$ wie üblich als die Null von R zu verstehen. Ist $T = \{t_1, \ldots, t_r\}$ eine endliche Menge, so schreiben wir auch $\langle T \rangle =$

$\langle t_1, \ldots, t_r \rangle$. Insbesondere gilt für einen kommutativen Ring R zum Beispiel $\langle a \rangle = Ra$ für alle $a \in R$. Wollen wir betonen, daß das Symbol zwischen den Spitzklammern für eine Menge von Erzeugern und nicht für einen einzigen Erzeuger steht, so schreiben wir $\langle T \rangle = \langle {}_! T \rangle$. Ideale, die von einem einzigen Element erzeugt werden können, heißen **Hauptideale**. Insbesondere ist nach 3.4.3.4 jedes Ideal in $\mathbb{Z}$ ein Hauptideal.

Ergänzung 6.2.1.17. Sei R ein Ring und $T \subset R$ eine Teilmenge. Wenn wir betonen wollen, daß $\langle T \rangle$ das von T erzeugte Ideal und nicht etwa die von T erzeugte Untergruppe meint, schreiben wir auch ${}_R\langle T \rangle_R$ oder $\langle RTR \rangle$ und im Fall eines kommutativen Rings $\langle T \rangle_R$ oder $\langle TR \rangle$. Im Fall eines nichtkommutativen Rings dahingegen meint $\langle T \rangle_R = \langle TR \rangle$ das von T erzeugte Rechtsideal, wie es in 7.2.3.4 eingeführt wird.

Ergänzung 6.2.1.18 (**Herkunft der Bezeichnung „Ideal“**). Die Bezeichnung als „Ideal“ ist abgeleitet von Kummer's Begriff einer „idealen Zahl“. Diese „idealen Zahlen“ führte Kummer ein, um Schwierigkeiten im Zusammenhang mit der Nichtexistenz eindeutiger Primfaktorzerlegungen in sogenannten „Ganzheitsringen von Zahlkörpern“ zu umgehen. Das einfachste Beispiel $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ für dieses Phänomen besprechen wir in 6.2.4.8. Erklären wir auf der Menge aller von Null verschiedenen Ideale eines solchen Ganzheitsrings $\mathfrak{o}$ eine Verknüpfung, in dem wir IJ als das von allen Produkten ab mit $a \in I$ und $b \in J$ erzeugte Ideal alias die von allen solchen Produkten erzeugte Untergruppe verstehen, die wir eigentlich $\langle IJ \rangle$ notieren müßten, so gilt in dieser Menge aller Ideale nämlich das Analogon der eindeutigen Primfaktorzerlegung, vergleiche etwa 7.8.2.11. Ordnen wir nun jeder Zahl $a \in \mathfrak{o}$ das von a erzeugte Hauptideal $\langle a \rangle$ zu, so erhalten wir eine Einbettung

$$\mathfrak{o}/\mathfrak{o}^\times \hookrightarrow \{I \subset \mathfrak{o} \mid I \text{ ist Ideal}\}$$

des Monoids aller „bis auf Einheiten wohlbestimmten Elemente von $\mathfrak{o}$“, in dem das Analogon der eindeutigen Primfaktorzerlegung nicht immer gilt, in das Monoid aller von Null verschiedenen Ideale, in dem es im Fall des Ganzheitsrings eines Zahlkörpers eben doch immer gilt. Kummer konnte das in einigen Fällen bereits selbst zeigen und bezeichnete deshalb die Elemente dieses größeren Monoids, das er selbst auf recht verschlungenen Wegen konstruierte, als „ideale Zahlen“.

6.2.1.19 (**Ideale und Teilerbeziehung**). Gegeben ein Kring R und Elemente $a, b \in R$ ist a ein Teiler von b genau dann, wenn gilt $\langle a \rangle \ni b$ oder gleichbedeutend $\langle a \rangle \supset \langle b \rangle$, in Formelsprache

$$a|b \;\Leftrightarrow\; b \in \langle a \rangle \;\Leftrightarrow\; \langle b \rangle \subset \langle a \rangle$$

Gegeben ein Kring R und ein Element $u \in R$ ist u eine Einheit genau dann, wenn gilt $\langle u \rangle = R$. Gegeben ein kommutativer Integritätsbereich folgt aus $\langle a \rangle = \langle b \rangle$, daß es eine Einheit $u \in R^\times$ gibt mit $au = b$.

Beispiel 6.2.1.20 (**Quotienten von Polynomringen**). Gegeben ein Körper k und ein von Null verschiedenes Polynom $P \in k[X]\backslash 0$ haben wir

$$\dim_k k[X]/\langle P\rangle = \operatorname{grad} P$$

Genauer bilden für $\operatorname{grad} P = d$ die Nebenklassen der Monome $1, X, \ldots, X^{d-1}$ eine k-Basis des Restklassenrings $k[X]/\langle P\rangle$. Noch etwas allgemeiner liefert Polynomdivision mit Rest 3.5.3.15 für jeden Kring k und jedes normierte Polynom $P \in k[X]$, daß die Polynome von einem Grad $\leq (\operatorname{grad} P) - 1$ ein Repräsentantensystem für die Menge $k[X]/\langle P\rangle$ der Nebenklassen nach dem von P erzeugten Hauptideal bilden. Bezeichnet also $k[X]^{\leq n} \subset k[X]$ die Menge aller Polynome vom Grad $\leq n$, so liefert für jedes normierte Polynom P die kanonische Projektion einen Gruppenisomorphismus

$$k[X]^{\leq(\operatorname{grad} P)-1} \xrightarrow{\sim} k[X]/\langle P\rangle$$

Beispiel 6.2.1.21 (**Die komplexen Zahlen als Quotient**). Wir erinnern die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit ihrem ausgezeichneten Element $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$. Das Einsetzen von i für X im Sinne von 3.5.3.5 liefert mithilfe der universellen Eigenschaft des Quotienten 6.2.1.13 Isomorphismen von Ringen

$$\mathbb{R}[X]/\langle X^2 + 1\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

und $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 + 1\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Hier ist $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ im Sinne von 6.2.2.1 zu verstehen als der Ring aller komplexen Zahlen mit ganzzahligem Real- und Imaginärteil. Ich mache die Nebenrechnung $(X - (2 + \mathrm{i}))(X - \overline{(2 + \mathrm{i})}) = X^2 - 4X + 3$. Das Einsetzen von $2 + \mathrm{i}$ für X liefert also auch einen Isomorphismus

$$\mathbb{R}[X]/\langle X^2 - 4X + 2\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

Allgemeiner könnten wir hier den Quotienten nach jedem Polynom vom Grad Zwei ohne reelle Nullstelle nehmen.

6.2.1.22. Gegeben ein Kring k und ein Element $\lambda \in k$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & k[X] \arrow[dl, "\delta_\lambda"'] \arrow[dr, "q"] & \\ k \arrow[rr, "\sim"] & & k[X]/\langle X - \lambda\rangle \end{tikzcd}$$

mit der Auswertungsabbildung δ_λ und der von der Einbettung $k \hookrightarrow k[X]$ induzierten unteren Horizontalen.

6.2.1.23 (**Polynomringe über Restklassenringen**). Gegeben sei ein Ring R mit einem Ideal I. Bezeichnet $I[X] \subset R[X]$ das von unserem Ideal I im Polynomring erzeugte Ideal, so induziert der offensichtliche Ringhomomorphismus $R[X] \twoheadrightarrow (R/I)[X]$ aus 3.5.3.11 offensichtlich einen Isomorphismus

$$R[X]/I[X] \xrightarrow{\sim} (R/I)[X]$$

Übungen

Ergänzende Übung 6.2.1.24. Man zeige: Gegeben ein surjektiver Ringhomomorphismus $\varphi : R \twoheadrightarrow S$ liefert das Bilden des Urbilds eine Bijektion zwischen der Menge der Ideale von S und der Menge derjenigen Ideale von R, die $\ker \varphi$ umfassen.

Übung 6.2.1.25. Gegeben ein normiertes Polynom P mit Koeffizienten in einem Körper k ist das P bis auf ein Vorzeichen genau das charakteristsche Polynom der Multiplikation mit X als Endomorphismus des k-Vektorraums $k[X]/\langle P\rangle$.

6.2.2 Teilringe

Definition 6.2.2.1. Eine Teilmenge eines Rings heißt ein **Teilring**, wenn sie so mit der Struktur eines Rings versehen werden kann, daß die Einbettung ein Ringhomomorphismus wird. Gleichbedeutend und expliziter ist das eine Teilmenge eines Rings, die sein Einselement enthält, die abgeschlossen ist unter Addition und Multiplikation, und die mit diesen Verknüpfungen zu einem Ring wird.

Ergänzung 6.2.2.2. Die in 3.5.1.5 bereits angesprochene Begriffsverwirrung setzt sich hier fort: Autoren, deren Ringe kein Einselement zu enthalten brauchen, fordern von ihren Teilringen zwar dem Wortlaut nach dasselbe wie wir im ersten Satz der Definition 6.2.2.1. Es bedeutet dann aber in unserer Terminologie nur noch, daß unsere Teilmenge unter Addition und Multiplikation abgeschlossen ist und mit diesen Verknüpfungen zu einem Rng wird. Wir nennen eine derartige Teilmenge eine **$\mathbb{Z}$-Unteralgebra**. Jedes Ideal eines Rings ist eine $\mathbb{Z}$-Unteralgebra, aber das einzige Ideal, das ein Teilring ist, ist der ganze Ring selber. Es ist im übrigen auch durchaus möglich, daß eine $\mathbb{Z}$-Unteralgebra eine Rings selbst wieder ein Ring ist, ohne aber in unserem Sinne ein Teilring zu sein: Der Nullring etwa ist eine $\mathbb{Z}$-Unteralgebra aber kein Teilring von $\mathbb{Q}$, und der Ring $\mathbb{Z} \times 0$ ist eine $\mathbb{Z}$-Unteralgebra aber kein Teilring von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

6.2.2.3. Jeder Schnitt von Teilringen ist selbst ein Teilring. Den kleinsten Teilring eines Ringes R, der eine gegebene Teilmenge $T \subset R$ umfaßt, heißt der **von T erzeugte Teilring**. Gegeben $S \supset R$ ein Kring mit einem Teilring und Elemente $a_1, \ldots, a_n \in S$ bezeichnet man mit

$$R[a_1, \ldots, a_n] \subset S$$

den Teilring von S, der von R und den a_i erzeugt wird, in anderen Worten den kleinsten Teilring von S, der R umfaßt und alle a_i enthält.

6.2.2.4. Die Notation aus 6.2.2.1 führt leicht zu Verwechslungen mit Polynomringen. Viele Autoren verwenden die Konvention, nach der die „freien“ oder „unabhängigen“ Variablen in Polynomringen mit großen Buchstaben vom Ende des Alphabets geschrieben werden, die „abhängigen“ Erzeuger eines Teilrings in einem bereits gegebenen Ring dahingegen mit kleinen Buchstaben. Nebenbei bemerkt kann man $R[a_1, \ldots, a_n]$ auch beschreiben als das Bild des Einsetzungshomomorphismus $R[X_1, \ldots, X_n] \to S$ mit $X_i \mapsto a_i$. Ist dieser Einsetzungshomomorphismus injektiv, also ein Isomorphismus auf sein Bild, so heißen die Elemente a_i **algebraisch unabhängig über** R. Wollen wir besonders betonen, daß wir mit freien Veränderlichen arbeiten, so setzen wir ein kleines „Freiheitsstrichlein“ vorne in die Klammer und schreiben $R['X_1, \ldots, X_n]$. Diese Notation gibt es jedoch meines Wissens bisher nur in diesem Skriptum.

6.2.2.5 (**Isomorphiesatz für Ringe**). Gegeben ein Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ ist nach 6.2.1.12 der Kern $\ker \varphi$ ein Ideal von R und das Bild $\operatorname{im} \varphi$ offensichtlich ein Teilring von S. Nach 6.2.1.13 und dem Isomorphiesatz 4.4.2.12 faktorisiert φ dann über einen Ringisomorphismus

$$R \twoheadrightarrow R/(\ker \varphi) \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} \varphi \hookrightarrow S$$

Übungen

Ergänzende Übung 6.2.2.6. Seien $K \subset L$ Körper, $I \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Bezeichne $\langle IL[X_1, \ldots, X_n] \rangle$ das von I im Polynomring über L erzeugte Ideal. So gilt

$$I = K[X_1, \ldots, X_n] \cap \langle IL[X_1, \ldots, X_n] \rangle$$

Hinweis: Jedes Element von $\langle IL[X_1, \ldots, X_n] \rangle$ hat die Gestalt $c_1 f_1 + \ldots + c_r f_r$ mit $f_\nu \in I$ und $c_\nu \in L$ linear unabhängig über K.

Übung 6.2.2.7. Man zeige, daß der Teilring $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$ ein Körper ist.

Übung 6.2.2.8. Man zeige, daß $\mathbb{Z}$ der einzige Teilring von $\mathbb{Q}$ ist, der endlich erzeugt ist als abelsche Gruppe.

6.2.3 Abstrakter chinesischer Restsatz

6.2.3.1. Gegeben Ringe $R_1, \ldots, R_s$ bilden wir den **Produktring** $R_1 \times \ldots \times R_s$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation. Gegeben ein weiterer Ring R und Ringhomomorphismen $f_i : R \to R_i$ erhalten wir natürlich einen Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rccc} (f_1, \ldots, f_s) : & R & \to & R_1 \times \ldots \times R_s \\ & r & \mapsto & (f_1(r), \ldots, f_s(r)) \end{array}$$

Genauer sind die Projektionen Ringhomomorphismen $\mathrm{pr}_i : R_1 \times \ldots \times R_s \to R_i$ und das Nachschalten der Projektionen liefert für jeden weiteren Ring R eine Bijektion

$$\mathrm{Ring}(R, R_1 \times \ldots \times R_s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ring}(R, R_1) \times \ldots \times \mathrm{Ring}(R, R_s)$$

In der Terminologie 4.7.7.8 liefert unsere Konstruktion also ein Produkt in der Kategorie der Ringe.

Definition 6.2.3.2. Gegeben Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in einem Ring R ist auch ihre **Summe** $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} := \{a+b \mid a \in \mathfrak{a},\ b \in \mathfrak{b}\}$ ein Ideal, und wir nennen ihr **Produkt** und bezeichnen mit $\langle \mathfrak{a}\mathfrak{b} \rangle$ dasjenige Ideal oder gleichbedeutend diejenige additive Untergruppe von R, das beziehungsweise die von allen Produkten ab mit $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$ erzeugt wird. Analog notieren wir auch Produkte von mehr als zwei Idealen.

6.2.3.3. Für das Produkt zweier Ideale ist die Notation $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gebräuchlicher, die wir aber bereits für die von der Multiplikation eines Rings auf seiner Potenzmenge induzierte Verknüpfung vergeben haben. Dennoch werden wir später meist diese abkürzende Notation für das Produkt von Idealen verwenden.

Satz 6.2.3.4 (Abstrakter chinesischer Restsatz). *Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ endlich viele Ideale eines Rings R. Gilt $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = R$ für $i \neq j$, so ist die offensichtliche Abbildung eine Surjektion*

$$\kappa : R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times R/\mathfrak{a}_s$$

mit Kern $(\ker \kappa) = \bigcap_i \mathfrak{a}_i$ dem Schnitt unserer Ideale. Für einen kommutativen Ring alias Kring R fällt dieser Schnitt auch mit dem Produktideal $\langle \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_s \rangle$ zusammen und wir erhalten einen Ringisomorphismus

$$R/\langle \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_s \rangle \quad \xrightarrow{\sim} \quad R/\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times R/\mathfrak{a}_s$$

Beispiel 6.2.3.5. Der Name dieses Satzes rührt von seiner Bedeutung im Ring der ganzen Zahlen her, die wir bereits in 4.4.3.11 folgende besprochen hatten.

Beispiel 6.2.3.6. Wir finden etwa

$$\mathbb{R}[X]/\langle X^2 - 1 \rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[X]/\langle X + 1 \rangle \times \mathbb{R}[X]/\langle X - 1 \rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

und ähnlich für den Quotienten $\mathbb{R}[X]/\langle P \rangle$ nach dem Hauptideal eines beliebigen quadratischen Polynoms P mit zwei reellen Nullstellen im Gegensatz zum Fall 6.2.1.21 eines reellen quadratischen Polynoms ohne reelle Nullstelle.

Beweis. Für die Surjektivität reicht es nachzuweisen, daß alle nur in einem Eintrag von Null verschiedenen Tupel im Bild liegen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit reicht es also zu zeigen, daß für alle $r \in R$ das Tupel $(\bar{r}, 0, \ldots, 0)$ im Bild liegt. Es reicht sogar, wenn wir das für $r = 1$ zeigen, denn aus $\kappa(x) = (\bar{1}, 0, \ldots, 0)$ folgt $\kappa(rx) = \kappa(r)\kappa(x) = (\bar{r}, 0, \ldots, 0)$. Nach Annahme gilt für $i \neq 1$ jedoch $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_1 = R$, wir finden für $i \neq 1$ also eine Darstellung $a_i + b_i = 1$ mit $a_i \in \mathfrak{a}_i$ und $b_i \in \mathfrak{a}_1$. Für das Ringelement $a_i = 1 - b_i$ hat $\kappa(a_i)$ dann natürlich die Gestalt

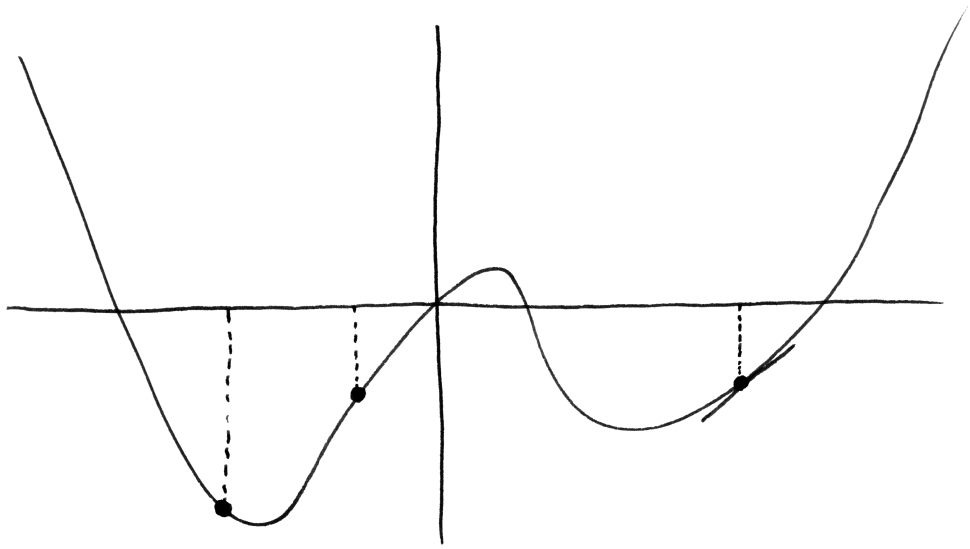
$$\kappa(a_i) = (1, *, \ldots, *, 0, *, \ldots *)$$

mit einer Null an der i-ten Stelle. Für das Bild des Produkts der a_i folgt dann $\kappa(a_2 a_3 \ldots a_s) = (1, 0, \ldots, 0)$ und die Surjektivität ist gezeigt. Der Kern dieser Surjektion ist offensichtlich genau der Schnitt der $\mathfrak{a}_i$, und wir müssen nur noch zeigen, daß er für kommutatives R mit dem Produktideal zusammenfällt. Im Fall $s = 2$ impliziert $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = R$ schon mal $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \langle \mathfrak{a}\mathfrak{b} \rangle$, denn schreiben wir $1 = a + b$ mit $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$, so gilt $x = xa + xb$ auch für alle $x \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Im allgemeinen beachten wir, daß das Aufmultiplizieren unserer Identitäten $a_i + b_i = 1$ von eben für $2 \leq i \leq n$ sogar zeigt $\mathfrak{a}_1 + \langle \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_s \rangle = R$. Mit vollständiger Induktion erhalten wir dann $\mathfrak{a}_1 \cap (\mathfrak{a}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_s) = \mathfrak{a}_1 \cap \langle \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_s \rangle = \langle \mathfrak{a}_1 \langle \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_s \rangle \rangle = \langle \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_s \rangle$. □

6.2.3.7. Wir schreiben auch $\langle I^n \rangle$ für das n-fache Produkt eines Ideals mit sich selbst. Betrachten wir zum Beispiel $R = k[X, Y]$ für einen Körper k und darin das Ideal $I = \langle X, Y \rangle$, so gilt $\langle I^2 \rangle = \langle X^2, XY, Y^2 \rangle$, $\langle I^3 \rangle = \langle X^3, X^2Y, XY^2, Y^3 \rangle$ und so weiter.

Korollar 6.2.3.8 (Polynominterpolation). *Seien k ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir finden stets ein Polynom $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$, das an endlich vielen vorgegebenen Stellen des k^n vorgegebene Werte annimmt und sogar eine beliebig vorgegebene Taylorentwicklung bis zu einem festen endlichen Grad hat.*

Beweis. Für einen Punkt $p \in k^n$ bezeichne $I(p)$ das Ideal aller Polynome, die bei p verschwinden. Mit der vagen Formulierung „die Taylorentwicklung bei p eines Polynoms $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ bis zum Grad $m - 1$ vorzugeben“ meinen wir, seine Nebenklasse in $k[X_1, \ldots, X_n]/\langle I(p)^m \rangle$ vorzugeben. Damit wir den abstrakten chinesischen Restsatz anwenden können, müssen wir nur noch zeigen $\langle I(p)^m \rangle + \langle I(q)^m \rangle = \langle 1 \rangle$ falls $p \neq q$. Offensichtlich gilt $I(p) + I(q) = \langle 1 \rangle$, denn p und q unterscheiden sich in mindestens einer Koordinate, sagen wir $p_i \neq q_i$, und dann ist $(X_i - p_i) + (q_i - X_i)$ eine Einheit im Polynomring. Schreiben wir nun $1 = a + b$ mit $a \in I(p)$ und $b \in I(q)$ und nehmen von dieser Gleichung die $2m$-te Potenz, so folgt $1 \in \langle I(p)^m \rangle + \langle I(q)^m \rangle$ wie gewünscht. □



Eine Interpolation in einer Variablen mit vorgegebenen Werten an zwei Punkten und vorgegebenem Wert und Wert der Ableitung an einem weiteren Punkt.

6.2.4 Euklidische Ringe und Primfaktorzerlegung

6.2.4.1. Die folgende schematische Übersicht soll die Struktur dieses Abschnitts und die Beziehungen der darin neu eingeführten Begriffe untereinander verdeutlichen:

Interessante Ringe, etwa $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, oder der Ring $k[X]$ für einen Körper k;
$\cap$
Euklidische Ringe, in denen es eine „Division mit Rest“ gibt;
$\cap$
Hauptidealringe, in denen jedes Ideal von einem Element erzeugt wird;
$\cap$
Faktorielle Ringe, alias Ringe mit „eindeutiger Primfaktorzerlegung“.

Wir arbeiten nun unser Schema von unten nach oben ab und beginnen mit faktoriellen Ringen.

Definition 6.2.4.2. Ein Element a eines Krings R heißt **irreduzibel** oder genauer **irreduzibel in** R, wenn es weder eine Einheit ist noch sich als ein Produkt von zwei Nichteinheiten darstellen läßt. In Formeln fordern wir also $a \notin R^\times$ und $a = bc \Rightarrow (b \in R^\times$ oder $c \in R^\times)$.

Beispiele 6.2.4.3. Die Null ist nie irreduzibel, denn im Nullring ist sie eine Einheit und in anderen Kringen das Produkt der zwei Nichteinheiten $0 = 0 \cdot 0$. Eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}$ genau dann, wenn ihr Betrag $|n|$ eine Primzahl ist. In einem Körper gibt es überhaupt keine irreduziblen Elemente, insbesondere ist auch keine ganze Zahl n irreduzibel in $\mathbb{Q}$.

6.2.4.4. Ich erinnere daran, daß man unter einem **Integritätsbereich** oder **Integritätsring** einen von Null verschiedenen Ring versteht, bei dem das Produkt je zweier von Null verschiedener Elemente stets auch wieder von Null verschieden ist.

Definition 6.2.4.5. Ein Ring R heißt **faktoriell**, wenn er ein kommutativer Integritätsbereich ist und wenn zusätzlich gilt:

1. Jedes $a \in R \backslash (R^\times \sqcup \{0\})$ läßt sich darstellen als ein Produkt von irreduziblen Elementen, in Formeln $a = p_1 \dots p_n$ mit p_i irreduzibel und $n \geq 1$.

2. Diese Darstellung ist eindeutig bis auf Einheiten und die Reihenfolge der Faktoren. Ist genauer $a = q_1 \dots q_m$ eine zweite Darstellung wie eben, so gilt $n = m$ und es gibt eine Permutation $\tau \in \mathcal{S}_n$ von n sowie Einheiten $u_i \in R^\times$ mit $q_i = u_i p_{\tau(i)}$ für $1 \leq i \leq n$.

6.2.4.6. Unsere einzigen Beispiele für faktorielle Ringe sind bisher nur $\mathbb{Z}$ und alle Körper. Im folgenden werden wir viele weitere Beispiele für faktorielle Ringe kennenlernen und insbesondere zeigen, daß Polynomringe über Körpern, ja Polynomringe über faktoriellen Ringen stets faktoriell sind.

Ergänzung 6.2.4.7. Gegeben ein Integritätsbereich bilden die von Null verschiedenen Elemente ein Monoid und unser Integritätsbereich ist faktoriell genau dann, wenn dieses Monoid isomorph ist zum Produkt einer abelschen Gruppe, eben der Einheitengruppe unseres Integritätsbereichs, mit einem freien Abmonoid. Ein freies Abmonoid ist hierbei zu verstehen als ein „freies Objekt" im Sinne von 12.4.2.8 oder explizit als ein Monoid, das isomorph ist zum Monoid aller fast überall verschwindenden Abbildungen von einer Menge in das additive Monoid $\mathbb{N}$.

Beispiele 6.2.4.8 (**Ein Integritätsbereich, der nicht faktoriell ist**). Als Beispiel für einen nicht faktoriellen kommutativen Integritätsbereich betrachten wir den Teilring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ der komplexen Zahlen, der gegeben wird durch

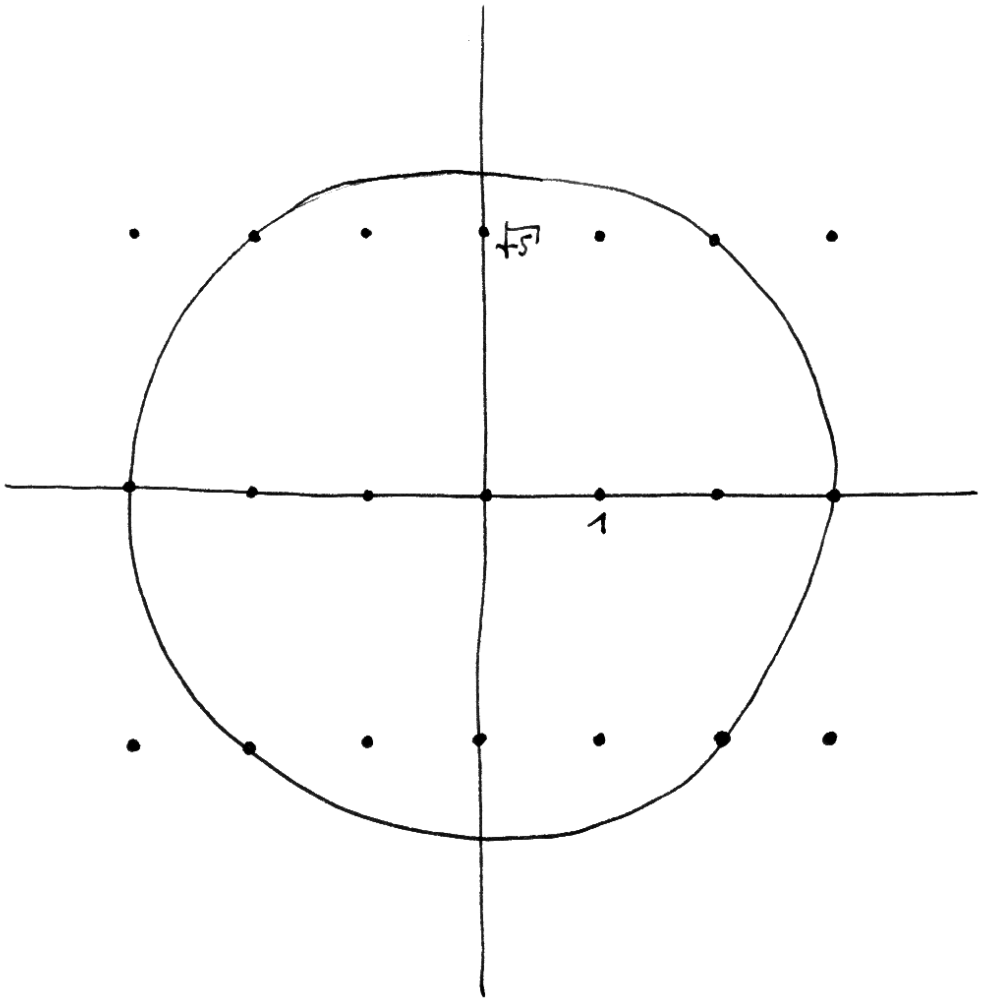
$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\,\mathrm{i}\,\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

Ich behaupte, daß $6 = 2\cdot 3 = (1+\sqrt{-5})\cdot(1-\sqrt{-5})$ zwei Zerlegungen in irreduzible Faktoren sind, die sich nicht nur um Einheiten und Reihenfolge unterscheiden. Das folgt leicht unter Verwendung der Multiplikativität der Norm $|zw| = |z||w|$ für $z, w \in \mathbb{C}$ aus der anschließenden Tabelle, in der alle Elemente $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ der Quadratlänge $|z|^2 \leq 9$ aufgelistet sind.

$\lvert z\rvert^2$	mögliche $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$
0	0
1	± 1
4	± 2
5	$\pm\sqrt{-5}$
6	$(\pm 1) + (\pm\sqrt{-5})$
9	± 3, $(\pm 2) + (\pm\sqrt{-5})$

Definition 6.2.4.9. Ein Ring R heißt ein **Hauptidealring**, wenn R ein kommutativer Integritätsbereich ist aber kein Körper und jedes Ideal von R ein Hauptideal ist, also von einem einzigen Element erzeugt wird.

Beispiel 6.2.4.10. Nach 3.4.3.4 ist der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ein Hauptidealring. Der Polynomring in zwei Variablen $\mathbb{C}[X, Y]$ ist kein Hauptidealring, denn das Ideal aller beim Ursprung von $\mathbb{C}^2$ verschwindenden Polynome ist kein Hauptideal: Jedes Polynom, das am Ursprung verschwindet, verschwindet auch sonst



Einige Elemente des Rings $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ als Punkte in der Gauß'schen Zahlenebene

noch irgendwo, und dasselbe gilt für alle Polynome des von ihm erzeugten Hauptideals.

Satz 6.2.4.11. *Jeder Hauptidealring ist faktoriell.*

Ergänzung 6.2.4.12. In diesem Beweis verwenden wir implizit das Auswahlaxiom, um die Existenz einer Faktorisierung in Irreduzible zu zeigen. Will man das Zorn'sche Lemma an dieser Stelle vermeiden, mag man sich auf den Fall euklidischer Ringe beschränken, für den wir in 6.2.4.18 einen Beweis ohne Auswahlaxiom geben.

Beweis. Wir zeigen als erstes, daß in einem Hauptidealring jedes Element $a \in R\backslash(R^\times \sqcup \{0\})$ ein Produkt von endlich vielen irreduziblen Elementen ist. Wir argumentieren durch Widerspruch. Gäbe es ein Element $a \in R\backslash(R^\times \sqcup \{0\})$, das kein Produkt von Irreduziblen ist, so wäre insbesondere a selbst nicht irreduzibel, also von der Gestalt $a = a_1 b_1$ mit $a_1, b_1 \notin R^\times$. Hier können nicht sowohl a_1 als auch b_1 Produkte von Irreduziblen sein. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, a_1 sei kein Produkt von Irreduziblen, und können schreiben $a_1 = a_2 b_2$ mit $a_2, b_2 \notin R^\times$ und a_2 keinem Produkt von Irreduziblen. Wir bemerken nun, daß in einem Integritätsbereich R die Gleichheit $\langle a \rangle = \langle b \rangle$ von Hauptidealen zu $a, b \in R\backslash 0$ äquivalent ist zu $a = ub$ mit einer Einheit $u \in R^\times$. Indem wir wie oben immer weitermachen, finden wir also in R eine unendliche echt aufsteigende Folge von Hauptidealen

$$\langle a \rangle \subsetneq \langle a_1 \rangle \subsetneq \langle a_2 \rangle \subsetneq \ldots$$

Die Vereinigung über alle diese Hauptideale ist auch ein Ideal, also ein Hauptideal $\langle h \rangle$. Diese Vereinigung ist aber aber auch das Erzeugnis $\langle h \rangle = \langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ der a_i. Es folgt eine Relation der Gestalt $h = r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n$ und damit $\langle h \rangle = \langle a_n \rangle$ im Widerspruch zu $\langle a_n \rangle \neq \langle a_{n+1} \rangle$. Dieser Widerspruch zeigt, daß jedes Element, das weder Null ist noch eine Einheit, ein Produkt von Irreduziblen sein muß. Jetzt zeigen wir die Eindeutigkeit. Es reicht dazu, ähnlich wie wir das im Fall der ganzen Zahlen bereits gesehen hatten, wenn wir für jedes irreduzible Element p zeigen

$$p|ab \;\Rightarrow\; p|a \text{ oder } p|b$$

Wir wiederholen dafür unseren Beweis des Lemmas von Euklid 3.4.4.15. Gleichbedeutend dürfen wir zeigen, daß aus $p \nmid a$ und $p|ab$ folgt $p|b$. Weil wir in einem Hauptidealring sind, gibt es aber c mit $\langle a, p \rangle = \langle c \rangle$ und wegen $c|p$ und p irreduzibel haben wir entweder $c \in R^\times p$ oder $c \in R^\times$. Der erste Fall $c \in R^\times p$ wird durch $p \nmid a$ ausgeschlossen, also haben wir $c \in R^\times$ alias $\langle a, p \rangle = R$ alias $1 = ax + py$ für geeignete $x, y \in R$. Multiplikation mit b liefert dann $b = abx + bpy$ und zusammen mit $p|ab$ folgt $p|b$ wie gewünscht. $\square$

Definition 6.2.4.13. Ein **euklidischer Ring** ist ein kommutativer Integritätsbereich mit einer Abbildung $\sigma : R\backslash 0 \to \mathbb{N}$ derart, daß man für alle $a, b \in R$ mit $a \neq 0$ Elemente $q, r \in R$ finden kann mit $b = aq + r$ und $r = 0$ oder $\sigma(r) < \sigma(a)$.

6.2.4.14. Salopp gesprochen ist also ein euklidischer Ring ein Integritätsbereich, in dem man „teilen kann mit Rest“, wobei der Rest in einer präzisen, durch σ spezifizierten Weise „kleiner“ sein soll als der Teiler. Alle unsere Argumente funktionieren auch noch, wenn σ allgemeiner Werte in einer beliebigen „wohlgeordneten“ Menge annimmt, als da heißt einer angeordneten Menge, in der jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.

Beispiele 6.2.4.15.

1. $R = \mathbb{Z}$ mit $\sigma(n) = |n|$;
2. $R = k[X]$ für einen Körper k und $\sigma(P) = \operatorname{grad} P$, siehe 3.5.3.15;
3. $R = \mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{x + y\,\mathrm{i} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$, $\sigma(x + y\,\mathrm{i}) = x^2 + y^2$. Dieser Ring der sogenannten **Gauß'schen Zahlen** ist als Teilring von $\mathbb{C}$ zu verstehen. Wir werden dies Beispiel in 6.2.6 noch ausführlich besprechen.

Satz 6.2.4.16. *Jeder euklidische Ring ist ein Körper oder ein Hauptidealring und damit insbesondere faktoriell.*

Ergänzung 6.2.4.17. Dieser Satz verallgemeinert unseren Satz 3.4.3.4, mit dem wir alle Untergruppen der Gruppe $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen beschrieben hatten. Der Beweis ist auch im wesentlichen derselbe.

Beweis. Sei $I \subset R$ ein Ideal. Ist $I = 0$, so ist $I = \langle 0 \rangle$ ein Hauptideal. Sonst finden wir $a \in I\backslash 0$ mit $\sigma(a)$ kleinstmöglich. Wir behaupten $I = \langle a \rangle$. Gäbe es nämlich $b \in I\backslash\langle a \rangle$, so könnten wir schreiben $b = aq + r$ mit $r \neq 0$ und $\sigma(r) < \sigma(a)$. Dann gilt aber auch $r = b - aq \in I$, und das steht im Widerspruch zur Wahl von a. $\square$

Ergänzung 6.2.4.18 (**Faktorialität ohne Zorn**). Für die Beweise der zentralen Resultate dieser Vorlesung müssen wir nur wissen, daß euklidische Ringe faktoriell sind. In diesem Fall können wir die Existenz einer Faktorisierung in Irreduzible auch ohne Auswahlaxiom einsehen. Dazu brauchen wir nur die Erkenntnis aus dem vorhergehenden Beweis, nach der jedes von Null verschiedene Ideal von jedem seiner von Null verschiedenen Elemente mit kleinstmöglichem σ-Wert erzeugt wird. Gäbe es nun von Null verschiedene Elemente ohne Faktorisierung in Irreduzible, so auch ein derartiges Element a mit kleinstmöglichem σ-Wert. Es hätte dann eine Faktorisierung in ein Produkt von zwei Nichteinheiten $a = bc$, und die Hauptideale $\langle b \rangle$ und $\langle c \rangle$ wären echt größer als $\langle a \rangle$. Das Minimum von σ auf $\langle b \rangle\backslash 0$ müßte also echt kleiner sein als das Minimum von σ auf $\langle a \rangle\backslash 0$, denn wir haben $b = aq + r$ mit $r \neq 0$ und $\sigma(r) < \sigma(a)$. Wird das Minimum von σ auf $\langle b \rangle\backslash 0$ bei β angenommen, so folgt weiter $\beta | b$ und damit $\beta \in R^\times b$. Genauso

finden wir $\gamma \in R^\times c$ mit $\sigma(\gamma) < \sigma(a)$. Dann aber müßten β und γ und damit auch b und c Faktorisierungen in Irreduzible besitzen und damit auch a selbst. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung.

Korollar 6.2.4.19. *Der Polynomring in einer Veränderlichen mit Koeffizienten in einem Körper ist stets ein Hauptidealring und ist insbesondere stets faktoriell.*

Beweis. Wie in 6.2.4.15 ausgeführt wird, ist unser Polynomring ein euklidischer Ring. Das Korollar folgt damit aus 6.2.4.16. □

6.2.4.20. Die irreduziblen Elemente des Polynomrings $k[X]$ mit Koeffizienten in einem Körper k nennt man **irreduzible Polynome**. Wenn wir mit mehreren Körpern gleichzeitig arbeiten, werden wir auch von **k-irreduziblen Polynomen** reden, da dieser Begriff ganz entscheidend von k abhängt: Zum Beispiel ist das Polynom $X^2 + 1$ zwar $\mathbb{R}$-irreduzibel, aber keineswegs $\mathbb{C}$-irreduzibel.

Beispiel 6.2.4.21. Die irreduziblen Polynome in $\mathbb{C}[X]$ sind nach 3.5.3.26 genau die Polynome vom Grad Eins. Die irreduziblen Polynome in $\mathbb{R}[X]$ sind nach 3.5.3.28 genau die Polynome vom Grad Eins sowie die Polynome vom Grad Zwei ohne reelle Nullstelle. Die irreduziblen Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ lassen sich nicht so leicht aufzählen.

Satz 6.2.4.22 (Quotienten von Hauptidealringen). *Gegeben ein von Null verschiedenes Element a eines Hauptidealrings R sind gleichbedeutend:*

1. *Der Quotient $R/\langle a\rangle$ ist ein Körper;*
2. *Der Quotient $R/\langle a\rangle$ ist ein Integritätsbereich;*
3. *Unser Element a ist irreduzibel.*

Beweis. (1)⇒(2) ist klar. Wir zeigen nun (2)⇒(3) alias (nicht 3)⇒(nicht 2). Ist $a \in R$ nicht irreduzibel, so haben wir $a \in R^\times$ oder $a = bc$ mit $b, c \notin R^\times$. Im ersten Fall ist der Quotient der Nullring und mithin kein Integritätsbereich. Im zweiten Fall folgt, da R ein Integritätsbereich ist, schon mal $b, c \notin \langle a\rangle$. Für die Nebenklassen in $R/\langle a\rangle$ gilt also $\bar{b} \neq 0$ und $\bar{c} \neq 0$ aber $\bar{b}\bar{c} = 0$. Deshalb kann für a nicht irreduzibel der Quotient $R/\langle a\rangle$ kein Integritätsbereich sein, und das gilt sogar für einen beliebigen kommutativen Integritätsbereich R. Schließlich zeigen wir noch (3)⇒(1). Gegeben $a, b \in R$ gibt es $c \in R$ mit $\langle a, b\rangle = \langle c\rangle$. Insbesondere ist c ein Teiler von a, und ist a irreduzibel, so folgt $\langle c\rangle = \langle a\rangle$ oder $\langle c\rangle = R$. Gilt zusätzlich $b \notin \langle a\rangle$, so folgt $\langle a, b\rangle = R$ und folglich gibt es $x, y \in R$ mit $1 = ax + by$. Dann aber ist $\bar{y}$ ein multiplikatives Inverses zu $\bar{b}$ in $R/\langle a\rangle$. □

Beispiel 6.2.4.23. Gegeben $p \in \mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Körper, wenn p oder $-p$ eine Primzahl ist.

Beispiel 6.2.4.24. $\mathbb{R}[X]/\langle X^2+1\rangle$ ist ein Körper, genauer induziert das Einsetzen von i für X einen Isomorphismus dieses Körpers mit $\mathbb{C}$.

Beispiel 6.2.4.25. $\mathbb{R}[X]/\langle X^2+2\rangle$ ist ein Körper, genauer induziert das Einsetzen von i $\sqrt{2}$ für X einen Isomorphismus dieses Körpers mit $\mathbb{C}$.

Beispiel 6.2.4.26. $\mathbb{R}[X]/\langle X+1\rangle$ ist ein Körper, genauer induziert das Einsetzen von -1 für X einen Isomorphismus dieses Körpers mit $\mathbb{R}$.

Beispiel 6.2.4.27. $\mathbb{R}[X]/\langle X^2-1\rangle$ ist *kein* Körper. Vielmehr liefert der chinesische Restsatz in Verbindung mit dem vorhergehenden Beispiel einen Ringisomorphismus $\mathbb{R}[X]/\langle X^2-1\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, und $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ist kein Köper, es gilt darin ja etwa $(1,0)\cdot(0,1)=(0,0)$.

Übungen

Übung 6.2.4.28. Man zeige, daß $\mathbb{Z}[X]$ kein Hauptidealring ist.

Übung 6.2.4.29. Sei k ein Körper. Man zeige: (1) Alle Polynome vom Grad 1 sind irreduzibel in $k[X]$. (2) Ist $P\in k[X]$ irreduzibel und $\operatorname{grad} P>1$, so hat P keine Nullstelle in k. (3) Ist $P\in k[X]\setminus k$ vom Grad $\operatorname{grad} P\le 3$ und hat P keine Nullstelle in k, so ist P irreduzibel in $k[X]$. (4) Ist k algebraisch abgeschlossen, so sind die irreduziblen Polynome in $k[X]$ genau die Polynome vom Grad 1. Man gebe auch (5) ein Polynom positiven Grades in $\mathbb{R}[X]$ an, das keine Nullstelle hat, aber dennoch nicht irreduzibel ist.

Ergänzende Übung 6.2.4.30. In einem Polynomring in mindestens einer Variablen über einem Körper gibt es stets unendlich viele normierte irreduzible Polynome. Hinweis: Man multipliziere sonst alle zusammen und ziehe 1 ab.

Ergänzende Übung 6.2.4.31. Man zeige: Gegeben ein Körper k ist der Ring $k[\![X]\!]$ der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten aus k aus 3.5.3.42 ein Hauptidealring, und die Ideale dieses Rings sind das Nullideal sowie die Ideale $X^n k[\![X]\!]$ für $n\in\mathbb{N}$. Man bespreche die Primfaktorzerlegung in diesem Hauptidealring.

Übung 6.2.4.32. Seien R ein faktorieller Ring und $q\in\operatorname{Quot}(R)$ ein Element seines Quotientenkörpers und $n\ge 1$ mit $q^n\in R$. Man zeige $q\in R$.

Übung 6.2.4.33 (**Eindeutigkeitsaussagen für teilerfremde Polynome**). Seien k ein Körper und $f,g\in k[T]$ teilerfremde Polynome. Man zeige, daß es dann für jedes Polynom h Polynome a,b gibt mit $h=af+bg$. Man zeige, daß man unter der zusätzlichen Annahme $g\neq 0$ hier (a,b) sogar so wählen kann, daß gilt $\operatorname{grad} a<\operatorname{grad} g$, und daß im Fall $\operatorname{grad}(h)\le\operatorname{grad}(f)+\operatorname{grad}(g)-1$ unser Paar (a,b) dadurch dann eindeutig bestimmt ist. Hinweis: Dimensionsabschätzung. Die analoge Aussage gilt nicht für $k=\mathbb{Z}$, selbst wenn wir f und g normiert annehmen.

Übung 6.2.4.34. Der Quotient eines faktoriellen Rings R nach einem Hauptideal $\langle a\rangle$ ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn gilt $a=0$ oder a irreduzibel.

Übung 6.2.4.35. Im Quotienten eines faktoriellen Rings R nach dem Hauptideal zu einem Element $a \neq 0$ ist das Bild von $b \in R$ genau dann kürzbar, wenn a und b teilerfremd sind.

Übung 6.2.4.36. Seien k ein Körper und R eine Ringalgebra über k. Ein Element $\alpha \in R$ heißt **algebraisch über** k, wenn es ein von Null verschiedenes Polynom $P \in k[X]\backslash 0$ gibt mit $P(\alpha) = 0$. Man zeige, daß es in diesem Fall genau ein normiertes Polynom $Q \in k[X]$ kleinstmöglichen Grades gibt mit $Q(\alpha) = 0$. Es heißt dann das **Minimalpolynom von** α.

6.2.5 Primelemente und maximale Ideale*

Definition 6.2.5.1. Sei R ein kommutativer Ring. Ein Element $p \in R$ heißt ein **euklidisches Element** oder üblicher **Primelement**, falls es (1) weder Null noch eine Einheit ist und falls (2) aus $p|ab$ folgt $p|a$ oder $p|b$. Wir sagen auch abkürzend, so ein Element sei **euklidisch** alias **prim**.

6.2.5.2 (**Diskussion der Terminologie**). Mir scheint die Bezeichnung als Primelement eine unglückliche Wahl, aber sie ist nun einmal historisch gewachsen. Einerseits sind nun zwar die positiven Primelemente des Rings der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ genau unsere Primzahlen, aber das ist bereits ein nichttrivialer Satz, den wir in 3.4.4.15 als „Lemma von Euklid“ bewiesen hatten. Von ihrer ursprünglichen Definition her versteht man unter Primzahlen ja viel eher die positiven irreduziblen Elemente des Rings der ganzen Zahlen. Andererseits wäre es auch eine vernünftige Terminologie, in einem beliebigen kommutativen Ring diejenigen Elemente als Primelemente zu bezeichnen, die im Sinne von 7.4.2.4 „ein Primideal erzeugen“, aber dann müßten wir in unserer Definition auch die Null als Primelement zulassen. So gesehen sitzt man mit der obigen und allgemein gebräuchlichen Definition eines Primelements leider zwischen allen Stühlen.

6.2.5.3 (**Primelemente und irreduzible Elemente**). Euklidische Elemente p alias Primelemente in Integritätsbereichen sind stets irreduzibel, denn aus $p = ab$ folgt $p|a$ oder $p|b$, also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a = p\alpha$ und dann $p = ab = p\alpha b$ und so $1 = \alpha b$ und b ist eine Einheit. Irreduzible Elemente müssen auch in Integritätsbereichen im allgemeinen keineswegs euklidisch alias prim sein, wie das Beispiel 6.2.4.8 des Rings $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ mit den Zerlegungen $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$. Wir hatten uns ja überlegt, daß hier alle Faktoren irreduzibel sind, sich aber nicht gegenseitig teilen. Also teilt $(1 + \sqrt{-5})$ das Produkt $2 \cdot 3$, teilt aber keinen der Faktoren. In einem faktoriellen Ring sind die euklidischen Elemente alias Primelemente aber offensichtlich genau die irreduziblen Elemente.

Definition 6.2.5.4. Ein Ideal in einem Ring heißt ein **echtes Ideal**, wenn es nicht der ganze Ring ist. Ein Ideal in einem Ring heißt ein **maximales echtes Ideal**,

wenn es ein maximales Element der durch Inklusion teilgeordneten Menge aller *echten* Ideale unseres Ringes ist. Es ist eine allgemeine Konvention, unsere maximalen echten Ideale abkürzend als **maximale Ideale** zu bezeichnen, obwohl sie natürlich nicht die maximalen Elemente der Menge aller Ideale unseres Ringes sind: Diese Menge hat nämlich nur genau ein maximales Element, den Ring selbst. Ich werde dieser allgemeinen Konvention folgen.

Beispiele 6.2.5.5. Die maximalen Ideale eines Hauptidealrings sind genau die von den irreduziblen Elementen erzeugten Hauptideale. Jeder Körper besitzt nur genau ein maximales Ideal, nämlich das Nullideal. Ist umgekehrt in einem Kring R das Nullideal ein maximales Ideal, so muß unser Kring offensichtlich ein Körper sein, denn wir haben $R \neq 0$ und für $a \in R \backslash 0$ gilt $Ra = \langle a \rangle = R \ni 1$. Der Nullring besitzt überhaupt kein maximales Ideal. In 7.1.6.4 zeigen wir, daß er der einzige Ring ohne maximales Ideal ist.

Proposition 6.2.5.6 (Quotienten nach maximalen Idealen). *Ein Ideal in einem Kring ist maximal genau dann, wenn der Quotientenring nach besagtem Ideal ein Körper ist.*

Erster Beweis. Sei R unser Kring und $\mathfrak{m} \subset R$ unser Ideal. Ist $R/\mathfrak{m}$ ein Körper, so gilt $\mathfrak{m} \neq R$ und es gibt für jedes $a \notin \mathfrak{m}$ ein $b \in R$ mit $ab \in 1 + \mathfrak{m}$. Folglich gilt $\langle a, \mathfrak{m} \rangle = R$ für jedes $a \notin \mathfrak{m}$ und damit ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R. Ist umgekehrt $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R, so ist $R/\mathfrak{m}$ nicht der Nullring und für jedes $a \notin \mathfrak{m}$ gilt $\langle a, \mathfrak{m} \rangle = R$ und folglich gibt es $b \in R$ und $m \in \mathfrak{m}$ mit $ab + m = 1$. Dann aber folgt $\bar{a}\bar{b} = 1$ in $R/\mathfrak{m}$ und dieser Quotient ist ein Körper. □

Zweiter Beweis. Nach 6.2.5.5 ist ein Kring genau dann ein Körper, wenn er genau zwei Ideale besitzt, das Nullideal und den ganzen Kring. Nach 6.2.1.24 entsprechen die Ideale von $R/\mathfrak{m}$ eindeutig den Idealen von R, die $\mathfrak{m}$ umfassen. Die Proposition folgt. □

6.2.5.7. Für unseren Satz 6.2.4.22, nach dem ein Quotient von einem Hauptidealring nach einem Hauptideal $\langle a \rangle$ genau dann ein Körper ist, wenn a ein irreduzibles Element ist, können wir damit einen neuen Beweis geben: Beide Eigenschaften von a sind nach 6.2.5.5 beziehungsweise 6.2.5.6 gleichbedeutend zur Forderung, daß $\langle a \rangle$ ein maximales Ideal ist. Bei genauerer Betrachtung ist dieser neue Beweis aber doch nur der alte in neuen Worten.

Übungen

Übung 6.2.5.8. Ein kommutativer Integritätsbereich ist faktoriell genau dann, wenn (1) jedes von Null verschiedene Element als Produkt von einer Einheit mit einigen Irreduziblen dargestellt werden kann und (2) jedes irreduzible Element prim ist.

6.2.6 Irreduzible im Ring der Gauß'schen Zahlen

Lemma 6.2.6.1. *Der Ring $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ der Gauß'schen Zahlen ist euklidisch und mithin faktoriell.*

Beweis. Die Elemente des von einem festen von Null verschiedenen Element $0 \neq a = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ im Ring $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ der Gauß'schen Zahlen erzeugten Hauptideals bilden die Ecken eines quadratischen Rasters auf der komplexen Zahlenebene, mit $|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Seitenlänge der Quadrate. Jedes $b \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ liegt in einem dieser Quadrate und hat von einer der Ecken einen Abstand $\leq \sqrt{2}|a|/2 < |a|$. Folglich ist unser Ring euklidisch mit $\sigma(a) = |a|^2$. □

6.2.6.2. Von nun an wird in diesem Abschnitt der Begriff „Quadrat" nicht mehr in seiner geometrischen Bedeutung verwendet, sondern in seiner algebraischen Bedeutung als Abkürzung für „Quadratzahl". Die ersten Quadrate in $\mathbb{Z}$ sind also $0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

Lemma 6.2.6.3 (**Irreduzible im Ring der Gauß'schen Zahlen**). *1. Jedes irreduzible Element $\pi \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ teilt genau eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$;*

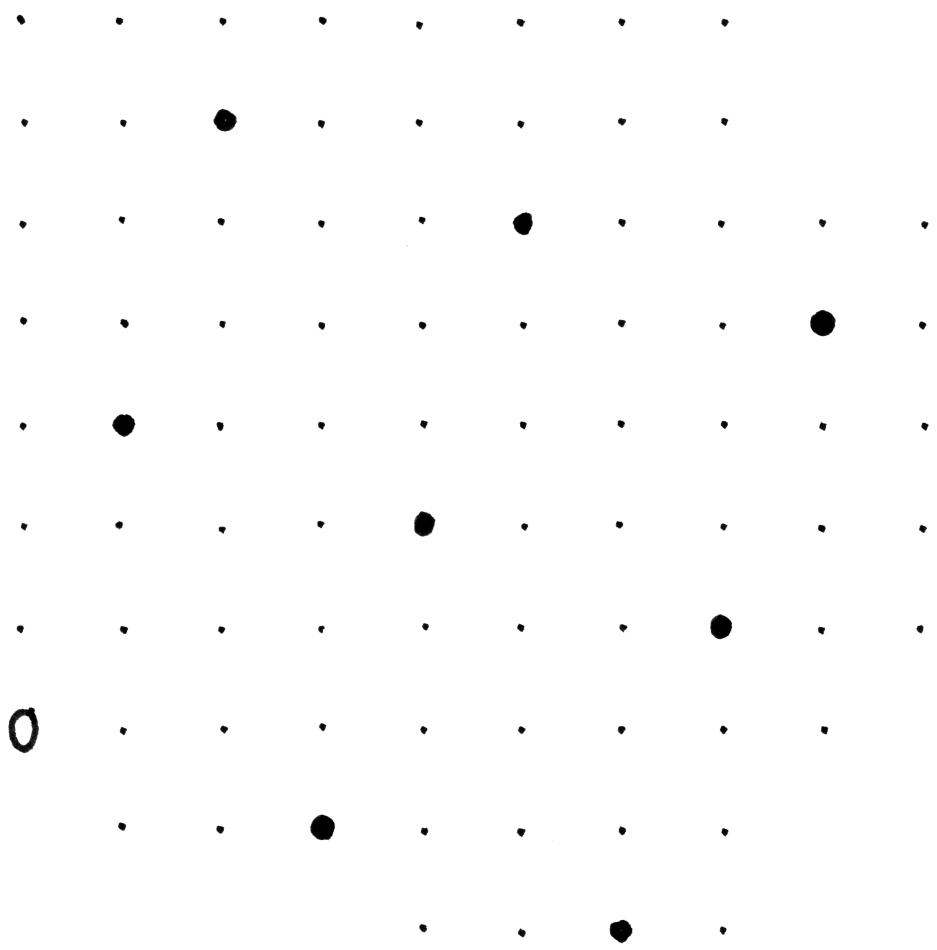
2. Jede Primzahl $p \in \mathbb{N}$ bleibt entweder irreduzibel in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ oder zerfällt dort in ein Produkt aus zwei irreduziblen Elementen, die dann notwendig zueinander komplex konjugiert sind und nur im Fall $p = 2 = (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$ durch Multiplikation mit einer Einheit auseinander hervorgehen.

6.2.6.4. Gleich im Anschluß in 6.2.6.5 zeigen wir, daß eine Primzahl genau dann im Ring der Gauß'schen Zahlen irreduzibel bleibt, wenn sie beim Teilen durch Vier den Rest Drei läßt.

Beweis. Aus $\pi|\pi\bar{\pi}$ folgt $\pi|p$ für mindestens einen Primteiler p von $\pi\bar{\pi}$, also teilt π mindestens eine Primzahl. Aus $\pi|p$ und $\pi|q$ für Primzahlen p und q folgt umgekehrt $\pi\bar{\pi}|p^2$ und $\pi\bar{\pi}|q^2$ und so $p = q$. Das zeigt Teil 1. Gegeben eine Primzahl p würde jede Zerlegung $p = \alpha\beta\gamma$ in Nichteinheiten von $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ eine Zerlegung in Nichteinheiten $p^2 = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta})(\gamma\bar{\gamma})$ in $\mathbb{Z}$ liefern, was unmöglich ist. Folglich ist p entweder irreduzibel in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ oder zerfällt in ein Produkt von Irreduziblen als $p = \alpha\beta$. Dann folgt sofort $p^2 = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta})$ und damit $p = \alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta}$ alias $\beta = \bar{\alpha}$. Gibt es nun eine Einheit ε mit $\bar{\alpha} = \varepsilon\alpha$, so haben wir notwendig $\varepsilon = \pm\mathrm{i}$, da sonst p keine Primzahl gewesen wäre. Bis auf eine eventuelle Vertauschung der Faktoren dürfen wir also $\bar{\alpha} = -\mathrm{i}\alpha$ annehmen, und das impliziert offensichtlich $\alpha \in \mathbb{Z}(1+\mathrm{i})$ und, wenn α auch noch irreduzibel sein soll, $\alpha = \pm(1+\mathrm{i})$. □

Proposition 6.2.6.5. *Für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ sind gleichbedeutend:*

1. p bleibt nicht prim im Ring $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ der Gauß'schen Zahlen;



Die Elemente des von $1 + 3\,\mathrm{i}$ im Ring der Gauß'schen Zahlen erzeugten Hauptideals habe ich in diesem Bild als fette Punkte dargestellt, die anderen Elemente des Rings der Gauß'schen Zahlen durch kleine Punkte.

2. *p ist Summe von zwei Quadraten, in Formeln* $p = x^2 + y^2$;

3. *p läßt beim Teilen durch Vier den Rest Eins oder Zwei, in Formeln* $p \equiv 1 \pmod 4$ *oder* $p = 2$*;*

4. *Das Polynom* $(X^2 + 1)$ *ist nicht irreduzibel in* $\mathbb{F}_p[X]$*;*

5. (-1) *ist ein Quadrat in* $\mathbb{F}_p$*.*

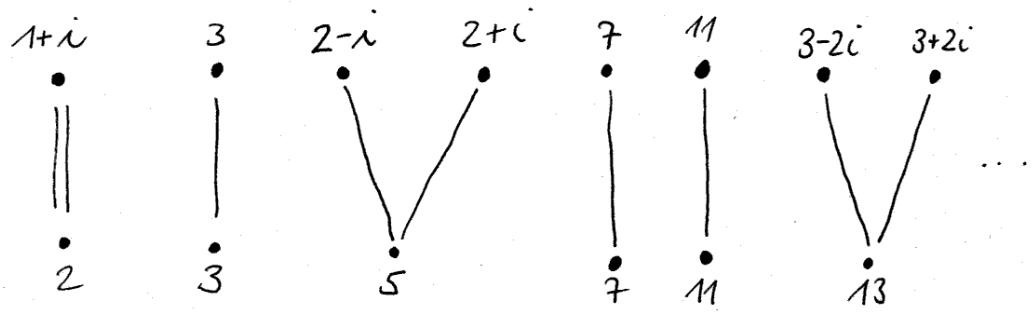
Beispiele 6.2.6.6. $2 = 1^2 + 1^2$, $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, $17 = 1^2 + 4^2, \ldots$

Beweis. Ist $\pi = x + \mathrm{i}y$ ein irreduzibler Faktor echt kleinerer Länge von p, so ist $\pi\bar{\pi} = x^2 + y^2$ ein Primfaktor echt kleinerer Länge von p^2, also $x^2 + y^2 = p$. Das zeigt 1⇒2. Aus $p = x^2 + y^2$ folgt umgekehrt $p = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)$, also haben wir auch 2⇒1. Die Implikation 2⇒3 folgt daraus, daß jedes Quadrat kongruent ist zu Null oder Eins modulo Vier, da nämlich gilt $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Eine Summe von zwei Quadraten kann also modulo 4 nie zu 3 kongruent sein. 1⇔4 folgert man durch die Betrachtung des Diagramms von Ringen

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}[X] \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\
\mathbb{F}_p[X] \arrow[dr, two heads] & & \mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \mathbb{Z}[X]/\langle X^2+1\rangle \arrow[dl, two heads] \\
 & \mathbb{F}_p[X]/\langle X^2+1\rangle = \mathbb{Z}[\mathrm{i}]/\langle p\rangle &
\end{tikzcd}$$

Alle vier Morphismen sind hierbei Surjektionen mit einem Hauptideal als Kern. Nach 6.2.4.22 sind also sowohl 1 als auch 4 gleichbedeutend dazu, daß der Ring $\mathbb{F}_p[X]/\langle X^2+1\rangle$ kein Körper ist, und damit sind sie auch untereinander äquivalent. 4⇔5 ist evident. Schließlich zeigen wir noch 3⇒5. Sicher ist nämlich -1 ein Quadrat in $\mathbb{F}_2$. Unter der Vorausetzung $p \equiv 1 \pmod 4$ gilt dasselbe in $\mathbb{F}_p$. Wir wissen nämlich aus 4.4.4.17, daß $\mathbb{F}_p^\times$ als endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe eines Körpers zyklisch ist, und in einer zyklischen Gruppe von durch Vier teilbarer Ordnung gibt es offensichtlich Elemente der Ordnung Vier. So ein Element der Ordnung Vier löst dann die Gleichung $x^2 = -1$ in $\mathbb{F}_p^\times$. □

6.2.6.7. Man beachte, daß jede Gauß'sche Zahl ungleich Null durch Multiplikation mit einer Einheit auf genau eine Gauß'sche Zahl $x + \mathrm{i}y$ mit $x \geq y > -x$, also auf genau eine Gauß'sche Zahl im „um $45°$ im Uhrzeigersinn verdrehten offenen ersten Quadranten mitsamt seiner oberen Kante ohne den Ursprung“ abgebildet werden kann. Die im wesentlichen eindeutige Zerlegung einer Primzahl $p \in \mathbb{N}$



Versuch einer graphischen Darstellung des Zerfallens der gewöhnlichen Primzahlen im Ring der Gauß'schen Zahlen. Die Zwei ist ein Sonderfall, weil bei ihr ein irreduzibles Element des Rings der Gauß'schen Zahlen als zweifacher Faktor auftritt.

in ein Produkt irreduzibler Elemente von $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ hat nach unserem Satz folgende Gestalt:

$$\begin{array}{lll} p \equiv 3 \pmod 4 & p = p; \\ p \not\equiv 3 \pmod 4 & p = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) \text{ für } x^2 + y^2 = p. \end{array}$$

Beschränken wir uns auf die irreduziblen Elemente $x + \mathrm{i}y$ mit $x \geq y > -x$, so ist das die eindeutige Faktorisierung von p in eine Einheit und irreduzible Elemente dieser Art in allen Fällen mit Ausnahme des Falls $p = 2$, in dem diese eindeutige Faktorisierung die Gestalt $2 = -\mathrm{i}(1 + \mathrm{i})^2$ hat.

Ergänzung 6.2.6.8. Es gibt auch einen sehr elementaren Beweis „durch Zauberei“ nach Zagier für die Tatsache, daß jede Primzahl p, die bei Teilen durch Vier den Rest Eins läßt, eine Summe von zwei Quadraten ist: Man betrachtet die endliche Menge $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid x^2 + 4yz = p\}$ und definiert darauf eine Involution durch die Vorschrift

$$(x, y, z) \mapsto \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z) & \text{falls } x < y - z; \\ (2y - x, y, x - y + z) & \text{falls } y - z < x < 2y; \\ (x - 2y, x - y + z, y) & \text{falls } x > 2y. \end{cases}$$

Diese Involution hat genau einen Fixpunkt, also ist die Zahl der Elemente von S ungerade und die Involution $(x, y, z) \mapsto (x, z, y)$ von S muß auch einen Fixpunkt haben. Für den aber gilt $x^2 + (2y)^2 = p$. Bei diesem Beweis sind noch einige implizit enthaltene Behauptungen zu prüfen, das geht alles mit Schulstoff. Aber man muß die Zauberformel auswendig hersagen können!

Korollar 6.2.6.9 (Summen von zwei Quadraten). *Eine positive natürliche Zahl ist Summe von zwei Quadratzahlen genau dann, wenn in ihrer Primfaktorzerlegung alle diejenigen Primfaktoren, die modulo Vier kongruent sind zu Drei, in geraden Potenzen auftreten.*

Beweis. Genau dann ist $n \in \mathbb{Z}$ Summe von zwei Quadratzahlen, wenn es $a \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ gibt mit $n = a\bar{a}$. Ist $n \neq 0$ und $a = \varepsilon\pi_1\pi_2 \ldots \pi_r$ eine Darstellung als Produkt einer Einheit ε mit Primelementen, von denen wir $\pi_1, \ldots, \pi_s$ weder reell noch rein imaginär annehmen und $\pi_{s+1}, \ldots, \pi_r$ aus $\mathbb{N}$, so muß

$$n = (\varepsilon\bar{\varepsilon})(\pi_1\bar{\pi}_1) \ldots (\pi_s\bar{\pi}_s)\pi_{s+1}\pi_{s+1} \ldots \pi_r\pi_r$$

die Primfaktorzerlegung in $\mathbb{N}$ sein. Damit folgt das Korollar aus unserer Beschreibung 6.2.6.7 der Primelemente im Ring der Gauß'schen Zahlen. □

6.2.6.10. Um aus einer Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl $n \geq 1$ im Ring der Gauß'schen Zahlen alle möglichen Darstellungen als Summe zweier Quadrate zu erhalten, muß man alle Zerlegungen $n = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)$ finden, also alle

Zerlegungen $n = a\bar{a}$, wobei der Übergang von a zu εa mit einer Einheit $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^\times$ und der Übergang von a zu $\bar{a}$ bis auf Reihenfolge dieselbe Zerlegung liefert. Dafür ist es besonders übersichtlich, mit dem in 6.2.6.7 beschriebenen Repräsentantensystem modulo Einheiten aller irreduziblen Elemente zu arbeiten, das stabil wird unter der komplexen Konjugation, sobald wir die Ausnahmestelle $1 + \mathrm{i}$ entfernen.

6.2.6.11. Gegeben ein faktorieller Ring R bezeichne $\mathrm{irk}(R)$ die Menge **Irreduziblenklassen**, als da heißt der Bahnen unter der Einheitengruppe $R^\times$ in der Menge der irreduziblen Elemente von R. Gegeben ein irreduzibles $r \in R$ bezeichne $[r] \in \mathrm{irk}(R)$ seine Klasse.

Proposition* 6.2.6.12 (Irreduziblenklassen in Invariantenringen). *Seien R ein faktorieller Ring und Γ eine endliche Gruppe von Automorphismen von R und es sei auch der Ring R^Γ der Γ-Invarianten faktoriell. So gilt:*

1. *Wir erhalten eine Bijektion*

$$\mathrm{irk}(R^\Gamma) \xrightarrow{\sim} \mathrm{irk}(R)/\Gamma$$

   durch die Abbildung, die jedem R^Γ-irreduziblen Element p die Menge der Klassen seiner R-irreduziblen Faktoren π zuordnet;

2. *Die Vielfachheit von π in p teilt die Ordnung $|\Gamma_{[\pi]}|$ der Isotropiegruppe der Irreduziblenklasse $[\pi]$.*

6.2.6.13. Diese Proposition systematisiert unsere obigen Betrachtungen zu irreduziblen Gauß'schen Zahlen. Betrachten wir genauer $R = \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ mit der Operation der zweielementigen Gruppe Γ, deren nichttriviales Element als die komplexe Konjugation operiert, so erhalten wir $R^\Gamma = \mathbb{Z}$ und sehen ein weiteres Mal, daß jede irreduzible Gauß'schen Zahl π nur genau eine Primzahl p teilt und daß die Abbildung, die ihr diese Primzahl zuordnet, surjektiv ist mit bis auf Einheiten höchstens zweielementigen Fasern. Teil 2 zeigt dann weiter, daß die Vielfachheit von π in p höchstens Zwei ist und nur dann genau Zwei sein kann, wenn gilt $\bar{\pi} \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^\times \pi$. Davon ausgehend analysiert man wie oben erklärt, daß $2 = -\mathrm{i}(1 + \mathrm{i})^2$ bis auf Einheiten die einzige Möglichkeit für Vielfachkeit Zwei ist.

Beweis. Für $\pi \in R$ gehört das Produkt $b(\pi) := \prod_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\pi)$ zu R^Γ. Mithin ist jedes R-irreduzible Element ein Teiler mindestens eines R^Γ-irreduziblen Elements und unsere Abbildung ist surjektiv. Teilt andererseits ein R-irreduzibles Element π zwei R^Γ-Irreduzible p und q, so teilt $b(\pi)$ sowohl $b(p) = p^{|\Gamma|}$ als auch $b(q) = q^{|\Gamma|}$, und da $b(\pi)$ keine Einheit sein kann, können sich p und q höchstens um eine Einheit unterscheiden und unsere Abbildung ist auch injektiv. Wir finden sogar

genauer $b(\pi) = \varepsilon p^n$ für $\varepsilon \in R^\Gamma$ eine Einheit. Wenn r die Vielfachheit von π in p ist und $\Gamma_{[\pi]}$ die Standgruppe der Irreduziblenklasse $[\pi]$, so haben wir weiter

$$p = \eta \prod_{\bar\gamma \in \Gamma/\Gamma_{[\pi]}} \gamma(\pi)^r$$

mit einer Einheit $\eta \in R^\times$, die von der Wahl der Repräsentanten γ unserer Nebenklassen $\bar\gamma$ abhängt, und für $d = |\Gamma_{[\pi]}|$ gilt folglich $p^d \in b(\pi)^r R^\times = (p^n)^r R^\times$ und folglich $d = rn$. □

Übungen

Übung 6.2.6.14. Man bestimme sämtliche Zerlegungen von 1000000 in eine Summe von zwei Quadratzahlen.

6.2.7 Primfaktorzerlegung in Polynomringen

6.2.7.1. Gegeben ein faktorieller Ring R und ein irreduzibles Element $p \in R$ erklären wir

$$v_p : \mathrm{Quot} R \to \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$$

als die eindeutig bestimmte Abbildung mit $v_p\left(p^n a/b\right) = n$ für $a, b \in R\backslash 0$ teilerfremd zu p und mit $v_p(0) = \infty$. Diese Abbildung v_p heißt die p**-Bewertung** oder englisch p**-valuation**. Offensichtlich gilt $v_p(fg) = v_p(f) + v_p(g)$ für alle Elemente $f, g \in \mathrm{Quot}\, R$.

Beispiele 6.2.7.2. Wir haben $v_2(16/6) = 3$, $v_3(16/6) = -1$, $v_5(16/6) = 0$. Ist k ein Körper und $R = k[t]$ der Polynomring, so ist per definitionem $\mathrm{Quot} R = k(t)$ der Funktionenkörper und für $f \in k(t)$ und $\lambda \in k$ ist $v_{(t-\lambda)}(f)$ die Nullstellenordnung beziehungsweise das Negative der Polstellenordnung der gebrochen rationalen Funktion f an der Stelle λ.

6.2.7.3 (**Bewertung von Polynomen**). Gegeben ein faktorieller Ring R mit einem irreduziblen Element p sowie ein Polynom $A = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \in (\mathrm{Quot} R)[X]$ erklären wir die p**-Bewertung des Polynoms** A durch

$$v_p(A) := \min(v_p(a_i))$$

Insbesondere ist das Nullpolynom das einzige Polynom A mit $v_p(A) = \infty$.

Beispiele 6.2.7.4. Im Fall $R = \mathbb{Z}$ haben wir etwa $v_2(10X^2 + 6X + 8) = 1$.

Proposition 6.2.7.5 (Lemma von Gauß). *Gegeben ein faktorieller Ring R und ein irreduzibles Element $p \in R$ und Polynome $A, B \in (\mathrm{Quot} R)[X]$ gilt*

$$v_p(AB) = v_p(A) + v_p(B)$$

Beweis. Ist eines unserer Polynome konstant, so gilt die Gleichung offensichtlich. Mit dieser Erkenntnis können wir uns auf den Fall zurückziehen, daß A und B Koeffizienten in R haben und daß gilt $v_p(A) = v_p(B) = 0$. Es bleibt, aus diesen Annahmen $v_p(AB) = 0$ zu folgern. Für ein Polynom $A \in R[X]$ ist $v_p(A) = 0$ nun gleichbedeutend dazu, daß sein Bild $\bar{A} \in (R/\langle p\rangle)[X]$ nicht das Nullpolynom ist. Wir haben also

$$\begin{aligned} v_p(A) = 0 = v_p(B) \quad &\Rightarrow \quad \bar{A} \neq 0 \neq \bar{B} \\ &\Rightarrow \quad \bar{A}\bar{B} \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad \overline{AB} \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad v_p(AB) = 0 \end{aligned}$$

mit der zweiten Implikation, da $R/\langle p\rangle$ nach 6.2.4.34 und dann auch $(R/\langle p\rangle)[X]$ Integritätsbereiche sind. □

Definition 6.2.7.6. Sei R ein faktorieller Ring. Ein Polynom $\sum_{i=0}^{r} a_i X^i$ aus dem Polynomring $R[X]$ heißt **primitiv**, wenn es kein irreduzibles Element von R gibt, das alle seine Koeffizienten teilt. Ein Polynom mit Koeffizienten im Quotientenkörper $P \in (\mathrm{Quot}R)[X]$ nennen wir **primitiv** oder genauer R**-primitiv**, wenn es bereits in $R[X]$ liegt und dort primitiv ist.

6.2.7.7 (**Diskussion der Terminologie**). Ich bin nicht glücklich darüber, daß mit dieser Definition auch alle Einheiten von R primitive Polynome in $R[X]$ sind. An primitive Polynome aber noch zusätzliche Bedingungen zu stellen, schien mir ein größeres Übel.

6.2.7.8. Offensichtlich ist ein Polynom $A \in (\mathrm{Quot}R)[X]$ primitiv genau dann, wenn gilt $v_p(A) = 0$ für alle irreduziblen Elemente p von R. Offensichtlich gibt es für jedes von Null verschiedene Polynom $A \in (\mathrm{Quot}R)[X]\backslash 0$ ein Element $c \in \mathrm{Quot}R$ mit cA primitiv.

6.2.7.9 (**Lemma von Gauß, ursprüngliche Form**). In seiner ursprünglichen Form sagt das Lemma von Gauß, daß das Produkt zweier primitiver Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten auch selbst wieder primitiv ist. Das folgt sofort aus 6.2.7.5 und ist auch im wesentlichen die Aussage, auf die wir uns dort beim Beweis zurückgezogen haben.

Beispiele 6.2.7.10. Die Polynome $X^2 + 2X + 10$ und $3X^2 + 20X + 150$ sind primitiv in $\mathbb{Z}[X]$. Das Polynom $10X^2 + 6X + 8$ ist nicht primitiv in $\mathbb{Z}[X]$.

Satz 6.2.7.11 (**Polynomringe über faktoriellen Ringen**). *Ist R ein faktorieller Ring, so ist auch der Polynomring $R[X]$ ein faktorieller Ring und die irreduziblen Elemente von $R[X]$ sind genau:*

1. *Alle irreduziblen Elemente von R;*

2. *Alle primitiven Polynome aus* $R[X]$*, die irreduzibel sind in* $(\mathrm{Quot}R)[X]$.

Beweis. Man sieht leicht, daß die unter 1 und 2 aufgeführten Elemente irreduzibel sind. Wir nennen sie für den Moment kurz die 1&2-Irreduziblen von $R[X]$. Wir vereinbaren für das weitere die Notation $\mathrm{Quot}R = K$. Gegeben $A \in R[X]$ zerlegen wir $A = P_1 \dots P_n$ als Produkt von irreduziblen Polynomen in $K[X]$ und schreiben $P_i = c_i \tilde{P}_i$ mit $c_i \in K^\times$ und $\tilde{P}_i$ primitiv. So erhalten wir eine Zerlegung $A = c\tilde{P}_1 \dots \tilde{P}_n$ mit $\tilde{P}_i$ primitiv und irreduzibel in $K[X]$ sowie $c \in K^\times$. Nach dem Lemma von Gauß 6.2.7.5 folgt $v_p(c) = v_p(A) \geq 0$ für alle Irreduziblen p von R und damit $c \in R$. Wir können also c faktorisieren in $c = up_1 \dots p_r$ mit $u \in R^\times$ und $p_i \in R$ irreduzibel und folgern so die Existenz einer Zerlegung von A in ein Produkt einer Einheit mit 1&2-Irreduziblen. Das zeigt insbesondere, daß wir unter 1 und 2 in der Tat alle irreduziblen Elemente von R aufgelistet haben. Sind

$$A = up_1 \dots p_r P_1 \dots P_m = vq_1 \dots q_s Q_1 \dots Q_n$$

zwei Zerlegungen von A in ein Produkt einer Einheit mit irreduziblen Elementen, sagen wir $u, v \in R^\times$, $p_i, q_j \in R$ irreduzibel und $P_k, Q_l \in R[X]$ irreduzibel in $K[X]$ und R-primitiv, so liefert die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in $K[X]$ zunächst $n = m$ und $P_i = a_i Q_{\sigma(i)}$ für geeignetes $\sigma \in \mathcal{S}_n$ und $a_i \in K^\times$. Aus der Primitivität folgt dann $a_i \in R^\times$ und aus der Faktorialität von R schließlich die Gleichheit $r = s$ sowie die Existenz einer Permutation $\tau \in \mathcal{S}_r$ mit $q_i \in p_{\tau(i)} R^\times$. □

Ergänzung 6.2.7.12. Die Zerlegung eines Polynoms aus $\mathbb{Z}[X]$ in irreduzible Faktoren kann im Prinzip durch Ausprobieren in endlicher Zeit bestimmt werden. Ein Polynoms vom Grad n muß ja, wenn es nicht irreduzibel ist, einen Faktor haben von höchstens dem halben Grad, sagen wir höchstens Grad m. Nehmen wir dann $m + 1$ ganzzahlige Stellen, so müssen die Werte unseres Faktors die Werte des ursprünglichen Polynoms teilen. Wir müssen also nur für alle Wahlen von Teilern der Werte des ursprünglichen Polynoms an besagten Stellen das Interpolationspolynom bilden und prüfen, ob es unser ursprüngliches Polynom teilt.

Korollar 6.2.7.13. *Sei* R *ein faktorieller Ring. Ist ein von Null verschiedenes Polynom* $P \in R[X] \backslash 0$ *nicht irreduzibel als Element des Polynomrings über dem Quotientenkörper* $P \in (\mathrm{Quot}R)[X]$*, so gibt es bereits in* $R[X]$ *Polynome* A, B *positiven Grades mit* $AB = P$.

Erster Beweis. Ist P primitiv, so folgt das unmittelbar aus unserem Satz. Andernfalls schreiben wir $P = c\tilde{P}$ mit $c \in R$ und $\tilde{P}$ primitiv und argumentieren genauso. □

Beispiel 6.2.7.14. Ich will auch noch an einem Beispiel erklären, wie man dies Korollar direkt aus dem Gauß'schen Lemma folgern kann. Nehmen wir an, wir hätten für $7X^2 - 7$ in $\mathbb{Q}[X]$ die Faktorisierung

$$7X^2 - 7 = (3X/7 + 3/7)(49X/3 - 49/3)$$

gefunden. Dann gilt $v_7(3X/7 + 3/7) + v_7(49X/3 - 49/3) = 1 \geq 0$ nach dem Gauß'schen Lemma und wir können folglich so Primfaktoren 7 zwischen den Faktoren unserer Faktorisierung austauschen, daß beide Faktoren dadurch eine positive 7-Bewertung kriegen. Diese Möglichkeiten wären hier $7X^2 - 7 = (3X + 3)(7X/3 - 7/3)$ und $7X^2 - 7 = (21X + 21)(X/3 - 1/3)$. Ebenso können wir für den Primfaktor 3 vorgehen und erhalten so die beiden Zerlegungen $7X^2 - 7 = (X + 1)(7X - 7)$ und $7X^2 - 7 = (7X + 7)(X - 1)$ in $\mathbb{Z}[X]$.

Korollar 6.2.7.15. *Für jeden Körper k ist der Polynomring $k[X_1, \ldots, X_n]$ faktoriell. Sogar $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ ist ein faktorieller Ring.*

Korollar 6.2.7.16. *Ist k ein Körper und sind $f, g \in k[X, Y]$ teilerfremde Polynome, so haben f und g höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen in k^2.*

Vorschau 6.2.7.17. In 6.2.10.2 werden wir genauer die „Schranke von Bézout" für die maximal mögliche Zahl gemeinsamer Nullstellen herleiten.

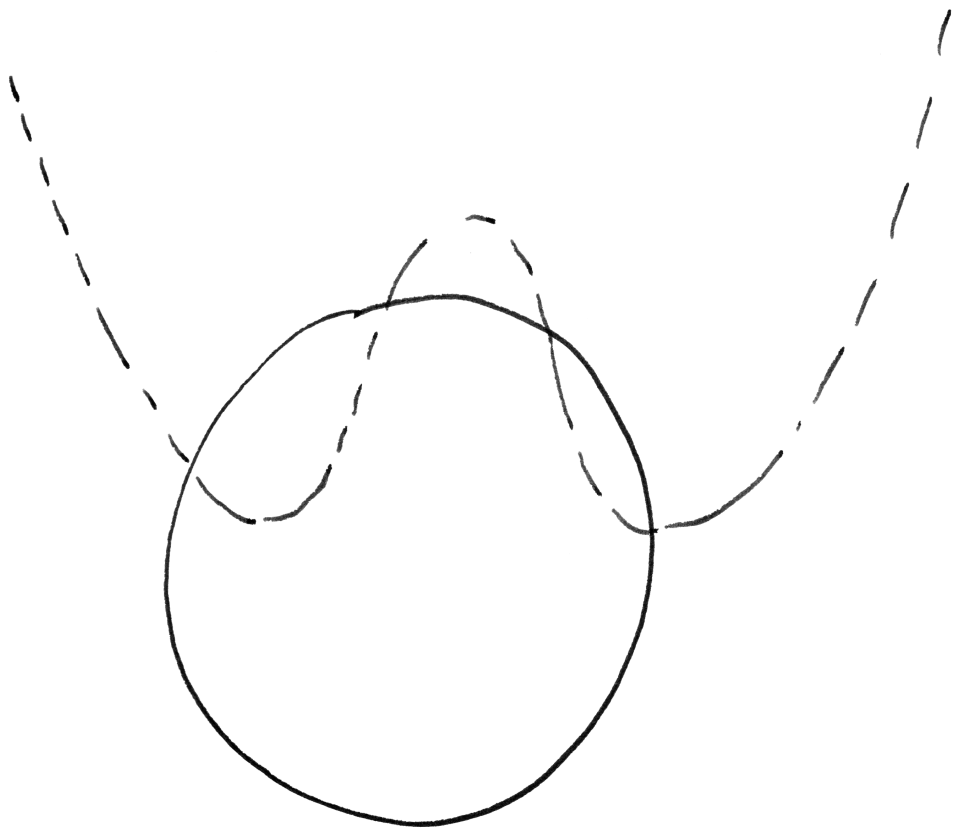
Beweis. Unsere Polynome haben nach der Beschreibung 6.2.7.11 der irreduziblen Elemente in Polynomringen über faktoriellen Ringen außer Einheiten erst recht keine gemeinsamen Teiler im Ring $k(X)[Y]$. Da dieser Ring nach 6.2.4.19 ein Hauptidealring ist, und da jeder Erzeuger des von unseren beiden Polynomen darin erzeugten Ideals ein gemeinsamer Teiler ist, gibt es notwendig $p, q \in k(X)[Y]$ mit $1 = pf + qg$. Nach Multiplikation mit so einer Art Hauptnenner h von p und q erhalten wir eine Identität der Gestalt

$$h = \tilde{p}f + \tilde{q}g$$

mit $0 \neq h \in k[X]$ und $\tilde{p}, \tilde{q} \in k[X, Y]$. Die endlich vielen Nullstellen von h sind dann die einzigen x-Koordinaten, die für gemeinsame Nullstellen von f und g in Frage kommen. Ebenso kommen auch nur endlich viele y-Koordinaten für gemeinsame Nullstellen in Frage. Das Korollar folgt. □

Übungen

Übung 6.2.7.18. Ist R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K und sind $P, Q \in K[X]$ normierte Polynome mit $PQ \in R[X]$, so folgt bereits $P, Q \in R[X]$.



Die Nullstellenmengen zweier Polynome $f, g \in \mathbb{R}[X, Y]$ ohne gemeinsamen nichtkonstanten Teiler als durchgezogener Kreis und gestrichelter Umriß eines auf dem Rücken liegenden Kamels. Hierfür ist die Papierebene vermittels eines Koordinatensystems mit dem $\mathbb{R}^2$ zu identifizieren. Legen wir etwa den Ursprung ins Zentrum des durgezogenen Kreises, so würden wir $f(X, Y) = X^2 + Y^2 - 1$ und $g(X, Y) = X^4 - 2X^2 + \frac{3}{2} - Y$ in etwa die skizzierten Nullstellenmengen besitzen.

Übung 6.2.7.19. Sei k ein Körper. Gibt es für ein Polynom P aus dem Polynomring $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Element $Q \in k(X_1, \ldots, X_n)$ aus dem Quotientenkörper mit $Q^2 = P$, so ist Q bereits selbst ein Polynom, in Formeln $Q \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Hinweis: 6.2.4.32.

Übung 6.2.7.20. Seien k ein Körper und $0 < n(1) < n(2) < \ldots < n(r) < n$ natürliche Zahlen, $r \geq 0$. Man zeige, daß das Polynom

$$T^n + a_r T^{n(r)} + \ldots + a_1 T^{n(1)} + a_0$$

irreduzibel ist in $K[T]$, für $K = \operatorname{Quot} k['a_0, \ldots, a_r]$ der Funktionenkörper. Hinweis: Jede Zerlegung käme nach 6.2.7.18 und 6.2.7.11 notwendig von einer Zerlegung im Polynomring $k['a_0, \ldots, a_r, T]$ her und müßte unter dem Einsetzen $a_1 = \ldots = a_r = 0$ zu einer Zerlegung von $T^n + a_0$ in $k['a_0, T]$ führen.

Übung 6.2.7.21. Sei K ein Körper und $K(X)$ sein Funktionenkörper. Man zeige, daß jedes K-irreduzible Polynom in $K[T]$ auch $K(X)$-irreduzibel ist. Hinweis: 6.2.7.18.

Übung 6.2.7.22 (**Satz über rationale Nullstellen**). Man zeige: Gegeben ein Polynom

$$a_n T^n + \ldots + a_1 T + a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten und eine rationale Wurzel p/q mit p, q teilerfremden ganzen Zahlen ist p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n.

6.2.8 Kreisteilungspolynome

6.2.8.1. Wir interessieren uns in dieser Vorlesung besonders für uns die Zerlegung der Polynome $X^n - 1$ in irreduzible Faktoren in $\mathbb{Z}[X]$. Die komplexen Nullstellen von $X^n - 1$ heißen die **komplexen n-ten Einheitswurzeln**. Sie bilden in der komplexen Zahlenebene die Ecken eines in den Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. In $\mathbb{C}[X]$ gilt natürlich

$$X^n - 1 = \prod_{\zeta^n = 1} (X - \zeta)$$

Nun bilden wir in $\mathbb{C}[X]$ die Polynome

$$\Phi_d(X) = \prod_{\operatorname{ord} \zeta = d} (X - \zeta)$$

Dann gilt offensichtlich

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$$

Sicher sind alle unsere Polynome Φ_d normiert. Daraus folgt durch Teilen mit Rest 3.5.3.15 und Induktion $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ für alle $n \geq 1$. Dies Polynom Φ_n heißt das n**-te Kreisteilungspolynom** oder bei griechisch Gebildeten das n**-te zyklotomische Polynom**. Natürlich gilt $\operatorname{grad}(\Phi_n) = \varphi(n)$, der Grad des n-ten Kreisteilungspolynoms ist also genau der Wert der Euler'schen φ-Funktion an der Stelle n, und das macht auch die Notation plausibel. Wir werden in 6.4.4.2 zeigen, daß alle Kreisteilungspolynome irreduzibel sind in $\mathbb{Q}[X]$, so daß wir das n-te Kreisteilungspolynom auch und vielleicht eher noch besser charakterisieren können als das eindeutig bestimmte normierte in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzible Polynom, das die n-te Einheitswurzel $\exp(2\pi\mathrm{i}/n)$ als Nullstelle hat. Natürlich haben wir für $p > 1$ stets die Zerlegung $X^p - 1 = (X-1)(X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1)$, also ist für p prim der zweite Faktor das p-te Kreisteilungspolynom Φ_p. In diesem Fall können wir die Irreduzibilität mithilfe des gleich folgenden „Eisensteinkriteriums" bereits hier zeigen.

Satz 6.2.8.2 (Eisensteinkriterium). *Sei $P = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und p eine Primzahl. Gilt $p \nmid a_n$, $p|a_{n-1}$, $\ldots$, $p|a_0$ und $p^2 \nmid a_0$, so ist P irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.*

6.2.8.3. Eine analoge Aussage gilt mit demselben Beweis auch für Polynome mit Koeffizienten in einem beliebigen faktoriellen Ring.

Beweis. Ist P nicht irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, so besitzt es nach 6.2.7.13 bereits eine Faktorisierung $P = QR$ in $\mathbb{Z}[X]$ mit Q, R von positiven Graden $r, s > 0$ und $r + s = n$. Wir reduzieren nun die Koeffizienten modulo p und folgern in $\mathbb{F}_p[X]$ eine Faktorisierung

$$\bar{P} = \bar{Q}\,\bar{R}$$

Nach Annahme haben wir aber $\bar{P} = \bar{a}_nX^n$ mit $\bar{a}_n \neq 0$. Es folgt $\bar{Q} = bX^r$ und $\bar{R} = cX^s$ für geeignete $b, c \in \mathbb{F}_p^\times$ und denselben positiven $r, s > 0$, denn das sind die einzig möglichen Faktorisierungen von $\bar{a}_nX^n$ als Produkt von Nichteinheiten im faktoriellen Ring $\mathbb{F}_p[X]$. Daraus folgt hinwiederum, daß die konstanten Terme von Q und R durch p teilbar sind, und dann muß der konstante Term von $QR = P$ teilbar sein durch p^2 im Widerspruch zur Annahme. □

Korollar 6.2.8.4. *Für jede Primzahl p ist das p-te Kreisteilungspolynom $\Phi_p(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.*

Beweis. Wir haben $X^p - 1 = (X-1)\Phi_p(X)$. Reduzieren wir diese Gleichung modulo p und beachten die Gleichung $X^p - 1 = (X-1)^p$ in $\mathbb{F}_p[X]$, so folgt $\bar{\Phi}_p(X) = (X-1)^{p-1}$ in $\mathbb{F}_p[X]$ und nach der Substitution $X = Y + 1$ haben wir $\bar{\Phi}_p(Y+1) = Y^{p-1}$ in $\mathbb{F}_p[Y]$, als da heißt, alle Koeffizienten von $\Phi_p(Y+1)$ bis auf den Leitkoeffizienten sind durch p teilbar. Jetzt prüfen wir einfach explizit, daß

der konstante Term von $\Phi_p(Y+1)$ genau p ist, und haben gewonnen nach dem Eisensteinkriterium 6.2.8.2. $\square$

Ergänzung 6.2.8.5. Nach ersten Rechnungen mag man vermuten, daß als Koeffizienten von Kreisteilungspolynomen nur 1, 0 und -1 in Frage kommen. Das erste Gegenbeispiel für diese Vermutung liefert das 105-te Kreisteilungspolynom, in dem X^7 mit dem Koeffizienten 2 auftritt. Man kann allgemeiner sogar zeigen [Suz87, SDAT00], daß jede ganze Zahl als Koeffizient mindestens eines Kreisteilungspolynoms auftritt.

Übungen

Übung 6.2.8.6 (**Kreisteilungspolynome zu Primzahlpotenzen**). Man zeige die Formel $\Phi_9(X) = X^6 + X^3 + 1$ für das neunte Kreisteilungspolynom. Man zeige allgemeiner $\Phi_{p^r}(X) = \Phi_p(X^{p^{r-1}})$ für p prim und $r \geq 1$. Man gebe auch explizite Formeln für alle kleineren Kreisteilungspolynome $\Phi_1, \ldots, \Phi_8$.

Übung 6.2.8.7. Man zeige, daß das neunte Kreisteilungspolynom $\Phi_9(X) = X^6 + X^3 + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist. Hinweis: Man substituiere $X = Y + 1$ und wende das Eisensteinkriterium an. Mit einem bereits weiter oben verwendeten Trick kann die Rechnung stark vereinfacht werden. Dasselbe Argument zeigt, daß alle Kreisteilungspolynome $\Phi_{p^r}(X)$ für eine Primzahl p in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel sind.

Übung 6.2.8.8. Man zeige, daß $X^7 - 9$ ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{Z}[X]$ ist. Hinweis: Man betrachte die Einbettung $\mathbb{Z}[X] \hookrightarrow \mathbb{Z}[Y]$ mit $X \mapsto Y^2$.

Ergänzende Übung 6.2.8.9. Man zerlege $(X^n - Y^n)$ in $\mathbb{C}[X, Y]$ in ein Produkt irreduzibler Faktoren.

Ergänzende Übung 6.2.8.10 (**Quantisierte Binomialkoeffizienten**). Ist $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit q Elementen, so ist die Zahl der k-dimensionalen Teilräume von $\mathbb{F}^n$ genau

$$\frac{(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\ldots(q^k-q^{k-1})}$$

Setzen wir $[n]_q := q^{n-1} + q^{n-1} + \ldots + 1 = (q^n - 1)/(q - 1)$, so können wir unser Ergebnis auch darstellen als

$$\frac{[n]_q[n-1]_q\ldots[n-k+1]_q}{[k]_q[k-1]_q\ldots[1]_q}$$

Für diese **quantisierten Binomialkoeffizienten** ist auch eine Notation wie für die gewöhnlichen Binomialkoeffizienten mit eckigen statt runden Klammern üblich. Man zeige, daß unsere quantisierten Binomialkoeffizienten, wenn wir sie als Element des Quotientenkörpers $\mathbb{Q}('q)$ lesen, für alle k, n mit $0 \leq k \leq n$ bereits im Polynomring $\mathbb{Z}['q] \subset \mathbb{Q}('q)$ liegen. Hinweis: Man finde eine induktive Beschreibung der Art, wie sie dem Pascal'schen Dreieck zugrunde liegt.

6.2.9 Symmetrische Polynome

Definition 6.2.9.1. Sei k ein Ring. Für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ setzen wir die Identität auf k fort zu einem Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & k[X_1,\ldots,X_n] & \to & k[X_1,\ldots,X_n] \\ & X_i & \mapsto & X_{\sigma(i)} \end{array}$$

Ein Polynom $f \in k[X_1,\ldots,X_n]$ heißt **symmetrisch**, wenn gilt $f = \sigma f \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n$. Die Menge aller symmetrischen Polynome ist ein Teilring des Polynomrings $k[X_1,\ldots,X_n]$. Wir notieren ihn $k[X_1,\ldots X_n]^{\mathcal{S}_n}$.

6.2.9.2. Operiert ganz allgemein eine Gruppe G auf einem Ring R durch Ringhomomorphismen, so bilden die G-Invarianten stets einen Teilring R^G, den sogenannten **Invariantenring**.

6.2.9.3. Operiert eine Gruppe G auf einem Ring R durch Ringhomomorphismen, so operiert unsere Gruppe natürlich auch auf dem Polynomring über R in einer oder sogar in mehreren Veränderlichen. Die Invarianten des Polynomrings fallen dann mit dem Polynomring über dem Invariantenring zusammen, in Formeln $R[T]^G = R^G[T]$.

Beispiele 6.2.9.4. Das Produkt $X_1 \ldots X_n$ und die Summe $X_1 + \ldots + X_n$ sind symmetrische Polynome. Allgemeiner definieren wir die **elementarsymmetrischen Polynome** in n Veränderlichen $s_i(X_1,\ldots,X_n) \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]^{\mathcal{S}_n}$ durch die Identität

$$(T+X_1)(T+X_2)\ldots(T+X_n) = T^n + s_1T^{n-1} + s_2T^{n-2} + \ldots + s_n$$

im Ring $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n][T]^{\mathcal{S}_n} = \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]^{\mathcal{S}_n}[T]$, so daß wir also haben

$$s_i = \sum_{|I|=i} \left(\prod_{j \in I} X_j \right)$$

Die Summe läuft über alle i-elementigen Teilmengen $I \subset \{1,\ldots,n\}$. Speziell ergibt sich $s_1 = X_1 + \ldots + X_n$ und $s_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + \ldots + X_1X_n + X_2X_3 + \ldots + X_2X_n + \ldots + X_{n-1}X_n$ und $s_n = X_1 \ldots X_n$.

6.2.9.5. Gegeben ein kommutativer Ring k sind für beliebige $\zeta_1,\ldots,\zeta_n \in k$ die Koeffizienten des Polynoms $\prod_{i=1}^n (T-\zeta_i) \in k[T]$ per definitionem die elementarsymmetrischen Polynome in den $(-\zeta_i)$. Grob gesprochen sind also „die Koeffizienten eines Polynoms bis auf Vorzeichen die elementarsymmetrischen Polynome in seinen Nullstellen“.

Satz 6.2.9.6 (über symmetrische Polynome). *Alle symmetrischen Polynome sind polynomiale Ausdrücke in den elementarsymmetrischen Polynomen, und die elementarsymmetrischen Polynome s_i sind algebraisch unabhängig. Für einen beliebigen Ring k haben wir also in Formeln*

$$k[X_1, \ldots, X_n]^{\mathcal{S}_n} = k['s_1, \ldots, s_n]$$

mit einem „Freiheitsstrichlein" an der eröffnenden Klammer im Sinne unserer Notation 6.2.2.4.

Beispiel 6.2.9.7. Wir haben $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3$.

Beispiel 6.2.9.8. Die Darstellung von $(X_1 - X_2)^2$ durch elementarsymmetrische Polynome ist

$$\begin{aligned}(X_1 - X_2)^2 &= (X_1 + X_2)^2 - 4X_1X_2 \\ &= s_1^2 - 4s_2\end{aligned}$$

Ein quadratisches Polynom $T^2 - pT + q = (T - \zeta)(T - \xi)$ mit Koeffizienten p, q und Nullstellen ζ, ξ in einem Integritätsbereich k hat also genau dann eine doppelte Nullstelle $\zeta = \xi$, wenn gilt

$$0 = p^2 - 4q$$

In diesem Spezialfall läuft unsere Argumentation darauf hinaus, für unsere p, q die Identität $(\zeta - \xi)^2 = (\zeta + \xi)^2 - 4\zeta\xi = p^2 - 4q$ zu zeigen, was nicht schwer nachzurechnen ist.

Beweis. Da die symmetrischen Polynome einen Ring bilden, folgt aus $s_1, \ldots, s_n \in k[X_1, \ldots, X_n]^{\mathcal{S}_n}$ sofort $k[X_1, \ldots, X_n]^{\mathcal{S}_n} \supset k[s_1, \ldots, s_n]$. Für das weitere verwenden wir die Multiindexnotation wie in 12.2.2.3 und vereinbaren für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ die Abkürzung

$$X^\alpha := X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$$

Um nun die umgekehrte Inklusion $\subset$ zu zeigen, betrachten wir auf $\mathbb{N}^n$ die **lexikographische Ordnung**, also etwa $(5, 1, 3) \geq (4, 7, 1) \geq (4, 7, 0) \geq (4, 6, 114)$ im Fall $n = 3$. In Formeln ist sie induktiv definiert durch

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geq (\beta_1, \ldots, \beta_n) \quad \Leftrightarrow \quad & \alpha_1 > \beta_1 \\ & \text{oder} \\ & \alpha_1 = \beta_1 \text{ und } (\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \geq (\beta_2, \ldots, \beta_n).\end{aligned}$$

Bezüglich dieser Ordnung besitzt jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ ein kleinstes Element. Für ein von Null verschiedenes Polynom $0 \neq f = \sum c_\alpha X^\alpha$ nennen wir

das größte $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $c_\alpha \neq 0$ seinen „Leitindex“. Zum Beispiel hat das i-te elementarsymmetrische Polynom s_i den Leitindex $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ mit i Einsen vorneweg und dann nur noch Nullen. Gälte unsere Inklusion $\subset$ nicht, so könnten wir unter allen symmetrischen Polynomen außerhalb von $k[s_1, \ldots, s_n]$ ein f mit kleinstmöglichem Leitindex α wählen. Wegen $f = \sum c_\alpha X^\alpha$ symmetrisch gilt $c_\alpha = c_\beta$, falls sich die Multiindizes α und β nur in der Reihenfolge unterscheiden. Der Leitindex von f hat folglich die Gestalt

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ mit } \alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$$

Dann hat das Produkt

$$g := s_1^{\alpha_1 - \alpha_2} s_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \ldots s_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} s_n^{\alpha_n}$$

denselben Leitindex wie f und den Koeffizienten Eins vor dem entsprechenden Monom. Die Differenz $f - c_\alpha g$ ist folglich entweder Null oder hat zumindest einen echt kleineren Leitindex, gehört also zu $k[s_1, \ldots, s_n]$. Dann gehört aber auch f selbst zu $k[s_1, \ldots, s_n]$ im Widerspruch zu unseren Annahmen. Um schließlich die lineare Unabhängigkeit der Monome $s_1^{\gamma_1} \ldots s_n^{\gamma_n}$ in den elementarsymmetrischen Funktionen zu zeigen beachten wir, daß diese Monome paarweise verschiedene Leitindizes haben. Ist nun eine Linearkombination mit Koeffizienten in k unserer Monome null, so notwendig auch der Koeffizient des Monoms mit dem größten Leitindex, und dann induktiv alle Koeffizienten aller Monome. □

Definition 6.2.9.9. Gegeben ein Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ verwenden wir wie in 12.2.2.3 die Notation

$$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

Ein Polynom in mehreren Veränderlichen mit Koeffizienten in einem beliebigen Ring heißt **homogen vom Grad** d, wenn es eine Linearkombination von Monomen X^α ist mit $|\alpha| = d$, in Formeln

$$f = \sum_{|\alpha| = d} c_\alpha X^\alpha$$

Nennt man ein Polynom einfach nur **homogen**, so ist gemeint, daß es einen Grad d gibt derart, daß unser Polynom homogen ist vom Grad d. Das Nullpolynom ist homogen von jedem Grad, aber jedes von Null verschiedene homogene Polynom ist homogen von nur genau einem Grad. Das Produkt zweier homogener Polynome ist homogen vom Grad der Summe der Grade der Faktoren. Gegeben ein nicht notwendig homogenes Polynom $g = \sum_\alpha c_\alpha X^\alpha$ heißt $\sum_{|\alpha|=d} c_\alpha X^\alpha$ seine **homogene Komponente vom Grad** d. Jedes Polynom ist mithin die Summe seiner homogenen Komponenten, und fast alle dieser homogenen Komponenten sind Null.

6.2.9.10 (**Diskussion der Terminologie**). Das Nullpolynom hat in unserer Terminologie einerseits den Grad $-\infty$ und ist andererseits homogen von jedem Grad $d \in \mathbb{N}$. Diese terminologische Schwierigkeit gilt es auszuhalten.

Beispiel 6.2.9.11. Das Polynom $X^3Y^3Z + X^2Z^5 - 98X^4YZ^2$ ist homogen vom Grad 7. Das elementarsymmetrische Polynom s_d ist homogen vom Grad d.

Beispiel 6.2.9.12. Wir versuchen, das symmetrische Polynom $\Delta := (X-Y)^2(Y-Z)^2(Z-X)^2$ durch elementarsymmetrische Funktionen auszudrücken, wo ich statt X_1, X_2, X_3 die Notation X, Y, Z verwendet habe. Unser Polynom ist homogen vom Grad 6 und das i-te elementarsymmetrische Polynom s_i ist homogen vom Grad i. Wir machen also den Ansatz

$$\Delta = As_1^6 + Bs_1^4s_2 + Cs_1^3s_3 + Ds_1^2s_2^2 + Es_1s_2s_3 + Fs_2^3 + Gs_3^2$$

Hier haben wir die Summanden nach ihren Leitindizes geordnet. Da in Δ keine Monome X^6 oder X^5Y vorkommen, gilt $A = B = 0$. Setzen wir $Z = 0$, so folgt

$$(XY)^2(X^2 - 2XY + Y^2) = D(X+Y)^2(XY)^2 + F(XY)^3$$

und damit $D = 1$ und $F = -4$. Wir kommen so zu einer Darstellung der Form

$$\Delta = Cs_1^3s_3 + s_1^2s_2^2 + Es_1s_2s_3 - 4s_2^3 + Gs_3^2$$

Zählen wir die Monome X^4YZ auf beiden Seiten, so folgt $C = -4$. Setzen wir jetzt für (X, Y, Z) speziell die Werte $(1, 1, -1)$ und $(2, -1, -1)$ ein, so erhalten für (s_1, s_2, s_3) die Werte $(1, -1, -1)$ und $(0, -3, 2)$ und finden

$$4 + 1 + E + G + 4 = 0 = 4G + 4 \cdot 27$$

Daraus folgt sofort $G = -27$, $E = 18$, und dann als Endresultat

$$\Delta = s_1^2s_2^2 - 4s_1^3s_3 + 18s_1s_2s_3 - 4s_2^3 - 27s_3^2$$

Ein kubisches Polynom $T^3 + aT^2 + bT + c = (T+\alpha)(T+\beta)(T+\gamma)$ mit Koeffizienten a, b, c und Nullstellen $-\alpha, -\beta, -\gamma$ in einem Integritätsbereich k hat also mehrfache Nullstellen genau dann, wenn gilt

$$0 = a^2b^2 - 4a^3c + 18abc - 4b^3 - 27c^2$$

Das Negative $\mathrm{Disk}_3 := -\Delta$ dieses Ausdrucks in den Koeffizienten werden wir gleich in 6.2.9.13 für normierte Polynome beliebigen Grades als deren „Diskriminante“ einführen.

Satz 6.2.9.13. *Es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau ein Polynom in n Variablen, genannt die n-te* **Diskriminante** $\mathrm{Disk}_n \in \mathbb{Z}['a_1, \ldots, a_n]$, *mit der Eigenschaft, daß beim Einsetzen derjenigen Polynome $a_i \in \mathbb{Z}['\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ in die Variablen, die durch die Identität $T^n + a_1 T^{n-1} + \ldots + a_n = (T + \zeta_1) \ldots (T + \zeta_n)$ gegeben werden, im Polynomring $\mathbb{Z}['\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ gilt*

$$\mathrm{Disk}_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i \neq j} (\zeta_i - \zeta_j)$$

6.2.9.14 (**Ursprung der Terminologie**). Die Bezeichnung „Diskriminante“ wird verständlich, wenn man mehrfache Nullstellen ansieht als „eigentlich verschiedene“ Nullstellen, die nur unglücklicherweise zusammenfallen und deshalb nicht mehr voneinander unterschieden oder lateinisierend „diskriminiert“ werden können.

Beweis. Unser Produkt ist offensichtlich symmetrisch und läßt sich nach 6.2.9.6 folglich eindeutig schreiben als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen. □

6.2.9.15. Für jeden kommutativen Integritätsbereich k und jedes normierte Polynom $T^n + a_1 T^{n-1} + \ldots + a_n$ im Polynomring $k[T]$, das in $k[T]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, sind für die eben definierte Diskriminante Disk_n offensichtlich gleichbedeutend:

1. $\mathrm{Disk}_n(a_1, \ldots, a_n) = 0$;
2. Das Polynom $T^n + a_1 T^{n-1} + \ldots + a_n$ hat mehrfache Nullstellen.

Man nennt das Element $\mathrm{Disk}_n(a_1, \ldots, a_n) \in k$ auch die **Diskriminante des normierten Polynoms** $T^n + a_1 T^{n-1} + \ldots + a_n$. Eine explizite Formel für die Diskriminante geben wir in 6.3.9.27. Manche Quellen definieren die Diskriminate abweichend als $\prod_{i<j} (\zeta_i - \zeta_j)^2 = (-1)^{n(n-1)/2} \mathrm{Disk}_n$.

Beispiel 6.2.9.16. Gilt speziell im Polynomring $k[T]$ über irgendeinem Kring k die Identität $T^2 - pT + q = (T - \zeta)(T - \xi)$ für $p, q, \alpha, \beta, \gamma \in k$, so erhalten wir in k die Identität $-(\zeta - \xi)^2 = -p^2 + 4q$. Das bedeutet

$$\mathrm{Disk}_2(p, q) = -p^2 + 4q$$

Beispiel 6.2.9.17. Gilt speziell im Polynomring $k[T]$ über irgendeinem Kring k die Identität $T^3 + pT + q = (T - \alpha)(T - \beta)(T - \gamma)$ für $p, q, \alpha, \beta, \gamma \in k$, so erhalten wir in k die Identität $-(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2 = 4p^3 + 27q^2$. Das bedeutet

$$\mathrm{Disk}_3(0, p, q) = 4p^3 + 27q^2$$

Übungen

Übung 6.2.9.18. Was ist die Summe der $\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_4^3$ dritten Potenzen der vier komplexen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ des Polynoms $X^4 + 3X^3 - 5X^2 + X + 1$?

Ergänzende Übung 6.2.9.19. Man zeige für symmetrische Polynome im Fall $n \geq k$ die Identität

$$s_{2k}(X_1, \ldots, X_n, -X_1, \ldots, -X_n) = (-1)^k s_k(X_1^2, \ldots, X_n^2)$$

Ergänzende Übung 6.2.9.20. Man zeige, daß die Polynome $P \in \mathbb{Z}[X, Y]$, die bei Vertauschung von X und Y in ihr Negatives übergehen, gerade die Produkte von $(X - Y)$ mit symmetrischen Polynomen sind.

Ergänzende Übung 6.2.9.21. Sei k ein Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik. Ein Polynom $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ heißt **antisymmetrisch** genau dann, wenn gilt $\sigma f = \operatorname{sgn}(\sigma) f \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n$. Man zeige, daß die antisymmetrischen Polynome genau die Produkte von $\prod_{i<j}(X_i - X_j)$ mit symmetrischen Polynomen sind. Hinweis: 3.5.4.5. Man zeige dasselbe auch allgemeiner im Fall eines faktoriellen Rings k einer von Zwei verschiedenen Charakteristik.

Ergänzende Übung 6.2.9.22. Ist der Koeffizientenring k ein unendlicher Integritätsbereich, so ist ein Polynom $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ homogen vom Grad d genau dann, wenn gilt

$$f(\lambda X_1, \ldots, \lambda X_n) = \lambda^d f(X_1, \ldots, X_n) \qquad \forall \lambda \in k$$

Übung 6.2.9.23. Man stelle $X^4 + Y^4 + Z^4 + W^4$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen dar.

Ergänzende Übung 6.2.9.24. Ist R ein Kring mit einer Primzahl p als Charakteristik, so bilden die Elemente $a \in R$ mit $a^p = a$ einen Teilring.

Übung 6.2.9.25. Man zeige: Die Darstellung eines symmetrischen Polynoms vom Grad d durch elementarsymmetrische Polynome ist dieselbe für jede Zahl von Variablen $\geq d$. Zum Beispiel impliziert unsere Formel $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3$, daß auch in 14 Variablen gilt $X_1^3 + X_2^3 + \ldots + X_{14}^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3$.

Ergänzende Übung 6.2.9.26. Der Ring der symmetrischen Funktionen in n Veränderlichen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ wird auch als Ring erzeugt von $\mathbb{Q}$ und den Potenzsummen $X_1^k + \ldots + X_n^k$ für $1 \leq k \leq n$. Hinweis: Wir schreiben $X_1^n + \ldots + X_n^n = P(s_1, \ldots, s_n)$ und müssen zeigen, daß rechts der Summand s_n mit von Null verschiedenem Koeffizienten auftritt. Dann kommen wir mit 6.2.9.25 und Induktion zum Ziel. Spezialisieren wir aber die X_ν zu den Negativen der n-ten Einheitswurzeln $\exp(2\pi \mathrm{i}\nu/n)$ alias den Negativen der Nullstellen von $X^n - 1$, so werden alle $s_{n-1} = \ldots = s_1$ zu Null. Eine $(n \times n)$-Matrix A über einem Körper der

Charakteristik Null ist nilpotent genau dann, wenn für die Spuren ihrer Potenzen gilt

$$0 = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^2) = \ldots = \operatorname{tr}(A^n)$$

Übung 6.2.9.27. Seien k ein Körper und $f, g \in k[X, Y]$ teilerfremde Polynome, die homogen sind von den Graden m und n. Man zeige, daß sich jedes homogene Polynom h vom Grad $m + n - 1$ eindeutig schreiben läßt als $h = af + bg$ mit a homogen vom Grad $n - 1$ und b homogen vom Grad $m - 1$. Hinweis: 6.2.4.33.

6.2.10 Schranke von Bézout*

Definition 6.2.10.1. Sei k ein Körper. Ein Polynom in zwei Veränderlichen $f \in k[X, Y]$ können wir in eindeutiger Weise schreiben in der Gestalt $f = \sum c_{pq} X^p Y^q$ mit $c_{pq} \in k$. Wir definieren den **Grad** oder genauer **Totalgrad** von f durch die Vorschrift

$$\operatorname{grad} f := \sup\{p + q \mid c_{pq} \neq 0\}$$

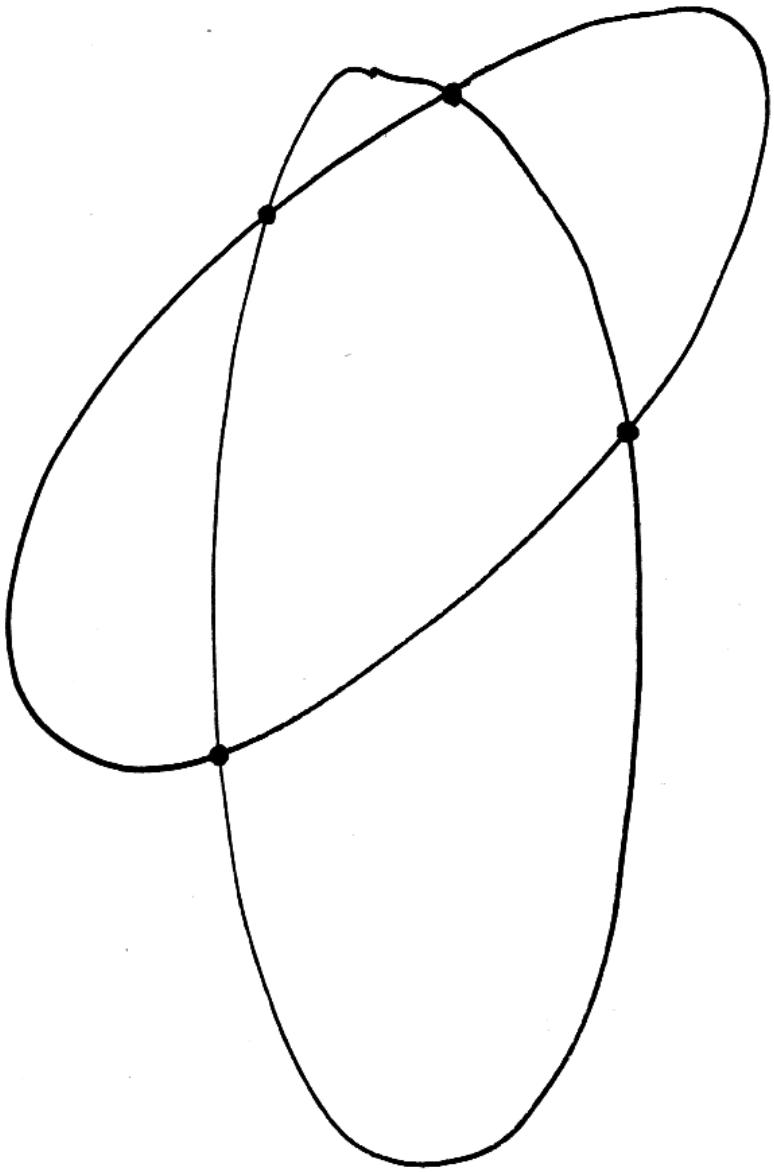
Speziell geben wir im Lichte von 10.3.2.3 dem Nullpolynom wie in einer Veränderlichen den Grad $-\infty$. Analog definieren wir auch den Grad eines Polynoms in beliebig vielen Veränderlichen.

Satz 6.2.10.2 (Schranke von Bézout). *Sei k ein Körper und seien im Polynomring $k[X, Y]$ in zwei Veränderlichen über k zwei von Null verschiedene teilerfremde Polynome f, g gegeben. So haben f und g in der Ebene k^2 höchstens $(\operatorname{grad} f)(\operatorname{grad} g)$ gemeinsame Nullstellen.*

Vorschau 6.2.10.3. Ist $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen und zählt man die gemeinsamen Nullstellen von f und g mit geeignet definierten Vielfachheiten und nimmt auch noch die „Nullstellen im Unendlichen“ mit dazu, so haben f und g in diesem verfeinerten Sinne sogar genau $(\operatorname{grad} f)(\operatorname{grad} g)$ gemeinsame Nullstellen. Mehr dazu können Sie in der algebraischen Geometrie 7.6.10.6 lernen.

Beispiel 6.2.10.4. Ist eines unserer Polynome von der Gestalt $a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 - Y$ und seine Nullstellenmenge mithin der Graph des Polynoms $a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ in einer Veränderlichen, so kann man diese Schranke schnell einsehen: Man setzt einfach in das andere Polynom $Y = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ ein und erhält ein Polynom in X, das eben nur höchstens so viele Nullstellen haben kann, wie sein Grad ist.

Beweis. Sicher reicht es, wenn wir unsere Schranke zeigen für geeignet transformierte Polynome $f \circ \varphi$, $g \circ \varphi$ mit $\varphi \in \mathrm{GL}(2; k)$ als da heißt $\varphi : k^2 \xrightarrow{\sim} k^2$ linear. Wir interessieren uns hier insbesondere für die Scherungen $\varphi_\lambda : k^2 \to k^2$, $(x, y) \mapsto (x + \lambda y, y)$ mit $\lambda \in k$. Gegeben $f \in k[X, Y]$ ein Polynom vom Totalgrad $\operatorname{grad} f = n$ enthält $f \circ \varphi_\lambda$ für alle $\lambda \in k$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen



Zwei verschiedene Ellipsen schneiden sich in höchstens vier Punkten. In der Tat sind sie jeweils Nullstellenmengen von Polynomfunktionen vom Totalgrad Zwei, so daß wir das unmittelbar aus der Schranke von Bézout folgern können.

einen Term cY^n mit $c \neq 0$. Das ist formal leicht einzusehen und entspricht der anschaulichen Erkenntnis, daß „das Nullstellengebilde von f nur höchstens endlich viele Asymptoten besitzt“. Wir wissen nach 6.2.7.16 schon, daß unsere beiden Polynome höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen haben können. Ist k unendlich, und jeder Körper k läßt sich notfalls in den unendlichen Körper $k(t)$ einbetten, so finden wir nun $\lambda \in k$ derart, daß unsere transformierten Polynome $f \circ \varphi_\lambda$ beziehungsweise $g \circ \varphi_\lambda$ beide Monome der Gestalt cY^n beziehungsweise dY^m mit $c \neq 0 \neq d$ enthalten, für $n = \operatorname{grad} f$, $m = \operatorname{grad} g$, und daß zusätzlich die gemeinsamen Nullstellen unserer transformierten Polynome paarweise verschiedene x-Koordinaten haben. Anschaulich gesprochen bedeutet das, daß wir die y-Achse so kippen, daß keine unserer Nullstellenmengen „einen in Richtung unserer gekippten y-Achse ins Unendliche gehenden Teil hat“ und daß jede Parallele zu unserer gekippten y-Achse höchstens eine gemeinsame Nullstelle unserer beiden Polynome trifft. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir also annehmen, daß unsere Polynome f und g die Gestalt

$$\begin{array}{rcl} f & = & Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots + a_n(X) \\ g & = & Y^m + b_1(X)Y^{m-1} + \ldots + b_m(X) \end{array}$$

haben mit $a_i, b_j \in k[X]$, $\operatorname{grad} a_i \leq i$, $\operatorname{grad} b_j \leq j$, und daß darüber hinaus die gemeinsamen Nullstellen von f und g paarweise verschiedene x-Koordinaten haben. Die x-Koordinaten gemeinsamer Nullstellen sind aber genau die Nullstellen der im folgenden definierten „Resultante“ $\operatorname{Res}(f, g) \in k[X]$, und in 6.2.10.9 zeigen wir, daß diese Resultante als Polynom in X höchstens den Grad nm hat. Das beendet dann den Beweis. □

Satz 6.2.10.5 (über die Resultante). *Gegeben $m, n \geq 0$ gibt es genau ein Polynom $\operatorname{Res} = \operatorname{Res}_{n,m} \in \mathbb{Z}['a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m]$ mit ganzzahligen Koeffizienten in $n + m$ Veränderlichen derart, daß unter der Substitution der a_i und b_j durch diejenigen Elemente von $\mathbb{Z}['\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \xi_1, \ldots, \xi_m]$, die erklärt sind durch die Gleichungen*

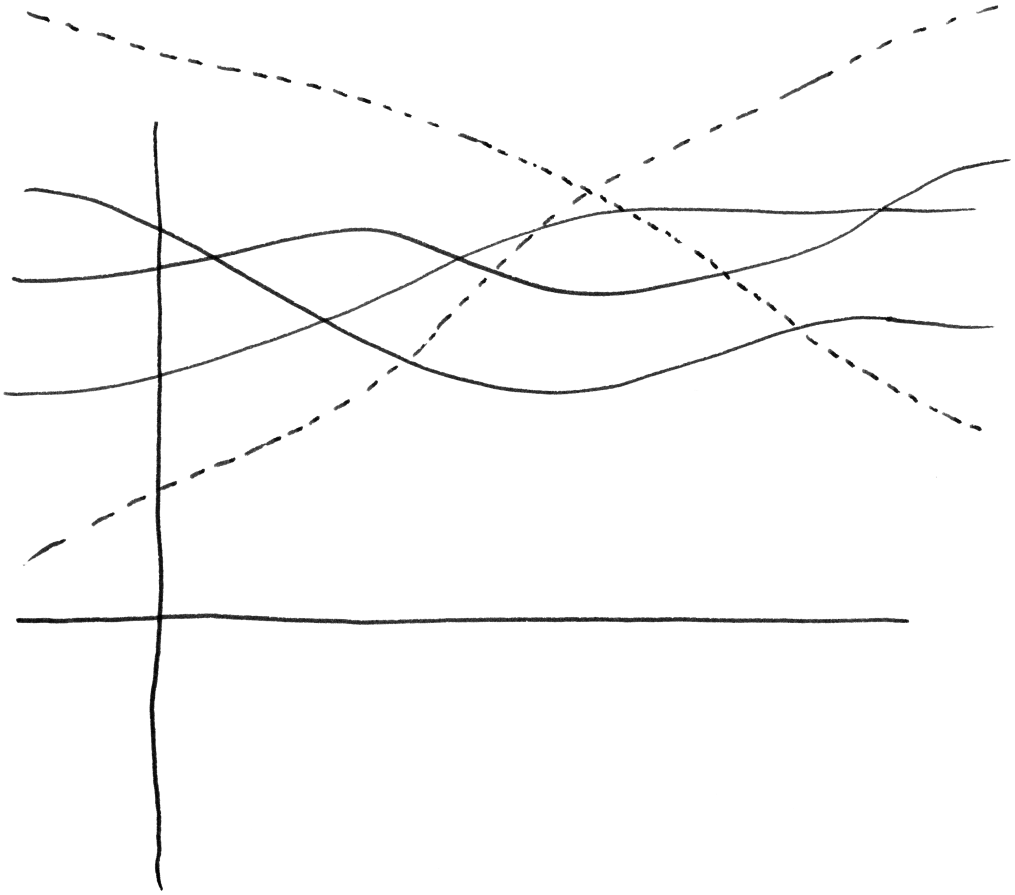
$$\begin{array}{rcl} T^n + a_1T^{n-1} + \ldots + a_n & = & (T + \zeta_1) \ldots (T + \zeta_n), \\ T^m + b_1T^{m-1} + \ldots + b_m & = & (T + \xi_1) \ldots (T + \xi_m), \end{array}$$

im Polynomring in den ζ_i und ξ_j gilt

$$\operatorname{Res}(a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots, b_m) = \prod_{i=1,j=1}^{n,m} (\zeta_i - \xi_j)$$

Definition 6.2.10.6. Gegeben normierte Polynome $f(T) = T^n + a_1T^{n-1} + \ldots + a_n$ und $g(T) = T^m + b_1T^{m-1} + \ldots + b_m$ mit Koeffizienten in einem Kring k benutzen wir die Abkürzung

$$\operatorname{Res}(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = \operatorname{Res}(f, g)$$



Das Nullstellengebilde von $f = Y^3 + a_2(X)Y^2 + \ldots + a_0(X)$ als durchgezogene und von $g = Y^2 + b_1(X)Y + \ldots + b_0(X)$ als gestrichelte Linien. Über jedem Punkt der x-Achse liegen genau drei beziehungsweise zwei Lösungen von f beziehungsweise g.

und nennen dies Element von k die **Resultante von f und g**. Bei der Determinantenbeschreibung der Resultante erklären wir allgemeiner für jede zwei nicht notwendig normierte Polynome f, g der Grade $\leq n$ beziehungsweise $\leq m$ ihre Resultante $\mathrm{Res}_{n,m}(f, g)$.

6.2.10.7 (**Bedeutung der Resultante**). Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so verschwindet die Resultante von zwei normierten Polynomen mit Koeffizienten in k per definitionem genau dann, wenn die beiden Polynome eine gemeinsame Nullstelle haben. Im allgemeinen verschwindet die Resultante jedenfalls, wann immer die beiden Polynome eine gemeinsame Nullstelle haben.

Beispiel 6.2.10.8. Im Fall $m = n = 2$ folgt aus $T^2 + a_1T + a_2 = (T - \zeta_1)(T - \zeta_2)$ und $T^2 + b_1T + b_2 = (T - \xi_1)(T - \xi_2)$ unmittelbar

$$\begin{aligned} a_2 &= \zeta_1\zeta_2, \quad a_1 = \zeta_1 + \zeta_2, \\ b_2 &= \xi_1\xi_2, \quad b_1 = \xi_1 + \xi_2, \end{aligned}$$

Eine kurze Rechnung liefert dann

$$(\zeta_1 - \xi_1)(\zeta_2 - \xi_2)(\zeta_1 - \xi_2)(\zeta_2 - \xi_1) = (a_2 - b_2)^2 - (a_2 + b_2)a_1b_1 + a_2b_1^2 + b_2a_1^2$$

Der Ausdruck rechts in den Koeffizienten ist also die Resultante der Polynome $f(T) = T^2 + a_1T + a_2$ und $g(T) = T^2 + b_1T + b_2$. Zum Beispiel sehen wir, daß im Fall $a_1 = b_1$ unsere Polynome f und g in einem algebraisch abgeschlossenen Körper genau dann eine gemeinsame Nullstelle haben, wenn gilt $a_2 = b_2$. Das hätten wir natürlich auch so schon gewußt, aber es ist doch ganz beruhigend, unseren Argumenten mal in einem überschaubaren Spezialfall bei der Arbeit zugesehen zu haben.

Beweis. Das Polynom $\prod_{i=1,j=1}^{n,m}(\zeta_i - \xi_j) \in \mathbb{Z}[\zeta_1, \ldots, \zeta_n][\xi_1, \ldots, \xi_m]$ ist symmetrisch in den ξ_j und liegt nach 6.2.9.6 folglich in

$$\mathbb{Z}[\zeta_1, \ldots, \zeta_n][b_1, \ldots, b_m] = \mathbb{Z}[b_1, \ldots, b_m][\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$$

Unser Polynom ist aber auch symmetrisch in den ζ_i, folglich liegt es wieder nach 6.2.9.6 sogar in $\mathbb{Z}[b_1, \ldots, b_m][a_1, \ldots, a_n]$. □

6.2.10.9 (**Grad der Resultante**). Wir zeigen nun noch die Behauptungen für den Grad der Resultante, die beim Beweis für die Schranke von Bézout benötigt wurden. Als Polynom in $\mathbb{Z}[\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \xi_1, \ldots, \xi_m]$ ist die Resultante ja offensichtlich homogen vom Grad mn. Dahingegen sind die $a_i \in \mathbb{Z}[\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ homogen vom Grad i und die $b_j \in \mathbb{Z}[\xi_1, \ldots, \xi_m]$ homogen vom Grad j. Aus der algebraischen Unabhängigkeit der elementarsymmetrischen Polynome folgt, daß ein Monom

$a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n} b_1^{\mu_1} \ldots b_m^{\mu_m}$ nur dann mit von Null verschiedenem Koeffizienten in der Resultante auftauchen kann, wenn gilt

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n + \mu_1 + 2\mu_2 + \ldots + m\mu_m = nm$$

Setzen wir hier insbesondere für a_i gewisse $a_i(X) \in k[X]$ vom Grad $\leq i$ und für b_j gewisse $b_j(X) \in k[X]$ vom Grad $\leq j$ ein, so ist die Resultante ein Polynom in $k[X]$ vom Grad $\leq mn$.

Ergänzung 6.2.10.10 (**Die Resultante als Determinante**). Sei M die Matrix aus nebenstehendem Bild. Eine explizite Formel für die Resultante ist

$$\operatorname{Res}(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = \det M$$

Um das einzusehen, kann man wie folgt argumentieren: Gegeben zwei normierte nicht konstante Polynome $f, g \in k[T]$ mit Koeffizienten in einem Körper k sind ja gleichbedeutend:

(1) Unsere beiden Polynome sind teilerfremd in $k[T]$;

(2) Es gibt Polynome p, q mit $\deg p < \deg g$ und $\deg q < \deg f$, für die gilt $pf + qg = 1$.

In der Tat ist $(2) \Rightarrow (1)$ offensichtlich und $(1) \Rightarrow (2)$ folgt unmittelbar aus dem abstrakten chinesischen Restsatz 6.2.3.4, wenn wir etwa das Urbild kleinsten Grades von $(0, 1) \in k[T]/\langle f \rangle \times k[T]/\langle g \rangle$ in $k[T]$ aufsuchen. Insbesondere sehen wir so, daß p und q bereits eindeutig bestimmt sind, wenn es sie denn gibt. Nun können wir die Gleichung $pf + qg = 1$ als ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten von p und q auffassen, und die Matrix dieses Systems ist dann genau die oben gegebene Matrix, wie der Leser leicht selbst einsehen wird. Genau dann ist also unser System eindeutig lösbar, wenn die Determinante der fraglichen Matrix nicht Null ist. Genau dann verschwindet also diese Determinante, wenn f und g nicht teilerfremd sind, und im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers k ist das gleichbedeutend dazu, daß f und g eine gemeinsame Nullstelle haben. Speziell erkennen wir so mit 3.5.4.5, daß das Polynom $\prod(\zeta_i - \xi_j)$ in $\mathbb{Q}[\zeta_i, \xi_j]$ unsere Determinante teilt, wenn wir sie zu den Polynomen aus 6.2.10.5 mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}[\zeta_i, \xi_j]$ bilden. Wir erkennen sogar genauer, daß unsere Determinante bis auf eine von Null verschiedene Konstante ein Produkt von Faktoren $(\zeta_i - \xi_j)$ ist, wobei jeder Faktor mindestens einmal vorkommt. Daß hier keine Faktoren mehrfach auftreten und daß die besagte von Null verschiedene Konstante eine Eins ist, können wir unschwer prüfen, indem wir alle ζ_i Null setzen.

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & \cdots & a_n & & & 0 \\
 & 1 & a_1 & & \ddots & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\
0 & & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & 1 & a_1 \cdots & a_n \\
1 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & & 0 \\
 & 1 & b_1 & & & b_m & \\
 & & \ddots & \ddots & & & \ddots \\
0 & & & 1 & b_1 & \cdots & b_m
\end{pmatrix}
\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n \end{matrix}
$$

Die Matrix M, deren Determinante die Resultante liefert. Gegeben zwei nicht notwendig normierte Polynome vom Grad $\leq n$ und $\leq m$ der Gestalt $a_0T^n + a_1T^{n-1} + \ldots + a_n$ und $b_0T^m + b_1T^{m-1} + \ldots + b_m$ nehmen wir diese Determinante mit den Einsen ersetzt durch a_0 beziehungsweise b_0 von nun an als unsere Definition der Resultante $\mathrm{Res}_{n,m}$.

Übungen

Ergänzende Übung 6.2.10.11. Zwei beliebige homogene Polynome $f(X,Y) = a_0X^n + a_1X^{n-1}Y + \ldots + a_nY^n$ und $g(X,Y) = b_0X^m + b_1X^{m-1}Y + \ldots + b_mY^m$ mit Koeffizienten in einem algebraisch abgeschlossenen Körper k haben genau dann eine gemeinsame Nullstelle außerhalb des Ursprungs, wenn die Determinante derjenigen Variante der nebenstehenden Matrix verschwindet, die entsteht, wenn wir die erste Reihe von Einsen durch a_0 und die zweite Reihe von Einsen durch b_0 ersetzen. Diese Determinante heißt dann auch die **Sylvester-Determinante**.

6.3 Mehr zu Körpern

6.3.1 Grundlagen und Definitionen

Beispiele 6.3.1.1. Ein Körper ist nach 3.5.2.25 ein kommutativer von Null verschiedener Ring, in dem jedes Element ungleich Null eine Einheit ist. Aus den Grundvorlesungen bekannt sind die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ der reellen und komplexen Zahlen sowie der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Allgemeiner haben wir in 3.5.5 zu jedem kommutativen Integritätsbereich R seinen Quotientenkörper $\operatorname{Quot} R$ konstruiert, zum Beispiel ist $\operatorname{Quot} \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen und $\operatorname{Quot} K[X] = K(X)$ der Funktionenkörper über einem gegebenen Körper K. Weiter ist nach 6.2.4.22 der Restklassenring R/pR von einem Hauptidealring nach dem von einem irreduziblen Element $p \in R$ erzeugten Ideal ein Körper. Insbesondere sind die Restklassenringe $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für p eine Primzahl in $\mathbb{Z}$ Körper und ebenso die Quotienten $K[X]/\langle P\rangle$ des Polynomrings $K[X]$ über einem Körper K nach einem irreduziblen Polynom $P \in K[X]$.

Definition 6.3.1.2. Eine Teilmenge eines Körpers heißt ein **Unterkörper**, wenn sie so mit der Struktur eines Körpers versehen werden kann, daß die Einbettung ein Körperhomomorphismus ist. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß unsere Teilmenge ein Teilring und mit der induzierten Ringstruktur ein Körper ist.

6.3.1.3. Sicher ist ein beliebiger Schnitt von Unterkörpern eines Körpers wieder ein Unterkörper. Ist K ein Körper und $T \subset K$ eine Teilmenge, so heißt der kleinste Unterkörper von K, der T enthält, der **von T erzeugte Unterkörper**. Den kleinsten Unterkörper von K, in anderen Worten den von der leeren Menge $T = \emptyset$ erzeugten Unterkörper, nennt man den **Primkörper von** K.

6.3.1.4. Für jeden Körper, ja jeden Ring K erinnern wir uns aus 3.5.2.30 an die Definition seiner **Charakteristik**, eines Elements $(\operatorname{char} K) \in \mathbb{N}$, durch die Identität

$$\ker(\mathbb{Z} \to K) = \mathbb{Z} \cdot (\operatorname{char} K)$$

Hier meint $\mathbb{Z} \to K$ den nach 3.5.1.10 eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach K.

6.3.1.5 (**Diskussion der Charakteristik**). Die Charakteristik ist also Null, wenn das neutrale Element der multiplikativen Gruppe $K^\times$ als Element der additiven Gruppe $(K, +)$ unendliche Ordnung hat, und ist sonst genau diese Ordnung. Gibt es demnach in noch anderen Worten eine natürliche Zahl $d > 0$ derart, daß in unserem Körper K gilt $1 + 1 + \ldots + 1 = 0$ (d Summanden), so ist das kleinstmögliche derartige $d > 0$ die Charakteristik $d = \operatorname{char} K$ von K, und gibt es kein derartiges d, so hat K die Charakteristik Null.

Lemma 6.3.1.6 (Kleinster Unterkörper eines Körpers). *Die Charakteristik eines Körpers ist entweder Null oder eine Primzahl und es gilt:*

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{char} K = 0 & \Leftrightarrow & \textit{Der kleinste Unterkörper von } K \textit{ ist isomorph zu } \mathbb{Q}; \\ \operatorname{char} K = p > 0 & \Leftrightarrow & \textit{Der kleinste Unterkörper von } K \textit{ ist isomorph zu } \mathbb{F}_p. \end{array}$$

Beweis. Sei $d = \operatorname{char} K$. Da wir eine Inklusion $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \hookrightarrow K$ haben, muß $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ein Integritätsring sein, also ist die Charakteristik eines Körpers nach 3.5.2.26 entweder null oder eine Primzahl. Im Fall $\operatorname{char} K = p > 0$ prim induziert $\mathbb{Z} \to K$ unter Verwendung der universellen Eigenschaft des Restklassenrings 6.2.1.13 oder spezieller 6.2.2.5 einen Isomorphismus von $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ auf einen Unterkörper von K. Im Fall $d = 0$ induziert $\mathbb{Z} \to K$ unter Verwendung der universellen Eigenschaft des Quotientenkörpers 3.5.5.5 einen Isomorphismus von $\mathbb{Q} = \operatorname{Quot} \mathbb{Z}$ auf einen Unterkörper von K. Man prüft leicht, daß die Bilder jeweils die kleinsten Unterkörper von K sind. □

6.3.2 Körpererweiterungen

Definition 6.3.2.1. Eine **Körpererweiterung** ist ein Paar $L \supset K$ bestehend aus einem Körper L mit einem Unterkörper K. So ein Paar $L \supset K$ nennt man dann auch eine **Körpererweiterung von** K. Man schreibt statt $L \supset K$ meist L/K und nennt K den **Grundkörper** und L den **Erweiterungskörper** oder **Oberkörper** der Körpererweiterung. Von einer **echten Körpererweiterung** fordern wir zusätzlich, daß der Erweiterungskörper nicht mit dem Grundkörper zusammenfällt.

Beispiele 6.3.2.2. Ein Grundbeispiel ist die Körpererweiterung $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$. Das Beispiel $\mathbb{C}(X) \supset \mathbb{C}(X^2)$ zeigt, daß es auch bei einer echten Körpererweiterung durchaus vorkommen kann, daß es einen Körperisomorphismus zwischen Grundkörper und Oberkörper gibt. In diesem Beispiel ist mit $\mathbb{C}(X^2)$ der Quotientenkörper des Rings der geraden Polynome $\mathbb{C}[X^2] \subset \mathbb{C}[X]$ gemeint.

Vorschau 6.3.2.3. In 6.3.8.7 werden wir unsere Definition abändern und eine Körpererweiterung als Synonym für einen Körperhomomorphismus erklären. Zum jetzigen Zeitpunkt führt dieser Standpunkt jedoch noch nicht zu mehr Klarheit, sondern vielmehr nur zu einer unnötig aufgeblähten Notation, unter der das Verständnis, so fürchte ich, mehr leidet als unter einer späteren Umwidmung des Begriffs einer Körpererweiterung.

Definition 6.3.2.4 (Erzeugung von Körpererweiterungen). Gegeben eine Körpererweiterung L/K und Elemente des Erweiterungskörpers $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ bezeichnet man mit $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subset L$ den von K und den α_i erzeugten Unterkörper von L. Er ist im allgemeinen verschieden von dem von K und den α_i erzeugten Teilring $K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \subset L$. Eine Körpererweiterung L/K heiße

körperendlich, wenn der Erweiterungskörper über dem Grundkörper als Körper endlich erzeugt ist, wenn es also in Formeln endlich viele Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ gibt mit

$$L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

6.3.2.5 (**Diskussion der Notation**). Das Symbol $K(X)$ kann nun leider auf zweierlei Weisen interpretiert werden: Einerseits als der Quotientenkörper des Polynomrings $K[X]$ über K in einer Veränderlichen X, andererseits als der von K und einem weiteren Element X in einem größeren Körper L erzeugte Unterkörper. Wie viele Autoren benutzen wir nach Möglichkeit große Buchstaben vom Ende des Alphabets für die „algebraisch unabhängigen“ Variablen in einem Funktionenkörper, also im ersten Fall, und kleine Buchstaben für Elemente einer bereits gegebenen Körpererweiterung, also im zweiten Fall. Wollen wir die Freiheit unserer Veränderlichen besonders betonen, so setzen wir wie in 6.2.2.4 ein „Freiheitsstrichlein“ oben an die eröffnende Klammer und schreiben $K('X)$ für den Funktionenkörper in einer Variablen X.

Ergänzung 6.3.2.6. Gegeben Körper $K \subset L$ und eine Teilmenge $T \subset L$ bezeichnen wir mit $K(T) \subset L$ auch den von K und T in L erzeugten Teilkörper und nennen ihn den **über** K **von** T **erzeugten Teilkörper von** L. Wenn wir besonders betonen wollen, daß hier T eine Teilmenge von L ist und nicht etwa ein Element von L, schreiben wir auch ausführlicher $K(_!T)$. Gegeben Körper $K \subset L$ und eine Teilmenge $T \subset L$ kann der von K und T erzeugte Teilkörper $K(_!T) \subset L$ von L beschrieben werden als die Vereinigung aller von endlichen Teilmengen von T über K erzeugten Teilköper, in Formeln

$$K(_!T) = \bigcup_{\substack{n \geq 0 \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T}} K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

Beispiele 6.3.2.7. Wir haben $\mathbb{R}(\mathrm{i}) = \mathbb{R}[\mathrm{i}] = \mathbb{C}$ und $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, aber $K['X] \neq K('X)$, der Polynomring ist nämlich verschieden von seinem Quotientenkörper.

Übungen

Übung 6.3.2.8. Alle Elemente von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ lassen sich eindeutig schreiben in der Form $a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$, vergleiche 2.2.4.15. Man schreibe das Inverse von $7 + \sqrt{2}$ in dieser Form.

Übung 6.3.2.9. Man zeige $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Übung 6.3.2.10. Gegeben $a, b \in \mathbb{Q}^\times$ zeige man, daß gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{a}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{b})$ genau dann, wenn a/b in $\mathbb{Q}$ ein Quadrat ist. Gegeben allgemeiner Körper $K \subset L$ einer

von zwei verschiedenen Charakteristik und $\alpha, \beta \in L^\times$ mit $\alpha^2, \beta^2 \in K$ zeige man, daß gilt $K(\alpha) = K(\beta)$ genau dann, wenn $\alpha/\beta \in K$.

Übung 6.3.2.11. Sei L/K eine Körpererweiterung und seien $P, Q \in K[X]$ teilerfremd in $K[X]$. So haben P und Q auch in L keine gemeinsame Nullstelle. Hinweis: Unser Polynomring ist ein Hauptidealring. Nun verwende man ein Analogon des Satzes von Bezout. Weitergehende Aussagen in Richtung dieser Übung faßt Proposition 6.3.9.11 zusammen.

Ergänzung 6.3.2.12. Sehr viel allgemeiner kann man für paarweise verschiedene Primzahlen $p, q, \ldots w$ und beliebige $n, m, \ldots, r \geq 2$ zeigen, daß gilt

$$\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[m]{q}, \ldots, \sqrt[r]{w})$$

Das und vieles weitere in dieser Richtung lernt man in der algebraischen Zahlentheorie, die auf dieser Vorlesung aufbaut. Den Fall $n = m = \ldots = r = 2$ behandeln wir in 6.4.1.34. Noch allgemeiner zeigt Besicovich [Bes40], daß gegeben paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \ldots, p_s$ und positive natürliche durch keine dieser Primzahlen teilbare Zahlen $a_1, \ldots, a_s$ und beliebige positive natürliche Zahlen $n_1, \ldots, n_s$ stets gilt

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[n_1]{p_1 a_1}, \ldots, \sqrt[n_s]{p_s a_s}) : \mathbb{Q}] = n_1 \ldots n_s$$

Die Wurzeln sind hierbei stets als die positiven Wurzeln in $\mathbb{R}$ zu verstehen.

Übung 6.3.2.13. Seien K ein Körper und $P \in K[X] \backslash K$ ein nichtkonstantes Polynom. So ist der Ringhomomorphismus $K[Y] \to K[X]$ mit $Y \mapsto P$ injektiv und die davon induzierte Körpererweiterung $K(Y) \hookrightarrow K(X)$ hat als Grad den Grad von P.

6.3.3 Elemente von Körpererweiterungen

Definition 6.3.3.1. Sei L/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$. Gibt es ein vom Nullpolynom verschiedenes Polynom $0 \neq Q \in K[X]$ mit $Q(\alpha) = 0$, so heißt α **algebraisch über** K. Sonst heißt α **transzendent über** K. Unter einer **algebraischen** beziehungsweise **transzendenten Zahl** versteht man eine komplexe Zahl, die algebraisch beziehungsweise transzendent ist über dem Körper der rationalen Zahlen. Ein berühmter Satz von Lindemann besagt, daß die Kreiszahl $\pi \in \mathbb{R}$ transzendent ist über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, vergleiche 10.3.4.2.

6.3.3.2. Gegeben eine Körpererweiterung L/K und ein Element $\alpha \in L$ betrachten wir die Auswertungsabbildung

$$\begin{array}{ccc} K[X] & \to & L \\ Q & \mapsto & Q(\alpha) \end{array}$$

Ist α transzendent, so ist diese Abbildung injektiv und induziert nach der universellen Eigenschaft des Quotientenkörpers 3.5.5.5 einen Isomorphismus $K(X) = \operatorname{Quot} K[X] \xrightarrow{\sim} K(\alpha) \subset L$. Den anderen Fall klärt der folgende Satz.

Satz 6.3.3.3 (über das Minimalpolynom). *Seien L/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ algebraisch über K. So gilt:*

1. *Es gibt in $K[X]$ unter allen normierten Polynomen P mit $P(\alpha) = 0$ genau eines von minimalem Grad. Es heißt das* **Minimalpolynom** $P = \operatorname{Irr}(\alpha, K)$ **von** α **über** K*;*

2. *Dies Minimalpolynom ist K-irreduzibel und jedes Polynom $Q \in K[X]$ mit einer Nullstelle bei α ist ein Vielfaches des Minimalpolynoms von α;*

3. *Gegeben ein normiertes K-irreduzibles Polynom $Q \in K[X]$ mit einer Nullstelle bei α ist Q bereits das Minimalpolynom von α;*

4. *Das Auswerten bei α liefert einen Isomorphismus*
$$K[X]/\langle \operatorname{Irr}(\alpha, K)\rangle \xrightarrow{\sim} K(\alpha)$$

5. *Ist $d = \operatorname{grad}(\operatorname{Irr}(\alpha, K))$ der Grad des Minimalpolynoms von α über K, so bilden die Potenzen $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{d-1}$ eine Basis des K-Vektorraums $K(\alpha)$.*

Beispiel 6.3.3.4. Wir betrachten die Körpererweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{R}$. Das Element $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ ist algebraisch über $\mathbb{R}$ mit Minimalpolynom $\operatorname{Irr}(\mathrm{i}, \mathbb{R}) = X^2 + 1$. Wir haben $\mathbb{R}(\mathrm{i}) = \mathbb{C}$ und die Abbildung $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ mit $X \mapsto \mathrm{i}$ definiert einen Ringisomorphismus $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 + 1\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$. Die beiden Elemente $1 = \mathrm{i}^0$ und $\mathrm{i} = \mathrm{i}^1$ bilden eine Basis von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$.

Beweis. Da $K[X]$ nach 6.2.4.19 ein Hauptidealring ist und da das Auswerten $\varphi_\alpha : K[X] \to L$ mit $Q \mapsto Q(\alpha)$ keine Injektion ist, wir hatten ja α algebraisch über K angenommen, gibt es ein von Null verschiedenes und dann natürlich auch ein normiertes Polynom $P \in K[X]$ mit $\ker(\varphi_\alpha) = \langle P\rangle$. Alle anderen normierten Polynome aus $\langle P\rangle$ haben offensichtlich einen Grad, der echt größer ist als der Grad von P, und das zeigt bereits den ersten Teil des Satzes. Für unser P haben wir nach 6.2.2.5 weiter eine Einbettung $K[X]/\langle P\rangle \hookrightarrow L$, folglich ist $K[X]/\langle P\rangle$ ein Integritätsbereich. Nach 6.2.4.22 ist also P irreduzibel und $K[X]/\langle P\rangle$ sogar ein Körper. Dann induziert aber offensichtlich die Einbettung einen Isomorphismus $K[X]/\langle P\rangle \xrightarrow{\sim} K(\alpha)$. Nach 6.2.1.20 bilden für $d = \operatorname{grad} P$ die Bilder der Potenzen $1, X, X^2, \ldots, X^{d-1}$ eine Basis von $K[X]/\langle P\rangle$ über K, und damit bilden dann auch $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{d-1}$ eine Basis von $K(\alpha)$ über K. $\square$

6.3.3.5. Ich will die Irreduzibilität des Minimalpolynoms auch noch einmal ganz explizit begründen. Wäre das Minimalpolynom P ein Produkt $P = QR$ von Polynomen positiven Grades, so gälte $Q(\alpha) \neq 0 \neq R(\alpha)$ wegen der Minimalität des Minimalpolynoms, und das würde sofort zum Widerspruch $P(\alpha) \neq 0$ führen.

6.3.3.6. Sei L/K ein Körpererweiterung und $\alpha \in L$. Das Minimalpolynom von α über K ist im allgemeinen nur in $K[X]$ irreduzibel, in $L[X]$ spaltet es zumindest einen Faktor $(X - \alpha)$ ab und ist also reduzibel, es sei denn, wir sind im Fall $\alpha \in K$. Zum Beispiel ist $X^3 - 2$, da es ja $\mathbb{Q}$-irreduzibel ist, das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$ und es gilt

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

6.3.3.7. Ist eine Körpererweiterung als Körpererweiterung erzeugt von einem einzigen Element über dem Grundkörper, so nennt man sie eine **einfache** oder auch eine **primitive Körpererweiterung** des Grundkörpers und das fragliche Element heißt ein **primitives Element** der Körpererweiterung. In dieser Terminologie geben die vorhergehenden Überlegungen einen Überblick über die primitiven Erweiterungen eines gegebenen Körpers: Bis auf den Funktionenkörper sind das genau die Quotienten des Polynomrings nach irreduziblen Polynomen. Dabei können allerdings verschiedene normierte irreduzible Polynome durchaus zu „derselben“ primitiven Körpererweiterung führen – und was hier genau mit „derselben“ Körpererweiterung gemeint ist, wird im weiteren noch ausführlich diskutiert werden müssen.

Übungen

Übung 6.3.3.8. Alle Elemente von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ lassen sich eindeutig schreiben in der Form $a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Man schreibe das Inverse von $7 + \sqrt[3]{2}$ in dieser Form.

Übung 6.3.3.9. Gegeben eine Körpererweiterung L/K und ein Element $a \in L$, das algebraisch ist über K, zeige man, daß das Minimalpolynom $\operatorname{Irr}(a; K)$ bis auf ein Vorzeichen mit dem charakteristischen Polynom nach 3.6.6.9 des durch Multiplikation mit a gegebenen Endomorphismus des K-Vektorraums $K(a)$ zusammenfällt. Hinweis: Cayley-Hamilton.

Übung 6.3.3.10. Man bestimme das Minimalpolynom der komplexen Zahl $1 + \mathrm{i}$ über $\mathbb{R}$.

Ergänzende Übung 6.3.3.11. Zeigen Sie, daß das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ nicht in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, daß für jede Einheitswurzel ζ das Minimalpolynom von ζ über $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}(\zeta)$ in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, daß für ζ eine nichttriviale dritte Einheitswurzel und $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ über K in $K(\sqrt[3]{2})$ in Linearfaktoren zerfällt.

Ergänzende Übung 6.3.3.12. Sei $K \supset \mathbb{C}$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{C}$. Gilt $K \neq \mathbb{C}$, so kann der $\mathbb{C}$-Vektorraum K nicht von einer abzählbaren Teilmenge erzeugt werden, d.h. K hat „überabzählbare Dimension“ über $\mathbb{C}$. Hinweis: $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen nach 10.5.1.7 und abzählbar viele gebrochen rationale Funktionen aus $\mathbb{C}(X)$ können nur abzählbar viele Polstellen haben.

Übung 6.3.3.13. Seien $R \supset K$ ein Kring mit einem Teilring, der sogar ein Körper ist. Genau ist $\alpha \in R$ Nullstelle eines von Null verschiedenen Polynoms $P \in K[X]$, wenn $K[\alpha]$ endlichdimensional ist als K-Vektorraum.

Übung 6.3.3.14. Seien $R \supset K$ ein Kring mit einem Teilring, der sogar ein Körper ist. Ist R endlichdimensional als K-Vektorraum und ein Integritätsring, so ist R auch selbst bereits ein Körper.

Übung 6.3.3.15. Sei K ein Körper und $K(X)$ der Funktionenkörper über K. So sind die Elemente von K die einzigen Elemente von $K(X)$, die algebraisch sind über K.

6.3.4 Endliche Körpererweiterungen

Definition 6.3.4.1. Gegeben eine Körpererweiterung L/K ist der Oberkörper L in natürlicher Weise ein Vektorraum über dem Unterkörper K. Die Dimension von L als K-Vektorraum notieren wir

$$[L : K] := \dim_K L \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

und nennen sie den **Grad der Körpererweiterung**. Eine Körpererweiterung von endlichem Grad heißt eine **endliche Körpererweiterung**.

6.3.4.2 (**Diskussion der Terminologie**). Jede endliche Körpererweiterung ist körperendlich im Sinne unserer Definition 6.3.2.4, aber das Umgekehrte gilt nicht. Wenn wir einmal Moduln über Ringen eingeführt haben, werden wir unsere endlichen Körpererweiterungen manchmal auch ausführlicher **modulendlich** nennen, um diesen Unterschied zu betonen.

6.3.4.3 (**Grad einer primitiven Körpererweiterung**). Ist L/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ algebraisch über K, so stimmt nach dem letzten Teil des Satzes 6.3.3.3 über das Minimalpolynom der Grad $[K(\alpha) : K]$ der von α erzeugten Körpererweiterung überein mit dem Grad $\operatorname{grad}(\operatorname{Irr}(\alpha, K))$ des Minimalpolynoms von α über K. Daher rührt wohl auch die Begriffsbildung des „Grades einer Körpererweiterung“. Wir vereinbaren für diese Zahl die abkürzende Bezeichnung

$$\operatorname{grad}_K(\alpha) := \operatorname{grad}(\operatorname{Irr}(\alpha, K)) = [K(\alpha) : K]$$

und nennen sie den **Grad von α über K**.

Ergänzung 6.3.4.4 (**Diskussion der Notation**). Man kann sich fragen, warum man für den Grad einer Körpereweiterung L/K zusätzlich zu $\dim_K L$ noch eine eigene Notation einführen sollte. Meine Antwort auf diese Frage wäre, daß in der Notation $\dim_K L$ der Körper K unten im Index steht und dadurch weniger wichtig erscheint und schlecht selbst mit Indizes versehen werden kann. Diese Notation ist deshalb nur für das Arbeiten über einem festen Körper K praktisch. Im Zusammenhang der Körpertheorie aber sind alle auftretenden Körper gleichermaßen Hauptdarsteller, und in derartigen Situationen ist eine Notation wie $[L : K]$ geschickter.

Beispiele 6.3.4.5. Es gilt $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$, $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$, $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$.

Beispiel 6.3.4.6. Jede endliche Körpererweiterung L/K eines algebraisch abgeschlossenen Körpers ist trivial, als da heißt, es gilt $L = K$. In der Tat muß das Minimalpolynom jedes Elements von L den Grad Eins haben. Eine andere Formulierung eines sehr ähnlichen Arguments war Übung 3.6.6.26.

Proposition 6.3.4.7. *Sei L/K eine Körpererweiterung. Für $\alpha \in L$ sind gleichbedeutend:*

1. *α ist algebraisch über K;*
2. *$[K(\alpha) : K] < \infty$;*
3. *Es gibt einen Zwischenkörper $K \subset L' \subset L$ mit $[L' : K] < \infty$ und $\alpha \in L'$.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$ folgt unmittelbar aus 6.3.3.3. Die Implikation $2 \Rightarrow 3$ ist offensichtlich. Aber falls gilt $\dim_K L' < \infty$, können die Potenzen α^ν von α für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ nicht K-linear unabhängig sein, also $3 \Rightarrow 1$. □

Definition 6.3.4.8. Eine Körpererweiterung vom Grad 2 heißt eine **quadratische Körpererweiterung**.

Proposition 6.3.4.9 (**Quadratische Körpererweiterungen**). *Für eine Körpererweiterung L/K mit $\operatorname{char} K \neq 2$ sind gleichbedeutend:*

1. *L/K ist eine quadratische Körpererweiterung, in Formeln $[L : K] = 2$.*
2. *L entsteht aus K durch Adjunktion einer Quadratwurzel, in Formeln $L = K(\alpha)$ für ein $\alpha \in L \backslash K$ mit $\alpha^2 \in K$.*

Beweis. $2 \Rightarrow 1$ ist klar. Für die andere Richtung $1 \Rightarrow 2$ beachte man, daß jedes $\beta \in L \backslash K$ ja notwendig ein Minimalpolynom $P(X) = X^2 + aX + b$ vom Grad zwei hat. Schreiben wir das um zu $P(X) = (X + \frac{a}{2})^2 + (b - \frac{a^2}{4})$, so finden wir $(\beta + \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} - b$ und das gesuchte α ist $\alpha = \beta + \frac{a}{2}$. □

Ergänzung 6.3.4.10. Wir werden in 6.3.7.1 sehen, daß auch der Körper $\mathbb{F}_2$ eine Erweiterung vom Grad 2 besitzt. Diese Erweiterung entsteht jedoch sicher nicht durch Adjunktion einer Quadratwurzel, da jedes Element von $\mathbb{F}_2$ seine eigene Quadratwurzel ist.

Satz 6.3.4.11 (**Multiplikativität des Grades**). *Für Körper $M \supset L \supset K$ gilt*

$$[M : K] = [M : L][L : K]$$

Beweis. Wir betrachten nur den endlichen Fall. Sei $m_1, \ldots, m_r$ eine Basis von M über L und $l_1, \ldots, l_s$ eine Basis von L über K. Wir behaupten, daß dann die Produkte $l_i m_j$ eine Basis von M über K bilden. Natürlich sind sie ein Erzeugendensystem. Gilt andererseits $\sum_{i,j} k_{ij} l_i m_j = 0$ mit $k_{ij} \in K$, so folgt zunächst $\sum_i k_{ij} l_i = 0$ für alle j aufgrund der linearen Unabhängigkeit der m_j über L und dann $k_{ij} = 0$ für alle i, j aufgrund der linearen Unabhängigkeit der l_i über K. □

Korollar 6.3.4.12 (**Grade von Elementen in Körpererweiterungen**). *Gegeben eine endliche Körpererweiterung ist jedes Element des Oberkörpers algebraisch über dem Unterkörper und sein Grad über dem Unterkörper teilt den Grad unserer Körpererweiterung.*

Beweis. Sei L/K unsere Körpererweiterung und $\alpha \in L$ unser Element. Die Kette $L \supset K(\alpha) \supset K$ zeigt $[L : K] = [L : K(\alpha)][K(\alpha) : K]$. □

Beispiel 6.3.4.13. Es gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. In der Tat sind nach 6.2.4.29 die Polynome $X^2 - 2$ und $X^3 - 2$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, nach 6.3.3.6 sind sie also bereits die Minimalpolynome von $\sqrt{2}$ beziehungsweise $\sqrt[3]{2}$, und folglich hat $\sqrt{2}$ den Grad 2 über $\mathbb{Q}$ und $\sqrt[3]{2}$ den Grad 3.

Korollar 6.3.4.14. *Seien L/K eine Körpererweiterung und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ algebraisch über K. So ist $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ endlich über K und insbesondere sind alle Elemente dieser Körpererweiterung auch algebraisch über K.*

Beweis. Im Körperturm $K \subset K(\alpha_1) \subset K(\alpha_1, \alpha_2) \subset \ldots \subset K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sind alle Schritte endliche Körpererweiterungen. Nach 6.3.4.11 ist also auch die ganze Erweiterung endlich. □

Übungen

Ergänzende Übung 6.3.4.15. Ist $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$? Wenn ja, was ist sein Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$? Liegt $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$?

Ergänzende Übung 6.3.4.16. Sei K ein Körper und seien $P, Q \in K[X]$ irreduzibel mit $\operatorname{grad} P$ und $\operatorname{grad} Q$ teilerfremd. Sei $L = K(\alpha)$ eine Körpererweiterung von K, wobei $\alpha \in L$ eine Nullstelle von P ist. Dann ist Q auch irreduzibel in $L[X]$. Hinweis: Wäre sonst β Nullstelle eines irreduziblen Faktors von Q in $L[X]$, so hätte $K(\alpha, \beta)$ zu kleinen Grad über K, denn es umfaßt $K(\alpha)$ und $K(\beta)$.

Übung 6.3.4.17. Die durch den Funktionenkörper $K(X)$ über einem vorgegebenen Körper K gegebene Körpererweiterung $K(X)/K$ ist stets körperendlich, aber nie endlich.

Übung 6.3.4.18. Man zeige für jede Körpererweiterung L/K, daß ihr Grad übereinstimmt mit dem Grad der auf den Funktionenkörpern induzierten Erweiterung, in Formeln $[L : K] = [L(X) : K(X)]$. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall primitiver Erweiterungen zurück und verwende 6.2.7.21 und 6.3.3.15.

6.3.5 Notationen für Erzeugung**

6.3.5.1. Im folgenden sollen die folgenden Konventionen befolgt werden:

$|\ \rangle$ Unsymmetrische Klammern verwenden wir, um **Erzeugung als Monoid** anzudeuten, manchmal in der Form $|\ ;\top\rangle$ im Fall der Verknüpfung $\top$;

$\langle\ \rangle$ Spitze Klammern verwenden wir, um **Erzeugung als Modul** oder **Erzeugung als Gruppe** anzudeuten, manchmal in der Form $\langle\ \rangle_k$ im Fall von Moduln über einem Ring k;

$[\ ]$ Eckige Klammern verwenden wir, um **Erzeugung als Kring** anzudeuten, allgemeiner auch Erzeugung als Ring über einem nicht notwendig kommutativen Ring, aber mit paarweise kommutierenden Erzeugern;

$\lfloor\ \rfloor$ Oben offene eckige Klammern verwenden wir, um **Erzeugung als Ring** anzudeuten, insbesondere im Fall von nicht kommutierenden Erzeugern;

$(\ )$ Runde Klammern verwenden wir, um **Erzeugung als Körper** anzudeuten;

$|_!\ \rangle, \langle_!\ \rangle, [_!\ ], \lfloor_!\ \rfloor, (_!\ )$ Steht zwischen den Klammern nur ein Symbol und meint dies Symbol eine Menge von Erzeugern und nicht einen einzigen Erzeuger, so kann das aber muß nicht durch ein Ausrufezeichen unten an der eröffnenden Klammer angezeigt werden, den **Mengenanzeiger**;

$|'\ \rangle, \langle'\ \rangle, ['\ ], \lfloor'\ \rfloor$ Freies Erzeugen als Monoid oder Modul oder Kring oder Kringerweiterung kann aber muß nicht durch ein kleines **Freiheitsstrichlein** oben an der eröffnenden Klammer angezeigt werden;

($'$) Im Fall einer Körpererweiterung meint das **Freiheitsstrichlein**, daß zwischen den Klammer algebraisch unabhängige Erzeuger stehen.

Beispiele 6.3.5.2. Wir schreiben $k['x_1, \ldots, x_n] = k[x_1, \ldots, x_n]$ für Polynomring über k in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Der freie k-Vektorraum über einer Menge X aus 3.2.3.4 kann bezeichnet werden mit $k\langle'_! X\rangle = k\langle X\rangle = kX$. Ist ein k-Vektorraum M bereits gegeben und $X \subset M$ eine Teilmenge, so schreiben wir $\langle_! X\rangle_k = \langle X\rangle_k = \langle kX\rangle \subset M$ für den von X erzeugten Untervektorraum. Wir kürzen $\langle\{x_1, \ldots, x_n\}\rangle_k = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle_k = k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ ab und lassen k ganz weg, wenn wir hoffen, daß es aus dem Kontext hervorgeht oder wenn die Erzeugung als Untergruppe gemeint ist. Allerdings setzen wir nur dann ein Freiheitsstrichlein, wenn die Erzeuger linear unabhängig sind. Sind weiter $R \supset k$ ein Kring mit einem Teilring und sind $x_1, \ldots, x_n$ Elemente von R, so notieren wir $k[x_1, \ldots, x_n] \subset R$ den von den x_i über k in R erzeugten Teilring und erlauben uns das Freiheitsstrichlein nur, wenn die Erzeuger über k algebraisch unabhängig sind.

6.3.6 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Definition 6.3.6.1. Sei $E \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge der komplexen Zahlenebene.

1. Eine reelle affine Gerade durch zwei verschiedene Punkte von E heißt eine „aus E elementar konstruierbare Gerade“;

2. Ein Kreis durch einen Punkt von E mit Mittelpunkt in einem anderen Punkt von E heißt ein „aus E elementar konstruierbarer Kreis“ ;

3. Alle aus E elementar konstruierbaren Geraden und Kreise fassen wir zusammen unter dem Oberbegriff der „aus E elementar konstruierbaren Figuren“;

4. Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ heißt **elementar konstruierbar aus** E, wenn er im Schnitt von zwei verschiedenen aus E elementar konstruierbaren Figuren liegt.

Satz 6.3.6.2 (**Konstruierbarkeit und quadratische Erweiterungen**). *Die folgenden beiden Teilmengen K und Q von $\mathbb{C}$ stimmen überein:*

1. *Die kleinste Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$, die 0 und 1 enthält und stabil ist unter elementaren Konstruktionen, also die Eigenschaft hat, daß jede aus K elementar konstruierbare komplexe Zahl wieder in K liegt. Wir nennen die Elemente von K die* **konstruierbaren Zahlen***;*

2. *Die kleinste Teilmenge $Q \subset \mathbb{C}$, die sowohl ein Teilkörper ist als auch stabil unter dem Bilden von Quadratwurzeln.*

6.3.6.3. Als allererstes und eigentlich noch vor der Formulierung des Satzes sollten wir uns hier überlegen, daß es solche kleinsten Teilmengen überhaupt gibt. Das ist aber klar: Wir können jeweils einfach den Schnitt aller Teilmengen mit besagter Eigenschaft nehmen, und der hat offensichtlich wieder besagte Eigenschaft.

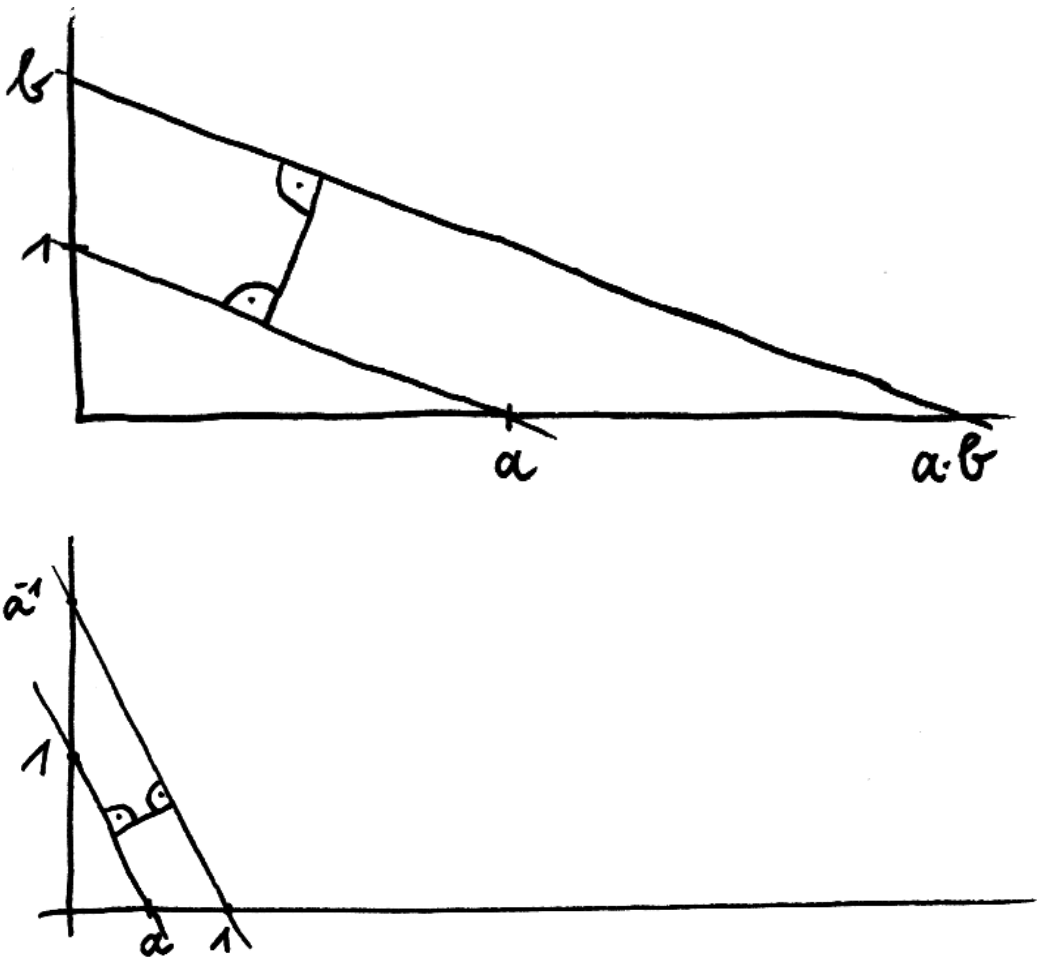
Beweis. Wir beginnen mit der Inklusion $Q \subset K$. Dazu reicht es zu zeigen, daß die Menge $K \subset \mathbb{C}$ der konstruierbaren Zahlen ein Teilkörper ist und stabil unter dem Bilden von Quadratwurzeln. Offensichtlich ist K stabil unter Addition. Um die Stabilität unter Multiplikation und Inversenbildung zu zeigen beachten wir, daß für $a \in \mathbb{C}^\times$ offensichtlich gleichbedeutend sind:

1. a liegt in K;
2. $|a|$ und $\frac{a}{|a|}$ liegen in K;
3. $\mathrm{Re}(a)$ und $\mathrm{Im}(a)$ liegen in K.

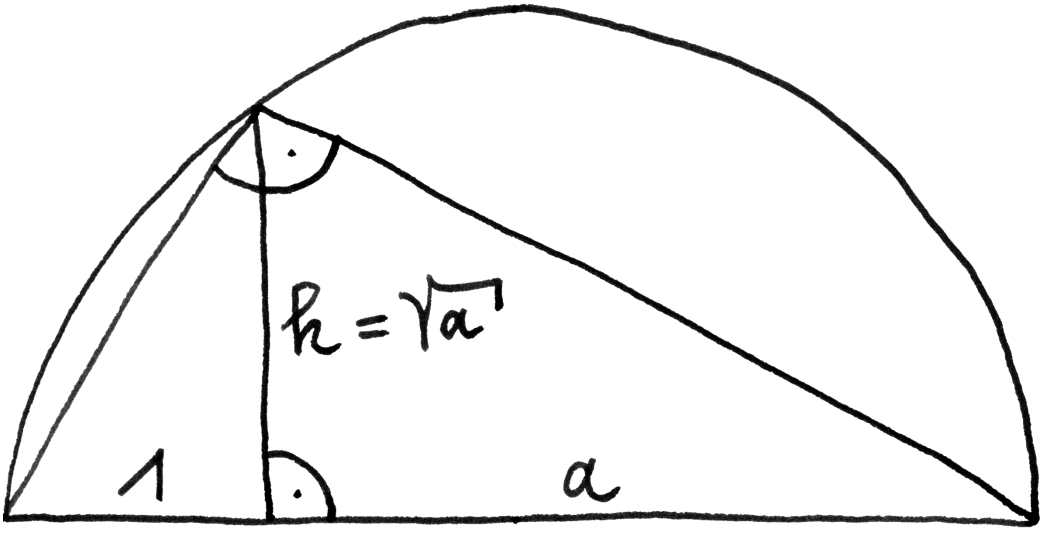
Nun ist es unproblematisch, Punkte auf dem Einheitskreis mithilfe von Zirkel und Lineal zu invertieren und zu multiplizieren. Daß das auch für reelle Zahlen möglich ist, zeigen die nebenstehenden Abbildungen. Also ist K ein Teilkörper von $\mathbb{C}$. Nun zeigen wir, daß er stabil ist unter dem Bilden von Quadratwurzeln. In der Tat ist klar, wie wir die Wurzeln von Punkten auf dem Einheitskreis mit Zirkel und Lineal bestimmen können, und daß das Wurzelziehen mit Zirkel und Lineal aus einer positiven reellen Zahl möglich ist, zeigt das nebenstehende Bild, in dem ja gilt $(h^2 + a^2) + (h^2 + 1^2) = (a + 1)^2$, also $h^2 = a$. Also ist $K \subset \mathbb{C}$ ein Teilkörper, der stabil ist unter dem Bilden von Quadratwurzeln, und wir haben $Q \subset K$ gezeigt. Wir zeigen nun umgekehrt $K \subset Q$. Dafür müssen wir nur zeigen, daß Q stabil ist unter elementaren Konstruktionen. Sicher ist Q stabil unter der komplexen Konjugation, denn mit Q ist auch $Q \cap \bar{Q}$ ein unter dem Bilden von Quadratwurzeln stabiler Unterkörper von $\mathbb{C}$. Eine komplexe Zahl z gehört folglich zu Q genau dann, wenn ihr Real- und Imaginärteil zu Q gehören. Mit $z = x + \mathrm{i}y$ werden unsere aus Q elementar konstruierbaren Figuren nun aber beschrieben durch Gleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 &= c \\ ax + by &= c \end{aligned}$$

für geeignete $a, b, c \in Q \cap \mathbb{R}$, und simultane Lösungen zweier verschiedener derartiger Gleichungen sind in der Tat Lösungen von linearen oder quadratischen Gleichungen mit Koeffizienten aus Q, ja sogar aus $Q \cap \mathbb{R}$. Im kompliziertesten Fall des Schnitts zweier Kreise bildet man hierzu zunächst die Differenz beider



Zur Konstruktion von Produkten und Inversen reeller Zahlen mit Zirkel und Lineal



Zur Konstruktion der Wurzel aus einer positiven reellen Zahl mit Zirkel und Lineal

Gleichungen und erhält so eine lineare Gleichung in x und y, die man anschließend nach einer Variable auflöst und in eine der Kreisgleichungen einsetzt. Das zeigt, daß $Q \subset \mathbb{C}$ stabil ist unter elementaren Konstruktionen. Da auch 0 und 1 zu Q gehören, folgt $K \subset Q$. □

Korollar 6.3.6.4 (Eine notwendige Bedingung für Konstruierbarkeit). *Jede konstruierbare Zahl ist algebraisch und ihr Grad über $\mathbb{Q}$ ist eine Zweierpotenz.*

Vorschau 6.3.6.5. Das Umgekehrte gilt nicht. Es gibt durchaus algebraische komplexe Zahlen, deren Grad über $\mathbb{Q}$ eine Zweierpotenz ist, die aber keineswegs konstruierbar sind. Ein hinreichendes und notwendiges Kriterium können Sie in 6.4.4.15 kennenlernen: Eine algebraische komplexe Zahl ist konstruierbar genau dann, wenn der Grad des Zerfällungskörpers ihres Minimalpolynoms als Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ eine Zweierpotenz ist.

Beweis. Es scheint mir offensichtlich, daß Q auch beschrieben werden kann als die Vereinigung aller Teilkörper von $\mathbb{C}$ der Gestalt $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ für Folgen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ komplexer Zahlen mit der Eigenschaft $\alpha_i^2 \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1})$ für alle i. In der Tat ist die Vereinigung aller derartigen Teilkörper offensichtlich selbst ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ und damit sicher der Kleinste unter dem Ziehen von Quadratwurzeln stabile Teilkörper von $\mathbb{C}$. Sei nun z unsere konstruierbare Zahl. Nach dem Satz gibt es eine Kette von Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_r$$

mit $[K_i : K_{i-1}] = 2$ und $z \in K_r$. Es folgt $[K_r : \mathbb{Q}] = 2^r$ und der Grad von z über $\mathbb{Q}$ ist nach 6.3.4.12 ein Teiler von $[K_r : \mathbb{Q}]$. □

Korollar 6.3.6.6 (Klassische unlösbare Konstruktionsaufgaben).

1. *Das regelmäßige Siebeneck ist nicht konstruierbar mit Zirkel und Lineal;*
2. *Die Seitenlänge eines Würfels mit Volumen Zwei ist nicht konstruierbar mit Zirkel und Lineal;*
3. *Es gibt keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal, die es erlaubt, einen beliebig vorgegebenen Winkel zu dritteln.*

Ergänzung 6.3.6.7. Wir werden in 6.4.4.7 allgemeiner zeigen, daß sich für $n \geq 3$ das regelmäßige n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt genau dann, wenn die Anzahl $\varphi(n) = |\{a \mid 1 \leq a \leq n,\ \langle a, n\rangle = 1\}|$ der zu n teilerfremden Zahlen unter n eine Zweierpotenz ist. Zum Beispiel ist das regelmäßige Dreieck konstruierbar, aber nicht das regelmäßige Neuneck. Das heißt, daß der Winkel $2\pi/3$ nicht mit Zirkel und Lineal gedrittelt werden kann. Hier geben wir für diese beiden Aussagen schon mal direkte Argumente.

Ergänzung 6.3.6.8. Die Griechen scheinen in der hellenistischen Hochkultur Konstruktionen mit Zirkel und Lineal auf Papyrus in derselben Weise eingesetzt zu haben, wie bei uns bis etwa 1960 Rechenschieber, dann Taschenrechner, und mittlerweile Laptops eingesetzt wurden und werden: Als unverzichtbare Hilfsmittel des Ingenieurs. Das Ziehen von Kubikwurzeln etwa war wichtig, um gemäß der Formel eines gewissen Philon die Dicke des Spannseils einer Wurfmaschine so zu berechnen, daß sie ein vorgegebenes Gewicht über eine vorgegebene Entfernung schleuderte. Mehr dazu findet man in [Rus05] in Abschnitt 2.3 und zu Ende des Abschnitts 4.3.

Ergänzung 6.3.6.9. Die Frage der **Würfelverdopplung**, also die Frage, mit Zirkel und Lineal aus einer gegebenen Strecke eine weitere Strecke zu konstruieren derart, daß das Längenverhältnis der beiden Strecken gerade $\sqrt[3]{2}$ ist, heißt das **Deli'sche Problem**. Diese Bezeichnung geht auf eine Geschichte zurück, nach der das Orakel in Delphi den Deliern aufgab, zur Abwehr einer Pest den würfelförmigen Altar ihres Tempels zu verdoppeln.

Beweis. 1. Nach der Bestimmung des siebten Kreisteilungspolynoms in 6.2.8.4 und der Gleichheit 6.3.3.6 vom Grad einer primitiven Körpererweiterung und dem Grad des Minimalpolynoms eines jeden Erzeugers hat $\exp(2\pi\mathrm{i}/7)$ den Grad 6 über $\mathbb{Q}$ und ist nach 6.3.6.4 also nicht konstruierbar.

2. Nach 6.3.3.6 hat die gesuchte Länge $\sqrt[3]{2}$ als algebraische Zahl den Grad 3 über $\mathbb{Q}$ und ist nach 6.3.6.4 also nicht konstruierbar.

3. Sicher gilt $\exp(2\pi\mathrm{i}/3) \in K$. Es reicht, $\exp(2\pi\mathrm{i}/9) \notin K$ zu zeigen. Sicher ist $\exp(2\pi\mathrm{i}/9) = \zeta$ eine Nullstelle des Polynoms $X^9 - 1$. Natürlich zerfällt dieses Polynom in

$$X^9 - 1 = (X^3 - 1)(X^6 + X^3 + 1)$$

und ζ ist Nullstelle des zweiten Faktors, unseres neunten Kreisteilungspolynom aus 6.2.8.6. Es reicht zu zeigen, daß dieses Polynom irreduzibel ist über $\mathbb{Q}$, denn dann hat ζ den Grad 6 über $\mathbb{Q}$ und kann nach 6.3.6.4 nicht konstruierbar sein. In 6.4.4.2 werden wir zeigen, daß alle Kreisteilungspolynome irreduzibel sind. Hier basteln wir nur ein schnelles Argument für unseren speziellen Fall zusammen, vergleiche auch 6.2.8.7. In $\mathbb{F}_3[X]$ gilt sicher $(X^9-1) = (X-1)^9$ und $(X^3-1) = (X-1)^3$ und folglich $X^6+X^3+1 = (X-1)^6$. Substituieren wir in X^6+X^3+1 nun $X = Y+1$, so erhalten wir in $\mathbb{F}_3[Y]$ also das Polynom Y^6. Gehen wir wieder über zu $\mathbb{Q}[Y]$, so hat $(Y+1)^6+(Y+1)^3+1$ den konstanten Term 3. Damit können wir aus dem Eisenstein-Kriterium 6.2.8.2 folgern, daß unser Polynom irreduzibel ist. $\square$

Satz 6.3.6.10 (**Konstruierbarkeit, Variante**). *Gegeben eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ stimmen die folgenden beiden Teilmengen K_A und Q_A von $\mathbb{C}$ überein:*

1. *Die kleinste Teilmenge $K_A \subset \mathbb{C}$, die 0 und 1 enthält und A umfaßt und stabil ist unter elementaren Konstruktionen;*

2. *Der kleinste Teilkörper $Q_A \subset \mathbb{C}$, der A und $\bar{A}$ umfaßt und stabil ist unter dem Bilden von Quadratwurzeln.*

6.3.6.11. Gegeben eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ nennen wir die Elemente der Menge K_A aus 6.3.6.10 die **aus A konstruierbaren Zahlen**. Der Beweis unserer Variante ist vollständig analog zum Beweis von 6.3.6.2 und bleibe dem Leser überlassen. Durch Anwendung auf die einelementige Menge $A = \{a\}$ und Beachtung der Formel $a\bar{a} = 1$ für Punkte auf dem Einheitskreis erkennt man daraus, daß ein Winkel genau dann mit Zirkel und Lineal gedrittelt werden kann, wenn für den zugehörigen Punkt a auf dem Einheitskreis das Polynom $X^3 - a$ über $\mathbb{Q}(a)$ nicht irreduzibel ist alias eine Nullstelle hat. Zum Beispiel lassen sich $360°$ und $180°$ mit Zirkel und Lineal dritteln, denn $X^3 - 1$ und $X^3 + 1$ haben rationale Nullstellen. Ebenso läßt sich $135° = 3 \times 45°$ mit Zirkel und Lineal dritteln, denn für die primitive achte Einheitswurzel $a = (\mathrm{i} - 1)/\sqrt{2}$ ist a^3 eine Nullstelle von $X^3 - a$. Andererseits läßt sich ein durch einen tranzendenten Punkt a auf dem Einheitskreis gegebener Winkel nie mit Zirkel und Lineal dritteln, denn im Funktionenkörper $\mathbb{Q}(X) \cong \mathbb{Q}(a)$ besitzt die Variable X offensichtlich keine dritte Wurzel.

6.3.7 Endliche Körper

Satz 6.3.7.1 (Klassifikation endlicher Körper). *Die Kardinalität eines endlichen Körpers ist stets eine echte Primzahlpotenz, und zu jeder echten Primzahlpotenz gibt es bis auf nichteindeutigen Isomorphismus genau einen endlichen Körper mit dieser Kardinalität.*

6.3.7.2. Gegeben eine echte Primzahlpotenz q notiert man „den“ Körper mit q Elementen meist $\mathbb{F}_q$. Ich weiß nicht, ob $\mathbb{F}$ in diesem Zusammenhang für „finite“ oder für „field“, die englische Bezeichnung für Körper, steht.

Vorschau 6.3.7.3. Man kann zeigen, daß jeder endliche Schiefkörper schon ein Körper ist, siehe zum Beispiel [Wei74], I, §1.

Beweis. Ein endlicher Körper $\mathbb{F}$ hat notwendig eine positive Charakteristik $p = \operatorname{char} \mathbb{F} > 0$. Nach 6.3.1.6 ist diese Charakteristik p eine Primzahl und wir haben eine Einbettung $\mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathbb{F}$. Damit wird $\mathbb{F}$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{F}_p$-Vektorraum. Für $r = \dim_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F} = [\mathbb{F} : \mathbb{F}_p]$ gilt dann offensichtlich $|\mathbb{F}| = p^r$. Das zeigt, daß die Kardinalität eines endlichen Körpers stets eine Primzahlpotenz ist. Unser Satz behauptet darüber hinaus, daß die Kardinalität eine Bijektion

$$\{\text{endliche Körper}\}_{/\cong} \xrightarrow{\sim} \{\text{echte Primzahlpotenzen}\}$$

liefert. Wir unterbrechen nun den Beweis durch einen Satz und zwei Lemmata, um die nötigen Hilfsmittel bereitzustellen. □

Satz 6.3.7.4 (**Zerfällung von Polynomen in Körpererweiterungen**). *Gegeben ein Körper K und ein von Null verschiedenes Polynom $P \in K[X]$ gibt es eine endliche Körpererweiterung L von K derart, daß P als Element von $L[X]$ in Linearfaktoren zerfällt.*

Beweis. Das folgt mit Induktion aus dem anschließenden Lemma 17.7.2.5, wenn wir beachten, daß nach 3.5.2.43 jeder Körperhomomorphismus injektiv ist. □

Vorschau 6.3.7.5. Natürlich folgt obiger Satz auch unmittelbar aus der Existenz eines algebraischen Abschlusses 6.3.11.5. Diese Argumentation ist jedoch zumindest im Rahmen der hier gegebenen Darstellung unzulässig, da unser Satz selbst einen wesentlichen Baustein beim Beweis der Existenz algebraischer Abschlüsse darstellt. Zumindest um das folgende Lemma kommt meines Wissens kein Beweis für die Existenz algebraischer Abschlüsse herum.

Lemma 6.3.7.6 (**Adjunktion von Nullstellen**). *Seien ein Körper K und ein nichtkonstantes Polynom $P \in K[X] \backslash K$ gegeben. So gibt es einen Körperhomomorphismus $i : K \to L$ derart, daß das Bild $i(P)$ von P unter der von i auf den Polynomringen induzierten Abbildung $i = i_{[X]} : K[X] \to L[X]$ in L eine Nullstelle hat.*

6.3.7.7. Die Adjunktion von Quadratwurzeln haben Sie möglicherweise bereits sozusagen zu Fuß als Übung 2.2.4.14 ausgearbeitet, um die komplexen Zahlen aus den reellen Zahlen zu gewinnen. Das Verfahren aus dem Beweis unseres Lemmas wird in manchen Quellen als die **Kronecker-Konstruktion** bezeichnet. Es ist eine gute Übung, im Fall der Adjunktion einer Quadratwurzel einen expliziten Isomorphismus zwischen der hier konstruierten und der in 2.2.4.14 beschriebenen Körpererweiterung anzugeben.

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit P irreduzibel in $K[X]$. Dann ist $L := K[X]/\langle P\rangle$ nach 6.2.4.22 als Quotient eines Hauptidealrings nach einem von einem irreduziblen Element erzeugten Ideal ein Körper. Wir notieren $\bar{Q} \in L$ die Nebenklasse eines Polynoms $Q \in K[X]$. Jetzt betrachten wir den offensichtlichen Körperhomomorphismus

$$i : K \to L = K[X]/\langle P\rangle$$

mit $i(a) = \bar{a}$ und behaupten, daß die Nebenklasse $\bar{X} \in L$ von $X \in K[X]$ eine Nullstelle des Polynoms $i(P) \in L[X]$ ist. In der Tat finden wir für unser Polynom $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ mit Koeffizienten $a_\nu \in K$ sofort $i(P) = \bar{a}_n X^n + \ldots + \bar{a}_1 X + \bar{a}_0$ und dann

$$(i(P))(\bar{X}) = \bar{a}_n \bar{X}^n + \ldots + \bar{a}_1 \bar{X} + \bar{a}_0 = \overline{a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0} = \bar{P} = 0 \quad \square$$

6.3.7.8. Gegeben ein Körper K und ein Polynom $P \in K[X]$ und eine Körpererweiterung $K \subset L$ und eine Nullstelle $\alpha \in L$ unseres Polynoms P sagen wir auch, der Körper $K(\alpha) \subset L$ entstehe aus K durch **Adjunktion einer Nullstelle von** P. Ist $P \in K[X]$ irreduzibel, so induziert das Einsetzen von α für X einen Körperisomorphismus

$$K[X]/\langle P \rangle \xrightarrow{\sim} K(\alpha)$$

In diesem Sinne darf man also an die linke Seite denken, wenn von der „Adjunktion einer Nullstelle eines Polynoms zu einem Körper" die Rede ist, sofern besagtes Polynom irreduzibel ist.

Beispiel 6.3.7.9. In $\mathbb{F}_5$ sind 0 und ± 1 die einzigen Quadrate. Wir erhalten also einen Körper mit 25 Elementen, indem wir zu $\mathbb{F}_5$ eine Wurzel aus 2 adjungieren, und können alle Elemente dieses Körpers dann eindeutig schreiben in der Form $a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{F}_5$.

Lemma 6.3.7.10. *Seien p eine Primzahl, $q = p^r$ mit $r \geq 1$ eine echte Potenz von p und L ein Körper der Charakteristik p. Zerfällt das Polynom $X^q - X$ über dem Körper L vollständig in Linearfaktoren, so bilden die Nullstellen unseres Polynoms in L einen Unterkörper der Kardinalität q.*

Beweis. Nach 3.5.2.37 ist die Abbildung $F : L \to L$, $a \mapsto a^q$ ein Körperhomomorphismus. Die Nullstellen unseres Polynoms sind nun genau die Fixpunkte dieses Körperautomorphismus, und als Fixpunkte eines Körperautomorphismus bilden sie damit einen Unterkörper $\mathbb{F}$ von L. Um zu zeigen, daß dieser Unterkörper $\mathbb{F}$ genau q Elemente hat, müssen wir nachweisen, daß das Polynom $X^q - X$ nur einfache Nullstellen hat. Ist aber a eine Nullstelle, so gilt im Polynomring $\mathbb{F}_p[X]$ die Gleichheit $X^q - X = (X-a)^q - (X-a) = ((X-a)^{q-1} - 1)\,(X-a)$. Also ist jede Nullstelle unseres Polynoms einfach. $\square$

Beweis von 6.3.7.1, Fortsetzung. Jetzt können wir zeigen, daß es zu jeder echten Potenz q einer Primzahl p auch tatsächlich einen Körper mit genau q Elementen gibt. Wir finden ja nach 6.3.7.4 eine Körpererweiterung L von $\mathbb{F}_p$, in der das Polynom $X^q - X \in \mathbb{F}_p[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, und nach 6.3.7.10 bilden die Nullstellen dieses Polynoms in L dann einen Unterkörper der Kardinalität q. Schließlich müssen wir, um unsere Klassifikation der endlichen Körper abzuschließen, noch zeigen, daß je zwei endliche Körper derselben Kardinalität isomorph sind. Ist $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit $q = p^r$ Elementen, so gilt $a^{q-1} = 1$ für alle $a \in \mathbb{F}^\times$ nach 4.4.3.8, also haben wir $a^q - a = 0$ für alle $a \in \mathbb{F}$. Insbesondere sind die Minimalpolynome der Elemente von $\mathbb{F}$ über $\mathbb{F}_p$ genau die $\mathbb{F}_p$-irreduziblen Faktoren des Polynoms $X^q - X \in \mathbb{F}_p[X]$. Die Erzeuger der Körpererweiterung $\mathbb{F}$ sind damit genau die Nullstellen der $\mathbb{F}_p$-irreduziblen Faktoren P vom Grad r

unseres Polynoms $X^q - X$. Nach 4.4.4.17 gibt es solche Erzeuger und damit auch solche Faktoren und mit 6.3.3.3 folgt

$$\mathbb{F} \cong \mathbb{F}_p[X]/\langle P \rangle$$

für einen und jeden $\mathbb{F}_p$-irreduziblen Faktor P vom Grad r des Polynoms $X^q - X$. Das zeigt, daß ein endlicher Körper durch die Zahl seiner Elemente bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt ist. Das Argument zeigt nebenbei bemerkt auch, wie man in endlichen Körpern explizit rechnen kann. □

6.3.7.11. Teile dieses Beweises lassen sich mithilfe der allgemeinen Theorie, sobald wir sie einmal entwickelt haben, auch schneller erledigen: Die Eindeutigkeit erhält man aus dem Satz 6.3.8.2 über die Eindeutigkeit von Zerfällungskörpern. Die Existenz folgt wie oben daraus, daß $X^q - X$ keine mehrfachen Nullstellen hat, aber das kann man nach 6.3.9.14 auch daraus folgern, daß die Ableitung dieses Polynoms keine Nullstellen hat.

Satz 6.3.7.12 (Endliche Erweiterungen endlicher Körper). *Gegeben ein endlicher Körper F liefert die Kardinalität eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{Unterkörper } K \subset F\} & \xrightarrow{\sim} & \{q \in \mathbb{N} \mid \exists d \in \mathbb{N} \textit{ mit } q^d = |F|\} \\ K & \mapsto & |K| \end{array}$$

6.3.7.13. Gegeben zwei endliche Körper läßt sich insbesondere der eine in den anderen einbetten genau dann, wenn die Kardinalität des einen eine Potenz der Kardinalität des anderen ist. Mit den Methoden der Galois-Theorie werden wir dies Resultat in 6.4.3.3 sehr viel müheloser einsehen können als im folgenden Beweis.

Beweis. Für den Grad $d = [F : K]$ unserer Körpererweiterung gilt sicher $|F| = |K|^d$, also liefert die Kardinalität jedenfalls eine Abbildung zwischen den im Satz beschriebenen Mengen. Weiter muß unser Unterkörper K, wenn es ihn denn gibt, genau aus den $(|K| - 1)$-ten Einheitswurzeln von F mitsamt der Null bestehen, und das zeigt die Injektivität unserer Abbildung. Für den Nachweis ihrer Surjektivität überlegen wir uns zunächst, daß es in $\mathbb{F}_{q^r}$ stets genau $(q - 1)$ Elemente der Ordnung $q - 1$ gibt. Das ist klar, da $\mathbb{F}_{q^r}^\times$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $q^r - 1$ ist und da gilt $(q-1)|(q^r-1)$, genauer ist der Quotient ja $q^{r-1} + q^{r-2} + \ldots + q + 1$. Also gibt es in $\mathbb{F}_{q^r}$ genau q Lösungen der Gleichung $X^q - X$ und nach 6.3.7.10 bilden diese einen Unterkörper von $\mathbb{F}_{q^r}$ mit q Elementen. □

Übungen

Übung 6.3.7.14. Ein endlicher Körper kann nie algebraisch abgeschlossen sein.

Übung 6.3.7.15. Geben Sie einen Körperisomorphismus $\mathbb{F}_5(\sqrt{2}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_5(\sqrt{3})$ an als $\mathbb{F}_5$-lineare Abbildung in Bezug auf die Basen $1, \sqrt{2}$ links und $1, \sqrt{3}$ rechts.

Ergänzende Übung 6.3.7.16 (**Partialbruchzerlegung**). Ist k ein Körper, so wird eine k-Basis des Funktionenkörpers $k(X)$ gebildet von erstens den $(X^n)_{n\geq 1}$ mitsamt zweitens den

$$(X^d P^{-n})_{n\geq 1,\, \operatorname{grad} P > d \geq 0}$$

für $P \in k[X]$ normiert und irreduzibel zuzüglich drittens der 1 aus $k(X)$. Für den Fall k algebraisch abgeschlossen vergleiche man 3.5.5.12. Sonst ziehe man sich für den Beweis der linearen Unabhängigkeit mit 6.3.7.4 auf den Fall von in Linearfaktoren zerfallenden Nennern zurück.

Ergänzende Übung 6.3.7.17. Man bestimme die Partialbruchzerlegung, also die Darstellung in der Basis aus 6.3.7.16, von $(1 + x^4)^{-1}$ in $\mathbb{R}(X)$.

Übung 6.3.7.18. Man zeige, daß es im Polynomring über einem endlichen Körper irreduzible Polynome von jedem positiven Grad gibt.

Ergänzende Übung 6.3.7.19. Geben Sie Verknüpfungstafeln für die Addition und die Multiplikation eines Körpers mit vier Elementen an.

6.3.8 Zerfällungskörper

Definition 6.3.8.1. Sei K ein Körper und $P \in K[X]\backslash 0$ ein von Null verschiedenes Polynom. Unter einem **minimalen Zerfällungskörper** oder kurz **Zerfällungskörper von** P verstehen wir eine Körpererweiterung L/K derart, daß (1) das Polynom P in $L[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt und daß (2) der Körper L über K erzeugt wird von den Nullstellen von P. Mit einem Zerfällungskörper meint man also eigentlich eine Körpererweiterung und sollte deshalb besser von einer **Zerfällungserweiterung** reden, aber das tut kein Mensch.

Satz 6.3.8.2 (**Existenz und Eindeutigkeit von Zerfällungskörpern**). *Seien K ein Körper und $P \in K[X]\backslash 0$ ein von Null verschiedenes Polynom. So existieren Zerfällungskörper von P, und sind L/K und L'/K zwei Zerfällungskörper von P, so gibt es einen Körperisomorphismus $L \xrightarrow{\sim} L'$, der auf K die Identität induziert.*

6.3.8.3. Die Existenz eines Zerfällungskörpers folgt leicht aus Satz 6.3.7.4, nach dem es für jedes Polynom eine Körpererweiterung gibt, in der es in Linearfaktoren zerfällt: Wir müssen darin dann nur noch den von besagten Nullstellen erzeugten Teilkörper betrachten. Die Eindeutigkeit zeigen wir erst nach den Beweis von 6.3.8.13.

6.3.8.4 (**Fragen der Eindeutigkeit und Terminologie**). Da ein Zerfällungskörper für ein Polynom damit in gewisser Weise eindeutig ist, spricht man auch oft von

dem Zerfällungskörper eines Polynoms. Das ist jedoch auch wieder irreführend: Im allgemeinen gibt es nämlich zwischen zwei Zerfällungskörpern L, L' desselben Polynoms durchaus verschiedene Isomorphismen $L \xrightarrow{\sim} L'$, und das auch dann noch, wenn wir die naheliegende Forderung stellen, daß unsere Isomorphismen auf K die Identität induzieren sollen. Zerfällungskörper eines vorgegebenen Polynoms sind in diesem Sinne „wohlbestimmt bis auf nicht eindeutigen Isomorphismus". Sie sollten bereits einige Strukturen kennen, die wohlbestimmt sind bis auf nicht eindeutigen Isomorphismus: Mengen mit zwei Elementen, Gruppen mit drei Elementen, eindimensionale Vektorräume über einem gegebenen Körper, etc. Beispiele für Strukturen, die wohlbestimmt sind bis auf eindeutigen Isomorphismus, wären dahingegen: Mengen mit einem Element, Gruppen mit zwei Elementen, der Ring der ganzen Zahlen, der Körper der rationalen Zahlen, der Körper der reellen Zahlen. Eigentlich bräuchte man eben zum Schreiben über Mathematik außer dem bestimmten und dem unbestimmten Artikel noch ein Zwischending für „wohlbestimmt bis auf nicht eindeutigen Isomorphismus", aber es wäre wohl vermessen, die deutsche Grammatik dahingehend erweitern zu wollen. Wir sind mit unseren beiden Arten von Artikeln verglichen etwa mit dem Russischen sogar schon gut bedient. Sie werden das merken, sobald Sie mathematische Artikel lesen, die aus dieser Sprache übersetzt sind: Oft sind dann in der Übersetzung ohne Verstand bestimmte oder unbestimmte Artikel gewählt worden, was man dann beim Lesen erst im Geiste korrigieren muß, damit sich ein sinnvoller Text ergibt. Um diese Phänomene der „Wohlbestimmtheit bis auf nicht eindeutigen Isomorphismus" im vorliegenden Fall begrifflich zu fassen, führen wir zunächst einmal eine geeignete Terminologie ein.

Definition 6.3.8.5. Sei K ein Kring. Unter einem **K-Kring** verstehen wir ein Paar (L, i) bestehend aus einem Kring L und einem Ringhomomorphismus $i : K \to L$. Ist (M, j) ein weiterer K-Kring, so verstehen wir unter einem **Homomorphismus von K-Kringen** $L \to M$ einen Kringhomomorphismus $\varphi : L \to M$ mit $\varphi \circ i = j$. Alternativ sprechen wir auch von einem **Homomorphismus über** K. Die Menge aller solchen Homomorphismen notieren wir

$$\mathrm{Kring}^K(L, M)$$

Einen bijektiven Ringhomomorphismus über K nennen wir auch einen **Isomorphismus von K-Kringen** oder einen **Isomorphismus über** K.

Beispiel 6.3.8.6. Unser Satz 3.5.3.5 über das Einsetzen in Polynome kann in dieser Terminologie dahingehend formuliert werden, daß für jeden Kring K und jeden K-Kring (R, i) das Auswerten $\varphi \mapsto \varphi(X)$ bei X eine Bijektion

$$\mathrm{Kring}^K(K[X], R) \xrightarrow{\sim} R$$

liefert. Die Umkehrabbildung ordnet jedem Element $b \in R$ den durch das Einsetzen von b nach 3.5.3.9 erklärten Ringhomomorphismus $K[X] \to R$ zu. Dasselbe gilt allgemeiner für jede K-Ringalgebra R.

Definition 6.3.8.7. Ist K ein Körper, so bezeichnen wir einen K-Kring, der seinerseits ein Körper ist, auch als eine **Körpererweiterung von** K. Das hatten wir bereits in 6.3.2.3 angedeutet. Wenn wir pedantisch sein wollen, sprechen wir von einer „Körpererweiterung im verallgemeinerten Sinne". Unsere Homomorphismen und Isomorphismen von K-Kringen nennen wir in diesem Kontext **Homomorphismen** beziehungsweise **Isomorphismen von Körpererweiterungen**. Fassen wir $i : K \hookrightarrow L$ auf als die Einbettung eines Unterkörpers $K \subset L$ und ist $j : K \to M$ ein weiterer Körperhomomorphismus, so nennen wir einen Körperhomomorphismus $L \to M$ über K auch eine **Ausdehnung** von j auf L und benutzen Notationen wie zum Beispiel $\tilde{j} : L \to M$.

Ergänzung 6.3.8.8. Ist K ein Körper, so ist jeder K-Kring im Sinne der vorhergehenden Definition 6.3.8.5 eine K-Kringalgebra im Sinne unserer Definition 4.7.9.1, und jede K-Kringalgebra A wird umgekehrt durch den einzigen Homomorphismus $K \to A$ von K-Kringalgebren zu einem K-Kring. Diese beiden Konzepte sind also äquivalent.

Proposition 6.3.8.9 (Ausdehnungen auf primitive Erweiterungen). *Gegeben eine Körpererweiterung $j : K \hookrightarrow M$ und eine primitive algebraische Erweiterung $K(\alpha)$ von K werden die Ausdehnungen von j zu einer Einbettung $\tilde{j} : K(\alpha) \hookrightarrow M$ parametrisiert durch die Nullstellen in M des Minimalpolynoms von α über K. Genauer liefert das Auswerten an α eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Kring}^K(K(\alpha), M) & \xrightarrow{\sim} & \{\beta \in M \mid \mathrm{Irr}(\alpha, K)(\beta) = 0\} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(\alpha) \end{array}$$

6.3.8.10. In der Formulierung dieser Proposition haben wir beim Auswerten des Polynoms $\mathrm{Irr}(\alpha, K) \in K[X]$ auf $\beta \in M$ stillschweigend die Elemente von K mit ihren Bildern in M unter j identifiziert. Die Proposition gilt unverändert und mit demselben Beweis auch allgemeiner für jeden K-Kring M, ja für jede Ringalgebra M über K.

Beispiel 6.3.8.11. Wir haben im Fall $K = \mathbb{Q}$, $M = \mathbb{C}$, $\alpha = \mathrm{i}$ etwa

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Kring}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\mathrm{i}), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\sim} & \{\beta \in \mathbb{C} \mid \beta^2 + 1 = 0\} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(\mathrm{i}) \end{array}$$

Beweis. Wir setzen $P := \mathrm{Irr}(\alpha, K)$ und etablieren der Reihe nach die Bijektionen

$$\begin{array}{lcll} \mathrm{Kring}^K(K[X], M) & \xrightarrow{\sim} & M & \varphi \mapsto \varphi(X) \\ \mathrm{Kring}^K(K[X]/\langle P \rangle, M) & \xrightarrow{\sim} & \{\beta \in M \mid P(\beta) = 0\} & \varphi \mapsto \varphi(\bar{X}) \\ \mathrm{Kring}^K(K(\alpha), M) & \xrightarrow{\sim} & \{\beta \in M \mid P(\beta) = 0\} & \varphi \mapsto \varphi(\alpha) \end{array}$$

Die Erste in 6.3.8.6 und gilt für jeden Kring K und jeden K-Kring M. Die Zweite gilt für jeden Kring K und jeden K-Kring M und jedes Polynom $P \in K[X]$ und folgt aus der universellen Eigenschaft des Quotienten, da für φ gegeben durch $\varphi(X) = \beta$ eben $\varphi(P) = 0$ gleichbedeutend ist zu $P(\beta) = 0$. Die Dritte folgt, da unter den Annahmen der Proposition das Einsetzen von α einen Isomorphismus $K[X]/\langle P\rangle \xrightarrow{\sim} K(\alpha)$ induziert. □

Lemma 6.3.8.12 (Primitives Ausdehnbarkeitskriterium). *Sei ein kommutatives Dreieck von Körperhomomorphismen gegeben wie in der rechten Hälfte des Diagramms*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[dr] & L \arrow[r] \arrow[d] & L(\alpha) \arrow[dl, dashed] \\ & M & \end{tikzcd}$$

und sei $L \subset L(\alpha)$ eine primitive Körpererweiterung von L mit α algebraisch über K derart, daß das Minimalpolynom $\operatorname{Irr}(\alpha, K)$ in $M[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt. So laßt sich der Körperhomomorphismus $L \to M$ wie durch den gestrichelten Pfeil angedeutet zu einem Körperhomomorphismus $L(\alpha) \to M$ ausdehnen.

Beweis. Das Minimalpolynom $\operatorname{Irr}(\alpha, L)$ ist ein Teiler von $\operatorname{Irr}(\alpha, K)$ und muß deshalb nach Annahme eine Nullstelle $\beta \in M$ haben. Nach 6.3.8.9 erhalten wir für jede solche Nullstelle eine Ausdehnung durch $\alpha \mapsto \beta$. □

Proposition 6.3.8.13 (Allgemeines Ausdehnbarkeitskriterium). *Sei ein kommutatives Dreieck von Körperhomomorphismen gegeben wie in der rechten Hälfte des Diagramms*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[dr] & L \arrow[r] \arrow[d] & L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \arrow[dl, dashed] \\ & M & \end{tikzcd}$$

und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebraisch über K derart, daß alle ihre Minimalpolynome $\operatorname{Irr}(\alpha_i, K)$ in $M[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerfallen. So laßt sich der Körperhomomorphismus $L \to M$ wie durch den gestrichelten Pfeil angedeutet zu einem Körperhomomorphismus $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to M$ ausdehnen.

Beweis. Das folgt induktiv aus dem Ausdehnbarkeitskriterium für primitive Erweiterungen 6.3.8.12. □

Vorschau 6.3.8.14. Diese Proposition wird auch unmittelbar aus der allgemeineren und vielleicht „glatteren“ Aussage 6.3.11.9 über Einbettungen in den algebraischen Abschluß folgen: Mit 6.3.11.3.2 dürfen wir M algebraisch über K annehmen. Nach 6.3.11.9 läßt sich M dann über K in einen algebraischen Abschluß $\bar{K}$

von K einbetten. Wieder nach 6.3.11.9 können wir auch $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ über K in $\bar{K}$ einbetten, und nach Annahme liegt sein Bild dann notwendig im Bild von M.

Beweis der Eindeutigkeit von Zerfällungskörpern 6.3.8.2. Proposition 6.3.8.13 liefert uns Injektionen $L \hookrightarrow L'$ und $L' \hookrightarrow L$ über K. Da hier beide Seiten endlichdimensionale Vektorräume sind über K, und da unsere Injektionen beide K-linear sind, müssen sie beide Isomorphismen sein. □

Satz 6.3.8.15 (Maximalzahl von Ausdehnungen). *Gegeben eine Körpererweiterung ist die Zahl der Ausdehnungen auf den Erweiterungskörper eines Homomorphismus des Grundkörpers in irgendeinen weiteren Körper beschränkt durch den Grad unserer Körpererweiterung. Ist also in Formeln L/K eine endliche Körpererweiterung und $j : K \hookrightarrow M$ ein Körperhomomorphismus, so gilt*

$$|\operatorname{Kring}^K(L, M)| \leq [L : K]$$

Erster Beweis. Gibt es einen Zwischenkörper L' mit $K \subset L' \subset L$ aber $K \neq L' \neq L$, so folgt der Satz mit vollständiger Induktion über den Grad unserer Körpererweiterung. Sonst gilt $L = K(\alpha)$ für ein $\alpha \in L$, und die Erweiterungen von j zu einer Einbettung von $K(\alpha)$ in M werden nach 6.3.8.9 parametrisiert durch die Nullstellen in M des Minimalpolynoms von α über K. Dieses Polynom hat aber den Grad $[K(\alpha) : K]$ und höchstens ebensoviele Nullstellen in M. □

Zweiter Beweis. Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ paarweise verschiedene K-lineare Körperhomomorphismen $L \to M$. Nach Satz 6.3.8.16 über die lineare Unabhängigkeit von Charakteren, den wir im Anschluß beweisen, sind sie linear unabhängig im M-Vektorraum $\operatorname{Ens}(L, M)$. Gegeben eine K-Basis $B \subset L$ von L bleiben ihre Restriktionen im M-Vektorraum $\operatorname{Ens}(B, M)$ offensichtlich linear unabhängig und es folgt $r \leq |B|$. □

Satz 6.3.8.16 (Lineare Unabhängigkeit von Charakteren). *Die Menge aller Homomorphismen von einer Gruppe in die multiplikative Gruppe eines Körpers ist stets linear unabhängig im Vektorraum aller Abbildungen von besagter Gruppe in besagten Körper.*

6.3.8.17. Dasselbe gilt mit demselben Beweis allgemeiner auch für die Menge aller Homomorphismen von einem Monoid in die multiplikative Gruppe eines Körpers.

Beweis. Bezeichnen wir unsere Gruppe mit G und unserem Körper mit M, so behaupten wir in Formeln, daß $\operatorname{Grp}(G, M^\times)$ eine linear unabhängige Teilmenge des M-Vektorraums $\operatorname{Ens}(G, M)$ ist. Sei in der Tat sonst

$$a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \ldots + a_n\chi_n = 0$$

eine nichttriviale lineare Relation kürzestmöglicher Länge mit $a_i \in M$ und $\chi_i : G \to M^\times$ paarweise verschiedenen Gruppenhomomorphismen. Wegen $\chi(1) = 1$ für alle Charaktere χ haben wir notwendig $n \geq 2$. Wegen $\chi_1 \neq \chi_2$ finden wir $g \in G$ mit $\chi_1(g) \neq \chi_2(g)$. Unsere Gleichung impliziert nun aber für jedes und insbesondere auch für dieses $g \in G$ durch Substituieren von gh für h beziehungsweise Multiplizieren mit $\chi_1(g)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1\chi_1(g)\chi_1 + a_2\chi_2(g)\chi_2 + a_n\chi_n(g)\chi_n &= 0 \\ a_1\chi_1(g)\chi_1 + a_2\chi_1(g)\chi_2 + a_n\chi_1(g)\chi_n &= 0 \end{aligned}$$

Deren Differenz wäre dann eine kürzere und wegen $\chi_1(g) \neq \chi_2(g)$ nichttriviale Linearkombination im Widerspruch zu unserer Annahme. □

Definition 6.3.8.18. Eine Körpererweiterung heißt **algebraisch**, wenn alle Elemente der Erweiterung algebraisch sind über dem Grundkörper.

6.3.8.19. Jede endliche Körpererweiterung ist also nach 6.3.4.7 auch algebraisch. Genauer ist nach 6.3.4.7 eine Körpererweiterung algebraisch genau dann, wenn sie eine Vereinigung von Teilerweiterungen ist, die jeweils endlich sind über dem Grundkörper.

Definition 6.3.8.20. Eine Körpererweiterung L/K heißt **normal**, wenn sie algebraisch ist und wenn gilt: Jedes *irreduzible* Polynom mit Koeffizienten im Grundkörper $P \in K[X]$, das im Erweiterungskörper L eine Nullstelle hat, zerfällt im Polynomring $L[X]$ über dem Erweiterungskörper bereits vollständig in Linearfaktoren.

6.3.8.21 (**Diskussion der Terminologie**). In der älteren Literatur, zum Beispiel in [Art], wird der Begriff „normal“ manchmal auch abweichend definiert als diejenige Eigenschaft einer Körpererweiterung, die wir später mit „Galois“ bezeichnen werden. Ich finde die Begriffsbildung in beiden Varianten ungeschickt: Normalerweise ist eine Körpererweiterung nämlich keineswegs normal im mathematischen Sinne, oder um es anders auszudrücken: Normal zu sein ist für Körpererweiterungen etwas ganz Besonderes. Aber gut, ein Psychologe ist vermutlich durchaus auch der Ansicht, daß es für einen Menschen etwas ganz Besonderes ist, normal zu sein, und für eine Körpererweiterung erst recht: So fern vom umgangssprachlichen Wortsinn ist unsere mathematische Terminologie also auch wieder nicht.

Beispiele 6.3.8.22. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist normal über $\mathbb{Q}$, aber $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ist nicht normal über $\mathbb{Q}$, denn wir können $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ einbetten in $\mathbb{R}$ und die beiden anderen Wurzeln des in $\mathbb{Q}[X]$ irreduziblen Polynoms $X^3 - 2$ sind nicht reell.

Satz 6.3.8.23 (**Charakterisierung normaler Erweiterungen**). *Für eine endliche Körpererweiterung L/K sind gleichbedeutend:*

1. *L/K ist normal;*

2. *L ist der Zerfällungskörper eines Polynoms $P \in K[X]$.*

Beweis. 1⇒2. Ist L normal über K und erzeugt von $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, so ist L ein Zerfällungskörper für das Produkt der Minimalpolynome $\operatorname{Irr}(\alpha_i, K)$ der α_i über K. Für die andere Implikation machen wir einen Umweg und zeigen zusätzlich die Äquivalenz zu der folgenden technischen Aussage:

3. *Für jede Einbettung $j : K \hookrightarrow M$ von K in einen beliebigen weiteren Körper M haben alle Fortsetzungen von j zu Einbettungen $\varphi, \psi : L \hookrightarrow M$ dasselbe Bild, in Formeln*

$$\varphi(L) = \psi(L) \qquad \forall M,\ \forall j : K \hookrightarrow M,\ \forall \varphi, \psi \in \operatorname{Kring}^K(L, M)$$

Jetzt zeigen wir 2⇒3⇒1 und beginnen mit 2⇒3. Sowohl φ als auch ψ identifizieren die Nullstellen von P in L mit den Nullstellen von P in M, wenn auch nicht notwendig in derselben Weise. Da nun L erzeugt wird über K von den Nullstellen von P, ist sowohl $\varphi(L)$ als auch $\psi(L)$ der von allen Nullstellen von P in M über K erzeugte Teilkörper und es folgt $\varphi(L) = \psi(L)$. Schließlich zeigen wir noch 3⇒1. Sei $P \in K[X]$ irreduzibel mit einer Nullstelle $\alpha \in L$. Wir ergänzen α zu einem endlichen Erzeugendensystem von L über K, sagen wir $L = K(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Dann wählen wir für M eine Körpererweiterung von L, in der sowohl das Minimalpolynom von α als auch die Minimalpolynome aller α_i vollständig in Linearfaktoren zerfallen. Für jede Nullstelle $\beta \in M$ von P können wir unsere Einbettung $K \hookrightarrow M$ zunächst nach 6.3.8.9 fortsetzen zu einer Einbettung $K(\alpha) \hookrightarrow M$ mit $\alpha \mapsto \beta$ und dann nach 6.3.8.13 weiter zu einer Einbettung $\varphi : L \hookrightarrow M$. Jede Nullstelle von P in M liegt also in $\varphi(L)$ für ein und damit jedes $\varphi \in \operatorname{Kring}^K(L, M)$. Also zerfällt unser Polynom P bereits in $\varphi(L)$ und a forteriori in L vollständig in Linearfaktoren. □

6.3.8.24. Unter formalen Gesichtspunkten ist es im vorhergehenden Beweis unschön um nicht zu sagen falsch, über alle Körper zu quantifizieren. Es reicht aber offensichtlich aus, Aussage 3 nur für die Zerfällungskörper M aller von Null verschiedenen Polynomen aus $K[X]$ zu fordern, um daraus wieder Aussage 1 zu folgern.

Proposition 6.3.8.25 (Vergrößern zu normaler Erweiterung). *Jede endliche Körpererweiterung läßt sich zu einer endlichen normalen Körpererweiterung vergrößern.*

Beweis. Gegeben eine endliche Körpererweiterung L/K behaupten wir in Formeln, daß es stets eine endliche Erweiterung N/L gibt, für die N/K normal ist.

Um das zu zeigen, nehmen wir Erzeuger $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ von L über K und konstruieren N als einen Zerfällungskörper über L des Produkts ihrer Minimalpolynome. Dies N ist dann natürlich auch ein Zerfällungskörper des besagten Produkts über K und damit normal über K. □

Übungen

Übung 6.3.8.26. Man zeige, daß eine algebraische Körpererweiterung eines unendlichen Körpers stets dieselbe Kardinalität hat wie der Ausgangskörper. Diese Erkenntnis wird bei einer Konstrution des algebraischen Abschlusses benötigt werden.

Übung 6.3.8.27. Es sei K ein Körper, $P \in K[X]$ ein Polynom vom Grad n und L/K der Zerfällungskörper von P. Zeigen Sie die Abschätzung $[L{:}K] \leq n!$. Mutige zeigen stärker $[L{:}K]|n!$. Hinweise: Induktion über den Grad n von P. Man beachte $n!m!|(n+m)!$ nach der Formel für die Binomialkoeffizienten im Fall eines nicht irreduziblen Polynoms. Im Fall eines irreduziblen Polynoms entsteht durch Adjunktion einer Nullstelle eine Körpereweiterung vom Grad n.

Übung 6.3.8.28. Es seien M/L und L/K endliche oder allgemeiner algebraische Körpererweiterungen. Ist M/K normal, so ist auch M/L normal. Sind L_1 und L_2 normale Körpererweiterungen von K und $L_1, L_2 \subset M$, so ist $L_1 \cap L_2$ normal über K. Geben Sie ein Beispiel für Körper $M \supset L \supset K$ an, bei dem M/L und L/K jeweils normal sind, M/K jedoch nicht normal ist.

Übung 6.3.8.29. Man formuliere präzise und zeige, daß es bis auf nichteindeutigen Isomorphismus genau ein minimales N wie in Proposition 6.3.8.25 gibt. Dies N heißt die **normale Hülle von** L **über** K.

Übung 6.3.8.30. Jede endliche Körpererweiterung von $\mathbb{R}$ ist isomorph im Sinne von 6.3.8.5 zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Hinweis: $\mathbb{C}$ ist bekanntlich algebraisch abgeschlossen.

Ergänzende Übung 6.3.8.31. Sei k ein Körper und $a \in k^\times$ und $n \geq 1$. Man zeige, daß im Zerfällungskörper des Polynoms $X^n - a$ auch das Polynom $X^n - 1$ stets in Linearfaktoren zerfällt, daß aber umgekehrt im Zerfällungskörper des Polynoms $X^n - 1$ ein Polynom $X^n - a$ nicht notwendig in Linearfaktoren zerfallen muß.

Übung 6.3.8.32. Gegeben eine endliche Körpererweiterung $K \subset L$ zeige man, daß jedes Polynom aus dem Polynomring $L[X]$ Teiler eines Polynoms aus dem Polynomring $K[X]$ ist.

Übung 6.3.8.33. Gegeben eine Primzahl p und zwei primitive p-te Einheitswurzeln $\zeta, \xi \in \mathbb{C}$ gilt $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(\xi)$ und es gibt genau einen Körperhomomorphismus $\mathbb{Q}(\zeta) \to \mathbb{Q}(\zeta)$ mit $\zeta \mapsto \xi$. Hinweis: Irreduzibilität des p-ten Kreisteilungspolynoms 6.2.8.4.

6.3.9 Vielfachheit von Nullstellen

6.3.9.1. Unter einer **mehrfachen Nullstelle** eines Polynoms mit Koeffizienten in einem Körper oder allgemeiner einem kommutativen Integritätsbereich verstehen wir eine Nullstelle der Vielfachheit mindestens Zwei. Sagen wir, unser Polynom habe „mehrfache Nullstellen“, so ist gemeint, daß es mindestens eine mehrfache Nullstelle haben soll. Eigentlich wäre es gemäß unserer allgemeinen Konventionen 2.1.7.3 präziser, zu sagen, es habe „eine mehrfache Nullstelle“, aber das ist unüblich. Möglicherweise rührt das daher, daß man eine mehrfache Nullstelle gerne denkt als „mehrere Nullstellen, die zusammenfallen“. Das Nullpolynom hat stets mehrfache Nullstellen, bei ihm haben ja sogar alle Nullstellen die Vielfachheit ∞.

Satz 6.3.9.2 (**Mehrfache Nullstellen bei Irreduzibilität über Teilkörper**). *Seien $K \subset L$ Körper. Gilt $\operatorname{char} K = 0$ oder ist K endlich, so hat ein K-irreduzibles Polynom $P \in K[X]$ keine mehrfachen Nullstellen in L.*

6.3.9.3. Wir werden in 6.3.9.17 und 6.3.9.24 sogar noch etwas allgemeinere Aussagen zeigen. Das braucht jedoch einige Vorbereitungen.

Beispiel 6.3.9.4 (**Ein K-irreduzibles Polynom mit mehrfachen L-Nullstellen**). In positiver Charakteristik können irreduzible Polynome über einem Körper durchaus mehrfache Nullstellen in einem Erweiterungskörper haben. Um ein Beispiel anzugeben, beachten wir zunächst, daß für K ein Körper positiver Charakteristik $\operatorname{char} K = p > 0$ jedes Element $a \in K$ höchstens eine p-te Wurzel in K hat. In der Tat folgt aus $b^p = a$ leicht $(X^p - a) = (X - b)^p$, mithin ist b die einzige Nullstelle des Polynoms $X^p - a$. Betrachten wir nun den Körper $K := \mathbb{F}_p(T)$, so besitzt das Element $a := T$ keine p-te Wurzel in K, denn die Menge der p-ten Potenzen von Elementen von $\mathbb{F}_p(T)$ kann explizit beschrieben werden als $\mathbb{F}_p(T^p)$ und enthält T nicht. Das Polynom $X^p - T$ ist nun sogar K-irreduzibel, da jeder seiner normierten K-irreduziblen Faktoren das Minimalpolynom $\operatorname{Irr}(\sqrt[p]{T}, K)$ sein muß, so daß unser Polynom, da es auch selbst normiert ist, eine Potenz dieses Minimalpolynoms sein muß. Das läßt aber wegen p prim nur die Möglichkeit $X^p - T = \operatorname{Irr}(\sqrt[p]{T}, K)$ offen. Dies Polynom ist also K-irreduzibel und hat in seinem Zerfällungskörper mehrfache Nullstellen, genauer eine einzige Nullstelle $\sqrt[p]{T}$ der Vielfachheit p.

Definition 6.3.9.5. Für ein Polynom $P = a_n X^n + \ldots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ mit Koeffizienten in einem beliebigen Ring R erklären wir seine **Ableitung** oder genauer **formale Ableitung** $P' \in R[X]$ durch die Vorschrift

$$P' := n a_n X^{n-1} + \ldots + 2 a_2 X + a_1$$

Lemma 6.3.9.6 (**Ableitungsregeln**). *Auch für unser formales Ableiten gelten die Summenregel $(P + Q)' = P' + Q'$ und die Produktregel $(PQ)' = P'Q + PQ'$.*

Beweis. Die Summenregel ist offensichtlich. Bei der Produktregel sind mithin beide Seiten additiv in P und Q und wir dürfen uns deshalb auf den Fall $P = aX^i$ und $Q = bX^j$ zurückziehen. In diesem Fall prüft man die Formel leicht explizit. □

Lemma 6.3.9.7 (Ableitung und mehrfache Nullstellen). *Gegeben K ein Körper, $g \in K[X]$ ein Polynom und $\alpha \in K$ eine Nullstelle von g ist α genau dann eine mehrfache Nullstelle von g, wenn auch die Ableitung g' von g bei α verschwindet.*

Beispiel 6.3.9.8. Sei p eine Primzahl. Unser Polynom $P := X^p - T$ mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_p(T)$ hat nach 6.3.9.4 in seinem Zerfällungskörper $\mathbb{F}_p(\sqrt[p]{T})$ nur eine einzige Nullstelle $\alpha = \sqrt[p]{T}$ der Vielfachheit p. Nach unserem Lemma muß also gelten $P'(\alpha) = 0$. In unserem Fall ist sogar stärker $P' = 0$ selbst das Nullpolynom.

Beweis. Aus $g = (x - \alpha)^2 f$ folgt mit der Produktregel 6.3.9.6 leicht $g'(\alpha) = 0$. Gilt umgekehrt $g(\alpha) = g'(\alpha) = 0$ und schreiben wir $g = (x-\alpha)h$, so folgt wieder mit der Produktregel 6.3.9.6 aus $g'(\alpha) = 0$ unmittelbar $h(\alpha) = 0$. □

6.3.9.9. Gegeben ein Körper K und Polynome $f, g \in K[X]$, die nicht beide Null sind, gibt es genau ein normiertes Polynom $d \in K[X]$, das das von f und g erzeugte Ideal erzeugt, in Formeln

$$\langle f, g\rangle = \langle d\rangle$$

Per definitionem gilt $d|f$ und $d|g$ und es gibt $a, b \in K[X]$ mit $d = af + bg$. Insbesondere folgt für ein Polynom c aus $c|f$ und $c|g$ bereits $c|d$. Mithin ist d der eindeutig bestimmte normierte gemeinsame Teiler größtmöglichen Grades von f und g. Wir nennen d den **normierten größtgradigen gemeinsamen Teiler** von f und g. Man kann ihn, analog wie in 3.4.4.18 im Fall der ganzen Zahlen erklärt, mit dem euklidischen Algorithmus unschwer explizit berechnen.

Ergänzung 6.3.9.10. Analog finden wir, daß jede Menge von Polynomen in einer Veränderlichen mit Koeffizienten einem Körper, die mindestens ein von Null verschiedenes Polynom enthält, genau einen normierten größtgradigen gemeinsamen Teiler besitzt.

Proposition 6.3.9.11 (Körpererweiterungen und Polynomdivision). *Es seien $K \subset L$ Körper und $f, g \in K[X]$ Polynome mit $g \neq 0$. So gilt:*

1. *Das Teilen mit Rest von f durch g führt zum selben Resultat unabhängig davon, ob wir es in $K[X]$ oder in $L[X]$ durchführen;*

2. *Genau dann ist g ein Teiler von f in $L[X]$, wenn dasselbe gilt in $K[X]$;*

3. *Der normierte größtgradige gemeinsame Teiler von f und g in $K[X]$ ist auch der normierte größtgradige gemeinsame Teiler von f und g in $L[X]$.*

Beweis. 1. Schreiben wir $f = qg + r$ mit $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} g$, so sind q und r schon eindeutig bestimmt. Insbesondere ist die Lösung in $K[X]$ auch die einzig mögliche Lösung in $L[X]$.

2. Das ist der Spezialfall von Teil 1 mit Rest $r = 0$.

3. Seien dazu d_K beziehungsweise d_L der normierte größtgradige gemeinsame Teiler von f und g in $K[X]$ beziehungsweise in $L[X]$ nach 6.3.9.9. Natürlich ist d_K auch ein gemeinsamer Teiler in $L[X]$, also gilt $d_K|d_L$ nach 6.3.9.9. Andererseits haben wir eine Darstellung $d_K = qf + pg$ mit $q, p \in K[X]$, also gilt auch umgekehrt $d_L|d_K$. Zusammen folgt $d_L = d_K$. □

6.3.9.12. Ich erinnere an unsere Definition 3.5.2.16: Zwei Elemente eines Krings oder allgemeiner die Elemente einer beliebigen Teilmenge eines Krings heißen **teilerfremd**, wenn sie außer Einheiten keine gemeinsamen Teiler haben. Im Fall eines Hauptidealrings ist das offensichtlich gleichbedeutend dazu, daß das von unseren Elementen erzeugte Ideal der ganze Ring ist.

6.3.9.13 (**Gemeinsame Nullstellen und gemeinsame Teiler**). Gegeben ein Körper K haben zwei Polynome $f, g \in K[X]$ genau dann eine gemeinsame Nullstelle in mindestens einem Erweiterungskörper L/K, wenn sie nicht teilerfremd sind. In der Tat dürfen wir annehmen, daß f und g nicht beide das Nullpolynom sind. Gibt es nun eine Körpererweiterung L/K und $\alpha \in L$ mit $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$, so folgt $(X - \alpha)|f$ und $(X - \alpha)|g$ und f und g sind nicht teilerfremd in $L[X]$ und dann nach unserer Proposition 6.3.9.11 auch nicht in $K[X]$. Haben umgekehrt f und g einen gemeinsamen Teiler positiven Grades, so hat dieser Teiler in mindestens einer Körpererweiterung L/K eine Nullstelle, und diese ist dann auch eine Nullstelle von f und von g.

Lemma 6.3.9.14 (**Ableitung und Existenz mehrfacher Nullstellen**). *Für ein von Null verschiedenes Polynom mit Koeffizienten in einem Körper sind gleichbedeutend:*

1. *Das Polynom hat mehrfache Nullstellen in seinem Zerfällungskörper;*
2. *Das Polynom hat mehrfache Nullstellen in mindestens einer Erweiterung seines Koeffizientenkörpers;*
3. *Das Polynom und seine Ableitung sind nicht teilerfremd.*

6.3.9.15. Bei der Bedingung „teilerfremd“ kommt es wegen 6.3.9.11 nicht darauf an, ob wir sie in unserem ursprünglichen Polynomring oder im Polynomring mit Koeffizienten in einem beliebigen Erweiterungskörper verstehen.

Beweis. Seien K unser Körper und $P \in K[X] \backslash 0$ unser Polynom.

$1 \Rightarrow 2$. Das ist offensichtlich.

$2 \Rightarrow 3$. Ist α eine mehrfache Nullstelle des Polynoms P in einer Körpererweiterung L von K, so ist $(X - \alpha)$ ein Teiler sowohl von P als auch von P' in $L[X]$ und es folgt $\langle P, P' \rangle \neq \langle 1 \rangle$.

$3 \Rightarrow 1$. Es gibt eine Körpererweiterung M/K, in der P und falls $P' \neq 0$ auch P' in Linearfaktoren zerfallen. Gilt $\langle P, P' \rangle \neq \langle 1 \rangle$, so gibt es in M ein Element α derart, daß $(X - \alpha)$ sowohl P als auch P' teilt. In anderen Worten ist α eine Nullstelle von P und P' und damit eine mehrfache Nullstelle von P nach 6.3.9.7. □

6.3.9.16. Ein Polynom, das in keinem Erweiterungskörper seines Koeffizientenkörpers mehrfache Nullstellen hat, heißt **separabel**. Gleichbedeutend ist die Bedingung, daß unser Polynom keine mehrfachen Nullstellen in seinem Zerfällungskörper hat.

Satz 6.3.9.17 (**Mehrfache Nullstellen bei Irreduzibilität über Teilkörper**). *Seien K ein Körper und $P \in K[X]$ ein K-irreduzibles Polynom. So sind gleichbedeutend:*

1. *Das Polynom P ist nicht separabel, hat also mindestens eine mehrfache Nullstelle in mindestens einer Erweiterung seines Koeffizientenkörpers;*
2. *Die Ableitung P' von P ist das Nullpolynom;*
3. *Es gilt* $\operatorname{char} K = p > 0$ *und es gibt $Q \in K[X]$ mit $P(X) = Q(X^p)$;*
4. *Jede Nullstelle unseres Polynoms in einer beliebigen Erweiterung seines Koeffizientenkörpers ist ein mehrfache Nullstelle.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Hat P mehrfache Nullstellen, so ist es nach 6.3.9.14 nicht teilerfremd zu seiner Ableitung. Wenn aber ein irreduzibles Polynom nicht teilerfremd ist zu einem weiteren Polynom echt kleineren Grades, muß dieses weitere Polynom das Nullpolynom sein.

$2 \Leftrightarrow 3$. Das scheint mir offensichtlich.

$2 \Rightarrow 4$. Ist die Ableitung das Nullpolynom, so ist jede Nullstelle unseres Polynoms auch eine Nullstelle seiner Ableitung, mithin nach 6.3.9.7 eine mehrfache Nullstelle unseres Polynoms.

$4 \Rightarrow 1$. Das scheint mir offensichtlich. □

Definition 6.3.9.18. Sei L/K eine Körpererweiterung. Ein Element $\alpha \in L$ heißt **separabel über** K, wenn es über K algebraisch und eine einfache Nullstelle seines Minimalpolynoms ist. Unsere Körpererweiterung heißt **separabel**, wenn jedes Element von L separabel ist über K.

6.3.9.19. Nach 6.3.9.17 ist ein Element eines Körpers separabel über einem Teilkörper genau dann, wenn es über diesem algebraisch ist mit separablem Minimalpolynom.

Beispiel 6.3.9.20. In Charakteristik Null ist jede algebraische Körpererweiterung separabel nach 6.3.9.17. Nicht separabel ist $\mathbb{F}_p(\sqrt[p]{T})$ über $\mathbb{F}_p(T)$ nach 6.3.9.4.

Definition 6.3.9.21. Ein Körper heißt **vollkommen**, wenn er entweder die Charakteristik Null hat oder aber für $p = \operatorname{char} K > 0$ die Abbildung $x \mapsto x^p$ eine Surjektion $K \twoheadrightarrow K$ ist.

Ergänzung 6.3.9.22. Für „vollkommen“ sagt man in diesem Zusammenhang auf Englisch **perfect** und auf Französisch **parfait**.

Beispiel 6.3.9.23 (**Endliche Körper sind vollkommen**). Jeder endliche Körper vollkommen, denn jeder Körperhomomorphismus und damit auch der Frobeniushomomorphismus ist injektiv und folglich im Fall eines endlichen Körpers auch surjektiv.

Satz 6.3.9.24 (**Irreduzible Polynome über vollkommenen Körpern**). *Jedes irreduzible Polynom über einem vollkommenen Körper ist separabel. Jede algebraische Erweiterung eines vollkommenen Körpers ist separabel.*

Beweis. Sei K unser vollkommener Körper. Den Fall $\operatorname{char} K = 0$ haben wir bereits durch 6.3.9.2 oder besser 6.3.9.17 erledigt. Sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\operatorname{char} K = p > 0$ und $P \in K[X]$ irreduzibel. Wäre P nicht separabel, so hätte P nach 6.3.9.17 die Form $P = b_n(X^p)^n + \ldots + b_1X^p + b_0$. Nehmen wir aber nun $a_n, \ldots, a_0 \in K$ mit $a_i^p = b_i$ und betrachten $Q = a_nX^n + \ldots + a_0$, so folgt $P = Q^p$ im Widerspruch zur Irreduzibilität von P. $\square$

6.3.9.25 (**Algebraische Körpererweiterungen endlicher Körper sind separabel**). Jede algebraische Körpererweiterung eines endlichen Körpers ist separabel, da jeder endliche Körper vollkommen ist nach 12.7.1.11 und folglich jedes irreduzible Polynom darüber separabel nach 6.3.9.24.

Satz 6.3.9.26 (**Charakterisierung separabler Erweiterungen**). *Für eine Körpererweiterung L/K sind gleichbedeutend:*

1. *L/K ist separabel;*
2. *L wird erzeugt über K von Elementen, die separabel sind über K.*

Ist L/K endlich, so sind auch gleichbedeutend:

3. *Für jede Vergrößerung N/L von L zu einer normalen Erweiterung von K gilt $|\mathrm{Kring}^K(L, N)| = [L : K]$;*

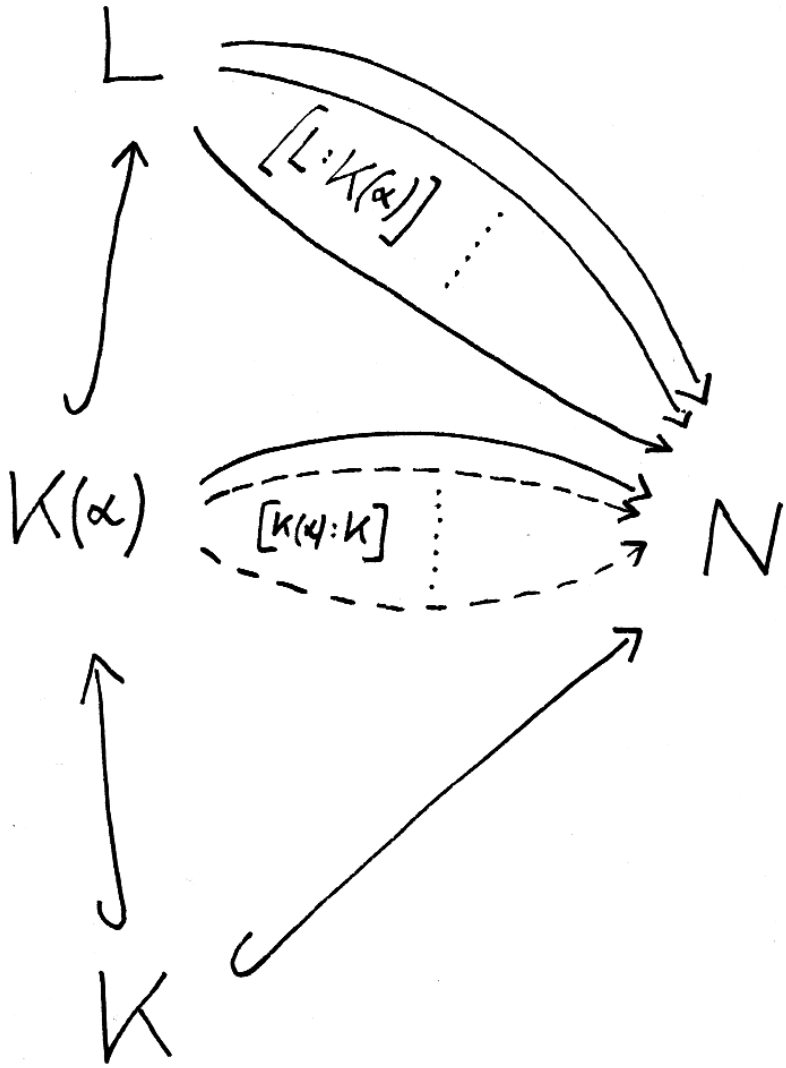


Illustration zum Beweis von 6.3.9.26, Implikation $2 \Rightarrow 3$. Die durchgezogenen Pfeile ganz oben sollen mögliche Erweiterungen des durchgezogenen Pfeils in der Mitte andeuten. Jeder andere der $[K(\alpha) : K]$ Pfeile in der Mitte besitzt genauso $[L : K(\alpha)]$ Erweiterungen nach ganz oben, nur sind diese nicht eingezeichnet.

4. *Es gibt mindestens eine Körpererweiterung N/K von K mit der Eigenschaft* $|\mathrm{Kring}^K(L,N)| = [L:K]$.

Beweis. Zeigen wir $1 \Leftrightarrow 2$ für endliche Erweiterungen, so folgt es mit 6.3.2.6 im allgemeinen. Wir dürfen uns also für den Rest des Beweises auf den Fall L/K endlich beschränken. $1 \Rightarrow 2$ ist klar. Für $2 \Rightarrow 3$ dürfen wir mit Induktion über den Grad $[L:K]$ annehmen $L = K(\alpha)$. Da α separabel ist, sind die $[L:K]$ Nullstellen seines Minimalpolynoms in N paarweise verschieden und liefern mit 6.3.8.9 paarweise verschiedene Erweiterungen der Einbettung $K \hookrightarrow N$ zu Körperhomomorphismen $K(\alpha) \hookrightarrow N$. Die Implikation $3 \Rightarrow 4$ ist klar. Für $4 \Rightarrow 1$ argumentieren wir durch Widerspruch: Wäre ein $\alpha \in L$ nicht separabel, so gäbe es nach 6.3.8.9 für jedes N weniger als $[K(\alpha):K]$ Ausdehnungen von $K \hookrightarrow N$ zu einer Einbettung $K(\alpha) \hookrightarrow N$ und damit nach Satz 6.3.8.15 über die maximal mögliche Zahl von Ausdehnungen notwendig auch weniger als $[L:K]$ Ausdehnungen von $K \hookrightarrow N$ zu einer Einbettung $L \hookrightarrow N$. □

Ergänzung 6.3.9.27 (**Die Diskriminante als Determinante**). Ich erkläre noch eine alternative Beschreibung der Diskriminante, deren Herleitung 6.3.9.14 verwendet. Ich behaupte genauer für die $a_i \in \mathbb{Z}['\zeta_1,\ldots,\zeta_n]$, die gegeben werden durch die Identität $T^n + a_1T^{n-1} + \ldots + a_n = (T+\zeta_1)\ldots(T+\zeta_n)$, daß die Determinante der nebenstehenden Matrix M gegeben wird durch die Formel

$$\det M = \prod_{i\neq j}(\zeta_i - \zeta_j)$$

und folglich genau unsere Diskriminante aus 6.2.9.13 ist. Um das zu zeigen, beachten wir zunächst, daß beide Seiten symmetrische Polynome sind und daß zumindest in $\mathbb{Q}['\zeta_1,\ldots,\zeta_n]$ alle $(\zeta_i - \zeta_j)$ nach 6.3.9.14 und 3.5.4.5 und 6.2.10.10 das Polynom $(\det M)$ teilen. Dann aber wechselt der Ausdruck $(\det M)/(\zeta_i - \zeta_j)$ unter der Vertauschung von ζ_i und ζ_j sein Vorzeichen und muß nach 3.5.4.5 folglich ein weiteres Mal durch $(\zeta_i - \zeta_j)$ teilbar sein. Mithin ist $\det M$ in $\mathbb{Q}['\zeta_1,\ldots,\zeta_n]$ durch $\prod_{i\neq j}(\zeta_i - \zeta_j)$ teilbar. Sicher ergibt das Wegteilen ein symmetrisches Polynom, das höchstens auf den Hyperebenen $\zeta_i = \zeta_j$ verschwindet. Wäre dies Polynom nicht konstant, so könnten wir mit denselben Argumenten ein weiteres Mal einen Faktor $\prod_{i\neq j}(\zeta_i - \zeta_j)$ herausziehen. Das führt jedoch zu einem Widerspruch, wenn wir etwa erst durch $\zeta_1^{2(n-1)}$ teilen, für $\zeta_2,\ldots,\zeta_n$ paarweise verschiedene rationale Zahlen einsetzen, und $\zeta_1 \in \mathbb{Q}$ gegen ∞ streben lassen: $(\det M)/\zeta_1^{2(n-1)}$ bleibt dann nämlich beschränkt, wie wir sehen, indem wir alle Spalten außer der Ersten mit ζ_1^{-1} multiplizieren, und $(\prod_{i\neq j}(\zeta_i - \zeta_j))/\zeta_1^{2(n-1)}$ strebt gegen eine von Null verschiedene Zahl, aber $(\prod_{i\neq j}(\zeta_i - \zeta_j))^r/\zeta_1^{2(n-1)}$ strebt für $r \geq 2$ stets nach

Unendlich. Es gilt also nur noch, die Konstante $c \in \mathbb{Q}$ zu bestimmen mit

$$\det M = c \prod_{i \neq j} (\zeta_i - \zeta_j)$$

Dazu setzen wir $\zeta_i = -\zeta^i$ mit ζ einer primitiven n-ten Einheitswurzel. Dann folgt $(T + \zeta_1) \ldots (T + \zeta_n) = T^n - 1$ und $(\det M) = n^n (-1)^{n-1}$ und andererseits

$$\prod_{i \neq j} (\zeta_i - \zeta_j) = \prod_{i=1}^{n} \left(\zeta^i \prod_{j \neq i} (1 - \zeta^{j-i}) \right)$$

Das Produkt aller n-ten Einheitswurzeln ist nun sicher $(-1)^{n-1}$ und das zweite Produkt kann berechnet werden als der Wert an der Stelle $t = 1$ des Polynoms $(t^n - 1)/(t - 1) = t^{n-1} + \ldots + t + 1$. So erhalten wir für die gesuchte Konstante c schließlich $(-1)^{n-1} n^n = (-1)^{n-1} n^n c$ und damit $c = 1$ wie gewünscht.

Übungen

Übung 6.3.9.28 (**Diskriminante eines Produkts**). Gegeben normierte Polynome f, g zeige man

$$\operatorname{Disk}(fg) = \operatorname{Disk}(f) \operatorname{Res}(f, g) \operatorname{Res}(g, f) \operatorname{Disk}(g)$$

Übung 6.3.9.29. Man bestimme den normierten größtgradigen gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $X^4 + X^3 - 2X^2 + 3X - 15$ und $X^3 - 6X^2 - 12X + 35$ in $\mathbb{Q}[X]$. Haben diese Polynome in einer Körperwerweiterung von $\mathbb{Q}$ eine gemeinsame Nullstelle?

Übung 6.3.9.30. Finden Sie alle komplexen mehrfachen Nullstellen des Polynoms $X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 4X + 4$.

Übung 6.3.9.31. Man zeige nocheinmal mit Sonderbetrachtungen in kleiner Charakteristik, daß gegeben ein Körper k und $p, q \in k$ das Polynom $X^3 + pX + q$ genau dann nicht separabel ist, wenn gilt $27q^2 + 4p^3 = 0$.

Übung 6.3.9.32 (**Ableitung und logarithmische Ableitung von Reihen**). Gegeben ein Ring R erklärt man die formale Ableitung einer Laurentreihe $f = \sum a_n t^n \in R(\!(t)\!)$ durch $f' := \sum n a_n t^{n-1}$. Wieder zeige man Summenregel und Produktregel. Für $f \in 1 + tR[\![t]\!]$ und $\mathbb{Q} \subset R$ zeige man zusätzlich $(\log f)' = f'/f$ für $\log f$ wie in 10.6.3.11.

Ergänzende Übung 6.3.9.33. Seien P, Q nicht konstante Polynome mit Koeffizienten in einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null. Man zeige: Haben unsere beiden Polynome dieselben Nullstellen und dieselben

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n & & & \\ & 1 & a_1 & \cdots & a_n & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & a_1 & \cdots & a_n \\ n & (n-1)a_1 & \cdots & a_{n-1} & & & \\ & n & (n-1)a_1 & \cdots & a_{n-1} & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & n & (n-1)a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Die Determinante dieser Matrix stimmt überein mit der Diskriminante des Polynoms $T^n + a_1T^{n-1} + \ldots + a_n$, wie sie in 6.2.9.15 für jedes normierte Polynom erklärt wird. In der in 6.2.10.6 eingeführten Terminologie ist die Diskriminante eines normierten Polynoms f vom Grad n also genau die Resultante $\mathrm{Disk}_n(f) = \mathrm{Res}_{n,n-1}(f, f')$ unseres Polynoms mit seiner Ableitung. Das sei von nun ab auch unsere Definition der Diskriminante $\mathrm{Disk}_n(f)$ eines beliebigen Polynoms f vom Grad $\leq n$. Man kann, wie obige Formel zeigt, von diesem Polynom Disk_n sogar noch einen Faktor a_0 abspalten.

„Einsstellen“, gelten also in Formeln für die zugehörigen Abbildungen $P, Q : k \to k$ die Gleichheiten $P^{-1}(0) = Q^{-1}(0)$ und $P^{-1}(1) = Q^{-1}(1)$ von Teilmengen von k, so folgt $P = Q$. Hinweis: Wäre $P \neq Q$, so wäre $P - Q$ ein von Null verschiedenes Polynom mit $|P^{-1}(1) \cup P^{-1}(0)|$ Nullstellen und folglich mindestens diesem Grad. Für d das Maximum der Grade unserer Polynome folgt $d \geq |P^{-1}(1) \cup P^{-1}(0)|$. Für P vom maximalen Grad folgt, daß P' mit Vielfachheiten gerechnet zu viele Nullstellen haben muß und deshalb Null ist.

Übung 6.3.9.34. Ein Polynom mit Koeffizienten in einem Körper der Charakteristik Null ist separabel genau dann, wenn es von keinem Quadrat eines irreduziblen Polynoms geteilt wird.

Übung 6.3.9.35. Seien $M \supset L \supset K$ Körper. Ist M/L separabel und L/K separabel, so ist M/K separabel. Hinweis: Man ziehe sich zunächst auf den Fall endlicher Erweiterungen zurück und verwende dann 6.3.9.26, insbesondere $4 \Rightarrow 1$, mit N einer Vergrößerung von M zu einer normalen Erweiterung von K.

Ergänzende Übung 6.3.9.36. In jeder Körpererweiterung M/K gibt es unter allen Zwischenkörpern $L \subset M$, die separabel sind über K, einen größten. Er heißt der **separable Abschluß von K in M**. Hinweis: Man verwende 6.3.9.35.

Übung 6.3.9.37. Eine algebraische Körpererweiterung derart, daß nur die Elemente des kleinen Körpers über diesem separabel sind, heißt **rein inseparabel**. Man zeige, daß eine algebraische Erweiterung L/K eines Körpers K der Charakteristik p rein inseparabel ist genau dann, wenn für jedes Element von L die p^r-te Potenz für hinreichend großes r in K liegt. Salopp gesprochen sind also rein inseparable Erweiterungen genau die Erweiterungen, die durch die sukzessive Adjunktion p-ter Wurzeln in Charakteristik p entstehen. Hinweis: 6.3.9.17.

Ergänzende Übung 6.3.9.38. Man zeige: Ist M/K eine algebraische Körpererweiterung und $L \subset M$ der separable Abschluß von K in M, so ist die Körpererweiterung M/L rein inseparabel. Hinweis: Man verwende 6.3.9.35.

Vorschau 6.3.9.39. Man kann im Fall positiver Charakteristik $p > 0$ auch für jede Körpererweiterung L/K die Menge L_{i} aller Elemente von L betrachten, die unter wiederholtem Anwenden des Frobenius, also unter wiederholtem Bilden der p-ten Potenz irgendwann einmal in K landen. Dann ist L_{i} der größte über K rein inseparable algebraische Unterkörper von L. Auch wenn L/K algebraisch oder sogar endlich ist, muß hier L/L_{i} nicht separabel sein. Das gilt jedoch, wenn zusätzlich L/K eine normale algebraische Körpererweiterung ist, vergleiche 6.4.1.30.

Übung 6.3.9.40. Man zeige für jede rein inseparable algebraische Körpererweiterung L/K und jede weitere Körpererweiterung N/K die Abschätzung

$$|\mathrm{Kring}^K(L, N)| \leq 1$$

Ergänzende Übung 6.3.9.41. Gegeben eine algebraische Körpererweiterung L/K erklärt man ihren **Separabilitätsgrad** als $[L : K]_{\mathrm{s}} := [S : K]$ für $S \subset L$ den separablen Abschluß von K in L.

1. Gegeben eine endliche Körpererweiterung L/K zeige man

$$[L : K]_{\mathrm{s}} := \sup_{N/K} |\mathrm{Kring}^K(L, N)|$$

   Das Supremum der Zahl möglicher Homomorphismen ist dabei über alle Körpererweiterungen N/K zu bilden und alle Werte in $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ sind erlaubt. Hinweis: 6.3.9.38 und 6.3.9.40.

2. Man zeige, daß der Separabilitätsgrad im Fall endlicher Körpererweiterungen multiplikativ ist, daß also für $M/L/K$ endliche Erweiterungen gilt

$$[M : K]_{\mathrm{s}} = [M : L]_{\mathrm{s}}[L : K]_{\mathrm{s}}$$

Die beiden Identitäten aus der vorhergehenden Übung gelten auch für beliebige algebraische Körpererweiterungen. Um das zu zeigen, muß man nur wissen, daß sich jeder Körper in einen algebraisch abgeschlossenen Körper einbetten läßt, und muß sich überlegen, daß für jede algebraische Körpererweiterung L/K und jede algebraisch abgeschlossene Körpererweiterung N/K gilt $[L : K]_{\mathrm{s}} = |\mathrm{Kring}^K(L, N)|$.

Übung 6.3.9.42 (**Rein inseparable Erweiterungen eines Funktionenkörpers**). Sei k ein vollkommener Körper positiver Charakteristik $p > 0$ und $L/k(T)$ eine endliche rein inseparable Erweiterung seines Funktionenkörpers. So ist unsere Körpererweiterung für genau ein $r \in \mathbb{N}$ zur Körpererweiterung $k(X)/k(T)$ gegeben durch $X \mapsto T^{p^r}$ isomorph. Hinweis: Man mag ohne Beschränkung der Allgemeinheit $[L : k(T)] = p$ annehmen. Dann überlegt man sich, daß in $k(\sqrt[p]{T})$ bereits alle Elemente von $k(T)$ eine p-te Wurzel haben.

Ergänzende Übung 6.3.9.43. Gegeben ein Körper k induzieren die Einbettungen $k[X] \hookrightarrow k[\![X]\!] \hookrightarrow k(\!(X)\!)$ einen Ringhomomorphismus und nach 3.5.5.5 eine Einbettung $k(X) \hookrightarrow k(\!(X)\!)$. Man zeige, daß im Fall $\mathrm{char}\, k = 0$ diese Einbettung für rationale Funktionen, die bei $X = 0$ keinen Pol haben, durch ein formales Analogon der Taylorformel beschrieben werden kann. Hierbei gilt es zunächst, die Ableitung eines Quotienten vermittels der Quotientenregel zu erklären.

6.3.10 Satz vom primitiven Element

Lemma 6.3.10.1 (Überdeckung durch affine Teilräume). *Ein affiner Raum über einem unendlichen Körper kann nicht durch endlich viele echte affine Teilräume überdeckt werden.*

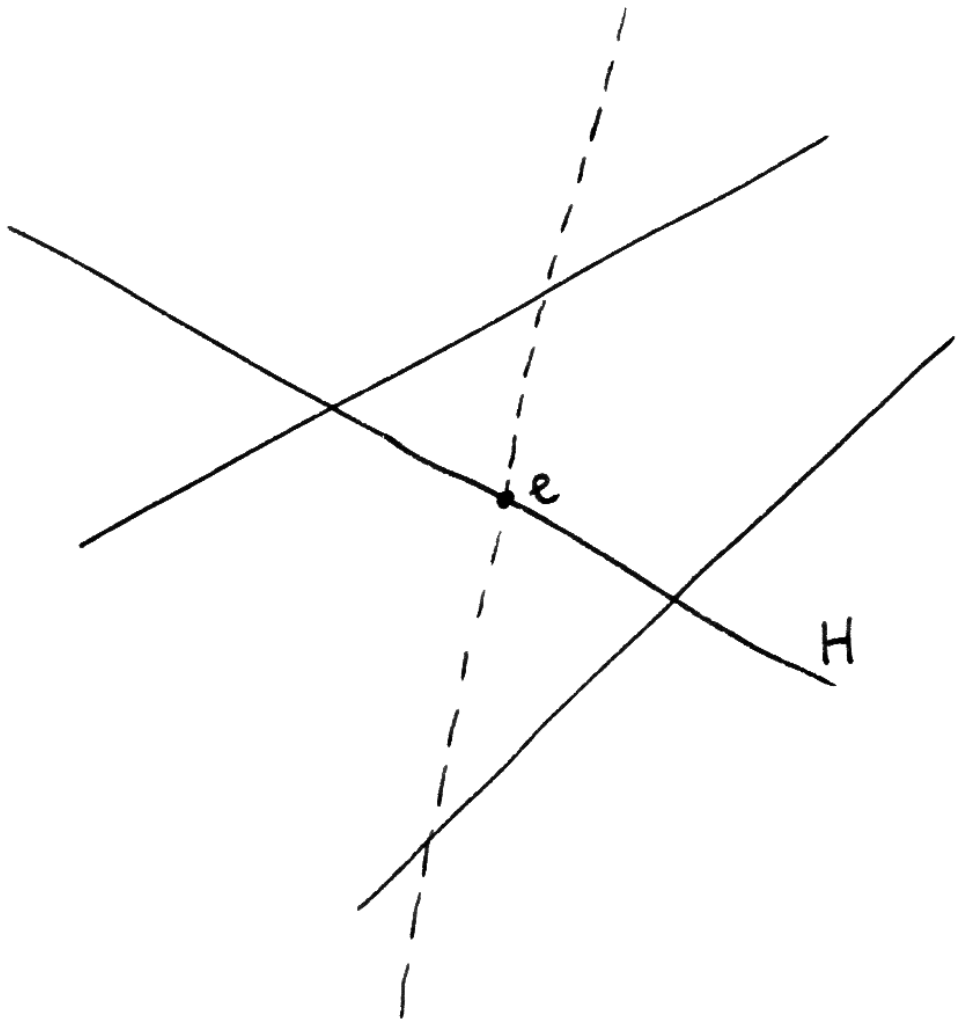


Illustration zum Beweis von 6.3.10.1

Beweis. Wir argumentieren durch Widerspruch und gehen von einer Überdeckung durch möglichst wenige Teilräume aus. Wir finden also einen Punkt, der im ersten Teilraum liegt, aber nicht in den anderen, und einen weiteren Punkt, der im zweiten Teilraum liegt, aber nicht in den anderen. Eine Gerade durch diese beiden Punkte trifft jeden unserer Teilräume in höchstens einem Punkt, hat aber selbst unendlich viele Punkte. □

Lemma 6.3.10.2 (Überdeckung durch Untervektorräume). *Ein Vektorraum kann nicht durch endlich viele Untervektorräume von unendlicher Kodimension überdeckt werden.*

Beweis. Sei sonst $V = U_1 \cup \ldots \cup U_r$ ein Gegenbeispiel mit r kleinstmöglich. Natürlich gilt notwendig $r \geq 2$. Ganz allgemein liefern die offensichtlichen Abbildungen Isomorphismen $U_1/(U_1 \cap U_i) \xrightarrow{\sim} (U_1 + U_i)/U_i$. Wäre das für ein $i > 1$ ein endlichdimensionaler Raum, so hätte mit U_i auch $U_1 + U_i$ unendliche Kodimension in V und wir hätten ein noch kürzeres Gegenbeispiel gefunden. Das kann nicht sein, also haben alle $(U_1 \cap U_i)$ mit $i > 1$ unendliche Kodimension in U_1. Gegeben eine Ursprungsgerade $G \subset V$ haben dann auch alle $(G + U_1) \cap (G + U_i)$ mit $i > 1$ unendliche Kodimension in $G + U_1$ und können wegen der Minimalität unseres Gegenbeispiels $G + U_1$ nicht überdecken, in Formeln

$$G + U_1 \not\subset \bigcup_{i>1} (G + U_i)$$

Dann können sie aber auch für kein $g \in G$ die Nebenklasse $g+U_1$ überdecken und a forteriori liegt keine Nebenklasse $g + U_1$ in der Vereinigung der U_i mit $i > 1$. Wählen wir nun $g \notin U_1$, so kann mithin $g + U_1$ nicht in der Vereinigung der U_i mit $i \geq 1$ enthalten sein. □

6.3.10.3. Ein Vektorraum V einer Dimension ≥ 2 über einem endlichen Körper $\mathbb{F}$ kann durchaus durch endlich viele echte Untervektorräume überdeckt werden. In der Tat ist $\mathbb{F}^2$ die Vereinigung seiner endlich vielen Ursprungsgeraden L und $V = \mathbb{F}^2 \times W$ damit die Vereinigung seiner echten Teilräume $L \times W$.

Korollar 6.3.10.4 (Überdeckung durch Teilkörper). *Ein Körper kann nicht durch endlich viele echte Teilkörper überdeckt werden.*

Beweis im Fall von Charakteristik Null. Jeder Unterkörper ist in diesem Fall ein $\mathbb{Q}$-Untervektorraum. Die Behauptung folgt so aus Lemma 6.3.10.1, nach dem ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum nicht durch endlich viele echte Untervektorräume überdeckt werden kann. □

Beweis im Fall eines endlichen Körpers. Ein endlicher Körper kann nicht durch echte Teilkörper überdeckt werden, da seine multiplikative Gruppe nach 4.4.4.17 zyklisch ist. □

Beweis im Fall eines unendlichen Körpers in positiver Charakteristik. Jeder echte Teilkörper eines unendlichen Körpers ist entweder unendlich oder endlich und hat in beiden Fällen als Untervektorraum in Bezug auf den Primkörper unendliche Kodimension. Die Behauptung folgt so aus Lemma 7.4.1.22, nach dem ein Vektorraum nicht durch endlich viele Untervektorräume von unendlicher Kodimension überdeckt werden kann. □

Proposition 6.3.10.5 (Unterscheidung von Körperhomomorphismen). *Gegeben Körpererweiterungen L/K und M/K desselben Grundkörpers K und endlich viele paarweise verschiedene Homomorphismen $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \mathrm{Kring}^K(L, M)$ von Körpererweiterungen gibt es stets ein Element $\alpha \in L$, dessen Bilder $\sigma_i(\alpha)$ unter unseren Körperhomomorphismen paarweise verschieden sind.*

Beweis. Sicher ist $L_{ij} := \{\beta \in L \mid \sigma_i(\beta) = \sigma_j(\beta)\}$ stets ein Teilkörper von L und für $i \neq j$ ist L_{ij} sogar ein echter Teilkörper von L. Da ein Körper nach 6.3.10.4 nicht durch endlich viele echte Teilkörper überdeckt werden kann, gibt es stets ein $\alpha \in L \backslash \bigcup_{i \neq j} L_{ij}$. □

Korollar 6.3.10.6 (Teilkörper und Primitivität). *Eine Körpererweiterung ist genau dann endlich und primitiv, wenn sie nur endlich viele Zwischenkörper zuläßt.*

Beweis. Läßt eine Körpererweiterung L/K nur endlich viele Zwischenkörper zu, so kann sie von ihren echten Zwischenkörpern nach 6.3.10.4 nicht überdeckt werden. Also gibt es ein $\alpha \in L$, das in keinem echten Zwischenkörper liegt. Dann gilt notwendig $L = K(\alpha)$ und es ist leicht zu sehen, daß α nicht transzendent sein kann. Ist umgekehrt $L = K(\alpha)$ eine primitive endliche Körpererweiterung, so betrachten wir die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Zwischenkörper } M, \\ K \subset M \subset K(\alpha) \end{array} \right\} & \to & \left\{ \begin{array}{c} \text{Normierte Teiler in } L[X] \\ \text{des Minimalpolynoms } \mathrm{Irr}(\alpha, K) \end{array} \right\} \\ M & \mapsto & \mathrm{Irr}(\alpha, M) \end{array}$$

Es reicht zu zeigen, daß sie injektiv ist. In der Tat wird aber M über K bereits von den Koeffizienten des Minimalpolynoms $\mathrm{Irr}(\alpha, M)$ erzeugt, denn für den von diesen Koeffizienten über K erzeugten Teilkörper $M' \subset M$ gilt $[L : M'] = \mathrm{grad}(\mathrm{Irr}(\alpha, M)) = [L : M]$. Da jedes Polynom nur endliche viele normierte Teiler besitzt, folgt die Behauptung. □

Satz 6.3.10.7 (vom primitiven Element). *Ist L/K eine endliche separable Körpererweiterung, so gibt es ein Element $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$.*

Beweis. Nach 6.3.8.25 können wir L vergrößern zu einer normalen Erweiterung N von K. Wegen der Separabilität von L/K gibt es dann nach 6.3.9.26 genau

$[L : K]$ Körperhomomorphismen über K von L nach N, in Formeln

$$|\mathrm{Kring}^K(L, N)| = [L : K]$$

Nach 6.3.10.5 gibt es Elemente $\alpha \in L$ derart, daß die $\sigma(\alpha)$ für $\sigma \in \mathrm{Kring}^K(L, N)$ paarweise verschieden sind. Gegeben solch ein α liefert die Restriktion eine Injektion $\mathrm{Kring}^K(L, N) \hookrightarrow \mathrm{Kring}^K(K(\alpha), N)$, denn verschiedene $\sigma \neq \tau$ links bilden auch schon unser α auf verschiedene Elemente von N ab. Die Identität $L = K(\alpha)$ folgt dann unmittelbar aus der Kette von Gleichungen und Ungleichungen

$$[L : K] = |\mathrm{Kring}^K(L, N)| \leq |\mathrm{Kring}^K(K(\alpha), N)| \leq [K(\alpha) : K] \leq [L : K] \quad \square$$

Lemma* 6.3.10.8 (Überdeckung durch Nebenklassen). *Eine abelsche Gruppe kann nicht durch endlich viele Nebenklassen zu Untergruppen von unendlichem Index überdeckt werden.*

Ergänzung 6.3.10.9. Dies Lemma ist eine gemeinsame Verallgemeinerung unserer beiden Lemmata 6.3.10.1 und 7.4.1.22 vom Beginn dieses Abschnitts, aber abgesehen davon für uns nicht von Belang. Noch stärker gilt sogar: Eine Überdeckung einer Gruppe durch endlich viele Linksnebenklassen bleibt eine Überdeckung, wenn wir daraus alle Linksnebenklassen zu Untergruppen von unendlichem Index weglassen. Diese Aussage wird als **Neumann's Lemma** zitiert. Bernhard Neumann studierte in den dreißiger Jahren Mathematik in Freiburg und Berlin. Die Machtübernahme durch die Nationalsozialisten trieb ihn in die Emigration.

Beweis. Wir argumentieren durch Widerspruch und gehen von einem Gegenbeispiel einer Überdeckung durch möglichst wenige Nebenklassen aus. Bezeichne bei so einem Gegenbeispiel G unsere abelsche Gruppe und $H_0, H_1, \ldots, H_n \subset G$ unsere überdeckenden Nebenklassen. Die zugehörigen Untergruppen notieren wir $\vec{H}_0, \vec{H}_1, \ldots, \vec{H}_n$. Für alle i dürfen wir $|(\vec{H}_0 + \vec{H}_i)/\vec{H}_i| \in \{1, \infty\}$ annehmen, indem wir andernfalls für alle i mit $|(\vec{H}_0 + \vec{H}_i)/\vec{H}_i| < \infty$ die Nebenklasse H_i von $\vec{H}_i$ zur Nebenklasse $\vec{H}_0 + H_i$ von $\vec{H}_0 + \vec{H}_i$ vergrößern und beachten, daß die Untergruppe $\vec{H}_0 + \vec{H}_i$ in diesem Fall immer noch unendlichen Index in G hat. Weiter können unsere Nebenklassen nicht alle Nebenklassen unter derselben Untergruppe sein, wir dürfen also $\vec{H}_0 \not\subset \vec{H}_1$ annehmen. Da wir von einem kleinsten Gegenbeispiel ausgegangen waren, finden wir $g \in H_1 \backslash \bigcup_{i \neq 1} H_i$. Wegen $g \notin H_0$ gilt $g + \vec{H}_0 \subset H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$ alias

$$\vec{H}_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Big((H_i - g) \cap \vec{H}_0 \Big)$$

Hier sind aber die $(H_i - g) \cap \vec{H}_0$ entweder leer oder Nebenklassen unter $\vec{H}_i \cap \vec{H}_0$, das wegen $|(\vec{H}_0 + \vec{H}_i)/\vec{H}_i| = |\vec{H}_0/(\vec{H}_i \cap \vec{H}_0)| \in \{1, \infty\}$ jeweils entweder ganz $\vec{H}_0$ ist oder eine Untergruppe von unendlichem Index. Ersteres kann nicht passieren, da $g + \vec{H}_0$ in keinem der H_i enthalten ist. Wir hätten also ein noch kürzeres Gegenbeispiel konstruiert. Dieser Widerspruch zeigt das Lemma. □

6.3.11 Algebraischer Abschluß*

6.3.11.1. In der Literatur ist es üblich, sich bei der Entwicklung der Körpertheorie stark auf den Satz von der Existenz eines algebraischen Abschlusses zu stützen. Das hat meines Erachtens den Nachteil, daß der Beweis dieses Satzes eher mengentheoretischer Natur ist und zu den anderen Themen der Vorlesung nicht recht passen will. Um die Entwicklung der Grundlagen der Algebra von den Schwierigkeiten bei der Formalisierung der Mengenlehre zu entlasten, entwickle ich in diesem Text die Grundzüge der Körpertheorie unabhängig vom Satz über die Existenz eines algebraischen Abschlusses. Ich diskutiere den Satz und seinen Beweis hier nur, damit weiterführende Vorlesungen darauf zurückgreifen können. Der folgende Abschnitt ist also für die weitere Entwicklung dieser Vorlesung unerheblich und kann ohne Schaden übersprungen werden.

6.3.11.2. Ich erinnere daran, daß eine Körpererweiterung nach 6.3.8.18 algebraisch heißt, wenn alle Elemente der Erweiterung algebraisch sind über dem Grundkörper. Ich erinnere daran, daß eine Körpererweiterung L/K körperendlich heißt, wenn der Erweiterungskörper über dem Grundkörper als Körper endlich erzeugt ist.

Satz 6.3.11.3 (über algebraische Körpererweiterungen). *1. Jede körperendliche algebraische Körpererweiterung ist endlich;*

2. Sei L/K eine Körpererweiterung. Diejenigen Elemente von L, die algebraisch sind über K, bilden einen Unterkörper von L;

3. Seien $M \supset L \supset K$ Körper. Ist M algebraisch über L und L algebraisch über K, so ist M algebraisch über K.

Beweis. 1. Sei $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Sind alle α_i algebraisch über K, so sind sie erst recht algebraisch über $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$. Wir betrachten die Körperkette

$$K \subset K(\alpha_1) \subset K(\alpha_1, \alpha_2) \subset \ldots \subset K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = L$$

Da hier alle Schritte endlich sind nach 6.3.4.7, ist auch L/K endlich nach 6.3.4.11.

2. Sind α und $\beta \in L$ algebraisch über K, so haben wir $[K(\alpha, \beta) : K] < \infty$ nach Teil 1. Mithin sind alle Elemente von $K(\alpha, \beta)$ algebraisch über K nach 6.3.4.7.

3. Für $\alpha \in M$ betrachten wir die Koeffizienten $\beta_0, \ldots, \beta_r \in L$ seines Minimalpolynoms über L. Dann ist α sogar algebraisch über $K(\beta_0, \ldots, \beta_r)$. Der Turm von endlichen Körpererweiterungen

$$K \subset K(\beta_0, \ldots, \beta_r) \subset K(\beta_0, \ldots, \beta_r, \alpha)$$

zeigt damit, daß α algebraisch ist über K. □

Definition 6.3.11.4. Ein **algebraischer Abschluß** eines Körpers ist eine algebraische Erweiterung durch einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Satz 6.3.11.5 (über den algebraischen Abschluß). *Jeder Körper besitzt einen algebraischen Abschluß und dieser algebraische Abschluß ist eindeutig bis auf im allgemeinen nicht eindeutigen Isomorphismus von Körpererweiterungen.*

6.3.11.6. Wegen dieser partiellen Eindeutigkeit erlaubt man sich meist den bestimmten Artikel und eine Notation und spricht von *dem* algebraischen Abschluß eines Körpers K und notiert ihn

$$\bar{K}$$

Ein algebraischer Abschluß von $\mathbb{R}$ wäre etwa der Körper $\mathbb{C}$, wie wir ihn in 3.2.7.4 als Teilring des Rings der reellen (2×2)-Matrizen eingeführt haben, mit der dort konstruierten Einbettung von $\mathbb{R}$. Ein weiterer algebraischer Abschluß wäre der wie in 2.2.4.14 zu $K = \mathbb{R}$ durch das explizite Erklären einer Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$ konstruierte Körper, wieder mit der dort konstruierten Einbettung von $\mathbb{R}$. Sicher sind diese beiden Körpererweiterungen von $\mathbb{R}$ isomorph, aber es gibt zwischen ihnen sogar genau zwei Isomorphismen, von denen keiner „besser“ ist als der andere.

6.3.11.7. Die größte separable Teilerweiterung in einem algebraischen Abschluß eines Körpers nennt man seinen **separablen Abschluß**.

Beweis. Gegeben ein Körper K konstruiert man ohne Schwierigkeiten eine Einbettung $K \hookrightarrow \Omega$ in eine Menge Ω derart, daß es für keine algebraische Erweiterung von K eine surjektive Abbildung nach Ω gibt. Die Menge $\Omega = \mathcal{P}(K[X] \times \mathbb{N})$ wäre etwa eine Möglichkeit: Jedes Element einer algebraischen Erweiterung L von K ist ja eine von endlich vielen Nullstellen eines Polynoms aus $K[X]$, so daß wir unter Zuhilfenahme des Auswahlaxioms eine injektive Abbildung $L \hookrightarrow K[X] \times \mathbb{N}$ finden können. Die Existenz einer Surjektion $L \twoheadrightarrow \Omega$ stünde damit im Widerspruch zu 2.1.6.7, wonach es keine Surjektion $K[X] \times \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathcal{P}(K[X] \times \mathbb{N})$ geben kann. Jetzt betrachte man die Menge aller Tripel (M, s, φ) bestehend aus einer Teilmenge $M \subset \Omega$, einer Struktur s eines Körpers darauf und einem Köperhomomorphismus $\varphi : K \to M$, bezüglich dessen M algebraisch ist über K. Nach dem Zorn'schen Lemma 3.1.9.15 existiert bezüglich der offensichtlichen

Teilordnung ein maximales derartiges Tripel, und bei solch einem maximalen Tripel ist M notwendig algebraisch abgeschlossen: Sonst könnten wir nämlich mit der Kronecker-Konstruktion 17.7.2.5 eine endliche Erweiterung L/M von M finden und die Einbettung $M \hookrightarrow \Omega$ zu einer Einbettung von Mengen $L \hookrightarrow \Omega$ ausdehnen – hier verwenden wir implizit nocheinmal das Zorn'sche Lemma, nach dem es eine maximale Ausdehnung auf eine Teilmenge von L geben muß, die aber nicht surjektiv sein kann und deshalb bereits auf ganz L definiert sein muß. So erhielten wir ein noch größeres Tripel und dieser Widerspruch zeigt die Existenz. Seien nun $K \hookrightarrow \bar{K}$ und $K \hookrightarrow E$ zwei algebraische Abschlüsse von K. Nach Proposition 6.3.11.9 über Ausdehnungen von Körpereinbettungen, die wir im Anschluß beweisen, läßt sich die Identität auf K fortsetzen zu einem Körperhomomorphismus $\varphi : \bar{K} \to E$. Er ist wie jeder Körperhomomorphismus injektiv und liefert für jedes Polynom $P \in K[X]$ eine Bijektion zwischen den Nullstellen von P in $\bar{K}$ und den Nullstellen von P in E. Folglich muß er auch surjektiv sein. $\square$

Alternativer Beweis für die Existenz eines algebraischen Abschlusses. Dieser Beweis basiert auf Grundkenntnissen über maximale Ideale, die in dieser Vorlesung nicht behandelt wurden, genauer auf 7.1.6.4 und 7.1.6.7. Sei K unser Körper. Wir betrachten die Menge $S = K[X]\backslash K$ aller nicht konstanten Polynome mit Koeffizienten in K und bilden den riesigen Polynomring

$$R = K[X_f]_{f \in S}$$

Hier gibt es also für jedes nichtkonstante Polynom f aus $K[X]$ eine eigene Variable X_f. In diesem riesigen Polynomring betrachten wir das Ideal $\mathfrak{a} \subset R$, das von allen $f(X_f)$ erzeugt wird, und zeigen $\mathfrak{a} \neq R$. Sonst könnten wir nämlich $1 \in R$ schreiben als eine endliche Summe

$$1 = \sum_{f \in E} g_f f(X_f)$$

für $E \subset S$ endlich und geeignete $g_f \in R$. Nun gibt es nach 6.3.7.4, angewandt auf das Produkt der f aus E, eine Körpererweiterung L von K derart, daß alle f aus E in L eine Nullstelle $\alpha_f \in L$ haben. Für die übrigen $f \in S$ wählen wir Elemente $\alpha_f \in L$ beliebig und betrachten den Einsetzungshomomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & R & \to & L \\ & X_f & \mapsto & \alpha_f \end{array}$$

Dieser Ringhomomorphismus müßte nun die Eins in R auf die Null in L abbilden und das kann nicht sein. Folglich gilt $\mathfrak{a} \neq R$ und es gibt nach 7.1.6.4, bei dessen Beweis das Zorn'sche Lemma eingeht, ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}$. Dann ist $K_1 = R/\mathfrak{m}$ nach 7.1.6.7 ein Körper und jedes nichtkonstante Polynom $f \in K[X]\backslash K$

hat eine Nullstelle in K_1, nämlich die Nebenklasse von X_f. Iterieren wir diese Konstruktion, so erhalten wir ein Kette von Körpern

$$K = K_0 \hookrightarrow K_1 \hookrightarrow K_2 \hookrightarrow \dots$$

derart, daß jedes nichtkonstante Polynom mit Koeffizienten in K_i eine Nullstelle hat in K_{i+1}. Die aufsteigende Vereinigung $\bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$ ist dann ein algebraisch abgeschlossener Körper, der K enthält. □

Ergänzung 6.3.11.8. Eigentlich hatte ich versprochen, beliebige Vereinigungen nur zu bilden von Systemen von Teilmengen einer bereits anderweitig bekannten Menge, und recht eigentlich müssen unsere Inklusionen auch keine Einbettungen von Teilmengen sein. Wenn Sie es so genau nehmen, muß ich daran erinnern, daß wir disjunkte Vereinigungen von beliebigen Familien von Mengen erlaubt hatten. Dann kann ich mich darauf zurückziehen, daß hier eigentlich der Quotient der disjunkten Vereinigung $\bigsqcup_{i=0}^{\infty} K_i$ nach derjenigen Äquivalenzrelation gemeint sein soll, die erzeugt wird durch die Bedingung, daß für alle i jedes $x \in K_i$ äquivalent sein soll zu seinem Bild in K_{i+1}. Formal ist diese Konstruktion ein Spezialfall der allgemeinen Konstruktion eines „Kolimes in der Kategorie der Mengen“, wie Sie ihn in 17.7.1.2 in voller Allgemeinheit kennenlernen können.

Proposition 6.3.11.9 (**Ausdehnung von Körpereinbettungen**). *Eine Einbettung eines Körpers in einen algebraisch abgeschlossenen Körper läßt sich auf jede algebraische Erweiterung unseres ursprünglichen Körpers ausdehnen.*

6.3.11.10. Ist also in Formeln $K \hookrightarrow L$ eine algebraische Körpererweiterung, so läßt sich jede Einbettung $K \hookrightarrow F$ von K in einen algebraisch abgeschlossenen Körper F ausdehnen zu einer Einbettung $L \hookrightarrow F$. Es reicht hier sogar, wenn wir von F nur fordern, daß die Minimalpolynome $\operatorname{Irr}(\alpha, K)$ aller Elemente α irgendeines Erzeugendensystems von L über K vollständig in Linearfaktoren zerfallen, sobald wir sie als Polynome in $F[X]$ betrachten.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $K \subset L$ annehmen. Nach dem Zorn'schen Lemma gibt es unter allen Zwischenkörpern M mit $K \subset M \subset L$, auf die sich unsere Einbettung $K \hookrightarrow F$ fortsetzen läßt, mindestens einen Maximalen. Ich behaupte $M = L$. Sonst gäbe es nämlich $\alpha \in L \backslash M$, und dies α wäre algebraisch über M, mit Minimalpolynom $f \in M[X]$. Die Minimalpolynom hätte eine Nullstelle $\beta \in F$, und nach Proposition 6.3.8.9 über das Ausdehnen auf primitive Erweiterungen könnten wir dann $M \hookrightarrow F$ fortsetzen zu einer Einbettung $M(\alpha) \to F$ durch $\alpha \mapsto \beta$ im Widerspruch zur Maximalität von M. □

6.3.11.11. Der algebraische Abschluß des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar nach 6.3.8.26.

Beispiel 6.3.11.12 (**Algebraischer Abschluß endlicher Körper**). Einen algebraischen Abschluß eines endlichen Primkörpers $\mathbb{F}_p$ können wir wie folgt konstruieren: Wir wählen eine Folge $r(0), r(1), \ldots$ von natürlichen Zahlen so, daß jeweils gilt $r(i)|r(i+1)$ und daß jede natürliche Zahl eines unserer Folgenglieder teilt. Dann gibt es nach 6.3.7.12 Einbettungen $\mathbb{F}_{p^{r(i)}} \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^{r(i+1)}}$. Wir wählen nun jeweils eine derartige Einbettung und bilden mit ihrer Hilfe die aufsteigende Vereinigung

$$\bar{\mathbb{F}}_p = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{F}_{p^{r(i)}}$$

Das ist dann offensichtlich ein algebraischer Abschluß von $\mathbb{F}_p$. Wie diese aufsteigende Vereinigung ganz genau zu verstehen ist, hatte ich bereits zu Ende des alternativen Beweises für die Existenz eines algebraischen Abschlusses 6.3.11.5 erläutert. Der Nachweis, daß wir so in der Tat einen algebraischen Abschluß von $\mathbb{F}_p$ erhalten, ist nicht schwer und bleibe dem Leser überlassen.

6.3.11.13. Ich erinnere an dem Körper $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ der formalen Laurentreihen mit komplexen Koeffizienten aus 3.5.3.43.

Satz 6.3.11.14 (**Algebraischer Abschluß des Laurentreihenkörpers**). *Der in hoffentlich offensichtlicher Weise präzise zu definierende Körper*

$$\bigcup_{\gamma \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \mathbb{C}(\!(t^{1/\gamma})\!)$$

der **Puiseux-Reihen mit komplexen Koeffizienten** *ist algebraisch abgeschlossen und damit der algebraische Abschluß des Körpers der formalen Laurentreihen* $\mathbb{C}(\!(t)\!) = \operatorname{Quot} \mathbb{C}[\![t]\!]$.

6.3.11.15. Analoges gilt, wenn wir $\mathbb{C}$ durch einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null ersetzen.

Beweis. Das folgt sofort aus dem im Anschluß bewiesenen Lemma 6.3.11.17. □

6.3.11.16. Die obige Konstruktion kann auch für einen beliebigen Koeffizientenring k durchgeführt werden. Wir erhalten so den **Ring der Puiseux-Reihen mit Koeffizienten in** k. Für eine formal befriedigende Definition mag man sich auf das allgemeine Konzept eines „Kolimes“ aus 17.7.1.9 stützen.

Lemma 6.3.11.17 (**Nullstellen von Polynomen in Laurentreihen**). *Seien $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $P \in k[\![t]\!][X]$ ein Polynom mit Koeffizienten im Potenzreihenring über k, und $\lambda \in k$ eine n-fache Nullstelle von seinem Bild $\bar{P} \in k[X]$. Wird n nicht von der Charakteristik unseres Körpers geteilt, so besitzt P für geeignetes γ mit $1 \leq \gamma \leq n$ eine Nullstelle in $\lambda + t^{1/\gamma} k[\![t^{1/\gamma}]\!]$.*

6.3.11.18. Wir erlauben hier nur Nullstellen endlicher Ordnung und machen insbesondere keine Aussage für den Fall, daß $\bar{P} \in k[X]$ das Nullpolynom ist. Mit dem Symbol $k[\![t^{1/\gamma}]\!]$ ist der Ring $k[\![s]\!]$ gemeint mit seiner durch $t \mapsto s^\gamma$ gegebenen Einbettung von $k[\![t]\!]$. Ich bin verblüfft, daß mir der Beweis auch für nicht notwendig normiertes P zu gelingen scheint.

Beweis. Indem wir X durch $X + \lambda$ substituieren, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda = 0$ annehmen. Nach unseren Annahmen hat P dann die Gestalt

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n + \ldots + a_N X^N$$

mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in tk[\![t]\!]$ und $a_n \in k^\times + tk[\![t]\!]$. Wir verwenden nun die Bewertung $v : k[\![t]\!] \to \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$, die jeder Potenzreihe a den Grad ihres Terms niedrigster Ordnung $v(a) := \sup\{\nu \mid t^\nu | a\}$ zuordnet. Im Spezialfall $v(a_0) = 1$ alias $a_0 \in k^\times t + t^2 k[\![t]\!]$ führt für unsere Nullstelle der Ansatz

$$\mu_1 t^{1/n} + \mu_2 t^{2/n} + \ldots$$

mit $\mu_i \in k$ zum Ziel. Ist etwa $a_0 \in \tilde{a}_0 t + t^2 k[\![t]\!]$ und $a_n \in \tilde{a}_n + tk[\![t]\!]$, so erhalten wir die Gleichung $\tilde{a}_0 + \tilde{a}_n \mu_1^n = 0$ und können dazu eine Lösung μ_1 finden, die notwendig verschieden ist von Null. Dann erhalten wir leicht induktiv eines unserer μ_i aus den Vorhergehenden: Der wesentliche Punkt ist dabei, daß in einer Entwicklung

$$(\mu_1 t^{1/n} + h)^n = \mu_. t + (n\mu_1^{n-1} t^{(n-1)/n}) h + \ldots$$

der Koeffizient des linearen Terms nicht Null ist. Im etwas allgemeineren Fall, daß für das kleinste $k < n$ mit $a_k \neq 0$ auch die Bewertung $b := v(a_k)$ minimal ist unter den Bewertungen der Koeffizienten $v(a_0), \ldots, v(a_{n-1})$, müssen wir „in erster Näherung“ eine Lösung der Gleichung $\tilde{a}_k t^b X^k + \tilde{a}_n X^n = 0$ finden, mit der Notation $\tilde{a} \in k^\times$ für den Koeffizienten der t-Potenz niedrigsten Grades in $a \in k[\![t]\!] \backslash 0$. Solch eine Lösung finden wir in der Form $\mu_1 t^\alpha$ mit $\alpha = b/(n-k)$, und wir finden sogar eine von Null verschiedene Lösung mit $\mu_1 \in k^\times$. Dann führt ähnlich der Ansatz

$$\mu_1 t^\alpha + \mu_2 t^{\alpha + 1/(n-k)} + \mu_3 t^{\alpha + 2/(n-k)} + \ldots$$

für eine Nullstelle mit $\mu_2, \mu_3, \ldots \in k$ zum Erfolg. Um schließlich unser Problem in voller Allgemeinheit zu lösen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_0 \neq 0$ annehmen, da ja sonst die Null von $k[\![t]\!]$ bereits eine Lösung ist. Dann suchen wir das Minimum α der $v(a_k)/(n-k)$ mit $0 \leq k < n$, es werde etwa an den Stellen $i, j, \ldots, l$ angenommen, und müssen „in erster Näherung“ eine Lösung der Gleichung

$$\tilde{a}_i t^{v(a_i)} X^i + \tilde{a}_j t^{v(a_j)} X^j + \ldots + \tilde{a}_l t^{v(a_l)} X^l + \tilde{a}_n X^n = 0$$

finden. Wegen $v(a_i) + i\alpha = v(a_j) + j\alpha = \ldots = v(a_l) + l\alpha = n\alpha$ finden wir mit dem Ansatz $X = \mu_1 t^\alpha$ eine Lösung dieser Gleichung, und zwar sogar eine Lösung mit $\mu_1 \in k^\times$. Ist nun γ der Nenner von α in seiner maximal gekürzten Darstellung, so führt wieder der Ansatz

$$\mu_1 t^\alpha + \mu_2 t^{\alpha\,+1/\gamma} + \mu_3 t^{\alpha\,+2/\gamma} + \ldots$$

und induktiv zu bestimmenden $\mu_2, \mu_3, \ldots \in k$ zum Erfolg. □

Definition 6.3.11.19. Seien K ein Körper und $\mathcal{P} \subset K[X]\backslash 0$ ein Menge von von Null verschiedenen Polynomen. Unter einem **Zerfällungskörper von** $\mathcal{P}$ verstehen wir eine Körpererweiterung L/K derart, daß (1) jedes Polynom $P \in \mathcal{P}$ in $L[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt und daß (2) der Körper L über K erzeugt wird von den Nullstellen der Polynome $P \in \mathcal{P}$.

Übungen

Ergänzende Übung 6.3.11.20. Man zeige, daß eine Körpererweiterung L/K normal ist genau dann, wenn sie der Zerfällungskörper einer Menge von Polynomen $\mathcal{P} \subset K[X]\backslash 0$ ist. Hinweis: Man kopiere den Beweis von 6.3.8.23. Bei Punkt 3 dort reicht es, für M einen algebraischen Abschluß von K zu betrachten.

Übung 6.3.11.21. Gegeben ein endlicher Körper ist die multiplikative Gruppe seines algebraischen Abschlusses in unkanonischer Weise isomorph zur Gruppe aller Elemente von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, deren Ordnung teilerfremd ist zur Charakteristik unseres Körpers.

Übung 6.3.11.22. Ist L/K eine Körpererweiterung durch einen algebraisch abgeschlossenen Körper, so bilden die über K algebraischen Elemente von L einen algebraischen Abschluß von K.

Übung 6.3.11.23. Sei L/K eine Körpererweiterung durch einen algebraisch abgeschlossenen Körper. Man zeige, daß jede normale Körpererweiterung von K als Körpererweiterung von K isomorph ist zu genau einem Unterkörper $M \subset L$ mit $M \supset K$.

Übung 6.3.11.24. Unter der **normalen Hülle** einer Körpererweiterung L/K versteht man eine Körpererweiterung N/L derart, daß N/K normal ist und daß es für jede weitere Körpererweiterung N_1/L mit dieser Eigenschaft einen Körperhomomorphismus $N \to N_1$ über K gibt. Man zeige, daß jede algebraische Körpererweiterung eine normale Hülle besitzt, und daß jeder Homomorphismus über K zwischen zwei normalen Hüllen ein Isomorphismus sein muß. Das rechtfertigt dann zu einem gewissen Maße den bestimmten Artikel.

6.3.12 Schiefkörper über den reellen Zahlen*

6.3.12.1. Der Inhalt des folgenden Abschnitts ist für die weitere Entwicklung dieser Vorlesung nicht von Belang. Die Thematik schien mir jedoch zu interessant, um sie ganz auszulassen. Anwendungen ergeben sich insbesondere in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen und allgemeiner in der abstrakten Theorie nicht notwendig kommutativer Ringe, in der Schiefkörper eine wichtige Rolle spielen. Unter einem Schiefkörper verstehen wir wie in 3.1.1.3 einen Ring R, der nicht der Nullring ist, und in dem alle von Null verschiedenen Elemente Einheiten sind.

Proposition 6.3.12.2 (**Schiefkörper über den reellen Zahlen**). *Jede endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Ringalgebra, die ein Schiefkörper ist, ist als $\mathbb{R}$-Ringalgebra isomorph zu $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, oder zum Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Quaternionen aus 3.5.6.4.*

Ergänzung 6.3.12.3. Statt endlicher Dimension über $\mathbb{R}$ brauchen wir sogar nur anzunehmen, daß unsere Ringalgebra als $\mathbb{R}$-Vektorraum abzählbar erzeugt ist. Derselbe Beweis funktioniert, da wir etwa nach 6.3.3.12 wissen, daß auch jede Erweiterung abzählbarer Dimension von $\mathbb{R}$ bereits algebraisch ist.

Beweis. Sei K unsere $\mathbb{R}$-Ringalgebra. Die Struktur als $\mathbb{R}$-Ringalgebra liefert uns einen eindeutig bestimmten Homomorphismus von $\mathbb{R}$-Ringalgebren $\mathbb{R} \to K$, der wegen $K \neq 0$ sogar injektiv sein muß. Wir fassen ihn von nun an zur Vereinfachung der Notation als die Inklusion einer Teilmenge $\mathbb{R} \subset K$ auf. Gegeben $\alpha \in K \backslash \mathbb{R}$ können wir unsere Einbettung $\mathbb{R} \hookrightarrow K$ zu einer Einbettung $\mathbb{C} \hookrightarrow K$ fortsetzen, deren Bild α enthält: In der Tat ist die $\mathbb{R}$-Ringalgebra $\mathbb{R}[\alpha]$ ein Integritätsring und nach 6.3.3.14 notwendig eine echte algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{R}$ und muß nach 6.3.8.30 also isomorph sein zu $\mathbb{C}$. Um die Notation nicht unnötig aufzublähen, denken wir uns von nun an vermittels dieser Einbettung $\mathbb{C}$ als einen Teilkörper $\mathbb{C} \subset K$. Jetzt machen wir K zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum durch Multiplikation von links. Die Multiplikation mit $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ von rechts wird dann ein $\mathbb{C}$-linearer Endomorphismus $J \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} K$ mit $J^2 = -\operatorname{id}_K$. Als Endomorphismus endlicher Ordnung 4.3.3.15 oder einfacher als Endomorphismus der Ordnung Vier ist er diagonalisierbar nach 4.3.3.14 und liefert wegen $J^2 = -\operatorname{id}$ eine Zerlegung $K = K^+ \oplus K^-$ mit $K^\pm = \{a \in K \mid \mathrm{i}\, a = \pm a\, \mathrm{i}\}$. Für alle $\alpha \in K^+$ ist nun $\mathbb{C}[\alpha]$ nach 6.3.3.14 ein Körper und es folgt $K^+ = \mathbb{C}$. Gilt $K \neq \mathbb{C}$, so gibt es nach dem Beginn des Beweises auch in $K^- \oplus \mathbb{R}$ ein Element j mit $\mathrm{j}^2 = -1$. Setzen wir $\mathrm{j} = \beta + \alpha$ mit $\beta \in K^-$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so folgt $-1 = \mathrm{j}^2 = \beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2$ mit dem ersten und letzten Term in K^+ und dem mittleren Term in K^-. Damit folgt erst $2\alpha\beta = 0$ und dann $\alpha = 0$ und man erkennt $\mathrm{j} \in K^-$. Für jedes von Null verschiedene $\mathrm{j} \in K^-$ induziert aber die Multiplikation mit j von rechts einen Isomorphismus $K^+ \xrightarrow{\sim} K^-$. Setzen wir $\mathrm{k} := \mathrm{ij}$, so ist also $\{1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{ij}\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von K und es gilt $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = -1$ und $\mathrm{ij} = -\mathrm{ji}$. Daraus aber folgt sofort $\mathrm{k}^2 = -1 = \mathrm{ijk}$. $\square$

Ergänzung 6.3.12.4. Eine **Kompositionsalgebra** ist ein reeller endlichdimensionaler Skalarproduktraum V mit einer bilinearen Verknüpfung $\mu : V \times V \to V$ derart, daß gilt $\|\mu(v,w)\| = \|v\| \cdot \|w\| \ \forall v, w \in V$. Topologische Methoden zeigen, daß die Dimension eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Kompositionsalgebren mit Einselement,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \{0,1,2,4,8\}$$

liefert. Genauer ist $\mu_v : w \to \mu(v,w)$ für jeden festen Vektor $v \in V$ der Länge Eins orthogonal und induziert folglich eine Permutation der Einheitssphäre von V. Für jedes $w \in V$ gibt es mithin genau ein $\rho(w) = \rho_v(w) \in V$ mit $\mu(v, \rho(w)) = w$. Gilt also $\dim V > 1$ und halten wir einen weiteren Einheitsvektor t mit $t \perp v$ fest, so ist $\mu(t, \rho(w))$ ein Einheitsvektor, der auf w senkrecht steht. Man sieht leicht, daß er stetig von w abhängt und so ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstelle auf der Einheitsshpäre in V liefert. Mit topologischen Methoden kann man aber zeigen, daß es derartige Vektorfelder nur auf Sphären der Dimensionen $1, 3, 7$ geben kann, daß das also in anderer Terminologie die einzigen **parallelisierbaren Sphären** sind. Die fraglichen Kompositionsalgebren sind 0, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und die sehr merkwürdige Struktur der sogenannten **Oktaven** $\mathbb{O}$, auch genannt **Oktonionen** oder **Cayley'sche Zahlen**, bei denen die Multiplikation nicht mehr assoziativ ist. Zur Konstruktion dieser Struktur erinnern wir aus 3.5.6.7 den dort ausgezeichneten Isomorphismus $\mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{\text{opp}}$, $q \mapsto \bar{q}$ und setzen $\mathbb{O} := \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ mit der nicht assoziativen Multiplikation $\mu((a,b),(x,y)) := (ax - \bar{y}b, b\bar{x} + ya)$. Das Skalarprodukt ist jeweils das „offensichtliche". Mehr dazu findet man etwa bei [E+92].

Übungen

Ergänzende Übung 6.3.12.5. Explizit gilt für das Skalarprodukt auf den Oktaven $\|(a,b)\|^2 = a\bar{a} + b\bar{b}$. Man zeige, daß die Oktaven in der Tat eine Kompositionsalgebra bilden. Ich empfehle, bei der Rechnung die übrigen gemischten Terme zu zwei Realteilen von Quaternionen zusammenzufassen, die sich dann zu Null addieren. Man zeige weiter: Sind zwei natürliche Zahlen jeweils eine Summe von acht Quadraten, so auch ihr Produkt.

6.4 Galoistheorie

6.4.1 Galoiserweiterungen

Definition 6.4.1.1. Ein Isomorphismus von einem Körper zu sich selbst heißt auch ein **Automorphismus** unseres Körpers. Gegeben eine Körpererweiterung L/K heißt die Gruppe aller Körperautomorphismen von L, die K punktweise festhalten, die **Galoisgruppe** $\mathrm{Gal}(L/K)$ der Körpererweiterung L/K.

Ergänzung 6.4.1.2. Bezeichnet Ring die Kategorie der Ringe und Ring^K die Kategorie der Ringe unter K, so können wir die Galoisgruppe in kategorientheoretischer Notation schreiben als $\mathrm{Gal}(L/K) = (\mathrm{Kring}^K)^\times(L)$ und im Fall einer endlichen Erweiterung als $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Kring}^K(L, L)$, da dann alle Körperhomomorphismen über K von L in sich selber bereits injektiv und durch Vergleich der K-Dimensionen sogar Isomorphismen sind.

Beispiele 6.4.1.3. $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ ist eine Gruppe mit zwei Elementen, der Identität und der komplexen Konjugation. Betrachten wir in $\mathbb{R}$ die dritte Wurzel $\sqrt[3]{2}$ von 2, so besteht $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ nur aus der Identität, denn jeder Körperhomomorphismus $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ muß die einzige Lösung der Gleichung $x^3 = 2$ in diesem Körper auf sich selbst abbilden.

Lemma 6.4.1.4. *Der Grad einer Körpererweiterung ist eine obere Schranke für die Kardinalität ihrer Galoisgruppe. Ist also in Formeln L/K unsere Körpererweiterung, so gilt in $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ die Ungleichung*

$$|\,\mathrm{Gal}(L/K)| \leq [L : K]$$

Beweis. Das folgt sofort aus Satz 6.3.8.15, nach dem sogar die Zahl der Körperhomomorphismen über K von L in einen beliebigen weiteren Körper M über K beschränkt ist durch der Erweiterunggrad, $|\,\mathrm{Ring}^K(L, M)| \leq [L : K]$. □

Proposition 6.4.1.5. *Ist q eine echte Primzahlpotenz und $r \geq 1$, so ist die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_q)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung r, erzeugt vom* **Frobenius-Homomorphismus** *oder kurz* **Frobenius**

$$F : \mathbb{F}_{q^r} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_{q^r}, \quad a \mapsto a^q$$

6.4.1.6. In 3.5.2.37 hatten wir bereits einen Frobeniushomomorphismus eingeführt. Der Frobeniushomomorphismus hier ist seine l-te Potenz für l gegeben durch $q = p^l$ mit p prim.

Beweis. Sicher erzeugt F in der Galoisgruppe eine zyklische Untergruppe der Ordnung r. Nach dem vorhergehenden Satz 6.4.1.4 hat die Galoisgruppe jedoch höchstens r Elemente. □

Definition 6.4.1.7. Eine Körpererweiterung L/K heißt eine **Galoiserweiterung** oder kurz **Galois**, wenn sie normal und separabel ist.

6.4.1.8. Operiert eine Gruppe G auf einer Menge X, so schreiben wir ganz allgemein X^G für die Menge der Fixpunkte. Ist speziell X ein Körper L und G eine Gruppe von Körperautomorphismen von L, so ist $L^G \subset L$ offensichtlich ein Unterkörper von L. Er heißt der **Fixkörper von** G.

Satz 6.4.1.9 (**Galoiserweiterungen durch Gruppenoperationen**). *Seien L ein Körper, G eine endliche Gruppe von Automorphismen von L und L^G der Fixkörper von G. So gilt:*

1. *Jedes Element $\alpha \in L$ ist algebraisch über L^G und sein Minimalpolynom über L^G wird gegeben durch die Formel*

$$\operatorname{Irr}(\alpha, L^G) = \prod_{\beta \in G\alpha} (X - \beta)$$

2. *Die Körpererweiterung L/L^G ist eine endliche Galoiserweiterung vom Grad $[L : L^G] = |G|$ mit Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L/L^G) = G$.*

Beweis. Wir setzen $K := L^G$. Schreiben wir $\prod_{\beta \in G\alpha}(X - \beta) = \sum a_i X^i$, so gilt für jedes Element $\sigma \in G$ die von der Mitte her zu entwickelnde Gleichungskette

$$\sum \sigma(a_i) X^i = \prod_{\beta \in G\alpha} (X - \sigma(\beta)) = \prod_{\beta \in G\alpha} (X - \beta) = \sum a_i X^i$$

Also gehört unser Produkt zu $K[X]$. Es teilt das Minimalpolynom $\operatorname{Irr}(\alpha, K)$, da mit α auch alle $\sigma(\alpha)$ für $\sigma \in G$ Nullstellen des besagten Minimalpolynoms sein müssen. Es wird aber auch vom fraglichen Minimalpolynom geteilt, da es bei α verschwindet. Da unser Produkt ebenso wie das Minimalpolynom normiert ist, müssen diese beiden Polynome übereinstimmen und der erste Punkt ist erledigt. Per definitionem ist dann L/K normal und separabel, also Galois. Als nächstes zeigen wir die Identität

$$[L : K] = |G|$$

Wir bemerken dazu, daß es nach Proposition 6.3.10.5 über die Unterscheidung von Körperhomomorphismen ein $\alpha \in L$ gibt mit $|G\alpha| = |G|$. Unsere Beschreibung des Minimalpolynoms von α über K zeigt dann $[K(\alpha) : K] = |G|$. Für $\beta \in L$ ist aber auch $K(\alpha, \beta)$ eine endliche separable Erweiterung von K und nach dem Satz vom primitiven Element 6.3.10.7 gibt es γ mit $K(\alpha, \beta) = K(\gamma)$. Aus $\operatorname{grad}(\operatorname{Irr}(\gamma, K)) \leq |G|$ folgt dann $K(\gamma) = K(\alpha)$ und damit $\beta \in K(\alpha)$. Insgesamt folgt $K(\alpha) = L$ und $[L : K] = [K(\alpha) : K] = |G|$. Mit dieser Erkenntnis

bewaffnet folgern wir schließlich die Gleichheit $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ ohne weitere Schwierigkeiten aus der Ungleichungskette

$$|G| \leq |\mathrm{Gal}(L/K)| \leq [L : K] = |G|$$

Hier kommt die mittlere Ungleichung von 6.4.1.4 her und wir müssen unsere Erkenntnis, daß sie im Fall endlicher Galois-Erweiterungen sogar eine Gleichheit ist, gar nicht bemühen. □

Alternative zum Beweis der Abschätzung $[L : L^G] \leq |G|$. Wir können hier alternativ auch durch Widerspruch mit dem Satz über die lineare Unabhängigkeit von Charakteren argumentieren. Nehmen wir an, die Elemente von G seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ und es gebe in L eine um Eins größere über $K := L^G$ linear unabhängige Familie $x_0, \ldots, x_r$. In der Matrix der $\sigma_i(x_j)$ sind dann notwendig die Spalten $\sigma_*(x_j)$ linear abhängig, wir finden also $y_0, \ldots, y_r$ in L nicht alle Null mit $\sum_j y_j \sigma_i(x_j) = 0 \ \forall i$. Durch Umnummerieren der x_j dürfen wir hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit $y_0 \neq 0$ annehmen, und indem wir von $y_0, \ldots, y_r$ zu $yy_0, \ldots, yy_r$ übergehen, finden wir sogar eine lineare Relation unserer Spaltenvektoren für beliebig vorgegebenes $y_0 = z \in L$. Schreiben wir das um zu $\sum_j \sigma_i^{-1}(y_j) x_j = 0 \ \forall i$ und summieren diese Gleichungen, so ergibt sich

$$\sum_j \lambda_j x_j = 0$$

für $\lambda_j = \sum_i \sigma_i^{-1}(y_j)$. Sicher gilt auch $\lambda_j \in K$ für alle j, und aus der linearen Unabhängigkeit der x_j folgt so $\lambda_j = 0$ für alle j und insbesondere $\lambda_0 = 0$. Nach der linearen Unabhängigkeit von Charakteren 6.3.8.16, angewandt auf die Homomorphismen $\sigma_i : L^\times \to L^\times$, gibt es jedoch ein $z \in L^\times$ mit $\sum_i \sigma_i^{-1}(z) \neq 0$. Das ist der gesuchte Widerspruch. □

6.4.1.10. Aus 6.4.1.9 folgt, daß bei einer endlichen Körpererweiterung die Kardinalität der Galoisgruppe sogar den Grad der Körpererweiterung teilen muß, in Formeln

$$|\mathrm{Gal}(L/K)| \mid [L : K]$$

In der Tat folgt für $G := \mathrm{Gal}(L/K)$ sowohl $|G| = [L : L^G]$ als auch $L^G \supset K$, also $|G|[L^G : K] = [L : K]$.

Vorschau 6.4.1.11. Ist L/K eine endliche Galois-Erweiterung, so ist $\alpha \in L$ nach dem ersten Beweis von 6.4.1.9 ein primitives Element genau dann, wenn es von keinem Element der Galoisgruppe festgehalten wird. Wir können sogar stets ein $\alpha \in L$ so wählen, daß es mit seinen Galois-Konjugierten eine K-Basis von L bildet: Das sagt uns der „Satz von der Normalbasis“ 6.6.1.6. Diese schärfere Aussage stimmt keineswegs für jedes primitive Element, wie das Beispiel $L = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$, $\alpha = \mathrm{i}$ zeigt.

Satz 6.4.1.12 (**Charakterisierung endlicher Galoiserweiterungen**). *Seien L/K eine endliche Körpererweiterung und $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ ihre Galoisgruppe. So sind gleichbedeutend:*

1. *L/K ist eine Galoiserweiterung;*
2. *Die Ordnung der Galoisgruppe stimmt überein mit dem Grad der Körpererweiterung, in Formeln $|G| = [L : K]$;*
3. *Der Unterkörper K stimmt überein mit dem Fixkörper der Galoisgruppe, in Formeln $K = L^G$.*

Beweis. Wir beginnen mit 1⇒2. Nach (6.3.9.26, 1⇒3) gibt es für L endlich, separabel und normal über K genau $[L : K]$ Körperhomomorphismen $L \to L$ über K. Als Körperhomomorphismen sind diese natürlich injektiv, und wegen der Gleichheit der K-Dimensionen sind sie dann auch surjektiv. Die Implikation 2⇒3 folgt daraus, daß wir $|G| = [L : L^G]$ ja bereits nach 6.4.1.9 wissen. Gilt dann außerdem $|G| = [L : K]$ für einen Unterkörper $K \subset L^G$, so erhalten wir aus der Multiplikativität des Grades von Körpererweiterungen unmittelbar erst $[L^G : K] = 1$ und dann $L^G = K$. Die Implikation 3⇒1 folgt direkt aus 6.4.1.9. □

Ergänzung 6.4.1.13. Auch für eine beliebige algebraische Körpererweiterung gilt noch, daß sie genau dann Galois ist, wenn der Unterkörper der Fixkörper der Galoisgruppe ist. Hier folgt die eine Implikation aus 6.4.1.33, und die andere aus 6.3.11.10.

Beispiel 6.4.1.14. Unter der Voraussetzung $\operatorname{char} K \neq 2$ ist jede quadratische Körpererweiterung L von K Galois mit Galoisgruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und die Elemente $\alpha \in L \backslash K$ mit $\alpha^2 \in K$ sind genau diejenigen von Null verschiedenen Elemente von L, die vom nichttrivialen Element der Galoisgruppe auf ihr Negatives geschickt werden.

Definition 6.4.1.15. Eine Wirkung einer Gruppe auf einer Menge heißt **treu**, englisch **faithful**, französisch **fidèle**, wenn nur das neutrale Element jedes Element der Menge festhält.

6.4.1.16. Wir erinnern aus 4.5.1.7, daß eine Wirkung einer Gruppe auf einer Menge transitiv heißt, wenn unsere Menge nicht leer ist und je zwei ihrer Elemente durch ein geeignetes Gruppenelement ineinander überführt werden können.

Satz 6.4.1.17 (**Operation der Galoisgruppe auf Nullstellen**). *Gegeben L/K eine endliche normale Körpererweiterung und $P \in K[X]$ ein Polynom betrachte man die Operation der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ auf der Menge $\{\alpha \in L \mid P(\alpha) = 0\}$ der Nullstellen von P in L.*

1. *Ist P ein K-irreduzibles Polynom, das in L zerfällt, so ist die Operation der Galoisgruppe auf seinen L-Nullstellen transitiv;*

2. *Ist $P \in K[X]$ ein beliebiges von Null verschiedenes Polynom und L sein Zerfällungskörper, so ist die Operation der Galoisgruppe auf den L-Nullstellen von P treu.*

Ergänzung 6.4.1.18. Dasselbe gilt auch ohne daß wir $[L : K] < \infty$ annehmen und folgt in dem Fall unmittelbar aus 6.3.11.10.

Beweis. Für je zwei Nullstellen α, β von P gibt es nach unserer Proposition 6.3.8.9 über das Ausdehnen auf primitive Erweiterungen einen Körperhomomorphismus $K(\alpha) \to L$ über K mit $\alpha \mapsto \beta$, der sich dann nach 6.3.8.13 weiter ausdehnen läßt zu einem Körperhomomorphismus $L \to L$ über K. Treu ist die Operation, da der Zerfällungskörper eines Polynoms bereits von den Nullstellen des besagten Polynoms erzeugt wird. □

6.4.1.19 (**Grundfrage der Galoistheorie**). Die Grundfrage der Galoistheorie ist, welche Permutationen der Nullstellenmenge eines vorgegebenen irreduziblen Polynoms denn nun von einem Automorphismus seines Zerfällungskörpers oder genauer von einem Element der Galoisgruppe seiner Zerfällungserweiterung herkommen. Man nennt diese Galoisgruppe die **Galoisgruppe unseres irreduziblen Polynoms**. Hierzu gebe ich gleich drei Beispiele.

Beispiel 6.4.1.20 (**Ein kubisches Polynom mit Galoisgruppe $\mathcal{S}_3$**). Ist L der Zerfällungskörper von $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$, so kommen alle Permutationen der Nullstellenmenge unseres Polynoms von Elementen der Galoisgruppe her und wir haben folglich $\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathcal{S}_3$. In der Tat ist $L/\mathbb{Q}$ normal als Zerfällungskörper und sogar Galois, da in Charakteristik Null jede Körpererweiterung separabel ist. Damit folgt insbesondere $[L : \mathbb{Q}] = |\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})|$. Jetzt realisieren wir L als einen Teilkörper

$$L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta\sqrt[3]{2}, \zeta^2\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{C}$$

der komplexen Zahlen, mit $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ der reellen dritten Wurzel von 2 und $\zeta = \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,/3)$ einer dritten Einheitswurzel. Diese Darstellung zeigt $L \neq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, da ja unser L nicht in $\mathbb{R}$ enthalten ist. In $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})[X]$ zerfällt unser Polynom $X^3 - 2$ also in einen linearen und einen irreduziblen quadratischen Faktor, folglich ist L eine quadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Zusammen ergibt sich $[L : \mathbb{Q}] = 6$ und mithin $|\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})| = 6$. Die Operation von $\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})$ auf der Menge $\{\sqrt[3]{2}, \zeta\sqrt[3]{2}, \zeta^2\sqrt[3]{2}\}$ definiert nun nach 6.4.1.17 eine Einbettung $\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathcal{S}_3$, und da beide Seiten gleichviele Elemente haben, muß diese Einbettung ein Isomorphismus sein.

Beispiel 6.4.1.21 (**Ein kubisches Polynom mit zyklischer Galoisgruppe**). Ist L der Zerfällungskörper von $X^3 + X^2 - 2X - 1$ über $\mathbb{Q}$, so kommen genau die zyklischen Permutationen der Nullstellenmenge unseres Polynoms von Elementen der Galoisgruppe her und wir haben folglich $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. In der Tat können wir mit $\zeta = \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,/7)$ einer siebten Einheitswurzel die drei komplexen Nullstellen unseres Polynoms schreiben als $\alpha = \zeta + \bar{\zeta}$, $\beta = \zeta^2 + \bar{\zeta}^2$ sowie $\gamma = \zeta^3 + \bar{\zeta}^3$, wie man leicht nachrechnet. Ich bin im übrigen den umgekehrten Weg gegangen und habe mein Polynom aus den Linearfaktoren zu diesen drei Nullstellen zusammenmultipliziert. Wie dem auch sei besitzt unser Polynom keine ganzzahligen Nullstellen, also nach 3.5.3.41 auch keine Nullstellen in $\mathbb{Q}$, und ist als Polynom vom Grad 3 folglich irreduzibel über $\mathbb{Q}$. Unsere Nullstellen erfüllen nun jedoch die Relationen $\alpha^2 = \beta + 2$, $\beta^2 = \gamma + 2$ und $\gamma^2 = \alpha + 2$, woraus unmittelbar die Behauptung folgt. In 6.4.7.12 geben wir im übrigen ein Kriterium an, das es erlaubt, die Galoisgruppe einer kubischen Gleichung ganz mechanisch zu bestimmen.

Beispiel 6.4.1.22 (**Ein kubisches Polynom mit trivialer Galoisgruppe**). Man betrachte den Funktionenkörper $\mathbb{F}_3(T)$ über dem Körper mit drei Elementen und darüber das Polynom $X^3 - T$. Es hat nur eine einzige Nullstelle in seinem Zerfällungskörper, die aber eben eine dreifache Nullstelle ist. Seine Galoisgruppe ist folglich trivial. Im übrigen ist ein Zerfällungskörper hier die Körpererweiterung $\mathbb{F}_3(T) \hookrightarrow \mathbb{F}_3(U)$ mit $T \mapsto U^3$ und darin zerfällt unser Polynom als $X^3 - T = X^3 - U^3 = (X - U)^3$.

Proposition 6.4.1.23 (Quotientenkörper eines Invariantenrings). *Operiert eine endliche Gruppe G auf einem kommutativen Integritätsbereich R, so liefert die offensichtliche Einbettung einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Quot}(R^G) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Quot}\, R)^G$$

des Quotientenkörpers seines Invariantenrings mit den Invarianten seines Quotientenkörpers.

Beweis. Jeden Bruch $f/h \in (\mathrm{Quot}\, R)^G$ können wir mit $\prod_{\sigma \in G \setminus 1} \sigma(h)$ erweitern zu einem Bruch, dessen Nenner im Invariantenring R^G liegt, da er ja das Produkt aller $\sigma(h)$ mit $\sigma \in G$ ist und bei diesem Produkt die Gruppenoperation nur die Faktoren permutiert. So ein Bruch kann aber nur dann G-invariant sein, wenn auch sein Zähler in R^G liegt. □

Beispiel 6.4.1.24. Für jeden Körper k ist nach 6.4.1.9 und 6.4.1.23 in den Notationen von 6.2.9.6 die Erweiterung

$$k('s_1, \ldots, s_n) = k('X_1, \ldots, X_n)^{\mathcal{S}_n} \subset k('X_1, \ldots, X_n)$$

eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $\mathcal{S}_n$. Unsere Erweiterung ist natürlich auch ein Zerfällungskörper der **allgemeinen Gleichung**

$$T^n + s_1 T^{n-1} + \ldots + s_{n-1} T + s_n$$

Hier fassen wir die s_i schlicht als algebraisch unabhängige Variablen des Funktionenkörpers $k('s_1, \ldots, s_n)$ über k auf. Nach unserer Konvention sollten wir hier vielleicht sogar große Buchstaben vom Ende des Alphabets benutzen, zum Beispiel Y_i statt s_i. Insbesondere ist die allgemeine Gleichung nach 6.4.1.9 irreduzibel, da ja alle ihre Wurzeln einfach sind und zueinander konjugiert unter der Galoisgruppe. Die Irreduzibilität dieses Polynoms kann aber auch bereits aus 6.2.7.20 abgeleitet werden.

Übungen

Übung 6.4.1.25. Gegeben eine endliche separable Körpererweiterung ist ihre normale Hülle Galois. Mutigere zeigen dasselbe, ohne die Endlichkeit vorauszusetzen.

Übung 6.4.1.26. Gegeben $n \geq 1$ zeige man, daß $\mathbb{C}(X^n) \subset \mathbb{C}(X)$ eine Galoiserweiterung vom Grad n ist mit zyklischer Galoisgruppe.

Ergänzende Übung 6.4.1.27. Man zeige, daß sich jede endliche Erweiterung eines vollkommenen Körpers zu einer endlichen Galoiserweiterung vergrößern läßt. Man zeige, daß sich wie in 4.3.3.2 behauptet jeder Endomorphismus x eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem vollkommenen Körper auf genau eine Weise zerlegen läßt als $x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$ mit x_{s} halbeinfach, x_{n} nilpotent und $x_{\mathrm{s}} x_{\mathrm{n}} = x_{\mathrm{n}} x_{\mathrm{s}}$.

Übung 6.4.1.28. Man zeige: Gegeben eine Körpererweiterung L/K und zwei verschiedene normierte irreduzible Polynome in $K[X]$ kann kein Element der Galoisgruppe eine Nullstelle des einen Polynoms in eine Nullstelle des anderen Polynoms überführen.

Übung 6.4.1.29. Sei k ein Körper der Charakteristik p und $\lambda \in k^\times$ und $t = t_\lambda : k(X) \xrightarrow{\sim} k(X)$ der Körperautomorphismus über k mit $X \mapsto X + \lambda$. Man zeige, daß der Körper der Invarianten genau das Bild derjenigen Einbettung $k(Y) \hookrightarrow k(X)$ ist, die durch $Y \mapsto X^p - \lambda^{p-1} X$ gegeben wird. Man zeige, daß auch die induzierte Einbettung $k[Y] \hookrightarrow k[X]$ einen Isomorphismus auf den Ring der t-Invarianten von $k[X]$ induziert.

Ergänzende Übung 6.4.1.30. Jede normale Körpererweiterung mit trivialer Galoisgruppe ist rein inseparabel im Sinne von 6.3.9.37. Für jede normale Körpererweiterung K/k mit Galoisgruppe G ist K^G/k rein inseparabel. Hinweis: 6.3.9.17. Im Fall unendlicher Erweiterungen verwende man 6.3.11.9.

Ergänzende Übung 6.4.1.31 (**Satz von Gilmer**). Man zeige, daß eine algebraische Körpererweiterung L/K derart, daß jedes Polynom aus $K[X]$ in L eine Nullstelle hat, ein algebraischer Abschluß von K sein muß. Hinweis: Man beginne mit dem Fall der Charakteristik Null. Jede endliche Körpererweiterung von K besitzt dann nach 6.3.10.7 ein primitives Element und läßt sich folglich in L einbetten. Gegeben ein Polynom $P \in L[X]$ gilt das insbesondere für seinen Zerfällungskörper über dem von seinen Koeffizienten in L erzeugten Teilkörper über K. Im Fall positiver Charakteristik argumentiere man erst mit dem separablen Abschluß von K in unserem Zerfällungskörper und dann mit 6.3.9.37.

Übung 6.4.1.32. Man bestimme die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers des Polynoms $X^4 - 5$ über $\mathbb{Q}$ und über $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$.

Ergänzende Übung 6.4.1.33. Ist L/K eine algebraische, aber nicht notwendig endliche Körpererweiterung und $G \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ eine beliebige, nicht notwendig endliche Untergruppe, so ist L/L^G immer noch eine Galoiserweiterung, deren Galoisgruppe jedoch nicht mit G übereinzustimmen braucht. Zum Beispiel erzeugt der Frobenius-Homomorphismus nicht die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$, aber der Fixkörper seines Erzeugnisses ist dennoch $\mathbb{F}_p$.

Übung 6.4.1.34. Gegeben eine Körpererweiterung L/K in Charakteristik ungleich zwei und $\alpha, \beta \in L \backslash K$ mit $\alpha^2, \beta^2 \in K$ zeige man $\alpha \in K(\beta) \Leftrightarrow \alpha \in K\beta$. Hinweis: 6.4.1.14 oder 6.3.2.10. Gegeben paarweise teilerfremde quadratfreie natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ zeige man, daß a_n kein Quadrat ist in $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_{n-1}})$. Hinweis: Andernfalls gäbe es ein kürzestmögliches Gegenbeispiel, und dann wäre $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_{n-2}})$ mit $a_{n-1}a_n$ ein noch kürzeres Gegenbeispiel. Schließlich zeige man, daß die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})$ über $\mathbb{Q}$ Galois ist mit Galoisgruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Diese Aussage kann auch als Spezialfall der sogenannten Kummertheorie 6.6.5.3 verstanden werden.

Übung 6.4.1.35 (**Artin-Schreier-Erweiterungen**). Gegeben ein Körper F positiver Charakteristik $p > 0$ betrachten wir für $a \in F$ das Polynom $X^p - X - a$. Ist β eine Nullstelle dieses Polynoms in einer Körpererweiterung L/K, so sind die anderen Nullstellen $\beta + \lambda$ für $\lambda \in \mathbb{F}_p$. Insbesondere ist $F(\beta)$ bereits der Zerfällungskörper von $X^p - X - a$ und alle irreduziblen Faktoren von $X^p - X - a$ in $F[X]$ haben denselben Grad, a forteriori den Grad Eins oder den Grad p. Hat unser Polynom keine Nullstelle in F, so ist $F(\beta)/F$ mithin eine Galoiserweiterung vom Grad p zyklischer Galoisgruppe.

Übung 6.4.1.36. Gegeben eine endliche Galoiserweiterung L/K ist die **Spurabbildung** $\mathrm{S}_L^K : L \to K$ gegeben durch

$$x \mapsto \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(x)$$

eine K-lineare von Null verschiedene Abbildung und die **Spurform** $L \times L \to K$ gegeben durch $(x, y) \mapsto \mathrm{S}_L^K(xy)$ ist eine nichtausgeartete Bilinearform aufdem K-Vektorraum L. Hinweis: Lineare Unabhängigkeit von Charakteren 6.3.8.16. In 7.8.3.1 wird die Spur auf beliebige endliche Körperwerweiterungen verallgemeinert.

6.4.2 Anschauung für die Galoisgruppe*

6.4.2.1. Formal ist der nun folgende Abschnitt für die logische Kohärenz dieser Vorlesung nicht von Belang. Es wird darin auch nichts bewiesen. Ich denke jedoch, daß die im folgenden erklärten Ideen bei der historischen Entwicklung der Theorie von zentraler Bedeutung waren und hoffe, daß sie Ihnen beim Verständnis helfen.

6.4.2.2 (**Reelle Nullstellen einer Familie reeller Polynome**). Zum Aufwärmen betrachten wir zunächst einmal ein normiertes Polynom $P \in \mathbb{R}(t)[X]$ mit Koeffizienten im Funktionenkörper $\mathbb{R}(t) = \operatorname{Quot} \mathbb{R}[t]$ über dem Körper der reellen Zahlen. Sei $E = E_P \subset \mathbb{R}$ die endliche Menge aller Punkte, an denen mindestens ein Koeffizient von P eine Polstelle hat. An jeder anderen Stelle $\lambda \in \mathbb{R} \backslash E$ können wir die Koeffizienten von P bei $t = \lambda$ auswerten und erhalten so ein Polynom $P_\lambda \in \mathbb{R}[X]$. Die Punkte $\lambda \in \mathbb{R} \backslash E$ nennen wir „die Parameter λ, für die P_λ definiert ist“. Die reellen Nullstellen der Polynome P_λ hängen dann vom Parameter λ ab und eine bildliche Darstellung der **simultanen Nullstellenmenge**

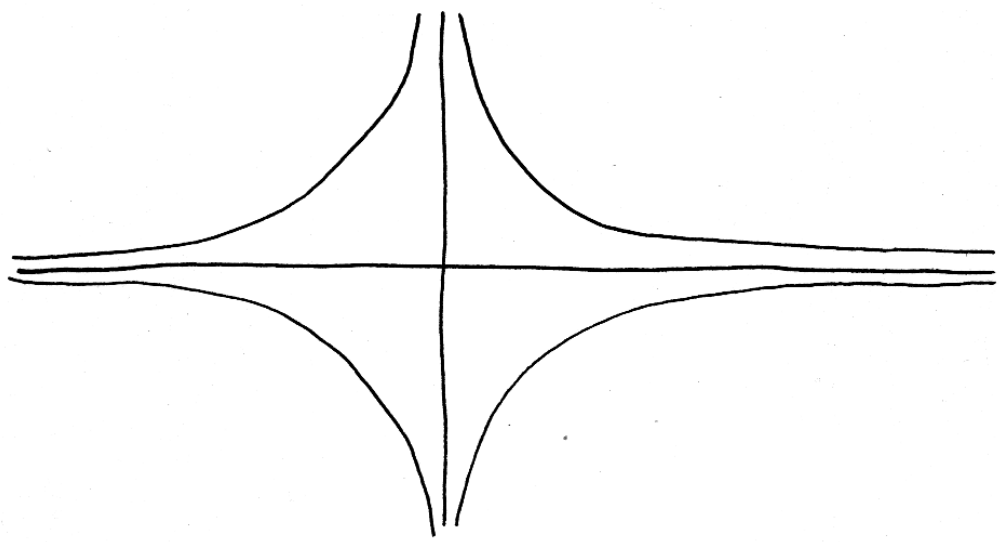
$$\mathcal{Z}(P) := \{(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \notin E,\ P_\lambda(\alpha) = 0\}$$

als Teilmenge der Ebene vermittelt eine gewisse Anschauung für diese Abhängigkeit. Ist etwa $P = X^2 - (1/t)$, so ist P_λ definiert für $\lambda \neq 0$ und wir haben $\mathcal{Z}(P) = \{(\lambda, \alpha) \mid \lambda \neq 0,\ \alpha^2 - (1/\lambda) = 0\}$.

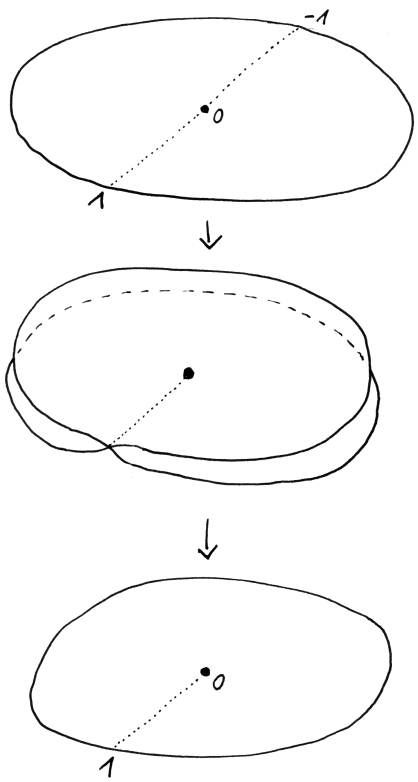
6.4.2.3 (**Komplexe Nullstellen einer Familie komplexer Polynome**). Nun betrachten wir analog ein normiertes Polynom $P \in \mathbb{C}(z)[X]$ mit Koeffizienten im Funktionenkörper $\mathbb{C}(z) = \operatorname{Quot} \mathbb{C}[z]$ über dem Körper der komplexen Zahlen. Sei wieder $E = E_P \subset \mathbb{C}$ die endliche Menge aller Punkte, an denen mindestens ein Koeffizient von P eine Polstelle hat. An jeder anderen Stelle $\lambda \in \mathbb{C} \backslash E$ können wir die Koeffizienten von P bei $z = \lambda$ auswerten und erhalten so ein Polynom $P_\lambda \in \mathbb{C}[X]$. Die Punkte $\lambda \in \mathbb{C} \backslash E$ nennen wir „die Parameter λ, für die P_λ definiert ist“. Die komplexen Nullstellen der Polynome P_λ hängen dann vom Parameter λ ab und wir betrachten analog die **simultane Nullstellenmenge**

$$\mathcal{Z}(P) := \{(\lambda, \alpha) \in \mathbb{C}^2 \mid \lambda \notin E,\ P_\lambda(\alpha) = 0\}$$

Ist etwa zur Abwechslung diesmal $P = X^2 - z$, so ist P_λ definiert für alle λ und wir haben $\mathcal{Z}(P) = \{(\lambda, \alpha) \mid \alpha^2 - \lambda = 0\}$.



Graphische Darstellung der Menge $\{(\lambda, \alpha) \mid \lambda \neq 0,\ \alpha^2 - 1/\lambda = 0\}$



Dies Bild kam bereits in 3.2.7.6 vor als Illustration für die Abbildung $z \mapsto z^2$ der komplexen Zahlenebene auf sich selbst. Für die durch Adjunktion einer Quadratwurzel aus z entstehende Erweiterung L des Funktionenkörpers $\mathbb{C}(z)$ ist nun $P = X^2 - z$ das Minimalpolynom eines Erzeugers und wir erhalten eine stetige Bijektion $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} Z(P)$ mit stetiger Umkehrung vermittels der Vorschrift $z \mapsto (z^2, z)$. Die Komposition $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} Z(P) \to \mathbb{C}$ mit der Projektion auf die erste Koordinate ist also gerade unsere Abbildung $z \mapsto z^2$. Wir sehen so anschaulich, daß die Galoisgruppe von $L/\mathbb{C}(z)$ gerade $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist. Ähnlich zeigt diese Anschauung, daß die Galoisgruppe der durch Adjunktion einer n-ten Wurzel von t entstehende und oft $\mathbb{C}(\sqrt[n]{z})/\mathbb{C}(z)$ notierten Körpererweiterung gerade $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sein sollte, was Sie bereits als Übung 6.4.1.26 formal bewiesen haben.

6.4.2.4. Gegeben eine stetige Abbildung $p : Z \to C$ von metrischen oder auch von topologischen Räumen verstehen wir unter einer **stetigen Selbstabbildung über** C eine stetige Abbildung $f : Z \to Z$ mit $p \circ f = p$. Das Monoid dieser speziellen Selbstabbildungen notieren wir

$$\mathrm{Top}_p(Z)$$

6.4.2.5. Ist $p : Z \to C$ eine sogenannte „Überlagerungsabbildung", so nennen wir die Elemente von $\mathrm{Top}_p(Z)$ auch „Decktransformationen". Wir diskutieren später, warum wir uns im folgenden bereits diese Terminologie erlauben.

6.4.2.6 (**Galoisgruppe und Decktransformationen**). Sei $P \in \mathbb{C}(z)[X]$ normiertes irreduzibles Polynom. Wir bilden die Körpererweiterung $L := \mathbb{C}(z)[X]/\langle P(X)\rangle$ und betrachten ihre Galoisgruppe $\Gamma := \mathrm{Gal}(L/\mathbb{C}(z))$. In dieser Situation finden wir stets ein $u \in \mathbb{C}[z]\backslash 0$ derart, daß gilt $P \in \mathbb{C}[z, u^{-1}][X]$ und daß alle Elemente der Galoisgruppe Γ den Teilring

$$L_0 := \mathbb{C}[z, u^{-1}][X]/\langle P(X)\rangle$$

auf sich selber abbilden. In der Tat reicht es dazu, u so zu wählen, daß alle $\gamma(\bar{X})$ für $\gamma \in \Gamma$ zu diesem Teilring gehören, und das ist sicher möglich. Ab nun halten wir solch ein u fest und erhalten offensichtlich eine Bijektion

$$\mathrm{Kring}^{\mathbb{C}}(L_0, \mathbb{C}) \ \tilde{\to}\ \mathcal{Z}(P)_u := \{(\lambda, \alpha) \in \mathcal{Z}(P) \mid u(\lambda) \neq 0\}$$

durch die Vorschrift $\varphi \mapsto (\varphi(z), \varphi(\bar{X}))$. Die Operation von Γ auf L_0 induziert durch Vorschalten eine Rechtsoperation von Γ auf $\mathrm{Kring}^{\mathbb{C}}(L_0, \mathbb{C})$ und vermittels unserer Bijektion eine Rechtsoperation auf $\mathcal{Z}(P)_u$. Die versprochene Anschauung für die Galoisgruppe liefert nun ein Satz, nach dem diese Rechtsoperation einen Isomorphismus

$$\Gamma^{\mathrm{opp}} \ \tilde{\to}\ \mathrm{Top}_{\mathrm{pr}_1}(\mathcal{Z}(P)_u)$$

der Opponierten der Galoisgruppe mit dem Monoid der stetigen Selbstabbildungen über $\mathbb{C}$ des $(u(\lambda) \neq 0)$-Teils der simultanen Nullstellenmenge von P induziert. Wir zeigen im folgenden, daß unsere Rechtsoperation durch stetige Abbildungen über $\mathbb{C}$ geschieht, aber nicht, daß sie einen Isomorphismus liefert. Gegeben $\gamma \in \Gamma$ haben wir sicher $\gamma(\bar{X}) = c_0 + c_1\bar{X} + \ldots + c_{n-1}\bar{X}^{n-1}$ für gewisse $c_\nu \in \mathbb{C}[z, u^{-1}]$. Bezeichnet $(\lambda, \alpha) \mapsto \varphi_{(\lambda,\alpha)}$ die Umkehrabbildung unserer Bijektion $\varphi \mapsto (\varphi(z), \varphi(\bar{X}))$, so finden wir . $(\varphi_{(\lambda,\alpha)} \circ \gamma)(\bar{X}) = c_0(\lambda) + c_1(\lambda)\alpha + \ldots + c_{n-1}(\lambda)\alpha^{n-1}$. Die Rechtsoperation von $\gamma \in \Gamma$ auf $\mathcal{Z}(P)_u$ wird also in Formeln gegeben durch die Vorschrift

$$(\lambda, \alpha) \mapsto (\lambda, c_0(\lambda) + c_1(\lambda)\alpha + \ldots + c_{n-1}(\lambda)\alpha^{n-1})$$

und geschieht insbesondere durch stetige Selbstabbildungen über $\mathbb{C}$. Das löst unser Versprechen ein.

6.4.2.7 (**Hilfen zur graphischen Darstellung**). Seien $P \in \mathbb{C}(z)[X]$ normiertes irreduzibles Polynom und u wie zuvor. Die Abbildung $\mathrm{pr}_1 : \mathcal{Z}(P)_u \to \mathbb{C}$ hat dann endliche nichtleere Fasern. Weiter ist die Diskriminante von P nicht die Null von $\mathbb{C}(z)$, und ändern wir u dahingehend, daß es auch an allen Null- und Polstellen dieser Diskriminante verschwindet, so hat jede Faser von $\mathrm{pr}_1 : \mathcal{Z}(P)_u \to \mathbb{C}_{u\neq 0}$ genau $\operatorname{grad} P$ Elemente und ist nebenbei bemerkt eine „Überlagerung". Indem wir nun um jede Nullstelle von u einen Kreis zeichnen, der keine andere Nullstelle von u umläuft, und alle diese Kreise durch sich nicht kreuzende Wege mit einem festen Punkt verbinden, und weiter das Urbild eines solchen Gebildes in der simultanen Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(P)_u$ zeichnen, erhalten wir eine gewisse Anschauung für die Abbildung $\mathrm{pr}_1 : \mathcal{Z}(P)_u \to \mathbb{C}_{u\neq 0}$ und das Monoid ihrer Decktransformationen. Bezeichnet genauer $S \subset \mathbb{C}^2$ unser in der komplexen Zahlenebene gezeichnetes Gebilde aus verbundenen Kreisen, so liefert die Restriktion auf $\mathrm{pr}_1^{-1}(S)$ eine Bijektion zwischen dem Monoid der Decktransformationen von $\mathrm{pr}_1 : \mathcal{Z}(P)_u \to \mathbb{C}_{u\neq 0}$ und dem Monoid der Decktransformationen von $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{pr}_1^{-1}(S) \to S$.

Vorschau 6.4.2.8. Statt „Funktionen mit Parametern" betrachtet man auch in der Algebra besser „Funktionen in mehreren Variablen". Diese Sichtweise können Sie in der Algebraischen Geometrie kennenlernen. Der dort als 7.8.6.2 bewiesene Satz über „Körper und ihre Kurven" istx eine Variante der obigen Aussagen für einen beliebigen algebraischen Grundkörper statt $\mathbb{C}$. Einen Beweis der oben gegebenen Behauptungen wird man jedoch eher in einer Vorlesung über Riemann'sche Flächen finden, die sich an eine Vorlesung zur Funktionentheorie anschließt.

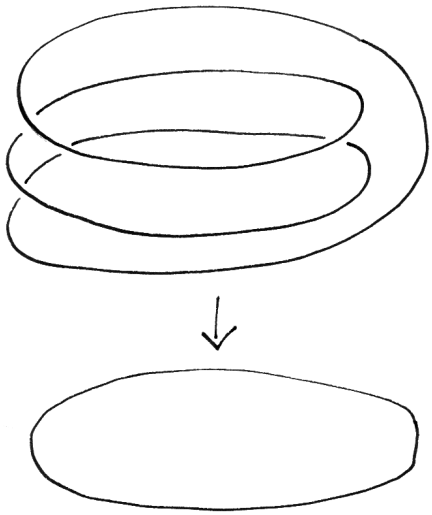
6.4.3 Zwischenkörper durch Untergruppen

Satz 6.4.3.1 (**Galoiskorrespondenz**). *Gegeben eine endliche Galoiserweiterung L/K mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ liefern das Bilden der Galoisgruppe $M \mapsto \mathrm{Gal}(L/M)$ und das Bilden des Fixkörpers $H \mapsto L^H$ zueinander inverse inklusionsumkehrende Bijektionen*

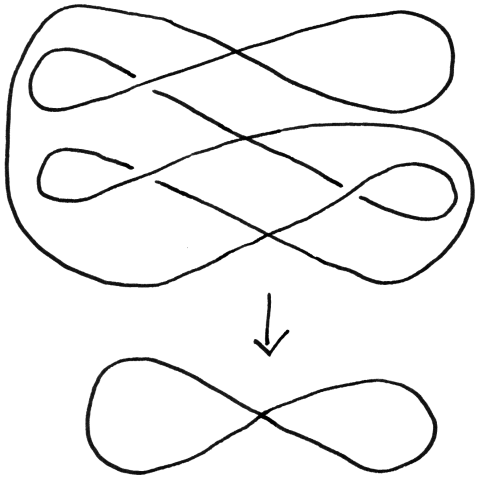
$$\left\{\begin{array}{c}\textit{Zwischenkörper } M\\ \textit{unserer Körpererweiterung}\\ K \subset M \subset L\end{array}\right\} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \left\{\begin{array}{c}\textit{Untergruppen } H\\ \textit{ihrer Galoisgruppe}\\ H \subset G\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{ccc} M & \overset{\phi}{\mapsto} & H := \mathrm{Gal}(L/M) \\ M := L^H & \overset{\psi}{\leftarrow\!\shortmid} & H \end{array}$$

Unter dieser Bijektion entsprechen die Normalteiler H von G genau denjenigen Zwischenkörpern M, die normal sind über K, und in diesen Fällen liefert das Ein-



Anschauung für die durch Adjunktion einer dritten Wurzel aus t entstehende Körpererweiterung des Funktionenkörpers $\mathbb{C}(t)$ nach 6.4.2.7. Ich finde, man sieht in diesem Fall auch recht anschaulich, daß die Galoisgruppe zyklisch von der Ordnung drei sein sollte.



Versuch der bildlichen Darstellung einer Körpererweiterung vom Grad 3 mit trivialer Galoisgruppe, die also insbesondere nicht normal ist.

schränken von Elementen der Galoisgruppe einen Isomomorphismus von Gruppen $G/H \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(L^H/K)$ *alias eine kurze exakte Sequenz*

$$\mathrm{Gal}(L/M) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(L/K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(M/K)$$

Vorschau 6.4.3.2. In der Sprache der Kategorientheorie ausgedrückt liefert für L/K eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G der Funktor $\mathrm{Kring}^K(\ ,L)$ der K-linearen Körperhomomorphismen nach L eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Körpererweiterungen von } K, \\ \text{die sich in } L \text{ einbetten lassen} \end{array} \right\} \xrightarrow{\approx} \left\{ \begin{array}{c} \text{transitive} \\ G\text{-Mengen} \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}}$$

Das folgt aus obigem Satz mit einfachen Zusatzüberlegungen. Umgekehrt kann man auch obigen Satz auch leicht aus dieser Aussage folgern.

Beweis. Nach Eigenschaft 6.3.8.28 der Normalität und der Definition der Separabilität 6.3.9.18 ist für jeden Zwischenkörper M auch L/M normal und separabel, also Galois, und damit folgt $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$ aus unserer Erkenntnis 6.4.1.12, daß bei einer endlichen Galoiserweiterung der Grundkörper gerade der Fixkörper der Galoisgruppe ist. Ohne alle Schwierigkeiten folgt $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ aus unserer Erkenntnis 6.4.1.9, daß das Bilden des Fixkörpers zu einer endlichen Gruppe von Körperautomorphismen stets eine Galoiserweiterung mit besagter Gruppe als Galoisgruppe liefert. Das zeigt die erste Behauptung. Man prüft nun leicht $g(L^H) = L^{gHg^{-1}}$ für alle $g \in G$, das gilt sogar für eine beliebige Operation einer beliebigen Gruppe auf einer beliebigen Menge. In Worten entspricht unter unserer Galoiskorrespondenz also das Verschieben von Zwischenkörpern mit einem Element der Galoisgruppe $g \in G$ der Konjugation von Untergruppen mit besagtem Element $g \in G$. Insbesondere ist L^H invariant unter G genau dann, wenn H in G ein Normalteiler ist. Da aber G nach 6.4.1.17 transitiv operiert auf den Wurzeln der Minimalpolynome aller Elemente von L, ist L^H invariant unter G genau dann, wenn es normal ist über K. Schließlich faktorisiert dann die durch Einschränken von Körperhomomorphismen gegebene Abbildung $G \to \mathrm{Gal}(L^H/K)$ über G/H und liefert eine Injektion $G/H \hookrightarrow \mathrm{Gal}(L^H/K)$, die mit einem Abzählargument bijektiv sein muß. □

Beispiel 6.4.3.3. Nach 6.4.1.5 ist für jede Potenz $q = p^r$ mit $r \geq 1$ einer Primzahl p die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung r, erzeugt vom Frobenius-Homomorphismus $a \mapsto a^p$. Die Untergruppen dieser Gruppe $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}r$ sind nach 4.4.3.20 genau die Gruppen $\mathbb{Z}d/\mathbb{Z}r$ für Teiler d von r. Das liefert im Licht der Galoiskorrespondenz 6.4.3.1 einen neuen Beweis unserer Klassifikation 6.3.7.12 aller Unterkörper eines endlichen Körpers.

Definition 6.4.3.4. Eine Körpererweiterung L/K heißt **biquadratisch**, wenn sie den Grad $[L : K] = 4$ hat und erzeugt ist von zwei Elementen $\alpha, \beta \in L$ mit $\alpha^2, \beta^2 \in K$.

Beispiel 6.4.3.5. $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ ist biquadratisch über $\mathbb{Q}$, denn $(a + b\sqrt{5})^2 = a^2 + 2ab\sqrt{5} + 5b^2$ kann nie 3 sein, weder für $a = 0$ noch für $b = 0$ und erst recht nicht für $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Lemma 6.4.3.6. *Jede biquadratische Erweiterung in einer von zwei verschieneden Charakteristik ist Galois und ihre Galoisgruppe ist die Klein'sche Vierergruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Beweis. Sei $L = K(\alpha, \beta)$ mit $\alpha^2, \beta^2 \in K$ unsere biquadratische Erweiterung. Für die nichttrivialen Elemente $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K(\alpha))$, $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K(\beta))$ haben wir

$$\sigma : \begin{cases} \alpha & \mapsto & \alpha \\ \beta & \mapsto & -\beta \end{cases} \qquad \tau : \begin{cases} \alpha & \mapsto & -\alpha \\ \beta & \mapsto & \beta \end{cases}$$

und wir haben $\{\mathrm{id}, \sigma, \tau, \sigma\tau\} \subset \mathrm{Gal}(L/K)$. Das muß dann aber schon die ganze Galois-Gruppe sein. □

6.4.3.7. Die Klein'sche Vierergruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_2^2$ hat fünf Untergruppen: Den Nullpunkt, drei Geraden, und die ganze Gruppe. Sie entsprechen in unserer biquadratischen Erweiterung aus 6.4.3.6 den Unterkörpern

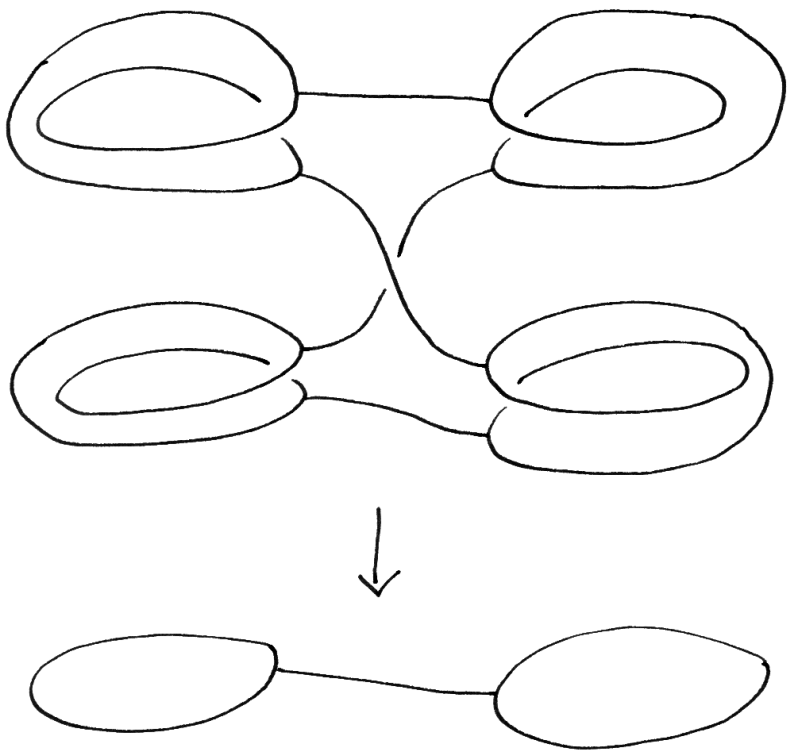
$$L \supset K(\alpha), K(\beta), K(\alpha\beta) \supset K$$

Eine K-Basis von L besteht aus $1, \alpha, \beta, \alpha\beta$, wie die simultane Eigenraumzerlegung von L unter σ und τ zeigt. Ein primitives Element ist zum Beispiel $\alpha + \beta$, da es von keinem nichttrivialen Element der Galoisgruppe festgehalten wird.

Satz 6.4.3.8 (Fundamentalsatz der Algebra). *Der Körper der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen.*

6.4.3.9. Alternative Beweise diskutieren wir in 3.5.3.25. Als Übung dürfen Sie zeigen, daß aus einem beliebigen angeordneten Körper R, in dem jedes Polynom ungerader Ordnung eine Nullstelle hat und jedes positive Element eine Quadratwurzel, durch Adjunktion einer Quadratwurzel von (-1) bereits ein algebraisch abgeschlossener Körper entsteht.

Beweis. Sei $[L : \mathbb{R}]$ eine endliche normale Erweiterung von $\mathbb{R}$. Sei $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{R})$ ihre Galoisgruppe und $S \subset G$ eine 2-Sylow von G, die in unseren Konventionen auch die triviale Gruppe sein darf. So haben wir $[L : \mathbb{R}] = |G|$ und $[L : L^S] = |S|$ und folglich ist $L^S/\mathbb{R}$ eine Erweiterung von ungeradem Grad. Da jedes Polynom



Dies Bild ist wie in 6.4.2.7 zu verstehen und stellt eine biquadratische Erweiterung des Funktionenkörpers $\mathbb{C}(t)$ dar, etwa durch die Adjunktion von Quadratwurzeln aus $(t \pm 1)$, wo die beiden Punkte ± 1 in den beiden Kreisen unten zu denken sind.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & G & & & & K & \\
\langle\sigma\rangle \arrow[ur, phantom, "\cup"] & \langle\tau\rangle \arrow[u, phantom, "\cup"] & \langle\sigma\tau\rangle \arrow[ul, phantom, "\cup"] & \arrow[r, leftrightarrow] & K(\alpha) \arrow[ur, phantom, "\cap"] & K(\beta) \arrow[u, phantom, "\cap"] & K(\alpha\beta) \arrow[ul, phantom, "\cap"] \\
 & 1 \arrow[ul, phantom, "\cup"] \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[ur, phantom, "\cup"] & & & & L \arrow[ul, phantom, "\cap"] \arrow[u, phantom, "\cap"] \arrow[ur, phantom, "\cap"] &
\end{tikzcd}$$

Links die fünf Untergruppen der Klein'schen Vierergruppe, rechts die ihnen unter der Galoiskorrespondenz entsprechenden fünf Zwischenkörper einer biquadratischen Erweiterung im Fall einer von Zwei verschiedenen Charakteristik.

aus $\mathbb{R}[X]$ von ungeradem Grad nach dem Zwischenwertsatz 10.3.3.8 eine reelle Nullstelle hat, folgt $L^S = \mathbb{R}$. Mithin haben wir $S = G$ und G ist eine 2-Gruppe. Damit entsteht nach unserem Satz 6.1.3.8 über die Struktur von p-Gruppen und unter Zuhilfenahme der Galoiskorrespondenz und Übung 6.4.3.10 die Körpererweiterung L aus $\mathbb{R}$ durch sukzessive Körpererweiterungen vom Grad 2, also nach 6.3.4.9 durch sukzessive Adjunktion von Quadratwurzeln. Adjungiert man aber eine echte Quadratwurzel zu $\mathbb{R}$, so erhält man $\mathbb{C}$ und in $\mathbb{C}$ hat jedes Element schon eine Quadratwurzel. Daraus folgt $L = \mathbb{R}$ oder $L = \mathbb{C}$. $\square$

Übungen

Übung 6.4.3.10. Gegeben eine endliche Galoiserweiterung L/K und zwei Untergruppen $I \subset H$ ihrer Galoisgruppe zeige man für den Grad der Erweiterung der zugehörigen Fixkörper die Formel

$$[L^I : L^H] = |H/I|$$

Hinweise: 6.4.1.12, 6.3.4.11, 4.4.1.5, 6.4.3.1.

Übung 6.4.3.11. Man drücke $\sqrt{3}$ aus als Polynom in $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ mit rationalen Koeffizienten: Das muß möglich sein, da dies Element nach 6.4.3.7 primitiv ist in $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

Übung 6.4.3.12. Seien L/K eine endliche Körpererweiterung und $K_1, K_2 \subset L$ zwei Zwischenkörper mit K_i/K Galois und $K_1 \cap K_2 = K$. So ist auch der von K_1 und K_2 erzeugte Unterkörper $K_1K_2 \subset L$ Galois über K und es gilt $\mathrm{Gal}(K_1K_2/K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K_1/K) \times \mathrm{Gal}(K_2/K)$ vermittels der Restriktionen.

Ergänzende Übung 6.4.3.13. Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G und sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Man konstruiere einen Isomorphismus zwischen $\mathrm{Gal}(L^H/K)$ und dem Quotienten N/H nach H des **Normalisators** $N = \mathrm{N}_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ von H in G.

Übung 6.4.3.14. Für jeden Körper k, dessen Charakteristik kein Teiler von n ist, hat der Zerfällungskörper des Polynoms

$$T^n + a_2T^{n-2} + \ldots + a_{n-1}T + a_n$$

mit Koeffizienten im Funktionenkörper $k('a_2, \ldots, a_n)$ in $n-1$ algebraisch unabhängigen Veränderlichen als Galoisgruppe die volle symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$. Hinweis: Man gehe aus von 6.4.1.24; Die Galoisgruppe eines Polynoms über einem Körper K ändert sich nicht unter Substitutionen des Typs $T = Y + \lambda$ für $\lambda \in K$; die Galoisgruppe ändert sich nicht beim Übergang zu Funktionenkörpern $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Gal}(L(X)/K(X))$. Die Irreduzibilität folgt bereits aus 6.2.7.20.

Ergänzung 6.4.3.15. Bei der Behandlung kubischer Gleichungen in 6.4.7.6 werden wir sehen, daß auch im Fall eines Körpers k der Charakteristik drei das Polynom $T^3 + pT + q$ über $k('p, q)$ die volle symmetrische Gruppe als Galoisgruppe hat. Andererseits ist im Fall eines Körpers k der Charakteristik zwei das Polynom $T^2 + p$ über $k('p)$ inseparabel und seine Galoisgruppe ist trivial und ist nicht die volle symmetrische Gruppe.

6.4.4 Galoisgruppen von Kreisteilungskörpern

6.4.4.1. Gegeben $n \geq 1$ interessieren wir uns nun für den Zerfällungskörper über $\mathbb{Q}$ des Polynoms $X^n - 1$. Dieser Zerfällungsköper heißt der n-te **Kreisteilungskörper** und wird unter Mißbrauch der Notation bezeichnet mit $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$. Er ist normal als Zerfällungskörper und separabel über $\mathbb{Q}$ wegen Charakteristik Null und mithin eine Galois-Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Ich stelle mir als n-ten Kreisteilungskörper meist konkret den Unterkörper $\mathbb{Q}(\zeta) \subset \mathbb{C}$ vor mit $\zeta = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/n}$. Auch ohne Rückgriff auf den Körper der komplexen Zahlen wissen wir nach 4.4.4.17, daß die n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ eine zyklische Gruppe der Ordnung n bilden. Die Erzeuger dieser Gruppe heißen die **primitiven n-ten Einheitswurzeln**. Nach unserer Definition der Kreisteilungspolynome in 6.2.8.1 sind sie gerade die Nullstellen des n-ten Kreisteilungspolynoms

$$\Phi_n = \prod_{\operatorname{ord} \zeta = n} (X - \zeta)$$

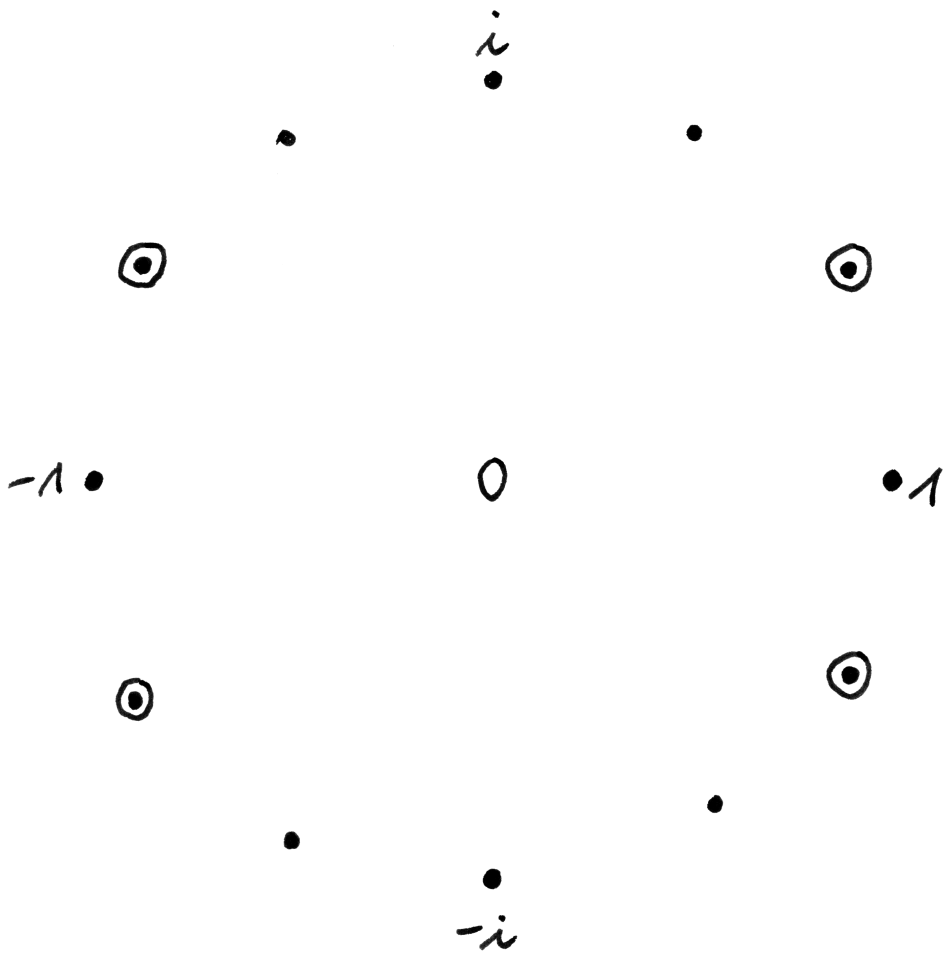
Wir hatten schon in 6.2.8.1 mit Induktion über n gezeigt, daß dieses Polynom Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ und sogar in $\mathbb{Z}$ hat, und 6.2.8.4 besagte, daß für $n = p$ prim das p-te Kreisteilungspolynom Φ_p irreduzibel ist in $\mathbb{Q}[X]$. Nun zeigen wir ganz allgemein, daß für alle $n \geq 1$ das n-te Kreisteilungspolynom Φ_n irreduzibel ist in $\mathbb{Q}[X]$. Nach 6.2.7.11 ist das ganz allgemein für normierte Polynome in $\mathbb{Z}[X]$ gleichbedeutend dazu, irreduzibel zu sein in $\mathbb{Z}[X]$.

Satz 6.4.4.2 (Galoisgruppen der Kreisteilungskörper). *1. Die Kreisteilungspolynome $\Phi_n(X)$ sind irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$;*

2. Bezeichnet μ_n die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln im n-ten Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ und $\operatorname{Aut}(\mu_n)$ ihre Automorphismengruppe, so liefern die offensichtichen Abbildungen Isomorphismen

$$\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Aut}(\mu_n) \xleftarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$$

Auf diese Weise erhalten wir einen ausgezeichneten Isomorphismus zwischen der Galoisgruppe des n-ten Kreisteilungskörpers und der Einheitengruppe des Restklassenrings $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;



Die zwölften Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$, eingekringelt die vier primitiven zwölften Einheitswurzeln

3. *Gegeben zwei primitive n-te Einheitswurzeln $\zeta, \xi \in \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ existiert genau ein Körperhomomorphismus $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ mit $\sigma(\zeta) = \xi$.*

6.4.4.3. Die Irreduzibilität der Kreisteilungspolynome für prime Einheitswurzeln haben wir bereits in 6.2.8.4 gezeigt. In diesem Fall vereinfacht sich der Beweis entsprechend.

6.4.4.4. Wählt man eine Einbettung des n-ten Kreisteilungskörpers $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ nach $\mathbb{C}$, so ist das Bild stets der von $\mathbb{Q}$ und $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/n}$ in $\mathbb{C}$ erzeugte Teilkörper. Von den Automorphismen unseres Kreisteilungskörpers läßt sich jedoch außer der Identität nur ein einziger stetig auf $\mathbb{C}$ fortsetzen, und dieser Automorphismus ist für jede Wahl der Einbettung derselbe und kann beschrieben werden als der Automorphismus, der jede Einheitswurzel auf ihr multiplikatives Inverses wirft.

6.4.4.5. Ich schicke dem Beweis einige allgemeine Betrachtungen zu zyklischen Gruppen voraus. Für $n \geq 1$ liefert ja sicher die Multiplikation einen Isomorphismus $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ zwischen der Einheitengruppe unseres Restklassenrings und der Automorphismengruppe seiner zyklischen Gruppe. Die Umkehrabbildung kann angegeben werden durch die Abbildungsvorschrift $\psi \mapsto \psi(1)$ für jeden Automorphismus ψ. Ist allgemeiner C irgendeine additiv notierte zyklische Gruppe der Ordnung n, so erhalten wir folglich einen Isomorphismus $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(C)$ durch die Abbildungsvorschrift $a \mapsto (c \mapsto ac)$, und ist μ irgendeine multiplikativ notierte zyklische Gruppe der Ordnung n, so erhalten wir ebenso einen Isomorphismus $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\mu)$ durch die Abbildungsvorschrift $a \mapsto (\zeta \mapsto \zeta^a)$. Des weiteren gibt es für je zwei Erzeuger einer zyklischen Gruppe genau einen Automorphismus, der den einen in den anderen überführt.

Beweis. 1. Ist ζ eine primitive n-te Einheitswurzel, so sind alle anderen primitiven n-ten Einheitswurzeln von der Form ζ^a für $a \in \mathbb{Z}$ mit a teilerfremd zu n alias mit $\langle a, n\rangle = \langle 1\rangle$. Sei nun $\Phi_n = fg$ eine Zerlegung in $\mathbb{Z}[X]$ mit f dem Minimalpolynom von ζ. Sicher ist dann auch g normiert. Es reicht zu zeigen, daß für jede Nullstelle $\zeta \in \mathbb{C}$ von f und $p \in \mathbb{N}$ prim mit $p \nmid n$ auch ζ^p eine Nullstelle von f ist, denn dann sind alle Wurzeln von Φ_n schon Wurzeln von f und es folgt $\Phi_n = f$. Aber sei sonst p prim mit $p \nmid n$ und $g(\zeta^p) = 0$. Nach Annahme teilt dann f das Polynom $g(X^p)$ in $\mathbb{Q}[X]$ und nach Gauß sogar in $\mathbb{Z}[X]$ und nach Übergang zu $\mathbb{F}_p[X]$ ist $\bar{f}$ Teiler von $\bar{g}(X^p) = \bar{g}^p$. Dann haben aber $\bar{f}$ und $\bar{g}$ eine gemeinsame Nullstelle im Zerfällungskörper von $X^n - 1$ über $\mathbb{F}_p$, und das steht im Widerspruch dazu, daß nach 6.3.9.14 das Polynom $X^n - 1$ über $\mathbb{F}_p$ für $p \nmid n$ keine mehrfachen Nullstellen in seinem Zerfällungskörper hat.

2. Sicher wird $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ erzeugt von jeder primitiven n-ten Einheitswurzel ζ, und da Φ_n nach Teil 1 ihr Minimalpolynom ist, folgt mit 6.3.3.3

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1}) : \mathbb{Q}] = \deg \Phi_n = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$$

Sicher liefert die Operation der Galoisgruppe auf den n-ten Einheitswurzeln weiter eine Einbettung $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mu_n)$ und nach 4.5.3.3 haben wir einen kanonischen Isomorphismus $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\mu_n)$. Da diese drei Gruppen alle gleichviele Elemente haben, folgt der Satz. □

6.4.4.6. Man erklärt die **Euler'sche φ-Funktion** $\varphi : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \text{Zahl der zu } n \text{ teilerfremden } d \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq d \leq n \\ &= \text{Zahl der Erzeuger der Gruppe } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ &= |\{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \mathrm{ord}(x) = n\}| \\ &= |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| \end{aligned}$$

Wir haben etwa $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = \varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$ und so weiter. Nach 6.4.4.2 haben wir auch $\varphi(n) = \deg \Phi_n = [\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1}) : \mathbb{Q}]$.

Satz 6.4.4.7 (Konstruierbarkeit regelmäßiger n-Ecke). *Genau dann ist das regelmäßige n-Eck konstruierbar mit Zirkel und Lineal, wenn der Wert $\varphi(n)$ der Euler'schen φ-Funktion an der Stelle n eine Zweierpotenz ist.*

Beweis. Sei ζ eine primitive n-te Einheitswurzel. Ist $\varphi(n) = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$ keine Zweierpotenz, so kann ζ nicht konstruierbar sein nach 6.3.6.4. Ist $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz, so ist $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ eine 2-Gruppe. Nach 6.1.3.8 oder einfacher induktiv nach 4.4.3.18 gibt es dann in G eine Kette von Normalteilern von G der Gestalt

$$G = G_r \supset G_{r-1} \supset \ldots \supset G_0 = 1$$

mit $G_i/G_{i-1} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für $1 \leq i \leq r$. Deren Fixkörper bilden eine Kette

$$\mathbb{Q} = K_r \subset K_{r-1} \subset \ldots \subset K_0 = \mathbb{Q}(\zeta)$$

von Teilkörpern mit $[K_{i-1} : K_i] = 2$ für $1 \leq i \leq r$. Diese Kette hinwiederum zeigt mit 6.3.6.2, daß ζ konstruierbar ist. □

Lemma 6.4.4.8 (Rechenregeln für die Euler'sche φ-Funktion). *1. Sind positive natürliche Zahlen n und m teilerfremd, so gilt $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$;*

2. Für p eine Primzahl und $r \geq 1$ beliebig gilt $\varphi(p^r) = p^{r-1}(p-1)$.

Beweis. 1. Der Isomorphismus $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ von Ringen induziert einen Isomorphismus $(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ der zugehörigen Einheitengruppen.

2. Es gibt p^{r-1} Vielfache n von p mit $1 \leq n \leq p^r$, also gilt

$$\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1} = p^{r-1}(p-1)$$ □

6.4.4.9 (**Diskussion der Zahlen n mit $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz**). Damit $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz ist, darf nach den eben erklärten Rechenregeln 6.4.4.8 nur der Primfaktor 2 in n mehrfach vorkommen, und alle anderen Primfaktoren müssen die Gestalt $2^r + 1$ haben. Nur dann kann aber $2^r + 1$ eine Primzahl sein, wenn r selbst eine Zweierpotenz ist, denn sonst wäre $r = st$ mit $t > 1$ ungerade, und wir könnten die Gleichung

$$(1 - X^t) = (1 - X)(1 + X + \ldots + X^{t-1})$$

spezialisieren zu $X = -2^s$ und so $1 + 2^r$ nichttrivial faktorisieren. Genau dann ist also $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz, wenn alle Primfaktoren von n Fermat'sche Primzahlen im Sinne der folgenden Bemerkung sind und keine Primfaktoren außer der Zwei mehrfach vorkommen.

Ergänzung 6.4.4.10. Die Zahlen $F_k := 1 + 2^{2^k}$ heißen **Fermat'sche Zahlen**. F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sind prim, aber $F_5 = 1 + 2^{32} = 641 \cdot 6700417$ ist nach Euler nicht prim. Es ist nicht bekannt, ob es außer den 5 Ersten noch weitere Fermat'sche Zahlen gibt, die prim sind. Bekannt ist, daß die Fermat'schen Zahlen F_k für $5 \leq k \leq 32$ nicht prim sind, jedenfalls habe ich das 2020 mit Zitat in Wikipedia gelesen.

Ergänzung 6.4.4.11. Wie gesagt kann $\varphi(m)$ auch interpretiert werden als die Ordnung der Einheitengruppe des Restklassenrings $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, in Formeln

$$\varphi(m) = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times|$$

Wenden wir auf diese Gruppe unsere Erkenntnis 4.4.3.8 an, daß die Ordnung jedes Elements einer endlichen Gruppe die Gruppenordnung teilt, so erhalten wir für b teilerfremd zu m insbesondere die sogenannte **Euler'sche Kongruenz**

$$b^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

Ergänzung 6.4.4.12. Wenn man die Eulersche φ-Funktion einführt, so darf die witzige Identität

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

nicht fehlen. Um sie zu zeigen bemerke man, daß auch für jedes Vielfache $n = cd$ einer Zahl d schon gilt $\varphi(d) = |\{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \operatorname{ord}(x) = d\}|$. In der Tat liefert nämlich die Multiplikation mit c eine Einbettung $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, deren Bild genau aus allen $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ besteht, deren Ordnung d teilt.

Übungen

Übung 6.4.4.13. Man zeige, daß man aus einem regelmäßigen 7-Eck mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges 35-Eck konstruieren kann. Hinweis: Man verwende 6.3.6.10.

Übung 6.4.4.14. Wieviele zu 140000 teilerfremde Zahlen a mit $1 \leq a \leq 140000$ gibt es?

Übung 6.4.4.15 (**Konstruierbarkeitskriterium**). Man zeige: Eine algebraische komplexe Zahl ist konstruierbar genau dann, wenn der Grad des Zerfällungskörpers ihres Minimalpolynoms über $\mathbb{Q}$ eine Zweierpotenz ist.

Übung 6.4.4.16. Man zeige, daß die Einheitswurzeln des n-ten Kreisteilungskörpers für gerades n genau die n-ten Einheitswurzeln sind und für ungerades n genau die $2n$-ten Einheitswurzeln.

Übung 6.4.4.17. Man zeige für die Euler'sche φ-Funktion und alle $n \geq 1$ die Identität $\varphi(n^2) = n\varphi(n)$.

Übung 6.4.4.18. Seien $m, n \geq 1$ natürliche Zahlen und k ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches. Man zeige $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1}, \sqrt[m]{1}) = \mathbb{Q}(\sqrt[k]{1})$ für beliebige entsprechende primitive Einheitswurzeln Hinweis: Ist $k = an = bm$ mit $(a, b) = 1$, so gibt es x, y mit $ax + by = 1$ alias $\zeta_k = (\zeta_k^a)^x(\zeta_k^b)^y$.

Übung 6.4.4.19. Gegeben $n > 2$ zeige man, daß im Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1}) = \mathbb{Q}(\zeta)$ für ζ eine primitive n-te Einheitswurzel gilt $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})] = 2$ und $[\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1}) : \mathbb{Q}(\zeta)] = \varphi(n)/2$. Man folgere $\Phi_n(X) = X^{\varphi(n)}\Phi_n(X^{-1})$.

6.4.5 Quadratisches Reziprozitätsgesetz

6.4.5.1. Gegeben ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ stellen wir uns nun die Frage, ob es ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$a = x^2 + by$$

Ist das der Fall, so nennt man a einen **quadratischen Rest modulo** b. Gleichbedeutend können wir auch fragen, ob eine Restklasse $\bar{x} \in \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ existiert mit $\bar{a} = \bar{x}^2$, ob also $\bar{a}$ ein Quadrat ist in $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$. Es mag a priori nicht klar sein, ob diese Frage derart wichtig ist, daß ihre Behandlung einen eigenen Abschnitt verdient. A posteriori hat sich die Untersuchung dieser Frage und ihrer Verallgemeinerungen jedoch als derart fruchtbar erwiesen, daß es mir angemessen scheint, sie hier zu diskutieren. Zunächst reduzieren wir unsere Frage dazu auf den Fall b prim und erklären dann, wie sie in diesem Fall durch das sogenannte „quadratische Reziprozitätsgesetz“ gelöst wird. Es gibt verschiedene Beweise des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, dessen verblüffende Aussage viele Mathematiker fasziniert

hat. Wir geben hier einen Beweis mit den Methoden der Galoistheorie. Er ist vielleicht nicht der elementarste Beweis, aber in meinen Augen doch der Beweis, bei dem am wenigsten „gezaubert“ wird. Darüber hinaus weist er die Richtung, in der die meines Erachtens interessantesten Verallgemeinerungen zu finden sind.

6.4.5.2 (**Reduktion auf $b = p^n$ eine Primzahlpotenz**). Gegeben $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ teilerfremd ist a ein Quadrat modulo $b_1 b_2$ genau dann, wenn es ein Quadrat ist modulo b_1 und ein Quadrat modulo b_2. Das folgt unmittelbar aus unserem Ringisomorphismus

$$\mathbb{Z}/b_1 b_2 \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/b_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b_2\mathbb{Z}$$

alias dem chinesischen Restsatz 4.4.3.11. Nach dieser Bemerkung werden wir uns bei der Untersuchung unserer ursprünglichen Frage auf den Fall beschränken, daß b eine echte Primzahlpotenz ist. Für Zahlen b, deren Primfaktorzerlegung wir nicht kennen, ist uns damit zwar wenig geholfen, aber für diese b ist nun einmal schlicht kein schnelles Verfahren bekannt, mit dem die Frage entschieden werden könnte, ob ein gegebenes a quadratischer Rest modulo b ist oder nicht.

6.4.5.3 (**Reduktion auf a teilerfremd zu $b = p^n$**). Sei nun also b eine echte Primzahlpotenz, sagen wir $b = p^n$. Ist dann $a = p^r \alpha$ die Darstellung von a als Produkt mit α teilerfremd zu p, so ist die Gleichung

$$a = p^r \alpha = x^2 + yp^n$$

für $r \geq n$ bereits mit $x = 0$ lösbar. Haben wir dahingegen $r + t = n$ mit $t > 0$, so folgt aus der Identität $p^r \alpha = x^2 + yp^r p^t$, daß die maximale p-Potenz, die die rechte Seite teilt, entweder gerade ist oder mindestens p^{r+1}. Diese Gleichung ist also für $t > 0$ nur unter der Annahme r gerade lösbar, und unter dieser Annahme genau dann, wenn die Gleichung

$$\alpha = \tilde{x}^2 + yp^t$$

lösbar ist alias wenn α ein Quadrat ist modulo p^t. Auf diese Weise können wir uns bei der Untersuchung unserer ursprünglichen Frage weiter auf den Fall zurückziehen, daß b eine echte Primzahlpotenz ist und zusätzlich a teilerfremd zu b.

6.4.5.4 (**Reduktion von $b = p^n$ auf $b = p$ für $p \neq 2$**). Ist p eine ungerade Primzahl und a teilerfremd zu p, so ist a ein Quadrat modulo p^n für $n \geq 2$ genau dann, wenn a ein Quadrat ist modulo p. Das folgt leicht aus 4.4.4.32 oder besser seinem Beweis, wo Sie gezeigt haben, daß die Projektion $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ faktorisiert über einen Isomorphismus mit der Projektion als zweitem Pfeil in der Form

$$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$$

Da die Zwei teilerfremd ist zu p, ist nun jedes Element von $\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}$ das Doppelte von einem anderen, und das beendet auch bereits unsere Reduktion. Durch Induktion über n kann man sogar explizit eine Lösung finden: Gegeben $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{Z}$ mit $a = \tilde{x}^2 + \tilde{y}p^n$ machen wir zur Lösung der Gleichung $a = x^2 + yp^{n+1}$ den Ansatz $x = \tilde{x} + \lambda p^n$ und finden für λ die Gleichung

$$a = \tilde{x}^2 + 2\lambda p^n \tilde{x} + \lambda^2 p^{2n} + yp^{n+1}$$

Wegen $a - \tilde{x}^2 = \tilde{y}p^n$ kann sie umgeschrieben werden zu

$$2\lambda\tilde{x} = \tilde{y} - \lambda^2 p^n - yp$$

Da nun nach Annahme 2 und a und damit auch $\tilde{x}$ invertierbar sind in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, hat diese Gleichung stets eine Lösung λ.

6.4.5.5 (**Reduktion von** $b = 2^n$ **auf** $b = 8$). Eine ungerade Zahl ist ein quadratischer Rest modulo 2^n für $n \geq 3$ genau dann, wenn sie ein quadratischer Rest ist modulo 8 alias kongruent zu 1 modulo 8. Daß diese Bedingung notwendig ist, scheint mir offensichtlich. Um zu zeigen, daß sie auch hinreichend ist, erinnern wir wieder aus 4.4.4.32 oder besser seinem Beweis, daß sich die offensichtliche Surjektion $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ als rechte Vertikale in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}
\end{array}$$

mit den offensichtlichen Surjektionen in den Vertikalen einbetten läßt. Aus diesem Diagramm ist die Behauptung dann unmittelbar ersichtlich. Um eine explizite Lösung zu finden, machen wir wieder Induktion über s und gehen also aus von einer Lösung der Gleichung $a = x^2 + y2^s$ mit $s \geq 3$. Ist y gerade, also $y = 2\tilde{y}$, so steht unsere Lösung für $s + 1$ schon da. Sonst ersetzen wir x durch $x + 2^{s-1}$ und finden so auch eine Lösung mit y gerade.

6.4.5.6. Mit diesen Überlegungen haben wir also unsere ursprüngliche Frage zurückgeführt auf die Frage, welche Zahlen quadratische Reste sind modulo ungerader Primzahlen und modulo 8. Ganz allgemein wissen wir seit 3.5.3.37, wiewiele Elemente eines endlichen Körpers $\mathbb{F}$ Quadrate sind, nämlich im Fall der Charakteristik Zwei alle und im Fall einer von 2 verschiedenen Charakteristik knapp über die Hälfte, genauer $(|\mathbb{F}| + 1)/2$ Elemente. Aber welche? In 6.4.5.18 erklären wir, wie diese Frage für endliche Primkörper durch das Zusammenwirken von quadratischem Reziprozitätsgesetz 6.4.5.7 und Ergänzungssatz 6.4.5.14 effizient gelöst werden kann.

Satz 6.4.5.7 (**Quadratisches Reziprozitätsgesetz**). *Seien p und q zwei verschiedene ungerade Primzahlen.*

1. *Ist p oder q kongruent zu 1 modulo 4, so ist p ein Quadrat modulo q genau dann, wenn q ein Quadrat ist modulo p;*

2. *Sind p und q kongruent zu 3 modulo 4, so ist p ein Quadrat modulo q genau dann, wenn q kein Quadrat ist modulo p.*

Beispiel 6.4.5.8. Wir betrachten $p = 7$ und $q = 103$. Wir finden $103 \equiv 5 \pmod 7$ und durch Ausprobieren sehen wir, daß $0, 1, 2, 4$ die einzigen Quadrate im Körper mit 7 Elementen sind. Insbesondere ist 103 kein Quadrat modulo 7. Unsere Primzahlen sind nun beide kongruent zu 3 modulo 4, und Teil zwei des quadratischen Reziprozitätsgesetzes sagt uns dann, daß 7 notwendig ein Quadrat modulo 103 sein muß. Ausprobieren liefert in der Tat $25^2 = 625 = 6 \times 103 + 7$.

6.4.5.9 (**Allgemeines zu zyklischen Gruppen**). Wir schicken dem Beweis einige allgemeine Überlegungen voraus. Ich erinnere zunächst daran, daß nach 4.4.4.26 jede nichttriviale zyklische Gruppe G gerader Ordnung $2n$ genau eine Untergruppe mit zwei Elementen und genau eine Untergruppe vom Index 2 hat. Für den in additiver Notation geschriebenen Gruppenhomomorphismus

$$(n\cdot) : G \to G$$

ist das Bild die einzige Untergruppe mit zwei Elementen und der Kern die einzige Untergruppe vom Index 2. Für den in additiver Notation geschriebenen Gruppenhomomorphismus

$$(2\cdot) : G \to G$$

ist dahingegen das Bild die einzige Untergruppe vom Index 2 und der Kern die einzige Untergruppe mit zwei Elementen.

Beispiel 6.4.5.10. Im Fall der additiven Gruppe $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ ist $\{\bar{0}, \bar{n}\} = n\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ die einzige zweielementige Untergruppe und $2\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ die einzige Untergruppe vom Index 2.

6.4.5.11. Im Fall der multiplikativen Gruppe $\mathbb{F}_p^\times$ für p eine ungerade Primzahl ist entsprechend $\{1, -1\}$ die einzige zweielementige Untergruppe und $(\mathbb{F}_p^\times)^2$ einzige Untergruppe vom Index 2 und das Potenzieren mit $(p-1)/2$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\mathbb{F}_p^\times \twoheadrightarrow \{1, -1\}$ mit Kern $(\mathbb{F}_p^\times)^2$. Wir führen nun für p prim und $a \in \mathbb{Z}$ das sogenannte **Legendre-Symbol** ein durch die Vorschrift

$$\left(\frac{a}{p}\right) := \begin{cases} 0 & a \text{ ist ein Vielfaches von } p; \\ 1 & a \text{ ist ein Quadrat modulo } p\text{, aber kein Vielfaches von } p; \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für p eine ungerade Primzahl erhalten wir damit die Kongruenz

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

In der Tat folgt das für a teilerfremd zu p aus den vorhergehenden Überlegungen und in den anderen Fällen ist es eh klar. Des weiteren hängt auch für beliebige Primzahlen p das Legendresymbol nur von der Restklasse modulo p ab und es gilt die Multiplikativität

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$$

In der Tat folgt das für a und b teilerfremd zu p aus den vorhergehenden Überlegungen und in den anderen Fällen ist es eh klar.

6.4.5.12 (**Quadratische Teilerweiterungen in Galoiserweiterungen**). Seien L/K eine endliche Galoiserweiterung und $G := \mathrm{Gal}(L/K)$ ihre Galoisgruppe. Gegeben eine Untergruppe $H \subset G$ der Galoisgruppe vom Index 2 ist nach der Galoiskorrespondenz oder auch bereits nach 6.4.1.9 ihr Fixkörper L^H eine quadratische Erweiterung von K. Ist die Charakteristik kein Teiler von $|H|$, so kann dieser Fixkörper offensichtlich beschrieben werden durch die Formel

$$L^H = \left\{ \sum_{\sigma \in H} \sigma(\gamma) \,\middle|\, \gamma \in L \right\}$$

Die Bedingung an die Charakteristik wird dabei für die Inklusion $\subset$ benötigt, weil man damit $\alpha \in L^H$ schreiben kann als $\alpha = |H|^{-1} \sum_{\sigma \in H} \sigma(\alpha)$. Gilt zusätzlich $\operatorname{char} K \neq 2$, so sind die Elemente $\alpha \in L^H \backslash K$ mit $\alpha^2 \in K$ genau die Eigenvektoren zum Eigenwert (-1) des nichttrivialen Elements τ der zweielementigen Gruppe $\mathrm{Gal}(L^H/K) \cong G/H$ und man überlegt sich leicht, daß dieser Eigenraum beschrieben werden kann als

$$\mathrm{Eig}(\tau|L^H; -1) = \left\{ \sum_{\sigma \in H} \sigma(\gamma) - \sum_{\sigma \in G \backslash H} \sigma(\gamma) \,\middle|\, \gamma \in L \right\}$$

Gegeben $\gamma \in L$ gilt für $\alpha := \sum_{\sigma \in H} \sigma(\gamma) - \sum_{\sigma \in G \backslash H} \sigma(\gamma)$ auch ohne Vorausetzungen an die Charakteristik stets $\alpha \in L^H$ und $\alpha^2 \in K$ sowie unter den zusätzlichen Annahmen $\alpha \neq 0$ und $\mathrm{char}(K) \neq 2$ zusätzlich $L^H = K(\alpha) = K + K\alpha$.

6.4.5.13 (**Quadratwurzeln in Kreisteilungskörpern**). Gegeben p eine ungerade Primzahl betrachten wir den p-ten Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$ und erinnern unseren Isomorphismus $\mathbb{F}_p^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1}), \mathbb{Q})$ aus 6.4.4.2 und die Erkenntnis

aus 4.4.4.17, daß $\mathbb{F}_p^\times$ eine zyklische Gruppe ist. Nach 6.4.5.9 hat die Galoisgruppe genau eine Untergruppe vom Index Zwei. Nach der Galoiskorrespondenz liegt damit in $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$ genau eine quadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}$ und nach 6.4.5.12 und 20.3.4.15 hat für $\zeta \in \mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$ eine primitive p-te Einheitswurzel das Element

$$\alpha := \sum_{a \in \mathbb{F}_p^\times} \left(\frac{a}{p}\right) \zeta^a$$

die Eigenschaft $\alpha^2 \in \mathbb{Q}$. Dies Element α erzeugt folglich, wenn es nicht Null ist, die fragliche quadratische Erweiterung. Wir zeigen nun genauer durch explizite Rechnung die Formel

$$\alpha^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$$

In der Tat, beachten wir $(\frac{ab^2}{p}) = (\frac{a}{p})$, so ergibt sich durch Substitution von ab für a die zweite Gleichung der Kette

$$\alpha^2 = \sum_{a,b \in \mathbb{F}_p^\times} \left(\frac{ab}{p}\right) \zeta^{a+b} = \sum_{a \in \mathbb{F}_p^\times} \left(\frac{a}{p}\right) \sum_{b \in \mathbb{F}_p^\times} (\zeta^{a+1})^b$$

Bei $a = -1$ ergibt sich ganz rechts der Beitrag $(\frac{-1}{p})(p-1)$. Bei $a \neq -1$ beachten wir, daß für $\eta = \zeta^{a+1}$ wie für jede primitive p-te Einheitswurzel die Relation

$$1 + \eta + \eta^2 + \ldots + \eta^{p-1} = 0$$

erfüllt ist, so daß die Summanden mit $a \neq -1$ jeweils den Beitrag $-(\frac{a}{p})$ liefern. Da nun die Summe der $(\frac{a}{p})$ über alle $a \in \mathbb{F}_p^\times$ verschwindet, und erst dafür brauchen wir $p \neq 2$, liefern alle Summanden mit $a \neq -1$ zusammen den Beitrag $(\frac{-1}{p})$ und mit 20.3.4.15 folgern wir

$$\alpha^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) p = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$$

Im übrigen folgt $\alpha^2 \in \mathbb{Z}$ auch ohne alle Rechnung aus der Identität $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}[\zeta] = \mathbb{Z}$. Um sie einzusehen, bemerkt man, daß $\mathbb{Z}[\zeta]$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist, der Schnitt ist mithin nach 4.4.4.1 auch eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Andererseits aber ist er auch ein Teilring von $\mathbb{Q}$, und diese beiden Eigenschaften zusammen zeigen nach Übung 6.2.2.8 bereits, daß unser Schnitt $\mathbb{Z}$ sein muß. Explizit prüft man für eine von Null verschiedene dritte Einheitswurzel ζ leicht $(\zeta - \zeta^2)^2 = -3$ und damit $\pm\sqrt{-3} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{1})$. Die Beziehung zwischen regelmäßigem Fünfeck und dem goldenen Schnitt 10.4.5.30 zeigt weiter $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt[5]{1})$.

Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes. Sei weiter p eine ungerade Primzahl. Wir betrachten die eindeutige quadratische Teilerweiterung unseres p-ten Kreisteilungskörpers, die wir in 20.1.5 bestimmt hatten zu $\mathbb{Q}(\zeta) \supset \mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{Q}$ mit $\alpha^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$. Die Teilringe

$$\mathbb{Z}[\zeta] \supset \mathbb{Z}[\alpha] \supset \mathbb{Z}$$

sind offensichtlich stabil unter der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$. Jede Primzahl $q \neq p$ liefert unter $\mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ ein Element σ_q der Galoisgruppe mit $\sigma_q(\zeta) = \zeta^q$ und der von diesem Element auf $R := \mathbb{Z}[\zeta]/q\mathbb{Z}[\zeta]$ induzierte Ringautomorphismus ist folglich der Frobenius $r \mapsto r^q$. Das Bild von α in R notieren wir

$$\bar{\alpha} \in R$$

Das Bild der offensichtlichen Einbettung $\mathbb{F}_q \hookrightarrow R$ notieren wir von nun an kurzerhand auch $\mathbb{F}_q \subset R$. Wir nehmen nun zusätzlich $q \neq 2$ an und sind dann in genau einem der beiden folgenden Fälle:

1. $\bar{\alpha} \in \mathbb{F}_q$ und $\bar{\alpha}^2 \in (\mathbb{F}_q^\times)^2$ und $\sigma_q(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}$;
2. $\bar{\alpha} \notin \mathbb{F}_q$ und $X^2 - \bar{\alpha}^2$ irreduzibel in $\mathbb{F}_q[X]$ und $\mathbb{F}_q[\bar{\alpha}] \cong \mathbb{F}_{q^2}$ und $\sigma_q(\bar{\alpha}) = -\bar{\alpha}$.

Nun haben wir $\bar{\alpha}^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \bar{p}$ und zusammen mit unserer vergleichsweise banalen Erkenntnis $\sigma_q(\alpha) = (\frac{q}{p})\alpha$ folgt

$$\left(\frac{-1}{q}\right)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$$

Zusammen mit unserer Erkenntnis $(\frac{-1}{q}) = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$ aus 20.3.4.15 folgt dann das quadratische Reziprozitätsgesetz. □

Proposition 6.4.5.14 (Ergänzungssatz). *Für jede ungerade Primzahl p gilt*

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 & \textit{für } p \equiv \pm 1 \pmod 8; \\ -1 & \textit{für } p \equiv \pm 3 \pmod 8. \end{cases}$$

Beweis. Wir beginnen wie beim Beweis des Reziprozitätsgesetzes und betrachten feiner

$$\beta := (\alpha + 1)/2 = \sum_{a \in (\mathbb{F}_p^\times)^2} \zeta^a$$

Dann haben wir wieder $\mathbb{Z}[\zeta] \supset \mathbb{Z}[\beta] \supset \mathbb{Z}$ und diese Teilringe sind stabil unter der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ und für alle zu p teilerfremden ganzen Zahlen q finden wir

$$\sigma_q(\beta) = \begin{cases} \beta & \text{falls } (\frac{q}{p}) = 1; \\ \beta - \alpha & \text{falls } (\frac{q}{p}) = -1. \end{cases}$$

Unsere Einbettungen induzieren weiter für alle $q \in \mathbb{Z}$ Einbettungen

$$\mathbb{Z}[\zeta]/q\mathbb{Z}[\zeta] \;\supset\; \mathbb{Z}[\beta]/q\mathbb{Z}[\beta] \;\supset\; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$$

Man kann das etwa daraus folgern, daß $\mathbb{Z}[\zeta]$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang $p-1$ mit Erzeugern $1, \zeta, \ldots, \zeta^{p-2}$ oder besser Erzeugern $\zeta, \ldots, \zeta^{p-1}$ ist. Für jede Primzahl q ist damit der von σ_q auf $\mathbb{Z}[\beta]/q\mathbb{Z}[\beta]$ induzierte Ringautomorphismus der Frobeniushomomorphismus. Weiter finden wir $\beta^2 = (\alpha^2 + 2\alpha + 1)/4$. Da wir stets $\alpha^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p = 4u+1$ schreiben können mit $u \in \mathbb{Z}$, ergibt sich $\beta^2 = u+\beta$ und das Einsetzen von $\bar{\beta}$ für X induziert einen Ringisomorphismus

$$\mathbb{F}_q[X]/\langle X^2 - X - u\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\beta]/q\mathbb{Z}[\beta]$$

Wir sind also in genau einem der folgenden zwei Fälle:

1. Das Polynom $X^2 - X - u$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_q[X]$ und es gilt $\sigma_q(\bar{\beta}) \neq \bar{\beta}$;
2. Das Polynom $X^2 - X - u$ ist reduzibel in $\mathbb{F}_q[X]$ und es gilt $\sigma_q(\bar{\beta}) = \bar{\beta}$.

Für $q \neq 2$ fallen wir von hier aus auf die bereits beim Beweis des Reziprozitätsgesetzes angestellten Überlegungen zurück. Für $q = 2$ jedoch zeigt das

$$(-1)^u = \left(\frac{2}{p}\right)$$

Die Parität von u hängt nun offensichtlich nur von der Restklasse von p modulo 8 ab und kurzes Durchprobieren zeigt, daß wir so genau den Ergänzungssatz erhalten. $\square$

Vorschau 6.4.5.15. In der „algebraischen Zahlentheorie“ werden gewisse Tricks der vorhergehenden Argumentation zu einer Theorie ausgebaut. Gegeben ein **Zahlkörper** alias eine endliche Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$ kann man ganz allgemein in K stets einen ausgezeichneten Teilring konstruieren, der als abelsche Gruppe endlich erzeugt ist und der stabil ist unter der Galoisgruppe $G := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, nämlich den sogenannten **Ganzheitsring** oder **Ganzzahlenring**

$$R = \mathfrak{o}_K := \{r \in K \mid r \text{ ist Nullstelle eines normierten Polynoms aus } \mathbb{Z}[X]\}$$

Daß diese Teilmenge $R \subset K$ in der Tat ein Teilring ist, zeigen wir in 7.5.1.8. In unserem Beispiel $\mathbb{Q}(\zeta) \supset \mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{Q}$ sind die Ganzheitsringe gerade die Teilringe $\mathbb{Z}[\zeta] \supset \mathbb{Z}[\beta] \supset \mathbb{Z}$, die wir beim Beweis des Ergänzungssatzes haben vom Himmel fallen lassen. Gegeben eine Erweiterung L/K von Zahlkörpern mit Ganzheitsringen $\mathfrak{o}_L \supset \mathfrak{o}_L$ ist nach 7.8.2.13 dann für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}_K$ die offensichtliche Abbildung eine Injektion $\mathfrak{o}_K/\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{o}_L/\mathfrak{a}\mathfrak{o}_L$.

6.4.5.16. Die Abbildung $n \mapsto (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ von der Menge der ungeraden ganzen Zahlen in das Monoid der Vorzeichen ist die Verknüpfung der Restklassenabbildung mit dem einzigen Gruppenisomorphismus

$$2\mathbb{Z}+1 \to (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^\times$$

Insbesondere ist sie multiplikativ alias ein Monoidhomomorphismus.

6.4.5.17. Die Abbildung $n \mapsto (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$ von der Menge der ungeraden ganzen Zahlen in das Monoid der Vorzeichen ist die Verknüpfung der Restklassenabbildung mit einem surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$2\mathbb{Z}+1 \to (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^\times$$

Insbesondere ist sie multiplikativ alias ein Monoidhomomorphismus. In diesem Fall beachte man, daß es sogar vier Gruppenhomomorphismen $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{Z}^\times$ alias $\mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2$ gibt, von denen drei surjektiv sind.

Ergänzung 6.4.5.18. Will man Legendre-Symbole tatsächlich ausrechnen, so erweist sich deren Erweiterung zu den sogenannten **Jacobi-Symbolen** als praktisch. Man definiert genauer für $a \in \mathbb{Z}$ beliebig und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit Primfaktorzerlegung $n = p_1 p_2 \ldots p_r$ das Jacobi-Symbol als Produkt von Legendre-Symbolen

$$\left(\frac{a}{n}\right) := \left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{a}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{a}{p_r}\right)$$

Aus den entsprechenden Eigenschaften des Legendre-Symbols folgt, daß auch das Jacobi-Symbol nur von der Restklasse von a modulo n abhängt und daß gilt

$$\left(\frac{ab}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right) \quad \text{und für } n \text{ ungerade} \quad \left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Schließlich folgt aus dem quadratischen Reziprozitätsgesetz 6.4.5.7, daß allgemeiner für je zwei ungerade Zahlen $m, n \geq 1$ das **Reziprozitätsgesetz für Jacobi-Symbole**

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}\frac{m-1}{2}}\left(\frac{n}{m}\right)$$

gilt, denn auch die Vorzeichen sind multiplikativ in ungeraden m und n, wie man durch Fallunterscheidung prüft. Für jede ungerade Zahl $n \geq 1$ folgt schließlich aus dem Ergänzungssatz 6.4.5.14 mühelos der **Ergänzungssatz für Jacobi-Symbole**

$$\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 & \text{für } n \equiv \pm 1 \pmod 8; \\ -1 & \text{für } n \equiv \pm 3 \pmod 8. \end{cases}$$

Für die Primzahlen 1231 und 1549 finden wir so etwa

$$\begin{aligned}
&\left(\tfrac{1231}{1549}\right) = \left(\tfrac{1549}{1231}\right) = \left(\tfrac{318}{1231}\right) = \left(\tfrac{2}{1231}\right)\left(\tfrac{159}{1231}\right) = \left(\tfrac{159}{1231}\right) = -\left(\tfrac{1231}{159}\right) = -\left(\tfrac{118}{159}\right) = \\
&= -\left(\tfrac{2}{159}\right)\left(\tfrac{59}{159}\right) = -\left(\tfrac{59}{159}\right) = -\left(\tfrac{159}{59}\right) = -\left(\tfrac{41}{59}\right) = -\left(\tfrac{59}{41}\right) = -\left(\tfrac{18}{41}\right) = \\
&= -\left(\tfrac{2}{41}\right)\left(\tfrac{9}{41}\right) = -\left(\tfrac{9}{41}\right) = -\left(\tfrac{41}{9}\right) = -\left(\tfrac{5}{9}\right) = -\left(\tfrac{9}{5}\right) = -\left(\tfrac{4}{5}\right) = -\left(\tfrac{2}{5}\right)^2 = -1
\end{aligned}$$

mit unserem Reziprozitätsgesetz und Ergänzungssatz für Jacobi-Symbole. Die Zahl 1231 ist demnach kein quadratischer Rest modulo 1549. Alternativ hätten wir auch den Rest von $1231^{1548/2} = 1231^{774}$ modulo 1548 ausrechnen können. Das dauert so lange auch wieder nicht, da wir zur Beschleunigung der Rechnung 774 in eine Summe von Zweierpotenzen entwickeln können als $774 = 512+256+4+2$, und dann müssen wir nur noch neun Quadrate in $\mathbb{Z}/1549\mathbb{Z}$ berechnen und vier dieser Quadrate in $\mathbb{Z}/1549\mathbb{Z}$ multiplizieren. Ganz so schnell wie obige Rechnung geht das dann aber doch nicht.

Übungen

Übung 6.4.5.19. Sei $a \in \mathbb{Z}$ fest vorgegeben. Man zeige: Ob a ein Quadrat ist modulo einer Primzahl q hängt nur von der Restklasse von q modulo $4a$ ab.

Ergänzung 6.4.5.20. Im Fall $a = -1$ kennen wir das das Resultat der vorhergehenden Übung 6.4.5.19 im Übrigen bereits aus 6.2.6.5. In der Sprache der algebraischen Zahlentheorie ist das eine starke Aussage über die Beziehungen zwischen dem „Verzweigungsverhalten der Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{a})/\mathbb{Q}$ an verschiedenen Primstellen“. Unser Beweis des Reziprozitätsgesetzes, das erst mal den Fall a prim liefert, geht aus vom explizit bekannten Verzweigungsverhalten bei Kreisteilungserweiterungen und folgert das Resultat daraus durch eine Art Galois-Abstieg.

Ergänzende Übung 6.4.5.21. Ein berühmter **Satz von Kronecker-Weber** besagt, daß jede endliche Galoiserweiterung des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit abelscher Galoisgruppe als Unterkörper eines Kreisteilungskörpers realisiert werden kann. Man zeige das für alle quadratischen Erweiterungen von $\mathbb{Q}$.

Ergänzung 6.4.5.22. Man mag den Satz von Kronecker-Weber interpretieren als eine explizite Beschreibung der „maximalen abelschen Erweiterung“ von $\mathbb{Q}$: Sie entsteht durch die Adjunktion aller Einheitswurzeln. **Hilbert's zwölftes Problem** fragt nach einer ähnlich expliziten Beschreibung der „maximalen abelschen Erweiterung“ eines beliebigen Zahlkörpers, als da heißt, eines beliebigen Körpers der Charakteristik Null von endlichem Grad über $\mathbb{Q}$.

Übung 6.4.5.23. Ist 283 ein quadratischer Rest modulo 397? Hinweis: 397 ist eine Primzahl.

Übung 6.4.5.24. Gibt es eine Quadratzahl, deren Darstellung im Dezimalsystem mit der Ziffernfolge 39 endet? Für welche Ziffern $a, b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ gibt es eine Quadratzahl, die mit der Ziffernfolge ab endet?

6.4.6 Radikalerweiterungen

Definition 6.4.6.1. Eine Galoiserweiterung mit zyklischer Galoisgruppe heißt eine **zyklische Erweiterung**. Eine Galoiserweiterung mit abelscher Galoisgruppe heißt eine **abelsche Erweiterung**.

6.4.6.2. Zerfällt das Polynom $X^n - 1$ in einem Körper vollständig in Linearfaktoren, so sagen wir, der besagte Körper **enthalte alle n-ten Einheitswurzeln**. Wir sagen, eine Körpererweiterung L/K **entstehe durch Adjunktion einer n-ten Wurzel**, wenn gilt $L = K(\alpha)$ für ein $\alpha \in L$ mit $\alpha^n \in K$.

Satz 6.4.6.3 (**Zyklische Erweiterungen**). *Seien K ein Körper und $n \geq 2$ eine natürliche Zahl derart, daß unser Körper alle n-ten Einheitswurzeln enthält und daß seine Charakteristik n nicht teilt. So gilt:*

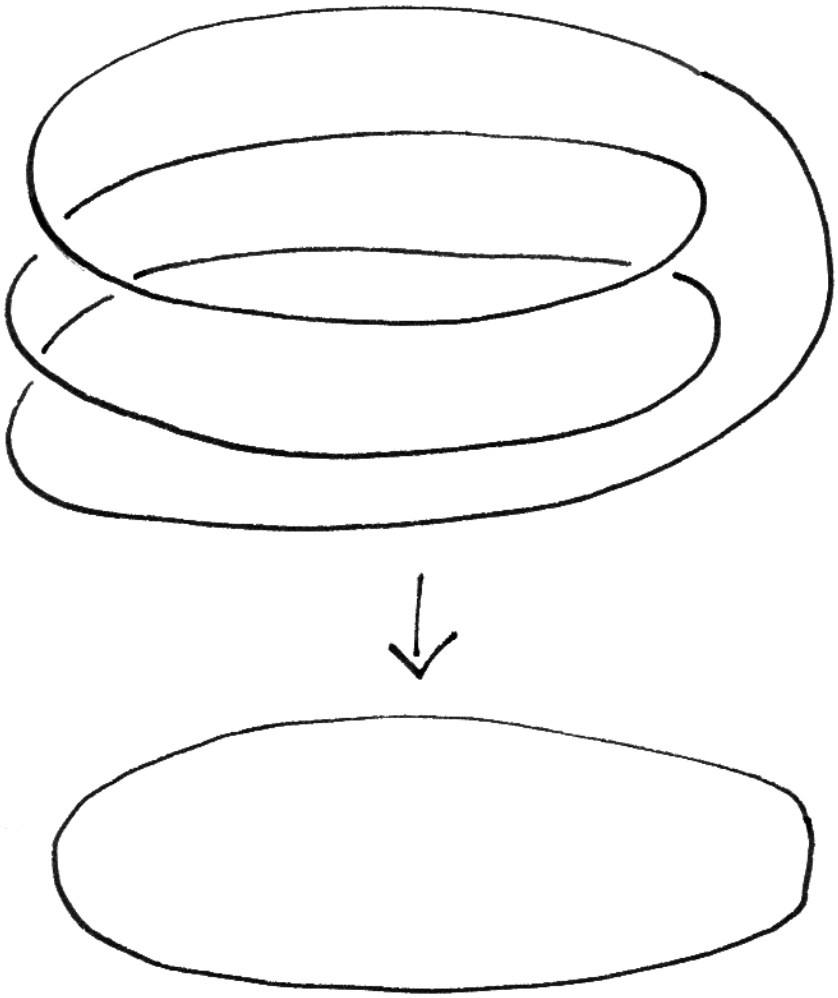
1. *Alle zyklischen Erweiterungen von K vom Grad n entstehen durch die Adjunktion einer n-ten Wurzel;*

2. *Adjungieren wir zu K eine n-te Wurzel, so erhalten wir eine zyklische Erweiterung, deren Grad n teilt.*

6.4.6.4. Der Beweis des ersten Teils beschreibt die Elemente sogar genauer, deren n-te Potenz im Grundkörper liegt und die unsere Erweiterung erzeugen: Es handelt sich genau um die Eigenvektoren eines beliebigen Erzeugers der Galoisgruppe mit einer primitiven n-ten Einheitswurzel als Eigenwert. Im Fall einer quadratischen Erweiterung wissen wir das schon länger.

6.4.6.5 (**Adjunktion von Einheitswurzeln und anderen Wurzeln im Vergleich**). Man beachte den fundamentalen Unterschied zwischen der Erweiterung eines Körpers durch n-te Einheitswurzeln und der Erweiterung eines Körpers mit n-ten Einheitswurzeln durch n-te Wurzeln aus von Eins verschiedenen Elementen: Setzen wir der Einfachkeit halber Charakteristik Null voraus, so ist im ersten Fall nach 6.4.4.2 und 6.4.6.10 die Ordnung der Galois-Gruppe ein Teiler von $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$ und im zweiten Fall ein Teiler von n.

Beweis. 2. Bezeichne $\mu_n \subset K^\times$ die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln. Entsteht $L = K(\alpha)$ durch Adjunktion einer n-ten Wurzel aus $a = \alpha^n \in K$, so sind die Wurzeln des Polynoms $X^n - a$ genau alle $\zeta\alpha$ mit ζ den n-ten Einheitswurzeln und unsere Erweiterung ist folglich Galois. Weiter erhalten wir eine Injektion



Anschauung für die durch Adjunktion einer dritten Wurzel aus T entstehenden Körpererweiterung des Funktionenkörpers $\mathbb{C}(T)$. In 6.4.2.7 wird erklärt, wie auch dies Bild zu interpretieren ist. Ich finde, man sieht in diesem Fall auch recht anschaulich, daß die Galoisgruppe zyklisch von der Ordnung drei ist.

der Galois-Gruppe in die Gruppe μ_n der n-ten Einheitswurzeln, indem wir jedem $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ diejenige Einheitswurzel ζ zuordnen mit $\sigma(\alpha) = \zeta\alpha$, also die Einheitswurzel $\sigma(\alpha)/\alpha$. An dieser Stelle verwenden wir, daß unser Grundkörper K alle n-ten Einheitswurzeln enthält, um nämlich zu zeigen, daß $\sigma \mapsto \sigma(\alpha)/\alpha$ ein Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mu_n$ ist. Da nach 4.4.4.17 jede endliche Gruppe von Einheitswurzeln zyklisch ist, liefert die Adjunktion n-ter Wurzeln in der Tat zyklische Erweiterungen, deren Ordnung n teilt.

1. Sei umgekehrt L/K eine zyklische Erweiterung vom Grad n. Sei $\sigma \neq \mathrm{id}$ ein Erzeuger der Galoisgruppe. Wir fassen σ auf als eine K-lineare Abbildung $\sigma : L \to L$. Da gilt $\sigma^n = \mathrm{id}$ nach Voraussetzung und da $X^n - 1$ in $K[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt und paarweise verschiedene Nullstellen hat, ist σ nach der im Anschluß bewiesenen Proposition 6.4.6.6 diagonalisierbar und seine Eigenwerte sind n-te Einheitswurzeln. Da aus $\sigma(\alpha) = \zeta\alpha$ und $\sigma(\beta) = \eta\beta$ für n-te Einheitswurzeln ζ und η folgt $\sigma(\alpha\beta) = \zeta\eta\alpha\beta$, bilden die Eigenwerte von σ sogar eine Untergruppe $U \subset \mu_n$. Enthielte diese Untergruppe nicht alle n-ten Einheitswurzeln, so gäbe es einen Teiler d von n mit $d \neq n$ derart, daß σ^d als einzigen Eigenwert die 1 hätte. Dann müßte aber σ^d aufgrund seiner Diagonalisierbarkeit bereits selbst die Identität sein im Widerspruch zu unseren Annahmen. Also besteht U aus allen n-ten Einheitswurzeln und es gibt ein von Null verschiedenes $\alpha \in L$ mit $\sigma(\alpha) = \zeta\alpha$ für ζ eine primitive n-ten Einheitswurzel. Wir haben dann notwendig $\sigma(\alpha^n) = \alpha^n$, also $\alpha^n \in K$, aber die Potenzen $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ sind linear unabhängig über K als Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten von σ. Es folgt $[K(\alpha) : K] = n$ und damit $L = K(\alpha)$. □

Proposition 6.4.6.6. *Seien f ein Endomorphismus eines Vektorraums V über einem Körper K und $P \in K[X]$ ein normiertes Polynom ohne mehrfache Nullstellen, das in K vollständig in Linearfaktoren zerfällt und f annulliert, in Formeln $P(f) = 0$. So ist f diagonalisierbar und seine Eigenwerte sind Nullstellen von P.*

Beweis. Man wähle einen festen Vektor $v \in V$ und suche dazu einen normierten Teiler $Q = (X - \lambda_1)\ldots(X - \lambda_r)$ von P kleinstmöglichen Grades r mit $Q(f) : v \mapsto 0$. Dann ist $E := \langle v, f(v), f^2(v), \ldots f^{r-1}(v)\rangle$ ein unter f stabiler Untervektorraum von V. Andererseits ist $(f - \lambda_2)\ldots(f - \lambda_r)v$ nach Annahme nicht Null und folglich ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ_1 in E. In derselben Weise finden wir auch Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Da Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind nach 3.6.6.18, ist damit $f|_E$ diagonalisierbar und v eine Summe von Eigenvektoren von f. Die Proposition folgt. □

Zweiter Beweis. Wenn man bereits weiß, daß ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums genau dann diagonalisierbar ist, wenn sein Minimalpolynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt und keine mehrfachen Nullstellen

hat, so bleibt im Fall eines endlichdimensionalen Raums nichts zu zeigen. Der Fall eines unendlichdimensionalen Raums ist für uns aber eh nicht relevant, und man kann sich von dort auch unschwer auf den Fall eines endlichdimensionalen Raums zurückziehen. □

Dritter Beweis. Der chinesische Restsatz liefert einen Ringisomorphismus

$$K[X]/\langle P\rangle \xrightarrow{\sim} K[X]/\langle X-\lambda_1\rangle \times \ldots \times K[X]/\langle X-\lambda_n\rangle$$

für λ_i die Nullstellen von P. Ist $1 = e_1 + \ldots + e_n$ die zugehörige Zerlegung der Eins in die Einselemente der Faktoren und vereinbaren wir für jeden Vektor $v \in V$ und $Q \in K[X]/\langle P\rangle$ die Notation $Qv = (Q(f))(v)$, so wird $v = e_1 v + \ldots + e_n v$ eine Zerlegung mit $e_i v \in \operatorname{Eig}(f;\lambda_i)$. □

Korollar 6.4.6.7 (Adjunktion primer Wurzeln). *Seien p eine Primzahl und K ein Körper einer Charakteristik $\operatorname{char} K \neq p$, der alle p-ten Einheitswurzeln enthält. Genau dann ist eine echte Erweiterung unseres Körpers Galois vom Grad p, wenn sie durch Adjunktion einer p-ten Wurzel entsteht.*

Beweis. Eine Galoiserweiterung von Primzahlordnung ist notwendig zyklisch, denn jede Gruppe von Primzahlordnung ist zyklisch. Das Korollar folgt damit aus 6.4.6.3. □

Definition 6.4.6.8. Sind in einem Körper Ω zwei Teilkörper $K, L \subset \Omega$ gegeben, so bezeichnet $(KL) \subset \Omega$ den von K und L in Ω erzeugten Teilkörper. Man nennt diesen Körper das **Kompositum von K und L**.

6.4.6.9 (**Diskussion der Notation**). Für das Kompositum ist die abkürzende Notation $(KL) = KL$ üblich. Ich verwende hier etwas pedantisch die Notation (KL), da ja KL in unseren Konventionen 2.2.1.3 a priori nur die Menge aller Produkte bedeutet und man oft runde Klammern als Symbol für die „Erzeugung als Körper“ verwendet.

Satz 6.4.6.10 (Translationssatz der Galoistheorie). *Seien in einem Körper Ω zwei Teilkörper $K, L \subset \Omega$ gegeben. Ist $L \supset (K \cap L)$ eine endliche Galoiserweiterung, so ist auch $(KL) \supset K$ eine endliche Galoiserweiterung und die Restriktion liefert einen Isomorphismus von Galoisgruppen*

$$\operatorname{Gal}((KL)/K) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Gal}(L/K \cap L)$$

6.4.6.11. Insbesondere gilt dieser Situation $[L : K \cap L] = [(KL) : K]$. Ohne die Galois-Bedingung gilt das im Allgemeinen nicht. Als Gegenbeispiel betrachte man in $\Omega := \mathbb{C}$ die von zwei verschiedenen dritten Wurzeln aus 2 über $\mathbb{Q}$ erzeugten Teilkörper K und L. Da jeder von ihnen nur zwei Teilkörper hat, muß hier gelten $K \cap L = \mathbb{Q}$. Ihr Kompositum (KL) hat Grad 6 über $\mathbb{Q}$ und damit Grad 2 über K und über L.

Vorschau 6.4.6.12. Der obige Translationssatz gilt auch ohne die Annahme, unsere Erweiterung sei endlich. Sogar wenn wir nur $L \supset (K \cap L)$ normal annehmen, folgt bereits $(KL) \supset K$ normal und die Restriktion liefert einen Isomorphismus von Galoisgruppen. Wir zeigen das in 6.6.2.2.

Beweis. Mit $L/(K \cap L)$ ist auch $(KL)/K$ erzeugt von endlich vielen separablen Elementen beziehungsweise ein Zerfällungskörper. Also ist $(KL)/K$ Galois und K ist nach 6.4.1.12 der Fixkörper der Galoisgruppe $K = (KL)^G$ für $G = \mathrm{Gal}((KL)/K)$. Da L normal ist über $(K \cap L)$, stabilisieren alle Körperautomorphismen von (KL) über K den Unterkörper L, und die durch Restriktion gegebene Abbildung $\rho : \mathrm{Gal}((KL)/K) \to \mathrm{Gal}(L/(K \cap L))$ zwischen den Galoisgruppen ist offensichtlich injektiv. Der Fixkörper des Bildes von ρ ist aber genau $L^{\rho(G)} = K \cap L$, und das zeigt mit unserem Satz 6.4.1.9 über Galoiserweiterungen durch Gruppenoperationen $\rho(G) = \mathrm{Gal}(L/(K \cap L))$ alias die Surjektivität der Restriktionsabbildung. □

Korollar 6.4.6.13. *Sind in einem Körper Ω Teilkörper M sowie $T \supset S$ gegeben und ist $T \supset S$ endlich und Galois, so ist auch $(TM) \supset (SM)$ endlich und Galois und die Restriktion liefert eine Inklusion von Galoisgruppen*

$$\mathrm{Gal}((TM)/(SM)) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(T/S)$$

Beweis. Wir wenden den Translationssatz an auf $K := T$ und $L := (SM)$. Mit $T \supset S$ ist ja erst recht $T \supset (T \cap (SM))$ Galois, etwa nach der Galoiskorrespondenz. Also ist nach dem Translationssatz 6.4.6.10 auch die Körpererweiterung $(TM) = (T(SM)) \supset (SM)$ Galois und letztere beiden Erweiterungen haben nach dem Translationssatz dieselbe Galoisgruppe. □

Definition 6.4.6.14. Sei L/K eine Körpererweiterung. Wir nennen L eine **Radikalerweiterung von** K, wenn es eine Körperkette

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_r = L$$

gibt derart, daß der nächstgrößere Körper jeweils entsteht durch Adjunktion einer Wurzel, daß es also in Formeln jeweils $\alpha_i \in K_i$ und $n_i \geq 2$ gibt derart, daß gilt $\alpha_i^{n_i} \in K_{i-1}$ und $K_i = K_{i-1}(\alpha_i)$.

6.4.6.15. Das Wort „Radikal“ ist der lateinische Ausdruck für „Wurzel“. Unsere Radikalerweiterungen würde man also auf Deutsch bezeichnen als „Erweiterungen, die durch sukzessives Wurzelziehen entstehen“.

Definition 6.4.6.16. Sei M/K eine Körpererweiterung. Wir sagen, ein Element $\alpha \in M$ läßt sich **darstellen durch Radikale über** K, wenn sich $K(\alpha)$ in eine Radikalerweiterung von K einbetten läßt.

Beispiel 6.4.6.17. Die folgende reelle Zahl läßt sich darstellen durch Radikale über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen:

$$\frac{\sqrt[7]{\sqrt[5]{6}+3}+13}{\sqrt[2]{3}+8} - \sqrt[17]{19876} + \sin(\pi/7)$$

Definition 6.4.6.18. Seien K ein Körper und $P \in K[X]\backslash 0$ ein von Null verschiedenes Polynom. Wir sagen, die Gleichung $P(X) = 0$ läßt sich **auflösen durch Radikale**, wenn sich alle Nullstellen des Polynoms P in seinem Zerfällungskörper durch Radikale über K darstellen lassen.

6.4.6.19. Ist unser Polynom irreduzibel, so läßt es sich offensichtlich genau dann auflösen durch Radikale, wenn sich eine Nullstelle durch Radikale über K darstellen läßt.

6.4.6.20. Ich erinnere, daß eine Gruppe G nach 6.1.3.9 **auflösbar** heißt, wenn es eine Folge von Untergruppen $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_r = 1$ gibt mit G_i normal in G_{i-1} und G_{i-1}/G_i abelsch für $1 \leq i \leq r$.

Proposition 6.4.6.21 (**Radikalerweiterungen und Galoiserweiterungen**). *Sei K ein Körper der Charakteristik* $\operatorname{char} K = 0$ *und sei L/K eine Körpererweiterung von K. So sind gleichbedeutend:*

1. *Die Erweiterung L läßt sich einbetten in eine Radikalerweiterung des Körpers K;*

2. *Die Erweiterung L läßt sich einbetten in eine endliche Galoiserweiterung des Körpers K mit auflösbarer Galoisgruppe.*

Beweis. $2 \Rightarrow 1$. Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung mit auflösbarer Galoisgruppe $G = \operatorname{Gal}(L/K)$. So gibt es eine Folge von Untergruppen

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_r = 1$$

mit G_i normal in G_{i-1} und G_{i-1}/G_i zyklisch von Primzahlordnung für $1 \leq i \leq r$. Die zugehörige Kette von Fixkörpern ist eine Kette von zyklischen Erweiterungen von Primzahlordnung

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_r = L$$

Adjungieren wir eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel ζ, so erhalten wir nach dem Translationssatz 6.4.6.10 oder besser seinem Korollar 6.4.6.13 und zusätzlich unserer Diskussion von Kreisteilungserweiterungen für den ersten Schritt wieder eine Kette

$$K = K_0 \subset K_0(\zeta) \subset K_1(\zeta) \subset \ldots \subset K_r(\zeta) = L(\zeta)$$

von Galoiserweiterungen. Nach unserem Satz über Adjunktion primer Wurzeln 6.4.6.7 ensteht hier auch jede höhere Stufe durch Adjunktion einer geeigneten Wurzel aus der vorherigen Stufe. Mithin läßt sich L in eine Radikalerweiterung von K einbetten, nämlich in die Radikalerweiterung $L(\zeta)$.

$1 \Rightarrow 2$. Sei L/K eine Radikalerweiterung. Offensichtlich können wir L auch erhalten, indem wir sukzessive Wurzeln von Primzahlordnung $\sqrt[p_i]{a_i}$ adjungieren, für geeignete Primzahlen p_i. Es gibt also eine Körperkette

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_r = L$$

sowie geeignete $\alpha_i \in K_i$ und Primzahlen p_i derart, daß für alle $i \geq 1$ gilt $K_i = K_{i-1}(\alpha_i)$ und $\alpha_i^{p_i} \in K_{i-1}$. Ist n das Produkt dieser p_i und adjungieren wir zu L eine primitive n-te Einheitswurzel ζ, so ist im Körperturm

$$K = K_0 \subset K_0(\zeta) \subset K_1(\zeta) \subset \ldots \subset K_r(\zeta) = L(\zeta)$$

jeder Schritt eine abelsche Erweiterung: Das folgt, indem wir den Translationssatz der Galoistheorie oder besser sein Korollar 6.4.6.13 im ersten Schritt auf die nach 6.4.4.2 abelsche Kreisteilungserweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta)$ anwenden und danach auf die $K_i \subset K_{i+1}$. Vergrößern wir nun $L(\zeta)$ zu einer normalen Erweiterung N/K und darin das Kompositum $M \subset N$ aller $\varphi(L(\zeta))$ mit $\varphi \in \mathrm{Ring}^K(L(\zeta), N)$, also in anderer Terminologie die normale Hülle M von $L(\zeta)$, so ist M eine Galoiserweiterung von K und es gibt einen Körperturm

$$K = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_t = M$$

derart, daß jede Stufe eine abelsche Erweiterung ist: Um solch einen Körperturm anzugeben, zählen wir unsere φ auf als $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, beginnen mit $M_1 = M_0(\zeta)$ und adjungieren der Reihe nach $\varphi_1(\alpha_1)$, $\varphi_1(\alpha_2), \ldots$, $\varphi_1(\alpha_r)$, $\varphi_2(\alpha_1)$, $\varphi_2(\alpha_2)$, $\ldots, \varphi_2(\alpha_r), \ldots$, $\varphi_m(\alpha_1)$, $\varphi_m(\alpha_2), \ldots$, $\varphi_m(\alpha_r)$. Die Galoiskorrespondenz zeigt dann, daß die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(M/K)$ auflösbar ist. □

Satz 6.4.6.22 (**Auflösbarkeit von Gleichungen durch Radikale**). *Seien K ein Körper der Charakteristik* $\mathrm{char}\, K = 0$ *und $P \in K[X] \backslash 0$ ein von Null verschiedenes Polynom. So sind gleichbedeutend:*

1. *Die Gleichung $P(X) = 0$ läßt sich auflösen durch Radikale;*
2. *Die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von P über K ist auflösbar.*

Beweis. Die Gleichung $P(X) = 0$ läßt sich auflösen durch Radikale genau dann, wenn sich der Zerfällungskörper L unseres Polynoms in eine Radikalerweiterung von K einbetten läßt. Nach Proposition 6.4.6.21 ist das gleichbedeutend dazu,

daß sich L in eine endliche Galoiserweiterung M des Körpers K mit auflösbarer Galoisgruppe einbetten läßt. Und da L schon selbst Galois ist und da seine Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ ein Quotient der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(M/K)$ ist, und da nach 6.1.3.15 Quotienten auflösbarer Gruppen auflösbar sind, ist das auch gleichbedeutend dazu, daß L selbst eine auflösbare Galoisgruppe hat. □

Proposition 6.4.6.23. *Hat ein irreduzibles Polynom fünften Grades aus $\mathbb{Q}[X]$ genau drei reelle und zwei komplexe Nullstellen, so ist seine Galoisgruppe die volle symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_5$ und ist damit nicht auflösbar.*

Beweis. Die komplexe Konjugation τ vertauscht zwei Nullstellen und läßt die übrigen fest. Da die Galoisgruppe G transitiv auf der 5-elementigen Menge der Nullstellen operiert, teilt nach der Bahnformel 5 die Gruppenordnung und es gibt nach 6.1.4.8 ein $g \in G$ von der Ordnung $\operatorname{ord} g = 5$. Man sieht etwa mit 3.6.1.10, daß g und τ schon ganz $\mathcal{S}_5$ erzeugen. □

Beispiel 6.4.6.24. Das Polynom $X(X^2+4)(X^2-4) = X^5 - 16X$ hat genau drei reelle Nullstellen und Extrema bei $X = \pm 2/\sqrt[4]{5}$ mit Werten $\pm 32(\frac{1}{5} - 1)1/\sqrt[4]{5}$, die im Absolutbetrag größer sind als zwei. Das Polynom $X^5 - 16X + 2$ hat also ebenfalls genau drei reelle und zwei komplexe Nullstellen, und es ist darüber hinaus irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ nach dem Eisensteinkriterium 6.2.8.2. Seine Galoisgruppe ist nach 6.4.6.23 folglich nicht auflösbar, und damit kann nach 6.4.6.22 die Gleichung $X^5 - 16X + 2 = 0$ nicht durch Radikale gelöst werden.

Beispiel 6.4.6.25. Das Polynom $X^5 - 2$ in $\mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel nach dem Eisensteinkriterium 6.2.8.2. Es ist jedoch durchaus auflösbar durch Radikale.

6.4.6.26 (**Adjunktion höherer Wurzeln**). Seien K ein Körper und $a \in K$ ein Element und $n \geq 1$. Ich will diskutieren, wie eine Körpererweiterung $K(\alpha)$ mit $\alpha^n = a$ und der Zerfällungskörper von $X^n - a$ aussehen können. Zunächst einmal muß ein Polynom der Gestalt $X^n - a$ nicht irreduzibel sein, wie bereits $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ zeigt. Im Zerfällungskörper von $X^n - a$ müssen auch keineswegs alle n-ten Wurzeln von a isomorphe Teilkörper erzeugen, etwa haben wir $X^4 - 9 = (X^2+3)(X^2-3)$ und $\mathbb{Q}(\mathrm{i}\sqrt{3})$ ist nicht isomoph zu $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Übungen

Übung 6.4.6.27. Gegeben Primzahlen p, q ist die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers L von $X^p - q \in \mathbb{Q}[X]$ isomorph zum semidirekten Produkt $\mathbb{F}_p \rtimes \mathbb{F}_p^\times$ in Bezug auf die offensichtliche Wirkung von $\mathbb{F}_p^\times$ auf $\mathbb{F}_p$. Hinweis: Mit 6.4.7.8 kann man das sogar allgemeiner zeigen für $q \in \mathbb{Q}^\times \backslash (\mathbb{Q}^\times)^p$. Wählt man zu einem Erzeuger von $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})/\mathbb{Q})$ ein Urbild $\rho \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, so ist $\sigma := \rho^p$ von der Ordnung $p-1$ und restringiert zu einem Erzeuger von $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})/\mathbb{Q})$.

Übung 6.4.6.28. Seien in einem Körper Ω zwei Teilkörper $K, L \subset \Omega$ gegeben. Sind $K \supset (K \cap L)$ und $L \supset (K \cap L)$ endliche Galoiserweiterungen, so ist auch $(KL) \supset (K \cap L)$ eine endliche Galoiserweiterung und die Restriktionen liefern einen Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{Gal}((KL)/K \cap L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K/K \cap L) \times \mathrm{Gal}(L/K \cap L)$$

6.4.7 Lösung kubischer Gleichungen

6.4.7.1. Jetzt interessieren wir uns für **kubische Gleichungen**, also Gleichungen der Gestalt

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Ihre Galoisgruppen sind auflösbar als Untergruppen von $\mathcal{S}_3$, also müssen sich kubische Gleichungen zumindest in Charakteristik Null durch Radikale lösen lassen. Um explizite Lösungsformeln anzugeben, bringen wir zunächst durch die Substitution $x = y - a/3$ den quadratischen Term zum Verschwinden und gehen über zu einer Gleichung der Gestalt $y^3 + py + q = 0$. Für die Lösungen derartiger Gleichungen gibt der folgende Satz eine explizite Formel.

Satz 6.4.7.2. *Gegeben komplexe Zahlen p, q erhält man genau die Lösungen der Gleichung $y^3 + py + q = 0$, wenn man in der* **Cardano'schen Formel**

$$y_{1/2/3} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

bei beiden Summanden dieselbe Quadratwurzel fest wählt und dann die beiden Kubikwurzeln so zieht, daß ihr Produkt gerade $-p/3$ ist.

6.4.7.3. Dasselbe gilt sogar für jeden beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper einer von zwei und drei verschiedenen Charakteristik. Dieser Trick war bei den Italienern schon im 16. Jahrhundert bekannt und wurde von den Experten sorgsam geheimgehalten. Diese schlagende Anwendung der komplexen Zahlen war der Ausgangspunkt ihres Siegeszugs in der höheren Mathematik. Selbst wenn alle drei Nullstellen unserer kubischen Gleichung reell sind, ist es nicht möglich, unser Lösungsverfahren ohne die Verwendung der komplexen Zahlen anzuwenden. Die Bemerkung 6.4.7.10 zeigt, daß der Übergang zu komplexen Zahlen hier wirklich notwendig und nicht etwa nur unserer Ungeschicklichkeit geschuldet ist.

Beweis. Daß wir auf diese Weise wirklich nur Lösungen unserer Gleichung erhalten, kann man unschwer nachrechnen. Daß wir alle Lösungen erhalten, folgt auch recht schnell: Stimmen zwei derartige Lösungen überein, sagen wir $u + v =$

$\zeta u + \zeta^{-1} v$ für verträgliche Wahlen u und v der beiden Kubikwurzeln und eine primitive dritte Einheitswurzel ζ, so folgern wir $(1-\zeta)u = (\zeta^{-1}-1)v$, also $\zeta u = v$, also $u^3 = v^3$, damit das Verschwinden der Diskriminante $27q^2 + 4p^3$, und damit gibt es auch nur höchstens zwei Lösungen nach 6.2.9.17. Stimmen alle drei so konstruierten Lösungen überein, so folgt zusätzlich $\zeta^{-1}u = v$, also $u = v = 0$ und $q = p = 0$ und unsere Gleichung hat in der Tat als einzige Lösung $y = 0$. $\square$

6.4.7.4. Wie wir sehen, ist es nicht schwer, die Cardano'sche Formel nachzuprüfen. Ich will nun erklären, wie man durch Galois-Theorie auf diese Formel geführt wird, und beginne mit einer Vorbemerkung zur linearen Algebra.

6.4.7.5 (**Zerlegung unter Endomorphismus endlicher Ordnung**). Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung und $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n = \mathrm{id}$. Die Charakteristik $\operatorname{char} K$ sei kein Teiler von n und das Polynom $X^n - 1$ zerfalle vollständig in K. Wir wissen etwa aus 6.4.6.6, daß sich jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als eine Summe von Elementen der Eigenräume von f zu den verschiedenen Eigenwerten darstellen lassen muß. Hier geben wir nun diese Darstellung ganz explizit an. Gegeben eine n-te Einheitswurzeln $\zeta \in K$ setzen wir dazu

$$v_\zeta := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \zeta^i f^i(v)$$

So gilt $f(v_\zeta) = \zeta^{-1} v_\zeta$ alias $v_\zeta \in \operatorname{Eig}(f; \zeta^{-1})$ aus $\sum_{\zeta^n=1} \zeta^i = 0$ für $0 < i < n$ folgt

$$v = \sum_{\zeta^n=1} v_\zeta$$

Das ist also die Darstellung von v als Summe von Elementen der jeweiligen Eigenräume von f.

6.4.7.6 (**Herleitung der Cardano'schen Formeln**). Sei nun L/K eine endliche Galoiserweiterung mit der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_3$ als Galoisgruppe. Die geraden Permutationen bilden einen Normalteiler A_3 und dessen Fixkörper ist ein Zwischenkörper $Q \subset L$ mit L/Q Galois vom Grad 3 und Q/K Galois vom Grad 2. Gilt $\operatorname{char} K \neq 3$ und enthält K eine nichttriviale dritte Einheitswurzel ζ und ist σ ein Erzeuger der Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L/Q)$, so können wir nach 6.4.7.5 und in der Notation von dort jedes $\alpha \in L$ schreiben als

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_\zeta + \alpha_{\zeta^2}$$

mit $\alpha_1 \in Q$ und $\alpha_\zeta^3, \alpha_{\zeta^2}^3 \in Q$ und bei uns auch $\alpha_\zeta \alpha_{\zeta^2} \in Q = L^\sigma$. Jetzt nehmen wir speziell an, L sei der Zerfällungskörper eines Polynoms $Y^3 + pY + q \in K[Y]$ und es habe die Zerlegung

$$Y^3 + pY + q = (Y - \alpha)(Y - \beta)(Y - \gamma)$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in L$. Dann war unser Polynom notwendig irreduzibel und separabel und die Operation der Galoisgruppe auf den Nullstellen induziert einen Isomorphismus

$$\mathrm{Gal}(L/K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}^{\times}\{\alpha, \beta, \gamma\}$$

zwischen der Galoisgruppe und der Gruppe aller Permutationen der drei Nullstellen, deren Bezeichnung wir so wählen können, daß gilt $\sigma(\alpha) = \beta$ und $\sigma(\beta) = \gamma$. Da nun der quadratische Term unseres kubischen Polynoms nach Annahme verschwindet, gilt

$$\begin{array}{rcl} \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha & = & p \\ -\alpha\beta\gamma & = & q \quad = \quad \alpha^2\beta + \beta^2\alpha \end{array}$$

So erhalten wir $\alpha_1 = 0$ und obige Gleichung spezialisiert zu

$$\alpha = u + v$$

mit $u^3, v^3 \in Q$ und

$$\begin{array}{rcl} 3u & = & \alpha + \zeta\beta + \zeta^2\gamma \quad = \quad (1-\zeta^2)\alpha + (\zeta - \zeta^2)\beta \\ 3v & = & \alpha + \zeta^2\beta + \zeta\gamma \quad = \quad (1-\zeta)\alpha + (\zeta^2 - \zeta)\beta \end{array}$$

Diese Gleichungen liefern

$$\begin{array}{rcl} 9uv & = & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + (\zeta + \zeta^2)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \\ & = & (\alpha + \beta + \gamma)^2 + (\zeta + \zeta^2 - 2)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \\ & = & -3p \end{array}$$

alias $uv = -p/3$. Weiter kann man das nichttriviale Element τ der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(Q/K)$ erhalten als die Einschränkung von $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$ mit $\tau(\alpha) = \beta$ und $\tau(\beta) = \alpha$ und unter der zusätzlichen Annahme $\mathrm{char}\, K \neq 2$ erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} u^3 & = & a + b \\ v^3 & = & c + d \end{array}$$

mit $a, c, b^2, d^2 \in K$ und

$$\begin{array}{rcl} 2a & = & (u^3 + \tau(u^3)) \qquad 2b \quad = \quad (u^3 - \tau(u^3)) \\ 2c & = & (v^3 + \tau(v^3)) \qquad 2d \quad = \quad (v^3 - \tau(v^3)) \end{array}$$

Von b wissen wir a priori, daß es ein Vielfaches von $E := (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) = 2\alpha^3 + 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - 2\beta^3$ sein muß, da dies Element auch invariant ist unter σ und antiinvariant unter τ. Bereits im Zusammenhang mit symmetrischen Polynomen

in 6.2.9.17 hatten wir $E^2 = -4p^3 - 27q^2$ gefunden. Wir rechnen fleißig weiter und erhalten $3u/(1-\zeta^2) = \alpha - \zeta^2\beta$ und dann

$$\begin{array}{rcl} 9u^3/(\zeta-\zeta^2) & = & \alpha^3 - 3\zeta^2\alpha^2\beta + 3\zeta\alpha\beta^2 - \beta^3 \\ 9\tau(u^3)/(\zeta-\zeta^2) & = & -\alpha^3 + 3\zeta\alpha^2\beta - 3\zeta^2\alpha\beta^2 + \beta^3 \\ 18a/(\zeta-\zeta^2) & = & 3(\zeta-\zeta^2)(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2) \\ a & = & -q/2 \\ 18b/(\zeta-\zeta^2) & = & 2\alpha^3 + 3(\alpha^2\beta - \alpha\beta^2) - 2\beta^3 \\ b & = & (\zeta-\zeta^2)E/18 \end{array}$$

unter Beachtung von $q = -\alpha\beta\gamma = \alpha^2\beta + \beta^2\alpha$ und $(\zeta-\zeta^2)^2 = -3$ im vorvorletzten Schritt. Die Formeln für v unterscheiden sich von denen für u nur dadurch, daß darin ζ und ζ^2 vertauscht sind. Dieselbe Rechnung liefert damit

$$\begin{array}{rcl} c & = & -q/2 \\ d & = & (\zeta^2-\zeta)E/18 \end{array}$$

So erhalten wir wegen $a = c$ und $d = -b$ schließlich

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & u + v \\ & = & \sqrt[3]{-(q/2)+b} + \sqrt[3]{-(q/2)-b} \end{array}$$

mit der Maßgabe, daß die beiden dritten Wurzeln mit $uv = -p/3$ zu wählen sind und daß gilt $b^2 = -3E^2/3^4 2^2 = (p/3)^3 + (q/2)^2$. Das sind genau die Cardano'schen Formeln.

Ergänzung 6.4.7.7 (**Die Cardano'schen Formeln für Kringe**). Ist unser Polynom nicht irreduzibel oder besteht seine Galoisgruppe nur aus den drei geraden Permutationen der drei Nullstellen, so funktioniert das obige Argument nur noch in mehr oder weniger stark modifizierter Form. Wir können aber ganz allgemein den Kring $k := \mathbb{Z}[2^{-1}, 3^{-1}, \zeta]$ betrachten für eine von Eins verschiedene dritte Einheitswurzel ζ und auf dem Polynomring

$$L := k['\alpha, \beta, \gamma]$$

die Gruppe $\mathcal{S}_3$ der Permutationen der drei Variablen operieren lassen. Dann ist der Invariantenring der Polynomring $K := k['p, q, r]$ mit

$$(Y-\alpha)(Y-\beta)(Y-\gamma) = Y^3 + rY^2 + pY + q$$

Die Injektion $K \hookrightarrow L$ induziert auf den Quotienten beider Ringe nach dem von $-r = \alpha+\beta+\gamma$ erzeugt Ideal wieder eine Injektion $\bar{K} \hookrightarrow \bar{L}$ und $\mathcal{S}_3$ operiert auch auf dem Quotienten und $\bar{K}$ ist der Invariantenring und wir haben $\bar{L} = k['\alpha, \beta]$

sowie $\bar{K} = k'[p,q]$ mit der Bezeichnung $\alpha, \beta, \gamma, p, q$ für die Bilder dieser Elemente in den jeweiligen Quotientenringen. In diesem Kontext bleiben alle unsere Rechnungen sinnvoll und wir erhalten $\alpha = u + v$ mit $uv = -p/3$ und $u^3 = -(q/2) + b$ sowie $v^3 = -(q/2) - b$ mit $b^2 = (p/3)^3 + (q/2)^2$. Hierdurch sind zwar u und v nicht eindeutig bestimmt, aber wenn wir eine Wahl fest treffen und dann $\alpha := u+v$ sowie $\beta := \zeta u + \zeta^{-1} v$ sowie $\gamma := \zeta^{-1} u + \zeta v$ setzen, so prüft man in $\bar{L}$ der Tat

$$(Y - \alpha)(Y - \beta)(Y - \gamma) = Y^3 + pY + q$$

Alle diese Formeln bleiben nun natürlich richtig unter jedem Homomorphismus von $\bar{L}$ in einen beliebigen Körper oder sogar beliebigen Ring und bedeuten die Cardano'schen Formeln in großer Allgemeinheit. Wir haben bei der Herleitung sogar den Vorteil, daß wir zusätzlich den Ringautomorphismus $\kappa : k \xrightarrow{\sim} k$ mit $\kappa(\zeta) = \zeta^2$ und $\kappa^2 = \mathrm{id}$ zur Verfügung haben. Offensichtlich gilt dann $\kappa(u) = v$ und das formalisiert die Beobachtung in obiger Rechnung, daß „für v alles genauso geht wie für u, nur mit ζ und ζ^2 vertauscht".

Ergänzung 6.4.7.8 (**Ziehen primer Wurzeln**). Gegeben ein Körper K und eine Primzahl p ist für $a \in K$ das Polynom $X^p - a$ entweder irreduzibel oder es besitzt eine Nullstelle. In der Tat zerfällt unser Polynom in seinem Zerfällungskörper für eine p-te Einheitswurzel ζ als $X^p - a = \prod_{\nu=1}^{p}(X - \zeta^\nu b)$. Zerfällt es nun in K als $X^p - a = fg$ mit f, g normiert und $0 < d := \operatorname{grad} f < p$, so kann man aus dem konstanten Term von f und a eine p-te Wurzel von a zusammenmultiplizieren. In der Tat hat der konstante Term c von f die Gestalt $c = (-1)^d \xi b^d$ für eine p-te Einheitswurzel ξ. Es folgt $c^p = b^{dp} = a^d$. Damit führt der Ansatz $(c^n a^m)^p = a$ zur Gleichung $a^{nd+mp} = a$ alias $nd + mp = 1$ und jede Lösung $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ liefert für $a \neq 0$ eine p-ten Wurzel $c^n a^m$ von a in K. Der Fall $a = 0$ ist eh unproblematisch.

Ergänzung 6.4.7.9 (**Ziehen beliebiger Wurzeln**). In [Rom06, 14.1.4] findet man ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für die Irreduzibilität des Polynoms $T^n - a \in K[T]$ gegeben $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig und K ein beliebiger Körper und $a \in K$. Daß das nicht ganz trivial sein kann, zeigt die Zerlegung

$$X^4 + 4a^4 = \big((X^2 + 2a^2) + 2aX\big)\big((X^2 + 2a^2) - 2aX\big)$$

Dort können wir natürlich noch $X = T^r$ substitutieren. Weiter ist $X^m - a^m$ offensichtlich durch $X - a$ teilbar, und auch diese Teilbarkeit bleibt bei der Substitution $X = T^r$ erhalten. Gilt also $4|n$ und $a \in -4K^4$, so ist $T^n - a$ nicht irreduzibel, und gibt es $m > 1$ mit $m|n$ und $a \in K^m$, so ist $T^n - a$ auch nicht irreduzibel. Das Kriterium sagt nun, daß wenn keine dieser beiden Bedingungen zutrifft, daß dann unser Polynom $T^n - a$ auch in der Tat irreduzibel ist.

6.4.7.10 (**Notwendigkeit des Ausgreifens in die komplexen Zahlen**). Sei eine kubische Gleichung $X^3+pX+q=0$ mit $p,q \in \mathbb{R}$ gegeben, die drei reelle Lösungen besitzt, von denen jedoch keine zum Koeffizientenkörper $K := \mathbb{Q}(p,q) \subset \mathbb{R}$ gehört, etwa $X^3 - \frac{3}{4}X + \frac{3}{16}$. Wir zeigen, daß es dann nicht möglich ist, eine Kette

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_r \subset \mathbb{R}$$

von Teilkörpern von $\mathbb{R}$ so zu finden, daß unser Polynom in K_r vollständig zerfällt und K_{i+1} jeweils durch Adjunktion der positiven l_i-ten Wurzel aus einem positiven Element $a_i \in K_i$ entsteht, in Formeln

$$K_{i+1} = K_i(\sqrt[l_i]{a_i})$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir hier die l_i als prim annehmen. Weiter ist das Quadrat $\Delta = -4p^3 - 27q^2$ des Produkts der Differenzen der Nullstellen aus 6.2.9.17 in unserem Fall notwendig positiv und wir dürfen $K_1 = K(\sqrt{\Delta})$ annehmen. Unser irreduzibles kubisches Polynom ist dann auch irreduzibel über K_1, denn es kann erst in einer Körpererweiterung vom Grad Drei eine Nullstelle haben. Seinen Zerfällungskörper Z über K können wir in eine Körperkette $K \subset K_1 \subset Z \subset \mathbb{R}$ einfügen und Z/K_1 ist dann Galois vom Grad $[Z : K_1] = 3$. Gegeben eine Wurzel $\alpha \in \mathbb{R}$ unseres kubischen Polynoms mit $\alpha \notin K_s$ ist für $s \geq 1$ nach dem Translationssatz also $K_s(\alpha)/K_s$ Galois vom Grad Drei. Für r kleinstmöglich mit $\alpha \in K_r$ muß damit $[K_r : K_{r-1}]$ ein Vielfaches von Drei sein. Wegen $K_r = K_{r-1}(\sqrt[l]{a})$ mit $a = a_r$ und $l = l_r$ prim muß aber nach 6.4.7.8 unser Polynom $X^l - a$ irreduzibel gewesen sein in $K_{r-1}[X]$ und wir folgern $[K_r : K_{r-1}] = l$. Zusammen zeigt das $l = 3$ und $K_r = K_{r-1}(\alpha)$ und damit K_r/K_{r-1} Galois vom Grad drei. Dann hinwiederum muß $X^3 - a$ in K_r vollständig in Linearfaktoren zerfallen und K_r muß drei dritte Einheitswurzeln enthalten und das steht im Widerspruch zu unserer Annahme $K_r \subset \mathbb{R}$. Der Übergang ins Komplexe oder alternativ die Verwendung trigonometrischer Funktionen zu ihrer Lösung „durch Radikale“ ist in anderen Worten unumgänglich. Lateinisch spricht man bei reellen Gleichungen dritten Grades dieser Art vom **casus irreducibilis**.

Übungen

Ergänzende Übung 6.4.7.11. Sei $n \geq 1$ und K ein Körper, der alle n-ten Einheitswurzeln enthält und dessen Charakteristik n nicht teilt. Man zeige: Gegeben $a \in K$ ist das Polynom $X^n - a$ irreduzibel in $K[X]$ genau dann, wenn a für keinen Teiler $d > 1$ von n eine d-te Wurzel in K besitzt.

Übung 6.4.7.12. Ein irreduzibles Polynom dritten Grades der Gestalt $Y^3 + pY + q$ mit Koeffizienten in einem Körper k der Charakteristik $\operatorname{char} k \neq 2$ hat genau dann

die Galoisgruppe $\mathcal{S}_3$ über k, wenn $-4p^3 - 27q^2$ kein Quadrat in k ist. In unserer Terminologie ist $-4p^3 - 27q^2$ das Negative der Diskriminante unseres Polynoms, aber hier sind auch andere Konventionen verbreitet.

Beispiel 6.4.7.13. Das Polynom $X^3 - 2$ hat nach 6.4.1.20 oder 6.4.7.12 die Galoisgruppe $\mathcal{S}_3$ über $\mathbb{Q}$, denn $-108 = (-27)4$ ist kein Quadrat in $\mathbb{Q}$. Dasselbe Polynom hat jedoch Galoisgruppe A_3 über $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1})$ nach unserem Satz über Radikalerweiterungen 6.4.6.3. Damit alles zusammenpaßt, muß -108 ein Quadrat im dritten Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1})$ sein. Zum Glück stimmt das auch, für ζ eine primitive dritte Einheitswurzel gilt nämlich $(\zeta - \zeta^{-1})^2 = -3$.

6.4.8 Einheitswurzeln und reelle Radikale*

6.4.8.1. Die Tabelle

	sin	cos
π	0	-1
$\pi/2$	1	0
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/5$	$\sqrt{5-\sqrt{5}}/2\sqrt{2}$	$(\sqrt{5}+1)/4$
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/7$	?	?
$\pi/8$	$\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{2}}$
$\pi/9$	?	?
$\pi/10$	$(\sqrt{5}-1)/4$	$\sqrt{5+\sqrt{5}}/2\sqrt{2}$
$\pi/11$	?	?

aus 10.4.5.33 zeigt einige $n \geq 1$, für die $\sin(\pi/n)$ und $\cos(\pi/n)$ in geschlossener Form als „reelle algebraische Ausdrücke“ dargestellt werden können, ohne daß wir bei der Berechnung der besagten Ausdrücke den Körper der reellen Zahlen verlassen müßten. Sie zeigt auch einige Fragezeichen für Fälle, in denen keine derartige Darstellung zur Verfügung steht. Wir zeigen im Folgenden, daß das nicht etwa an unserer Ungeschicklichkeit liegt, sondern daß es derartige reelle Darstellungen für die meisten n schlicht nicht gibt. Diese Aussage gilt es zunächst einmal zu präzisieren.

Definition 6.4.8.2. Gegeben eine Körpererweiterung $F \subset E$ definieren wir den **Radikalabschluß von** F **in** E als den kleinsten Zwischenkörper $R \subset E$ derart, daß für alle $p \geq 1$ gilt $(x^p \in R) \Rightarrow (x \in R)$. Wir notieren ihn

$$R = \mathrm{rad}(F \subset E)$$

Beispiel 6.4.8.3. Die folgende reelle Zahl gehört zum Radikalabschluß des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen im Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen:

$$\frac{\sqrt[7]{\sqrt[5]{6}+3}+13}{\sqrt[2]{3}+8} - \sqrt[17]{19876}$$

Definition 6.4.8.4. Gegeben eine Körpererweiterung $F \subset E$ definieren wir den **Quadratwurzelabschluß von** F **in** E als den kleinsten Zwischenkörper $Q \subset E$ derart, daß gilt $(x^2 \in Q) \Rightarrow (x \in Q)$. Wir notieren ihn

$$Q = \mathrm{quad}(F \subset E)$$

6.4.8.5. Den Quadratwurzelabschluß $\mathrm{quad}(\mathbb{Q} \subset \mathbb{C})$ der rationalen Zahlen in den komplexen Zahlen hatten wir bereits in 6.3.6.2 betrachtet und gezeigt, daß er genau aus allen konstruierbaren Zahlen besteht.

Satz 6.4.8.6 (Markus Rost). *Der Radikalabschluß der rationalen Zahlen in den reellen Zahlen trifft jeden Kreisteilungskörper nur innerhalb des Quadratwurzelabschlusses der rationalen Zahlen in den reellen Zahlen. Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *gilt also in Formeln*

$$\mathrm{rad}(\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1}) \quad \subset \quad \mathrm{quad}(\mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$$

Ergänzung 6.4.8.7. Für jeden Teilkörper $K \subset \mathbb{R}$ und jedes $n \geq 1$ gilt allgemeiner $\mathrm{rad}(K \subset \mathbb{R}) \cap K(\sqrt[n]{1}) \subset \mathrm{quad}(K \subset \mathbb{R})$. Der Beweis ist im wesentlichen derselbe.

6.4.8.8. Der Satz von Rost zeigt, daß $\cos(2\pi/7)$ nicht zum Radikalabschluß von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ gehören kann. In der Tat gehört diese reelle Zahl zu einem Kreisteilungskörper und müßte nach dem Satz von Rost anderfalls sogar zum Quadratwurzelabschluß von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ gehören. Das steht jedoch im Widerspruch zu unserer Erkenntnis, daß das regelmäßige Siebeneck nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. Weiter ist $\cos(2\pi/7)$ nach 6.4.1.21 auch eine von drei reellen Nullstellen des Polynoms $X^3 + X^2 - 2X - 1$. Wir sehen so ein weiteres Mal, daß kubische Gleichungen mit rationalen Koeffizienten, selbst wenn sie drei reelle Nullstellen haben, im allgemeinen nicht durch „algebraische Rechenoperationen im Rahmen der reellen Zahlen“ gelöst werden können. Im übrigen ist $\cos(2\pi/7)$ ein Erzeuger des Schnitts des siebten Kreisteilungskörpers mit der reellen Achse, dieser Schnitt muß Grad $6/2 = 3$ über $\mathbb{Q}$ haben, und besagtes Polynom ist gerade das Minimalpolynom von $\cos(2\pi/7)$ über $\mathbb{Q}$.

6.4.8.9. Genau dann gehört $\sin(\pi/n)$ zum Radikalabschluß der rationalen Zahlen in den reellen Zahlen, wenn das regelmäßige n-Eck konstruierbar alias $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz ist. In der Tat liegt $\sin(\pi/n)$ sicher in einem Kreisteilungskörper. Liegt $\sin(\pi/n)$ auch im Radikalabschluß $\mathrm{rad}(\mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$ der rationalen in den reellen Zahlen, so folgt $\sin(\pi/n) \in \mathrm{quad}(\mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$ aus dem Satz 6.4.8.6 von Rost. Damit ist $\sin(\pi/n)$ aber nach 6.3.6.2 konstruierbar und damit dann unschwer auch das regelmäßige n-Eck. Der Beweis der Gegenrichtung bleibe dem Leser überlassen.

Beweis des Satzes von Rost 6.4.8.6. Wir halten eine natürliche Zahl $n \geq 1$ für den folgenden Beweis fest und vereinbaren die Abkürzung $Q := \mathrm{quad}(\mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$ für den Quadratwurzelabschluß der rationalen Zahlen in den reellen Zahlen und $E := \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ für den n-ten Kreisteilungskörper, mit einem E wie Einheitswurzel. Um den Satz zu zeigen, reicht es sicher nachzuweisen, daß für jeden Teilkörper $R \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $R \cap E \subset Q$ auch der durch Adjunktion einer primen reellen Wurzel, also durch Adjunktion eines Elements $x \in \mathbb{R}$ mit $x^p \in R$ für eine Primzahl p entstehende Teilkörper $R(x) \subset \mathbb{R}$ diese Eigenschaft hat. Im Fall $[R(x) : R] < p$ folgt aus unseren Annahmen bereits $R(x) = R$. In der Tat haben wir für $q = [R(x) : R]$ und $a = x^p$ ja

$$\det_R(x|R(x))^p = \det_R(x^p|R(x)) = a^q$$

Es gibt also $c \in R$ mit $c^p = a^q$. Im Fall $q < p$ können wir $1 = \alpha p + \beta q$ schreiben, es folgt $a = a^{\alpha p + \beta q} = (a^\alpha c^\beta)^p$ und a hat bereits eine p-te Wurzel $y = a^\alpha c^\beta$ in R, woraus wegen $R \subset \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ folgt $y = \pm x$ und $R(x) = R$. Es bleibt also nur noch, den Fall $[R(x) : R] = p$ zu diskutieren und in diesem Fall die Implikation

$$R \cap E \subset Q \quad \Rightarrow \quad R(x) \cap E \subset Q$$

zu zeigen. Im Fall $R(x) \cap E = R \cap E$ ist das klar. Sonst ist $(R(x) \cap E)/(R \cap E)$ eine nichttriviale Galoiserweiterung, denn das sind beides Zwischenkörper einer endlichen abelschen Erweiterung. Nach dem Translationssatz 6.4.6.10 ist dann auch $((R(x) \cap E)R)/R$ eine nichttriviale Galoiserweiterung. Da $R(x)/R$ Primzahlgrad hat, folgt $((R(x) \cap E)R) = R(x)$, und $R(x)/R$ ist mithin selbst eine Galoiserweiterung vom Grad p. Das Polynom $X^p - a$ ist dann notwendig das Minimalpolynom von x über R, und da jede Galoiserweiterung normal ist, müssen alle seine Nullstellen auch zu $R(x)$ gehören, also alle ζx für ζ eine beliebige p-te Einheitswurzel. Damit müssen aber alle p-ten Einheitswurzeln zu $R(x)$ gehören, also zu $\mathbb{R}$, und das gilt nur im Fall $p = 2$. Mithin sind wir in diesem Fall, und durch das Rückverfolgen unserer Argumente erhalten wir

$$[(R(x) \cap E) : (R \cap E)] = 2$$

Der Körper $R(x) \cap E$ entsteht also aus dem Teilkörper $R \cap E \subset Q$ durch Adjunktion einer Quadratwurzel. Folglich liegt $R(x) \cap E$ in der Tat bereits selbst im Quadratwurzelabschluß Q von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. $\square$

6.5 Verallgemeinerungen ins Unendliche*

6.5.1 Ordinalzahlen

Definition 6.5.1.1. Eine Anordnung einer Menge heißt eine **Wohlordnung**, wenn jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.

Beispiel 6.5.1.2. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist wohlgeordnet mit ihrer üblichen Anordnung aus 3.4.1.19, wie wir in 6.5.2.2 formal zeigen werden. Die Menge der rationalen Zahlen ist nicht wohlgeordnet mit ihrer üblichen Anordnung.

6.5.1.3. Gegeben eine teilgeordnete Menge X versteht man unter einem **unmittelbaren Nachfolger** oder kurz **Nachfolger** eines Elements $x \in X$ das kleinste Element „oberhalb von x“, also in Formeln das kleinste Element der Menge $\{y \in X \mid y > x\}$, wenn es denn existiert. Jedes Element hat höchstens einen unmittelbaren Nachfolger. Ebenso versteht man unter einem **unmittelbaren Vorgänger** oder kurz **Vorgänger** eines Elements $x \in X$ das größte Element „unterhalb von x“, in Formeln also das größte Element der Menge $\{y \in X \mid y < x\}$, wenn es denn existiert. Jedes Element hat höchstens einen unmittelbaren Vorgänger.

6.5.1.4. Jede nichtleere wohlgeordnete Menge besitzt ein kleinstes Element, das wir meist mit 0 bezeichnen. In einer wohlgeordneten Menge $(\Omega, \leq)$ hat weiter jedes Element a außer dem größten, wenn denn ein größtes Element existiert, einen unmittelbaren Nachfolger, nämlich das kleinste Element von $\Omega_{>a}$. Wir notieren diesen unmittelbaren Nachfolger

$$S(a)$$

für englisch „successor“. Manche Elemente besitzen auch unmittelbare Vorgänger, aber keineswegs alle.

Definition 6.5.1.5. Eine Teilmenge A einer wohlgeordneten Menge Ω heißt ein **Anfangsstück**, wenn A mit einem Element von Ω auch alle kleineren Elemente von Ω enthält.

6.5.1.6. Jedes von der ganzen Menge verschiedene Anfangsstück A einer wohlgeordneten Menge Ω ist von der Gestalt $A = \Omega_{<a}$ für genau ein $a \in \Omega$, nämlich für a das kleinste Element des Komplements $\Omega \backslash A$.

Definition 6.5.1.7. Eine Abbildung $f : X \to Y$ von teilgeordneten Mengen heißt ein **Morphismus von teilgeordneten Mengen**, wenn gilt $x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$. Ein **Isomorphismus von teilgeordneten Mengen** oder auch **Ordnungsisomorphismus** ist ein bijektiver Morphismus von teilgeordneten Mengen, dessen Inverses auch ein Morphismus von teilgeordneten Mengen ist. Zwei teilgeordnete

Mengen heißen **ordnungsisomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Ordnungsisomorphismus gibt.

Satz 6.5.1.8 (Vergleich von wohlgeordneten Mengen). *1. Gegeben wohlgeordnete Mengen $(\Omega, \leq)$ und $(\Omega', \leq')$ gibt es höchstens einen Isomorphismus von $(\Omega, \leq)$ mit einem Anfangsstück von $(\Omega', \leq')$;*

2. Gegeben wohlgeordnete Mengen $(\Omega, \leq)$ und $(\Omega', \leq')$ ist mindestens eine von beiden ordnungsisomorph zu einem Anfangsstück der anderen.

6.5.1.9. Insbesondere sind zwei Anfangsstücke einer wohlgeordneten Menge nur dann ordnungsisomorph, wenn sie gleich sind als Teilmengen.

Beweis. 1. Gegeben zwei verschiedene derartige Isomorphismen f, g gäbe es ein kleinstes Element $b \in \Omega$, auf dem sie verschiedene Werte annähmen. Dies Element müßte jedoch sowohl unter f als auch unter g auf das kleinste Element von $\Omega' \backslash f(\Omega_{<b}) = \Omega' \backslash g(\Omega_{<b})$ abgebildet werden. Widerspruch!

2. Wir betrachten das Mengensystem aller Anfangsstücke $A \subset \Omega$, die zu einem Anfangsstück von Ω' ordnungsisomorph sind. Die Vereinigung über dieses Mengensystem ist offensichtlich das größte Anfangsstück $A_{\max} \subset \Omega$, das zu einem Anfangsstück von Ω' ordnungsisomorph ist. Gilt $A_{\max} = \Omega$ oder $A_{\max} \cong \Omega'$, so sind wir fertig. Sonst aber wäre $A_{\max}$ vereinigt mit dem kleinsten Element außerhalb auch ordnungsisomorph zum Bild von $A_{\max}$ in Ω' vereinigt mit dem kleinsten Element außerhalb, im Widerspruch zur Maximalität von $A_{\max}$. □

Lemma 6.5.1.10. *Auf jeder Menge existiert eine Wohlordnung.*

Beweis. Sei X unsere Menge. Wir betrachten die Menge $\mathcal{W}$ aller Paare $(\Omega, \leq)$ mit $\Omega \subset X$ einer Teilmenge und $\leq$ einer Wohlordnung auf Ω. Auf dieser Menge $\mathcal{W}$ erklären wir eine Teilordnung durch die Vorschrift $(\Omega, \leq) \leq (\Omega', \leq')$ genau dann, wenn $(\Omega, \leq)$ ein Anfangsstück von $(\Omega', \leq')$ ist. Das Zorn'sche Lemma liefert die Existenz eines maximalen Paares $(\Omega_{\max}, \leq_{\max}) \in \mathcal{W}$. Für solch ein Paar gilt $\Omega_{\max} = X$, da wir sonst $(\Omega_{\max}, \leq_{\max})$ noch vergrößern könnten, indem wir ein weiteres Element von X hinzunehmen und die Anordnung dahingehend erweitern, daß es das größte Element der dadurch neu entstehenden Menge wird. □

6.5.1.11. Unter einer **Ordinalzahl** versteht man eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen. Gegeben zwei Ordinalzahlen ω und ω' nennen wir ω kleinergleich ω', wenn ω isomorph ist zu einem Anfangsstück von ω'. Wir schreiben dann

$$\omega \leq \omega'$$

Der zweite Teil des Satzes 6.5.1.8 bedeutet, daß je zwei Ordinalzahlen vergleichbar sind, wohingegen der zweite Teil bedeutet, daß gegeben eine durch eine wohlgeordnete Menge $(\Omega, \leq)$ repräsentierte Ordinalzahl die angeordnete Klasse aller Ordinalzahlen, die echt kleiner sind als diese, isomorph ist als angeordnete Klasse zur angeordneten Menge $(\Omega, \leq)$ selber. Jede Ordinalzahl besitzt einen unmittelbaren Nachfolger. Diejenigen Ordinalzahlen, die keinen unmittelbaren Vorgänger besitzen, heißen **Limeszahlen**. In diesem Sinne ist 0 also auch eine Limeszahl. Problematisch ist hierbei allerdings, daß wir uns mit unserem Begriff einer Isomorphieklasse in die „Klasse aller Mengen“ begeben, die schon am Rande des Gebietes liegt, in dem ich mich mit dem alleinigen Rüstzeug der naiven Mengenlehre noch sicher fühle. Man kann jedoch auch alternativ kanonische Repräsentanten wählen und mit von Neumann eine Ordinahlzahl definieren als eine wohlgeordnete Menge Ω mit der Eigenschaft, daß jedes ihrer Elemente mit der Menge der kleineren Elemente, zusammenfällt, in Formeln

$$a = \{b \in \Omega \mid b < a\} \quad \forall a \in \Omega$$

Ergänzung 6.5.1.12. Man definiert die **Addition** von Ordinalzahlen als das Hintereinandersetzen von wohlgeordneten Mengen. Sie ist sicher assoziativ. Es gilt jedoch zu beachten, daß diese Addition nicht kommutativ ist, zum Beispiel haben wir für die durch die wohlgeordnete Menge $\mathbb{N}$ repräsentierte Ordinalzahl ω die Formeln $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$. Wieder eine andere Ordinalzahl wäre etwa $\omega + \omega$. Man erklärt das **Produkt** zweier Ordinalzahlen als das kartesische Produkt von wohlgeordneten Mengen, versehen mit der lexikographischen Ordnung, und hätte für ω wie eben etwa

$$\omega \cdot \omega = \omega + \omega + \ldots$$

in hoffentlich verständlicher Schreibweise. Dieses Produkt ist sicher assoziativ, aber nicht kommutativ, zum Beispiel gilt $2 \cdot \omega = \omega + \omega \neq \omega = \omega \cdot 2$.

6.5.2 Wohlordnung und natürliche Zahlen

6.5.2.1. Ich erinnere an 3.4.1.2. Führt man die Mengenlehre axiomatisch ein, so definiert man eine Menge als **unendlich**, wenn es eine injektive aber nicht bijektive Abbildung von unserer Menge in sich selbst gibt. Eine Menge heißt **endlich**, wenn sie nicht unendlich ist. Die Existenz einer unendlichen Menge ist eines der Axiome der Mengenlehre, wir nennen es kurz das **Unendlichkeitsaxiom**.

Satz 6.5.2.2 (**Charakterisierung der natürlichen Zahlen**). *Die Menge der natürlichen Zahlen mit ihrer Anordnung aus 3.4.1.19 ist die bis auf eindeutigen Ordnungsisomorphismus eindeutig bestimmte kleinste unendliche wohlgeordnete Menge.*

6.5.2.3. Insbesondere ist jede endliche wohlgeordnete Menge isomorph zu genau einem Anfangsstück der Menge der natürlichen Zahlen. Um welches Anfangsstück es sich dabei handelt, kann noch nicht einmal von der gewählten Wohlordnung abhängen, denn verschiedene Möglichkeiten würden schnell zu einer injektiven nicht surjektiven Selbstabbildung unserer Menge führen, die es ja wegen der Endlichkeit nicht geben kann. Insbesondere ist jede endliche Menge X in Bijektion zu einer Menge der Gestalt $\{n \in \mathbb{N} \mid n < a\}$ für genau ein $a \in \mathbb{N}$. Diese natürliche Zahl nennen wir dan ihre **Kardinalität** und schreiben $|X| = a$.

Beweis. Nach 6.5.1.10 und 6.5.1.8 können wir „die kleinste unendliche Ordinalzahl“ bilden: Dazu wählen wir mithilfe des Unendlichkeitsaxioms 6.5.2.1 eine unendliche Menge, erklären darauf mithilfe von 6.5.1.10 eine Wohlordnung, vereinigen disjunkt mit einem weiteren Element, und erweitern unsere Wohlordnung so, daß das neue Element das Größte wird. In der so entstehenden unendlichen wohlgeordneten Menge $(\Omega, \leq)$ mit einem größten Element betrachten das kleinste b derart, daß $\Omega_{<b}$ unendlich ist. Dieses $\omega = \Omega_{<b}$ ist dann die kleinste unendliche wohlgeordnete Menge in dem Sinne, daß sie in jeder unendlichen wohlgeordneten Menge als Anfangsstück auftritt. Zwischen je zwei derartigen wohlgeordneten Mengen gibt es nach 6.5.1.8 genau einen Ordnungsisomorphismus. Es gilt nun zu zeigen, daß ω ordnungsisomorph ist zu unserer in 3.4.1.19 beschriebenen angeordneten Menge $\mathbb{N}$. Die Menge ω hat sicher kein größtes Element, denn ein solches könnten wir ihr wegnehmen und so ein unendliches echtes Anfangsstück erhalten. Mithin hat in ω jedes Element einen Nachfolger. Die Abbildung $S : \omega \to \omega$, die jedem Element seinen Nachfolger zuordnet, ist injektiv, denn haben zwei Elemente x und y denselben Nachfolger, so führen beide Annahmen $x < y$ und $x > y$ leicht zum Widerspruch. Offensichtlich gehört auch das kleinste Element $o \in \omega$ nicht zum Bild von S. Um zu zeigen, daß das Tripel (ω, o, S) die definierenden Eigenschaften der natürlichen Zahlen nach 3.4.1.5 hat, müssen wir nur noch prüfen, daß es keine echte S-stabile Teilmenge $Z \subsetneq \omega$ gibt mit $o \in Z$. Gegeben eine echte Teilmenge $Z \subsetneq \omega$ gäbe es aber in $\omega \backslash Z$ ein kleinstes Element b. Gilt zusätzlich $o \in Z$, so folgt $b \neq o$. Jedes Element von ω außer der Null hat aber einen Vorgänger, denn für jedes $b \in \omega$ ist $\omega_{<b}$ endlich und im Fall $b \neq o$ nicht leer und hat damit als nichtleere endliche angeordnete Menge nach 3.4.1.4 ein größtes Element a. Aus $a \in Z$ folgt dann aber sofort $S(a) = b \in Z$, und das ist der gesuchte Widerspruch. □

6.5.3 Dimension als Kardinalität

Definition 6.5.3.1. Gibt es zwischen zwei Mengen eine Bijektion, so sagt man auch, sie seien **gleichmächtig**.

Vorschau 6.5.3.2. Unter einer **Kardinalzahl** versteht man eine Äquivalenzklasse in der Klasse aller Mengen unter der Äquivalenzrelation, die durch die Existenz einer Bijektion erklärt wird. Die Äquivalenzklasse einer Menge heißt dann ihre **Kardinalität**. Hier rede ich sehr vorsichtig von der „Klasse“ aller Mengen, da wir ja bereits aus 2.1.3.9 wissen, daß es nicht sinnvoll ist, von der „Menge aller Mengen“ zu reden. Die Gesamtheit aller Kardinalitäten ist dann auch keine Menge mehr, und wir stoßen hier wieder an die Grenze dessen, was im Rahmen der naiven Mengenlehre noch sinnvoll behandelt werden kann. Die Gesamtheit aller Kardinalitäten von Mengen, die Elemente eines gegebenen Universums 4.7.11.3 sind, ist aber durchaus noch eine wohldefinierte Teilmenge besagten Universums.

6.5.3.3. Nach 2.1.6.7 ist keine Menge gleichmächtig zu ihrer Potenzmenge.

Satz 6.5.3.4 (Kardinalitäten von Basen). *Zwischen je zwei Basen ein- und desselben Vektorraums gibt es eine Bijektion.*

Beweis. Nach dem Austauschsatz 6.5.3.5 gibt es eine Injektion von jeder Basis in jede andere Basis. Die Behauptung folgt dann mit dem Satz von Schröder-Bernstein 6.5.3.6. □

Lemma 6.5.3.5 (Austauschsatz). *Ist V ein Vektorraum, $E \subset V$ ein Erzeugendensystem und $L \subset V$ eine linear unabhängige Teilmenge, so gibt es eine Injektion $\varphi : L \hookrightarrow E$ derart, daß auch $(E \backslash \varphi(L)) \cup L$ ein Erzeugendensystem von V ist.*

Beweis. In 3.1.8.2 hatten wir das für L endlich bereits gezeigt. Wir erweitern nun unseren Beweis und betrachten die „durch Einschränkung“ angeordnete Menge aller „partiellen Austauschungen“ (L', φ') bestehend aus einer Teilmenge $L' \subset L$ und einer dazu gegebenen Injektion $\varphi' : L' \hookrightarrow E$ mit der Eigenschaft, daß auch $(E \backslash \varphi'(L')) \cup L'$ ein Erzeugendensystem von V ist. Dann zeigen wir, daß gegeben ein angeordnetes System $\mathcal{L}$ von partiellen Austauschungen auch die Vereinigung L° mit dem darauf durch Fortsetzung definierten φ° eine partielle Austauschung ist, daß also $(E \backslash \varphi^\circ(L^\circ)) \cup L^\circ$ ein Erzeugendensystem ist. Aber wählen wir für einen Vektor von V unter allen Darstellung als Linearkombination von Vektoren aus einem $(E \backslash \varphi'(L')) \cup L'$ mit $(L', \varphi') \in \mathcal{L}$ eine Darstellung aus, für die wir so wenig Vektoren aus $E \backslash \varphi'(L')$ wie möglich brauchen, so ist leicht zu sehen, daß dabei diese Vektoren bereits alle zu $E \backslash \varphi^\circ(L^\circ)$ gehören. Nach dem Zorn'schen Lemma gibt es also eine maximale partielle Ausdehnung $(L_{\max}, \varphi_{\max})$, und es bleibt zu zeigen $L_{\max} = L$. Sonst gäbe es aber einen Vektor $w \in L \backslash L_{\max}$, und nach 3.1.8.4 könnten wir den auch noch in unser Erzeugendensystem hereintauschen alias $\varphi_{\max}$ ausdehnen auf $L_{\max} \cup \{w\}$, im Widerspruch zur Maximalität. □

Satz 6.5.3.6 (Schröder-Bernstein). *Seien X und Y zwei Mengen. Gibt es eine Injektion $f : X \hookrightarrow Y$ und eine Injektion $g : Y \hookrightarrow X$, so gibt es auch eine Bijektion zwischen X und Y.*

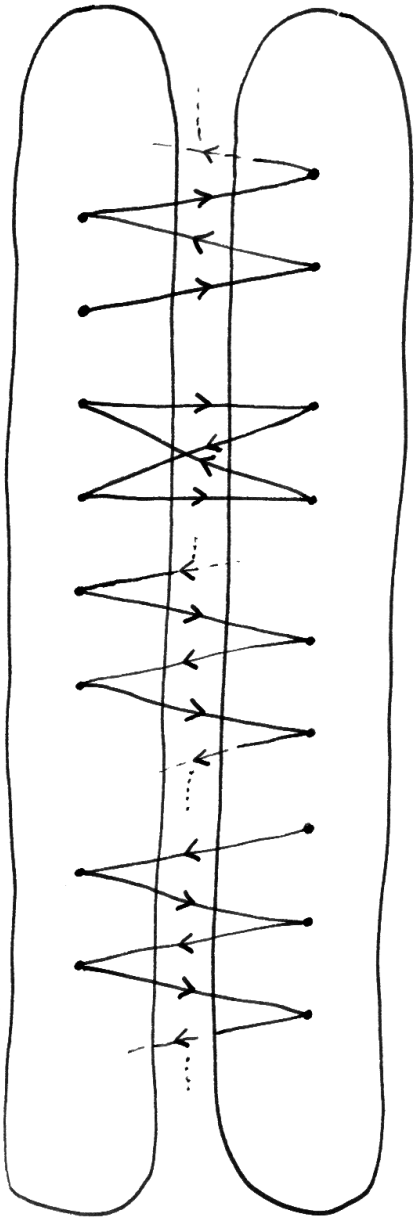


Illustration der vier Typen von Äquivalenzklassen im Beweis des Satzes von Schröder-Bernstein

Beweis. Wir dürfen unsere beiden Mengen X und Y als disjunkt annehmen, indem wir sie andernfalls etwa durch $X \times \{0\}$ und $Y \times \{1\}$ ersetzen. Wir betrachten auf der Vereinigung $X \cup Y$ nun die Äquivalenzrelation $\sim$, die erzeugt wird von $x \sim f(x)$ und $y \sim g(y)$, und interessieren uns für deren Äquivalenzklassen. Besitzt in einer derartigen Äquivalenzklasse A ein Element $x \in A \cap X$ kein Urbild unter g, so hat unsere Äquivalenzklasse die Gestalt „einer in X beginnenden Kette“

$$A = \{x, f(x), gf(x), fgf(x), \dots\}$$

Besitzt ein Element $y \in A \cap Y$ kein Urbild unter f, so hat unsere Äquivalenzklasse die Gestalt „einer in Y beginnenden Kette“

$$A = \{y, g(y), fg(y), gfg(y), \dots\}$$

Sind wir in keinem der beiden vorhergehenden Fälle und ist unsere Äquivalenzklasse endlich, so hat sie die Gestalt „einer geschlossenen Kette“

$$A = \{x, f(x), gf(x), fgf(x), \dots, (gf)^i(x) = x\}$$

für ein $i \geq 1$ und jedes $x \in A \cap X$. Sind wir schließlich in keinem der drei vorhergehenden Fälle, so hat unsere Äquivalenzklasse die Gestalt „einer nach beiden Seiten unendlichen Kette“

$$A = \{x_i, y_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$$

mit x_i und y_i paarweise verschieden und $f(x_i) = y_i$, $g(y_i) = x_{i+1} \, \forall \, i \in \mathbb{Z}$. Man überzeugt sich nun leicht, dass für jede Äquivalenzklasse entweder f oder g oder beide eine Bijektion zwischen den Elementen aus X in unserer Äquivalenzklasse und den Elementen aus Y in unserer Äquivalenzklasse liefern. Im Zweifelsfall wählen wir hier f und erhalten auf diese Weise eine wohlbestimmte Bijektion zwischen X und Y. □

6.5.3.7 (**Vergleichbarkeit von Kardinalitäten**). Gegeben zwei Mengen X, Y gibt es stets entweder eine Inklusion $X \hookrightarrow Y$ oder eine Inklusion $Y \hookrightarrow X$. In der Tat, betrachten wir auf der Menge aller Tripel (X', f, Y') mit $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ und $f : X' \xrightarrow{\sim} Y'$ einer Bijektion die offensichtliche Teilordnung, so können wir das Zorn'sche Lemma anwenden und ein maximales Tripel finden, für das dann offensichtlich entweder $X' = X$ oder $Y' = Y$ gilt. Wir schreiben $|X| \leq |Y|$ falls es eine Inklusion $X \hookrightarrow Y$ gibt. Mit dem Satz von Schröder-Bernstein 6.5.3.6 sehen wir, daß $|X| \leq |Y| \leq |X|$ bereits $|X| = |Y|$ impliziert.

Ergänzung 6.5.3.8. Es liegt nun nahe, auf der Gesamtheit aller möglichen Kardinalitäten, etwa von Mengen eines gegebenen Universums, eine Teilordnung einzuführen durch die Vorschrift $|X| \leq |Y|$ genau dann, wenn eine Injektion $X \hookrightarrow Y$ existiert. Daß diese Teilordnung total ist, daß also darunter je zwei Kardinalitäten vergleichbar sind, folgt dann aus 6.5.3.7.

Satz 6.5.3.9 (**Multiplikationssatz der Mengenlehre**). *Für jede unendliche Menge ist ihr kartesisches Quadrat gleichmächtig zur Menge selber, in Formeln*

$$|M \times M| = |M|$$

Beweis. Wir zeigen zunächst eine schwächere Aussage.

Lemma 6.5.3.10. *Für jede unendliche Menge M gilt $|\mathbb{N} \times M| = |M|$.*

Beweis. Um dies Lemma zu zeigen, müssen wir nach Schröder-Bernstein 6.5.3.6 nur die Existenz einer Injektion $\mathbb{N} \times M \hookrightarrow M$ nachweisen. Dazu betrachten wir die Menge aller Paare (A, φ) mit $A \subset M$ und $\varphi : \mathbb{N} \times A \hookrightarrow A$ einer Injektion. Sie ist ein offensichtlicher Weise induktiv teilgeordnet und besitzt folglich ein maximales Element $(A_{\max}, \varphi_{\max})$. Gilt $|A_{\max}| = |M|$, so haben wir schon gewonnen. Sonst gilt nach 6.5.3.7 jedoch $|A_{\max}| \neq |M|$ und wir finden nach 6.5.3.12 eine abzählbare unendliche Menge $Z \subset M \backslash A_{\max}$. Dann aber können wir unsere Injektion zu einer Injektion $\mathbb{N} \times (A_{\max} \cup Z) \hookrightarrow A_{\max} \cup Z$ ausdehnen, indem wir eine Injektion $\mathbb{N} \times Z \xrightarrow{\sim} Z$ wählen. Widerspruch! □

Nun zeigen wir den Multiplikationssatz. Wir betrachten dazu die Menge aller Paare (A, φ) mit $A \subset M$ und $\varphi : A \times A \hookrightarrow A$ einer Injektion. Sie ist in offensichtlicher Weise induktiv teilgeordnet und besitzt folglich ein maximales Element $(A_{\max}, \varphi_{\max})$. Sicher ist dann $A_{\max}$ unendlich. Im Fall $|A_{\max}| = |M|$ haben wir schon gewonnen. Sonst gilt $|A_{\max}| < |M|$ nach 6.5.3.7 und dann nach Lemma 6.5.3.10 sogar $|\mathbb{N} \times A_{\max}| < |M|$. Wir finden also eine Einbettung $\psi : \mathbb{N} \times A_{\max} \hookrightarrow M$, von der wir sogar $\psi(0, a) = a$ fordern dürfen. Wählen wir nun eine Injektion $\xi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$ mit $\xi(0, 0) = 0$, können wir die Injektion

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{N} \times A_{\max}) \times (\mathbb{N} \times A_{\max}) & \hookrightarrow & (\mathbb{N} \times A_{\max}) \\ ((i, a), (j, b)) & \mapsto & (\xi(i, j), \varphi_{\max}(a, b)) \end{array}$$

bilden. Vermittels ψ erhalten wir eine Injektion $(\operatorname{im} \psi) \times (\operatorname{im} \psi) \hookrightarrow (\operatorname{im} \psi)$, die $\varphi_{\max}$ fortsetzt. Widerspruch zur Maximalität von $(A_{\max}, \varphi_{\max})$! □

Ergänzung 6.5.3.11. Gegeben Mengen X, Y mit $2 \leq |X| \leq |Y|$ und Y unendlich kann man zeigen, daß gilt $|\operatorname{Ens}(Y, X)| = |\operatorname{Ens}(Y, \{0, 1\})| = |\operatorname{Pot}(Y)|$. Im allgemeinen ist die Frage nach der Kardinalität einer Menge von Abbildungen $\operatorname{Ens}(Y, X)$ nicht so leicht zu beantworten.

Übungen

Übung 6.5.3.12. Lassen wir aus einer unendlichen Menge endlich viele Elemente weg, so erhalten wir eine gleichmächtige Menge.

Übung 6.5.3.13. Gegeben ein von Null verschiedener Vektorraum abzählbarer Dimension über einem unendlichen Körper zeige man, daß der Vektorraum dieselbe Kardinalität hat wie der Grundkörper. Gegeben ein Vektorraum unendlicher Dimension über einem abzählbaren Körper zeige man, daß die Kardinalität jeder seiner Basen übereinstimmt mit der Kardinalität des ganzen Vektorraums. Jede algebraische Körpererweiterung eines unendlichen Körpers hat dieselbe Kardinalität wie besagter Körper. Hinweis: 6.5.3.10.

Übung 6.5.3.14. Gegeben ein unendlichdimensionaler Vektorraum zeige man, daß sein Dualraum stets eine im Sinne von Kardinalitäten echt größere Dimension hat. Hinweis: Man beginne mit der Betrachtung von Vektorräumen über dem Körper mit zwei Elementen und verwende 6.5.3.13 sowie 2.1.6.7.

Übung 6.5.3.15. Jede unendliche Menge ist gleichmächtig zur Menge ihrer endlichen Teilmengen. Gegeben eine surjektive Abbildung mit endlichen Fasern zwischen unendlichen Mengen sind unsere beiden Mengen gleichmächtig.

6.5.4 Anwendungen in der Analysis*

6.5.4.1 (**Die kleinste überabzählbare Ordinalzahl**). Wir können nach 6.5.1.10 und 6.5.1.8 insbesondere auch „die kleinste überabzählbare Ordinalzahl“ bilden: Dazu wählen wir mit 6.5.1.10 eine Wohlordnung auf einer überabzählbaren Menge, etwa auf $\mathbb{R}$, und betrachten in der so entstehenden überabzählbaren wohlgeordneten Menge $(\Omega, \leq)$ das kleinste b derart, daß $\Omega_{<b}$ überabzählbar ist. Dieses $\omega = \Omega_{<b}$ ist dann die kleinste überabzählbare wohlgeordnete Menge in dem Sinne, daß sie in jeder überabzählbaren wohlgeordneten Menge als Anfangsstück auftritt. Aber versuchen sie bloß nicht, eine derartige kleinste überabzählbare wohlgeordnete Menge explizit anzugeben! Bereits einen Repräsentanten für die „kleinste unendliche Ordinalzahl“ schreiben wir zwar leichthin auf's Papier als $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, aber ob das eigentlich eine explizite Darstellung ist, scheint mir bei näherem Hinsehen auch schon recht fragwürdig.

6.5.4.2. Die kleinste überabzählbare Ordinalzahl $(\omega, \leq)$ besitzt kein größtes Element, denn ein solches könnten wir ihr leicht wegnehmen. Die **Alexandroff'sche Halbgerade** wird erklärt, indem man $\omega \times [0, 1)$ lexikographisch anordnet und mit der Topologie versieht, die von allen Teilmengen $\{x \mid x > y\}$ und $\{x \mid x < y\}$ für $y \in \omega \times [0, 1)$ erzeugt wird. Läßt man aus $\omega \times [0, 1)$ das kleinste Element weg, so entsteht eine nicht parakompakte wegzusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit, wie wir im folgenden zeigen werden. Zunächst zeigen wir, daß wir so eine wegzusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit erhalten. Genauer behaupten wir, daß $\omega_{<a} \times [0, 1)$ homöomorph ist zu $[0, 1)$ für alle $a \in \omega$: Ist sonst b kleinstmöglich mit $\omega_{<b} \times [0, 1)$ nicht homöomorph zu $[0, 1)$, so könnte b keinen direkten Vorgänger haben, wäre also eine Limeszahl, wir fänden also eine

streng monoton wachsende Folge mit Supremum b, und abzählbar viele $[0,1)$ zu verkleben ist unproblematisch. Daß unser Raum nicht parakompakt ist, zeigen wir nach einer Vorbemerkung als 6.5.4.4.

Lemma 6.5.4.3. *Eine Selbstabbildung einer überabzählbaren wohlgeordneten Menge, die das kleinste Element auf sich selbst abbildet und jedes andere Element auf ein echt Kleineres, hat mindestens eine überabzählbare Faser.*

Beweis. Sei Ω unsere überabzählbare wohlgeordnete Menge und $f : \Omega \to \Omega$ unsere Selbstabbildung, von der wir in Formeln ausgedrückt fordern $f(0) = 0$ und $f(a) < a \quad \forall a \neq 0$. Es gilt zu zeigen, daß ein $b \in \Omega$ existiert mit $f^{-1}(b)$ überabzählbar. Nun muß für alle $a \in \Omega$ die Menge $\{f^n(a) \mid n \geq 0\}$ ein kleinstes Element besitzen, und das kann nur das kleinste Element 0 unserer wohlgeordneten Menge Ω sein. In anderen Worten gibt es für alle $a \in \Omega$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(a) = 0$. Wären nun alle Fasern von f abzählbar, so wären auch die Mengen $(f^n)^{-1}(0)$ abzählbar für alle $n \in \mathbb{N}$ und Ω wäre abzählbar als die Vereinigung all dieser abzählbar vielen abzählbaren Mengen. Widerspruch! $\square$

Lemma 6.5.4.4. *Die Alexandroff'sche Halbgerade aus 6.5.4.2 ist nicht parakompakt. Dasselbe gilt auch für das Komplement des kleinsten Elements der Alexandroff'schen Halbgerade.*

Beweis. Wir betrachten für jedes $a \in \omega$ das offene Intervall U_a aller Punkte, die kleiner sind als mindestens ein Punkt von $\{a\} \times [0,1)$. Sicher bilden diese U_a eine offene Überdeckung, und ich behaupte, daß diese Überdeckung keine lokal endliche Verfeinerung zuläßt. In der Tat kann man für jede Verfeinerung eine Abbildung $f : \omega \to \omega$ finden mit $f(0) = 0$ und $f(a) < a$ falls $a \neq 0$ derart, daß für $a \neq 0$ jeweils ein $t_a \in (0,1)$ existiert, für das das Intervall $[(f(a), t_a), (a, 0)]$ ganz in einer offenen Menge unserer Verfeinerung enthalten ist. Diese Abbildung f hat nun nach 6.5.4.3 eine überabzählbare Faser. Ist etwa $f^{-1}(b)$ überabzählbar, so hat $f^{-1}(b)$ keine obere Schranke in ω, aber es gibt natürlich ein kleinstes Element $c \in f^{-1}(b)$. Wir erkennen nun, daß $(c, 0)$ zu unendlich vielen offenen Mengen unserer Verfeinerung gehört, denn für alle $a \in f^{-1}(b)$ gibt es eine offene Menge unserer Verfeinerung, die $(a, 0)$ und $(c, 0)$ beide enthält. $\square$

Lemma 6.5.4.5. *Seien gegeben eine Menge X und darin ein System von Teilmengen $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$.*

1. *Hat $\mathcal{E}$ eine Kardinalität $\leq |\mathbb{R}|$, so hat auch die davon erzeugte σ-Algebra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ eine Kardinalität $\leq |\mathbb{R}|$, in Formeln*

$$|\mathcal{E}| \leq |\mathbb{R}| \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{M}(\mathcal{E})| \leq |\mathbb{R}|$$

2. *Hat $\mathcal{E}$ eine Kardinalität $\geq |\mathbb{R}|$, so hat die davon erzeugte σ-Algebra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ dieselbe Kardinalität wie $\mathcal{E}$, in Formeln*

$$|\mathcal{E}| \geq |\mathbb{R}| \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{M}(\mathcal{E})| = |\mathcal{E}|$$

6.5.4.6 (**Vergleich von Lebesgue-Mengen und Borel-Mengen**). Die σ-Algebra der Borelmengen in $\mathbb{R}$ kann von einem abzählbaren Mengensystem erzeugt werden, mithin gilt nach unserem Satz 6.5.4.5 die Abschätzung $|\operatorname{Borel}(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}|$. Dahingegen hat die Cantormenge 13.1.2.39 dieselbe Kardinalität wie $\mathbb{R}$ und alle ihre Teilmengen sind Lebesgue-meßbar. Folglich stimmt wieder nach 6.5.4.5 die Kardinalität der σ-Algebra der Lebesgue-Mengen in $\mathbb{R}$ überein mit der Kardinalität von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Beweis. Die von einem Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ kann wie folgt beschrieben werden: Wir beginnen mit der kleinsten überabzählbaren Ordinalzahl ω und behaupten zunächst die Existenz und Eindeutigkeit zweier Abbildungen $[0,\omega] \to \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathcal{E}))$, $\alpha \mapsto \Pi_\alpha$ und $\alpha \mapsto \Sigma_\alpha$ mit der Eigenschaft $\Pi_0 = \Sigma_0 = \mathcal{E}$ und so, dass für $\alpha > 0$ gilt

$$\Pi_\alpha = \left\{ \begin{array}{c} \text{abzählbare Schnitte von Mengen aus} \\ \text{irgendwelchen } \Sigma_\beta \text{ mit } \beta < \alpha \end{array} \right\}$$

$$\Sigma_\alpha = \left\{ \begin{array}{c} \text{abzählbare Vereinigungen von Mengen} \\ \text{aus irgendwelchen } \Pi_\beta \text{ mit } \beta < \alpha \end{array} \right\}$$

Sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit dieser Abbildungen folgt leicht durch „transfinite Induktion“, d.h. man betrachtet das kleinste α, für das Π_α oder Σ_α nicht mehr mit diesen Eigenschaften definiert werden kann oder für das es verschiedene Möglichkeiten gibt und kommt sofort zu einem Widerspruch. Wir behaupten nun $\Pi_\omega = \Sigma_\omega = \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Hier folgt offensichtlich die zweite Gleichung aus der ersten, denn alle unsere Π_α sind stabil unter abzählbaren Schnitten und alle unsere Σ_α sind stabil unter abzählbaren Vereinigungen. Nun haben wir aber $\Pi_\alpha \subset \Sigma_{\alpha+1}$ und $\Sigma_\alpha \subset \Pi_{\alpha+1}$ per definitionem. Ein $M \in \Pi_\omega$ alias eine abzählbare Vereinigung

$$M_1 \cup M_2 \cup \ldots$$

mit $M_i \in \Pi_{\alpha(i)}$ und $\alpha(i) < \omega$ gehört also wegen $\alpha(i) + 1 < \omega$ auch zu Σ_ω und die umgekehrte Inklusion $\Sigma_\omega \subset \Pi_\omega$ zeigt man ähnlich. Geht man speziell von einem Mengensystem der Kardinalität $|\mathcal{E}| \leq |\mathbb{R}|$ aus, so haben alle unsere Π_α und Σ_α auch höchstens die Kardinalität $|\mathbb{R}|$ und es folgt $|\mathcal{M}(\mathcal{E})| \leq |\mathbb{R}|$. Geht man dahingegen von einem Mengensystem der Kardinalität $|\mathcal{E}| \geq |\mathbb{R}|$ aus, so haben alle unsere Π_α und Σ_α dieselbe Kardinalität wie $\mathcal{E}$ und es folgt $|\mathcal{M}(\mathcal{E})| = |\mathcal{E}|$. $\square$

Übungen

Ergänzende Übung 6.5.4.7. Die Alexandroff'sche Halbgerade ist folgenkompakt, aber nicht überdeckungskompakt.

Übung 6.5.4.8. Sei $\Omega = \Omega_\alpha$ die kleinste wohlgeordnete Menge einer vorgegebenen unendlichen Kardinalität α und $X \subset \Omega$ eine Teilmenge einer echt kleineren Kardinalität. So gibt es $\omega \in \Omega$ mit $X \subset \Omega_{<\omega}$. Hinweis: Eine Vereinigung einer Familie von höchstens α Mengen einer Kardinalität höchstens α hat auch selbst nur höchstens die Kardinalität α nach dem Multiplikationssatz der Mengenlehre 6.5.3.9.

6.6 Ergänzungen zur Körpertheorie*

6.6.1 Tensorprodukte von Körpern

6.6.1.1 (**Beispiele für Tensorprodukte von Körpern**). Gegeben Körpererweiterungen L/K und M/K muß $L \otimes_K M$ keineswegs wieder ein Körper sein, wie bereits das Beispiel $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ zeigt. Solch ein Tensorprodukt kann sogar von Null verschiedene nilpotente Elemente enthalten: Für ein Beispiel sei k ein Körper positiver Charakteristik $\operatorname{char} k = p > 0$. Betrachten wir nun den Funktionenkörper $K = k(T)$ und seine Erweiterung $L = k(\sqrt[p]{T}) = K[X]/\langle X^p - T\rangle$, so ergibt sich $L \otimes_K L \cong L[X]/\langle X^p - T\rangle$ und in diesem Ring ist $X - \sqrt[p]{T}$ nilpotent und von Null verschieden.

6.6.1.2 (**Tensorprodukt mit endlicher separabler Körpererweiterung**). Ist L/K eine endliche separable Körpererweiterung und M/K eine beliebige Körpererweiterung, so ist $L \otimes_K M$ stets ein Produkt von Körpern, die ihrerseits endlich separabel sind über M. Ist genauer $\alpha \in L$ ein primitives Element und $P \in K[X]$ sein Minimalpolynom, so entsprechen die Faktoren von $L \otimes_K M$ den irreduziblen Faktoren $P = Q_1 \dots Q_r$ von P in $M[X]$, denn wir haben ja natürliche Isomorphismen

$$L \otimes_K M \xrightarrow{\sim} (K[X]/PK[X]) \otimes_K M \xrightarrow{\sim} M[X]/PM[X] \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{r} M[X]/Q_i M[X]$$

Für den letzten Schritt verwenden wird den chinesischen Restsatz und brauchen dazu, daß die Q_i paarweise teilerfremd sind. Das hinwiederum folgt aus der Separabilität von P.

6.6.1.3 (**Endomorphismenring einer endlichen Galoiserweiterung**). Gegeben eine Körpererweiterung L/K mit Galoisgruppe Γ liefert der Satz über die lineare Unabhängigkeit von Charakteren 6.3.8.16 eine L-lineare Einbettung

$$L\Gamma \hookrightarrow \operatorname{Hom}_K(L, L)$$

Hierbei soll die Operation von L auf dem Hom-Raum durch Nachschalten geschehen, also $(lf)(x) = lf(x)$. Verstehen wir hier $L\Gamma$ als getwisteten Gruppenring $L\Gamma = L^{\rtimes}\langle\Gamma\rangle$ im Sinne von 8.3.9.4 mit der Multiplikation charakterisiert durch $\gamma \cdot l = \gamma(l) \cdot \gamma$, so wird unsere Einbettung ein Ringhomomorphismus $L^{\rtimes}\langle\Gamma\rangle \hookrightarrow \operatorname{End}_K(L)$. Ist schließlich unsere Körpererweiterung auch noch endlich und Galois, so ist unsere Einbettung wegen der Gleichheit der Dimensionen sogar ein Ringisomorphismus

$$L^{\rtimes}\langle\Gamma\rangle \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_K L$$

6.6.1.4 (**Tensorquadrat einer endlichen Galoiserweiterung**). Für jede Körpererweiterung L/K mit Galoisgruppe Γ haben wir einen Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{ccc} L \otimes_K L & \to & \mathrm{Ens}(\Gamma, L) \\ x \otimes y & \mapsto & (\sigma \mapsto x\sigma(y)) \end{array}$$

Der Ring der Abbildungen von Γ nach L ist hierbei schlicht mit der punktweisen Multiplikation zu verstehen. Im Fall einer Galoiserweiterung ist unser Ringhomomorphismus injektiv, wie wir aus der linearen Unabhängigkeit von Charakteren folgern werden. Sind genauer $x_1, \ldots, x_r \in L$ linear unabhängig über K, so können wir sie zu einer K-Basis einer endlichen Galoiserweiterung $E \subset L$ von K ergänzen durch geeignete $x_{r+1}, \ldots, x_s$. Bilden dann $\sigma_1, \ldots, \sigma_s \in \Gamma$ ein Repräsentantensystem von $G := \mathrm{Gal}(E/K)$, so hat die Matrix der $(\sigma_i(x_j))$ vollen Rang wegen der linearen Unabhängigkeit von Charakteren. Für $y_j \in L$ folgt aus $\sum_j y_j \sigma_i(x_j) = 0$ für alle i also $y_1 = \ldots = y_s = 0$. Im Fall einer endlichen Galoiserweiterung $\dim_K L < \infty$ entlarvt damit ein Dimensionsvergleich unseren Homomorphismus sogar als Isomorphismus

$$L \otimes_K L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(\Gamma, L)$$

Ergänzung 6.6.1.5. Gegeben eine endliche Galoiserweiterung L/K mit Galoisgruppe Γ kann man zeigen, daß unsere Isomorphismen $L \otimes_K L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(\Gamma, L)$ und $L^\times\langle\Gamma\rangle \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_K L$ einander entsprechen unter dem von der sogenannten „Spurform“ induzierten Isomorphismus $L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(L, K)$ und dem davon abgeleiteten Isomorphismus $L \otimes_K L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_K(L)$. Ich führe das hier nicht weiter aus.

Satz 6.6.1.6 (über die Normalbasis). *Gegeben eine endliche Galoiserweiterung L/K mit Galoisgruppe Γ ist L ein freier $K\langle\Gamma\rangle$-Modul vom Rang Eins.*

Beweis. Nach 6.6.1.4 ist $L \otimes_K L$ für die Operation von Γ auf dem zweiten Tensorfaktor ein freier $K\langle\Gamma\rangle$-Modul vom Rang $[L : K]$. Der Satz von Krull-Schmid 8.7.2.15 zeigt jedoch, daß zwei endlichdimensionale $K\langle\Gamma\rangle$-Moduln, die nach endlicher Erweiterung der Skalare isomorph werden, schon von Anfang an isomorph gewesen sein müssen, denn die Erweiterung der Skalare gefolgt von der Restriktion bedeutet schlicht, eine direkte Summe von $[L : K]$ Kopien des Moduls zu nehmen. □

Ergänzung 6.6.1.7. Gegeben eine Erweiterung endlicher Körper kann man zeigen, daß jeder Erzeuger der multiplikativen Gruppe des großen Körpers zusammen mit seinen Bildern unter der Galoisgruppe eine Basis des großen Körpers über dem kleinen Körper bildet. Der Beweis soll hier nicht gegeben werden.

6.6.2 Allgemeiner Translationssatz

Satz 6.6.2.1 (Kompositum als Tensorprodukt). *Gegeben Unterkörper K, L eines gemeinsamen Körpers mit K normal über $K \cap L$ liefert die Multiplikation stets einen Isomorphismus mit dem Kompositum*

$$K \otimes_{K \cap L} L \xrightarrow{\sim} (KL)$$

Beweis. Da K algebraisch ist über $S := K \cap L$, fällt das Erzeugnis als Ring mit dem Erzeugnis als Körper zusammen, in Formeln $[KL] = (KL)$, und unser Homomorphismus ist schon mal surjektiv. Es reicht also, die Injektivität zu zeigen, und dazu können wir uns auf den Fall beschränken, daß L/S als Körpererweiterung endlich erzeugt ist. Mit einer offensichtlichen Induktion können wir uns weiter beschränken auf den Fall, daß L/S eine primitive Körpererweiterung ist, etwa $L = S(\alpha)$. Wir dürfen uns sogar auf drei Fälle beschränken: Erstens α transzendent über S, zweitens α eine p-te Wurzel eines Elements aus S für p die Charakteristik, und drittens α separabel über S. Diese drei Fälle gehen wir nun der Reihe nach durch. Ist α transzendent über S, so auch über K, und die Multiplikation liefert schon mal einen Ringisomorphismus

$$K \otimes_S S[\alpha] \xrightarrow{\sim} K[\alpha]$$

Damit erhalten wir für jedes von Null verschiedene Polynom $P \in S[\alpha] \backslash 0$ auch einen Isomorphismus $K \otimes_S P^{-1}S[\alpha] \xrightarrow{\sim} P^{-1}K[\alpha]$, und das zeigt die Injektivität der durch Multiplikation gegebenen Abbildung $K \otimes_S S(\alpha) \to K(\alpha)$ für den Fall, daß α transzendent ist über S. Ist α algebraisch über S mit $\alpha \notin S$, aber $\alpha^p \in S$ für $p > 0$ die Charakteristik, so folgt $[S(\alpha) : S] = p$ und $[K(\alpha) : K] = p$ und die Injektivität folgt durch Dimensionsvergleich. Ist schließlich α algebraisch und separabel über S, so können wir, indem wir notfalls unseren großen Körper noch weiter vergrößern, auch einen Unterkörper L' finden, der Zerfällungskörper über S des Minimalpolynoms von α über S ist. Betrachten wir nun das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & (KL) \arrow[d, equal] & \\
K \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & K(\alpha) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (KL') \arrow[d, dash] \\
K \cap L' \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "G"'] & (K \cap L')(\alpha) \arrow[r, dash, "G"] \arrow[d, dash] & L' \\
K \cap L \arrow[r, dash] \arrow[d, equal] & (K \cap L)(\alpha) \arrow[d, equal] & \\
S & L &
\end{tikzcd}$$

von Teilkörpern unseres großen Körpers. Für jedes in unserem Diagramm enthaltene Rechteck steht in der Ecke oben rechts das Kompositum der Körper an den beiden benachbarten Ecken. Zusätzlich zu den beiden mit G bezeichneten Körpererweiterungen ist auch noch die ganze mittlere Horizontale $L'/(K \cap L')$ offensichtlich Galois. In den drei Rechtecken über diesen Galois-Erweiterungen sind nach dem bereits bewiesenen Translationssatz für endliche Galoiserweiterungen 6.4.6.10 also gegenüberliegende Kanten jeweils Körpererweiterungen vom selben Grad, in Formeln

$$\begin{aligned} [(KL') : K(\alpha)] &= [L' : (K \cap L')(\alpha)] \\ [(K \cap L')(\alpha) : K \cap L'] &= [(K \cap L)(\alpha) : K \cap L] \\ [(KL') : K] &= [L' : K \cap L'] \end{aligned}$$

Aus der ersten und der letzten Gleichung für das obere große Rechteck und sein rechtes Quadrat folgt aber sofort die Identität

$$[K(\alpha) : K] = [(K \cap L')(\alpha) : K \cap L']$$

in seinem linken Quadrat, und zusammen mit der mittleren unserer drei Gleichungen aus dem unteren Quadrat ergibt sich schließlich

$$[K(\alpha) : K] = [(K \cap L)(\alpha) : K \cap L]$$

Mithilfe dieser Identität erhalten wir dann die Injektivität der Multiplikationsabbildung

$$K \otimes_{K \cap L} L \to (KL)$$

aus der Gleichheit der Dimensionen besagter K-Vektorräume. □

Satz 6.6.2.2 (Translationssatz der Galoistheorie). *Seien in einem großen Körper zwei Teilkörper K, L gegeben. Ist $K \supset (K \cap L)$ eine Galoiserweiterung, so ist auch $(KL) \supset L$ eine Galoiserweiterung. Ist $K \supset (K \cap L)$ eine normale Erweiterung, so ist auch $(KL) \supset L$ eine normale Erweiterung. In beiden Fällen liefert die Restriktion einen Isomorphismus von Galoisgruppen*

$$\mathrm{Gal}((KL)/L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K/K \cap L)$$

Beweis. Ist K Zerfällungskörper einer Familie separabler Polynome über $K \cap L$, so ist auch (KL) Zerfällungskörper derselben Familie separabler Polynome über L. Ist K Zerfällungskörper einer Familie von Polynomen über $K \cap L$, so ist auch (KL) Zerfällungskörper derselben Familie von Polynomen über L. Das zeigt die ersten Aussagen. Daß der von der Restriktion induzierte Homomorphismus auf

den Galoisgruppen injektiv ist, scheint mir offensichtlich. Daß er auch surjektiv ist erkennt man, indem man den Isomorphismus

$$K \otimes_{K \cap L} L \xrightarrow{\sim} (KL)$$

aus 23.3.3.13 beachtet: Wir können mit seiner Hilfe nämlich eine Spaltung unseres Homomorphismus explizit angeben durch die Vorschrift $\sigma \mapsto \sigma \otimes \mathrm{id}$. □

Korollar 6.6.2.3. *Sind $k \subset K \subset M$ Körper und ist K/k normal und $\alpha \in M$ algebraisch über k, so gilt für die Minimalpolynome von α die Identität*

$$\mathrm{Irr}(\alpha; k(\alpha) \cap K) = \mathrm{Irr}(\alpha; K)$$

Beweis. Man wende 23.3.3.13 an auf $L = k(\alpha)$. □

6.6.3 Krull-Topologie

Definition 6.6.3.1. Gegeben eine algebraische Körpererweiterung L/K erklärt man auf der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ die **Krull-Topologie** als die gröbste Topologie mit der Eigenschaft, daß für jedes Element $a \in L$ die durch das Anwenden auf a gegebene Abbildung $\mathrm{Gal}(L/K) \to L$ nach L mit seiner diskreten Topologie stetig ist.

6.6.3.2. Mit ihrer KrullTopologie wird die Galoisgruppe jeder algebraischen Körpererweiterung L/K eine kompakte Hausdorff'sche topologische Gruppe, und ist L/K Galois, so liefern die Abbildungen der Galoiskorrespondenz eine eineindeutige Entsprechung zwischen abgeschlossenen Untergruppen und Zwischenkörpern.

6.6.3.3 (**Nichtoffene Untergruppen von endlichem Index**). Untergruppen von endlichem Index in einer Galoisgruppe müssen für die Krulltopologie nicht abgeschlossen oder gleichbedeutend offen sein. Das folgende Beispiel habe ich von Franziska Jahnke gelernt: Man betrachtet die Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$, bei der man die Quadratwurzeln aller Primzahlen adjungiert, in Formeln die Erweiterung

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p} \mid p \text{ prim})/\mathbb{Q}$$

Die Galoisgruppe dieser Erweiterung ist ein abzählbares Produkt von Kopien von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Diese Gruppe hat nur abzählbar viele offene Untergruppen, aber überabzählbar viele Untergruppen von endlichem Index. Da die Restriktionsabbildung ein offener Epimorphismus ist, gilt das auch für $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Ergänzung 6.6.3.4. Eine Vermutung von Serre, nach der in jeder endlich erzeugten profiniten Gruppe jede Untergruppe von endlichem Index offen sein sollte, wurde 2007 von Segal und Nikolov gezeigt.

6.6.3.5. Gegeben eine Galoiserweiterung L/K mit Galoisgruppe Γ erhalten wir eine Bijektion

$$L \otimes_K L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}(\Gamma, L)$$

durch die Vorschrift $p \otimes q \mapsto (\sigma \mapsto p\sigma(q))$. Hierbei ist die Galoisgruppe mit ihrer Krulltopologie zu verstehen und L mit der diskreten Topologie. Das folgt aus dem Fall 6.6.1.4 einer endlichen Galoiserweiterung durch Übergang zum Kolimes.

6.6.4 Formen von Vektorräumen und Algebren

Definition 6.6.4.1. Seien K/k eine Galoiserweiterung und $\Gamma = \mathrm{Gal}(K/k)$ ihre Galoisgruppe. Unter einer **abstrakten galoislinearen Operation** von Γ auf einem K-Vektorraum V verstehen wir eine Operation $\Gamma \times V \to V, (\gamma, v) \mapsto \gamma(v)$ auf der Menge V derart, daß für alle $v \in V$, $\lambda \in K$ gilt

$$\gamma(\lambda \cdot v) = \gamma(\lambda) \cdot \gamma(v)$$

Von einer **stetigen galoislinearen Operation** fordern wir zusätzlich die Stetigkeit der zugehörigen Abbildung $\Gamma \times V \to V$ für die Krull-Topologie auf Γ und die diskrete Topologie auf V. Wenn wir ohne weitere Spezifikationen von einer **galoislinearen Operation** reden, meinen wir eine stetige galoislineare Operation.

6.6.4.2. Oft ist für solch eine Operation auch die exponentielle Schreibweise $a^\gamma := \gamma^{-1}(a)$ praktisch. Das Invertieren sorgt dabei für die Identität $a^{(\gamma\sigma)} = (a^\gamma)^\sigma$.

Definition 6.6.4.3. Sei K/k eine Körpererweiterung. Eine **k-Form eines K-Vektorraums** V ist ein k-Untervektorraum $V_k \subset V$ derart, daß die Multiplikation einen Isomorphismus $K \otimes_k V_k \xrightarrow{\sim} V$ liefert. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß V_k ganz V als K-Vektorraum erzeugt und daß jede über k linear unabhängige Teilmenge unseres Untervektorraums V_k auch über K linear unabhängig ist in V.

Satz 6.6.4.4 (Formen und galoislineare Operationen bei Vektorräumen). *Seien K/k eine Galoiserweiterung und $\Gamma = \mathrm{Gal}(K/k)$ ihre Galoisgruppe. Gegeben ein K-Vektorraum V mit einer galoislinearen Operation von Γ induziert die Multiplikation einen Isomorphismus*

$$K \otimes_k V^\Gamma \xrightarrow{\sim} V$$

6.6.4.5. Gegeben eine Galois-Erweiterung K/k mit Galoisgruppe Γ und ein K-Vektorraum V erhalten wir nach diesem Satz zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{c} k\text{-Formen} \\ V_k \subset V \end{array} \right\} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{galoislineare Operationen} \\ \Gamma \times V \to V \end{array} \right\}$$

durch die Vorschriften, daß wir jeder k-Form $V_k \subset V$ wir die galoislineare Operation von Γ zuordnen, die durch $\gamma : a \otimes v \mapsto \gamma(a) \otimes v \; \forall a \in K, v \in V_k$ gegeben ist, und umgekehrt jeder galoislinearen Operation $\Gamma \times V \to V$ ihre Fixpunktmenge $V_k = V^\Gamma$.

Beweis. Wir beginnen mit der Surjektivität. Gegeben $v \in V$ finden wir nach Annahme und der Definition der Krull-Topologie eine endliche Galois'sche Untererweiterung K_0/k derart, daß die Operation von Γ auf v über $\Gamma_0 := \mathrm{Gal}(K_0/k)$ faktorisiert. Sind $\sigma, \tau, \ldots, \rho$ die Elemente von Γ_0 und ist $a_\sigma, a_\tau, \ldots, a_\rho$ eine Basis von K_0 über k, so ist nach dem Satz über die lineare Unabhängigkeit von Charakteren 6.3.8.16 die Matrix $(a_\tau^\sigma)_{\tau,\sigma\in\Gamma_0}$ invertierbar, deren Einträge wie angedeutet durch das Anwenden der Elemente $\sigma, \tau, \ldots, \rho$ der Galoisgruppe Γ_0 auf die Elemente $a_\sigma, a_\tau, \ldots, a_\rho$ des Körpers K_0 entstehen. Es gibt also Elemente $b_{\rho,\sigma} \in K$ mit $\sum_\sigma b_{\rho,\sigma} a_\sigma^\tau = \delta_{\rho\tau}$ für alle ρ, τ. Bilden wir nun die Vektoren

$$v_\sigma := \sum_{\tau\in\Gamma_0} (a_\sigma v)^\tau = \sum_{\tau\in\Gamma_0} a_\sigma^\tau v^\tau \in V^\Gamma, \quad \text{so erkennen wir} \quad \sum_\sigma b_{1,\sigma} v_\sigma = v$$

für $1 \in \Gamma_0$ das neutrale Element. Das zeigt die Surjektivität. Nun erfüllt der Kern $\ker$ unserer Abbildung auch die Bedingung des Satzes, aus $\ker \neq 0$ folgt demnach mit dem, was wir schon wissen, sofort $\ker^\Gamma \neq 0$. Es bleibt also nur zu zeigen, daß die Γ-Invarianten in $K \otimes_k V^\Gamma$ mit dem Bild von $k \otimes_k V^\Gamma$ zusammenfallen. Dabei können wir uns leicht auf den Fall $V^\Gamma = k$ einschränken, und in diesem Fall ist es offensichtlich. □

Definition 6.6.4.6. Gegeben ein K-Vektorraum mit einer k-Form $V \supset V_k$ heißt ein K-Untervektorraum $W \subset V$ **definiert über** k, wenn es einen k-Untervektorraum $W_k \subset V_k$ gibt derart, daß die Multiplikation einen Isomorphismus $K \otimes_k W_k \xrightarrow{\sim} W$ liefert.

6.6.4.7. Seien K/k eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe Γ und $V \supset V_k$ ein K-Vektorraum mit einer k-Form. Sei $\Gamma \times V \to V$ die zugehörige galoislineare Operation. Offensichtlich ist ein K-Untervektorraum $W \subset V$ genau dann definiert über k, wenn er unter Γ stabil ist, wenn also in Formeln gilt $\gamma(W) \subset W$ oder gleichbedeutend $\gamma(W) = W$ für alle $\gamma \in \Gamma$.

6.6.4.8 (**Formen und bepunktete Torsoren**). Seien K/k eine Galoiserweiterung, $\Gamma = \mathrm{Gal}(K/k)$ ihre Galoisgruppe und V ein K-Vektorraum. Für jede k-Form $\hat{V} \subset V$ erhalten wir eine Rechtsoperation von Γ durch Konjugation auf der Gruppe $\mathrm{Mod}_K^\times(V)$ der Automorphismen des K-Vektorraums V, in Formeln gegeben durch

$$p^\gamma := \hat{\gamma}^{-1} \circ p \circ \hat{\gamma}$$

für $\hat{\gamma} : V \to V$ unsere galoislineare Operation. Ich notiere unsere Automorphismengruppe dann $\mathrm{Mod}_K^\times(\hat{V})$, um anzudeuten, daß die Γ-Operation von der Form $\hat{V}$ abhängt. Versehen wir $\mathrm{Mod}_K^\times(\hat{V})$ mit der Topologie, in der die Fixatoren endlicher Teilmengen von V eine Umgebungsbasis des neutralen Elements bilden, und versehen unsere Galoisgruppe Γ mit der Krull-Topologie, so ist unsere Rechtsoperation von Γ stetig. Gegeben eine weitere k-Form $\tilde{V} \subset V$ liefert die offensichtliche Identifikation

$$\mathrm{Mod}_K^\times(\tilde{V} \otimes_k K, \hat{V} \otimes_k K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_K^\times(V)$$

eine Rechtsoperation der Galoisgruppe Γ auf dieser Menge durch die Vorschrift $q^{(\gamma)} := \hat{\gamma}^{-1} \circ q \circ \tilde{\gamma}$. Mit ihrer $\mathrm{Mod}_K^\times(\hat{V})$-Linksoperation durch Nachschalten wird unsere Menge dann ein topologischer Γ-äquivarianter $\mathrm{Mod}_K^\times(\hat{V})$-Torsor im Sinne von 19.3.8.10, in Formeln gilt insbesondere

$$(pq)^{(\gamma)} = p^\gamma q^{(\gamma)}$$

Unser Torsor besitzt auch einen ausgezeichneten Punkt, die Identität auf V. Diese Konstruktion liefert sogar für jede feste k-Form $\hat{V} \subset V$ eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} k\text{-Formen } \tilde{V} \subset V \\ \text{des } K\text{-Vektorraums } V \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Bepunktete topologische} \\ \Gamma\text{-äquivariante } \mathrm{Mod}_K^\times(\hat{V})\text{-Torsoren,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\}$$

Gemeint sind rechts Isomorphismen bepunkteter Torsoren, die also den ausgezeichneten Punkt in den ausgezeichneten Punkt überführen. Die Umkehrabbildung kann wie folgt beschrieben werden: Gegeben ein bepunkteter topologischer Γ-äquivarianter $\mathrm{Mod}_K^\times(\hat{V})$-Torsor (X, x) erhalten wir die zugehörige galoislineare Γ-Operation auf V mit Fixpunktmenge $\tilde{V}$, indem wir eine Abbildung $z : \Gamma \to \mathrm{Mod}_K^\times(\hat{V})$ erklären durch die Identität $x^{(\gamma)} = z(\gamma)x$ und daraus eine galoislineare Γ-Wirkung auf V machen vermittels der Vorschrift $\tilde{\gamma} := \hat{\gamma} \circ z(\gamma)$ und eben $\tilde{V} \subset V$ definieren als deren Fixpunktmenge. Gegeben $\varphi \in \mathrm{Mod}_K^\times(\hat{V})$ entspricht nun der umbepunktete äquivariante Torsor $(X, \varphi x)$ der k-Form $\varphi(\tilde{V}) \subset V$. Da aber je zwei k-Formen eines K-Vektorraums V durch einen Automorphismus von V auseinander hervorgehen, gibt es insbesondere, wenn wir keinen Basispunkt auszeichnen, bis auf Isomorphismus nur einen einzigen topologischen Γ-äquivarianten $\mathrm{Mod}_K^\times(\hat{V})$-Torsor. In der Sprache der Gruppenkohomologie 19.3.8.10 gilt also $\mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \mathrm{Mod}_K^\times(\hat{V})) = 0$ und insbesondere

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \mathrm{GL}(n; K)) = 0$$

für die Gruppe $\mathrm{GL}(n; K)$ mit ihrer offensichtlichen Γ-Operation. Diese Aussage wird meist zitiert als **Hilbert's Satz 90**. Hilbert selbst formuliert sie allerdings nur im Fall $n = 1$.

Korollar 6.6.4.9 (Pythagoreische Zahlen). *Gegeben $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 + b^2 = c^2$ ist entweder a oder b gerade. Nehmen wir zusätzlich an, b sei gerade, so gibt es $r, s, t \in \mathbb{Z}$ mit $a = (r^2 - s^2)t$ und $b = 2rst$ und $c = (r^2 + s^2)t$.*

Beweis. Modulo Vier sind Null und Eins die einzigen Quadrate. Das zeigt bereits die erste Aussage. Im Fall der quadratischen Erweiterung $\mathbb{Q}(\mathrm{i})/\mathbb{Q}$ liefert die Beschreibung 19.3.8.6 der nichtabelschen Gruppenkohomologie durch Zykel zusammen mit Hilbert's Satz 90, daß jedes von Null verschiedene Element $p+q\mathrm{i} \in \mathbb{Q}(\mathrm{i})$ mit $(p+q\mathrm{i})(p-q\mathrm{i}) = 1$ von der Gestalt $p+q\mathrm{i} = (r+s\mathrm{i})(r-s\mathrm{i})^{-1}$ ist für ein von Null verschiedenes Element $r + s\mathrm{i} \in \mathbb{Q}(\mathrm{i})$. Sicher dürfen wir dabei annehmen, daß gilt $r, s \in \mathbb{Z}$ und $\langle r, s\rangle = 1$. Gegeben $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nicht alle Null mit

$$a^2 + b^2 = c^2$$

finden wir also $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $\langle r, s\rangle = 1$ und

$$a + b\mathrm{i} = (r^2 - s^2 + 2rs\mathrm{i})c^2/(r^2 + s^2)$$

Aus $b = 2rsc^2/(r^2 + s^2) \in 2\mathbb{Z}$ folgt dann $t := c^2/(r^2 + s^2) \in \mathbb{Z}$. Auf diese Weise finden wir $r, s, t \in \mathbb{Z}$ mit $a = (r^2 - s^2)t$ und $b = 2rst$ und $c = (r^2 + s^2)t$, wenn a, b, c nicht alle Null sind. Im Fall $a = b = c = 0$ können wir schlicht $t = 0$ und r, s beliebig nehmen. □

Definition 6.6.4.10. Sei K/k eine Körpererweiterung. Eine **k-Form einer K-Algebra** A ist eine k-Form $\hat{A} \subset A$ des Vektorraums A, die gleichzeitig eine k-Unteralgebra von A ist.

6.6.4.11 (**Formen von Algebren und galoislineare Operationen**). Gegeben eine Galoiserweiterung K/k mit Galoisgruppe Γ und eine K-Algebra A liefern die Bijektionen aus 6.6.4.5 auch zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{\begin{array}{c} k\text{-Formen} \\ \hat{A} \subset A \\ \text{der } K\text{-Algebra } A \end{array}\right\} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \left\{\begin{array}{c} \text{galoislineare Operationen} \\ \Gamma \times A \to A \\ \text{auf der } K\text{-Algebra } A \end{array}\right\}$$

Hier fordern wir von einer Operation auf einer Algebra zusätzlich, daß sie mit der Verknüpfung in unserer Algebra verträglich sein soll, in Formeln $\hat{\gamma}(a \cdot b) = \hat{\gamma}(a) \cdot \hat{\gamma}(b)$ für alle $a, b \in A$ und $\gamma \in \Gamma$.

6.6.4.12 (**Formen von Algebren und Torsoren**). Gegeben eine Galoiserweiterung K/k mit Galoisgruppe Γ und eine K-Algebra A mit einer ausgezeichneten k-Form $\hat{A} \subset A$ stabilisiert unsere Γ-Operation auf $\mathrm{Mod}_K^\times(\hat{A})$ aus 6.6.4.8 die Untergruppe $\mathrm{Alg}_K^\times(\hat{A})$ der Automorphismen von K-Algebren und unsere Bijektion

aus 6.6.4.8 induziert eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} k\text{-Formen } \tilde{A} \subset A \\ \text{der } K\text{-Algebra } A \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \text{bepunktete topologische} \\ \Gamma\text{-äquivariante } \mathrm{Alg}_K^\times(\hat{A})\text{-Torsoren,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \\ \tilde{A} & \mapsto & \mathrm{Alg}_K^\times(\tilde{A}, \hat{A}) \end{array}$$

Hier ist rechts zu verstehen, daß wir beim Übergang vom Fall der Vektorräume zum Fall der Algebren jedem bepunkteten $\mathrm{Mod}_K^\times(\hat{A})$-Torsor die $\mathrm{Alg}_K^\times(\hat{A})$-Bahn des ausgezeichneten Punktes zuordnen. Entspricht die k-Form $\tilde{A} \subset A$ dem bepunkteten Torsor (X, x) und ist $\varphi \in \mathrm{Alg}_K^\times(\hat{A})$ ein Automorphismus von K-Algebren, so entspricht nun der bepunktete Torsor $(X, \varphi x)$ der k-Form $\varphi(\tilde{A}) \subset A$. Insbesondere induziert unsere Bijektion eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} k\text{-Formen } \tilde{A} \subset A \\ \text{der } K\text{-Algebra } A, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \\ k\text{-Algebren} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{topologische} \\ \Gamma\text{-äquivariante} \\ \mathrm{Alg}_K^\times(\hat{A})\text{-Torsoren,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\}$$

Vorschau 6.6.4.13. In der Sprache der Gruppenkohomologie 19.3.8.4 lesen sich die obigen Bijektionen als Bijektionen

$$\begin{array}{lcl} \{k\text{-Formen der } K\text{-Algebra } A\} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Z}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \mathrm{Alg}_K^\times(\hat{A})) \\ \{k\text{-Formen der } K\text{-Algebra } A\}_{/\cong_k} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \mathrm{Alg}_K^\times(\hat{A})) \end{array}$$

Hier meint $\cong_k$, daß wir in der zweiten Zeile nur k-Formen bis auf Isomorphismus von k-Algebren betrachten, und der untere Index st erinnert jeweils daran, daß nur stetige Einskozykel zu betrachten sind.

6.6.4.14. Gegeben ein Körper k und eine k-Ringalgebra $\hat{A}$ und eine Galoiserweiterung K/k mit Galoisgruppe Γ und $A := \hat{A} \otimes_k K$ erhält man wie in 6.6.4.12 eine Bijektion

$$\{k\text{-Formen der } K\text{-Ringalgebra } A\}_{/\cong_k} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \mathrm{Ralg}_K^\times(\hat{A}))$$

Rechts steht hier die Gruppe der K-Ringalgebrenautomorphismen von A mit ihrer von $\hat{A}$ herrührenden Γ-Operation. Ist $\hat{J} \subset \hat{A}$ ein Ideal derart, daß $J := \hat{J} \otimes_k K$ stabil ist unter allen Automorphismen der K-Ringalgebra A, so erhalten wir mit $\hat{B} := \hat{A}/\hat{J}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \{k\text{-Formen der } K\text{-Ringalgebra } A\}_{/\cong_k} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \mathrm{Ralg}_K^\times(\hat{A})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{k\text{-Formen der } K\text{-Ringalgebra } B\}_{/\cong_k} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \mathrm{Ralg}_K^\times(\hat{B})) \end{array}$$

Das alles sollte direkt aus der Konstruktion dieser Bijektionen folgen.

6.6.4.15 (**Innere Formen algebraischer Gruppen**). Analoges gilt für Koalgebren und Bialgebren und überhaupt sehr allgemein für Vektorräume A mit einer Familie ausgezeichneter Homomorphismen zwischen Tensorpotenzen von A, etwa einem Homomorphismus $A \otimes A \to A$ und einem weiteren Homomorphismus $A \to A \otimes A$. Insbesondere gilt es für affine algebraische Gruppen G. In diesem Fall induziert die Operation der Gruppe $G(K)$ durch Konjugation einen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{int} : G(K) \to \mathrm{GrpVar}_K^\times(G)$. Ist $\hat{G}$ eine k-Form von G, so trägt $\hat{G}(K) := \mathrm{Ralg}_k(\mathcal{O}(\hat{G}), K)$ eine stetige Γ-Wirkung durch Nachschalten, die wir durch Invertieren zu einer Rechtsoperation machen können. Der Homomorphismus $\mathrm{int} : \hat{G}(K) \to \mathrm{GrpVar}_K^\times(\hat{G})$ ist verträglich mit der Rechtsoperation von Γ. Die k-Formen von G, die Kohomologieklassen im Bild der von int induzierten Abbildung

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \hat{G}(K)) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \mathrm{GrpVar}_K^\times(\hat{G}))$$

entsprechen, heißen dann die **zu $\hat{G}$ inneren k-Formen von G**. Gegeben ein Einskozykel alias eine stetige Abbildung $z : \Gamma \to \hat{G}(K)$ mit $z(\gamma\beta) = z(\gamma)^\beta z(\beta)$ wie in 19.3.8.4 wird die Galoisoperation zur neuen Form also gegeben durch $\tilde{\gamma} := \hat{\gamma} \circ \mathrm{int}(z(\gamma))$.

Ergänzung 6.6.4.16. Ich wollte mir überlegen, daß gegeben zwei Bilinearformen auf einem endlichdimensionalen k-Vektorraum, die über K isomorph werden, die zugehörigen Automorphismengruppen innere Formen voneinander sind. Ich wollte mir ferner überlegen, daß zueinander innere Formen isomorphe k-lineare Tensorkategorien endlichdimensionaler Darstellungen besitzen.

6.6.5 Kummer-Theorie

Definition 6.6.5.1. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Eine Körpererweiterung L/K heißt eine **Kummer-Erweiterung durch n-te Wurzeln** oder kurz eine **n-Kummererweiterung**, wenn (1) unser n kein Vielfaches der Charakteristik unserer Körper ist, (2) der Körper K alle n-ten Einheitswurzeln enthält und (3) der Körper L über K erzeugt wird von n-ten Wurzeln von Elementen aus K, in Formeln

$$L = K(\alpha \mid \alpha \in L,\ \alpha^n \in K)$$

Nennen wir L/K eine **Kummererweiterung**, so ist gemeint, daß es ein n gibt derart, daß L/K eine Kummererweiterung durch n-te Wurzeln ist.

6.6.5.2. Für jedes multiplikativ notierte Monoid M vereinbaren wir die Notation $M^{\cdot n} := \{\alpha^n \mid \alpha \in M\}$. Der kleine Punkt vor dem n soll klar machen, daß nicht das kartesische Produkt von n Kopien der Menge M gemeint ist.

Satz 6.6.5.3 (**Kummertheorie**). *Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches der Charakteristik von K und K enthalte alle n-ten Einheitswurzeln. So gilt:*

1. *Genau dann ist eine Körpererweiterung L/K eine n-Kummererweiterung, wenn L/K eine Galois-Erweiterung ist mit abelscher Galois-Gruppe von endlichem n teilenden Exponenten, also mit $g^n = 1$ für alle $g \in \mathrm{Gal}(L/K)$;*

2. *Die Abbildungsvorschrift $L \mapsto \Delta(L) := ((L^\times)^{\cdot n} \cap K^\times)/(K^\times)^{\cdot n}$ liefert eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} n\text{-Kummererweiterungen von } K \text{ in einem} \\ \text{festen algebraischen Abschluß } \bar{K} \text{ von } K \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Untergruppen von} \\ K^\times/(K^\times)^{\cdot n} \end{array} \right\}$$

   Wir nennen $\Delta(L)$ die **Kummergruppe** *unserer Kummererweiterung. Gegeben eine Untergruppe $\Delta \subset K^\times/(K^\times)^{\cdot n}$ wird die zugehörige Kummererweiterung $E(\Delta)$ erzeugt von den n-ten Wurzeln der Repräsentanten der Elemente von Δ;*

3. *Ist L/K eine n-Kummererweiterung mit Kummergruppe $\Delta = \Delta(L)$ und Galoisgruppe $G := \mathrm{Gal}(L/K)$ und bezeichnet μ_n die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln von K, so erhalten wir eine wohldefinierte bilineare Abbildung, die* **Kummerpaarung**

$$\begin{array}{ccc} G \times \Delta & \to & \mu_n \\ (g\ ,\ a) & \mapsto & g(\sqrt[n]{a})/\sqrt[n]{a} \end{array}$$

4. *Ist L/K eine n-Kummererweiterung, so liefert die Kummerpaarung einen Isomorphismus*

$$G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Delta, \mu_n)$$

   Insbesondere haben wir für jede endliche Kummererweiterung einen unkanonischen Isomorphismus $G \cong \Delta$ zwischen ihrer Galoisgruppe und ihrer Kummergruppe;

5. *Ist L/K eine n-Kummererweiterung, so liefert unsere Kummerpaarung einen Isomorphismus*

$$\Delta \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{st}}(G, \mu_n)$$

   Hierbei sind rechts stetige Gruppenhomomorphismen gemeint für die Krull-Topologie auf der Galoisgruppe und die diskrete Topologie auf μ_n.

6.6.5.4. Wir könnten im Satz statt μ_n ebensogut an jeder Stelle $K^\times$ schreiben, alle Abbildungen landen automatisch in $\mu_n \subset K^\times$.

6.6.5.5. Seien K ein Körper und $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluß von K. Da Kummererweiterungen per definitionem Galois sind, ist jede Kummererweiterung von K isomorph über K zu genau einem Unterkörper von $\bar{K}$, der K umfaßt.

Beispiel 6.6.5.6. Unsere Bestimmung der Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})$ über $\mathbb{Q}$ in 6.4.1.34 mag eine erste Anschauung für 2-Kummererweiterungen liefern.

Beweis. 3. Das ist klar.

1. Per definitionem ist jede Kummererweiterung ein Zerfällungskörper separabler Polynome und mithin nach 6.3.11.20 Galois. Die in Teil 3 angegebene Paarung $G \times \Delta \to \mu_n$ liefert offensichtlich einen injektiven Gruppenhomomorphismus $G \hookrightarrow \mathrm{Ens}(\Delta, \mu_n)$ und zeigt so, daß für jede n-Kummererweiterung die Galoisgruppe G abelsch ist mit $g^n = 1 \; \forall g \in G$. Sei andererseits L/K eine Erweiterung mit abelscher Galoisgruppe von endlichem n teilenden Exponenten. Jedes Element von L liegt schon in einem Zwischenkörper, der Galois und endlich ist über K. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir also L/K endlich annehmen. Dann finden wir etwa nach 4.4.4.9 Untergruppen $H_1, \ldots, H_r \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ mit trivialem Schnitt $H_1 \cap \ldots \cap H_r = 1$ und zyklischen Quotienten G/H_i. Die zugehörigen Unterkörper $L_1, \ldots, L_r$ erzeugen L und entstehen nach 6.4.6.3 jeweils durch Adjunktion einer n-ten Wurzel zu K. Damit ist auch 1 bewiesen.

4&5. Gegeben eine abelsche Gruppe G definieren wir ihre duale Gruppe oder Charaktergruppe als $\mathfrak{X}(G) := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Die offensichtliche Paarung $G \times \mathfrak{X}(G) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ liefert eine natürliche Abbildung von G in sein Biduales. Für $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ prüft man $\mathfrak{X}(G) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und prüft sogar, daß die natürliche Abbildung von G in sein Biduales eine Bijektion ist. Dieselben Aussagen $\mathfrak{X}(G) \cong G$ und $\mathrm{ev} : G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(G))$ folgen dann für alle endlichen abelschen Gruppen G. Betrachten wir nur Gruppen vom Exponenten n, so kann hier auch μ_n den Part von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ übernehmen. Nun wissen wir bereits, daß unsere Paarung $G \times \Delta \to \mu_n$ eine Injektion

$$G \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\Delta, \mu_n)$$

induziert. Ebenso ist umgekehrt klar, daß sie eine Injektion

$$\Delta \hookrightarrow \mathrm{Hom}(G, \mu_n)$$

induziert, denn für $a \in \Delta$ und $\alpha \in L^\times$ mit $\alpha^n = a$ folgt aus $g(\alpha) = \alpha \; \forall g \in G$ schon $\alpha \in K^\times$, also $a \in (K^\times)^{\cdot n}$. Im Fall einer endlichen n-Kummererweiterung zeigt die zweite Injektion, daß Δ endlich ist, und mit unserer Dualität folgt dann, daß unsere Injektionen beide Isomorphismen sein müssen. So erhalten wir 4 und 5 im Fall einer endlichen Kummererweiterung. Im allgemeinen folgt dann 4 durch Übergang zum Limes über alle endlichen Teilerweiterungen und 5 durch Übergang zum Kolimes über alle endlichen Teilerweiterungen.

2. Sei $\bar{K}$ ein fester algebraischer Abschluß von K. Für eine beliebige Teilmenge $D \subset K^\times/(K^\times)^{\cdot n}$ können wir eine n-Kummererweiterung $E(D) \subset \bar{K}$ von K bilden, indem wir zu K alle n-ten Wurzeln von Repräsentanten in $K^\times$ der Elemente

aus D in $\bar{K}$ adjungieren. Sicher erhalten wir dann für eine n-Kummererweiterung $L \subset \bar{K}$ von K unser L aus seiner Kummergruppe $\Delta(L)$ zurück als $L = E(\Delta(L))$. Es gilt nur noch umgekehrt zu zeigen, daß für jede Untergruppe $D \subset K^\times/(K^\times)^{\cdot n}$ auch gilt $D = \Delta(E(D))$. Offensichtlich ist hier $D \subset \Delta(E(D))$. Um Gleichheit zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit D endlich annehmen. Dann ist auch $E(D)/K$ endlich. Nun bezeichne man mit G die Galoisgruppe dieser Körpererweiterung und betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(\Delta(E(D)), \mu_n) \\ \| & & \downarrow \\ G & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(D, \mu_n) \end{array}$$

Die obere Horizontale ist bijektiv aufgrund der bereits bewiesenen Teile. Die untere Horizontale ist injektiv, da die n-ten Wurzeln der Repräsentanten der Elemente von D bereits $E(D)$ erzeugen. Die rechte Vertikale ist surjektiv als duale Abbildung zu einer Injektion. Es folgt, daß die rechte Vertikale ein Isomorphismus sein muß. Dualisieren liefert schließlich $D = \Delta(E(D))$ wie gewünscht. □

Ergänzung 6.6.5.7 (**Isotypische Zerlegung von Kummererweiterungen**). Gegeben $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und eine n-Kummererweiterung L/K mit Galoisgruppe G ist für jeden stetigen Gruppenhomomorphismus $\chi : G \to K^\times$ die χ-isotypische Komponente

$$L_\chi := \{l \in L \mid gl = \chi(g)l \ \forall g \in G\}$$

der Darstellung L von G über K eindimensional, in Formeln $\dim_K L_\chi = 1$, und sie werden erzeugt von einer beliebigen n-ten Wurzel eines beliebigen Repräsentanten des Urbilds von χ unter der im letzten Teil unseres Satzes 6.6.5.3 zur Kummertheorie gegebenen Bijektion. Daß die eben beschriebenen Elemente in $L_\chi \backslash 0$ liegen, folgt direkt aus den Definitionen. Daß kein L_χ eine Dimension echt größer als Eins haben kann, folgt im Fall einer endlichen Kummererweiterung aus der Identität $|\mathfrak{X}(G)| = |G| = [L : K]$ zusammen mit der Zerlegung in isotypischen Komponenten $L = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} L_\chi$ aus der Darstellungstheorie. Alternativ kann man die Aussage aus dem Satz über die Normalbasis 6.6.1.6 folgern. Im Fall beliebiger Kummererweiterungen leitet man die Aussage leicht aus dem endlichen Fall ab.

6.7 Vorlesung Algebra und Zahlentheorie WS 19/20

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

22.10 Gruppen 2.2.2 und Gruppenhomomorphismen 2.2.3. Monoide, Magmas 2.2.3.2. Klassifikation der Gruppen mit höchstens vier Elementen 6.1.1 zu Fuß. Klassifikation der Gruppen F mit fünf Elementen durch Theorie: Untergruppen „richtige“ Definition. Untergruppen von $\mathbb{Z}$ nach 3.4.3.4, Nebenklassen 4.4.1 und Lagrange: F hat nur die beiden Untergruppen 1 und F.

24.10 Bijektion $\mathrm{Grp}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} G$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ nach 2.2.3.31 für jede Gruppe G. Also für $|G| = 5$ Surjektion $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow G$ durch $1 \mapsto g$ mit $g \neq e$. Universelle Eigenschaft surjektiver Gruppenhomomorphismen 4.4.2.1. Normalteiler 4.4.2 und Quotient danach. Isomorphiesätze. Ordnung von Gruppenelementen, Struktur zyklischer Gruppen. Gruppen von Primzahlordnung sind zyklisch. Kleiner Fermat für Kongruenzen von Potenzen modulo Primzahl.

29.10 Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung 3.4.4.8. Satz über den größten gemeinsamen Teiler. Euklidischer Algorithmus. Chinesischer Restsatz mit zwei Resten. Beide Klassifikationen endlich erzeugter abelscher Gruppen angegeben. Elementarteilersatz bewiesen.

31.10 Beide Klassifikationen endlich erzeugter abelscher Gruppen bewiesen. Endliche Untergruppen der multiplikativen Gruppe eines Körpers sind zyklisch. Operationen von Gruppen und Monoiden auf Mengen. Bahnen als homogene Räume. Bahnformel.

5.11 Operation durch Konjugation. Endliche Untergruppen der Drehgruppe bis auf Konjugation. Einfache Gruppen. Klassengleichung. Konjugationsklassen in der Ikosaedergruppe. Die Ikosaedergruppe ist einfach 6.1.2.5. Kompositionsreihen und Satz von Jordan-Hölder, noch ohne Beweis.

7.11 Beweis Jordan-Hölder. Struktur von p-Gruppen. Sylowsätze. Gruppen mit 6 und 15 Elementen. Gruppen mit 8 Elementen ohne Beweis.

12.11 Die natürlichen Zahlen axiomatisch, 3.4.1.2 bis 3.4.1.17, nicht Kürzungsregel **??**, nicht Anordnung 3.4.1.19, aber noch 3.4.1.21 und **??** und Definition der Multiplikation.

14.11 Leonardo vertritt mich. Ringe und Restklassenringe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ohne Diffie-Hellmann. Quotient eines Rings nach einem Ideal 6.2.1.13.

19.11 Teilringe und Notationen für ihre Erzeugung. Notationen für Erzeugung von Idealen. Beispiele für Restklassenringe, insbesondere $\mathbb{R}[X]/\langle P\rangle$ für Polynome vom Grad zwei und allgemeinere Polynome. Abstrakter chinesischer Restsatz und Bezug zur Interpolation. Quotientenkörper eines kommutativen Integritätsbereichs und seine universelle Eigenschaft. Damit $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$ konstruiert.

21.11 Euklidische Ringe, Faktorielle Ringe, Hauptidealringe, Beispiele, deren Beziehung untereinander. Quotienten von Hauptidealringen. Der Ring der Gauß'schen Zahlen ist euklidisch.

26.11 Gauß'sche Zahlen und Summen von zwei Quadraten. Polynomringe über faktoriellen Ringen noch ohne Beweis.

28.11 Polynomringe über faktoriellen Ringen. Gemeinsame Nullstellen von zwei teilerfremden Polynomen in zwei Variablen. Kreisteilungspolynome, Eisensteinkriterium, Irreduzibilität des p-ten Kreisteilungspolynoms für p prim.

3.12 Symmetrische Polynome, Hauptsatz. Diskriminante eines Polynoms vom Grad Drei. Nicht allgemeine Diskriminante. Schranke von Bézout mit Beweisskizze.

5.12 Körpererweiterungen. Algebraische und transzendente Elemente. Minimalpolynom. Endliche Körpererweiterungen, Grad einer Körpererweiterung. Elemente von endlicher Körpererweiterung sind algebraisch.

10.12 Quadratische Körpererweiterungen. Multiplikativität des Grades. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.

12.12 Endliche Körper und deren Unterkörper. Zerfällungskörper definiert, Satz über Eindeutigkeit formuliert, aber noch nicht bewiesen. Satz über Ausdehnung von Körperhomomorphismen auf primitive algebraische Erweiterungen bewiesen, aber kurz. Beweis nochmal!

17.12 Eindeutigkeit des Zerfällungskörpers. Normale Erweiterungen. Angekündigt: Algebraischer Abschluß.

19.12 Algebraischer Abschluß.

7.1 Separable Polynome. Definition separabler Körpererweiterungen. Noch nicht, daß von separablen Elementen erzeugte Körpererweiterungen separabel sind.

9.1 Charakterisierung separabler Körpererweiterungen. Unmöglichkeit einer Überdeckung eines Körpers durch endlich viele echte Teilkörper. Satz vom primitiven Element, Körpererweiterungen mit nur endlich vielen Zwischenkörpern, Unterscheidung von Körperhomomorphismen an einem einzigen Element.

14.1 Galoiserweiterungen und ihre Beschreibung als Erweiterungen über dem Fixkörper. Beispiele für Galoisgruppen.

16.1 Galoisgruppe der allgemeinen Gleichung. Anschauung. Galois-Korrespondenz.

21.1 Biquadratische Erweiterungen. Beweis mit Galoistheorie, daß $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Irreduzibilität von Kreisteilungspolynomen. Galoisgruppen von Kreisteilungskörpern.

23.1 Hinreichendes Kriterium für die Konstruierbarkeit regelmäßiger n-Ecke mit Zirkel und Lineal. Euler'sche φ-Funktion. Reziprozitätsgesetz. Beweis bis zu $\alpha^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p$ für ein gewisses explizites α im p-ten Kreisteilungskörper. Legendre-Symbole bereits eingeführt.

28.1 Beweis von Reziprozitätsgesetz und Ergänzungssatz. Jacobi-Symbole, ihre Eigenschaften und ihr Nutzen. Zyklische Erweiterungen, der Beweis eines Lemmas aus der linearen Algebra steht aber noch aus, ebenso das Korollar über Erweiterungen von Primzahlordnung.

30.1 Lemma aus der linearen Algebra. Erweiterungen von Primzahlordnung. Translationssatz. Radikalerweiterungen. Hauptsatz noch nicht bewiesen über auflösbare Galoisgruppen und auflösbare Gleichungen.

4.2 Hauptsatz über auflösbare Galoisgruppen und auflösbare Gleichungen. Beispiel einer Gleichung fünften Grades, die sich nicht durch Radikale lösen läßt. Cardano'sche Formeln. Begonnen mit deren Herleitung aus der Galoistheorie.

6.2 Herleitung der Cardano'schen Formeln aus der Galoistheorie. Notwendigkeit des Ausgreifens in die komplexen Zahlen.

11.2 Ansage: Tutoren werden gesucht. Mehr zu Zahlbereichen: Konstruktion $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$.

13.2 Quaternionen?

6.8 Vorlesung Algebra und Zahlentheorie WS 16/17

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

19.10 Gruppen und Gruppenhomomorphismen. Klassifikation der Gruppen mit höchstens vier Elementen 6.1.1 zu Fuß. Klassifikation der Gruppen F mit fünf Elementen durch Theorie: Untergruppen, Untergruppen von $\mathbb{Z}$ nach 3.4.3.4, Nebenklassen 4.4.1 und Lagrange: F hat nur die beiden Untergruppen 1 und F. Bijektion $\mathrm{Grp}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} G$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ für jede Gruppe G. Also für $|G| = 5$ Surjektion $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow G$ durch $1 \mapsto g$ mit $g \neq e$. Universelle Eigenschaft surjektiver Gruppenhomomorphismen.

21.10 Normalteiler 4.4.2 und Quotient danach. Isomorphiesätze. Ordnung von Gruppenelementen, Struktur zyklischer Gruppen. Gruppen von Primzahlordnung sind zyklisch. Kleiner Fermat für Kongruenzen von Potenzen modulo Primzahl. Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Satz über den größten gemeinsamen Teiler.

26.10 Chinesischer Restsatz mit zwei Resten. RSA-Verschlüsselung. Einfache Gruppen, Satz von Jordan-Hölder. Operationen von Gruppen und Monoiden auf Mengen. Operation durch Konjugation ganz kurz. Noch nicht Bahnformel.

28.10 Bahnen als homogene Räume. Bahnformel. Operation durch Konjugation. Konjugationsklassen in der Würfelgruppe und der Ikosaedergruppe. Die Ikosaedergruppe ist einfach 6.1.2.5.

2.11 Struktur von p-Gruppen. Gruppen mit p^2 Elementen sind abelsch. Sylow-Sätze bewiesen. Noch nachholen: Jeder Primteiler der Ordnung einer abelschen Gruppe ist die Ordnung eines Elements 4.4.3.15, 4.4.3.17.

4.11 Jeder Primteiler der Ordnung einer abelschen Gruppe ist die Ordnung eines Elements 4.4.3.15, 4.4.3.17. Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen durch Multimengen von Primpotenzen, ohne Beweis. Gruppen mit 6 Elementen mit Beweis. Gruppen mit 8 Elementen ohne Beweis. Dann Konstruktion der natürlichen Zahlen im Rahmen der Mengenlehre. Konstruktion der Addition, noch ohne Beweis der Eigenschaften.

9.11 Konstruktion und Eigenschaften der Addition. Ringe, Ringhomomorphismen. Universelle Eigenschaft surjektiver Ringhomomorphismen. Ideale. Konstruktion von Restklassenringen, noch nicht ganz fertig.

11.11 Konstruktion von Restklassenringen. Von Teilmengen erzeugte Ideale. Quotientenringe von Polynomringen nach von normierten Polynomen erzeugten

Hauptidealen. Konstruktion von $\mathbb{C}$ als Quotient $\mathbb{R}[X]/\langle X^2+1\rangle$. Teilringe. Von Teilmengen erzeugte Teilringe. Algebraische Unabhängigkeit. Produkte von Ringen. Abstrakter chinesischer Restsatz. Interpolation als Beispiel.

16.11 Euklidische Ringe, Faktorielle Ringe, Hauptidealringe, Beispiele, deren Beziehung untereinander. Quotienten von Hauptidealringen. Noch nicht der Ring der Gauß'schen Zahlen.

18.11 Gauß'sche Zahlen und Summen von zwei Quadraten. Endliche Untergruppen der multiplikativen Gruppe eines Körpers sind zyklisch. Konstruktion des Quotientenkörpers. Bewertung auf dem Quotientenkörper eines faktoriellen Rings an einem irreduziblen Element.

23.11 Polynomringe über faktoriellen Ringen, Bewertung von Polynomen, Lemma von Gauß. Zwei teilerfremde Polynome in zwei Variablen haben höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen. Kreisteilungspolynome haben ganze Zahlen als Koeffizienten. Noch nicht Irreduzibilität von Kreisteilungspolynomen.

25.11 Irreduzibilität von Kreisteilungspolynomen. Eisensteinkriterium. Symmetrische Polynome, Hauptsatz.

30.11 Diskriminante eines Polynoms vom Grad Drei. Allgemeine Diskriminante. Schranke von Bézout mit Beweis.

2.12 Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen. Konstruktion der reellen Zahlen.

7.12 Körpererweiterungen. Algebraische und transzendente Elemente. Minimalpolynom.

9.12 Endliche und algebraische Körpererweiterungen. Quadratische Körpererweiterungen.

14.12 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Angefangen mit endlichen Körpern. Gezeigt, daß deren Kardinalität stets Charakteristik hoch Grad über dem Primkörper ist.

16.12 Endliche Körper und deren Unterkörper. Zerfällungskörper definiert, Satz über Eindeutigkeit formuliert, aber noch nicht bewiesen. Satz über Ausdehnung von Körperhomomorphismen auf primitive algebraische Erweiterungen bewiesen, aber kurz. Beweis nochmal!

21.12 Ausdehnungen von Körperhomomorphismen. Maximalzahl, Existenz. Eindeutigkeit des Zerfällungskörpers. Normale Erweiterungen, Definition und Anschauung. Formuliert, aber nicht bewiesen, daß Zerfällungskörper normal sind.

23.12 Ich will nur die Ableitung einführen mit Summen- und Produktregel und zeigen, daß mehrfache Nullstellen Nullstellen der Ableitung sind. Dann habe über den Koordinatisierungssatz geredet und gezeigt, wie man in jeder Desargues-Ebene Richtungsvektoren einführt. Nicht gezeigt, daß diese eine kommutative Gruppe bilden.

11.1 Ableitung von Polynomen und Separabilität von Polynomen und Körpererweiterungen. Noch nicht den Satz über die Zahl von Ausdehnungen von Körperhomomorphismen auf separable Erweiterungen fertig bewiesen.

13.1 Satz über separable Körpererweiterungen fertig bewiesen. Satz vom primitiven Element, Charakterisierung endlicher primitiver Körpererweiterungen. Konstruktion und Eindeutigkeit des algebraischen Abschlusses.

18.1 Galoisgruppe, Galois-Erweiterungen. Galois-Erweiterungen über Fixkörper. Transitive treue Operation der Galoisgruppe eines Zerfällungskörpers eines irreduziblen Polynoms auf den Nullstellen. Noch nicht: Invarianten eines Quotientenkörpers.

20.1 Galoisgruppe der allgemeinen Gleichung. Anschauung für die Galoisgruppe. Galois-Korrespondenz, aber noch keine Anwendungen dazu.

25.1 Biquadratische Erweiterungen. Beweis mit Galoistheorie, daß $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Irreduzibilität von Kreisteilungspolynomen.

27.1 Galoisgruppen von Kreisteilungskörpern und hinreichendes Kriterium für die Konstruierbarkeit regelmäßiger n-Ecke mit Zirkel und Lineal. Euler'sche φ-Funktion.

1.2 Erweiterungen durch Radikale: Zyklische Erweiterungen, Translationssatz, Zusammenhang zwischen Radikalerweiterungen und endlichen Galoiserweiterungen mit auflösbarer Galoisgruppe. Noch nicht Auflösbarkeit von Gleichungen gleichbedeutend zur Auflösbarkeit ihrer Galoisgruppe.

3.2 Auflösbarkeit von Gleichungen gleichbedeutend zur Auflösbarkeit ihrer Galoisgruppe. Unmöglichkeit der Auflösung kubischer Gleichungen nur durch reelle Wurzeln aus positiven reellen Zahlen selbst im Fall von drei reellen Lösungen.

8.2 Herleitung der Cardano'schen Formeln aus der Galoistheorie. Quadratisches Reziprozitätsgesetz, Legendre-Symbol, Beispiele. Quadratische Erweiterungen in Kreisteilungskörpern zu Einheitswurzeln von ungerader Primzahlordnung. Beides noch ohne Beweis.

10.2 Beweis quadratisches Reziprozitätsgesetz. Beweis quadratische Erweiterungen in Kreisteilungskörpern zu Einheitswurzeln von ungerader Primzahlordnung.

6.9 Danksagung

Als Quellen habe ich besonders [Lor96] und [Lan74] genutzt. Auch [E+92] war hilfreich. Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Anna Breucker, Katharina Wendler, René Recktenwald, Meinolf Geck, Theo Grundhöfer, Christina Pflanz, . . .

Kapitel 7

Kommutative Algebra und Geometrie

Inhalt

7.1 Endliches Erzeugen und Nullstellensatz 917

7.1.1 Formulierung des Hilbert'schen Nullstellensatzes . 917

7.1.2 Allgemeinheiten zu Moduln 923

7.1.3 Homomorphismen, Untermoduln, Quotienten . . . 925

7.1.4 Noethersche Moduln und Ringe 929

7.1.5 Ringendliche Körpererweiterungen 932

7.1.6 Beweis des Hilbert'schen Nullstellensatzes 937

7.2 Mehr zu Moduln 942

7.2.1 Summen und Produkte von Moduln 942

7.2.2 Endliche Produkte von Ringen 946

7.2.3 Rechtsmoduln und Matrizenrechnung 948

7.2.4 Moduln über Hauptidealringen 951

7.2.5 Tensorprodukte über Kringen 959

7.2.6 Allgemeine Tensorprodukte* 963

7.2.7 Merkwürdigkeiten bei Tensorprodukten* 969

7.2.8 Induktion und Koinduktion für Ringe* 970

7.2.9 Ganzzahlige symplektische Formen* 974

7.3 Affine Varietäten 975

7.3.1 Polynomiale Funktionen 975

7.3.2 Räume als Ringe 976

7.3.3 Naive affine Varietäten 981
7.3.4 Nullstellensatz für affine Varietäten 986
7.3.5 Die symmetrische Algebra* 995
7.4 Primideale und Lokalisierung 999
7.4.1 Irreduzible Komponenten 999
7.4.2 Irreduzible algebraische Mengen und Primideale . 1004
7.4.3 Lokalisierung 1010
7.4.4 Lokalisierung im geometrischen Kontext 1022
7.4.5 Lokalisierung und Primideale 1026
7.4.6 Lemma von Nakayama 1033
7.4.7 Einfache Moduln und Kompositionsreihen 1037
7.4.8 Hauptraumzerlegung von Moduln* 1044
7.5 Ganze Kringerweiterungen und Dimension 1046
7.5.1 Ganze Kringerweiterungen 1046
7.5.2 Going-up 1049
7.5.3 Quotienten nach endlichen Gruppen* 1055
7.5.4 Noether-Normalisierung 1057
7.5.5 Flache Morphismen 1064
7.5.6 Transzendenzgrad 1067
7.5.7 Going-Down und maximale Primidealketten 1073
7.5.8 Beweis von Going-Down ohne Galois-Theorie** . . 1080
7.5.9 Hauptidealsatz von Krull 1081
7.5.10 Flachheit und Faserdimension 1088
7.6 Algebraische Varietäten 1092
7.6.1 Einführung 1092
7.6.2 Geringte Räume 1093
7.6.3 Gesättigte geringte Räume 1097
7.6.4 Algebraische Varietäten 1100
7.6.5 Projektive Räume 1105
7.6.6 Graduierte Gruppen und Ringe 1111
7.6.7 Graduierte Variante des Elementarteilersatzes** . 1114
7.6.8 Rechnen in projektiven Varietäten 1116
7.6.9 Hilbertpolynome 1121

7.6.10 Satz von Bézout 1125
7.6.11 Produkte von Varietäten 1128
7.6.12 Separierte Varietäten 1131
7.7 Hilbertpolynome und reguläre Ringe 1135
7.7.1 Filtrierungen von Gruppen 1135
7.7.2 Filtrierungen von Ringen 1138
7.7.3 Dimensionstheorie lokaler noetherscher Kringe . . 1139
7.7.4 Glattheit und Regularität 1147
7.7.5 Birationale Äquivalenz 1156
7.7.6 Beispiele für faktorielle lokale Ringe* 1158
7.8 Krulldimension Eins 1163
7.8.1 Diskrete Bewertungsringe 1163
7.8.2 Dedekindringe 1169
7.8.3 Norm, Spur, Endlichkeit ganzer Abschlüsse* 1173
7.8.4 Bewertungen und Körpererweiterungen* 1177
7.8.5 Spur und Diskriminante* 1183
7.8.6 Glatte projektive Kurven* 1187
7.9 Invariantentheorie* 1194
7.9.1 Affinität von Varietäten und Morphismen 1194
7.9.2 Quotienten nach endlichen Gruppen 1195
7.9.3 Allgemeines zu Bahnenräumen 1199
7.9.4 Quotienten nach fixpunktfreien $k^\times$-Operationen . . 1201
7.9.5 Varietäten zu graduierten Kringalgebren 1204
7.9.6 Bahnschlußräume und Invariantenringe 1207
7.9.7 Geometrische Invariantentheorie 1215
7.10 Danksagung 1221

Wichtige Grundlage für dieses Kapitel ist Abschnitt 6.2.1 aus der Algebra über Restklassenringe und Teilringe. Nach und nach wird dann immer mehr aus den anderen Abschnitten von 6.2 verwendet, insbesondere der Satz, daß Polynomringe über faktoriellen Ringen wieder faktoriell sind. Nach und nach wird auch die Begrifflichkeit topologischer Räume immer wichtiger: Zunächst genügen elementarste Kenntnisse, etwa im Umfang von 11.1.1, später verwenden wir auch weitergehende Konstruktionen im Umfang von 15.1.6. Grundbegriffe der Kategorientheorie im Umfang von 4.7.1.1 sollten vorhanden sein oder im Rahmen dieser Vorlesung mit erlernt werden.

7.1 Endliches Erzeugen und Nullstellensatz

7.1.1 Formulierung des Hilbert'schen Nullstellensatzes

7.1.1.1. Ich erinnere daran, daß bei uns jeder Ring eine Eins hat und daß von jedem Ringhomomorphismus gefordert wird, daß er die Eins auf die Eins wirft. Ein Ideal eines Rings ist nach 6.2.1.9 eine Untergruppe seiner additiven Gruppe, die unter der Multiplikation mit beliebigen Elementen unseres Rings von links wie von rechts stabil ist. Einen kommutativen Ring nenne ich auch einen **Kring**.

7.1.1.2. Seien k ein Kring und $k[T_1, \ldots, T_n]$ der Polynomring über k in n Variablen. Das Auswerten liefert eine Abbildung

$$k[T_1, \ldots, T_n] \times k^n \to k$$

Definition 7.1.1.3. Gegeben ein Kring k und eine Teilmenge $E \subset k[T_1 \ldots, T_n]$ des Polynomrings in n Variablen mit Koeffizienten in k erklären wir die **Nullstellenmenge** oder kurz die **Nullstellen von** E als die Menge derjenigen Punkte des k^n, an denen alle Polynome aus E verschwinden. Wir notieren diese Menge

$$\mathcal{Z}(E) := \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in E\}$$

mit $\mathcal{Z}$ wie „zeroes". Im Fall $E = \{f_1, \ldots, f_r\}$ verwenden wir die abkürzende Notation $\mathcal{Z}(E) = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_r)$. Eine Teilmenge $Z \subset k^n$ heißt **algebraisch**, wenn sie die Nullstellenmenge eines Systems von Polynomen ist, wenn es also eine Teilmenge $E \subset k[T_1 \ldots, T_n]$ gibt mit $Z = \mathcal{Z}(E)$.

7.1.1.4 (**Diskussion der Notationen**). Eine andere in der Literatur gängige Notation für unser $\mathcal{Z}(E)$ ist $\mathrm{V}(E)$ mit V wie „Varietät". Wir verwenden jedoch die Bezeichnung als Varietät nur über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k und verwenden die Notation $\mathrm{V}(E)$ überhaupt nicht.

7.1.1.5. Im ersten Teil dieser Vorlesung geht es um die Untersuchung „geometrischer" Eigenschaften algebraischer Teilmengen von k^n für algebraisch abgeschlossene Körper k und die entsprechenden „algebraischen" Aussagen aus der Theorie der kommutativen Ringe. Den tragenden Pfeiler der Brücke zwischen der „geometrischen" und der „algebraischen" Welt bildet der folgende Satz, dessen Beweis mit den nötigen Vorbereitungen uns bis 7.1.6.11 beschäftigen wird.

Satz 7.1.1.6 (**Hilbert'scher Nullstellensatz**). *Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Ist $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Polynom in endlich vielen Variablen, das auf der Nullstellenmenge eines Ideals $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ verschwindet, so liegt eine Potenz unseres Polynoms bereits selbst in besagtem Ideal. In Formeln gilt also*

$$\mathcal{Z}(f) \supset \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \;\Rightarrow\; f^N \in \mathfrak{a} \quad \textit{für } N \gg 0$$

Beispiel 7.1.1.7. Die gemeinsame Nullstellenmenge von $x^2, z^3 \in k[x,y,z]$ ist die y-Achse. Das Polynom $f := (x+z)y$ verschwindet auf der y-Achse und wie vom Nullstellensatz vorhergesagt gehört eine Potenz von f zum Ideal $\langle x^2, z^3\rangle$, in unserem Fall etwa die vierte Potenz

$$f^4 = \big((x^2+4xz+6z^2)y^4\big)x^2 + \big((4x+z)y^4\big)z^3$$

Beispiel 7.1.1.8. Für k nicht algebraisch abgeschlossen ist unser Satz falsch. Als Beispiel betrachte man für $k = \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}[T]$ das Ideal $\mathfrak{a} = \langle T^2+1\rangle$. Obwohl das konstante Polynom $f = 1$ auf der Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \emptyset$ unseres Ideals verschwindet, liegt keine seiner Potenzen $1^N = 1$ in besagtem Ideal.

7.1.1.9. Wir werden den Hilbert'schen Nullstellensatz erst im Anschluß an Lemma 7.1.6.11 zeigen können. Manche Aussagen aus seinem Umfeld sind jedoch sehr einfach zu haben, wie ich im folgenden ausführen will.

Definition 7.1.1.10. Ist k ein Kring und $X \subset k^n$ eine Teilmenge, so bilden diejenigen Polynome, die an allen Punkten von X verschwinden, offensichtlich ein Ideal des Polynomrings $k[T_1,\dots,T_n]$. Es heißt das **Verschwindungsideal von** X und wir notieren es

$$\mathcal{I}(X) := \{f \in k[T_1,\dots,T_n] \mid f(x) = 0 \quad \forall x \in X\}$$

7.1.1.11. Sei k ein Kring. Offensichtlich gilt für ein beliebiges System $\mathcal{E}$ von Teilmengen von $k[T_1,\dots,T_n]$ die Identität $\bigcap_{E\in\mathcal{E}} \mathcal{Z}(E) = \mathcal{Z}\left(\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E\right)$ und insbesondere auch

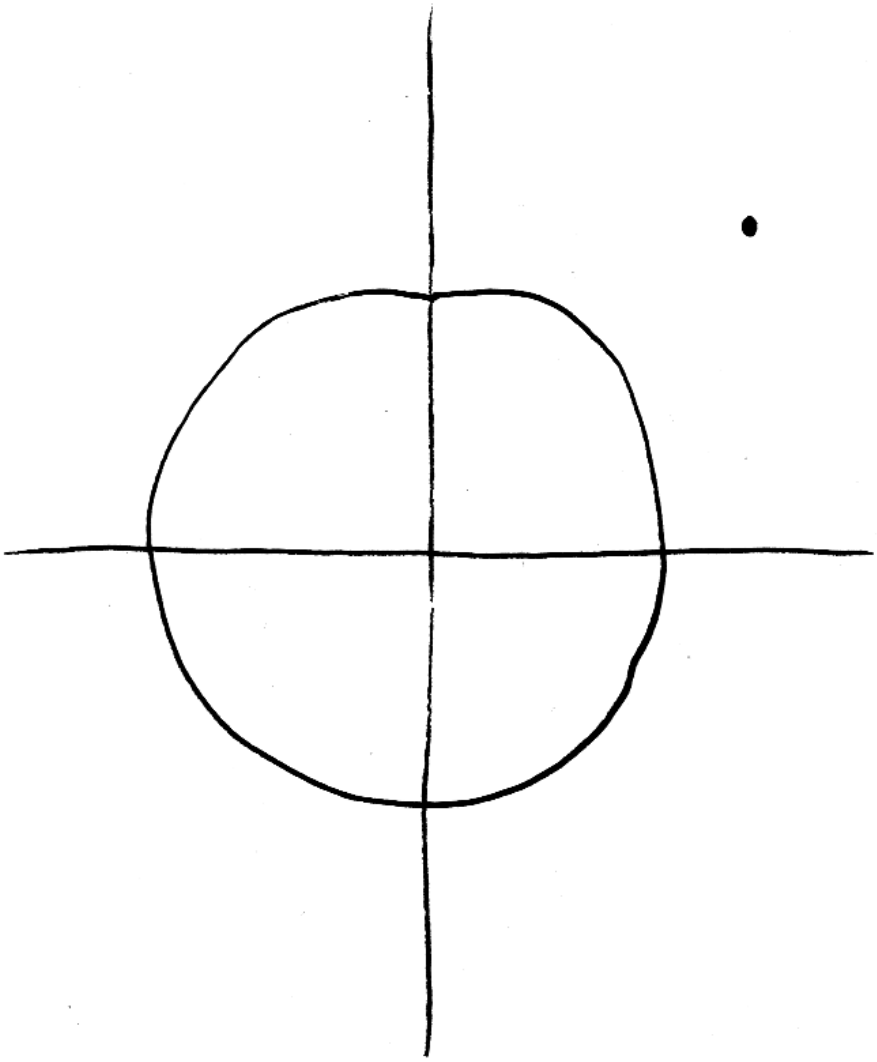
$$E \subset F \;\Rightarrow\; \mathcal{Z}(E) \supset \mathcal{Z}(F)$$

Ebenso offensichtlich gilt für ein beliebiges System $\mathcal{X}$ von Teilmengen des k^n die Identität $\mathcal{I}\left(\bigcup_{X\in\mathcal{X}} X\right) = \bigcap_{X\in\mathcal{X}} \mathcal{I}(X)$ und insbesondere auch

$$Y \subset X \;\Rightarrow\; \mathcal{I}(Y) \supset \mathcal{I}(X)$$

Des weiteren gilt sicher $E \subset \mathcal{I}(\mathcal{Z}(E))$ für jede Teilmenge $E \subset k[T_1,\dots,T_n]$ und $X \subset \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$ für jede Teilmenge $X \subset k^n$. Es folgt $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathcal{I}(X)))$ für jede Teilmenge $X \subset k^n$, indem wir einerseits $\mathcal{I}$ auf $X \subset \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$ anwenden und andererseits $E \subset \mathcal{I}(\mathcal{Z}(E))$ auf $E = \mathcal{I}(X)$. Ebenso folgt für jede Teilmenge $E \subset k[T_1,\dots,T_n]$ die Identität $\mathcal{Z}(E) = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(\mathcal{Z}(E)))$. Insbesondere gilt für jede algebraische Teilmenge $X \subset k^n$ die Identität $X = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$, die offensichtlich auch umgekehrt algebraische Teilmengen charakterisiert.

Ergänzung 7.1.1.12. Allgemeiner versteht man unter einer **Inzidenzstruktur** ein Tripel (A,B,R) bestehend aus zwei Mengen A und B mit einer Teilmenge $R \subset A \times B$ alias einer Relation zwischen A und B im Sinne von 10.2.2.5. Zum Beispiel können wir die Menge $A = k[T_1,\dots,T_n]$ der Polynome und die Menge



Die Kreislinie ist die Nullstellenmenge in $\mathbb{R}^2$ des Polynoms $x^2 + y^2 - 1 \in \mathbb{R}[x, y]$. Das ist also eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$. Jeder Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ist die simultane Nullstellenmenge in $\mathbb{R}^2$ der Polynome $x - a$ und $y - b$ aus $\mathbb{R}[x, y]$. Also ist auch jede einpunktige Menge Zariski-abgeschlossen. Alle Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind offensichtlich auch metrisch abgeschlossen, also abgeschlossen in der natürlichen Topologie des $\mathbb{R}^2$ aus 11.2.3.15, aber das Umgekehrte gilt nicht. Man zeige zur Übung, daß eine echte Zariski-abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ keine nichtleere metrisch offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ umfassen kann.

$B = k^n$ der Punkte zu betrachten mit der Relation $(f, x) \in R$ genau dann, wenn gilt $f(x) = 0$. Für eine beliebige Inzidenzstruktur können wir in derselben Weise wie in diesem Beispiel Abbildungen $\mathcal{Z} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ und $\mathcal{I} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ erklären. Auch in dieser Allgemeinheit verwandeln sich Vereinigungen in Schnitte, Inklusionen kehren sich um und es gilt stets $X \subset \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$ sowie $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathcal{I}(X)))$ und symmetrisch $E \subset \mathcal{I}(\mathcal{Z}(E))$ sowie $\mathcal{Z}(E) = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(\mathcal{Z}(E)))$.

7.1.1.13. Um Sie zu ermuntern, sich in Vorbereitung auf spätere Kapitel mit den Grundbegriffen der Topologie auseinanderzusetzen, beginne ich bereits hier mit der Diskussion der sogenannten „Zariski-Topologie“. Ich erinnere zunächst an einige grundlegende Definitionen aus der Begriffwelt der Topologie, wie sie in 11.1.1.5 ausführlicher eingeführt werden. Eine **Topologie $\mathcal{T}$ auf einer Menge** X ist ein System von Teilmengen $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, das stabil ist unter dem Bilden von endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen. Ein Paar $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge mit einer Topologie heißt ein **topologischer Raum**. Die Teilmengen aus $\mathcal{T}$ heißen dann die **offenen Teilmengen** unseres topologischen Raums. Statt $U \in \mathcal{T}$ schreibe ich auch $U \Subset X$. Die Komplemente der offenen Teilmengen heißen die **abgeschlossenen Teilmengen** unseres topologischen Raums. Für $A \subset X$ schreiben wir statt $(X \backslash A) \in \mathcal{T}$ auch $A \Subset X$. Das System der abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raums ist stabil unter endlichen Vereinigungen und beliebigen Schnitten. Jedes Mengensystem in einer Menge X mit diesen Eigenschaften ist auch umgekehrt das System der abgeschlossenen Teilmengen einer wohlbestimmten Topologie auf X. Gegeben eine Teilmenge $M \subset X$ eines topologischen Raums wird ihr **Abschluß** $\bar{M}$ erklärt als die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die M umfaßt, alias der Schnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von X, die M umfassen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen heißt **stetig**, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist, oder gleichbedeutend das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen.

7.1.1.14. Ich erinnere 11.1.1.13. Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge, so erklärt man die **induzierte Topologie** oder **Spurtopologie** auf Y durch die Vorschrift

$$U \Subset Y \quad \Leftrightarrow \quad \exists V \Subset X \text{ mit } U = V \cap Y$$

In Worten ist also eine Teilmenge von Y offen für die induzierte Topologie genau dann, wenn sie der Schnitt mit Y einer offenen Teilmenge von X ist. Ab jetzt fassen wir stillschweigend jede Teilmenge Y eines topologischen Raums X als topologischen Raum mit der induzierten Topologie auf.

Lemma 7.1.1.15. *Ist k ein kommutativer Integritätsbereich, so bilden die algebraischen Teilmengen von k^n die abgeschlossenen Mengen einer Topologie, der* **Zariski-Topologie auf dem** k^n.

Beweis. Daß beliebige Schnitte algebraischer Teilmengen wieder algebraisch sind, folgt sofort aus 7.1.1.11. Ist k nicht der Nullring, so gilt weiter $\mathcal{Z}(1) = \emptyset$. Ist k sogar ein Integritätsring, so gilt zusätzlich $\mathcal{Z}(E) \cup \mathcal{Z}(F) = \mathcal{Z}(EF)$ mit der Notation $EF = \{ef \mid e \in E,\ f \in F\}$. Folglich bilden die $\mathcal{Z}(E)$ das System der abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf dem k^n. □

7.1.1.16. Ist k ein kommutativer Integritätsbereich, so folgt für den Abschluß einer beliebigen Teilmenge $X \subset k^n$ in Bezug auf die eben erklärte Zariskitopologie die Formel

$$\bar{X} = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$$

In der Tat ist die rechte Seite eine algebraische alias abgeschlossene Menge, die X umfaßt, und für jede algebraische alias abgeschlossene Teilmenge $Z \supset X$ gilt $Z = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(Z)) \supset \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$.

7.1.1.17. Ein Element eines faktoriellen Rings heißt **quadratfrei**, wenn es von Null verschieden ist und darin kein Primfaktor mehrfach auftritt. Sei nun $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine Teilmenge $Z \subset k^n$ heißt eine

Hyperebene, wenn sie Nullstellenmenge eines linearen Polynoms ist, also eines Polynoms vom Totalgrad 1;

Quadrik, wenn sie Nullstellenmenge eines quadratfreien quadratischen Polynoms ist;

Kubik, wenn sie Nullstellenmenge eines quadratfreien kubischen Polynoms ist;

Quartik, wenn sie Nullstellenmenge eines quadratfreien Polynoms vom Totalgrad 4 ist;

Quintik, wenn sie Nullstellenmenge eines quadratfreien Polynoms vom Totalgrad 5 ist;

Vorschau 7.1.1.18. Wir zeigen in 7.5.4.12, daß für $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper auf einer algebraischen Teilmenge $X \not\subset k^n$ jedes Polynom $P \in k[T_1, \ldots, T_n]$, wenn wir es als Abbildung $P : X \to k$ auffassen, entweder nur endlich viele Werte annimmt oder nur endlich viele Werte nicht annimmt. Unser Beweis dort ist nicht ganz einfach. Ich wüßte gerne, wie man das möglichst leicht einsehen kann.

Ergänzung 7.1.1.19. Man kann zeigen, daß für $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $n \geq 1$ jede algebraische Teilmenge von k^n bereits als die Nullstellenmenge von n Polynomen beschrieben werden kann, vergleiche etwa [Kun80]. Im Gegensatz dazu kann keineswegs jedes Ideal des Polynomrings in n Variablen von n Polynomen erzeugt werden. Zum Beispiel ist leicht zu sehen, daß das Ideal $\langle x^2, xy, y^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y]$ nicht von zwei Elementen erzeugt werden kann.

Übungen

Übung 7.1.1.20. Ist k ein Körper, ja ein beliebiger Kring, und $x \in k^n$ ein Punkt, so ist das Verschwindungsideal dieser einelementigen Menge das Ideal $\mathcal{I}(x) = \langle T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n \rangle \subset k[T_1, \ldots, T_n]$.

Übung 7.1.1.21. Sei k ein Körper. Man zeige, daß die von ganz k verschiedenen algebraischen Teilmengen von k genau die endlichen Teilmengen sind. Man zeige, daß die algebraischen Teilmengen von k^2 genau die endlichen Teilmengen, die Vereinigungen der Nullstellenmengen einzelner Polynome mit endlichen Teilmengen, sowie ganz k^2 sind. Hinweis: Nach 6.2.7.16 haben zwei teilerfremde Polynome in zwei Veränderlichen höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen.

Übung 7.1.1.22. Sei k ein Körper. Man zeige für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ die Abschätzung $|\mathcal{Z}(\mathfrak{a})| \leq \dim_k k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}$. Insbesondere kann ein Ideal endlicher Kodimension nur höchstens endlich viele simultane Nullstellen besitzen. Hinweis: Interpolation in mehreren Variablen 6.2.3.8.

Übung 7.1.1.23. Unter einem **Homöomorphismus** versteht man eine bijektive stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, deren Umkehrung auch stetig ist. Man zeige: Ist $\gamma : k \xrightarrow{\sim} k$ ein Körperautomorphismus, so induziert γ einen Homöomorphismus $\gamma : k^n \xrightarrow{\sim} k^n$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\gamma(x_1), \ldots, \gamma(x_n))$ von k^n versehen mit der Zariskitopologie auf sich selbst.

Übung 7.1.1.24. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt **dicht**, wenn ihr Abschluß der ganze Raum ist. Sei k ein kommutativer Integritätsbereich. Man zeige: Jede unendliche Teilmenge von k ist Zariski-dicht. Sind $A \subset k^m$ und $B \subset k^n$ Zariski-dicht, so gilt dasselbe für $A \times B \subset k^{m+n}$. Jede offene nichtleere Teilmenge von k^n ist Zariski-dicht. Je zwei offene nichtleere Teilmengen von k^n haben nichtleeren Schnitt.

Übung 7.1.1.25. Gegeben ein Körper k und Matrizen $M, N \in \mathrm{Mat}(n; k)$ haben MN und NM dasselbe charakteristische Polynom. Hinweis: 7.1.1.24.

Übung 7.1.1.26. Man zeige, daß jede unendliche Teilmenge der Kreislinie in der reellen Ebene $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ Zariski-dicht liegt in der Kreislinie mit ihrer Spurtopologie nach 7.1.1.14. Hinweis: 6.2.7.16.

Übung 7.1.1.27. Man zeige: Verschwindet ein Polynom $P \in \mathbb{R}[x, y]$ auf der Kreislinie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, so wird es von $x^2 + y^2 - 1$ geteilt.

Übung 7.1.1.28. Man folgere aus dem Hilbert'schen Nullstellensatz: Haben zwei irreduzible Polynome in $\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n]$ dieselben Nullstellen, so ist das eine ein skalares Vielfaches des anderen. Im Fall $n = 1$ ist das klar. In Fall $n = 2$ folgt es bereits aus Korollar 6.2.7.16, nach dem zwei teilerfremde Polynome in $\mathbb{C}[x, y]$ höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen haben.

Übung 7.1.1.29. Gegeben eine endlichdimensionale Ringalgebra über einem Körper bilden die Einheiten stets eine Zariski-offene Teilmenge.

7.1.2 Allgemeinheiten zu Moduln

7.1.2.1. Gegeben eine abelsche Gruppe M bilden wir den Ring $\mathrm{Ab}(M) = \mathrm{End}(M)$ aller Gruppenhomomorphismen $\varphi : M \to M$, den **Endomorphismenring von** M, vergleiche 3.5.1.7. Seine Addition ist die Addition von Abbildungen, $(\varphi + \psi)(m) := \varphi(m) + \psi(m)$, und seine Multiplikation die Verknüpfung von Abbildungen, $\varphi\psi := \varphi \circ \psi$. Das Einselement ist die Identität $\mathrm{id} : M \to M$.

Definition 7.1.2.2. Sei Ω eine Menge. Unter einem **Ω-Mengenmodul** versteht man ein Paar (M, σ) bestehend aus einer abelschen Gruppe M und einer Abbildung $\sigma : \Omega \to \mathrm{Ab}(M)$ unserer Menge Ω in den Endomorphismenring der abelschen Gruppe M.

Definition 7.1.2.3. Sei R ein Ring. Unter einem **R-Modul** oder ausführlicher einem **R-Ringmodul** versteht man ein Paar (M, σ) bestehend aus einer abelschen Gruppe M und einem Ringhomomorphismus $\sigma : R \to \mathrm{Ab}(M)$ unseres Rings R in den Endomorphismenring der abelschen Gruppe M.

7.1.2.4. Natürlich ist jeder Ringmodul auch ein Mengenmodul für die dem fraglichen Ring zugrundeliegenden Menge. Unter dem Exponentialgesetz, also der Bijektion $\mathrm{Ens}(\Omega, \mathrm{Ens}(M, M)) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ens}(\Omega \times M, M)$ aus 2.1.6.5, entsprechen unsere Strukturen auf einer abelschen Gruppe $(M, +)$ als Ω-Mengenmodul eineindeutig den Abbildungen $\Omega \times M \to M$, $(\omega, m) \mapsto \omega m$ derart, daß für alle $\omega \in \Omega$ und $m, n \in M$ gilt

$$\omega(m + n) = \omega m + \omega n$$

Weiter entsprechen für einen Ring R unsere Strukturen auf einer abelschen Gruppe $(M, +)$ als R-Ringmodul eineindeutig den Abbildungen $R \times M \to M$ derart, daß für alle $r, s \in R$ und $m, n \in M$ gilt

$$\begin{array}{rcl} r(m+n) & = & (rm) + (rn) \\ (r+s)m & = & (rm) + (sm) \\ r(sm) & = & (rs)m \\ 1m & = & m \end{array}$$

7.1.2.5 (**Diskussion alternativer terminologischer Konventionen**). Arbeitet man mit der alternativen Konvention, nach der Ringe nicht notwendig unitär zu sein brauchen, so ist hier die letzte Bedingung $1m = m$ nicht mehr sinnvoll und wird weggelassen. Moduln, wie wir sie in 7.1.2.3 definiert haben, würde man in dieser

alternativen Konvention als „unitäre Moduln über einem unitären Ring“ bezeichnen. Wir nennen eine abelsche Gruppe A mit einer assoziativen biadditiven Verknüpfung eine **assoziative $\mathbb{Z}$-Algebra** und eine abelsche Gruppe M mit einer biadditiven Abbildung $A \times M \to M$ derart, daß gilt $a(bm) = (ab)m \ \forall a, b \in A, m \in M$ einen **A-Assoziativmodul**. Bei Assoziativmoduln fordern wir also nichts für die Operation eines Einselements, selbst wenn es ein solches geben sollte.

7.1.2.6. Wir vereinbaren auch in diesem Kontext die Regel „Punkt vor Strich“. Wie bei Vektorräumen zeigt man auch bei Moduln M über einem Ring R für alle $m \in M$ die Formel $0m = 0$, genauer $0_R m = 0_M$, und folgert $(-1)m = -m$.

7.1.2.7 (**Vergleich von Ringmoduln und Mengenmoduln**). Moduln über Ringen können als spezielle Moduln über Mengen aufgefaßt werden. Es gibt offensichtlich im allgemeinen viel weniger Moduln über einem Ring als Mengenmoduln über der zugrundeliegenden Menge und wir können für Moduln über speziellen Ringen entsprechend stärkere Aussagen erwarten. So sind zum Beispiel die Ringmoduln über einem Körper genau unsere Vektorräume aus der linearen Algebra. Umgekehrt können Moduln über einer Menge Ω auch aufgefaßt werden als Ringmoduln über dem „nichtkommutativen Polynomring über $\mathbb{Z}$ in durch Ω indizierten Variablen“ alias dem „freien Ring über Ω“, den wir in der Notation aus 16.4.8.7 etwa $\mathrm{Ring}^{\setminus}\,\Omega$ notieren würden. Insofern sind unsere beiden Begriffsbildungen im Prinzip austauschbar. Ich werde im folgenden allgemeine Aussagen soweit möglich für Mengenmoduln formulieren, weil diese a priori eine geringere Komplexität haben.

Beispiele 7.1.2.8. Jeder Ring R ist in offensichtlicher Weise ein R-Modul. Dasselbe gilt für R^n, ja gegeben eine beliebige Menge X für $\mathrm{Ens}(X, R)$ und gegeben zusätzlich ein beliebiger R-Modul M auch für die Menge $\mathrm{Ens}(X, M)$ aller Abbildungen von X nach M.

7.1.2.9 (**Abelsche Gruppen als $\mathbb{Z}$-Moduln**). Jede abelsche Gruppe M trägt genau eine Struktur als $\mathbb{Z}$-Modul, denn für jeden Ring E gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to E$ und das gilt insbesondere auch für $E := \mathrm{Ab}(M)$. Wir können diese Modulstruktur auch explizit beschreiben: Für $a \in \mathbb{N}$ ist notwendig $1m = m$, also $2m = (1+1)m = m + m$, induktiv $(a+1)m = am + m$, und dann auch $(-a)m = (-1)am = -(am)$.

7.1.2.10. Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so wird jeder S-Modul und insbesondere auch S selbst ein R-Modul vermittels der Operation $rm = \varphi(r)m$. Dies Verfahren heißt **Restriktion der Skalare**, und zwar selbst dann, wenn der Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ nicht die Inklusion eines Teilrings ist. Wir notieren $\mathrm{res}_\varphi(M)$ den so aus einem S-Modul konstruierten R-Modul. Zum Beispiel ist für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ der Quotient $R/\mathfrak{a}$ aus 6.2.1.13 ein R-Modul in natürlicher Weise.

7.1.2.11. Ist X eine Menge und $x \in X$ ein Punkt und k ein Ring, so liefert das Auswerten an der Stelle x einen Ringhomomorphismus $\delta_x : \operatorname{Ens}(X,k) \to k$. Den zugehörigen Modul über den Funktionenring $\operatorname{Ens}(X,k)$ nennen wir den **Auswertungsmodul** und notieren ihn k_x.

Übungen

Übung 7.1.2.12 (**$k[T]$-Moduln als k-Vektorräume mit Endomorphismus**). Gegeben eine abelsche Gruppe M und ein Körper k haben wir natürliche Bijektionen

$$\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{array}{c}\text{Strukturen als } k[T]\text{-Modul}\\ \text{auf der abelschen Gruppe } M\end{array}\right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{\begin{array}{c}\text{Ringhomomorphismen}\\ k[T] \to \operatorname{Ab} M\end{array}\right\} \\
 & & \wr\downarrow \\
\left\{\begin{array}{c}\text{Paare } (\psi, A) \text{ bestehend aus}\\ \text{einer } k\text{-Vektorraumstruktur}\\ \psi : k \times M \to M\\ \text{auf der abelschen Gruppe } M\\ \text{und einem Endomorphismus}\\ A \in \operatorname{End}_k(M)\end{array}\right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{\begin{array}{c}\text{Paare } (\varphi, A) \text{ bestehend aus}\\ \text{einem Ringhomomorphismus}\\ \varphi : k \to \operatorname{Ab} M\\ \text{und einem mit seinem Bild}\\ \text{kommutierenden Element}\\ A \in \operatorname{Ab} M\end{array}\right\}
\end{array}$$

Genauer liefert 7.1.2.4 die obere horizontale Bijektion und 3.5.3.5 die vertikale Bijektion. In diesem Sinne ist also ein $k[T]$-Modul „dasselbe“ wie ein k-Vektorraum mit einem k-linearen Endomorphismus. Für einen beliebigen Ring k gilt Analoges.

7.1.3 Homomorphismen, Untermoduln, Quotienten

Definition 7.1.3.1. Sei Ω eine Menge. Eine Abbildung $f : M \to N$ von einem Ω-Mengenmodul in einen weiteren Ω-Mengenmodul heißt ein **Modulhomomorphismus**, wenn gilt

$$f(m+m') = f(m) + f(m') \text{ und } f(rm) = rf(m) \quad \forall m, m' \in M, r \in \Omega.$$

Einen **Homomorphismus von Ringmoduln** erklären wir als einen Homomorphismus der zugrundeliegenden Mengenmoduln.

7.1.3.2. Die Gesamtheit aller Mengenmoduln über einer vorgegebenen Menge Ω bildet mit den Modulhomomorphismen als Morphismen eine Kategorie

$$\Omega\text{-MMod}$$

7.1.3.3. Die Gesamtheit aller Moduln über einem vorgegebenen Ring R bildet mit den Modulhomomorphismen als Morphismen eine Kategorie

$$R\text{-Mod}$$

In der Sprache der Kategorientheorie ist das Vergessen der $\mathbb{Z}$-Modulstruktur ein Isomorphismus von Kategorien $\mathbb{Z}\text{-Mod} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}$ zwischen der Kategorie der $\mathbb{Z}$-Moduln und der Kategorie der abelschen Gruppen.

Definition 7.1.3.4. Die Menge aller Homomorphismen von einem R-Modul M in einen R-Modul N schreiben wir auch $\mathrm{Hom}_R(M, N)$. Sie bildet eine Untergruppe und für kommutatives R sogar einen R-Untermodul von $\mathrm{Ens}(M, N)$. Ein bijektiver Homomorphismus heißt ein **Isomorphismus** von R-Moduln. Gibt es einen Isomorphismus zwischen zwei R-Moduln M und N, so schreiben wir auch $M \cong M$ und sagen, M und N seien **isomorph**. Ein Homomorphismus von einem Modul zu sich selbst heißt ein **Endomorphismus** unseres Moduls. Die Menge aller Endomorphismen des R-Moduls M notiert man $\mathrm{End}_R(M)$. Sie bildet einen Ring unter der Verknüpfung als Multiplikation.

Ergänzung 7.1.3.5. Ich will das Symbol Hom ohne Index reservieren für Funktoren, die aus zwei Objekten einer Kategorie ein drittes Objekt derselben Kategorie machen. Nur im Fall von Vektorräumen oder kommutativen Ringen darf man dann, wenn man dieser Konvention folgen will, den Grundring aus der Notation weglassen. Die Morphismenmenge in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$ notiere ich $\mathcal{C}(X, Y)$. Wenn sie mit zusätzlicher Struktur verstanden werden soll, benutze ich auch Hom, aber dann mit ergänzenden Indizes.

Lemma 7.1.3.6 (**Modulhomomorphismen vom Grundring zu einem Modul**). *Die R-Modulhomomorphismen von einem Ring R, aufgefaßt als R-Modul, zu einem beliebigen weiteren R-Modul werden parametrisiert durch die Elemente des besagten R-Moduls. Für jeden R-Modul M liefert genauer die Abbildungsvorschrift $m \mapsto (r \mapsto rm)$ einen Isomorphismus*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_R(R, M) \\ m & \mapsto & (r \mapsto rm) \end{array}$$

von abelschen Gruppen mit Inversem $\varphi \mapsto \varphi(1)$.

Beweis. Dem Leser überlassen. □

Definition 7.1.3.7. Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt ein **Untermodul** genau dann, wenn N eine Untergruppe ist und wenn zusätzlich gilt $m \in N, r \in R \Rightarrow rm \in N$.

7.1.3.8. Die Untermoduln eines kommutativen Rings sind genau seine Ideale. Die Untermoduln eines allgemeinen Rings heißen seine **Linksideale**. Jeder Schnitt von Untermoduln ist wieder ein Untermodul. Ist $T \subset M$ eine Teilmenge eines Moduls M, so heißt der kleinste Untermodul von M, der T enthält, auch der **von** T **erzeugte Untermodul** und wir bezeichnen ihn mit ${}_R\langle T\rangle$ oder wenn die genaue Bedeutung eh aus dem Kontext hervorgeht etwas nachlässig mit $\langle T\rangle_R$ oder auch abkürzend mit $\langle T\rangle$. Man kann den von T erzeugten Untermodul beschreiben als die Menge aller Linearkombinationen

$$\{r_1t_1 + \ldots r_st_s \mid s \geq 0,\ r_i \in R,\ t_i \in T\}$$

Hierbei steht die leere Linearkombination mit $s = 0$ für die Null in M. Ein Modul, der von einer endlichen Teilmenge erzeugt wird, heißt **endlich erzeugt**. Ein Modul, der von einem einzigen Element erzeugt wird, heißt **zyklisch**.

7.1.3.9. Das Bild eines Untermoduls unter einem Modulhomomorphismus ist wieder ein Untermodul. Dasselbe gilt für das Urbild eines Untermoduls. Insbesondere sind Bild und Kern eines Modulhomomorphismus stets Untermoduln.

Proposition 7.1.3.10 (Quotientenmoduln). *Seien R ein Ring, M ein R-Modul und $N \subset M$ ein Untermodul.*

1. *Es gibt genau eine Struktur eines R-Moduls auf der Restklassengruppe M/N aus 4.4.2.10 derart, daß die Projektion $\mathrm{can} : M \twoheadrightarrow M/N$ ein Homomorphismus von R-Moduln ist;*

2. *Jeder Homomorphismus von R-Moduln $\varphi : M \to M'$ mit $\varphi(N) = 0$ faktorisiert in eindeutiger Weise über M/N, es gibt also zu φ genau einen R-Modulhomomorphismus $\tilde{\varphi} : M/N \to M'$ mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \mathrm{can}$.*

Beweis. Sehr ähnlich zum Beweis der entsprechenden Aussagen im Fall von Vektorräumen 4.4.5.4 und dem Leser überlassen. □

Definition 7.1.3.11. Ein **Subquotient** eines Moduls ist ein Quotient eines Untermoduls.

Übungen

Übung 7.1.3.12. Gegeben ein R-Modul M wird M ein Modul über seinem Endomorphismenring $\mathrm{End}_R(M)$ vermittels der Vorschrift $fm = f(m)$ für alle $f \in \mathrm{End}_R(M)$ und $m \in M$.

Übung 7.1.3.13. Ist R ein Ring und $e \in R$ ein idempotentes Element und M ein R-Modul, so induziert das Auswerten bei e eine Bijektion $\mathrm{Hom}_R(Re, M) \xrightarrow{\sim} eM$.

Ergänzende Übung 7.1.3.14. In einem endlich erzeugten Modul umfaßt jedes Erzeugendensystem ein endliches Erzeugendensystem.

Übung 7.1.3.15. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal und M ein R-Modul. Bezeichne $\mathfrak{a}M \subset M$ den Untermodul, der von allen Elementen am mit $a \in \mathfrak{a}$ und $m \in M$ erzeugt wird, und der bei sorgfältigerer Notation eigentlich $\langle \mathfrak{a}M \rangle$ notiert werden müßte. Man zeige, daß die Operation von R auf $M/\mathfrak{a}M$ in natürlicher Weise faktorisiert über $R/\mathfrak{a}$, so daß also $M/\mathfrak{a}M$ in natürlicher Weise ein $R/\mathfrak{a}$-Modul wird.

Übung 7.1.3.16. Man zeige, daß gegeben ein Ring R und ein R-Modul M für jedes Linksideal $I \subset R$ das Auswerten an der Nebenklasse $1_R + I$ eine Bijektion $\mathrm{Hom}_R(R/I, M) \xrightarrow{\sim} \{m \in M \mid Im = 0\}$ induziert.

Übung 7.1.3.17. Gegeben Moduln M_i über Ringen R_i kann man das Produkt M der M_i in offensichtlicher Weise mit der Struktur eines Moduls über dem Produkt R der R_i versehen. Ergibt sich in derselben Weise ein R-Modul N als das Produkt gewisser R_i-Moduln N_i, so haben wir einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\sim} \prod_i \mathrm{Hom}_{R_i}(M_i, N_i)$$

Übung 7.1.3.18. Ich erinnere an exakte Sequenzen im Sinne von 4.4.6.5. Eine Sequenz von Gruppen $M' \to M \to M''$ heißt **linksexakt**, wenn die erweiterte Sequenz $1 \to M' \to M \to M''$ exakt ist, wenn sie also in anderen Worten bei M exakt ist und $M' \to M$ injektiv ist. Wir schreiben linksexakte Sequenzen meist $M' \hookrightarrow M \to M''$. Man zeige: Eine Sequenz $M' \to M \to M''$ von Moduln über einem Ring R ist linkssexakt genau dann, wenn für jeden weiteren R-Modul N die induzierte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_R(N, M') \to \mathrm{Hom}_R(N, M) \to \mathrm{Hom}_R(N, M'')$$

linksexakt ist.

Übung 7.1.3.19. Ich erinnere an exakte Sequenzen im Sinne von 4.4.6.5. Eine Sequenz von Gruppen $M' \to M \to M''$ heißt **rechtsexakt**, wenn die erweiterte Sequenz $M' \to M \to M'' \to 1$ exakt ist, wenn sie also in anderen Worten bei M exakt ist und $M \to M''$ surjektiv ist. Wir schreiben rechtsexakte Sequenzen meist $M' \to M \twoheadrightarrow M''$. Man zeige: Eine Sequenz $M' \to M \to M''$ von Moduln über einem Ring R ist rechtsexakt genau dann, wenn für jeden weiteren R-Modul N die induzierte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_R(M'', N) \to \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M', N)$$

linksexakt ist.

7.1.4 Noethersche Moduln und Ringe

7.1.4.1. Dieser Abschnitt betrifft kommutative und nichtkommutative Ringe gleichermaßen.

Definition 7.1.4.2. Ein Modul über einem Ring heißt **noethersch**, wenn alle seine Untermoduln endlich erzeugt sind.

7.1.4.3. Mit gemeint ist dabei die Forderung, daß unser Modul selbst endlich erzeugt sein soll. Die Bezeichnung erinnert an die Mathematikerin Emmy Noether, eine Pionierin der abstrakten Algebra jüdischen Ursprungs, die in Göttingen arbeitete bis sie in die Emigration gezwungen wurde.

Definition 7.1.4.4. Ein Ring heißt **linksnoethersch** beziehungsweise **rechtsnoethersch**, wenn er noethersch ist als Links- beziehungsweise Rechtsmodul über sich selbst, und **noethersch**, wenn er linksnoethersch und rechtsnoethersch ist. In anderen Worten ist also etwa ein Ring linksnoethersch genau dann, wenn alle seine Linksideale endlich erzeugt sind.

Beispiel 7.1.4.5. Ein Vektorraum über einem Körper k ist noethersch als k-Modul genau dann, wenn er endlichdimensional ist. Jeder Hauptidealring ist noethersch.

Beispiel 7.1.4.6. Der Polynomring $R = \mathbb{Z}[T_1, T_2, \ldots]$ in abzählbar vielen Variablen ist nicht noethersch, denn das von allen T_i erzeugte Ideal ist nicht endlich erzeugt: In der Tat bilden die $\langle T_1 \rangle \subsetneq \langle T_1, T_2 \rangle \subsetneq \ldots$ eine unendliche echt aufsteigende Folge von Idealen, deren Vereinigung $\langle T_1, T_2, \ldots \rangle$ nicht endlich erzeugt sein kann.

Proposition 7.1.4.7. *Jeder Quotient und jeder Untermodul eines noetherschen Moduls ist noethersch. Besitzt ein Modul M einen noetherschen Untermodul M' mit noetherschem Quotient M/M', so ist M bereits selbst noethersch.*

Ergänzung 7.1.4.8. Für diejenigen Leser, die mit exakten Sequenzen nach 4.4.6.5 vertraut sind, können wir die Proposition auch wie folgt formulieren: Ist $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ eine kurze exakte Sequenz von Moduln über einem Ring, so ist M noethersch genau dann, wenn M' und M'' noethersch sind. Leser, die noch nicht mit dieser Terminologie vertraut sind, werden ermuntert, sich damit vertraut zu machen.

Beweis. Der erste Teil bleibt dem Leser überlassen. Wir müssen im zweiten Teil zeigen, daß jeder Untermodul $U \subset M$ endlich erzeugt ist. Nach Annahme ist aber sein Bild $\bar{U} \subset M/M'$ endlich erzeugt, wir finden also Elemente $u_1, \ldots, u_r \in U$, deren Bilder $\bar{U}$ erzeugen. Ganz genauso ist $U \cap M'$ endlich erzeugt, sagen wir von $v_1, \ldots, v_s \in U$, und dann sieht man leicht, daß die $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ zusammen ganz U erzeugen. $\square$

Satz 7.1.4.9. *Ein Modul über einem linksnoetherschen Ring ist noethersch genau dann, wenn er endlich erzeugt ist.*

Beweis. Ein noetherscher Modul ist immer endlich erzeugt. Ist umgekehrt M endlich erzeugt, so ist M ein Quotient von R^n, und für R linksnoethersch ist auch R^n noethersch als Modul, wie man induktiv aus 7.1.4.7 folgert. □

Beispiel 7.1.4.10. Dieser Satz zeigt insbesondere, daß jede Untergruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe endlich erzeugt ist. In der Tat ist ja eine abelsche Gruppe dasselbe wie ein $\mathbb{Z}$-Modul, und $\mathbb{Z}$ ist ein Hauptidealring, also noethersch. Wir hatten in diesem Fall in 4.4.4.1 sogar gesehen, daß man für die Untergruppe nicht mehr Erzeuger benötigt als für die ganze Gruppe. Das folgt mit demselben Argument allgemein für Moduln über Ringen, in denen jedes Linksideal ein Hauptideal ist. Im allgemeinen kann es aber durchaus vorkommen, daß man für einen Untermodul mehr Erzeuger benötigt als für den ursprünglichen Modul. Insbesondere kann es ja vorkommen, daß man für ein Ideal mehr als einen Erzeuger benötigt und damit mehr Erzeuger als für den Ring, der ja als Modul über sich selber stets zyklisch ist.

Satz 7.1.4.11 (**Hilbert'scher Basissatz**). *Ist R ein linksnoetherscher Ring, so ist auch der Polynomring $R[T]$ mit Koeffizienten in R ein linksnoetherscher Ring. Dasselbe gilt analog für rechtsnoethersch und noethersch.*

Beweis. Sei $I \subset R[T]$ ein Linksideal. Wir betrachten das Linksideal $\mathfrak{a} \subset R$, das erzeugt wird von den Leitkoeffizienten aller Polynome aus I. Da R noethersch ist, gibt es endlich viele Polynome $f_1, \ldots, f_t \in I$, deren Leitkoeffizienten das Linksideal $\mathfrak{a} \subset R$ erzeugen. Sei m das Maximum der Grade der f_i. Gegeben $h \in I$ mit $\deg h \geq m$ finden wir offensichtlich $p_i \in R[T]$ derart, daß

$$h - (p_1 f_1 + \ldots + p_t f_t)$$

echt kleineren Grad hat als h. Induktiv finden wir dann sogar p_i derart, daß diese Differenz echt kleineren Grad hat als m. Die Polynome aus $R[T]$ vom Grad $< m$ und, wieder da R linksnoethersch ist, dann auch die Polynome aus I vom Grad $< m$ bilden aber einen endlich erzeugten R-Modul. Wählen wir Erzeuger $g_1, \ldots, g_r$ dieses R-Moduls, so erzeugen offensichtlich $f_1, \ldots, f_t, g_1, \ldots, g_r$ unser Linksideal I über $R[T]$. □

7.1.4.12. Man erkennt induktiv, daß ein Polynomring in endlich vielen Variablen $k[T_1, \ldots, T_n]$ mit Koeffizienten in einem Körper k, ja mit Koeffizienten in einem beliebigen noetherschen Ring ein noetherscher Ring ist. Das zeigt insbesondere, daß jede algebraische Teilmenge $X \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ k^n$ bereits durch endlich viele Gleichungen beschrieben werden kann, denn ihr Verschwindungsideal $\mathcal{I}(X) \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ muß endlich erzeugt sein, und für Erzeuger $f_1, \ldots, f_r$ gilt dann sicher $\mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_r) = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X)) = X$.

Lemma 7.1.4.13 (**Charakterisierungen noetherscher Moduln**). *Für einen Modul sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Modul ist noethersch, als da heißt, jeder Untermodul ist endlich erzeugt;*

2. *Jedes nichtleere System von Untermoduln unseres Moduls besitzt ein maximales Element;*

3. *Jede aufsteigende Folge $M_0 \subset M_1 \subset \ldots$ von Untermoduln unseres Moduls wird stationär alias stagniert.*

7.1.4.14. Ein Ring ist insbesondere linksnoethersch genau dann, wenn jede aufsteigende Folge von Linksidealen stagniert.

7.1.4.15. Beim Nachweis der Implikationen (2)⇒(3) und (1)⇒(3) kommen wir noch ohne Auswahlaxiom aus. Die Beweise der anderen Implikationen benötigen jedoch, soweit ich sehen kann, das Auswahlaxiom.

Beweis. $(1) \Rightarrow (3)$: Sei M unser Modul. Ist jeder Untermodul von M endlich erzeugt, so auch die Vereinigung $\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ über unsere aufsteigende Folge von Untermoduln. Es gibt also ein j derart, daß alle Erzeuger dieser Vereinigung schon in M_j liegen, und dann gilt notwendig $M_j = M_{j+1} = \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$.

$(3) \Rightarrow (1)$: Ist ein Untermodul $N \subset M$ nicht endlich erzeugt, so finden wir induktiv eine Folge $m_0, m_1, \ldots$ in N derart, daß für jedes $i \geq 0$ das i-te Folgenglied m_i nicht im Erzeugnis der vorhergehenden $m_0, m_1, \ldots, m_{i-1}$ liegt. Die $M_i = \langle m_0, m_1, \ldots, m_i \rangle$ bilden dann eine aufsteigende Folge von Untermoduln von M, die nicht stagniert.

$(2) \Leftrightarrow (3)$: Offensichtlich und auch nach Übung 3.1.9.22 besitzt in einer teilgeordneten Menge jede nichtleere Teilmenge ein maximales Element genau dann, wenn jede monoton wachsende Folge in unserer Menge stagniert. Diese Erkenntnis gilt es anzuwenden auf das System alias die Menge aller Untermoduln unseres Moduls. □

Ergänzung 7.1.4.16. Ein Tensorprodukt noetherscher Ringe muß nicht wieder noethersch sein. Ist etwa k ein Körper und $K = \operatorname{Quot} k[X_1, X_2, \ldots]$ der Quotientenkörper des Polynomrings über k in unendlich vielen Variablen, so ist $K \otimes_k K$ nicht noethersch: Die Ideale $\langle (X_1 - Y_1), (X_2 - Y_2), \ldots, (X_n - Y_n) \rangle$ bilden eine unendliche aufsteigende Idealkette, mit den Abkürzungen $X_i = X_i \otimes 1$ und $Y_i = 1 \otimes Y_i$. Um das zu sehen, mag man davon ausgehen, daß $K \otimes_k K$ faktoriell ist als Lokalisierung des faktoriellen Rings $k[X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots]$.

Übungen

Übung 7.1.4.17. Jedes Erzeugendensystem eines noetherschen Moduls umfaßt ein endliches Erzeugendensystem.

Übung 7.1.4.18. Jeder Quotient eines linksnoetherschen Rings ist linksnoethersch. Jeder Quotient eines rechtsnoetherschen Rings ist rechtsnoethersch. Jeder Quotient eines noetherschen Rings ist noethersch.

Übung 7.1.4.19. Man zeige: Ist R ein linksnoetherscher Ring, so ist auch der Potenzreihenring $R[\![T]\!]$ mit Koeffizienten in R ein linksnoetherscher Ring. Dasselbe gilt analog für rechtsnoethersch und noethersch. Hinweis: Man argumentiere wie bei Beweis des Basissatzes, aber betrachte diesmal das von den Koeffizienten der „Anfangsterme“ erzeugte Linksideal von R. Insbesondere sind auch die Potenzreihenringe in mehreren Variablen $R[\![T_1, \ldots, T_s]\!]$ linksnoethersch, wenn R selbst linksnoethersch ist.

Übung 7.1.4.20. Sei k ein Körper oder allgemeiner ein noetherscher Integritätsbereich. Gegeben $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ bezeichne $U_f := \{x \in k^n \mid f(x) \neq 0\}$ das Komplement der Nullstellenmenge von f. Man zeige, daß die offenen Teilmengen von k^n genau alle endlichen Vereinigungen solcher U_f sind.

Ergänzende Übung 7.1.4.21. Jede direkte Summe von injektiven Linksmoduln über einem linksnoetherschen Ring ist injektiv. Hinweis: Man verwende das Injektivitätskriterium über Ideale 19.3.2.28.

Übung 7.1.4.22 (**Jedes Monoidideal von** $(\mathbb{N}^r, +)$ **ist endlich erzeugt**). Sei $T \subset \mathbb{N}^r$ eine Teilmenge, die unter der Addition mit beliebigen Elementen von $\mathbb{N}^r$ stabil ist. Man zeige, daß es endlich viele $t_1, \ldots, t_l \in T$ gibt mit

$$T = \bigcup_{i=1}^{l} (t_i + \mathbb{N}^r)$$

Man nennt eine Teilmenge T in einem Monoid $(M, \top)$ ein **Monoidideal**, wenn aus $t \in T$ und $m \in M$ folgt $t \top m \in T$ und $m \top t \in T$. In dieser Begrifflichkeit besagt unsere Erkenntnis, daß jedes Monoidideal von $(\mathbb{N}^r, +)$ endlich erzeugt ist.

Übung 7.1.4.23. Jeder surjektive Endomorphismus eines noetherschen Moduls ist ein Isomorphismus.

7.1.5 Ringendliche Körpererweiterungen

Definition 7.1.5.1. Unter einer **Kringerweiterung** verstehen wir ein Paar $A \subset B$ bestehend aus einem Kring B mit einem Teilring A. Später verstehen wir darunter auch allgemeiner einen beliebigen injektiven Kringhomomorphismus.

Definition 7.1.5.2. Sei $A \subset B$ eine Kringerweiterung.

1. Wir sagen, B sei **von endlichem Typ über** A oder **ringendlich über** A, wenn B als Ring von A zusammen mit endlich vielen weiteren Elementen erzeugt werden kann.

2. Wir sagen, B sei **endlich über** A oder genauer **modulendlich über** A, wenn B als A-Modul endlich erzeugt ist.

3. Ein Element $b \in B$ heißt **ganz über** A, wenn es Nullstelle eines normierten Polynoms mit Koeffizienten in A ist, wenn also eine Gleichung der Gestalt

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 = 0$$

gilt mit $n \geq 1$ und $a_i \in A$. Im Fall einer Körpererweiterung $A \subset B$ sagt man stattdessen auch, b sei **algebraisch über** A.

Analog verwenden wir diese Begriffe auch für beliebige Kringhomomorphismen $A \to B$, die nicht notwendig Einbettungen von Teilmengen, ja noch nicht einmal injektiv zu sein brauchen.

7.1.5.3. Im Fall von Körpererweiterungen reicht in Teil 3 die Forderung, daß wir ein von Null verschiedenes Polynom finden. Im Fall von Kringerweiterungen jedoch ist die Forderung wesentlich, daß das Polynom in Teil 3 normiert sein soll.

Beispiel 7.1.5.4. Gegeben ein von Null verschiedener Kring R und die Kringerweiterung $R[T] \subset R[T, T^{-1}]$ ist T^{-1} nicht ganz über $R[T]$.

7.1.5.5. Ich erinnere die in 6.3.8.5 eingeführten Begriffsbildungen und Notationen. Sei A ein Kring. Unter einem **A-Kring** verstehen wir ein Paar (B, φ) bestehend aus einem Kring B und einem Kringhomomorphismus $\varphi : A \to B$. Ist (C, ψ) ein weiterer A-Kring, so verstehen wir unter einem **Homomorphismus von A-Kringen** $B \to C$ einen Kringhomomorphismus $\eta : B \to C$ mit $\eta \circ \varphi = \psi$. Alternativ sprechen wir auch von einem **Homomorphismus über** A. Die Menge aller solchen Homomorphismen notieren wir

$$\mathrm{Kring}^A(B, C)$$

Einen bijektiven Kringhomomorphismus über A nennen wir auch einen **Isomorphismus von A-Kringen** oder einen **Isomorphismus über** A.

Ergänzung 7.1.5.6. Unser Kring^A ist ebenso wie seine nichtkommutative Variante Ring^A ein Speziallfall der allgemeinen kategorientheoretischen Konstruktion 16.2.2.4 der Kategorie $\mathcal{C}^X$ der „Objekte unter X“ zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit einem ausgezeichneten Objekt X.

7.1.5.7. Gegeben ein Kring k verstehe ich wie in 4.7.9.1 unter einer **k-Algebra** einen k-Modul M mitsamt einer k-bilinearen Abbildung $M \times M \to M$. Hier bedeutet „bilinear“ wie im Fall eines Körpers k die Linearität in beiden Einträgen. Üblich ist in diesem Zusammenhang die Konvention, daß man eine Algebra stets als assoziativ versteht, wenn aus dem Kontext nichts anderes hervorgeht. Ist die bilineare Verknüpfung assoziativ und besitzt M dazu noch ein neutrales Element, so nenne ich M eine **k-Ringalgebra**, und ist sie zusätzlich auch noch kommutativ, eine **k-Kringalgebra**.

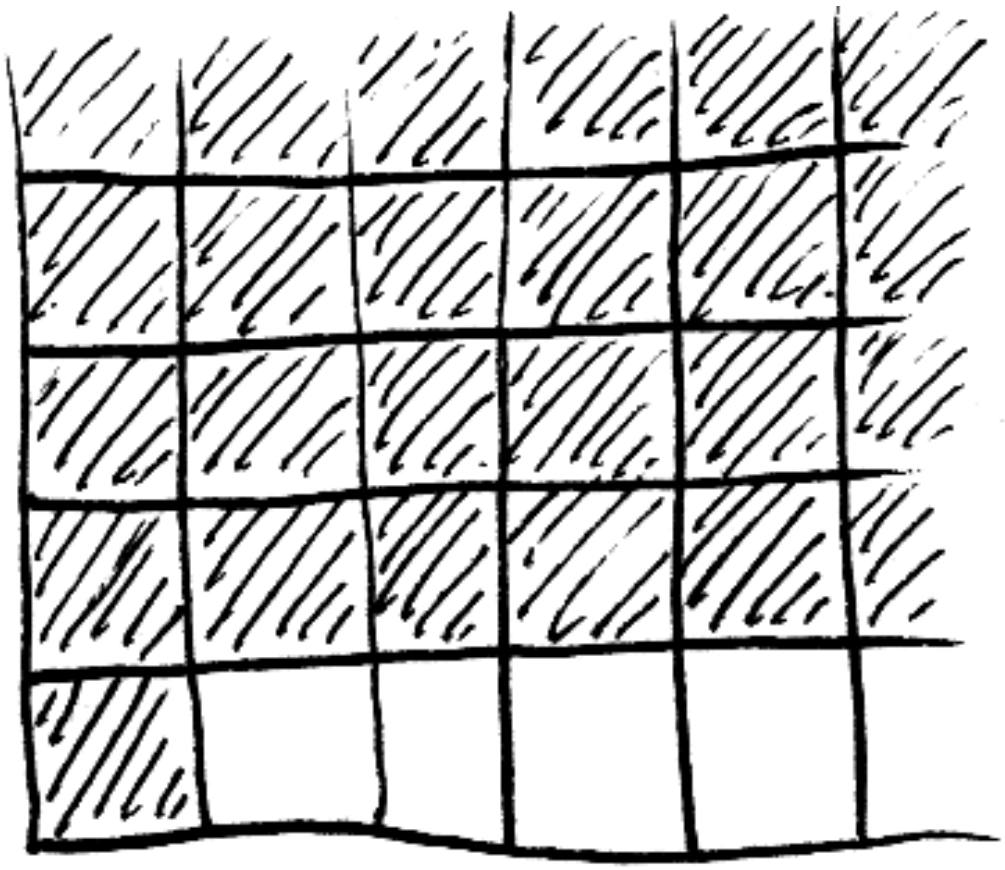
7.1.5.8 (**k-Kringe und k-Kringalgebren**). In der hier gewählten Terminologie ist für jeden Kring k eine k-Kringalgebra dasselbe wie ein k-Kring: Die Multiplikation eines k-Krings (B, φ) zusammen mit der von φ induzierten k-Modulstruktur macht jeden k-Kring zu einer k-Kringalgebra, und umgekehrt wird jede k-Kringalgebra M zu einem k-Kring durch den Kringhomomorphismus $\varphi : k \to M$, $\lambda \mapsto \lambda 1_M$. Ich verwende die Bezeichnung als Kringalgebra insbesondere, wenn ich den Grundring k nicht explizit erwähnen will. Viele Autoren, deren Fokus mehr auf der algebraischen Geometrie und kommutativen Algebra liegt, nennen letztere Struktur kurzerhand eine „k-Algebra“. Ich verwende diese Terminologie nicht, da bei mir auch nicht-kommutative Algebren und nicht-unitäre Algebren eine wichtige Rolle spielen. Allerdings will ich der Konvention folgen, daß eine Algebra als assoziativ angenommen sei, wenn aus dem Kontext nichts anderes hervorgeht.

7.1.5.9 (**Ringendliche Erweiterungen noetherscher Kringe sind noethersch**). Ist ein Kring B ringendlich über einem noetherschen Kring A, so ist auch B selbst noethersch. Man folgert das mit dem Hilbert'schen Basissatz 7.1.4.11 zunächst für einen Polynomring in endlich vielen Variablen über A und dann mit 7.1.4.18 für Quotienten solcher Polynomringe.

Satz 7.1.5.10 (**Ringendliche Körpererweiterungen**). *Jede ringendliche Körpererweiterung ist modulendlich. In anderen Worten ist also jede Körpererweiterung, die endlich erzeugt ist als Ringerweiterung, bereits endlichdimensional über dem Grundkörper.*

7.1.5.11. Wegen seiner engen Verwandtschaft zum Nullstellensatz heißt dieser Satz in vielen Quellen der **körpertheoretische Nullstellensatz**. Einen alternativen Beweis, der auf dem Noether'schen Normalisierungslemma und Eigenschaften ganzer Ringerweiterungen basiert, diskutieren wir in 7.5.4.9.

Beweis im Fall eines überabzählbaren Grundkörpers. Sei $k \subset L$ unsere Körpererweiterung. Ist L ein endlich erzeugter k-Ring, so ist L von abzählbarer Dimension über k. Gäbe es nun ein $t \in L \backslash k$, das transzendent ist über k, so hätten wir mit



Sind $A \subset B \subset C$ Kringe und ist C ringendlich über A, so muß B keineswegs ringendlich über A sein. Als Gegenbeispiel betrachte man etwa $\mathbb{C} \subset B \subset \mathbb{C}[x, y]$ mit B dem Ring aller Polynomfunktionen, deren Einschränkung auf die y-Achse konstant ist. Eine $\mathbb{C}$-Basis von B bildet dann etwa die Eins und alle Monome $x^i y^j$ mit $i > 0$, und man sieht leicht, daß kein Teilring von B von endlichem Typ über $\mathbb{C}$ alle xy^j enthalten kann. Dies Bild illustriert, wie ich mir diesen Ring veranschauliche: Jedes ausgemalte Kästchen mit unterer linker Ecke (i, j) steht für einen Basisvektor $x^i y^j$ von B.

$T \mapsto t$ eine Einbettung $k(T) \hookrightarrow L$. Der Funktionenkörper $k(T)$ hat aber überabzählbare Dimension über k, da die Familie der Brüche $(T-\lambda)^{-1}$ parametrisiert durch $\lambda \in k$ linear unabhängig ist über k, vergleiche 6.3.7.16. Widerspruch! $\square$

Beweis im Allgemeinen. Sei $k \subset L$ unsere ringendliche Körpererweiterung. Seien $e_1, \ldots, e_n$ Erzeuger des k-Krings L, in Formeln $L = k[e_1, \ldots, e_n]$. Wir argumentieren mit Induktion über n. Der Fall $n = 1$ ist unproblematisch, der Polynomring in einer Veränderlichen ist eben kein Körper, und jeder Quotient davon nach einem von Null verschiedenen Ideal ist endlichdimensional als k-Vektorraum. Für den Induktionsschritt dürfen wir annehmen, daß wir bereits wissen, daß L modulendlich ist über $K := k(e_1)$. Ist e_1 algebraisch über k, so sind wir wieder fertig. Also dürfen wir e_1 transzendent über k annehmen, in Formeln $K \cong k('T)$. Betrachten wir nun den Teilring $A \subset K$, der über k von e_1 und den Koeffizienten der Minimalpolynome über K von $e_2, \ldots, e_n$ erzeugt wird, so ist A per definitionem ringendlich über k. Wir haben also unseren Funktionenkörper K eingebettet in ein Sandwich von Kringen

$$k \subset A \subset K \subset L$$

mit L modulendlich über A und A ringendlich über k und damit nach 7.1.5.9 insbesondere A noethersch. Also muß auch K modulendlich sein über A und damit ringendlich über k. Das ist nun der gesuchte Widerspruch, denn ein Funktionenkörper $K \cong k('T)$ kann nie ringendlich über seinem Grundkörper k sein: Es gibt ja nach 6.2.4.30 unendlich viele irreduzible Polynome in $k['T]$, und nur endlich viele davon könnten in den Nennern von endlich vielen hypothetischen Erzeugern des k-Krings $k('T)$ vorkommen. $\square$

Vorschau 7.1.5.12. Einen alternativen Beweis geben wir im Anschluß an 7.5.5.3.

Übungen

Übung 7.1.5.13. Seien $A \subset B \subset C$ Kringerweiterungen. Man zeige: Ist C modulendlich über B und B modulendlich über A, so ist C bereits modulendlich über A. Ist C ringendlich über B und B ringendlich über A, so ist C bereits ringendlich über A.

Übung 7.1.5.14. Man bestimme alle Elemente von $\mathbb{Q}$, die ganz sind über $\mathbb{Z}$. Sei k ein Körper. Man bestimme alle Elemente von $k(T_1, \ldots, T_n)$, die ganz sind über dem Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$.

Übung 7.1.5.15. Man zeige, daß $\mathbb{C}[x, y]/\langle y^2 - x^3 \rangle$ ein Integritätsbereich ist, und daß die über diesem Ring ganzen Elemente seines Quotientenkörpers selbst einen Ring bilden, der isomorph ist zum Polynomring in einer Veränderlichen.

Übung 7.1.5.16. Wird ein A-Kring B als A-Kring erzeugt von endlich vielen über A ganzen Elementen, haben wir also in Formeln $B = A[x_1, \ldots, x_n]$ mit x_i ganz über A für $1 \leq i \leq n$, so ist er bereits modulendlich über A. Hinweis: Man beginne mit dem Fall eines einzigen Erzeugers und verwende dann 7.1.5.13.

7.1.6 Beweis des Hilbert'schen Nullstellensatzes

7.1.6.1. In einem unvoreingenommenen Sprachgebrauch hat jeder Ring genau ein maximales Ideal, nämlich das Ideal, das aus allen Elementen unseres Rings besteht. Ich erinnere jedoch daran, daß wir in 6.2.5.4 vereinbart hatten, vielmehr die maximalen echten Ideale eines Rings seine „maximalen Ideale" zu nennen.

7.1.6.2. Die Menge der maximalen Ideale eines Rings A notieren wir

$$\operatorname{Max} A$$

Statt $\operatorname{Max} A$ findet man für die Menge der maximalen Ideale eines Rings A auch oft Notationen wie $\operatorname{Spec}_{\max} A$ oder $\operatorname{Specm} A$, die aber im hier verfolgten Aufbau der Theorie erst in 7.4.2.4 verständlich werden.

7.1.6.3. In vom Nullring verschiedenen noetherschen Ringen ist es offensichtlich, daß sich jedes Ideal zu einem maximalen Ideal vergrößern läßt: Das System aller echten Ideale ist dann nicht leer und besitzt folglich mindestens ein maximales Element. In allgemeinen Ringen folgt das aus dem Zorn'schen Lemma, wie nun gleich gezeigt werden soll.

Satz 7.1.6.4 (**Existenz von maximalen Idealen**). *In jedem von Null verschiedenen Ring gibt es mindestens ein maximales Ideal. Allgemeiner läßt sich in einem beliebigen Ring jedes Ideal, das nicht der ganze Ring ist, vergrößern zu einem maximalen Ideal unseres Rings.*

Beweis. Sei R unser Ring und $\mathfrak{a} \neq R$ unser Ideal. Wir betrachten das System aller Ideale von R, die $\mathfrak{a}$ umfassen und nicht ganz R sind oder, gleichbedeutend, nicht die 1 von R enthalten. Dieses System von Teilmengen ist offensichtlich stabil unter aufsteigenden Vereinigungen. Jetzt folgt der Satz aus dem Zorn'schen Lemma in der Gestalt 3.1.9.18. □

Ergänzung 7.1.6.5. In der Logik wird gezeigt, daß die Annahme, jedes Ideal eines Krings möge sich zu einem maximalen Ideal vergrößern lassen, echt schwächer ist als das Auswahlaxiom. Der Beweis scheint allerdings nicht ganz einfach zu sein.

7.1.6.6. Ist $\varphi : R \twoheadrightarrow S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus, so erhalten wir eine Bijektion

$$\{\text{Ideale in } R, \text{ die } \ker\varphi \text{ umfassen}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Ideale in } S\}$$

vermittels der Abbildungen $I \mapsto \varphi(I)$ für $I \subset R$ beziehungsweise in der Gegenrichtung $J \mapsto \varphi^{-1}(J)$ für $J \subset S$. Insbesondere liefert das Zurückholen mit einem surjektiven Ringhomomorphismus eine Injektion $\operatorname{Max} S \hookrightarrow \operatorname{Max} R$, $\mathfrak{m} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$.

Lemma 7.1.6.7. *Ein Kring ist ein Körper genau dann, wenn in ihm das Nullideal ein maximales Ideal ist. Ein Ideal in einem Kring ist maximal genau dann, wenn der Quotientenring nach besagtem Ideal ein Körper ist.*

Beweis. Die zweite Aussage und damit implizit auch die Erste haben wir bereits als 6.2.5.6 bewiesen. Hier geben wir noch eine Beweisalternative. In einem Körper ist natürlich das Nullideal maximal. Ist umgekehrt das Nullideal ein maximales Ideal, so gilt $k = \langle 1 \rangle \neq \langle 0 \rangle$ und damit $1 \neq 0$. Weiter gilt $\langle a \rangle = k$ für jedes $a \neq 0$, also gibt es für jedes $a \neq 0$ ein b mit $ab = 1$. Wenden wir nun die Erkenntnis 7.1.6.6 an auf die Surjektion $R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}$ für irgendein Ideal $\mathfrak{m}$ von R, so folgt, daß $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal ist genau dann, wenn $\langle 0 \rangle \subset R/\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist. Das Nullideal in einem Kring ist aber, wie bereits gezeigt, maximal genau dann, wenn besagter Kring ein Körper ist. □

7.1.6.8. Die nun folgenden Lemmata 7.1.6.9 und 7.1.6.11 formulieren einfache Konsequenzen des Nullstellensatzes 7.1.1.6. Da wir uns jedoch beim Beweis des Nullstellensatzes auf diese Lemmata stützen wollen, dürfen wir sie hier nicht aus dem Nullstellensatz herleiten. Stattdessen folgern wir sie aus dem bereits bewiesenen Satz über ringendliche Körpererweiterungen 7.1.5.10.

Lemma 7.1.6.9 (Maximale Ideale in Polynomringen). *Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so sind die maximalen Ideale im Polynomring in n Variablen $k[T_1, \ldots, T_n]$ genau die Verschwindungsideale von Punkten des k^n. In Formeln liefert das Bilden des Verschwindungsideals also eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} k^n & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Max} k[T_1, \ldots, T_n] \\ x & \mapsto & \mathcal{I}(x) \end{array}$$

7.1.6.10. Da jeder Punkt des k^n abgeschlossen ist, können wir die inverse Abbildung beschreiben durch die Abbildungsvorschrift $\mathfrak{m} \mapsto \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$.

Beweis. Ist k ein Körper und $x \in k^n$ ein Punkt, so ist ganz offensichtlich $\mathcal{I}(x) = \langle T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n \rangle \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ ein maximales Ideal: In der Tat induziert das Auswerten bei x einen Isomorphismus $k[T_1, \ldots, T_n]/\mathcal{I}(x) \xrightarrow{\sim} k$. Ist umgekehrt $\mathfrak{m} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ ein maximales Ideal, so betrachten wir den Körper $L := k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m}$. Wir haben natürlich einen Ringhomomorphismus $\varphi : k \to L$ und die Nebenklassen der T_i erzeugen L als k-Algebra. Mit dem Satz über ringendliche Körpererweiterungen 7.1.5.10 folgt, daß $\varphi : k \hookrightarrow L$ eine algebraische

Körpererweiterung sein muß. Aus unserer Annahme k algebraisch abgeschlossen folgt dann weiter, daß φ eine Bijektion sein muß. Ist $x_i \in k$ das Urbild der Nebenklasse $\bar{T}_i \in L$ von T_i unter dieser Bijektion, so folgt $T_i - x_i \in \mathfrak{m}$. Bezeichnet $x = (x_1, \ldots, x_n)$ den Punkt mit den Koordinaten x_i, so folgt $\mathcal{I}(x) \subset \mathfrak{m}$ und damit $\mathcal{I}(x) = \mathfrak{m}$. □

Lemma 7.1.6.11 (Ideale ohne simultane Nullstellen). *Hat ein Ideal in einem Polynomring in endlich vielen Variablen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper keine Nullstelle, so ist besagtes Ideal schon der ganze Polynomring.*

Beweis. Bezeichnet $k = \bar{k}$ unseren Körper und $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ unser Ideal, so behauptet unser Lemma in Formeln

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{a} = k[T_1, \ldots, T_n]$$

Das zeigen wir durch Widerspruch: Ist ein Ideal $\mathfrak{a}$ nicht der ganze Ring, so gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ über $\mathfrak{a}$ und wir folgern aus $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ erst $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \supset \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ und dann mit 7.1.6.9 weiter $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$. □

7.1.6.12. Nun erinnern und beweisen wir den bereits in 7.1.1.6 angekündigten Hilbert'schen Nullstellensatz.

Satz 7.1.6.13 (Hilbert'scher Nullstellensatz). *Seien $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal. Ist $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Polynom, das auf der Nullstellenmenge unseres Ideals verschwindet, so liegt eine Potenz unseres Polynoms bereits selbst in besagtem Ideal, in Formeln*

$$\mathcal{Z}(f) \supset \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \;\Rightarrow\; f^N \in \mathfrak{a} \textit{ für } N \gg 0$$

Beweis. Wir verwenden den sogenannten **Rabinovitch-Trick** und betrachten in dem um eine Variable T vergrößerten Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n, T]$ das von $\mathfrak{a}$ und $fT - 1$ erzeugte Ideal $\mathfrak{b}$. Da wir $\mathcal{Z}(f) \supset \mathcal{Z}(\mathfrak{a})$ angenommen hatten, besitzt dies Ideal $\mathfrak{b}$ überhaupt keine simultanen Nullstellen. Anschaulich gesprochen entweicht $\mathcal{Z}(fT - 1)$ bei jeder Nullstelle von f in Richtung der zusätzlichen Koordinate T ins Unendliche und die Nullstellenmenge von $\mathfrak{a}$ im um eine Variable größeren Polynomring ist das kartesische Produkt von $\mathcal{Z}(\mathfrak{a})$ mit der zusätzlichen Koordinatenachse: Der Schnitt dieser beiden Mengen ist dann offensichtlich leer. Nach 7.1.6.11 gilt also in unserem um eine Variable vergrößerten Polynomring eine Gleichung der Gestalt

$$r_0(fT - 1) + r_1 f_1 + \ldots + r_m f_m = 1$$

mit $f_j \in \mathfrak{a}$ und r_j Elementen unseres um eine Variable vergrößerten Polynomrings. Nun durften wir sicher von Anfang an $f \neq 0$ annehmen. Setzen wir dann in

unserer Gleichung für T das Element f^{-1} des Funktionenkörpers $k(T_1, \ldots, T_n)$ ein, wenden also den Ringhomomorphismus $k[T_1, \ldots, T_n, T] \to k(T_1, \ldots, T_n)$ mit $T \mapsto f^{-1}$ an, so ergibt sich in diesem Funktionenkörper und sogar bereits in seinem Teilring $k[T_1, \ldots, T_n, f^{-1}]$ eine Gleichung der Gestalt

$$s_1 f_1 + \ldots + s_m f_m = 1$$

wo die $s_j \in k[T_1, \ldots, T_n, f^{-1}]$ eben aus den r_j hervorgehen durch Einsetzen von f^{-1} für T. Nach Multiplikation mit einer geeigneten Potenz f^N von f erhalten wir schließlich eine Gleichung in $k[T_1, \ldots, T_n]$ der Gestalt

$$c_1 f_1 + \ldots + c_m f_m = f^N$$

mit $c_j = f^N s_j$ Elementen unseres ursprünglichen Polynomrings $k[T_1, \ldots, T_n]$. Diese Gleichung zeigt dann $f^N \in \mathfrak{a}$. □

Definition 7.1.6.14. Gegeben ein Ideal $\mathfrak{a}$ in einem Kring R definiert man sein **Radikal** $\sqrt{\mathfrak{a}}$ durch die Vorschrift $\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in R \mid f^N \in \mathfrak{a} \text{ für } N \gg 0\}$. Ein Ideal heißt ein **Radikalideal**, wenn es sein eigenes Radikal ist.

7.1.6.15 (**Diskussion der Terminologie**). In 24.4.4.8 führen wir den Begriff des „Radikals eines Moduls“ ein. Das Radikal eines Ideals im obigen Sinne ist etwas völlig anderes als sein Radikal als Modul. Wenn es nötig sein sollte, werde ich unterscheiden zwischen dem **Potenzradikal** und dem **Modulradikal** eines Ideals.

7.1.6.16 (**Abgeschlossene Mengen und Radikalideale**). Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so gilt für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ nach dem Nullstellensatz die Formel $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Andererseits wissen wir schon lange um die Formel $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(X)) = \bar{X}$ für Teilmengen $X \subset k^n$. Die Vorschriften $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{I}$ liefern also zueinander inverse Bijektionen zwischen der Menge aller Zariski-abgeschlossenen Teilmengen des k^n und der Menge aller Radikalideale in $k[T_1, \ldots, T_n]$, in Formeln

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Radikalideale} \\ \mathfrak{b} \subset k[T_1, \ldots, T_n] \end{array} \right\} \quad \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{Z}}{\underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{\sim}}}} \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{Algebraische Teilmengen} \\ Z \not\subset k^n \end{array} \right\}$$

Übungen

Übung 7.1.6.17. Ist k algebraisch abgeschlossen und $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal, so induziert die Bijektion $k^n \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} k[T_1, \ldots, T_n]$ aus Lemma 7.1.6.9 eine Bijektion $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max}(k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a})$.

Übung 7.1.6.18. Warum kann man nicht mit demselben Argument wie in 7.1.6.4 zeigen, daß jede Gruppe eine maximale echte Untergruppe besitzt? Man zeige auch, daß die additive Gruppe $\mathbb{Q}$ keine maximale echte Untergruppe besitzt.

Übung 7.1.6.19. Gegeben ein kommutativer von Null verschiedener Ring R folgt aus $R^n \cong R^m$ schon $n = m$. Hinweis: Man benutze 7.1.3.15 und wähle mit 7.1.6.4 ein maximales Ideal $\mathfrak{a} \subset R$, so daß $R/\mathfrak{a}$ nach 7.1.6.7 ein Körper ist. Ein alternativer Beweis, der ohne das Zorn'sche Lemma auskommt, wird in 7.2.3.10 gegeben. Der hier skizzierte Beweis zeigt jedoch mit 6.5.3.4 allgemeiner für beliebige Mengen I, J, daß aus der Isomorphie von freien Moduln $RI \cong RJ$ folgt, daß I und J dieselbe Kardinalität haben.

Übung 7.1.6.20. Der Schnitt aller maximalen Ideale eines Krings R kann auch beschrieben werden als die Menge aller Elemente unseres Rings mit der Eigenschaft, daß die Summe eines beliebigen Vielfachen unseres Elements mit der Eins stets eine Einheit ist, in Formeln

$$\bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R} \mathfrak{m} = \{a \in R \mid (ra + 1) \in R^\times \ \forall r \in R\}$$

Diese Menge heißt das **Jacobson-Radikal** unseres Krings. Im Fall nichtkommutativer Ringe versteht man unter dem Jacobson-Radikal feiner den Schnitt aller maximalen Links- oder gleichbedeutend aller maximalen Rechtsideale.

Übung 7.1.6.21. $(k = \bar{k})$. In Erweiterung von 7.1.1.22 zeige man, daß ein Ideal $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ genau dann von endlicher Kodimension ist, wenn es höchstens endlich viele simultane Nullstellen besitzt, in Formeln

$$|\mathcal{Z}(\mathfrak{a})| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{codim}_k(\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]) < \infty$$

Ergänzende Übung 7.1.6.22. Noch allgemeiner als in 7.1.6.21 zeige man für einen beliebigen Körper k, daß ein Ideal $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ genau dann von endlicher Kodimension ist, wenn es nur in endlich vielen maximalen Idealen enthalten ist.

Übung 7.1.6.23. Man zeige, daß für ein Ideal $\mathfrak{a}$ eines Krings R das Radikal $\sqrt{\mathfrak{a}}$ wieder ein Ideal von R ist und daß $\sqrt{\mathfrak{a}}$ sein eigenes Radikal ist.

Übung 7.1.6.24. $(k = \bar{k})$. Ist A ein ringendlicher k-Kring, so liefert das Bilden des Kerns $\varphi \mapsto \ker \varphi$ eine Bijektion $\operatorname{Kring}^k(A, k) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} A$.

Übung 7.1.6.25. Seien k ein Körper und A ein ringendlicher k-Kring. Man zeige: Ist der Quotient von A nach seinem Nilradikal $A/\sqrt{0}$ endlichdimensional über k, so ist bereits A selbst endlichdimensional über k.

7.2 Mehr zu Moduln

Die Resultate dieses Abschnitts werden erst nach und nach gebraucht. Ich schlage vor, ihn hier zu überspringen und dieses eher technische Material erst bei Bedarf nachzuholen.

7.2.1 Summen und Produkte von Moduln

7.2.1.1. Die folgenden Konstruktionen verallgemeinern unsere Konstruktionen im Fall von Vektorräumen aus 4.7.8.

Definition 7.2.1.2. Gegeben eine Familie $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Moduln über einem Ring R bilden wir zwei neue R-Moduln, das **Produkt** $\prod M_\lambda$ und die **direkte Summe** oder kurz **Summe** $\bigoplus M_\lambda$ durch die Regeln

$$\begin{array}{rcl} \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda & = & \{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid m_\lambda \in M_\lambda\} \\ \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda & = & \{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid m_\lambda \in M_\lambda, \text{ nur endlich viele } m_\lambda \text{ sind nicht null}\} \end{array}$$

mit der offensichtlichen komponentenweisen Addition und Multiplikation mit Skalaren aus R.

7.2.1.3. Für eine endliche Familie von Moduln $M_1, \ldots, M_s$ stimmen die direkte Summe und das Produkt überein. Wir benutzen dann alternativ die Notationen

$$M_1 \times \ldots \times M_s = M_1 \oplus \ldots \oplus M_s$$

7.2.1.4. Das Produkt beziehungsweise die Summe sind das Produkt beziehungsweise Koprodukt in der Kategorie der R-Moduln im Sinne unserer allgemeinen Definitionen 4.7.7.1 beziehungsweise 4.7.7.16. Ausformuliert bedeutet das: Die offensichtlichen Einbettungen und Projektionen sind Homomorphismen

$$\mathrm{in}_\lambda : M_\lambda \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \mathrm{pr}_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \twoheadrightarrow M_\lambda$$

und ist M ein weiterer R-Modul, so induzieren die durch Vorschalten der in_λ beziehungsweise Nachschalten der pr_λ gegebenen Abbildungen Bijektionen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, M) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, M) \\ f & \mapsto & (f \circ \mathrm{in}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_R(M, \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M, M_\lambda) \\ f & \mapsto & (\mathrm{pr}_\lambda \circ f)_{\lambda\in\Lambda} \end{array}$$

7.2.1.5. Gegeben eine Familie $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Untermoduln eines Moduls M bezeichnet man den von ihrer Vereinigung erzeugten Untermodul von M auch als ihre **Summe** und notiert ihn $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Diese Summe kann auch interpretiert werden als das Bild eines natürlichen Homomorphismus $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M$ von der direkten Summe nach M. Ist dieser Homomorphismus injektiv, so sagen wir, die „Summe der Untermoduln M_λ sei direkt" und schreiben statt $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ auch $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Zwei Untermoduln $N_1, N_2 \subset M$ heißen **komplementär** genau dann, wenn ihre Einbettungen einen Isomorphismus $N_1 \oplus N_2 \xrightarrow{\sim} M$ induzieren. Ein Untermodul, der ein Komplement besitzt, heißt ein **Summand**.

7.2.1.6. Auch bei Moduln über Ringen nennt man eine Familie $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ **linear unabhängig** genau dann, wenn nur die triviale endliche Linearkombination verschwindet, wenn also für eine Familie $(r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Elementen unseres Rings mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Mitgliedern gilt

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda m_\lambda = 0 \quad \Rightarrow \text{ alle } r_\lambda \text{ sind null}$$

Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt wie bei Vektorräumen eine **Basis**, und wie dort erklären wir die Begriffsvarianten einer **Basis als Teilmenge**, einer **Basis als Familie**, und einer **angeordneten Basis**. Allerdings besitzen keineswegs alle Moduln eine Basis, wie man das von Vektorräumen gewohnt ist. Die Moduln, die eine Basis besitzen, nennt man **freie Moduln**. Die Moduln, die eine Basis bestehend aus genau einem Element besitzen, nenne ich **frei zyklisch**.

Beispiel 7.2.1.7. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist kein freier $\mathbb{Z}$-Modul, aber durchaus ein freier Modul über dem Ring $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Jede Familie von Elementen eines Moduls über dem Nullring, der notwendig aus genau einem Element besteht, ist eine Basis.

Beispiel 7.2.1.8. Für jede Menge Λ ist der Modul

$$R\Lambda := \{f : \Lambda \to R \mid f(\lambda) = 0 \text{ für fast alle } \lambda\}$$

frei, denn die Abbildungen, die an einer Stelle den Wert 1 annehmen und sonst den Wert Null, bilden eine Basis. Wir nennen $R\Lambda$ den **freien R-Modul über der Menge** Λ. Nach unseren Definitionen ist umgekehrt eine Familie $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in einem Modul M eine Basis genau dann, wenn die Abbildung $R\Lambda \to M$ mit $(r_\lambda) \mapsto \sum r_\lambda m_\lambda$ ein Isomorphismus ist.

7.2.1.9 (**Ungewohnte Isomorphismen zwischen freien Moduln**). Für beliebige Ringe R folgt aus $R^n \cong R^m$ im allgemeinen keineswegs $n = m$. Das einfachste Gegenbeispiel ist der Nullring, und das ist nach 7.2.3.10 auch das einzige kommutative Gegenbeispiel. Unter den nicht kommutativen Ringen gibt es

jedoch auch interessantere Gegenbeispiele. Betrachten wir etwa zu einem beliebigen Körper den freien Vektorraum V über der Menge $\mathbb{N}$, so gibt es einen Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} V \oplus V$, und für den Endomorphismenring $R = \operatorname{End} V$ erhalten wir einen Isomorphismus von R-Moduln $R \cong R^2$ als die Verknüpfung $R = \operatorname{End} V \cong \operatorname{Hom}(V \oplus V, V) \cong R \oplus R$.

Ergänzung 7.2.1.10. Wir erhalten mit 7.2.1.9 auch ein Paar $A \subsetneq B$ bestehend aus einem Ring mit einem echten Teilring und der Eigenschaft, daß dennoch ein Isomorphismus $A \cong B$ von A-Linksmoduln existiert: Betrachten wir R wie in 7.2.1.9 und den Teilring $(R \times R) \subset \operatorname{Mat}(2; R)$ der Diagonalmatrizen, haben wir einerseits einen Isomorphismus $(R \times R)^2 \cong \operatorname{Mat}(2; R)$ von $(R \times R)$-Linksmoduln, soviel gilt sogar für jeden Ring R, und andererseits gibt es nach den vorherigen Überlegungen auch einen Isomorphismus $(R \times R) \cong (R \times R)^2$ von $(R \times R)$-Linksmoduln.

Lemma 7.2.1.11 (Kriterium für die Direktheit einer Summe). *Gegeben eine Familie $(V_i)_{i \in I}$ von Untergruppen einer abelschen Gruppe V ist der natürliche Homomorphismus $\bigoplus_{i \in I} V_i \to V$ eine Injektion genau dann, wenn für jedes $i \in I$ gilt*

$$V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = 0$$

Beweis. Ist der natürliche Homomorphismus eine Injektion, so offensichtlich $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = 0$. Ist der natürliche Homomorphismus keine Injektion, so liegt ein von Null verschiedenes Element $v = (v_i)_{i \in I}$ der direkten Summe in seinem Kern. Dieses Element hat eine von Null verschiedene Komponente, die Menge $K := \{i \mid v_i \neq 0\}$ ist also endlich und nicht leer. Per definitionem gilt nun $\sum_{k \in K} v_k = 0$. Wählen wir $i \in K$, so folgt $0 \neq -v_i = \sum_{j \neq i} v_j$ und damit $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j \neq 0$. $\square$

Satz* 7.2.1.12. *Für jede freie abelsche Gruppe F ist die offensichtliche Abbildung in das Bidual ein Isomorphismus $F \xrightarrow{\sim} F^{**}$.*

Beweis. Wir zeigen das nur für $F = \mathbb{Z}[T]$, der allgemeine Fall geht genauso. Das Dual F^* ist in diesem Fall ein Produkt abzählbar vieler Kopien von $\mathbb{Z}$ und heißt die **Baer-Specker-Gruppe**. Wir verwenden im folgenden die Inkarnation von F^* als der Potenzreihenring. In Formeln ausgedrückt haben wir eine bilineare Abbildung

$$\mathbb{Z}[\![T]\!] \times \mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}$$

gegeben durch $(P, Q) \mapsto$ (der Koeffizient von T^0 in $P\bar{Q}$), wobei $\bar{Q}$ aus Q entstehe durch Substitution von T^{-1} für T. Diese Paarung liefert offensichtlich einen Isomorphismus $\mathbb{Z}[\![T]\!] \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})$. Es gilt zu zeigen, daß sie auch einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}[T] \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\![T]\!], \mathbb{Z})$$

induziert. Um das einzusehen, zeigt man zunächst

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\![T]\!]/\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z}) = 0$$

Jeder Homomorphismus $f : \mathbb{Z}[\![T]\!]/\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}$ macht jede Nebenklasse einer Reihe der Gestalt $\sum b_i 3^i T^i$ zu Null, da seine Werte darauf durch jede Potenz von drei teilbar sein müssen. Auf der Nebenklasse einer beliebigen Reihe $\sum a_i T^i$ kann f also nur gerade Zahlen als Werte annehmen, da $\sum a_i T^i + \sum_{a_i \text{ ungerade}} 3^i T^i$ stets das Doppelte einer anderen Reihe ist. Das zeigt, daß f Null sein muß. Jeder Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}[\![T]\!] \to \mathbb{Z}$ ist also durch seine Restriktion auf $\mathbb{Z}[T]$ bereits eindeutig festgelegt. Es bleibt zu zeigen, daß eine Linearform $f : \mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}$, die nicht auf fast allen T^i Null ist, nicht auf $\mathbb{Z}[\![T]\!]$ fortgesetzt werden kann. Ist aber f auf unendlich vielen T^i nicht Null, so finden wir eine monoton wachsende Folge $\alpha(0) \le \alpha(1) \le \ldots$ von natürlichen Zahlen mit $c_n := |f(T^0)2^{\alpha(0)} + \ldots + f(T^n)2^{\alpha(n)}| \to \infty$ für $n \to \infty$ und $2^{\alpha(n+1)} > 2c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Werten wir dann unsere Linearform auf der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{\alpha(i)} T^i$ aus, so muß das Ergebnis im Betrag mindestens c_n sein für alle n, wie man durch Aufteilen in einen Anfang und einen Schwanz aus $2^{\alpha(n+1)}\mathbb{Z}[\![T]\!]$ sieht, und das ist unmöglich. $\square$

Übungen

Übung 7.2.1.13. Man zeige: Jeder endlich erzeugte Modul über einem Schiefkörper D ist isomorph zu D^n für wohlbestimmtes $n \in \mathbb{N}$. Hinweis: Man kopiere die Argumentation aus der linearen Algebra.

Übung 7.2.1.14. Sei k ein von Null verschiedener Ring. Man gebe ein minimales alias unverkürzbares Erzeugendensystem des Rings $R := (k \times k)$ als Linksmodul über sich selber an, das keine Basis ist. Man gebe eine maximale linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{Z}$ als Linksmodul über sich selber an, die keine Basis ist.

Übung 7.2.1.15. Sei k ein Ring und $k[\varepsilon] := k[T]/\langle T^2 \rangle$ mit $\varepsilon = \bar{T}$ der Ring der **dualen Zahlen über** k. Man zeige: Ein $k[\varepsilon]$-Modul ist frei genau dann, wenn gilt: $M/\varepsilon M$ ist ein freier k-Modul und die Multiplikation mit ε induziert einen Isomorphismus

$$M/\varepsilon M \xrightarrow{\sim} \varepsilon M$$

Übung 7.2.1.16. Jeder Modul ist isomorph zu einem Quotient eines freien Moduls.

Übung 7.2.1.17. Gegeben Moduln $M_1, \ldots, M_m$ und $N_1, \ldots, N_n$ über einem Ring R haben wir eine natürliche Identifikation

$$\mathrm{Hom}_R(M_1 \oplus \ldots \oplus M_m, N_1 \oplus \ldots \oplus N_n) \xrightarrow{\sim} \prod_{i,j} \mathrm{Hom}_R(M_j, N_i)$$

Wir werden die Elemente einer endlichen direkten Summe oft als Spaltenvetoren von Elementen der Summanden auffassen und die Homomorphismen zwischen direkten Summen als Matrizen von Homomorphismen zwischen den Summanden. Das erlaubt uns, die Komposition solcher Homomorphismen mit dem Formalismus der Matrixmultiplikation zu berechnen.

Übung 7.2.1.18. Gegeben eine Familie von Moduln M_{ij} mit $i \in I$, $j \in J$ haben wir stets eine kanonische Injektion $\bigoplus_i(\prod_j M_{ji}) \hookrightarrow \prod_j(\bigoplus_i M_{ji})$, die im allgemeinen aber kein Isomorphismus ist.

Übung 7.2.1.19. Das folgende verallgemeinert 4.4.2.23. Sei R ein Ring. Man nennt einen Homomorphismus von R-Moduln $M \twoheadrightarrow M''$ **linksspaltend**, wenn er ein Rechtsinverses besitzt, und nennt solch ein Rechtsinverses dann eine **Spaltung**. Man zeige: Ist $\varphi : M \twoheadrightarrow M''$ ein Homomorphismus, $M' \subset M$ sein Kern und $\psi : M'' \to M$ ein Rechtsinverses von φ, so erhalten wir vermittels der Vorschrift $(a', a'') \mapsto a' + \psi(a'')$ einen Isomorphismus $M' \times M'' \xrightarrow{\sim} M$. Man nennt einen Modulhomomorphismus $M' \hookrightarrow M$ **rechtsspaltend**, wenn er ein Linksinverses besitzt, und nennt solch ein Linksinverses ψ auch eine **Spaltung**. Für $s : M \twoheadrightarrow M''$ die Surjektion auf den Kokern eines rechtsspaltenden Morphismus zeige man, daß (ψ, s) einen Isomorphismus $M \xrightarrow{\sim} M' \times M''$ liefern.

7.2.1.20. Gegeben eine kurze exakte Sequenz von Moduln $A \overset{r}{\hookrightarrow} B \overset{s}{\twoheadrightarrow} C$ sind gleichbedeutend: (1) r besitzt ein Linksinverses, (2) s besitzt ein Rechtsinverses und (3) es gibt einen Isomorphismus der Gestalt $(\mathrm{id}_A, f, \mathrm{id}_C)$ von unserer Sequenz mit der Sequenz

$$A \overset{\mathrm{in}_1}{\hookrightarrow} A \oplus C \overset{\mathrm{pr}_2}{\twoheadrightarrow} C$$

Das ist eine Umformulierung der Übungen 4.4.2.23 und 4.4.2.24. Eine kurze exakte Sequenzen mit diesen Eigenschaften heißt eine **spaltende** kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Die kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit der Multiplikation mit Zwei als erster Abbildung spaltet nicht. Das ist eine offensichtliche Verallgemeinerung der entsprechenden Aussagen für abelsche Gruppen 4.4.6.10.

Übung 7.2.1.21. Sei R ein Ring. Für jeden surjektiven Homomorphismus $f : M \twoheadrightarrow F$ von einem R-Modul M auf einen freien R-Modul F existiert eine Spaltung, als da heißt ein Homomorphismus $s : F \to M$ mit $fs = \mathrm{id}_F$.

7.2.2 Endliche Produkte von Ringen

7.2.2.1. Unter dem **Zentrum** $\mathrm{Z}(R)$ eines Rings R verstehen wir die Menge derjenigen Elemente von R, die mit allen anderen Elementen kommutieren, in Formeln

$$\mathrm{Z}(R) = \{z \in R \mid za = az \ \ \forall a \in R\}$$

Das Zentrum ist stets ein kommutativer Teilring von R.

7.2.2.2. Gegeben eine Familie von Ringen $(A_i)_{i\in I}$ können wir den Produktring $A := \prod_{i\in I} A_i$ bilden. Die Elemente e_i mit einer 1 an der i-ten Stelle und Nullen sonst liegen im Zentrum des Produktrings und die von den e_i erzeugten zweiseitigen Ideale $A\mathrm{e}_iA$ werden unter den Projektionen $\mathrm{pr}_j : A \to A_j$ bijektiv auf A_i abgebildet im Fall $i = j$ und auf Null sonst. Des weiteren gilt $\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j = 0$ für $i \neq j$ und $\mathrm{e}_i^2 = \mathrm{e}_i$. Ist unsere Familie endlich, so gilt zusätzlich $1 = \sum_{i\in I} \mathrm{e}_i$.

7.2.2.3. Seien umgekehrt ein Ring A gegeben und darin eine endliche Familie von zentralen Idempotenten $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ mit $\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j = 0$ falls $i \neq j$ und

$$1 = \mathrm{e}_1 + \ldots + \mathrm{e}_n$$

Wir nennen eine solche Darstellung eine **Zerlegung der Eins in paarweise orthogonale zentrale Idempotente**. Sie liefert eine Zerlegung

$$A = A\mathrm{e}_1 \oplus \ldots \oplus A\mathrm{e}_n$$

in eine direkte Summe von Idealen, die jeweils selbst Ringe sind mit Einselement e_i, und sogar einen Ringisomorphismus

$$A\mathrm{e}_1 \times \ldots \times A\mathrm{e}_n \xrightarrow{\sim} A$$

Fassen wir in einer derartigen Zerlegung der Eins einige Summanden zusammen, so sprechen wir von einer **Vergröberung** unserer Zerlegung. Natürlich haben je zwei derartige Zerlegungen eine gemeinsame Verfeinerung, bestehend aus allen Produkten von einem Idempotenten der einen Zerlegung und einem Idempotenten der anderen Zerlegung. Existiert eine feinste Zerlegung mit von Null verschiedenen Summanden, so ist sie demnach eindeutig. Die zugehörige Zerlegung des Rings heißt dann seine **Block-Zerlegung** $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ und die zugehörigen Faktoren A_i heißen die **Blöcke** des Rings A.

Ergänzung 7.2.2.4. Gegeben Ringe $R_1, \ldots, R_n$ mit Produkt $R = R_1 \times \ldots \times R_n$ erhalten wir für jede abelsche Gruppe M eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Strukturen auf } M \\ \text{als } R\text{-Modul} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Zerlegungen } M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n \text{ mit} \\ \text{jeweils einer } R_i\text{-Modulstruktur auf } M_i \end{array} \right\}$$

indem wir in R die Elemente $\mathrm{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ mit einer 1 an der i-ten Stelle und Nullen sonst betrachten und in M die Untergruppen $M_i := \mathrm{e}_iM$ nehmen und sie mit der hoffentlich offensichtlichen von der R-Modulstruktur auf M induzierten Struktur eines R_i-Moduls versehen.

Übung 7.2.2.5. Gegeben ein Modul M über einem Ring R und ein Element $m \in M$ heißt die Teilmenge

$$\mathrm{Ann}_R(m) := \{r \in R \mid rm = 0\}$$

der **Annullator von** m. Man zeige, daß der Annullator jedes Elements ein Linksideal ist. Weiter heißt die Teilmenge

$$\mathrm{Ann}_R(M) := \{r \in R \mid rm = 0 \ \forall m \in M\}$$

der Annullator des Moduls M. Man zeige, daß der Annullator eines Moduls stets ein zweiseitiges Ideal ist.

7.2.3 Rechtsmoduln und Matrizenrechnung

Definition 7.2.3.1. Sei R ein Ring. Ein R**-Rechtsmodul** ist ein Paar bestehend aus einer abelschen Gruppe $(M, +)$ mitsamt einer Abbildung $M \times R \to M$, $(m, r) \mapsto mr$ derart, daß gilt für alle $m, n \in M$ und $r, s \in R$:

$$\begin{array}{rcl} (m+n)r & = & mr + nr \\ m(r+s) & = & mr + ms \\ m(rs) & = & (mr)s \\ m1 & = & m \end{array}$$

7.2.3.2. Unsere R-Moduln aus Definition 7.1.2.3 nennt man manchmal auch genauer **Linksmoduln**. Um den Unterschied klar zu machen, definieren wir für jeden Ring $R = (R, +, \cdot)$ den **opponierten Ring** $R^{\mathrm{opp}} = (R, +, \cdot)$ als die abelsche Gruppe R mit der „vertauschten“ Multiplikation $r^\circ s^\circ = sr$ für $r, s \in R$. Wir verwenden dabei die Notation 2.2.3.33, insbesondere meint r° das Element r aufgefaßt als Element des opponierten Rings. Man prüft ohne Schwierigkeiten, daß ein R-Rechtsmodul dasselbe ist wie ein R^{opp}-Linksmodul, alias eine abelsche Gruppe M mitsamt einem Ringhomomorphimus $R^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{End}\, M$. Insbesondere braucht man bei kommutativen Ringen zwischen Rechtsmoduln und Linksmoduln keinen Unterschied zu machen.

Definition 7.2.3.3. Sei R ein Ring und M ein R-Rechtsmodul. Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt ein Untermodul oder ganz pedantisch **Unterrechtsmodul** genau dann, wenn N eine Untergruppe ist und wenn zusätzlich gilt $m \in N, r \in R \Rightarrow mr \in N$.

7.2.3.4. Die Unterrechtsmoduln eines Rings heißen seine **Rechtsideale**. Jeder Schnitt von Untermoduln ist wieder ein Untermodul. Ist $T \subset M$ eine Teilmenge eines Moduls M, so heißt der kleinste Untermodul von M, der T enthält, auch der **von** T **erzeugte Untermodul** und wir bezeichnen ihn mit $\langle T \rangle_R$ oder auch abkürzend mit $\langle T \rangle$.

7.2.3.5. Für R-Rechtsmoduln M, N nennen wir einen Homomorphismus von abelschen Gruppen $f : M \to N$ mit $f(mr) = f(m)r \; \forall m \in M, r \in R$ auch einen **Homomorphismus von R-Rechtsmoduln** und bezeichnen die Menge aller Homomorphimen von R-Rechtsmoduln mit

$$\mathrm{Hom}_{-R}(M, N)$$

Genau wie bei Körpern haben wir auch bei Ringen R eine natürliche Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{-R}(R^p, R^q) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Mat}(q \times p; R) \\ f & \mapsto & [f] \end{array}$$

wo die Spalten der Matrix $[f] = (a_{ij})$ die Bilder unter f der Vektoren $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_p$ der Standardbasis des R^p sind, in Formeln $f(\mathrm{e}_j) = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ für $1 \leq j \leq p$. Die inverse Abbildung ordnet jeder Matrix A die R-rechtslineare Abbildung $x \mapsto Ax$ zu, wo wir die Elemente $x \in R^p$ beziehungsweise $Ax \in R^q$ als Spaltenmatrizen auffassen. Wie bei Körpern entspricht die Matrixmultiplikation der Verknüpfung von Abbildungen, in Formeln $[f \circ g] = [f] \circ [g]$, und f ist ein Isomorphismus genau dann, wenn seine Matrix $[f]$ invertierbar ist.

7.2.3.6. Für die Kategorie der Rechtsmoduln über einem Ring R verwenden wir die beiden Notationen

$$\text{Mod-}\, R = \mathrm{Mod}_{-R}$$

7.2.3.7. Gegeben R-Rechtsmoduln M, N mit endlichen angeordneten Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ der Kardinalitäten p, q erhalten wir genau wie bei Körpern auch bei Ringen R eine natürliche Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{-R}(M, N) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Mat}(q \times p; R) \\ f & \mapsto & {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}} \end{array}$$

und nennen wieder ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$ die **darstellende Matrix der Abbildung f in Bezug auf die Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$**. Die Formel ${}_{\mathcal{C}}[g \circ f]_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{C}}[g]_{\mathcal{B}} \circ {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$ gilt entsprechend.

7.2.3.8. Ich erinnere an die Definition der Determinante quadratischer Matrizen mit Einträgen in einem Kring durch die Leibnizformel 3.6.2.1, an die Multiplikationsformel $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ aus 3.6.4.1 und daran, daß eine quadratische Matrix nach 4.6.1.50 genau dann invertierbar ist, wenn ihre Determinante eine Einheit in fraglichen kommutativen Ring ist.

Ergänzung 7.2.3.9. Die Leibnizformel ist zwar auch für nichtkommutative Ringe noch sinnvoll, aber die Formel $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ ist dann nicht mehr richtig, und deshalb sind Determinanten in der Allgemeinheit nichtkommutativer Ringe nicht mehr von Nutzen.

Proposition 7.2.3.10 (Wohlbestimmtheit des Rangs). *Ist R ein kommutativer Ring und nicht der Nullring, so folgt für $m, n \in \mathbb{N}$ aus der Existenz eines Isomorphismus von Moduln $R^n \cong R^m$ bereits $n = m$.*

7.2.3.11. Ein alternativer Beweis wird in Übung 7.1.6.19 skizziert. Ein Gegenbeispiel für nichtkommutative Ringe erklärt 7.2.1.9.

Beweis. Ein Isomorphismus $R^n \cong R^m$ wird notwendig beschrieben durch Matrizen A und B. Wäre hier $n \neq m$, so wären unsere Matrizen nicht quadratisch. Hat ohne Beschränkung der Allgemeinheit A mehr Zeilen als Spalten und ergänzen wir unsere Matrizen durch Nullen zu quadratischen Matrizen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$, so gilt immer noch $\tilde{A}\tilde{B} = I$ mit I der Einheitsmatrix, im Widerspruch zu $\det \tilde{A} = 0$. $\square$

7.2.3.12. Ist M ein endlich erzeugter freier Modul über einem kommutativen und vom Nullring verschiedenen Ring R, so heißt die Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $M \cong R^n$ der **Rang** von M. Wir nennen diese Zahl etwas unüblich wie im Körperfall die **Dimension** unseres Moduls und verwenden dafür die Notation

$$n = \dim_R M = \dim M$$

Das Beispiel 7.2.1.9 zeigt, daß man über nichtkommutativen Ringen im allgemeinen nicht mehr sinnvoll vom Rang eines freien Moduls reden kann.

Ergänzung 7.2.3.13. Es gibt Schiefkörper $K \subset L$ derart, daß L über K endlich erzeugt ist als Linksmodul, nicht aber als Rechtsmodul. Die Frage nach einem solchen Beispiel war lange als **Artin's Problem** bekannt. Eine explizite Konstruktion kann man in [Coh95] finden.

Übungen

Übung 7.2.3.14. Gegeben ein Ring R liefert die durch Rechtsmultiplikation gegebene Abbildung aus 7.1.3.6 einen Ringisomorphismus $R^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_R(R)$ und die durch Linksmultiplikation gegebene Abbildung einen Ringisomorphismus $R \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{-R}(R)$. Hier ist es wichtig zu erinnern, daß in unseren Konventionen Ringe stets ein Einselement haben.

Übung 7.2.3.15. Ein Element eines Rings $r \in R$ ist genau dann eine Einheit, wenn sowohl die Rechtsmultiplikation als auch die Linksmultiplikation mit r eine Bijektion von R mit sich selbst liefert.

Übung 7.2.3.16. Man zeige: Gegeben ein Kring R und $n \in \mathbb{N}$ ist jeder surjektive Homomorphismus $R^n \twoheadrightarrow R^n$ bereits ein Isomorphismus. Hinweis: Man finde ein Halbinverses und rechne mit Matrizen. Weiter zeige man: Ist $S \subset R$ ein Teilring und der R-Modul M sowohl über R als auch über S frei vom Rang n, so gilt $S = R$.

Ergänzende Übung 7.2.3.17. Für jeden Ring R und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ liefert die Zuordnung $M \mapsto M^n$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$R\text{-Mod} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Mat}(n; R)\text{-Mod}$$

In anderen Worten ist jeder Modul über $S := \mathrm{Mat}(n; R)$ isomorph zu einem Modul der Gestalt M^n mit $M \in R\text{-Mod}$ und unsere Zuordnung induziert Bijektionen $\mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(M^n, N^n)$. Diese Aussagen sind im übrigen Spezialfälle unserer allgemeinen Überlegungen 7.2.8.1 zur Tensor-Hom-Adjunktion und erste Beispiele der sogenannten **Morita-Äquivalenz**.

Übung 7.2.3.18. Man zeige, daß jeder endlich erzeugte freie Modul über eine endliche Basis besitzt.

7.2.4 Moduln über Hauptidealringen

Satz 7.2.4.1 (Elementarteilersatz). *Sei f ein Homomorphismus zwischen zwei endlich erzeugten freien Moduln über einem Hauptidealring. So gilt:*

1. *Es gibt angeordnete Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ unserer Moduln derart, daß die darstellende Matrix $D := {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$ unseres Homomorphismus eine Diagomalmatrix ist, deren vordere Diagonaleinträge jeweils die hinteren teilen, in Formeln $(i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0)$ und $d_{11}|d_{22}|\ldots|d_{rr}$ für r das Minimum der Kardinalitäten beider Basen;*

2. *Die Diagonaleinträge d_{ii} einer derartigen darstellenden Matrix durch die Abbildung f wohlbestimmt bis auf Multiplikation mit Einheiten.*

Beispiele 7.2.4.2. Die analoge Aussage im Fall eines Körpers kennen wir bereits aus 3.2.6.11 als Smith-Normalform, den Fall des Hauptidealrings $\mathbb{Z}$ aus 4.4.4.13, den Fall eines Polynomrings aus 4.4.4.30 als Smith-Zerlegung.

7.2.4.3. Nach unserer Definition 6.2.4.9 ist ein Hauptidealring ein kommutativer Integritätsbereich, der kein Körper ist und in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist. Wir können unseren Satz auch verstehen als die Beschreibung eines Systems von Repräsentanten für die Bahnen der offensichtlichen Wirkung der Gruppe $\mathrm{GL}(n; R) \times \mathrm{GL}(m; R)$ auf der Menge $\mathrm{Mat}(n \times m; R)$ im Fall eines Hauptidealrings R.

Beweis. Wir dürfen $E = R^m$ und $F = R^n$ annehmen. Die Abbildung f wird beschrieben durch eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times m; R)$ und es gilt, invertierbare Matrizen $P \in \mathrm{Mat}(n \times n; R)$ und $Q \in \mathrm{Mat}(m \times m; R)$ zu finden derart, daß $PAQ = D$ diagonal ist von der gewünschten Form. Für eine Matrix A bezeichne $\langle A \rangle \subset R$ das von den Einträgen von A erzeugte Ideal. Sicher gilt $\langle XA \rangle \subset \langle A \rangle$ für

jede Matrix X, also $\langle XA\rangle = \langle A\rangle$ für X invertierbar. Ebenso gilt $\langle AY\rangle \subset \langle A\rangle$ für jede Matrix Y und $\langle AY\rangle = \langle A\rangle$ für Y invertierbar. Wir geben im folgenden ein Verfahren an, das im Fall $\langle a_{11}\rangle \neq \langle A\rangle$ invertierbare Matrizen X und Y liefert derart, daß der obere linke Eintrag von XAY ein echt größeres Ideal erzeugt als a_{11}. Da unser Kring noethersch ist, oder auch mit einer elementaren Argumentation wie beim Beweis von 6.2.4.11 finden wir dann sogar $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ invertierbar derart, daß der obere linke Eintrag von $\tilde{X}A\tilde{Y}$ das Ideal $\langle \tilde{X}A\tilde{Y}\rangle = \langle A\rangle$ erzeugt, als da heißt, daß er alle Einträge von $\tilde{X}A\tilde{Y}$ teilt. Da nun Zeilen- und Spaltenoperationen auch durch Multiplikation mit invertierbaren Matrizen von links beziehungsweise rechts gegeben werden, finden wir dann sogar invertierbare Matrizen $\hat{X}, \hat{Y}$ derart, daß $\hat{X}A\hat{Y}$ außer einem Eintrag $a_{11} = d_{11}$ in der oberen linken Ecke nur Nullen in der ersten Zeile und erste Spalte stehen hat und daß zusätzlich gilt $\langle d_{11}\rangle = \langle A\rangle$. Dann können wir aber den Beweis beenden mit einer offensichtlichen Induktion. Es bleibt, das versprochene Verfahren anzugeben. Wir unterscheiden drei Fälle.

(i) Falls a_{11} nicht alle Elemente der ersten Zeile teilt, sagen wir a_{11} teilt nicht a_{12}, so betrachten wir das Ideal $\langle a_{11}, a_{12}\rangle$ und wählen dafür einen Erzeuger d. Wir können nun schreiben $d = xa_{11} + ya_{12}$ sowie zusätzlich $a_{11} = d\lambda, a_{12} = d\mu$ und folgern $1 = x\lambda + y\mu$. Jetzt beachten wir

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & * \\ * & * & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{*} & * \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} x & -\mu & 0 \\ y & \lambda & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} d & * & * \\ * & * & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{*} & * \end{array}\right)$$

mit I der Einheitsmatrix und haben schon gewonnen.

(ii) Falls a_{11} nicht alle Elemente der ersten Spalte teilt, gehen wir analog vor.

(iii) Teilt a_{11} alle Elemente der ersten Zeile und der ersten Spalte, so finden wir schon mal invertierbare X, Y derart, daß XAY außer einem Eintrag a_{11} in der oberen linken Ecke nur Nullen in der ersten Zeile und der ersten Spalte stehen hat. Unter der Annahme $\langle a_{11}\rangle \neq \langle A\rangle$ kann aber a_{11} nicht alle Einträge von A teilen. Addieren wir nun eine geeignete Zeile zur ersten Zeile, so landen wir im Fall (i) und haben wieder gewonnen.

Damit haben wir das versprochene Verfahren angegeben und Teil 1 ist gezeigt.

2. Wir zeigen nun die Eindeutigkeit der Diagonaleinträge bis auf Einheiten. Dazu betrachten wir für $i \geq 1$ das von allen Determinanten von $(i \times i)$-Untermatrizen von A erzeugte Ideal $J_i(A)$. Ist X eine weitere Matrix, so gilt $J_i(XA) \subset J_i(A)$, denn die Zeilen von XA sind Linearkombinationen von Zeilen von A. Insbesondere gilt also $J_i(XA) = J_i(A)$ für invertierbares X und ebenso $J_i(AY) = J_i(A)$ für invertierbares Y. Es folgt sofort, daß $J_i(A)$ das vom Produkt $d_{11}d_{22}\cdots d_{ii}$

erzeugte Ideal ist, in Formeln $J_i(A) = \langle d_{11}d_{22}\cdots d_{ii}\rangle$. Daraus folgt dann die Eindeutigkeit der d_{ii} bis auf Einheiten. $\square$

7.2.4.4. Wir geben nun zwei Formen der Klassifikation endlich erzeugter Moduln über Hauptidealringen an. Wenden wir diese Klassifikationen an auf den Hauptidealring $\mathbb{Z}$, so erhalten wir die Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen 4.4.4.4 und 4.4.4.5 vom Beginn der Vorlesung. Wenden wir unsere Sätze an auf einen Polynomring über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, so ergibt sich die Jordan'sche Normalform 4.3.4.5, wie als Korollar 7.2.4.11 ausgeführt wird.

Satz 7.2.4.5 (**Klassifikation durch Idealketten**). *Ist M ein endlich erzeugter Modul über einem Hauptidealring R, so gibt es genau eine aufsteigende Kette $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_s \subset R$ von Idealen von R mit $\mathfrak{a}_s \neq R$ und*

$$M \cong R/\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times R/\mathfrak{a}_s$$

Der Nullmodul wird abgedeckt durch den Fall $s = 0$.

7.2.4.6. Ist R ein faktorieller Ring, so nennen wir die Potenzen irreduzibler Elemente von R auch die **Primpotenzen** von R und die von Eins verschiedenen Potenzen die **echten Primpotenzen** von R. Jede echte Primpotenz q hat also die Form $q = p^e$ mit p irreduzibel und $e \geq 1$.

Ergänzung 7.2.4.7. Die Existenz ist mir auch klar für Kringe, in denen jedes Ideal ein Hauptideal ist. Wie steht es in dieser Allgemeinheit mit der Eindeutigkeit?

Satz 7.2.4.8 (**Klassifikation durch Multimengen von Primpotenzen**). *Gegeen ein endlich erzeugter Modul M über einem Hauptidealring R gibt es $r \in \mathbb{N}$ und echte Primpotenzen $q_1, \ldots, q_t \in R$ derart, daß gilt*

$$M \cong R^r \times R/q_1R \times \ldots \times R/q_tR$$

Hier ist r wohlbestimmt und die q_i sind wohlbestimmt bis auf Einheiten und Reihenfolge. Der Nullmodul wird abgedeckt durch den Fall $r = t = 0$.

7.2.4.9. Der Beweis beider Sätze ist mutatis mutandis derselbe wie der Beweis ihrer als 4.4.4.4 und 4.4.4.5 diskutierten Spezialisierungen für den Hauptidealring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

7.2.4.10. Ein Modul heißt **torsionsfrei** genau dann, wenn die Multiplikation mit jedem von Null verchiedenen Ringelement eine injektive Abbildung von unserem Modul in sich selber liefert. Nach dem Satz ist insbesondere jeder endlich erzeugte torsionsfreie Modul über einem Hauptidealring frei.

Beweis von 7.2.4.5. Gegeben ein Erzeugendensystem $g_1, \ldots, g_n$ von M erklären wir durch die Vorschrift $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n$ einen surjektiven Modulhomomorphismus

$$R^n \twoheadrightarrow M$$

Dessen Kern ist nach 7.1.4.9 ein endlich erzeugter R-Modul K, für den wir wieder einen surjektiven Homomorphismus $R^m \twoheadrightarrow K$ finden können. Der Formalismus noetherscher Ringe kann an dieser Stelle noch vermieden werden, man kann ebenso wie in 4.4.4.1 sogar stärker und unabhängig zeigen, daß man für jeden Untermodul eines endlich erzeugten Moduls über einem Hauptidealring höchstens soviele Erzeuger benötigt wie für den großen Modul. Mit der Komposition $R^m \twoheadrightarrow K \hookrightarrow R^n$ als erster Abbildung entsteht so eine im Sinne von 4.4.6.5 exakte Sequenz von R-Moduln

$$R^m \to R^n \to M \to 0$$

Nach 7.2.3.5 sind die Homomorphismen $R^m \to R^n$ genau die Multiplikationen von links mit $(n \times m)$-Matrizen mit Einträgen in R. Weiter überlegt man sich, daß auch in dieser Situation die Verknüpfung von Homomorphismen der Multiplikation von Matrizen entspricht. Bezeichnet nun A die Matrix unserer Abbildung $R^m \to R^n$ und wählen wir P und Q wie im Elementarteilersatz oder vielmehr dem Beginn seines Beweises, so ergibt sich ein kommutatives Diagramm von R-Moduln

$$\begin{tikzcd} R^m \arrow[r, "A\circ"] & R^n \arrow[d, "P\circ", "\wr"'] \\ R^m \arrow[u, "Q\circ", "\wr"'] \arrow[r, "D\circ"] & R^n \end{tikzcd}$$

für eine nicht notwendigerweise quadratische Diagonalmatrix D mit Einträgen $d_1|d_2|\ldots|d_r$ für $r = \min(m,n)$. Bilden wir nun andererseits das Produkt der exakten Sequenzen $R \xrightarrow{d_i} R \to R/\langle d_i \rangle \to 0$ für $1 \leq i \leq r$ mit $m - r$ Kopien der exakten Sequenzen $R \to 0 \to 0 \to 0$ im Fall $m > n$ beziehungsweise $n - r$ Kopien der exakten Sequenzen $0 \to R \xrightarrow{\mathrm{id}} R \to 0$ im Fall $n > m$, so erhalten wir mit 4.4.6.13 die untere Horizontale in einem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd} R^m \arrow[r, "A\circ"] & R^n \arrow[rr] \arrow[d, "P\circ", "\wr"'] & & M \arrow[rr] & & 0 \arrow[d] \\ R^m \arrow[u, "Q\circ", "\wr"'] \arrow[r, "D\circ"] & R^n \arrow[r] & R/\langle d_1 \rangle \times \ldots \times R/\langle d_r \rangle \times R^{n-r} \arrow[rr] & & 0 \end{tikzcd}$$

Damit liefert 4.4.2.4 oder vielmehr eine offensichtliche Variante dieses Resultats für Moduln einen Isomorphismus $M \xrightarrow{\sim} R/\langle d_1 \rangle \times \ldots \times R/\langle d_r \rangle \times R^{n-r}$. Lassen wir von unserer Folge $d_1|d_2|\ldots|d_r$ alle Einheiten vorne weg und ergänzen am

Ende $(n-r)$ Nullen und drehen die Nummerierung um, so erhalten wir eine Folge $a_s|\ldots|a_1$ derart, daß die von ihren Gliedern erzeugten Ideale eine Kette bilden wie im Satz 7.2.4.5 gefordert, und die Existenz dort ist gezeigt. Um die Eindeutigkeit zu zeigen bemerken wir, daß für jeden endlich erzeugten R-Modul M und jedes irreduzible Element p und alle $n \geq 1$ der Quotient $p^{n-1}M/p^nM$ nach 7.1.3.15 ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Restklassenring $R/\langle p\rangle$ ist, der hinwiederum nach 6.2.4.22 ein Körper sein muß. Wir notieren seine Dimension

$$D_p^n(M) := \dim_{R/\langle p\rangle}(p^{n-1}M/p^nM)$$

Man folgert unmittelbar $D_p^n(M \times N) = D_p^n(M) + D_p^n(N)$ für je zwei endlich erzeugte R-Moduln M und N. Für zyklische R-Moduln $M \cong R/aR$ behaupten wir nun

$$D_p^n(R/aR) \quad = \quad \begin{cases} 1 & p^n \text{ teilt } a; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Tat ist das klar für $a = p^m$, für a teilerfremd zu p ist es eh klar, und mit dem chinesischen Restsatz 6.2.3.4 folgt es im allgemeinen. Für eine Zerlegung $M \cong R/\langle d_1\rangle \times \ldots \times R/\langle d_s\rangle$ wie in 7.2.4.5 finden wir also

$$D_p^n(M) = |\{i \mid p^n \text{ teilt } d_i\}|$$

Die Zahl der Nullen unter unseren d_i wird damit für jedes p gegeben durch die Formel $|\{i \mid d_i = 0\}| = \lim_{n\to\infty} D_p^n(M)$, und welche Potenz von jedem irreduziblen Element p in jedem von Null verschiedenen d_i stecken muß, kann man an den Zahlen $D_p^n(M)$ auch ablesen. Folglich hängen die Ideale $\langle d_i\rangle$ nur von M und nicht von der gewählten Zerlegung ab. □

Beweis von 7.2.4.8. Aus 7.2.4.5 folgt sofort die Existenzaussage in Satz 7.2.4.8, indem wir im Fall $\mathfrak{a}_i \neq 0$ einen Erzeuger d_i von $\mathfrak{a}_i$ als Produkt von paarweise teilerfremden Primpotenzen $d_i = q_1 \ldots q_k$ schreiben und mit dem chinesischen Restsatz zerlegen

$$R/\mathfrak{a}_i \cong R/q_1R \times \ldots \times R/q_kR$$

Für die Eindeutigkeit argumentieren wir wie im vorhergehenden Beweis: Für $M \cong R^r \times R/q_1R \times \ldots \times R/q_tR$ wie in 7.2.4.8 finden wir diesmal

$$D_p^n(M) = r + |\{i \mid p^n \text{ teilt } q_i\}|$$

Wenden wir diese Erkenntnis an auf alle irreduziblen Elemente p, so folgt die im Satz behauptete Eindeutigkeit ohne weitere Schwierigkeiten: Die Zahl der Primpotenzen q_i, die bis auf eine Einheit p^n sind, muß nämlich bei jeder Zerlegung gerade $D_p^n(M) - D_p^{n+1}(M)$ sein, und den Rang r des freien Anteils können wir als die auch von allen Wahlen unabhängige Zahl $r = \lim_{n\to\infty} D_p^n(M)$ beschreiben, für jedes irreduzible Element p. □

Korollar 7.2.4.11 (Jordan'sche Normalform). *Seien k ein algebraisch abgeschlossenen Körper, V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum und $A : V \to V$ eine lineare Abbildung. So gibt es eine Basis von V derart, daß die Matrix von A bezüglich dieser Basis blockdiagonal ist, wobei die Blöcke konstant sind auf der Diagonale, konstant Eins auf der ersten oberen Nebendiagonale, und Null an allen anderen Stellen.*

7.2.4.12. Das ist genau unser Satz 4.3.4.5 aus der linearen Algebra, der hier also ein weiteres Mal bewiesen wird.

Beweis. Mithilfe von 7.1.2.12 fassen wir V als Modul über dem Polynomring $k[T]$ auf und mit 7.2.4.8 finden wir einen Isomorphismus von $k[T]$-Moduln

$$V \cong k[T]/\langle (T-\lambda_1)^{n_1}\rangle \times \ldots \times k[T]/\langle (T-\lambda_t)^{n_t}\rangle$$

Wählen wir auf der rechten Seite im Summanden $k[T]/\langle (T-\lambda)^n\rangle$ als angeordnete Basis die Nebenklassen von $(T-\lambda)^{n-1}, \ldots, (T-\lambda)$ und 1, so erhält man die Matrix der Multiplikation mit T, indem man zunächst die Matrix der Multiplikation mit $(T-\lambda)$ berechnet und dann die Diagonalmatrix λI addiert. So erkennt man dann leicht, daß die Matrix der Multiplikation mit T die gewünschte Form hat. □

7.2.4.13. Auf ähnliche Weise erhält man auch Normalformen für die Matrizen von Endomorphismen über nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen Körpern, wie in den folgenden Übungen ausgeführt wird.

Übungen

Übung 7.2.4.14. Jedes normierte Polynom $P \in k[T]$ ist bis auf Vorzeichen das charakteristische Polynom der k-linearen Abbildung

$$(T\cdot) : k[T]/\langle P\rangle \to k[T]/\langle P\rangle$$

Hat unser Polynom die Gestalt $P = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1T + a_0$, so bilden die Nebenklassen von $1, T, \ldots, T^{n-1}$ eine angeordnete Basis des Quotienten, und in Bezug auf diese Basis hat die durch Multiplikation mit T gegebene k-lineare Abbildung die in nebenstehender Abbildung angegebene Matrix. Hinweis: Eine Methode ist die explizite Berechnung mithilfe der Determinante. Alternativ mag man k algebraisch abgeschlossen annehmen und sich mithilfe des chinesischen Restsatzes auf den Fall zurückziehen, daß P eine Potenz eines linearen Polynoms ist.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Illustration zu 7.2.4.14

Übung 7.2.4.15 (**Charakteristisches Polynom eines $k[T]$-Moduls**). Sei ein Endomorphismus $A : V \to V$ eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem Körper k gegeben. Man zeige: Genau dann hat A das charakteristische Polynom P, wenn es eine Faktorisierung $P = Q_1 \dots Q_r$ gibt derart, daß der (V, A) entsprechende $k[T]$-Modul isomorph ist zu

$$k[T]/\langle Q_1 \rangle \times \dots \times k[T]/\langle Q_r \rangle$$

Man nutze diese Erkenntnis, um einen alternativen Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton 3.6.6.20 zu geben. Hinweis: Man verwende 7.2.4.14 und 7.2.4.5 oder 7.2.4.8. In anderen Worten kann das Aufmultiplizieren einer endlichen Multimenge von normierten Polynomen demnach geschrieben werden als die Verknüpfung

$$\begin{array}{ccc}
{}_{\mu}\{Q_1, \dots, Q_r\} & \in & \left\{ \begin{array}{c} \text{endliche Multimengen} \\ \text{von Polynomen aus } k[T]\backslash 0 \end{array} \right\} \\
\downarrow & & \downarrow \\
k[T]/\langle Q_1 \rangle \times \dots \times k[T]/\langle Q_r \rangle & \in & \left\{ \begin{array}{c} \text{endlichdimensionale} \\ k[T]\text{-Moduln} \end{array} \right\} \\
 & & \downarrow \\
(V, A) & \in & \left\{ \begin{array}{c} \text{endlichdimensionale} \\ k\text{-Vektorräume } V \\ \text{mit Endomorphismus} \end{array} \right\} \\
\downarrow & & \downarrow \\
(-1)^{\dim V} \chi_A & \in & k[T]
\end{array}$$

mit unserer Entsprechung $M \mapsto (M, (T\cdot))$ aus 7.1.2.12 als mittlerem Pfeil.

Ergänzende Übung 7.2.4.16. Sei $A : V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums über einem Körper k. Man zeige: Genau dann liefert (V, A) einen $k[T]$-Modul, der isomorph ist zu $k[T]/\langle P \rangle$ für ein Polynom $P \in k[T]$, wenn es einen Vektor $v \in V$ gibt derart, daß die $A^i v$ den Vektorraum V erzeugen. Ein derartiger Vektor heißt auch ein **zyklischer Vektor**.

Ergänzende Übung 7.2.4.17. Sei $A : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem Körper k. Man zeige: Kommen im charakteristischen Polynom χ_A von A keine k-irreduziblen Faktoren mehrfach vor, so liefert (V, A) einen $k[T]$-Modul, der isomorph ist zu $k[T]/\langle \chi_A \rangle$.

Übung 7.2.4.18 (**Mit dem Elementarteilersatz zur Jordan'schen Normalform**). Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; k)$ eine quadratische Matrix mit Koeffizienten in einem Ring. So liefert die offensichtliche Einbettung $k^n \hookrightarrow k[T]^n$ gefolgt von der Projektion auf den Kokern einen Isomorphismus von k-Rechtsmoduln

$$k^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{cok}\left((A - T\mathrm{I}) : k[T]^n \to k[T]^n\right)$$

und der durch Multiplikation von rechts mit T gegebene k-lineare Endomorphismus des Kokerns entspricht unter diesem Isomorphismus dem Morphismus $(A\cdot) : k^n \to k^n$ links. Ist speziell k ein Körper, so liefern die Elementarteiler der Matrix von Polynomen $(A - T\mathrm{I})$ eine Beschreibung des $k[T]$-Moduls k^n, der durch Einsetzen von A für T entsteht. Die Bestimmung der Elementarteiler ist algorithmisch gut machbar, zum Erreichen der Jordan'schen Normalform oder verwandter Normalformen wäre jedoch zusätzlich die Zerlegung der Elementarteiler in irreduzible Faktoren zu leisten, die im allgemeinen algorithmisch schwierig ist.

Übung 7.2.4.19. Gegeben $F \supset U$ ein endlich erzeugter freier Modul über einem Hauptidealring R mit einem Untermodul gibt es stets eine Basis $f_1, \ldots, f_n$ von F und $0 \le r \le n$ und $d_1|d_2|\ldots|d_r$ in R derart, daß die $d_i f_i$ eine Basis von U bilden. In Worten gibt es also insbesondere eine Basis von F derart, daß geeignete Vielfache der Basisvektoren unseren Untermodul erzeugen. Ist F nicht endlich erzeugt, so ist das nicht mehr richtig. Zwar ist jeder Untermodul von F frei nach 17.5.5.11, aber wenn wir eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen $U \hookrightarrow F \twoheadrightarrow \mathbb{Q}$ betrachten mit F und dann auch U frei, so ist klar, daß F keine derartige Basis haben kann.

7.2.5 Tensorprodukte über Kringen

7.2.5.1. Ganz genauso, wie wir es bei Vektorräumen alias Moduln über Körpern in 4.6.1.2 im zweiten Beweis gesehen hatten, erklärt man auch für Moduln $M_1, \ldots, M_r$ über einem Kring K multilineare Abbildungen und universelle multilineare Abbildungen und zeigt, daß sie im wesentlichen eindeutig sind und existieren, und verwendet dafür die Notation

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times \ldots \times M_r & \to & M_1 \otimes \ldots \otimes M_r \\ (m_1, \ldots, m_r) & \mapsto & m_1 \otimes \ldots \otimes m_r \end{array}$$

beziehungsweise im Fall $r = 0$ üblicherweise $\mathrm{ens} \to K$, $* \mapsto 1$. Wenn man den Grundring präzisieren will, schreibt man $\otimes_K$. Wie in 4.6.1.19 konstruiert man auch einen ausgezeichneten Isomorphismus von K-Moduln

$$\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, L)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(M \otimes N, L)$$

In der Tat sind auch hier beide Seiten sind in offensichtlicher Weise in Bijektion zur Menge $\mathrm{Hom}^{(2)}(M \times N, L)$ aller K-bilinearen Abbildungen $M \times N \to L$.

Beispiel 7.2.5.2. Es gilt $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$, denn wir haben für jeden Tensor $a \otimes q = a \otimes 5(q/5) = 5a \otimes (q/5) = 0 \otimes (q/5) = 0$.

7.2.5.3. Um präzise zu formulieren, was man salopp die „Asoziativität, Kommutativität und Unitarität des Tensorprodukts über einem Kring" nennen man, erinnere

ich an die Multiverknüpfung multilinearer Abbildungen, wie wir sie in 4.6.2 im Fall von Körpern formuliert hatten. Die präzise Aussage ist dann, daß jede Multiverknüpfung universeller multilinearer Abbildungen auch selbst wieder universell ist. Das hinwiederum folgt leicht, wenn man nachweist, daß das entsprechende Vorschalten stets eine Bijektion

$$\begin{array}{c} \mathrm{Hom}_K^{(1+s)}((M_1 \otimes \ldots \otimes M_r) \times N_1 \times \ldots \times N_s, L) \\ \downarrow \wr \\ \mathrm{Hom}_K^{(r+s)}(M_1 \times \ldots \times M_r \times N_1 \times \ldots \times N_s, L) \end{array}$$

induziert. Das aber sehen wir unschwer, indem wir beide Seiten ähnlich wie zuvor mit $\mathrm{Hom}_K^{(r)}(M_1 \times \ldots \times M_r, \mathrm{Hom}_K^{(s)}(N_1 \times \ldots \times N_s, L))$ identifizieren. Zum Beispiel entsteht durch Multiverknüpfung der universellen bilinearen Abbildung $M \times N \to M \otimes N$ mit der universellen bilinearen Abbildung $(M \otimes N) \times L \to (M \otimes N) \otimes L$ die trilineare Abbildung $M \times N \times L \to (M \otimes N) \otimes L$ mit $(m, n, l) \mapsto (m \otimes n) \otimes l$, die nach unseren Erkenntnissen auch wieder universell sein muß, so daß wir einen eindeutig bestimmten Isomorphismus

$$M \otimes N \otimes L \xrightarrow{\sim} (M \otimes N) \otimes L$$

erhalten mit der Eigenschaft $m \otimes n \otimes l \mapsto (m \otimes n) \otimes l$. Oder als zweites Beispiel entsteht durch Multiverknüpfung der universellen bilinearen Abbildung $M \times K \to M \otimes K$ mit der universellen nulllinearen Abbildung $\mathrm{ens} \to K$ gegeben durch $* \mapsto 1$ die lineare Abbildung $M \to M \otimes K$ mit $m \mapsto m \otimes 1$. Sie ist folglich auch universell alias ein Isomorphismus

$$M \xrightarrow{\sim} M \otimes K$$

In derselben Weise folgt bei einem etwas sorgfältigeren Ausformulieren des Konzepts einer Multiverknüpfung wie in 4.6.2.3 oder auch direkt, daß es genau einen Morphismus $M \otimes N \to N \otimes M$ gibt mit $m \otimes n \mapsto n \otimes m$ für alle $m \in M, n \in N$ und daß wir so einen Isomorphismus

$$M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M$$

erhalten. Er heißt der **Vertauschungsisomorphismus**.

7.2.5.4 (**Funktorialität des Tensorprodukts**). Sei K ein Kring. Aufgrund der universellen Eigenschaft definieren je zwei K-lineare Abbildungen $f : M \to M'$ und $g : N \to N'$ eine K-lineare $f \otimes g : M \otimes_K N \to M' \otimes_K N'$, $m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n)$, und wir erhalten so einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mod}_K \times \mathrm{Mod}_K & \to & \mathrm{Mod}_K \\ (M \quad , \quad N) & \mapsto & M \otimes_K N \end{array}$$

Lemma 7.2.5.5 (**Tensorprodukte vertauschen mit Summen**). *Gegeben ein Kring K liefert die offensichtliche Abbildung für jeden K-Modul M und eine beliebige Familie von K-Moduln (N_i) einen Isomorphismus*

$$M \otimes_K \left(\bigoplus N_i\right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus (M \otimes_K N_i)$$

Beweis. In der Tat haben wir sowohl für die linke als auch für die rechte Seite S offensichtliche bilineare Abbildungen $\mathrm{can}_i : M \times N_i \to S$ und diese sind universell: Ist irgendeine abelsche Gruppe A gegeben und eine Familie von bilinearen Abbildungen $b_i : M \times N_i \to A$, so gibt es jeweils genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{b} : S \to A$ mit $b_i = \tilde{b} \circ \mathrm{can}_i$. □

Beispiel 7.2.5.6. Wir haben $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}^7 \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^7$.

Definition 7.2.5.7. Eine Sequenz $A' \to A \to A''$ von abelschen Gruppen heißt **rechtsexakt**, wenn sie exakt ist bei A und wenn zusätzlich $A \to A''$ eine Surjektion ist. Wir schreiben rechtsexakte Sequenzen meist $A' \to A \twoheadrightarrow A''$.

Lemma 7.2.5.8 (**Rechtsexaktheit des Tensorprodukts**). *Ist K ein Kring, M ein K-Modul und $N' \to N \twoheadrightarrow N''$ eine rechtsexakte Sequenz von K-Moduln, so entsteht durch Darantensorieren von M eine rechtsexakte Sequenz von K-Moduln $M \otimes_K N' \to M \otimes_K N \twoheadrightarrow M \otimes_K N''$.*

Beweis. Daß hier die Surjektivität erhalten bleibt und daß die Verknüpfung auch nach dem Tensorieren verschwindet, ist offensichtlich. Wir kürzen für den weiteren Beweis $\otimes_K = \otimes$ ab und haben also eine Surjektion

$$\mathrm{cok}(M \otimes N' \to M \otimes N) \twoheadrightarrow M \otimes N''$$

Wir müssen zeigen, daß sie eine Injektion ist. Nun gibt es aber offensichtlich eine wohldefinierte K-bilineare Abbildung $M \times N'' \to \mathrm{cok}$ mit $(m, \bar{n}) \mapsto \overline{m \otimes n}$ für alle $n \in N$. Sie induziert folglich eine Abbildung $M \otimes N'' \to \mathrm{cok}$. Man sieht, daß wir so eine inverse Abbildung zu unserer Surjektion $\mathrm{cok} \twoheadrightarrow M \otimes N''$ erhalten. □

Zweiter Beweis. Aufgrund der Tensor-Hom-Adjunktion 7.2.6.18 ist $M \otimes_K$ linksadjungiert zu einem Funktor $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Mod}_K$. Mit 7.1.3.19 folgt die Rechtsexaktheit. □

Beispiel 7.2.5.9. Wir erhalten $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, indem wir die Sequenz $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit der Multiplikation $(2\cdot)$ als erster Abbildung tensorieren mit $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und die Rechtsexaktheit des Tensorprodukts ausnutzen.

Beispiel 7.2.5.10. Das Tensorprodukt ist im allgemeinen nicht linksexakt: Wendet man auf die Multiplikation $(2\cdot) : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ den Funktor $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ an, so erhält man die Nullabbildung $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

7.2.5.11. Tensorprodukte mit freien Moduln sind sogar exakt, machen also kurze exakte Sequenzen zu kurzen exakten Sequenzen. Das folgt leicht aus dem Vertauschen mir direkten Summen 7.2.5.5 und den Erkenntnissen zum Tensorieren mit dem Grundring 7.2.5.3.

7.2.5.12. Ein Modul über einem Kring heißt **flach**, wenn das Tensorieren mit besagtem Modul über besagtem Kring ein exakter Funktor ist, und **treuflach**, wenn darüberhinaus das Darantensorieren von besagtem Modul keinen von Null verschiedenen Modul zu Null macht. Jeder freie Modul ist flach und jeder von Null verschiedene freie Modul ist treuflach.

Ergänzung 7.2.5.13. Diese Definition ist ungewöhnlich, weil „alle Moduln“ gar keine Menge zu bilden brauchen. Da jedoch das Tensorprodukt mit filtierenden Kolimites vertauscht, kann man gleichbedeutend fordern, daß für jeden Untermodul eines endlich erzeugten Moduls die Einbettung unter dem Darantensorieren eine Injektion bleibt. Für diese Bedingung reicht es dann offensichtlich aus, sie auf einer Menge von Paaren aus Modul und Untermodul zu prüfen.

7.2.5.14 (**Tensorprodukt und Restklassenbildung**). Ist K ein Kring, M ein K-Modul, $\mathfrak{m} \subset K$ ein Ideal alias ein Untermodul des K-Moduls K, und betrachten wir in M den Untermodul $\mathfrak{m}M := \{\sum a_i m_i \mid a_i \in \mathfrak{m}, m_i \in M\}$, so induziert die Multiplikation einen Isomorphismus

$$(K/\mathfrak{m}) \otimes_K M \xrightarrow{\sim} M/\mathfrak{m}M$$

In der Tat folgt das sofort, wenn wir auf die exakte Sequenz $\mathfrak{m} \hookrightarrow K \twoheadrightarrow K/\mathfrak{m}$ den Funktor $\otimes_K M$ anwenden.

Definition 7.2.5.15. Eine abelsche Gruppe heißt **torsionsfrei**, wenn die Multiplikation mit jeder von Null verschiedenen ganzen Zahl auf unserer Gruppe eine Injektion induziert. Allgemeiner heißt ein Modul über einem Ring **torsionsfrei**, wenn die Multiplikation mit jedem von Null verschiedenen Ringelement auf unserem Modul eine Injektion induziert.

Lemma 7.2.5.16. *Aus einer Injektion $N' \hookrightarrow N$ von abelschen Gruppen entsteht durch Darantensorieren einer torsionsfreien abelschen Gruppe M eine Injektion $M \otimes_{\mathbb{Z}} N' \hookrightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} N$.*

7.2.5.17. Einen flachen $\mathbb{Z}$-Modul nenne ich auch eine **flache abelsche Gruppe**. Jede torsionsfreie abelsche Gruppe ist nach Lemma 7.2.5.16 also flach. Eine abelsche Gruppe ist sogar genau dann torsionsfrei, wenn sie flach ist. Ist in der Tat eine abelsche Gruppe M nicht torsionsfrei, gibt es also $m \in M \backslash 0$ und $t \in \mathbb{Z}$ mit $t \neq 0$ aber $tm = 0$, so ist $(t\cdot) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ injektiv aber $(\mathrm{id}_M \otimes (t\cdot)) : M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \to M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ nicht injektiv und folglich ist M nicht flach.

Beweis. Ist M endlich erzeugt, so ist M frei nach 4.4.4.12 und das Lemma folgt aus 7.2.5.5. Wir führen nun den allgemeinen Fall darauf zurück. Jedes Element $t \in M \otimes_{\mathbb{Z}} N'$ ist ja Bild eines $t_1 \in M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} N'$ für eine geeignete endlich erzeugte Untergruppe $M_1 \subset M$. Geht t nach Null in $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$, so auch in $M_2 \otimes_{\mathbb{Z}} N$ für eine geeignete endlich erzeugte Untergruppe $M_2 \subset M$ mit $M_1 \subset M_2$. Nach dem bereits behandelten Fall verschwindet damit t_1 schon in $M_2 \otimes_{\mathbb{Z}} N'$ und erst recht in $M \otimes_{\mathbb{Z}} N'$ und es folgt $t = 0$. □

Vorschau 7.2.5.18. In einer Sprache, die wir später einführen werden, hört sich dieser Beweis so an: Für endlich erzeugte torsionsfreie Gruppen gilt das Lemma, da sie frei sind. Eine beliebige torsionsfreie Gruppe ist der filtrierende Kolimes ihrer endlich erzeugten Untergruppen, das Tensorprodukt kommutiert nach 17.7.1.37 mit Kolimites, und filtrierende Kolimites exakter Sequenzen sind exakt nach 17.7.1.18.

7.2.5.19. Gegeben drei Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ mit additiver Struktur nennt man einen Funktor $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ **biadditiv**, wenn er bilineare Abbildungen

$$\mathcal{A}(A, A') \times \mathcal{B}(B, B') \to \mathcal{C}(F(A, B), F(A', B'))$$

induziert. Unser Tensorfunktor ist ein typisches Beispiel.

7.2.5.20. Sind S, R Ringe, so versteht man unter einem S-R-**Bimodul** eine abelsche Gruppe M mit einer Struktur als S-Linksmodul und einer Struktur als R-Rechtsmodul derart, daß gilt

$$(sm)r = s(mr) \quad \forall s \in S, m \in M, r \in R$$

Wir notieren die Kategorie aller S-R-Bimoduln als S-Mod-R. Aufgrund seiner Funktorialität und Biadditivität ist das Tensorprodukt automatisch auch ein Funktor

$$(S\text{-Mod-}R) \times (R\text{-Mod-}T) \to (S\text{-Mod-}T)$$

für beliebige Ringe S, R, T. Die Operation von S beziehungsweise von T geschieht dabei durch $s(m \otimes n) = (sm) \otimes n$, $(m \otimes n)t = m \otimes (nt)$. Ist speziell R ein kommutativer Ring, so fallen die beiden R-Operationen auf dem Tensorprodukt, die von den Operationen von R auf den beiden Tensorfaktoren herkommen, zusammen und das Tensorprodukt von zwei R-Moduln ist in natürlicher Weise wieder ein R-Modul. Diesen Fall lernt man oft zuerst kennen, wir haben ihn auch bereits in 7.2.5.1 besprochen.

7.2.6 Allgemeine Tensorprodukte*

7.2.6.1. Wir beginnen mit dem Fall der Mengenmoduln 7.1.2.2 über einer Menge Ω. Dabei kommt es nicht darauf an, ob wir ein $r \in \Omega$ von links oder von rechts

an unseren Modul dranschreiben, aber wir machen es schon mal so, wie es dann später im Fall von Moduln über nichtkommutativen Ringen praktisch ist.

Definition 7.2.6.2. Seien Ω eine Menge und M, N Mengenmoduln über Ω und A eine abelsche Gruppe. Eine Abbildung $b : M \times N \to A$ heißt **Ω-balanciert**, wenn sie biadditiv ist und wenn gilt

$$b(mr, n) = b(m, rn) \quad \forall m \in M, n \in N, r \in \Omega$$

Für die Menge aller biadditiven Ω-balancierten Abbildungen $M \times N \to A$ verwenden wir die Notation $\mathrm{Bab}_\Omega(M \times N, A)$.

Satz 7.2.6.3. *1. Gegeben eine Menge Ω und Ω-Moduln M, N existiert ein Paar (T, τ) bestehend aus einer abelschen Gruppe T und einer biadditiven Ω-balancierten Abbildung $\tau : M \times N \to T$ derart, daß für jede weitere abelsche Gruppe A das Vorschalten von τ eine Bijektion*

$$\mathrm{Ab}(T, A) \overset{\circ\tau}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{Bab}_\Omega(M \times N, A)$$

zwischen der Menge aller Gruppenhomomorphismen $T \to A$ und der Menge aller biadditiven Ω-balancierten Abbildungen $M \times N \to A$ induziert. Wir nennen τ eine **universelle biadditive Ω-balancierte Abbildung***;*

2. Gegeben zwei universelle biadditive Ω-balancierte Abbildungen $\tau : M \times N \to T$ und $\sigma : M \times N \to S$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $c : T \to S$ mit $c \circ \tau = \sigma$ und genau ein Gruppenhomomorphismus $d : S \to T$ mit $d \circ \sigma = \tau$. Des weiteren sind diese Homomorphismen c und d zueinander inverse Isomorphismen zwischen T und S.

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit des Homomorphismus c in Teil 2 folgt sofort aus der universellen Eigenschaft von (T, τ), in der Notation von eben hätten wir genauer $c = \hat{\sigma}$, und die Existenz und Eindeutigkeit von d folgt ebenso aus der universellen Eigenschaft von (S, σ). Schließlich gilt $(d \circ c) \circ \tau = \tau = \mathrm{id}_T \circ \tau$ und damit folgt $d \circ c = \mathrm{id}_T$ wieder nach der universellen Eigenschaft von τ. Die Identität $c \circ d = \mathrm{id}_S$ zeigt man genauso. Um die Existenz universeller balancierter Abbildungen zu zeigen, gehen wir von der universellen biadditiven Abbildung $M \times N \to M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ aus, die wir ja bereits aus 7.2.5.1 kennen, und erklären $M \otimes_\Omega N$ als den Quotienten dieser abelschen Gruppe nach der von allen $mr \otimes n - m \otimes rn$ erzeugten Untergruppe. □

7.2.6.4. Unsere Paare sind nach Teil 2 „eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus“, wenn sie existieren. Insbesondere kommt es auf die genaue Konstruktion ebensowenig an wie auf die genaue Konstruktion der natürlichen oder

der reellen Zahlen. Solch eine universelle biadditive Ω-balancierte Abbildung $\tau : M \times N \to T$ verdient damit den bestimmten Artikel. Man nennt T das **Tensorprodukt von M und N über Ω** und notiert es

$$T = M \otimes_\Omega N$$

Die universelle biadditive balancierte Abbildung notieren wir $\tau : (m, n) \mapsto m \otimes n$. Aufgrund der universellen Eigenschaft erhalten wir auf diese Weise sogar einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mod}_\Omega \times \mathrm{Mod}_\Omega & \to & \mathrm{Ab} \\ (M \quad , \quad N) & \mapsto & M \otimes_\Omega N \end{array}$$

7.2.6.5 (**Tensor-Hom-Adjunktion**). Gegeben Ω-Mengenmoduln M, N und eine abelsche Gruppe A erhalten wir offensichtliche Bijektionen

$$\mathrm{Ab}(M \otimes_\Omega N, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bab}_\Omega(M \times N, A) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Omega(M, \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(N, A))$$

mit der Maßgabe, daß die Operation von Ω auf der abelschen Gruppe $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(N, A)$ die von der Operation auf N induzierte sein soll. Die durch die Verknüpfung unserer Bijektionen gegebenen Bijektionen bilden eine Adjunktion

$$(\otimes_\Omega N, \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(N, \ ))$$

von Funktoren zwischen Mod_Ω und Ab.

7.2.6.6. Als Linksadjungierter vertauscht $\otimes_\Omega N$ mit Koprodukten und ist rechtsexakt, ja vertauscht mit beliebigen Kolimites. Insbesondere ist er ein additiver Funktor nach 19.2.5.5. Man kann Beweise für diese Behauptungen in diesem Fall aber auch leicht elementar ausschreiben wie in 7.2.5.5 und 7.2.5.8.

7.2.6.7. Jede spaltende kurze exakte Sequenz von Ω-Moduln $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ induziert, da $\otimes_\Omega N$ ein additiver Funktor ist, eine spaltende kurze exakte Sequenz $M' \otimes_\Omega N \hookrightarrow M \otimes_\Omega N \twoheadrightarrow M'' \otimes_\Omega N$. Ist speziell e ein idempotenter Endomorphismus des Ω-Moduls M, so induziert die offensichtliche Abbildung $(eM) \otimes_\Omega N \to M \otimes_\Omega N$ einen Isomorphismus

$$(eM) \otimes_\Omega N \xrightarrow{\sim} e(M \otimes_\Omega N)$$

Beispiel 7.2.6.8 (**Tensorieren eines Moduls mit seinem Ring**). Ist R ein Ring und $M \in R\text{-Mod}$ ein R-Modul, so ist die Multiplikation $\mathrm{mult} : R \times M \to M$ eine universelle R-balancierte Abbildung für die Operation von R auf sich selbst durch Multiplikation von rechts. Ist in der Tat $\varphi : R \times M \to A$ irgendeine R-balancierte Abbildung, so faktorisiert sie als $\varphi = \hat{\varphi} \circ \mathrm{mult}$ mit $\hat{\varphi}(m) = \psi(1, m)$ und das ist auch offensichtlich die einzig mögliche derartige Faktorisierung. Die Abbildung $m \mapsto 1 \otimes m$ induziert also einen Isomorphismus

$$M \xrightarrow{\sim} R \otimes_R M$$

Beispiel 7.2.6.9 (**Tensorieren bei vielen Idempotenten**). Seien R eine $\mathbb{Z}$-Algebra und $J \subset R$ eine Menge von paarweise kommutierenden Idempotenten derart, daß es für jedes $r \in R$ ein $e \in J$ gibt mit $er = r$ und für je zwei $e, f \in J$ ein $g \in J$ gibt mit $e = eg$ und $f = fg$. Ist nun M ein R-Assoziativmodul und gibt es für alle $m \in M$ ein $e \in J$ mit $em = m$, so ist die Multiplikation eine universelle balancierte Abbildung $\operatorname{mult} : R \times M \to M$ in Bezug auf die Rechtsoperation von R auf sich selber und induziert mithin einen Isomorphismus

$$R \otimes_R M \xrightarrow{\sim} M$$

Ist in der Tat $\varphi : R \times M \to A$ eine balancierte Abbildung in eine abelsche Gruppe und ist $m \in M$ gegeben, so folgt für je zwei $e, f \in J$ mit $em = m$ und $fm = m$ durch Wahl eines $g \in J$ mit $eg = e$ und $fg = f$ wegen $m = em = egm = gem = gm$ und analog für f bereits

$$\varphi(e, m) = \varphi(g, m) = \varphi(f, m)$$

Diesen gemeinsamen Wert nehmen wir als $\hat{\varphi}(m)$ und erhalten so $\hat{\varphi} : M \to A$. Gegeben $r \in R$ und $m \in M$ finden wir $e \in J$ mit $er = r$ und folgern

$$\varphi(r, m) = \varphi(er, m) = \varphi(e, rm) = \hat{\varphi}(rm)$$

wegen $erm = rm$. Es gilt also $\hat{\varphi} \circ \operatorname{mult} = \varphi$. Daß es kein anderes $\hat{\varphi}$ mit dieser Eigenschaft geben kann, ist eh klar. Mithin ist die Multiplikation $R \times M \to M$ in die abelsche Gruppe M unter den getroffenen Annahmen in der Tat eine universelle balancierte Abbildung. Nach 7.2.6.7 liefert dann die Multiplikation auch für jedes idempotente Element $h \in R$ einen Isomorphismus

$$(hR) \otimes_R M \xrightarrow{\sim} hM$$

Ist R ein Ring, so ist offensichlich $J = \{1\}$ eine Menge von Idempotenten mit den fraglichen Eigenschaften in Bezug auf jeden Modul und wir erhalten das Tensorieren eines Moduls mit seinem Ring 7.2.6.8 als Spezialfall.

Übungen

Übung 7.2.6.10. Genau dann besteht eine abelsche Gruppe M nur aus Elementen endlicher Ordnung, wenn gilt $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$. Im Rahmen der kommutativen Algebra erweist sich das im Lichte der Beschreibung 7.4.3.60 der Lokalisierung eines Moduls als Tensorprodukt mit dem lokalisierten Kring als ein Spezialfall der Beschreibung des Kerns 7.4.3.9 der Abbildung eines Moduls in seine Lokalisierung.

Übung 7.2.6.11. Sei $\varphi : A \to B$ ein Kringhomomorphismus und seien B-Moduln M, N gegeben. Wird B als Ring erzeugt vom Bild $\varphi(A)$ von A mitsamt den Inversen der Elemente aus $\varphi(A) \cap B^\times$, so ist der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus

$$M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} M \otimes_B N$$

Übung 7.2.6.12. In der Kategorie der Kringe ist

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & A \otimes_C B \end{tikzcd}$$

für beliebige Kringhomomorphismen $C \to A$ und $C \to B$ und die offensichtlichen weiteren Kringhomomorphismen stets ein Pushout. Ist die linke Vertikale flach, so ist auch die rechte Vertikale in den Pushout.

Übung 7.2.6.13. Ist $N' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N''$ eine spaltende kurze exakte Sequenz von Ω-Moduln, so bleibt die Sequenz exakt unter $M \otimes_\Omega$. Insbesondere ist also das Tensorieren über einem Körper stets exakt.

Ergänzende Übung 7.2.6.14. Seien $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $e \in \mathrm{Z}(R)$ ein Element des Zentrums von R mit $\varphi(e) = 1$. So liefern für jeden R-Modul M die Einbettung $eM \hookrightarrow M$ und die Multiplikation $(e\cdot) : M \twoheadrightarrow eM$ zueinander inverse Isomorphismen $S \otimes_R eM \xrightarrow{\sim} S \otimes_R M \xrightarrow{\sim} S \otimes_R eM$.

Übung 7.2.6.15 (**Ringwechsel unter Tensorprodukten**). Gegeben Ringe A, B und $M \in \text{Mod-}A$ und $X \in A\text{-Mod-}B$ und $N \in B\text{-Mod}$ Moduln beziehungsweise Bimoduln. So liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$M \otimes_A (X \otimes_B N) \xrightarrow{\sim} (M \otimes_A X) \otimes_B N$$

Ist insbesondere $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, so induziert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} (M \otimes_A B) \otimes_B N$ alias

$$M \otimes_A \operatorname{res}_B^A N \xrightarrow{\sim} \operatorname{prod}_A^B M \otimes_B N$$

in den Notationen aus 7.2.8.5 und 7.2.8.7. Ist etwa $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und N ein $(A/\mathfrak{a})$-Modul, so liefert nach 7.2.5.14 die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} (M/M\mathfrak{a}) \otimes_{A/\mathfrak{a}} N$. Wird zusätzlich B als Ring erzeugt vom Bild $\varphi(A)$ von A mitsamt den Inversen der Elemente aus $\varphi(A) \cap B^\times$, so ist die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus $M \xrightarrow{\sim} \operatorname{prod}_A^B M$ und der offensichtliche Morphismus ist in vereinfachter Notation ein Isomorphismus

$$M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} M \otimes_B N$$

Speziell liefert für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ und $M \in \text{Mod-}A/\mathfrak{a}$ sowie $N \in A/\mathfrak{a}\text{-Mod}$ die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} M \otimes_{A/\mathfrak{a}} N$ und für je zwei $\mathbb{Q}$-Vektorräume M, N liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $M \otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathbb{Q}} N$.

Übung 7.2.6.16. Sei $S \to R$ ein Ringhomomorphismus. Ist M ein S-Modul und $(m_i)_{i \in I}$ eine Basis von M, so bilden die $1 \otimes m_i$ eine Basis des R-Moduls $R \otimes_S M$.

Übung 7.2.6.17 (**Variante zur Rechtsexaktheit des Tensorprodukts**). Gegeben $M' \to M \twoheadrightarrow M''$ und $N' \to N \twoheadrightarrow N''$ rechtsexakte Sequenzen von Rechts- beziehungsweise Linksmoduln über einem Ring R, so ist auch die Sequenz

$$(M' \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R N') \to M \otimes_R N \twoheadrightarrow M'' \otimes_R N''$$

wie durch die Notation bereits angedeutet eine rechtsexakte Sequenz.

Übung 7.2.6.18 (**Rechtsadjungierter eines Tensorprodukts**). Gegeben ein Ring und ein R-Rechtsmodul M erhalten wir aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts ein adjungiertes Paar von Funktoren $(M \otimes_R, \mathrm{Ab}(M, \ ))$ zwischen den Kategorien $R\text{-Mod}$ und Ab. In größerer Allgemeinheit wird das in 7.2.8.1 diskutiert.

Ergänzende Übung 7.2.6.19. Gegeben ein Ring R und $M \in \text{Mod-}R$ und $N \in R\text{-Mod}$ gibt es genau einen Isomorphismus von abelschen Gruppen $M \otimes_R N \xrightarrow{\sim} N \otimes_{R^{\mathrm{opp}}} M$ mit $m \otimes n \mapsto n \otimes m$.

Ergänzende Übung 7.2.6.20. Man zeige: Gegeben ein Ring A und ein Idempotentes $e \in A$ liefert die Multiplikation einen Isomorphismus $eA \otimes_A M \xrightarrow{\sim} eM$.

Ergänzende Übung 7.2.6.21. In dieser Übung meint $\otimes$ ohne unteren Index stets $\otimes_{\mathbb{Z}}$. Gegeben Ringe R und S wird das Tensorprodukt $R \otimes S$ ein Ring mit der Multiplikation $(r \otimes s)(a \otimes b) := ra \otimes sb$. Für den Ringhomomorphismus $R \to R \otimes S$ mit $r \mapsto r \otimes 1$ und einen R-Rechtsmodul M haben wir $\mathrm{prod}_R^{R \otimes S} M \xrightarrow{\sim} M \otimes S$ unter der offensichtlichen Abbildung. Speziell liefert 7.2.6.15 für jeden $(R \otimes S)$-Modul N einen Isomorphismus

$$M \otimes_R N \xrightarrow{\sim} (M \otimes S) \otimes_{R \otimes S} N$$

Ist insbesondere N flach als $(R \otimes S)$-Modul und S flach als $\mathbb{Z}$-Modul, so ist N auch flach als R-Modul.

Übung 7.2.6.22. Ein Kringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ heißt **flach**, wenn darunter B ein flacher A-Modul wird. Man zeige, daß die Verknüpfung zweier flacher Kringhomomorphismen auch wieder flach ist.

Übung 7.2.6.23. Gegeben ein noetherscher Ring R ist jedes Produkt von Kopien von R ein flacher R-Modul. Hinweis: Man zeige zunächst, daß für jeden endlich präsentierten R-Modul M die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$(\prod_I R) \otimes_R M \xrightarrow{\sim} \prod_I M$ ist. Allgemeiner reicht es, statt „R noethersch“ anzunehmen, daß jedes endlich erzeugte Ideal von R ein endlich präsentierter R-Modul ist.

Übung 7.2.6.24. Gegeben ein Ring R und ein endlich präsentierter R-Modul M und eine Menge I ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $(\prod_I R) \otimes_R M \xrightarrow{\sim} \prod_I M$.

7.2.7 Merkwürdigkeiten bei Tensorprodukten*

Ergänzendes Beispiel 7.2.7.1. Ist R ein linksnoetherscher Ring, so ist für je zwei Mengen X, Y die offensichtliche Abbildung eine Injektion

$$\mathrm{Ens}(X, R) \otimes_R \mathrm{Ens}(Y, R) \hookrightarrow \mathrm{Ens}(X \times Y, R)$$

In der Tat gehe $a_1 \otimes b_1 + \ldots + a_n \otimes b_n$ nach Null. Die Menge aller $(r_1, \ldots, r_n) \in R^n$ mit $r_1 b_1 + \ldots + r_n b_n = 0$ in $\mathrm{Ens}(Y, R)$ ist ein Untermodul von R^n. Ist R linksnoethersch, so ist dieser Untermodul endlich erzeugt, etwa von $c_1, \ldots, c_k \in R^n$. Für alle $x \in X$ gibt es also $r_1(x), \ldots, r_k(x) \in R$ derart, daß für alle i mit $1 \leq i \leq n$ gilt $a_i(x) = r_1(x)c_{1i} + \ldots + r_k(x)c_{ki}$. Es folgt

$$a_1 \otimes b_1 + \ldots + a_n \otimes b_n = \sum_{i,j} r_j c_{ji} \otimes b_i = \sum_{i,j} r_j \otimes c_{ji} b_i = 0$$

Ergänzung 7.2.7.2 (**Tensorprodukte von Funktionenräumen**). Heike Mildenberger und Martin Ziegler haben mir ein Beispiel konstruiert, das zeigt, daß die kanonische Abbildung

$$\mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R) \otimes_R \mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R) \to \mathrm{Ens}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, R)$$

nicht für jeden Ring R injektiv ist. Der Ring R ist dabei der Polynomring in abzählbar vielen Variablen $x_0, x_1, x_2, \ldots, y_0, y_1, y_2, \ldots$ modulo der quadratischen Relationen $x_i y_j = 0 \ \forall i, j$ und $x_i x_j = y_i y_j = 0$ falls $|i - j| \neq 1$. Man betrachte nun die Elemente $a : i \mapsto x_i$ und $b : j \mapsto y_j$ von $\mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R)$. Natürlich hat $a \otimes b$ in $\mathrm{Ens}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, R)$ das Bild Null. Es reicht zu zeigen, daß $a \otimes b$ nicht bereits selbst Null ist. Dazu betrachte man das Ideal $I \subset \mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R)$ aller Abbildungen mit endlichem Träger und setze $R^* := \mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R)/I$. Die Komposition

$$R \hookrightarrow \mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R) \twoheadrightarrow R^*$$

mit der Einbettung als konstante Funktionen links ist ein Ringhomomorphismus. Seien $a^*, b^* \in R^*$ die Bilder von $a, b \in \mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R)$. Man zeigt nun, daß R^* einen R-linearen Ringautomorphismus f besitzt mit der Eigenschaft $f(a^*)b^* \neq 0$. Wir

betrachten dazu die involutiven Automorphismen $f_{2n} = f_{2n+1} : R \xrightarrow{\sim} R$ des Rings R mit $f_{2n}(x_{2n}) = y_{2n+1}$ und $f_{2n}(y_{2n}) = x_{2n+1}$. Jedes Element von R wird nur von endlich vielen dieser Automorphismen überhaupt bewegt. Zusammen liefern die f_i einen Ringautomorphismus $f : \mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R) \to \mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R)$ gegeben durch $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (f_i(u_i))_{i\in\mathbb{N}}$. Dieser Automorphismus ist nicht R-linear, hält jedoch das Ideal I fest und der davon induzierte Automorphismus $f : R^* \xrightarrow{\sim} R^*$ des Quotienten ist sogar R-linear, da eben jedes Element von R nur von endlich vielen unserer Automorphismen f_i überhaupt bewegt wird und folglich jede konstante Folge nur an endlich vielen Stellen verändert wird. Damit ist $f(a^*)b^*$ das Bild der Folge $(y_2y_1, y_1y_2, y_4y_3, y_3y_4, \ldots)$ in R^*, und das ist nicht Null.

7.2.7.3. Gibt es einen Kring R und R-Moduln M, N und linear unabhängige $K \subset M$ und $L \subset N$ derart, daß die $k \otimes l$ mit $k \in K$ und $l \in L$ in $M \otimes_R N$ nicht linear unabhängig sind über R? Ich denke schon, kenne aber kein Gegenbeispiel.

7.2.8 Induktion und Koinduktion für Ringe*

7.2.8.1 (**Tensor-Hom-Adjunktion**). In diesem Abschnitt fasse ich einige Allgemeinheiten über Tensorprodukte zusammen, die oft nützlich sind. Für den Fortgang der Vorlesung werden die hier erklärten Methoden erst viel später benötigt werden. Wir setzen neben der Kenntnis allgemeiner Tensorprodukte im Umfang von 7.2.6 die Begrifflichkeit adjungierter Funktoren im Umfang von 16.4.3 voraus. Seien Ω, Θ Mengen und X ein Ω-Θ-**Modul**, als da heißt eine abelsche Gruppe mit einer Operation von Ω und einer Operation von Θ, die kommutieren. Ich notiere im folgenden die Operation von Ω durch davorschreiben und die Operation von Θ durch dahinterschreiben, so daß die Bedingung des Kommutierens ausgeschrieben werden kann zu $(\omega x)\theta = \omega(x\theta)\ \forall \omega, x, \theta$. Wir erhalten Funktoren

$$\begin{aligned} X\otimes_\Theta : \Theta\text{-Mod} &\to \Omega\text{-Mod} \\ \mathrm{Hom}_\Omega(X,\ ) : \Omega\text{-Mod} &\to \Theta\text{-Mod} \end{aligned}$$

Die Adjunktionsisomorphismen $\mathrm{Ab}(X \otimes_\Theta M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Theta(M, \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(X, N))$ aus 7.2.6.5 induzieren Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_\Omega(X \otimes_\Theta M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Theta(M, \mathrm{Hom}_\Omega(X, N))$$

Diese hinwiederum bilden eine Adjunktion zwischen unseren Funktoren.

Ergänzung 7.2.8.2. Gegeben Ringe A, B versteht man unter einem A-B-**Bimodul** X eine abelsche Gruppe mit einer Struktur als A-Modul und einer Struktur als B-Rechtsmodul derart, daß gilt $(ax)b = a(xb)\ \forall a, x, b$. Dann ist $X^* := \mathrm{Hom}_A(X, A)$ stets ein B-A-Bimodul vermittels der Rechtsoperation von $a \in A$ durch Nachschalten der Rechtsmultiplikation, $fa := (\cdot a) \circ f$ für jeden Homomorphismus f.

Wir erhalten dann natürliche Homomorphismen $X^* \otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(X, N)$. Unter der zusätzlichen Annahme, daß X als A-Modul ein Summand von A^n ist für $n < \infty$ alias endlich erzeugt und projektiv, sind das sogar Isomorphismen

$$X^* \otimes_A N \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(X, N)$$

Beispiel 7.2.8.3 (**Eine Morita-Äquivalenz**). Ist R ein Ring und $X = R^n$ für $n \geq 1$ mit der natürlichen Linksoperation von $A = \mathrm{Mat}(n; R)$ und Rechtsoperation von $B = R$, so liefert unser adjungiertes Paar eine Äquivalenz von Kategorien

$$R\text{-Mod} \quad \xrightarrow{\approx} \quad \mathrm{Mat}(n; R)\text{-Mod}$$

Beispiel 7.2.8.4 (**Eine weitere Morita-Äquivalenz**). Seien $M_1, \ldots, M_n$ Moduln über einem Ring und $r_1, \ldots, r_n$ positive natürliche Zahlen. Wir setzen

$$\begin{array}{rcl} A & := & \mathrm{End}(M_1 \oplus \ldots \oplus M_n) \\ B & := & \mathrm{End}(M_1^{\oplus r_1} \oplus \ldots \oplus M_n^{\oplus r_n}) \\ X & := & \mathrm{Hom}(M_1 \oplus \ldots \oplus M_n, M_1^{\oplus r_1} \oplus \ldots \oplus M_n^{\oplus r_n}) \end{array}$$

So liefert unser adjungiertes Paar eine Äquivalenz von Kategorien

$$A\text{-Mod} \quad \xrightarrow{\approx} \quad B\text{-Mod}$$

Statt Moduln über einem Ring hätten wir dabei auch Objekte einer beliebigen additiven Kategorie nehmen können. Das alles ist ein Spezialfall der sogenannten **Morita-Äquivalenz**.

7.2.8.5. Ist $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, so können wir speziell B vermittels φ auffassen als einen A-B-Bimodul. Dann wird der erste Funktor nach 7.2.5.3 die **Restriktion der Skalare** $\mathrm{res}_\varphi = \mathrm{res}_B^A : B\text{-Mod} \to A\text{-Mod}$ und der zweite Funktor die sogenannte **Induktion**

$$\mathrm{ind}_\varphi = \mathrm{ind}_A^B := \mathrm{Hom}_A(B, \ ) : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$$

und wir erhalten eine Adjunktion $(\mathrm{res}_B^A, \mathrm{ind}_A^B)$.

7.2.8.6 (**Diskussion der Notation**). Viele Autoren schreiben statt unserem res_B^A auch res_A^B. Ich vermute, daß dem die Vorstellung zugrundeliegt, daß Induktion aus Objekten niederer Komplexität solche höherer Komplexität macht und Restriktion umgekehrt aus Objekten höherer Komplexität solche niederer Komplexität. Das ist in den üblichen Anwendungen sicher richtig, aber in der hier vorgeschlagenen Allgemeinheit gilt es nicht mehr. Ich verfolge stattdessen die Konvention, die „Ausgangskategorie“ durch einen unteren Index anzudeuten und die „Zielkategorie“ durch einen oberen Index.

7.2.8.7. Umgekehrt können wir natürlich vermittels unseres Ringhomomorphismus B auch auffassen als einen B-A-Bimodul. Dann wird der zweite Funktor die Restriktion der Skalare und der erste Funktor die sogenannte **Erweiterung der Skalare** oder **Koinduktion**. Wir nennen ihn der Symmetrie der Begrifflichkeit halber manchmal auch die **Produktion** und notieren ihn

$$\operatorname{prod}_A^B := B \otimes_A : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$$

Damit erhalten wir eine Adjunktion $(\operatorname{prod}_A^B, \operatorname{res}_B^A)$. Für jeden A-Modul M und jeden B-Modul N liefert insbesondere das Vorschalten von $m \mapsto 1 \otimes m$ einen Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(M, N)$$

7.2.8.8. Die Adjunktionen $(\operatorname{res}, \operatorname{ind})$ und $(\operatorname{prod}, \operatorname{res})$ werden üblicherweise als **Frobenius-Reziprozitäten** bezeichnet. Gegeben des weiteren Ringhomomorphismen $A \to B \to C$ liefert die Gleichheit $\operatorname{res}_B^A \circ \operatorname{res}_C^B = \operatorname{res}_C^A$ vermittels dieser Adjunktionen nach 16.4.8.22 Isotransformationen

$$\operatorname{ind}_B^C \circ \operatorname{ind}_A^B \xRightarrow{\sim} \operatorname{ind}_A^C \qquad \text{und} \qquad \operatorname{prod}_B^C \circ \operatorname{prod}_A^B \xRightarrow{\sim} \operatorname{prod}_A^C .$$

Sie sind gemeint, wenn von der **Transitivität** der Induktion beziehungsweise Koinduktion die Rede ist.

Beispiel 7.2.8.9. Für die in 4.6.1.42 besprochene Komplexifizierung $V_{\mathbb{C}}$ eines reellen Vektorraums V induziert die dort erklärte kanonische Einbettung $V \hookrightarrow V_{\mathbb{C}}$ einen Isomorphismus von komplexen Vektorräumen $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V \xrightarrow{\sim} V_{\mathbb{C}}$.

Ergänzung 7.2.8.10 (**Hom-Hom-Adjunktion**). Gegeben Ringe A, B und ein A-B-Bimodul X liefern die offensichtlichen Identifikationen aus dem Exponentialgesetz 2.1.6.5 Identifikationen

$$\begin{array}{ccc} & \operatorname{Bil}_{A-\mathbb{Z}-B}(M \times N, X) & \\ & \wr\downarrow \qquad\qquad \downarrow\wr & \\ \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_{-B}(N, X)) & & \operatorname{Hom}_{-B}(N, \operatorname{Hom}_A(M, X)) \end{array}$$

Hier bezeichnet in der Mitte $\operatorname{Bil}_{A-\mathbb{Z}-B}(M \times N, X)$ die Menge aller $\mathbb{Z}$-bilinearen Abbildungen $\varphi\colon M \times N \to X$ mit $\varphi(am, n) = a\varphi(m, n)$ und $\varphi(m, nb) = \varphi(m, n)b$ für alle $m \in M$, $n \in N$, $a \in A$, $b \in B$. Wir können diese Identifikationen auch als die Adjunktionen eines adjungierten Paars von Funktoren

$$A\text{-Mod}^{\text{opp}} \underset{\operatorname{Hom}_{-B}(\ ,X)}{\overset{\operatorname{Hom}_A(\ ,X)}{\rightleftarrows}} \text{Mod-}B$$

auffassen. Der obere Funktor ist dabei rechtsadjungiert zum unteren Funktor.

Ergänzung 7.2.8.11 (**Tensorprodukte mit allgemeineren Objekten**). Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $X \in \mathcal{A}$ ein Objekt und B ein Ring und $B^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}(X)$ ein Homomorphismus in den Endomorphismenring von X, so erhalten wir in derselben Weise auch einen Funktor

$$\mathcal{A}(X, \ ) : \mathcal{A} \to B\text{-Mod}$$

Er besitzt im allgemeinen keinen Linksadjungierten, aber natürlich wie jeder Funktor einen partiellen Linksadjungierten, der eben auf den Objekten $M \in B\text{-Mod}$ erklärt ist, für die $N \mapsto \mathrm{Hom}_B(M, \mathcal{A}(X, N))$ ein darstellbarer Funktor ist. Wir notieren das darstellende Objekt dann wieder

$$X \otimes_B M$$

Zur Übung mag der Leser zeigen, daß für jeden endlich präsentierten B-Modul alias jeden B-Modul M, der in eine rechtsexakte Sequenz $B^n \to B^m \twoheadrightarrow M$ von B-Moduln paßt mit $n, m \in \mathbb{N}$, solch ein darstellendes Objekt $X \otimes_B M \in \mathcal{A}$ tatsächlich existiert und beschrieben werden kann als der Kokern des hoffentlich offensichtlichen Morphismus $X^n \to X^m$. Unser $X \otimes_B M$ ist im übrigen auch funktoriell in X in der hoffentlich offensichtlichen Weise.

Ergänzung 7.2.8.12 (**Hom-Funktoren in allgemeinere Objekte**). Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $X \in \mathcal{A}$ ein Objekt und B ein Ring und $B^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}(X)$ ein Homomorphismus in seinen Endomorphismenring, so hat in derselben Weise wie in 7.2.8.11 der Funktor

$$\mathcal{A}(\ , X) : \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \to \text{Mod-}B$$

zumindest einen partiellen Rechtsadjungierten. Ist dieser auf $N \in \text{Mod-}B$ definiert, so notieren wir sein Bild wieder

$$\mathrm{Hom}_{-B}(N, X)$$

und erhalten damit ein Objekt von $\mathcal{A}$. Ist hier unser N endlich präsentierbar, etwa durch $B^n \to B^m \to N$, so erhalten wir ein mögliches solches Objekt als Kern eines Morphismus $X^m \to X^n$, dessen genaue Definition dem Leser überlassen bleiben möge. Unser $\mathrm{Hom}_{-B}(N, X)$ ist sogar auch noch funktoriell in X, aber das soll an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt werden.

Übungen

Übung 7.2.8.13. Gegeben ein Kring k und k-Moduln M, N konstruiere man natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_k(M, \mathrm{Hom}_k(N, k)) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(M \otimes_k N, k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(N, \mathrm{Hom}_k(M, k))$$

Im Rahmen unserer Diskussion von „Schmelzkategorien“ werden wir diese Isomorphismen in einem allgemeineren Kontext wiedersehen.

7.2.9 Ganzzahlige symplektische Formen*

Satz 7.2.9.1 (**Symplektische Formen über $\mathbb{Z}$**). *Gegeben eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe Γ mit einer nichtausgearteten alternierenden Bilinearform $\omega : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{Z}$ existiert stets eine Basis von Γ, bezüglich derer die Matrix unserer Form eine Blockmatrix der Gestalt*

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$$

ist mit $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_r)$ und $d_i > 0$ und $d_i | d_{i+1}$ für alle i. Die d_i sind dabei durch die Form ω eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir wählen $\lambda, \mu \in \Gamma$ derart, daß $\omega(\lambda, \mu) = d$ die kleinstmögliche positive Zahl ist, die so dargestellt werden kann. Dann behaupten wir $\Gamma = \langle \lambda, \mu \rangle \oplus \langle \lambda, \mu \rangle^\perp$. Aus Dimensionsgründen gilt das über $\mathbb{Q}$. Für jedes $\gamma \in \Gamma$ finden wir also $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ derart, daß $m\gamma$ eine Darstellung

$$m\gamma = a\lambda + b\mu + \kappa$$

besitzt mit $\kappa \in \langle \lambda, \mu \rangle^\perp$. Es folgt sofort $m\omega(\gamma, \mu) = da$. Wäre m kein Teiler von a, so wäre d kein Teiler von $\omega(\gamma, \mu)$ und wir könnten $x, y \in \mathbb{Z}$ finden mit $0 < x\omega(\gamma, \mu) + \gamma\omega(\lambda, \mu) = \omega(x\gamma + \gamma\lambda, \mu) < d$, im Widerspruch zur Wahl von λ, μ. Das kann nicht sein, folglich teilt m unser a und ebenso auch b. Dann aber teilt m auch κ und wir finden wie gewünscht

$$\Gamma = \langle \lambda, \mu \rangle \oplus \langle \lambda, \mu \rangle^\perp$$

Vollständige Induktion beendet den Beweis der Existenz von D, wenn auch zunächst noch ohne die Zusatzbedingung $d_i | d_{i+1}$. Es ist jedoch leicht zu sehen, daß im Fall, daß d_1 nicht d_2 teilt, unser d_1 nicht das Kleinstmögliche gewesen sein kann, und induktiv folgt so auch $d_i | d_{i+1}$. Die Eindeutigkeit der d_i schließlich folgt, indem wir die Eindeutigkeit im Elementarteilersatz 4.4.4.13 auf den Fall der von ω induzierten Abbildung $\Gamma \hookrightarrow \Gamma^*$ anwenden. $\square$

7.3 Affine Varietäten

7.3.1 Polynomiale Funktionen

Definition 7.3.1.1. Seien k ein Körper und $X \subset k^n$ eine Teilmenge. Eine k-wertige Funktion $f : X \to k$ auf X heißt eine **polynomiale Funktion**, wenn es ein Polynom $P \in k[T_1, \ldots, T_n]$ gibt mit $f(x) = P(x)\ \forall x \in X$.

7.3.1.2. Sei k ein Körper. Im Fall einer algebraischen Teilmenge $X \mathrel{\substack{\subset \\ \sim}} k^n$ notieren wir den Ring der polynomialen Funktionen auf X als

$$\mathcal{O}(X) \subset \mathrm{Ens}(X, k)$$

Nach dem Isomorphiesatz 4.4.2.12 liefert die Einschränkung von Funktionen einen Isomorphismus von k-Kringen

$$k[T_1, \ldots, T_n]/\mathcal{I}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)$$

zwischen dem Restklassenring des Polynomrings nach dem Verschwindungsideal von X und dem Ring der polynomialen Funktionen auf X. Das gilt sogar für beliebige Teilmengen $X \subset k^n$, nur wollen wir in diesen allgemeineren Fällen die Notation $\mathcal{O}(X)$ für andere Ringe von Funktionen reservieren.

7.3.1.3 (**Notationen für Ringe von polynomialen Funktionen**). Viele Autoren verwenden statt $\mathcal{O}(X)$ die alternative Notation $k[X]$ für den k-Kring der polynomialen Funktionen auf X. Die Aussage, daß für einen unendlichen Kring k die polynomialen Funktionen auf $X = k$ durch obigen Isomorphismus mit dem Polynomring in einer Veränderlichen T identifiziert werden, schreibt sich in dieser Notation $k[T] \xrightarrow{\sim} k[k]$ und in unserer Notation $k[T] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(k)$.

7.3.1.4 (**Polynomiale Funktionen auf Produkten**). Gegeben ein Körper k und algebraische Teilmengen $X \mathrel{\substack{\subset \\ \sim}} k^n$ und $Y \mathrel{\substack{\subset \\ \sim}} k^m$ ist die durch $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ erklärte Abbildung ein Isomorphismus von k-Kringen

$$\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times Y)$$

Die Multiplikation auf der linken Seite ist dabei die Offensichtliche aus 4.7.9.9. Die Surjektivität folgt leicht aus der offensichtlichen Surjektivität im Fall $X = k^m$, $Y = k^n$. Die Injektivität folgt aus der Injektivität der Abbildung $\mathrm{Ens}(X, k) \otimes_k \mathrm{Ens}(Y, k) \to \mathrm{Ens}(X \times Y, k)$, $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$, die für beliebige Mengen X, Y in 4.6.1.47 diskutiert wird. Unser Isomorphismus existiert sogar genauso für nicht notwendig algebraische Teilmengen, für diese haben wir jedoch keine Notation für Ringe polynomialer Funktionen bereitgestellt.

Übungen

Übung 7.3.1.5. $(k = \bar{k})$. Man zeige: Gegeben nilpotentfreie k-Kringe A, B ist auch ihr Tensorprodukt $A \otimes_k B$ nilpotentfrei. Hinweis: 7.3.1.4.

Ergänzung 7.3.1.6. Ist k nicht algebraisch abgeschlossen, so ist die Aussage der vorhergehenden Übung im allgemeinen falsch. Ein Gegenbeispiel steht in 6.6.1.1. Ist jedoch $\bar{k}/k$ separabel, so stimmt unsere Aussage doch wieder. Allgemeiner ist für jede Galoiserweiterung K/k und jeden k-Kring A seine Erweiterung $A \otimes_k K$ nilpotentfrei genau dann, wenn A nilpotentfrei ist. In der Tat ist das Nilradikal von $A \otimes_k K$ stabil unter der Galoisgruppe, und wäre es nicht Null, so wäre nach 6.6.4.4 auch sein Schnitt mit A nicht Null.

Übung 7.3.1.7 (**Disjunktes Verkleben polynomialer Funktionen**). $(k = \bar{k})$. Seien disjunkte und Zariski-abgeschlossene Teilmengen $X, Y \not\subset k^n$ gegeben sowie polynomiale Funktionen $f : X \to k$ und $g : Y \to k$. Man zeige, daß die Abbildung

$$h : X \sqcup Y \to k$$

mit $h|_X = f$ und $h|_Y = g$ dann auch polynomial ist. Hinweis: Nach dem Nullstellensatz ist die Summe der Verschwindungsideale der ganze Polynomring. Nun verwende man den abstrakten chinesischen Restsatz 6.2.3.4. Insbesondere kann man eine Vorgabe von endlich vielen Funktionswerten an endlich vielen Punkten stets durch eine polynomiale Funktion interpolieren, was wir aber eigentlich in diesem Fall schon aus 6.2.3.8 wissen.

Übung 7.3.1.8 (**Kein abgeschlossenes Verkleben polynomialer Funktionen**). Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ und algebraische Teilmengen $X, Y \not\subset k^n$ sowie polynomiale Funktionen $f : X \to k$ und $g : Y \to k$ mit $f|_{X \cap Y} = g|_{X \cap Y}$ muß die Abbildung

$$h : X \cup Y \to k$$

mit $h|_X = f$ und $h|_Y = g$ keineswegs polynomial sein. Als Beispiel untersuche man den k^2 mit X dem Achsenkreuz und Y einer weiteren Ursprungsgeraden. Mutige zeigen, daß das Verkleben im allgemeinen genau dann gelingt, wenn $\mathcal{I}(X) + \mathcal{I}(Y)$ ein Radikalideal ist.

7.3.2 Räume als Ringe

7.3.2.1. Seien k ein Körper und $X \not\subset k^n$ sowie $Y \not\subset k^m$ algebraische Teilmengen. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt **polynomial**, wenn es Polynome $P_1, \ldots, P_m \in k[T_1, \ldots, T_n]$ gibt mit

$$\varphi(x) = (P_1(x), \ldots, P_m(x)) \quad \forall x \in X$$

Ist zusätzlich eine algebraische Teilmenge $Z \subset k^l$ gegeben sowie polynomiale Abbildungen $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$, so ist offensichtlich auch deren Verknüpfung $\psi \circ \varphi : X \to Z$ polynomial.

Definition 7.3.2.2. Sei k ein Körper. Jede polynomiale Abbildung $\varphi : X \to Y$ zwischen algebraischen Teilmengen $X \subset k^n$ und $Y \subset k^m$ liefert auf den polynomialen Funktionen einen Ringhomomorphismus

$$\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$$

in die Gegenrichtung, das **Vorschalten von** φ alias **Zurückholen von Funktionen** $f \mapsto f \circ \varphi$. Wir nennen $\varphi^\sharp$ den zu φ gehörigen **Komorphismus**.

Definition 7.3.2.3. Ein Ring heißt **nilpotentfrei** oder gleichbedeutend **reduziert**, wenn er außer der Null keine nilpotenten Elemente hat.

7.3.2.4. Für die weitere Entwicklung der algebraischen Geometrie verwenden wir die Sprache der Kategorientheorie in dem Umfang, wie sie etwa in 4.7.1.1 folgende entwickelt wird, und insbesondere den Begriff einer Äquivalenz von Kategorien 4.7.2.19. In dieser Sprache ausgedrückt haben wir in 7.1.5.5 die Kategorie der k-Kringe eingeführt.

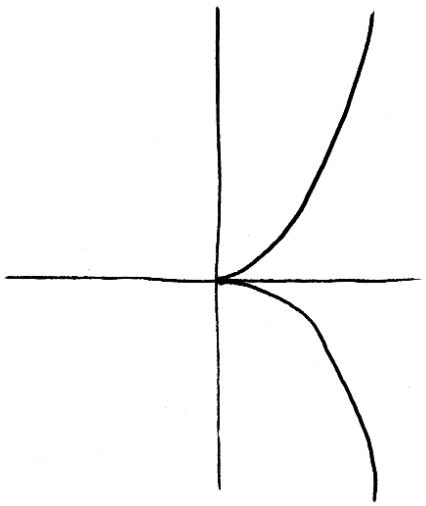
Satz 7.3.2.5 (**Räume als Ringe**). $(k = \bar{k})$. *Betrachten wir die algebraischen Mengen in irgendwelchen k^n als die Objekte einer Kategorie mit den polynomialen Abbildungen als Morphismen, so liefert das Bilden des k-Krings der polynomialen Funktionen eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc} \left\{\begin{array}{c}\textit{Algebraische Mengen}\\ \textit{in irgendwelchen } k^n\end{array}\right\} & \overset{\approx}{\to} & \left\{\begin{array}{c}\textit{Nilpotentfreie}\\ \textit{ringendliche } k\textit{-Kringe}\end{array}\right\}^{\mathrm{opp}} \\ X & & \mathcal{O}(X) \\ \varphi \downarrow & \mapsto & \varphi^\sharp \uparrow \\ Y & & \mathcal{O}(Y) \end{array}$$

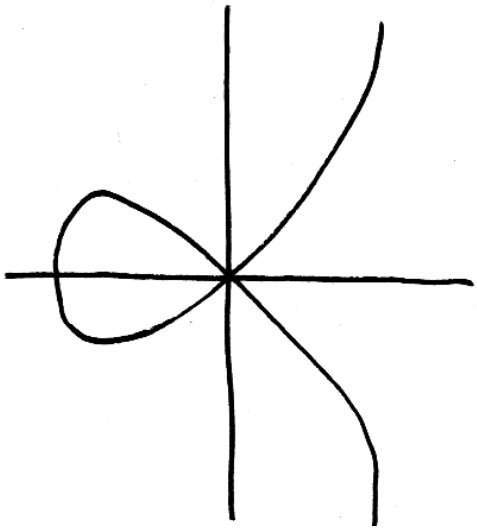
7.3.2.6 (**Endlichdimensionale nilpotentfreie k-Kringe**). $(k = \bar{k})$. Insbesondere liefert das Bilden des k-Krings aller k-wertigen Funktionen eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Endliche Mengen}\} & \overset{\approx}{\to} & \{\text{Nilpotentfreie } k\text{-Kringe } A \text{ mit } \dim_k A < \infty\}^{\mathrm{opp}} \\ X & \mapsto & \mathrm{Ens}(X, k) \end{array}$$

In diesem Fall können wir aber auch einfacher argumentieren. Gegeben ein endlichdimensionaler nilpotentfreier k-Kring A liefert ja die Linksmultiplikation eine Einbettung $A \hookrightarrow \mathrm{End}\, A$, $a \mapsto (a\cdot)$, deren Bild nach 7.2.3.14 genau aus allen



Ein reelles Bild der sogenannten **Neil'schen Parabel**, der Nullstellenmenge von $x^3 = y^2$ in der Ebene.



Ein reelles Bild der sogenannten **nodalen Kubik**, der Nullstellenmenge von $x^3 + x^2 = y^2$ in der Ebene.

Endomorphismen besteht, die mit allen Rechtsmultiplikationen $(\cdot b)$ für $b \in A$ kommutieren. Aufgrund der Funktorialität der Jordanzerlegung 4.3.3.7 gehört mit $(a\cdot)$ dann auch sein nilpotenter Anteil zum Bild unserer Einbettung, und ist A nilpotentfrei, muß der nilpotente Anteil Null und $(a\cdot)$ diagonalisierbar sein. Dann gibt es aber nach 4.7.8.10 in A eine Basis, bezüglich derer alle $(a\cdot)$ durch Diagonalmatrizen dargestellt werden, und aus Dimensionsgründen liefert dann unsere Einbettung $A \hookrightarrow \operatorname{End} A$ einen Isomorphismus von A mit dem Ring der Diagonalmatrizen, also mit $k \times \ldots \times k$. Das zeigt, daß unser Funktor surjektiv ist auf Isomorphieklassen. Der Rest des Beweises bleibe dem Leser überlassen.

Beispiele 7.3.2.7 (**Neil'sche Parabel und nodale Kubik**). $(k = \bar{k})$. Für $n \geq m$ entspricht der Projektion $k^n \twoheadrightarrow k^m$ durch Weglassen der letzten Koordinaten hier die Einbettung von Polynomringen durch Hinzufügen von Variablen $k[T_1, \ldots, T_m] \hookrightarrow k[T_1, \ldots, T_m, T_{m+1}, \ldots, T_n]$. Der Einbettung $X \hookrightarrow k^n$ einer algebraischen Teilmenge entspricht in der Gegenrichtung die Surjektion

$$k[T_1, \ldots, T_n] \twoheadrightarrow k[T_1, \ldots, T_n]/\mathcal{I}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)$$

Umgekehrt, und jetzt schreiben wir zur Abwechslung und zum Vermeiden von Indizes mal X, Y für Variablen eines Polynomrings, entspricht die Komposition

$$k[X, Y] \twoheadrightarrow k[X, Y]/\langle X^3 - Y^2 \rangle \xrightarrow{\sim} \langle 1, T^2, T^3, \ldots \rangle_k = k + \langle T^2 \rangle \subset k[T]$$

mit dem mittleren Isomorphismus gegeben durch $X \mapsto T^2$, $Y \mapsto T^3$ der Abbildung, die die Gerade „geknifft“ in die Ebene legt vermittels $k \to k^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$. Weiter entspricht die Komposition

$$k[X, Y] \twoheadrightarrow k[X, Y]/\langle X^3 + X^2 - Y^2 \rangle \xrightarrow{\sim} 1 + \langle T^2 - 1 \rangle \subset k[T]$$

mit dem mittleren Isomorphismus gegeben durch die Vorschrift $X \mapsto (T^2 - 1)$, $Y \mapsto T(T^2 - 1)$ der Abbildung, die die Gerade „mit Selbstüberschneidung“ in die Ebene legt vermittels $k \to k^2$, $t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$. Hier haben alle Fasern höchstens einen Punkt mit Ausnahme der Faser über dem Ursprung, die aus den beiden Punkten $\pm 1 \in k$ besteht und im Fall einer von 2 verschiedenen Charakteristik zwei Punkte hat. Man beachte, daß $1 + \langle T^2 - 1 \rangle \subset k[T]$ der Teilring aller Polynome ist, die bei $T = -1$ und $T = 1$ jeweils denselben Wert annehmen. Die mittleren Isomorphismen in den letzten beiden Beispielen sind nicht ganz offensichtlich und sollten vom Leser zur Übung bewiesen werden. Die fraglichen Abbildungen $k \to k^2$ gehen sogar surjektiv auf die Nullstellenmengen der fraglichen Polynome, aber zumindest im letzten Beispiel scheint mir das mit der uns bis jetzt zur Verfügung stehenden Theorie gar nicht so leicht einzusehen: Warum sollte sich denn jede Lösung der Gleichung $x^3 + x^2 = y^2$ in der Form $(x, y) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ mit $t \in k$ schreiben lassen? Na gut, mit etwas Rechnen geht das dann schon. In 7.5.2.17 werden Sie es auch ohne weitere Mühen aus dem Going-up-Theorem folgern können. Mehr dazu diskutieren wir in 7.3.3.14.

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir, daß es für jeden nilpotentfreien ringendlichen k-Kring A eine algebraische Teilmenge $X \not\subset k^n$ gibt mitsamt einem Isomorphismus von k-Kringen $\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} A$. Sind in der Tat $t_1, \ldots, t_n \in A$ Erzeuger unseres k-Krings, so erhalten wir durch die Vorschrift $T_i \mapsto t_i$ eine Surjektion

$$k[T_1, \ldots, T_n] \twoheadrightarrow A$$

Bezeichne $\mathfrak{a}$ ihren Kern. Besitzt A außer der Null keine nilpotenten Elemente, so ist $\mathfrak{a}$ ein Radikalideal, und ist k algebraisch abgeschlossen, so ist ein Radikalideal im Polynomring das Verschwindungsideal seiner Nullstellenmenge, in Formeln $\mathfrak{a} = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathfrak{a}))$. Wir erhalten damit Isomorphismen von k-Kringen

$$\mathcal{O}(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) \xleftarrow{\sim} k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} A$$

und haben gezeigt, daß A isomorph ist zum k-Kring der polynomialen Funktionen der algebraischen Menge $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \subset k^n$. Unser Funktor ist also essentiell surjektiv. Jetzt müssen wir noch zeigen, daß er auch volltreu ist, daß also unsere Vorschrift $\varphi \mapsto \varphi^\sharp$ Bijektionen zwischen den Morphismenräumen liefert. Das gilt sogar ohne die Annahme $k = \bar{k}$. Wir notieren dazu die Menge der polynomialen Abbildungen zwischen zwei algebraischen Mengen mit $\mathrm{Pol}(X, Y)$. Homomorphismen von k-Kringen notieren wir $\mathrm{Kring}^k(A, B)$. Dann erinnern wir uns an die Formel $Y = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) \subset k^m$ und bilden das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Pol}(X, Y) & & \to & & \mathrm{Kring}^k(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X)) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\mathrm{Pol}(X, k^m) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}(X)^m & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Kring}^k(k[T_1, \ldots, T_m], \mathcal{O}(X))
\end{array}$$

Darin seien die Horizontalen durch $\varphi \mapsto \varphi^\sharp$ gegeben und die Vertikalen durch $Y \subset k^m$ beziehungsweise $k[T_1, \ldots, T_m] \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Y)$ und die beiden einzelnen Abbildungen in der unteren Horizontale durch das Nachschalten der Projektionen auf die Koordinaten und das Einsetzen von polynomialen Funktionen für die Variablen. Diese beiden Abbildungen sind sicher Bijektionen, folglich ist auch die untere Horizontale insgesamt eine Bijektion. Die obere Horizontale ist dann ebenso eine Bijektion, denn dort sind nun beide Seiten in natürlicher Bijektion zu

$$\{(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathcal{O}(X)^m \mid f(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{I}(Y)\}$$

Um das zu sehen, verwenden wir die universelle Eigenschaft der Quotientenabbildung $k[T_1, \ldots, T_m]/\mathcal{I}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(Y)$ auf der rechten Seite und die Definition des Verschwindungsideals $\mathcal{I}(Y)$ auf der linken Seite. $\square$

Übungen

Übung 7.3.2.8 (**Stetigkeit polynomialer Abbildungen**). Ich erinnere daran, daß eine Abbildung zwischen topologischen Räumen stetig heißt, wenn das Urbild jeder offenen Menge wieder offen ist. Man zeige: Gegeben ein Körper k sind polynomiale Abbildungen $X \to Y$ mit $X \mathrel{\not\subset} k^n$ und $Y \mathrel{\not\subset} k^m$ stetig für die von der Zariskitopologie auf unseren Teilmengen induzierte Topologie.

7.3.3 Naive affine Varietäten

Definition 7.3.3.1. Gegeben ein Körper k verstehen wir unter einer **k-geringten Menge** ein Paar

$$(X, \mathcal{O}(X))$$

bestehend aus einer Menge X und einem k-Unterring $\mathcal{O}(X) \subset \mathrm{Ens}(X, k)$ im k-Kring aller k-wertigen Funktionen auf X. Die Elemente von $\mathcal{O}(X)$ nennen wir die **strukturierenden Funktionen** unserer k-geringten Menge X. Ein **Morphismus** von $(X, \mathcal{O}(X))$ in eine weitere k-geringte Menge $(Y, \mathcal{O}(Y))$ ist eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ derart, daß gilt $f \in \mathcal{O}(Y) \Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)$. Mit diesen Morphismen bilden die k-geringten Mengen eine Kategorie

$$\mathrm{Ensr}_k$$

Den durch Vorschalten von φ erklärten Homomorphismus von k-Kringen nennen wir den **Komorphismus zu** φ und notieren ihn $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$.

Definition 7.3.3.2. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine **naive affine k-Varietät** oder kürzer **affine k-Varietät** ist eine k-geringte Menge $(X, \mathcal{O}(X))$ derart, daß ihr Ring von strukturierenden Funktionen $\mathcal{O}(X)$ ringendlich ist über k und daß wir eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} X & \tilde{\to} & \mathrm{Kring}^k(\mathcal{O}(X), k) \\ x & \mapsto & \delta_x \end{array}$$

von X mit der Menge der k-linearen Ringhomomorphismen $\mathcal{O}(X) \to k$ erhalten, wenn wir jedem Punkt $x \in X$ den durch das Auswerten bei x gegebenen Ringhomomorphismus $\delta_x : \mathcal{O}(X) \to k$, $f \mapsto f(x)$ zuordnen. Die strukturierenden Funktionen einer affinen Varietät nennen wir auch ihre **regulären Funktionen**.

7.3.3.3 (**Diskussion der Terminologie**). Es wird sich bald erweisen, daß unsere naiven affinen Varietäten bis auf Isomorphismus genau unsere k-geringten Mengen $(X, \mathcal{O}(X))$ zu algebraischen Teilmengen $X \mathrel{\not\subset} k^n$ sind. Das Adjektiv „affin“ dient dazu, in der Terminologie Platz zu lassen für allgemeinere Varietäten, wie

wir sie in 7.6.4.2 kennenlernen werden. Das Adjektiv „naiv“ bringt zum Ausdruck, daß wir unsere naiven affinen Varietäten als spezielle k-geringte Mengen betrachten und noch nicht, wie im Fall allgemeiner Varietäten, als spezielle „k-geringte Räume“. Dieser Unterschied wird sich jedoch als unwesentlich erweisen, weshalb wir auf das Adjektiv „naiv“ im folgenden meist verzichten.

7.3.3.4. Unter einem **Morphismus** von affinen k-Varietäten verstehen wir einen Morphismus von k-geringten Mengen. Die affinen k-Varietäten bilden damit eine volle Unterkategorie

$$\mathrm{Varaff}_k \subset \mathrm{Ensr}_k$$

in der Kategorie aller k-geringten Mengen. Gegeben affine Varietäten X, Y notieren wir die Menge aller Morphismen von X nach Y statt $\mathrm{Varaff}_k(X, Y)$ meist kürzer $\mathrm{Var}_k(X, Y)$ und greifen damit der volltreuen Einbettung $\mathrm{Varaff}_k \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathrm{Var}_k$ in die Kategorie aller k-Varietäten vor, die wir zusammen mit der Definition allgemeiner Varietäten in 7.6.4.2 kennenlernen werden. Wenn wir hoffen, daß der Grundkörper aus dem Kontext hervorgeht, schreiben wir auch kurz Var.

7.3.3.5. Ich verwende das Wort **Varietät** nur für k-Varietäten über algebraisch abgeschlossenen Körpern $k = \bar{k}$. Wenn das Wort „Varietät“ fällt, ist also implizit zu verstehen, daß der zugehörige Grundkörper algebraisch abgeschlossen ist. Ich werde das nicht immer noch extra erwähnen.

Beispiele 7.3.3.6. $(k = \bar{k})$.

1. Jede endliche Menge X wird mit $\mathcal{O}(X) := \mathrm{Ens}(X, k)$ eine affine Varietät.

2. Die Menge $X = k^n$ wird mit $\mathcal{O}(X) := k[T_1, \ldots, T_n]$ eine affine Varietät.

3. (**Nullstellenmengen**). Gegeben eine affine Varietät X und eine Teilmenge $E \subset \mathcal{O}(X)$ des Rings der regulären Funktionen wird die Menge der gemeinsamen Nullstellen

$$Y = \mathcal{Z}(E) := \{x \in X \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in E\}$$

mit den Einschränkungen $\mathcal{O}(Y) := \{f|_Y \mid f \in \mathcal{O}(X)\}$ regulärer Funktionen von X als den regulären Funktionen von Y eine affine Varietät. In der Tat kommt jeder k-lineare Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(Y) \to k$ von einem k-linearen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(X) \to k$ her, der durch Auswerten δ_x an einem Punkt $x \in X$ gegeben wird, der dann notwendig bereits zu Y gehört haben muß.

4. (**Nichtnullstellenmengen einzelner Funktionen**). Gegeben eine affine Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ und eine reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ wird ihre Nichtnullstellenmenge

$$X_f := X \backslash \mathcal{Z}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

eine affine Varietät mit $\mathcal{O}(X_f) := \mathcal{O}(X)[f^{-1}] \subset \mathrm{Ens}(X_f, k)$ dem von den Restriktionen der regulären Funktionen aus $\mathcal{O}(X)$ zusammen mit der Funktion $1/f$ erzeugten Teilring. In der Tat liefert dann jeder Ringalgebrenhomomorphismus $\mathcal{O}(X)[f^{-1}] \to k$ einen Ringalgebrenhomomorphismus $\mathcal{O}(X) \to k$, der von der Auswertung an einem Punkt $x \in X$ herkommt, und von diesem Punkt hinwiederum sieht man leicht ein, daß er bereits zu X_f gehört haben muß.

7.3.3.7 (**Gegenbeispiele**). Die Menge $X := \mathbb{C}^\times$ geringt durch $\mathcal{O}(X) := \mathbb{C}[T]$ ist keine affine Varietät, da es für den Ringalgebrenhomomorphismus $\mathbb{C}[T] \to \mathbb{C}$ „nimm den konstanten Term“ keinen Punkt $x \in X$ gibt, für den er der Auswertungshomomorphismus wäre. Die Zahlenebene $X := \mathbb{C} \sqcup \{\tilde{0}\}$ „mit verdoppeltem Nullpunkt“ geringt durch $\mathcal{O}(X) := \mathbb{C}[T]$ mit der Maßgabe $P(\tilde{0}) = P(0)\ \forall P \in \mathbb{C}[T]$ ist auch keine affine Varietät, da hier die beiden Punkte $0 \neq \tilde{0}$ denselben Auswertungshomomorphismus $\delta_0 = \delta_{\tilde{0}}$ liefern. Die Kreislinie $X := S^1$ geringt durch alle stetigen komplexwertigen Funktionen $\mathcal{O}(X) := \mathcal{C}(X)$ schließlich ist keine affine Varietät, da $\mathcal{C}(X)$ nicht ringendlich ist über $\mathbb{C}$. Man kann das etwa daran sehen, daß $\mathcal{C}(X)$ nicht noethersch ist, denn es gibt in der Kreislinie eine absteigende Folge von abgeschlossenen Mengen, die nicht stagniert, und deren Verschwindungsideale bilden dann eine aufsteigende Folge von Idealen von $\mathcal{C}(X)$, die ebenfalls nicht stagniert. Man beachte in diesem letzten Beispiel, daß unsere Bedingung $X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kring}^{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(X), \mathbb{C})$ durchaus erfüllt ist, da ja allgemein für jeden kompakten Hausdorffraum X die Abbildungsvorschrift $x \mapsto \delta_x$ eine Bijektion $X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kring}^{\mathbb{C}}(\mathcal{C}(X), \mathbb{C})$ liefert, vergleiche 15.3.4.11.

Vorschau 7.3.3.8. Seien X eine affine Varietät und $f, g \in \mathcal{O}(X)$. In 9.1.1.21 zeigen wir, daß aus $X_f = X_g$ folgt $\mathcal{O}(X_f) = \mathcal{O}(X_g)$ und daß allgemeiner aus $X_f \subset X_g$ und $h \in \mathcal{O}(X_g)$ folgt $h|X_f \in \mathcal{O}(X_f)$.

Beispiel 7.3.3.9 (**Affine Räume als affine Varietäten**). Jeder endlichdimensionale affine Raum A über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k wird offensichtlich eine affine k-Varietät, wenn wir $\mathcal{O}(A) \subset \mathrm{Ens}(A, k)$ erklären als die von allen affinen Abbildungen $A \to k$ erzeugte k-Unterringalgebra. Jede affine Abbildung von endlichdimensionalen affinen Räumen ist in Bezug auf diese Strukturen ein Morphismus von affinen Varietäten und im Fall $A = k^n$ erhalten wir wieder unsere aus 7.3.3.6 bekannte affine Varietät mit $\mathcal{O}(k^n) = k[T_1, \ldots, T_n]$ zurück.

7.3.3.10 (**Verschiedene Bedeutungen von „affin“**). Unglücklich ist in diesem Zusammenhang die Verwendung des Wortes „affin“ in zwei verschiedenen Bedeutungen: Jeder endlichdimensionale affine Raum trägt zwar in dieser Weise eine natürliche Struktur als affine Varietät, aber es gibt durchaus auch noch andere affine Varietäten, ja „die meisten“ affinen Varietäten sind keineswegs isomorph zu affinen Räumen.

Beispiel 7.3.3.11. Alle Definitionen und Sätze vom Beginn dieses Abschnitts bis hierher würden auch für einen beliebigen Grundkörper k funktionieren. Allerdings müßte man dann in Kauf nehmen, daß etwa die reelle Gerade $X = \mathbb{R}$ mit dem Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(X) = \mathbb{R}[T, (T^2+1)^{-1}]$ auch eine naive affine $\mathbb{R}$-Varietät wäre, und das stünde im Widerspruch zur allgemein üblichen Terminologie. Dies Beispiel zeigt auch, daß die in unserer Vorschau 7.3.3.8 aufgestellten Behauptungen dieser Allgemeinheit nicht mehr richtig wären.

Satz 7.3.3.12 (über affine Varietäten). $(k = \bar{k})$. *Unsere Äquivalenz von Kategorien aus 7.3.2.5 läßt sich einbetten in ein kommutatives Diagramm von Äquivalenzen*

$$\begin{tikzcd}
\left\{\begin{matrix}\textit{Algebraische Mengen}\\ \textit{in irgendwelchen } k^n\end{matrix}\right\} \arrow[rr, "\approx"] \arrow[dr, "\approx"'] & & \left\{\begin{matrix}\textit{Nilpotentfreie ring-}\\ \textit{-endliche } k\textit{-Kringe}\end{matrix}\right\}^{\mathrm{opp}} \\
& \left\{\textit{Affine } k\textit{-Varietäten}\right\} \arrow[ur, "\approx"'] &
\end{tikzcd}$$

Der Funktor $\searrow$ ordnet dabei jeder algebraische Menge $X \subset k^n$ die affine Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ zu und der Funktor $\nearrow$ jeder affinen k-Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ den k-Kring $\mathcal{O}(X)$ ihrer regulären Funktionen.

7.3.3.13. In meinen Augen ist dieser Satz zentral für das Verständnis sowohl der kommutativen Algebra als auch der algebraischen Geometrie. Er stellt in einem besonders einfachen Kontext die Beziehung zwischen eingebetteter Geometrie, koordinatenfreier Geometrie und abstrakter Algebra her, die das ganze Gebiet prägt. Motiviert durch diesen Satz heißen ringendliche nilpotentfreie k-Kringe über algebraisch abgeschlossenen Körpern auch **affine k-Kringe**.

Vorschau 7.3.3.14 (**Verkleben von Punkten in affinen Varietäten**). In 7.5.2.15 werden wir lernen, daß gegeben eine affine Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ und eine surjektive Abbildung $\varphi : X \to Y$ auf eine Menge Y mit endlichen Fasern und höchstens endlich vielen Fasern mit mehr als einem Punkt unser Y mit $\mathcal{O}(Y) := \{f : Y \to k \mid f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)\}$ zu einer affinen Varietät wird. Weiter werden wir in 7.5.2.19 sehen, daß man die nodale Kubik in dieser Weise durch das Verkleben von zwei verschiedenen Punkten einer Gerade erhalten kann, und werden in 7.5.2.22 auch sehen, inwiefern man beim Verkleben von zwei „infinitesimal benachbarten Punkten“ die Neil'sche Parabel erhält.

Beweis. Gegeben $X \subset k^n$ ist $\mathcal{O}(X)$ ringendlich über k und die k-linearen Ringhomomorphismen $\mathcal{O}(X) \to k$ sind etwa nach 7.3.2.5 genau die Auswertungsabbildungen an Punkten von X. Unser Funktor $\searrow$ landet also in der Tat in unserer Kategorie von affinen Varietäten. Daß unser funktorielles Diagramm kommutiert, ist offensichtlich. Jede affine Varietät X ist isomorph zu einer affinen Varietät vom

Typ $\mathcal{Z}(I) \not\subset k^n$. In der Tat ist nach Annahme $\mathcal{O}(X)$ ringendlich über k. Bilden etwa die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ ein Erzeugendensystem, so erhalten wir eine Surjektion $k[T_1, \ldots, T_n] \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X)$ mit $T_i \mapsto f_i$. Die Abbildung $(f_1, \ldots, f_n) : X \to k^n$ induziert dann einen Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(I)$ für I den Kern obiger Surjektion. Das zeigt, daß $\searrow$ eine Surjektion auf Isomorphieklassen von Objekten induziert. Nach 7.3.2.5 induzieren demnach alle drei Funktoren Bijektionen auf Isomorphieklassen von Objekten. Um den Satz zu folgern, müssen wir nur noch zeigen, daß $\nearrow$ Injektionen auf den Morphismenräumen induziert. Das ist aber klar. $\square$

7.3.3.15 (**Universelle Eigenschaft von Nullstelleneinbettungen**). Gegeben X eine affine Varietät und $E \subset \mathcal{O}(X)$ eine Menge regulärer Funktionen und $Y := \mathcal{Z}(E)$ deren simultane Nullstellenmenge ist die Einbettung $Y \hookrightarrow X$ offensichtlich ein Morphismus. Ist weiter $\varphi : Z \to X$ ein Morphismus von affinen Varietäten mit $\varphi(Z) \subset Y$, so ist auch die induzierte Abbildung $\varphi : Z \to Y$ offensichtlich ein Morphismus von affinen Varietäten.

7.3.3.16 (**Regularität der Kehrwerte nullstellenfreier regulärer Funktionen**). Gegeben eine affine Varietät X und eine reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ ohne Nullstelle ist auch $1/f$ regulär. Das zeigen wir, indem wir die gegenteilige Annahme zum Widerspruch führen. Ist genauer $f \in \mathcal{O}(X)$ keine Einheit, so ist das von f erzeugte Ideal nicht der ganze Ring und kann mithin zu einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ vergrößert werden. Jetzt sagt der Hilbert'sche Nullstellensatz in seiner körpertheoretischen Form 7.1.5.10, daß die Komposition $k \to \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung sein muß, also wegen $k = \bar{k}$ ein Isomorphismus. So erhalten wir dann einen Homomorphismus $\mathcal{O}(X) \to k$ von k-Kringen mit $f \mapsto 0$. Das aber bedeutet im Lichte unserer Definition 7.3.3.2 einer affinen Varietät, daß f ein Nullstelle auf X gehabt haben muß.

7.3.3.17 (**Universelle Eigenschaft von Nichtnullstelleneinbettungen**). Gegeben X eine affine Varietät und $f \in \mathcal{O}(X)$ eine reguläre Funktion ist die Einbettung $X_f \hookrightarrow X$ offensichtlich ein Morphismus. Ist weiter $\varphi : Z \to X$ ein Morphismus von affinen Varietäten mit $\varphi(Z) \subset X_f$, so ist auch die induzierte Abbildung $\varphi : Z \to X_f$ ein Morphismus von affinen Varietäten. In der Tat ist $(1/f) \circ \varphi = 1/\varphi^\sharp(f)$ nach 9.1.1.19 auch eine reguläre Funktion auf Z. Insbesondere folgt für $f, g \in \mathcal{O}(X)$ mit $X_g \subset X_f$ sofort $\operatorname{res}(\mathcal{O}(X_f)) \subset \mathcal{O}(X_g)$. Insbesondere folgt aus $X_f = X_g$ dann auch $\mathcal{O}(X_g) = \mathcal{O}(X_f)$, was aus unseren Definitionen noch nicht unmittelbar hervorgeht.

Übungen

Übung 7.3.3.18. Die regulären Funktionen einer affinen k-Varietät X sind genau die Morphismen von Varietäten $X \to k$, in Formeln $\mathcal{O}(X) = \operatorname{Var}(X, k)$.

Übung 7.3.3.19 (**Automorphismen offener Teilmengen der Gerade**). Jeder Isomorphismus von Varietäten $k \xrightarrow{\sim} k$ hat die Gestalt $t \mapsto at + b$ für $a \in k^\times$ und $b \in k$. Jeder Isomorphismus von Varietäten $k^\times \xrightarrow{\sim} k^\times$ hat die Gestalt $t \mapsto at^\varepsilon$ für $a \in k^\times$ und $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Die Varietäten $k \backslash E$ für $E \subset k$ endlich mit zwei oder mehr Elementen haben nur endlich viele Automorphismen. Hinweis: 3.5.5.21.

Übung 7.3.3.20 (**Bijektive Morphismen müssen keine Isomorphismen sein**). Es gibt durchaus bijektive Morphismen zwischen affinen Varietäten, die keine Isomorphismen von Varietäten sind. Als Beispiele betrachte man im Fall einer Charakteristik $\operatorname{char} k = p > 0$ die Abbildung $k \to k$, $t \mapsto t^p$ und im Fall $\operatorname{char} k$ beliebig die Abbildung $k \to \mathcal{Z}(X^3 - Y^2)$, $t \mapsto (t^2, t^3)$.

Übung 7.3.3.21 (**Frobenius-Twist**). Gegeben eine affine Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k positiver Charakteristik $p > 0$ erhalten wir eine weitere affine k-Varietät $X^{[1]} = (X^{[1]}, \mathcal{O}(X^{[1]}))$ durch die Vorschrift $X^{[1]} := X$ und $\mathcal{O}(X^{[1]}) := \{f^p \mid f \in \mathcal{O}(X)\}$. Die Identität auf den zugrundeliegenden Mengen ist dann stets ein Morphismus von Varietäten, der **Frobenius-Morphismus**

$$X \to X^{[1]}$$

Er ist im allgemeinen kein Isomorphismus, ja die Varietäten X und $X^{[1]}$ sind im allgemeinen nicht isomorph. Die Varietät $X^{[1]}$ heißt der **Frobenius-Twist von** X. Jeder Morphismus $X \to Y$ ist auch ein Morphismus $X^{[1]} \to Y^{[1]}$. Der Morphismus $F : k^n \to k^n$ gegeben durch $F : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1^p, \ldots, x_n^p)$ induziert einen Isomorphismus $(k^n)^{[1]} \xrightarrow{\sim} k^n$ und induziert für jede abgeschlossene Untervarietät $X \not\subset k^n$ einen Isomorphismus $X^{[1]} \xrightarrow{\sim} F(X)$. Definierende Gleichungen in $k[T_1, \ldots, T_n]$ für $F(X)$ kann man erhalten, indem man in definierenden Gleichungen für X alle Koeffizienten zur p-ten Potenz erhebt. In der Sprache der affinen k-Kringe entspricht $X \to X^{[1]}$ dem Frobeniushomomorphismus $A \to A$ aus 3.5.2.37, den wir als einen Homomorphismus von k-Kringen $A^{[1]} \to A$ lesen, indem wir als Ringe $A^{[1]} = A$ setzen, aber den strukturellen Homomorphismus $k \to A^{[1]}$ definieren als die Komposition $k \to k \to A$ des strukturellen Homomorphismus $k \to A$ mit dem Inversen des Frobenius $k \xrightarrow{\sim} k$. Schließlich zeige man, daß der Funktor $X \mapsto X^{[1]}$ eine Äquivalenz von Kategorien ist. Vielleicht noch natürlicher wird diese Konstruktion in der Sprache der Schemata, vergleiche **??**.

7.3.4 Nullstellensatz für affine Varietäten

7.3.4.1 (**Räume und Ringe als übergreifendes Thema**). Ein großer Teil der sogenannten „kommutativen Algebra“ besteht aus geometrischen Erkenntnissen, die man unter Zuhilfenahme des vorhergehenden Satzes 7.3.3.12 in die Sprache der

affinen k-Kringe übersetzt und von dort auf möglichst große Klassen von kommutativen Ringen verallgemeinert. Zu jedem topologischen Raum können wir auch den Ring der stetigen reellwertigen Funktionen auf unserem Raum bilden, zu jeder $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit den Ring der $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen und zu jeder Riemann'schen Fläche den Ring der holomorphen Funktionen. Es zeigt sich, daß diese Ringe wieder die ursprünglichen „strukturierten Räume" sehr weitgehend kodieren. Für kompakte Hausdorff-Räume ist das die Aussage des Satzes 15.3.4.6 und in den anderen und vielen weiteren Fällen gelten ähnliche Aussagen. Man kann sich deshalb durchaus auf den Standpunkt stellen, daß „Ringe die besseren Räume" sind. Mein Ziel ist im folgenden, diese geometrische Intuition offenzulegen, die großen Teilen der kommutativen Algebra zugrunde liegt.

Vorschau 7.3.4.2. Der „Hauptsatz von Zariski" 9.2.4.17 besagt, daß in Charakteristik Null die Umkehrabbildung eines bijektiven Morphismus von einer affinen Varietät in eine „glatte" affine Varietät stets wieder ein Morphismus ist. In positiver Charakteristik muß man zusätzlich voraussetzen, daß der fragliche bijektive Morphismus auch in jedem Punkt bijektives „Differential" hat.

7.3.4.3 (**Nullstellenmengen und Verschwindungsideale für affine Varietäten**). Unsere bis jetzt entwickelten Notationen und Resultate lassen sich ohne große Schwierigkeiten von k^n auf beliebige affine Varietäten X verallgemeinern. Das Auswerten liefert wieder eine Paarung

$$X \times \mathcal{O}(X) \to k$$

und wir können für $Y \subset X$ beziehungsweise $E \subset \mathcal{O}(X)$ das Verschwindungsideal beziehungsweise die Nullstellenmenge

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{I}(Y) = \mathcal{I}_X(Y) & := & \{f \in \mathcal{O}(X) & \mid f(x) = 0 \quad \forall x \in Y\} \\ \mathcal{Z}(E) = \mathcal{Z}_X(E) & := & \{x \in X & \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in E\} \end{array}$$

bilden. Wieder kehren $\mathcal{I}$ beziehungsweise $\mathcal{Z}$ die Inklusionen um und die $\mathcal{Z}(E)$ bilden eine Topologie auf X, die **Zariski-Topologie**.

7.3.4.4. Gegeben eine affine Varietät X wird nach 7.3.3.6 jede abgeschlossene Teilmenge $Y \not\subset X$ mit $\mathcal{O}(Y) := \{f|_Y \mid f \in \mathcal{O}(X)\}$ selbst eine affine Varietät. Wir nennen diese Struktur die **induzierte Struktur** auf Y. Natürlich induziert die Restriktion dann einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X)/\mathcal{I}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(Y)$$

Weiter ist die Einbettung $Y \hookrightarrow X$ ein Morphismus und ist $\varphi : Z \to X$ ein Morphismus von affinen Varietäten mit $\varphi(Z) \subset Y$, so ist offensichtlich auch die induzierte Abbildung $\varphi : Z \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten.

7.3.4.5. Für einen Morphismus $\varphi : Y \to X$ von affinen Varietäten sind gleichbedeutend:

1. Der Morphismus φ ist injektiv mit abgeschlossenem Bild und induziert einen Isomorphismus $Y \xrightarrow{\sim} \varphi(Y)$ auf sein Bild mit der induzierten Struktur;

2. Der Komorphismus ist eine Surjektion $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Y)$.

Der Nachweis dieser Äquivalenz bleibe dem Leser zur Übung. Einen Morphismus mit diesen Eigenschaften nennen wir eine **abgeschlossene Einbettung**.

Satz 7.3.4.6 (**Nullstellensatz für affine Varietäten**). *Für jede affine Varietät X gilt:*

1. *Ist $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}(X)$ ein Ideal und verschwindet $f \in \mathcal{O}(X)$ auf der Nullstellenmenge von $\mathfrak{a}$, so liegt eine Potenz von f bereits in $\mathfrak{a}$. In Formeln ausgedrückt gilt also $\mathcal{Z}(f) \supset \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \;\Rightarrow\; f^N \in \mathfrak{a}$ für $N \gg 0$;*

2. *Die Zuordnungen $\mathfrak{b} \mapsto \mathcal{Z}(\mathfrak{b})$ und $Z \mapsto \mathcal{I}(Z)$ liefern zueinander inverse Bijektionen zwischen der Menge aller Radikalideale von $\mathcal{O}(X)$ und der Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von X;*

3. *Für jede Teilmenge $Y \subset X$ ist die Nullstellenmenge ihres Verschwindungsideals der Abschluß von Y in X, in Formeln $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) = \bar{Y}$;*

4. *Für jede Teilmenge $E \subset \mathcal{O}(X)$ ist das Verschwindungsideal ihrer Nullstellenmenge das Radikal des von E erzeugten Ideals, in Formeln gilt also $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(E)) = \sqrt{\langle E \rangle}$;*

5. *Die Zuordnung $\mathfrak{m} \mapsto \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ ist eine Bijektion $\operatorname{Max} \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} X$. Die Zuordnung $x \mapsto \mathcal{I}(x)$ beschreibt ihre Umkehrabbildung.*

Beweis. Das folgt ohne Schwierigkeiten aus den entsprechenden Aussagen im Fall $X = k^n$, die wir als 7.1.6.13, 7.1.6.16 und 7.1.6.9 bereits besprochen haben. Die Details überlasse ich dem Leser zur Übung. □

7.3.4.7 (**Das Maximalspektrum**). Sei $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen. Wir notieren $\mathrm{Kring}^k_{\mathrm{re}}$ die Kategorie der ringendlichen k-Kringe und $\mathrm{Kringo}^{\mathrm{re}}_k$ ihre opponierte Kategorie. Wir konstruieren einen Funktor

$$\mathrm{Max} : \mathrm{Kringo}^{\mathrm{re}}_k \to \mathrm{Ensr}_k$$

in die Kategorie der k-geringten Mengen durch die Vorschrift, daß wir einem Kring A die Menge $\mathrm{Max}(A)$ der maximalen Ideale von A zuordnen und als Ring

der strukturierenden Funktionen $\mathcal{O}(\mathrm{Max}(A)) \subset \mathrm{Ens}(\mathrm{Max}\, A, k)$ das Bild des Homomorphismus von k-Kringen $\tau = \tau_A : A \to \mathrm{Ens}(\mathrm{Max}\, A, k)$, der dadurch gegeben wird, daß $(\tau(a))(\mathfrak{m})$ und a dasselbe Bild in $A/\mathfrak{m}$ haben. Diese Definition ist sinnvoll, da unter unseren Endlichkeitsannahmen die Komposition $k \to A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}$ ein Isomorphismus ist. Wir nennen $\mathrm{Max}(A)$ das **Maximalspektrum von** A. Ist $\mathfrak{n} \subset A$ ein aus nilpotenten Elementen bestehendes Ideal, so induziert die Surjektion $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{n}$ offensichtlich einen Isomorphismus

$$\mathrm{Max}(A/\mathfrak{n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Max}(A)$$

Insbesondere ist für $A \in \mathrm{Kring}^k_{\mathrm{re}}$ nicht nur der Schnitt aller Primideale, sondern auch der Schnitt aller maximalen Ideale das Nilradikal.

7.3.4.8. Sei $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen. Ist $(X, \mathcal{O}(X))$ eine affine k-Varietät, so ist unsere Bijektion $\eta_X : \mathrm{Max}(\mathcal{O}(X)) \xrightarrow{\sim} X$ aus dem Nullstellensatz für Varietäten 7.3.4.6 offensichtlich sogar ein Isomorphismus von k-geringten Mengen für die in 7.3.4.7 auf $\mathrm{Max}(\mathcal{O}(X))$ erklärte Struktur als k-geringte Menge. Da jeder affine k-Kring A isomorph ist zum Ring der regulären Funktionen einer affinen k-Varietät und da jeder ringendliche k-Kring ein affiner k-Kring wird, wenn wir darin das Ideal aller nilpotenten Elemente herausteilen, ist unser Maximalspektrum sogar ein Funktor

$$\mathrm{Max} : \mathrm{Kringo}^{\mathrm{re}}_k \to \mathrm{Varaff}_k$$

Satz 7.3.4.9. $(k = \bar{k})$. *Die Einschränkung unseres Funktors* Max *auf die volle Unterkategorie der affinen alias ringendlichen nilpotentfreien* k*-Kringe* $\mathrm{Kring}^k_{\mathrm{renf}}$ *und genauer ihre opponierte Kategorie ist eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{Max} : \mathrm{Kringo}^{\mathrm{renf}}_k \xrightarrow{\approx} \mathrm{Varaff}_k$$

Ergänzung 7.3.4.10. In der Sprache der Kategorientheorie ist Max zusammen mit weiteren Daten ein „quasiinverser Funktor“ zu unserer Äquivalenz $\mathcal{O}$ aus 7.3.3.12. Das wird in der weiterführenden Übung 7.3.4.23 ausgeführt, in der wir eine Adjunktion $(\mathcal{O}, \mathrm{Max})$ angeben.

Beweis. In der Tat zeigen unsere Isomorphismen $\eta_X : \mathrm{Max}\, \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} X$, daß jede affine Varietät isomorph ist zu einem Objekt im Bild unseres Funktors. Man sieht weiter leicht ein, daß für jeden Morphismus $\varphi : X \to Y$ von affinen Varietäten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Max}\, \mathcal{O}(X) & \xrightarrow{\sim} & X \\ {\scriptstyle \mathrm{Max}(\varphi^\sharp)} \downarrow & & {\scriptstyle \varphi} \downarrow \\ \mathrm{Max}\, \mathcal{O}(Y) & \xrightarrow{\sim} & Y \end{array}$$

mit diesen Isomorphismen in den Horizontalen kommutiert. Mithin ist für beliebige affine Varietäten X, Y die Verknüpfung

$$\mathrm{Var}(X,Y) \to \mathrm{Kring}^k(\mathcal{O}(Y),\mathcal{O}(X)) \to \mathrm{Var}(\mathrm{Max}\,\mathcal{O}(X),\mathrm{Max}\,\mathcal{O}(Y))$$

eine Bijektion. Da wir aber bereits wissen, daß auch die erste Abbildung $\varphi \mapsto \varphi^\sharp$ dieser Verknüpfung bijektiv ist, muß auch die zweite Abbildung $\psi \mapsto \mathrm{Max}\,\psi$ bijektiv sein. Dann aber muß auch $\mathrm{Max} : \mathrm{Kring}^k(B,A) \to \mathrm{Var}(\mathrm{Max}\,A, \mathrm{Max}\,B)$ bijektiv sein für alle $A, B \in \mathrm{Kring}^k_{\mathrm{renf}}$ und wir sind fertig. $\square$

7.3.4.11. Das Argument des vorherigen Beweises gehört eigentlich zur Kategorientheorie. Ist genauer $F : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ eine Äquivalenz von Kategorien und $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ ein Funktor und sind Isomorphismen $\eta_X : GFX \xrightarrow{\sim} X$ für alle $X \in \mathcal{A}$ gegeben derart, daß für alle $\varphi : X \to Y$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} GFX & \xrightarrow{\sim} & X \\ {\scriptstyle GF\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi}\downarrow \\ GFY & \xrightarrow{\sim} & Y \end{array}$$

mit η_X und η_Y in den Horizontalen kommutiert, so ist auch G eine Äquivalenz von Kategorien. Meist liegt einer derartigen Situation eine „Adjunktion“ zugrunde, so auch in unserem speziellen Fall, vergleiche 7.3.4.23.

7.3.4.12 (**Produkt affiner Varietäten**). Gegeben affine Varietäten X, Y wird ihr Produkt $X \times Y$ zu einer affinen Varietät durch die Vorschrift

$$\mathcal{O}(X \times Y) := [f \boxtimes g \mid f \in \mathcal{O}(X), g \in \mathcal{O}(Y)]$$

Hier ist $f \boxtimes g$ erklärt durch $(f \boxtimes g)(x,y) := f(x)g(y)$ und die eckigen Klammern meinen den von all diesen Funktionen in $\mathrm{Ens}(X \times Y, k)$ erzeugten Teilring. In der Tat ist er sicher ringendlich über k. Nach 4.6.1.47 induziert die Abbildung $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ weiter eine Injektion $\mathrm{Ens}(X,k) \otimes_k \mathrm{Ens}(Y,k) \hookrightarrow \mathrm{Ens}(X \times Y, k)$, und das liefert uns unmittelbar einen Ringisomorphismus

$$\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times Y)$$

Da aber nun nach 4.7.9.9 für zwei beliebige k-Kringe A, B jeder Homomorphismus von k-Kringen $A \otimes_k B \to k$ die Form $a \otimes b \mapsto \phi(a)\psi(b)$ hat für wohlbestimmte Homomorphismen $\phi : A \to k$, $\psi : B \to k$, folgt auch die Zweite unserer Bedingungen an eine affine Varietät. Die beiden Projektionen $\mathrm{pr}_X : X \times Y \twoheadrightarrow X$ und $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \twoheadrightarrow Y$ sind dann Morphismen von affinen Varietäten und $(X \times Y, \mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y)$ ist ein Produkt in der Kategorie der affinen Varietäten im Sinne von 4.7.7.1. Die einpunktige Varietät ist ein finales Objekt in dieser Kategorie.

Affine k-Varietäten X, Y	Affine k-Kringe A, B	Quelle
Produkt $X \times Y$	Tensorprodukt $A \otimes_k B$	7.3.4.12
Koprodukt $X \sqcup Y$	Produkt $A \times B$	7.3.4.19
abgeschlossene Einbettung $X \hookrightarrow Y$	surjektiver Homomorphismus $B \twoheadrightarrow A$	7.3.4.5
Einbettung $X_f \hookrightarrow X$ für $f \in \mathcal{O}(X)$ regulär	kanonischer Homomorphismus $A \to A[f^{-1}]$ für $f \in A$	7.4.4.12
Morphismus $X \to Y$ mit dichtem Bild	injektiver Homomorphismus $B \hookrightarrow A$	7.3.4.15
Zusammenhangskomponente	Block	7.3.4.22
abgeschlossene Teilmenge	Radikalideal	7.3.4.6
Punkt	maximales Ideal	7.3.4.6.5
irreduzible Teilmenge	Primideal	7.4.2.8
irreduzible Komponente	minimales Primideal	7.4.2.8

Diese Tabelle faßt einige Entsprechungen zwischen Räumen und Ringen zusammen. Ganz rechts ist jeweils die Quelle angegeben und einige Entsprechungen sind noch Zukunftsmusik. Das Tensorprodukt ist im Sinne von 4.7.9.9 zu verstehen.

Satz 7.3.4.13 (Offenes Verkleben von regulären Funktionen). *Seien X eine affine Varietät und $H \subset \mathcal{O}(X)$ eine Menge regulärer Funktionen, deren Nichtnullstellenmengen unsere Varietät überdecken, in Formeln $\mathcal{Z}(H) = \emptyset$. Gegeben eine Funktion $f : X \to k$ gilt dann*

$$f \in \mathcal{O}(X) \quad \Leftrightarrow \quad f|X_h \in \mathcal{O}(X_h)\ \forall h \in H$$

Beweis. Daß die Einbettung $X_h \hookrightarrow X$ für alle $h \in \mathcal{O}(X)$ ein Morphismus ist, daß also reguläre Funktionen zu regulären Funktionen auf Nichtnullstellenmengen einschränken, das ist Teil unserer Definition in 7.3.3.6 des Rings der regulären Funktionen auf Nichtnullstellenmengen. Wenn umgekehrt die Nichtnullstellenmengen X_h für $h \in H$ unser X überdecken, so gilt $\mathcal{Z}(H) = \emptyset$ und aus dem Nullstellensatz für affine Varietäten 7.3.4.6 folgt $\langle H \rangle_{\mathcal{O}(X)} = \mathcal{O}(X)$ und wir finden $a_i \in \mathcal{O}(X)$ mit

$$a_1 h_1 + \ldots + a_r h_r = 1$$

Es folgt, daß bereits gilt $\mathcal{Z}(h_1) \cap \ldots \cap \mathcal{Z}(h_r) = \emptyset$. Nach Annahme gibt es nun $g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{O}(X)$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $f(x) = g_i(x)/h_i(x)^n\ \forall x \in X \backslash \mathcal{Z}(h_i)$. Indem wir die h_i durch ihre n-ten Potenzen ersetzen, dürfen wir $n = 1$ annehmen. Wir finden auch mit demselben Argument wir zuvor $c_i \in \mathcal{O}(X)$ mit

$$c_1 h_1^2 + \ldots + c_r h_r^2 = 1$$

Es reicht nun zu zeigen, daß f und $c_1 h_1 g_1 + \ldots + c_r h_r g_r$ an jedem Punkt $x \in X$ denselben Wert annehmen. Für beliebiges $x \in X$ haben wir mit $S = S(x) = \{i \mid h_i(x) \neq 0\}$ in der Tat

$$\begin{aligned} f(x) &= \textstyle\sum_{i=1}^r c_i(x) h_i^2(x) f(x) \\ &= \textstyle\sum_{i \in S} c_i(x) h_i^2(x) f(x) \\ &= \textstyle\sum_{i \in S} c_i(x) h_i(x) g_i(x) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^r c_i(x) h_i(x) g_i(x) \end{aligned}$$

□

Übungen

Übung 7.3.4.14. Jeder Morphismus von affinen Varietäten ist stetig für die Zariskitopologie.

Übung 7.3.4.15. Seien X und Y affine Varietäten. Man zeige, daß ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ dichtes Bild hat genau dann, wenn der zugehörige Komorphismus eine Injektion $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ induziert.

Übung 7.3.4.16. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten. Gegeben eine Teilmenge $H \subset \mathcal{O}(X)$ ist die Nullstellenmenge ihres Urbilds $(\varphi^\sharp)^{-1}(H) \subset \mathcal{O}(Y)$ der Abschluß des Bildes ihrer Nullstellenmenge, in Formeln

$$\overline{\varphi(\mathcal{Z}(H))} = \mathcal{Z}((\varphi^\sharp)^{-1}(H))$$

Übung 7.3.4.17. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten. Gegeben eine Teilmenge $J \subset \mathcal{O}(Y)$ ist das Urbild ihrer Nullstellenmenge die Nullstellenmenge ihres Bildes, in Formeln

$$\varphi^{-1}(\mathcal{Z}(J)) = \mathcal{Z}(\varphi^\sharp(J))$$

Übung 7.3.4.18. Gegeben ein Morphismus $X \to Y$ von affinen Varietäten zeige man: Ist unter dem Komorphismus $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ der Ring $\mathcal{O}(X)$ modulendlich über $\mathcal{O}(Y)$, so hat unser Morphismus endliche Fasern. Hinweis: 7.1.1.22 und 7.3.4.17.

Übung 7.3.4.19 (**Koprodukt affiner Varietäten**). Gegeben affine Varietäten X, Y wird ihre disjunkte Vereinigung $X \sqcup Y$ zu einer affinen Varietät durch die Vorschrift

$$\mathcal{O}(X \sqcup Y) := \{f : X \sqcup Y \to k \mid f|_X \in \mathcal{O}(X) \text{ und } f|_Y \in \mathcal{O}(Y)\}$$

Die beiden Einbettungen $\mathrm{in}_X : X \hookrightarrow X \sqcup Y$ und $\mathrm{in}_Y : Y \hookrightarrow X \sqcup Y$ sind dann Morphismen von affinen Varietäten und $(X \sqcup Y, \mathrm{in}_X, \mathrm{in}_Y)$ ist ein Koprodukt in der Kategorie der affinen Varietäten im Sinne von 4.7.7.16. Die leere Varietät ist ein initiales Objekt in dieser Kategorie.

Übung 7.3.4.20 (**Faserprodukt affiner Varietäten**). Gegeben affine Varietäten X, Y mit Morphismen $a : X \to T$ und $b : Y \to T$ ist auch

$$X \times_T Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid ax) = b(y)\}$$

eine affine Varietät mit der als abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$ induzierten Struktur. Wir erhalten so ein Faserprodukt im Sinne der Kategorientheorie von affinen Varietäten. Die offensichtliche Abbilddung

$$\mathcal{O}(X) \otimes_{\mathcal{O}(T)} \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X \times_T Y)$$

ist eine Surjektion mit dem Nilradikal des Ausgangsrings als Kern.

Übung 7.3.4.21 (**Produkt mit k^n**). Gegeben eine affine Varietät X zeige man, daß wir einen Isomorphismus $\mathcal{O}(X)[T_1, \ldots, T_n] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times k^n)$ erhalten, wenn wir den Kringhomomorphismus betrachten, der auf $\mathcal{O}(X)$ durch das Zurückholen gegeben ist und unter dem der Variablen T_i die Projektion auf k^n gefolgt von der Projektion auf den i-ten Eintrag zugeordnet wird. Dieser Morphismus ist so natürlich, daß wir ihn oft in Sprache und Notation als Gleichheit behandeln werden.

Übung 7.3.4.22. Ein **Block** eines Krings kann charakterisiert werden als ein unzerlegbarer direkter Summand unseres Krings, betrachtet als Modul über sich selber. Mehr zur Blockzerlegung wird in 7.2.2.3 erklärt. Man konstruiere eine Bijektion zwischen der Menge der Zusammenhangskomponenten einer affinen Varietät X und der Menge der Blöcke ihres Rings von strukturierenden Funktionen $\mathcal{O}(X)$.

Übung 7.3.4.23 (**Adjunktion von Maximalspektrum und Funktionenring**). Wir notieren $\mathrm{Kringo} := \mathrm{Kring}^{\mathrm{opp}}$ die opponierte Kategorie zur Kategorie der Kringe und $\mathrm{Kringo}_k^{\mathrm{re}}$ die opponierte Kategorie zur Kategorie zur Kategorie der ringendlichen k-Kringe. Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ erinnern wir aus 7.3.4.7 den Funktor

$$\mathrm{Max} : \mathrm{Kringo}_k^{\mathrm{re}} \to \mathrm{Varaff}_k$$

von der Opponierten der Kategorie der ringendlichen k-Kringe zur Kategorie der affinen k-Varietäten. Gegeben ein ringendlicher k-Kring A und eine affine k-Varietät X betrachten wir nun die Menge $\mathrm{AH} = \mathrm{AH}(A, X)$ aller Abbildungen $A \times X \to k$, die für jedes feste $a \in A$ eine reguläre Funktion $X \to k$ liefern und für jedes feste $x \in X$ einen Homomorphismus von k-Kringen $A \to k$. Das Kürzel meint „Adjunktionshelfer“. Das Exponentialgesetz für Mengen induziert dann Bijektionen

$$\mathrm{Varaff}_k(X, \mathrm{Max}\, A) \;\tilde{\leftarrow}\; \mathrm{AH} \;\tilde{\to}\; \mathrm{Kring}_{\mathrm{re}}^k(A, \mathcal{O}(X)) = \mathrm{Kringo}_k^{\mathrm{re}}(\mathcal{O}(X), A)$$

Genauer betrachten wir $\mathrm{AH} \hookrightarrow \mathrm{Ens}(X, \mathrm{Kring}^k(A, k)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(X, \mathrm{Max}\, A)$ mit der ersten Abbildung nach dem Exponentialgesetz und der zweiten durch Nachschalten der Bijektion $\mathrm{Kring}^k(A, k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Max}\, A$ und prüfen, daß sie die behauptete Bijektion induziert. So erhalten wir eine Adjunktion

$$(\mathcal{O}, \mathrm{Max})$$

Insbesondere ist Max verträglich mit endlichen Produkten, ja mit beliebigen Limites soweit sie existieren, und macht Gruppenobjekte zu Gruppenobjekten sowie abelsche Gruppenobjekte zu abelschen Gruppenobjekten.

Weiterführende Übung 7.3.4.24. Gegeben eine affine Varietät X liefert das Bilden des Maximalspektrums einen Funktor

$$\mathrm{Max} : \mathrm{Kringo}_{\mathrm{re}}^{\mathcal{O}(X)} \to \mathrm{Varaff}_X$$

von opponierten ringendlichen $\mathcal{O}(X)$-Kringen zu affinen Varietäten über X mit Linksadjungiertem $\mathcal{O}$. Insbesondere ist Max verträglich mit endlichen Produkten und macht Gruppenobjekte zu Gruppenobjekten sowie abelsche Gruppenobjekte zu abelschen Gruppenobjekten. Die Einschränkung auf affine Kringalgebren ist eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Max} : \mathrm{Kringo}_{\mathrm{renf}}^{\mathcal{O}(X)} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Varaff}_X$$

7.3.5 Die symmetrische Algebra*

Definition 7.3.5.1. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k erklärt man die **symmetrische Algebra über** V als den Quotienten

$$\mathrm{S}_k V = \mathrm{Sym}_k V := \mathrm{T}_k V / \langle v \otimes w - w \otimes v \rangle$$

der Tensoralgebra aus 4.7.9.7 nach dem von allen $v \otimes w - w \otimes v$ mit $v, w \in V$ erzeugten Ideal. Wenn sich der Grundkörper von selbst versteht, schreiben wir auch kürzer $\mathrm{S}V$.

7.3.5.2. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k hat die offensichtliche k-lineare Abbildung $\mathrm{can} : V \hookrightarrow \mathrm{S}_k V$ die zur universellen Eigenschaft 4.7.9.7 der Tensoralgebra analoge **universelle Eigenschaft** für Kringalgebrenhomomorphismen. Ist genauer A ein k-Kring und $\varphi : V \to A$ eine k-lineare Abbildung, so gibt es genau einen Homomorphismus von k-Kringen $\hat{\varphi} : \mathrm{S}_k V \to A$ mit $\varphi = \hat{\varphi} \circ \mathrm{can}$, im Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathrm{S}_k V \arrow[d, dashed, "\hat{\varphi}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Wieder anders gesagt liefert das Vorschalten von can für jeden k-Kring A eine Bijektion $(\circ\,\mathrm{can}) : \mathrm{Kring}^k(\mathrm{S}V, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(V, A)$. Ist $B \subset V$ eine Basis von V, so erhalten wir mithin durch sukzessives Einschränken Bijektionen

$$\mathrm{Kring}^k(\mathrm{S}V, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(V, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(B, A)$$

Daraus folgt mit dem Yoneda-Lemma, daß die Einbettung $B \hookrightarrow \mathrm{S}V$ einen Isomorphismus von k-Kringen $k[{}'_!B] \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}V$ zwischen dem Polynomring in der Variablenmenge B und unserer symmetrischen Algebra induziert. Ist insbesondere $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, so erhalten wir einen Isomorphismus von Kringalgebren

$$k[{}'T_1, \ldots, T_n] \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_k V$$

durch die Vorschrift $T_i \mapsto v_i$.

7.3.5.3 (**Reguläre Funktionen auf Vektorräumen**). Gegeben ein Körper k und ein k-Vektorraum V liefert die universelle Eigenschaft einen Homomorphismus $\mathrm{S}_k V \to \mathrm{Ens}(V^*, k)$ von Kringalgebren in die Kringalgebra aller k-wertigen Funktionen auf dem Dualraum von V. Ist k ein unendlicher Körper, so ist dieser Homomorphismus injektiv und induziert einen Isomorphismus zwischen $\mathrm{S}_k V$ und derjenigen Unterringalgebra von $\mathrm{Ens}(V^*, k)$, die von allen Auswertungen an Vektoren $v \in V$ erzeugt wird. Ist zusätzlich V endlichdimensional, so erhalten wir auf

diese Weise einen Isomorphismus von $\mathrm{S}_k(V^*)$ mit der von allen Linearformen erzeugten Unterringalgebra von $\mathrm{Ens}(V,k)$. Arbeiten wir über einem algebraisch abgeschossenen Körper $k = \bar{k}$, so induziert mithin für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum V die Einbettung $V^* \hookrightarrow \mathrm{Ens}(V,k)$ einen Ringalgebrenisomorphismus

$$\mathrm{S}(V^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(V)$$

von der symmetrischen Algebra über dem Dualraum V^* mit der Algebra der regulären Funktionen auf V in Bezug auf seine Struktur als k-Varietät nach 9.1.1.10.

Ergänzung 7.3.5.4 (**Symmetrische Algebra und symmetrische Tensoren**). Ich halte die allgemein übliche Bezeichnung von $\mathrm{S}V$ als „symmetrische Algebra“ nicht für besonders glücklich und würde dazu lieber die „universelle Kringalgebra über V“ sagen. Ich will kurz die Herkunft der allgemein üblichen Bezeichnung erklären. Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_r$ operiert durch Vertauschung der Tensorfaktoren auf $V^{\otimes r}$. Die Invarianten unter dieser Operation, also die Elemente von $(V^{\otimes r})^{\mathcal{S}_r}$, heißen die **symmetrischen Tensoren** der Stufe r. In Charakteristik Null liefert nun für jedes $r \geq 0$ die Projektion

$$\mathrm{proj} : V^{\otimes r} \twoheadrightarrow \mathrm{S}^r V$$

einen Isomorphismus $(V^{\otimes r})^{\mathcal{S}_r} \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}^r V$ zwischen dem Raum der symmetrischen Tensoren der Stufe r und der homogenen Komponente $\mathrm{S}^r V$ der Algebra $\mathrm{S}V$. Daher kommt die Bezeichnung als „symmetrische Algebra“. Das Inverse dieses Isomorphismus heißt die **Symmetrisierung** und kann auf Monomen beschrieben werden durch die Formel $v_1 \ldots v_r \mapsto \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_r} v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(r)}$. Um das alles einzusehen führen wir den **Symmetrisator**

$$\mathrm{sym} : V^{\otimes r} \to (V^{\otimes r})^{\mathcal{S}_r}$$

ein durch die Abbildungsvorschrift $\mathrm{sym} : t \mapsto \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_r} t^\sigma$. Wir haben offensichtlich $\mathrm{sym}(t) = t$ für jeden symmetrischen Tensor t der Stufe r. Für die Inklusion

$$\mathrm{inkl} : (V^{\otimes r})^{\mathcal{S}_r} \hookrightarrow V^{\otimes r}$$

des Raums der symmetrischen Tensoren gilt in anderen Worten $\mathrm{sym} \circ \mathrm{inkl} = \mathrm{id}$ und sym ist insbesondere surjektiv. Weiter verschwindet sym auf $\ker(\mathrm{proj}) = \langle v\otimes w - w\otimes v\rangle \cap V^{\otimes r}$, in Formeln $\ker(\mathrm{proj}) \subset \ker(\mathrm{sym})$. Andererseits faktorisiert auch die kanonische Projektion $\mathrm{proj} : V^{\otimes r} \twoheadrightarrow \mathrm{S}^r V$ über sym als

$$\mathrm{proj} = \mathrm{proj} \circ \mathrm{inkl} \circ \mathrm{sym}$$

Also gilt auch umgekehrt $\ker(\mathrm{sym}) \subset \ker(\mathrm{proj})$. Zusammen folgt $\ker(\mathrm{sym}) = \ker(\mathrm{proj})$ und damit muß $\mathrm{proj} \circ \mathrm{inkl}$ surjektiv und injektiv sein und damit in der Tat, immer im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null, ein Isomorpismus

$$(V^{\otimes r})^{\mathcal{S}_r} \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}^r V$$

Ergänzung 7.3.5.5. Über Körpern positiver Charakteristik sind die beiden Funktoren $V \mapsto \mathrm{S}^r V$ und $V \mapsto (V^{\otimes r})^{\mathcal{S}_r}$ im allgemeinen nicht mehr isomorph. Man nennt sie die r-te **symmetrische Potenz** und die r-te **dividierte Potenz**. Im endlichdimensionalen Fall ist der eine dieser Funktoren konjugiert zum anderen unter dem Dualraumfunktor, wie wir gleich in 7.3.5.6 sehen werden. Die Situation ist im Fall symmetrischer Algebren also delikater als bei den äußeren Potenzen, die im endlichdimensionalen Fall schlicht mit dem Dualraumfunktor kommutieren.

Ergänzung 7.3.5.6 (**Symmetrische Multilinearformen**). Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k und $r \geq 0$ bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Symu}^r V := \{s : V \times \ldots \times V \to k \mid s \text{ ist multilinear und symmetrisch}\}$$

die Menge aller symmetrischen r-Multilinearformen, als da heißt aller Multilinearformen, die ihren Wert nicht ändern, wenn man die Einträge permutiert. Unter der Identifikation des Raums aller r-Multilinearformen mit $(V^{\otimes r})^*$ entspricht $\mathrm{Symu}^r V$ dem Bild von $(\mathrm{S}^r V)^*$ in $(V^{\otimes r})^*$, wir haben also einen kanonischen Isomorphismus

$$(\mathrm{S}^r V)^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Symu}^r V$$

Andererseits ist die offensichtliche Einbettung $(V^*)^{\otimes r} \hookrightarrow (V^{\otimes r})^*$ verträglich mit der Operation der symmetrischen Gruppe und induziert eine kanonische Einbettung $((V^*)^{\otimes r})^{\mathcal{S}_r} \hookrightarrow \mathrm{Symu}^r V$, die im endlichdimensionalen Fall sogar ein Isomorphismus ist. Zusammen erhalten wir eine kanonische Einbettung

$$((V^*)^{\otimes r})^{\mathcal{S}_r} \hookrightarrow (\mathrm{S}^r V)^*$$

und auch diese ist dann im endlichdimensionalen Fall ein Isomorphismus.

Übungen

Ergänzende Übung 7.3.5.7. Man zeige: Ist V ein Vektorraum über einem Körper k, so induziert der durch unsere Konstruktion der äußeren Algebra in 4.6.5.4 gegebene Ringalgebrenhomomorphismus $\mathrm{T}_k V \twoheadrightarrow \bigwedge V$ von der Tensoralgebra aus 4.7.9.7 auf die äußere Algebra einen Isomorphismus

$$\mathrm{T}_k V / \langle v \otimes v \mid v \in V \rangle \xrightarrow{\sim} \bigwedge V$$

der äußeren Algebra mit dem Quotienten der Tensoralgebra nach dem von allen $v \otimes v$ mit $v \in V$ erzeugten Ideal.

Ergänzende Übung 7.3.5.8. Bezeichnet $\mathrm{S}^r V \subset \mathrm{S} V$ das Bild von $V^{\otimes r} \subset \mathrm{T} V$, so haben wir eine Zerlegung

$$\mathrm{S} V = \bigoplus_{r \geq 0} \mathrm{S}^r V$$

und das Produkt eines Elements von $\mathrm{S}^r V$ mit einem Element von $\mathrm{S}^p V$ liegt in $\mathrm{S}^{r+p} V$. Hier heißt $\mathrm{S}^r V$ die **homogene Komponente vom Grad** r der symmetrischen Algebra $\mathrm{S}V$.

Übung 7.3.5.9. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k erhalten wir eine Bijektion der zweiten symmetrischen Potenz seines Dualraums $\mathrm{S}^2(V^*)$ mit dem Raum der quadratischen Formen auf V nach 4.2.2.1, indem wir der Nebenklasse des Tensors $f_1 \otimes g_1 + \ldots + f_n \otimes g_n$ die quadratische Form $v \mapsto f_1(v)g_1(v) + \ldots + f_n(v)g_n(v)$ zuordnen.

7.4 Primideale und Lokalisierung

7.4.1 Irreduzible Komponenten

Definition 7.4.1.1. Ein topologischer Raum heißt **noethersch**, wenn darin jede absteigende Folge von abgeschlossenen Mengen stationär wird.

7.4.1.2. Offensichtlich und formal nach Übung 3.1.9.22 besitzt in einer partiell geordneten Menge jede nichtleere Teilmenge ein minimales Element genau dann, wenn jede monoton fallende Folge in unserer Menge stagniert. Ein topologischer Raum ist insbesondere noethersch genau dann, wenn es in jedem nichtleeren System von abgeschlossenen Teilmengen unseres Raums ein bezüglich Inklusion minimales Element gibt.

Lemma 7.4.1.3. *Für jeden Körper k ist der k^n mit seiner Zariskitopologie ein noetherscher topologischer Raum.*

Beweis. Nach 7.1.1.16 gilt unter unseren Annahmen für jede abgeschlossene Teilmenge $X \not\subset k^n$ die Formel $X = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$. Ist nun $X_0 \supset X_1 \supset \ldots$ eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen in k^n, so ist $\mathcal{I}(X_0) \subset \mathcal{I}(X_1) \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge von Idealen im Polynomring über k. Nach dem Hilbert'schen Basissatz ist aber ein Polynomring in endlich vielen Veränderlichen über einem Körper stets noethersch, also wird unsere Folge von Idealen stationär und damit auch die Folge der $X_\nu = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X_\nu))$. □

Definition 7.4.1.4. Ein topologischer Raum X heißt **irreduzibel**, wenn er nicht leer ist und sich nicht schreiben läßt als eine Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen. Ein topologischer Raum heißt **reduzibel**, wenn er nicht irreduzibel ist. Insbesondere ist der leere Raum in unserer Terminologie reduzibel.

7.4.1.5. Eine Teilmenge eines topologischen Raums nennen wir reduzibel beziehungsweise irreduzibel, wenn sie diese Eigenschaft für die Spurtopologie hat.

Beispiel 7.4.1.6. In einer Menge mit der diskreten Topologie sind die irreduziblen Teilmengen genau die einpunktigen Teilmengen.

Beispiel 7.4.1.7. Sei k ein Körper. Das Achsenkreuz $\mathcal{Z}(T_1T_2) \subset k^2$ ist reduzibel in der Zariskitopologie, denn es läßt sich als die Vereinigung der beiden Achsen schreiben, die beide echte abgeschlossene Teilmengen sind.

Beispiel 7.4.1.8. Gegeben ein unendlicher Körper k ist für alle $n \geq 0$ der k^n irreduzibel in der Zariskitopologie. Nach 7.1.1.24 haben darin nämlich je zwei nichtleere offene Teilmengen nichtleeren Schnitt.

Definition 7.4.1.9. Die maximalen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raums heißen seine **irreduziblen Komponenten**.

Ergänzung 7.4.1.10. Die maximalen irreduziblen Teilmengen eines topologischen Raums sind nach Übung 7.4.1.28 stets abgeschlossen, wir könnten mithin das Wort „abgeschlossen“ in der vorhergehenden Definition auch weglassen.

Beispiel 7.4.1.11. Ist k ein unendlicher Körper, so sind die irreduziblen Komponenten des Achsenkreuzes $\mathcal{Z}(T_1T_2) \subset k^2$ genau die beiden Koordinatenachsen. Ähnlich kann man sich die irreduziblen Komponenten von beliebigen zariskiabgeschlossenen Mengen in k^n vorstellen. Ich rate davon ab, für das Konzept der irreduziblen Komponenten außerhalb der Zariskitopologie nach Anschauung zu suchen.

Satz 7.4.1.12 (**Zerlegung in irreduzible Komponenten**). *Ein noetherscher topologischer Raum besitzt nur endlich viele irreduzible Komponenten. Keine seiner Komponenten ist in der Vereinigung der Übrigen enthalten, und alle Komponenten zusammen überdecken den ganzen Raum.*

7.4.1.13. Wir schicken dem Beweis des Satzes zwei Lemmata voraus, von denen das erste eine einfache Konsequenz unseres Satzes ist. Wir geben jedoch für beide einen eigenständigen Beweis, damit wir uns beim Beweis des Satzes darauf stützen können. Mit dem Zorn'schen Lemma kann man im übrigen allgemeiner zeigen, daß überhaupt jeder beliebige topologische Raum die Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten ist.

Lemma 7.4.1.14. *Jede abgeschlossene Teilmenge eines noetherschen topologischen Raums läßt sich schreiben als Vereinigung von endlich vielen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen.*

Beweis. Bezeichne X unseren Raum und $\mathcal{A} \subset \mathrm{Pot}(X)$ das System aller abgeschlossenen Teilmengen und $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ das System aller abgeschlossenen Teilmengen $Y \not\subset X$, die sich nicht als endliche Vereinigung von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen schreiben lassen. Wäre das Lemma falsch, so wäre $\mathcal{F}$ nicht leer und hätte nach 7.4.1.2 ein minimales Element $Y \in \mathcal{F}$. Dies minimale Element Y wäre weder leer noch irreduzibel, besäße also eine Darstellung $Y = Y_1 \cup Y_2$ mit $Y_i \not\subset Y$ und $Y_i \neq Y$. Aufgrund der Minimalität von Y hätten wir aber $Y_1, Y_2 \notin \mathcal{F}$ und damit $Y \notin \mathcal{F}$ im Widerspruch zur Wahl von Y. □

Lemma 7.4.1.15. *Sei $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ eine Darstellung eines topologischen Raums als endliche Vereinigung von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen X_i. Gibt es keine nichttrivialen Inklusionen zwischen unseren Teilmengen, in Formeln $X_i \subset X_j \Rightarrow i = j$, so sind die X_i genau die irreduziblen Komponenten von X.*

Beweis. Ist $Y \not\subset X$ eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge, so haben wir

$$Y = (Y \cap X_1) \cup \ldots \cup (Y \cap X_r)$$

und folglich $Y = Y \cap X_i$ alias $Y \subset X_i$ für mindestens ein i. Also ist jede Komponente von X eines der X_i, und wäre ein X_j keine Komponente von X, so fänden wir ein $i \neq j$ mit $X_j \subset X_i$. □

Beweis von Satz 7.4.1.12. Nach 7.4.1.14 können wir X schreiben als endliche Vereinigung irreduzibler abgeschlossener Teilmengen

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$$

Indem wir überflüssige Teilmengen weglassen, dürfen wir weiter annehmen, daß kein X_i ganz in der Vereinigung der X_j mit $j \neq i$ enthalten ist. Der Satz folgt nun aus 7.4.1.15. □

7.4.1.16. Das Beweisprinzip von 7.4.1.14 heißt **noethersche Induktion**. Um es abstrakt zu fassen, sei $\mathcal{A}$ eine teilgeordnete Menge, in der jede absteigende Folge stagniert alias jede nichtleere Teilmenge mindestens ein minimales Element hat. Eine Teilmenge $\mathcal{Z} \subset \mathcal{A}$ derart, daß jedes Element von $\mathcal{A}$, für das alle echt kleineren Elemente zu $\mathcal{Z}$ gehören, bereits selbst zu $\mathcal{Z}$ gehört, muß dann bereits mit $\mathcal{A}$ zusammenfallen. In der Tat, wäre $\mathcal{F} := \mathcal{A} \backslash \mathcal{Z}$ nicht leer, so hätte es ein minimales Element, das nach Annahme aber doch zu $\mathcal{Z}$ gehören müßte.

Definition 7.4.1.17. Die **Krulldimension** $\operatorname{kdim}(X)$ eines topologischen Raums X ist das Supremum über alle Längen l von echt aufsteigenden Ketten

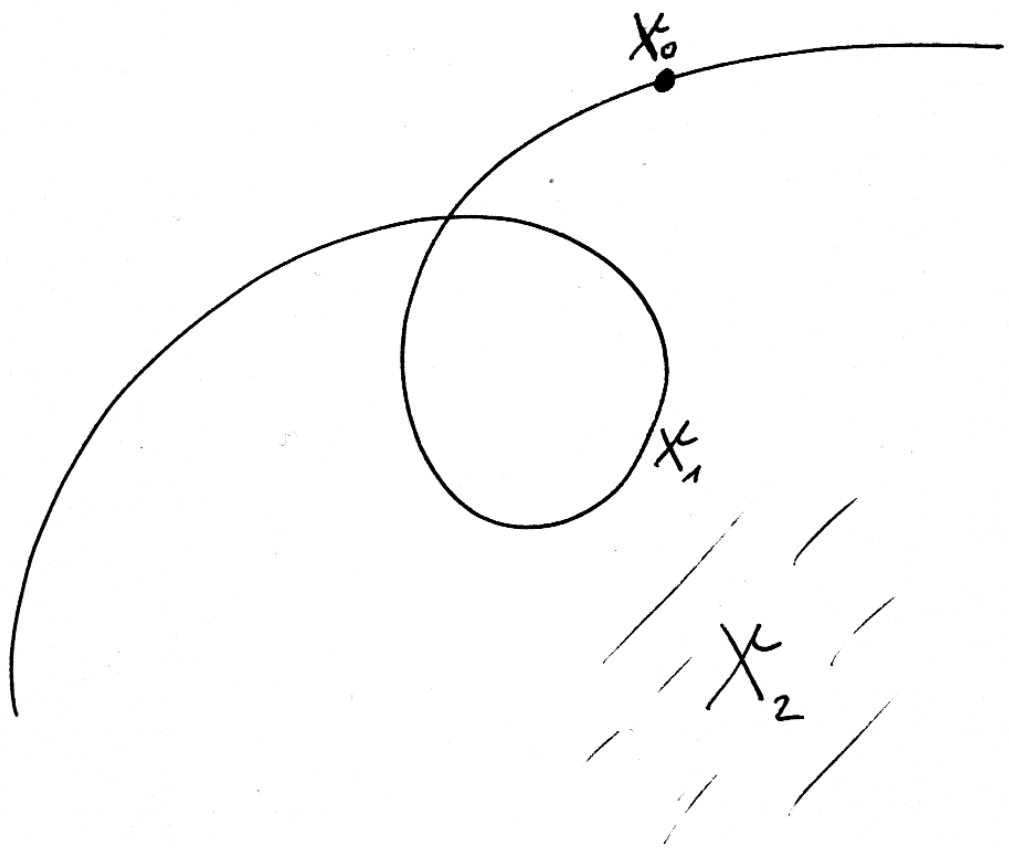
$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ldots \subsetneq X_l \subset X$$

von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X. Mögliche Werte sind natürliche Zahlen, ∞ und $-\infty$. Die hier verwendete Notation $\operatorname{kdim}(X)$ ist unüblich, meist schreibt man stattdessen schlicht $\dim(X)$. Etwas allgemeiner erklären wir für jede Teilmenge $Y \subset X$ die **Krullkodimension** $\operatorname{kdim}(Y \subset X)$ **von** Y **in** X als das Supremum über alle Längen l von echt aufsteigenden Ketten

$$Y \subset X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ldots \subsetneq X_l \subset X$$

von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X. Im Spezialfall einer einpunktigen Menge $Y = \{x\}$ schreiben wir $\operatorname{kdim}_x X := \operatorname{kdim}(\{x\} \subset X)$ und nennen das die **lokale Krulldimension von** X **bei** x. Die Krullkodimension verwenden wir nur, wenn Y in X irreduziblen Abschluß hat.

7.4.1.18 (**Diskussion der Notation**). Sicher ist es fragwürdig, das Inklusionssymbol als Trenner in einer Notation zu mißbrauchen. Mir schien aber die Notation $\operatorname{kdim}(Y \subset X)$ so viel suggestiver als etwa $\operatorname{kdim}(Y, X)$, daß ich diese Bedenken hintangestellt habe.



Die Krulldimension der Ebene ist Zwei. Jede Kette maximaler Länge von irreduziblen Teilmengen besteht wie angedeutet aus einem Punkt, einer irreduziblen Kurve im Sinne von 7.4.1.21 durch diesen Punkt, und der ganzen Ebene.

Beispiel 7.4.1.19. Wir haben $\operatorname{kdim}(\emptyset) = -\infty$ und $\operatorname{kdim}(X) = 0$ für jeden nichtleeren diskreten Raum X. Für einen unendlichen Körper k mit seiner Zariskitopologie gilt sicher $\operatorname{kdim}(k) = 1$. Offensichtlich gilt auch stets

$$\operatorname{kdim}(X) = \sup_{\substack{Y \not\subset X \\ \text{irreduzibel}}} \operatorname{kdim}(Y)$$

Hier ist zu verstehen, daß das Supremum wie angedeutet über alle abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen Y von X gebildet wird.

Vorschau 7.4.1.20. Im weiteren Verlauf der Vorlesung soll gezeigt werden, daß die Krulldimension in Bezug auf die Zariskitopologie einen vernünftigen Dimensionsbegriff für affine Varietäten liefert. Schon allein um in 7.5.4.5 zu zeigen, daß die Krulldimension von k^n eben n ist, müssen wir tiefer in die kommutative Algebra einsteigen. Offensichtlich ist nur die Abschätzung $\operatorname{kdim}(k^n) \geq n$, wie eine beliebige Folge aus jeweils ineinander enthaltenen affinen Teilräumen wachsender Dimension

$$\text{Punkt} \subsetneq \text{Gerade} \subsetneq \text{Ebene} \subsetneq \ldots \subsetneq \text{Hyperebene} \subsetneq k^n$$

zeigt, da nach 7.4.1.8 alle k^l irreduzibel sind. Ein weiteres wesentliches Ziel ist der Nachweis der Formel

$$\operatorname{kdim} Y + \operatorname{kdim}(Y \subset X) = \operatorname{kdim} X$$

für eine beliebige irreduzible affine Varietät X mit einer irreduziblen abgeschlossenen Teilmenge $Y \not\subset X$. Offensichtlich ist nur die Ungleichung $\leq$. Die andere Ungleichung zeigen wir in 7.5.7.14.

7.4.1.21. Ein noetherscher topologischer Raum heißt **äquidimensional**, wenn alle seine irreduziblen Komponenten dieselbe endliche Dimension haben. Er heißt **äqui-d-dimensional**, wenn alle seine irreduziblen Komponenten die Dimension d haben. Der leere Raum ist mithin äqui-d-dimensional von jeder Dimension d und ein äqui-d-dimensionaler Raum für $d < 0$ muß der leere Raum sein. Eine äqui-eindimensionale affine Varietät heißt eine **affine Kurve**. Eine äqui-zweidimensionale affine Varietät heißt eine **affine Fläche**.

Übungen

Übung 7.4.1.22. Ein noetherscher topologischer Raum kann nie isomorph sein zu einer echten Teilmenge von sich selbst.

Ergänzende Übung 7.4.1.23. Ein topologischer Raum ist noethersch genau dann, wenn jede seiner offenen Teilmengen kompakt ist.

Übung 7.4.1.24. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Man zeige, daß die irreduziblen algebraischen Teilmengen von k genau die einpunktigen Teilmengen sowie ganz k sind. Man zeige, daß die irreduziblen algebraischen Teilmengen von k^2 genau die einpunktigen Teilmengen, die Nullstellenmengen einzelner irreduzibler Polynome, sowie ganz k^2 sind. Hinweis: 7.1.1.21 listet alle algebraischen Teilmengen. 3.5.4.4 besagt, daß jedes nichtkonstante Polynom in zwei Veränderlichen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper unendlich viele Nullstellen hat.

Übung 7.4.1.25. Das Bild eines irreduziblen Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets irreduzibel.

Übung 7.4.1.26. Für einen topologischen Raum X sind gleichbedeutend: (1) X ist irreduzibel; (2) X ist nicht leer und je zwei nichtleere offene Teilmengen von X haben nichtleeren Schnitt; und (3) X ist nicht leer und jede offene nichtleere Teilmenge von X ist dicht in X.

Übung 7.4.1.27. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Man zeige, daß k die Krulldimension Eins hat und k^2 die Krulldimension Zwei. Hinweis: Die irreduziblen algebraischen Teilmengen wurden in diesen Fällen in 7.4.1.24 bestimmt.

Übung 7.4.1.28. Eine Teilmenge eines topologischen Raums ist genau dann irreduzibel, wenn ihr Abschluß irreduzibel ist.

7.4.2 Irreduzible algebraische Mengen und Primideale

Satz 7.4.2.1 (Reguläre Funktionen auf irreduziblen affinen Varietäten). *Eine affine Varietät X ist irreduzibel genau dann, wenn ihr Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(X)$ ein Integritätsring ist.*

7.4.2.2. Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist insbesondere k^n irreduzibel, denn jeder Polynomring über einem Körper ist ein Integritätsring. Daß k^n irreduzibel ist, wissen wir nach 7.4.1.8 sogar allgemeiner für jeden unendlichen Körper k.

Beweis. Eine affine Varietät ist leer genau dann, wenn ihr Ring von regulären Funktionen der Nullring ist. Es reicht also zu zeigen, daß eine nichtleere Varietät genau dann irreduzibel ist, wenn in ihrem Ring von regulären Funktionen gilt $ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ oder } b = 0)$. Gibt es nun in $\mathcal{O}(X)$ von Null verschiedene Elemente $a \neq 0 \neq b$ mit $ab = 0$, so sind $\mathcal{Z}(a)$ und $\mathcal{Z}(b)$ echte abgeschlossene Teilmengen von X mit $\mathcal{Z}(a) \cup \mathcal{Z}(b) = X$ und X ist nicht irreduzibel. Ist umgekehrt X nicht leer und nicht irreduzibel, so gibt es Teilmengen $I, J \subset \mathcal{O}(X)$ mit $\mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J) = X$ aber $\mathcal{Z}(I) \neq X \neq \mathcal{Z}(J)$. Dann gibt es auch Elemente $a \in I$ und $b \in J$ mit

$\mathcal{Z}(a) \neq X \neq \mathcal{Z}(b)$, und für diese gilt erst recht $\mathcal{Z}(a) \cup \mathcal{Z}(b) = X$. Damit gilt insbesondere $a \neq 0 \neq b$ aber $ab = 0$. $\square$

Beispiel 7.4.2.3 (**Irreduzibilität der Determinante**). Wir zeigen, daß die Determinante $\det \in k[X_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n]$ für alle $n \geq 1$ ein irreduzibles Polynom ist. Ihre Nullstellenmenge ist irreduzibel als das Bild der durch die Abbildungsvorschrift $(A, B) \mapsto A \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0) B$ gegebenen polynomialen Abbildung

$$\operatorname{Mat}(n; k) \times \operatorname{Mat}(n; k) \to \operatorname{Mat}(n; k)$$

Hätten wir $\det = fg$ mit nichtkonstanten f und g, so müßten demnach f und g dieselbe Nullstellenmenge haben wie $\det$. Wenn wir also einen Punkt D finden mit $\det(D) = 0$, an dem die partielle Ableitung nach mindestens einer unserer Variablen X_{ij} nicht verschwindet, so sind wir fertig. Das aber ist nun nicht mehr schwierig.

Definition 7.4.2.4. Ein Ideal I eines Krings R heißt ein **Primideal**, wenn gilt $I \neq R$ und $a, b \notin I \Rightarrow ab \notin I$. Die Menge aller Primideale eines Krings R heißt das **Spektrum** oder ausführlicher das **Primspektrum von** R und man notiert diese Menge

$$\operatorname{Spec} R := \{\mathfrak{p} \subset R \mid \mathfrak{p} \text{ ist ein Primideal von } R\}$$

7.4.2.5 (**Primideale und Integritätsbereiche**). Genau dann ist ein Ideal in einem Kring ein Primideal, wenn der Quotientenring nach besagtem Ideal ein Integritätsbereich ist. Insbesondere ist jedes maximale Ideal in einem Kring ein Primideal, denn der Quotient nach einem maximalen Ideal ist nach 7.1.6.7 ein Körper und jeder Körper ist ein Integritätsbereich.

Vorschau 7.4.2.6. Man kann den Begriff eines Primideals auf verschiedene Arten auf den Fall nicht notwendig kommutativer Ringe verallgemeinern. Diejenigen Ideale, die die Bedingung der obigen Definition wortwörtlich erfüllen, heißen im nichtkommutativen Kontext **vollprime Ideale**. Unter einem **Primideal** versteht man im nichtkommutativen Kontext dahingegen ein vom ganzen Ring verschiedenes Ideal P mit der Eigenschaft, daß für beliebige Ideale $I, J \subset R$ aus $IJ \subset P$ folgt $I \subset P$ oder $J \subset P$. Unter Idealen sind im nichtkommutativen Kontext immer beidseitige Ideale zu verstehen, andernfalls spricht man von Links- beziehungsweise Rechtsidealen.

Beispiele 7.4.2.7 (**Primideale im Ring der ganzen Zahlen**). Die Primideale im Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen sind genau das Nullideal und die von Primzahlen erzeugten Hauptideale. Allgemein ist ein Element eines Krings ein **Primelement** im Sinne von 6.2.5.1 genau dann, wenn unser Element nicht Null ist und das von besagtem Element erzeugte Hauptideal ein Primideal ist.

Satz 7.4.2.8 (**Primideale und irreduzible Mengen im geometrischen Fall**). *Gegeben eine affine Varietät X liefert das Bilden des Verschwindungsideals eine Bijektion zwischen der Menge aller irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X und der Menge aller Primideale im Ring $\mathcal{O}(X)$ der regulären Funktionen*

$$\begin{array}{ccc} \{Y \not\subset X \mid Y \textit{ irreduzibel}\} & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X) \\ Y & \mapsto & \mathcal{I}(Y) \end{array}$$

7.4.2.9. Natürlich sind alle einpunktigen Teilmengen von X irreduzibel. Sie entsprechen nach 7.3.4.6 unter unserer Bijektion genau den maximalen Idealen von $\mathcal{O}(X)$. Man mag sich im Licht des Satzes $\operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)$ vorstellen als die Menge X erweitert um jeweils einen zusätzlichen Punkt für jede irreduzible Teilmenge, die nicht bereits selbst nur aus einem Punkt besteht.

Beweis. Nach 7.3.4.6 liefern das Bilden des Verschwindungsideals $\mathcal{I}$ und das Bilden der Nullstellenmenge $\mathcal{Z}$ zueinander inverse Bijektionen zwischen den abgeschlossenen Teilmengen von X und den Radikalidealen von $\mathcal{O}(X)$, und nach dem noetherschen Isomorphiesatz liefert für alle $Y \subset X$ die Einschränkung von Funktionen einen Isomorphismus $\mathcal{O}(X)/\mathcal{I}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(Y)$. Nun ist nach 7.4.2.1 der Ring $\mathcal{O}(Y)$ genau dann ein Integritätsbereich, wenn Y irreduzibel ist, und das gilt nach 7.4.2.5 genau dann, wenn $\mathcal{I}(Y)$ ein Primideal ist. Unter unseren Bijektionen entsprechen also die irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen genau den primen Radikalidealen alias den Primidealen. □

7.4.2.10 (**Urbilder von Primidealen sind Primideale**). Ist $f : R \to S$ ein Kringhomomorphismus und $\mathfrak{p} \subset S$ ein Primideal, so ist auch $f^{-1}(\mathfrak{p}) \subset R$ ein Primideal. In der Tat haben wir eine Einbettung $R/f^{-1}(\mathfrak{p}) \hookrightarrow S/\mathfrak{p}$ und jeder Teilring eines Integritätsbereichs ist selbst ein Integritätsbereich. Jeder Kringhomomorphismus induziert also auf den Spektren der beteiligten Kringe eine Abbildung in der Gegenrichtung

$$\operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$$

Vorschau 7.4.2.11. Für Homomorphismen beliebiger Kringe $A \to B$ induziert die zugehörige Abbildung $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ im allgemeinen keine Abbildung $\operatorname{Max} B \to \operatorname{Max} A$ mehr und man kann auch nicht so einfach jedem Element $a \in A$ eine Abbildung von $\operatorname{Max} A$ oder $\operatorname{Spec} A$ in irgendein festes k zuordnen. Mit etwas mehr technischem Aufwand gelingt es aber dennoch, jedem Kring A ein unser $\operatorname{Max} A$ verallgemeinerndes geometrisches Objekt $\operatorname{Spec} A$ zuzuordnen, das „Spektrum von A“ in der Kategorie der „Schemata“.

Lemma 7.4.2.12 (**Primideale über einem Produkt von Idealen**). *In einem Kring R ist ein echtes Ideal $\mathfrak{p} \subsetneq R$ genau dann ein Primideal, wenn für beliebige Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \subsetneq R$ ein Ideal. Ist $\mathfrak{p}$ kein Primideal, so gibt es $a, b \in R \backslash \mathfrak{p}$ mit $ab \in \mathfrak{p}$ und damit $\langle a \rangle \not\subset \mathfrak{p}$ sowie $\langle b \rangle \not\subset \mathfrak{p}$ aber $\langle a \rangle \langle b \rangle \subset \mathfrak{p}$. Gibt es Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ aber $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{p}$, so gibt es $a \in \mathfrak{a} \backslash \mathfrak{p}$ und $b \in \mathfrak{b} \backslash \mathfrak{p}$ und für diese gilt nach Annahme $ab \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ und deshalb kann $\mathfrak{p}$ dann kein Primideal sein. □

7.4.2.13 (**Primideale über einem Schnitt von Idealen**). Gegeben Ideale $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ eines Krings R und ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ mit $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_s$, ja sogar schwächer mit $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_s$, gilt insbesondere $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_i$ für mindestens ein i. Liegt also eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge einer affinen Varietät in einer endlichen Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen, so liegt sie bereits in einer der vereinigten Teilmengen. Ist insbeosndere $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_s$ prim, so folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$ für mindestens ein i.

Proposition 7.4.2.14 (**Ideale in einer Vereinigung von Primidealen**). *Gegeben Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ eines Krings R und ein Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ folgt aus der Inklusion $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_s$ bereits $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_j$ für mindestens ein j.*

Beweis. Durch Widerspruch. Wir nehmen an, daß für alle j gilt $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_j$. Dann finden wir jeweils ein $g_j \in \mathfrak{a} \backslash \mathfrak{p}_j$. Im geometrischen Fall ist das eine Funktion $g_j \in \mathfrak{a}$, die auf $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)$ nicht identisch verschwindet. Es gilt, ein Element $g \in \mathfrak{a} \backslash (\mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_s)$ zu konstruieren. Im geometrischen Fall ist das eine reguläre Funktion $g \in \mathfrak{a}$, die auf keinem der $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)$ identisch verschwindet. Sicher dürfen wir dazu annehmen, daß es zwischen den $\mathfrak{p}_j$ keine Inklusionsrelationen gibt. Im geometrischen Fall bedeutet das, daß es zwischen den $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)$ keine Inklusionsrelationen gibt. Dann existieren für $i \neq j$ stets Elemente $f_{ij} \in \mathfrak{p}_i \backslash \mathfrak{p}_j$. Im geometrischen Fall sind das Funktionen, die auf $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_i)$ verschwinden, aber nicht auf $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)$. Das Produkt $g_j \prod_{i \neq j} f_{ij}$ gehört dann zu $\mathfrak{a}$ und zu allen $\mathfrak{p}_i$ mit $i \neq j$, gehört aber nicht zu $\mathfrak{p}_j$. Im geometrischen Fall ist es eine Funktion aus $\mathfrak{a}$, die auf allen $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_i)$ mit $i \neq j$ identisch verschwindet, aber nicht auf $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)$. Die Summe dieser Produkte ist dann unser gesuchtes g. □

Definition 7.4.2.15. Die **Krulldimension** $\operatorname{kdim}(R)$ eines Krings R wird erklärt als das Supremum aller Längen von echt aufsteigenden Ketten

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_l \subset R$$

vom Primidealen von R. Wir haben also $\operatorname{kdim}(R) \in \mathbb{N} \sqcup \{\pm\infty\}$.

Vorschau 7.4.2.16. Es gibt noethersche Kringe von unendlicher Krulldimension. Es gibt auch kommutative noethersche Integritätsbereiche endlicher Krulldimension, in denen sich nicht jede Primidealkette zu einer Primidealkette maximaler Länge verfeinern läßt. Für von Null verschiedene Kringe, die ringendlich sind

über einem Körper, werden wir jedoch im folgenden zeigen, daß die Krulldimension endlich ist, und daß sich im Fall eines über einem Körper ringendlichen Integritätsrings sogar jede Primidealkette zu einer Primidealkette maximaler Länge verfeinern läßt.

Beispiel 7.4.2.17. Wir haben $\operatorname{kdim}(0) = -\infty$ und $\operatorname{kdim}(k) = 0$ für jeden Körper k und $\operatorname{kdim}(\mathbb{Z}) = 1$ und $\operatorname{kdim}(k[T]) = 1$ für jeden Körper k.

7.4.2.18 (**Krulldimension von Kringen und Varietäten**). Ist X eine affine algebraische Varietät, so entsprechen nach 7.4.2.8 die abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X eineindeutig den Primidealen von $\mathcal{O}(X)$. Die Krulldimension des topologischen Raums X nach 7.4.1.17 stimmt folglich überein mit der Krulldimension des Krings $\mathcal{O}(X)$ im Sinne der vorhergehenden Definition 7.4.2.15, in Formeln

$$\operatorname{kdim}(X) = \operatorname{kdim} \mathcal{O}(X)$$

Um mit der Krulldimension arbeiten zu können, ja allein um zu zeigen, daß für $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen der k^n die Krulldimension n hat, müssen wir tiefer in die kommutative Algebra einsteigen. Bis hierher haben wir nur gezeigt, daß gilt $\operatorname{kdim}(k^n) = \operatorname{kdim} k[T_1, \ldots, T_n]$, aber jetzt müssen wir die rechte Seite bestimmen. Das gelingt in 7.5.4.4. Zunächst aber bestimmen wir in 7.4.7.18 die noetherschen Kringe der Krulldimension Null und beginnen im folgenden Abschnitt mit den Vorbereitungen.

Vorschau 7.4.2.19. In 7.5.6.13 zeigen wir, daß in gewissen Situationen die a priori anschaulichere Krulldimension mit dem leichter zu berechnenden „Transzendenzgrad des Körpers der rationalen Funktionen“ übereinstimmt.

7.4.2.20. Sei X ein topologischer Raum. Unter einer **Hyperfläche in** X verstehen wir eine Teilmenge $Y \subset X$ derart, daß jede ihrer irreduziblen Komponenten Z die Krullkodimension $\operatorname{kdim}(Z \subset X) = 1$ hat. Insbesondere ist damit für uns auch die leere Menge in jedem topologischen Raum stets eine Hyperfläche.

Proposition 7.4.2.21 (**Gleichungen für Hyperflächen**). *Gegeben eine affine Varietät X mit einem faktoriellen Ring $\mathcal{O}(X)$ von regulären Funktionen liefert das Bilden der Nullstellenmenge eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Irreduzible Elemente von} \\ \mathcal{O}(X),\ \textit{bis auf Einheiten} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Abgeschlossene irreduzible} \\ \textit{Hyperflächen in } X \end{array} \right\} \\ [f] & \mapsto & \mathcal{Z}(f) \end{array}$$

Beweis. Ist $\mathcal{O}(X)$ faktoriell, so ist für f irreduzibel das Hauptideal $\langle f \rangle$ prim und offensichtlich sind die minimalen Elemente der durch Inklusion angeordneten Menge aller von Null verschiedenen Primideale offensichtlich genau diese Hauptideale. $\square$

7.4.2.22. Ebenso erhalten wir eine Bijektion zwischen quadratfreien Elementen von $\mathcal{O}(X)$, bis auf Einheiten, und Hyperflächen in X. Ist $\mathcal{O}(X)$ nicht faktoriell, so ist die Aussage im allgemeinen nicht mehr richtig: In diesem Fall kann die Nullstellenmenge eines irreduziblen Elements mehrere Komponenten haben und es kann umgekehrt passieren, daß für das Verschwindungsideal einer irreduziblen Hyperfläche mehr als ein Erzeuger benötigt wird.

Vorschau 7.4.2.23. Was wir an dieser Stelle noch nicht zeigen können und worauf wir hinarbeiten ist die Erkenntnis 7.5.7.15, daß für jede nichtleere Hyperfläche Z in einer irreduziblen affinen Varietät X gilt $\operatorname{kdim} Z = \operatorname{kdim} X - 1$. In 7.5.4.5 zeigen wir $\operatorname{kdim} k^n = n$ und $\operatorname{kdim} \mathcal{Z}(f) = n-1$ für jedes nichtkonstante Polynom in n Variablen. Noch später zeigt der Krull'sche Hauptidealsatz 7.5.9.4, daß die Nullstellenmenge einer beliebigen von Null verschiedenen regulären Funktion auf einer beliebigen irreduziblen affinen Varietät eine Hyperfläche ist.

Übungen

Übung 7.4.2.24 (**Irreduzibilität der Gruppe** SL_n). $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(n; k)$ stets irreduzibel ist. Hinweis: Ähnlich wie in 3.2.5.10 erkennt man, daß es für jedes n ein N gibt derart, daß sich jede $(n \times n)$-Matrix der Determinante Eins darstellen läßt als Produkt von N Faktoren, die jeweils Diagonalmatrizen der Determinante Eins oder Elementarmatrizen der Determinante Eins sind. Man folgere, daß auch $1 - \det$ für $n \geq 1$ ein irreduzibles Polynom ist. Hinweis: 7.4.2.3.

Übung 7.4.2.25 (**Irreduzibilität von Produkten**). Seien k ein Körper und $X \subset k^n$ und $Y \subset k^m$ irreduzibel für die Zariskitopologie. Man zeige, daß dann auch $X \times Y \subset k^{n+m}$ irreduzibel ist für die Zariskitopologie. Hinweis: Man betrachte zunächst den Fall, daß Y nur aus einem Punkt besteht.

Ergänzung 7.4.2.26 (**Tensorprodukte von Integritätskringen**). Wir zeigen, daß das Tensorprodukt von zwei Integritätskringen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ stets wieder ein Integritätskring ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir uns auch auf den Fall ringendlicher Integritätskringe über k zurückziehen. Dann sind unsere Integritätskringe aber nach 7.3.2.5 isomorph zu Ringen polynomialer Funktionen auf Teilmengen gewisser k^n, und besagte Teilmengen sind irreduzibel nach 7.4.2.1. Damit ist auch ihr Produkt irreduzibel nach 7.4.2.25, dann bilden die polynomialen Funktionen auf dem Produkt einen Integritätsring nach 7.4.2.1, und nach 7.3.1.4 ist dieser Integritätsring gerade das Tensorprodukt über k unserer ursprünglichen Integritätsringe. Die $\mathbb{R}$-Kringalgebra $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ist kein Integritätsring, für Kringalgebren über einem nicht algebraisch abgeschlossenen Körper gilt die Aussage also im allgemeinen nicht.

Übung 7.4.2.27 (**Filtrierung durch Quotienten nach Primidealen**). Jeder endlich erzeugte Modul über einem noetherschen Kring besitzt eine endliche Filtrierung durch Untermoduln derart, daß alle Subquotienten isomorph sind zu Quotienten unseres Krings nach Primidealen. Hinweis: Man wähle mit 7.1.4.13 einen maximalen Untermodul, der eine Filtrierung der beschriebenen Art besitzt. Dann zeige man mit 7.1.4.13, daß im Fall eines von Null verschiedenen Moduls das System der Annullatoren aller seiner von Null verschiedenen Elemente maximale Elemente besitzt und daß diese maximalen Elemente Primideale sind. Schließlich zeige man, daß unser maximaler Untermodul bereits der ganze Modul gewesen sein muß.

Übung 7.4.2.28. Ein Primideal eines Krings muß alle nilpotenten Elemente des besagten Krings enthalten.

Übung 7.4.2.29 (**Urbilder von Primidealen im geometrischen Fall**). Ist $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten und $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ der zugehörige Komorphismus, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Max}\mathcal{O}(X) & \subset & \operatorname{Spec}\mathcal{O}(X) \\ \varphi\downarrow & & & & \downarrow(\varphi^\sharp)^{-1} \\ Y & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Max}\mathcal{O}(Y) & \subset & \operatorname{Spec}\mathcal{O}(Y) \end{array}$$

Hier ist zu verstehen, daß die Vertikale rechts jedem Primideal sein Urbild unter $\varphi^\sharp$ zuordnet. Hinweis: 7.3.4.16. Man zeige allgemeiner, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \{Z \not\subset X \mid Z \text{ irreduzibel}\} & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Spec}\mathcal{O}(X) \\ \downarrow & & \downarrow(\varphi^\sharp)^{-1} \\ \{W \not\subset Y \mid W \text{ irreduzibel}\} & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Spec}\mathcal{O}(Y) \end{array}$$

kommutiert mit den durch 7.4.2.8 gegebenen Horizontalen und der Abbildung $Z \mapsto \overline{\varphi(Z)}$ als linker Vertikale.

Übung 7.4.2.30. Man zeige: Gegeben Ideale $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ und Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ eines Krings R mit $\mathfrak{a}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ für alle i, j gibt es stets $f \in R$ mit $f \in \mathfrak{a}_i\ \forall i$ aber $f \notin \mathfrak{p}_j\ \forall j$. Hinweis: Man verwende 7.4.2.14 und 7.4.2.13.

Übung 7.4.2.31. Man zeige für jeden Körper k die Formeln $\operatorname{kdim}(k \times k) = 0$ und $\operatorname{kdim}(k[T]/\langle T^2\rangle) = 0$.

Übung 7.4.2.32. Gegeben ein surjektiver Kringhomomorphismus $A \twoheadrightarrow B$ zeige man $\operatorname{kdim}(A) \geq \operatorname{kdim}(B)$.

7.4.3 Lokalisierung

Definition 7.4.3.1. Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Ein R-Modul M heißt S**-lokal**, wenn für alle $s \in S$ die Multiplikation mit s einen Isomorphismus $(s\cdot) : M \xrightarrow{\sim} M$ liefert.

Definition 7.4.3.2. Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge und M ein R-Modul. Eine **Lokalisierung von** M **an** S ist ein Paar (L, lok) bestehend aus einem S-lokalen R-Modul L und einem Homomorphismus von R-Moduln $\mathrm{lok} : M \to L$ derart, daß jeder Homomorphismus von M in einen S-lokalen R-Modul eindeutig über lok faktorisiert.

7.4.3.3. In Formeln fordern wir also, daß für jeden weiteren S-lokalen R-Modul N das Vorschalten von lok eine Bijektion

$$(\circ\, \mathrm{lok}) : \mathrm{Hom}_R(L, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(M, N)$$

liefert. Diese Eigenschaft heißt die **universelle Eigenschaft der Lokalisierung**. Die üblichen Argumente zeigen, daß solch eine Lokalisierung eindeutig ist bis auf eindeutigen Isomorphismus, wenn sie denn existiert. Daß so eine Lokalisierung stets existiert, werden wir gleich in voller Allgemeinheit zeigen. Sie verdient deshalb eine Notation und einen bestimmten Artikel. Wir notieren die Lokalisierung eines Moduls M meist

$$(S^{-1}M, \mathrm{lok})$$

Ist unser Modul M bereits S-lokal, so ist (M, id) seine Lokalisierung.

7.4.3.4 (**Diskussion der Terminologie**). Die Herkunft der Bezeichnung wird hoffentlich im nächsten Abschnitt deutlich, in dem wir zeigen, inwiefern Ringe von regulären Funktionskeimen auf affinen Varietäten als Lokalisierungen des Rings aller regulären Funktionen beschrieben werden können.

7.4.3.5. Gegeben ein Monoid $(M, \circ)$ und eine Teilmenge $T \subset M$ notieren wir ganz allgemein $|T\rangle = |T, \circ\rangle = \langle T; \mathrm{Mon}\rangle$ wie in 6.3.5.1 das von T in M erzeugte Untermonoid. Man beachte, daß das von einer Teilmenge S eines Rings erzeugte multiplikative Monoid $|S\rangle$ etwas sehr anderes ist als das von S erzeugte Ideal $\langle S\rangle$.

7.4.3.6. Eine Teilmenge T eines Rings R heißt **multiplikativ abgeschlossen**, wenn die 1 zu T gehört und wenn gilt $s, t \in T \Rightarrow st \in T$. Unser $|S\rangle$ ist in diesem Sinne die kleinste multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R, die S umfaßt. Die meisten Quellen gehen bei der Definition der Lokalisierung gleich von einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge aus, aber das schien mir für das folgende weniger geschickt.

Satz 7.4.3.7 (Existenz der Lokalisierung). *Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $S \subset R$ und ein R-Modul M existiert stets eine Lokalisierung*

$$\mathrm{lok} : M \to S^{-1}M$$

Beweis. Wir betrachten das von S erzeugte multiplikative Untermonoid $|S\rangle \subset R$ und bilden die Menge $M \times |S\rangle$ und definieren darauf eine Relation $\sim$ durch die Vorschrift

$$(m, s) \sim (n, t) \text{ genau dann, wenn es } r \in |S\rangle \text{ gibt mit } rtm = rsn.$$

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, wie man unschwer einsieht. Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen mit $S^{-1}M$ und die Äquivalenzklasse von (m, s) mit $\frac{m}{s}$ oder m/s. Dann definieren wir auf $S^{-1}M$ eine Verknüpfung $+$ durch die Regel

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} := \frac{tm + sn}{st}$$

und überlassen dem Leser den Nachweis, daß diese Verknüpfung wohldefiniert ist und $S^{-1}M$ zu einer abelschen Gruppe macht. Schließlich definieren wir eine Abbildung $R \times S^{-1}M \to S^{-1}M$ durch die Regel

$$a \cdot \frac{n}{t} = \frac{an}{t}$$

und prüfen, daß sie wohldefiniert ist und die abelsche Gruppe $S^{-1}M$ zu einem S-lokalen R-Modul macht. Als Umkehrabbildung beim Nachweis der universellen Eigenschaft kann und muß man jedem Homomorphismus $\varphi : M \to N$ in einen S-lokalen R-Modul N die Abbildung $\tilde{\varphi} : S^{-1}M \to N$ zuordnen, die durch $\tilde{\varphi}(m/s) = s^{-1}\varphi(m)$ wohldefiniert ist. □

Beispiel 7.4.3.8. Die Lokalisierung eines kommutativen Integritätsbereichs R nach allen von Null verschiedenen Elementen ist sein Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(R)$ aus 3.5.5.2. An dieser Stelle können wir nur einen Isomorphismus als R-Modul behaupten, aber die Konstruktion der Ringstruktur wird nicht lange auf sich warten lassen.

7.4.3.9 (**Kern der kanonischen Abbildung in die Lokalisierung**). Nach Konstruktion besteht der Kern der kanonischen Abbildung $\mathrm{lok} : M \to S^{-1}M$ genau aus allen $m \in M$, für die es ein $r \in |S\rangle$ gibt mit $rm = 0$.

7.4.3.10 (**Die Lokalisierung als Funktor**). Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Wir ordnen jedem Homomorphismus von R-Moduln $\varphi : M \to N$ den nach 7.4.3.3 eindeutig bestimmten Homomorphismus $S^{-1}\varphi : S^{-1}M \to S^{-1}N$ mit $(S^{-1}\varphi) \circ \mathrm{lok} = \mathrm{lok} \circ \varphi : M \to S^{-1}N$ zu, der explizit gegeben wird durch

$$S^{-1}\varphi : \frac{m}{s} \mapsto \frac{\varphi(m)}{s}$$

So erhalten wir einen Funktor von der Kategorie der R-Moduln in sich selber und sogar in die volle Unterkategorie der S-lokalen R-Moduln.

Proposition 7.4.3.11 (**Exaktheit der Lokalisierung**). *Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Ist $M' \to M \to M''$ eine exakte Sequenz von R-Moduln, so ist auch $S^{-1}M' \to S^{-1}M \to S^{-1}M''$ eine exakte Sequenz.*

7.4.3.12. Insbesondere können und werden wir für jeden Untermodul $N \subset M$ auch seine Lokalisierung als Untermodul des lokalisierten Moduls auffassen. In Formeln bezeichnen wir mit $S^{-1}N$ also sowohl die Lokalisierung von N als auch ihr Bild $S^{-1}N \subset S^{-1}M$ unter der offensichtlichen Einbettung. Es wird jedoch auf diesen Unterschied nie ankommen.

Beweis. Geht m/s auf Null in M'', also $m \mapsto m''$ mit $m''/s = 0$, so gibt es $t \in |S\rangle$ mit $tm'' = 0$. Damit gibt es $n \in M'$ mit $n \mapsto tm$ und $n/ts \mapsto tm/ts = m/s$. $\square$

7.4.3.13 (**Lokalisierung und Restriktion der Skalare**). Ist $\varphi : A \to B$ ein Kringhomomorphismus und $S \subset A$ eine Teilmenge und M ein B-Modul, so ist der durch die universelle Eigenschaft gegebene Morphismus ein Isomorphismus

$$S^{-1}(\operatorname{res}_\varphi M) \xrightarrow{\sim} \operatorname{res}_\varphi(\varphi(S)^{-1}M)$$

In der Tat liefert die Funktorialität der Lokalisierung eine Struktur als B-Modul auf der linken Seite, und dieser ist offensichtlich $\varphi(S)$-lokal. Die universelle Eigenschaft der Lokalisierung liefert damit einen Homomorphismus von B-Moduln $\varphi(S)^{-1}M \to S^{-1}(\operatorname{res}_\varphi M)$ in die Gegenrichtung und man prüft leicht, daß diese Abbildung invers ist zu unserem behaupteten Isomorphismus.

7.4.3.14 (**Lokalisierung und multilineare Abbildungen**). Gegeben $R \supset S$ ein Kring mit einer Teilmenge und R-Moduln M, N und eine R-bilineare Abbildung $\varphi : M \times N \to L$ in einen S-lokalen R-Modul L gibt es genau eine R-bilineare Abbildung

$$\tilde{\varphi} : S^{-1}M \times S^{-1}N \to L$$

mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ (\operatorname{lok} \times \operatorname{lok})$. Das folgt unmittelbar aus der Konstruktion. Alternativ mag man bilineare Abbildungen mit linearen Abbildungen in den Hom-Raum identifizieren und bemerken, daß mit L auch $\operatorname{Hom}_R(N, L)$ ein S-lokaler R-Modul ist. Analoges gilt für multilineare Abbildungen.

Vorschau 7.4.3.15. In der in 18.1.6.1 eingeführten Terminologie ist die Lokalisierung ein Schmelzfunktor und ist sogar verträglich mit universellen Verschmelzungen, aber so weit will ich hier nicht gehen.

7.4.3.16 (**Lokalisierung von Kringen**). Ist R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge, so induziert die R-bilineare Abbildung der Multiplikation $R \times R \to R$ eine R-bilineare Abbildung

$$S^{-1}R \times S^{-1}R \to S^{-1}R$$

Man sieht unmittelbar, daß damit $S^{-1}R$ auch wieder ein Kring ist. Ist weiter M ein R-Modul, so induziert die R-bilineare Abbildung $R \times M \to M$ der Operation eine R-bilineare Abbildung

$$S^{-1}R \times S^{-1}M \to S^{-1}M$$

Man sieht unmittelbar, daß so $S^{-1}M$ zu einem $S^{-1}R$-Modul wird.

7.4.3.17. Ist R ein Integritätsbereich und $0 \notin S$, so ist auch $S^{-1}R$ ein Integritätsbereich und die kanonische Einbettung $S^{-1}R \hookrightarrow \operatorname{Quot} R$ identifiziert unsere Lokalisierung mit dem Teilring des Quotientenkörpers derjenigen Elemente, die sich als Bruch mit Nenner aus $|S\rangle$ darstellen lassen und für den wir bereits in 3.5.5.6 die Notation $S^{-1}R$ eingeführt hatten. Ist unser Kring R ein Integritätsbereich und S die Menge aller seiner von Null verschiedenen Elemente, so erhalten wir insbesondere genau unseren Quotientenkörper $S^{-1}R = \operatorname{Quot} R$ aus 3.5.5.2.

7.4.3.18 (**Lokalisierung von Ringalgebren**). Ist R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge und A eine R-Algebra, so induziert die R-bilineare Abbildung der Multiplikation $A \times A \to A$ eine R-bilineare Abbildung

$$S^{-1}A \times S^{-1}A \to S^{-1}A$$

Man sieht unmittelbar, daß die Assoziativität, Kommutativität und Unitarität sich von A auf $S^{-1}A$ übertragen. Ist weiter A eine Ringalgebra und M ein A-Modul, so induziert die R-bilineare Abbildung $A \times M \to M$ der Operation eine R-bilineare Abbildung

$$S^{-1}A \times S^{-1}M \to S^{-1}M$$

Man sieht unmittelbar, daß so $S^{-1}M$ zu einem $S^{-1}A$-Modul wird.

7.4.3.19 (**Universelle Eigenschaft der Lokalisierung von Kringen**). Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Offensichtlich ist dann $\operatorname{lok} : R \to S^{-1}R$ ein Ringhomomorphismus und unter diesem Ringhomomorphismus wird jedes Element von S auf eine Einheit abgebildet. Gegeben andererseits ein Kringhomomorphismus $\varphi : R \to A$ mit $\varphi(S) \subset A^\times$ ist der universelle R-Modulhomomorphismus $S^{-1}R \to A$ sogar ein Ringhomomorphismus. In anderen Worten faktorisiert jeder Kringhomomorphismus $R \to A$, unter dem alle Elemente von S auf Einheiten abgebildet werden, eindeutig über die Lokalisierung $\operatorname{lok} : R \to S^{-1}R$.

7.4.3.20 (**Lokale Moduln als Moduln über dem lokalisierten Kring**). Gegeben R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge ist die Restriktion der Skalare unter dem Kringhomomorphismus $\operatorname{lok} : R \to S^{-1}R$ eine offensichtlich Äquivalenz, ja ein Isomorphismus von Kategorien

$$S^{-1}R\text{-Mod} \xrightarrow{\sim} \{M \in R\text{-Mod} \mid M \text{ ist } S\text{-lokal}\}$$

Vorschau 7.4.3.21 (**Lokalisierung als Skalarerweiterung**). Für die mit allgemeinen Tensorprodukten und Erweiterung der Skalare 7.2.8.5 vertrauten Leser sei angefügt, daß für R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge die Abbildung $M \to (S^{-1}R) \otimes_R M$ gegeben durch $m \mapsto 1 \otimes m$ stets eine Lokalisierung von M ist. In anderen Worten ist die Lokalisierung eines Moduls nichts anderes als die

Erweiterung der Skalare zur entsprechenden Lokalisierung unseres Krings und damit ein Spezialfall der allgemeinen Skalarerweiterung. Allerdings haben die bei der Lokalisierung auftretenden Skalarerweiterungen sehr spezielle Eigenschaften, insbesondere die Exaktheit, die man mithilfe der hier gegebenen alternativen Konstruktion der Lokalisierung eines Moduls besser einsehen kann.

7.4.3.22 (**Lokalisieren nach einem einzigen Element**). Besteht $S = \{f\}$ nur aus einem einzigen Element, so benutzt man für die Lokalisierung nach S auch die Notationen

$$S^{-1}M = f^{-1}M = M_f = M[f^{-1}]$$

7.4.3.23 (**Lokalisieren an einem Primideal**). Ist R ein Kring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so benutzt man für die Lokalisierung eines R-Moduls M nach dem Komplement $S = R \backslash \mathfrak{p}$ unseres Primideals $\mathfrak{p}$ auch die Notation

$$S^{-1}M =: M_{\mathfrak{p}}$$

und nennt $M_{\mathfrak{p}}$ die **Lokalisierung von** M **an der Stelle** $\mathfrak{p}$. Man beachte, daß $S = R \backslash \mathfrak{p}$ in diesem Fall bereits multiplikativ abgeschlossen ist.

7.4.3.24 (**Diskussion der Notation**). Die beiden im vorhergehenden eingeführten Notationen für die Lokalisierung nach einem Element und die Lokalisierung an einem Primideal passen schlecht zusammen: Bei der Ersten schreibt man als unteren Index, was zu Invertieren ist, bei der Zweiten, was nicht zu invertieren ist. Was im Einzelfall gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen. Sprachlich unterscheide ich Lokalisierung an einem Primideal oder auch bei einem Primideal von der Lokalisierung nach irgendwelchen Elementen. Die Notation $R[f^{-1}]$ ist nicht ganz eindeutig: Es könnte auch gemeint sein, daß wir allgemeiner einen injektiven Kringhomomorphismus $R \hookrightarrow A$ gegeben haben und für ein invertierbares Element $f \in A^\times$, das nicht im Bild von R liegt, den vom Bild von R und f^{-1} erzeugten Teilring meinen.

7.4.3.25 (**Diskussion der Notation**). Man nehme sich beim Studium der Literatur in acht, daß $\mathbb{Z}_p$ meist nicht eine Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ meint, sondern vielmehr eine Vervollständigung wie in **??**.

7.4.3.26 (**Lokal-global-Prinzip**). Gegeben ein Kring R und ein R-Modul M ist die offensichtliche Abbildung stets eine Injektion

$$M \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R} M_{\mathfrak{m}}$$

in das Produkt der Lokalisierungen von M an allen maximalen Idealen von R. In der Tat, ist $x \in M$ nicht Null, so ist sein Annullator nicht ganz R und folglich enthalten in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Dann aber kann das Bild von x in $M_{\mathfrak{m}}$ nicht Null sein. Insbesondere ist ein Modul Null, wenn seine Lokalisierungen an allen maximalen Idealen Null sind.

Satz 7.4.3.27 (Lokalisierung ist verträglich mit Koprodukten). *Gegeben R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge ist der durch $M \mapsto S^{-1}M$ erklärte Lokalisierungsfunktor $R\text{-Mod} \to S^{-1}R\text{-Mod}$ verträglich mit Koprodukten.*

Ergänzung 7.4.3.28. Die Aussage des Satzes ebenso wie ihr Beweis spezialisieren ein allgemeines Resultat der Kategorientheorie, nach dem jeder Linksadjungierte Koprodukte und sogar beliebige Kolimites erhält.

7.4.3.29. Gegeben ein Koprodukt (K, in_i) einer Familie $(M_i)_{i\in I}$ von R-Moduln im Sinne von 4.7.7.16 ist also ausgeschrieben auch $(S^{-1}K, S^{-1}\,\mathrm{in}_i)$ ein Koprodukt der Familie $(S^{-1}M_i)_{i\in I}$ von $S^{-1}R$-Moduln. In anderen Worten gilt

$$S^{-1}\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I} S^{-1}M_i$$

unter der „offensichtlichen Abbildung“. Man beachte, daß die analoge Aussage für Produkte im allgemeinen nicht richtig ist: Die Lokalisierung ist nicht mit beliebigen Produkten verträglich. Bereits für das Produkt abzählbar unendlich vieler Kopien von $\mathbb{Z}$ und $S = \{2\}$ ist die natürliche Abbildung $S^{-1}\left(\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}\right) \to \prod_{i\in\mathbb{N}} S^{-1}\mathbb{Z}$ kein Isomorphismus, da das Tupel $(2^{-i})_{i\in\mathbb{N}}$ nicht in ihrem Bild liegt. Für endliche Produkte von Moduln wird die natürliche Abbildung aber natürlich ein Isomorphismus sein, endliche Produkte stimmen ja mit direkten Summen alias Koprodukten überein.

Beweis. Es gilt zu zeigen, daß für jeden $S^{-1}R$-Modul N das Vorschalten aller $S^{-1}\,\mathrm{in}_i$ eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}K, N) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M_i, N)$$

induziert. Vermittels unserer universellen Eigenschaft 7.4.3.3 läuft das auf den Nachweis der Tatsache hinaus, daß für jeden $S^{-1}R$-Modul N Vorschalten aller in_i eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_R(K, N) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$$

induziert. Das ist jedoch klar, da K ja ein Koprodukt war. □

Beispiel 7.4.3.30. Die Lokalisierung nach allen von Null verschiedenen ganzen Zahlen macht jede abelsche Gruppe alias jeden $\mathbb{Z}$-Modul zu einem $\mathbb{Q}$-Modul alias $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Gegeben eine endlich erzeugte abelsche Gruppe M ist die Dimension dieses $\mathbb{Q}$-Vektorraums die Zahl, die wir in 4.4.4.5 den Rang von M genannt hatten.

7.4.3.31 (**Lokalisierung erhält die Eigenschaft noethersch**). Jede Lokalisierung eines noetherschen Moduls ist wieder noethersch. Seien in der Tat R ein Kring, $S \subset R$ eine Teilmenge, M ein R-Modul und $\mathrm{lok} : M \to S^{-1}M$ die Abbildung in die Lokalisierung. Ist $U \subset S^{-1}M$ ein Untermodul und $E \subset \mathrm{lok}^{-1}(U)$ ein Erzeugendensystem seines Urbilds, so ist $\mathrm{lok}(T)$ ein Erzeugendensystem des $S^{-1}R$-Moduls U. Hat also jeder R-Untermodul von M ein endliches Erzeugendensystem, so auch jeder $S^{-1}R$-Untermodul von $S^{-1}M$. A forteriori ist jede Lokalisierung eines noetherschen Krings wieder noethersch.

Lemma* 7.4.3.32 (Bild des Primspektrums unter Kringhomomorphismen). *Gegeben eine Kringerweiterung $A \subset B$ ist ein Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ der Schnitt mit A eines Primideals $\mathfrak{q} \subset B$ genau dann, wenn gilt $\mathfrak{p} = A \cap \langle B\mathfrak{p} \rangle$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{p}$ der Schnitt mit A irgendeines Ideals von B, so gilt offensichtlich $\mathfrak{p} = A \cap \langle B\mathfrak{p} \rangle$. Hierzu brauchen wir noch nicht einmal $\mathfrak{p}$ prim vorauszusetzen. Gilt umgekehrt diese Identität und ist $\mathfrak{p}$ prim und setzen wir $S = A \backslash \mathfrak{p}$ und betrachten wir die Ringerweiterung $S^{-1}A \subset S^{-1}B$, so folgt

$$S^{-1}\mathfrak{p} = (S^{-1}A) \cap (S^{-1}\langle B\mathfrak{p} \rangle)$$

Das folgt formal etwa aus 19.4.8.15 mit der Interpretation der Lokalisierung als Lokalisierung von A-Moduln. Nun ist $S^{-1}\langle B\mathfrak{p} \rangle$ ein echtes Ideal in $S^{-1}B$, da es $S^{-1}A$ in einem echten Ideal trifft, und läßt sich damit vergrößern zu einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subset S^{-1}B$. Das Urbild in A dieses maximalen Ideals trifft nicht S und umfaßt $\mathfrak{p}$, ist folglich $\mathfrak{p}$ selbst. Das Urbild in B dieses maximalen Ideals ist mithin unser gesuchtes Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ mit $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. □

Ergänzung 7.4.3.33. Ein Modul M über einem Ring A heißt **endlich präsentierbar** oder kürzer **endlich präsentiert**, wenn es eine exakte Sequenz $A^n \to A^m \twoheadrightarrow M$ gibt mit $n, m \in \mathbb{N}$. Über einem linksnoetherschen Ring ist ein Modul genau dann endlich präsentiert, wenn er endlich erzeugt ist.

7.4.3.34 (**Lokalisierung und Homomorphismenräume**). Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $S \subset R$ und eine R-Ringalgebra A und A-Moduln M, N mit M endlich präsentiert ist mit der Lokalisierung von Ringalgbren und ihren Moduln nach 7.4.3.18 die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$S^{-1}\operatorname{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

In der Tat können wir dann eine im Sinne von 7.1.3.19 rechtsexakte Sequenz

$A^n \to A^m \twoheadrightarrow M$ finden, die hinwiederum ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S^{-1}\operatorname{Hom}_A(M,N) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N) \arrow[d, hook] \\
S^{-1}\operatorname{Hom}_A(A^m,N) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}A^m, S^{-1}N) \arrow[d] \\
S^{-1}\operatorname{Hom}_A(A^n,N) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}A^n, S^{-1}N)
\end{tikzcd}$$

liefert. Die beiden unteren Horizontalen darin sind Isomorphismen, da beide Räume jeweils mit $S^{-1}N^m$ und $S^{-1}N^n$ identifiziert werden können, und damit ist auch die obere Horizontale ein Isomorphismus, wie man leicht direkt sieht und formal aus dem Fünferlemma folgern mag.

Beispiel 7.4.3.35. Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $S \subset R$ und R-Moduln M, N ist die offensichtliche Abbildung

$$S^{-1}\operatorname{Hom}_R(M,N) \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

im allgemeinen kein Isomorphismus. Im Fall der $\mathbb{Z}$-Moduln $M = N = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ und $S = \mathbb{Z}\backslash 0$ etwa haben wir $\operatorname{Hom}_{S^{-1}\mathbb{Z}}(S^{-1}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}), S^{-1}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) = 0$ und sogar $S^{-1}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$, aber die Identität $\mathrm{id} \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ hat nach 7.4.3.9 ein von Null verschiedenes Bild in $S^{-1}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Geometrischer kann man auch $R = k[X]$ betrachten für einen Körper k und $M = N = k[X, X^{-1}]/k[X]$ und $S = \{X\}$ und wieder verschwinden die lokalisierten Moduln, nicht aber der lokalisierte Homomorphismenraum.

7.4.3.36 (**Projektivitätskriterium**). Ein Modul über einem Kring ist projektiv und endlich erzeugt genau dann, wenn er endlich präsentierbar und **lokal frei** ist, als da heißt, wenn seine Lokalisierung an jedem maximalen Ideal frei ist. Die schwierige Richtung beim Beweis geht so: Gegeben $K \hookrightarrow F \twoheadrightarrow M$ exakt mit F frei von endlichem Rang und K endlich erzeugt und M lokal frei wollen wir $\operatorname{Hom}(M,F) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(M,M)$ zeigen. Da wir aber Surjektivität nach 7.4.3.41 lokal prüfen dürfen, folgt das aus 7.4.3.34.

Übungen

Übung 7.4.3.37. Seien R ein Kring und M ein R-Modul und $a, b \in R$. Operiert ab als Isomorphismus auf M, so auch a und b. Ist $S \subset R$ eine Teilmenge und T die Menge der Faktoren von Elementen von S, so ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $S^{-1}M \xrightarrow{\sim} T^{-1}M$.

Übung 7.4.3.38 (**Wiederholtes Lokalisieren**). Seien R ein Kring und $S, T \subset R$ Teilmengen und M ein R-Modul. So ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$T^{-1}(S^{-1}M) \xrightarrow{\sim} (S \cup T)^{-1}M$$

Übung 7.4.3.39 (**Lokalisierung bei kleinem Träger**). Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $S \subset R$ und ein R-Modul M betrachten wir die Teilmenge

$$M_{(S)} := \{m \in M \mid \operatorname{Ann}(m) + Rf = R \ \ \forall f \in S\}$$

Man zeige, daß sie ein Untermodul $M_{(S)} \subset M$ ist und sich nicht ändert, wenn wir S durch sein multiplikatives Erzeugnis $|S\rangle$ ersetzen. Man zeige, daß die Komposition $M_{(S)} \hookrightarrow M \to S^{-1}M$ Isomorphismen

$$M_{(S)} \xrightarrow{\sim} S^{-1}(M_{(S)}) \xrightarrow{\sim} (S^{-1}M)_{(S)}$$

induziert, wobei wir ganz rechts auch nur die R-Modulstruktur verwenden. Gegeben R-Moduln M, N mit $M = M_{(S)}$ liefert, da ein Homomorphismus $M \to N$ stets $M_{(S)}$ nach $N_{(S)}$ abbilden muß, folglich die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

Übung 7.4.3.40 (**Lokal-global-Prinzip, Variante**). Gegeben ein Kring R und Elemente $f, g, \ldots, h \in R$, die als Ideal ganz R erzeugen, zeige man, daß die offensichtliche Abbildung eine Injektion $N \hookrightarrow N_f \times N_g \times \ldots \times N_h$ induziert.

Übung 7.4.3.41 (**Lokal-global-Prinzip, zweite Variante**). Seien R ein Kring und $\varphi : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Man zeige, daß φ genau dann surjektiv beziehungsweise injektiv ist, wenn für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ die auf den Lokalisierungen induzierte Abbildung $M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ surjektiv beziehungsweise injektiv ist. Allgemeiner zeige man, daß eine Sequenz von Moduln exakt ist genau dann, wenn ihre Lokalisierung an jedem maximalen Ideal exakt ist. Hinweis: Exaktheit der Lokalisierung 7.4.3.11 und lokal-global-Prinzip 7.4.3.26.

Übung 7.4.3.42 (**Lokalität der Flachheit**). Ein Modul M über einem Kring R ist flach genau dann, wenn für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ der lokalisierte Modul $M_{\mathfrak{m}}$ flach ist über R oder gleichbedeutend über $R_{\mathfrak{m}}$. Hinweis: Lokal-global-Prinzip 7.4.3.41.

Übung 7.4.3.43 (**Lokal-global-Prinzip, dritte Variante**). Gegeben ein Kring R, ein R-Modul N und eine Teilmenge $E \subset R$, die als Ideal ganz R erzeugt, zeige man die Exaktheit der Sequenz

$$0 \to N \to \prod_{f \in E} N_f \to \prod_{(f,g) \in E \times E} N_{fg}$$

mit dem Produkt der Differenzen der natürlichen Abbildungen $N_f \to N_{fg}$ und $N_g \to N_{fg}$ in die Lokalisierung nach dem Produkt fg an letzter Stelle. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall zurück, daß E endlich ist.

Übung 7.4.3.44. Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Gegeben ein R-Modul M mit Untermoduln $K, L \subset M$ zeige man die Identität $S^{-1}(K \cap L) = (S^{-1}K) \cap (S^{-1}L)$.

Übung 7.4.3.45. Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Gegeben Ideale $I, J \subset R$ zeige man die Identität $S^{-1}(IJ) = (S^{-1}I)(S^{-1}J)$ von Idealen von $S^{-1}R$.

Ergänzende Übung 7.4.3.46. Gegeben ein endlich präsentierter Modul M über einem von Null verschiedenen Kring R gibt es stets ein von Null verschiedenes Element $f \in R \backslash 0$ mit M_f frei von endlichem Rang über R_f. Hinweis: Man versuche, eine präsentierende Matrix in Smith-Normalform zu bringen.

Übung 7.4.3.47. Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge und M ein R-Modul. Ist S endlich und f das Produkt aller Elemente von S ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $M_f \xrightarrow{\sim} S^{-1}M$.

Übung 7.4.3.48 (**Lokalisierung von Invariantenringen**). Seien A ein Kring und $G \subset \mathrm{Kring}^\times(A)$ eine endliche Menge von Ringautomorphismen von A und $S \subset A$ eine G-stabile multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Man zeige, daß die Einbettung $A^G \hookrightarrow A$ einen Isomorphismus

$$(S^G)^{-1}(A^G) \xrightarrow{\sim} (S^{-1}A)^G$$

zwischen der Lokalisierung des Invariantenrings und dem Invariantenring der Lokalisierung induziert. Hinweis: Die Exakteit der Lokalisierung 7.4.3.11 mag hier helfen.

Übung 7.4.3.49 (**Lokalisierung von Invariantenringen, Variante**). Seien A ein noetherscher Kring und $G \subset \mathrm{Kring}^\times(A)$ eine Menge von Ringautomorphismen von A und $s \in A^G$ ein Element des Invariantenrings. Man zeige, daß die Einbettung $A^G \hookrightarrow A$ einen Isomorphismus

$$s^{-1}(A^G) \xrightarrow{\sim} (s^{-1}A)^G$$

zwischen der Lokalisierung des Invariantenrings und dem Invariantenring der Lokalisierung induziert. Hinweis: Die Exakteit der Lokalisierung 7.4.3.11 mag hier helfen. Weiter beachte man, daß die Kette der Annullatoren der Potenzen s^n von s stagnieren muß.

Übung 7.4.3.50. Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Genau dann ist $S^{-1}R$ der Nullring, wenn das Monoid $|S\rangle$ die Null von R enthält. Genau dann ist a/s eine Einheit in $S^{-1}R$, wenn es $b \in R$ und $t \in |S\rangle$ gibt mit $ab = t$.

Übung 7.4.3.51. Gegeben ein Integritätsbereich A zeige man in $\mathrm{Quot} A$ die Identität

$$A = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, A} A_{\mathfrak{m}}$$

Hinweis: Gegeben $f \in \mathrm{Quot} A \backslash A$ kann das Ideal $I = \{g \in A \mid gf \in A\}$ nie ganz A sein.

Übung 7.4.3.52. Ein Element eines Moduls heißt ein **Torsionselement**, wenn es von einem von Null verschiedenen Element des operierenden Rings annulliert wird. Ein Torsionselement einer abelschen Gruppe nach 4.4.3.14 ist also ein Torsionselement im hier erklärten Sinne des zugehörigen $\mathbb{Z}$-Moduls. Man zeige, daß gegeben ein Modul M über einem Integritätskring A der Kern der natürlichen Abbildung $M \to M \otimes_A \mathrm{Quot}\, A$ genau aus allen Torsionselementen von M besteht.

Übung 7.4.3.53. Ist speziell f die Variable $f = t$ in einem Polynomring $R[t]$ über einem Kring R, so schreibt man kurz $R[t][t^{-1}] = R[t, t^{-1}]$ und nennt diesen Ring den **Ring der Laurentpolynome über** R. Man zeige, daß sich jedes Element von $R[t, t^{-1}]$ eindeutig darstellen läßt als eine endliche Linearkombination $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i$ mit Koeffizienten $a_i \in R$, daß also die t^i eine Basis des R-Moduls $R[t, t^{-1}]$ bilden. Man konstruiere des weiteren einen Isomorphismus $R[\![t]\!][t^{-1}] \xrightarrow{\sim} R(\!(t)\!)$ zwischen der Lokalisierung an der Variablen des Rings der formalen Potenzreihen und dem Ring der formalen Laurentreihen aus 3.5.3.43.

Übung 7.4.3.54 (**Lokalisierung faktorieller Ringe**). Gegeben ein faktorieller Ring R bezeichne

$$\mathrm{irk}(R)$$

die Menge **Irreduziblenklassen**, als da heißt der Bahnen irreduzibler Elemente von R unter der Einheitengruppe $R^\times$. Gegeben ein irreduzibles $r \in R$ bezeichne $[r] \in \mathrm{irk}(R)$ seine Klasse. Man zeige: Lokalisiert man einen faktoriellen Ring R nach einer Teilmenge S, die nicht die Null enthält, so ist auch die Lokalisierung $S^{-1}R$ faktoriell und die Einbettung $R \hookrightarrow S^{-1}R$ induziert eine Bijektion

$$\{[r] \in \mathrm{irk}(R) \mid r \text{ teilt kein } s \in S\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{irk}(S^{-1}R)$$

Zum Beispiel ist also $\mathbb{Z}[d^{-1}]$ für $d \neq 0$ faktoriell und seine Primelemente sind bis auf Einheiten genau die Primzahlen, die d nicht teilen.

Übung 7.4.3.55 (**Lokalisierung nilpotentfreier Kringe**). Man zeige, daß jede Lokalisierung eines nilpotentfreien Krings wieder nilpotentfrei ist.

Übung 7.4.3.56 (**Lokalisierung und Radikal**). Man zeige, daß jede Lokalisierung des Radikals eines Ideals mit dem Radikal des lokalisierten Ideals übereinstimmt.

Übung 7.4.3.57. Gegeben ein Kring A und ein Element $f \in A$ zeige man, daß das Einsetzen von f^{-1} für T einen Ringisomorphismus

$$A[T]/\langle fT - 1\rangle \xrightarrow{\sim} A[f^{-1}]$$

induziert. Insbesondere ist nach 7.4.3.55 für einen nilpotentfreien Kring A das Ideal $\langle fT - 1\rangle$ stets ein Radikalideal. Hinweis: Man konstruiere eine inverse Abbildung mithilfe der universellen Eigenschaft der Lokalisierung.

Übung 7.4.3.58 (**Lokalisierung endlichdimensionaler Kringalgebren**). Gegeben k ein Körper und R eine endlichdimensionale k-Kringalgebra und $f \in R$ beliebig induziert die kanonische Abbildung in die Lokalisierung einen Isomorphismus $R/\operatorname{Hau}((f\cdot)|R;0) \xrightarrow{\sim} R_f$ zwischen dem Quotient nach dem Hauptraum zum Eigenwert Null der Multiplikation mit f und der Lokalisierung nach f.

Übung 7.4.3.59 (**Lokalisierung vertauscht mit Restklassenbildung**). Gegeben ein Kring R und ein Ideal $I \subset R$ und eine Teilmenge $S \subset R$ ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$S^{-1}R/S^{-1}I \xrightarrow{\sim} \bar{S}^{-1}(R/I)$$

für $\bar{S} \subset R/I$ das Bild von S unter der Quotientenabbildung. Hinweis: Exaktheit der Lokalisierung und Verträglichkeit mit der Restriktion der Skalare 7.4.3.13.

Ergänzende Übung 7.4.3.60 (**Tensorprodukt und Lokalisierung**). Gegeben ein Kring A, eine Teilmenge $S \subset A$ und ein A-Modul M zeige man, daß die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$S^{-1}A \otimes_A M \xrightarrow{\sim} S^{-1}M$$

liefert. Hinweis: Man mag die inverse Abbildung explizit angeben, oder auch mithilfe von 7.2.8.7 die universellen Eigenschaften vergleichen. Ist zusätzlich N ein $S^{-1}A$-Modul, so ist nach 7.2.6.15 die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} N$.

7.4.4 Lokalisierung im geometrischen Kontext

7.4.4.1. Gegeben (X, x) ein bepunkteter topologischer Raum und k ein Kring erklären wir die k-Kringalgebra

$$\operatorname{Ens}(X, k)_x$$

der **Keime k-wertiger Funktionen bei** x als die Menge aller Äquivalenzklassen von Paaren (U, f) mit $x \in U \Subset X$ und $f : U \to k$ unter der Äquivalenzrelation

$$(U, f) \sim (U', f') \quad \Leftrightarrow \quad \exists W \Subset U \cap U' \text{ mit } x \in W \text{ und } f|_W = f'|_W.$$

Quasi per definitionem induziert für jede offene Teilmenge $V \Subset X$ mit $x \in V$ die Restriktion von Funktionen einen Isomorphismus $\mathrm{Ens}(X,k)_x \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(V,k)_x$ zwischen den jeweiligen Räumen von Funktionskeimen.

Beispiel 7.4.4.2 (**Lokalisierung und Funktionskeime**). Seien (X,x) eine bepunktete affine Varietät. Im Ring der Funktionskeime betrachten wir den Teilring

$$\mathcal{O}_{X,x} \subset \mathrm{Ens}(X,k)_x$$

aller **regulären Funktionskeime** alias aller Funktionskeime mit einem Repräsentanten der Gestalt (X_h, f) für $h \in \mathcal{O}(X)$ mit $x \in X_h$ und $f \in \mathcal{O}(X_h)$. Der von der universellen Eigenschaft der Lokalisierung von $\mathcal{O}(X)$ am maximalen Ideal $\mathcal{I}(x)$ herrührende Homomorphismus ist dann sogar ein Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X)_{\mathcal{I}(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}$$

In der Tat ist er per definitionem surjektiv, und liefert ein Bruch f/s die Nullfunktion, so muß f bereits auf einer offenen Umgebung U von x verschwinden, die wir von der Gestalt X_h für $h \in \mathcal{O}(X)$ mit $h(x) \neq 0$ annehmen dürfen. Daraus folgt jedoch $f/s = hf/th = 0$ in unserer Lokalisierung.

7.4.4.3 (**Reguläre Funktionen auf offenen Teilmengen**). Gegeben eine affine Varietät X und eine offene Teilmenge $U \Subset X$ nennen wir eine Funktion $f : U \to k$ **lokal regulär** und demnächst **regulär**, wenn sie an jeder Stelle $x \in U$ einen regulären Funktionskeim alias ein Element von $\mathcal{O}_{X,x}$ repräsentiert. Die Menge aller lokal regulären Funktionen $U \to k$ notieren wir

$$\mathcal{O}_X(U)$$

7.4.4.4 (**Lokal reguläre Funktionen sind regulär**). Sei X eine affine Varietät. Unsere Erkenntnisse 7.3.4.13 zum offenen Verkleben regulärer Funktionen zeigen unmittelbar $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}(X)$. Ist andererseits $h \in \mathcal{O}(X)$ eine reguläre Funktion und $x \in X_h$ ein Punkt ihrer Nichtnullstellenmenge, so induziert quasi per definitionem die Restriktion einen Isomorphismus $\mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_h,x}$ auf den regulären Funktionskeimen und wir folgern die erste Gleichung der Gleichungskette

$$\mathcal{O}_X(X_h) = \mathcal{O}_{X_h}(X_h) = \mathcal{O}(X_h)$$

mit der zweiten Gleichung durch Anwenden der Erkenntnis $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}(X)$ auf die affine Varietät X_h. Da wir mithin keine Mehrdeutigkeiten zu befürchten haben, verwenden wir im folgenden auch oft die abkürzende Notation

$$\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}(U)$$

und nennen unsere lokal regulären Funktionen auf U von nun an einfacher die **regulären Funktionen** auf U.

7.4.4.5. Gegeben X ein topologischer Raum, $Y \subset X$ eine Teilmenge und k ein Kring erklären wir die k-Kringalgebra

$$\mathrm{Ens}(X, k)_Y$$

der **Keime k-wertiger Funktionen längs** Y als die Menge aller Äquivalenzklassen von Paaren (U, f) bestehend aus einer offenen Teilmenge $U \Subset X$ mit $\overline{U \cap Y} = Y$ und einer Abbildung $f : U \to k$ unter der Äquivalenzrelation

$$(U, f) \sim (U', f') \quad \Leftrightarrow \quad \exists W \Subset U \cap U' \text{ mit } \overline{W \cap Y} = Y \text{ und } f|_W = f'|_W .$$

Übung 15.1.2.21, nach der in jedem topologischen Raum der Schnitt je zweier dichter offener Teilmengen wieder dicht ist, stellt dabei sicher, daß unsere Relation transitiv ist. Ich skizziere kurz ihre Lösung. Sind in der Tat $A, B \Subset Y$ offen und dicht und ist $y \in Y$ ein Punkt und U eine offene Umgebung von Y, so gilt $\emptyset \neq A \cap U \Subset Y$ und da $A \cap U$ eine Umgebung eines jeden seiner Punkte ist, folgt $B \cap A \cap U \neq \emptyset$.

Beispiel 7.4.4.6 (**Lokalisierung und Funktionskeime, Variante**). Seien X eine affine Varietät und $Y \not\Subset X$ abgeschlossen. Im Ring der Funktionskeime längs Y betrachten wir den Teilring

$$\mathcal{O}_{X,Y} \subset \mathrm{Ens}(X, k)_Y$$

aller **regulären Funktionskeime längs** Y alias aller Funktionskeime längs Y mit mindestens einem Repräsentanten aus $\mathcal{O}(X_h)$ für $h \in \mathcal{O}(X)$ mit $\overline{X_h \cap Y} = Y$ oder nach 7.4.4.4 gleichbedeutend mindestens einem Repräsentanten aus $\mathcal{O}(U)$ für $U \Subset X$ und $\overline{U \cap Y} = Y$. Seien $Y_1, \ldots, Y_r$ die irreduziblen Komponenten von Y und

$$S := \mathcal{O}(X) \backslash (\mathcal{I}(Y_1) \cup \ldots \cup \mathcal{I}(Y_r))$$

Der von der universellen Eigenschaft der Lokalisierung von $\mathcal{O}(X)$ herkommende Homomorphismus ist dann sogar ein Isomorphismus

$$S^{-1}\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,Y}$$

In der Tat ist er per definitionem surjektiv. Liefert andererseits ein Bruch f/s die Nullfunktion, so muß f bereits auf einer offenen Teilmenge $U \Subset X$ verschwinden, die Y dicht trifft, und die wir nach nochmaliger Verkleinerung von der Gestalt X_h für $h \in S$ annehmen dürfen. Daraus folgt aber $f/s = hf/hs = 0$ in unserer Lokalisierung. Ist Y irreduzibel, so erhalten wir speziell einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X)_{\mathcal{I}(Y)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,Y}$$

7.4.4.7. Gegeben eine affine Varietät X vereinbaren wir die Notation

$$\mathcal{M}(X) := \mathcal{O}_{X,X}$$

für den Ring der regulären Funktionskeime längs X und nennen solche Äquivalenzklassen **rationale Funktionen auf** X. Unsere Erkenntnisse 7.4.4.6 liefern im Fall einer irreduziblen affinen Varietät X insbesondere einen Isomorphismus

$$\operatorname{Quot} \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$$

und damit eine Interpretation der Elemente des Quotientenkörpers als rationale Funktionen.

7.4.4.8 (**Diskussion der Notation**). Der Buchstabe $\mathcal{M}$ soll dabei an den Begriff der „meromorphen" Funktionen erinnern, einem analogen Konzept aus der Funktionentheorie. Üblich ist stattdessen die Notation $k(X)$ mit k dem Grundkörper, die aber leicht als Notation für den Quotientenkörper eines Polynomrings mißverstanden werden kann.

7.4.4.9 (**Definitionsbereich einer rationalen Funktion**). Gegeben eine affine Varietät X hat jede rationale Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ offensichtlich einen größten regulären Repräsentanten $(U, f_{\max})$ mit $U \Subset X$ offen dicht und $f_{\max} \in \mathcal{O}(U)$ in dem Sinne, daß für jeden weiteren regulären Repräsentanten (U_1, f_1) gilt $U_1 \subset U$ und $f_1 = f_{\max}|_U$. Diese Menge $U \Subset X$ notieren wir auch $\mathrm{D}(f)$ und nennen sie den **Definitionsbereich von** f. Statt $f_{\max}$ schreiben wir dann auch kurz f.

Beispiel 7.4.4.10 (**Nennernullstellen als Definitionslücken**). Sei X eine affine Varietät X mit $\mathcal{O}(X)$ faktoriell. Schreiben wir $f \in \mathcal{M}(X)^\times$ als maximal gekürzten Bruch $f = p/q$ mit $p, q \in \mathcal{O}(X)$ und $p, q \neq 0$, so ist der Definitionsbereich von f gegeben durch

$$\mathrm{D}(f) = X \backslash \mathcal{Z}(q)$$

7.4.4.11. Gegeben $Z \subset\!\!\!

Satz 7.4.4.12 (Lokalisierung nach einem Element im geometrischen Fall). *Seien X eine affine Varietät, $f \in \mathcal{O}(X)$ eine reguläre Funktion auf X und X_f die Nichtnullstellenmenge von f. So ist der von der universellen Eigenschaft der Lokalisierung herkommende Homomorphismus ein Isomorphismus*

$$\mathcal{O}(X)_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X_f)$$

zwischen der Lokalisierung des Rings der regulären Funktionen auf X an f und dem Ring der regulären Funktionen auf X_f.

Beweis. Die Injektivität ist schnell gezeigt: Geht g/f^n nach Null, so verschwindet g auf X_f, folglich ist gf die Nullfunktion auf ganz X und wir folgern $g/f^n = gf/f^{n+1} = 0$ in $\mathcal{O}(X)_f$. Die Surjektivität ist eh klar. □

Proposition* 7.4.4.13 (Lokale Surjektivität von Komorphismen). *Sei ein Morphismus von affinen Varietäten $\varphi : X \to Y$ gegeben und sei $x \in X$ ein Punkt mit Bild $\varphi(x) = y$. Induziert unser Morphismus eine Surjektion $\mathcal{O}_{Y,y} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ auf den jeweiligen lokalen Ringen, so gibt es reguläre Funktionen $u \in \mathcal{O}(X)$ und $v \in \mathcal{O}(Y)$ mit $u(x) \neq 0$ und $v(y) \neq 0$ und $\varphi(X_u) \subset Y_v$ und der Eigenschaft, daß φ eine Surjektion $\mathcal{O}(Y_v) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X_u)$ induziert.*

Beweis. Seien $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(X)$ gegeben mit $\mathcal{O}(X) = k[f_1, \ldots, f_n]$. Bezeiche $\bar{f}_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ die Bilder der f_i. Es gibt nach Annahme $\bar{h}_i \in \mathcal{O}_{Y,y}$ mit $\bar{h}_i \mapsto \bar{f}_i$. Dann finden wir $s \in \mathcal{O}(Y)$ mit $s(y) \neq 0$ derart, daß alle $\bar{h}_i$ von geeigneten $h_i \in \mathcal{O}(Y_s)$ herkommen. Dann gibt es $t \in \mathcal{O}(X)$ mit $t(x) \neq 0$ und $\varphi(X_t) \subset Y_s$ derart, daß die $h_i \circ \varphi$ auf X_t mit den Restriktionen der f_i übereinstimmen. Nun gibt es $P \in k[T_1, \ldots, T_n]$ mit $t = P(f_1, \ldots, f_n)$ in $\mathcal{O}(X)$. In $\mathcal{O}(X_t)$ folgt $t = r \circ \varphi$ für $r = P(h_1, \ldots, h_n) \in \mathcal{O}(Y_s)$. Mithin induziert die Restriktion eine Surjektion $\mathcal{O}(Y_{rs}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X_t)$. □

Übungen

Übung 7.4.4.14. Gegeben ein Morphismus $X \to Y$ von affinen Varietäten und ein Punkt $x \in X$ mit $x \mapsto y$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$, der mit dem Komorphismus $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ in der offensichtlichen Weise verträglich ist.

7.4.5 Lokalisierung und Primideale

7.4.5.1. Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $S \subset R$ und ein Ideal $\mathfrak{b} \subset S^{-1}R$ nennen wir sein Urbild $\mathrm{lok}^{-1}(\mathfrak{b})$ das **Zählerideal** von $\mathfrak{b}$. Dies Zählerideal ist dann ein Ideal von R selbst.

Proposition 7.4.5.2 (**Primideale in Lokalisierungen**). *Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $S \subset R$ liefert der Übergang zum Zählerideal eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec}(S^{-1}R) & \xrightarrow{\sim} & \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \operatorname{lok}^{-1}(\mathfrak{p}) \end{array}$$

zwischen der Menge der Primideale der Lokalisierung und der Menge derjenigen Primideale des ursprünglichen Rings, die die Teilmenge S der zu invertierenden Elemente nicht treffen. Die Inverse dieser Bijektion ist die Abbildung $\mathfrak{q} \mapsto S^{-1}\mathfrak{q}$.

Beispiel 7.4.5.3. Ist $R = \mathcal{O}(X)$ der Ring der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät X und besteht S aus einer einzigen Funktion f, so besagt diese Proposition nach 7.4.2.8 anschaulich, daß das Herunterschneiden eine Bijektion liefert zwischen abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X_f und abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X, die nicht in $\mathcal{Z}(f)$ enthalten sind.

Beweis. Da alle Elemente aus S bei der Lokalisierung Einheiten werden, landet das Zurückholen $\operatorname{Spec}(S^{-1}R) \to \operatorname{Spec} R$ in der Menge der Primideale von R, die S nicht treffen. Unsere Abbildung ist also sinnvoll definiert. Für jedes Ideal $\mathfrak{b} \subset S^{-1}R$ gilt wie bereits erwähnt $\mathfrak{b} = S^{-1}(\operatorname{lok}^{-1}(\mathfrak{b}))$. Wir müssen nur noch zeigen, daß für jedes Primideal $\mathfrak{q} \subset R$, das S nicht trifft, seine Lokalisierung $S^{-1}\mathfrak{q} \subset S^{-1}R$ ein Primideal ist mit Zählerideal $\operatorname{lok}^{-1}(S^{-1}\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$. Um zu sehen, daß $S^{-1}\mathfrak{q} \subset S^{-1}R$ ein Primideal ist, gehen wir aus von $(a/s)(b/t) = (c/r)$ mit $c \in \mathfrak{q}$. Das impliziert die Existenz von $u \in |S\rangle$ mit $urab = ustc$. Nun gilt sicher $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset \Rightarrow \mathfrak{q} \cap |S\rangle = \emptyset$, folglich impliziert $urab \in \mathfrak{q}$ bereits $a \in \mathfrak{q}$ oder $b \in \mathfrak{q}$ und $S^{-1}\mathfrak{q}$ ist in der Tat ein Primideal. Um schließlich einzusehen, daß $\mathfrak{q}$ das Zählerideal von $S^{-1}\mathfrak{q}$ ist, beachten wir, daß aus $c/s = a/1$ mit $c \in \mathfrak{q}$ folgt $tc = tsa$ für ein $t \in |S\rangle$ und wegen $ts \notin \mathfrak{q}$ folgt $a \in \mathfrak{q}$. □

7.4.5.4 (**Primideale in Quotientenringen**). Sei R ein Kring und $I \subset R$ eine Teilmenge und $\operatorname{quot} : R \twoheadrightarrow R/\langle I\rangle$ die Abbildung auf den Quotienten. So liefert quot^{-1} eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec}(R/\langle I\rangle) & \xrightarrow{\sim} & \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \supset I\} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \operatorname{quot}^{-1}(\mathfrak{p}) \end{array}$$

zwischen der Menge der Primideale des Restklassenrings und der Menge derjenigen Primideale des ursprünglichen Rings, die die Teilmenge der herausgeteilten Elemente umfassen. Die Inverse dieser Bijektion ist die Abbildung $\mathfrak{q} \mapsto \operatorname{quot}(\mathfrak{q})$. In der Tat induzieren diese Abbildungen sogar Bijektionen zwischen den entsprechenden Mengen beliebiger Ideale und wegen $(R/\langle I\rangle)/\mathfrak{p} \cong R/\operatorname{quot}^{-1}(\mathfrak{p})$ entsprechen sich darunter Ideale mit einem Integritätsbereich als Quotientenring alias Primideale.

Definition 7.4.5.5. Die Menge aller nilpotenten Elemente eines Krings alias das Radikal des Nullideals heißt das **Nilradikal** $\sqrt{0}$ unseres Krings.

Korollar 7.4.5.6 (**Schnitt aller Primideale**). *Der Schnitt aller Primideale eines Krings ist sein Nilradikal. Der Schnitt aller Primideale eines Krings, die ein gegebenes Ideal umfassen, ist das Radikal des besagten Ideals.*

7.4.5.7. Der Beweis dieser Aussage beruht im Fall nicht noetherscher Kringe auf dem Zorn'schen Lemma.

Beweis. Sicher liegt jedes nilpotente Element in jedem Primideal. Ist umgekehrt R unser Ring und $f \in R$ nicht nilpotent, so ist nach 7.4.3.50 die Lokalisierung $R[f^{-1}]$ nicht der Nullring und besitzt folglich mindestens ein Primideal, ja sogar mindestens ein maximales Ideal. Das Urbild dieses Ideals in R ist dann das gesuchte Primideal, das f nicht enthält. Ist $I \subset R$ ein beliebiges Ideal, so wende man die bereits bewiesene Aussage auf den Quotientenring R/I an und beachte 7.4.5.4. □

7.4.5.8. Anders als bei „maximalen Idealen", worunter man ja stets „maximale Elemente in der Menge aller vom ganzen Ring verschiedenen Ideal" versteht, versteht man unter einem **minimalen Primideal** schlicht ein Primideal, das eben minimal ist in der durch Inklusion teilgeordneten Menge aller Primideale. Ein kommutativer Integritätsbereich hat insbesondere stets genau ein minimales Primideal, nämlich das Nullideal.

7.4.5.9 (**Existenz minimaler Primideale**). Jedes Primideal eines Krings umfaßt ein minimales Primideal. In der Tat ist ein Schnitt einer Kette von Primidealen offensichtlich auch selbst prim, denn läge ein Produkt ab in allen geschnittenen Primidealen und läge a nicht in jedem von ihnen, so müßte b in jedem von ihnen liegen. Unsere Behauptung folgt so aus dem Zorn'schen Lemma. Mit 7.4.5.6 folgt weiter, daß auch der Schnitt aller minimalen Primideale eines Krings stets das Nilradikal sein muß.

Korollar 7.4.5.10 (**Minimale Primideale und nichtkürzbare Elemente**).

1. *In einem beliebigen Kring besteht jedes minimale Primideal aus nichtkürzbaren Elementen;*
2. *In einem nilpotentfreien Kring ist die Vereinigung der minimalen Primideale die Menge der nichtkürzbaren Elemente.*

7.4.5.11. Wir diskutieren kurz den geometrischen Fall. Ist X eine affine Varietät, so gehört offensichtlich eine reguläre Funktion zu einem minimalen Primideal von $\mathcal{O}(X)$ genau dann, wenn sie auf einer irreduziblen Komponente von X identisch verschwindet, und genau dann ist sie andererseits auch nicht kürzbar.

Beweis. Lokalisieren wir unseren Kring R an unserem minimalen Primideal $\mathfrak{p}$ zu $R_\mathfrak{p}$, so erhalten wir nach 7.4.5.4 einen Kring mit genau einem Primideal $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$. Gegeben $f \in R$ kürzbar mit $f \in \mathfrak{p}$ wäre sein Bild $(f/1) \in R_\mathfrak{p}$ nach 7.4.3.11 auch kürzbar mit $(f/1) \in \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$. Aus $R_\mathfrak{p} \neq 0$ folgte $R_\mathfrak{p}[(f/1)^{-1}] \neq 0$. Dann aber gäbe es aber in $R_\mathfrak{p}[(f/1)^{-1}]$ ein Primideal und in $R_\mathfrak{p}$ ein von $\mathfrak{p}$ verschiedenes Primideal im Widerspruch zu unseren Annahmen. Das zeigt Teil 1. Umgekehrt ist nach 7.4.5.9 der Schnitt aller minimalen Primideale das Nilradikal. Ist unser Kring R nilpotentfrei, so liefert die Diagonale mithin eine Einbettung von R in ein Produkt von Integritätsbereichen

$$R \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \text{ minimal}} R/\mathfrak{p}$$

Jedes nichtkürzbare Element von R muß dabei auf ein nichtkürzbares Element des Produkts abgebildet werden und folglich bereits in einem der minimalen Primideale liegen. □

7.4.5.12. Gegeben ein Kring R betrachten wir die Teilmenge von $R \times \operatorname{Spec} R$ aller Paare $(r, \mathfrak{p})$ mit $r \in \mathfrak{p}$. Das ist eine Inzidenzstruktur im Sinne von 7.1.1.12 und liefert so Konstruktionen mit analogen Eigenschaften zu unseren Konstruktionen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{I}$ aus 7.1.1.15, die wir hier $\mathcal{A}$ und $\mathcal{S}$ notieren und im folgenden ausführlicher diskutieren.

Definition 7.4.5.13. Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $I \subset R$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(I)$ die Menge aller Primideale von R, die I umfassen, in Formeln

$$\mathcal{A}(I) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \supset I\} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid r \in \mathfrak{p}\ \forall r \in I\}$$

Definition 7.4.5.14. Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $X \subset \operatorname{Spec} R$ bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(X)$ den Schnitt aller Primideale aus X, in Formeln

$$\mathcal{S}(X) := \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p} = \{r \in R \mid r \in \mathfrak{p}\ \forall \mathfrak{p} \in X\}$$

7.4.5.15. Diese Konstruktionen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{S}$ erfüllen ähnliche Formeln wie die analogen Konstruktionen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{I}$ aus 7.1.1.15 und 7.1.1.11, was nun genauer ausgeführt werden soll. Sei R ein beliebiger Kring. Offensichtlich gilt für ein beliebiges System $\mathcal{J}$ von Teilmengen von R die Identität $\bigcap_{J \in \mathcal{J}} \mathcal{A}(J) = \mathcal{A}\left(\bigcup_{J \in \mathcal{J}} J\right)$ und insbesondere auch

$$I \subset J \ \Rightarrow\ \mathcal{A}(I) \supset \mathcal{A}(J)$$

Ebenso offensichtlich gilt für ein beliebiges System $\mathcal{X}$ von Teilmengen des $\operatorname{Spec} R$ die Identität $\mathcal{S}\left(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X\right) = \bigcap_{X \in \mathcal{X}} \mathcal{S}(X)$ und insbesondere auch

$$Y \subset X \ \Rightarrow\ \mathcal{S}(Y) \supset \mathcal{S}(X)$$

Des weiteren gilt sicher $J \subset \mathcal{S}(\mathcal{A}(J))$ für jede Teilmenge $J \subset R$ und $X \subset \mathcal{A}(\mathcal{S}(X))$ für jede Teilmenge $X \subset \operatorname{Spec} R$. Es folgt $\mathcal{S}(X) = \mathcal{S}(\mathcal{A}(\mathcal{S}(X)))$ für jede Teilmenge $X \subset \operatorname{Spec} R$, indem wir einerseits $\mathcal{S}$ auf $X \subset \mathcal{A}(\mathcal{S}(X))$ anwenden und andererseits $J \subset \mathcal{S}(\mathcal{A}(J))$ auf $J = \mathcal{S}(X)$. Ebenso folgt für jede Teilmenge $J \subset R$ die Identität $\mathcal{A}(J) = \mathcal{A}(\mathcal{S}(\mathcal{A}(J)))$.

7.4.5.16. Man zeigt ohne Schwierigkeiten, daß die Mengen $\mathcal{A}(I)$ für $I \subset R$ die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf dem Spektrum von R bilden. Sie heißt die **Zariskitopologie auf** $\operatorname{Spec} R$. Insbesondere gilt für jede abgeschlossene Teilmenge $X \subset \operatorname{Spec} R$ die Identität $X = \mathcal{A}(\mathcal{S}(X))$, die offensichtlich auch umgekehrt abgeschlossene Teilmengen charakterisiert.

7.4.5.17 (**Abgeschlossene Mengen und Radikalideale, Variante**). Für jede Teilmenge I eines Krings R ist nach 7.4.5.6 unser $\mathcal{S}(\mathcal{A}(I))$ das Radikal des von I erzeugten Ideals, in Formeln $\mathcal{S}(\mathcal{A}(I)) = \sqrt{\langle I \rangle}$. Umgekehrt ist nach den Definitionen für jede Teilmenge $X \subset \operatorname{Spec} R$ unser $\mathcal{A}(\mathcal{S}(X))$ der Abschluß von X in der Zariskitopologie, in Formeln $\mathcal{A}(\mathcal{S}(X)) = \bar{X}$. Insbesondere liefern $\mathcal{A}$ und $\mathcal{S}$ ähnlich wie in 7.1.6.16 zueinander inverse Bijektionen

$$\mathcal{A}: \left\{ \begin{matrix} \text{Radikalideale} \\ I \subset R \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{matrix} \text{Abgeschlossene Teilmengen} \\ Y \subset\!\!\!

7.4.5.21. Man kann $\mathcal{A}(\mathfrak{p})$ auch als den Abschluß des Punktes $\mathfrak{p}$ in Bezug auf die Zariskitopologie interpretieren, so daß also unsere Abbildung jedem Punkt seinen Abschluß zuordnet. Das Spektrum eines Krings ist also ein topologischer Raum X mit der Eigenschaft, daß $x \mapsto \bar{x}$ eine Bijektion

$$X \xrightarrow{\sim} \{Y \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\, X \mid Y \text{ irreduzibel }\}$$

induziert. Gegeben umgekehrt eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Y \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\, \operatorname{Spec} R$ heißt der Punkt $x \in Y$ mit $\bar{x} = Y$ der **generische Punkt von** Y.

Beweis. Daß der Abschluß eines Punktes irreduzibel sein muß, gilt sogar in einem beliebigen topologischen Raum. Unsere Abbildungsvorschrift ist mithin sinnvoll. Gegeben $Y \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\, \operatorname{Spec} R$ gibt es per definitionem eine Teilmenge $I \subset R$ mit $Y = \mathcal{A}(I)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, I sei ein Radikalideal, denn alle Primideale, die I umfassen, umfassen auch das Radikal des von I erzeugten Ideals. Ich zeige nun, daß für Y irreduzibel unser I ein Primideal sein muß. Ist in der Tat I kein Primideal, so gibt es $a, b \notin I$ mit $ab \in I$. Nach 7.4.5.6 gibt es ein Primideal über I, das a nicht enthält, und ebenso ein Primideal über I, das b nicht enthält. Folglich haben wir $\mathcal{A}(a) \not\supset \mathcal{A}(I)$ und $\mathcal{A}(b) \not\supset \mathcal{A}(I)$. Jedes Primideal, das ab enthält, muß jedoch a oder b enthalten, folglich gilt $\mathcal{A}(a) \cup \mathcal{A}(b) \supset \mathcal{A}(I)$ und $\mathcal{A}(I)$ war nicht irreduzibel. Ist also Y irreduzibel und I das Radikalideal mit $Y = \mathcal{A}(I)$, so ist I prim und wir schreiben hinfort $I = \mathfrak{p}$. Bezeichnen wir mit x den durch $\mathfrak{p}$ gegebenen Punkt von $\operatorname{Spec} R$, so gilt $\bar{x} = \mathcal{A}(\mathfrak{p}) = Y$. Das zeigt die Surjektivität unserer Abbildung. Zur Injektivität bemerken wir, daß $y \in \bar{x}$ gleichbedeutend ist zur Inklusion $\mathfrak{p}_y \supset \mathfrak{p}_x$ der zugehörigen Primideale, wir können also $\mathfrak{p}$ aus Y zurückgewinnen als den Schnitt aller Primideale $\mathfrak{p}_y$ mit $y \in Y$. $\square$

7.4.5.22. Ich will kurz auf die Beziehung dieses Satzes zu seinem geometrischen Analogon 7.4.2.8 eingehen. Ist ein Kring R ringendlich über einem Körper, so können wir obige Bijektionen ergänzen zu einer Sequenz von Bijektionen

$$\operatorname{Spec} R \xrightarrow{\sim} \{Y \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\, \operatorname{Spec} R \mid Y \text{ irreduzibel}\} \xrightarrow{\sim} \{Z \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\, \operatorname{Max} R \mid Z \text{ irreduzibel}\}$$

wo $\operatorname{Max} R$ die von $\operatorname{Spec} R$ induzierte Topologie erhält und die rechte Abbildung schlicht das Schneiden mit $\operatorname{Max} R$ meint. Ist sogar k ein algebraisch abgeschlossener Körper und X eine affine k-Varietät und beachten wir unsere Bijektion $X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} \mathcal{O}(X)$, so liefert diese Verknüpfung die Inverse der in 7.4.2.8 diskutierten Bijektion

$$\{Y \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\, X \mid Y \text{ irreduzibel}\} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)$$

Korollar 7.4.5.23 (Minimale Primideale in noetherschen Kringen). *In einem noetherschen Kring gibt es nur endlich viele minimale Primideale.*

Beweis. Gegeben ein noetherscher Kring ist sein Spektrum ein noetherscher topologischer Raum und ist nach 7.4.1.12 folglich die Vereinigung von endlich vielen irreduziblen Komponenten. Die nach 7.4.5.21 zu diesen Komponenten gehörenden Primideale sind dann die fraglichen minimalen Primideale. □

Korollar 7.4.5.24 (**Endliche Produkte von Integritätsbereichen**). *Genau dann ist ein Kring ein endliches Produkt von Integritätsbereichen, wenn seine Lokalisierung nach jedem maximalen Ideal ein Integritätsbereich ist und er nur endlich viele minimale Primideale hat.*

Beweis. Daß ein endliches Produkt von Integritätsbereichen diese Eigenschaften hat, ist klar. Für die andere Implikation bemerken wir zunächst, daß nach dem lokal-global-Prinzip 7.4.3.26 unser Kring keine von Null verschiedenen nilpotenten Elemente haben kann. Der Schnitt der minimalen Primideale ist also Null nach 7.4.5.9. Damit reicht es nach dem chinesischen Restsatz 6.2.3.4 zu zeigen, daß für je zwei minimale Primideale $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ gilt $1 \in \mathfrak{p} + \mathfrak{q}$. Andernfalls gäbe es aber ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p} + \mathfrak{q}$ und die Lokalisierung unseres Krings an $\mathfrak{m}$ hätte zwei verschiedene minimale Primideale und könnte kein Integritätsbereich sein. □

Übungen

Übung 7.4.5.25. Seien X eine affine Varietät und $x \in X$ ein Punkt. Man zeige, daß die lokale Krulldimension von X bei x übereinstimmt mit der Krulldimension des lokalen Ringes, in Formeln $\operatorname{kdim}_x X = \operatorname{kdim} \mathcal{O}_{X,x}$.

Übung 7.4.5.26. Gegeben ein Kring R bilden die Teilmengen $\mathrm{U}(f) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ für $f \in R$ eine Basis der Zariskitopologie auf $\operatorname{Spec} R$. Wir nennen sie die **Standardbasis**.

Ergänzende Übung 7.4.5.27. Für jeden Kringhomomorphismus $R \to S$ ist die induzierte Abbildung $\operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$ stetig für die Zariskitopologie. Ist unser Kringhomomorphismus injektiv, so hat die induzierte Abbildung dichtes Bild.

Übung 7.4.5.28. Hinweis: 7.4.5.23 und 7.4.5.6. Gegeben ein noetherscher Kring mit einem Ideal I besitzt die Menge aller Primideale von R über I endlich viele minimale Elemente $P_1, \ldots, P_n$ und deren Schnitt ist das Radikal von besagtem Ideal, in Formeln

$$\sqrt{I} = P_1 \cap \ldots \cap P_n$$

Übung 7.4.5.29. Sind in einem Kring endlich viele Primideale gegeben, deren Schnitt aus nilpotenten Elementen besteht, so umfaßt jedes Primideale unseres Krings eines dieser endlich vielen Primideale.

Übung 7.4.5.30. Gegeben ein Modul M über einem Kring R und ein Element $m \in M$ setzen wir $\operatorname{supp}(m) := \mathcal{A}(\operatorname{Ann}_R(m))$ und nennen diese abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spec}(R)$ den **Träger von** m. Die Vereinigung

$$\operatorname{supp}(M) := \bigcup_{m \in M} \operatorname{supp}(m)$$

heißt der **Träger von** M und braucht nicht abgeschlossen zu sein. Man zeige, daß der $\mathbb{C}[X]$-Modul $M := \mathbb{C}[X, X^{-1}]/\mathbb{C}[X]$ einpunktigen Träger hat, bestehend aus dem einzigen Primideal $\langle X \rangle$, wohingegen sein Annullator das Nullideal ist. Ist aber M endlich erzeugt, sagen wir von $m_1, \ldots, m_r$, so gilt

$$\operatorname{supp}(M) = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{supp}(m_i) = \mathcal{A}(\operatorname{Ann} M)$$

Übung 7.4.5.31 (**Träger und Lokalisierung**). Gegeben ein Modul M über einem Kring R und ein Element $m \in M$ und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ zeige man, daß das Bild von m in der Lokalisierung $M_{\mathfrak{p}}$ genau dann verschwindet, wenn gilt $\mathfrak{p} \not\supset \operatorname{Ann}_R(m)$ alias $\mathfrak{p} \notin \operatorname{supp}(m)$ in der Notation aus 7.4.5.30.

7.4.6 Lemma von Nakayama

7.4.6.1. Gegeben ein Kring R und ein Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ und ein R-Modul M vereinbaren wir die abkürzende Bezeichnung $\mathfrak{a}M$ statt $\langle \mathfrak{a}M \rangle$ für den in M von den Elementen am mit $a \in \mathfrak{a}$ und $m \in M$ erzeugten Untermodul.

Proposition 7.4.6.2 (Lemma von Nakayama). *Seien R ein Kring, $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal und Q ein endlich erzeugter R-Modul. Gilt $Q = \mathfrak{a}Q$, so gibt es $f \in 1 + \mathfrak{a}$ mit $fQ = 0$.*

Vorschau 7.4.6.3. Eine Variante für nicht notwendig kommutative Ringe zeigen wir in [NAS]. Sie ist schwächer und ihr Beweis benötigt das Zorn'sche Lemma. Für beliebige nicht notwendig kommutative Ringe R erklärt man das **Jacobson-Radikal** $\mathrm{J}(R)$ als den Schnitt aller maximalen Linksideale. In dieser Situation besagt das **nichtkommutative Nakayamalemma** 8.3.6.3, daß für jeden endlich erzeugten R-Modul M gilt

$$\mathrm{J}(R)M = M \;\Rightarrow\; M = 0$$

Es folgt, daß gegeben ein endlich erzeugter R-Modul M und ein endliches Erzeugendensystem von $M/\mathrm{J}(R)M$ eine beliebige Wahl von Urbildern bereits ein Erzeugendensystem vom M ist. Wenn wir betonen wollen, daß wir obige Variante 7.4.6.2 meinen, reden wir vom **kommutativen Nakayamalemma**, das im übrigen auf Matsumura zurückzugehen scheint.

7.4.6.4. Die Bedingung, Q sei endlich erzeugt, ist an dieser Stelle wesentlich. Gegeben ein Körper k ist die Folgerung zum Beispiel offensichtlich falsch für den $k[T]$-Modul $Q := k(T)$ und das Ideal $\mathfrak{a} := \langle T \rangle$ in $R := k[T]$.

7.4.6.5 (**Anschauung zum Lemma von Nakayama**). In geometrischer Sprache besagt das kommutative Nakayamalemma, daß $\mathfrak{a}M = M$ für einen endlich erzeugten R-Modul M gleichbedeutend ist zu $\mathcal{A}(\operatorname{Ann} M) \cap \mathcal{A}(\mathfrak{a}) = \emptyset$.

Beweis. Wir müssen aus $Q = \mathfrak{a}Q$ folgern $fQ = 0$ für ein $f \in 1 + \mathfrak{a}$ oder gleichbedeutend $S^{-1}Q = 0$ für die Lokalisierung von Q nach der multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $S := 1 + \mathfrak{a}$. Aber seien sonst $q_1, \ldots, q_t \in Q$ gewählt mit kleinstmöglichem $t \geq 1$ derart, daß ihre Bilder $S^{-1}Q$ als Modul über $S^{-1}R$ erzeugen. Natürlich haben wir auch $S^{-1}Q = S^{-1}\mathfrak{a}Q$ und können also in $S^{-1}Q$ schreiben $q_1 = b_1q_1 + \ldots + b_tq_t$ mit $b_i \in S^{-1}\mathfrak{a}$. Dann können wir auch in Q schreiben $sq_1 = a_1q_1 + \ldots + a_tq_t$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$, $s \in S$ und folgern $(s - a_1)q_1 = a_2q_2 + \ldots + a_tq_t$. Wegen $(s - a_1) \in S$ zeigt diese Gleichung aber, daß auch $q_2, \ldots, q_t$ schon $S^{-1}Q$ erzeugen als Modul über $S^{-1}R$. Widerspruch! □

Beweis ohne Lokalisierung. Seien $q_1, \ldots, q_n$ Erzeuger des R-Moduls Q. Wir finden $a_{ij} \in \mathfrak{a}$ mit

$$q_i = a_{i1}q_1 + \ldots + a_{in}q_n$$

Das können wir umschreiben zur Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

Ziehen wir nun beide Seiten voneinander ab und multiplizieren mit der adjungierten Matrix 3.6.4.6, so erkennen wir, daß für P das charakteristische Polynom der Matrix der (a_{ij}) gilt $P(1)q_1 = \ldots = P(1)q_n = 0$. Dies $P(1)$ ist dann unser gesuchtes $f \in 1 + \mathfrak{a}$. □

Korollar 7.4.6.6 (Lemma von Nakayama, Variante). *Seien R ein Kring, $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter R-Modul. Seien Elemente $m_1, \ldots, m_r \in M$ gegeben derart, daß ihre Nebenklassen den Quotienten $M/\mathfrak{a}M$ erzeugen. So gibt es $f \in 1 + \mathfrak{a}$ derart, daß die m_i auch schon $M[f^{-1}]$ über $R[f^{-1}]$ erzeugen.*

7.4.6.7. Aus unserer Variante 7.4.6.6 folgt unmittelbar Proposition 7.4.6.2, indem wir den Fall $r = 0$ betrachten. Wir gehen jedoch beim Beweis den umgekehrten Weg. Ich selbst kann mir die Variante viel besser merken, da ich mir darunter mehr vorstellen kann. Das soll im nächsten Punkt ausgeführt werden.

7.4.6.8 (**Anschauung für das Lemma von Nakayama**). Der Anschauung besonders gut zugänglich scheint mir die Variante 7.4.6.6 des Lemmas von Nakayama, und zwar besonders in dem Fall, daß $R = \mathcal{O} = \mathcal{O}(X)$ der Ring der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät X ist, $M = \mathcal{O}^n$ ein freier Modul endlichen Ranges, und $\mathfrak{a} = \mathcal{I}(x)$ das Verschwindungsideal eines Punktes $x \in X$. Unsere $m_i \in M$ verstehen wir dann als Spaltenvektoren $m_j = (m_{1j}, \ldots, m_{nj})$ mit Funktionen $m_{ij} \in \mathcal{O}$ als Einträgen, und unser Lemma besagt: Erzeugen die Spaltenvektoren $m_j(x) := (m_{1j}(x), \ldots, m_{nj}(x))$ für $1 \le j \le r$ den k^n, so gibt eine Funktion $f \in \mathcal{O}$, die bei x den Wert Eins annimmt und mit der die m_j bereits $\mathcal{O}[f^{-1}]^n$ erzeugen als $\mathcal{O}[f^{-1}]$-Modul. Daß solch ein f existiert, kann man nun auch ohne viel Theorie leicht einsehen: Wenn wir erst mal etwas allgemeiner nur ein f wie oben finden, das bei x nicht den Wert Null annimmt, multiplizieren wir es mit dem Skalar $f(x)^{-1}$ und sind auch fertig. Erzeugen nun die $m_j(x)$ für $1 \le j \le r$ den k^n, so kann man nach Umnummerieren annehmen, daß $m_1(x), \ldots, m_n(x)$ bereits eine Basis des k^n bilden. Dann aber ist die Determinante der Matrix der $A = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ nicht Null bei x. Nehmen wir $f = \det(A)$ als unsere Funktion, so gibt es nach der Cramer'schen Regel 3.6.4.6 eine Matrix $B = f^{-1}A^\sharp$ mit Einträgen in $\mathcal{O}[f^{-1}]$ und $BA = I$ der Einheitsmatrix. Das aber zeigt, daß die m_j bereits $\mathcal{O}[f^{-1}]^n$ als $\mathcal{O}[f^{-1}]$-Modul erzeugen.

Herleitung des Korollars 7.4.6.6 aus der Proposition 7.4.6.2. Seien Elemente m_1, $\ldots$, $m_r \in M$ gegeben derart, daß ihre Nebenklassen den Quotienten $M/\mathfrak{a}M$ erzeugen. Sei $N \subset M$ das Erzeugnis von $m_1, \ldots, m_r$ und $Q = M/N$. Wir betrachten das Diagramm mit exakten Spalten

$$\begin{array}{ccccc}
N \cap \mathfrak{a}M & \hookrightarrow & \mathfrak{a}M & \twoheadrightarrow & \mathfrak{a}Q \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
N & \hookrightarrow & M & \twoheadrightarrow & Q \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
N/(N \cap \mathfrak{a}M) & \hookrightarrow & M/\mathfrak{a}M & \twoheadrightarrow & Q/\mathfrak{a}Q
\end{array}$$

Seine beiden oberen Zeilen sind exakt, also nach dem Neunerlemma auch die untere Zeile. Aus der Wahl von N folgt nun $Q/\mathfrak{a}Q = 0$, also $Q = \mathfrak{a}Q$, also $fQ = 0$ für ein $f \in 1 + \mathfrak{a}$ nach Proposition 7.4.6.2, also $Q[f^{-1}] = 0$, also $N[f^{-1}] \xrightarrow{\sim} M[f^{-1}]$ wegen der Exaktheit des Lokalisierens 7.4.3.11 und wir sind fertig. $\square$

7.4.6.9. Ein Ring heißt **lokal**, wenn seine Nichteinheiten ein Ideal bilden. Dies Ideal ist dann natürlich das größte echte Ideal unseres Rings. Der Nullring ist insbesondere nicht lokal, denn die leere Menge ist kein Ideal. In einem lokalen Ring ist die Summe aus einer Nichteinheit und einer Einheit offensichtlich stets eine Einheit.

7.4.6.10. Mit der Sprechweise „Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Kring“ ist gemeint, daß A ein lokaler Kring sein soll und $\mathfrak{m}$ sein per definitionem eindeutig bestimmtes maximales Ideal.

Beispiel 7.4.6.11. Gegeben ein Kring R und ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ ist die Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ von R an der Stelle $\mathfrak{p}$ nach 7.4.5.4 stets ein lokaler Kring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$. Insbesondere sind unsere Ringe von Funktionskeimen $\mathcal{O}_{X,x}$ aus 7.4.4.2 und allgemeiner unsere Ringe von Funktionskeimen $\mathcal{O}_{X,Y}$ aus 7.4.4.6 stets lokal.

7.4.6.12 (**Lemma von Nakayama für lokale Kringe**). Seien $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Kring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Sind $m_1, \ldots, m_r \in M$ gegeben derart, daß ihre Nebenklassen den Quotienten $M/\mathfrak{m}M$ erzeugen, so erzeugen die m_i bereits M selbst. Das folgt sofort aus der Variante 7.4.6.6 des kommuntativen Nakayamalemmas, denn die Menge $1 + \mathfrak{m}$ besteht aus Einheiten von A. Obwohl wir im Rückblick ein endliches Erzeugendensystem von M angeben, gilt die Aussage nicht, wenn wir nicht M von Anfang an als endlich erzeugt annehmen.

Satz 7.4.6.13 (**Durchschnittssatz von Krull**). *Gegeben $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal in einem noetherschen Kring und M ein noetherscher R-Modul gilt*

$$\bigcap \mathfrak{a}^n M = \{m \in M \mid \exists a \in \mathfrak{a} \textit{ mit } am = m\}$$

Beweis. Sei zunächst R ein Kring und $\mathfrak{a} \subset R$ ein beliebiges Ideal. Im Polynomring $R[X]$ bilden die Polynome $\sum r_n X^n$ mit $r_n \in \mathfrak{a}^n$ für alle $n \geq 0$ einen Teilring, den sogenannten **Rees-Ring** $R_\mathfrak{a}[X]$. Sind $a_1, \ldots, a_r$ Erzeuger von $\mathfrak{a}$, so finden wir eine Surjektion $R[Y_1, \ldots, Y_r] \twoheadrightarrow R_\mathfrak{a}[X]$ des Polynomrings auf den Reesring mit $Y_\nu \mapsto a_\nu X$. Folglich ist mit R auch der Reesring noethersch. Des weiteren ist im in offensichtlicher Weise erklärten $R[X]$-Modul $M[X]$ die Teilmenge $M_\mathfrak{a}[X]$ aller $\sum m_n X^n$ mit $m_n \in \mathfrak{a}^n M$ für alle $n \geq 0$ ein Untermodul über dem Reesring. Dieser Untermodul $M_\mathfrak{a}[X]$ ist offensichtlich endlich erzeugt über dem Reesring, wenn M endlich erzeugt ist über R. Für $S := \bigcap \mathfrak{a}^n M$ ist weiter $S[X] \subset M_\mathfrak{a}[X]$ ein Untermodul dieses Moduls über dem Reesring und ist folglich auch endlich erzeugt, also insbesondere erzeugt von einer Teilmenge der Gestalt $S + SX + \ldots + SX^n$. Das hinwiederum zeigt $\mathfrak{a}S = S$ und mit dem Lemma von Nakayama 7.4.6.2 folgt sogar die Existenz von einem $a \in \mathfrak{a}$ mit $(1 + a)S = 0$ alias $am = m \ \forall m \in S$. Das zeigt im Satz die Inklusion $\subset$. Die andere Inklusion ist offensichtlich. $\square$

Korollar 7.4.6.14. *Gegeben ein noetherscher Kring R mit Jacobsonradikal $J \subset R$ und ein noetherscher R-Modul M gilt*

$$\bigcap_n J^n M = 0$$

7.4.6.15. Besonders oft wird diese Aussage im Fall lokaler noetherscher Kringe verwendet, in dem das Jacobsonradikal mit dem einzigen maximalen Ideal zusammenfällt, so daß also der Schnitt aller Potenzen des maximalen Ideals das Nullideal sein muß.

Beweis. Wenden wir den Durchschnittssatz 7.4.6.13 auf das Jacobsonradikal $\mathfrak{a} = J$ an, so folgt für unseren Schnitt S erst $JS = S$ und dann mit dem Lemma von Nakayama **??** sofort $S = 0$. □

Beispiel 7.4.6.16. Um zu sehen, daß Durchschnittssatz für nicht noethersche Kringe im allgemeinen nicht mehr gilt, mag man den Ring R der Keime stetiger reeller Funktionen um den Ursprung der reellen Zahlengeraden im Sinne von 7.4.4.1 betrachten. Dieser Ring R ist lokal und sein maximales Ideal J ist nicht Null, aber dennoch gilt $J^2 = J$.

Übungen

Übung 7.4.6.17. Gegeben ein endlich erzeugter freier Modul M über einem lokalen Kring $(A, \mathfrak{m})$ bilden Elemente $v_1, \ldots, v_r \in M$ eine A-Basis von M genau dann, wenn ihre Bilder $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_r \in M/\mathfrak{m}M$ eine Basis des Quotienten über $A/\mathfrak{m}$ bilden.

Übung 7.4.6.18. Sei $A \subset B$ eine modulendliche Kringerweiterung. Ist A lokal und B ein freier A-Modul, so spaltet die Einbettung $A \hookrightarrow B$ als Homomorphismus von A-Moduln. Hinweis: 20.3.2.10.

Übung 7.4.6.19. Seien X eine affine Varietät und M ein $\mathcal{O}(X)$-Modul. Gegeben $x \in X$ heißt $M \otimes_{\mathcal{O}(X)} k_x$ der **geometrische Halm** von M an der Stelle x. Man zeige: Ein endlich erzeugter $\mathcal{O}(X)$-Modul M ist genau dann projektiv, wenn die Dimensionen seiner geometrischen Halme eine lokal konstante Funktion bilden. Hinweis: Man finde für jeden Punkt $x \in X$ eine Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ mit $f(x) \neq 0$ und M_f frei über $\mathcal{O}(X)_f$. Man erinnere aus 7.4.3.36, daß unter gewissen Endlichkeitsbedingungen projektiv äquivalent ist zu lokal frei.

7.4.7 Einfache Moduln und Kompositionsreihen

7.4.7.1. Dieser Abschnitt steht leicht variiert auch in 8.2.2. Er ist weitgehend unabhängig von der bis hierher entwickelten Theorie.

Definition 7.4.7.2. Ein Modul heißt **einfach**, wenn er nicht Null ist, aber außer sich selbst und Null keine Untermoduln hat.

Beispiele 7.4.7.3. Die einfachen Moduln über einem Körper oder allgemeiner einem Schiefkörper sind genau die eindimensionalen Vektorräume. Jeder Vektorraum ist einfach als Modul über seinem Endomorphismenring.

7.4.7.4. Die einfachen $\mathbb{Z}$-Moduln sind genau die zyklischen abelschen Gruppen von Primzahlordnung. Allgemeiner sind alle einfachen Moduln über einem Ring isomorph zu einem Quotienten des besagten Rings nach einem maximalen Linksideal. Ist der Ring kommutativ, so kann man besagtes Linksideal aus dem Modul zurückgewinnen als seinen Annullator. Genauer ist dann der Quotient unseres Rings nach unserem maximalen Ideal bereits ein Körper, vergleiche 7.1.6.7, und unser einfacher Modul ist ein eindimensionaler Vektorraum über diesem Körper. Bei nichtkommutativen Ringen können die Quotienten nach verschiedenen maximalen Linksidealen jedoch durchaus als Moduln isomorph sein: Man denke etwa an den Matrizenring $\mathrm{Mat}(r;k)$ mit Einträgen in einem Körper k und den einfachen Modul k^r dieses Rings: Hier sind ja die Annullatoren verschiedener von Null verschiedener Elemente im allgemeinen durchaus verschiedene Linksideale.

7.4.7.5. Der Hilbert'sche Nullstellensatz 7.1.5.10 besagt, daß alle einfachen Moduln über einem Polynomring in endlich vielen Variablen mit Koeffizienten in einem Körper endlichdimensional sind über besagtem Körper. Ist der Körper algebraisch abgeschlossen, so sind sie sogar eindimensional.

Lemma 7.4.7.6 (Homomorphismen von und zu einfachen Moduln). *Seien R ein Ring, E, E' einfache R-Moduln, und M ein beliebiger R-Modul. So gilt:*

1. *Jeder Homomorphismus $E \to M$ ist injektiv oder Null;*
2. *Jeder Homomorphismus $M \to E'$ ist surjektiv oder Null;*
3. *Jeder Homomorphismus $E \to E'$ ist bijektiv oder Null;*
4. *Der Endomorphismenring $\mathrm{End}_R E$ ist ein Schiefkörper.*

Beweis. $\ker(E \to M)$ und $\mathrm{im}(M \to E')$ sind Untermoduln von E beziehungsweise von E' und sind folglich Null oder ganz E beziehungsweise ganz E'. □

Korollar 7.4.7.7. *Sei R ein kommutativer Ring, der einen algebraisch abgeschlossenen Körper k als Teilring hat. So ist ein einfacher R-Modul, der endlichdimensional ist als k-Vektorraum, notwendig eindimensional als k-Vektorraum.*

Beweis. Die Multiplikation mit einem beliebigen Element $r \in R$ besitzt notwendig einen Eigenwert, und der zugehörige Eigenraum ist ein von Null verschiedener Untermodul, also der ganze Modul. Also operiert jedes $r \in R$ durch einen Skalar, und dann kann unser Modul nur einfach sein, wenn er eindimensional ist. □

Definition 7.4.7.8. Gegeben ein Modul M über einem Ring R definieren wir seine **Länge**

$$\mathrm{Länge}_R(M) = \mathrm{Länge}(M) = \mathrm{l}_R(M) = \mathrm{l}(M) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

als das Supremum über alle n derart, daß es in M eine echt absteigende Kette von Untermoduln gibt der Gestalt $M = M_n \supsetneq M_{n-1} \supsetneq \ldots \supsetneq M_0 = 0$, die also salopp gesprochen in n echten Schritten vom ganzen Modul zum Nullmodul führt.

Beispiel 7.4.7.9. Ist k ein Körper, so ist die Länge eines k-Moduls die Dimension des fraglichen k-Vektorraums.

7.4.7.10. Bei einer endlichen echt absteigenden Kette maximal möglicher Länge ist natürlich stets M_i/M_{i-1} einfach für $1 \leq i \leq n$. Offensichtlich hat ein Modul die Länge Null genau dann, wenn er der Nullmodul ist, und die Länge Eins genau dann, wenn er einfach ist.

Definition 7.4.7.11. Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Eine **Kompositionsreihe von** M ist eine endliche Kette von Untermoduln

$$M = M_r \supset M_{r-1} \supset \ldots \supset M_0 = 0$$

derart, daß M_i/M_{i-1} einfach ist für $1 \leq i \leq r$. Der Modul M_i/M_{i-1} heißt dann der **i-te Subquotient** unserer Kompositionsreihe. Gegeben ein Modul M über einem Ring erklären wir seine **Kompositionslänge**

$$\lambda_R(M) = \lambda(M) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

wie folgt: Besitzt unser Modul eine Kompositionsreihe, so sei $\lambda(M)$ die kleinstmögliche Länge einer Kompositionsreihe von M. Besitzt unser Modul keine Kompositionsreihe, so sagen wir, seine Kompositionslänge sei unendlich und schreiben $\lambda(M) = \infty$.

Satz 7.4.7.12 (Jordan-Hölder). *Die Länge und die Kompositionslänge stimmen für jeden Modul überein. Weiter haben je zwei Kompositionsreihen eines Moduls dieselbe Länge und bis auf Reihenfolge isomorphe Subquotienten.*

7.4.7.13. In Formeln ausgedrückt besagt der zweite Teil: Sind $M = M_r \supset \ldots \supset M_0 = 0$ und $M = N_s \supset \ldots \supset N_0 = 0$ zwei Kompositionsreihen eines Moduls M, so gilt $r = s$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ mit $N_i/N_{i-1} \cong M_{\sigma(i)}/M_{\sigma(i)-1}$ für alle i. Diese Subquotienten oder genauer ihre Isomorphieklassen heißen die **Kompositionsfaktoren** unseres Moduls endlicher Länge M, und unser Satz sagt auch, daß jeder Kompositionsfaktor mit einer wohlbestimmten Vielfachheit auftritt. Gegeben ein einfacher Modul L notiert man die Vielfachheit von L als Kompositionsfaktor von M meist

$$[M : L]$$

Beweis. Die erste Aussage unseres Satzes behauptet in Formeln $\mathrm{l}(M) = \lambda(M)$. Offensichtlich ist a priori nur die Abschätzung $\mathrm{l}(M) \geq \lambda(M)$. Als nächstes zeigen wir nun, daß für jeden Modul M endlicher Kompositionslänge und jeden von Null verschiedenen Untermodul $0 \neq N \subset M$ gilt

$$\lambda(M/N) < \lambda(M)$$

Seien in der Tat $M = M_r \supset \ldots \supset M_0 = 0$ eine Kompositionsreihe von M und $N \subset M$ ein Untermodul. Wir betrachten den Quotienten $\bar{M} = M/N$ und die Bilder $\bar{M}_i$ der M_i in $\bar{M}$ und erhalten kurze exakte Sequenzen

$$M_i \cap N/M_{i-1} \cap N \hookrightarrow M_i/M_{i-1} \twoheadrightarrow \bar{M}_i/\bar{M}_{i-1}$$

durch explizites Nachdenken: Geht ein Element $m + M_{i-1}$ aus der Mitte rechts nach Null, landet es also in $\bar{M}_{i-1}$, so muß es aus $N + M_{i-1}$ stammen und sich folglich mit $m \in M_i \cap N$ darstellen lassen. Alternativ mag man das Neunerlemma 4.4.7.5 auf das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
M_{i-1} \cap N & \hookrightarrow & M_i \cap N & \twoheadrightarrow & M_i \cap N/M_{i-1} \cap N \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
M_{i-1} & \hookrightarrow & M_i & \twoheadrightarrow & M_i/M_{i-1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\bar{M}_{i-1} & \hookrightarrow & \bar{M}_i & \twoheadrightarrow & \bar{M}_i/\bar{M}_{i-1}
\end{array}$$

anwenden. Gilt zusätzlich $N \neq M$, so kann nicht $\bar{M}_i = \bar{M}_{i-1}$ gelten für alle i. Zu jeder Kompositionsreihe von M haben wir also eine echt kürzere Kompositionsreihe von N konstruiert und erkennen damit, daß in der Tat aus $\lambda(M) < \infty$ und $N \neq N$ folgt $\lambda(N) < \lambda(M)$. Man sieht so, daß die Länge einer beliebigen echt absteigenden Kette von Untermoduln eines Moduls endlicher Kompositionslänge M nach oben beschränkt ist durch eben diese Kompositionslänge $\lambda(M)$ und folgert sofort $\mathrm{l}(M) \leq \lambda(M)$. Im Fall $\lambda(M) = \infty$ ist das eh klar. So ergibt sich schließlich für jeden Modul M die Gleichheit

$$\mathrm{l}(M) = \lambda(M)$$

Daß je zwei Kompositionsreihen dieselbe Länge haben, folgt sofort. Ist weiter $N \subset M$ ein einfacher Untermodul, so gibt es oben genau einen Index j mit

$$M_j \cap N = N \text{ aber } M_{j-1} \cap N = 0$$

Für diesen Index haben wir $M_j/M_{j-1} \cong N$ und $\bar{M}_j/\bar{M}_{j-1} = 0$, wohingegen für die anderen Indizes $i \neq j$ gilt $M_i/M_{i-1} \cong \bar{M}_i/\bar{M}_{i-1}$. Nun folgt der Rest des Satzes mit Induktion. Ist genauer $M = N_r \supset \ldots \supset N_1 = N$ eine weitere Kompositionsreihe, so dürfen wir induktiv annehmen, daß die Kompositionsfaktoren N_k/N_{k-1} für $k \geq 2$ von $\bar{M} = M/N$ bis auf Reihenfolge und Isomorphismus mit den $\bar{M}_i/\bar{M}_{i-1}$ für $i \neq j$ übereinstimmen. $\square$

Korollar 7.4.7.14 (Längenformel). *Gegeben $M \supset N$ ein Modul mit einem Untermodul gilt in $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ die Gleichheit $\mathrm{l}(M) = \mathrm{l}(M/N) + \mathrm{l}(N)$.*

Beweis. Für jeden Untermodul $N \subset M$ sind die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{l}(M) &\geq \mathrm{l}(M/N) + \mathrm{l}(N) \\ \lambda(M) &\leq \lambda(M/N) + \lambda(N) \end{aligned}$$

offensichtlich. Da nach dem Satz 7.4.7.12 von Jordan-Hölder aber die Länge und die Kompositionslänge übereinstimmen, folgt die Behauptung. □

Korollar 7.4.7.15. *Sei R ein Ring, der einen Körper k als Teilring hat. Ist R endlichdimensional als Linksmodul über k, so gibt es bis auf Isomorphismus höchstens $\dim_k R$ einfache R-Moduln.*

Beweis. Natürlich ist R von endlicher Länge als R-Modul und es gilt sogar $\mathrm{l}(R) \leq \dim_k R$. Jeder einfache R-Modul ist aber ein Quotient von R und taucht folglich in einer und damit in jeder Kompositionsreihe von R als Subquotient auf. □

Ergänzung 7.4.7.16. Eine Variante zum hier gewählten Zugang zum Satz von Jordan-Hölder findet man etwa in [JS06]: Man zeigt, wie dort ausgeführt, ohne große Schwierigkeiten, daß je zwei endliche Filtrierungen eines Moduls durch das Einfügen geeigneter weiterer Untermoduln so verfeinert werden können, daß die Subquotienten der beiden so enstehenden Filtrierungen bis auf Reihenfolge isomorph sind.

Ergänzung 7.4.7.17. Ein **Ring von endlicher Länge** ist ein Ring, der sowohl als Linksmodul als auch als Rechtsmodul über sich selber von endlicher Länge ist.

Satz 7.4.7.18 (Noethersche Kringe der Krulldimension Null). *Für Kring sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Kring ist von endlicher Länge;*
2. *Unser Kring ist noethersch von der Krulldimension Null oder der Nullring;*
3. *Unser Kring ist isomorph zu einem endlichen Produkt von noetherschen Kringen mit genau einem Primideal, das dann notwendig sowohl maximal als auch nilpotent sein muß.*

Vorschau 7.4.7.19. Die Äquivalenz dieser Aussagen wird sich als eine wesentliche Zutat beim Beweis des Hauptidealsatzes von Krull 7.5.9.4 erweisen, einer der zentralen Aussagen der Dimensionstheorie.

Beweis. (2)⇒(3). Ist unser Kring R noethersch, so ist nach 7.4.5.28 sein Nilradikal der Schnitt seiner endlich vielen minimalen Primideale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$. Ist zusätzlich seine Krulldimension Null, so sind das auch seine maximalen Ideale. Es gibt also n mit $(\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_r)^n = 0$ und der abstrakte chinesische Restsatz liefert einen Isomorphismus

$$R \xrightarrow{\sim} R/\mathfrak{m}_1^n \times \ldots \times R/\mathfrak{m}_r^n$$

(3)⇒(1). Jedes $\mathfrak{m}_i^t/\mathfrak{m}_i^{t+1}$ ist ein endlich erzeugter Vektorraum über dem Körper $R/\mathfrak{m}_i$ und folglich von endlicher Länge als R-Modul. Zusammen mit der Längenformel 7.4.7.14 zeigt das, daß R endliche Länge hat.

(1)⇒(2). Natürlich ist jeder Modul von endlicher Länge auch noethersch. Weiter kann unser Kring von endlicher Länge bis auf Isomorphismus nur endlich viele einfache Moduln haben, also nur endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$. Offensichtlich gilt $(\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_r)^l = 0$ für l die Länge unseres Krings. Dies Produkt liegt mithin in jedem Primideal $\mathfrak{p}$ unseres Rings. Umfaßte unser $\mathfrak{p}$ keines der $\mathfrak{m}_i$, so würden wir mit 7.4.2.12 schnell bei einem Widerspruch landen. Also ist jedes Primideal maximal und die Krulldimension ist Null. □

Definition 7.4.7.20. Ein Modul heißt **artinsch** nach dem Mathematiker Emil Artin genau dann, wenn jede absteigende Folge von Untermoduln stationär wird. Man sagt dann auch, unser Modul „erfülle die absteigende Kettenbedingung“.

Ergänzung 7.4.7.21. Auf Englisch spricht man von der **descending chain condition** oder kurz **dcc** oder auch von **artinian modules**. Darin liegt eine gewisse Ironie der Geschichte: Emil Artin war nämlich armenischen Ursprungs und seine Familie hatte ihren Familiennamen Artinian extra zu Artin eingedeutscht.

Ergänzung 7.4.7.22. Man kann auch zeigen, daß ein Kring genau dann endliche Länge hat, wenn er ein **artinscher Kring** alias artinsch als Modul über sich selber ist. Diese Erkenntnis scheint mir im Gesamtgebäude der Theorie eher nebensächlich und ich selber werde stets von Kringen endlicher Länge reden. Ich gebe dennoch einen Beweis, da die Terminologie eines artinschen Krings oft verwendet wird. Problematisch ist nur der Nachweis, daß jeder artinsche Kring bereits von endlicher Länge ist. Wir zeigen dazu zunächst, daß jedes Primideal eines artinschen Krings maximal ist. In der Tat ist der Restklassenring ein artinscher Integritätsbereich, und solch ein Kring muß ein Körper sein: Wäre sonst x eine von Null verschiedene Nichteinheit, so müste es n geben mit $\langle x^n \rangle = \langle x^{n+1} \rangle$, also $x^n y = x^{n+1}$ für eine Einheit y, und dann folgte $x = y$ im Widerspruch zu unserer Annahme, x sein keine Einheit. Weiter kann ein artinscher Kring nur endlich viele maximale Ideale haben, da wir sonst aus Schnitten von immer größeren endlichen Familien maximaler Ideale eine unendliche absteigende Folge von Idealen bilden

könnten. Nach 7.4.5.6 ist der Schnitt unserer maximalen Ideale das Nilradikal $\mathfrak{n}$ unseres Krings. Wenn wir zeigen können, daß es ein n gibt mit $\mathfrak{n}^n = 0$, so sind wir fertig mit derselben Argumentation wie oben. Sicher wird die Folge der $\mathfrak{n}^n$ stabil, sagen wir $\mathfrak{n}^n = \mathfrak{n}^{n+1} = \ldots = \mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{a} \neq 0$, so folgt $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a} \neq 0$, und dann gibt es auch ein minimales Ideal $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \neq 0$. Offensichtlich ist jedes solche minimale $\mathfrak{b}$ ein Hauptideal, also $\mathfrak{b} = \langle x \rangle$ mit $x \neq 0$. Andererseits gilt für jedes solche minimale $\mathfrak{b}$ auch $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$, zusammen also $\mathfrak{a}x = \langle x \rangle$. Dann gibt es aber $y \in \mathfrak{a}$ mit $yx = x$ und damit $y^r x = x$ für alle r. Da aber y nilpotent ist, steht das im Widerspruch zu $x \neq 0$.

Ergänzung 7.4.7.23. Analoges gilt mit einem umfangreicheren Beweis sogar für beliebige, nicht notwendig kommutative Ringe: Jeder Ring, der als Linksmodul über sich selber artinsch ist, ist als Linksmodul über sich selber bereits von endlicher Länge. Solche Ringe heißen auch **linksartinsch**. Einen Beweis findet man zum Beispiel in [JS06].

Übungen

Übung 7.4.7.24. Man zeige: Ist ein Ring einfach als Linksmodul über sich selbst, so ist unser Ring ein Schiefkörper.

Übung 7.4.7.25. In jedem Ring läßt sich auch jedes echte Links- beziehungsweise Rechtsideal vergrößern zu einem maximalen echten Links- beziehungsweise Rechtsideal. Genau dann ist ein Linksideal maximal, wenn der Quotient danach ein einfacher Modul ist. Jeder von Null verschiedene Modul über einem Ring besitzt einen einfachen Subquotienten. Insbesondere besitzt jeder von Null verschiedene Ring mindestens einen einfachen Modul. Hinweis: 7.1.6.4.

Übung 7.4.7.26. Jeder endlich erzeugte und von Null verschiedene Modul besitzt einen einfachen Quotienten. Hinweis: 7.4.7.25. Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ besitzt als $\mathbb{Z}$-Modul weder einfache Untermoduln noch einfache Quotienten. Als $\mathbb{Q}$-Modul ist $\mathbb{Q}$ dahingegen einfach.

Übung 7.4.7.27. Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist jeder einfache $k[X]$-Modul eindimensional und isomorph zu $k[X]/\langle X - \lambda \rangle$ für genau ein $\lambda \in k$.

Übung 7.4.7.28. Der Quotient eines Moduls nach einem maximalen echten Untermodul ist stets ein einfacher Modul.

Übung 7.4.7.29. Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper k und eine k-Kringalgebra A von endlichem Typ ist jeder A-Modul von endlicher Länge bereits endlichdimensional, und seine Länge fällt mit seiner Dimension als k-Vektorraum zusammen.

Übung 7.4.7.30. Der einzige einfache Modul über dem Endomorphismenring eines endlichdimensionalen Vektorraums ist der besagte Vektorraum selber, bis auf Isomorphismus.

Übung 7.4.7.31. Man zeige: Ein $\mathbb{Z}$-Modul M ist von endlicher Länge genau dann, wenn er endlich ist. Seine Länge ist dann die Zahl der Primfaktoren seiner Kardinalität $|M|$, mit Vielfachheiten gerechnet.

Ergänzende Übung 7.4.7.32. Man zeige, daß jeder Modul endlicher Länge artinsch ist. Ein Beispiel für einen artinschen $\mathbb{Z}$-Modul unendlicher Länge ist der Quotient $\mathbb{Z}[2^{-1}]/\mathbb{Z}$.

Übung 7.4.7.33. Sei A ein noetherscher Kring. Man zeige: Ist der Quotient von A nach seinem Nilradikal $A/\sqrt{0}$ von endlicher Länge, so ist bereits A selbst von endlicher Länge.

7.4.8 Hauptraumzerlegung von Moduln*

Lemma 7.4.8.1 (Verallgemeinerte Hauptraumzerlegung). *Gegeben ein Modul M über einem Kring R und ein maximales Ideal $\chi \in \operatorname{Max} R$ setze man $M_{(\chi)} := \{m \in M \mid \chi^k m = 0$ für $k \gg 0\}$. Mit dieser Notation liefern die Inklusionen eine Einbettung*

$$\bigoplus_{\chi \in \operatorname{Max} R} M_{(\chi)} \hookrightarrow M$$

Weiter ist das Bild dieser Einbettung die Vereinigung aller Untermoduln endlicher Länge.

7.4.8.2. Im Spezialfall eines Polynomrings in einer Veränderlichen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist das die Hauptraumzerlegung 4.3.2.7, vergleiche auch 4.3.2.16. Unter der Bijektion $k \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max}(k[X])$, $\lambda \mapsto \langle X - \lambda \rangle$ entspricht genauer die Hauptraumzerlegung des durch Multiplikation mit X gegebenen Endomorphismus des k-Vektorraums M genau der Zerlegung in der Proposition.

Beweis. Wäre die Summe der $M_{(\chi)}$ nicht direkt, so wäre auch schon eine endliche Teilsumme nicht direkt und wir hätten notwendig eine endliche direkte Teilsumme $M_{(\nu)} \oplus \ldots \oplus M_{(\mu)}$, die von einem weiteren $M_{(\chi)}$ nichttrivial geschnitten wird. Wegen $(M \oplus N)_{(\chi)} = M_{(\chi)} \oplus N_{(\chi)}$ hätten wir dann $\mu \neq \chi$ mit $M_{(\mu)} \cap M_{(\chi)} \neq 0$. Das ist aber absurd, da gilt $R = \chi + \mu$, also $1 = a + b$ mit $a \in \chi$, $b \in \mu$, also für alle n auch $1 = (a+b)^{2n} = c + d$ mit $c \in \chi^n$, $d \in \mu^n$, und damit $1m = 0$ für alle $m \in M_{(\mu)} \cap M_{(\chi)}$. Die Summe ist also direkt und es reicht, wenn wir für M von endlicher Länge $M = \sum M_{(\chi)}$ zeigen. Unter dieser Annahme ist klar, daß wir paarweise verschiedene $\chi_1, \ldots, \chi_r \in \operatorname{Max} R$ finden können und $n \in \mathbb{N}$ mit

$$(\chi_1 \ldots \chi_r)^n M = 0$$

Der chinesische Restsatz 6.2.3.4 liefert dann einen Isomorphismus

$$R/(\chi_1 \dots \chi_r)^n \xrightarrow{\sim} R/\chi_1^n \times \dots \times R/\chi_r^n$$

den wir benutzen können, um unser M aufzufassen als einen Modul über dem Produktring. Die Elemente e_i in diesem Produktring mit einem einzigen Eintrag 1 an der i-ten Stelle und Nullen sonst haben als Elemente der rechten Seite die Eigenschaft $\chi_i^n e_i = 0$ und für alle $m \in M$ gehört $m = e_1 m + \dots + e_r m$ folglich zur Summe der $M_{(\chi)}$. □

Übungen

Übung 7.4.8.3. Man bestimme die verallgemeinerte Hauptraumzerlegung des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}/1000\mathbb{Z}$.

Übung 7.4.8.4 (**Hauptraumzerlegung über Kringen endlicher Länge**). Ist R ein Kring und M ein R-Modul, der die Vereinigung seiner Untermoduln endlicher Länge ist, so sind für alle $\chi \in \operatorname{Max} R$ die Kompositionen $M_{(\chi)} \hookrightarrow M \to M_\chi$ Isomorphismen mit der Lokalisierung nach χ und für maximale Ideale $\chi \neq \mu$ ist die Komposition $M_{(\chi)} \hookrightarrow M \to M_\mu$ die Nullabbildung. Insbesondere ist für jeden Modul M über einem Kring endlicher Länge die Abbildung aus 7.4.3.26 ein Isomorphismus

$$M \xrightarrow{\sim} \prod_{\chi \in \operatorname{Max} R} M_\chi$$

7.5 Ganze Kringerweiterungen und Dimension

7.5.1 Ganze Kringerweiterungen

7.5.1.1. Ich beginne mit einigen Erinnerungen. Sei $A \subset B$ eine Kringerweiterung. Ein Element $b \in B$ heißt wie in 7.1.5.2 **ganz über** A, wenn es Nullstelle eines normierten Polynoms mit Koeffizienten in A ist, wenn es also $n \geq 1$ und $a_i \in A$ gibt mit

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 = 0$$

Definition 7.5.1.2. Eine Kringerweiterung $A \subset B$ heißt **ganz**, wenn jedes Element $b \in B$ ganz ist über A. Einen Kringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ nennen wir **ganz**, wenn $\varphi(A) \subset B$ eine ganze Kringerweiterung ist.

Beispiel 7.5.1.3. Die Kringerweiterung $R[T] \subset R[T, T^{-1}]$ ist, wie bereits in 7.1.5.4 besprochen, nicht ganz für jeden von Null verschiedenen Kring R.

7.5.1.4 (**Ganz bleibt ganz unter Quotienten und Lokalisierungen**). Ist $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung und $I \subset B$ ein Ideal, so ist auch $(A/A \cap I) \subset B/I$ eine ganze Kringerweiterung. Ist $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung und $T \subset A$ eine Teilmenge, so ist auch $T^{-1}A \subset T^{-1}B$ eine ganze Kringerweiterung.

Satz 7.5.1.5 (Charakterisierung ganzer ringendlicher Kringerweiterungen). *Für eine Kringerweiterung $A \subset B$ sind gleichbedeutend:*

1. *Der Ring B wird als Kringerweiterung von endlich vielen über A ganzen Elementen erzeugt;*
2. *Unsere Kringerweiterung ist ganz und ringendlich;*
3. *Unsere Kringerweiterung ist modulendlich.*

Beweis. 2⇒1 ist offensichtlich und 1⇒3 hatten Sie bereits als Übung 7.1.5.16 ausgeführt. Wir müssen nur noch 3⇒2 zeigen. Seien dazu $b_1, \ldots, b_n$ Erzeuger des A-Moduls B. Gegeben $b \in B$ finden wir dann $a_{ij} \in A$ mit

$$bb_i = a_{i1}b_1 + \ldots + a_{in}b_n$$

was wir umschreiben können zur Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} b & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ziehen wir nun beide Seiten voneinander ab und multiplizieren mit der adjungierten Matrix 3.6.4.6, so erkennen wir, daß für P das charakteristische Polynom

der Matrix der (a_{ij}) gilt $P(b)b_1 = \ldots = P(b)b_n = 0$. Das hinwiederum zeigt $P(b) = 0$, denn wir können ja die Eins von B als Linearkombination der b_i schreiben. $\square$

Ergänzung 7.5.1.6. Ein Modul über einem Ring heißt **treu**, wenn nur die Multiplikation mit dem Nullelement des Rings darauf die Nullabbildung liefert. Der vorhergehende Beweis zeigt allgemeiner: Ist $A \subset B$ eine Kringerweiterung und gibt es einen treuen B-Modul M, der endlich erzeugt ist als A-Modul, so ist B ganz über A. Ist darüber hinaus $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und gilt $bM \subset \mathfrak{a}M$ für ein $b \in B$, so erfüllt b sogar eine Ganzheitsgleichung der Gestalt $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$. Das Argument bleibt dasselbe.

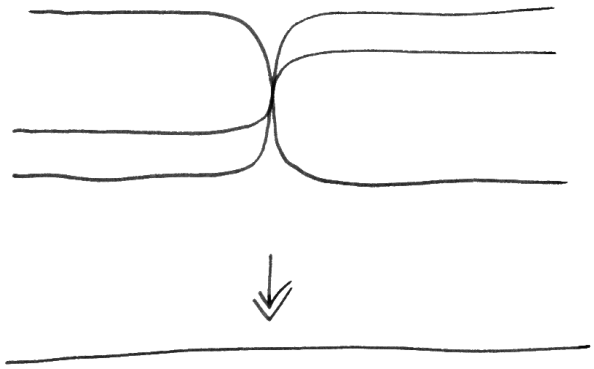
7.5.1.7 (**Anschauung für ganze Kringerweiterungen**). Um für den Begriff einer ganzen Kringerweiterung eine Anschauung zu entwickeln, betrachte man den Fall, daß $A = \mathcal{O}(X)$ der Ring der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät X ist und daß B nilpotentfrei ist und als A-Ring erzeugt wird von einem einzigen Element b. Ist $f \in \mathcal{O}(X)[T] = \mathcal{O}(X \times k)$ ein normiertes Polynom mit $f(b) = 0$, so ist B der Ring der polynomialen Funktionen auf einer abgeschlossenen Teilmenge des Nullstellengebildes $\mathcal{Z}(f) \subset X \times k$ und unsere Inklusion $A \subset B$ entspricht geometrisch der durch das Weglassen der letzten Koordinate definierten Abbildung. Die Faser über $x \in X$ besteht also aus den Wurzeln des Polynoms $f(x, T) \in k[T]$ und daß unser Polynom f normiert sein soll, bedeutet geometrisch, daß „an keiner Stelle $x \in X$ eine dieser Wurzeln nach Unendlich streben kann“.

7.5.1.8. Sei $A \subset B$ eine Kringerweiterung. Sind Elemente $x_1, \ldots, x_n \in B$ ganz über A, so ist $A[x_1, \ldots, x_n]$ nach 7.5.1.5 ganz über A. Ist $A \subset B$ eine Kringerweiterung, so bilden mithin alle über A ganzen Elemente von B einen Teilring von B. Der Kring aller über A ganzen Elemente von B heißt der **ganze Abschluß von A in B**.

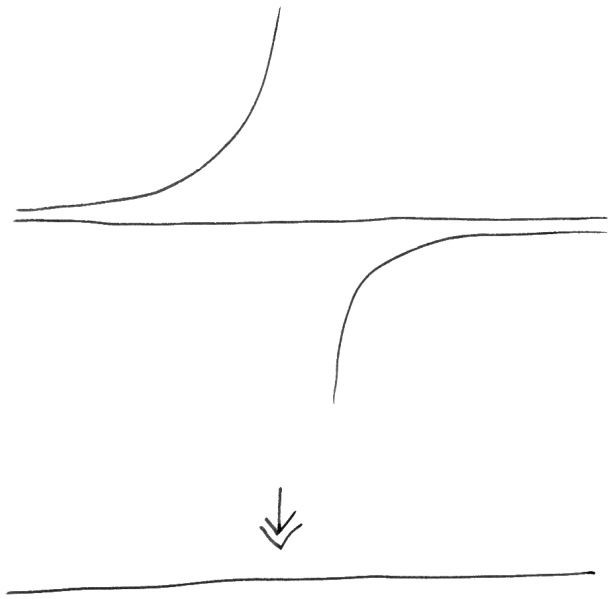
Beispiel 7.5.1.9. Nach 3.5.3.41 ist $\mathbb{Z}$ sein eigener ganzer Abschluß in $\mathbb{Q}$.

7.5.1.10 (**Transitivität der Ganzheit von Kringerweiterungen**). Sind $C \supset B \supset A$ Kringe und ist C ganz über B und B ganz über A, so ist auch C ganz über A. Ist in der Tat $c \in C$ gegeben, so existiert für c eine Ganzheitsgleichung $c^n + b_{n-1}c^{n-1} + \ldots + b_0$ über B. Im Turm $A[b_0, \ldots, b_{n-1}, c] \supset A[b_0, \ldots, b_{n-1}] \supset A$ ist dann jede der beiden Ringerweiterungen modulendlich nach 7.5.1.5. Damit ist aber nach 7.1.5.13 auch die gesamte Ringerweiterung modulendlich und nach 7.5.1.5 ist folglich c ganz über A.

Lemma 7.5.1.11 (Sandwich-Lemma). *Gegeben ein Sandwich $B \supset A \supset k$ von Kringen mit B modulendlich über A und B ringendlich über k und k noethersch ist A ringendlich über k.*



Die Erweiterung $k[X,Y]/\langle Y^3 - X\rangle \supset k[X]$ ist ganz.



Die Erweiterung $k[X,Y]/\langle (XY-1)Y\rangle \supset k[X]$ ist nicht ganz. Formal zeigt das die Surjektion $k[X,Y]/\langle (XY-1)Y\rangle \twoheadrightarrow k[X,Y]/\langle (XY-1)\rangle \xrightarrow{\sim} k[X,X^{-1}]$ zusammen mit Beispiel 7.5.1.3.

Bemerkung 7.5.1.12. Ein Spezialfall dieses Lemmas, für das die Theorie ganzer Kringerweiterungen nicht in voller Stärke benötigt wird, bildet das Rückgrat des in 7.1.5.10 gegebenen Beweises für den Hilbert'schen Nullstellensatz in seiner körpertheoretischen Form. Wir werden das Sandwich-Lemma im weiteren Verlauf insbesondere beim „Verkleben von Punkten" 7.5.2.15 benötigen.

Beweis. Wir wählen ein endliches Erzeugendensystem $b_1, \ldots, b_n$ von B als A-Modul, das gleichzeitig B als k-Kring erzeugt. Nach 7.5.1.5 finden wir für jedes Element dieses Erzeugendensystems eine Ganzheitsgleichung über A. Bezeichnet $K \subset A$ den von allen Koeffizienten dieser Gleichungen über k erzeugten Teilring, so erhalten wir ein erweitertes Sandwich

$$B \supset A \supset K \supset k$$

mit B modulendlich über K und K ringendlich über k. Nach dem Hilbert'schen Basissatz 7.1.4.11 ist K also noethersch und damit A modulendlich über K und damit A ringendlich über k. □

Beispiel 7.5.1.13. Ist k ein Körper und B eine ringendliche k-Kringalgebra, so ist jede Unterringalgebra $A \subset B$ endlicher Kodimension auch ringendlich über k. Zum Beispiel ist $A = \{P \mid P'(0) = 0\} = k + \langle T^2 \rangle \subset k[T]$ der Ring der polynomialen Funktionen auf der Neil'schen Parabel und $A = \{P \mid P(1) = P(-1)\} = k + \langle T^2 - 1 \rangle \subset k[T]$ der Ring der polynomialen Funktionen auf der nodalen Kubik, vergleiche 7.3.2.7.

Übungen

Übung 7.5.1.14. Man zeige, daß der ganze Abschluß von $\mathbb{C}[X, Y]/\langle X^3 - Y^2 \rangle$ in seinem Quotientenkörper isomorph ist zum Polynomring $\mathbb{C}[T]$.

Übung 7.5.1.15. Man berechne die ganzen Abschlüsse von $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ und $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ jeweils in ihren Quotientenkörpern.

Ergänzende Übung 7.5.1.16. Ist $A \subset B$ eine Kringerweiterung und B ein Integritätsring und gibt es ein Ideal $I \subset B$ mit $B = A \oplus I$, so ist außer den Elementen von A selbst kein Element von B ganz über A.

7.5.2 Going-up

Satz 7.5.2.1 (Ganze Kringerweiterungen und Primideale). *Gegeben eine ganze Kringerweiterung $A \subset B$ gilt:*

1. *Jedes Primideal von A ist der Schnitt mit A eines Primideals von B. Das Herunterschneiden von Primidealen induziert also in Formeln eine Surjektion* $\operatorname{Spec} B \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$*;*

2. *Für je zwei echt ineinander enthaltene Primideale* $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ *des großen Krings* B *gilt auch für ihre Schnitte mit dem kleinen Kring* $(\mathfrak{q} \cap A) \subsetneq (\mathfrak{p} \cap A)$.

7.5.2.2. Der Satz impliziert insbesondere, daß das Urbild von $\operatorname{Max} A$ unter unserer Surjektion $\operatorname{Spec} B \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$ genau $\operatorname{Max} B$ ist. Mit einem ersten vorbereitenden Lemma und dem Beweis dieser Aussage in 7.5.2.4 werden wir den Beweis des Satzes vorbereiten, der dann im Anschluß an den Beweis von 7.5.2.4 gegeben wird. Ist $A \subset B$ keine ganze Kringerweiterung, so muß das Herunterschneiden keine Surjektion auf den Primspektren liefern. Das einfachste Gegenbeispiel ist $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Ein Gegenbeispiel im geometrischen Fall wäre die Erweiterung

$$k[X] \subset k[X,Y]/\langle XY - 1\rangle$$

Geometrisch entspricht sie der Projektion einer Hyperbel auf die x-Achse. Hier liegt der Ursprung nicht im Bild. In algebraischer Sprache kann also das Primideal $\langle X\rangle$ nicht durch Herunterschneiden erhalten werden.

Lemma 7.5.2.3. *Gegeben eine ganze Kringerweiterung zwischen Integritätsringen ist der eine Integritätsring ein Körper genau dann, wenn der andere ein Körper ist.*

Beweis. Sei $A \subset B$ unsere Kringerweiterung. Ist A ein Körper und $b \in B$ gegeben, so finden wir eine Gleichung

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 = 0$$

mit $n \geq 1$ und $a_i \in A$. Da B ein Integritätsring ist, dürfen wir im Fall $b \neq 0$ sogar $a_0 \neq 0$ annehmen. Bringen wir nun a_0 auf die andere Seite, teilen durch $(-a_0)$ und klammern b aus, so erhalten wir das Inverse zu b. Also ist mit A auch B ein Körper. Ist umgekehrt B ein Körper, so besitzt jedes $a \in A\backslash 0$ ein Inverses $b \in B$, und multiplizieren wir eine Gleichung für b wie oben mit a^{n-1}, so folgt $b \in A$. Also ist mit B auch A ein Körper. □

Lemma 7.5.2.4. *Seien* $A \subset B$ *eine ganze Kringerweiterung und* $\mathfrak{p} \subset B$ *ein Primideal. Genau dann ist* $\mathfrak{p}$ *ein maximales Ideal in* B*, wenn* $A \cap \mathfrak{p}$ *ein maximales Ideal in* A *ist.*

Beweis. Wir betrachten die ganze Erweiterung von Integritätsringen

$$(A/A \cap \mathfrak{p}) \subset (B/\mathfrak{p})$$

und müssen nach 7.1.6.7 zeigen, daß der eine Integritätsring ein Körper ist genau dann, wenn der andere ein Körper ist. Das aber sagt gerade das vorhergehende Lemma 7.5.2.3. □

Bemerkung 7.5.2.5. Der folgende Beweis für den ersten Teil von 7.5.2.1 benötigt das Zorn'sche Lemma, um in einer Lokalisierung eines Restklassenrings von B die Existenz eines maximalen Ideals sicherzustellen. Arbeiten wir mit noetherschen Kringen, so könnten wir das auch noch mit einer etwas schwächeren Version des Auswahlaxioms zeigen. Im Anschluß zeigen wir noch, wie man die Aussagen des Satzes im Fall einer modulendlichen Kringerweiterung auch ohne das Zorn'sche Lemma zeigen kann.

Beweis des Satzes 7.5.2.1 über ganze Kringerweiterungen. 1. Sei $P \subset A$ ein Primideal. Wir lokalisieren am Komplement $S := A \backslash P$ von P in A und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \to & S^{-1}B \\ \cup & & \cup \\ A & \to & S^{-1}A \end{array}$$

Seine Vertikalen sind ganze Ringerweiterungen. Nun ist $S^{-1}P$ das einzige maximale Ideal von $S^{-1}A$ und $S^{-1}B$ ist nicht der Nullring. Mithin besitzt $S^{-1}B$ maximale Ideale, und jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset S^{-1}B$ schneidet $S^{-1}A$ nach 7.5.2.4 im einzigen maximalen Ideal $S^{-1}P$. Das Urbild von $\mathfrak{m}$ in B ist also unser gesuchtes Primideal $\mathfrak{p} \subset B$ mit $\mathfrak{p} \cap A = P$.

2. Betrachten wir in A die multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $S := A \backslash \mathfrak{p}$, so ist $S^{-1}(A \cap \mathfrak{p})$ ein maximales Ideal in $S^{-1}A$. In $S^{-1}B$ haben wir nach 7.4.5.4 jedoch $S^{-1}\mathfrak{q} \subsetneq S^{-1}\mathfrak{p}$. Folglich ist das Ideal $S^{-1}\mathfrak{q}$ nicht maximal in $S^{-1}B$, folglich ist $S^{-1}\mathfrak{q} \cap S^{-1}A = S^{-1}(\mathfrak{q} \cap A)$ nicht maximal in $S^{-1}A$ nach 7.5.2.4, folglich gilt $\mathfrak{q} \cap A \neq \mathfrak{p} \cap A$. □

Ergänzung 7.5.2.6 (*Beweis ohne Zorn im modulendlichen Fall*). Ist ganz allgemein $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung und $\mathfrak{a} \subsetneq A$ ein echtes Ideal, so ist auch das Erzeugnis $\langle \mathfrak{a}B \rangle$ von $\mathfrak{a}$ in B ein echtes Ideal. Das kann man aus 7.5.2.1 folgern, da jedes echte Ideal zu einem maximalen Ideal vergrößert weden kann, aber wir können es auch ohne Zorn zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir unsere Kringerweiterung dabei modulendlich annehmen, denn läßt sich die Eins von B als Linearkombination von Elementen von $\mathfrak{a}$ darstellen, so auch schon die Eins des von den Koeffizienten über A erzeugten Teilrings. Ist $b_1, \ldots, b_n$ ein Erzeugendensystem des A-Moduls B, so folgt aus $\langle \mathfrak{a}B \rangle = B$ die Existenz von Gleichungen

$$\begin{array}{ccccc} b_1 & = & a_{11}b_1 & + \ldots + & a_{1n}b_n \\ & \vdots & & & \vdots \\ b_n & = & a_{n1}b_1 & + \ldots + & a_{nn}b_n \end{array}$$

mit $a_{ij} \in \mathfrak{a}$ oder in Matrixschreibweise $\vec{b} = A\vec{b}$ alias $(A - I)\vec{b} = \vec{0}$. Multiplizieren wir mit der adjungierten Matrix, so folgt erst $\det(A - I) = 0$ und durch

Auswerten der Determinante dann $1 \in \mathfrak{a}$ alias $\mathfrak{a} = A$. Um nun auch 7.5.2.1 im modulendlichen Fall ohne Zorn zu zeigen, bemerken wir, daß das einzige maximale Ideal $\mathfrak{a} = S^{-1}P$ von $S^{-1}A$ nach unserer Vorüberlegung ein echtes Ideal in $S^{-1}B$ erzeugt. Teilen wir diese Ideale weg, so erhalten wir eine modulendliche Kringerweiterung eines Körpers. Darin gibt es offensichtlich ein maximales Ideal, und dessen Urbild ist notwendig ein maximales Ideal in $S^{-1}B$. Nun kann der Beweis so weiterlaufen wie zuvor.

Korollar 7.5.2.7 (Going-up). *Sei $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung. Gegeben ein Ideal $\mathfrak{b}$ des Krings B gibt es für jedes Primideal P von A mit $(\mathfrak{b} \cap A) \subset P$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ von B mit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \cap A = P$.*

7.5.2.8. Im Diagramm mit einer ganzen Kringerweiterung in der rechten Vertikalen

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{b} & \subset & \boxed{\mathfrak{p}} & \subset & B \\ \downarrow\!\!\!\downarrow \cap A & & \downarrow\!\!\!\downarrow \cap A & & \cup \\ \mathfrak{b} \cap A & \subset & P & \subset & A \end{array}$$

sind also das Ideal $\mathfrak{b}$ und das Primideal P mit den dargestellten Inklusionsrelationen vorgegeben und die Existenz des eingekastelten Primideals $\mathfrak{p}$ wird behauptet. Sind in einem Diagramm mit unserer ganzen Kringerweiterung in der rechten Vertikalen

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathfrak{p}_0 & \subset & \boxed{\mathfrak{p}_1} & \subset & \boxed{\boxed{\mathfrak{p}_2}} & \subset & \dots & \subset & \boxed{\boxed{\boxed{\mathfrak{p}_r}}} & \subset & B \\ \downarrow\!\!\!\downarrow \cap A & & \downarrow\!\!\!\downarrow \cap A & & \downarrow\!\!\!\downarrow \cap A & & & & \downarrow\!\!\!\downarrow \cap A & & \cup \\ P_0 & \subset & P_1 & \subset & P_2 & \subset & \dots & \subset & P_r & \subset & A \end{array}$$

die nicht eingekastelten Primideale mit vorgegeben, so können wir also induktiv der Reihe nach die mehr und mehr eingekastelten Primideale finden. Daher rührt die Bezeichnung als „Going-Up“. Das analoge „Going-down-Theorem“, bei dem man stattdessen absteigende Primidealketten in A betrachtet, gilt nur unter wesentlich stärkeren Voraussetzungen, vergleiche 7.5.7.6. Es mag merkwürdig wirken, daß hier die „kleinen“ Primideale mit großen Buchstaben bezeichnet werden und die „großen“ Primideale mit kleinen Buchstaben. Das gefiel mir nur deshalb besser, weil so die meisten explizit notierten Primideale, wie es sich gehört, durch kleine Buchstaben in Fraktur notiert werden.

Beweis. Wir gehen zur ganzen Kringerweiterung $A/(\mathfrak{b} \cap A) \subset B/\mathfrak{b}$ über und erinnern, daß nach 7.5.2.1 für jede ganze Kringerweiterung das Herunterschneiden eine Surjektion zwischen den Mengen der Primideale der jeweiligen Ringe induziert. $\square$

Ergänzung 7.5.2.9. Dieser Satz wurde zuerst von Wolfgang Krull für Integritätskringe bewiesen. Irvin Cohen und Abraham Seidenberg verallgemeinerten ihn dann auf den Fall beliebiger Kringe und vereinfachten gleichzeitig den Beweis. Wolfgang Krull begann sein Studium in Freiburg und kam auch zur Promotion wieder nach Freiburg, wo er zwei Jahre als außerordentlicher Professor tätig war.

7.5.2.10 (**Geometrie ganzer Kringerweiterungen**). Eine Abbildung von topologischen Räumen heißt **abgeschlossen**, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Teilmengen wieder abgeschlossen ist. Unser Going-up 7.5.2.7 kann geometrisch dahingehend formuliert werden, daß jede ganze Kringerweiterung $A \subset B$ eine abgeschlossene Surjektion $\operatorname{Spec} B \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$ zwischen den Spektren der beteiligten Ringe induziert, die wir uns dafür mit ihrer Zariskitopologie aus 7.4.5.16 versehen denken.

Satz 7.5.2.11 (**Ganze Kringerweiterungen und Krulldimension**). *Ist $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung, so haben beide Kringe dieselbe Krulldimension, in Formeln*

$$\operatorname{kdim} A = \operatorname{kdim} B$$

Beweis. Nach 7.5.2.1.2 liefert jede echt aufsteigende Primidealkette von B durch Herunterschneiden eine echt aufsteigende Primidealkette von A. Nach Going-up 7.5.2.7 läßt sich umgekehrt jede echt aufsteigende Primidealkette von A induktiv zu einer echt aufsteigenden Primidealkette von B hochheben. □

Satz 7.5.2.12 (**Endlichkeitskriterium für die Fasern eines Morphismus**). *Ist $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung und B noethersch, so hat $\operatorname{Spec} B \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$ endliche Fasern, als da heißt, das Urbild jedes Elements ist endlich.*

7.5.2.13. Einen geometrischen Spezialfall haben wir schon in 7.3.4.18 gesehen. Ein Gegenbeispiel für nicht noethersches B erhält man, indem man für A einen Körper und für B ein unendliches Produkt von Kopien von A nimmt. Ein Gegenbeispiel mit einem Integritätsring B erhält man, indem man von $A = \mathbb{C}[X]$ ausgeht und als B den ganzen Abschluß von A in einem algebraischen Abschluß von $\mathbb{C}(X)$ nimmt: Die Fasern sind dann nach 7.5.7.9 die Galoisbahnen, und man kann sich überlegen, daß in diesem Fall alle Galoisbahnen von maximalen Idealen unendlich sind.

Beweis. Gegeben $P \in \operatorname{Spec} A$ ist $\sqrt{\langle PB \rangle} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ nach 7.4.5.28 der Schnitt der endlich vielen minimalen Primideale $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} B$, die $\langle PB \rangle$ enthalten. Sei nun $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ mit $\mathfrak{q} \cap A = P$. So folgt $\mathfrak{q} \supset \sqrt{\langle PB \rangle}$, also $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}_i$ für ein i, also $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_i$ für ein i, denn nach Going-up 7.5.2.7 haben wir

$$\mathfrak{q} \supsetneq \mathfrak{p}_i \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{q} \cap A \supsetneq \mathfrak{p}_i \cap A \supset P$$

□

Beispiel 7.5.2.14. Der ganze Abschluß von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ist $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Hinweis: Mit $a + b\sqrt{3}$ liegt auch $a - b\sqrt{3}$ im ganzen Abschluß, also $2a$, woraus folgt $2a \in \mathbb{Z}$ und $a^2 - 3b^2 \in \mathbb{Z}$, also $3(2b)^2 \in \mathbb{Z}$, also $2b \in \mathbb{Z}$. Setzen wir $2a := \alpha$ und $2b := \beta$, so folgt weiter $\alpha^2 - 3\beta^2 \in 4\mathbb{Z}$. Quadrate in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sind aber nur 0 und 1, woraus folgt $\alpha^2, \beta^2 \in 4\mathbb{Z}$ und damit $a, b \in \mathbb{Z}$.

Proposition 7.5.2.15 (**Verkleben von Punkten in affinen Varietäten**). *Seien X eine affine k-Varietät über $k = \bar{k}$ und $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung von X auf eine Menge Y, bei der alle Fasern endlich und fast alle Fasern einelementig sind. So ist Y mit $\mathcal{O}(Y) := \{f : Y \to k \mid f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)\}$ als regulären Funktionen auch eine affine Varietät.*

Beweis. Offensichtlich brauchen wir nur den Fall zu betrachten, daß es genau zwei Punkte $p, q \in X$ gibt mit $p \neq q$ aber $\varphi(p) = \varphi(q)$. In $\mathcal{O}(X)$ hat der Teilring $\{f \in \mathcal{O}(X) \mid f(p) = f(q)\}$ dann endliche Kodimension, folglich ist $\mathcal{O}(X)$ modulendlich über $\mathcal{O}(Y)$. Damit ist einerseits nach dem Sandwich-Lemma 7.5.1.11 unser $\mathcal{O}(Y)$ ringendlich über k und andererseits ist $\mathcal{O}(X)$ ganz über $\mathcal{O}(Y)$. Nach unseren allgemeinen Erkenntnissen 7.5.2.2 über ganze Kringerweiterungen liefert also der Homomorphismus $\mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ eine Surjektion $\pi : \operatorname{Max} \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \operatorname{Max} \mathcal{O}(Y)$. Daß hier die Faser über $\pi(p) = \pi(q)$ genau aus den beiden Elementen p und q besteht und daß alle anderen Fasern einelementig sind, ist leicht zu sehen: Zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X \backslash \{p, q\}$ gibt es ja eine reguläre Funktion mit $f(x) = 1$ und $f(y) = f(p) = f(q) = 0$. Folglich erhalten wir eine Bijektion $Y \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} \mathcal{O}(Y)$ durch $y \mapsto \ker \delta_y$ und die geringte Menge $(Y, \mathcal{O}(Y))$ ist in der Tat eine affine Varietät. $\square$

Beispiel 7.5.2.16. Verkleben wir drei Geraden in einem Punkt, so erhalten wir eine affine Varietät. Sie ist isomorph zur affinen Varietät der drei Koordinatenachsen im Raum und besitzt einen bijektiven Morphismus zur Vereinigung von drei paarweise verschiedenen Ursprungsgeraden in der Ebene, der jedoch ein Isomorphismus ist.

Übungen

Übung 7.5.2.17. Zeigen Sie die letzte Behauptung aus 7.3.2.7, daß sich für $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper jede Lösung der Gleichung $x^3 + x^2 = y^2$ in der Form $(x, y) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ mit $t \in k$ schreiben läßt.

Übung 7.5.2.18 (**Eigenschaften von Morphismen mit ganzen Komorphismen**). Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten. Ist der Komorphismus ganz, so ist φ abgeschlossen mit endlichen Fasern und für jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Z \subsetneq X$ gilt

$$\operatorname{kdim} Z = \operatorname{kdim} \varphi(Z)$$

Übung 7.5.2.19 (**Nodale Kubik als Verklebung**). Wir erhalten die nodale Kubik, wenn wir zwei verschiedene Punkte der affinen Gerade miteinander verkleben.

Übung 7.5.2.20. Seien $A \subset B \subset C$ kommutative Integritätsringe und sei C ein freier A-Modul von endlichem Rang r. Ist auch $\operatorname{Quot} C$ eine Körpererweiterung von $\operatorname{Quot} B$ vom Rang r, so gilt $A = B$.

Übung 7.5.2.21 (**Verklebungen eines Punktes mit sich selber**). Gegeben eine bepunktete affine k-Varietät (X, x) und ein Ideal $\mathfrak{b} \subset \mathcal{O}(X)$ mit Radikal $\sqrt{\mathfrak{b}} = \mathcal{I}(x)$ ist der Teilring $A := k + \mathfrak{b} \subset \mathcal{O}(X)$ auch affin und der der Inklusion $A \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ entsprechende Morphismus von affinen Varietäten $X \to Y := \operatorname{Max} A$ ist bijektiv und ein Homöomorphismus und induziert Isomorphismen von Varietäten von jeder Nichtnullstellenmenge, die den Punkt x vermeidet, auf ihr Bild.

Beispiel 7.5.2.22 (**Neil'sche Parabel als Verklebung**). Ist etwa $X = k^n$ und $\mathfrak{b}$ ein Ideal der Kodimension zwei, so mag man es sich als Ideal der Funktionen denken, die bei x verschwinden und bei denen auch die Richtungsableitung längs einer vorgegebenen Gerade durch x bei x verschwindet. Unsere Konstruktion mag man dann anschaulich verstehen als das „Verkleben von x mit einem in Richtung unserer Gerade infinitesimal nahen benachbarten Punktes". Verklebt man in dieser Weise einen Punkt der Gerade mit einem infinitesimal nahen benachbarten Punkt, so erhält man die Neil'sche Parabel.

7.5.3 Quotienten nach endlichen Gruppen*

Satz 7.5.3.1 (Noether). *Ist A ein Kring und operiert eine endliche Gruppe W auf A durch Ringautomorphismen, so ist A ganz über dem Invariantenring A^W. Ist A ringendlich über einem noetherschen Kring k und operiert W durch k-lineare Automorphismen, so ist A modulendlich über A^W und A^W ringendlich über k.*

7.5.3.2. Der Satz gilt mit demselben Beweis auch noch, wenn wir statt der Endlichkeit von W schwächer nur fordern, daß alle Bahnen von W in A endlich sein sollen. Dieser Fall tritt typisch bei der Wirkung von Galoisgruppen auf.

Beweis. Jedes $a \in A$ ist Nullstelle des normierten Polynoms $\prod_{b \in Wa}(X - b)$ aus $A^W[X]$, folglich ist A ganz über A^W. Ist A ringendlich über k, so ist es auch ringendlich über A^W und damit modulendlich über A^W nach 7.5.1.5. Nach dem Sandwichlemma 7.5.1.11 ist damit A^W ringendlich über k. □

Satz 7.5.3.3 (Quotienten affiner Varietäten nach endlichen Gruppen). *Operiert eine endliche Gruppe W auf einer affinen k-Varietät X, so wird auch der Bahnenraum X/W mit $\mathcal{O}(X/W) := \{f : X/W \to k \mid f \circ \operatorname{can} \in \mathcal{O}(X)\}$ eine affine Varietät.*

7.5.3.4. Unter den Annahmen des Satzes liefert die kanonische Abbildung insbesondere einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X/W) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)^W$$

zwischen den regulären Funktionen auf dem Bahnenraum und den W-invarianten regulären Funktionen auf X.

Beweis. Nach 7.5.3.1 ist der Invariantenring $\mathcal{O}(X)^W$ ringendlich über k, und nilpotentfrei ist er eh. Damit entspricht er einer affinen k-Varietät. Der von der Einbettung von k-Ringalgebren $\mathcal{O}(X)^W \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ induzierte Morphismus von affinen Varietäten $\pi : X \to \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$ ist sicher konstant auf W-Bahnen und induziert folglich eine Abbildung

$$\kappa : X/W \to \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$$

Diese Abbildung ist surjektiv, da bereits $X \to \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$ surjektiv ist nach 7.5.2.2, angewandt auf die ganze Ringerweiterung $\mathcal{O}(X)^W \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$. Wir zeigen, daß sie auch injektiv und damit bijektiv ist. Nach 7.3.1.7 gibt für je zwei verschiedene W-Bahnen eine reguläre Funktion, die auf der einen Bahn verschwindet und auf der anderen konstant den Wert Eins annimmt. Das Produkt über alle W-Verschobenen einer derartigen Funktion ist dann sogar eine invariante Funktion mit besagter Eigenschaft. Die Existenz einer solchen Funktion zeigt, daß unser Morphismus κ auf den zugrundeliegenden Punktmengen auch injektiv ist. Per definitionem entsprechen unter unserer Bijektion $\kappa : X/W \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$ die regulären Funktionen auf der affinen Varietät $\operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$ genau den Funktionen aus dem eben definierten Teilring $\mathcal{O}(X/W) \subset \operatorname{Ens}(X/W, k)$. Damit muß dann auch $(X/W, \mathcal{O}(X/W))$ eine affine Varietät sein. □

Ergänzung 7.5.3.5. Operiert die endliche Gruppe W auf der affinen k-Varietät X und ist $p \in X/W$ ein Punkt des Quotienten, so nenne ich den Restklassenring $\mathcal{O}(X)/\langle \mathcal{O}(X)\mathfrak{m}_p \rangle$ den **Faserring bei** p. In der Tat wird sich sein Spektrum als die „schementheoretische Faser bei p“ der Projektionsabbildung erweisen. Mit $\langle \mathcal{O}(X)\mathfrak{m}_p \rangle$ ist hierbei das von $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}(X/W)$ in $\mathcal{O}(X)$ erzeugte Ideal gemeint.

Übungen

Übung 7.5.3.6. Man zeige, daß die Quotientenvarietät $\mathbb{C}^2/\{\pm \operatorname{id}\}$ isomorph ist zum Kegel $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$. Idem, wenn man $\mathbb{C}$ durch einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik ersetzt.

Übung 7.5.3.7. Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ operiert auf der Varietät k^n durch Vertauschen der Koordinaten. Man zeige, daß der durch die elementarsymmetrischen Polynome $(s_1, \ldots, s_n) : k^n \to k^n$ gegebene Morphismus einen Isomorphismus

$$k^n/\mathcal{S}_n \xrightarrow{\sim} k^n$$

induziert. Hinweis: Das ist wenig mehr als eine geometrische Formulierung des Hauptsatzes über symmetrische Polynome 6.2.9.6.

7.5.4 Noether-Normalisierung

7.5.4.1. Ich erinnere aus der Algebra 6.2.2.4 den Begriff der algebraischen Unabhängigkeit. Gegeben Kringe $A \subset B$ heißt eine Familie $b_1, \ldots, b_n$ von Elementen von B **algebraisch unabhängig über** A, wenn der Einsetzungshomomorphismus $A[T_1, \ldots, T_n] \to B$ mit $T_i \mapsto b_i$ injektiv ist. Ich schreibe dann für sein Bild auch $A['b_1, \ldots, b_n]$ mit einem Freiheitsstrichlein an der eröffnenden Klammer. Ist besagter Einsetzungshomomorphismus nicht injektiv, so heißt unsere Familie **algebraisch abhängig über** A.

Proposition 7.5.4.2 (Noether-Normalisierung von Hyperflächen). *Gegeben ein Körper k und ein nichtkonstantes Polynom $f \in k['X_1, \ldots, X_n] \backslash k$ gibt es eine Einbettung von k-Kringen $k['Y_1, \ldots, Y_{n-1}] \hookrightarrow k['X_1, \ldots, X_n]/\langle f \rangle$, die eine ganze Kringerweiterung ist.*

7.5.4.3. Die Bezeichnung, die wir für diese Proposition gewählt haben, bezieht sich auf den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers $k = \bar{k}$. Die Aussage zeigen wir jedoch für einen beliebigen Körper k.

Beweis. Wir beginnen mit dem Fall eines unendlichen Grundkörpers k und haben in Multiindexnotation $f = \sum c_\alpha X^\alpha$. Die homogene Komponente von f von maximalem Grad im Sinne von 6.2.9.9 liefert eine Funktion auf dem k^n, die im Fall eines unendlichen Grundkörpers k nicht identisch verschwinden kann und die demnach an mindestens einer Stelle $(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ nicht Null ist. Diese Stelle kann nicht der Ursprung sein. Machen wir eine lineare Koordinatentransformation und wählen in anderen Worten neue Erzeuger $Y_1, \ldots, Y_n$ als Linearkombinationen der alten, so können wir mithin erreichen, daß die homogene Komponente von maximalem Grad bei $(0, \ldots, 0, 1)$ nicht verschwindet. Das bedeutet jedoch gerade, daß in den neuen Variablen f ein skalares Vielfaches eines normierten Polynoms positiven Grades aus dem Polynomring $(k['Y_1, \ldots, Y_{n-1}])[Y_n]$ ist, also eines normierten Polynoms positiven Grades aus dem Polynomring mit Koeffizienten in $k['Y_1, \ldots, Y_{n-1}]$. Damit ist klar, daß

$$k['Y_1, \ldots, Y_{n-1}] \to k['X_1, \ldots, X_n]/\langle f \rangle = (k['Y_1, \ldots, Y_{n-1}])[Y_n]/\langle f \rangle$$

ein injektiver ganzer Kringhomomorphismus ist. Im Fall eines endlichen Grundkörpers gelingt derselbe Trick, wenn man auch nichtlineare Variablentransformationen zuläßt. Sei etwa β maximal in der lexikographischen Ordnung mit $c_\beta \neq 0$. Wählen wir als neue Erzeuger $Y_i = X_i + X_n^{r_i}$ für $i < n$ und $Y_n = X_n$ und suchen uns dafür r_i mit der Eigenschaft, daß gilt $\beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \ldots + \beta_{n-1} r_{n-1} + \beta_n > \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \ldots + \alpha_{n-1} r_{n-1} + \alpha_n$ für alle Multiindizes $\alpha \neq \beta$ mit $c_\alpha \neq 0$, so wird wieder f bis auf einen Skalar ein normiertes Polynom in $(k['Y_1, \ldots, Y_{n-1}])[Y_n]$ sein und wir können den Beweis in derselben Weise beenden. Mögliche r_i mag man finden, indem man sie induktiv von oben alias mit r_{n-1} beginnend so wählt, daß für alle α mit $c_\alpha \neq 0$, die sich erst in der i-ten Stelle von β unterscheiden und für die wir folglich $\beta_i > \alpha_i \geq 0$ haben, gilt $\beta_i r_i + \ldots + \beta_{n-1} r_{n-1} + \beta_n > \alpha_i r_i + \ldots + \alpha_{n-1} r_{n-1} + \alpha_n$. □

Satz 7.5.4.4 (Krulldimension von Polynomringen). *Gegeben ein Körper k ist die Krulldimension des Polynomrings in n Variablen genau*

$$\operatorname{kdim} k[T_1, \ldots, T_n] = n$$

und für jedes nichtkonstante Polynom $f \in \operatorname{kdim} k[T_1, \ldots, T_n] \backslash k$ ist die Krulldimension des Quotienten genau

$$\operatorname{kdim} k[T_1, \ldots, T_n]/\langle f \rangle = n - 1$$

7.5.4.5. Im geometrischen Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers $k = \bar{k}$ ist insbesondere die Krulldimension des k^n genau n.

Beweis. Daß die Krulldimension von $k[T_1, \ldots, T_n]$ mindestens n ist, scheint mir offensichtlich. Die andere Abschätzung $\operatorname{kdim} k[T_1, \ldots, T_n] \leq n$ zeigen wir durch Induktion über n. Ist $\mathfrak{p}$ minimal unter allen von Null verschiedenen Primidealen, so ist es ein Hauptideal $\mathfrak{p} = \langle f \rangle$ erzeugt von einem irreduziblen Polynom f und dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{kdim}(k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{p}) &= \operatorname{kdim}(k[T_1, \ldots, T_n]/\langle f \rangle) \\ &= \operatorname{kdim} k[T_1, \ldots, T_{n-1}] \\ &= n - 1 \end{aligned}$$

nach der Normalisierung für Hyperflächen 7.5.4.2 und Satz 7.5.2.11 über die Invarianz der Krulldimension unter ganzen Kringerweiterungen. Die Behauptung folgt. □

Satz 7.5.4.6 (Noether's Normalisierungslemma). *Gegeben ein Körper k und ein von Null verschiedener ringendlicher k-Kring A gibt es $x_1, \ldots, x_d \in A$ algebraisch unabhängig über k derart, daß A ganz ist über $k['x_1, \ldots, x_d]$.*

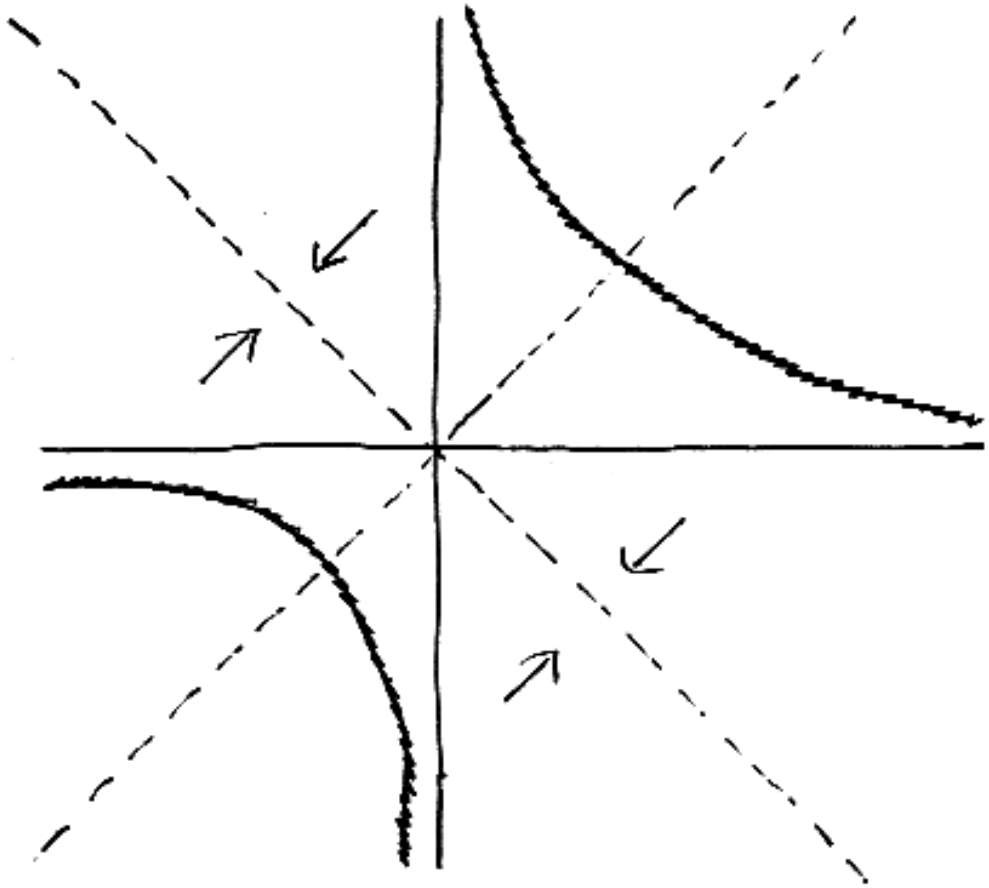


Illustration zum Noether'schen Normalisierungslemma, genauer seiner in 7.5.4.8 formulierten Verfeinerung im Fall eines unendlichen Grundkörpers. Hier ist $A = k[x, y]/\langle xy \rangle$ die Algebra der regulären Funktionen auf einer Hyperbel. Sie ist weder ganz über $k[x]$ noch ganz über $k[y]$, aber wählen wir eine geeignete Linearkombination dieser Erzeuger, etwa $x_1 := x - y$, so ist A ganz über $k[x_1]$. In der Tat haben wir ja $x^2 - x_1 x = 0$ und $y^2 + x_1 y = 0$. Geometrisch bedeutet das, daß im neu gestrichelt eingezeichneten Koordinatensystem „auf keinem Zweig unserer affinen Kurve die zweite Koordinate, etwa $y_1 := x + y$ oder auch irgendeine andere mögliche zweite Koordinate, ins Unendliche strebt, wenn wir die Koordinate x_1 auf der Nebendiagonalen gegen einen Punkt im Endlichen streben lassen".

7.5.4.7. Nach der Invarianz der Krulldimension unter ganzen Kringerweiterungen 7.5.2.11 muß die Zahl der algebraisch unabhängigen Elemente d in diesem Satz genau die Krulldimension von A sein.

7.5.4.8 (**Noether-Normalisierung im geometrischen Fall**). Wird ein von Null verschiedener k-Kring A erzeugt von einem k-Untervektorraum V und ist k unendlich, so zeigen wir beim Beweis des Normalisierungslemmas sogar, daß die $x_1, \ldots, x_d$ aus V gewählt werden können. Geometrisch bedeutet das, daß wir im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers k für jede Zariski-abgeschlossene Teilmenge $X \not\subset k^n$ eine lineare Abbildung $k^n \to k^d$ finden können derart, daß ihre Restriktion $X \to k^d$ auf den regulären Funktionen einer ganzen Ringerweiterung $\mathcal{O}(k^d) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ entspricht. Hierbei muß natürlich unsere lineare Abbildung notwendig eine Surjektion $k^n \twoheadrightarrow k^d$ sein und im Fall $X \neq k^n$ gilt $d < n$.

Beweis. Induktion über die minimal mögliche Zahl von Erzeugern unserer k-Algebra A. Brauchen wir gar keinen Erzeuger, so folgt aus unserer Annahme $A \neq 0$ bereits $k = A$ und wir sind fertig mit $d = 0$. Sei sonst $x_1, \ldots, x_n$ ein Erzeugendensystem mit so wenig Elementen wie möglich. Sind sie algebraisch unabhängig über k, so sind wir schon fertig. Sonst finden wir zwischen ihnen eine nichttriviale Relation f und erhalten mit der Normalisierung für Hyperflächen 7.5.4.2 Homomorphismen von k-Kringen

$$k['Y_1, \ldots, Y_{n-1}] \hookrightarrow k['X_1, \ldots, X_n]/\langle f \rangle \twoheadrightarrow A$$

derart, daß die erste Inklusion eine ganze Ringerweiterung ist. Das Bild dieser Verknüpfung ist dann ein Teilring $B \subset A$ derart, daß A ganz ist über B und daß B über k bereits von $n-1$ Elementen erzeugt wird. Induktion im Verein mit der Transitivität der Ganzheit 7.5.1.10 beendet dann den Beweis. □

7.5.4.9 (**Alternativer Beweis des Nullstellensatzes**). Der Noether'sche Normalisierungssatz 7.5.4.6 in Verbindung mit Going-up 7.5.2.7 oder vielmehr dem bei seinem Beweis benötigten Lemma 7.5.2.4 eröffnet einen alternativen Zugang zum Nullstellensatz, der mir besonders anschaulich scheint. Das einzige Problem dabei ist, daß diese Anschaulichkeit erst über die Brücke 7.3.2.5 zwischen Ringen und Räumen erreicht wird, die ihrerseits auf dem Nullstellensatz beruht. Aber sei's drum: Es gilt zu zeigen, daß für jedes maximale Ideal eines Polynomrings $\mathfrak{m} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ über einem Körper k, den sich der Leser der besseren Anschaulichkeit halber algebraisch abgeschlossen denken mag, die offensichtliche Abbildung eine algebraische Körpererweiterung

$$k \hookrightarrow k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m}$$

liefert. Nach dem Normalisierungssatz können wir $x_1, \ldots, x_d \in k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m}$ finden derart, daß $x_1, \ldots, x_d$ algebraisch unabhängig sind über k und daß der Restklassenring $k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m}$ ganz ist über $k[x_1, \ldots, x_d]$. Nach 7.5.2.4 ist dann auch $k[x_1, \ldots, x_d]$ ein Körper. Das zeigt $d = 0$ und damit die Behauptung.

Korollar 7.5.4.10. *Seien k ein Körper und $A \subset B$ ringendliche kommutative Integritätsringe über k. So gibt es ein Element $t \in A\backslash 0$ und über A algebraisch unabhängige Elemente $z_1, \ldots, z_d \in B$ mit B_t ganz über $A_t['z_1, \ldots, z_d]$.*

Beweis. Zunächst sei $S := A\backslash 0$. Sicher ist $S^{-1}B$ ringendlich über dem Körper $S^{-1}A$. Nach Noether's Normalisierungslemma 7.5.4.6 finden wir $z_1, \ldots, z_d \in S^{-1}B$ mit $S^{-1}B$ ganz über $S^{-1}A['z_1, \ldots, z_d]$. Durch Wegmultiplizieren der Nenner dürfen wir sogar $z_1, \ldots, z_d \in B$ annehmen. Nach Annahme können wir auch ein endliches Erzeugendensystem der k-Ringalgebra B wählen. Jetzt betrachten wir je eine Ganzheitsgleichung über $S^{-1}A['z_1, \ldots, z_d]$ für jeden dieser Erzeuger und nehmen als $t \in S$ einen Hauptnenner für alle diese Ausdrücke. □

7.5.4.11 (**Faktorisierungssatz**). Im geometrischen Fall bedeutet das Korollar unter Verwendung von 7.3.4.21, daß für jeden dominanten Morphismus $\varphi : X \to Y$ von irreduziblen affinen Varietäten ein $t \in \mathcal{O}(Y)\backslash 0$ existiert derart, daß sich $\varphi : \varphi^{-1}(Y_t) \to Y_t$ faktorisieren läßt als eine Komposition

$$\varphi^{-1}(Y_t) \to k^d \times Y_t \to Y_t$$

mit einem ersten Morphismus, der einer ganzen Ringerweiterung entspricht und insbesondere surjektiv ist mit endlichen Fasern, und der Projektion auf den hinteren Faktor als zweitem Morphismus. Insbesondere nimmt eine reguläre Funktion auf einer affinen Varietät entweder nur endlich viele Werte an oder aber alle Werte mit höchstens endlich vielen Ausnahmen. Ich würde dafür gerne einen noch einfacheren Beweis geben können.

Korollar 7.5.4.12 (**Bilder von Morphismen von Varietäten**). *Gegeben ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von affinen Varietäten umfaßt sein Bild stets eine offene dichte Teilmenge vom Abschluß des Bildes, in Formeln*

$$\exists U \subset \varphi(X) \text{ mit } U \Subset \overline{\varphi(X)} \text{ und } \bar{U} = \overline{\varphi(X)}.$$

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß unser Morphismus dichtes Bild hat. Dann zerlegen wir Y in irreduzible Komponenten und jede irreduzible Komponente von X wird in eine von ihnen abgebildet. Dann gibt es sogar für jede irreduzible Komponente $Y_\nu \not\subset Y$ eine irreduzible Komponente von $X_\mu \not\subset X$ derart, daß das Bild von X_μ in Y_ν enthalten ist und dicht liegt. Nach dem Faktorisierungssatz 7.5.4.11 umfaßt das Bild von X_μ dann sogar eine offene nichtleere Teilmenge von Y_ν. Das Korollar folgt. □

Ergänzung 7.5.4.13 (**Satz von Chevalley**). Diejenigen Teilmengen eines topologischen Raums, die in der von den offenen Teilmengen erzeugten Mengenalgebra liegen, heißen die **konstruktiblen Teilmengen** unseres topologischen Raums. In anderen Worten sind die konstruktiblen Teilmengen eines topologischen Raums genau alle endlichen Vereinigungen von lokal abgeschlossenen Teilmengen oder mit 13.1.2.33 auch alle endlichen disjunkten Vereinigungen von lokal abgeschlossenen Teilmengen. Der Satz von Chevalley besagt nun, daß das Bild einer konstruktiblen Teilmenge einer Varietät unter einem Morphismus von Varietäten stets konstruktibel ist. Man folgert das unschwer durch Induktion über die Dimension der Varietät, von der unser Morphismus ausgeht. Sicher reicht es, wenn wir im Induktionsschritt im Fall eines dominanten Morphismus irreduzibler Varietäten zeigen können, daß sein Bild konstruktibel ist. Dann ist aber nach 7.5.4.12 das Bild mindestens einer offenen dichten Teilmenge offen, mithin konstruktibel, und das Bild ihres Komplements ist nach Induktionsannahme auch konstruktibel. Umgekehrt zeigt man leicht, daß jede konstruktible Teilmenge eines noetherschen topologischen Raums eine dichte offene Teilmenge ihres Abschlusses umfaßt. So folgt umgekehrt 7.5.4.12 aus dem Satz von Chevalley.

7.5.4.14. Unter dem Separabilitätsgrad $[L : K]_{\mathrm{s}}$ einer algebraischen Körpererweiterung verstehen wir wie in 6.3.9.41 den Grad über K der maximalen separablen Teilerweiterung.

Satz 7.5.4.15 (**Fasern von Morphismen zu endlichen Körpererweiterungen**). *Seix $\varphi : X \to Y$ ein dominanter Morphismus von irreduziblen affinen Varietäten derselben Dimension. So gibt es eine dichte offene Teilmenge $V \Subset Y$ derart, daß die Kardinalität der Faser über jedem Punkt von V so groß ist wie der Separabilitätsgrad der zugehörigen Körpererweiterung, in Formeln*

$$|\varphi^{-1}(y)| = [\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(Y)]_{\mathrm{s}} \quad \forall y \in V$$

Vorschau 7.5.4.16. Mit dem Satz über generische Freiheit 7.5.5.3 können wir zusätzlich erreichen, daß V und $\varphi^{-1}(V)$ Nichtnullstellenmengen regulärer Funktionen sind und daß $\mathcal{O}(\varphi^{-1}(V))$ frei ist als Modul über $\mathcal{O}(V)$, der dann natürlich frei sei muß vom Rang

$$\dim_{\mathcal{O}(V)} \mathcal{O}(\varphi^{-1}(V)) = [\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(Y)]$$

In 9.2.4.14 verallgemeinern wir die Ausage des Satzes auf beliebige, nicht notwendig affine Varietäten.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß unser Satz für die Verknüpfung $X \to Y \to Z$ von zwei Morphismen folgt, wenn er für die beiden einzelnen Morphismen $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ gilt. Dazu finden wir zunächst eine dichte offene Teilmenge $V \Subset Y$ wie im Satz für den ersten Morphismus und beachten, daß $\psi(Y \backslash V)$

aus Dimensionsgründen nicht in Z dicht liegen kann. Dann finden wir eine dichte offene Teilmenge $W \Subset Z$ wie im Satz, die außerdem $\psi(Y \backslash V)$ nicht trifft, und diese ist dann aufgrund der Multiplikativität des Separabilitätsgrades 6.3.9.41 auch geeignet für die Verknüpfung. Nach dem Faktorisierungssatz 7.5.4.11 dürfen wir annehmen, daß $\mathcal{O}(X)$ ganz ist über $\mathcal{O}(Y)$. Aus Lemma 7.5.2.3 folgt dann, daß die Lokalisierung von $\mathcal{O}(X)$ nach $S := \mathcal{O}(Y) \backslash 0$ bereits ein Körper ist. Insbesondere dürfen wir $\mathcal{M}(X) = S^{-1}\mathcal{O}(X)$ annehmen. Sicher finden wir andererseits auch einen Körperturm

$$\mathcal{M}(Y) = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_r = \mathcal{M}(X)$$

derart, daß jeder Schritt entweder durch Adjunktion eines über K_{i-1} separablen Elements $f_i \in K_i$ entsteht oder im Fall positiver Charakteristik $p > 0$ durch Adjunktion eines Elements $f_i \in K_i$ mit $f_i^p \in K_{i-1}$. Indem wir alle f_i als Brüche in $S^{-1}\mathcal{O}(X)$ schreiben und Y verkleinern zur Nichtnullstellenmenge des Produkts der beteiligten Nenner, dürfen wir annehmen, daß alle diese Elemente bereits zu $\mathcal{O}(X)$ gehören. Indem wir notfalls unsere Kette noch verlängern, dürfen wir zusätzlich annehmen, daß unsere Kette durch Lokalisieren nach S aus einer Kette von Zwischenringen

$$\mathcal{O}(Y) = R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset R_r = \mathcal{O}(X)$$

entsteht mit $R_i = R_{i-1}[f_i]$. Insgesamt können wir uns so auf die beiden Spezialfälle zurückziehen, daß gilt $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(Y)[f]$ mit $f^p \in \mathcal{M}(Y)$ oder f separabel über $\mathcal{M}(Y)$. Indem wir Y weiter verkleinern zur Nichtnullstellenmenge des Produkts der Nenner des Minimalpolynoms P von f können wir zusätzlich $P \in \mathcal{O}(Y)[T]$ und

$$\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(Y)[T]/\langle P \rangle$$

annehmen. Unser Morphismus kann dann identifiziert werden mit der Projektion auf den ersten Faktor

$$X := \{(y, \lambda) \in Y \times k \mid P(y, \lambda) = 0\} \ \to \ Y$$

Im ersten Fall $f^p \in \mathcal{M}(Y)$ ist dann bereits klar, daß diese Projektion eine Bijektion $X \xrightarrow{\sim} Y$ sein muß und die Körpererweiterung rein inseparabel und die Aussage des Satzes gilt. Im zweiten Fall eines separablen Polynomes ist die Diskriminante 6.2.9.15 unseres Polynoms P nicht Null in $\mathcal{M}(Y)$, also nicht Null in $\mathcal{O}(Y)$, und über allen Nichtnullstellen der Diskriminante in Y liegen genau so viele Punkte von X, wie der Grad von P angibt. Folglich gilt die Aussage des Satzes auch in diesem Fall. $\square$

Übungen

Übung 7.5.4.17. Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ und zwei nichtleere algebraische Teilmengen $X \not\subset k^n$ und $Y \not\subset k^m$ zeige man die Formel $\mathrm{kdim}(X \times Y) = \mathrm{kdim}X + \mathrm{kdim}Y$. Hinweis: Noether-Normalisierung 7.5.4.6.

Übung 7.5.4.18 (**Dimension von Bildern und Fasern**). Gegeben ein Morphismus von Varietäten $\varphi : X \to Y$ mit X irreduzibel zeige man, daß es eine offene dichte Teilmenge $V \subset\!\!\!\circ\, \overline{\varphi(X)}$ gibt derart, daß für alle $y \in V$ gilt

$$\mathrm{kdim}(X) = \mathrm{kdim}(\overline{\varphi(X)}) + \mathrm{kdim}(\varphi^{-1}(y))$$

Hinweis: Faktorisierungssatz und Eigenschaften von Morphismen mit ganzen Komorphismen 7.5.2.18. Mehr über Bilder und Fasern von Morphismen wird im Zusammenhang mit dem Krull'schen Hauptidealsatz in 7.5.9.12 und 7.5.10.5 erklärt.

Übung 7.5.4.19 (**Überdeckung einer Varietät durch Untervarietäten**). Eine irreduzible affine Varietät über einem überabzählbaren algebraisch abgeschlossenen Körper k kann nicht durch abzählbar viele echte abgeschlossene Teilmengen überdeckt werden. Hinweis: Mit dem Normalisierungssatz ziehe man sich auf den Fall zurück, daß unsere Varietät der k^n ist. Dann findet man eine Hyperebene, die in keiner unserer Teilmengen enthalten ist, und argumentiert mit Induktion.

7.5.5 Flache Morphismen

Definition 7.5.5.1. Ein Morphismus von affinen Varietäten $\varphi : X \to Y$ heißt **flach**, wenn sein Komorphismus $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ flach ist.

Beispiel 7.5.5.2. Offensichtlich ist die Verknüpfung von flachen Morphismen flach. Aufgrund der Exaktheit der Lokalisierung ist für jede reguläre Funktionen $f \in \mathcal{O}(X)$ auf einer affinen Varietät X die Einbettung $X_f \hookrightarrow X$ der Nichtnullstellenmenge flach.

Satz 7.5.5.3 (Generische Freiheit ringendlicher Kringerweiterungen). *Gegeben $\varphi : A \to B$ ein Kringhomomorphismus mit A einem Integritätsbereich und B ringendlich über A gibt es $a \in A\backslash 0$ derart, daß die Lokalisierung B_a ein freier A_a-Modul ist.*

7.5.5.4. Einen Kringhomomorphisms $A \to B$ nenne ich **modulfrei**, wenn darunter B ein freier A-Modul wird. Weiter nenne ich eine Kringerweiterung $A \to B$ **modulspaltend**, wenn sie injektiv ist und als Homomorphismus von A-Moduln spaltet. Im Beweis zeigen wir, daß wir $a \in A\backslash 0$ sogar so wählen können, daß entweder gilt $B_a = 0$ oder daß $A_a \hookrightarrow B_a$ eine modulfreie und modulspaltende Kringerweiterung ist.

Beweis. Wir wählen $b_1, \ldots, b_r \in B$ mit $B = \varphi(A)[b_1, \ldots, b_r]$. Auf der Menge $\mathbb{N}^r$ der Multiindizes erklären wir eine Anordung $\leq$ durch $\nu \leq \mu$ falls $|\nu| < |\mu|$ oder $|\nu| = |\mu|$ und ν lexikographisch kleinergleich μ. Dann setzen wir $B_{<\nu} := \sum_{\mu<\nu} Ab^\mu$ und $B_{\leq\nu} := \sum_{\mu\leq\nu} Ab^\mu$ und finden kurze exakte Sequenzen von A-Moduln

$$B_{<\nu} \hookrightarrow B_{\leq\nu} \twoheadrightarrow A/I(\nu)$$

mit $I(\nu) = \{a \in A \mid ab^\nu \in B_{<\nu}\}$. Offensichtlich gilt $\mu \leq \nu \Rightarrow \mu + \lambda \leq \nu + \lambda$ und daraus folgt $I(\nu) \subset I(\nu + \lambda)$ für alle λ. Die Menge $T := \{\nu \mid I(\nu) \neq 0\}$ ist also ein Monoidideal von $\mathbb{N}^r$ im Sinne von 19.3.2.28 und ist folglich endlich erzeugt, sagen wir

$$T = \bigcup_{\eta\in E} (\eta + \mathbb{N}^r)$$

für eine endliche Teilmenge $E \subset T$. Dann finden wir Elemente $a_\eta \in I(\eta)\backslash 0$ für $\eta \in E$ und für deren Produkt $a \in A\backslash 0$ gilt $I(\nu) \neq 0 \Rightarrow a \in I(\nu)$. Für dieses $a \in A\backslash 0$ bilden schließlich die b^ν mit $I(\nu) = 0$ eine A_a-Basis von B_a. □

Alternativer Beweis des körpertheoretischen Nullstellensatzes 7.1.5.10. Sei $L \supset k$ eine ringendliche Körpererweiterung. Es gilt zu zeigen, daß L algebraisch ist über k. Andernfalls gäbe es $x \in L$ mit x transzendent über k. Nach 7.5.5.3 gibt es also $f \in k[x]$ mit L frei als $k[x]_f$-Modul. Nach 6.2.4.30 gibt es aber in $k[X]_f$ ein Element g, das weder Null ist noch eine Einheit, und das steht nunmehr im Widerspruch zu $(g\cdot) : L \xrightarrow{\sim} L$. □

Beispiel 7.5.5.5 (**Generische Flachheit**). Gegeben ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von affinen Varietäten gibt es eine Funktion $s \in \mathcal{O}(Y)$ mit dichter Nichtnullstellenmenge Y_s derart, daß $\mathcal{O}(X)_{s\circ\varphi} = \mathcal{O}(X_{s\circ\varphi})$ flach ist über $\mathcal{O}(Y)_s = \mathcal{O}(Y_s)$. Ist Y irreduzibel, so zeigt 7.5.5.3 sogar, daß wir erreichen können, daß $\mathcal{O}(X)_{s\circ\varphi}$ ein freier Modul über $\mathcal{O}(Y)_s$ ist. Sonst können wir zunächst t so finden, daß Y_t in Y dicht liegt und die disjunkte Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten ist, und können dann für jede irreduzible Komponente separat das vorherige Argument anwenden.

Satz 7.5.5.6 (**Flach impliziert offenes Bild**). *Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Ist $\varphi : A \to B$ ein Homomorpismus von über k ringendlichen k-Kringen und ist B flach als A-Modul, so ist die induzierte Abbildung $\bar{\varphi} : \operatorname{Max} B \to \operatorname{Max} A$ offen.*

7.5.5.7. Dieser Satz ist eine besonders einfache Variante einer ganzen Vielfalt von Aussagen, die für Kringhomomorphismen Kriterien dafür angeben, wann die induzierte Abbildung auf den Spektren offen ist.

Beweis. Jede offene Teilmenge von $\operatorname{Max} B$ ist eine Vereinigung von Bildern von $\operatorname{Max} B_g$ für $g \in B$. Da $B \to B_g$ flach ist, müssen wir nur zeigen, daß das Bild von $\operatorname{Max} B$ offen ist. Wir argumentieren mit Induktion über die Krulldimension von A. Ist sie Null oder ist A der Nullring, so trägt $\operatorname{Max} A$ die diskrete Topologie und es bleibt nichts zu zeigen. Ist $A \to D$ irgendein Kringhomomorphismus, so ist auch $D \otimes_A B$ flach als D-Modul. Wenden wir diese Erkenntnis an auf $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p}$ für die minimalen Primideale $\mathfrak{p} \subset A$, von denen es nach 7.4.5.23 nur höchstens endlich viele gibt, so können wir uns auf den Fall zurückziehen, daß A ein Integritätsbereich der kleinsten Krulldimension ist, für die wir unsere Behauptung noch nicht gezeigt haben. Ist nun das Bild $\bar{\varphi}(\operatorname{Max} B)$ nicht dicht, so gibt es $f \in A \backslash 0$ mit $\bar{\varphi}(\operatorname{Max} B) \subset \mathcal{A}(f)$ in unserer Notation aus 7.4.5.13. In anderen Worten liegt $\varphi(f)$ in jedem maximalen Ideal von B und damit nach 7.3.4.7 im Nilradikal von B. Aufgrund der Flachheit muß andererseits die Injektion $(f\cdot) : A \hookrightarrow A$ eine Injektion $(\varphi(f)\cdot) : B \hookrightarrow B$ induzieren und wir sehen so, daß aus $\bar{\varphi}(\operatorname{Max} B)$ nicht dicht bereits folgt $B = 0$. Da die leere Menge eh offen ist, dürfen wir annehmen, daß $\bar{\varphi}(\operatorname{Max} B)$ dicht ist in $\operatorname{Max} A$, und müssen zeigen, daß es dann auch offen ist. Zuächst einmal umfaßt $\bar{\varphi}(\operatorname{Max} B)$ nach 7.5.4.12 eine offene dichte Teilmenge $U \Subset \operatorname{Max} A$. Deren Komplement ist eine abgeschlossene Teilmenge $Y \Subset \operatorname{Max} A$ echt kleinerer Krulldimension und per Induktion wissen wir bereits, daß das Bild von $\operatorname{Max}(\mathcal{O}(Y) \otimes_A B) \to Y$ alias $Y \cap \bar{\varphi}(\operatorname{Max} B)$ offen ist in Y. Die Behauptung folgt. $\square$

7.5.5.8. Wir nennen einen Morphismus $\varphi : X \to Y$ von affinen k-Varietäten **scheinflach**, wenn es ein kommutatives Diagramm von ringendlichen k-Kringalgebren

$$\begin{array}{ccc} A & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(X) \end{array}$$

gibt derart, daß die Horizontalen Surjektionen sind mit den jeweiligen Nilradikalen als Kern und daß $A \to B$ ein flacher Kringhomomorphismus ist. Ich erwarte nicht, daß jede Verknüpfung scheinflacher Morphismen wieder scheinflach ist. Dieser Begriff ist nur im Kontext vom Varietäten nützlich und kommt in der Literatur sonst noch nicht vor. Jeder flache Morphismus ist auch scheinflach.

Korollar 7.5.5.9 (Eigenschaften scheinflacher Morphismen). *1. Jeder scheinflache Morphismus $\varphi : X \to Y$ von affinen Varietäten induziert eine offene Abbildung der zugrundeliegenden topologischen Räume;*

2. Ist $\varphi : X \to Y$ ein scheinflacher Morphismus von affinen Varietäten und $T \to Y$ ein beliebiger Morphismus von affinen Varietäten, so ist auch der induzierte Morphismus $X \times_Y T \to T$ scheinflach.

Vorschau 7.5.5.10. Zusätzliche Eigenschaften, die insbesondere die Dimensionen von Fasern betreffen, diskutieren wir in 7.5.10.5.

7.5.5.11. Zum Beispiel folgt, daß gegeben ein flacher oder auch nur scheinflacher Morphismus $\varphi : X \to Y$ und $Z \not\subset Y$ abgeschlossen auch $\varphi : \varphi^{-1}(Z) \to Z$ scheinflach und insbesondere offen ist.

Beweis. Teil 1 folgt sofort aus Satz 7.5.5.6. Teil 2 folgt sofort aus den Definitionen und der Beschreibung des Faserprodukts 7.3.4.20. □

7.5.6 Transzendenzgrad

7.5.6.1. Ich erinnere an den Satz 6.3.11.3 über algebraische Körpererweiterungen und insbesondere daran, daß für Körper $M \supset L \supset K$ mit M/L algebraisch und L/K algebraisch auch M/K algebraisch ist.

Definition 7.5.6.2. Sei K/k eine Körpererweiterung. Eine Teilmenge $B \subset K$ heißt **algebraisch abhängig über** k, wenn es paarweise verschiedene $x_1, \ldots, x_n \in B$ und ein von Null verschiedenes Polynom $P \in k[X_1, \ldots, X_n] \backslash 0$ gibt derart, daß gilt $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Andernfalls nennen wir unsere Teilmenge B **algebraisch unabhängig über** k.

Definition 7.5.6.3. Sei K/k eine Körpererweiterung. Eine Teilmenge $E \subset K$ heißt ein **System von Transzendenzerzeugern**, wenn K algebraisch ist über dem von E erzeugten Teilkörper. Ein algebraisch unabhängiges System von Transzendenzerzeugern heißt eine **Transzendenzbasis** unserer Körpererweiterung.

Satz 7.5.6.4 (Extremalcharakterisierungen von Transzendenzbasen). *Sei K/k eine Körpererweiterung.*

1. *Ist $A \subset K$ eine über k algebraisch unabhängige Teilmenge und ist E minimal unter allen Systemen von Transzendenzerzeugern unserer Körpererweiterung mit $A \subset E$, so ist E eine Transzendenzbasis;*

2. *Ist $E \subset K$ ein Systemen von Transzendenzerzeugern und A maximal unter allen über k algebraisch unabhängigen Teilmengen von K mit $A \subset E$, so ist A eine Transzendenzbasis.*

7.5.6.5. Hier sind die Begriffe minimal und maximal in Bezug auf die Teilordnung durch Inklusion zu verstehen.

Beweis. 1. Gegeben ein algebraisch abhängiges System $E \supset A$ finden wir ein von Null verschiedenes Polynom kleinstmöglichen Totalgrades, das auf einem Tupel von paarweise verschiedenen Elementen aus E verschwindet. Da A algebraisch

unabhängig ist, muß die Variable zu mindestens einem Element von $E \backslash A$ in unserem Polynom auch wirklich mit positivem Exponenten in einem Monom mit von Null verschiedenem Koeffizienten vorkommen. Fassen wir unseren Ausdruck dann als Polynom in dieser Variable auf, so sind die Koeffizienten mit Ausnahme des konstanten Terms alle von kleinerem Totalgrad und unser Polynom wird folglich nicht das Nullpolynom, wenn wir in die anderen Variablen die jeweiligen Elemente einsetzen. Also ist das in diese Variable einzusetzende Element algebraisch über den anderen und E war kein minimales System von Transzendenzerzeugern über A.

2. Wäre unsere algebraisch unabhängige Teilmenge A kein System von Transzendenzerzeugern, so fänden wir ein Element $e \in E$, daß über dem von unserer Teilmenge erzeugten Teilkörper nicht algebraisch wäre. Das könnten wir zu unserer algebraisch unabhängigen Teilmenge hinzunehmen und das Resultat wäre immer noch algebraisch unabhängig. Also wäre unsere algebraisch unabhängige Teilmenge nicht maximal gewesen. □

7.5.6.6 (**Existenz einer Transzendenzbasis**). Wir finden für jede Körpererweiterung mit dem Zorn'schen Lemma eine Transzendenzbasis als ein maximales algebraisch unabhängiges System, ja gegeben $A \subset E$ eine algebraisch unabhängige Teilmenge in einem System von Transzendenzerzeugern können wir stets eine Transzendenzbasis B finden mit $A \subset B \subset E$.

Satz 7.5.6.7 (**Austauschsatz**). *Gegeben K/k eine Körpererweiterung, $E \subset K$ ein System von Transzendenzerzeugern und $A \subset K$ eine über k algebraisch unabhängige Teilmenge gibt es eine Injektion $\varphi : A \hookrightarrow E$ derart, daß auch $(E \backslash \varphi(A)) \cup A$ ein System von Transzendenzerzeugern ist.*

Beweis. Das folgt leicht induktiv aus dem Austauschlemma 7.5.6.8, das wir im Anschluß beweisen. Es erlaubt uns nämlich, die Elemente von A der Reihe nach in E hineinzutauschen. Ist A unendlich, so verwendet man transfinite Induktion oder argumentiert analog wie in 6.5.3.5 mit dem Zorn'schen Lemma. □

Lemma 7.5.6.8 (**Austauschlemma**). *Sei K/k eine Körpererweiterung. Seien weiter $E \supset B$ ein System von Transzendenzerzeugern mit einer über k algebraisch unabhängigen Teilmenge. Ist $a \in K \backslash B$ ein Element außerhalb von B derart, daß auch $B \cup \{a\}$ über k algebraisch unabhängig ist, so gibt es $e \in E \backslash B$ derart, daß auch $(E \backslash e) \cup \{a\}$ ein System von Transzendenzerzeugern von K/k ist.*

Beweis. Wir finden eine endliche Teilmenge $F \subset E$ mit $\{a\} \cup B \cup F$ algebraisch abhängig. Wir wählen eine derartige Teilmenge F der kleinstmöglichen Kardinalität, so daß a forteriori gilt $F \cap B = \emptyset$, und finden darin $F_0 \subset F$ maximal mit $\{a\} \cup B \cup F_0$ algebraisch unabhängig. Dann gilt $F_0 \subsetneq F$ und jedes Element $e \in F \backslash F_0$ hat die geforderte Eigenschaft. □

7.5.6.9 (**Hauptabschätzung**). Gegeben eine Körpererweiterung K/k und $E \subset K$ ein System von Transzendenzerzeugern und $A \subset K$ eine algebraisch unabhängige Teilmenge gibt es nach dem Austauschsatz 7.5.6.7 stets eine Injektion $A \hookrightarrow E$ und es gilt mithin

$$|A| \leq |E|$$

7.5.6.10 (**Kardinalitäten von Transzendenzbasen**). Jede Körpererweiterung mit einem endlichen System von Transzendenzerzeugern besitzt insbesondere eine endliche Transzendenzbasis und je zwei ihrer Transzendenzbasen haben gleich viele Elemente. Allgemeiner haben nach 7.5.6.9 und Schröder-Bernstein überhaupt je zwei Transzendenzbasen einer Körpererweiterung dieselbe Kardinalität.

Definition 7.5.6.11. Die Kardinalität einer und jeder Transzendenzbasis einer Körpererweiterung mit einem endlichen System von Transzendenzerzeugern heißt ihr **Transzendenzgrad** und wird

$$\operatorname{trgr}(K/k) = \operatorname{trgr}_k K$$

notiert. Besitzt eine Körpererweiterung kein endliches System von Transzendenzerzeugern, so setzten wir $\operatorname{trgr}(K/k) = \infty$ und ignorieren in unserer Notation im allgemeinen die auch hier durchaus möglichen Unterscheidungen zwischen verschiedenen unendlichen Kardinalitäten.

Korollar 7.5.6.12. *Sei k ein Körper. Gibt es einen Isomorphismus von k-Kringen $k('X_1, \ldots, X_n) \xrightarrow{\sim} k('Y_1, \ldots, Y_m)$, so gilt $m = n$.*

Beweis. Die Variablen bilden eine Transzendenzbasis für den Quotientenkörper eines Polynomrings und wir haben folglich $\operatorname{trgr}_k k('X_1, \ldots, X_n) = n$. □

Satz 7.5.6.13 (**Transzendenzgrad als Krulldimension**). *Gegeben ein ringendlicher Integritätsring A über einem Körper k stimmt die Krulldimension des Krings A überein mit dem Transzendenzgrad über k seines Quotientenkörpers, in Formeln*

$$\operatorname{kdim} A = \operatorname{trgr}_k \operatorname{Quot}(A)$$

Beweis. Wir wählen mit dem Normalisierungslemma 7.5.4.6 über k algebraisch unabhängige Elemente $x_1, \ldots, x_d \in A$ derart, daß A ganz ist über dem Polynomring $k['x_1, \ldots, x_d]$, und finden

$$\operatorname{kdim} A = \operatorname{kdim} k['x_1, \ldots, x_d] = d = \operatorname{trgr}_k k('x_1, \ldots, x_d) = \operatorname{trgr}_k \operatorname{Quot}(A)$$

mit der Invarianz 7.5.2.11 der Krulldimension unter ganzen Kringerweiterungen, der Berechnung 7.5.4.4 der Krulldimension von Polynomringen, und der Invarianz 7.5.6.10 des Transzendenzgrades unter algebraischen Körpererweiterungen. □

Korollar 7.5.6.14. *Gegeben eine Erweiterung $A \hookrightarrow B$ von ringendlichen k-Kringen über einem vorgegebenen Körper k haben wir stets*

$$\operatorname{kdim} A \leq \operatorname{kdim} B$$

Beweis. Sowohl A als auch B haben nach 7.4.5.23 nur endlich viele minimale Primideale und deren Schnitt ist jeweils das Nilradikal. Jedes minimale Primideal von A ist mithin der Schnitt mit A eines minimalen Primideals von B. Indem wir ein Primideal von A auswählen, mit dem eine längstmögliche Primidealkette beginnt, und zu den Quotienten übergehen, dürfen wir A und B als Integritätsringe annehmen. Der Faktorisierungssatz oder genauer seine algebraische Fassung 7.5.4.10 zeigt dann $\operatorname{trgr}(\operatorname{Quot} A)/k \leq \operatorname{trgr}(\operatorname{Quot} B)/k$ und die Behauptung folgt aus der Interpretation 7.5.6.13 der Krulldimension als Transzendenzgrad. □

Beweis in geometrischer Sprache. Ist der Grundkörper k algebraisch abgeschlossen, so können wir dieselbe Argumentation auch geometrisch fassen, wie nun ausgeführt werden soll. Zunächst man man die Nilradikale wegteilen, so daß unsere Kringerweiterung einem Morphismus $\varphi : X \to Y$ von affinen Varietäten mit dichtem Bild entspricht. Wählen wir in Y eine irreduzible Komponente maximaler Dimension aus, so muß die der Abschluß des Bildes einer irreduziblen Komponente von X sein. Wir dürfen also X und Y irreduzibel und φ dominant annehmen. Damit induziert φ eine Körpererweiterung $\mathcal{M}(Y) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$ und die Interpretation 7.5.6.13 der Krulldimension als Transzendenzgrad zeigt die Behauptung. Alternativ könnten wir auch Übung 7.5.4.18 anwenden. □

Ergänzung 7.5.6.15. Als abstrakter Körper besitzt $\mathbb{C}$ eine Transzendenzbasis B über $\mathbb{Q}$. Wäre B abzählbar, so wäre auch $\mathbb{Q}({}_!B)$ abzählbar und damit nach 6.5.3.13 auch eine algebraische Erweiterung $\mathbb{C}$. Da dem nicht so ist, muß B überabzählbar und insbesondere unendlich sein, und daraus folgt dann mit 6.5.3.13 leicht $|B| = |\mathbb{Q}({}_!B)| = |\mathbb{C}|$. Als abstrakter Körper ist $\mathbb{C}$ also isomorph zum algebraischen Abschluß eines Funktionenkörpers über $\mathbb{Q}$ in überabzählbar vielen, genauer in $|\mathbb{C}|$ Veränderlichen. Insbesondere besitzt $\mathbb{C}$ jede Menge Körperautomorphismen, und es gibt auch zahllose nicht surjektive Körperhomomorphismen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Das steht in scharfem Kontrast zum Körper $\mathbb{R}$, nach 10.2.4.21 gibt es nämlich außer der Identität keinen Körperhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Bemerkung 7.5.6.16. Das **vierzehnte Hilbert'sche Problem** fragt, ob für eine endlich erzeugte Körpererweiterung $k \subset K$ und einen Zwischenkörper $M \subset K$ und einen „Zwischenring" $R \subset K$, der als Ring über k endlich erzeugt ist, auch $R \cap M$ ein über k endlich erzeugter Ring sein muß. Nagata fand dazu das erste Gegenbeispiel. Inzwischen sind viele weitere Gegenbeispiele bekannt, von Mukai, Winkelmann, Steinberg, Kuroda und anderen.

Ergänzung 7.5.6.17. Gegeben $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ besagt die **Vermutung von Schanuel**, daß der von den α_i und den Werten der Exponentialfunktion bei α_i erzeugte Unterkörper der komplexen Zahlen

$$\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \exp(\alpha_1), \ldots, \exp(\alpha_n))$$

über $\mathbb{Q}$ mindestens den Transzendenzgrad n haben sollte. Im Spezialfall algebraischer α_i spezialisiert er zum Satz von Hermite-Lindemann, den wir in 10.4.5.24 erwähnt aber nicht bewiesen haben.

Vorschau 7.5.6.18. Eindimensionale holomorphe Mannigfaltigkeiten heißen auch „Riemann'sche Flächen", da sie erstmals von dem Mathematiker Bernhard Riemann betrachtet wurden und als reelle Mannigfaltigkeiten zweidimensional sind. Die Zuordnung, die jeder zusammenhängenden Riemann'schen Fläche X den Körper $\mathcal{M}(X)$ der meromorphen Funktionen auf X zuordnet, liefert eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{kompakte} \\ \text{zusammenhängende} \\ \text{Riemann'sche Flächen} \end{array} \right\} \tilde{\to} \left\{ \begin{array}{c} \text{endlich erzeugte} \\ \text{Körpererweiterungen von } \mathbb{C} \\ \text{vom Transzendenzgrad Eins} \end{array} \right\}$$

Genauer meinen wir hier rechts Riemann'sche Flächen bis auf Isomorphie und links Körpererweiterungen bis auf Isomorphie von Körpern über $\mathbb{C}$. Zum Beispiel entspricht die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ unter dieser Bijektion dem Körper der gebrochen rationalen Funktion $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) = \mathbb{C}(t)$. Man kann weiter zeigen, daß gegeben zwei kompakte zusammenhängende Riemann'sche Flächen X, Y das Zurückholen von meromorphen Funktionen eine Bijektion auf Isomorphieklassen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{nichtkonstante holomorphe} \\ \text{Abbildungen } X \to Y \end{array} \right\} \tilde{\to} \operatorname{Ring}^{\mathbb{C}}(\mathcal{M}(Y), \mathcal{M}(X))$$

liefert. In diesem Licht wird die Galoistheorie im Fall endlich erzeugter algebraischer Erweiterungen des Funktionenkörpers $\mathbb{C}(t)$ sehr anschaulich. In der Sprache der Kategorientheorie haben wir eine „Äquivalenz von Kategorien" vor uns. Eine algebraische Version dieser Äquivalenz werden wir in 7.8.6.2 herleiten.

7.5.6.19 (**Endomorphismen von Funktionenkörpern**). Unser Monoidhomomorphismus $K(X) \to \operatorname{Ens}(K \sqcup \{\infty\})$ aus 3.5.5.28 verwandelt sich unter der üblichen Identifikation $K \sqcup \{\infty\} \tilde{\to} \mathbb{P}^1 K$ in einen Monoidhomomorphismus $K(X) \to \operatorname{Ens}(\mathbb{P}^1 K)$, der in Formeln beschrieben werden kann durch die Vorschrift $f : \langle 1, x \rangle \mapsto \langle Q(x), P(x) \rangle$ für $f = P/Q$ eine Darstellung mit P und Q ohne gemeinsame Nullstelle in K oder besser, wenn man den Wert bei $\langle 0, 1 \rangle$ auch korrekt erhalten will, durch $f : \langle y, x \rangle \mapsto \langle \tilde{Q}(y, x), \tilde{P}(y, x) \rangle$ für $\tilde{Q}, \tilde{P} \in K[Y, X]$ diejenigen homogenen Polynome vom gleichen Grad in zwei Variablen, die beim Einsetzen

von $Y = 1$ unsere ursprünglichen Polynome liefern und bei denen der gemeinsame Grad unter diesen Bedingungen kleinstmöglich ist. Für $P(X) = X^2 + 1$ und $Q(X) = X^5 + X$ hätten wir etwa $\tilde{P}(Y, X) = X^2Y^3 + Y^5$ und $\tilde{Q}(Y, X) = X^5 + XY^4$. Die offensichtliche Operation von $\mathrm{GL}(2; K)$ auf $\mathbb{P}^1 K$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \langle y, x \rangle \mapsto \langle ay + bx, cy + dx \rangle$$

kommt dann offensichtlich her von einer Operation auf $K(X)$ durch Einsetzen von $(c+dX)/(a+bX)$ für X. Man kann sich auch überlegen, daß man so alle K-linearen Körperautomorphismen von $K(X)$ erhält, daß also das Einsetzen anderer nichtkonstanter rationaler Funktionen keinen Körperautomorphismus liefert: Ist K algebraisch abgeschlossen, so folgt das daraus, daß unter $K(X) \to \mathrm{Ens}(\mathbb{P}^1 K)$ andere Elemente keine Injektion liefern. Im allgemeinen gilt es, zu einem algebraischen Abschluß überzugehen.

Übungen

Übung 7.5.6.20. Gegeben eine Körpererweiterung K/k von endlichem Transzendenzgrad t und ebensoviele Elemente $x_1, \ldots, x_t \in K$, die entweder algebraisch unabhängig sind über k oder aber ein System von Transzendenzerzeugern sind über k, bilden unsere Elemente bereits eine Transzendenzbasis.

Übung 7.5.6.21. Sind $M \supset K \supset k$ Körper, so ist der Transzendenzgrad von M über k die Summe der Transzendenzgrade von M über K und von K über k, in Formeln

$$\mathrm{trgr}(M/k) = \mathrm{trgr}(M/K) + \mathrm{trgr}(K/k)$$

Übung 7.5.6.22. Seien $k \subset K \subset M$ Körper und sei K algebraisch über k. Man zeige: Sind $x_1, \ldots, x_n \in M$ algebraisch unabhängig über k, so sind sie auch algebraisch unabhängig über K. Hinweis: 7.5.6.21.

Übung 7.5.6.23. Jeder Zwischenkörper in einer körperendlichen Körpererweiterung ist auch körperendlich über dem kleineren Körper. Hinweis: Man beachte 7.5.6.21 sowie 6.3.4.18 und das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & L & \subset & L(x_{s+1}, \ldots, x_r) & \subset & M \\ & & \cup & & \cup & & \\ k & \subset & k(x_1, \ldots, x_s) & \subset & k(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_r) & & \end{array}$$

Ergänzende Übung 7.5.6.24. Gegeben zwei Körpererweiterungen eines gegebenen Körpers existiert stets eine weitere Körpererweiterung des gegebenen Körpers, in die sie beide eingebettet werden können. Mutige zeigen noch allgemeiner: Gegeben eine Familie von Körpererweiterungen eines gegebenen Körpers existiert stets eine weitere Körpererweiterung des gegebenen Körpers, in die sie alle eingebettet werden können.

7.5.7 Going-Down und maximale Primidealketten

Lemma 7.5.7.1. *Seien $A \subset B$ Kringe und $C \subset B$ der ganze Abschluß von A in B. So ist für jedes $S \subset A$ auch $S^{-1}C$ der ganze Abschluß von $S^{-1}A$ in $S^{-1}B$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei S multiplikativ abgeschlossen. Daß alle Elemente von $S^{-1}C$ ganz sind über $S^{-1}A$ ist klar. Ist umgekehrt b/s mit $b \in B$ und $s \in S$ ganz über $S^{-1}A$, so gilt in $S^{-1}B$ eine Gleichung der Gestalt

$$\left(\frac{b}{s}\right)^n + \left(\frac{b}{s}\right)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{s_{n-1}} + \ldots + \frac{a_0}{s_0} = 0$$

mit $s_i \in S$, $a_i \in A$. Setzen wir $t = s_0 s_1 \ldots s_{n-1}$ und multiplizieren unsere Gleichung mit $(st)^n$, so zeigt sie, daß $bt/1$ ganz ist über $\operatorname{lok}(A) \subset S^{-1}A$ und es folgt, daß btu ganz ist über A für ein $u \in |S\rangle$. Es folgt $btu \in C$ und $b \in S^{-1}C$. $\square$

Definition 7.5.7.2. Ein Integritätsring heißt **ganz abgeschlossen**, wenn er kommutativ ist und sein eigener ganzer Abschluß in seinem Quotientenkörper.

7.5.7.3. Ein Kring A heißt **normal**, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ die Lokalisierung $A_\mathfrak{p}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsring ist. Nach 7.4.3.51 und 7.5.7.1 ist ein kommutativer Integritätsring genau dann normal, wenn er ganz abgeschlossen ist. Die Bedeutung der Normalitätsbedingung für beliebige Kringe diskutieren wir in den Übungen.

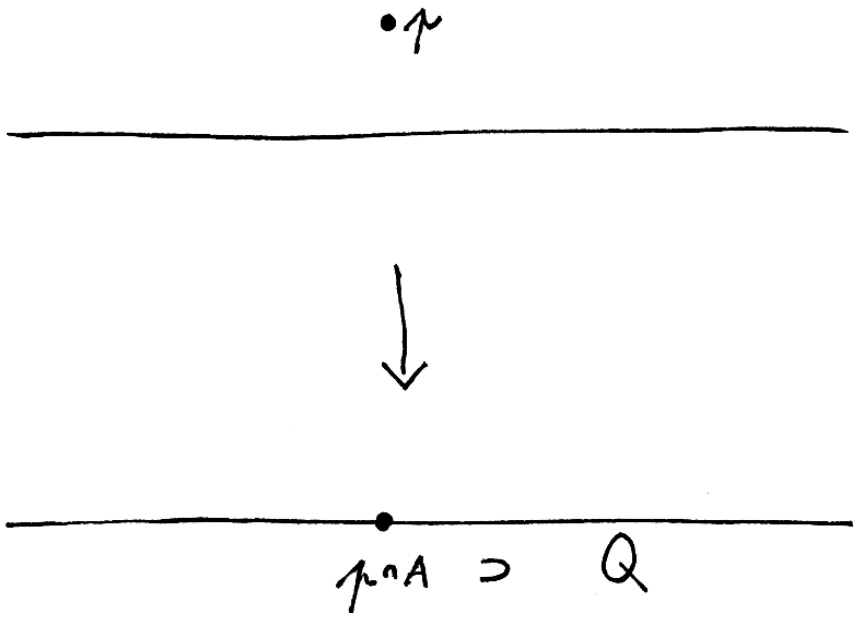
Beispiel 7.5.7.4. Nach 3.5.3.41 ist $\mathbb{Z}$ ganz abgeschlossen. Dasselbe gilt mit demselben Beweis für jeden faktoriellen Ring. Insbesondere ist nach 6.2.7.15 auch jeder Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ mit Koeffizienten in einem Körper ganz abgeschlossen.

Satz 7.5.7.5 (Going-down). *Sei $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung von Integritätsringen und sei A ganz abgeschlossen. So gibt es für je zwei Primideale $Q \subset P$ von A und jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset B$ mit $\mathfrak{p} \cap A = P$ ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ mit $\mathfrak{q} \cap A = Q$ und $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.*

7.5.7.6. Im Diagramm mit einer ganzen Kringerweiterung von Integritätsringen und A ganz abgeschlossen in der rechten Vertikalen

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\mathfrak{q}} & \subset & \mathfrak{p} & \subset & B \\ \downarrow{\scriptstyle \cap A} & & \downarrow{\scriptstyle \cap A} & & \cup \\ Q & \subset & P & \subset & A \end{array}$$

sind also das Primideal $\mathfrak{p}$ und das Primideal Q mit den dargestellten Inklusionsrelationen vorgegeben und die Existenz des eingekastelten Primideals $\mathfrak{q}$ wird be-



Ein Gegenbeispiel zu Going-Down im Fall, daß B kein Integritätsring ist, liefert bereits die diagonale Einbettung $k[T] \subset k[T] \times k$ für einen Körper k. Geometrisch sieht man, daß der mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet Punkt oben, der eigentlich $\mathcal{Z}(\mathfrak{p})$ darstellt, nicht zu einer irreduziblen Teilmenge $\mathcal{Z}(\mathfrak{q})$ vergrößert werden kann, deren Bild als Abschluß die ganze Gerade $\mathcal{Z}(Q)$ unten hat.

hauptet. Sind in einem Diagramm mit unserer ganzen Kringerweiterung von Integritätsringen mit A ganz abgeschlossen in der rechten Vertikalen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\boxed{\boxed{\boxed{\mathfrak{p}_0}}} & \subset & \dots & \subset & \boxed{\boxed{\mathfrak{p}_{r-2}}} & \subset & \boxed{\mathfrak{p}_{r-1}} & \subset & \mathfrak{p}_r & \subset & B \\
\downarrow\cap A & & & & \downarrow\cap A & & \downarrow\cap A & & \downarrow\cap A & & \cup \\
P_0 & \subset & \dots & \subset & P_{r-2} & \subset & P_{r-1} & \subset & P_r & \subset & A
\end{array}$$

die nicht eingekastelten Primideale mit vorgegeben, so können wir also induktiv der Reihe nach die mehr und mehr eingekastelten Primideale finden. Daher rührt die Bezeichnung als „Going-Down“ im Gegensatz zum Going-Up aus 7.5.2.8.

7.5.7.7. Ich gebe hier einen Beweis, der mir besonders transparent scheint, der aber eine gewisse Vertrautheit mit Galoistheorie voraussetzt. In 7.5.8 gebe ich einen alternativen Beweis, der versucht, mit einem Minimum an Galoistheorie auszukommen.

Beweis im ringendlichen Fall. Wir beginnen mit dem einfacheren und für unsere Anwendungen ausreichenden Fall, daß B ringendlich ist über A. Dann ist $\operatorname{Quot} B / \operatorname{Quot} A$ eine modulendliche Körpererweiterung. Wir vereinbaren die Abkürzung $K := \operatorname{Quot} A$. Vergrößern wir unsere Körpererweiterung zu einer modulendlichen normalen Erweiterung N/K wie in 6.3.8.25 und betrachten den von den Bildern der Elemente von B unter der Galoisgruppe $G = \operatorname{Gal}(N/K)$ erzeugten Teilring $C \subset N$, so ist auch C ganz und ringendlich über A. Da wir P nach Going-up als Schnitt mit B eines Primideals von C erhalten können, reicht es sicher, die Aussage von Going-down für unsere Kringerweiterung $A \subset C$ zu zeigen. Das folgt jedoch leicht aus dem anschließenden Satz 7.5.7.8. $\square$

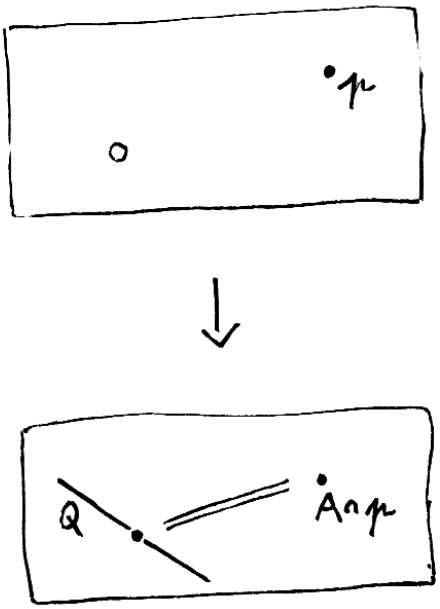
Satz 7.5.7.8 (Fasern als Galoisbahnen). *Seien A ein ganz abgeschlossener Integritätsring, $N/\operatorname{Quot} A$ eine normale Körpererweiterung mit endlicher Galoisgruppe und $C \subset N$ ein Teilring, der ganz ist über A und stabil unter der Galoisgruppe. So sind die Fasern der Surjektion*

$$\operatorname{Spec} C \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$$

genau die Bahnen der Galoisgruppe Γ in $\operatorname{Spec} C$ und für $\mathfrak{q}, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} C$ gilt genauer

$$(\mathfrak{q} \cap A) \subset (\mathfrak{p} \cap A) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \tau \in \Gamma \textit{ mit } \tau(\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{p}$$

Ergänzung 7.5.7.9. Der Satz gilt allgemeiner auch ohne Endlichkeitsannahmen an die Galoisgruppe. Den Beweis dieser Verallgemeinerung überlassen wir dem Leser als Übung. Man benötigt hierzu die Kompaktheit der Galoisgruppe in der Krull-Topologie und wendet 12.4.1.13 an auf die Teilmengen der Galoisgruppe, die in endlichen normalen Teilerweiterungen die Schnitte von zwei Elementen einer Faser mit dieser Teilerweiterung ineinander überführen.



Ein Gegenbeispiel zu Going-Down liefert die endliche Kringerweiterung, die durch Verkleben zweier verschiedener Punkte der affinen Ebene im Sinne von 7.5.2.15 entsteht: Nehmen wir in unserer Ebene eine Gerade durch genau einen unserer Punkte, davon das Bild und dann wieder dessen Urbild, so besteht es aus einer Gerade nebst einem Punkt. Dieser Punkt definiert ein maximales Ideal, das sich nicht so zu einem Primideal verkleinern läßt, daß dessen Schnitt mit dem verklebten Ring gerade das Definitionsideal des Bildes unserer Gerade wäre, oder geometrisch gesagt: Dieser Punkt liegt auf keiner irreduziblen abgeschlossenen echten Teilmenge unserer Ebene, die unsere ursprüngliche Gerade umfaßt. In diesem Fall ist der verklebte Ring unten nicht ganz abgeschlossen.

Ergänzung 7.5.7.10. Ist unter den Annahmen des Satzes $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} C$ ein maximales Ideal, so ist $C/\mathfrak{m}$ eine normale Körpererweiterung von $A/A \cap \mathfrak{m}$. In der Tat hat für $c \in C$ das Minimalpolynom $\operatorname{Irr}(c, \operatorname{Quot} A)$ Nullstellen in C und damit Koeffizienten in $C \cap \operatorname{Quot} A = A$ und kann folglich modulo $A \cap \mathfrak{m}$ reduziert werden.

Beweis. Es reicht für $\mathfrak{q}, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} C$ zu zeigen, daß aus $\tau(\mathfrak{q}) \not\subset \mathfrak{p}\ \forall \tau \in \Gamma$ bereits folgt $(\mathfrak{q} \cap A) \not\subset (\mathfrak{p} \cap A)$. Sicher folgt jedoch $\tau(\mathfrak{q}) \not\subset \sigma(\mathfrak{p})$ für alle $\tau, \sigma \in \Gamma$ und so mit 7.4.2.30 die Existenz eines $f \in C$ mit $f \in \tau(\mathfrak{q})\ \forall \tau \in \Gamma$ und $f \notin \sigma(\mathfrak{p})\ \forall \sigma \in \Gamma$. Das Produkt über alle Galoiskonjugierten von f ist dann ein galoisinvariantes Element $g \in C^\Gamma$ mit derselben Eigenschaft, also mit $g \in \tau(\mathfrak{q})\ \forall \tau \in \Gamma$ und $g \notin \sigma(\mathfrak{p})\ \forall \sigma \in \Gamma$. Nun ist $N^\Gamma / \operatorname{Quot}(A)$ rein inseparabel nach 6.4.1.30 und nach 6.3.9.37 liegt folglich eine hinreichend hohe Potenz g^N von g sogar in $\operatorname{Quot}(A)$. Da aber g^N ganz ist über A, folgt $g^N \in A$. Nach Konstruktion haben wir nun $g^N \in \mathfrak{q} \cap A$ aber $g^N \notin \mathfrak{p} \cap A$. □

Beweis von Going-down im allgemeinen. Ist B nicht ringendlich über A, so funktioniert derselbe Beweis, solange sich $\operatorname{Quot} B$ derart zu einer normalen Körpererweiterung von $K := \operatorname{Quot} A$ vergrößern läßt, daß die zugehörige Galoisgruppe endlich ist. Sonst lassen wir alle Rücksichten fallen und vergrößern $\operatorname{Quot} B$ zu einem algebraischen Abschluß $\bar{K}$ von K, in dem wir dann den ganzen Abschluß $\bar{A} \subset \bar{K}$ von A betrachten. Wieder reicht es, die Behauptung von Going-Down für $A \subset \bar{A}$ zu zeigen. Wir betrachten dazu die Menge aller Paare $(L, \mathfrak{q}_L)$ bestehend aus einem Zwischenkörper L von $\bar{K}/K$ und einem Primideal $\mathfrak{q}_L$ des ganzen Abschlusses $A_L \subset L$ von A in L mit $\mathfrak{q}_L \subset \mathfrak{p} \cap A_L$ und $\mathfrak{q}_L \cap A = Q$. Sie ist offensichtlich induktiv teilgeordnet und hat folglich ein maximales Element $(M, \mathfrak{q}_M)$. Wäre aber dabei $M \neq \bar{K}$, so könnten wir unser Paar noch vergrößern unter Zuhilfenahme des bereits bewiesenen Falles endlicher Galoisgruppen, indem wir M vergrößern zum Zerfällungskörper eines geeigneten Polynoms mit Koeffizienten in M und beachten, daß A_M ganz abgeschlossen ist. □

Satz 7.5.7.11 (**Topologisches Going-down**). *Sei $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung von Integritätsringen und sei A ganz abgeschlossen. So induziert unsere Kringeinbettung auf den Spektren eine offene Surjektion*

$$\pi : \operatorname{Spec} B \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$$

Beweis. Wie zuvor ziehen wir uns auf den Fall zurück, daß $\operatorname{Quot} B / \operatorname{Quot} A$ eine normale Körpererweiterung ist und $B \subset \operatorname{Quot} B$ stabil unter der Galoisgruppe Γ. Dann folgt aus 7.5.7.8 die Identität

$$(\operatorname{Spec} A) \backslash \pi(U) = \pi((\operatorname{Spec} B) \backslash \Gamma U)$$

für ΓU die Vereinigung aller Galoiskonjugierten von U. Ist nun U offen, so ist ΓU offen und $(\operatorname{Spec} B)\backslash\Gamma U$ abgeschlossen und damit ist nach Going-up 7.5.2.7, 7.5.2.10 auch $(\operatorname{Spec} A)\backslash\pi(U)$ abgeschlossen und $\pi(U)$ offen. □

Definition 7.5.7.12. Ein **Kettenlängenring** ist ein Kring, in dem es eine obere Schranke für die möglichen Längen von Primidealketten gibt und in dem je zwei maximale Primidealketten dieselbe Länge haben. In unserer Terminologie ist insbesondere auch der Nullring ein Kettenlängenring.

7.5.7.13. Die Maximalität ist hier in Bezug auf die offensichtliche Teilordnung auf der Menge aller Primidealketten zu verstehen. Die Bezeichnung als Kettenlängenring ist in der Literatur nicht gebräuchlich. In der üblichen Terminologie würde man solch einen Ring einen „äquidimensionalen und äquikodimensionalen Kettenring endlicher Krulldimension“ nennen.

Satz 7.5.7.14 (Geometrisch relevante Ringe sind Kettenlängenringe). *Jeder Integritätskring, der ringendlich ist über einem Körper, ist ein Kettenlängenring.*

7.5.7.15 (**Krulldimension und Krullkodimension**). Im geometrischen Fall bedeutet dieser Satz für $Y \not\subset X$ eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge einer irreduziblen oder allgemeiner einer äquidimensionalen affinen Varietät die Identität

$$\mathrm{kdim} Y + \mathrm{kdim}(Y \subset X) = \mathrm{kdim} X$$

7.5.7.16. Es gibt noethersche Integritätskringe endlicher Krulldimension, die keine Kettenlängenringe sind. Für ein Gegenbeispiel mag man eine Lokalisierung eines Polynomrings betrachten, bei der alle Elemente im Komplement der Vereinigung zweier Primideale invertiert werden. Es gibt sogar noethersche lokale Integritätskringe endlicher Krulldimension, die keine Kettenlängenringe sind. Hier sind Gegenbeispiele jedoch nicht so leicht zu konstruieren. Bei lokalen noetherschen Integritätskringen ist aber zumindest die Endlichkeit der Krulldimension nach 7.7.3.18 noch im allgemeinen gesichert.

Beweis. Sei k unser Körper und B unser Integritätskring. Wir argumentieren mit Induktion über $\mathrm{kdim} B$. Wir finden eine Noether-Normalisierung, also einen polynomialen Unterring $A = k[x_1, \ldots, x_n] \subset B$ mit B ganz über besagtem Unterring. Im Fall $\mathrm{kdim} B = 0$ ist nichts zu zeigen. Sonst finden wir ein Primideal $\mathfrak{p} \supsetneq 0$ von B und nach Going-up gilt auch $\mathfrak{p} \cap A \supsetneq 0$. Ist $\mathfrak{p}$ minimal unter den von Null verschiedenen Primidealen von B, so ist nach Going-down 7.5.7.5 auch $\mathfrak{p} \cap A$ minimal unter den von Null verschiedenen Primidealen unseres Polynomrings. Also ist $\mathfrak{p} \cap A = \langle f \rangle$ ein Hauptideal erzeugt von einem irreduziblen Polynom. Damit hat $A/(\mathfrak{p} \cap A)$ nach 7.5.4.4 eine um Eins kleinere Krulldimension und mit der Invarianz der Krulldimension unter ganzen Kringerweiterungen folgt

$$\mathrm{kdim} B/\mathfrak{p} = \mathrm{kdim} A/(\mathfrak{p} \cap A) = \mathrm{kdim} A - 1 = \mathrm{kdim} B - 1$$

Nach Induktionsannahme wissen wir aber bereits, daß jede nicht weiter verfeinerbare Kette von Primidealen in $B/\mathfrak{p}$ die Länge $\mathrm{kdim} B - 1$ hat. Der Satz folgt. $\square$

Übungen

Übung 7.5.7.17. Operiert eine endliche Gruppe auf einem ganz abgeschlossenen kommutativen Integritätsring, so ist auch der Invariantenring ganz abgeschlossen.

Übung 7.5.7.18. Sei $K \subset L$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe Γ und $A \subset K$ ein ganz abgeschlossener Teilring und $B \subset L$ sein ganzer Abschluß in L ist B stabil unter Γ und für den Invariantenring gilt

$$A = B^\Gamma$$

Übung 7.5.7.19. Man zeige, daß jede Lokalisierung eines Kettenlängenrings an einem Primideal und jeder Quotient eines Kettenlängenrings nach einem Primideal auch selbst wieder ein Kettenlängenring ist.

Übung 7.5.7.20. Sei A ein Kring und $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und $S^{-1}A \subset B$ eine Kringerweiterung. Ist $b \in B$ ganz über $S^{-1}A$, so gibt es $s \in S$ mit sb ganz über A.

Übung 7.5.7.21. Man zeige, daß der Ring der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät genau dann ein Kettenlängenring ist, wenn unsere Varietät äquidimensional ist.

Übung 7.5.7.22 (**Normalität über maximale Ideale**). Ein Kring A ist bereits normal, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ die Lokalisierung $A_\mathfrak{m}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsring ist.

Übung 7.5.7.23 (**Normalität über Komponenten**). Ein Kring A mit endlich vielen minimalen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ ist genau dann normal, wenn die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$A \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{p}_1 \times \ldots \times A/\mathfrak{p}_r$$

liefert und alle $A/\mathfrak{p}_i$ ganz abgeschlossen sind. Hinweis: 7.4.5.24.

7.5.7.24. Eine affine Varietät X heißt **normal**, wenn ihr Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(X)$ normal ist. Nach 7.5.7.23 ist das gleichbedeutend dazu, daß unsere affine Varietät die disjunkte Vereinigung ihrer irreduziblen Komponenten ist und daß diese jeweils einen ganz abgeschlossenen Ring von regulären Funktionen haben.

7.5.8 Beweis von Going-Down ohne Galois-Theorie**

7.5.8.1. In diesem Abschnitt gebe ich einen alternativen Beweis von Going-Down, der mit einem Minimum an Galois-Theorie auskommt. Ich kenne diesen Beweis aus [AM69]. Die Begriffsbildungen und Aussagen dieses Abschnitts dienen nur diesem alternativen Beweis und werden davon abgesehen im weiteren Verlauf der Vorlesung nicht benötigt.

Definition 7.5.8.2. Seien $A \subset B$ Kringe und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Ein Element $b \in B$ heißt **ganz über dem Ideal** $\mathfrak{a}$, wenn es $n \geq 1$ und $a_i \in \mathfrak{a}$ gibt mit

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

Lemma 7.5.8.3. *Sei $A \subset B$ eine Kringerweiterung und $C \subset B$ der ganze Abschluß von A in B. So kann der ganze Abschluß von $\mathfrak{a}$ in B beschrieben werden als das Radikal $\sqrt{\langle \mathfrak{a}C \rangle}$ des von $\mathfrak{a}$ in C erzeugten Ideals.*

Beweis. Gegeben $x \in B$ mit $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ für $a_i \in \mathfrak{a}$ gilt sicher $x \in C$ und $x^n \in \langle \mathfrak{a}C \rangle$ und folglich $x \in \sqrt{\langle \mathfrak{a}C \rangle}$. Gegeben $x \in \sqrt{\langle \mathfrak{a}C \rangle}$ gilt umgekehrt $x^n = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$ und $x_i \in C$. Dann ist $M := A[x_1, \ldots, x_n]$ ein endlich erzeugter A-Modul und für die Multiplikation mit x^n gilt

$$x^n : M \to \mathfrak{a}M$$

Mit 7.5.1.6 folgern wir dann, daß x^n ganz ist über $\mathfrak{a}$. □

Lemma 7.5.8.4. *Seien $A \subset B$ Integritätsringe, A ganz abgeschlossen und $x \in B$ ganz über einem Ideal $\mathfrak{a} \subset A$. So ist x algebraisch über $K := \operatorname{Quot} A$ und die Koeffizienten seines Minimalpolynoms liegen in $\sqrt{\mathfrak{a}}$.*

Beweis. Sei L/K der Zerfällungskörper des Minimalpolynoms von x. Alle seine Nullstellen gehören zum ganzen Abschluss von $\mathfrak{a}$ in L, und nach 7.5.8.3 gehören damit auch alle seine Koeffizienten zum ganzen Abschluß von $\mathfrak{a}$ in L. Andererseits gehören sie auch zu K und damit zum ganzen Abschluß von $\mathfrak{a}$ in K, und da A ganz abgeschlossen ist, sogar zum ganzen Abschluß von $\mathfrak{a}$ in A. Dieser ganze Abschluß ist aber nach 7.5.8.3 genau $\sqrt{\mathfrak{a}}$. □

Beweis von Going-Down ohne Galois-Theorie. Wir gehen zu $B_\mathfrak{p}$ über und müssen nur $A \cap \langle QB_\mathfrak{p} \rangle = Q$ zeigen, um mit 7.4.3.32 den Satz folgern zu können. Nun, jedes $x \in \langle QB_\mathfrak{p} \rangle$ hat die Gestalt $x = y/s$ mit $y \in \langle QB \rangle$ und $s \in B \backslash \mathfrak{p}$. Nach 7.5.8.3 ist y ganz über Q und nach 7.5.8.4 liegen die Koeffizienten seines Minimalpolynoms über $K := \operatorname{Quot} A$ in Q und unser Minimalpolynom hat die Gestalt

$$y^n + q_{n-1}y^{n-1} + \ldots + q_0$$

mit $q_i \in Q$. Liegt nun $x = y/s$ in A und ist nicht Null, so haben wir $s = yx^{-1}$ und das Minimalpolynom von s über K ist

$$s^n + (q_{n-1}/x)s^{n-1} + \ldots + (q_0/x^n)$$

Für die Koeffizienten v_i dieses Polynoms gilt also $x^{n-i}v_i = q_i \in Q$. Da aber s ganz ist über A folgt $v_i \in A$ wieder mit 7.5.8.3. Hätten wir nun $x \notin Q$, so hätten wir $v_i \in Q$ für alle i und damit $s^n \in \langle QB \rangle$ im Widerspruch zu $s \notin \mathfrak{p}$. Also gilt $x \in Q$ was zu zeigen war. □

7.5.9 Hauptidealsatz von Krull

Definition 7.5.9.1. Gegeben ein Kring R und ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ erklärt man die **Höhe von** $\mathfrak{p}$ als die Krulldimension der Lokalisierung an $\mathfrak{p}$, in Formeln

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) := \mathrm{kdim} R_{\mathfrak{p}} = \sup\{l \mid \text{Es gibt in } R \text{ eine Primidealkette } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_l = \mathfrak{p}\}$$

Das Supremum soll also in Worten gebildet werden über die Längen aller zu $\mathfrak{p}$ aufsteigenden Ketten von Primidealen von R. Die Notation erinnert an französisch „hauteur“ und englisch „height“.

7.5.9.2. In einem Kettenlängenring R gilt natürlich für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ die Identität

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \mathrm{kdim}(R/\mathfrak{p}) = \mathrm{kdim}(R)$$

In allgemeineren Ringen kann man nur $\leq$ erwarten, weil es ja passieren könnte, daß alle längeren Primidealketten das Primideal $\mathfrak{p}$ vermeiden. Der Hauptsatz der Dimensionstheorie lokaler noetherscher Kringe 7.7.3.18 wird zumindest zeigen, daß die Höhe eines Primideals in einem noetherschen Kring stets endlich ist.

7.5.9.3 (**Anschauliche Bedeutung der Höhe im geometrischen Fall**). Ist X eine affine Varietät und $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}(X)$ ein Primideal, so ist seine Nullstellemenge eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}) \not\subset X$. Die Höhe von $\mathfrak{p}$ kann dann geometrisch beschrieben werden als Krullkodimension durch die Identität

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{kdim}(\mathcal{Z}(\mathfrak{p}) \subset X)$$

Ist X selbst irreduzibel oder auch nur äquidimensional, so ist $\mathcal{O}(X)$ nach 7.5.7.14 beziehungsweise 7.5.7.15 ein Kettenlängenring und nach 7.5.9.2 gilt zusätzlich die Identität $\mathrm{kdim}(\mathcal{Z}(\mathfrak{p}) \subset X) = \mathrm{kdim} X - \mathrm{kdim}\mathcal{Z}(\mathfrak{p})$.

Satz 7.5.9.4 (Hauptidealsatz von Krull). *Gegeben ein noetherscher Kring R und ein Element $f \in R$ gilt für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$, das f enthält und minimal ist unter allen Primidealen mit dieser Eigenschaft, die Abschätzung* $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$. *Ist f kürzbar, so gilt sogar* $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$.

Vorschau 7.5.9.5. Ein unabhängiger Beweis wird in 7.7.3.21 gegeben. Dort zeigen wir sogar allgemeiner für Elemente $f_1, \ldots, f_s$ eines noetherschen Krings und jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$, das $f_1, \ldots, f_s$ enthält und minimal ist unter allen Primidealen mit dieser Eigenschaft, die Abschätzung $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \leq s$.

Beweis. Die Verschärfung für f kürzbar folgt unmittelbar daraus, daß jedes minimale Primideal eines Krings nach 7.4.5.10 aus nichtkürzbaren Elementen besteht. Indem wir zu $R_\mathfrak{p}$ übergehen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{p}$ das einzige maximale Ideal von R ist. Es gilt dann, für jedes Primideal $\mathfrak{q} \subset R$ mit $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ zu zeigen, daß $\mathfrak{q}$ ein minimales Primideal von R ist. Nach Annahme gilt $f \notin \mathfrak{q}$. Wir betrachten nun die kanonische Abbildung $\lambda : R \to R_\mathfrak{q}$ in die Lokalisierung und setzen $\mathfrak{q}^{(i)} := \lambda^{-1}(\mathfrak{q}_\mathfrak{q}^i)$. Dann bilden wir in R die Kette von Idealen

$$\mathfrak{q} + \langle f \rangle \ \supset \ \mathfrak{q}^{(2)} + \langle f \rangle \ \supset \ \mathfrak{q}^{(3)} + \langle f \rangle \ \supset \ldots$$

Da $R/\langle f \rangle$ nach Konstruktion ein noetherscher Kring der Krulldimension Null ist und folglich nach 7.4.7.18 endliche Länge hat, wird diese Kette von Idealen stationär, sagen wir bei

$$\mathfrak{q}^{(n)} + \langle f \rangle = \mathfrak{q}^{(n+1)} + \langle f \rangle$$

So kann jedes $a \in \mathfrak{q}^{(n)}$ dargestellt werden als $a = b + rf$ mit $b \in \mathfrak{q}^{(n+1)}$ und $r \in R$. Nun impliziert $rf \in \mathfrak{q}^{(n)}$ aber $\lambda(rf) \in \mathfrak{q}_\mathfrak{q}^n$ und wegen $\lambda(f) \in R_\mathfrak{q}^\times$ weiter $\lambda(r) \in \mathfrak{q}_\mathfrak{q}^n$ und so $r \in \mathfrak{q}^{(n)}$. Mithin haben wir sogar

$$\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)} + f\mathfrak{q}^{(n)}$$

Es folgt $f(\mathfrak{q}^{(n)}/\mathfrak{q}^{(n+1)}) = (\mathfrak{q}^{(n)}/\mathfrak{q}^{(n+1)})$, und da f im einzigen maximalen Ideal unseres Rings liegt, liefert das Lemma 7.4.6.12 von Nakayama $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)}$ und damit $\mathfrak{q}_\mathfrak{q}^n = \mathfrak{q}_\mathfrak{q}^{n+1}$. Wieder mit Nakayama zeigt das jedoch $\mathfrak{q}_\mathfrak{q}^n = 0$ und damit ist das maximale Ideal von $R_\mathfrak{q}$ bereits nilpotent, also etwa nach 7.4.2.28 ein minimales Primideal von $R_\mathfrak{q}$. Es folgt sofort, daß $\mathfrak{q}$ ein minimales Primideal von R ist. □

7.5.9.6. Ein Primideal eines Rings R, das ein gegebenes Element f enthält und minimal ist unter allen Primidealen mit dieser Eigenschaft, nennen wir ein **über f minimales Primideal**. Wenn ich stattdessen aus Versehen einmal „minimales Primideal über f“ schreiben sollte, bitte ich um Nachsicht.

7.5.9.7 (**Bedeutung des Hauptidealsatzes im geometrischen Fall**). Ist X eine affine Varietät und $f \in \mathcal{O}(X)$ eine reguläre Funktion, so sind die über f minimalen Primideale genau die Verschwindungsideale der irreduziblen Komponenten

der Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(f) \subset X$ von f. Unser Satz besagt also, daß für jede irreduzible Komponente Z von $\mathcal{Z}(f)$ gilt

$$\mathrm{kdim}(Z \subset X) \leq 1$$

Des weiteren ist f kürzbar genau dann, wenn es auf keiner irreduziblen Komponente von X verschwindet. Ist f kürzbar, so besagt unser Satz für jede irreduzible Komponente Z von $\mathcal{Z}(f)$ genauer $\mathrm{kdim}(Z \subset X) = 1$. In unserer Terminologie 7.4.2.20 ist dann also $\mathcal{Z}(f)$ eine Hyperfläche in X. Ist zusätzlich X auch noch irreduzibel oder auch nur äquidimensional, so können wir mit 7.5.7.15 noch einen Schritt weitergehen und für jede irreduzible Komponente Z von $\mathcal{Z}(f)$ folgern

$$\mathrm{kdim} Z = \mathrm{kdim} X - 1$$

7.5.9.8 (**Alternativer Beweis des Hauptidealsatzes im geometrischen Fall**). Im Fall des Rings $R = \mathcal{O}(X)$ der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät skizziere ich noch einen alternativen Zugang, der den Beweis der Kettenlängenringeigenschaft 7.5.7.14 verfeinert. Man zieht sich dabei zunächst auf den Fall zurück, daß X affin und irreduzibel ist und daß $f \in \mathcal{O}(X)\backslash 0$ eine irreduzible Nullstellenmenge hat und zeigt direkt

$$\mathrm{kdim}(\mathcal{Z}(f)) = \mathrm{kdim}\, X - 1$$

Dazu wählt man eine Noethernormalisierung $X \twoheadrightarrow k^d$ und betrachtet die normale Hülle N zur Körpererweiterung $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(k^n)$ und die Galoisgruppe $\Gamma := \mathrm{Gal}(N/\mathcal{M}(k^n))$. Weil $N^\Gamma/\mathcal{M}(k^n)$ eine endliche rein inseparable Körpererweiterung ist, gibt es für alle $h \in N^\Gamma$ ein $b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $h^b \in \mathcal{M}(k^n)$. Betrachten wir auch noch das Ringerzeugnis $A \subset N$ der Galoiskonjugierten von $\mathcal{O}(X)$, so erhalten wir einen Turm ganzer Ringerweiterungen

$$\mathcal{O}(k^n) \subset \mathcal{O}(X) \subset A$$

Nehmen wir nun für h das Produkt der Galoiskonjugierten von f, so gilt sogar $h^b \in \mathcal{O}(k^n)$, da nämlich $\mathcal{O}(k^n)$ ganz abgeschlossen ist. Unter den minimalen Primidealen von A über h^b gibt es sicher ein Primideal $\mathfrak{q}$, das f enthält. Dann ist es auch minimal über f und Going-up liefert, daß $\mathfrak{q} \cap \mathcal{O}(X)$ minimal ist über f, also mit $\mathfrak{p}$ zusammenfällt, und daß $\mathfrak{q} \cap \mathcal{O}(k^n)$ minimal ist über h^b. Zusammen sehen wir, daß $\mathfrak{p} \cap \mathcal{O}(k^n)$ minimal ist über h^b. Aus der Noether-Normalisierung von Hyperflächen 7.5.4.2 folgt $\mathrm{kdim}\, \mathcal{Z}(\mathfrak{p} \cap \mathcal{O}(k^n)) = n - 1$. Aus Going-up folgt dann $\mathrm{kdim}\, \mathcal{Z}(\mathfrak{p}) = n - 1$ wie gewünscht. Daraus folgt auch direkt, daß jede maximale echte irreduzible abgeschlossene Teilmenge Z einer ireduziblen affinen Varietät X eine um Eins kleinere Krulldimension hat und wir erhalten die Kettenlängenringeigenschaft 7.5.7.14 als Korollar, aus der man dann hinwiederum den Krull'schen Hauptidealsatz in seiner Höhenform in diesem Fall folgern kann.

Korollar 7.5.9.9 (Nullstellenmengen endlich vieler Funktionen). *Gegeben eine irreduzible affine Varietät X und r reguläre Funktionen $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}(X)$ haben alle irreduziblen Komponenten Z der simultanen Nullstellenmenge unserer r Funktionen $\mathcal{Z}_X(f_1, \ldots, f_r)$ eine Dimension*

$$\operatorname{kdim} Z \geq \operatorname{kdim} X - r$$

Beweis. Vollständige Induktion durch wiederholte Anwendung der Aussage im Fall $r = 1$, in dem sie aus 7.5.9.7 bereits bekannt ist. Der Fall einer echten Ungleichung tritt im Fall $r = 1$ nur für die Nullfunktion aus, aber im Verlauf der Induktion kann ja auch nicht ausgeschlossen werden, daß die r-te Funktion auf einer irreduziblen Komponente der gemeinsamen Nullstellenmenge der ersten $r-1$ Funktionen verschwindet. □

Korollar 7.5.9.10 (Darstellung algebraischer Mengen durch Gleichungen). *Seien $Z \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ X$ nichtleere äquidimensionale affine Varietäten mit der Dimensionsdifferenz $c := \operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} Z$. So gibt es Elemente $f_1, \ldots, f_c \in \mathcal{O}(X)$ mit $f_i|Z = 0$ und $\mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_c)$ äquidimensional von derselben Dimension wie Z.*

7.5.9.11. Insbesondere ist dann also Z eine Vereinigung von irreduziblen Komponenten von $\mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_c)$.

Beweis. Im Fall $c = 0$ ist nichts zu zeigen. Sonst finden wir ein kürzbares Element $f_1 \in \mathcal{O}(X)$ mit $Z \subset \mathcal{Z}(f_1)$, etwa indem wir auf jeder irreduziblen Komponente von X einen Punkt wählen, der nicht zu Z gehört, und eine Funktion f_1, die an allen diesen Punkten den Wert Eins annimmt und auf Z verschwindet. Nach Krull hat jede irreduzible Komponente von $\mathcal{Z}(f_1)$ eine um Eins kleinere Dimension als X. Der Beweis kann nun mit Induktion über c zu Ende geführt werden. □

Korollar 7.5.9.12 (Mindestdimension der Fasern von Morphismen). *Gegeben $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von irreduziblen affinen Varietäten und eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Z \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ Y$ gilt für jede irreduzible Komponente K von $\varphi^{-1}(Z)$ mit $\overline{\varphi(K)} = Z$ die Abschätzung*

$$\operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} K \leq \operatorname{kdim} Y - \operatorname{kdim} Z$$

Vorschau 7.5.9.13. Dasselbe folgt für irreduzible, aber nicht notwendig affine Varietäten, wie wir sie im weiteren Verlauf dieser Vorlesung einführen. Für φ flach zeigen wir sehr viel stärkere Aussagen in 7.5.10.5.

Beweis. Für $c := \operatorname{kdim} Y - \operatorname{kdim} Z$ finden wir Funktionen $f_1, \ldots, f_c \in \mathcal{O}(Y)$ mit $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_c)$ äquidimensional und Z einer irreduziblen Komponente von $\mathcal{Z}$ nach 7.5.9.10. Nach 7.5.9.9 hat jede irreduzible Komponente W von

$$\varphi^{-1}(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}(f_1 \circ \varphi, \ldots, f_c \circ \varphi)$$

mindestens die Dimension $\operatorname{kdim} W \geq \operatorname{kdim} X - c$. Jede irreduzible Komponente V von $\varphi^{-1}(Z)$ mit $\overline{\varphi(V)} = Z$ ist aber notwendig auch eine irreduzible Komponente von $\varphi^{-1}(\mathcal{Z})$. $\square$

7.5.9.14. Die Proposition zeigt zum Beispiel, daß es Morphismen $X \to Y$ zwischen irreduziblen affinen Varietäten mit mindestens einer endlichen aber nicht leeren Faser nur dann geben kann, wenn gilt $\operatorname{kdim} X \leq \operatorname{kdim} Y$.

Korollar 7.5.9.15 (Kodimension von Schnittmengen). $(k = \bar{k})$. *Gegeben irreduzible abgeschlossene Teilmengen $X, Y \mathrel{\not\subset} k^n$ gilt für jede irreduzible Komponente Z ihres Schnitts $X \cap Y$ die Abschätzung*

$$(n - \operatorname{kdim} Z) \leq (n - \operatorname{kdim} X) + (n - \operatorname{kdim} Y)$$

Beweis. Die Diagonale $\Delta = \{(v, v) \in k^n \times k^n\}$ kann als Nullstellenmenge von n regulären Funktionen beschrieben werden. Der Schnitt mit $\Delta \cap (X \times Y)$ ist isomorph zu $X \cap Y$ und kann andererseits als Nullstellenmenge von n regulären Funktionen aus $\mathcal{O}(X \times Y)$ beschrieben werden. Nach 7.5.9.9 hat also jede irreduzible Komponente des Schnitts mindestens die behauptete Dimension. $\square$

7.5.9.16. Ich hätte gleichbedeutend auch $\operatorname{kdim} Z \geq \operatorname{kdim} X + \operatorname{kdim} Y - n$ schreiben können, aber in der im Korollar gegebenen Form kann ich mir die Aussage besser merken. Die Aussage des Korollars gilt analog auch für Schnitte in beliebigen „glatten“ äquidimensionalen Varietäten mit im wesentlichen demselben Beweis, vergleiche 7.7.4.20. Für Schnitte in allgemeinen irreduziblen Varietäten gilt sie nicht mehr. Zum Beispiel ist $Q := \mathcal{Z}(T_1T_2 - T_3T_4) \mathrel{\not\subset} k^4$ eine irreduzible Hyperfläche, also dreidimensional, und darin liegen die beiden zweidimensionalen Untervarietäten $\mathcal{Z}(T_1, T_3)$ und $\mathcal{Z}(T_2, T_4)$ scheiden sich nur in einem einzigen Punkt, dem Ursprung des Koordinatensystems.

7.5.9.17. In meinen Augen ist dieses Korollar eine großartige Verallgemeinerung der Abschätzung für die Kodimension des Schnitts affiner Teilräume eines affinen Raums in 3.3.2.21 zum Fall von Teilmengen, die durch kompliziertere, nicht mehr notwendig lineare, sondern polynomiale Gleichungen gegeben werden.

7.5.9.18. Für das Korollar ist es wesentlich, daß wir über einem algebraisch abgeschlossenen Körper arbeiten: Zwei Sphären im $\mathbb{R}^3$ etwa können sich berühren und so eine einpunktige Schnittmenge haben. Im Komplexen aber muß nach unserem Korollar jede irreduzible Komponente des Schnitts zweier algebraischer Flächen im $\mathbb{C}^3$ entweder eine Kurve oder eine Fläche sein. Gegeben komplexe Polynome f, g in drei Variablen kann also ihre gemeinsame Nullstellenmenge keine isolierten Punkte haben. Genauer muß sogar der Schnitt zweier verschiedener irreduzibler algebraischer Flächen in $\mathbb{C}^3$ stets eine Kurve alias äqui-eindimensional sein, wie Sie sich in Übung 7.5.9.25 selbst überlegen dürfen.

Satz* 7.5.9.19 (Definitionslücken rationaler Funktionen). *Jeder ganz abgeschlossene noethersche Integritätskring A ist in seinem Quotientenkörper der Schnitt über alle seine Lokalisierungen nach Primidealen der Höhe Eins. In Formeln gilt mithin in* $\operatorname{Quot} A$ *die Identität*

$$A = \bigcap_{\operatorname{ht}(\mathfrak{q})=1} A_{\mathfrak{q}}$$

7.5.9.20. Wir diskutieren eine Konsequenz dieses Satzes im geometrischen Fall. Sei X eine irreduzible affine Varietät, deren Ring $\mathcal{O}(X)$ von regulären Funktionen ganz abgeschlossen ist. Sei $U \Subset X$ eine offene Teilmenge, deren Komplement eine Kodimension größergleich Zwei hat. So ist die Restriktion eine Bijektion

$$\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(U)$$

zwischen dem Ring der regulären Funktionen auf ganz X und dem Ring der regulären Funktionen auf U. In der Tat liegt jede rationale Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ mit der Eigenschaft, daß das Komplement $X \backslash D(f)$ ihres Definitionsbereichs aus 7.4.4.9 keine irreduzible Komponente der Kodimension Eins hat, bereits im Schnitt der $\mathcal{O}_{X,Y}$ für $Y \not\subset X$ irreduzibel von der Kodimension Eins und liegt damit nach 7.4.4.6 und unserem Satz 7.5.9.19 in $\mathcal{O}(X)$. Ist $\mathcal{O}(X)$ faktoriell, so können wir das auch ohne den vorstehenden Satz leicht einsehen, denn dann ist der Definitionsbereich nach 7.4.4.10 genau das Komplement der Nullstellenmenge des Nenners in einer maximal gekürzten Darstellung unserer rationalen Funktion und ist nach dem Hauptidealsatz 7.5.9.7 folglich eine Hyperfläche. Ist $\mathcal{O}(X)$ nicht ganz abgeschlossen, so gilt die Aussage im allgemeinen nicht mehr. Für ein Gegenbeispiel verklebe man zwei Punkte einer affinen Ebene im Sinne von 7.5.2.15 und betrachte eine reguläre Funktion auf unserer Ebene, die an diesen beiden Punkten verschiedene Werte annimmt. Dann ist der Definitionsbereich der entsprechenden rationlen Funktion auf der verklebten Varietät das Komplement des verklebten Punktes und sein Komplement hat die Kodimension Zwei.

Beispiel 7.5.9.21. Nach 7.5.9.20 und sogar dem sehr viel einfacheren Beweis im Fall faktorieller Ringe liefert für $n \geq 2$ und $k = \bar{k}$ die Restriktion von regulären Funktionen von regulären Funktionen auf ganz k^n zu regulären Funktionen auf dem Komplement des Ursprungs eine Bijektion

$$\mathcal{O}(k^n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(k^n \backslash 0)$$

Beweis. Für $f \in (\operatorname{Quot} A) \backslash A$ ist das Ideal $I := \{g \in A \mid gf \in A\}$ nicht ganz A. Seien $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die paarweise verschiedenen über I minimalen Primideale von A nach 7.4.5.28. Man zeigt leicht $I_{\mathfrak{p}} = \{g \in A_{\mathfrak{p}} \mid gf \in A_{\mathfrak{p}}\}$. Die analoge Formel gälte sogar für eine Lokalisierung nach einer beliebigen Teilmenge. Es folgt $f \notin A_{\mathfrak{p}}$. Können wir $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ zeigen, so sind wir fertig. Indem wir

sonst zu $A_\mathfrak{p}$ übergehen, das nach 7.5.7.1 auch ganz abgeschlossen ist, dürfen wir gleich $A = A_\mathfrak{p}$ annehmen, also A lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$ und $I \subset A$ ein Ideal mit Radikal $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$. Wir folgern $\mathfrak{p}^n \subset I$ für $n \gg 0$. Aus $If \subset A$ folgt damit insbesondere $\mathfrak{p}^n f \subset A$. Jetzt betrachten wir das kleinstmögliche $l \geq 0$ mit $\mathfrak{p}^l f \subset A$. Sicher gilt $l > 0$, und wählen wir $g \in \mathfrak{p}^{l-1} f \backslash A$, so gilt $g \notin A$ aber $\mathfrak{p} g \subset A$. Nun ist A ganz abgeschlossen, also kann g nicht ganz sein über A. Dann kann aber nach 7.5.1.6 die Multiplikation mit g auch nicht den endlich erzeugten von Null verschiedenen A-Modul $\mathfrak{p}$ stabilisieren, wir haben also $\mathfrak{p} g \not\subset \mathfrak{p}$. Andererseits wissen wir jedoch bereits, daß gilt $\mathfrak{p} g \subset A$, woraus folgt $\mathfrak{p} g = A$ alias $\mathfrak{p} = g^{-1} A$. Nun liefert der Krull'sche Hauptidealsatz 7.5.9.4 oder sogar einfacher 7.5.9.22 in der Tat $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$. □

Ergänzung 7.5.9.22. Ein lokaler noetherscher Integritätsring, dessen maximales Ideal ein von Null verschiedenes Hauptideal ist, hat als einziges weiteres Primideal das Nullideal. Dieser Spezialfall des Krull'schen Hauptidealsatzes 7.5.9.4 ist nicht schwer direkt einzusehen: Ist $(A, \langle g \rangle)$ unser lokaler Integritätsring und $\mathfrak{q} \subset A$ ein Primideal mit $g \notin \mathfrak{q}$, so gilt $\mathfrak{q} = g\mathfrak{q}$, denn jedes $a \in \mathfrak{q}$ läßt sich darstellen als $a = gb$ mit $b \in A$ und dann notwendig $b \in \mathfrak{q}$. Dann aber zeigt das Nakayama-Lemma sofort $\mathfrak{q} = 0$.

Übungen

Übung 7.5.9.23. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß für jede offene Teilmenge $U \Subset k^n$ der Ring $\mathcal{O}_{k^n}(U)$ der regulären Funktionen auf U ringendlich ist über k. Hinweis: Man erinnere, daß der Polynomring faktoriell ist, und überlege sich, daß eine reguläre Funktion global durch ihre maximal gekürzte Darstellung gegeben sein muß.

Übung 7.5.9.24. Gegeben ein noetherscher faktorieller Ring R induziert das Bilden des Hauptideals irreduzibler Elemente eine Bijektion

$$\operatorname{irk} R \xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1\}$$

zwischen der Menge der Irreduziblenklassen von R und der Menge aller Primideale der Höhe Eins. Hinweis: Man kopiere den Beweis von 7.4.2.21.

Übung 7.5.9.25. Seien X eine affine Varietät mit einem faktoriellen Ring von regulären Funktionen, $Y \not\subset X$ eine Hyperfläche und $Z \not\subset X$ eine irreduzible Teilmenge. Ist Z nicht in Y enthalten, so ist $Y \cap Z$ eine Hyperfläche in Z. Hinweis: 7.5.9.7, 7.4.2.21.

Übung 7.5.9.26. Gegeben ein von Null verschiedener noetherscher Kettenlängenring R und darin ein kürzbares Element f ist auch $R/\langle f \rangle$ ein Kettenlängenring und es gilt

$$\operatorname{kdim} R/\langle f \rangle = \operatorname{kdim} R - 1$$

7.5.10 Flachheit und Faserdimension

Satz 7.5.10.1 (Höhenvergleich in flachen Kringerweiterungen). *Gegeben ein flacher Kringhomomorpismus $\varphi : A \to B$ von noetherschen Kettenlängenringen haben für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ die über $\varphi(\mathfrak{p})$ minimalen Primideale $\mathfrak{q} \subset B$ dieselbe Höhe wie $\mathfrak{p}$ und es gilt für sie zusätzlich*

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$$

7.5.10.2. Als Gegenbeispiel für den Fall, daß A kein Kettenlängenring ist, mag man den durch Auswerten bei $T = 0$ gegebenen Homomorphismus $k[T] \times k \to k \times k$ betrachten.

7.5.10.3. Der Satz und sein Beweis bleiben richtig, wenn wir von unseren beiden Ringen nur fordern, daß sie noethersch sind und daß je zwei Primidealketten, die zu einem fest vorgegebenen Primideal aufsteigen und nicht weiter verfeinerbar sind, dieselbe endliche Länge haben. In 7.7.3.21 werden wir zeigen, daß in einem noetherschen Kring jedes Primideal eine endliche Höhe hat. Insbesondere gibt es dann zumindest mindestens eine endliche nicht verfeinerbare Primidealkette, die zu einem gegebenen Primideal aufsteigt.

7.5.10.4. Gegeben ein flacher Kringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ und ein beliebiger Kringhomomorphismus $A \to C$ ist der induzierte Homomorphismus $C \to B \otimes_A C$ stets wieder flach. Weiter ist für jedes kürzbare Element $f \in A$ auch sein Bild $\varphi(f)$ kürzbar in B. Ist insbesondere A ein Integritätsbereich und B nicht der Nullring, so muß jeder flache Kringhomomorphismus eine Injektion $\varphi : A \hookrightarrow B$ sein.

Beweis. Wir zeigen das, indem wir mit Spezialfällen beginnen und in mehreren Schritten zum allgemeinen Fall übergehen.

Fall 1: Der Ring A ist ein Integritätsring und $\mathfrak{p} = 0$. Im Fall $B = 0$ ist nichts zu zeigen, andernfalls dürfen wir $A \subset B$ annehmen nach 7.5.10.4. Die über $\mathfrak{p}$ minimalen Primideale von B sind dann genau die minimalen Primideale von B und haben auch die Höhe Null. Weiter schneiden sie den Integritätsbereich A in Null, denn schneidet ein Ideal $\mathfrak{q} \subset B$ den Teilring A nicht im Nullideal, so enthält es kürzbare Elemente von A und diese sind nach 7.5.10.4 wegen der Flachheit auch kürzbar in B und nach 7.4.5.10 kann unser $\mathfrak{q}$ dann kein minimales Primideal in B sein.

Fall 2: Das Primideal $\mathfrak{p}$ ist ein minimales Primideal von A. Das Darantensorieren $\otimes_A A/\mathfrak{p}$ zeigt mit 7.5.10.4, daß auch $\bar{\varphi} : A/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{p}B$ flach ist mit der abkürzenden Notation $\mathfrak{p}B$ für das von $\varphi(\mathfrak{p})$ in B erzeugte Ideal. Die über $\varphi(\mathfrak{p})$ minimalen Primideale $\mathfrak{q} \subset B$ sind nun genau die Urbilder unter der Projektion

$\pi_B : B \twoheadrightarrow B/\mathfrak{p}B$ der minimalen Primideale $\bar{\mathfrak{q}}$ von $B/\mathfrak{p}B$. Nach dem bereits behandelten Fall gilt $\bar{\varphi}^{-1}(\bar{\mathfrak{q}}) = 0$ und dann auch

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\pi_B^{-1}(\bar{\mathfrak{q}})) = \pi_A^{-1}(\bar{\varphi}^{-1}(\bar{\mathfrak{q}})) = \pi_A^{-1}(0) = \mathfrak{p}$$

Es bleibt zu zeigen, daß die über $\varphi(\mathfrak{p})$ minimalen Primideale $\mathfrak{q} \subset B$ auch als Primideale von B minimal sind. Andernfalls gäbe es aber in B ein Primideal $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}$ und wir hätten notwendig auch $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}_1 \supset \mathfrak{p}B$ und $\bar{\mathfrak{q}}_1 \subsetneq \bar{\mathfrak{q}}$ wäre ein echt kleineres Primideal von $B/\mathfrak{p}B$ im Widerspruch dazu, daß $\bar{\mathfrak{q}}$ dort ein minimales Primideal war.

Fall 3: Der allgemeine Fall. Wir argumentieren durch Induktion über die Höhe von $\mathfrak{p}$. Die Basis der Induktion bildet Fall 2, bei dessen Behandlung wir sogar ohne die Bedingung ausgekommen sind, daß unsere Ringe noethersche Kettenlängenringe sein sollen. Im allgemeinen ziehen wir uns zunächst einmal auf den Fall zurück, daß A nilpotentfrei ist, indem wir sonst A und B durch das Nilradikal $\mathfrak{n} \subset A$ beziehungsweise das von $\varphi(\mathfrak{n})$ in B erzeugte Ideal $\mathfrak{n}B$ teilen. Da diese Ideale beide aus nilpotenten Elementen bestehen, liegen sie jeweils in allen Primidealen. Des weiteren ist der induzierte Ringhomomorphismus $A/\mathfrak{n} \to B/\mathfrak{n}B$ nach 7.5.10.4 auch flach, so daß sich an unserer Aussage nichts ändert. Sei also von nun an A nilpotentfrei. Ist $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal positiver Höhe $c \geq 1$, so enthält $\mathfrak{p}$ ein kürzbares Element f von A, da es nach 7.4.2.14 nicht in einer endlichen Vereinigung minimaler Primideale enthalten sein kann, da es aber nach 7.4.5.23 in unserem noetherschen Ring A nur endlich viele minimalen Primideale gibt und da deren Vereinigung nach 7.4.5.10 in unserem nilpotentfreien Ring genau die Menge der nichtkürzbaren Elemente ist. Dann ist nach 7.5.10.4 aufgrund der Flachheit f auch kürzbar in B und der Kringhomomorphismus $\bar{\varphi} : A/fA \to B/fB$ ist flach und nach dem Krull'schen Hauptidealsatz 7.5.9.4, für den wir wieder die Bedingung noethersch brauchen, sind A/fA sowie B/fB Kettenlängenringe. Da wir A als Kettenlängenring angenommen hatten, hat $\bar{\mathfrak{p}} := \mathfrak{p}/fA$ die Höhe $\operatorname{ht}\bar{\mathfrak{p}} = c - 1$ in A/fA. Mit Induktion folgt für jedes Primideal $\bar{\mathfrak{q}} \subset B/fB$, das minimal ist über $\bar{\varphi}(\bar{\mathfrak{p}})$, daß gilt $\operatorname{ht}\bar{\mathfrak{q}} = c - 1$ und $\bar{\varphi}^{-1}(\bar{\mathfrak{q}}) = \bar{\mathfrak{p}}$. Da wir B als Kettenlängenring angenommen hatten, zeigt der Krull'sche Hauptidealsatz weiter, daß das Zurückholen Bijektionen

$$\operatorname{Spec}_{\operatorname{ht}=c-1}(B/fB) \xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}_{\operatorname{ht}=c} B \mid f \in \mathfrak{q}\}$$

induziert. Dann folgt aber auch für jedes Primideal $\mathfrak{q} \subset B$, das minimal ist über $\varphi(\mathfrak{p})$, daß gilt $\operatorname{ht}\mathfrak{q} = c$ und $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. □

Korollar 7.5.10.5 (Scheinflache Morphismen äquidimensionaler Varietäten). *Gegeben ein scheinflacher Morphismus $\varphi : X \to Y$ von einer nichtleeren äqui-n-dimensionalen affinen Varietät zu einer äqui-m-dimensionalen affinen Varietät*

gilt $n \geq m$ und gegeben eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Z \not\subset Y$ gilt für jede irreduzible Komponente K ihres Urbilds $\varphi^{-1}(Z)$ sowohl $\overline{\varphi(K)} = Z$ als auch

$$\operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} K = \operatorname{kdim} Y - \operatorname{kdim} Z$$

7.5.10.6. Das mag im Kontrast zum Fall 7.5.9.12 eines dominanten Morphismus irreduzibler affiner Varietäten gesehen werden, in dem wir selbst unter der zusätzlichen Annahme $\overline{\varphi(K)} = Z$ nur die Abschätzung $\leq$ zeigen konnten und insbesondere nur eine untere Abschätzung für die Dimension der Fasern. Im Fall eines scheinflachen Morphismus finden wir viel stärker, daß alle Komponenten aller Fasern die zu erwartende Dimension haben.

Beweis. Wir zeigen das nur im flachen Fall. Im scheinflachen Fall geht es genauso, man muß nur mehr Notation einführen. Genau dann hat eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge $W \not\subset X$ die Eigenschaft $\varphi(W) \subset Z$, wenn für die zugehörigen Primideale gilt $\varphi^\sharp(\mathcal{I}_Y(Z)) \subset \mathcal{I}_X(W)$. Die irreduziblen Komponenten von $\varphi^{-1}(Z)$ entsprechen also den kleinstmöglichen Primidealen $\mathfrak{q} \subset \mathcal{O}(X)$, die $\varphi^\sharp(\mathcal{I}_Y(Z))$ umfassen. Nach 7.5.10.1 haben alle diese Primideale $\mathfrak{q}$ dieselbe Höhe wie $\mathcal{I}_Y(Z)$. Folglich gilt für alle irreduziblen Komponenten W von $\varphi^{-1}(Z)$ die Identität

$$\operatorname{kdim}(W \subset X) = \operatorname{kdim}(Z \subset Y)$$

Die obige Dimensionsidentität folgt damit aus unserer Beziehung 7.5.7.15 zwischen Krulldimension und Krullkodimension in äquidimensionalen Varietäten. Die Gleichheit $\overline{\varphi(K)} = Z$ dahingegen folgt aus der Gleichheit $(\varphi^\sharp)^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathcal{I}_Y(Z)$ aus 7.5.10.1. □

Satz 7.5.10.7 (Halbstetigkeit der Faserdimension). *Gegeben ein Morphismus von affinen Varietäten $\varphi : X \to Y$ ist die Funktion $\mathrm{f} : X \to \mathbb{N}$ der lokalen Faserdimension*

$$\mathrm{f}(x) := \operatorname{kdim}_x \varphi^{-1}(\varphi(x))$$

halbstetig auf X in dem Sinne, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{x \in X \mid \mathrm{f}(x) \geq n\}$ abgeschlossen ist.

7.5.10.8. Hier verwenden wir unsere Notation $\operatorname{kdim}_z Z$ aus 7.4.1.17 für das Maximum der Dimensionen irreduzibler Komponenten von Z, die den Punkt z enthalten. Für das folgende vereinbaren wir die Notation

$$X^{\geq n} := \{x \in X \mid \mathrm{f}(x) \geq n\}$$

Vorschau 7.5.10.9. Sobald wir allgemeine, nicht notwendig affine Varietäten und ihre Morphismen kennenlernen, wird klar sein, daß der Satz für sie genauso gilt.

Beweis. Wir zeigen das durch Induktion über die Dimension von Y. Wissen wir es bei festem Y für X irreduzibel, so folgt es leicht für X beliebig. Im Fall $\operatorname{kdim} Y = 0$ ist die Behauptung klar für X irreduzibel und folgt dann für X beliebig. Für den Induktionsschritt dürfen wir wieder X irreduzibel annehmen und, indem wir Y durch $\overline{\varphi(Y)}$ ersetzen, auch noch Y irreduzibel. Setzen wir nun $c := \operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} Y$, so folgt aus unseren Erkenntnissen 7.5.9.12 zur Mindestdimension von Fasern bereits $X = X^{\geq c}$. Aufgrund der generischen Flachheit 7.5.5.5 und der Dimensionseigenschaften flacher Morphismen 7.5.10.5 besitzt weiter Y eine offene dichte Teilmenge $V \Subset Y$ derart, daß unsere Funktion f auf $\varphi^{-1}(V)$ konstant den Wert c annimmt. Setzen wir $Z := Y \backslash V$, so hat $Z \not\Subset Y$ echt kleinere Dimension als Y und wir dürfen auf $\varphi : \varphi^{-1}(Z) \to Z$ die Induktionsvorausetzung anwenden und haben gewonnen. $\square$

7.6 Algebraische Varietäten

7.6.1 Einführung

7.6.1.1 (**Streitgespräch**). Ich will die Theorie allgemeiner algebraischer Varietäten durch einen kurzen Dialog motivieren.

A: Kennst Du schon diesen super Satz von Bézout, nach dem zwei Polynome in zwei Veränderlichen genau so viele gemeinsame Nullstellen haben, wie das Produkt ihrer Grade angibt?

B: Ist doch offensichtlich Quatsch. Denk nur an zwei parallele Geraden in der Ebene!

A: Na ja, die schneiden sich halt im Unendlichen.

B: Hättest Du auch gleich dazusagen können, was da noch alles mitzuzählen ist! Dann denk halt an zwei Kreise, Nullstellenmengen von quadratischen Polynomen. Die schneiden sich doch meist gar nicht, bestenfalls in zwei und nie in vier Punkten.

A: Na ja, die anderen Schnittpunkte liegen eben im Komplexen.

B: Wird ja ziemlich komplex. Eine Ausrede nach der anderen. Dann denk eben an den Schnitt der Standardparabel mit der x-Achse.

A: Der muß natürlich doppelt gezählt werden!

B: Argh! Natürlich, selbstverständlich. Und was wäre, wenn wir schlicht zweimal dasselbe Polynom in zwei Veränderlichen nehmen?

A: Oups, ich vergaß, teilerfremd müssen die beiden Polynome schon sein. Aber dann stimmt es auch wirklich!

B: Ich glaub vorerst gar nichts mehr. Jetzt erklär mir erst mal ganz genau, was Du mit „gemeinsamen Nullstellen im Unendlichen“ meinst und mit welcher „Vielfachheit“ eine vorgegebene gemeinsame Nullstelle denn nun gezählt werden soll, dann sehen wir weiter.

7.6.1.2. Nun, dieses „ganz genaue Erklären“ wird ein Weilchen dauern, weil ich es auch wieder nicht minimalistisch machen will. Vielmehr erkläre ich zunächst ganz allgemein abstrakte algebraische Varietäten als spezielle k-geringte Räume. Dann wird diskutiert, inwiefern für $k = \bar{k}$ unsere algebraischen Teilmengen von k^n oder auch unsere naiven affinen Varietäten in diesem Sinne eine natürliche Struktur als algebraische Varietäten tragen, und inwiefern dasselbe auch für die

projektiven Räume $\mathbb{P}^n k$ aus 5.1.4.18 gilt. In diesem Rahmen schließlich wird das „ganz genaue Erklären“ dann leicht von der Hand gehen, vergleiche 7.6.10.6.

7.6.2 Geringte Räume

Definition 7.6.2.1. Sei k ein Kring. Unter einer k**-Ringalgebra** verstehen wir ein Paar (R, φ) bestehend aus einem Ring R und einem Ringhomomorphismus $\varphi : k \to R$, dessen Bild im Zentrum von R liegt und der meist vom Leser erraten werden muß. Von einer k-Teilringalgebra fordern wir, daß sie das Bild dieses ausgezeichneten Ringhomomorphismus umfassen soll. In 4.7.9.1 hatten wir derartige Strukturen im Fall eines Körpers k bereits kennengelernt.

Definition 7.6.2.2. Sei k ein Kring. Ein k**-geringter Raum** $X = (X, \mathcal{O})$ ist ein topologischer Raum X mitsamt einer Vorschrift $\mathcal{O}$, die jeder offenen Teilmenge $U \Subset X$ eine k-Teilringalgebra $\mathcal{O}(U) \subset \mathrm{Ens}(U, k)$ in der k-Ringalgebra aller Abbildungen von U nach k zuordnet, deren Elemente wir die **strukturierenden Funktionen auf** U nennen und von denen wir fordern:

> Ist $\mathcal{U}$ ein System offener Teilmengen von X und $V := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ seine Vereinigung, so ist eine Funktion $f : V \to k$ strukturierend genau dann, wenn ihre Restriktionen auf alle $U \in \mathcal{U}$ strukturierend sind.

7.6.2.3. Unter anderem impliziert unsere Definition, daß alle konstanten Funktionen strukturierend sind, daß also für jedes $U \Subset X$ die konstanten Abbildungen von U nach k in $\mathcal{O}(U)$ liegen: Eine Teilringalgebra muß nämlich nach unseren Definitionen stets das Einselement der ursprünglichen Ringalgebra enthalten.

Ergänzung 7.6.2.4 (**Diskussion der Terminologie**). Im Zusammenhang mit der Definition von „Schemata“ und „Supermannigfaltigkeiten“ wird eine noch allgemeinere Definition des Konzepts eines geringten Raums benötigt. Wenn wir betonen wollen, daß wir den hier erklärten einfacheren Begriff meinen, reden wir genauer von einem **durch Funktionen** k**-geringten Raum**. In der Sprache der Garbentheorie, die ich hier noch vermeiden will, ist $\mathcal{O}$ eine „k-Ringalgebren-Untergarbe der k-Ringalgebren-Garbe aller k-wertigen Funktionen auf X“.

Beispiel 7.6.2.5 (**Mannigfaltigkeiten als** $\mathbb{R}$**-geringte Räume**). Ein typisches Beispiel sind die „Mannigfaltigkeiten“, die wir in 22.3.2.4 definiert haben als gewisse $\mathbb{R}$-geringte Räume X, bei denen wir als strukturierende Funktionen auf einer offenen Teilmenge $U \Subset X$ alle „glatten“ Funktionen nehmen.

Beispiel 7.6.2.6 (**Affine Varietäten als** k**-geringte Räume**). Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ und eine naive affine k-Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ erhalten wir einen k-geringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, indem wir X mit seiner Zariskitopologie versehen und für $U \Subset X$ unsere regulären Funktionen aus 7.4.4.3 als

strukturierende Funktionen $U \to k$ nehmen. Die Menge dieser Funktionen hatten wir bereits in 7.4.4.3 mit $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}(U)$ bezeichnet. Die so aus naiven affinen Varietäten entstehenden k-geringten Räume nennen wir **affine Varietäten**.

Definition 7.6.2.7. Seien k ein Kring und $(X, \mathcal{O}_X)$ sowie $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei k-geringte Räume. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt ein **Morphismus von k-geringten Räumen**, wenn sie stetig ist und wenn das Davorschalten unserer Abbildung strukturierende Funktionen zu strukturierenden Funktionen macht, wenn also in Formeln aus $U \Subset Y$ und $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ folgt $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$. Die Kategorie der k-geringten, genauer der durch Funktionen k-geringten Räume notieren wir

$$\mathrm{Gerf}_k$$

Beispiel 7.6.2.8. Die Morphismen $\mathbb{R}$-geringter Räume im Fall von Mannigfaltigkeiten sind genau alle glatten Abbildungen.

Beispiel 7.6.2.9. Die Morphismen k-geringter Räume im Fall von affinen k-Varietäten sind genau alle Morphismen von naiven affinen Varietäten im Sinne von 7.3.3.2. Es ist deshalb im weiteren nicht so wichtig, zwischen naiven affinen Varietäten im Sinne von speziellen k-geringten Mengen und affinen Varietäten im Sinne von speziellen k-geringten Räumen zur Zariskitopologie zu unterscheiden.

7.6.2.10 (**Schnitt von Strukturen als k-geringter Raum**). Sind auf ein und derselben Menge X mehrere Strukturen als k-geringter Raum gegeben, so bilden wir ihren Schnitt, indem wir diejenigen Mengen offen nennen, die in jeder unserer Strukturen offen sind, und diejenigen Funktion strukturierend, die in jeder unserer Strukturen strukturierend sind. Dieser Schnitt ist dann offensichtlich auch eine Struktur als k-geringter Raum auf X.

7.6.2.11 (**Vergleich von Strukturen als k-geringter Raum**). Gegeben zwei Strukturen als k-geringter Raum auf derselben Menge X nennen wir die eine **größergleich** als die andere genau dann, wenn ihr Schnitt die andere Struktur ist. Salopp gesprochen sind also größere Strukturen solche „mit mehr offenen Mengen oder mehr strukturierenden Funktionen oder beidem“. Auf diese Weise erhalten wir eine Teilordnung auf der Menge aller Strukturen als k-geringter Raum auf einer vorgegebenen Menge X.

Definition 7.6.2.12. Eine Familie $(\varphi_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ von Morphismen k-geringter Räume heißt **gesamthaft final**, wenn für jeden weiteren k-geringten Raum W und jede Abbildung $\psi : Y \to W$ gilt

$$(\psi\varphi_i \text{ Morphismus } \forall i) \Rightarrow (\psi \text{ Morphismus})$$

Lemma 7.6.2.13. *Gegeben k-geringte Räume $(X_i)_{i \in I}$, eine Menge Y und Abbildungen $\varphi_i : X_i \to Y$ gibt es genau eine Struktur als k-geringter Raum auf Y derart, daß unsere Familie gesamthaft final wird. Sie heißt die* **finale Struktur** *zu unserer Familie.*

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Sind $(\mathcal{T}_1, \mathcal{O}_1)$ und $(\mathcal{S}_2, \mathcal{O}_2)$ zwei derartige Strukturen auf Y, jeweils bestehend aus einer Topologie und einer Vorgabe strukturierender Funktionen, für die unsere Familie gesamthaft final wird, so ist $\mathrm{id} : (Y, \mathcal{T}_i, \mathcal{O}_i) \to (Y, \mathcal{T}_j, \mathcal{O}_j)$ für beliebige $i, j \in \{1, 2\}$ ein Morphisms. Das zeigt die Eindeutigkeit. Nun zeigen wir noch, daß für die größte Struktur auf Y, für die alle die φ_i Morphismen werden, die von einer gesamthaft finalen Struktur geforderte Eigenschaft erfüllt ist. Diese größte Struktur kann ja explizit dadurch beschrieben werden, daß ihre Topologie die Finaltopologie $\mathcal{T} = \{V \subset Y \mid \varphi_i^{-1}(V) \Subset X_i \ \forall i\}$ ist und die strukturierenden Funktionen gegeben werden durch

$$\mathcal{O}(V) = \{f : V \to k \mid f \circ \varphi_i \in \mathcal{O}(\varphi_i^{-1}(V)) \ \forall i\}$$

Damit ist klar, daß diese Struktur die von einer gesamthaft finalen Struktur geforderte Eigenschaft erfüllt. □

7.6.2.14 (**Transitivität gesamthaft finaler Familien**). Seien $e_{ij} : W_{ij} \to X_i$ und $f_i : X_i \to Y$ Familien von k-geringten Räumen und Morphismen. Ist die Familie der $f_i e_{ij}$ gesamthaft final, so auch die Familie der f_i. Ist die Familie der e_{ij} gesamthaft final für alle i und die Familie der f_i gesamthaft final, so ist auch die Familie der $f_i e_{ij}$ gesamthaft final. Das alles folgt unmittelbar aus der Definition.

7.6.2.15. Ein Morphismus $f : X \to Y$ von k-geringten Räumen heißt **final**, wenn Y die finale Struktur in Bezug auf die einelementige Familie f trägt. Zum Beispiel ist die Identität auf einem k-geringten Raum stets final.

7.6.2.16 (**Disjunkte Vereinigung k-geringter Räume**). Gegeben eine Familie k-geringter Räume (X_i) versehen wir ihre disjunkte Vereinigung $\bigsqcup X_i$ mit der finalen Struktur bezüglich der Inklusionen, wenn nichts anderes gesagt wird. Wir erhalten so ein Koprodukt in der Kategorie Ger_k.

Definition 7.6.2.17. Eine Familie $(\varphi_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ von Morphismen k-geringter Räume heißt **gesamthaft initial**, wenn für jeden weiteren k-geringten Raum W und jede Abbildung $\psi : W \to X$ gilt

$$(\varphi_i \psi \text{ Morphismus } \forall i) \Rightarrow (\psi \text{ Morphismus})$$

7.6.2.18. Ganz allgemein nennen wir einen Morphismus $f : X \to Y$ **initial**, wenn er als einelementige Familie gesamthaft initial ist. Zum Beispiel ist die Identität auf einem k-geringten Raum stets initial. Ist $\psi : X \hookrightarrow Y$ ein injektiver Morphismus von k-geringten Räumen und trägt X die initiale Struktur, so nennen wir ψ eine **Einbettung** von k-geringten Räumen.

7.6.2.19 (**Diskussion der Terminologie**). In der algebraischen Geometrie ist für unsere Einbettungen auch die Bezeichnung **Immersion** gebräuchlich. In der Differentialgeometrie versteht man jedoch unter einer Immersion stattdessen meist

wie in 22.3.3.14 einen nicht notwendig injektiven Morphismus mit injektivem Differential an jedem Punkt.

Ergänzung 7.6.2.20. Ich will den Begriff der Einbettung nur verwenden in dem allgemeinen in 15.1.4.2 erklärten Kontext. Den Begriff einer **Immersion** will ich weiter fassen als Morphismus in einer Kategorie, der unter einem natürlichen Mengenfunktor zu einer Injektion wird. Insbesondere will ich, anders als in der Differentialgeometrie üblich, differentialinjektive Abbildungen glatter Mannigfaltigkeiten nur dann Immersionen nennen, wenn sie zusätzlich auch noch injektiv sind.

7.6.2.21. Besonders oft werden uns **offene Einbettungen** und **abgeschlossene Einbettungen** begegnen, bei denen zusätzlich gefordert wird, daß sie als Abbildungen topologischer Räume offen beziehungsweise abgeschlossen sind, oder gleichbedeutend, daß ihr Bild offen beziehungsweise abgeschlossen ist.

Lemma 7.6.2.22. *Gegeben k-geringte Räume $(Y_i)_{i\in I}$, eine Menge X und Abbildungen $\varphi_i : X \to Y_i$ gibt es genau eine Struktur als k-geringter Raum auf X derart, daß unsere Familie gesamthaft initial wird. Sie heißt die* **initiale Struktur** *zu unserer Familie.*

Beweis. Die Eindeutigkeit zeigt man wie im Fall gesamthaft finaler Strukturen in 7.6.2.13. Für den Nachweis der die Existenz zeigen wir genauer, daß die kleinste Struktur $\mathcal{I}$ eines k-geringten Raums auf X, für die alle unsere φ_i Morphismen werden, die geforderte universelle Eigenschaft hat. Ist in der Tat $\psi : W \to X$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, daß alle $\varphi_i\psi$ Morphismen sind, so muß ja die finale Struktur $\mathcal{T}$ auf X in Bezug auf ψ größergleich unserer kleinsten Struktur $\mathcal{I}$ sein. Das zeigt, daß ψ auch in Bezug auf $\mathcal{I}$ ein Morphismus ist. □

7.6.2.23. Ist $X \subset Y$ eine Teilmenge eines k-geringten Raums, so nennen wir die initiale Struktur zur Inklusion die **induzierte Struktur** eines k-geringten Raums auf X und notieren sie $(X, \mathcal{O}_Y|_X)$. Explizit kann man die induzierte Struktur beschreiben wie folgt: Als Topologie auf X erhält man die von Y induzierte Topologie, und eine Funktion g auf $U \Subset X$ ist strukturierend genau dann, wenn es für alle $x \in U$ eine offene Umgebung $V \Subset Y$ von x in Y gibt und eine Funktion $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ mit $g|_{U\cap V} = f|_{U\cap V}$.

7.6.2.24 (**Transitivität gesamthaft initialer Familien**). Seien $\varphi_i : X \to Y_i$ und $\psi_{ji} : Y_i \to Z_{ji}$ Familien von k-geringten Räumen und Morphismen. Sind die φ_i gesamthaft initial und sind für jedes i die ψ_{ji} gesamthaft initial, so ist auch die Familie der $\psi_{ji}\varphi_i$ gesamthaft initial. Ist andererseits die Familie der $\psi_{ji}\varphi_i$ gesamthaft initial, so auch die Familie der φ_i. All das folgt direkt aus den Definitionen.

7.6.2.25. Bemerkung 7.6.2.24 besagt unter anderem, daß die Verknüpfung von zwei initialen Morphismen stets initial ist, und daß Verknüpfung $\psi\varphi$ von zwei

Morphismen nur dann initial sein kann, wenn φ initial ist. Insbesondere ist jeder Morphismus initial, zu dem es einen linksinversen Morphismus gibt. Weiter ist die Verknüpfung von zwei Einbettungen stets wieder eine Einbettung.

Ergänzung 7.6.2.26. Diese Aussagen und ihr Beweis sind ebenso wie die Aussagen zur Transitivität finaler Familien völlig analog zum Beweis der entsprechenden Aussagen 15.1.6.14, 15.1.7.5 im Kontext topologischer Räume. Sie sind noch allgemeiner sinnvoll und richtig für einen beliebigen treuen Funktor, vergleiche 15.1.6.16.

Übungen

Übung 7.6.2.27. Für $m \leq n$ ist die Projektion auf die ersten Koordinaten $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ final in Bezug auf die in 22.3.1.4 erklärten $\mathcal{C}^1$-Strukturen $\mathbb{R}$-geringter Räume.

Übung 7.6.2.28. Man folgere aus 22.3.1.12: Die Verknüpfung von zwei finalen Morphismen ist stets final. Ist die Verknüpfung $\varphi \circ \psi$ von zwei Morphismen final, so ist φ final. Insbesondere ist jeder Morphismus final, der ein Rechtsinverses alias einen **Schnitt** besitzt, für den es also einen Morphismus s gibt mit $fs = \mathrm{id}$.

Übung 7.6.2.29 (**Finalität offener Überdeckungen**). Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung eines k-geringten Raums X, so trägt X die finale Struktur in Bezug auf die Einbettungen $U_i \hookrightarrow X$. Eine Abbildung $X \to Y$ in einen weiteren k-geringten Raum ist also genau dann ein Morphismus, wenn ihre Restriktionen auf alle U_i Morphismen sind.

Übung 7.6.2.30 (**Finalität ist lokal in der Basis**). Ist ein Morphismus von k-geringten Räumen $f : Y \to X$ final, so ist auch für jede offene Teilmenge $U \Subset X$ die induzierte Abbildung $f^{-1}(U) \to U$ final für die induzierten Strukturen. Ist umgekehrt $f : Y \to X$ ein Morphismus von k-geringten Räumen und besitzt X eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ derart, daß $f : f^{-1}(U) \to U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ final ist, so ist unser Morphismus bereits selbst final.

7.6.3 Gesättigte geringte Räume

7.6.3.1. Für das Studium von Varietäten sind besonders diejenigen k-geringten Räume relevant, die wir im folgenden als „gesättigte k-geringte Räume“ einführen.

Definition 7.6.3.2. Sei k ein Körper. Ein k-geringter Raum X heiße **gesättigt**, wenn für $U \Subset X$ offen und $f : U \to k$ regulär auch die Menge $\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$ offen ist und $1/f$ darauf eine reguläre Funktion.

7.6.3.3 (**Diskussion der Terminologie**). Der Begriff eines „gesättigten geringten Raums“ ist nicht gebräuchlich. Kempf [Kem93] bezeichnet solche Strukturen als „spaces with functions“. Der Begriff ist nur sinnvoll, wenn k ein Körper ist.

7.6.3.4. Offensichtlich ist ein beliebiger Schnitt gesättigter Strukturen wieder gesättigt. Offensichtlich ist die finale Struktur zu irgendwelchen Abbildungen von gesättigten Strukturen in eine vorgegebene Menge auch selbst gesättigt.

Definition 7.6.3.5. Eine Familie $(\varphi_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ von Morphismen k-geringter Räuma heißt **gesamthaft gesättigt initial**, wenn X gesättigt ist und wenn für jeden weiteren gesättigten k-geringten Raum W und jede Abbildung $\psi : W \to X$ gilt

$$(\varphi_i \psi \text{ Morphismus } \forall i) \Rightarrow (\psi \text{ Morphismus})$$

Lemma 7.6.3.6. *Gegeben eine Familie $(\varphi_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ von Abbildungen einer Menge k-geringter Räume gibt es stets genau eine Struktur als k-geringter Raum auf X derart, daß unsere Familie gesamthaft gesättigt initial wird. Wir nennen sie die* **gesättigte initiale Struktur auf** X.

Beweis. Die Eindeutigkeit zeigt man wie in 7.6.2.13. Um die Existenz zu zeigen, weisen wir nach, daß die kleinste Struktur als gesättigter k-geringter Raum auf X, für die alle φ_i Morphismen werden, die behauptete universelle Eigenschaft hat. Das hinwiederum folgt daraus, daß die finale Struktur zu $\psi : W \to X$ gesättigt ist und größergleich dieser kleinsten Struktur sein muß. □

Beispiel 7.6.3.7 (**Sättigung einer geringten Menge**). Sei k ein Körper. Jede k-geringte Menge $(X, \mathcal{O}(X))$ ist für die Klumpentopologie ein k-geringter Raum. Die gesättigte initiale Struktur für $\mathrm{id} : X \to X$ alias die kleinste gesättigte Struktur $(X, \mathcal{O}_X)$, die diese Struktur umfaßt, nennen wir die **Sättigung** unserer k-geringten Menge. Sie kann explizit beschrieben werden wie folgt:

1. Abgeschlossen sind alle simultanen Nullstellenmengen $\mathcal{Z}(E)$ für Mengen von Funktionen $E \subset \mathcal{O}(X)$;

2. Die strukturierenden Funktionen $\mathcal{O}_X(U)$ für $U \Subset X$ offen in Bezug auf die im ersten Teil erklärte Topologie sind alle Funktionen $f : U \to k$ mit der Eigenschaft, daß es für jeden Punkt $x \in U$ eine offene Umgebung $V \Subset U$ gibt und Funktionen $g, h \in \mathcal{O}(X)$ mit $h(y) \neq 0$ und $f(y) = g(y)/h(y)$ für alle $y \in V$.

In der Tat müssen offensichtlich in jeder gesättigten Struktur, die die gegebene Struktur umfaßt, alle $\mathcal{Z}(E)$ abgeschlossen sein und alle lokal durch Quotienten von Funktionen aus $\mathcal{O}(X)$ darstellbaren Funktionen auf offenen Teilmengen strukturierend. Andererseits erkennt man auch leicht, daß X mit der in Teil 1 angegebenen Topologie und den in Teil zwei angegebenen strukturierenden Funktionen auf offenen Teilmengen ein gesättigter geringter Raum ist.

Beispiel 7.6.3.8 (**Affine Varietät als Sättigung**). Gegeben eine naive affine Varietät X ist die Topologie auf ihrer Sättigung 20.1.4.16 unsere Zariski-Topologie aus 7.3.4.3 und die Struktur als k-geringter Raum die in 7.6.2.6 beschriebene und die Identität ist folglich ein gesättigt initialer Morphismus

$$(X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}(X))$$

7.6.3.9. Die initiale Struktur zu einer Abbildung von einer Menge in eine gesättigte Struktur ist offensichtlich stets wieder gesättigt. Für die initiale Struktur in Bezug auf eine Familie von mehr als einer Abbildung gilt das jedoch im allgemeinen nicht mehr, wie schon das Beispiel der Produktstruktur auf k^2 bald zeigen wird.

7.6.3.10 (**Transitivität gesamthaft gesättigt initialer Familien**). Seien $\varphi_i : X \to Y_i$ und $\psi_{ji} : Y_i \to Z_{ji}$ Familien von k-geringten Räumen und Morphismen. Sind die φ_i gesamthaft gesättigt initial und sind für jedes i die ψ_{ji} gesamthaft initial oder gesamthaft gesättigt initial, so ist auch die Familie der $\psi_{ji}\varphi_i$ gesamthaft gesättigt initial. Ist andererseits die Familie der $\psi_{ji}\varphi_i$ gesamthaft gesättigt initial, so auch die Familie der φ_i. All das folgt direkt aus den Definitionen.

7.6.3.11 (**Vergleich induzierter Strukturen auf abgeschlossenen Teilmengen**). Gegeben $i : Y \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge in eine naive affinen Varietät ist die Verknüpfung $(Y, \mathcal{O}_Y) \to (Y, \mathcal{O}(Y)) \to (X, \mathcal{O}(X))$ eines gesättigt initialen Morphismus mit einem initialen Morphismus wieder gesättigt initial. Aufgrund der universellen Eigenschaft der Sättigung faktorisiert sie über $(X, \mathcal{O}_X)$, folglich ist die Inklusion ein initialer Morphismus

$$(Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

7.6.3.12 (**Vergleich induzierter Strukturen auf Nichtnullstellenmengen**). Gegeben in einer naiven affinen Varietät X die Nichtnullstellenmenge U einer regulären Funktion betrachten wir die Verknüpfung $(U, \mathcal{O}_U) \to (U, \mathcal{O}(U)) \to (X, \mathcal{O}(X))$ und prüfen explizit, daß sie gesättigt initial ist. Sie faktorisiert andererseits aufgrund der universellen Eigenschaft der Sättigung als $(U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}(X))$, folglich ist die Inklusion ein initialer Morphismus

$$(U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

Proposition 7.6.3.13 (**Verkleben von Punkten**). *Seien X eine affine k-Varietät und $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung von X auf eine Menge Y. Sind alle Fasern von φ endlich und fast alle Fasern einelementig, so ist Y mit seiner finalen Struktur eines k-geringten Raums auch eine affine k-Varietät.*

Beweis. In 7.5.2.15 hatten wir bereits gezeigt, daß Y mit $\mathcal{O}(Y) := \{f : Y \to k \mid f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)\}$ eine naive affine Varietät wird. Da $\mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ ganz ist, zeigen unsere allgemeinen Erkenntnisse 7.5.2.10 über die Geometrie ganzer Ringerweiterungen, daß φ abgeschlossen und insbesondere „topologisch final" ist: Eine Teilmenge von Y ist genau dann offen, wenn ihr Urbild in X es ist. Um zu zeigen, daß φ eine finale Abbildung auf den zugehörigen k-geringten Räumen ist, müssen wir noch für jede offene Teilmenge $U \Subset Y$ zeigen, daß eine Funktion $h : U \to k$ genau dann regulär ist, wenn $h \circ \varphi$ regulär ist. Für globale Funktionen ist das offensichtlich. Für den allgemeinen Fall reicht es, wenn wir unsere Aussage für offene Teilmengen der Gestalt $U = Y_g = \{g \neq 0\}$ zeigen, mit $g \in \mathcal{O}(Y)$. Offensichtlich brauchen wir nur den Fall zu betrachten, daß es genau zwei Punkte $p, q \in X$ gibt mit $p \neq q$ aber $\varphi(p) = \varphi(q)$. Nun betrachten wir die kurze exakte Sequenz

$$\mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow k$$

mit rechter Abbildung $f \mapsto f(p) - f(q)$. Lassen wir $g \in \mathcal{O}(Y)$ auf dem k in dieser Sequenz durch Multiplikation mit seinem Wert $g(p) = g(q)$ operieren, so besteht sie aus Homomorphismen von $\mathcal{O}(Y)$-Moduln und bleibt exakt bei Lokalisierung nach g. Das zeigt $\mathcal{O}(Y)_g \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)_g$ im Fall $g(p) = g(q) = 0$ und $\mathcal{O}(Y)_g \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathcal{O}(X)_g \mid f(p) = f(q)\}$ im Fall $g(p) = g(q) \neq 0$. Die Proposition ist bewiesen. □

7.6.4 Algebraische Varietäten

7.6.4.1. Ich erinnere daran, daß wir in 7.6.2.6 eine affine Varietät erklärt hatten als einen k-geringten Raum, der aus einer naiven affinen Varietät hervorgeht, indem wir sie mit der Zariskitopologie versehen und als die strukturierenden Funktionen auf offenen Teilmengen unsere regulären Funktionen nehmen.

Definition 7.6.4.2. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1. Eine **k-Varietät** ist ein k-geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, der eine endliche Überdeckung besitzt durch offene Teilmengen U derart, daß alle $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ affine k-Varietäten sind. Die Elemente von $\mathcal{O}_X(V)$ für $V \Subset X$ nennen wir in diesem Kontext die **regulären Funktionen** auf V;

2. Ein Morphismus von Varietäten ist ein Morphismus von geringten Räumen. Wir erhalten so die **Kategorie** Var_k **der k-Varietäten**.

7.6.4.3 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur ist für die Struktur, die wir hier eine Varietät genannt haben, die Bezeichnung als **Prävarietät** üblich. Unter einer „Varietät" versteht man in der Literatur dann meist, was wir in 7.6.12.1

als eine „separierte Varietät“ einführen. Meine Motivation für diese Abweichung ist, daß man in der allgemeineren Theorie der Schemata genauso vorgeht. Manche Quellen fordern von ihren Varietäten zusätzlich noch, daß sie irreduzibel sein sollen.

7.6.4.4. Wenn wir im Folgenden wie im Vorhergehenden von einer Varietät reden, so denken wir uns stets einen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper $k = \bar{k}$ fest gewählt, über dem sie definiert ist. Analoga über nicht algebraisch abgeschlossenen Körpern werden wir erst im Rahmen der allgemeinen Theorie der Schemata behandeln und nicht als Varietäten ansprechen. Der Leser sei gewarnt, daß man eine andere und recht nutzlose Kategorie erhält, wenn man im Fall eines nicht algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers die vohergehende Definition 7.6.4.2 wortwörtlich übernimmt.

Vorschau 7.6.4.5. Wir zeigen in 7.6.11.4, daß es in der Kategorie der Varietäten alle endlichen Produkte gibt und daß Produkte affiner Varietäten wieder affin sind. Bis dahin betrachten wir nur Produkte affiner Varietäten und verwenden nur deren universelle Eigenschaft in Bezug auf affine Varietäten.

Lemma 7.6.4.6. *Jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge einer Varietät ist mit der induzierten Struktur wieder eine Varietät.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus den Erkenntnissen **??** und 7.6.3.12, daß in einer affinen Varietät jede abgeschlossene Teilmenge und jede Nichtnullstellenmenge einer regulären Funktion wieder eine affine Varietät ist. Es gilt nur zu beachten, daß jede offene Teilmenge einer affinen Varietät X bereits eine endliche Überdeckungen durch Nichtnullstellenmengen X_f besitzt. □

Definition 7.6.4.7. Eine **quasiaffine k-Varietät** ist ein k-geringter Raum, der isomorph ist zu einer offenen Teilmenge einer affinen k-Varietät.

7.6.4.8. Eine Teilmenge eines topologischen Raums, die ein Schnitt einer offenen mit einer abgeschlossenen Menge ist, heißt **lokal abgeschlossen**. Jede lokal abgeschlossene Teilmenge einer Varietät ist mit ihrer induzierten Struktur eines k-geringten Raums selbst wieder eine Varietät. Wir nennen die lokal abgeschlossenen Teilmengen einer Varietät auch ihre **Untervarietäten** und denken sie uns dabei stets mit der induzierten Struktur versehen. Jede lokal Untervarietät einer quasiaffinen Varietät ist quasiaffin.

7.6.4.9 (**Diskussion der Terminologie**). Unsere Untervarietäten sind kategorische Unterobjekte in der Kategorie der Varietäten, aber die meisten Varietäten besitzen durchaus noch weitere, nicht zu Untervarietäten isomorphe kategorische Unterobjekte. Beispiele liefern unsere bijektiven Morphismen von Varietäten aus 9.1.1.37 oder 7.3.3.21, die keine Isomorphismen sind.

7.6.4.10 (**Eine quasiaffine aber nicht affine Varietät**). Das Komplement $k^2\backslash 0$ des Ursprungs in der Ebene ist keine affine Varietät: In der Tat liefert nach 7.5.9.21 die Restriktion eine Bijektion $\mathcal{O}(k^2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(k^2\backslash 0)$, auf affinen Varietäten ist jedoch $\mathcal{O}$ volltreu. Mithin kann ein Morphismus von affinen Varietäten nur dann einen Isomorphismus auf den globalen regulären Funktionen induzieren, wenn er bereits selbst ein Isomorphismus war.

Vorschau 7.6.4.11. Es gibt durchaus auch offene affine Teilmengen affiner Varietäten, die nicht das Komplement der Nullstellenmenge einer regulären Funktion sind. Die Konstruktion eines Beispiels braucht jedoch mehr Theorie, als sie uns hier zur Verfügung steht: Man betrachte eine elliptische Kurve ohne ihr neutrales Element. Das ist eine affine Varietät. Jeder Punkt dieser affinen Varietät, der die einzige Nullstelle einer regulären Funktion ist, muß dann von endlicher Ordnung sein. Andererseits ist das Komplement in einer elliptischen Kurve von zwei beliebigen Punkten stets affin.

7.6.4.12. Offensichtlich ist jede Varietät ein noetherscher topologischer Raum.

Definition 7.6.4.13. Unter der **Dimension** einer Varietät versteht man die Krull-Dimension des zugrundeliegenden topologischen Raums.

Proposition 7.6.4.14. *Gegeben eine irreduzible Varietät stimmt die Dimension jeder nichtleeren offenen Teilmenge überein mit der Dimension der ganzen Varietät.*

Beweis. In der Tat, jede echt aufsteigende endliche Kette irreduzibler Mengen enthält einen gemeinsamen Punkt und liefert durch Herunterschneiden auf eine affine offene Umgebung dieses Punktes eine echt aufsteigende Kette irreduzibler Mengen dort. Das zeigt, daß die Krulldimension beschränkt ist durch das Maximum der Krulldimensionen der Mengen jeder offenen affinen Überdeckung. Jede nichtleere offene Teilmenge ist aber auch irreduzibel, und jeder der zu unserer Überdeckung gehörigen affinen k-Kringe ist folglich ein Integritätsbereich und damit ein Kettenring. Da schließlich je zwei nichtleere offene Teilmengen nichtleeren Schnitt haben, folgt die Behauptung. □

7.6.4.15. Eine äqui-eindimensionale Varietät heißt eine **Kurve** oder genauer eine **algebraische Kurve**.

Definition 7.6.4.16. Gegeben ein k-geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und ein Punkt $x \in X$ erklären wir den **lokalen Ring**

$$\mathcal{O}_{X,x}$$

von X **bei** x als die Menge aller Funktionskeime in $\mathrm{Ens}(X, k)_x$, die von einer strukturierenden Funktion repräsentiert werden.

7.6.4.17 (**Lokale Ringe im Fall affiner Varietäten**). Im Fall einer affinen Varietät X stimmt der hier definierte Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ offensichtlich überein mit dem in 7.4.4.2 definierten Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ aller Funktionskeime, die einen Repräsentanten der Gestalt (X_g, f) für $g \in \mathcal{O}(X)$ mit $x \in X_g$ und $f \in \mathcal{O}(X_g)$ haben.

Ergänzung 7.6.4.18. Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ eine k-Varietät und liefern die Auswertungen an Punkten eine Bijektion $X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ring}^k(\mathcal{O}_X(X), k)$, so wüßte ich gerne, ob X affin sein muß. Nimmt man zusätzlich an, daß $\mathcal{O}_X(X)$ ringendlich ist über k und $X \to \mathrm{Max}\,\mathcal{O}_X(X)$ ein Homöomorphismus, so kann ich das wohl zeigen.

Ergänzung 7.6.4.19. Ist der k-Kring der regulären Funktionen auf einer Varietät stets wieder ringendlich über k? Ich denke schon, kenne aber kein ganz einfaches Argument.

Übungen

Übung 7.6.4.20 (**Morphismen in affine Varietäten**). Jede k-Varietät ist ein gesättigter k-geringter Raum. Gegeben eine Varietät X und eine affine Varietät Y liefert der Rückzug eine Bijektion $\mathrm{Var}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kring}^k(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X))$. Hinweis: Universelle Eigenschaft der gesättigten initialen Struktur 7.6.3.5.

Übung 7.6.4.21. Jeder Punkt einer Varietät liegt in einer dichten offenen affinen Teilmenge.

Übung 7.6.4.22. Gegeben eine Varietät X und $f \in \mathcal{O}_X(X)$ regulär setzen wir

$$X_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

Man zeige, daß es für alle $h \in \mathcal{O}_X(X_f)$ ein $n \gg 0$ gibt derart, daß die Fortsetzung durch Null von $f^n h$ eine reguläre Funktion auf ganz X ist. Man folgere, daß die Restriktion $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X_f)$ einen Isomorphismus $\mathcal{O}_X(X)_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(X_f)$ zwischen der Lokalisierung von $\mathcal{O}_X(X)$ an f und dem Ring der regulären Funktionen auf X_f induziert.

Übung 7.6.4.23 (**Affine offene Teilmengen affiner Varietäten**). Gegeben eine Varietät X, offene affine Teilmengen $U, V \Subset X$ und ein Punkt $x \in U \cap V$ zeige man: Es gibt stets $s \in \mathcal{O}(U)$ und $t \in \mathcal{O}(V)$ mit $x \in U_s$ und $U_s = V_t$. In dieser Situation ist natürlich auch $U_s = V_t$ affin. Hinweis: 7.6.4.22.

Übung 7.6.4.24. Man zeige, daß für jede affine Varietät Z der von einer Verklebung $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ affiner Varietäten im Sinne von 7.6.3.13 induzierte Morphismus $X \times Z \to Y \times Z$ abgeschlossen, ja selbst wieder final ist. Man gebe ein Beispiel an, in dem diese Verklebung kein offener Morphismus ist.

Übung 7.6.4.25 (**Verkleben von Punkten in allgemeinen Varietäten**). Seien X eine k-Varietät und $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung von X auf eine Menge

Y. Sind alle Fasern von φ endlich und fast alle Fasern einelementig, und liegen die Urbilder aller Punkte mit nicht einelementiger Faser in einer gemeinsamen offenen affinen Teilmenge von X, so ist Y mit seiner finalen Struktur eines k-geringten Raums auch eine k-Varietät. Hinweis: 7.6.3.13. In 7.6.12.18 zeigen wir im Übrigen, daß diese Konstruktion auch die „Separabilität" erhält.

Übung 7.6.4.26. Eine auf einer offenen Teilmenge einer irreduziblen affinen Varietät definierte reguläre Funktion f, die lokal als Quotient $f = g/h$ geschrieben werden kann, stimmt bereits auf der der Differenz ihres Definitionsbereichs und der Nullstellenmenge von h mit g/h überein.

Übung 7.6.4.27 (**Frobenius-Twist**). Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper positiver Charakteristik. $\operatorname{char} k = p > 0$ und sei $X = (X, \mathcal{O})$ eine Varietät über k. So ist auch $X^{[1]} := (X, \mathcal{O}^{[1]})$ mit

$$\mathcal{O}^{[1]}(U) := \{f^p \mid f \in \mathcal{O}(U)\} \quad \forall U \Subset X$$

eine Varietät über k. Sie heißt der **Frobenius-Twist** unserer ursprünglichen Varietät. Weiter ist die Identität auf X ein Morphismus $X \to X^{[1]}$ von Varietäten über k, der **Frobenius-Morphismus**, und jeder Morphismus $X \to Y$ induziert einen Morphismus $X^{[1]} \to Y^{[1]}$. Schließlich zeige man, daß der Funktor $X \mapsto X^{[1]}$ eine Äquivalenz von Kategorien ist. Hinweis: 7.3.3.21. Vielleicht noch natürlicher wird diese Konstruktion in der Sprache der Schemata, vergleiche **??**.

Vorschau 7.6.4.28. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper von positiver Charakteristik. Eine k-Varietät X heißt **Frobenius-spaltend**, wenn $\mathcal{O}^{[1]}$ ein direkter Summand des $\mathcal{O}^{[1]}$-Moduls $\mathcal{O}$ ist.

Übung 7.6.4.29 (**Normale Varietäten**). Eine Varietät heißt **normal**, wenn für jeden Punkt $x \in X$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich ist. Man zeige, daß eine affine Varietät genau dann normal ist, wenn ihr Ring von regulären Funktionen normal ist. Man zeige, daß jede normale Varietät die disjunkte Vereinigung ihrer irreduziblen Komponenten ist.

Übung 7.6.4.30 (**Reguläre Funktionskeime längs abgeschlossener Teilmengen**). Gegeben ein noetherscher k-geringter Raum X mit einer abgeschlossenen Teilmenge $Y \not\trianglelefteq X$ erklären wir den Ring

$$\mathcal{O}_{X,Y} \subset \operatorname{Ens}(X, k)_Y$$

aller **strukturierenden Funktionskeime längs** Y als den Ring aller Funktionskeime nach 7.4.4.5 mit mindestens einer strukturierenden Funktion unter seinen Repräsentanten. Im Fall einer einpunktigen Teilmenge ist das unser lokaler Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ aus 7.6.4.16. Ist $U \Subset X$ offen mit $U \cap Y$ dicht in Y, so induziert die Restriktion einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_{X,Y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U,Y\cap U}$$

Gegeben $Z \subsetneq Y \subsetneq X$ abgeschlossene Teilmengen derart, daß Z jede irreduzible Komponente von Y trifft, induziert weiter das Generisieren 7.4.4.11 einen Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{X,Z} \to \mathcal{O}_{X,Y}$$

auf den regulären Funktionskeimen. Ist X eine affine Varietät, so spezialisiert das zu den bereits in 7.4.4.6 erklärten regulären Funktionskeimen. Für eine beliebige Varietät X übernehmen wir diese Terminologie und nennen die Elemente von $\mathcal{O}_{X,Y}$ **reguläre Funktionskeime längs** Y und setzen $\mathcal{M}(X) := \mathcal{O}_{X,X}$ und nennen diese „dicht definierten regulären Funktionen“ die **rationalen Funktionen auf** X. In der Literatur ist in diesem Fall statt $\mathcal{M}(X)$ die Notation $k(X)$ üblich. Ist X eine irreduzible k-Varietät, so bilden die rationalen Funktionen auf X einen Körper vom Transzendenzgrad

$$\operatorname{trgr}_k \mathcal{M}(X) = \operatorname{kdim} X$$

Übung 7.6.4.31. Sei X eine Varietät. Offensichtlich stimmen je zwei Repräsentanten (U, f_U) und (V, f_V) einer rationalen Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ bereits auf $U \cap V$ überein. Jede rationale Funktion hat mithin einen eindeutig bestimmten **größten Repräsentanten**, der eben auf der Vereinigung der Definitionsbereiche aller Repräsentanten definiert ist. Der Definitionsbereich des größten Repräsentanten heißt der **Definitionsbereich unserer rationalen Funktion**.

Übung 7.6.4.32 (**Definitionsbereiche und lokale Ringe**). Ist X eine irreduzible Varietät, so liefert das Generisieren 7.4.4.11 für jeden Punkt $x \in X$ eine natürliche Injektion $\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$, die wir von nun an in Notation und Sprache oft als Einbettung einer Teilmenge betrachten werden. Man zeige: Ein Punkt $x \in X$ gehört genau dann zum Definitionsbereich einer rationalen Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$, wenn f im lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x} \subset \mathcal{M}(X)$ liegt.

7.6.5 Projektive Räume

7.6.5.1. Ich erinnere aus 5.1.4.1, daß wir gegeben ein k-Vektorraum W die Menge aller Geraden in W durch den Ursprung mit

$$\mathbb{P}W = \mathbb{P}_k W := \{V \subset W \mid V \text{ ist ein eindimensionaler Untervektorraum}\}$$

bezeichnen und diese Menge den **projektiven Raum zu** W nennen. Die **kanonische Projektion** $\pi : W \backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}W$, $w \mapsto \langle w \rangle$, die jedem von Null verschiedenen Vektor sein Vektorraumerzeugnis zuordnet, ist eine Surjektion, deren Fasern gerade die Bahnen von $k^\times$ sind.

7.6.5.2 (**Projektive Räume als k-geringte Räume**). $(k = \bar{k})$. Wir erklären für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum W auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}W$

die Struktur eines k-geringten Raums, indem wir von der natürlichen Struktur 9.1.1.10 auf W als naive affine Varietät ausgehen, sie wie in 7.6.2.6 zu einer affinen Varietät im Sinne spezieller k-geringter Räume machen, darin das Ursprungskomplement $W\backslash 0$ mit der induzierten Struktur nehmen und schließlich $\mathbb{P}W$ mit der finalen Struktur zur kanonischen Projektion

$$\pi : W\backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}W$$

versehen. Damit ist eine Teilmenge $U \subset \mathbb{P}W$ per definitionem offen, wenn ihr Urbild unter der kanonischen Projektion offen ist, und eine Funktion auf $U \Subset \mathbb{P}W$ ist regulär, wenn die zurückgezogene Funktion auf $\pi^{-1}(U) \Subset W\backslash 0$ regulär ist.

7.6.5.3. $(k = \bar{k})$. Speziell schreibt man $\mathbb{P}^n k := \mathbb{P}(k^{n+1})$. Elemente darin notieren wir abkürzend $\langle x_0, \ldots, x_n\rangle := \langle (x_0, \ldots, x_n)\rangle$. Genau dann ist per definitionem $U \subset \mathbb{P}^n k$ offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subset k^{n+1}\backslash 0$ offen ist, und eine Funktion $f : U \to k$ ist regulär genau dann, wenn die zurückgezogene Funktion $f \circ \pi$ auf $\pi^{-1}(U)$ regulär ist, als da heißt, lokal als Quotient von Polynomfunktionen geschrieben werden kann.

Lemma 7.6.5.4 (Projektive Räume sind Varietäten). $(k = \bar{k})$. *Gegeben ein endlichdimensionaler k-Vektorraum W ist der zugehörige projektive Raum $\mathbb{P}W$ mit seiner eben erklärten Struktur als k-geringter Raum eine Varietät über k.*

Vorschau 7.6.5.5. Die „Separiertheit“ projektiver Varietäten diskutieren wir erst in 7.6.12.6. In unserer Terminologie wird diese Eigenschaft auch von einer Varietät nicht gefordert.

7.6.5.6 (**Lokale Trivialität der Projektion**). Bezeichne $\pi : W\backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}W$ die Projektion. Im anschließenden Beweis zeigen wir sogar, daß jeder Punkt von $\mathbb{P}W$ eine offene Umgebung $U \Subset \mathbb{P}W$ besitzt, für die die Projektion $\pi^{-1}(U) \to U$ einen Schnitt $\sigma : U \to \pi^{-1}(U)$ besitzt derart, daß die Abbildung $(\lambda, x) \mapsto \lambda\sigma(x)$ ein Isomorphismus $k^\times \times U \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(U)$ ist.

Beweis. Wir zeigen, daß für jede affine Hyperebene $H \subset W$, die den Ursprung vermeidet, die Injektion $i_H : H \hookrightarrow \mathbb{P}W$ gegeben durch $v \mapsto \langle v\rangle$ eine offene Einbettung ist. Ist in der Tat $\vec{H} \subset W$ der Untervektorraum der Richtungsvektoren unserer affinen Hyperebene H, so ist $\pi^{-1}(\pi(H)) = W\backslash\vec{H}$ offen in $W\backslash 0$. Mithin hat unsere Injektion $i_H : H \hookrightarrow \mathbb{P}W$ offenes Bild. Nun betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & W\backslash\vec{H} \arrow[dl] \arrow[dr, "\pi"] & \\ H \arrow[rr] & & i_H(H) \end{tikzcd}$$

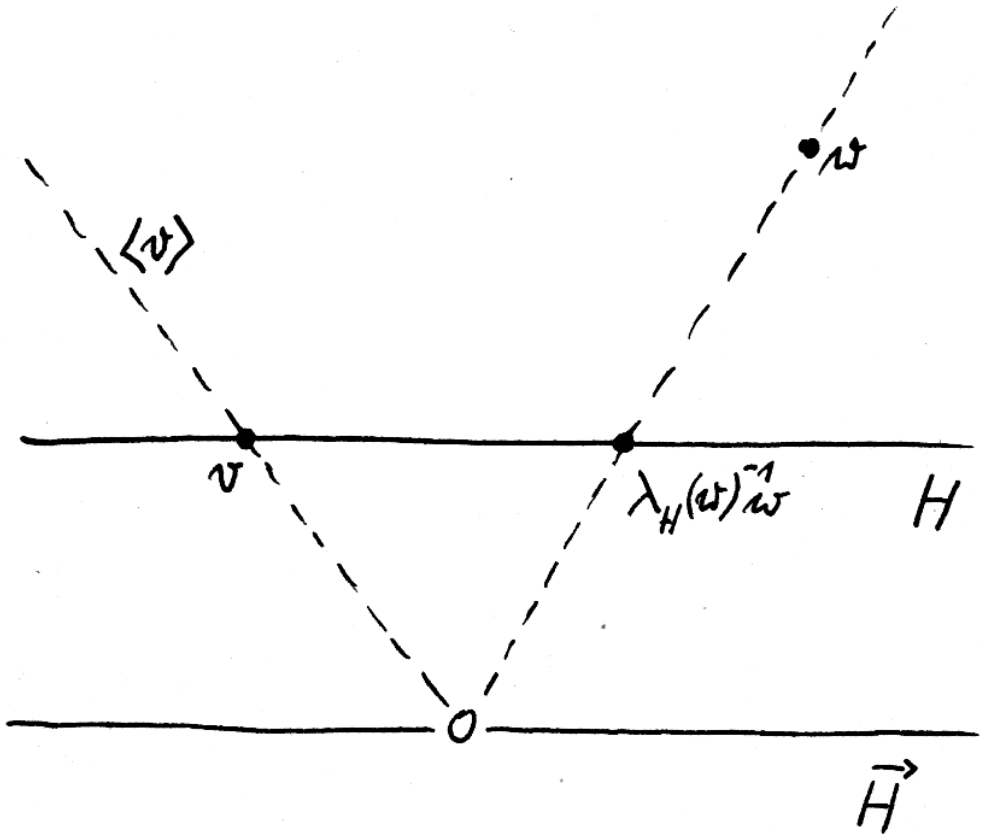


Illustration zum Beweis von 7.6.5.4

Der linke schräge Pfeil ordne jedem Punkt den Schnittpunkt mit H der durch ihn verlaufenden Ursprungsgeraden zu. Er ist ein Morphismus, denn ist in Formeln $\lambda_H : W \to k$ die Linearform, deren Niveaufläche zum Wert Eins gerade H ist, so wird er gegeben durch die Formel $w \mapsto \lambda_H(w)^{-1}w$. Er ist nach **??** sogar final, da er einen Schnitt besitzt, eben die Einbettung $H \hookrightarrow W \backslash \vec{H}$. Der rechte schräge Pfeil ist final, da diese Eigenschaft nach 7.6.2.30 lokal ist in der Basis. Zusammen folgt, daß die horizontale Bijektion ein Isomorphismus $H \xrightarrow{\sim} i_H(H)$ von k-geringten Räumen sein muß. Damit ist $\mathbb{P}W$ in der Tat eine Varietät. □

7.6.5.7 (**Die Standardkarten von** $\mathbb{P}^n k$). $(k = \bar{k})$. Speziell zeigt der vorhergehende Beweis, daß wir eine offene Einbettung $i_0 : k^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n k$ erhalten durch die Vorschrift $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \langle 1, x_1, \ldots, x_n \rangle$. In derselben Weise erhalten wir offene Einbettungen $i_\nu : k^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n k$ für $0 \leq \nu \leq n$, deren Bilder $\mathbb{P}^n k$ überdecken.

7.6.5.8 (**Projektive Vervollständigungen als Varietäten**). Gegeben ein endlichdimensionaler affiner Raum E über einem Körper k erinnern wir seine projektive Vervollständigung $\mathbb{V}E := E \sqcup \mathbb{P}\vec{E}$ aus 5.1.4.3. Weiter erinnern wir, wie wir für jede Einbettung $E \hookrightarrow V$ als den Ursprung vermeidende Hyperebene in einen Vektorraum eine Bijektion $\mathbb{V}E \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}V$ konstruiert hatten. Jede dieser Bijektionen versieht $\mathbb{V}E$ im Fall $k = \bar{k}$ mit der Struktur einer Varietät. Der Leser mag zur Übung prüfen, daß diese Struktur nicht von der gewählten Einbettung als Hyperebene abhängt und daß $E \hookrightarrow \mathbb{V}E$ eine offene Einbettung von Varietäten alias k-geringten Räumen ist sowie $\mathbb{P}\vec{E} \hookrightarrow \mathbb{V}E$ eine abgeschlossene Einbettung.

Proposition 7.6.5.9 (**Globale Funktionen auf projektiven Räumen**). $(k = \bar{k})$. *Die einzigen globalen regulären Funktionen auf unseren projektiven Räumen* $\mathbb{P}^n k$ *sind die konstanten Funktionen, in Formeln gilt für alle* $n \geq 0$ *also*

$$\mathcal{O}(\mathbb{P}^n k) = k$$

Beweis. Im Fall $n = 0$ ist das eh klar. Für jedes n kann $\mathcal{O}(\mathbb{P}^n k)$ identifiziert werden mit der Menge aller der regulären Funktionen f auf $k^{n+1} \backslash 0$, die auf allen Ursprungsgeraden konstant sind. Da sich aber nach 7.5.9.21 unser f für $n \geq 1$ zu einer regulären Funktion auf ganz k^{n+1} fortsetzen läßt, die dann natürlich auch auf allen Ursprungsgeraden konstant ist, muß unsere Funktion f konstant denselben Wert annehmen wie ihre reguläre Fortsetzung auf ganz k^{n+1} am Ursprung. □

7.6.5.10 (**Explizites Prüfen im eindimensionalen Fall**). Für $\mathbb{P}^1 k = k \sqcup \{\infty\}$ kann man das auch einsehen, indem man ihn als Verklebung von zwei Kopien von k längs $k^\times$ mit der Verklebungsidentifikation $z \mapsto z^{-1}$ versteht. Genauer haben wir in diesem Fall $i_0(k) \cap i_1(k) = i_0(k^\times) = i_1(k^\times)$ und $i_0(z) = i_1(z^{-1})$ für alle $z \in k^\times$. Eine reguläre Funktion $f : \mathbb{P}^1 k \to k$ schränkt unter i_0 ein zu einem Polynom $f \circ i_0 :\in \mathcal{O}(k)$ mit der Eigenschaft, daß die Funktion $f \circ i_0 \circ \mathrm{inv} : k^\times \to k$

für $\mathrm{inv} : k^\times \to k$, $z \mapsto z^{-1}$ auch die Restriktion eines Polynoms ist, eben des Polynoms $f \circ i_1$. So folgt auch leicht, daß f konstant sein muß.

Definition 7.6.5.11. Eine **abstrakte projektive k-Varietät** oder kurz **projektive Varietät** ist ein k-geringter Raum, der isomorph ist zu einer abgeschlossenen Teilmenge eines $\mathbb{P}^n k$. Eine **quasiprojektive k-Varietät** ist ein k-geringter Raum, der isomorph ist zu einer offenen Teilmenge einer projektiven k-Varietät.

7.6.5.12. Da es eine offene Einbettung $k^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n k$ gibt, ist jede quasiaffine Varietät auch quasiprojektiv.

7.6.5.13. Unter einer **in $\mathbb{P}^n k$ eingebetteten projektiven k-Varietät** oder kurz einer **eingebetteten projektiven Varietät** verstehen wir eine abgeschlossene Teilmenge eines $\mathbb{P}^n k$.

7.6.5.14 (**Diskussion des Begriffs einer projektiven Varietät**). Ich meine in diesem Text mit einer projektiven Varietät stets eine abstrakte projektive Varietät. In der Literatur werden jedoch sowohl abstrakte wie eingebettete projektive Varietäten oft abkürzend als projektive Varietäten bezeichnet. Der Unterschied dieser Begriffsbildungen ist jedoch erheblich, wie Sie noch zur Genüge feststellen werden: Ein- und dieselbe abstrakte projektive Varietät kann nämlich durchaus auf sehr verschiedene Weisen in vorgegebene projektive Räume eingebettet werden. Manche Autoren fordern zusätzlich von einer Varietät, daß sie irreduzibel sein soll. Ich schließe mich dieser Konvention nicht an.

7.6.5.15. Unter einer **projektiven Kurve** verstehen wir eine äqui-eindimensionale projektive Varietät. Unter einer **ebenen projektiven Kurve** verstehen wir eine projektive Kurve, die in eine projektive Ebene eingebettet ist. Unter einer **projektiven Ebene** verstehen wir den $\mathbb{P}^2 k$ oder die dazu isomorphen Varietäten $\mathbb{V}(k^2)$ oder koordinatenfrei $\mathbb{V}(E)$ für einen zweidimensionalen affinen Raum E.

7.6.5.16 (**Kegelkonstruktion**). Sei k ein Körper. Um die Topologie des $\mathbb{P}^n k$ zu untersuchen, gehen wir aus von der Projektion $\pi : (k^{n+1} \backslash 0) \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n k$. Natürlich liefert die Abbildungsvorschrift $W \mapsto \mathrm{C}(W) := \pi^{-1}(W) \sqcup \{0\}$ eine Bijektion

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Teilmengen} \\ \text{von } \mathbb{P}^n k \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{matrix} k^\times\text{-stabile Teilmengen von } k^{n+1}, \\ \text{die den Ursprung enthalten} \end{matrix} \right\}$$

Hier heißt $\mathrm{C}(W)$ auch der **Kegel über** W mit dem Buchstaben C für englisch **cone**. Genau dann ist eine Teilmenge $W \subset \mathbb{P}^n k$ abgeschlossen, wenn ihr Kegel $\mathrm{C}(W) \subset k^{n+1}$ eine abgeschlossene Teilmenge von k^{n+1} ist. Insbesondere ist der Kegel über dem Abschluß der Abschluß des Kegels $\mathrm{C}(\bar{W}) = \overline{\mathrm{C}(W)}$, denn der Abschluß einer $k^\times$-stabilen Teilmenge muß auch selbst wieder $k^\times$-stabil sein, und damit ist die kleinste $k^\times$-stabile abgeschlossene Teilmenge über $\mathrm{C}(W)$ auch die kleinste abgeschlossene Teilmenge über $\mathrm{C}(W)$.

Lemma 7.6.5.17. *Sei k ein unendlicher Körper. Genau dann ist eine Teilmenge $W \subset \mathbb{P}^n k$ irreduzibel, wenn ihr Kegel $\mathrm{C}(W)$ irreduzibel ist und nicht nur aus dem Ursprung besteht.*

Beweis. Um das einzusehen, dürfen wir uns auf abgeschlossene Teilmengen $W \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ \mathbb{P}^n k$ beschränken. Ist $W = Y \cup Z$ eine Zerlegung in echte abgeschlossene Teilmengen, so auch $\mathrm{C}(W) = \mathrm{C}(Y) \cup \mathrm{C}(Z)$. Ist W leer, so besteht $\mathrm{C}(W)$ nur aus dem Ursprung. Ist also W nicht irreduzibel, so ist auch $\mathrm{C}(W)$ nicht irreduzibel oder besteht nur aus dem Urspung. Sei umgekehrt $\mathrm{C}(W) = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Die Abbildung $k^\times \times \mathrm{C}(W) \to \mathrm{C}(W)$ ist ein Morphismus von Varietäten und die $k^\times \times Y_i$ sind irreduzibel nach 7.4.2.25. Das zeigt, daß ihre Bilder jeweils ganz in einer irreduziblen Komponente von $\mathrm{C}(W)$ landen müssen, und man sieht leicht, daß dafür nur die Komponente Y_i in Frage kommt. Also sind alle Komponenten Y_i von $\mathrm{C}(W)$ auch $k^\times$-stabil. Besteht also $\mathrm{C}(W)$ nur aus dem Urspung oder ist nicht irreduzibel, so ist W auch nicht irreduzibel. □

Satz 7.6.5.18 (Erzwungene Schnitte in projektiven Räumen). $(k = \bar{k})$. *Sind $X, Y \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ \mathbb{P}^n k$ nichtleere abgeschlossene Teilmengen und ist die Summe ihrer Dimensionen mindestens n, so haben sie nichtleeren Schnitt, in Formeln*

$$\operatorname{kdim} X + \operatorname{kdim} Y \geq n \quad \Rightarrow \quad X \cap Y \neq \emptyset$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir X und Y irreduzibel annehmen. Durch Übergang zu den Kegeln erhalten wir nach Übung 7.6.5.23 irreduzible abgeschlossene Teilmengen $\mathrm{C}(X), \mathrm{C}(Y) \subset k^{n+1}$ von jeweils um Eins größerer Dimension. Da der Ursprung in ihrem Schnitt liegt, gilt $\mathrm{C}(X) \cap \mathrm{C}(Y) \neq \emptyset$. Nach 7.5.9.15 hat aber nun jede Komponente des Schnitts dieser Kegel mindestens die Dimension Eins und muß folglich auch Punkte außerhalb des Ursprungs und mithin eine ganze Gerade durch den Ursprung enthalten. Das zeigt hinwiederum $X \cap Y \neq \emptyset$. □

Satz 7.6.5.19 (Kodimension von Schnittmengen). $(k = \bar{k})$. *Gegeben irreduzible abgeschlossene Teilmengen $X, Y \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ \mathbb{P}^n k$ gilt für jede irreduzible Komponente Z ihres Schnitts $X \cap Y$ die Abschätzung*

$$(n - \operatorname{kdim} Z) \leq (n - \operatorname{kdim} X) + (n - \operatorname{kdim} Y)$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der entsprechenden Aussage 7.5.9.15 für affine Varietäten. □

Übungen

Übung 7.6.5.20. Man zeige, daß es keinen Morphismus von Varietäten $\mathbb{P}^1 k \to \mathbb{P}^1 k$ ohne Fixpunkt gibt. Salopp gesprochen ist es also nicht möglich, „in algebraischer Weise jeder Ursprungsgerade in k^2 ein Komplement zuzuordnen“. In

stetiger Weise gelingt das etwa im Komplexen durchaus: Es reicht, ein Skalarprodukt auszuzeichnen und jeder Gerade ihr orthogonales Komplement zuzuordnen.

Ergänzende Übung 7.6.5.21. Gegeben ein endlichdimensionaler k-Vektorraum V und seine d-te symmetrische Potenz $\mathrm{S}^d V$ induziert der Morphismus von Varietäten $V \to \mathrm{S}^d V$, $v \mapsto v^d$ einen Morphismus von Varietäten

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}V & \hookrightarrow & \mathbb{P}(\mathrm{S}^d V) \\ \langle v \rangle & \mapsto & \langle v^d \rangle \end{array}$$

Man zeige, daß dieser Morphismus für $d \geq 1$ eine Einbettung ist. Sie heißt die **d-te Veronese-Einbettung** unseres projektiven Raums $\mathbb{P}V$.

Übung 7.6.5.22 (**Automorphismen der projektiven Gerade**). $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß jeder Isomorphismus $\mathbb{P}^1 k \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 k$ von der Restriktion eines Vektorraumautomorphismus von k^2 auf $k^2 \backslash 0$ induziert wird und daß wir so einen Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{GL}(2;k)/k^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Var}^\times(\mathbb{P}^1 k)$$

des besagten Quotienten mit der Automorphismengruppe der projektiven Gerade erhalten. Hinweis: Man erinnere zunächst die Automorphismen der Gerade k aus 9.1.1.36.

Übung 7.6.5.23. Gegeben eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge $W \not\subset \mathbb{P}^n k$ zeige man für die Dimension ihres Kegels die Formel $\mathrm{kdim}\, \mathrm{C}(W) = \mathrm{kdim}\, W + 1$. Hinweis: Lokale Trivialität der Projektion 7.6.5.6.

7.6.6 Graduierte Gruppen und Ringe

Definition 7.6.6.1. Eine **Graduierung** auf einer abelschen Gruppe V ist eine Familie von Untergruppen V^r für $r \in \mathbb{Z}$ derart, daß gilt $V = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} V^r$. Die Elemente von V^r heißen dann **homogen vom Grad** r. Jedes Element $v \in V$ läßt sich demnach eindeutig darstellen als Summe $v = \sum v_r$ mit $v_r \in V^r$, wobei fast alle v_r verschwinden. Das besagte v_r heißt dann die **homogene Komponente von** v **vom Grad** r.

Ergänzung 7.6.6.2. Ist etwas allgemeiner Γ eine Menge, so versteht man unter einer **Γ-Graduierung** auf einer abelschen Gruppe V eine Familie von Untergruppen V^γ für $\gamma \in \Gamma$ derart, daß gilt $V = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} V^\gamma$. Eine Graduierung im obigen Sinne ist also genauer eine **$\mathbb{Z}$-Graduierung**.

7.6.6.3. Eine multilineare Abbildung $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_r \to V$ von graduierten abelschen Gruppen heißt **graduierungsverträglich**, wenn gilt

$$\varphi\big(V_1^{a(1)} \times \ldots \times V_r^{a(r)}\big) \subset V^{a(1)+\ldots+a(r)}$$

für alle $a(1), \ldots, a(r) \in \mathbb{Z}$. Die nulllinearen Abbildung nach V sind speziell Abbildungen $\varphi : \{*\} \to V$ der einelementigen Menge nach V mit $\varphi(*) \in V^0$ und können durch $\varphi \mapsto \varphi(*)$ mit den Elementen von V^0 identifiziert werden. Allgemeiner bleibt der Begriff graduierungsverträglicher multilinearer Abbildungen sinnvoll für abelsche Gruppen mit einer Graduierung durch eine beliebiges abelsches Monoid Γ. Im Fall eines nichtabelschen Monoids wird dieser Begriff abhängig von der Reihenfolge der Eingänge in unserer multilinearen Abbildung und wir verfolgen das hier nicht weiter.

Definition 7.6.6.4. Eine **Graduierung** eines Rings A ist eine Graduierung der additiven Gruppe A derart, daß gilt $A^r A^s \subset A^{r+s}$ für alle r, s und $1 \in A^0$. Ein **graduierter Modul** über einem graduierten Ring A ist ein A-Modul M mit einer Graduierung $M = \bigoplus M^i$ derart, daß gilt $A^r M^s \subset M^{r+s}$ für alle r, s.

Ergänzung 7.6.6.5. Etwas allgemeiner erklärt man ähnlich für jedes abelsche Monoid Γ den Begriff einer Γ-Graduierung auf einem Ring und eines Γ-graduierten Moduls über einem Γ-graduierten Ring. Etwas formaler ist die Forderung im Fall eines Rings, daß die Multiplikation $A \times A \to A$ eine graduierungsverträgliche bilineare Abbildung ist und das Einselement einer graduierungsverträglichen nulllinearen Abbildung entspricht.

7.6.6.6 (**Diskussion der Homogenität der Eins**). Im Fall eines $\mathbb{Z}$-graduierten Rings kann man aus den anderen Eigenschaften bereits herleiten, daß das Eins-Element notwendig homogenen sein muß vom Grad Null, in Formeln $1 \in A^0$. Um das zu sehen, berechne man das Produkt der homogenen Komponenten von 1 mit beliebigen homogenen Elementen des Rings. Im Fall allgemeinerer Γ-graduierter Ringe geht das jedoch nicht mehr. Es ist dehalb unnatürlich, diese Bedingung aus der Definition wegzulassen.

7.6.6.7. Für eine Untergruppe $U \subset V$ beziehungsweise einen Quotienten V/U einer graduierten abelschen Gruppe V bilden die Schnitte $U^r = V^r \cap U$ beziehungsweise die Bilder der V^r in V/U im allgemeinen keine Graduierung von U beziehungsweise von V/U. Das gilt nur, wenn mit jedem $v \in U$ auch alle homogenen Komponenten von v zu U gehören, wenn also für die $U^r = U \cap V^r$ gilt $U = \bigoplus_r U^r$. Eine Untergruppe einer graduierten abelschen Gruppe mit dieser Eigenschaft nennt man eine **homogene Untergruppe**, und für den Quotienten einer graduierten abelschen Gruppe nach einer homogenen Untergruppe bilden die Bilder der V^r in der Tat auch eine Graduierung des Quotienten V/U und wir haben dann $(V/U)^r = V^r/U^r$.

7.6.6.8. Jeder Quotient A/I eines graduierten Rings A nach einem homogenen Ideal I ist mit der natürlichen Graduierung wieder ein graduierter Ring.

7.6.6.9. Analog definiert man **graduierte Vektorräume** und **graduierte Algebren**.

Beispiel 7.6.6.10. Gegeben ein Körper k oder auch ein beliebiger Ring besitzt der Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ genau eine Graduierung derart, daß die homogenen Elemente vom Grad r eben die homogenen Polynome vom Grad r aus 6.2.9.9 sind. Diese Graduierung nennen wir die **Standardgraduierung** auf unserem Polynomring. Etwas allgemeiner besitzt er auch für beliebige $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{Z}$ genau eine Graduierung derart, daß T_i jeweils homogen ist vom Grad d_i.

Ergänzung 7.6.6.11. Gegeben ein Vektorraum V besitzen die Tensoralgebra $\mathrm{T}V$ nach 4.7.9.7, die Graßmann-Algebra $\bigwedge V$ nach 4.6.5.4 und die symmetrische Algebra $\mathrm{S}V$ nach 7.3.5.1 jeweils eine natürliche Graduierung durch die Teilräume, die wir im jeweiligen Kontext $\mathrm{T}^r V$, $\bigwedge^r V$ und $\mathrm{S}^r V$ notiert hatten.

Ergänzung 7.6.6.12. Gegeben ein graduierter Ring $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ mag es naheliegend scheinen, einen weiteren graduierten Ring einzuführen als die Gruppe A mit der Multiplikation $a * b = (-1)^{|a||b|} ab$ für homogene $a, b \in A$. Das liefert jedoch nichts Neues, genauer gilt mit der Notation $[|a|/2]$ für die größte ganze Zahl kleinergleich $|a|/2$ für den Gruppenisomorphismus $\varphi : A \xrightarrow{\sim} A$ gegeben durch $\varphi(a) = (-1)^{[|a|/2]} a$ für beliebige homogene $a \in A$ die Relation $\varphi(ab) = \varphi(a) * \varphi(b)$. Ich kenne für die dieser Erkenntnis zugrundeliegende mit beliebigen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ gültige Kongruenz

$$[(\alpha + \beta)/2] \equiv \alpha\beta + [\alpha/2] + [\beta/2] \pmod 2$$

keinen besseren Beweis als den Vergleich der beiden Verknüpfungstabellen für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Übungen

Übung 7.6.6.13 (**Radikale homogener Ideale**). Gegeben ein homogenes Ideal in einem graduierten Kring ist auch sein Radikal wieder homogen. Hinweis: Man zeige, daß für $x_n + x_{n+1} + \ldots + x_m$ aus dem Radikal mit x_i homogen vom Grad i auch x_n zu fraglichem Radikal gehört.

Ergänzende Übung 7.6.6.14. Man zeige, daß es auf jedem Schiefkörper nur eine einzige Graduierung gibt, die ihn zu einem graduierten Ring macht.

Übung 7.6.6.15 (**Charakterisierung homogener Integritätsringe**). Ein graduierter Ring ist ein Integritätsring genau dann, wenn er nicht Null ist und wenn für je zwei homogene von Null verschiedene Elemente auch ihr Produkt von Null verschieden ist. Ein homogenes Ideal in einem graduierten Ring ist vollprim genau dann, wenn es nicht der ganze Ring ist und für je zwei homogene Elemente außerhalb unseres homogenen Ideals auch ihr Produkt außerhalb unseres homogenen Ideals liegt.

Übung 7.6.6.16. Jeder graduierte noethersche Modul über einem graduierten Kring besitzt eine endliche Filtrierung durch homogene Untermoduln derart, daß alle Subquotienten isomorph sind zu Quotienten unseres Krings nach homogenen Primidealen. Hinweis: 7.4.2.27 und 7.6.6.15.

Übung 7.6.6.17 (**Graduierung und Lokalisierung**). Gegeben ein graduierter Kring A und eine Teilmenge $S \subset A$, die aus homogenen Elementen besteht, sowie ein graduierter A-Modul M gibt es genau eine Graduierung auf dem A-Modul $S^{-1}M$ derart, daß $\mathrm{lok} : M \to S^{-1}M$ die Graduierung erhält. Die von einer graduierungsverträglichen multilinearen Abbildung auf den Lokalisierungen induzierte multilineare Abbildung ist auch wieder graduierungsverträglich. Insbesondere wird $S^{-1}A$ ein graduierter Kring und $S^{-1}M$ ein graduierter A-Modul.

Übung 7.6.6.18 (**Moduln als graduierte Moduln**). Seien A ein Ring und $A[T, T^{-1}]$ der Ring der Laurentpolynome mit Koeffizienten in A und der durch $\mathrm{grad}(T) = 1$ gegebenen $\mathbb{Z}$-Graduierung. Man zeige, daß der Funktor $M \mapsto M^0$ eine Äquivalenz

$$A[T, T^{-1}]\text{-Mod}^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\approx} A\text{-Mod}$$

ist zwischen der Kategorie aller $\mathbb{Z}$-graduierten $A[T, T^{-1}]$-Moduln und der Kategorie aller A-Moduln und daß die Einbettung einen Isomorphismus

$$M^0 \xrightarrow{\sim} M/(T-1)M$$

induziert. Man zeige auch: Im Fall eines kommutativen Rings liefert für jede Teilmenge $S \subset A$ und jeden graduierten $A[T, T^{-1}]$-Modul M der durch die universelle Eigenschaft gegebene Morphismus einen Isomorphismus

$$S^{-1}(M^0) \xrightarrow{\sim} (S^{-1}M)^0$$

Vorschau 7.6.6.19. In einer geometrischen Sprache, die wir später entwickeln, besagt die vorhergehende Übung anschaulich insbesondere, daß wir für jede affine k-Varietät X eine Äquivalenz von Kategorien erhalten zwischen $k^\times$-äquivarianten quasikohärenten Modulgarben auf $k^\times \times X$ und quasikohärenten Modulgarben auf X. Eine analoge Aussage für ein beliebiges affines Schema X ist dann sogar gleichbedeutend zur Hauptaussage unserer Übung im Fall eines beliebigen kommutativen Rings A.

7.6.7 Graduierte Variante des Elementarteilersatzes**

Proposition 7.6.7.1. *Gegeben ein Körper k ist jeder endlich erzeugte graduierte Modul über dem Polynomring $k[t]$ mit seiner Standardgraduierung die direkte Summe von endlich vielen Untermoduln, die jeweils von einem homogenen Element erzeugt werden.*

Beweis. Sei M unser Modul und T der Untermodul seiner Torsionselemente. So ist M/T frei und dann auch graduiert frei und die Surjektion $M \twoheadrightarrow M/T$ besitzt eine graderhaltende Spaltung und liefert einen Isomorphismus von graduierten Moduln $M \cong T \oplus M/T$. Das anschließende Lemma 7.6.7.3 beendet dann den Beweis. □

7.6.7.2. Wir erinnern die Notation, nach der für eine $\mathbb{Z}$-graduierte abelsche Gruppe $M = \bigoplus M^n$ mit $M[j]$ die in der Graduierung verschobene Gruppe bezeichnet wird. Genauer setzen wir $(M[j])^n = M^{n+j}$.

Lemma 7.6.7.3. *Gegeben ein Körper k wird jeder endlichdimensionale graduierte und graduiert unzerlegbare $k[t]$-Modul M von einem homogenen Element erzeugt. In Formeln ausgedrückt gibt es also $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$ und einen graderhaltenden Isomorphismus*

$$M \cong k[t]/\langle t^{i+1}\rangle[j]$$

Beweis. Sei M ein von Null verschiedener endlichdimensionaler $\mathbb{Z}$-graduierter $k[t]$-Modul und $m \in M$ ein Vektor mit kleinstmöglichem Annullator, sagen wir $\mathrm{Ann}(m) = \langle t^{i+1}\rangle$. So ist M sogar ein Modul über $k[t]/\langle t^{i+1}\rangle$ und m besitzt auch eine homogene Komponente, die von t^i nicht annulliert wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir also m homogen annehmen, etwa vom Grad j. Dann liefert m eine graderhaltende Einbettung

$$k[t]/\langle t^{i+1}\rangle[-j] \hookrightarrow M$$

Nehmen wir auf beiden Seiten den k-dualen $k[t]$-Modul, so wir sie zu einer graderhaltenden Surjektion $M^* \twoheadrightarrow k[t]/\langle t^{i+1}\rangle[l]$ für geeignetes l und muß spalten als Surjektion auf einen freien Modul. Folglich spaltete auch schon unsere Einbettung. War M graduiert unzerlegbar, so muß sie folglich ein Isomorphismus gewesen sein. □

Korollar 7.6.7.4 (Graduierte Variante des Elementarteilersatzes). *Seien k ein Körper und M, N endlich erzeugte graduierte graduiert freie $k[t]$-Moduln. So gibt es für jeden graderhaltenden Homomorphismus von $k[t]$-Moduln*

$$f : M \to N$$

Basen von M und N aus homogenen Elementen, bezüglich derer die Matrix unseres Homomorphismus höchstens auf der Diagonalen von Null verschiedene Einträge hat.

Beweis. Das Bild von M ist graduiert frei, folglich spaltet M als $M \cong \ker f \oplus \mathrm{im} f$. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit f injektiv annehmen. Indem wir sonst M durch tM ersetzen, dürfen wir sogar $M \subset tN$ annehmen.

Jetzt finden wir nach 7.6.7.1 homogene Elemente $n_1, \ldots, n_r \in N$ derart, daß die $\bar{n}_i \in N/M$ von Null verschieden sind und N/M die direkte Summe der von den $\bar{n}_i$ erzeugten zyklischen Untermoduln ist. Sind genau die ersten s dieser zyklischen Moduln endlichdimensional von den Dimensionen $d(1), \ldots, d(s)$, so bilden $t^{d(1)+1}n_1, \ldots, t^{d(s)+1}n_s$ die gesuchte Basis von M. □

7.6.8 Rechnen in projektiven Varietäten

7.6.8.1. Um die Zariskitopologie auf $\mathbb{P}^n k$ konkret zu beschreiben, erinnere ich an die Begrifflichkeit graduierter Gruppen und Ringe. Gegeben ein Körper k besitzt der Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ genau eine Graduierung derart, daß die homogenen Elemente vom Grad r eben die homogenen Polynome vom Grad r aus 6.2.9.9 sind.

7.6.8.2. Sei k ein Körper. Gegeben eine Menge $I \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ von homogenen Polynomen ist ihre Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(I) \subset k^{n+1}$ stets stabil unter $k^\times$.

Lemma 7.6.8.3. *Gegeben k ein unendlicher Körper und $C \subset k^{n+1}$ eine $k^\times$-stabile Teilmenge ist das Verschwindungsideal $\mathcal{I}(C) \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ homogen.*

Ergänzung 7.6.8.4. Im Fall eines endlichen Körpers k ist das nicht mehr richtig. Im Fall $|k| = q < \infty$ verschwindet zum Beispiel das Polynom $X^{q-1} - 1$ auf $k^\times$, nicht aber seine homogene Komponente vom Grad Null. Es wird in diesem Fall auch nicht richtiger, wenn man nur $k^\times$-stabile Teilmengen betrachtet, die den Ursprung enthalten: Das Produkt $(X^{q-1} - 1)(Y^q - Y)$ etwa verschwindet auf beiden Koordinatenachsen, nicht aber seine homogene Komponente Y vom Grad Eins.

Beweis. Wir betrachten für alle $\lambda \in k^\times$ die Multiplikation $\lambda : k^{n+1} \to k^{n+1}$. Sie induziert auf den polynomialen Funktionen eine Abbildung $\lambda^* : k[T_0, \ldots, T_n] \to k[T_0, \ldots, T_n]$ gegeben durch die Vorschrift $T_i \mapsto \lambda T_i$. Wir haben also in Formeln $P(\lambda x) = (\lambda^* P)(x)$ für alle Polynome P und alle Punkte $x \in k^{n+1}$. Das Verschwindungsideal einer $k^\times$-stabilen Teilmenge ist mithin stabil unter allen λ^*. Die Aussage folgt nun aus dem anschließenden Lemma 7.6.8.5, angewandt auf den $\mathbb{Z}$-graduierten Vektorraum $V = k[T_0, \ldots, T_n]$. □

Lemma 7.6.8.5 (Graduierungen und $k^\times$-Operationen). *Gegeben ein $\mathbb{Z}$-graduierter Vektorraum $V = \bigoplus_i V^i$ über einem Körper k erkläre man für jedes $\lambda \in k^\times$ einen Automorphismus λ^* von V durch die Vorschrift $\lambda^*(v) := \lambda^i v$ für alle $v \in V^i$. Ist k unendlich, so sind die unter allen λ^* stabilen Teilräume von V genau die homogenen Teilräume.*

Vorschau 7.6.8.6. $(k = \bar{k})$. In 7.9.4.5 werden wir zeigen, daß die „algebraischen" Operationen der multiplikativen Gruppe $k^\times$ auf einer affinen k-Varietät X unter der durch das Lemma gegebenen Konstruktion eineindeutig den $\mathbb{Z}$-Graduierungen auf ihrem Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(X)$ entsprechen.

Beweis. Daß alle homogenen Teilräume unter allen λ^* stabil sind, ist klar. Sei umgekehrt $U \subset V$ ein unter allen λ^* stabiler Teilraum und $v \in U$ ein Vektor. Sicher gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $v \in \bigoplus_{|i|\leq r} V^i$. Da k unendlich angenommen war, finden wir $\lambda \in k^\times$ mit $\lambda^r, \lambda^{r-1}, \ldots, \lambda^{-r}$ paarweise verschieden. Da $U \subset V$ unter λ^* stabil ist, muß λ^* nach 3.6.6.19 auch auf U diagonalisierbar sein. Nach 4.7.8.9 zerfällt mithin U in die direkte Summe der Eigenräume von λ^*. Insbesondere zerfällt auch v auf genau eine Weise in eine Summe $v = \sum u_i$ mit $u_i \in U$ und $\lambda^* u_i = \lambda^i u_i$. Das muß aber bereits die Zerlegung von v nach homogenen Komponenten in V sein. Da folglich für jedes $u \in U$ auch seine homogenen Komponenten zu U gehören, muß damit U ein homogener Teilraum sein. □

7.6.8.7 (**Homogene Ideale und $k^\times$-stabile Teilmengen**). Gegeben eine affine Varietät X betrachten wir $X \times k^n$ mit der $k^\times$-Operation $\lambda(x, v) = (x, \lambda v)$ und den offensichtlichen Isomorphismus $\mathcal{O}(X)[T_1, \ldots, T_n] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times k^n)$ aus 7.3.4.21 und versehen die linke Seite mit der Standardgraduierung und die rechte Seite mit der induzierten Graduierung. So ist für jedes homogene Ideal $I \subset \mathcal{O}(X \times k^n)$ die Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(I)$ stabil unter der Operation von $k^\times$, und umgekehrt ist für jede $k^\times$-stabile Teilmenge $Y \subset X \times k^n$ das Verschwindungsideal $\mathcal{I}(Y)$ homogen nach 7.6.8.5.

7.6.8.8. Wir verwenden im Fall eines unendlichen Grundkörpers k für jede Teilmenge $W \subset \mathbb{P}^n k$ die Notation

$$\mathcal{I}^*(W) := \mathcal{I}(\mathrm{C}(W))$$

für das Verschwindungsideal des Kegels über W und nennen $\mathcal{I}^*(W)$ das **homogene Verschwindungsideal von** W. In der Tat ist $\mathcal{I}^*(W)$ im Fall eines unendlichen Grundkörpers nach 7.6.8.3 stets ein homogenes Ideal, ja sogar ein echtes homogenes Radikalideal. Der Quotient

$$\mathcal{O}^*(W) := k[T_0, \ldots, T_n]/\mathcal{I}^*(W) = \mathcal{O}(\mathrm{C}(W))$$

heißt der **homogene Koordinatenring von** W. In unseren Konventionen haben wir insbesondere $\mathcal{O}^*(\emptyset) = k$ für die leere Teilmenge $\emptyset \subset \mathbb{P}^n k$.

7.6.8.9. Umgekehrt verwenden wir sowohl für jede aus homogenen Elementen bestehende Teilmenge als auch für jedes homogene Ideal $I \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ die Notation

$$\mathcal{Z}^*(I) := \pi(\mathcal{Z}(I) \backslash 0)$$

und nennen $\mathcal{Z}^*(I)$ die **projektive Nullstellenmenge von** I.

7.6.8.10. Die Abbildungen $\mathcal{I}^*$ und $\mathcal{Z}^*$ kehren wieder Inklusionen um. Wir haben stets $W \subset \mathcal{Z}^*(\mathcal{I}^*(W))$. Wenn wir uns auf homogene Teilmengen $I \subset \mathcal{I}(0)$ beziehungsweise homogene Ideale $I \subsetneq k[T_0, \ldots, T_n]$ beschränken, die also keine von Null verschiedenen Konstanten enthalten, so gilt auch $I \subset \mathcal{I}^*(\mathcal{Z}^*(I))$.

Korollar 7.6.8.11 (Zariskitopologie auf $\mathbb{P}^n_k$ und homogene Ideale). $(k = \bar{k})$. *Ordnen wir jedem homogenen Radikalideal $I \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ seine projektive Nullstellenmenge zu, so erhalten wir eine Bijektion*

$$\mathcal{Z}^* : \left\{ \begin{matrix} \textit{Homogene Radikalideale} \\ I \subsetneq k[T_0, \ldots, T_n] \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{matrix} \textit{Abgeschlossene Teilmengen} \\ Y \subsetneq \mathbb{P}^n k \end{matrix} \right\}$$

mit Umkehrabbildung $Y \mapsto \mathcal{I}^*(Y)$.

Beweis. Wir erinnern die Projektion $\pi : k^{n+1} \backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n k$. Das Bilden des Urbilds unter π, das Hinzufügen des Ursprungs und das Bilden des Verschwindungsideals liefern Bijektionen

$$\begin{tikzcd}
\left\{ \begin{matrix} \text{abgeschlossene} \\ \text{Teilmengen von } \mathbb{P}^n k \end{matrix} \right\} \arrow[r, "\sim"] & \left\{ \begin{matrix} k^\times\text{-stabile abgeschlossene} \\ \text{Teilmengen von } k^{n+1} \backslash 0 \end{matrix} \right\} \arrow[d, "\wr"] \\
\left\{ \begin{matrix} \text{homogene Radikalideale} \\ I \subsetneq k[T_0, \ldots, T_n] \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} k^\times\text{-stabile abgeschlossene} \\ \text{Teilmengen } X \subsetneq k^{n+1} \text{ mit } 0 \in X \end{matrix} \right\} \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

Die Zusammenfassung der ersten beiden Bijektionen hatten wir bereits in 7.6.5.16 als Kegelkonstruktion $Y \mapsto \mathrm{C}(Y)$ eingeführt. Beim letzten Schritt verwenden wir, daß nach 7.6.8.3 und 7.6.8.2 unter unserer Bijektion 7.1.6.16 zwischen algebraischen Teilmengen von k^{n+1} und Radikalidealen die $k^\times$-invarianten Teilmengen genau den homogenen Radikalidealen entsprechen müssen. □

7.6.8.12. Nach 7.6.5.17 induziert unsere Bijektion auch eine Bijektion

$$\mathcal{Z}^* : \left\{ \begin{matrix} \text{Homogene Primideale} \\ \text{mit } I \subsetneq \mathcal{I}(0) \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{matrix} \text{Irreduzible abgeschlossene} \\ \text{Teilmengen } Y \subsetneq \mathbb{P}^n k \end{matrix} \right\}$$

Da wir im k^n bereits nach 7.4.2.22 wissen, daß die irreduziblen Hyperflächen genau die Nullstellenmengen der irreduziblen Polynome sind, erhalten wir weiter für $n \geq 1$ Bijektionen

$$\mathcal{Z}^* : \left\{ \begin{matrix} \text{Homogene irreduzible} \\ \text{Polynome } f \in k[T_0, \ldots, T_n] \end{matrix} \right\}_{/k^\times} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{matrix} \text{Irreduzible} \\ \text{Hyperflächen } Y \subsetneq \mathbb{P}^n k \end{matrix} \right\}$$

$$\mathcal{Z}^* : \left\{ \begin{matrix} \text{Homogene quadratfreie} \\ \text{Polynome } f \in k[T_0, \ldots, T_n] \end{matrix} \right\}_{/k^\times} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{matrix} \text{Beliebige} \\ \text{Hyperflächen } Y \subsetneq \mathbb{P}^n k \end{matrix} \right\}$$

Eine Hyperfläche in einem projektiven Raum heißt ganz allgemein eine **projektive Hyperfläche**. Der Grad eines und jedes zu einer projektiven Hyperfläche gehörigen quadratfreien homogenen Polynoms heißt der **Grad** unserer projektiven Hyperfläche. Den Grad einer projektiven Hyperfläche $H \not\subset \mathbb{P}^n k$ notieren wir

$$\operatorname{grad} H$$

Grad Null hat nur die leere Hyperfläche. Hyperflächen der Grade Eins, Zwei, Drei, Vier und Fünf und Sechs heißen **Hyperebene**, **Quadrik**, **Kubik**, **Quartik**, **Quintik** und **Sextik**.

7.6.8.13. Vereinigen wir zwei projektive Hyperflächen ohne gemeinsame irreduzible Komponente in demselben projektiven Raum, so addieren sich ihre Grade. So ist zum Beispiel die Vereinigung zweier verschiedener Hyperebenen stets eine Quadrik.

7.6.8.14 (**Projektive Vervollständigung ohne Koordinaten**). Für einen koordinatenfreien und dadurch hoffentlich anschaulicheren Zugang mag man wie in 7.6.5.8 jedem endlichdimenionalen affinen Raum E seine projektive Vervollständigung $\mathbb{V}E = E \sqcup \mathbb{P}\vec{E}$ zuordnen. Gegeben $X \not\subset E$ bedeutet das Bilden seines Abschlusses $\bar{X} \subset \mathbb{V}E$ anschaulich, daß wir „alle Richtungen aus $\mathbb{P}\vec{E}$ mit hinzunehmen, in die X ins Unendliche entweicht“. Bei der Parabel $x^2 = y$ in der Ebene k^2 wäre das etwa die Richtung der y-Achse und bei der Hyperbel $xy = 1$ die Richtungen beider Koordinatenachsen.

Proposition* 7.6.8.15 (Darstellung algebraischer Mengen durch Gleichungen). $(k = \bar{k})$. *Seien $Z \not\subset X \not\subset \mathbb{P}^n k$ nichtleere äquidimensionale projektive Varietäten und sei $c = \operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} Z$. So gibt es Elemente $f_1, \ldots, f_c \in \mathcal{O}^*(X)$ mit $\mathcal{Z}^*(f_1, \ldots, f_c) \supset Z$ äquidimensional von derselben Dimension wie Z.*

Beweis. Analog zu 7.5.9.10. Im Fall $c = 0$ ist nichts zu zeigen. Sonst finden wir ein homogenes kürzbares Element $f_1 \in \mathcal{O}^*(X)$ mit $Z \subset \mathcal{Z}^*(f_1)$. In der Tat finden wir homogene Funktionen, die auf $\mathrm{C}(Z)$ und endlich vielen vorgegebenen Ursprungsgeraden verschwinden, auf einer weiteren Ursprungsgerade außerhalb von $\mathrm{C}(Z)$ aber nicht verschwinden. Indem wir solche Funktionen potenzieren und dann die Summe bilden, finden wir homogene Funktionen, die auf $\mathrm{C}(Z)$ verschwinden, aber auf endlich vielen vorgegebenen Ursprungsgeraden außerhalb von $\mathrm{C}(Z)$ nicht verschwinden. Der Beweis kann nun mit Induktion über c zu Ende geführt werden. □

Übungen

Übung 7.6.8.16. $(k = \bar{k})$. Man zeige: Gegeben $W \subset \mathbb{P}^n k$ ist $\mathcal{Z}^*(\mathcal{I}^*(W)) = \bar{W}$ der Abschluß von W in der Zariskitopologie. Für beliebige Teilmengen $I \subset \mathcal{I}(0)$,

die aus homogenen Elementen bestehen, sowie für beliebige homogene Ideale $I \subset \mathcal{I}(0)$ ist $\mathcal{I}^*(\mathcal{Z}^*(I)) = \sqrt{\langle I \rangle}$ das Radikal des von I erzeugten Ideals.

Übung 7.6.8.17. Das Komplement einer nichtleeren Hyperfläche im projektiven Raum ist stets eine affine Varietät.

Übung 7.6.8.18 (**Homogenisierung und Dehomogenisierung**). $(k = \bar{k})$. Wir betrachten für $n \geq 1$ die Einbettung $i_0 : k^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n k$ gegeben durch das Hinzufügen einer ersten Koordinate Eins und den Übergang zur davon erzeugten Geraden

$$i_0 : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \langle 1, x_1, \ldots, x_n \rangle$$

Das Komplement $H_0 := \mathbb{P}^n k \backslash i_0(k^n)$ ihres Bildes ist eine projektive Hyperebene im Sinne von 5.1.4.8 und damit isomorph zu $\mathbb{P}^{n-1}k$. Wir erhalten eine offensichtliche Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Abgeschlossene Teilmengen} \\ Y \subset k^n \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Abgeschlossene Teilmengen} \\ A \subset \mathbb{P}^n k \text{ mit } H_0 \subset A \end{array} \right\}$$

durch $Y \mapsto i_0(Y) \cup H_0$ und $A \mapsto i_0^{-1}(A)$. Wir folgern eine weitere Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Echte abgeschlossene} \\ \text{Teilmengen } Y \subsetneq k^n \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Echte abgeschlossene Teilmengen} \\ B \subsetneq \mathbb{P}^n k \text{ ohne Komponente in } H_0 \end{array} \right\}$$

durch $Y \mapsto \overline{i_0(Y)}$ und $B \mapsto i_0^{-1}(B)$. Ist $I \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ eine Menge von homogenen Polynomen oder ein homogenes Ideal und $B \subset \mathbb{P}^n k$ eine beliebige Teilmenge, so gelten die Identitäten

$$i_0^{-1}\mathcal{Z}^*(I) = \mathcal{Z}(a_0(I)) \tag{7.1}$$

$$a_0(\mathcal{I}^*(B)) = \mathcal{I}(i_0^{-1}B) \tag{7.2}$$

für $a_0 : k[T_0, \ldots, T_n] \to k[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben durch $T_0 \mapsto 1$. Sei umgekehrt die **Homogenisierung** $h_0(f) \in k[T_0, \ldots, T_n]$ von $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ erklärt durch die Vorschrift $h_0(a) = aT_0$ für $a \in k$ und auf nichtkonstanten Polynomen durch $h_0(\sum c_\alpha T^\alpha) = \sum c_\alpha T^\alpha T_0^{d-|\alpha|}$ für $d = \sup\{|\alpha| \mid c_\alpha \neq 0\}$ der Totalgrad. Zum Beispiel haben wir

$$h_z(X^2Y + Y^3 + 4Y^2X^3) = Z^2X^2Y + Z^2Y^3 + 4Y^2X^3$$

mit der Konvention, daß wir bei den wenigen Variablen statt (T_0, T_1, T_2) der Übersichtlichkeit halber (Z, Y, X) schreiben und die Homogenisierung statt h_0 in diesem Kontext h_z notieren, da sie ja „durch die zusätzliche Variable Z“ geschieht und nicht „durch die zusätzliche Variable T_0“. Mit dieser Notation finden wir für

eine beliebige Teilmenge $J \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ und eine beliebige Teilmenge $Y \subset k^n$ die Identitäten

$$i_0\mathcal{Z}(J) \cup H_0 = \mathcal{Z}^*(h_0(J) \cup \{T_0\})$$

$$\langle h_0(\mathcal{I}(Y)), T_0\rangle = \mathcal{I}^*(i_0(Y) \cup H_0)$$

Ist schließlich $J \subsetneq k[T_1, \ldots, T_n]$ ein echtes Ideal und $Y \subset k^n$ eine Teilmenge, so gelten die Identitäten

$$\overline{i_0\mathcal{Z}(J)} = \mathcal{Z}^*(h_0(J))$$

$$\langle h_0(\mathcal{I}(Y))\rangle = \mathcal{I}^*(\overline{i_0(Y)})$$

Ist $J \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ beliebig, so haben wir $\mathcal{Z}^*(h_0(J)) = \overline{i_0\mathcal{Z}(J)} \cup R$ mit einem Rest $R \not\subset H_0$, über den wir a priori wenig wissen.

7.6.9 Hilbertpolynome

7.6.9.1. Ich erinnere an Übung 3.5.3.43, nach der wir für jeden Ring k den Ring $k(\!(u)\!)$ der formalen Laurentreihen mit Koeffizienten in k der Gestalt $\sum_{n\geq N} a_n u^n$ mit $a_n \in k$ und $N \in \mathbb{Z}$ bilden können. Ich erinnere weiter daran, daß formale Laurentreihen $\sum_{n\geq N} a_n u^n$ mit $a_N \in k^\times$ einer Einheit des Grundrings k selbst Einheiten des Rings der formalen Laurentreihen sind. Unter der offensichtlichen Einbettung $k[u, u^{-1}] \hookrightarrow k(\!(u)\!)$ der formalen Laurent-Polynome in die formalen Laurentreihen, ja bereits unter der offensichtlichen Einbettung $k[u] \hookrightarrow k[\![u]\!]$ des Polynomrings in den Ring der formalen Potenzreihen wird zum Beispiel $(1-u)$ eine Einheit mit Inversem $1 + u + u^2 + \ldots$

Satz 7.6.9.2 (Erzeugende Funktionen zu Moduln über Polynomringen). *Seien k ein Körper und $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$ ein endlich erzeugter graduierter Modul über dem Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ mit seiner Standardgraduierung. So gibt es genau ein Laurent-Polynom $f_M \in \mathbb{Z}[u, u^{-1}]$ derart, daß im Ring $\mathbb{Z}(\!(u)\!)$ der formalen Laurentreihen gilt*

$$\sum (\dim_k M^i) u^i = \frac{f_M(u)}{(1-u)^n}$$

7.6.9.3. Dasselbe gilt mit demselben Beweis, wenn wir für k einen Kring endlicher Länge nehmen und statt $\dim_k M^i$ die Länge $l_k(M^i)$ des k-Moduls M^i betrachten. Man überlegt sich, daß auch in diesem Fall jeder endlich erzeugte graduierte Modul von endlich vielen homogenen Elementen erzeugt wird, und da die homogenen Komponenten des Polynomrings $k[T_1, \ldots, T_n]$ mit seiner Standardgraduierung endliche Länge haben, folgt dasselbe für die homogenen Komponenten unseres endlich erzeugten Moduls M.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist offensichtlich, nur die Existenz bleibt zu zeigen. Wir notieren die linke Seite $\mathrm{E}(M,u)$ und argumentieren mit vollständiger Induktion über die Zahl der Variablen. Der Fall $n=0$ ist offensichtlich. Sonst betrachten wir die exakte Sequenz $\ker \hookrightarrow M \xrightarrow{T_1\cdot} M \twoheadrightarrow \mathrm{cok}$ und folgern durch mehrmaliges Anwenden der Dimensionsformel 3.2.2.5 leicht

$$\dim \ker^i - \dim M^i + \dim M^{i+1} - \dim \mathrm{cok}^{i+1} = 0$$

alias $u\mathrm{E}(\ker,u) - u\mathrm{E}(M,u) + \mathrm{E}(M,u) - \mathrm{E}(\mathrm{cok},u) = 0$ alias $(1-u)\mathrm{E}(M,u) = \mathrm{E}(\mathrm{cok},u) - u\mathrm{E}(\ker,u)$. Nun wirkt T_1 aber auf $\ker$ und cok durch Null. Induktion zeigt dann, daß $\mathrm{E}(M,u)$ die gewünschte Form hat. $\square$

Satz 7.6.9.4 (**Hilbertpolynom**). *Seien k ein Körper und $M = \bigoplus_i M^i$ ein endlich erzeugter graduierter Modul über dem Polynomring $k[T_1,\ldots,T_n]$. So gibt es Polynome $\mathrm{Q}_M, \mathrm{P}_M \in \mathbb{Q}[t]$ derart, daß für alle hinreichend großen $i \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\dim_k M^i = \mathrm{Q}_M(i) \quad \textit{und} \quad \dim_k M^{\leq i} = \mathrm{P}_M(i).$$

Beide Polynome sind eindeutig bestimmt. P_M heißt das **Hilbert-Polynom von** M. *Es hat höchstens den Grad n. Ich nenne diesen Grad die* **Hilbert-Dimension** *des graduierten Moduls M und notiere ihn*

$$\mathrm{hdim}(M) := \mathrm{grad}\,\mathrm{P}_M$$

7.6.9.5. Dasselbe gilt mit demselben Beweis, wenn wir für k einen Kring endlicher Länge nehmen und statt $\dim_k M^i$ die Länge $l_k(M^i)$ des k-Moduls M^i betrachten.

7.6.9.6. Nur der Nullmodul hat die Hilbertdimension $-\infty$. Hilbertdimension Null haben genau die graduierten Moduln, die als k-Vektorräume eine endliche positive Dimension beziehungsweise als k-Moduln eine endliche positive Länge haben.

Beweis. Die Binomialreihe 10.6.1.23 oder auch elementare Überlegungen liefern die Entwicklung

$$\frac{1}{(1-u)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} (-u)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{n-1} u^i$$

in $\mathbb{Q}[\![u]\!]$. Die Binomialkoeffizienten ganz rechts sind offensichtlich die Werte bei i des Polynoms

$$Q_n(t) := \binom{n+t-1}{n-1} = \frac{(n+t-1)(n+t-2)\ldots(t+1)}{(n-1)!}$$

So folgt aus dem vorhergehenden Satz 7.6.9.2 schon mal die Existenz eines Polynoms Q_M vom Grad $\leq n-1$ mit $\dim_k M^i = \mathrm{Q}_M(i)$ für $i \gg 0$. Nun mache man $N := \bigoplus_i M^{\leq i}$ zu einem graduierten Modul über dem erweiterten Polynomring $k[T_0, T_1, \ldots, T_n]$, indem man T_0 als Einbettung $M^{\leq i} \hookrightarrow M^{\leq i+1}$ operieren läßt und die anderen T_ν als die Multiplikationsabbildungen $(T_\nu \cdot) : M^{\leq i} \to M^{\leq i+1}$. Man sieht leicht, daß mit M auch N endlich erzeugt ist. Das Polynom Q_N für den so konstruierten Modul N ist dann das gesuchte Polynom P_M. $\square$

7.6.9.7 (**Multiplizitäten**). Gegeben ein Körper k und ein endlich erzeugter graduierter Modul M über dem Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ und $d \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\mathrm{mult}^d(M) := \lim_{i \to \infty} d! \dim_k M^{\leq i}/i^d$$

und behaupten, daß dieser Grenzwert stets in $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ existiert. In der Tat wissen wir aus 3.5.4.8, daß Polynome $P \in \mathbb{Q}[t]$, die auf allen hinreichend großen natürlichen Zahlen positive ganzzahlige Werte annehmen, stets die Gestalt $P(t) = a_h t^h + a_{h-1} t^{h-1} + \ldots + a_0$ haben mit $h \geq 0$ und $h! a_h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Diese Erkenntnis gilt es dann auf das Hilbertpolynom $\mathrm{P}_M(t)$ anzuwenden. Für $M \neq 0$ von der Hilbertdimension $h = \mathrm{hdim}\, M$ finden wir

$$\mathrm{mult}^d(M) = \begin{cases} 0 & d > h; \\ h! a_h & d = h; \\ \infty & d < h. \end{cases}$$

mit a_h dem Leitkoeffizient des Hilbertpolynoms P_M von M. Wir nennen unser $\mathrm{mult}^d(M) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ die d-**Multiplizität von** M. Für $M \neq 0$ und $h = \mathrm{hdim}(M)$ heißt die Zahl $\mathrm{mult}^h(M) \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die **Multiplizität von** M und wir notieren sie $\mathrm{mult}(M)$. Im Fall des Nullmoduls sind alle d-Multiplizitäten Null. All das gilt analog für einen beliebigen Kring k endlicher Länge.

7.6.9.8 (**Additivität der Multiplizitäten**). Gegeben ein Körper k und eine kurze exakte Sequenz $N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow Q$ von endlich erzeugten graduierten Moduln über dem Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ gilt für die Hilbertdimensionen $\mathrm{hdim}(M) = \max(\mathrm{hdim}(N), \mathrm{hdim}(Q))$ und für $d \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\mathrm{mult}^d(M) = \mathrm{mult}^d(N) + \mathrm{mult}^d(Q)$$

Weiter bleiben die Hilbertdimension ebenso wie die Multiplizitäten bei Verschiebungen der Graduierung unverändert. Dasselbe gilt offensichtlich analog im Fall eines beliebigen Krings k endlicher Länge.

Ergänzung 7.6.9.9 (**Multiplizität und Hilbertdimension, Variante**). Sei $M \neq 0$ ein endlich erzeugter graduierter Modul über einem Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$

mit Koeffizienten in einem Körper k. Offensichtlich müssen sich die Multiplizitäten und die Hilbertdimension auch direkt an der erzeugenden Funktion $\mathrm{E}(M,u)$ aus 7.6.9.2 ablesen lassen. Ich behaupte, daß der Grad d des Hilbertpolynoms P_M dann genau die Polordnung der erzeugenden Funktion bei $u=1$ ist und $\mathrm{mult}(M)$ ist der tiefste von Null verschiedene Koeffizient in der Laurententwicklung der erzeugenden Funktion $\mathrm{E}(M,u)$ nach Potenzen von $(1-u)$. Sei dazu allgemein $E(u) \in \mathbb{Z}(\!(u)\!)$ eine von Null verschiedene formale Potenzreihe aus dem Bild der offensichtlichen Einbettung

$$\mathbb{Z}[u,u^{-1},(1-u)^{-1}] \hookrightarrow \mathbb{Z}(\!(u)\!)$$

Zunächst einmal zeigt man wie zuvor, daß es Polynome $Q,P \in \mathbb{Q}[t]$ gibt mit

$$E(u) \in \sum_{i\geq 0} Q(i)u^i + \mathbb{Z}[u,u^{-1}] \quad \text{und} \quad E(u)(1-u)^{-1} \in \sum_{i\geq 0} P(i)u^i + \mathbb{Z}[u,u^{-1}]$$

Die Partialbruchzerlegung von E hat notwendig die Gestalt

$$E(u) = \sum_{\nu=-d}^{-1} a_\nu (1-u)^{-\nu} + \sum_{\mu=-m}^{-1} b_\mu u^{-\mu} + R(u)$$

mit einem Polynom $R(u) \in \mathbb{Q}[u]$ und $a_\nu, b_\mu \in \mathbb{Q}$. Rechnen wir uns von hier aus in den Ring $\mathbb{Q}(\!(u)\!)$ der formalen Laurentreihen zurück, so erkennen wir leicht, daß der Grad des Polynoms Q aus dem vorhergehenden Beweis Eins kleiner ist als die Polordnung von E bei $u=1$ und daß gilt $Q=0$ falls E bei $u=1$ gar keinen Pol hat. Denken wir etwas schärfer nach oder erinnern 3.5.5.26, so sehen wir weiter, daß hier sogar notwendig gilt $a_\nu, b_\mu \in \mathbb{Z}$ für alle ν sowie $R \in \mathbb{Z}[u]$. Zusätzlich erkennen wir, daß im Fall $Q \neq 0$ für $d>0$ größtmöglich mit $a_{-d} \neq 0$ unser Polynom Q den Leitkoeffizienten $a_{-d}/(d-1)!$ hat. Mehr war nicht zu zeigen.

Übungen

Übung 7.6.9.10 (**Kokerne homogener Selbstinjektionen**). Seien k ein Körper und $M = \bigoplus_i M^i$ ein endlich erzeugter von Null verschiedener graduierter Modul über dem Polynomring $k[T_1,\ldots,T_n]$. Ist $f : M \hookrightarrow M$ ein injektiver Endomorphismus von M und gibt es $r>0$ mit $f(M^i) \subset M^{i+r}$ für alle i, so hat $\operatorname{cok} f$ im Vergleich zu M eine um Eins kleinere Hilbertdimension und die r-fache Multiplizität, in Formeln

$$\mathrm{hdim}(\operatorname{cok} f) = \mathrm{hdim}(M) - 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{mult}(\operatorname{cok} f) = r\,\mathrm{mult}(M).$$

Ist f zwar nicht notwendig injektiv, aber kennen wir für $d := \mathrm{hdim}(M)$ dennoch die Abschätzung $\mathrm{hdim}(\operatorname{cok} f) < d$, so folgt $\mathrm{hdim}(\ker f) < d$ und

$$\mathrm{mult}^{d-1}(\operatorname{cok} f) - \mathrm{mult}^{d-1}(\ker f) = r\,\mathrm{mult}^d(M)$$

Dasselbe gilt im Fall eines beliebigen Krings k endlicher Länge.

Übung 7.6.9.11. Für den Polynomring $M = k[T_1, \ldots, T_n]$ über einem Körper als graduierter Modul über sich selbst haben wir $\dim_k(M^{\leq m}) = \binom{n+m}{n}$ etwa nach 10.1.4.25 und folglich $\mathrm{P}_M(t) = \binom{n+t}{n}$ und $\operatorname{hdim} M = n$ und $\operatorname{mult} M = 1$. Ist k ein von Null verschiedener Kring endlicher Länge l, so haben wir allgemeiner $\mathrm{P}_M(t) = l\binom{n+t}{n}$ und $\operatorname{hdim} M = n$ sowie $\operatorname{mult} M = l$.

7.6.10 Satz von Bézout

7.6.10.1. Sei (X, x) eine bepunktete Varietät. Gegeben eine abgeschlossene Teilmenge $C \subset\!\!\!

Komponenten unserer Kurven anwenden können. Die Lokalisierung unseres Quotienten ist dann auch endlichdimensional als k-Vektorraum nach 7.4.3.58. Insbesondere ist unsere Vielfachheit $\mathrm{s}_x(C, D)$ also endlich, wenn die Komponenten der Kurve C, die durch x laufen, paarweise verschieden sind von den Komponenten der Kurve D, die durch x laufen. Im folgenden listen wir noch einige genauere Aussagen für die Schnittmultiplizität $\mathrm{s}_x(C, D)$ unserer Kurven $C, D \not\subset k^2$ auf und nehmen dabei an, daß sie keine gemeinsamen Komponenten haben, die durch x gehen, und daß sie die Nullstellenmengen der quadratfreien Polynome f, g sind.

1. Die Schnittmultiplizität ist Null $\mathrm{s}_x(C, D) = 0$ genau dann, wenn eine unserer Kurven nicht durch x geht, denn genau dann ist f oder g im lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ eine Einheit und andernfalls gehören sie beide zum maximalen Ideal;

2. Die Schnittmultiplizität ist Eins $\mathrm{s}_x(C, D) = 1$ genau dann, wenn $\bar{f}$ und $\bar{g}$ bereits $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ erzeugen, denn genau dann erzeugen sie nach Nakayama bereits ganz $\mathfrak{m}_x$. In anderen Worten und vielleicht anschaulicher gesagt bedeutet diese Bedingung, daß die Gradienten von f und g bei x linear unabhängig sind;

3. Im Fall $g(S, T) = T$, wenn also die zweite unserer Kurven eine Koordinatenachse ist, finden wir als Schnittmultiplizität

$$\mathrm{s}_{(0,0)}(C, D) = \inf\{n \mid S^n \text{ teilt } f(S, 0)\}$$

   den kleinstmöglichen Grad eines Monoms in S, das mit von Null verschiedenem Koeffizienten in $f(S, 0)$ auftaucht. Das ist leicht einzusehen. In anderen Worten ist das der Grad der Nullstelle am Ursprung der Einschränkung von f auf unsere Koordinatenachse. Analog bestimmt man die Schnittmultiplizitäten von beliebigen Kurven mit beliebigen affinen Geraden in k^2;

4. Sind $\tilde{f}, \tilde{g}$ die von Null verschiedenen homogenen Komponenten kleinstmöglichen Grades von f, g und r, s deren Grade, so gilt $\mathrm{s}_{(0,0)}(C, D) \geq rs$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ auch ihrerseits teilerfremd sind. Das verallgemeinert die Aussage über transversalen Schnitt, ist aber nicht ganz so leicht einzusehen. Wir zeigen die Aussage in 7.7.4.37.

5. Ist $C = C_1 \cup \ldots \cup C_n$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten, so gilt $s_x(C, D) = s_x(C_1, D) + \ldots + s_x(C_n, D)$. Der Nachweis bleibe dem Leser zur Übung überlassen.

Satz 7.6.10.6 (von Bézout über Schnitte ebener Kurven). $(k = \bar{k})$. *Zwei ebene projektive Kurven $C, D \not\subset \mathbb{P}^2 k$ ohne gemeinsame irreduzible Komponente haben*

mit Vielfachheiten gerechnet genau so viele Schnittpunkte, wie das Produkt ihrer Grade angibt, in Formeln

$$\sum_{x \in C \cap D} \mathrm{s}_x(C, D) = (\operatorname{grad} C)(\operatorname{grad} D)$$

7.6.10.7. Mehr zur Motivation und anschaulichen Bedeutung findet man in 7.6.1.1.

Beweis. Nach 7.6.8.12 sind C, D die projektiven Nullstellenmengen teilerfremder quadratfreier homogener Polynome $f, g \in k[T_0, T_1, T_2]$ der Grade $c = \operatorname{grad} C$ und $d = \operatorname{grad} D$. Da es mir übersichtlicher scheint, schreibe ich von nun an statt $k[T_0, T_1, T_2]$ kürzer $\mathcal{O}(k^3)$. Nach unseren Annahmen ist f kürzbar in $\mathcal{O}(k^3)$ und g kürzbar in $\mathcal{O}(k^3)/\langle f \rangle$. Mit unseren Erkenntnissen zur Hilbertdimension in 7.6.9.10 folgt erst $\operatorname{hdim} \mathcal{O}(k^3)/\langle f \rangle = 2$ sowie $\operatorname{mult} \mathcal{O}(k^3)/\langle f \rangle = c$ und dann $\operatorname{hdim} \mathcal{O}(k^3)/\langle f, g \rangle = 1$ sowie $\operatorname{mult} \mathcal{O}(k^3)/\langle f, g \rangle = cd$. Weiter hat unser Quotient $Q := \mathcal{O}(k^3)/\langle f, g \rangle$ nach Übung 7.6.6.16 eine Filtrierung

$$0 = Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_m = Q$$

durch homogene Ideale, bei der sämtliche Subquotienten Q_a/Q_{a-1} isomorph sind zu Quotienten $\mathcal{O}(k^3)/\mathfrak{p}_a$ nach jeweils einem homogenen Primideal $\mathfrak{p}_a$. In unserem Fall kommen aus Dimensionsgründen für die homogenen Primideale $\mathfrak{p}_a$ nur die Verschwindungsideale von Ursprungsgeraden $\mathcal{I}^*(x)$ für $x \in \mathbb{P}^2 k$ sowie das Verschwindungsideal $\mathcal{I}(0)$ des Ursprungs in Betracht. Nun gilt sicher $\operatorname{mult} \mathcal{O}(k^3)/\mathcal{I}^*(x) = \operatorname{mult} \mathcal{O}^*(x) = 1$. Wegen der Additivität der Multiplizität 7.6.9.8 tritt in unserer Filtrierung von Q also als Subquotient genau cd mal ein Quotient nach dem Verschwindungsideal einer Ursprungsgeraden auf, in Formeln

$$cd = \operatorname{card}\{a \mid \exists x \in \mathbb{P}^2 k \text{ mit } Q_a/Q_{a-1} \cong \mathcal{O}^*(x)\}$$

Unser Satz folgt, sobald wir für alle $x \in \mathbb{P}^2 k$ die Identität

$$\mathrm{s}_x(C, D) = \operatorname{card}\{a \mid Q_a/Q_{a-1} \cong \mathcal{O}^*(x)\}$$

zeigen können. Dazu dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß x im Bild der offenen Einbettung $i_0 : k^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2 k$ gegeben durch $(x_1, x_2) \mapsto \langle 1, x_1, x_2 \rangle$ liegt. Wir erklären nun für jeden Modul M über $\mathcal{O}(k^3)$ den $\mathcal{O}(k^2)$-Modul

$$\bar{M} := M/(T_0 - 1)M$$

Wir werden später lernen, inwiefern er aus M durch „Restriktion unter der Einbettung $i_0 : k^2 \hookrightarrow k^3$ der Ebene als affine Ebene im Raum“ entsteht, aber bisher wissen wie noch nicht, was ein „Modul auf einer Varietät“ sein sollte und wie wir so einen Modul auf eine abgeschlossene Untervarietät einzuschränken hätten. Ist

M ein graduierter $\mathcal{O}(k^3)$-Modul, so ist die Multiplikation mit $(T_0 - 1)$ eine Injektion $(T_0 - 1) : M \hookrightarrow M$, denn für jedes Element ungleich Null im Kern muß seine tiefste von Null verschiedene homogene Komponente verschwinden und das geht eben nicht. Ist nun $N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow Q$ eine kurze exakte Sequenz graduierter $\mathcal{O}(k^3)$-Moduln, so zeigt das Neunerlemma

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & Q \arrow[d, hook] \\
N \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & Q \arrow[d, two heads] \\
\bar{N} \arrow[r] & \bar{M} \arrow[r] & \bar{Q}
\end{tikzcd}$$

mit der Multiplikation mit $(T_0 - 1)$ als oberer Vertikale, daß auch die Sequenz $\bar{N} \hookrightarrow \bar{M} \twoheadrightarrow \bar{Q}$ exakt ist. Insbesondere wird die durch die Zeilenmatrix (f, g) gegebene rechtsexakte Sequenz $\mathcal{O}(k^3)^2 \to \mathcal{O}(k^3) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(k^3)/\langle f, g\rangle$ unter dem Bilden des Kokerns von $(T_0 - 1)$ wieder eine rechtsexakte Sequenz $\mathcal{O}(k^2)^2 \to \mathcal{O}(k^2) \to \mathcal{O}(k^2)/\langle \bar{f}, \bar{g}\rangle$ für $\bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{O}(k^2)$ die Polynome, die aus den homogenen Polynomen f, g durch Einsetzen von $T_0 = 1$ entstehen. Für unser $Q = \mathcal{O}(k^3)/\langle f, g\rangle$ erhalten wir damit $\bar{Q} \cong \mathcal{O}(k^2)/\langle \bar{f}, \bar{g}\rangle$. Unsere Filtrierung von oben liefert weiter eine Filtrierung

$$0 = \bar{Q}_0 \subset \bar{Q}_1 \subset \ldots \subset \bar{Q}_m = \bar{Q}$$

von $\bar{Q} = \mathcal{O}(k^2)/\langle \bar{f}, \bar{g}\rangle$ mit Subquotienten $\bar{Q}_a/\bar{Q}_{a-1} \cong \overline{Q_a/Q_{a-1}}$. Lokalisieren wir jetzt noch an einer Stelle $y \in k^2$, kürzen $M_{\mathcal{I}(y)} =: M_{(y)}$ ab und erinnern, daß Lokalisieren exakt ist, so erhalten wir für $\bar{Q}_{(y)} \cong \mathcal{O}(k^2)_{(y)}/\langle \bar{f}, \bar{g}\rangle_{(y)}$ eine Filtrierung mit Subquotienten $(\overline{Q_a/Q_{a-1}})_{(y)}$. Diese Subquotienten sind aber eindimensional für $Q_a/Q_{a-1} \cong \mathcal{O}^*(i_0(y))$ und Null sonst. Im Licht unserer Definition der Schnittmultiplizität zeigt das dann für $x = i_0(y)$ die gewünschte Identität

$$\mathrm{s}_x(C, D) = \dim_k \mathcal{O}(k^2)_{(y)}/\langle \bar{f}, \bar{g}\rangle_{(y)} = \mathrm{card}\{a \mid Q_a/Q_{a-1} \cong \mathcal{O}^*(x)\} \qquad \square$$

Übungen

Übung 7.6.10.8. Man bestimme die Schnittpunkte in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ der konzentrischen Kreise $x^2 + y^2 = 1$ und $x^2 + y^2 = 2$ sowie ihre jeweiligen Vielfachheiten.

7.6.11 Produkte von Varietäten

7.6.11.1 (**Produkt gesättigter k-geringter Räume**). Gegeben ein Körper k und gesättigte k-geringte Räume X und Y erhalten wir offensichtlich ein Produkt in

der Kategorie der gesättigten k-geringten Räume, das **gesättigte Produkt** von X und Y, indem wir auf der Produktmenge $X \times Y$ die gesättigte initiale Struktur zu den Projektionen auf X und Y betrachten.

7.6.11.2 (**Der k^n als gesättigtes Produkt**). Versehen wir einen Körper k mit der kleinstmöglichen Struktur $(k, \mathcal{O}_k)$ eines k-geringten Raums derart, daß die Identität $k \to k$ eine strukturierende Funktion auf k ist, so erhalten wir offensichtlich Klumpentopologie mit den polynomialen Funktionen als strukturierenden Funktionen. Nehmen wir $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen an, so ist die kleinste gesättigte Struktur $(k, \mathcal{O}_k)$ als k-geringter Raum auf k derart, daß die Identität $k \to k$ eine strukturierende Funktion ist, offensichtlich genau unsere Struktur als affine Varietätauf k, die durch Sättigung aus unserer Struktur als naive affine Varietät 7.3.3.6 hervorgeht. Versehen wir schließlich k^n mit der Struktur eines gesättigten Produkts von einigen Kopien von $(k, \mathcal{O}_k)$, so erhalten wir offensichtlich genau unsere Struktur als affine Varietät auf k^n, die durch Sättigung aus unserer Struktur als naive affine Varietät 7.3.3.6 hervorgeht.

Lemma 7.6.11.3. *Sei k ein Körper. Jedes gesättigte Produkt von initialen Morphismen gesättigter k-geringter Räume ist wieder initial.*

Beweis. Das folgt aus der Transitivität gesättigter initialer Familien 7.6.3.10. Seien genauer $\phi : X \to Y$ und $\psi : Z \to W$ unsere initialen Morphismen. Die Definition des Produktmorphismus $\phi \times \psi$ liefert $\mathrm{pr}_Z \circ (\phi \times \psi) = \phi \circ \mathrm{pr}_X$ und $\mathrm{pr}_W \circ (\phi \times \psi) = \psi \circ \mathrm{pr}_Y$. Die Definition des gesättigten Produkts $X \times Y$ liefert, daß die Projektionen pr_X, pr_Y dafür eine gesättigt initiale Familie bilden. Die Transitivität gesättigter initialer Familien 7.6.3.10 zeigt dann, daß auch $\phi \circ \mathrm{pr}_X$, $\psi \circ \mathrm{pr}_Y$ alias $\mathrm{pr}_Z \circ (\phi \times \psi)$, $\mathrm{pr}_W \circ (\phi \times \psi)$ dafür eine gesättigt initiale Familie bilden. Die zweite Aussage in 7.6.3.10 impliziert dann weiter, daß auch $\phi \times \psi$ eine gesättigte initiale Familie und mithin nach 7.6.3.9 initial ist. □

Satz 7.6.11.4 (**Produkte von Varietäten**). *1. Die Kategorie der Varietäten hat endliche Produkte und diese stimmen überein mit den Produkten in der Kategorie der gesättigten k-geringten Räume;*

2. Das in der Kategorie der Varietäten gebildete Produkt von affinen Varietäten ist stets wieder affin.

Beweis. Das Produkt in der Kategorie der gesättigten k-geringten Räume macht nach 7.6.11.3 aus je zwei Einbettungen eine Einbettung und macht nach 7.6.11.7 auch aus je zwei abgeschlossenen Einbettungen eine abgeschlossene Einbettung. Das zeigt, daß unter diesem gesättigten Produkt aus je zwei affinen Varietäten wieder eine affine Varietät wird. Nach 7.6.11.7 macht das gesättigte Produkt jedoch auch aus je zwei offenen Einbettungen eine offene Einbettung. Das zeigt, daß unter dem gesättigten Produkt aus je zwei Varietäten eine Varietät wird. □

7.6.11.5 (**Irreduzibilität von Produkten**). Das Produkt von zwei irreduziblen Varietäten ist stets wieder irreduzibel. Sei in der Tat $X \times Y = A \cup B$ Vereinigung von zwei abgeschlossenen Teilmengen. Wir betrachten

$$\begin{array}{rcl} X_A & := & \{x \in X \mid \{x\} \times Y \subset A\} \\ X_B & := & \{x \in X \mid \{x\} \times Y \subset B\} \end{array}$$

und folgern $X = X_A \cup X_B$ aus der Irreduzibilität von Y. Da X irreduzibel ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit X_A dicht in X annehmen. Für alle $y \in Y$ gilt nun $X_A \times \{y\} \subset A$ und wegen A abgeschlossen auch $X \times \{y\} \subset A$. Das zeigt $A = X \times Y$.

7.6.11.6 (**Morphismen in affine Varietäten**). Es bezeichne $T_j : k^m \to k$ die j-te Koordinate. Für jeden gesättigten k-geringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ liefert das Zurückholen von Funktionen aufgrund der universellen Eigenschaft der Produktstruktur auf k^n eine Bijektion $\mathrm{Gerf}_k(X, k^m) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(X)^m$, $\varphi \mapsto (T_j \circ \varphi)_{j=1}^m$. Ist allgemeiner Y affin, so liefert der Übergang zu den globalen regulären Funktionen für jeden gesättigten k-geringten Raum X eine Bijektion

$$\mathrm{Gerf}_k(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kring}^k(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))$$

Um das zu sehen, nehme man $Y \mathrel{\mathrel{\mathrel{\

$\mathcal{O}_{X\times Y,(x,y)}$, der für beliebige offene affine Umgebungen U von x und V von y den in 7.3.1.4 erklärten Isomorphismus $\mathcal{O}(U)\otimes\mathcal{O}(V)\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}(U\times V)$ fortsetzt. Genauer liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$S^{-1}(\mathcal{O}_{X,x}\otimes\mathcal{O}_{Y,y})\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_{X\times Y,(x,y)}$$

für S das Urbild von $k^\times$ unter $\mathcal{O}_{X,x}\otimes\mathcal{O}_{Y,y}\twoheadrightarrow k\otimes k\xrightarrow{\sim}k$.

Übung 7.6.11.10. Gegeben bepunktete irreduzible Varietäten (X,x) und (Y,y) kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{O}_{X,x}\otimes\mathcal{O}_{Y,y} & \to & \mathcal{O}_{X\times Y,(x,y)}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathcal{M}(X)\otimes\mathcal{M}(Y) & \to & \mathcal{M}(X\times Y)\end{array}$$

mit den im vorhergehenden erklärten natürlichen Abbildungen.

Übung 7.6.11.11. Die Projektion von einem Produkt in der Kategorie der gesättigten geringten Räume auf einen der Faktoren ist stets offen.

Übung 7.6.11.12. Seien $m,n\geq 1$. Man zeige, daß die von der Abbildung $k^n\times k^m\to k^{mn}$ gegeben durch $(x_i,y_j)\mapsto(x_iy_j)$ induzierte Abbildung

$$\mathbb{P}^{n-1}k\times\mathbb{P}^{m-1}k\to\mathbb{P}^{nm-1}k$$

eine abgeschlossene Einbettung ist. Sie heißt die **Segre-Einbettung**. Man folgere, daß das Produkt von zwei projektiven Varietäten wieder eine projektive Varietät ist. Hinweis: Das Bild in k^{mn} ist die Nullstellenmenge der Gleichungen $z_{ij}z_{kl}=z_{il}z_{kj}$. Dann rechne man in Koordinaten 7.6.5.7. Alternativ mag man auch von 7.9.2.12 ausgehen.

Ergänzende Übung 7.6.11.13. Man zeige, daß für beliebige Varietäten X,Y die Abbildung $f\otimes g\mapsto f\boxtimes g$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X)\otimes\mathcal{O}(Y)\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}(X\times Y)$$

induziert. Hinweis: Für affine Varietäten wissen wir das bereits aus 7.3.1.4. Als nächstes betrachte man den Fall, daß nur eine unserer Varietäten affin ist, und erinnere dazu die Exakheit des Tensorprodukts.

7.6.12 Separierte Varietäten

Definition 7.6.12.1. Eine k-Varietät X heißt **separiert**, wenn die Diagonale im Produkt unserer Varietät mit sich selbst eine abgeschlossene Teilmenge ist, wenn also in Formeln gilt

$$\Delta(X)\not\subset X\times X$$

7.6.12.2 (**Diskussion der Terminologie**). Bei den meisten Autoren meint der Begriff einer Varietät das, was wir eine *separierte* Varietät nennen. Bei manchen Autoren meint der Begriff der Varietät noch stärker das, was wir eine *irreduzible separierte* Varietät nennen.

Beispiel 7.6.12.3 (**Eine Varietät, die nicht separiert ist**). Wir betrachten die „Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt“ $X := k \sqcup \{\tilde{0}\}$ mit der finalen Struktur zu den beiden Abbildungen $\psi : k \hookrightarrow X$ und $\tilde{\psi} : k \hookrightarrow X$, die gegeben werden durch $\psi(x) = \tilde{\psi}(x) = x$ für $x \neq 0$ aber $\psi(0) = 0$, $\tilde{\psi}(0) = \tilde{0}$. Diese Varietät ist nicht separiert, denn die Punkte $(0, \tilde{0})$ und $(\tilde{0}, 0)$ aus $X \times X$ liegen beide im Abschluß der Diagonale. In der Tat ist das Urbild jeder offenen Umgebung von $(\tilde{0}, 0)$ unter $(\tilde{\psi}, \psi) : k \to X \times X$ eine offene Umgebung von $0 \in k$, folglich trifft jede offene Umgebung von $(\tilde{0}, 0)$ die Diagonale.

7.6.12.4 (**Folgerungen aus der Separiertheit**). Zwei Morphismen $\phi, \psi : Y \to X$ von einer Varietät in eine separierte Varietät, die auf einer dichten Teilmenge übereinstimmen, sind gleich. In der Tat, ist die Diagonale in $X \times X$ abgeschlossen, so auch ihr Urbild unter dem Morphismus $(\phi, \psi) : Y \to X \times X$.

7.6.12.5 (**Affine Varietäten sind separiert**). Da für affines X die globalen regulären Funktionen die Punkte trennen, können wir die Diagonale beschreiben als die simultane Nullstellenmenge der Funktionen $f \boxtimes 1 - 1 \boxtimes f$ für $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Folglich ist die Diagonale abgeschlossen in $X \times X$.

Satz 7.6.12.6 (**Projektive Räume sind separiert**). *Für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum V ist der zugehörige projektive Raum $\mathbb{P}V$ separiert.*

Beweis. Wir erinnern aus dem Beweis von 7.6.5.4 für jede affine Hyperebene $H \subset V$, die den Ursprung vermeidet, die zugehörige offene Einbettung $i_H : H \to \mathbb{P}V$, $v \mapsto \langle v \rangle$ und die Linearform $\lambda_H : V \to k$, deren Niveaumenge zum Wert Eins gerade H ist. Gegeben eine weitere affine Hyperebene $E \subset V$, die den Ursprung vermeidet, besteht das Urbild der Diagonale unter dem Produkt $i_H \times i_E : H \times E \hookrightarrow \mathbb{P}V \times \mathbb{P}V$ aus allen (v, w) mit $\lambda_H(w) \neq 0$, $\lambda_H(w)^{-1}w = v$, $\lambda_E(v) \neq 0$ und $\lambda_E(v)^{-1}v = w$. Diese Bedingungen sind jedoch gleichbedeutend zu den beiden Bedingungen $w = \lambda_H(w)v$ und $v = \lambda_E(v)w$, die offensichtlich eine abgeschlossene Teilmenge von $H \times E$ definieren. Das zeigt, daß $\mathbb{P}V$ separiert ist. □

Proposition 7.6.12.7 (**Produkte von separierten Varietäten**). *Das Produkt von separierten Varietäten ist separiert.*

Beweis. Das folgt aus unserer Erkenntnis 7.6.11.7, daß in der Kategorie der gesättigten k-geringten Räume das Produkt abgeschlossener Teilmengen abgeschlossen ist im Produkt besagter Räume. □

7.6.12.8. Im folgenden identifizieren wir im Fall einer irreduziblen Varietät Z alle lokalen Ringe und alle Ringe von regulären Funktionen auf nichtleeren offenen Teilmengen mit ihren Bildern in $\mathcal{M}(Z)$.

Lemma 7.6.12.9 (**Lokale Ringe charakterisieren Punkte**). *Sind x, y Punkte einer irreduziblen separierten Varietät X und gilt $\mathcal{O}_{X,y} \subset \mathcal{O}_{X,x}$ in Körper der rationalen Funktionen $\mathcal{M}(X)$, so folgt $x = y$.*

Beweis. Wir zeigen das, indem wir die gegenteilige Annahme $x \neq y$ zum Widerspruch führen. In der Tat liefert Übung 7.6.11.9 sofort $\mathcal{O}_{X\times X,(x,y)} \subset \mathcal{O}_{X\times X,(x,x)}$. Sind $U, V \Subset X$ offene affine Umgebungen von x, y, so trifft $U \times V$ nach Annahme die Diagonale Δ in einer abgeschlossenen Teilmenge und es gibt folglich $f \in \mathcal{O}(U \times V)$ mit $f(x, y) \neq 0$ aber $f(p, p) = 0$ für alle $p \in U \cap V$. Als rationale Funktion auf $X \times X$ ist f bei (x, y) und dann nach 7.6.4.32 notwendig auch bei (x, x) definiert, da es in den entsprechenden lokalen Ringen liegt, und muß an beiden Stellen denselben Wert annehmen. Nun verschwindet jedoch f auf einer offenen dichten Teilmenge der Diagonale und mithin auf dem Schnitt seines Definitionsbereichs mit der Diagonale. Wir landen so beim Widerspruch $0 \neq f(x, y) = f(x, x) = 0$. □

7.6.12.10. Seien X, Y Varietäten über k. Ein **rationaler Morphismus** $f : X \dashrightarrow Y$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f_U) mit $U \Subset X$ offen dicht und $f_U : U \to Y$ einem Morphimus, unter der Äquivalenzrelation der Übereinstimmung auf einer offenen dichten Teilmenge im Schnitt der Definitionsbereiche. Ist Y separiert, so stimmen nach 7.6.12.4 je zwei Repräsentanten (U, f_U) und (V, f_V) eines rationalen Morphismus $f : X \dashrightarrow Y$ bereits auf $U \cap V$ überein. Jeder rationale Morphismus in eine separierte Varietät hat mithin einen eindeutig bestimmten **größten Repräsentanten**, der eben auf der Vereinigung der Definitionsbereiche aller Repräsentanten definiert ist. Der Definitionsbereich des größten Repräsentanten heißt der **Definitionsbereich unseres rationalen Morphismus**.

7.6.12.11 (**Schnitte affiner offener Teilmengen**). In einer separierten Varietät X ist der Schnitt von je zwei offenen affinen Teilmengen U, V wieder affin. In der Tat ist $U \cap V$ isomorph zu $(U \times V) \cap \Delta_X$ und Δ_X ist abgeschlossen in $X \times X$ nach Annahme. Ist etwas allgemeiner $\varphi : V \to X$ ein Morphismus einer affinen Varietät V in eine separierte Varietät X und ist $U \Subset X$ offen affin, so ist auch $\varphi^{-1}(U)$ affin, denn es ist isomorph zum Urbild der Diagonale Δ_X unter $\varphi \times i : V \times U \to X \times X$ für $i : U \hookrightarrow X$ die Inklusion.

7.6.12.12. Gegeben eine Eigenschaft (E) von Morphismen einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit endlichen Produkten heiße ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ **produktfest** (E) oder ausführlicher **produktfest** (E) **in** $\mathcal{C}$, wenn für jedes weitere Objekt Z auch der Morphismus $\varphi \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ die Eigenschaft (E) hat. Mir schien diese Terminologie bequem, sie ist aber unüblich.

Übungen

Übung 7.6.12.13 (**Fixpunktmengen in separierten Varietäten**). Gegeben eine separierte Varietät X und ein Morphismus $\varphi : X \to X$ ist die Menge der Fixpunkte $X^\varphi := \{x \in X \mid \varphi(x) = x\}$ abgeschlossen. Die entsprechende Aussage für eine allgemeine Varietät ist falsch: Ist zum Beispiel Y eine nicht separierte Varietät und betrachten wir die Vertauschung der Einträge auf $X = Y \times Y$, so ist die Menge der Fixpunkte nicht abgeschlossen.

Übung 7.6.12.14. Der Graph eines Morphismus von einer beliebigen Varietät in eine separierte Varietät ist stets abgeschlossen.

Übung 7.6.12.15. Jede lokal abgeschlossene Teilmenge einer separierten Varietät ist mit ihrer induzierten Struktur wieder separiert.

Übung 7.6.12.16. Ein Morphismus von Varietäten $X \to Y$ heißt **eigentlich**, wenn er produktfest abgeschlossen ist. Man zeige, daß es dafür ausreicht zu zeigen, daß für jede affine Varietät Z der induzierte Morphismus $X \times Z \to Y \times Z$ abgeschlossen ist. Man zeige, daß gegeben ein surjektiver eigentlicher Morphismus $X \twoheadrightarrow Y$ mit X separiert auch Y separiert sein muß.

Vorschau 7.6.12.17. Die vorstehende Definition eines „eigentlichen“ Morphismus kann nicht wortwörtlich auf „Schemata“ übertragen werden. Um in dieser Allgemeinheit einen nützlichen Begriff zu erhalten, muß man eigentliche Morphismen als „basisfest“ abgeschlossene Morphismen erklären.

Übung 7.6.12.18 (**Verkleben erhält Separiertheit**). Eine Verklebung $X \twoheadrightarrow Y$ im Sinne von 7.6.4.25 ist eigentlich nach 7.6.4.24. Ist also X separiert, so ist nach 7.6.12.16 auch Y separiert.

7.7 Hilbertpolynome und reguläre Ringe

7.7.1 Filtrierungen von Gruppen

Definition 7.7.1.1. Eine **Filtrierung** auf einer abelschen Gruppe V ist eine Familie von Untergruppen $V^{\leq r}$ für $r \in \mathbb{Z}$ derart, daß gilt $V^{\leq r} \subset V^{\leq r+1}$ für alle $r \in \mathbb{Z}$.

7.7.1.2. Manchmal notieren wir eine Filtrierung auf einer abelschen Gruppe V auch als eine Familie von Untergruppen $V^{\geq r}$ für $r \in \mathbb{Z}$ derart, daß gilt $V^{\geq r} \supset V^{\geq r+1}$ für alle $r \in \mathbb{Z}$.

7.7.1.3.

1. Eine **ausschöpfende Filtrierung** ist eine Filtrierung, bei der die Vereinigung der filtrierenden Untergruppen die ganze Gruppe ist, in Formeln $\bigcup_r V^{\leq r} = V$.

2. Eine **voll endende Filtrierung** ist eine Filtrierung, bei der bereits eine der filtrierenden Untergruppen die ganze Gruppe ist, bei der also in Formeln ein r existiert mit $V^{\leq r} = V$.

3. Eine **Hausdorff'sche** oder auch **separierte Filtrierung** ist eine Filtrierung, bei der der Schnitt über alle filtrierenden Untergruppen Null ist, in Formeln $\bigcap_r V^{\leq r} = 0$.

4. Eine **von Null kommende Filtrierung** ist eine Filtrierung, bei der bereits eine der filtrierenden Untergruppen Null ist, bei der also in Formeln ein r existiert mit $V^{\leq r} = 0$.

5. Eine **endliche Filtrierung** ist eine von Null kommende und voll endende Filtrierung.

7.7.1.4 (**Diskussion der Terminologie**). Manche Autoren fordern auch ganz allgemein von einer Filtrierung noch zusätzlich implizit eine oder mehrere der oben angegebenen Eigenschaften. Außerdem mag man statt durch $\mathbb{Z}$ indizierte Filtrierungen auch noch allgemeinere Filtrierungen betrachten. Unsere Filtrierungen hier nennen wir dann präziser **$\mathbb{Z}$-Filtrierungen**.

7.7.1.5. Eine letzte Eigenschaft von Filtrierungen, die oft verwendet wird, ist die **Vollständigkeit**. Diese Bedingung besagt im Fall einer Hausdorff'schen Filtrierung, daß V vollständig ist für die Metrik

$$d(v, w) := \inf\left(\{1\} \sqcup \{2^r \mid (v - w) \in V^{\leq r}\}\right)$$

Im Fall einer beliebigen Filtrierung erklärt man sie dadurch, daß der Quotient $V/\bigcap_r V^{\leq r}$ vollständig ist in der zuvor beschriebenen Weise.

7.7.1.6 (**Diskussion der Terminologie**). Kennt man die Terminologie uniformer Räume 15.4.1.3 und versieht V mit der durch die Filtrierung gegebenen Struktur als uniformer Raum nach 15.4.1.7, so ist V vollständig beziehungsweise Hausdorff als topologischer Raum genau dann, wenn unsere Filtrierung vollständig beziehungsweise Hausdorff ist im Sinne der vorhergehenden Definitionen.

7.7.1.7. Ein Homomorphismus $\phi : V \to W$ von filtrierten abelschen Gruppen heißt **mit den Filtrierungen verträglich**, wenn gilt $\phi(V^{\leq r}) \subset W^{\leq r}$ für alle $r \in \mathbb{Z}$. Die filtrierten abelschen Gruppen werden mit den filtrierungsverträglichen Homomorphismen als Morphismen zu einer Kategorie filAb.

7.7.1.8 (**Finale Filtrierung**). Gegeben ein Homomorphismus von abelschen Gruppen $\varphi : V \to W$ und eine Filtrierung auf V erklären wir die zugehörige **finale Filtrierung** auf W durch $W^{\leq r} := \varphi(V^{\leq r})$. Im Fall eines Quotienten nennen wir sie auch die **Quotientenfiltrierung**.

7.7.1.9 (**Initiale Filtrierung**). Gegeben ein Homomorphismus von abelschen Gruppen $\varphi : V \to W$ und eine Filtrierung auf W erklären wir die zugehörige **initiale Filtrierung** auf V durch $V^{\leq r} := \varphi^{-1}(W^{\leq r})$. Im Fall der Einbettung einer Untergruppe nennen wir sie auch die **Untergruppenfiltrierung**.

7.7.1.10. Gegeben Untergruppen $U \subset V \subset W$ einer filtrierten abelschen Gruppe W stimmt auf dem Subquotienten V/U die Untergruppenfiltrierung zur Quotientenfiltrierung auf W/U überein mit der Quotientenfiltrierung zur Untergruppenfiltrierung auf V. In 16.2.3.7 besprechen wir die dieser Erkenntnis zugrundeliegenden Tatsachen, den „Basiswechsel für Untergruppen“, in einem größeren Rahmen.

7.7.1.11. Gegeben eine Zerlegung $W = U \oplus V$ einer filtrierten abelschen Gruppe W stimmt die Untergruppenfiltrierung auf U für die offensichtliche Einbettung im allgemeinen keineswegs überein mit der Quotientenfiltrierung auf U für die offensichtliche Projektion.

Vorschau 7.7.1.12. Wir erklären eine r**-Verschmelzung** von filtrierten abelschen Gruppen als eine multilineare Abbildung $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_r \to W$ mit

$$\varphi\left(V_1^{\leq n_1} \times \ldots \times V_r^{\leq n_r}\right) \subset W^{\leq (n_1 + \ldots + n_r)}$$

und insbesondere eine 0-Verschmelzung nach W als ein Element von $W^{\leq 0}$. Mit der offensichtlichen Multiverknüpfung von Verschmelzungen werden die filtrierten abelschen Gruppen dann zu einer Schmelzkategorie im Sinne von 18.1.1.4. In unserer Schmelzkategorie erhalten wir stark universelle Verschmelzungen, indem wir das Tensorprodukt mit der **Tensorfiltrierung** versehen, die im Fall von zwei Faktoren gegeben wird durch die Vorschrift

$$(M \otimes N)^{\leq n} := \langle \mathrm{ten}(M^{\leq i} \times N^{\leq j}) \mid i + j \leq n \rangle_{\mathbb{Z}}$$

für $\mathrm{ten} : M \times N \to M \otimes N$ die universelle bilineare Abbildung.

7.7.1.13. Eine Graduierung $V = \bigoplus_r V^r$ auf einer abelschen Gruppe liefert eine Filtrierung durch die Vorschrift $V^{\leq r} := \bigoplus_{\nu \leq r} V^\nu$. Zu jeder filtrierten abelschen Gruppe können wir umgekehrt die **assoziierte graduierte Gruppe**

$$\operatorname{gr} V = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} V^{\leq r}/V^{\leq r-1}$$

bilden. Wir notieren ihren homogenen Teil vom Grad r auch $(\operatorname{gr} V)^r = \operatorname{gr}^r V = V^{\leq r}/V^{\leq r-1}$ Kommt die Filtrierung auf V schon von einer Graduierung her, so induzieren die Verknüpfungen $V^r \hookrightarrow V^{\leq r} \twoheadrightarrow V^{\leq r}/V^{\leq r-1} = \operatorname{gr}^r V$ einen kanonischen Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr} V$.

7.7.1.14. Jeder filtrierungsverträgliche Homomorphismus $V \to W$ von filtrierten abelschen Gruppen induziert einen Homomorphismus $\operatorname{gr}\phi : \operatorname{gr} V \to \operatorname{gr} W$ zwischen den assoziierten graduierten Gruppen. Analoges gilt für multilineare Abbildungen. Der Übergang zum assoziierten Graduierten ist in der Terminolgie aus 18.1.6.1 genauer ein Schmelzfunktor, und in der analogen Situation von Vektorräumen über einem Körper k ist er sogar verträglich mit universellen Verschmelzungen, die offensichtlichen Abbildungen sind also etwa im Fall von zwei zu verschmelzenden Objekten Isomorphismen

$$(\operatorname{gr} M) \otimes_k (\operatorname{gr} N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}(M \otimes_k N)$$

In der Tat finden wir in dieser Situation an unsere Filtrierungen angepaßte Basen, mit denen wir diese Behauptung leicht explizit prüfen können.

Übungen

Übung 7.7.1.15. Ist V eine filtrierte abelsche Gruppe und $U \subset V$ eine Untergruppe und betrachten wir auf U und V/U die induzierten Filtrierungen, so erhalten wir mit dem Neunerlemma eine kurze exakte Sequenz

$$\operatorname{gr} U \hookrightarrow \operatorname{gr} V \twoheadrightarrow \operatorname{gr}(V/U)$$

Übung 7.7.1.16. Sei $\phi : V \to W$ ein Homomorphismus filtrierter abelscher Gruppen, der mit den Filtrierungen verträglich ist. Man zeige:

1. Ist die Filtrierung auf W bei Null beginnend und ausschöpfend und ist die assoziierte graduierte Abbildung $\operatorname{gr}\phi : \operatorname{gr} V \to \operatorname{gr} W$ surjektiv, so ist ϕ bereits selbst surjektiv.

2. Ist die Filtrierung auf V Hausdorff und ausschöpfend und ist die assoziierte graduierte Abbildung $\operatorname{gr}\phi : \operatorname{gr} V \to \operatorname{gr} W$ injektiv, so ist ϕ bereits selbst injektiv.

Übung 7.7.1.17. Jede bei Null beginnende und ausschöpfende Filtrierung auf einem Vektorraum kommt von einer Graduierung her.

7.7.2 Filtrierungen von Ringen

7.7.2.1. Benutzt man die oben eingeführten Begriffe für Ringe, so wird stets implizit die Verträglichkeit mit der Multiplikation gefordert. Genauer treffen wir folgende Vereinbarungen.

Definition 7.7.2.2. Eine **Filtrierung** eines Rings A ist eine Filtrierung der additiven Gruppe A derart, daß gilt $A^{\leq r}A^{\leq s} \subset A^{\leq r+s}$ für alle r, s und zusätzlich $1 \in A^{\leq 0}$. Wenn wir besonders betonen wollen, daß wir die Verträglichkeit mit der Ringstruktur fordern, reden wir von einer **Ringfiltrierung**.

7.7.2.3. Die Bedingung $1 \in A^{\leq 0}$ wird benötigt, um sicherzustellen, daß der in 7.7.2.6 erklärte assoziierte graduierte Ring auch in der Tat wieder ein Ring in unserem Sinne ist, also ein Einselement hat. Vom kategoriellen Standpunkt aus liefert sie, was wir in 18.3.1.2 ein „Ringobjekt der Schmelzkategorie der filtrierten abelschen Gruppen“ nennen werden.

7.7.2.4. Sicher ist bei einem filtrierten Ring $A^{\leq 0}$ ein Teilring und alle $A^{\leq n}$ für $n \leq 0$ sind Ideale von $A^{\leq 0}$. Allgemeiner definiert man **filtrierte Moduln** über filtrierten Ringen als Moduln M mit Filtrierung derart, daß gilt $A^{\leq r}M^{\leq s} \subset M^{\leq r+s}$ für alle r, s. Dann sind für jeden filtrierten Modul M alle $M^{\leq n}$ Untermoduln für die Restriktion unseres filtrierten Moduls auf den Teilring $A^{\leq 0}$.

7.7.2.5. Jeder Quotient eines filtrierten Rings ist für die Quotientenfiltrierung wieder ein filtrierter Ring. Jeder Teilring eines filtrierten Rings ist für die induzierte Filtrierung wieder ein filtrierter Ring.

7.7.2.6. Eine Graduierung $A = \bigoplus_r A^r$ eines Rings liefert eine Filtrierung durch $A^{\leq r} = \bigoplus_{\nu \leq r} A^\nu$. Zu jedem filtrierten Ring können wir umgekehrt den **assoziierten graduierten Ring**

$$\operatorname{gr} A = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} A^{\leq r}/A^{\leq r-1}$$

bilden, die Multiplikation auf $\operatorname{gr} A$ wird in der naheliegenden Weise definiert und die Existenz eines Eins-Elements in $\operatorname{gr} A$ folgt aus unserer Bedingung $1 \in A^{\leq 0}$ an einen filtrierten Ring. Kommt die Filtrierung auf dem Ring A schon von einer Graduierung her, so haben wir einen kanonischen Isomorphismus graduierter Ringe $A \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr} A$.

7.7.2.7. Ein Ringhomomorphismus $\phi : A \to B$ von einem filtrierten Ring A in einen filtrierten Ring B, der mit den Filtrierungen verträglich ist, induziert natürlich einen Homomorphismus $\operatorname{gr}\phi : \operatorname{gr} A \to \operatorname{gr} B$ zwischen den assoziierten graduierten Ringen.

7.7.2.8. Analog definiert man **filtrierte Vektorräume** und **filtrierte Algebren**. Bei der Definition einer **filtrierten Ringalgebra** fordert man zusätzlich, daß die

Filtrierung auch im Sinne von 7.7.2.2 mit der zugrundeliegenden Ringstruktur verträglich sein soll, daß also die 1 im Teilraum zu ≤ 0 enthalten ist.

Lemma 7.7.2.9. *Ist A ein Ring mit einer Hausdorff'schen ausschöpfenden Filtrierung, so gilt*

$$(\operatorname{gr} A) \text{ ist Integritätsring} \quad \Rightarrow \quad A \text{ ist Integritätsring}$$

Beweis. In der Tat, seien $a, b \in A \backslash 0$ gegeben. Sind r, s minimal mit $a \in A^{\leq r}$, $b \in A^{\leq s}$, so sind auch die Bilder $\bar{a} \in A^{\leq r}/A^{\leq r-1}$ und $\bar{b} \in A^{\leq s}/A^{\leq s-1}$ von Null verschieden. Ist $\operatorname{gr} A$ ein Integritätsring, so folgt $\bar{a}\bar{b} \neq 0$. Dies Produkt ist aber die Nebenklasse von ab in $A^{\leq r+s}/A^{\leq r+s-1}$, und wenn schon die Nebenklasse von ab nicht verschwindet, so ist erst recht ab selbst von Null verschieden. □

Lemma* 7.7.2.10. *Ist A ein filtrierter Ring und M ein filtrierter A-Modul mit einer bei Null beginnenden und ausschöpfenden Filtrierung, so ist mit $\operatorname{gr} M$ auch M selbst endlich erzeugt und es gilt sogar*

$$(\operatorname{gr} M) \text{ noethersch über } (\operatorname{gr} A) \quad \Rightarrow \quad M \text{ noethersch über } A$$

7.7.2.11. Es reicht nicht, die Filtrierung auf M Hausdorff anzunehmen, wie das Beispiel des $\mathbb{C}[X]$-Moduls $\mathbb{C}[\![X]\!]$ zeigt, mit der Filtrierung beider Strukturen durch die von den verschiedenen X^r erzeugten Ideale.

Beweis. Ist der assoziierte graduierte Modul $\operatorname{gr} M$ endlich erzeugt, so finden wir dafür auch ein endliches Erzeugendensystem aus homogenen Elementen. Wählen wir Urbilder dieser Elemente in M, so erzeugen sie über A einen Untermodul $N \subset M$ mit $\operatorname{gr} N \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr} M$. Mit 7.7.1.15 folgt daraus hinwiederum $\operatorname{gr}(M/N) = 0$ und mit unseren Voraussetzungen an die Filtrierung dann $M/N = 0$, als da heißt unsere Urbilder erzeugen bereits M. Ist schließlich $\operatorname{gr} M$ noethersch, so ist für jeden Untermodul $N \subset M$ der assoziierte Graduierte $\operatorname{gr} N$ endlich erzeugt als Untermodul von $\operatorname{gr} M$, und dann ist auch N selbst endlich erzeugt nach dem, was wir bereits bewiesen haben. □

7.7.3 Dimensionstheorie lokaler noetherscher Kringe

Definition 7.7.3.1. Gegeben ein Ring A und ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ bilden seine Potenzen $\mathfrak{a}^n$ eine absteigende Filtrierung des Rings A, mit der Konvention $\mathfrak{a}^n = A$ für $n \leq 0$. Den assoziierten graduierten Ring notieren wir

$$\operatorname{gr}_{\mathfrak{a}} A := \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{a}^i/\mathfrak{a}^{i+1} = A/\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \oplus \mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^3 \oplus \ldots$$

7.7.3.2. Gegeben ein noetherscher Kring A und $\mathfrak{q} \subset A$ ein Ideal mit $\sqrt{\mathfrak{q}}$ maximal ist $A/\mathfrak{q}$ von endlicher Länge. In der Tat ist ja dann $A/\mathfrak{q}$ ein Kring der Krulldimension Null und wir können 7.4.7.18 anwenden, oder auch den hier einzig relevanten Teil des Beweises erinnern und das Bild von $\sqrt{\mathfrak{q}}$ mit $\mathfrak{m} \subset A/\mathfrak{q}$ notieren und beachten, daß die Subquotienten der Filtrierung $A/\mathfrak{q} \supset \mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^2 \supset \ldots \supset \mathfrak{m}^r$ endliche Länge haben und daß gilt $\mathfrak{m}^r = 0$ für $r \gg 0$.

Satz 7.7.3.3 (Hilbertpolynome im Fall lokaler noetherscher Kringe). *Seien A ein noetherscher lokaler Kring, $\mathfrak{q} \subset A$ ein Ideal mit $\sqrt{\mathfrak{q}}$ dem maximalen Ideal und M ein endlich erzeugter A-Modul. So gilt:*

1. *Es gibt genau ein Polynom $P = \mathrm{P}_M^{\mathfrak{q}} \in \mathbb{Q}[t]$, das für große i die Länge von $M/\mathfrak{q}^i M$ berechnet, in Formeln $\mathrm{l}(M/\mathfrak{q}^i M) = P(i)$ für $i \gg 0$;*

2. *Der Grad $\mathrm{d}_{\mathfrak{q}}(M)$ dieses Polynoms ist beschränkt durch die Kardinalität jedes Erzeugendensystems von $\mathfrak{q}$;*

3. *Für $\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ das maximale Ideal von A haben $\mathrm{P}_M^{\mathfrak{q}}$ und $\mathrm{P}_M^{\mathfrak{m}}$ denselben Grad. Wir nennen ihn die* **Hilbert-Dimension von** *M und notieren ihn*

$$\mathrm{hdim}_A M = \mathrm{hdim}\, M$$

Ergänzung 7.7.3.4. Die Hilbertdimension eines endlich erzeugten Moduls M über einem lokalen noetherschen Kring $(A, \mathfrak{m})$ im Sinne des vorhergehenden Satzes und die Hilbertdimension eines endlich erzeugten graduierten Moduls über einem Polynomring im Sinne von 7.6.9.4 sind mithin verknüpft durch die Beziehung $\mathrm{hdim}(M) = \mathrm{hdim}(\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} M)$. Hilbertdimension $-\infty$ hat nur der Nullmodul, in Formeln

$$\mathrm{hdim}(M) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad M = 0$$

Hilbertdimension Null haben genau alle von Null verschiedenen A-Moduln endlicher Länge.

Beweis. Für $k := A/\mathfrak{q}$ und $x_1, \ldots, x_n$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{q}$ erhalten wir durch $X_i \to \bar{x}_i$ eine Surjektion $k[X_1, \ldots, X_n] \twoheadrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{q}} A$. Die ersten beiden Behauptungen folgen damit aus dem Satz über das Hilbertpolynom 7.6.9.4 oder eigentlich und genauer seiner Erweiterung 7.6.9.5. Die dritte Aussage folgt, da es l gibt mit $\mathfrak{m}^l \subset \mathfrak{q}$ und da folglich gilt $\mathrm{P}_M^{\mathfrak{q}}(i) \geq \mathrm{P}_M^{\mathfrak{m}}(i)$ sowie $\mathrm{P}_M^{\mathfrak{m}}(li) \geq \mathrm{P}_M^{\mathfrak{q}}(i)$ für $i \gg 0$. □

Satz 7.7.3.5 (Hilbertdimension der Kokerne injektiver Endomorphismen). *Seien $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Kring und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter von Null verschiedener A-Modul. Ist $f : M \hookrightarrow M$ ein injektiver Endomorphismus, so gilt*

$$\mathrm{hdim}(\mathrm{cok}\, f) < \mathrm{hdim}\, M$$

7.7.3.6. Der Beweis dieses zentralen Resultats braucht einige Vorbereitungen und wird erst im Anschluß an den Beweis von 7.7.3.10 gegeben. Man bemerke den Kontrast in der Schwierigkeit zwischen dieser Aussage und ihrem graduierten Analogon 7.6.9.10, das Ihnen als Übung aufgegeben war.

Definition 7.7.3.7. Seien A ein Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Eine Filtrierung eines A-Moduls M heißt **$\mathfrak{a}$-stabil**, wenn sie (1) bei M endet, wenn sie (2) mit der Filtrierung von A durch die $\mathfrak{a}^n$ verträglich ist, in Formeln $\mathfrak{a}M^{\geq i} \subset M^{\geq i+1}$ für alle i, und wenn es (3) ein d gibt derart, daß für alle $i \geq d$ sogar gilt $\mathfrak{a}M^{\geq i} = M^{\geq i+1}$.

Lemma 7.7.3.8 (**Vergleich stabiler Filtrierungen**). *Gegeben ein Ring A und ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ und ein A-Modul M sind je zwei $\mathfrak{a}$-stabile Filtrierungen Ω und Γ auf M in der Weise vergleichbar, daß es c gibt mit $\Gamma^{\geq i+c}M \subset \Omega^{\geq i}M$ für alle i.*

Beweis. Es reicht, das unter der Annahme zu zeigen, daß eine unserer Filtrierungen die offensichtliche Filtrierung durch die $\mathfrak{a}^i M$ ist. Wir können also unsere Notation vereinfachen und die andere Filtrierung $M^{\geq i}$ notieren. Nach Annahme gibt es ein c mit $M = M^{\geq -c}$ und dann haben wir notwendig $\mathfrak{a}^i M \subset M^{\geq -c+i}$ für alle i. Nach Annahme gibt es aber auch ein d mit $M^{\geq i+d} = \mathfrak{a}^i M^{\geq d}$ für alle $i \geq 0$ und somit $M^{\geq i+d} \subset \mathfrak{a}^i M$ für alle i. □

Proposition 7.7.3.9 (**Von stabilen Filtrierungen induzierte Filtrierungen**). *Seien A ein noetherscher Kring, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter A-Modul. So ist die von einer $\mathfrak{a}$-stabilen Filtrierung von M auf einem Untermodul $N \subset M$ induzierte Filtrierung auch selbst wieder $\mathfrak{a}$-stabil.*

Beweis. Wir erinnern aus dem Beweis von 7.4.6.13 die Konstruktion des Reesrings $\bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{a}^n$ und den Nachweis, daß dieser Ring im Fall eines Ideals $\mathfrak{a}$ eines noetherschen Krings wieder noethersch ist. Es ist leicht zu sehen, wie $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M^{\geq n}$ im Fall einer mit der Filtrierung von A durch die $\mathfrak{a}^i$ verträglichen Filtrierung von M ein Modul über dem Reesring wird, und daß dieser Modul im Fall einer $\mathfrak{a}$-stabilen Filtrierung von M sogar endlich erzeugt alias noethersch sein muß. Dasselbe folgt für den zu seinem Untermodul mit der induzierten Filtrierung $N^{\geq n} := N \cap M^{\geq n}$ gebildeten Modul $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} N^{\geq n}$ über dem Reesring. Daraus, daß dieser Modul endlich erzeugt ist, folgt dann, daß die induzierte Filtrierung auch $\mathfrak{a}$-stabil ist: Ist genauer g der größte Grad für ein Element eines homogenen Erzeugendensystems von $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} N^{\geq n}$ über dem Reesring, so folgt $\mathfrak{a}N^{\geq i} = N^{\geq i+1}$ für alle $i \geq g$. □

7.7.3.10 (**Multiplizitäten im Fall lokaler noetherscher Kringe**). Seien $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Kring, $\mathfrak{q} \subset A$ ein Ideal mit $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$ und M ein endlich

erzeugter A-Modul. Für alle $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-\infty\}$ erklären wir im folgenden einen Wert $\operatorname{mult}_{\mathfrak{q}}^d(M) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$. Für $d \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\operatorname{mult}_{\mathfrak{q},A}^d(M) = \operatorname{mult}_{\mathfrak{q}}^d(M) := \lim_{i \to \infty} \mathrm{l}(M/\mathfrak{q}^i M) d!/i^d$$

und folgern aus der Existenz der Hilbertpolynoms wie im graduierten Fall 7.6.9.7, daß dieser Grenzwert stets in $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ existiert. Für $d = -\infty$ vereinbaren wir ergänzend $\operatorname{mult}_{\mathfrak{q}}^{-\infty}(M) = 0$ falls $M = 0$ und $\operatorname{mult}_{\mathfrak{q}}^{-\infty}(M) = \infty$ sonst. Für M von der Hilbertdimension $h = \operatorname{hdim} M$ mit a_h dem Leitkoeffizienten des Hilbertpolynoms $\mathrm{P}_M^{\mathfrak{q}}$ von M finden wir dann

$$\operatorname{mult}_{\mathfrak{q}}^d(M) = \begin{cases} 0 & d > h; \\ h! a_h & d = h \geq 0; \\ 0 & d = h = -\infty; \\ \infty & d < h. \end{cases}$$

Wir nennen unser $\operatorname{mult}_{\mathfrak{q}}^d(M) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ die **d-$\mathfrak{q}$-Multiplizität von** M. Mit diesen Konventionen haben wir stets

$$\operatorname{mult}_{\mathfrak{q}}^0(M) = \text{Länge}(M)$$

Lassen wir in unserer Notation $\mathfrak{q}$ weg, so meinen wir $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$. Lassen wir den oberen Index d weg, so meinen wir $d = \operatorname{hdim}(M)$. Die **Multiplizität von** M erklären wir insbesondere als

$$\operatorname{mult}(M) := \operatorname{mult}_{\mathfrak{m}}^d(M)$$

für $d = \operatorname{hdim}(M)$. Die Multiplizität eines lokalen noetherschen Krings A als A-Modul heißt die **Multiplizität von** A. Ist speziell (X, x) eine bepunktete Varietät, so setzen wir

$$\operatorname{mult}_x(X) := \operatorname{mult} \mathcal{O}_{X,x}$$

und nennen diese Zahl die **Multiplizität von** X **an der Stelle** x.

7.7.3.11 (**Permanenzen von Multiplizität und Hilbertdimension**). Ist A ein lokaler noetherscher Kring und B ein von Null verschiedener Quotient von A und M ein B-Modul, so stimmen die Multiplizitäten von M als B-Modul und die Hilbertdimension offensichtlich überein mit den Multiplizitäten und der Hilbertdimension von M als A-Modul, in Bezug auf die maximalen Ideale ebenso wie in Bezug auf ein allgemeines Ideal in B mit maximalem Radikal und dessen Urbild, in Formeln $\operatorname{mult}_{\mathfrak{q},A}^d(M) = \operatorname{mult}_{\bar{\mathfrak{q}},B}^d(M)$ und $\operatorname{hdim}_A(M) = \operatorname{hdim}_B(M)$.

Proposition 7.7.3.12 (Additivität der Multiplizitäten im Fall lokaler Kringe). *Seien $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Kring, $\mathfrak{q} \subset A$ ein Ideal mit $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$ maximal und $N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow Q$ eine kurze exakte Sequenz von endlich erzeugten A-Moduln. So gilt $\operatorname{hdim}(M) = \max(\operatorname{hdim}(N), \operatorname{hdim}(Q))$ für die Hilbertdimensionen und für alle $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-\infty\}$ haben wir*

$$\operatorname{mult}_{\mathfrak{q}}^d(M) = \operatorname{mult}_{\mathfrak{q}}^d(N) + \operatorname{mult}_{\mathfrak{q}}^d(Q)$$

Beweis. Wir betrachten das Diagramm mit exakten Spalten

$$\begin{array}{ccccc}
N \cap \mathfrak{q}^i M & \hookrightarrow & \mathfrak{q}^i M & \twoheadrightarrow & \mathfrak{q}^i Q \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
N & \hookrightarrow & M & \twoheadrightarrow & Q \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
N/(N \cap \mathfrak{q}^i M) & \hookrightarrow & M/\mathfrak{q}^i M & \twoheadrightarrow & Q/\mathfrak{q}^i Q
\end{array}$$

Seine beiden oberen Zeilen sind exakt, also nach dem Neunerlemma auch die untere Zeile. Sie liefert die Relation

$$\mathrm{l}(M/\mathfrak{q}^i M) = \mathrm{l}(N/(N \cap \mathfrak{q}^i M)) + \mathrm{l}(Q/\mathfrak{q}^i Q)$$

Nun bilden jedoch die $N \cap \mathfrak{q}^i M$ nach 7.7.3.9 auch eine $\mathfrak{q}$-stabile Filtrierung von N, folglich gibt es ein Polynom $\tilde{\mathrm{P}}_N(t)$ mit $\mathrm{l}(N/(N \cap \mathfrak{q}^i M)) = \tilde{\mathrm{P}}_N(i)$ für $i \gg 0$. Hier und im folgenden lassen wir der Übersichtlichkeit halber das $\mathfrak{q}$ aus der Notation weg. Es folgt die Identität von Polynomen

$$\mathrm{P}_M(t) = \tilde{\mathrm{P}}_N(t) + \mathrm{P}_Q(t)$$

Nach 7.7.3.8 gibt es jedoch c mit $\mathrm{P}_N(i+c) \geq \tilde{\mathrm{P}}_N(i) \geq \mathrm{P}_N(i-c)$ für $i \gg 0$, folglich haben P_N und $\tilde{\mathrm{P}}_N$ denselben Grad und, wenn sie nicht Null sind, denselben Leitkoeffizienten. Daraus folgt unsere Behauptung dann unmittelbar. □

Beweis von Satz 7.7.3.5. Seien A ein lokaler noetherscher Ring und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter von Null verschiedener A-Modul. Gegeben ein injektiver Homomorphismus $f : M \hookrightarrow M$ behauptet unser Satz 7.7.3.5 die strikte Ungleichung $\operatorname{hdim}(\operatorname{cok} f) < \operatorname{hdim} M$. Um sie zu zeigen, betrachten wir die kurze exakte Sequenz $M \hookrightarrow M \twoheadrightarrow \operatorname{cok} f$. Wegen $M \neq 0$ haben wir $d = \operatorname{hdim} M \geq 0$. So folgt aus 7.7.3.12 sofort $\operatorname{mult}_{\mathfrak{m}}^d(\operatorname{cok} f) = 0$ und damit die Behauptung. □

Satz* 7.7.3.13 (Multiplizitäten der Kokerne von Multiplikationen). *Seien ein lokaler noetherscher Kring $(A, \mathfrak{m})$ und ein endlich erzeugter A-Modul M gegeben. Für $d \geq 1$ und $\mathfrak{q} \subset A$ ein Ideal mit $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$ und $x \in \mathfrak{q}^r$ gilt dann*

$$\operatorname{mult}_{\mathfrak{q}}^{d-1}(M/xM) \geq r \operatorname{mult}_{\mathfrak{q}}^d(M)$$

7.7.3.14. Wir verwenden hier unsere allgemeine Konvention $0 \cdot \infty = 0$.

7.7.3.15. Unser Satz liefert insbesondere für alle $x \in \mathfrak{m}$ und M von positiver Hilbertdimension die Abschätzung $\operatorname{hdim}(M/xM) \geq \operatorname{hdim}(M) - 1$. Wissen wir zusätzlich, daß die Multiplikation mit x eine Injektion $(x\cdot) : M \hookrightarrow M$ induziert, so erhalten wir zusammen mit der umgekehrten Abschätzung 7.7.3.5 sogar die Identität

$$\operatorname{hdim}(M/xM) = \operatorname{hdim}(M) - 1$$

Beweis. Für den Untermodul $N := xM$ finden wir $\mathfrak{q}^i xM \subset xM \cap \mathfrak{q}^{i+r}M$ und folglich die zweite Unleichung der Kette

$$\mathrm{l}(M/\mathfrak{q}^i M) \geq \mathrm{l}(xM/\mathfrak{q}^i xM) \geq \mathrm{l}(xM/(xM \cap \mathfrak{q}^{i+r}M))$$

Die erste dieser Ungleichungen ist klar, weil die Multiplikation mit x eine Surjektion des ersten Quotienten auf den zweiten induziert. In den Notationen des Beweises von 7.7.3.12 haben wir für $i \geq 0$ also $\mathrm{P}_M(i) \geq \tilde{\mathrm{P}}_{xM}(i+r)$ und aus unserer Identität von Polynomen $\mathrm{P}_M(t) = \tilde{\mathrm{P}}_{xM}(t) + \mathrm{P}_{M/xM}(t)$ folgt

$$\mathrm{P}_{M/xM}(i) = \mathrm{P}_M(i) - \tilde{\mathrm{P}}_{xM}(i) \geq \mathrm{P}_M(i) - \mathrm{P}_M(i-r)$$

für $i \geq r$. Jetzt unterscheiden wir den Fall $M = 0$, in dem unsere Behauptung eh klar ist, und den Fall $M \neq 0$, was wir hinfort annehmen. Ist dann $a_d t^d$ der Leitterm von $\mathrm{P}_M(t)$, so ergibt sich der Leitterm von $\mathrm{P}_M(t) - \mathrm{P}_M(t-r)$ zu $rda_d t^{d-1}$ und unsere Behauptung folgt leicht im Fall $r \neq 0$. Der Fall $r = 0$ ist aber in unseren Konventionen eh unproblematisch, da alle unsere Multiplizitäten ≥ 0 sind. □

Definition 7.7.3.16. Gegeben ein lokaler noetherscher Kring heißt die kleinstmögliche Anzahl von Elementen unseres Krings, deren Idealerzeugnis das maximale Ideal unseres Krings zum Radikal hat, seine **Einbettungsdimension**.

7.7.3.17 (**Geometrische Bedeutung der Einbettungsdimension**). Im geometrischen Fall des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ einer affinen k-Varietät ist die Einbettungsdimension das kleinste n derart, daß es eine offene Umgebung U von x und einen Morphismus $U \to k^n$ gibt, für den x ein isolierter Punkt seiner Faser ist.

Satz 7.7.3.18 (**Hauptsatz zur Dimension lokaler noetherscher Kringe**). *Gegeben ein lokaler noetherscher Kring stimmen seine Hilbertdimension, seine Krulldimension und seine Einbettungsdimension überein.*

7.7.3.19. Speziell hat jeder lokale noethersche Kring endliche Krulldimension, ja die Zahl der für sein maximales Ideal benötigten Erzeuger ist eine obere Schranke für seine Krulldimension.

Beweis. Sei A unser lokaler noetherscher Kring. Wir notieren $\delta(A)$ die Einbettungsdimension. Zum Beweis zeigen wir $\delta(A) \leq \operatorname{kdim}(A) \leq \operatorname{hdim}(A) \leq \delta(A)$. Die Abschätzung $\operatorname{hdim}(A) \leq \delta(A)$ folgt unmittelbar aus unserem Satz 7.7.3.3 über Hilbertpolynome lokaler noetherscher Kringe. Die Abschätzung $\operatorname{kdim}(A) \leq \operatorname{hdim}(A)$ zeigen wir durch Induktion über $\operatorname{hdim}(A)$. Im Fall $\operatorname{hdim}(A) = 0$ stagniert die Folge der Ideale $\mathfrak{m}^n$ und nach dem Lemma von Nakayama 7.4.6.12 stagniert sie bei Null. Folglich umfaßt jedes Primideal unser $\mathfrak{m}$ und damit ist $\mathfrak{m}$ das einzige Primideal und die Krulldimension ist Null. Für den Induktionsschritt sei

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_l$$

eine Primidealkette in A. Im Integritätsbereich $\bar{A} := A/\mathfrak{p}_0$ betrachten wir das Bild $\bar{\mathfrak{p}}_1 \subset \bar{A}$ von $\mathfrak{p}_1$ und wählen $x \in \bar{\mathfrak{p}}_1 \backslash 0$. Die kurze exakte Sequenz

$$\bar{A} \overset{x\cdot}{\hookrightarrow} \bar{A} \twoheadrightarrow \bar{A}/\bar{A}x$$

zeigt mit 7.7.3.5 sofort $\operatorname{hdim}(\bar{A}/\bar{A}x) < \operatorname{hdim} \bar{A}$, und $\operatorname{hdim} \bar{A} \leq \operatorname{hdim} A$ ist eh klar. Aus der Induktionsannahme folgt so, dass die Primidealkette $\bar{\mathfrak{p}}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \bar{\mathfrak{p}}_l$ in $\bar{A}/\bar{A}x$ der Bilder der $\mathfrak{p}_i$ in $\bar{A}/\bar{A}x$ höchstens die Länge $l-1 \leq \operatorname{hdim} A - 1$ haben kann. Es bleibt $\delta(A) \leq \operatorname{kdim} A$ zu zeigen. Wir argumentieren mit Induktion über $\delta(A)$. Im Fall $\delta(A) = 0$ ist $\mathfrak{m} = \sqrt{0}$ das Nilradikal und wir finden $\operatorname{kdim} A = 0$. Gilt sonst $\delta(A) > 0$, so ist $\mathfrak{m}$ kein minimales Primideal von A und nach 7.4.5.23 gibt es nur endlich viele minimale Primideale in A und nach 7.4.2.14 können sie $\mathfrak{m}$ nicht überdecken. Es gibt also ein Element $x \in \mathfrak{m}$, das in keinem minimalen Primideal enthalten ist. Wir setzen $\bar{A} := A/Ax$ und finden $\delta(\bar{A}) = \delta(A) - 1$ und, da nach 7.4.5.9 jedes Primideal stets ein minimales Primideal umfaßt, auch $\operatorname{kdim} \bar{A} \leq \operatorname{kdim} A - 1$. Die Behauptung folgt mit vollständiger Induktion. □

Korollar 7.7.3.20 (Abschätzung für die Krulldimension lokaler Kringe). *Gegeben ein lokaler noetherscher Kring A mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ gilt stets*

$$\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \geq \operatorname{kdim} A$$

Beweis. Jedes Repräsentantensystem eines Erzeugendensystem des $A/\mathfrak{m}$-Vektorraums $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ erzeugt nach Nakayama bereits das Ideal $\mathfrak{m}$ als Ideal von A. Damit erweist sich unsere Behauptung als Konsequenz der Aussage $\delta(A) = \operatorname{kdim} A$ aus dem Hauptsatz der Dimensionstheorie 7.7.3.18. □

Korollar 7.7.3.21 (Verallgemeinerter Krull'scher Hauptidealsatz). *Gegeben ein noetherscher Kring R gilt für die Höhe jedes Primideals $\mathfrak{p} \subset R$, das vorgegebene Elemente $f_1, \ldots, f_s$ von R enthält und minimal ist unter allen Primidealen mit dieser Eigenschaft, die Abschätzung $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \leq s$.*

Beweis. Im lokalen Kring $R_\mathfrak{p}$ muß $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ das Radikal des von $f_1, \ldots, f_s$ erzeugten Ideals sein. Damit erweist sich unsere Behauptung als Konsequenz der Aussage $\delta(A) = \operatorname{kdim} A$ aus dem Hauptsatz der Dimensionstheorie 7.7.3.18. □

Definition 7.7.3.22. Gegeben ein lokaler noetherscher Kring $(A, \mathfrak{m})$ versteht man unter einem **Parametersystem von** A eine Familie $x_1, \ldots, x_d$ von $d = \operatorname{kdim} A$ Elementen des maximalen Ideals $\mathfrak{m}$ mit der Eigenschaft, daß das Radikal des von ihnen erzeugten Ideals gerade das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ selbst ist. Die Existenz solcher Parametersysteme folgt aus dem Hauptsatz der Dimensionstheorie 7.7.3.18.

Proposition 7.7.3.23 (Parametersysteme sind algebraisch unabhängig). *Besitzt ein lokaler noetherscher Kring $(A, \mathfrak{m})$ einen Unterkörper $k \subset A$ mit $k \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}$ unter der natürlichen Abbildung und ist $x_1, \ldots, x_d$ ein Parametersystem von A, so sind die x_i algebraisch unabhängig über k.*

Beweis. Ist $\mathfrak{q}$ das Erzeugnis der x_i, so liefern die offensichtlichen Abbildungen Homomorphismen

$$k[X_1, \ldots, X_d] \hookrightarrow (A/\mathfrak{q})[X_1, \ldots, X_d] \twoheadrightarrow \operatorname{gr}_\mathfrak{q} A$$

von graduierten Ringen. Wäre die Komposition nicht injektiv, so gäbe es ein von Null verschiedenes homogenes Polynom in ihrem Kern. Dies Element müßte auch in der Mitte kürzbar sein, da die erste Abbildung offensichtlich von Null verschiedene Polynome auf kürzbare Elemente abbildet, und mit Übung 7.6.9.10 über Kokerne homogener Selbstinjektionen folgte $\operatorname{hdim} A < d$ im Widerspruch zu unseren Annahmen. Also liefert die Komposition eine Injektion $k[X_1, \ldots, X_d] \hookrightarrow \operatorname{gr}_\mathfrak{q} A$. Mit Übung 7.7.1.16 folgt, daß die offensichtliche Abbildung bereits eine Injektion $k[X_1, \ldots, X_d] \hookrightarrow A$ gewesen sein muß. □

Übungen

Übung 7.7.3.24. $(k = \bar{k})$. Man zeige: Gegeben $I \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ ein homogenes Ideal mit nichtleerer projektiver Nullstellenmenge $\mathcal{Z}^*(I) \neq \emptyset$ alias unendlicher Kodimension ist die Hilbertdimension des Restklassenrings genau um Eins größer als die Krulldimension der projektiven Nullstellenmenge, in Formeln

$$\operatorname{hdim}(k[T_0, \ldots, T_n]/I) = \operatorname{kdim} \mathcal{Z}^*(I) + 1$$

Hinweis: Hauptsatz 7.7.3.18 zur Dimension lokaler noetherscher Kringe.

Übung 7.7.3.25. Gegeben $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Kring der Dimension d und Elemente $f_1, \ldots, f_d \in A$ mit $f_i \in \mathfrak{m}^{r(i)}$ gilt die Abschätzung

$$\operatorname{l}(A/\langle f_1, \ldots, f_d \rangle) \geq r(1) \ldots r(d) \operatorname{mult}(A)$$

Hinweis: 7.7.3.13 und vollständige Induktion und Interpretation der Länge als Multiplizität.

Übung 7.7.3.26. Gegeben ein lokaler noetherscher Kring A und ein Parametersystem $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ zeige man für jedes s mit $0 \leq s \leq d$ für die Krulldimension des Quotienten nach einem Teil der Parameter die Identität

$$\operatorname{kdim}(A/\langle x_1, \ldots, x_s \rangle) = d - s$$

Hinweis: Für jeden lokalen noetherschen Kring B gilt $\operatorname{kdim} B = \delta(B)$.

7.7.4 Glattheit und Regularität

Definition 7.7.4.1. $(k = \bar{k})$. Eine algebraische Teilmenge $X \mathrel{\not\subset} k^n$ heißt **glatt an der Stelle** $x \in X$, wenn es $f_1, \ldots f_r \in k[T_1, \ldots, T_n]$ und eine Umgebung $U \mathrel{\circ\!\!\subset} k^n$ von x gibt derart, daß $X \cap U = \mathcal{Z}(f_1, \ldots f_r) \cap U$ die simultane Nullstellenmenge der f_i in U ist und daß die Gradienten der f_i bei x linear unabhängig sind.

7.7.4.2. Mit **Gradienten** meinen wir hier wie in der Analysis die Vektoren

$$(\operatorname{grad} f)(x) := ((\partial f / \partial T_\nu)(x)) \in k^n$$

Es wird erst später klar werden, daß die obige Bedingung nur von der bepunkteten affinen Varietät (X, x) und nicht von ihrer Einbettung in einen k^n abhängt. Wenn ich im Verlauf der folgenden Argumentation besonders betonen will, daß die Bedingung wie oben in Bezug auf eine explizit vorgegebene Einbettung verstanden werden soll, nenne ich X **extrinsisch glatt an der Stelle** x. Es ist klar und die Aussage von Übung 7.7.4.26, daß die extrinsisch glatten Punkte von $X \mathrel{\not\subset} k^n$ eine offene Teilmenge von X bilden. Was an dieser Stelle fehlt, ist der Nachweis, daß die glatten Stellen sogar eine dichte offene Teilmenge bilden. Das wird erst in 7.7.5.5 bewiesen, wobei wir im Fall eines Grundkörpers positiver Charakteristik zusätzlich Resultate aus [AAG] benötigen.

7.7.4.3 (**Generische Glattheit von Hyperflächen**). $(k = \bar{k})$. Für ebene Kurven $C \mathrel{\not\subset} k^2$ können wir auch hier schon einsehen, daß ihre glatten Punkte eine offene dichte Teilmenge bilden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir sie ja irreduzibel annehmen, also $C = \mathcal{Z}(f)$ für ein irreduzibles Polynom $f \in k[X, Y]$. Für so ein Polynom können auch in positiver Charakteristik $p > 0$ die partiellen Ableitungen $\partial_x f$ und $\partial_y f$ nicht beide identisch verschwinden, sonst gäbe es ein Polynom g mit $f(X, Y) = g(X^p, Y^p)$ und mit Ziehen der p-ten Wurzeln aus den Koeffizienten von g auch ein h mit $h^p = f$ im Widerspruch zur Irreduzibilität. Gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\partial_x f \neq 0$, so sind f und $\partial_x f$ teilerfremd und haben folglich höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen. In derselben Weise zeigt man, daß in jeder Hyperfläche $X \mathrel{\not\subset} k^n$ die glatten Punkte dicht liegen.

7.7.4.4 (**Beziehung zum Begriff einer Mannigfaltigkeit**). $(k = \bar{k})$. Die Motivation für die Begiffsbildung „glatter“ algebraischer Teilmengen kommt von der

Beschreibung 12.3.2.20 von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ als Urbilder her. Die verschiedenen äquivalenten Beschreibungen von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ als Bilder 12.3.4.1 sowie als „lokal plättbare Teilmengen“ 12.3.2.6 haben in der algebraischen Geometrie keine unmittelbaren Analoga, da der Satz über implizite Funktionen **??** im Fall der Zariskitopologie für Morphismen von Varietäten nicht mehr gilt. Bereits in einer Variablen gilt ja der Satz über die Umkehrabbildung in dieser Situation nicht mehr, wie das Beispiel der Abbildung $k \to k$, $x \mapsto x^2$ zeigt. Später mögen Sie lernen, wie es gelingt, diese Schwierigkeiten durch die Einführung der sogenannten „étalen Topologie“, die allerdings im engeren Sinne unserer Definition 11.1.1.5 gar keine Topologie ist, sozusagen „wegzudefinieren“.

7.7.4.5 (**Diskussion von Varianten der Definition**). $(k = \bar{k})$. In der Literatur ist auch eine andere Definition des Begriffs einer extrinsisch glatten Stelle gebräuchlich: Gegeben $X \not\subset k^n$ heißt danach eine Stelle $x \in X$ glatt, wenn der von den Gradienten bei x der Funktionen $f \in \mathcal{I}(X)$, als da heißt von den Vektoren $(\operatorname{grad} f)(x) := ((\partial f/\partial T_i)(x)) \in k^n$ für $f \in \mathcal{I}(X)$ aufgespannte Teilraum die Dimension $n - \operatorname{kdim} \mathcal{O}_{X,x}$ hat. Diese Definition ist aber zu schwach, um Übung 7.7.4.28 zu lösen, nach der die glatten Punkte einer äqui-d-dimensionalen algebraischen Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ eine glatte reell $2d$-dimensionale Untermannigfaltigkeit bilden. Die Äquivalenz beider Definitionen zeigen wir in 7.7.4.13.

7.7.4.6 (**Intrinsische Natur der Glattheit**). $(k = \bar{k})$. Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, daß unsere Definition glatter Punkte in der Weise „intrinsisch“ ist, daß gegeben ein Isomorphismus $\varphi : X \xrightarrow{\sim} Y$ in der Kategorie 7.3.2.5 der algebraischen Teilmengen irgendwelcher k^n unser X glatt ist bei $x \in X$ genau dann, wenn Y glatt ist bei $\varphi(x) \in Y$.

Definition 7.7.4.7. Ein lokaler Kring A heißt **regulär**, wenn er noethersch ist und wenn für sein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ gilt

$$\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \operatorname{kdim} A$$

Eine Familie von Elementen $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$, deren Nebenklassen eine Basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ bilden, heißt dann ein **reguläres Parametersystem von** A.

Beispiel 7.7.4.8. Für alle Primzahlen p ist die Lokalisierung $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ an dem von p erzeugten Primideal ein regulärer lokaler Kring. Für jeden Körper k und jeden Punkt $x \in k^n$ ist der lokalisierte Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]_{\mathcal{I}(x)}$ regulär.

Satz 7.7.4.9 (**Assoziierte graduierte regulärer lokaler Kringe**). *Jeder reguläre lokale Kring ist ein Integritätsring und der assoziierte graduierte Ring zu seiner Filtrierung durch die Potenzen des maximalen Ideals ist ein Polynomring.*

Beweis. Für jeden regulären lokalen Kring $(A, \mathfrak{m})$ der Dimension d und jedes reguläre Parametersystem $x_1, \ldots, x_d$ muß die offensichtliche durch $X_i \mapsto \bar{x}_i$ gegebene Surjektion ein Isomorphismus

$$(A/\mathfrak{m})[X_1, \ldots, X_d] \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A$$

sein, denn sonst folgte wie beim Beweis von 7.7.3.23 aus Übung 7.6.9.10 zu Kokernen homogener Selbstinjektionen bereits die Abschätzung $\operatorname{hdim} A < d$. Die Filtrierung durch die $\mathfrak{m}^i$ ist jedoch Hausdorff nach dem Durchschnittssatz 7.4.6.14. Da der assoziierte graduierte Ring ein Integritätsring ist, folgt dasselbe mit 7.7.2.9 für A selber. □

Satz 7.7.4.10 (Reguläre Quotienten regulärer lokaler Kringe). *Seien $(A, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Kring und $I \subset A$ ein Ideal. So sind gleichbedeutend:*

1. *Der Quotient A/I nach unserem Ideal ist ein regulärer lokaler Kring;*
2. *Unser Ideal I wird von einer Teilmenge eines regulären Parametersystems des regulären lokalen Krings A erzeugt.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Ist A/I lokal, so folgt $A \neq I$ und mithin $I \subset \mathfrak{m}$. Wir vereinbaren die Abkürzungen $A/I =: \bar{A}$ und $\mathfrak{m}/I =: \bar{\mathfrak{m}}$ und betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
I \cap \mathfrak{m}^2 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathfrak{m}^2 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \bar{\mathfrak{m}}^2 \arrow[d, hook] \\
I \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & \mathfrak{m} \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \bar{\mathfrak{m}} \arrow[d, two heads] \\
I/(I \cap \mathfrak{m}^2) \arrow[r, hook] & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \arrow[r, two heads] & \bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen und Spalten, bei dem die Exaktheit der unteren Zeile aus dem Neunerlemma folgt. Sei d die Krulldimension von A und $\bar{d}$ die Krulldimension von $\bar{A}$ und $s = d - \bar{d}$. Wir finden sicher Elemente $f_1, \ldots, f_s \in I$, deren Bilder den Kern in der unteren Zeile erzeugen. Für den Quotienten $\tilde{A} := A/\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ nach dem von ihnen erzeugten Ideal mit seinem maximalen Ideal $\tilde{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}/\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ erhalten wir dann $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \twoheadrightarrow \tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2 \twoheadrightarrow \bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2$ und nach Wahl der f_i ist die Zweite dieser Abbildungen ein Isomorphismus und wir erhalten

$$\operatorname{kdim} \tilde{A} \leq \dim_{\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{m}}} \tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2 = \dim_{\bar{A}/\bar{\mathfrak{m}}} \bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2 = \operatorname{kdim} \bar{A} \leq \operatorname{kdim} \tilde{A}$$

mit ersten Abschätzung nach Korollar 7.7.3.20 des Hauptsatzes der Dimensionstheorie und der letzten aufgrund der Surjektion $\tilde{A} \twoheadrightarrow \bar{A}$. Zusammen folgt, daß auch $\tilde{A}$ regulär ist und mithin nach 7.7.4.9 ein Integritätsbereich. Wäre der Kern

von $\tilde{A} \twoheadrightarrow \bar{A}$ nicht Null, so müßte er ein Primideal ungleich Null sein und unsere Kringe könnten nicht dieselbe Krulldimension haben. Das zeigt $\tilde{A} \xrightarrow{\sim} \bar{A}$ und damit $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$.

$2 \Rightarrow 1$. Sei $f_1, \ldots, f_d \in \mathfrak{m}$ ein reguläres Parametersystem. Es gilt zu zeigen, daß für alle s auch $\bar{A} := A/\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ ein regulärer lokaler Kring ist. Nun liefert Übung 7.7.3.26 uns die Identität $\operatorname{kdim}(\bar{A}) = \operatorname{kdim}(A) - s$ und die Identität $\dim_{\bar{A}/\bar{\mathfrak{m}}}(\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2) = \dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) - s$ ist leicht zu sehen. □

Definition 7.7.4.11. Ein Punkt x einer algebraischen Varietät X heißt ein **regulärer Punkt von** X oder gleichbedeutend ein **glatter Punkt von** X, wenn der Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ der Funktionskeime bei x ein regulärer lokaler Ring ist. Ein Punkt, der nicht regulär ist, heißt **singulär**.

7.7.4.12. Ich erinnere daran, daß in unserer Terminologie Varietäten stets über einem algebraisch abgeschlossenen Körper definiert sind. Verallgemeinert man die Definitionen auf den Fall beliebiger Grundkörper, so ist das Analogon der extrinsischen Glattheit stärker als die lokale Regulärität, vergleiche 7.7.4.25.

Korollar 7.7.4.13 (Regularität und Glattheit). $(k = \bar{k})$. *Eine algebraische Teilmenge $X \not\subset k^n$ ist genau dann extrinsisch glatt an einer Stelle $x \in X$, wenn der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär ist.*

7.7.4.14. Mit der in der Literatur üblichen Definition glatter Stellen, wie sie in 7.7.4.5 erklärt wird, ist dieses Korollar fast eine Tautologie. Wie in 7.7.4.5 ausgeführt wird, macht es die in der Literatur übliche Definition aber mühsam, die Brücke zur Analysis und damit zur Anschauung zu schlagen.

Beweis. Wir wenden Satz 7.7.4.10 über reguläre Quotienten regulärer lokaler Kringe an auf die Lokalisierung $\mathcal{O}_{k^n,x} = \mathcal{O}(k^n)_{\mathcal{I}(x)}$ des Polynomrings nach allen bei x nicht verschwindenden Polynomen und seinen Quotienten $\mathcal{O}_{X,x}$ nach der Lokalisierung $I := \mathcal{I}(X)_{\mathcal{I}(x)}$ des Verschwindungsideals von X. Das maximale Ideal von $\mathcal{O}(k^n)_{\mathcal{I}(x)}$ notiere wir $\mathfrak{m} := \mathcal{I}(x)_{\mathcal{I}(x)}$. Das Auswerten $f \mapsto (\operatorname{grad} f)(x)$ des Gradienten an der Stelle x liefert einen Vektorraumisomorphismus

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\sim} k^n$$

Ein reguläres Parametersystem von $\mathcal{O}_{k^n,x}$ ist folglich dasselbe wie ein System von Funktionskeimen $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_{k^n,x}$ mit $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$ derart, daß ihre Gradienten bei x eine Basis des k^n bilden. Ist $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{k^n,x}/I$ regulär, so kann I nach 7.7.4.10 erzeugt werden von einem Teil eines regulären Parametersystems, also von bei x verschwindenden Funktionskeimen mit linear unabhängigen Gradienten bei x. Beliebig gewählte Repräsentanten dieser Funktionskeime erzeugen dann auch $\mathcal{I}(X)_g$ für eine geeignet gewählte Funktion $g \in k[T_1, \ldots, T_n]$ mit

$g(x) \neq 0$ und damit ist X extrinsisch glatt bei x. Ist umgekehrt X extrinsisch glatt bei x, so gibt es Funktionen $f_1, \ldots, f_s \in \mathcal{O}(k^n)$ mit linear unabhängigen Gradienten an der Stelle x und eine weitere reguläre Funktion $g \in \mathcal{O}(k^n)$ mit $g(x) \neq 0$ und

$$X \cap \{g \neq 0\} \quad = \quad \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_s) \cap \{g \neq 0\}$$

Die f_i müssen im lokalen Ring bei x bereits ein Primideal erzeugen, da der Quotient nach $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle_{\mathcal{I}(x)}$ ja nach 7.7.4.10 ein regulärer lokaler Ring und folglich nach 7.7.4.9 ein Integritätsring ist. Andererseits folgt aus unseren Annahmen $\mathcal{I}(X)_g = \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_s \rangle_g}$ in der Lokalisierung $\mathcal{O}(k^n)_g$. Da das Bilden des Radikals nach Übung 7.4.3.56 mit Lokalisierung vertauscht und da jedes Primideal bereits sein eigenes Radikal ist, folgt

$$\mathcal{I}(X)_{\mathcal{I}(x)} = \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_s \rangle_{\mathcal{I}(x)}} = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle_{\mathcal{I}(x)}$$

Der Quotient von $\mathcal{O}_{k^n,x} = \mathcal{O}(k^n)_{\mathcal{I}(x)}$ nach $\mathcal{I}(X)_{\mathcal{I}(x)}$ ist nun isomorph zum lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ und damit ist dieser lokale Ring nach 7.7.4.10 regulär. □

Definition 7.7.4.15. Eine Varietät heißt **glatt**, wenn sie glatt alias regulär ist an jeder Stelle.

Korollar 7.7.4.16 (Lokale Irreduzibilität bei glatten Stellen). *Ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ einer bepunkteten affinen Varietät (X, x) regulär, so geht durch den Punkt x nur genau eine irreduzible Komponente von X.*

7.7.4.17. Insbesondere ist jede glatte Varietät die disjunkte Vereinigung ihrer irreduziblen Komponenten.

Beweis. Ginge mehr als nur eine irreduzible Komponente von X durch den Punkt x, so hätte der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ mehr als nur ein minimales Primideal. Dann wäre er aber kein Integritätsbereich und mithin nach 7.7.4.9 auch nicht regulär. □

7.7.4.18 (**Schwierigkeiten mit lokalen Koordinaten**). Gegeben eine glatte Stelle x einer affinen k-Varietät X und ein reguläres Parametersystem $f_1, \ldots, f_d$ ihres lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ werden die Funktionen f_i bereits alle in einer offenen Umgebung $U \Subset X$ von x definiert sein und folglich einen Morphismus $\varphi : U \to k^d$ liefern. Im Gegensatz zur analogen Situation im Fall differenzierbarer Mannigfaltigkeiten wird diese Abbildung jedoch im allgemeinen auf keiner Zariski-offenen Umgebung U von x injektiv sein, und das für jedes System lokaler Parameter. Es ist also im allgemeinen nicht möglich, im algebraischen Fall in der Zariskitopologie so etwas wie „lokale Koordinatensysteme“ zu finden.

7.7.4.19. Gegeben eine Varietät verstehen wir unter einem **System von Pseudokoordinaten** eine Familie von regulären Funktionen $f_1, \ldots, f_d$ mit der Eigenschaft, daß an jeder Stelle $x \in X$ die Funktionen $f_i - f_i(x)$ ein reguläres Parametersystem bilden. Mit den bis hierher erzielten äquivalenten extrinsischen und intrinsischen Beschreibungen glatter Punkte sieht man leicht ein, daß jedes reguläre Parametersystem an einem Punkt durch Restriktion von einem System von Pseudokoordinaten auf einer irreduziblen offenen affinen Umgebung von besagtem Punkt herkommt. Weiter ist klar, daß gegeben ein System von Pseudokoordinaten die Nullstellenmenge einer beliebigen Auswahl von d unserer Pseudokoordinaten stets glatt ist und jede irreduzible Komponente eine um d kleinere Dimension hat.

Satz 7.7.4.20 (Kodimension von Schnittmengen). *Gegeben irreduzible abgeschlossene Teilmengen $X, Y \not\subset W$ einer glatten äquidimensionalen Varietät W gilt für jede irreduzible Komponente Z ihres Schnitts $X \cap Y$ die Abschätzung*

$$\operatorname{kdim}(Z \subset W) \leq \operatorname{kdim}(X \subset W) + \operatorname{kdim}(Y \subset W)$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß W irreduzibel und affin ist und daß es darauf ein System $f_1, \ldots, f_n$ von Pseudokoordinaten gibt. Offensichtlich bilden dann die Funktionen $f_i \boxtimes 1 - 1 \boxtimes f_i$ und $f_i \boxtimes 1$ ein System von Pseudokoordinaten auf $W \times W$. Betrachten wir den durch unsere Pseudokoordinaten gegebenen Morphismus $\varphi : W \to k^n$, so ist das Urbild der Diagonale unter $\varphi \times \varphi : W \times W \to k^n \times k^n$ glatt und äqui-n-dimensional als Nullstellenmenge der ersten n unserer Pseudokoordinaten. Mithin ist das Urbild der Diagonale die disjunkte Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten und die Diagonale $\Delta_W \not\subset W \times W$ ist notwendig eine dieser Komponenten. Nun ist aber $X \cap Y$ isomorph zu $(X \times Y) \cap \Delta_W$ und damit isomorph zu einer irreduziblen Komponente der Nullstellenmenge der n Funktionen $f_i \boxtimes 1 - 1 \boxtimes f_i$ auf $X \times Y$. Damit folgt die Behauptung aus unserer Abschätzung 7.5.9.9. □

Satz 7.7.4.21. *Jeder reguläre lokale Kring ist ganz abgeschlossen.*

Vorschau 7.7.4.22. Man kann sogar zeigen, daß jeder reguläre lokale Kring faktoriell ist. Beweise findet man etwa in [Eis95, Ais]. Für die lokalen Ringe von Varietäten schreibe ich in 7.7.6.14 einen Beweis aus.

Beweis. Sei $(A, \mathfrak{m})$ unser regulärer lokaler Kring. Sei $x \in \operatorname{Quot} A$ ganz über A. Es gilt zu zeigen $x \in A$. Dazu schreiben wir $x = r/s$ mit $r, s \in A$ und $s \neq 0$. Da x ganz ist über A, gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit

$$A[x] = A + Ax + \ldots + Ax^n$$

Wir folgern $s^n x^m \in A$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und damit $r^m \in s^{m-n} A$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nehmen wir zusätzlich $r \neq 0$ an, so gibt es i maximal mit $r \in \mathfrak{m}^i$ und wir

haben $0 \neq \bar{r} \in \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$. Ebenso gibt es j maximal mit $s \in \mathfrak{m}^j$ und wir haben $0 \neq \bar{s} \in \mathfrak{m}^j/\mathfrak{m}^{j+1}$ und folgern, daß $\bar{s}^{m-n}$ für $m \geq n$ stets ein Teiler von $\bar{r}^m$ ist in $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} A$. Da dieser Ring jedoch nach 7.7.4.9 faktoriell ist, muß sogar $\bar{s}$ ein Teiler von $\bar{r}$ sein. Wir haben also $i \geq j$ und es gibt $a_1 \in \mathfrak{m}^{i-j} \subset A$ und $r_1 \in \mathfrak{m}^{i+1}$ mit

$$r = a_1 s + r_1$$

und das gilt sogar ohne die Annahme $r \neq 0$. Dann ist aber r_1/s auch wieder ganz über A und wir finden genauso $r_1 = a_2 s + r_2$ mit $a_2 \in A$ und $r_2 \in \mathfrak{m}^{i+2}$ und induktiv folgt

$$r \in \bigcap_{\nu=1}^{\infty} (As + \mathfrak{m}^{i+\nu})$$

Nach dem Durchschnittssatz von Krull 7.4.6.14, angewandt auf den Restklassenring A/As, folgt daraus aber sofort $r \in As$ alias $x \in A$. □

Satz* 7.7.4.23 (Differentielles Dominanzkriterium für affine Räume). *Seien $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Polynom und $X := k^n \backslash \mathcal{Z}(f)$ das Komplement seiner Nullstellenmenge und $\varphi : X \to k^m$ ein Morphismus. Induziert für einen Punkt $x \in X$ der Komorphismus eine Injektion $\mathfrak{m}_{\varphi(x)}/\mathfrak{m}^2_{\varphi(x)} \hookrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}^2_x$, so umfaßt $\varphi(X)$ eine offene Teilmenge von k^m.*

Vorschau 7.7.4.24. Dieses Kriterium ist insbesondere in der Theorie der Liealgebren hilfreich. Im weiteren Verlauf dieser Vorlesung spielt es dahingegen keine Rolle. In der Sprache der Differentiale aus 9.3.1.1 besagt unserer Bedingung, daß das Differential bei x eine Surjektion $\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \twoheadrightarrow \mathrm{T}_y Y$ sein soll. Eine Variante in dieser Sprache und in größerer Allgemeinheit zeigen wir in 9.3.1.31.

Beweis. Wir setzen $y := \varphi(x)$. Offensichtlich folgt aus unserer Annahme, daß unser Morphismus φ eine Injektion $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_y} \mathcal{O}_{Y,y} \hookrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_{X,x}$ der assozierten graduierten Ringe induziert. Da unsere Filtrierungen ausschöpfend und Hausdorff sind, folgt mit 7.7.1.16 die Injektivität $\mathcal{O}_{Y,y} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ des Komorphismus und unser Morphismus φ ist dominant. Unser Satz folgt damit aus Korollar 7.5.4.12 über Bilder von Morphismen. □

Vorschau 7.7.4.25 (**Regularität und Glattheit in größerer Allgemeinheit**). Arbeitet man nicht mehr über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, so ist das Analogon von Glattheit stärker als Regularität. Sei genauer k ein Kring. Ein Kringhomomorphismus $k \to A$ heißt **standardglatt**, wenn natürliche Zahlen $n \geq r \geq 0$ und Polynome $f_1, \ldots f_r \in k[T_1, \ldots, T_n]$ und ein Isomorphismus von k-Kringen

$$k[T_1, \ldots, T_n]/\langle f_1, \ldots f_r \rangle \xrightarrow{\sim} A$$

existieren derart, daß das Bild von $\det((\partial_j f_i)_{i,j=1}^r)$ in A eine Einheit ist. Ein Kringhomomorphismus $k \to A$ heißt **glatt**, wenn es Erzeuger $s, \ldots, t$ des Einsideals von A gibt derart, daß die Lokalisierungen $A_s, \ldots, A_t$ jeweils standardglatt sind über k. Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $X \mathrel{\not\subset} k^n$ eine abgeschlossene Teilmenge, so sind nach unserem Korollar 7.7.4.13 über Regularität und Glattheit gleichbedeutend:

1. Unsere Teilmenge $X \mathrel{\not\subset} k^n$ ist extrinsisch glatt an jeder Stelle $x \in X$;
2. Alle lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,x}$ von X sind regulär;
3. Der Ring $\mathcal{O}(X)$ der regulären Funktionen auf X ist ein glatter k-Kring.

Arbeiten wir über nicht vollkommenen Körpern k, so ist jedoch lokale Regularität schwächer als Glattheit. Ist etwa L/k eine endliche inseparable Körpererweiterung, so ist L ein regulärer lokaler k-Kring, aber der Ringhomomorphismus $k \hookrightarrow L$ ist nicht glatt.

Übungen

Übung 7.7.4.26. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß die glatten Stellen einer algebraischen Teilmenge $X \mathrel{\not\subset} k^n$ stets eine offene Teilmenge bilden.

Übung 7.7.4.27. $(k = \bar{k})$. Gegeben $p \in X \mathrel{\not\subset} k^n$ eine glatte Stelle einer algebraischen Teilmenge zeige man, daß für jedes System $x_1, \ldots, x_d$ von lokalen Parametern um p der Ringhomomorphismus $k[T_1, \ldots, T_d] \to \mathcal{O}_{X,p}$ zum lokalen Ring bei p gegeben durch $T_i \mapsto x_i$ einen Isomorphismus

$$k[\![T_1, \ldots, T_d]\!] \to \mathcal{O}_{X,p}^\wedge$$

zwischen dem Ring der formalen Potenzreihen und der Vervollständung des lokalen Rings von X bei p an seinem maximalen Ideal induziert.

Übung 7.7.4.28 (**Algebraische Teilmengen in $\mathbb{C}^n$ als Mannigfaltigkeiten**). Man zeige, daß die glatten Stellen einer irreduziblen algebraischen Teilmenge $X \mathrel{\not\subset} \mathbb{C}^n$ eine orientierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ der Dimension $d = 2\,\mathrm{kdim}\, X$ von im Sinne von 12.3.2.6 und 12.8.3.6 bilden, genauer sogar eine glatte Untermannigfaltigkeit im Sinne von 22.3.2.7. Hinweis: 12.3.2.20.

Übung 7.7.4.29 (**Verschwindungsideale glatter Varietäten**). Sei $X \mathrel{\not\subset} k^n$ glatt in jedem Punkt und seien Polynome $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{I}(X)$ gegeben derart, daß für alle $x \in X$ gilt

$$\dim_k \langle (\mathrm{grad}\, f_1)(x), \ldots, (\mathrm{grad}\, f_r)(x) \rangle_k + \mathrm{kdim}\, \mathcal{O}_{X,x} = n$$

So erzeugen die f_i bereits das Verschwindungsideal von X, in Formeln ausgedrückt gilt also $\langle f_1, \ldots, f_r \rangle = \mathcal{I}(X)$.

Übung 7.7.4.30. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß die Matrizen $M \in \mathrm{Mat}(3; k)$ vom Rang ≤ 1 eine irreduzible algebraische Teilmenge des k^9 der Dimension 5 bilden und bestimme Erzeuger ihres Verschwindungsideals. Hinweis: 7.7.4.29.

Übung 7.7.4.31 (**Lokale Multiplizitäten**). Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Kring einer Krulldimension $d \geq 1$. Gegeben $f \in A \backslash 0$ und r maximal mit $f \in \mathfrak{m}^r$ zeige man $\mathrm{hdim}(A/Af) < d$ und

$$r = \mathrm{mult}_{\mathfrak{m}}^{d-1}(A/Af)$$

und damit auch $f \in \mathfrak{m} \Rightarrow \mathrm{hdim}(A/Af) = d - 1$. Man schreibt dann abkürzend $r = \mathrm{mult}(f)$ und im Fall einer affinen Varietät X mit $A := \mathcal{O}_{X,x}$ dem lokalen Ring an einer regulären Stelle $x \in X$ alternativ $r = \mathrm{mult}_x(f)$. Da der assoziierte graduierte Ring ein Polynomring über einem Körper ist, gilt

$$\mathrm{mult}(fg) = \mathrm{mult}(f) + \mathrm{mult}(g)$$

Hinweis: Man gehe den Beweis von 7.7.3.12 nocheinmal durch und erkenne in diesem Fall $\tilde{\mathrm{P}}_{Af}(t) = t^r \mathrm{P}_A(t)$. Die nun folgende Rechnung finde ich in der Variante 7.6.9.9 besonders transparent: Die rationale Funktion $1/(1-u)^d - u^r/(1-u)^d$ hat um $u = 1$ eine Laurent-Entwicklung, die mit dem Term $r/(1-u)^{d-1}$ beginnt.

Übung 7.7.4.32 (**Glattheit und lokale Multiplizität**). Gegeben $y \in Y \not\subset X$ eine bepunktete abgeschlossene Hyperfläche in einer glatten irreduziblen affinen Varietät zeige man, daß Y genau dann glatt ist bei y, wenn gilt $\mathrm{mult}_y Y = 1$. Hinweis: 7.7.4.10 und 7.7.4.31.

Ergänzung 7.7.4.33. In [Bou06], exercice 25 zu §7 wird ein Argument dafür skizziert, daß aus $\mathrm{mult}_x(X) = 1$ schon folgt, daß $x \in X$ ein glatter Punkt der Varietät X sein muß. In [Bou06], exercice 24 zu §7 wird ein Argument dafür skizziert, daß ein lokaler noetherscher Kring A genau dann regulär ist, wenn er die Multiplizität Eins hat und seine Vervollständigung $\hat{A}$ ein Integritätsbereich ist. In der entsprechenden Arbeit [Nag55] von Nagata findet man auch ein Beispiel dafür, daß in diesem Zusammenhang die zusätzliche Bedingung an $\hat{A}$ notwendig ist.

Übung 7.7.4.34 (**Schnittmultiplizität an singulären Stellen**). Seien X eine glatte Varietät der Dimension $\mathrm{kdim}\, X = 2$ und $C, D \not\subset X$ Kurven mit Schnittpunkt $x \in C \cap D$. Sind C oder D nicht glatt bei x, so gilt für die Schnittmultiplizität

$$\mathrm{s}_x(C, D) \geq 2$$

Übung 7.7.4.35 (**Maximalzahl singulärer Stellen ebener Kurven**). $(k = \bar{k})$. Eine Kurve $C = \mathcal{Z}(f) \not\subset k^2$ für ein quadratfreies Polynom $f \in k[X, Y]$ hat höchstens $d(d-1)/2$ singuläre Punkte für $d = \mathrm{grad}(f)$. Hinweis: Man überlege sich zunächst, daß es eine Richtung $v \in k^2 \backslash 0$ gibt derart, daß die Richtungsableitung $\mathrm{D}_v f$ nur höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen mit f hat. Dann verwende man 7.7.4.34.

Übung 7.7.4.36 (**Vorbereitung feinerer Aussagen zur Schnittmultiplizität**). Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Kring der Krulldimension Zwei. Gegeben $f \in \mathfrak{m}^r$ und $g \in \mathfrak{m}^s$ liefert 7.7.3.25 die Abschätzung

$$\mathrm{l}(A/\langle f, g\rangle) \geq rs$$

Bezeichne nun $\bar{f} \in \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}$ und $\bar{g} \in \mathfrak{m}^s/\mathfrak{m}^{s+1}$ die Nebenklassen. Sind $\bar{f}$ und $\bar{g}$ teilerfremd in $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} A$, so folgere man $\mathfrak{m}^{r+s} \subset \langle f, g\rangle$ aus dem Nakayama-Lemma und Übung 6.2.9.27, nach der sich jedes homogene Polynom $\bar{h}$ vom Grad $r+s-1$ schreiben läßt als $\bar{h} = \bar{a}\bar{f} + \bar{b}\bar{g}$ mit $\bar{a}$ homogen vom Grad $s-1$ und $\bar{b}$ homogen vom Grad $r-1$. Dann folgere man aus Übung 6.2.9.27, daß wir kurze exakte Sequenzen $A/\mathfrak{m}^s \oplus A/\mathfrak{m}^r \hookrightarrow A/\mathfrak{m}^{r+s} \twoheadrightarrow A/\langle f, g\rangle$ erhalten mit $(a, b) \mapsto af + bg$ als erster Abbildung und daraus, immer unter der Annahme $\bar{f}, \bar{g}$ teilerfremd, daß sogar gilt

$$\mathrm{l}(A/\langle f, g\rangle) = rs$$

Sind dahingegen $\bar{f}, \bar{g}$ nicht teilerfremd, so ist die erste Abbildung unserer Sequenz nicht injektiv und es folgt sogar $\mathrm{l}(A/(\langle f, g\rangle + \mathfrak{m}^{r+s})) > rs$ und a forteriori $\mathrm{l}(A/\langle f, g\rangle) > rs$.

Beispiel 7.7.4.37 (**Feinere Aussagen zur Schnittmultiplizität**). $(k = \bar{k})$. Ist speziell $X = k^2$ die Ebene und $x = 0$ der Ursprung und sind $f, g \in k[T, S]\backslash 0$ teilerfremde Polynome und $\bar{f}, \bar{g}$ deren von Null verschiedene homogene Komponenten kleinstmöglichen Grades und r sowie s deren Grade, so gilt $\dim_k(\mathcal{O}_{X,x}/\langle f, g\rangle) \geq rs$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\bar{f}$ und $\bar{g}$ auch ihrerseits teilerfremd sind.

7.7.5 Birationale Äquivalenz

Definition 7.7.5.1. Zwei irreduzible k-Varietäten, deren Funktionenkörper als Körpererweiterungen von k isomorph sind, heißen **birational äquivalent**.

Definition 7.7.5.2. Ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von irreduziblen k-Varietäten heißt **birational**, wenn er dominant ist und einen Isomorphismus $\mathcal{M}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$ induziert.

7.7.5.3. Gegeben irreduzible k-Varietäten X, Y und zwischen ihren Funktionenkörpern ein Körperisomorphismus $\mathcal{M}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(Y)$ über k gibt es nichtleere offene affine Teilmengen $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ sowie einen Isomorphismus von k-Varietäten $V \xrightarrow{\sim} U$ derart, daß die zugehörigen Ringhomomorphismen unseren Körperisomorphismus ergänzen zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(U) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathcal{O}(V) \arrow[d] \\ \mathcal{M}(X) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{M}(Y) \end{tikzcd}$$

In der Tat dürfen wir X und Y affin annehmen. Bezeichne $A, B \subset \mathcal{M} := \mathcal{M}(Y)$ die Bilder von von $\mathcal{O}(X)$ und $\mathcal{O}(Y)$. Alle Lokalisierungen dieser Integritätsbereiche nach von Null verschiedenen Elementen identifizieren wir stillschweigend mit ihren Bildern in $\mathcal{M}$. Da B ringendlich ist über k, gibt es $f \in A\backslash 0$ mit $A[f^{-1}] \supset B$. Ebenso gibt es $g \in B\backslash 0$ mit $B[g^{-1}] \supset A$. Wir haben also $A[f^{-1}, g^{-1}] = B[f^{-1}, g^{-1}]$ und können $U = (X_f)_g$ und $V = (Y_g)_f$ nehmen.

Proposition 7.7.5.4. *Jede irreduzible k-Varietät ist birational äquivalent zu einer irreduziblen Hyperfläche, also zur Nullstellenmenge eines einzigen irreduziblen Polynoms in einem k^s.*

Beweis unter der Annahme $\operatorname{char} k = 0$. Sei X unsere Varietät. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei X affin. Wir setzen $\mathcal{O}(X) := A$. Sicher finden wir eine Noether-Normalisierung $k['x_1, \ldots, x_n] \subset A$, so daß also A ganz ist über diesem Polynomring. Gehen wir zu den Quotientenkörpern über, so erhalten wir eine modulendliche Körpererweiterung, und diese muß nach 6.3.10.7 und wegen unserer Annahme der Charakteristik Null ein primitives Element $r \in \operatorname{Quot} A$ besitzen. Der Ring $B := k[x_1, \ldots, x_n, r] \subset \operatorname{Quot} A$ hat also denselben Quotientenkörper wie A. Andererseits ist B ein Integritätsbereich und ein Quotient des Polynomrings in $n+1$ Variablen von der Krulldimension n, mithin nach 7.4.2.22 der Quotient nach dem von einem irreduziblen Polynom erzeugten Hauptideal. □

Beweis im Allgemeinen. Sei X unsere Varietät. Sei $\mathcal{M}(X)$ ihr Funktionenkörper. Da $\mathcal{M}(X)/k$ körperendlich ist und k vollkommen, gibt es nach 9.3.5.8 algebraisch unabhängige $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{M}(X)$ derart, daß $\mathcal{M}(X)$ separabel ist über $k(x_1, \ldots, x_n)$. Nun kann der Beweis wie zuvor zu Ende geführt werden. □

Proposition 7.7.5.5. *Die glatten Stellen einer algebraischen Teilmenge $X \not\subset k^n$ bilden stets eine offene dichte Teilmenge. Dasselbe gilt für die glatten Stellen einer beliebigen Varietät.*

7.7.5.6. Der Beweis basiert auf 7.7.5.4. Das Argument ist deshalb vorerst nur für $\operatorname{char} k = 0$ vollständig und benötigt im allgemeinen 9.3.5.8.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $X \not\subset k^n$ irreduzibel. Daß die Teilmenge der glatten Stellen offen ist, wissen wir schon aus Übung 7.7.4.26. Es bleibt zu zeigen, daß sie nicht leer ist. Nach 7.7.5.4 dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß X die Nullstellenmenge eines einzigen irreduziblen Polynoms P ist. Verschwindet eine partielle Ableitung $\partial_i P$ unseres Polynoms auf ganz X, so muß von P geteilt werden und folglich das Nullpolynom sein. Es ist jedoch unmöglich, daß alle partiellen $\partial_i P$ Ableitungen Null sind: In Charakteristik Null, da unser Polynom ja nicht konstant sein kann; In Charakteristik p, da unser Polynom dann, wenn es nicht konstant wäre, eine p-te Potenz eines anderen Polynoms sein müßte und wieder nicht irreduzibel sein könnte. □

7.7.5.7 (**Komplex-algebraische Mengen als verklebte Mannigfaltigkeiten**). Zusammen mit 7.7.4.26 liefert 7.7.5.5 induktiv, daß jede algebraische Teilmenge $X \not\subset \mathbb{C}^n$ eine Folge von Zariski-abgeschlossenen Teilmengen

$$X = X_d \supset X_{d-1} \supset \ldots \supset X_0$$

besitzt derart, daß $X_i \backslash X_{i-1}$ jeweils eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ der reellen Dimension $2i$ im Sinne von 12.3.2.6 ist. Genauer können wir derartige Mengen induktiv finden, indem wir als X_{i-1} die Menge aller nicht regulären Stellen von X_i vereinigt mit allen irreduziblen Komponenten von X_i einer Krulldimension $< i$ nehmen.

Übungen

Übung 7.7.5.8. Ist X eine beliebige Varietät, so ist für jede dichte offene affine Teilmenge $U \Subset X$ die von der universellen Eigenschaft induzierte Abbildung ein Ringisomorphimus $S^{-1}\mathcal{O}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$ für $S \subset \mathcal{O}(U)$ die Menge der kürzbaren Elemente.

Übung 7.7.5.9. Ein Morphismus von Varietäten mit dichtem Bild heißt ein **dominanter Morphismus**. Man zeige: Gegeben irreduzible k-Varietäten X, Y und ein Körperhomomorphismus $\mathcal{M}(Y) \to \mathcal{M}(X)$ über k gibt es nichtleere offene affine Teilmengen $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ sowie einen dominanten Morphismus von k-Varietäten $U \to V$ derart, daß die zugehörigen Ringhomomorphismen unseren Körperhomomorphismus ergänzen zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{M}(Y) \arrow[r] & \mathcal{M}(X) \end{tikzcd}$$

Gibt es für eine irreduzible k-Varietät X der Dimension n einen Körperisomorphismus $\mathcal{M}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(k^n)$ über k, so heißt X eine **rationale Varietät**. Gibt es für eine irreduzible k-Varietät X der Dimension n eine endliche Körpererweiterung $\mathcal{M}(X) \hookrightarrow \mathcal{M}(k^n)$ über k, so heißt X eine **unirationale Varietät**.

7.7.6 Beispiele für faktorielle lokale Ringe*

7.7.6.1. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist Korollar 7.7.6.14, nach dem die lokalen Ringe affiner Varietäten an glatten Punkten stets faktoriell sind. Nach 7.5.9.24 bedeutet das geometrisch, daß in einer irreduziblen affinen Varietät die irreduziblen Untervarietäten der Kodimension Eins, die durch einen festen glatten Punkt

laufen, in einer hinreichend kleinen Umgebung dieses Punktes stets als die Nullstellenmenge einer einzigen regulären Funktion geschrieben werden können. Sehr viel allgemeiner besagt der Satz von Alexander-Buchsbaum, daß reguläre lokale Kringe stets faktoriell sind.

7.7.6.2. Ein lokaler Ring $(A, \mathfrak{m})$ heiße **Hausdorff**, wenn die Filtrierung durch die Potenzen seines maximalen Ideals Hausdorff ist, wenn also gilt $\bigcap_{r\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}^r = 0$. Nach dem Krull'schen Durchschnittssatz 7.4.6.14 ist jeder noethersche lokale Kring Hausdorff.

7.7.6.3. Ein lokaler Ring $(A, \mathfrak{m})$ heiße **vollständig**, wenn die Filtrierung durch die Potenzen seines maximalen Ideals vollständig ist, wenn also anders gesagt die natürliche Abbildung eine Surjektion $A \twoheadrightarrow \lim_r A/\mathfrak{m}^r$ ist.

Lemma 7.7.6.4 (Teilen mit Rest bei Potenzreihen). *Seien $(R, \mathfrak{m})$ ein vollständiger Hausdorffscher lokaler Kring und $n \in \mathbb{N}$ und $P, Q \in R[\![X]\!]$ formale Potenzreihen mit $Q \in X^n + \mathfrak{m}[\![X]\!]$. So gibt es eindeutig bestimmte $A \in R[\![X]\!]$ und $B \in R[X]$ mit $P = AQ + B$ und $\operatorname{grad} B < n$.*

7.7.6.5. Dieselbe Aussage folgt, wenn wir nur $Q \in R[\![X]\!]^\times X^n + \mathfrak{m}[\![X]\!]$ fordern. Das ist gleichbedeutend zu $\bar{Q} \in \bar{R}[\![X]\!]^\times X^n$ für $\bar{R} := R/\mathfrak{m}$ den Restklassenring und $\bar{Q}$ das Bild von Q unter der Quotientenabbildung. Formale Potenzreihen über einem lokalen Kring R mit dieser Eigenschaft heißen **regulär vom Grad** n. Explizit sind das Potenzreihen, bei denen der Koeffizient von X^n eine Einheit von R ist und alle Koeffizienten von kleineren Potenzen keine Einheiten von R. Ist ein Produkt von zwei Potenzreihen regulär, so offensichtlich auch die Faktoren.

7.7.6.6. Ist R selber ein Ring von formalen Potenzreihen in mehreren Variablen über einem Körper, so erhält man ein formales Analogon des sogenannten Weierstraß'schen Teilersatzes.

Beweis. Für die Eindeutigkeit reicht es, den Fall $P = 0$ zu betrachten. Wegen der Hausdorffeigenschaft reicht weiter zu zeigen, daß dann das Bild von A in $(R/\mathfrak{m}^s)[\![X]\!]$ verschwindet für alle s. Das schließlich folgert man leicht mit vollständiger Induktion über s. Die Existenz zeigt man mit einer Induktion derselben Art, diesmal unter Verwendung der Vollständigkeit. □

Lemma 7.7.6.7. *Gegeben $(R, \mathfrak{m})$ ein vollständiger Hausdorffscher lokaler Kring und $n \in \mathbb{N}$ induziert die Multiplikation eine Bijektion*

$$R[\![X]\!]^\times \times (X^n + \mathfrak{m}[X]^{<n}) \xrightarrow{\sim} R[\![X]\!]^\times X^n + \mathfrak{m}[\![X]\!]$$

mit der Notation $\mathfrak{m}[X]^{<n}$ für die Menge aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathfrak{m}$ von einem Grad, der echt kleiner ist als n.

7.7.6.8. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring. Ein Element von $X^n + \mathfrak{m}[X]^{<n}$ nennen wir ein **Weierstraß-Polynom vom Grad** n. Gegeben ein vollständiger Hausdorff'scher lokaler Kring läßt sich also jede reguläre Potenzreihe vom Grad n mit Koeffizienten in unserem Kring eindeutig schreiben als Produkt eines Weierstraßpolynoms vom Grad n mit einer Einheit des Potenzreihenrings.

Beweis. Gegeben ein Element Q der rechten Seite alias eine reguläre Potenzreihe suchen wir zunächst ein Element A des Potenzreihenrings mit $AQ = X^n - B$ für $B \in \mathfrak{m}[X]^{<n}$. Diese Gleichung können wir umschreiben zu $X^n = AQ + B$. Das Teilen mit Rest von X^n durch Q im Sinne von 7.7.6.4 besitzt nun genau eine Lösung und das zeigt bereits die Injektivität unserer Abbildung. Unsere Annahmen an Q zeigen dann, daß für diese Lösung gilt $B \in \mathfrak{m}[X]^{<n}$ und $A \in R[\![X]\!]^\times$ und das Lemma ist bewiesen. □

Lemma 7.7.6.9. *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein vollständiger Hausdorffscher lokaler Kring und seien $A, B, C \in R[\![X]\!]$ gegeben mit $AB = C$. Sind A und C Weierstraßpolynome, so ist auch B ein Weierstraßpolynom.*

Beweis. Sicher ist B regulär, also besitzt es nach 7.7.6.7 eine eindeutige Darstellung $B = DU$ als Produkt eines Weierstraßpolynoms D mit einer Einheit U des Potenzreihenrings. Es folgt $ADU = C$ und AD ist offensichtlich seinerseits ein Weierstraßpolynom. Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung der regulären Potenzreihe C als Produkt eines Weierstraßpolynoms mit einer Einheit des Potenzreihenrings 7.7.6.7 folgt dann $U = 1$ wie gewünscht. □

Lemma 7.7.6.10. *Gegeben ein Körper k gibt es für jedes von Null verschiedene Element $P \in k[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ einen Automorphismus φ unseres Potenzreihenrings derart, daß in $\varphi(P)$ eines der Monome $(X_n)^a$ mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten auftritt.*

Beweis. Wir schreiben in Multiindexschreibweise $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X^\alpha$. Sei β der lexikographisch kleinste Multiindex mit $c_\beta \neq 0$. Wir betrachten nun Automorphismen φ der Gestalt $X_i \mapsto X_i + X_n^{r(i)}$ für $1 \leq i < n$ und $X_n \mapsto X_n$. Dann kommt in $\varphi(X^\beta)$ unser X_n zur Potenz $\beta_1 r(1) + \ldots + \beta_{n-1} r(n-1) + \beta_n$ vor. Wir müssen nun unsere $r(i)$ nur noch so wählen, daß für jeden lexikographisch größeren Multiindex α unser X_n in $\varphi(X^\alpha)$ zu einer echt höheren Potenz vorkommt, daß also gilt

$$\beta_1 r(1) + \ldots + (\beta_i + 1) r(i) > \beta_1 r(1) + \ldots + \beta_{n-1} r(n-1) + \beta_n$$

für $1 \leq i < n$ alias $r(i) > \beta_{i+1} r(i+1) + \ldots + \beta_{n-1} r(n-1) + \beta_n$. Das können wir aber leicht erreichen, indem wir zuerst $r(n-1)$ wählen, dann $r(n-2)$ und so weiter. □

Satz 7.7.6.11. *Potenzreihenringe in endlich vielen Variablen über einem Körper sind stets faktoriell.*

Beweis. Nach 7.1.4.19 sind unsere Ringe noethersch, also besitzt mit demselben Argument, wie wir es in 6.2.4.11 im Fall von Hauptidealringen gegeben haben, jedes Element eine Darstellung als Produkt irreduzibler Elemente. Sei nun k unser Grundkörper. Mit Induktion dürfen wir annehmen, daß wir bereits wissen, daß der Potenzreihenring R über k in allen Variablen außer der letzten faktoriell ist. Es bleibt zu zeigen, daß jede irreduzible Potenzreihe $P \in R[\![X]\!]$ ein Primelement ist. Teile also P ein Produkt AB, sagen wir $PQ = AB$. Es gilt zu zeigen, daß P einen der Faktoren teilt. Wir dürfen $AB \neq 0$ annehmen und nach 7.7.6.10 dürfen wir auch annehmen, daß AB regulär ist. Dann sind nach 7.7.6.5 notwendig P, Q, A, B alle regulär. Indem wir unsere Potenzreihen um Einheiten abändern, dürfen wir mit 7.7.6.7 annehmen, daß A, B und P Weierstraßpolynome sind. Dann ist aber nach 7.7.6.9 auch Q ein Weierstraßpolynom und wir finden $PQ = AB$ mit $P, Q, A, B \in R[X]$. Mit R ist aber nach 6.2.7.11 auch der Polynomring $R[X]$ faktoriell, folglich teilt P entweder A oder B. $\square$

Proposition 7.7.6.12. *Seien $A \subset \hat{A}$ noethersche lokale Kringe. Für die maximalen Ideale $\mathfrak{m}, \hat{\mathfrak{m}}$ gelte $\langle \mathfrak{m}\hat{A} \rangle = \hat{\mathfrak{m}}$ sowie $\hat{\mathfrak{m}}^n \cap A = \mathfrak{m}^n$ und $\hat{\mathfrak{m}}^n + A = \hat{A}$ jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist unter diesen Annahmen $\hat{A}$ faktoriell, so auch A.*

7.7.6.13. Hier und im folgenden meint $\langle\ \rangle$ stets das Erzeugnis als additive Untergruppe und Verknüpfungssymbole zwischen Teilmengen einer Menge mit Verknüpfung meinen die auf der Potenzmenge induzierte Verknüpfung. Nur bei Potenzen von Idealen erlauben wir uns die abkürzende Schreibweise $\mathfrak{b}^n$ für das Ideal, das wir nach obigen Konventionen eigentlich $\langle \mathfrak{b}^n \rangle$ notieren müßten. Produkte von Idealen schreiben wir dahingegen aus als die von allen Produkten ab mit $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$ erzeugte additive Untergruppe $\langle \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \rangle$.

Beweis. Aus unseren Annahmen folgt insbesondere $A/\mathfrak{m}^n \xrightarrow{\sim} \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}^n$. Als erstes zeigen wir nun für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ die Identität

$$\langle \mathfrak{a}\hat{A} \rangle \cap A = \mathfrak{a}$$

Nur die Inklusion $\langle \mathfrak{a}\hat{A} \rangle \cap A \subset \mathfrak{a}$ ist nicht a priori klar. Aus unseren Annahmen folgt erst $\langle \mathfrak{a}\hat{A} \rangle \subset \mathfrak{a} + \hat{\mathfrak{m}}^n$ für alle n und dann $\langle \mathfrak{a}\hat{A} \rangle \cap A \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^n$ für alle n. Mit dem Krull'schen Durchschnittssatz oder vielmehr seinem Korollar 7.4.6.14 folgt dann auch die a priori nicht offensichtliche Inklusion. Insbesondere folgt aus $a = \gamma b$ mit $a, b \in A \backslash 0$ und $\gamma \in \hat{A}$ bereits $\gamma \in A$. Jetzt müssen wir nur noch zeigen, daß je zwei in A teilerfremde Elemente $a, b \in A \backslash 0$ auch in $\hat{A}$ teilerfremd bleiben. Daraus zusammen mit der Faktorialität von $\hat{A}$ können wir nämlich unschwer ableiten, daß ein irreduzibles Element von A nur dann ein Produkt teilen kann, wenn es einen

der Faktoren teilt. Wir führen dazu die umgekehrte Annahme zum Widerspruch, es gebe $\alpha, \beta, \gamma \in \hat{A}$ mit $a = \alpha\gamma$ und $b = \beta\gamma$ und $\gamma \notin \hat{A}^\times$ und α, β teilerfremd. Zunächst einmal haben wir $\alpha \notin \hat{A}^\times$, sonst hätten wir ja $a|b$ in $\hat{A}$ und damit auch in A. Nach dem dem Krull'schen Durchschnittssatz oder vielmehr seinem Korollar 7.4.6.14 finden wir nun $n \geq 1$ mit $\alpha \in \hat{\mathfrak{m}}^{n-1} \backslash \hat{\mathfrak{m}}^n$. Jetzt finden wir $x, y \in A$ und $\varepsilon, \eta \in \hat{\mathfrak{m}}^n$ mit $\alpha = x + \varepsilon$ und $\beta = y + \eta$. Die Identität $a\beta = b\alpha$ liefert $a(y + \eta) = b(x + \varepsilon)$ und damit für $\mathfrak{a} := \langle a, b \rangle_A$ das von a und b in A erzeugte Ideal

$$ay - bx \in \langle \mathfrak{a}\hat{\mathfrak{m}}^n \rangle \cap A = \langle \langle \mathfrak{a}\mathfrak{m}^n \rangle \hat{A} \rangle \cap A = \langle \mathfrak{a}\mathfrak{m}^n \rangle$$

Wir finden mithin $s, t \in \mathfrak{m}^n$ mit $ay - bx = bt - as$ alias $a(y + s) = b(x + t)$ und damit auch $\alpha(y + s) = \beta(x + t)$. Da wir α, β teilfremd angenommen hatten, gibt es $\lambda \in \hat{A}$ mit $\lambda\alpha = (x + t)$. Wir wissen aber aus unseren Konstruktionen, daß α und $(x + t)$ zu $\hat{\mathfrak{m}}^{n-1} \backslash \hat{\mathfrak{m}}^n$ gehören. Es folgt $\lambda \notin \hat{\mathfrak{m}}$ alias $\lambda \in \hat{A}^\times$. Damit aber können wir unsere Ausgangsgleichung umschreiben zu $a = (\alpha\lambda)(\lambda^{-1}\gamma)$ mit $\alpha\lambda = (x + t) \in A$ und folglich $\lambda^{-1}\gamma \in A$. Dann aber ist $\lambda^{-1}\gamma$ ein gemeinsamer Teiler von a und b in A im Widerspruch zu unserer Annahme. □

Korollar 7.7.6.14. *Der lokale Ring einer affinen Varietät an einem glatten Punkt ist stets faktoriell.*

Beweis. Nach 7.7.4.13 sind unsere lokalen Ringe regulär. Aus 7.7.4.9 und folgt und Übung **??** besagt, daß ihre Vervollständigungen Ringe von Potenzreihen in endlich vielen Variablen sind und daß die Einbettungen unserer lokalen Ringe in ihre Vervollständigungen die Annahmen in unserer Proposition 7.7.6.12 erfüllen. Nach 7.7.6.11 sind diese Potenzreihenringe faktoriell und nach 7.7.6.12 erben unsere lokalen Ringe diese Eigenschaft von den Potenzreihenringen. □

Übungen

Ergänzende Übung 7.7.6.15. Gegeben $(R, \mathfrak{m})$ ein vollständiger Hausdorffscher lokaler Kring bleibt ein Weierstraßpolynom, das in $R[X]$ irreduzibel ist, irreduzibel in $R[\![X]\!]$.

Ergänzende Übung 7.7.6.16. Gegeben $(R, \mathfrak{m})$ ein kommutativer lokaler Integritätsbereich ist jedes Weierstraßpolynom ein Produkt von irreduziblen Weierstraßpolynomen.

7.8 Krulldimension Eins

7.8.1 Diskrete Bewertungsringe

7.8.1.1. Ich erinnere daran, daß wir noethersche Kringe der Krulldimension Null bereits in 7.4.7.18 untersucht hatten und insbesondere wissen, daß nilpotentfreie derartige Ring endliche Produkte von Körpern sind und daß alle Varietäten der Krulldimension Null endliche Mengen sind mit der diskreten Topologie und allen Funktionen als regulären Funktionen. Der Fall noetherschen Kringen der Krulldimension Eins und von Varietäten der Krulldimension Eins ist schon sehr viel reichhaltiger, wie im folgenden ausgeführt werden soll. Wir beginnen mit regulären lokalen Ringen der Krulldimension Eins. Satz 7.8.1.11 wird uns, daß sie genau die diskreten Bewertungsringe sind, die in 7.8.1.8 eingeführt werden. Aber davor führen wir erst einmal die diskreten Bewertungen selber ein.

Definition 7.8.1.2. Eine **diskrete Bewertung**, englisch **discrete valuation**, auf einem Körper K ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $v : K^\times \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, daß für seine Ausdehnung durch $v(0) := \infty$ zu einer Abbildung $v : K \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ gilt

$$v(x+y) \geq \min(v(x), v(y)) \quad \text{für alle } x, y \in K.$$

Ein **diskret bewerteter Körper** (K, v) ist ein Körper mit einer ausgezeichneten diskreten Bewertung.

Ergänzung 7.8.1.3 (**Indiskrete Bewertungen**). Allgemein versteht man unter einer **Anordnung einer abelschen Gruppe** Γ eine Anordnung der zugrundeliegenden Menge mit der Eigenschaft $a \leq b \Rightarrow (a+c) \leq (b+c)$ für alle $a, b, c \in \Gamma$. Dann erklärt man eine **Bewertung** auf einem Körper K als einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $v : K^\times \twoheadrightarrow \Gamma$ in eine angeordnete abelsche Gruppe mit der Eigenschaft, daß für seine Ausdehnung durch $v(0) := \infty$ zu einer Abbildung $v : K \twoheadrightarrow \Gamma \sqcup \{\infty\}$ gilt $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$ für alle $x, y \in K$.

Beispiel 7.8.1.4 (**Bewertung von Laurentreihen**). Auf dem Körper der formalen Laurentreihen $k(\!(t)\!)$ über einem beliebigen Körper k erhalten wir eine diskrete Bewertung durch die Vorschrift

$$v\left(\sum a_n t^n\right) = \inf\{n \mid a_n \neq 0\}$$

Beispiel 7.8.1.5 (**Bewertungen rationaler Funktionen**). Auf dem Körper der rationalen Funktionen $k(T)$ über einem beliebigen Körper k liefert jedes Element $p \in k$ eine diskrete Bewertung v_p vermittels der Vorschrift

$$v_p(f) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid (T-p)^{-n} f \text{ hat bei } p \text{ keine Polstelle}\}$$

Eine positive Bewertung $v_p(f) > 0$ bedeutet in diesem Fall also, daß f bei p eine Nullstelle hat; eine negative Bewertung $v_p(f) < 0$, daß f bei p eine Polstelle hat; und die Bewertung $v_p(f) = \infty$ hat nur die Nullfunktion. Für die durch die Entwicklung in eine Laurentreihe um p gegebene Einbettung $\mathbb{C}(T) \hookrightarrow \mathbb{C}(\!(t)\!)$ ist diese Bewertung v_p offensichtlich gerade die Einschränkung unserer Bewertung v von oben. Auf dem Körper der rationalen Funktionen $k(T)$ über einem beliebigen Körper k können wir zusätzlich die diskrete Bewertung v_∞ erklären durch die Vorschrift

$$v_\infty(P/Q) = (\operatorname{grad} Q) - (\operatorname{grad} P)$$

für beliebige von Null verschiedene Polynome $P, Q \in k[T]$ und $v_\infty(0) = \infty$. Im Rahmen der algebraischen Geometrie mag man sich $k(T)$ als Funktionen auf der projektiven Gerade denken, und diese Bewertung v_∞ beschreibt dann die Null- beziehungsweise Polstellenordnung am unendlich fernen Punkt.

Ergänzung 7.8.1.6 (**Bewertungen meromorpher Funktionen**). Typisch ist auch das Beispiel 14.4.1.22 des Körpers $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(X)$ der meromorphen Funktionen auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge $X \Subset \mathbb{C}$ oder allgemeiner einer zusammenhängenden Riemann'schen Fläche X. In diesem Fall liefert jeder Punkt $p \in X$ eine diskrete Bewertung $v_p : \mathcal{M}^{\mathrm{an}}(X) \to \mathbb{Z}$ durch die Vorschrift

$$v_p(f) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid (z-p)^{-n} f \text{ ist holomorph bei } p\}$$

Eine positive Bewertung $v_p(f) > 0$ bedeutet in diesem Fall also, daß f bei p eine Nullstelle hat; eine negative Bewertung $v_p(f) < 0$, daß f bei p eine Polstelle hat; und die Bewertung $v_p(f) = \infty$ hat nur die Nullfunktion. Für die durch die Entwicklung in eine Laurentreihe um p gegebene Einbettung $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(X) \hookrightarrow \mathbb{C}(\!(t)\!)$ ist diese Bewertung v_p die Einschränkung unserer Bewertung v aus dem vorhergehenden Beispiel 7.8.1.4. Unter unserem Körperisomorphismus $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}(T)$ aus **??** entspricht dann die Bewertung v_∞ links, die die Pol- beziehungsweise Nullstellenordnung einer meromorphen Funktion an der Stelle $\infty \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ angibt, genau der „Grad-Bewertung" v_∞ aus 7.8.1.5 auf $\mathbb{C}(T)$. Im übrigen kann man zeigen, daß für jede zusammenhängende kompakte Riemann'sche Fläche X die Zuordnung $p \mapsto v_p$ eine Bijektion zwischen der Menge aller Punkte von X und der Menge aller diskreten Bewertungen des Körpers $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(X)$ liefert, vergleiche etwa **??**.

Beispiel 7.8.1.7 (**Bewertungen rationaler Zahlen**). Typisch ist schließlich das Beispiel des Körpers der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. In diesem Fall definiert jede Primzahl p eine diskrete Bewertung v_p auf $\mathbb{Q}$ durch die Vorschrift, daß für $a, b \in \mathbb{Z}\backslash 0$ teilerfremd zu p gilt

$$v_p(p^n a/b) = n$$

In derselben Weise definiert jedes irreduzible Element eines faktoriellen Ringes eine diskrete Bewertung seines Quotientenkörpers. Im Spezialfall des Polynomrings $\mathbb{C}[T]$ über $\mathbb{C}$ erhalten wir so genau die in 7.8.1.5 betrachteten diskreten Bewertungen auf $\mathbb{C}(T)$.

Definition 7.8.1.8. Ein **diskreter Bewertungsring** ist ein kommutativer Integritätsring mit der Eigenschaft, daß es auf seinem Quotientenkörper eine diskrete Bewertung 7.8.1.2 gibt, für die unser Integritätsring gerade aus allen Elementen mit nichtnegativer Bewertung besteht.

7.8.1.9. Wir werden gleich sehen, daß die fragliche diskrete Bewertung auf dem Quotientenkörper in Definition 7.8.1.8 durch den besagten Integritätsring bereits eindeutig bestimmt ist.

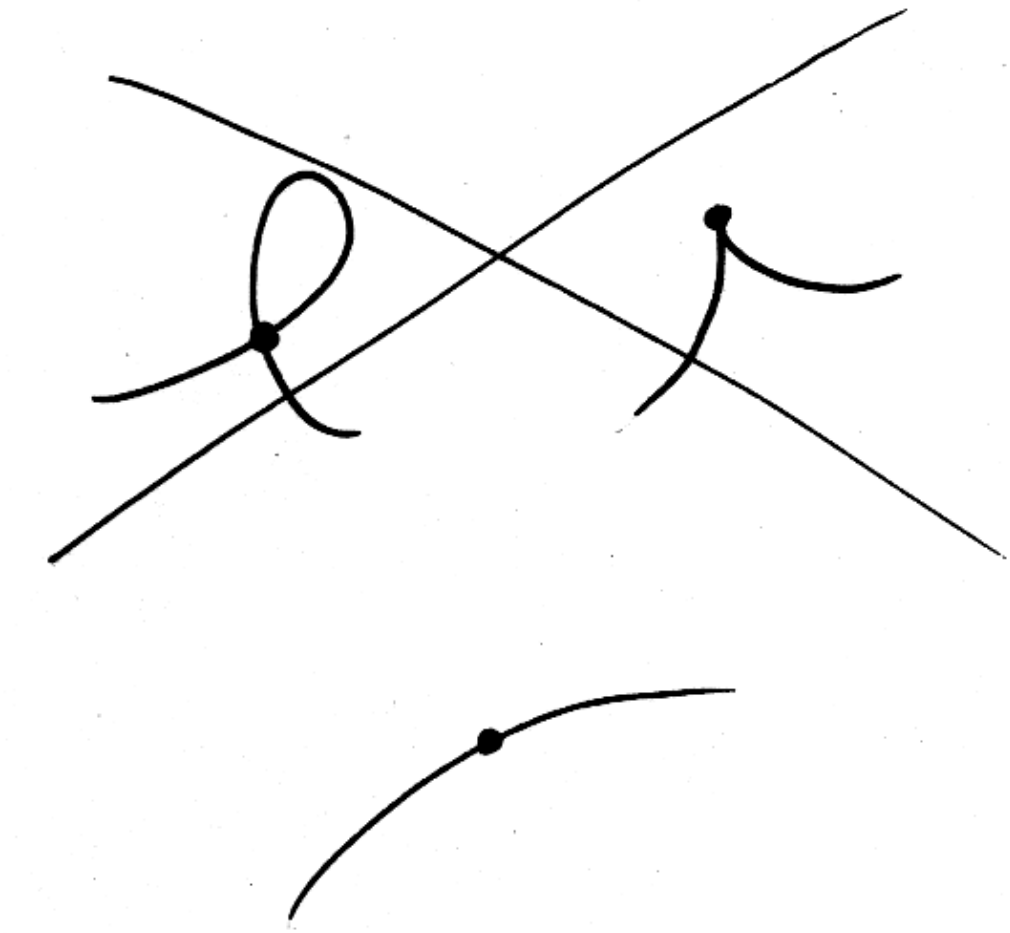
Beispiele 7.8.1.10. Der Ring der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in einem Körper ist ein diskreter Bewertungsring. Der Ring der Potenzreihen mit komplexen oder auch reellen Koeffizienten und positivem Kovergenzradius ist ein diskreter Bewertungsring.

Satz 7.8.1.11 (**Charakterisierungen diskreter Bewertungsringe**). *Gegeben ein Kring sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Kring ist ein diskreter Bewertungsring;*
2. *Unser Kring ist ein Hauptidealring mit genau zwei Primidealen;*
3. *Unser Kring ist ein regulärer lokaler Ring der Krulldimension Eins;*
4. *Unser Kring ist ein ganz abgeschlossener noetherscher lokaler Integritätsring der Krulldimension Eins.*

Beispiel 7.8.1.12. Der lokale Ring beim verklebten Punkt derjenigen komplexen algebraischen Varietät, die aus $\mathbb{C}$ entsteht durch das Verkleben zweier verschiedener Punkte, ist ein lokaler noetherscher kommutativer Integritätsbereich der Krulldimension Eins, aber eben nicht ganz abgeschlossen und mithin auch kein diskreter Bewertungsring. Dasselbe gilt für den lokalen Ring der Neil'schen Parabel an ihrer Spitze.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Sei A unser Bewertungsring und $v : \mathrm{Quot}A \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ eine diskrete Bewertung mit $A = \{q \in \mathrm{Quot}A \mid v(q) \geq 0\}$. Offensichtlich sind dann die Einheiten $A^\times = \{a \in A \mid v(a) = 0\}$ genau die Elemente mit der Bewertung Null und das Komplement $\mathfrak{m} := A \backslash A^\times = \{a \in A \mid v(a) > 0\}$ ist ein Ideal von A, notwendig das einzige maximale Ideal. Da wir v surjektiv annehmen, gibt es $t \in \mathfrak{m}$ mit $v(t) = 1$. Für jedes solche t folgt sofort $\mathfrak{m} = At$. Jedes derartige



Hier der zugegebenermaßen waghalsige Versuch, das Konzept eines diskreten Bewertungsrings in Bilder zu fassen. Im geometrischen Fall ist eben der lokale Ring einer affinen Varietät an einem Punkt genau dann ein diskreter Bewertungsring, wenn nur eine Komponente der Varietät durch besagten Punkt geht, wenn diese Komponente darüber hinaus die Dimension Eins hat, und wenn schließlich unser Punkt sogar eine glatte Stelle besagter Varietät ist.

Element t heißt im übrigen eine **Uniformisierende** unseres diskreten Bewertungsrings. Gegeben ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ ungleich Null sei $a \in \mathfrak{a}$ gegeben mit $i = v(a)$ kleinstmöglich. Es folgt sofort $\mathfrak{a} = At^i = \mathfrak{m}^i$ und A ist in der Tat ein Hauptidealring mit genau einem Primideal ungleich Null. Nebenbei sehen wir auch, daß für $a \in A$ gilt $v(a) = \sup\{i \mid a \in \mathfrak{m}^i\}$ und daß so die Bewertung v schon durch den Teilring $A \subset \operatorname{Quot} A$ eindeutig festgelegt wird.

$2 \Rightarrow 1$. Nach 6.2.4.11 ist unser Hauptidealring A faktoriell und hat bis auf Einheiten genau ein irreduzibles Element t. Jede Wahl von t liefert also eine Bijektion $A^\times \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} A\backslash 0, (u,i) \mapsto ut^i$ und dann auch eine Bijektion $A^\times \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} (\operatorname{Quot} A)^\times$, gegeben durch dieselben Formel $(u,i) \mapsto ut^i$. Eine mögliche Bewertung wird dann gegeben durch $v(ut^i) = i$ und $v(0) = \infty$.

$2 \Rightarrow 3$. Das folgt unmittelbar aus den Definitionen.

$3 \Rightarrow 2$. Gegeben ein regulärer lokaler Ring $(A, \mathfrak{m})$ der Krulldimension Eins wissen wir um die Existenz einer Fortsetzung der Identität auf $A/\mathfrak{m}$ zu einem Isomorphismus von graduierten Ringen

$$(A/\mathfrak{m})[X] \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A$$

Insbesondere sind die Subquotienten $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ für alle $i \geq 0$ einfach und es folgt, daß jeder echte Untermodul von $\mathfrak{m}^i$ bereits in $\mathfrak{m}^{i+1}$ enthalten sein muß. Nach dem Krull'schen Durchschnittssatz sind also die $\mathfrak{m}^i$ alle von Null verschiedenen Ideale und mit Nakayama sieht mal leicht $\mathfrak{m}^i = \langle t^i \rangle$ für jeden Erzeuger t von $\mathfrak{m}$.

$2 \Rightarrow 4$. Das folgt, da jeder Hauptidealring faktoriell und damit ganz abgeschlossen ist.

$4 \Rightarrow 3$. Es gilt zu zeigen, daß das das maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ ein Hauptideal ist. Da die Krulldimension Eins ist, kann $\mathfrak{m}$ nicht das Nullideal sein. Sei nun $a \in \mathfrak{m}$ mit $a \neq 0$ gewählt. Nach der Beschreibung 7.4.5.28 des Radikals eines Ideals als Schnitt der darüberliegenden Primideale und da die Krulldimension Eins ist, gilt $\sqrt{\langle a \rangle} = \mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt ist, folgt $\mathfrak{m}^n \subset \langle a \rangle$ für $n \gg 0$. Sei $n \geq 1$ minimal mit $\mathfrak{m}^n \subset \langle a \rangle$ und sei $b \in \mathfrak{m}^{n-1} \backslash \langle a \rangle$. So haben wir $y = b/a \in (\operatorname{Quot} A)\backslash A$ und folglich $y\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{m}$, da sonst $A[y]$ und damit y nach 7.5.1.6 angewandt auf den treuen $A[y]$-Modul $\mathfrak{m}$ ganz sein müßte über A. Andererseits gilt nach Konstruktion $b\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^n \subset \langle a \rangle$ und mithin $y\mathfrak{m} \subset A$, also $y\mathfrak{m} = A$ als einziges Ideal von A, das nicht in $\mathfrak{m}$ enthalten ist. Damit ist $\mathfrak{m}$ das Hauptideal erzeugt von $x := y^{-1}$. $\square$

Korollar 7.8.1.13 (Bewertungen zu glatten Stellen von Kurven). *Gegeben X eine Kurve über $k = \bar{k}$ und ein glatter Punkt $x \in X$ ist der Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ der regulären Funktionskeime ein diskreter Bewertungsring und für die zugehörige Bewertung $v = v_x$ gilt*

$$v_x(f) = \dim_k \mathcal{O}_{X,x}/\langle f \rangle \quad \forall f \in \mathcal{O}_{X,x}$$

7.8.1.14. Gegeben $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ nennen wir $v_x(f)$ die **Nullstellenordnung von f an der Stelle** x. Ist X irreduzibel, so nennen wir für $f \in \mathcal{M}(X)\backslash\mathcal{O}_{X,x}$ das Negative $-v_x(f)$ seiner Bewertung die **Polstellenordnung von f an der Stelle** x. Es ist klar, daß im Fall der Gerade $X = k$ die in 3.5.3.22 beziehungsweise 3.5.5.7 erklärte Nullstellenordnung beziehungsweise Polstellenordnung mit den hier erklärten Begriffen zusammenfällt.

Beweis. Das folgt sofort aus unserer Charakterisierung 7.8.1.11 diskreter Bewertungsringe und der Beziehung 7.7.4.13 von Glattheit und Regularität. □

Proposition* 7.8.1.15 (Definitionslücken durch Polstellen). *Sei X eine irreduzible k-Varietät, $x \in X$ ein Punkt mit ganz abgeschlossenem lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ und $f \in \mathcal{M}(X)\backslash\mathcal{O}_{X,x}$ eine am Punkt x nicht definierte rationale Funktion auf X. So liegt x im Abschluß der Menge aller Punkte, an denen f^{-1} definiert ist und den Wert Null annimmt.*

7.8.1.16. In gewisser Weise ist also im Fall eines ganz abgeschlossenen lokalen Rings „die Nicht-Definiertheit einer rationalen Funktion stets durch das Vorliegen einer Polstelle bedingt“. Um zu sehen, was im Fall eines nicht ganz abgeschlossenen lokalen Rings passieren kann, verklebe man zwei verschiedene Punkte von $\mathbb{C}^\times$. So entsteht eine $\mathbb{C}$-Varietät X, bei der am verklebten Punkt $x \in X$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ nicht ganz abgeschlossen ist. Die reguläre Funktion f auf $\mathbb{C}^\times$ gegeben durch $f(z) = z$ liegt dann nicht in $\mathcal{O}_{X,x}$, obwohl f^{-1} außerhalb von x überall definiert ist und keine Nullstelle hat. Dies Beispiel zeigt, daß man im Lemma auf die Bedingung „ganz abgeschlossen“ nicht verzichten kann. Salopp gesprochen ist in unserem Gegenbeispiel die Nicht-Definiertheit von f am Verklebepunkt x nicht durch eine „Polstelle“ bedingt, sondern durch „schlechtes Zusammenpassen“.

Beweis. Wir setzen $A := \mathcal{O}_{X,x}$. Nach 7.5.9.19 gibt es ein Primideal $\mathfrak{q} \subset A$ der Höhe Eins mit $f \notin A_\mathfrak{q}$. Nach 7.8.1.11.4 ist $A_\mathfrak{q}$ ein diskreter Bewertungsring. Es folgt unmittelbar $f^{-1} \in \mathfrak{q}_\mathfrak{q}$, also $f^{-1} = g/h$ mit $g \in \mathfrak{q}$ und $h \in A\backslash\mathfrak{q}$. Nun dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß X affin ist und daß g und h beide auf ganz X definiert sind. Dann gibt es aber auch ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{q} \cap \mathcal{O}(X)$ mit $h \in \mathcal{O}(X)\backslash\mathfrak{m}$. Das ist dann das Verschwindungsideal eines Punktes $z \in X$, an dem f^{-1} definiert ist und den Wert Null annimmt. Läge x nicht im Abschluß der Menge aller derartigen Punkte $z \in X$, so könnten wir den fraglichen Abschluß aus X entfernen und die so entstehende Varietät als unser X nehmen und erhielten unmittelbar einen Widerspruch. □

Übungen

Übung 7.8.1.17. Gegeben eine algebraische Körpererweiterung $K \subset L$ und eine diskrete Bewertung v auf L gilt $v(K^\times) \neq 0$.

Übung 7.8.1.18. Man zeige, daß es auf einem algebraisch abgeschlossenen Körper keine diskrete Bewertung geben kann. Man zeige, daß es auf einem vollkommenen Körper positiver Charakteristik keine diskrete Bewertung geben kann. Man zeige, daß es auf dem Körper der konstruierbaren Zahlen keine diskrete Bewertung gibt.

Übung 7.8.1.19 (**Maximalität diskreter Bewertungsringe**). Seien K ein Körper und $A \subset K$ ein diskreter Bewertungsring. Man zeige, daß K nur genau zwei Teilringe besitzt, die A umfassen, nämlich A und K.

Übung 7.8.1.20. Sei R ein noetherscher kommutativer Integritätsbereich. Man zeige:

1. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ der Höhe Eins und jedes $f \in R\backslash 0$ hat der Quotient $R_\mathfrak{p}/\langle f\rangle$ der Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ endliche Länge.

2. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ der Höhe Eins gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $v_\mathfrak{p} : (\mathrm{Quot} R)^\times \to \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, daß sein Wert auf allen $f \in R\backslash 0$ die Länge des Quotienten $R_\mathfrak{p}/\langle f\rangle$ angibt, in Formeln $v_\mathfrak{p}(f) = l(R_\mathfrak{p}/\langle f\rangle)$.

3. Ist $R_\mathfrak{p}$ regulär, so ist dies $v_\mathfrak{p}$ gerade die Restriktion der diskreten Bewertung auf $\mathrm{Quot} R$ mit Bewertungsring $R_\mathfrak{p}$.

Übung 7.8.1.21 (**Bewertung als lokale Multiplizität**). Gegeben ein diskreter Bewertungsring R mit seiner Bewertung v und ein Element $f \in R$ haben wir $v(f) = \mathrm{mult}(f)$ für die in 7.7.4.31 erklärte Multiplizität.

Übung 7.8.1.22. Sei $A \subset B$ eine modulendliche Kringerweiterung. Ist A ein diskreter Bewertungsring und B ein Integritätsbereich, so spaltet die Einbettung $A \hookrightarrow B$ als Homomorphismus von A-Moduln. Hinweis: 7.4.6.18.

7.8.2 Dedekindringe

Definition 7.8.2.1. Ein **Dedekind-Ring** ist ein noetherscher ganz abgeschlossener kommutativer Integritätsbereich der Krulldimension Eins.

7.8.2.2 (**Diskussion der Terminologie**). Manche Quellen fordern statt der letzten Bedingung von Dedekindringen nur Krulldimension kleinergleich Eins. Damit werden zusätzlich auch alle Körper als Dedekindringe zugelassen und viele der im folgenden getroffenen Aussagen müssen in komplizierterer Weise formuliert werden.

Proposition 7.8.2.3 (**Dedekindringe im geometrischen Fall**). *Eine affine Varietät X ist genau dann glatt, irreduzibel und eindimensional, wenn ihr Ring $\mathcal{O}(X)$ von regulären Funktionen ein Dedekindring ist.*

Beweis. Das folgt daraus, daß nach 7.8.1.11 ein lokaler noetherscher Kring der Krulldimension Eins genau dann ganz abgeschlossen ist, wenn er regulär ist. Ist also $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär für alle $x \in X$, so ist es auch ganz abgeschlossen für alle $x \in X$. Dasselbe folgt für den Schnitt $\mathcal{O}(X) = \bigcap_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x}$ in $\mathrm{Quot}\mathcal{O}(X)$. Ist umgekehrt $\mathcal{O}(X)$ ganz abgeschlossen, so nach 7.5.7.1 auch seine Lokalisierungen $\mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in X$. □

Beispiele 7.8.2.4. Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist ein Dedekindring. Jeder diskrete Bewertungsring ist ein Dedekindring, ja die diskreten Bewertungsringe sind nach 7.8.1.11 genau die lokalen Dedekindringe. Jede Lokalisierung eines Dedekindrings an einer Teilmenge, die mindestens ein maximales Ideal nicht trifft, ist wieder ein Dedekindring. Insbesondere ist jede Lokalisierung eines Dedekindrings an einem maximalen Ideal ein diskreter Bewertungsring.

Proposition 7.8.2.5. *Ein noetherscher kommutativer Integritätsbereich ist genau dann ein Dedekindring, wenn seine lokalen Ringe an maximalen Idealen sämtlich diskrete Bewertungsringe sind.*

Beweis. Dieser Beweis ist vollständig analog zu unserer Diskussion von Dedekindringen im geometrischen Fall. Ist A ein Dedekindring und $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal, so ist $A_\mathfrak{m}$ normal, noethersch und von der Krulldimension Eins und nach 7.8.1.11 folglich ein diskreter Bewertungsring. Sind umgekehrt die lokalen Ringe an maximalen Idealen $\mathfrak{m} \subset A$ sämtlich diskrete Bewertungsringe, so haben nach 7.8.1.11 alle $A_\mathfrak{m}$ und damit auch A die Krulldimension Eins. Weiter sind nach 7.8.1.11 auch alle $A_\mathfrak{m}$ ganz abgeschlossen und damit nach 7.4.3.51 auch $A = \bigcap A_\mathfrak{m}$. □

Vorschau 7.8.2.6 (**Ganzheitsringe sind Dedekindringe**). Ein **Zahlkörper** ist ein Körper K der Charakteristik Null, der endlich ist über seinem Primkörper, in Formeln $[K : \mathbb{Q}] < \infty$. Der **Ring der ganzen Zahlen** oder auch **Ganzheitsring** $\mathfrak{o}_K \subset K$ unseres Zahlkörpers K ist per definitionem der ganze Abschluß von $\mathbb{Z}$ in K. Nach dem Endlichkeitsresultat 7.8.3.9 für ganze Abschlüsse, das wir im nächsten Abschnitt beweisen, ist $\mathfrak{o}_K$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul, und nach der Stabilität der Krulldimension bei ganzen Kringerweiterungen 7.5.2.11 hat $\mathfrak{o}_K$ wie $\mathbb{Z}$ die Krulldimension Eins. Ganz abgeschlossen ist $\mathfrak{o}_K$ als ganzer Abschluß eh, also muß unser Ganzheitsring $\mathfrak{o}_K$ ein Dedekindring sein.

Satz 7.8.2.7 (**Bewertungen und maximale Ideale**). *Gegeben ein Dedekindring B liefert die Vorschrift, die jedem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ die durch den diskreten Bewertungsring $B_\mathfrak{m}$ nach 7.8.2.4 gegebene Bewertung auf $\mathrm{Quot}B$ zuweist, eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Max}\, B & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Diskrete Bewertungen auf } \mathrm{Quot}B, \\ \textit{deren Bewertungsring } B \textit{ umfaßt} \end{array} \right\} \\ \mathfrak{m} & \mapsto & v_\mathfrak{m} \end{array}$$

Beweis. Die Injektivität unserer Abbildung ist klar, es bleibt die Surjektivität zu zeigen. Sei dazu $v : \mathrm{Quot}B \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ eine diskrete Bewertung mit Bewertungsring $A \supset B$. Der Schnitt des maximalen Ideals $\mathfrak{m}_A \subset A$ mit B kann nicht das Nullideal sein, da sonst die Bewertung v auf $(\mathrm{Quot}B)^\times$ identisch verschwinden müßte. Also ist der Schnitt ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset B$. Natürlich gilt $B_\mathfrak{m} \subset A$ und aus der Maximalität diskreter Bewertungsringe 7.8.1.19 folgt $B_\mathfrak{m} = A$. $\square$

7.8.2.8. Wir bestimmen nun die Ganzheitsringe der Kreisteilungskörper und beginnen mit einer allgemeinen Vorüberlegung. Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ Ideale eines Krings R. Gilt $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = R$ für $i \neq j$, so ist mit einer zweifachen Anwendung des chinesischen Restsatzes 6.2.3.4 die offensichtliche Abbildung für alle $n \geq 1$ ein Isomorphismus

$$\langle \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_s \rangle / \langle (\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_s)^n \rangle \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_1/\langle \mathfrak{a}_1^n \rangle \times \ldots \times \mathfrak{a}_s/\langle \mathfrak{a}_s^n \rangle$$

Wird die linke Seite von einem einzigen Element erzeugt, so auch jeder der Faktoren auf der rechten Seite. Im Fall $R = \mathbb{Z}[X]/\langle P \rangle$ für ein normiertes Polynom P gilt für $a \in \mathbb{Z}$ stets $P(a) \in \langle \bar{X} - a \rangle \subset R$. Haben wir speziell $P(a) \neq 0$ und ist $P(a) = q_1 \ldots q_r$ eine Zerlegung in ein Produkt paarweise teilerfremder Faktoren, so folgern wir in R die Darstellung als Produktideal

$$\langle \bar{X} - a \rangle = \langle \bar{X} - a, q_1 \rangle \ldots \langle \bar{X} - a, q_r \rangle$$

Hier gilt $\subset$, weil das Produkt nach 6.2.3.4 mit dem Schnitt zusammenfällt, und $\supset$ wegen $q_1 \ldots q_r \in \langle \bar{X} - a \rangle$. So sehen wir, daß für $\mathfrak{a}_i := \langle \bar{X} - a, q_i \rangle$ die Quotienten $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_i^2$ jeweils von einem Element erzeugt werden.

Proposition 7.8.2.9 (Ganzheitsringe von Kreisteilungskörpern). *Für jede Einheitswurzel $\zeta \in \mathbb{C}$ ist $\mathbb{Z}[\zeta]$ ein Dedekindring und damit der Ganzheitsring des Kreisteilungskörpers $\mathbb{Q}(\zeta)$.*

Beweis. Nach 7.5.1.5 ist $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\zeta]$ eine ganze und modulendliche Ringerweiterung. Nach 7.5.2.11 haben damit beide Ringe dieselbe Krulldimension und es folgt $\mathrm{kdim}\, \mathbb{Z}[\zeta] = 1$. Es bleibt also nur zu zeigen, daß für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathbb{Z}[\zeta]$ der Quotient $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ von einem einzigen Element erzeugt wird. Wir behandeln zunächst den Fall einer primitiven p^r-ten Einheitswurzel für p prim. Wir kennen das zugehörige Kreisteilungspolynom $\Phi_{p^r}(X) = \Phi_p(X^{p^{r-1}})$ aus 6.2.8.6 und folgern insbesondere $\Phi_{p^r}(1) = p$. Für den Ring $R := \mathbb{Z}[X]/\langle \Phi_{p^r}(X) \rangle$ bedeutet das die Beziehung $p \in \langle \bar{X} - 1 \rangle$. Das liefert die linke Vertikale eines kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
R/pR \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, two heads] & \mathbb{F}_p[X]/\langle \bar{\Phi}_{p^r}(X) \rangle \arrow[r, equal] & \mathbb{F}_p[X]/\langle (X-1)^{(p-1)p^{r-1}} \rangle \arrow[d, two heads] & \\
R/\langle \bar{X} - 1 \rangle \arrow[rr, "\sim"] & & \mathbb{F}_p[X]/\langle X - 1 \rangle \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{F}_p
\end{tikzcd}$$

Über pR liegt also genau ein maximales Ideal von R, und das wird von einem einzigen Element erzeugt, nämlich dem Element $\bar{X}-1$. Ist andererseits l eine von p verschiedene Primzahl, so ist für $n \geq 1$ teilerfremd zu l das Polynom $X^n - 1$ separabel in $\mathbb{F}_l[X]$ und folglich zerfällt auch das Bild $\bar{\Phi}_n$ von Φ_n in $\mathbb{F}_l[X]$ in ein Produkt von paarweise teilerfremden irreduziblen Faktoren $\bar{\Phi}_n = Q_1 \ldots Q_s$. Für $R := \mathbb{Z}[X]/\langle \Phi_n(X) \rangle$ gilt demnach

$$R/lR \cong \mathbb{F}_l[X]/\langle \bar{\Phi}_n(X) \rangle \cong R/\mathfrak{m}_1 \times \ldots \times R/\mathfrak{m}_s$$

für die paarweise verschiedenen maximalen Ideale $\mathfrak{m}_i \subset R$, die l enthalten. Es folgt $lR = \langle \mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_s \rangle$ und nach 7.8.2.8 werden dann auch alle $\mathfrak{m}_i/\langle \mathfrak{m}_i^2 \rangle$ vom jeweiligen Bild von l erzeugt. Das erledigt den Fall einer primitiven p^r-ten Einheitswurzel. Es bleibt zu zeigen, daß auch für $m \geq 1$ teilfremd zu p und eine primitive mp^r-te Einheitswurzel ζ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von $\mathbb{Z}[\zeta]$, die p enthalten, der Quotient $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ von einem einzigen Element erzeugt wird. Da wir bereits wissen, daß $\mathbb{Z}[\zeta^m]$ ganz abgeschlossen ist, muß das Minimalpolynom P von ζ über $\mathbb{Q}(\zeta^m)$ Koeffizienten in $R := \mathbb{Z}[\zeta^m]$ haben und wir finden

$$R[Y]/\langle P(Y) \rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\zeta]$$

Als Teiler von $Y^m - \zeta$ bleibt nun P separabel bei Reduktion modulo dem maximalen Ideal $\langle \zeta^m - 1 \rangle$ von R über p, denn darunter wird es ein Teiler des Polynoms $Y^m - 1 \in \mathbb{F}_p[Y]$. Dasselbe Argument wie zuvor zeigt nun, daß für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von $\mathbb{Z}[\zeta]$ über p oder gleichbedeutend über $\langle \zeta^m - 1 \rangle$ der Quotient $\mathfrak{m}/\langle \mathfrak{m}^2 \rangle$ von $\zeta^m - 1$ erzeugt wird. $\square$

Übungen

Übung 7.8.2.10 (**Ganzheitsringe quadratischer Zahlkörper**). Eine Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$ vom Grad Zwei heißt ein **quadratischer Zahlkörper**. Offensichtlich hat jeder quadratische Zahlkörper die Gestalt $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für genau ein $d \in \mathbb{Z} \backslash \{0, 1\}$ ohne mehrfachen Primfaktor. Gegeben solch ein d kann der Ring der ganzen Zahlen in der quadratischen Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ beschrieben werden als

$$\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})} = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d} & d \notin 1 + 4\mathbb{Z}, \\ \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\big((1+\sqrt{d})/2\big) & d \in 1 + 4\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Es ist damit klar, daß $A := \mathbb{Z}[X]/\langle X^2 - 5 \rangle$ nicht an allen maximalen Idealen einen regulären lokalen Ring haben kann. Man zeige speziell, daß für das maximale Ideal $\mathfrak{m} := \langle 2, X - 1 \rangle$ gilt $\dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 2$.

Übung 7.8.2.11. Sei B ein Dedekindring. Ein von Null verschiedener endlich erzeugter B-Untermodul von $\operatorname{Quot} B$ heißt ein **gebrochenes Ideal von** B. Wir erhalten eine Bijektion

$$\{\text{gebrochene Ideale von } B\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\operatorname{Max} B$$

mit dem freien $\mathbb{Z}$-Modul über $\operatorname{Max} B$, indem wir jedem gebrochenen Ideal I die Funktion f_I zuordnen mit $f_I(\mathfrak{m}) = \inf\{v_\mathfrak{m}(b) \mid b \in I\}$ für $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} B$. Erklären wir das Produkt IJ zweier gebrochener Ideale I, J als das von allen Produkten ab von Elementen $a \in I$, $b \in J$ erzeugte gebrochene Ideal, so wird diese Bijektion sogar ein Gruppenisomorphismus. Natürlich induziert sie auch eine Bijektion

$$\{\text{Ideale von } B\} \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathbb{N} \operatorname{Max} B$$

mit der Menge aller endlichen Multimengen von maximalen Idealen. Ist speziell $k = \bar{k}$ und X eine irreduzible glatte affine Kurve über k, so entsprechen die gebrochenen Ideale des Rings der regulären Funktionen $\mathcal{O}(X)$ eineindeutig formalen endlichen $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von Punkten aus X, und zwar entspricht $\sum n_x x$ gerade der Menge der rationalen Funktionen $f \in \mathcal{M}(X)$, die an allen Stellen x mit $n_x \geq 0$ definiert sind, an allen Stellen x mit $n_x > 0$ eine n_x-fache Nullstelle haben, und an allen Stellen mit $n_x < 0$ entweder definiert sind oder einen Pol der Ordnung höchstens n_x haben. In Formeln ausgedrückt haben wir also

$$\begin{array}{ccc} \{\text{gebrochene Ideale von } \mathcal{O}(X)\} & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{Z}X \\ \{f \in \mathcal{M}(X) \mid v_x(f) \geq n_x \ \forall x \in X\} & \longmapsfrom & \sum n_x x \end{array}$$

Übung 7.8.2.12 (**Moduln über Dedekindringen**). Jeder endlich erzeugte Modul über einem Dedekindring ist isomorph zur direkten Summe eines projektiven Moduls mit einem Torsionsmodul. Hinweis: 7.4.3.39 und die Klassifikation endlich erzeugter Moduln über Hauptidealringen.

Übung 7.8.2.13. Sei $A \subset B$ eine modulendliche Kringerweiterung. Ist A ein Dedekindring und B ein Integritätsbereich, so induziert unsere Einbettung für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ eine Einbettung $A/\mathfrak{a} \hookrightarrow B/\mathfrak{a}B$. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall eines lokalen Dekekindrings A zurück und verwende 7.8.1.22.

7.8.3 Norm, Spur, Endlichkeit ganzer Abschlüsse*

Definition 7.8.3.1. Gegeben eine endliche Körpererweiterung L/K erklären wir zwei Abbildungen $\mathrm{N}, \mathrm{S} : L \to K$, die **Norm** und die **Spur**, indem wir für $a \in L$ die K-lineare Abbildung $(a\cdot) : L \to L$ betrachten und setzen

$$\begin{array}{rclclcl} \operatorname{Norm}(a) & = & \mathrm{N}(a) & = & \mathrm{N}_L^K(a) & := & \det_K((a\cdot)|L) \\ \operatorname{Spur}(a) & = & \mathrm{S}(a) & = & \mathrm{S}_L^K(a) & := & \operatorname{tr}_K((a\cdot)|L) \end{array}$$

7.8.3.2. Für $a \in K$ haben wir offensichtlich $\mathrm{N}_L^K(a) = a^{[L:K]}$ und $\mathrm{S}_L^K(a) = [L : K]a$. Für $\sigma : L \xrightarrow{\sim} M$ ein Isomorphismus von endlichen Körpererweiterungen von K gilt offensichtlich $\mathrm{N}_L^K(a) = \mathrm{N}_M^K(\sigma(a))$ und $\mathrm{S}_L^K(a) = \mathrm{S}_M^K(\sigma(a))$.

7.8.3.3 (**Diskussion der Terminologie**). Unglücklicherweise erhalten wir so im Fall der Körpererweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ die Abbildung $\mathrm{N}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto z\bar{z}$ und damit gerade das Quadrat der Norm einer komplexen Zahl, wie wir sie in 3.2.7.9 erklärt hatten. Was im Einzelfall genau gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen. Ist allgemeiner D eine endlichdimensionale Ringalgebra über einem Körper K, so findet man auch in dieser Allgemeinheit manchmal die Notation $\mathrm{N}_D^K(a) = \det((a\cdot)|D)$. Im Fall eines Schiefkörpers D wird aber die Notation $\mathrm{N}(a)$ alternativ auch verwendet als Abkürzung für $\mathrm{N}_{K(a)}^K(a)$.

Lemma 7.8.3.4 (**Transitivität von Norm und Spur**). *Sind $K \subset L \subset M$ endliche Körpererweiterungen, so gelten die Formeln*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{N}_M^K & = & \mathrm{N}_L^K \circ \mathrm{N}_M^L \\ \mathrm{S}_M^K & = & \mathrm{S}_L^K \circ \mathrm{S}_M^L \end{array}$$

Beweis. Die zweite Formel folgt daraus, daß sich für eine $(m \times m)$-Matrix von $(n \times n)$-Matrizen die Gesamtspur auch berechnen läßt, indem man zunächst alle $(n \times n)$-Blöcke auf der Diagonalen aufaddiert und dann von dieser Summe die Spur nimmt. Die erste Formel folgt daraus, daß man nach 3.6.4.15 ganz analog auch die Determinante einer Blockmatrix mit paarweise kommutierenden Blöcken berechnen kann als die Determinante der $(n \times n)$-Matrix, die sich als „Blockdeterminante“ ergibt. Ist etwas genauer $m_1, \ldots, m_r$ eine L-Basis von M, so wird die Multiplikation mit $b \in M$ gegeben durch eine $(r \times r)$-Matrix $(a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(r; L)$. Ist weiter $l_1, \ldots, l_s$ eine K-Basis von L, so werden die Multiplikationen mit a_{ij} dargestellt durch gewisse $(s \times s)$-Matrizen

$$A_{ij} \in \mathrm{Mat}(s; K)$$

Die Multiplikation mit $b \in M$ wird dann in der K-Basis von M, die aus den $m_i l_\nu$ besteht, durch die Blockmatrix $B = (A_{ij})$ dargestellt. □

Satz 7.8.3.5 (**Norm und Spur über Galoistheorie**). *Gegeben L/K eine endliche separable Körpererweiterung und M eine Vergrößerung von L zu einer normalen Erweiterung von K gilt*

$$\mathrm{S}_L^K(a) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Kring}^K(L,M)} \sigma(a) \quad \textit{und} \quad \mathrm{N}_L^K(a) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Kring}^K(L,M)} \sigma(a)$$

7.8.3.6. Ist also speziell L/K eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe Γ, so gilt $\mathrm{S}(a) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma(a)$ und $\mathrm{N}(a) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \gamma(a)$.

Beweis. Ist $L' \subset L$ ein Unterkörper, der a enthält, so gilt wegen der Transitivität von Norm und Spur 7.8.3.4 und unseren Erkenntnissen 7.8.3.1 für Norm und

Spur von Elementen des Grundkörpers offensichtlich $\mathrm{S}_L^K(a) = [L : L']\mathrm{S}_{L'}^K(a)$ und $\mathrm{N}_L^K(a) = (\mathrm{N}_{L'}^K(a))^{[L:L']}$. Die rechten Seiten der behaupteten Formeln verhalten sich nun in derselben Weise beim Übergang von L' zu L, so daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $L = K(a)$ annehmen dürfen. Dann definiert jedoch $X \mapsto a$ einen Körperisomorphismus

$$K[X]/\langle \mathrm{Irr}(a, K)\rangle \xrightarrow{\sim} L$$

Das charakteristische Polynom der K-linearen Abbildung $(a\cdot) : L \to L$ ist mit 6.2.1.25 folglich $\det(X\mathrm{id} - (a\cdot)) = \mathrm{Irr}(a, K) = \prod(X - \sigma(a))$. Setzen wir hier $X = 0$, so ergibt sich die Formel für die Norm. Vergleichen wir dahingegen die Koeffizienten der zweithöchsten Potenzen von X auf beiden Seiten, so ergibt sich die Formel für die Spur. □

Korollar 7.8.3.7 (Spur und Separabilität). *Eine endliche Körpererweiterung ist genau dann separabel, wenn die zugehörige Spurabbildung nicht identisch verschwindet.*

Beweis. Ist unsere Erweiterung separabel, so kann ihre Spurabbildung nicht identisch verschwinden nach ihrer Darstellung als Summe von Galoiskonjugierten aus 7.8.3.5 und dem Satz über die lineare Unabhängigkeit von Charakteren 6.3.8.16. Ist unsere Erweiterung nicht separabel, so überlassen wir das Argument dem Leser mit dem Hinweis, sich vom Beweis von 7.8.3.5 inspirieren zu lassen. □

7.8.3.8. Für jede endliche Körpererweiterung L/K liefert die Spur eine K-bilineare Paarung, die **Spurform**

$$\begin{array}{ccc} L \times L & \to & K \\ (x, y) & \mapsto & \mathrm{S}_L^K(xy) \end{array}$$

Sie ist offensichtlich invariant unter der Galoisgruppe. Für L/K endlich separabel ist diese Paarung nach 7.8.3.7 nicht ausgeartet.

Satz 7.8.3.9 (Endlichkeit ganzer Abschlüsse). *Seien A ein ganz abgeschlossener noetherscher Integritätsring und $L/\mathrm{Quot}A$ eine endliche separable Körpererweiterung seines Quotientenkörpers. So ist der ganze Abschluß B von A in L modulendlich über A.*

Beweis. Nach 7.8.3.7 liefert für jede endliche separable Erweiterung die Spur $\mathrm{S}_L^K : L \to K$ eine symmetrische nichtausgeartete Bilinearform

$$\begin{array}{ccc} L \times L & \to & K \\ (x, y) & \mapsto & \mathrm{S}_L^K(xy) \end{array}$$

Aus der Beschreibung der Spur als Summe von Galoiskonjugierten 7.8.3.5 folgt, daß $\mathrm{S}_L^K(b)$ ganz ist über A für alle $b \in B$. Also gilt nach unserer Annahme $\mathrm{S}_L^K(B) \subset A$. Nun finden wir nach 7.5.7.20 sicher $b_1, \ldots, b_n \in B$, die eine Basis von L über K bilden. Sie spannen in L einen freien A-Modul V vom Rang n auf. Die duale Basis $b_1^*, \ldots, b_n^*$ in Bezug auf unsere Bilinearform spannt dann in L einen weiteren freien A-Modul V^* vom Rang n auf, der auch beschrieben werden kann durch die Formel

$$V^* = \{x \in L \mid \mathrm{S}_L^K(xy) \in A \quad \forall y \in V\}$$

Insbesondere gilt $B \subset V^*$. Aus A noethersch folgt dann sofort, daß B endlich erzeugt ist als A-Modul. □

Satz 7.8.3.10 (Endlichkeit ganzer Abschlüsse im geometrischen Fall). *Seien A ein über einem Körper k ringendlicher Integritätskring und $L/\mathrm{Quot}A$ eine endliche Körpererweiterung seines Quotientenkörpers. So ist auch der ganze Abschluß von A in L ringendlich über k und a forteriori modulendlich über A.*

7.8.3.11. Insbesondere ist auch der ganze Abschluß von A in $\mathrm{Quot}A$ ringendlich über k. Im Gegensatz zum vorhergehenden Satz 7.8.3.9 brauchen wir in diesem „geometrischen“ Fall weder A ganz abgeschlossen noch unsere Körpererweiterung separabel anzunehmen.

Beweis. Noether's Normalisierungslemma 7.5.4.6 liefert uns einen Teilring

$$k['x_1, \ldots, x_n] \subset A$$

mit A modulendlich über diesem Teilring. Der ganze Abschluß von A in L ist also auch der ganze Abschluß von $k['x_1, \ldots, x_n]$ in L. Ist $L/k('x_1, \ldots, x_n)$ separabel, so sind wir fertig mit dem Satz über die Endlichkeit ganzer Abschlüsse im Fall ganz abgeschlossener Ringe 7.8.3.9, da ja Polynomringe ganz abgeschlossen sind. Sonst vergrößern wir L mit 6.3.8.25 zu einer endlichen normalen Erweiterung $N/k('x_1, \ldots, x_n)$ mit Galoisgruppe G und betrachten die Körperkette

$$k('x_1, \ldots, x_n) \subset N^G \subset N$$

Sie besteht nach 6.4.1.30 aus einer rein inseparablen Erweiterung gefolgt von einer separablen Erweiterung. Nach 6.3.9.37 gibt es mithin eine p-Potenz q, für $p > 0$ die Charakteristik von k, mit $f^q \in k('x_1, \ldots, x_n)$ für alle $f \in N^G$. Nehmen wir Erzeuger $f_1, \ldots, f_r \in N^G$ der ersten Körpererweiterung und notieren h eine endliche Körpererweiterung von k, die für alle Koeffizienten der Zähler und Nenner der f_i^q jeweils q-te Wurzeln enthält, so erhalten wir eine Einbettung

$N^G \subset h('x_1^{1/q}, \ldots, x_n^{1/q})$ und können N vergrößern zu einer endlichen separablen Erweiterung $h(x_1^{1/q}, \ldots, x_n^{1/q}) \subset M$, so daß im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} k('x_1, \ldots, x_n) & \subset & N^G & \subset & N \\ & & \cap & & \cap \\ & & h('x_1^{1/q}, \ldots, x_n^{1/q}) & \subset & M \end{array}$$

die untere rechte Inklusion auch separabel ist. Der ganze Abschluß des Teilrings $k['x_1, \ldots, x_n]$ in $h('x_1^{1/q}, \ldots, x_n^{1/q})$ ist aber offensichtlich $h[x_1^{1/q}, \ldots, x_n^{1/q}]$ und damit modulendlich über $k['x_1, \ldots, x_n]$. Der ganze Abschluß in M ist dann modulendlich nach 7.8.3.9. □

Übungen

Ergänzende Übung 7.8.3.12. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung, V ein endlichdimensionaler L-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. So gilt die Identität $\det_K \varphi = \mathrm{N}_L^K(\det_L \varphi)$. Hinweis: 3.6.4.15. Alternative: Man ziehe sich durch geeignete Körpererweiterung von L auf den Fall zurück, daß für eine Basis von V die Matrix von φ obere Dreiecksgestalt hat, und argumentiere dann mit der Formel für die Determinante block-oberer Dreiecksmatrizen 3.6.2.9.

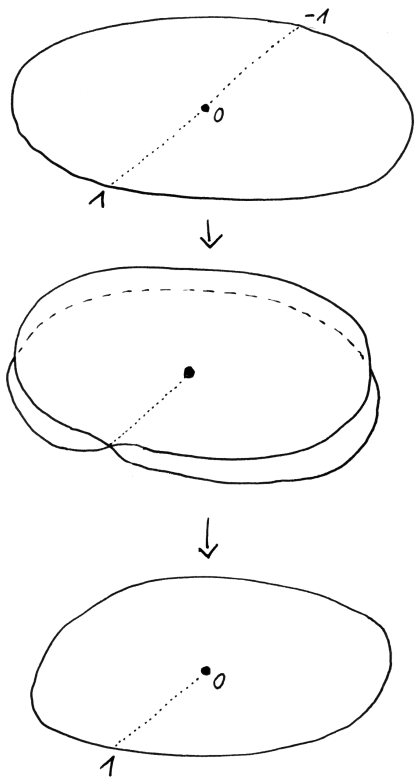
7.8.4 Bewertungen und Körpererweiterungen*

Definition 7.8.4.1. Ein Homomorphismus von diskret bewerteten Körpern heißt **bewertungsverträglich**, wenn seine Verknüpfung mit der Bewertung des Bildkörpers ein positives Vielfaches der Bewertung auf dem Ausgangskörper ist.

7.8.4.2. Für einen bewertungsverträglichen Homomorphismus $\varphi : K \to L$ von diskret bewerteten Körpern gibt es demnach per definitionem genau eine positive natürliche Zahl $d \in \mathbb{N}_{>0}$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, two heads, "v_K"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "(d\cdot)"] \\ L \arrow[r, two heads, "v_L"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Diese natürliche Zahl d heißt der **Verzweigungsgrad** unserer bewertungsverträglichen Körpererweiterung. Auf Englisch sagt man dazu **ramification index**, auf Französisch **indice de ramification**. Ein bewertungsverträglicher Homomorphismus vom Verzweigungsgrad Eins heißt **unverzweigt**. Ein Unterkörper eines diskret bewerteten Körpers besitzt genau dann eine verträgliche Bewertung, wenn die Bewertung des großen Körpers auf dem Unterkörper auch Werte außerhalb von $\{0, \infty\}$ annimmt.



Dies Bild erinnert unsere Anschauung für die Abbildung $z \mapsto z^2$ der Einheitskreisscheibe auf sich selbst. Es stellt diese Abbildung dar als die Komposition einer Abbildung der Einheitskreisscheibe auf eine räumliche sich selbst durchdringende Fläche, gegeben in etwa durch eine Formel der Gestalt $z \mapsto (z^2, \varepsilon(\operatorname{Im} z))$ in $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ für geeignetes monotones und in einer Umgebung von Null streng monotones ε, gefolgt von einer senkrechten Projektion auf die ersten beiden Koordinaten. Das Zurückholen meromorpher Funktionen unter dieser Abbildung induziert für die Bewertungen nach der Nullstellen- beziehungsweise Polordnung am Ursprung einen Homomorphismus diskret bewerteter Körper vom Verzweigungsgrad Zwei.

Beispiel 7.8.4.3. Dieses Beispiel ist für Leser mit Grundkenntnissen in Funktionentheorie gedacht. Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ induziert durch Vorschalten eine Einbettung in der Gegenrichtung auf dem Körper der meromorphen Funktionen $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{M}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})$. Gegeben $p \in \mathbb{C}$ mit $p^n = q$ ist das zum Beispiel ein bewertungsverträglicher Körperhomomorphismus $(\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C}), v_p) \hookrightarrow (\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C}), v_q)$ mit Verzweigungsgrad Eins für $p \neq 0 \neq q$ und Verzweigungsgrad n für $p = q = 0$. Ist allgemeiner $f : X \to Y$ ein nichtkonstanter Homomorphismus von zusammenhängenden Riemann'schen Flächen und $p \in X$ ein Punkt mit Bild $f(p) = q \in Y$, so liefert das Zurückholen von meromorphen Funktionen einen Homomorphismus von diskret bewerteten Körpern

$$(\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(Y), v_q) \hookrightarrow (\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(X), v_p)$$

und der zugehörige Verzweigungsgrad ist genau der „topologische" Verzweigungsgrad im Sinne von **??**.

Beispiel 7.8.4.4. Die Einbettung $\mathbb{C}(\!(T)\!) \hookrightarrow \mathbb{C}(\!(Y)\!)$ des Körpers der Laurentreihen über $\mathbb{C}$ in sich selber vermittels $T \mapsto Y^n$ für ein fest vorgegebenes $n > 0$ ist ein bewertungsverträglicher Morphismus diskret bewerteter Körper vom Verzweigungsgrad n.

Beispiel 7.8.4.5. Die Einbettung $\mathbb{Q}(\!(T)\!) \hookrightarrow \mathbb{C}(\!(T)\!)$ des Körpers der Laurentreihen über $\mathbb{Q}$ in den Körper der Laurentreihen über $\mathbb{C}$ ist ein bewertungsverträglicher Morphismus diskret bewerteter Körper vom Verzweigungsgrad Eins.

Definition 7.8.4.6. Ein Homomorphismus von lokalen Ringen heißt **lokal**, wenn das Urbild des größten echten Ideals das größte echte Ideal ist.

Proposition 7.8.4.7 (**Verzweigung bei Körpern und Ringen**). *Das Bilden des Teilrings aller Elemente mit nichtnegativer Bewertung liefert eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{diskret bewertete Körper,} \\ \textit{bewertungsverträgliche} \\ \textit{Körperhomomorphismen} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\approx} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{diskrete Bewertungsringe,} \\ \textit{lokale Ringhomomorphismen} \end{array} \right\} \\ (K, v) & \mapsto & \mathfrak{o}_K := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\} \end{array}$$

Die Uniformisierenden des diskreten Bewertungsrings $\mathfrak{o}_K$ sind dabei genau die Elemente unseres diskret bewerteten Körpers mit Bewertung Eins.

7.8.4.8. Man verwendet diese Entsprechung, um die Begriffe **Verzweigungsgrad** und **unverzweigt** auf den Fall lokaler Ringhomomorphismen diskreter Bewertungsringe zu übertragen. Im Fall eines lokalen Ringhomomorphismus diskreter Bewertungsringe $(A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ ist der Verzweigungsgrad mithin das $d \geq 1$ mit $B\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^d$.

Beispiel 7.8.4.9. Sei X eine zusammenhängende Riemann'sche Fläche und $x \in X$ ein Punkt. Dem diskret bewerteten Körper $\mathcal{M}_x^{\mathrm{an}}$ der „meromorphen Funktionskeime bei x" entspricht unter unserer Äquivalenz der Ring $\mathcal{O}_x^{\mathrm{an}}$ der „holomorphen Funktionskeime bei x". Eine Uniformisierende wäre in diesem Fall ein holomorpher Funktionskeim u bei x mit einer einfachen Nullstelle bei x. Per definitionem besitzt x eine zusammenhängende offene Umgebung $U \Subset X$, auf der sich unser Funktionskeim u realisieren läßt und auf der u sogar einen Isomorphismus von bepunkteten Riemann'schen Flächen

$$u : (U, x) \xrightarrow{\sim} (W, 0)$$

mit $W = u(U) \Subset \mathbb{C}$ induziert. Man sagt dann auch, die Funktion u liefere eine „Uniformisierung der Riemann'schen Fläche X in einer Umgebung von x" und daher rührt die Bezeichnung „Uniformisierende" im Beweis von 7.8.1.11.

Beweis. Sei (K, v) ein diskret bewerteter Körper. Offensichtlich ist $\mathfrak{o}_K \subset K$ ein Teilring und seine Einheitengruppe ist $\mathfrak{o}_K^\times = \{x \in K \mid v(x) = 0\}$. Die Nichteinheiten von $\mathfrak{o}_K$ bilden also ein Ideal $\mathfrak{m}_K = \{x \in K \mid v(x) \geq 1\}$, das notwendig das einzige maximale Ideal sein muß. Jedes $\pi \in K$ mit $v(\pi) = 1$ liefert einen Gruppenisomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{o}_K^\times \times \mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & K^\times \\ (u, n) & \mapsto & u\pi^n \end{array}$$

Dieselbe Abbildung induziert auch eine Bijektion $\mathfrak{o}_K^\times \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{o}_K \backslash 0$. Die Ideale von $\mathfrak{o}_K$ sind also genau das Nullideal und die Ideale $\langle \pi^n \rangle$ für $n \in \mathbb{N}$. Das zeigt, daß unser Ring $\mathfrak{o}_K$ ein Hauptidealring ist und π bis auf Einheiten sein einziges irreduzibles Element. Weiter liefert jeder Körperhomomorphismus $\varphi : K \to L$ von diskret bewerteten Körpern mit $v_L(\varphi(x)) \in \mathbb{N}_{>0} v_K(x)\ \forall x \in K$ einen Ringhomomorphismus $\varphi : \mathfrak{o}_K \to \mathfrak{o}_L$ mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_L) = \mathfrak{m}_K$. Damit liefert die Vorschrift aus unserem Lemma in der Tat einen Funktor der beschriebenen Art. Der Rest des Beweises kann dem Leser überlassen bleiben. □

Satz 7.8.4.10 (Gradformel). *Gegeben eine modulendliche Erweiterung $A \subset B$ von Dedekindringen gilt für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ die Identität*

$$[\mathrm{Quot} B : \mathrm{Quot} A] = \sum_{\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}} d(B_\mathfrak{n}/A_\mathfrak{m}) \cdot [B/\mathfrak{n} : A/\mathfrak{m}]$$

mit der Summe über alle $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$ mit $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$ und $d(B_\mathfrak{n}/A_\mathfrak{m})$ dem Verzweigungsgrad im Sinne von 7.8.4.8.

Ergänzung 7.8.4.11. In der Zahlentheorie schreibt man diese Identität meist mit anderen Symbolen. Ist genauer L/K eine Erweiterung von Zahlkörpern und $\mathfrak{p} \subset$

$\mathfrak{o}_K$ ein maximales Ideal des Ganzheitsrings von K, so liest sich unsere Formel in der dort üblichen Notation

$$[L : K] = \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{P}} e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$$

Im Fall einer primitiven p^r-ten Einheitswurzel $\zeta \in \mathbb{C}$ und der Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ finden wir mit 7.8.2.9 die Ganzheitsringe $\mathbb{Z}[\zeta] \supset \mathbb{Z}$ und über dem maximalen Ideal $\langle p \rangle \subset \mathbb{Z}$ liegt, nun nach dem Beweis von 7.8.2.9, genau ein maximales Ideal $\langle \zeta - 1 \rangle \subset \mathbb{Z}[\zeta]$ und der Verzweigungsgrad ist $e = p^{r-1}(p-1)$ und der Grad der Erweiterung der Restklassenkörper ist $f = 1$. Dahingegen entsprechen für eine Primzahl l und jedes zu l teilerfremde $n \geq 1$ und jede primitive n-te Einheitswurzel $\zeta \in \mathbb{C}$ die über dem maximalen Ideal $\mathfrak{p} = \langle l \rangle \subset \mathbb{Z}$ liegenden maximalen Ideale von $\mathbb{Z}[\zeta]$ eineindeutig den irreduziblen Faktoren des Bildes $\bar{\Phi}_n \in \mathbb{F}_l[X]$ des n-ten Kreisteilungspolynoms $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$, und ist genauer $\bar{\Phi}_n = Q_1 \ldots Q_s$ die Zerlegung in irreduzible Faktoren und sind $\mathfrak{P}_i = \langle l, Q_i \rangle \subset \mathbb{Z}[\zeta]$ die zugehörigen maximalen Ideale, so haben wir $e(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p}) = 1$ und $f(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p}) = \operatorname{grad} Q_i$, alles nach dem Beweis von 7.8.2.9.

7.8.4.12. Unsere Endlichkeitssätze von eben liefern zwei typische Situationen, in denen dieser Satz anwendbar ist: Einerseits nach 7.8.3.9 für einen Dedekindring A, eine endliche separable Erweiterung $L/\mathrm{Quot}A$ und B den ganzen Abschluß von A in L. Diese Situation trifft man oft in der Zahlentheorie an. Oder nach 7.8.3.10 für einen Dedekindring A, der ringendlich ist über einem vorgegebenen Grundkörper, eine beliebige endliche Körpererweiterung $L/\mathrm{Quot}A$ und B den ganzen Abschluß von A in L. Das ist der „geometrische“ Fall einer „verzweigten Überlagerung von algebraischen Kurven“, der für mich insbesondere im Fall des Grundkörpers $\mathbb{C}$ der Anschauung gut zugänglich ist. Allerdings wird man im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers in der Situation des Satzes stets $[B/\mathfrak{n} : A/\mathfrak{m}] = 1$ finden, weshalb dieser Faktor meiner Anschauung schlechter zugänglich ist. Man sieht ihn aber deutlich im Fall der Erweiterung $\mathbb{R}[T] \subset \mathbb{C}[T]$.

Beweis. Nach 7.5.2.12 ist unsere Summe endlich. Die Lokalisierung $B_\mathfrak{m}$ von B nach $A \backslash \mathfrak{m}$ ist modulendlich und torsionsfrei über dem Hauptidealring $A_\mathfrak{m}$, also frei vom Rang $[\mathrm{Quot}B : \mathrm{Quot}A]$. Damit ist auch $\bar{B} := B/\mathfrak{m}B$ frei von demselben Rang über dem Körper $\bar{A} := A/\mathfrak{m}$ und nach 7.4.8.4 liefern die Abbildungen in die Lokalisierungen für unseren Kring endlicher Länge $\bar{B}$ einen Isomorphismus

$$\bar{B} \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}} \bar{B}_{\bar{\mathfrak{n}}}$$

mit $\bar{\mathfrak{n}}$ dem Bild von $\mathfrak{n}$ in $\bar{B}$. Da Lokalisierung nach 7.4.3.59 mit Restklassenbildung vertauscht, ist die natürliche Abbildung ein Isomorphismus $B_\mathfrak{n}/\mathfrak{m}B_\mathfrak{n} \xrightarrow{\sim} \bar{B}_{\bar{\mathfrak{n}}}$.

Per definitionem haben wir $\mathfrak{m}B_\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_\mathfrak{n}^d$ für d der zugehörige Verzweigungsgrad, folglich hat $B_\mathfrak{n}/\mathfrak{m}B_\mathfrak{n}$ die Länge alias Dimension d als Modul über $B/\mathfrak{n}$ und dann eine entsprechend vervielfachte Dimension als Vektorraum über $A/\mathfrak{m}$. □

7.8.4.13. Ist $A \subset B$ eine modulendliche Erweiterung von Dedekindringen, so ist notwendig B der ganze Abschluß von A in $\mathrm{Quot}(B)$.

Satz 7.8.4.14 (Galoistheorie für lokale und globale Erweiterungen). *Sei eine modulendliche Erweiterung $A \subset B$ von Dedekindringen gegeben, die eine normale Erweiterung der Quotientenkörper induziert. Sei G deren Galoisgruppe und sei $\mathfrak{n} \subset B$ ein maximales Ideal mit Bild $\mathfrak{m} := \mathfrak{n} \cap A$. So ist die auf den Restklassenkörpern induzierte Abbildung $\bar{A} \to \bar{B}$ eine normale Körpererweiterung und die offensichtliche Abbildung eine Surjektion*

$$G_\mathfrak{n} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{B}/\bar{A})$$

der Standgruppe $G_\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{n}$, der sogenannten **Zerlegungsgruppe von** $\mathfrak{n}$*, auf die Galoisgruppe der Erweiterung der Restklassenkörper.*

7.8.4.15. Der Kern unseres surjektiven Homomorphismus heißt die **Trägheitsgruppe von** $\mathfrak{n}$. Sind die beteiligten Körpererweiterungen der Quotientenkörper sowie der Restklassenkörper auch noch separabel, wie zum Beispiel nach 6.3.9.20 im Fall von Zahlkörpern, so zeigt die Gradformel zusammen mit dem folgenden Beweis, daß die Kardinalität der Trägheitsgruppe mit dem Verzweigungsindex übereinstimmen muß.

Beweis. Die Normalität ergibt sich als ein Spezialfall von 7.5.7.10, das Minimalpolynom von $b \in B$ zerfällt mit Nullstellen in B und folglich mit Koeffizienten in A und kann folglich modulo $\mathfrak{m}$ reduziert werden. Betrachten wir nun den Invariantenring der Standgruppe $C := B^{G_\mathfrak{n}}$, so bilden nach 7.5.7.8 die maximalen Ideale in B über $\mathfrak{l} := C \cap \mathfrak{n}$ eine $G_\mathfrak{n}$-Bahn, die folglich nur aus dem einzigen Punkt $\mathfrak{n}$ bestehen kann. Ein Vergleich der Gradformeln 7.8.4.10 für $C \subset B$ und $A \subset B$ zeigt $d(B_\mathfrak{n}/A_\mathfrak{m}) = d(B_\mathfrak{n}/C_\mathfrak{l})$ und $[B/\mathfrak{n} : C/\mathfrak{l}] = [B/\mathfrak{n} : A/\mathfrak{m}]$. Daraus hinwiederum folgt mit der Notation $\bar{C} := C/\mathfrak{l}$, daß die Einbettung einen Isomorphismus $\bar{A} \xrightarrow{\sim} \bar{C}$ liefert. Es reicht also zu zeigen, daß die offensichtliche Abbildung eine Surjektion

$$G_\mathfrak{n} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{B}/\bar{C})$$

induziert. Nun ist ja nach 6.4.1.30 der Fixkörper der Galoisgruppe von $F \subset \bar{B}$ rein inseparabel über $\bar{C}$. Andererseits gibt es nach dem Satz vom primitiven Element ein $\bar{b} \in \bar{B}$ mit $\bar{B} = F[\bar{b}]$. Ist $b \in B$ ein Urbild von $\bar{b}$, so hat das Minimalpolynom von b wie zu Anfang des Beweises besprochen Koeffizienten in C und kann folglich modulo $\mathfrak{l}$ reduziert werden. Die Operation von $G_\mathfrak{n}$ auf den Nullstellen des Minimalpolynoms von $\bar{b}$ ist folglich transitiv. Das aber zeigt die behauptete Surjektivität. □

Übungen

Übung 7.8.4.16. Man zeige, daß für $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl das Ideal $\langle p \rangle$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ zerfällt als das Produkt der beiden Ideale $\langle p, 1+\sqrt{-5}\rangle$ und $\langle p, 1-\sqrt{-5}\rangle$, wenn (-5) ein Quadrat ist modulo p, und daß andernfalls das Hauptideal $\langle p \rangle$ auch in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ maximal ist. Im Spezialfall $p = 2$ und nur in diesem gilt zusätzlich $\langle p, 1+\sqrt{-5}\rangle = \langle p, 1-\sqrt{-5}\rangle$.

7.8.5 Spur und Diskriminante*

7.8.5.1. Gegeben ein Kring k und ein freier endlich erzeugter k-Modul M ist die **Spur** $\operatorname{tr} = \operatorname{tr}_k : \operatorname{End}_k M \to k$ definiert als die Verknüpfung von kanonischen Homomorphismen

$$\operatorname{End}_k M \xleftarrow{\sim} M \otimes_k \operatorname{Hom}_k(M, k) \to k$$

Wir können diese Spur berechnen als die Summe der Diagonaleinträge einer darstellenden Matrix in Bezug auf eine und jede Basis von M.

7.8.5.2 (**Spur auf projektivem Modul**). Die vorhergehende Definition bleibt sinnvoll für einen Kring k und einen projektiven endlich erzeugten k-Modul M und liefert auch dann eine Spur $\operatorname{tr} : \operatorname{End}_k M \to k$.

7.8.5.3 (**Spur und Erweiterung der Skalare**). Die Spur ist verträglich mit der Erweiterung von Skalaren. Ist genauer $\varphi : k \to K$ ein Kringhomomorphismus und M ein freier oder allgemeiner projektiver endlich erzeugter k-Modul und $f \in \operatorname{End}_k M$ ein Endomorphismus und $\operatorname{id} \otimes_k f \in \operatorname{End}_K(K \otimes_k M)$ der entsprechend erweiterte Endomorphismus, so gilt die Identität

$$\varphi(\operatorname{tr}_k(f)) = \operatorname{tr}_K(\operatorname{id} \otimes_k f)$$

7.8.5.4 (**Spur nilpotenter Endomorphismen**). Jeder nilpotente Endomorphismus hat nilpotente Spur. Um das einzusehen, mag man beachten, daß wir nach 7.4.5.6 nur zu zeigen brauchen, daß die Spur eines nilpotenten Endomorphismus in jedem Primideal liegt. Mit Erweiterung der Skalare können wir uns so erst auf den Fall eines Integritätsbereichs und dann auf den Fall eines Körpers zurückziehen, und in letzterem Fall folgt es aus Übung 3.2.6.15. Ich hätte gerne ein vergleichbar elementares Argument, das nicht via 7.4.5.6 auf dem Zorn'schen Lemma beruht.

7.8.5.5 (**Spur eines Kommutators**). Gegeben freie oder allgemeiner projektive endlich erzeugte Moduln M, N über einem Kring k und Homomorphismen $f : M \to N$ und $g : N \to M$ gilt

$$\operatorname{tr}(fg) = \operatorname{tr}(gf)$$

Im Fall freier Moduln prüft man das leicht in Matrizen. Im allgemeinen notiert man $M^* = \mathrm{Hom}_k(M, k)$ und die Behauptung folgt aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
 & & N \otimes N^* \arrow[dr] & \\
M \otimes M^* \otimes N \otimes N^* \arrow[urr] \arrow[drr] & & & k \\
 & & M \otimes M^* \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

mit den durch Evalutionen gegebenen Morphismen.

Definition 7.8.5.6. Gegeben ein Kring k und eine modulendliche k-Algebra A, die frei oder allgemeiner projektiv ist als k-Modul, erhalten wir wie in 8.3.6.7 mit 7.8.5.1 eine k-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}_k : A &\to k \\ a &\mapsto \mathrm{tr}((a\cdot) : A \to A) \end{aligned}$$

und können so die k-bilineare Abbildung $A \times A \to k$, $(a, b) \mapsto \mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{tr}((ab)\cdot)$ betrachten. Sie heißt auch in dieser Allgemeinheit die **Spurform**. Wieder gilt $(a, b) = (b, a)$ und $(ax, b) = (a, xb)$ für alle $a, b, x \in A$.

Satz 7.8.5.7 (Endliche étale Überlangerungen eines Körpers). *Seien k ein Körper und A eine modulendliche k-Kringalgebra. Genau dann ist A ein Produkt von separablen Körpererweiterungen von k, wenn die Spurform nicht ausgeartet ist.*

Vorschau 7.8.5.8. Ein Kringhomomorphismus $k \to A$ heißt allgemein **modulendlich étale** oder auch eine **endliche étale Überlagerung**, wenn A ein endlich erzeugter projektiver k-Modul ist und die Spurform $(a, b) \mapsto \mathrm{Tr}_k(ab)$ einen Isomorphismus $A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(A, k)$ induziert.

Beweis. Jedes nilpotente Element von A liegt nach 7.8.5.4 im Radikal der Spurform. Wenn sie nicht ausgeartet ist, besitzt demnach A keine nilpotenten Elemente und mit 7.4.7.18 folgt, daß A ein Produkt von Körpern ist, die nach dem Separabilitätskriterium 7.8.3.7 alle über k separabel sind. Die andere Implikation folgt sofort aus der anderen Implikation in 7.8.3.7. □

7.8.5.9. In Charakteristik Null ist unser Satz auch eine direkte Konsequenz des Spurkriteriums für Halbeinfachkeit 8.3.6.12, das sogar für nicht notwendig kommutative k-Ringalgebren gilt.

Definition 7.8.5.10. Gegeben ein Kring k und eine k-Kringalgebra A, die frei von endlichem Rang oder zumindest endlich erzeugt und projektiv ist als k-Modul, vereinbaren wir für $a_1, \ldots, a_n \in A$ die Notation

$$\mathrm{Dis}_{A/k}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{Dis}(a_1, \ldots, a_n) := \det(\mathrm{Tr}(a_i a_j)_{i,j=1}^n)$$

Wir nennen dieses Element die **Diskriminante der Elemente** $a_1, \ldots, a_n$.

7.8.5.11. Gegeben ein Körper k und eine modulendliche k-Kringalgebra A ist offensichtlich die Spurform von A genau dann nicht ausgeartet, wenn für eine und jede k-Basis $a_1, \ldots, a_n$ von A gilt

$$\mathrm{Dis}(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$$

7.8.5.12. Seien k ein Kring und A eine freie modulendliche k-Kringalgebra. Liegen Elemente $b_1, \ldots, b_n \in A$ im k-Spann von weiteren Elementen $a_1, \ldots, a_n \in A$, so gilt offensichtlich $\mathrm{Dis}(b_1, \ldots, b_n) = c^2 \,\mathrm{Dis}(a_1, \ldots, a_n)$ für ein $c \in k$. Für je zwei k-Basen von A unterscheiden sich insbesondere diese Elemente höchstens um die Multiplikation mit dem Quadrat einer Einheit $c \in k^\times$.

7.8.5.13. Seien k ein Kring und A eine freie oder zumindest projektive modulendliche k-Kringalgebra. Gegeben ein Kringhomomorphismus $\varphi : k \to K$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt offensichtlich

$$\varphi : \mathrm{Dis}_{A/k}(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \mathrm{Dis}_{A \otimes_k K/K}(a_1 \otimes 1, \ldots, a_n \otimes 1)$$

7.8.5.14. Gegeben ein Kring k und eine k-Algebra A, die frei ist von endlichem Rang n oder modulendlich und projektiv als k-Modul mit demselben Rang n nach Lokalisierung an jedem Primideal von k nennen wir das von allen $\mathrm{Dis}(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_1, \ldots, a_n \in A$ erzeugte Ideal von k das **Diskriminantenideal** $\mathrm{Dis}_{A/k}$ von A. Nach dem Vorhergehenden gilt für ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, A$ genau dann $\mathfrak{m} \supset \mathrm{Dis}_{A/k}$, wenn die Spurform der $A/\mathfrak{m}$-Kringalgebra $A/\mathfrak{m}A$ ausgeartet ist.

Satz 7.8.5.15 (Diskriminantenideal und Diskriminante). *Gegeben k ein Kring und $P \in k[T]$ ein normiertes Polynom stimmt für $A := k[T]/\langle P \rangle$ unser Element $\mathrm{Dis}(1, \bar{T}, \ldots, \bar{T}^{n-1})$ aus 7.8.5.10 bis auf ein Vorzeichen überein mit der Diskriminante des Polynoms P im Sinne von 6.2.9.13. Insbesondere wird das Diskriminantenideal von A/k erzeugt von der Diskriminante des Polynoms P.*

Beweis. Da beide Seiten mit Erweiterungen von k vertauschen, dürfen wir ohne Beschränkung annehmen, k sei der Ring der symmetrischen Funktionen $k := \mathbb{Z}['\zeta_1, \ldots, \zeta_n]^{\mathcal{S}_n}$. Bekanntlich gilt $k = \mathbb{Z}['s_1, \ldots, s_n]$ für die $s_i \in k$, die durch die Identität $P(T) := T^n + s_1 T^{n-1} + \ldots + s_n = (T + \zeta_1) \ldots (T + \zeta_n)$ in

$\mathbb{Z}['\zeta_1, \ldots, \zeta_n][T]$ gegeben werden. Ich behaupte, daß für $A := k[T]/\langle P\rangle$ in der Notation aus 7.8.5.10 gilt

$$\mathrm{Dis}(1, \bar{T}, \ldots, \bar{T}^{n-1}) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i \neq j} (\zeta_i - \zeta_j)$$

Man zeigt das wie 6.3.9.27. Die linke Seite ist per definitionem ein Element von k. Unter der Skalarerweiterung $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ wird die linke Seite ein symmetrisches Polynom in den ζ_i mit rationalen Koeffizienten. Dies Polynom hat dort Nullstellen, wo P mehrfache Nullstellen hat, da dort $A = k[T]/\langle P\rangle$ zu einem Ring von Null verschiedenen nilpotenten Elementen spezialisiert. Wie in 6.3.9.27 folgt, daß die rechte Seite nach Übergang zu $\mathbb{Q}$-Koeffizienten die linke Seite teilt. Mit Gradbetrachtungen und dem Vergleich von Leitkoeffizienten zeigen wir nun auch noch die Gleichheit bis auf Vorzeichen. Die $\mathbb{Z}$-Graduierung auf $\mathbb{Z}['\zeta_1, \ldots, \zeta_n][T]$, in der alle ζ_i ebenso wie T den Grad Eins haben, induziert eine $\mathbb{Z}$-Graduierung auf $k[T]$, in der P homogen ist vom Grad n und die Multiplikation mit $\bar{T}$ homogen vom Grad Eins. Die Leibnizformel zeigt dann, daß $\mathrm{Dis}(1, \bar{T}, \ldots, \bar{T}^{n-1})$ homogen ist vom Grad $n(n-1)$, so daß unsere Behauptung bis auf einen Faktor aus $\mathbb{Q}$ schon mal richtig sein muß. Um besagten Faktor zu bestimmen, wählen wir eine primitive n-te Einheitswurzel ζ und spezialisieren zu $\zeta_i = -\zeta^i$. Dann spezialisiert die rechte Seite nach einer bereits in 6.3.9.27 ausgeführten Rechnung zu $(-1)^{n-1}n^n$, auf der linken Seite dahingegen ergibt sich $P = T^n - 1$ sowie $\mathrm{Tr}(\bar{T}^a) = n$ falls $n|a$ und Null sonst. Damit folgt durch elementare Rechnung $\mathrm{Dis}(1, \bar{T}, \ldots, \bar{T}^{n-1}) = n^n(-1)^{n-1}(-1)^{n(n-1)/2}$. Der Vergleich dieser Resultate zeigt die Behauptung. $\square$

Ergänzung 7.8.5.16. Gegeben ein Kringhomomorphismus $k \to A$ erinnere ich an den Modul der relativen Differentiale $\Omega_{A/k}$. Nach 9.3.4.29 liefert für k einen Kring und $P \in k[T]$ ein Polynom und $A = k[T]/\langle P\rangle$ den Quotienten nach P das Multiplizieren mit $\mathrm{d}T$ einen Isomorphismus von A-Moduln

$$k[T]/\langle P, P'\rangle \quad \tilde{\to} \quad \Omega_{A/k}$$

Es scheint recht klar, daß das Diskriminantenideal eng mit diesem Modul verwandt ist. Ich erwarte, daß es genau das Quadrat des Annullatorideals von $\Omega_{A/k}$ ist.

Korollar 7.8.5.17 (Diskriminatenideal und Verzweigung). *Sei $A \subset B$ eine modulendliche Erweiterung von Dedekindringen. Die maximalen Ideale $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, A$ mit $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m} \supset \mathrm{Dis}_{B/A}$ sind genau die Stellen, über denen es ein $\mathfrak{n} \in \mathrm{Max}\, B$ gibt, das entweder echt verzweigt, in Formeln $d(B_{\mathfrak{n}}/A_{\mathfrak{m}}) > 1$, oder für das $B/\mathfrak{n}$ inseparabel ist über $A/\mathfrak{m}$.*

7.8.5.18. Sowohl im Fall von Ganzheitsringen von Zahlkörpern als auch im geometrischen Fall sind also die maximalen Ideale über dem Diskriminatenideal genau die Verzweigungsstellen, da in beiden Fällen $A/\mathfrak{m}$ vollkommen ist und keine inseparablen Erweiterungen besitzt.

Übungen

Übung 7.8.5.19. Sei $d \in \mathbb{Z}\backslash\{0,1\}$ ohne mehrfache Primfaktoren. Aus 7.8.2.10 erinnern wir die Beschreibung der Ganzheitsringe

$$\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})} = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d} & d \notin 1 + 4\mathbb{Z}, \\ \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\big((1+\sqrt{d})/2\big) & d \in 1 + 4\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Die Minimalpolynome von $\sqrt{d}$ bezihungsweise $(1+\sqrt{d})/2$ sind $T^2 - d$ beziehungsweise $T^2 - T + (1-d)/4$. Die Diskriminante dieser Polynome erzeugt das Diskriminantenideal und ergibt sich mit 3.5.6.4 zu $4d$ beziehungsweise d. Im ersten Fall verzweigen also die Zwei und alle Primteiler von d, im zweiten Fall nur die Primteiler von d.

7.8.6 Glatte projektive Kurven*

7.8.6.1. Eine äqui-eindimensionale k-Varietät heißt eine **Kurve**. Insbesondere verstehen wir eine Kurve stets über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper. Eine **projektive Kurve** ist eine Kurve, für die eine abgeschlossene Einbettung in einen projektiven Raum $\mathbb{P}^n k$ existiert. In insistiere darauf, daß wir die Einbettung hier nicht als Teil des Datums sehen, projektive Kurven können also durchaus isommorph sein können, auch wenn sie in verschiedenen $\mathbb{P}^n k$ liegen.

Satz 7.8.6.2 (**Körper und ihre Kurven**). *Gegeben $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper liefert das Bilden des Körpers der rationalen Funktionen eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Glatte irreduzible} \\ \textit{projektive Kurven über } k, \\ \textit{nichtkonstante Morphismen} \end{array} \right\} & \overset{\approx}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Körperendliche} \\ \textit{Körpererweiterungen von } k \\ \textit{vom Transzendenzgrad Eins} \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}} \\ X & \mapsto & \mathcal{M}(X) \end{array}$$

Ergänzung 7.8.6.3. Mir gefällt die alternative Formulierung noch besser, bei der links die Kategorie aller glatten irreduziblen separierten „vollständigen“ Kurven steht. Eine Varietät ist per definitionem „vollständig“, wenn ihre Projektion auf einen Punkt eigentlich ist im Sinne von 7.6.12.16. Der Beweis bleibt fast derselbe, man muß nur am Ende statt mit 7.8.6.11 mit 9.4.4.8 argumentieren.

Beweis. Wir bezeichnen die Kategorie aller körperendlichen Körpererweiterungen von k von Transzendenzgrad Eins mit $\mathscr{T}$. Wir bezeichnen die Kategorie aller glatten irreduziblen projektiven Kurven über k mit $\mathscr{PC}$ und die Kategorie aller glatten eindimensionalen irreduziblen Varietäten über k mit $\mathscr{C}$, jeweils mit nichtkonstanten Morphismen von Varietäten als Morphismen. Der Satz behauptet, daß der Funktor $\mathcal{M} : \mathscr{C} \to \mathscr{T}^{\mathrm{opp}}$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathcal{M} : \mathscr{PC} \xrightarrow{\approx} \mathscr{T}^{\mathrm{opp}}$$

induziert. Um das zu zeigen, konstruieren wir einen quasiinversen Funktor $\mathcal{B}$. Das geschieht in mehreren Schritten.

7.8.6.4 (**Konstruktion der Möchte-Gern-Kurve $\mathcal{B}(K)$ als Menge**). Ich erinnere an den Begriff einer diskreten Bewertung 7.8.1.2 eines Körpers. Gegeben eine endlich erzeugte Körpererweiterung K/k vom Transzendenzgrad Eins betrachten wir die Menge

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(K) := \{v : K \to \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\} \mid v \text{ ist diskrete Bewertung}\}$$

Gegeben ein Homomorphismus $K \hookrightarrow L$ von endlich erzeugten Körpererweiterungen von k vom Transzendenzgrad Eins und eine diskrete Bewertung $v : L \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ gilt $v(K^\times) \neq 0$ nach 7.8.1.17. Folglich existieren eine wohlbestimmte diskrete Bewertung $w : K \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ und ein wohlbestimmtes $d \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $v|_K = dw$ und die Vorschrift $v \mapsto w$ liefert eine Abbildung $\mathcal{B}(L) \to \mathcal{B}(K)$. Man erkennt ohne weitere Schwierigkeiten, daß wir so einen Mengenfunktor konstruiert haben.

7.8.6.5 (**Konstruktion einer Transformation** $\mathrm{can} : \mathrm{Vergiß} \Rightarrow \mathcal{B} \circ \mathcal{M}$). Bezeichne $\mathrm{Vergiß} : \mathscr{C} \to \mathrm{Ens}$ den offensichtlichen Funktor, der jeder Varietät die zugrundeliegende Menge zuordnet. Ist X eine irreduzible glatte eindimensionale Varietät über k, so erhalten wir nach 7.8.1.11 eine kanonische Abbildung $\mathrm{can}_X : X \to \mathcal{B}(\mathcal{M}(X))$, indem wir jedem Punkt $x \in X$ die durch die Null- beziehungsweise Polstellenordnung bei x gegebene Bewertung $v_x : \mathcal{M}(X) \to \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ zuordnen. Es ist leicht zu sehen, daß diese kanonischen Abbildungen eine Transformation von Funktoren bilden.

7.8.6.6 (**Überdeckung von $\mathcal{B}(K)$ durch Maximalspektren**). Wir zeigen, daß für jede Körpererweiterung $K \in \mathscr{T}$ und jede Bewertung $v \in \mathcal{B}(K)$ ein über k ringendlicher Dedekindring $A \subset K$ mit $K = \{a/b \mid a, b \in A, b \neq 0\}$ existiert derart, daß v im Bild der kanonischen Injektion

$$\mathrm{can} : \mathrm{Max}\, A \hookrightarrow \mathcal{B}(K)$$

aus 7.8.2.7 liegt und daß das Komplement des Bildes dieser Einbettung endlich ist. Machen wir uns an die Arbeit. Wir finden sicher $f \in K \backslash k$ mit $v(f) \geq 0$. Nach

7.8.1.18 gibt es auf einem algebraisch abgeschlossenen Körper keine diskrete Bewertung, folglich haben wir $v(k^\times) = 0$. Der Bewertungsring $\mathfrak{o}_v$ unserer Bewertung v muß demnach $k[f]$ und dann auch seinen ganzen Abschluß $A \subset K$ umfassen. Der Quotientenkörper $\operatorname{Quot} A$ dieses ganzen Abschlusses muß nach 7.5.7.1 aber als Teilkörper von K mit dem ganzen Abschluß des Quotientenkörpers von $k[f]$ in K zusammenfallen und folglich gilt $K = \{a/b \mid a, b \in A, b \neq 0\}$. Nach 7.8.3.10 ist A ringendlich über k, also noethersch, und nach 7.5.6.13 gilt $\operatorname{kdim} A = \operatorname{trgr}_k(\operatorname{Quot} A) = 1$. Ganz abgeschlossen ist A nach Konstruktion eh, folglich ist A ein Dedekindring und unsere kanonische Abbildung ist nach 7.8.2.7 eine Inklusion $\operatorname{can} : \operatorname{Max} A \hookrightarrow \mathcal{B}(K)$ und ihr Bild besteht aus allen Bewertungen v mit $v(f) \geq 0$. Wir folgern, daß es nur endlich viele Bewertungen v mit $v(f) > 0$ geben kann, denn wegen $f \neq 0$ gibt es nur endlich viele maximale Ideale in A über f alias Nullstellen von f auf $\operatorname{Max} A$. Das gilt nun aber mit derselben Argumentation für jedes Element $f \in K \backslash k$. Insbesondere ist das Komplement des Bildes unserer Einbettung endlich, besteht es doch aus allen Bewertungen v mit $v(f) < 0$ alias $v(f^{-1}) > 0$. Im übrigen zeigen unsere Argumente auch, daß $\mathcal{B}(K)$ unendlich ist, denn die eindimensionale irreduzible Varietät $\operatorname{Max} A$ ist bereits unendlich.

7.8.6.7 (**Die Möchte-Gern-Kurve $\mathcal{B}(K)$ als topologischer Raum**). Gegeben $K \in \mathscr{T}$ versehen wir $\mathcal{B}(K)$ mit der koendlichen Topologie. Abgeschlossen sind also nur ganz $\mathcal{B}(K)$ und seine endlichen Teilmengen. Da $\mathcal{B}(K)$ unendlich ist, ist es dann irreduzibel als topologischer Raum. Für jedes $X \in \mathscr{C}$ ist weiter $\operatorname{can} : X \to \mathcal{B}(\mathcal{M}(X))$ stetig, denn diese Abbildung hat endliche Fasern, sie ist ja für X affin sogar eine Injektion nach 7.8.2.7. Ist weiter $K \hookrightarrow L$ ein Homomorphismus von Körpererweiterungen, so hat die induzierte Abbildung $\mathcal{B}(L) \to \mathcal{B}(K)$ endliche Fasern und ist mithin stetig: In der Tat gibt es für $v \in \mathcal{B}(K)$ nach dem vorhergehenden Punkt 7.8.6.6 einen über k ringendlichen Dedekindring $A \subset K$ mit K als Quotientenkörper und mit v im Bild von $\operatorname{Max} A \hookrightarrow \mathcal{B}(K)$. Der ganze Abschluß B von A in L ist dann nach 7.8.3.10 auch ein über k ringendlicher Dedekindring mit $B \subset L$ mit L als Quotientenkörper, und jede Bewertung von L, die auf A nichtnegativ ist, ist auch auf B nichtnegativ, weil B ganz ist über A. Im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Max} B & \hookrightarrow & \mathcal{B}(L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Max} A & \hookrightarrow & \mathcal{B}(K) \end{array}$$

induziert also die obere Horizontale Bijektionen zwischen der Faser über einem Punkt und der Faser über seinem Bild. Die Fasern links sind aber endlich nach 7.5.2.12.

7.8.6.8 (**Die Möchte-Gern-Kurve $\mathcal{B}(K)$ als Varietät über k**). Gegeben $K \in \mathscr{T}$ und $v \in X = X_K := \mathcal{B}(K)$ eine diskrete Bewertung und $K \supset \mathfrak{o}_v \supset \mathfrak{m}_v$

der zugehörige diskrete Bewertungsring mit seinem maximalem Ideal liefert nach 7.8.6.6 die Einbettung des Grundkörpers einen Isomorphismus $k \xrightarrow{\sim} \mathfrak{o}_v/\mathfrak{m}_v$. Gegeben $U \Subset X$ erklären wir nun den Teilring

$$\mathcal{O}_X(U) \subset \mathrm{Ens}(U, k)$$

als die Menge aller Abbildungen $f : U \to k$, für die ein $a \in K$ existiert derart, daß für alle $v \in U$ gilt $v(a) \geq 0$ und $f(v) \mapsto \bar{a}$ unter unserem Isomorphismus $k \xrightarrow{\sim} \mathfrak{o}_v/\mathfrak{m}_v$. Gegeben ein über k ringendlicher Dedekindring $A \subset K$ mit $\mathrm{Quot} A = K$ und $\mathrm{Max}\, A \xrightarrow{\sim} U$ unter der kanonischen Einbettung induziert dann das Zurückholen von Funktionen vermittels der kanonischen Einbettung

$$\mathrm{Max}\, A \xrightarrow{\sim} U \Subset X$$

einen Isomorphismus $\mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\sim} A$, wie man aus der Beschreibung 7.6.4.32 von Definitionsbereichen rationaler Funktionen in Termen lokaler Ringe folgert. Für $U \neq \emptyset$ kommt also jedes $f \in \mathcal{O}_X(U)$ von genau einem Element $a \in K$ her. Wir sehen so, daß die $O_X(U)$ unser X zu einem k-geringten Raum machen. Weiter sehen wir, daß unsere Einbettungen $\mathrm{Max}\, A \hookrightarrow X$ offene Einbettungen von k-geringten Räumen sind, so daß X sogar eine Varietät über k ist. Das Diagramm am Ende von 7.8.6.7 zeigt, daß für jeden Homomorphismus von Körpererweiterungen $K \to L$ die induzierte Abbildung $\mathcal{B}(L) \to \mathcal{B}(K)$ ein Morphismus von k-geringten Räumen ist, und aus dem affinen Fall leitet man leicht ab, daß für alle $X \in \mathscr{C}$ unsere kanonische Abbildung ein Morphismus $\mathrm{can} : X \to \mathcal{B}(\mathcal{M}(X))$ von k-geringten Räumen ist. Umgekehrt erhalten wir natürliche Isomorphismen $\mathcal{M}(\mathcal{B}(K)) \xrightarrow{\sim} K$, indem wir für $U \Subset \mathcal{B}(K) = X$ nichtleer jedem $f \in \mathcal{O}_X(U)$ das eindeutig bestimmte $a \in K$ zuordnen, von dem es herkommt.

7.8.6.9 (**Die Kurve $\mathcal{B}(K)$ ist eine projektive k-Varietät**). Wir finden nach dem Vorhergehenden eine endliche offene Überdeckung $X := \mathcal{B}(K) = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ durch irreduzible affine glatte Kurven. Seien $\bar{Y}_i$ deren projektive Abschlüsse. Nach 7.8.6.11 läßt sich $Y_i \hookrightarrow \bar{Y}_i$ eindeutig zu $\bar{\varphi}_i : X \to \bar{Y}_i$ fortsetzen. Nun betrachte man den durch die $\bar{\varphi}_i$ gegebenen Morphismus

$$\bar{\varphi} : X \to \prod_{i=1}^n \bar{Y}_i$$

und setze $Y := \overline{\bar{\varphi}(X)}$. Wenn wir zeigen können, daß unser $\bar{\varphi}$ einen Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} Y$ induziert, sind wir fertig, denn Produkte projektiver Varietäten sind projektiv nach 7.6.11.12. Mit X ist auch Y irreduzibel. Weiter ist $\bar{\varphi}$ birational, induziert also einen Isomorphismus $\mathcal{M}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$. Ich behaupte, daß dieser Isomorphismus für alle $x \in X$ Isomorphismen $\mathcal{O}_{Y,\bar{\varphi}(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}$ induziert. In der

Tat liegt jedes $x \in X$ in einem der Y_i und wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "\bar{\varphi}"] & \\
Y_i \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_i"] \\
 & \bar{Y}_i &
\end{tikzcd}$$

Da darin das Zurückholen längs aller Pfeile Injektionen auf den lokalen Ringen bei x induziert und das Zurückholen längs $Y_i \hookrightarrow \bar{Y}_i$ eine Bijektion, muß das Zurückholen längs aller Pfeile Bijektionen auf den lokalen Ringen bei x liefern. Jetzt zeigen wir, daß $\bar{\varphi}$ surjektiv ist. Jedes $y \in Y$ hat ja eine offene affine Umgebung $V \Subset Y$. Die Einbettung $\mathcal{O}(V) \hookrightarrow \mathcal{O}(V)^\sim$ von $\mathcal{O}(V)$ in seinen ganzen Abschluß entspricht einer Surjektion $\operatorname{Max} \mathcal{O}(V)^\sim \twoheadrightarrow \operatorname{Max} \mathcal{O}(V)$, unter der unser $y \in Y$ ein Urbild haben muß. Wir sehen mit 7.8.2.7, daß dies Urbild einer Bewertung $v \in X = \mathcal{B}(K)$ entspricht mit $v(\mathcal{O}_{Y,y}) \subset [0, \infty]$. Wir hätten dann aber nach Konstruktion

$$\mathcal{O}_{Y,\bar{\varphi}(v)} \supset \mathcal{O}_{Y,y}$$

und daraus folgt $y = \bar{\varphi}(v)$: In der Tat folgt ja für je zwei Punkte p, q einer irreduziblen Varietät Y, die in einer gemeinsamen offenen affinen Teilmenge liegen, aus der Inklusion $\mathcal{O}_{Y,p} \supset \mathcal{O}_{Y,q}$ von Teilmengen von $\mathcal{M}(Y)$ bereits $p = q$. Je zwei Punkte, ja endlich viele beliebig vorgegebene Punkte einer projektiven Varietät liegen stets in einer gemeinsamen offenen affinen Teilmenge, da wir ja zu endlich vielen Ursprungsgeraden in einem Vektoraum über einem unendlichen Körper stets eine Hyperebene finden, die keine von ihnen umfaßt. Da $\bar{\varphi}$ eh injektiv ist, muß $\bar{\varphi} : X \to Y$ bijektiv sein. Da aber $\bar{\varphi}$ Isomorphismen auf den lokalen Ringen induziert, und da stets gilt $\mathcal{O}(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}$, muß damit $\bar{\varphi}$ schon ein Isomorphismus sein.

7.8.6.10 (**Für $X \in \mathscr{PC}$ haben wir** $\mathrm{can} : X \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(\mathcal{M}(X))$). Es bleibt zu zeigen, daß für jede glatte projektive Kurve X die kanonische Abbildung einen Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(\mathcal{M}(X))$ liefert. Wir wissen bereits, daß für jede nichtleere offene affine Teilmenge $V \Subset X$ die kanonische Abbildung eine offene Einbettung $V \xrightarrow{\sim} U \Subset \mathcal{B}(\mathcal{M}(X))$ liefert. Deren Inverse $U \xrightarrow{\sim} V$ läßt sich nun aber nach 7.8.6.11 auf genau eine Weise zu einem Morphismus $\mathcal{B}(\mathcal{M}(X)) \to X$ fortsetzen, der dann offensichtlich invers sein muß zu unserer kanonischen Abbildung.

Bis auf die Aussage 7.8.6.11, deren Beweis gleich nachgeholt wird, beendet das den Beweis von Satz 7.8.6.2 über Körper und ihre Kurven. □

Satz 7.8.6.11 (**Morphismen glatter Kurven in projektive Räume**). *Sei X eine*

Kurve und $p \in X$ ein regulärer Punkt. So läßt sich jeder Morphismus $\varphi : X \backslash p \to \mathbb{P}^n k$ zu einem Morphismus $\bar{\varphi} : X \to \mathbb{P}^n k$ fortsetzen.

7.8.6.12. Das gilt mit demselben Beweis genauso, wenn X eine eindimensionale äquidimensionale Varietät ist mit $\mathcal{O}_{X,p}$ regulär. Die Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt hierbei ohne alle Voraussetzungen aus 7.6.12.4. Daß die Definitionslücke p ein regulärer Punkt von X ist, ist wesentlich für die Existenz: Sonst könnte man ja eine affine Kurve $C \subset \mathbb{P}^n k$ nehmen und X konstruieren, indem man zwei Punkte von C wie in 7.6.3.13 verklebt zu einem Punkt p von X. Dann kann das mit dem Fortsetzen natürlich nicht mehr funktionieren. In 9.4.4.8 zeigen wir dieselbe Aussage allgemeiner für Morphismen in eine „vollständige“ Varietät.

Ergänzung 7.8.6.13. Für höherdimensionales X stimmt die analoge Aussage nicht mehr: Man betrachte etwa die Abbildung $\mathbb{C}^2 \backslash 0 \to \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ gegeben durch $v \mapsto (v, \langle v \rangle)$. Sie kann nicht über den Ursprung zu einem Morphismus $\mathbb{P}^2\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ fortgesetzt werden.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei X irreduzibel. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß das Bild von φ in keiner der Hyperflächen $x_i = 0$ enthalten ist, für $0 \le i \le n$, da wir sonst mit Induktion über n argumentieren könnten. Die Funktionen $(x_i/x_j) \circ \varphi \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}\{x_j \neq 0\})$ definieren also rationale Funktionen $\varphi_{ij} \in \mathcal{M}(X)$ auf X. Setzen wir $v_p(\varphi_{i0}) = r_i$, so gilt $v_p(\varphi_{ij}) = r_i - r_j$ für alle i, j. Ist r_0 minimal unter den r_i, was wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, so gilt $v_p(\varphi_{i0}) \ge 0$ für alle i. Jetzt erklären wir $\bar{\varphi}(p)$ als den Punkt $\bar{\varphi}(p) = \langle \varphi_{00}(p), \ldots, \varphi_{n0}(p) \rangle$. Nach Konstruktion ist klar, daß diese Abbildung $\bar{\varphi} : X \to \mathbb{P}^n k$ ein Morphismus ist. $\square$

Übungen

Übung 7.8.6.14. Man zeige, daß für jede glatte eindimensionale irreduzible Varietät X über k, in der Notation von eben also jedes Objekt $X \in \mathscr{C}$, und jede endlich erzeugte Körpererweiterung K/k vom Transzendenzgrad Eins, in der Notation von eben also jedes Objekt $K \in \mathscr{T}$, das Bilden der rationalen Funktionen im Verein mit unserer kanonischen Bijektion $K \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathcal{B}(K))$ eine Bijektion

$$\mathrm{Var}^{\mathrm{nc}}(X, \mathcal{B}(K)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kring}^k(K, \mathcal{M}(X))$$

zwischen nichtkonstanten Morphismen und Morphismen von Körpererweiterungen induziert. In kategorientheoretischer Sprache ist der Funktor $\mathcal{M} : \mathscr{C} \to \mathscr{T}^{\mathrm{opp}}$ also „linksadjungiert“ zu unserem Funktor $\mathcal{B} : \mathscr{T}^{\mathrm{opp}} \to B$.

Übung 7.8.6.15. Man zeige, daß für jede glatte eindimensionale irreduzible separierte Varietät X über k die natürliche Abbildung aus 7.8.6.5 eine offene Einbettung $\mathrm{can}_X : X \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{M}(X))$ von Varietäten ist. Man nennt $\mathcal{B}(\mathcal{M}(X))$ die

Komplettierung oder **Vervollständigung von** X. Jede glatte eindimensionale irreduzible separierte Varietät X über k entsteht also aus ihrer Vervollständigung durch das Weglassen von endlich vielen Punkten.

7.9 Invariantentheorie*

7.9.1 Affinität von Varietäten und Morphismen

Proposition 7.9.1.1 (Affinitätskriterium). *Eine Varietät X ist eine affine Varietät genau dann, wenn es Elemente $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}(X)$ gibt, die als Ideal ganz $\mathcal{O}(X)$ erzeugen und so, daß $U_i := \{x \in X \mid f_i(x) \neq 0\}$ jeweils eine affine Varietät ist.*

Beweis. Sei $k = \bar{k}$ unser algebraisch abgeschlossener Grundkörper. Ich behaupte zunächst, daß $\mathcal{O}(X)$ ringendlich ist über k. Seien dazu g_{ij} Erzeuger des k-Krings $\mathcal{O}(U_i)$. Für hinreichend großes n lassen sich alle $f_i^n g_{ij}$ nach 7.6.4.22 durch Null regulär auf X fortsetzen und ich behaupte genauer, daß diese Fortsetzungen zusammen mit den f_i ganz $\mathcal{O}(X)$ als k-Kring erzeugen. Nun kann für jede Funktion $h \in \mathcal{O}(X)$ ihre Einschränkung auf U_i als Polynom in den g_{ij} dargestellt werden, und für hinreichend großes $m \geq 0$ kann damit auch $f_i^m h$ als Funktion auf ganz X dargestellt werden als Polynom in f_i mitsamt den durch Null fortgesetzten $f_i^n g_{ij}$. Da die f_i^m für beliebiges $m \geq 0$ als Ideal ganz $\mathcal{O}(X)$ erzeugen, folgt die Behauptung. Jetzt betrachten wir den Morphismus $X \to \operatorname{Max} \mathcal{O}(X)$ nach 7.6.11.6, der jedem Punkt sein Verschwindungsideal zuordnet. Für alle $f \in \mathcal{O}(X)$ ist dann $X_f := \{f \neq 0\}$ das Urbild der offenen Teilmenge $\operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)_f)$. Ist speziell X_f affin, so zeigt unser Isomorphismus $\mathcal{O}(X)_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X_f)$ aus 7.6.4.22, daß unser Morphismus $X \to \operatorname{Max} \mathcal{O}(X)$ einen Isomorphismus $X_f \xrightarrow{\sim} (\operatorname{Max} \mathcal{O}(X))_f$ induziert. Gibt es also $f_1, \ldots, f_r$ derart, daß die $U_i = \{f_i \neq 0\}$ affin sind und X überdecken, so folgt, daß unsere Abbildung bereits selbst ein Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} \mathcal{O}(X)$ sein muß. □

Definition 7.9.1.2. Ein Morphismus von Varietäten heißt **affin**, wenn das Urbild jeder affinen offenen Teilmenge wieder affin ist.

7.9.1.3. Unsere Erkenntnis 7.6.12.11 besagt, in dieser Terminologie ausgedrückt, daß jeder Morphismus von einer affinen Varietät in eine separierte Varietät affin ist. Die Separiertheit ist hier wesentlich: Betrachten wir für die „nichtseparierte Ebene mit verdoppeltem Ursprung“ X die beiden offenen Einbettungen $k^2 \hookrightarrow X$, deren Bilder sie überdecken, so ist das Urbild unter der einen vom Bild der anderen nicht affin.

Übungen

Übung 7.9.1.4. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten. Man zeige: Ist Y affin und gibt es eine Überdeckung von Y durch offene affine Teilmengen V_i mit affinen Urbildern $\varphi^{-1}(V_i)$, so ist auch X affin. Hinweis: 7.9.1.1.

Übung 7.9.1.5. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten. Besitzt Y eine Überdeckung durch offene affine Untervarietäten mit affinen Urbildern, so ist φ ein affiner Morphismus. Hinweis: In 7.9.1.4 haben Sie das für Y affin bereits gezeigt. Für den allgemeinen Fall nehme man 7.6.4.23 zu Hilfe.

Übung 7.9.1.6. Jede abgeschlossene Einbettung von Varietäten ist affin. Hinweis: 7.9.1.5.

Übung 7.9.1.7. Ist $\varphi : X \to Y$ ein affiner Morphismus von Varietäten und $Z \not\subset Y$ eine abgeschlossene Teilmenge, so ist für die jeweils induzierten Strukturen auch $\varphi : \varphi^{-1}(Z) \to Z$ ein affiner Morphismus.

Ergänzende Übung 7.9.1.8. Ich wüßte gerne, ob gegeben affine algebraische Gruppen $G \supset H \supset K$ der offensichtliche Morphismus $G/K \to G/H$ affin ist, wenn H/K affin ist.

Übung 7.9.1.9. Ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von Varietäten heißt **endlich** oder bei uns auch **modulendlich**, wenn er affin ist und wenn für alle affinen $V \Subset Y$ der Ring $\mathcal{O}(\varphi^{-1}(V))$ modulendlich ist über $\mathcal{O}(V)$. Man zeige, daß das bereits für alle affinen $V \Subset Y$ folgt, wenn wir es nur für die Teilmengen einer Überdeckung von Y durch offene affine Teilmengen fordern. Hinweis: 7.9.1.5. Man zeige, daß jeder endliche Morphismus eigentlich ist. Hinweis: Geometrie ganzer Kringerweiterungen 7.5.2.10.

7.9.2 Quotienten nach endlichen Gruppen

7.9.2.1. Einen Morphismus von k-Varietäten nennen wir **offenfinal**, wenn er als Morphismus von k-geringten Räumen offen und final ist. Besonders oft werden wir es mit Morphismen von Varietäten zu tun haben, die **produktfest offenfinal** sind, also produktfest offen und produktfest final. Hier fordern wir aber nur die Stabilität dieser Eigenschaften mit Produkten in der Kategorie der Varietäten.

7.9.2.2. Es reicht zu prüfen, daß unsere Eigenschaft unter dem Produkt mit der Identität auf jeder affinen Varietät Z stabil ist: In der Tat sind die Eigenschaften „offen“ und „final“ nach 7.6.2.30 beide lokal in der Basis.

Beispiele 7.9.2.3. Die Projektion eines Produkts von Varietäten auf einen der Faktoren ist produktfest offenfinal, wenn der andere Faktor nicht leer ist, vergleiche 7.6.11.11. Insbesondere ist der konstante Morphismus von einer beliebigen nichtleeren Varietät auf einen Punkt stets produktfest offenfinal.

Definition 7.9.2.4. Gegeben $W \circlearrowright X$ ein k-geringter Raum mit der Operation einer Gruppe verstehen wir den **Bahnenraum** X/W stets mit seiner finalen Struktur eines k-geringten Raums bezüglich der kanonischen Abbildung $X \to X/W$.

Satz 7.9.2.5 (**Quotienten affiner Varietäten nach endlichen Gruppen**). *Operiert eine endliche Gruppe W auf einer affinen Varietät X, so ist der Bahnenraum X/W auch eine affine Varietät und der Quotientenmorphismus ist produktfest offenfinal und endlich.*

Beweis. Wir wissen bereits aus 7.5.3.3, daß der Bahnenraum X/W mit den regulären Funktionen $\mathcal{O}(X/W) := \{f : X/W \to k \mid f \circ \mathrm{can} \in \mathcal{O}(X)\}$ zu einer naiven affinen Varietät wird. Es bleibt zu zeigen, daß die Abbildung zwischen den zugehörigen Varietäten final, ja sogar produktfest offenfinal ist. Nach unseren Erkenntnissen 7.5.2.10 über die Geometrie ganzer Kringerweiterungen ist $\pi : X \to \mathrm{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$ abgeschlossen und man folgert leicht, daß $X/W \to \mathrm{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$ sogar ein Homöomorphismus sein muß. Sicher induziert dieser Homöomorphismus auch einen Isomorphismus zwischen den jeweiligen Ringen von globalen regulären Funktionen. Um den Satz zu zeigen, müssen wir aber noch nachweisen, daß die finale Struktur auf X/W mit der initialen Struktur von $\mathrm{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$ übereinstimmt. Nun, es reicht für jede offene Teilmenge $U \Subset \mathrm{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$ zu zeigen, daß gilt $\mathcal{O}(U) = \{f : U \to k \mid f \circ \pi \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))\}$. Wir setzen $A := \mathcal{O}(X)$ und dürfen wir uns sicher auf offene Teilmengen der Gestalt $U = \{h \neq 0\}$ beschränken mit $h \in A^W$. Unsere Behauptung verwandelt sich so in die Behauptung, daß die kanonische Abbildung ein Isomorphismus

$$(A^W)_h \xrightarrow{\sim} (A_h)^W$$

ist. Wir müssen in Worten also zeigen, daß die Invarianten im lokalisierten Ring mit der Lokalisierung des Invariantenrings übereinstimmen. Das war aber gerade Übung 7.4.3.48. Die Eigenschaft produktfest offenfinal folgt dann leicht aus dem in 4.6.1.41 erwähnten kanonischen Isomorphismus $B \otimes_k (A^W) \xrightarrow{\sim} (B \otimes_k A)^W$ angewandt auf $B = \mathcal{O}(Z)$ für eine weitere affine Varietät Z und $A = \mathcal{O}(X)$. $\square$

Korollar 7.9.2.6 (**Quotienten nach endlichen Gruppen**). *Operiert eine endliche Gruppe W auf einer Varietät X und besitzt X eine Überdeckung durch unter W stabile offene affine Untervarietäten, so ist der Bahnenraum X/W auch eine Varietät und die Quotientenabbildung ist endlich und produktfest offenfinal. Ist des weiteren X separiert, so auch X/W.*

7.9.2.7 (**Quotienten nach endlichen Gruppen im quasiprojektiven Fall**). Für jede quasiprojektive Varietät X mit einer Operation einer endlichen Gruppe W ist unsere Bedingung aus 7.9.2.6 erfüllt und X/W ist wieder eine separierte Varietät. In der Tat gibt es für jede endliche Teilmenge eines $\mathbb{P}^n$ mit $n \geq 1$ nach 6.3.10.1 eine Hyperebene, die unsere endliche Teilmenge nicht trifft. Wenden wir das auf eine Bahn an, so können wir uns in den Fall einer quasiaffinen Varietät retten. Nach 7.3.1.7 gibt es weiter für jede endliche Teilmenge einer quasiaffinen Varietät

eine offene affine Teilmenge, die sie umfaßt. Insbesondere gilt das für jede Bahn. Nach 7.6.12.11 ist dann auch der Schnitt dieser offenen affinen Teilmengen affin und das Korollar 7.9.2.6 darf angewendet werden.

Beweis. Das einzige Problem ist der Beweis der letzten Aussage. Man kann sie aus 7.6.12.16 folgern. Will man den Begriff der Eigentlichkeit vermeiden, kann man bemerken, daß die Verknüpfung

$$X \times X \to X/W \times X \to X/W \times X/W$$

auch selbst produktfest offenfinal und insbesondere offen ist. Da nun das Urbild der Diagonale unter dieser Verknüpfung offensichtlich abgeschlossen ist, muß auch die Diagonale in $X/W \times X/W$ selbst abgeschlossen sein. □

Proposition 7.9.2.8 (Erkennen von Quotientenmorphismen). *Gegeben seien ein endlicher Morphismus $\varphi : X \to Y$ von irreduziblen k-Varietäten und eine Operation einer endlichen Guppe W auf X derart, daß die Fasern gerade die Bahnen von W sind. Ist dann Y normal und $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ eine Galoiserweiterung und die offensichtliche Abildung eine Surjektion von W auf ihre Galoisgruppe, so induziert φ einen Isomorphismus $X/W \xrightarrow{\sim} Y$ von k-geringten Räumen.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $Y = \operatorname{Max} A$ affin annehmen. Ist ganz allgemein A ein normaler kommutativer Integritätsbereich und $L/\operatorname{Quot}(A)$ eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe Γ und B der ganze Abschluß $B \subset L$ von A in L, so gilt offensichtlich $A = B^\Gamma$, denn B^Γ besteht aus über A ganzen Elementen von $\operatorname{Quot}(A)$ und umfaßt A. In unserem Fall ist $\mathcal{O}(X)$ modulendlich über A, also $\mathcal{O}(X) \subset B$ und a forteriori $\mathcal{O}(X)^W = \mathcal{O}(Y)$. □

Beispiel 7.9.2.9. Auf der Neil'schen Parabel X mit

$$\mathcal{O}(X) = k \oplus kT^2 \oplus kT^3 \oplus \ldots \subset k[T]$$

erhalten wir eine Operation der zweielementigen Gruppe W durch die Vorschrift $T \mapsto -T$. Der Invariantenring $\mathcal{O}(X)^W = k[T^2]$ ist derselbe wie bei der Operation auf der Gerade durch die Vorschrift $T \mapsto -T$. In der Situation unserer Proposition 7.9.2.8 kann es also durchaus passieren, daß $\mathcal{O}(X)$ nicht der ganze Abschluß von $\mathcal{O}(Y)$ in $\mathcal{M}(X)$ ist. Ist aber zusätzlich auch X normal, so kann das offensichtlich nicht passieren.

Proposition 7.9.2.10 (Differentialkriterium für Quotientenmorphismen). *Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten und sei eine freie Operation einer endlichen Guppe W auf X gegeben derart, daß die Fasern von φ gerade die Bahnen von W sind. Ist zusätzlich Y normal und gibt es eine offene dichte Teilmenge $U \Subset X$ mit $\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$ für alle $x \in U$, so induziert φ einen Isomorphismus*

$$X/W \xrightarrow{\sim} Y$$

Beweis. Als normale Varietät ist Y die disjunkte Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten und wir dürfen Y irreduzibel annehmen. Jede irreduzible Komponente Z von X wird nach dem differentiellen Dominanzkriterium mit einem dominanten Morphismus nach Y abgebildet und hat nach 7.5.4.18 dieselbe Dimension wie Y. Es gibt also Punkte $y \in Y$ derart, daß kein Punkt der Faser $\varphi^{-1}(y)$ in mehr als einer irreduziblen Komponente von X liegt. Insbesondere operiert W transitiv auf der Menge der irreduziblen Komponenten von X. Nun können wir X durch die disjunkte Vereinigung $\tilde{X}$ der irreduziblen Komponenten von X ersetzen und wenn wir $\mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\tilde{X})^W$ zeigen, folgt a forteriori $\mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)^W$. Dann können wir aber auch $(\tilde{X}, W)$ ersetzen durch (Z, W_Z) für eine irreduzible Komponente Z von X und ihren Stabilisator. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist also bereits X selbst irreduzibel und die Operation von W treu. Dann ist $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ separabel nach unserem Kriterium 9.3.5.13 der generischen Bijektivität des Differentials. Dann muß nach **??** diese Körpererweiterung den Grad $|W|$ haben und die offensichtliche Einbettung muß einen Isomorphismus $W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y))$ liefern, so daß unsere Körpererweiterung sogar Galois ist. Damit ist aber $X/W \to Y$ birational und bijektiv und folglich aufgrund der Normalität von Y ein Isomorphismus nach Zariski's Hauptsatz 9.2.4.17. $\square$

7.9.2.11 (**Konstruktion von Quotientenmorphismen**). Gegeben seien eine normale irreduzible affine Varietät Y und eine endliche Galoiserweiterung $L/\mathcal{M}(Y)$ mit Galoisgruppe W. Betrachten wir dann in L den ganzen Abschluß $B \subset L$ von $\mathcal{O}(Y)$, so ist B nach 7.8.3.9 modulendlich über $\mathcal{O}(Y)$ und ein affiner k-Kring und die Einbettung $\mathcal{O}(Y) \hookrightarrow B$ induziert einen Isomorphismus $\mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} B^W$ und für $X := \operatorname{Max} B$ einen Isomorphismus von k-geringten Räumen $X/W \xrightarrow{\sim} Y$.

Übungen

Übung 7.9.2.12. Ist $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten und ist $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von Y derart, daß die induzierten Morphismen $\varphi^{-1}(V) \to V$ für alle $V \in \mathcal{V}$ produktfest offenfinal sind, so ist auch φ selbst produktfest offenfinal. Insbesondere ist für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum V die Projektion $V \backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}V$ produktfest offenfinal, da sie ja lokal in der Basis der Projektion eines Produkts mit $k^\times$ auf einen der Faktoren entspricht. Allgemeiner ist für $X \subset\!\!\!

Teilmengen $Y \not\subset X \times \mathbb{P}^n k$ die Gestalt $Y = \mathcal{Z}_X^*(I)$ haben für ein homogenes Ideal I. Man zeige weiter, daß $\mathcal{Z}_X^*(I) = \emptyset$ genau dann gilt, wenn für hinreichend großes r das homogene Ideal I alle T_ν^r enthält.

Übung 7.9.2.14. Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ und ein endlichdimensionaler k-Vektorraum V ist die durch die Wirkung induzierte Abbildung $\mathrm{GL}(V) \times \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V$ ein Morphismus von Varietäten. Hinweis: 7.9.2.12.

Übung 7.9.2.15. Der Morphismus der leeren Varietät zu einer beliebigen endlichen Varietät ist offenfinal, aber nicht produktfest offenfinal. Jeder produktfest offenfinale Morphismus ist surjektiv.

7.9.3 Allgemeines zu Bahnenräumen

Definition 7.9.3.1. Gegeben $G \circlearrowright X$ ein topologischer Raum mit der Operation einer Gruppe bezeichnen wir

$$X/G$$

mit seiner Finaltopologie als den **Bahnenraum** und nennen eine stetige Abbildung $X \to Y$ einen **Bahnenmorphismus**, wenn Y isomorph ist zu X/G als topologischer Raum unter X. Ist X ein k-geringter Raum, so denken wir uns den Bahnenraum, wenn nichts anderes gesagt ist, stets mit seiner finalen Struktur eines k-geringten Raums bezüglich $X \twoheadrightarrow X/G$ versehen und nennen einen Morphismus $X \to Y$ in einen weiteren k-geringten Raum einen **Bahnenmorphismus** $X \to Y$, wenn Y als k-geringter Raum unter X isomorph ist zu X/G.

7.9.3.2. Ist im Fall der Operation $G \circlearrowright X$ einer Gruppe auf einer algebraischen Varietät der Bahnenraum X/G wieder eine algebraische Varietät, so nennen wir den Bahnenraum auch die **Bahnenvarietät**.

7.9.3.3 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur ist es üblich, unsere Bahnenvarietät als „geometrischen Quotienten“ zu bezeichnen und diesen Begriff noch mit zusätzlichen Eigenschaften aufzuladen. Insbesondere wird oft zusätzlich gefordert, daß diese Varietät separiert sein soll. Ich schließe mich diesen Konventionen nicht an.

Beispiel 7.9.3.4. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Betrachten wir $k^2 \backslash 0$ mit der durch $t(x, y) = (tx, t^{-1}y)$ gegebenen Operation von $k^\times$, so erhalten wir als Bahnenraum die „Gerade mit verdoppeltem Ursprung“, eine nicht separierte Varietät.

Beispiel 7.9.3.5. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Betrachten wir $k^{n+1} \backslash 0$ mit der durch Multiplikation gegebenen Operation von $k^\times$, so erhalten wir den projektiven Raum $\mathbb{P}^n k$ als Bahnenvarietät.

Beispiel 7.9.3.6 (**Lokalität von Bahnenmorphismen**). Sei $G\backslash X$ ein k-geringter Raum mit einer Operation einer Gruppe. Gegeben ein Bahnenmorphismus $\pi : X \to Y$ ist offensichtlich für jede offene Teilmenge $V \Subset Y$ auch $\pi : \pi^{-1}(V) \to V$ ein Bahnenmorphismus. Ist umgekehrt $\pi : X \to Y$ ein Morphismus in einen weiteren k-geringten Raum und ist $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von Y derart, daß $\pi : \pi^{-1}(V) \to V$ ein Bahnenmorphismus ist für alle $V \in \mathcal{V}$, so ist auch π selber bereits ein Bahnenmorphismus.

Beispiele 7.9.3.7. Daß der Bahnenraum eine Varietät ist, ist unter anderem bekannt in den folgenden Fällen:

1. Im Fall der Operation einer endlichen Gruppe G auf einer durch G-stabile offene affine Teilmengen überdeckten Varietät 7.9.2.6;

2. Im Fall einer fixpunktfreien algebraischen $k^\times$-Operation auf einer affinen Varietät 7.9.4.2;

3. Im Fall der $k^\times$-Operation auf dem Komplement der $k^\times$-Fixpunktmenge in einer affinen Varietät mit einer kontrahierenden algebraischen $k^\times$-Operation 7.9.5.3;

4. Im Fall einer affinen algebraischen Gruppe und der Operation durch Rechtstranslation oder Linkstranslation einer abgeschlossenen Untergruppe 9.3.6.2;

5. Im Rahmen der sogenannten „geometrischen Invariantentheorie“ konstruiert man weitere Beispiele im Fall der Operation einer „linear reduktiven affinen algebraischen Gruppe“. Genauer zeigt man für die auf die offene Teilmenge der „stabilen Punkte“ restringierte Operation, daß der Bahnenraum eine Varietät ist, vergleiche 7.9.6.27 und 7.9.7.3;

6. In 7.9.6.30 zeigen wir, daß der Bahnenraum der offenen Menge $\mathrm{Mat}(n;k)^{\mathrm{reg}}$ der Matrizen mit einem Zentralisator kleinstmöglicher Dimension unter der Operation durch Konjugation von $\mathrm{GL}(n;k)$ eine Varietät ist.

7.9.3.8. In vielen dieser Fälle wissen wir sogar zusätzlich, daß für jede weitere Varietät Y auch der Morphismus $Y \times X \twoheadrightarrow Y \times X/G$ ein Bahnenmorphismus ist. Ist diese zusätzliche Eigenschaft erfüllt, so rede ich von einem **produktfesten Bahnenmorphismus**.

Ergänzung 7.9.3.9. Gegeben ein affiner G-äquivarianter Morphismus $X \to Y$ von Varietäten derart, daß beide Bahnenräume Varietäten sind, wüßte ich gerne, ob auch $(X/G) \to (Y/G)$ ein affiner Morphismus sein muß.

7.9.4 Quotienten nach fixpunktfreien $k^\times$-Operationen

Definition 7.9.4.1. Eine Operation der multiplikativen Gruppe $k^\times$ auf einer k-Varietät X heißt **algebraisch**, wenn die zugehörige Abbildung $k^\times \times X \to X$ ein Morphismus ist.

Proposition 7.9.4.2 (**Quotienten nach fixpunktfreien $k^\times$-Operationen**). *Gegeben eine affine k-Varietät X mit einer fixpunktfreien algebraischen Operation der multiplikativen Gruppe $k^\times$ gilt:*

1. *Der Bahnenraum $X/k^\times$ mit seiner finalen Struktur ist eine affine k-Varietät und der Bahnenmorphismus $X \twoheadrightarrow X/k^\times$ ist produktfest offenfinal;*

2. *Ist $Y \subsetneq X$ eine abgeschlossene $k^\times$-stabile Teilmenge, so ist $Y/k^\times \hookrightarrow X/k^\times$ eine abgeschlossene Einbettung.*

7.9.4.3. Diese Proposition wird sich als ein Spezialfall von 7.9.6.27 erweisen, kann jedoch mit sehr viel weniger Vorkenntnissen bewiesen werden und erlaubt bereits die Konstruktion vieler wichtiger Verallgemeinerungen der projektiven Räume im folgenden Abschnitt.

7.9.4.4. Wenn wir diese Proposition einmal hinnehmen, so folgt sofort, daß der Rückzug vermittels der Projektion die regulären Funktionen auf der Bahnenvarietät mit den $k^\times$-invarianten Funktionen auf X identifizieren muß, in Formeln

$$\mathcal{O}(X/k^\times) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)^{k^\times}$$

Insbesondere sollte also auch $\mathcal{O}(X)^{k^\times}$ ringendlich sein über k. Wir zeigen diese Aussage sogar in noch größerer Allgemeinheit, bevor wir dann im Anschluß an 7.9.4.9 den eigentlichen Beweis der Proposition führen. Wir beginnen mit einigen Umformulierungen.

Proposition 7.9.4.5 (**Graduierungen und $k^\times$-Operationen**). *Wir erhalten für jede affine k-Varietät X eine eineindeutige Entsprechung*

$$\{\textit{algebraische } k^\times\textit{-Operationen auf } X\} \xrightarrow{\sim} \{\mathbb{Z}\textit{-Graduierungen auf } \mathcal{O}(X)\}$$

dadurch, daß wir der Ringalgebra $\mathcal{O}(X)$ die Graduierung $\mathcal{O}(X) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}(X)^i$ durch die simultanen Eigenräume der $k^\times$-Operation geben, in Formeln durch die Teilräume $\mathcal{O}(X)^i := \{f \in \mathcal{O}(X) \mid f(\mu x) = \mu^i f(x)\ \forall x \in X, \mu \in k^\times\}$.

Ergänzung 7.9.4.6. Sie mögen zur Übung zeigen, daß man genauso eine eineindeutige Entsprechung zwischen algebraischen Operationen des multiplikativen Monoids k auf X und $\mathbb{N}$-Graduierungen auf $\mathcal{O}(X)$ erhält.

Beweis. Gegeben eine affine k-Varietät X und ein Morphismus $k^\times \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ liefert das Zurückholen globaler regulärer Funktionen zusammen mit 7.3.1.4 einen Homomorphismus

$$\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(k^\times \times X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(k^\times) \otimes \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} k[T, T^{-1}] \otimes \mathcal{O}(X)$$

Haben wir $f \mapsto \sum T^i \otimes f_i$, so gilt per definitionem $f(\lambda x) = \sum \lambda^i f_i(x)$. Ist unser Morphismus eine Gruppenwirkung, so zeigt die von der Mitte aus zu entwickelnde Gleichungskette

$$\sum \lambda^i \mu^i f_i(x) = f((\lambda\mu)x) = f(\lambda(\mu x)) = \sum \lambda^i f_i(\mu x)$$

uns, daß bei festem x und μ das Laurentpolynom $\sum(\mu^i f_i(x) - f_i(\mu x))T^i$ unendlich viele Nullstellen hat und folglich alle seine Koeffizienten verschwinden müssen. Mithin gilt $f_i(\mu x) = \mu^i f_i(x)$ für alle μ und x alias $f_i \in \mathcal{O}(X)^i$. Nach Konstruktion gilt andererseits $f = \sum f_i$ und wir sehen, daß unsere $\mathcal{O}(X)^i$ ganz $\mathcal{O}(X)$ als Vektorraum erzeugen. Das Argument, daß die Summe der $\mathcal{O}(X)^i$ direkt ist, kann dem Leser zur Übung überlassen bleiben. Das Argument, daß wir so die behauptete Bijektion erhalten, desgleichen. □

Lemma 7.9.4.7. *Ist R ein noetherscher $\mathbb{Z}$-graduierter Kring, so ist auch seine homogene Komponente R^0 vom Grad Null noethersch.*

Beweis. Für jedes Ideal $I \subset R^0$ gilt $I = \langle RI \rangle \cap R^0$. □

Lemma 7.9.4.8. *Sei $S = \bigoplus_{i \geq 0} S^i$ ein nichtnegativ graduierter Kring. Ist S noethersch, so ist S ringendlich über S^0.*

Beweis. Sind x_ν homogene Erzeuger des Ideals $S^{>0} \subset S$, so zeigt eine Induktion über den Grad schnell, daß die x_ν auch S als S^0-Kring erzeugen. □

Lemma 7.9.4.9. *Sei K ein Körper. Ist $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ ein $\mathbb{Z}$-graduierter ringendlicher K-Kring, so ist auch A^0 ringendlich über K.*

Beweis. Wir wählen homogene Erzeuger $x_1, \ldots x_n$ des K-Krings A und realisieren A als Quotienten des Polynomrings $S := K[X_1, \ldots, X_n]$. Versehen wir diesen Ring mit der $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$-Graduierung, in der die Erzeuger X_ν den Bigrad $(\operatorname{grad}(x_\nu), 1)$ haben, so ist der homogene Teil vom Grad Null in Bezug auf die erste Graduierung $S^{(0,*)}$ alias der $(\{0\} \times \mathbb{Z})$-Anteil unseres bigraduierten Rings noethersch nach 7.9.4.7. Damit ist er auch ringendlich über K nach 7.9.4.8. Nun induziert jedoch unsere Surjektion $S \twoheadrightarrow A$ eine Surjektion $S^{(0,*)} \twoheadrightarrow A^0$. So folgt, daß auch A^0 ringendlich ist über K. □

Beweis von Proposition 7.9.4.2. Um nun Proposition 7.9.4.2 über die Bahnenräume für fixpunktfreie $k^\times$-Operationen zu zeigen, versehen wir $\mathcal{O}(X)$ mit seiner durch die $k^\times$-Operation induzierten Graduierung und wissen aus 7.9.4.9, daß $\mathcal{O}(X)^0$ ringendlich ist über k. Damit müssen wir im wesentlichen nur noch nachweisen, daß der von der Einbettung $\mathcal{O}(X)^0 \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ induzierte Morphismus $\pi : X \to \operatorname{Max} \mathcal{O}(X)^0$ genau die $k^\times$-Bahnen von X als Fasern hat und offen und final ist. Für den Nachweis, daß π sogar produktfest offenfinal ist, dürfen wir dann Z affin annehmen und brauchen nur unsere Erkenntnisse für $\mathcal{O}(Z) \otimes \mathcal{O}(X)$ anzuwenden. Jedes Ideal in $\mathcal{O}(X)^0$ entsteht nun offensichtlich durch Herunterschneiden mit dem von ihm erzeugten Ideal von $\mathcal{O}(X)$. Damit entsteht auch jedes maximale Ideal von $\mathcal{O}(X)^0$ durch Herunterschneiden aus einem maximalen Ideal von $\mathcal{O}(X)$, als da heißt, π ist surjektiv. Offensichtlich ist π auch konstant auf $k^\times$-Bahnen. Für eine $k^\times$-stabile abgeschlossene Teilmenge $Y \not\subset X$ ist weiter ihr Verschwindungideal $\mathcal{I}(Y) \subset \mathcal{O}(X)$ ein homogenes Radikalideal, das $\mathcal{O}(X)^0$ notwendig in einem Radikalideal $\mathcal{I}(Y)^0$ schneidet. Jedes Ideal in $\mathcal{O}(X)^0$ entsteht nun aber wie gesagt durch Herunterschneiden mit einem Ideal von $\mathcal{O}(X)$, und insbesondere entsteht auch jedes maximale Ideal über $\mathcal{I}(Y)^0$ durch Herunterschneiden aus einem maximalen Ideal über $\mathcal{I}(Y)$, als da heißt, die simultane Nullstellenmenge von $\mathcal{I}(Y)^0$ ist genau $\pi(Y)$. Das zeigt, daß $\pi(Y)$ abgeschlossen ist. Eine Teilmenge von $\operatorname{Max} \mathcal{O}(X)^0$ ist mithin genau dann abgeschlossen, wenn ihr Urbild unter π abgeschlossen ist. Folglich trägt $\operatorname{Max} \mathcal{O}(X)^0$ die Quotiententopologie, und π ist offen als Projektion auf einen Bahnenraum unter einer Gruppenwirkung. Nun beachten wir, daß nach 7.5.4.12 alle $k^\times$-Bahnen eine offene Teilmenge ihres Abschlusses umfassen, und da diese Abschlüsse höchstens eindimensional sind und unsere Operation nach Annahme fixpunktfrei ist, müssen alle Bahnen abgeschlossen sein. Gegeben verschiedene Bahnen $Y \neq Z$ gilt also $\mathcal{I}(Y) + \mathcal{I}(Z) = \mathcal{O}(X)$ und damit $\mathcal{I}(Y)^0 + \mathcal{I}(Z)^0 = \mathcal{O}(X)^0$ und folglich $\pi(Y) \neq \pi(Z)$. Die Fasern von π sind also genau die $k^\times$-Bahnen. Es bleibt nur zu zeigen, daß Funktionen auf offenen Teilmengen von $\operatorname{Max} \mathcal{O}(X)^0$ regulär sind genau dann, wenn sie unter Zurückholen auf X regulär werden. Für globale Funktionen ist das klar. Für Funktionen auf affinen offenen Mengen folgt es aus $(s^{-1}\mathcal{O}(X))^0 = s^{-1}(\mathcal{O}(X)^0)$ für alle $s \in \mathcal{O}(X)^0$, und damit ist klar, daß unser Morphismus final ist. Schließlich liefert unser Argument von oben für eine $k^\times$-stabile abgeschlossene Teilmenge $Y \not\subset X$ die Exaktheit der oberen Zeile im Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I}(Y)^0 & \hookrightarrow & \mathcal{O}(X)^0 & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(\pi(Y)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{I}(Y) & \hookrightarrow & \mathcal{O}(X) & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(Y) \end{array}$$

In diesem Diagramm meinen sind alle Vertikalen schlicht die Einbettungen der homogenen Komponenten vom Grad Null und das zeigt den behaupteten Isomorphismus $Y/k^\times \xrightarrow{\sim} \pi(Y)$. $\square$

Übungen

Übung 7.9.4.10. Sei $S = \bigoplus_{i \geq 0} S^i$ ein nichtnegativ graduierter Kring. Ist S noethersch, so ist für jedes $d > 0$ auch der Teilring $\bigoplus_{i \geq 0} S^{di}$ ringendlich über S^0. Hinweis: 7.9.4.8.

7.9.5 Varietäten zu graduierten Kringalgebren

7.9.5.1. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine algebraische Operation $k^\times \times X \to X$ von $k^\times$ auf einer k-Varietät X heißt **kontrahierend**, wenn sie sich fortsetzen läßt zu einem Morphismus $k \times X \to X$. Das Bild $0X$ von $\{0\} \times X$ ist unter diesen Annahmen die Fixpunktmenge unserer Operation, denn die Regel $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ für eine Operation muß aus Stetigkeitsgründen dann auch für beliebige $\lambda, \mu \in k$ gelten. Insbesondere folgt $0X \not\subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\; X$.

7.9.5.2 (**Diskussion der Terminologie**). Unsere kontrahierenden Operationen kontrahieren im allgemeinen nur auf eine Untervarietät und nicht notwendig auf einen Punkt. Im Fall einer Kontraktion auf einen Punkt sagen wir das explizit dazu.

Satz 7.9.5.3 (**Varietäten zu nichtnegativ graduierten Kringalgebren**). *Sei X eine affine k-Varietät mit einer kontrahierenden algebraischen Operation von $k^\times$ und sei $X^\circ \Subset X$ das Komplement der Fixpunktmenge. So gilt:*

1. *Mit seiner finalen Struktur ist $X^\circ/k^\times$ eine separierte k-Varietät;*
2. *Die Projektion $X^\circ \twoheadrightarrow X^\circ/k^\times$ ist produktfest offenfinal;*
3. *Ist $Y \hookrightarrow X$ die Einbettung einer $k^\times$-stabilen abgeschlossenen Teilmenge, so ist auch der induzierte Morphismus $Y^\circ/k^\times \hookrightarrow X^\circ/k^\times$ eine abgeschlossene Einbettung;*
4. *Der von der Multiplikation mit Null induzierte Morphismus $X^\circ/k^\times \to 0X$ ist eigentlich.*

7.9.5.4. Der Beweis wird mit 7.9.1.5 auch zeigen, daß die Projektion auf den Bahnenraum ein affiner Morphismus ist. Umgekehrt ist auch das Bild jeder offenen affinen $k^\times$-stabilen Teilmenge von X° nach 7.9.4.2 wieder affin.

Ergänzung 7.9.5.5. Gegeben ein nichtnegativ $\mathbb{Z}$-graduierter affiner k-Kring A über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ verwenden wir die Abkürzung

$$\mathrm{MProj}(A) := (\mathrm{Max}\, A)^\circ/k^\times$$

für die durch die Konstruktion in 7.9.5.3 gegebene k-Varietät.

Vorschau 7.9.5.6. Die Varietät der k-wertigen Punkte des Schemas $\mathrm{Proj}(A)$ von Grothendieck ist im Fall $A = \mathcal{O}(X)$ genau unsere Quotientenvarietät. Der letzte Teil unseres Satzes besagt, daß $X^\circ/k^\times$ im Fall eines einzigen Fixpunkts vollständig ist. Man kann mit etwas mehr Aufwand zeigen, daß $X^\circ/k^\times$ im Fall eines einzigen Fixpunkts sogar eine projektive Varietät ist.

Beispiel 7.9.5.7. Betrachten wir auf der Varietät $X = k^2$ die nichtkontrahierende $k^\times$-Operation durch $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda^{-1} y)$, so ist der Bahnenraum von $X^\circ = k^2 \backslash 0$ mit seiner finalen Struktur als k-geringter Raum genau unsere nicht-separierte Varietät „Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt“ aus 7.6.12.3.

Beweis. Sei $A = \mathcal{O}(X)$ mit der nach 7.9.4.5 durch die $k^\times$-Operation gegebenen $\mathbb{Z}$-Graduierung versehen. Offensichtlich ist die Operation kontrahierend genau dann, wenn gilt $A^i = 0$ für $i < 0$, und wir haben dann $\mathcal{I}(0X) = A^{>0}$. Für jedes homogene $f \in A$ ist nun $X_f = X \backslash \mathcal{Z}(f)$ eine $k^\times$-stabile affine offene Teilmenge mit $A[f^{-1}]$ als Ring von regulären Funktionen, und für f homogen von positivem Grad gilt $X_f \subset X^\circ$. Nach 7.9.4.2 ist für f homogen von positivem Grad die durch das Herunterschneiden induzierte Abbildung

$$\mathrm{Max}(A[f^{-1}]) \to \mathrm{Max}(A[f^{-1}]^0)$$

produktfest offenfinal mit den $k^\times$-Bahnen als Fasern. Die besagten offenen Teilmengen X_f überdecken aber X°. Das zeigt, daß $X^\circ/k^\times$ mit seiner finalen Struktur eine Varietät ist und daß die Projektion produktfest offenfinal ist. Ebenso folgt aus 7.9.4.2 die Behauptung 3 über abgeschlossene Einbettungen. Wir müssen nur noch zeigen, daß unser Bahnenraum separiert ist. Wir finden eine homogene Surjektion $A^0[Z_1, \ldots, Z_n] \twoheadrightarrow A$ von einem Polynomring nach A mit den Z_ν homogen von Graden $d(\nu)$ und dürfen nach Teil 3 hinfort annehmen, daß A bereits selbst dieser Polynomring ist. Nun betrachten wir die ganze Ringerweiterung

$$A^0[Z_1, \ldots, Z_n] \subset A^0[T_0, \ldots, T_n]$$

mit den Z_ν homogen von Graden $d(\nu)$ und den T_ν homogen vom Grad Eins und der rechten Abbildung gegeben durch $Z_\nu \mapsto T_\nu^{d(\nu)}$. Die zugehörige Abbildung auf den Maximalspektra $Y \to X$ ist abgeschlossen und surjektiv mit endlichen Fasern und $k^\times$-äquivariant. Genauer sind die Fasern die Bahnen der Operation einer endlichen Gruppe W von Einheitswurzeln auf Y, die mit der Operation von $k^\times$ kommutiert. Unsere Abbildung induziert abgeschlossene Abbildung $Y \times Y \to X \times X$, und das Urbild von $X^\circ \times X^\circ$ ist offensichtlich $Y^\circ \times Y^\circ$. Nun sind im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y^\circ \times Y^\circ & \to & Y^\circ/k^\times \times Y^\circ/k^\times \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^\circ \times X^\circ & \to & X^\circ/k^\times \times X^\circ/k^\times \end{array}$$

die Vertikalen surjektiv und die Horizontalen produktfest offenfinal und insbesondere offen. Es reicht also zu zeigen, daß das Urbild der Diagonale unter der unteren Horizontale abgeschlossen ist. Da wir schon wissen, daß $Y^\circ/k^\times \cong 0X \times \mathbb{P}^n k$ separiert ist, ist das Urbild der Diagonale unter der oberen Horizontale schon mal abgeschlossen. Dasselbe gilt für seine Vereinigung mit allen seinen Bildern unter der W-Operation auf dem ersten Faktor. Dann aber ist das Bild dieser Vereinigung unter der linken Vertikale abgeschlossen, und das ist genau das Urbild der Diagonale unter der unteren Horizontale. Die letzte Aussage folgt aus ihrer eigenen Allgemeinheit, sobald wir zeigen, daß der Morphismus $\pi : X^\circ/k^\times \to 0X$ abgeschlossen ist. Um das zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß sein Bild genau aus allen Punkten von $0X$ besteht, über denen der durch Multiplikation mit 0 gegebene Morphismus $X \to 0X$ eine Faser der Dimension mindestens Eins hat. Nach der Halbstetigkeit der Faserdimension 7.5.10.7 bilden alle Punkte von X, die zu einer Faser von $(0\cdot) : X \to X$ einer Dimension ≥ 1 gehören, eine abgeschlossene Teilmenge von X. Der Schnitt dieser Teilmenge mit $0X$ ist genau das Bild von $\pi : X^\circ/k^\times \to 0X$, mithin ist dieses Bild schon mal abgeschlossen. Gegeben $A \subsetneq X^\circ/k^\times$ eine abgeschlossene Teilmenge ist sicher ihr Urbild eine abgeschlossene $k^\times$-stabile Teilmenge $B \subsetneq X^\circ$. Folglich ist $B \sqcup 0X \subsetneq X$ eine abgeschlossene k-stabile Teilmenge von X, und wenn wir darauf die bereits bewiesene Erkenntnis anwenden, folgt $\pi(A) \subsetneq 0X$. $\square$

7.9.5.8. Im Fall eines Polynomrings $A = k[T_1, \ldots, T_n]$, der graduiert ist durch die Vorschrift $\operatorname{grad}(T_i) = w_i$ mit positiven natürlichen Zahlen $w_1, \ldots, w_n$, heißt die zugehörige Bahnenvarietät ein **gewichteter projektiver Raum**. Man notiert sie $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$.

Beispiel 7.9.5.9. Man prüft, daß der gewichtete projektive Raum $\mathbb{P}(1,1,2)$ eine offene Überdeckung durch affine Untervarietäten $\mathbb{P}(1,1,2) = U_0 \cup U_1 \cup U_2$ hat mit

$$\begin{aligned} U_0 &= \operatorname{Max} \mathbb{C}[y/x, z/x^2] \cong \mathbb{C}^2, \\ U_1 &= \operatorname{Max} \mathbb{C}[x/y, z/y^2] \cong \mathbb{C}^2, \\ U_2 &= \operatorname{Max} \mathbb{C}[x^2/z, xy/z, y^2/z] \text{ singulär.} \end{aligned}$$

Übungen

Ergänzende Übung 7.9.5.10. Gegeben über einem Körper K ein Polynomring $R = K[X_1, \ldots, X_r]$ mit Erzeugern der positiven Grade $0 < d_1 \leq \ldots \leq d_r$ gilt für die Dimensionen der homogenen Komponenten R^i im Körper der Laurentreihen $\mathbb{Q}((t))$ die Identität

$$\sum_{i=0}^{\infty} (\dim_k R^i) t^i = \prod_{\nu=1}^{r} (1 - t^{d_\nu})^{-1}$$

Weiter zeige man, daß sowohl r als auch die Grade $d_1, \ldots, d_r$ der Erzeuger durch diese formale Potenzreihe bereits eindeutig festgelegt werden.

7.9.6 Bahnschlußräume und Invariantenringe

Definition 7.9.6.1. Gegeben $G \backslash X$ ein topologischer Raum mit der Operation einer Gruppe bezeichne

$$X /\!\!/ G$$

die Menge der Äquivalenzklassen für die von der Relation $\{(x, y) \mid y \in \overline{Gx}\}$ erzeugte Äquivalenzrelation auf X. Wir nennen $X /\!\!/ G$ den **Bahnschlußraum** und nennen eine stetige Abbildung $X \to Y$ einen **Bahnschlußmorphismus**, wenn Y isomorph ist zu $X /\!\!/ G$ als topologischer Raum unter X.

7.9.6.2. Gegeben $G \backslash X$ ein topologischer Raum mit der Operation einer Gruppe und $f : X \to Y$ ein Bahnschlußmorphismus ist für $L \subset Y$ offen oder abgeschlossen auch $f : f^{-1}(L) \to L$ ein Bahnschlußmorphismus. Das folgt aus den entsprechenden Aussagen 15.1.7.20 und 15.1.7.28 für finale Abbildungen.

Beispiel 7.9.6.3 (**Ein nicht offener Bahnschlußmorphismus**). Wir betrachten die Ebene $X := \mathbb{R}^2$ mit der Operation von $G := \mathbb{R}_{>0}$ gegeben durch $\lambda(x, y) := (\lambda x, \lambda^{-1} y)$. In diesem Fall geht die Vereinigung der Diagonale und der Nebendiagonale $\{(x, y) \mid x = \pm y\}$ homöomorph auf den Bahnschlußraum. Die Abbildung von $X = \mathbb{R}^2$ in den Bahnschlußraum ist in diesem Fall nicht offen, ja selbst die unter der Gruppenoperation stabile offene obere Halbebene hat kein offenes Bild.

7.9.6.4 (**Bahnschlußraum im Fall k-geringter Räume**). Gegeben $G \backslash X$ ein k-geringter Raum mit der Operation einer Gruppe denken wir uns den Bahnschlußraum, wenn nichts anderes gesagt ist, stets mit seiner finalen Struktur eines k-geringten Raums bezüglich $X \twoheadrightarrow X /\!\!/ G$ versehen und erklären einen Bahnschlußmorphismus $X \to Y$ in einen weiteren k-geringten Raum als einen Morphismus, für den Y als Objekt unter X isomorph ist zu $X /\!\!/ G$.

Beispiel 7.9.6.5 (**Lokalität von Bahnschlußmorphismen**). Sei $G \backslash X$ ein k-geringter Raum mit einer Operation einer Gruppe. Gegeben ein Bahnschlußmorphismus $\pi : X \to Y$ ist offensichtlich für jede offene Teilmenge $V \Subset Y$ auch $\pi : \pi^{-1}(V) \to V$ ein Bahnschlußmorphismus. Ist umgekehrt $\pi : X \to Y$ ein Morphismus in einen weiteren k-geringten Raum und ist $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von Y derart, daß $\pi : \pi^{-1}(V) \to V$ ein Bahnschlußmorphismus ist für alle $V \in \mathcal{V}$, so ist auch π selber bereits ein Bahnschlußmorphismus.

7.9.6.6 (**Faktorisieren über einen Bahnschlußmorphismus**). Ist $G \backslash X$ ein topologischer Raum mit der Operation einer Gruppe und Y ein topologischer Raum, in dem alle Punkte abgeschlossen sind, so faktorisiert jede auf G-Bahnen konstante

stetige Abbildung $X \to Y$ in eindeutiger Weise über den Bahnschlußmorphismus $X \twoheadrightarrow X /\!\!/ G$. Dasselbe gilt analog auch für k-geringte Räume und insbesondere im Fall einer k-Varietät Y, deren Punkte ja stets abgeschlossen sind.

Ergänzung 7.9.6.7. In der Allgemeinheit der obigen Definitionen ist mir nicht klar, ob alle Punkte eines Bahnschlußraums abgeschlossen sein müssen. Deshalb erlaube ich mir oben auch nicht, von einer universellen Eigenschaft zu sprechen.

7.9.6.8 (**Vergleich von Bahnenraum und Bahnschlußraum**). Sei $G\backslash\!\!\backslash X$ ein topologischer Raum mit der Operation einer Gruppe. Liegt im Abschluß jeder G-Bahn genau eine abgeschlossene G-Bahn, so liefert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion zwischen der Menge der abgeschlossenen G-Bahnen in X und dem Bahnschlußraum $X /\!\!/ G$. Ist jede G-Bahn abgeschlossen, so ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $X/G \xrightarrow{\sim} X /\!\!/ G$ zwischen dem Bahnenraum und dem Bahnschlußraum.

7.9.6.9. Offensichtlich ist ein Bahnschlußmorphismus genau dann ein Bahnenmorphismus, wenn alle seine Fasern Bahnen sind. Offensichtlich ist ein Bahnenmorphismus genau dann ein Bahnschlußmorphismus, wenn alle seine Fasern abgeschlossen sind, insbesondere also dann, wenn alle Punkte des Bahnenraums abgeschlossen sind.

7.9.6.10. Jede G-äquivariante stetige Abbildung $X \to Y$ in einen weiteren Raum mit G-Operation induziert auch eine stetige Abbildung $X /\!\!/ G \to Y /\!\!/ G$, aber äquivariante eine offene Einbettung muß, im Gegensatz zum Fall der Bahnenräume, auf den Bahnschlußräumen keineswegs eine offene Einbettung induzieren.

7.9.6.11. Ist im Fall der Operation $G\backslash\!\!\backslash X$ einer Gruppe auf einer algebraischen Varietät der Bahnschlußraum $X /\!\!/ G$ wieder eine algebraische Varietät, so nennen wir diese Varietät die **Bahnschlußvarietät**. Ist zusätzlich der Bahnschlußmorphismus affin, so sagen wir, $G\backslash\!\!\backslash X$ **habe einen affinen Bahnschlußmorphismus** und setzen dabei implizit voraus, daß der Bahnschlußraum wieder eine Varietät ist.

7.9.6.12 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur ist es üblich, unsere Bahnschlußvarietät als „guten Quotienten“ oder auch „kategorischen Quotienten“ zu bezeichnen und diesen Begriff noch mit zusätzlichen Eigenschaften aufzuladen. Insbesondere wird oft zusätzlich gefordert, daß diese Varietät separiert sein soll. Ich schließe mich diesen Konventionen nicht an.

7.9.6.13. Ist im Fall einer Operation einer Gruppe auf einem k-geringten Raum der Bahnenraum eine Varietät, so fällt er nach 7.9.6.9 mit dem Bahnschlußraum zusammen.

Definition 7.9.6.14. Eine algebraische Gruppe heißt **linear reduktiv**, wenn jede algebraische Darstellung unserer Gruppe im Sinne von 9.1.4.4 vollständig reduzibel ist im Sinne von 8.4.1.3, also die Summe ihrer irreduziblen Unterdarstellungen.

Beispiele 7.9.6.15. Nach 9.1.7.19 sind diagonalisierbare Gruppen und insbesondere Tori stets linear reduktiv. Nach dem Satz von Maschke 8.4.1.1 sind endliche Gruppen einer zur Charakteristik teilerfremden Ordnung auch linear reduktiv. Nach 24.2.6.7 sind in Charakteristik Null alle reduktiven algebraischen Gruppen linear reduktiv und insbesondere gilt das für $\mathrm{GL}(n)$. Im Fall von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ kann man auch argumentieren, daß sie der Zariski-Abschluß der unitären Gruppe $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ ist, die für die analytische Topologie kompakt ist und auf jeder algebraischen endlichdimensionalen Darstellung von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ stetig operiert in Bezug auf die natürliche Topologie des zugrundeliegenden $\mathbb{C}$-Vektorraums. Damit folgt die Behauptung aus der vollständigen Reduzibilität endlichdimensionaler Darstellungen kompakter topologischer Gruppen 22.2.4.12.

Vorschau 7.9.6.16. Unser Ziel ist im folgenden zu zeigen, daß für die Operation einer linear reduktiven algebraische Gruppe G auf einer affinen Varietät X der Bahnschlußraum $X /\!\!/ G$ auch eine affine Varietät ist. Wenn wir das einmal hinnehmen, folgt wegen $\mathcal{O}(X)^G = \mathcal{O}(X /\!\!/ G)$ sofort, daß der Invariantenring $\mathcal{O}(X)^G$ ringendlich sein muß über k. Der Nachweis dieser Aussage hinwiederum erweist sich als ein wesentlicher erster Schritt auf dem Weg zu unserem Ziel, mit dem wir jetzt erst einmal beginnen.

Vorschau 7.9.6.17. In positiver Charakteristik kann man noch ziemlich weit kommen, wenn man statt mit linear reduktiven Gruppen mit den sogenannten „geometrisch reduktiven“ Gruppen arbeitet.

Satz 7.9.6.18 (Endlichkeitssatz von Hilbert). *Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und A ein ringendlicher k-Kring mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe G, so ist auch der Invariantenring A^G ringendlich über k.*

Ergänzung 7.9.6.19. Der Satz gilt mit demselben Beweis auch über einem beliebigen Grundkörper, sobald einmal alle darin auftauchenden Begriffe in dieser Allgemeinheit definiert sind. Im Fall von Operationen endlicher Gruppen steht uns bereits der deutlich stärkere Satz von Noether 7.5.3.1 zur Verfügung.

Beweis. Die Projektion längs der isotypischen Zerlegung $A \twoheadrightarrow A^G$ ist sicher A^G-linear. Das gleich folgende Lemma 7.9.6.20 zeigt damit schon mal, daß der Invariantenring noethersch ist. Um zu zeigen, daß A^G sogar ringendlich ist über k, wählen wir einen endlichdimensionalen G-stabilen Teilraum $V \subset A$, der den k-Kring A erzeugt, und realisieren A als Quotienten der symmetrischen Algebra $S := \mathrm{S}(V)$ nach einem geeigneten G-stabilen Ideal J. Unser S besitzt dann eine natürliche G-invariante Graduierung, und da S^G nach dem bereits Bewiesenen noethersch sein muß, ist S^G nach 7.9.4.8 ringendlich über k. Dasselbe gilt dann auch für S^G/J^G. Nun haben wir ja per definitionem $S/J \xrightarrow{\sim} A$. Aus der

vollständigen Reduzibilität folgt dann $S^G/J^G \xrightarrow{\sim} (S/J)^G \xrightarrow{\sim} A^G$ und wir sind fertig. $\square$

Lemma 7.9.6.20. *Seien A ein Ring und $B \subset A$ ein Teilring. Ist die Inklusion $B \hookrightarrow A$ eine spaltende Einbettung von B-Rechtsmoduln, so gilt für jedes Linksideal $I \subset B$ die Formel $I = B \cap \langle AI \rangle$. Ist insbesondere A linksnoethersch, so auch B.*

7.9.6.21. Hier und im folgenden meint $\langle\ \rangle$ das Erzeugnis als abelsche Gruppe und AI die Menge der Produkte von einem Element von A mit einem Element von I und $\langle AI \rangle$ folgerichtig die von diesen Produkten erzeugte additive Untergruppe von A.

Beweis. Nach Annahme existiert eine Zerlegung $A = B \oplus C$ von A als B-Rechtsmodul. Sie impliziert unmittelbar eine Zerlegung $\langle AI \rangle = I \oplus \langle CI \rangle$, und diese Zerlegung hinwiederum impliziert unmittelbar die Hauptaussage des Lemmas. Der Nachsatz folgt aus der Charakterisierung noetherscher Moduln durch das Stagnieren aller aufsteigenden Folgen von Untermoduln. $\square$

7.9.6.22. Sei $G\backslash X$ eine affine Varietät über $k = \bar{k}$ mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven Gruppe. Nach dem Endlichkeitssatz von Hilbert 7.9.6.18 ist der Invariantenring $\mathcal{O}(X)^G$ ringendlich über k und wir können folglich eine affine Varietät $X /\!\!/_{\mathrm{a}} G$ erklären durch $X /\!\!/_{\mathrm{a}} G := \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^G)$ und einen Morphismus von X dorthin durch die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Max} \mathcal{O}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^G) \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r] & X /\!\!/_{\mathrm{a}} G \end{tikzcd}$$

Man nennt $X /\!\!/_{\mathrm{a}} G$ den **algebraischen Quotienten** von X nach der Operation von G und $X \to X /\!\!/_{\mathrm{a}} G$ den **Quotientenmorphismus**. Wir zeigen im folgenden Satz unter anderem, daß unser Quotientenmorphismus ein Bahnschlußmorphismus ist. Sobald das gezeigt ist, vereinfachen wir unsere Notation $X /\!\!/_{\mathrm{a}} G$ wieder zu $X /\!\!/ G$.

Satz 7.9.6.23 (**Algebraische Quotienten affiner Varietäten**). *Sei $G\backslash X$ eine affine Varietät mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe. So gilt:*

1. *Der Morphismus $\pi : X \to X /\!\!/_{\mathrm{a}} G$ ist konstant auf G-Bahnen und jeder Morphismus von X in eine weitere Varietät, der konstant ist auf G-Bahnen, faktorisiert in eindeutiger Weise über π;*

2. *Gegeben eine Familie G-stabiler abgeschlossener Teilmengen von X stimmt das Bild in $X /\!\!/_{\mathrm{a}} G$ ihres Schnitts überein mit dem Schnitt ihrer Bilder;*

3. *Gegeben eine G-stabile abgeschlossene Teilmenge $Z \mathrel{\underset{\mathrm{a}}{\subset}} X$ ist ihr Bild eine abgeschlossene Teilmenge $\pi(Z) \mathrel{\underset{\mathrm{a}}{\subset}} X /\!\!/_{\mathrm{a}} G$ und die offensichtliche Abbildung ist ein Isomorphismus $Z /\!\!/_{\mathrm{a}} G \xrightarrow{\sim} \pi(Z)$;*

4. *Der Morphismus $\pi : X \to X /\!\!/_{\mathrm{a}} G$ ist produktfest offenfinal und in jeder seiner Fasern liegt genau eine abgeschlossene G-Bahn. Insbesondere ist er ein Bahnschlußmorphismus und wir dürfen unsere Notation zu $X /\!\!/ G$ vereinfachen;*

5. *Gegeben eine offene Teilmenge $V \mathrel{\underset{\mathrm{o}}{\subset}} X /\!\!/ G$ ist V affin genau dann, wenn $\pi^{-1}(V)$ affin ist, und dann ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $\pi^{-1}(V) /\!\!/ G \xrightarrow{\sim} V$.*

Beweis. 3. Für eine G-stabile abgeschlossene Teilmenge $Z \subset X$ ist sicher auch ihr Verschwindungideal $\mathcal{I}(Z) \subset \mathcal{O}(X)$ ein G-stabiles Ideal, das den Invariantenring in einem Radikalideal $\mathcal{I}(Z)^G \subset \mathcal{O}(X)^G$ schneidet. Jedes Ideal im Invariantenring entsteht nun aber nach 7.9.6.20 durch Herunterschneiden mit einem Ideal von $\mathcal{O}(X)$, und insbesondere entsteht auch jedes maximale Ideal über $\mathcal{I}(Z)^G$ durch Herunterschneiden aus einem maximalen Ideal über $\mathcal{I}(Z)$, als da heißt, die simultane Nullstellenmenge von $\mathcal{I}(Z)^G$ ist genau $\pi(Z)$. Das zeigt, daß $\pi(Z)$ abgeschlossen ist, und liefert zusätzlich die Exaktheit der oberen Zeile im Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I}(Z)^G & \hookrightarrow & \mathcal{O}(X)^G & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(\pi(Z)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{I}(Z) & \hookrightarrow & \mathcal{O}(X) & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(Z) \end{array}$$

In diesem Diagramm meinen die beiden linken Vertikalen schlicht die Einbettungen der Invarianten, und weil unter unseren Voraussetzungen das Bilden der Invarianten exakt ist, muß auch die letzte Vertikale einen Isomorphismus auf die Invarianten $\mathcal{O}(\pi(Z)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(Z)^G$ induzieren, also einen Isomorphismus von Varietäten $Z /\!\!/_{\mathrm{a}} G \xrightarrow{\sim} \pi(Z)$.

2. Es reicht zu zeigen, daß für G-stabile Ideale von $\mathcal{O}(X)$ der Schnitt ihrer Summe mit dem Invariantenring übereinstimmt mit der Summe ihrer Schnitte, in Formeln

$$\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right) \cap \mathcal{O}(X)^G = \sum_{\lambda \in \Lambda} (I_\lambda \cap \mathcal{O}(X)^G)$$

Das gilt jedoch ganz allgemein für eine beliebige Familie von Unterdarstellungen einer vollständig reduziblen Darstellung oder noch allgemeiner für Untermoduln eines halbeinfachen Moduls, wenn man das Bilden der Invarianten verallgemeinert zum Bilden irgendeiner isotypischen Komponente.

4. Wenden wir 3 auf $Z = X$ an, so folgt die Surjektivität des Quotientenmorphismus. Weiter ist klar, daß unser Quotientenmorphismus auf Bahnen konstant ist. Ein Urbild ist in anderen Worten stets G-stabil, und eine Menge mit abgeschlossenem Urbild muß nach 3 selbst abgeschlossen sein. Somit trägt $X /\!\!/_{\mathrm{a}} G$ die Quotiententopologie. Es bleibt nur zu zeigen, daß Funktionen auf offenen Teilmengen von $X /\!\!/_{\mathrm{a}} G$ regulär sind genau dann, wenn sie unter Zurückholen auf X regulär werden. Für globale Funktionen ist das klar, denn für eine Funktion $f : X /\!\!/_{\mathrm{a}} G \to k$ mit $f \circ \pi \in \mathcal{O}(X)$ haben wir notwendig $f \circ \pi \in \mathcal{O}(X)^G$ und damit $f \in \mathcal{O}(X /\!\!/_{\mathrm{a}} G)$. Für Funktionen auf einer Basis der Topologie von $X /\!\!/_{\mathrm{a}} G$ folgt es aus $s^{-1}(\mathcal{O}(X)^G) \xrightarrow{\sim} (s^{-1}\mathcal{O}(X))^G$ für alle $s \in \mathcal{O}(X)^G$, was man aus $\ker(s\cdot) = \ker(s^2\cdot)$ oder auch aus 7.4.3.49 folgern mag. Damit ist klar, daß unser Morphismus eine Submersion ist. In jeder Faser liegt nun mindestens eine Bahn kleinstmöglicher Dimension, die notwendig abgeschlossen sein muß, da ja ihr Abschluß in derselben Faser enthalten ist und beim Bilden des Abschlusses nur Bahnen echt kleinerer Dimension hinzukommen können. Es kann aber auch nicht mehr als eine abgeschlossene Bahn in einer gegebenen Faser geben, da wir sonst einen Widerspruch zu 2 erhalten würden.

1. Wir wissen ja nach Teil 4, daß unser Quotientenmorphismus ein Bahnschlußmorphismus ist.

5. Hier bemerken wir zunächst, daß jeder Morphismus von affinen Varietäten affin ist, etwa nach 7.9.1.3. Also ist das Urbild jeder offenen affinen Untervarietät unter affin. Andererseits ist für $V \Subset X /\!\!/ G$ stets $\pi : \pi^{-1}(V) \twoheadrightarrow V$ ein Bahnschlußmorphismus, und ist $\pi^{-1}(V)$ affin, so ist zusätzlich auch $\pi^{-1}(V) \to \pi^{-1}(V) /\!\!/ G$ ein Bahnschlußmorphismus und folglich $V \cong \pi^{-1}(V) /\!\!/ G$ affin. $\square$

7.9.6.24. Sei G linear reduktiv. Jeder G-äquivariante Morphismus von affinen G-Varietäten $X \to Y$ induziert einen Morphismus $X /\!\!/ G \to Y /\!\!/ G$. Eine offene Einbettung muß dabei jedoch keineswegs eine offene Einbettung werden. Wir erhalten bereits ein Gegenbeispiel, wenn wir das Komplement einer Ursprungsgerade in die Ebene einbetten und jeweils die Operation der multiplikativen Gruppe durch Streckungen betrachten.

7.9.6.25. Sei $G \backslash\!\!\!\backslash X$ eine Varietät mit einer algebraischen Operation einer algebraischen Gruppe. Ich erinnere daran, daß wir die Punkte, deren Bahn die für Bahnen größtmögliche Dimension hat, die **regulären Punkte** genannt hatten, und daß nach 9.2.4.22 die regulären Punkte eine offene und G-stabile Teilmenge $X^{\mathrm{reg}} \Subset X$ bilden. Die regulären Punkte mit abgeschlossener Bahn nennen wir **absolut stabile Punkte**. Die Menge aller absolut stabilen Punkte notieren wir

$$X^{\mathrm{stab}}$$

Vorschau 7.9.6.26. Im Rahmen der „geometrischen Invariantentheorie“ 7.9.7.1 werden wir auch „relativ stabile Punkte“ betrachten, die in der Literatur meist einfach nur „stabile Punkte“ heißen und deren Menge wir X^{s} notieren. Diese Menge ebenso wie die Menge X^{ss} der „semistabilen Punkte“ hängen von von zusätzlichen Daten ab. Unsere drei Begriffe stehen dann zueinander in der Beziehung

$$X^{\mathrm{s}} = (X^{\mathrm{ss}})^{\mathrm{stab}}$$

Satz 7.9.6.27 (Bahnenvarietät der absolut stabilen Punkte, affiner Fall). *Sei $G\circlearrowright X$ eine affine Varietät mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe. So bilden die absolut stabilen Punkte eine offene Teilmenge $X^{\mathrm{stab}} \Subset X$ und der Rückzug des Bahnschlußmorphismus $X \twoheadrightarrow X/\!\!/G$ auf deren Bild ist ein Bahnenmorphismus*

$$X^{\mathrm{stab}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{stab}}/G$$

Beweis. Das Komplement $X\backslash X^{\mathrm{reg}}$ der Menge der regulären Punkte alias die Menge der nicht-regulären Punkte ist abgeschlossen und hat als G-stabile abgeschlossene Teilmenge nach 7.9.6.23 ein abgeschlossenes Bild in $X/\!\!/G$. Das Urbild dieses Bildes aber ist per definitionem genau die Menge aller nicht-stabilen Punkte, die damit auch abgeschlossen sein muß. In Formeln gilt mithin

$$X\backslash X^{\mathrm{stab}} = \pi^{-1}(\pi(X\backslash X^{\mathrm{reg}}))$$

und dann $\pi^{-1}(\pi(X^{\mathrm{stab}})) = X^{\mathrm{stab}}$. Nach 7.9.6.5 ist also auch $X^{\mathrm{stab}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{stab}}/G$ ein Bahnschlußmorphismus und dann als Bahnschlußmorphismus mit abgeschlossenen Fasern sogar ein Bahnenmorphismus. □

Korollar 7.9.6.28. *Sei $G\circlearrowright X$ eine beliebige Varietät mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe und affinem Bahnschlußmorphismus $\pi : X \twoheadrightarrow X/\!\!/G$. So gilt:*

1. *In jeder Faser von π liegt genau eine abgeschlossene Bahn;*
2. *Der Morphismus π ist produktfest offenfinal;*
3. *Das Bild jeder abgeschlossenen G-stabilen Teilmenge $Z \Subset X$ ist abgeschlossen und $\pi : Z \twoheadrightarrow \pi(Z)$ ist auch ein affiner Bahnschlußmorphismus;*
4. *Gegeben eine Familie G-stabiler abgeschlossener Teilmengen von X stimmt das Bild ihres Schnitts überein mit dem Schnitt ihrer Bilder.*

Beweis. Für jede affine offene Teilmenge $V \Subset X/\!\!/G$ ist auch ihr Urbild $\pi^{-1}(V)$ affin und der nach 7.9.6.5 induzierte Bahnschlußmorphismus $\pi : \pi^{-1}(V) \twoheadrightarrow V$ ist vom in 7.9.6.23 betrachteten Typus. □

Korollar 7.9.6.29 (Bahnenraum der absolut stabilen Punkte). *Sei $G\backslash X$ eine beliebige Varietät mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe und affinem Bahnschlußmorphismus $\pi : X \twoheadrightarrow X/\!\!/G$. So bilden die absolut stabilen Punkte eine offene G-stabile Teilmenge $X^{\mathrm{stab}} \Subset X$ und der Rückzug des Bahnschlußmorphismus $X \twoheadrightarrow X/\!\!/G$ auf deren Bild ist ein Bahnenmorphismus*

$$X^{\mathrm{stab}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{stab}}/G$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus 7.9.6.27, das wir ja für jede affine offene Teilmenge von $X/\!\!/G$ auf deren Urbild anwenden können. □

Satz* 7.9.6.30 (Bahnenvarietät der regulären Punkte). *Sei $G\backslash X$ eine irreduzible normale affine Varietät mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe und bezeichne $X^{\mathrm{reg}} \Subset X$ die Menge der G-regulären Punkte. Ist die offensichtliche Abbildung eine Bijektion $X^{\mathrm{reg}}/G \xrightarrow{\sim} X/\!\!/G$ und hat $X\backslash X^{\mathrm{reg}}$ in X eine Kodimension ≥ 2, so ist $X^{\mathrm{reg}} \to X/\!\!/G$ ein Bahnenmorphismus.*

Beispiel 7.9.6.31. Die Operation durch Konjugation von $G = \mathrm{GL}(n;k)$ auf $X = \mathrm{Mat}(n;k)$ hat alle in diesem Satz geforderten Eigenschaften.

Beweis. Bezeichne $\pi : X \to X/\!\!/G$ unseren algebraischen Quotienten alias Bahnschlußmorphismus und bezeichne $\tilde{\pi} : X^{\mathrm{reg}} \to X/\!\!/G$ unseren Bahnenmorphismus in spe. Nach unseren Annahmen sind alle Fasern von $\tilde{\pi}$ disjunkte Vereinigungen von höchstens $|G/G^\circ|$ irreduziblen Varietäten der immergleichen Dimension d. Gegeben $Z \Subset X/\!\!/G$ irreduzibel und eine irreduzible Komponente A von $\tilde{\pi}^{-1}(Z)$ hat also auch jede irreduzible Komponente jeder Faser von $A \to Z$ diese Dimension und mit generischer Flachheit 7.5.5.5 und den Dimensionseigenschaften flacher Morphismen 7.5.10.5 folgt

$$\mathrm{kdim}\, A = d + \mathrm{kdim}\, Z$$

Wir zeigen nun, daß $\tilde{\pi}$ als Abbildung von topologischen Räumen final ist. Dazu reicht es zu zeigen, daß das Bild jeder G-stabilen abgeschlossenen Teilmenge $Y \Subset X^{\mathrm{reg}}$ eine abgeschlossene Teilmenge $\tilde{\pi}(Y) \Subset X/\!\!/G$ ist. Wir dürfen dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gilt $Y = GY_1$ für eine irreduzible Komponente Y_1 von Y, so daß $Z := \overline{\tilde{\pi}(Y)}$ irreduzibel ist. Für jede irreduzible Komponente A von $\tilde{\pi}^{-1}(Z)$ gilt nun $\mathrm{kdim}\, A = d + \mathrm{kdim}\, Z$, und aus $Z \neq \tilde{\pi}(Y)$ folgte im Widerspruch dazu, daß es Komponenten geben müßte, die über echten abgeschlossenen Teilmengen von Z liegen und damit eine echt kleinere Dimension haben müßten. Mithin ist $\tilde{\pi}$ eine finale Abbildung von topologischen Räumen. Für $V \Subset X/\!\!/G$ affin ist nun $\pi^{-1}(V) \Subset X$ affin und nach 7.5.9.20 und

Annahme ist die Restriktion eine Bijektion $\mathcal{O}(\pi^{-1}(V)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\tilde{\pi}^{-1}(V))$. Also induziert die Restriktion auch eine Bijektion auf G-Invarianten und wir folgern, daß $\tilde{\pi}$ auch ein finaler Morphismus von k-geringten Räumen ist. $\square$

7.9.6.32. Ich hätte gerne einen Studenten, der mir den vorhergehenden und den folgenden Abschnitt auf den Fall einer geometrisch reduktiven affinen algebraischen Gruppe umschreibt. Nach Haboush haben alle reduktiven algebraischen Gruppen diese Eigenschaft auch in positiver Charakteristik, und Argumente von Nagata zeigen dann die endliche Erzeugbarkeit des Invariantenrings und dergleichen, vergleiche auch die Appendix von Mumford-Fogarty.

Übungen

Übung 7.9.6.33. Gegeben eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V einer linear reduktiven Gruppe G mit Bahnschlußmorphismus $\pi : V \twoheadrightarrow V/\!\!/G$ heißt $\pi^{-1}(\pi(0)) \trianglelefteq V$ die **Nilfaser** oder auch der **Nilkegel** oder englisch **nullcone**. Man zeige, daß er auch beschrieben werden kann als die simultane Nullstellenmenge aller Invarianten positiven Grades. Mithilfe von 25.1.3.3 zeige man weiter, daß der Nilkegel im Raum der quadratischen Matrizen für die Operation der allgemeinen linearen Gruppe durch Konjugation genau der Kegel der nilpotenten Matrizen ist.

Ergänzung 7.9.6.34. Gegeben eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V einer linear reduktiven Gruppe G mit Bahnschlußmorphismus $\pi : V \twoheadrightarrow V/\!\!/G$ induziert nach die Einbettung der Nilfaser nach V einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(V)/\sqrt{\langle \mathcal{O}(V)^G_{>0} \rangle} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\pi^{-1}(\pi(0)))$$

Den nicht notwendig reduzierten Quotienten $\mathcal{O}(V)/\langle \mathcal{O}(V)^G_{>0} \rangle$ nennen wir die **Nilfaseralgebra**. Ihr Spektrum mit seiner Struktur als lokal gekringter Raum nach **??** ist die schematheoretische Nilfaser im Sinne von **??**.

7.9.7 Geometrische Invariantentheorie

7.9.7.1. Üblicherweise geht man in der geometrischen Invariantentheorie von einer Varietät X mit einer Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe G aus und wählt zunächst einmal eine „Linearisierung“. Dem entspricht bei uns im folgenden die Wahl eines möglichen „Kegels“ C über X, den wir der Einfachkeit halber erst einmal affin annehmen. Das Ziel ist die Konstruktion einer offenen G-stabilen Teilmenge

$$X^{\mathrm{ss}} \Subset X$$

von sogenannten „semistabilen“ Punkten derart, daß $X^{\mathrm{ss}} \Subset X$ einen affinen Bahnschlußmorphismus $X^{\mathrm{ss}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{ss}}/\!\!/G$ hat mit den in 7.9.6.28 und 7.9.6.29 gezeigten Konsequenzen. Insbesondere ist nach 7.9.6.29 für die G-stabile offene Teilmenge

$$X^{\mathrm{s}} := (X^{\mathrm{ss}})^{\mathrm{stab}}$$

von „relativ stabilen“ Punkten der Bahnenraum eine Varietät. Die offene Teilmenge $X^{\mathrm{ss}} \Subset X$ und a forteriori X^{s} hängen jedoch, auch wenn das in der Notation nicht zum Ausdruck kommt, von C ab. Die im folgenden gegebene Konstruktion heißt der „Geometrische-Invarianten-Theorie-Quotient“ oder kurz **GIT-Quotient**.

7.9.7.2. Wir erinnern für eine kontrahierende $k^\times$-Operation auf einer affinen k-Varietät X und $X^\circ \Subset X$ das Komplement der Menge der Fixpunkte aus 7.9.5.3, daß der Quotient $X^\circ/k^\times$ mit seiner finalen Struktur als k-geringter Raum eine separierte k-Varietät ist.

7.9.7.3 (**Die allgemeine Quotientenkonstruktion**). Sei C eine affine Varietät mit einer Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe G und einer damit kommutierenden kontrahierenden $k^\times$-Operation. In dieser Situation konstruieren wir von der obersten Zeile beginnend ein kommutatives Diagramm von separierten Varietäten

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, equal] & C \arrow[r, two heads, "\pi"] & C/\!\!/G \\
C^\circ \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads, "\kappa"] & \pi^{-1}(C/\!\!/G)^\circ \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, two heads, "\tilde{\kappa}"] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & (C/\!\!/G)^\circ \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads, "\beta"] \\
C^\circ/k^\times \arrow[d, equal] & \pi^{-1}(C/\!\!/G)^\circ/k^\times \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & (C/\!\!/G)^\circ/k^\times \arrow[d, equal] \\
X & X^{\mathrm{ss}} \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads, "\alpha"] & X^{\mathrm{ss}}/\!\!/G \\
 & X^{\mathrm{s}} \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & X^{\mathrm{s}}/G \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Im folgenden will ich diese Konstruktion diskutieren. Der obere Index $\circ$ meint in unserem Diagramm stets das Komplement der Fixpunktmenge einer Wirkung von $k^\times$. Alle Inklusionspfeile in unserem Diagramm sind offene Einbettungen. Alle Pfeile nach rechts in unserem Diagramm sind affine Bahnschlußmorphismen und damit insbesondere offenfinal. Ich beginne damit, den Aufbau unseres Diagramms zu erklären.

1. Der Morphismus $\tilde{\pi}$ entsteht durch Rückzug des $k^\times$-äquivarianten affinen Bahnschlußmorphismus π für die G-Operation nach 7.9.6.23. Nach 7.9.6.5

ist dann $\tilde{\pi}$ auch ein $k^\times$-äquivarianter affiner Bahnschlußmorphismus für die G-Operation.

2. Die Morphismen κ und β sind affine Bahnenmorphismen auf dem Komplement der Fixpunktmenge einer kontrahierenden $k^\times$-Operation und die zugehörigen Bahnenvarietäten sind separiert, alles nach unseren Erkenntnissen aus 7.9.5.3. In der Notation aus 7.9.5.5 haben wir also einen ausgezeichneten Isomorphismus $X^{\mathrm{ss}}/\!\!/G \xrightarrow{\sim} \mathrm{MProj}(\mathcal{O}(C)^G)$. Der Morphismus κ ist nach Konstruktion außerdem G-äquivariant. Der Morphismus $\tilde{\kappa}$ erbt von κ die Eigenschaft, ein G-äquivarianter affiner Bahnenmorphismus für die $k^\times$-Operation zu sein.

3. Der Morphismus α wird nun konstruiert mithilfe der universellen Eigenschaft des Bahnenmorphismus $\tilde{\kappa}$. Wir zeigen, daß er ein offenfinaler Morphismus k-geringter Räume ist. Um das zu einzusehen, bezeichnen wir seinen Definitionsbereich mit X^{ss} und nennen dessen Elemente **semistabile Punkte**. Für $U \Subset X^{\mathrm{ss}}$ offen ist ist $\tilde{\kappa}^{-1}(U)$ offen, also $\tilde{\pi}(\tilde{\kappa}^{-1}(U))$ offen, also $\beta\tilde{\pi}(\tilde{\kappa}^{-1}(U)) = \alpha(U)$ offen. Da α auch surjektiv ist, ist es mithin offenfinal als Abbildung von topologischen Räumen. Sei weiter W offen im Wertebereich von α und $f : W \to k$ eine Funktion. Ist $f \circ \alpha$ regulär auf $\alpha^{-1}(W)$, so ist $f \circ \alpha\tilde{\kappa} = f \circ \beta\tilde{\pi}$ regulär und $(G \times k^\times)$-invariant auf $\tilde{\kappa}^{-1}(\alpha^{-1}(W))$, also ist $f \circ \beta$ regulär auf $\beta^{-1}(W)$ und $k^\times$-invariant, also ist f regulär. Mithin ist α offenfinal als Morphismus k-geringter Räume.

4. Wir zeigen, daß der Morphismus α ein Bahnschlußmorphismus ist, ja daß in jeder seiner Fasern genau eine in X^{ss} abgeschlossene G-Bahn liegt. Daß mindestens eine abgeschlossene Bahn in jeder Faser liegt, ist nach 9.2.3.8 eh klar. Gäbe es zwei abgeschlossene Bahnen, so fänden wir jedoch auch zwei abgeschlossene Bahnen in mindestens einer Faser von $\tilde{\pi}$ und dann auch in mindestens einer Faser von π im Widerspruch zu 7.9.6.23.

5. Der Morphismus α ist affin. In der Tat, gegeben W offen affin in seinem Wertebereich ist $\tilde{\kappa}^{-1}(\alpha^{-1}(W)) = \tilde{\pi}^{-1}(\beta^{-1}(W))$ affin aufgrund der Affinität von π und von β, letztere nach 7.9.5.4, und damit ist auch $\alpha^{-1}(W)$ affin wieder nach 7.9.5.4.

6. Wir wissen nun, daß $\alpha : X^{\mathrm{ss}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{ss}}/\!\!/G$ ein affiner Bahnschlußmorphismus ist. Damit ergibt sich die unterste Zeile unseres Diagramms aus unseren allgemeinen Überlegungen in 7.9.6.29. Die offene Teilmenge der stabilen Punkte $X^{\mathrm{s}} := (X^{\mathrm{ss}})^{\mathrm{stab}} \Subset X^{\mathrm{ss}}$ besteht also aus allen regulären Punkten $x \in X^{\mathrm{reg}} \cap X^{\mathrm{ss}}$ mit $Gx \not\Subset X^{\mathrm{ss}}$. Auch sie hängt von X^{ss} und damit von C ab. Wir nennen die Punkte von X^{s} die **relativ stabilen Punkte** von X.

Es kann passieren, daß ein regulärer Punkt x bei einer anderen Wahl von C zwar semistabil bleibt, aber nicht relativ stabil.

7. Die Konstruktion liefert mit 7.9.5.3 zusätzlich einen eigentlichen Morphismus

$$X^{\mathrm{ss}} /\!\!/ G = (C /\!\!/ G)^\circ / k^\times \to 0(C /\!\!/ G) = \mathrm{Max}(\mathcal{O}(C)^G \cap \mathcal{O}(C)^0)$$

Kontrahiert die $k^\times$-Operation bereits den Kegel C zu einem Punkt, so haben wir insbesondere $\mathcal{O}(C)^0 = k$ und $X^{\mathrm{ss}} /\!\!/ G$ ist eigentlich.

Beispiel 7.9.7.4 (**Die Quotientenkonstruktion zu einer Darstellung**). Gehen wir bei der allgemeinen Quotientenkonstruktion 7.9.7.3 speziell von einer endlichdimensionalen algebraischen Darstellung $C = V$ einer linear reduktiven algebraischen Gruppe G aus und nehmen als unsere kontrahierende Operation von $k^\times$ die Operation der Skalare auf dem Vektorraum V, so spezialisiert der entsprechende Teil dieses Diagramms zu einem Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, equal] & V \arrow[r, two heads, "\pi"] & V /\!\!/ G \\
V \backslash 0 \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads, "\kappa"] & V \backslash \pi^{-1}(\bar{0}) \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, two heads, "\tilde{\kappa}"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & (V /\!\!/ G) \backslash \bar{0} \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads, "\beta"] \\
\mathbb{P}(V) & (V \backslash \pi^{-1}(\bar{0}))/k^\times \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"] & ((V /\!\!/ G) \backslash \bar{0})/k^\times
\end{tikzcd}$$

Mit $\bar{0}$ ist dabei das Bild des Ursprungs $\bar{0} := \pi(0)$ gemeint. Sein Urbild $\pi^{-1}(\bar{0})$ heißt die **Nullfaser** und besteht aus allen Punkten $v \in V$, deren Bahnabschluß den Ursprung enthält, in Formeln $0 \in \overline{Gv}$.

Beispiel 7.9.7.5 (**Die Quotientenkonstruktion zu einem Gruppencharakter**). Sei $G \backslash X$ eine affine Varietät mit einer Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe und sei $\theta : G \to k^\times$ ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen. Wir können unsere allgemeine Quotientenkonstruktion 7.9.7.3 auf $C := X \times k$ mit der G-Operation $g(x, \lambda) = (gx, \theta(g)\lambda)$ und der damit kommutierenden kontrahierenden $k^\times$-Operation durch Multiplikation auf dem zweiten Faktor anwenden. Dann ergibt sich $\mathcal{O}(C) = \mathcal{O}(X) \otimes k[T]$ und

$$\mathcal{O}(C)^G = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}(X)^{G, n\theta} \boxtimes T^n$$

für $\mathcal{O}(X)^{G,n\theta} := \{f \in \mathcal{O}(X) \mid f(g^{-1}x) = \theta(g)^n f(x) \ \forall x \in X, g \in G\}$. Setzen wir $X^{\theta\text{-ss}} := \{x \in X \mid \exists n > 0, f \in \mathcal{O}(X)^{G,n\theta} \text{ mit } f(x) \neq 0\}$, so spezialisiert

der entsprechende Teil dieses Diagramms zu einem Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
X \times k \arrow[r, equal] & C \arrow[r, two heads, "\pi"] & C /\!\!/ G \\
X \times k^\times \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads, "\kappa"] & X^{\theta\text{-ss}} \times k^\times \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, two heads, "\tilde{\kappa}"] \arrow[ur, phantom, "\urcorner"] & (C /\!\!/ G)^\circ \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads, "\beta"] \\
X & X^{\theta\text{-ss}} \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[ul, phantom, "\lrcorner"] & X /\!\!/^\theta G
\end{tikzcd}$$

Unten links haben wir dabei eine neue Notation eingeführt, diese Varietät $X /\!\!/^\theta G$ ist sowohl die Bahnschlußvarietät von $G \backslash\!\!\searrow X^{\theta\text{-ss}}$ unter dem horizontalen Morphismus α als auch die Bahnenvarietät nach $k^\times$ unter dem vertikalen Morphismus β. Die Menge $X^{\theta\text{-ss}} \mathrel{\circledcirc} X$ heißt die Menge der **θ-semistabilen Punkte**. Gegeben $f \in \mathcal{O}(X)^{G,n\theta}$ mit $n > 0$ ist $X_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ das Urbild unter α einer offenen Teilmenge. Andererseits ist X_f affin und der offensichtliche Morphismus ist folglich nach 7.9.6.5 eine offene Einbettung $X_f /\!\!/ G \hookrightarrow X /\!\!/^\theta G$.

Beispiel 7.9.7.6 (**Die Quotientenkonstruktion für $k^\times \backslash\!\!\searrow k^{n+1}$**). Spezialisieren wir das vorhergehende Beispiel zu $X = k^{n+1}$ mit der offensichtlichen Operation von $G = k^\times$ und betrachten den Charakter $\theta : k^\times \to k^\times$, $t \mapsto t^m$, so ergibt sich mit unserer Notation var für die finale einpunktige Varietät

$$X /\!\!/^\theta G = \begin{cases} \mathbb{P}^n k & \text{für } m < 0; \\ \mathrm{var} & \text{für } m = 0; \\ \emptyset & \text{für } m > 0. \end{cases}$$

Vorschau 7.9.7.7 (**Quotienten projektiver Varietäten**). Seien G linear reduktiv, X eine projektive G-Varietät und $L \to X$ ein G-äquivariantes amples Geradenbündel auf X. Man erkläre die Menge X^{ss} der **semistabilen Punkte von X in Bezug auf** L durch die Vorschrift

$$X^{\mathrm{ss}} = X^{\mathrm{ss}}(L) := \left\{ x \in X \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Es gibt einen } G\text{-invarianten globalen Schnitt} \\ s \text{ einer Tensorpotenz } L^{\otimes n} \text{ von } L \text{ für } n > 0, \text{ der} \\ \text{bei } x \text{ nicht verschwindet, in Formeln } s(x) \neq 0. \end{array} \right\}$$

So ist X^{ss} eine offene G-stabile Teilmenge von X und ihr Bahnschlußraum $X^{\mathrm{ss}} /\!\!/ G$ ist eine projektive Varietät und $X^{\mathrm{ss}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{ss}} /\!\!/ G$ ist ein affiner Morphismus. Erklären wir schließlich die Menge $X^{\mathrm{s}} = X^{\mathrm{s}}(L) \subset X^{\mathrm{ss}}(L)$ der **stabilen Punkte** als die Teilmenge aller Punkte $x \in X^{\mathrm{ss}}$ mit endlicher Isotropiegruppe G_x, deren G-Bahn in X^{ss} abgeschlossen ist, so ist X^{s} offen mit $X^{\mathrm{s}} = \alpha^{-1}(\alpha(X^{\mathrm{s}}))$ und unser Bahnschlußmorphismus induziert einen Bahnenmorphismus

$$\alpha : X^{\mathrm{s}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{s}}/G$$

Das alles ist nur ein Spezialfall unserer Grundkonstruktion 7.9.7.3, ausgedrückt in einer etwas feineren Sprache. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir nach **??** nämlich L sehr ampel annehmen. Der Raum V der globalen Schnitte von L ist dann nach **??** endlichdimensional und wir erhalten eine kanonische abgeschlossene G-äquivariante Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{P}V$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen also $X \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ \mathbb{P}V$ annehmen. Der Kegel über X im Sinne von 7.6.5.16 ist dann eine abgeschlossene Teilmenge $C = C(X) \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ V$ mit einer algebraischen Operation von G und einer damit kommutierenden kontrahierenden Operation von $k^\times$ so daß die offensichliche Abbildung einen G-äquivarianten Isomorphismus $C^\circ/k^\times \xrightarrow{\sim} X$ liefert, für C° das Komplement der Menge der $k^\times$-Fixpunkte. Schließlich besteht $\pi^{-1}(C/\!\!/G)^\circ$ nach Konstruktion genau aus allen Punkten von C, auf denen irgendeine G-invariante Funktion echt positiven Grades nicht verschwindet. Übersetzen wir diese Bedingung zurück in die Situation des Satzes, so ergibt sich die dort für X^{ss} gegebene Beschreibung. Weiter wird in der Situation unseres Satzes C von $k^\times$ sogar auf einen einzigen Punkt kontrahiert und $\mathcal{O}(C)$ ist folglich nichtnegativ graduiert mit nur Skalaren im Grad Null. Dasselbe folgt für $\mathcal{O}(C)^G = \mathcal{O}(C/\!\!/G)$ und zeigt, daß auch $C/\!\!/G$ von $k^\times$ auf einen einzigen Punkt kontrahiert wird. Dann aber ist $(C/\!\!/G)^\circ/k^\times = X^{\text{ss}}/\!\!/G$ nach 7.9.5.6 vollständig und, für letztere Aussage ebenfalls nach 7.9.5.6 aber noch ohne Beweis, sogar projektiv.

Ergänzung 7.9.7.8. Verkleben wir bei der Riemann'schen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1k$ mit ihrer offensichtlichen $k^\times$-Operation die beiden Fixpunkte Nord- und Südpol im Sinne von 7.6.4.25, so erhalten wir nach 7.6.4.24 oder expliziter Rechnung wieder eine $k^\times$-Varietät Z. Ist V eine algebraische Darstellung positiver endlicher Dimension von $k^\times$, so muß jeder $k^\times$-äquivariante Morpismus $Z \to \mathbb{P}V$ konstant sein, denn jede abgeschlossene $k^\times$-invariante Teilmenge $Y \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ \mathbb{P}V$ positiver Dimension besitzt nach 9.4.7.13 mindestens zwei $k^\times$-Fixpunkte. Weiter kann auch Z offensichtlich nicht durch offene affine unter $k^\times$ invariante Teilmengen überdeckt werden.

Vorschau 7.9.7.9. Das tautologische Bündel $\mathcal{O}(1)$ auf $\mathbb{P}^1k$ ist nicht äquivariant für $\mathrm{PSL}(2;k)$, sondern nur für $\mathrm{SL}(2;k)$. Es ist also in der Weise unkanonisch, daß es nicht gelingen kann, jeder Varietät X, die zu $\mathbb{P}^1k$ isomorph ist, ein Geradenbündel $\mathcal{L}_X$ zuzuordnen und jedem Isomorphismus $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ derartiger Varietäten einen Isomorphismus $i_f : \mathcal{L}_X \xrightarrow{\sim} f^*\mathcal{L}_Y$ derart, daß die offensichtlichen Verträglichkeiten erfüllt sind.

7.10 Danksagung

Bei der Formulierung des Beweises der Faktorialität von Potenzreihenringen war mir ein Aufschrieb von Marcin Mazur, den ich im Netz gefunden habe, eine gute Hilfe. Der Beweis der Faktorialität von regulären lokalen Kringen folgt Shafarevitch [Sha13], der hinwiederum Mumford [Mum95] folgt. Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich David Nies, Stefan Matting, Manuel Blickle, Friedrich Knop (7.5.5.3), Ivan Zaccanelli, . . .

Kapitel 8

Nichtkommutative Algebra und Symmetrie

Inhalt

8.1 Darstellungen und Gruppenringe 1225

8.1.1 Darstellungen 1225

8.1.2 Darstellungen als Moduln über dem Gruppenring . 1232

8.2 Moduln über Mengen 1238

8.2.1 Begrifflichkeit der Mengenmoduln 1238

8.2.2 Einfache Moduln und Kompositionsreihen 1240

8.2.3 Halbeinfache Moduln 1245

8.2.4 Halbeinfachkeit und externes Tensorieren 1248

8.2.5 Mengenmoduln und Körpererweiterungen 1252

8.3 Moduln über Ringen 1253

8.3.1 Einfache Moduln über Ringen 1253

8.3.2 Endomorphismen einfacher Moduln 1254

8.3.3 Dichtesatz und Anwendungen 1256

8.3.4 Moduln über Tensorproduktalgebren 1258

8.3.5 Halbeinfache Ringe 1260

8.3.6 Spurkriterium für Halbeinfachkeit* 1264

8.3.7 Erzeugende und Relationen für Ringalgebren** . . 1269

8.3.8 Tensorkalkül für Darstellungen* 1271

8.3.9 Vertwistete Monoidringe* 1273

8.4 Darstellungstheorie endlicher Gruppen 1276
8.4.1 Halbeinfachkeit von Gruppenringen 1276
8.4.2 Gruppenringe endlicher Gruppen 1279
8.4.3 Orthogonalitätsrelationen 1285
8.4.4 Charaktere und algebraische Zahlen* 1290
8.4.5 Matrixkoeffizienten und isotypische Komponenten* 1293
8.4.6 Ergänzungen zu Charakteren* 1296
8.5 Darstellungen der symmetrischen Gruppen 1298
8.5.1 Einfache Darstellungen und Young-Diagramme . . 1298
8.5.2 Der Robinson-Schensted-Algorithmus 1310
8.5.3 Berechnung der Charaktere 1310
8.5.4 Jucys-Murphy-Elemente 1312
8.6 Verschiedene weiterführende Resultate 1314
8.6.1 Reeller, komplexer und quaternionaler Typ 1314
8.6.2 Invariante Bilinearformen auf Darstellungen 1318
8.6.3 Induktion und Koinduktion für Monoide 1323
8.6.4 Clifford-Theorie 1327
8.6.5 Darstellungen endlicher Heisenberg-Gruppen* . . . 1329
8.7 Abelsche Kategorien 1331
8.7.1 Projektive Decken 1331
8.7.2 Zerlegungen in unzerlegbare Objekte 1337
8.7.3 Blockzerlegung 1342
8.7.4 Grothendieck-Gruppen 1342
8.7.5 Morita-Äquivalenz 1344
8.7.6 Darstellungen von Köchern* 1346
8.7.7 Verschiedenes 1353
8.8 Danksagung 1354

8.1 Darstellungen und Gruppenringe

8.1.1 Darstellungen

Definition 8.1.1.1. Eine **Darstellung einer Gruppe** G **über einem Körper** k ist ein Paar (V, ρ) bestehend aus einem k-Vektorraum V und einem Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

8.1.1.2. Allgemeiner versteht man unter einer **Darstellung eines Monoids** G **über einem Ring** k ein Paar (V, ρ) bestehend aus einem k-Modul V und einem Monoidhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{End}_k(V)$.

8.1.1.3 (**Notationen**). Oft bezeichnen wir eine Darstellung abkürzend mit demselben Symbol wie den zugrundeliegenden Vektorraum oder Modul. Gegeben eine Darstellung V eines Monoids G bezeichnet dann ρ_V den zugehörigen Monoidhomomorphismus $\rho_V : G \to \mathrm{End}(V)$.

8.1.1.4. Ist unser Monoid G eine Gruppe, so landet jeder Monoidhomomorphismus $\rho_V : G \to \mathrm{End}(V)$ in der Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ der invertierbaren Elemente des Monoids der Endomorphismen von V und ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$. Eine Darstellung einer Gruppe „als Monoid“ ist also dasselbe wie eine Darstellung einer Gruppe „als Gruppe“.

8.1.1.5 (**Herkunft der Terminologie**). Im Fall des Vektorraums $V = k^n$ liefert lineare Algebra einen Ringisomorphismus $\mathrm{End}_k(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}(n; k)$. Ist unsere Darstellung $\rho : G \to \mathrm{End}_k(V)$ dann auch noch injektiv, so „stellt ρ die abstrakte Gruppe G dar als eine konkrete Gruppe von Matrizen“, daher die Bezeichnung als „Darstellung“. Zum Beispiel könnte die zweielementige Gruppe dargestellt werden, indem man ihr nichttriviales Element als Punktspiegelung auf der Ebene operieren läßt, oder als Spiegelung an einer Achse in der Ebene, oder als Punktspiegelung auf dem Raum, oder als Spiegelung an einer Ebene im Raum, oder auch als Drehung mit dem Winkel $180°$ um eine Achse. Das Symbol ρ ist ein „rho“, das Analogon für unser „r“ im griechischen Alphabet. Es steht für „representation“.

8.1.1.6 (**Geschichtliche Anmerkung**). Die Theorie der Darstellungen endlicher Gruppen durch komplexe Matrizen wurde parallel von Theodor Molien in Estland (April 1897), Georg Frobenius in Berlin (November 1897) und William Burnside in Greenwich (Januar 1898) entwickelt. Die wechselseitigen Beziehungen zwischen diesen Autoren wurden von Thomas Hawkins untersucht. Er kam zu dem Schluß, daß die beiden erstgenannten Autoren völlig unabhängig voneinander arbeiteten und daß Burnside's Arbeit sich auf noch frühere Arbeiten von Molien und Frobenius stützt.

8.1.1.7. Gegeben G ein Monoid und k ein Ring und V ein k-Modul induziert das Exponentialgesetz $\mathrm{Ens}(G, \mathrm{Ens}(V, V)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(G \times V, V)$ eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Darstellungen} \\ G \to \mathrm{End}(V) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} G\text{-Operationen } G \times V \to V \\ \text{durch } k\text{-lineare Abbildungen} \end{array} \right\}$$

Hierbei verstehen wir unter einer „G-Operation durch k-lineare Abbildungen“ eine G-Operation $G \times V \to V$ mit der Eigenschaft, daß gilt $g(v + w) = gv + gw$ und $g(\lambda v) = \lambda(gv) \quad \forall g \in G, \lambda \in k$ und $v, w \in V$.

Beispiel 8.1.1.8. Jeder Vektorraum V wird eine Darstellung seiner Automorphismengruppe $G = \mathrm{GL}(V)$ vermittels $\rho = \mathrm{id}$. Diese Darstellung heißt die **Standarddarstellung von** $\mathrm{GL}(V)$.

Beispiel 8.1.1.9. Gegeben ein Monoidhomomorphismus $\varphi : H \to G$ können wir jede Darstellung V von G zurückziehen zu einer Darstellung $\mathrm{res}_G^H V$ von H, indem wir von ρ_V zu $\rho_V \circ \varphi$ übergehen.

Beispiel 8.1.1.10. Sei k ein Ring. Jeder k-Modul V wird eine Darstellung eines beliebigen Monoids G vermittels der **trivialen Operation** $\rho(g) = \mathrm{id}_V \ \forall g \in G$. Der Modul $V = k$ mit der trivialen Operation heißt die **Einsdarstellung**.

Beispiel 8.1.1.11. Ist K/k eine Körpererweiterung, so ist K eine Darstellung über k der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/k)$.

Beispiel 8.1.1.12. Ist $G \times X \to X$ eine Operation eines Monoids G auf einer Menge X und k ein Ring, so wird der freie k-Modul kX über X mit der linear fortgesetzten Operation eine Darstellung des Monoids G über k. Darstellungen dieser Bauart nennt man im Fall einer Gruppe G **Permutationsdarstellungen**. Ebenso wird der Funktionenraum $\mathrm{Ens}(X, k)$ mit der Operation „durch Vorschalten“ eine Darstellung des opponierten Monoids G^{opp}.

Beispiel 8.1.1.13. Eine Darstellung (V, ρ) des Monoids $\mathbb{N}$ anzugeben bedeutet nach der universellen Eigenschaft von $(\mathbb{N}, 1)$ als „freies Monoid über der einelementigen Menge“ nichts anderes, als einen Endomorphismus $A \in \mathrm{End}(V)$ eines Moduls V anzugeben, nämlich dem Endomorphismus $A = \rho(1)$. Eine Darstellung (V, ρ) der Gruppe $\mathbb{Z}$ anzugeben bedeutet nach der universellen Eigenschaft von $(\mathbb{Z}, 1)$ als „freie Gruppe über der einelementigen Menge“ nichts anderes, als einen Automorphismus $A \in \mathrm{GL}(V)$ eines Moduls V anzugeben, nämlich den Automorphismus $A = \rho(1)$.

Beispiel 8.1.1.14 (**Darstellungen der zweielementigen Gruppe**). Sei ein Körper k gegeben. Wir untersuchen die endlichdimensionalen Darstellungen der Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ über k. Eine solche Darstellung (V, ρ) anzugeben bedeutet nach der universellen Eigenschaft von $\mathbb{Z}$ und der universellen Eigenschaft des Quotienten nichts anderes, als einen Automorphismus $A \in \mathrm{GL}(V)$ eines k-Vektorraums V anzugeben mit $A^2 = \mathrm{id}_V$, nämlich den Automorphismus $A = \rho(1)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

$\operatorname{char} k \neq 2$: In diesem Fall ist V die direkte Summe $V = V^+ \oplus V^-$ der Eigenräume von A zu den Eigenwerten ± 1, für alle $v \in V$ gilt nämlich

$$v = \frac{1}{2}(v + Av) + \frac{1}{2}(v - Av)$$

$\operatorname{char} k = 2$: In diesem Fall zerfällt das charakteristische Polynom von A bereits über k und hat nur den Eigenwert 1. In einer geeigneten Basis von V hat also A eine Matrix in Jordan'scher Normalform. Aus $A^2 = \mathrm{id}_V$ folgt dann, daß hier nur Jordanblöcke der Größen eins und zwei möglich sind.

Um die Analoga dieser Erkenntnisse für eine beliebige Gruppe, ja ein beliebiges Monoid G formulieren zu können, bauen wir zunächst unseren Begriffsapparat weiter aus.

Definition 8.1.1.15. Seien V, W Darstellungen eines Monoids G über einem festen Ring k. Ein **Homomorphismus von Darstellungen** ist eine k-lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(gv) = gf(v)$ für alle $v \in V$, $g \in G$. Wir notieren die Gruppe aller solchen Homomorphismen

$$\mathrm{Hom}_{k,G}(V, W)$$

Ein **Isomorphismus von Darstellungen** ist ein bijektiver Homomorphismus. Gibt es einen Isomorphismus zwischen zwei Darstellungen V und W, so schreiben wir auch $V \cong W$ und sagen, die Darstellungen V und W seien **isomorph**.

Ergänzung 8.1.1.16. Steht der Formalismus der Kategorientheorie zur Verfügung, so kann man das alles auch sehr viel effizienter sagen: Die Kategorie der Darstellungen eines Monoids G über einem Ring k ist die Kategorie

$$\mathrm{Cat}([G], \mathrm{Mod}_k)$$

aller Funktoren der Einobjektkategorie zu G in die Kategorie der k-Moduln.

Definition 8.1.1.17. Gegeben Darstellungen V, W eines Monoids G über einem Ring k definieren wir ihre **direkte Summe** als den Modul $V \oplus W$ mit der Operation $g(v, w) = (gv, gw)$. Ähnlich definieren wir auch direkte Summen von endlich oder sogar unendlich vielen Darstellungen. Die direkte Summe von n Kopien einer Darstellung V kürzen wir ab mit V^n oder ausführlicher $V^{\oplus n}$. Für den Fall $n = 0$ vereinbaren wir $V^0 = 0$.

Beispiel 8.1.1.18. Sei wieder k ein Körper. In unserer neuen Terminologie können wir die obigen Erkenntnisse wie folgt zusammenfassen:

$\operatorname{char} k \neq 2:$ Bezeichnet k_+ beziehungsweise k_- die Einsdarstellung beziehungsweise die nichttriviale eindimensionale Darstellung der Gruppe $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, so ist jede endlichdimensionale Darstellung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ über k isomorph zu genau einer Darstellung der Gestalt $k_+^n \oplus k_-^m$ für $n, m \in \mathbb{N}$.

$\operatorname{char} k = 2:$ Bezeichnet k beziehungsweise P die Einsdarstellung beziehungsweise eine zweidimensionale Darstellung mit nichttrivialer Operation von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, bei der also das nichtneutrale Element durch einen Jordanblock der Größe zwei mit Eigenwert Eins operiert, so ist jede endlichdimensionale Darstellung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ über k isomorph zu genau einer Darstellung der Gestalt $k^n \oplus P^m$ für $n, m \in \mathbb{N}$.

Von den in 8.1.1.5 diskutierten Fällen wäre in dieser Notation die Punktspiegelung auf der Ebene $\mathbb{R}_-^2$, die Spiegelung an einer Achse $\mathbb{R}_+ \oplus \mathbb{R}_-$, die Punktspiegelung im Raum $\mathbb{R}_-^3$, die Spiegelung an einer Ebene $\mathbb{R}_+^2 \oplus \mathbb{R}_-$, und die Drehung mit dem Winkel $180°$ um eine Achse $\mathbb{R}_+ \oplus \mathbb{R}_-^2$.

Vorschau 8.1.1.19. In 8.1.2.10 diskutieren wir die Klassifikation aller Darstellungen der zweielementigen Gruppe über $\mathbb{Z}$, die als $\mathbb{Z}$-Moduln frei und endlich erzeugt sind. Sie zeigt, daß die Situation schnell komplizierter wird, wenn wir nicht mehr über Körpern arbeiten.

8.1.1.20. Wir wollen nun ähnliche Aussagen auch für allgemeinere Monoide formulieren und bauen dazu unseren Begriffsapparat noch weiter aus.

Definition 8.1.1.21. Seien G ein Monoid und k ein Ring.

1. Eine Teilmenge $W \subset V$ einer Darstellung V von G über k heißt eine **Unterdarstellung**, wenn W ein unter G stabiler k-Untermodul ist, in Formeln $g \in G, w \in W \Rightarrow gw \in W$;

2. Eine Darstellung V von G heißt oder **einfach** oder **irreduzibel**, wenn sie genau zwei Unterdarstellungen hat, als da heißt, wenn V nicht der Nullraum ist, aber 0 und V die einzigen Unterdarstellungen von V sind. Die Menge der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von G über k notiere ich

$$\operatorname{irr}(k, G)$$

3. Eine Darstellung V von G heißt **unzerlegbar**, wenn V nicht der Nullraum ist und es keine zwei von Null verschiedenen Unterdarstellungen $W_1, W_2 \subset V$ gibt mit $W_1 \oplus W_2 \xrightarrow{\sim} V$ unter dem von den Einbettungen induzierten Homomorphismus;

4. Ein Element $v \in V$ einer Darstellung von G heißt **zyklisch**, wenn V selbst die einzige Unterdarstellung von V ist, die das Element v enthält. Arbeiten wir über einem Körper, so heißt solch ein Element auch ein **zyklischer Vektor**. Eine Darstellung V von G heißt **zyklisch**, wenn sie ein zyklisches Element besitzt.

Beispiele 8.1.1.22. Jede eindimensionale Darstellung über einem Körper k ist einfach. In einer einfachen Darstellung ist jedes von Null verschiedene Element zyklisch. Unsere Darstellung P aus 8.1.1.18 ist zwar unzerlegbar und zyklisch, aber nicht einfach.

Proposition 8.1.1.23 (**Schranke für die Zahl einfacher Darstellungen**). *Ein endliches Monoid G hat über jedem Körper k bis auf Isomorphismus höchstens soviele einfache Darstellungen wie Elemente, in Formeln*

$$|\operatorname{irr}(k, G)| \leq |G|$$

Beweis als Vorschau. Zum Beweis der Proposition entwickeln wir im folgenden allgemeine Begriffe und Methoden, die Ihnen auch in anderen Kontexten ständig begegnen werden. Genauer können wir unsere Darstellungen mit 8.1.2.7 als Moduln über dem Monoidring kG auffassen. Die Proposition folgt dann aus dem Korollar 8.3.1.4 zum Satz von Jordan-Hölder für Moduln. □

Ergänzung 8.1.1.24 (**Eine Gruppe mit vielen unzerlegbaren Darstellungen**). Proposition 8.1.1.23 gilt nicht analog, wenn wir darin „einfach“ durch „unzerlegbar“ ersetzen: Bereits für die Klein'sche Vierergruppe gibt es über dem Körper mit zwei Elementen unzerlegbare Darstellungen beliebig großer Dimension. In der Tat ist der Gruppenring in dem Fall isomorph zu $\mathbb{F}_2[a, b]$ mit $a^2 = b^2 = 0$. Dann sind die Moduln $V := \mathbb{F}_2^{2n+1}$ mit $a : \mathrm{e}_{2i} \mapsto \mathrm{e}_{2i+1}$ und $b : \mathrm{e}_{2i} \mapsto \mathrm{e}_{2i-1}$ für $1 \leq i \leq n$ und $a, b : \mathrm{e}_{2i+1} \mapsto 0$ für $0 \leq i \leq n$. Dann gilt $\ker a = \ker b$ und wir können folglich $\phi : \operatorname{im} a \to V$ definieren durch $\phi : v \mapsto b(a^{-1}(v))$. Damit erhalten wir eine Filtrierung auf $\operatorname{im} a$ durch

$$\operatorname{im} a \supset \phi^{-1}(\operatorname{im} a) \supset \ldots \supset \phi^{-n}(\operatorname{im} a) = 0$$

mit eindimensionalen Subquotienten. Das aber zeigt, daß für jede Zerlegung unserer Darstellung in zwei direkte Summanden $V = U \oplus W$ für einen Summanden W gilt $\operatorname{im}(a|W) = 0$ und damit $W \subset \langle \mathrm{e}_{2i+1} \mid 0 \leq i \leq n \rangle$. Es ist aber explizit klar, daß es einen derartigen Summanden nicht geben kann.

Beispiele 8.1.1.25 (**Schwingungen eines Methanmoleküls**). Ein Methanmolekül können wir uns als einen Tetraeder denken mit jeweils einem Wasserstoffatom an jeder der vier Ecken und einem Kohlenstoffatom in der Mitte. Wir denken uns

im folgenden diese Atome durch eine Art Federn verbunden und beschreiben den Zustand unseres Moleküls durch eine Abbildung

$$\varphi : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{E}$$

in den Anschauungsraum, einen dreidimensionalen affinen euklidischen Raum $\mathbb{E}$, mit der Konvention, daß $\varphi(0)$ die Position des Kohlenstoffatoms angeben möge und die anderen $\varphi(i)$ die Positionen der vier Wasserstoffatome. Die Menge aller derartigen Abbildungen φ notieren wir M. In der in 12.6.4.3 eingeführten Terminologie ist M der Konfigurationsraum eines mechanischen Systems. Das Vorschalten einer Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_4$, fortgesetzt auf $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ durch $0 \mapsto 0$, induziert eine Rechtsoperation von $\mathcal{S}_4$ auf M und a forteriori eine Rechtsoperation von $\mathcal{S}_4$ auf seinem Geschwindigkeitsphasenraum $\mathrm{T}M\langle 1/\,\mathrm{s}\rangle$, wie er in 12.6.5.4 eingeführt wird. Andererseits operiert die Gruppe $\mathrm{O}_{\mathrm{aff}}(\mathbb{E})$ der orthogonalaffinen Automorphismen des Anschauungsraums durch Nachschalten von links auf unserem Konfigurationsraum M und a forteriori auf seinem Geschwindigkeitsphasenraum $\mathrm{T}M\langle 1/\,\mathrm{s}\rangle$. Diese beiden Operationen kommutieren und liefern durch Übergang zur Linksoperation der inversen Permutation eine Operation von $\mathrm{O}_{\mathrm{aff}}(\mathbb{E}) \times \mathcal{S}_4$ auf M und $\mathrm{T}M\langle 1/\,\mathrm{s}\rangle$. Offensichtlich sind sowohl die Potentialfunktion V als auch die Funktion der kinetischen Energie K invariant unter der Operation von $\mathrm{O}_{\mathrm{aff}}(\mathbb{E}) \times \mathcal{S}_4$. Bei jedem Methanmolekül in Ruhe $p \in M \subset \mathrm{T}M\langle 1/\,\mathrm{s}\rangle$ verschwindet die kinetische Energie K und das Potential $V : M \to \langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2\rangle$ nimmt ein lokales Minimum an. Die Isotropiegruppe von p ist in diesem Fall eine diagonal eingebettete Kopie von $\mathcal{S}_4$. Unter dem Isomorphismus $\mathrm{T}_pM \xrightarrow{\sim} M, \vec{v} \mapsto p + \vec{v}$ entspricht in diesem Fall die das Potential V bei p approximierende Quadrik bis auf eine additive Konstante einer energiewertigen homogenen quadratischen Form auf T_pM und die kinetische Energie einer energiewertigen positiv definiten homogenen quadratischen Form auf $\mathrm{T}_pM\langle 1/\,\mathrm{s}\rangle$ alias einer positiv definiten quadratischen Form auf T_pM mit Werten in $\langle \mathrm{gm}^2\rangle$. Beide Formen sind invariant unter $\mathcal{S}_4$, folglich sind auch die Eigenräume des quadratischen Anteils der potentiellen Energie in Bezug auf die durch die kinetische Energie gegebene euklidische Struktur nach 4.2.2.9 stabil unter $\mathcal{S}_4$ und damit Darstellungen von $\mathcal{S}_4$. Die zugehörigen Eigenwerte sind „energiewertige inverse Flächen“ alias Elemente von $\langle \mathrm{s}^{-2}\rangle$ und beschreiben nach 12.6.5.8 die Frequenzen der „kleinen Schwingungen“ unseres Moleküls. Die Symmetrien unseres Systems erzwingen Vielfachheiten von gewissen Eigenwerten. Gewisse Spektrallinien werden also in mehrere nah beieinander liegende Linien aufspalten, sobald man die Symmetrie bricht, etwa durch das Anlegen eines Magnetfeldes.

Übungen

Übung 8.1.1.26 (**Darstellungen in Charateristik p von p-Gruppen**). Gegeben eine Primzahl p besitzt jede p-Gruppe G über einem Körper der Charakteristik p bis auf Isomorphismus nur eine einzige einfache Darstellung, in Formeln

$$(|G| = p^n \text{ und } \operatorname{char} k = p) \;\Rightarrow\; |\operatorname{irr}(k, G)| = 1$$

Hinweis: Man beginne mit dem Fall zyklischer Gruppen und verwende dann Satz 6.1.3.8 über die Struktur von p-Gruppen.

Übung 8.1.1.27 (**Zurückziehen mit inneren Automorphismen**). Man zeige, daß wir beim Zurückziehen nach 8.1.1.9 einer Darstellung eines Monoids G mit einem inneren Automorphismus, also einem durch die Konjugation mit einem inveriertbaren Element gegebenen Automorphismus $G \to G$, eine zur ursprünglichen Darstellung isomorphe Darstellung erhalten.

Übung 8.1.1.28. Im Fall der Operation einer Gruppe G auf einer Menge X liefert die offensichtliche Einbettung $kX \hookrightarrow \operatorname{Ens}(X, k)$ einen Homomorphismus von Darstellungen, wenn man die Operation rechts mit dem durch das Invertieren gegebenen Isomorphismus $\operatorname{inv} : G \xrightarrow{\sim} G^{\mathrm{opp}}$ zu einer Operation von G zurückzieht.

Ergänzung 8.1.1.29. Stabilisiert eine endliche Untergruppe der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ein Gitter alias den $\mathbb{Z}$-Spann einer Basis, so nennt man sie **kristallographisch**. Gleichbedeutend ist nach 8.1.1.30 die Forderung, daß sie bezüglich einer geeigneten Basis durch Matrizen mit rationalen Einträgen dargestellt wird.

Ergänzende Übung 8.1.1.30. Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung V über $\mathbb{Q}$ eines endlichen Monoids G gibt es stets eine **$\mathbb{Z}$-Form**, als da heißt, ein unter G stabiles Gitter $V_{\mathbb{Z}} \subset V$.

Übung 8.1.1.31. Gegeben eine Darstellung (V, ρ) einer Gruppe G über einem Körper k erhalten wir eine Darstellung (V^*, ρ^*) auf dem Dualraum durch die Vorschrift $\rho^*(g) := (\rho(g^{-1}))^\top$. Sie heißt die **kontragrediente Darstellung** zur Darstellung (V, ρ). Man zeige, daß eine endlichdimensionale Darstellung einfach ist genau dann, wenn die zugehörige kontragrediente Darstellung einfach ist. Man gebe ein Beispiel für eine eindimensionale Darstellung, die nicht zu ihrer kontragredienten Darstellung isomorph ist.

Übung 8.1.1.32. Die Dimension einer zyklischen und erst recht einer einfachen Darstellung eines Monoids über einem Körper ist beschränkt durch die Kardinalität des dargestellten Monoids.

Übung 8.1.1.33. Man zeige, daß die Quaternionen aufgefaßt als reeller Vektorraum eine einfache Darstellung der achtelementigen Quaternionengruppe aus 6.1.4.13 bilden.

Übung 8.1.1.34. Wieviele Unterdarstellungen hat die Darstellung $\mathbb{R}_+ \oplus \mathbb{R}_-$ der Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Ist sie zyklisch? Was ist die Dimension des Raums der Homomorphismen von dieser Darstellung zu sich selber?

Übung 8.1.1.35. Man gebe alle Unterdarstellungen der Darstellung $\mathbb{R}_+^2 \oplus \mathbb{R}_-$ der Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ an. Ist diese Darstellung zyklisch? Was ist die Dimension des Raums der Homomorphismen von dieser Darstellung zu sich selber?

Übung 8.1.1.36. Man bestimme die Dimension des Raums der Homomorphismen von Darstellungen $(\mathbb{R}_+^n \oplus \mathbb{R}_-^m) \to (\mathbb{R}_+^a \oplus \mathbb{R}_-^b)$.

8.1.2 Darstellungen als Moduln über dem Gruppenring

8.1.2.1. Gegeben ein Ring k und ein Monoid G erklären wir den **Monoidring**

$$kG$$

des Monoids G über k wie folgt: Als abelsche Gruppe ist kG wie in 3.2.3.4 die Menge aller Abbildungen $f : G \to k$, die nur an endlich vielen Stellen von Null verschiedene Werte annehmen. So eine Abbildung schreiben wir als eine formale Linearkombination $\sum f(g)g$ von Elementen aus G mit Koeffizienten aus k. Die Multiplikation $*$ in kG, manchmal auch **Konvolution** oder **Faltung** genannt, erklären wir durch die Vorschrift

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) * \left(\sum_{h\in G} b_h h\right) = \sum_{x\in G}\left(\sum_{gh=x} a_g b_h\right) x$$

Die innere Summe rechts läuft dabei über alle Paare $(g,h) \in G \times G$ mit $gh = x$. Offensichtlich erhalten wir so einen Ring mitsamt einem Ringhomomorphismus $k \hookrightarrow kG$, $a \mapsto ae$ für $e \in G$ das neutrale Element und einem Monoidhomomorphismus $G \to kG$, $g \mapsto 1g$ in das multiplikative Monoid des Rings kG. Ist k ein Körper, so ist dieser Monoidhomomorphismus, wenn wir ihn als eine durch G indizierte Familie von Elementen von kG auffassen, offensichtlich eine Basis von kG über k. Für Ringe gilt dasselbe mit dem auf Moduln erweiterten Basisbegriff aus 7.2.1.6. Wir schreiben meist kurz $ae = a$ und $1g = g$, auch wenn wir eigentlich Elemente des Monoidrings meinen, und notieren die Faltung oft ohne $*$ schlicht durch Hintereinanderschreiben. Ist unser Monoid eine Gruppe, so nennt man unseren Monoidring auch den **Gruppenring**.

8.1.2.2 (**Notationsvarianten für Monoidringe**). Häufig wird der Monoidring in der Literatur auch $k[G]$ notiert. Zu dem in diesem Text befolgten Notationsschema paßt diese Notation nicht, da ich mir ja in 6.3.5.1 vorgenommen hatte, eckige Klammern vorzugsweise für die Erzeugung als Ring „durch kommutierende Erzeuger“ zu verwenden. Um dieser Kovention zu folgen, sollten wir hier besser

$k\lfloor G\rfloor$ schreiben. Stattdessen benutze ich gerne die alternative Notation $k\langle G\rangle$. Als k-Modul ist der Monoidring in der Tat erzeugt, ja sogar frei erzeugt von G.

8.1.2.3 (**Exponentialnotation für Monoidringe**). Die eben eingeführte Notation für Monoidringe ist nur im Fall multiplikativ notierter Monoide praktisch. Im Fall additiv notierter Monoide ist bereits der Ausdruck $g+h$ zweideutig, es könnte damit entweder die Summe im Monoid $1(g+h)$ oder die Summe im Monoidring $1g+1h$ gemeint sein. Aus diesem Grund schreibt man im Fall additiv notierter Monoide Elemente des Monoidrings lieber in der Form $\sum a_g\,\mathrm{e}^g$, wobei die Notation e^g rein formale Bedeutung hat. Dann gilt etwa im Monoidring $\mathrm{e}^{g+h}=\mathrm{e}^g\,\mathrm{e}^h\neq\mathrm{e}^g+\mathrm{e}^h$ und man kann wieder ganz intuitiv rechnen.

8.1.2.4 (**Der Polynomring als Monoidring**). Wir erhalten einen Isomorphismus $k\langle\mathbb{N}\rangle\xrightarrow{\sim}k[T]$ zwischen dem Monoidring des Monoids $\mathbb{N}$ über einem Ring k und dem Polynomring $k[T]$ mit Koeffizienten in k durch die Vorschrift $\sum a_n\,\mathrm{e}^n\mapsto\sum a_nT^n$. In diesem Fall ist die Exponentialnotation im Sinne von 8.1.2.3 auch ziemlich ungewöhnlich und lädt zu Mißverständnissen ein.

8.1.2.5 (**Der Ring der Laurentpolynome als Gruppenring**). Wir erhalten einen Isomorphismus $k\langle\mathbb{Z}\rangle\xrightarrow{\sim}k[T,T^{-1}]$ zwischen dem Gruppenring der Gruppe $\mathbb{Z}$ über einem Ring k und dem Ring $k[T,T^{-1}]$ der Laurentpolynome mit Koeffizienten in k durch die Vorschrift $\sum a_n\,\mathrm{e}^n\mapsto\sum a_nT^n$. Im Fall der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$ ist die Exponentialnotation im Sinne von 8.1.2.3 auch ziemlich ungewöhnlich und lädt zu Mißverständnissen ein.

8.1.2.6 (**Dirac-Notation für Monoidringe**). Gegeben ein Kring k induziert jede Abbildung $X_1\times\ldots\times X_n\to Y$ von Mengen eine k-multilineare Abbildung

$$kX_1\times\ldots\times kX_n\to kY$$

in natürlicher Weise. Identifiziert man im Fall $k=\mathbb{R}$ oder $k=\mathbb{C}$ die Elemente von kX als kompakt getragene endliche Maße auf dem diskreten Raum X, so kann unsere k-multilineare Abbildung als das Bildmaß des Produktmaßes beschrieben werden. Die Multiplikation des Monoidrings ergibt sich dann aus der Verknüpfung des zugrundeliegenden Monoids als das Bildmaß

$$\mu*\nu=\mathrm{mult}_*(\mu\boxtimes\nu)$$

des Produktmaßes unter der Verknüpfung $\mathrm{mult}:G\times G\to G$. Im Fall $n=0$ wird jeder Abbildung $\{*\}\to Y$ aus dem leeren Produkt mit $*\mapsto y$ eine Abbildung $\{*\}\to kY$ zugeordnet und das Bild von $*$ entspricht dem Diracmaß δ_y, das dem Punkt y das Maß 1 gibt und allen anderen Punkten das Maß Null. Ich will, auch wenn k nicht $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist, Elemente von Monoidringen vorzugsweise als eine Art von Maßen auffassen und verwende auch in dieser Allgemeinheit die Notation

$\delta_y \in kY$ entsprechend. Insbesondere ist für $e \in G$ das neutrale Element damit δ_e die Eins des Monoidrings. Mehr dazu wird in 18.1.6.29 besprochen, wo wir auch die alternative Notation $\mathrm{Maß}_!(X;k) = kX$ einführen.

8.1.2.7 (**Darstellungen als Moduln über dem Monoidring**). Seien G ein Monoid und k ein Ring. Sei weiter M eine abelsche Gruppe. Das Einschränken einer Abbildung $kG \times M \to M$ zu Abbildungen $k \times M \to M$ und $G \times M \to M$ liefert dann die vertikale Bijektion im Diagramm

$$\left\{\begin{array}{c} kG\text{-Modulstrukturen} \\ kG \times M \to M \\ \text{auf der abelschen Gruppe } M \end{array}\right\}$$
$$\downarrow \wr$$
$$\left\{\begin{array}{c} k\text{-Modulstrukturen} \\ k \times M \to M \\ \text{auf der abelschen Gruppe } M \\ \text{zusammen mit } G\text{-Operation} \\ G \times M \to M \\ \text{durch } k\text{-lineare Abbildungen} \end{array}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{c} k\text{-Modulstrukturen} \\ k \times M \to M \\ \text{auf der abelschen Gruppe } M \\ \text{zusammen mit einem} \\ \text{Monoidhomomorphismus} \\ G \to \mathrm{End}_k(M) \end{array}\right\}$$

wobei die horizontale Bijektion wie so oft schon wieder einmal von unserer Bijektion $\mathrm{Ens}(G \times M, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(G, \mathrm{Ens}(M, M))$ aus 2.1.6.5 herkommt und $\mathrm{End}_k(M)$ das multiplikative Monoid des Rings $\mathrm{End}_k(M)$ aus 7.1.3.4 meint. Des weiteren haben wir für je zwei Darstellungen V, W eines Monoids G über einem Ring k die Gleichheit

$$\mathrm{Hom}_{k,G}(V, W) = \mathrm{Hom}_{kG}(V, W)$$

von Homomorphismen von Darstellungen und Homomorphismen von Moduln. In diesem Sinne ist eine Darstellung eines Monoids G über k also „dasselbe“ wie ein kG-Modul. Wir werden einen guten Teil der Darstellungstheorie von Gruppen aus der Spezialisierung von Resultaten für Moduln über Ringen erhalten, die hinwiederum durch die Methoden der linearen Algebra für Moduln über Körpern alias Vektorräume motiviert werden.

8.1.2.8 (**Funktionen und Maße**). Gegeben ein Kring k und ein Monoid G mag man auch den Kring $\mathrm{Fun}(G;k) = \mathrm{Ens}(G,k)$ der Funktionen auf G betrachten. Er trägt natürliche Operationen von G von links und rechts durch $(yf)(x) := f(xy)$ und $(fy)(x) = f(yx)$. Ebenso trägt auch der Gruppenring $\mathrm{Maß}_!(G;k) = kG$ natürliche Operationen von G von links und rechts durch $y\mu := \delta_y * \mu$ und $\mu y := \mu * \delta_y$. Man mag nun versucht sein, mit der Einbettung von k-Moduln

$$\mathrm{Maß}_!(G;k) \hookrightarrow \mathrm{Fun}(G;k)$$

zu arbeiten, die gegeben wird durch $\delta_x \mapsto [x]$ für $[x]$ die charakteristische Funktion der einelementigen Menge $\{x\}$. Das ist aber keine gute Idee, da diese Abbildung weder mit der Linksoperation noch mit der Rechtsoperation von G verträglich ist. Natürlich ist es vielmehr, $\mathrm{Fun}(G;k)$ als den Dualraum zu $\mathrm{Maß}_!(G;k)$ aufzufassen. Für die entsprechende Paarung

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathrm{Maß}_!(G;k) \times \mathrm{Fun}(G;k) \to k$$

gilt dann auch in der Tat $\langle y\mu, f\rangle = \langle \mu, fy\rangle$ sowie $\langle \mu y, f\rangle = \langle \mu, yf\rangle$ für alle Maße μ, Funktionen f und Elemente $y \in G$. Ist G eine Gruppe, so ist zusätzlich die Abbildung

$$\mathrm{inz} : \mathrm{Maß}_!(G;k) \hookrightarrow \mathrm{Fun}(G;k)$$

gegeben durch $\delta_x \mapsto [x^{-1}]$ verträglich mit den natürlichen G-Wirkungen von rechts und links. Die Abkürzung inz meint hier „durch das Zählmaß teilen und das Invertieren vorschalten“. Wir wollen stets $kG = \mathrm{Maß}_!(G;k)$ verstehen und selbst im Fall endlicher Gruppen oder Mengen der Versuchung widerstehen, diesen Raum leichtfertig mit $\mathrm{Ens}(G,k) = \mathrm{Fun}(G;k)$ zu identifizieren. Vernünftig ist auch im Fall endlicher Gruppen vielmehr eine Identifikation mit unserer Abbildung inz, die in diesem Fall sogar ein Isomorphismus ist.

8.1.2.9. Eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe nennen wir ein **Gitter**. In anderen Zusammenhängen versteht man unter einem „Gitter“ abweichend eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe X zusammen mit einer symmetrischen Bilinearform $X \times X \to \mathbb{Z}$.

Proposition* 8.1.2.10 (Gitter mit Involution). *Jedes Gitter mit Involution (X,σ) ist isomorph als Darstellung der zweielementigen Gruppe über $\mathbb{Z}$ zu einer endlichen direkten Summe von Kopien von $(\mathbb{Z},\mathrm{id})$, $(\mathbb{Z},-\mathrm{id})$ und $(\mathbb{Z}^2,\tau)$ für τ die Vertauschung der beiden Einträge. Die Zahl der jeweiligen Summanden ist dabei wohlbestimmt.*

Beweis. Wir setzen $X^\pm := \{\lambda \in X \mid \sigma(\lambda) = \pm\lambda\}$. Die Existenz einer Zerlegung der beschriebenen Art ist klar im Fall $X = X^+ + X^-$. Gibt es dahingegen $\lambda \in X$ mit $\lambda \notin (X^+ + X^-)$, so haben wir $2\lambda = (\lambda+\sigma(\lambda))+(\lambda-\sigma(\lambda))$, also $2\lambda = \mu^+ + \mu^-$ mit $\mu^\pm \in X^\pm \backslash 0$. Man überzeugt sich dann, daß

$$Z := \{\nu \in X \mid \exists m \in \mathbb{Z}_{\neq 0} \text{ mit } m\nu \in \mathbb{Z}\mu^+ + \mathbb{Z}\mu^-\}$$

ein unter σ stabiles zu $(\mathbb{Z}^2,\tau)$ isomorphes Untergitter ist. In der Tat prüft man leicht $Z^+ + Z^- \supsetneq 2Z \supsetneq 2Z^+ + 2Z^-$ und ein zweidimensionaler $\mathbb{F}_2$-Vektorraum hat genau drei Geraden. Nach Konstruktion ist X/Z auch ein Gitter. Bilden wir zur kurzen exakten Sequenz $Z \hookrightarrow X \twoheadrightarrow X/Z$ durch Anwenden von $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\ ,\mathbb{Z})$ die duale Sequenz, so erhalten wir als wieder eine kurze exakte Sequenz $(X/Z)^* \hookrightarrow$

$X^* \twoheadrightarrow Z^*$. Diese muß aber spalten als Sequenz von Moduln über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[\sigma]/\langle\sigma^2 - 1\rangle$, da Z^* ebenso wie Z frei zyklisch ist über dem Gruppenring alias isomorph zu unserem Ring als Modul über sich selber. Damit spaltet auch die ursprüngliche Sequenz und wir können den Beweis der Existenz einer Zerlegung der beschriebenen Art mit Induktion zu Ende bringen. Die Zahl der jeweiligen Summanden wird eindeutig festgelegt durch die Dimensionen der σ-Eigenräume in $\mathrm{Hom}(X, \mathbb{Q})$ und die Dimension des $\mathbb{F}_2$-Vektorraums $X/(X^+ + X^-)$. Daß dieser Quotient auch in der Tat ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ ist, folgt aus der Identität $2\lambda = (\lambda + \sigma(\lambda)) + (\lambda - \sigma(\lambda))$. $\square$

Ergänzung 8.1.2.11. Meines Wissens ist derzeit (2020) nicht bekannt, ob der Gruppenring jeder torsionsfreien Gruppe über jedem kommutativen Integritätsbereich auch selbst ein Integritätsring ist. Im Fall von Koeffizienten in einem Körper ist das die sogenannte **Nullteilervermutung von Kaplansky**.

Übungen

Übung 8.1.2.12 (**Universelle Eigenschaft des Monoidrings**). Gegeben ein Ringhomomorphismus $\varphi : k \to R$ und ein Monoid G und Monoidhomomorphismus $\psi : G \to (R, \cdot)$ mit der Eigenschaft $\varphi(a)\psi(g) = \psi(g)\varphi(a)\ \forall a \in k,\ g \in G$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus $kG \to R$, der φ und ψ fortsetzt.

Übung 8.1.2.13. Man zeige, daß es für jeden Ring k und $G = \{e, g\}$ eine zweielementige Gruppe genau einen Ringisomorphismus $k[X]/\langle X^2 - 1\rangle \xrightarrow{\sim} kG$ gibt mit $\bar{X} \mapsto g$. Man folgere aus dem abstrakten chinesischen Restsatz weiter für k einen Körper mit $\mathrm{char}\, k \neq 2$ einen Isomorphismus $k[X]/\langle X^2 - 1\rangle \xrightarrow{\sim} k \times k$.

Übung 8.1.2.14. Man zeige, daß der Gruppenring der Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ über einem Körper k isomorph ist zum Quotienten $k[X]/\langle X^n - 1\rangle$ des Polynomrings. Im Fall, daß $X^n - 1$ über k in Linearfaktoren zerfällt, zeige man weiter, daß die einfachen Darstellungen alle eindimensional sind und daß ihre Isomorphieklassen parametrisiert werden durch die Wurzeln dieses Polynoms. Unter der Annahme, daß zusätzlich das Bild von n in k nicht verschwindet, zeige man weiter, daß dieser Gruppenring auch isomorph ist zum Produkt $k \times \ldots \times k$ von n Kopien des Körpers k. Im Fall $k = \mathbb{C}$ liefert etwa die diskrete Fouriertransformation aus **??** einen derartigen Isomorphismus.

Übung 8.1.2.15. Seien $G \supset N$ eine endliche Gruppe mit einer Untergruppe. Man zeige, daß N genau dann ein Normalteiler ist, wenn die die N-linksinvarianten Elemente $\mathbb{Z}[G]^N$ des Gruppenrings von G einen $\mathbb{Z}[G]$-Unterlinksmodul bilden.

Übung 8.1.2.16. Eine **Frobenius-Algebra** ist eine endlichdimensionale Ringalgebra über einem Körper mit einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ derart, daß gilt $\langle ab, c\rangle = \langle a, bc\rangle$ für alle Elemente a, b, c unserer Ringalgebra.

Man zeige, daß der Gruppenring einer endlichen Gruppe G mit der Bilinearform $\langle h, f\rangle := [e](hf)$ eine Frobenius-Algebra ist. Hier meint $[e]$ das Auswerten am neutralen Element als Linearform auf dem Gruppenring.

8.2 Moduln über Mengen

8.2.1 Begrifflichkeit der Mengenmoduln

Definition 8.2.1.1. Sei Ω eine Menge. Ein Ω**-Mengenmodul** oder kurz Ω**-Modul** ist ein Paar (M, σ) bestehend aus einer abelschen Gruppe M und einer Abbildung

$$\sigma : \Omega \to \mathrm{Ab}(M)$$

von Ω in den Endomorphismenring der abelschen Gruppe M. Wir verwenden in diesem Kontext die Abkürzung $\omega m := (\sigma(\omega))(m)$.

Beispiel 8.2.1.2. Gegeben ein Körper k ist ein k-Vektorraum ein k-Mengenmodul mit zusätzlichen Eigenschaften. Ein $\emptyset$-Modul ist eine abelsche Gruppe.

Definition 8.2.1.3. Sei Ω eine Menge. Eine Abbildung $f : M \to N$ von Ω-Moduln heißt ein **Modulhomomorphismus**, wenn sie ein Homomorphismus von abelschen Gruppen ist und wenn zusätzlich gilt

$$f(\omega m) = \omega f(m) \quad \forall m \in M, \omega \in \Omega$$

und erhalten so die Kategorie $\Omega\text{-}\mathrm{Mod} = \mathrm{Mod}_\Omega$ der Ω-Moduln.

Beispiel 8.2.1.4. Gegeben ein Körper k ist eine k-lineare Abbildung von k-Vektorräumen dasselbe wie k-Modulhomomorphismus der zugrundeliegenden Mengenmoduln. Ein Homomorphismus von $\emptyset$-Moduln ist schlicht ein Homomorphismus von abelschen Gruppen.

8.2.1.5. Gegeben ein Ring R gilt es zu unterscheiden wir zwischen unseren R-Moduln aus 7.1.2.3, die wir ausführlicher R**-Ringmoduln** nennen, und den R-Mengenmoduln, die wir hier eingeführt haben. Die R-Ringmoduln bilden eine volle Unterkategorie der R-Mengenmoduln. Ich verwende für beide dieselbe Notation $R\text{-}\mathrm{Mod} = \mathrm{Mod}_R$ in der Hoffnung, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, was jeweils gemeint ist. Die R^{opp}-Ringmoduln bilden ebenfalls eine volle Unterkategorie der R-Mengenmoduln. Diese notiere ich vorzugsweise $\mathrm{Mod}\text{-}R = \mathrm{Mod}_{-R}$.

8.2.1.6. Gegeben ein Monoid G gilt es zu unterscheiden zwischen Darstellungen von G über $\mathbb{Z}$ im Sinne von 8.1.1.2, die wir auch ausführlicher G**-Monoidmoduln** nennen, und den G-Mengenmoduln, die wir hier eingeführt haben. Die G-Monoidmoduln bilden eine volle Unterkategorie der G-Mengenmoduln. Ich verwende für beide dieselbe Notation $G\text{-}\mathrm{Mod} = \mathrm{Mod}_G$ in der Hoffnung, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, was jeweils gemeint ist.

8.2.1.7. Eine Darstellung eines Monoids G über einem Ring k ist ein Modul über der Menge $k \sqcup G$ mit gewissen Zusatzeigenschaften. Ich notiere die Kategorie dieser Darstellungen

$$(G,k)\text{-Mod} = \mathrm{Mod}_{k,G}$$

Allgemein sollen durch Kommata getrennte Aufzählungen operierender Mengen bedeuten, daß die Operationen der Elemente der verschiedenen Mengen miteinander kommutieren sollen, und wenn in der Aufzählung Monoide oder Ringe auftreten, wird implizit gefordert, daß diese auch als Ringe beziehungsweise Monoide operieren, und zwar von links, wenn sie auf der linken Seite des Kürzels Mod stehen, und von rechts, wenn sie auf der rechten Seite stehen.

8.2.1.8. Man hätte fast Lust, im vorhergehenden Ab statt Mod zu schreiben, aber das habe ich mich nicht getraut.

8.2.1.9 (**Universelle Eigenschaft injektiver Modulhomomorphismen**). Injektive Modulhomomorphismen $i : U \hookrightarrow M$ haben die universelle Eigenschaft, daß für jeden Modulhomomorphismus $\varphi : X \to M$ mit $\varphi(X) \subset U$ die induzierte Abbildung $\varphi : X \to U$ auch ein Modulhomomorphismus ist.

Definition 8.2.1.10. Seien Ω eine Menge und M ein Ω-Modul. Eine Teilmenge $L \subset M$ heißt ein **Ω-Untermodul** oder ausführlicher **Untermengenmodul**, wenn sie eine abelsche Untergruppe ist und wenn zusätzlich gilt $l \in L, \omega \in \Omega \Rightarrow \omega l \in L$.

8.2.1.11. Eine Teilmenge eines Ω-Moduls ist genau dann ein Ω-Untermodul, wenn sie so mit der Struktur eines Ω-Moduls versehen werden kann, daß die Einbettung eine Modulhomomorphismus ist. Diese Modulstruktur ist dann eindeutig bestimmt.

Beispiel 8.2.1.12. Ein k-Untervektorraum eines k-Vektorraums V ist dasselbe wie ein k-Untermengenmodul von V. Der Kern und das Bild jedes Mengenmodulhomomorphismus ist ein Untermengenmodul.

8.2.1.13 (**Universelle Eigenschaft surjektiver Modulhomomorphismen**). Surjektive Modulhomomorphismen $p : M \twoheadrightarrow Q$ haben die universelle Eigenschaft, daß für jeden Modulhomomorphismus $\varphi : M \to Y$ mit $\ker p \subset \ker \varphi$ die induzierte Abbildung von abelschen Gruppen $\varphi : Q \to Y$ ein Modulhomomorphismus ist.

8.2.1.14. Seien Ω eine Menge, M ein Ω-Modul und $L \subset M$ ein Untermodul. So gibt es auf der Restklassengruppe M/L genau eine Struktur als Ω-Modul derart, daß die Projektion $M \twoheadrightarrow M/L$ ein Modulhomomorphismus ist. Wir nennen dann M/L den **Quotient von M nach L**.

Beispiel 8.2.1.15. Der Quotient eines Vektorraums nach einem Untervektorraum ist ein Beispiel für diese Konstruktion. In diesem Fall ist der Quotient stärker nicht nur ein Mengenmodul, sondern sogar wieder ein Vektorraum.

8.2.2 Einfache Moduln und Kompositionsreihen

Definition 8.2.2.1. Gegeben ein Modul M über einer Menge Ω definieren wir seine **Länge**

$$\text{Länge}_\Omega(M) = \text{Länge}(M) = \mathrm{l}_\Omega(M) = \mathrm{l}(M) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

als das Supremum über alle n derart, daß es in M eine echt absteigende Kette von Untermoduln gibt der Gestalt $M = M_n \supsetneq M_{n-1} \supsetneq \ldots \supsetneq M_0 = 0$, die also salopp gesprochen in n Schritten vom ganzen Modul zum Nullmodul führt.

Definition 8.2.2.2. Ein Modul heißt **einfach** oder gleichbedeutend **irreduzibel**, wenn er genau zwei Untermoduln hat, als da heißt, wenn er nicht Null ist, aber außer sich selbst und Null keine weiteren Untermoduln hat.

Beispiel 8.2.2.3. Offensichtlich hat ein Modul die Länge Null genau dann, wenn er der Nullmodul ist, und die Länge Eins genau dann, wenn er einfach ist.

Beispiel 8.2.2.4. Ein Vektorraum über einem Körper oder Schiefkörper k ist ein einfacher k-Modul genau dann, wenn er eindimensional ist. Ein $\emptyset$-Modul alias eine abelsche Gruppe ist einfach genau dann, wenn sie endlich ist von Primzahlordnung, also isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p.

Beispiel 8.2.2.5. Jeder Vektorraum ist einfach als Modul über seinem Endomorphismenring.

Beispiele 8.2.2.6. Alle einfachen Ringmoduln über einem Ring isomorph zu einem Quotienten des besagten Rings nach einem maximalen Linksideal. Ist der Ring kommutativ, so kann man besagtes Linksideal aus dem Modul zurückgewinnen als seinen Annullator. Genauer ist dann der Quotient unseres Rings nach unserem maximalen Ideal bereits ein Körper, vergleiche 7.1.6.7, und unser einfacher Modul ist ein eindimensionaler Vektorraum über diesem Körper. Bei nichtkommutativen Ringen können Quotienten nach verschiedenen maximalen Linksidealen jedoch als Moduln durchaus isomorph sein: Man denke etwa an den Matrizenring $\mathrm{Mat}(r; k)$ mit Einträgen in einem Körper k und den einfachen Modul k^r dieses Rings: Hier sind ja die Annullatoren verschiedener von Null verschiedener Elemente im allgemeinen durchaus verschiedene Linksideale.

Beispiele 8.2.2.7. Der Hilbert'sche Nullstellensatz 7.1.5.10 besagt, daß alle einfachen Ringmoduln über einem Polynomring in endlich vielen Variablen mit Koeffizienten in einem Körper endlichdimensional sind über besagtem Körper. Ist der Körper algebraisch abgeschlossen, so sind sie sogar eindimensional.

Proposition 8.2.2.8. *Jeder von Null verschiedene endlich erzeugte Modul hat einen einfachen Quotienten.*

Beweis. Jedes endliche Erzeugendsystem können wir zu einem minimalen Erzeugendensystem verkleinern. Nach dem Zorn'schen Lemma gibt es dann für jeden Erzeuger einen Untermodul, der maximal ist mit der Eigenschaft, besagten Erzeuger nicht zu enthalten. So ein Untermodul aber muß alle anderen Erzeuger enthalten und ist mithin maximal unter allen echten Untermoduln. □

Lemma 8.2.2.9 (**Homomorphismen von und zu einfachen Moduln**). *Seien Ω eine Menge und E, F einfache Ω-Moduln und M ein beliebiger Ω-Modul. So gilt:*

1. *Jeder Homomorphismus $E \to M$ ist injektiv oder Null;*
2. *Jeder Homomorphismus $M \to F$ ist surjektiv oder Null;*
3. *Jeder Homomorphismus $E \to F$ ist bijektiv oder Null;*
4. *Der Endomorphismenring $\operatorname{End}_\Omega E$ ist ein Schiefkörper.*

Beweis. Der Kern $\ker(E \to M)$ und das Bild $\operatorname{im}(M \to F)$ sind Untermoduln von E beziehungsweise von F und sind folglich Null oder ganz E beziehungsweise ganz F. □

Definition 8.2.2.10. Seien Ω eine Menge und M ein Ω-Modul. Eine **Kompositionsreihe von** M ist eine endliche Kette von Untermoduln

$$M = M_r \supset M_{r-1} \supset \ldots \supset M_0 = 0$$

derart, daß M_i/M_{i-1} einfach ist für $r \geq i \geq 1$. Der Modul M_i/M_{i-1} heißt dann der **i-te Subquotient** unserer Kompositionsreihe. Gegeben ein Modul M über einer Menge Ω erklären wir seine **Kompositionslänge**

$$\lambda_\Omega(M) = \lambda(M) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

als die kleinstmögliche Länge einer Kompositionsreihe von M, wenn unser Modul eine Kompositionsreihe besitzt, und setzen andernfalls $\lambda(M) = \infty$.

Beispiel 8.2.2.11. Man überlegt sich leicht, daß die Länge und die Kompositionslänge eines Vektorraums beide mit seiner Dimension zusammenfallen. Der anschließende Satz besagt unter anderem, daß das auch für allgemeine Mengenmoduln immer gilt.

Beispiel 8.2.2.12. Man überlegt sich, daß ein $\emptyset$-Modul M alias eine abelsche Gruppe genau dann endliche Länge hat, wenn sie endlich ist, und daß ihre Kompositionslänge und Länge dann beide mit der Zahl der mit ihren Vielfachheiten gezählten Primfaktoren von $|M|$ zusammenfallen.

Satz 8.2.2.13 (Jordan-Hölder). *Für jeden Modul stimmen seine Länge und seine Kompositionslänge überein. Weiter haben je zwei Kompositionsreihen eines Moduls dieselbe Länge und bis auf Reihenfolge isomorphe Subquotienten.*

8.2.2.14. Sobald der Satz bewiesen ist, wird der Begriff der „Kompositionslänge“ überflüssig und wir sprechen nur noch von der „Länge“ eines Moduls.

8.2.2.15. In Formeln ausgedrückt besagt der zweite Teil unseres Satzes: Sind $M = M_r \supset \ldots \supset M_0 = 0$ und $M = N_s \supset \ldots \supset N_0 = 0$ zwei Kompositionsreihen eines Moduls M, so gilt $r = s$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ mit $N_i/N_{i-1} \cong M_{\sigma(i)}/M_{\sigma(i)-1}$ für alle i. Diese Subquotienten oder genauer ihre Isomorphieklassen heißen die **Kompositionsfaktoren** unseres Moduls endlicher Länge M und unser Satz sagt auch, daß jeder Kompositionsfaktor mit einer wohlbestimmten Vielfachheit auftritt. Gegeben ein einfacher Modul L notiert man die Vielfachheit von L als Kompositionsfaktor von M meist

$$[M : L]$$

Beispiel 8.2.2.16. Im Fall einer abelschen Gruppe M haben wir $[M : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})] = \max\{r \mid p^r \text{ teilt } |M|\}$.

Beweis. Die erste Aussage unseres Satzes behauptet in Formeln $\mathrm{l}(M) = \lambda(M)$. Offensichtlich ist a priori nur die Abschätzung $\mathrm{l}(M) \geq \lambda(M)$. Als nächstes zeigen wir nun, daß für jeden Modul M endlicher Kompositionslänge und jeden von Null verschiedenen Untermodul $0 \neq N \subset M$ gilt

$$\lambda(M/N) < \lambda(M)$$

Seien in der Tat $M = M_r \supset \ldots \supset M_0 = 0$ eine Kompositionsreihe von M und $N \subset M$ ein Untermodul. Wir betrachten den Quotienten $\bar{M} := M/N$ und die Bilder $\bar{M}_i$ der M_i in $\bar{M}$ und erhalten kurze exakte Sequenzen

$$(M_i \cap N)/(M_{i-1} \cap N) \hookrightarrow M_i/M_{i-1} \twoheadrightarrow \bar{M}_i/\bar{M}_{i-1}$$

durch explizites Nachdenken: Geht ein Element $m + M_{i-1}$ aus der Mitte rechts nach Null, landet es also in $\bar{M}_{i-1}$, so muß es aus $N + M_{i-1}$ stammen und sich folglich mit $m \in M_i \cap N$ darstellen lassen. Alternativ mag man das Neunerlemma 4.4.7.5 auf das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
M_{i-1} \cap N & \hookrightarrow & M_i \cap N & \twoheadrightarrow & (M_i \cap N)/(M_{i-1} \cap N) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
M_{i-1} & \hookrightarrow & M_i & \twoheadrightarrow & M_i/M_{i-1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\bar{M}_{i-1} & \hookrightarrow & \bar{M}_i & \twoheadrightarrow & \bar{M}_i/\bar{M}_{i-1}
\end{array}$$

anwenden. Gilt zusätzlich $N \neq 0$, so kann nicht $M_i \cap N = M_{i-1} \cap N$ gelten für alle i. Zu jeder Kompositionsreihe von M haben wir also eine echt kürzere Kompositionsreihe von $\bar{M} = M/N$ konstruiert und erkennen damit, daß in der Tat aus $\lambda(M) < \infty$ und $N \neq 0$ folgt $\lambda(M/N) < \lambda(M)$. Man sieht so, daß die Länge einer beliebigen echt absteigenden Kette von Untermoduln eines Moduls endlicher Kompositionslänge M nach oben beschränkt ist durch eben diese Kompositionslänge $\lambda(M)$ und folgert sofort $\mathrm{l}(M) \leq \lambda(M)$. Im Fall $\lambda(M) = \infty$ ist das eh klar und so ergibt sich schließlich für jeden Modul M die Gleichheit

$$\mathrm{l}(M) = \lambda(M)$$

Daß je zwei Kompositionsreihen dieselbe Länge haben, folgt sofort. Ist weiter $N \subset M$ ein einfacher Untermodul, so gibt es oben genau einen Index j mit

$$M_j \cap N = N \text{ aber } M_{j-1} \cap N = 0$$

Für diesen Index haben wir $M_j/M_{j-1} \cong N$ und $\bar{M}_j/\bar{M}_{j-1} = 0$, wohingegen für die anderen Indizes $i \neq j$ gilt $M_i/M_{i-1} \cong \bar{M}_i/\bar{M}_{i-1}$. Nun folgt der Rest des Satzes mit Induktion. □

Korollar 8.2.2.17 (Längenformel). *Gegeben $M \supset N$ ein Modul mit einem Untermodul gilt in $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ die Gleichheit $\mathrm{l}(M) = \mathrm{l}(M/N) + \mathrm{l}(N)$.*

Beweis. Für jeden Untermodul $N \subset M$ sind die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{l}(M) &\geq \mathrm{l}(M/N) + \mathrm{l}(N) \\ \lambda(M) &\leq \lambda(M/N) + \lambda(N) \end{aligned}$$

offensichtlich. Da nach dem Satz 8.2.2.13 von Jordan-Hölder aber die Länge und die Kompositionslänge übereinstimmen, folgt die Behauptung. □

Ergänzung 8.2.2.18. Eine Variante zum hier gewählten Zugang zu Jordan-Hölder findet man in [JS06]: Man zeigt wie dort ausgeführt ohne große Schwierigkeiten, daß je zwei endliche Filtrierungen eines Moduls durch das Einfügen geeigneter weiterer Untermoduln so verfeinert werden können, daß die Subquotienten der beiden so enstehenden Filtrierungen bis auf Reihenfolge und Isomorphismen dieselben sind.

8.2.2.19. Der Schnitt über ein beliebiges System von Untermoduln eines Moduls ist wieder ein Untermodul. Gegeben ein Ω-Modul M und eine Teilmenge $T \subset M$ gibt es also einen kleinsten Untermodul $U \subset M$, der T umfaßt. Wir notieren ihn

$$\langle T \rangle_\Omega := U$$

und nennen ihn den **von T erzeugten Untermodul**. Er kann explizit beschrieben werden als die von allen $\omega_r \ldots \omega_1 m$ für $r \geq 0$ und $\omega_i \in \Omega$ und $m \in M$ erzeugte abelsche Untergruppe. Ein Modul heißt **endlich erzeugt**, wenn er von einer endlichen Teilmenge erzeugt wird. Er heißt **zyklisch**, wenn er von einer einelementigen Teilmenge erzeugt wird.

Beispiel 8.2.2.20. Jeder Modul endlicher Länge ist endlich erzeugt. Um ein endliches Erzeugendensystem anzugeben, können wir etwa eine Kompositionsreihe $M = M_r \supset M_{r-1} \supset \ldots \supset M_0 = 0$ wählen und Elemente $m_i \in M_i \backslash M_{i-1}$ und dann ist $\{m_1, \ldots, m_r\}$ offensichtlich ein Erzeugendensystem. Jeder einfache Modul ist zyklisch und jedes von Null verschiedene Element ist darin ein Erzeuger.

Definition 8.2.2.21. Ein Modul heißt **noethersch** nach der Mathematikerin Emmy Noether, wenn jeder Untermodul endlich erzeugt ist.

8.2.2.22. Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe alias jeder $\emptyset$-Modul ist noethersch nach 7.1.4.10. Wir wiederholen den Beweis hier nicht.

8.2.2.23 (**Charakterisierungen noetherscher Moduln**). Die Vereinigung über ein nicht leeres total geordnetes System von Untermoduln eines Moduls ist wieder ein Untermodul. Die beiden alternativen Charakterisierungen noetherscher Moduln aus 7.1.4.13 gelten mit demselben Beweis auch für Mengenmoduln. Ein Modul ist also noethersch genau dann, wenn jedes nichtleere System von Untermoduln ein maximales Element hat genau dann, wenn jede aufsteigende Folge von Untermoduln stagniert. Man sagt dann auch, unser Modul „erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung“.

Definition 8.2.2.24. Ein Modul heißt **artinsch** nach dem Mathematiker Emil Artin, wenn jede absteigende Folge von Untermoduln stationär wird. Man sagt dann auch, unser Modul „erfüllt die absteigende Kettenbedingung“.

Ergänzung 8.2.2.25. Auf Englisch spricht man von der **descending chain condition** oder kurz **dcc** oder auch von **artinian modules**. Darin liegt eine gewisse Ironie der Geschichte: Emil Artin war nämlich armenischen Ursprungs und seine Familie hatte ihren Familiennamen Artinian zu Artin eingedeutscht.

Beispiele 8.2.2.26. Der $\emptyset$-Modul $\mathbb{Z}$ besitzt keinen einfachen Untermodul. Der $\emptyset$-Modul $\mathbb{Q}$ besitzt als $\emptyset$-Modul weder einfache Untermoduln noch einfache Quotienten. Als $\mathbb{Q}$-Modul ist $\mathbb{Q}$ dahingegen einfach.

Übungen

Übung 8.2.2.27. Ein Modul, der sowohl artinsch als auch noethersch ist, ist von endlicher Länge. Hinweis: Man interessiere sich für maximale Untermoduln endlicher Länge.

Übung 8.2.2.28. Der Quotient eines Moduls nach einem maximalen echten Untermodul ist stets ein einfacher Modul.

Übung 8.2.2.29. Jeder endlich erzeugte und von Null verschiedene Modul besitzt einen einfachen Quotienten.

Ergänzende Übung 8.2.2.30. Man zeige, daß jeder Modul endlicher Länge artinsch ist. Ein Beispiel für einen artinschen $\emptyset$-Modul unendlicher Länge ist der Quotient $\mathbb{Z}[2^{-1}]/\mathbb{Z}$.

8.2.3 Halbeinfache Moduln

Definition 8.2.3.1. Ein Modul heißt **halbeinfach**, wenn er die Summe seiner einfachen Untermoduln ist.

8.2.3.2. Wir fordern bei der Definition nicht, daß unser Modul die direkte Summe seiner einfachen Untermoduln sein soll. Zum Beispiel ist jeder Vektorraum über einem Körper halbeinfach, er ist ja die Summe seiner eindimensionalen Teilräume, aber im Fall einer Dimension Zwei oder mehr natürlich nicht deren direkte Summe. Der Nullmodul ist stets halbeinfach als die Summe über die leere Familie seiner einfachen Untermoduln.

8.2.3.3. Zwei Untermoduln $U, D \subset M$ eines Moduls heißen **komplementär** und wir schreiben $M = U \oplus D$, wenn die Addition einen Isomorphismus $U \oplus D \xrightarrow{\sim} M$ liefert. Hinreichend und notwendig ist dafür, daß gilt $U \cap D = 0$ und $U + D = M$. Wir sagen in dem Fall auch, M sei die **direkte Summe** von U und D und D sei ein **Komplement** von U in M. Analoge Begriffsbildungen benutzen wir auch für beliebige Familien von Untermoduln eines Moduls.

Proposition 8.2.3.4 (**Charakterisierung halbeinfacher Moduln**). *Seien Ω eine Menge und M ein Ω-Modul. So sind gleichbedeutend:*

1. *M ist halbeinfach alias die Summe seiner einfachen Untermoduln;*
2. *M ist eine direkte Summe von einfachen Untermoduln;*
3. *Jeder Untermodul von M besitzt ein Komplement in M.*

Beweis. 2⇒1: Das ist klar.

1⇒3: Sei $M = \sum_{i \in I} M_i$ das Erzeugnis einer Familie von einfachen Untermoduln $M_i \subset M$ und sei $U \subset M$ der Untermodul, für den wir ein Komplement suchen. Gegeben $J \subset I$ setzen wir

$$M_J := \sum_{i \in J} M_i$$

Ist I endlich, so finden wir natürlich unter allen Teilmengen $J \subset I$ mit $M_J \cap U = 0$ eine bezüglich Inklusion maximale Teilmenge. Ist I unendlich, so folgt die Existenz eines solchen maximalen J mit dem Zorn'schen Lemma. In jedem Fall behaupten wir für solch ein maximales J, daß gilt $M_J \oplus U = M$. In der Tat, aus $M_J + U \neq M$ folgt, daß es ein $i \in I$ gibt mit $M_i \not\subset (M_J + U)$, also $M_i \cap (M_J + U) = 0$ da M_i einfach ist. Dann folgt aber $(M_i + M_J) \cap U = 0$ und J war nicht maximal.

3⇒2: Wir bemerken zunächst, daß sich die Eigenschaft 3 auf Untermoduln vererbt: Sind nämlich $U \subset N \subset M$ Untermoduln und ist V ein Komplement von U in M, so ist notwendig $V \cap N$ ein Komplement von U in N. Jetzt finden wir mithilfe des Zorn'schen Lemmas eine maximale Menge von einfachen Untermoduln derart, daß ihre Summe in M direkt ist. Wäre diese Summe S nicht ganz M, so fänden wir ein von Null verschiedenes Komplement D von S in M. In diesem Komplement D gäbe es einen von Null verschiedenen zyklischen Untermodul $Z \subset D$, und der hätte nach Übung 8.2.2.29 seinerseits einen einfachen Quotienten $Z \twoheadrightarrow Q$. Nun hat diese Surjektion einen Kern $K \subset Z$ und dieser Kern hat ein Komplement $E \subset Z$ und wegen $E \cong Q$ ist E einfach. Das aber steht im Widerspruch zur Maximalität von S. □

Ergänzung 8.2.3.5. Beim Nachweis der Implikation 1⇒3 im vorhergehenden Beweis hätten wir auch gleich mit der Familie aller einfachen Untermoduln arbeiten können. Ich hoffe jedoch, daß man anhand des oben gegebenen Arguments besser nachvollziehen kann, in welchen Fällen das Zorn'sche Lemma benötigt wird.

Korollar 8.2.3.6. *Jeder Quotient und jeder Untermodul eines halbeinfachen Moduls ist halbeinfach.*

Beweis. Natürlich ist jeder Quotient eine Summe einfacher Untermoduln und ist damit halbeinfach nach 8.2.3.4. Weiter besitzt nach 8.2.3.4 jeder Untermodul ein Komplement und ist damit auch isomorph zu einem Quotienten unseres Moduls, nämlich zu dem Quotienten nach besagtem Komplement. Alternativ kann man sich daran erinnern, daß wir beim Beweis von 3⇒1 in 8.2.3.4 bereits gezeigt hatten, daß sich die Eigenschaft 3 auf Untermoduln vererbt. □

Definition 8.2.3.7. Seien Ω eine Menge und M ein Ω-Modul. Gegeben ein einfacher Ω-Modul E nennen wir die Summe aller zu E isomorphen Untermoduln von M den E**-isotypischen Anteil von** M und notieren diesen Untermodul

$$M_E \subset M$$

Satz 8.2.3.8 (**Zerlegung in isotypische Anteile**). *Gegeben eine Menge Ω und ein Ω-Modul M liefert die Einbettung der isotypischen Anteile eine Einbettung ihrer*

direkten Summe

$$\bigoplus_{E\in\operatorname{irr}(\Omega)} M_E \hookrightarrow M$$

mit der Notation $\operatorname{irr}(\Omega)$ *für die Menge der Isomorphieklassen einfacher* Ω*-Moduln.*

8.2.3.9. Das Bild dieser Einbettung ist offensichtlich der größte halbeinfache Untermodul von M. Er heißt der **Sockel** $\operatorname{soc} M$ von M. Insbesondere zerfällt jeder halbeinfache Modul in die direkte Summe seiner isotypischen Anteile, die in diesem Fall auch seine **isotypischen Komponenten** heißen.

Beweis. Daß das Bild unserer Abbildung der größte halbeinfache Untermodul ist, scheint mir klar. Es muß also nur noch gezeigt werden, daß die Summe der isotypischen Komponenten direkt ist. Nach 7.2.1.11 reicht es also zu zeigen, daß für alle E gilt

$$M_E \cap \sum_{F\neq E} M_F = 0$$

Dazu hinwiederum brauchen wir nur zu zeigen, daß jeder einfache Untermodul einer Summe von einfachen Untermoduln zu einem der Summanden isomorph ist. Da aber besagte Summe halbeinfach ist, ist unser einfacher Untermodul auch ein Quotient dieser Summe und damit notwendig auch ein Quotient eines Summanden und folglich isomorph zu diesem Summanden. □

Proposition 8.2.3.10 (**Beschreibung isotypischer Komponenten**). *Gegeben eine Menge* Ω *und ein einfacher* Ω*-Modul* E *bezeichne* $S := \operatorname{End}_\Omega E$ *seinen Endomorphismenschiefkörper. So liefert für jeden weiteren* Ω*-Modul* M *das Einsetzen einen Isomorphismus von* Ω*-Moduln*

$$\operatorname{Hom}_\Omega(E, M) \otimes_S E \xrightarrow{\sim} M_E$$

Beweis. Offensichtlich liefert die Einbettung unserer isotypischen Komponente einen Isomorphismus $\operatorname{Hom}_\Omega(E, M_E) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_\Omega(E, M)$. Wir dürfen also $M = M_E$ annehmen und dann auch, daß $M = \bigoplus_{i\in I} E$ eine direkte Summe von Kopien von E ist. Ein Homomorphismus $E \to \prod_{i\in I} E$ ist nun ein I-Tupel von Homomorphismen $E \to E$ und landet offensichtlich genau dann in $\bigoplus_{i\in I} E \subset \prod_{i\in I} E$, wenn in diesem Tupel von Homomorphismen fast alle Einträge die Nullabbildung sind. So sehen wir, daß die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} \operatorname{Hom}_\Omega(E, E) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_\Omega(E, \bigoplus_{i\in I} E)$$

induziert. Da das Tensorprodukt mit direkten Summen vertauscht, folgt die Behauptung. □

8.2.4 Halbeinfachkeit und externes Tensorieren

Proposition 8.2.4.1 (**Halbeinfache Moduln als Modulkategorie**). *Gegeben eine Menge Ω und ein einfacher Ω-Modul E mit Endomorphismenschiefkörper $S := \mathrm{End}_\Omega E$ induziert das Darantensorieren eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\otimes_S E : \mathrm{Mod}\text{-}\, S \xrightarrow{\approx} \Omega\text{-}\mathrm{Mod}_{(E)}$$

zwischen der Kategorie der S-Rechtsmoduln und der Kategorie der Ω-Moduln M mit $M = M_E$.

8.2.4.2. Damit diese Aussage sinnvoll wird, muß man sich ein Universum dazudenken. Alternativ kann man sich die Aussage dahingehend präzisiert denken, daß mit dem im Beweis angegebenen adjungierten Funktor in die Gegenrichtung die Einheit ebenso wie die Koeinheit der Adjunktion aus Isomorphismen bestehen.

Beweis. Wir betrachten den rechtsadjungierten Funktor $\mathrm{Hom}_\Omega(E,\ )$ und wissen aus 8.2.3.10, daß die Koeinheit der Adjunktion für alle $M \in \Omega\text{-}\mathrm{Mod}_{(E)}$ ein Isomorphismus $\mathrm{Hom}_\Omega(E, M) \otimes_S E \xrightarrow{\sim} M$ ist. Ebenso ist für jeden S-Rechtsmodul N die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus $N \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Omega(E, N \otimes_S E)$, denn das gilt für $N = S$ und beide Seiten sind verträglich mit Koprodukten. Die Behauptung folgt. □

8.2.4.3 (**Äquivalenzen mit Operationen**). Gegeben eine Menge Ω und ein einfacher Ω-Modul E und $S := \mathrm{End}_\Omega E$ sein Endomorphismenschiefkörper und eine weitere Menge Θ liefert die Äquivalenz aus 8.2.4.1 offensichtlich auch eine Äquivalenz

$$\otimes_S E : \Theta\text{-}(\mathrm{Mod}\text{-}\, S) \xrightarrow{\approx} \Theta\text{-}(\Omega\text{-}\mathrm{Mod}_{(E)})$$

zwischen den Kategorien der jeweiligen Objekte mit Θ-Operation. Ist zusätzlich Θ ein Ring, so induziert sie auch eine Äquivalenz zwischen den jeweiligen Unterkategorien der Objekte, die sogar Ringmoduln sind in Bezug auf Θ.

Proposition 8.2.4.4 (**Externe Tensorprodukte mit einfachen Moduln**). *Gegeben eine Menge Ω, ein Kring k, ein einfacher Ω-k-Modul E mit Endomorphismenschiefkörper $S := \mathrm{End}_{\Omega,k} E$ und eine k-Ringalgebra B liefert das Tensorprodukt eine Äquivalenz*

$$\otimes_S E : \mathrm{Mod}\text{-}(S \otimes_k B) \xrightarrow{\approx} \Omega\text{-}\mathrm{Mod}_{(\mathrm{E})}\text{-}\, B$$

zur Kategorie derjenigen Ω-B-Moduln, deren Restriktion zu (Ω, k) isomorph ist zu einer Summe von Kopien von E.

8.2.4.5. Gegeben ein B-Rechtsmodul M ist insbesondere $E \otimes_k M$ einfach beziehungsweise halbeinfach als Ω-B-Modul genau dann, wenn $S \otimes_k M$ einfach beziehungsweise halbeinfach ist als $S \otimes_k B$-Rechtsmodul. Der Fall $S = k$ war Übung 8.3.1.11.

Beweis. Gegeben eine Menge Ω und ein Kring k und ein einfacher Ω-k-Modul E und $S := \operatorname{End}_{\Omega,k} E$ sein Endomorphismenschiefkörper mit dem offensichtlichen Ringhomomorphismus $k \to \mathrm{Z}(S)$ ist die Äquivalenz

$$\otimes_S E : \text{Mod-}\, S \xrightarrow{\approx} \Omega\text{-Mod-}_{(E)}\, k$$

von vorher offensichtlich verträglich mit den natürlichen k-Modulstrukturen auf den Morphismenräumen. Ist zusätzlich A eine k-Ringalgebra, so induziert unsere Äquivalenz folglich eine Äquivalenz zwischen den Kategorien der A-Moduln auf beiden Seiten, deren Objekte wir erklären als Paare (X, φ) aus einem Objekt X der jeweiligen Kategorie mit einem Homomorphismus $\varphi : A \to \operatorname{End} X$ von k-Ringalgebren. Wir notieren diese Äquivalenz

$$\otimes_S E : A\text{-}(\text{Mod-}\, S) \xrightarrow{\approx} A\text{-}(\Omega\text{-}\, k\text{-Mod}_{(E)})$$

Mit $B := A^{\mathrm{opp}}$ erhalten wir die Äquivalenz aus der Proposition. □

Korollar 8.2.4.6 (**Skalarerweiterung bei einfachen Mengenmoduln**). *Gegeben eine Körpererweiterung K/k und eine Menge Ω und ein einfacher (Ω, k)-Modul E mit Endomorphismenring k ist $K \otimes_k E$ ein einfacher (Ω, K)-Modul mit Endomorphismenring K.*

8.2.4.7 (**Tensorprodukte von Körpern und Schiefkörpern**). Die Resultate dieses Abschnitts liefern besonders interessante Aussagen, wenn man mehr über Tensorprodukte von Körpern und Schiefkörpern weiß. Ich zitiere hierzu insbesondere 6.6.1.2, daß und wie gegeben T/k eine Körpererweiterung und S/k eine endliche separable Körpererweiterung das Tensorprodukt $T \otimes_k S$ ein Produkt von endlich vielen endlichen separablen Körpererweiterungen von T ist. Weiter wird in 8.3.6.13 unter anderem gezeigt, daß in Charakteristik Null das Tensorprodukt über einem Körper k zweier Schiefkörper, die endlichdimensionale k-Ringalgebren sind, zumindest eine halbeinfache k-Ringalgebra ist, also ein endliches Produkt von Matrixringen über Schiefkörpern.

Satz 8.2.4.8 (**Externes Tensorieren einfacher Moduln**). *Gegeben ein Körper k und Mengen Ω, Θ und darüber einfache k-Mengenmoduln E, F mit Endomorphismenschiefkörpern S, T liefert das Tensorieren eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\otimes_{(T \otimes_k S)}(F \otimes_k E) : \text{Mod-}(T \otimes_k S) \xrightarrow{\approx} \text{Mod-}(\Theta, \Omega, k)_{(F,E)}$$

zur Kategorie aller k-Vektorräume mit kommutierenden Operationen von Θ und Ω derart, daß die Restriktion zu (k, Ω) beziehungsweise (k, Θ) isomorph ist zu einer Summe von Kopien von E beziehungsweise F.

Beweis. Wir arbeiten mit dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Mod}\text{-}(T \otimes_k S) \arrow[dl, "\approx"'] \arrow[dr, "\approx"] & \\
\mathrm{Mod}\text{-}(\Theta, S)_{(F)} \arrow[rr, Rightarrow, "\sim"] \arrow[dr, "\approx"] & & \mathrm{Mod}\text{-}(T, \Omega)_{(E)} \arrow[dl, "\approx"'] \\
 & \mathrm{Mod}\text{-}(\Theta, k, \Omega)_{(F,E)} \arrow[d, hook] & \\
 & \mathrm{Mod}\text{-}(\Theta, k, \Omega) &
\end{tikzcd}$$

Hier meint $\mathrm{Mod}\text{-}(\Theta, S)_{(F)}$ die Kategorie derjenigen Θ-S-Rechtsmoduln, die als Θ-k-Moduln isomorph sind zu einer Summe von Kopien von F. Wir wissen bereits aus 8.2.4.4, daß $\otimes_T F$ eine Äquivalenz von Kategorien induziert wie der Pfeil oben links andeutet. Ebenso liefert $\otimes_S E$ die Äquivalenz oben rechts. Daß $\otimes_S E$ einen volltreuen Funktor von links nach ganz unten induziert, wissen wir bereits aus 8.2.4.1. Analog induziert $\otimes_T F$ einen volltreuen Funktor von rechts nach ganz unten und eine Isotransformation zwischen beiden verknüpften Funktoren von oben nach unten ist auch schnell angegeben. Nun ist T ein Schiefkörper und $\otimes_T F$ gefolgt vom Vergessen der Θ-Operation bildet offensichtlich $\mathrm{Mod}\text{-}(T, \Omega)_{(E)}$ nach $\mathrm{Mod}\text{-}(k, \Omega)_{(E)}$ ab. Dasselbe gilt auf der anderen Seite und so landen unsere unteren Funktoren in der Tat in $\mathrm{Mod}\text{-}(\Theta, k, \Omega)_{(F,E)}$ wie behauptet. Ausführlicher haben wir nach 8.2.4.1 eine Äquivalenz

$$\otimes_T F : \mathrm{Mod}\text{-}(T, \Omega) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Mod}\text{-}(\Theta, k, \Omega)_{(F)}$$

und offensichtlich bildet $\otimes_T F$ ein Objekt genau dann nach $\mathrm{Mod}\text{-}(\Theta, k, \Omega)_{(F,E)}$ ab, wenn es zu $\mathrm{Mod}\text{-}(T, \Omega)_{(E)}$ gehört. Folglich induziert unsere Äquivalenz auch eine Äquivalenz

$$\otimes_T F : \mathrm{Mod}\text{-}(T, \Omega)_{(E)} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Mod}\text{-}(\Theta, k, \Omega)_{(F,E)} \qquad \square$$

Korollar 8.2.4.9 (Externe Tensorprodukte einfacher Moduln). *Gegeben k ein Körper und Ω, Θ Mengen und E, F jeweils ein einfacher k-Mengenmodul und S, T deren Endomorphismenschiefkörper gilt:*

1. *Genau dann ist $F \otimes_k E$ einfach, wenn $S \otimes_k T$ ein Schiefkörper ist;*

2. *Genau dann ist $F \otimes_k E$ halbeinfach, wenn $S \otimes_k T$ ein halbeinfacher $S \otimes_k T$-Rechtsmodul ist.*

8.2.4.10. Das kann man auch bei Bourbaki [Bou12] nachlesen, der im wesentlichen denselben Beweis gibt, aber die Sprache der Kategorientheorie vermeidet.

Beweis. Wir erinnern unsere Äquivalenz 8.2.4.8. Nach diesem Satz ist $F \otimes_k E$ genau dann einfach, wenn $S \otimes_k T$ ein einfacher $S \otimes_k T$-Rechtsmodul ist, und genau dann halbeinfach, wenn $S \otimes_k T$ ein halbeinfacher $S \otimes_k T$-Rechtsmodul ist. □

Übungen

Übung 8.2.4.11. Gegeben $m \geq 1$ ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ein halbeinfacher $\emptyset$-Modul alias eine halbeinfache abelsche Gruppe genau dann, wenn kein Primfaktor in m mehrfach vorkommt.

Übung 8.2.4.12. Ein $\mathbb{C}[X]$-Ringmodul M ist halbeinfach genau dann, wenn der durch Multiplikation mit X gegebene Endomorphismus des $\mathbb{C}$-Vektorraums M diagonalisierbar ist, als da heißt, wenn M eine Basis aus Eigenvektoren besitzt. Dasselbe gilt im Fall von $k[X]$-Ringmoduln für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper k. Hinweis: 7.4.7.27. Ist k ein vollkommener Körper und $\bar{k}$ ein algebraischer Abschluß, so ist ein $k[X]$-Ringmodul halbeinfach genau dann, wenn der durch Erweiterung der Skalare entstehende $\bar{k}[X]$-Modul halbeinfach ist. Ist k nicht vollkommen, so gilt das nicht mehr.

Übung 8.2.4.13. Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : M \to N$ von Ω-Moduln und E ein einfacher Ω-Modul bildet φ den entsprechenden isotypischen Anteil in den entsprechenden isotypischen Anteil ab, in Formeln $\varphi(M_E) \subset N_E$. Ist $U \subset M$ ein Untermodul, so haben wir sogar $U_E = U \cap M_E$.

Übung 8.2.4.14. Eine Sequenz $M' \to M \to M''$ von halbeinfachen Moduln ist exakt genau dann, wenn für alle einfachen Moduln die induzierte Sequenz $M'_E \to M_E \to M''_E$ exakt ist.

Übung 8.2.4.15. Man gebe eine halbeinfache abelsche Gruppe mit genau tausend Elementen an.

Übung 8.2.4.16. Man bestimme die isotypischen Komponenten der abelschen Gruppe $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$.

Übung 8.2.4.17. Man erkläre, inwiefern die Zerlegung eines halbeinfachen Moduls in isotypische Komponenten die Eigenraumzerlegung eines Vektorraums unter einem diagonalisierbaren Endomorphismus verallgemeinert. Hinweis: 8.2.4.12.

8.2.5 Mengenmoduln und Körpererweiterungen

Lemma 8.2.5.1 (Skalarerweiterung und Homomorphismen). *Seien Ω eine Menge und k ein Körper und K eine k-Ringalgebra. Seien Ω-k-Moduln M, N gegeben mit $\dim_k \operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M,N) < \infty$. So ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus*

$$K \otimes_k \operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M,N) \tilde{\to} \operatorname{Hom}_{K,\Omega}(K \otimes_k M, K \otimes_k N)$$

8.2.5.2. Unter einer der Annahmen $\dim_k K < \infty$ oder $\dim_k M < \infty$ gilt das auch ohne unsere Zusatzannahme $\dim_k \operatorname{Hom} < \infty$, vergleiche 4.6.1.42. Ich habe die Aussage in der hier gegebenen Allgemeinheit nicht in der Literatur gefunden.

Beweis. Die Erweiterung der Skalare liefert einen Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M, K \otimes_k N) \tilde{\to} \operatorname{Hom}_{K,\Omega}(K \otimes_k M, K \otimes_k N)$$

Sei $(\alpha_i)_{i \in I}$ eine k-Basis von K. Bezeichne $\alpha^i : K \to k$ die Koordinatenfunktionen unserer Basis und $\tilde{\alpha}^i \in \operatorname{Hom}_{\Omega,k}(K \otimes_k N, N)$ die davon induzierten Homomorphismen. Gegeben $\psi \in \operatorname{Hom}_{\Omega,k}(M, K \otimes_k N$ gilt dann

$$\tilde{\alpha}^i \circ \psi \in \operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M,N)$$

Nun finden wir induktiv $v_1, \ldots, v_d \in M$ mit $d := \dim_k \operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M,N)$ derart, daß für $\phi \in \operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M,N)$ aus $\phi(v_1) = \ldots = \phi(v_d) = 0$ folgt $\phi = 0$. Nun kann es aber für jedes j nur höchstens endlich viele i geben mit $(\tilde{\alpha}^i \circ \psi)(v_j) \neq 0$. Also kann es überhaupt nur höchstens endlich viele i geben mit $\tilde{\alpha}^i \circ \psi \neq 0$ und dann ist ψ das Bild von $\sum \alpha_i \otimes (\tilde{\alpha}^i \circ \psi)$ und unser Isomorphimus in spe ist schon mal surjektiv. Die Injektivität folgt aus 4.6.1.48. □

Proposition 8.2.5.3 (Skalarerweiterung und einfache Moduln). *Seien Ω eine Menge und K/k eine Körpererweiterung und M ein einfacher Ω-k-Modul, der außer den Skalaren keine weiteren Endomorphismen hat, in Formeln*

$$\operatorname{End}_{k,\Omega}(M) = k \operatorname{id}$$

So ist auch $K \otimes_k M$ ein einfacher Ω-K-Modul mit $\operatorname{End}_{K,\Omega}(K \otimes_k M) = K \operatorname{id}$.

Beweis. Die letzte Aussage $\operatorname{End}_{K,\Omega}(K \otimes_k M) = K \operatorname{id}$ folgt sofort aus der Verträglichkeit von Homomorphismen und Skalarerweiterungen 8.2.5.1. Es gilt damit nur noch zu zeigen, daß $K \otimes_k M$ einfach ist. Zunächst einmal ist sicher $\operatorname{res}^k_K(K \otimes_k M)$ ein halbeinfacher Ω-k-Modul, ja eine direkte Summe von Kopien von M. Jede kurze exakte Sequenz $U \hookrightarrow K \otimes_k M \twoheadrightarrow Q$ induziert also eine kurze exakte Sequenz von K-Moduln

$$\operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M,U) \hookrightarrow \operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M, K \otimes_k M) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M,Q)$$

Nun ist die Mitte eindimensional über K nach der bereits bewiesenen Teilaussage. Folglich steht rechts oder links eine Null und es folgt $U = 0$ oder $Q = 0$. □

8.3 Moduln über Ringen

8.3.1 Einfache Moduln über Ringen

8.3.1.1. Im folgenden verstehen wir unter Moduln a priori Ringmoduln.

Definition 8.3.1.2. Ein **Ring von endlicher Länge** ist ein Ring, der sowohl als Linksmodul als auch als Rechtsmodul über sich selber von endlicher Länge ist.

8.3.1.3 (**Zahl einfacher Ringmoduln**). Sei R ein Ring. Die Menge der Isomorphieklassen von einfachen R-Moduln notieren wir $\operatorname{irr}(R)$. Für jeden Ring folgt aus dem Satz von Jordan-Hölder in $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ die Abschätzung

$$|\operatorname{irr}(R)| \leq \mathrm{l}_R(R)$$

In der Tat ist jeder einfache R-Modul ein Quotient von R und tritt folglich in einer und jeder Kompositionsreihe von R als Subquotient auf.

Korollar 8.3.1.4 (**Zahl einfacher Ringmoduln und Dimension**). *Sei R ein Ring, der einen Körper k als Teilring hat. Ist R endlichdimensional als Linksmodul über k, so gibt es bis auf Isomorphismus höchstens $\dim_k R$ einfache R-Moduln, in Formeln gilt also*

$$|\operatorname{irr}(R)| \leq \dim_k R$$

Beweis. Offensichtlich gilt $|\operatorname{irr}(R)| \leq \mathrm{l}_R(R)$ und $\mathrm{l}_R(R) \leq \dim_k R$. □

Ergänzung 8.3.1.5. Jeder Ring, der als Linksmodul über sich selber artinsch ist, ist als Linksmodul über sich selber bereits von endlicher Länge. Solche Ringe heißen auch **linksartinsch**. Einen Beweis findet man zum Beispiel in [JS06].

Übungen

Übung 8.3.1.6. Ist ein Ring einfach als Linksmodul über sich selbst, so ist unser Ring ein Schiefkörper.

Übung 8.3.1.7. In jedem Ring läßt sich auch jedes echte Linksideal vergrößern zu einem maximalen echten Linksideal. Genau dann ist ein Linksideal maximal, wenn der Quotient danach ein einfacher Modul ist. Jeder von Null verschiedene Modul über einem Ring besitzt einen einfachen Subquotienten. Insbesondere besitzt jeder von Null verschiedene Ring mindestens einen einfachen Modul. Hinweis: 7.1.6.4.

Übung 8.3.1.8. Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist jeder einfache $k[X]$-Modul eindimensional und isomorph zu $k[X]/\langle X - \lambda \rangle$ für genau ein $\lambda \in k$.

Übung 8.3.1.9. Der einzige einfache Modul über dem Endomorphismenring eines endlichdimensionalen Vektorraums ist der besagte Vektorraum selber, bis auf Isomorphismus. Dasselbe gilt für endlichdimensionale Vektorräume über Schiefkörpern. Hinweis: Jordan-Hölder. Von einem höheren Standpunkt mag man das auch als Konsequenz der Morita-Äquivalenz 7.2.8.3 verstehen.

Übung 8.3.1.10 (**Isotypische Komponenten als Ideale**). Ist R ein Ring und E ein einfacher R-Modul, so ist die E-isotypische Komponente R_E von R als R-Linksmodul ein beidseitiges Ideal von R. Ist F ein weiterer einfacher R-Modul mit $E \not\cong F$, so gilt für das Produkt der isotypischen Komponenten insbesondere $R_E R_F = 0$.

Ergänzende Übung 8.3.1.11 (**Tensorprodukte einfacher Moduln**). Gegeben Ringalgebren A, B über einem Körper k und ein einfacher A-Modul E mit Endomorphismenring $\operatorname{End}_A E = k\,\mathrm{id}_E$ liefert die Vorschrift $F \mapsto E \otimes_k F$ eine Bijektion

$$\operatorname{irr}(B) \xrightarrow{\sim} \{M \in \operatorname{irr}(A \otimes_k B) \mid \operatorname{Hom}_A(E, M) \neq 0\}$$

In der Tat liefert der Funktor $F \mapsto E \otimes_k F$ sogar eine Äquivalenz von Kategorien

$$\operatorname{Mod}_B \xrightarrow{\approx} \{M \in \operatorname{Mod}_{A \otimes_k B} \mid M = M_E\}$$

zwischen der Kategorie aller B-Moduln und der Kategorie aller der $(A \otimes_k B)$-Moduln, die als A-Moduln mit ihrer E-isotypischen Komponente zusammenfallen. Um das einzusehen, erinnere man die kanonische Beschreibung isotypischer Komponenten 8.2.3.10 und prüfe, daß die Vorschrift $M \mapsto \operatorname{Hom}_A(E, M)$ einen quasiinversen Funktor liefert. Das ist im wesentlichen der Fall $S = k$ von 8.2.4.4.

Ergänzung 8.3.1.12 (**Einfache Moduln über Tensorproduktalgebren**). Im allgemeinen wird es selbst im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers $k = \bar{k}$ für k-Ringalgebren A, B auch einfache Moduln über $A \otimes_k B$ geben, die weder als A-Moduln noch als B-Moduln einfache Untermoduln besitzen und die mithin nicht von der Gestalt $E \otimes_k F$ sind. Das einfachste Beispiel, das mir einfällt, arbeitet mit den Ringen von algebraischen Differentialoperatoren $A = B = \mathbb{C}\lfloor X, \partial \rfloor = A_1$, wie sie in **??** folgende besprochen werden. Für die diagonale Einbettung $i : \Delta \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ liefert dann $i_+\mathcal{O}(\Delta)$ nach dem Einbettungssatz von Kashiwara **??** einen einfachen Modul über $A_2 \cong A_1 \otimes_{\mathbb{C}} A_1$, von dem man unschwer einsieht, daß er kein Tensorprodukt einfacher A_1-Moduln sein kann.

8.3.2 Endomorphismen einfacher Moduln

Satz 8.3.2.1. *Gegeben eine Ringalgebra R über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ und ein einfacher R-Modul E endlicher Dimension $\dim_k E < \infty$ liefert die offensichtliche Einbettung $\lambda \mapsto \lambda\,\mathrm{id}_E$ einen Isomorphismus*

$$k \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_R E$$

Beweis. Nach Annahme gilt $E \neq 0$. Jedes $\varphi \in \operatorname{Mod}_R E$ besitzt also einen Eigenwert, sagen wir λ, und der zugehörige Eigenraum ist offensichtlich ein von Null verschiedener R-Untermodul $\operatorname{Eig}(\varphi; \lambda) = \ker(\varphi - \lambda \operatorname{id})$. Wenn E einfach ist, muß dieser Untermodul schon ganz E sein und wir folgern $\varphi = \lambda \operatorname{id}_E$. □

Beispiel 8.3.2.2. Ist $k \subset L$ ein Körpererweiterung, so wird $E := L$ ein einfacher Modul über $R := L$. In diesem Fall haben wir offensichtlich $\operatorname{End}_R E = L$ und im allgemeinen kann natürlich $k \neq L$ gelten, aber eben nur dann, wenn entweder gilt $\dim_k L = \infty$ oder wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist.

Korollar 8.3.2.3 (Schur'sches Lemma). *Gegeben eine endlichdimensionale einfache Darstellung eines Monoids über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sind die Skalare ihre einzigen Endomorphismen.*

Beweis. Eine einfache Darstellung ist nichts anderes als ein einfacher Modul über dem Monoidring. Die Behauptung folgt so aus 8.3.2.1. □

Korollar 8.3.2.4. *Jede endlichdimensionale einfache Darstellung eines kommutativen Monoids über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist eindimensional.*

Beweis. Jedes Element unseres Monoids operiert in diesem Fall durch einen Endomorphismus unserer Darstellung, also nach dem Lemma von Schur durch ein Vielfaches der Identität. Dann aber ist jeder Untervektorraum bereits eine Unterdarstellung und unsere Darstellung kann nur einfach sein, wenn sie eindimensional ist. □

8.3.2.5. Die nun folgende Verallgemeinerung von 8.3.2.1 ist für die Darstellungstheorie endlicher Gruppen ohne Bedeutung. Ihr Beweis benötigt stärkere Resultate der Mengenlehre.

Satz* 8.3.2.6. *Gegeben eine Ringalgebra R über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ und ein einfacher R-Modul E, dessen Dimension als k-Vektorraum echt kleiner ist als die Kardinalität von k, liefert die offensichtliche Einbettung $\lambda \mapsto \lambda \operatorname{id}_E$ einen Isomorphismus*

$$k \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_R E$$

8.3.2.7. Insbesondere besitzt eine einfache Darstellung eines Monoids über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, deren Dimension echt kleiner ist als die Kardinalität des Körpers, außer den Skalaren keine Endomorphismen. Wie zuvor folgt auch, daß eine einfache Darstellung eines kommutativen Monoids über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, deren Dimension echt kleiner ist als die Kardinalität des Körpers, eindimensional sein muß.

Ergänzung 8.3.2.8. Der Hilbert'sche Nullstellensatz 7.1.5.10 oder auch 7.1.6.9 liefert die verwandte Aussage, daß gegeben eine ringendliche Kringalgebra R über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ jeder einfache R-Modul eindimensional ist über k.

Beweis. Das Anwenden auf ein beliebiges von Null verschiedenes Element unseres einfachen R-Moduls E liefert natürlich eine Injektion $(\mathrm{End}_R E) \hookrightarrow E$. Die Dimension des Endomorphismenrings von E über k ist folglich höchstens so groß wie die Dimension von E über k. Wäre unser Endomorphismenring echt größer als k, so müßte er den Funktionenkörper $k(X)$ umfassen, in dem die Familie der $((X-\lambda)^{-1})_{\lambda\in k}$ etwa nach 3.5.5.12 linear unabhängig ist über k. Das steht jedoch im Widerspruch zu unseren Voraussetzungen an die Kardinalitäten. □

Übungen

Ergänzende Übung 8.3.2.9. Jede einfache Darstellung einer abelschen Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, deren Dimension echt kleiner ist als die Kardinalität des Körpers, ist eindimensional.

Übung 8.3.2.10. Ist eine endlichdimensionale Ringalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ein Schiefkörper, so fällt sie mit unserem algebraisch abgeschlossenen Körper zusammen.

8.3.3 Dichtesatz und Anwendungen

Satz 8.3.3.1 (Jacobson's Dichtesatz). *Gegeben ein Ring R und ein halbeinfacher R-Modul M ist das Bild des offensichtlichen Ringhomomorphismus*

$$R \to \mathrm{End}_{(\mathrm{End}_R M)} M$$

dicht in folgendem Sinne: Gegeben $f \in \mathrm{End}_{(\mathrm{End}_R M)} M$ und endlich viele Elemente $m_1, \ldots, m_r \in M$ existiert stets ein $x \in R$ mit $xm_i = f(m_i)$ für $1 \le i \le r$.

8.3.3.2. Jeder Modul ist nach 7.1.3.12 auch ein Modul über seinem eigenen Endomorphismenring. Ist unser Modul der Ring R selber, so gilt nach 7.2.3.14 sogar ohne alle weitere Voraussetzungen und für jeden beliebigen Ring R stets $R \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{(\mathrm{End}_R R)} R$ unter der offensichtlichen Abbildung.

8.3.3.3. Gegeben eine Menge E mit Verknüpfung alias ein Magma und eine Teilmenge $T \subset E$ erklärt man den **Kommutator von T in E** durch die Formel $T' := \{x \in E \mid xt = tx \quad \forall t \in T\}$. Der Kommutator T'' des Kommutators T' von T heißt dann der **Bikommutator von** T und umfaßt natürlich T selbst, in Formeln

$$T \subset T''$$

Unser Satz sagt in dieser Terminologie, daß gegeben ein halbeinfacher Modul M über einem Ring R das Bild $D \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} M$ von $R \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} M$ in der oben ausgeführten Weise „dicht“ liegt in seinem Bikommutator $D'' \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} M$. Im übrigen fällt der „Trikommutator“ stets mit dem Kommutator zusammen, in Formeln

$$T''' = T'$$

In der Tat, $T'' \supset T$ impliziert $T''' \subset T'$ und $T''' \supset T'$ folgt durch Anwenden der Regel $S'' \supset S$ auf $S = T'$. Man mag das auch als Spezialfall unserer allgemeinen Erkenntnisse 7.1.1.12 im Zusammenhang mit Inzidenzstrukturen auffassen, angewandt auf die Inzidenzstruktur $K \subset E \times E$ bestehend aus allen kommutierenden Paaren.

8.3.3.4. Hier ein Gegenbeispiel. Man betrachte den Ring $R \subset \mathrm{Mat}(2; k)$ der oberen Dreiecksmatrizen mit Einträgen in einem Körper k und seinen Modul $M := k^2$ der Spaltenvektoren. Der Kommutator $D' \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} k^2$ von $D = R \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} k^2$ besteht nur aus Skalaren $D' = k\,\mathrm{id} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} k^2$ und sein Bikommutator ist folglich der ganze Matrixring $D'' = \mathrm{Mat}(2; k) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} k^2$. Offensichtlich liegt also D nicht dicht in D''. Zum Glück ist hier auch M kein halbeinfacher R-Modul. Dies Beispiel zeigt jedoch, daß der Dichtesatz nicht ohne Voraussetzungen gilt.

8.3.3.5. Hier kommt ein weiteres Gegenbeispiel. Man betrachte den Ring der dualen Zahlen $D := \mathbb{Z}[\varepsilon]$ mit $\varepsilon^2 = 0$ und den injektiven Endomorphismus dieses Rings mit $\varepsilon \mapsto n\varepsilon$ für $n \geq 1$. Sein Bild ist ein Teilring $R \subset D$. Betrachten wir $M := D$ als R-Modul, so gilt der Dichtesatz nicht, wie der Leser zur Übung selbst prüfen mag.

Beweis. Wir beginnen mit dem Fall $r = 1$ und betrachten zu $m = m_1$ ein Komplement N des Untermoduls $Rm \subset M$, so daß also gilt

$$M = Rm \oplus N$$

Da die Projektion $\pi : M \twoheadrightarrow Rm \hookrightarrow M$ längs unserer Zerlegung in $\mathrm{End}_R M$ liegt, und da gilt $f \circ \pi = \pi \circ f$ nach Annahme, folgt $f(m) \in Rm$. Es gibt also in anderen Worten $x \in R$ mit $f(m) = xm$. Den allgemeinen Fall führen wir auf den Fall $r = 1$ zurück, indem wir das Element $(m_1, \ldots, m_r) \in M^{\oplus r}$ betrachten und die Abbildung $f \times \ldots \times f$. Sie entspricht unter dem Isomorphismus

$$\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M^{\oplus r}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}(r; \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} M)$$

gegeben durch $\varphi \mapsto (\mathrm{pr}_j \circ \varphi \circ \mathrm{in}_i)_{ij}$ einer Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(f, \ldots, f)$ und kommutiert in der Tat mit allen Elementen von $\mathrm{End}_R(M^{\oplus r})$, da diese unter unserem Isomorphismus den Matrizen aus $\mathrm{Mat}(r; \mathrm{End}_R M)$ entsprechen. $\square$

Korollar 8.3.3.6 (Satz von Wedderburn). *Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $A \subset \mathrm{Mat}(n;k)$ eine k-Unterringalgebra derart, daß k^n einfach ist als A-Modul, so gilt bereits $A = \mathrm{Mat}(n;k)$.*

8.3.3.7. Das Beispiel des Quaterionenschiefkörpers $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$ mit seiner komplexen Vektorraumstruktur durch Multiplikation mit komplexen Skalaren von rechts und seiner offensichtlichen Struktur als Linksmodul über den Quaternionen $A = \mathbb{H}$ zeigt, daß das Korollar nicht für einen beliebigen Teilring gilt.

Beweis. Zunächst gilt $\mathrm{End}_A k^n = k$, da alle Eigenräume von Elementen $\varphi \in \mathrm{End}_A k^n$ in Bezug auf A Untermoduln sind und jeder Untermodul entweder Null ist oder ganz k^n. Dann folgt $A = \mathrm{End}_k k^n$ aus dem Dichtesatz 8.3.3.1. □

8.3.3.8. Man mag den Satz von Wedderburn auch koordinatenfrei formulieren: Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper und V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum und $A \subset \mathrm{End}_k V$ eine k-Unterringalgebra derart, daß V einfach ist als A-Modul, so gilt bereits $A = \mathrm{End}_k V$. In dieser Sprache läßt sich die Notwendigkeit der Bedingung $k = \bar{k}$ besonders gut einsehen: Sind $k \subset L$ Körper und betrachten wir den Teilring $L \subset \mathrm{End}_k L$, so ist ja L ein einfacher L-Modul, aber im Fall $k \neq L$ gilt $L \neq \mathrm{End}_k L$.

Vorschau 8.3.3.9. Aus dem Satz von Wedderburn folgt insbesondere, daß für jede einfache Darstellung V eines endlichen Monoids G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k gilt $(\dim_k V)^2 \leq |G|$. Stärkere Aussagen in dieser Richtung werden wir in 8.4.2.9 kennenlernen. Über allgemeineren Körpern gilt diese Abschätzung im allgemeinen nicht mehr, wie 8.1.1.33 zeigt.

8.3.4 Moduln über Tensorproduktalgebren

8.3.4.1. Gegeben Ringalgebren A, B über einem Kring k und Moduln M über A und N über B können wir $M \otimes_k N$ zu einem Modul über der Ringalgebra $A \otimes_k B$ machen, indem wir setzen $(a \otimes b)(m \otimes n) = am \otimes bn$. Ich schlage für diesen Modul die Notation

$$M \boxtimes N = M \boxtimes_k N$$

vor und nenne ihn das **äußere Produkt** der oder **Boxprodukt** von M und N.

8.3.4.2. Gegeben eine Ringalgebra A über einem Körper k bezeichne

$$\mathrm{irrf}_k(A)$$

die Menge aller Isomorphieklassen einfacher und über k endlichdimensionaler A-Moduln. Der Buchstabe f steht hier für „finite“ oder „fini“. Die für einen deutschen Text naheliegende Notation irre hätte zu merkwürdig ausgesehen.

Satz 8.3.4.3 (Einfache Moduln über Tensorproduktalgebren). *Gegeben Ringalgebren A, B über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ induziert das Boxprodukt eine Bijektion*

$$(\operatorname{irrf}_k A) \times (\operatorname{irrf}_k B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{irrf}_k(A \otimes_k B)$$

Beispiel 8.3.4.4. Ist k nicht algebraisch abgeschlossen, so ist das im allgemeinen falsch. Zum Beipiel ist $\mathbb{C}$ ein einfacher Modul über der $\mathbb{R}$-Ringalgebra $\mathbb{C}$, aber $\mathbb{C} \boxtimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ist kein einfacher Modul über der $\mathbb{R}$-Ringalgebra $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, denn der Kern der durch die Multiplikation gegebenen Surjektion $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ ist ein von Null verschiedener echter Untermodul.

8.3.4.5. Etwas stärkere und allgemeinere Aussagen mögen Sie bereits als Übung 8.3.1.11 gezeigt haben. Noch allgemeinere Aussagen werden in 8.2.4.8 und 8.2.4.9 gezeigt. Ein Gegenbeispiel im Fall unendlicher Dimension wird in 8.3.1.12 gegeben.

Beweis. Gegeben $E \in A\text{-Mod}$ und $F \in B\text{-Mod}$ einfach und endlichdimensional über k ist auch $E \boxtimes F \in (A \otimes B)\text{-Mod}$ einfach, da nach dem Satz von Wedderburn 8.3.3.6 die Operationen Surjektionen $A \twoheadrightarrow \operatorname{End}_k E$ und $B \twoheadrightarrow \operatorname{End}_k F$ liefern und damit auch eine Surjektion von $A \otimes B \twoheadrightarrow \operatorname{End}_k(E \otimes F)$. Die im Satz angegebene Abbildung ist also sinnvoll definiert. Ist T ein über k endlichdimensionaler $A \otimes B$-Modul, so besitzt T als A-Modul einen einfachen Untermodul $E \subset T$. Die offensichtliche Abbildung $E \boxtimes \operatorname{Hom}_A(E, T) \to T$ ist dann nach 8.3.4.6 ein injektiver $(A \otimes B)$-Homomorphismus für die Operation durch Nachschalten von B auf dem Hom-Raum. Ist T einfach, so muß diese Abbildung auch surjektiv sein und der Hom-Raum muß ein einfacher B-Modul F sein. Die im Satz angegebene Abbildung ist also surjektiv. Den Nachweis ihrer Injektivität kann der Leser ohne Mühe aus dem Nachweis der Surjektivität extrahieren. □

Lemma 8.3.4.6. *Gegeben k ein Körper und A eine k-Ringalgebra und M ein A-Modul und E ein einfacher A-Modul mit Endomorphismenring $\operatorname{End}_A E = k \operatorname{id}_E$ induziert das Auswerten eine Inklusion*

$$E \otimes_k \operatorname{Hom}_A(E, M) \hookrightarrow M$$

Beweis. Eventuell haben Sie bereits eine stärkere Aussage als Übung 8.2.3.10 gezeigt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß M eine Summe und dann auch eine direkte Summe ist von zu E isomorphen Untermoduln ist, und in diesem Fall ist das Lemma explizit klar. □

Definition 8.3.4.7. Seien A, B Ringe und M ein Modul über $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$. Man nennt (A, B) ein **duales Paar vermittels** M, wenn die offensichtlichen Abbildungen Surjektionen $B \twoheadrightarrow \operatorname{End}_A M$ sowie $A \twoheadrightarrow \operatorname{End}_B M$ liefern.

Proposition* 8.3.4.8 (Zerlegung unter dualen Paaren). *Sind zwei Ringalgebren A, B über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k ein duales Paar vermittels eines über k endlichdimensionalen $(A \otimes_k B)$-Moduls M, und ist M halbeinfach als A-Modul, so gibt es einfache und paarweise nicht isomorphe A-Moduln $E_1, \ldots, E_r$ sowie einfache und paarweise nicht isomorphe B-Moduln $F_1, \ldots, F_r$ derart, daß M unter $A \otimes_k B$ zerfällt als*

$$M \cong \bigoplus_{\nu=1}^{r} E_\nu \boxtimes_k F_\nu$$

Beweis. Mit 8.3.4.6 finden wir schon einmal eine derartige Zerlegung mit allen E_ν einfach und paarweise nicht isomorph. Dann liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $\prod_{\nu=1}^{r} \operatorname{End}_k F_\nu \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_A M$. Folglich sind die F_ν einfache Moduln für $\operatorname{End}_A M$ und damit nach Annahme für B. Damit ist M auch als B-Modul halbeinfach. Lassen wir nun dasselbe Argument andersherum laufen, so folgt zusätzlich, daß die F_ν paarweise nicht isomorph sind. □

8.3.5 Halbeinfache Ringe

Definition 8.3.5.1. Ein Ring heißt **halbeinfach**, wenn er halbeinfach ist als Linksmodul über sich selber.

8.3.5.2. Aus dem Satz über die Struktur halbeinfacher Ringe 8.3.5.4 wird folgen, daß ein Ring halbeinfach ist genau dann, wenn der opponierte Ring halbeinfach ist. In Teilen der Literatur wird aus mir unerfindlichen Gründen von einem halbeinfachen Ring zusätzlich gefordert, daß er nicht der Nullring sein darf. Der Gruppenring einer endlichen Gruppe über einem Körper oder sogar Schiefkörper, dessen Charakteristik die Gruppenordnung nicht teilt, ist halbeinfach nach dem Satz von Maschke 8.4.1.1.

Ergänzung 8.3.5.3 (**Terminologisches**). Unter einem **einfachen Ring** verstehen wir einen Ring, der nicht Null ist und außer Null und dem ganzen Ring keine weiteren zweiseitigen Ideale besitzt. Diese Terminologie ist mit der eben in 8.2.3.1 eingeführten Terminologie nicht gut verträglich, da einfache Ringe keineswegs halbeinfach als Linksmodul über sich selber zu sein brauchen. Ein einfacher Ring R ist vielmehr einfach als Modul über dem Produktring $R \times R^{\mathrm{opp}}$, dessen Operation auf R dabei durch simultane Links- und Rechtsmultiplikation zu verstehen ist. Zum Beispiel erhält man einen einfachen Ring, wenn man in $\operatorname{End}(\mathbb{C}[X])$ den Teilring betrachet, der von den Multiplikationen mit Polynomen und der Operation ∂ des Ableitens erzeugt wird. Er wird $\mathbb{C}\lfloor X, \partial \rfloor$ notiert, heißt die „Algebra der algebraischen Differentialoperatoren auf $\mathbb{C}$“ oder auch „Weyl-Algebra in einer

Veränderlichen“, und wir zeigen in **??**, daß er einfach ist. Als weiteres Beispiel erhält man auch einen einfachen Ring, wenn man den Quotienten des Endomorphismenrings eines Vektorraums abzählbarer Dimension nach dem Ideal aller Endomorphismen endlichen Ranges betrachtet, wie der Leser zur Übung selbst prüfen mag. Dieser Ring E ist jedoch als Linksmodul über sich selber mit denselben Argumenten wie in 7.2.1.9 isomorph zu $E^{\oplus 2}$, folglich kann er nach 8.3.5.4 nicht halbeinfach sein. In der Literatur wird auch oft unter einem „einfachen Ring“ das verstanden, was in der hier gewählten Terminologie als ein „halbeinfacher einfacher Ring“ zu bezeichnen ist.

Satz 8.3.5.4 (**Struktur halbeinfacher Ringe**). *1. Der Ring $\operatorname{End}_D L$ der Endomorphismen eines endlich erzeugten Moduls L über einem Schiefkörper D ist stets halbeinfach. Unter der zusätzlichen Annahme $L \neq 0$ ist er auch einfach und hat L als einzigen einfachen Modul bis auf Isomorphismus;*

2. *Jedes endliche Produkt von halbeinfachen Ringen ist halbeinfach;*

3. *Jeder halbeinfache Ring besitzt bis auf Isomorphismus nur endlich viele einfache Moduln und ist selbst eine direkte Summe von endlich vielen einfachen Links-Untermoduln alias Linksidealen;*

4. *Der opponierte Ring eines halbeinfachen Rings ist stets auch wieder halbeinfach;*

5. *Jeder einfache Modul über einem halbeinfachen Ring ist endlichdimensional als Modul über seinem Endomorphismenschiefkörper;*

6. *Ist $L_1, \ldots, L_r$ ein Vertretersystem für die Isomorphieklassen von einfachen Moduln eines halbeinfachen Rings R und sind $D_i := \operatorname{End}_R L_i$ deren Endomorphismenschiefkörper, so liefert die offensichtliche Abbildung einen Ringisomorphismus*

$$R \xrightarrow{\sim} (\operatorname{End}_{D_1} L_1) \times \ldots \times (\operatorname{End}_{D_r} L_r)$$

8.3.5.5. Man mag zur Übung zeigen, daß die Faktoren rechts unter unserem Isomorphismus den isotypischen Komponenten des R-Moduls R entsprechen.

8.3.5.6 (**Halbeinfache endlichdimensionale Ringalgebren**). Eine endlichdimensionale Ringalgebra über einem Körper ist insbesondere genau dann halbeinfach, wenn sie isomorph ist zu einem endlichen Produkt von Matrixringen in endlichdimensionalen Schiefkörpern über besagtem Körper. Eine endlichdimensionale Ringalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist damit genau dann halbeinfach, wenn sie isomorph ist zu einem endlichen Produkt von Matrixringen über besagtem Körper.

Beispiel 8.3.5.7 (**Halbeinfache endlichdimensionale reelle Ringalgebren**). Wir wissen aus 6.3.12.2, daß es bis auf Isomorphismus nur drei endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Ringalgebren gibt, die Schiefkörper sind, nämlich $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ und den Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Quaternionen. Jede halbeinfache endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Ringalgebra ist also isomorph zu einem endlichen Produkt von Matrizenringen in diesen drei $\mathbb{R}$-Ringalgebren. Ein typisches Beispiel für eine endlichdimensionale halbeinfache $\mathbb{R}$-Ringalgebra wäre etwa

$$\mathrm{Mat}(2;\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}(7;\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}(2;\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}(5;\mathbb{H})$$

Beweis. 1. Gegeben ein Schiefkörper D und $n \geq 1$ ist der Matrizenring $\mathrm{Mat}(n;D)$ einfach und halbeinfach. In der Tat sieht man leicht ein, daß das von einer beliebigen von Null verschiedenen Matrix erzeugte zweiseitige Ideal bereits der ganze Matrizenring sein muß und daß der Linksmodul D^n der Spaltenvektoren ein einfacher Modul über unserem Matrizenring ist. Der Matrizenring $\mathrm{Mat}(n;D)$ ist nun als Linksmodul über sich selber isomorph zur direkten Summe von n Kopien dieses einfachen Moduls, etwa den Untermoduln aller Matrizen, bei denen höchstens eine vorgegebene Spalte von Null verschieden ist. Folglich ist er auch halbeinfach. Da jeder einfache Modul eines Rings ein Quotient des Rings selber sein muß, zeigt die Zerlegung in isotypische Komponenten 8.2.3.8, daß D^n im Fall eines Schiefkörpers D bis auf Isomorphismus der einzige einfache Modul von $\mathrm{Mat}(n;D)$ ist.

2. Das ist klar.

3. Jeder halbeinfache Ring zerfällt in eine direkte Summe von einfachen Untermoduln. Seine Eins muß dabei wie jedes Element bereits in einer Summe von endlich vielen dieser einfachen Untermoduln liegen, und diese Summe ist dann notwendig bereits der ganze Ring. Da jeder einfache Modul Quotient unseres Rings ist und damit in einer isotypischen Zerlegung unseres Rings auftreten muß, besitzt unser Ring bis auf Isomorphismus nur endlich viele einfache Moduln.

4. Ist $L_1, \ldots, L_r$ ein Vertretersystem für die Isomorphieklassen einfacher Moduln und m_i deren jeweilige Vielfachheit im R-Modul R, so haben wir also einen Isomorphismus von R-Linksmoduln $R \cong L_1^{m_1} \oplus \ldots \oplus L_r^{m_r}$. Sind $D_i = \mathrm{End}_R L_i$ die Endomorphismenringe unserer einfachen Moduln, so erhalten wir nach 7.2.3.14 und 7.2.1.17 Ringisomorphismen

$$R^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_R R \xleftarrow{\sim} \mathrm{Mat}(m_1;D_1) \times \ldots \times \mathrm{Mat}(m_r;D_r)$$

Das Transponieren von Matrizen liefert dann auch einen Ringisomorphismus

$$R \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}(m_1;D_1^{\mathrm{opp}}) \times \ldots \times \mathrm{Mat}(m_r;D_r^{\mathrm{opp}})$$

Jeder halbeinfache Ring ist also isomorph zu einem endlichen Produkt von Ringen endlicher quadratischer Matrizen mit Einträgen in Schiefkörpern. Umgekehrt

folgt aus 1 und 2, daß alle Ringe dieser Gestalt halbeinfach sind. Insbesondere ist der opponierte Ring eines halbeinfachen Rings stets wieder halbeinfach.

5. Nach dem Vorhergehenden wissen wir bereits, daß gegeben ein Schiefkörper D und eine natürliche Zahl $m \geq 1$ jeder einfache Modul über dem Matrizenring $\mathrm{Mat}(m; D)$ isomorph ist zum Modul D^m der Spaltenmatrizen und jeder einfache Rechtsmodul isomorph zum Modul D^m der Zeilenmatrizen, dessen Endomorphismenring hinwiederum D selber ist, nun aber durch Linksmultiplikation wirkend.

6. Sicher liefert die offensichtliche Abbildung einen injektiven Homomorphismus

$$R \hookrightarrow (\mathrm{End}_{D_1} L_1) \times \ldots \times (\mathrm{End}_{D_r} L_r)$$

Teil 5 zusammen mit dem Dichtesatz zeigt, daß er ein Isomorphismus sein muß. Im Rückblick folgern wir zusätzlich $m_i = \dim_{D_i} L_i$. In Worten stimmt also die Multiplizität eines einfachen Linksideals in R überein mit seiner Dimension über dem jeweiligen Endomorphismenschiefkörper. $\square$

Übungen

Übung 8.3.5.8. Man zeige, daß jeder Linksmodul über einem halbeinfachen Ring halbeinfach ist.

Übung 8.3.5.9. Besitzt ein Ring einen endlich erzeugten halbeinfachen Modul mit verschwindendem Annulator, so ist er halbeinfach.

Ergänzende Übung 8.3.5.10. Besitzt ein einfacher Ring ein Linksideal, das als Linksmodul einfach ist, so muß unser Ring keineswegs halbeinfach sein: Der Endomorphismenring jedes Vektorraums unendlicher Dimension ist ein Gegenbeispiel.

Übung 8.3.5.11. Gegeben ein Modul über einem Schiefkörper sind die einzigen zentralen Idempotenten seines Endomorphismenrings die Null und die Identität.

Übung 8.3.5.12. Gegeben ein Schiefkörper D und ein zentraler Unterkörper $k \subset D$ und ein endlich erzeugter D-Modul L ist jeder k-lineare Ringautomorphismus $\varphi : \mathrm{End}_D(L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_D(L)$ die Konjugation mit einer Einheit $g \in (\mathrm{End}_k L)^\times$. Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $L \neq 0$ annehmen. Der mit φ zurückgezogene $\mathrm{End}_D(L)$-Modul L ist dann ebenfalls einfach als $\mathrm{End}_D(L)$-Modul und folglich isomorph zu L über k.

Übung 8.3.5.13. Gegeben ein endlich erzeugter halbeinfacher Modul M über einem Ring R zeige man, daß sein Endomorphismenring $\mathrm{End}_R M$ halbeinfach ist, daß die R-isotypischen Komponenten von M mit den $\mathrm{End}_R M$-isotypischen Komponenten von M zusammenfallen, und daß jeder einfache Modul von $\mathrm{End}_R M$ isomorph ist zu einem Untermodul von M. Wir erhalten mithin eine Injektion

$\mathrm{irr}(\mathrm{End}_R M) \hookrightarrow \mathrm{irr}(R)$, deren Bild aus allen Isomorphieklassen von einfachen R-Moduln besteht, die in M vorkommen.

Übung 8.3.5.14. Ein zentrales Idempotentes $z \in R$ eines Rings heißt **primitiv**, wenn es nicht Null ist und es keine von Null verschiedenen zentralen Idempotenten z_1, z_2 gibt mit $z_1 + z_2 = z$ aber $z_1 z_2 = 0$. Man zeige: Gegeben von Null verschiedene Vektorräume $L_1, \ldots, L_r$ über Schiefkörpern $D_1 \ldots, D_r$ sind die primitiven zentralen Idempotenten des Produktrings

$$R := (\mathrm{End}_{D_1} L_1) \times \ldots \times (\mathrm{End}_{D_r} L_r)$$

genau die Tupel mit der Identität an einer Stelle und sonst nur Nullen. Insbesondere ist in einem halbeinfachen Ring stets die Eins die Summe der primitiven zentralen Idempotenten.

Übung 8.3.5.15. Selbst in einem kommutativen aber nicht halbeinfachen Ring muß im allgemeinen die Eins keineswegs die Summe der primitiven zentralen Idempotenten sein. Man gebe ein Gegenbeispiel.

Übung 8.3.5.16. Jeder Ring $\mathrm{Mat}(n; D)$ von endlichen quadratischen Matrizen mit Koeffizienten in einem Schiefkörper D und $n \geq 1$ ist einfach, und jeder halbeinfache einfache Ring ist isomorph zu einem derartigen Matrizenring für genau ein n und einen bis auf Isomorphismus wohlbestimmten Schiefkörper D, seinen **Goldie-Schiefkörper**. Das fragliche n heißt dann der **Goldie-Rang** unseres halbeinfachen einfachen Rings.

Übung 8.3.5.17. Gegeben ein Schiefkörper D und ein endlich erzeugter D-Modul V und ein Endomorphismus $a \in E := \mathrm{End}_D V$ sind gleichbedeutend:

1. Das von a erzeugte Linksideal Ea ist ein einfacher E-Modul;
2. Das von a erzeugte Rechtsideal aE ist ein einfacher E-Rechtsmodul;
3. Unser Endomorphismus a hat den Rang Eins alias $aV \cong D$ als D-Modul;
4. Unser D-Modul V besitzt eine Basis derart, daß die Matrix von a in Bezug auf diese Basis genau einen von Null verschiedenen Eintrag hat.

Hinweis: Sind zwei Spalten unserer Matrix a linear unabhängig, so hätte Ea eine zu große Dimension. Dann beachte man, daß Zeilenrang gleich Spaltenrang auch für Matrizen mit Einträgen in Schiefkörpern gilt.

8.3.6 Spurkriterium für Halbeinfachkeit*

8.3.6.1. Sei R ein Ring. Der Schnitt $\mathrm{J}(R) = \mathrm{Jac}(R)$ aller Annullatoren einfacher R-Moduln heißt das **Jacobson-Radikal von** R.

8.3.6.2. Das Jacobsonradikal von R ist auch der Schnitt aller Annulatoren einfacher R-Rechtsmoduln, in Formeln gilt also $\mathrm{J}(R) = \mathrm{J}(R^{\mathrm{opp}})$. Um das einzusehen bemerkt man zunächst

$$\mathrm{J}(R) = \{x \in R \mid 1 - rx \text{ besitzt für alle } r \in R \text{ ein Linksinverses}\}.$$

In der Tat finden wir für $x \notin \mathrm{J}(R)$ einen einfachen R-Modul E und $e \in E$ mit $xe \neq 0$ und insbesondere $e \neq 0$ und dann ein $r \in R$ mit $rxe = e$ alias $(1-rx)e = 0$ und dann kann $(1-rx)$ kein Linksinverses haben. Gibt es umgekehrt $r \in R$ so daß $(1 - rx)$ kein Linksinverses hat, so liegt es in einem maximalen Linksideal, annulliert also einen einfachen R-Linksmodul E und dann kann rx und a forteriori x nicht zum Annulator von E gehören. Nun folgern wir stärker

$$\mathrm{J}(R) = \{x \in R \mid 1 - rxs \text{ ist für alle } r, s \in R \text{ invertierbar}\}.$$

Die Inklusion $\supset$ ist hier eh klar. Andererseits impliziert $x \in \mathrm{J}(R)$ bereits $xs \in \mathrm{J}(R)$ für alle $s \in R$ und es gibt folglich u mit $u(1 - rxs) = 1$ alias $1 + urxs = u$. Andererseits gibt es dann auch v mit $v(1 + urxs) = 1 = vu$. Aus $vu = 1$ und $ua = 1$ folgt aber direkt $v = a$ und so die Invertierbarkeit von a.

Proposition 8.3.6.3 (**Lemma von Nakayama**). *Gegeben ein Ring R und ein endlich erzeugter R-Modul M mit $\mathrm{J}(R)M = M$ gilt $M = 0$.*

8.3.6.4. Im Fall kommutativer Ringe kann man nach Matsumura eine stärkere Aussage 7.4.6.2 sogar ohne Verwendung des Zorn'schen Lemmas zeigen, die man dann auch das „Lemma von Nakayama“ nennt. Wenn ich die Unterscheidung betonen will, nenne ich sie das **kommutative Nakayamalemma** und nenne die hier bewiesene Aussage 8.3.6.3 das **nichtkommutative Nakayamalemma**.

Beweis. Wäre $M \neq 0$, so gäbe es nach 8.2.2.8 einen Untermodul $N \subset M$ mit M/N einfach und folglich $\mathrm{J}(R)(M/N) = 0$ alias $\mathrm{J}(R)M \subset N$ und a forteriori $\mathrm{J}(R)M \neq M$. □

8.3.6.5 (**Jacobsonradikal eines Rings endlicher Länge**). Sei R ein Ring, der von endlicher Länge ist als Linksmodul über sich selber. So ist $\mathrm{J}(R)$ offensichtlich ein nilpotentes zweiseitiges Ideal, in Formeln $\mathrm{J}(R)^n = 0$ für $n \gg 0$, ja für $n \geq l_R(R)$. Umgekehrt muß jedes Linksideal J, das aus nilpotenten Elementen besteht, jeden einfachen Modul annullieren, denn aus $JL \neq 0$ folgt erst die Existenz von $x \in J$ und $m \in L$ mit $xm \neq 0$ und dann die Existenz von $r \in R$ mit $(rx)m = m$ im Widerspruch zu $(rx) \in J$. Mithin ist in diesem Fall $\mathrm{J}(R)$ daß größte Linksideal von R, das aus nilpotenten Elementen besteht.

8.3.6.6 (**Ringe endlicher Länge mit Jacobsonradikal Null**). Ein Ring R, der von endlicher Länge ist als Linksmodul über sich selber und dessen Jacobsonradikal verschwindet, muß halbeinfach sein. In der Tat findet man dann Elemente einfacher Moduln $m_1 \in L_1, \ldots, m_t \in L_t$ derart, daß das Daranmultiplizieren an $(m_1, \ldots, m_t) \in L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$ eine Injektion $R \hookrightarrow L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$ induziert, und dann ist R nach 8.2.3.6 halbeinfach als Untermodul eines halbeinfachen Moduls.

8.3.6.7 (**Die Spurform und ihre Eigenschaften**). Sei k ein Körper. Auf jeder endlichdimensionalen k-Algebra A können wir die Linearform

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Tr}: & A & \to & k \\ & a & \mapsto & \mathrm{tr}((a\cdot)|A) \end{array}$$

betrachten und die **Spurform** $A \times A \mapsto k$ erklären durch

$$(a,b)_{\mathrm{tr}} := \mathrm{tr}\left((a\cdot) \circ (b\cdot)|A\right)$$

Man prüft leicht $(a,b)_{\mathrm{tr}} = (b,a)_{\mathrm{tr}}$. Ist unsere Algebra assoziativ, so haben wir $(a,b)_{\mathrm{tr}} = \mathrm{Tr}(ab)$ und $(ax,b)_{\mathrm{tr}} = (a,xb)_{\mathrm{tr}}$ für alle $a,b,x \in A$. Daraus folgt, daß das Radikal J der Spurform einer assoziativen Algebra stets ein zweiseitiges Ideal ist. Da die Spur nilpotenter Endomorphismen Null ist und da das Jacobsonradikal einer endlichdimensionalen Ringalgebra nach 8.3.6.5 aus nilpotenten Elementen besteht, muß im Fall einer endlichdimensionalen Ringalgebra A das Jacobsonradikal $\mathrm{J}(A)$ stets im Radikal der Spurform enthalten sein, in Formeln $\mathrm{J}(A) \subset J$. Insbesondere ist jede endlichdimensionale Ringalgebra mit nichtausgearteter Spurform nach 8.3.6.6 halbeinfach. In Charakteristik Null gilt nach 8.3.6.12 sogar die Umkehrung.

Vorschau 8.3.6.8. Im Fall endlichdimensionaler Liealgebren spezialisiert unsere Spurform zur sogenannten Killingform 24.1.6.7.

Vorschau 8.3.6.9. Etwas allgemeiner gelingt die Definition von Spurform und Spur auch noch für Ringalgebren über allgemeineren Kringen k, die endlich erzeugt und projektiv sind als k-Moduln. Wir diskutieren das in 7.8.5.1.

Ergänzung 8.3.6.10. Auf jeder endlichdimensionalen Algebra A über einem Körper k könnten wir zusätzlich zur Linearform $\mathrm{Tr} : a \mapsto \mathrm{tr}((a\cdot) : A \to A)$ a priori auch noch die Linearform $a \mapsto \mathrm{tr}((\cdot a) : A \to A)$ betrachten und so eine Variante der Spurform erhalten. Ich kenne jedoch keinen Fall, in dem man mit dieser Variante einen Zusatznutzen erzielen könnte.

Beispiel 8.3.6.11. Sei k ein Körper. Auf der k-Algebra $A = \mathrm{Mat}(n;k)$ wird die Spur nach 3.2.6.18 beschrieben durch die Formel $\mathrm{Tr}(M) = n\,\mathrm{tr}(M)$ für die übliche Spur $\mathrm{tr} : \mathrm{Mat}(n;k) \to k$ aus der linearen Algebra.

Proposition 8.3.6.12 (**Spurkriterium für Halbeinfachkeit**). *Eine endlichdimensionale Ringalgebra über einem Körper der Charakteristik Null ist genau dann halbeinfach, wenn ihre Spurform nichtausgeartet ist.*

8.3.6.13. Insbesondere ist eine halbeinfache endlichdimensionale Ringalgebra über einem Körper der Charakteristik Null halbeinfach genau dann, wenn sie unter einer und jeder Körpererweiterung des Grundkörpers halbeinfach wird. In Formeln ist also A halbeinfach genau dann, wenn $K \otimes_k A$ halbeinfach ist für K/k eine beliebige Körpererweiterung und $\operatorname{char} k = 0$. Ebenso folgt, daß gegeben zwei halbeinfache endlichdimensionale Ringalgebren A, B über einem Körper k der Charakteristik Null auch die Ringalgebra $A \otimes_k B$ halbeinfach ist, denn Orthogonalbasen der jeweiligen Algebren bezüglich der Spurform liefern unmittelbar eine Orthogonalbasis ihres Tensorprodukts. Ein Gegenbeispiel in positiver Charakteristik gibt 6.6.1.1, wo wir eine endliche Körpererweiterung L/K angeben derart, daß der Ring $L \otimes_K L$ von Null verschiedene nilpotente Elemente hat.

Beweis. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß jede halbeinfache Ringalgebra endlicher Dimension über einem Körper der Charakteristik Null eine nichtausgeartete Spurform hat. Nach 6.2.9.26 ist aber ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem Körper der Charakteristik Null nilpotent genau dann, wenn die Spuren aller seiner echten Potenzen verschwinden. Man zeigt damit leicht, daß unser Radikal J der Spurform im Fall der Charakteristik Null das größte Linksideal ist, das aus nilpotenten Elementen besteht, also nach 8.3.6.5 das Jacobsonradikal. Ist das aber Null, so ist unsere Ringalgebra halbeinfach nach 8.3.6.6. □

8.3.6.14 (**Einfache Moduln und Erweiterung des Grundkörpers**). Seien k ein Körper und A eine Ringalgebra über k und L ein einfacher A-Modul. Gegeben eine Körpererweiterung K/k muß $L_K := L \otimes_k K$ kein einfacher, ja noch nicht einmal ein halbeinfacher Modul über $A_K := A \otimes_k K$ sein, wie das Beispiel 6.6.1.1 zeigt. Ist jedoch L endlichdimensional über k, so ist das Bild $B \subset \operatorname{End}_k L$ von A halbeinfach nach 8.3.5.9 und sind wir zusätzlich in Charakteristik Null, so ist auch B_K halbeinfach nach 8.3.6.13 und damit ist L_K halbeinfach als B_K-Modul und a forteriori als A_K-Modul.

8.3.6.15 (**Einfache Moduln und Galoiserweiterungen**). Seien A eine Ringalgebra über einem Körper k und K/k eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe Γ. Sei weiter L ein einfacher A-Modul derart, daß L_K ein halbeinfacher A_K-Modul ist. So ist operiert Γ durch k-lineare Ringautomorphismen auf A_K und für $\gamma \in \Gamma$ ist $\operatorname{id} \otimes \gamma^{-1} : L_K \xrightarrow{\sim} L_K$ ein Isomorphismus

$$\operatorname{res}^\gamma L_K \xrightarrow{\sim} L_K$$

zwischen dem mit $\mathrm{id} \otimes \gamma : A_K \to A_K$ restringierten A_K-Modul L_K und L_K selbst. Ist der einfache A_K-Modul E ein direkter Summand von L_K, so ist folglich auch $\mathrm{res}^\gamma E$ ein direkter Summand von L_K und kommt mit derselben Vielfachkeit vor wie E. Darüberhinaus müssen alle einfachen Summanden des A_K-Moduls L_K gewisse $\mathrm{res}^\gamma E$ für unser festes E sein, da die Summe aller zugehörigen isotypischen Komponenten von L_K ein Γ-stabiler A_K-Untermodul ist, der nach 6.6.4.7 durch Erweiterung der Skalare aus einem A-Untermodul von L hervorgehen muß. Als A_K-Modul besitzt L_K mithin eine Zerlegung der Gestalt

$$L_K \cong E_1^{\oplus n} \oplus E_2^{\oplus n} \oplus \ldots \oplus E_r^{\oplus n}$$

mit $n, r \geq 1$ und einfachen A_K-Moduln E_i derart, daß es für beliebige i, j mindestens ein Element γ der Galoisgruppe gibt mit $E_i \cong \mathrm{res}^\gamma E_j$. Nehmen wir nun zusätzlich $\dim_k L < \infty$ an, so ist L auch endlichdimensional über seinem Endomorphismenschiefkörper $D := \mathrm{End}_A L$ und für $m := \dim_D L$ und $d := \dim_k D$ finden wir $dm = \dim_k L$ sowie $\mathrm{End}_D L \cong \mathrm{Mat}(m; D)^{\mathrm{opp}}$. Für $D_i := \mathrm{End}_{A_K} E_i$ der Endomorphismenschiefkörper von E_i finden wir durch Erweiterung der Skalare weiter

$$\begin{aligned} D_K \cong \mathrm{End}_{A_K} L_K &\cong \mathrm{End}_{A_K} E_1^{\oplus n} \times \ldots \times \mathrm{End}_{A_K} E_r^{\oplus n} \\ &\cong \mathrm{Mat}(n; D_1) \times \ldots \times \mathrm{Mat}(n; D_r) \end{aligned}$$

Sicher haben alle D_i dieselbe K-Dimension $d_1 := \dim_K D_1$ und damit gilt dann $d = \dim_K D_K = rn^2 d_1$ sowie $m = (\dim_k L)/rn^2 d_1$.

8.3.6.16 (**Jacobsonradikal und Erweiterung der Skalare**). Ist k ein Körper der Charakteristik Null und A eine endlichdimensionale k-Ringalgebra, so vertauscht das Bilden des Jacobson-Radikals mit beliebigen Körpererweiterungen, das Produkt induziert also genauer einen Isomorphismus

$$\mathrm{J}(A) \otimes_k K \xrightarrow{\sim} \mathrm{J}(A \otimes_k K)$$

In der Tat ist $\mathrm{J}(A)$ ein nilpotentes zweiseitiges Ideal und folglich ist auch $\mathrm{J}(A) \otimes_k K$ ein nilpotentes zweiseitiges Ideal in $A \otimes_k K$ und folglich enthalten im Jacobson-Radikal $\mathrm{J}(A \otimes_k K)$. Andererseits ist $A/\mathrm{J}(A)$ halbeinfach und nach 8.3.6.13 ist damit auch $(A/\mathrm{J}(A)) \otimes_k K$ halbeinfach und die Behauptung folgt.

8.3.6.17. Seien k ein Körper der Charakteristik Null und A eine endlichdimensionale k-Ringalgebra derart, daß $A/\mathrm{J}(A) = D_1 \times \ldots \times D_r$ ein Produkt von Schiefkörpern ist. Die einfachen A-Moduln sind also gewisse $L_1, \ldots, L_r$ und deren Endomorphismenschiefkörper sind die D_i und sind $P_i \twoheadrightarrow L_i$ projektive Decken der L_i, so gibt es einen nicht eindeutigen Isomorphismus $A \xrightarrow{\sim} P_1 \oplus \ldots \oplus P_r$ von A-Moduln, der hinwiederum einen Isomorphismus

$$A^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_A(P_1 \oplus \ldots \oplus P_r)$$

induziert. Unter Erweiterung der Skalare, angegeutet durch einen Querstrich, wird er ein Isomorphismus

$$\bar{A}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\bar{A}}(\bar{P}_1 \oplus \ldots \oplus \bar{P}_r)$$

und $\bar{P} \twoheadrightarrow \bar{L}$ ist auch eine projektive Decke. Im Fall einer Galoiserweiterung wissen wir aus 8.3.6.15, daß $\bar{L}$ über $\bar{A}$ eine Zerlegung der Gestalt

$$\bar{L} \xrightarrow{\sim} E_1^{\oplus n} \oplus E_2^{\oplus n} \oplus \ldots \oplus E_d^{\oplus n}$$

hat mit $n, d \geq 1$ und einfachen $\bar{A}$-Moduln E_i derart, daß es für beliebige i, j mindestens ein Element γ der Galoisgruppe gibt mit $E_i \cong \mathrm{res}^\gamma E_j$. Wir finden eine endliche Galoiserweiterung derart, daß alle E_i den Körper K als Endomorphismenring haben. Dann finden wir auch einen Lift zu einem Isomorphismus von $\bar{A}$-Moduln

$$\bar{P} \xrightarrow{\sim} Q_1^{\oplus n} \oplus Q_2^{\oplus n} \oplus \ldots \oplus Q_d^{\oplus n}$$

mit $Q_i \twoheadrightarrow E_i$ jeweils einer projektiven Decke, und auch der ist unkanonisch.

Übungen

Übung 8.3.6.18. Gegeben $A \supset I$ eine endlichdimensionale Algebra mit einem Ideal stimmt die Spurform von I, aufgefaßt als eigenständige Algebra, überein mit der Einschränkung der Spurform von A auf I.

Übung 8.3.6.19. Gegeben ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierten k-Vektorraums alias **Supervektorraums** $V = V_0 \oplus V_1$ erklärt man die **Superspur** $\mathrm{str} : \mathrm{End}(V) \to k$ in hoffentlich selbsterklärender Notation durch die Formel

$$\mathrm{str}(A) := \mathrm{tr}(A_0^0) - \mathrm{tr}(A_1^1)$$

Man zeige, daß auch eine endlichdimensionale $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierte k-Ringalgebra A mit nichtausgearteter Superspurform $(a, b) \mapsto \mathrm{str}(ab : A \to A)$ halbeinfach ist als Ring. Hinweis: Man kopiere das Argument aus 8.3.6.7. Im übrigen ist die Superspurform nicht symmetrisch, sondern „supersymmetrisch“. Für ein systematisches Verständnis dieser Vorzeichen mag man mit der „Multikategorie der Supervektorräume“ 18.3.4.14 arbeiten.

8.3.7 Erzeugende und Relationen für Ringalgebren**

8.3.7.1. Gegeben ein Kring k und eine Menge I definiert man die **freie k-Ringalgebra** $\mathrm{Ralg}_k^{\nwarrow} I$ über I als den Monoidring über k nach 8.1.2.5 des freien Monoids über I nach 16.2.5.2, in Formeln

$$\mathrm{Ralg}_k^{\nwarrow} I := k\langle \mathrm{Mon}^{\nwarrow} I \rangle$$

Salopp gesprochen kann man diese freie Ringalgebra verstehen als einen „Polynomring in den nicht-kommutierenden Variablen $(X_i)_{i\in I}$“. Wir notieren sie auch

$$k\lfloor' X_1, X_2, \ldots, X_n\rfloor = k\lfloor X_1, X_2, \ldots, X_n\rfloor$$

im Fall endlich vieler Variablen oder $k\lfloor' X_i | i \in I\rfloor = k\lfloor'_! I\rfloor$ im allgemeinen. Die unfertigen Klammern sollen andeuten, daß nichtkommutierende Variablen gemeint sind. Das „Freiheitsstrichlein“ bedeutet wie in 6.3.5.1 vereinbart die Freiheit der Erzeuger. Die kanonische Einbettung $\mathrm{can} : I \to \mathrm{Ralg}_k^{\setminus} I$ hat dann die universelle Eigenschaft, daß für jede weitere k-Ringalgebra B das Vorschalten von can eine Bijektion

$$\mathrm{Ralg}_k(\mathrm{Ralg}_k^{\setminus} I, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(I, B)$$

zwischen Homomorphismen von k-Ringalgebren und Abbildungen von Mengen induziert. Jede Abbildung von der Menge I in eine k-Ringalgebra B faktorisiert also eindeutig über einen Homomorphismus von k-Ringalgebren $\mathrm{Ralg}_k^{\setminus} I \to B$, im Diagramm

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathrm{Ralg}_k^{\setminus} I \arrow[d, dashed, "\tilde{\varphi}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

8.3.7.2. Gegeben ein Kring k, eine Menge I und eine Teilmenge $R \subset \mathrm{Ralg}_k^{\setminus} I$ der freien k-Ringalgebra über I bezeichnen wir den Quotienten

$$(\mathrm{Ralg}_k^{\setminus} I)/\langle R\rangle$$

nach dem von R erzeugten Ideal auch als die **von der Menge I mit den Relationen R erzeugte k-Ringalgebra**. In der Literatur spricht man meist etwas unscharf von der „von der Menge I mit den Relationen R erzeugten k-Algebra“. Oft schreibt man Relationen auch in der Form $a = b$ mit Elementen $a, b \in \mathrm{Ralg}_k^{\setminus} I$. Damit ist gemeint, daß die Differenz $a - b$ unserer beiden Elemente zu R gehören soll.

Beispiel 8.3.7.3. Ist k ein Körper und $B \subset V$ eine Basis eines k-Vektorraums V, so kann die äußere Algebra $\bigwedge V$ von V aus 4.7.9.6 beschrieben werden als die von der Menge B mit den Relationen $b^2 = 0$ erzeugte k-Ringalgebra. Genauer induziert die Abbildung $B \to \bigwedge V, b \mapsto b \in \bigwedge^1 V$ einen Isomomorphismus von k-Ringalgebren

$$(\mathrm{Ralg}_k^{\setminus} B)/\langle b^2 \mid b \in B\rangle \xrightarrow{\sim} \bigwedge V$$

Beispiel 8.3.7.4. Der Polynomring über einem Kring k in Variablen $X_1, \ldots, X_n$ ist die von den Variablen X_i mit den Relationen $X_iX_j = X_jX_i$ erzeugte k-Ringalgebra.

Übungen

Übung 8.3.7.5. Gegeben eine Menge I und ein Körper k ist unser Monoidring $k\langle \mathrm{Mon}^{\setminus} I\rangle$ zum freien Monoid $\mathrm{Mon}^{\setminus} I$ über I aus 16.2.5.2 isomorph zur Tensoralgebra $\mathrm{T}(k\langle I\rangle)$ über dem freien Vektorraum über I im Sinne von 4.7.9.7. Genauer haben die offensichtlichen Abbildungen $I \to k\langle \mathrm{Mon}^{\setminus} I\rangle$ und $I \to \mathrm{T}(k\langle I\rangle)$ beide dieselbe universelle Eigenschaft: Für jede k-Ringalgebra A induziert ihr Vorschalten Bijektionen

$$\mathrm{Ralg}_k(k\langle \mathrm{Mon}^{\setminus} I\rangle, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(I, A) \quad \text{und} \quad \mathrm{Ralg}_k(\mathrm{T}(k\langle I\rangle), A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(I, A)$$

Übung 8.3.7.6 (**Freier Ring über einer Menge unter einem gegebenen Ring**). Gegeben ein Ring R mag man die Kategorie Ring^R der „Ringe unter R“ betrachten. Objekte sind Ringe A mit einem ausgezeichneten Ringhomomorphismus $R \to A$. Auch für diese Kategorie hat das Bilden der zugrundeliegenden Menge $\mathrm{Ring}^R \to \mathrm{Ens}$ einen Linksadjungierten. Ein mögliche Konstruktion dieses Linksadjungierten besteht darin, für jedes Wort in I der Länge l die $(l+1)$-te Tensorpotenz von R über $\mathbb{Z}$ zu betrachten und die direkte Summe aller dieser Tensorpotenzen zu bilden, in Formeln die abelsche Gruppe

$$R|I\rfloor := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_n)\in I^n} R^{\otimes(n+1)}$$

Als Produkt zweier Tensoren erklärt man das Zusammentensorieren über R in der Tensorpotenz zum verknüpften Wort. Mit dem Ringhomomorphismus $R \to R|I\rfloor$ gegeben durch Interpretation eines Ringelements als Tensor zu $n = 0$ und der Abbildung $I \to R|I\rfloor$ gegeben durch $i \mapsto (1\otimes 1)$ im Summanden zum Index $i \in I$ hat dann $R|I\rfloor$ die gewünschte universelle Eigenschaft. Ein Tensor $r_1 \otimes r_2 \otimes \ldots \otimes r_{n+1}$ zum Index $(i_1, \ldots, i_n)$ ist dann in $R|I\rfloor$ das Produkt $r_1 i_1 r_2 \ldots i_n r_{n+1}$, wobei wir genau genommen unter den Faktoren die Bilder der r_ν und i_ν in $R|I\rfloor$ verstehen. Die Notation $R|I\rfloor$ soll andeuten, daß im Gegensatz zu $R\lfloor I\rfloor$ die Variablen noch nicht einmal mit den Ringelementen kommutieren müssen.

8.3.8 Tensorkalkül für Darstellungen*

8.3.8.1. Für manche Allgemeinheiten erweist es sich als sinnvoll, die noch allgemeinere Situation eines Moduls V über einem Ring k mitsamt einer Abbildung $\rho : \Omega \to \mathrm{End}_k(V)$ einer beliebigen Menge Ω in seinen Endomorphismenring zu betrachten. Solch ein Paar (V, ρ) heißt eine **Darstellung der Menge Ω über dem Ring k**. Man überlegt sich leicht, daß das dasselbe ist wie eine Darstellung über k des freien Monoids $\mathrm{Mon}^{\setminus}\Omega$ über der Menge Ω.

8.3.8.2. Die Darstellungstheorie von Gruppen, Monoiden oder Mengen ist zum Teil das Studium der Moduln über speziellen Ringen, eben den entsprechenden Gruppenringen, Monoidringen oder Monoidringen des freien Monoids über einer gegebenen Menge. Die Begriffe einfach, halbeinfach, isotypische Komponente, isotypische Zerlegung, Länge und viele mehr bleiben so auch für Darstellungen von Gruppen, Monoiden und sogar Mengen sinnvoll. Zusätzlich können wir für Darstellungen von Monoiden über kommutativen Ringen jedoch multilineare Abbildungen erklären und erhalten so die viel reichhaltigere Struktur einer Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen, ja im Fall einer Gruppe sogar mit Multihom. Das soll im folgenden ausgeführt werden.

8.3.8.3. Gegeben $r \geq 0$ und Darstellungen $W_1, \ldots, W_r, V$ eines Monoids oder gar einer Menge G über einem Kring k verstehen wir unter einer **Verschmelzung von Darstellungen** eine multilineare Abbildung $\varphi : W_1 \times \ldots \times W_r \to V$, die G-äquivariant ist in dem Sinne, daß gilt $\varphi(gw_1, \ldots, gw_r) = g\varphi(w_1, \ldots, w_r)$ für alle $w_i \in W_i$ und $g \in G$. Wir verwenden für die Gesamtheit aller derartigen Abbildungen wie in 4.6.2.2 die beiden Notationen

$$\mathrm{Mod}_{k,G}(W_1 \curlyvee \ldots \curlyvee W_r, V) = \mathrm{Hom}^{(r)}_{k,G}(W_1 \times \ldots \times W_r, V)$$

Insbesondere liefert im Fall $r = 0$ das Auswerten auf dem einzigen Punkt $*$ des leeren Produkts eine Bijektion $\mathrm{Mod}_{k,G}(\curlyvee, V) = \mathrm{Hom}_{k,G}(*, V) \xrightarrow{\sim} V^G$ alias eine Bijektion zwischen den Mengen der G-äquivarianten 0-linearen Abbildungen in eine Darstellung und der Menge der G-invarianten Vektoren unserer Darstellung. Unsere Multiverknüpfung multilinearer Abbildungen 4.6.2.3 induziert eine Multiverknüpfung von Verschmelzungen von Darstellungen. Unsere universellen Verschmelzungen

$$\tau : W_1 \times \ldots \times W_r \to W_1 \otimes \ldots \otimes W_r$$

aus 4.6.1.1 im Fall eines Körpers k und aus 7.2.6 im Allgemeinen werden G-äquivariant mit derjenigen G-Operation auf dem Tensorprodukt, die für $g \in G$ gegeben wird durch $g(w_1 \otimes \ldots \otimes w_r) := gw_1 \otimes \ldots \otimes gw_r$ im Fall $r \geq 1$ und durch die triviale Operation auf dem leeren Tensorprodukt k im Fall $r = 0$. Es ist dann klar, daß diese Verschmelzungen von Darstellungen τ in das Tensorprodukt in der Weise universell sind, daß das Vorschalten von τ für jede weitere Darstellung V eine Bijektion

$$\mathrm{Mod}_{k,G}(W_1 \otimes \ldots \otimes W_r, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_{k,G}(W_1 \curlyvee \ldots \curlyvee W_r, V)$$

liefert. Im Fall $r = 0$ spezialisiert das unter unseren ganzen Identifikationen zu der durch das Auswerten bei $1 \in k$ gegebenen Bijektion $\mathrm{Mod}_{k,G}(k, V) \xrightarrow{\sim} V^G$. In anderen Worten ist unsere Einsdarstellung k versehen mit der durch $* \mapsto 1$ erklärten Leerverschmelzung das Einsobjekt unserer Schmelzkategorie.

8.3.8.4 (**Internes Hom von Gruppendarstellungen**). Seien k ein Kring und G eine Gruppe und U, V, W Darstellungen von G über k. Erklären wir eine Operation von G auf $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ durch die Vorschrift $gf := \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1})$ für $g \in G$ und $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, so induziert die offensichtliche Bijektion $\mathrm{Mod}_k(U \curlyvee V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_k(U, \mathrm{Hom}_k(V, W))$ eine Bijektion

$$\mathrm{Mod}_{k,G}(U \curlyvee V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_{k,G}(U, \mathrm{Hom}_k(V, W))$$

Die definitorische Gleichheit $\mathrm{Mod}_{k,G}(V, W) = \mathrm{Hom}_k(V, W)^G$ von Homomorphismen von Darstellungen und G-Invarianten in der Darstellung auf dem Raum aller linearen Abbildungen kann man dann auch als die Verknüpfung von kanonischen Isomorphismen

$$\mathrm{Mod}_{k,G}(V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_{k,G}(k, \mathrm{Hom}_k(V, W)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(V, W)^G$$

verstehen, von denen der Erste von 4.6.2.4 herkommt und der Letzte von 8.3.8.3.

Vorschau 8.3.8.5 (**Darstellungen als Schmelzkategorie**). In der in 18.1.3.2 eingeführten Terminologie kann man die vorhergehenden Bemerkungen dahingehend zusammenfassen, daß die Darstellungen eines Monoids, ja einer Menge G über einem Kring k eine Schmelzkategorie $\mathrm{Mod}_{k,G}$ mit stabil universellen Verschmelzungen bilden. Ist unser Monoid G eine Gruppe, so hat unsere Schmelzkategorie zusätzlich internes Hom im Sinne von 18.1.4.3. Die definitorische Gleichheit $\mathrm{Mod}_{k,G}(V, W) = \mathrm{Hom}_k(V, W)^G$ wird dann ein Spezialfall der natürlichen Bijektion $\mathcal{M}(V, W) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\curlywedge, V \Rrightarrow W)$ aus 18.1.4.9 zwischen Einsverschmelzungen und Leerverschmelzungen in das interne Hom-Objekt.

8.3.9 Vertwistete Monoidringe*

8.3.9.1. Seien A ein Ring und G ein Monoid, das durch Ringhomomorphismen auf A operiert. Formal nehmen wir also an, daß wir einen Monoidhomomorphismus $\sigma : G \to \mathrm{Ring}(A)$ ausgezeichnet haben. Unter diesen Annahmen erklären wir die Kategorie

$$\mathrm{Mod}_{A,\sigma,G} = A\text{-}\mathrm{Mod}^G = A\text{-}\mathrm{Mod}^{(G,\sigma)}$$

der **G-äquivarianten A-Moduln** als die Kategorie aller Paare (M, τ), die bestehen aus einem A-Modul M und einer G-Operation $\tau : G \to \mathrm{Ab}(M)$ auf der abelschen Gruppe M mit der Eigenschaft, daß die Multiplikation mit Skalaren eine G-äquivariante Abbildung

$$A \times M \to M$$

ist. In Formeln fordern wir also ${}^x(am) = {}^xa\,{}^xm$ für alle $x \in G$, $a \in A$ und $m \in M$ und verwenden dabei die Notationen ${}^xa := (\sigma(x))(a)$ und ${}^xm := (\tau(x))(m)$.

Ergänzung 8.3.9.2 (**Äquivariante Moduln als Schmelzkategorie**). Gegeben ein Kring A mit der Operation eines Monoids G erhalten wir auf diese Weise sogar eine Schmelzkategorie im Sinne von 18.1.3.2 mit multilinearen G-äquivarianten Abildungen als Verschmelzungen. Der mit dieser Begrifflichkeit vertraute Leser wird unschwer zeigen können, daß diese Schmelzkategorie stabil universelle Verschmelzungen hat und, wenn G eine Gruppe ist, sogar internes Hom.

Beispiel 8.3.9.3. Ist K ein Körper und $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(K)$ eine endliche Untergruppe seiner Automorphismengruppe und $k := K^\Gamma$ deren Fixkörper, so liefert das Bilden der Γ-Invarianten eine Äquivalenz von Schmelzkategorien

$$K\text{-Mod}^\Gamma \xrightarrow{\approx} k\text{-Mod}$$

Das ist im wesentlichen die Aussage von Hilbert's Satz 90 aus 6.6.4.4 und gilt immer noch nach 6.6.4.4 sogar stärker für beliebige Galoiserweiterungen K/k mit Galoisgruppe Γ, wenn wir die Galoisgruppe mit ihrer Krulltopologie versehen und nur solche äquivarianten Moduln M betrachten, für die die Operation $\Gamma \times M \to M$ stetig ist in Bezug auf die Krulltopologie auf Γ und die diskrete Topologie auf M.

8.3.9.4. Operiert ein Monoid G auf einem Ring A, geben wir also einen Monoidhomomorphismus $\sigma : G \to \mathrm{Ring}(A)$ vor, so bilden wir den **vertwisteten Monoidring**

$$A^{\rtimes}\langle G\rangle = A^\sigma\langle G\rangle = A^\sigma\langle\!\langle G\rangle\!\rangle$$

Als additive Gruppe nehmen wir dem üblichen Monoidring. Er besteht mithin aus allen Abbildungen $G \to A$ mit endlichem Träger oder besser kompakt getragenen Maßen, die wir schreiben als formale Linearkombinationen $\sum_y a_y y$ mit $a_y \neq 0$ für höchstens endlich viele $y \in G$. Um die Multiplikation zu erklären, vereinbaren wir für die Operation unseres Monoids die Notation ${}^x a := (\sigma(x))(a)$ und erklären die Multiplikation durch die Vorschrift $(ax)(by) := (a\,{}^x b)(xy)$ für $a, b \in A$ und $x, y \in G$. Es ist leicht zu sehen, daß wir einen Isomorphismus von Kategorien

$$A^{\rtimes}\langle G\rangle\text{-Mod} \xrightarrow{\sim} A\text{-Mod}^{(G,\sigma)}$$

zwischen der Kategorie der Moduln über dem vertwisteten Monoidring und der Kategorie der G-äquivarianten A-Moduln erhalten, indem wir die Operation von $A^{\rtimes}\langle G\rangle$ einschränken zu Operationen von A und von G.

Beispiel 8.3.9.5. In 6.6.1.3 erklären wir für jede endliche Galoiserweiterung K/k mit Galoisgruppe Γ einen Isomorphismus von k-Ringalgebren

$$K^{\rtimes}\langle\Gamma\rangle \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_k K$$

In 7.2.3.17 diskutieren wir eine Äquivalenz $k\text{-Mod} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Mat}(n;k)\text{-Mod}$ von Kategorien, die in unserer Situation und in koordinatenfreier Schreibweise zu einer

Äquivalenz $k\text{-Mod} \xrightarrow{\approx} (\operatorname{End}_k K)\text{-Mod}$ mit $M \mapsto K \otimes_k M$ spezialisiert. Unsere Äquivalenzen aus 8.3.9.3 und 8.3.9.4 fügen sich in diesem Fall zusammen zu einem bis auf eine natürliche Isotransformation kommutativen Viereck

$$\begin{tikzcd}
K\text{-Mod}^\Gamma \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\wr"] & k\text{-Mod} \arrow[d, "\wr"] \arrow[dl, Rightarrow, "\sim"'] \\
K^{\rtimes}\langle\Gamma\rangle\text{-Mod} \arrow[r, "\sim"] & (\operatorname{End}_k K)\text{-Mod}
\end{tikzcd}$$

aus Isomorphismen und Äquivalenzen von Kategorien. Die fragliche Isotransformation bilden dabei die durch Multiplikation gegebenen Isomorphismen $K \otimes_k M^\Gamma \xrightarrow{\sim} M$.

8.3.9.6 (**Diskussion der Terminologie**). Viele Autoren bezeichnen unseren vertwisteten Gruppenring als **Smashprodukt** und notieren ihn $A\#\mathbb{Z}[G]$.

Übungen

8.3.9.7. Man schreibe Beweise zu den in diesem Abschnitt aufgestellten Behauptungen aus.

8.4 Darstellungstheorie endlicher Gruppen

8.4.1 Halbeinfachkeit von Gruppenringen

Satz 8.4.1.1 (von Maschke). *Ist G eine endliche Gruppe und k ein Körper mit $|G|k \neq 0$, so ist jede Darstellung von G über k eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen.*

8.4.1.2. Insbesondere ist unter den Annahmen des Satzes von Maschke der Gruppenring halbeinfach. Die Bedingung $|G|k \neq 0$ bedeutet ausformuliert, daß die Charakteristik von k nicht die Gruppenordnung $|G|$ teilt. Wir sprechen dann auch vom Fall **nichtteilender Charakteristik**.

8.4.1.3. Im Fall der einelementigen Gruppe stimmt das schon mal: Jeder Vektorraum ist eine direkte Summe von eindimensionalen Teilräumen. Eine Darstellung, die eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen ist, nennt man **halbeinfach** oder **vollständig reduzibel**. Gleichbedeutend ist, daß sie einem halbeinfachen Modul über dem Gruppenring entspricht. Unser Satz gilt mit demselben Beweis auch für einen Schiefkörper k. Beispiel 8.1.1.18 zeigt, daß er im allgemeinen nicht mehr gilt, wenn die Charakteristik die Gruppenordnung teilt.

Beweis für endlichdimensionale Darstellungen über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. In diesen Fällen benutzen wir:

Lemma 8.4.1.4. *Gegeben eine Darstellung V über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ der endlichen Gruppe G gibt es auf V ein G-invariantes Skalarprodukt.*

Beweis. Ist $b : V \times V \to \mathbb{C}$ irgendein Skalarprodukt, so liefert die Formel

$$(v, w) = \sum_{g \in G} b(gv, gw)$$

ein **G-invariantes Skalarprodukt**, als da heißt, ein Skalarprodukt mit der Eigenschaft $(gv, gw) = (v, w)\ \forall g \in G$. □

Ist nun $W \subset V$ eine endlichdimensionale Unterdarstellung, so ist auch ihr orthogonales Komplement $W^\perp \subset V$ unter einem invarianten Skalarprodukt eine Unterdarstellung und wir haben $V = W \oplus W^\perp$ nach 4.1.3.18. Induktiv zeigt man so, daß jede endlichdimensionale Darstellung V in eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen zerfällt. □

Beweis im allgemeinen. Wir müssen nur zeigen, daß es für jede Unterdarstellung $W \subset V$ einer endlichdimensionalen Darstellung V von G ein Komplement gibt, als da heißt eine Unterdarstellung $D \subset V$ mit $V = W \oplus D$. Dann sind wir fertig mit vollständiger Induktion über die Dimension im endlichdimensionalen

Fall und mit der entsprechenden Charakterisierung 8.2.3.4 halbeinfacher Moduln im allgemeinen. Ist nun $i : W \hookrightarrow V$ eine Unterdarstellung, so finden wir nach 3.2.10.2 eine k-lineare Abbildung $\pi : V \to W$ mit $\pi \circ i = \mathrm{id}_W$. Die lineare Abbildung

$$\psi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ \pi \circ g^{-1}$$

in $\mathrm{Hom}(V, W)$ ist dann sogar ein Homomorphismus von Darstellungen $\psi : V \to W$ mit $\psi \circ i = \mathrm{id}_W$. Ihr Kern $\ker \psi$ ist folglich eine Unterdarstellung von V mit $V = W \oplus \ker \psi$. □

8.4.1.5. Ich will den vorhergehenden Beweis nocheinmal von einem anderen Standpunkt aus diskutieren und dazu neue Konzepte einführen, die uns auch an anderer Stelle noch nützlich sein werden.

Definition 8.4.1.6. Sind V, W Darstellungen einer Gruppe G über einem Körper k, so machen wir den Raum $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ aller k-linearen Abbildungen von V nach W selbst zu einer Darstellung vermittels der Vorschrift $(gf)(v) = g(f(g^{-1}v))$ oder, anders geschrieben,

$$gf = g \circ f \circ g^{-1}$$

Wir nennen diese Operation der Gruppe auf dem Hom-Raum die **Operation durch Konjugation**.

8.4.1.7. Man sieht sofort, daß die Invarianten im Raum aller linearen Abbildungen von einer Darstellung V in eine Darstellung W unter der Operation durch Konjugation genau die Homomorphismen von Darstellungen sind, in Formeln

$$\mathrm{Hom}_k(V, W)^G = \mathrm{Hom}_{kG}(V, W)$$

Im vorhergehenden Beweis haben wir schlicht über die Bahn von π im Hom-Raum gemittelt und so einen G-invarianten Homomorphismus von Vektorräumen alias einen Homomorphismus von Darstellungen erhalten. Analoga dieser Konstruktionen gibt es in jeder Schmelzkategorie, vergleiche 8.3.8.4.

Ergänzung 8.4.1.8. Ist noch allgemeiner V eine Darstellung einer Gruppe G und W eine Darstellung einer Gruppe H, so erhalten wir eine natürliche Operation von $G \times H$ auf $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ durch die Vorschrift

$$(g, h)f = \rho_W(h) \circ f \circ \rho_V(g^{-1}) = h \circ f \circ g^{-1}$$

Unsere Definition ergibt sich im Fall $H = G$ durch Einschränken der $(G \times G)$-Operation auf dem Hom-Raum vermittels der diagonalen Einbettung $G \hookrightarrow G \times G$, $g \mapsto (g, g)$. Wir nennen sie präziser die Operation durch Konjugation auf dem Hom-Raum, um sie zu unterscheiden von der **Operation durch Nachschalten** $g : f \mapsto \rho_W(g) \circ f$ und der **Operation durch Vorschalten** $g : f \mapsto f \circ \rho_V(g^{-1})$.

8.4.1.9 (**Zerlegung in isotypische Anteile**). Seien G eine endliche Gruppe, k ein Körper nichtteilender Charakteristik, M eine Darstellung von G und $\operatorname{irr}_k(G)$ ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen einfacher kG-Moduln. So liefert die Einbettung der isotypischen Anteile nach 8.2.3.8 einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{E \in \operatorname{irr}_k(G)} M_E \xrightarrow{\sim} M$$

Ergänzung 8.4.1.10. Gegeben ein komplexer Vektorraum V operiert die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ auf $V^{\otimes n}$ durch die Permutation von Tensoren. Die Zerlegung in isotypische Komponenten

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{irr} \mathcal{S}_n} (V^{\otimes n})_\lambda$$

ist dann sogar eine Zerlegung in Unterdarstellungen von $\mathrm{GL}(V)$. Ist W ein weiterer komplexer Vektorraum, so liefert das Tensorieren beider Zerlegungen eine Zerlegung

$$(V \otimes W)^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda, \mu \in \operatorname{irr} \mathcal{S}_n} (V^{\otimes n})_\lambda \otimes (W^{\otimes n})_\mu$$

in eine Summe von unter $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$ stabilen Teilräumen. Betrachten wir auf beiden Seiten nur die unter $\mathcal{S}_n$ alternierenden Tensoren, so erhalten wir mit dem ersten Isomorphismus nach 4.6.5.12 eine Zerlegung der äußeren Potenzen

$$\bigwedge^n (V \otimes W) \xleftarrow{\sim} (V \otimes W)^{\otimes n}_{\mathrm{sgn}} = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{irr} \mathcal{S}_n} (V^{\otimes n})_\lambda \otimes (W^{\otimes n})_{\lambda \otimes \mathrm{sgn}}$$

Diese Zerlegung heißt auch die **Binet-Cauchy-Identität**. Sie kann mithilfe unserer Erkenntnisse 8.5.1.2 über einfache Darstellungen von symmetrischen Gruppen auch noch konkreter ausgeschrieben werden.

Übungen

Übung 8.4.1.11. Ist G eine endliche Gruppe und k ein Körper, dessen Charakteristik die Gruppenordnung teilt, so besitzt die Unterdarstellung der konstanten Funktionen im Gruppenring kein G-invariantes Komplement. Hinweis: Der zu solch einer Zerlegung gehörige Projektor wäre nach 7.1.3.6 die Rechtsmultiplikation mit einem Element a des Gruppenrings, das einerseits einer von Null verschiedenen konstanten Funktion entsprechen müßte und andererseits der Formel $a^2 = a$ zu genügen hätte. Für die konstante Funktion $a \in kG$ mit dem einzigen Funktionswert $c \in k$ gilt jedoch $a^2 = |G|ca$.

8.4.2 Gruppenringe endlicher Gruppen

8.4.2.1. Gegeben eine endliche Gruppe G nennen wir einen Körper k einen **Spaltungskörper für** G, wenn alle einfachen Darstellungen von G über k außer Skalaren keine weiteren Endomorphismen haben. Nach dem Dichtesatz ist dazu gleichbedeutend, daß der Gruppenring surjektiv auf den Ring der k-linearen Endomorphismen jeder einfachen Darstellung abbildet. Nach dem Schur'schen Lemma ist jeder algebraisch abgeschlossene Körper ein Spaltungskörper. Da Ringe von quadratischen Matrizen unter Körpererweiterung Ringe von quadratischen Matrizen bleiben, ist jede Erweiterung eines Spaltungskörpers auch selbst ein Spaltungskörper. Offensichtlich besitzt jeder Körper eine endliche Erweiterung zu einem Spaltungskörper, indem wir etwa alle Matrixeinträge von Repräsentanten der einfachen Darstellungen über dem algebraischen Abschluß adjungieren.

8.4.2.2. Ich erinnere daran, daß wir uns in 8.1.2.8 vorgenommen hatten, auch auf einer endlichen Gruppe G sorgfältig zwischen Funktionen und Maßen aus $kG = \text{Maß}_!(G)$ zu unterscheiden. Ich notiere $\zeta \in \text{Maß}_!(G)$ das Zählmaß, so daß die Verknüpfung

$$\text{Fun}(G) \xrightarrow{\circ\,\text{inv}} \text{Fun}(G) \xrightarrow{\cdot\zeta} \text{Maß}_!(G)$$

ein mit den natürlichen Operationen von $G \times G^{\text{opp}}$ verträglicher Isomorphismus ist. Er ist die Umkehrabbildung des in 8.1.2.8 betrachtenen Homomorphismus inz, den wir sogar für nicht notwendig endliche Gruppen erklärt hatten.

Satz 8.4.2.3 (Fouriertransformation für endliche Gruppen). *Seien G eine endliche Gruppe, k ein Spaltungskörper und $L_1, \ldots, L_r$ die einfachen Darstellungen von G über k bis auf Isomorphismus.*

1. *Im Fall nichtteilender Charakteristik liefert die Operation einen Ringisomorphismus*

$$\rho : kG \xrightarrow{\sim} (\text{End}_k L_1) \times \ldots \times (\text{End}_k L_r)$$

2. *Unter der Umkehrabbildung wird $A \in \text{End}_k L$ für $L = L_i$ abgebildet auf $(\dim L)(c_A \circ \text{inv})\zeta/|G| \in kG$ mit $c_A : g \mapsto \text{tr}\big(\rho_L(g)A|L\big)$;*

3. *Teilt die Charakteristik die Gruppenordnung, so ist ρ zumindest noch ein surjektiver Ringhomomorphismus.*

8.4.2.4. Der Gruppenring einer endlichen Gruppe über einem Spaltungskörper einer die Gruppenordnung nichtteilenden Charakteristik ist also in Worten isomorph vermittels der durch die Operation gegebenen Abbildung zum Produkt der Endomorphismenringe der einfachen Darstellungen. Insbesondere ist er isomorph zu

einem Produkt von Matrixringen. Gegeben $B \in \operatorname{Mat}(d;k)$ und E_{ij} eine Basismatrix finden wir $\operatorname{tr}(BE_{ij}) = B_{ji}$. Aus diesem Grund heißt unsere Funktion c_A aus Teil 2 ein **Matrixkoeffizient der Darstellung** L.

Beweis. Der kG-Modul $L_1 \oplus \ldots \oplus L_r$ hat nach dem Schur'schen Lemma 8.3.2.1 den Endomorphismenring $k \times \ldots \times k$. Die Surjektivität folgt damit aus dem Dichtesatz 8.3.3.1, angewandt auf den kG-Modul $L_1 \oplus \ldots \oplus L_r$ mit seinem Endomorphismenring $k \times \ldots \times k$, formal unter Verwendung der offensichtlichen Übung 7.1.3.17. Um die Injektivität zu zeigen bemerken wir, daß ja im Fall nichtteilender Charakteristik nach Maschke kG selbst eine Summe von einfachen Unterdarstellungen ist. Liegt also ein Element $a \in kG$ im Kern unserer Abbildung, so ist die Linksmultiplikation mit a die Nullabbildung auf kG und es folgt $a = 0$. Im Fall nichtteilender Charakteristik folgt das auch unmittelbar aus der Halbeinfachheit des Gruppenrings nach Maschke und der Strukturtheorie halbeinfacher Ringe 8.3.5.4. Diese Argumentation hat den Vorteil, ohne den Dichtesatz auszukommen. Um die Umkehrabbildung zu bestimmen, beachten wir, daß alle Multiplikationen mit vom neutralen Element verschiedenen Gruppenelementen spurfreie Endomorphismen des Gruppenrings liefern, wohingegen die Multiplikation mit dem neutralen Element alias die Identität auf dem Gruppenring die Spur $|G|$ hat. Für $c = \sum c(x)\delta_x \in kG$ folgt die Identität

$$|G|c(g^{-1}) = \operatorname{tr}\big((\delta_g c\cdot)|kG\big)$$

Sie gilt speziell auch für das Element $c_A \in kG$ mit $\rho : c_A \mapsto A$ für $A \in \operatorname{End}(L)$ und ein festes $L = L_i$. Berechnen wir nun für dieses Element dieselbe Spur auch auf der anderen Seite unseres Fourierisomorphismus, so erhalten wir die Identität

$$|G|c_A(g^{-1}) = \operatorname{tr}((\rho_L(g)A\cdot)|\operatorname{End}_k L)$$

Gegeben eine Matrix $M \in \operatorname{Mat}(d;k)$ haben wir aber offensichtlich

$$\operatorname{tr}\big((M\cdot)|\operatorname{Mat}(d;k)\big) = d\operatorname{tr}(M)$$

Es folgt $|G|c_A(g^{-1}) = (\dim L)\operatorname{tr}\big(\rho_L(g)A|L\big)$ und die Behauptung. □

Ergänzung 8.4.2.5 (**Isotypische Komponenten von links und rechts**). Im Fall nichtteilender Charakteristik zeigt der Satz, daß für jede einfache Darstellung L einer endlichen Gruppe G die L-isotypische Komponente des Gruppenrings kG in seiner Eigenschaft als Linksmodul zusammenfällt mit der L^*-isotypischen Komponente des Gruppenrings kG in seiner Eigenschaft als Rechtsmodul, für die hoffentlich offensichtliche Struktur als Rechtsmodul auf dem Dualraum L^*. Das zeigen wir in 8.4.5.9 allgemeiner für jede endlichdimensionale einfache Darstellung L einer beliebigen Gruppe G über einem beliebigen Körper k.

Ergänzung 8.4.2.6 (**Bezug zur Fouriertransformation der Analysis**). Ist G eine endliche und kommutative Gruppe, so ist jede einfache komplexe Darstellung von G eindimensional und die Isomorphieklassen komplexer einfacher Darstellungen von G entsprechen eineindeutig den Gruppenhomomorphismen $G \to \mathbb{C}^\times$. Unser Isomorphismus aus dem Satz entspricht dann der kanonischen Fouriertransformation

$$\mathrm{M}(G) \to \mathrm{Ens}(\hat{G}, \mathbb{C})$$

von komplexen Maßen auf G zu Funktionen auf $\hat{G}$, die wir in 13.3.4.1 im allgemeineren Fall einer Fouriergruppe eingeführt hatten. Daß wir in unserem Satz einen Ringhomomorphismus erhalten, verallgemeinert sich in diesem Fall zu Proposition 13.3.5.12 aus der Fouriertheorie, nach der unter der Fouriertransformation die Faltung zweier Maße in das punktweise Produkt ihrer Fouriertransformierten übergeht.

Beispiel 8.4.2.7 (**Fouriertransformation für zyklische Gruppen**). Ist $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zyklisch, so finden wir unsere diskrete Fouriertransformation bereits im chinesischen Restsatz wieder, wie im folgenden Diagramm ausgeführt wird, das wir im Anschluß diskutieren, vergleiche auch 8.1.2.14.

$$\begin{tikzcd}
 & k[X] \arrow[d, two heads] \arrow[drr, two heads] & & \\
 & k[X]/\langle X^n - 1\rangle \arrow[rr, two heads, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & & kG \arrow[d, "\wr"] \\
\prod_{\{\zeta \mid \zeta^n = 1\}} k[X]/\langle X - \zeta\rangle \arrow[rr, "\sim"] & & \prod_{L \in \mathrm{irr}_k G} \mathrm{End}_k L & \\
 & \underbrace{k \times \ldots \times k}_{n \text{ Faktoren}} \arrow[ul, "\sim"] \arrow[ur, "\sim"'] &&
\end{tikzcd}$$

Die universelle Eigenschaft des Polynomrings liefert sicher einen Homomorphismus von k-Kringen $k[X] \to kG$ mit $X \mapsto \mathrm{e}^{\bar{1}}$ in der Notation 8.1.2.3. Sicher liegt $X^n - 1$ im Kern und die universelle Eigenschaft des Restklassenrings induziert so die obere Horizontale unseres Diagramms. Die Basis $X^0, X^1, \ldots, X^{n-1}$ des Restklassenrings geht dabei in die Standardbasis des Gruppenrings über, so daß unsere obere Horizontale ein Isomorphismus sein muß. Ist $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen und $\operatorname{char} k$ kein Teiler von n, so hat $X^n - 1$ nach 6.3.9.7 genau n paarweise verschiedene Nullstellen $\zeta_1, \ldots \zeta_n$ in k und die Faktorisierung $X^n - 1 = (X - \zeta_1) \ldots (X - \zeta_n)$ zusammen mit dem chinesischen Restsatz 6.2.3.4 liefert den Isomorphismus in der linken Vertikale. Die rechte Vertikale

ist dahingegen unsere Fouriertransformation 8.4.2.3. Da nun nach 8.3.2.4 jede einfache Darstellung unserer abelschen Gruppe G über k eindimensional ist, entsprechen diese einfachen Darstellungen eineindeutig den Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to k^\times$ alias nach 4.4.2.18 den n-ten Einheitswurzeln $\zeta_1, \ldots \zeta_n$. Die Kommutativität unseres Diagramms folgt aus den Definitionen. In diesem Sinne reduziert sich unser Satz 8.4.2.3 über die diskrete Fouriertransformation also im Fall zyklischer Gruppen auf einen Spezialfall des chinesischen Restsatzes.

8.4.2.8. Der erste Teil in unserem Satz gilt analog für jede endlichdimensionale halbeinfache Ringalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Die Fouriertransformation im Fall endlicher zyklischer Gruppen läuft meist unter der Bezeichnung **diskrete Fouriertransformation**.

Korollar 8.4.2.9. *Gegeben G eine endliche Gruppe, k ein Spaltungskörper nichtteilender Charakteristik und $L_1, \ldots, L_r$ die einfachen Darstellungen von G über k bis auf Isomorphismus gilt*

$$|G| = (\dim L_1)^2 + \ldots + (\dim L_r)^2$$

Lassen wir die Einschränkung an die Charakteristik fallen, so gilt zumindest noch die Abschätzung $\leq$.

Beweis. Offensichtlich mit dem Isomorphismus 8.4.2.3 der diskreten Fouriertransformation. □

Korollar 8.4.2.10. *Gegeben eine endliche Gruppe G und ein Spaltungskörper k nichtteilender Charakteristik gibt es bis auf Isomorphismus genausoviele einfache Darstellungen unserer Gruppe über besagtem Körper wie Konjugationsklassen in unserer Gruppe, in Formeln*

$$|\operatorname{irr}_k(G)| = |G/\operatorname{int}(G)|$$

Beweis. Das Zentrum eines Gruppenrings kG besteht offensichtlich genau aus den Funktionen $G \to k$, die mit allen Gruppenelementen kommutieren, und damit aus den Funktionen, die konstant sind auf Konjugationsklassen. Man nennt sie **Klassenfunktionen**. Das Zentrum der anderen Seite in Satz 8.4.2.3 ist aber nach den beiden anschließenden Übungen 8.4.2.23 und 8.4.2.24 offensichtlich isomorph als k-Vektorraum zu einem Produkt von r Kopien des Grundkörpers $k \times \ldots \times k$. □

Korollar 8.4.2.11 (Dimension einfacher Darstellungen und Charakteristik). *Ist k ein Spaltungskörper nichtteilender Charakteristik für eine endliche Gruppe G, so teilt die Charakeristik auch keine der Dimensionen der einfachen Darstellungen von G über k.*

Beweis. Das folgt sofort aus unserer expliziten Beschreibung der inversen Abbildung zur diskreten Fouriertransformation. □

8.4.2.12. Seien G eine endliche Gruppe und k ein Spaltungskörper nichtteilender Charateristik. Sei L eine einfache Darstellung von G. Nach unserer Fouriertransformation 8.4.2.3 gibt es genau ein Element $\mathrm{e}_L \in kG$ derart, daß e_L durch die Identität auf L operiert und durch Null auf jeder einfachen Darstellung M von G, die nicht isomorph ist zu L, in Formeln

$$(\mathrm{e}_L\cdot : M \to M) = \begin{cases} \mathrm{id} : M \to M & \text{falls } M \cong L; \\ 0 : M \to M & \text{falls } M \text{ einfach, } M \ncong L. \end{cases}$$

Dies Element e_L nennen wir den **Projektor** zu L. Die Summe all dieser Projektoren ist per definitionem die Eins des Gruppenrings.

Beispiel 8.4.2.13. Die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hat über jedem Körper k der Charakteristik ungleich Zwei die beiden einfachen Darstellungen k_+ und k_-. Die zugehörigen Projektoren sind $\mathrm{e}_{k_+} = (\delta_{\bar{0}} + \delta_{\bar{1}})/2$ und $\mathrm{e}_{k_-} = (\delta_{\bar{0}} - \delta_{\bar{1}})/2$.

Beispiel 8.4.2.14. Der Projektor zur Einsdarstellung k hat stets die Gestalt $\mathrm{e}_k = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \delta_g$. In der Tat operiert dieses Element des Gruppenrings auf der Einsdarstellung als die Identität und auf allen anderen einfachen Darstellungen als Null, da diese außer der Null keinen unter G invarianten Vektor besitzen können.

Ergänzung 8.4.2.15. Die Projektoren zu den einfachen einfachen Darstellungen einer endlichen Gruppe G im Fall nichtteilender Charakteristik lassen sich im Gruppenring kG auch allein aus der Ringstruktur heraus beschreiben als die „primitiven zentralen Idempotenten“ im Sinne von 8.3.5.14.

Definition 8.4.2.16. Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung V einer Gruppe G über einem Körper k definiert man ihren **Charakter** $\chi_V : G \to k$ durch die Vorschrift

$$\chi_V(g) := \mathrm{tr}(g|V)$$

8.4.2.17. Ich bestehe darauf, daß dieser Charakter eine Funktion $\chi_V \in \mathrm{Fun}(G; k)$ auf unserer Gruppe ist und nicht ein Element des Gruppenrings $kG = \mathrm{Maß}_!(G; k)$.

8.4.2.18. Da nach 3.2.6.16 konjugierte Matrizen dieselbe Spur haben, sind Charaktere stets Klassenfunktionen. Die Dimension einer Darstellung ist offensichtlich gerade der Wert ihres Charakters beim neutralen Element $e \in G$, in Formeln

$$(\dim_k V)_k = \chi_V(e)$$

Hier meinen wir links das Bild der Dimension unter dem eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to k$. Die Charaktere der einfachen Darstellungen heißen die **einfachen Charaktere** oder auch abkürzend die **Charaktere** unserer

Gruppe. Im Fall komplexer Darstellungen einer abelschen Gruppe sind das genau die Gruppenhomomorphismen $G \to \mathbb{C}^\times$, weshalb unsere Terminologie hier mit der in 13.2.7.8 eingeführten Terminologie verträglich ist.

Korollar 8.4.2.19 (Charakter-Projektor-Formel). *Für jede endliche Gruppe G und jeden Spaltungskörper k nichtteilender Charakteristik liefert der Charakter einer einfachen Darstellung L ihren Projektor vermittels der Identität*

$$\mathrm{e}_L = \frac{\dim L}{|G|}(\chi_L \circ \mathrm{inv})\zeta$$

Beispiel 8.4.2.20. Der Charakter der Einsdarstellung ist die konstante Funktion Eins auf unserer Gruppe. Den zugehörigen Projektor kennen wir bereits aus 8.4.2.14 und das paßt.

Beweis. Wir müssen nur unsere allgemeine Formel für die Umkehrabbildung zur diskreten Fouriertransformation aus 8.4.2.3 auf den Fall des Identitätsendomorphismus einer einfachen Darstellung anwenden. □

Korollar* 8.4.2.21. *Seien G eine endliche Gruppe, k ein Spaltungskörper nichtteilender Charakteristik und $a \in kG$ ein Element des Gruppenrings. Ist das von a erzeugte Linksideal $L := kGa$ eine einfache Darstellung von G, so gilt $\dim_k(aL) = 1$ und $aM = 0$ für alle einfachen Darstellungen M mit $M \not\cong L$.*

8.4.2.22. Sind wir in der Situation unseres Satzes 8.3.4.8 zu dualen Paaren und gilt $L \cong E_\nu$, so erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus $aM \xrightarrow{\sim} F_\nu$ von Darstellungen von H.

Beweis. Unter der diskreten Fouriertransformation kann a nur in $\mathrm{End}_k L$ einen von Null verschiedenen Anteil haben, da es zur L-isotypischen Komponente gehört. Wenden wir auf diesen Anteil unsere Übung 8.3.5.17 an, so sehen wir, daß er ein Endomorphismus vom Rang Eins sein muß. Das Korollar folgt. □

Übungen

Übung 8.4.2.23. Das Zentrum des Endomorphismenrings eines Vektorraums besteht genau aus allen Multiplikationen mit Skalaren aus dem Körper.

Übung 8.4.2.24. Das Zentrum eines Produkts von Ringen ist das Produkt ihrer Zentren.

Ergänzende Übung 8.4.2.25. Gegeben eine endliche Gruppe und ein Spaltungskörper nichtteilender Charakteristik zeige man: Genau dann ist die Gruppe kommutativ, wenn alle ihre einfachen Darstellungen über besagtem Körper eindimensional sind.

Übung 8.4.2.26. Man zeige, daß jede nichtkommutative Gruppe der Ordnung Acht über $\mathbb{C}$ bis auf Isomorphismus genau vier eindimensionale Darstellungen und genau eine einfache zweidimensionale Darstellung und keine weiteren einfachen Darstellungen hat. Man bestimme sie im Fall der Bierdeckelgruppe und im Fall der Quaternionengruppe.

Übung 8.4.2.27. Die Quaternionengruppe $Q := \{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{j}, \pm \mathrm{k}\}$ im Quaternionenring aus 6.1.4.13 hat über $\mathbb{R}$ bis auf Isomorphismus vier eindimensionale Darstellungen und nur noch eine weitere einfache Darstellung, nämlich die offensichtliche Darstellung $\mathbb{H}$. Die Strukturtheorie halbeinfacher Ringe 8.3.5.4 liefert so einen Isomorphismus

$$\mathbb{R}Q \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{H}$$

Analoges gilt über $\mathbb{Q}$. Hinweis: Man untersuche den Quotienten $Q/\{\pm 1\}$.

8.4.3 Orthogonalitätsrelationen

Satz 8.4.3.1 (Orthonormalität einfacher Charaktere). *Gegeben eine endliche Gruppe G und ein Spaltungskörper k nichtteilender Charakteristik bilden die einfachen Charaktere eine Orthonormalbasis des Raums der Klassenfunktionen in Bezug auf die symmetrische Bilinearform $(\varphi, \psi) := |G|^{-1} \sum \varphi(g^{-1})\psi(g)$.*

Beweis. Bezeichne $\hat{G}$ die Menge der Isomorphieklassen von einfachen Darstellungen über k. Wir können unseren Satz 8.4.2.3 über die diskrete Fouriertransformation ausschreiben zur Aussage, daß im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Maß}_!(G;k) \arrow[r, "\rho", "\sim"'] & \prod_{L\in\hat{G}} \mathrm{End}_k L \arrow[d, "\wr", "\cdot\,\mathrm{diag}(\dim L)"'] \\
\mathrm{Fun}(G;k) \arrow[u, "|G|^{-1}\zeta\cdot(\circ\,\mathrm{inv})"', "\wr"] & \prod_{L\in\hat{G}} \mathrm{End}_k L \arrow[l, "c"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

mit derjenigen Abbildung als unterer Horizontale, unter der ein Endomorphismus $A \in \mathrm{End}_k L$ auf die Funktion $c_A : g \mapsto \mathrm{tr}\big(\rho_L(g)A|L\big)$ abgebildet wird, das einmal im Kreis herumgehen an jeder Stelle die Identität liefert. Die Spurform 8.3.6.7 auf $\mathrm{Maß}_!(G)$ wird gegeben durch $(\varphi, \psi)_{\mathrm{tr}} = \mathrm{Tr}(\varphi\psi) = |G| \sum \varphi[g^{-1}]\psi[g]$ mit eckigen Klammern um die Punkte, auf deren durch die eckigen Klammern notierten charakteristischen Funktionen die jeweiligen Maße ausgewertet werden. Diese Spurform entspricht unter der oberen Horizontale der Spurform auf unserem Produkt von Endomorphismenringen

$$((A_L), (B_L))_{\mathrm{tr}} = \mathrm{Tr}((A_L)(B_L)) = \sum_{L\in\hat{G}} (\dim L)\,\mathrm{tr}(A_L B_L|L)$$

Unter der unteren Horizontale entspricht mithin die Bilinearform

$$(\varphi, \psi) := |G|^{-1} \sum \varphi(g)\psi(g^{-1})$$

auf $\mathrm{Fun}(G)$ der Bilinearform $((A_L), (B_L)) := \sum_{L \in \hat{G}} (\dim L)^{-1} \operatorname{tr}(A_L B_L | L)$ auf dem Produkt von Endomorphismenringen. So erhalten wir insbesondere für einfache Darstellungen $M, L \in \hat{G}$ die Orthonormalitätsrelation $(\chi_L, \chi_M) = \delta_{L,M}$. Ein Dimensionsvergleich zeigt den Rest. □

8.4.3.2 (**Dimension des Endomorphismenrings einer Darstellung**). Gegeben eine endliche Gruppe G und eine endlichdimensionale Darstellung L über einem Körper k nichtteilender Charakteristik liefern unsere Orthonormalitätsrelationen 8.4.3.1 für die k-Dimension ihres Endomorphismenrings die Formel

$$\dim_k(\mathrm{End}_{kG} L) = (\chi_L, \chi_L)$$

Hierfür müssen wir noch nicht einmal annehmen, daß k ein Spaltungskörper ist, da wir uns durch Erweiterung der Skalare auf diesen Fall zurückziehen können.

Korollar 8.4.3.3 (**Orthonormalität komplexer einfacher Charaktere**). *Gegeben eine endliche Gruppe G bilden die komplexen einfachen Charaktere eine Orthonormalbasis des Raums der komplexen Klassenfunktionen in Bezug auf das* **Standardskalarprodukt** $\langle \varphi, \psi \rangle := |G|^{-1} \sum \overline{\varphi(g)} \psi(g)$.

Beweis. Das folgt sofort aus 8.4.3.1, wenn man bemerkt, daß alle Eigenwerte von $\rho_L(g)$ Einheitswurzeln sind, so daß gilt

$$\chi_L(g^{-1}) = \operatorname{tr}(\rho_L(g)^{-1}) = \overline{\operatorname{tr}(\rho_L(g))} = \overline{\chi_L(g)}$$ □

8.4.3.4 (**Berechnung von Multiplizitäten**). Gegeben eine endlichdimensionale komplexe Darstellung V einer endlichen Gruppe über einem können wir also die Vielfachheit, mit der eine vorgegebene einfache Darstellung L in einer Zerlegung unserer Darstellung V als direkte Summe einfacher Darstellungen auftritt, berechnen als den Wert

$$[V : L] = \langle \chi_L, \chi_V \rangle$$

unseres Skalarprodukts auf den Charakteren.

8.4.3.5. Wir können die Orthonormalität einfacher komplexer Charaktere auch direkter einsehen, indem wir das Argument von oben etwas umschreiben. Gegeben eine endliche Gruppe G betrachten wir dazu das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Maß}_!(G;\mathbb{C}) \arrow[r, "\rho", "\sim"'] & \prod_{L \in \hat{G}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[d, "\wr", "\cdot \operatorname{diag}(\dim L)"'] \\
\mathrm{Fun}(G;\mathbb{C})^{\leftrightarrow} \arrow[u, "|G|^{-1}\zeta\cdot", "\wr"'] & \prod_{L \in \hat{G}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[l, "c^*", "\sim"']
\end{tikzcd}$$

mit der unteren Horizontale abgewandelt zu $A \mapsto c_A^*$ mit $c_A^* : g \mapsto \operatorname{tr}\big(\rho_L(g)^* A : L \to L\big)$, wobei das Sternchen oben den Adjungierten in Bezug auf ein und jedes G-invariante Skalarprodukt auf L bezeichnet. Der obere Index $\leftrightarrow$ erinnert uns daran, daß wir die „vertauschte" G-Operation auf dem Funktionenraum betrachten müssen, wenn wir erreichen wollen, daß unser Diagramm aus äquivarianten Abbildungen besteht. Wegen $(\rho_L(g^{-1})) = (\rho_L(g)^{-1}) = (\rho_L(g)^*)$ kommutiert auch dieses Diagramm. Wird unter der oberen Horizontale $g \in G \subset \mathbb{C}G$ auf das Tupel von Endomorphismen $(\rho_L(g))$ abgebildet, so geht g^{-1} auf das Tupel $(\rho_L(g^{-1})) = (\rho_L(g)^{-1}) = (\rho_L(g)^*)$ der adjungierten Endomorphismen. Die Abbildung $\mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ mit $\varphi \mapsto \varphi^* := \overline{\operatorname{inv}_* \varphi}$ entspricht unter ρ also dem komponentenweise Adjungieren, das wir auch mit einem Stern notieren. Jetzt erinnere ich aus 8.3.6.7 die Spur $\operatorname{Tr}(a) := \operatorname{Tr}\big((a\cdot) : A \to A\big)$ einer endlichdimensionalen Algebra und die Formeln $\operatorname{Tr}(\varphi) = |G|\varphi[e]$ für den Gruppenring einer endlichen Gruppe sowie $\operatorname{Tr}(A) = d\operatorname{tr}(A)$ für die Ringalgebra der $(d \times d)$-Matrizen. Indem wir die offensichtliche Identität

$$\operatorname{Tr}(\varphi^*\psi) = \operatorname{Tr}(\rho(\varphi^*\psi)) = \operatorname{Tr}(\rho(\varphi^*)\rho(\psi)) = \operatorname{Tr}(\rho(\varphi)^*\rho(\psi))$$

ausschreiben, erhalten wir die **Skalarproduktverträglichkeit der Fouriertransformation**

$$|G| \sum_{g \in G} \overline{\varphi[g]}\ \psi[g] = \sum_{L \in \hat{G}} (\dim_{\mathbb{C}} L) \operatorname{tr}\big(\rho_L(\varphi)^* \rho_L(\psi)\big)$$

für $\rho_L(\varphi)^* \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L$ der zu $\rho_L(\varphi)$ adjungierte Endomorphismus in Bezug auf ein und jedes G-invariante Skalarprodukt auf L. Das liefert einen weiteren Beweis für die Orthonormalität der einfachen Charaktere. Um die Analogie zur Inversionsformel der Fouriertheorie 13.3.7.21 herauszuarbeiten, betrachten wir schließlich auch noch die Erweiterung unseres Diagramms zum Sechseck

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C}G \arrow[r, "\rho", "\sim"'] & \prod_{L\in\hat{G}} \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[dr, "\cdot\operatorname{diag}(\sqrt{\dim L})", "\sim"'] & \\
\mathbb{C}G \arrow[ur, "|G|^{-1/2}\cdot", "\sim"'] & & & \prod_{L\in\hat{G}} \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[dl, "\cdot\operatorname{diag}(\sqrt{\dim L})", "\sim"'] \\
 & \mathbb{C}G \arrow[ul, "|G|^{-1/2}\cdot", "\sim"'] & \prod_{L\in\hat{G}} \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[l, "c^*", "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

und verwenden dabei die eigentlich „falsche" Identifikation des Gruppenrings mit dem Raum der Funktionen auf unserer Gruppe, in Formeln die Identifikation $\operatorname{Fun}(G;\mathbb{C})^{\leftrightarrow} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Maß}_!(G;\mathbb{C})$ mit $[g] \mapsto \delta_g$. Betrachten wir nun in der mittleren Horizontale auf beiden Seiten die Skalarprodukte, die gegeben werden durch

$\sum_{g\in G}\overline{\varphi(g)}\psi(g)$ auf dem Gruppenring und $\langle A,B\rangle := \operatorname{tr}(A^*B)$ auf dem Produkt der Endomorphismenringe, für $A,B\in\operatorname{End}_{\mathbb{C}}L$ und A^* die adjungierte Abbildung zu A in Bezug auf ein und jedes G-invariante Skalarprodukt auf L, so bedeutet unsere Skalarproduktverträglichkeit, daß die Morphismen unseres Diagramms zueinander inverse unitäre Isomorphismen zwischen beiden Räumen auf der mittleren Horizontale induzieren. Ein Analogon für kompakte Hausdorffgruppen diskutieren wir in 15.4.9.8.

Proposition 8.4.3.6 (Orthonormalität komplexer Matrixkoeffizienten). *Bilden gewisse $\rho_L : G \to \mathrm{U}(d_L)$ ein Repräsentantensystem für die einfachen unitären Darstellungen einer endlichen Gruppe G, so bilden die renormalisierten Matrixkoeffizienten $\sqrt{\dim_L}\,(\rho_L)_{ij}$ eine Orthonormalbasis von $\operatorname{Fun}(G;\mathbb{C})$ in Bezug auf das Standardskalarprodukt $\langle\varphi,\psi\rangle := |G|^{-1}\sum_{g\in G}\overline{\varphi(g)}\psi(g)$.*

Beweis. Die Matrizen E_{ij} bilden eine Orthonormalbasis von $\operatorname{Mat}(d;\mathbb{C})$ für das durch $\langle A,B\rangle = \operatorname{tr}(A^*B)$ gegebene Skalarprodukt. Schieben wir diese Orthonormalbasis in unserem Sechseck nach links unten, so ergibt sich die Behauptung. □

8.4.3.7. Aus der Orthonormalität komplexer Matrixkoeffizienten 8.4.3.6 und der Erkenntnis $\chi_L = \sum_{i=1}^{\dim L}(\rho_L)_{ii}$ folgt auch ein weiteres Mal die Orthonormalität der einfachen Charaktere in Bezug auf das Standardskalarprodukt.

8.4.3.8. Die wesentlichen Informationen über die komplexen Darstellungen einer endlichen Gruppe werden meist in Form einer **Charaktertafel** dargeboten: Die Spalten solch einer Tafel sind indiziert durch Repräsentanten der Konjugationsklassen, die Zeilen durch die einfache Darstellungen bis auf Isomorphismus, und in der Tafel stehen die Werte des Charakters der entsprechenden einfachen Darstellung auf Elementen der entsprechenden Konjugationsklasse. Über den Konjugationsklassen wird meist in einer eigenen Zeile ihre Kardinalität angegeben, damit auch das Skalarprodukt auf dem Raum Klassenfunktionen aus der Tafel hervorgeht.

Beispiel 8.4.3.9. Die einfachen Darstellungen der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_3$ sind die Einsdarstellung eins, die Signumsdarstellung sgn und die Darstellung spieg als zweidimensionale Spiegelungsgruppe, bei der die drei ungeraden Permutationen operieren als Spiegelungen an drei Geraden durch den Ursprung, die paarweise den Winkel $60°$ einschließen. Zeichnen wir zwei ungerade Permutationen $s,t\in\mathcal{S}_3$ aus, so können wir die Elemente von $\mathcal{S}_3$ aufzählen als $\mathcal{S}_3=\{e,s,t,sts,ts,st\}$ und die Charaktertafel hat die Gestalt

	e	s, t, sts	ts, st
eins	1	1	1
sgn	1	-1	1
spieg	2	0	-1

Um die unterste Zeile zu prüfen bemerkt man, daß jede ebene lineare Spiegelung Spur Null hat, jede ebene Drehung um $120°$ jedoch Spur $\zeta + \bar{\zeta} = -1$ für ζ eine primitive dritte Einheitswurzel.

8.4.3.10 (**Orthogonalitätsrelationen in der Charaktertafel**). Seien G eine endliche Gruppe und $\chi_1, \ldots, \chi_r$ die einfachen komplexen Charaktere von G. Bilden $x_1, \ldots, x_r$ ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen und bezeichnet $\hat{x} \subset G$ die Konjugationsklasse von $x \in G$, so lauten die Orthogonalitätsrelationen

$$\delta_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_k |\hat{x}_k| \, \overline{\chi_i(x_k)} \chi_j(x_k)$$

Wegen der Bahnformel $|\hat{x}_k| \cdot |\operatorname{Z}_G(x_k)| = |G|$ ist also die Matrix mit den Einträgen $|\operatorname{Z}_G(x_k)|^{-1/2} \chi_i(x_k)$ unitär. Dasselbe gilt a forteriori für ihre transponierte Matrix und zeigt

$$\delta_{ij} |\operatorname{Z}_G(x_i)| = \sum_k \overline{\chi_k(x_i)} \chi_k(x_j)$$

Insbesondere können wir also aus der Charaktertafel auch die Gruppenordnung $|G| = |\operatorname{Z}_G(e)|$ und die Ordnungen der Konjugationsklassen $|\hat{x}_k| = |G|/|\operatorname{Z}_G(x_k)|$ ablesen. Wenn wir mithin die Spalten durch die einfachen Darstellungen indizieren, so sind die Spaltenvektoren paarweise orthogonal und ihre quadrierte Länge ist die Kardinalität des Zentralisators der jeweiligen Konjugationsklasse.

Übungen

Übung 8.4.3.11 (**Charaktere von Permutationsdarstellungen**). Gegeben eine Gruppe G und eine endliche G-Menge X und ein Körper k zeige man für den Charakter der zugehörigen Permutationsdarstellung $V := \operatorname{Ens}(X, k)$ nach 8.1.1.12 die Formel

$$\chi_V(g) = |X^g|$$

In Worten ist also der Wert des Charakters bei g die als Element von k zu verstehende Zahl der Fixpunkte von g in X.

Übung 8.4.3.12. Gegeben eine Darstellung V einer Gruppe nennen wir die Darstellung $V^* = \operatorname{Hom}(V, k)$ auch die **kontragradiente Darstellung**. Man zeige, daß der Charakter der kontragredienten Darstellung gegeben wird durch die Formel $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1})$. Weiter zeige man $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$.

Übung 8.4.3.13. Gegeben eine endliche Gruppe G und eine komplexe Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(L)$ von G folgt aus $|\chi_L(g)| = \chi(e)$ bereits, daß $\rho(g)$ ein Vielfaches der Identität ist. Hinweis: $\rho(g)$ ist diagonalisierbar und alle seine Eigenwerte sind Einheitswurzeln.

8.4.4 Charaktere und algebraische Zahlen*

8.4.4.1. In diesem Abschnitt werden verschiedene weiterführende Aussagen der Charaktertheorie diskutiert, deren Beweise grundlegende Kenntnisse der kommutativen Algebra benötigen.

Satz 8.4.4.2 (Dimensionen einfacher Darstellungen). *Gegeben ein Spaltungskörper der Charakteristik Null und eine endliche Gruppe ist die Dimension jeder einfachen Darstellung unserer Gruppe über dem gegebenen Körper ein Teiler der Gruppenordnung.*

Beweis. Seien k unser Körper, G unsere endliche Gruppe und L unsere einfache Darstellung. Wir gehen aus von der Gleichung $\mathrm{e}_L * \mathrm{e}_L = \mathrm{e}_L$ im Gruppenring. Mit der Charakter-Projektor-Formel 8.4.2.19 folgt mit ζ dem Zählmaß

$$\chi_L\zeta * \chi_L\zeta = \frac{|G|}{\dim L}\chi_L\zeta$$

Per definitionem ist $\chi_L(g)$ die Summe der Eigenwerte von $g : L \to L$. Wegen $g^n = 1$ für $n = |G|$ sind diese Eigenwerte n-te Einheitswurzeln. Ist also $\beta \in k$ eine primitive n-te Einheitswurzel, so nehmen alle Charaktere Werte in $\mathbb{Z}[\beta]$ an. Bezeichnet $I \subset \mathbb{Z}[\beta]$ das von den Werten des Charakters χ_L erzeugte Ideal, so folgern wir im Körper k die Inklusionsrelation

$$I \supset \frac{|G|}{\dim L} I$$

Nun ist $\mathbb{Z}[\beta]$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, erzeugt etwa von den Potenzen $1, \beta, \beta^2, \ldots \beta^{n-1}$. Foglich ist mit 4.4.4.1 auch I eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Zusätzlich ist I offensichtlich torsionsfrei und mit 4.4.4.12 dann sogar frei über $\mathbb{Z}$, in Formeln $I \cong \mathbb{Z}^r$ für geeignetes $r \in \mathbb{N}$. Zusammen mit der Erkenntnis $I \neq 0$ impliziert unsere Inklusion oben nun $(|G|/\dim L) \in \mathbb{Z}$ wie gewünscht. □

Satz* 8.4.4.3. *Die Dimensionen der einfachen Darstellungen einer endlichen Gruppe G bilden über jedem Spaltungskörper nichtteilender Charakteristik dieselbe Multimenge.*

8.4.4.4. Am Schluß des Beweises dieses Satzes zeigen wir unter den Annahmen das Satzes zusätzlich, daß salopp gesprochen auch „die einfachen Charaktere nicht vom Grundkörper abhängen“. Diese Idee muß man jedoch erst noch zu einer präzisen Aussage machen, denn es ist a priori nicht klar, wie man Funktionen mit Werten in verschiedenen Körpern überhaupt sollte vergleichen können.

8.4.4.5. Für diesen Satz brauchen wir etwas mehr Kenntnisse in kommutativer Algebra und insbesondere den Begriff **??** eines projektiven Moduls und den Begriff **??** des Ranges eines endlich erzeugten projektiven Moduls über einem Integritätsbereich.

Beweis. Sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen oder allgemeiner irgendein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null. Die Charakter-Projektor-Formel 8.4.2.19 zusammen mit elementaren Erkenntnissen aus dem vorhergehenden Beweis von Satz 8.4.4.2 über die Dimension einfacher Darstellungen zeigt, daß die Projektoren $\mathrm{e}_i \in \mathbb{C}G$ zu den einfachen Darstellungen mit der Notation $n := |G|$ für die Gruppenordnung Koeffizienten im Teilring $R := \mathbb{Z}[\sqrt[n]{1}, n^{-1}] \subset \mathbb{C}$ haben. Wenn wir diese Projektoren für alle einfachen Darstellungen aufaddieren, gilt offensichtlich $\mathrm{e}_1 + \ldots + \mathrm{e}_r = 1$. Andererseits haben wir $\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j = \delta_{ij}\mathrm{e}_i$. Wir folgern eine Zerlegung des Gruppenrings RG der Gestalt

$$RG = \mathrm{e}_1 RG \oplus \ldots \oplus \mathrm{e}_r RG$$

Hier ist klar, daß $\mathrm{e}_i RG$ ein projektiver R-Modul sein muß und daß dieser projektive R-Modul im Sinne von **??** den Rang $\mathrm{rg}_R(\mathrm{e}_i RG) = (\dim_{\mathbb{C}} L_i)^2$ haben muß. Für jeden Körper k nichtteilender Charakteristik, in dem es eine n-te Einheitswurzel der Ordnung n gibt, also eine Nullstelle des n-ten Kreisteilungspolynoms $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$, finden wir nun einen Ringhomomorphismus $R \to k$, da nämlich R durch formales Invertieren des Elements n aus dem Restklassenring $\mathbb{Z}[X]/\langle \Phi_n(X) \rangle$ entsteht. Die Bilder der Projektoren e_i unter dem induzierten Ringhomomorphismus $RG \to kG$ sind dann offensichtlich paarweise orthogonale Idempotente $\bar{\mathrm{e}}_i \in kG$ mit der Summe Eins, also $\bar{\mathrm{e}}_1 + \ldots + \bar{\mathrm{e}}_r = 1$ und $\bar{\mathrm{e}}_i\bar{\mathrm{e}}_j = \delta_{ij}\bar{\mathrm{e}}_i$. Weiter gilt offensichtlich

$$\dim_k(\bar{\mathrm{e}}_i kG) = \mathrm{rg}_R(\mathrm{e}_i RG) = (\dim_{\mathbb{C}} L_i)^2$$

Weil wir aber bereits wissen, daß es über k nicht mehr einfache Darstellungen geben kann als über $\mathbb{C}$, nämlich höchstens soviele wie Konjugationsklassen in unserer Gruppe, sind die $\bar{\mathrm{e}}_i$ notwendig die Projektoren zu den einfachen Darstellungen von G über k. Die Charakter-Projektor-Formel 8.4.2.19 zeigt nun sogar, daß wir die einfachen Charaktere von G über k erhalten, indem wir von den einfachen Charakteren von G über $\mathbb{C}$ ausgehen, beachten, daß sie Werte in R annehmen müssen, und dann die so erhaltenen Abbildungen $\chi_i : G \to R$ noch mit einem fest gewählten Ringhomomorphismus $R \to k$ verknüpfen. $\square$

8.4.4.6. Man beachte, daß die im vorhergehenden Beweis konstruierte Identifikation $\mathrm{irr}_{\mathbb{C}}(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{irr}_k(G)$ von der Wahl eines Ringhomomorphismus $R \to k$ entscheidend abhängt. Man kann das bereits am Beispiel der zyklischen Gruppen gut erkennen.

8.4.4.7. Für den Rest dieses Abschnitts setzen wir Kenntnisse über ganze Kringerweiterungen im Umfang von 7.5.1 voraus. Wir müssen wissen, daß die über $\mathbb{Z}$ ganzen komplexen Zahlen einen Teilring von $\mathbb{C}$ bilden, der alle Einheitswurzeln enthält und dessen Schnitt mit $\mathbb{Q}$ schlicht $\mathbb{Z}$ selber ist. Weiter müssen wir wissen, daß jeder Teilring von $\mathbb{C}$, der als additive abelsche Gruppe endlich erzeugt ist, bereits aus über $\mathbb{Z}$ ganzen Zahlen besteht.

Satz 8.4.4.8 (Ganzheitseigenschaften von Charakteren). *Gegeben eine endliche Gruppe G ist für jeden einfachen komplexen Charakter χ von G und jedes Element $g \in G$ mit Konjugationsklasse $\hat{g}$ der Quotient $\chi(g)|\hat{g}|/\chi(e)$ ganz über $\mathbb{Z}$.*

Beweis. Die Projektoren $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_r$ zu den einfachen komplexen Darstellungen bilden eine Basis des Zentrums des Gruppenrings $Z := \mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$. Entwickeln wir $z \in Z$ als $z = \sum_{i=1}^r \omega_i(z)\mathrm{e}_i$, so sind die ω_i Ringhomomorphismen $\omega_i : Z \to \mathbb{C}$. Bezeichnet $\hat{g}$ die Konjugationsklasse von $g \in G$ und $[\hat{g}]$ ihre Indikatorfunktion und ζ das Zählmaß, so erzeugen die Maße $[\hat{g}]\zeta$ einen Teilring $Z_{\mathbb{Z}} \subset Z$. Sein Bild $\omega_i(Z_{\mathbb{Z}}) \subset \mathbb{C}$ ist dann ein Teilring, der modulendlich ist über $\mathbb{Z}$ und der damit nach 7.5.1.5 aus über $\mathbb{Z}$ ganzen Elementen von $\mathbb{C}$ bestehen muß. Insbesondere sind die $\omega_i([\hat{g}]\zeta)$ stets ganz über $\mathbb{Z}$. Nun finden wir aber

$$\omega_i(z)\mathrm{e}_i = z\mathrm{e}_i$$

und auf einer einfachen Darstellung L mit $\mathrm{e}_i = \mathrm{id} : L \to L$ operiert die linke Seite durch einen Endomorphismus der Spur $\omega_i(z) \dim L = \omega_i(z)\chi_L(e)$. Im Fall $z = [\hat{g}]\zeta$ operiert aber die rechte Seite durch einen Endomorphismus der Spur $\chi_L(g)|\hat{g}|$ und es folgt $\omega_i([\hat{g}]\zeta) = \chi_L(g)|\hat{g}|/\chi_L(e)$ und so die Behauptung. □

Satz 8.4.4.9 (Notwendige Nullstellen von Charakteren). *Gegeben eine endliche Gruppe G und eine einfache komplexe Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(L)$ und ein Element $g \in G$, dessen Konjugationsklasse $\hat{g}$ eine zu $\chi_L(e) = \dim_{\mathbb{C}} L$ teilerfremde Kardinalität hat, gilt $\rho(g) \in \mathbb{C}^\times \mathrm{id}_L$ oder $\chi_L(g) = 0$.*

Beweis. Wir setzen $\chi := \chi_L$ schreiben $1 = a\chi(e) + b|\hat{g}|$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Teilen wir diese Gleichung durch $\chi(e)$ und multiplizieren sie mit $\chi(g)$, so folgt aus 8.4.4.8, daß $\alpha := \chi(g)/\chi(e)$ ganz ist über $\mathbb{Z}$. Nun ist aber $\chi(g)$ eine Summe von $\chi(e)$ Einheitswurzeln und es folgt $|\alpha| = |\chi(g)/\chi(e)| \leq 1$. Sicher liegt $\chi(g)$ in einem Unterkörper $K \subset \mathbb{C}$, der endlich und Galois ist über $\mathbb{Q}$, und für $\gamma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ finden wir ebenso $|\alpha^\gamma| \leq 1$. Das Produkt aller α^γ liegt dann in $\mathbb{Q}$ und ist ganz

über $\mathbb{Z}$, liegt also in $\mathbb{Z}$, und muß also Null sein, wenn es nicht den Betrag Eins hat. Wenn es aber den Betrag Eins hat, so müssen alle Eigenwerte von $\rho(g)$ dieselbe Einheitswurzel gewesen sein. □

Satz 8.4.4.10. *Hat eine endliche Gruppe G eine Konjugationsklasse, deren Kardinalität eine echte Primzahlpotenz ist, so ist unsere Gruppe nicht einfach.*

8.4.4.11. Unter einer echten Primzahlpotenz verstehen wir hier wie immer eine Primzahl hoch einer positiven Zahl.

Beweis. Seien p eine Primzahl und $g \in G$ mit $|\hat{g}| = p^l > 1$. Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(L)$ eine einfache Darstellung von G mit Charakter χ. Aus $p \nmid \chi(e)$ folgt mit 8.4.4.9 schon mal $\rho(g) \in \mathbb{C}^\times \mathrm{id}_L$ oder $\chi(g) = 0$. Im ersten Fall liegt g im Normalteiler $\rho^{-1}(\mathbb{C}^\times \mathrm{id}_L)$, der damit die ganze Gruppe sein muß, so daß wir eine eindimensionale Darstellung vor uns haben. Diese muß notwendig trivial sein, wenn G einfach sein will. Wenn also G einfach ist, so folgt $\chi(g) = 0$ für jeden nichttrivialen einfachen Charakter χ mit $p \nmid \chi(e)$. In $\mathrm{Fun}(G;\mathbb{C})$ gilt jedoch $|G|[e] = \sum_\chi \chi(e)\chi$ mit der Summe über alle einfachen Charaktere, und das Auswerten bei g liefert

$$0 = 1 + \sum_{p|\chi(e)} \chi(e)\chi(g)$$

mit dem ersten Summanden für den trivialen Charakter. Das aber impliziert, daß $1/p$ ganz ist über $\mathbb{Z}$, und dieser Widerspruch beendet den Beweis. □

Satz 8.4.4.12 (p-q-Satz von Burnside). *Eine Gruppe, deren Kardinalität nur durch höchstens zwei Primzahlen teilbar ist, ist stets auflösbar.*

8.4.4.13. Jede Gruppe mit 30 Elementen ist auflösbar nach Übung 6.1.4.23. Jede Gruppe mit weniger als 60 Elementen ist mithin auflösbar.

Beweis. Seien sonst $p \neq q$ Primzahlen und G eine Gruppe mit $|G| = p^a q^b$ und $a \geq 1$. Wir wählen eine p-Sylow $P \subset G$. Nach 6.1.3.6 finden wir ein nichttriviales Element $g \neq 1$ im Zentrum von P. Dann gilt $\mathrm{Z}_G(g) \supset P$ und folglich ist die Kardinalität $|\hat{g}|$ der Konjugationsklasse $\hat{g}$ von g eine q-Potenz. Im Fall $|\hat{g}| > 1$ ist G nicht einfach nach 8.4.4.10 und wir kommen mit vollständiger Induktion zum Ziel. Im Fall $|\hat{g}| = 1$ hat G nichttriviales Zentrum und wir kommen auch mit vollständiger Induktion zum Ziel. □

8.4.5 Matrixkoeffizienten und isotypische Komponenten*

8.4.5.1. In diesem Abschnitt erklären wir, warum in Gruppenringen über einem beliebigen Körper und jede endlichdimensionale einfache Darstellung E die E-isotypische Komponente des Gruppenrings zusammenfällt mit der E^*-isotypischen Komponente des Gruppenrings als Rechtsmodul über sich selber, vergleiche 8.4.5.9. Weiter erklären wir, warum im Gruppenring einer endlichen Gruppe

über einem beliebigen Körper das Produkt von Matrixkoeffizienten zu nichtisomorphen einfachen Darstellungen stets verschwindet.

8.4.5.2. Gegeben ein Kring k und ein k-Modul V bezeichnen wir im folgenden den dualen k-Modul als $V^* := \mathrm{Hom}_k(V, k)$.

8.4.5.3 (**Matrixkoeffizientenabbildung eines Moduls einer Ringalgebra**). Gegeben ein Kring k und eine k-Ringalgebra A und ein A-Modul V bezeichne $S := (\mathrm{End}_A V)^{\mathrm{opp}}$ den Opponierten des Endomorphismenrings von V. Dann ist, wie man leicht nachrechnet, die Abbildung

$$\kappa : V \otimes_S V^* \to A^*$$

gegeben durch $\kappa : v \otimes \varphi \mapsto c_{\varphi,v}$ mit $c_{\varphi,v}(a) := \varphi(av)$ ein Homomorphismus von A-Bimoduln. Wir nennen sie die **Matrixkoeffizientenabbildung**.

8.4.5.4. Ist V eine Darstellung einer Menge G über einem Kring k, so erklärt man für $v \in V$ und $\varphi \in V^*$ den **Matrixkoeffizienten** $c_{\varphi,v} : G \to k$ durch die Vorschrift

$$c_{\varphi,v}(g) := \varphi(gv)$$

Ist G ein Monoid und fassen wir V als Modul über dem Monoidring $A := kG$ auf, so entspricht dies $c_{\varphi,v} \in \mathrm{Ens}(G, k)$ dem zuvor definierten $c_{\varphi,v} \in A^*$ unter der durch die Restriktion auf $G \subset kG$ gegebenen Bijektion $A^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(G, k)$.

Satz 8.4.5.5 (**Matrixkoeffizienten und isotypische Komponenten**). *Seien k ein Kring, A eine k-Ringalgebra, E ein einfacher A-Modul und $S := (\mathrm{End}_A E)^{\mathrm{opp}}$ der Opponierte des Endomorphismenschiefkörpers von E. So induziert die Matrixkoeffizientenabbildung einen Isomorphismus von A-Bimoduln*

$$\kappa : E \otimes_S E^* \xrightarrow{\sim} A^*_E$$

von $E \otimes_S E^*$ mit der E-isotypischen Komponente A^*_E des A-Linksmoduls A^*.

8.4.5.6. Insbesondere erzeugen im Fall eines einfachen A-Moduls E seine Matrixkoeffizienten die E-isotypische Komponente A^*_E des A-Linksmoduls A^* als abelsche Gruppe. Über einem Körper k folgt auch, daß von Null verschiedene Matrixkoeffizienten zu paarweise nichtisomorphen einfachen A-Moduln linear unabhängig sind.

8.4.5.7. Ist k ein Körper und A eine k-Ringalgebra und E ein endlichdimensionaler einfacher A-Modul, so finden wir, indem wir unseren Satz auf den A^{opp}-Modul E^* anwenden, daß das Bild der zugehörigen Matrixkoeffizientenabbildung sowohl die E-isotypische Komponente von A^* als A-Linksmodul ist als auch die E^*-isotypische Komponente von A^* als A-Rechtsmodul. Insbesondere stimmen in dieser Situation diese beiden isotypischen Komponenten überein. Notieren wir

$\mathrm{Iso}_R(M;E) := M_E$ die E-isotypische Komponente eines R-Moduls M in Bezug auf einen einfachen R-Modul E und $\mathrm{Iso}_{-R}(N;F)$ die F-isotypische Komponente eines R-Rechtsmoduls N in Bezug auf einen einfachen R-Rechtsmodul F, so haben wir also in Formeln

$$\mathrm{Iso}_A(A^*;E) = \mathrm{Iso}_{-A}(A^*;E^*)$$

8.4.5.8. Ich bin nicht vollständig glücklich damit, daß in unserer Notation die isotypische Komponente für die Linksmodulstruktur durch einen Index von rechts angedeutet wird, aber es schien mir auch wieder übertrieben, die allgemeine Notation am Fall der Bimoduln auszurichten.

Beweis. Die kanonische Beschreibung isotypischer Komponenten aus 8.2.3.10 liefert einen Isomorphismus

$$\kappa : E \otimes_S \mathrm{Hom}_A(E, A^*) \xrightarrow{\sim} A^*_E$$

Gegeben ein A-Modul N und ein A-Rechtsmodul M induzieren weiter die offensichtlichen Isomorphismen $\mathrm{Hom}_k(N, M^*) \xrightarrow{\sim} (M \otimes_k N)^*$ aus 7.2.8.13 Isomorphismen $\mathrm{Hom}_A(N, M^*) \xrightarrow{\sim} (M \otimes_A N)^*$. Genauer können liefern die üblichen Formeln natürliche Bijektionen beider Seiten mit der Menge der A-balancierten k-bilinearen Abbildungen $M \times N \to k$. Wenden wir das auf $N = E$ und $M = A$ an, so folgt unser Satz. □

8.4.5.9 (**Isotypische Komponenten von Gruppenringen**). Ist k ein Körper und A eine k-Ringalgebra und E ein endlichdimensionaler einfacher A-Modul und gibt es eine Einbettung

$$A \hookrightarrow A^*$$

von A-Bimoduln, so stimmen nach 8.2.4.13 und 8.4.5.7 die E-isotypische Komponente von A als A-Linksmodul und die E^*-isotypische Komponente von A als A-Rechtsmodul überein. Eine typische Anwendung ist der Fall eines Gruppenrings kG, in dem die Abbildung $kG \hookrightarrow (kG)^*$, unter der jedem Gruppenelement das „Bestimmen des Koeffizienten seines Inversen“ zugeordnet wird, ein Homomorphismus von Bimoduln ist.

8.4.5.10 (**Verschwinden von Produkten von Matrixkoeffizienten**). Gegeben eine endliche Gruppe und ein Körper haben Matrixkoeffizienten zu nichtisomorphen einfachen Darstellungen im Gruppenring das Produkt Null. In der Tat gehören unsere Matrixkoeffizienten nach 8.4.5.9 dann zu verschiedenen isotypischen Komponenten des Gruppenrings, und diese isotypischen Komponenten sind ja nach 8.3.1.10 Ideale des Gruppenrings.

Ergänzung 8.4.5.11. Gegeben ein Körper k und eine k-Ringalgebra A und ein einfacher A-Modul E unendlicher Dimension wird E^* im allgemeinen nicht einfach sein. Hat zum Beispiel A abzählbare Dimension, so gilt dasselbe für jeden einfachen A-Modul, aber der Dualraum eines einfachen unendlichdimensionalen A-Moduls hat notwendig eine überabzählbare Dimension. Auch der Sockel des Dualen eines einfachen A-Moduls kann bereits überabzählbare Dimension haben. Ein explizites Beispiel in der Lie-Theorie ist ein einfacher Vermamodul, dessen Dualraum überabzählbar viele paarweise nicht isomorphe einfache Whittakermoduln enthält.

8.4.6 Ergänzungen zu Charakteren*

8.4.6.1. Auch bei endlichdimensionalen Darstellungen nicht notwendig endlicher Gruppen über nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen Körpern beliebiger Charakteristik bestimmt der Charakter die weitgehend Darstellung. In diesem Abschnitt werden verschiedene Aussagen in dieser Richtung besprochen.

8.4.6.2 (**Kriterien für von Null verschiedenen Charakter**). Gegeben eine endlichdimensionale einfache Darstellung V einer Gruppe über einem Körper der Charakeristik Null oder einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist ihr Charakter nicht die Nullfunktion. Im ersten Fall ist bereits der Wert am neutralen Element nicht Null, im zweiten Fall folgt es unschwer aus dem Satz von Wedderburn 8.3.3.6. Ich erwarte, daß das allgemeiner für vollkommene Körper gilt, und muß mal in Bourbaki nachschlagen. Für allgemeine Körper gilt es nicht, wie das folgende Beispiel 8.4.6.3 zeigt.

Beispiel 8.4.6.3. Gegeben eine endliche inseparable Körpererweiterung L/K ist L eine einfache Darstellung über K der multiplikativen Gruppe $L^\times$, deren Charakter nach 7.8.3.7 die Nullfunktion ist.

Ergänzung 8.4.6.4. Eine einfache Darstellung einer Gruppe wird bereits durch die Angabe einer beliebigen von Null verschiedenen Linearkombination ihrer Matrixkoeffizienten bis auf Isomorphismus eindeutig festgelegt. In der Tat liegt nach 8.4.5.5 jeder Matrixkoeffizient in derjenigen isotypischen Komponente des Raums der Funktionen auf unserer Gruppe, der zu besagter einfacher Darstellung gehört. Insbesondere wird eine endlichdimensionale einfache Darstellung durch ihren Charakter bis auf Isomorphismus eindeutig festgelegt, sofern dieser nicht die Nullfunktion ist.

Satz 8.4.6.5 (**Charakterisierung durch Charaktere**). *1. Endlichdimensionale Darstellungen einer endlichen Gruppe über einem Körper der Charakteristik Null sind isomorph genau dann, wenn sie denselben Charakter haben.*

2. *Endlichdimensionale Darstellungen einer beliebigen Gruppe über einem Körper der Charakteristik Null haben dieselben Kompositionsfaktoren mit denselben Vielfachheiten genau dann, wenn sie denselben Charakter haben.*

Beweis. Nach dem Satz von Maschke 8.4.1.1 sind Darstellungen einer endlichen Gruppe über einem Körper der Charakteristik Null halbeinfach. Es reicht also, die zweite Aussage zu zeigen. Sind aber L_i diejenigen paarweise nichtisomorphen einfachen Darstellungen, die als Kompositionsfaktoren in unserer Darstellung M auftreten, und ist $m(i)$ die Vielfachheit des Auftretens von L_i und bezeichnet χ_i den Charakter von L_i, so gilt

$$\chi_M = \sum_{i=1}^{r} m(i)\chi_i$$

Da aber die χ_i in verschiedenen isotypischen Komponenten des Gruppenrings liegen und nicht Null sind, sind sie linear unabhängig. Da wir in Charakteristik Null arbeiten, können wir somit die Multiplizitäten $m(i)$ am Charakter χ_M von M ablesen. $\square$

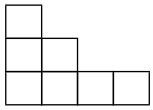
8.5 Darstellungen der symmetrischen Gruppen

8.5.1 Einfache Darstellungen und Young-Diagramme

8.5.1.1. Wir stellen zunächst die beiden Hauptsätze vor, die wir beweisen wollen. Unter einem **Young-Diagramm** verstehen wir wie in 6.1.5.3 eine endliche Teilmenge $Y \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$((i,j) \in Y \text{ und } i' \leq i \text{ und } j' \leq j) \quad \Rightarrow \quad (i',j') \in Y$$

Die Elemente von Y nennen wir die „Kästchen“ unseres Youngdiagramms und stellen uns ein Element (i,j) vor als das Kästchen auf einem Rechenpapier, bei dem die Koordinaten der linken unteren Ecke gerade (i,j) sind. Zum Beispiel stellt das Bild



das Youngdiagramm $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(2,0),(3,0)\}$ dar. In der Praxis denke ich selber bei Youngdiagrammen stets an Bilder dieser Art.

Satz 8.5.1.2 (Einfache Darstellungen der symmetrischen Gruppen). *1. Gegeben ein Youngdiagramm Y besitzt die Gruppe $\mathcal{S}_Y := \mathrm{Ens}^\times Y$ aller Permutationen von Y bis auf Isomorphismus genau eine einfache komplexe Darstellung $L(Y)$ mit der Eigenschaft, daß darin sowohl die Einsdarstellung des Spaltenstabilisators von Y als auch die Signumsdarstellung des Zeilenstabilisators von Y vorkommen;*

2. Gegeben $n \geq 0$ erhalten wir eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_n & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{irr} \mathbb{C}\mathcal{S}_n \\ Y & \mapsto & L(Y) \end{array}$$

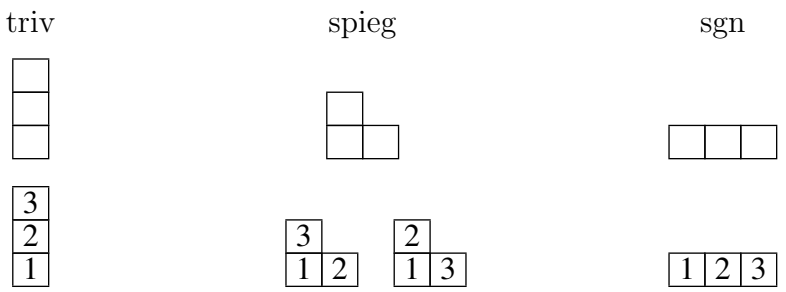
zwischen der Menge $\mathcal{Y}_n$ aller Youngdiagramme mit n Kästchen und der Menge aller Isomorphieklassen von einfachen komplexen Darstellungen der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$, indem wir für jedes Youngdiagramm Y mit n Kästchen eine Bijektion $Y \xrightarrow{\sim} \{1,\ldots,n\}$ wählen, dadurch $\mathcal{S}_Y$ mit $\mathcal{S}_n$ identifizieren, und unsere einfache Darstellung $L(Y)$ aus Teil 1 mit dieser Identifikation als Darstellung von $\mathcal{S}_n$ auffassen.

8.5.1.3. Nach 8.1.1.9 hängt die so erhaltene Darstellung $L(Y)$ der Gruppe $\mathcal{S}_n$ bis auf Isomorphismus nicht von der Wahl der Bijektion $Y \xrightarrow{\sim} \{1,\ldots,n\}$ ab.

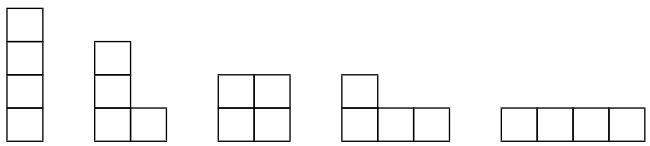
Definition 8.5.1.4. Gegeben ein Youngdiagramm Y mit n Kästchen ist ein **Tableau der Gestalt** Y eine Bijektion $T : Y \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, n\}$. Wir veranschaulichen uns solch ein Tableau, indem wir in jedes Kästchen unseres Youngdiagramms den Wert schreiben, den T dort annimmt. Ein **Standardtableau** ist ein Tableau, dessen Einträge in allen Zeilen und Spalten monoton wachsen.

Satz 8.5.1.5 (**Dimensionen der einfachen Darstellungen**). *Für jedes Youngdiagramm Y stimmt die Dimension der zugehörigen einfachen komplexen Darstellung $L(Y)$ von $\mathcal{S}_n$ überein mit der Zahl der Standardtableaus der Gestalt Y.*

Beispiel 8.5.1.6. Im Fall der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_3$ haben wir drei Young-Diagramme mit drei Kästchen. Sie entsprechen den drei einfachen Darstellungen nach 8.4.3.9. Die Spiegelungsdarstellung ist zweidimensional, was der Tatsache entspricht, daß es für das fragliche Youngdiagramm zwei Standardtableaus gibt.



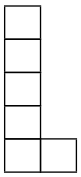
Beispiel 8.5.1.7. Im Fall der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_4$ haben wir fünf Young-Diagramme mit vier Kästchen



Sie entsprechen einfachen Darstellungen wie folgt: Ganz links steht die Einsdarstellung, ganz rechts die Signumsdarstellung, in der Mitte die zweidimensionale einfache Darstellung von $\mathcal{S}_3$ zurückgezogen mit dem Gruppenhomomorphismus $\mathcal{S}_4 \twoheadrightarrow \mathcal{S}_3$, dessen Kern die Doppeltranspositionen zusammen mit dem neutralen Element bilden. Die restlichen beiden Darstellungen sind rechts die dreidimensionale Darstellung auf dem Umgebungsraum des Tetraeders, die von den Permutationen seiner Ecken induziert wird, und links ihr Tensorprodukt mit der Vorzeichendarstellung.

Beispiel 8.5.1.8. Die Permutationsdarstellung von $\mathcal{S}_n$ auf $\mathbb{C}^n$ zerfällt für $n \geq 2$ in zwei einfache Darstellungen, nämlich die Gerade $\langle(1, 1, \ldots, 1)\rangle$ und ihr orthogonales Komplement unter dem Standard-Skalarprodukt. Daß dieses Komplement

einfach ist, erkennt man zum Beispiel, indem man nachrechnet, daß der Endomorphismenring unserer Permutationsdarstellung zweidimensional ist: Genauer besteht er aus allen Matrizen, bei denen alle Einträge auf der Diagonalen übereinstimmen und alle Einträge außerhalb der Diagonale ebenfalls übereinstimmen. Das Youngtableau für den nichttrivialen Summanden hat im Fall $n = 6$ die Gestalt



und hat auch für allgemeines n nur zwei Spalten, von denen die Zweite aus einem einzigen Kästchen besteht. In der Tat kommt in unserem orthogonalen Komplement die Einsdarstellung von $\mathcal{S}_{n-1} \subset \mathcal{S}_n$ vor als die Gerade $\langle(1, 1, \ldots, 1-n)\rangle$ und die Signumsdarstellung von $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_n$ als die Gerade $\langle(1, -1, 0, \ldots 0)\rangle$.

8.5.1.9. Ist R ein Ring und $e \in R$ idempotent und M ein R-Modul, so induziert das Auswerten bei e offensichtlich eine Bijektion $\operatorname{Hom}_R(Re, M) \xrightarrow{\sim} eM$. Das mögen Sie auch bereits als Übung 7.1.3.13 ausgeführt haben. Man mag auch direkt bemerken, daß der Annullator von e das Linksideal $R(1-e)$ ist.

Beweis von 8.5.1.2. Wir betrachten im Gruppenring $\mathbb{C}\mathcal{S}_Y$ die beiden Idempotenten

$$E_Y = |S|^{-1} \sum_{g \in S} g \quad \text{und} \quad A_Y = |Z|^{-1} \sum_{h \in Z} \operatorname{sgn}(h)\, h$$

Diese Idempotenten sind genau die Projektoren zur Einsdarstellung von S und zur Signumsdarstellung von Z. Die beiden von diesen Idempotenten erzeugten Linksideale des Gruppenrings $\mathbb{C}\mathcal{S}_Y$ notieren wir $M(Y) := (\mathbb{C}\mathcal{S}_Y)E_Y$ und $N(Y) := (\mathbb{C}\mathcal{S}_Y)A_Y$. Der mit Induktion von Darstellungen 8.6.3.2 vertraute Leser wird sie nebenbei bemerkt leicht identifizieren können mit den induzierten Darstellungen zur Einsdarstellung des Spaltenstabilisators beziehungsweise der Signumsdarstellung des Zeilenstabilisators. In einer Darstellung L von $\mathcal{S}_Y$ kommt nach 8.5.1.9 die Einsdarstellung des Spaltenstabilisators vor genau dann, wenn gilt $E_Y L \neq 0$ alias $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{S}_Y}(M(Y), L) \neq 0$. Ebenso kommt die Signumsdarstellung des Zeilenstabilisators vor genau dann, wenn gilt $A_Y L \neq 0$ alias $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{S}_Y}(N(Y), L) \neq 0$ und wegen der Halbeinfachkeit gleichbedeutend $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{S}_Y}(L, N(Y)) \neq 0$. Jede einfache Darstellung L von $\mathcal{S}_Y$ mit beiden Eigenschaften ist also das Bild eines Homomorphismus von Darstellungen $M(Y) \to N(Y)$, und Teil 1 folgt leicht, wenn wir zeigen können, daß gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{S}_Y}(M(Y), N(Y)) = 1 \qquad (*)$$

In der Tat ist dann unser L notwendig das Bild eines und jedes von Null verschiedenen derartigen Homomorphismus. Nehmen wir speziell den durch Rechtsmultiplikation mit A_Y gegebenen Homomorphismus und beachten die im folgenden gezeigte Formel $E_Y A_Y \neq 0$, so ergibt sich für diese durch Y bestimmte einfache Darstellung $L \cong L(Y)$ sogar die explizite Formel

$$L(Y) \cong (\mathbb{C}\mathcal{S}_Y)E_Y A_Y$$

In anderen Worten kann $L(Y)$ also beschrieben werden als das vom sogenannten **Young-Symmetrisator** $E_Y A_Y$ im Gruppenring erzeugte Linksideal. Um nun zu zeigen, daß der Raum der Homomorphismen $M(Y) \to N(Y)$ eindimensional ist, schreiben wir diese Behauptung zunächst mithilfe unserer Vorbemerkung 8.5.1.9 und den Definitionen um zur Behauptung

$$\dim_{\mathbb{C}} E_Y(\mathbb{C}\mathcal{S}_Y)A_Y = 1$$

Nun gilt ja offensichtlich $S \cap Z = 1$, also $E_Y A_Y \neq 0$, und für alle $x \in SZ$ gilt $E_Y x A_Y = \pm E_Y A_Y$. Es reicht also, wenn wir zusätzlich für alle $x \notin SZ$ zeigen $E_Y x A_Y = 0$ oder gleichbedeutend $x^{-1}E_Y x A_Y = 0$. Nun haben wir natürlich

$$|S|x^{-1}E_Y x = \sum_{g \in x^{-1}Sx} g$$

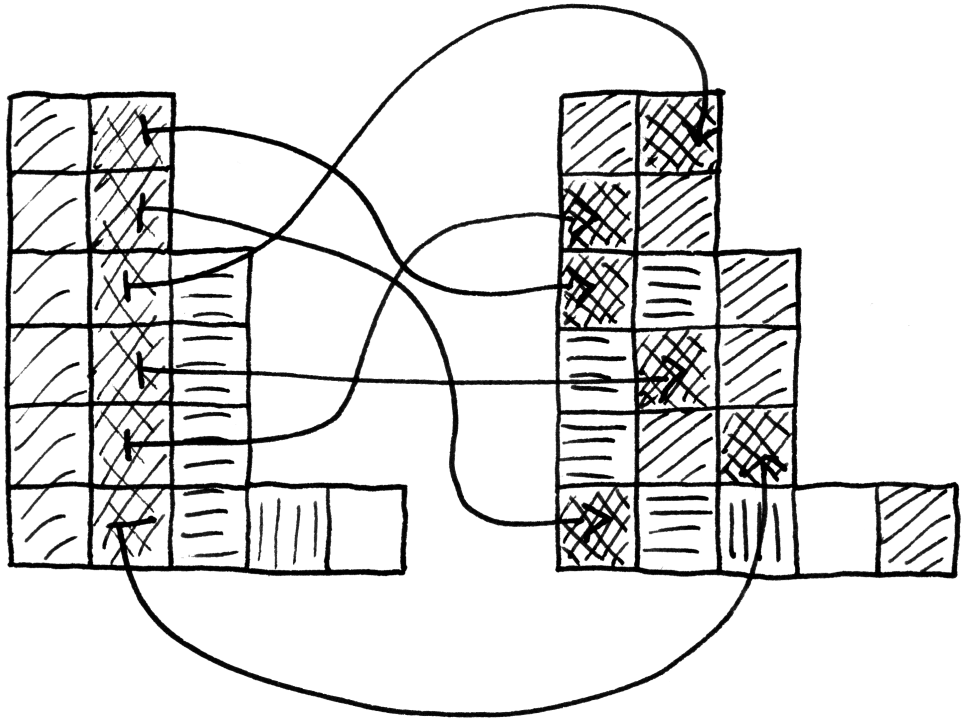
Bezeichnet $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots$ die Partition des Youngdiagramms Y in seine Spalten, so ist $x^{-1}Sx$ gerade die Gruppe aller derjenigen Permutationen von Y, die jedes Stück der Partition

$$Y = x^{-1}Y_1 \cup x^{-1}Y_2 \cup \ldots$$

unserer Kästchenmenge Y stabilisieren. Trifft nun jede transformierte Spalte $x^{-1}Y_i$ jede Zeile unseres Youngdiagramms in höchstens einem Element, so scheint es mir offensichtlich, daß es ein y im Zeilenstabilisator Z geben muß mit $yx^{-1}Y_i = Y_i$ für alle i, woraus sofort folgt $x \in SZ$. Im Fall $x \notin SZ$ gibt es folglich eine transformierte Spalte $x^{-1}Y_i$, die mit einer Zeile von Y mindestens zwei Elemente gemeinsam hat. Die Vertauschung dieser beiden Elemente ist dann eine Transposition $t \in x^{-1}Sx \cap Z$, und deren Existenz zeigt $E_Y x A_Y = 0$, da dann ja gilt

$$(x^{-1}E_Y x) \in \mathbb{C}\mathcal{S}_Y(t+1) \quad \text{und} \quad A_Y \in (t-1)\mathbb{C}\mathcal{S}_Y$$

Damit wissen wir, daß die Darstellungen $L(Y)$ einfach sind. Da es offensichtlich ebensoviele Young-Diagramme mit n Kästchen gibt wie Partitionen der Zahl n wie nach 6.1.5.6 Konjugationsklassen in der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$, ist der erste Satz bewiesen, sobald wir zeigen, daß die Darstellungen $L(Y)$ paarweise nicht isomorph sind. Um das zu zeigen, führen wir auf der Menge $\mathcal{Y}_n$ aller Youngdiagramme mit n Kästchen eine Teilordnung ein.



Eine Permutation der Kästchen eines Youngdiagramms, bei der das Bild jeder Spalte höchstens ein Kästchen in jeder Zeile hat, kann durch Nachschalten eines Elements des Zeilenstabilisators in den Spaltenstabilisator geschoben werden. Das Bild deutet solch eine Permutation an, die Wirkung der Permutation auf die Kästchen der zweiten Spalte habe ich durch Pfeile angedeutet, bei den anderen Kästchen rechts ist nur an der Textur zu sehen, aus welcher Spalte sie kommen.

Definition 8.5.1.10. Ein Youngdiagramm heißt kleinergleich einem anderen in der **Dominanz-Teilordnung** genau dann, wenn es für jedes $s \in \mathbb{N}$ in den ersten s Spalten insgesamt höchstens ebensoviele Kästchen besitzt wie das andere. Wir notieren diese Teilordnung $Y \leq Y'$.

Fortführung des Beweises. Wählen wir irgendeine Bijektion $Y \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, n\}$, identifizieren mit ihrer Hilfe $\mathcal{S}_Y$ mit $\mathcal{S}_n$ und fassen mithilfe dieser Identifikation die Darstellungen $M(Y)$ und $N(Y)$ von $\mathcal{S}_Y$ als Darstellungen von $\mathcal{S}_n$ auf, so erhalten wir nach 8.1.1.9 bis auf Isomorphismus wohldefinierte Darstellungen von $\mathcal{S}_n$. Für je zwei Diagramme $Y, Y' \in \mathcal{Y}_n$ behaupten wir nun

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{S}_n}(M(Y), N(Y')) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Y \leq Y'$$

Sobald das gezeigt ist, sind wir fertig, denn dann folgt aus $L(Y) \cong L(Y')$ sofort $Y \leq Y' \leq Y$ und damit $Y = Y'$. Seien also Bijektionen $\varphi : Y \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, n\}$ und $\varphi' : Y' \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, n\}$ beliebig gewählt. Die von φ induzierte Identifikation $\mathcal{S}_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n$ hat die Gestalt $x \mapsto \varphi x \varphi^{-1}$, und den zugehörigen Isomorphismus von Gruppenringen notieren wir analog $C \mapsto \varphi C \varphi^{-1}$. Mit denselben Argumenten wie zuvor gilt es in diesen Notationen zu zeigen

$$Y \not\leq Y' \quad \Rightarrow \quad (\varphi E_Y \varphi^{-1})(\mathbb{C}\mathcal{S}_n)(\varphi' A_{Y'} \varphi'^{-1}) = 0$$

Es reicht dazu, für jede Bijektion $\psi : Y' \xrightarrow{\sim} Y$ zu zeigen

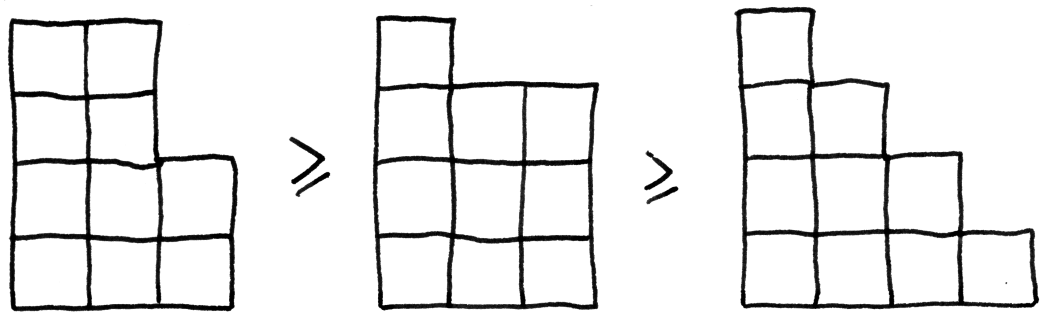
$$Y \not\leq Y' \quad \Rightarrow \quad E_Y \psi A_{Y'} = 0$$

Wie zuvor reicht es dafür weiter zu zeigen, daß für $Y \not\leq Y'$ unter jeder Bijektion $Y \xrightarrow{\sim} Y'$ aus mindestens einer Spalte von Y mindestens zwei Kästchen in derselben Zeile von Y' landen. In der Yat gibt es dann ja ein s derart, daß Y mehr Kästchen in den ersten s Spalten stehen hat als Y'. Dann können wir diese Kästchen jedoch nicht so mit Kästchen von Y' identifizieren, daß wir in jeder Zeile von Y' höchstens s Kästchen erwischen. Also erwischen wir in mindestens einer Zeile von Y' mindestens $s + 1$ Kästchen, und von denen müssen dann mindestens zwei aus derselben Spalte von Y kommen. □

Beweis von 8.5.1.5. Gegeben ein Youngdiagramm Y operiert die Gruppe $\mathcal{S}_Y$ aller Permutationen der Kästchen frei und transitiv von rechts auf der Menge $\mathcal{B}_Y := \mathrm{Ens}^{\times}(Y, \{1, \ldots, n\})$ aller Tableaus der Gestalt Y vermittels der Vorschrift $T^\sigma = T \circ \sigma$ für

$$T : Y \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \ldots, n\}$$

ein Tableau und $\sigma : Y \xrightarrow{\sim} Y$ eine Permutation. Als $\mathbb{C}\mathcal{S}_Y$-Rechtsmodul ist also $\mathbb{C}\mathcal{S}_Y$ isomorph zum freien $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}\mathcal{B}_Y$ über der Menge aller Tableaus der Gestalt Y mit seiner hoffentlich offensichtlichen Rechtsoperation von $\mathbb{C}\mathcal{S}_Y$.



Beispiel zur Dominanzteilordnung. Stellen wir uns ein Youngdiagramm als eine Geröllhalde von Kästchen vor, so sind in unserer Dominanzteilordnung genau diejenigen Partitionen kleiner, die entstehen, wenn in unserer Geröllhalde ein oder mehrere Kästchen weiter nach unten purzeln.

Bezeichne nun $\mathcal{D}_Y \subset \mathcal{B}_Y$ die Menge aller Standardtableaus der Gestalt Y. Ich behaupte, daß die Einschränkung res einer formalen Summe auf die Teilmenge aller Standardtableaus eine Surjektion

$$\operatorname{res} : (\mathbb{C}\mathcal{B}_Y)E_Y A_Y \twoheadrightarrow \mathbb{C}\mathcal{D}_Y$$

induziert. In der Tat, wenden wir auf ein Standardtableau φ der Gestalt Y von rechts alle Elemente von SZ an, als da heißt eine beliebige Vertauschung der Einträge jeder Spalte gefolgt von einer beliebigen Vertauschung der Einträge jeder Zeile, so erhalten wir zwar eventuell außer φ selbst noch weitere Standardtableaus, aber für diese ist offensichtlich die Folge der Zeilensummen lexikographisch größer als bei unserem Ausgangstableau. Gegeben $\varphi \in \mathcal{D}_Y \subset \mathbb{C}\mathcal{B}_Y$ ein Standardtableau gilt für unsere Einschränkung res auf die Teilmenge aller Standardtableaus demnach

$$\operatorname{res}(\varphi E_Y A_Y) \in |S|^{-1}|Z|^{-1}\varphi + \sum_{\varphi<\psi} \mathbb{C}\psi$$

wobei die Notation $\varphi < \psi$ rechts andeuten soll, daß nur über Standardtableaus ψ mit einer lexikographisch größeren Folge von Zeilensummen summiert wird. So ergibt sich die behauptete Surjektivität. Es folgt, daß die Zahl der Standardtableaus eine untere Schranke für die Dimension von $(\mathbb{C}\mathcal{B}_Y)E_Y A_Y$ und damit auch eine untere Schranke für die Dimension der einfachen Darstellung $L(Y)$ ist. Daß die Zahl der Standardtableaus sogar mit dieser Dimension übereinstimmt, folgt dann aus der durch 8.5.2.1 bewiesenen Formel mit der aus 8.4.2.9 spezialisierten allgemeinen Erkenntnis

$$\sum_{Y\in\mathcal{Y}_n} (\dim_{\mathbb{C}} L(Y))^2 = |\mathcal{S}_n| \qquad \square$$

Ergänzung 8.5.1.11. Das Bilden der Umkehrabbildung liefert eine Bijektion zwischen unserer Menge $\mathcal{B}_Y := \operatorname{Ens}^\times(Y, \{1,\ldots,n\})$ und der Menge der Bijektionen in der Gegenrichtung $\operatorname{Ens}^\times(\{1,\ldots,n\}, Y)$. Oft wird in der Literatur letzere Menge als Menge der Tableaus bezeichnet. Diese trägt dann in natürlicher Weise eine Linksoperation von $\mathcal{S}_Y$ und eine Rechtsoperation von $\mathcal{S}_n$.

Ergänzung 8.5.1.12. Gegeben ein Youngdiagramm Y trägt die Menge $\mathcal{B}_Y$ aller Tableaus der Gestalt Y auch eine Linksoperation der $\mathcal{S}_n$ „durch Nachschalten“, die mit der Rechtsoperation von $\mathcal{S}_Y$ „durch Vorschalten“ kommutiert. Unsere Räume $(\mathbb{C}\mathcal{B}_Y)E_Y A_Y$ für die verschiedenen Young-Diagramme werden mit dieser Operation von $\mathcal{S}_n$ nach dem vorhergehenden genau die einfachen Darstellungen von $\mathcal{S}_n$. Die Argumente von eben zeigen, daß die $\psi E_Y A_Y$ für $\psi \in \mathcal{D}_Y$ Standardtableaus eine Basis dieser einfachen Darstellung bilden. Dasselbe gilt für die um die

Nenner bereinigten sogenannten **Specht-Vektoren**

$$v(\psi) := \psi|Z||S|E_Y A_Y = \psi\left(\sum_{g\in S} g\right)\left(\sum_{h\in Z} \operatorname{sgn}(h)h\right)$$

Sie sind in Worten formale Linearkombinationen von Tableaus, die zu jedem Standardtableau ψ der Gestalt Y gebildet werden, indem man erst seine Varianten mit in jeder Spalte beliebig permutierten Einträgen betrachtet, und dann deren Varianten mit in jeder Zeile beliebig permutierten Einträgen, und alle diese Tableaus aufsummiert, jeweils gewichtet mit dem Signum der letzteren Permutation.

Ergänzung 8.5.1.13. Seien k ein beliebiger Ring und Y ein Youngdiagramm mit n Kästchen und $\mathcal{B}_Y := \operatorname{Ens}^\times(Y, \{1, \ldots, n\})$ die Menge der Y-Tableaus. Seien weiter $Z, S \subset \operatorname{Ens}^\times(Y)$ der Zeilenstabilisator und der Spaltenstabilisator. Zum freien k-Modul $k\mathcal{B}_Y$ betrachtet man in der modularen Darstellungstheorie meist den Raum der sogenannten „Z-Koinvarianten“, also den Quotienten $(k\mathcal{B}_Y)_Z$ nach dem von allen $a(z-1)$ für $a \in k\mathcal{B}_Y$ und $z \in Z$ erzeugten k-Untermodul. Eine k-Basis dieses Quotienten von $k\mathcal{B}_Y$ bildet die Menge der Bilder der Tableaus. Man nennt diese Bilder auch **Tabloide** und notiert sie als Tableaus ohne senkrechte Striche, um anzudeuten, daß es auf die Reihenfolge der Einträge in den Zeilen nun nicht mehr ankommen soll. Das Tabloid alias die Nebenklasse eines Tableaus T notiert man $[T]$. Die Elemente des Raums der Koinvarianten faßt man als formale Linearkombinationen von Tabloiden auf und nennt sie **Polytabloide**. Dann betrachtet man den Raum der spaltenalternierenden Elemente $(k\mathcal{B}_Y)^{S\text{-sgn}}$ und das Bild der Verknüpfung

$$(k\mathcal{B}_Y)^{S\text{-sgn}} \hookrightarrow k\mathcal{B}_Y \twoheadrightarrow (k\mathcal{B}_Y)_Z$$

der offensichtlichen Homomorphismen von $\mathcal{S}_n$-Darstellungen. Dieses Bild wird $L(Y)$ notiert und heißt der **Specht-Modul**. Natürlich ist

$$(k\mathcal{B}_Y)^{S\text{-sgn}} = k\mathcal{B}_Y\left(\sum_{h\in S} \operatorname{sgn}(h)h\right)$$

ein zyklischer $k\mathcal{S}_n$-Modul und für jedes Tableau $T \in \mathcal{B}_Y$ ist $T\left(\sum_{h\in S} \operatorname{sgn}(h)h\right)$ ein Erzeuger. Das Bild dieses Erzeugers im Raum $(k\mathcal{B}_Y)_Z$ der Koinvarianten notieren wir $[\![T]\!]$ und nennen es das zu T gehörige Polytabloid. Die Polytabloide $[\![T]\!]$ für $T \in \mathcal{B}_Y$ erzeugen also den Spechtmodul zum Youngdiagramm Y als k-Modul und jedes Polytabloid $[\![T]\!]$ erzeugt den Spechtmodul $L(Y)$ als $k\mathcal{S}_n$-Modul.

Ergänzung 8.5.1.14. Operiert ein Monoid G auf einer Menge X und ist k ein Kring, so wird der freie k-Modul kX in offensichtlicher Weise eine Darstellung

$$\vartheta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline\end{array}\right) = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & \\ \hline 3 & 1 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline 3 & 2 \\ \hline\end{array}$$

$$\vartheta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}\right) = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline 3 & 2 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & \\ \hline 2 & 1 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}$$

Die beiden Specht-Vektoren zu den beiden Standardtableaus einer gewissen vorgegebenen Gestalt mit drei Kästchen. Das Mitteln über die Bilder unter dem Spaltenstabilisator $Z \subset \mathcal{S}_Y$ liefert in obigem Bild die Zeilensummen, das Mitteln mit Vorzeichen über den Zeilenstabilisator dann die alternierenden Spaltensummen unter jedem Eintrag.

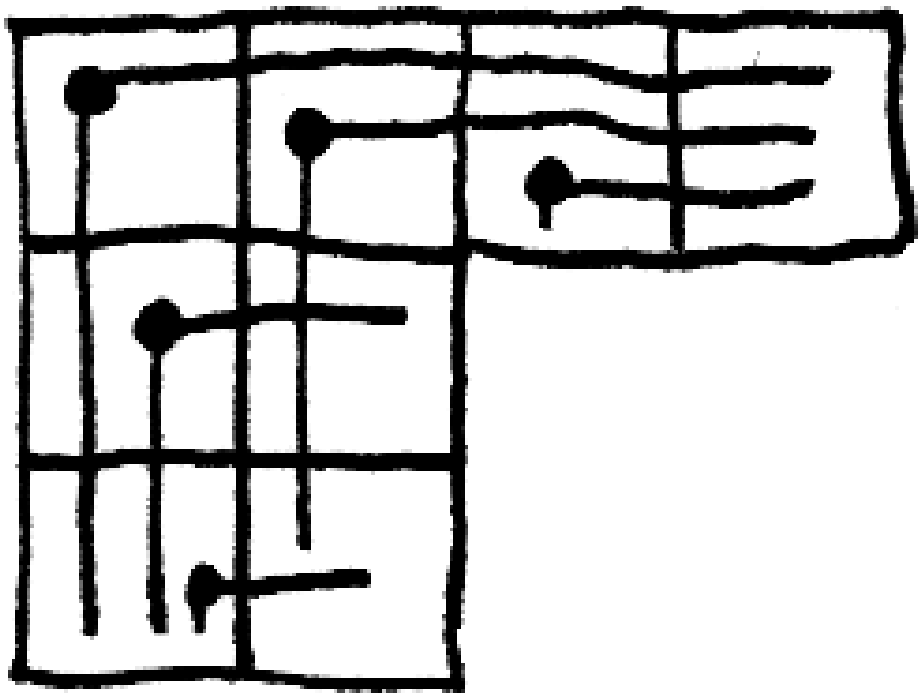


Illustration der Hakenlängenformel. Eingezeichnet sind alle Haken mit mehr als nur einem Kästchen. Die zu diesem Young-Diagramm gehörige einfache Darstellung hat danach die Dimension

$$\frac{8!}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 2 = 112$$

von G. Weiter erhalten wir eine G-invariante symmetrische bilineare Abbildung $kX \times kX \to k$ durch die Vorschrift $(x, y) \mapsto \delta_{xy}$ für $x, y \in X$. Die Basis der Tabloide liefert so eine symmetrische invariante Bilinearform auf $(k\mathcal{B}_Y)_Z$.

Ergänzung 8.5.1.15. Eine besonders schöne Formel für die Dimension der einfachen Darstellung $L(Y)$ einer symmetrischen Gruppe ist die **Hakenlängenformel**

$$\dim_{\mathbb{C}} L(Y) = \frac{|Y|!}{\prod_{(i,j)\in Y}(\text{Hakenlänge von } (i,j))}$$

Die **Hakenlänge** eines Kästchens $(i, j) \in Y$ ist dabei erklärt als die Zahl aller $(a, b) \in Y$ mit $a = i, b \geq j$ oder $b = j, a \geq i$. Ich gebe hierfür keinen Beweis.

8.5.1.16. Über die Darstellungen der symmetrischen Gruppen ist noch sehr viel mehr bekannt, siehe zum Beispiel [Sag00, Jam78, JK81, FH91]. Was die Darstellungen über Körpern positiver Charakteristik angeht, ist aber auch noch vieles offen. Selbst die Dimensionen der meisten einfachen Darstellungen sind in diesem Fall noch nicht bekannt.

Vorschau 8.5.1.17 (**Gelfand-Modell für symmetrische Gruppen**). Sei $I \subset \mathcal{S}_n$ die Menge aller Idinvolutionen in der symmetrischen Gruppe. Auf der Menge I operiert die symmetrische Gruppe durch Konjugation. Es gibt nun ein äquivariantes Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf I derart, daß seine globalen Schnitte isomorph sind zur direkten Summe aller einfachen Darstellungen der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$, in Formeln

$$\bigoplus_{Y\in\mathcal{Y}_n} L(Y) \cong \Gamma(I; \mathcal{L})$$

Das Geradenbündel kann hierbei dadurch charakterisiert werden, daß für eine Idinvolution τ die Operation der Standgruppe von τ auf der Faser $\mathcal{L}_\tau$ durch den Charakter geschieht, der durch das Signum der Operation der Elemente der Standgruppe auf der Fixpunktmenge $\{1, \ldots, n\}^\tau$ von τ gegeben wird.

Übungen

Übung 8.5.1.18. Man zeige, daß das Tensorieren mit der Vorzeichendarstellung dem Übergang zur dualen Partition alias zum an der Hauptdiagonale gespiegelten Youngdiagramm entspricht, in Formeln $L(Y) \otimes \operatorname{sgn} \cong L(\tau Y)$ für τ die Vertauschung der beiden Koordinaten.

Übung 8.5.1.19. Man zeige in der Notation 7.4.7.13 die beiden Implikationen $[M(Y) : L(Y')] \neq 0 \Rightarrow Y \leq Y'$ und $[N(Y) : L(Y')] \neq 0 \Rightarrow Y \geq Y'$, die beschreiben, welche einfachen Darstellungen als Kompositionsfaktoren von $M(Y)$ und $N(Y)$ auftreten können. Darüberhinaus zeige man

$$[M(Y) : L(Y)] = [N(Y) : L(Y)] = 1$$

8.5.2 Der Robinson-Schensted-Algorithmus

8.5.2.1. Wir erhalten eine Bijektion zwischen der Menge aller Permutationen σ von $\{1, \ldots, n\}$ und der Menge aller Paare von Standardtableaus mit jeweils n Kästchen und gleicher Gestalt, d.h. gleichem zugrundeliegendem Young-Diagramm vermittels des sogenannten **Robinson-Schensted-Algorithmus** wie folgt: Zunächst stellen wir unsere Zahlen in der durch σ gegebenen Reihenfolge auf als $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, …, $\sigma(n)$. Dann lassen wir sie „ein Young-Haus bauen und bewohnen“ nach den folgenden Regeln: Im i-ten Schritt geht die Zahl $\sigma(i)$ von links nach rechts durch die erste Etage des Young-Hauses, wie es bis dahin bereits konstruiert ist. Ist sie größer als alle Bewohnerinnen der ersten Etage, baut sie am Ende der ersten Etage ein Kästchen an und zieht dort ein. Sonst verdrängt sie die erste Bewohnerin der ersten Etage, die größer ist als sie selber, und diese versucht es in der zweiten Etage. Ist sie größer als alle Bewohnerinnen der zweiten Etage, so baut sie sich am Ende der zweiten Etage ein Kästchen an und zieht dort ein. Sonst verdrängt sie in der zweiten Etage die erste Bewohnerin, die größer ist als sie selber, und diese versucht es in der dritten Etage etc. Der i-te Schritt ist fertig, wenn die Zahlen $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)$ alle wieder in einem Kästchen wohnen. So entsteht, wie man sich unschwer überlegt, ein Standardtableau $L(\sigma)$. Die Reihenfolge, in der die Kästchen angebaut werden, erinnern wir in einem zweiten Standardtableau $R(\sigma)$ derselben Gestalt, bei dem in demjenigen Kästchen die Zahl i steht, das im i-ten Schritt angebaut wurde. Daß wir auf diese Weise in der Tat eine Bijektion zwischen der Menge aller Permutationen und der Menge aller Paare von Standardtableaus gleicher Gestalt erhalten, kann der Leser hoffentlich ohne allzu große Schwierigkeiten selbst einsehen. In jedem Fall denke ich, daß es noch schwieriger wäre, einen in Worten aufgeschriebenen Beweis nachzuvollziehen.

Beispiel 8.5.2.2. Es sei $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(5)$ die Folge $3, 1, 5, 4, 2$. Wir erhalten der Reihe nach

$$\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 1\\\hline\end{array}\;\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 1\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & \\\hline 1 & 5\\\hline\end{array}\;\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & \\\hline 1 & 3\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 5\\\hline 1 & 4\\\hline\end{array}\;\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 4\\\hline 1 & 3\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 5 & \\\hline 3 & 4\\\hline 1 & 2\\\hline\end{array}\;\begin{array}{|c|c|}\hline 5 & \\\hline 2 & 4\\\hline 1 & 3\\\hline\end{array}$$

Das Paar von Standardtableaus ganz am Ende der Zeile ist dann dasjenige, das der Robinson-Schensted-Algorithmus unserer Permutation σ zuordnet.

8.5.3 Berechnung der Charaktere

8.5.3.1. Aus dem Beweis von Satz 8.5.1.2 wissen wir insbesondere, daß für je zwei Young-Diagramme $Y, Y' \in \mathcal{Y}_n$ gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{S}_n}(M(Y), N(Y')) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Y \leq Y'$$

Zusätzlich wissen wir aus demselben Beweis $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{S}_Y}(M(Y), N(Y)) = 1$. Es ist nun für das folgende bequemer, mit Partitionen natürlicher Zahlen im Sinne von 6.1.5.1 zu arbeiten. Gegeben eine Partition $\lambda \in \mathcal{P}_n$ alias eine absteigende Folge $\lambda(1) \geq \lambda(2) \geq \ldots \geq \lambda(r) > 0 = 0 = 0 \ldots$ natürlicher Zahlen mit Summe n bilden wir in hoffentlich offensichtlicher Weise die Untergruppe $\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_{\lambda(1)} \times \ldots \times S_{\lambda(r)} \subset \mathcal{S}_n$ der symmetrischen Gruppe und schreiben

$$M(\lambda) = (\mathbb{C}\mathcal{S}_n)E_\lambda$$

mit $E_\lambda = |\mathcal{S}_\lambda|^{-1} \sum_{g \in \mathcal{S}_\lambda} g$ für die Darstellung, die wir später auch als die induzierte der Einsdarstellung $M(\lambda) = \operatorname{ind}_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_n} \mathbb{C}$ verstehen werden. Wie in 6.1.5.4 erklärt liefert das Bilden der Spaltenlängen eine Bijektion $s : \mathcal{Y}_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_n$ und für $\lambda = s(Y)$ haben wir per definitionem $M(\lambda) = M(Y)$. Ebenso setzen wir dann $L(\lambda) = L(Y)$ und übertragen die Dominanzteilordnung 8.5.1.10 vermittels s von Young-Tableaus auf Partitionen. Notieren wir nun die Charaktere der induzierten Darstellung $M(\lambda)$ und der einfachen Darstellung $L(\lambda)$ als

$$\chi_{M(\lambda)} = \psi_\lambda \quad \text{und} \quad \chi_{L(\lambda)} = \chi_\lambda$$

so liefern unsere obigen Formeln

$$\psi_\lambda = \chi_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} a_{\lambda,\mu} \chi_\mu$$

mit natürlichen Zahlen $a_{\lambda,\mu}$.Wir können also die Charaktere χ_λ der einfachen Darstellungen erhalten, indem wir auf die Basis der ψ_λ mit einer Anordnung, in der die ψ_λ zu größeren Indizes zuerst kommen, das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren anwenden.

8.5.3.2. Wie zu Beginn des Beweises von 8.5.1.2 liefert das Auswerten auf dem Idempotenten Isomorphismen $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{S}_n}((\mathbb{C}\mathcal{S}_n)E_\lambda, (\mathbb{C}\mathcal{S}_n)E_\mu) \xrightarrow{\sim} E_\lambda(\mathbb{C}\mathcal{S}_n)E_\mu$ und für das Skalarprodukt der zugehörigen Charaktere folgt sofort

$$(\psi_\lambda, \psi_\mu) = |\mathcal{S}_\lambda \backslash \mathcal{S} / \mathcal{S}_\mu|$$

Um die Kardinalität dieser Menge von Doppelnebenklassen zu berechnen, beachten wir die Bahnformel $|Gx| \cdot |G_x| = |G|$ und folgern für jede endliche Menge X mit der Operation einer endlichen Gruppe G die Formel

$$|G \backslash X| = \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|} = \sum_{x \in X} \frac{|G_x|}{|G|}$$

Ist speziell $X = \mathcal{S}_n$ und $G = \mathcal{S}_\lambda \times \mathcal{S}_\mu$, so spezialisiert unsere Formel zur Identität

$$|\mathcal{S}_\lambda \backslash \mathcal{S}_n / \mathcal{S}_\mu| = \frac{1}{|\mathcal{S}_\lambda| \cdot |\mathcal{S}_\mu|} \sum_{x \in \mathcal{S}_n} |x \mathcal{S}_\lambda x^{-1} \cap \mathcal{S}_\mu|$$

Untersuchen wir hier die Schnitte für jede Konjugationsklasse $\mathcal{C}_\nu \subset \mathcal{S}_n$ separat und beachten für den Zentralisator Z_ν eines Elements der Konjugationsklasse $\mathcal{C}_\nu$ die Bahnformel $|\mathcal{C}_\nu| \cdot |Z_\nu| = |\mathcal{S}_n|$, so ergibt sich

$$|\mathcal{S}_\lambda \backslash \mathcal{S}_n / \mathcal{S}_\mu| = \frac{|\mathcal{S}_n|}{|\mathcal{S}_\lambda| \cdot |\mathcal{S}_\mu|} \sum_\nu \frac{|\mathcal{S}_\lambda \cap \mathcal{C}_\nu| \cdot |\mathcal{S}_\mu \cap \mathcal{C}_\nu|}{|\mathcal{C}_\nu|}$$

8.5.3.3. Für die Gruppe $\mathcal{S}_4$ haben wir zum Beispiel die Partitionen $\lambda = (4), (3,1), (2^2), (2,1^2), (1^4)$ in abkürzender Notation, wo die Hochzahlen Vielfachheiten meinen, so daß etwa $((2,1^2)$ ein Kürzel wäre für die Partition $4 = 2+1+1$. Wir erhalten $|\mathcal{S}_\lambda| = 24, 6, 4, 2, 1$ und $|\mathcal{C}_\lambda| = 6, 8, 3, 6, 1$. Die Kardinalitäten der Schnitte $|\mathcal{S}_\lambda \cap \mathcal{C}_\nu|$ werden gegeben durch den Eintrag in der Spalte unter λ und der Zeile neben ν in der Tafel

	4	$3,1$	2^2	$2,1^2$	1^4
4	6	0	0	0	0
$3,1$	8	2	0	0	0
2^2	3	0	1	0	0
$2,1^2$	6	3	2	1	0
1^4	1	1	1	1	1

Die Matrix der (ψ_λ, ψ_μ) ergibt sich dann zu

	4	$3,1$	2^2	$2\,,1^2$	1^4
4	1	1	1	1	1
$3,1$	1	2	2	3	4
2^2	1	2	3	4	6
$2\,,1^2$	1	3	4	7	12
1^4	1	4	6	12	24

Damit ergibt sich schließlich die Zerlegung unserer induzierten Darstellungen in einfache Darstellungen zu

$$\begin{aligned}
\psi_{(4)} &= \chi_{(4)} \\
\psi_{(3,1)} &= \chi_{(3,1)} + \chi_{(4)} \\
\psi_{(2^2)} &= \chi_{(2^2)} + \chi_{(3,1)} + \chi_{(4)} \\
\psi_{(2,1^2)} &= \chi_{(2,1^2)} + \chi_{(2^2)} + 2\chi_{(3,1)} + \chi_{(4)} \\
\psi_{(1^4)} &= \chi_{(1^4)} + 3\chi_{(2,1^2)} + 2\chi_{(2^2)} + 3\chi_{(3,1)} + \chi_{(4)}
\end{aligned}$$

8.5.4 Jucys-Murphy-Elemente

Definition 8.5.4.1. Das j-te **Jucys-Murphy-Element** ξ_j im Gruppenring $\mathbb{Z}\mathcal{S}_n$ der n-ten symmetrischen Gruppe ist die Summe aller Transpositionen von j mit klei-

neren Elementen, in Formeln

$$\xi_j = \sum_{1 \le i < j} (i, j)$$

8.5.4.2 (**Die Jucys-Murphy-Elemente kommutieren paarweise**). Per definitionem ist $\xi_1 = 0$. Offensichtlich kommutiert das j-te Jucys-Murphy-Element mit allen Elementen aus $\mathcal{S}_n$, die sowohl j als auch die Teilmenge $\{1, \ldots, j-1\}$ festhalten. Insbesondere kommutieren die Jucys-Murphy-Elemente untereinander.

Lemma 8.5.4.3. *Die elementarsymmetrischen Funktionen in den Jucys-Murphy-Elementen ξ_j liegen im Zentrum des Gruppenrings $\mathbb{Z}\mathcal{S}_n$.*

Beispiel 8.5.4.4. Die Summe $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ ist die Summe aller Transpositionen und folglich zentral.

Beweis. Wir betrachten im Polynomring über dem Gruppenring $(\mathbb{Z}\mathcal{S}_n)[X]$ das Produkt

$$(X + \xi_1)(X + \xi_2) \ldots (X + \xi_n)$$

Es reicht zu zeigen, daß es mit allen Transpositionen $s_j := (j, j+1)$ benachbarter Elemente kommutiert. Dazu reicht es zu zeigen, daß s_j mit

$$(X + \xi_j)(X + \xi_{j+1})$$

kommutiert, also mit $\xi_j + \xi_{j+1}$ und $\xi_j \xi_{j+1}$. Wir finden ohne große Mühe

$$\begin{aligned} s_j \xi_j s_j &= \xi_{j+1} - s_j \\ s_j \xi_{j+1} s_j &= \xi_j + s_j \end{aligned}$$

und müssen also nur noch prüfen, daß gilt $\xi_j \xi_{j+1} = (\xi_{j+1} - s_j)(\xi_j + s_j)$ alias $s_j \xi_j + 1 = \xi_{j+1} s_j$. Hier aber rechnen wir ohne Schwierigkeiten aus, daß beide Seiten beschrieben werden können als eine Summe der Identität mit Dreizykeln, genauer durch den Ausdruck

$$1 + \sum_{1 \le i < j} (i, j+1, j) \qquad \square$$

8.6 Verschiedene weiterführende Resultate

8.6.1 Reeller, komplexer und quaternionaler Typ

8.6.1.1. Wir erinnern an die Körper beziehungsweise Schiefkörper $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ der reellen Zahlen, komplexen Zahlen und Quaternionen $\mathbb{H}$ aus 3.5.6.4 und bezeichnen Darstellungen einer Gruppe G über den jeweiligen Ringen als reelle, komplexe und quaternionale Darstellungen. Die Restriktion der Skalare macht in offensichtlicher Weise aus quaternionalen Darstellungen komplexe Darstellungen und aus komplexen Darstellungen reelle Darstellungen. Umgekehrt macht die Erweiterung der Skalare aus reellen Darstellungen komplexe Darstellungen und aus komplexen Darstellungen quaternionale Darstellungen. In Formeln meint man etwa für V eine komplexe Darstellung mit der durch Erweiterung der Skalare gegebene quaternionale Darstellung die quaternionale Darstellung $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} V$.

Definition 8.6.1.2. 1. Eine reelle Darstellung heißt:

   (a) von **quaternionalem Typ**, wenn sie durch Restriktion der Skalare aus einer quaternionalen Darstellung entsteht;

   (b) von **komplexem Typ**, wenn sie durch Restriktion der Skalare zwar nicht aus einer quaternionalen, aber doch immerhin aus einer komplexen Darstellung entsteht;

   (c) von **reellem Typ** sonst.

2. Eine komplexe Darstellung heißt:

   (a) von **reellem Typ**, wenn sie isomorph ist zu einer Darstellung, die durch Erweiterung der Skalare aus einer reellen Darstellung entsteht;

   (b) von **quaternionalem Typ**, wenn sie durch Restriktion der Skalare aus einer quaternionalen Darstellung entsteht;

   (c) von **komplexem Typ** sonst.

3. Eine quaternionale Darstellung heißt:

   (a) von **reellem Typ**, wenn sie isomorph ist zu einer Darstellung, die durch Erweiterung der Skalare aus einer reellen Darstellung entsteht;

   (b) von **komplexem Typ**, wenn sie zwar nicht von reellem Typ ist, aber isomorph ist zu einer Darstellung, die durch Erweiterung der Skalare aus einer komplexen Darstellung entsteht;

   (c) von **quaternionalem Typ** sonst.

8.6.1.3 (**Typen reeller Darstellungen und ihre Endomorphismen**). Gegeben eine einfache reelle Darstellung höchstens abzählbarer Dimension ist ihr Endomorphismenring nach 6.3.12.3 als $\mathbb{R}$-Ringalgebra isomorph zu genau einem der Ringe $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Offensichtlich können wir den Typ unserer Darstellung in diesem Fall an ihrem Endomorphismenring ablesen.

8.6.1.4 (**Typen quaternionaler Darstellungen und ihre Endomorphismen**). Gegeben eine einfache quaternionale Darstellung höchstens abzählbarer Dimension ist ihr Endomorphismenring nach 6.3.12.2 als $\mathbb{R}$-Ringalgebra isomorph zu genau einem der Ringe $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Wieder können wir den Typ unserer Darstellung an ihrem Endomorphismenring ablesen, aber diesmal ist die Beziehung umgekehrt, der Endomorphismenring $\mathbb{R}$ zeigt quaternionalen Typ an, der Endomorphismenring $\mathbb{C}$ komplexen Typ und der Endomorphismenring $\mathbb{H}$ reellen Typ. In der Tat liefert die Rechtsmultiplikation auf dem ersten Tensorfaktor für jede reelle Darstellung V von G einen $\mathbb{R}$-linearen Ringhomomorphismus $\mathbb{H}^{\text{opp}} \to \operatorname{End}_{\mathbb{H},G}(\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} V)$, und ist umgekehrt eine quaternionale Darstellung W von G mit einem $\mathbb{R}$-linearen Ringhomomorphismus $\mathbb{H}^{\text{opp}} \to \operatorname{End}_{\mathbb{H},G}(W)$ gegeben, so können wir W als Modul über $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^{\text{opp}}$ mit G-Operation auffassen, nach 8.6.1.10 also als Modul über $\operatorname{End}_{-\mathbb{R}} \mathbb{H}$ mit G-Operation und nach 7.2.3.17 entsteht W dann durch Erweiterung der Skalare $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}}$ aus einer reellen Darstellung von G. Ähnlich liefert die Rechtsmultiplikation auf dem ersten Tensorfaktor für jede komplexe Darstellung V von G einen $\mathbb{R}$-linearen Ringhomomorphismus $\mathbb{C}^{\text{opp}} \to \operatorname{End}^G_{\mathbb{H}}(\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} V)$. Ist umgekehrt eine quaternionale Darstellung W von G mit einem $\mathbb{R}$-linearen Ringhomomorphismus $\mathbb{C}^{\text{opp}} \to \operatorname{End}^G_{\mathbb{H}}(W)$ gegeben, so können wir W als Modul über $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{\text{opp}}$ mit G-Operation auffassen, nach Übung 8.6.1.10 also als Modul über $\operatorname{End}_{-\mathbb{C}} \mathbb{H}$ mit G-Operation und nach 7.2.3.17 entsteht W dann durch Erweiterung der Skalare $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}}$ aus einer komplexen Darstellung von G.

8.6.1.5. Auch einfache komplexe Darstellungen höchstens abzählbarer Dimension haben einen wohlbestimmten Typ, können also nicht gleichzeitig durch Skalarerweiterung aus einer reellen Darstellung und durch Restriktion aus einer quaternionalen Darstellung hervorgehen. Um das zu sehen, holen wir etwas weiter aus, um diese Behauptung dann schließlich in 8.6.1.8 sogar etwas allgemeiner zu zeigen für beliebige komplexe Darstellungen mit Endomorphismenring $\mathbb{C}$.

8.6.1.6. Zu jedem komplexen Vektorraum V bilden wir wie in 4.1.12.33 den komplex konjugierten Vektorraum $\overline{V}$, indem wir dieselbe unterliegende additive Gruppe nehmen, die Operation von $a \in \mathbb{C}$ auf $v \in V$ jedoch ändern zu einer Operation $a \cdot v$, die mit der ursprünglichen Operation av verknüpft ist durch die Formel $a \cdot v = \bar{a}v$. Es ist in diesem Zusammenhang praktisch, für jedes Element $v \in V$ dasselbe Element in seiner Eigenschaft als Element des komplex konjugierten Vektorraums $\bar{v} \in \overline{V}$ zu notieren, so daß wir unseren Punkt für die neue Operation der Skalare gleich wieder weglassen können und unsere zweite Formel besonders

suggestiv in der Form $\bar{a}\bar{v} = \overline{av}$ geschrieben werden kann. Ist V eine komplexe Darstellung einer Gruppe G, so ist $\overline{V}$ mit derselben Operation von G auch eine komplexe Darstellung, die **komplex konjugierte Darstellung**.

Proposition 8.6.1.7 (**Typ komplexer Darstellung und Endomorphismen**). *Sei V eine komplexe Darstellung einer Gruppe G.*

1. *Genau dann ist V die Komplexifizierung einer reellen Darstellung von G, wenn es einen Isomorphismus von Darstellungen $J : V \xrightarrow{\sim} \overline{V}$ gibt mit $J^2 = \mathrm{id}_V$;*

2. *Genau dann ist V die Restriktion einer quaternionalen Darstellung von G, wenn es einen Isomorphismus von Darstellungen $J : V \xrightarrow{\sim} \overline{V}$ gibt mit $J^2 = -\mathrm{id}_V$.*

Beweis. Im ersten Fall ist V isomorph zur Komplexifizierung der reellen Unterdarstellung V^J der J-Invarianten, vergleiche auch 22.2.2.13. Im zweiten Fall können wir V zu einem $\mathbb{H}$-Rechtsmodul machen, indem wir als Rechtsmultiplikation mit $\mathrm{j} \in \mathbb{H}$ unser J nehmen. Der Rest des Beweises sei dem Leser überlassen. □

Korollar 8.6.1.8 (**Typen einfacher komplexer Darstellungen**). *Sei V eine komplexe Darstellung einer Gruppe G, deren einzige Endomorphismen die Skalare sind, in Formeln $\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}^G V = \mathbb{C}$. So sind wir in genau einem der folgenden drei Fälle:*

1. *Die Darstellung V ist von reellem Typ, als da heißt, sie entsteht aus einer reellen Darstellung W durch Komplexifizierung;*

2. *Die Darstellung V ist von quaternionalem Typ, als da heißt, sie entsteht aus einer quaternionalen Darstellung V über $\mathbb{H}$ durch Restriktion der Skalare;*

3. *Die Darstellung V ist nicht isomorph zu ihrer komplex konjugierten Darstellung $\overline{V}$.*

8.6.1.9. Per definitionem heißt eine komplexe Darstellung von komplexem Typ, wenn sie weder von reellem noch von quaternionalem Typ ist. Das Korollar impliziert, daß diese Eigenschaft für komplexe Darstellungen mit Endomorphismenring $\mathbb{C}$ gleichbedeutend ist zur Eigenschaft, nicht isomorph zu sein zu ihrer konjugierten Darstellung.

Beweis. Sind wir in einem der ersten beiden Fälle, so sind wir nach 8.6.1.7 nicht im dritten Fall. Sind wir umgekehrt nicht im dritten Fall, so gibt es einen Isomorphismus $J : V \xrightarrow{\sim} \overline{V}$. Per definitionem gilt

$$Jav = a \cdot Jv = \bar{a}Jv \quad \forall a \in \mathbb{C}, v \in V$$

Unser J liefert auch einen Isomorphismus $\bar{J} : \overline{V} \xrightarrow{\sim} V$, für den wir der Klarheit halber manchmal die alternative Bezeichnung $\bar{J}$ verwenden, obwohl es sich rein mengentheoretisch um dieselbe Abbildung handelt. Nach Annahme gilt auch $\bar{J}J = a\,\mathrm{id}_V$ für geeignetes $a \in \mathbb{C}^\times$, und da $\bar{J}J = J^2$ kommutiert mit J, haben wir nach der vorhergehenden Rechnung hier sogar $a \in \mathbb{R}^\times$. Aus unseren Voraussetzungen folgt nun auch $\dim \mathrm{Hom}^G(V, \overline{V}) = 1$. Ändern wir J ab um einen Skalar $z \in \mathbb{C}^\times$, so ändert sich $\bar{J}J$ um den Skalar $|z|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Also gilt für alle $J : V \xrightarrow{\sim} \overline{V}$ entweder $J^2 = a\,\mathrm{id}_V$ mit $a > 0$ oder $J^2 = a\,\mathrm{id}_V$ mit $a < 0$. Im ersten Fall finden wir leicht ein J mit $J^2 = \mathrm{id}_V$ und nach 8.6.1.7 ist unsere Darstellung die Komplexifizierung einer reellen Darstellung. Im zweiten Fall finden wir ebensoleicht ein J mit $J^2 = -\mathrm{id}_V$ und nach 8.6.1.7 ist unsere Darstellung die Restriktion einer quaternionalen Darstellung. □

Übungen

Übung 8.6.1.10. Die Abbildung $q \otimes w \mapsto (u \mapsto quw)$ induziert einen Ringisomorphismus $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$. Dieselbe Abbildung induziert einen Ringisomorphismus $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{-\mathbb{C}}(\mathbb{H})$.

Übung 8.6.1.11. Gegeben eine endlichdimensionale komplexe Darstellung V einer endlichen Gruppe G ist die komplex konjugierte Darstellung stets isomorph zur kontragredienten Darstellung, in Formeln $\overline{V} \cong V^*$. Hinweis: 8.4.1.4.

Übung 8.6.1.12. Gegeben eine Gruppe G bezeichne $\mathrm{irra}_{\mathbb{K}} G$ die Menge der Isomorphieklassen einfacher Darsellungen von G über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ von höchstens abzählbarer Dimension und

$$\mathrm{irra}_{\mathbb{K}} G = \mathrm{irra}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{R}} G \;\sqcup\; \mathrm{irra}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{C}} G \;\sqcup\; \mathrm{irra}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{H}} G$$

die Zerlegung nach reellem, komplexem und quaternionalem Typ. So liefern die offensichtlichen durch Restriktion beziehungsweise Erweiterung der Skalare gegebenen Abbildungen Bijektionen

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{irra}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{H}} G & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{irra}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}} G & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{irra}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{H}} G \\
\mathrm{irra}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{R}} G & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{irra}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} G & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{irra}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} G \\
\mathrm{irra}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{C}} G & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{irra}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}} G/_{(V \sim \overline{V})} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{irra}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} G
\end{array}$$

In der Mitte der untersten Zeile ist hier der Quotient nach der Äquivalenzrelation gemeint, unter der eine Darstellung und ihre komplex konjugierte Darstellung identifiziert werden. Dabei bestehen im übrigen nach 8.6.1.8 alle Äquivalenzklassen aus genau zwei Elementen. Hinweis: Um zu zeigen, daß einfache Darstellungen jeweils einfach bleiben, beachte man, daß Erweiterung der Skalare gefolgt

von Restriktion der Skalare jede reelle Darstellung V zu $V \oplus V$ macht und jede komplexe Darstellung V zu $V \oplus \overline{V}$. Für die Wohldefiniertheit der Abbildung unten links muß der Leser zunächst $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} V \cong \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{V}$ zeigen. Die Surjektivität aller Abbildungen folgt aus den Definitionen. Für die Injektivität etwa der ersten Abbildung oben links beachte man $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} V \cong V \oplus V$ für jede quaternionale Darstellung V. Die Injektivität der anderen Pfeile zeigt man ähnlich.

8.6.2 Invariante Bilinearformen auf Darstellungen

Proposition 8.6.2.1. *Seien G eine Gruppe und V eine endlichdimensionale einfache Darstellung von G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k mit $\operatorname{char} k \neq 2$. So sind wir in genau einem der folgenden drei Fälle:*

1. *Es gibt auf V eine von Null verschiedene symmetrische G-invariante Bilinearform. Diese ist dann nichtausgeartet und bis auf einen Skalar eindeutig bestimmt;*

2. *Es gibt auf V eine von Null verschiedene symplektische G-invariante Bilinearform. Diese ist dann nichtausgeartet und bis auf einen Skalar eindeutig bestimmt;*

3. *Es gibt auf V keine von Null verschiedene G-invariante Bilinearform.*

Beweis. Nach dem Schur'schen Lemma haben wir $\dim \operatorname{Hom}_k^G(V, V^*) \leq 1$ und jeder von Null verschiedene Homomorphismus ist ein Isomorphismus. Da unsere Identifikation $\operatorname{Hom}(V, V^*) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Bil}(V)$ aus 8.6.2.13 verträglich ist mit der Operation von G, folgt auch für den Raum der invarianten Bilinearformen

$$\dim_k \operatorname{Bil}(V)^G \leq 1$$

und jede von Null verschiedene invariante Bilinearform ist nichtausgeartet. Ist unser Raum von Bilinearformen eindimensional, so operiert schließlich unsere durch das Vertauschen der Argumente definierte Selbstinverse aus 8.6.2.14 darauf entweder als die Identität oder als die Multiplikation mit (-1). □

8.6.2.2. Im allgemeinen definiert man $\mathrm{S}^2 V$ als den Quotienten von $V \otimes V$ nach allen $v \otimes w - w \otimes v$ und $\bigwedge^2 V$ als den Quotienten von $V \otimes V$ nach allen $v \otimes v$. Ist unsere Charakteristik nicht Zwei, so geht der Unterraum der Invarianten unter der Vertauschung der Faktoren unter der Projektion isomorph nach $\mathrm{S}^2 V$ der Unterraum der Schiefinvarianten isomorph nach $\bigwedge^2 V$, aber in Charakteristik zwei ist beides nicht mehr richtig. Für endlichdimensionales V haben wir stets $\operatorname{Bil}(V) = V^* \otimes V^*$ in kanonischer Weise.

Lemma 8.6.2.3. *Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $g : V \to V$ eine lineare Abbildung, so haben wir*

$$\operatorname{tr}(g^2|V) = \operatorname{tr}(g|\mathrm{S}^2 V) - \operatorname{tr}(g|\textstyle\bigwedge^2 V)$$

Beweis. Ist g diagonalisierbar und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis aus Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so ist $(v_i v_j)_{i \le j}$ eine Basis aus Eigenvektoren in $\mathrm{S}^2 V$ und $(v_i \wedge v_j)_{i<j}$ eine Basis von Eigenvektoren von $\bigwedge^2 V$ und unsere Behauptung reduziert sich auf die offensichtliche Identität

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i \le j} \lambda_i \lambda_j - \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j$$

Im allgemeinen ist g jedenfalls trigonalisierbar über einer geeigneten Erweiterung des Grundkörpers, und dann greift dasselbe Argument. □

Proposition 8.6.2.4. *Gegeben eine einfache Darstellung V einer endlichen Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik gilt*

$$|G|^{-1} \sum \chi_V(g^2) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } V \textit{ eine symmetrische Form besitzt;} \\ 0 & \textit{falls } V \textit{ keine Form besitzt;} \\ -1 & \textit{falls } V \textit{ eine symplektische Form besitzt.} \end{cases}$$

Mit der Abkürzung „Form“ sind dabei jeweils von Null verschiedene G-invariante Bilinearformen gemeint, die dann, wie bereits gezeigt, notwendig nichtausgeartet sind.

Beweis. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik zerfällt der Raum der Bilinearformen $\operatorname{Bil}(V)$ in die Teilräume

$$\operatorname{Bil}(V) = \operatorname{Sym}(V) \oplus \operatorname{Alt}(V)$$

der symmetrischen beziehungsweise alternierenden Bilinearformen. Ist V eine Darstellung einer Gruppe G, so notieren wir die entsprechende Darstellung

$$B = S \oplus A$$

Die entsprechenden kanonischen Identifikationen definieren Isomorphismen von Darstellungen $\mathrm{S}^2 V^* \xrightarrow{\sim} S$ und $\bigwedge^2 V^* \xrightarrow{\sim} A$ und mit Lemma 8.6.2.3 erhalten wir

$$\chi_V(g^2) = \chi_S(g^{-1}) - \chi_A(g^{-1})$$

Nun gilt ja $(\chi_S, \chi_{\mathrm{triv}}) = 1$ beziehungsweise $(\chi_A, \chi_{\mathrm{triv}}) = 1$ in Bezug auf unsere symmetrische Bilinearform aus **??** genau dann, wenn es auf V bis auf Skalar genau eine nichtausgeartete symmetrische beziehungsweise symplektische Form gibt. Die Proposition folgt. □

Definition 8.6.2.5. Eine **quaternionale Sesquilinearform** auf einem quaternionalen Vektorraum alias $\mathbb{H}$-Rechtsmodul V ist eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{H}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$ derart, daß für alle $v, w, v', w' \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{H}$ gilt:

1. $\langle v + v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle,\ \langle v\lambda, w\rangle = \bar{\lambda}\langle v, w\rangle$;
2. $\langle v, w + w'\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, w'\rangle,\ \langle v, w\mu\rangle = \langle v, w\rangle\mu$.

Sie heißt **hermitesch**, wenn zusätzlich gilt

3. $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$,

und ein **Skalarprodukt** oder genauer ein **quaternionales Skalarprodukt**, wenn außerdem noch gilt

4. $\langle v, v\rangle \leq 0 \Rightarrow v = 0$.

Beispiel 8.6.2.6. Auf dem $\mathbb{H}^n$ erhalten wir ein quaternionales Skalarprodukt durch die Vorschrift $\langle v, w\rangle = \bar{v}_1 w_1 + \ldots + \bar{v}_n w_n$.

8.6.2.7 (**Existenz invarianter quaternionaler Skalarprodukte**). Auf jeder endlichdimensionalen quaternionalen Darstellung einer endlichen Gruppe existiert ein invariantes quaternionales Skalarprodukt. Man zeigt das wie im reellen oder komplexen Fall durch das Mitteln eines beliebigen Skalarprodukts.

8.6.2.8. Jedes $q \in \mathbb{H}$ läßt sich eindeutig schreiben als $q = z + \mathrm{j}w$ mit $z, w \in \mathbb{C}$. Ich nenne dann w den **j-Teil** von q und schreibe $w = \operatorname{jot}(q)$. Man prüft leicht $\operatorname{jot}(zq) = \bar{z}\operatorname{jot}(q)$ für $z \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{jot}(\bar{q}) = -\operatorname{jot}(q)$. Man rechnet mühelos nach, daß gegeben ein Skalarprodukt auf einem quaternionalen Vektorraum sein j-Teil $(v, w) \mapsto \operatorname{jot}\langle v, w\rangle$ komplex-bilinear und symplektisch ist.

Satz 8.6.2.9 (**Formen und Typen einfacher komplexer Darstellungen**). *Seien G eine endliche Gruppe und V eine einfache komplexe Darstellung von G.*

1. *Genau dann ist V von reellem Typ, wenn es auf V eine nichtausgeartete symmetrische G-invariante Bilinearform gibt;*
2. *Genau dann ist V quaternionalem Typ, wenn es auf V eine nichtausgeartete symplektische G-invariante Bilinearform gibt;*
3. *Genau dann ist V von komplexem Typ, wenn V nicht isomorph ist zu seiner eigenen kontragredienten Darstellung, $V \not\cong V^*$.*

8.6.2.10. Ich zeige zu Ende dieses Abschnitts als 8.6.2.12 auch noch eine Variante dieser Proposition im Fall nicht notwendig einfacher Darstellungen. Dann schließen sich die Fälle jedoch nicht mehr gegenseitig aus.

Beweis. 1. Ist unsere Darstellung die Komplexifizierung einer Darstellung über $\mathbb{R}$, so erhalten wir durch Komplexifizieren eines invarianten Skalarprodukts auf besagter Darstellung über $\mathbb{R}$ eine invariante nichtausgeartete symmetrische Bilinearform auf unserer komplexen Darstellung. Ist umgekehrt eine invariante symmetrische Bilinearform $(v, w) \mapsto s(v, w)$ gegeben, so wählen wir zusätzlich ein invariantes Skalarprodukt $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$ und betrachten die Komposition J der von unserer Bilinearform und unserem Skalarprodukt induzierten Isomorphismen

$$V \xrightarrow{\sim} V^* \xrightarrow{\sim} \overline{V}$$

Per definitionem gilt $(v, w) = \langle v, Jw\rangle \; \forall v, w \in V$ und folglich

$$\langle v, J^2 w\rangle = (v, Jw) = (Jw, v) = \langle Jw, Jv\rangle$$

und wir erkennen, daß J^2 selbstadjungiert ist und nur positive Eigenwerte hat. Aus dem Schur'schen Lemma folgt $J^2 = a\,\mathrm{id}_V$ mit $a > 0$. Mit 8.6.1.7 folgt dann leicht, daß unsere Darstellung die Komplexifizierung einer Darstellung über $\mathbb{R}$ ist.

2. Ist unsere Darstellung die Restriktion einer Darstellung über $\mathbb{H}$, so ist der j-Teil im Sinne von 8.6.2.8 eines invarianten quaternionalen Skalarprodukts im Sinne von 8.6.2.5, das es nach 8.6.2.7 stets gibt, eine invariante nichtausgeartete symplektische Bilinearform auf unserer komplexen Darstellung. Ist umgekehrt eine invariante symplektische Bilinearform gegeben, so liefert unsere Konstruktion wieder ein komplex-schieflineares J, für das J^2 selbstadjungiert ist und diesmal nur negative Eigenwerte hat. Aus dem Schur'schen Lemma folgt dann $J^2 = a\,\mathrm{id}_V$ mit $a < 0$ und aus 8.6.1.7 folgt so, daß unsere Darstellung die Restriktion einer quaternionalen Darstellung ist.

3. Das ist klar nach 8.6.1.11. □

Korollar 8.6.2.11. *Gegeben eine einfache komplexe Darstellung V einer endlichen Gruppe G gilt*

$$|G|^{-1} \sum \chi_V(g^2) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } V \textit{ von reellem Typ ist;} \\ 0 & \textit{falls } V \textit{ von komplexem Typ ist;} \\ -1 & \textit{falls } V \textit{ von quaternionalem Typ ist.} \end{cases}$$

Beweis. Das folgt sofort, wenn man 8.6.2.4 mit 8.6.2.1 kombiniert. □

Proposition 8.6.2.12 (Formen und Typen komplexer Darstellungen). *Seien G eine endliche Gruppe und V eine endlichdimensionale komplexe Darstellung von G. So gilt:*

1. *Genau dann ist V isomorph zur Komplexifizierung einer reellen Darstellung von G, wenn es auf V eine invariante nichtausgeartete symmetrische Bilinearform gibt;*

2. *Genau dann ist V isomorph zur Restriktion einer quaternionalen Darstellung von G, wenn es auf V eine invariante nichtausgeartete symplektische Bilinearform gibt.*

Beweis. Die Hinrichtung geht genauso wie im Beweis von 8.6.2.1. Für die Rückrichtung wählen wir wie im Beweis von 8.6.2.1 auf unserer Darstellung ein invariantes Skalarprodukt und finden wieder einen schieflinearen Automorphismus J unserer Darstellung derart, daß J^2 selbstadjungiert ist und nur positive beziehungsweise negative Eigenwerte hat. Ändern wir dann J auf den Eigenräumen von J^2 durch einen geeigneten Skalar ab, so können wir $J^2 = \mathrm{id}$ beziehungsweise $J^2 = -\mathrm{id}$ erreichen. □

Übungen

Übung 8.6.2.13. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k erhalten wir eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}(V, V^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bil}(V)$$

zwischen dem Raum der Homomorphismen von V in seinen Dualraum und dem Raum der Bilinearformen auf V, indem wir jedem Homomorphismus $\varphi : V \to V^*$ die Bilinearform $\hat{\varphi}$ zuordnen, die gegeben wird durch $\hat{\varphi}(v, w) = (\varphi(v))(w)$. Wir kennen diese Bijektion bereits aus 12.7.3.13, wo wir ihre Inverse $g \mapsto \mathrm{can}_g$ notiert hatten.

Übung 8.6.2.14. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k haben wir auf dem Raum $\mathrm{Bil}(V)$ der Bilinearformen eine natürliche selbstinverse Abbildung, das „Vertauschen der Argumente“. Ihr Eigenraum zum Eigenwert 1 besteht genau aus allen symmetrischen Bilinearformen, ihr Eigenraum zum Eigenwert (-1) aus allen symplektischen alias alternierenden Bilinearformen, und Fall $\mathrm{char}\, k \neq 2$ ist $\mathrm{Bil}(V)$ die direkte Summe dieser Eigenräume.

Übung 8.6.2.15 (**Eindeutigkeit invarianter Sesquilinearformen**). Je zwei invariante Sesquilinearformen auf einer irreduziblen endlichdimensionalen komplexen Darstellung eines Monoids unterscheiden sich höchstens um einen Skalar. Hinweis: Man beachte für einen komplexen Vektorraum mit der Notation $\mathrm{Ses}(V)$ für die Menge der Sesquilinearformen $s : V \times V \to \mathbb{C}$ die Identifikation

$$\mathrm{Ses}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\overline{V}, V^*)$$

mit $s \mapsto f_s$ und f_s gegeben durch $f_s(\bar{v}) : w \mapsto s(v, w)$ mit $\overline{V}$ dem komplex konjugierten Vektorraum nach 4.1.12.33.

Übung 8.6.2.16 (**Eindeutigkeit invarianter Skalarprodukte**). Gegeben ein invariantes Skalarprodukt auf einer irreduziblen endlichdimensionalen reellen Darstellung eines Monoids ist jede weitere invariante symmetrische Bilinearform ein Vielfaches. Hinweis: Hauptachsentransformation **??**.

Übung 8.6.2.17 (**Eindeutigkeit quaternionaler invarianter Skalarprodukte**). Gegeben ein invariantes quaternionales Skalarprodukt auf einer irreduziblen endlichdimensionalen quaternionalen Darstellung eines Monoids G ist jede weitere invariante hermitesche quaternionale Sesquilinearform ein reelles Vielfaches. Hinweis: Unsere Formen werden durch ihren Realteil festgelegt und der ist ein invariantes Skalarprodukt beziehungsweise eine invariante symmetrische Bilinearform einer einfachen reellen Darstellung des Monoids $G \times \{\pm i, \pm j, \pm k, \pm 1\}$.

8.6.3 Induktion und Koinduktion für Monoide

8.6.3.1. Ich erinnere an das Konzept adjungierter Funktoren, das in 16.4.3 diskutiert wird.

Satz 8.6.3.2 (**Adjungierte von Restriktionen**). *Sei $\varphi : H \to G$ ein Monoidhomomorphismus. Das Restringieren von Darstellungen alias der Funktor $\operatorname{res}_G^H : G\text{-Mod} \to H\text{-Mod}$ besitzt einen Rechtsadjungierten ind_H^G und einen Linksadjungierten prod_H^G.*

8.6.3.3. Ist $\varphi : H \hookrightarrow G$ die Einbettung eines Untermonoids, so nennt man ind_H^G meist die **Induktion** und prod_H^G manchmal die **Koinduktion**. Im Fall $G = 1$ benutzt man die Bezeichnungen $\operatorname{ind}_H^1 M = M^H$ sowie $\operatorname{prod}_H^1 M = M_H$ und nennt diese abelschen Gruppen die H**-Invarianten** und die H**-Koinvarianten** von M. Explizit haben wir in diesem Fall $M^H = \{m \in M \mid hm = m \ \forall h \in H\}$ und $M_H = M/\langle hm - m \mid m \in M, h \in H\rangle$. Ist allgemeiner φ eine Surjektion $\varphi : H \twoheadrightarrow G$ und K ihr Kern, so sind für $M \in H\text{-Mod}$ die Räume M^K und M_K der Invarianten und Koinvarianten in natürlicher Weise Darstellungen von G und wir erhalten natürliche Isomorphismen $\operatorname{prod}_H^G M \xrightarrow{\sim} M_K$ und $\operatorname{ind}_H^G M \xrightarrow{\sim} M^K$.

8.6.3.4. Gegeben Darstellungen $M \in H\text{-Mod}$ und $N \in G\text{-Mod}$ bezeichnet man als **Frobenius-Reziprozität** die kanonischen Isomorphismen

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}^H(\operatorname{res}_G^H N, M) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}^G(N, \operatorname{ind}_G^H M)\\ \operatorname{Hom}^H(M, \operatorname{res}_G^H N) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}^G(\operatorname{prod}_H^G M, N)\end{aligned}$$

Aus der Transitivität der Restriktionen folgt auch in diesem Kontext sofort die Transitivität von Induktion und Koinduktion.

Beweis. Wir geben verschiedene Beweise, um diese zentralen Konstruktionen unter verschiedenen Blickwinkeln zu beleuchten.

1. Für jeden Ringhomomorphismus $A \to B$ hat die Restriktion $B\text{-Mod} \to A\text{-Mod}$ den Rechtsadjungierten $M \mapsto \operatorname{Hom}_A(B, M)$ und den Linksadjungierten $M \mapsto B \otimes_A M$, siehe 7.2.8.5 und 7.2.8.7. Identifizieren wir $H\text{-Mod} = \mathbb{Z}H\text{-Mod}$

und $G\text{-Mod} = \mathbb{Z}G\text{-Mod}$ und spezialisieren zum von φ induzierten Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}H \to \mathbb{Z}G$, so erhalten wir eine erste Beschreibung unserer adjungierten Funktoren als

$$\operatorname{ind}_H^G M = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M) \quad \text{und} \quad \operatorname{prod}_H^G M = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$$

2. Alternativ können wir die induzierte Darstellung konstruieren als

$$\operatorname{ind}_H^G M = \{f : G \to M \mid f(hx) = hf(x) \quad \forall h \in H, x \in G\}$$

mit der G-Operation gegeben durch $(gf)(x) = f(xg)$ für alle $x, g \in G$. Die Identifikation mit $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$ geschieht durch die Einschränkung eines derartigen Homomorphismus auf die Teilmenge $G \subset \mathbb{Z}G$.

3. Die folgende Konstruktion induzierter und koinduzierter Darstellungen scheint mir am anschaulichsten, sie funktioniert jedoch nur für Gruppen $H \subset G$. Wir betrachten dazu das sogenannte balancierte Produkt $G \times_{/H} M$, das definiert ist als der Raum der H-Bahnen in $G \times M$ unter der Operation $h(g, m) = (gh^{-1}, hm)$, und die Menge aller Schnitte beziehungsweise aller Schnitte mit endlichem Träger der Projektion $\pi : G \times_{/H} M \twoheadrightarrow G/H$, also

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}_H^G M &= \{s : G/H \to G \times_{/H} M \mid \pi \circ s = \mathrm{id}\} \\ \operatorname{prod}_H^G M &= \{s : G/H \to G \times_{/H} M \mid \pi \circ s = \mathrm{id},\ |\operatorname{supp} s| < \infty\} \end{aligned}$$

Die Fasern von π sind hier abelsche Gruppen in natürlicher Weise, π ist G-äquivariant für die offensichtliche G-Operation von links auf beiden Räumen, und die Operation von G induziert Gruppenhomomorphismen zwischen den Fasern von π. Damit erhalten wir eine Operation von G auf unseren Mengen von Schnitten durch „Verschieben“, $(gs)(x) = g(s(g^{-1}x))$, und das ist unsere dritte Konstruktion. Um sie im Fall der induzierten Darstellung mit der vorherigen Konstruktion zu identifizieren, bilden wir zu einer Abbildung $f : G \to M$ die Abbildung $\tilde{f} : G \to G \times M$, $x \mapsto (x, f(x^{-1}))$ und beachten, daß sie für unsere speziellen f absteigt zu einem Schnitt $s : G/H \to G \times_{/H} M$, falls $H \subset G$ eine Einbettung ist. Im Fall der koinduzierten Darstellung ordnen wir einem Tensor $g \otimes m \in \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$ den Schnitt s zu mit $s(gH) = \overline{(g, m)}$. Insbesondere gibt es im Fall $H \subset G$ stets eine natürliche Einbettung $\operatorname{prod}_H^G M \subset \operatorname{ind}_H^G M$ und unter der Zusatzannahme $|G/H| < \infty$ ist diese Einbettung sogar ein Isomorphismus. □

Vorschau 8.6.3.5. Ist $H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus mit endlichem Kern, so gibt es besondere interessante Transformationen $\operatorname{prod}_H^G \to \operatorname{ind}_H^G$. Speziell ist für H eine endliche Gruppe und G trivial die Multiplikation mit $N_H := \sum_{h \in H} h$ solch eine Transformation von den Koinvarianten zu den Invarianten, und für $H \subset G$ eine Einbettung von Gruppen wird eine derartige Transformation im vorhergehenden dritten Beweis von 8.6.3.2 mit konstruiert. In **??** wird skizziert, wie sie sich als Spezialfall allgemeinerer Konstruktionen verstehen lassen sollten.

8.6.3.6. Sei $\varphi : H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus und k ein Körper und bezeichne $d : H\text{-}\mathrm{Mod}_k \to H\text{-}\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{opp}}$ das Bilden der kontragredienten Darstellung. So induziert die offensichtliche Isotransformation

$$\begin{tikzcd} G\text{-}\mathrm{Mod}_k \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\mathrm{res}_G^H"'] & G\text{-}\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{opp}} \arrow[d, "(\mathrm{res}_G^H)^{\mathrm{opp}}"] \arrow[dl, Rightarrow, "\sim"'] \\ H\text{-}\mathrm{Mod}_k \arrow[r, "d"] & H\text{-}\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{opp}} \end{tikzcd}$$

durch Übergang zu den Rechtsadjungierten eine Isotransformation

$$\begin{tikzcd} G\text{-}\mathrm{Mod}_k & G\text{-}\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{opp}} \arrow[l, "d^{\mathrm{opp}}"'] \arrow[dl, Rightarrow, "\sim"'] \\ H\text{-}\mathrm{Mod}_k \arrow[u, "\mathrm{ind}_H^G"] & H\text{-}\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{opp}} \arrow[l, "d^{\mathrm{opp}}"'] \arrow[u, "(\mathrm{prod}_H^G)^{\mathrm{opp}}"'] \end{tikzcd}$$

Wir haben also kürzer geschrieben stets natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{ind}_H^G(dM) \xrightarrow{\sim} d(\mathrm{prod}_H^G M)$$

Wenden wir sie auf $M = dN$ an und schalten $N \to ddN$ davor, so ergeben sich natürliche Homomorphismen $\mathrm{ind}_H^G(N) \to d(\mathrm{prod}_H^G dN)$. Dualisieren wir sie, so erhalten wir natürliche Homomorphismen $\mathrm{prod}_H^G M \to d(\mathrm{ind}_H^G(dM))$.

Satz 8.6.3.7 (**Mackey**). *Sei G eine Gruppe mit Untergruppen H, L und sei A eine Darstellung von H. Sei $X \subset G$ ein Repräsentantensystem für die L-H-Doppelnebenklassen. Gegeben $x \in X$ setzen wir $U_x = xHx^{-1} \cap L$ und betrachten die Einbettung $U_x \hookrightarrow H$, $u \mapsto x^{-1}ux$. So haben wir kanonische Isomorphismen*

$$\mathrm{res}_G^L\left(\mathrm{prod}_H^G A\right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x \in X} \mathrm{prod}_{U_x}^L\left(\mathrm{res}_H^{U_x} A\right)$$

$$\mathrm{res}_G^L\left(\mathrm{ind}_H^G A\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in X} \mathrm{ind}_{U_x}^L\left(\mathrm{res}_H^{U_x} A\right)$$

Beweis. Wir zeigen nur den ersten Isomorphismus, der Zweite ergibt sich analog. Auf der linken Seite steht $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} A$. Nun zerfällt $\mathbb{Z}G$ als $\mathbb{Z}L$-$\mathbb{Z}H$-Bimodul offensichtlich in $\mathbb{Z}G = \bigoplus_Q \mathbb{Z}Q$, wo Q über die L-H-Doppelnebenklassen in G läuft. Wählen wir $x \in Q$, so liefert weiter die Vorschrift $f \otimes g \mapsto fxg$ einen Isomorphismus von $\mathbb{Z}L$-$\mathbb{Z}H$-Bimoduln $\mathbb{Z}L \otimes_{\mathbb{Z}U_x} \mathbb{Z}H \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}Q$. Damit ist der Satz klar. $\square$

Bemerkung 8.6.3.8. Ist im vorhergehenden Satz speziell $H = L$ ein Normalteiler von G, so haben wir $X = G/H$ und die Summanden beziehungsweise Faktoren auf der rechten Seite unserer Formeln sind schlicht die H-Moduln A^x, die man erhält, wenn man die Operation von H auf A mit der Konjugation durch $x \in G$ vertwistet.

Korollar 8.6.3.9. *Sei G eine Gruppe mit Untergruppen H, L und seien $A \in H\text{-Mod}$, $B \in L\text{-Mod}$ Darstellungen. Sei $X \subset G$ ein Repräsentantensystem für die L-H-Doppelnebenklassen in G. Für $x \in X$ setzen wir $U_x = xHx^{-1} \cap L$ und betrachten die Einbettung $U_x \hookrightarrow H, u \mapsto x^{-1}ux$. So haben wir einen kanonischen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}^G(\mathrm{prod}_H^G A, \mathrm{ind}_L^G B) \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}^{U_x}(\mathrm{res}_H^{U_x} A, \mathrm{res}_L^{U_x} B)$$

Beweis. Klar mit dem vorhergehenden Satz von Mackey 8.6.3.7 und den Adjunktionen $(\mathrm{prod}, \mathrm{res})$ sowie $(\mathrm{res}, \mathrm{ind})$. □

Ergänzung 8.6.3.10. Vertauschen wir die Rollen von H und L, so haben wir mit demselben Beweis auch einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}^G(\mathrm{prod}_L^G B, \mathrm{ind}_H^G A) \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}^{U_x}(\mathrm{res}_L^{U_x} B, \mathrm{res}_H^{U_x} A)$$

Übungen

Übung 8.6.3.11. Gegeben endliche Gruppen $H \subset G$ und ein Körper k der Charakteristik Null können wir die koinduzierte Darstellung der Einsdarstellung von H auch beschreiben als

$$\mathrm{prod}_H^G k \cong (kG)\left(\sum_{h \in H} h\right)$$

Dieselbe Formel gilt, wenn nur H endlich ist.

Übung 8.6.3.12 (**Charaktere induzierter Darstellungen**). Gegeben $H \subset G$ endliche Gruppen und V eine endlichdimensionale komplexe Darstellung von H gilt für den Charakter der induzierten Darstellung $W := \mathrm{ind}_H^G V$ die Formel

$$\chi_W(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \dot{\chi}_V(xgx^{-1})$$

mit $\dot{\chi}_V : G \to \mathbb{C}$ der Ausdehnung von $\chi_V : H \to \mathbb{C}$ durch Null. Bilden alternativ $x_1, \ldots, x_r$ ein Repräsentantensystem für die Rechtsnebenklassen von H in G, also $G = \bigsqcup_{i=1}^r x_i H$, so gilt auch

$$\chi_W(g) = \sum_{i=1}^r \dot{\chi}_V(x_i g x_i^{-1})$$

In diesem Sinne ist es sinnvoll, jeder Klassenfunktion $\chi : H \to \mathbb{C}$ die **induzierte Klassenfunktion** $\chi : H \to \mathbb{C}$ durch ebendiese Formel zuzuordnen. Für die Standardskalarprodukte auf den Räumen der Klassenfunktionen sind damit das Restringieren und das Induzieren von Klassenfunktionen adjungierte lineare Abbildungen

$$\mathcal{C}(H) \underset{\mathrm{res}_G^H}{\overset{\mathrm{ind}_H^G}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}(G)$$

im Sinne von 18.2.4.11. Daher rührt vermutlich die Terminologie der „adjungierten Funktoren“.

8.6.4 Clifford-Theorie

8.6.4.1. Gegeben eine Gruppe H und ein Körper k bezeichne im folgenden

$$\hat{H} := \mathrm{irr}_k H$$

die Menge der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen der Gruppe H über dem Körper k. Gegeben eine Darstellung V von H und $\chi \in \hat{H}$ bezeichne $V_\chi \subset V$ den zugehörigen **isotypischen Anteil** alias die Summe aller Bilder von Verflechtungsoperatoren von unserer einfachen Darstellung nach V.

8.6.4.2. Gegeben $G \supset N$ eine Gruppe mit einem Normalteiler induziert die Operation von G auf N durch Konjugation eine Operation der Gruppe G auf der Menge $\hat{N}$. Die Standgruppe von $\chi \in \hat{N}$ notieren wir G_χ. Nach 8.1.1.9 gilt stets $G_\chi \supset N$.

Satz 8.6.4.3 (**Einfache Darstellungen und Normalteiler**). *Gegeben k ein Körper und $G \supset N$ eine Gruppe mit Normalteiler liefert die Abbildung, die einer einfachen Darstellung $V \in \hat{G}$ die Menge aller Paare (χ, V_χ) mit $\chi \in \hat{N}$ und V_χ der zugehörigen N-isotypischen Komponente zuordnet und daraus alle Paare (χ, V_χ) mit $V_\chi = 0$ wegläßt, eine Bijektion*

$$\hat{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Par}(G, N)/G$$

zwischen der Menge der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von G und der Menge aller G-Bahnen auf der G-Menge $\mathrm{Par}(G,N)$ *aller Paare*

$$\mathrm{Par}(G,N) := \{(\chi, W) \mid \chi \in \hat{N},\ W \in \hat{G}_\chi \textit{ mit } W_\chi = W\}$$

unter der offensichtlichen G-Operation. Die inverse Abbildung wird gegeben durch $[(\chi, W)] \mapsto \mathrm{prod}^G_{G_\chi} W$.

Beweis. Sei V eine Darstellung von G. Die Operation von G auf N induziert eine Operation von G auf $\hat{N}$ und für alle $g \in G$ gilt offensichtlich $g : V_\chi \to V_{g\chi}$. Weiter ist die Summe der isotypischen Komponenten stets direkt nach 8.2.3.8. Folglich bilden für jede G-Bahn $B \subset \hat{N}$ die zugehörigen isotypischen Komponenten eine G-Unterdarstellung

$$V_B := \bigoplus_{\chi \in B} V_\chi$$

von V. Ist V einfach, so muß es demnach genau eine Bahn $G\chi = B = B(V)$ geben mit $V = V_B$. Wir schreiben $kG\text{-}\mathrm{Mod}_B$ für die Kategorie aller G-Moduln V mit $V = V_B$ und behaupten für alle $\chi \in \hat{N}$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{ccc} kG\text{-}\mathrm{Mod}_{G\chi} & \xrightarrow{\approx} & kG_\chi\text{-}\mathrm{Mod}_\chi \\ V & \mapsto & V_\chi \end{array}$$

In der Tat können wir den Funktor $R : kG\text{-}\mathrm{Mod} \to kG_\chi\text{-}\mathrm{Mod}_\chi$ gegeben durch $R : V \mapsto V_\chi$ schreiben als die Restriktion gefolgt vom Bilden des besagten N-isotypischen Anteils. Wir erhalten dazu einen Linksadjungierten durch die Vorschrift

$$L : W \mapsto \mathrm{prod}^G_{G_\chi}(W)$$

Wegen $g : V_\chi \xrightarrow{\sim} V_{g\chi}$ ist klar, daß L bereits in $kG\text{-}\mathrm{Mod}_{G\chi}$ landet. Aus demselben Grund induziert die kanonische Abbildung $W \to \mathrm{prod}^G_{G_\chi}(W)$ einen Isomorphismus auf die χ-isotypische Komponente der rechten Seite, als da heißt, die Adjunktion induziert einen Isomorphismus $W \xrightarrow{\sim} RLW$. Es bleibt nur zu zeigen, daß auch umgekehrt die Adjunktion einen Isomorphismus $LRV \xrightarrow{\sim} V$ induziert, daß also für $V \in kG\text{-}\mathrm{Mod}_{G\chi}$ die von der Adjunktion alias Frobenius-Reziprozität 8.6.3.4 herkommende Abbildung ein Isomorphismus

$$\mathrm{prod}^G_{G_\chi} V_\chi \xrightarrow{\sim} V$$

ist. In der Tat induziert nun unsere Abbildung einen Isomorphismus auf den χ-isotypischen Komponenten. Damit haben sowohl Kern als auch Kokern unseres Isomorphismus in spe höchstens von Null verschiedene isotypische Komponenten an Stellen $\psi \in G\chi$. Andererseits aber haben sowohl Kern als auch Kokern Komponente Null bei χ und folglich auch Komponenten Null bei allen $\psi \in G\chi$. Der Satz folgt. $\square$

8.6.4.4. Gegeben $H \ltimes N$ ein semidirektes Produkt zweier Gruppen induziert die Operation von H auf N eine Operation der Gruppe H auf der Menge $\hat{N}$. Die Standgruppe von $\chi \in \hat{N}$ notieren wir H_χ.

Korollar 8.6.4.5 (**Darstellungen semidirekter Produkte**). *Gegeben ein semidirektes Produkt $H \ltimes N$ einer endlichen Gruppe H mit einer abelschen Gruppe N liefert die Abbildung $V \mapsto \{(\chi, V_\chi) \mid \chi \in \operatorname{irrf}_{\mathbb{C}} N$ mit $V_\chi \neq 0\}$ eine Bijektion*

$$\operatorname{irrf}_{\mathbb{C}}(H \ltimes N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Par}/H$$

zwischen der Menge der Isomorphieklassen komplexer einfacher Darstellungen von $H \ltimes N$ und der Menge der H-Bahnen auf der Parametermenge Par aller Paare $\operatorname{Par} := \{(\chi, W) \mid \chi \in \operatorname{irrf}_{\mathbb{C}} N,\ W \in \operatorname{irrf}_{\mathbb{C}} H_\chi\}$ mit der offensichtlichen H-Operation.

8.6.4.6. Statt $\mathbb{C}$ dürfen wir hier allgemeiner einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper nehmen. Der Beweis bleibt derselbe.

Beweis. Das folgt durch Spezialisierung aus Clifford-Theorie 8.6.4.3. Genauer induziert die dort gegebene Bijektion unter der Annahme $|G/N| < \infty$ eine Bijektion zwischen endlichdimensionalen Einfachen auf beiden Seiten. Nehmen wir zusätzlich den Grundkörper k algebraisch abgeschlossen und N abelsch an, so sind die einfachen endlichdimensionalen k-Darstellungen eindimensional und die Restriktion liefert für alle derartigen χ eine Äquivalenz von Kategorien

$$k(H_\chi \ltimes N)\text{-Mod}_\chi \xrightarrow{\approx} kH_\chi\text{-Mod}$$

So folgt dann das Korollar. □

Übungen

Übung 8.6.4.7. Man entwickle die Charaktertafeln der Diedergruppen aus 4.5.4.2. Wiewiele einfache Darstellungen haben diese Gruppen? Was sind deren Dimensionen?

8.6.5 Darstellungen endlicher Heisenberg-Gruppen*

8.6.5.1. Allgemein erklärt man für jede abelsche Gruppe V mit einer alternierenden bilinearen Abbildung $\omega : V \times V \to A$ in eine weitere abelsche Gruppe A die zugehörige **Heisenberg-Gruppe**

$$\operatorname{Heis}(V, \omega) := V \times A$$

mit der Verknüpfung $(v, \alpha)(w, \beta) := (v + w, \alpha + \beta + \omega(v, w))$. Das Zentrum dieser Gruppe ist die Menge aller (v, α) mit $2\omega(v, w) = 0$ für alle $w \in V$.

8.6.5.2 (**Einfache Darstellungen der endlichen Heisenberggruppen**). Wir untersuchen nun einfache komplexe Darstellungen der Heisenberggruppe G im Fall eines endlichdimensionalen symplektischen Vektorraums V über einem endlichen Körper $k = \mathbb{F}_q$. Das Zentrum operiert auf jeder einfachen Darstellung durch einen multiplikativen Charakter. Ist dieser Charakter der triviale Charakter, so kommt unsere Darstellung durch Rückzug von einer einfachen Darstellung der additiven Gruppe V her und wir erhalten so $q^{2n} = |V|$ paarweise nichtisomorphe eindimensionale Darstellungen. Ist dieser Charakter $\chi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$ nicht der triviale Charakter, so betrachten wir irgendeinen Lagrange'schen Teilraum $L \subset V$ und den trivial fortgesetzten Charakter $\tilde{\chi} : L \times \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$ mit $\tilde{\chi}(v, \alpha) = \chi(\alpha)$ und induzieren $\mathbb{C}_{\tilde{\chi}}$ zu einer Darstellung V_χ unserer Heisenberggruppe. Für $2n = \dim V$ erhalten wir dann eine q^n-dimensionale Darstellung der Heisenberggruppe, auf der das Zentrum immer noch durch denselben multiplikativen Charakter χ operiert. Diese induzierten Darstellungen sind jedoch alle einfach, denn $L \times \mathbb{F}_q$ ist ein Normalteiler und die Bahn von $\tilde{\chi}$ unter Konjugation hat genau q^n Elemente: Es gilt nämlich

$$(w, 0)(v, \beta)(w, 0)^{-1} = (v, \beta + 2\omega(w, v))$$

Folglich ist für jede Linearform $\lambda \in L^*$ der Charakter $(v, \alpha) \mapsto \chi(2\lambda(v) + \alpha)$ konjugiert zu $\tilde{\chi}$. Wegen $(q-1)(q^n)^2 + (q^n)^2 = |G|$ müssen das bereits alle einfachen Darstellungen gewesen sein.

8.7 Abelsche Kategorien

8.7.1 Projektive Decken

8.7.1.1. Unter einer **abelschen Kategorie** darf und sollte der mit der abstrakten Definition 19.2.5.4 nicht vertraute Leser stets eine **eingebettete abelsche Kategorie** verstehen, als da heißt eine volle Unterkategorie der Kategorie aller Moduln über einem fest vorgegebenen Ring, die stabil ist unter dem Bilden von Subquotienten und endlichen direkten Summen. Die Begriffe **Epimorphismus** oder kurz **epi** und **Monomorphismus** oder kurz **mono** aus der allgemeinen Begriffswelt abelscher Kategorien spezialisieren dann zu surjektiven beziehungsweise injektiven Modulhomomorphismen.

Beispiele 8.7.1.2. Ist A ein Ring, so ist die Kategorie aller A-Moduln oder genauer aller A-Moduln in einem vorgegebenen Universum eine abelsche Kategorie. Sind $A \supset B$ Ringe, so ist die Kategorie aller A-Moduln, die halbeinfach sind über B, eine abelsche Kategorie. Dasselbe gilt für die Kategorie aller A-Moduln, die über B halbeinfach und von endlicher Länge sind.

Definition 8.7.1.3. Ein Objekt einer abelschen Kategorie heißt **einfach**, wenn es nicht null ist und jeder Morphismus zu unserem Objekt entweder epi oder null ist. Gleichbedeutend können wir dual auch fordern, daß unser Objekt nicht null ist und jeder Morphismus aus unserem Objekt entweder mono oder null ist.

8.7.1.4. Der Satz von Jordan-Hölder 7.4.7.12 gilt a forteriori auch für jede eingebettete abelsche Kategorie. Nach Übung 19.2.5.26 gilt er sogar für jede abelsche Kategorie.

Definition 8.7.1.5. Ein Objekt M einer Kategorie heißt **unzerlegbar**, wenn M nicht final ist und es keine zwei nicht finalen Objekte W_1, W_2 gibt mit $M \cong W_1 \times W_2$.

Beispiel 8.7.1.6. Die unzerlegbaren Ojekte in der Kategorie der Darstellungen eines Monoids über einem vorgegebenen Ring k sind genau unsere unzerlegbaren Darstellungen im Sinne von 8.1.1.21.

Definition 8.7.1.7. Ein Objekt P einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ heißt **projektiv**, wenn der Funktor $\mathcal{A}(P, \ ) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$ exakt ist. Ein Objekt I einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ heißt **injektiv**, wenn der Funktor $\mathcal{A}(\ , I) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ exakt ist.

8.7.1.8. Projektive Moduln werden in 17.5.6.10 folgende diskutiert, injektive Moduln in 17.6.6.1 folgende.

Vorschau 8.7.1.9. Der Rahmen abstrakter abelscher Kategorien hat den Vorteil, daß die opponierte Kategorie einer abelschen Kategorie stets wieder abelsch ist. Die projektiven Objekte einer abelschen Kategorie sind dann genau die injektiven Objekte der opponierten Kategorie.

Definition 8.7.1.10. Seien $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt.

1. Ein Morphismus $\eta : P \twoheadrightarrow A$ heißt ein **wesentlicher Epimorphismus**, wenn er ein Epimorphismus ist und wenn für beliebige Morphismen $f : Q \to P$ gilt: $(\eta \circ f \text{ epi}) \Rightarrow (f \text{ epi})$. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß zwar P selbst surjektiv auf A geht, daß aber kein echtes Unterobjekt von P surjektiv auf A geht;

2. Eine **projektive Decke** des Objekts A ist ein Paar (P, η) bestehend aus einem projektiven Objekt $P \in \mathcal{A}$ und einem wesentlichen Epimorphismus $\eta : P \twoheadrightarrow A$.

Dual erklärt man **wesentliche Monomorphismen** und **injektive Hüllen**.

Beispiel 8.7.1.11 (**Wesentliche Monomorphismen von Moduln**). Ein Untermodul $M \subset I$ ist genau dann wesentlich, wenn er mit jedem weiteren von Null verschiedenen Untermodul $U \subset I$ mindestens ein von Null verschiedenes Element gemeinsam hat, wenn also jedes von Null verschiedene Element von I durch Davormultiplizieren eines Ringelements zu einem von Null verschiedenen Element von M gemacht werden kann. In 8.7.1.28 zeigen wir, daß jeder Modul eine bis auf nichteindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte injektive Hülle besitzt. Dahingegen muß, wie in 8.7.1.19 erklärt wird, keineswegs jeder Modul eine projektive Decke besitzen.

Beispiel 8.7.1.12 (**Wesentliche Epimorphismen von Moduln**). Ist $\mathcal{A}$ eine Kategorie von Moduln, die mit einem Modul auch alle seine Untermoduln enthält, so ist ein Epimorphismus $P \twoheadrightarrow M$ wesentlich genau dann, wenn beliebige Urbilder der Elemente eines Erzeugendensystems von M bereits P erzeugen. Zum Beispiel ist das Auswerten bei $t = 0$ ein wesentlicher Epimorphismus $\mathbb{C}[\![t]\!] \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ von Moduln über dem Ring der formalen Potenzreihen $\mathbb{C}[\![t]\!]$. Dahingegen ist das Auswerten bei $t = 0$ kein wesentlicher Epimorphismus $\mathbb{C}[t] \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ von $\mathbb{C}[t]$-Moduln.

Beispiel 8.7.1.13. Ist R ein lokaler Kring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, so ist nach dem Lemma von Nakayama 7.4.6.12 oder auch 8.3.6.3 für jeden endlich erzeugten R-Modul M die kanonische Surjektion $M \twoheadrightarrow M/\mathfrak{m}M$ ein wesentlicher Epimorphismus von R-Moduln.

Proposition 8.7.1.14 (**Eindeutigkeit projektiver Decken**). *Sind $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt und (P, η) sowie (P', η') projektive Decken von*

A, so gibt es einen Homomorphismus $i : P \to P'$ mit $\eta = \eta' \circ i$ und jeder solche Homomorphismus ist ein Isomorphismus

$$i : P \xrightarrow{\sim} P'$$

8.7.1.15. Dual sind auch injektive Hüllen, wenn sie denn existieren, eindeutig bis auf nichteindeutigen Isomorphismus. Wie bereits angekündigt zeigen wir in 8.7.1.28, daß injektive Hüllen im Fall von Modulkategorien stets existieren.

Beispiel 8.7.1.16 (**Injektive Hülle des trivialen $\mathbb{C}[t]$-Moduls $\mathbb{C}$**). Die offensichtliche Einbettung $\mathbb{C}[t]/t\mathbb{C}[t] \hookrightarrow \mathbb{C}[t, t^{-1}]/t\mathbb{C}[t]$ ist ein wesentlicher Monomorphismus von $\mathbb{C}[t]$-Moduln. Als Abbildung von Vektorräumen kann sie identifiziert werden mit der Einbettung $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}[t^{-1}]$. Aus 17.6.6.7 wissen wir zusätzlich, daß dieser $\mathbb{C}[t]$-Modul injektiv ist. Damit haben wir die injektive Hülle des trivialen $\mathbb{C}[t]$-Moduls $\mathbb{C}$ gefunden.

Beweis. Der besseren Übersichtlichkeit halber stelle ich die Objekte und Morphismen der Proposition nocheinmal graphisch dar. Die Proposition behauptet die Existenz eines Isomorphismus i im Diagramm

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, dashed, "i"] \arrow[dr, "\eta"'] & & P' \arrow[dl, "\eta'"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Da η' ein Epimorphismus ist und P projektiv, gibt es $i : P \to P'$ mit $\eta' \circ i = \eta$. Da η ein Epimorphismus ist und η' wesentlich, ist i ein Epimorphismus. Da P' projektiv ist, muß i spalten. Bezeichnet $i' : P' \to P$ eine Spaltung, also $i \circ i' = \mathrm{id}$, so haben wir offensichtlich $\eta \circ i' = \eta'$. Da η wesentlich ist, muß mithin auch i' ein Epimorphismus sein. Damit sind i und i' zueinander inverse Isomorphismen. □

8.7.1.17. Im Allgemeinen ist der Isomorphismus $i : P \xrightarrow{\sim} P'$ aus Proposition 8.7.1.14 keineswegs eindeutig bestimmt. Motiviert durch die Proposition erlauben wir uns dennoch den bestimmten Artikel und sprechen von *der* projektiven Decke eines Objekts in einer abelschen Kategorie, wenn eine solche existiert. Manchmal meinen wir damit auch nur das Objekt P statt dem Paar (P, η).

Lemma 8.7.1.18. *Ist L ein einfaches Objekt in einer abelschen Kategorie und $P \twoheadrightarrow L$ ein wesentlicher Epimorphismus, so ist P unzerlegbar. Insbesondere ist die projektive Decke eines einfachen Objekts stets unzerlegbar.*

Beweis. Ist $P' \oplus P'' \xrightarrow{\sim} P$ eine Zerlegung, so haben wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $P' \twoheadrightarrow L$ und damit $P' \twoheadrightarrow P$, also $P'' = 0$. □

Beispiel 8.7.1.19 (**Der triviale $\mathbb{C}[t]$-Modul $\mathbb{C}$ besitzt keine projektive Decke**). Die offensichtliche Surjektion $\mathbb{C}[t] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[t]/t\mathbb{C}[t] = \mathbb{C}$ ist kein wesentlicher Epimorphismus von $\mathbb{C}[t]$-Moduln. Gäbe es eine projektive Decke $P \twoheadrightarrow \mathbb{C}$, so müßte P also ein echter direkter Summand von $\mathbb{C}[t]$ sein. Der $\mathbb{C}[t]$-Modul $\mathbb{C}[t]$ ist aber unzerlegbar.

Proposition 8.7.1.20 (**Fitting-Zerlegung**). *Gegeben ein Objekt M endlicher Länge in einer abelschen Kategorie und ein Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(M)$ hängen für hinreichend großes $n \gg 0$ die Unterobjekte $\ker f^n$ und $\operatorname{im} f^n$ nicht von n ab und ihre Einbettungen liefern eine Zerlegung*

$$(\ker f^n) \oplus (\operatorname{im} f^n) \xrightarrow{\sim} M$$

Beispiel 8.7.1.21. Im Fall eines Endomorphismus f eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist die Fittingzerlegung die Zerlegung in den Hauptraum zum Eigenwert Null und die direkte Summe der übrigen Haupträume.

Beweis. Für beliebige Morphismen h nach M und g von M erhalten wir in offensichtlicher Weise ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{im} h \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & M \arrow[d, two heads] \\
\operatorname{im}(g \circ h) \arrow[r, hook] & \operatorname{im} g
\end{tikzcd}$$

mit vertikalen Epimorphismen induziert von g und horizontalen Monomorphismen gegeben durch die offensichtlichen Einbettungen. Ist f ein Endomorphismus von M und hat M endliche Länge, so haben auch die Bilder aller f^n endliche Länge nach 8.7.1.4 und diese Längen bilden eine monoton fallende Folge. Mithin gibt es eine Stelle n, ab der diese Längen konstant werden. Nun erinnern wir daran, daß Monomorphismen und ebenso Epimorphismen zwischen Objekten gleicher endlicher Länge notwendig Isomorphismen sein müssen. Nehmen wir in unserem Diagramm $h = g = f^n$, so erhalten wir demnach ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{im} f^n \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads, "\wr"'] & M \arrow[d, two heads] \\
\operatorname{im} f^{2n} \arrow[r, "\sim"] & \operatorname{im} f^n
\end{tikzcd}$$

mit durch f^n induzierten Vertikalen, das offensichtlich eine Spaltung s unserer Surjektion $f^n : M \twoheadrightarrow \operatorname{im} f^n$ mit Bild $\operatorname{im} s = \operatorname{im} f^n$ liefert. $\square$

Proposition 8.7.1.22 (**Einfache Quotienten unzerlegbarer Projektiver**). *Gegeben ein unzerlegbares projektives Objekt P endlicher Länge in einer abelschen Kategorie und Epimorphismen auf einfache Objekte $a : P \twoheadrightarrow L$ sowie $b : P \twoheadrightarrow M$ existiert genau ein Isomorphismus $i : L \xrightarrow{\sim} M$ mit $b = i \circ a$.*

Beweis. Sei $i : K \hookrightarrow P$ der Kern von a. Gilt $bi \neq 0$, so ist bi ein Epimorphismus und es gibt folglich $\alpha : P \to K$ mit $bi\alpha = b : P \twoheadrightarrow M$. Dann kann $i\alpha$ nicht nilpotent sein und muß aufgrund der Fittingzerlegung ein Isomorphismus sein im Widerspruch dazu, daß i kein Epimorphismus ist. Es folgt $bi = 0$ und damit induziert a einen Epi und a forteriori einen Isomorphisms $i : L \xrightarrow{\sim} M$. □

8.7.1.23. Gegeben ein wesentlicher Epimorphismus $P \twoheadrightarrow L$ auf ein einfaches Objekt einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ besteht der Kern der durch Nachschalten der Projektion gegebenen Abbildung $\mathcal{A}(P, P) \to \mathcal{A}(P, L)$ aus allen Nichtepimorphismen. Ist P projektiv von endlicher Länge, so induziert das Vorschalten des besagten Epimorphismus nach 8.7.1.22 weiter eine Bijektion $\mathcal{A}(L, L) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(P, L)$.

Proposition 8.7.1.24 (**Kriterium für projektive Decken**). *Ist P ein projektives Objekt endlicher Länge einer abelschen Kategorie und $\eta : P \twoheadrightarrow M$ ein Epimorphismus derart, daß kein echter direkter Summand von P surjektiv auf M geht, so ist unser Epimorphismus eine projektive Decke.*

8.7.1.25. Die Bedingung, daß P endliche Länge hat, ist hierbei wesentlich. In der Tat geben wir in 8.7.1.19 einen Epimorphismus eines unzerlegbaren projektiven $\mathbb{C}[T]$-Moduls auf eine einfachen $\mathbb{C}[T]$-Modul an, der keine projektive Decke ist.

Beweis. Ist $f : U \to P$ ein Morphismus mit $\eta \circ f$ epi, so finden wir wegen der Projektivität von P einen Morphismus $s : P \to U$ mit $(\eta \circ f) \circ s = \eta$. Betrachten wir nun die Fittingzerlegung von P für $(f \circ s)$, so ist für hinreichend großes n das Bild von $(f \circ s)^n$ ein Summand von P, der auch schon surjektiv auf M geht. Solch ein Summand muß aber nach Annahme P selbst sein und es folgt f epi, als da heißt, η ist wesentlich wie gewünscht. □

Definition 8.7.1.26. Eine abelsche Kategorie, in der jedes Objekt endliche Länge hat, nennen wir eine **längenendliche Kategorie**.

Satz 8.7.1.27 (**Unzerlegbare Projektive in längenendlichen Kategorien**). *In einer längenendlichen Kategorie mit genügend projektiven Objekten besitzt jedes Objekt eine projektive Decke, je zwei einfache Quotienten eines unzerlegbaren projektiven Objekts sind isomorph, und wir erhalten so zueinander inverse Bijektionen*

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{Einfache Objekte,}\\ \textit{bis auf Isomorphismus}\end{array}\right\} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \left\{\begin{array}{c}\textit{Unzerlegbare projektive Objekte,}\\ \textit{bis auf Isomorphismus}\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{ccc} L & \mapsto & (\textit{die projektive Decke von } L) \\ (\textit{der einfache Quotient von } P) & \leftarrow\!\shortmid & P \end{array}$$

Beweis. Nach Annahme ist jedes einfache Objekt Quotient eines Projektiven und dann auch eines unzerlegbaren Projektiven und der muß nach 8.7.1.24, da er nach Annahme endliche Länge hat, seine projektive Decke sein. Umgekehrt kann ein unzerlegbares projektives Objekt endlicher Länge nach 8.7.1.22 bis auf Isomorphismus nur einen einfachen Quotienten haben. □

Satz* 8.7.1.28 (Injektive Hüllen). *Jeder Modul über einem Ring besitzt eine injektive Hülle und diese ist eindeutig bis auf nichteindeutigen Isomorphismus.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt sofort aus 8.7.1.14, angewandt auf die opponierte Kategorie zur Kategorie der Moduln über unserem Ring. Um die Existenz zu zeigen, erinnern wir zunächst aus 19.3.2.12, daß wir jeden Modul M in einen injektiven Modul I einbetten können. Dann finden wir mit dem Zorn'schen Lemma unter allen Untermoduln $U \subset I$ mit $M \subset U \subset I$ und M wesentlich in U einen maximalen Untermodul $J = U_{\max}$. Weiter finden wir mit dem Zorn'schen Lemma in I auch einen Untermodul $V_{\max}$, der maximal ist unter allen Untermoduln, die $U_{\max}$ nur in Null treffen. Dann ist $U_{\max} \hookrightarrow I/V_{\max}$ auch ein essentieller Monomorphismus. Nun können wir die Einbettung $U_{\max} \hookrightarrow I$ zu einem Homomorphismus $I/V_{\max} \to I$ fortsetzen, dessen Bild auch essentiell über $U_{\max}$ sein muß und folglich mit $U_{\max}$ zusammenfällt. Mithin spaltet $U_{\max} \hookrightarrow I/V_{\max}$ und dann spaltet auch $U_{\max} \hookrightarrow I$ und $U_{\max}$ ist injektiv. □

Vorschau 8.7.1.29. Wir zeigen in 19.3.4.2, daß gegeben ein Körper K die Einbettung $K \hookrightarrow K[T_1^{-1}, \ldots, T_r^{-1}]$ eine injektive Hülle des Augmentationsmoduls K über dem Polynomring $K[T_1, \ldots, T_r]$ ist.

Übungen

Ergänzende Übung 8.7.1.30. Sei M ein Objekt einer abelschen Kategorie und f ein Endomorphismus von M. Man zeige: Ist M **artinsch**, wird also jede absteigende Folge von Unterobjekten von M stationär, so gilt immer noch $M = \ker f^n + \operatorname{im} f^n$ für $n \gg 0$. Ist M **noethersch**, wird also jede aufsteigende Folge von Unterobjekten von M stationär, so gilt immer noch $0 = \ker f^n \cap \operatorname{im} f^n$ für $n \gg 0$.

Übung 8.7.1.31. Jeder von Null verschiedene Quotient eines unzerlegbaren projektiven Objekts endlicher Länge ist unzerlegbar.

Übung 8.7.1.32. Ein Objekt einer abelschen Kategorie heißt **halbeinfach**, wenn es isomorph ist zu einem Koprodukt einfacher Objekte. Man erinnere den Begriff eines Unterobjekts und zeige, daß jedes Objekt M endlicher Länge in einer abelschen Kategorie ein größtes halbeinfaches Unterobjekt besitzt. Es heißt der **Sockel von** M und wird notiert als

$$\operatorname{soc}(M)$$

Jeder Quotient und jedes Unterobjekt eines halbeinfachen Objekts endlicher Länge sind halbeinfach. Wenn man sich nicht auf Objekte endlicher Länge beschränkt, gelten analoge Aussagen, aber man muß dabei mehr Sorgfalt in Fragen der Mengenlehre walten lassen.

8.7.2 Zerlegungen in unzerlegbare Objekte

Lemma 8.7.2.1. *Jeder noethersche und ebenso jeder artinsche Modul läßt sich schreiben als eine endliche direkte Summe unzerlegbarer Untermoduln.*

Beweis. Nur für diesen Beweis bezeichne $\mathcal{Z}$ das System aller derjenigen Untermoduln unseres Moduls M, die sich als eine endliche direkte Summe unzerlegbarer Untermoduln schreiben lassen. Ist nun $M = M_0 \oplus N_0$ eine Zerlegung mit $M_0 \notin \mathcal{Z}$, so finden wir auch eine Zerlegung $M = M_1 \oplus N_1$ mit $M_1 \notin \mathcal{Z}$ und $M_1 \subsetneq M_0$ und $N_1 \supsetneq N_0$. In der Tat gilt nach Annahme $M_0 \notin \mathcal{Z}$, also ist M_0 weder Null noch unzerlegbar. Unser Modul M_0 läßt sich demnach nichttrivial zerlegen als $M_0 = M_0' \oplus M_0''$. Aus $M_0 \notin \mathcal{Z}$ folgt dann $M_0' \notin \mathcal{Z}$ oder $M_0'' \notin \mathcal{Z}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $M_0' \notin \mathcal{Z}$ annehmen. Dann erhalten wir für M die Zerlegungen

$$M = M_0 \oplus N_0 = M_0' \oplus M_0'' \oplus N_0 = M_1 \oplus N_1$$

mit $M_1 := M_0' \notin \mathcal{Z}$ und $M_1 \subsetneq M_0$ und $N_1 := M_0'' \oplus N_0 \supsetneq N_0$. Jede Zerlegung $M = M_0 \oplus N_0$ mit $M_0 \notin \mathcal{Z}$ führt in dieser Weise zu einer nicht stagnierenden aufstegenden Kette von Untermoduln $N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \ldots$ und damit zum Widerspruch zur Annahme M noethersch sowie zu einer nicht stagnierenden absteigenden Kette von Untermoduln $M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \ldots$ und damit zum Widerspruch zur Annahme M artinsch. Gälte aber $M \notin \mathcal{Z}$, so hätte es die Zerlegung $M = M \oplus 0 = M_0 \oplus N_0$ mit $M_0 \notin \mathcal{Z}$. Dieser Widerspruch beendet den Beweis. □

Proposition 8.7.2.2 (**Endomorphismen unzerlegbarer Objekte**). *Gegeben ein unzerlegbares Objekt M endlicher Länge in einer abelschen Kategorie ist jeder Endomorphismus von M entweder ein Automorphismus oder nilpotent. Die nilpotenten Elemente von $\operatorname{End} M$ bilden ein Ideal $\mathfrak{m}$ des Endomorphismenrings und der Restklassenring ist ein Schiefkörper $(\operatorname{End} M)/\mathfrak{m}$.*

Beweis. Hätten wir einen Endomorphismus, der weder nilpotent noch ein Automorphismus ist, so wäre die zugehörige Fitting-Zerlegung 8.7.1.20 eine nichttriviale Zerlegung unseres Objekts. Das zeigt die erste Behauptung. Insbesondere ist das Produkt von einem beliebigen Endomorphismus mit einem Nilpotenten in beiden möglichen Reihenfolgen stets wieder nilpotent, da es ja nicht epi beziehungsweise mono und damit kein Automorphismus sein kann. Es ist weiter klar,

daß für N nilpotent $1 - N$ ein Isomorphismus ist mit Inversem $1 + N + N^2 + \ldots$. Folglich ist auch allgemeiner die Summe eines Automorphismus u mit einem nilpotenten Endomorphismus N ein Automorphismus, da sie sich ja als $(u + N) = u(1 - (-u)^{-1}N)$ schreiben läßt und $(-u)^{-1}N$ nilpotent sein muß nach unserer Vorüberlegung. Damit ist dann aber notwendig die Summe von zwei Nilpotenten wieder nilpotent und diese bilden ein Ideal. Es folgt, daß der Restklassenring ein Schiefkörper sein muß. □

8.7.2.3. Ein Ring heißt **lokal**, wenn seine Nichteinheiten ein Ideal bilden. Dies Ideal ist dann natürlich das größte echte Ideal unseres Rings. Der Nullring ist nicht lokal, denn die leere Menge ist kein Ideal. In einem lokalen Ring ist die Summe aus einer Nichteinheit und einer Einheit offensichtlich stets eine Einheit.

8.7.2.4 (**Lokalität von Endomorphismenringen**). Insbesondere ist also der Endomorphismenring eines unzerlegbaren Objekts endlicher Länge aus einer abelschen Kategorie stets lokal, als da heißt, seine Nichteinheiten bilden ein Ideal. Umgekehrt ist ein Objekt mit lokalem Endomorphismenring stets unzerlegbar, denn ist ein Objekt Null, so auch sein Endomorphismenring, und ist ein Objekt die Summe von zwei von Null verschiedenen Unterobjekten, so sind die Projektoren auf diese Unterobjekte zwei Nichteinheiten des Endomorphismenrings, deren Summe eine Einheit ist.

Proposition 8.7.2.5 (**Lemma von Nakayama für lokale Ringe**). *Seien $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Sind $m_1, \ldots, m_r \in M$ gegeben derart, daß ihre Nebenklassen den Quotienten $M/\mathfrak{m}M$ erzeugen, so erzeugen die m_i bereits M selbst. Inbesondere gilt*

$$M = \mathfrak{m}M \quad \Rightarrow \quad M = 0$$

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis der zweiten Aussage. Sei dazu $e_1, \ldots, e_n$ ein unverkürzbares endliches Erzeugendensystem von M. Aus $M = \mathfrak{m}M$ und $n \geq 1$ folgt, daß es $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{m}$ gibt mit $e_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$. Daraus folgt weiter $(1 - a_1)e_1 = a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$. Da $(1 - a_1)$ invertierbar ist, war unser Erzeugendensystem nicht unverkürzbar und dieser Widerspruch zeigt $M = 0$. Für den allgemeinen Fall bezeichne $N \subset M$ den von $m_1, \ldots, m_r$ erzeugten Untermodul. Es folgt erst $N + \mathfrak{m}M = M$ und dann $\mathfrak{m}M \twoheadrightarrow M/N$ und schließlich $\mathfrak{m}(M/N) = M/N$ und so $M/N = 0$ alias $M = N$. □

8.7.2.6 (**Lokale Ringe endlicher Linkslänge**). Hat ein lokaler Ring $(A, \mathfrak{m})$ endliche Länge als Modul über sich selber, so ist sein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ nilpotent. In der Tat sind dann alle Potenzen $\mathfrak{m}^r$ endlich erzeugte A-Moduln und aus $\mathfrak{m}^r \neq 0$ folgt $\mathfrak{m}^r \supsetneq \mathfrak{m}^{r+1}$ mit Nakayama 8.7.2.5. Da nach Annahme jede absteigende Folge von Linksidealen stagniert, muß es ein n geben mit $\mathfrak{m}^n = 0$.

Ergänzung 8.7.2.7. Man kann zeigen, daß ein Ring genau dann endliche Linkslänge hat, wenn er artinsch ist als Linksmodul über sich selber. Einen Beweis findet man in [JS06].

Proposition 8.7.2.8 (Lokalitätskriterium). *Ein Ring E endlicher Linkslänge mit genau zwei Idempotenten ist lokal mit nilpotentem maximalen Ideal.*

Beweis. Die Multiplikation von rechts liefert für jeden Ring E einen Isomorphismus $E^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_E E$ und unser E ist nach Annahme ein unzerlegbarer E-Modul endlicher Länge. Also ist E^{opp} lokal nach 8.7.2.4 und dann ist offensichtlich auch E lokal. Nach 8.7.2.6 ist unter diesen Voraussetzungen aber auch das maximale Ideal von E nilpotent. □

Proposition 8.7.2.9 (Struktur von Endomorphismenringen). *Seien $M_1, \ldots, M_n$ unzerlegbare Objekte einer abelschen Kategorie mit Endomorphismenringen von endlicher Linkslänge. So gilt:*

1. *Im Endomorphismenring $R := \mathrm{End}(M_1 \oplus \ldots \oplus M_n)$ ihrer direkten Summe bilden die Matrizen aus Nichtisomorphismen ein nilpotentes Ideal J;*

2. *Sind die M_i paarweise nicht isomorph und $\mathfrak{m}_i \subset \mathrm{End}(M_i)$ die Ideale der Nichtautomorphismen, so induziert die diagonale Einbettung $\mathrm{End}(M_1) \times \ldots \times \mathrm{End}(M_n) \hookrightarrow R$ einen Isomorphismus*

$$\mathrm{End}(M_1)/\mathfrak{m}_1 \times \ldots \times \mathrm{End}(M_n)/\mathfrak{m}_n \xrightarrow{\sim} R/J$$

3. *Sind die M_i paarweise nicht isomorph und bezeichnet $K_i := \mathrm{End}(M_i)/\mathfrak{m}_i$ den nach 8.7.2.2 zugehörigen Schiefkörper und betrachten wir allgemeiner $R := \mathrm{End}(M_1^{\oplus r_1} \oplus \ldots \oplus M_n^{\oplus r_n})$, so induziert die diagonale Einbettung $\mathrm{End}(M_1^{\oplus r_1}) \times \ldots \times \mathrm{End}(M_n^{\oplus r_n}) \hookrightarrow R$ einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Mat}(r_1; K_1) \times \ldots \times \mathrm{Mat}(r_n; K_n) \xrightarrow{\sim} R/J$$

8.7.2.10 (**Struktur von Ringen endlicher Linkslänge**). Gegeben ein Ring E endlicher Linkslänge zeigt der durch Multiplikation von rechts gegebene Isomorphismus $E^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_E E$, daß wir unsere Proposition auf E^{opp} anwenden können mit $E = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ einer Zerlegung des E-Moduls E in unzerlegbare Summanden. Insbesondere hat E^{opp} und damit auch E selbst ein maximales nilpotentes Ideal und der zugehörige Restklassenring ist halbeinfach. In diesem Fall bilden die endlich erzeugten E-Moduln eine längenendliche Kategorie und die M_i sind deren unzerlegbare Projektive, die in der Zerlegung von E mit gewissen positiven Vielfachheiten auftauchen können.

8.7.2.11. In den Notationen der Proposition ist J das Jacobsonradikal von R und die K_i beziehungsweise die $K_i^{r_i}$ bilden ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen einfacher R-Moduln.

Ergänzung 8.7.2.12. In 7.2.8.4 konstruieren wir ganz allgemein eine Äquivalenz zwischen den Modulkategorien unserer Endomorphismenringe aus Teil 2 und Teil 3, die sich ihrerseits als ein Spezialfall der sogenannten „Morita-Äquivalenz“ erhalten läßt.

Beweis. Wir identifizieren Endomorphismen f der direkten Summe mit Matrizen (f_{ij}) von Homomorphismen. Sind keine der Einträge f_{ij} Isomorphismen, so liegen alle Produkte $f_{ri}f_{ik}\dots f_{lr}$ von Matrixeinträgen mit einer Kette von Indizes, die bei r beginnt und bei r endet, im nach 8.7.2.8 nilpotenten Ideal $\mathfrak{m}_r \subset \operatorname{End} M_r$ der Nichtautomorphismen, denn wäre so eine Verknüpfung ein Automorphismus von M_r, so müßte f_{lr} eine spaltende Einbettung sein. Für $l := \max(\text{Länge}\, M_r)$ kommt in jeder Kette von Indizes der Länge nl mindestens ein Index l-mal vor. Es folgt $J^{nl} = 0$. Die weiteren Behauptungen der Proposition folgen daraus unmittelbar. □

Beispiel 8.7.2.13. Der Endomorphismenring der abelschen Gruppe $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ ist isomorph zum Teilring von $\operatorname{Mat}(2;\mathbb{Q})$ aller Matrizen A mit Einträgen $A_{11} \in \mathbb{Z}$ und $A_{21} = 0$. Er ist von endlicher Rechtslänge, aber nicht von endlicher Linkslänge.

8.7.2.14. Gegeben ein projektives Objekt P endlicher Länge in einer abelschen Kategorie hat sein Endomorphismenring $\operatorname{End} P$ endliche Rechtslänge. Ein Beweis wird im Beweis von 8.7.5.3 gegeben.

Satz 8.7.2.15 (Krull-Schmidt). *Ist M ein Modul endlicher Länge über einem Ring und sind $M \cong M_1 \oplus \dots \oplus M_r$ sowie $M \cong N_1 \oplus \dots \oplus N_s$ zwei Zerlegungen von M in eine direkte Summe von unzerlegbaren Moduln, so gilt $r = s$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ mit $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ für $1 \le i \le r$.*

Satz 8.7.2.16 (Allgemeiner Krull-Schmidt). *Ist M ein Objekt einer additiven Kategorie und sind $M \cong M_1 \oplus \dots \oplus M_r$ sowie $M \cong N_1 \oplus \dots \oplus N_s$ zwei Zerlegungen von M in eine direkte Summe von unzerlegbaren Objekten derart, daß alle M_i einen lokalen Endomorphismenring haben, so gilt $r = s$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ mit $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ für $1 \le i \le r$.*

8.7.2.17. Die zweite Variante ist in verschiedener Hinsicht allgemeiner: Erstens verallgemeinern wir von Modulkategorien auf beliebige additive Kategorien, und zweitens fordern wir nur die Lokalität der Endomorphismenringe der M_i. Das folgt in abelschen Kategorien unter der Voraussetzung endlicher Länge nach 8.7.2.2 aus der Unzerlegbarkeit.

8.7.2.18 (**Diskussion der Terminologie**). Für diese Sätze ist auch die Bezeichnung „Krull-Remak-Schmidt“ gebräuchlich, die sich jedoch inhaltlich schwer rechtfertigen läßt.

Beispiel 8.7.2.19 (**Ein nicht in Unzerlegbare zerlegbarer Modul**). Ist V ein Vektorraum unendlicher Dimension, so ist sein Endomorphismenring E als Linksmodul über sich selber keine direkte Summe von unzerlegbaren Untermoduln. In der Tat erhalten wir eine Bijektion zwischen Untervektorräumen $W \subset V$ und direkten Summanden $F \subset E$ vermittels der Vorschrift $W \mapsto \operatorname{Hom}(W, V)$, und die unzerlegbaren direkten Summanden von E entsprechen so genau den Geraden in V. Die Summe aller unzerlegbaren direkten Summanden von E liefert aber nicht ganz E, sondern nur den Untermodul aller Endomorphismen von endlichem Rang. Im Übrigen gilt auch $E \cong E^n$ als E-Linksmodul für alle $n \geq 1$.

Ergänzung 8.7.2.20. Man beachte, daß durchaus auch unter anderen Voraussetzungen die Eindeutigkeit einer Zerlegung in Unzerlegbare im Sinne des Satzes von Krull-Schmidt gezeigt werden kann: Insbesondere erwähne ich die Wohlbestimmtheit des Ranges für freie Moduln über von Null verschiedenen kommutativen Ringen 7.2.3.10, die im Fall eines unzerlegbaren Ringes eine analoge Aussage liefert, und die Klassifikation endlich erzeugter Moduln über Hauptidealringen 7.2.4.8.

Beweis. Wir schreiben die Identität auf M als Matrix (f_{ij}) mit $f_{ij} : M_j \to N_i$ und ebenso als Matrix (g_{ji}) mit $g_{ji} : N_i \to M_j$. Im Endomorphismenring von M_1 gilt dann

$$\mathrm{id} = g_{11}f_{11} + g_{12}f_{21} + \ldots + g_{1s}f_{s1}$$

Wegen der Lokalität des Endomorphismenrings von M_1 muß hier einer der Summanden eine Einheit sein, sagen wir der Erste. Dann ist aber f_{11} eine spaltende Injektion und wegen der Unzerlegbarkeit von N_1 ein Isomorphismus. Durch geeignete Spaltenumformungen können wir nun alle anderen Einträge in der ersten Zeile der Matrix der (f_{ij}) zum Verschwinden bringen und durch geeignete Zeilenumformungen alle anderen Einträge in der ersten Spalte. Das bedeutet in anderen Worten: Bewegen wir die Zerlegung von M in die M_j mit einem geeigneten Automorphismus von M, so können wir erreichen, daß gilt $M_1 = N_1$ und $M_2 \oplus \ldots \oplus M_r = N_2 \oplus \ldots \oplus N_s$. Von da aus kommen wir dann mit einer offensichtlichen Induktion ans Ziel. $\square$

Übungen

Übung 8.7.2.21. Jede endlichdimensionale Ringalgebra A über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist als A-Linksmodul isomorph zur direkten Summe

$$A \cong \bigoplus_{L \in \operatorname{irr}(A\text{-Mod})} (P_L)^{\oplus \dim L}$$

der projektiven Decken P_L ihrer einfachen Moduln L, genommen jeweils mit der Vielfachheit $\dim_k L$.

8.7.3 Blockzerlegung

8.7.3.1. Gegeben Kategorien $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ definieren wir ihr **Produkt** als diejenige Kategorie $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$, deren Objekte Tupel von Objekten aus den jeweiligen Kategorien sind und deren Morphismen entsprechend Tupel von Morphismen sind, mit der offensichtlichen Verknüpfung. Darin betrachten wir die volle Unterkategorie $\bigoplus \mathcal{A}_i \subset \prod \mathcal{A}_i$ bestehend aus allen Tupeln von Objekten, die nur an endlich vielen Stellen nicht ein Nullobjekt alias initial und final sind. Wir nennen diese Kategorie die **direkte Summe** der Kategorien $\mathcal{A}_i$. Sind schließlich alle $\mathcal{A}_i$ volle Unterkategorien einer festen Kategorie $\mathcal{A}$ mit endlichen Koprodukten, so schreiben wir kurz

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{A}_i$$

für die Aussage, daß der durch das Bilden von Koprodukten gegebene Funktor von rechts nach links eine Äquivalenz von Kategorien ist.

Übungen

Übung 8.7.3.2 (**Blockzerlegung längenendlicher Kategorien**). Seien $\mathcal{A}$ eine längenendliche Kategorie und $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $\mathrm{irr}\mathcal{A}$, die erzeugt wird von der Relation, für die gilt $L \sim N$ genau dann, wenn es nichtspaltende Erweiterungen $N \hookrightarrow E \twoheadrightarrow L$ von L durch N gibt. Betrachten wir für jede Teilmenge $\Omega \subset \mathrm{irr}\,\mathcal{A}$ die Unterkategorie $\mathcal{A}_\Omega$ aller Objekte, deren sämtliche einfachen Subquotienten zu Ω gehören, so haben wir eine Äquivalenz von Kategorien

$$\bigoplus_{\Omega\in\mathrm{irr}\mathcal{A}/\sim} \mathcal{A}_\Omega \xrightarrow{\approx} \mathcal{A}$$

mit der direkten Summe über alle Äquivalenzklassen Ω in $\mathrm{irr}\mathcal{A}$. Diese Summanden $\mathcal{A}_\Omega$ können ihrerseits nicht weiter als direkte Summen zerlegt werden und heißen die **Blöcke von** $\mathcal{A}$.

8.7.4 Grothendieck-Gruppen

Definition 8.7.4.1. Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, so erklären wir die **Grothendieckgruppe** $[\mathcal{A}]$ von $\mathcal{A}$ als die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ über den Objekten modulo den Relationen $A = A' + A''$ wann immer es in $\mathcal{A}$ eine kurze exakte Sequenz $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ gibt, in Formeln

$$[\mathcal{A}] = \mathbb{Z}\mathcal{A}/\langle A - A' - A'' \mid \text{Es gibt eine kurze exakte Sequenz } A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''\rangle$$

Jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ liefert ein Element $[A] \in [\mathcal{A}]$.

8.7.4.2. Ist G eine abelsche Gruppe und $\lambda : \mathcal{A} \to G$ eine beliebige **additive Abbildung**, was bedeuten soll, daß gilt $\lambda(A) = \lambda(A') + \lambda(A'')$ für jede kurze exakte Sequenz $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{\lambda} : [\mathcal{A}] \to G$ mit $\tilde{\lambda}[A] = \lambda(A)$.

Lemma 8.7.4.3. *Für jede längenendliche Kategorie bilden die Isomorphieklassen einfacher Objekte eine Basis ihrer Grothendieckgruppe.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ unsere längenendliche Kategorie. Gegeben ein Objekt $M \in \mathcal{A}$ mit Filtrierung $M = M_n \supset M_{n-1} \supset \ldots \supset M_0 = 0$ erhalten wir in der Grothendieckgruppe induktiv

$$[M_j] = \sum_{i=1}^{j} [M_i/M_{i-1}]$$

Das zeigt schon einmal, daß die einfachen Isomorphieklassen die Grothendieckgruppe erzeugen. Gegeben $L \in \operatorname{irr} \mathcal{A}$ ist andererseits die Abbildung $\mathcal{A} \to \mathbb{Z}$, die jedem Objekt A die Vielfachheit von L in einer und damit nach 8.7.1.4 jeder Kompositionsreihe von A zuordnet, eine additive Abbildung. Das zeigt die lineare Unabhängigkeit Isomorphieklassen einfacher Objekte in der Grothendieckgruppe. □

8.7.4.4. Ist A ein Objekt endlicher Länge in einer abelschen Kategorie und benutzen wir die Notation $[A : L] \in \mathbb{N}$ für die Vielfachheit von $L \in \operatorname{irr} \mathcal{A}$ in einer Kompositionsreihe von A, so gilt natürlich in der Grothendieckgruppe der besagten abelschen Kategorie die Gleichung

$$[A] = \sum_{L \in \operatorname{irr} \mathcal{A}} [A : L]\, [L]$$

Haben wir irgendeine Menge von Objekten $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ derart, daß die Klassen $[B]$ mit $B \in \mathcal{B}$ eine Basis der Grothendieckgruppe $[\mathcal{A}]$ bilden, so dehnen wir unsere Notation aus und definieren $[A : B] = [A : B]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{Z}$ durch die Gleichung

$$[A] = \sum_{B \in \mathcal{B}} [A : B]\, [B]$$

Besitzt A eine $\mathcal{B}$-Fahne, womit eine endliche Filtrierung gemeint sei, deren sukzessive Subquotienten alle isomorph sind zu gewissen Objekten von $\mathcal{B}$, so zählt $[A : B]$ diejenigen Subquotienten, die isomorph sind zu einem festen $B \in \mathcal{B}$.

Übungen

Übung 8.7.4.5. Jeder Funktor $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von abelschen Kategorien, der kurze exakte Sequenzen zu kurzen exakten Sequenzen macht, induziert auf den Grothendieckgruppen einen Gruppenhomomorphismus $T = [T] : [\mathcal{A}] \to [\mathcal{B}]$.

8.7.5 Morita-Äquivalenz

8.7.5.1. Ein Objekt P einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt ein **Separator**, wenn es für je zwei verschiedene Morphismen $f, g : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $h : P \to X$ gibt mit $fh \neq gh$. In anderen Worten bedeutet das, daß der Funktor $\mathcal{C}(P, \ ) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}\text{-}\,\mathcal{C}(P)$ von $\mathcal{C}$ in die Rechtsmengen über dem Endomorphismenmonoid von P treu ist.

8.7.5.2 (**Projektive Separatoren in längenendlichen Kategorien**). In einer längenendlichen Kategorie ist ein projektives Objekt P genau dann ein Separator, wenn es jedes einfache Objekt zum Quotienten hat. In der Tat folgt daraus induktiv, daß jedes Objekt ein Quotient einer endlichen direkten Summe von Kopien von P ist.

Satz 8.7.5.3 (**Abstrakte Morita-Äquivalenz**). *Seien $\mathcal{A}$ eine längenendliche Kategorie und $P \in \mathcal{A}$ ein projektiver Separator. So induziert der Funktor der Homomorphismen von P eine Äquivalenz von $\mathcal{A}$ mit der Kategorie aller endlich erzeugten Rechtsmoduln über dem Endomorphismenring von P, in Formeln*

$$\mathcal{A}(P, \ ) : \mathcal{A} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Modf}\text{-}\,\mathcal{A}(P)$$

Ergänzung 8.7.5.4. Dieser Satz ist ein nach meinem Geschmack besonders attraktiver Vertreter einer ganzen Familie von Sätzen, die auf verschiedene Weisen die Erkenntnis präzisieren, daß „abstrakte abelsche Kategorien im wesentlichen dasselbe sind wie Kategorien von Moduln über Ringen“. Der Satz gilt mit fast demselben Beweis auch, wenn wir $\mathcal{A}$ schwächer nur noethersch annehmen. Der Endomorphismenring unseres projektiven Objekts muß dann bereits rechtsnoethersch sein, da wir die Unterobjekte von P beschreiben können als Äquivalenzklassen in der Menge aller Morphismen $P^{\oplus n} \to P$ für $n \in \mathbb{N}$ mit der durch das „gegenseitig übereinander faktorisieren“ erklärten Äquivalenzrelation. Die Anordnung auf der Menge der Unterobjekte entspricht dann der Teilordnung des „Faktorisierens“. In derselben Weise können wir die angeordnete Menge der endlich erzeugten Rechtsideale von $E := \mathcal{A}(P)$ beschreiben, die folglich zur Menge der Unterobjekte von P ordnungsisomorph ist. Das aber zeigt dann, daß E rechtsnoethersch sein muß.

Vorschau 8.7.5.5. Ist $\mathcal{A}$ eine beliebige abelsche Kategorie und P ein projektives Objekt endlicher Länge, so betrachten wir die Serre-Unterkategorie $\mathcal{K} := \{M \in \mathcal{A} \mid \mathcal{A}(P, M) = 0\}$ und finden in 20.1.5.25, daß $\mathcal{A}(P, \ )$ eine Äquivalenz von

der Kategorie der Objekte endlicher Länge im Quotienten $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ mit der Kategorie $\mathrm{Modf}\text{-}\,\mathcal{A}(P)$ der endlich erzeugten Rechtsmoduln über dem Endomorphismenring von P induziert. Dasselbe gilt hoffentlich mit demselben Beweis, wenn P noethersch ist und wir die noetherschen Objekte von $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ betrachten.

Beweis. Für ein beliebiges Objekt P einer beliebigen abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ mit Endomorphismenring $E = \mathcal{A}(P)$ haben wir einen Funktor

$$H = \mathcal{A}(P,\ ) : \mathcal{A} \to \mathrm{Mod}\text{-}\,E$$

Er bildet das Objekt P auf seinen Endomorphismenring E ab. Der durch Linksmultiplikation gegebene Ringisomorphismus $E \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{-E}\,E$ zeigt, daß unser Funktor eine Äquivalenz $\langle P\rangle_\oplus \xrightarrow{\approx} \langle E\rangle_\oplus$ induziert zwischen der vollen Unterkategorie aller zu endlichen direkten Summen von Kopien von P isomorphen Objekte von $\mathcal{A}$ und der vollen Unterkategorie aller zu endlichen direkten Summen von Kopien von E isomorphen Objekte von $\mathrm{Mod}\text{-}\,E$. Ist P projektiv, so ist unser Funktor $\mathcal{A}(P,\ ) : \mathcal{A} \to \mathrm{Mod}\text{-}\,E$ zusätzlich exakt und macht einfache Objekte aus $\mathcal{A}$ zu einfachen E-Moduln oder zu Null, denn für je zwei Surjektionen a, b von P auf ein- und dasselbe einfache Objekt gibt es $r \in E$ mit $ar = b$. Ist zusätzlich P von endlicher Länge, so ist folglich auch sein Endomorphismenring E von endlicher Länge als E-Rechtsmodul. Ist $\mathcal{A}$ eine längenendliche Kategorie, so liefert sicher jedes projektive Objekt $P \in \mathcal{A}$ einen exakten Funktor

$$\mathcal{A}(P,\ ) : \mathcal{A} \to \mathrm{Modf}\text{-}\,E$$

Wir müssen noch zeigen, daß dieser Funktor sogar eine Surjektion auf Isomorphieklassen liefert und daß er volltreu ist. Da aber E unter unseren Voraussetzungen insbesondere rechtsnoethersch ist, besitzt jeder endlich erzeugte E-Rechtsmodul M eine Auflösung der Gestalt $E^n \to E^m \twoheadrightarrow M$ und wir folgern $M \cong H(\mathrm{coker}(P^n \to P^m))$, als da heißt H liefert eine Surjektion auf Isomorphieklassen. Ist zusätzlich jedes einfache Objekt ein Quotient von P, so finden wir für jedes $B \in \mathcal{A}$ eine rechtsexakte Sequenz der Gestalt $P^n \to P^m \twoheadrightarrow B$. Sie bleibt rechtsexakt unter H. Für beliebiges $A \in \mathcal{A}$ betrachten wir dann das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{A}(P^n, A) & \leftarrow & \mathcal{A}(P^m, A) & \hookleftarrow & \mathcal{A}(B, A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{-E}(HP^n, HA) & \leftarrow & \mathrm{Hom}_{-E}(HP^m, HA) & \hookleftarrow & \mathrm{Hom}_{-E}(HB, HA)
\end{array}$$

mit exakten Zeilen. Die beiden linken vertikalen Isomorphismen müssen dann rechts einen vertikalen Isomorphismus zwischen den Kernen der linken Horizontalen induzieren. Das zeigt, daß H volltreu ist. $\square$

Beispiel 8.7.5.6. Ist $\mathcal{A}$ die Kategorie aller endlichdimensionalen Vektorräume über einem Körper k und $P = k^n$ der Vektorraum der Zeilenmatrizen mit der natürlichen Rechtsoperation des Matrizenrings $\mathrm{Mat}(n;k)$, so spezialisiert unser Satz zu einer Äquivalenz $k\text{-Modf} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Mat}(n;k)\text{-Modf}$. Das ist hinwiederum ein Spezialfall einer sehr allgemeinen Aussage 7.2.3.17, die ihrerseits nicht mehr aus unserem Satz folgt: Für jeden Ring R liefert der Funktor $\mathrm{Mod}_R(R^n, \ )$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$R\text{-Mod} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Mat}(n;R)\text{-Mod}$$

8.7.6 Darstellungen von Köchern*

8.7.6.1. Wir erinnern die Terminologie der Köcher aus 4.7.6.2. Ein **Köcher** (englisch **quiver**, französisch **carquois**) ist ein Datum $\mathcal{K} = (P, E, a, e)$ bestehend aus zwei Mengen P, E und zwei Abbildungen $a, e : P \to E$. Wir nennen die Elemente von P die **Pfeile** des Köchers und die Elemente von E seine **Ecken** oder auch **Punkte**. Für einen Pfeil $\vec{p} \in P$ nennen wir $a(\vec{p})$ seinen **Anfangspunkt** und $e(\vec{p})$ seinen **Endpunkt**. Ein **Morphismus** F von unserem Köcher in einen weiteren Köcher (P', E', a', e') ist ein Paar bestehend aus einer Abbildung $F : P \to P'$ auf den Pfeilen und einer Abbildung $F : E \to E'$ auf den Ecken derart, daß gilt $Fa = a'F$ und $Fe = e'F$. Wir erhalten so die Kategorie aller Köcher

$$\mathrm{Car}$$

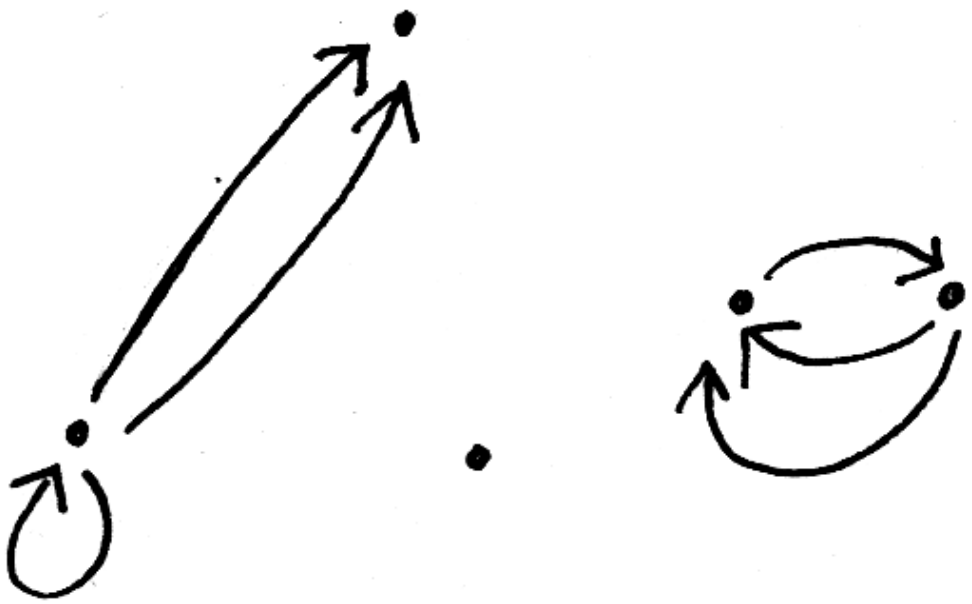
Ähnlich wie bei Kategorien schreiben wir gerne abkürzend $\mathcal{K}$ für die Eckenmenge eines Köchers $\mathcal{K} = (P, E, a, e)$ und $\mathcal{K}(x, y)$ für die Menge der Pfeile mit Anfangspunkt x und Endpunkt y.

Definition 8.7.6.2. Eine **Darstellung eines Köchers** $\mathcal{K}$ über einem Körper k ist ein Köchermorphismus $V : \mathcal{K} \to \mathrm{Mod}_k$. Ein **Morphismus** von Darstellungen von Köchern ist eine Transformation zwischen Köchermorphismen.

8.7.6.3. Die Darstellungen eines Köchers über einem Körper k bilden mit der offensichtlichen k-Struktur eine abelsche k-Kategorie. Die Kategorie der Darstellungen eines Köchers $\mathcal{K}$ über einem Körper k kann besonders konzise beschrieben werden als die Kategorie $\mathrm{Car}(\mathcal{K}, \mathrm{Mod}_k)$. Etwas ausführlicher ist eine Darstellung eines Köchers (P, E, a, e) über einem Körper k eine Zuordnung V, die jeder Ecke $q \in E$ einen k-Vektorraum V_q zuordnet und jedem Pfeil $p \in P$ eine k-lineare Abbildung

$$V(p) : V_{a(p)} \to V_{e(p)}$$

Gegeben zwei Darstellungen V, W unseres Köchers über einem Körper k ist weiter ein Morphismus von Darstellungen $\varphi : V \to W$ eine Familie von k-linearen



Ein Köcher mit 5 Ecken und 6 Pfeilen.

Abbildungen $\varphi_q : V_q \to W_q$ für $q \in E$ derart, daß für alle Pfeile $p \in P$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V_{a(p)} & \xrightarrow{V(p)} & V_{e(p)} \\ \varphi_{a(p)} \downarrow & & \downarrow \varphi_{e(p)} \\ W_{a(p)} & \xrightarrow{W(p)} & W_{e(p)} \end{array}$$

8.7.6.4. Nach 20.1.1.5 liefert das Vorschalten des kanonischen Köchermorphismus $\varepsilon : \mathcal{K} \to \tilde{\mathcal{K}}$ von einem Köcher in seine Pfadkategorie für jeden Körper k einen Isomorphismus von Kategorien

$$\mathrm{Cat}(\tilde{\mathcal{K}}, \mathrm{Mod}_k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Car}(\mathcal{K}, \mathrm{Mod}_k)$$

Eine Darstellung eines Köchers $\mathcal{K}$ ist also salopp gesprochen dasselbe wie ein Funktor $\tilde{\mathcal{K}} \to \mathrm{Mod}_k$.

8.7.6.5. Besitzt ein Köcher $\mathcal{K}$ nur endlich viele Punkte, so bilden wir dazu zu jedem Körper k eine k-Ringalgebra, seine **Wegealgebra**

$$W = \mathrm{W}_k(\mathcal{K})$$

Als zugrundeliegenden k-Vektorraum nehmen wir den freien k-Vektorraum über der Menge $\bigsqcup_{x,y \in E} \tilde{\mathcal{K}}(x, y)$ aller Wege unseres Köchers. Darin erklären wir das Produkt $w \circ v$ zweier Wege als das Aneinanderhängen, wenn w da anfängt wo v aufhört, und setzen sonst schlicht $w \circ v = 0$. Die Multiplikation in der Wegealgebra schließlich erklären wir durch lineare Fortsetzung. Der Weg der Länge Null an einem Punkt x ist die Identität id_x des Objekts x in der Pfadkategorie und wir notieren ihn $e_x \in W$ als Element der Wegealgebra. Das Einselement der Wegealgebra ist der Ausdruck $1_W = \sum_{x \in E} e_x$ und die e_x sind paarweise orthogonale Idempotente. Wir erhalten in diesem Fall eine Äquivalenz

$$\mathrm{Mod}_W \xrightarrow{\approx} \mathrm{Car}(\mathcal{K}, \mathrm{Mod}_k)$$

zwischen der Kategorie der Moduln über der Wegealgebra und der Kategorie der Darstellungen des Köchers, indem wir einem W-Modul M den Köchermorphismus zuordnen, der jeden Punkt $x \in E$ auf den k-Vektorraum $e_x M$ wirft und jeden Pfeil p von x zu einer weiteren Ecke y auf das Daranmultiplizieren des entsprechenden Elements der Wegealgebra, einer k-linearen Abbildung $e_x M \to e_y M$.

Definition 8.7.6.6. Eine **k-lineare Relation** in einem Köcher $\mathcal{K}$ ist eine formale Linearkombination von Wegen mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt, in Formeln ein Element von $k\tilde{\mathcal{K}}(x, y)$ für feste Ecken $x, y \in E$.

Definition 8.7.6.7. Eine **Darstellung eines Köchers mit Relationen** $(\mathcal{K}, R)$ ist eine Darstellung derart, daß „alle Relationen erfüllt sind", daß also alle Relationen die Nullabbildung vom Vektorraum des Anfangspunkts der jeweiligen Relation in den Vektorraum ihres Endpunkts liefern. In unserer Notation meint R eine Menge von Relationen.

8.7.6.8. Die Kategorie aller Darstellungen eines Köchers mit Relationen $(\mathcal{K}, R)$ ist abelsch. Besitzt der Köcher nur endlich viele Ecken, so ist sie äquivalent zur Kategorie aller Moduln über dem Quotienten der $\mathrm{W}(\mathcal{K})/\langle R\rangle$ der Wegealgebra nach dem von den Relationen erzeugten beidseitigen Ideal.

Definition 8.7.6.9. Wir nennen einen Köcher mit Relationen **nilpotent**, wenn es ein n gibt derart, daß alle Wege der Länge n zu dem von den Relationen erzeugten beidseitigen Ideal der Wegealgebra gehören.

Definition 8.7.6.10. Wir nennen einen Köcher mit Relationen **reduziert**, wenn in den Relationen keine Wege der Längen Null oder Eins mit von Null verschiedenen Koeffizienten vorkommen.

Satz 8.7.6.11 (Köcher für längenendliche k-Kategorien). *Seien k ein Körper und $\mathcal{A}$ eine längenendliche k-Kategorie mit endlich vielen einfachen Isomorphieklassen, genügend Projektiven und mit der Eigenschaft, daß der Endomorphismenring jedes einfachen Objekts eindimensional ist über k. So gilt:*

1. *Unsere Kategorie $\mathcal{A}$ ist äquivalent als k-Kategorie zur Kategorie der endlichdimensionalen Darstellungen eines endlichen reduzierten nilpotenten Köchers mit Relationen;*

2. *Jede derartige Äquivalenz liefert eine Bijektion zwischen den Ecken des Köchers und den einfachen Isomorphieklassen unserer Kategorie und für $L, M \in \operatorname{irr}\mathcal{A}$ eine durch die Menge der Pfeile von L nach M indizierte k-Basis von $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(L, M)$.*

8.7.6.12. Der Satz gilt insbesondere für die Kategorie der endlichdimensionalen Moduln über einer endlichdimensionalen Ringalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper.

8.7.6.13. Der fragliche Köcher wird zwar durch unsere längenendliche k-Kategorie $\mathcal{A}$ eindeutig festgelegt, keineswegs aber die Relationen. Der Beweis wird zeigen, daß auch jede Wahl von durch die Pfeile des Köchers indizierten Basen der jeweiligen Erweiterungsgruppen von einer Äquivalenz herkommt.

Beweis. Sei $L_1, \ldots, L_r$ ein Repräsentantensystem der einfachen Isomorphieklassen. Bezeichne $P_i \twoheadrightarrow L_i$ die jeweiligen projektiven Decken nach 8.7.1.27 und

$P = \bigoplus P_i$ ihre Summe. Dieses Objekt ist ein projektiver Separator und nach 8.7.5.3 liefert das Bilden der von P ausgehenden Morphismen eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathcal{A}(P, \ ) : \mathcal{A} \xrightarrow{\approx} \text{Modf-}\,\mathcal{A}(P)$$

Um die Arbeit mit Rechtsmoduln zu vermeiden, setzen wir $A := \mathcal{A}(P)^{\text{opp}}$. Die Projektoren $e_i := \text{pr}_i^\circ$ auf die Summanden bilden in A eine Familie von paarweise orthogonalen Idempotenten mit Summe $1 = \sum e_i$. Bezeichne $J \subset A$ das Jacobsonradikal. Nach 8.7.2.9 und 8.7.1.23 bilden die $\bar{e}_i$ eine k-Basis von A/J und liefern so einen Isomorphismus von k-Ringalgebren

$$ke_1 \times \ldots \times ke_r \xrightarrow{\sim} A/J$$

Weiter liefert Übung 19.3.2.39 für einen beliebigen Ring A mit einem zweiseitigen Ideal J einen Isomorphismus $\text{Hom}_{A/J}(J/\langle J^2\rangle, A/J) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}^1_A(A/J, A/J)$ von A/J-Bimoduln und damit in unserem Fall Isomorphismen

$$e_i(J/\langle J^2\rangle)e_j \xrightarrow{\sim} \text{Ext}^1_A(L_j, L_i)^*$$

von k-Vektorräumen. Da A eine endlichdimensionale k-Ringalgebra ist, stimmen die Ext^1-Gruppen in der Kategorie aller A-Moduln und in der Kategorie aller endlichdimensionalen A-Moduln überein und sind damit nach unserer Äquivalenz von Kategorien auch isomorph zu den entsprechenden Ext^1-Gruppen in $\mathcal{A}$. Nach 8.7.2.9 ist in unserem Fall weiter J ein nilpotentes Ideal, mithin wird A als k-Ringalgebra erzeugt von den e_i für $1 \le i \le r$ und Repräsentanten in e_iJe_j von je einer Basis der k-Vektorräume $e_i(J/\langle J^2\rangle)e_j$ für $1 \le i, j \le r$. In anderen Worten haben wir so A beschrieben als die Köcheralgebra eines endlichen reduzierten nilpotenten Köchers mit Relationen und Teil 1 ist bewiesen. Um Teil 2 zu zeigen, müssen wir nur prüfen, daß in der Kategorie der endlichdimensionalen Darstellungen eines endlichen reduzierten nilpotenten Köchers mit Relationen die Darstellungen mit k an einer Ecken und Null an allen anderen Ecken und Nullabbildungen für alle Pfeile eine Repräsentantensystem der einfachen Darstellungen bilden und daß die durch „ein Pfeil wird die Identität, die anderen werden zu Null“ gegebenen Erweiterungen zwischen derartigen einfachen Darstellungen eine Basis der entsprechenden Erweiterungsräume liefern. Das mag dem Leser überlassen bleiben. □

8.7.6.14. Seien k ein Körper und A eine endlichdimensionale Ringalgebra über k und $J \subset A$ das Jacobsonradikal. Ist A/J separabel über k, das gilt zum Beispiel stets für k von der Charakteristik Null, so gibt es nach dem Spaltungssatz von Wedderburn 19.3.3.9 eine Unterringalgebra $S \subset A$ mit $A = S \oplus J$ als k-Vektorraum. Des weiteren ist dann, das ist gerade die Definition der Separabilität,

der Ring $S \otimes_k S^{\mathrm{opp}}$ halbeinfach. Insbesondere finden wir einen S-Unterbimodul $I \subset J$ mit $I \xrightarrow{\sim} J/J^2$ und nach 8.7.2.9 liefert die Multiplikation eine Surjektion

$$\mathrm{T}_S I \twoheadrightarrow A$$

der freien Tensoralgebra des S-Bimoduls I auf A. Nach Annahme ist der Kern dieser Surjektion enthalten im Ideal $\mathrm{T}_S^{\geq 2} I$ der Tensoren vom Grad mindestens zwei. Da wir endliche Dimension angenommen hatten, umfaßt er $\mathrm{T}_S^{\geq n} I$ für $n \gg 0$. Unsere Isomorphismen $\mathrm{Hom}_{A/J}(J/\langle J^2 \rangle, A/J) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_A(A/J, A/J)$ gelten weiter und übersetzen sich in Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_S(I, S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_A(S, S)$$

Beide Seiten sind S-Bimoduln vermittels der Rechtsoperation von S auf S und I und darunter, das habe ich nun schnell geraten, sind unsere Abbildungen Bimodulisomorphismen. Will man also Erweiterungen einfacher A-Moduln L, M verstehen, so gilt es, Idempotente $e_L, e_M \in S$ zu wählen mit $L \cong Se_L$ und $M \cong Se_M$ und dann erhalten wir

$$\mathrm{Hom}_S(Ie_L, Se_M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_A(L, M)$$

Ziehe ich mich nun weiter zurück auf $\mathrm{char}\, k = 0$, so ist für beliebige endlichdimensionale S-Moduln P, Q die Abbildung „verknüpfe und nimm die k-Spur“ eine nicht ausgeartete Paarung

$$\mathrm{Hom}_S(P, Q) \times \mathrm{Hom}_S(Q, P) \to k$$

Speziell liefert sie einen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_S(Ie_L, Se_M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(Se_M, Ie_L)^*$ in den k-Dualraum. Nach 8.5.1.9 liefert andererseits das Auswerten auf dem Idempotenten e_M einen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_S(Se_M, Ie_L) \xrightarrow{\sim} e_M I e_L$ und so erhalten wir schließlich zumindest in Charakteristik Null einen wohlbestimmten Isomorphismus von k-Vektorräumen

$$(e_M I e_L)^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_A(L, M)$$

8.7.6.15 (**Endlichdimensionale Ringalgebren und Köcher**). Für jede endlichdimensionale Ringalgebra B über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist $B\text{-Modf}$ eine längenendliche k-lineare Kategorie mit genug Projektiven und nach dem Schur'schen Lemma ist auch der Endomorphismenring jedes einfachen Moduls k-eindimensional. Wir finden nach 8.7.6.11 also einen endlichen reduzierten nilpotenten Köcher mit Relationen $(\mathcal{K}, R)$ und eine Äquivalenz von Kategorien

$$B\text{-Modf} \xrightarrow{\approx} \mathrm{W}(\mathcal{K})/\langle R \rangle\text{-Modf}$$

Unter dieser Äquivalenz entspricht der projektive Separator B links einem projektiven Separator rechts, sagen wir

$$B \mapsto P_1^{\oplus m(1)} \oplus \ldots \oplus P_r^{\oplus m(r)}$$

für Vielfachheiten $m(1), \ldots, m(r) \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. So finden wir für $A := \mathrm{W}(\mathcal{K})/\langle R \rangle$ die Algebra unseres Köchers mit Relationen Isomorphismen von k-Algebren

$$\begin{array}{ccccc} B^{\mathrm{opp}} & \tilde{\to} & \mathrm{End}_B(B) & \tilde{\to} & \mathrm{End}_A(P_1^{\oplus m(1)} \oplus \ldots \oplus P_r^{\oplus m(r)}) \\ A^{\mathrm{opp}} & \tilde{\to} & \mathrm{End}_A(A) & \tilde{\to} & \mathrm{End}_A(P_1 \oplus \ldots \oplus P_r) \end{array}$$

Die $m(i)$ sind dann die Dimensionen der einfachen B-Moduln und das Tensorieren mit dem A-B-Bimodul

$$\mathrm{Hom}(P_1^{\oplus m(1)} \oplus \ldots \oplus P_r^{\oplus m(r)}, P_1 \oplus \ldots \oplus P_r)$$

induziert eine Äquivalenz von Kategorien $B\text{-Mod} \tilde{\to} A\text{-Mod}$ und analog konstruiert man eine quasiinverse Äquivalenz.

Proposition 8.7.6.16 (Standardauflösung). *Gegeben ein Körper k und ein Köcher $\mathcal{K} = (P, E, a, e)$ mit endlich vielen Ecken und Köcheralgebra A und ein Modul $M \in A\text{-Mod}$ über der Köcheralgebra erhalten wir eine kurze exakte Sequenz*

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{\vec{p} \in P} A\,\mathrm{id}_{a(\vec{p})} \otimes_k \mathrm{id}_{e(\vec{p})} M & \hookrightarrow & \bigoplus_{z \in E} A\,\mathrm{id}_z \otimes_k \mathrm{id}_z M & \twoheadrightarrow & M \\ a \otimes m & \mapsto & a\vec{p} \otimes m - a \otimes \vec{p}m & & \\ & & a \otimes m & \mapsto & am \end{array}$$

Beweis. Daß die Verknüpfung verschwindet, scheint mir evident. Um die Exaktheit zu zeigen, erklären wir eine Filtrierung $0 \subset A^{\leq 0} \subset A^{\leq 1} \subset \ldots$ auf A nach der Weglänge. Filtrieren wir M durch $0 = M^{\leq -1} \subset M^{\leq 0} = M$, so erhalten wir eine Filtrierung unseres Komplexes durch Unterkomplexe

$$\bigoplus_{\vec{p} \in P} A^{\leq \nu - 1}\,\mathrm{id}_{a(\vec{p})} \otimes \mathrm{id}_{e(\vec{p})} M \to \bigoplus_{z \in E} A^{\leq \nu}\,\mathrm{id}_z \otimes \mathrm{id}_z M \to M^{\leq \nu}$$

Nach 7.7.1.16 reicht es zu zeigen, daß die Sequenz der assoziierten graduierten Vektorräume exakt ist. Im Grad Null gibt es da nur die beiden hinteren Terme und einen Isomorphismus zwischen diesen, und in höheren Graden gilt dasselbe für die beiden vorderen Terme. □

Übungen

Übung 8.7.6.17. Man finde einen Isomorphismus zwischen der Ringalgebra der unteren $(n \times n)$-Dreiecksmatrizen und der Wegealgebra des Köchers mit Eckenmenge $\{1, 2, \ldots, n\}$ und Pfeilmenge $\{(i, i+1) \mid 1 \leq i < n\}$.

8.7.7 Verschiedenes

Satz 8.7.7.1 (Jacobson-Morozov). *Seien $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $X \in \mathcal{A}$ ein Objekt und $N : X \to X$ ein nilpotenter Endomorphismus von X. So besitzt X genau eine endliche Filtrierung $(X^{\geq r})_{r\in\mathbb{Z}}$ derart, daß für alle r gilt $N(X^{\geq r}) \subset X^{\geq r+2}$ und für alle $r \in \mathbb{N}$ zusätzlich*

$$N^r : X^{\geq -r}/X^{\geq -r+1} \xrightarrow{\sim} X^{\geq r}/X^{\geq r+1}$$

8.7.7.2. Unter einer **endlichen Filtrierung** verstehen wir hier wie in 7.7.1.3 eine von Null kommende und voll endende Filtrierung.

Beweis. Gegeben $r \in \mathbb{N}$ mit $N^r = 0$ liefern unsere Annahmen offensichtlich $\ldots = X^{\geq -r-1} = X^{\geq -r} = X^{\geq -r+1}$ und ebenso $X^{\geq r} = X^{\geq r+1} = X^{\geq r+2} = \ldots$ Wenn unsere Filtrierung voll endet, so folgt $X = X^{\geq -r+1}$, und wenn unsere Filtrierung von Null kommt, so folgt $X^{\geq r} = 0$. Gilt $r = 0$, so folgt $X = 0$ und die Behauptung ist klar. Gilt $r \geq 1$, so folgt $X^{\geq r-1} = \operatorname{im} N^{r-1}$ und $X^{\geq -r+2} = \ker N^{r-1}$ und im Fall $r = 1$ erhalten wir $X^{\geq 0} = X$ und $X^{\geq 1} = 0$ und die Behauptung ist wieder klar. Im Fall $r \geq 2$ schließlich gilt $\operatorname{im} N^{r-1} \subset \ker N^{r-1}$ und wir können zu $Y := \ker N^{r-1}/\operatorname{im} N^{r-1}$ übergehen und per Induktion darauf eine eindeutig bestimmte Filtrierung mit den gewünschten Eigenschaften finden. Die Urbilder in $\ker N^{r-1}$ dieser Filtrierung auf Y ergänzt um $X^{\geq -r+1} = X$ und $X^{\geq r} = 0$ bilden dann eine Filtrierung auf X mit den gewünschten Eigenschaften. Deren Eindeutigkeit folgt leicht mit derselben Induktion. $\square$

8.8 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Frau Noemi Joosten, Frau Natascha Moser, Frau Bettina Eiche, Leonardo Patimo, Salomon Brugger, . . .

Kapitel 9

Affine Algebraische Gruppen

Inhalt

9.1 Lineare und affine algebraische Gruppen 1357

9.1.1 Einführung und Grundbegriffe 1357

9.1.2 Verknüpfungen auf Objekten 1366

9.1.3 Einbettungen in Matrizenräume 1371

9.1.4 Algebraische Darstellungen 1373

9.1.5 Jordanzerlegung 1379

9.1.6 Unipotente Gruppen 1384

9.1.7 Diagonalisierbare Gruppen 1386

9.1.8 Darstellungen von $\mathrm{SL}(2;k)$ 1392

9.1.9 Tannaka-Krein-Dualität* 1396

9.2 Morphismen von Varietäten mit Anwendungen 1399

9.2.1 Komponenten algebraischer Gruppen 1399

9.2.2 Irreduzibles Erzeugen 1400

9.2.3 Operationen algebraischer Gruppen 1403

9.2.4 Flache Morphismen 1407

9.3 Algebraische Differentialrechnung 1413

9.3.1 Derivationen und Tangentialräume 1413

9.3.2 Liealgebren und Vektorfelder 1422

9.3.3 Adjungierte Darstellung 1431

9.3.4 Differentiale und Kotangentialräume 1437

9.3.5 Transzendenz und Separabilität 1447

9.3.6 Konstruktion von Quotienten 1454
9.3.7 Liealgebren von Zentralisatoren 1461
9.3.8 Graßmann'sche und Plücker-Relationen* 1465
9.3.9 Restringierte Lie-Algebren* 1468
9.3.10 Unipotente Gruppen und ihre Liealgebren* 1470
9.3.11 Algebraische Distributionen* 1474
9.4 Borel'sche Untergruppen und maximale Tori 1479
9.4.1 Zusammenhängende auflösbare Gruppen 1479
9.4.2 Maximale Tori in auflösbaren Gruppen 1482
9.4.3 Zentralisatoren in auflösbaren Gruppen 1485
9.4.4 Vollständige Varietäten 1488
9.4.5 Parabolische Untergruppen 1491
9.4.6 Borel'sche Untergruppen 1494
9.4.7 Fahnenmannigfaltigkeit und Weylgruppe 1502
9.4.8 Halbeinfache Gruppen vom Rang Eins 1508
9.4.9 Radikale und reduktive Gruppen 1512
9.4.10 Klassifikation im reduktiven Fall 1515
9.4.11 Struktur reduktiver Gruppen 1522
9.4.12 Bruhat-Zerlegung 1532
9.5 Danksagung 1540

9.1 Lineare und affine algebraische Gruppen

9.1.1 Einführung und Grundbegriffe

9.1.1.1. Eine **lineare algebraische Gruppe** über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ ist Untergruppe

$$G \subset \mathrm{GL}(n; k)$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ derart, daß es eine Menge $P \subset k[X_{ij}]$ von Polynomen in den Matrixeinträgen mit simultaner Nullstellenmenge G gibt, in Formeln also eine Menge P von Polynomen mit $G = \{A \in \mathrm{GL}(n; k) \mid f(A) = 0 \; \forall f \in P\}$.

Beispiele 9.1.1.2. Erste Beispiele sind die Untergruppen der invertierbaren Diagonalmatrizen, der oberen Dreiecksmatrizen, und der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen. Des weiteren die Gruppen von invertierbaren Block-oberen Dreiecksmatrizen beliebiger fester Blockstruktur, die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(n; k)$ und die orthogonale Gruppe

$$\mathrm{O}(n; k) := \{A \in \mathrm{GL}(n; k) \mid A^\top A = I\}$$

9.1.1.3 (**Notwendigkeit des Formalismus der algebraischen Varietäten**). In dieser Vorlesung sollen lineare algebraische Gruppen „unabhängig von ihrer Einbettung“ studiert werden und wir bauen den Formalismus der „affinen algebraischen Gruppen“ auf, der das präzisiert und ermöglicht. In diesem Formalismus sind dann etwa $G = \mathrm{GL}(1; k) = k^\times$ und $G = \{\mathrm{diag}(\lambda, 1) \mid \lambda \in k^\times\} \subset \mathrm{GL}(2; k)$ als „dieselbe“ affine algebraische Gruppe anzusehen. Des weiteren werden viele Argumente induktiv unter Zuhilfenahme von Quotienten algebraischer Gruppen nach geeigneten Untergruppen geführt. Dazu müssen diese Quotienten ihrerseits mit einer algebraischen Struktur versehen werden. Um all das zu präzisieren und formalisieren, arbeitet man mit abstrakten algebraischen Varietäten, wie sie etwa in 7.6.12.1 eingeführt werden. Da die volle Kraft dieser Begrifflichkeit aber erst nach und nach benötigt wird, beginnen wir elementarer, erinnern zunächst nur den Begriff einer „naiven affinen k-Varietät“ aus 7.3.3.2 folgende und arbeiten so lange wie möglich mit dieser einfacher zugänglichen Begrifflichkeit. Ich empfehle jedoch, parallel auch die ausführlichere Diskussion der Grundlagen der algebraischen Geometrie in 7.1.1.1 folgende zu studieren.

Definition 9.1.1.4. Gegeben ein Körper k verstehen wir unter einer **k-geringten Menge** ein Paar

$$(X, \mathcal{O}(X))$$

bestehend aus einer Menge X und einem k-Unterring $\mathcal{O}(X) \subset \mathrm{Ens}(X, k)$ im k-Kring aller k-wertigen Funktionen auf X. Die Elemente von $\mathcal{O}(X)$ nennen wir die

strukturierenden Funktionen unserer k-geringten Menge X. Ein **Morphismus** von $(X, \mathcal{O}(X))$ in eine weitere k-geringte Menge $(Y, \mathcal{O}(Y))$ ist eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ derart, daß gilt $f \in \mathcal{O}(Y) \Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)$. Mit diesen Morphismen bilden die k-geringten Mengen eine Kategorie

$$\mathrm{Ensr}_k$$

Den durch Vorschalten von φ erklärten Homomorphismus von k-Kringen nennen wir den **Komorphismus zu** φ und notieren ihn $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$.

Definition 9.1.1.5. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine **naive affine k-Varietät** oder kürzer **affine k-Varietät** ist eine k-geringte Menge $(X, \mathcal{O}(X))$ derart, daß ihr Ring von strukturierenden Funktionen $\mathcal{O}(X)$ ringendlich ist über k und daß wir eine Bijektion

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ev}: & X & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Kring}^k(\mathcal{O}(X), k) \\ & x & \mapsto & \delta_x \end{array}$$

von X mit der Menge der k-linearen Ringhomomorphismen $\mathcal{O}(X) \to k$ erhalten, indem wir jedem Punkt $x \in X$ den durch das Auswerten bei x gegebenen Ringhomomorphismus $\delta_x : \mathcal{O}(X) \to k$, $f \mapsto f(x)$ zuordnen. Die strukturierenden Funktionen einer affinen Varietät nennen wir ihre **regulären Funktionen**.

9.1.1.6 (**Diskussion der Terminologie**). Das Adjektiv „affin“ dient dazu, in der Terminologie Platz zu lassen für allgemeinere Varietäten, wie sie in 7.6.4.2 erklärt werden. Das Adjektiv „naiv“ bringt zum Ausdruck, daß wir unsere naiven affinen Varietäten als spezielle k-geringte Mengen betrachten und noch nicht, wie im Fall allgemeiner Varietäten, als spezielle „k-geringte Räume“. Dieser Unterschied wird sich jedoch als unwesentlich erweisen, weshalb wir auf das Adjektiv „naiv“ im folgenden meist verzichten.

9.1.1.7. Unter einem **Morphismus** von affinen k-Varietäten verstehen wir einen Morphismus von k-geringten Mengen. Die affinen k-Varietäten bilden damit eine volle Unterkategorie

$$\mathrm{Varaff}_k \subset \mathrm{Ensr}_k$$

in der Kategorie aller k-geringten Mengen. Gegeben affine Varietäten X, Y notieren wir die Menge aller Morphismen von X nach Y statt $\mathrm{Varaff}_k(X, Y)$ meist kürzer $\mathrm{Var}_k(X, Y)$ und greifen damit der volltreuen Einbettung $\mathrm{Varaff}_k \hookrightarrow \mathrm{Var}_k$ in die Kategorie aller k-Varietäten vor, die wir zusammen mit der Definition allgemeiner Varietäten in 7.6.4.2 kennenlernen werden. Wenn wir hoffen, daß der Grundkörper aus dem Kontext hervorgeht, schreiben wir auch kurz Var.

9.1.1.8. Ich verwende das Wort **Varietät** nur für k-Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$. Wenn das Wort „Varietät“ fällt, ist also implizit zu verstehen, daß der zugehörige Grundkörper algebraisch abgeschlossen sein soll. Ich werde das nicht immer extra erwähnen.

Beispiele 9.1.1.9. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1. Jede endliche Menge X wird mit $\mathcal{O}(X) := \mathrm{Ens}(X, k)$ eine affine Varietät.

2. Die Menge $X = k^n$ wird mit $\mathcal{O}(X) := k[T_1, \ldots, T_n]$ eine affine Varietät.

3. (**Nullstellenmengen**). Gegeben eine affine Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ und eine Teilmenge $P \subset \mathcal{O}(X)$ des Rings ihrer regulären Funktionen wird die Menge der gemeinsamen Nullstellen

$$Y = \mathcal{Z}(P) := \{x \in X \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in P\}$$

mit den Einschränkungen $\mathcal{O}(Y) := \{f|_Y \mid f \in \mathcal{O}(X)\}$ regulärer Funktionen von X als den regulären Funktionen von Y eine affine Varietät. In der Tat kommt jeder k-lineare Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(Y) \to k$ von einem k-linearen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(X) \to k$ her, der durch Auswerten δ_x an einem Punkt $x \in X$ gegeben wird, der dann notwendig bereits zu Y gehört haben muß. Wir nennen diese Struktur die **auf Y induzierte Struktur** einer affinen Varietät.

4. (**Nichtnullstellenmengen einzelner Funktionen**). Gegeben eine affine Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ und eine reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ wird deren Nichtnullstellenmenge

$$X_f := X \backslash \mathcal{Z}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

eine affine Varietät mit $\mathcal{O}(X_f) := \mathcal{O}(X)[f^{-1}] \subset \mathrm{Ens}(X_f, k)$ dem von den Restriktionen der regulären Funktionen aus $\mathcal{O}(X)$ zusammen mit der Funktion $1/f$ erzeugten Teilring. In der Tat liefert dann jeder Ringalgebrenhomomorphismus $\mathcal{O}(X)[f^{-1}] \to k$ einen Ringalgebrenhomomorphismus $\mathcal{O}(X) \to k$, der von der Auswertung an einem Punkt $x \in X$ herkommt, und von diesem Punkt hinwiederum sieht man leicht ein, daß er bereits zu X_f gehört haben muß.

Beispiel 9.1.1.10 (**Affine Räume als affine Varietäten**). Jeder endlichdimensionale affine Raum A über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k wird offensichtlich eine affine k-Varietät, wenn wir $\mathcal{O}(A) \subset \mathrm{Ens}(A, k)$ erklären als die von allen affinen Abbildungen $A \to k$ erzeugte k-Unterringalgebra. Jede affine Abbildung von endlichdimensionalen affinen Räumen ist in Bezug auf diese

Strukturen ein Morphismus von affinen Varietäten und jede injektive affine Abbildung induziert einen Isomorphismus auf ihr Bild mit der induzierten Struktur als Nullstellenmenge gewisser regulärer Funktionen.

Beispiel 9.1.1.11. Auf dem k^n stimmt die Struktur einer affinen Varietät als affiner Raum nach 9.1.1.10 überein mit unserer Struktur aus 9.1.1.9 durch Polynome als reguläre Funktionen.

9.1.1.12 (**Verschiedene Bedeutungen des Wortes „affin“**). Unglücklich ist in diesem Zusammenhang die Verwendung des Wortes „affin“ in zwei verschiedenen Bedeutungen: Jeder endlichdimensionale affine Raum trägt zwar in dieser Weise eine natürliche Struktur als affine Varietät, aber es gibt durchaus andere affine Varietäten, ja „die meisten“ affinen Varietäten sind keineswegs isomorph zu affinen Räumen.

9.1.1.13. Alle Definitionen und Sätze vom Beginn dieses Abschnitts bis hierher würden auch für einen beliebigen Grundkörper k funktionieren. Allerdings müßte man dann in Kauf nehmen, daß etwa die reelle Gerade $X = \mathbb{R}$ mit dem Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(X) = \mathbb{R}[T, (T^2+1)^{-1}]$ auch eine naive affine $\mathbb{R}$-Varietät wäre, und das stünde im Widerspruch zur allgemein üblichen Terminologie.

Ergänzung 9.1.1.14. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. In 7.3.3.12 zeigen wir, daß der Funktor der regulären Funktionen eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathcal{O} : \{\text{Affine } k\text{-Varietäten}\} \xrightarrow{\approx} \{\text{Nilpotentfreie ringendliche } k\text{-Kringe}\}^{\mathrm{opp}}$$

liefert und daß jede affine Varietät ismorph ist zur Nullstellenmenge nach 9.1.1.9 einer endlichen Menge von regulären Funktionen alias Polynomfunktionen auf k^n. In meinen Augen sind diese Aussagen zentral für das Verständnis sowohl der kommutativen Algebra als auch der algebraischen Geometrie. Wir werden sie in dieser Vorlesung jedoch nicht beweisen. Die nilpotentfreien ringendlichen k-Kringe nennt man auch **affine k-Kringe**.

9.1.1.15 (**Universelle Eigenschaft von Nullstelleneinbettungen**). Gegeben X eine affine Varietät und $P \subset \mathcal{O}(X)$ eine Menge regulärer Funktionen und $Y := \mathcal{Z}(P)$ deren simultane Nullstellenmenge ist die Einbettung $Y \hookrightarrow X$ offensichtlich ein Morphismus. Ist weiter $\varphi : Z \to X$ ein Morphismus von affinen Varietäten mit $\varphi(Z) \subset Y$, so ist auch die induzierte Abbildung $\varphi : Z \to Y$ offensichtlich ein Morphismus von affinen Varietäten.

9.1.1.16. Gegeben eine affine Varietät, ja eine beliebige k-geringte Menge X sind die Nullstellenmengen $\mathcal{Z}(P)$ für $P \subset \mathcal{O}(X)$ die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf X, der **Zariski-Topologie**. In der Tat ist ein beliebiger Schnitt

von Nullstellenmengen offensichtlich wieder eine Nullstellenmenge. Was endliche Vereinigungen angeht, haben wir $\mathcal{Z}(1) = \emptyset$ für die Vereinigung über das leere Mengnsystem von Teilmengen von X sowie

$$\mathcal{Z}(P) \cup \mathcal{Z}(Q) = \mathcal{Z}(\{fg \mid f \in P, g \in Q\})$$

9.1.1.17. Einen Morphismus $\varphi : Z \to X$ von affinen Varietäten nennen wir eine **abgeschlossene Einbettung**, wenn sein Bild eine abgeschlossene Teilmenge $\varphi(Z) \not\subset X$ ist und die induzierte Abbildung ein Isomorphismus $Z \xrightarrow{\sim} \varphi(Z)$ auf $\varphi(Z)$ mit seiner induzierten Struktur ist. Abgeschlossene Einbettungen haben eine zu Nullstelleneinbettungen analoge universelle Eigenschaft.

9.1.1.18. Wir erinnern den **Hilbert'schen Nullstellensatz** in seiner körpertheoretischen Form, nach der jede ringendliche Körpererweiterung modulendlich ist. In anderen Worten ist jede Körpererweiterung, bei der der Erweiterungskörper als Ring endlich erzeugt ist über dem Grundkörper, bereits eine endiche Körpererweiterung. Insbesondere ist jede ringendliche Körpererweiterung eines algebraisch abgeschlossenen Körpers trivial. Für einen Beweis verweisen wir auf die kommutative Algebra 7.1.5.10.

9.1.1.19 (**Kehrwerte nullstellenfreier regulärer Funktionen**). Gegeben eine affine Varietät X und eine reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ ohne Nullstelle ist auch $1/f$ regulär. Das zeigen wir, indem wir die gegenteilige Annahme zum Widerspruch führen. Ist genauer $f \in \mathcal{O}(X)$ keine Einheit, so ist das von f erzeugte Ideal nicht der ganze Ring und kann mithin nach 7.1.6.4 zu einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}(X)$ vergrößert werden. Der Quotientenring $\mathcal{O}(X)/\mathfrak{m}$ ist dann nach 7.1.6.7 ein Körper. Jetzt sagt der Hilbert'sche Nullstellensatz 9.1.1.18, daß die Komposition $k \to \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung sein muß. Wegen unserer Annahme $k = \bar{k}$ ist diese Komposition also ein Isomorphismus. So erhalten wir einen Homomorphismus $\mathcal{O}(X) \to k$ von k-Kringen mit $f \mapsto 0$. Das aber bedeutet im Lichte unserer Definition 9.1.1.5 einer affinen Varietät, daß f ein Nullstelle auf X gehabt haben muß.

9.1.1.20. Das Beispiel der $\mathbb{R}$-geringten Menge $X := \mathbb{R}$ mit $\mathcal{O}(X) := \mathbb{R}[T]$ zeigt, daß es für die im vorhergehenden aufstellte Behauptung wesentlich ist, daß wir über einem algebraisch abgeschlossenen Körper arbeiten. In der Tat hat die Funktion $f := T^2 + 1$ in diesem Fall keine Nullstelle auf X, aber $1/f$ gehört dennoch nicht zu $\mathcal{O}(X)$.

9.1.1.21 (**Universelle Eigenschaft von Nichtnullstelleneinbettungen**). Gegeben X eine affine Varietät und $f \in \mathcal{O}(X)$ eine reguläre Funktion ist die Einbettung $X_f \hookrightarrow X$ offensichtlich ein Morphismus. Ist weiter $\varphi : Z \to X$ ein Morphismus von affinen Varietäten mit $\varphi(Z) \subset X_f$, so ist auch die induzierte Abbildung $\varphi : Z \to X_f$ ein Morphismus von affinen Varietäten. In der Tat ist $(1/f) \circ \varphi = 1/\varphi^\sharp(f)$ nach 9.1.1.19 eine reguläre Funktion auf Z.

9.1.1.22. Insbesondere folgt aus der universellen Eigenschaft für jede affine Varietät X und $f, g \in \mathcal{O}(X)$ mit $X_g \subset X_f$ sofort $\operatorname{res} \mathcal{O}(X_f) \subset \mathcal{O}(X_g)$. Wir sehen insbesondere, daß aus $X_f = X_g$ bereits $\mathcal{O}(X_g) = \mathcal{O}(X_f)$ folgt. Das bedeutet insbesondere, daß unsere Notation vernünftig war.

9.1.1.23 (**Produkte affiner Varietäten**). Für das folgende vergleiche man auch 7.3.4.12. Gegeben affine Varietäten X, Y wird das kartesische Produkt der zugrundeliegenden Punktmengen $X \times Y$ zu einer affinen Varietät durch die Vorschrift

$$\mathcal{O}(X \times Y) = \mathcal{O}_{\mathrm{prod}}(X \times Y) := [f \boxtimes g \mid f \in \mathcal{O}(X), g \in \mathcal{O}(Y)]$$

Hier meint $f \boxtimes g$ die Funktion $(f \boxtimes g)(x, y) := f(x)g(y)$ auf $X \times Y$ und die eckigen Klammern meinen den von all diesen Funktionen in $\operatorname{Ens}(X \times Y, k)$ erzeugten Teilring. Er ist sicher ringendlich über k. Nach 4.6.1.47 induziert die Abbildung $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ eine Injektion $\operatorname{Ens}(X, k) \otimes_k \operatorname{Ens}(Y, k) \hookrightarrow \operatorname{Ens}(X \times Y, k)$ und das liefert unmittelbar einen Ringisomorphismus

$$\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times Y)$$

Da aber nach 4.7.9.9 für zwei beliebige k-Kringalgebren A, B jeder Ringalgebrenhomomorphismus $A \otimes_k B \to k$ die Form $a \otimes b \mapsto \phi(a)\psi(b)$ hat für wohlbestimmte Ringalgebrenhomomorphismen $\phi : A \to k$, $\psi : B \to k$, folgt auch die Zweite unserer Bedingungen an eine affine Varietät. Die beiden Projektionen $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ und $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ sind dann Morphismen von affinen Varietäten und $(X \times Y, \mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y)$ ist ein Produkt in der Kategorie der affinen Varietäten im Sinne von 4.7.7.1. Die einpunktige Varietät ist ein finales Objekt in dieser Kategorie, in der mithin alle endlichen Produkte existieren.

Beispiel 9.1.1.24. Auf dem k^n stimmt die Struktur einer affinen Varietät als Produkt von n Kopien von k im Sinne von 9.1.1.23 mit unserer Struktur aus 9.1.1.9 durch Polynome als reguläre Funktionen überein.

Definition 9.1.1.25. Ein **affines algebraisches Monoid** über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ ist ein Monoid G mit der Struktur einer affinen k-Varietät, für das die Verknüpfung $G \times G \to G$ ein Morphismus von affinen Varietäten ist.

Definition 9.1.1.26. Eine **affine algebraische Gruppe** über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ ist eine Gruppe G mit der Struktur einer affinen k-Varietät, für die die Verknüpfung $G \times G \to G$ und die Inversenbildung $G \to G$ Morphismen von affinen Varietäten sind.

9.1.1.27. Ein **Homomorphismus** von affinen algebraischen Gruppen oder Monoiden ist ein Morphismus von affinen Varietäten, der gleichzeitig ein Monoidhomomorphismus ist. Die Menge aller Homomorphismen zwischen zwei affinen

algebraischen Monoiden G, H notieren wir $\mathrm{MonVar}(G, H)$ und im Gruppenfall $\mathrm{GrpVar}(G, H)$.

Proposition 9.1.1.28 (**Die allgemeine lineare Gruppe**). $(k = \bar{k})$. *Das Monoid der quadratischen Matrizen* $\mathrm{Mat}(n; k)$ *ist ein algebraisches Monoid. Die allgemeine lineare Gruppe* $G = \mathrm{GL}(n; k)$ *ist mit ihrer Struktur als Nichtnullstellenmenge der regulären Funktion* $\det : \mathrm{Mat}(n; k) \to k$ *eine affine algebraische Gruppe.*

Beweis. Die Multiplikation $\mathrm{mult} : \mathrm{Mat}(n; k) \times \mathrm{Mat}(n; k) \to \mathrm{Mat}(n; k)$ ist offensichtlich ein Morphismus. Genauer gilt $T_{ij} \circ \mathrm{mult} = \sum_l T_{il} \boxtimes T_{lj}$. Die Multiplikation $\mathrm{mult} : G \times G \to \mathrm{Mat}(n; k)$ ist ein Morphismus, da die Einbettung $G \hookrightarrow \mathrm{Mat}(n; k)$ ein Morphisms ist. Die Multiplikation $\mathrm{mult} : G \times G \to G$ ist dann auch ein Morphismus nach der universellen Eigenschaft von Nichtnullstelleneinbettungen oder auch wegen $\det^{-1} \circ \mathrm{mult} = \det^{-1} \boxtimes \det^{-1}$. Die Cramer'sche Regel zeigt, daß auch das Invertieren $G \to G$ ein Morphismus ist. $\square$

Beispiele 9.1.1.29. Gegeben ein affines algebraisches Monoid G und ein abgeschlossenes Untermonoid $H \mathrel{\not\triangleleft} G$ ist auch H mit der induzierten Struktur einer affinen Varietät aufgrund der universellen Eigenschaft von Nullstellenmengen ein affines algebraisches Monoid. Zum Beispiel bilden für alle n, r über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper die $n \times n$-Matrizen vom Rang $\leq r$ zusammen mit der Einheitsmatrix ein algebraisches Monoid.

Beispiele 9.1.1.30. Gegeben eine affine algebraische Gruppe G und eine abgeschlossene Untergruppe $H \mathrel{\not\triangleleft} G$ ist auch H mit der induzierten Struktur einer affinen Varietät eine affine algebraische Gruppe aufgrund der universellen Eigenschaft von Nullstellenmengen.

Ergänzung 9.1.1.31 (**Funktionen auf speziellen linearen Gruppen**). Die offensichtliche Abbildung ist ein Isomorphismus $k[T_{ij}]/\langle \det -1 \rangle \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathrm{SL}(n; k))$, aber ich kenne dafür keinen vollständig elementaren Beweis. Die Schwierigkeit besteht darin zu zeigen, daß der Restklassenring auf der linken Seite nilpotentfrei ist. Eine mögliche Argumentation wird in 7.4.2.24 erklärt. Es mag eine gute Übung sein, das hier zumindest im Fall $n = 2$ explizit zu prüfen.

Lemma 9.1.1.32. *Der Abschluß jedes Untermonoids eines algebraischen Monoids ist wieder ein algebraisches Monoid. Der Abschluß jeder Untergruppe einer algebraischen Gruppe ist wieder eine Untergruppe.*

Beweis. Sei G unser algebraisches Monoid und $H \subset G$ unser Untermonoid. Für alle $h \in H$ impliziert $hH \subset H$ bereits $H\bar{H} \subset \bar{H}$, denn die Linkstranslation mit h ist stetig. Damit wissen wir $Hg \subset \bar{H}$ für alle $g \in \bar{H}$ und folgern $\bar{H}g \subset \bar{H}$, denn die Rechtstranslation mit g ist stetig. Zusammengenommen ist also $\bar{H}$

abgeschlossen unter der Verknüpfung und $1 \in H$ gilt nach Annahme eh. Ebenso folgt im Gruppenfall aus $\operatorname{inv}(H) \subset H$ sofort $\operatorname{inv}(\bar{H}) \subset \bar{H}$. $\square$

9.1.1.33 (**Diskussion der Terminologie**). Eine Untergruppe einer algebraischen Gruppe verstehen wir a priori als eine Untergruppe der zugrundeliegenden gewöhnlichen Gruppe. Eine abgeschlossene Untergruppe denken wir uns im Zweifelsfall stets mit ihrer induzierten Struktur als alebraische Gruppe versehen. Unsere abgeschlosenen Untergruppen sind zwar kategorische Unterobjeke in der Kategorie der algebraischen Gruppen, aber in positiver Charakteristik besitzen die meisten algebraischen Gruppen durchaus noch weitere, nicht zu Untergruppen in diesem Sinne isomorphe kategorische Unterobjekte. So ist zum Beispiel für jede algebraische Gruppe G in positiver Charakteristik der Frobenius $G \to G^{[1]}$ aus 7.3.3.21 ein Monomorphismus aber kein Isomorphismus und $G^{[1]}$ ist in natürlicher Weise wieder eine algebraische Gruppe. In Charakteristik Null verschwinden diese Phänomene, dort ist nach 9.3.5.15 sogar jede bijektive Abbildung von homogenen Räumen ein Isomorphismus.

Übungen

Übung 9.1.1.34 (**Koprodukt affiner Varietäten**). Gegeben affine Varietäten X, Y ist auch die disjunkte Vereinigung $X \sqcup Y$ mit

$$\mathcal{O}(X \sqcup Y) := \{f : X \sqcup Y \to k \mid f|_X \in \mathcal{O}(X) \text{ und } f|_Y \in \mathcal{O}(Y)\}$$

eine affine Varietät. Die Einbettungen $\operatorname{in}_X : X \to X \sqcup Y$ sowie $\operatorname{in}_Y : Y \to X \sqcup Y$ sind dann Morphismen von Varietäten und diese Daten bilden zusammen ein Koprodukt in der Kategorie der affinen Varietäten. Diese Kategorie besitzt mithin endliche Koprodukte. Das leere Koprodukt in unserer Kategorie ist die leere Varietät. Die Restriktionen liefern zusammen einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X \sqcup Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X) \times \mathcal{O}(Y)$$

Übung 9.1.1.35. Die regulären Funktionen einer affinen k-Varietät X sind genau die Morphismen von Varietäten $X \to k$, in Formeln $\mathcal{O}(X) = \operatorname{Var}(X, k)$.

Übung 9.1.1.36 (**Automorphismen offener Teilmengen der Gerade**). Jeder Isomorphismus von Varietäten $k \xrightarrow{\sim} k$ hat die Gestalt $t \mapsto at + b$ für $a \in k^\times$ und $b \in k$. Jeder Isomorphismus von Varietäten $k^\times \xrightarrow{\sim} k^\times$ hat die Gestalt $t \mapsto at^\varepsilon$ für $a \in k^\times$ und $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Die Varietäten $k \backslash E$ für $E \subset k$ endlich mit zwei oder mehr Elementen haben nur endlich viele Automorphismen. Hinweis: 3.5.5.21.

Übung 9.1.1.37 (**Bijektive Morphismen müssen keine Isomorphismen sein**). Es gibt durchaus bijektive Morphismen zwischen affinen Varietäten, die keine Isomorphismen von Varietäten sind. Als Beispiele betrachte man im Fall einer

Charakteristik $\operatorname{char} k = p > 0$ die Abbildung $k \to k$, $t \mapsto t^p$ und im Fall $\operatorname{char} k$ beliebig die Abbildung $k \to \mathcal{Z}(X^3 - Y^2)$, $t \mapsto (t^2, t^3)$.

Übung 9.1.1.38. Jeder endlichdimensionale k-Vektorraum V ist mit der Addition als Verknüpfung eine affine algebraische Gruppe.

Übung 9.1.1.39. Für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum V ist $\mathrm{GL}(V)$ mit der Struktur einer k-Varietät als Komplement der Nullstellenmenge einer regulären Funktion auf dem endlichdimensionalen k-Vektorraum $\operatorname{End} V$ eine affine algebraische Gruppe.

Übung 9.1.1.40. Ein Morphismus $\varphi : Z \to X$ von affinen Varietäten ist genau dann eine abgeschlossene Einbettung, wenn sein Komorphismus eine Surjektion $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Z)$ ist.

Übung 9.1.1.41. Ich erinnere an 6.1.2.10: Sind N und B Gruppen und $\tau : B \to \mathrm{Grp}^\times N$ ein Gruppenhomomorphismus alias eine Operation von B auf N durch Gruppenautomorphismen, notiert $(\tau(a))(n) = ({}^a n)$, so kann man $N \times B$ mit einer Gruppenstruktur versehen vermittels der Vorschrift $(m, a)(n, b) = (m\ ({}^a n), ab)$ Diese Gruppe heißt das oder genauer ein **semidirektes Produkt** von N mit B und wird auch notiert als $N \rtimes B = N \rtimes_\tau B$. Man zeige: Sind hier B und N algebraische Gruppen und ist $B \times N \to N$, $(a, n) \mapsto ({}^a n)$ ein Morphismus von Varietäten, so ist auch das semidirekte Produkt eine algebraische Gruppe, wenn wir es als Varietät mit der Produktstruktur betrachten.

Übung 9.1.1.42. Es sei $k^\times$ die multiplikative Gruppe und k die additive Gruppe. Man zeige: Alle Homomorphismen von der einen in die andere sind konstant, in Formeln $|\operatorname{GrpVar}(k, k^\times)| = 1 = |\operatorname{GrpVar}(k^\times, k)|$. Später wird das auch direkt aus der Jordan-Zerlegung folgen. Man zeige weiter: Jeder Endomorphismus von $k^\times$ ist ein Potenzieren, in Formeln haben wir eine Bijektion $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \operatorname{GrpVar}(k^\times, k^\times)$, $n \mapsto (z \mapsto z^n)$. Jeder Endomorphismus von k in Charakteristik Null ist ein Multiplizieren, in Formeln haben wir eine Bijektion $k \xrightarrow{\sim} \operatorname{GrpVar}(k, k)$, $\lambda \mapsto (a \mapsto \lambda a)$. In Charakteristik p bilden die fraglichen Endomorphismen einen k-Vektorraum unter Nachschalten von $(\lambda\cdot)$ und die Potenzen des Frobeniushomomorphismus bilden eine Basis dieses k-Vektorraums.

Ergänzende Übung 9.1.1.43. Man zeige, daß auf der affinen Varietät k die Addition die einzige Verknüpfung ist, die sie zu einer algebraischen Gruppe mit neutralem Element Null macht. Man zeige, daß auf der affinen Varietät $k^\times$ die Multiplikation die einzige Verknüpfung ist, die sie zu einer algebraischen Gruppe mit neutralem Element Eins macht. Man zeige, daß auf der affinen Varietät $k \backslash E$ für $E \subset k$ endlich mit zwei oder mehr Elementen keine Struktur als algebraische Gruppe gibt. Hinweis: Man erinnere die Automorphismen offener Teilmengen der Geraden aus Übung 9.1.1.36.

Übung 9.1.1.44. Gegeben $A \subset X$ und $B \subset Y$ Teilmengen von affinen Varietäten ist der Abschluß von $A \times B$ in $X \times Y$ das Produkt der Abschlüsse, in Formeln $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$. Man folgere ein weiteres Mal, daß der Abschluß jeder Untergruppe einer affinen algebraischen Gruppe wieder eine Untergruppe ist.

Übung 9.1.1.45 (**Quotienten nach endlichen Normalteilern**). Gegeben eine affine algebraische Gruppe G und ein endlicher Normalteiler $N \subset G$ zeige man, daß G/N mit seiner Struktur als affine Varietät nach 7.5.3.3 auch eine affine algebraische Gruppe wird.

Übung 9.1.1.46. $(k = \bar{k})$. Jede endlichdimensionale Ringalgebra über k ist mit der Multiplikation als Verknüpfung und der Struktur als affine Varietät aus 9.1.1.10 ein algebraisches Monoid und ihre Einheitengruppe ist die Nichtnullstellenmenge einer regulären Funktion und mit der Struktur als affine Varietät nach 9.1.1.9 eine algebraische Gruppe. Hinweis: 7.2.3.15.

9.1.2 Verknüpfungen auf Objekten

Definition 9.1.2.1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit endlichen Produkten und nach unseren Konventionen 4.7.7.14 insbesondere auch einem finalen Objekt, das wir mit pt bezeichnen. Eine **Verknüpfung** auf einem Objekt $G \in \mathcal{C}$ ist ein Morphismus

$$m : G \times G \to G$$

und ein Objekt mit Verknüpfung (G, m) heißt ein **Magma in** $\mathcal{C}$. Solch eine Verknüpfung heißt **assoziativ** beziehungsweise **kommutativ**, wenn von den beiden folgenden Diagrammen das Linke beziehungsweise das Rechte kommutiert, mit $\tau : G \times G \to G \times G$ der Vertauschung der beiden Faktoren und der offensichtlichen Vertikalen ganz links:

$$\begin{tikzcd}
(G \times G) \times G \arrow[r, "m \times \mathrm{id}"] \arrow[d] & G \times G \arrow[r, "m"] & G \arrow[d, equal] \\
G \times (G \times G) \arrow[r, "\mathrm{id} \times m"] & G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\tau"'] & G \arrow[d, equal] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

Ein **neutrales Element** für eine Verknüpfung auf einem Objekt G ist ein Morphismus $e : \mathrm{pt} \to G$ des finalen Objekts nach G derart, daß mit der Notation fin für den einzigen Morphismus $\mathrm{fin} : G \to \mathrm{pt}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(\mathrm{id}, e \circ \mathrm{fin})"] \arrow[d, "(e \circ \mathrm{fin}, \mathrm{id})"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

kommutiert. So ein neutrales Element ist, wenn es überhaupt existiert, eindeutig bis auf die Wahl des finalen Objekts, als da heißt: Ist $e' : \mathrm{pt}' \to G$ ein weiteres neutrales Element, so gilt $e' = e \circ \mathrm{fin}$ für den einzigen Morphismus $\mathrm{fin} : \mathrm{pt}' \to \mathrm{pt}$. Wir überlassen diesen Nachweis dem Leser. Ein **Monoidobjekt** von $\mathcal{C}$ ist ein Objekt mit Verknüpfung (G, m) derart, daß die Verknüpfung assoziativ ist und ein neutrales Element existiert. Existiert zusätzlich ein Morphismus **Inversenbildung** $i : G \to G$ derart, daß auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(\mathrm{id},i)"] \arrow[d, "(i,\mathrm{id})"'] \arrow[dr, "e\circ\mathrm{fin}"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd}$$

kommutiert, so nennen wir unser Objekt mit Verknüpfung (G, m) ein **Gruppenobjekt**. Wieder überlassen wir dem Leser den Nachweis, daß es höchstens einen Morphismus $i : G \to G$ mit dieser Eigenschaft geben kann, vergleiche Übung 9.1.2.14. Ich hoffe, daß sich von selbst versteht, was Homomorphismen zwischen Objekten mit Verknüpfung oder auch zwischen Monoidobjekten derselben Kategorie sind. Wir erhalten so insbesondere für jede Kategorie mit endlichen Produkten $\mathcal{C}$ die Kategorien

$\mathrm{Mon}\,\mathcal{C}$	der Monoidobjekte,
$\mathrm{Abmon}\,\mathcal{C}$	der abelschen alias kommutativen Monoidobjekte,
$\mathrm{Grp}\,\mathcal{C}$	der Gruppenobjekte und
$\mathrm{Ab}\,\mathcal{C}$	der abelschen alias kommutativen Gruppenobjekte.

Eine **Operation** oder **Wirkung** eines Monoidobjekts G einer Kategorie $\mathcal{C}$ auf einem Objekt $X \in \mathcal{C}$ ist ein Morphismus $a : G \times X \to X$ derart, daß die beiden folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} (G \times G) \times X \arrow[r, "m\times\mathrm{id}"] \arrow[d] & G \times X \arrow[r, "a"] & X \arrow[d, equal] \\ G \times (G \times X) \arrow[r, "\mathrm{id}\times a"] & G \times X \arrow[r, "a"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "(e\circ\mathrm{fin},\mathrm{id})"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ G \times X \arrow[r, "a"] & X \end{tikzcd}$$

Die Notation a soll an das Wort **action** erinnern, mit dem man Operationen auf englisch und französisch bezeichnet.

Beispiele 9.1.2.2. Ein Monoidobjekt in der Kategorie der Mengen ist ein Monoid, ein Gruppenobjekt eine Gruppe, ein Objekt mit G-Operation eine G-Menge. Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der topologischen Räume heißt eine **topologische Gruppe**, ein Objekt mit G-Operation ein G**-Raum**. Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der separablen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt eine **Liegruppe**, ein Objekt mit G-Operation eine G**-Mannigfaltigkeit**. Ein Gruppenobjekt in

der Kategorie der affinen algebraischen Varietäten heißt eine **affine algebraische Gruppe**, ein Objekt mit G-Operation eine **affine G-Varietät**. Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der algebraischen Varietäten heißt eine **algebraische Gruppe**, ein Objekt mit G-Operation eine **G-Varietät**. Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der Schemata heißt ein **Gruppenschema**, ein Objekt mit G-Operation ein **G-Schema**. In der Kategorie der Schemata ist die volle Unterkategorie der affinen Schemata abgeschlossen unter Produkten und sozusagen per definitionem äquivalent zur opponierten Kategorie $\mathrm{Kring}^{\mathrm{opp}}$ der Kategorie Kring der kommutativen Ringe. Gruppenobjekte in dieser Kategorie heißen **affine Gruppenschemata** oder **kommutative Hopfalgebren über $\mathbb{Z}$ mit Antipode**, wie wir sie gleich ausfülicher diskutieren werden. In der Kategorie der Garben von Mengen über einem gegebenen topologischen Raum ist ein Gruppenobjekt eine **Garbe von Gruppen** und ein abelsches Gruppenobjekt eine **abelsche Garbe**. Ein Monoidobjekt in der Kategorie Cat der Kategorien schließlich heißt eine **strikte Tensorkategorie**.

9.1.2.3 (**Anwendung von Funktoren auf Gruppenobjekte**). Natürlich muß jeder mit endlichen Produkten verträgliche Funktor zwischen Kategorien mit endlichen Produkten Monoidobjekte zu Monoidobjekten machen, Gruppenobjekte zu Gruppenobjekten, und so weiter. Allgemeiner reicht es sogar aus zu fordern, daß für unseren Funktor F und unser Objekt mit Verknüpfung G und $n \leq 3$ die offensichtlichen Morphismen Isomorphismen $F(G^{\times n}) \xrightarrow{\sim} (FG)^{\times n}$ sind. Zum Beispiel wird jede topologische Gruppe durch das Vergessen der Topologie zu einer gewöhnlichen Gruppe alias einem Gruppenobjekt in der Kategorie der Mengen, und jede affine algebraische Gruppe ist auch eine algebraische Gruppe, da eben der Einbettungsfunktor der Kategorie der affinen Varietäten in die Kategorie aller Varietäten mit endlichen Produkten verträglich ist.

Beispiel 9.1.2.4 (**Anwendung von Yonedafunktoren auf Gruppenobjekte**). Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit endlichen Produkten ist für jedes Objekt $A \in \mathcal{C}$ der Mengenfunktor $\mathcal{C}(A,\ ) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ verträglich mit Produkten und macht folglich Gruppenobjekte zu Gruppen.

Beispiel 9.1.2.5. Gegeben ein Körper k erinnern wir aus 4.7.9.10 den mit endlichen Produkten verträglichen Funktor

$$\{\text{Endliche Mengen}\} \to \{k\text{-Kringe}\}^{\mathrm{opp}}$$

gegeben durch $X \mapsto \mathrm{Ens}(X, k)$. Er macht insbesondere endliche Gruppen zu Gruppenobjekten in $k\text{-}\mathrm{Kring}^{\mathrm{opp}}$.

Beispiel 9.1.2.6. Gegeben $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper erinnern wir aus 9.1.1.23, daß der durch $X \mapsto \mathcal{O}(X)$ gegebene Funktor

$$\{\text{Naive affine } k\text{-Varietäten}\} \to \{k\text{-Kringe}\}^{\mathrm{opp}}$$

mit endlichen Produkten verträglich ist. Er macht also affine algebraische Gruppen zu Gruppenobjekten in $k\text{-Kring}^{\text{opp}}$. Im folgenden will ich diskutieren, wie Gruppenobjekte in $k\text{-Kring}^{\text{opp}}$ konkret aussehen.

9.1.2.7 (**Gruppenobjekte in opponierten Kringalgebren**). Nach 4.7.9.9 kann für jeden Körper k ein Koprodukt von je zwei Objekten A, B in der Kategorie aller k-Kringe konstruiert werden als $A \otimes_k B$, und k selbst ist in k-Kring ein initiales Objekt. Im übrigen gilt beides sogar für jeden Kring k, aber so allgemein brauchen wir hier nicht zu werden. Ein Monoidobjekt von $k\text{-Kring}^{\text{opp}}$ ist demnach per definitionem ein Paar (A, Δ) bestehend aus einem k-Kring A und einem Morphismus von k-Kringen $\Delta : A \to A \otimes_k A$ derart, daß

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & A \otimes A \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] & (A \otimes A) \otimes A \arrow[d] \\ A \arrow[r, "\Delta"] & A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] & A \otimes (A \otimes A) \end{tikzcd}$$

kommutiert und daß ein ein Morphismus von k-Kringen $\varepsilon : A \to k$ existiert, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & A \otimes A \arrow[d, "(\varepsilon,\mathrm{id})"] \\ A \otimes A \arrow[r, "(\mathrm{id},\varepsilon)"'] & A \end{tikzcd}$$

kommutiert. Hier meint etwa $(\varepsilon, \mathrm{id}) : A \otimes A \to A$ die Abbildung $a \otimes b \mapsto \varepsilon(a)b$ aus dem Koprodukt im Sinne von 4.7.7.16. Nach dem Vorhergehenden ist hier ε eindeutig bestimmt, wenn es existiert. Solch ein Monoidobjekt ist weiter ein Gruppenobjekt genau dann, wenn es zusätzlich einen Morphismus $S : A \to A$ gibt derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & A \otimes A \arrow[d, "(S,\mathrm{id})"] \\ A \otimes A \arrow[r, "(\mathrm{id},S)"'] & A \end{tikzcd}$$

kommutiert. Hier meint etwa $(\mathrm{id}, S) : A \otimes A \to A$ wieder die Abbildung aus dem Koprodukt $a \otimes b \mapsto aS(b)$. Ein Gruppenobjekt (A, Δ) in der Kategorie $k\text{-Kring}^{\text{opp}}$ nennt man eine **kommutative Hopf-Algebra über** k. Die Abbildung $\Delta : A \to A \otimes A$ heißt ihre **Komultiplikation**, die Abbildung $\varepsilon : A \to k$ die **Ko-Eins**, die Abbildung $S : A \to A$ die **Antipode**.

Vorschau 9.1.2.8. Allgemeine Hopfalgebren diskutieren wir in 18.3.3.11.

9.1.2.9 (**Algebraische Gruppen und kommutative Hopfalgebren**). Das oben bereits angedeutete Beispiel besagt explizit, daß man von einer affinen algebraischen Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ ausgehend eine kommutative Hopf-Algebra erhält, indem man auf $A = \mathcal{O}(G)$ als Komultiplikation

$$\Delta : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G \times G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(G) \otimes_k \mathcal{O}(G)$$

den Komorphismus der Verknüpfung $\Delta := \mathrm{can} \circ m^\sharp$ betrachtet. Die Koeins ist dann das Auswerten am neutralen Element und die Antipode der Komorphismus $S = i^\sharp : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ zum Invertieren. Noch einfacher wird in derselben Weise auch für jede endliche Gruppe G und jeden Körper k der k-Kring $kG = \mathcal{O}(G) = \mathrm{Ens}(G, k)$ zu einer kommutativen Hopf-Algebra über k.

9.1.2.10. Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so erinnern wir aus 7.3.3.12, daß das Bilden der regulären Funktionen $\mathcal{O}$ sogar eine Äquivalenz von Kategorien

$$\{\text{Affine } k\text{-Varietäten}\} \xrightarrow{\approx} \{\text{Affine } k\text{-Kringe}\}^{\mathrm{opp}}$$

induziert. Unter einem affinen k-Kring versteht man dabei eine ringendliche nilpotentfreie Kringalgebra über k. Natürlich muß unsere Äquivalenz $\mathcal{O}$ Gruppenobjekte mit Gruppenobjekten identifizieren. Da das Koprodukt affiner k-Kringe in der Kategorie aller k-Kringe stets wieder affin ist, erhalten wir mit Unterschlagung des Grundkörpers in der Notation eine Äquivalenz von Kategorien

$$\{\text{Affine algebraische Gruppen}\} \xrightarrow{\approx} \{\text{Affine Hopfalgebren}\}^{\mathrm{opp}}$$

Die Spezifikation „affin“ auf der rechten Seite bezieht sich dabei auf die zugrundeliegende k-Kringalgebra, die eben affin sein soll, also ringendlich und nilpotentfrei.

Übungen

Übung 9.1.2.11 (**Die algebraische Gruppe** $\mathrm{PSL}(2; k)$). $(k = \bar{k})$. Wir betrachten die algebraische Gruppe $\mathrm{SL}(2; k)$ mit dem Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(\mathrm{SL}(2; k)) = k[T_1, T_2, T_3, T_4]/\langle T_1T_4 - T_2T_3 - 1\rangle$. Es sei $A \subset \mathcal{O}(\mathrm{SL}(2; k))$ die von allen T_iT_j mit $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ erzeugte Unterringalgebra von $\mathcal{O}(\mathrm{SL}(2; k))$. Man zeige:

(a) Die Struktur einer Hopfalgebra auf $\mathcal{O}(\mathrm{SL}(2; k))$ induziert eine Struktur einer Hopfalgebra auf A. Damit gibt es eine algebraische Gruppe $\mathrm{PSL}(2; k)$ mit der Eigenschaft $\mathcal{O}(\mathrm{PSL}(2; k)) = A$;

(b) Der von der Inklusion $A \subset \mathcal{O}(\mathrm{SL}(2; k))$ induzierte Homomorphismus $\phi : \mathrm{SL}(2; k) \to \mathrm{PSL}(2; k)$ hat den Kern $\ker \phi = \{I, -I\}$;

(c) Im Fall $\operatorname{char} k = 2$ ist ϕ ein Isomorphismus von abstrakten Gruppen, aber nicht von algebraischen Gruppen.

Im Fall $\operatorname{char} k \neq 2$ erhalten wir so den Quotienten aus 9.1.1.45 von $\mathrm{SL}(2;k)$ nach dem Normalteiler $\{I, -I\}$. Im Fall $\operatorname{char} k = 2$ eerhalten wir den Quotienten von $\mathrm{SL}(2;k)$ nach einem normalen „infinitesimalen Untergruppenschema“, aber diese Allgemeinheit werden wir vorerst meiden. In 9.3.6.18 werden wir eine isomorphe Gruppe nocheinmal auf andere Weise konstruieren und $\mathrm{PGL}(2;k)$ nennen.

Ergänzende Übung 9.1.2.12. Ein Element f einer Hopf-Algebra heißt **primitiv**, wenn gilt $\Delta(f) = f \otimes 1 + 1 \otimes f$. Man zeige, daß die primitiven Elemente im Ring der regulären Funktionen $\mathcal{O}(G)$ auf einer affinen algebraischen Gruppe G genau die Homomorphismen in die additive Gruppe $f : G \to k$ sind. Man folgere im Fall eines Körpers k der Charakteristik Null, daß die primitiven Elemente der symmetrischen Algebra $\mathrm{S}V$ genau die Bilder der Elemente von V sind.

Ergänzende Übung 9.1.2.13. Ein kommutatives Monoid wird durch seine Verknüpfung ein Monoidobjekt in der Kategorie der Monoide. Man zeige, daß jedes Monoidobjekt in der Kategorie der Monoide von dieser Gestalt ist.

Übung 9.1.2.14 (**Eindeutigkeit der Inversenbildung**). Man zeige, daß eine Inversenbildung für ein Monoidobjekt eindeutig ist, wenn sie existiert. Hinweis: Gegeben zwei Inversenbildungen $i, j : G \to G$ betrachte man den Morphismus $(i, \mathrm{id}, j) : G \to G \times G \times G$ und verwende die Assoziativität.

Übung 9.1.2.15 (**Involutivität der Inversenbildung**). Man zeige, daß eine Inversenbildung i für ein Monoidobjekt stets die Eigenschaft $i^2 = \mathrm{id}$ hat. Hinweis: Man betrachte den Morphismus $(\mathrm{id}, i, i^2) : G \to G \times G \times G$ und verwende die Assoziativität.

Übung 9.1.2.16. Wir können die Definition 9.1.2.1 von Gruppenobjekten dahingehend abschwächen, daß wir statt die Existenz eines Morphismus „Inversenbildung“ nur die Existenz von zwei Morphismen „Bilden des Linksinversen“ und „Bilden des Rechtsinversen“ fordern. Aus dem Rest der Axiome folgt dann bereits, daß sie übereinstimmen müssen.

9.1.3 Einbettungen in Matrizenräume

Satz 9.1.3.1 (**Affine algebraische Gruppen sind linear**). *Jede abgeschlossene Untergruppe der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen k-Vektorraums ist eine affine algebraische Gruppe, und jede affine algebraische Gruppe ist isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe dieser Art.*

9.1.3.2. Die Bedingung abgeschlossen bezieht sich hier auf die Zariskitopologie. Ganz allgemein heißt eine Gruppe **linear** genau dann, wenn sie als Untergruppe in

die Automorphismengruppe eines Vektrorraums eingebettet werden kann. Unsere affinen algebraischen Gruppen werden aufgrund des obigen Satzes auch und sogar meist **lineare algebraische Gruppen** genannt.

Satz 9.1.3.3 (**Affine algebraische Monoide sind linear**). *Jedes abgeschlossene Untermonoid des Endomorphismenmonoids eines endlichdimensionalen k-Vektorraums ist ein affines algebraische Monoid und jede affine algebraische Monoid ist isomorph zu einem abgeschlossenen Untermonoid dieser Art.*

Beweis. Die erste Aussage in beiden Sätzen folgt unmittelbar aus der universellen Eigenschaft der induzierten Struktur auf abgeschlossenen Teilmengen einer affinen Varietät. Um die zweite Aussage zu beweisen, konzentrieren wir uns auf den zweiten Satz, der hier eine stärkere Aussage macht, und betrachten für ein algebraisches Monoid G die Komposition Δ von Homomorphismen von k-Ringalgebren

$$\mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G \times G) \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}(G) \otimes_k \mathcal{O}(G)$$

mit dem Komorphismus $\mathrm{mult}^\sharp$ der Multiplikation $\mathrm{mult} : G \times G \to G$ auf den regulären Funktionen an erster Stelle dem Inversen des Isomorphismus 9.1.1.23 oder alternativ 7.3.1.4 an zweiter Stelle. Genau dann haben wir also $\Delta f = \sum_{i=1}^n g_i \otimes h_i$, wenn für alle $x, y \in G$ gilt $f(xy) = \sum_{i=1}^n g_i(x) h_i(y)$. Erklären wir die Rechtsverschiebung $\rho(y) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ durch die Vorschrift $(\rho(y)f)(x) = f(xy)$, so liegen alle $\rho(y)f$ also in dem von den Funktionen g_i aufgespannten Teilraum und wir folgern, daß für alle $f \in \mathcal{O}(G)$ der von den Translaten von f aufgespannte Teilraum $V := \langle \rho(y)f \mid y \in G \rangle$ endlichdimensional ist. Zusammenfassend liegt jede reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ in einem endlichdimensionalen unter allen Rechtsverschiebungen invarianten Teilraum V. Weiter liefert die Operation von G durch Rechtsverschiebung auf jedem endlichdimensionalen unter Rechtsverschiebung invarianten Teilraum V für jeden Vektor $f \in V$ einen Morphismus von Varietäten $G \to V$, $y \mapsto \rho(y)f = \sum h_i(y) g_i$. A priori ist diese Abbildung zwar ein Morphismus nach $W := \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$, aber da sie in $W \cap V$ landet und da jede injektive lineare Abbildung endlichdimensionaler Vektorräume eine abgeschlossene Einbettung ist, folgt die Aussage aus der universellen Eigenschaft abgeschlossener Einbettungen. Durch Anwenden dieser Erkenntnis auf die Vektoren einer Basis erhalten wir einen Homomorphismus von algebraischen Monoiden

$$\rho : G \to \mathrm{End}(V)$$

Wählen wir nun V so groß, daß V ein Erzeugendensystem $f_1, \ldots, f_t$ des k-Krings $\mathcal{O}(G)$ umfaßt, so induziert unser Morphismus von algebraischen Monoiden ρ eine Surjektion

$$\mathcal{O}(\mathrm{End}(V)) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(G)$$

Betrachten wir in der Tat das Auswerten am neutralen Element $\delta_e : \mathcal{O}(G) \to k$ und die regulären Abbildungen $F_\tau : \operatorname{End}(V) \to k$, $A \mapsto (Af_\tau)(e)$ für $1 \le \tau \le t$, so gilt $F_\tau(\rho(y)) = (\rho(y)f_\tau)(e) = f_\tau(y)$. Folglich haben wir $F_\tau \mapsto f_\tau$ und folglich liegen alle f_τ im Bild, das damit ganz $\mathcal{O}(G)$ sein muß. Nach 9.1.1.40 oder alternativ 7.3.4.5 liefert unser Monoidhomomorphismus $\rho : G \to \operatorname{End}(V)$ folglich einen Isomorphismus von G mit einem abgeschlossenen Untermonoid von $\operatorname{End}(V)$. □

Satz 9.1.3.4 (Algebraische Untermonoide algebraischer Gruppen). *Gegeben G eine algebraische Gruppe und $M \not\subset G$ ein Zariski-abgeschlossenes Untermonoid ist M bereits eine Untergruppe.*

Beweis. Jedes $x \in M$ induziert einen Isomorphismus $(x\cdot) : M \xrightarrow{\sim} xM$ von M mit einer abgeschlossenen Teilmenge von M. Keine echte abgeschlossene Teilmenge einer Varietät kann aber isomorph sein zur Varietät selber, da jede Varietät ein noetherscher topologischer Raum ist, vergleiche Übung 7.4.1.22. Also gilt $xM = M$ und M ist eine Gruppe. □

Korollar 9.1.3.5 (Einheitengruppe affiner algebraischer Monoide). *In jedem affinen algebraischen Monoid bilden die Einheiten eine offene affine Teilmenge und können beschrieben werden als die Nichtnullstellenmenge einer regulären Funktion.*

Beweis. Sei M unser Monoid. Nach 9.1.3.3 finden wir einen endlichdimensionalen Vektorraum V und eine abgeschlossene Einbettung als Untermonoid $M \not\subset \operatorname{End}(V)$. Dann ist $M \cap \operatorname{GL}(V)$ als abgeschlossenes Untermonoid einer algebraischen Gruppe bereits sebst eine algebraische Gruppe nach 9.1.3.4 und wir folgern $M^\times \supset M \cap \operatorname{GL}(V)$ und dann auch sofort $M^\times = M \cap \operatorname{GL}(V)$. □

Übungen

9.1.3.6. Gegeben ein affines algebraisches Monoid G und ein Automorphismus φ von G, der einen lokal endlichen Automorphismus $\varphi^\sharp$ von $\mathcal{O}(G)$ induziert, gibt es einen endlichdimensionalen Vektorraum V und eine abgeschlossene Einbettung $\rho : G \hookrightarrow \operatorname{End}(V)$ und ein Element $x \in \operatorname{GL}(V)$ mit $\rho \circ \varphi = \operatorname{int}_x \circ \rho$. Hinweis: Man vergrößere den Teilraum $V \subset \mathcal{O}(G)$ aus dem vorherigen Beweis so, daß er auch noch unter $\varphi^\sharp$ stabil ist. Unser x wird dann das Inverse der Einschränkung von $\varphi^\sharp$ auf V.

9.1.4 Algebraische Darstellungen

9.1.4.1. Seien G ein Monoid und k ein Körper. Eine **Darstellung von G über k** ist ein Paar (V, ρ) bestehend aus einem k-Vektorraum V und einem Monoidhomomorphismus $\rho : G \to \operatorname{End} V$. Wir verwenden dann auch die abkürzenden

Notationen $(\rho(x))(v) = x \cdot_\rho v = xv$. Gegeben eine Darstellung V eines Monoids G erklärt man eine **Unterdarstellung** als einen Untervektorraum $W \subset V$ mit $w \in W \Rightarrow xw \in W \ \forall x \in G$. Unser ρ induziert dann einen Monoidhomomorphismus $G \to \operatorname{End} W$.

9.1.4.2. Im folgenden gelten die Aussagen, bei denen ich nicht explizit Affinität fordere, auch im allgemeinen. Für die Beweise verwendet man 7.6.11.13, nach dem auch für beliebige Varietäten X, Y die Abbildung $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ einen Isomorphismus $\mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times Y)$ induziert, und 7.6.4.20, nach dem für jede Varietät X und jede affine Varietät Y das Zurückholen regulärer Funktionen eine Bijektion $\operatorname{Var}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Kring}^k(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X))$ induziert.

Definition 9.1.4.3. Sei G ein algebraisches Monoid über $k = \bar{k}$. Eine **algebraische Darstellung von** G ist eine Darstellung (V, ρ) über k, in der jeder Vektor zu einer endlichdimensionalen Unterdarstellung $W \subset V$ gehört derart, daß die induzierte Abbildung $G \to \operatorname{End} W$ algebraisch ist.

Lemma 9.1.4.4. $(k = \bar{k})$. *Gegeben ein k-Vektorraum V und G ein algebraisches Monoid über k liefert ein Monoidhomomorphismus $\rho : G \to \operatorname{End}(V)$ genau dann eine algebraische Darstellung, wenn es eine lineare Abbildung*

$$\Delta_V : V \to \mathcal{O}(G) \otimes V$$

gibt derart, daß gilt $\Delta_V(v) = \sum_{i=1}^n f_i \otimes v_i \ \Rightarrow \ \rho(x)v = \sum_{i=1}^n f_i(x) v_i \ \forall x \in G$.

Beweis. Ist V endlichdimensional und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis und $\rho : G \to \operatorname{End} V$ ein Monoidhomomorphismus, so gibt es eindeutig bestimmte Funktionen $f_{ji} : G \to k$ mit $\rho(x)v_j = \sum_{i=1}^n f_{ji}(x) v_i$. Das zeigt, daß die Abbildung Δ_V aus dem Lemma, wenn es sie denn gibt, bereits durch (V, ρ) eindeutig bestimmt ist. Ebenso sind unsere Funktionen f_{ji} offensichtlich genau dann regulär, wenn $\rho : G \to \operatorname{End} V$ ein Morphismus von Varietäten ist. □

9.1.4.5 (**Diskussion der Terminologie**). In der älteren Literatur heißen unsere algebraischen Darstellungen meist **rationale Darstellungen**. Diese Terminologie erklärt sich daraus, daß man bereits zuvor **polynomiale Darstellungen** der Gruppen $\operatorname{GL}(n; k)$ erklärt hatte als Gruppenhomomorphismen $\operatorname{GL}(n; k) \to \operatorname{GL}(m; k)$, bei denen die Matrixeinträge der Bildmatrix polynomial von den Matrixeinträgen der Ausgangsmatrix abhängen, in unserer Terminologie also als algebraische Darstellungen des Monoids $\operatorname{Mat}(m; k)$. Bei rationalen Darstellungen durften dann im Gegensatz dazu auch Nenner auftreten, aber eben nur Potenzen der Determinante im Nenner, so daß die Matrixeinträge durchaus reguläre Funktionen auf der Gruppe sind. Die Verwendung des Wortes „rational“ in diesem Zusammenhang halte ich im aktuellen terminologischen Kontext für problematisch, weil sie einen Zusammenhang mit rationalen Funktionen suggeriert, der weit hergeholt ist.

Beispiel 9.1.4.6. Für jedes algebraische Monoid liefert die Rechtsverschiebung

$$\rho : G \to \mathrm{End}(\mathcal{O}(G))$$

eine algebraische Darstellung von G. Ist allgemeiner X eine G-Varietät, also eine Varietät mit einer G-Operation $G \times X \to X$, die ein Morphismus von Varietäten ist, so liefert die Verschiebung von Funktionen mit denselben Argumenten wie im Beweis von 9.1.3.1 eine algebraische Darstellung $G \to \mathrm{End}(\mathcal{O}(X))$.

9.1.4.7. Eine Darstellung heißt **irreduzibel**, wenn sie nicht Null ist, aber außer Null und sich selbst keine Unterdarstellung besitzt.

9.1.4.8. Gegeben Darstellungen V, W eines Monoids G versteht man unter einem **Homomorphismus von Darstellungen** eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(xv) = xf(v)$ für alle $x \in G$ und $v \in V$. Die Darstellungen eines Monoids G über einem Körper k werden so zu einer Kategorie. Wir notieren sie

$$\mathrm{Mod}_{k,G} = \mathrm{Mod}_G$$

Ist G ein algebraisches Monoid, so meinen wir mit dieser Notation meist abweichend die volle Unterkategorie der algebraischen Darstellungen.

Vorschau 9.1.4.9. Gegeben Darstellungen $V_1, \ldots, V_r, W$ eines Monoids G verstehen wir unter einer **Verschmelzung von Darstellungen** eine multilineare Abbildung $f : V_1 \times \ldots \times V_r \to W$ mit $f(xv_1, \ldots, xv_r) = xf(v_1, \ldots, v_r)$ für alle $x \in G$ und $v_i \in V_i$. Die Darstellungen eines Monoids G über einem Körper k bilden mit diesen Verschmelzungen und deren „Multiverknüpfung“ eine „Schmelzkategorie“ im Sinne von 18.1.1.

Ergänzung 9.1.4.10 (**Einordnung der Superdarstellungen**). Unsere Bemerkungen zu affinen Supergruppenschemata **??** haben eine natürliche Ergänzung für Darstellungen. Betrachten wir genauer wie dort zu einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit stabil universellen Verschmelzungen die zugehörige Kategorie von Kringobjekten und ein Gruppenobjekt G in deren opponierter Kategorie mit zugrundeliegendem Objekt $\mathcal{O}(G) \in \mathcal{M}$, so können wir eine „Darstellung von G“ erklären als ein Paar (V, Δ_V) bestehend aus einem Objekt $V \in \mathcal{M}$ nebst einem Morphismus $\Delta_V : V \to \mathcal{O}(G) \otimes V$ in $\mathcal{M}$ derart, daß gewisse mehr oder weniger offensichtliche Verträglichkeiten gelten. Insbesondere erhält man so im Fall der Schmelzkategorie der Paritätsgruppen sogenannte „Superdarstellungen von affinen Supergruppenschemata“.

Übungen

Übung 9.1.4.11. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und G ein affines algebraisches Monoid über k und V ein k-Vektorraum. So gehört eine

lineare Abbildung $\Delta_V : V \to \mathcal{O}(G) \otimes V$ genau dann zu einer algebraischen Darstellung, wenn gilt $(\mathrm{id} \otimes \Delta_V) \circ \Delta_V = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_V$ für $\Delta : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G)$ die Komultiplikation sowie $\mathrm{id}_V = (\delta_1 \otimes \mathrm{id}_V) \circ \Delta_V$.

Übung 9.1.4.12. Jede irreduzible Darstellung einer affinen algebraischen Gruppe läßt sich als Unterdarstellung in die reguläre Darstellung einbetten. Hinweis: Matrixkoeffizienten.

Übung 9.1.4.13. Eine Darstellung V eines algebraischen Monoids G ist algebraisch genau dann, wenn es für jeden Vektor $v \in V$ eine offene Umgebung $U \Subset G$ des neutralen Elements gibt derart, daß Uv in V einen endlichdimensionalen Teilraum $\langle Uv \rangle$ aufspannt und die Abbildung $U \to \langle Uv \rangle$ gegeben durch $g \mapsto gv$ algebraisch ist.

Übung 9.1.4.14. Gegeben eine algebraische Darstellung V eines algebraischen Monoids G und Untervektorräume $U, W \subset V$ ist $\{g \in G \mid g(U) \subset W\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von G.

Übung 9.1.4.15. Gegeben eine algebraische Darstellung V eines algebraischen Monoids G und ein Untervektorraum $U \subset V$ und eine offene dichte Teilmenge $A \Subset G$ ist das Vektorraumerzeugnis W von $\{au \mid a \in A, u \in U\}$ eine G-stabile Teilmenge von V.

Übung 9.1.4.16. Ist $V \twoheadrightarrow W$ ein surjektiver Homomorphismus von Darstellungen eines affinen algebraischen Monoids G und ist die Darstellung V algebraisch, so ist auch die Darstellung W algebraisch.

Übung 9.1.4.17. Ist V eine Darstellung eines Monoids G und $W \subset V$ eine Unterdarstellung, so gibt es genau ein Struktur von G-Darstellung auf V/W derart, daß dis kanonische Projektion $V \twoheadrightarrow V/W$ ein homomorphismus von Darstellungen ist. Wir nennen V/W mit dieser Struktur die **Quotientendarstellung**.

Übung 9.1.4.18. Der Quotient einer Darstellung nach einer maximalen echten Unterdarstellung ist stets irreduzibel.

Übung 9.1.4.19. Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung V einer algebraischen Gruppe oder eines algebraischen Monoids G zeige man:

1. Der Komorphismus $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(G \times V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(V)$ zur Operation $G \times V \to V$ induziert eine lineare Abbildung $V^* \to \mathcal{O}(G) \otimes V^*$;

2. Diese lineare Abbildung ist der Komorphismus zur kontragredienten Darstellung von G^{opp} auf V^*.

Übung 9.1.4.20. Jede irreduzible algebraische Darstellung einer kommutativen algebraischen Gruppe ist eindimensional. Hinweis: Existenz simultaner Eigenvektoren 4.3.2.18.

Übung 9.1.4.21. Der Komorphismus $\Delta_V : V \to \mathcal{O}(G) \otimes V$ ist ein Homomorphismus von Darstellungen für die Operation durch Konjugation auf $\mathcal{O}(G)$. Hinweis: Für jede Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ einer Gruppe G und jedes Element $t \in G$ gilt $(tgt^{-1})tv = t(gv)$. Die lineare Abbildung $\rho(t) : V \to V$ ist also ein Isomorphismus von der Darstellung ρ zur Darstellung $\rho \circ (\operatorname{int} t)$.

Übung 9.1.4.22 (**Tensorprodukt algebraischer Darstellungen**). Gegeben algebraische Darstellungen V, W eines affinen algebraischen Monoids G ist auch der Vektorraum $V \otimes W$ eine algebraische Darstellung von G unter der Operation $x(v \otimes w) := xv \otimes xw$.

Übung 9.1.4.23. Gegeben algebraische Darstellungen $(\rho, V), (\psi, W)$ einer affinen algebraischen Gruppe G mit $\dim V < \infty$ ist auch der Vektorraum $\mathrm{Hom}(V, W)$ eine algebraische Darstellung von G unter der Operation $(gf) = \psi(g) \circ f \circ \rho(g)^{-1}$ für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ist speziell W die Einsdarstellung von G, so erhalten wir eine Darstellung von G durch Automorphismen des Dualraums V^* von V, die sogenannte **kontragrediente Darstellung**.

Vorschau 9.1.4.24. Die Übung 9.1.4.22 zum Tensorprodukt bedeutet, daß die Schmelzkategorie algebraischen Darstellungen eines affinen algebraischen Monoids stabil universelle Verschmelzungen besitzt im Sinne von 18.1.1. Ist unser Monoid eine Gruppe, bilden die endlichdimensionalen algebraischen Darstellungen nach Übung 9.1.4.23 sogar eine Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen und Multihom. Das gilt auch für beliebige algebraische Darstellungen, aber dann müssen wir das „interne Hom“ sorgfältiger konstruieren als die maximale algebraische Unterdarstellung $(V \Rrightarrow W) \subset \mathrm{Hom}(V, W)$. Ein injektiver Morphismus $L \hookrightarrow V$ muß jedoch in dieser Allgemeinheit keinen surjektiven Morphismus $(L \Rrightarrow k) \twoheadrightarrow (V \Rrightarrow k)$ induzieren, wie das Beispiel 9.1.6.6 zeigt.

Ergänzende Übung 9.1.4.25. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit stabil universellen Verschmelzungen und ein Gruppenobjekt $G \in \mathrm{Kring}_{\mathcal{M}}^{\mathrm{opp}}$ mit zugrundeliegendem Objekt $\mathcal{O}(G) \in \mathrm{Kring}_{\mathcal{M}}$ können wir nach 9.1.2.4 die Gruppe $G(\mathrm{I})$ betrachten. Man zeige, daß für jede Darstellung V von G die Gruppe $G(\mathrm{I})$ in natürlicher Weise auf V operiert.

9.1.4.26 (**Anfänge des Tannaka-Formalismus**). Seien $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und G eine affine algebraische Gruppe über k. Wir betrachten den Schmelzfunktor

$$F : \mathrm{Mod}_G \to \mathrm{Mod}_k$$

des Vergessens der Gruppenwirkung. Wir behaupten, daß wir einen Gruppenisomorphismus

$$\tau : G \xrightarrow{\sim} \mathrm{SCat}(\mathrm{Mod}_G, \mathrm{Mod}_k)^{\times}(F)$$

zwischen G und der Automorphismengruppe des Schmelzfunktors F erhalten durch die Vorschrift $g \mapsto \tau(g)$, bei der die Isotransformation von Schmelzfunktoren $\tau(g) : F \to F$ hinwiederum gegeben durch die Gesamtheit der linearen Abbildungen $\tau(g)_V : F(V) \to F(V)$ für $V \in \mathrm{Mod}_G$, die gerade die durch die Operation von G auf V gegebenen linearen Abbildungen $(g\cdot) : V \to V$ sind. Es ist klar, daß diese Vorschrift einen Gruppenhomomorphismus liefert. Um dessen Bijektivität zu zeigen, konstruieren wir eine Umkehrabbildung. Dazu betrachten wir die Darstellung $R := \mathcal{O}(G)$ mit der G-Operation durch Rechtsverschiebung $(\rho(g)f)(x) = f(xg)$. Jeder Automorphismus τ des Schmelzfunktors F liefert ja insbesondere einen Vektorraumisomorphismus $\tau_R : R \xrightarrow{\sim} R$. Da die Multiplikation $\mathcal{O}(G) \times \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ eine G-äquivariante bilineare Abbildung ist, ist sie eine Zweiverschmelzung $R \curlyvee R \to R$, und damit muß τ_R ein Algebrenhomomorphismus sein. Da die Eins von $\mathcal{O}(G)$ invariant unter Rechtsverschiebung ist, ist sie eine Nullverschmelzung $\curlyvee \to R$ und damit muß τ_R die Eins auf die Eins Abbilden alias ein Ringalgebrenhomomorphismus sein. Da die Linksverschiebungen $\lambda(z) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ Homomorphismen von Darstellungen $R \to R$ sind, muß τ_R mit ihnen allen kommutieren. Wie wir beim Beweis der Jordanzerlegung 9.1.5.5 gesehen haben, gibt es folglich $g \in G$ mit $\tau_R = \rho(g) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$. Es folgt $\tau_V = \tau_V(g)$ erst für $V = R$, dann für V eine beliebige direkte Summe von Kopien von R, dann für V endlichdimensional, weil sich V dann nach dem Beweis von 9.1.5.5 in eine direkte Summe von Kopien von $R = \mathcal{O}(G)$ einbetten läßt, und schlißlich für V beliebig, weil es eine Vereinigung von endlichdimensionalen Unterdarstellungen ist. Es ist ziemlich klar, daß wir durch dieselbe Vorschrift dann auch einen Gruppenisomorphismus

$$\tau : G \xrightarrow{\sim} \mathrm{SCat}(\mathrm{Modf}_G, \mathrm{Mod}_k)^\times(F)$$

von G mit der Automorphismengruppe des auf endlichdimensionale Darstellungen eingeschränkten Schmelzfunktors F erhalten. Wenn wir nun umgekehrt von einem Paar $(\mathcal{M}, E)$ aus einer k-linearen Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ und einem k-linearen Schmelzfunktor $E : \mathcal{M} \to \mathrm{Mod}_k$ ausgehen, kann man sich fragen, unter welchen Bedingungen man die Gruppe

$$G := \mathrm{SCat}(\mathcal{M}, \mathrm{Mod}_k)^\times(E)$$

so mit der Struktur einer affinen algebraischen Gruppe über k versehen kann, daß es eine Äquivalenz von k-linearen Schmelzkategorien $\sigma : \mathrm{Modf}_G \xrightarrow{\approx} \mathcal{M}$ gibt und einen Isomorphismus $E \circ \sigma \xrightarrow{\sim} F$ von Schmelzfunktoren. Das ist die Grundfrage der Tannaka-Theorie.

9.1.5 Jordanzerlegung

9.1.5.1 (**Erinnerungen aus der Linearen Algebra**). Ein Endomorphismus eines Vektorraums heißt nach 4.3.2.16 **lokal endlich**, wenn jeder Vektor in einem endlichdimensionalen unter unserem Endomorphismus stabilen Teilraum liegt. Ein Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper zerfällt nach 4.3.2.16 unter einem Endomorphismus in die direkte Summe seiner Haupträume genau dann, wenn besagter Endomorphismus lokal endlich ist. Ein Endomorphismus x eines Vektorraums heißt **lokal nilpotent**, wenn jeder Vektor von einer Potenz von x zu Null gemacht wird, wenn also unser Vektorraum die Vereinigung der Kerne der Potenzen von x ist. Natürlich ist jeder lokal nilpotente Endomorphismus lokal endlich. Ein Endomorphismus x eines Vektorraums heißt **lokal unipotent**, wenn $x - \mathrm{id}$ lokal nilptent ist. Oft wird der Zusatz „lokal“ in diesem Zusammenhang auch weggelassen.

9.1.5.2 (**Multiplikative Jordanzerlegung von Automorphismen**). Ich erinnere an die multiplikative Jordanzerlegung 4.3.3.20: Jeder lokal endliche Automorphismus x eines Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper läßt sich auf genau eine Weise darstellen als ein Produkt

$$x = x_{\mathrm{u}} x_{\mathrm{s}}$$

mit x_{s} halbeinfach alias „semisimple“ alias diagonalisierbar, x_{u} lokal unipotent alias $(x_{\mathrm{u}} - \mathrm{id})$ lokal nilpotent, und $x_{\mathrm{u}} x_{\mathrm{s}} = x_{\mathrm{s}} x_{\mathrm{u}}$. Ich erinnere weiter an die Funktorialitätseigenschaften dieser Zerlegung. Sei

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ x \downarrow & & \downarrow y \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Vektorräumen mit invertierbaren lokal endlichen Vertikalen. Sind dann $x = x_{\mathrm{s}} x_{\mathrm{u}}$ und $y = y_{\mathrm{s}} y_{\mathrm{u}}$ die multiplikativen Jordan-Zerlegungen von x und y, so kommutieren auch die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ x_{\mathrm{s}} \downarrow & & \downarrow y_{\mathrm{s}} \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ x_{\mathrm{u}} \downarrow & & \downarrow y_{\mathrm{u}} \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

9.1.5.3. Ich erinnere daran, daß nach dem Beweis von 9.1.3.1 für jedes $g \in G$ die Rechtsverschiebung $\rho(g) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ gegeben durch $(\rho(g)f)(x) = f(xg)$ für alle $x \in G$ und $f \in \mathcal{O}(G)$ eine k-lineare lokal endliche Abbildung ist.

Definition 9.1.5.4. $(k = \bar{k})$. Ein Element einer affinen algebraischen Gruppe heißt **halbeinfach** beziehungsweise **unipotent**, wenn es auf jeder algebraischen Darstellung besagter Gruppe durch einen halbeinfachen beziehungsweise einen unipotenten Automorphismus operiert.

Satz 9.1.5.5 (**Jordanzerlegung in affinen algebraischen Gruppen**). *1. Gegeben eine affine algebraische Gruppe G gibt es für jedes Element $g \in G$ eindeutig bestimmte $g_{\mathrm{s}}, g_{\mathrm{u}} \in G$ mit g_{s} halbeinfach und g_{u} unipotent und $g = g_{\mathrm{s}} g_{\mathrm{u}} = g_{\mathrm{u}} g_{\mathrm{s}}$. Diese Elemente g_{s} und g_{u} heißen der* **halbeinfache** *und der* **unipotente Anteil von** g*;*

2. Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : G \to G'$ von affinen algebraischen Gruppen gilt $\varphi(g_{\mathrm{u}}) = \varphi(g)_{\mathrm{u}}$ und $\varphi(g_{\mathrm{s}}) = \varphi(g)_{\mathrm{s}}$ für alle $g \in G$;

9.1.5.6. Sobald der Satz und insbesondere sein dritter Teil einmal bewiesen ist, müssen wir in der Notation nicht mehr zwischen der Jordanzerlegung in affinen algebraischen Gruppen und der multiplikativen Jordanzerlegung lokal endlicher Endomorphismen unterscheiden. Für die Dauer des Beweises notieren wir die Jordanzerlegung in affinen algebraischen Gruppen abweichend von der Formulierung des Satzes noch $g = g_u g_s$ mit Indizes in einem anderen Schrifttyp als bei der konkreten Zerlegung $g = g_{\mathrm{u}} g_{\mathrm{s}}$ eines Automorphismus g eines endlichdimensionalen Vektorraums.

Beweis. Eine lineare Abbildung $\mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ kommt her von einem Homomorphismus von affinen Varietäten genau dann, wenn sie ein Homomorphismus von Ringalgebren ist. Eine bijektive lineare Abbildung $\mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ kommt her von einem Isomorphismus von affinen Varietäten genau dann, wenn sie ein Isomorphismus von Algebren alias in unserer Terminologie verträglich mit der Multiplikation ist, denn ein solcher Isomorphismus muß das Eins-Element automatisch erhalten. Ein Homomorphismus von affinen Varietäten $G \to G$ ist die Rechtsmultiplikation mit einem Gruppenelement genau dann, wenn er mit den Linksmultiplikationen mit allen Gruppenelementen $z \in G$ vertauscht. Kürzen wir $\mathcal{O}(G) = A$ ab, so ist ein Vektorraumisomorphismus $r : A \xrightarrow{\sim} A$ demnach ein $\rho(g)$ genau dann, wenn die beiden folgenden Diagramme kommutieren, das letztere für alle $z \in G$:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{mult}"] \arrow[d, "r \otimes r"'] & A \arrow[d, "r"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{mult}"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda(z)"] \arrow[d, "r"'] & A \arrow[d, "r"] \\ A \arrow[r, "\lambda(z)"] & A \end{tikzcd}$$

mit $\lambda(z) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ der Rechtsoperation durch Linksverschiebung, gegeben durch $(\lambda(z)f)(x) = f(zx)$. Nach der Funktorialität der Jordanzerlegung 9.1.5.2 kommutieren diese Diagramme aber auch dann noch, wenn wir in den

Vertikalen den halbeinfachen beziehungsweise den unipotenten Anteil nehmen. Die Eindeutigkeit der multiplikativen Jordanzerlegung 9.1.5.2 liefert unmittelbar $(r \otimes r)_{\mathrm{s}} = r_{\mathrm{s}} \otimes r_{\mathrm{s}}$ und $(r \otimes r)_{\mathrm{u}} = r_{\mathrm{u}} \otimes r_{\mathrm{u}}$. Es folgt, daß mit $r = \rho(g)$ auch $\rho(g)_{\mathrm{s}}$ und $\rho(g)_{\mathrm{u}}$ die fraglichen Diagramme kommutieren lassen. Folglich gibt es $g_s, g_u \in G$ mit $\rho(g)_{\mathrm{s}} = \rho(g_s)$ und $\rho(g)_{\mathrm{u}} = \rho(g_u)$. Wegen $\rho(g) = \rho(g_s)\rho(g_u) = \rho(g_u)\rho(g_s)$ folgt $g = g_s g_u = g_u g_s$. Jetzt zeigen wir, daß g_s, g_u auch im Sinne unserer Definition halbeinfach beziehungsweise unipotent sind. Es reicht dafür zu zeigen, daß sie auf jeder endlichdimensionalen algebraischen Darstellung V von G durch halbeinfache beziehungsweise unipotente Automorphismen operieren. Für $\psi_1, \ldots, \psi_n$ eine Basis von V^* liefern aber die Matrixkoeffizientenabbildungen eine für die G-Operation durch Rechtstranslation auf $\mathcal{O}(G)$ äquivariante Einbettung

$$\begin{array}{rcl} V & \hookrightarrow & \mathcal{O}(G)^n \\ v & \mapsto & (x \mapsto \psi_i(xv))_{i=1}^n \end{array}$$

In anderen Worten erhalten wir also für alle $g \in G$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{O}(G)^n \arrow[d, "\rho(g)\times\ldots\times\rho(g)"] \\ V \arrow[r, hook] & \mathcal{O}(G)^n \end{tikzcd}$$

Nun erkennt man aber auch ohne Schwierigkeiten die Identitäten $(x \times y)_{\mathrm{u}} = x_{\mathrm{u}} \times y_{\mathrm{u}}$ sowie $(x \times y)_{\mathrm{s}} = x_{\mathrm{s}} \times y_{\mathrm{s}}$ für $x : V \to V$ und $y : W \to W$ lokal endlich und invertierbar. Wenden wir also auf unser Diagramm die Funktorialität der konkreten Jordanzerlegung an, so folgt, daß g_s auf V durch einen halbeinfachen Automorphismus operiert und g_u durch einen unipotenten Automorphismus. Das zeigt die Existenz der multiplikativen Jordanzerlegung. Die Eindeutigkeit folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit der konkreten multiplikativen Jordanzerlegung von $\rho(g)$ im Sinne von 9.1.5.2. Um den zweiten Teil zu zeigen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cdot g"] & G' \arrow[d, "\cdot\varphi(g)"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & G' \end{tikzcd}$$

und das induzierte kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(G) & \mathcal{O}(G') \arrow[l, "\circ\varphi"'] \\ \mathcal{O}(G) \arrow[u, "\rho(g)"'] & \mathcal{O}(G') \arrow[l, "\circ\varphi"'] \arrow[u, "\rho(\varphi(g))"'] \end{tikzcd}$$

Wieder bleibt es kommutativ, wenn wir in den Vertikalen den unipotenten oder den halbeinfachen Anteil nehmen. Kehren wir dann wieder zu unseren Varietäten zurück, so erhalten wir kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cdot g_u"] & G' \arrow[d, "\cdot \varphi(g)_u"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & G' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cdot g_s"] & G' \arrow[d, "\cdot \varphi(g)_s"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & G' \end{tikzcd}$$

Setzen wir darin schließlich oben links das neutrale Element ein, so ergibt sich $\varphi(g_u) = \varphi(g)_u$ und $\varphi(g_s) = \varphi(g)_s$ wie gewünscht. $\square$

9.1.5.7 (**Eigenschaften der Menge der unipotenten Elemente**). Die unipotenten Elemente einer affinen algebraischen Gruppe G bilden stets eine abgeschlossene Teilmenge $G_{\mathrm{u}} \mathrel{\not\subset} G$. In der Tat dürfen wir, um das zu zeigen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $G \mathrel{\not\subset} \mathrm{GL}(n;k)$ annehmen, und dann sind die unipotenten Elemente gerade die Matrizen mit charakteristischem Polynom $(T-1)^n$. Die unipotenten Elemente bilden im allgemeinen keine Untergruppe und die Abbildung $g \mapsto g_{\mathrm{u}}$ ist im allgemeinen kein Morphismus von Varietäten. Ist jedoch $G = B$ zusammenhängend und auflösbar, so ist $B_{\mathrm{u}} \mathrel{\not\subset} B$ nach 9.4.1.12 ein zusammenhängender nilpotenter Normalteiler, und ist $G = N$ zusammenhängend nilpotent oder kommutativ, so ist nach 9.4.1.10 beziehungsweise 9.1.5.9 nicht nur $N_{\mathrm{u}} \mathrel{\not\subset} N$ eine Untergruppe, sondern auch das Bilden des unipotenten Anteils ein Morphismus $N \to N_{\mathrm{u}}$ von algebraischen Gruppen.

9.1.5.8 (**Eigenschaften der Menge der halbeinfachen Elemente**). Gegeben eine affine algebraische Gruppe G muß die Menge G_{s} der halbeinfachen Elemente weder offen noch abgeschlossen noch eine Untergruppe sein. Ist jedoch $G = N$ zusammenhängend nilpotent oder kommutativ, so ist nach 9.4.1.10 beziehungsweise 9.1.5.9 die Menge der halbeinfachen Elemente $N_{\mathrm{s}} \mathrel{\not\subset} N$ eine abgeschlossene zentrale Untergruppe und das Bilden des halbeinfachen Anteils ein Morphismus $N \to N_{\mathrm{s}}$ von algebraischen Gruppen.

Proposition 9.1.5.9 (**Jordanzerlegung in kommutativen Gruppen**). *Ist K eine kommutative affine algebraische Gruppe, so bilden die unipotenten und die halbeinfachen Elemente jeweils abgeschlossene Untergruppen $K_{\mathrm{u}}, K_{\mathrm{s}} \mathrel{\not\subset} K$ und die Multiplikation liefert einen Isomorphismus von algebraischen Gruppen*

$$K_{\mathrm{s}} \times K_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} K$$

Vorschau 9.1.5.10. Wir zeigen in 9.1.7.23 und 9.1.7.13, daß K_{s}, wenn es zusammenhängend ist, isomorph sein muß zu einem endlichen Produkt von Kopien der multiplikativen Gruppe $(k^\times, \cdot)$. Wir zeigen in 9.3.10.13, daß in Charakteristik Null

K_{u} isomorph sein muß zu einem endlichen Produkt von Kopien der additiven Gruppe $(k, +)$. Eine zusammenhängende kommutative affine algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null ist also isomorph zu einem Produkt von endlich vielen Kopien von $(k^\times, \cdot)$ mit endlich vielen Kopien von $(k, +)$.

Beweis. Als allererstes bemerken wir, daß die Abbildung in unserer Proposition nach dem Satz über die Jordanzerlegung jedenfalls schon mal eine Bijektion von Mengen sein muß. Nach 9.1.3.1 können wir nun K als abgeschlossene Untergruppe in die Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen Vektorraums V einbetten. Nach Übung 4.7.8.10 über die simultane Eigenraumzerlegung finden wir eine Zerlegung in Untervektorräume $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ und paarweise verschiedene Abbildungen $\lambda_i : K_{\mathrm{s}} \to k$ mit

$$V_i = \{v \in V \mid gv = \lambda_i(g)v \;\; \forall g \in K_{\mathrm{s}}\}$$

den simultanen Eigenräumen. Da unsere Gruppe kommutativ ist, müssen alle $g \in K$ jeden dieser simultanen Eigenräume V_i stabilisieren. Nach Übung 4.4.5.11 über die simultane Trigonalisierbarkeit finden wir also eine Basis von V, bezüglich derer alle Elemente von K_{s} durch Diagonalmatrizen dargestellt werden und alle Elemente von K durch obere Dreiecksmatrizen. In dieser Einbettung $K \not\subset \mathrm{GL}(n; k)$ ist dann aber offensichtlich, daß K_{s} und K_{u} abgeschlossene Untergruppen von K sind, daß der halbeinfache Anteil von $g \in K$ genau sein diagonaler Anteil ist, und daß $g \mapsto g_{\mathrm{s}}$ ein Morphismus von algebraischen Gruppen sein muß. Weiter können wir dann eine inverse Abbildung zur Bijektion aus der Proposition explizit angeben als $g \mapsto (g_{\mathrm{s}}, gg_{\mathrm{s}}^{-1})$. Da das auch ein Morphismus ist, folgt die Proposition. □

Beispiel 9.1.5.11 (**Jordanzerlegung in endlichen Gruppen**). Jede endliche Gruppe kann über einem vorgegebenen algebraisch abgeschlossenen Körper k auch als algebraische Gruppe aufgefaßt werden. Dann besteht $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ aus halbeinfachen Elementen für m teilerfremd zur Charakteristik von p, da es nach 4.4.4.17 als die Untergruppe von $k^\times$ der m-ten Einheitswurzeln realisiert werden kann. Ist dahingegen m eine p-Potenz, so sind für jede Einbettung unserer Gruppe in eine Matrizengruppe alle Eigenwerte m-te Einheitswurzeln, also Eins, und unsere Gruppe besteht folglich aus unipotenten Elementen. Im allgemeinen liefert für $m = p^r n$ mit n teilerfremd zu p der chinesische Restsatz einen Isomorphismus $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, und der liefert auch schon die Jordanzerlegung in dieser kommutativen Gruppe. Im allgemeinen zerlegt sich jedes Element wie in der von ihm erzeugten zyklischen Gruppe. Der folgende Satz 9.1.6.2 liefert dann einen neuen Beweis unserer Erkenntnis 8.1.1.26, daß jede p-Gruppe in Charakteristik p bis auf Isomorphismus nur eine einzige irreduzible Darstellung hat, nämlich

eben die Einsdarstellung. Aus 9.1.6.3 kann man sogar folgern, daß jede p-Gruppe auflösbar ist.

Übungen

Übung 9.1.5.12. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und G eine affine algebraische Gruppe über k. Man zeige, daß für $g \in G$ die Rechtsverschiebung $\rho(g) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ lokal halbeinfach beziehungsweise unipotent ist genau dann, wenn die Linksverschiebung $\lambda(g) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ die entsprechende Eigenschaft hat.

Übung 9.1.5.13. Man zeige, daß jeder surjektive Homomorphismus von affinen algebraischen Gruppen $G \twoheadrightarrow H$ Surjektionen $G_{\mathrm{s}} \twoheadrightarrow H_{\mathrm{s}}$ und $G_{\mathrm{u}} \twoheadrightarrow H_{\mathrm{u}}$ induziert.

Übung 9.1.5.14. Ist die Menge der halbeinfachen Elemente der $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ offen? Ist die Menge der halbeinfachen Elemente der $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ dicht?

Übung 9.1.5.15. In jeder affinen algebraischen Gruppe gilt: Das Inverse eines halbeinfachen Elements ist halbeinfach. Das Inverse eine unipotenten Elements ist unpotent. Das Produkt von zwei kommutierenden halbeinfachen Elementen ist halbeinfach. Das Produkt von zwei kommutierenden unipotenten Elementen ist unipotent. Hinweis: Einbettung in eine allgemeine lineare Gruppe.

Übung 9.1.5.16. In jeder affinen algebraischen Gruppe ist der Abschluß jeder kommutativen Untergruppe, die aus halbeinfachen Elementen besteht, wieder eine kommutative Untergruppe, die aus halbeinfachen Elementen besteht.

9.1.6 Unipotente Gruppen

Definition 9.1.6.1. Eine affine algebraische Gruppe heißt **unipotent**, wenn alle ihre Elemente unipotent sind.

Satz 9.1.6.2 (Irreduzible Darstellungen unipotenter Gruppen). *Die einzige irreduzible algebraische Darstellung einer unipotenten Gruppe ist die Einsdarstellung.*

Beweis. Sei k unser algebraisch abgeschlossener Grundkörper. Sei U unsere unipotente Gruppe und $\rho : U \to \mathrm{GL}(V)$ eine irreduzible algebraische Darstellung. Da jede algebraische Darstellung lokal endlich ist, dürfen wir V endlichdimensional annehmen. Nach der Verträglichkeit 9.1.5.5 der Jordanzerlegung mit Homomorphismen von affinen algebraischen Gruppen ist $\rho(g)$ unipotent für alle $g \in U$, woraus wir $\mathrm{tr}(\rho(g)) = \dim V$ folgern. Es folgt weiter sogar

$$0 = \mathrm{tr}(\rho(g)\rho(h) - \rho(g)) = \mathrm{tr}(\rho(g) \circ (\rho(h) - \mathrm{id}))$$

für alle $g, h \in U$. Da V einfach ist, müssen nach dem Satz von Wedderburn 8.3.3.6 die $\rho(g)$ für $g \in U$ bereits $\operatorname{End}_k(V)$ als k-Vektorraum erzeugen. Es folgt unmittelbar $\operatorname{tr}(A(\rho(h) - \mathrm{id})) = 0$ für alle $A \in \operatorname{End}_k V$ und damit $\rho(h) = \mathrm{id}$ für alle $h \in U$. □

Korollar 9.1.6.3 (Unipotente Untergruppen von $\mathrm{GL}(V)$). *Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V und eine abgeschlossene unipotente Untergruppe $U \subset \mathrm{GL}(V)$ gibt es stets eine Basis von V, bezüglich derer alle Elemente von U obere Dreiecksmatrizen sind mit Einsen auf der Diagonale.*

Beweis. Wir wählen eine Folge $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ von Unterdarstellungen der Darstellung V derart, daß für jeden Indes $i < n$ unser V_i eine maximale echte Unterdarstellung von V_{i+1} ist. Nach 9.1.6.2 operiert U trivial auf den Subquotienten V_i/V_{i-1} und diese sind eindimensional. Wählen wir eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V mit $V_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$ für $1 \leq i \leq n$, so operieren folglich alle $g \in U$ bezüglich dieser Basis durch obere Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen. □

Korollar 9.1.6.4 (Gruppen aus unipotenten Matrizen). *Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem beliebigen Körper und eine Untergruppe $U \subset \mathrm{GL}(V)$, die aus unipotenten Automorphismen besteht, gibt es stets eine Basis von V, bezüglich derer alle Elemente von U obere Dreiecksmatrizen sind mit Einsen auf der Diagonale.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß es einen simultanen Fixvektor gibt. Indem wir die Skalare erweitern, dürfen wir unseren Grundkörper algebraisch abgeschlossen annehmen. Der Zariski-Abschluß von U ist aber nach 9.1.1.32 auch eine Untergruppe und besteht nach 9.1.5.7 aus unipotenten Elementen. Damit folgt die Aussage aus dem vorhergehenden Korollar 9.1.6.3. □

9.1.6.5. Jede unipotente algebraische Gruppe ist nilpotent im Sinne von 6.1.3.10. In der Tat ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ bereits die Gruppe der unipotenten oberen $(n \times n)$-Dreiecksmatrizen nilpotent, vergleiche 6.1.3.13.

Übungen

Übung 9.1.6.6. Man zeige, daß in der kontragredienten Darstellung zur Darstellung des Gruppenrings $\mathcal{O}(k)$ der additiven Gruppe mit der Operation durch Rechtstranslation die Nulldarstellung die einzige algebraische Unterdarstellung ist. Insbesondere induziert die Einbettung der Unterdarstellung der konstanten Funktionen $k \hookrightarrow \mathcal{O}(k)$ keine Surjektion auf den maximalen algebraischen Unterdarstellungen der kontragredienten Darstellungen.

9.1.7 Diagonalisierbare Gruppen

Definition 9.1.7.1. Eine affine algebraische Gruppe heißt **diagonalisierbar**, wenn sie als abgeschlossene Untergruppe in eine Gruppe von Diagonalmatrizen eingebettet werden kann.

9.1.7.2. Eine affine algebraische Gruppe über $k = \bar{k}$ heißt also in Formeln diagonalisierbar, wenn sie isomorph ist zu einer abgeschlossenen Untergruppe $D \mathrel{\underline{\subset}} T_n$ der Gruppe $T_n \mathrel{\underline{\subset}} \mathrm{GL}(n;k)$ der Diagonalmatrizen.

Definition 9.1.7.3. Eine affine algebraische Gruppe über $k = \bar{k}$ heißt ein **Torus**, wenn sie isomorph ist zu einem T_n oder gleichbedeutend zu einem endlichen Produkt von Kopien von $k^\times$.

9.1.7.4. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zu jeder endlich erzeugten abelschen Gruppe X konstruieren wir eine affine algebraische Gruppe

$$\mathfrak{D}(X) = \mathfrak{D}_k(X) := \mathrm{Ab}(X, k^\times)$$

Als zugrundeliegende Gruppe nehmen wir die Gruppe $\mathrm{Ab}(X, k^\times)$ der Gruppenhomomorphismen von X in die multiplikative Gruppe unseres Körpers. Die Struktur einer affinen Varietät legen wir durch die Bedingung fest, daß für ein- und jedes endliche Erzeugendensystem $E \subset X$ die Einschränkung auf E eine abgeschlossene Einbettung $\mathrm{Ab}(X, k^\times) \hookrightarrow \mathrm{Ens}(E, k^\times)$ von Varietäten sein soll. Der Nachweis, daß es so eine Struktur gibt und daß sie eindeutig bestimmt ist, sei dem Leser zur Übung überlassen. Wir erhalten so einen Funktor

$$\mathfrak{D} : \left\{ \begin{array}{c} \text{Endlich erzeugte abelsche} \\ \text{Gruppen} \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}} \to \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagonalisierbare affine} \\ \text{algebraische Gruppen über } k \end{array} \right\}$$

Wir zeigen im folgenden, daß dieser Funktor in Charakteristik Null eine Äquivalenz von Kategorien ist und in Charakteristik $p > 0$ eine Äquivalenz von Kategorien wird unter Einschränkung auf die volle Unterkategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen ohne p-Torsion.

Definition 9.1.7.5. Gegeben eine algebraische Gruppe G über $k = \bar{k}$ nennt man einen Homomorphismus von algebraischen Gruppen $G \to k^\times$ in die multiplikative Gruppe des Grundkörpers auch einen **Charakter** oder genauer einen **multiplikativen algebraischen Charakter von** G.

Definition 9.1.7.6. Gegeben eine algebraische Gruppe G über k wird die Menge

$$\mathfrak{X}(G) := \mathrm{GrpVar}(G, k^\times)$$

aller ihrer Charaktere selbst eine Gruppe $\mathfrak{X}(G)$ unter der punktweisen Multiplikation von Funktionen. Sie heißt die **Charaktergruppe von** G. Man notiert die Verknüpfung von $\mathfrak{X}(G)$, obwohl sie eine Multiplikation von Funktionen ist, meist additiv. Ich verwende in diesem Kontext die beiden Notationen

$$(\chi \dotplus \psi)(g) = (\chi + \psi)(g) := \chi(g)\psi(g) \quad \text{für alle } g \in G \text{ und } \chi, \psi \in \mathfrak{X}(G).$$

Die Vorschrift $\mathfrak{X}$ ist in offensichtlicher Weise ein Funktor $\mathfrak{X} : \mathrm{GrpVar} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$. Ich nenne diesen Funktor den **Charakterfunktor**.

9.1.7.7. Ist k ein Körper positiver Charakteristik $\operatorname{char} k = p > 0$, so gibt es in $k^\times$ keine nichttrivialen Elemente von p-Torsion, denn aus $a^p = 1$ folgt bekanntich $(a-1)^p = 0$ und so $a = 1$. In Charakteristik $p > 0$ können also die hier erklärten Charaktergruppen keine p-Torsion haben.

9.1.7.8 (**Schwierigkeiten der Notation**). Die allgemein übliche Notation $\chi + \psi$ ist insofern gefährlich, als nun $\chi + \psi$ einerseits als eine Summe von k-wertigen Funktionen auf G verstanden werden kann, die ihrerseits kein Charakter mehr wäre, andererseits aber auch als Summe in der Charaktergruppe. Was im Einzelfall gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen. Ich versuche zumindest zu Beginn, durch die Notation $\chi \dotplus \psi$ zu verdeutlichen, wenn die Summe in der Charaktergruppe gemeint ist.

Beispiel 9.1.7.9 (**Charaktere von** $k^\times$). Nach Übung 9.1.1.42 erhalten wir einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(k^\times)$ durch die Vorschrift $n \mapsto (z \mapsto z^n)$. Eine elegante Lösung für diese Übung besteht im übrigen in der Bemerkung, daß es nicht mehr Charaktere geben kann, da die fraglichen Funktionen bereits eine k-Basis von $\mathcal{O}(k^\times) \cong k[t, t^{-1}]$ bilden und da unsere Charaktere nach Artin 6.3.8.16 linear unabhängig sein müssen.

Beispiel 9.1.7.10 (**Charaktere von Produkten**). Gegeben algebraische Gruppen G, H liefern die Restriktionen unter den Einbettungen $G \hookrightarrow G \times H$, $g \mapsto (g, 1)$ und $H \hookrightarrow G \times H$, $h \mapsto (1, h)$ einen Gruppenisomorphismus

$$\mathfrak{X}(G \times H) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(H)$$

Die Umkehrabbildung wirft (χ, ξ) auf den Charakter $\chi \boxtimes \xi : (g, h) \mapsto \chi(g)\xi(h)$. Insbesondere erhalten wir einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(T_n)$$

durch $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1\varepsilon_1 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ mit $\varepsilon_i : T_n \to k^\times$ der Projektion auf den i-ten Diagonaleintrag.

Proposition 9.1.7.11 (**Funktionen auf diagonalisierbaren Gruppen**). *Gegeben eine diagonalisierbare affine algebraische Gruppe D über $k = \bar{k}$ gilt:*

1. *Die Charaktergruppe $\mathfrak{X}(D)$ ist endlich erzeugt und die Charaktere bilden eine k-Basis des Rings $\mathcal{O}(D)$ der regulären Funktionen;*

2. *Ein Homomorphismus $C \to D$ von diagonalisierbaren algebraischen Gruppen ist genau dann eine abgeschlossene Einbettung, wenn er auf den Charakteren eine Surjektion $\mathfrak{X}(D) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(C)$ induziert.*

Vorschau 9.1.7.12. In 9.2.2.14 können Sie zur Übung zeigen, daß die Charaktergruppe jeder affinen algebraischen Gruppe endlich erzeugt ist.

Beweis. Nach dem Satz über die lineare Unabhängigkeit von Charakteren 6.3.8.16 ist $\mathfrak{X}(D) \subset \mathcal{O}(D)$ stets eine über k linear unabhängige Teilmenge. Im Fall $D = T_n$ haben wir bereits in 9.1.7.10 einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(T_n)$ hergeleitet. Insbesondere ist $\mathfrak{X}(T_n)$ eine endliche erzeugte abelsche Gruppe und eine Basis von $\mathcal{O}(T_n) \cong k[X^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}^n]$. Ist $D \mathrel{\not\triangleleft} T_n$ eine abgeschlossene Untergruppe, so zeigt die Surjektion $\mathcal{O}(T_n) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(D)$, daß die Bilder der Charaktere aus $\mathfrak{X}(T_n)$ bereits $\mathcal{O}(D)$ als k-Vektorraum erzeugen. Wir folgern, daß $\mathfrak{X}(D)$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\mathcal{O}(D)$ sein muß, in anderen Worten eine Basis. Wir folgern zusätzlich, daß auch das Bild von $\mathfrak{X}(T_n) \to \mathfrak{X}(D)$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\mathcal{O}(D)$ sein muß, in anderen Worten stimmt also dieses Bild mit $\mathfrak{X}(D)$ überein und $\mathfrak{X}(D)$ ist endlich erzeugt. Wir zeigen noch den zweiten Teil. Ist $K \mathrel{\not\triangleleft} D$ eine abgeschlossene Untergruppe, so folgt aus $\mathfrak{X}(T_n) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(D)$ und $\mathfrak{X}(T_n) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(K)$ bereits $\mathfrak{X}(D) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(K)$. Induziert umgekehrt ein Morphismus eine Surjektion auf den Charakteren, so nach dem ersten Teil auch auf den regulären Funktionen. □

Satz 9.1.7.13 (Klassifikation der diagonalisierbaren Gruppen). *Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Hat k die Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$, so liefert der Funktor $\mathfrak{X}$ eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Diagonalisierbare affine} \\ \textit{algebraische Gruppen über } k \end{array} \right\} & \xrightarrow{\approx} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Endlich erzeugte abelsche} \\ \textit{Gruppen} \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}} \\ D & \mapsto & \mathfrak{X}(D) \end{array}$$

Hat k positive Charakteristik $\operatorname{char} k = p > 0$, so liefert derselbe Funktor eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Diagonalisierbare affine} \\ \textit{algebraische Gruppen über } k \end{array} \right\} & \xrightarrow{\approx} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Endlich erzeugte abelsche} \\ \textit{Gruppen ohne } p\textit{-Torsion} \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}} \\ D & \mapsto & \mathfrak{X}(D) \end{array}$$

Beweis. Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. Wir konstruieren zunächst einmal eine Adjunktion von Funktoren $(\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$. Gegeben eine diagonalisierbare algebraische Gruppe D über einem Körper $k = \bar{k}$ und eine endlich erzeugte abelsche Gruppe X betrachten wir dazu die Menge $\mathrm{AH} = \mathrm{AH}(D, X)$ aller Abbildungen $\varphi : D \times X \to k^\times$, die Homomorphismen von algebraischen Gruppen werden, wenn wir die zweite Variable festhalten, und Homomorphismen von diskreten Gruppen, wenn wir die zweite Variable festhalten. Das Kürzel meint „Adjunktionshelfer". Offensichtlich liefert das Exponentialgesetz der Mengenlehre Bijektionen

$$\mathrm{GrpVar}(D, \mathfrak{D}(X)) \xleftarrow{\sim} \mathrm{AH} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}(X, \mathfrak{X}(D)) = \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}(\mathfrak{X}(D), X)$$

und wir erhalten so eine Adjunktion von Funktoren $(\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$. Sobald wir nach Übung 9.2.2.14 wissen, daß $\mathfrak{X}(G)$ für jede affine algebraische Gruppe endlich erzeugt ist, liefert dasselbe Argument auch eine Adjunktion in dieser Allgemeinheit.

2. Die Koeinheit der Adjunktion liefert stets eine Surjektion $\varepsilon^\circ : X \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(\mathfrak{D}(X))$, da ihr Bild nach Konstruktion den Ring der regulären Funktionen $\mathcal{O}(\mathfrak{D}(X))$ als k-Ringalgebra erzeugt.

3. Der Kern $\ker \varepsilon^\circ$ besteht genau aus allen Elementen mit p-Torsion. In der Tat ist jede endlich erzeugte abelsche Gruppe X ein endliches Produkt von zyklischen Gruppen von Primpotenzordnung und von Kopien von $\mathbb{Z}$. Es reicht, die Behauptung für jeden der Faktoren zu prüfen, und das ist schnell gemacht. Hat X keine p-Torsion, so ist die Koeinheit der Adjunktion mithin ein Isomorphismus

$$\varepsilon = \varepsilon_X : \mathfrak{X}(\mathfrak{D}(X)) \xrightarrow{\sim} X$$

4. Der Funktor $\mathfrak{X}$ macht nur Isomorphismen zu Isomorphismen, denn gegeben $\varphi : C \to D$ folgt aus $\mathfrak{X}\varphi : \mathfrak{X}(C) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(D)$ mit der Beschreibung 9.1.7.11 der regulären Funktionen auf diagonalisierbaren Gruppen bereits $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(C)$. Für die Einheit der Adjunktion $\eta : D \to \mathfrak{D}(\mathfrak{X}(D))$ ist aber die Verknüpfung

$$\mathfrak{X}(D) \to \mathfrak{X}(\mathfrak{D}(\mathfrak{X}(D))) \to \mathfrak{X}(D)$$

von $\mathfrak{X}\eta_D$ mit $\varepsilon_{\mathfrak{X}(D)}$ die Identität nach der Dreiecksidentität für adjungierte Funktoren. Da nun $\mathfrak{X}(D)$ keine p-Torsion hat, ist $\varepsilon_{\mathfrak{X}(D)}$ ein Isomorphismus. Dasselbe folgt für $\mathfrak{X}\eta$ und damit für η und damit liefert unser Paar von adjungierten Funktoren in der Tat die behauptete Äquivalenz. $\square$

9.1.7.14. Wir erinnern den Funktor $\mathrm{Max} : \mathrm{Kringo}_k^{\mathrm{re}} \to \mathrm{Ens}$ aus 7.3.4.7, der jedem ringendlichen k-Kring die Menge seiner maximalen Ideale zuordnet. Gegeben eine endlich erzeugte abelsche Gruppe X und ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ erhalten wir Bijektionen

$$\mathrm{Ab}(X, k^\times) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ralg}_k(kX, k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Max}(kX)$$

Von der Mitte nach links ordnen wir einem Ringalgebrenhomomorphismus seine Restriktion auf X zu, von der Mitte nach rechts seinen Kern. Wir erinnern den verfeinerten Funktor des Maximalspektrums $\mathrm{Max} : \mathrm{Kringo}_k^{\mathrm{re}} \to \mathrm{Varaff}_k$ aus 7.3.4.8 und prüfen unschwer, daß unsere Bijektion sogar ein Isomorphismus von affinen k-Varietäten ist. Weiter ist der Gruppenring sogar eine kommutative Hopf-Algebra mit der Komultiplikation

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & kX & \to & kX \otimes kX \\ & \chi & \mapsto & \chi \otimes \chi \end{array}$$

alias ein Gruppenobjekt in $\mathrm{Kringo}_k^{\mathrm{re}}$. Für die davon wegen der Verträglichkeit von Max mit endlichen Produkten 7.3.4.23 induzierte Gruppenstruktur auf dem Maximalspektrum ist unsere Bijektion ein Isomorphismus von affinen algebraischen Gruppen

$$\mathrm{Ab}(X, k^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Max}(kX)$$

Vorschau 9.1.7.15. Unser quasiinverser Funktor oben liefert für jeden Kring k einen volltreuen Funktor

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Hopfalgebren} \\ \text{über } k \end{array} \right\} & \leftarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{Abelsche} \\ \text{Gruppen} \end{array} \right\} \\ kX & \leftarrow\!\shortmid & X \end{array}$$

Er landet in den kommutativen kokommutativen Hopfalgebren und bildet endlich erzeugte abelsche Gruppen auf ringendliche Hopfalgebren ab. Er liefert weiter eine Äquivalenz zwischen endlich erzeugten abelschen Gruppen und solchen Hopfalgebren über k, die isomorph sind zu Quotienten von Laurentpolynomen in mehreren Veränderlichen $k[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$. In der Sprache der Gruppenschemata bedeutet das insbesondere für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper k eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagonalisierbare affine} \\ \text{Gruppenschemata über } k \end{array} \right\} & \xrightarrow{\approx} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Endlich erzeugte} \\ \text{abelsche Gruppen} \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}} \\ D & \mapsto & \mathfrak{X}(D) \end{array}$$

Ergänzung 9.1.7.16. Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe X ist nach 4.4.4.5 isomorph zu einem Produkt von zyklischen Gruppen von Primpotenzordnung. Der Gruppenring kX ist isomorph zum Tensorprodukt der Gruppenringe der Faktoren und ist nach 7.3.1.5 nilpotentfrei genau dann, wenn alle Tensorfaktoren es sind. Nun haben wir jedoch $k[t]/\langle t^q - 1\rangle \xrightarrow{\sim} k(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ vermittels der Abbildung, die t auf den natürlichen Erzeuger der zyklischen Gruppe in ihrem Gruppenring abbildet, und die linke Seite ist genau dann nilpotentfrei, wenn das Polynom $t^q - 1$ keine mehrfachen Nullstellen in k hat, als da heißt, für q teilerfremd zur Charakteristik von k.

Definition 9.1.7.17. Sei Ω eine Menge. Ein **Ω-graduierter Vektorraum** ist ein Vektorraum V mitsamt einer Familie von Untervektorräumen $(V_\omega)_{\omega\in\Omega}$ derart, daß gilt $V = \bigoplus_{w\in\Omega} V_\omega$. Ein Morphismus von Ω-graduierten Vektorräumen V, W ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(V_\omega) \subset W_\omega \ \forall \omega \in \Omega$.

Definition 9.1.7.18. Gegeben eine Darstellung V einer Gruppe G und ein Gruppenhomomorphismus $\chi : G \to k^\times$ in die multiplikative Gruppe des Grundkörpers von V erklärt man den zugehörigen **Gewichtsraum** als

$$V_\chi := \{v \in V \mid gv = \chi(g)v \ \forall g \in G\}$$

Satz 9.1.7.19 (**Darstellungen von diagonalisierbaren Gruppen**). *Gegeben eine diagonalisierbare affine algebraische Gruppe D mit Charaktergruppe $\mathfrak{X}(D)$ liefert das Zerlegen in Gewichtsräume eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{algebraische Darstellungen} \\ \textit{der Gruppe } D \end{array} \right\} & \xrightarrow{\approx} & \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{X}(D)\textit{-graduierte} \\ k\textit{-Vektorräume} \end{array} \right\} \\ (D \looparrowright V) & \mapsto & V = \bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}(D)} V_\chi \end{array}$$

Beweis. Das folgt ohne weitere Schwierigkeiten aus dem Satz über simultane Diagonalisierbarkeit 4.7.8.10. Die Details bleiben dem Leser zur Übung überlassen. □

Vorschau 9.1.7.20. Das ist sogar eine Äquivalenz von Schmelzkategorien im Sinne von 18.1.6.1, wenn wir Verschmelzungen von Darstellungen als äquivariante multilineare Abbildungen verstehen wie in 18.2.2.14 und Verschmelzungen von Ω-graduierten Vektorräumen als homogene multilineare Abbildungen wie in 18.1.3.23.

Definition 9.1.7.21. Gegeben eine algebraische Darstellung V einer diagonalisierbaren affinen algebraischen Gruppe D bezeichnet man mit

$$\mathrm{P}(V) = \mathrm{P}_D(V) := \{\chi \in \mathfrak{X}(D) \mid V_\chi \neq 0\}$$

die Menge aller Charaktere unserer Gruppe, die in unserer Darstellung auftreten, und nennt die Elemente dieser Menge die **Gewichte von** V. Die Notation geht auf französisch „poids“ zurück.

Satz 9.1.7.22 (**Starrheit von diagonalisierbaren Gruppen**). *Seien D, T diagonalisierbare affine algebraische Gruppen, V eine zusammenhängende affine Varietät und*

$$\Phi : V \times D \to T$$

ein Morphismus derart, daß die Abbildung $\Phi_v : D \to T$, $g \mapsto \Phi(v, g)$ für alle $v \in V$ ein Gruppenhomomorphismus ist. So ist Φ_v unabhängig von v.

Beweis. Man betrachte die Verknüpfung Φ^* des Komorphismus $\Phi^\sharp$ mit der kanonischen Identifikation, also die Verknüpfung

$$\mathcal{O}(T) \quad \to \quad \mathcal{O}(V \times D) \quad \tilde{\to} \quad \mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{O}(D)$$

Gegeben $h \in \mathcal{O}(T)$ haben wir $\Phi^*(h) = f_1 \otimes \chi_1 + \ldots + f_n \otimes \chi_n$ mit $\chi_i \in \mathfrak{X}(D)$ paarweise verschieden. Ist $h = \chi \in \mathfrak{X}(T)$ ein Charakter, so muß $\Phi_v^\sharp(\chi)$ für jedes $v \in V$ ein Charakter sein, also muß an jeder Stelle $v \in V$ genau ein f_i den Wert Eins annehmen und die anderen den Wert Null. Da V zusammenhängend ist, folgt $\Phi^*(\chi) = 1 \otimes \chi_i$ für ein i. Mithin ist für jeden Charakter χ sein Bild $\Phi_v^\sharp(\chi)$ unter den Komorphismen der Φ_v unabhängig von v. Da die Charaktere von T bereits $\mathcal{O}(T)$ erzeugen, ist damit $\Phi_v^\sharp$ unabhängig von v und dann auch Φ_v selbst. $\square$

Übungen

Übung 9.1.7.23. Eine kommutative affine algebraische Gruppe, in der jedes Element halbeinfach ist, ist diagonalisierbar.

Übung 9.1.7.24. Ein Morphismus $D \to T$ von diagonalisierbaren Gruppen ist genau dann eine abgeschlossene Einbettung, wenn die zugehörige Abbildung auf den Charaktergruppen eine Surjektion $\mathfrak{X}(T) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(D)$ induziert.

Übung 9.1.7.25.

1. Eine Sequenz $T \to D \to E$ von diagonalisierbaren Gruppen in Charakteristik Null ist genau dann exakt, wenn die Sequenz der zugehörigen Charaktergruppen $\mathfrak{X}(E) \to \mathfrak{X}(D) \to \mathfrak{X}(T)$ exakt ist;

2. Gegeben ein Homomorphismus $D \to E$ von diagonalisierbaren Gruppen in Charakteristik $p > 0$ mit Kern $K \not\trianglelefteq D$ besteht der Kern der Einschränkung $\mathfrak{X}(D) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(K)$ aus allen $\chi \in \mathfrak{X}(D)$ mit $p^n\chi \in \operatorname{im}(\mathfrak{X}(E) \to \mathfrak{X}(D))$ für hinreichend großes n;

3. Eine Sequenz $T \to D \to E$ von diagonalisierbaren Gruppen in Charakteristik $p > 0$ ist genau dann exakt, wenn die Sequenz der zugehörigen Charaktergruppen $\mathfrak{X}(E) \to \mathfrak{X}(D) \to \mathfrak{X}(T)$ Komposition Null hat und in der Mitte $(\ker/\operatorname{im})$ eine endliche p-Gruppe ist.

Übung 9.1.7.26. Seien $G \supset D$ eine affine algebraische Gruppe und eine diagonalisierbare abgeschlossene Untergruppe. Man zeige, daß jeder Charakter von D in mindestens einer Darstellung von G als Gewicht vorkommt.

9.1.8 Darstellungen von $\mathrm{SL}(2; k)$

9.1.8.1. Dieser Abschnitt besteht weitgehend aus Übungen. Verschiedene Teile dieser Übungen werden später bei der Diskussion von Wurzelsystemen und reduktiven Gruppen benötigt. Daneben scheinen mir diese Inhalte aber auch als Beispielmaterial wichtig.

Satz 9.1.8.2 (**Algebraische Darstellungen von** $\mathrm{SL}(2)$)**.** *Für $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $T \subset B \subset \mathrm{SL}(2;k)$ der Torus der Diagonalmatrizen sowie die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Determinate Eins gilt:*

1. *Gegeben ein Erzeuger $\varepsilon \in \mathfrak{X}(T)$ der Gruppe der Charaktere von T erhalten wir eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Irreduzible algebraische Darstellungen} \\ \textit{von } \mathrm{SL}(2;k) \textit{ bis auf Isomorphie} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$$

   durch die Vorschrift $L \mapsto \sup\{n \mid L_{n\varepsilon} \neq 0\}$, die in Worten jeder irreduziblen Darstellung L die maximale natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ zuordnet, für die $n\varepsilon$ ein T-Gewicht von L ist;

2. *Wählen wir den Charakter $\varepsilon : T \xrightarrow{\sim} k^\times$, $\mathrm{diag}(c, c^{-1}) \mapsto c$ als Erzeuger der Charaktergruppe von T, so ist der zum maximalen n aus Teil 1 gehörige Gewichtsraum $L_{n\varepsilon}$ die eindeutig bestimmte B-stabile Gerade von L;*

3. *In der von der Operation auf k^2 induzierten Operation von $\mathrm{SL}(2;k)$ auf $\mathcal{O}(k^2) \cong k[X,Y]$ haben die Unterdarstellungen $k[X,Y]^{(m)}$ der homogenen Polynome vom Grad m jeweils genau eine irreduzible Unterdarstellung L, und deren B-stabile Gerade hat das Gewicht $m\varepsilon$;*

4. *Im Fall der Charakteristik Null ist sogar $k[X,Y]^{(m)}$ selbst irreduzibel.*

Beweis. Der Beweis dieser Aussagen ist der Inhalt der folgenden Übungen. □

Übungen

Übung 9.1.8.3. ($k = \bar{k}$). Sei $B = B_\chi = k \rtimes T$ das semidirekte Produkt der additiven Gruppe mit einem Torus, mit einer Verknüpfung der Gestalt

$$(u,t)(v,s) = (u + \chi(t)v, ts)$$

für einen fest gewählten Charakter $\chi \in \mathfrak{X}(T)$, so daß also der durch die Konjugation mit $s \in T$ induzierte Automorphismus von k gerade die Multiplikation mit $\chi(s)$ ist. Man zeige, daß für jede algebraische Darstellung V von B und jede T-stabile Gerade $L \subset V_\lambda$ die Summe $L \oplus \bigoplus_{n>0} V_{\lambda+n\chi}$ der Gerade L und besagter Gewichtsräume von T ein unter B stabiler Teilraum ist und daß alle T-Gewichtsräume der von L erzeugten B-Unterdarstellung von V höchstens eindimensional sind. Hinweis: 9.1.4.21.

Übung 9.1.8.4 (**Bruhat-Zerlegung für** $\mathrm{SL}(2;k)$). Man verifiziere die Zerlegung $G = B \sqcup BsB$ im Fall $G = \mathrm{SL}(2;k)$ und B der Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen und $s \in G$ einem beliebigen Element mit Nullen auf der Diagonalen. Das gilt sogar für einen beliebigen Körper k.

Übung 9.1.8.5. $(k = \bar{k})$. Seien $T \subset \mathrm{SL}(2;k)$ der Torus der Diagonalmatrizen, B die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen, und $\bar{B}$ die Untergruppe der unteren Dreiecksmatrizen. Seien $\varepsilon : T \xrightarrow{\sim} k^\times$, $\mathrm{diag}(c, c^{-1}) \mapsto c$ besagter Erzeuger des Charaktergitters $\mathfrak{X}(T)$ und V eine algebraische Darstellung von $\mathrm{SL}(2;k)$. Man zeige:

1. Die Gruppe B ist ein semidirektes Produkt der in 9.1.8.3 betrachteten Art mit $\chi = 2\varepsilon$. Die Gruppe $\bar{B}$ ist ein semidirektes Produkt der in 9.1.8.3 betrachteten Art mit $\chi = -2\varepsilon$.

2. Für $\alpha := 2\varepsilon$ sind die Teilräume $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{n\alpha}$ und $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{n\alpha+\varepsilon}$ Unterdarstellungen von V.

3. Es gilt $\nu \in \mathrm{P}_T(V) \Rightarrow -\nu \in \mathrm{P}_T(V)$. Hinweis: Der Normalisator von T ist echt größer als sein Zentralisator.

4. Gegeben eine unter B stabile Gerade $L \subset V$ ist das k-Erzeugnis der $\bar{B}$-Bahn von $v \in L$ bereits G-stabil. Hinweis: 9.1.4.15.

5. Gegeben eine B-stabile Gerade $L \subset V$ ist die von L erzeugte G-Unterdarstellung enthalten in $L \oplus \bigoplus_{n>0} V_{\lambda-n\alpha}$ für $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$ das Gewicht von L. Nach 3 haben wir also notwendig $\lambda \in \mathbb{N}\varepsilon$. Hinweis: 4.

6. Jede irreduzible Darstellung von $\mathrm{SL}(2;k)$ besitzt genau eine B-stabile Gerade. Hinweis: 5.

7. Haben die B-stabilen Geraden irreduzibler Darstellungen V, W von $\mathrm{SL}(2;k)$ dasselbe T-Gewicht, so sind unsere Darstellungen isomorph. Hinweis: Gegeben von Null verschiedene Vektoren v, w der jeweiligen B-stabilen Gerade betrachte man die von $(v, w) \in V \oplus W$ erzeugte G-Unterdarstellung U und zeige, daß die Projektionen auf Surjektionen von U auf V und W sind mit demselben Kern, nämlich mit Kern der größten Unterdarstellung von U, die den Gewichtsraum vom Gewicht der B-stabilen Gerade nicht trifft.

8. In der von der Operation auf k^2 induzierten Operation von $\mathrm{SL}(2;k)$ auf $\mathcal{O}(k^2) \cong k[X,Y]$ bilden die Teilräume $k[X,Y]^{(m)}$ homogener Polynome vom Grad m Unterdarstellungen.

9. Wir erhalten eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Irreduzible algebraische Darstellungen} \\ \text{von } \mathrm{SL}(2;k)\text{, bis auf Isomorphie} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}\varepsilon$$

durch die Vorschrift, die jeder irreduziblen Darstellung das T-Gewicht ihrer eindeutig bestimmten B-stabilen Gerade zuordnet. Die Umkehrabbildung ordnet einem Gewicht $m\varepsilon$ mit $m \geq 0$ die eindeutig bestimmte irreduzible Unterdarstellung von $k[X,Y]^{(m)}$ zu.

10. In Charakteristik Null sind die Darstellungen $k[X,Y]^{(m)}$ alle schon selbst irreduzibel. In Charakteristik $p > 0$ ist $kX^p + kY^p \subset k[X,Y]^{(p)}$ die eindeutig bestimmte irreduzible Unterdarstellung.

Übung 9.1.8.6 (**Vollständige Reduzibilität in Charakteristik Null**). In Charakteristik Null ist jede Darstellung der Gruppe $\mathrm{SL}(2;k)$ isomorph zu einer direkten Summe irreduzibler Darstellungen. Hinweis: Wir können uns mit den Methoden von 8.2.3.4 auf den Fall einer endlichdimensionalen Darstellung V beschränken. Dann gibt es m mit $V_{m\varepsilon} \neq 0$ aber $V_{n\varepsilon} = 0$ für alle $n > m$. Jede Gerade in $V_{m\varepsilon}$ erzeugt eine Unterdarstellung, die nach 9.1.8.3 höchstens eindimensionale Gewichtsräume haben kann und folglich irreduzibel sein muß. Dasselbe gilt für die kontragrediente Darstellung V^*.

9.1.8.7. Ganz allgemein vereinbaren wir, daß wir unter einer **regulären Abbildung** einer affinen Varietät in einen unendlichdimensionalen Vektorraum eine Abbildung verstehen wollen, deren Bild einen endlichdimensionalen Teilraum erzeugt und die als Abbildung dorthin ein Morphismus von affinen Varietäten ist.

Ergänzende Übung 9.1.8.8. Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : H \to G$ von affinen algebraischen Gruppen und eine algebraische Darstellung W von G erhalten wir durch **Restriktion** eine algebraische Darstellung $\mathrm{res}^\varphi W = \mathrm{res}^H_G W$ von H. Für ihren Komorphismus gilt $\Delta_{\mathrm{res}^\varphi W} = (\varphi^\sharp \otimes \mathrm{id}_W) \circ \Delta_W$. Bezeichnet $G\text{-Mod}$ die Kategorie der algebraischen Darstellungen von G, so ist die Restriktion ein exakter Funktor

$$\mathrm{res}^H_G : G\text{-Mod} \to H\text{-Mod}$$

Er hat einen Rechtsadjungierten ind^G_H, die **Induktion**. Ganz analog zum topologischen Fall **??** kann die induzierte Darstellung konstruiert werden, indem wir den Vektorraum

$$\mathrm{ind}^G_H V := \{f : G \to V \text{ regulär} \mid f(\varphi(h)x) = hf(x)\ \forall h \in H, x \in G\}$$

aller H-äquivarianten regulären Abbildungen von G nach V betrachten und darauf eine G-Operation erklären durch die Vorschrift $(gf)(x) = f(xg)\ \forall g, x \in G$.

Ganz genauso wie in 25.2.4.1 liefern für jede endlichdimensionale algebraische Darstellung E von G die Isomorphismen $\operatorname{res}_G^H(E \otimes_k W) \xrightarrow{\sim} E \otimes_k (\operatorname{res}_G^H W)$ kanonische Isomorphismen

$$\operatorname{ind}_H^G \operatorname{Hom}_k(E, M) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_k(E, \operatorname{ind}_H^G M)$$

Wir können sie durch Übergang zum Dualraum von E umschreiben zu kanonischen Isomorphismen

$$\operatorname{ind}_H^G(F \otimes_k V) \xrightarrow{\sim} F \otimes_k (\operatorname{ind}_H^G V)$$

Durch Übergang zu Kolimites erhalten wir derartige kanonische Isomorphismen sogar für beliebige, nicht notwendig endlichdimensionale algebraische Darstellungen F von G. Sie heißen die **Tensoridentitäten**.

Ergänzende Übung 9.1.8.9. Man zeige, daß unsere Darstellungen $k[X,Y]^{(m)}$ aus Übung 9.1.8.5 induziert sind von eindimensionalen Darstellungen von B.

9.1.9 Tannaka-Krein-Dualität*

Proposition 9.1.9.1. *Ist $G \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ eine kompakte Untergruppe, so gibt es Polynome in den Matrixeinträgen $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{R}[X_{ij}]$ mit*

$$G = \{A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R}) \mid f_\rho(A) = 0 \ \forall \rho\}$$

9.1.9.2. Dieser Satz ist eine erste Formulierung der Erkenntnis, daß kompakte Liegruppen recht eigentlich algebraische Objekte sind.

Beweis. Wir betrachten auf $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ die Zariski-Topologie im Sinne von 7.1.1.15 und müssen in den dort eingeführten Notationen $G = \bar{G}$ zeigen, wobei sich der Abschluß auf die Zariski-Topologie von $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ bezieht. In der Tat bedeutet diese Gleichung gerade, daß G die Nullstellenmenge seines Verschwindungsideals ist, in Formeln $G = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(G))$. Da aber das Verschwindungsideal $\mathcal{I}(G)$ von G endlich erzeugt sein muß in $\mathbb{R}[X_{ij}]$ nach dem Hilbert'schen Basissatz, folgt $G = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_r)$ für ein endliche Familie von Polynomen $f_1, \ldots, f_r$. Die Proposition erweist sich damit als eine Umformulierung des Satzes, den wir gleich im Anschluß beweisen. □

Satz 9.1.9.3. *Jede metrisch kompakte Untergruppe von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ ist in Bezug auf die Zariski-Topologie abgeschlossen in $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$.*

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir, daß mit einer metrisch kompakten Untergruppe $G \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ auch ihr Zariski-Abschluß $\bar{G} \not\subset \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ eine metrisch

kompakte Untergruppe von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ ist. Indem wir ein invariantes Skalarprodukt wählen, dürfen wir ja ohne Beschränkung der Allgemeinheit $G \subset \mathrm{O}(n)$ annehmen, und da $\mathrm{O}(n)$ Zariski-abgeschlossen ist in $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$, folgt $\bar{G} \subset \mathrm{O}(n)$. Folglich ist auch $\bar{G}$ metrisch kompakt. Weiter ist mit G auch $\bar{G}$ stabil unter dem Transponieren von Matrizen und enthält folglich mit jedem Element auch dessen Inverses. Und schließlich impliziert $a \in G$ sofort $a \cdot G \subset G$ und $a \cdot \bar{G} \subset \bar{G}$ und dann folgt aus $b \in \bar{G}$ bereits $G \cdot b \subset \bar{G}$ und so $\bar{G} \cdot b \subset \bar{G}$ und wir erkennen, daß $\bar{G}$ unter der Matrixmultiplikation abgeschlossen ist. Mithin ist $\bar{G} \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ eine metrisch kompakte Untergruppe. Nach 15.4.9.13 haben wir nun den unteren Isomorphismus in einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X_{ij}]/\mathcal{I}(\bar{G}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{R}(\bar{G};\mathbb{R}) \\ \| & & \downarrow \\ \mathbb{R}[X_{ij}]/\mathcal{I}(G) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{R}(G;\mathbb{R}) \end{array}$$

Die Restriktion von $\bar{G}$ auf G induziert folglich eine Bijektion zwischen den Räumen der Matrixkoeffizienten beider Gruppen. Dasselbe folgt für komplexwertige Matrixkoeffizienten. Nun ist aber eine endlichdimensionale stetige Darstellung V unserer kompakten Hausdorffgruppe G, für die die Matrixkoeffizientenabbildung $V^* \otimes_{\mathbb{C}} V \to \mathcal{C}(G)$ injektiv ist, nach 15.4.9.17 bereits irreduzibel. Es folgt, daß die Restriktion von $\bar{G}$ auf G eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen einfacher stetiger Darstellungen liefern muß. Damit folgt, daß die Restriktion $\mathcal{R}(\bar{G}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}(G)$ auch mit den normierten invarianten Integralen auf $\bar{G}$ beziehungsweise G verträglich sein muß. Dann muß aus Stetigkeitsgründen auch die Restriktion $\mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(G)$ mit den normierten invarianten Integralen verträglich sein. Wäre aber $\bar{G} \neq G$, so gäbe es eine von Null verschiedene stetige Funktion $f : \bar{G} \to \mathbb{R}$ mit $f|_G = 0$, und das stünde im Widerspruch zu unserer Erkenntnis, daß die L^2-Norm stetiger Funktionen bei der Restriktion $\mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(G)$ erhalten bleibt. $\square$

Definition 9.1.9.4. Gegeben eine topologische Gruppe G bezeichne

$$\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(G) \subset \mathcal{R}(G) \subset \mathcal{C}(G)$$

den Ring der reellwertigen darstellenden Funktionen im Ring der komplexwertigen darstellenden Funktionen im Ring aller stetigen Funktionen.

Lemma 9.1.9.5. *Gegeben topologische Gruppen G, H definiert der offensichtliche Homomorphismus einen Isomorphismus*

$$\mathcal{R}(G) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{R}(H) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}(G \times H)$$

Beweis. Die Injektivität gilt für beliebige Funktionen. Das einzige Problem ist die Surjektivität. Andererseits haben wir für jede stetige endlichdimensionalen Darstellung

$$\rho : G \times H \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$$

die Matrizengleichung $\rho(g, h) = \rho(g, 1)\rho(1, h)$ und erhalten sofort die Surjektivität im Lemma. □

Lemma 9.1.9.6. *Das Vorschalten der Verknüpfungsabbildung einer topologischen Gruppe liefert einen Ringhomomorphismus*

$$\mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}(G \times G)$$

Beweis. Ist $\rho : G \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ eine stetige Darstellung, so ist die Matrix $\rho(xy)$ das Produkt der Matrizen $\rho(x)$ und $\rho(y)$ und ihre Koeffizienten liegen folglich im Bild von $\mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G)$. □

Übungen

Übung 9.1.9.7. Man zeige: Für jede topologische Gruppe G ist $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(G)$ beziehungsweise $\mathcal{R}(G)$ ein Gruppenobjekt in der opponierten Kategorie zur Kategorie der $\mathbb{R}$-Kringe beziehungsweise der $\mathbb{C}$-Kringe.

Übung 9.1.9.8. Der Ring der komplexwertigen darstellenden Funktionen auf der Gruppe $\mathbb{Z}$ mit ihrer diskreten Topologie wird als $\mathbb{C}$-Ringalgebra erzeugt von den Funktionen $n \mapsto \lambda^n$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ und von der Einbettung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}$.

9.2 Morphismen von Varietäten mit Anwendungen

Ich setzte von nun an Grundlagen der kommutativen Algebra und algebraischen Geometrie im Umfang von 7.1.1.1 bis 7.6.12.6 voraus. Der Leser mag das Konzept allgemeiner Varietäten zwar vorerst noch ignorieren und sie sich als naive affine Varietäten denken, aber spätestens bei der Konstruktion der Quotienten 9.3.6.2 wird er mit allgemeinen Varietäten umgehen müssen, wie wir sie in 7.6.4.2 einführen. Nach 7.6.4.6 erbt jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge einer Varietät in natürlicher Weise die Struktur einer Varietät. Nach 7.6.11.4 existieren in der Kategorie der Varietäten endliche Produkte und der Einbettungsfunktor von der Kategorie der affinen Varietäten in die Kategorie der Varietäten ist verträglich mit endlichen Produkten.

9.2.1 Komponenten algebraischer Gruppen

9.2.1.1. Ich beginne mit Erinnerungen. Ein topologischer Raum heißt **irreduzibel**, wenn er nicht leer ist und nicht als Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen geschrieben werden kann. Eine affine Varietät X ist nach 7.4.2.1 genau dann irreduzibel, wenn ihr Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(X)$ ein Integritätsring ist. Die maximalen irreduziblen Teilmengen einer Varietät heißen ihre **irreduziblen Komponenten**. Jeder topologische Raum ist die Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten und diese sind stets abgeschlossen. Jede Varietät besitzt nur endlich viele irreduzible Komponenten nach 7.4.1.12. Jedes endliche Produkt von irreduziblen Varietäten ist nach 7.6.11.5 wieder irreduzibel.

Proposition 9.2.1.2 (Komponenten algebraischer Gruppen). *1. Die irreduziblen Komponenten einer algebraischen Gruppe sind genau ihre Zusammenhangskomponenten;*

2. Die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements alias **Einskomponente** *einer algebraischen Gruppe ist eine abgeschlossene Untergruppe;*

3. Die irreduziblen Komponenten einer algebraischen Gruppe sind genau die Nebenklassen ihrer Einskomponente.

Beweis. Sei G unsere algebraische Gruppe und $G = G_1 \cup \ldots \cup G_r$ ihre Zerlegung in irreduzible Komponenten. Sicher gilt $G_i \cap G_j = \emptyset$ falls $i \neq j$, sonst gehörte ein Gruppenelement zu mehr als einer Komponente, also gehörte jedes Gruppenelement zu mehr als einer Komponente und dann hätten wir $G = G_2 \cup \ldots \cup G_r$ im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Zerlegung. Bezeichne nun G° die Einskomponente einer algebraischen Gruppe G. Dann muß $\mathrm{mult}(G^\circ \times G^\circ)$ irreduzibel sein, also in einer Komponente liegen, also in G°. Dasselbe gilt für $\mathrm{inv}(G^\circ)$.

Es folgt, daß G° eine abgeschlossene Untergruppe ist. Wegen $gG^\circ g^{-1} \ni 1$ folgt $G^\circ = gG^\circ g^{-1}$ und G° ist sogar Normalteiler. Die Nebenklassen von G° sind irreduzible Komponenten von G. Da sie G überdecken, kann es keine weiteren Komponenten geben. □

Lemma 9.2.1.3. *Jede abgeschlossene Untergruppe $H \trianglelefteq G$ von endlichem Index einer algebraischen Gruppe hat dieselbe Einskomponente, in Formeln*

$$|G/H| < \infty \quad \Rightarrow \quad H^\circ = G^\circ$$

Beweis. Seien $H \trianglelefteq G$ unsere algebraischen Gruppen. Hat H endlichen Index r in G, so folgt $G = Hg_1 \sqcup \ldots \sqcup Hg_r$ für endliches r, wobei wir ohne Einschränkung $g_1 = 1$ annehmen dürfen. Nach dem vorhergehenden haben wir auch eine endliche Zerlegung $H = H^\circ h_1 \sqcup \ldots \sqcup H^\circ h_s$, wobei wir ohne Einschränkung $h_1 = 1$ annehmen dürfen. Zusammen ergibt sich eine Zerlegung von G als endliche disjunkte Vereinigung von rs irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen $H^\circ g_i h_j$. Diese Zerlegung hinwiederum impliziert $H^\circ = G^\circ$. □

9.2.2 Irreduzibles Erzeugen

9.2.2.1. Ich beginne mit einer weiteren Erinnerung und Umformulierung einer allgemeinen Aussage über Bilder von Morphismen von Varietäten.

Satz 9.2.2.2 (über Bilder von Morphismen). *Gegeben ein Morphismus von Varietäten $\varphi : X \to Y$ gibt es stets eine Teilmenge $U \subset \varphi(X)$, die offen und dicht ist im Abschluß des Bildes $\overline{\varphi(X)}$, also $U \Subset \overline{\varphi(X)}$ und $\overline{U} = \overline{\varphi(X)}$.*

Beweis. Das folgt sofort aus dem affinen Fall, den wir in 7.5.4.12 behandelt hatten. □

Lemma 9.2.2.3. *Seien G eine algebraische Gruppe und $U, V \subset G$ mit U dicht und V offen und nichtleer. So gilt $UV = G$.*

Beweis. Gegeben $g \in G$ gilt $gV^{-1} \cap U \neq \emptyset$. Es gibt also $v \in V$ und $u \in U$ mit $gv^{-1} = u$ alias $g = uv$. □

Satz 9.2.2.4 (Bilder von Homomorphismen algebraischer Gruppen). *Jeder Homomorphismus von algebraischen Gruppen $\varphi : G \to H$ hat abgeschlossenes Bild und die Einskomponente seines Bildes ist das Bild der Einskomponente, in Formeln*

$$\varphi(G)^\circ = \varphi(G^\circ)$$

Beweis. Sei $\varphi : G \to H$ unser Homomorphismus. Nach 9.2.2.2 gibt es $U \subset \varphi(G)$ mit U offen und dicht in $\overline{\varphi(G)}$. Nach 9.1.1.32 ist $\overline{\varphi(G)} \subset H$ eine Untergruppe. Nach 9.2.2.3 folgt erst $\overline{\varphi(G)} = U^2$ und dann $\overline{\varphi(G)} = \varphi(G)^2 = \varphi(G)$. Das zeigt die erste Behauptung. Da nun $\varphi(G^\circ) \subset \varphi(G)$ eine abgeschlossene Untergruppe von endlichem Index sein muß, folgt $\varphi(G^\circ) \supset \varphi(G)^\circ$ aus 9.2.1.3. Wegen der Irreduzibilität von $\varphi(G^\circ)$ ergibt sich dann schließlich $\varphi(G^\circ) = \varphi(G)^\circ$. □

Satz 9.2.2.5 (Irreduzibles Erzeugen). *Sei G eine algebraische Gruppe und sei $(\varphi_i : X_i \to G)_{i\in I}$ eine Familie von Morphismen irreduzibler Varietäten nach G, deren Bilder alle das neutrale Element enthalten, in Formeln $1 \in \varphi_i(X_i)\ \forall i \in I$. So gilt:*

1. *Die von diesen Bildern erzeugte Untergruppe $H := \langle \varphi_i(X_i) \mid i \in I\rangle$ ist abgeschlossen in G;*

2. *Es gibt endliche Folgen $i(1), \ldots, i(r) \in I$ und $\varepsilon(1), \ldots, \varepsilon(r) \in \{1, -1\}$ mit*

$$H = \varphi_{i(1)}(X_{i(1)})^{\varepsilon(1)} \ldots \varphi_{i(r)}(X_{i(r)})^{\varepsilon(r)}$$

Beispiele 9.2.2.6. Das Beispiel der einelementigen Familie $\varphi : \{0, 1\} \hookrightarrow \mathbb{C}$ zeigt, daß die Forderung X_i irreduzibel wesentlich ist: In diesem Fall wäre $H = \mathbb{Z}$ nicht abgeschlossen in der Zariski-Topologie. Das Beispiel der einelementigen Familie $\varphi : \{1\} \hookrightarrow \mathbb{C}$ zeigt, daß auch die Forderung wesentlich ist, $\varphi_i(X_i)$ möge jeweils das neutrale Element von G enthalten.

Beweis. Indem wir notfalls I verdoppeln, dürfen wir annehmen, daß mit φ_i auch $\mathrm{inv} \circ \varphi_i$ zu unserer Familie gehört. Gegeben eine endliche Folge $\alpha : \{1, \ldots, n\} \to I$ betrachte man nun die Varietät $Y_\alpha := X_{\alpha(1)} \times \ldots \times X_{\alpha(n)}$ und den Morphismus $\varphi_\alpha : Y_\alpha \to G$ gegeben durch $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \varphi_{\alpha(1)}(x_1) \ldots \varphi_{\alpha(n)}(x_n)$. Sicher haben wir dann

$$H = \bigcup_\alpha \varphi_\alpha(Y_\alpha)$$

wo die Vereinigung wie angedeutet über alle endlichen Folgen zu bilden ist. Da das neutrale Element zu den Bildern all unserer Morphismen gehört, haben wir auch $\varphi_\alpha(Y_\alpha) \subset \varphi_{\alpha\beta}(Y_{\alpha\beta}) \supset \varphi_\beta(Y_\beta)$ mit der Notation $\alpha\beta$ für das Hintereinanderschreiben zweier endlicher Folgen α, β. Da alle Y_α irreduzibel sind, müssen auch alle $\overline{\varphi_\alpha(Y_\alpha)}$ irreduzibel sein. Da die Länge echt aufsteigender Ketten irreduzibler abgeschlossener Teilmengen von G begrenzt ist durch die Krulldimension von G, gibt es ein γ mit $\overline{\varphi_\alpha(Y_\alpha)} \subset \overline{\varphi_\gamma(Y_\gamma)}\ \forall\alpha$. Es folgt $H \subset \overline{\varphi_\gamma(Y_\gamma)}$. Nun enthält $\varphi_\gamma(Y_\gamma)$ jedoch nach 9.2.2.2 eine offene dichte Teilmenge U seines Abschlusses und wir finden ein Sandwich

$$U \subset \varphi_\gamma(Y_\gamma) \subset H \subset \overline{\varphi_\gamma(Y_\gamma)}$$

Dann ist erst recht U offen und dicht in $\overline{H}$ und wegen 9.2.2.3 folgt $U^2 = \bar{H}$, also $H = \bar{H} = \varphi_{\gamma\gamma}(Y_{\gamma\gamma})$. □

Definition 9.2.2.7. Gegeben Teilmengen A, B einer Gruppe G bezeichne (A, B) die von allen Kommutatoren $(a, b) := aba^{-1}b^{-1}$ mit $a \in A$ und $b \in B$ erzeugte Untergruppe. Die von allen Kommutatoren erzeugte Untergruppe (G, G) heißt auch die **derivierte Gruppe**.

9.2.2.8. Sind A und B Normalteiler, so ist auch (A, B) ein Normalteiler. Die derivierte Gruppe ist der kleinste Normalteiler derart, daß wir beim Wegteilen eine abelsche Gruppe erhalten.

Korollar 9.2.2.9. *Seien G eine algebraische Gruppe und $H, K \subset G$ Untergruppen mit H zusammenhängend und abgeschlossen. So ist auch der Kommutator (H, K) von H und K zusammenhängend und abgeschlossen.*

9.2.2.10. Gegeben eine zusammenhängende algebraische Gruppe G ist insbesondere ihre derivierte Gruppe (G, G) abgeschlossen in G und zusammenhängend.

Beweis. Wir betrachten für alle $b \in K$ den Morphismus $\varphi_b : H \to G$, $h \mapsto hbh^{-1}b^{-1}$. Per definitionem ist (H, K) das Gruppen-Erzeugnis der Bilder der φ_b. Das Korollar folgt damit aus Satz 9.2.2.5 über das irreduzible Erzeugen. □

Korollar 9.2.2.11. *Gegeben eine Familie $(G_i)_{i\in I}$ von abgeschlossenen zusammenhängenden Untergruppen einer algebraischen Gruppe ist das Gruppenerzeugnis H der G_i abgeschlossen in G und es gibt eine endliche Folge $i(1), \ldots, i(n)$ in der Indexmenge I mit*

$$H = G_{i(1)} \ldots G_{i(n)}$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Satz 9.2.2.5 über das irreduzible Erzeugen. □

Satz 9.2.2.12 (Invertierbare Elemente algebraischer Monoide). *In jedem algebraischen Monoid bilden die invertierbaren Elemente eine offene Teilmenge.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß es eine offene Umgebung des neutralen Elements gibt, die aus invertierbaren Elementen besteht. Sei zunächst G ein irreduzibles algebraisches Monoid und $d = \operatorname{kdim} G$ seine Dimension. Die Verknüpfung $G \times G \to G$ hat keine leere Faser. Nach unseren Erkenntnissen 7.5.9.12 über die Mindestdimension von Fasern hat folglich jede irreduzible Komponente jeder Faser mindestens dieselbe Dimension wie G. Sei $Z \not\subset G \times G$ eine irreduzible Komponente der Faser über e mit $(e, e) \in Z$. Die Projektion auf die erste Komponente $\mathrm{pr}_1 : Z \to G$ hat eine einelementige Faser über e und muß folglich wieder nach 7.5.9.12 dominant sein. Das Bild $\mathrm{pr}_1(Z) \subset G$ umfaßt folglich eine offene dichte Teilmenge $U \Subset G$ und nach Konstruktion gibt es für alle $x \in U$ ein $y \in G$

mit $xy = e$. Ebenso finden wir eine offene dichte Teilmenge $V \Subset G$ derart, daß es für alle $x \in V$ ein $z \in G$ gibt mit $zx = e$. Alle Elemente der offenen dichten Teilmenge $U \cap V \Subset G$ sind nach 2.2.2.16 also invertierbar. Da Produkte invertierbarer Elemente wieder invertierbar sind, ist für $x \in U \cap V$ die verschobene Menge $x^{-1}(U \cap V)$ eine offene Umgebung des neutralen Elements, die aus invertierbaren Elementen besteht. Das erledigt den Fall eines irreduziblen Monoids. Ist G nicht notwendig irreduzibel, so zeigen wir zunächst, daß jede irreduzible Komponente $K \mathrel{\not\triangleleft} G$ durch das neutrale Element ein Untermonoid ist. In der Tat muß die Verknüpfung $K \times K$ in eine irreduzible Komponente von G abbilden, die K umfaßt und die folglich mit K zusammenfällt. Nach dem bereits Bewiesenen bilden also die invertierbaren Elemente von K eine offene dichte Teilmenge $K^\times \Subset K$. Andererseits gilt für jede weitere irreduzible Komponente $L \mathrel{\not\triangleleft} G$ mit demselben Argument $KL = L$ und aus $L \cap K^\times \neq \emptyset$ folgt in derselben Weise $L = KL = K$. Der Satz folgt. □

Übungen

Übung 9.2.2.13. Der von einer irreduziblen das neutrale Element enthaltenden Teilmenge einer algebraischen Gruppe erzeugte Normalteiler ist stets abgeschlossen.

Übung 9.2.2.14. Man zeige: Die Charaktergruppe einer affinen algebraischen Gruppe ist stets endlich erzeugt. Hinweis: Für jede endlich ezeugte Untergruppe $X \subset \mathfrak{X}(G)$ erhalten wir einen surjektiven Homomorphismus von algebraischen Gruppen $\varphi_X : G \twoheadrightarrow \mathfrak{D}(X)$ und für $Y \supsetneq X$ gilt $\ker \varphi_Y \subsetneq \ker \varphi_X$.

9.2.3 Operationen algebraischer Gruppen

Definition 9.2.3.1. Sei M ein algebraisches Monoid. Eine **M-Varietät** ist eine Varietät X mit einer M-Operation $M \times X \to X$ derart, daß die Wirkungsabbildung $M \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx$ ein Morphismus ist.

Definition 9.2.3.2. Sei M ein abstraktes Monoid. Eine **schwache M-Varietät** ist eine Varietät X mit einer Operation von M durch Homomorphismen von Varietäten $X \to X$.

9.2.3.3. Sei X eine schwache M-Varität. Gegeben Teilmengen $S, T \subset X$ erklärt man den **Transporteur von S nach T** als die Teilmenge

$$\mathrm{Trans}_M(S, T) := \{g \in M \mid gS \subset T\}$$

Sicher gilt $\mathrm{Trans}_M(S, T) \subset \mathrm{Trans}_M(S, \bar{T}) = \mathrm{Trans}_M(\bar{S}, \bar{T})$.

9.2.3.4. Sei X eine M-Varität. Der Transporteur in eine abgeschlossene Teilmenge $A \not\subset X$ ist abgeschlossen als der Schnitt $\mathrm{Trans}_M(S, A) = \bigcap_{x \in S} \mathrm{Trans}_M(x, A)$ der Urbilder von A unter dem Morphismus $M \to X$, $g \mapsto gx$. Speziell ist für $A \not\subset X$ der **Stabilisator**

$$\mathrm{Stab}_M(A) := \mathrm{Trans}_M(A, A)$$

abgeschlossen und für $x \in X$ ist sein Isotropiemonoid $M_x = \mathrm{Stab}_M(\{x\})$ abgeschlossen. Schließlich ist für jede Teilmenge $S \subset X$ ihr **Zentralisator**

$$\mathrm{Z}_M(S) := \{g \in M \mid gx = x \ \forall x \in S\} = \bigcap_{x \in S} M_x$$

abgeschlossen als der Schnitt der Isotropiemonoide ihrer Elemente.

9.2.3.5. Ich erinnere daran, daß nach 7.6.12.1 eine Varietät X **separiert** heißt, wenn die Diagonale im Produkt unserer Varietät mit sich selber eine abgeschlossene Teilmenge $\Delta \not\subset X \times X$ ist.

9.2.3.6 (**Fixpunktmengen in separierten M-Varietäten**). Sei M ein Monoid. Gegeben eine separierte schwache M-Varietät X und eine Teilmenge $H \subset M$ ist die Menge der Fixpunkte

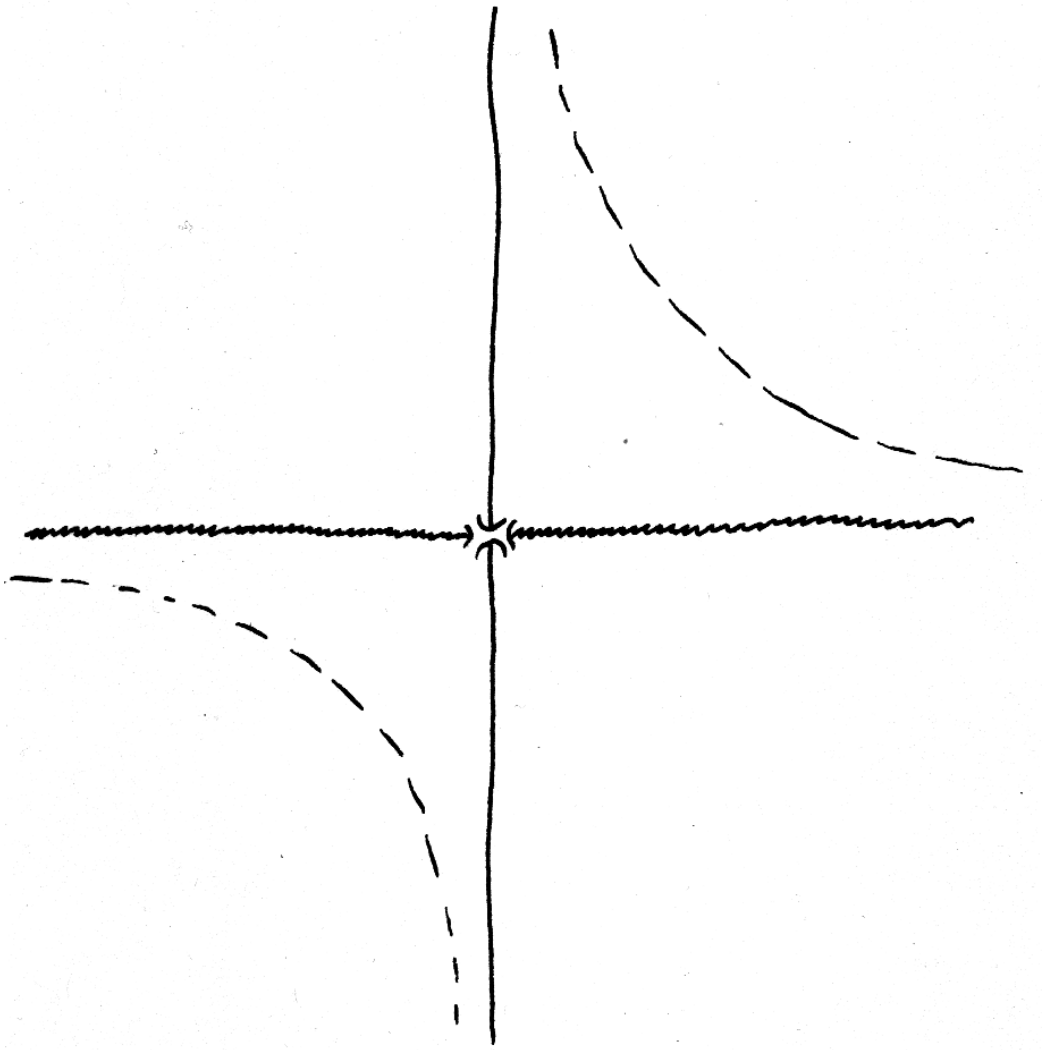
$$X^H := \{x \in X \mid hx = x \ \forall h \in H\} = \bigcap_{h \in H} X^h$$

abgeschlossen in X. In der Tat ist jedes X^h ist abgeschlossen als das Urbild der Diagonale unter dem Morphismus $X \to X \times X$, $x \mapsto (x, hx)$, vergleiche 7.6.12.13.

Satz 9.2.3.7 (Bahnen sind Varietäten). *Gegeben eine Varietät mit einer algebraischen Operation einer algebraischen Gruppe ist jede Bahn offen in ihrem Abschluß.*

Beweis. Seien G unsere Gruppe und X unsere G-Varietät. Für jeden Punkt $x \in X$ behaupten wir $Gx \Subset \overline{Gx}$. Um das zu zeigen, betrachten wir den Morphismus $\varphi : G \to X$, $g \mapsto gx$. Nach 9.2.2.2 umfaßt auch hier das Bild $\varphi(G) = Gx$ eine offene dichte Teilmenge seines Abschlusses, in Formeln $\exists U \subset Gx$ mit $U \Subset \overline{Gx}$ und $\bar{U} = \overline{Gx}$ und damit insbesondere $U \neq \emptyset$. Jetzt brauchen wir, daß eine Gruppe operiert und nicht nur ein Monoid, und damit folgt

$$Gx = \bigcup_{g \in G} gU \Subset \overline{Gx} \qquad \square$$



Operiert die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times$ auf $\mathbb{C}^2$ durch $t \mapsto \operatorname{diag}(t, t^{-1})$, so sind die Bahnen die Hyperbeln $xy = c$ für festes $c \in \mathbb{C}^\times$, die x-Achse ohne Ursprung, die y-Achse ohne Ursprung, und der Ursprung selber. Die beiden Achsen ohne Ursprung sind nicht abgeschlossen, aber offen in ihrem Abschluß. Die anderen Bahnen sind bereits abgeschlossen.

Korollar 9.2.3.8 (Existenz abgeschlossener Bahnen). *In jeder nichtleeren Varietät mit einer Operation einer algebraischen Gruppe besitzt unsere Gruppe mindestens eine abgeschlossene Bahn.*

Beweis. Sei G unsere algebraische Gruppe und X unsere G-Varietät. Für jeden Punkt $x \in X$ ist seine Bahn $Gx \Subset \overline{Gx}$ eine offene dichte Teilmenge ihres Abschlusses. Das Komplement $\overline{Gx} \backslash Gx$ ist damit abgeschlossen, G-stabil und von echt kleinerer Dimension als Gx. Mithin muß jede Bahn kleinstmöglicher Dimension abgeschlossen sein. □

Proposition 9.2.3.9 (Operationen unipotenter Gruppen auf affinen Varietäten). *Unter einer algebraischen Operation einer unipotenten Gruppe auf einer affinen Varietät sind alle Bahnen abgeschlossen.*

Beweis. Sei $U \looparrowright X$ unsere Operation. Der Raum

$$\{f \in \mathcal{O}(\overline{Ux}) \mid f|_{\overline{Ux} \backslash Ux} = 0\}$$

aller regulären Funktionen auf dem Abschluß der Bahn, die auf Komplement der Bahn verschwinden, ist stabil unter Translation mit U. Wäre die Bahn nicht abgeschlossen, so wäre dieser Raum von Funktionen nicht Null und müßte nach 9.1.6.2 auch eine von Null verschiedene U-invariante Funktion f enthalten. Das aber kann nicht sein, da jede U-invariante Funktion konstant ist auf $\overline{Ux}$. □

Übungen

Übung 9.2.3.10. Man zeige, daß im Kontext der Wirkung einer algebraischen Gruppe G auf einer Varietät X und einer abgeschlossenen Teilmenge $M \not\subset X$ stets gilt

$$\mathrm{Trans}_G(M, M) = \{g \in G \mid gM = M\}$$

Insbesondere ist der Stabilisator von M, wie er oben eingeführt wird, stets eine Untergruppe, und der Stabilisator einer abgeschlossenen Untergruppe $H \subset G$ unter der Operation durch Konjugation ist ihr Normalisator im Sinne der Gruppentheorie, vergleiche etwa 6.4.3.13 oder 16.3.2.7.

Übung 9.2.3.11. Man betrachte die Operation durch Konjugation von $\mathrm{GL}(n; k)$ auf $\mathrm{Mat}(n; k)$ und zeige, daß die abgeschlossenen Bahnen genau die Bahnen der diagonalisierbaren Matrizen sind. Man bestimme in diesem Fall die Dimensionen aller Bahnen. Man bestimme genauer, wann eine Bahn im Abschluß einer anderen Bahn liegt.

Übung 9.2.3.12. Ist $M \backslash X$ eine affine Varietät mit der Operation eines affinen algebraischen Monoids, so existiert eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V von M nebst einer äquivarianten abgeschlossenen Einbettung $X \hookrightarrow V$. Hinweis: Man argumentiere wie beim Beweis von 9.1.3.1. Mutige zeigen dasselbe auch ohne die Annahme M affin.

9.2.4 Flache Morphismen

9.2.4.1. Wir hatten in der kommutativen Algebra bemerkenswerte Resultate über geometrische Eigenschaften flacher Morphismen von affinen Varietäten gezeigt. Hier schreiben wir sie um auf den Fall beliebiger Varietäten. Das ist nicht weiter schwer und ermöglicht es uns, diese Aussagen so zu formulieren, wie wir sie im folgenden verwenden wollen. Ich erinnere daran daß ein Kringhomomorphismus $A \to B$ **flach** heißt, wenn die Erweiterung der Skalare $B \otimes_A : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ alias der Linksadjungierte des Restriktionsfunktors exakt ist.

Definition 9.2.4.2. Ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von Varietäten heißt **flach**, wenn für alle Punkte $x \in X$ der auf den lokalen Ringen induzierte Homomorphismus $\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ ein flacher Ringhomomorphismus ist.

9.2.4.3 (**Beispiele für Flachheit**). Ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von affinen Varietäten ist nach der Lokalität der Flachheit 7.4.3.42 genau dann flach, wenn der zugehörige Komorphismus $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ flach ist. Jede offene Einbettung von algebraischen Varietäten ist flach. Die Projektion einer Varietät auf einen Punkt ist stets flach.

9.2.4.4 (**Permanenzen der Flachheit**). Die Komposition flacher Morphismen von algebraischen Varietäten ist wieder flach. Gegeben $X \to Y$ ein flacher Morphismus von algebraischen Varietäten und Z eine beliebige Varietät ist auch der induzierte Morphismus $X \times Z \to Y \times Z$ flach.

Satz 9.2.4.5 (**Generische Flachheit**). *Gegeben ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von Varietäten gibt es eine offene dichte Teilmenge $U \Subset Y$ mit $\varphi : \varphi^{-1}(U) \to U$ flach.*

Beweis. Sind X und Y beide affin, so haben wir das in 7.5.5.5 gezeigt. Die allgemeine Aussage folgt unmittelbar. □

Satz 9.2.4.6 (**Offenheit flacher Morphismen**). *Jeder flache Morphismus von algebraischen Varietäten ist offen.*

Beweis. Das folgt sofort aus dem in 7.5.5.9 bewiesenen Spezialfall eines Morphismus affiner Varietäten. □

Satz 9.2.4.7 (**Flache Morphismen und Faserdimension**). *Gegeben ein flacher Morphismus $\varphi : X \to Y$ von einer nichtleeren äqui-n-dimensionalen Varietät zu einer äqui-m-dimensionalen Varietät gilt $n \geq m$ und gegeben eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Z \trianglelefteq Y$ haben wir für jede irreduzible Komponente K ihres Urbilds $\varphi^{-1}(Z)$ sowohl $\overline{\varphi(K)} = Z$ als auch*

$$\operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} K = \operatorname{kdim} Y - \operatorname{kdim} Z$$

Beweis. Im Fall affiner Varietäten hatten wir das bereits in 7.5.10.5 gezeigt. Der Fall, in dem zumindest Y affin ist, folgt unmittelbar. Der allgemeine Fall ist dann auch leicht einzusehen. □

Satz 9.2.4.8 (Halbstetigkeit der Faserdimension). *Gegeben ein Morphismus von Varietäten $\varphi : X \to Y$ ist die Funktion $\mathrm{f} : X \to \mathbb{N}$ der lokalen Faserdimension $\mathrm{f}(x) := \mathrm{kdim}_x \varphi^{-1}(\varphi(x))$ halbstetig auf X in dem Sinne, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{x \in X \mid \mathrm{f}(x) \geq n\}$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Das folgt sofort aus dem affinen Fall 7.5.10.7. □

9.2.4.9. Der Satz gilt für beliebige, nicht notwendig flache Morphismen. Ich habe ihn dennoch hier angefügt, da er recht eigentlich ein Korollar der vorhergehenden Sätze über generische Flachheit und Dimensionseigenschaften flacher Morphismen ist.

Definition 9.2.4.10. Eine Varietät mit der Operation einer algebraischen Gruppe heißt **homogen** oder ein **homogener Raum**, wenn sie aus genau einer Bahn besteht, wenn also die Gruppenwirkung transitiv ist.

Definition 9.2.4.11. Eine Varietät mit der Operation einer abstrakten Gruppe durch Automorphismen von Varietäten heißt **schwach homogen** oder ein **schwach homogener Raum**, wenn sie aus genau einer Bahn besteht, wenn also die Gruppenwirkung transitiv ist.

9.2.4.12 (**Flachheit äquivarianter Morphismen von homogenen Räumen**). Ein äquivarianter Morphismus von schwach homogenen Räumen ist stets flach. Das folgt unmittelbar aus der generischen Flachheit 9.2.4.5 zusammen mit der Homogenität.

Proposition 9.2.4.13 (Dimensionsformel). *Gegeben eine algebraische Gruppe G und eine G-Varietät X gilt für jeden Punkt $x \in X$ die Identität*

$$\mathrm{kdim}\, Gx + \mathrm{kdim}\, G_x = \mathrm{kdim}\, G$$

Beweis. Der Morphismus von homogenen Räumen $\varphi : G \to Gx$ gegeben durch $g \mapsto gx$ ist flach nach 9.2.4.12 als Morphismus von homogenen Räumen. Aufgrund der Homogenität sind G und Gx auch äquidimensional. Die Behauptung folgt damit aus den allgemeinen Eigenschaften flacher Morphismen 9.2.4.7. □

Satz 9.2.4.14 (Morphismen zu endlichen Körpererweiterungen). *Gegeben ein dominanter Morphismus $\varphi : X \to Y$ von irreduziblen Varietäten derselben Dimension gibt es eine offene nichtleere Teilmenge $V \Subset Y$ derart, daß gilt:*

1. *Die Faser über jedem Punkt $y \in V$ hat genau $[\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(Y)]_{\mathrm{s}}$ Elemente;*

2. *Sowohl V als auch $\varphi^{-1}(V)$ sind affin;*

3. *$\mathcal{O}(\varphi^{-1}(V))$ ist ein freier $\mathcal{O}(V)$-Modul vom Rang $[\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(Y)]$.*

Beweis. Sind X und Y affin, so haben wir das bereits in 7.5.4.15 gezeigt. Um uns auf diesen Fall zurückzuziehen, wählen wir eine offene dichte affine Teilmenge $W \Subset Y$ und eine offene dichte affine Teilmenge $U \Subset \varphi^{-1}(W)$. Dann finden wir eine von Null verschiedene reguläre Funktion $s \in \mathcal{O}(W)$, deren Nichtnullstellenmenge $\varphi(X \backslash U)$ nicht trifft, so daß also gilt $\varphi^{-1}(W_s) \subset U$. Schließlich nehmen wir die Nichtnullstellenmenge U_s als unser neues X und die Nichtnullstellenmenge W_s als unser neues Y und ziehen uns so auf den affinen Fall zurück. □

Proposition 9.2.4.15 (**Morphismen mit endlichen Fasern**). *Gegeben ein dominanter Morphismus von irreduziblen Varietäten $\varphi : X \to Y$ mit einer nichtleeren endlichen Faser ist die Körpererweiterung $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ endlich. Ist φ zusätzlich injektiv, so ist sie rein inseparabel.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien X und Y affin. Wäre die Körpererweiterung $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ nicht endlich, so folgte aus der Beschreibung der Dimension als Transzendenzgrad unmittelbar $\operatorname{kdim} X > \operatorname{kdim} Y$. Dann müßten aber alle nichtleeren Fasern unseres Morphismus nach 7.5.9.12 positive Dimension haben und insbesondere unendlich sein. Hätten wir weiter für den Separabilitätsgrad unserer Körpererweiterung $[\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(Y)]_s > 1$, so könnte φ nicht injektiv sein nach Proposition 9.2.4.14 über die Kardinalitäten von Fasern. □

Korollar 9.2.4.16 (**Birationale Morphismen homogener Räume**). *Ein birationaler äquivarianter Homomorphismus zwischen irreduziblen schwach homogenen Räumen ein- und derselben Gruppe ist stets ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach 9.2.4.14 gibt es für jeden birationalen Morphismus $\varphi : X \to Y$ von irreduziblen Varietäten eine offene dichte affine Teilmenge $V \Subset Y$ derart, daß φ einen Isomorphismus von Varietäten $\varphi : \varphi^{-1}(V) \xrightarrow{\sim} V$ induziert. Homogenität zeigt den Rest. □

Satz 9.2.4.17 (**Zariski's Hauptsatz für affine Varietäten**). *Ein bijektiver birationaler Morphismus von einer affinen irreduziblen Varietät in eine normale affine Varietät ist stets ein Isomorphismus.*

9.2.4.18. Wir wissen aus 7.7.4.21, daß jede glatte Varietät Y normal ist. Meist werden wir den Satz in diesem Fall anwenden. Wir wissen aus 9.2.4.15, daß ein bijektiver Morphismus von irreduziblen Varietäten stets zu einer endlichen rein inseparablen Erweiterung der Funktionenkörper führt. In Charakteristik Null ist

die Annahme der Birationalität im Satz also überflüssig, da sie bereits aus der Bijektivität folgt. In positiver Charakteristik werden wir in 9.3.5.14 die Birationalität folgern können, wenn wir nur die Surjektivität des Differentials an einer glatten Stelle kennen.

Beispiele 9.2.4.19. $(k = \bar{k})$ Die Abbildung $k \to k^2$ mit $t \mapsto (t^3, t^2)$ induziert einen bijektiven Morphismus $k \xrightarrow{\sim} Y := \{(x, y) \mid x^2 = y^3\}$ auf die sogenannte „Neil'sche Parabel", der kein Isomorphismus ist. In diesem Fall ist aber Y auch nicht normal. Im Fall $\operatorname{char} k = p > 0$ ist auch $\varphi : k \to k$ mit $x \mapsto x^p$ ein bijektiver Morphismus, der kein Isomorphismus ist. In diesem Fall ist zwar die Zielvarietät normal, aber unser Morphismus ist nicht birational.

Beweis. Sei zunächst $\varphi : X \to Y$ ein beliebiger bijektiver Morphismus von einer beliebigen Varietät in eine affine Varietät. Mit der Beschreibung 7.4.3.32 für das Bild des Primspektrums unter Kringerweiterungen sehen wir, daß die Einbettung $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ eine Surjektion $\operatorname{Spec} \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}(Y)$ induziert. Ist Y irreduzibel und $\mathcal{O}(Y)$ normal, so sind nach 7.8.1.11 die Lokalisierungen $\mathcal{O}(Y)_\mathfrak{q}$ von $\mathcal{O}(Y)$ nach Primidealen der Höhe eins diskrete Bewertungsringe. Gilt also $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) = 1$ und ist $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}(X)$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{q}$ und ist unser Morphismus birational, so induziert $\mathcal{M}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$ eine Bijektion $\mathcal{O}(Y)_\mathfrak{q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)_\mathfrak{p}$ aufgrund der Maximalität diskreter Bewertungsringe 7.8.1.19. Nun haben wir nach 7.5.9.19 wieder aufgrund der Normalität von $\mathcal{O}(Y)$ die Gleichheit

$$\mathcal{O}(Y) = \bigcap_{\operatorname{ht}(\mathfrak{q})=1} \mathcal{O}(Y)_\mathfrak{q}$$

von Teilmengen von $\mathcal{M}(Y)$. Unter $\mathcal{M}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$ wird $\mathcal{O}(Y)$ also auf eine Teilmenge von $\mathcal{M}(X)$ abgebildet, die $\mathcal{O}(X)$ umfaßt. Da aber das Bild von $\mathcal{O}(Y)$ stets in $\mathcal{O}(X)$ liegt, muß $\mathcal{M}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$ einen Isomorphismus $\mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)$ induzieren. □

Ergänzung 9.2.4.20. Der Hauptsatz von Zariski gilt sogar, wenn man X und Y als beliebige irreduzible separierte Varietäten annimmt und fordert, daß Y normal ist in dem Sinne, daß die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{Y,y}$ normal sind für alle $y \in Y$. In dieser Allgemeinheit folgert man die Aussage leicht, wenn man zusätzlich annimmt, daß unser Morphismus offen ist, und erinnert, daß nach 7.9.1.3 jeder Morphismus von einer affinen Varietät in eine separierte Varietät affin ist. Wenn man unseren Morphismus nicht offen annimmt, kenne ich keinen so einfachen Beweis. Unter Zuhilfenahme von Grothendieck-Dieudonné sollte es aber doch mit wenig zusätzlichem Aufwand zu machen sein. Wenn man die Bedingung der Separiertheit fallenläßt, erhält man ein Gegenbeispiel, indem man die „Ebene mit verdoppeltem Achsenkreuz" betrachtet und den Morphismus dorthin von einer „Ebene mit verdoppelter x-Achse und verdoppelter (y-Achse ohne Nullpunkt)".

Satz* 9.2.4.21 (Affinität von homogenen Räumen). *Gegeben ein surjektiver äquivarianter Morphismus von homogenen Räumen $\varphi : X \to Y$ mit endlichen Fasern ist X affin genau dann, wenn Y affin ist.*

Beweis. Nach unseren Erkenntnissen 9.2.4.14 über Morphismen zu endlichen Körpererweiterungen und Homogenität gibt es eine Überdeckung von Y durch offene affine Teilmengen V_i mit affinen Urbildern $\varphi^{-1}(V_i)$. Ist Y affin, so ist damit X affin nach 7.9.1.4. Sei nun umgekehrt X affin. Wir dürfen unsere Varietäten sicher irreduzibel annehmen und beginnen mit dem Fall eines bijektiven äquivarianten Morphismus von homogenen Räumen. Unter dieser Annahme stellt sich das Problem nach 9.3.5.15 nur in positiver Charakteristik $p > 0$. Nach 9.3.6.14 liegt für jedes $f \in \mathcal{O}(X)$ eine geeignete iterierte p-Potenz in $\mathcal{O}(Y)$. Ist X affin, so finden wir eine Verfeinerung der Überdeckung durch die $\varphi^{-1}(V_i)$ zu einer Verfeinerung durch gewisse X_{f_ν} mit $f_\nu \in \mathcal{O}(X)$ sowie eine Relation $1 = \sum b_\nu f_\nu$ mit $b_\nu \in \mathcal{O}(X)$. Erheben wir unsere Relation mehrmals zur p-ten Potenz, so wird sie eine Relation $1 = \sum b_\nu^q f_\nu^q$ mit $b_\nu^q, f_\nu^q \in \mathcal{O}(Y)$. Dann aber gilt $\{y \in Y \mid f_\nu^q(y) \neq 0\} = \{y \in V_i \mid f_\nu^q(y) \neq 0\}$ für geeignetes i. Folglich sind diese offenen Teilmengen affin, und das Affinitätskriterium 7.9.1.1 zeigt, daß Y affin ist. Ist unser äquivarianter Morphismus von homogenen Räumen mit endlichen Fasern nur surjektiv, so nennen wir n die Kardinalität einer und jeder Faser und bilden die Mengen

$$\begin{aligned} W &:= \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mid \varphi(x_1) = \ldots = \varphi(x_n)\} \\ Z &:= \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mid \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ ist eine Faser von } \varphi\} \end{aligned}$$

Da Y separiert ist nach Übung 9.2.4.24, ist mit X auch $W \mathrel{\not\subset\!\!\!\!\!\!\;\;\;

von X kleinstmögliche Dimension hat, eine offene Teilmenge. Wir nennen diese Punkte die G**-regulären Punkte** von $G\backslash\!\!\backslash X$.

Übung 9.2.4.23. Gegeben ein homogener Raum X einer algebraischen Gruppe G sind die irreduziblen Komponenten von X genau die Bahnen der Einskomponente G° von G.

Übung 9.2.4.24 (**Jeder homogene Raum ist separiert**). Sei $G\backslash\!\!\backslash X$ unser homogener Raum. Die Diagonale $\Delta \subset X \times X$ ist eine Bahn und alle weiteren Bahnen im Abschluß der Diagonale hätten kleinere Dimension. Das führt schnell zu einem Widerspruch.

9.3 Algebraische Differentialrechnung

9.3.1 Derivationen und Tangentialräume

Definition 9.3.1.1. Seien k ein Kring, A ein k-Kring und M ein A-Modul. Eine **M-wertige k-lineare Derivation auf** A ist eine k-lineare Abbildung $D : A \to M$ mit $D(ab) = aD(b) + bD(a)\ \forall a, b \in A$. Die abelsche Gruppe aller derartigen Derivationen notieren wir

$$\mathrm{Der}_k(A, M)$$

Sie wird ein A-Modul durch das Nachschalten von Multiplikationen, in Formeln durch die Vorschrift $aD := (a\cdot) \circ D$. Im Spezialfall $A = M$ verwenden wir die Abkürzung $\mathrm{Der}_k A := \mathrm{Der}_k(A, A)$.

Vorschau 9.3.1.2. Noch allgemeiner betrachtet man Derivationen beliebiger k-Algebren A über einem Kring k. Sie sind aber nur nach k-Moduln.

Beispiel 9.3.1.3 (**Richtungsableitungen als Derivationen**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum E und ein Punkt $x \in E$ und der $\mathbb{R}$-Kring $\mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(E)$ der stetig differenzierbaren Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$ und der Auswertungsmodul $\mathbb{R}_x$ mit zugrundeliegender abelscher Gruppe $\mathbb{R}$, auf der eine Funktion f durch Multiplikation mit $f(x)$ operiert, liefert für jeden Richtungsvektor $\vec{v} \in \vec{E}$ das Bilden der Richtungsableitung bei x in Richtung $\vec{v}$ eine Derivation

$$\mathrm{D}_{\vec{v},x} \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(E), \mathbb{R}_x)$$

Das Bilden der Richtungsableitung an allen Stellen hinwiederum ist eine Derivation

$$\mathrm{D}_{\vec{v}} \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}\, \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(E)$$

9.3.1.4 (**Derivation von Konstanten**). Jede Derivation annulliert das Einselement. Für jede Derivation D auf einem Kring alias $\mathbb{Z}$-Kring A in einen A-Modul gilt also in Formeln $D(1) = 0$. In der Tat folgt aus der Definition

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1)$$

Ist k ein Kring und A ein k-Kring, so verschwindet mithin jede k-lineare Derivation auf $k1_A$.

Beispiel 9.3.1.5 (**Derivationen auf Polynomringen**). Ist k ein Kring und M ein Modul über $k[T]$, so erhalten wir eine Bijektion

$$\mathrm{Der}_k(k[T], M) \xrightarrow{\sim} M$$

durch die Vorschrift $D \mapsto D(T)$. In der Tat kann die Umkehrabbildung explizit angegeben werden durch $m \mapsto (P \mapsto P'm)$. Die Ableitung ist dabei wie in

6.3.9.5 formal zu verstehen. Insbesondere ist $\operatorname{Der}_k k[T]$ ein freier $k[T]$-Modul mit der Derivation

$$\partial : P \mapsto P'$$

als $k[T]$-Basis. Ist weiter $x \in k$ ein Punkt und k_x der Auswertungsmodul, so ist $\operatorname{Der}_k(k[T], k_x)$ ein freier k-Modul mit der Derivation $\partial = \partial_{(x)} : P \mapsto P'(x)$ als k-Basis.

9.3.1.6 (**Funktorialitäten von Derivationen**). Seien k ein Kring und A ein k-Kring. Ist $\psi : M \to N$ ein Homomorphismus von A-Moduln, so induziert das Nachschalten von ψ eine A-lineare Abbildung $\operatorname{Der}_k(A, M) \to \operatorname{Der}_k(A, N)$. Ist $\varphi : B \to A$ ein Homomorphismus von k-Kringen, so erhalten wir einen Homomorphismus von B-Moduln $\operatorname{res}_A^B \operatorname{Der}_k(A, M) \to \operatorname{Der}_k(B, \operatorname{res}_A^B M)$ durch das Vorschalten von φ. Wir kürzen ihn ab zu $\operatorname{Der}_k(A, M) \to \operatorname{Der}_k(B, M)$ und erhalten so die **linksexakte Sequenz für Derivationen**

$$\operatorname{Der}_B(A, M) \hookrightarrow \operatorname{Der}_k(A, M) \to \operatorname{Der}_k(B, M)$$

Ist $\varphi : B \twoheadrightarrow A$ ein surjektiver Homomorphismus von k-Kringen, so erhalten wir offensichtlich im Spezialfall eines surjektiven Kringhomomorphisms für jeden A-Modul M eine Beschreibung der **Derivationen auf Quotienten** durch eine linksexakte Sequenz

$$\operatorname{Der}_k(A, M) \hookrightarrow \operatorname{Der}_k(B, M) \to \operatorname{Hom}_k(\ker \varphi, M)$$

Des weiteren ist das Verschwinden einer Derivation von B in einen A-Modul M auf $\ker \varphi$ gleichbedeutend zu ihrem Verschwinden auf einem Erzeugendensystem besagten Ideals.

9.3.1.7 (**Verträglichkeit von Derivationen mit Koprodukten**). Gegeben ein Kring k und k-Kringe A und B und ein Modul M über $A \otimes_k B$ liefern die Restriktionen längs $a \mapsto a \otimes 1$ und $b \mapsto 1 \otimes b$ eine Bijektion

$$\operatorname{Der}_k(A \otimes_k B, M) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k(A, M) \oplus \operatorname{Der}_k(B, M)$$

In der Tat kann man die Umkehrabbildung unmittelbar angeben als $(\partial_2, \partial_2) \mapsto \partial$ mit $\partial : a \otimes b \mapsto (1 \otimes b)\partial_1 a + (a \otimes 1)\partial_2 b$.

Vorschau 9.3.1.8. In Übung 9.3.1.34 werden Sie allgemeiner zeigen, daß Derivationen sogar mit beliebigen Kolimites vertauschen.

Beispiel 9.3.1.9 (**Derivationen auf Polynomringen in mehreren Variablen**). Ist k ein Kring und M ein Modul über $k[T_1, \ldots, T_n]$, so erhalten wir nach dem Vorhergehenden eine Bijektion

$$\operatorname{Der}_k(k[T_1, \ldots, T_n], M) \xrightarrow{\sim} M^n$$

durch die Vorschrift $D \mapsto (D(T_1), \ldots, D(T_n))$. In diesem Fall kann die Umkehrabbildung explizit angegeben werden durch $(m_1, \ldots, m_n) \mapsto m_1\partial_1 + \ldots + m_n\partial_n$, womit die Derivation $P \mapsto (\partial_1 P)m_1 + \ldots + (\partial_n P)m_n$ gemeint ist, die unter Verwendung der partiellen Ableitungen gebildet wird. Die partiellen Ableitungen sind dabei wie in 6.3.9.5 formal zu verstehen. Ist speziell $x \in k^n$ und k_x der Auswertungsmodul, so ist $\mathrm{Der}_k(k[T_1, \ldots, T_n], k_x)$ ein freier k-Modul und die Derivationen $\partial_{i,(x)} : P \mapsto (\partial_i P)(x)$ bilden darin eine k-Basis.

Proposition 9.3.1.10 (**Ausdehnung von Derivationen auf Lokalisierungen**). *Gegeben k ein Kring, A ein k-Kring, $S \subset A$ eine Teilmenge und M ein Modul über der Lokalisierung $S^{-1}A$ liefert das Vorschalten von $S^{-1}A \to A$ eine Bijektion*

$$\mathrm{Der}_k(S^{-1}A, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(A, M)$$

9.3.1.11. Die Umkehrabbildung dieser Bijektion mithilfe der Quotientenregel notieren wir $\mathrm{qr} : \mathrm{Der}_k(A, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(S^{-1}A, M)$.

Beispiel 9.3.1.12 (**Formale Ableitung rationaler Funktionen**). Gegeben ein Körper k gibt es genau eine Möglichkeit, unsere formale Ableitung $\partial : k[T] \to k[T]$ aus 6.3.9.5 so zu einer formalen Ableitung $\partial : k(T) \to k(T)$ fortzusetzen, daß die Summenregel und die Produktregel weiter gelten. Diese formale Ableitungen notieren wir auch $f \mapsto f'$.

Beispiel 9.3.1.13 (**Formale Ableitung regulärer Funktionen**). $(k = \bar{k})$. Gegeben $U \Subset k$ gibt es genau eine Möglichkeit, unsere vermittels des Isomorphismus $k[T] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(k)$ aus 6.3.9.5 erhaltene formale Ableitung $\partial : \mathcal{O}(k) \to \mathcal{O}(k)$ so zu einer formalen Ableitung $\partial : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U)$ fortzusetzen, daß die Summenregel und die Produktregel weiter gelten. Diese formale Ableitungen notieren wir auch $f \mapsto f'$.

Beweis. Wir dürfen S multiplikativ abgeschlossen annehmen. Für alle $s \in S$ und jede Derivation $D : S^{-1}A \to M$ gilt $0 = D(s \cdot s^{-1}) = s^{-1}D(s) + sD(s^{-1})$ alias $D(s^{-1}) = -s^{-2}D(s)$. Das zeigt die Injektivität der Einschränkung. Andererseits können wir jede Derivation $D : A \to M$ zu einer Derivation $S^{-1}A \to M$ ausdehnen durch die Vorschrift $D(a/s) = s^{-1}D(a) - s^{-2}aD(s)$, wie der Leser leicht nachrechnet. Genauer und mit der abkürzenden Notation $a' := D(a)$ folgt aus der Gleichheit $(a/s) = (b/t)$ im lokalisierten Ring alias aus der Existenz von $r \in S$ mit $atr = bsr$ in A bereits die Gleichheit $(a's - as')/s^2 = (b't - bt')/t^2$ im lokalisierten Ring und sogar genauer in A die Gleichheit $(a's - as')t^2r^2 = (b't - bt')s^2r^2$. Das zeigt die Surjektivität. $\square$

Definition 9.3.1.14. Gegeben eine k-Varietät X und ein Punkt $x \in X$ liefert das Auswerten bei x einen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{X,x} \to k$. Wollen wir besonders betonen, daß wir k mit der durch diesen Homomorphismus gegebenen Struktur

eines $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduls versehen, so verwenden wir dafür die Notation k_x und nennen k_x den **Auswertungsmodul zu** x. Wir erklären den **Tangentialraum** an X bei x als den k-Vektorraum

$$\mathrm{T}_x X := \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k_x)$$

der k-linearen Derivationen des lokalen Rings in den Auswertungsmodul. Gegeben ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von Varietäten wird das **Differential** $\mathrm{d}_x\varphi$ **von** φ **an der Stelle** x definiert als die durch das Vorschalten von $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ erklärte k-lineare Abbildung

$$\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \to \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$$

Vorschau 9.3.1.15. Wir zeigen in 9.3.1.30, daß eine bepunktete Varietät (X, x) genau dann glatt ist bei x, wenn gilt $\mathrm{kdim}_x X = \dim \mathrm{T}_x X$.

Proposition 9.3.1.16 (**Tangentialräume affiner Varietäten**). *Für jede bepunktete affine k-Varietät (X, x) liefert die Restriktion unter $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}_{X,x}$ eine Bijektion*

$$\mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(X), k_x)$$

Beweis. Das folgt aus der Ausdehnbarkeit von Derivationen auf Lokalisierungen 9.3.1.10 angewandt auf $A = \mathcal{O}(X)$, $M = k_x$ und $S \subset \mathcal{O}(X)$ die Menge aller Funktionen, die bei x nicht verschwinden. □

Beispiel 9.3.1.17 (**Tangentialräume der Zahlengerade**). Gegeben $k = \bar{k}$ und $a \in k$ bildet die bei a ausgewertete Ableitung $\partial = \partial_{(a)} : f \mapsto f'(a)$ eine k-Basis des Tangentialraums $\mathrm{T}_a k$ der k-Varietät k. Das folgt sofort aus der Beschreibung des Tangentialraums affiner Varietäten 9.3.1.16 und der Beschreibung der Derivationen auf Polynomringen 9.3.1.5. Wir nennen dies Element den **kanonischen Erzeuger**

$$\partial = \partial_{(a)} \in \mathrm{T}_a k$$

Ich setze hier die auszuwertende Stelle in Klammern, um Verwechslungen mit der Notation ∂_x für die partielle Ableitung nach einer Variable x zu vermeiden.

Beispiel 9.3.1.18. Gegeben $k = \bar{k}$ und $x \in k^n$ bilden die bei x ausgewerteten partiellen Ableitungen $\partial_{1,(x)}, \ldots, \partial_{n,(x)}$ eine k-Basis von $\mathrm{T}_x k^n$. Das folgt sofort aus der Beschreibung des Tangentialraums affiner Varietäten 9.3.1.16 und der Beschreibung der Derivationen auf Polynomringen in mehreren Variablen 9.3.1.9.

9.3.1.19 (**Der Tangentialraum als Funktor**). Gegeben Morphismen von Varietäten $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ sowie $x \in X$ ein Punkt mit Bildern $\varphi(x) = y$ und $\psi(y) = z$ haben wir offensichtlich

$$\mathrm{d}_y\psi \circ \mathrm{d}_x\varphi = \mathrm{d}_x(\psi \circ \varphi) : \mathrm{T}_x X \to \mathrm{T}_z Z$$

Sicher gilt auch $\mathrm{d}_x \mathrm{id}_X = \mathrm{id} : \mathrm{T}_x X \to \mathrm{T}_x X$. In anderen Worten erhalten wir so einen Funktor von der Kategorie der bepunkteten Varietäten in die Kategorie der Vektorräume. Hier verstehen wir unter einer **bepunkteten Varietät** eine Varietät mit einem ausgezeichneten Punkt und unter einem Morphismus von bepunkteten Varietäten einen Morphismus von Varietäten, der den ausgezeichneten Punkt auf den ausgezeichneten Punkt abbildet.

9.3.1.20 (**Differential offener Einbettungen**). Jede offene Einbettung $j : U \hookrightarrow X$ liefert für alle $x \in U$ einen Isomorphismus auf den lokalen Ringen $\mathcal{O}_{X,j(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U,x}$ und damit auch einen Isomorphismus auf den Tangentialräumen

$$\mathrm{d}_x j : \mathrm{T}_x U \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{j(x)} X$$

9.3.1.21 (**Differential abgeschlossener Einbettungen**). Jede eine abgeschlossene Einbettung $i : Z \hookrightarrow X$ liefert für alle $z \in Z$ eine Surjektion auf den lokalen Ringen $i^\sharp : \mathcal{O}_{X,i(z)} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{Z,z}$ und damit eine Injektion auf den Tangentialräumen

$$\mathrm{d}_z i : \mathrm{T}_z Z \hookrightarrow \mathrm{T}_{i(z)} X$$

Insbesondere sind unsere Tangentialräume von Varietäten stets endlichdimensional. Ist X affin und sind Funktionen $f_\nu \in \mathcal{O}(X)$ gegeben, die das Verschwindungsideal $\ker i^\sharp$ von Z bei z erzeugen, so kann nach 9.3.1.6 das Bild von $\mathrm{d}_z i$ beschrieben werden als der Schnitt der Kerne der Differentiale $\mathrm{d}_{i(z)} f_\nu : \mathrm{T}_{i(z)} X \to \mathrm{T}_0 k$ unserer lokalen Erzeuger.

9.3.1.22 (**Tangentialräume von Untervarietäten**). Gegeben $z \in Z \subset X$ eine Varietät mit einer lokal abgeschlossenen Teilmenge und einem ausgezeichneten Punkt derselben identifizieren wir häufig den Tangentialraum $\mathrm{T}_z Z$ an die Untervarietät Z implizit mit seinem Bild unter dem Differential $\mathrm{d}_z \iota$ der Einbettung $\iota : Z \hookrightarrow X$, das ja in diesem Fall nach 9.3.1.21 und 9.3.1.20 stets eine Injektion ist, und verwenden die abkürzende Notation

$$\mathrm{T}_z Z \subset \mathrm{T}_z X$$

für den Teilraum, der genau genommen $\mathrm{d}_z \iota(\mathrm{T}_z Z)$ zu notieren wäre.

Proposition 9.3.1.23 (Tangentialraum eines Produkts). *Der Tangentialraumfunktor ist verträglich mit endlichen Produkten.*

9.3.1.24. Die Differentiale der Projektionen induzieren in anderen Worten stets einen Isomorphismus von Vektorräumen

$$(\mathrm{d}_{(x,y)} \mathrm{pr}_X, \mathrm{d}_{(x,y)} \mathrm{pr}_Y) : \mathrm{T}_{(x,y)}(X \times Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_x X \times \mathrm{T}_y Y$$

Die Umkehrabbildung ist dann $(v, w) \mapsto \mathrm{d}_x(\mathrm{id}_X, y)(v) + \mathrm{d}_y(x, \mathrm{id}_Y)(w)$ mit der Notation $y = \mathrm{em}_y \mathrm{fin}_X$ für die konstante Abbildung $X \to Y$, die jeden Punkt

auf y abbildet, und ebenso für die konstante Abbildung $x : Y \to X$. In der Tat ist diese Abbildung linear und die Kettenregel zeigt, daß das Nachschalten des Ismorphismus aus der Proposition alle Elemente der Gestalt $(v, 0)$ oder $(0, w)$ auf sich selber abbildet.

Beweis. Es reicht, das für affine Varietäten zu zeigen. In diesem Fall folgt es aus der Verträglichkeit von Derivationen mit Koprodukten 9.3.1.7. □

Beispiel 9.3.1.25. Gegeben $k = \bar{k}$ und $x \in k^n$ bilden die bei x ausgewerteten partiellen Ableitungen $\partial_{1,x}, \ldots, \partial_{n,x}$ eine k-Basis von $\mathrm{T}_x k^n$. Das folgt sofort aus der Beschreibung der Derivationen auf Polynomringen 9.3.1.5 und der Verträglichkeit des Tangentialraumfunktors mit endlichen Produkten.

9.3.1.26 (**Tangentialräume affiner Räume**). $(k = \bar{k})$. Für jeden endlichdimensionalen affinen Raum E über k und jeden Punkt $p \in E$ erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathrm{D} = \mathrm{D}_p : \vec{E} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_p E$$

durch die Vorschrift, daß wir zu einem Richtungsvektor $\vec{v} \in \vec{E}$ den Morphismus $k \to E$, $t \mapsto p + t\vec{v}$ bilden und unserem Richtungsvektor $\vec{v}$ das Bild des kanonischen Basisvektors $\partial \in \mathrm{T}_0 k$ unter dem Differential dieses Morphismus zuordnen. Um das zu sehen, mag man von der Bemerkung ausgehen, daß D sogar eine Transformation von Funktoren von der Kategorie der endlichdimensionalen bepunkteten affinen Räume in die Kategorie der Vektorräume ist. Beide Funktoren sind dabei nun verträglich mit endlichen Produkten und alle Objekte der Ausgangskategorie sind isomorph zu endlichen Produkten von Kopien von $(k, 0)$. Um zu zeigen, daß unsere Transformation eine Isotransformation ist, können wir uns also darauf zurückziehen, die Isomorphismeneigenschaft im Fall $(E, p) = (k, 0)$ zu zeigen, und in diesem Fall folgt sie direkt aus den Definitionen. Wir schreiben

$$\mathrm{D}_{\vec{v},p} := \mathrm{D}_p(\vec{v})$$

und nennen diesen Tangentialvektor die **Richtungsableitung** in Richtung $\vec{v}$ an der Stelle p. Die Umkehrabbildung unseres Isomorphismus $\mathrm{D} : \vec{E} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_p E$ notieren wir

$$\mathrm{richt} = \mathrm{richt}_p : \mathrm{T}_p E \xrightarrow{\sim} \vec{E}$$

Etwas allgemeiner verwenden wir in der Situation $p \in U \Subset E$ dieselbe Notation $\mathrm{richt} : \mathrm{T}_p U \xrightarrow{\sim} \vec{E}$ für den durch das Vorschalten des Differentials der Einbettung entstehenden Isomorphismus. Weiter verwenden wir im Spezialfall eines endlichdimensionalen Vektorraums V mit seiner natürlichen Struktur als affiner Raum und für $v \in U \Subset V$ die Notation

$$\mathrm{richt} = \mathrm{richt}_v : \mathrm{T}_v U \xrightarrow{\sim} V$$

auch für den Isomorphismus, den wir ganz pedantisch $\mathrm{trans}^{-1} \circ \mathrm{richt}$ notieren müßten für $\mathrm{trans} : V \xrightarrow{\sim} \vec{V}$ unseren natürlichen Isomorphismus zwischen einem Vektorraum und dem Richtungsraum des dazu gebildeten affinen Raums.

9.3.1.27 (**Differential linearer Abbildungen**). $(k = \bar{k})$. Gegeben eine lineare Abbildung $f : V \to W$ von endlichdimensionalen k-Vektorräumen kommutiert stets das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_v V \arrow[r, "\mathrm{d}_v f"] \arrow[d, "\mathrm{richt}"', "\wr"] & \mathrm{T}_{f(v)} W \arrow[d, "\mathrm{richt}"', "\wr"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

Salopp gesprochen ist also jede lineare Abbildung ihr eigenes Differential. Analog ist salopp gesprochen das Differential jeder affinen Abbildung ihr linearer Anteil.

Lemma 9.3.1.28 (**Derivationen als duale Differentiale**). *Gegeben ein Kring k und ein k-Kring A und eine Spaltung $A \to k$ des strukturierenden Homomorphismus $k \to A$ und $\mathfrak{m} := \ker(A \to k)$ ihr Kern induziert die Restriktion auf $\mathfrak{m} \subset A$ einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Der}_k(A, k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$$

Vorschau 9.3.1.29. Die Aussage dieses Lemmas werden wir in 9.3.4.4 zu einer Beschreibung beliebiger Derivationen durch den sogenannten „Modul der Differentiale“ ausbauen, daher der Name des Lemmas.

Beweis. Gegeben eine Derivation ∂ und $f, g \in \mathfrak{m}$ haben wir sicher $\partial(fg) = 0$ in k. Jede Derivation verschwindet also auf $\mathfrak{m}^2$, folglich liefert unsere Vorschrift zumindest eine Abbildung. Wegen $A = k1 \oplus \mathfrak{m}$ und $\partial(1) = 0$ ist diese Abbildung injektiv. Sei nun $A \to \mathfrak{m}$ die zu unserer Zerlegung gehörige Projektion. Wenn wir zeigen können, daß das Vorschalten der Komposition $A \to \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ aus jeder k-linearen Abbildung $\partial : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to k$ eine Derivation $D : A \to A/\mathfrak{m}$ macht, sind wir fertig. Hier wird also D gegeben durch $D(\alpha + f) = \partial \bar{f}$ für $f \in \mathfrak{m}$ und $\alpha \in k$ und $\bar{f} \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ die Nebenklasse von f. Es gilt also für $f, g \in \mathfrak{m}$ und $\alpha, \beta \in k$ zu zeigen

$$D((f + \alpha)(g + \beta)) = (f + \alpha)D(g + \beta) + (g + \beta)D(f + \alpha)$$

Das bedeutet umgeformt die Gleichheit $\partial(\alpha\bar{g} + \beta\bar{f} + \bar{f}\bar{g}) = \alpha\partial\bar{g} + \beta\partial\bar{f}$ und die ist offensichtlich wegen $\partial(\bar{f}\bar{g}) = 0$. $\square$

9.3.1.30 (**Dimension des Tangentialraums**). Gegeben (X, x) eine bepunktete Varietät und $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ der Kern des Auswertungshomomorphismus liefert die

Beschreibung 9.3.1.28 von Derivationen als duale Differentiale einen Isomorphismus von k-Vektorräumen

$$\mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$$

Insbesondere ist nach der oberen Abschätzung 7.7.3.20 für die Krulldimension lokaler Kringe die Dimension des Tangentialraums stets mindestens so groß wie die lokale Krulldimension unserer Varietät an der entsprechenden Stelle, in Formeln $\dim_k \mathrm{T}_x X \geq \mathrm{kdim}_x X$. Des weiteren ist Gleichheit nach der Definition 7.7.4.7 regulärer lokaler Kringe äquivalent zur Regularität des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ alias der Glattheit der Varietät X an der Stelle x.

Satz 9.3.1.31 (**Differentielles Dominanzkriterium**). *Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von irreduziblen Varietäten. Ist für einen glatten Punkt $x \in X$ das Differential bei x eine Surjektion $\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \twoheadrightarrow \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$, so ist auch sein Bild $\varphi(x)$ glatt und der Morphismus φ dominant.*

9.3.1.32. Den Spezialfall dieses Kriteriums für offene Teilmengen affiner Räume haben wir bereits in 7.7.4.23 diskutiert.

Beweis. Wir bezeichnen mit k unseren Grundkörper und setzen $y := \varphi(x)$. Nach Annahme induziert der Komorphismus zu φ eine Injektion $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \hookrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ für $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ sowie $\mathfrak{m}_y \subset \mathcal{O}_{Y,y}$ die maximalen Ideale. Gegeben $g_1, \ldots, g_r \in \mathfrak{m}_y$ Repräsentanten einer k-Basis von $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2$ sind die $g_i \circ \varphi \in \mathcal{O}_{X,x}$ algebraisch unabhängig über k nach 7.7.3.23. Also sind die g_i bereits selbst algebraisch unabhängig über k und wir folgern die Glattheit von Y bei y aus der Ungleichungskette

$$\mathrm{kdim}\, Y = \mathrm{trgr}_k\, \mathcal{M}(Y) \geq r = \dim_k \mathrm{T}_y Y \geq \mathrm{kdim}\, Y$$

Nun folgt mit 7.7.4.9 weiter, daß φ eine Injektion $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_y} \mathcal{O}_{Y,y} \hookrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_{X,x}$ der assozierten graduierten Ringe induziert. Da unsere Filtrierungen ausschöpfend und nach dem Durchschnittssatz 7.4.6.14 auch Hausdorff sind, folgt mit 7.7.1.16 die Injektivität $\mathcal{O}_{Y,y} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ des Komorphismus und φ ist in der Tat dominant. □

Übungen

Übung 9.3.1.33 (**Derivationen als Kringhomomorphismen**). Gegeben ein Kring A und ein A-Modul M wird die abelsche Gruppe $A \times M$ zu einem Kring, wenn wir ihre Multiplikation erklären durch $(a, m)(b, n) := (ab, an+bm)$. Ist k ein weiterer Kring und A ein k-Kring, so liefert das Nachschalten von pr_2 eine Bijektion

$$\{\varphi \in \mathrm{Kring}^k(A, A \times M) \mid \mathrm{pr}_1 \circ \varphi = \mathrm{id}_A\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(A, M)$$

Übung 9.3.1.34 (**Verträglichkeit von Derivationen mit Kolimites**). Gegeben ein Kring k und ein Köcher $\mathcal{I}$ und ein System $A_i \in \mathrm{Car}(\mathcal{I}, \mathrm{Kring}^k)$ von k-Kringen existiert nach 17.7.1.42 stets der Kolimes $A := \mathrm{col}_{i\in\mathcal{I}} A_i$. Man zeige, daß für jeden A-Modul M die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\mathrm{Der}_k(A, M) \xrightarrow{\sim} \lim_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{Der}_k(A_i, M)$$

ist. Hinweis: Man verwende 9.3.1.33 und die Bijektionen

$$\{\varphi : A_i \to A_i \times M \mid \mathrm{pr}_1 \circ\varphi = \mathrm{id}\} \xrightarrow{\sim} \{\psi : A_i \to A \times M) \mid \mathrm{pr}_1 \circ\psi = \mathrm{in}_i\}$$

zwischen den jeweiligen Mengen von Homomorphismen von k-Kringen.

Übung 9.3.1.35. Man zeige, daß der Tangentialraum der Neil'schen Parabel an der singulären Stelle zweidimensional ist. Man zeige allgemeiner, daß der Tangentialraum einer ebenen Kurve an jeder singulären Stelle zweidimensional ist.

Übung 9.3.1.36. Man zeige, daß für $x \in U \Subset k$ und $f \in \mathcal{O}(U) \subset k(T)$ gilt $\mathrm{d}_x f : \partial \mapsto f'(x)\partial$ für $\partial \in \mathrm{T}_x U$ beziehungsweise $\partial \in \mathrm{T}_{f(x)} k$ die kanonischen Erzeuger aus 9.3.1.17. Hier ist f' zu verstehen wie in 9.3.1.12.

Übung 9.3.1.37 (**Differential und Jacobi-Matrix**). $(k = \bar{k})$. Gegeben $p \in U \Subset k^n$ und $V \Subset k^m$ und ein Morphismus $\varphi : U \to V$ zeige man die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_p U \arrow[r, "\mathrm{d}_p\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{richt}"', "\wr"] & \mathrm{T}_{\varphi(p)} V \arrow[d, "\mathrm{richt}"', "\wr"] \\
k^n \arrow[r, "J"] & k^m
\end{tikzcd}$$

für J die durch die Jacobi-Matrix $\big((\partial_i(\mathrm{pr}_j\,\varphi))(p)\big)_{ij}$ gegebene lineare Abbildung.

Übung 9.3.1.38 (**Differential bilinearer Abbildungen**). $(k = \bar{k})$. Seien V, W, L endlichdimensionale k-Vektorräume. Man zeige für das Differential einer bilinearen Abbildung $b : V \times W \to L$ bei $p := (x, y)$ die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_x V \times \mathrm{T}_y W \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{richt} \times \mathrm{richt}"', "\wr"] & \mathrm{T}_p(V \times W) \arrow[r, "\mathrm{d}_p\varphi"] & \mathrm{T}_{\varphi(p)} L \arrow[d, "\mathrm{richt}"', "\wr"] \\
V \times W \arrow[rr, "(v,w) \mapsto b(v,y)+b(x,w)"] & & L
\end{tikzcd}$$

Übung 9.3.1.39 (**Tangentialräume projektiver Räume**). $(k = \bar{k})$. Seien V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum und $\pi : V\backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}V$ die Projektion und $v \in V\backslash 0$. So erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$\langle v\rangle \hookrightarrow \mathrm{T}_v V \overset{\mathrm{d}_v\pi}{\twoheadrightarrow} \mathrm{T}_{\langle v\rangle}\mathbb{P}V$$

mit der Einbettung $\langle v\rangle \hookrightarrow V$ der von v erzeugten Gerade gefolgt von der Identifikation $\mathrm{richt}^{-1} : V \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_v V$ als erster Abbildung.

Übung 9.3.1.40 (**Operation auf dem Fixpunkttangentialraum im affinen Fall**). Gegeben $G \backslash X$ eine affine algebraische Varietät mit der Operation eines affinen algebraischen Monoids und ein Fixpunkt $x \in X$ der Operation ist die induzierte Darstellung von G auf dem Tangentialraum $\mathrm{T}_x X$ algebraisch. Hinweis: Man gehe aus von der Algebraizität der Rechtsdarstellung von G auf $\mathcal{O}(X)$. Ohne Affinitätsannahmen geben wir einen Beweis in 9.3.11.11.

9.3.2 Liealgebren und Vektorfelder

Definition 9.3.2.1. Eine **Lie-Algebra** über einem Körper k ist ein k-Vektorraum $\mathfrak{g}$ mitsamt einer k-bilinearen Abbildung, der **Lie-Klammer**

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ (x, y) & \mapsto & [x, y] \end{array}$$

derart, daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Antisymmetrie: $[x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$;

Jacobi-Identität: $\big[x, [y, z]\big] + \big[z, [x, y]\big] + \big[y, [z, x]\big] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

9.3.2.2. Unsere Bedingung $[x, x] = 0 \quad \forall x$ impliziert, wie in 3.6.3.2 ausgeführt, bereits die Identität $[x, y] = -[y, x]\ \forall x, y$. Im Fall eines Grundkörpers einer von zwei verschiedenen Charakteristik impliziert umgekehrt $[x, x] = -[x, x]$ auch $[x, x] = 0$.

Beispiel 9.3.2.3. Ist A eine assoziative Algebra unter der Verknüpfung $(x, y) \mapsto x \cdot y$, so wird A eine Lie-Algebra A_{L} unter der Verknüpfung

$$(x, y) \mapsto [x, y] := x \cdot y - y \cdot x$$

Das rechnet man leicht nach. Man nennt deshalb die Lie-Klammer auch im allgemeinen oft den **Kommutator**. Faßt man $\operatorname{End} V$ beziehungsweise $\operatorname{Mat}(n; k)$ in dieser Weise als Lie-Algebren auf, so bezeichnet man sie meist mit $\mathfrak{gl}(V)$ beziehungsweise $\mathfrak{gl}(n; k)$ für **general linear Lie algebra**.

9.3.2.4. Sei k ein Körper. Gegeben eine nicht notwendig assoziative k-Algebra $(A, \cdot)$ heißt eine lineare Abbildung $D : A \to A$ eine **Derivation**, wenn sie die **Leibniz-Regel** $D(a \cdot b) = (Da) \cdot b + a \cdot (Db)$ für alle $a, b \in A$ erfüllt. Wir bezeichnen mit

$$\operatorname{Der}_k A \subset \operatorname{End}_k A$$

den Untervektorraum der Derivationen von A. Man prüft leicht, daß die Derivationen einer Algebra A eine Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(A)$ der Endomorphismen des k-Vektorraums A bilden. Man prüft leicht, daß unsere Derivationen

hier im Fall einer Kringalgebra A mit den A-wertigen k-linearen Derivationen auf A aus 9.3.1.1 zusammenfallen, die wir auch dort schon $\operatorname{Der}_k A$ notiert hatten. Noch allgemeiner mag man Derivationen mit Werten in einem A-Bimodul über k einführen, aber alles zu seiner Zeit.

Ergänzung 9.3.2.5. Im Fall $\operatorname{char} k = p > 0$ gilt $D \in \operatorname{Der}_k A \Rightarrow D^p \in \operatorname{Der}_k A$, denn wir haben ganz allgemein

$$D^n(ab) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (D^i a)(D^{n-i} b)$$

9.3.2.6. Unter einem **Vektorfeld auf einer Varietät** X verstehen wir ähnlich wie in 22.3.4.6 eine Vorschrift ξ, die jedem Punkt $x \in X$ einen Tangentialvektor $\xi_x \in \mathrm{T}_x X$ zuordnet. So ein Vektorfeld induziert für alle $U \Subset X$ eine Abbildung $\xi : \mathcal{O}_X(U) \to \operatorname{Ens}(U, k)$ gegeben durch $(\xi f)(x) := \xi_x(f)$. Unser Vektorfeld heißt **algebraisch**, wenn für alle $U \Subset X$ gilt $f \in \mathcal{O}_X(U) \Rightarrow \xi f \in \mathcal{O}_X(U)$. Die Menge der algebraischen Vektorfelder auf X notieren wir

$$\mathcal{T}(X)$$

9.3.2.7 (**Algebraische Vektorfelder als Derivationen**). Gegeben eine affine k-Varietät X erhalten wir einen Isomorphismus

$$\operatorname{Der}_k \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}(X)$$

zwischen dem Raum der Derivationen ihres Rings von regulären Funktionen und dem Raum ihrer algebraischen Vektorfelder durch die Abbildungsvorschrift $D \mapsto (x \mapsto \operatorname{qr}(\delta_x \circ D))$, wobei $\delta_x : \mathcal{O}(X) \to k_x$ das Auswerten bei x meint und $\operatorname{qr} : \operatorname{Der}_k(\mathcal{O}(X), k_x) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k_x)$ das Ausdehnen von Derivationen auf die Lokalisierung nach 9.3.1.10. In der Tat ist unsere Abbildung offensichtlich injektiv, weil eine Funktion eben durch ihre Werte an allen Stellen festgelegt wird, und ebenso offensichtlich surjektiv. Dieser Isomorphismus scheint mir derart kanonisch, daß ich ihn sprachlich und in der Notation meist als eine Gleichheit behandeln werde.

Beispiel 9.3.2.8. $(k = \bar{k})$. Ein Vektorfeld ξ auf $U \Subset k^n$ ist offensichtlich genau dann algebraisch, wenn es $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(U)$ gibt mit $\xi = f_1\partial_1 + \ldots + f_n\partial_n$.

9.3.2.9 (**Liealgebra der algebraischen Vektorfelder**). Gegeben eine Varietät X und algebraische Vektorfelder $\xi, \zeta \in \mathcal{T}(X)$ liefert für alle $U \Subset X$ das Bilden des Kommutators eine Abbildung $[\xi, \zeta]_U : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U)$. Diese Abbildungen gehören nach 9.3.2.7 für affines U zu $\operatorname{Der}_k \mathcal{O}_X(U)$ und für $V \Subset U$ gilt offensichtlich $\operatorname{res}_U^V \circ [\xi, \zeta]_U = [\xi, \zeta]_V \circ \operatorname{res}_U^V$. Daraus folgt, daß unsere $[\xi, \zeta]_U$ zu einem wohlbestimmten algebraischen Vektorfeld $[\xi, \zeta] \in \mathcal{T}(X)$ verkleben und daß der Raum $\mathcal{T}(X)$ der algebraischen Vektorfelder auf X mit dieser Lieklammer zu einer Liealgebra wird.

Definition 9.3.2.10. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten. Vektorfelder ξ auf X und ζ auf Y heißen **φ-verwandt** und wir schreiben $\varphi : \xi \rightsquigarrow \zeta$, wenn für alle $x \in X$ gilt

$$\mathrm{d}_x\varphi : \xi_x \mapsto \zeta_{\varphi(x)}$$

Beispiel 9.3.2.11. Hat ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ die Eigenschaft, daß sein Differential für jeden Punkt ein Isomorphismus $\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$ ist, so gibt es für jedes Vektorfeld ζ auf Y genau ein Vektorfeld ξ auf X mit $\varphi : \xi \rightsquigarrow \zeta$. Ist φ eine offene Einbettung von Varietäten, so ist dies Vektorfeld auf X die Einschänkung $\xi = \zeta|_X$ und ist offensichtlich algebraisch, wenn ζ algebraisch ist.

Proposition 9.3.2.12 (**Verwandtschaft und Lieklammer**). *Verwandte algebraische Vektorfelder haben verwandte Lieklammern.*

Beweis. Ist also in Formeln $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten und sind ξ, ξ' algebraische Vektorfelder auf X und ζ, ζ' algebraische Vektorfelder auf Y und gilt $\varphi : \xi \rightsquigarrow \zeta$ und $\varphi : \xi' \rightsquigarrow \zeta'$, so gilt es $\varphi : [\xi, \xi'] \rightsquigarrow [\zeta, \zeta']$ zu zeigen. Ist φ eine offene Einbettung, so folgt diese Verträglichkeit direkt aus den Definitionen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir deshalb von nun an für den Beweis unsere Varietäten affin annehmen. Genau dann gilt $\varphi : \xi \rightsquigarrow \zeta$, wenn für beliebige reguläre Funktionen $f \in \mathcal{O}(X)$ und $g \in \mathcal{O}(Y)$ mit $\varphi : f \rightsquigarrow g$ alias $f = g \circ \varphi$ gilt $\xi f \rightsquigarrow \zeta g$ alias $\xi(g \circ \varphi) = (\zeta g) \circ \varphi$. In noch anderen Worten bedeutet das das Kommutieren des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(Y) \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\circ\varphi"'] & \mathcal{O}(Y) \arrow[d, "\circ\varphi"] \\
\mathcal{O}(X) \arrow[r, "\xi"] & \mathcal{O}(X)
\end{tikzcd}$$

Daraus folgt unsere Behauptung unmittelbar. □

Definition 9.3.2.13. Gegeben ein algebraisches Monoid G erklärt man die **Liealgebra seiner linksinvarianten Vektorfelder** durch die Vorschrift

$$\mathrm{Lie}\, G := \{\xi \in \mathcal{T}(G) \mid (g\cdot) : \xi \rightsquigarrow \xi \ \text{ für alle } g \in G\}$$

Die Verträglichkeit der Lieklammer mit Verwandtschaft 9.3.2.12 zeigt, daß das in der Tat eine Lieunteralgebra von $\mathcal{T}(G)$ ist. Analog erklären wir die **Liealgebra der rechtsinvarianten Vektorfelder** $\mathrm{Lie}\, G$.

Beispiel 9.3.2.14. Gegeben ein affines algebraisches Monoid G liefert die Interpretation 9.3.2.7 algebraischer Vektorfelder als Derivationen einen Isomorphismus von Liealgebren

$$\mathrm{Lie}\, G \xrightarrow{\sim} \{D \in \mathrm{Der}_k\, \mathcal{O}(G) \mid D \circ \lambda_g = \lambda_g \circ D \quad \forall g \in G\}$$

Hier verwenden wir die Notation $\lambda_g f = \lambda(g)f := f \circ (g\cdot)$ für die Linksverschiebung von Funktionen $f \in \mathcal{O}(G)$.

Satz 9.3.2.15 (Invariante Vektorfelder auf algebraischen Monoiden). *Gegeben ein algebraisches Monoid G liefert das Auswerten $\xi \mapsto \xi_e$ eines linksinvarianten Vektorfelds am neutralen Element einen Vektorraumisomorphismus*

$$\mathrm{Lie}\, G \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_e G$$

9.3.2.16. Wir notieren die inverse Abbildung zu unserem Isomorphismus im Satz $v \mapsto \grave{v}$. Analog liefert auch das Auswerten $\zeta \mapsto \zeta_e$ eines rechtsinvarianten Vektorfelds am neutralen Element einen Vektorraumisomorphismus $\mathrm{Lie}\, G \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_e G$. Wir notieren die inverse Abbildung in diesem Fall $v \mapsto \acute{v}$.

Beweis im affinen Fall. Die Abbildung ist sicher injektiv, denn für jedes linksinvariante Vektorfeld ξ gilt $\xi_x = (\mathrm{d}_e(x\cdot))\xi_e$. Es bleibt nur zu zeigen, daß für alle $v \in \mathrm{T}_e G$ das durch die Vorschrift

$$\grave{v}_x := (\mathrm{d}_e(x\cdot))v$$

auf G definierte Vektorfeld algebraisch ist. Wenn G affin ist, reicht es ja zu zeigen, daß gilt $f \in \mathcal{O}(G) \Rightarrow \grave{v} f \in \mathcal{O}(G)$. Mit $\Delta f = \sum g_i \otimes f_i$ haben wir nun $f(xy) = \sum g_i(x) f_i(y)$ und folglich $f \circ (x\cdot) = \sum g_i(x) f_i$ und

$$(\grave{v} f)(x) = \grave{v}_x f = v(f \circ (x\cdot)) = \sum g_i(x) v(f_i)$$

und das ist offensichtlich wieder eine reguläre Funktion. □

Beweis im Allgemeinen. Das folgt sofort aus Satz 9.3.2.33 über infinitesimale Operationen, dessen Beweis jedoch Resultate voraussetzt, die uns erst das Studium der Differentiale zur Verfügung stellen wird. Genauer benötigen wir für diesen Beweis, daß jede Varietät eine offene dichte Teilmenge aus glatten Punkten besitzt und daß sich jeder Tangentialvektor an einem glatten Punkt zu einem algebraischen Vektorfeld in einer offenen Umgebung unseres Punktes fortsetzen läßt. □

Definition 9.3.2.17. Die **Liealgebra** $\mathrm{Lie}\, G$ eines algebraischen Monoids G erklären wir als den Tangentialraum beim neutralen Element

$$\mathrm{Lie}\, G := \mathrm{T}_e G$$

mit derjenigen Struktur einer Liealgebra, für die der Isomorphismus mit der Liealgebra der linksinvarianten Vektorfelder ein Isomorphismus von Liealgebren ist.

9.3.2.18. Offensichtlich liefert für jedes algebraische Monoid G das Auswerten am neutralen Element einen Liealgebrenisomorphismus $\operatorname{Lie} G \xrightarrow{\sim} \operatorname{Lie}(G^{\mathrm{opp}})$. Auf die Beziehung zwischen den beiden Lieklammern auf $\mathrm{T}_e G$ durch linksinvariante und rechtsinvariante Vektorfelder kommen wir in 9.3.2.31 zurück. Sie unterscheiden sich um ein Vorzeichen.

Satz 9.3.2.19 (**Differential eines Monoidhomomorphismus**). *Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von algebraischen Monoiden ist sein Differential beim neutralen Element ein Homomorphismus von Liealgebren*

$$\mathrm{d}\varphi := \mathrm{d}_e\varphi : \operatorname{Lie} G \to \operatorname{Lie} H$$

Beweis. Linksinvariante Vektorfelder ξ auf G und ζ auf H mit $\mathrm{d}_e\varphi : \xi_e \mapsto \zeta_e$ sind offensichtlich φ-verwandt, in Formeln $\varphi : \xi \rightsquigarrow \zeta$. Damit folgt die Behauptung aus unserer Erkenntnis 9.3.2.12, daß verwandte Vektorfelder verwandte Lieklammern haben. □

9.3.2.20. Bisher haben wir Tangentialvektoren meist mit v bezeichnet und Varietäten gerne mit X. Wenn aber Liealgebren auf Vektorräumen operieren, bezeichnen wir mit v lieber die Elemente dieser Vektorräume und mit X die Elemente unsere Liealgebren.

9.3.2.21 (**Ableiten algebraischer Darstellungen**). Gegeben eine endlichdimensionale algebraische Darstellung (V, ρ) eines algebraischen Monoids G und Elemente $X \in \operatorname{Lie} G$ sowie $v \in V$ erklären wir ein Element $X \cdot_\rho v = Xv \in V$ durch die Vorschrift

$$Xv := \operatorname{richt}\big((\mathrm{d}_e(\cdot v))(X)\big)$$

Wir nehmen also in Worten von der Abbildung $(\cdot v) : G \to V$ gegeben durch $g \mapsto \rho(g)(v) = gv$ das Differential beim neutralen Element, werten es aus bei $X \in \mathrm{T}_e G$ und wenden auf das Ergebnis $\operatorname{richt} : \mathrm{T}_v V \xrightarrow{\sim} V$ an. Es ist klar, daß für jeden Homomorphismus $A : V \to W$ von endlichdimensionalen algebraischen Darstellungen gilt

$$A(Xv) = X(Av) \quad \forall X \in \operatorname{Lie} G,\ v \in V$$

Insbesondere erhalten wir auch im Fall nicht notwendig endlichdimensionaler Darstellungen ein wohldefiniertes Xv, indem wir es in Bezug auf eine und jede endlichdimensionale Unterdarstellung berechnen, die v enthält. Mit dem dadurch erklärten Xv gilt dann auch für Homomorphismen $A : V \to W$ von beliebigen algebraischen Darstellungen weiter $A(Xv) = X(Av)\ \forall X \in \operatorname{Lie} G, v \in V$.

9.3.2.22. Seien etwas allgemeiner $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus von Monoiden. Unter einem **Homomorphismus von Darstellungen über** φ verstehen

wir eine lineare Abbildung $A : V \to W$ von einer G-Darstellung V in eine H-Darstellung W mit

$$A(gv) = \varphi(g)(Av) \quad \forall g \in G, v \in V$$

9.3.2.23. Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von algebraischen Monoiden und darüber ein Homomorphismus $A : V \to W$ von algebraischen Darstellungen finden wir für die abgeleiteten Darstellungen unmittelbar

$$A(Xv) = (\mathrm{d}\varphi(X))(Av) \quad \forall X \in \operatorname{Lie} G, v \in V$$

Lemma 9.3.2.24 (Ableitung der rechtsregulären Darstellung). *Gegeben ein algebraisches Monoid G und seine rechtsreguläre Darstellung $\mathcal{O}(G)$ mit der Operation durch Rechtsverschiebung $\big(\rho(g)f\big)(x) := f(xg)$ gilt für jedes linksinvariante Vektorfeld $\xi \in \mathcal{T}(G)$ mit Wert $\xi_e \in \operatorname{Lie} G$ beim neutralen Element und jedes $f \in \mathcal{O}(G)$ die Identität*

$$\xi f = \xi_e \cdot_\rho f$$

9.3.2.25. In Worten erhalten wir also dasselbe Ergebnis, ob wir einen Tangentialvektor im neutralen Element zu einem linksinvarianten Vektorfeld fortsetzen und das auf eine Funktion loslassen oder aber dieselbe Funktion als eine Vektor der rechtsregulären Darstellung verstehen und darauf den fraglichen Tangentialvektor als Element der Liealgebra im Sinne der Ableitung von Darstellungen operieren lassen.

Beweis. Wir schreiben $\Delta f = \sum g_i \otimes h_i$. Es gilt also $f(xy) = \sum_{i=1}^n g_i(x)h_i(y)$ und $\rho(y)f = \sum h_i(y)g_i$ und $\lambda(x)f = \sum g_i(x)h_i$. So ergibt sich

$$(\xi f)(x) = (\lambda(x)\xi f)(e) = (\xi\lambda(x)f)(e) = \xi_e(\lambda(x)f) = \sum g_i(x)(\xi_e h_i)$$

und $\xi f = \sum(\xi_e h_i)g_i$. Andererseits ergibt sich das Differential von $y \mapsto \rho(y)f$ am neutralen Element gefolgt von richt ebenso zu $\sum(\xi_e h_i)g_i$, denn $y \mapsto \rho(y)f$ ist die Verknüpfung von $h : G \to k^n, y \mapsto (h_1(y), \ldots, h_n(y))$ mit einer linearen Abbildung $A : k^n \to W$ für $W := \langle g_1, \ldots, g_n\rangle \subset \mathcal{O}(G)$ ein endlichdimensionaler unter $\rho(G)$ stabiler Teilraum und so folgt

$$\operatorname{richt} \mathrm{d}_e(A \circ h)\, \xi_e = A \operatorname{richt} \mathrm{d}_e(h)\, \xi_e = A(\xi_e h_1, \ldots, \xi_e h_n) \qquad \square$$

9.3.2.26. Eine **Darstellung einer Liealgebra** $\mathfrak{g}$ ist ein Paar (V, ρ) aus einem Vektorraum V übr demselben Grundkörper wie unsere Liealgebra und einem Homomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ von Liealgebren. Wir schreiben in diesem Kontext meist abkürzend

$$Xv = X \cdot_\rho v := (\rho(X))(v)$$

Genau dann gehört eine bilineare Abbildung $\mathfrak{g} \times V \to V$ zu einer Darstellung von Liealgebren, wenn gilt $X(Yv) - Y(Xv) = [X, Y]v$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}, v \in V$.

9.3.2.27. Ein **Homomorphismus von Darstellungen** einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist eine lineare Abbildung $A : V \to W$ mit $A(Xv) = X(Av)$ für alle $v \in V$ und $X \in \mathfrak{g}$.

Proposition 9.3.2.28 (Ableitung einer algebraischen Darstellung). *Gegeben eine algebraische Darstellung V eines algebraischen Monoids G gilt*

$$X(Yv) - Y(Xv) = [X, Y]v \quad \forall X, Y \in \operatorname{Lie} G, v \in V$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei V endlichdimensional. Wie wir bei der Diskussion der Jordanzerlegung gezeigt hatten, läßt sich dann V als Unterdarstellung in eine direkte Summe endlich vieler Kopien der rechtsregulären Darstellung einbetten. Damit folgt die Proposition aus der Beschreibung 9.3.2.24 der Ableitung der rechtsregulären Darstellung und der Verträglichkeit der Ableitung von Darstellungen mit Homomorphismen 9.3.2.21. □

9.3.2.29. Ist $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Homomorphismus von Liealgebren und V eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ und W eine Darstellung von $\mathfrak{h}$, so verstehen wir unter einem **Homomorphismus von Darstellungen über** φ eine lineare Abbildung $A : V \to W$ mit

$$A(Xv) = \varphi(X)(Av) \quad \forall X \in \mathfrak{g}, v \in V$$

Insbesondere ist nach 9.3.2.23 jeder Homomorphismus von algebraischen Darstellungen über einem Homomorphismus von algebraischen Monoiden auch ein Homomorphismus der abgeleiteten Darstellungen über dem zugehörigen Liealgebrenhomomorphismus.

Lemma 9.3.2.30 (Liealgebra des allgemeinen linearen Monoids). *Für das algebraische Monoid* $\operatorname{End} V$ *liefert* $\operatorname{richt} : \mathrm{T}_e(\operatorname{End} V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End} V$ *einen Liealgebrenisomorphismus*

$$\operatorname{richt} : \operatorname{Lie}(\operatorname{End} V) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{gl}(V)$$

Beweis. In diesem Fall ist $(\cdot v) : \operatorname{End} V \to V$ für jedes feste $v \in V$ eine lineare Abbildung, folglich gilt $\operatorname{richt} \mathrm{d}_e(\cdot v)X = (\cdot v) \operatorname{richt} X$. □

9.3.2.31 (**Rechtsinvariante versus linksinvariante Vektorfelder**). Gegeben eine endlichdimensionale algebraische Darstellung (V, ρ) eines algebraischen Monoids G wird der Dualraum eine algebraische Darstellung des opponierten Monoids G^{opp} durch die Vorschrift

$$(g^\circ \alpha)(v) := \alpha(gv) \quad \forall \alpha \in V^*, g \in G, v \in V$$

Für die abgeleitete Darstellung von $X \in \mathrm{T}_e G$ folgt $(X^\circ \alpha)(v) = \alpha(Xv)$ mit der Notation X° für $X \in \mathrm{T}_e G$ aufgefaßt als Element von $\operatorname{Lie}(G^{\mathrm{opp}})$. Gegeben $X, Y \in \operatorname{Lie} G$ folgt aus $X^\circ(Y^\circ \alpha) - Y^\circ(X^\circ \alpha) = [X^\circ, Y^\circ]\alpha$ durch Anwenden auf v mithin

$([Y,X]^\circ\alpha)(v) = \alpha\big([Y,X]v\big) = \alpha\big(Y(Xv) - X(Yv)\big) = ([X^\circ,Y^\circ]\alpha)(v)$. Da wir hier für α auch jedes Element der linksregulären Darstellung nehmen können, wenn wir von $V := \langle G^{\mathrm{opp}}\alpha\rangle^*$ ausgehen, folgt schließlich

$$[X^\circ,Y^\circ] = -[X,Y]^\circ$$

Satz 9.3.2.32 (Vektorfelder auf affinen algebraischen Gruppen). *Gegeben eine affine algebraische Gruppe G liefert das Multiplizieren regulärer Funktionen mit linksinvarianten Vektorfeldern einen Isomorphismus*

$$\mathcal{O}(G) \otimes_k \mathrm{Lie}\, G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k\, \mathcal{O}(G)$$

Beweis. Wir beginnen mit dem Isomorphismus $\mathrm{Lie}\, G \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_e G$ aus 9.3.2.15 und entwickeln eine explizite Formel für die mit seiner Hilfe entstehende Abbildung

$$\mathcal{O}(G) \otimes_k \mathrm{T}_e G \to \mathrm{Der}_k\, \mathcal{O}(G)$$

Ist (w_α) eine Basis von $\mathrm{T}_e G$, so wird unsere Abbildung gegeben durch die Vorschrift $\sum_\alpha f_\alpha \otimes w_\alpha \mapsto D$ mit $D_z = \sum_\alpha f_\alpha(z)(\mathrm{d}_e(z\cdot)w_\alpha)$. Gegeben eine Derivation $D \in \mathrm{Der}_k\, \mathcal{O}(G)$ werden andererseits Funktionen $f_\alpha : G \to k$ durch diese Gleichungen festgelegt, da wir im Gruppenfall sind und folglich die Differentiale der Linksmultiplikationen Isomorphismen $\mathrm{d}_e(z\cdot) : \mathrm{T}_e G \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_z G$ sind. Wir haben gewonnen, wenn wir zeigen können, daß unsere Funktionen f_α regulär sind. Für alle $h \in \mathcal{O}(G)$ und $z \in G$ haben wir aber

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_\alpha f_\alpha(z) w_\alpha(h) &= (\mathrm{d}_z(z^{-1}\cdot)D_z)(h) \\
&= D_z(\lambda(z)h) \\
&= \delta_z D(\lambda(z)h) \\
&= \delta_z D(\textstyle\sum_i l_i(z) g_i) \\
&= \textstyle\sum_i l_i(z)(Dg_i)(z)
\end{aligned}$$

für $\Delta(h) = \sum_i l_i \otimes g_i$. Nun finden wir sicher reguläre Funktionen $h_\beta \in \mathcal{O}(G)$ mit $w_\alpha(h_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$. Setzen wir dann oben $h = h_\beta$ ein, so folgt, daß f_β regulär gewesen sein muß. □

Satz* 9.3.2.33 (Infinitesimale Operation). *Gegeben $G \circlearrowright X$ ein Varietät mit der Operation eines algebraischen Monoids und ein Tangentialvektor $\xi_e \in \mathrm{T}_e G$ ist das Vektorfeld auf X gegeben durch $x \mapsto \mathrm{d}_e(\cdot x)(\xi_e)$ algebraisch.*

Beweis. Nach 9.2.2.12 bilden die Einheiten von G eine offene Umgebung des neutralen Elements, folglich dürfen wir annehmen, daß G eine algebraische Gruppe ist. Nach 9.3.4.17 können wir ξ_e zu einem algebraischen Vektorfeld ξ auf einer offenen Umgebung $U \Subset G$ des neutralen Elements fortsetzen. Nach 9.3.2.37

können wir dazu das algebraische Vektorfeld $(\xi, 0)$ auf $U \times X$ bilden. Dessen Vorwärtsverwandter uner dem Isomorphismus von Varietäten $U \times X \xrightarrow{\sim} U \times X$ gegeben durch $(g, x) \mapsto (g, gx)$ ist dann auch ein algebraisches Vektorfeld ζ auf $U \times X$. Dessen Projektionsrestriktion $\operatorname{pres}_{e \times X} \zeta$ ist nach 9.3.2.38 mithin auch algebraisch. Man prüft nun leicht, daß es mit dem im Satz beschriebenen Vektorfeld zusammenfällt. □

Übungen

Übung 9.3.2.34. $(k = \bar{k})$. Gegeben endlichdimensionale k-Vektorräume V, W und eine bilineare Abbildung $\varphi : V \times V \to W$ betrachten wir die algebraische Gruppe $\mathrm{O}(\varphi) := \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid \varphi(gv, gw) = \varphi(v, w)\ \forall v, w \in V\}$. Man zeige, daß die offensichtliche Abbildung eine Inklusion

$$\operatorname{Lie} \mathrm{O}(\varphi) \hookrightarrow \{X \in \operatorname{End} V \mid \varphi(Xv, w) + \varphi(v, Xw) = 0\ \forall v, w \in V\}$$

induziert. In vielen Fällen werden wir zeigen können, daß diese Inklusion sogar ein Isomorphismus ist. Daß das nicht immer gilt, zeigt der Fall $\varphi : k \times k \to k$ der Multiplikation in Charakteristik Zwei.

Übung 9.3.2.35. $(k = \bar{k})$. Gegeben eine endlichdimensionale k-Algebra A zeige man für die Liealgebra ihrer Automorphismengruppe $\mathrm{Alg}_k^\times(A) \subset \mathrm{GL}(A)$, daß unter den üblichen Identifikationen gilt

$$\operatorname{Lie}(\mathrm{Alg}_k^\times(A)) \subset \operatorname{Der}_k(A)$$

Man prüfe auch, daß das im Fall $A = k[X]/\langle X^p \rangle$ mit $\operatorname{char} k = p > 0$ eine echte Inklusion ist. In 22.1.3.11 dürfen Sie als Übung zeigen, daß das im Fall $k = \mathbb{C}$ stets eine Gleichheit ist. In 9.3.3.10 zeigen wir das allgemeiner für $\operatorname{char} k = 0$.

Übung 9.3.2.36. Für jeden Automorphismus φ einer algebraischen Gruppe G ist die Liealgebra der Gruppe der Fixpunkte enthalten in der Menge der Fixpunkte des Differentials, in Formeln $\operatorname{Lie}(G^\varphi) \subset (\operatorname{Lie} G)^{\mathrm{d}\varphi}$.

Übung 9.3.2.37 (**Verträglichkeit von Vektorfeldern mit Produkten**). Gegeben k-Varietäten X und Y zeige man, daß es genau einen Homomorphismus

$$\big(\mathcal{T}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y)\big) \oplus \big(\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{T}(Y)\big) \to \mathcal{T}(X \times Y)$$

gibt, der an allen Stellen $(x, y) \in X \times Y$ zu unserer Identifikation 9.3.1.24 spezialisiert. Sind X und Y beide affin, so zeige man darüberhinaus, daß er ein Isomorphismus ist. Hinweis: Verträglichkeit von Derivationen mit Koprodukten 9.3.1.7.

Übung 9.3.2.38. Gegeben Varietäten X und Y und ein algebraisches Vektorfeld $v \in \mathcal{T}(X \times Y)$ und ein Punkt $y \in Y$ zeige man, daß $x \mapsto (\mathrm{d}_{(x,y)} \operatorname{pr}_X) v_{(x,y)}$

ein algebraisches Vektorfeld auf X ist. Hinweis: Man mag sich auf den affinen Fall zurückziehen und den Isomorphismus 9.3.2.37 verwenden. Wir nennen dies Vektorfeld auf X die **Projektionsrestriktion von** v **längs** y und notieren es $\mathrm{pres}_{X\times y}(v) \in \mathcal{T}(X)$.

Übung 9.3.2.39. Gegeben eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ zeige man, daß die Abbildung $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ gegeben durch $\mathrm{ad} : X \mapsto [X, \ ]$ ein Homomorphismus von Liealgebren ist, der in den Derivationen unserer Liealgebra landet.

Übung 9.3.2.40 (**Final Vorwärtsverwandte algebraischer Vektorfelder**). Seien ein finaler Morphismus von Varietäten $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ und ein algebraisches Vektorfeld $A \in \mathcal{T}(X)$ gegeben. Gibt es ein zu A verwandtes Vektorfeld B auf Y, so ist auch B algebraisch.

9.3.3 Adjungierte Darstellung

Lemma 9.3.3.1 (**Differential von Verknüpfung und Inversenbildung**). *Gegeben ein algebraisches Monoid G ist das Differential der Multiplikation die Addition. Genauer ist die Verknüpfung*

$$\mathrm{T}_eG \oplus \mathrm{T}_eG \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{(e,e)}(G \times G) \xrightarrow{\mathrm{d}_e(\mathrm{mult})} \mathrm{T}_eG$$

die Addition im Vektorraum T_eG. Im Gruppenfall ist weiter das Differential des Invertierens die Multiplikation mit (-1), in Formeln

$$\mathrm{d}_e(\mathrm{inv}) = (-1) : \mathrm{T}_eG \to \mathrm{T}_eG$$

Beweis. Unsere Verknüpfung ist linear und ihre Restriktion auf beide Summanden ist das Differential der Identität, also die Identität. Das zeigt die erste Aussage. Die Verknüpfung $G \to G \times G \to G$ von $(\mathrm{inv}, \mathrm{id})$ mit der Multiplikation ist konstant, hat also Differential Null. Das zeigt die zweite Aussage. □

Definition 9.3.3.2. Sei G eine algebraische Gruppe. Gegeben $g \in G$ betrachten wir den Homomorphismus $\mathrm{int}(g) = \mathrm{int}_g : G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$ und setzen

$$\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Ad}_g := \mathrm{d}_e(\mathrm{int}_g) : \mathrm{T}_eG \to \mathrm{T}_eG$$

9.3.3.3. Auf diese Weise erhalten wir zu jeder affinen algebraischen Gruppe G eine Darstellung, die **adjungierte Darstellung**

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{T}_eG)$$

Diese Darstellung ist algebraisch nach Übung 9.3.1.40 im affinen Fall und nach 9.3.11.11 im allgemeinen. Explizit wird im affinen Fall $\mathcal{O}(G)$ mithilfe der $(\mathrm{int}\, g)$ eine algebraische Darstellung von G nach 9.1.4.6, darin ist $\mathcal{I}(1)/\mathcal{I}(1)^2$ ein Subquotient und nach 9.1.4.16 ebenfalls algebraisch, und T_eG ist nach 9.3.1.28 isomorph zur Kontragradienten $(\mathcal{I}(1)/\mathcal{I}(1)^2)^*$ dieser Darstellung.

9.3.3.4 (**Verträglichkeiten der adjungierten Darstellung**). Gegeben eine Darstellung (V, ρ) einer Gruppe G und ein Element $g \in G$ ist die lineare Abbildung $\rho(g) : V \to V$ stets ein Homomorphismus von Darstellungen über dem Gruppenhomomorphismus $\mathrm{int}_g : G \to G$. In der Tat gilt für alle $x \in G$ die Identität

$$\rho(g)\rho(x) = \rho(\mathrm{int}_g x)\rho(g)$$

Insbesondere ist $\rho(g)$ nach 9.3.2.29 dann auch ein Homomorphismus der abgeleiteten Darstellung über Ad_g alias $\rho(g)(X \cdot_\rho v) = (\mathrm{Ad}_g X) \cdot_\rho (\rho(g)v)$ oder abgekürzt notiert

$$g(Xv) = (\mathrm{Ad}_g X)gv \quad \forall X \in \mathfrak{g}, v \in V$$

9.3.3.5. Wenn wir die adjungierte Darstellung ableiten, erhalten wir eine Operation der Liealgebra unserer algebraischen Gruppe auf sich selber. Man notiert sie

$$\mathrm{ad} : \mathrm{Lie}\, G \to \mathfrak{gl}(\mathrm{Lie} G)$$

Satz 9.3.3.6 (**Lieklammer und adjungierte Darstellung**). *Für jede algebraische Gruppe G und alle $X, Y \in \mathrm{Lie}\, G$ gilt*

$$(\mathrm{ad}\, X)(Y) = [X, Y]$$

9.3.3.7. Das gilt fraglos auch für nicht notwendig affine algebraische Gruppen, aber es ist mir nicht gelungen, in dieser Allgemeinheit einen Beweis vertretbarer Länge auszuschreiben.

Beweis. Gegeben eine algebraische Darstellung V von G und ein Vektor $v \in V$ können wir unsere Verträglichkeiten der adjungierten Darstellung 9.3.3.4 umschreiben zur Identität

$$gXg^{-1}v = (\mathrm{Ad}_g X)v \quad \forall g \in G, X \in \mathrm{Lie}\, G, v \in V$$

Halten wir X und v fest und nehmen V endlichdimensional an, so ist das eine Gleichheit von Morphismen von Varietäten $G \to V$. Diese Morphismen haben dann notwendig auch dasselbe Differential am neutralen Element und durch Einsetzen von Y in dieses Differential und Nachschalten von richt ergibt sich die Identität

$$YXv - XYv = (\mathrm{ad}_Y X)v \quad \forall X, Y \in \mathrm{Lie}\, G, v \in V$$

Um im vorhergehenden das Differential auf der linken Seite zu brechnen, mag man sie als Vernüpfung der diagonalen Einbettung $G \to G \times G$ mit der Abbildung $(g, h) \mapsto gXh^{-1}v$ schreiben. Wie auch immer folgt $[Y, X]v = (\mathrm{ad}_Y X)v$ für alle Vektoren v aller algebraischen Darstellungen V von G. Um $[Y, X] = (\mathrm{ad}_Y X)$

zu zeigen, müssen wir also nur eine algebraische Darstellung finden, auf der verschiedene Elemente der Liealgebra auch durch verschiedene Endomorphismen operieren. Das leistet etwa jede Einbettung in die Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen Vektorraums oder nach 9.3.2.24 auch die rechtsreguläre Darstellung. □

Zweiter Beweis. Sei ξ das linksinvariante Vektorfeld auf G mit $\xi_e = X$. Das linksinvariante Vektorfeld ζ mit $\zeta_e = (\operatorname{Ad} g)X$ entspricht dann der Derivation $f \mapsto \rho(g^{-1})\xi\rho(g)f$. □

Beweis. Wir ziehen uns zunächst auf den Fall $G = \mathrm{GL}(V)$ zurück, den wir dann durch explizite Rechnung erledigen. Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von algebraischen Gruppen kommutiert sicher für alle $g \in G$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\operatorname{int} g"'] & H \arrow[d, "\operatorname{int} \varphi(g)"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & H \end{tikzcd}$$

und mithin auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_e G \arrow[r, "\mathrm{d}_e\varphi"] \arrow[d, "\operatorname{Ad} g"'] & \mathrm{T}_e H \arrow[d, "\operatorname{Ad} \varphi(g)"] \\ \mathrm{T}_e G \arrow[r, "\mathrm{d}_e\varphi"] & \mathrm{T}_e H \end{tikzcd}$$

In anderen Worten ist $\mathrm{d}_e\varphi : \mathrm{T}_e G \to \mathrm{T}_e H$ ein Homomorphismus von Darstellungen über unserem Gruppenhomomorphismus. Nach 9.3.2.29 ist diese Abbildung dann auch ein Homomorphismus der abgeleiteten Darstellungen über dem induzierten Homomorphismus von Liealgebren, aus $\mathrm{d}_e\varphi : X \mapsto A$ und $\mathrm{d}_e\varphi : Y \mapsto B$ folgt also $(\mathrm{d}_e\varphi) : (\operatorname{ad} X)(Y) \mapsto (\operatorname{ad} A)(B)$. Andererseits folgt aus 9.3.2.19 auch $(\mathrm{d}_e\varphi) : [X, Y] \mapsto [A, B]$. Ist speziell $\varphi : G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine abgeschlossene Einbettung, so folgt der Satz für G, sobald wir ihn für $\mathrm{GL}(V)$ zeigen können. Sei also V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum und $G = \mathrm{GL}(V) \circledcirc \operatorname{End} V$. Mithilfe von 9.3.1.26 erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus

$$\text{richt} : \mathrm{T}_e G \xrightarrow{\sim} \operatorname{End} V$$

Er wird selten überhaupt notiert, aber hier notieren wir ihn ausnahmsweise durch $X \mapsto \bar{X}$. Ich behaupte, daß unter diesem Isomorphismus unser $\operatorname{ad} : \mathrm{T}_e G \to \operatorname{End} \mathrm{T}_e G$ der Abbildung $\operatorname{End} V \to \operatorname{End}(\operatorname{End} V)$, $A \mapsto [A, \ ]$ entspricht, mit $[A, B] = AB - BA$ dem üblichen Kommutator im Endomorphismenring $\operatorname{End} V$.

Für $g \in G$ ist $(\operatorname{int} g)$ die Restriktion einer linearen Abbildung auf $\operatorname{End} V$ und wir erhalten somit für alle $g \in G$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_e G \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{d}_e(\operatorname{int} g)=\operatorname{Ad} g"'] & \operatorname{End} V \arrow[d] & \ni A \arrow[d, mapsto] \\ \mathrm{T}_e G \arrow[r, "\sim"] & \operatorname{End} V & \ni gAg^{-1} \end{tikzcd}$$

Wir notieren die rechte Vertikale meist auch $\operatorname{Ad} g : \operatorname{End} V \to \operatorname{End} V$, $A \mapsto gAg^{-1}$ und erhalten so $\operatorname{Ad} : G \to \operatorname{GL}(\operatorname{End} V)$. Um hinwiederum das Differential dieser Abbildung zu berechnen, schreiben wir sie als Verknüpfung

$$\begin{array}{ccccc} G & \to & G \times G & \to & \operatorname{GL}(\operatorname{End} V) \\ g & \mapsto & (g, g^{-1}) & & \\ & & (x, y) & \mapsto & (A \mapsto xAy) \end{array}$$

und bilden die zugehörigen Tangentialräume und Differentiale beim neutralen Element und seinen Bildern. Das liefert die obere Horizontale im Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_e G \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \mathrm{T}_{(1,1)}(G \times G) \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\wr"] & \mathrm{T}_e \operatorname{GL}(\operatorname{End} V) \arrow[d, "\wr"] \\ & \mathrm{T}_e G \oplus \mathrm{T}_e G \arrow[r, dashed] \arrow[u, shift left, "\wr"] & \operatorname{End}(\operatorname{End} V) \end{tikzcd}$$

Wir interessieren uns für die als Strichpfeile eingezeichneten Verknüpfungen. Der schräge Strichelpfeil wird nach 9.3.3.1 gegeben durch $X \mapsto (X, -X)$. Der waagerechte Strichelpfeil bildet offensichtlich $(X, 0)$ auf $(\bar{X}\cdot)$ ab und $(0, Y)$ auf $(\cdot\bar{Y})$. Zusammen geht also X auf $[\bar{X}, \ ]$. □

Satz 9.3.3.8 (Jordan-Zerlegung in Lie-Algebren algebraischer Monoide). *1. Gegeben ein affines algebraisches Monoid G besitzt jedes Element $X \in \operatorname{Lie} G$ genau eine Zerlegung $X = X_{\mathrm{s}} + X_{\mathrm{n}}$ mit $\grave{X}_{\mathrm{s}} \in \operatorname{End}_k \mathcal{O}(G)$ diagonalisierbar, $\grave{X}_{\mathrm{n}} \in \operatorname{End}_k \mathcal{O}(G)$ lokal nilpotent und $[X_{\mathrm{s}}, X_{\mathrm{n}}] = 0$;*

2. Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von affinen algebraischen Monoiden gilt $\mathrm{d}\varphi(X_{\mathrm{s}}) = (\mathrm{d}\varphi(X))_{\mathrm{s}}$ und $\mathrm{d}\varphi(X_{\mathrm{n}}) = (\mathrm{d}\varphi(X))_{\mathrm{n}}$;

3. Für das Monoid $G = \operatorname{End}(V)$ entspricht unter dem kanonischen Isomorphismus $\operatorname{richt} : \operatorname{Lie} G \xrightarrow{\sim} \operatorname{End} V$ die absolute Jordan-Zerlegung der konkreten Jordan-Zerlegung.

Beweis. Wir stützen uns auf das anschließende Lemma 9.3.3.9. Ist speziell $A = \mathcal{O}(G)$ und $X \in \operatorname{Lie} G$ eine linksinvariante Derivation, so wirkt X lokal endlich nach 9.3.2.24 und wir erhalten unmittelbar die gewünschte Zerlegung in $\operatorname{Der}_k \mathcal{O}(G)$.

Des weiteren sind wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung auch X_{s} und X_{n} linksinvariant und Teil 1 ist bewiesen. Teil 2 folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(H) \arrow[r] \arrow[d, "(\mathrm{d}\varphi)(X)"'] & \mathcal{O}(G) \arrow[d, "X"] \\ \mathcal{O}(H) \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \end{tikzcd}$$

mit der Funktorialität der Jordan-Zerlegung. Man muß nur beachten, daß dies Diagramm bereits $(\mathrm{d}\varphi)(X)$ als linksinvariantes Vektorfeld eindeutig festlegt. Teil 3 zeigt man analog wie die analoge Aussage zur Jordan-Zerlegung in affinen algebraischen Monoiden in 9.1.5.5 durch Einbettung von V in eine endliche direkte Summe von Kopien der rechtsregulären Darstellung von G. □

Lemma 9.3.3.9 (**Jordan-Zerlegung von Derivationen**). *Seien k ein Körper und $(A, *)$ eine nicht notwendig assoziative k-Algebra und $\partial : A \to A$ eine lokal endliche Derivation und $A_\lambda := \mathrm{Hau}(\partial; \lambda)$ der Hauptraum von ∂ zum Eigenwert λ. So gilt*

$$A_\lambda * A_\mu \subset A_{\lambda+\mu}$$

Ist zusätzlich A die Summe seiner Haupträume, so sind auch der halbeinfache und der nilpotente Anteil ∂_{s} und ∂_{n} von ∂ Derivationen von A.

Beweis. In der Tat gilt für $\lambda, \mu \in k$ und $a, b \in A$ sicher

$$(\partial - (\lambda + \mu))(a * b) = ((\partial - \lambda)a) * b + a * ((\partial - \mu)b)$$

Induktiv erhalten wir mühelos

$$(\partial - (\lambda + \mu))^n(a * b) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\partial - \lambda)^i(a) * (\partial - \mu)^{n-i}(b)$$

Aus $a \in A_\lambda$ und $b \in A_\mu$ folgt damit $a * b \in A_{\lambda+\mu}$. Insbesondere erhalten wir so $\partial_{\mathrm{s}}(a * b) = (\partial_{\mathrm{s}} a) * b + a * (\partial_{\mathrm{s}} b)$ und ∂_{s} ist auch eine Derivation. Dasselbe folgt für $\partial_{\mathrm{n}} = \partial - \partial_{\mathrm{s}}$. □

9.3.3.10 (**Automorphismen und Derivationen**). Seien $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\mathrm{char}(k) = 0$ und $(A, *)$ eine endlichdimensionale k-Algebra und $\partial : A \to A$ eine Derivation und $A_\lambda := \mathrm{Hau}(\partial; \lambda)$ der Hauptraum von ∂ zum Eigenwert λ und $X \subset k$ die von den λ mit $A_\lambda \neq 0$ erzeugte additive Untergruppe. So trägt A eine X-Graduierung und unter der Äquivalenz 9.1.7.19 oder noch besser der Schmelzäquivalenz 9.1.7.20 entspricht sie einer Operation der diagonalisierbaren Gruppe $\mathfrak{D}(X)$ durch Algebrenautomorphismen und man sieht, daß ∂_{s} im Bild von $\mathrm{Lie}\,\mathfrak{D}(X)$ liegt. Andererseits, und erst

hier brauchen wir $\operatorname{char}(k) = 0$, liefert ∂_{n} eine algebraisch Operation der additiven Gruppe k durch Algebrenautomorphismen vermittels $t \mapsto \exp(t\partial_{\mathrm{n}})$, vergleiche 24.2.4.3. Wir erkennen so, daß in unserem Fall und insbesondere unter der Annahme $\operatorname{char}(k) = 0$ gilt

$$\operatorname{Lie}(\operatorname{Alg}_k^\times(A)) = \operatorname{Der}_k(A)$$

In 9.3.2.35 hatten wir gesehen, daß ohne Einschränkungen an die Charakteristik im allgemeinen nur die Inklusion $\subset$ gilt.

Übungen

Übung 9.3.3.11. Gegeben eine affine algebraische Gruppe G und ein Element $g \in G$ betrachte man den Morphismus $\beta : G \to G$, $h \mapsto hgh^{-1}g^{-1}$ und zeige die Formel $(\mathrm{d}_e\beta)(Y) = Y - \operatorname{Ad}_g(Y)\ \forall Y \in \operatorname{Lie} G$.

Übung 9.3.3.12. Gegeben algebraische Darstellungen V, W eines algebraischen Monoids ist auch $V \otimes W$ eine algebraische Darstellung mit der Operation $g(v \otimes w) = gv \otimes gw$. Das Differential dieser Darstellung wird beschrieben durch die Formel

$$X(v \otimes w) = Xv \otimes w + v \otimes Xw \quad \forall X \in \operatorname{Lie} G, v \in V, w \in W$$

Übung 9.3.3.13. Gegeben eine algebraische Darstellung V eines algebraischen Monoids ist auch die äußere Algebra $\bigwedge V$ mit der offensichtlichen Gruppenwirkung eine algebraische Darstellung. Das Differential dieser Darstellung wird beschrieben durch die Formel

$$X(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) = \sum_{i=1}^{r} v_1 \wedge \ldots \wedge Xv_i \wedge \ldots \wedge v_r$$

Ergänzende Übung 9.3.3.14. Die Liealgebra eines Nomalteilers einer algebraischen Gruppe ist ein Ideal in der Liealgebra der ursprünglichen Gruppe.

Übung 9.3.3.15. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Man zeige, daß die Fortsetzung eines Elements der Liealgebra durch ein linksinvariantes Vektorfeld als diagonalisierbare beziehungsweise nilpotente Derivation operiert genau dann, wenn seine Fortsetzung durch ein rechtsinvariantes Vektorfeld diese Eigenschaft hat. Mir ist nicht klar, ob dasselbe auch im Fall von Monoiden gilt.

Übung 9.3.3.16. Die Liealgebra einer unipotenten affinen algebraischen Gruppe besteht aus nilpotenten Elementen. Die Liealgebra einer diagonalisierbaren affinen algebraischen Gruppe besteht aus halbeinfachen Elementen.

9.3.4 Differentiale und Kotangentialräume

Definition 9.3.4.1. Seien k ein Kring, A ein k-Kring, $A \otimes_k A \to A$ die Multiplikation und I ihr Kern. Wir bezeichnen mit $\langle I^2 \rangle$ oder auch abkürzend I^2 das von allen Produkten von zwei Elementen von I erzeugte Ideal und setzen

$$\Omega_{A/k} := I/I^2$$

und nennen diesen Raum den **Modul der Differentiale von** A **über** k. Er ist in natürlicher Weise ein Modul über $(A \otimes_k A)/I$ und wird vermittels des durch die Multiplikation gegebenen Isomorphismus $(A \otimes_k A)/I \xrightarrow{\sim} A$ ein A-Modul. Manchmal spricht man auch ausführlicher vom **Modul der Kähler-Differentiale**. Ist k noethersch und A ringendlich über k oder auch nur $A \otimes_k A$ noethersch, so ist der Modul der Differentiale endlich erzeugt.

9.3.4.2. Für die beiden Ringhomomorphismen $A \to A \otimes_k A$, die gegeben werden durch $a \mapsto a \otimes 1$ und $a \mapsto 1 \otimes a$, ist die Verknüpfung mit der Multiplikation die Identität auf A.

9.3.4.3. Der Kern I der Multiplikation $A \otimes_k A \to A$ wird als Ideal erzeugt von den Elementen $a \otimes 1 - 1 \otimes a$ mit $a \in A$. Liegt in der Tat $\sum a_i \otimes b_i$ in unserem Kern, so gilt

$$\sum a_i \otimes b_i = \sum a_i \otimes b_i - \sum 1 \otimes a_i b_i = \sum (a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i)(1 \otimes b_i)$$

Satz 9.3.4.4 (**Universelle Eigenschaft des Moduls der Differentiale**). *Seien k ein Kring und A ein k-Kring. Die Abbildung $\mathrm{d} : A \to \Omega_{A/k}$ gegeben durch die Vorschrift $a \mapsto \mathrm{d}a := (a \otimes 1 - 1 \otimes a) + \langle I^2 \rangle$ ist eine k-lineare Derivation im Sinne von 9.3.1.1 und für alle A-Moduln M liefert das Vorschalten von d einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(A, M)$$

9.3.4.5. Unser Element $\mathrm{d}a \in \Omega_{A/k}$ heißt das **Differential von** a. Nach 9.3.4.3 wird der Modul der Differentiale als A-Modul erzeugt von den Differentialen $\mathrm{d}a$ der Elemente $a \in A$. Manchmal verfeinern wir die Notation zu $\mathrm{d}a = \mathrm{d}_{A/k}a$.

9.3.4.6 (**Derivationen und Differentiale**). Im folgenden übersetzen wir verschiedene Eigenschaften von Derivationen in die Sprache der Differentiale. In der Sprache der Differentiale gelten viele Aussagen in größerer Allgemeinheit als in der dualen Sprache der Derivationen. Die Sprache der Derivationen hinwiederum ist zumindest meiner Anschauung besser zugänglich und spielt auch in den hier gegebenen Beweisen eine wichtige Rolle.

Beweis. Wir prüfen unschwer für alle $a, b \in A$ die Identitäten $\mathrm{d}(ab) = ab \otimes 1 - 1 \otimes ab = (a \otimes 1 - 1 \otimes a)b + a(b \otimes 1 - 1 \otimes b) = b\mathrm{d}a + a\mathrm{d}b$ in $\Omega_{A/k}$. Das zeigt die erste Aussage. Zum Beweis der Zweiten konstruieren wir eine inverse Abbildung. Gegeben $D \in \mathrm{Der}_k(A, M)$ betrachten wir die Abbildung $D_1 : A \otimes_k A \to M$, $a \otimes b \mapsto -aD(b)$. Sicher annulliert D_1 alle Produkte $(a \otimes 1 - 1 \otimes a)(b \otimes 1 - 1 \otimes b) = ab \otimes 1 + 1 \otimes ab - a \otimes b - b \otimes a$ und liefert nach 9.3.4.3 folglich eine Abbildung $D_1 : \Omega_{A/k} \to M$. Diese Abbildung D_1 muß A-linear sein, weil das bereits für $D_1 : A \otimes_k A \to M$ gilt in Bezug auf die A-Operation auf $A \otimes_k A$ vermittels der Multiplikation auf den ersten Faktor. □

Beispiel 9.3.4.7 (**Differentiale von Polynomringen**). Gegeben ein Kring k ist der Modul der Differentiale $\Omega_{k[T]/k}$ ein freier $k[T]$-Modul mit Basis $\mathrm{d}T$. In der Tat folgt das mit der universellen Eigenschaft 9.3.4.4 leicht aus der Beschreibung der k-linearen Derivationen des Polynomrings in 9.3.1.5, nach dem eine k-lineare Derivation $k[T] \to M$ in einen $k[T]$-Modul M festgelegt und festlegbar ist durch das Bild $m \in M$ der Variablen T und gegeben wird durch $P \mapsto P'm$. Gegeben ein Polynom $P \in k[T]$ haben wir insbesondere für die universelle Derivation

$$\mathrm{d}P = P'\mathrm{d}T$$

Wenn wir direkt von der Definition ausgehen, finden wir alternativ $k[T_1, T_2] \xrightarrow{\sim} k[T] \otimes_k k[T]$ mit $T_1 \mapsto T \otimes 1$ und $T_2 \mapsto 1 \otimes T$ und darunter $\langle T_1 - T_2 \rangle \xrightarrow{\sim} I$ und $\langle (T_1 - T_2)^2 \rangle \xrightarrow{\sim} \langle I^2 \rangle$ und sehen so auch ganz explizit ein weiteres Mal, daß $\mathrm{d}T$ eine Basis des $k[T]$-Moduls $\Omega_{k[T]/k}$ ist.

Beispiel 9.3.4.8 (**Differentiale von Polynomringen in mehreren Veränderlichen**). Gegeben ein Kring k ist der Modul der Differentiale $\Omega_{k[T_1,\ldots,T_n]/k}$ ein freier Modul über $k[T_1, \ldots, T_n]$ mit Basis $\mathrm{d}T_1, \ldots, \mathrm{d}T_n$. In der Tat folgt das mit der universellen Eigenschaft leicht aus der Beschreibung der k-linearen Derivationen des Polynomrings in 9.3.1.9. Gegeben ein Polynom P haben wir dann

$$\mathrm{d}P = \frac{\partial P}{\partial T_1}\mathrm{d}T_1 + \ldots + \frac{\partial P}{\partial T_n}\mathrm{d}T_n$$

Analog bilden auch für einen Polynomring in einer beliebigen Menge von Variablen die Differentiale der Variablen eine Basis des Moduls der Differentiale.

9.3.4.9. Gegeben eine bepunktete k-Varietät (X, x) heißt der Dualraum $\mathrm{T}_x^* X := \mathrm{Hom}_k(\mathrm{T}_x X, k)$ des Tangentialraums an X bei x der **Kotangentialraum an X bei x**. Ein Element des Kotangentialraums heißt auch ein **Kovektor**. Für $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ der Kern des Auswertungshomomorphismus liefert das Transponieren unseres Isomorphismus aus 9.3.1.30 einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathrm{T}_x^* X \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$$

Proposition 9.3.4.10 (Geometrische Halme des Moduls der Differentiale). *Gegeben ein Kring k und ein k-Kring A und eine Spaltung $A \to k$ des strukturierenden Homomorphismus $k \to A$ und $\mathfrak{m} := \ker(A \to k)$ ihr Kern induziert die Abbildung $f \mapsto 1 \otimes \mathrm{d}f$ einen Isomorphismus*

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\sim} k \otimes_A \Omega_{A/k}$$

Beispiel 9.3.4.11 (**Kotangentialraum durch Differentiale**). Speziell erhalten wir daraus als die Verknüpfung mit zwei weiteren natürlichen Isomorphismen unseren Isomorphismus

$$\mathrm{Der}_k(A,k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k},k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(k \otimes_A \Omega_{A/k},k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,k)$$

aus 9.3.1.28. Im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers $k = \bar{k}$ und einer bepunkteten k-Varietät (X,x) mit dem lokalen Ring $A := \mathcal{O}_{X,x}$ spezialisiert er zu unserem Isomorphismus $\mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ aus 9.3.1.30 und induziert den ersten Isomorphismus einer Sequenz von Isomorphismen

$$\mathrm{T}_x^* X \;\xrightarrow{\sim}\; \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \;\xrightarrow{\sim}\; k_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/k}$$

Ist unsere bepunktete Varietät X affin, so erhalten wir in derselben Weise mit $A := \mathcal{O}(X)$ und $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}(X)$ dem Kern des Auswertungshomomorphismus $\delta_x : \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow k$ eine Sequenz von Isomorphismen

$$\mathrm{T}_x^* X \;\xrightarrow{\sim}\; \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \;\xrightarrow{\sim}\; k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$$

Salopp gesprochen ist also der geometrische Halm bei x des Moduls der Differentiale $\Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ der Kotangentialraum.

Erster Beweis. Wir prüfen zunächt, daß unsere Abbildung wohldefiniert ist. Wegen der Leinbizregel $\mathrm{d}(gf) = g(\mathrm{d}f) + f(\mathrm{d}g)$ wird darunter aber in der Tat jedes Element aus $\mathfrak{m}^2$ zu Null. Jetzt konstruieren wir eine Umkehrabbildung. Bezeichne wieder $I \subset A \otimes_k A$ den Kern der Multiplikation. Unter dem Kringhomomorphismus $A \otimes_k A \to A \otimes_k k \xrightarrow{\sim} A$ wird offensichtlich I nach $\mathfrak{m}$ abgebildet und er induziert folglich einen Morphismus $\Omega_{A/k} = I/I^2 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ und dann auch einen Morphismus $k \otimes_A \Omega_{A/k} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, der für $f \in \mathfrak{m}$ sicher $1 \otimes \mathrm{d}f = 1 \otimes (f \otimes 1 - 1 \otimes f)$ auf $f + \mathfrak{m}^2$ abbildet. Folglich sind unsere beiden Homomorphismen von A-Moduln zueinander invers. □

Zweiter Beweis. Die beim Beweis von 9.3.1.28 gegebenen Argumente zeigen auch, daß für jeden k-Modul M die Einschränkung einer Derivation auf $\mathfrak{m}$ einen Isomorphismus $\mathrm{Der}_k(A,M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, M)$ induziert. Den daraus mit der universellen Eigenschaft des Moduls der Differentiale entstehenden Isomorphismus

können wir nach der universellen Eigenschaft der Erweiterung der Skalare faktorisieren als

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(k \otimes_A \Omega_{A/k}, M) \to \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, M)$$

Also muß hier auch die zweite Abbildung ein Isomorphismus sein, und da das für alle k-Moduln M gilt, folgt die Proposition mit dem Yoneda-Lemma oder auch einfacheren dem speziellen Fall angepaßten Argumenten. □

9.3.4.12. Ein **Kovektorfeld** ω auf einer Varietät X ist eine Vorschrift, die jedem Punkt $x \in X$ ein Element $\omega_x \in \mathrm{T}_x^* X$ des Kotangentialraums bei x zuordnet. Gegeben eine affine k-Varietät X liefert jedes Differential $\omega \in \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ ein Kovektorfeld auf X vermittels der Vorschrift, daß $\omega_x \in \mathrm{T}_x^* X$ das Urbild von $1 \otimes \omega$ sein soll unter dem Isomorphismus $\mathrm{T}_x^* X \xrightarrow{\sim} k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ aus 9.3.4.11.

9.3.4.13 (**Glattheit impliziert Projektivität des Moduls der Differentiale**). Wir erinnern aus 7.7.4.15, daß eine Varietät X glatt heißt, wenn gilt

$$\mathrm{kdim}_x X = \dim_k \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \quad \forall x \in X$$

Wir erinnern weiter daran, daß nach 7.7.4.16 jede glatte Varietät die disjunkte Vereinigung ihrer irreduziblen Komponenten ist. Gegeben eine affine Varietät X ist andererseits der Modul der Differentiale $\Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ endlich erzeugt. Ist unsere affine Varietät X zusätzlich X glatt, so hat der Modul der Differentiale $\Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ geometrische Halme von lokal konstanter Dimension und ist nach 7.4.6.19 folglich projektiv alias lokal frei.

9.3.4.14 (**Differentiale als Kovektorfelder**). Gegeben eine glatte affine Varietät ist unsere Abbildung aus 9.3.4.12 nach der Projektivität des Moduls der Differentiale 9.3.4.13 eine Injektion vom Modul der Differentiale in die Menge der Kovektorfelder. Ein Kovektorfeld auf einer glatten Varietät nennen wir **algebraisch**, wenn jeder Punkt eine offene affine Umgebung U besitzt derart, daß die Restriktion unseres Kovektorfelds auf U von einem Differential aus $\Omega_{\mathcal{O}(U)/k}$ herkommt. Nach Übung 7.6.4.23 kann jede affine offene Umgebung eines Punkts in einer affinen Varietät zu einer offenen Umgebung verkleinert werden, die sowohl in Bezug auf unsere ursprüngliche affine Varietät als auch in Bezug auf unsere affine offene Umgebung eine Nichtnullstellenmenge ist. Nach dem lokal-global-Prinzip aus 7.4.3.43 liefert unsere Konstruktion 9.3.4.12 also für jede glatte affine Varietät eine Bijektion zwischen $\Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ und der Menge der algebraischen Kovektorfelder auf X.

9.3.4.15. Jede algebraische Gruppe G ist glatt, da nach 7.7.5.5 in jeder Varietät die regulären Punkte eine offene dichte Teilmene bilden. Insbesondere bilden die

Differentiale auf jeder offenen affinen Teilmenge $U \Subset G$ einen projektiven $\mathcal{O}(U)$-Modul. Man kann das aber auch einfacher wie in 9.3.4.13 direkt mit 7.4.6.19 daraus folgern, daß der Modul der Differentiale $\Omega_{\mathcal{O}(U)/k}$ geometrische Halme konstanter Dimension hat.

9.3.4.16 (**Vektorfelder auf glatten Varietäten**). Gegeben eine bepunktete affine k-Varietät (X, x) liefern die universelle Eigenschaft des Moduls der Differentiale und 9.3.2.7 und unsere Definitionen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\Omega_{\mathcal{O}(X)/k}, \mathcal{O}(X)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Der}_k\, \mathcal{O}(X) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{T}(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\Omega_{\mathcal{O}(X)/k}, k_x) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(X), k_x) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{T}_x X \end{array}$$

Ist X glatt, so ist der Modul der Differentiale $\Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ projektiv nach 9.3.4.13, und da er auch endlich erzeugt ist, induziert die linke Vertikale einen Isomorphismus vom geometrischen Halm ihres Ausgangspunkts zu ihrem Zielpunkt. Wir folgern, daß für jede glatte affine Varietät X auch die algebraischen Vektorfelder einen endlich erzeugten projektiven $\mathcal{O}(X)$-Modul $\mathcal{T}(X)$ bilden und daß das Auswerten eines Vektorfelds an einem Punkt $x \in X$ einen Isomorphismus

$$k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{T}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_x X$$

des geometrischen Halms des Moduls der algebraischen Vektorfelder mit dem Tangentialraum induziert.

9.3.4.17. Jeder Tangentialvektor an einem Punkt einer algebraischen Gruppe kann zu einem algebraischen Vektorfeld auf einer offenen Umgebung besagten Punktes fortgesetzt werden. Das folgt direkt aus 9.3.4.16 und der Erkenntnis, daß jede algebraische Gruppe glatt ist.

9.3.4.18 (**Anschauung für relative Differentiale**). Seien $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen k-Varietäten und $B \to A$ eine abkürzende Notation für den zugehörigen Komorphismus $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$. Es fällt mir schwer, eine unmittelbare Anschauung für den Modul der Differentiale $\Omega_{A/B}$ zu geben, der in diesem Fall auch der **Modul der relativen Differentiale** heißt. Der duale Modul

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/B}, A) \cong \mathrm{Der}_B\, A \subset \mathrm{Der}_k\, A$$

kann jedoch anschaulich interpretiert werden als der Modul derjenigen algebraischen Vektorfelder auf X, die alle von Y zurückgeholten Funktionen annullieren. In besonders einfachen Situationen können diese Vektorfelder auch geometrisch beschrieben werden als diejenigen Vektorfelder, die tangential sind an die Fasern von φ. Insbesondere gilt das, wenn für alle $y \in Y$ die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $A \otimes_B k_y \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\varphi^{-1}(y))$ ist. Ist $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus

von affinen k-Varietäten, so verwenden wir für den $\mathcal{O}(X)$-Modul der relativen Differentiale auf X auch gerne die abkürzenden Notationen

$$\Omega(X/Y) = \Omega(\varphi) = \Omega_{\mathcal{O}(X)/\mathcal{O}(Y)}$$

9.3.4.19 (**Funktorialität des Moduls der Differentiale**). Gegeben ein kommutatives Diagramm von Kringen

$$\begin{array}{ccc} A & \to & C \\ \uparrow & & \uparrow \\ B & \to & D \end{array}$$

erhalten wir einen Modulhomomorphismus $\Omega_{A/B} \to \Omega_{C/D}$ über dem Kringhomomorphismus $\varphi : A \to C$ mit der Eigenschaft $\mathrm{d}a \mapsto \mathrm{d}(\varphi(a))$ in offensichtlicher Weise. Im geometrischen Fall und für $B = D = k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper nennt man diesen Homomorphismus das **Zurückholen von Kovektorfeldern**. Für jeden C-Modul N kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Der}_B(A, N) & \leftarrow & \mathrm{Der}_D(C, N) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/B}, N) & \leftarrow & \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/D}, N) \end{array}$$

mit der durch diesen Homomorphismus induzierten Abbildung rechts und den hoffentlich offensichtlichen Abbildungen sonst.

Ergänzung 9.3.4.20 (**Invariante Differentiale auf algebraischen Gruppen**). Gegeben eine affine algebraische Gruppe G betrachte man die Multiplikation und die Projektion auf die zweite Koordinate $\mu, \mathrm{pr}_2 : G \times G \to G$ sowie die natürliche Abbildung $\mathrm{can} : \Omega(G \times G) \to \Omega(G \times G/G \times 1)$. Ein Kovektorfeld $\omega \in \Omega(G)$ ist genau dann linksinvariant, wenn gilt

$$\mathrm{can}\, \mu^* \omega = \mathrm{can}\, \mathrm{pr}_2^* \omega$$

Lemma 9.3.4.21 (**Differentiale und Lokalisierung**). *1. Gegeben ein Kringhomomorphismus $B \to A$ und eine Teilmenge $S \subset A$ liefert die von $A \to S^{-1}A$ induzierte Abbildung $\Omega_{A/B} \to \Omega_{S^{-1}A/B}$ einen Isomorphismus von $(S^{-1}A)$-Moduln*

$$S^{-1}\Omega_{A/B} \xrightarrow{\sim} \Omega_{S^{-1}A/B}$$

2. Faktorisiert ein Kringhomomorphismus $B \to A$ für eine Teilmenge $T \subset B$ über $T^{-1}B$, so ist die davon induzierte Abbildung ein Isomorphismus

$$\Omega_{A/B} \xrightarrow{\sim} \Omega_{A/T^{-1}B}$$

Beweis. Um die erste Aussage zu sehen, muß man nach dem Yonedalemma oder einfacher nach 4.7.1.24 nur prüfen, daß die fragliche Abbildung für jeden $(S^{-1}A)$-Modul M eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{s^{-1}A}(\Omega_{S^{-1}A/B}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}\Omega_{A/B}, M)$$

induziert. Dazu betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(\Omega_{S^{-1}A/B}, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}\Omega_{A/B}, M) \\
 & \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/B}, M) \arrow[u, "\wr"'] \\
\mathrm{Der}_B(S^{-1}A, M) \arrow[uu, "\wr"] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Der}_B(A, M) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

und führen so die Behauptung auf unsere Erkenntnisse 9.3.1.10 über die Verträglichkeit von Derivationen mit Lokalisierungen zurück. Die zweite Aussage ist offensichtlich. □

Beispiel 9.3.4.22 (**Differentiale von Funktionenkörpern**). Gegeben ein Körper k ist $\Omega_{k(T_1,\ldots,T_n)/k}$ ein freier $k(T_1,\ldots,T_n)$-Modul mit der Basis $\mathrm{d}T_1,\ldots,\mathrm{d}T_n$.

Proposition 9.3.4.23 (**Derivationen und Lokalisierung**). *Seien B ein Kring, A ein B-Kring und $S \subset A$ eine Teilmenge. Ist der A-Modul $\Omega_{A/B}$ der Differentiale endlich präsentiert, so induziert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus*

$$S^{-1}\,\mathrm{Der}_B(A, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_B(S^{-1}A, S^{-1}A)$$

9.3.4.24. Insbesondere gilt das also, wenn B noethersch ist und A ringendlich über B, oder nach 9.3.4.21 auch, wenn B noethersch ist und A eine Lokalisierung einer ringendlichen B-Kringalgebra. Für ein Gegenbeispiel nehmen wir einen Körper k und betrachten $A = k[X_1, X_2, \ldots]$ und $S = \{X_1, X_2, \ldots\}$. So ist die geeignet interpretierte unendliche Summe $\sum X_i^{-1}\partial_i$ eine k-lineare Derivation von $S^{-1}A$, die nicht im Bild von $S^{-1}\,\mathrm{Der}_k(A, A)$ liegt.

Beweis. Gegeben B ein Kring, A ein B-Kring und $S \subset A$ eine Teilmenge sei $\mathrm{Der}_B(A, A) \to \mathrm{Der}_B(A, S^{-1}A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_B(S^{-1}A, S^{-1}A)$ die Komposition des Nachschaltens von $A \to S^{-1}A$ mit dem Isomorphismus aus 9.3.1.10. Sie induziert einen Homomorphismus

$$S^{-1}\,\mathrm{Der}_B(A, A) \to \mathrm{Der}_B(S^{-1}A, S^{-1}A)$$

Unter unseren Identifikationen 9.3.4.4 entspricht er dem natürlichen Homomorphismus

$$S^{-1}\operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/B}, A) \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}\Omega_{A/B}, S^{-1}A)$$

aus 7.4.3.34. Er ist nach 7.4.3.34 ein Isomorphismus, falls der A-Modul $\Omega_{A/B}$ endlich präsentiert ist. □

9.3.4.25 (**Vektorfelder und Lokalisierung**). Gegeben X eine affine Varietät und $A := \mathcal{O}(X)$ ihr Ring von regulären Funktionen und $S = \{f\}$ für $f \in \mathcal{O}(X)$ entspricht die Abbildung aus 9.3.4.23 unter unseren Isomorphismen aus 9.3.2.7 der Restriktion von algebraischen Vektorfeldern $\mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(X_f)$. In diesem Fall liefert also die Restriktion von algebraischen Vektorfeldern $\mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(X_f)$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{T}(X)_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}(X_f)$$

zwischen der Lokalisierung nach f des Raums der algebraischen Vektorfelder und dem Raum der algebraischen Vektorfelder auf dem Komplement der Nullstellenmenge von f.

Proposition 9.3.4.26 (**Differentiale sukzessiver Kringerweiterungen**). *Gegeben Kringhomomorphismen $k \to B$ und $\varphi : B \to A$ erhalten wir die* **rechtsexakte Sequenz der Differentiale**

$$A \otimes_B \Omega_{B/k} \to \Omega_{A/k} \twoheadrightarrow \Omega_{A/B}$$

mit $1 \otimes \mathrm{d}b \mapsto \mathrm{d}(\varphi(b))$ unter dem ersten Pfeil und $\mathrm{d}b \mapsto \mathrm{d}b$ unter dem Zweiten. Ist φ surjektiv, so gilt $\Omega_{A/B} = 0$ und wir erhalten eine Verlängerung unserer Sequenz zu einer Beschreibung der **Differentiale auf Quotienten** *durch die rechtsexakte Sequenz*

$$A \otimes_B \ker\varphi \to A \otimes_B \Omega_{B/k} \twoheadrightarrow \Omega_{A/k}$$

mit $1 \otimes b \mapsto 1 \otimes \mathrm{d}b$ als erster Abbildung.

9.3.4.27. Insbesondere impliziert unser Lemma 9.3.4.21 über die Verträglichkeit von Differentialen mit Lokalisierungen, daß für jeden Kring B und jede Teilmenge $S \subset B$ gilt $\Omega_{S^{-1}B/B} = 0$. Mit $I := \ker\varphi$ induziert $I \xrightarrow{\sim} B \otimes_B I \twoheadrightarrow A \otimes_B I$ darüberhinaus einen Isomorphismus $I/I^2 \xrightarrow{\sim} A \otimes_B \ker\varphi$.

Beispiel 9.3.4.28 (**Differentiale im geometrischen Fall**). $(k = \bar{k})$. Ist $X \subsetneq k^n$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f_1, \ldots, f_r$ ein Erzeugendensystem ihres Verschwindungsideals $\mathcal{I}(X)$, so liefert die Beschreibung der Differentiale auf Quotienten 9.3.4.26 zusammen mit unseren Erkenntnissen 9.3.4.8 über die Differentiale von Polynomringen einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X)\mathrm{d}T_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(X)\mathrm{d}T_n/\langle \mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_r\rangle \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$$

des freien $\mathcal{O}(X)$-Moduls über der Basis der $\mathrm{d}T_i$ modulo dem von den Bildern der $\mathrm{d}f_j$ erzeugten Untermodul mit dem Modul der Differentiale von $\mathcal{O}(X)$.

Beispiel 9.3.4.29 (**Differentiale im allgemeinen Fall**). Sind k ein beliebiger Kring und $f_1, \ldots, f_r \in k[T_1, \ldots, T_n]$ Polynome und $A := k[T_1, \ldots, T_n]/\langle f_1, \ldots, f_r\rangle$ der entsprechende Quotient des Polynomrings, so liefert unsere Beschreibung der Differentiale auf Quotienten 9.3.4.26 zusammen mit unseren Erkenntnissen 9.3.4.8 über die Differentiale von Polynomringen einen Isomorphismus

$$(A\mathrm{d}T_1 \oplus \ldots \oplus A\mathrm{d}T_n)\,/\langle \mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_r\rangle \;\xrightarrow{\sim}\; \Omega_{A/k}$$

des freien A-Moduls über der Basis der $\mathrm{d}T_i$ modulo dem von den Bildern der $\mathrm{d}f_j$ erzeugten Untermodul mit dem Modul der Differentiale von A über k. Dasselbe gilt allgemeiner für beliebig viele Variablen und beliebig viele Relationen, wenn wir also in anderen Worten jeweils auch unendliche Familien zulassen.

Beweis. Wir erinnern für jeden A-Modul M aus 9.3.1.6 die linksexakte Sequenz der Derivationen

$$\mathrm{Der}_B(A, M) \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(A, M) \to \mathrm{Der}_k(B, M)$$

Mit 9.3.4.4 wird daraus eine linksexakte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/B}, M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) \to \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k}, M)$$

Identifizieren wir den letzten Raum dieser Sequenz mit $\mathrm{Hom}_A(A \otimes_B \Omega_{B/k}, M)$ unter Zuhilfenahme der universellen Eigenschaft von Skalarerweiterungen 7.2.8.7, so erhalten wir daraus mit 7.1.3.19 die behauptete Rechtsexaktheit der Sequenz

$$\Omega_{A/B} \twoheadleftarrow \Omega_{A/k} \leftarrow A \otimes_B \Omega_{B/k}$$

Ist $\varphi : B \twoheadrightarrow A$ surjektiv, so gilt $\mathrm{Der}_B(A, M) = 0$ für jeden A-Modul M nach 9.3.1.6 und folglich $\Omega_{A/B} = 0$ nach der universellen Eigenschaft 9.3.4.4. Weiter haben wir dann wieder nach 9.3.1.6 für jeden A-Modul M die Beschreibung der Derivationen auf Quotienten durch die linksexakte Sequenz

$$\mathrm{Der}_k(A, M) \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(B, M) \to \mathrm{Hom}_k(\ker \varphi, M)$$

Wie zuvor schreiben wir sie um zu einer linksexakten Sequenz

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k}, M) \to \mathrm{Hom}_k(\ker \varphi, M)$$

und mit der universellen Eigenschaft von Skalarerweiterungen 7.2.8.7 weiter zu einer linksexakten Sequenz

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(A \otimes_B \Omega_{B/k}, M) \to \mathrm{Hom}_A(A \otimes_k \ker \varphi, M)$$

Mit 7.1.3.19 folgt die Rechtsexaktheit der Sequenz

$$\Omega_{A/k} \twoheadleftarrow A \otimes_B \Omega_{B/k} \leftarrow A \otimes_k \ker \varphi$$

und man sieht leicht, daß deren erste Abbildung über $A \otimes_B \ker \varphi$ faktorisiert. $\square$

9.3.4.30 (**Erzeuger für Moduln von Differentialen**). Ist k ein Kring und ist der k-Kring A eine Lokalisierung des von den Elementen $a_1, \ldots, a_n$ über k erzeugten Teilrings $k[a_1, \ldots, a_n]$, so erzeugen die Differentiale $\mathrm{d}a_1, \ldots, \mathrm{d}a_n$ den Modul der Differentiale $\Omega_{A/k}$. Das folgt unmittelbar aus der Beschreibung der Differentiale von Polynomringen 9.3.4.8, der Beschreibung der Differentiale von Quotienten 9.3.4.26 und der Verträglichkeit mit Lokalisierungen 9.3.4.21. Ist allgemeiner $W \subset A$ eine Teilmenge derart, daß A eine Lokalisierung von $k[{}_!W]$ ist, so erzeugen mit denselben Argumenten die $\mathrm{d}a$ mit $a \in W$ bereits den Modul der Differentiale $\Omega_{A/k}$.

Übungen

Übung 9.3.4.31 (**Verträglichkeit von Differentialen mit Koprodukten**). Gegeben ein Kring k und k-Kringe A, B zeige man, daß es genau einen Isomorphismus

$$(\Omega_{A/k} \otimes_k B) \oplus (A \otimes_k \Omega_{B/k}) \xrightarrow{\sim} \Omega_{(A \otimes_k B)/k}$$

gibt mit $(\mathrm{d}a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes \mathrm{d}b_2) \mapsto (1 \otimes b_1)\mathrm{d}(a_1 \otimes 1) + (a_2 \otimes 1)\mathrm{d}(1 \otimes b_2)$. Hinweis: 9.3.1.7.

Ergänzende Übung 9.3.4.32 (**Verträglichkeit von Differentialen mit Kolimites**). Man zeige, daß das Bilden des Moduls der Differentiale verträglich ist mit filtrierenden Kolimites von k-Kringen. Gegeben ein Kring k und ein Köcher $\mathcal{I}$ und ein System $R_i \in \mathrm{Car}(\mathcal{I}, \mathrm{Kring}^k)$ von k-Kringen mit dem Kolimes $R := \mathrm{col}_{i \in \mathcal{I}} R_i$ zeige man stärker, daß für nicht notwendig filtrierende Systeme die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$\mathrm{col}_{i \in \mathcal{I}}(R \otimes_{R_i} \Omega_{R_i/k}) \xrightarrow{\sim} \Omega_{R/k}$$

ist. Hinweis: Derivationen sind nach 9.3.1.34 verträglich mit Kolimites.

Übung 9.3.4.33. Seien $k \to A$ ein Kringhomomorphismus und $E \subset A$ ein Erzeugendensystem von A als k-Ringalgebra. Man zeige, daß die Differentiale $\mathrm{d}a$ für $a \in E$ bereits den Modul der Differentiale $\Omega_{A/k}$ als A-Modul erzeugen.

Ergänzende Übung 9.3.4.34. Gegeben eine affine k-Varietät X erinnern wir aus **??** die Konstruktion des Bündels $\mathrm{V}(M)$ zu einem endlich erzeugten $\mathcal{O}(X)$-Modul M und setzen

$$\mathrm{T}X := \mathrm{V}(\Omega_{\mathcal{O}(X)/k})$$

und nennen diese affine Varietät das **Tangentialbündel von** X. Nach **??** trägt das Tangentialbündel die Struktur eines geometrischen Moduls auf X und ist für glattes X nach 9.3.4.13 und **??** sogar ein Vektorbündel. Man konstruiere natürliche Isomorphismen zwischen den Fasern des Tangentialbündels und unseren Tangentialräumen $\mathrm{T}_x X$. Hinweis: Man erinnere aus 9.3.4.11 den natürlichen Isomorphismus $k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} \Omega_{\mathcal{O}(X)/k} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_x^* X$.

9.3.5 Transzendenz und Separabilität

Lemma 9.3.5.1 (**Differentiale und separable Erweiterungen**). *Seien $k \subset F \subset E$ Körper. Ist E/F separabel, so induziert die Einbettung $F \hookrightarrow E$ einen Isomorphismus*

$$E \otimes_F \Omega_{F/k} \xrightarrow{\sim} \Omega_{E/k}$$

9.3.5.2. Eine Körpererweiterung heißt wie in 6.3.9.18 separabel, wenn sie algebraisch ist und darüber hinaus jedes Element des Erweiterungskörpers eine einfache Nullstelle seines Minimalpolynoms über dem Grundkörper.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß die auf den Dualräumen induzierte Abbildung ein Isomorphismus ist, daß sich also jede k-Derivation $F \to E$ auf genau eine Weise zu einer k-Derivation $E \to E$ ausdehnen läßt. Dazu reicht es zu zeigen, daß sich für jedes $\alpha \in E$ jede k-Derivation $F \to E$ auf genau eine Weise zu einer k-Derivation $F(\alpha) \to E$ ausdehnen läßt. Nach Annahme haben wir $F(\alpha) = F[T]/\langle P(T)\rangle$ für ein irreduzibles Polynom $P \in F[T]$ mit $P'(\alpha) \neq 0$. Nach der zweiten Funktorialität für Derivationen 9.3.1.6 haben wir eine linksexakte Sequenz

$$\mathrm{Der}_k(F(\alpha), E) \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(F[T], E) \to \mathrm{Hom}_k(\langle P(T)\rangle, E)$$

Nach 9.3.1.7 ist eine k-lineare Derivation D von $F[T] = F \otimes_k k[T]$ in den durch $T \mapsto \alpha$ zu einem $F[T]$-Modul gemachten Körper E festgelegt und festlegbar durch ihre Einschränkung ∂ auf F und ihren Wert $\beta \in E$ bei T. Diese Derivation $D = D_\beta$ kann dann beschrieben werden als $D_\beta : Q \mapsto (\partial Q)(\alpha) + \beta Q'(\alpha)$, wobei ∂Q das Polynom in $E[T]$ meint, das durch Anwenden von ∂ auf die Koeffizienten von Q entsteht. Wegen $P'(\alpha) \neq 0$ gibt es genau ein $\beta \in E$ mit $D_\beta(P) = 0$, und dies D_β induziert dann die einzig mögliche Fortsetzung von ∂ zu einer k-linearen Derivation $F(\alpha) \to E$. □

9.3.5.3 (**Anschauliche Bedeutung im geometrischen Fall**). Für einen Homomorphismus $M \to N$ von endlich erzeugten projektiven Moduln über dem Ring $\mathcal{O}(X)$ der regulären Funktionen auf einer irreduziblen affinen Varietät X sind gleichbedeutend:

1. Unser Morphismus wird bijektiv nach Lokalisierung aller von Null verschiedenen Elemente von $\mathcal{O}(X)$;

2. Unser Morphismus wird bijektiv nach Lokalisierung eines von Null verschiedenen Elements $f \in \mathcal{O}(X)\backslash 0$;

3. Es gibt eine offene dichte Teilmenge $U \Subset X$ derart, daß unser Homomorphismus Bijektionen $k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} M \xrightarrow{\sim} k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} N$ auf den geometrischen Halmen induziert für alle $x \in U$;

4. Es gibt einen Punkt $x \in X$ derart, daß unser Homomorphismus bei x eine Bijektion $k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} M \xrightarrow{\sim} k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} N$ auf dem geometrischen Halm induziert.

Das folgt aus der Exaktheit der Lokalisierung, der Beschreibung des Kerns der natürlichen Abbildung eines Moduls in seine Lokalisierung, dem Nakayamalemma und dem Spalten surjektiver Homomorphismen auf projektive Moduln. Betrachten wir nun einen dominanten Morphismus $\varphi : X \to Y$ von irreduziblen glatten affinen Varietäten, so sind die Moduln der Differentiale projektiv nach 9.3.4.13. Wenden wir nun unsere Erkenntnisse auf den induzierten Homomorphismus $\mathcal{O}(X) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \Omega_{\mathcal{O}(Y)/k} \to \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ an, so finden wir mit den Verträglichkeiten 9.3.4.21 von Differentialen mit Lokalisierung und der Beschreibung 9.3.4.11 des Kotangentialraums als geometrischer Halm des Moduls der Differentiale, daß gleichbedeutend sind:

1. Die zu $X \to Y$ gehörige Körpererweiterung $\mathcal{M}(Y) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$ liefert einen Isomorphismus $\mathcal{M}(X) \otimes_{\mathcal{M}(Y)} \Omega_{\mathcal{M}(Y)/k} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathcal{M}(X)/k}$;

2. Nach Vorschalten der Einbettung der Nichtnullstellenmenge eines von Null verschiedenen Elements $f \in \mathcal{O}(X)\backslash 0$ induziert unser Morphismus einen Isomorphismus $\mathcal{O}(X_f) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \Omega_{\mathcal{O}(Y)/k} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathcal{O}(X_f)/k}$;

3. Es gibt eine offene dichte Teilmenge $U \Subset X$ derart, daß unser Morphismus für alle $x \in U$ Isomorphismen $\mathrm{T}^*_{\varphi(x)}Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^*_x X$ auf den Kotangentialräumen induziert;

4. Es gibt einen Punkt $x \in X$ derart, daß unser Morphismus einen Isomorphismus $\mathrm{T}^*_{\varphi(x)}Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^*_x X$ auf den Kotangentialräumen induziert.

5. Es gibt eine offene dichte Teilmenge $U \Subset X$ derart, daß unser Morphismus für alle $x \in U$ Isomorphismen $\mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\varphi(x)}Y$ auf den Tangentialräumen induziert;

6. Es gibt einen Punkt $x \in X$ derart, daß unser Morphismus einen Isomorphismus $\mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\varphi(x)}Y$ auf den Tangentialräumen induziert.

In 9.3.5.13 zeigen wir noch wesentlich stärkere Aussagen in dieser Richtung.

Lemma 9.3.5.4 (**Differentiale primitiver Körpererweiterungen**). *Gegeben eine primitive Körpererweiterung $F(\alpha)/F$ gilt*

$$\dim_{F(\alpha)} \Omega_{F(\alpha)/F} = \begin{cases} 0 & \textit{falls } \alpha \textit{ separabel ist über } F; \\ 1 & \textit{falls } \alpha \textit{ algebraisch, aber nicht separabel ist über } F; \\ 1 & \textit{falls } \alpha \textit{ transzendent ist über } F. \end{cases}$$

Beweis. Der Modul der Differentiale des Polynomrings $F[T]$ über F ist frei vom Rang Eins nach 9.3.4.8. Der Modul der Differentiale seines Quotientenkörpers $F(T)$ über F ist frei vom Rang Eins nach der Verträglichkeit mit Lokalisierungen 9.3.4.21. Ist also α transzendent über F, so haben wir $\dim_{F(\alpha)} \Omega_{F(\alpha)/F} = 1$. Sonst haben wir eine Surjektion $F[T] \twoheadrightarrow F(\alpha)$ mit $T \mapsto \alpha$, deren Kern vom Minimalpolynom P von α erzeugt wird. Damit haben wir nach unseren Erkenntnissen über die Differentiale von Quotienten 9.3.4.26 eine Surjektion $F(\alpha) \otimes_{F[T]} F[T]\mathrm{d}T \twoheadrightarrow \Omega_{F(\alpha)/F}$, deren Kern von $1 \otimes \mathrm{d}P = 1 \otimes P'(T)\mathrm{d}T = P'(\alpha) \otimes \mathrm{d}T$ erzeugt wird. Damit gilt $\dim_{F(\alpha)} \Omega_{F(\alpha)/F} = 1$ falls $P'(\alpha) = 0$ und $\dim_{F(\alpha)} \Omega_{F(\alpha)/F} = 0$ falls $P'(\alpha) \neq 0$. Im Lichte des Separabilitätskriteriums 6.3.9.26 ist aber eine primitive algebraische Körpererweiterung $F(\alpha)/F$ genau dann separabel, wenn für das Minimalpolynom P eines Erzeugers α gilt $P'(\alpha) \neq 0$. □

9.3.5.5. Ich erinnere aus 6.3.2.6, daß eine Körpererweiterung E/F **körperendlich** heißt, wenn der Erweiterungskörper über dem Grundkörper als Körper endlich erzeugt ist, wenn es also in Formeln endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_n \in E$ gibt mit $E = F(x_1, \ldots, x_n)$.

Lemma 9.3.5.6. *Der Modul der Differentiale einer körperendlichen Körpererweiterung verschwindet genau dann, wenn sie separabel ist.*

Ergänzung 9.3.5.7. Das folgende Beispiel zeigt, daß das vorhergehende Lemma nicht auf beliebige Körpererweiterungen verallgemeinert werden kann. Sei k ein Körper positiver Charakteristik $p > 0$ und $k(T)$ sein Funktionenkörper. Die durch sukzessives Adjungieren der p-ten Wurzeln der Variablen entstehende Körpererweiterung

$$\bigcup_{r=0}^{\infty} k\left(\sqrt[p^r]{T}\right)$$

des Funktionenkörpers ist algebraisch und rein inseparabel, aber der Modul ihrer relativen Differentiale verschwindet nach 9.3.4.32 dennoch.

Beweis. Sei E/F unsere Körpererweiterung. Ist unsere Erweiterung separabel, so verschwindet der Modul ihrer Differentiale nach unseren Erkenntnissen zu Diffe-

rentialen bei separablen Körpererweiterungen 9.3.5.1 und der rechtsexakten Sequenz der Differentiale 9.3.4.26. Verschwindet umgekehrt der Modul der Differentiale, so zeigen wir die Behauptung durch Induktion über die Zahl der Erzeuger. Haben wir etwa $E = F(x_1, \ldots, x_n)$, so betrachten wir die rechtsexakte Sequenz

$$E \otimes_F \Omega_{F(x_1)/F} \to \Omega_{E/F} \twoheadrightarrow \Omega_{E/F(x_1)}$$

In der Mitte steht nach Annahme eine Null. Also steht auch am rechten Ende eine Null und nach Induktionsannahme ist $E/F(x_1)$ separabel. Nach nach unseren Erkenntnissen zu Differentialen bei separablen Körpererweiterungen 9.3.5.1 ist also die natürliche Abbildung ein Isomorphismus

$$E \otimes_{F(x_1)} \Omega_{F(x_1)/F} \xrightarrow{\sim} \Omega_{E/F}$$

Mithin haben wir $\Omega_{F(x_1)/F} = 0$ und nach 9.3.5.4 ist $F(x_1)/F$ separabel. Dann aber ist wegen der Transitivität der Separabilität 6.3.9.35 auch E/F separabel. □

Satz 9.3.5.8 (Differentiale körperendlicher Körpererweiterungen). *Seien E/k eine körperendliche Körpererweiterung und $x_1, \ldots, x_r \in E$ gegeben. So erzeugen die Differentiale $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r$ den Modul der Differentiale $\Omega_{E/k}$ genau dann, wenn E separabel ist über $k(x_1, \ldots, x_r)$*

9.3.5.9. Beispiel 9.3.5.7 zeigt, daß das für nicht körperendliche Körpererweiterungen im allgemeinen nicht mehr gilt.

9.3.5.10. Sei E/k eine körperendliche Körpererweiterung. Die erste Aussage des Satzes impliziert die Abschätzung $\dim_E \Omega_{E/k} \geq \operatorname{trgr}(E/k)$ sowie im Fall von Gleichheit die Existenz einer Transzendenzbasis $x_1, \ldots, x_r$ mit E separabel über $k(x_1, \ldots, x_r)$. Der im Anschluß bewiesene Satz 9.3.5.11 impliziert, daß für vollkommenes k sogar stets $\dim_E \Omega_{E/k} = \operatorname{trgr}(E/k)$ gilt.

Beweis. Wir erinnern aus 9.3.4.26 die rechtsexakte Sequenz der Differentiale

$$E \otimes_F \Omega_{F/k} \to \Omega_{E/k} \twoheadrightarrow \Omega_{E/F}$$

für jeden Zwischenkörper F. Erzeugen die $\mathrm{d}x_i$ den Modul der Differentiale $\Omega_{E/k}$, so zeigt für $F = k(x_1, \ldots, x_r)$ die rechtsexakte Sequenz der Differentiale $\Omega_{E/F} = 0$ und nach 9.3.5.6 ist folglich E separabel über F. Umgekehrt wird für $F = k(x_1, \ldots, x_r)$ nach 9.3.4.30 stets $\Omega_{F/k}$ erzeugt von den $\mathrm{d}x_i$, und ist zusätzlich E separabel über $F = k(x_1, \ldots, x_r)$, so folgt aus dem Verschwinden des Moduls der relativen Differentiale 9.3.5.1 und unserer rechtsexakten Sequenz, daß auch der Modul der Differentiale $\Omega_{E/k}$ von $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r$ erzeugt wird. □

Satz 9.3.5.11 (**Differentiale und algebraische Unabhängigkeit**). *Sei E/k eine Körpererweiterung eines vollkommenen Körpers k und seien $x_1, \ldots, x_r \in E$ gegeben. Sind die Differentiale $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r$ linear unabhängig über E, so sind die $x_1, \ldots, x_r$ algebraisch unabhängig über k.*

9.3.5.12. Das erlaubt uns, auch in positiver Charakteristik den Beweis unseres Satzes 7.7.5.4 zu Ende zu bringen, nach dem jede irreduzible Varietät birational ist zu einer Hyperfläche, und vervollständigt damit insbesondere auch in positiver Charakteristik den Beweis unserer Proposition 7.7.5.5, nach der in jeder Varietät die glatten Punkte eine dichte offene Teilmenge bilden. Uns hätte es auch gereicht, wenn wir nur hätten zeigen können, daß jee nichtleere Varietät mindestens einen glatten Punkt hat, abe auch dafür kenne ich keinen einfacheren Beweis. Es folgt sofort, daß jede algebraische Gruppe und sogar jeder homogene Raum glatt sind.

Beweis. Wir zeigen gleichbedeutend, daß wenn die x_i algebraisch abhängig sind, daß dann auch ihre Differentiale linear abhängig sind. Sind die x_i algebraisch abhängig über k, so gibt es per definitionem ein von Null verschiedenes Polynom $P \in k[T_1, \ldots, T_r] \backslash 0$ mit $P(x_1, \ldots, x_r) = 0$. Dann gibt es auch ein derartiges Polynom P von kleinstmöglichem Totalgrad. Eine partielle Ableitung dieses Polynoms P kann also nur dann auf $(x_1, \ldots, x_r)$ verschwinden, wenn sie das Nullpolynom ist. Andererseits kann aber P nicht konstant sein. Wären also alle partiellen Ableitungen $\partial_i P$ das Nullpolynom, so wären wir in positiver Charakteristik $p > 0$ und fänden ein Polynom R mit $R(T_1^p, \ldots, T_r^p) = P(T_1, \ldots, T_r)$. Da k vollkommen ist, gäbe es dann ein Polynom $Q \in k[T_1, \ldots, T_r]$ mit $Q^p = P$, im Widerspruch zur Minimalität des Grades von P. Also gibt es einen Index i mit $(\partial_i P)(x_1, \ldots, x_r) \neq 0$ und die Identität

$$\big((\partial_1 P)(x_1, \ldots, x_r)\big)\mathrm{d}x_1 + \ldots + \big((\partial_r P)(x_1, \ldots, x_r)\big)\mathrm{d}x_r = \mathrm{d}\big(P(x_1, \ldots, x_r)\big) = 0$$

im Modul der Differentiale $\Omega_{E/k}$ bedeutet die lineare Abhängigkeit der $\mathrm{d}x_i$. Das ist der gesuchte Widerspruch. □

Satz 9.3.5.13 (**Morphismen mit generisch bijektivem Differential**). *Für einen Morphismus $\varphi : X \to Y$ von irreduziblen Varietäten sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Morphismus φ ist dominant und die zugehörige Körpererweiterung $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ ist separabel;*

2. *Unser Morphismus φ ist dominant und es gibt einen Punkt in X mit glattem Bildpunkt, an dem das Differential von φ injektiv ist;*

3. *Wir haben $\operatorname{kdim} X \leq \operatorname{kdim} Y$ und es gibt einen glatten Punkt in X, an dem das Differential von φ surjektiv ist;*

4. *Es gibt einen glatten Punkt in X, an dem das Differential von φ bijektiv ist;*

5. *Es gibt eine nichtleere offene Teilmenge von X, an deren Punkten das Differential von φ bijektiv ist.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien X und Y affin.

3⇒4&2. Gegeben ein glatter Punkt $x \in X$ mit $\mathrm{d}_x\varphi$ surjektiv haben wir in 9.3.1.31 gezeigt, daß unser Morphismus dominant sein muß und $\varphi(x)$ ein glatter Punkt von Y. Wenn wir zusätzlich $\operatorname{kdim} Y \geq \operatorname{kdim} X$ annehmen, folgt $\mathrm{d}_x\varphi$ bijektiv.

4⇒3. Gegeben ein glatter Punkt $x \in X$ mit $\mathrm{d}_x\varphi$ surjektiv ist wie bereits bemerkt nach 9.3.1.31 unser Morphismus dominant und der Bildpunkt glatt. Ist dann $\mathrm{d}_x\varphi$ sogar bijektiv, so folgt die Gleichheit der Dimensionen $\operatorname{kdim} Y = \operatorname{kdim} X$ aus der Gleichheit der Dimensionen de Tangentialräume.

2⇒4. Ist unser Morphismus dominant, so gilt $\operatorname{kdim} X \geq \operatorname{kdim} Y$. Aus der Injektivität des Differentials an einer Stelle mit glattem Bildpunkt folgt so die Bijektivität ebenso wie die Glattheit des Ausgangspunkts.

4⇒1. Ist das Differential an einem glatten Punkt eine Bijektion $\mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$, so ist die duale Abbildung auch eine Bijektion $\mathrm{T}^*_{\varphi(x)} Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^*_x X$ auf den Kotangentialräumen, was hinwiederum bedeutet, daß unser kanonischer Morphismus $\mathcal{O}(X) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \Omega_{\mathcal{O}(Y)/k} \to \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ eine Bijektion alias

$$k_{\varphi(x)} \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \Omega_{\mathcal{O}(Y)/k} \xrightarrow{\sim} k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$$

induziert. In dieser Situation aber zeigt das Lemma von Nakayama, daß es eine Funkion $f \in \mathcal{O}(X)$ gibt mit $f(x) \neq 0$ derart, daß die kanonische Abbildung eine Surjektion

$$\mathcal{O}(X)[f^{-1}] \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \Omega_{\mathcal{O}(Y)/k} \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X)[f^{-1}] \otimes_{\mathcal{O}(X)} \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$$

induziert. Aus der Verträglichkeit von Differentialen mit Lokalisierung folgt, daß die natürliche Abbildung eine Surjektion

$$\mathcal{M}(X) \otimes_{\mathcal{M}(Y)} \Omega_{\mathcal{M}(Y)/k} \twoheadrightarrow \Omega_{\mathcal{M}(X)/k}$$

liefert, und das hinwiederum impliziert mit der rechtsexakten Sequenz 9.3.4.26 der Differentiale $\Omega_{\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)} = 0$. Nach 9.3.5.6 muß dann $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ separabel sein und wir haben 4⇒1 gezeigt.

1⇒5. Das zeigt man, indem man obige Argumentation rückwärts liest: Aus der Separabilität der Erweiterung der Funktionenkörper folgt mit 9.3.5.6, daß der Homomorphismus

$$\mathcal{O}(X) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \Omega_{\mathcal{O}(Y)/k} \to \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$$

von endlich erzeugten $\mathcal{O}(X)$-Moduln unter Skalarerweiterung zu $\mathcal{M}(X)$ eine Surjektion wird. Daraus folgt, daß wir schon nach Lokalisierung an einem geeigneten Element $f \in \mathcal{O}(X)\backslash 0$ eine Surjektion erhalten. Daraus folgt, daß für alle Nichtnullstellen von f die induzierte Abbildung eine Surjektion $\mathrm{T}^*_{\varphi(x)}Y \twoheadrightarrow \mathrm{T}^*_x X$ ist und das Differential folglich eine Injektion $\mathrm{T}_x X \hookrightarrow \mathrm{T}_{\varphi(x)}Y$. Für alle Punkte $x \in X_f$ mit glattem Bildpunkt zeigt dann ein Dimensionsvergleich, daß das Differential eine Bijektion $\mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\varphi(x)}Y$ sein muß. Nach 9.3.5.12 bilden die glatten Punkte jedoch in jeder Varietät eine offene dichte Teilmenge.

5⇒4. Das ist klar. □

Korollar 9.3.5.14 (Variante zu Zariski's Hauptsatz). *Sei $\varphi : X \to Y$ ein bijektiver Morphismus von affinen irreduziblen Varietäten und sei $\mathcal{O}(Y)$ normal. Gibt es einen glatten Punkt $x \in X$, an dem das Differential eine Surjektion $\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \twoheadrightarrow \mathrm{T}_{\varphi(x)}Y$ induziert, so ist φ ein Isomorphismus.*

Beweis. Wir wissen aus 9.2.4.15, daß ein bijektiver Morphismus von irreduziblen Varietäten stets zu einer endlichen rein inseparablen Erweiterung der Funktionenkörper führt. In Charakteristik Null ist jede endliche rein inseparable Körpererweiterung trivial und damit, wie bereits in 9.2.4.18 erwähnt, unsere Bedingung an das Differential überflüssig. In positiver Charakteristik impliziert nach 9.3.5.13 3⇒1 die zusätzliche Bedingung an das Differential, daß unsere rein inseparable Körpererweiterung auch separabel und mithin trivial ist. Wieder folgt also, daß unser Morphismus birational ist und damit nach dem Hauptsatz von Zariski 9.2.4.17 ein Isomorphismus. □

Satz 9.3.5.15 (Isomorphismen homogener Räume). *Ein bijektiver äquivarianter Morphismus von homogenen Räumen ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sein Differential an einer Stelle surjektiv ist. Im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null ist er stets ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei $\varphi : X \to Y$ unser bijektiver Morphismus und G unsere algebraische Gruppe. Nach 9.2.4.13 haben unsere beiden Varietäten dieselbe Dimension und nach 9.2.4.23 haben sie auch dieselben irreduziblen Komponenten und diese sind homogene Räume für G°, so daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit X und Y irreduzibel annehmen dürfen. Nach 9.3.5.13 induziert unser Morphismus dann eine separable Körpererweiterung $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ und nach 9.2.4.14 ist diese Körpererweiterung trivial, weil alle Fasern unseres Morphismus einelementig sind. Also ist unser Morphismus von homogenen Räumen birational und damit nach 9.2.4.16 ein Isomorphismus. □

9.3.6 Konstruktion von Quotienten

9.3.6.1. Ich erinnere daran, daß wir in 7.6.4.2 allgemeine k-Varietäten als spezielle k-geringte Räume eingeführt hatten. Ich erinnere daran, wie wir in 7.6.2.13 für jede Abbildung $f : X \to Y$ von einem k-geringten Raum X in eine Menge Y die „finale Struktur eines k-geringten Raums auf Y“ eingeführt hatten. Ich erinnere schließlich daran, daß nach 7.9.2.2 ein Morphismus $f : X \to Y$ **produktfest offenfinal** heißt, wenn er offen und final ist und für jede affine und damit sogar für jede beliebige Varietät Z auch $f \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ offen und final ist.

Satz 9.3.6.2 (**Quotienten affiner algebraischer Gruppen**). *Gegeben eine affine algebraische Gruppe G mit einer abgeschlossenen Untergruppe $H \trianglelefteq G$ gilt:*

1. *Die Menge G/H mit ihrer finalen Struktur eines k-geringten Raums zur Projektion $G \twoheadrightarrow G/H$ ist eine quasiprojektive Varietät;*

2. *Das Differential der Einbettung der Untergruppe und das Differential der Projektion auf die Quotientenvarietät bilden zusammen eine kurze exakte Sequenz $\mathrm{T}_e H \hookrightarrow \mathrm{T}_e G \twoheadrightarrow \mathrm{T}_{\bar{e}}(G/H)$;*

3. *Die Operation $G \times G/H \to G/H$ ist ein Morphismus von Varietäten.*

4. *Die Projektion $G \twoheadrightarrow G/H$ ist produktfest offenfinal.*

9.3.6.3. Offensichtlich ist der Quotientenmorphismus $G \twoheadrightarrow G/H$ flach nach 9.2.4.12 als Morphismus von schwach homogenen Räumen.

Ergänzung 9.3.6.4. In der Terminologie 7.9.3.8 existiert unter den Annahmen des Satzes also die Bahnenvarietät und hat im Sinne von 7.9.3.8 einen produktfesten Bahnenmorphismus. In der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten wird eine analoge Aussage in 22.4.4.3 gezeigt.

Beweis. Wir finden nach 9.3.6.7 eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V von G mitsamt einem von Null verschiedenen Vektor $v \in V \backslash 0$ derart, daß gilt $H = \{g \in G \mid gv \in kv\}$ und $\operatorname{Lie} H = \{X \in \operatorname{Lie} G \mid Xv \in kv\}$. Dann betrachten wir die Wirkung von G auf $\mathbb{P}V$, die nach 7.9.2.14 algebraisch ist, da nämlich $V \backslash 0 \to \mathbb{P}V$ nach 7.9.2.12 produktfest offenfinal ist. Darin betrachten wir dann die Bahn $G\langle v \rangle$ von $\langle v \rangle$. Sie ist als Bahn einer algebraischen G-Operation nach 9.2.3.7 eine lokal abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{P}V$ und erbt so eine Struktur als Varietät mit G-Wirkung. Das Differential von $(\cdot v) : G \to V$ beim neutralen Element wird per definitionem gegeben durch $\operatorname{richt}\big((\mathrm{d}_e(\cdot v))(X)\big) = Xv$ und nach der Beschreibung 9.3.1.39 der Tangentialräume des projektiven Raums haben wir weiter mit den offensichtlichen Morphismen eine linksexakte Sequenz

$$\mathrm{T}_e H \hookrightarrow \mathrm{T}_e G \to \mathrm{T}_{\langle v \rangle}(G\langle v \rangle)$$

Ein Dimensionsvergleich unter Verwendung der Dimensionsformel 9.2.4.13 zeigt, daß diese Sequenz sogar exakt sein muß. Sobald wir zeigen, daß $\pi : G \to G\langle v\rangle$ final ist, sind die drei ersten Teile des Satzes also bewiesen. Satz 9.2.4.12 über Morphismen homogener Räume zeigt schon einmal, daß π flach und damit produktfest offen ist. Gegeben $U \Subset G\langle v\rangle$ mit Urbild $W := \pi^{-1}(U) \Subset G$ und eine Abbildung $f : U \to k$ mit $f \circ \pi : W \to k$ regulär gilt es für die ersten drei Teile also nur noch zu zeigen, daß auch f bereits regulär ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir dabei U affin annehmen. Für den Graphen $\Gamma(f) \subset U \times k$ gilt nun sicher

$$(\pi \times \mathrm{id})^{-1}(\Gamma(f)) = \Gamma(f \circ \pi)$$

Mit π ist auch $\pi \times \mathrm{id}$ flach und folglich offen. Es folgt $\Gamma(f) \mathrel{\not\subset} U \times k$. Damit erbt $\Gamma(f)$ die Struktur einer affinen Varietät und die Projektion liefert einen bijektiven Morphismus $\Gamma(f) \to U$. Es reicht zu zeigen, daß er ein Isomorphismus ist, denn dann ist auch f ein Morphismus als die Komposition

$$U \xleftarrow{\sim} \Gamma(f) \hookrightarrow U \times k \twoheadrightarrow k$$

Nun ist nach 9.3.5.12 aber U glatt als offene Teilmenge eines homogenen Raums und $\Gamma(f)$ hat mindestens einen glatten Punkt. Nach unserer affinen Variante 9.3.5.14 von Zariski's Hauptsatz reicht es also zu zeigen, daß $\Gamma(f) \to U$ in jedem Punkt surjektives Differential hat. Um das zu sehen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(f \circ \pi) & \to & \Gamma(f) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ W & \to & U \end{array}$$

und sehen, daß es reicht zu zeigen, daß $W \to U$ in jedem Punkt surjektives Differential hat. Das haben wir jedoch bereits zu Beginn des Beweises aus einer Dimensionsabschätzung gefolgert. Um auch noch den vierten Teil zu zeigen, wiederholen wir unser Argument in einer etwas größeren Algemeinheit. Der Morphismus $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$ ist ja affin nach 7.9.1.3 als Morphismus von einer affinen Varietät in eine separierte Varietät. Für $U \Subset G/H$ offen affin ist also $\pi^{-1}(U)$ auch affin und das Vorschalten von π induziert nach dem, was wir bereits wissen, einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))^H$$

Ist Y eine weitere affine Varietät, so induziert das Vorschalten von $\mathrm{id} \times \pi$ also den

oberen horizontalen Isomorphismus eines kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(Y) \otimes \mathcal{O}(U) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dd, "\wr"'] & \mathcal{O}(Y) \otimes \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))^H \arrow[d, "\wr"] \\
& (\mathcal{O}(Y) \otimes \mathcal{O}(\pi^{-1}(U)))^H \arrow[d, "\wr"] \\
\mathcal{O}(Y \times U) \arrow[r] & \mathcal{O}(Y \times \pi^{-1}(U))^H
\end{tikzcd}$$

Dessen oberer rechter vertikaler Isomorphismus folgt aus 4.6.1.41, die übrigen vertikalen Isomorphismen sind offensichtlich. Die untere Horizontale muß dann auch ein Isomorphismus sein und Teil 4 folgt. □

Lemma 9.3.6.5. *Seien $H \trianglelefteq G$ affine algebraische Gruppen und $\iota : H \hookrightarrow G$ die Einbettung. So gibt es eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V von G mit einem Teilraum $W \subset V$ derart, daß gilt*

$$H = \{g \in G \mid gW \subset W\} \quad \textit{und} \quad \mathrm{d}\iota : \operatorname{Lie} H \xrightarrow{\sim} \{X \in \operatorname{Lie} G \mid XW \subset W\}.$$

Beweis. Wir konstruieren V als Unterdarstellung der rechtsregulären Darstellung $(\mathcal{O}(G), \rho)$ von G. Seien $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}(G)$ Erzeuger des Verschwindungsideals $\mathcal{I}(H)$ von H. Wir finden eine endlichdimensionale Unterdarstellung $V \subset \mathcal{O}(G)$ mit $f_1, \ldots, f_r \in V$ und setzen $W := V \cap \mathcal{I}(H)$. Für $g \in G$ folgt aus $gW \subset W$ dann $f_i(hg) = 0$ für alle $h \in H$ und $1 \leq i \leq r$. Insbesondere folgt das für $h = 1$ und wir folgern $g \in H$. Weiter finden wir für ein Element $X \in \operatorname{Lie} G$ mit der linksinvarianten Fortsetzung ξ nach unserer Beschreibung 9.3.2.24 der Ableitung der rechtsregulären Darstellung

$$\begin{aligned}
XW \subset W \quad &\Rightarrow \quad (\xi f_i)|H = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq r \\
&\Rightarrow \quad \xi(\mathcal{I}(H)) \subset \mathcal{I}(H) \\
&\Rightarrow \quad \text{Es gibt } \bar{\xi} \in \operatorname{Der}_k \mathcal{O}(H) \text{ mit } \bar{\xi}(f|H) = (\xi f)|H \quad \forall f \in \mathcal{O}(G) \\
&\Rightarrow \quad \bar{\xi} \text{ ist linksinvariant und } X = \mathrm{d}\iota(\bar{\xi}_e) \\
&\Rightarrow \quad X \in \mathrm{d}\iota(\operatorname{Lie} H)
\end{aligned}$$

und das war gerade zu zeigen. □

Lemma 9.3.6.6. *Seien k ein Körper und V ein k-Vektorraum mit einem Teilraum $W \subset V$ der Dimension $\dim W = d < \infty$. So gilt:*

1. *Für $x \in \mathrm{GL}(V)$ ist $xW = W$ gleichbedeutend zu $x(\bigwedge^d W) = \bigwedge^d W$;*
2. *Für $X \in \mathfrak{gl}(V)$ ist $XW \subset W$ gleichbedeutend zu $X(\bigwedge^d W) \subset \bigwedge^d W$.*

Beweis. Indem wir eine Basis von $W \cap xW$ nach vorne und hinten entsprechend ergänzen, finden wir Vektoren in V derart, daß $v_1, \ldots, v_d$ eine Basis von W ist und $v_{i+1}, \ldots, v_{i+d}$ eine Basis von xW. Dann gibt es eine Konstante $c \in k^\times$ mit $x(v_1 \wedge \ldots \wedge v_d) = c(v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_{i+d})$. Aus $x(\bigwedge^d W) = \bigwedge^d W$ folgt also $i = 0$ und damit $xW = W$. Das zeigt die erste Aussage. Für den Beweis der zweiten Aussage beachten wir

$$X(v_1 \wedge \ldots \wedge v_d) = \sum_\nu v_1 \wedge \ldots \wedge Xv_\nu \wedge \ldots \wedge v_d$$

unter der abgeleiteten Operation der Lie-Algebra nach 9.3.3.13. Machen wir den Ansatz $Xv_\nu = \sum_\mu^d a_{\nu\mu} v_\mu$ für eine Ergänzung von $v_1, \ldots, v_d$ zu einer Basis von V durch gewisse weitere v_μ, so folgt aus $X(\bigwedge^d W) \subset \bigwedge^d W$ bereits $a_{\nu\mu} = 0$ für $\mu \notin \{1, \ldots, d\}$ und damit die Behauptung. □

Lemma 9.3.6.7. *Gegeben $H \mathrel{\triangleleft} G$ affine algebraische Gruppen und $\iota : H \hookrightarrow G$ die Einbettung gibt es eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V_1 von G mit einem von Null verschiedenen Vektor $v \in V_1 \backslash 0$ derart, daß gilt*

$$H = \{g \in G \mid gv \in kv\} \quad \textit{und} \quad \mathrm{d}\iota : \operatorname{Lie} H \xrightarrow{\sim} \{X \in \operatorname{Lie} G \mid Xv \in kv\}.$$

Beweis. Wir gehen von der Darstellung V mit ihrem Teilraum W aus, wie sie in Lemma 9.3.6.5 konstruiert worden sind, setzen $d = \dim W$ und $V_1 := \bigwedge^d V$ und $W_1 := \bigwedge^d W$ und nehmen als v irgendeinen von Null verschiedenen Vektor aus W_1. Nach 9.3.6.6 leistet dieses Datum das Gewünschte. □

9.3.6.8 (**Quotienten unipotenter Gruppen sind affin**). Der Quotient einer unipotenten affinen algebraischen Gruppe U nach einer abgeschlossenen Untergruppe $H \subset U$ ist stets affin. Um das zu sehen, mag man die Konstruktion des Quotienten aus dem Beweis von 9.3.6.2 wiederholen und nach 9.3.6.7 eine endlichdimensionale Darstellung V von U finden und darin eine Gerade kv, deren Stabilisator genau H ist und für die zusätzlich gilt $\operatorname{Lie} H = \{X \in \operatorname{Lie} U \mid Xv \in kv\}$. Dann muß kv nach 9.1.6.2 bereits die Einsdarstellung von H sein und die Wirkung liefert einen bijektiven Morphismus $U/H \xrightarrow{\sim} Uv$ unseres Quotienten auf die Bahn von v mit ihrer induzierten Struktur als Varietät, der nach 9.3.5.15 ein Isomorphismus sein muß. Die fragliche Bahn aber ist als Bahn einer unipotenten Gruppe in der affinen Varietät V abgeschlossen in V nach 9.2.3.9.

Satz 9.3.6.9 (**Quotienten nach abgeschlossenen Normalteilern**). *Der Quotient einer affinen algebraischen Gruppe nach einem abgeschlossenen Normalteiler ist stets wieder eine affine algebraische Gruppe.*

Beweis. Seien G unsere affine algebraische Gruppe und $N \trianglelefteq G$ unser Normalteiler. Die Inversenbildung auf G/N ist ein Morphismus aufgrund der Finalität der Projektion $G \twoheadrightarrow G/N$. Die Multiplikation auf G/N ist ein Morphismus aufgrund der Finalität der Projektion $G \times G \to G/N \times G/N$, die wir hinwiederum aus der Faktorisierung $G \times G \twoheadrightarrow G/N \times G \twoheadrightarrow G/N \times G/N$ in nach Teil 4 von 9.3.6.2 finale Morphismen folgern. Alternativ könnten wir die Finalität der Projektion $G \times G \to G/N \times G/N$ auch zeigen, indem wir den induzierten bijektiven Morphismus von homogenen Räumen $(G \times G)/(N \times N) \to G/N \times G/N$ betrachten und ihn durch Bestimmen des Differentials am neutralen Element als Isomorphismus entlarven. Damit bleibt nur zu zeigen, daß G/N affin ist. Dazu konstruieren wir im folgenden einen endlichdimensionalen Vektorraum W und einen Gruppenhomomorphismus $\psi : G \to \mathrm{GL}(W)$ mit Kern N und der Eigenschaft, daß die Sequenz $\operatorname{Lie} N \hookrightarrow \operatorname{Lie} G \to \operatorname{Lie} \mathrm{GL}(W)$ linksexakt ist. Dann folgern dann mit Satz 9.3.5.15 über Isomorphismen homogener Varietäten, daß ψ einen Isomorphismus

$$G/N \xrightarrow{\sim} \psi(G)$$

nach $\psi(G)$ mit seiner von $\mathrm{GL}(W)$ induzierten Struktur induziert und das beendet den Beweis, da wir bereits aus 9.2.2.4 wissen, daß $\psi(G) \trianglelefteq \mathrm{GL}(W)$ eine abgeschlossene Untergruppe sein muß. Es bleibt also, einen Gruppenhomomorphismus ψ wie oben zu konstruieren. Nach 9.3.6.7 finden wir eine Darstellung $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ und $v \in V \backslash 0$ mit $N = \mathrm{Stab}(kv)$ und $\operatorname{Lie} N \xrightarrow{\sim} \{X \in \operatorname{Lie} G \mid Xv \in kv\}$. Gegeben ein Charakter $\chi \in \mathfrak{X}(N)$ betrachten wir den zugehörigen Gewichtsraum $V_\chi \subset V$ nach 9.1.7.18 und dürfen $V = \bigoplus V_\chi$ annehmen, da N ein Normalteiler ist und folglich die Summe der V_χ stets ein G-stabiler Teilraum und da unser ausgezeichneter Vektor v stets zu einem Gewichtsraum gehören muß. Dann betrachten wir

$$W := \{f \in \operatorname{End} V \mid f(V_\chi) \subset V_\chi \ \forall \chi\}$$

und $\psi : G \to \mathrm{GL}(W)$ gegeben durch $(\psi(x))f := \varphi(x) f \varphi(x^{-1})$ für $x \in G$ und $f \in W$. Dann ist $\psi(x) = \mathrm{id}_W$ gleichbedeutend zu $\varphi(x)f = f\varphi(x)$ für alle $f \in W$ und es folgt sofort $N \subset \ker \psi$. In Bezug auf eine geeignete Basis von V besteht nun W aus allen blockdiagonalen Matrizen mit einer durch die Dimensionen der V_χ festgelegten Blockstruktur. Die Bedingung $x \in \ker \psi$ alias $\varphi(x)f = f\varphi(x)$ für alle $f \in W$ ist also gleichbedeutend zu $\varphi(x)V_\chi \subset V_\chi$ und $\varphi(x)|V_\chi \in k\,\mathrm{id}$ für alle χ. Da nun unser ausgezeichneter Vektor v in einem der V_χ liegt, impliziert das auch $\varphi(x)v \in kv$ und damit $x \in N$. Wir haben also $N = \ker \psi$. Der analoge Nachweis von $\operatorname{Lie} H \xrightarrow{\sim} \ker \mathrm{d}\psi$ kann dem Leser überlassen bleiben. □

Vorschau 9.3.6.10 (**Quotienten nach reduktiven Gruppen sind affin**). Jeder Quotient einer affinen algebraischen Gruppe G nach einer im Sinne von 9.4.9.3

reduktiven Untergruppe $H \not\subset G$ ist affin. Ich kenne den Beweis nur im Fall der Charakteristik Null, in dem die Behauptung leicht aus 7.9.6.23 folgt. Ein Satz von Matsushima besagt feiner, daß ein Quotient einer reduktiven Gruppe nach einer abgeschlossenen Untergruppe genau dann affin ist, wenn auch die Untergruppe reduktiv ist.

Definition 9.3.6.11. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k und eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ heißt die Menge aller m-dimensionalen Untervektorräume von V die **Graßmann'sche der m-dimensionalen Teilräume von** V und wird notiert

$$\text{Graß}(m; V) = \text{Gr}(m; V) := \{W \subset V \mid \dim W = m\}$$

9.3.6.12. Auf unseren Graßmann'schen operiert die Gruppe $\text{GL}(V)$ in offensichtlicher Weise, und diese Operation ist transitiv, sofern die Graßmann'sche nicht leer ist. Um die Graßmann'schen näher zu untersuchen, realisieren wir sie als Teilmengen von projektiven Räumen.

Lemma 9.3.6.13. *Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V liefert die Abbildungsvorschrift $W \mapsto \bigwedge^m W$ eine Injektion, die* **Plücker-Einbettung**

$$\bigwedge^m : \text{Gr}(m; V) \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\bigwedge^m V\right)$$

Im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers $(k = \bar{k})$ ist das Bild der Plücker-Einbettung abgeschlossen in der Zariski-Topologie.

Beweis. Unsere Abbildung ist injektiv, da gilt $W = \{v \in V \mid v \wedge \bigwedge^m W = 0\}$. Um ihr Bild zu beschreiben, betrachten wir umgekehrt für ein beliebiges $\omega \in \bigwedge^m V$ den Teilraum

$$\ker(\omega\wedge) = \{v \in V \mid \omega \wedge v = 0\}$$

Ergänzen wir eine Basis $v_1, \ldots, v_l$ von $\ker(\omega\wedge)$ durch $v_{l+1}, \ldots, v_n$ zu einer Basis von V und schreiben ω in der zugehörigen Basis der äußeren Potenzen, so erkennen wir, daß es im Fall $\omega \neq 0$ ein η gibt mit $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_l \wedge \eta$. Wir haben also $\omega \neq 0 \;\Rightarrow\; \dim \ker(\omega\wedge) = l \leq |\omega| = m$, und

$$\dim \ker(\omega\wedge) = m \quad \Leftrightarrow \quad k\omega = \bigwedge^m \ker(\omega\wedge) \in \operatorname{im} \bigwedge^m$$

Die Bedingung $\dim \ker(\omega\wedge) \geq m$ ist nun aber offensichtlich eine abgeschlossene Bedingung an $\omega \in \bigwedge^m V$, deshalb ist unser Bild abgeschlossen. $\square$

Übungen

Übung 9.3.6.14. Sei $\varphi : X \to Y$ ein surjektiver Morphismus mit endlichen Fasern von affinen irreduziblen Varietäten und sei $\mathcal{O}(Y)$ normal. Man zeige

$$\mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}(X) \cap \mathcal{M}(Y)$$

alias, ganz pedantisch geschrieben, $\varphi^\sharp \mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}(X) \cap \varphi^\sharp \mathcal{M}(Y)$. Hinweis: Ähnlich wie beim Beweis von 9.2.4.17 zeige man in den Notationen dort zunächst $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y)_\mathfrak{q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)_\mathfrak{p} \cap \varphi^\sharp \mathcal{M}(Y)$.

Übung 9.3.6.15. Sind $K \not\trianglelefteq H \not\trianglelefteq G$ affine algebraische Gruppen, so ist die offensichtliche Abbildung $H/K \hookrightarrow G/K$ eine abgeschlossene Einbettung.

Übung 9.3.6.16 (**Struktur als Quotient nach abgeschlossener Untergruppe**). Sei X eine Menge mit einer transitiven Operation einer affinen algebraischen Gruppe G. Ist die Standgruppe G_x eines Punktes $x \in X$ abgeschlossen, so sind die Standgruppen aller Punkte abgeschlossen und es gibt genau eine Struktur als algebraische Varietät auf X, für die alle durch die Gruppenwirkung gegebenen Abbildungen $G/G_x \to X$ Isomorphismen von Varietäten sind.

Übung 9.3.6.17. Gegeben eine diagonalisierbare algebraische Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper wird die Sequenz $G^\circ \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/G^\circ$ unter dem Charakterfunktor $\mathfrak{X}$ die Sequenz $\mathfrak{X}_{\text{tor}} \hookrightarrow \mathfrak{X} \twoheadrightarrow \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_{\text{tor}}$ in der Gegenrichtung.

Übung 9.3.6.18. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß die Komposition

$$\mathrm{SL}(2;k) \hookrightarrow \mathrm{GL}(2;k) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(2;k) := \mathrm{GL}(2;k)/k^\times$$

über einen Isomorphismus $\mathrm{PSL}(2;k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{PGL}(2;k)$ unserer in 9.1.2.11 definierten Gruppe faktorisiert.

Übung 9.3.6.19. Man zeige, daß in Charakteristik Null jede unipotente affine algebraische Gruppe zusammenhängend ist. Hinweis: Man betrachte ihren Quotient nach der Einskomponente.

Übung 9.3.6.20. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß gegeben eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V der multiplikativen Gruppe $k^\times$ die Bahn Y jedes Punktes des projektiven Raums $\mathbb{P}V$ entweder ein Punkt ist oder als Varietät isomorph zu $k^\times$ selber. Man zeige genauer, daß Y sogar als homogener Raum isomorph ist zu $k^\times$ mit der durch einen nichtkonstanten Gruppenhomomorphismus $k^\times \to k^\times$ gegebenen Wirkung von $k^\times$. Hinweis: Wenn man bereit ist, 9.2.4.21 zu verwenden, so kann man gleich Übung 9.3.6.21 machen. Der Punkt hier ist, 9.2.4.21 zu vermeiden.

Ergänzende Übung 9.3.6.21. Jeder homogene Raum eines Torus ist affin. Hinweis: 9.2.4.21.

Ergänzende Übung 9.3.6.22 (**Homogene Räume auflösbarer Gruppen**). Jeder homogene Raum einer auflösbaren affinen algebraischen Gruppe ist affin. Hinweis: Man verwende im Vorgriff 9.4.2.2. Indem man einen geeigneten maximalen Torus der großen Gruppe geeignet verkleinert, rette man sich mit 9.2.4.21 in den Fall 9.3.6.8 eines Quotienten einer unipotenten Gruppe.

Übung 9.3.6.23. $(k = \bar{k})$. Sei V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum. Man zeige, daß auf den Graßmann'schen $\mathrm{Gr}(m; V)$ die Struktur Quotient von $\mathrm{GL}(V)$ nach einer abgeschlossenen Unterruppe übereinstimmt mit der induzierten Struktur in Bezug auf die Plücker-Einbettung $\bigwedge^m : \mathrm{Gr}(m; V) \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\bigwedge^m V\right)$ aus 9.3.6.13.

Übung 9.3.6.24. Unter einer **vollständigen Fahne** von Untervektorräumen eines endlichdimensionalen Vektorraums V versteht man eine Folge von Untervektorräumen

$$V = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_1 \supset V_0 = 0$$

mit $\dim V_i = i$. Die Menge aller derartigen Fahnen notieren wir $\mathcal{F}(V)$. Auf dieser Menge operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ in offensichtlicher Weise und diese Operation ist transitiv. Man zeige, daß $\mathcal{F}(V)$ im Fall $k = \bar{k}$ mit seiner Struktur als Quotient nach einer abgeschlossenen Untergruppe aus 9.3.6.16 eine projektive Varietät wird. Sie heißt die **Flaggenvarietät** oder **Fahnenmannigfaltigkeit** von V.

Übung 9.3.6.25. Gegeben eine monoton fallende Folge $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \ldots$ natürlicher Zahlen verstehen wir unter einer **Fahne vom Typ** λ von Untervektorräumen eines vorgegebenen endlichdimensionalen Vektorraums V eine Folge von Untervektorräumen

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \ldots$$

mit $\dim V_i = \lambda_i$. Die Menge aller derartigen Fahnen notieren wir $\mathcal{F}_\lambda(V)$. Auf dieser Menge operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ in offensichtlicher Weise, und diese Operation ist auch sicher transitiv. Man zeige, daß auch $\mathcal{F}_\lambda(V)$ im Fall $k = \bar{k}$ mit seiner Struktur als homogener Raum aus 9.3.6.16 eine projektive k-Varietät wird. Sie heißt eine **partielle Flaggenvarietät** oder **partielle Fahnenmannigfaltigkeit**.

9.3.7 Liealgebren von Zentralisatoren

9.3.7.1 (**Liealgebra des Schnitts zweier abgeschlossener Untergruppen**). Gegeben $H, K \mathrel{\not\triangleleft} G$ abgeschlossene Untergruppen einer affinen algebraischen Gruppe liefert die universelle Eigenschaft des ersten Quotienten einen injektiven Morphismus $c : H/(H \cap K) \hookrightarrow G/K$ und wir erhalten ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Lie}(H \cap K) & \hookrightarrow & \mathrm{Lie}\, H & \twoheadrightarrow & \mathrm{T}_{\bar{e}}(H/H \cap K) \\ \cap & & \cap & & \downarrow \mathrm{d}_{\bar{e}} c \\ \mathrm{Lie}\, K & \hookrightarrow & \mathrm{Lie}\, G & \twoheadrightarrow & \mathrm{T}_{\bar{e}}(G/K) \end{array}$$

Wir sehen mit einer Diagrammjagd oder auch durch Anwenden der langen exakten Homologiesequenz 17.2.2.2, daß die rechte obere Horizontale in diesem Diagramm einen Isomorphismus $(\operatorname{Lie} H \cap \operatorname{Lie} K)/\operatorname{Lie}(H \cap K) \xrightarrow{\sim} \ker \mathrm{d}_{\bar{e}} c$ induziert. Genau dann ist also $\mathrm{d}_{\bar{e}} c$ injektiv, wenn gilt $\operatorname{Lie}(H \cap K) = \operatorname{Lie} H \cap \operatorname{Lie} K$. Das Bild unseres Morphismus c ist nun genau die H-Bahn $HK/K \subset G/K$. Nach Satz 9.3.5.15 über Isomorphismen von homogenen Räumen hat unser Morphismus genau dann injektives Differential, wenn er einen Isomorphismus $c : H/H \cap K \xrightarrow{\sim} HK/K$ induziert, und im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null ist das stets der Fall. Insbesondere gilt in Charakteristik Null stets

$$\operatorname{Lie}(H \cap K) = \operatorname{Lie} H \cap \operatorname{Lie} K$$

Weiter gilt in Charakteristik Null notwendig

$$\operatorname{Lie} H \subset \operatorname{Lie} K \Rightarrow H^\circ \subset K$$

In der Tat, aus $\operatorname{Lie} H \subset \operatorname{Lie} K$ folgt $\operatorname{Lie} H = \operatorname{Lie} H \cap \operatorname{Lie} K = \operatorname{Lie}(H \cap K)$ und damit $\operatorname{kdim} H = \operatorname{kdim}(H \cap K)$.

Beispiel 9.3.7.2. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper positiver Charakteristik $p > 0$. In $G := (k^2, +)$ haben die beiden abgeschlossenen Untergruppen $H := \{(x, y) \mid y = 0\}$ und $K := \{(x, y) \mid y = x^p\}$ denselben Tangentialraum im neutralen Element.

9.3.7.3 (**Zentralisator**). Seien G eine Gruppe und $x \in G$. Wir bezeichnen mit

$$\begin{aligned} G^x := G^{\operatorname{int} x} = &\ \{g \in G \mid \operatorname{int}_x(g) = g\} = \{g \in G \mid xg = gx\} \\ = \mathrm{Z}_G(x) = G_x = &\ \{g \in G \mid \operatorname{int}_g(x) = x\} = \{g \in G \mid gx = xg\} \end{aligned}$$

die Menge der Fixpunkte in G unter der Operation von x durch Konjugation alias die Isotropiegruppe von x in Bezug auf Operation durch Konjugation von G auf sich selbst. Diese Untergruppe G^x heißt der **Zentralisator von** x.

9.3.7.4 (**Liealgebrenzentralisator**). Gegeben $x \in G$ ein Element in einer algebraischen Gruppe betrachten wir die Unterliealgebra

$$(\operatorname{Lie} G)^x := (\operatorname{Lie} G)^{\operatorname{Ad} x} = \{Y \in \operatorname{Lie} G \mid \operatorname{Ad}_x Y = Y\}$$

und nennen sie den **Liealgebren-Zentralisator von** x.

9.3.7.5 (**Liealgebren von Zentralisatoren**). Gegeben $x \in G$ ein Element in einer algebraischen Gruppe ist die Liealebra des Zentralisators stets enthalten im Liealgebrenzentralisator, in Formeln

$$\operatorname{Lie}(G^x) \subset (\operatorname{Lie} G)^x$$

Das folgt aus der allgemeinen Tatsache, daß für jeden Automorphismus φ einer algebraischen Gruppe G gilt $\operatorname{Lie}(G^\varphi) \subset (\operatorname{Lie} G)^{\mathrm{d}\varphi}$. Das hinwiederum war Ihnen als Übung 9.3.2.36 aufgegeben. Im folgenden werden wir verschiedene Situationen kennenlernen, in denen hier Gleichheit gilt.

Beispiel 9.3.7.6. Für $x := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G = \mathrm{SL}_2(k)$ mit $\operatorname{char} k = 2$ erhalten als Zentralisator $G^x = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ und als Liealgebrenzentralisator $(\operatorname{Lie} G)^x = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)\right\}$. In diesem Fall gilt also $\operatorname{Lie}(G^x) \subsetneq (\operatorname{Lie} G)^x$.

9.3.7.7 (**Liealgebren von Zentralisatoren in allgemeinen linearen Gruppen**). Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem algebraisch abgeschlossenen Körper gilt im Fall der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ für alle Elemente $x \in \mathrm{GL}(V)$ die Gleichheit

$$\operatorname{Lie}(\mathrm{GL}(V)^x) = (\operatorname{Lie} \mathrm{GL}(V))^x$$

In der Tat ist in diesem Fall $\mathrm{GL}(V)^x$ ist schlicht der Schnitt von $\mathrm{GL}(V)$ mit dem Bild $\operatorname{richt}(\operatorname{Lie} \mathrm{GL}(V))^x$ der Invarianten in der Liealgebra unter unserer üblichen Identifikation $\operatorname{richt} : \operatorname{Lie} \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}(V)$.

9.3.7.8 (**Liealgebren von Zentralisatoren, Variante**). Gegeben $H \not\trianglelefteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe einer algebraischen Gruppe und $x \in \mathrm{N}_G(H)$ setzen wir allgemeiner $H^x := H^{\operatorname{int} x}$ und $(\operatorname{Lie} H)^x := (\operatorname{Lie} H)^{\operatorname{Ad} x}$ und haben wie zuvor

$$\operatorname{Lie}(H^x) \subset (\operatorname{Lie} H)^x$$

Im Fall affiner algebraischer Gruppen in Charakteristik Null gilt dann sogar die Gleichheit $\operatorname{Lie}(H^x) = (\operatorname{Lie} H)^x$, denn wir können $G = \mathrm{GL}(V)$ annehmen und dann folgt

$$\operatorname{Lie}(H^x) = \operatorname{Lie}(H \cap G^x) = \operatorname{Lie} H \cap \operatorname{Lie}(G^x) = \operatorname{Lie} H \cap (\operatorname{Lie} G)^x = (\operatorname{Lie} H)^x$$

mit der zweiten Gleichung nach unserer Erkenntnis 9.3.7.1, daß Charakteristik Null die Liealgebra eines Schnitts von Untergruppen der Schnitt der Liealgebren ist, und der dritten Gleichung nach unserer Bestimmung 9.3.7.7 der Liealgebra eines Zentralisators in einer allgemeinen linearen Gruppe.

Satz 9.3.7.9 (**Liealgebren der Zentralisatoren halbeinfacher Elemente**). *Gegeben $H \not\trianglelefteq G$ affine algebraische Gruppen gilt für jedes halbeinfache Element $s \in \mathrm{N}_G(H)$ des Normalisators von H die Identiät*

$$\operatorname{Lie}(H^s) = (\operatorname{Lie} H)^s$$

9.3.7.10. Ein Automorphismus eines affinen algebraischen Monoids heißt **halbeinfach**, wenn sein Komorphismus halbeinfach ist. Die vorgeschlagene Lösung von Übung 9.1.3.6 zeigt, daß es gegeben ein affines algebraisches Monoid H mit einem halbeinfachen Automorphismus σ stets einen endlichdimensionalen Vektorraum V und eine abgeschlossene Einbettung $\rho : H \hookrightarrow \operatorname{End}(V)$ und ein halbeinfaches Element $s \in \mathrm{GL}(V)$ gibt mit $\rho \circ \sigma = \operatorname{int}_s \circ \rho$. Insbesondere folgt aus unserem Satz auch für jeden halbeinfachen Automorphismus σ einer affinen algebraischen Gruppe H die Identität

$$\operatorname{Lie}(H^\sigma) = (\operatorname{Lie} H)^{\mathrm{d}\sigma}$$

Beweis. Man betrachte den Morphismus $\alpha : G \to G$, $g \mapsto gsg^{-1}s^{-1}$. Sein Bild $\alpha(G) = C(s)s^{-1}$ ist die mit s^{-1} von rechts verschobene Konjugationsklasse von s und das Bild $\alpha(H) = C_H(s)s^{-1}$ von H die entsprechend verschobene Bahn von s unter der Operation durch Konjugation von H auf G. Andererseits gilt $\mathrm{d}_e\alpha : X \mapsto X - \mathrm{Ad}_s(X)$ für alle $X \in \mathrm{Lie}\, G$, wie Sie bereits in 9.3.3.11 gezeigt haben sollten. Ein Dimensionsvergleich zeigt, daß die Gleichheit im Satz äquivalent ist zur Surjektivität des Differentials $\mathrm{d}_e\alpha : \mathrm{T}_eH \to \mathrm{T}_e(\alpha(H))$. Nun können wir sicher $G = \mathrm{GL}(V)$ annehmen. Damit ist die Surjektivität $\mathrm{d}_e\alpha : \mathrm{T}_eG \to \mathrm{T}_e(\alpha(G))$ bereits durch die Bemerkungen gegen Ende von 9.3.7.5 gesichert. Ist aber ganz allgemein $f : V \to V$ diagonalisierbar und $W \subset V$ ein unter f stabiler Teilraum, so gilt $W \cap f(V) = f(W)$, denn beide Seiten sind die Summe der Eigenräume zu von Null verschiedenen Eigenwerten von $f : W \to W$. Da s halbeinfach angenommen war, können wir diese Erkenntnis auf $f = \mathrm{d}_e\alpha = \mathrm{id} - \mathrm{Ad}_s$ anwenden und erhalten die Surjektivität $\mathrm{d}_e\alpha : \mathrm{T}_eH \twoheadrightarrow \mathrm{T}_eH \cap \mathrm{T}_e(\alpha(G))$ und wegen $\alpha(H) \subset H$ a forteriori die Surjektivität $\mathrm{d}_e\alpha : \mathrm{T}_eH \twoheadrightarrow \mathrm{T}_e(\alpha(H))$. □

Satz 9.3.7.11 (Konjugationsklassen halbeinfacher Elemente). *Gegeben $H \mathrel{\not\triangleleft} G$ affine algebraische Gruppen ist für jedes halbeinfache Element $s \in \mathrm{N}_G(H)$ des Normalisators von H seine Bahn unter der Operation von H durch Konjugation eine abgeschlossene Teilmenge*

$$\{hsh^{-1} \mid h \in H\} \mathrel{\not\triangleleft} G$$

Insbesondere ist die Konjugationsklasse jedes halbeinfachen Elements einer affinen algebraischen Gruppe abgeschlossen.

Beweis. Wieder reicht es, den Fall $G = \mathrm{GL}(V)$ zu betrachten. Wir setzen

$$\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}H$$

Die Menge $M = M_s \subset G$ aller Elemente $g \in \mathrm{N}_G(H)$, auf denen das Minimalpolynom von s verschwindet und deren charakteristisches Polynom auf $\mathfrak{h}$ ebenfalls mit dem von s übereinstimmt, in Formeln $\mathrm{char}(\mathrm{Ad}_g|\mathfrak{h}) = \mathrm{char}(\mathrm{Ad}_s|\mathfrak{h})$, besteht dann aus halbeinfachen Matrizen, ist eine abgeschlossene Teilmenge $M \mathrel{\not\triangleleft} G$ und ist stabil unter Konjugation mit Elementen von H. Können wir zeigen, daß alle Bahnen in M unter der Operation von H durch Konjugation dieselbe Dimension haben, so haben wir gewonnen, da nach 9.2.3.7 alle Bahnen lokal abgeschlossen sind und damit alle Bahnen kleinstmöglicher Dimension abgeschlossen. Aber für $t \in M$ gilt ja

$$\begin{aligned} \mathrm{kdim}(\mathrm{int}(H)t) &= \mathrm{kdim}\, H - \mathrm{kdim}\, H^t \\ &= \mathrm{kdim}\, H - \dim \mathfrak{h}^t \end{aligned}$$

nach 9.3.7.9 und $\dim \mathfrak{h}^t$ ist die Vielfachheit von Eins als Eigenwert von Ad_t auf $\mathfrak{h}$ und ist nach Konstruktion konstant für $t \in M$. □

9.3.7.12. Gegeben affine algebraische Gruppen $H \not\trianglelefteq G$ und eine Teilmenge $X \subset \mathrm{N}_G(H)$ setzen wir $H^X := \bigcap_{x \in X} H^x$ sowie $(\mathrm{Lie}\, H)^X := \bigcap_{x \in X} (\mathrm{Lie}\, H)^x$.

Korollar 9.3.7.13 (Liealgebren der Zentralisatoren von Tori). *Gegeben $H \not\trianglelefteq G$ affine algebraische Gruppen gilt für jede Teilmenge $S \subset \mathrm{N}_G(H)_{\mathrm{s}}$ des Normalisators von H aus paarweise kommutierenden halbeinfachen Elementen die Identiät*

$$\mathrm{Lie}(H^S) = (\mathrm{Lie}\, H)^S$$

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie} H$ und argumentieren mit Induktion über die Dimension $\mathrm{kdim}\, H$ von H und unterscheiden zwei Fälle. Gilt $\mathfrak{h}^S = \mathfrak{h}$, so folgt für alle $s \in S$ erst $\mathfrak{h}^s = \mathfrak{h}$ und mit 9.3.7.9 weiter $\mathrm{Lie}(H^s) = \mathfrak{h}$ und so $H^s \supset H^\circ$. Zusammen erhalten wir $H^S \supset H^\circ$ und dann natürlich auch $\mathrm{Lie}(H^S) = \mathfrak{h}$ und wir brauchen noch nicht einmal die Induktionsannahme. Gilt dahingegen $\mathfrak{h}^S \neq \mathfrak{h}$, so gibt es $s \in S$ mit $\mathfrak{h}^s \neq \mathfrak{h}$, a forteriori also $\mathrm{Lie}(H^s) \neq \mathfrak{h}$, also $\mathrm{kdim}\, H^s < \mathrm{kdim}\, H$ und wir können die Induktionsannahme auf H^s anwenden und finden

$$\mathrm{Lie}(H^S) = \mathrm{Lie}((H^s)^S) = (\mathrm{Lie}\, H^s)^S = ((\mathrm{Lie}\, H)^s)^S = (\mathrm{Lie}\, H)^S$$

mit der Induktionsannahme im zweiten Schritt und 9.3.7.9 im dritten Schritt. □

Übungen

Übung 9.3.7.14. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß in $\mathrm{GL}(n; k)$ nur die halbeinfachen Elemente eine abgeschlossene Konjugationsklasse haben. Man gebe eine Formel für die Dimensionen dieser Konjugationsklassen.

9.3.8 Graßmann'sche und Plücker-Relationen*

9.3.8.1. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper k mit Basis $v_1, \ldots, v_n$. Wir wählen in $\bigwedge^m V$ die Basis v_I, wo I über alle m-elementigen Teilmengen $I \subset \{1, \ldots, n\}$ läuft und wir wie üblich $v_I := v_i \wedge \ldots \wedge v_j$ setzen für $i < \ldots < j$ die Größe nach aufgeführten Elemente von I. Die zugehörigen Koordinatenfunktionen heißen die **Plücker-Koordinaten**, das sind also lineare Abbildungen $x_I = x_{i,\ldots,j} : \bigwedge^m V \to k$. Gegeben $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichne $\mathrm{sgn}(I, \nu)$ das Vorzeichen „Minus Eins hoch die Anzahl derjenigen Elemente von I, die größer sind als ν".

Satz 9.3.8.2. *Seien k ein Körper und V ein k-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Seien $x_I : \bigwedge^m V \to k$ für $I \subset \{1, \ldots, n\}$ mit $|I| = m$ die zugehörigen Plücker-Koordinaten. So ist das Bild unserer eben erklärten Einbettung $\bigwedge^m : \mathrm{Gr}(m; V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^m V)$ die Projektivisierung der Lösungsmenge*

des folgenden Systems von quadratischen Gleichungen, der sogenannten **Plücker-Relationen**

$$0 = \sum_{\nu \in K \setminus L} \operatorname{sgn}(K, \nu) x_{L \cup \{\nu\}} x_{K \setminus \{\nu\}}$$

Diese Gleichungen sind dabei für alle $K, L \subset \{1, \ldots, n\}$ *mit* $|K| = m + 1$ *und* $|L| = m - 1$ *zu nehmen.*

9.3.8.3. Im Spezialfall $m = 2$ und unter der Annahme eines Grundkörpers einer von zwei verschiedenen Charakteristik ist das auch gleichbedeutend zu der besonders übersichtlichen Bedingung

$$\omega \wedge \omega = 0$$

In der Tat, $\omega = \sum_{i<j} x_{ij} v_i \wedge v_j$ erfüllt $\omega \wedge \omega = 0$ genau dann, wenn für alle $i < j < k < l$ gilt $2(x_{ij}x_{kl} - x_{ik}x_{jl} + x_{il}x_{jk}) = 0$. Nehmen wir nun oben $L = \{i\}$ und $K = \{j, k, l\}$, so erhalten wir genau diese Gleichungen bis auf den Faktor 2 und im Fall $L \subset K$ die Gleichungen $0 = 0$, die keine zusätzlichen Bedingungen liefern.

Beweis. Es gilt, die Bedingung $\dim \ker(\omega\wedge) \geq m$ aus dem vorhergehenden Beweis im Fall eines n-dimensionalen Raums V mit $n \geq m$ auszuschreiben. Dazu erinnern wir an die beiden nichtausgearteten Paarungen

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^m V \times \bigwedge^m V^* & \to & k \\ (v_1 \wedge \ldots \wedge v_m, f_1 \wedge \ldots \wedge f_m) & \mapsto & \det(f_i(v_j))_{i,j=1}^m \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^m V \times \bigwedge^{n-m} V & \to & \bigwedge^n V \\ (\omega\ ,\ \eta) & \mapsto & \omega \wedge \eta \end{array}$$

Hier und im folgenden vereinbaren wir, daß das Bilden des Dualraums stärker bindet als das Bilden äußerer Potenzen, daß also $\bigwedge^m V^*$ a priori als $\bigwedge^m (V^*)$ zu verstehen ist, auch wenn es darauf ja gar nicht wirklich ankommt, denn die erste Paarung liefert eine kanonische Identifikation $\bigwedge^m V^* \xrightarrow{\sim} (\bigwedge^m V)^*$. Zusammen mit der zweiten Paarung erhalten wir dann einen bis auf Skalar eindeutig bestimmten Isomorphismus $\bigwedge^m V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^{n-m} V^*$. Auf die Wahl dieses Skalars kommt es uns nicht an und wir schreiben unseren Isomorphismus $\omega \mapsto \omega^*$. Bezeichnen wir weiter für einen Teilraum $A \subset B$ seinen Annullator mit $A^\perp \subset B^*$, so haben wir für $W \subset V$ einen m-dimensionalen Teilraum unter unserem Isomorphismus $\omega \mapsto \omega^*$ offensichtlich $\bigwedge^m W \mapsto \bigwedge^{n-m}(W^\perp)$. Folglich erfüllt jedes ω im Bild von $\operatorname{Gr}(m; V)$ die Gleichung

$$\ker(\omega\wedge)^\perp = \ker(\omega^*\wedge)$$

In der Tat sind für $\omega = \bigwedge^m W$ schlicht beide Seiten $W^\perp$. Umgekehrt folgt aus dieser Gleichung auch $\dim\ker(\omega\wedge) + \dim\ker(\omega^*\wedge) = n$ und damit definiert unsere Gleichung genau das Bild von $\mathrm{Gr}(m;V)$. Aus Dimensionsgründen charakterisiert sogar die Bedingung $(\ker(\omega\wedge))^\perp \subset \ker(\omega^*\wedge)$ bereits das Bild von $\mathrm{Gr}(m;V)$. Weil nun bei jeder linearen Abbildung der Annullator des Kerns mit dem Bild der transponierten Abbildung zusammenfällt, in Formeln $(\ker f)^\perp = \mathrm{im}(f^\top)$, erhalten wir für $\omega \in \bigwedge^m V$ schließlich

$$(k\omega \text{ liegt im Bild von } \mathrm{Gr}(m;V)) \Leftrightarrow \mathrm{im}((\omega\wedge)^\top) \subset \ker(\omega^*\wedge)$$

Die Wahl des Elements $v_1\wedge\ldots\wedge v_n \in \bigwedge^n V$ legt die bis auf einen Skalar definierte Abbildung $\omega \mapsto \omega^*$ von oben sogar ganz fest und wir erhalten dafür die explizite Beschreibung als die Komposition

$$v_I \mapsto \mathrm{sgn}(I) v^*_{I^c}$$

mit I^c dem Komplement von I und $\mathrm{sgn}(I)$ dem Signum der Permutation, die die Elemente von I nach vorne schiebt, sonst aber alle Reihenfolgen erhält, mit v_i^* den Elementen der dualen Basis und v_J^* den Elementen der dazu entsprechend gebildeten Basis der Graßmann-Algebra $\bigwedge V^*$. Gegeben $\omega = \sum x_I v_I$ wird $\omega\wedge$ gegeben durch $v_\nu \mapsto \sum_{\nu\notin I} \mathrm{sgn}(I,\nu) x_I v_{I\cup\{\nu\}}$. Die transponierte Abbildung $(\omega\wedge)^\top$ wird also gegeben durch

$$v_K^* \mapsto \sum_{\nu\in K} \mathrm{sgn}(K,\nu) x_{K\setminus\nu} v_\nu^*$$

Unsere Bedingung $\mathrm{im}(\omega\wedge)^\top \subset \ker(\omega^*\wedge)$ lautet damit dann, daß für alle K mit $|K| = m+1$ gilt

$$0 = \sum_{\nu\in K}\sum_I \mathrm{sgn}(I) x_I \,\mathrm{sgn}(K,\nu) x_{K\setminus\nu} v^*_{I^c} \wedge v_\nu^*$$

Das bedeutet, daß für alle L mit $|L| = m-1$ der Koeffizient von $v^*_{L^c}$ Null ist, und da $I^c \cup \{\nu\} = L^c$ gleichbedeutend ist zu $L = I\setminus\nu$, ist das äquivalent zu den Gleichungen

$$0 = \sum_{\nu\in K\setminus L} \mathrm{sgn}(L\cup\{\nu\})\,\mathrm{sgn}(K,\nu)\,\mathrm{sgn}(L^c,\nu) x_{L\cup\{\nu\}} x_{K\setminus\{\nu\}}$$

für alle $K, L \subset \{1,\ldots,n\}$ mit $|K| = m+1$ und $|L| = m-1$. Nun überlegen wir uns noch, daß $\mathrm{sgn}(L\cup\{\nu\})\,\mathrm{sgn}(L^c,\nu)$ für $\nu \notin L$ von ν gar nicht abhängt, und folgern unsere Plücker-Relationen

$$0 = \sum_{\nu\in K\setminus L} \mathrm{sgn}(K,\nu) x_{L\cup\{\nu\}} x_{K\setminus\{\nu\}}$$

Das Bild der Graßmann'schen im projektiven Raum der entsprechenden äußeren Potenz ist also die simultane Nullstellenmenge dieser quadratischen Gleichungen für alle $K, L \subset \{1, \ldots, n\}$ mit $|K| = m + 1$ und $|L| = m - 1$. $\square$

Definition 9.3.8.4. Gegeben ein Körper k und ein k-Kring A versteht man unter einer **Theorie von Standard-Monomen** für A die Angabe einer Teilmenge $\mathcal{A} \subset A$ mitsamt einer Teilordnung darauf derart, daß die Menge der „nichtfallenden Monome in den Elemten von $\mathcal{A}$", in Formeln die Menge

$$\{a_1 a_2 \ldots a_r \mid r \geq 0,\ a_i \in \mathcal{A},\ a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_r\}$$

eine Basis von A über k bildet.

Beispiel 9.3.8.5. Man kann zeigen, daß im homogenen Koordinatenring der Graßmann'schen $\mathrm{Gr}(m; k^n) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^m k^n)$ die Plücker-Koordinaten x_I eine Theorie von Standard-Monomen liefern, wenn man setzt $x_I \leq x_J$, wenn gilt $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ und $J = \{j_1, \ldots, j_m\}$ mit $i_\nu \leq j_\nu\ \forall \nu$. Weiter gibt es eine Anordnung auf der Menge der möglichen Monome derart, daß für $a, b \in \mathcal{A}$ unvergleichbar gilt $ab \in (\text{Standardmonom} + \langle c \mid c < ab \rangle_k)$. Solche Darstellungen von ab heißen dann „straithening relations". Man erhält solch eine Anordung laut Literatur, indem man die Bruhatteilordnung zu einer totalen Ordnung erweitert und dazu die lexikographische Ordnung betrachtet.

9.3.9 Restringierte Lie-Algebren*

9.3.9.1. In diesem Abschnitt werden grundlegende Kenntnisse über die universelle einhüllende Algebra einer Liealgebra im Umfang von 24.4.3 vorausgesetzt.

Definition 9.3.9.2. Sei k ein Körper positiver Charakteristik $p > 0$. Eine **restringierte k-Liealgebra** ist ein Paar bestehend aus einer k-Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einer Abbildung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $X \mapsto X^{[p]}$ derart, daß die drei folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Abbildung $\xi : \mathfrak{g} \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$, $X \mapsto X^p - X^{[p]}$ von der Liealgebra in ihre universelle Einhüllende ist ein Homomorphismus von additiven Gruppen;

2. Für alle $\alpha \in k$ und $X \in \mathfrak{g}$ gilt $(\alpha X)^{[p]} = \alpha^p X^{[p]}$;

3. Für alle $X \in \mathfrak{g}$ gilt $\mathrm{ad}(X^{[p]}) = (\mathrm{ad}\, X)^p$.

Die Abbildung $X \mapsto X^{[p]}$ heißt im Zusammenhang von restringierten Lialgebren die **formale p-te Potenz**.

9.3.9.3. Es gilt in obiger Definition sorgfältig zu unterscheiden zwischen der p-ten Potenz X^p in der einhüllenden Algebra, der p-ten Potenz $(\operatorname{ad} X)^p$ im Endomorphismenring $\operatorname{End}(\mathfrak{g})$ des Vektorraums $\mathfrak{g}$ und der formalen p-ten Potenz $X^{[p]} \in \mathfrak{g}$. Offensichtlich ist jede Unteralgebra einer restringierten k-Liealgebra, die stabil ist unter $X \mapsto X^{[p]}$, auch ihrerseits eine restringierte k-Liealgebra.

Proposition 9.3.9.4 (Formale p-Potenz der allgemeinen linearen Liealgebra). *Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k der Charakteristik $p > 0$ ist $\mathfrak{gl}(V)$ mit $X^{[p]} := X^{(\circ p)}$ der p-ten Potenz von X im Endomorphismenring von V eine restringierte Liealgebra.*

9.3.9.5. Gegeben eine k-Ringalgebra $(A, \circ)$ ist insbesondere A_{L} eine restringierte Liealgebra mit $X^{[p]} := X^{(\circ p)}$. Gegeben eine beliebige k-Algebra $(A, \circ)$ ist weiter $\operatorname{Der}_k A$ nach 9.3.2.5 eine restringierte Liealgebra mit $\partial^{[p]} := \partial^{(\circ p)}$. Speziell wird so auch die Lie-Algebra einer algebraischen Gruppe eine restringierte Lie-Algebra. Schließlich ist für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum V auch $\mathfrak{sl}(V) \subset \mathfrak{gl}(V)$ stabil unter $X \mapsto X^{(\circ p)}$, was man durch Übergang zu einem größeren Körper und Trigonalisierung leicht einsieht, und wird damit ihrerseits eine restringierte Lie-Algebra.

Beweis. Die zweite Bedingung aus der Definition ist offensichtlich erfüllt. Wir zeigen als nächstes die letzte Bedingung. In der Hoffnung, dadurch dem Verständnis zu helfen, notieren wir $\circ$ die Multiplikation in $\operatorname{End}(V)$ und verstehen ad stets in Bezug auf die auf $\mathfrak{g} := \operatorname{End}(V)$ induzierte Struktur einer Liealgebra. Dahingegen notieren wir die Multiplikation in $\operatorname{End}(\mathfrak{g}) = \operatorname{End}(\operatorname{End}(V))$ ohne ein spezielles Multiplikationssymbol. Damit finden wir für $X, Y \in \operatorname{End}(V)$ im Ring $\operatorname{End}(V)$ die Identität

$$(\operatorname{ad}(X^{[p]}))(Y) = X^{(\circ p)} \circ Y - Y \circ X^{(\circ p)} = ((X\circ) - (\circ X))^p(Y) = (\operatorname{ad} X)^p(Y)$$

Jetzt zeigen wir noch die Additivität $\xi(A + B) = \xi(A) + \xi(B)$ von ξ. Es gilt in $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ zu zeigen

$$(A + B)^p - A^p - B^p = (A + B)^{[p]} - A^{[p]} - B^{[p]}$$

Es reicht zu zeigen, daß die linke Seite im Teilraum $\mathfrak{g} \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ liegt, denn beide Seiten landen unter dem natürlichen Ringalgebrenhomomorphismus $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to \operatorname{End}_k V$ offensichtlich auf demselben Element und die Restriktion dieses Ringalgebrenhomomorphismus auf $\mathfrak{g} \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ ist injektiv. Nun gilt in einer beliebigen k-Ringalgebra

$$(A + B)^p - A^p - B^p = \sum_{i=1}^{p-1} s_i(A, B)$$

für gewisse universelle Polynome $s_i \in k\lfloor X, Y \rfloor$ in nichtkommutierenden Variablen, die erklärt werden können durch die Identität

$$(tX+Y)^p - (tX)^p - Y^p = \sum_{i=1}^{p-1} t^i s_i(X,Y)$$

in $k\lfloor X, Y \rfloor[t]$. Formales Ableiten nach t liefert

$$\sum_{i=1}^{p} (tX+Y)^{i-1} X (tX+Y)^{p-i} = \sum_{i=1}^{p-1} i t^{i-1} s_i(X,Y)$$

Die linke Seite kann hier umgeschrieben werden zu

$$(((tX+Y)\cdot) - (\cdot(tX+Y)))^{p-1}(X)$$

aufgrund der allgemeinen Formel $(r-s)^{p-1} = \sum_{i=1}^{p} r^{i-1} s^{p-i}$ im Polynomring $k[r,s]$, die man unschwer durch Multiplikation beider Seiten mit $(r-s)$ prüft. Das aber zeigt $(\mathrm{ad}(tX+Y))^{p-1}(X) = \sum_{i=1}^{p-1} i t^{i-1} s_i(X,Y)$. Damit sind alle $s_i(X,Y)$ Linearkombinationen von iterierten Kommutatoren. Im Fall $A, B \in \mathfrak{g} \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ gehört also in der Tat auch $(A+B)^p - A^p - B^p$ zu $\mathfrak{g} \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$. □

Proposition 9.3.9.6. *Gegeben eine restringierte Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k positiver Charakteristik gehört $X^{[p]} - X^p$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ zum Zentrum der Einhüllenden $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.*

Beweis. Nach Annahme gilt $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X^{[p]})(Y) = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X)^p(Y)$ für alle $Y \in \mathfrak{g}$. Beide Seiten lassen sich zu Derivationen der universellen Einhüllenden fortsetzen durch $\mathrm{ad}_{\mathrm{U}}(X^{[p]})(u) := X^{[p]}u - uX^{[p]}$ beziehungsweise $(\mathrm{ad}_{\mathrm{U}} X)u := Xu - uX$ und $(\mathrm{ad}_{\mathrm{U}} X)^p$ die p-te Potenz dieser Derivation, die ja nach unseren allgemeinen Erkenntnissen 9.3.2.5 auch selbst wieder eine Derivation der Einhüllenden sein muß. Da diese beiden Derivationen nach Annahme auf $\mathfrak{g}$ übereinstimmen, stimmen sie notwendig auch auf der ganzen Einhüllenden überein und wir haben

$$\mathrm{ad}_{\mathrm{U}}(X^{[p]})(u) = (\mathrm{ad}_{\mathrm{U}} X)^p(u)$$

für alle $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Andererseits gilt $\mathrm{ad}_{\mathrm{U}} X = (X\cdot) - (\cdot X) : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ und damit $(\mathrm{ad}_{\mathrm{U}} X)^p(u) = X^p u - uX^p$. Insgesamt folgt $X^{[p]}u - uX^{[p]} = X^p u - uX^p$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ und das war genau zu zeigen. □

9.3.10 Unipotente Gruppen und ihre Liealgebren*

9.3.10.1 (**Exponentialabbildung bei algebraischen Gruppen**). Gegeben eine affine algebraische Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k

der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ und $X \in \operatorname{Lie} G$ nilpotent ist seine Fortsetzung $\grave{X}$ zu einem linksinvarianten Vektorfeld eine lokal nilpotente Derivation von $\mathcal{O}(G)$ und folglich $\exp(\grave{X})$ nach 24.2.4.3 ein Ringalgebrenautomorphismus von $\mathcal{O}(G)$. Mit $\grave{X}$ muß natürlich auch $\exp(\grave{X})$ mit allen Linksverschiebungen $\acute{z}$ für $z \in G$ vertauschen. Wie beim Beweis von 9.1.5.5 diskutiert, muß dieser Automorphismus $\exp(\grave{X})$ von $\mathcal{O}(G)$ also die Rechtsverschiebung $\grave{g}$ mit einem wohlbestimmten Element $g \in G$ sein. Wir vereinbaren für dieses Element die Notation

$$g := \tilde{\exp} X$$

und vereinfachen sie ab 9.3.10.4 zu $\exp X$, sobald wir uns daselbst überzeugt haben, daß das nicht zu Mehrdeutigkeiten führt.

Beispiel 9.3.10.2 (**Exponentialabbildung der additiven Gruppe**). Im Fall der additiven Gruppe $(k, +)$ eines algebraisch abgeschlossenen Körpers k der Charakteristik Null und $\lambda \in k$ finden wir

$$(\exp \lambda\partial) : T^n \mapsto \sum_i \binom{n}{i} T^i \lambda^{n-i} = (T + \lambda)^n$$

und so $(\exp \lambda\partial) f = f \circ (+\lambda)$ und mithin $\tilde{\exp} : \lambda\partial \mapsto \lambda$.

9.3.10.3 (**Funktorialität der Exponentialabbildung**). Offensichtlich gilt für jeden Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von affinen algebraischen Gruppen und jedes nilpotente Element $X \in \operatorname{Lie} G$ stets

$$\varphi(\tilde{\exp} X) = \tilde{\exp}(\mathrm{d}\varphi(X))$$

Lemma 9.3.10.4 (**Exponentialabbildung der allgemeinen linearen Gruppe**). *Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorrraum V über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik* $\operatorname{char} k = 0$ *gilt mit unserer kanonischen Identifikation* $\operatorname{richt} : \operatorname{Lie}(\mathrm{GL}(V)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End} V$ *für alle nilpotenten* $X \in \operatorname{Lie} \mathrm{GL}(V)$ *die Identität*

$$\tilde{\exp}(X) = \exp(\operatorname{richt} X)$$

9.3.10.5. Wegen dieser Verträglichkeit führt es nicht zu Mehrdeutigkeiten, wenn wir unsere Notation, sobald das Lemma bewiesen ist, zu $\tilde{\exp} = \exp$ vereinfachen.

Beweis. Für jeden nilpotenten Endomorphismus $N \in \operatorname{End} V$ können wir einen Gruppenhomomorphismus $\varphi = \varphi_N : (k, +) \to \mathrm{GL}(V)$ erklären durch die Vorschrift $\varphi_N(t) = \exp(tN)$. Dann gilt offensichtlich $\operatorname{richt}(\mathrm{d}\varphi_N(\partial)) = N$. Für $N = \operatorname{richt}(X)$ erhalten wir mit der Funktorialität 9.3.10.3 und dem Beispiel 9.3.10.2 der additiven Gruppe

$$\tilde{\exp}(X) = \tilde{\exp}(\mathrm{d}\varphi_N(\partial)) = \varphi_N(\tilde{\exp}(\partial)) = \varphi_N(1) = \exp(N) \qquad \square$$

Satz 9.3.10.6 (Unipotente Gruppen in Charakteristik Null). *Gegeben eine unipotente affine algebraische Gruppe U über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik* $\operatorname{char} k = 0$ *induziert die Exponentialabbildung einen Isomorphismus von algebraischen Varietäten*

$$\exp : \operatorname{Lie} U \xrightarrow{\sim} U$$

9.3.10.7. Ist insbesondere $\dim_k V < \infty$ und $U \mathrel{\not\subset} \mathrm{GL}(V)$ eine unipotente Untergruppe und ein Teilraum $W \subset V$ stabil unter der abgeleiteten Operation von $\operatorname{Lie} U$, so ist W auch stabil unter U.

Beweis. Gegeben ein Körper k der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ liefern die Exponentialreihe und die Reihenentwicklung von $\log(1+x)$ zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\} \underset{\log}{\overset{\exp}{\underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{\sim}}}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

zwischen der Menge der echten oberen Dreiecksmatrizen und der Menge der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen, jeweils mit Einträgen in k. Gilt zusätzlich $k = \bar{k}$ und ist U eine abgeschlossene Untergruppe rechts und $\operatorname{Lie} U$ ihre Liealgebra links, so folgt zunächst $\exp(\operatorname{Lie} U) \subset U$ aus der Funktorialität 9.3.10.3 und dann $\exp(\operatorname{Lie} U) = U$ durch Dimensionsvergleich und die Erkenntnis 9.3.6.19, daß in Charakteristik Null jede unipotente Gruppe zusammenhängend ist. □

9.3.10.8. Wir nennen eine endlichdimensionale Liealgebra **nilpotent**, wenn sie als Unteralgebra in eine Liealgebra von echten oberen Dreiecksmatrizen eingebettet werden kann. Eine intrinsische Charakterisierung, die auch für Liealgebren unendlicher Dimension sinnvoll bleibt, wird in 24.3.6.2 formuliert und bewiesen.

Satz 9.3.10.9 (Unipotente Gruppen und ihre Liealgebren). *Gegeben $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik* $\operatorname{char} k = 0$ *ist das Bilden der Liealgebra eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{unipotente affine algebraische} \\ \textit{Gruppen über } k \end{array} \right\} \xrightarrow{\approx} \left\{ \begin{array}{c} \textit{endlichdimensionale nilpotente} \\ \textit{Liealgebren über } k \end{array} \right\}$$

Beweis. Daß unser Funktor treu ist, daß er also Injektionen zwischen den beteiligten Morphismenräumen induziert, folgt bereits aus der Isomorphismeneigenschaft 9.3.10.6 und der Funktorialität 9.3.10.3 der Exponentialabbildung. Wir zeigen als nächstes, daß auch jede nilpotente Liealgebra isomorph ist zur Liealgebra einer unipotenten algebraischen Gruppe. Dazu reicht es zu zeigen, daß für jedes n und

jede Unteralgebra $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{d}_n$ der Liealgebra $\mathfrak{d}_n \subset \operatorname{Mat}(n;k)$ aller echten oberen Dreiecksmatrizen auch $\exp \mathfrak{n}$ eine Untergruppe der Gruppe aller unipotenten oberen Dreiecksmatrizen ist. Das zeigen wir durch Induktion über die Dimension. Der nulldimensionale Fall ist klar. Sonst wähle man ein Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}$ der Kodimension Eins, das muß es stets geben, und ein Element $x \in \mathfrak{n} \backslash \mathfrak{m}$. Da die Rechtsmultiplikation und die Linksmultiplikationen mit x kommutieren, erhalten wir für jede nilpotente Matrix x und jede Matrix y die Identität

$$\exp(x) y \exp(x)^{-1} = \exp((x\cdot) - (\cdot x))(y) = (\exp(\operatorname{ad} x))(y)$$

Nun ist aber $\operatorname{ad} x$ eine nilpotente Derivation der Matrixalgebra und $\exp(\operatorname{ad} x)$ folglich ein Automorphismus der Matrixalgebra. Für z eine weitere nilpotente Matrix ergibt sich damit

$$\exp(x) \exp(z) \exp(x)^{-1} = (\exp(\operatorname{ad} x))(\exp(z)) = \exp((\exp(\operatorname{ad} x))(z))$$

Folglich normalisiert die Untergruppe $\exp(kx)$ die Untergruppe $\exp \mathfrak{m}$ und damit ist das Produkt $(\exp \mathfrak{m})(\exp kx)$ selbst eine Untergruppe. Dasselbe gilt für ihren Abschluß, in dem unser Produkt als Bahn einer Wirkung von $(\exp \mathfrak{m}) \times (\exp kx)$ zumindest eine offene Teilmenge sein muß. Die Liealgebra dieses Abschlusses umfaßt nun aber offensichtlich unser $\mathfrak{n}$ und fällt dann aus Dimensionsgründen sogar damit zusammen. Also ist $\exp \mathfrak{n} \mathrel{\not\subset} \exp \mathfrak{d}_n$ in der Tat eine abgeschlossene Untergruppe. Nun müssen wir nur noch zeigen, daß jeder Homomorphismus $\mathfrak{u} \to \mathfrak{n}$ von nilpotenten Liealgebren auch von einem Gruppenhomomorphismus herkommt. Sei dazu $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{u} \times \mathfrak{n}$ der Graph unseres Liealgebrenhomomorphismus. Nach dem bereits Bewiesenen ist $M := \exp \mathfrak{m}$ dann eine abgeschlossene Untergruppe $M \mathrel{\not\subset} U \times N$ und die Treue unseres Funktor zeigt, daß die Projektion einen Isoorphismus $M \xrightarrow{\sim} U$ induziert. Also ist M auch der Graph eines Gruppenhomomorphismus und das beendet den Beweis. □

9.3.10.10 (**Alternativen beim Beweis**). Aus 9.2.3.9 folgt, daß $(\exp \mathfrak{m})(\exp kx)$ als Bahn einer unipotenten Gruppe in einer affinen Varietät bereits selbst abgeschlossen sein muß. Aus der Variante 24.3.2.5 der Hausdorff-Formel kann man auch direkt folgern, daß $\exp(\mathfrak{n})$ eine Untergruppe der Gruppe der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen sein muß.

Übungen

Übung 9.3.10.11. Gegeben ein Körper k der Charakteristik $\operatorname{char}(k) = 0$ betrachte man die Menge $\mathcal{N} \subset \operatorname{Mat}(n;k)$ der nilpotenten Matrizen und zeige, daß die Exponentialabbildung darauf zu einer Injektion $\exp : \mathcal{N} \hookrightarrow \operatorname{Mat}(n;k)$ einschränkt. Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $k = \bar{k}$. Aus $\exp(A) = \exp(B)$ folgere man $\exp(tA) = \exp(tB)$ für alle $t \in \mathbb{N}$ und dann für alle $t \in k$.

Übung 9.3.10.12. Gegeben eine affine algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null und $(\operatorname{Lie} G)_{\mathrm{n}}$ die Menge der nilpotenten Elemente ihrer Liealgebra induziert die Exponentialabbildung einen Isomorphismus von Varietäten

$$\exp : (\operatorname{Lie} G)_{\mathrm{n}} \xrightarrow{\sim} G_{\mathrm{u}}$$

des nilpotenten Kegels mit der Varietät der unipotenten Elemente von G. Hinweis: Die Injektivität folgt aus 9.3.10.11.

Übung 9.3.10.13 (**Unipotente kommutative Gruppen**). Jede kommutative unipotente affine algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null ist isomorph zur additiven Gruppe eines endlichdimensionalen k-Vektorraums. In positiver Charakteristik gilt das nicht mehr.

9.3.11 Algebraische Distributionen*

Definition 9.3.11.1. Gegeben eine bepunktete k-Varietät (X, x) und $n \in \mathbb{N}$ setzt man $\operatorname{Dist}^{\leq n}(X, x) := \{\mu \in \operatorname{Hom}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k) \mid \mu(\mathfrak{m}_x^{n+1}) = 0\}$ und

$$\operatorname{Dist}(X, x) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \operatorname{Dist}^{\leq n}(X, x)$$

Die Elemente dieses Vektorraums über k heißen die **Distributionen auf X mit Träger in** x. Jeder Morphismus $\varphi : (X, x) \to (Y, y)$ von bepunkteten Varietäten induziert einen lokalen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ und so Homomorphismen $\operatorname{Dist}^{\leq n}(X, x) \to \operatorname{Dist}^{\leq n}(Y, y)$ sowie

$$\mathrm{d}_x\varphi : \operatorname{Dist}(X, x) \to \operatorname{Dist}(Y, y)$$

Auf diese Weise erhalten wir einen Funktor von der Kategorie Var^* der bepunkteten Varietäten in die Kategorie der Vektorräume, ja in die Kategorie der filtrierten Vektorräume.

Beispiel 9.3.11.2. Gegeben eine affine bepunktete Varietät (X, x) liefert die Einbettung nach dem Satz über überflüssiges Lokalisieren Isomorphismen

$$\mathcal{O}(X)/\mathcal{I}(x)^{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{n+1}$$

Distributionen vom Grad $\leq n$ können also auch als Linearformen auf dem linken Quotienten realisiert werden. Ist etwa $X = k$ die Gerade mit $\mathcal{O}(X) = k[T]$ und $x = 0$ der Ursprung, so bilden die Koordinatenfunktionen zur Basis der Monome T^r eine Basis des Raums der Distributionen. Wir notieren die entsprechenden Basisvektoren $\partial^{(r)}$. In Charakteristik Null können sie auch explizit als die Differentialoperatoren $(r!)^{-1}\partial^r$ gefolgt vom Auswerten beim Ursprung aufgefaßt werden.

9.3.11.3. Sei (X, x) eine bepunktete Varietät. Das Auswerten $\delta_x : \mathcal{O}_{X,x} \to k$ an der Stelle x nennt man in diesem Zusammenhang auch die **Dirac'sche δ-Distribution**. Sie ist eine Basis des k-Vektorraums $\mathrm{Dist}^{\leq 0}(X, x)$ der Dimension Eins. Der Kern des Auswertens auf der konstanten Funktion Eins ist ein Teilraum $\mathrm{Dist}^{+}(X, x) \subset \mathrm{Dist}(X, x)$, der komplementär ist zu $k\delta_x$. Die Restriktion auf $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \subset \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^2$ induziert des weiteren einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Dist}^{\leq 1}(X, x) \cap \mathrm{Dist}^{+}(X, x) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_x X$$

und so eine Einbettung des Tangentialraums in den Raum der Distributionen.

9.3.11.4. Der Durchschnittssatz von Krull 7.4.6.14 zeigt, daß für jede bepunktete Varietät (X, x) das Auswerten $\mathrm{Dist}(X, x) \times \mathcal{O}_{X,x} \to k$ eine nichtausgeartete Paarung ist.

Satz 9.3.11.5 (Distributionen auf Produkten). *Gegeben zwei bepunktete Varietäten (X, x) sowie (Y, y) und Distributionen $\mu \in \mathrm{Dist}(X, x)$ sowie $\nu \in \mathrm{Dist}(Y, y)$ gibt es genau eine Distribution $\mu \boxtimes \nu \in \mathrm{Dist}(X \times Y, (x, y))$ mit der Eigenschaft, daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X,x} \otimes_k \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[r] \arrow[d, "\mu\otimes\nu"'] & \mathcal{O}_{X\times Y,(x,y)} \arrow[d, "\mu\boxtimes\nu"] \\
k \otimes_k k \arrow[r, "\mathrm{mult}"] & k
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Weiter liefert diese Vorschrift einen Isomorphismus

$$\mathrm{Dist}(X, x) \otimes_k \mathrm{Dist}(Y, y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dist}(X \times Y, (x, y))$$

9.3.11.6. Der Isomorphismus aus dem Satz ist sogar ein Isomorphismus von filtrierten Vektorräumen, wenn wir die Filtierung auf dem Tensorprodukt wie in 7.7.1.12 erklären, und gegeben Tangentialvektoren v, w der jeweiligen Tangentialräume finden wir $v \otimes \delta_y + \delta_x \otimes w \mapsto (v, w)$. Auch das zeigt der folgende Beweis.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir X und Y affin annehmen. In diesem Fall liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $\mathcal{O}(X)/\mathcal{I}(x)^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^n$ und dann natürlich auch einen Isomorphismus der Dualräume. Andererseits induziert $\mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times Y)$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{I}(x) \otimes \mathcal{O}(Y) + \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{I}(y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}(x, y)$$

mit dem Verschwindungsideal $\mathcal{I}(x, y)$ von (x, y). Dann entsprechen sich unter dem kanonischen Isomorphismus auch alle Potenzen dieser Ideale, in Formeln

$$\sum_{i+j=n} \mathcal{I}(x)^i \otimes \mathcal{I}(y)^j \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}(x, y)^n$$

Das zeigt, daß gegeben Linearformen $\mu \in \mathcal{O}(X)^*$ und $\nu \in \mathcal{O}(Y)^*$ mit $\mu(\mathcal{I}(x)^i) = 0$ und $\nu(\mathcal{I}(y)^j) = 0$ notwendig gilt $(\mu \boxtimes \nu)(\mathcal{I}(x,y)^{i+j}) = 0$. Mithin gibt es für $\mu \in \mathrm{Dist}^{\leq i}(X,x)$ und $\nu \in \mathrm{Dist}^{\leq j}(Y,y)$ genau ein $\mu \boxtimes \nu \in \mathrm{Dist}^{\leq i+j}(X \times Y,(x,y))$ mit der im Satz geforderten Eigenschaft. Nun können wir unsere Summe auch umschreiben zu einem Schnitt und damit induziert der kanonische Isomorphismus einen Isomorphismus

$$\bigcap_{i+j=n} \left(\mathcal{I}(x)^i \otimes \mathcal{O}(Y) + \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{I}(y)^j\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}(x,y)^n$$

So erkennen wir mit 4.4.5.10, daß der kanonische Isomorphismus eine Surjektion

$$\sum_{i+j=n} \mathrm{Dist}^{\leq i}(X,x) \otimes \mathrm{Dist}^{\leq j}(Y,y) \twoheadrightarrow \mathrm{Dist}^{\leq n}(X \times Y,(x,y))$$

induziert. Die Injektivität von $\mathrm{Dist}(X,x) \otimes \mathrm{Dist}(Y,y) \to \mathrm{Dist}(X \times Y,(x,y))$ ist eh klar nach 4.6.1.25. $\square$

9.3.11.7. In der Sprache der Schmelzkategorien 18.1.1.4 folgende ausgedrückt bilden die Distributionen sogar einen mit universellen Trennungen verträglichen Trennfunktor

$$\mathrm{Dist} : \curlywedge\mathrm{Var}_k^* \to \mathrm{Mod}_k^{\mathrm{dual}}$$

von der banalen Trennkategorie der bepunkteten k-Varietäten in die Duale der Schmelzkategorie der k-Vektorräume, ja sogar der filtrierten k-Vektorräume. Die einzige Leertrennung $(X,x) \to \curlywedge$ wird dabei auf diejenige Leertrennung alias Linearform auf $\mathrm{Dist}(X,x)$ abgebildet, die durch Auswerten auf der Eins des lokalen Rings gegeben wird. Im Fall affiner Varietäten kann der zu unserem Trennfunktor duale Schmelzfunktor $\mathrm{kart}(\mathrm{Var}_k^*) \to \mathrm{Mod}_k$ als Unterschmelzfunktor des Schmelzfunktors $(X,x) \mapsto \mathcal{O}(X)^*$ aufgefaßt werden, der jeder punktierten Varietät den Dualraum in Bezug auf den Grundkörper des Raums der regulären Funktionen zuordnet.

9.3.11.8 (**Distributionen als Kokringalgebra**). Gegeben eine bepunktete algebraische Varietät (X,x) betrachten wir die diagonale Einbettung $\Delta : X \hookrightarrow X \times X$ und die Verknüpfung

$$\mathrm{Dist}(X,x) \xrightarrow{\mathrm{d}_x\Delta} \mathrm{Dist}(X \times X,(x,x)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dist}(X,x) \otimes \mathrm{Dist}(X,x)$$

Diese Verknüpfung μ ist offensichtlich koassoziativ und kokommutativ und macht so $\mathrm{Dist}(X,x)$ zu einer Koalgebra, ja zu einer Kokringalgebra im Sinne von **??** mit dem Auswerten $\mu \mapsto \mu(1)$ auf der konstanten Funktion $1 \in \mathcal{O}_{X,x}$ als Koeinheit. In der Sprache der Trennkategorien ausgedrückt wird das banale Koabmonoidobjekt (X,x) aus 18.2.2.10 unter dem Trennfunktor Dist eben zu einem Koabmonoidobjekt von $\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{dual}}$ alias einer Kokringalgebra.

9.3.11.9 (**Distributionen auf einer Gruppe als Hopfalgebra**). Ist G eine algebraische Gruppe, so induziert das Gruppengesetz $G \times G \to G$ eine bilineare Abbildung

$$\mathrm{Dist}(G,e) \otimes \mathrm{Dist}(G,e) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dist}(G \times G, (e,e)) \to \mathrm{Dist}(G,e)$$

Man sieht leicht, daß $\mathrm{Dist}(G,e)$ so eine k-Ringalgebra wird mit dem Auswerten an e als Einselement, ja eine kokommutative Hopfalgebra mit der zuvor erklärten Kokringalgebrenstruktur. Formal mag man auch bemerken, daß (G,e) ein Hopfobjekt im Sinne von **??** der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathrm{Var}_k^*$ ist und damit unter dem mit universellen Trennungen verträglichen Trennfunktor Dist notwendig zu einem Hopfobjekt der Trennkategorie $\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{dual}}$ alias einem Hopfobjekt der Schmelzkategorie Mod_k werden muß.

9.3.11.10 (**Distributionsalgebra eines Vektorraums**). Im Spezialfall der additiven Gruppe V eines endlichdimensionalen Vektorraums liefert die Einbettung $V^* \hookrightarrow \mathcal{O}(V)$ einen Isomorphismus von Ringalgebren

$$\mathrm{S}(V^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(V)$$

Indem wir jedem Vektor die zugehörige Richtungsableitung im Ursprung zuordnen, erhalten wir auch einen natürlichen Homomorphismus von Ringalgebren

$$\mathrm{S}(V) \to \mathrm{Dist}(V,0)$$

Im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null ist auch letztere Abbildung ein Isomorphismus von Ringalgebren. In jedem Fall induziert die durch das Auswerten gegebene Paarung

$$\mathrm{Dist}(V,0) \times \mathcal{O}(V) \to k$$

eine Paarung $\mathrm{S}(V) \otimes \mathrm{S}(V^*) \to k$. Ist $T_1, \ldots, T_n$ eine Basis von V^* und $\partial_1, \ldots, \partial_n$ die duale Basis von V, so entspricht diese Paarung nach **??** dem Anwenden eines Differentialoperators auf eine polynomiale Funktion, gefolgt vom Auswerten beim neutralen Element.

Proposition 9.3.11.11 (**Operation auf Fixpunktdistributionen**). *Gegeben $G \curvearrowright X$ eine algebraische Varietät mit der Operation eines algebraischen Monoids und ein Fixpunkt $x \in X$ der Operation ist für alle $r \geq 0$ die induzierte Operation von G auf* $\mathrm{Dist}(X,x)$ *algebraisch.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß für alle $r \geq 0$ die induzierte Rechtsoperation von G auf $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^r$ algebraisch ist. Um das zu sehen, betrachten wir eine offene affine Umgebung $U \Subset X$ von unserem Fixpunkt x und eine offene affine Umgebung

des neutralen Elements $V \Subset G$ und finden eine reguläre Funktion $s \in \mathcal{O}(V \times U)$ mit $s(e,x) \neq 0$ derart, daß ihre Nichtnullstellenmenge $(V \times U)_s$ unter der Multiplikation in U landet. Wir schreiben $s = \sum r_j \boxtimes t_j$. Sei nun $f \in \mathcal{O}(U)$. Für die Operation $\mathrm{act} : (V \times U)_s \to U$ gilt dann eine Gleichung der Gestalt $f \circ \mathrm{act} = s^{-n} \sum g_i \boxtimes h_i$ mit $g_i \in \mathcal{O}(U)$ und $h_i \in \mathcal{O}(V)$ und $n \in \mathbb{Z}$ alias $f(zy) = s(z,y)^{-n} \sum g_i(z) h_i(y)$ alias

$$f \circ (z\cdot) = \left(\sum r_j(z) t_j\right)^{-n} \sum g_i(z) h_i$$

an jeder Stelle y mit $(z,y) \in (U \times V)_s$. Sei nun $W := \{z \in V \mid s(z,x) \neq 0\}$. Sicher ist nun $z \mapsto \sum r_j(z) t_j + \mathfrak{m}_x^r$ ein Morphismus von W in die Einheitengruppe der k-Kringalgebra $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^r$. Nach 9.1.1.46 ist das Invertieren darin ein Morphismus. Folglich ist auch

$$z \mapsto (f \circ (z\cdot)) + \mathfrak{m}_x^r = \left(\sum r_j(z) t_j + \mathfrak{m}_x^r\right)^{-n} \left(\sum g_i(z) h_i + \mathfrak{m}_x^r\right)$$

ein Morphismus $W \to \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^r$. Mit 9.1.4.13 folgt die Algebraizität der fraglichen Rechtsoperation. □

Übungen

Ergänzende Übung 9.3.11.12 (**Zusammenhang mit der Einhüllenden**). Sei G eine affine algebraische Gruppe und $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$ ihre Lie-Algebra. So induziert die Einbettung $\mathrm{T}_e G \hookrightarrow \mathrm{Dist}(G,e)$ einen Homomorphismus von Hopf-Algebren $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Dist}(G,e)$ von der Einhüllenden der Lie-Algebra in die Distributionenalgebra, und im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null ist dieser Homomorphismus sogar ein Isomorphismus. Insbesondere liefert das Auswerten im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null unter der zusätzlichen Annahme G zusammenhängend eine nichtausgeartete Paarung

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{O}(G) \to k$$

Die davon induzierte Einbettung $\mathcal{O}(G) \hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})^*$ in den Dualraum der Einhüllenden hat als Bild genau diejenigen Linearformen, die unter der Kontragredienten der Operation durch Linksmultiplikation von $\mathfrak{g}$ auf $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ eine endlichdimensionale zu einer Darstellung von G integrable $\mathfrak{g}$-Unterdarstellung erzeugen.

9.4 Borel'sche Untergruppen und maximale Tori

9.4.1 Zusammenhängende auflösbare Gruppen

9.4.1.1. Ich erinnere aus 9.2.2.7, daß wir für Teilmengen A, B einer Gruppe G die von allen Kommutatoren $(a, b) := aba^{-1}b^{-1}$ mit $a \in A$ und $b \in B$ erzeugte Untergruppe (A, B) notieren. Sind A und B Normalteiler, so ist auch (A, B) ein Normalteiler. Die von allen Kommutatoren erzeugte Untergruppe (G, G) heißt die **derivierte Gruppe**. Wir notieren sie auch $\mathcal{D}G$.

9.4.1.2. Gegeben eine Gruppe G setzt man:

1. $\mathcal{D}^0G = G$ und induktiv $\mathcal{D}^nG = (\mathcal{D}^{n-1}G, \mathcal{D}^{n-1}G)$ für $n \geq 1$;
2. $\mathcal{C}^0G = G$ und induktiv $\mathcal{C}^nG = (G, \mathcal{C}^{n-1}G)$ für $n \geq 1$.

Alle diese Untergruppen sind Normalteiler von G. Eine Gruppe ist auflösbar im Sinne von 6.1.3.9 genau dann, wenn gilt $\mathcal{D}^nG = 0$ für $n \gg 0$. Eine Gruppe ist nilpotent im Sinne von 6.1.3.10 genau dann, wenn gilt $\mathcal{C}^nG = 0$ für $n \gg 0$.

9.4.1.3. Natürlich können wir zu jeder Gruppe G den Quotienten $G/\mathrm{Z}(G)$ nach dem Zentrum konstruieren. Nilpotent ist eine Gruppe genau dann, wenn wiederholtes Anwenden dieser Konstruktion in endlich vielen Schritten von unserer Gruppe zur trivialen Gruppe führt. Die Zahl der hierbei benötigten Schritte heißt der **Nilpotenzgrad** unserer nilpotenten Gruppe. Nilpotenzgrad Null hat nur die triviale Gruppe, Nilpotenzgrad Eins ist gleichbedeutend zu nichttrivial und kommutativ.

9.4.1.4. Ist G eine zusammenhängende algebraische Gruppe, so sind die Untergruppen $\mathcal{C}^nG$ und $\mathcal{D}^nG$ alle abgeschlossen und zusammenhängend nach dem Satz über irreduzibles Erzeugen 9.2.2.11.

9.4.1.5. Zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppen notiere ich im folgenden vorzugsweise mit dem Buchstaben B, weil die Resultate insbesondere benötigt werden, um sie später auf die sogenannten „Borel'schen" anzuwenden.

Satz 9.4.1.6 (Lie-Kolchin). *Alle irreduziblen algebraischen Darstellungen einer zusammenhängenden auflösbaren algebraischen Gruppe sind eindimensional.*

Beispiel 9.4.1.7. Die Bedingung zusammenhängend ist hier wesentlich. Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_3$ etwa ist auflösbar, hat aber eine zweidimensionale irreduzible reelle Darstellung als Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks, die auch unter Komplexifizierung irreduzibel bleibt.

9.4.1.8. Aus 9.1.6.2 und 9.1.6.3 kennen wir bereits die sehr ähnliche Aussage, daß alle unipotenten Gruppen auflösbar sind und daß alle ihre irreduziblen Darstellungen isomorph sind zur trivialen eindimensionalen Darstellung.

Beweis. Sei B unsere Gruppe und V eine von Null verschiedene Darstellung. Wir müssen zeigen, daß es in V eine unter B stabile Gerade gibt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir V endlichdimensional annehmen. Wir argumentieren mit Induktion über $\operatorname{kdim} B$. Die Induktionsbasis $B = 1$ ist unproblematisch. Sonst gilt $\operatorname{kdim} \mathcal{D}B < \operatorname{kdim} B$ und wir dürfen die Existenz einer $\mathcal{D}B$-stabilen Gerade kv annehmen. Wie beim Beweis von 9.3.6.9 ist dann

$$\bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(\mathcal{D}B)} V_\chi$$

ein von Null verschiedener B-stabiler Teilraum und die B-Wirkung permutiert die Summanden. Da aber B zusammenhängend ist, muß sie alle Summanden stabilisieren und wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V = V_\chi$ für ein $\chi \in \mathfrak{X}(\mathcal{D}B)$ annehmen. Unter $\rho : B \to \mathrm{GL}(V)$ gilt nun sicher $\rho(\mathcal{D}B) \subset \mathrm{SL}(V)$, da ja $\mathcal{D}B$ von Kommutatoren erzeugt wird. Für alle $g \in \mathcal{D}B$ haben wir also $1 = \det \rho(g) = \chi(g)^{\dim V}$. Da auch die Gruppe $\mathcal{D}B$ zusammenhängend ist, folgt $\chi(g) = 1 \ \forall g \in \mathcal{D}B$ und $\mathcal{D}B$ operiert trivial auf V. Dann aber ist $\rho(B) \subset \mathrm{GL}(V)$ eine Menge paarweise kommutierender Endomorphismen und besitzt nach 4.3.2.18 einen simultanen Eigenvektor. □

9.4.1.9 (**Existenz stabiler vollständiger Fahnen**). In jeder endlichdimensionalen Darstellung V einer zusammenhängenden auflösbaren algebraischen Gruppe gibt es nach dem Satz von Lie-Kolchin eine Folge $V = V_r \supset V_{r-1} \supset \ldots \supset V_0 = 0$ von Unterdarstellungen mit $\dim V_i = i$. Gleichbedeutend gibt es eine Basis, bezüglich derer unsere Gruppe durch obere Dreiecksmatrizen operiert.

Korollar 9.4.1.10 (**Struktur zusammenhängender nilpotenter Gruppen**). *Gegeben eine zusammenhängende nilpotente affine algebraische Gruppe N sind N_{u} und N_{s} abgeschlossene Untergruppen, N_{s} liegt im Zentrum von N und die Multiplikation ist ein Isomorphismus von algebraischen Gruppen*

$$N_{\mathrm{s}} \times N_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} N$$

9.4.1.11. Insbesondere sind auch N_{s} und N_{u} zusammenhängend und N_{s} ist nach 9.1.7.23 zusätzlich diagonalisierbar, mithin ein Torus. Für $N = K$ kommutativ hatten wir die Aussagen des Korollars bereits in 9.1.5.9 gezeigt, und das sogar, ohne K zusammenhängend vorauszusetzen.

Beweis. Gegeben $s \in N_{\mathrm{s}}$ betrachten wir nun $\varphi = \varphi_s : N \to N$, $x \mapsto sxs^{-1}x^{-1}$. Nach Annahme ist φ^n konstant für $n \gg 0$. Andererseits wird das Differential von φ gegeben durch $\mathrm{d}_1\varphi = \mathrm{Ad}_s - \mathrm{id}$ und aus φ^n konstant folgt $\mathrm{Ad}_s = \mathrm{id}$. Aus der Beschreibung 9.3.7.9 der Liealgebra des Zentralisators halbeinfacher Elemente folgt $\mathrm{Lie}(N^s) = (\mathrm{Lie}\, N)^s = \mathrm{Lie}\, N$. Da N zusammenhängend ist, folgt weiter $N^s = N$. Also gehört s zum Zentrum von N, in Formeln $s \in \mathrm{Z}(N)$. Nun ist aber $\mathrm{Z}(N)$ kommutativ, also ist $N_{\mathrm{s}} = \mathrm{Z}(N)_{\mathrm{s}} \mathrel{\text{⫋}} \mathrm{Z}(N) \mathrel{\text{⫋}} N$ eine abgeschlossene Untergruppe nach unseren Erkenntnissen über die Struktur kommutativer affiner algebraischer Gruppen aus 9.1.5.9. Andererseits finden wir eine abgeschlossene Einbettung von N in die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ eines endlichdimensionalen Vektorraums und nach der Existenz stabiler vollständiger Fahnen 9.4.1.9 sogar eine abgeschlossene Einbettung von N in eine Gruppe D von oberen Dreiecksmatrizen. Damit bilden auch die unipotenten Elemente eine abgeschlossene Untergruppe $N_{\mathrm{u}} = N \cap D_{\mathrm{u}} \mathrel{\text{⫋}} N$. Aus der Existenz und Eindeutigkeit Jordanzerlegung folgt dann, daß die Multiplikation einen bijektiven Gruppenhomomorphismus

$$N_{\mathrm{s}} \times N_{\mathrm{u}} \to N$$

liefert. Um schließlch zu zeigen, daß er sogar ein Isomorphismus von Varietäten ist, dürfen wir $N \mathrel{\text{⫋}} \mathrm{GL}(V)$ annehmen. Sei $V = \bigoplus V_\chi$ die Zerlegung in simultane Eigenräume unter N_{s}. Mithilfe des Satzes von Lie-Kolchin 9.4.1.6 finden wir in jedem V_χ eine Basis, bezüglich derer N durch obere Dreiecksmatrizen operiert. Dann ist für $g \in N$ notwendig g_{s} der diagonale Anteil von N und auf diese Weise erhalten wir den inversen Morphismus. □

Korollar 9.4.1.12 (Struktur zusammenhängender auflösbarer Gruppen). *Gegeben eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe B gilt:*

1. *Die derivierte Gruppe ist unipotent, in Formeln $(B, B) \subset B_{\mathrm{u}}$;*
2. *Die Menge der unipotenten Elemente ist ein zusammenhängender abgeschlossener nilpotenter Normalteiler $B_{\mathrm{u}} \mathrel{\text{⫋}} B$ und der Quotient B/B_{u} ist ein Torus.*

Beweis. Fast alle Aussagen folgen unmittelbar aus der Existenz einer abgeschlossenen Einbettung von B in eine Gruppe von oberen Dreiecksmatrizen 9.4.1.9. Nicht unmittelbar klar ist nur, daß B_{u} zusammenhängend ist und daß B/B_{u} ein Torus sein muß. Sicher ist jedoch der Quotient B/B_{u} zusammenhängend und kommutativ und besteht wegen $(B, B) \subset B_{\mathrm{u}}$ nur aus halbeinfachen Elementen. Also muß er nach 9.1.7.23 ein Torus sein. Es bleibt zu zeigen, daß B_{u} zusammenhängend ist. Sicher ist zumindest auch $B_{\mathrm{u}}^\circ \subset B$ ein Normalteiler und in $H := B/B_{\mathrm{u}}^\circ$ ist der unipotente Anteil nach 9.1.5.13 die Untergruppe $H_{\mathrm{u}} = B_{\mathrm{u}}/B_{\mathrm{u}}^\circ$ und ist folglich eine endliche normale Untergruppe, also $H_{\mathrm{u}} \subset \mathrm{Z}(H)$ und damit

$(H, H) \subset \mathrm{Z}(H)$. Damit aber ist H nilpotent, und da es als Quotient von B auch zusammenhängend ist, muß H_{u} zusammenhängend sein nach 9.4.1.11. Als zusammenhängende endliche algebraische Gruppe ist somit H_{u} trivial und es folgt $B_{\mathrm{u}} = B_{\mathrm{u}}^{\circ}$. □

Übungen

Übung 9.4.1.13. Jede abgeschlossene Untergruppe der Kodimension Eins in einer zusammenhängenden nilpotenten affinen algebraischen Gruppe ist ein Normalteiler. Hinweis: Entweder unsere Untergruppe umfaßt die Einskomponente des Zentrums, oder sie umfaßt sie eben nicht.

Übung 9.4.1.14. Für $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen ist die Gruppe $\mathrm{SL}(2; k)$ nicht auflösbar. Die Gruppe $\mathrm{SL}(2; \mathbb{F}_2)$ ist auflösbar.

Übung 9.4.1.15. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Man zeige, daß jede $\mathbb{Z}$-Graduierung auf der $\mathbb{C}$-Ringalgebra $\mathrm{End}(V)$ von einer $\mathbb{Z}$-Graduierung auf V herkommt. Hinweis: Man erinnere aus 8.3.5.12 den Isomorphismus $\mathrm{PGL}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RAlg}_{\mathbb{C}}^{\times}(\mathrm{End}\, V)$ und erinnere aus 7.9.4.5, daß eine $\mathbb{Z}$-Graduierung dasselbe ist wie eine algebraische Operation von $\mathbb{C}^{\times}$. Dann betrachte man das Rückzugsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} T & \twoheadrightarrow & \mathbb{C}^{\times} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{GL}(V) & \twoheadrightarrow & \mathrm{PGL}(V) \end{array}$$

und folgere aus der Strukturtheorie diagonalisierbarer Gruppen, daß die obere Horizontale spaltet.

9.4.2 Maximale Tori in auflösbaren Gruppen

9.4.2.1. Ein **maximaler Torus** in einer algebraischen Gruppe ist eine abgeschlossene Untergruppe, die ein Torus ist und maximal bezüglich Inklusion mit diesen Eigenschaften. Offensichtlich besitzt jede algebraische Gruppe maximale Tori.

Satz 9.4.2.2 (**Maximale Tori in auflösbaren Gruppen**). *Sei B eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe. So gilt:*

1. *Für jeden maximalen Torus $T \subset B$ liefert die Multiplikation einen Isomorphismus von Varietäten*
$$T \times B_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} B$$

2. *Je zwei maximale Tori von B sind zueinander konjugiert;*

3. *Jede Teilmenge $X \subset B_{\mathrm{s}}$, die aus paarweise kommutierenden Elementen besteht, liegt in einem maximalen Torus von B.*

Vorschau 9.4.2.3. In 9.4.6.9 zeigen wir, daß sogar in einer beliebigen affinen algebraischen Gruppe je zwei maximale Tori konjugiert sind. Der Beweis dieser Tatsache stützt sich aber ganz wesentlich auf den vorhergehenden Satz.

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus der anschließenden Proposition 9.4.2.5 und Lemma 9.4.2.4, in deren Beweis sich die eigentliche Arbeit versteckt. □

Lemma 9.4.2.4. *Gegeben B eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe ist jeder Torus $T \subset B$ mit $TB_{\mathrm{u}} = B$ ein maximaler Torus und die Multiplikation induziert einen Isomorphismus $T \times B_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} B$.*

Beweis. Jeder Untergruppe von G, die T als echte Untergruppe enthält, muß nichttriviale unipotente Elemente enthalten und kann folglich kein Torus sein. Mithin ist T ein maximaler Torus. Daß die Multiplikation eine Bijektion $T \times B_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} B$ liefert, folgt leicht aus $T \cap B_{\mathrm{u}} = 1$. Aus der Jordanzerlegung in der Liealgebra und Übung 9.3.3.16 folgt aber auch $\operatorname{Lie} T \cap \operatorname{Lie} B_{\mathrm{u}} = 0$, mithin ist das Differential am neutralen Element unserer Multiplikationsabbildung aus Dimensionsgründen bijektiv. Nun können wir B als homogenen Raum für die simultane Linksoperation von T und Rechtsoperation von B_{u} betrachten und unser Satz 9.3.5.15 über Isomorphismen homogener Räume impliziert dann, daß die Multiplikation in der Tat einen Isomorphismus von Varietäten $T \times B_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} B$ liefert. □

Proposition 9.4.2.5. *Sei B eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe. So gibt es einen Torus $T \subset B$ mit $TB_{\mathrm{u}} = B$ und der zusätzlichen Eigenschaft, daß es für jede Teilmenge $X \subset B_{\mathrm{s}}$ aus paarweise kommutierenden halbeinfachen Elementen ein $g \in (T, B_{\mathrm{u}})$ gibt mit $gXg^{-1} \subset T$.*

Beweis. Wir argumentieren mit Induktion über $\operatorname{kdim} B$. Die Induktionsbasis ist unproblematisch. Im Fall $B = B_{\mathrm{s}}$ folgt $(B, B) \subset B_{\mathrm{u}} = 1$ und B ist kommutativ, also nach 9.1.7.23 ein Torus. Wir dürfen also $B \neq B_{\mathrm{s}}$ alias $B_{\mathrm{u}} \neq 1$ annehmen. Dann gibt es einen minimalen unipotenten zusammenhängenden nichttrivialen Normalteiler $U \trianglelefteq B$, denn B_{u} hat alle diese Eigenschaften nach 9.4.1.12. Als unipotente Gruppe ist U nilpotent und es folgt $\mathcal{D}U \subsetneq U$ und folglich $\mathcal{D}U = 1$ wegen der Minimalität von U. Mithin ist unser U kommutativ. Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall 1: $\bar{B} := B/U$ ist kein Torus. Dann wenden wir die Induktionsannahme an und finden in $\bar{B}$ einen Torus $\bar{T} \subset \bar{B}$ mit $\bar{T}\bar{B}_{\mathrm{u}} = \bar{B}$ und den weiteren oben ausgeführten Eigenschaften. Bezeichnet $\pi : B \twoheadrightarrow \bar{B}$ die Projektion, so ist $\tilde{B} := \pi^{-1}(\bar{T})$ auch auflösbar zusammenhängend und wegen unserer Annahme gilt $\bar{T} \neq \bar{B}$ und $\tilde{B} \subset B$ ist eine echte Untergruppe. Wir können unsere Induktionsannahme so ein weiteres Mal anwenden und einen Torus $\tilde{T} \subset \tilde{B}$ finden mit $\tilde{T}\tilde{B}_{\mathrm{u}} = \tilde{B}$ und den weiteren oben ausgeführten Eigenschaften. Im folgenden prüfen wir, daß dies $\tilde{T}$

auch die von unserem Torus T von B in der Proposition geforderten Eigenschaften hat. In der Tat liefert $\pi : B \twoheadrightarrow \bar{B}$ nach 9.1.5.13 eine Surjektion $B_{\mathrm{u}} \twoheadrightarrow \bar{B}_{\mathrm{u}}$. Aus $\bar{T}\bar{B}_{\mathrm{u}} = \bar{B}$ folgt $\tilde{B}B_{\mathrm{u}} = \pi^{-1}(\bar{T})\pi^{-1}(\bar{B}_{\mathrm{u}}) = \pi^{-1}(\bar{B}) = B$ und mit $\tilde{B} = \tilde{T}\tilde{B}_{\mathrm{u}}$ dann sofort $\tilde{T}B_{\mathrm{u}} = B$. Man beachte, daß daraus auch folgt $\pi(\tilde{T})\bar{B}_{\mathrm{u}} = \bar{B}$ und wegen $\pi(\tilde{T}) \subset \bar{T}$ dann $\pi(\tilde{T}) = \bar{T}$. Sei weiter $X \subset B_{\mathrm{s}}$ eine kommutative Teilmenge. Dasselbe gilt dann für $\pi(X) \subset \bar{B}_{\mathrm{s}}$ und Induktion liefert $\bar{g} \in (\bar{T}, \bar{B}_{\mathrm{u}})$ mit $\bar{g}\pi(X)\bar{g}^{-1} \subset \bar{T}$. Dann aber gibt es auch $g \in (T, B_{\mathrm{u}})$ mit $g \mapsto \bar{g}$ und für dies g gilt $g(\pi^{-1}(\pi(X))g^{-1} \subset \tilde{B}$. Erst recht folgt $gXg^{-1} \subset \tilde{B}$ und wieder mit Induktion finden wir $h \in (\tilde{T}, \tilde{B}_{\mathrm{u}})$ mit $hgXg^{-1}h^{-1} \subset \tilde{T}$. Damit ist der Fall erledigt, daß B/U kein Torus ist.

Fall 2: $\bar{B} := B/U$ ist ein Torus. Es folgt sofort $U = B_{\mathrm{u}}$. Ist zusätzlich B_{u} zentral in B, so muß wegen $(B, B) \subset B_{\mathrm{u}}$ unsere Gruppe sogar nilpotent sein und nach dem Satz 9.4.1.10 über die Struktur zusammenhängender nilpotenter Gruppen ist dann B_{s} eine Untergruppe und die Multiplikation ein Isomorphismus $B_{\mathrm{s}} \times B_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} B$ und B_{s} ist der einzige maximale Torus und die Behauptung ist klar. Wir dürfen also annehmen, daß $U = B_{\mathrm{u}}$ nicht zentral ist in B. Da U kommutativ ist, gibt es dann $s \in B_{\mathrm{s}}$ mit $U \not\subset B^s$. Im Rest des Beweises soll gezeigt werden, daß in dieser Situation B^s der ersehnte Torus mit den gesuchten Eigenschaften ist. Da U kommutativ ist, muß

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & U & \to & U \\ & & u & \mapsto & sus^{-1}u^{-1} = (\operatorname{int}_s u)u^{-1} \end{array}$$

ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen sein. Nach Wahl von s ist er nicht konstant. Sein Bild ist ein Normalteiler in B, denn für $g \in G$ gilt

$$\operatorname{int}_g((\operatorname{int}_s u)u^{-1}) = \operatorname{int}_g(\operatorname{int}_s u)(\operatorname{int}_g u)^{-1})$$

und wir folgern leicht $\operatorname{int}_g(\operatorname{int}_s u) = \operatorname{int}_s(\operatorname{int}_g u)$ aus $(B, B) \subset U$ und der Kommutativität von U. Die Minimalität von U vom Anfang des Beweises zeigt dann $\varphi(U) = U$. Daraus folgern wir nun $B^sU = B$. In der Tat haben wir für $g \in B$ stets $sgs^{-1}g^{-1} \in \mathcal{D}B \subset B_{\mathrm{u}} = U = \varphi(U)$ und folglich gibt es $u \in U$ mit $sgs^{-1}g^{-1} = sus^{-1}u^{-1}$, woraus folgt $u^{-1}g \in B^s$. Dann zeigen wir $B^s \cap U = 1$. In der Tat können wir jedes g im Schnitt schreiben als $g = sus^{-1}u^{-1}$ und finden $s^{-1}g = us^{-1}u^{-1}$. Dann wäre die linke Seite die Jordan-Zerlegung der rechten Seite und das zeigt $g = 1$. Wegen $B^s \cap B_{\mathrm{u}} = 1$ besteht B^s aus halbeinfachen Elementen. Dann zeigen wir, daß B^s zusammenhängend ist. In der Tat ist $U = B_{\mathrm{u}}$ ein Normalteiler von B und wir können das semidirekte Produkt $(B^s)^\circ \ltimes U$ bilden mitsamt einem offensichtlichen Gruppenhomomorphismus nach B. Dessen Bild $(B^s)^\circ U$ ist notwendig eine abgeschlossene Untergruppe von B von endlichem Index, also ganz B, und daraus folgt $(B^s)^\circ = B^s$. Jetzt folgt, daß B^s kommutativ ist, denn es ist auflösbar und zusammenhängend, also besteht seine derivierte Gruppe

nach 9.4.1.12 aus unipotenten Elementen. Also ist $T := B^s$ schon mal ein Torus mit $TU = B$ und damit nach 9.4.2.4 ein maximaler Torus von B. Sei schließlich $X \subset B_{\mathrm{s}}$ kommutativ. Kommutiert jedes Element von X mit jedem Element von U, gilt also $U \subset B^X$, so führt für jedes $x \in X$ die Darstellung $x = tu$ mit $t \in T$ und $u \in U$ zu $u^{-1}x = xu^{-1} = t$ und die Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung zeigt $x = t \in T$, also $X \subset T$. Sonst gibt es $r \in X$ mit $U \not\subset B^r$. Nach dem, was wir bereits bewiesen haben, ist dann auch B^r ein Torus und $\psi : U \to U$, $u \mapsto rur^{-1}u^{-1}$ bijektiv. Außerdem gilt natürlich $X \subset B^r$. Schreiben wir nun $r^{-1} = tu$ mit $t \in T, u \in U$, so gibt es $v \in U$ mit $u^{-1} = rvr^{-1}v^{-1}$, also $t = r^{-1}u^{-1} = vr^{-1}v^{-1}$, also $vB^rv^{-1} = B^t \supset T$ und damit $vB^rv^{-1} = T$. Da schließlich wegen der Bijektivität von φ gilt $U = (T, B_{\mathrm{u}})$, haben wir $v \in (T, B_{\mathrm{u}})$ und die Proposition ist bewiesen. □

Übungen

Übung 9.4.2.6. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß die Diagonalmatrizen in der $\mathrm{GL}(n; k)$ einen maximalen Torus bilden, und daß jeder maximale Torus zu diesem konjugiert ist. Man zeige dasselbe in der Gruppe $\mathrm{SL}(n; k)$.

Übung 9.4.2.7. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß in der Gruppe $\mathrm{GL}(n; k)$ jede aus halbeinfachen Elementen bestehende kommutative Teilmenge in einem maximalen Torus enthalten ist. Man zeige, daß das für den Fall einer von Zwei verschiedenen Charakteristik im Quotienten $\mathrm{GL}(2; k)/\{\pm \mathrm{id}\}$ nicht mehr richtig ist.

Übung 9.4.2.8. Man zeige: Der Zentralisator eines maximalen Torus in einer zusammenhängenden auflösbaren affinen algebraischen Gruppe ist stets nilpotent.

Übung 9.4.2.9. Seien B eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe und $T \subset B$ ein Torus. Man zeige: Es gibt eine abgeschlossene Einbettung von B in eine Gruppe von oberen Dreiecksmatrizen, unter der alle Elemente unseres Torus auf Diagonalmatrizen gehen. Ist hier T sogar ein maximaler Torus, so muß er der Schnitt von B mit der Gruppe der Diagonalmatrizen sein. Hinweis: Je zwei maximale Tori von B sind zueinander konjugiert.

Übung 9.4.2.10. Ist B eine auflösbare affine algebraische Gruppe und $S \subset B$ ein Torus, so ist SB_{u} eine abgeschlossene Untergruppe von B.

9.4.3 Zentralisatoren in auflösbaren Gruppen

Satz 9.4.3.1 (Zentralisatoren halbeinfacher Elemente). *In einer zusammenhängenden auflösbaren affinen algebraischen Gruppe ist der Zentralisator jedes halbeinfachen Elements zusammenhängend.*

Ergänzung 9.4.3.2. Der folgende Beweis kommt ohne die Klassifikation eindimensionaler zusammenhängender Gruppen aus. Kennt man diese Klassifikation,

so kann man folgern, daß im Beweis U/V isomorph sein muß zu $(k,+)$, und kann damit den Beweis entsprechend vereinfachen.

Beweis. Seien B unsere Gruppe und $s \in B_{\mathrm{s}}$ unser halbeinfaches Element. Wir finden nach 9.4.2.2 einen maximalen Torus T über s und folgern $T \subset B^s$. Nach 9.4.2.2 ist die Multiplikation ein Isomorphismus

$$T \times (B^s \cap B_{\mathrm{u}}) \xrightarrow{\sim} B^s$$

und in Charakteristik Null ist der Beweis an dieser Stelle zu Ende, weil dort nach 9.3.6.19 jede unipotente Gruppe zusammenhängend ist. Im allgemeinen können wir B nach Übung 9.4.2.9 so in eine Gruppe D von oberen Dreiecksmatrizen einbetten, daß T in den Diagonalmatrizen landet. Wir finden leicht eine Filtrierung $D_{\mathrm{u}} = D(0) \supset D(1) \supset \ldots \supset D(r) = 1$ durch Normalteiler von D mit sukzessiven Subquotienten jeweils isomorph zur additiven Gruppe $(k,+)$. Herunterschneiden liefert eine Filtrierung $U := B_{\mathrm{u}} = U(0) \supset U(1) \supset \ldots \supset U(r) = 1$ durch Normalteiler von B, deren sukzessive Subquotienten injektive Gruppenhomomorphismen

$$U(i)/U(i+1) \hookrightarrow k$$

zulassen derart, daß sich darunter int_s zu einem Automorphismus der additiven Gruppe k fortsetzen läßt. Ist B_{u} trivial, so ist der Beweis wieder zu Ende. Da mit B nach 9.4.1.12 auch $U = B_{\mathrm{u}}$ zusammenhängend ist, finden wir sonst einen kleinsten Index i mit $U \supsetneq U(i+1)$. Wir haben dann für diesen Index i einen bijektiven Gruppenhomomorphismus $U/U(i+1) \to k$ derart, daß sich int_s zu einem Automorphismus der additiven Gruppe k fortsetzen läßt. Wir betrachten nun die Einskomponente $V := U(i+1)^\circ$ von $U(i+1)$. Mit Induktion über die Dimension von B dürfen wir voraussetzen, daß die Aussage für das semidirekte Produkt $T \ltimes V$ bereits bewiesen ist, und dürfen mithin V^s zusammenhängend annehmen. Da V auch ein Normalteiler von B sein muß, erhalten wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $p : U/V \twoheadrightarrow k$ mit endlichem Kern zusammen mit $\alpha \in k^\times$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U/V \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\mathrm{int}_s"'] & k \arrow[d, "\alpha"] \\ U/V \arrow[r, two heads] & k \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dann kommutiert dasselbe Diagramm auch mit $\psi : U/V \to U/V$ links und $(\alpha - 1)$ rechts, für

$$\psi(x) := (\mathrm{int}_s\, x)x^{-1}$$

Da U/V als eindimensionale zusammenhängende unipotente Gruppe kommutativ ist, die derivierte Gruppe muß ja trivial sein, ist auch ψ ein Gruppenhomomorphismus. Haben wir hier $\alpha \neq 1$, so muß auch ψ birational sein, da es auf $\mathcal{M}(U/V)$

einen Körperhomomorphismus über $\mathcal{M}(k)$ induziert und da $\mathcal{M}(U/V)$ eine endliche Körpererweiterung von $\mathcal{M}(k)$ ist. Mithin muß ψ nach 9.2.4.16 bijektiv sein und int_s hat in U/V keine Fixpunkte außer dem neutralen Element. Die linksexakte Sequenz

$$V^s \hookrightarrow U^s \to (U/V)^s$$

zeigt also $U^s = V^s$ und V^s ist zusammenhängend nach Induktionsannahme. Haben wir sonst $\alpha = 1$, so landet ψ im Kern von p, ist folglich konstant das neutrale Element, und damit ist int_s die Identität auf U/V. Unsere linksexakte Sequenz wird so zu

$$V^s \hookrightarrow U^s \xrightarrow{\pi} (U/V)$$

Ist hier π surjektiv, so sind wir wieder fertig. Sonst folgt $\mathrm{kdim}\, V^s = \mathrm{kdim}\, U^s$ und damit induziert die Einbettung einen Isomorphismus $\mathrm{Lie}(V^s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(U^s)$ und mit 9.3.7.9 auch einen Isomorphismus $(\mathrm{Lie}\, V)^s \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Lie}\, U)^s$. Nun haben wir aber eine kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{Lie}\, V \hookrightarrow \mathrm{Lie}\, U \twoheadrightarrow \mathrm{Lie}(U/V)$$

und die Ad_s-Invarianten darin müssen, da s halbeinfach ist, auch eine kurze exakte Sequenz bilden. Daraus aber folgt $(\mathrm{Lie}(U/V))^s = 0$ im Widerspruch zu $\mathrm{int}_s = \mathrm{id} : U/V \to U/V$. □

Korollar 9.4.3.3. *Seien B eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe und $X \subset B_{\mathrm{s}}$ eine Teilmenge aus paarweise kommutatierenden halbeinfachen Elementen. So ist B^X zusammenhängend.*

Beweis. Natürlich gilt für jedes $s \in X$ die Identität $B^X = (B^s)^X$. Induktion über die Dimension unter Anwendung von 9.4.3.1 zeigt die Behauptung. □

Lemma 9.4.3.4. *Seien B eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe und $S \subset B$ eine kommutative Untergruppe mit $S \subset B_{\mathrm{s}}$. So gilt*

$$\mathrm{Z}_B(S) = \mathrm{N}_B(S)$$

Beweis. Seien $h \in \mathrm{N}_B(S)$ und $s \in S$ gegeben. Wir finden $hsh^{-1}s^{-1} \in (B, B) \subset B_{\mathrm{u}}$ aber auch $hsh^{-1}s^{-1} = (hsh^{-1})s^{-1} \in S \subset B_{\mathrm{s}}$. □

Zweiter Beweis. Die Operation durch Konjugation von B auf dem Torus B/B_{u} ist trivial wegen der Starrheit von Tori 9.1.7.22. Wegen $S \subset B_{\mathrm{s}}$ ist aber die Komposition $S \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B/B_{\mathrm{u}}$ injektiv. Das Lemma folgt. □

9.4.4 Vollständige Varietäten

Definition 9.4.4.1. Eine Varietät X heißt **vollständig**, wenn für alle weiteren Varietäten Z die Projektion $X \times Z \to Z$ abgeschlossen ist.

Beispiel 9.4.4.2. Die Varietät k ist nicht vollständig, denn in $k \times k$ ist die Hyperbel $\{xy = 1\}$ abgeschlossen, ihre Projektion auf die x-Achse ist jedoch nicht abgeschlossen.

9.4.4.3. Wir werden im folgenden sehen, daß die Vollständigkeit ein algebraisches Analogon zur Kompaktheit von Mannigfaltigkeiten ist. Vollständige Varietäten sind auch genau die Varietäten, deren Projektion auf einen Punkt eigentlich ist im Sinne von 7.6.12.16.

Lemma 9.4.4.4 (Eigenschaften vollständiger Varietäten). *1. Jede abgeschlossene Untervarietät einer vollständigen Varietät ist vollständig;*

2. *Das Produkt von zwei vollständigen Varietäten ist vollständig;*

3. *Gegeben ein surjektiver Morphismus von Varietäten $\pi : X \twoheadrightarrow Y$ mit X vollständig folgt Y vollständig;*

4. *Das Bild einer vollständigen Varietät unter einem Morphismus in eine separierte Varietät ist abgeschlossen und vollständig;*

5. *Jede reguläre Funktion auf einer zusammenhängenden vollständigen Varietät ist konstant;*

6. *Eine affine Varietät ist vollständig genau dann, wenn sie endlich ist.*

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind klar. Für 3 betrachte man $A \subset Y \times Z$ und folgert $A = \pi(\pi^{-1}(A))$ und damit $\mathrm{pr}_Z(A) = \mathrm{pr}_Z(\pi^{-1}(A)) \subset Z$. Für 4 betrachtet man zu einem Morphismus $\varphi : X \to Y$ den Graphen $\Gamma_\varphi \subset X \times Y$. Ist Y separiert, so ist er abgeschlossen nach 7.6.12.14 und man folgert $\varphi(X) = \mathrm{pr}_Y(\Gamma_\varphi) \subset Y$. Die Vollständigkeit von $\varphi(X)$ folgt aus 3. Aus 3 folgt 5, denn k ist nicht vollständig nach 9.4.4.2, folglich sind die endlichen Teilmengen die einzigen vollständigen abgeschlossenen Untervarietäten von k. Daraus hinwiederum folgt 6 unmittelbar. □

Proposition 9.4.4.5 (Projektive Varietäten sind vollständig). *Für jede Varietät Z ist die Projektion $\pi : \mathbb{P}^n \times Z \to Z$ abgeschlossen.*

Geometrischer Beweis. Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $A \subset \mathbb{P}V \times Z$ eine abgeschlossene Teilmenge. Es gilt zu zeigen $\mathrm{pr}_Z(A) \subset Z$. Ohne

Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir A irreduzibel und $\mathrm{pr}_Z(A)$ dicht annehmen und müssen dann $\mathrm{pr}_Z(A) = Z$ zeigen. Klar ist $\operatorname{kdim} A \geq \operatorname{kdim} Z$. Jetzt erklären wir Varietäten B und C durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, equal] & C := \overline{j(B)} \arrow[d, equal] \\
A \arrow[d, hook] & \pi^{-1}(A) \arrow[l, two heads, "\pi"'] \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, hook] & \overline{j(\pi^{-1}(A))} \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}V \times Z \arrow[dr] & (V\backslash 0) \times Z \arrow[l, two heads, "\pi"'] \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d] & V \times Z \arrow[dl] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

Es ist leicht zu sehen, etwa mit der lokalen Trivialität der Projektion auf den projektiven Raum 7.6.5.6, daß $B := \pi^{-1}(A)$ auch irreduzibel ist von einer Dimension $\operatorname{kdim} B > \operatorname{kdim} Z$. Dann ist $C := \overline{j(B)}$ auch irreduzibel mit $j^{-1}(C) = B$. Weiter gilt $C \supset \{0\} \times \mathrm{pr}_Z(A)$, also auch $C \supset \{0\} \times Z$. Für alle $z \in Z$ ist also $C \cap (V \times \{z\})$ nicht leer und wegen $\operatorname{kdim} C = \operatorname{kdim} B > \operatorname{kdim} Z$ muß nach unseren Erkenntnissen 7.5.9.12 zur Mindestdimension nichtleerer Fasern unser Schnitt mindestens die Dimension Eins haben und folglich auch Punkte (v, z) mit $v \in V\backslash 0$ enthalten. So folgt $z \in \mathrm{pr}_Z(A)$. $\square$

Algebraischer Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit Z affin. Wir setzen $S := \mathcal{O}(Z)[T_0, \ldots, T_n]$. Jede abgeschlossene Teilmenge $A \mathrel{\underset{\mathbb{A}}{\subset}} Z \times \mathbb{P}^n$ ist nach 7.9.2.13 von der Gestalt $A = \mathcal{Z}^*(I)$ für ein homogenes Ideal $I \subset S$, und für $z \in Z$ mit Verschwindungsideal $\mathcal{I}(z) \subset \mathcal{O}(Z)$ haben wir $\pi^{-1}(z) = \mathcal{Z}^*(\mathcal{I}(z)S)$. Es folgt

$$A \cap \pi^{-1}(z) = \mathcal{A}^*(\mathcal{I}(z)S + I)$$

Nach 7.9.2.13 haben wir also $A \cap \pi^{-1}(z) = \emptyset$ genau dann, wenn es ein d gibt derart, daß für die homogenen Komponenten vom Grad d gilt $(\mathcal{I}(z)S + I)_d = S_d$, also genau dann, wenn für ein d die offensichtliche Abbildung $I_d \to S_d/\mathcal{I}(z)S_d$ eine Surjektion ist. Nun sind aber $I_d \subset S_d$ endlich erzeugte $\mathcal{O}(Z)$-Moduln und nach dem Nakayama-Lemma 7.4.6.6 ist dann die Menge aller $z \in Z$, für die $I_d \to S_d/\mathcal{I}(z)S_d$ surjektiv ist, eine offene Teilmenge von Z. Das zeigt, daß das Komplement von $\pi(A)$ offen ist in Z. $\square$

9.4.4.6 (**Globale reguläre Funktionen auf projektiven Varietäten**). Auf einer zusammenhängenden projektiven Varietät gibt es insbesondere außer den Konstanten keine globalen regulären Funktionen.

Ergänzung 9.4.4.7. Jede vollständige separierte zusammenhängende algebraische Gruppe G ist kommutativ. In der Tat betrachte man den Morphismus

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & G \times G & \to & G \times G \\ & (g,h) & \mapsto & (g, hgh^{-1}) \end{array}$$

Sein Bild ist abgeschlossen nach 9.4.4.4 und umfaßt die Diagonale. Wäre sein Bild aber nicht die Diagonale, so folgte $\operatorname{kdim} \varphi(G \times G) > \operatorname{kdim} G$ und nach Proposition 7.7.4.20 über die Kodimension von Schnittmengen in glatten Varietäten stünde das im Widerspruch zu $\varphi(G \times G) \cap (1 \times G) = \{(1,1)\}$.

Lemma 9.4.4.8 (Morphismen von Kurven in vollständige Varietäten). *Ist Y eine vollständige Varietät und X eine Kurve und $p \in X$ ein regulärer Punkt und $\varphi : X \backslash p \to Y$ ein Morphismus, so gibt es eine Fortsetzung von φ zu einem Morphismus $\tilde{\varphi} : X \to Y$.*

9.4.4.9. Ist Y separiert, so ist diese Fortsetzung sogar eindeutig bestimmt. Wir werden unser Lemma im folgenden nicht benötigen. Ich halte es aber für ein wichtiges Stück Allgemeinbildung.

Beweis. Wir betrachten die Einbettung $i : X \backslash p \hookrightarrow X$ und den Morphismus

$$(\varphi, i) : (X \backslash p) \hookrightarrow Y \times X.$$

Der Abschluß des Bildes dieses Morphismus $A := \overline{\operatorname{im}(\varphi, i)}$ muß unter der Projektion $\operatorname{pr}_X : Y \times X \to X$ wegen der Vollständigkeit von Y auf eine abgeschlossene Teilmenge von X abgebildet werden, wir haben also $\operatorname{pr}_X(A) = X$. Insbesondere gibt es $a \in A$ mit $\operatorname{pr}_X(a) = p$. Nun dürfen wir nach 7.7.4.16 zusätzlich X irreduzibel annehmen. Dann ist natürlich $\psi := \operatorname{pr}_X : A \to X$ ein birationaler Morphismus, denn er induziert einen Isomorphismus $\psi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$ für alle $U \Subset X$ mit $p \notin U$. Andererseits induziert der Komorphismus Injektionen $\psi^\sharp : \mathcal{O}_{X,p} \hookrightarrow \mathcal{O}_{A,a}$ für alle $a \in \psi^{-1}(p)$. Wegen der Maximalität diskreter Bewertungsringe 7.8.1.19 induziert $\psi^\sharp$ dann sogar Isomorphismen $\psi^\sharp : \mathcal{O}_{X,p} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{A,a}$. Das aber zeigt, daß wir für jeden Punkt $a \in \psi^{-1}(p)$ eine Fortsetzung von $(\varphi, i) : X \backslash p \to A$ erhalten durch die Vorschrift $p \mapsto a$. □

Übungen

Übung 9.4.4.10. Eine nichtleere echte offene Teilmenge einer zusammenhängenden separierten Varietät kann nie vollständig sein. Eine Varietät, die durch endlich viele vollständige Untervarietäten überdeckt werden kann, ist vollständig.

Übung 9.4.4.11. Gegeben eine algebraische Gruppe G gibt es unter den vollständigen zusammenhängenden abgeschlossenen Untergruppen von G eine größte.

Ergänzende Übung 9.4.4.12. Gegeben eine zusammenhängende algebraische Gruppe G liegt jede vollständige Untergruppe $V \mathrel{\not\triangleleft} G$ im Zentrum von G. Hinweis: Man zeige $\{(g, vgv^{-1}) \mid g \in G, v \in V\} \mathrel{\not\triangleleft} G \times G$. Man mag zunächst zeigen wollen, daß gilt $\{(g, w, wgv^{-1}) \mid g \in G, v, w \in V\} \mathrel{\not\triangleleft} G \times V \times G$.

9.4.5 Parabolische Untergruppen

Lemma 9.4.5.1. *Ist $\varphi : X \to Y$ ein bijektiver äquivarianter Homomorphismus von homogenen Räumen, so ist X vollständig genau dann, wenn Y vollständig ist.*

Beweis. Nach 9.2.4.12 ist φ flach, also ist für jede weitere Varietät Z der Morphismus $(\varphi \times \mathrm{id}) : X \times Z \to Y \times Z$ auch flach, also offen, also ein Homöomorphismus. Die Definition der Vollständigkeit liefert den Rest. □

Definition 9.4.5.2. Eine Untergruppe $P \subset G$ einer affinen algebraischen Gruppe heißt **parabolisch**, wenn sie abgeschlossen und der homogene Raum G/P vollständig ist.

9.4.5.3. Da unsere Quotienten von affinen algebraischen Gruppen stets quasiprojektiv sind, ist der Quotient nach einer parabolischen Untergruppe sogar projektiv.

9.4.5.4 (**Ursprung der Terminologie**). Die nichttrivialen Elemente von $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ heißen je nach dem Betrag ihrer Spur

elliptisch	falls $\lvert \mathrm{tr} \rvert < 2$;
parabolisch	falls $\lvert \mathrm{tr} \rvert = 2$;
hyperbolisch	falls $\lvert \mathrm{tr} \rvert > 2$.

Diese Terminologie erklärt sich im ersten und letzten Fall aus der Gestalt der Kegelschnitte, die von unserem Element in sich selber überführt werden. Genauer ist die Menge der Eigenwerte unserer Matrix stabil unter der komplexen Konjugation. Sie sind also entweder beide reell von der Gestalt λ, λ^{-1} oder komplex konjugiert von der Gestalt $\lambda, \bar{\lambda}$ mit $\lambda\bar{\lambda} = 1$. Man rechnet leicht nach, daß der hyperbolische Fall der erste Fall ist mit der Zusatzannahme $\lambda \neq \pm 1$, der elliptische Fall der zweite Fall bei $\lambda \neq \pm 1$ mit derselben Zusatzannahme und der parabolische Fall der Grenzfall $\lambda = \bar{\lambda} = \lambda^{-1} = \pm 1$. Im hyperbolischen Fall bildet unser Element geeignete Hyperbeln in $\mathbb{R}^2$ auf sich selber ab und im elliptischen Fall geeignete Ellipsen. Der parabolische Fall erhält dann seinen Namen, weil die Parabeln unter allen Kegelschnitten in gewisser Weise „zwischen“ den Ellipsen und den Hyperbeln liegen. Die archetypische parabolische Untergruppe ist nun, wie wir noch sehen werden, die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{SL}(2; k)$, und der Normalisator vom Abschluß des Erzeugnisses von einem Element mit zwei gleichen Eigenwerten ist stets parabolisch. Das ist die einzige Idee, die ich zur Herkunft der Terminologie habe. Ich kann sie leider nicht belegen.

Lemma 9.4.5.5 (Transitivität der Parabolizität). *Seien $Q \mathrel{\mathbb{A}} P \mathrel{\mathbb{A}} G$ affine algebraische Gruppen. Genau dann ist Q parabolisch in G, wenn Q parabolisch ist in P und P parabolisch in G.*

Beweis. Für eine abgeschlossene Untergruppe $K \mathrel{\mathbb{A}} H$ einer affinen algebraischen Gruppe sind gleichbedeutend:

1. Die Untergruppe K ist parabolisch in H;
2. Für jede Varietät X ist die Projektion $H/K \times X \to X$ abgeschlossen;
3. Für jede Varietät X und jede abgeschlossene Teilmenge $A \mathrel{\mathbb{A}} H \times X$ mit $(h, x) \in A \Rightarrow (hk, x) \in A \; \forall k \in K$ ist $\mathrm{pr}_X(A)$ abgeschlossen in X.

In der Tat ist $1 \Leftrightarrow 2$ die Definition der Vollständigkeit und $2 \Leftrightarrow 3$ folgt, da nach 9.2.4.12 die Projektion $H \twoheadrightarrow H/K$ flach und damit produktfest offen ist. Nach dieser Vorüberlegung beginnen wir mit dem eigentlichen Beweis. Sei X eine Varietät und $A \mathrel{\mathbb{A}} G \times X$ abgeschlossen Q-stabil. Wir betrachten

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & P \times G \times X & \to & G \times X \\ & (p, g, x) & \mapsto & (gp, x) \end{array}$$

Sicher ist $\alpha^{-1}(A)$ dann Q-stabil für die Rechtsoperation auf der ersten Variablen, und da $Q \mathrel{\mathbb{A}} P$ parabolisch ist, muß $B := \mathrm{pr}_{G \times X}(\alpha^{-1}(A))$ abgeschlossen sein in $G \times X$. Diese Menge läßt sich beschreiben als

$$B = \{(g, x) \mid (gP \times \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}$$

und ist insbesondere P-stabil. Da auch $P \mathrel{\mathbb{A}} G$ parabolisch ist, ist auch ihre Projektion $\mathrm{pr}_X(B)$ abgeschlossen und man sieht leicht $\mathrm{pr}_X(B) = \mathrm{pr}_X(A)$. Damit ist im Lemma eine der Implikationen gezeigt. Die andere folgt leicht aus $G/Q \twoheadrightarrow G/P$ sowie $P/Q \mathrel{\mathbb{A}} G/Q$. □

Proposition 9.4.5.6 (Gruppen ohne echte parabolische Untergruppen). *Eine affine algebraische Gruppe ist auflösbar und zusammenhängend genau dann, wenn sie keine echte, also von der ganzen Gruppe verschiedene parabolische Untergruppe besitzt.*

Beweis. Sei G unsere Gruppe. Wir nehmen zunächst an, es gebe in G keine echte Parabolische. Dann ist G schon mal zusammenhängend, denn die Einskomponente ist stets parabolisch. Gegeben eine Darstellung $G \to \mathrm{GL}(V)$ von G ist die induzierte G-Wirkung auf $\mathbb{P}V$ algebraisch nach 7.9.2.14. Jede abgeschlossene Bahn hat nach 9.4.5.1 Parabolische als Standgruppen. Gibt es keine echten Parabolischen, so müssen also alle abgeschlossenen Bahnen Fixpunkte sein. Da es aber

nach 9.2.3.8 unter der Annahme $V \neq 0$ stets abgeschlossene Bahnen gibt, muß es in jeder algebraischen Darstellung $V \neq 0$ von G eine eindimensionale Unterdarstellung geben. Dann folgern wir leicht, daß G isomorph ist zu einer Gruppe von oberen Dreiecksmatrizen und mithin auflösbar. Sei nun umgekehrt G zusammenhängend und auflösbar. Wir führen die Annahme, G habe eine echte Parabolische, zum Widerspruch. In der Tat fänden wir sonst auch ein Gegenbeispiel mit G von kleinstmöglicher Dimension und darin eine echte Parabolische $P \subsetneq G$ maximal möglicher Dimension. Nun gilt entweder $P \supset (G,G)$ oder $P \not\supset (G,G)$. Im ersten Fall wäre P normal, also G/P affin nach 9.3.6.9 und damit G/P endlich und wegen G zusammenhängend ein Punkt, im Widerspruch zur Annahme $P \subsetneq G$. Im Fall $P \not\supset (G,G)$ wäre $P(G,G) = \langle P(G,G) \rangle$ eine abgeschlossene Untergruppe größerer Dimension als P, also $P(G,G) = G$ und wir erhielten einen bijektiven Morphismus

$$(G,G)/(G,G) \cap P \to G/P$$

Dann aber muß nach 9.4.5.1 auch $P \cap (G,G) \not\triangleleft (G,G)$ bereits eine echte Parabolische sein, und unsere verkappte Induktion über die Dimension von G zeigt $P \supset (G,G)$ im Widerspruch zu unserer Annahme. □

Satz 9.4.5.7 (Borel'scher Fixpunktsatz). *Wirkt eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe auf einer nichtleeren vollständigen Varietät, so hat sie dort stets einen Fixpunkt.*

Beweis. Nach 9.4.5.1 hat jede abgeschlossene Bahn Parabolische als Standgruppen, und nach 9.4.5.6 kann sie dann nur aus einem einzigen Punkt bestehen. Abgeschlossene Bahnen aber gibt es in jeder nichtleeren Varietät mit einer algebraischen Wirkung einer algebraischen Gruppe nach 9.2.3.8. □

Alternativer Beweis. Sei G unsere Gruppe und X unsere Varietät. Sei zunächst G abelsch. Nach 9.2.3.8 finden wir $x \in X$ mit $Gx \not\triangleleft X$, also Gx vollständig. Die Abbildung $G/G_x \to Gx$ ist bijektiv und G/G_x ist affin nach 9.3.6.9, also besteht unsere Bahn nur aus einem Punkt. Ist nun G beliebig, so gilt für $H = (G,G)$ bereits $\operatorname{kdim} H < \operatorname{kdim} G$. Mit Induktion über die Dimension der Gruppe ist dann $X^H \not\triangleleft X$ nicht leer und G/H wirkt darauf und Induktion beendet den Beweis. □

Lemma 9.4.5.8. *Jede auflösbare zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe einer affinen algebraischen Gruppe kann in jede parabolische Untergruppe hineinkonjugiert werden.*

Beweis. Sei G unsere affine algebraische Gruppe, $P \subset G$ eine Parabolische und $B \subset G$ zusammenhängend auflösbar. Nach dem Fixpunktsatz 9.4.5.7 besitzt B einen Fixpunkt $x \in G/P$. Die Standgruppe G_x ist dann konjugiert zu P, in Formeln $G_x = gPg^{-1}$ mit $g \in G$, und sie umfaßt B, also $B \subset gPg^{-1}$ alias $g^{-1}Bg \subset P$. □

Übungen

Übung 9.4.5.9. Seien G eine affine algebraische Gruppe, X eine G-Varietät, $P \mathrel{\rotatebox{-90}{$\leq$}} G$ eine Parabolische und $Y \mathrel{\rotatebox{-90}{$\leq$}} X$ eine abgeschlossene P-stabile Teilmenge von X. So ist auch GY abgeschlossen in X. Hinweis: Man beachte den Isomorphismus $G \times X \xrightarrow{\sim} G \times X$ mit $(g, x) \mapsto (g, gx)$ und den nach 9.2.4.12 offenen Morphismus $G \times X \twoheadrightarrow G/P \times X$.

9.4.6 Borel'sche Untergruppen

Satz 9.4.6.1 (Borel'sche Untergruppen). *Sei G eine affine algebraische Gruppe. Für eine abgeschlossene Untergruppe $B \mathrel{\rotatebox{-90}{$\leq$}} G$ sind dann gleichbedeutend:*

1. *B ist maximal unter allen abgeschlossenen zusammenhängenden auflösbaren Untergruppen von G;*

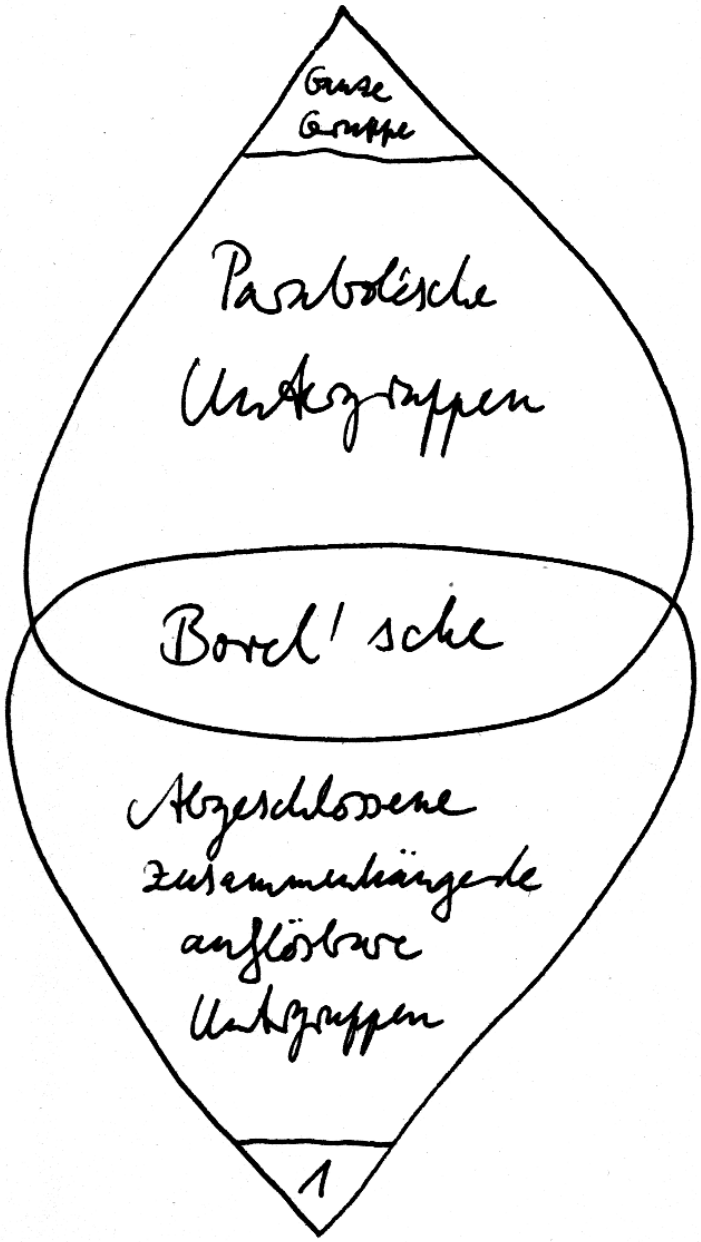
2. *B ist minimal unter allen parabolischen Untergruppen von G;*

3. *B ist parabolisch, auflösbar und zusammenhängend.*

Darüber hinaus gibt es stets mindestens eine Untergruppe mit diesen Eigenschaften und je zwei von ihnen sind zueinander konjugiert.

9.4.6.2. Die durch die äquivalenten Eigenschaften im vorhergehenden Satz charakterisierten Untergruppen von G heißen die **Borel'schen Untergruppen** oder kurz die **Borel'schen** von G.

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir, daß es stets eine zusammenhängende auflösbare Parabolische gibt, also eine Untergruppe B mit den in Teil 3 angeführten Eigenschaften. Wir argumentieren dabei durch Induktion über die Dimension. Ist G° auflösbar, so tut es bereits $B = G^\circ$ selbst. Sonst existiert nach 9.4.5.6 eine echte Parabolische $P \subsetneq G^\circ$ und nach Induktionsannahme besitzt sie eine parabolische zusammenhängende auflösbare Untergruppe $B \subset P$. Nach der Transitivität der Parabolizität 9.4.5.5 ist dann B auch parabolisch in G. Jede abgeschlossene zusammenhängende auflösbare Untergruppe kann nun nach 9.4.5.8 in dieses B hineinkonjugiert werden, jede maximale muß also zu B konjugiert sein. Ebenso kann jede parabolische Untergruppe nach 9.4.5.8 über B darüberkonjugiert werden, jede minimale muß also zu B konjugiert sein. Da es aber aus Dimensionsgründen solche maximalen abgeschlossenen auflösbaren zusammenhängenden Untergruppen gibt und aufgrund der Noether-Eigenschaft von G auch solche minimalen Parabolischen, ist damit der Satz bewiesen. $\square$



Versuch einer graphischen Darstellung der zentralen Bedeutung der Borel'schen im Gefüge aller abgeschlossenen Untergruppen einer affinen algebraischen Gruppe. Nicht dargestellt ist die Tatsache, daß es nur eine Konjugationsklasse von Borel'schen und, wie wir später noch zeigen werden, nur endlich viele Konjugationsklassen von parabolischen Untergruppen gibt.

Beispiel 9.4.6.3. $(k = \bar{k})$. In der $\mathrm{GL}(n;k)$ bilden die oberen Dreiecksmatrizen eine Borel'sche Untergruppe $B \subset \mathrm{GL}(n;k)$. In der Tat ist diese Untergruppe auflösbar und zusammenhängend. Wäre $H \supset B$ eine weitere Gruppe mit diesen Eigenschaften, so müßte sie nach dem Satz von Lie-Kolchin 9.4.1.6 auch eine Fahne von Untervektorräumen von k^n stabilisieren, also eine Folge $k^n = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_0 = 0$ von Untervektorräumen mit $\dim V_i = i$. Nun ist aber B genau der Stabilisator der Fahne

$$k^n = \langle \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n \rangle \supset \langle \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_{n-1} \rangle \supset \ldots \supset \langle \mathrm{e}_1 \rangle \supset 0$$

und stabilisiert keine weitere Fahne. Es folgt $H \subset B$, also $H = B$.

Ergänzung 9.4.6.4. Unter einer **vollständigen Fahne** von Untervektorräumen eines endlichdimensionalen Vektorraums V versteht man eine Folge von Untervektorräumen

$$V = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_1 \supset V_0 = 0$$

mit $\dim V_i = i$. Die Menge aller derartigen Fahnen notieren wir $\mathcal{F}(V)$. Auf dieser Menge operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ in offensichtlicher Weise, und diese Operation ist auch sicher transitiv. Arbeiten wir über einen algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$, so ist die Isotropiegruppe jeder Fahne $x \in \mathcal{F}(V)$ nach dem Vorhergehenden eine Borel'sche $B_x \not\trianglelefteq \mathrm{GL}(V)$, und wir erhalten so eine Bijektion

$$\mathrm{GL}(V)/B_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(V)$$

Nach Übung 9.3.6.16 gibt es genau eine Struktur als algebraische Varietät auf $\mathcal{F}(V)$ derart, daß alle diese Bijektionen Isomorphismen werden. Mit dieser Struktur ist $\mathcal{F}(V)$ dann eine vollständige separierte k-Varietät und heißt die **Fahnenvarietät von** V. Sie heißt auch **Flaggenvarietät** oder **Fahnenmannigfaltigkeit**.

Korollar 9.4.6.5 (Bilder von Borel'schen unter Surjektionen). *Unter einem surjektiven Homomorphismus affiner algebraischer Gruppen ist das Bild jeder Parabolischen eine Parabolische und das Bild jeder Borel'schen eine Borel'sche.*

Beweis. Das Bild jeder parabolischen Untergruppe ist sicher parabolisch, das Bild jeder auflösbaren Untergruppe auflösbar, das Bild jeder zusammenhängenden Untergruppe zusammenhängend. Die Behauptung folgt. □

Korollar 9.4.6.6 (Zentren Borel'scher Untergruppen). *Ist $B \subset G$ eine Borel'sche Untergruppe einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe, so gilt $\mathrm{Z}(G)^\circ \subset \mathrm{Z}(B) \subset \mathrm{Z}(G)$.*

Vorschau 9.4.6.7. In 9.4.6.18 zeigen wir stärker $\mathrm{Z}(B) = \mathrm{Z}(G)$.

Beweis. $\mathrm{Z}(G)^\circ$ ist zusammenhängend und auflösbar, liegt also in einer Borel. Da je zwei Borel'sche konjugiert sind, liegt es damit in jeder Borel und wir folgern $\mathrm{Z}(G)^\circ \subset \mathrm{Z}(B)$. Gegeben $z \in \mathrm{Z}(B)$ faktorisiert die Abbildung $G \to G$, $x \mapsto zxz^{-1}x^{-1}$ über einem Morphismus $G/B \to G$. Der aber muß konstant sein als Morphismus einer vollständigen zusammenhängenden Varietät in eine affine Varietät und wir erhalten $\mathrm{Z}(B) \subset \mathrm{Z}(G)$. □

Korollar 9.4.6.8 (Nilpotente Borel'sche). *Hat eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe eine nilpotente Borel'sche, so fällt sie bereits mit dieser Borel'schen zusammen.*

Beweis. Sei G unsere Gruppe und $B \subset G$ unsere Borel'sche. Wir argumentieren mit Induktion über den Nilpotenzgrad von B. Ist er Null, besteht also B nur aus dem neutralen Element, so ist G vollständig und besteht folglich auch nur aus einem Element. Sonst ist das Zentrum $Z := \mathrm{Z}(B)$ nicht trivial und liegt nach 9.4.6.6 im Zentrum von G. Induktion zeigt dann $B/Z = G/Z$ und es folgt $B = G$. □

Satz 9.4.6.9 (Maximale Tori sind konjugiert). *In einer affinen algebraischen Gruppe sind je zwei maximale Tori konjugiert.*

Beweis. Jeder unserer Tori liegt in einer Borel. Je zwei Borel's sind konjugiert nach 9.4.6.1, und je zwei maximale Tori in einer Borel sind konjugiert, da wir unseren Satz für auflösbare Gruppen ja bereits aus 9.4.2.2 kennen. □

Satz 9.4.6.10 (Bilder maximaler Tori unter Surjektionen). *Das Bild eines maximalen Torus unter einem surjektiven Homomorphismus von affinen algebraischen Gruppen ist wieder ein maximaler Torus.*

Beweis. Sei $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ unser surjektiver Homomorphismus. Gegeben $T \subset G$ ein maximaler Torus finden wir eine Borel $B \subset G$ mit $T \subset B \subset G$. Nach 9.4.6.5 ist $\varphi(B) \subset H$ eine Borel und nach 9.4.2.2 haben wir $B = TB_{\mathrm{u}}$. Es folgt $\varphi(B) = \varphi(T)\varphi(B_{\mathrm{u}})$ und wir sehen, daß $\varphi(T)$ ein maximaler Torus von $\varphi(B)$ sein muß. Dann aber ist $\varphi(T)$ nach Übung 9.4.6.26 auch ein maximaler Torus in H. □

Definition 9.4.6.11. Eine Untergruppe C einer affinen algebraischen Gruppe G heißt eine **Cartan'sche**, wenn es in G einen maximalen Torus T gibt mit

$$C = (G^T)^\circ$$

Vorschau 9.4.6.12. Wir werden in 9.4.6.21 sehen, daß der Zentralisator eines maximalen Torus in einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe stets zusammenhängend ist. In zuammenhängenden Gruppen sind die Cartan'schen damit schlicht die Zentralisatoren der maximalen Tori.

Proposition 9.4.6.13. *Jede Cartan'sche einer affinen algebraischen Gruppe ist nilpotent.*

Beweis. Seien $G \supset T$ eine affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Es gilt zu zeigen, daß $C := (G^T)^\circ$ nilpotent ist. Sicher ist $T \subset C$ ein maximaler Torus und sicher gilt $T \subset \mathrm{Z}(C)$. Sicher liegt weiter T in einer Borel'schen D von C und ist auch ein maximaler Torus von D. Wegen $T \subset \mathrm{Z}(C)$ ist dann die Multiplikation nicht nur ein Isomorphismus $T \times D_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} D$ von Varietäten, sondern auch von Gruppen. Mithin ist D nilpotent. Nach 9.4.6.8 zeigt das hinwiederum $D = C$ und C nilpotent. □

Lemma 9.4.6.14. *Gegeben G eine affine algebraische Gruppe und $S \subset G$ ein Torus gibt es $s \in S$ mit $G^s = G^S$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $G = \mathrm{GL}(V)$ annehmen. Sei $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ die simultane Eigenraumzerlegung von V unter S. Wir finden $s \in S$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten auf allen V_i. Dann gilt $G^s = G^S = \mathrm{GL}(V_1) \times \ldots \times \mathrm{GL}(V_r)$ mit der Notation rechts für die Gruppe der alle Teilräume unsere V_i stabilisierenden Automorphismen von V. □

Lemma 9.4.6.15. *In jeder affinen algebraischen Gruppe umfaßt die Vereinigung der Cartan'schen eine offene nichtleere Teilmenge.*

Beweis. Sei G unsere Gruppe, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusammenhängend annehmen dürfen, und $T \subset G$ ein maximaler Torus und $C := (G^T)^\circ$ eine Cartan'sche. Es gilt zu zeigen, daß die Vereinigung

$$\bigcup_{g \in G} gCg^{-1}$$

eine offene Teilmenge umfaßt. Dazu betrachte man den Morphismus $G \times C \to G, (g, c) \mapsto gcg^{-1}$. Nach Lemma 9.4.6.14 finden wir $t \in T$ mit $C = (G^t)^\circ$. Die Faser unseres Morphismus über t ist $\{(g, c) \in G \times C \mid gcg^{-1} = t\}$. Da aber C nilpotent ist, haben wir $C_{\mathrm{s}} = T$ und mithin impliziert oben $gcg^{-1} = t$ bereits $c \in T$. Des weiteren folgt für unser g dann $gTg^{-1} \subset g(G^c)^\circ g^{-1} = (G^t)^\circ = C$ und wegen $T = C_{\mathrm{s}}$ damit $g \in \mathrm{N}_G(T)$. Nach der Starrheit von Tori 9.1.7.22 haben wir aber $\mathrm{N}_G(T)^\circ = \mathrm{Z}_G(T)^\circ = C$ und der Quotient $\mathrm{N}_G(T)/\mathrm{Z}_G(T)$ ist folglich endlich und es gibt insbesondere nur endlich viele $c \in C$, die konjugiert sind zu t. Zusammen folgt, daß die Faser unserer Abbildung bei t höchstens dieselbe Dimension wie $\mathrm{N}_G(T)$ und damit auch höchstens dieselbe Dimension wie C hat. Nach Lemma 7.5.9.12 über die Mindestdimension nichtleerer Fasern, für dessen Anwendung wir G irreduzibel brauchen, ist unser Morphismus also dominant und nach 9.2.2.2 umfaßt sein Bild damit eine offene nichtleere Teilmenge von G. □

Satz 9.4.6.16 (**Überdeckung durch Borel'sche**). *Jede zusammenhängende affine algebraische Gruppe wird von ihren Borel'schen überdeckt. Genauer gilt für jede derartige Gruppe G sogar*

$$G = \bigcup_{B \subset G \text{ Borel}} B \quad \textit{und} \quad G_{\mathrm{u}} = \bigcup_{B \subset G \text{ Borel}} B_{\mathrm{u}} \quad \textit{und} \quad G_{\mathrm{s}} = \bigcup_{T \subset G \text{ Torus}} T$$

Beweis. Sobald wir wissen, daß G von seinen Borel'schen überdeckt wird, folgt die Aussage über unipotente Elemente unmittelbar, und die Aussage über halbeinfache Elemente folgt, da sie nach 9.4.2.2 für zusammenhängende auflösbare Gruppen gilt. Da nun die Vereinigung der Borel'schen die Vereinigung der Cartan'schen umfaßt, jede Cartan'sche ist nach 9.4.6.13 ja nilpotent, reicht es mit 9.4.6.15 zu zeigen, daß die Vereinigung der Borel'schen abgeschlossen ist. Das folgt jedoch sofort, wenn wir das im Anschluß bewiesene Lemma 9.4.6.17 anwenden mit $Y = B$, $X = G$, $P = B$, $G = G$ und der Operation durch Konjugation. □

Lemma 9.4.6.17. *Seien G eine affine algebraische Gruppe, $P \subset G$ eine Parabolische, X eine G-Varietät und $Y \mathrel{\not\subset\!\!\!\!\!\!\;\;\!\!\!\!\!\!\;\;\!\!\!\!\!\!\;\;

Beweis. Seien G unsere Gruppe und $S \mathrel{\not\subset\!\!\!\!\mathrel{\mathbb{A}}} G$ unser Torus. Gegeben $z \in G^S$ finden wir eine Borel'sche $B \subset G$ mit $z \in B$. Also ist

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}_z := \{g \in G \mid z \in gBg^{-1}\}$$

eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge von G und stabil unter der Rechtsmultiplikation mit $b \in B$, ist also das Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge $X \mathrel{\not\subset\!\!\!\!\mathrel{\mathbb{A}}} G/B$. Da S auflösbar ist, hat es nach dem Borel'schen Fixpunktsatz 9.4.5.7 einen Fixpunkt $x \in X$. Nun betrachten wir die Menge $\mathcal{B}$ aller Borel'schen von G und die Surjektion

$$\begin{array}{ccc} G/B & \twoheadrightarrow & \mathcal{B} \\ gB & \mapsto & gBg^{-1} \end{array}$$

Sie ist G-äquivariant für die Operation von G auf $\mathcal{B}$ durch Konjugation. Unser S-Fixpunkt $x \in X$ wird also abgebildet auf eine Borel'sche $A \subset G$ mit $sAs^{-1} = A$ für alle $s \in S$ und $z \in A$. Dann ist auch $SA = AS$ eine Untergruppe und nach dem Satz über irreduzibles Erzeugen sogar eine abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe von G und wegen $(sa, tb) = satba^{-1}s^{-1}b^{-1}t^{-1} \in A$ für alle $s, t \in S$ und $a, b \in A$ ist auch SA auflösbar, mithin $SA = A$. Das aber zeigt

$$G^S = \bigcup_{A \text{ Borel von } G \text{ mit } A \supset S} A^S$$

Daß aber Zentralisatoren von Tori in zusammenhängenden auflösbaren Gruppen zusammenhängend sind, wissen wir bereits aus 9.4.3.3. Folglich muß auch G^S zusammenhängend sein. □

Satz 9.4.6.21 (Borel'sche in Zentralisatoren von Tori). *Seien G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe und $S \subset G$ ein Torus. So ist für jede Borel'sche B von G mit $S \subset B \subset G$ auch $B^S \subset G^S$ eine Borel'sche von G^S und das Herunterschneiden liefert eine Surjektion*

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{Borel'sche von } G \textit{ über } S\} & \twoheadrightarrow & \{\textit{Borel'sche von } G^S\} \\ B & \mapsto & B^S \end{array}$$

Beweis. Sei B eine Borel'sche von G mit $S \subset B \subset G$. Nach 9.4.3.3 ist B^S zusammenhängend, auflösbar ist es eh. Können wir zeigen, daß G^S/B^S vollständig ist, so muß B^S eine Borel'sche von G^S sein. Es reicht nach 9.4.5.1 auch bereits, zu zeigen, daß $G^S/B^S \hookrightarrow G/B$ abgeschlossenes Bild hat, oder auch, daß $Y := G^S B$ abgeschlossen ist in G. Nach 9.4.6.19 ist Y irreduzibel. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} Y \times S & \to & B/B_{\mathrm{u}} \\ (y, s) & \mapsto & y^{-1}syB_{\mathrm{u}} \end{array}$$

Dieselbe Vorschrift liefert sicher auch eine Abbildung $G \times S \to G/B_{\mathrm{u}}$ und induziert eine Abbildung $\bar{Y} \times S \to B/B_{\mathrm{u}}$ für $\bar{Y} \not\trianglelefteq G$ der Abschluß von Y in G. Nun ist auch B/B_{u} ein Torus. Aufgrund der Starrheit von Tori 9.1.7.22 muß unsere Abbildung also bei festem $s \in S$ konstant sein als Funktion von $\bar{y} \in \bar{Y}$, also $\bar{y}^{-1}s\bar{y}B_{\mathrm{u}} = sB_{\mathrm{u}}$ für alle $\bar{y} \in \bar{Y}, s \in S$. Andererseits ist SB_{u} eine abgeschlossene Untergruppe von B, da $B_{\mathrm{u}} \subset B$ ein Normalteiler ist, und $\bar{y}^{-1}S\bar{y} \subset SB_{\mathrm{u}}$ ist für alle $\bar{y} \in \bar{Y}$ ein maximaler Torus von SB_{u}. Also gibt es $z \in B_{\mathrm{u}}$ mit $z^{-1}Sz = \bar{y}^{-1}S\bar{y}$. Nun induziert die Konjugation mit $z \in B$ stets die Identität auf $B/(B,B)$ und a forteriori induziert die Konjugation mit $z \in B_{\mathrm{u}}$ die Identität auf $SB_{\mathrm{u}}/B_{\mathrm{u}}$. Wir landen so bei einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{int}(z\bar{y}^{-1})"'] & B/B_{\mathrm{u}} \arrow[d, "\mathrm{int}(z)=\mathrm{id}"] \\ S \arrow[r, hook] & B/B_{\mathrm{u}} \end{tikzcd}$$

Es folgt $z\bar{y}^{-1} \in G^S$ und $\bar{y} \in G^S B$ für alle $\bar{y} \in \bar{Y}$. Mithin haben wir $Y = \bar{Y}$ und B^S ist in der Tat eine Borel'sche in G^S. Da je zwei Borel'sche von G^S konjugiert sind, muß unsere Abbildung dann auch surjektiv sein. □

Korollar 9.4.6.22. *Umfaßt eine Borel'sche einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe einen vorgegebenen maximalen Torus, so umfaßt sie auch dessen Zentralisator.*

Beweis. Ist also in Formeln $G \supset B \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einer Borel'schen und einem maximalen Torus, so gilt $B \supset G^T$. In der Tat gilt nach 9.4.6.19 schon mal $G^T = (G^T)^\circ$, also ist G^T eine Cartan'sche, also nach 9.4.6.13 nilpotent, also folgt $B \cap G^T = G^T$ aus unserem Satz 9.4.6.21, nach dem $B \cap G^T = B^T$ eine Borel'sche von G^T sein muß. □

Satz 9.4.6.23 (Darstellungen von Gruppen und Liealgebren). *Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null und G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe über k. So gilt:*

1. *Gegeben eine algebraische Darstellung von G ist jeder unter der Liealgebra stabile Teilraum auch unter der Gruppe stabil;*

2. *Gegeben eine algebraische Darstellung von G stimmen die Invarianten der Liealgebra mit den Invarianten der Gruppe überein;*

3. *Das Ableiten von Darstellungen der Gruppe zu Darstellungen ihrer Liealgebra ist ein volltreuer Funktor.*

Beweis. Wir beginnen mit dem ersten Teil. Da unsere Gruppe nach 9.4.6.16 von ihren Borel'schen überdeckt wird, reicht es, den Fall auflösbarer Gruppen zu betrachten. Da zusammenhängende auflösbare Gruppen nach 9.4.2.2 von ihrem unipotenten Radikal und einem maximalen Torus erzeugt werden, reicht es, die Fälle der unipotenten Gruppen und der Tori zu betrachten. Letzterer Fall ist evident, ersterer Fall folgt aus 9.3.10.6. Den zweiten Teil zeigt man genauso. Der dritte Teil folgt für die Unterkategorie der endlichdimensionalen Darstellungen unserer Gruppe mit der Identifikation von $\mathrm{Hom}_k^G(V,W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V,W)_k^G$ der Homomorphismen von Darstellungen als Invarianten in der Homomorphismendarstellung. Der allgemeine Fall ergibt sich unmittelbar. □

Lemma 9.4.6.24. *Unter einer algebraischen Operation einer affinen algebraischen Gruppe auf einer affinen Varietät sind die Bahnen von Fixpunkten maximaler Tori stets abgeschlossen.*

Beweis. Seien $G \circlearrowright X$ unsere Operation, $T \subset B \subset G$ ein maximaler Torus und eine Borel und $x \in X$ ein Fixpunkt von T. Nach 9.4.2.2 gilt $B = B_{\mathrm{u}}T$, also ist $Y := Bx = B_{\mathrm{u}}x$ abgeschlossen nach 9.2.3.9 als Bahn einer unipotenten Gruppe auf einer affinen Varietät. Dann ist jedoch $Gx = GY$ abgeschlossen in X nach 9.4.5.9. □

Übungen

Übung 9.4.6.25. Man zeige: Jede zusammenhängende affine algebraische Gruppe der Dimension Zwei oder kleiner ist auflösbar. Hinweis: Man gehe die Möglichkeiten für die Dimensionen maximaler Tori der Reihe nach durch.

Übung 9.4.6.26. Gegeben eine affine algebraische Gruppe ist jeder maximale Torus einer Borel'schen bereits ein maximaler Torus der ganzen Gruppe.

Übung 9.4.6.27. Man zeige, daß ein halbeinfaches Element aus dem Zentrum einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe in jedem maximalen Torus liegt. Hinweis: 9.4.6.16.

Ergänzende Übung 9.4.6.28. $(\mathrm{char}\, k = 0)$. Gegeben eine affine algebraische Guppe G und eine auflösbare Unteralgebra $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ ihrer Liealgebra existiert stets eine Borel'sche $B \subset G$ mit $\mathfrak{k} \subset \mathrm{Lie}\, B$. Hinweis: Man finde eine treue Darstellung und wende den Satz von Lie oder besser sein Korollar 24.1.5.6 an.

9.4.7 Fahnenmannigfaltigkeit und Weylgruppe

Satz 9.4.7.1 (Normalisatoren von Borel'schen). *In einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe ist jede Borel'sche ihr eigener Normalisator.*

Beweis. Seien G unsere Gruppe und $B \subset G$ eine Borel'sche. Wir behaupten

$$\mathrm{N}_G(B) = B$$

Wir führen den Beweis mit Induktion über $\operatorname{kdim} G$ durch Widerspruch. Sei sonst $x \in \mathrm{N}_G(B) \backslash B$. Sei $T \subset B$ ein maximaler Torus. Indem wir x andernfalls abändern zu xb mit geeignetem $b \in B$, dürfen wir $xTx^{-1} = T$ annehmen, da ja in B nach 9.4.2.2 je zwei maximale Tori konjugiert sind. Jetzt betrachten wir den Kommutator

$$\begin{array}{rccc} \psi : & T & \to & T \\ & t & \mapsto & xtx^{-1}t^{-1} \end{array}$$

und unterscheiden zwei Fälle.

$\psi(T) \subsetneq T$: Aus $B \supset T$ folgt mit 9.4.6.22 sofort $B \supset G^T$. Unsere Annahmen $x \notin B$ impliziert so a forteriori $x \notin G^T$. Wir haben also $S := (\ker \psi)^\circ \subsetneq T$. Weiter liegt x nach Konstruktion in G^S und normalisiert B^S. Nach 9.4.6.21 ist G^S zusammenhängend und B^S darin eine Borel'sche. Gilt hier $G^S \neq G$, so folgt also $x \in B$ per Induktion. Gilt dahingegen $G^S = G$, so können wir die Induktionsannahme auf G/S anwenden. In diesem Quotienten ist B/S eine Borel'sche nach 9.4.6.5 und wir folgern $\bar{x} \in B/S$, also wieder $x \in B$.

$\psi(T) = T$: In diesem Fall benötigen wir die Induktionsannahme nicht. Wir wählen eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ und einen Vektor $v \in V \backslash 0$ mit $\mathrm{N}_G(B) = \mathrm{Stab}_G\langle v \rangle$. Dann gilt sogar $\rho(T)v = v$, da $T = \psi(T)$ aus Kommutatoren von Gruppenelementen besteht, die $\langle v \rangle$ stabilisieren, sowie $\rho(B_\mathrm{u})v = v$, da B_u unipotent ist. Also erhalten wir einen Morphismus $G/B \to V$, $g \mapsto \rho(g)v$, und der muß konstant sein nach 9.4.4.4 als Morphismus einer zusammenhängenden vollständigen Varietät in eine affine Varietät. Es gilt also $G = \mathrm{Stab}_G\langle v \rangle = \mathrm{N}_G(B)$ und B ist selbst ein Normalteiler. Dann aber ist G/B vollständig, affin und zusammenhängend, mithin ein Punkt, und es folgt wieder $x \in B$. □

9.4.7.2. Gegeben eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe G betrachten wir die Menge

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(G) = \mathcal{B}_G := \{A \subset G \mid A \text{ ist Borel'sche}\}$$

aller Borel'schen von G. Die Gruppe G operiert darauf transitiv durch Konjugation und nach 9.4.7.1 erhalten wir für jede Borel'sche $B \subset G$ eine G-äquivariante Bijektion

$$\begin{array}{ccc} G/B & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{B}_G \\ gB & \mapsto & gBg^{-1} \end{array}$$

Nach 9.3.6.16 gibt es nun genau eine Struktur als Varietät auf $\mathcal{B}$, bezüglich derer alle diese Abbildungen Isomorphismen von Varietäten werden. Diese Varietät $\mathcal{B}$ heißt die **Varietät der Borel'schen von** G oder, in Erweiterung der in

15.2.3.10 eingeführten Terminologie, die **Fahnenmannigfaltigkeit von** G. Für die G-Operation auf der Fahnenmannigfaltigkeit $\mathcal{B}$ verwenden wir zwei Notationen: Betrachten wir eine Borel'sche eher als Punkt, so notieren wir sie mit einem kleinen Buchstaben wie etwa $x \in \mathcal{B}$ und schreiben gx für das Anwenden von $g \in G$ auf $x \in \mathcal{B}$. Betrachten wir eine Borel'sche eher als Untergruppe, so notieren wir sie mit einem großen Buchstaben wie etwa $A \subset G$ und schreiben gAg^{-1} für das Konjugieren. Manchmal notieren wir zu $x \in \mathcal{B}$ auch $B_x \subset G$ eben diese Borel'sche, aufgefaßt als Untergruppe, und haben also $B_{gx} = gB_xg^{-1}$.

Ergänzung 9.4.7.3. Gegeben eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe G betrachten wir ähnlich die Menge

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(G) = \mathcal{T}_G := \{T \subset B \subset G \mid T \text{ ist maximaler Torus und } B \text{ Borel'sche}\}$$

aller **borelierten maximalen Tori** oder kurz **borelierten Tori von** G. Die Gruppe G operiert darauf transitiv durch Konjugation und nach 9.4.7.1 zusammen mit 9.4.3.4 erhalten wir für jeden borelierten Torus $T \subset B \subset G$ eine G-äquivariante Bijektion

$$\begin{array}{ccc} G/T & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{T}_G \\ gT & \mapsto & (gTg^{-1} \subset gBg^{-1}) \end{array}$$

Nach 9.3.6.16 gibt es nun genau eine Struktur als Varietät auf $\mathcal{T}$, bezüglich derer alle diese Abbildungen Isomorphismen von Varietäten werden. Diese Varietät $\mathcal{T}$ heißt die **Varietät der borelierten Tori von** G. Für die G-Operation auf dieser Varietät $\mathcal{T}$ verwenden wir wieder zwei Notationen: Betrachten wir einen borelierten Torus eher als Punkt, so notieren wir ihn mit einem kleinen Buchstaben wie etwa $x \in \mathcal{T}$ und schreiben gx für das Anwenden von $g \in G$ auf $x \in \mathcal{B}$. Betrachten wir ihn eher als ein Paar von Untergruppen, so notieren wir ihn $T \subset B$ und schreiben $gTg^{-1} \subset gBg^{-1}$ für das Konjugieren. Manchmal notieren wir zu $x \in \mathcal{T}$ auch $T_x \subset B_x \subset G$ eben diesen borelierten Torus, aufgefaßt als Paar von Untergruppen, und haben also $(T_{gx} \subset B_{gx}) = (gT_xg^{-1} \subset gB_xg^{-1})$. Wir haben einen offensichtlichen G-äquivarianten Morphismus $\mathcal{T} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$. Die Faser über x ist hierbei jeweils ein prinzipaler homogener Raum über dem unipotenten Radikal von B_x.

Vorschau 9.4.7.4. Gegeben eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe G mit einer Borel'schen B existiert im allgemeinen keine zu unseren Beschreibungen von G/B und G/T vergleichbar natürliche Beschreibung des Quotienten G/B_{u}. Mehr dazu wird in **??** diskutiert.

Korollar 9.4.7.5 (**Normalisatoren parabolischer Untergruppen**). *In einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe ist jede Parabolische zusammenhängend und ihr eigener Normalisator.*

Beweis. Seien $G \supset P$ unsere Gruppe und ihre Parabolische. Es gibt eine Borel'sche $B \subset P^\circ$. Aus $x \in \mathrm{N}_G(P)$ folgt dann, daß $xBx^{-1} \subset P^\circ$ auch eine Borel'sche ist, also gibt es $y \in P^\circ$ mit $yBy^{-1} = xBx^{-1}$ und folglich $y^{-1}x \in \mathrm{N}_G(B) = B$. So folgt unmittelbar $x \in P^\circ B \subset P^\circ$. □

Korollar 9.4.7.6. *Seien G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe und $P \not\trianglelefteq G$ eine Parabolische. Sei weiter $x \in G$ gegeben. Umfaßt $P \cap x^{-1}Px$ eine Borel, so gilt bereits $P = x^{-1}Px$.*

Beweis. Sei $B \subset P \cap x^{-1}Px$ eine Borel. Sicher ist $xBx^{-1} \subset P$ dann auch eine Borel, also gibt es $y \in P$ mit $yxBx^{-1}y^{-1} = B$ alias $yx \in B$. Mit $y \in P$ folgt dann $x \in P$. □

Definition 9.4.7.7. Gegeben $G \supset T$ eine affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus setzt man

$$\mathrm{W}_G(T) := \mathrm{N}_G(T)/\mathrm{Z}_G(T)$$

und nennt diese endliche Gruppe die **Weylgruppe von** G oder präziser die **Weylgruppe von** (G, T).

Beispiel 9.4.7.8. Der Normalisator des maximalen Torus T aller Diagonalmatrizen in der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(n; k)$ besteht genau aus allen Matrizen, die die simultanen Eigenräume $k\mathrm{e}_\nu$ unserer Diagonalmatrizen permutieren, als da heißt aus allen Matrizen, die in jeder Zeile und Spalte genau einen von Null verschiedenen Eintrag haben. In diesem Fall bilden die Permutationsmatrizen ein Repräsentantensystem für die Weylgruppe.

Korollar 9.4.7.9 (Borel'sche und Weylgruppe). *Gegeben eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe operiert die Weylgruppe zu einem maximalen Torus frei und transitiv durch Konjugation auf der Menge der Borel'schen über besagtem maximalen Torus.*

9.4.7.10. Sind $G \supset B \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einer Borel'schen un einem maximalen Torus liefert in Formeln die Konjugation also eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{W}_G(T) & \xrightarrow{\sim} & \{A \subset G \mid A \text{ ist Borel'sche mit } A \supset T\} \\ n & \mapsto & nBn^{-1} \end{array}$$

In nochmal anderen Worten und unter Verwendung von 9.4.7.1 operiert die Weylgruppe $\mathrm{W}_G(T)$ zu einem maximalen Torus T frei und transitiv auf der Menge $\mathcal{B}_G^T$ der Fixpunkte unseres maximalen Torus T in der Fahnenmannigfaltigkeit.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $\mathrm{N}_G(T)$ transitiv auf der Menge der Borel'schen über T operiert. Gegeben eine Borel A mit $T \subset A \subset G$ gibt es $x \in G$ mit $xBx^{-1} = A$. Dann ist $xTx^{-1} \subset A$ ein maximaler Torus und nach 9.4.2.2 gibt es $a \in A$ mit $axTx^{-1}a^{-1} = T$. Es folgt $n = ax \in \mathrm{N}_G(T)$ und $nBn^{-1} = A$. Nun berechnen wir noch die Isotropiegruppe von B unter der Operation durch Konjugation von $\mathrm{N}_G(T)$. Aus $n^{-1}Bn = B$ folgt mit 9.4.7.1 ja $n \in B$ und Konjugation mit jedem $b \in B$ stabilisiert auch umgekehrt B, also ist unsere Isotropiegruppe $\mathrm{N}_B(T)$. In der zusammenhängenden auflösbaren Gruppe B gilt aber $\mathrm{N}_B(T) = \mathrm{Z}_B(T)$ nach 9.4.3.4. Nach 9.4.6.22 folgt aus $B \supset T$ weiter $B \supset G^T$, also gilt $\mathrm{N}_B(T) = \mathrm{Z}_B(T) = \mathrm{Z}_G(T)$ wie gewünscht. □

Lemma 9.4.7.11. *Ist (V, ρ) eine endlichdimensionale algebraische Darstellung von $k^\times$ und $x \in \mathbb{P}V$ ein Punkt ihrer Projektivisierung, so läßt sich die durch Anwenden auf x gegebene Abbildung $k^\times \to \mathbb{P}V$ eindeutig zu einem Morphismus von Varietäten $\mathbb{P}^1 k \to \mathbb{P}V$ fortsetzen. Diese Fortsetzung ist darüberhinaus entweder konstant oder injektiv und bildet 0 und ∞ auf Fixpunkte von $k^\times$ in $\mathbb{P}V$ ab.*

9.4.7.12. Wir notieren $0x$ und ∞x die Bilder von 0 und ∞ unter unserer Fortsetzung. Überhaupt jeder Morphismus $k^\times \to \mathbb{P}V$ für $\dim_k V < \infty$ läßt sich eindeutig zu einem Morphismus $\mathbb{P}^1 k \to \mathbb{P}V$ fortsetzen, wie in 7.8.6.11 gezeigt wird. Allerdings ist die Fortsetzung in dieser Allgemeinheit nicht notwendig injektiv.

Beweis. Sei $v \in V \backslash 0$ mit $x = \langle v \rangle$. Wir können v schreiben als Linearkombination von simultanen Eigenvektoren

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r$$

mit $a_i \neq 0$ für alle i und $\rho(\lambda) v_i = \lambda^{m(i)} v_i$ und $m(1) > \ldots > m(r)$. Dann kann unsere Fortsetzung explizit angegeben werden durch die Vorschrift $0 \mapsto \langle v_r \rangle, \infty \mapsto \langle v_1 \rangle$. Der Rest des Beweises kann dem Leser überlassen werden. □

Satz 9.4.7.13 (Zahl der Fixpunkte von Tori). *Seien $\rho : T \to \mathrm{GL}(V)$ eine endlichdimensionale algebraische Darstellung eines Torus und $Y \mathrel{\not\subset} \mathbb{P}V$ eine abgeschlossene T-stabile Teilmenge.*

1. *Gilt $\mathrm{kdim}\, Y \geq 1$, so hat T in Y mindestens zwei Fixpunkte, $|Y^T| \geq 2$;*
2. *Gilt $\mathrm{kdim}\, Y \geq 2$, so hat T in Y mindestens drei Fixpunkte, $|Y^T| \geq 3$.*

Beweis. Sei $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ die simultane Eigenraumzerlegung von V unter T mit $V_i \neq 0$ zum Charakter $\chi_i \in \mathfrak{X}(T)$. Sicher liefern die offensichtlichen Abbildungen eine Bijektion

$$\mathbb{P}V_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{P}V_n \xrightarrow{\sim} (\mathbb{P}V)^T$$

Sicher gibt es auch Morphismen von algebraischen Gruppen $\lambda : k^\times \to T$ mit $\chi_i \circ \lambda$ paarweise verschieden. Dann sind die Fixpunkte unter der durch λ induzierten Operation von $k^\times$ dieselben wie die Fixpunkte von T, wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $T = k^\times$ annehmen. Besteht ganz Y aus Fixpunkten, so ist nichts zu zeigen. Sonst gibt es, wenn Y nicht leer ist, schon mal mindestens zwei Fixpunkte nach 9.4.7.11 und der erste Teil ist gezeigt. Wählen wir für den zweiten Teil eine Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von V mit $\rho(t)v_i = t^{m(i)}v_i$ für alle $t \in k^\times$ und $m(1) \geq m(2) \geq \ldots \geq m(n)$, so ist $W := \langle v_2, \ldots, v_n \rangle \subset V$ ein $k^\times$-invarianter Teilraum und $\mathbb{P}W \cap Y$ ist nach 7.6.5.18 nicht leer, falls gilt $\operatorname{kdim} Y \geq 1$, und nach 7.6.5.19 mindestens eindimensional falls $\operatorname{kdim} Y \geq 2$. Dort gibt es also schon mal zwei Fixpunkte. Indem wir sonst V verkleinern, dürfen wir $Y \not\subset \mathbb{P}W$ annehmen. Gegeben $y \in Y \backslash \mathbb{P}W$ ist dann ∞y noch ein dritter Fixpunkt außerhalb von $\mathbb{P}W$. □

Korollar 9.4.7.14. *Eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe ist genau dann auflösbar, wenn ihre Weylgruppe trivial ist.*

Beweis. Ist unsere Gruppe auflösbar, so ist die Weylgruppe trivial nach 9.4.3.4. Ist unsere Gruppe nicht auflösbar, so ist die Fahnenmannigfaltigkeit mindestens eindimensional und nach 9.4.7.13 hat ein maximaler Torus darauf mindestens zwei Fixpunkte. Hier haben wir implizit verwendet, daß jeder Quotient einer affinen algebraischen Gruppe äquivariant in die Projektivisierung einer endlichdimensionalen Darstellung eingebettet werden kann. Nach 9.4.7.10 folgt, daß die Weylgruppe nicht trivial ist. □

Korollar 9.4.7.15. *Jede zusammenhängende affine algebraische Gruppe wird erzeugt von den Borel'schen über einem festen maximalen Torus.*

Beweis. Seien G unsere Gruppe und $T \subset G$ ein maximaler Torus und $Q \subset G$ die von allen Borel'schen über T erzeugte Untergruppe. Sie ist parabolisch. Wäre $Q \neq G$, so hätte T nach 9.4.7.13 auf G/Q außer Q/Q noch einen weiteren Fixpunkt. Er entspricht einer Konjugierten xQx^{-1} unserer Parabolischen mit $T \subset xQx^{-1}$. Mit Induktion über die Dimension dürfen wir annehmen, daß xQx^{-1} von seinen Borel'schen über T erzeugt wird, daß also gilt $xQx^{-1} \subset Q$. Das aber steht im Widerspruch zu unserer Annahme $xQx^{-1} \neq Q$. □

Übungen

Übung 9.4.7.16. Gegeben eine algebraische Darstellung V einer affinen algebraischen Gruppe und ein maximaler Torus $T \subset G$ stabilisiert die Weylgruppe die Menge $\mathrm{P}_T(V) \subset \mathfrak{X}(T)$ der Gewichte von V.

9.4.8 Halbeinfache Gruppen vom Rang Eins

Definition 9.4.8.1. Unter dem **Rang** einer affinen algebraischen Gruppe G versteht man die Dimension eines maximalen Torus. Man notiert den Rang $\mathrm{rk}(G)$.

Definition 9.4.8.2. Eine affine algebraische Gruppe heißt **halbeinfach**, wenn alle ihre auflösbaren Normalteiler endlich sind.

Satz 9.4.8.3 (Klassifikation halbeinfacher affiner Gruppen vom Rang Eins). *Jede halbeinfache zusammenhängende affine algebraische Gruppe vom Rang Eins ist isomorph zu* $\mathrm{SL}(2;k)$ *oder zu* $\mathrm{PGL}(2;k)$.

9.4.8.4. Der Beweis dieses Satzes wird den ganzen Abschnitt füllen. Wir beginnen damit, allgemeine Aussagen zu beweisen, die sogar für beliebige zusammenhängende affine algebraische Gruppen vom Rang Eins gelten, die nicht auflösbar sind.

Lemma 9.4.8.5. *Seien $G \supset B \supset T$ eine zusammenhängende nicht auflösbare affine algebraische Gruppe vom Rang Eins, eine Borel'sche und ein maximaler Torus. So gilt:*

1. *Die Weylgruppe hat genau zwei Elemente, $|\mathrm{W}_G(T)| = 2$;*
2. *Die Fahnenmannigfaltigkeit ist eine projektive Gerade, $\mathcal{B}_G \cong \mathbb{P}^1$;*
3. *Für jedes $n \in \mathrm{N}_G(T)\backslash\mathrm{Z}_G(T)$ haben wir $G = B \sqcup BnB$;*
4. *Für jedes $n \in \mathrm{N}_G(T)\backslash\mathrm{Z}_G(T)$ ist $(B_\mathrm{u} \cap nB_\mathrm{u}n^{-1})^\circ$ ein Normalteiler von G.*

Beweis. Da unsere Gruppe zusammenhängend aber nicht auflösbar ist, ist die Weylgruppe nach 9.4.7.14 nicht trivial. Da die multiplikative Gruppe $k^\times$ genau zwei Automorphismen hat, die Identität und das Invertieren, kann unsere Weylgruppe aber auch nicht mehr als zwei Elemente haben und das zeigt die erste Aussage. Auf G/B hat T dann genau zwei Fixpunkte nach 9.4.7.10 und aus 9.4.7.13 folgt damit $\mathrm{kdim}\, G/B = 1$. Andererseits muß T auch eine eindimensionale Bahn $Y \subset G/B$ haben. Deren Abschluß ist nun notwendig eine Vereinigung mit nulldimensionalen Bahnen und wir folgern $G/B = Y \sqcup (G/B)^T$ und $Y \Subset G/B$. Nach 9.3.6.20 oder alternativ 9.3.6.21 ist dann Y als Varietät isomorph zu $k^\times$. Jetzt gibt es verschiedene Wege, um $G/B \cong \mathbb{P}^1$ zu zeigen. Kennt man die Theorie der Kurven, so folgt das mit 7.8.6.2 aus

$$\mathcal{M}(G/B) \cong \mathcal{M}(k^\times) \cong \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$$

und der Beweis der zweiten Aussage ist fertig. Man mag aber auch direkter eine algebraische Darstellung (V,ρ) von G wählen und $v \in V\backslash 0$ mit $G/B \xrightarrow{\sim}$

$G\langle v\rangle \not\subset \mathbb{P}V$. Dann wird $y \in Y$ repräsentiert durch $w \in V\backslash 0$ und zerfällt als $w = w_1 + \ldots + w_r$ mit $\rho(t)w_i = t^{n(i)}w_i$, wobei alle w_i von Null verschieden sind und für die Exponenten gilt $n(1) > n(2) > \ldots > n(r)$. Unter unserem Isomorphismus gehen die Fixpunkte von $k^\times$ in G/B auf $\langle w_1\rangle, \langle w_r\rangle \in \mathbb{P}V$. Ist d der größte gemeinsame Teiler der $n(i)$, so liefert die Abbildungsvorschrift $t \mapsto t^{n(1)/d}w_1 + \ldots + t^{n(r)/d}$ einen Isomorphismus von Varietäten $k^\times \xrightarrow{\sim} Y$, der sich zu einem bijektiven Morphismus $\mathbb{P}^1 \to G/B$ fortsetzen läßt durch die Vorschrift $\infty \mapsto \langle w_1\rangle, 0 \mapsto \langle w_r\rangle$. Daß das nun ein Isomorphismus ist, kann man entweder explizit einsehen oder auch mit dem Hauptsatz von Zariski 9.2.4.17 prüfen, da ja jede echte offene Teilmenge von $\mathbb{P}^1$ affin ist. Nun hat B auf G/B nach 9.4.7.1 den einzigen Fixpunkt B/B und die B-Bahn BnB/B des anderen T-Fixpunkts nB/B muß folglich auch die dichte T-Bahn Y umfassen. Mithin zerfällt G unter der beidseitigen B-Operation in die zwei Doppelnebenklassen

$$G = B \sqcup BnB$$

Schließlich ist $(B_{\mathrm{u}} \cap nB_{\mathrm{u}}n^{-1})^\circ$ eine zusammenhängende unipotente Gruppe, die mindestens zwei Fixpunkte auf $\mathcal{B}_G \cong \mathbb{P}^1$ hat. Da Bahnen unipotenter Gruppen auf affinen Varietäten nach 9.2.3.9 abgeschlossen sind und da bereits das Komplement eines Punktes in $\mathbb{P}^1$ affin ist, muß $(B_{\mathrm{u}} \cap nB_{\mathrm{u}}n^{-1})^\circ$ ganz $\mathbb{P}^1$ punktweise festhalten. Also ist $(B_{\mathrm{u}} \cap nB_{\mathrm{u}}n^{-1})^\circ$ die Einskomponente des Schnitts der unipotenten Anteile aller Borel'schen von G und damit ein Normalteiler. □

Lemma 9.4.8.6 (Automorphismen der projektiven Gerade). $(k = \bar{k})$. *Sei* $\Delta \not\subset (\mathbb{P}^1k)^3$ *die sogenannte* **dicke Diagonale** *alias die Teilmenge aller Tripel mit mindestens zwei gleichen Einträgen. So liefern die Operation von* $\mathrm{PGL}(2;k) := \mathrm{GL}(2;k)/k^\times$ *auf* $\mathbb{P}^1k$ *und das Anwenden eines Automorphismus der algebraischen Varietät* $\mathbb{P}^1k$ *auf das Tripel* $(0,1,\infty)$ *Bijektionen*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{PGL}(2;k) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Var}^\times(\mathbb{P}^1k) & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{P}^1k)^3\backslash\Delta \\ & & \varphi & \mapsto & (\varphi(0),\varphi(1),\varphi(\infty)) \end{array}$$

Des weiteren ist die Komposition dieser Bijektionen ein Isomorphismus von Varietäten zwischen der algebraischen Gruppe $\mathrm{PGL}(2;k)$ *und der Menge aller Tripel von paarweise verschiedenen Punkten der projektiven Gerade.*

Beweis. Die erste Abbildung ist eine Bijektion nach 7.6.5.22 und die Verknüpfung ist eine Bijektion nach 5.1.5.12. Nach unseren Resultaten über homogene Räume aus 9.3.5.15 muß nur die Surjektivität des Differentials der Abbildung $\mathrm{GL}(2;k) \to (\mathbb{P}^1)^3$, $g \mapsto (g(0),g(1),g(\infty))$ am neutralen Element geprüft werden, und die ist schnell nachgerechnet. □

Beweis von Satz 9.4.8.3. Sei nun G eine zusammenhängende halbeinfache affine algebraische Gruppe vom Rang Eins. Seien $T \subset B \subset G$ ein maximaler Torus

und eine Borel'sche. Sei weiter $n \in \mathrm{N}_G(T) \backslash \mathrm{Z}_G(T)$. Wir kürzen für das folgende $U = B_{\mathrm{u}}$ ab und pirschen uns Schritt für Schritt an die Klassifikation heran.

1. Da $U \cap nUn^{-1} = U \cap nBn^{-1}$ als Einskomponente einen unipotenten, also auflösbaren Normalteiler hat, muß $U \cap nUn^{-1}$ endlich sein. Wegen $B = TU = UT$ ist die U-Bahn von nB/B dicht in G/B. Andererseits ist die Isotropiegruppe in U von nB/B endlich und es folgt $\operatorname{kdim} U = 1$.

2. Aus $\operatorname{kdim} U = 1$ folgt unmittelbar $\operatorname{kdim} B = 2$ und $\operatorname{kdim} G = 3$.

3. Die Gruppe G hat außer sich selbst nur endliche Normalteiler. In der Tat ist nach 9.4.6.25 jede zusammenhängende affine algebraische Gruppe einer Dimension Zwei oder kleiner auflösbar. Also muß jeder echte zusammenhängende Normalteiler positiver Dimension auflösbar sein und der Quotient danach desgleichen, im Widerspruch dazu, daß G selbst nicht auflösbar ist.

4. Der von der Operation von G auf seiner Fahnenmannigfaltigkeit im Verein mit der Wahl eines Isomorphismus $\mathcal{B}_G \cong \mathbb{P}^1$ nach 9.4.8.6 induzierte Homomorphismus von algebraischen Gruppen ist eine Surjektion $G \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(2;k)$. In der Tat operiert G nicht trivial auf seiner Fahnenmannigfaltigkeit, der maximale Torus etwa hat ja darin nur zwei Fixpunkte. Folglich muß nach dem vorhergehenden Punkt der Kern unseres Morphismus $G \to \mathrm{PGL}(2;k)$ endlich sein. Dimensionsbetrachtungen zeigen dann die Surjektivität unseres Morphismus.

5. Nun betrachten wir die Surjektion $\phi : \mathrm{SL}(2;k) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(2;k)$ und die Gruppe $H := \{(g,s) \in G \times \mathrm{SL}(2;k) \mid \varphi(g) = \phi(s)\}$ mitsamt dem offensichtlichen Homomorphismus $H \to \mathrm{PGL}(2;k)$. Die Einskomponente H° von H paßt in ein kommutatives Diagramm von surjektiven Gruppenhomomorphismen der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
 & H^\circ \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] \arrow[dd, two heads] & \\
G \arrow[dr, two heads] & & \mathrm{SL}(2;k) \arrow[dl, two heads] \\
 & \mathrm{PGL}(2;k) &
\end{tikzcd}$$

Alle diese Gruppenhomomorphismen haben offensichtlich endliche Kerne. Mithin sind alle Gruppen unseres Diagramms halbeinfach vom Rang Eins. Wir haben gewonnen, wenn wir zeigen können, daß (a) der obere Pfeil nach rechts ein Isomorphismus $H^\circ \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}(2;k)$ sein muß und daß (b) von den beiden Pfeilen nach unten auf der linken Seite einer ein Isomorphismus sein muß. Dazu müssen wir noch etwas mehr über die Struktur zusammenhängender halbeinfacher Gruppen G vom Rang Eins zeigen.

6. Wir zeigen zunächst $\mathrm{Z}_G(T) = T$. In der Tat ist $\mathrm{Z}_G(T)$ zusammenhängend

nach 9.4.6.21 und ist folglich eine Cartan'sche, also nilpotent nach 9.4.6.13. Damit muß $\mathrm{Z}_G(T)$ in einer und jeder Borel'schen liegen, die T umfaßt, in Formeln $\mathrm{Z}_G(T) \subset B$. Gleichheit ist hier unmöglich, weil nilpotente Borel'sche schon die ganze Einskomponente ihrer Gruppe sind nach 9.4.6.8. Wegen $\operatorname{kdim} B = 2$ folgt damit $\mathrm{Z}_G(T) = T$.

7. Wir zeigen $U \cap nUn^{-1} = 1$. In der Tat, da $U \cap nUn^{-1}$ von T normalisiert wird und endlich ist, muß diese Untergruppe sogar im Zentralisator von T liegen, nach dem vorhergehenden also in T selbst. Das einzige unipotente Element eines Torus ist aber das neutrale Element.

8. Die Multiplikation liefert eine offene Einbettung $(nUn^{-1}) \times T \times U \hookrightarrow G$. In der Tat ist diese Abbildung wegen $(nUn^{-1}) \cap B = 1$ sicher injektiv und hat offenes Bild nach Dimensionsvergleich und weil das Bild als eine Bahn in G aufgefaßt werden kann, unter einer geeigneten Operation von $(nUn^{-1}) \times B$. Wir müssen also nur noch die Injektivität des Differentials an einer Stelle zeigen, in anderen Worten die Formel

$$\operatorname{Lie} G = \operatorname{Lie}(nUn^{-1}) \oplus \operatorname{Lie} B$$

Sicher gibt es $\alpha \in \mathfrak{X}(T)$ mit $\operatorname{Ad}(t) = \alpha(t) : \operatorname{Lie} U \to \operatorname{Lie} U$ für alle $t \in T$. Wegen $\mathrm{Z}_G(T) = T$ und $\operatorname{Lie} \mathrm{Z}_G(T) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(T)$ nach 9.3.7.13 folgt $\alpha \neq 0$. Auf $\operatorname{Lie}(nUn^{-1})$ operiert $t \in T$ dann durch $\alpha(t^{-1})$ und die Behauptung folgt.

9. Die Gruppe U ist isomorph zur additiven Gruppe k. In der Tat liefert die Operation von U auf der Fahnenmannigfaltigkeit nach dem Vorhergehenden einen Isomorphismus von U mit dem Komplement eines Punktes in der projektiven Geraden. Das zeigt $U \cong k$ als Varietät und dann nach 9.1.1.43 auch als algebraische Gruppe.

10. Für unser α von eben gilt $\mathfrak{X}(T) \supset \mathbb{Z}\alpha \supset 2\mathfrak{X}(T)$. In der Tat ist für jede algebraische Darstellung V von G und jedes $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$ der Teilraum $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_{\lambda + n\alpha}$ nach Übung 9.1.8.3 eine Unterdarstellung. Andererseits folgt aus $V_\lambda \neq 0$ durch Anwenden des nichttrivialen Elements der Weylgruppe nach 9.4.7.16 auch $V_{-\lambda} \neq 0$. Für jede irreduzible Darstellung folgt aus $V_\lambda \neq 0$ also $2\lambda \in \mathbb{Z}\alpha$. Da nun jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{X}$ nach 9.1.7.26 auch in einer irreduziblen Darstellung vorkommt, folgt $2\mathfrak{X} \subset \mathbb{Z}\alpha$.

11. Wegen $\operatorname{Lie} G = \operatorname{Lie} B \oplus \operatorname{Lie}(nUn^{-1})$ ist das Differential beim neutralen Element der durch die Wirkung gegebenen Abbildung $\operatorname{Lie} G \to \mathrm{T}_{\bar{e}}(G/B)$ injektiv auf $\operatorname{Lie}(nUn^{-1})$. Das zeigt, daß das Differential unseres zu Beginn konstruierten Homomorphismus $G \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(2;k)$ injektiv ist auf den Liealgebren aller unipotenten Untergruppen. Dieser Homomorphismus bildet also nach 9.4.6.5 Borel'sche auf Borel'sche ab und induziert Isomorphismen zwischen deren unipotenten Anteilen. Wir sehen explizit, daß dasselbe auch für $\mathrm{SL}(2;k) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(2;k)$

gilt. Dann aber muß auch für eine und jede Borel'sche in H° ihr unipotenter Anteil isomorph auf den unipotenten Anteil ihres Bildes in G beziehungsweise $\mathrm{SL}(2;k)$ abgebildet werden. Da nun im Fall von $\mathrm{SL}(2;k)$ bereits gilt $2\mathfrak{X} = \mathbb{Z}\alpha$, muß für $S \subset H^\circ$ ein maximaler Torus und T sein Bild in $\mathrm{SL}(2;k)$ die auf den Charaktergruppen induzierte Inklusion $\mathfrak{X}(T) \hookrightarrow \mathfrak{X}(S)$ ein Isomorphismus sein, so daß wir bereits einen Isomorphismus $S \xrightarrow{\sim} T$ vor uns hatten. Da aber der Kern des rechten oberen Pfeils im Zentrum und damit im Zentralisator von S und damit in S liegen muß, ist der rechte obere Pfeil als bijektiv entlarvt, und an seinem Differential sehen wir, daß er sogar ein Isomorphismus sein muß. Dieselbe Argumentation zeigt, daß von den beiden Morphismen links genau einer einen Isomorphismus von einem maximalen Torus auf sein Bild induziert und daß der dann ein Isomorphismus sein muß. □

Übungen

Übung 9.4.8.7. Man zeige, daß für eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe gleichbedeutend sind: (1) Die Weylgruppe hat genau zwei Elemente; (2) Die Fahnenmannigfaltigkeit ist eindimensional; (3) Die Fahnenmannigfaltigkeit ist isomorph zur projektiven Geraden $\mathbb{P}^1$.

Übung 9.4.8.8. Jede halbeinfache zusammenhängende affine algebraische Gruppe G vom Rang Eins ist ihre eigene derivierte Gruppe, in Formeln $(G,G) = G$. Hinweis: 9.4.6.25.

Übung 9.4.8.9. In $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$ treffen sich je zwei verschiedene maximale Tori nur im neutralen Element. In $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ ist der Schnitt von je zwei verschiedenen maximalen Tori das Zentrum $\{\pm\,\mathrm{id}\}$.

Beispiel 9.4.8.10. Alle Automorphismen der algebraischen Gruppe $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ sind innere Automorphismen, wir haben also in Formeln eine kurze exakte Sequenz

$$\{\pm\,\mathrm{id}\} \hookrightarrow \mathrm{SL}(2;\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$$

Es gibt zwei Konjugationsklassen von Involutionen in $\mathrm{Aut}\,\mathrm{SL}(2;\mathbb{C}) \cong \mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$, nämlich die Identität und das Element der Ordnung zwei aus jedem maximalen Torus.

9.4.9 Radikale und reduktive Gruppen

Definition 9.4.9.1. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Die von allen abgeschlossenen auflösbaren zusammenhängenden normalen Untergruppen erzeugte Untergruppe hat auch selbst wieder alle diese Eigenschaften und ist mithin die größte Untergruppe mit diesen Eigenschaften. Sie heißt das **Radikal von** G und

wird $\operatorname{rad} G$ notiert. Dasselbe gilt, wenn man statt auflösbaren Untergruppen unipotente Untergruppen betrachtet. Man erhält dann die größte zusammenhängende normale unipotente Untergruppe von G. Sie heißt das **unipotente Radikal von** G und wird $\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G$ notiert.

9.4.9.2. Eine affine algebraische Gruppe G ist also halbeinfach im Sinne von 9.4.8.2 genau dann, wenn ihr Radikal trivial ist. Der Rang des Quotienten nach dem Radikal einer affinen algebraischen Gruppe G heißt der **halbeinfachen Rang** von G. Er wird $\operatorname{rk}_{\mathrm{s}}(G) := \operatorname{rk}(G/\operatorname{rad} G)$ notiert.

Definition 9.4.9.3. Eine algebraische Gruppe heißt **reduktiv**, wenn sie affin ist mit trivialem unipotenten Radikal.

9.4.9.4. Manche Autoren fordern von ihren reduktiven Gruppen zusätzlich, daß sie zusammenhängend sein sollen. Ich schließe mich dieser Konvention nicht an.

9.4.9.5 (**Diskussion der Bedeutung reduktiver Gruppen**). Zusammenhängende reduktive Gruppen spielen in der Theorie der affinen algebraischen Gruppen eine zentrale Rolle. Ich will zunächst erklären, was an ihnen so besonders ist.

1. Fast alle einfachen affinen algebraischen Gruppen sind reduktiv, die einzige Ausnahme sind die additiven Gruppen $(k, +)$ für einen algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null. Hier nennen wir eine algebraische Gruppe **einfach**, wenn sie nicht trivial ist, aber keinen echten nichttrivialen Normalteiler hat.

2. Man kann die zusammenhängenden reduktiven Gruppen recht explizit klassifizieren, wie wir im folgenden besprechen werden, und kann so eine Klassifikation der einfachen affinen algebraischen Gruppen erreichen.

3. In Charakteristik Null sind die reduktiven Gruppen genau die „linear reduktiven affinen Gruppen“ alias die affinen algebraischen Gruppen, deren sämtliche algebraische Darstellungen in eine direkte Summe irreduzibler Unterdarstellungen zerfallen.

4. In positiver Charakteristik liefern die einfachen affinen algebraischen Gruppen die meisten einfachen endlichen Gruppen.

5. Die zusammenhängenden reduktiven Gruppen spielen eine zentrale Rolle im sogenannten Langlands-Programm.

6. Die allgemeinen linearen Gruppen $\mathrm{GL}(n; k)$ sind reduktiv und man mag die anderen reduktiven Gruppen als ihre etwas schwerer zugänglichen Vettern ansehen, oder als die anderen Planeten des Sonnensystems neben der Erde, und kann bei ihrem Studium viel über die allgemeinen linearen Gruppen selber lernen.

Satz 9.4.9.6 (Radikal und Zentrum reduktiver Gruppen). *Gegeben eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe G ist ihr Radikal ein Torus und die Einskomponente $\operatorname{rad} G = \mathrm{Z}(G)^\circ$ des Zentrums und $\operatorname{rad} G \cap (G, G)$ ist endlich.*

Beweis. Da $\operatorname{rad} G$ zusammenhängend und auflösbar ist und da nach Annahme gilt $(\operatorname{rad} G)_{\mathrm{u}} = 1$, muß $\operatorname{rad} G$ nach unserem Struktursatz für auflösbare Gruppen 9.4.2.2 ein Torus sein und wir schreiben von nun an $S := \operatorname{rad} G$. Nach Annahme gilt $G = \mathrm{N}_G(S)^\circ = \mathrm{Z}_G(S)^\circ$ und es folgt $S \subset \mathrm{Z}(G)^\circ$. Da aber $\mathrm{Z}(G)^\circ \subset \operatorname{rad} G$ eh klar ist, folgt $\mathrm{Z}(G)^\circ = \operatorname{rad} G$. Sei nun $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine treue endlichdimensionale algebraische Darstellung. Sie zerfällt über S als

$$V = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(S)} V_\chi$$

und wegen $S \subset \mathrm{Z}(G)$ sind alle V_χ stabil unter G. Es folgt $(G, G) \subset \prod \mathrm{SL}(V_\chi)$ und S operiert durch Skalare auf jedem V_χ. Es gibt jedoch jeweils nur endlich viele Skalare, die als Diagonalmatrix mit Determinante Eins auf V_χ operieren. □

Lemma 9.4.9.7 (Reduktivitätskriterium). *Besitzt eine affine algebraische Gruppe eine algebraische Darstellung mit endlichem Kern, die Summe irreduzibler Unterdarstellungen ist, so ist unsere Gruppe reduktiv.*

9.4.9.8. Hierfür brauchen wir unsere algebraische Gruppe nicht einmal als affin annehmen, das folgt vielmehr mit 9.2.4.21 bereits aus der Existenz einer algebraischen Darstellung mit endlichem Kern.

Beweis. Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ besagte Darstellung mit $|\ker \rho| < \infty$. Die Fixvektoren unter $\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G$ bilden einen G-stabilen Teilraum $W \subset V$. Nach Annahme und 8.2.3.4 besitzt er ein G-stabiles Komplement $D \subset V$. Da $\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G$ in D keine von Null verschiedenen Fixvektoren haben kann, folgt $D = 0$ aus 9.1.6.2 und so $W = V$ und $\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G \subset \ker \rho$. □

Beispiele 9.4.9.9. Die affinen algebraischen Gruppen $\mathrm{GL}(V)$, $\mathrm{SL}(V)$ und $\mathrm{Sp}(V)$ sind reduktiv. Dasselbe gilt für $\mathrm{SO}(V)$ im Fall einer von Zwei verschiedenen Charakteristik. In der Tat ist in allen diesen Fällen jeweils V eine irreduzible Darstellung, im letzteren Fall nach dem Satz von Witt 4.2.4.2.

Übungen

Übung 9.4.9.10. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Man zeige, daß das unipotente Radikal der unipotente Anteil des Radikals ist, in Formeln $(\operatorname{rad} G)_{\mathrm{u}} = \operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G$. Man zeige, daß das Radikal die Einskomponente des Schnitts aller Borel'schen Untergruppen ist.

Übung 9.4.9.11 (**Untergruppen von** $\mathrm{SL}(2;k)$). Man zeige, daß jede echte zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{SL}(2;k)$ entweder eine Borel'sche oder das unipotente Radikal einer Borelschen oder ein maximaler Torus ist. Hinweis: Man zeige zunächst, daß unsere Untergruppe auflösbar sein muß. Man zeige, daß jede echte abgeschlossene Untergruppe positiver Dimension das Urbild einer abgeschlossenen Untergruppe des eindimensionalen Torus B/B_{u} ist für eine Borel'sche B oder ein maximaler Torus oder der Normalisator eines maximalen Torus.

9.4.10 Klassifikation im reduktiven Fall

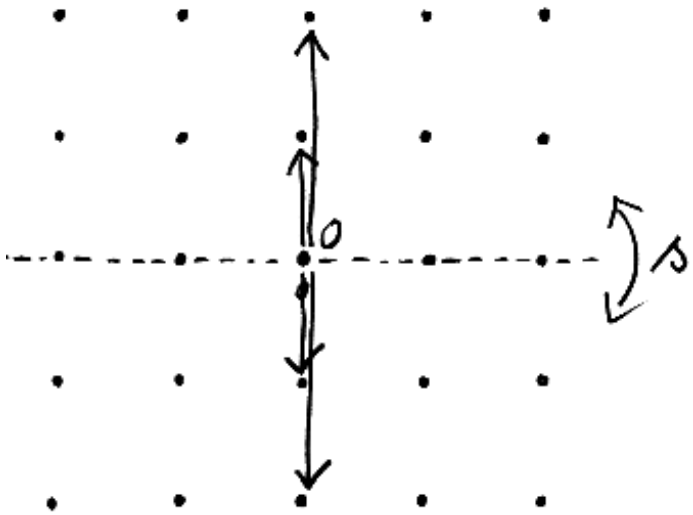
9.4.10.1. Dieser Abschnitt ist in großen Teilen eine Kopie der entsprechenden Begriffe und Argumente im Fall kompakter Liegruppen 22.5.4. Das ist kein Zufall, liefert doch die Komplexifizierung nach **??** eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen kompakter Liegruppen und Isomorphieklassen reduktiver affiner algebraischer Gruppen über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Definition 9.4.10.2. Eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe X nennen wir auch ein **Gitter**. Unter einer **Gitterspiegelung** oder auch kurz **Spiegelung** verstehen wir einen Automorphismus $s : X \xrightarrow{\sim} X$ eines Gitters derart, daß sein Quadrat die Identität ist und die Untergruppe der Elemente, die auf ihr Negatives gehen, unendlich zyklisch, in Formeln $s^2 = \mathrm{id}$ und $X^{-s} \cong \mathbb{Z}$. Unter einer **Wurzel** α **zu einer Gitterspiegelung** s verstehen wir ein Element unseres Gitters derart, daß sich jeder Punkt unseres Gitters von seinem Spiegelbild um ein ganzzahliges Vielfaches des besagten Elements unterscheidet, in Formeln $\lambda - s\lambda \in \mathbb{Z}\alpha \ \forall \lambda \in X$.

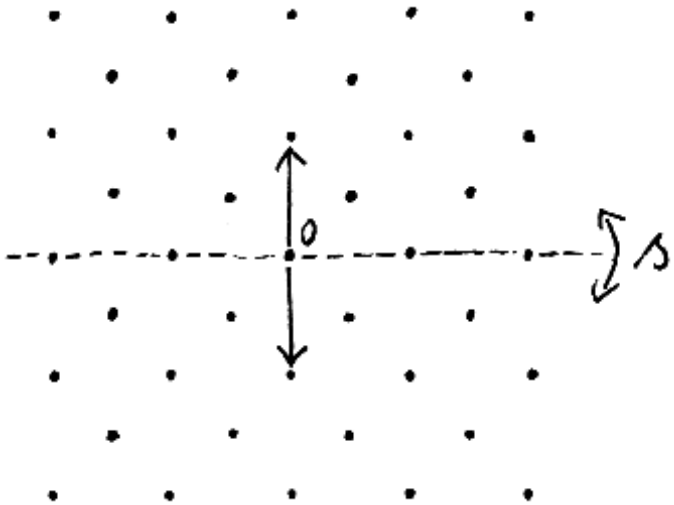
9.4.10.3 (**Mögliche Wurzeln zu Gitterspiegelungen**). Ist X ein Gitter und $s : X \to X$ eine Gitterspiegelung und $\alpha \in X$ dazu eine Wurzel, so gibt es genau eine Linearform $\alpha^\vee : X \to \mathbb{Z}$ mit

$$s\lambda = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \quad \forall \lambda \in X$$

Hier verwenden wir für das Auswerten von $\chi \in X^* := \mathrm{Hom}(X, \mathbb{Z})$ auf $\lambda \in X$ die in diesem Kontext übliche symmetrische Notation $\chi(\lambda) = \langle \lambda, \chi \rangle$. Die Linearform $\alpha^\vee$ heißt dann die **Kowurzel** zur Wurzel α der Spiegelung s. Wegen $s\alpha = -\alpha$ gilt stets $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$, und umgekehrt ist auch für jedes Paar $(\alpha, \alpha^\vee)$ mit $\alpha \in X$ und $\alpha^\vee \in X^*$ und $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ die Abbildung $s_{\alpha,\alpha^\vee} : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ eine Gitterspiegelung. Das Negative einer Wurzel zu einer Gitterspiegelung ist stets wieder eine Wurzel zu derselben Gitterspiegelung, und zu jeder Gitterspiegelung s gibt es mindestens zwei und höchstens vier Wurzeln: Genauer sind die beiden Erzeuger der unendlich zyklischen Gruppe X^{-s} aller Vektoren $\lambda \in X$ mit $s\lambda =$



Eine Gitterspiegelung, zu der es vier Wurzeln gibt.



Eine Gitterspiegelung, zu der es nur zwei Wurzeln gibt.

$-\lambda$ stets mögliche Wurzeln, und nehmen die zugehörigen Kowurzeln auf X nur gerade Werte an, so sind die Doppelten besagter Erzeuger auch noch mögliche Wurzeln. Damit sind dann aber auch bereits alle Möglichkeiten ausgeschöpft.

Definition 9.4.10.4. Eine **endliche Gitterspiegelungsgruppe** ist eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Gitters, die von Spiegelungen erzeugt wird. Eine **stabile Wurzelwahl** für eine endliche Gitterspiegelungsgruppe ist eine Teilmenge des zugrundeliegenden Gitters, die (1) stabil ist unter der Spiegelungsgruppe, die (2) aus Wurzeln zu Spiegelungen der Spiegelungsgruppe besteht und die (3) zu jeder Spiegelung der Spiegelungsgruppe genau zwei Wurzeln enthält, von denen die eine dann natürlich die Negative der anderen sein muß.

Ergänzung 9.4.10.5 (**Bezug zum Begriff eines Wurzeldatums**). In der Literatur trifft man statt Gitterspiegelungsgruppen mit stabiler Wurzelwahl meist das äquivalente Konzept eines **Wurzeldatums** an. Darunter versteht man ein Datum

$$(X, R, X^\vee, R^\vee, \phi, \tau)$$

bestehend aus zwei Gittern $X, X^\vee$, einer bilinearen Abbildung $\phi : X \times X^\vee \to \mathbb{Z}$, die das eine Gitter mit dem Dualen des anderen identifiziert und üblicherweise $(\lambda, \nu) \mapsto \langle \lambda, \nu \rangle$ notiert wird, sowie endlichen Teilmengen $R \subset X$ und $R^\vee \subset X^\vee$ mitsamt einer Bijektion $\tau : R \xrightarrow{\sim} R^\vee$, die üblicherweise $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ notiert wird, so daß gilt $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2\ \forall \alpha \in R$ und $\beta \in R \Rightarrow \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in R$ und $\beta^\vee \in R^\vee \Rightarrow \beta^\vee - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \alpha^\vee \in R^\vee$ und $\alpha \in R \Rightarrow 2\alpha \notin R$ und $\alpha^\vee \in R^\vee \Rightarrow 2\alpha^\vee \notin R^\vee$. Diese Begrifflichkeit hat den Vorteil, eine zusätzliche Symmetrie sichtbar zu machen in dem Sinne, daß unmittelbar klar wird, was unter dem **dualen Wurzeldatum** zu verstehen ist. Jedes derartige Wurzeldatum liefert eine Gitterspiegelungsgruppe auf dem Gitter X mit Spiegelungen $\lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ und stabiler Wurzelwahl R, und umgekehrt können wir aus den Spiegelungen und Wurzeln R auch unschwer unser Wurzeldatum zurückgewinnen.

Vorschau 9.4.10.6 (**Bezug zum Begriff eines abstrakten Wurzelsystems**). Gegeben $W \looparrowright X \supset R$ eine Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl ist R ein Wurzelsystem im Sinne von 23.2.1.2 im rationalen Vektoraum $\langle R \rangle_\mathbb{Q} \subset X_\mathbb{Q} := X \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$, der von den Wurzeln erzeugt wid in dem aus dem Gitter X durch Skalarerweiterung entstehenden rationalen Vektoraum $X \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$. Das ist offensichtlich, sobald man die Definitionen vor Augen hat. Die Operation der fraglichen Gitterspiegelungsgruppe auf $X \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ stabilisiert dann den Teilraum $\langle R \rangle_\mathbb{Q}$ und induziert einen Isomorphismus $W \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}(R)$ zwischen unserer Gitterspiegelungsgruppe und der Weylgruppe des Wurzelsystems im Sinne von 23.2.1.13. Die Kowurzeln in 23.2.1.9 sind dann offensichtlich die Restriktionen auf $\langle R \rangle_\mathbb{Q}$ der von unseren Kowurzeln $\alpha^\vee : X \to \mathbb{Z}$ hier induzierten linearen Abbildungen $X_\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. Alle diese Beziehungen sind hier noch nicht relevant.

Definition 9.4.10.7 (Wurzeln einer reduktiven algebraischen Gruppe). Seien $G \supset T$ eine reduktive algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Die von Null verschiedenen T-Gewichte in der Liealgebra $\mathrm{Lie}(G)$ von G heißen die **Wurzeln von** G. Die Menge aller Wurzeln heißt das **Wurzelsystem** von G in Bezug auf ihren maximalen Torus T und wird mit R für englisch „root“ oder französisch „racine“ notiert als

$$\mathrm{R}(G,T) := \mathrm{P}_T(\mathrm{Lie}(G)\backslash 0$$

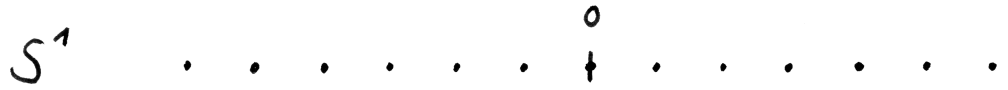
Vorschau 9.4.10.8. Ist $G \supset T$ eine beliebige affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus, so erklären wir ihr Wurzelsystem als das Wurzelsystem ihres maximalen reduktiven Quotienten $G/\mathrm{rad}_{\mathrm{u}}G$.

Satz 9.4.10.9 (Klassifikation der reduktiven algebraischen Gruppen). $(k = \bar{k})$ *Ordnen wir jeder zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe die Charaktergruppe eines maximalen Torus zu mitsamt der Operation der zugehörigen Weylgruppe und dem zugehörigen Wurzelsystem, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

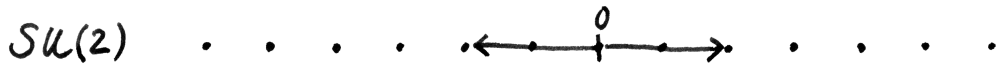
$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Zusammenhängende reduktive} \\ \textit{algebraische Gruppen} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Gitterspiegelungsgruppen} \\ \textit{mit stabiler Wurzelwahl} \end{array} \right\} \\ G & \mapsto & \mathrm{W}(G,T) \looparrowright \mathfrak{X}(T) \supset \mathrm{R}(G,T) \end{array}$$

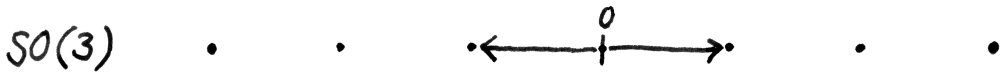
9.4.10.10. Da nach 9.4.6.9 je zwei maximale Tori einer affinen algebraischen Gruppe zueinander konjugiert sind, hängt unsere Abbildung nicht von der Wahl eines maximalen Torus T ab. Im folgenden zeigen wir zunächst nur, daß die im Satz erklärte Abbildungsvorschrift in der Tat eine Abbildung zwischen den angegebenen Mengen liefert. Wendet man genauer 9.4.7.16 auf die adjungierte Darstellung an, so folgt schon mal, daß die Weylgruppe die Wurzeln permutiert. Weiter zeigt Proposition 9.4.11.7, daß jede Wurzel des Wurzelsystems auch Wurzel zu genau einer durch ein Element der Weylgruppe gegebenen Spiegelung auf der Charaktergruppe des maximalen Torus ist, und 9.4.11.6, daß auf jeder Ursprungsgerade höchstens zwei Wurzeln unseres Wurzelsystems liegen. Dann zeigt 9.4.11.12, daß die Spiegelungen zu Wurzeln die Weylgruppe erzeugen, und 9.4.11.15, daß es in der Weylgruppe keine weiteren Spiegelungen gibt.

Beispiel 9.4.10.11 (**Wurzeln der allgemeinen linearen Gruppe**). Wir besprechen den Fall der allgemeinen linearen Gruppen $G = \mathrm{GL}(n;k)$. Als maximalen Torus T können wir nach 9.4.2.6 etwa die Menge aller invertierbaren Diagonalmatrizen nehmen. Eine Basis des Charaktergitters $\mathfrak{X}(T)$ über $\mathbb{Z}$ bilden die $\varepsilon_i : T \to k^\times$, die jeder diagonalen Matrix ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnen,

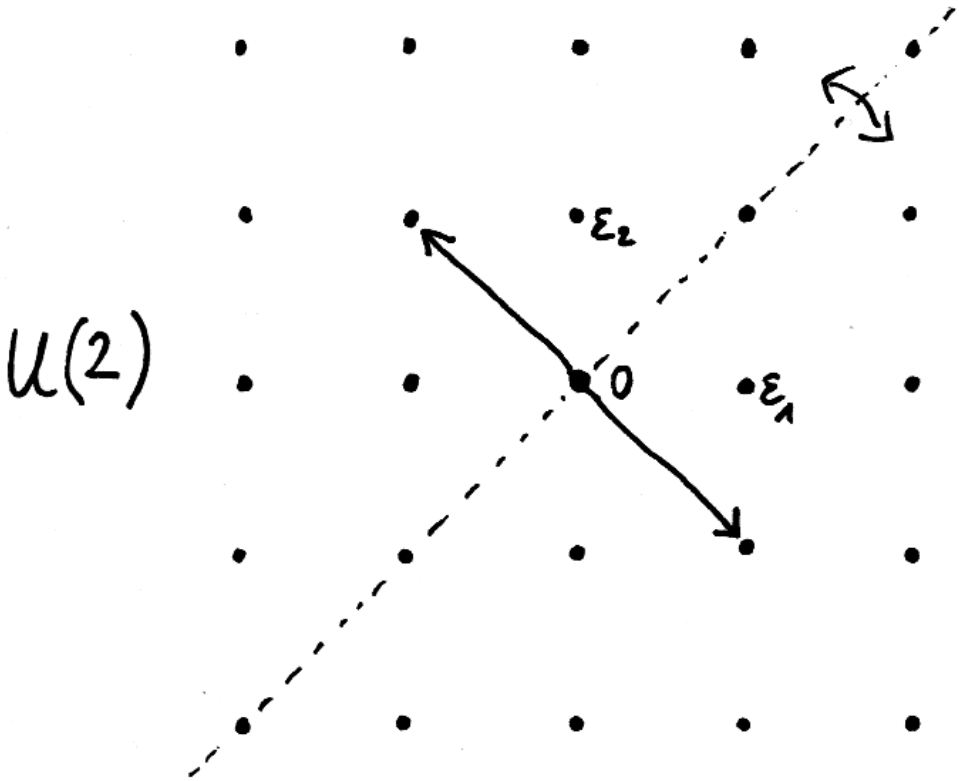


Die Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl zu S^1. In diesem Fall ist die Menge der Wurzeln leer und die Gitterspiegelungsgruppe besteht nur aus dem neutralen Element.





Die Gitterspiegelungsgruppen mit stabiler Wurzelwahl zu $\mathrm{SL}(2;k)$ und $\mathrm{PSL}(2;k)$. In diesen Fällen haben wir zwei Wurzeln, die als Pfeile eingezeichnet sind, und die Gitterspiegelungsgruppe besteht aus dem neutralen Element und der Punktspiegelung am Ursprung. Das Gitter zu $\mathrm{SL}(2;k)$ kann man als Quotient des Gitters zu $\mathrm{GL}(2;k)$ verstehen, das Gitter zu $\mathrm{PSL}(2;k)$ als Untergitter des Gitters zu $\mathrm{SL}(2;k)$.



Die Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl zu $\mathrm{GL}(2;k)$. In diesem Fall haben wir zwei Wurzeln, die als Pfeile eingezeichnet sind, und die Gitterspiegelungsgruppe besteht aus dem neutralen Element und der anschaulich orthogonalen Spiegelung an der zu den Wurzeln senkrechten Geraden durch den Ursprung.

für $1 \leq i \leq n$. Die Operation der Weylgruppe auf dem Charaktergitter identifiziert unsere Weylgruppe nach 9.4.7.8 mit der Gruppe aller Permutationen der ε_i und wir erhalten so einen kanonischen Isomorphismus $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n$. Der kanonische Isomorphismus $\operatorname{Lie} \mathrm{GL}(n;k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}(n;k)$ aus 9.3.1.26 ist äquivariant für die adjungierte Operation vorne und die Operation durch Konjugation hinten. Als Wurzelsystem ergibt sich so die Menge

$$R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$$

und der zur Wurzel $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ gehörende Wurzelraum $(\operatorname{Lie} \mathrm{GL}(n;k))^\alpha$ entspricht unter unserer Identifikation mit den quadratischen Matrizen der Gerade kE_{ij} aller Matrizen, denen nur in Zeile i und Spalte j ein von Null verschiedener Eintrag erlaubt ist. Die Spiegelung zur Wurzel $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ entspricht unter der offensichtlichen Identifikation $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n$ der Transposition (i,j), und in der Tat erzeugen diese Transpositionen die symmetrische Gruppe. Die zugehörige Kowurzel entspricht der Abbildung $k^\times \to T$ gegeben durch

$$z \mapsto \operatorname{diag}(1, \ldots, z, \ldots, z^{-1}, \ldots, 1)$$

mit einem z an der i-ten Stelle, einem z^{-1} an der j-ten Stelle und Einsen sonst. In der Notation $\varepsilon_i^* : z \mapsto \operatorname{diag}(1, \ldots, z, \ldots, 1)$ mit einem z an der i-ten Stelle hat die Kowurzel zur Wurzel $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ also die Gestalt $\alpha^\vee = \varepsilon_i^* - \varepsilon_j^*$. In diesem Fall ist $S_\alpha := (\ker \alpha)^\circ$ die Gruppe der Diagonalmatrizen, die an der i-ten Stelle denselben Eintrag haben wie an der j-ten Stelle. Der Zentralisator dieser Untergruppe besteht aus allen invertierbaren Matrizen, die höchstens auf der Diagonalen und an den Stellen mit Indizes (i,j) oder (j,i) von Null verschiedene Einträge haben. Man kann damit leicht einen Isomorphismus $\mathrm{PGL}(2;k)/\{\pm \mathrm{id}\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Z}_G(S_\alpha)/S_\alpha$ angeben.

Übungen

Übung 9.4.10.12. Die Transponierte einer Gitterspiegelung ist stets eine Gitterspiegelung des dualen Gitters und jedes Paar von Wurzel und Kowurzel zu einer Gitterspiegelung ist ein Paar von Kowurzel und Wurzel zu ihrer Transponierten.

Übung 9.4.10.13. Ein Element eines maximalen Torus in einer reduktiven algebraischen Gruppe liegt in keinem anderen maximalen Torus genau dann, wenn es von keiner Wurzel auf die Eins geworfen wird.

Übung 9.4.10.14. Ein Element eines maximalen Torus in einer zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe liegt im Zentrum genau dann, wenn es im Kern jeder Wurzel liegt.

9.4.11 Struktur reduktiver Gruppen

Definition 9.4.11.1 (Wurzeln einer affinen algebraischen Gruppe). Seien $G \supset T$ eine affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Die von Null verschiedenen T-Gewichte in der Liealgebra $\operatorname{Lie}(G/\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G)$ des Quotienten von G nach seinem unipotenten Radikal heißen die **Wurzeln von** G. Die Menge aller Wurzeln heißt das **Wurzelsystem** der affinen algebraischen Gruppe G in Bezug auf ihren maximalen Torus T und wird mit R für englisch „root“ oder französisch „racine“ bezeichnet notiert als

$$\mathrm{R}(G,T) := \mathrm{P}_T(\operatorname{Lie}(G/\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G))\backslash 0$$

9.4.11.2 (**Provisorische Wurzeln**). Aus beweistechnischen Gründen arbeiten wir bis zum Ende dieses Abschnitts mit einer abweichenden provisorischen Definition des Begriffs einer Wurzel. Seien $G \supset T$ eine affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Wir betrachen die Einskomponente

$$H = H(G,T) := \left(\bigcap_{B\in\mathcal{B}^T} B\right)^\circ$$

des Schnitts aller Borel'schen über T und nennen die T-Gewichte in $\operatorname{Lie} G/\operatorname{Lie} H$ die **provisorischen Wurzeln** oder kürzer auch **Wurzeln von** G. Die Menge aller provisorischen Wurzeln nennen wir das **provisorische Wurzelsystem**

$$\mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T) := \mathrm{P}_T(\operatorname{Lie} G/\operatorname{Lie} H)$$

In 9.4.11.26 wird sich dann herausstellen, daß der unipotente Anteil H_{u} der auflösbaren Untergruppe H genau das unipotente Radikal von G ist, so daß unsere provisorischen Wurzeln mit unseren Wurzeln aus 9.4.11.1 zusammenfallen, in Formeln $\mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T) = \mathrm{R}(G,T)$.

Satz 9.4.11.3 (Weylgruppe und provisorisches Wurzelsystem). *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus ist das Datum $\mathrm{W}(G,T) \looparrowright \mathfrak{X}(T) \supset \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ eine Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl.*

Vorschau 9.4.11.4. Der Beweis dieses Satzes wird einen großen Teil dieses Abschnitts einnehmen. In 9.4.11.6 zeigen wir, daß die einzigen Vielfachen einer Wurzel, die wieder Wurzeln ist, sie selbst und ihr Negatives sind. Nach 9.4.11.7 ist jede Wurzel eine Wurzel im Sinne von 9.4.10.2 zu einem Element der Weylgruppe, das als Gitterspiegelung auf dem Charaktergitter des maximalen Torus operiert. Nach 9.4.11.12 erzeugen diese Gitterspiegelungen bereits die Weylgruppe, die mithin eine Gitterspiegelungsgruppe ist, und nach 9.4.11.15 operieren keine anderen Elemente der Weylgruppe als Gitterspiegelungen auf dem Charaktergitter des maximalen Torus. Daß $\mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ unter der Weylgruppe stabil ist, ist eh klar. Damit wird dann der Satz bewiesen sein, was wir in 9.4.11.17 nocheinmal festhalten.

Proposition 9.4.11.5 (Rang-Eins-Subquotienten zu Wurzeln). *Gegeben eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus $G \supset T$ und eine Wurzel $\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ betrachten wir die Einskomponente $S_\alpha := (\ker \alpha)^\circ \subset T$ ihres Kerns und deren Zentralisator $\mathrm{Z}_G(S_\alpha) \subset G$. So gilt:*

1. *Der Quotient $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{rad}\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ ist eine halbeinfache zusammenhängende Gruppe vom Rang Eins und die von Null verschiedenen T-Gewichte ihrer Liealgebra sind $\pm\alpha$;*

2. *Der Quotient $G_\alpha := \mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{rad}_{\mathrm{u}}\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ hat als derivierte Gruppe eine halbeinfache zusammenhängende Gruppe vom Rang Eins (G_α, G_α) und das Bild $\bar{T} \subset G_\alpha$ von T schneidet (G_α, G_α) in einem maximalen Torus dieser Untergruppe.*

Beweis. 1. Unser Zentralisator ist nach 9.4.6.19 als Zentralisator eines Torus in einer zusammenhängenden Gruppe selbst zusammenhängend und nach unserem Satz über Borel'sche in Zentralisatoren von Tori 9.4.6.21 ist für jede Borel'sche $B \in \mathcal{B}^T$, ja sogar für jede Borel'sche B von G mit $B \supset S_\alpha$ der Schnitt $B \cap \mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ eine Borel'sche von $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$. Da das Radikal einer affinen algebraischen Gruppe stets in jeder Borelschen enthalten ist, folgt $\operatorname{rad}\mathrm{Z}_G(S_\alpha) \subset H$. Nach Wahl von α und dem Satz über Liealgebren von Zentralisatoren von Tori 9.3.7.13 gilt aber $\operatorname{Lie}\mathrm{Z}_G(S_\alpha) \not\subset \operatorname{Lie} H$, also kann $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ nicht auflösbar sein, und nach demselben Satz gilt $\alpha \in \mathrm{P}_T(\operatorname{Lie}\mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{Lie}(\operatorname{rad}\mathrm{Z}_G(S_\alpha))$. Jetzt setzen wir

$$G_\alpha := \mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{rad}_{\mathrm{u}}\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$$

Das ist quasi per definitionem eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe und die Projektion induziert einen Isomorphismus von T mit einem maximalen Torus $\bar{T} \subset G_\alpha$, da weder T noch seine Liealgebra T nichttriviale unipotente Elemente hat und da nach 9.4.6.10 das Bild eines maximalen Torus unter einem surjektiven Homomorphismus wieder ein maximaler Torus ist. Mithin induziert die Projektion auch einen Isomorphismus von S_α mit einem zentralen Untertorus $\bar{S}_\alpha \subset G_\alpha$ der Kodimension Eins in $\bar{T}$. Wir zeigen nun, daß genauer sogar gilt

$$\bar{S}_\alpha = \operatorname{rad} G_\alpha$$

Hier ist $\subset$ klar, andererseits aber muß nach 9.4.9.6 das Radikal der reduktiven Gruppe G_α ein zentraler Torus sein. Gäbe es aber in G_α einen echt größeren zentralen Torus als $\bar{S}_\alpha$, so wäre dieser schon ein maximaler Torus, und dann wäre die Weylgruppe trivial und dann wäre nach 9.4.7.14 auch G_α auflösbar und damit auch $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$, was es ja eben nicht ist. Also gilt $\bar{S}_\alpha = \operatorname{rad} G_\alpha$, und das hinwiederum zeigt, daß die Surjektion einen Isomorphismus

$$\mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{rad}\mathrm{Z}_G(S_\alpha) \xrightarrow{\sim} G_\alpha/\bar{S}_\alpha$$

induziert und daß diese beiden zueinander isomorphen Gruppen zusammenhängend und halbeinfach vom Rang Eins sind. Nach unserer Klassifikation halbeinfacher Gruppen vom Rang Eins 9.4.8.3 enthält schließlich die Menge der T-Gewichte $\mathrm{P}_T(\mathrm{Lie}(G_\alpha/\bar{S}_\alpha))$ genau zwei Gewichte ungleich Null, deren Summe ist Null, und deren Gewichtsräume in $\mathrm{Lie}(G_\alpha/\bar{S}_\alpha)$ sind eindimensional. Da wir α bereits als Gewicht erkannt haben, muß das zweite Gewicht notwendig $-\alpha$ sein.

2. Für die derivierte Gruppe von G_α induziert die Projektion nach 9.4.8.8 eine Surjektion

$$(G_\alpha, G_\alpha) \twoheadrightarrow G_\alpha/\bar{S}_\alpha$$

Andererseits trifft $(G_\alpha, G_\alpha) \subset G_\alpha$ nach 9.4.9.6 das Radikal $\bar{S}_\alpha$ in einer endlichen Gruppe, unsere Surjektion hat folglich endlichen Kern. Mithin ist auch (G_α, G_α) halbeinfach vom Rang Eins und die Einskomponente des Urbilds von $\bar{T}/\bar{S}_\alpha$ ist darin ein maximaler Torus. Der muß aber wie jeder maximale Torus einer zusammenhängenden halbeinfachen Gruppe vom Rang Eins das Zentrum umfassen und a forteriori den Kern von $(G_\alpha, G_\alpha) \twoheadrightarrow G_\alpha/\bar{S}_\alpha$. Damit ist unser maximaler Torus bereits das ganze Urbild von $\bar{T}/\bar{S}_\alpha$ alias der Schnitt $\bar{T} \cap (G_\alpha, G_\alpha)$. □

9.4.11.6 (**Vielfache von Wurzeln**). Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus sind Wurzeln $\alpha, \beta \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G, T)$ mit $\alpha \neq \pm\beta$ sind linear unabhängig. In der Tat, sind Wurzeln α, β linear abhängig, so gilt $(\ker \alpha)^\circ = (\ker \beta)^\circ$ und die Behauptung folgt, da für diesen Torus, den wir einmal S nennen wollen, $\mathrm{Z}_G(S)/\operatorname{rad} \mathrm{Z}_G(S)$ nach 9.4.11.5 zusammenhängend und halbeinfach ist vom Rang Eins und wir diese Gruppen aus 9.4.8.3 bereits sehr genau kennen.

Lemma 9.4.11.7 (**Wurzelspiegelungen**). *Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus und sei $\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G, T)$ eine Wurzel. So gilt:*

1. *Es gibt genau ein Element der Weylgruppe $s_\alpha \in \mathrm{W}(G, T)$ mit $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ und $s_\alpha|(\ker \alpha)^\circ = \mathrm{id}$;*

2. *Für dieses Element haben wir $s_\alpha^2 = \mathrm{id}$ und es gibt es genau eine Linearform $\alpha^\vee : \mathfrak{X}(T) \to \mathbb{Z}$ derart, daß für alle $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$ gilt*

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

9.4.11.8. Hier verwenden wir die in diesem Zusammenhang übliche symmetrische Schreibweise $\langle \lambda, \psi \rangle := \psi(\lambda)$ für das Auswerten einer Linearform $\psi : \mathfrak{X}(T) \to \mathbb{Z}$ auf einem Element $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$. Wir nennen s_α die **Wurzelspiegelung zur Wurzel** α und $\alpha^\vee$ die zur Wurzel α gehörige **Kowurzel**.

Beweis. 1. Wir setzen wie zuvor $S_\alpha := (\ker \alpha)^\circ$. Nach 9.4.11.5 ist die Gruppe $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ nicht auflösbar. Also ist nach 9.4.7.14 ihre Weylgruppe zum maximalen Torus T nicht trivial. Ist s ein nichttriviales Element dieser Gruppe, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \ker \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathfrak{X}(T) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "s"] & \mathfrak{X}(S_\alpha) \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\ \ker \arrow[r, hook] & \mathfrak{X}(T) \arrow[r, two heads] & \mathfrak{X}(S_\alpha) \end{tikzcd}$$

Hier ist $\ker \cong \mathbb{Z}$ frei vom Rang Eins. Würde s auf dem Kern die Identität induzieren, so wäre es auf $\mathfrak{X}(T)$ unipotent und müßte als unipotenter Automorphismus endlicher Ordnung trivial sein. Das ist es nicht, also haben wir $s = -\mathrm{id}$ auf dem Kern und insbesondere $s(\alpha) = -\alpha$. Dieselbe Argumentation zeigt, daß s eindeutig bestimmt ist und daß gilt $s^2 = \mathrm{id}$ und Teil 1 unseres Lemmas ist bewiesen. Von nun an nennen wir, wie bereits angekündigt, diese Gitterspiegelung s die Wurzelspiegelung zur Wurzel α und notieren sie $s = s_\alpha$.

2. Wenden wir nun die Klassifikation 9.4.8.3 zusammenhängender halbeinfacher Gruppen vom Rang Eins auf die derivierte Gruppe (G_α, G_α) von

$$G_\alpha := \mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{rad_u} \mathrm{Z}_G(S_\alpha)$$

an, die ja nach 9.4.11.5 eine Gruppe dieser Art ist und vom Bild $\bar{T} \subset G_\alpha$ von T in einem maximalen Torus geschnitten wird, so finden wir einen Homomorphismus $\alpha^\vee : k^\times \to \bar{T} \cap (G_\alpha, G_\alpha)$ von algebraischen Gruppen mit $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$. Repräsentiert $\bar{s} \in (G_\alpha, G_\alpha)$ das nichttriviale Element der Weylgruppe zum maximalen Torus $\bar{T} \cap (G_\alpha, G_\alpha)$, so kommutiert $\bar{s}$ mit $\bar{S}_\alpha$ und normalisiert damit ganz $\bar{T}$ und der davon induzierte Automorphismus $\bar{s}$ von $\mathfrak{X}(\bar{T})$ muß folglich mit dem von unserer Wurzelspiegelung s_α auf $\mathfrak{X}(T)$ induzierten Automorphismus übereinstimmen modulo der Identifikation $T \xrightarrow{\sim} \bar{T}$. Schreiben wir

$$\mathfrak{X}^\vee(D) := \mathrm{GrpVar}(k^\times, D)$$

für die Gruppe der multiplikativen Ein-Parameter-Untergruppen eines Torus D, so operiert unser $\bar{s}$ auch auf $\mathfrak{X}^\vee(\bar{T})$ und wir haben $\bar{s}(\alpha^\vee) = -\alpha^\vee$. Andererseits haben wir $\bar{s}(\psi) = \psi$ für alle $\psi \in \mathfrak{X}^\vee(\bar{S}_\alpha) \subset \mathfrak{X}^\vee(\bar{T})$. Da nun $\mathfrak{X}^\vee(\bar{S}_\alpha)$ und $\alpha^\vee$ bereits eine Untergruppe von endlichem Index in $\mathfrak{X}^\vee(\bar{T})$ erzeugen, wird der von $\bar{s}$ induzierte Automorphismus der Gruppe $\mathfrak{X}^\vee(\bar{T})$ durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt. Es folgt

$$\bar{s}(\psi) = \lambda - \langle \alpha, \psi \rangle \alpha^\vee$$

für alle $\psi \in \mathfrak{X}^\vee(\bar{T})$, denn die durch die rechte Seite gegebene Abbildung erfüllt dieselben Bedingungen. Nun identifiziert die offensichtliche Paarung

$$\mathfrak{X}^\vee(\bar{T}) \times \mathfrak{X}(\bar{T}) \to \mathbb{Z}$$

jeweils die eine abelsche Gruppe mit dem $\mathbb{Z}$-Dualen der anderen, so daß die Operation von $\bar{s}$ auf $\mathfrak{X}(\bar{T})$ durch die transponierte Abbildung geschehen muß. Indem wir wieder zu T aufsteigen, folgt schließlich die behauptete Formel

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \quad \forall \lambda \in \mathfrak{X}(T) \qquad \square$$

9.4.11.9. Es ist leicht zu sehen, daß die Transponierte jeder Gitterspiegelung eine Gitterspiegelung auf dem dualen Gitter ist.

Proposition 9.4.11.10 (Homomorphismen und Weylgruppen). *Unter einem surjektiven Homomorphismus von zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppen mit zentralem diagonalisierbaren Kern ist das Urbild jedes maximalen Torus ein maximaler Torus und das Urbild seines Normalisators der Normalisator seines Urbilds und wir erhalten so einen Isomorphismus zwischen den zugehörigen Weylgruppen.*

Beweis. Sei $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ unser surjektiver Homomorphismus und $T \subset G$ ein maximaler Torus. Da G zusammenhängend ist, zeigt 9.4.6.27 bereits $\ker \varphi \subset T$ und folglich $T = \varphi^{-1}(\varphi(T))$. Da wir bereits nach 9.4.6.10 wissen, daß jeder maximale Torus in H das Bild eines maximalen Torus in G ist, folgt die erste Behauptung. Die beiden weiteren Behauptungen folgen nun ohne weitere Schwierigkeiten. Für eine formale Argumentation scheint mir das Neunerlemma 4.4.7.5 besonders übersichtlich. Die benötigten Rechnungen macht 9.4.11.11 explizit. $\square$

9.4.11.11. Gegeben ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ und Teilmengen $A, B \subset H$ gilt $\varphi^{-1}(AB) = \varphi^{-1}(A)\varphi^{-1}(B)$. Gegeben eine Teilmenge $S \subset H$ und ein Element $g \in G$ gilt des weiteren die Äquivalenz

$$g\varphi^{-1}(S)g^{-1} \subset \varphi^{-1}(S) \;\Leftrightarrow\; \varphi(g)S\varphi(g)^{-1} \subset S$$

Man lasse sich nicht dadurch verwirren, daß hierbei „hoch (-1)“ sowohl für Abbildungen die auf den Potenzmengen in der Gegenrichtung induzierte Abbildung bezeichnet als auch für Gruppenelemente ihr Inverses.

Satz 9.4.11.12 (Erzeugung der Weylgruppe durch Wurzelspiegelungen). *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus erzeugen die Wurzelspiegelungen die Weylgruppe $\mathrm{W}(G, T)$.*

Beweis. Wir argumentieren mit Induktion über die Dimension unserer Gruppe. Gibt es keine Wurzeln, genauer bei unserem derzeitigen Kenntnisstand keine provisorischen Wurzeln, so ist $G = H(G, T)$ per definitionem auflösbar und die Weylgruppe ist trivial nach 9.4.7.14. Das erledigt auch ohne Verwendung der Induktionsannahme den Fall, daß das provisorische Wurzelsystem leer ist. Sonst sei

$w \in \mathrm{W}(G,T)$ ein nichttriviales Element der Weylgruppe und $\dot{w} \in \mathrm{N}_G(T)$ ein Repräsentant desselben. Man betrachte den Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{rccl} \phi: & T & \to & T \\ & t & \mapsto & \dot{w}t\dot{w}^{-1}t^{-1} \end{array}$$

Ist ϕ nicht surjektiv, so hat sein Kern positive Dimension und w zentralisiert mithin einen echten Untertorus $S \subsetneq T$. Dann brauchen wir nur die Induktionsannahme auf $\mathrm{Z}_G(S)/S$ anzuwenden, das nach 9.4.11.10 dieselbe Weylgruppe hat wie $\mathrm{Z}_G(S)$ und dessen Wurzeln unter $T \twoheadrightarrow T/S$ genau den Wurzeln von $\mathrm{Z}_G(S)$ entsprechen. Ist dahingegen ϕ surjektiv, so ist die davon auf der Charaktergruppe induzierte Abbildung eine Injektion

$$(w - \mathrm{id}) : \mathfrak{X}(T) \hookrightarrow \mathfrak{X}(T)$$

Nun wissen wir bereits, daß es Wurzeln α geben muß, und gegeben eine Wurzel α finden wir dann $\lambda \in \mathfrak{X}(T)\backslash 0$ mit $(w - \mathrm{id})\lambda \in \mathbb{Z}\alpha$. Da die Bahn einer endlichen Gruppe in einer Darstellung über einem $\mathbb{Q}$-Vektorraum jede affine Gerade nur in höchstens zwei Punkten treffen kann, die unter jedem invarianten Skalarprodukt denselben Abstand vom Ursprung haben, folgt $w\lambda = s_\alpha\lambda$ und damit

$$(s_\alpha w - \mathrm{id})\lambda = s_\alpha(w - \mathrm{id})\lambda + (w - \mathrm{id})\lambda = 0$$

Also ist $s_\alpha w$ ein weiteres Element der Weylgruppe, für das unser ϕ nicht mehr surjektiv ist, so daß wir den Beweis, wie zuvor erklärt, mit vollständiger Induktion zu Ende bringen können. □

Definition 9.4.11.13. Ein Automorphismus eines Vektorraums über einem Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik heißt eine **Spiegelung**, wenn er eine Hyperebene punktweise festhält und einen Vektor außerhalb dieses **Spiegels** auf sein Negatives wirft.

9.4.11.14. Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Die Weylgruppe $\mathrm{W}(G,T)$ operiert auf dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathfrak{X}^\vee_\mathbb{Q} = \mathfrak{X}(T)^\vee_\mathbb{Q} := \mathrm{Ab}(\mathfrak{X}(T), \mathbb{Q})$. Die maximalen konvexen Teilmengen des Komplements

$$\mathfrak{X}^\vee_\mathbb{Q} \setminus \bigcup_{\alpha \in R} (\mathfrak{X}^\vee_\mathbb{Q})^{s_\alpha}$$

der Vereinigung aller Spiegel zu Spiegelungen s_α aus 9.4.11.7 heißen **Alkoven**. Die Menge aller Alkoven bezeichnen wir mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{X}^\vee_\mathbb{Q})$. Sicher permutiert die Weylgruppe unsere Spiegel, folglich erhalten wir auch eine Operation der Weylgruppe auf der Menge $\mathcal{A}$ aller Alkoven.

Proposition 9.4.11.15 (Spiegelungen in der Weylgruppe). *Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. So gilt:*

1. *Die Weylgruppe operiert frei und transitiv auf der Menge der Alkoven in $\mathfrak{X}(T)^\vee_{\mathbb{Q}}$. In Formeln liefert also für jeden Alkoven A das Anwenden eine Bijektion $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$, $w \mapsto wA$;*

2. *Außer den Spiegelungen zu Wurzeln operieren keine weiteren Elemente der Weylgruppe als Spiegelungen auf $\mathfrak{X}(T)$.*

Ergänzung 9.4.11.16. Teile des anschließenden Beweises können wir im Rahmen der allgemeinen Theorie endlicher Spiegelungsgruppen 23.1.6.1 noch besser verstehen. Insbesondere kann man ganz allgemein zeigen, daß jede endliche von Spiegelungen erzeugte Gruppe von Automorphismen eines endlichen reellen Vektorraums frei und transitiv auf der Menge ihrer Alkoven operiert und daß jede Spiegelung einer derartigen Gruppe konjugiert ist zu einer der erzeugenden Spiegelungen.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß die Operation der Weylgruppe auf der Menge der Alkoven transitiv ist. Wir wählen dazu ein W-invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{X}_{\mathbb{Q}}$ und finden wir für beliebige Vektoren $v, w \in \mathfrak{X}_{\mathbb{Q}}$ ein $x \in W$ derart, daß der Abstand $\|v - xw\|$ kleinstmöglich wird. Dann können v und xw durch keinen Spiegel einer Wurzelspiegelung mehr getrennt werden, da ja sonst aus elementargeometrischen Gründen für s_α die Spiegelung an besagtem Spiegel v und $s_\alpha xw$ noch näher aneinander wären. Also liegen v und xw für jeden Spiegel einer Wurzelspiegelung in demselben abgeschlossenen Halbraum und damit im Abschluß desselben Alkoven. Als nächstes zeigen wir, daß sie auch frei ist. Hält aber ein nichttriviales Element der Weylgruppe einen Alkoven fest, so hat es in besagtem Alkoven auch einen Fixpunkt, etwa die Summe über die Elemente einer Bahn der von unserem Element erzeugten zyklischen Untergruppe. Es gäbe also eine Einparameteruntergruppe $\chi \in \mathfrak{X}^\vee$ mit $\langle \alpha, \chi \rangle \neq 0$ alias $\operatorname{im} \chi = \chi(k^\times) \not\subset \ker \alpha \;\; \forall \alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}$ derart, daß ein nichttriviales Element der Weylgruppe durch ein Element von $\mathrm{Z}_G(\operatorname{im} \chi)$ repräsentiert werden kann. Diese Gruppe ist nach 9.4.6.19 zusammenhängend. Wenn wir nun $\mathrm{Z}_G(\operatorname{im} \chi) \subset H$ zeigen können, so haben wir den gewünschten Widerspruch erreicht, denn die Weylgruppe jeder zusammenhängenden auflösbaren Gruppe ist trivial nach 9.4.7.14. Aus den Eigenschaften von χ folgt aber $(\operatorname{Lie} G)^{\operatorname{im} \chi} \subset \operatorname{Lie} H$, also $(\operatorname{Lie} G)^{\operatorname{im} \chi} = (\operatorname{Lie} H)^{\operatorname{im} \chi}$, also $\mathrm{Z}_G(\operatorname{im} \chi) = \mathrm{Z}_H(\operatorname{im} \chi) \subset H$. Um auch die zweite Aussage der Proposition abzuleiten, beachten wir, daß es nach 8.4.1.4 auf $\mathfrak{X}^\vee_{\mathbb{Q}}$ ein weylgruppeninvariantes Skalarprodukt gibt, so daß eine Spiegelung aus der Weylgruppe durch ihren Spiegel bereits eindeutig festgelegt wird. Hätten wir zusätzlich zu den s_α noch eine

weitere Spiegelung s in der Weylgruppe, so müßte deren Spiegel ganz offensichtlich und formal nach 6.3.10.1 einen Alkoven A treffen und es folgte $sA = A$ im Widerspruch zur Freiheit der Operation. □

9.4.11.17. Wir haben damit, wie in 9.4.11.4 angekündigt, Satz 9.4.11.3 gezeigt, nach dem für $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus das Datum $\mathrm{W}(G,T) \looparrowright \mathfrak{X}(T) \supset \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ eine Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl ist.

Definition 9.4.11.18. Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Eine Teilmenge $\mathrm{R}^+ \subset \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ nennen wir ein **System positiver Wurzeln** oder kurz ein **positives System**, wenn es ein $\psi \in \mathfrak{X}(T)^\vee_{\mathbb{Q}}$ gibt, dessen Kern das Wurzelsystem nicht trifft und für die gilt

$$\mathrm{R}^+ = \{\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T) \mid \langle \alpha, \psi \rangle > 0\}$$

Ergänzung 9.4.11.19. So ein System positiver Wurzeln ist nach 23.2.2.6 dasselbe wie ein positives System für das abstrakte Wurzelsystem $\mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ im Sinne von 23.2.2.2.

Lemma 9.4.11.20 (**Transitivität der Weylgruppe auf positiven Systemen**). *Gegeben eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus $G \supset T$ operiert die Weylgruppe auf der Menge aller Systeme positiver Wurzeln in $\mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ frei und transitiv.*

Ergänzung 9.4.11.21. Das folgt auch aus der allgemeinen Theorie von Wurzelsystemen 23.2.2.9.

Beweis. Genau dann trifft der Kern eines $\psi \in \mathfrak{X}^\vee_{\mathbb{Q}}$ das Wurzelsystem nicht, wenn ψ von keiner der Wurzelspiegelungen festgehalten wird. Genau dann liefern zwei Elemente von $\mathfrak{X}^\vee_{\mathbb{Q}}$ im Komplement der Vereinigung der Spiegel der Weylgruppe dasselbe System positiver Wurzeln, wenn sie zu demseben Alkoven gehören. Wir erhalten so eine Bijektion zwischen der Menge $\mathcal{A}$ der Alkoven und der Menge aller Systeme positiver Wurzeln, die äquivariant ist unter der Weylgruppe. Nach 9.4.11.15 operiert also die Weylgruppe auch auf der Menge aller Systeme positiver Wurzeln sogar frei und transitiv. □

9.4.11.22 (**Beschreibung positiver Systeme durch ihre Kowurzeln**). Seien eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus $G \supset T$ gegeben. Eine Teilmenge $\mathrm{R}^+ \subset \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ ist genau dann ein System positiver Wurzeln, wenn es einen Charakter $\chi \in \mathfrak{X}(T)$ gibt, auf dem keine Kowurzel verschwindet und so daß gilt

$$\mathrm{R}^+ = \{\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T) \mid \langle \chi, \alpha^\vee \rangle > 0\}$$

In der Tat entsprechen sich unter der durch weylgruppeninvariantes Skalarprodukt gegebenen Identifikation von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen $\mathfrak{X}(T)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}^{\vee}_{\mathbb{Q}}$ die (-1)-Eigenräume der Wurzelspiegelungen, so daß α auf ein positives Vielfaches von $\alpha^{\vee}$ abgebildet wird. Die Behauptung folgt.

Satz 9.4.11.23 (Positive Systeme zu Borel'schen). *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus bilden für jede Borel'sche $B \subset G$ über T diejenigen Wurzeln $\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$, die als T-Gewichte in $\operatorname{Lie} B/\operatorname{Lie} H(G,T)$ vorkommen, ein System positiver Wurzeln*

$$\mathrm{R}^{+}(B,T) \subset \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$$

9.4.11.24. Es ist offensichtlich, daß für zwei Borel'sche $B, B' \in \mathcal{B}^T$ aus der Gleichheit $\mathrm{R}^{+}(B,T) = \mathrm{R}^{+}(B',T)$ bereits folgt $B = B'$. Mit der Transitivität der Weylgruppe auf positiven Systemen 9.4.11.20 folgern wir, daß die Abbildung $B \mapsto \mathrm{R}^{+}(B,T)$ sogar eine Bijektion zwischen der Menge $\mathcal{B}^T$ der Borel'schen über T und der Menge der positiven Systeme unseres provisorischen Wurzelsystems induziert.

Beweis. Nach 9.3.6.7 finden wir eine endlichdimensionale algebraische Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ und darin einen von Null verschiedenen Vektor $v \in V \backslash 0$ derart, daß B der Stabilisator der Gerade kv ist. Sei $\chi \in \mathfrak{X}(T)$ bestimmt durch $v \in V_{\chi}$. Wir zeigen $\langle \chi, \alpha^{\vee} \rangle \neq 0$ für alle $\alpha \in R$ und $R^{+} = \{\alpha \mid \langle \chi, \alpha^{\vee} \rangle > 0\}$ und haben gewonnen nach der Beschreibung 9.4.11.22 positiver Systeme durch ihre Kowurzeln. Wie bereits zu Beginn des Beweises von 9.4.11.5 erwähnt ist $B \cap \mathrm{Z}_G(S_{\alpha})$ für jede provisorische Wurzel α eine Borel'sche von $\mathrm{Z}_G(S_{\alpha})$. Sicher hält mithin $\operatorname{rad_u} \mathrm{Z}_G(S_{\alpha})$ unseren Vektor v fest. Der von den Bildern von v unter $\mathrm{Z}_G(S_{\alpha})$ erzeugte Teilraum von V ist also eine Darstellung W von

$$G_{\alpha} := \mathrm{Z}_G(S_{\alpha}) / \operatorname{rad_u} \mathrm{Z}_G(S_{\alpha})$$

mit $W_{\chi} \neq 0$, und das Bild in G_{α} der Borel'schen $B \cap \mathrm{Z}_G(S_{\alpha})$ ist eine Borel'sche $B_{\alpha} \subset G_{\alpha}$, die W_{χ} stabilisiert. Bezeichnet $\bar{S}_{\alpha} \subset \bar{T} \subset G_{\alpha}$ die Bilder von $S_{\alpha} \subset T$, so ist das Bild $B_{\alpha}/\bar{S}_{\alpha} \subset G_{\alpha}/\bar{S}_{\alpha}$ nach 9.4.6.5 immer noch eine Borel'sche, und dasselbe gilt für das Urbild dieses Bildes $B_{\alpha} \cap (G_{\alpha}, G_{\alpha})$ unter der Projektion mit endlichem in $\bar{T}$ enthaltenem Kern $(G_{\alpha}, G_{\alpha}) \twoheadrightarrow G_{\alpha}/\bar{S}_{\alpha}$. Da nun χ das Gewicht einer Geraden mit Stabilisator $B_{\alpha} \cap (G_{\alpha}, G_{\alpha})$ in einer Darstellung von (G_{α}, G_{α}) ist, folgt $\langle \chi, \alpha^{\vee} \rangle > 0$ aus der Darstellungstheorie 9.1.8.5.5 der Gruppe $\mathrm{SL}(2;k)$. $\square$

Lemma 9.4.11.25. *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus und $\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ eine Wurzel ist stets*

$H(G,T)_{\mathrm{u}}$ ein Normalteiler der Untergruppe

$$K(\alpha) := \left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}^T,\ \alpha \in \mathrm{R}(B,T)} B \right)^{\circ}$$

Beweis. Wir setzen $H := H(G,T)_{\mathrm{u}}$. Es reicht zu zeigen, daß $H_{\mathrm{u}} \subset K(\alpha)_{\mathrm{u}}$ ein Normalteiler ist, denn der maximale Torus T der zusammenhängenden auflösbaren Gruppe $K(\alpha)$ normalisiert H_{u} eh. Es reicht nach 9.4.1.13 dazu zu zeigen, daß $H_{\mathrm{u}} \subset K(\alpha)_{\mathrm{u}}$ eine Untergruppe der Kodimension höchstens Eins ist. Es reicht auch zu zeigen, daß $H \subset K(\alpha)$ eine Untergruppe der Kodimension Eins ist, denn beide Gruppen sind auflösbar mit demselben maximalen Torus T. Nun sind alle T-Gewichte von $\operatorname{Lie} K(\alpha)/\operatorname{Lie} H$ offensichtlich Wurzeln β mit der Eigenschaft, daß für jede Borel'sche $B \in \mathcal{B}^T$ gilt $\alpha \in \mathrm{R}^+(B,T) \Rightarrow \beta \in \mathrm{R}^+(B,T)$. Daraus folgt $\beta = \alpha$, denn für je zwei verschiedene Wurzeln $\beta \neq \alpha$ gilt nach 9.4.11.6 entweder $\beta = -\alpha$ oder $\beta \notin \mathbb{Z}\alpha$ und folglich gibt es für Wurzeln $\beta \neq \alpha$ stets ein System positiver Wurzeln, das α enthält aber nicht β und dann mit 9.4.11.24 auch eine Borel'sche $B \in \mathcal{B}^T$ mit $\alpha \in \mathrm{R}^+(B,T)$ aber $\beta \notin \mathrm{R}^+(B,T)$. Da wir bereits wissen, daß die fraglichen Gewichtsräume eindimensional sind, folgt die Behauptung. □

Proposition 9.4.11.26. *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem ausgezeichneten maximalen Torus ist $H(G,T)_{\mathrm{u}}$ das unipotente Radikal von G, in Formeln*

$$\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G = \left(\left(\textstyle\bigcap_{B \in \mathcal{B}^T} B \right)^{\circ} \right)_{\mathrm{u}}$$

Beweis. Die Inklusion $\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G \subset H_{\mathrm{u}}$ ist evident, eine und damit jede Borel'sche umfaßt ja das Radikal. Die andere Inklusion $\supset$ folgt, sobald wir unser H_{u} als Normalteiler entlarven können. Nach Lemma 9.4.11.25 aber wird H_{u} von allen $K(\alpha)$ normalisiert. Man überlegt sich nun, daß der Gewichtsraum zur Wurzel α von $\operatorname{Lie} K(\alpha)/\operatorname{Lie} H$ nicht Null ist. In der Tat umfaßt ja $K(\alpha)$ nach unseren Erkenntnissen 9.4.6.21 über Borel'sche in Zentralisatoren von Tori diejenige Borel'sche von $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ über T, bei der $-\alpha$ kein T-Gewicht der Liealgebra von $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{rad} \mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ ist, denn wieder nach 9.4.6.21 gilt $\operatorname{rad} \mathrm{Z}_G(S_\alpha) \subset H$. Damit erzeugen die $K(\alpha)$ bereits eine Untergruppe von G mit der vollen Liealgebra, als da heißt, ganz G. □

Satz 9.4.11.27 (Maximaler Torus als Schnitt von Borel'schen). *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende reduktive affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus ist der maximale Torus T die Einskomponente des Schnitts aller Borel'schen über T, in Formeln*

$$T = \left(\textstyle\bigcap_{B \in \mathcal{B}^T} B \right)^{\circ}$$

Beweis. Die Inklusion $\subset$ ist evident. Der unipotente Anteil der rechten Seite ist Null nach 9.4.11.26, folglich geht sie für eine beliebige Borel'sche B über T injektiv nach B/B_{u}. Da aber die Komposition eine Bijektion $T \xrightarrow{\sim} B/B_{\mathrm{u}}$ ist, folgt die Behauptung. □

Satz 9.4.11.28 (Zentralisator eines maximalen Torus). *In einer zusammenhängenden affinen reduktiven algebraischen Gruppe G ist ist jeder maximale Torus T sein eigener Zentralisator, in Formeln*

$$T = \mathrm{Z}_G(T)$$

9.4.11.29. Wir können insbesondere die Weylgruppe einer zusammenhängenden affinen reduktiven algebraischen Gruppe schreiben als

$$\mathrm{W}(G,T) = \mathrm{N}_G(T)/T$$

Beweis. In einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe ist der Zentralisator eines Torus stets zusammenhängend nach 9.4.6.19. Ist unsere Gruppe G zusätzlich reduktiv, so liefert 9.4.11.27 die Gleichheit $T = H(G,T)$ in der Notation vom Beginn dieses Abschnitts. Da nun aber in $\operatorname{Lie} G/\operatorname{Lie} H(G,T)$ das T-Gewicht Null nicht vorkommt, muß $H(G,T)$ schon der Zentralisator von T gewesen sein. □

9.4.12 Bruhat-Zerlegung

Satz 9.4.12.1 (Struktur reduktiver Gruppen). *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus zerfällt die adjungierte Darstellung unter dem Torus als*

$$\operatorname{Lie} G = \operatorname{Lie} T \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{R}(G,T)} (\operatorname{Lie} G)_\alpha$$

und alle $(\operatorname{Lie} G)_\alpha$ sind eindimensional. Betrachten wir für $\alpha \in \mathrm{R}(G,T)$ den Torus $S_\alpha := (\ker \alpha)^\circ$, so ist $G_\alpha := \mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ reduktiv zusammenhängend mit Wurzelsystem $\mathrm{R}(G_\alpha, T) = \{\alpha, -\alpha\}$ und der offensichtliche Morphismus ist eine Surjektion mit endlichem Kern

$$(G_\alpha, G_\alpha) \twoheadrightarrow G_\alpha/S_\alpha$$

halbeinfacher Gruppen vom Rang Eins. Weiter ist $T \cap (G_\alpha, G_\alpha)$ ein maximaler Torus in (G_α, G_α) und das Urbild des maximalen Torus T/S_α von G_α/S_α.

Beweis. Wie beim Beweis von 9.4.11.26 erwähnt folgt aus unserer Beschreibung 9.4.6.21 von Borel'schen in Zentralisatoren von Tori bereits $\operatorname{rad} \mathrm{Z}_G(S_\alpha) \subset H$. Für

G zusammenhängend und reduktiv folgt zusammen mit der Erkenntnis $H = T$ aus 9.4.11.27 dann $\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} \mathrm{Z}_G(S_\alpha) = 1$. In diesem Fall haben wir in 9.4.11.5 also $G_\alpha = \mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ und diese Untergruppe von G hat weiter nach 9.4.11.5 als derivierte Gruppe (G_α, G_α) eine halbeinfache Gruppe vom Rang Eins und Aussagen aus dem Beweis von 9.4.11.5 spezialisieren in unserem Fall zu $\operatorname{rad} G_\alpha = S_\alpha$ zu den restlichen Aussagen des Satzes. □

9.4.12.2 (**Wurzelgruppen**). Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus und $\alpha \in \mathrm{R}(G, T)$ eine Wurzel besitzt G_α genau zwei Borel'sche über T und für eine eindeutig bestimmte solche Borel $B_\alpha \subset G_\alpha$ gilt $(\operatorname{Lie} B_\alpha)_\alpha \neq 0$. Das unipotente Radikal dieser Borel'schen notieren wir

$$U_\alpha := (B_\alpha)_{\mathrm{u}}$$

und nennen es die **Wurzelgruppe zur Wurzel** α. Unsere Wurzelgruppe wird unter der Quotientenabbildung isomorph auf das unipotente Radikal der Borel'schen $B_\alpha/S_\alpha \subset G_\alpha/S_\alpha$ abgebildet, da der Kern der Projektion ein Torus ist. Nach unseren Erkenntnissen über halbeinfache Gruppen vom Rang Eins ist U_α folglich isomorph zur additiven Gruppe $(k, +)$. Weiter folgt, daß gegeben solch ein Isomorphismus $u_\alpha : k \xrightarrow{\sim} U_\alpha$ stets gilt

$$t u_\alpha(x) t^{-1} = u_\alpha(\alpha(t)x) \quad \forall x \in k, t \in T$$

Proposition 9.4.12.3 (Vorbereitungen zur Wurzelgruppenzerlegung). *Seien $G \supset B \supset T$ eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe mit einer Borel und einem maximalen Torus und $U := B_{\mathrm{u}}$ das unipotente Radikal von B und*

$$U = U_{\leq n} \supset U_{\leq n-1} \supset \ldots \supset U_{\leq 0} = 1$$

eine endliche Filtierung von U durch zusammenhängende abgeschlossene Normalteiler von B derart, daß alle Subquotienten $U_{\leq \nu}/U_{\leq \nu-1}$ kommutativ sind. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ die T-Gewichte von $\operatorname{Lie}(U_{\leq \nu}/U_{\leq \nu-1})$. So induziert die Multiplikation einen Isomorphismus von algebraischen Gruppen

$$U_{\alpha_1} \times \ldots \times U_{\alpha_s} \xrightarrow{\sim} U_{\leq \nu}/U_{\leq \nu-1}$$

und alle Wurzelgruppen zu Wurzeln aus $\operatorname{Lie}(U_{\leq \nu-1})$ liegen in $U_{\leq \nu-1}$.

9.4.12.4. Mögliche derartige Folgen von Untergruppen sind die absteigende Zentralreihe von U oder die Folge der höheren derivierten Gruppen $\mathcal{D}^\nu U$.

Beweis. Wir zeigen das durch vollständige Induktion über ν von oben. Die Induktionsannahme zeigt bereits, daß unsere Abbildung ein wohldefinierter Gruppenhomomorphimus ist, und aus den Voraussetzungen folgt, daß, sein Differential

beim neutralen Element ein Isomorphismus ist. Sein Bild hat also Dimension s und da $U_{\leq\nu}$ zusammenhängend angenommen war, muß auch $U_{\leq\nu}/U_{\leq\nu-1}$ zusammenhängend sein und unser Homomorphismus surjektiv. Aus den Voraussetzungen folgt weiter, daß unser Homomorphismus äquivariant ist für die Operation von T durch Konjugation. Der Kern muß also eine endliche T-stabile Untergruppe sein und unsere Beschreibung der Wurzelgruppen zeigt, daß es in einem Produkt von Wurzelgruppen keine nichttriviale derartige Untergruppe gibt. Folglich ist unser Homomorphismus ein Isomorphismus. Jede Wurzelgruppe U_β zu einer Wurzel β aus $\mathrm{Lie}(U_{\leq\nu-1})$ liegt nach Induktionsannahme bereits in $U_{\leq\nu}$. Läge sie nicht in $U_{\leq\nu-1}$, so müßte sie einen nichtkonstanten T-äquivarianten Morphismus $U_\beta \to U_\alpha$ induzieren für α eines der α_σ, also $\alpha \neq \beta$. Den gibt es aber nicht und so folgt $U_\beta \subset U_{\leq\nu-1}$. □

Lemma 9.4.12.5 (Induzierte Zerlegung von Untergruppen). *Seien $H \subset U \supset Z$ eine Gruppe mit einer zentralen Untergruppe Z und einer weiteren Untergruppe H derart, daß die Multiplikation eine Bijektion $H \times Z \xrightarrow{\sim} U$ induziert. Sei $V \subset U$ eine Untergruppe. Haben Z und H keine nichttrivialen isomorphen Subquotienten, so induziert die Multiplikation auch eine Bijektion*

$$(V \cap H) \times (V \cap Z) \xrightarrow{\sim} V$$

9.4.12.6. Mit einem Subquotienten einer Gruppe ist ein Quotient einer Untergruppe nach einem Normalteiler besagter Untergruppe gemeint.

Beweis. Wir setzen $V_Z := V \cap Z$ und $V_H := V \cap H$ und betrachten die Projektionen $\mathrm{pr}_Z : U \xrightarrow{\sim} Z \times H \twoheadrightarrow Z$ sowie $\mathrm{pr}_H : U \xrightarrow{\sim} Z \times H \twoheadrightarrow H$. Da Z zentral ist, sind sie Gruppenhomomorphismen. Dann betrachten wir die Bijektionen

$$(\mathrm{pr}_H V)/V_H \xleftarrow{\sim} V/(V_H V_Z) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{pr}_Z V)/V_Z$$

Da Z kommutativ ist, ist V_Z ein Normalteiler in $\mathrm{pr}_Z V$ und damit $V_H V_Z$ ein Normalteiler in V und damit V_H ein Normalteiler in $\mathrm{pr}_H V$. Aus unserer Annahme folgt so $V = V_H V_Z$. □

Proposition 9.4.12.7 (Verfeinerte induzierte Zerlegung von Untergruppen). *Sei U eine Gruppe mit einer endlichen Filtierung*

$$U = U_{\leq r} \supset U_{\leq r-1} \supset \ldots \supset U_{\leq 0} = 1$$

durch Normalteiler von U derart, daß $U_{\leq i}/U_{\leq i-1}$ jeweils im Zentrum von $U/U_{\leq i-1}$ liegt. Seien $H_i \subset U_{\leq i}$ Untergruppen mit $H_i \xrightarrow{\sim} U_{\leq i}/U_{\leq i-1}$. Haben die H_i paarweise keine nichttrivialen isomorphen Subquotienten, so ist für jede Untergruppe $V \subset U$ und jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ die Multiplikation eine Bijektion

$$(V \cap H_{\sigma(1)}) \times \ldots \times (V \cap H_{\sigma(r)}) \xrightarrow{\sim} V$$

Beweis. Wir argumentieren mit vollständiger Induktion über die Länge r der Filtrierung, die wir uns in trivialer Weise nach unten und oben fortgesetzt denken, um Ärger mit Beschränkungen der Indizes zu vermeiden. Der Fall $r = 0$ ist eh klar. Sonst ist $U_{\leq 1}$ zentral und wir bezeichnen die Bilder aller unserer Untergruppen von U in $\bar{U} := U/U_{\leq 1}$ auch mit einem Querstrich. Unsere Induktionsannahme zeigt unmittelbar, daß für jede Permutation τ von $\{2, \ldots, r\}$ die Multiplikation eine Bijektion

$$(\bar{V} \cap \bar{H}_{\tau(2)}) \times \ldots \times (\bar{V} \cap \bar{H}_{\tau(r)}) \xrightarrow{\sim} \bar{V}$$

induziert. Nehmen wir links jeweils Urbilder in V, so sehen wir, daß das Produkt der $(V \cap H_{\tau(i)}U_{\leq 1})$ surjektiv auf $VU_{\leq 1}/U_{\leq 1}$ geht und damit induziert für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ die Multiplikation eine Surjektion

$$(V \cap H_{\sigma(1)}U_{\leq 1}) \times \ldots \times (V \cap H_{\sigma(r)}U_{\leq 1}) \twoheadrightarrow V$$

Nach Annahme haben nun $H_{\sigma(i)}$ und $U_{\leq 1}$ für $i \neq 1$ keine nichttrivialen isomorphen Subquotienten und nach 9.4.12.5 induziert damit die Multiplikation jeweils eine Bijektion

$$(V \cap H_i) \times (V \cap U_{\leq 1}) \xrightarrow{\sim} (V \cap H_iU_{\leq 1})$$

wohingegen wir für $i = 1$ schlicht $H_1U_{\leq 1} = H_1 = U_{\leq 1}$ haben. Da diese Untergruppe nach Annahme zentral ist, induziert die Multiplikation also auch eine Surjektion

$$(V \cap H_{\sigma(1)}) \times \ldots \times (V \cap H_{\sigma(r)}) \twoheadrightarrow V$$

Betrachten wir die Bilder in $\bar{U}$, so sehen wir, daß nach unserer Indutionsannahme alle Faktoren mit $\sigma(i) \neq 1$ durch $v \in V$ auf der rechten Seite eindeutig bestimmt sind. Dasselbe folgt dann auch für den Faktor mit $\sigma(i) = 1$. □

9.4.12.8 (**Verfeinerte induzierte Zerlegung von Untergruppen mit Operation**). Das vorhergehende Lemma 9.4.12.5 und der vorhergehende Satz 9.4.12.7 gelten analog mit demselben Beweis, wenn wir statt Gruppen vielmehr „Gruppen mit einer Operation einer Menge T" oder kurz „T-Gruppen" betrachten. Genauer meinen wir damit Paare (M, a_M) bestehend aus einer Gruppe M und einer Abbildung $a_M : T \to \mathrm{Grp}(M)$ von T in die Menge der Gruppenhomomorphismen $M \to M$. Statt Untergruppen betrachten wir dann T-stabile Untergruppen alias „T-Untergruppen" und die wesentliche Bedingung besagt entsprechend, daß keine zwei nichttrivialen T-Subquotienten T-isomorph sein dürfen.

Satz 9.4.12.9 (**Wurzelgruppenzerlegung**). *Seien $G \supset B \supset T$ eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe mit einer Borel und einem maximalen Torus. Seien $V \mathrel{\triangleleft} B_{\mathrm{u}}$ eine abgeschlossene von T normalisierte Untergruppe und $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ die T-Gewichte von* $\mathrm{Lie}\, V$ *in einer beliebigen Reihenfolge. So induziert die Multiplikation einen Isomorphismus von Varietäten*

$$U_{\alpha_1} \times \ldots \times U_{\alpha_s} \xrightarrow{\sim} V$$

Beweis. Unsere Vorbereitung zur Wurzelgruppenzerlegung 9.4.12.3 liefert uns durch entsprechende Verfeinerung der Zentralreihe für $U := B_{\mathrm{u}}$ eine endliche Filtierung

$$U = U_{\leq r} \supset U_{\leq r-1} \supset \ldots \supset U_{\leq 0} = 1$$

durch zusammenhängende abgeschlossene Normalteiler von B derart, daß alle Subquotienten $U_{\leq i}/U_{\leq i-1}$ zentral sind in U und daß es für jedes i eine Wurzel $\alpha(i)$ gibt mit $U_{\alpha(i)} \subset U_{\leq i}$ und $U_{\alpha(i)} \xrightarrow{\sim} U_{\leq i}/U_{\leq i-1}$ unter der Projektion. Die verschiedenen Wurzelgruppen haben nun als T-Gruppen unter der Operation durch Konjugation als abstrakte Gruppen paarweise keine nichttrivialen isomorphen Subquotienten und damit folgt aus unseren Erkentnissen 9.4.12.8 über die Zerlegung von Untergruppen mit Operation, daß die Multiplikation für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ eine Bijektion

$$(V \cap U_{\alpha(\sigma(1))}) \times \ldots \times (V \cap U_{\alpha(\sigma(r))}) \xrightarrow{\sim} V$$

liefert. Alle diese Schnitte sind nun aber T-stabile Untergruppen unserer Wurzelgruppen und folglich trivial oder die ganze jeweilige Wurzelgruppe. Das zeigt, daß die Abbildung in unserem Satz bijektiv ist. Als bijektiver Morphismus von glatten affinen Varietäten mit bijektivem Differential in einem Punkt ist sie dann nach unserer Variante 9.3.5.14 des Hauptsatzes von Zariski sogar ein Isomorphismus von Varietäten. □

Definition 9.4.12.10. Zwei Borel'sche einer zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe heißen **opponiert**, wenn ihr Schnitt ein maximaler Torus ist.

Beispiel 9.4.12.11. In $\mathrm{GL}(n;k)$ sind die oberen Dreiecksmatrizen und die unteren Dreiecksmatrizen opponierte Borel'sche.

9.4.12.12 (**Existenz und Eindeutigkeit opponierter Borel'scher**). Gegeben $G \supset B \supset T$ eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe mit einer Borel und einem maximalen Torus gibt es genau eine zu B opponierte Borel'sche über T. In der Tat sei $R^+ := \mathrm{R}^+(B,T) \subset \mathrm{R}(G,T)$ das System positiver Wurzeln zu B. Offensichtlich gilt $-R^+ = \mathrm{R}(G,T) \backslash R^+$ und nach 9.4.11.18 ist das auch ein System positiver Wurzeln. Wir zeigen, daß die zugehörige Borel'sche B° opponiert ist zu B. Wäre in der Tat $B^\circ \cap B \neq T$, so wäre $B^\circ \cap B_{\mathrm{u}}$ eine nichttriviale T-stabile Untergruppe und müßte eine Wurzelgruppe enthalten, was nach Konstruktion unmöglich ist. Die anderen Borel'schen über T dahingegen teilen sich Wurzelgruppen mit B und sind folglich nicht opponiert zu B.

9.4.12.13 (**Dicke Zelle**). Gegeben opponierte Borel'sche B, B° einer zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe G induziert die Multiplikation eine offene Einbettung

$$B_{\mathrm{u}} \times B^\circ \hookrightarrow G$$

In der Tat wissen wir aus 9.4.12.12, daß dieser Morphismus injektiv ist, und sein Bild ist die Bahn des neutralen Elements von G unter der Operation von $B_{\mathrm{u}} \times B^\circ$ durch $(a,b)g = agb^{-1}$. Mithin ist sein Bild $B_{\mathrm{u}}B^\circ \subset G$ nach 9.2.3.7 offen in seinem Abschluß und folglich selbst eine Varietät mit der induzierten Struktur und ein homogener Raum. Nach 7.5.9.14 kann bei einem Morphismus von irreduziblen Varietäten mit mindestens einer nichtleeren endlichen Faser die Dimension der Ausgangsvarietät nicht größer sein als die Dimension der Zielvarietät. Ein Dimensionsvergleich zeigt, daß $B_{\mathrm{u}}B^\circ$ dicht sein muß in G und folglich eine offene Teilmenge von G. Nach 9.3.5.15 induziert aufgrund der Bijektivität des Differentials in $(1,1)$ unser Morphismus dann einen Isomorphismus von Varietäten

$$B_{\mathrm{u}} \times B^\circ \xrightarrow{\sim} B_{\mathrm{u}}B^\circ$$

9.4.12.14 (**Diskussion der Terminologie**). Man folgert leicht, daß jede Borel'sche B einer zusamenhängenden reduktiven Gruppe G auf der Fahnenmannigfaltigkeit $\mathcal{B}_G$ von G nach 9.4.7.3 genau eine offene Bahn hat und daß diese Bahn aus den zu B opponierten Borel'schen besteht und daß sie als B_{u}-Varietät isomorph ist zu B_{u} selber und als abstrakte Varietät isomorph zu k^r mit $r := \dim B_{\mathrm{u}}$. Im Fall $k = \mathbb{C}$ und nach Übergang zur analytischen Topologie kann man die Fahnenmannigfaltigkeit als Zellkomplex im Sinne der algebraischen Topologie realisieren so, daß dieser $\mathbb{C}^r$ das Innere der zuletzt angeklebte Zelle ist. Daher rührt die Bezeichnung der offenen Bahn einer Borel'schen auf der Fahnenmannigfaltigkeit und übertragen der Bezeichnung verwandter Objekte als „dicke Zelle".

9.4.12.15 (**Doppelnebenklassen einer Borel'schen als Varietäten**). Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende reduktive affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Die Operation der Weylgruppe $W := \mathrm{W}(G,T)$ auf dem maximalen Torus T induziert eine Operation von W auf der Charaktergruppe $\mathfrak{X}(T)$. Durch Strukturtransport finden wir für $\alpha \in \mathrm{R}(G,T)$ und jeden Repräsentanten $\dot{w}$ von w die Identität $\dot{w}U_\alpha\dot{w}^{-1} = U_{w\alpha}$ alias $\dot{w}U_\alpha = U_{w\alpha}\dot{w}$. Es folgt

$$B\dot{w}B = B\dot{w} \prod_{\alpha \in R^+ \backslash w^{-1}R^+} U_\alpha$$

für das in einer beliebigen Reihenfolge ausmultiplizierte Produkt ganz rechts. Genauer ist das Produkt ganz rechts wegen $R^+ \backslash w^{-1}R^+ = R^+ \cap w^{-1}R^-$ für $R^- := -R^+$ die Wurzelgruppenzerlegung von $B_{\mathrm{u}} \cap \dot{w}^{-1}B_{\mathrm{u}}^\circ\dot{w}$. Unser Isomorphismus der dicken Zelle aus 9.4.12.13 oder vielmehr seine Variante $B \times B_{\mathrm{u}}^\circ \xrightarrow{\sim} BB_{\mathrm{u}}^\circ$ muß aber für jede abgeschlossene Teilmenge $A \ntriangleleft B_{\mathrm{u}}^\circ$ und jedes $g \in G$ einen Isomorphismus $B \times Ag \xrightarrow{\sim} BAg$ induzieren. So sehen wir daß die Multiplikation einen Isomorphismus $B \times \{\dot{w}\} \times (B_{\mathrm{u}} \cap \dot{w}^{-1}B_{\mathrm{u}}^\circ\dot{w}) \xrightarrow{\sim} BwB$ liefern muß und das Ausmultiplizieren bei jeder beliebigen Reihenfolge der Wurzelgruppen

in unserem Produkt einen Isomorphismus von Varietäten

$$B \times \{\dot{w}\} \times \prod_{\alpha \in R^+ \cap w^{-1}R^-} U_\alpha \quad \tilde{\to} \quad BwB$$

Insbesondere hat für jede Doppelnebenklasse der Gestalt BwB ihr Bild in der Fahnenmannigfaltigkeit $BwB/B \subset G/B$ nur einen Fixpunkt unter T und diese Fixpunkte sind paarweise verschieden, da die Weylgruppe nach 9.4.7.10 frei auf der Menge der Fixpunkten des Torus in der Fahnenmannifaltigkeit operiert. Es folgt, daß die Doppelnebenklassen BwB paarweise disjunkt sind.

Lemma 9.4.12.16. *Gegeben $G \supset B \supset T$ eine reduktive zusammenhängende Gruppe, eine Borel'sche und ein maximaler Torus und $\beta \in \Pi(\mathrm{R}^+(B,T))$ eine Wurzel aus der Basis zu unserem System positiver Wurzeln nach 23.2.2.6 gilt für jedes Element $w \in \mathrm{W}(G,T)$ der Weylgruppe*

$$BwBs_\beta B \subset BwB \cup Bws_\beta B$$

Beweis. Wir erinnern aus der allgemeinen Theorie der Wurzelsysteme 23.2.2.6, daß gegeben $R \supset R^+$ ein Wurzelsystem mit einem System positiver Wurzeln und eine Wurzel $\beta \in \Pi(R^+)$ der zugehörigen Basis des Wurzelsystems stets gilt $s_\beta : R^+ \backslash \beta \tilde{\to} R^+ \backslash \beta$. Gilt also $\beta \notin w^{-1}R^-$, so folgt

$$\begin{aligned} s_\beta(R^+ \cap w^{-1}R^-) &= s_\beta((R^+\backslash\beta) \cap w^{-1}R^-) \\ &= (R^+\backslash\beta) \cap s_\beta w^{-1}R^- \\ &= (R^+ \cap s_\beta w^{-1}R^-)\backslash\beta \end{aligned}$$

Daraus folgt immer noch für $\beta \notin w^{-1}R^-$ unmittelbar

$$BwBs_\beta B = Bw\left(\prod_{\alpha \in R^+ \cap w^{-1}R^-} U_\alpha\right)\dot{s}_\beta U_\beta = Bws_\beta B$$

Für $\beta \in w^{-1}R^-$ dahingegen gilt $\beta \notin v^{-1}R^-$ für $v := ws_\beta$ und damit kennen wir bereits die Identität $BvBs_\beta B = Bvs_\beta B$. Weiter wissen wir aus der Klassifikation halbeinfacher Gruppen vom Rang Eins und sogar bereits aus 9.4.8.5, daß unsere halbeinfache Gruppe G_β/S_β aus 9.4.12.2 unter seiner Borel'schen B_β/S_β zerfällt in die zwei Doppelnebenklassen zu den beiden Elementen der Weylgruppe, und amit hben wir natürlich auch

$$G_\beta = B_\beta \sqcup B_\beta s_\beta B_\beta = U_\beta T \cup U_\beta T \dot{s}_\beta U_\beta$$

eine Untergruppe von G ist, genauer die Untergruppe G_β. Daraus hinwiederum folgt durch Betrachtung der Wurzelgruppenzerlegung leicht, daß auch $B \sqcup Bs_\beta B$

eine Untergruppe von G ist, so daß insbesondere gilt $Bs_\beta Bs_\beta B \subset B \cup Bs_\beta B$. Wenn wir unsere Identität Identität $Bvs_\beta B = BvBs_\beta B$ mit $Bs_\beta B$ multiplizieren und $w = vs_\beta$ erinnern, finden wir also auch in diesem Fall

$$BwBs_\beta B = BvBs_\beta Bs_\beta B \subset BvB \cup Bvs_\beta B = Bws_\beta B \cup BwB \qquad \square$$

Satz 9.4.12.17 (**Bruhat-Zerlegung affiner algebraischer Gruppen**). *Seien $G \supset B \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einer Borel'schen und einem maximalen Torus. So ist G die disjunkte Vereinigung der Doppelnebenklassen von Repräsentanten der Weylgruppenelemente unter der Borel'schen, in Formeln*

$$G = \bigsqcup_{w \in \mathrm{W}(G,T)} BwB$$

Beispiel 9.4.12.18. Im Fall der allgemeinen linearen Gruppen kennen wir diese Zerlegung bereits aus 4.5.6.1.

Beweis. Es reicht offensichtlich, das für reduktives G zu zeigen. Unsere Doppelnebenklassen sind paarweise disjunkt nach 9.4.12.15. Nach 9.4.7.15 wird unsere Gruppe erzeugt von den Borel'schen über T und nach 9.4.7.9 sind je zwei dieser Borel'schen konjugiert unter der Weylgruppe. Also erzeugt $\mathrm{N}_G(T)$ zusammen mit B bereits ganz G. Zusätzlich wissen wir aber nach 23.2.2.12, daß die einfachen Spiegelungen die Weylgruppe erzeugen, also die s_β mit $\beta \in \Pi(\mathrm{R}^+(B,T))$. Also erzeugen bereits Repräsentanten $\dot{s}_\beta$ dieser einfachen Spiegelungen zusammen mit B die ganze Gruppe G. Unsere Vereinigung ist nun aber nicht leer und stabil unter der Multiplikation von rechts mit B und nach dem vorhergehenden Lemma 9.4.12.16 auch unter Multiplikation von rechts mit $\dot{s}_\beta$. Also ist sie ganz G. $\square$

Korollar 9.4.12.19 (**Bruhat-Zerlegung der Fahnenmannigfaltigkeit**). $(k = \bar{k})$. *Seien $G \supset B \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einer Borel'schen und einem maximalen Torus. So ist*

$$G/B = \bigsqcup_{w \in \mathrm{W}(G,T)} BwB/B$$

die Zerlegung der Fahnenmannigfaltigkeit in Bahnen der Borel'schen B und in jeder Bahn liegt genau ein Fixpunkt des maximalen Torus T. Weiter gibt es einen Isomorphismus von Varietäten $BwB/B \cong k^{l(w)}$ für $l(w) := |R^+ \cap wR^-|$.

Beweis. Nur die behauptete Beschreibung der B-Bahnen als Varietäten folgt nicht sofort aus der Bruhat-Zerlegung für Gruppen 9.4.12.17. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei G reduktiv. Nach 9.4.12.15 operiert die Gruppe $\prod_{\alpha \in R^+ \cap wR^-} U_\alpha$ frei und transitiv auf BwB/B. Man prüft leicht mit Hilfe des Differentials, daß diese Operation einen Isomorphismus von Varietäten liefert. Das Korollar folgt. $\square$

9.5 Danksagung

Dieses Skript ist der Versuch einer weiteren Vereinfachung der wunderbaren Darstellung von Tonny Springer [Spr81]. Dort schien mir allerdings Proposition 4.2.4 problematisch, bereits im Fall der Morphismen $\mathbb{C}\backslash p \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto z^2$ für $p \neq 0$. In derselben Weise schien mir Übung 4.2.6(2) dort problematisch. In der neuen Ausgabe [Spr98] wird dieser Punkt auch in anderer Weise angegangen, vergleiche Lemma 5.2.4 dort, bei dem ich jedoch den zweiten Satz des Beweises nicht vollständig durchdringen konnte. Andere wichtige Quellen waren meine Mitschrift einer Vorlesung von Jens Carsten Jantzen und die Bücher von Borel [Bor91] und Humphreys [Hum75] und Erklärungen von Friedrich Knop. Hilfreich war auch das Buch von Tauvel und Yu [TW05], in dem allerdings nur den Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null betrachtet wird. Hilfreich war weiter das Buch von Hochschild [**?**], das einen ganz eigenwilligen Zugang verfolgt. Eine gewisse Vereinfachung ist mir, so hoffe ich, insbesondere bei der Diskussion von Gruppen vom Rang Eins gelungen. Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Antonio Sartori, Leonardo Patimo, ...

Teil C

Analysis

Kapitel 10

Analysis 1: Funktionen einer reellen Veränderlichen

Inhalt

10.1 Grundlegendes 1546

10.1.1 Vollständige Induktion und binomische Formel . . 1546

10.1.2 Mengen und Teilmengen 1553

10.1.3 Mengenoperationen 1559

10.1.4 Abbildungen 1565

10.1.5 Mengen mit Verknüpfung 1571

10.1.6 Körper im Sinne der Algebra 1579

10.2 Die reellen Zahlen 1585

10.2.1 Rationale Wurzeln rationaler Zahlen 1585

10.2.2 Angeordnete Körper 1586

10.2.3 Maximum und Supremum 1590

10.2.4 Reelle Zahlen 1594

10.2.5 Rationale und reelle Zahlen im Vergleich 1602

10.3 Stetigkeit und Grenzwerte 1605

10.3.1 Anschauung für Funktionen 1605

10.3.2 Intervalle und Stetigkeit 1607

10.3.3 Zwischenwertsatz und Umkehrfunktionen 1615

10.3.4 Umfang des Einheitskreises 1621

10.3.5 Grenzwerte 1624

10.3.6 Vollständigkeit der reellen Zahlen 1636

10.3.7 Algorithmisches Wurzelziehen* 1639
10.4 Exponentialfunktion 1642
10.4.1 Konvergenz von Reihen 1642
10.4.2 Wachstum und Zerfall 1649
10.4.3 Logarithmus und allgemeine Potenzen 1656
10.4.4 Komplexe Zahlen 1663
10.4.5 Trigonometrische Funktionen 1668
10.5 Integration und Ableitung 1685
10.5.1 Stetige Funktionen auf Kompakta 1685
10.5.2 Integration stetiger Funktionen 1690
10.5.3 Ableitung an einer Stelle 1698
10.5.4 Ableitungsregeln 1701
10.5.5 Folgerungen aus Eigenschaften der Ableitung . . . 1706
10.5.6 Regeln von de l'Hospital 1716
10.5.7 Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung . 1720
10.5.8 Integrationsregeln 1723
10.5.9 Hyperbolische trigonometrische Funktionen 1732
10.5.10 Integration rationaler Funktionen 1736
10.6 Potenzreihen und höhere Ableitungen 1743
10.6.1 Funktionenfolgen und Potenzreihen 1743
10.6.2 Taylorentwicklung 1752
10.6.3 Rechnen mit Approximationen 1757
10.6.4 Der Abel'sche Grenzwertsatz* 1761
10.7 Raumwertige Funktionen und Schwingungen 1763
10.7.1 Bogenlänge und Geschwindigkeit 1763
10.7.2 Systeme von linearen Differentialgleichungen . . . 1774
10.7.3 Gedämpfte Schwingungen 1778
10.7.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung 1782
10.7.5 Gekoppelte Schwingungen* 1784
10.7.6 Angeregte Schwingungen 1785
10.8 Danksagung 1788

Dies ist der erste Teil eines Skriptums zur Analysis. Ich habe mir große Mühe gegeben, an jeder Stelle nur soviel Begrifflichkeit einzuführen, wie gerade eben nötig ist, um einerseits einen glatten und transparenten Fluß der Argumentation zu ermöglichen und andererseits regelmäßig motivierende Anwendungen geben zu können. Sowohl die Anwendungen als auch der durchsichtige Aufbau der Theorie erfordern jedoch in meinen Augen eine nach Möglichkeit koordinatenfreie Darstellung und damit den Aufbau der zugehörigen Begrifflichkeit, so daß am Schluß im Vergleich zu anderen Texten doch eher mehr abstrakte Konzepte eingeführt werden. Wie Sie noch an verschiedenen Stellen merken werden, will ich Sie eben am liebsten davon überzeugen, daß das Abstrakte das eigentlich Konkrete ist!

10.1 Grundlegendes

10.1.1 Vollständige Induktion und binomische Formel

Satz 10.1.1.1. *Für jede natürliche Zahl* $n \geq 1$ *gilt* $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beispiel 10.1.1.2. Im Fall $n = 5$ behauptet unser Satz $1+2+3+4+5 = 5 \times 6/2$ und in diesem Fall stimmt das schon mal: Beide Seiten sind 15. Man bemerke, daß wir beim Rechnen mit Symbolen wie etwa $n(n+1)$ die Multiplikationssymbole weggelassen haben, die nur beim Rechnen mit durch Ziffern dargestellten Zahlen wichtig sind.

Beweis. Bei diesem Beweis sollen Sie gleichzeitig das Beweisprinzip der **vollständigen Induktion** lernen. Wir bezeichnen mit $A(n)$ die Aussage, daß die Formel im Satz für ein gegebenes n gilt, und zeigen:

Induktionsbasis: Die Aussage $A(1)$ ist richtig. In der Tat gilt $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Induktionsschritt: Aus der Aussage $A(n)$ folgt die Aussage $A(n+1)$. In der Tat, unter der Annahme, daß unsere Formel für ein gegebenes n gilt, der sogenannten **Induktionsannahme** oder **Induktionsvoraussetzung**, rechnen wir

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &= \tfrac{n(n+1)}{2} + \tfrac{2(n+1)}{2} \\ &= \tfrac{(n+2)(n+1)}{2} \\ &= \tfrac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

und folgern so, daß die Formel auch für $n+1$ gilt.

Es ist damit klar, daß unsere Aussage $A(n)$ richtig ist alias daß unsere Formel gilt für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ □

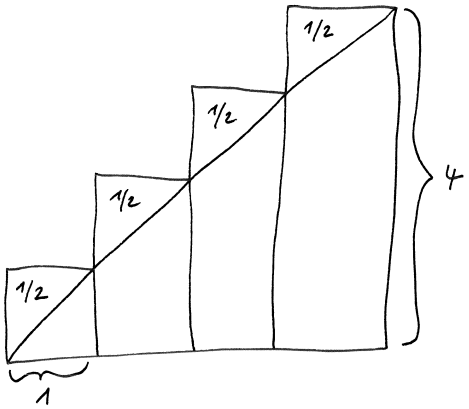
10.1.1.3. Das Zeichen □ deutet in diesem Text das Ende eines Beweises an und ist in der neueren Literatur weit verbreitet. Buchstaben in Formeln werden in der Mathematik üblicherweise kursiv notiert, so wie etwa das n oder auch das A im vorhergehenden Beweis. Nur Buchstaben oder Buchstabenkombinationen, die stets dasselbe bedeuten sollen, schreibt man nicht kursiv, wie etwa $\sin$ für den Sinus oder $\log$ für den Logarithmus.

10.1.1.4. Der vorhergehende Beweis stützt sich auf unser intuitives Verständnis der natürlichen Zahlen. Man kann das Konzept der natürlichen Zahlen auch formal einführen und so die natürlichen Zahlen in gewisser Weise „besser“ verstehen. Das wird in 2.1.6.11 und ausführlicher in 3.4.1.6 diskutiert. Das Wort „Induktion“ meint eigentlich „Hervorrufen“, so wie etwa das Betrachten einer Wurst die

Ausschüttung von Spucke induziert alias uns den Mund wässrig macht. Im Zusammenhang der vollständigen Induktion ist es dahingehend zu verstehen, daß die Richtigkeit unserer Aussage $A(1)$ die Richtigkeit von $A(2)$ induziert, die Richtigkeit von $A(2)$ hinwiederum die Richtigkeit von $A(3)$, die Richtigkeit von $A(3)$ die Richtigkeit von $A(4)$, und immer so weiter.

10.1.1.5. Es herrscht keine Einigkeit in der Frage, ob man die Null eine natürliche Zahl nennen soll. In diesem Text ist stets die Null mit gemeint, wenn von natürlichen Zahlen die Rede ist. Wollen wir die Null dennoch ausschließen, so sprechen wir wie oben von einer „natürlichen Zahl $n \geq 1$“.

10.1.1.6. Ich will kurz begründen, warum es mir natürlich scheint, auch die Null eine natürliche Zahl zu nennen: Hat bildlich gesprochen jedes Kind einer Klasse einen Korb mit Äpfeln vor sich und soll seine Äpfel zählen, so kann es ja durchaus vorkommen, daß in seinem Korb gar kein Apfel liegt, weil es zum Beispiel alle seine Äpfel bereits gegessen hat. In der Begrifflichkeit der Mengenlehre ausgedrückt, die wir in 10.1.2 einführen werden, muß man die leere Menge endlich nennen, wenn man erreichen will, daß jede Teilmenge einer endlichen Menge wieder endlich ist. Will man dann zusätzlich erreichen, daß die Kardinalität jeder endlichen Menge eine natürliche Zahl ist, so darf man die Null nicht aus den natürlichen Zahlen herauslassen.



Die Gesamtfläche dieses Treppenquerschnitts ist offensichtlich $4^2/2 + 4/2 = 4 \cdot 5/2$

10.1.1.7. Man kann sich den Satz wie im Bild angedeutet anschaulich klar machen als eine Formel für die Fläche des Querschnitts durch eine Treppe der Länge n mit Stufenabstand und Stufenhöhe Eins. In der Tat bedeckt ein derartiger Querschnitt ja offensichtlich ein halbes Quadrat der Kantenlänge n nebst n halben Quadraten

der Kantenlänge Eins. Ein weiterer Beweis geht so:

$$\begin{array}{rcl} 1+2+3+\ldots+n & = & \begin{array}{ccccccccc} 1/2 & + & 2/2 & + & 3/2 & +\ldots & +n/2 \\ +n/2 & & +(n-1)/2 & & +(n-2)/2 & +\ldots & +1/2 \end{array} \\ & = & \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} + \ldots + \frac{n+1}{2} \\ & = & n(n+1)/2 \end{array}$$

Ich will letzteren Beweis benutzen, um eine neue Notation einzuführen.

Definition 10.1.1.8. Gegeben $a_1, a_2, \ldots, a_n$ schreiben wir

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Das Symbol $\sum$ ist ein großes griechisches S und steht für „Summe“. Das Symbol $:=$ deutet an, daß die Bedeutung der Symbole auf der doppelpunktbehafteten Seite des Gleichheitszeichens durch den Ausdruck auf der anderen Seite unseres Gleichheitszeichens definiert ist. Im obigen und ähnlichen Zusammenhängen heißen $a_1, \ldots, a_n$ die **Summanden** und i der **Laufindex**, da er eben etwa in unserem Fall von 1 bis n läuft und anzeigt alias „indiziert“, welcher Summand gemeint ist.

10.1.1.9 (**Zur Sprache in der Mathematik**). Das Wort „Definition“ kommt aus dem Lateinischen und bedeutet „Abgrenzung“. In Definitionen versuchen wir, die Bedeutung von Symbolen und Begriffen so klar wie möglich festzulegen. Sie werden merken, daß man in der Mathematik die Angwohnheit hat, in Definitionen Worte der Umgangssprache wie Menge, Gruppe, Körper, Unterkörper, Abbildung etcetera „umzuwidmen“ und ihnen ganz spezielle und meist nur noch entfernt mit der umgangssprachlichen Bedeutung verwandte neue Bedeutungen zu geben. In mathematischen Texten sind dann überwiegend diese umgewidmeten Bedeutungen gemeint. In dieser Weise baut die Mathematik also wirklich ihre eigene Sprache auf, bei der jedoch die Grammatik und auch nicht ganz wenige Wörter doch wieder von den uns geläufigen Sprachen übernommen werden. Das muß insbesondere für den Anfänger verwirrend sein, der sich auch bei ganz harmlos daherkommenden Wörtern stets wird fragen müssen, ob sie denn nun umgangssprachlich gemeint sind oder vielmehr bereits durch eine Definition auf eine mehr oder weniger andere und viel genauere Bedeutung festgelegt wurden. Um hier zu helfen, habe ich mir große Mühe mit dem Index gegeben, den Sie ganz am Schluß dieses Skriptums finden und in dem alle an verschiedenen Stellen eingeführten oder umgewidmeten und dort fett gedruckten Begriffe verzeichnet sein sollten. Und an dieser Stelle muß ich Sie schon bitten, das Wort „Index“ nicht als Laufindex mißzuverstehen!

Beispiel 10.1.1.10. In der $\sum$-Notation liest sich der in 10.1.1.7 gegebene Beweis so:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^n i &= \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} \\
&\quad \text{und nach Indexwechsel } i = n+1-k \text{ hinten} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{n+1-k}{2} \\
&\quad \text{dann mache } k \text{ zu } i \text{ in der zweiten Summe} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{n+1-i}{2} \\
&\quad \text{und nach Zusammenfassen beider Summen} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{n+1}{2} \\
&\quad \text{ergibt sich offensichtlich} \\
&= n(\tfrac{n+1}{2})
\end{aligned}$$

Beispiel 10.1.1.11. Einen anderen Beweis derselben Formel liefert die Gleichungskette:

$$(n+1)^2 = \sum_{i=0}^n (i+1)^2 - i^2 = \sum_{i=0}^n 2i + 1 = 2\sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n 1 = n + 1 + 2\sum_{i=0}^n i$$

Definition 10.1.1.12. In einer ähnlichen Bedeutung wie das Symbol $\sum$ verwendet man auch das Symbol $\prod$, ein großes griechisches P, für „Produkt“ und schreibt

$$\prod_{i=1}^n a_i := a_1 a_2 \ldots a_n$$

Die $a_1, \ldots, a_n$ heißen in diesem und ähnlichen Zusammenhängen die **Faktoren** des Produkts.

Definition 10.1.1.13. Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ definieren wir die Zahl $n!$ (sprich: n **Fakultät**) durch die Formel

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^n i$$

Wir treffen zusätzlich die Vereinbarung $0! := 1$ und haben also $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ und so weiter.

10.1.1.14 (**Allgemeinere Summen und Produkte**). Wir vereinbaren, daß Produkten, bei denen die obere Grenze des Laufindex um Eins kleiner ist als seine untere Grenze, der Wert 1 zugewiesen werden soll, also etwa $1 = \prod_{i=1}^0 i = 0!$. Ebenso vereinbaren wir auch, daß Summen, bei denen die obere Grenze des Laufindex um Eins kleiner ist als seine untere Grenze, der Wert 0 zugewiesen werden

soll, so daß wir in Erweiterung unserer Formel 10.1.1.1 etwa schreiben könnten $0 = \sum_{i=1}^{0} i$. Der Sinn dieser Erweiterungen zeigt sich darin, daß damit Formeln wie $\sum_{i=k}^{l} a_i = \sum_{i=k}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{l} a_i$ auch für $m = k - 1$ richtig bleiben. Man mag sogar noch weiter gehen und die Definition von Summen und Produkten auf beliebige untere und obere Grenzen so erweitern, daß diese Formeln richtig bleiben, zumindest wenn alle Summanden ein Negatives beziehungsweise alle Faktoren einen Kehrwert haben. In dieser Allgemeinheit ist die fragliche Notation jedoch nur beim kontinuierlichen Analogon $\int$ des Summenzeichens üblich, wie in 10.5.2.10 ausgeführt werden wird.

Satz 10.1.1.15 (**Bedeutung der Fakultät**). *Es gibt genau $n!$ Möglichkeiten, n voneinander verschiedene Objekte in eine Reihenfolge zu bringen.*

Beispiel 10.1.1.16. Es gibt genau $3! = 6$ Möglichkeiten, die drei Buchstaben a, b und c in eine Reihenfolge zu bringen, nämlich

$$\begin{array}{ccc} abc & bac & cab \\ acb & bca & cba \end{array}$$

In gewisser Weise stimmt unser Satz sogar für $n = 0$: In der Terminologie, die wir in 10.2.3 einführen, gibt es genau eine Anordnung der leeren Menge.

Beweis. Hat man n voneinander verschiedene Objekte, so hat man n Möglichkeiten, ein Erstes auszusuchen, dann $(n-1)$ Möglichkeiten, ein Zweites auszusuchen und so weiter, bis schließlich nur noch eine Möglichkeit bleibt, ein Letztes auszusuchen. Insgesamt haben wir also wie behauptet $n!$ mögliche Reihenfolgen. □

Definition 10.1.1.17. Wir definieren für beliebiges n und jede natürliche Zahl k den **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ (sprich: n **über** k) durch die Regeln

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{k-j} = \frac{n(n-1)\dots \quad (n-k+1)}{k(k-1)\dots \qquad 1} \text{ für } k \geq 1 \text{ und } \binom{n}{0} := 1.$$

Der Sonderfall $k = 0$ wird im Übrigen auch durch unsere allgemeine Formel gedeckt, wenn wir unsere Konvention 10.1.1.14 beherzigen. Im Lichte des folgenden Satzes schlage ich vor, die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ statt „n über k“ inhaltsreicher „k aus n“ zu sprechen.

10.1.1.18. Die Bezeichnung als Binomialkoeffizienten leitet sich von dem Auftreten dieser Zahlen als Koeffizienten in der „binomischen Formel“ 10.1.1.23 ab.

Satz 10.1.1.19 (**Bedeutung der Binomialkoeffizienten**). *Gegeben natürliche Zahlen n und k gibt es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n voneinander verschiedenen Objekten k Objekte auszuwählen.*

Beispiel 10.1.1.20. Es gibt genau $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6$ Möglichkeiten, aus den vier Buchstaben a, b, c, d zwei auszuwählen, nämlich

$$\begin{array}{lll} a,b & b,c & c,d \\ a,c & b,d & \\ a,d & & \end{array}$$

Beweis. Wir haben n Möglichkeiten, ein erstes Objekt auszuwählen, dann $n-1$ Möglichkeiten, ein zweites Objekt auszuwählen, und so weiter, also insgesamt $n(n-1)\dots(n-k+1)$ Möglichkeiten, k Objekte *der Reihe nach* auszuwählen. Auf die Reihenfolge, in der wir ausgewählt haben, kommt es uns aber gar nicht an, jeweils genau $k!$ von unseren $n(n-1)\dots(n-k+1)$ Möglichkeiten führen nach 10.1.1.15 also zur Auswahl derselben k Objekte. Man bemerke, daß unser Satz auch im Extremfall $k = 0$ noch stimmt, wenn wir ihn geeignet interpretieren: In der Terminologie, die wir gleich einführen werden, besitzt in der Tat jede Menge genau eine nullelementige Teilmenge, nämlich die leere Menge. □

10.1.1.21. Offensichtlich gilt für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq k$ die Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Das folgt einerseits sofort aus der formalen Definition und ist andererseits auch klar nach der oben erklärten Bedeutung der Binomialkoeffizienten: Wenn wir aus n Objekten k Objekte auswählen, so bleiben $n-k$ Objekte übrig. Es gibt demnach gleichviele Möglichkeiten, k Objekte auszuwählen, wie es Möglichkeiten gibt, $n-k$ Objekte auszuwählen. Wir haben weiter $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ sowie $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ für jede natürliche Zahl $n \geq 1$.

Definition 10.1.1.22. Wie in der Schule setzen wir $a^k := \prod_{i=1}^{k} a$ und sprechen diesen usdruck „a hoch k“. In Worten ist also gemeint „das Produkt von k-mal dem Faktor a“. Im Lichte von 10.1.1.14 verstehen wir insbesondere $a^0 := 1$.

Satz 10.1.1.23. *Für jede natürliche Zahl n gilt die* **binomische Formel**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

10.1.1.24. Man beachte, wie wichtig unsere Konvention $a^0 = 1$ und insbesondere auch ihr Spezialfall $0^0 = 1$ für die Gültigkeit dieser Formel ist.

10.1.1.25. Die Bezeichung „binomische Formel“ leitet sich ab von der Vorsilbe „bi“ für Zwei, wie etwa in englisch „bicycle“ für „Zweirad“ alias „Fahrrad“, und dem lateinischen Wort „nomen“ für „Namen“. Mit den beiden „Namen“ sind hier a und b gemeint. Mehr dazu wird in 10.3.2.37 erklärt.

Erster Beweis. Beim Ausmultiplizieren erhalten wir das Monom $a^k b^{n-k}$ so oft, wie es Möglichkeiten gibt, aus unseren n Faktoren $(a+b)$ die k Faktoren auszusuchen, „in denen wir beim Ausmultiplizieren das a nehmen". Dieses Argument werden wir in 10.1.2.19 noch besser formulieren. □

Zweiter Beweis. Dieser Beweis ist eine ausgezeichnete Übung im Umgang mit unseren Symbolen und mit der vollständigen Induktion. Er scheint mir jedoch auch in einer für Beweise durch vollständige Induktion typischen Weise wenig durchsichtig. Zunächst prüfen wir für beliebiges n und jede natürliche Zahl $k \geq 1$ die Formel

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

durch explizites Nachrechnen. Dann geben wir unserer Formel im Satz den Namen $A(n)$ und prüfen die Formel $A(0)$ und zur Sicherheit auch noch $A(1)$ durch Hinsehen. Schließlich gilt es, den Induktionsschritt durchzuführen, als da heißt, $A(n+1)$ aus $A(n)$ zu folgern. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&\quad \text{und mit der Induktionsvoraussetzung} \\
&= (a+b)\textstyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&\quad \text{und durch Ausmultiplizieren} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&\quad \text{und Indexwechsel } k = i-1 \text{ in der ersten Summe} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&\quad \text{dann mit } k \text{ statt } i \text{ und Absondern von Summanden} \\
&= a^{n+1} b^0 + \textstyle\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \\
&\qquad + \textstyle\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + a^0 b^{n+1} \\
&\quad \text{und nach Zusammenfassen der mittleren Summen} \\
&= a^{n+1} b^0 + \textstyle\sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + a^0 b^{n+1} \\
&\quad \text{und Einbeziehen der abgesonderten Summanden} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

und folgern so tatsächlich $A(n+1)$ aus $A(n)$. □

10.1.1.26. Die Formel $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ für $k \geq 1$ kann man zur effektiven Berechnung der Binomialkoeffizienten mit dem sogenannten **Pascal'schen Dreieck**

benutzen: Im Schema

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

seien die Einsen an den Rändern vorgegeben und eine Zahl in der Mitte berechne sich als die Summe ihrer beiden oberen „Nachbarn“. Dann stehen in der $(n+1)$-ten Zeile der Reihe nach die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \ldots$, bis $\binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{n} = 1$. Wir haben also zum Beispiel nach der untersten Zeile in obigem Ausschnitt des Pascal'schen Dreiecks

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Übungen

Übung 10.1.1.27. Man finde und beweise eine Formel für $\sum_{i=1}^n i^2$. Hinweis: Man suche zunächst eine Formel für $\sum_{i=1}^n i^3 - (i-1)^3$ und beachte $i^3 - (i-1)^3 = 3i^2 - 3i + 1$.

Ergänzende Übung 10.1.1.28. Man zeige, daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Formel der Gestalt $\sum_{i=1}^n i^k = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0$ gilt mit $a_\kappa \in \mathbb{Q}$.

10.1.2 Mengen und Teilmengen

10.1.2.1. Beim Arbeiten mit reellen Zahlen oder räumlichen Gebilden reicht auf der Schule ein intuitives Verständnis meist aus, und wenn die Intuition in die Irre führt, ist ein Lehrer zur Stelle. Wenn Sie jedoch selbst unterrichten oder etwas beweisen wollen, reicht dieses intuitive Verständnis nicht mehr aus. Im folgenden werden deshalb zunächst der Begriff der reellen Zahlen und der Begriff des Raums zurückgeführt auf Grundbegriffe der Mengenlehre, den Begriff der rationalen Zahlen und elementare Logik. Bei der Arbeit mit diesen Begriffen führt uns die Intuition nicht so leicht in die Irre, wir geben uns deshalb mit einem intuitiven Verständnis zufrieden und verweisen jeden, der es noch genauer wissen will, auf eine Vorlesung über Logik. Wir beginnen mit etwas naiver Mengenlehre, wie sie von Georg Cantor in den Jahren 1874 bis 1897 begründet wurde und von der der berühmte Mathematiker David Hilbert einmal sagte: „Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können“. Natürlich gab es auch vor der Mengenlehre schon hoch entwickelte Mathematik: Beim Tod von Carl Friedrich Gauß im Jahre 1855 gab es diese Theorie noch gar nicht und

Fourier fand seine „Fourierentwicklung“ sogar bereits zu Beginn des 19.-ten Jahrhunderts. Er behauptete auch gleich in seiner „Théorie analytique de la chaleur“, daß sich jede beliebige periodische Funktion durch eine Fouriereihe darstellen lasse, aber diese Behauptung stieß bei anderen berühmten Mathematikern seiner Zeit auf Ablehnung und es entstand darüber ein heftiger Disput. Erst in besagtem „Paradies der Mengenlehre“ konnten die Fourier's Behauptung zugrundeliegenden Begriffe soweit geklärt werden, daß dieser Disput nun endgültig beigelegt ist. Ähnlich verhält es sich auch mit vielen anderen Fragestellungen. Da die Mengenlehre darüber hinaus auch vom didaktischen Standpunkt aus eine äußerst klare und durchsichtige Darstellung mathematischer Sachverhalte ermöglicht, hat sie sich als Grundlage der höheren Mathematik und der Ausbildung von Mathematikern an Universitäten schnell durchgesetzt und ist nun weltweit das „Alphabet der Sprache der Mathematik“. Man wird an Universitäten sogar geradezu dazu erzogen, alle Mathematik in der Sprache der Mengenlehre zu fassen und geometrischen Argumenten keine Beweiskraft zuzugestehen. Ich halte das bei der Ausbildung von Mathematikern auch für angemessen. Bei der Mathematik-Ausbildung im allgemeinen scheint mir dieses Vorgehen dahingegen nicht zielführend: In diesem Kontext sollte man meines Erachtens nicht mit demselben Maß messen, auch ohne alle Mengenlehre geometrisch erklärte Begriffe wie Gerade und Kreis, Ebene und Raum, als wohldefinierte Objekte der Mathematik zulassen und geometrischen Argumenten Beweiskraft zugestehen.

10.1.2.2. Im Wortlaut der ersten Zeilen des Artikels „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Erster Aufsatz)“ von Georg Cantor, erschienen im Jahre 1895, hört sich die Definition einer Menge so an:

> Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Verbinden wir mit einer Menge eine geometrische Vorstellung, so nennen wir ihre Elemente auch **Punkte** und die Menge selbst einen **Raum**. Ein derartiges Herumgerede ist natürlich keine formale Definition und birgt durchaus verschiedene Fallstricke, vergleiche 10.1.3.9. Das Ziel dieser Vorlesung ist aber auch nicht eine formale Begründung der Mengenlehre, wie Sie sie in der Logik kennenlernen können. Sie sollen vielmehr die Bedeutung dieser Worte intuitiv erfassen wie ein Kleinkind, das Sprechen lernt: Indem sie mir und anderen Mathematikern zuhören, wie wir mit diesen Worten sinnvolle Sätze bilden, uns nachahmen, und beobachten, welchen Effekt Sie damit hervorrufen. Unter anderem dazu sind die Übungsgruppen da.

Ergänzung 10.1.2.3. Bei der Entwicklung der Mathematik aus der Umgangssprache durch fortgesetztes Zuspitzen und Umwidmen des Wortschatzes muß ich an

den Baron von Münchhausen denken, wie er sich an seinen eigenen Haaren aus dem Sumpf zieht. Schon verblüffend, daß es klappt. Aber bei Kleinkindern, die Sprechen lernen, ist es ja noch viel verblüffender, wie sie die Bedeutung von Worten erfassen, ohne daß man sie ihnen in Worten erklären kann.

Beispiele 10.1.2.4. Endliche Mengen kann man durch eine vollständige Liste ihrer Elemente in geschweiften Klammern angeben, zum Beispiel in der Form

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Diese geschweiften Klammern heißen auch **Mengenklammern**. Die Elemente dürfen mehrfach genannt werden und es kommt nicht auf die Reihenfolge an, in der sie genannt werden. Wir haben also $\{1, 1, 2\} = \{2, 1\}$. Die Aussage „x ist Element von X“ wird mit $x \in X$ abgekürzt, ihre Verneinung „x ist nicht Element von X“ mit $x \notin X$. Zum Beispiel gilt $1 \in \{2, 1\}$ und $3 \notin \{2, 1\}$. Es gibt auch die sogenannte **leere Menge** $\emptyset = \{\ \}$, die gar kein Element enthält. Andere Beispiele sind die Mengen

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ der **natürlichen Zahlen**,

$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ der **ganzen Zahlen** und

$\mathbb{Q} := \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ der **rationalen Zahlen**.

Der Name letzterer Menge kommt von lateinisch „ratio“ für „Verhältnis“, der Buchstabe $\mathbb{Q}$ steht für „Quotient“. Man beachte, daß wir auch hier Elemente mehrfach genannt haben, es gilt ja $p/q = p'/q'$ genau dann, wenn $pq' = p'q$. Auf Deutsch bezeichnet man die rationalen Zahlen auch als **Bruchzahlen**, da man sich etwa ein Viertel eines Kekses als den Anteil denken kann, der entsteht, wenn man besagten Keks in vier gleiche Teile zerbricht. Einen Leitfaden zu einem formaleren Aufbau des Zahlensystems können Sie in 2.2.5.1 finden.

Ergänzung 10.1.2.5 (**Herkunft des Gleichheitszeichens**). Das Gleichheitszeichen $=$ scheint auf ein 1557 von Robert Recorde publiziertes Buch zurückzugehen und soll andeuten, daß das, was auf der linken und rechten Seite dieses Zeichens steht, so gleich ist wie die beiden Strichlein, die das uns heute so selbstverständliche Gleichheitszeichen bilden. Davor schrieb man statt einem Gleichheitszeichen meist ae für „äquivalent“.

Ergänzung 10.1.2.6 (**Diskussion der Notation**). In Texten, in deren Konventionen die Null keine natürliche Zahl ist, verwendet man meist die abweichenden Notationen $\mathbb{N}$ für die Menge $\{1, 2, \ldots\}$ und $\mathbb{N}_0$ für die Menge $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Die in diesem Text verwendete Notation $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ stimmt mit der internationalen Norm ISO 31-11 überein.

10.1.2.7. Die Bedeutung der Symbole $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ ist in der Mathematik weitgehend einheitlich. Man verwendet diesen Schrifttypus auch sonst gerne für Symbole, die in ihrer Bedeutung über große Teile der Mathematik hinweg einheitlich verwendet werden. Bei der Bedeutung von $\mathbb{N}$ ist man allerdings nie ganz sicher, ob die Null mitgemeint ist. In den Konventionen dieses Textes gilt $0 \in \mathbb{N}$.

10.1.2.8. Eine Menge, die nur endlich viele Elemente hat, nennen wir eine **endliche Menge**. Eine präzisere Definition dieses Konzepts wird in 3.4.1.2 gegeben. Wir vereinbaren bereits hier, daß wir auch die leere Menge endlich nennen. Die Zahl der Elemente einer endlichen Menge X nennen wir ihre **Kardinalität** oder **Mächtigkeit** und notieren sie

$$|X|$$

oder $\operatorname{card}(X)$. In der Literatur findet man auch die Notation $\sharp X$. Für endliche Mengen X ist demnach ihre Kardinalität stets eine natürliche Zahl $|X| \in \mathbb{N}$ und $|X| = 0$ ist gleichbedeutend zu $X = \emptyset$. Ist X unendlich, so schreiben wir bis auf weiteres kurzerhand $|X| = \infty$ und ignorieren in unserer Notation, daß auch unendliche Mengen „verschieden groß“ sein können. Für ein Beispiel für „verschieden große unendliche Mengen“ siehe 10.2.5.2 und für eine genauere Diskussion des Begriffs der Kardinalität vergleiche 6.5.3.1.

Definition 10.1.2.9. Eine Menge Y heißt **Teilmenge** einer Menge X, wenn jedes Element von Y auch ein Element von X ist. Man schreibt dafür $Y \subset X$ oder $X \supset Y$.

Beispiel 10.1.2.10. Die leere Menge Teilmenge jeder Menge, in Formeln $\emptyset \subset X$. $\{x\} \subset X$ ist gleichbedeutend zu $x \in X$. Es gilt $\emptyset \subset \{2, 1\} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

10.1.2.11 (**Elemente und Teilmengen**). Es ist im Kontext der Mengenlehre wichtig, bei einer Menge X sorgfältig zu unterscheiden zwischen ihren Elementen und ihren Teilmengen. Gegeben ein Element $x \in X$ ist für uns das Element $x \in X$ etwas anderes als die Teilmenge $\{x\} \subset X$, die nur aus dem einzigen Element x besteht. Gegeben eine Menge X mit einer Teilmenge $Y \subset X$ sage ich auch, X **umfaßt** Y. Gegeben ein Element $x \in X$ sage ich, x **gehört zu** X. Andere Sprechweisen möchte ich ungern auf eine so präzise Bedeutung festlegen. Gegeben eine Teilmenge $Y \subset X$ kann man sagen, „Y sei enthalten in X“ oder „Y liege in X“, und gegeben ein Element $x \in X$ kann man auch sagen, „x sei enthalten in X“ oder „x liege in X“. Was genau gemeint ist, gilt es dann aus dem Kontext zu erschließen.

10.1.2.12 (**Diskussion der Notation**). Gegeben eine Menge X verwenden wir die Schreibweise $Y \subsetneq X$ als Abkürzung für $(Y \subset X$ und $Y \neq X)$. Eine von der ganzen Menge verschiedene Teilmenge Y einer Menge X nennen wir auch eine **echte Teilmenge von** X. Bei diesen Notationen folgen wir Cantor und Bourbaki,

die sehr viel später festgelegte internationalen Norm ISO 31-11 weicht jedoch davon ab. In der folgenden Tabelle stellen wir diese beiden Konventionen einander gegenüber.

Cantor und Bourbaki	Norm ISO 31-11	Bedeutung
$\subset$	$\subseteq$	ist Teilmenge von
$\subsetneq$	$\subset$	ist echte Teilmenge von

Ich ziehe die Konvention von Cantor und Bourbaki vor, weil ich sie gewohnt bin und weil man sehr oft Teilmengen zu betrachten hat und nur vergleichsweise selten echte Teilmengen. Ich muß jedoch zugeben, daß die in diesem Text gewählte Notation $\subset, \subsetneq$ mit den üblichen Notationen $\leq, <$ für Ungleichungen weniger gut zusammenpaßt als die Konvention nach ISO 31-11.

10.1.2.13. Oft bildet man neue Mengen als Teilmengen bestehender Mengen. Gebräuchlich ist dazu eine Notation, bei der man zwischen den Mengenklammern hinter einem senkrechten Strich dazuschreibt, welche zusätzliche Eigenschaft die Elemente einer Teilmenge haben sollte, so daß man Teilmengen Y einer Menge X angeben kann in der Form

$$Y = \{x \in X \mid x \text{ hat eine zusätzlich noch gewisse Eigenschaft}\}$$

Zum Beispiel gilt $\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 0\}$, lies „die Menge der natürlichen Zahlen ist die Teilmenge der Menge der ganzen Zahlen bestehend aus allen ganzen Zahlen, die ≥ 0 sind“, und $\{0, 1\} = \{a \in \mathbb{N} \mid a^2 = a\}$.

Definition 10.1.2.14. Es ist auch erlaubt, die „Menge aller Teilmengen“ einer gegebenen Menge X zu bilden. Sie heißt die **Potenzmenge von** X und wird $\mathcal{P}(X)$ oder $\mathrm{Pot}(X)$ notiert.

Beispiel 10.1.2.15. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ kann man als die Menge aller möglichen Ausgänge einer Versuchsanordnung interpretieren, bei der man dreimal eine Münze wirft. Dazu mag man etwa jedem Ausgang die Menge der Wurfnummern zuordnet, bei denen Wappen herauskam. So würde etwa dem Ausgang WZW die Teilmenge $\{1, 3\}$ zugeordnet.

10.1.2.16 (**Kardinalität der Potenzmenge**). Ist X eine endliche Menge, so ist auch ihre Potenzmenge endlich und es gilt die Formel $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$. Für die dreielementige Menge $X = \{1, 2, 3\}$ besteht ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ zum Beispiel aus $8 = 2^3$ Elementen und wir haben genauer

$$\mathcal{P}(X) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$$

Die Teilmenge $\{1\} \subset \{1,2,3\}$, die nur aus dem Element 1 besteht, ist also ein Element der Potenzmenge $\{1\} \in \mathcal{P}(\{1,2,3\})$. Das Element 1 ist dahingegen kein Element der Potenzmenge, sondern ein Element der ursprünglichen Menge $1 \in \{1,2,3\}$.

Satz 10.1.2.17 (**Bedeutung der Binomialkoeffizienten**). *Gegeben natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$ gibt der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ die Zahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an. In Formeln ausgedrückt haben wir unter der Annahme $|X| = n$ also*

$$|\{Y \subset X \mid |Y| = k\}| = \binom{n}{k}$$

Beweis. Vollständige Induktion über n. Für $n = 0$ gilt die Aussage, denn eine nullelementige Menge hat genau eine k-elementige Teilmenge falls $k = 0$ und keine k-elementige Teilmenge falls $k \geq 1$. Nehmen wir nun an, die Aussage sei für ein n schon bewiesen. Eine $(n+1)$-elementige Menge X schreiben wir als $X = M \cup \{x\}$ mit dem gleich in 10.1.3.1 formal eingeführten Vereingungszeichen $\cup$, wo M eine n-elementige Menge ist und $x \notin M$. Ist $k = 0$, so gibt es genau eine k-elementige Teilmenge von $M \cup \{x\}$, nämlich die leere Menge. Ist $k \geq 1$, so gibt es in $M \cup \{x\}$ nach Induktionsannahme genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen, die x nicht enthalten. Die k-elementigen Teilmengen dahingegen, die x enthalten, ergeben sich durch Hinzunehmen von x aus den $(k-1)$-elementigen Teilmengen von M, von denen es gerade $\binom{n}{k-1}$ gibt. Insgesamt hat $M \cup \{x\}$ damit also genau $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ Teilmengen mit genau k Elementen. □

10.1.2.18. Wieder scheint mir dieser Beweis in der für vollständige Induktion typischen Weise undurchsichtig. Ich ziehe deshalb den in 10.1.1.19 gegebenen weniger formellen Beweis vor. Man kann auch diesen Beweis formalisieren und verstehen als Spezialfall der sogenannten „Bahnformel“, vergleiche 4.5.2.3.

10.1.2.19 (**Variante zum Beweis der binomischen Formel**). Wir geben nun die versprochene präzise Formulierung unseres ersten Beweises der binomischen Formel 10.1.1.23. Wir rechnen dazu

$$(a+b)^n = \sum_{Y \subset \{1,2,\ldots,n\}} a^{|Y|} b^{n-|Y|}$$

Die rechte Seite soll hier in Verallgemeinerung der in 10.1.1.8 eingeführten Notation bedeuten, daß wir für jede Teilmenge Y von $\{1,2,\ldots,n\}$ den angegebenen Ausdruck $a^{|Y|}b^{n-|Y|}$ nehmen und alle diese Ausdrücke aufsummieren. Dann fassen wir gleiche Summanden zusammen und erhalten mit 10.1.2.17 die binomische Formel.

Übungen

Übung 10.1.2.20. Es gilt $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$.

Übung 10.1.2.21. Man zeige $(a+b+c)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} a^i b^j c^k$.

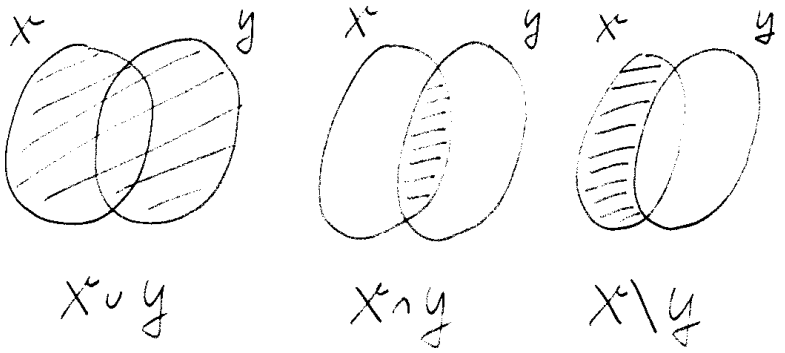
10.1.3 Mengenoperationen

Definition 10.1.3.1. Wir erinnern, daß wir $:=$ als Abkürzung für „ist definiert als“ verwenden und daß „oder“ in der Mathematik stets das „nichtausschließende oder“ meint. Gegeben zwei Mengen X, Y können wir unter anderem auf folgende Weisen neue Mengen bilden:

1. Die **Vereinigung** $X \cup Y := \{z \mid z \in X \text{ oder } z \in Y\}$, zum Beispiel ist $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$;

2. Den **Schnitt** oder auch **Durchschnitt** $X \cap Y := \{z \mid z \in X \text{ und } z \in Y\}$, zum Beispiel ist $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$;

3. Die **Differenz** $X \backslash Y := \{z \in X \mid z \notin Y\}$, zum Beispiel haben wir $\{1,2\} \backslash \{2,3\} = \{1\}$. Man schreibt statt $X \backslash Y$ auch $X - Y$. Ist Y eine Teilmenge von X, so heißt $X \backslash Y$ das **Komplement** von Y in X oder ausführlicher die **Komplementmenge**;

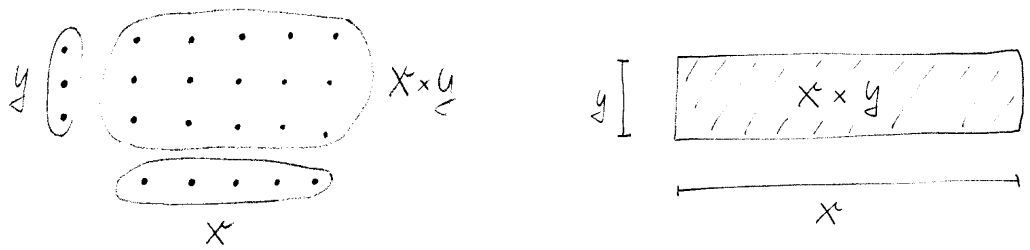


Van-de-Ven-Diagramme für Vereinigung, Schnitt und Differenz

4. Das **Produkt** $X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$ oder ausführlicher **kartesische Produkt**. Es gilt also $(x,y) = (x',y')$ genau dann, wenn gilt $x = x'$ und $y = y'$. Zum Beispiel haben wir

$$\{1,2\} \times \{1,2,3\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$$

Oft benutzt man für das Produkt $X \times X$ einer Menge X mit sich selbst die Abkürzung $X^2 := X \times X$ und nennt das die Menge aller **angeordneten Paare** von Elementen von X.



Zwei anschauliche Darstellungen des Produkts von zwei Mengen. Links das Produkt einer Menge mit fünf und einer Menge mit drei Elementen. Rechts das Produkt zweier Geradensegmente, aufgefaßt als unndliche Mengen. In beiden Fällen wird ein Paar $(x, y) \in X \times Y$ dargestellt durch einen Punkt, der über x und neben y liegt.

10.1.3.2. Eine gute Anschauung für die ersten drei Operationen liefern die sogenannten **van-de-Ven-Diagramme**, wie sie die Bilder zeigen. Sie sind allerdings nicht zu genau zu hinterfragen, denn ob die Punkte auf einem Blatt Papier im Sinne von Cantor „bestimmte wohlunterschiedene Objekte unserer Anschauung“ sind, scheint mir nicht ohne weiteres so klar. Wenn man jedoch jedes der schraffierten Gebiete im Bild als die Menge aller darin liegenden Kreuzungspunkte auf einem dazugedachten Millimeterpapier auffaßt und keine dieser Kreuzungspunkte auf den Begrenzungslinien liegen, so können sie wohl schon als eine Menge im Cantor'schen Sinne angesehen werden.

10.1.3.3. Zwei Teilmengen einer gegebenen Menge, die kein gemeinsames Element haben, heißen **disjunkt**. Äquivalent dazu ist die Bedingung, daß ihr Schnitt die leere Menge ist.

10.1.3.4 (**Mehrdeutigkeiten mit dem Komma als Trenner**). Die Verwendung des Kommas als Trenner ist hier problematisch, da $(1, 2)$ nun zweierlei bedeuten kann: Zum einen ein Element des kartesischen Produkts $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, zum anderen aber auch den eingeklammerten Dezimalbruch $1{,}2$. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen. In diesem Text werden Dezimalbrüche nur selten vorkommen. In deutschen Schulbüchern verwendet man für angeordnete Paare meist die abweichende Notation $(x|y)$, um auch Paare von Dezimalbrüchen unmißverständlich notieren zu können.

10.1.3.5 (**Diskussion der Terminologie**). Die Bezeichnung als „Schnitt“ kommt wohl her von der Vorstellung des Schnitts zweier Geraden, wenn man sie als Teilmengen der Ebene denkt und diese hinwiederum als ein Blatt Papier, das man

längs der einen Gerade entzweischneiden kann. Der Punkt, an dem die andere Gerade entzweigeschnitten wird, ist dann der Schnittpunkt und der Schnitt unserer beiden Geraden besteht genau aus diesem einen Punkt.

10.1.3.6 (**Mengenlehre und das Bilden von Begriffen**). Wir werden in unserer naiven Mengenlehre die ersten drei Operationen „Vereinigung“, „Schnitt“ und „Differenz“ aus 10.1.3.1 nur auf Teilmengen einer gemeinsamen Obermenge anwenden, die uns in der einen oder anderen Weise bereits zur Verfügung steht. Die Potenzmenge und das kartesische Produkt dahingegen benutzen wir, um darüber hinaus neue Mengen zu erschaffen. Diese Konstruktionen erlauben es, im Rahmen der Mengenlehre so etwas wie Abstraktionen zu bilden: Wenn wir uns etwa die Menge T aller an mindestens einem Tag der Weltgeschichte lebenden oder gelebt habenden Tiere als eine Menge im Cantor'schen Sinne denken, so würden wir Konzepte wie „männlich“ oder „Hund“ oder „Fleischfresser“ formal als Teilmengen dieser Menge alias als Elemente von $\mathcal{P}(T)$ formalisieren. Das Konzept „ist Kind von“ würde dahingegen formalisiert als eine Teilmenge $K \subset T \times T$ des kartesischen Produkts unserer Menge T mit sich selbst alias als ein Element $K \in \mathcal{P}(T \times T)$, nämlich als die Teilmenge $K := \{(x, y) \in T \times T \mid x \text{ ist Kind von } y\}$.

10.1.3.7. Für das Rechnen mit Mengen überlegt man sich die folgenden Regeln, die ich gleich mit ihren üblichen Bezeichnungen angebe:

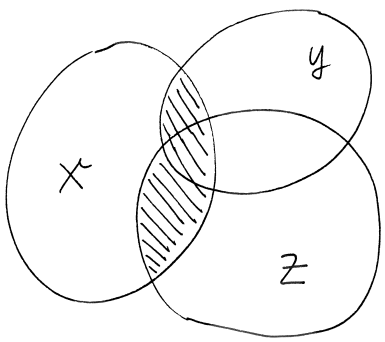
Assoziativgesetze:	$X \cap (Y \cap Z)$	$=$	$(X \cap Y) \cap Z$
	$X \cup (Y \cup Z)$	$=$	$(X \cup Y) \cup Z$
Distributivgesetze:	$X \cup (Y \cap Z)$	$=$	$(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
	$X \cap (Y \cup Z)$	$=$	$(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
de Morgan'sche Regeln:	$X \backslash (Y \cup Z)$	$=$	$(X \backslash Y) \cap (X \backslash Z)$
	$X \backslash (Y \cap Z)$	$=$	$(X \backslash Y) \cup (X \backslash Z)$
Komplement der Differenzmenge:	$X \backslash (X \backslash Y)$	$=$	$X \cap Y$

Eine gute Anschauung für diese Regeln liefern die van-de-Ven-Diagramme, wie die Bilder zeigen. Das liegt daran, daß alle acht möglichen Lagen in Bezug auf unsere drei Mengen in diesen Diagrammen als Flächen zu sehen sind.

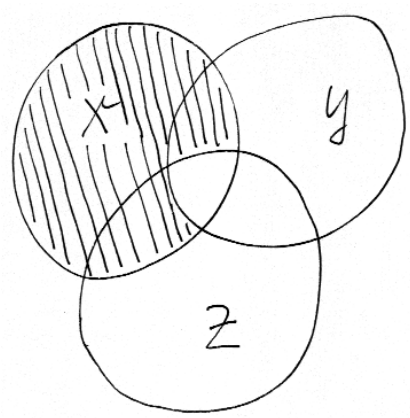
10.1.3.8. Ich zeige beispielhaft die Regel $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$. Es reicht, statt der Gleichheit die beiden Inklusionen $\subset$ und $\supset$ zu zeigen.

Ich beginne mit $\subset$. Sicher gilt $(Y \cap Z) \subset Y$, also auch $X \cup (Y \cap Z) \subset X \cup Y$. Ebenso zeigt man $X \cup (Y \cap Z) \subset X \cup Z$ und damit folgt schon mal $\subset$.

Bleibt noch $\supset$ zu zeigen. Das will mir nur durch Betrachtung von Elementen gelingen. Gegeben $a \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ gilt entweder $a \in X$ oder $a \notin X$. Falls $a \in X$ haben wir eh $a \in X \cup (Y \cap Z)$. Falls $a \notin X$ folgt aus $a \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$



$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

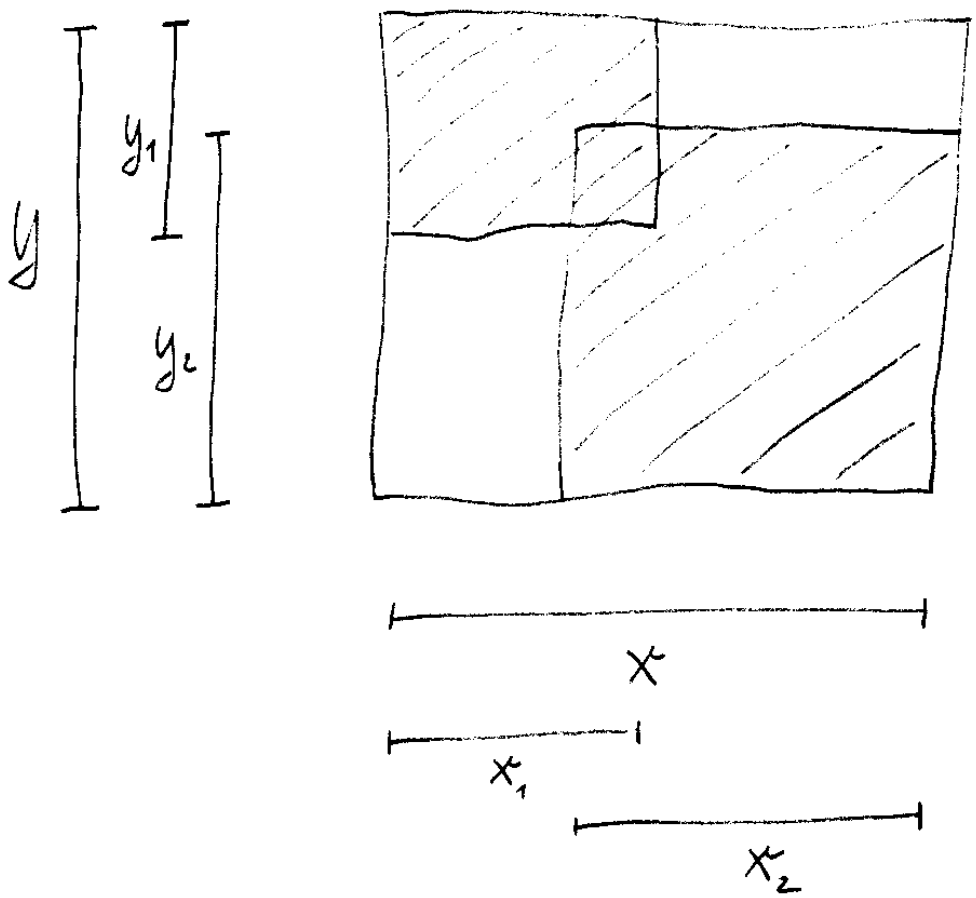


$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$

erst $a \in (X \cup Y)$ und dann $a \in Y$ und weiter erst $a \in (X \cup Z)$ und dann $a \in Z$, also $a \in Y \cap Z \subset X \cup (Y \cap Z)$. Wir haben somit gezeigt, daß jedes Element a von $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ auch zu $X \cup (Y \cap Z)$ gehört. Damit folgt die behauptete Inklusion $\supset$.

Ergänzung 10.1.3.9 (**Das Russell'sche Paradoxon**). Ich will nicht verschweigen, daß der in diesem Abschnitt dargestellte naive Zugang zur Mengenlehre durchaus begriffliche Schwierigkeiten mit sich bringt: Zum Beispiel darf die Gesamtheit $\mathcal{M}$ aller Mengen nicht als Menge angesehen werden, da wir sonst die „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten", gegeben durch die formelhafte Beschreibung $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{M} \mid A \notin A\}$, bilden könnten. Für diese Menge kann aber weder $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ noch $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$ gelten. Diese Art von Schwierigkeiten kann erst ein formalerer Zugang klären und auflösen, bei dem man unsere naiven Vorstellungen durch Ketten von Zeichen aus einem wohlbestimmten endlichen Alphabet ersetzt und unsere Vorstellung von Wahrheit durch die Verifizierbarkeit vermittels rein algebraischer „erlaubter Manipulationen" solcher Zeichenketten, die in „Axiomen" festgelegt werden. Diese Verifikationen kann man dann durchaus auch einer Rechenmaschine überlassen, so daß wirklich auf „objektivem" Wege entschieden werden kann, ob ein „Beweis" für die „Richtigkeit" einer unserer Zeichenketten in einem vorgegebenen axiomatischen Rahmen stichhaltig ist. Allerdings kann in derartigen Systemen von einer Zeichenkette algorithmisch nur entschieden werden, ob sie eine „sinnvolle Aussage" ist, nicht aber, ob sie „bewiesen" werden kann. Noch viel stärker zeigt der Unvollständigkeitssatz von Gödel, daß es in einem derartigen axiomatischen Rahmen, sobald er reichhaltig genug ist für eine Beschreibung des Rechnens mit natürlichen Zahlen, stets sinnvolle Aussagen gibt derart, daß entweder sowohl die Aussage als auch ihre Verneinung oder aber weder die Aussage noch ihre Verneinung bewiesen werden können. Mit diesen und ähnlichen Fragestellungen beschäftigt sich die Logik.

Vorschau 10.1.3.10 (**Weitere Konstruktionen der Mengenlehre**). Um mich nicht dem Vorwurf auszusetzen, während des Spiels die Spielregeln ändern zu wollen, sei bereits hier erwähnt, was noch hinzukommen soll. Die einzigen grundlegenden Konstruktionen, die noch fehlen, sind das Bilden der „disjunkten Vereinigung" und des „kartesischen Produkts" zu einer „beliebigen Mengenfamilie" in 4.7.7.17 und 4.7.7.7. In **??** besprechen wir weiter Schnitt und Vereinigung einer „beliebigen Familie von Teilmengen einer gegebenen Menge". In 3.1.9 werden einige weniger offensichtliche Argumentationen im Zusammenhang mit dem sogenannten „Zorn'schen Lemma" erläutert, die meines Erachtens bereits an den Rand dessen gehen, was man in unserem informellen Rahmen der naiven Mengenlehre als Argumentation noch vertreten kann. In 3.4.1 wird die Konstruktion der natürlichen Zahlen im Rahmen der Mengenlehre diskutiert, insbesondere geben wir erst dort eine formale Definition des Begriffs einer endlichen Menge. Sicher ist es in



Aus $X = X_1 \cup X_2$ und $Y = Y_1 \cup Y_2$ folgt noch lange nicht
$X \times Y = (X_1 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2)$

gewisser Weise unbefriedigend, das Fundament des Hauses der Mathematik erst fertigzustellen, wenn bereits erste Stockwerke stehen und bewohnt sind. Andererseits will ich aber auch vermeiden, daß Sie mir auf einem gewaltigen Fundament, das die ganze Mathematik tragen kann, im ersten Winter(semester) jämmerlich erfrieren.

10.1.3.11 (**Der Sinn von Genauigkeit und sorgfältiger Sprache**). Ich könnte mir gut vorstellen, daß verschiedene meiner Leser denken, diese ganze Pedanterie sei doch eigentlich überflüssig und jetzt sollten wir doch einfach mal fröhlich losrechnen wie das in der Schule ja auch sehr gut ging. Ich will hier erklären, warum Pedanterie in diesem Zusammenhang wichtig ist. Viele von Ihnen werden wissen, wie man mit einem einfachen Blatt Papier zum Mond kommt: 42-mal Falten und draufsteigen, das war's schon. So ähnlich ist es in der Mathematik: Etwas völlig Banales wie die naive Mengenlehre wird in den etwa dreißig Vorlesungsdoppelstunden des Wintersemesters jedes Mal auf's neue gefaltet und wenn Sie dann am Ende des Wintersemesters zurückblicken, kann Ihnen schon leicht schwindlig werden. Das funktioniert mit wirklichem Papier nur eingeschränkt, aber wenn man sehr festes und glattes „Gedankenpapier“ nimmt, und solches Gedankenpapier ist eben gerade die Mengenlehre, dann klappt es verblüffend gut. Man muß dazu aber mit der Herstellung dieses Gedankenpapiers ebenso wie beim Falten sorgfältig sein bis zur Pedanterie, denn auch die kleinste Ungeschicklichkeit vervielfacht sich bei diesem Vorgehen mit derselben Schnelligkeit wie die gedankliche Höhe und bringt, eh man sich's versieht, alles zum Einsturz.

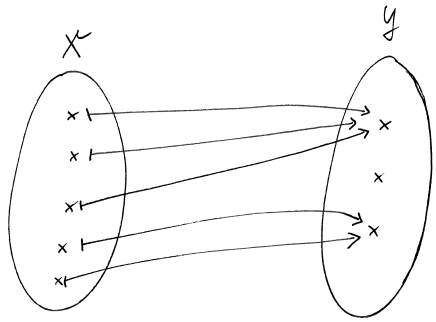
Übungen

Übung 10.1.3.12. Sind X und Y endliche Mengen, so gilt für die Kardinalitäten $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$ und $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.

10.1.4 Abbildungen

Definition 10.1.4.1. Seien X, Y Mengen. Eine **Abbildung** $f : X \to Y$ ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet, das **Bild** von x unter f, auch genannt der **Wert** von f an der Stelle x. Man spricht dann auch vom **Auswerten** der Funktion f an der Stelle x oder vom **Einsetzen** von x in f und schreibt manchmal abkürzend $f(x) = fx$.

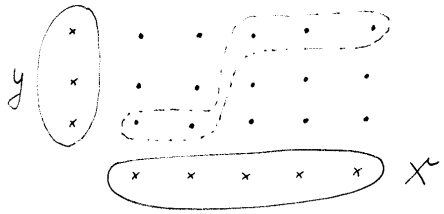
10.1.4.2. Wem das zu vage ist, der mag die alternative Definition vorziehen, nach der eine **Abbildung** $f : X \to Y$ eine Teilmenge $f \subset X \times Y$ ist derart, daß es für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt mit $(x, y) \in f$. Dies eindeutig bestimmte y schreiben wir dann $f(x)$ und sind auf einem etwas formaleren Weg wieder an



Eine Abbildung einer Menge mit fünf in eine mit drei Elementen

demselben Punkt angelangt. In unseren Konventionen nennen wir besagte Teilmenge den **Graphen von** f und notieren sie mit dem Symbol Γ (sprich: Gamma), einem großen griechischen G, und schreiben

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$



Der Graph der oben angegebenen Abbildung, wobei das X oben mit dem X hier identifiziert wurde durch „Umkippen nach Rechts“

Definition 10.1.4.3. Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so nennen wir X ihren **Definitionsbereich** und Y ihren **Wertebereich**. Zwei Abbildungen nennen wir gleich, wenn sie denselben Definitionsbereich X, denselben Wertebereich Y und dieselbe Abbildungsvorschrift $f \subset X \times Y$ haben.

10.1.4.4 (**Die Notationen $\to$ und $\mapsto$**). Wir notieren Abbildungen oft in der Form

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

und in verschiedenen Verkürzungen dieser Notation. Zum Beispiel sprechen wir von „einer Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ von der Menge der natürlichen Zahlen in sich selber“ oder „der Abbildung $n \mapsto n^3$ von der Menge der natürlichen Zahlen in sich selber“. Wir benutzen unsere zwei Arten von Pfeilen $\to$ und $\mapsto$ auch im allgemeinen in derselben Weise.

Beispiel 10.1.4.5. Für jede Menge X haben wir die **identische Abbildung** oder **Identität**

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id} = \mathrm{id}_X : & X & \to & X \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

Ein konkreteres Beispiel für eine Abbildung ist das Quadrieren

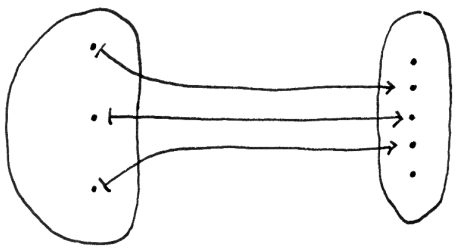
$$\begin{array}{rccc} q : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & n^2 \end{array}$$

Beispiel 10.1.4.6. Gegeben zwei Mengen X, Y erklärt man die **Projektionsabbildungen** oder **Projektionen** $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ beziehungsweise $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ durch die Vorschrift $(x, y) \mapsto x$ beziehungsweise $(x, y) \mapsto y$. In manchen Zusammenhängen notiert man sie auch abweichend pr_1 und pr_2 für die „Projektion auf die erste beziehungsweise zweite Komponente".

10.1.4.7 (**Konstanten und konstante Abbildungen**). Gegeben ein festes $c \in Y$ schreiben wir oft auch kurz c für die **konstante Abbildung** $X \to Y$ gegeben durch $x \mapsto c$ für alle $x \in X$. Damit verbunden ist die Hoffnung, daß aus dem Kontext klar wird, ob im Einzelfall die Abbildung $c : X \to Y$ oder das Element $c \in Y$ gemeint sind.

Definition 10.1.4.8. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

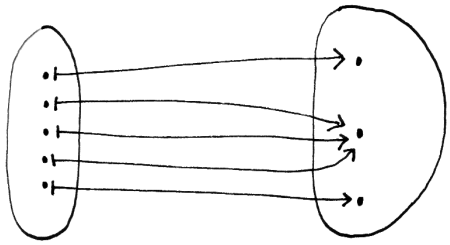
1. f heißt **injektiv** oder eine **Injektion**, wenn aus $x \neq x'$ folgt $f(x) \neq f(x')$. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß es für jedes $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Injektionen schreibt man oft $\hookrightarrow$.



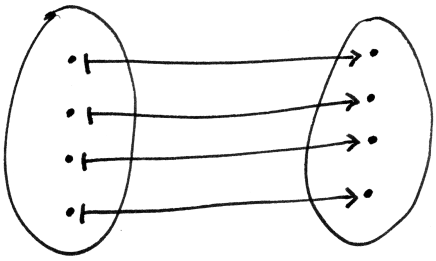
Eine Injektion

2. f heißt **surjektiv** oder eine **Surjektion**, wenn es für jedes $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Surjektionen schreibt man manchmal $\twoheadrightarrow$.

3. f heißt **bijektiv** oder eine **Bijektion**, wenn f injektiv und surjektiv ist. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß es für jedes $y \in Y$ genau ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Bijektionen schreibt man oft $\xrightarrow{\sim}$.



Eine Surjektion



Eine Bijektion

Definition 10.1.4.9. Sind drei Mengen X, Y, Z gegeben und dazwischen Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$, so definieren wir die **Verknüpfung** unserer Abbildungen f und g, eine Abbildung $g \circ f : X \to Z$, durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & X & \to & Z \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

10.1.4.10 (**Diskussion der Notation**). Die Notation $g \circ f$, sprich „g nach f", für „erst f, dann g" ist gewöhnungsbedürftig, erklärt sich aber durch die offensichtliche Formel $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Ich sage, $g \circ f$ entstehe aus g durch **Vorschalten von** f und aus f durch **Nachschalten von** g. Oft kürzt man auch $g \circ f$ mit gf ab. Mit dieser Abkürzung muß man jedoch sorgsam umgehen, da im Fall von zwei Abbildungen f, g von derselben Menge in einen Zahlbereich, etwa $f, g : X \to \mathbb{Q}$, der Ausdruck fg vielmehr für die Abbildung $x \mapsto f(x)g(x)$ reserviert ist, das sogenannte „punktweise Produkt" unserer beiden Funktionen.

Beispiel 10.1.4.11. Betrachten wir zusätzlich zum Quadrieren $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die Abbildung $t : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x + 1$, so gilt $(q \circ t)(x) = (x + 1)^2$ aber $(t \circ q)(x) = x^2 + 1$.

10.1.4.12. Ist $X \subset Y$ eine Teilmenge, so ist die **Einbettung** oder **Inklusion** $i : X \to Y$, $x \mapsto x$ stets injektiv. Ist $g : Y \to Z$ eine Abbildung und $X \subset Y$ eine Teilmenge, so nennen wir die Verknüpfung $g \circ i$ von g mit der Inklusion auch die **Einschränkung** von g auf X und notieren sie

$$g \circ i =: g|X = g|_X : X \to Z$$

Oft bezeichnen wir eine Einschränkung aber auch einfach mit demselben Buchstaben g in der Hoffnung, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, welche Abbildung genau gemeint ist. Das ist nicht ganz unproblematisch: So ist etwa unsere Abbildung $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n^2$ nicht injektiv, ihre Restriktion $q|_{\mathbb{N}}$ zu einer Abbildung $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist aber durchaus injektiv.

Beispiele 10.1.4.13. Unsere Abbildung $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n^2$ ist weder injektiv noch surjektiv. Die Identität $\mathrm{id} : X \to X$ ist stets bijektiv. Sind X und Y endliche Mengen, so gibt es genau dann eine Bijektion von X nach Y, wenn X und Y dieselbe Kardinalität haben, in Formeln $|X| = |Y|$.

Satz 10.1.4.14. *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.*

1. *Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv;*
2. *Sind g und f injektiv, so auch $g \circ f$.*

Beweis. Übung. □

Satz 10.1.4.15. *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.*

1. *Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv;*
2. *Sind g und f surjektiv, so auch $g \circ f$.*

Beweis. Übung. □

10.1.4.16 (**Umkehrabbildung**). Ist $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ eine bijektive Abbildung, so ist offensichtlich die Menge $\{(f(x), x) \in Y \times X \mid x \in X\}$ im Sinne von 10.1.4.2 eine Abbildung oder, vielleicht klarer, der Graph einer Abbildung $Y \to X$. Diese Abbildung in die Gegenrichtung heißt die **Umkehrabbildung** oder **Umkehrfunktion** oder auch die **inverse Abbildung** zu f und wird mit $f^{-1} : Y \to X$ bezeichnet. Offensichtlich ist mit f auch f^{-1} eine Bijektion.

10.1.4.17 (**Diskussion der Notation**). Mit dem vorhergehenden haben wir schon eine dritte mögliche Bedeutung für das Symbol f^{-1} kennengelernt. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

Beispiel 10.1.4.18. Die Umkehrabbildung unserer Bijektion $t : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x+1$ ist die Abbildung $t^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x - 1$.

Satz 10.1.4.19 (**Bedeutung der Fakultät**). *Sind X und Y zwei Mengen mit je n Elementen, so gibt es genau $n!$ bijektive Abbildungen $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.*

Beweis. Sei $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Wir haben n Möglichkeiten, ein Bild für x_1 auszusuchen, dann noch $(n-1)$ Möglichkeiten, ein Bild für x_2 auszusuchen, und so weiter, bis schließlich nur noch 1 Element von Y als mögliches Bild von x_n in Frage kommt. Insgesamt gibt es also $n(n-1)\cdots 1 = n!$ Möglichkeiten für f. Da wir $0! = 1$ vereinbart hatten, stimmt unser Satz auch für $n = 0$. □

Übungen

Übung 10.1.4.20. Gegeben eine Bijektion $f : X \to Y$ ist $g = f^{-1}$ die einzige Abbildung $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Ebenso ist auch $h = f^{-1}$ die einzige Abbildung $h : Y \to X$ mit $h \circ f = \mathrm{id}_X$.

Ergänzende Übung 10.1.4.21. Gegeben endliche Mengen X, Y gibt es genau $|Y|^{|X|}$ Abbildungen von X nach Y und unter diesen Abbildungen sind genau $|Y|(|Y|-1)(|Y|-2)\ldots(|Y|-|X|+1)$ Injektionen.

Ergänzende Übung 10.1.4.22. Sei X eine Menge mit n Elementen und seien natürliche Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ gegeben mit $n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_r$. Man zeige: Es gibt genau $n!/(\alpha_1! \cdots \alpha_r!)$ Abbildungen $f : X \to \{1, \ldots, r\}$, die jedes i genau α_i-mal als Wert annehmen, in Formeln

$$\frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} = \mathrm{card}\{f \mid |f^{-1}(i)| = \alpha_i \text{ für } i = 1, \ldots r\}$$

Ergänzung 10.1.4.23. Manche Autoren bezeichnen die Zahlen aus der vorherigen Übung 10.1.4.22 als **Multinomialkoeffizienten** und verwenden die Notation

$$\binom{n}{\alpha_1;\ldots;\alpha_r} := \frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!}$$

Mich überzeugt diese Notation nicht, da sie im Gegensatz zur Notation für Binomialkoeffizienten nichts kürzer macht.

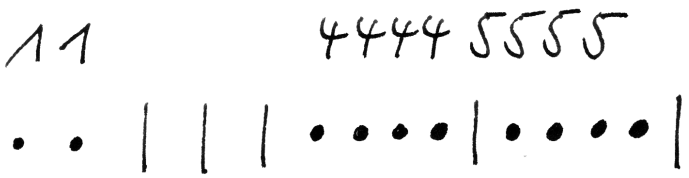
Ergänzende Übung 10.1.4.24. Man zeige die Formel

$$(x_1+\ldots+x_r)^n = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=n} \frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!} x_1^{\alpha_1}\cdots x_r^{\alpha_r}$$

Hier ist zu verstehen, daß wir für alle $\alpha_1,\ldots,\alpha_r \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_1+\ldots+\alpha_r = n$ den angegebenen Ausdruck nehmen und alle diese Ausdrücke aufsummieren.

Ergänzende Übung 10.1.4.25. Sei X eine Menge mit $n \geq 1$ Elementen und sei m eine natürliche Zahl. Man zeige, daß es genau $\binom{n+m-1}{n-1}$ Abbildungen $f : X \to \mathbb{N}$ gibt mit $\sum_{x\in X} f(x) = m$. Hinweis: Man denke sich $X = \{1,2,\ldots,n\}$ und veranschauliche sich dann f als eine Folge auf $f(1)$ Punkten gefolgt von einem Strich gefolgt von $f(2)$ Punkten gefolgt von einem Strich und so weiter, insgesamt also eine Folge aus $n+m-1$ Symbolen, davon m Punkten und $n-1$ Strichen.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	0	0	4	4	0



Eine Abbildung $f : \{1,2,\ldots,n\} \to \mathbb{N}$ im Fall $n = 6$ mit Wertesumme $m = 10$ und die Veranschaulichung nach der Vorschrift aus Übung 10.1.4.25 als Folge bestehend aus m Punkten und $n-1$ Strichen.

10.1.5 Mengen mit Verknüpfung

Definition 10.1.5.1. Eine **Verknüpfung** $\top$ **auf einer Menge** X ist eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} X\times X & \to & X \\ (x,y) & \mapsto & x\top y \end{array}$$

Jedem angeordneten Paar (x, y) mit $x, y \in X$ wird also ein Element $(x \top y) \in X$ zugeordnet. Eine Menge mit Verknüpfung heißt ein **Magma**.

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2
3	0	1	2	3	3
4	0	1	2	3	4

Man kann Verknüpfungen auf endlichen Mengen darstellen durch ihre **Verknüpfungstafel**. Hier die Verknüpfungstafel der Verknüpfung $\min$ auf der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Man muß sich dazu einigen, ob im Kästchen aus der Spalte m und der Zeile n nun $m \top n$ oder vielmehr $n \top m$ stehen soll. Bei einer kommutativen Verknüpfung wie $\min$ macht das aber kinen Unterschied.

10.1.5.2. Das unverfängliche Symbol $\top$ benutze ich, um mich an dieser Stelle noch nicht implizit auf einen der Standardfälle Addition oder Multiplikation festlegen zu müssen.

Beispiele 10.1.5.3.

1. Die Addition von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (m, n) & \mapsto & m + n \end{array}$$

2. Die Multiplikation von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (m, n) & \mapsto & m \cdot n \end{array}$$

3. Die Zuordnung $\min$, die jedem Paar von natürlichen Zahlen die kleinere zuordnet, wenn sie verschieden sind, und eben diese Zahl $\min(n, n) = n$, wenn sie gleich sind, ist eine Verknüpfung

$$\begin{array}{rrcl} \min: & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (m, n) & \mapsto & \min(m, n) \end{array}$$

4. Die Subtraktion von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (m, n) & \mapsto & m - n \end{array}$$

5. Logische Operationen wie „und“, „oder“, „impliziert“ können als Verknüpfungen auf der zweielementigen Menge $\{\text{Wahr}, \text{Falsch}\}$ aufgefaßt werden. Die zugehörigen Verknüpfungstabellen heißen **Wahrheitstafeln**. Bei einem formalen Zugang werden diese Tafeln, wie sie für „und“ und „oder“ auf der vorhergehenden Seite zu finden sind, zur Definition der jeweiligen Begriffe.

und	Wahr	Falsch
Wahr	Wahr	Falsch
Falsch	Falsch	Falsch

oder	Wahr	Falsch
Wahr	Wahr	Wahr
Falsch	Wahr	Falsch

Die Wahrheitstafeln für „und“ und „oder“. Gemeint ist hier wie stets in der Mathematik das „nichtausschließende oder“. Sagen wir, es gelte A oder B, so ist insbesondere auch erlaubt, daß beides gilt. Bei der Wahrheitstafel für das „ausschließende oder“ müßte oben links als Verknüpfung von „Wahr“ mit „Wahr“ ein „Falsch“ stehen.

10.1.5.4. Eine Verknüpfung $\top$ auf einer Menge X heißt **assoziativ**, wenn gilt

$$x\top(y\top z) = (x\top y)\top z \quad \forall x, y, z \in X$$

Im Fall einer assoziativen Verknüpfung liefern auch ungeklammerte Ausdrücke der Form $x_1\top x_2\top \ldots \top x_n$ wohlbestimmte Elemente von X, und zwar ist genauer das Resultat unabhängig davon, wie wir die Klammern setzen. Wir führen das hier nicht weiter aus und verweisen stattdessen auf 2.2.1.10.

10.1.5.5. Eine Verknüpfung $\top$ auf einer Menge X heißt **kommutativ** oder **abelsch**, wenn gilt

$$x\top y = y\top x \quad \forall x, y \in X$$

Die Bezeichnung „abelsch“ ehrt den norwegischen Mathematiker Nils Henrik Abel.

Beispiele 10.1.5.6. Die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ sind assoziativ und kommutativ. Für das Minimum in $\mathbb{N}$ gilt dasselbe. Die Subtraktion auf $\mathbb{Z}$ ist weder kommutativ noch assoziativ.

Definition 10.1.5.7. Gegeben eine Menge mit Verknüpfung $(X, \top)$ heißt ein Element $e \in X$ ein **neutrales Element** von $(X, \top)$, wenn gilt

$$e\top x = x\top e = x \quad \forall x \in X$$

10.1.5.8 (**Eindeutigkeit neutraler Elemente**). Gegeben eine Menge mit Verknüpfung $(X, \top)$ kann es höchstens ein neutrales Element e geben, denn für jedes weitere Element e' mit $e' \top x = x \top e' = x \quad \forall x \in X$ haben wir $e' = e' \top e = e$. Wir dürfen also den bestimmten Artikel verwenden und in einer Menge mit Verknüpfung von *dem* neutralen Element reden und es mit e_X bezeichnen.

Beispiele 10.1.5.9. Das neutrale Element von $(\mathbb{Z}, +)$ ist die Null $0 \in \mathbb{Z}$. Das neutrale Element von $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist die Eins $1 \in \mathbb{Z}$.

Definition 10.1.5.10. Ein **Monoid** ist eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung, in der es ein neutrales Element gibt.

10.1.5.11. Das Wort „Monoid“ ist wohl von griechisch „$\mu o \nu o \varsigma$“ für „allein“ abgeleitet: Ein Monoid besitzt nur eine einzige Verknüpfung.

10.1.5.12 (**Gebräuchliche Notationsschemata für Monoide**). (1) Notiert man in einem Monoid M die Verknüpfung mit dem Symbol $+$, so notiert man das neutrale Element meist 0_M oder abkürzend 0 und nennt es das **Null-Element** oder abkürzend die **Null** und spricht von einem **additiv notierten Monoid**. Nur kommutative Monoide werden additiv notiert.

(2) Notiert man in einem Monoid M die Verknüpfung mit einem eher runden Symbol wie $\cdot$ oder $\circ$ oder $*$ oder auch einfach durch Hintereinanderschreiben, so notiert man das neutrale Element oft 1_M oder abkürzend 1 und nennt es das **Eins-Element** oder abkürzend die **Eins** und spricht von einem **multiplikativ notierten Monoid**.

Beispiele 10.1.5.13. Die natürlichen Zahlen bilden mit der Addition ein Monoid $(\mathbb{N}, +)$ mit neutralem Element 0. Sie bilden mit der Multiplikation ein Monoid $(\mathbb{N}, \cdot)$ mit neutralem Element 1.

10.1.5.14 (**Iterierte Verknüpfungen**). Sei $(A, \top)$ ein Monoid. Ist $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $a \in A$, so schreiben wir

$$n^\top a := \underbrace{a \top a \top \ldots \top a}_{n\text{-mal}}$$

für $n \geq 1$ und setzen ergänzend $0^\top a := e_A$. Dann gelten offensichtlich für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in A$ mit $a \top b = b \top a$ die Regeln

1. $(n + m)^\top a = (n^\top a) \top (m^\top a)$
2. $(nm)^\top a = n^\top (m^\top a)$
3. $n^\top (a \top b) = (n^\top a) \top (n^\top b)$

Beispiel 10.1.5.15 (**Iterieren in additiv notierten Monoiden**). Im Fall additiv notierter Monoide schreibt man statt $n^\top a$ meist na. Unsere drei Regeln werden dann $(n+m)a = (na)+(ma)$, $(nm)a = n(ma)$ und $n(a+b) = (na)+(nb)$ und unsere Konvention $0^\top a = e_M$ nimmt die Gestalt $0a = 0_M$ an. Wenn ich es genau nehmen will, schreibe ich in diesem Fall n^+a statt na.

Beispiel 10.1.5.16 (**Iterieren in multiplikativ notierten Monoiden**). Im Fall multiplikativ notierter Monoide schreibt man statt $n^\top a$ meist a^n. Unsere drei Regeln werden dann $a^{n+m} = (a^n)(a^m)$, $a^{nm} = (a^n)^m$ und $(ab)^n = (a^n)(b^n)$ falls $ab = ba$ und unsere Konvention $0^\top a = e_M$ nimmt die Gestalt $a^0 = 1_M$ an.

10.1.5.17. Die natürlichen, ja die ganzen Zahlen, ja sogar die rationalen Zahlen mit Multiplikation und Addition nehmen wir hier als gegeben hin ebenso wie die Tatsache, daß in diesem Fall die n-fach iterierte Addition gerade die Multiplikation ist. Den Aufbau dieser Strukturen aus der Mengenlehre diskutieren wir erst in 3.4.1.

Definition 10.1.5.18.

1. Ist $(M, \top)$ ein Monoid und $a \in M$ ein Element, so nennen wir ein weiteres Element $\bar{a} \in M$ **invers zu** a, wenn gilt $a \top \bar{a} = e = \bar{a} \top a$ für $e \in M$ das neutrale Element unseres Monoids. Ein Element eines Monoids, das ein Inverses besitzt, heißt **invertierbar**;

2. Eine **Gruppe** ist ein Monoid, in dem jedes Element ein Inverses besitzt;

3. Eine **kommutative Gruppe** oder **abelsche Gruppe** ist eine Gruppe, deren Verknüpfung kommutativ ist.

Beispiele 10.1.5.19. Von unseren Beispielen 10.1.5.3 für Mengen mit Verknüpfung oben ist nur $(\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe, und diese Gruppe ist kommutativ. Ein anderes Beispiel für eine kommutative Gruppe ist die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung, ein weiteres die Menge $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ der von Null verschiedenen rationalen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung. Auch jedes einelementige Monoid ist eine Gruppe.

10.1.5.20. Der Begriff einer „Gruppe“ wurde von Évariste Galois (1811-1832) in die Mathematik eingeführt. Er verwendet den Begriff „Gruppe von Transformationen“ sowohl in der Bedeutung einer „Menge von bijektiven Selbstabbildungen einer gegebenen Menge“ als auch in der Bedeutung einer „Menge von bijektiven Selbstabbildungen einer gegebenen Menge, die abgeschlossen ist unter Verknüpfung und Inversenbildung“, und die damit in der Tat ein Beispiel für eine Gruppe im Sinne der obigen Definition bildet. Unsere obige Definition 10.1.5.18 geht auf eine Arbeit von Arthur Cayley aus dem Jahre 1854 mit dem Titel „On the theory of groups as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$“ zurück und wurde damit formuliert, bevor Cantor die Sprache der Mengenlehre entwickelte.

Die Terminologie „abelsche Gruppe“ wurde zu Ehren des norwegischen Mathematikers Niels Hendrik Abel eingeführt.

Lemma 10.1.5.21. *Jedes Element eines Monoids besitzt höchstens ein Inverses.*

Beweis. Aus $a \top \bar{a} = e$ und $b \top a = e$ folgt durch Anwenden von $b \top$ auf die erste Gleichung mit dem Assoziativgesetz sofort $\bar{a} = b$. □

10.1.5.22. Wir dürfen also den bestimmten Artikel benutzen und von nun an von *dem* Inversen eines Elements eines Monoids und insbesondere auch einer Gruppe reden.

Beispiel 10.1.5.23 (**Invertieren in additiv notierten Monoiden**). Im Fall additiv notierter Monoide schreibt man statt $\bar{a}$ meist $-a$ und nennt dieses „additive Inverse“ das **Negative von** a. Üblich ist in diesem Kontext auch die Abkürzung $a - b := a + (-b)$.

Beispiel 10.1.5.24 (**Invertieren in multiplikativ notierten Monoiden**). Im Fall multiplikativ notierter Monoide bleiben wir vorerst bei unserer Notation $\bar{a}$.

10.1.5.25 (**Zweimaliges Invertieren**). Gegeben ein invertierbares Element ist offensichtlich auch sein Inverses invertierbar und das Inverse des Inversen ist wieder das ursprüngliche Element, in Formeln $\bar{\bar{a}} = a$. In additiver Notation liest sich das $-(-a) = a$.

Lemma 10.1.5.26. *Sind a und b invertierbare Elemente eines Monoids, so ist auch $a \top b$ invertierbar mit Inversem $\overline{(a \top b)} = \bar{b} \top \bar{a}$.*

Beweis. In der Tat rechnen wir schnell $(a \top b) \top (\bar{b} \top \bar{a}) = e = (\bar{b} \top \bar{a}) \top (a \top b)$. Diese Formel ist auch aus dem täglichen Leben vertraut: Wenn man sich morgends zuerst die Strümpfe anzieht und dann die Schuhe, so muß man abends zuerst die Schuhe ausziehen und dann die Strümpfe. □

10.1.5.27. In additiver Notation liest sich das $-(a + b) = (-b) + (-a)$ oder, da additiv notierte Monoide stets als abelsch angenommen werden, gleichbedeutend $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

10.1.5.28 (**Gruppe der invertierbaren Elemente eines Monoids**). Die invertierbaren Elemente eines Monoids bilden offensichtlich stets eine Gruppe. Für die Gruppe der invertierbaren Elemente eines multiplikativ notierten Monoids M verwenden wir die Notation $M^\times$.

10.1.5.29 (**Negativ iterierte Verknüpfung invertierbarer Elemente**). Ist $(A, \top)$ ein Monoid und $a \in A$ invertierbar, so erweitern wir unsere Notation $n^\top a$ aus 10.1.5.14 weiter auf alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$, indem wir für n negativ setzen $n^\top a := (-n)^\top \bar{a}$. Dann gelten offensichtlich sogar für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ und $a, b \in A^\times$ mit $a \top b = b \top a$ die für $m, n \in \mathbb{N}$ bereits aus 10.1.5.14 bekannten Regeln

1. $(n+m)^\top a = (n^\top a)\top(m^\top a)$
2. $(nm)^\top a = n^\top(m^\top a)$
3. $n^\top(a\top b) = (n^\top a)\top(n^\top b)$

10.1.5.30 (**Negativ iterierte Verknüpfung in additiver Notation**). Im Fall additiv notierter Monoide erweitern wir unsere Notation $na := n^\top a$ für Elemente a mit Negativem auf alle $n \in \mathbb{Z}$ und finden für jedes Element a mit Negativem insbesondere $(-1)a = -a$ sowie die Regeln $(n+m)a = (na) + (ma)$, $(nm)a = n(ma)$ und $n(a+b) = (na)+(nb)$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ und alle Elemente a, b mit Negativem. Wenn ich es genau nehmen will, schreibe ich auch hier n^+a.

10.1.5.31 (**Negativ iterierte Verknüpfung in multiplikativer Notation**). Im Fall multiplikativ notierter Monoide erweitern wir unsere Notation $a^n := n^\top a$ für invertierbare Elemente a auf alle $n \in \mathbb{Z}$ und finden für jedes invertierbare Element a insbesondere $a^{-1} = \bar{a}$. Das nehmen wir hinfort als unsere übliche Notation für multiplikative Inverse. Unsere drei Regeln erhalten dann die Gestalt $a^{n+m} = (a^n)(a^m)$, $a^{nm} = (a^n)^m$ und $(ab)^n = (a^n)(b^n)$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ und a, b invertierbar mit $ab = ba$.

Definition 10.1.5.32. Seien $(A, \top)$ und $(B, \perp)$ Magmas. Ein **Homomorphismus von Magmas** ist eine Abbildung $\varphi : A \to B$ mit

$$\varphi(x\top y) = \varphi(x) \perp \varphi(y) \quad \forall x, y \in A$$

Definition 10.1.5.33. Seien $(A, \top)$ und $(B, \perp)$ Monoide. Ein **Homomorphismus von Monoiden** ist ein Magmahomomorphismus $\varphi : A \to B$, der das neutrale Element auf das neutrale Element abbildet.

Definition 10.1.5.34. Seien $(A, \top)$ und $(B, \perp)$ Gruppen. Ein **Homomorphismus von Gruppen** ist ein Monoidhomomorphismus $\varphi : A \to B$.

Beispiele 10.1.5.35.

1. Die Multiplikation mit einer festen Zahl $a \in \mathbb{Z}$ ist ein Gruppenhomomorphismus $(a\cdot) : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$.
2. Das Potenzieren $n \mapsto q^n$ ist für alle $q \in \mathbb{Q}$ ein Monoidhomomorphismus $(\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{Q}, \cdot)$ und für $q \neq 0$ sogar ein Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q}, \cdot)$.
3. Allgemeiner ist für jedes Element q eines Monoids $(M, \top)$ das Iterieren $n \mapsto n^\top q$ ein Monoidhomomorphismus $(\mathbb{N}, +) \to (M, \top)$, ja der einige Monoidhomomorphismus mit $1 \mapsto q$, und für invertierbares q sogar ein Monoidhomomorphismus $(\mathbb{Z}, +) \to (M, \top)$, wieder der einzige mit $1 \mapsto q$.

10.1.5.36. Ein **Isomorphismus** bezeichnet einen bijektiven Homomorphismus, dessen Umkehrabbildung auch ein Homomorphismus für die jeweiligen Strukturen ist. Im Fall von Magmas oder Monoiden ist jeder bijektive Homomorphismus ein Isomorphismus. Ein erstes Beispiel für einen bijektiven Homomorphismus, der kein Isomorphismus ist, lernen wir in 10.2.2.4 im Zusammenhang mit teilgeordneten Mengen kennen.

Übungen

Übung 10.1.5.37. In einer Gruppe $(G, \top)$ ist das neutrale Element $e \in G$ das einzige Element $x \in G$ mit $x \top x = x$. Jeder Magmahomomorpismus von einem Monoid in eine Gruppe ist bereits ein Monoidhomomorphismus.

Übung 10.1.5.38. Sei Z eine Menge. Das Schneiden von Teilmengen ist eine Verknüpfung

$$\begin{array}{rccc} \cap : & \mathcal{P}(Z) \times \mathcal{P}(Z) & \to & \mathcal{P}(Z) \\ & (A, B) & \mapsto & A \cap B \end{array}$$

auf der Potenzmenge. Dasselbe gilt für die Vereinigung und das Bilden der Differenzmenge. Welche dieser Verknüpfungen sind kommutativ oder assoziativ? Welche besitzen neutrale Elemente?

Ergänzende Übung 10.1.5.39. Man gebe die Wahrheitstafeln für $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ an. Bezeichne weiter $\neg : \{\mathrm{Wahr}, \mathrm{Falsch}\} \to \{\mathrm{Wahr}, \mathrm{Falsch}\}$ die „Verneinung“. Man zeige, daß die Formel

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$$

beim Einsetzen beliebiger Wahrheitswerte aus $\{\mathrm{Wahr}, \mathrm{Falsch}\}$ für A und B stets den Wert Wahr ausgibt.

Übung 10.1.5.40. Ein Element a eines Monoids M ist invertierbar genau dann, wenn es $b, c \in M$ gibt mit $b \top a = e = a \top c$ für e das neutrale Element.

Übung 10.1.5.41 (**Kürzen**). Sind a, b, c Elemente eines Monoids und ist a invertierbar, so folgt aus $a \top b = a \top c$ bereits $b = c$. Ebenso folgt aus $b \top a = c \top a$ bereits $b = c$.

Übung 10.1.5.42. Gegeben eine Menge Z ist das Bilden des Komplements ein Monoidhomomorphismus $(\mathcal{P}(Z), \cap) \to (\mathcal{P}(Z), \cup)$.

Übung 10.1.5.43. Jeder Monoidhomomorphismus $M \to N$ bildet invertierbare Elemente auf invertierbare Elemente ab und induziert so einen Gruppenhomomorphismus $M^\times \to N^\times$.

Übung 10.1.5.44. Jeder Monoidhomomorphismus $\varphi : (M, \top) \to (N, \bot)$ kommutiert mit dem Iterieren, in Formeln $\varphi(n^\top x) = n^\bot(\varphi(x))$ für alle $n \in \mathbb{N}, x \in M$ und ebenso für alle $n \in \mathbb{Z}, x \in M^\times$.

10.1.6 Körper im Sinne der Algebra

10.1.6.1. Die algebraische Struktur eines Körpers wird den Hauptbestandteil unseres Axiomensystems für die reellen Zahlen in 10.2.4 bilden. Gleichzeitig ist sie die Grundlage für die Modellierung des Raums unserer Anschauung in der linearen Algebra.

Definition 10.1.6.2. Ein **Ring** $(R, +, \cdot)$ ist eine Menge R mit zwei Verknüpfungen, genannt die **Addition** $+$ und die **Multiplikation** $\cdot$ des Rings, derart daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe;
2. $(R, \cdot)$ ist ein Monoid;
3. Es gelten die beiden **Distributivgesetze**

$$\begin{array}{rcll} a \cdot (b + c) & = & (a \cdot b) + (a \cdot c) & \forall a, b, c \in R \\ (b + c) \cdot a & = & (b \cdot a) + (c \cdot a) & \forall a, b, c \in R \end{array}$$

Ein Ring, dessen Multiplikation kommutativ ist, heißt ein **kommutativer Ring** und bei uns kürzer auch **Kring**. Die Gruppe $(R, +)$ heißt die **additive Gruppe** des Rings.

Beispiel 10.1.6.3. Die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bilden einen kommutativen Ring. Die einelementige Menge ist mit der einzig möglichen Verknüpfung als Addition und Multiplikation ein Ring, der **Nullring**.

Definition 10.1.6.4. Ein **Körper** $(K, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring, dessen multiplikativ invertierbare Elemente genau alle vom neutralen Element 0_K von $(K, +)$ verschiedenen Elemente sind, in Formeln

$$(K, \cdot)^\times = K \backslash \{0_K\}$$

10.1.6.5. Das neutrale Element jedes Monoids ist invertierbar, folglich muß nach unseren Annahmen in einem Körper K das neutrale Element 1_K des multiplikativen Monoids $(K, \cdot)$ von 0_K verschieden sein, in Formeln

$$1_K \neq 0_K$$

Die Gruppe invertierbaren Elemente von $K^\times = (K, \cdot)^\times$ eines Körpers K heißt die **multiplikative Gruppe** des Körpers.

Beispiele 10.1.6.6. Ein erstes Beispiel ist der Körper der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Ein anderes Beispiel ist der zweielementige Körper mit den durch die Axiome erzwungenen Rechenregeln, der fundamental ist in der Informatik. Die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bilden keinen Körper, da $(\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \cdot)$ keine Gruppe ist, da es nämlich in $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ nur für 1 und -1 ein multiplikatives Inverses gibt.

Ergänzung 10.1.6.7 (**Ursprung der Terminologie**). Der Begriff „Körper“ ist in diesem Zusammenhang wohl zu verstehen als „besonders gut unter den verschiedensten Rechenoperationen abgeschlossener Zahlbereich“, in Analogie zu geometrischen Körpern wie Kugeln oder Zylindern, die man entsprechend als „besonders gut in sich geschlossene Bereiche des Raums“ ansehen könnte. Die Bezeichnung als „Distributivgesetz“ rührt daher, daß uns dieses Gesetz erlaubt, beim Multiplizieren eines Elements mit einer Summe den „Faktor auf die Summanden zu verteilen“. Das Wort „distribution“ für Verteilung von Nahrungsmitteln und dergleichen auf Französisch und Englisch kommt von demselben lateinischen Wortstamm, auf die auch unsere Bezeichnung „Distributivgesetz“ zurückgeht.

10.1.6.8 (**Weglassen von Multiplikationssymbolen**). Beim Rechnen mit Buchstaben werden wir meist $ab := a \cdot b$ abkürzen. Das wäre beim Rechnen mit durch Ziffernfolgen dargestellten Zahlen wenig sinnvoll, da man dann nicht wissen könnte, ob 72 nun als „Zweiundsiebzig“ oder vielmehr als „Sieben mal Zwei“ zu verstehen sein soll. Beim Einsetzen von Zahlen für die Buchstaben müssen also wieder Multiplikationssymbole eingefügt werden.

Ergänzung 10.1.6.9 (**Weglassen von Additionssymbolen**). In der Schule und außerhalb der Mathematik ist es üblich, $1 + \frac{1}{2}$ mit $1\frac{1}{2}$ abzukürzen und „Anderthalb Stunden“ zu sagen oder „Dreieinviertel Pfund“. In diesem Fall wird also ein Additionssymbol weggelassen. Das ist jedoch in der höheren Mathematik nicht üblich. In der gesprochenen Sprache ist es noch viel merkwürdiger. Neunzehnhundertvierundachzig versteht jeder, in Symbolen geschrieben sieht $9\ 10\ 100\ 4 + 80$ dahingegen ziemlich sinnlos aus, und statt der üblichen Interpretation $((9{+}10)100){+}4{+}80$ wären durchaus auch andere Interpretationen denkbar. In der gesprochenen Sprache scheint eher eine Konvention befolgt zu werden, nach der die Operationen der Reihe nach auszuführen sind wie bei einem Taschenrechner, wobei eine Multiplikation gemeint ist, wenn die zuerst genannte Zahl die Kleinere ist, und eine Addition, wenn sie die Größere ist. Nur die Zahlen von 13 bis 19 scheinen dieser Regel nicht zu gehorchen. Kein Wunder, daß es Erstklässlern schwer fällt, sich den Zahlenraum zu erschließen, wenn sie zuvor dieses Dickicht von Konventionen durchdringen müssen.

10.1.6.10 (**Punkt vor Strich**). Wir vereinbaren zur Vermeidung von Klammern die Regel „Punkt vor Strich“, so daß also zum Beispiel unter zusätzlicher Beachtung unserer Konvention des Weglassens von Multiplikationssymbolen, in die-

sem Fall das Weglassen des Punktes, das Distributivgesetz kürzer in der Form $a(b+c) = ab + ac$ geschrieben werden kann.

10.1.6.11 (**Brüche**). Gegeben ein Körper K und Elemente $a, b \in K$ mit $b \neq 0_K$ vereinbaren wir die Notation

$$\frac{a}{b} := ab^{-1}$$

Sie werden zur Übung zeigen, daß die üblichen Regeln der Bruchrechnung auch in dieser Allgemeinheit gelten.

Lemma 10.1.6.12 (**Folgerungen aus den Ringaxiomen**). *In jedem Ring R gelten die folgenden Aussagen und Formeln:*

1. $a \cdot 0_R = 0_R = 0_R \cdot a \quad \forall a \in R$
2. $(-1_R) \cdot a = -a = a \cdot (-1_R) \quad \forall a \in R$
3. $(-1_R)(-1_R) = 1_R$
4. $(-a)(-b) = ab \quad \forall a, b \in R$
5. $m^+(ab) = (m^+a)b$ *für alle* $m \in \mathbb{Z}$ *und* $a, b \in R$.

Beweis.

1. $0_R + 0_R = 0_R \Rightarrow (0_R + 0_R) \cdot a = 0_R \cdot a \Rightarrow (0_R \cdot a) + (0_R \cdot a) = 0_R \cdot a \Rightarrow 0_R \cdot a = 0_R$ durch Addieren von $-(0_R \cdot a)$ auf beiden Seiten.
2. $a + (-1_R)a = 1_R a + (-1_R)a = (1_R + (-1_R))a = 0_R a = 0_R$ und $-a$ ist ja gerade definiert als das eindeutig bestimmte Element von R mit der Eigenschaft $a + (-a) = 0_R$.
3. $(-1_R)(-1_R) = -(-1_R) = 1_R$ als Negatives des Negativen nach 10.1.5.25.
4. Um das nachzuweisen ersetzen wir $-a = a(-1_R)$ und $-b = (-1_R)b$ und verwenden $(-1_R)(-1_R) = 1_R$.
5. Das folgt durch wiederholtes Anwenden des Distributivgesetzes. Die Fälle $m > 0$, $m = 0$ und $m < 0$ behandelt man am einfachsten separat. Alternativ mag man bemerken, daß nach dem Distributivgsetz für festes a die Abbildung $(\cdot b) : a \mapsto ab$ ein Monoidhomomorphismus $(R, +) \to (R, +)$ ist und folglich nach Übung 10.1.5.44 gilt

$$n^+(ab) = n^+((\cdot b)(a)) = (\cdot b)(n^+a) = (n^+a)b \qquad \square$$

10.1.6.13 (**Binomische Formel**). Für alle a, b in einem Ring R mit $ab = ba$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}$$

Um das einzusehen prüft man, daß wir bei der Herleitung nach 10.1.1.23 nur Ringaxiome und die Eigenschaft $ab = ba$ verwandt haben. Man beachte hierbei unsere Konvention $0_R^0 = 1_R$ aus 10.1.5.16, angewandt auf das Monoid $(R, \cdot)$. Die Multiplikation mit den Binomialkoeffizienten in dieser Formel ist zu verstehen als wiederholte Addition im Sinne der Bezeichnungskonvention $na = n^+a$ aus 10.1.5.15, angewandt auf den Spezialfall der additiven Gruppe unseres Rings.

10.1.6.14 (**Minus mal Minus gibt Plus**). Die Frage, wie das Produkt zweier negativer Zahlen zu bilden sei, war lange umstritten. Mir scheint der vorhergehende Beweis das überzeugendste Argument für „Minus mal Minus gibt Plus“ : Es sagt salopp gesprochen, daß man diese Regel vereinbaren muß, wenn man beim Rechnen das Ausklammern ohne alle Einschränkungen erlauben will.

10.1.6.15. Den Begriff eines Homomorphismus verwendet man bei Mengen mit mehr als einer Verknüpfung analog. Zum Beispiel ist ein **Ringhomomorphismus** φ von einem Ring R in einen Ring S definiert als eine Abbildung $\varphi : R \to S$ derart, daß gilt $\varphi(a+b) = \varphi(a)+\varphi(b)$ und $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für alle $a, b \in R$ sowie $\varphi(0_R) = 0_S$ und $\varphi(1_R) = 1_S$. Die Bedingung $\varphi(0_R) = 0_S$ ist nach 10.1.5.37 an dieser Stelle sogar überflüssig. In anderen Worten mag man einen Ringhomomorphismus auch definieren als eine Abbildung, die sowohl für die Addition als auch für die Multiplikation ein Monoidhomomorphismus ist. Einen Ringhomomorphismus zwischen Körpern nennt man einen **Körperhomomorphismus**.

10.1.6.16. Gegeben ein bijektiver Ringhomomorphismus ist auch seine Umkehrabbildung ein Ringhommorphismus und wir dürfen einen bijektiven Ringhomomorpismus deshalb einen **Ringisomorphismus** und im Fall von Körpern einen **Körperisomorphismus** nennen.

Satz 10.1.6.17 (Ganze Zahlen und allgemeine Ringe). *Für jeden Ring R gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to R$. Er wird gegeben durch die Vorschrift $\varphi(n) = n^+1_R$.*

Beweis. Um den Überblick zu behalten, verwende ich hier die Notation n^+a statt na für die iterierte Verknüpfung im Sinne von 10.1.5.29, also $n^+a = a+a+\ldots+a$ mit n Summanden im Fall $n \geq 1$. Wir wissen aus 10.1.5.35, daß $n \mapsto n^+a$ für alle $a \in R$ der einzige Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}, +) \to (R, +)$ ist mit $1 \mapsto a$. Für einen Ringhomomorphismus muß aber gelten $\varphi(1) = 1_R$, also muß er durch die Formel $\varphi(n) = n^+1_R$ gegeben sein. Es bleibt zu zeigen, daß diese Abbildung

φ mit der Multiplikation verträglich ist, in Formeln $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$. Dazu rechnen wir

$$\begin{array}{rcll} \varphi(nm) & = & (nm)^+1_R & \text{per definitionem,} \\ & = & n^+(m^+1_R) & \text{nach der zweiten Iterationsregel 10.1.5.29,} \\ & = & n^+(1_R(m^+1_R)) & \text{weil } 1_R \text{ neutral ist in } (R,\cdot), \\ & = & (n^+1_R)(m^+1_R) & \text{nach der letzten Regel in 10.1.6.12,} \\ & = & \varphi(n)\varphi(m) & \text{per definitionem.} \end{array}$$ □

10.1.6.18. Gegeben ein Ring R und $n \in \mathbb{Z}$ verwenden wir oft die Abkürzungen $n^+1_R = n_R = n$. Unser Satz zeigt, daß es meist nicht so genau darauf ankommt, ob n nun eine ganze Zahl oder das Element n_R eines abstrakten Rings bedeutet. Insbesondere kürzt man eigentlich immer 0_R ab durch 0 und 1_R durch 1. Man beachte jedoch, daß für verschiedene ganze Zahlen $n \neq m$ durchaus $n_R = m_R$ gelten kann: Ist etwa $R = K$ ein Körper mit zwei Elementen, so gilt $n_K = 0_K$ für gerades n und $n_K = 1_K$ für ungerades n. Vom höheren Standpunkt wird das alles in 3.5.1.11 nocheinmal ausführlich diskutiert werden.

Lemma 10.1.6.19 (Folgerungen aus den Körperaxiomen). *In jedem Körper K gelten zusätzlich zu den bereits für Ringe bewiesenen Aussagen die folgenden Aussagen und Formeln:*

1. $ab = 0_K \quad \Rightarrow \quad (a = 0_K$ *oder* $b = 0_K)$
2. $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ *für alle* $a, c \in K$ *und* $b, d \in K^\times$
3. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ *für alle* $a \in K$ *und* $b, c \in K^\times$
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ *für alle* $a, c \in K$ *und* $b, d \in K^\times$

Beweis.

1. In der Tat folgt aus $(a \neq 0_K$ und $b \neq 0_K)$ schon $(ab \neq 0_K)$ nach den Körperaxiomen.
2. Das ist klar.
3. Das ist klar.
4. Das wird bewiesen, indem man die Brüche auf einen Hauptnenner bringt und das Distributivgesetz anwendet. □

Übungen

Übung 10.1.6.20. Jeder Ring R mit $0_R = 1_R$ hat nur ein einziges Element.

Übung 10.1.6.21. Ist K ein Körper derart, daß es kein $x \in K$ gibt mit $x^2 = -1$, so kann man die Menge $K \times K = K^2$ zu einem Körper machen, indem man die Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{array}{rcl} (a,b)+(c,d) & := & (a+c, b+d) \\ (a,b)\cdot(c,d) & := & (ac-bd, ad+bc) \end{array}$$

Die Abbildung $K \to K^2$, $a \mapsto (a,0)$ ist dann ein Körperhomomorphismus. Kürzen wir $(a,0)$ mit a ab und setzen $(0,1) = \mathrm{i}$, so gilt $\mathrm{i}^2 = -1$ und $(a,b) = a + b\,\mathrm{i}$ und die Abbildung $a + b\,\mathrm{i} \mapsto a - b\,\mathrm{i}$ ist ein Körperisomorphismus $K^2 \xrightarrow{\sim} K^2$.

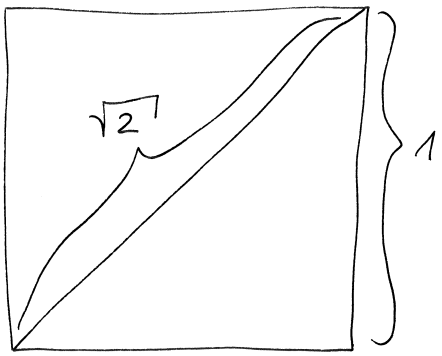
10.1.6.22. Auf die in der vorhergehenden Übung 10.1.6.21 erklärte Weise können wir etwa aus dem Körper $K = \mathbb{R}$ der „reellen Zahlen“, sobald wir ihn kennengelernt haben, direkt den Körper $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen** konstruieren. Unser Körperisomorphismus gegeben durch die Vorschrift $a + b\,\mathrm{i} \mapsto a - b\,\mathrm{i}$ heißt in diesem Fall die **komplexe Konjugation** und wird auch $z \mapsto \bar{z}$ notiert. Man beachte, wie mühelos das alles in der Sprache der Mengenlehre zu machen ist. Als die komplexen Zahlen erfunden wurden, gab es noch keine Mengenlehre und beim Rechnen beschränkte man sich auf das Rechnen mit „reellen“ Zahlen, ja selbst das Multiplizieren zweier negativer Zahlen wurde als eine fragwürdige Operation angesehen, und das Ziehen einer Quadratwurzel aus einer negativen Zahl als eine rein imaginäre Operation. In gewisser Weise ist es das ja auch geblieben, aber die Mengenlehre liefert eben unserer Imagination eine wunderbar präzise Sprache, in der wir uns auch über imaginierte Dinge unmißverständlich austauschen können. Man kann dieselbe Konstruktion auch allgemeiner durchführen, wenn man statt -1 irgendein anderes Element eines Körpers K betrachtet, das kein Quadrat ist. Noch allgemeinere Konstruktionen zur „Adjunktion höherer Wurzeln“ oder sogar der „Adjunktion von Nullstellen polynomialer Gleichungen“ können Sie in der Algebra kennenlernen, vergleiche etwa 17.7.2.5. In 3.2.7 diskutieren wir die komplexen Zahlen ausführlicher.

Ergänzende Übung 10.1.6.23. Ein Körperhomomorphismus ist stets injektiv.

10.2 Die reellen Zahlen

10.2.1 Rationale Wurzeln rationaler Zahlen

Satz 10.2.1.1. *Es gibt keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.*



Die Diagonal im Einheitsquadrat hat eine irrational Länge.

10.2.1.2. Dieser Satz erklärt, warum wir uns mit den rationalen Zahlen nicht zufrieden geben. In der Tat suchen wir nach einem Zahlbereich, in dem jeder „anschaulichen Länge“, wie zum Beispiel der Länge der Diagonale eines Quadrats der Kantenlänge Eins, auch tatsächlich eine Zahl entspricht. Wir zeigen in 10.3.3.14, daß im Zahlbereich der reellen Zahlen immerhin aus allen nichtnegativen Zahlen Quadratwurzeln gezogen werden können, und diskutieren in 10.3.4.1, wie sich sogar unsere anschauliche Vorstellung von der Länge des Einheitskreises zur Definition einer reellen Zahl präzisieren läßt.

Erster Beweis. Setzen wir die in 3.4.4.8 bewiesene Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung als bekannt voraus, so folgt unmittelbar, daß das Quadrat eines unkürzbaren Bruches mit Nenner $\neq \pm 1$ wieder ein unkürzbarer Bruch mit Nenner $\neq \pm 1$ sein muß. Für eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ folgt aus $x \notin \mathbb{Z}$ also $x^2 \notin \mathbb{Z}$. Gäbe es mithin eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$, so müßte x bereits selbst eine ganze Zahl sein. Offensichtlich gibt es jedoch keine ganze Zahl $x \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 = 2$. $\square$

Zweiter Beweis. Ohne die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung als bekannt vorauszusetzen können wir in unserer speziellen Situation auch elementarer mit dem Primfaktor 2 durch Widerspruch argumentieren: Nehmen wir an, wir fänden ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q \neq 0$ derart, daß $x = p/q$ ein unkürzbarer Bruch wäre mit $x^2 = 2$. Es folgte $p^2 = 2q^2$, also p^2 gerade, also p gerade, also p^2 durch 4 teilbar, also q^2 gerade, also q gerade. Dann wäre unser Bruch aber doch kürzbar gewesen, nämlich durch 2. $\square$

10.2.2 Angeordnete Körper

Definition 10.2.2.1. Eine **Relation** T auf einer Menge X ist eine Teilmenge $T \subset X \times X$ des kartesischen Produkts von X mit sich selbst, also eine Menge von Paaren von Elementen von X. Statt $(x, y) \in T$ schreiben wir in diesem Zusammenhang meist xTy.

Definition 10.2.2.2. Eine Relation T auf einer Menge X heißt eine **Ordnungsrelation** oder eine **Teilordnung** oder eine **partielle Ordnung**, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

1. **Transitivität:** $(xTy$ und $yTz) \Rightarrow xTz$;
2. **Antisymmetrie:** $(xTy$ und $yTx) \Rightarrow x = y$;
3. **Reflexivität:** xTx für alle $x \in X$.

Eine Teilordnung heißt eine **Ordnung** oder **Anordnung**, wenn wir zusätzlich haben

4. **Totalität:** Für alle $x, y \in X$ gilt xTy oder yTx.

10.2.2.3 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißt eine Teilordnung auch eine **Halbordnung** oder kurz eine „Ordnung“. Wir verstehen jedoch unter einer Ordnung stets eine Ordnungsrelation, die auch die Eigenschaft der Totalität besitzt. Auf Englisch benutzt man für eine teilgeordnete Menge alias „partially ordered set“ gerne die Abkürzung **poset**. Eine Ordnung in unserem Sinne heißt in der Literatur auch eine **totale Ordnung** oder eine **lineare Ordnung**.

10.2.2.4. Gegeben teilgeordnete Mengen $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ versteht man unter einem **Ordnungshomomorphismus** eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ mit $a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$. In dieser Situation muß ein bjektiver Homomorphismus keineswegs ein Isomorphismus sein, als da heißt, seine Umkehrabbildung muß keineswegs wieder ein Ordnungshomomorphismus sein.

Vorschau 10.2.2.5. Allgemeiner versteht man unter einer **Relation** T **zwischen einer Menge** X **und einer Menge** Y eine Teilmenge $T \subset X \times Y$. In diesem Sinne sind dann auch unsere Abbildungen aus 10.1.4.2 spezielle Relationen. In Teilen der Literatur heißen derartige Relationen auch „Korrespondenzen“. Noch allgemeiner betrachtet man auch für $n \geq 0$ und Mengen $X_1, \ldots, X_n$ Teilmengen $T \subset X_1 \times \ldots \times X_n$ und nennt sie n**-stellige Relationen**, aber das ist für uns vorerst noch nicht relevant.

10.2.2.6 (**Notationen zu teilgeordneten Mengen**). Bei einer Ordnungsrelation T schreiben wir stets $x \leq y$ statt xTy und statt $x \leq y$ schreiben wir dann oft auch $y \geq x$. Weiter kürzt man ($x \leq y$ und $x \neq y$) ab mit $x < y$ und ebenso ($x \geq y$ und

$x \neq y$) mit $x > y$. Auf jeder angeordneten Menge definieren wir Verknüpfungen $\max$ und $\min$ in offensichtlicher Verallgemeinerung von 10.1.5.3.

Definition 10.2.2.7. Ein **angeordneter Kring** ist ein Kring $(R, +, \cdot)$ mit einer Anordnung $\leq$ derart, daß für beliebige Elemente $x, y, z \in R$ gilt:

1. $x \geq y \;\Rightarrow\; x + z \geq y + z$;
2. $(x \geq 0$ und $y \geq 0) \;\Rightarrow\; xy \geq 0$.

Eine Anordnung eines Krings mit diesen Eigenschaften nennen wir eine **Kringanordnung**. Die Elemente $x \in R$ mit $x > 0$ beziehungsweise $x < 0$ nennen wir **positiv** beziehungsweise **negativ**. Die Elemente mit $x \geq 0$ beziehungsweise $x \leq 0$ nennen wir **nichtnegativ** beziehungsweise **nichtpositiv**. Ein **angeordneter Körper** ist ein Körper mit einer Kringanordnung.

Beispiel 10.2.2.8. Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist mit seiner üblichen Anordnung ein angeordneter Kring. Der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist mit seiner üblichen Anordnung ein angeordneter Körper. Dasselbe wird auch für den Körper $\mathbb{R}$ der „reellen Zahlen“ gelten, den wir demnächst einführen.

10.2.2.9 (**Eigenschaften angeordneter Kringe**). Wir listen einige Tatsachen auf, die in beliebigen angeordneten Kringen R gelten.

1. $(x \leq y$ und $a \leq b) \Rightarrow (x + a \leq y + b)$

   In der Tat folgt aus den Annahmen $x + a \leq y + a \leq y + b$.

2. $(x \leq y$ und $a \geq 0) \Rightarrow (ax \leq ay)$

   In der Tat folgt $0 \leq y - x$, also $0 \leq a(y - x) = ay - ax$ und damit dann $ax \leq ay$.

3. $(0 \leq x \leq y$ und $0 \leq a \leq b) \Rightarrow (0 \leq xa \leq yb)$

   In der Tat erhalten wir $0 \leq xa \leq ya \leq yb$.

4. $(x \leq y) \Rightarrow (-y \leq -x)$

   Das folgt durch Addition von $(-y - x)$ auf beiden Seiten.

5. $(x \geq y$ und $a \leq 0) \Rightarrow (ax \leq ay)$

   In der Tat folgern wir $x \geq y \Rightarrow (-a)x \geq (-a)y \Rightarrow ax \leq ay$.

6. $x^2 \geq 0$

   In der Tat ist $x^2 = (-x)^2$ und wir haben $x \geq 0 \Leftrightarrow (-x) \leq 0$.

7. $1 \geq 0$

   In der Tat gilt $1 = 1^2$.

8. ($x \geq 0$ und x invertierbar) $\Rightarrow$ ($x^{-1} \geq 0$)

   Das folgt durch Multiplikation mit $(x^{-1})^2$.

9. ($0 \leq x \leq y$ und x, y invertierbar) $\Rightarrow$ ($0 \leq y^{-1} \leq x^{-1}$)

   Das folgt durch Multiplikation mit $y^{-1}x^{-1}$.

10.2.2.10 (**Einbettung von $\mathbb{Z}$ in angeordnete Kringe**). Schreiben wir zur besonderen Betonung wieder 0_R und 1_R, so gelten nach dem vorhergehenden in jedem angeordneten Kring R mit $0_R \neq 1_R$ die Ungleichungen

$$\ldots < (-1_R) + (-1_R) < (-1_R) < 0_R < 1_R < 1_R + 1_R < \ldots$$

Insbesondere folgt aus $m1_R = n1_R$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ schon $m = n$. Unser eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R, m \mapsto m1_R$ ist in diesem Fall mithin eine Injektion

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow R$$

und diese Injektion ist zusätzlich auch ein Ordnungshomomorphismus. Das Bild dieser Injektion könnte einen eigenen Namen kriegen, zum Beispiel $\mathbb{Z}_R$, aber wir kürzen unsere Notation ab, bezeichnen dieses Bild auch mit $\mathbb{Z}$ und schreiben kürzer m statt $m1_R$.

10.2.2.11 (**Einbettung von $\mathbb{Q}$ in angeordnete Körper**). Ist K ein angeordneter Körper, so erhalten wir einen Körperhomomorphismus $\mathbb{Q} \to K$ durch die Vorschrift $m/n \mapsto m1_K/n1_K$. Es ist leicht zu sehen, daß er der einzige Körperhomomorphismus $\mathbb{Q} \to K$ ist. Wie jeder Körperhomomorphismus ist auch er eine Injektion

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow K$$

und man prüft leicht, daß auch diese Injektion ein Ordnungshomomorphismus ist. Wir könnten diese Injektion zum Beispiel $q \mapsto q_K$ notieren, sind aber etwas nachlässig, bezeichnen das Bild unserer Injektion $\mathbb{Q} \to K$ meist kurzerhand mit demselben Buchstaben $\mathbb{Q}$ statt genauer $\mathbb{Q}_K$ und hängen auch den Elementen von $\mathbb{Q}$ meist keinen Index an, wenn wir eigentlich ihr Bild in K meinen.

Definition 10.2.2.12. Für jeden angeordneten Kring R definieren wir eine Abbildung $R \to R$, $x \mapsto |x|$, genannt der **Absolutbetrag** oder kürzer **Betrag**, durch die Vorschrift

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0; \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

10.2.2.13 (**Eigenschaften des Absolutbetrags**). Wir listen einige Eigenschaften des Absolutbetrags auf. Der Beweis der ersten fünf sei dem Leser überlassen.

1. $x \leq |x|$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $|-x| = |x|$
4. $|xy| = |x||y|$
5. $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ für x invertierbar.
6. Es gilt die sogenannte **Dreiecksungleichung**

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in R$$

   In Worten ist also der Betrag einer Summe stets kleinergleich der Summe der Beträge der Summanden. In der Tat gilt ja $x + y \leq |x| + |y|$ und ebenso auch $-(x + y) \leq |x| + |y|$. Unsere Ungleichung heißt deshalb Dreiecksungleichung, weil sie in einem allgemeineren Kontext sagt, daß in einem Dreieck zwei Seiten zusammen stets länger sind als die Dritte.

7. $||a| - |b|| \leq |a + b| \quad \forall a, b \in R$.

   In der Tat folgt aus der Dreiecksungleichung $|a| = |(a + b) + (-b)| \leq |a + b| + |-b| = |a + b| + |b|$, also $|a| - |b| \leq |a + b|$. Ebenso folgert man aber auch $|b| - |a| \leq |a + b|$.

Ergänzung 10.2.2.14. Unter einer **angeordneten abelschen Gruppe** versteht man eine abelsche Gruppe $(A, +)$ mit einer Anordnung $\leq$ derart, daß für beliebige Elemente $x, y, z \in A$ gilt

$$x \geq y \;\Rightarrow\; x + z \geq y + z$$

Alle in diesem Abchnitt für angeordnete Kringe bewiesenen Aussagen, in denen die multiplikative Struktur keine Rolle spielt, gelten genauso für angeordnete abelsche Gruppen.

Übungen

Übung 10.2.2.15. In jedem angeordneten Körper gilt:

1. Aus $|x - a| \leq \eta$ und $|y - b| \leq \eta$ folgt $|(x + y) - (a + b)| \leq 2\eta$;
2. Aus $|x - a| \leq \eta \leq 1$ und $|y - b| \leq \eta \leq 1$ folgt $|xy - ab| \leq \eta(|b| + 1 + |a|)$;

3. Aus $|y-b| \leq \eta \leq |b|/2$ und $b \neq 0$ folgt $y \neq 0$ und $|1/y - 1/b| \leq 2\eta/|b|^2$.

Ergänzende Übung 10.2.2.16. In jedem angeordneten Ring gilt für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ die sogenannte **Bernoulli-Ungleichung** $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Hinweis: Vollständige Induktion.

Übung 10.2.2.17. Seien K ein angeordneter Körper und $I \subset K$ ein Intervall, in Formeln $(x < y < z$ und $x, z \in I) \Rightarrow y \in I$. Wir nennen eine Funktion $\phi : I \to K$ **konvex**, wenn „ihr Graph unter jeder seiner Sekanten liegt", wenn also in Formeln für alle $x < y < z$ aus I gilt

$$\frac{\phi(x) - \phi(y)}{x - y} \leq \frac{\phi(y) - \phi(z)}{y - z}$$

Man zeige in dieser Situation für beliebige $x_1, \ldots, x_n \in I$ und beliebige nichtnegative $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$ die **Jensen'sche Ungleichung**

$$\phi\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu_i \phi(x_i)$$

In Worten ist also „der Funktionswert beim gewichteten Mittel der x_i beschränkt durch das gewichtete Mittel der Funktionswerte". Hinweis: Die Voraussetzung läßt sich als der Fall $n = 2$ verstehen. Davon ausgehend führt Induktion ans Ziel.

10.2.3 Maximum und Supremum

Definition 10.2.3.1. Sei $(Y, \leq)$ eine teilgeordnete Menge.

1. Ein Element $g \in Y$ heißt ein **größtes Element**, wenn gilt $g \geq y \ \forall y \in Y$. Ein Element $g \in Y$ heißt ein **maximales Element**, wenn es kein $y \in Y$ gibt mit $y > g$.

2. Ein Element $k \in Y$ heißt ein **kleinstes Element**, wenn gilt $k \leq y \ \forall y \in Y$. Ein Element $k \in Y$ heißt ein **minimales Element**, wenn es kein $y \in Y$ gibt mit $y < k$.

10.2.3.2. Jede teilgeordnete Menge besitzt höchstens ein größtes und höchstens ein kleinstes Element. Wir dürfen deshalb den bestimmten Artikel verwenden und von **dem** größten beziehungsweise kleinsten Element reden. Besitzt eine teilgeordnete Menge ein größtes beziehungsweise ein kleinstes Element, so ist dies auch ihr einziges maximales beziehungsweise minimales Element. Im allgemeinen kann es jedoch maximale beziehungsweise minimale Elemente in großer Zahl geben, zumindest dann, wenn unsere Teilordnung keine Anordnung ist. Es kann auch durchaus passieren, daß es überhaupt kein minimales oder maximales Element gibt, und zwar selbst dann, wenn unsere teilgeordnete Menge nicht die leere Menge ist.

Eine teilgeordnete Menge mit zwei minimalen und einem maximalen Element, die weder ein kleinstes noch ein größtes Element besitzt. Die Darstellung ist in der Weise zu verstehen, daß die fetten Punkte die Elemente unserer Menge bedeuten und daß ein Element größer ist als ein anderers genau dann, wenn es von diesem „durch einen aufsteigenden Weg erreicht werden kann“.

Definition 10.2.3.3. Seien $(X, \leq)$ eine teilgeordnete Menge und $Y \subset X$ eine Teilmenge.

1. Ein Element $o \in X$ heißt eine **obere Schranke** von Y in X, wenn gilt $o \geq y \; \forall y \in Y$.

2. Ein Element $u \in X$ heißt eine **untere Schranke** von Y in X, wenn gilt $u \leq y \; \forall y \in Y$.

Definition 10.2.3.4. Seien $(X, \leq)$ eine teilgeordnete Menge und $Y \subset X$ eine Teilmenge.

1. Ein Element $s \in X$ heißt die **kleinste obere Schranke** oder lateinischer das **Supremum** von Y in X, wenn s das kleinste Element ist in der Menge $\{o \in X \mid o \text{ ist obere Schranke von } Y\}$. Wir schreiben dann $s = \sup Y = \sup_X Y$.

2. Ein Element $i \in X$ heißt die **größte untere Schranke** oder lateinischer das **Infimum** von Y in X, wenn i das größte Element ist in der Menge $\{u \in X \mid u \text{ ist untere Schranke von } Y\}$. Wir schreiben dann $i = \inf Y = \inf_X Y$.

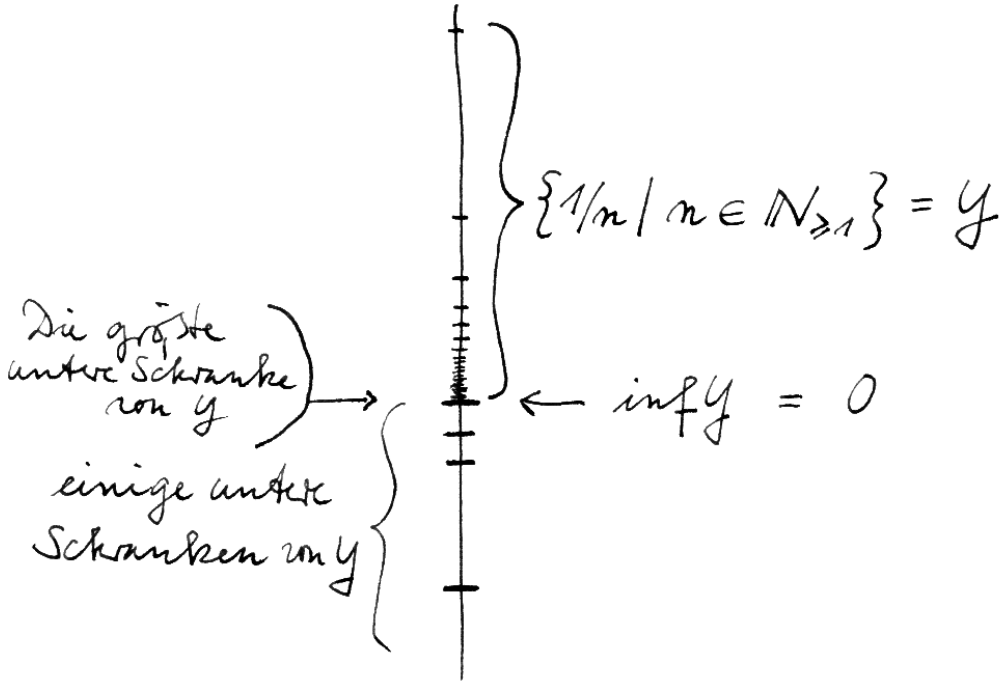
Beispiel 10.2.3.5. Die Teilmenge $Y = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 1\} \subset \mathbb{Q}$ hat kein größtes Element, besitzt jedoch in $\mathbb{Q}$ eine kleinste obere Schranke, nämlich $\sup Y = 1$. Die Teilmenge $Z = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 1\} \subset \mathbb{Q}$ hat ein größtes Element, nämlich die 1, und das ist dann natürlich auch gleichzeitig ihre kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$, also haben wir auch $\sup Z = 1$. Die Teilmenge $Y = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 1\} \subset \mathbb{Q}$ hat in $\mathbb{Q}$ keine untere Schranke und dann natürlich erst recht keine größte untere Schranke.

Ergänzendes Beispiel 10.2.3.6. Auf der Potenzmenge einer beliebigen Menge ist die Inklusionsrelation eine Teilordnung. Bezüglich dieser Teilordnung ist die Vereinigungsmenge im Sinne von 3.1.5.13 eines Mengensystems sein Supremum und die Schnittmenge sein Infimum.

Übungen

Übung 10.2.3.7. Die Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ besitzt in $\mathbb{Q}$ keine größte untere Schranke.

Übung 10.2.3.8. Sei X eine teilgeordnete Menge. Besitzt eine Teilmenge $Y \subset X$ ein größtes Element $g \in Y$, so gilt $g = \sup Y$. Besitzt eine Teilmenge $Y \subset X$ ein kleinstes Element $k \in Y$, so gilt $k = \inf Y$. Sind Teilmengen $Z \subset Y \subset X$ gegeben und besitzen Z und Y ein Supremum in X, so gilt $\sup Z \leq \sup Y$.



Die Menge $Y = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ besitzt in $\mathbb{Q}$ eine größte untere Schranke, nämlich die Null, in Formeln $\inf Y = 0$. Sie besitzt in $\mathbb{Q}$ auch eine kleinste obere Schranke, nämlich die Eins, in Formeln $\sup Y = 1$.

Ergänzende Übung 10.2.3.9 (**Teilordnungen und Verbandsstrukturen**). Erklären wir auf einer teilgeordneten Menge B, in der jede zweielementige Teilmenge ein Supremum und ein Infimum hat, die beiden Verknüpfungen $\vee$ und $\wedge$ durch $a \vee b := \sup\{a, b\}$ und $a \wedge b := \inf\{a, b\}$, so erhalten wir einen Verband im Sinne von 2.2.6.3. Erklären wir umgekehrt auf einem Verband $(B, \vee, \wedge)$ eine Relation R durch aRb genau dann, wenn $a \vee b = b$ oder gleichbedeutend $a = a \wedge b$, so ist R ein Teilordnung und jede zweielementige Teilmenge hat ein Supremum und ein Infimum. Schließlich sind diese beiden Konstruktionen zueinander inverse Bijektionen zwischen Verbandsstrukturen und Teilordnungen mit der fraglichen Eigenschaft auf jeder festen Menge B.

10.2.4 Reelle Zahlen

10.2.4.1 (**Geometrische und algorithmische Zahlbegriffe**). Der folgende Satz 10.2.4.3 enthält die Charakterisierung eines gewissen angeordneten Körpers von „reellen Zahlen“, auf der wir die Analysis aufbauen werden. Dieser Körper bildet einen wesentlichen Teil des Begriffsgebäudes, das es uns ermöglicht, unsere geometrischen Vorstellungen in der heute gebräuchlichen aus den Symbolen der Mengenlehre aufgebauten Sprache der höheren Mathematik wiederzufinden. Bereits im vierten Jahrhundert vor Christus erklärte der griechische Mathematiker Eudoxos eine „Zahl“ als das „Verhältnis zweier Längen“ und gab damit eine geometrische Beschreibung dessen, was wir heute „positive reelle Zahlen“ nennen würden. Die logischen Feinheiten der Beziehung dieses „geometrischen“ Zahlbegriffs zum „algorithmischen“ Zahlbegriff, der vom Prozeß des Zählens herkommt, wurden erst nach und nach verstanden. Den folgenden Satz 10.2.4.3 und seinen Beweis mag man als den Schlußpunkt dieser Entwicklung ansehen. Der Zwischenwertsatz 10.3.3.8 und stärker der Satz über die Gruppenwege in der Kreisgruppe 10.4.5.8 und seine Beziehung zu Winkelmaßen 4.1.8.1 illustrieren, wie gut die bei diesem Beweis im Reich der abstrakten Logik und Mengenlehre konstruierten reellen Zahlen unsere geometrische Anschauung modellieren.

10.2.4.2. Der Beweis der Existenz eines angordneten Körpers mit den im folgenden Satz 10.2.4.3 präzisierten Eigenschaften ist für das weitere Verständnis der Vorlesung belanglos. Ich gebe hier nur eine Beweisskizze, als da heißt einen Beweis für höhere Semester, um Sie zu überzeugen, daß wir nicht während des nächsten halben Jahres Folgerungen ziehen aus Grundannahmen, die überhaupt nie erfüllt sind. Ich rate dazu, bei der ersten Lektüre auf das genauere Studium des Existenzbeweises zu verzichten, der sich bis 10.2.4.17 hinzieht.

Satz 10.2.4.3 (**Charakterisierung der reellen Zahlen**). *1. Es gibt angeordnete Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ derart, daß in der angeordneten Menge $\mathbb{R}$ jede nicht-*

leere Teilmenge mit einer unteren Schranke auch eine größte untere Schranke besitzt;

2. *Solch ein angeordneter Körper ist im wesentlichen eindeutig bestimmt. Ist genauer* $(\mathbb{R}', +, \cdot, \leq)$ *ein weiterer derartiger angeordneter Körper, so gibt es genau einen Körperisomorphismus* $\varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}'$ *und für diesen Körperisomorphismus gilt zusätzlich* $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta)$.

10.2.4.4. Durch Multiplikation mit (-1) sehen wir, daß die im Satz formulierte „Infimumseigenschaft“ im Fall eines angeordneten Körpers gleichbedeutend ist zur **Supremumseigenschaft**, daß jede nichtleere Teilmenge mit einer oberen Schranke auch eine kleinste obere Schranke besitzt.

10.2.4.5. Die im Satz gegebene Charakterisierung trifft auf den angeordneten Körper der rationalen Zahlen nicht zu. Zum Beispiel wissen wir nach 10.2.3.7, daß die Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ in $\mathbb{Q}$ keine größte untere Schranke besitzt. Sie ist jedoch nicht leer und besitzt in $\mathbb{Q}$ durchaus untere Schranken, nur eben keine größte.

Beweis von 10.2.4.3.1. Wir konstruieren einen derartigen Körper $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ als eine Menge $\mathbb{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ von Teilmengen der Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen,

$$\mathbb{R} \quad := \quad \left\{ \alpha \subset \mathbb{Q} \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \text{ ist nicht leer,} \\ \alpha \text{ hat eine untere Schranke,} \\ \alpha \text{ hat kein kleinstes Element,} \\ \alpha \text{ enthält mit } x \text{ auch jedes } y > x. \end{array} \right\}$$

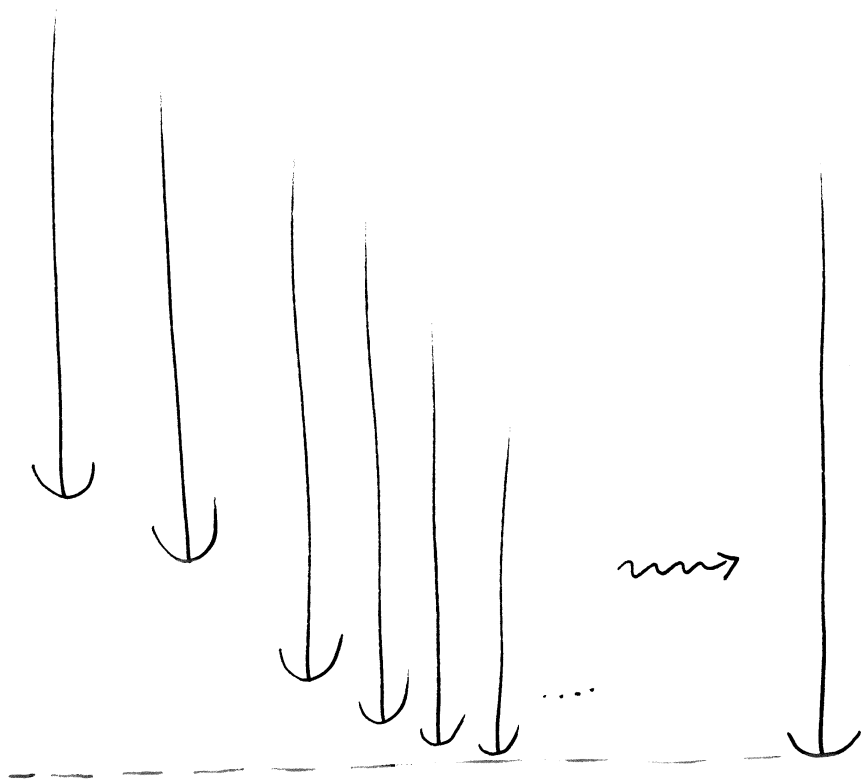
Man nennt solch ein α einen **Dedekind'schen Schnitt** und bezeichnet die so konstruierte Menge $\mathbb{R}$ als das „Dedekind'sche Modell der reellen Zahlen“. Auf unserer Menge $\mathbb{R}$ von Teilmengen von $\mathbb{Q}$ ist die Inklusionsrelation eine Anordnung und wir schreiben $\alpha \leq \beta$ statt $\alpha \supset \beta$. Ist $Y \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge mit unterer Schranke, so liegt offensichtlich auch die Vereinigung

$$\bigcup_{\alpha \in Y} \alpha = \{q \in \mathbb{Q} \mid \text{Es gibt } \alpha \in Y \text{ mit } q \in \alpha\}$$

aller Teilmengen aus Y in $\mathbb{R}$ und ist das Infimum von Y. Damit haben wir bereits eine angeordnete Menge mit der geforderten Eigenschaft konstruiert. Wir müssen darauf nur noch eine Addition und eine Multiplikation erklären derart, daß unsere Struktur zu einem angeordneten Körper wird. Die Addition ist unproblematisch: Wir setzen

$$\alpha + \beta := \{x + y \mid x \in \alpha,\ y \in \beta\}$$

und prüfen mühelos, daß aus $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ schon folgt $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$, daß $\mathbb{R}$ so zu einer kommutativen Gruppe wird mit neutralem Element $0_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, und



Zum Infimum in $\mathbb{R}$

daß gilt $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Das Negative zu α kann man etwa erhalten, indem man die Menge $\{y \in \mathbb{Q} \mid y + x > 0 \ \forall x \in \alpha\}$ betrachtet und ihr für den Fall, daß sie ein kleinstes Element haben sollte, das noch wegnimmt. Wir erlauben uns nun die Abkürzung $0_{\mathbb{R}} = 0$. Die Multiplikation positiver Elemente ist ebenfalls unproblematisch: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ setzen wir

$$\alpha\beta := \{xy \mid x \in \alpha,\ y \in \beta\}$$

und prüfen mühelos, daß aus $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ schon folgt $\alpha\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ und daß $\mathbb{R}_{>0}$ so zu einer kommutativen Gruppe mit neutralem Element $1_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\}$ wird. Das Distributivgesetz in $\mathbb{Q}$ impliziert mit diesen Definitionen auch sofort die Regel

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$. Um unsere Multiplikation so auf ganz $\mathbb{R}$ auszudehnen, daß $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper wird, verwenden wir das anschließende technische Lemma 10.2.4.6. Eine Beweisskizze für die in Teil 2 behauptete Eindeutigkeit geben wir zu Ende dieses Abschnitts. □

Lemma 10.2.4.6. *Sei $(R, +)$ eine kommutative Gruppe mit einer Anordnung $\leq$ derart, daß gilt $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in R$. Sei auf $R_{>0}$ eine Verknüpfung $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$ gegeben, die $R_{>0}$ zu einem kommutativen Monoid macht. Es gelte außerdem die Regel*

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in R_{>0}$$

So gibt es genau eine Fortsetzung unserer Verknüpfung $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$ zu einer Verknüpfung auf ganz R derart, daß $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring wird, und für diesen Ring ist $\leq$ eine Ringanordnung. War $R_{>0}$ eine Gruppe, ist unser Ring R sogar ein Körper.

Beweis. Wenn die Fortsetzung unserer Multiplikation auf ganz R das Distributivgesetz erfüllen soll, müssen wir notwendig setzen

$$\alpha\beta := \begin{cases} 0 & \alpha = 0 \text{ oder } \beta = 0; \\ -((-\alpha)\beta) & \alpha < 0,\ \beta > 0; \\ -(\alpha(-\beta)) & \alpha > 0,\ \beta < 0; \\ (-\alpha)(-\beta) & \alpha < 0,\ \beta < 0. \end{cases}$$

Es gilt nun, für diese Multiplikation Kommutativität und die Ringaxiome nachzuweisen. Unsere Multiplikation auf R ist offensichtlich kommutativ und assoziativ und macht $R \backslash \{0\}$ zu einem Monoid. Wir müssen also nur noch das Distributivgesetz

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in R$$

nachweisen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir hierbei $\alpha > 0$ und $\beta + \gamma > 0$ annehmen. Die einzigen nicht offensichtlichen Fälle sind dann $\beta > 0$, $\gamma < 0$ beziehungsweise $\beta < 0$, $\gamma > 0$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\beta > 0$, $\gamma < 0$. Nach unseren Annahmen gilt ja die Regel

$$\alpha\beta = \alpha((\beta + \gamma) + (-\gamma)) = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha(-\gamma)$$

und daraus folgt sofort $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ auch in diesem letzten Fall. □

Definition 10.2.4.7. Wir wählen für den weiteren Verlauf der Vorlesung einen festen angeordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, der die Supremumseigenschaft hat, erlauben uns wegen der in 10.2.4.3.2 formulierten „Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus“ den bestimmten Artikel, und nennen ihn **den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen**.

10.2.4.8. Ein angeordneter Körper heißt **archimedisch angeordnet**, wenn es zu jedem Element x des Körpers eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $n > x$.

Satz 10.2.4.9 (**Archimedizität der reellen Zahlen**). *Die natürlichen Zahlen besitzen keine obere Schranke in den reellen Zahlen, als da heißt, für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.*

Beweis. Wir argumentieren durch Widerspruch. Hätte die Teilmenge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ eine obere Schranke, so hätte sie nach 10.2.4.4 auch eine kleinste obere Schranke a. Dann wäre aber $a - 1 < a$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, also gäbe es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > (a-1)$. Es folgte $(n+1) > a$, und bereits a selbst wäre keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ gewesen. □

Korollar 10.2.4.10.

1. *Die ganzen Zahlen besitzen keine untere Schranke in den reellen Zahlen;*
2. *Für jede positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine positive natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$;*
3. *Es gilt $0 = \inf_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\}$;*
4. *Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt stets noch eine rationale Zahl, in Formeln: Gegeben $x < y$ in $\mathbb{R}$ gibt es $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$.*

10.2.4.11. Dies Korollar gilt mit demselben Beweis für jeden archimedisch angeordneten Körper.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus 10.2.4.9. Um die Zweite zu zeigen, suche man $n > 1/\varepsilon$. Die dritte Aussage folgt unmittelbar aus der zweiten. Um die vierte Aussage zu zeigen, suchen wir zunächst $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ mit $0 < \frac{1}{n} < y - x$, also

$1 < ny - nx$, das heißt $1 + nx < ny$. Nun gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < ny < b$, also gibt es eine größte ganze Zahl m mit $m < ny$ und folglich $ny \leq m + 1$, woraus hinwiederum folgt $nx < m$ und dann $x < \frac{m}{n} < y$. $\square$

Definition 10.2.4.12. Mit einem endlichen Dezimalausdruck wie $3{,}141$ bezeichnet man wie auf der Schule die rationale Zahl $3141/1000$. Die durch einen **unendlichen Dezimalausdruck** wie $3{,}1415\ldots$ dargestellte reelle Zahl erklären wir als das Supremum der Menge ihrer endlichen Teilausdrücke beziehungsweise das Infimum, wenn ein Minus davorsteht. Wir setzen also zum Beispiel

$$3{,}1415\ldots \quad := \quad \sup \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 3{,}1 \\ 3{,}14 \\ 3{,}141 \\ 3{,}1415 \\ \ldots \end{array} \right\}$$

Die Elemente der Menge aller endlichen Teilausdrücke haben wir hier nur der Übersichtlichkeit halber untereinander geschrieben, statt sie durch Kommata zu trennen, und rationale Zahlen haben wir stillschweigend mit ihren Bildern in $\mathbb{R}$ identifiziert.

Beispiel 10.2.4.13. Ich zeige $1 = 0,99999\ldots$ Nach unserer Konvention 10.2.4.12 gilt es zu zeigen $1 = \sup\{1-10^{-n} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$. Eine evidente Rechnung zeigt, daß es äquivalent ist, $0 = \inf\{10^{-n} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ zu zeigen, und das folgt unmittelbar aus Korollar 10.2.4.10, in dem wir $0 = \inf\{1/k \mid k \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ gezeigt hatten.

Proposition 10.2.4.14. *1. Jede reelle Zahl läßt sich durch einen unendlichen Dezimalausdruck darstellen;*

2. Genau dann stellen zwei verschiedene unendliche Dezimalausdrücke dieselbe reelle Zahl dar, wenn es eine Stelle vor oder nach dem Komma gibt und eine von Neun verschiedene Ziffer z derart, daß die beiden Dezimalausdrücke bis zu dieser Stelle übereinstimmen, ab dieser Stelle jedoch der eine die Form $z99999\ldots$ hat und der andere die Form $(z+1)00000\ldots$

Beweis. Für den ersten Teil reicht es zu zeigen, daß sich jede nichtnegative reelle Zahl $y \geq 0$ als ein unendlicher Dezimalausdruck darstellen läßt. Nehmen wir zu jedem $s \in \mathbb{N}$ die größte reelle Zahl $r_s \leq y$ unter y mit höchstens s Stellen nach dem Komma, so gilt

$$y = \sup\{r_0, r_1, r_2, \ldots\}$$

In der Tat ist y eine obere Schranke dieser Menge, aber jede reelle Zahl $x < y$ ist keine obere Schranke dieser Menge: Nach 10.2.4.10 oder, genauer, seinem Beweis gibt es nämlich für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ ein $s \in \mathbb{N}$ und ein $m \in \mathbb{Z}$ mit

$x < m \cdot 10^{-s} < y$, als da heißt, es gibt ein s mit $x < r_s$. Um den zweiten Teil zu zeigen, dürfen wir uns weiter auf nichtnegative Zahlen beschränken. Wir sehen wie in 10.2.4.13, daß jeder Dezimalausdruck mit einer Neunerperiode dieselbe reelle Zahl darstellt wie ein geeigneter anderer Dezimalausdruck ohne Neunerperiode. Betrachten wir nun zwei verschiedene Dezimalausdrücke ohne Neunerperiode und zeigen, daß sie verschiedene reelle Zahlen darstellen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien sie gleich vor dem Komma, aber verschieden in der ersten Nachkommastelle. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit mögen sie sogar beide nur eine Null vor dem Komma haben. Nach dem Komma habe der Dezimalausdruck a die Ziffern $a_1, a_2, \ldots$ und der Dezimalausdruck b die Ziffern $b_1, b_2, \ldots$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $a_1 > b_1$. Wir finden nach Annahme ein $r \geq 1$ mit $b_r \neq 9$. Bezeichne $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die durch unsere beiden Dezimalausdrücke dargestellten reellen Zahlen. Dann gilt offensichtlich

$$\alpha \geq \frac{a_1}{10} > \frac{a_1}{10} - \frac{1}{10^r} \geq \beta \qquad \square$$

Beweisskizze für 10.2.4.3.2. Wir gehen von der Bijektion zwischen einem beliebigen angeordneten Körper $\mathbb{R}$ mit der Supremumseigenschaft und der Menge aller „Dezimalausdrücken ohne Neunerperiode“ aus 10.2.4.14 aus. verwendet zusammen mit der in den Übungen 10.2.4.18, 10.2.4.19 und 10.2.4.20 gegebenen Beschreibung von Addition und Multiplikation von Dezimalausdrücken. Dieser Beweis ist zwar vom höheren Standpunkt aus nicht besonders geschickt oder natürlich, aber dafür vielleicht vom Schulstoff aus besser zugänglich. Ein Zugang „vom höheren Standpunkt“ wird in Übung 10.2.4.21 skizziert. Daß jeder Körperhomomorphismus zwischen zwei Körpern $\mathbb{R}, \mathbb{R}'$ mit der Supremumseigenschaft die Anordnung erhalten muß, wird in 10.3.3.14 klar werden, wo wir zeigen, daß für jeden angeordneten Körper $\mathbb{R}$ mit der Supremumseigenschaft die nichtnegativen Elemente genau alle Quadrate sind, in Formeln $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. $\square$

Ergänzung 10.2.4.15. Es ist durchaus möglich, die Menge D aller „Dezimalausdrücke“ ohne jegliche Identifizierungen zu betrachten. Wenn wir diese Menge D mit der Struktur einer angeordneten Menge zu versehen, ist auch durchaus die Supremumseigenschaft erfüllt. Es ist jedoch nicht möglich, diese angeordnete Menge zu einem angeordneten Körper zu machen. Der naive Ansatz scheitert daran, daß nicht klar ist, wie man mit den eventuell unendlich vielen Überträgen bei der Addition und Multiplikation umgehen soll. Daß überhaupt jeder Ansatz zum Scheitern verurteilt ist, erkennt man etwa daran, daß es in D Elemente gibt mit $d = \sup_D X \Rightarrow d \in X$ für Teilmengen $X \subset D$, wie etwa $d := 1,0000\ldots$, und andere Elemente wie etwa $d = 0,99999\ldots$, für die diese Implikation nicht gilt. Für jeden angeordneten Körper K muß jedoch die Addition eines beliebigen Elements $k \in K$ ein Ordnungsisomorphismus $(k+) : K \xrightarrow{\sim} K$ sein.

Übungen

Übung 10.2.4.16. Man zeige, daß es für je zwei nichtleere Teilmengen $M, N \subset \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ für alle $x \in M$ und $y \in N$ stets ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq a \leq y$ für alle $x \in M$ und $y \in N$. Man zeige weiter, daß diese Bedingung an eine angeordnete Menge sogar gleichbedeutend ist zur Forderung, jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke möge auch eine größte untere Schranke besitzen.

Übung 10.2.4.17. Bezeichne $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ das Dedekind'sche Modell der reellen Zahlen. Man zeige, daß die durch die Struktur eines angeordneten Körpers auf $\mathbb{R}$ nach 10.2.2.10 definierte Injektion $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ auch beschrieben werden kann durch die Vorschrift $p \mapsto p_{\mathbb{R}} := \{q \in \mathbb{Q} \mid q > p\}$.

Übung 10.2.4.18 (**Summe nichtnegativer Zahlen in Dezimaldarstellung**). Seien X und Y nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Mit der Notation $X + Y \subset \mathbb{R}$ für die Menge $\{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ zeige man $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$. Damit ist klar, wie man zu zwei durch Dezimalausdrücke dargestellten nichtnegativen reellen Zahlen einen Dezimalausdruck für ihre Summe bestimmen kann: Man betrachtet die Menge S aller Summen endlicher Teilausdrücke und nimmt den lexikographisch größten Dezimalausdruck, dessen sämtliche Anfangsstücke mit Anfangsstücken von Dezimalausdrücken aus unserer Menge S übereinstimmen. Da der Übertrag beim Addieren jeweils höchstens Eins sein kann, ist an jeder Stelle, an der nicht zwei Neuner übereinanderstehen, schon klar, welche Ziffer in unserem Dezimalausdruck für die Summe an der Stelle davor stehen muß.

Übung 10.2.4.19 (**Differenz nichtnegativer Zahlen in Dezimaldarstellung**). Man überlegt sich, daß man sich mit 10.2.4.18 darauf zurückziehen kann zu erklären, wie man für jede durch einen Dezimalausdruck a mit einer Null vor dem Komma gegebene reelle Zahl α einen Dezimalausdruck für $\beta := 1 - \alpha$ bestimmt. Sind aber $a_1, a_2, \ldots$ die Nachkommastellen unseres Dezimalausdrucks a, so sind die Ziffern b_i gegeben durch $a_i + b_i = 9$ nach 10.2.4.18 offensichtlich Nachkommastellen, die zusammen mit einer Null vor dem Komma einen Dezimalausdruck für β bilden.

Übung 10.2.4.20 (**Produkt in Dezimaldarstellung**). Seien X und Y nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}_{>0}$. Mit der Notation $XY \subset \mathbb{R}$ für die Menge $\{xy \mid x \in X,\ y \in Y\}$ zeige man $\sup(XY) = (\sup X)(\sup Y)$. Damit ist ähnlich wie in 10.2.4.18 klar, wie man zu je zwei durch Dezimalausdrücke dargestellten reellen Zahlen einen Dezimalausdruck für ihr Produkt bestimmen kann.

Ergänzende Übung 10.2.4.21 (Für höhere Semester). Man zeige die in 10.2.4.3.2 behauptete Eindeutigkeit der reellen Zahlen bis auf eindeutigen Isomorphismus. Hinweis: Die gesuchte Bijektion φ kann zum Beispiel konstruiert werden durch

die Vorschrift $\varphi(\alpha) = \inf\{q_{\mathbb{R}'} \mid q \in \mathbb{Q}, q_{\mathbb{R}} > \alpha\}$. Man zeige allgemeiner auch, daß jeder Körperhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Identität ist. Hinweis: Nach 10.3.3.14 sind die nichtnegativen reellen Zahlen genau die Quadrate, jeder Körperhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erhält also die Anordnung. Andererseits aber muß er auf $\mathbb{Q}$ die Identität sein.

Ergänzende Übung 10.2.4.22 (Für höhere Semester). Gegeben ein archimedisch angeordneter Körper k gibt es genau einen ordnungserhaltenden Körperhomomorphismus $k \to \mathbb{R}$. Hinweis: Ähnlich wie 10.2.4.21, das man umgekehrt aus diesem Resultat ableiten kann, sobald man weiß, daß es zu jeder positiven reellen Zahl eine Quadratwurzel gibt.

10.2.5 Rationale und reelle Zahlen im Vergleich

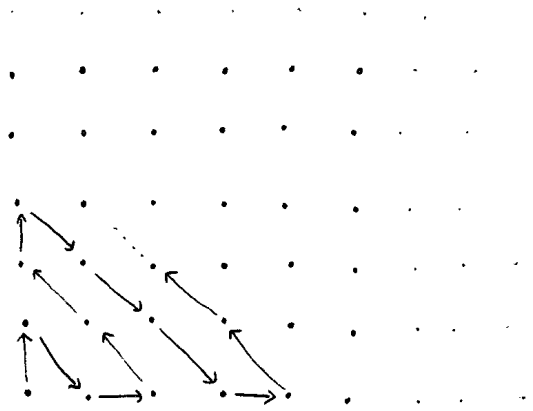
Definition 10.2.5.1. Eine Menge heißt **abzählbar**, wenn es eine Bijektion unserer Menge mit einer Teilmenge der Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen gibt. Gleichbedeutend können wir auch fordern, daß unsere Menge entweder leer ist oder es eine Surjektion von $\mathbb{N}$ darauf gibt. Eine Menge heißt **abzählbar unendlich**, wenn sie abzählbar aber nicht endlich ist. Eine Menge heißt **überabzählbar**, wenn sie nicht abzählbar ist.

Satz 10.2.5.2. *1. Es gibt eine Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$, in Worten: Die Menge der rationalen Zahlen ist* **abzählbar unendlich***;*

2. Es gibt keine Surjektion $\mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, in Worten: Die Menge der reellen Zahlen ist **überabzählbar**.

Beweis. 1. Für jede natürliche Zahl N gibt es nur endlich viele Brüche $p/q \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ und $|p| \leq N$, $|q| \leq N$. Wir beginnen unser Abzählen von $\mathbb{Q}$ mit den Brüchen für $N = 1$, dann nehmen wir die Brüche hinzu mit $N = 2$, und indem wir so weitermachen zählen wir ganz $\mathbb{Q}$ ab.

2. Hierzu verwenden wir das **Cantor'sche Diagonalverfahren**. Man beachte zunächst, daß ein unendlicher Dezimalbruch, in dem die Ziffern Null und Neun nicht vorkommen, nur dann dieselbe reelle Zahl darstellt wie ein beliebiger anderer unendlicher Dezimalbruch, wenn die beiden in jeder Stelle übereinstimmen. Wir betrachten nun eine beliebige Abbildung $\mathbb{N}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$, $i \mapsto r_i$, und zeigen, daß sie keine Surjektion sein kann. Wir schreiben dazu jedes r_i als unendlichen Dezimalbruch. Dann finden wir einen unendlichen Dezimalbruch r, bei dem die Ziffern Null und Neun nicht vorkommen und so, daß r für an der i-ten Stelle nach dem Komma verschieden ist von r_i. Dies r ist dann verschieden von allen r_i und unsere Abbildung $i \mapsto r_i$ kann keine Surjektion gewesen sein. $\square$



$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar und damit auch allgemeiner das Produkt von je zwei und dann auch von endlich vielen abzählbaren Mengen.

$$
\begin{aligned}
r_0 &= 12,87538\ldots \\
r_1 &= 0,01338\ldots \\
r_2 &= 14,22222\ldots \\
r_3 &= 338,12345\ldots \\
&\vdots \\
r &= 1,134\ldots
\end{aligned}
$$

Illustration zum Cantor'schen Diagonalverfahren. Ähnlich zeigt man, daß die Menge $\mathrm{Ens}(\mathbb{N}, E)$ aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ in eine Menge E mit mindestens zwei Elementen nicht abzählbar ist.

Bemerkung 10.2.5.3. Man kann sich fragen, ob jede Teilmenge der reellen Zahlen entweder abzählbar ist oder in Bijektion zu den reellen Zahlen selber. Die schon auf Cantor zurückgehende Vermutung, das könnte gelten, ist bekannt als die **Kontinuumshypothese**. Sie wurde 1963 von Paul Cohen in sehr merkwürdiger Weise geklärt: Er zeigte, daß unsere Frage in dem axiomatischen Rahmen, in dem man die Mengenlehre üblicherweise formalisiert, nicht entscheidbar ist. Cohen wurde für diese Leistung auf dem internationalen Mathematikerkongress 1966 mit der Fields-Medaille ausgezeichnet. Die Kontinuumshypothese ist übrigends die erste Frage einer berühmten Liste von 23 Fragestellungen, den sogenannten **Hilbert'schen Problemen**, die David Hilbert in seiner Ansprache auf dem internationalen Mathematikerkongress 1900 in Paris vorstellte in seinem Bemühen, „aus verschiedenen mathematischen Disziplinen einzelne bestimmte Probleme zu nennen, von deren Behandlung eine Förderung der Wissenschaft sich erwarten läßt".

10.3 Stetigkeit und Grenzwerte

10.3.1 Anschauung für Funktionen

10.3.1.1. Abbildungen mit Werten in irgendeiner Art von Zahlen nennen wir **Funktionen**. Wir erlauben hier auch Werte in $\bar{\mathbb{R}}$. Wollen wir besonders betonen, daß nur reelle Zahlen als Werte angenommen werden, so sprechen wir von **reellwertigen Funktionen**. Reellwertige Funktionen auf der reellen Zahlengeraden mag man sich auf viele verschiedene Arten vorstellen. Gleichzeitig diskutiere ich Anschauungen für Abbildungen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

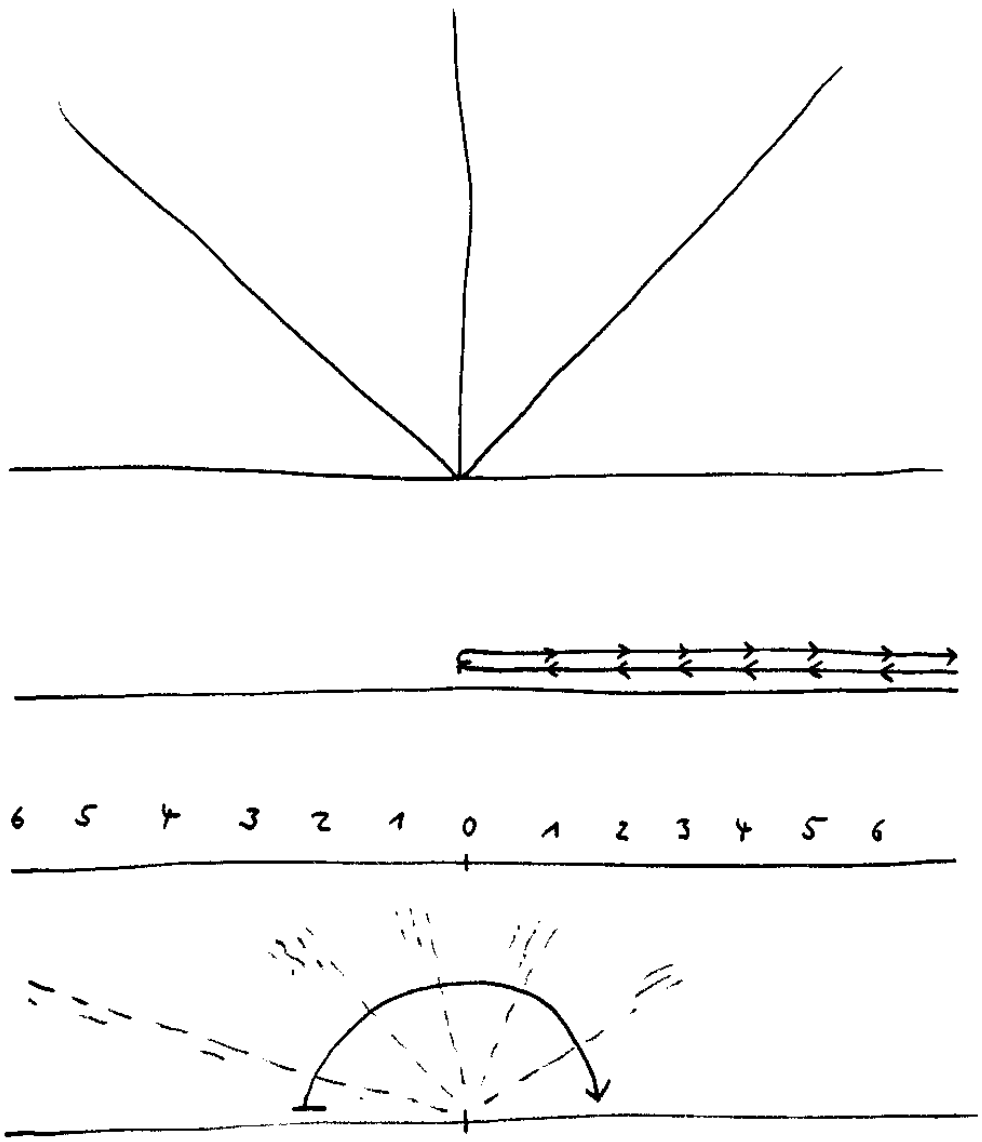
1. In der Schule ist es üblich, eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch ihren Graphen $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ zu veranschaulichen, also durch eine Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$.

2. In der Physik ist es üblich, sich eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to X$, $t \mapsto f(t)$ von $\mathbb{R}$ in irgendeine Menge X vorzustellen als ein Teilchen, das sich im Raum X bewegt und sich zur Zeit t für lateinisch „tempus“ am Punkt $f(t)$ befindet. Im Fall $X = \mathbb{R}$ hätten wir uns also ein Teilchen vorzustellen, das sich auf der Zahlengerade bewegt. Im Fall $X = \mathbb{R}^2$ beziehungsweise $X = \mathbb{R}^3$ können wir uns ein Teilchen vorzustellen, das sich auf der Koordinatenebene beziehungsweise im dreidimensionalen Raum bewegt.

3. Eine reellwertige Funktion $X \to \mathbb{R}$ auf einer beliebigen Menge kann man sich als eine Temperaturverteilung auf besagter Menge vorstellen, im Fall $X = \mathbb{R}$ also als eine Temperaturverteilung auf der reellen Zahlengeraden, im Fall $X = \mathbb{R}^2$ beziehungsweise $X = \mathbb{R}^3$ als Temperaturverteilung auf der Ebene beziehungsweise im Raum.

4. In der Mathematik ist es auch nützlich, sich eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wirklich als Abbildung der Zahlengerade auf sich selber vorzustellen. Als Beispiel betrachten wir den Absolutbetrag, der als Abbildung aufgefaßt den negativen Teil der Zahlengerade auf den positiven Teil herüberklappt. Ebenso mag man sich eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vorstellen als eine Beschreibung für das Aufspannen eines Gummituchs im Raum.

5. Im Fall $m + n \leq 3$ kann man sich eine Abbildung $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ auch noch durch ihren Graphen vorstellen. Im Fall $m = 2$ wäre der Graph eine hügelige Landschaft, jedem Punkt der Ebene wird die dortige Höhe zugeordnet. Im Fall $m = 1$ wäre der Graph eher eine Art Draht im Raum, zum Beispiel ist der Graph von $t \mapsto (\sin t, \cos t)$ ein Draht, der als Spirale um die t-Achse liegt.



Vier verschiedene Anschauungen für eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen am Beispiel des Absolutbetrags $x \mapsto |x|$

10.3.1.2. Bereits beliebige Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ können „wild aussehen“. Man denke etwa an die Abbildung, die jeder rationalen Zahl den Betrag ihres Nenners nach vollständigem Kürzen zuordnet und jeder irrationalen Zahl ihre fünfte Nachkommastelle. Wir führen nun die „stetigen Funktionen“ ein und zeigen insbesondere, daß für stetige auf einem Intervall definierte und injektive Funktionen auch ihr Bild ein Intervall ist und die Umkehrfunktion stetig. Das liefert uns viele Funktionen als Umkehrfunktionen bereits bekannter Funktionen. In der schmutzigen Anschauung ist eine reellwertige Funktion auf einem reellen Intervall stetig, wenn man „ihren Graphen zeichnen kann ohne den Stift abzusetzen“. Diese Anschauung werden wir im Folgenden präzisieren.

10.3.1.3. Die mit dieser Materie bereits Vertrauten seien vorgewarnt, daß ich im folgenden bei der Behandlung von Grenzwerten und Stetigkeit einen eher ungewöhnlichen Ansatz verfolge. Am Anfang steht der Begriff einer Intervallumgebung eines Punktes in den erweiterten reellen Zahlen $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \sqcup \{\infty, -\infty\}$ und allgemeiner eines Quaders um einen Punkt in $\bar{\mathbb{R}}^n$. Danach erklären wir, wann eine Abbildung von einer Teilmenge $D \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ nach $\bar{\mathbb{R}}^n$ stetig ist bei einem Punkt $p \in D$ und besprechen die Stetigkeit der Verknüpfung stetiger Abbildungen. Die Betrachtung mehrerer Variablen scheint mir didaktisch vorteilhaft, weil sie ausdrucksstärkere graphische Illustrationen erlaubt und darin Aussagen wie die Stetigkeit der Addition und Multiplikation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ formuliert und bewiesen werden können. Danach erst erklären wir den Grenzwert einer Funktion als den „Funktionswert der eindeutigen stetigen Fortsetzung“ und den Grenzwert einer Folge als den Spezialfall des Grenzwerts einer auf $\mathbb{N}$ definierten Funktion. Dieses Vorgehen steht im Kontrast zu der übliche Vorgehensweise, bei der man mit Grenzwerten von Folgen beginnt, bevor man von dort ausgehend zur Stetigkeit von Funktionen und ihren Grenzwerten kommt.

10.3.2 Intervalle und Stetigkeit

Definition 10.3.2.1. Eine Teilmenge einer teilgeordneten Menge heißt ein **Intervall**, wenn mit zwei beliebigen Punkten auch jeder Punkt dazwischen zu unserer Teilmenge gehört. Ist in Formeln $(X, \leq)$ eine teilgeordnete Menge, so heißt demnach eine Teilmenge $I \subset X$ ein Intervall oder noch präziser ein **Intervall in** X, wenn für $x, y, z \in X$ mit $x < y < z$ aus $x, z \in I$ folgt $y \in I$.

Definition 10.3.2.2. Wir erweitern die reellen Zahlen durch zwei zusätzliche Punkte $-\infty$ und ∞ zu der in offensichtlicher Weise angeordneten Menge der **erweiterten reellen Zahlen**

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

10.3.2.3 (**Reelle Intervalle**). Jede Teilmenge von $\bar{\mathbb{R}}$ besitzt in $\bar{\mathbb{R}}$ ein Supremum und ein Infimum. Wir kürzen im folgenden meist $\sup_{\bar{\mathbb{R}}} = \sup$ und $\inf_{\bar{\mathbb{R}}} = \inf$ ab.

Für ein Intervall $I \subset \bar{\mathbb{R}}$ mit Supremum $a = \sup I$ und Infimum $b = \inf I$ gibt es die Alternativen $a \in I$ oder $a \notin I$ und $b \in I$ oder $b \notin I$. Es gibt damit vier Typen von Intervallen in $\bar{\mathbb{R}}$, für die die beiden folgenden Notationen gebräuchlich sind:

$$\begin{array}{rclcl} [a,b] & = & [a,b] & = & \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid a \le x \le b\} \\ ]a,b[& = & (a,b) & = & \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid a < x < b\} \\ [a,b[& = & [a,b) & = & \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid a \le x < b\} \\ ]a,b] & = & (a,b] & = & \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid a < x \le b\} \end{array}$$

Wählen wir hier $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ beliebig mit $a < b$, so erhalten wir genau alle Intervalle in $\bar{\mathbb{R}}$ mit mehr als einem Element, die **mehrpunktigen Intervalle**. Wir benutzen die eben erklärten Notationen jedoch auch im Fall $a \ge b$, sie bezeichnen dann manchmal eine einpunktige Menge und meist die leere Menge. Ein Intervall in $\mathbb{R}$ nennen wir ein **reelles Intervall**.

10.3.2.4 (**Diskussion der Notation**). Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, wann mit (a, b) ein Intervall gemeint ist und wann ein Paar aus $\mathbb{R}^2$. Sind a und b konkrete Zahlen, etwa $a = 1$ und $b = 27$, so wäre zu allem Überfluß auch noch eine dritte Lesart von $(1, 27)$ als die in Klammern notierte Dezimalzahl $1{,}27$ denkbar. Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, was jeweils gemeint ist. Wenn man genau hinguckt, sollte auch im letzteren Fall der Abstand nach dem Komma etwas kleiner sein.

10.3.2.5. Ein Intervall in $\bar{\mathbb{R}}$ heißt **kompakt**, wenn es eines unserer Intervalle $[a, b]$ ist. Der Begriff „kompakt“ wird in 10.5.1.1 auf beliebige Teilmengen von $\bar{\mathbb{R}}$ verallgemeinert.

10.3.2.6. Ein reelles Intervall heißt **offen**, wenn es eines unserer Intervalle (a, b) ist. Der Begriff „offen“ wird in 10.5.5.1 auf beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}$ verallgemeinert.

Definition 10.3.2.7. Gegeben ein Punkt $p \in \bar{\mathbb{R}}$ verstehen wir unter einer **Intervallumgebung von** p ein Intervall $I \subset \bar{\mathbb{R}}$ mit $p \in I$, das auch einen Punkt $\beta > p$ enthält, falls es einen solchen Punkt in $\bar{\mathbb{R}}$ gibt, sowie einen Punkt $\alpha < p$, falls es einen solchen Punkt in $\bar{\mathbb{R}}$ gibt.

Beispiel 10.3.2.8. Intervallumgebungen von $p \in \mathbb{R}$ sind alle Intervalle der Gestalt $[a, b], (a, b], [a, b), (a, b)$ mit $a < p < b$ und $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.

Beispiel 10.3.2.9. Intervallumgebungen von ∞ sind alle Intervalle der Gestalt $[a, \infty]$ oder $(a, \infty]$ mit $a \in \bar{\mathbb{R}}$ und $a < \infty$.

Beispiel 10.3.2.10. Intervallumgebungen von $-\infty$ sind alle Intervalle der Gestalt $[-\infty, b]$ oder $[-\infty, b)$ mit $b \in \bar{\mathbb{R}}$ und $-\infty < b$.

Definition 10.3.2.11. Gegeben ein Punkt $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \bar{\mathbb{R}}^n$ verstehen wir unter einer **Quaderumgebung von** p oder kurz einem **Quader um** p eine Teilmenge $Q \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ der Gestalt $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$ mit I_ν jeweils einer Intervallumgebung von p_ν.

Definition 10.3.2.12. Eine Abbildung $f : \bar{\mathbb{R}}^m \to \bar{\mathbb{R}}^n$ heißt **stetig an einer Stelle** $p \in \bar{\mathbb{R}}^m$, wenn es für jeden Quader Q um $f(p)$ einen Quader Q' um p gibt mit $f(Q') \subset Q$.

10.3.2.13. Ein Datum bestehend aus einer Menge X, einer Teilmenge $D \subset X$ und einer Abbildung $f : D \to Y$ in eine weitere Menge Y notieren wir im folgenden abkürzend

$$f : X \supset D \to Y$$

Definition 10.3.2.14. Eine Abbildung $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \to \bar{\mathbb{R}}^n$ heißt **stetig an einer Stelle** $p \in D$, wenn es für jeden Quader Q um $f(p)$ einen Quader Q' um p gibt mit $f(Q' \cap D) \subset Q$. Eine Abbildung, die stetig ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs, heißt **stetig**.

10.3.2.15. Auf Englisch sagt man für stetig **continuous**, auf Französisch **continue**.

Beispiel 10.3.2.16 (**Aufschneiden der Ebene**). Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $(x, y) \mapsto (x, y)$ für $x < 0$ und $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ für $x \geq 0$ bedeutet anschaulich, daß wir die Ebene längs der y-Achse aufschneiden und den rechten Teil, dem wir auch die y-Achse selbst zuschlagen, um Eins nach rechts schieben. Sie ist nicht stetig an allen Punkten der y-Achse, ist jedoch stetig an allen Punkten außerhalb der y-Achse. An dieser Stelle möge als Argumentation ein Bild genügen.

Beispiel 10.3.2.17 (**Stetigkeit konstanter Funktionen**). Konstante Abbildungen $c : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \to \bar{\mathbb{R}}^n$ sind stetig. In diesem Fall gilt für jeden Quader Q um $c(p)$ und jeden beliebigen Quader Q' um p bereits $c(Q' \cap D) \subset Q$.

Beispiel 10.3.2.18 (**Stetigkeit von Einbettungen**). Eine beliebige Einbettungsabbildung $i : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \to \bar{\mathbb{R}}^m$ gegeben durch $x \mapsto x$ ist stetig. In diesem Fall ist für jeden Quader Q um $p = i(p)$ bereits $Q' := Q$ selbst ein Quader um p mit $i(Q' \cap D) \subset Q$.

10.3.2.19. Gegeben $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ erklären wir $|x| := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ als das Maximum der Absolutbeträge der Koordinaten von x. Gegeben $p \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ erklären wir den **ε-Quader um** p durch die Vorschrift

$$\mathrm{B}(p; \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |p - x| < \varepsilon\}$$

Die Notation B für unseren Quader bedeutet „Ball“ und ist die übliche Bezeichnung für dieses Konzept im Kontext allgemeiner „metrischer Räume“.

10.3.2.20. Offensichtlich sind für $p \in \mathbb{R}^n$ die ε-Quader um p auch Quader um p. Offensichtlich umfäßt weiter jeder Quader um $p \in \mathbb{R}^n$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ den ε-Quader um p. Wenn „nirgends $\pm\infty$ vorkommt“, können wir die Stetigkeit auch mit diesen speziellen Quadern charakterisieren, wie im folgenden Lemma ausgeführt wird.

Lemma 10.3.2.21 (**ε-δ-Kriterium für Stetigkeit**). *Seien $f : \mathbb{R}^m \supset D \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $p \in D$ ein Punkt. Genau dann ist f stetig bei p, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt derart, daß für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ gilt $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.*

Beweis. Ist f stetig bei p, so gibt es insbesondere für jedes $\varepsilon > 0$ und den Quader $Q := \mathrm{B}(f(p), \varepsilon)$ um $f(p)$ einen Quader Q' um p mit $f(Q' \cap D) \subset Q$. Für diesen Quader Q' hinwiederum gibt es $\delta > 0$ mit $\mathrm{B}(p, \delta) \subset Q'$ und dann gilt a forteriori $f(\mathrm{B}(p, \delta) \cap D) \subset \mathrm{B}(f(p), \varepsilon) = Q$ alias

$$(|x - p| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(p)| < \varepsilon)$$

Ist umgekehrt das ε-δ-Kriterium erfüllt und ist Q ein Quader um $f(p)$, so wählen wir ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathrm{B}(f(p), \varepsilon) \subset Q$ und finden dazu ein $\delta > 0$ mit $f(\mathrm{B}(p, \delta) \cap D) \subset \mathrm{B}(f(p), \varepsilon)$ und dann ist $Q' := \mathrm{B}(p, \delta)$ ein Quader um p mit $f(Q' \cap D) \subset Q$ und f ist stetig bei p. □

10.3.2.22 (**Konventionen zu ε**). Wenn Sie in der Analysis die Formulierung „für alle $\varepsilon > 0$ gilt was auch immer“ antreffen, so dürfen Sie erwarten, daß dieses „was auch immer“, wenn es denn für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ gilt, für alle größeren $\varepsilon > 0$ erst recht gilt. Salopp gesprochen besteht also die unausgesprochene Übereinkunft, durch die Verwendung des Buchstabens ε das anzudeuten, was man umgangsprachlich vielleicht mit „für jedes auch noch so kleine $\varepsilon > 0$“ ausdrücken würde. Sie müssen nur einmal versuchen, beim Vorrechnen einer Übungsaufgabe statt ε den Buchstaben M zu verwenden: Auch wenn formal alles richtig sein sollte, wird Ihr Tutor deutlich länger darüber nachdenken müssen, ob Ihre Formulierung auch wirklich stimmt. „Sei $\varepsilon < 0$“ schließlich ist ein mathematischer Witz.

10.3.2.23. Wenn wir den Beweis des ε-δ-Kriteriums nocheinmal durchgehen, stellen wir fest, daß dabei nur zwei Eigenschaften unserer ε-Quader $\mathrm{B}(p, \varepsilon)$ eine Rolle spielen: Zum ersten, daß jeder ε-Quader $\mathrm{B}(p, \varepsilon)$ um p einen Quader um p umfaßt, etwa sich selber, und zum zweiten, daß jeder Quader Q um $p \in \mathbb{R}^n$ einen ε-Quader $\mathrm{B}(p, \varepsilon)$ um p umfaßt, für geeignetes $\varepsilon > 0$. Gegeben $p \in \bar{\mathbb{R}}^n$ nennt man allgemeiner $U \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ eine **Umgebung von** p, wenn es einen Quader Q um p gibt mit $p \in Q \subset U$, und erhält in derselben Weise ein weiteres Stetigkeitskriterium, das weniger eckig daherkommt.

Lemma 10.3.2.24 (Umgebungskriterium für Stetigkeit). *Seien $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \to \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Abbildung und $p \in D$ ein Punkt. Genau dann ist f stetig bei p, wenn es für jede Umgebung U von $f(p)$ eine Umgebung U' von p gibt mit $f(U' \cap D) \subset U$.*

Beweis. Analog zum Beweis von 10.3.2.21 und dem Leser überlassen. □

Beispiel 10.3.2.25 (**Stetigkeit des Absolutbetrags**). Der Absolutbetrag $\mathrm{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist stetig. In der Tat gilt in diesem Fall an jeder Stelle p das ε-δ-Kriterium mit $\delta = \varepsilon$, denn aus $|x - p| < \varepsilon$ folgt $||x| - |p|| < \varepsilon$. Sogar die Fortsetzung des Absolutbetrags zu $\mathrm{abs} : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ durch $|-\infty| = |\infty| = \infty$ ist stetig, wie der Leser zur Übung selbst zeigen mag.

10.3.2.26. Ich will versuchen, an der Tafel einem Farbencode zu folgen, nach dem vorgegebene Umgebungen von Grenzwerten und dergleichen in gelber Farbe dargestellt werden, dazu zu findende N und dergleichen dahingegen in blauer Farbe. Rote Farbe ist an grünen Tafeln für nicht wenige Menschen schwer zu lesen.

Beispiel 10.3.2.27 (**Stetigkeit der Addition**). Die Addition ist eine stetige Abbildung $\mathrm{add} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$. Um das zu sehen, müssen wir zeigen, daß sie stetig ist an jedem Punkt $p := (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt aber offensichtlich

$$\mathrm{add}(\mathrm{B}(p; \varepsilon/2)) \subset \mathrm{B}(\mathrm{add}(p); \varepsilon)$$

Also ist an jeder Stelle $p = (a, b)$ das ε-δ-Kriterium erfüllt mit $\delta = \varepsilon/2$.

Beispiel 10.3.2.28 (**Stetigkeit der Multiplikation**). Die Multiplikation ist eine stetige Abbildung $\mathrm{mult} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$. Um das zu sehen, müssen wir zeigen, daß sie stetig ist an jedem Punkt $p := (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Wir überlegen uns dazu zunächst die Abschätzung

$$\begin{aligned} |xy - ab| &= |(x - a)y + a(y - b)| \\ &\leq |x - a||y| + |a||y - b| \end{aligned}$$

Aus den beiden Ungleichungen $|x - a| < \eta$ und $|y - b| < \eta$ folgt zunächst $|y| < |b| + \eta$ und dann

$$|xy - ab| \leq \eta(|b| + \eta + |a|)$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$, nämlich $\delta = \varepsilon/(|b| + 1 + |a|)$, mit

$$\mathrm{mult}(\mathrm{B}(p; \delta)) \subset \mathrm{B}(\mathrm{mult}(p); \varepsilon)$$

Mithin ist das ε-δ-Kriterium erfüllt an jeder Stelle $p = (a, b)$. Man beachte, daß im Gegensatz zur Addition unser δ hier nicht nur von ε abhängt, sondern auch von der auf Stetigkeit untersuchten Stelle p.

Beispiel 10.3.2.29 (**Stetigkeit von Projektionen**). Die Projektionen $\mathrm{pr}_\nu : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben durch $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_\nu$ sind stetig. Der Einfachkeit der Notation halber zeigen wir das nur für $\nu = 1$. Ist aber Q ein Quader um $p_1 = \mathrm{pr}_1(p)$ alias eine Intervallumgebung von p_1, so ist $Q' := Q \times \bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ ein Quader um p mit $\mathrm{pr}_1(Q') \subset Q$.

Satz 10.3.2.30 (**Stetigkeit der Verknüpfung stetiger Abbildungen**). *Seien Abbildungen $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \to \bar{\mathbb{R}}^n$ und $g : \bar{\mathbb{R}}^n \supset E \to \bar{\mathbb{R}}^l$ gegeben und es gelte $f(D) \subset E$. Ist f stetig bei $p \in D$ und g stetig bei $f(p) \in E$, so ist auch $g \circ f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \to \bar{\mathbb{R}}^l$, $x \mapsto g(f(x))$ stetig bei p.*

10.3.2.31. Genau genommen ist die Notation $g \circ f$ in der Formulierung von Satz 10.3.2.30 im Sinne von 10.1.4.9 nicht ganz korrekt: Wir müßten eigentlich erst eine Abbildung $\tilde{f} : D \to E$ definieren durch $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ und dann die Abbildung $g \circ \tilde{f}$ betrachten. Das scheint mir jedoch ein Fall, in dem größere Präzision nicht zu größerer Verständlichkeit führt.

Beweis. Da g stetig ist bei $f(p)$, finden wir für jeden Quader Q um $g(f(p))$ einen Quader Q' um $f(p)$ mit $g(Q' \cap E) \subset Q$. Da f stetig ist bei p, finden wir für diesen Quader Q' von $f(p)$ einen Quader Q'' um p mit $f(Q'' \cap D) \subset Q'$. Damit finden wir in der Tat für jeden Quader Q um $(g \circ f)(p)$ einen Quader Q'' um p mit $(g \circ f)(Q'' \cap D) \subset Q$. □

Variante zum Beweis. Idem mit Umgebungen statt Quadern und dem Umgebungskriterium für Stetigkeit 10.3.2.24. □

10.3.2.32 (**Schnitte von Umgebungen**). Offensichtlich ist der Schnitt von zwei Intervallumgebungen von $p \in \bar{\mathbb{R}}$ wieder eine Intervallumgebung von p. Offensichtlich ist allgemeiner der Schnitt von zwei Quadern um $p \in \bar{\mathbb{R}}^n$ wieder ein Quader um p. Offensichtlich ist folglich der Schnitt von zwei Umgebungen von $p \in \bar{\mathbb{R}}^n$ wieder eine Umgebung von p.

Satz 10.3.2.33 (**Stetigkeit als komponentenweise Stetigkeit**). *Eine vorgegebene Abbildung $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \to \bar{\mathbb{R}}^n$ ist stetig bei p genau dann, wenn alle ihre Komponenten $f_\nu := \mathrm{pr}_\nu \circ f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \to \bar{\mathbb{R}}$ stetig sind bei p für $1 \le \nu \le n$.*

Beweis. Ist die Abbildung f stetig bei p, so auch alle $\mathrm{pr}_\nu \circ f$ als die Verküpfung der bei p stetigen Funktion f mit der nach 10.3.2.29 überall stetigen Projektion pr_ν. Seien umgekehrt alle f_ν stetig bei p und sei Q ein Quader um $f(p)$. Per definitionem finden wir Intervallumgebungen I_ν von $f_\nu(p)$ mit $I_1 \times \ldots \times I_n = Q$. Da wir f_ν stetig bei p annehmen, gibt es jeweils einen Quader Q'_ν um p mit $f_\nu(Q'_\nu \cap D) \subset I_\nu$. Dann ist $Q' := Q'_1 \cap \ldots \cap Q'_n$ nach 10.3.2.32 wieder ein Quader um p und offensichtlich gilt $f(Q') \subset Q$. □

Korollar 10.3.2.34 (**Summe und Produkt stetiger Funktionen sind stetig**). *Seien Funktionen $f, g : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \to \mathbb{R}$ stetig bei $p \in D$. So sind auch die Funktionen $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ und $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ stetig bei p.*

Beweis. Wir schreiben $f + g = \operatorname{add} \circ (f, g)$ und $fg = \operatorname{mult} \circ (f, g)$ für $(f, g) : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $(f, g) : x \mapsto (f(x), g(x))$. Nun ist (f, g) stetig bei p nach 10.3.2.33, denn seine Komponenten f, g sind stetig bei p nach Annahme. Weiter sind Addition und Multiplikation stetig nach 10.3.2.27, 10.3.2.28. Also sind auch $f + g = \operatorname{add} \circ (f, g)$ und $fg = \operatorname{mult} \circ (f, g)$ stetig bei p nach 10.3.2.30 als Verknüpfungen stetiger Abbildungen. □

Beispiel 10.3.2.35 (**Stetigkeit von Polynomfunktionen**). Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gegeben wird durch eine Abbildungsvorschrift der Gestalt $x \mapsto a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ mit konstanten $a_\nu \in \mathbb{R}$, heißt eine **Polynomfunktion**. Jede Polynomfunktion ist stetig, denn konstante Funktionen sind stetig nach 10.3.2.17, die identische Funktion $x \mapsto x$ ist stetig nach 10.3.2.18 und Produkte sowie Summen stetiger Funktionen sind stetig nach 10.3.2.34.

Vorschau 10.3.2.36. Jede Familie reeller Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, in der höchstens endlich viele a_n von Null verschieden sind, liefert eine Polynomfunktion $\sum a_n x^n$. Nach Übung 10.3.5.53 oder allgemeiner 3.5.4.3 liefern verschiedene Familien auch stets verschiedene Funktionen. Im Licht dieser Tatsache werden wir unsere Polynomfunktionen meist kürzer Polynome nennen, obwohl eigentlich der Begriff Polynom eher den formalen Ausdruck meint. Diese Unterscheidung ist aber erst in der Algebra wirklich von Belang. Wenn man nämlich mit endlichen Körpern arbeitet, so können verschiedene formale Ausdrücke $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ durchaus dieselbe Funktion liefern, vergleiche 3.5.3.2.

10.3.2.37 (**Diskussion der Terminologie**). Das Wort „Polynom“ kommt von der griechischen Vorsilbe „poly“ für „viele“ und dem lateinischen Wort „nomen“ für „Namen“. Allgemeiner betrachtet man auch Polynome in mehreren Veränderlichen und meint damit Ausdrücke wie etwa $xyz + 7x^2y^4 - 12z + 1$. Dieses Polynom ist die Summe der vier **Monome** xyz, $7x^2y^4$, $-12z$ und 1, wobei das Wort „Monom“ diesmal mit der griechischen Vorsilbe „mono“ für „allein“ gebildet ist. Einen Ausdruck wie $xyz + 7x^2y^4$ würde man als **Binom** bezeichnen, diesmal mit der griechischen Vorsilbe „bi“ für „Zwei“. Ein anderes Binom wäre der Ausdruck $(x + y)$, dessen Potenzen die „binomische“ Formel 1.1.1.23 explizit angibt. Es sollte klar sein, wie man aus unserer binomischen Formel auch Formeln für die Potenzen eines beliebigen Binoms erhält.

Beispiel 10.3.2.38 (**Stetigkeit von Einschränkungen**). Ist $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset E \to \bar{\mathbb{R}}^n$ stetig bei $p \in E$ und $D \subset E$ eine Teilmenge mit $p \in D$, so ist auch die Einschränkung $f|_D : D \to \bar{\mathbb{R}}^n$ stetig bei p. Das folgt sofort aus der Definition oder al-

ternativ daraus, daß Einbettungen stetig sind nach 10.3.2.18 und die Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig nach 10.3.2.30.

Satz 10.3.2.39 (Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft). *Seien $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \to \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Abbildung und $p \in D$ ein Punkt. Gibt es eine Umgebung V von p derart, daß die Einschränkung $f : V \cap D \to \bar{\mathbb{R}}^n$ stetig ist bei p, so ist auch $f : D \to \bar{\mathbb{R}}^n$ bereits stetig bei p.*

Beweis. Gegeben ein Quader Q um $f(p)$ finden wegen der Stetigkeit der Einschränkung einen Quader Q'_1 um p mit $f(Q'_1 \cap V \cap D) \subset Q$. Da V eine Umgebung von p ist, finden wir weiter einen Quader Q'_2 um p mit $Q'_2 \subset V$. Ihr Schnitt $Q' := Q'_1 \cap Q'_2$ ist dann der gesuchte Quader um p mit $f(Q' \cap D) \subset Q$. □

Variante zum Beweis. Statt der Definition verwenden wir das Umgebungskriterium für Stetigkeit 10.3.2.24. Gegeben eine Umgebung U von $f(p)$ finden wegen der Stetigkeit der Einschränkung eine Umgebung U' von p mit $f(U' \cap (V \cap D)) \subset Q$. Dann ist $U' \cap V$ die gesuchte Umgebung von p mit $f((U' \cap V) \cap D) \subset Q$. □

10.3.2.40 (**Partiell stetig impliziert nicht stetig**). Es gibt Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derart, daß sowohl $x \mapsto f(x, b)$ als auch $y \mapsto f(a, y)$ stetig sind für alle b beziehungsweise alle a, daß aber dennoch die Funktion f selbst nicht stetig ist. Als Beispiel betrachte man die Funktion mit $(x, y) \mapsto xy/(x^2 + y^2)$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $(0, 0) \mapsto 0$. Sie ist nicht stetig am Nullpunkt nach dem anschließenden Satz 10.3.2.30, da nämlich ihre Verknüpfung mit $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, t)$ nicht stetig ist bei $t = 0$. Die Stetigkeit von $t \mapsto (t, t)$ hinwiederum mag man aus der Komponentenregel 10.3.2.33 folgern. Der Anschauung mag die Erkenntnis helfen, daß unsere merkwürdige Funktion, wenn man vom Ursprung selbst einmal absieht, auf allen Geraden durch den Ursprung konstant ist. Auf den beiden Koordinatenachsen ist unsere Funktion konstant Null, auf allen anderen Geraden durch den Ursprung jedoch nimmt sie nur am Ursprung den Wert Null an und sonst konstant einen von Null verschiedenen Wert.

Übungen

Übung 10.3.2.41. In einer teilgeordneten Menge ist jeder Schnitt von Intervallen wieder ein Intervall.

Ergänzende Übung 10.3.2.42. Jede Teilmenge Y einer angeordneten Menge X ist die disjunkte Vereinigung aller maximalen in Y enthaltenen nichtleeren Intervalle von X. Hinweis: Hat ein System von Intervallen von X nichtleeren Schnitt, so ist auch seine Vereinigung wieder ein Intervall von X.

Übung 10.3.2.43 (**Eine nur im Ursprung stetige Funktion**). Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für $x \notin \mathbb{Q}$ ist nur an der Stelle $p = 0$ stetig.

Übung 10.3.2.44 (**Addition und Multiplikation im Unendlichen**). Addition und Multiplikation lassen sich auf genau eine Weise fortsetzen zu stetigen Abbildungen

$$\begin{array}{rll} \text{add}: & \bar{\mathbb{R}}^2 \backslash \{(\infty,-\infty),(-\infty,\infty)\} & \to \bar{\mathbb{R}} \\ \text{mult}: & \bar{\mathbb{R}}^2 \backslash \{(\pm\infty,0),(0,\pm\infty)\} & \to \bar{\mathbb{R}} \end{array}$$

und zwar durch

$$\begin{array}{ll} a+\infty = \infty + a = \infty & \text{falls } a \neq -\infty; \\ a+(-\infty) = (-\infty)+a = -\infty & \text{falls } a \neq \infty; \\ a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty & \text{falls } a > 0; \\ a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty & \text{falls } a < 0; \\ a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty & \text{falls } a > 0; \\ a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty & \text{falls } a < 0. \end{array}$$

Sie lassen sich nicht weiter stetig fortsetzen auf die oben ausgeschlossenen Punkte $(\infty,-\infty),(-\infty,\infty)$ für die Addition beziehungsweise $(\pm\infty,0),(0,\pm\infty)$ für die Multiplikation.

Übung 10.3.2.45. Gegeben $f : \bar{\mathbb{R}} \supset D \to \bar{\mathbb{R}}$ stetig bei $p \in D$ und $g : \bar{\mathbb{R}} \supset E \to \bar{\mathbb{R}}$ stetig bei $q \in E$ ist $f \times g : D \times E \to \bar{\mathbb{R}}^2$ stetig bei (p,q).

Übung 10.3.2.46 (**Stetigkeit durch Einquetschen**). Gegeben $f,g,h : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ \forall x \in D$ und f,h stetig bei $p \in D$ mit $f(p) = h(p)$ ist auch g stetig bei p.

Übung 10.3.2.47 (**Stetigkeit durch Verkleben**). Seien $I,J \subset \bar{\mathbb{R}}$ Intervalle mit nichtleerem Schnitt $I \cap J \neq \emptyset$ und sei $f : (I \cup J) \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Man zeige: Sind die Einschränkungen $f|_I$ und $f|_J$ stetig, so ist auch f selbst stetig. Im übrigen wird sich der „schwierige“ Fall dieser Übung als Spezialfall von **??** erweisen.

Übung 10.3.2.48. Man zeige, daß auf einem offenen reellen Intervall I jede konvexe reelle Funktion stetig ist. Hinweis: Die graphische Darstellung zum Beweis von 10.5.5.15 mag helfen. Eine Funktion heißt **konvex**, wenn für alle $x,z \in I$ gilt

$$f(tx+(1-t)z) \leq tf(x)+(1-t)f(z) \quad \forall t \in [0,1]$$

Anschaulich bedeutet das, daß unsere Funktion „unter jeder ihrer Sekanten liegt“. Die Stetigkeit durch Einquetschen 10.3.2.46 mag helfen.

10.3.3 Zwischenwertsatz und Umkehrfunktionen

Definition 10.3.3.1. Eine Abbildung f zwischen teilgeordneten Mengen heißt

monoton wachsend,	wenn gilt	$x \leq y$	$\Rightarrow$	$f(x) \leq f(y)$
streng monoton wachsend,	wenn gilt	$x < y$	$\Rightarrow$	$f(x) < f(y)$
monoton fallend,	wenn gilt	$x \leq y$	$\Rightarrow$	$f(x) \geq f(y)$
streng monoton fallend,	wenn gilt	$x < y$	$\Rightarrow$	$f(x) > f(y)$

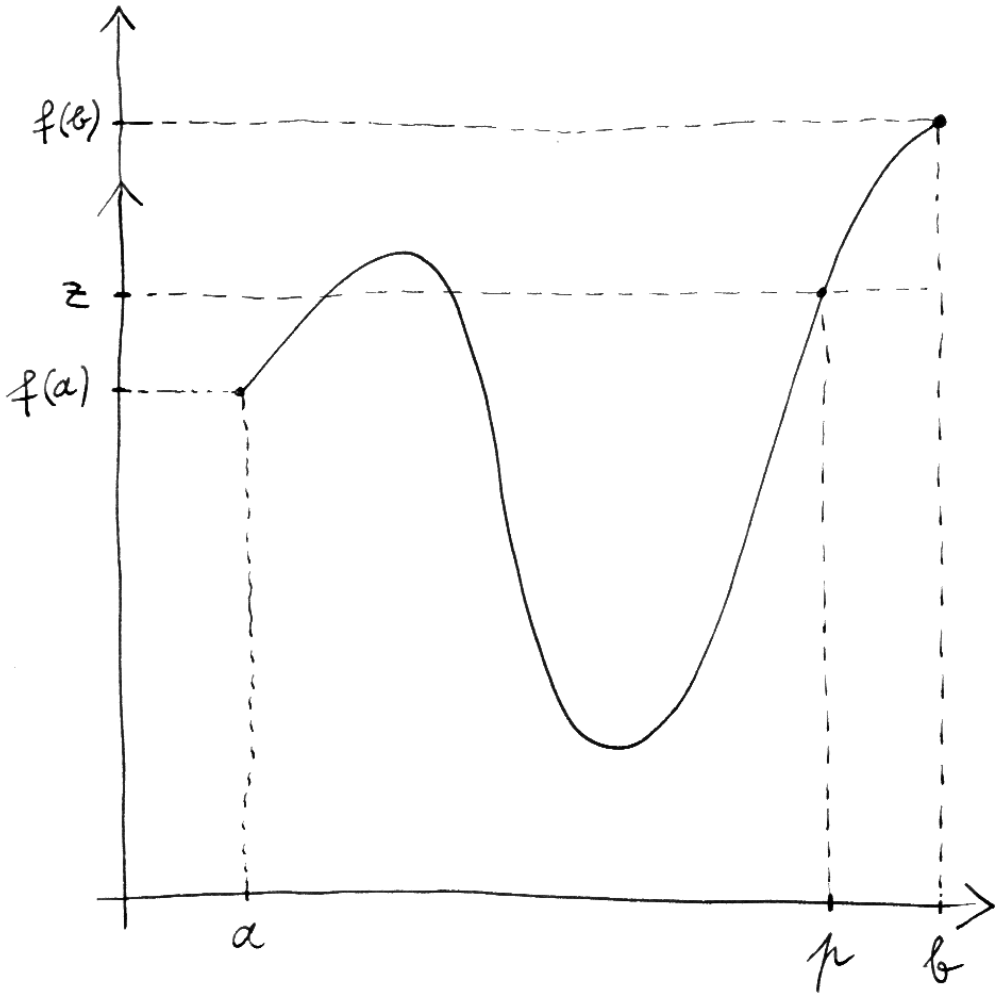


Illustration zum Zwischenwertsatz. Im vorliegenden Fall wir der gegebene Zwischenwert z sogar dreimal als Funktionswert angenommen. Unser erster Beweis führt stets zum hier eingezeichneten größten $p \in [a, b]$, an dem z als Funktionswert angenommen wird.

Eine Abbildung heißt **monoton**, wenn sie monoton wachsend oder fallend ist. Eine Abbildung heißt **streng monoton**, wenn sie streng monoton wachsend oder fallend ist.

Proposition 10.3.3.2 (Stetigkeit monotoner Surjektionen auf Intervalle). *Es sei $f : \bar{\mathbb{R}} \supset D \to \bar{\mathbb{R}}$ eine monotone Abbildung. Ist ihr Bild $f(D)$ ein Intervall in $\bar{\mathbb{R}}$, so ist f stetig.*

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit f monoton wachsend. Gegeben $p \in D$ gilt es, für jeden Quader Q um $f(p)$ einen Quader Q' um p zu finden mit $f(Q' \cap D) \subset Q$. Wir setzen $I := f(D)$ und unterscheiden vier Fälle.

1. Ist $f(p) \in I$ weder das größte noch das kleinste Element von I, so umfaßt jeder Quader Q um $f(p)$ ein Intervall der Gestalt $[\alpha, \beta]$ mit $\alpha < f(p) < \beta$ und $\alpha, \beta \in I$, also $\alpha = f(a)$ und $\beta = f(b)$ mit $a, b \in D$ und $a < p < b$. Dann können wir $Q' = [a, b]$ nehmen;

2. Ist $f(p) \in I$ das größte aber nicht das kleinste Element von I, so umfaßt jeder Quader Q um $f(p)$ ein Intervall der Gestalt $[\alpha, f(p)]$ mit $\alpha < f(p)$ und $\alpha \in I$, also $\alpha = f(a)$ mit $a \in D$ und $a < p$. Dann können wir $Q' = [a, \infty]$ nehmen;

3. Ist $f(p) \in I$ das kleinste aber nicht das größte Element von I, so argumentieren wir analog;

4. Ist $f(p) \in I$ das kleinste und das größte alias das einzige Element von I, so ist f konstant und wir können $Q' = [-\infty, \infty]$ nehmen. □

Beispiel 10.3.3.3 (**Stetigkeit des Invertierens**). Die Funktion $\mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig. In der Tat reicht es aufgrund der Lokalität der Stetigkeit 10.3.2.39 zu zeigen, daß ihre Einschränkung auf $\mathbb{R}_{>0}$ und auf $\mathbb{R}_{<0}$ jeweils stetig ist. Diese Einschränkungen sind jedoch beide monoton und haben als Bildmenge jeweils ein Intervall.

Beispiel 10.3.3.4 (**Stetigkeit des erweiterten nichtnegativen Invertierens**). Die Abbildung

$$\overline{\mathrm{inv}}^+ : [0, \infty] \to [0, \infty]$$

gegeben durch $x \mapsto \frac{1}{x}$ für $x \in (0, \infty)$ sowie $0 \mapsto \infty$ und $\infty \mapsto 0$ ist stetig. In der Tat ist diese Abbildung monoton und ihr Bild ist ein Intervall und die Behauptung folgt aus der Stetigkeit monotoner Surjektionen auf Intervalle 10.3.3.2.

Korollar 10.3.3.5 (Quotienten stetiger Funktionen sind stetig). *Gegeben stetige Funktionen $f, g : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0 \ \forall x \in D$ ist auch die Funktion $f/g : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)/g(x)$ stetig.*

Beweis. Bezeichne $i : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto 1/x$. Sie ist stetig nach 10.3.3.3. Also ist auch $i \circ g : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1/g(x)$ stetig und dann auch das Produkt dieser Funktion mit der stetigen Funktion f. □

Beispiel 10.3.3.6. Die Funktion

$$x \mapsto \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 1}$$

ist stetig auf $D := \mathbb{R}\backslash 1$. Sie kann sogar zu einer stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden, die gegeben wird durch die Abbildungsvorschrift

$$x \mapsto \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$$

10.3.3.7. Eine Funktion, die sich als der Quotient eines Polynoms durch ein von Null verschiedenes Polynom darstellen läßt, heißt eine **rationale Funktion**. So eine Funktion ist a priori natürlich nur da definiert, wo der Nenner nicht verschwindet, und ist nach dem vorhergehenden Korollar auf dem Komplement der Nullstellenmenge ihres Nenners stetig. Betrachten wir unsere rationale Funktion jedoch nicht als Abbildung, sondern als formalen Ausdruck, so verstehen wir unter ihrem Definitionsbereich die etwas größere Menge, auf der „nach maximalem Kürzen“ der Nenner keine Nullstellen hat, vergleiche 20.3.4.1. Man beachte, daß die hier gegebene etwas unscharfe Formulierung „nach maximalem Kürzen“ eigentlich erst in 6.2.4.19 gerechtfertigt wird, wo wir die Eindeutigkeit der „Primfaktorzerlegung“ in Polynomringen diskutieren. Bleibt auch nach maximalem Kürzen noch ein nichtkonstantes Polynom im Nenner stehen, so spricht man von einer **gebrochenrationalen Funktion**.

Satz 10.3.3.8 (**Zwischenwertsatz**). *Für $a \leq b$ aus $\bar{\mathbb{R}}$ nimmt eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \bar{\mathbb{R}}$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

10.3.3.9 (**Die schmutzige Anschauung**). Wenn man sich eine stetige reellwertige Funktion auf einem reellen Intervall vorstellt als eine Funktion, deren Graphen man zeichnen kann ohne den Bleistift abzusetzen, so ist auch der Zwischenwertsatz anschaulich klar: Wenn unser Graph unter einer horizontalen Linie anfängt und oberhalb aufhört oder umgekehrt, so muß er an irgendeiner Stelle unsere horizontale Linie kreuzen.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(a) \leq f(b)$ annehmen. Gegeben $z \in [f(a), f(b)]$ suchen wir $p \in [a, b]$ mit $f(p) = z$. Wir betrachten dazu

$$p := \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) \leq z\}$$

und behaupten $f(p) = z$. Um das zu zeigen führen wir die Annahmen $f(p) < z$ und $z < f(p)$ beide zum Widerspruch. Aus $f(p) < z$ folgte zunächst $p < b$, und dann gäbe es aufgrund der Stetigkeit ein q mit $p < q < b$ und $f(q) \leq z$ und p wäre gar keine obere Schranke unserer Menge gewesen. Aus $z < f(p)$ dahingegen folgte zunächst $a < p$, und dann gäbe es aufgrund der Stetigkeit ein r mit $a < r < p$ und $z < f(x)$ für alle $x \in [r, p]$. Also wäre auch r schon eine obere Schranke unserer Menge und p könnte nicht ihre kleinste obere Schranke gewesen sein. □

Korollar 10.3.3.10 (Abstrakter Zwischenwertsatz). *Das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Funktion ist ein Intervall. Ist also in Formeln $I \subset \bar{\mathbb{R}}$ ein Intervall und $f : I \to \bar{\mathbb{R}}$ stetig, so ist auch $f(I)$ ein Intervall.*

Beweis. Das ist nur eine Umformulierung des Zwischenwertsatzes 10.3.3.8. □

Satz 10.3.3.11 (über die Umkehrfunktion). *Ist $I \subset \bar{\mathbb{R}}$ ein Intervall und $f : I \to \bar{\mathbb{R}}$ streng monoton und stetig, so ist auch $f(I) \subset \bar{\mathbb{R}}$ ein Intervall und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \bar{\mathbb{R}}$ ist streng monoton und stetig.*

10.3.3.12. Hier ist unsere Notation wieder nicht ganz korrekt: Wir müßten genau genommen eigentlich die Bijektion $\tilde{f} : I \xrightarrow{\sim} f(I), x \mapsto f(x)$ betrachten, dazu die inverse Abbildung $\tilde{f}^{-1} : f(I) \xrightarrow{\sim} I$ nehmen, und unser $f^{-1} : f(I) \to \bar{\mathbb{R}}$ definieren als die Verknüpfung von $\tilde{f}^{-1}$ mit der Einbettung $I \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Beweis. Die Umkehrfunktion $g := f^{-1}$ ist offensichtlich monoton und ihr Bild ist ein Intervall, nämlich das Intervall I, also ist sie nach 10.3.3.2 stetig. Daß $f(I)$ ein Intervall ist, war die Aussage des abstrakten Zwischenwertsatzes 10.3.3.10. □

10.3.3.13 (**Diskussion der Notation**). Die Umkehrfunktion f^{-1} darf nicht verwechselt werden mit der Funktion $x \mapsto 1/f(x)$: Ist zum Beispiel $q : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $q(x) = x^2$, so haben wir $1/q(x) = x^{-2}$, aber die Umkehrabbildung ist gegeben durch die Funktion $q^{-1}(y) = \sqrt{y}$, die Sie aus der Schule kennen und die wir im Anschluß auf ganz $[0, \infty)$ einführen. Die Notation ist hier leider nicht ganz eindeutig. Oft muß man aus dem Kontext erschließen, ob mit f^{-1} die Umkehrfunktion von f oder vielmehr die „Kehrwertfunktion“ $x \mapsto 1/f(x)$ gemeint ist.

10.3.3.14 (**Potenz- und Wurzelfunktionen**). Gegeben $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist die n-te Potenzfunktion $x \mapsto x^n$ auf $[0, \infty)$ nach 10.3.2.35 stetig und nach 10.2.2.9.3 streng monoton wachsend. Ihr Bild ist nach dem Zwischenwertsatz 10.3.3.10 ein Intervall und da für $a \geq 1$ gilt $a^n \geq a$ und andererseits $0^n = 0$ muß dies Intervall wieder $[0, \infty)$ sein. Wir definieren die **n-te Wurzel**

$$\sqrt[n]{} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

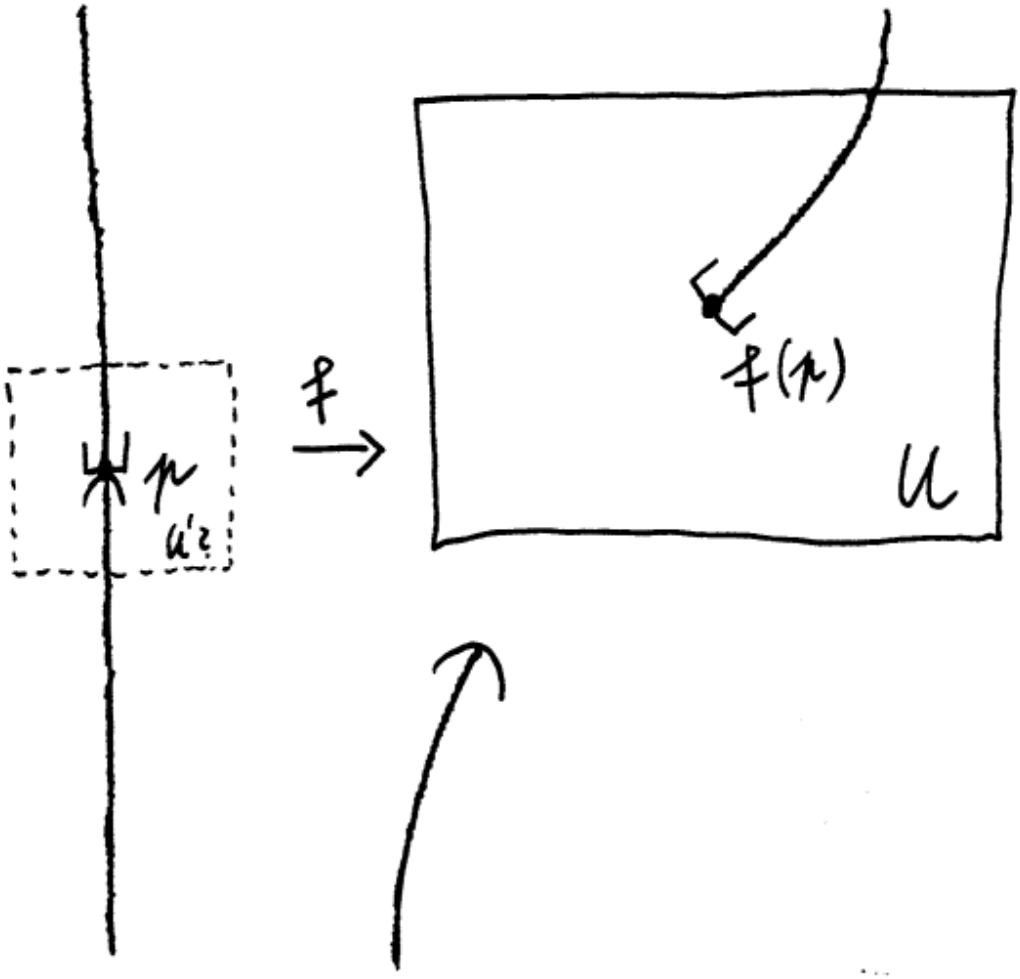


Illustration zur Stetigkeit in mehreren Veränderlichen. Dargestellt ist ein Geradenstück D in der Ebene nebst einer Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^2$, die es in die Ebene abbildet und es dabei an einer Stelle $p \in D$ zerreißt. Dargestellt ist weiter eine Umgebung U von $f(p)$, für die es keine Umgebung U' von p gibt mit $f(U') \subset U$, so daß in der Tat f an dieser Aufreißstelle p nicht stetig ist.

als die Umkehrfunktion zur n-ten Potenzfunktion $x \mapsto x^n$. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion 10.3.3.11 ist $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ stetig. Im Fall $n = 2$ verwendet man die Abkürzung $\sqrt{x} := \sqrt[2]{x}$.

10.3.3.15 (**Potenz- und Wurzelfunktionen im Unendlichen**). Immer noch für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist auch die Fortsetzung der n-ten Potenz durch $\infty \mapsto \infty$ zu einer Abbildung $\overline{\mathrm{pot}}_n : [0, \infty] \to [0, \infty]$ stetig, da sie monoton und surjektiv ist. Die n-te Wurzel besitzt mithin auch eine stetige streng monotone Fortsetzung durch $\infty \mapsto \infty$ zu $\overline{\mathrm{wurz}}_n : [0, \infty] \to [0, \infty]$.

Beispiel 10.3.3.16. Die Abbildungsvorschrift $x \mapsto \sqrt{x^4 + 5}$ liefert eine stetige Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ergänzung 10.3.3.17. Alle Definitionen und Ergebnisse dieses Abschnitts, die nicht Summen oder Produkte verwenden, bleiben gültig und sinnvoll, wenn wir $\bar{\mathbb{R}}$ durch eine allgemeinere angeordnete Menge ersetzen derart, daß zwischen je zwei verschiedenen Punkten stets noch ein weiterer Punkt liegt und daß jede nach oben beziehungsweise unten beschränkte Teilmenge in unserer Menge ein Supremum und beziehungsweise Infimum besitzt.

Übungen

Übung 10.3.3.18. Man zeige, daß die Funktion $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, y) \mapsto x/y$ stetig ist.

Übung 10.3.3.19. Man zeige, daß die Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, y) \mapsto (x^2y + xy^3)/(x^2 + y^2 + 1)$ stetig ist.

Ergänzende Übung 10.3.3.20. Seien $a \leq b$ aus $\bar{\mathbb{R}}$ gegeben und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(b) = 0$. Man zeige, daß dann f eine kleinste Nullstelle in $[a, b]$ hat.

Übung 10.3.3.21. Jede Polynomfunktion $x \mapsto a_nx^n + \ldots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ und n ungerade besitzt mindestens eine reelle Nullstelle. Ist $a_n > 0$ und $a_0 > 0$, so besitzt sie sogar mindestens eine negative Nullstelle.

Übung 10.3.3.22. Gegeben ein Intervall $I \subset \bar{\mathbb{R}}$ ist jede injektive stetige Funktion $I \to \bar{\mathbb{R}}$ streng monoton.

10.3.4 Umfang des Einheitskreises

10.3.4.1. Bekanntlich bezeichnet π, ein kleines griechisches P für „Perimeter“, das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises. Um diese Anschauung zu formalisieren zur Definition einer reellen Zahl im Sinne von 10.2.4.7 gehen wir aus von der anschaulichen Bedeutung von π als Länge des Halbkreises H mit Radius Eins

$$H := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1,\ b \geq 0\}$$

Seien $x, y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die beiden Abbildungen, die jedem Punkt der Ebene seine erste beziehungsweise zweite Koordinate zuordnen, also $v = (x(v), y(v))\ \forall v \in \mathbb{R}^2$. Die Distanz $d(v, w) \in \mathbb{R}$ zwischen zwei Punkten $v, w \in \mathbb{R}^2$ der Ebene erklären wir in Erinnerung an den Satz des Pythagoras durch die Formel

$$d(v, w) := \sqrt{(x(v) - x(w))^2 + (y(v) - y(w))^2}$$

Die **Kreiszahl** $\pi \in \mathbb{R}$ definieren wir dann als das Supremum über die „Längen aller in unseren Halbkreis H einbeschriebenen Polygonzüge“, in Formeln

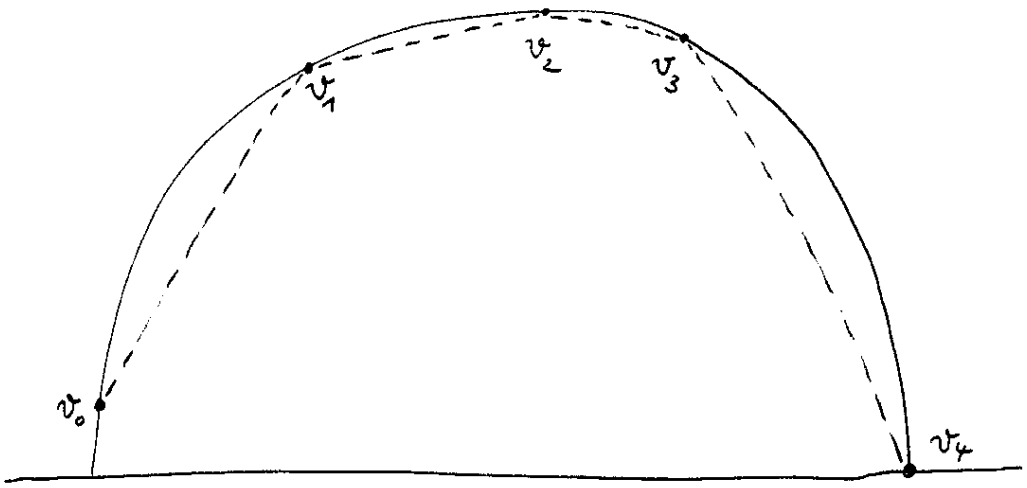
$$\pi := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} d(v_{i-1}, v_i) \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N},\ v_0, v_1, \ldots, v_n \in H, \\ x(v_0) < x(v_1) < \ldots < x(v_n) \end{array} \right\}$$

Mithilfe der einfachen Abschätzung $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ erkennt man, daß die Zahl 4 eine obere Schranke ist für unsere Menge von Längen von Polygonzügen, mithin haben wir hier in der Tat eine reelle Zahl $\pi \in \mathbb{R}$ definiert. Wir werden in 10.6.1.31 sehen, wie man diese Zahl im Prinzip bis zu einer beliebig vorgegebenen Stelle nach dem Komma berechnen kann. Die Definition selbst ist elementar. Ich habe sie nur deshalb nicht gleich im Zusammenhang mit der Definition der reellen Zahlen gegeben, weil sie die Existenz reeller Quadratwurzeln von nichtnegativen reellen Zahlen benötigt, die erst in 10.3.3.14 gezeigt wurde.

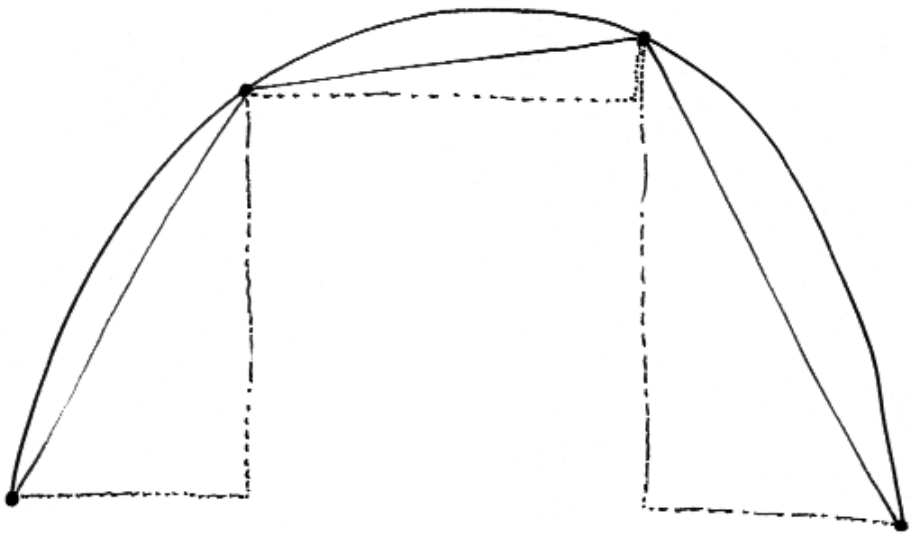
Ergänzung 10.3.4.2. Die Zahl π ist nicht rational, in Formeln $\pi \notin \mathbb{Q}$, wie Lambert bereits 1761 zeigen konnte. Anders ausgedrückt läßt sich π nicht durch einen periodischen Dezimalbruch darstellen. Wir beweisen diese Tatsache in 10.5.8.12. Unsere Kreiszahl π ist noch nicht einmal **algebraisch**, als da heißt Nullstelle eines nichttrivialen Polynoms mit rationalen Koeffizienten. Es gilt in anderen Worten keine Gleichung der Gestalt

$$\pi^n + q_{n-1}\pi^{n-1} + \ldots + q_1\pi + q_0 = 0 \quad \text{mit } q_{n-1}, \ldots, q_0 \in \mathbb{Q} \text{ und } n \geq 1.$$

Reelle Zahlen, die nicht algebraisch sind, heißen **transzendent**, lateinisch für „überschreitend“, da ihre Behandlung „die Grenzen der Algebra überschreitet“. Die Transzendenz von π wurde 1882 von Lindemann in Freiburg bewiesen. Seine Büste steht im vierten Stock des Mathematischen Instituts. Er war übrigends Hilbert's Doktorvater. Johann Heinrich Lambert alias Jean-Henri Lambert wurde 1728 als Sproß einer hugenottischen Familie in Mulhouse geboren, das zu der Zeit mit den umgebenden Landstrichen als unabhängige Republik Mitglied der Eidgenossenschaft war. Er veröffentlichte seine Arbeit zur Irrationalität von π auf französisch in der „Histoire de l'Academie Royale des Sciences et Belles-Lettres“ in Berlin, wo er 1763 eine Anstellung an der preußischen Akademie der Wissenschaften erhielt.



Ein einbeschriebener Polygonzug



Diese Abbildung soll veranschaulichen, warum 4 eine obere Schranke für die Längen einbeschriebener Polygonzüge ist: Die horizontalen Stücke und die vertikalen Stücke haben jeweils zusammengenommen eine Gesamtlänge ≤ 2.

10.3.5 Grenzwerte

Definition 10.3.5.1. Seien $C, D \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ Teilmengen.

1. Ein Punkt $p \in D$ heiße ein **Häufungspunkt von** D, wenn jede Umgebung von p in $\bar{\mathbb{R}}^n$ mindestens einen von p verschiedenen Punkt mit D gemeinsam hat;

2. Ein Punkt $p \in D$ heiße ein **isolierter Punkt von** D, wenn er kein Häufungspunkt von D ist. Gleichbedeutend ist die Bedingung, daß es eine Umgebung V von p in $\bar{\mathbb{R}}^n$ gibt mit $V \cap D = \{p\}$.

3. Ein Punkt $p \in \bar{\mathbb{R}}^n$ heiße ein **Häufungspunkt zu** C, wenn er ein Häufungspunkt von $C \cup \{p\}$ ist;

10.3.5.2. Ich verwende hier die Bezeichnungen p, C, D in der Weise, daß a priori p ein Häufungspunkt von D und ein Häufungspunkt zu C ist, salopp gesprochen $D = C \cup \{p\}$, so daß also p in D liegen muß und in C liegen darf. Je nach Kontext ist die eine oder die andere Konvention geschickter.

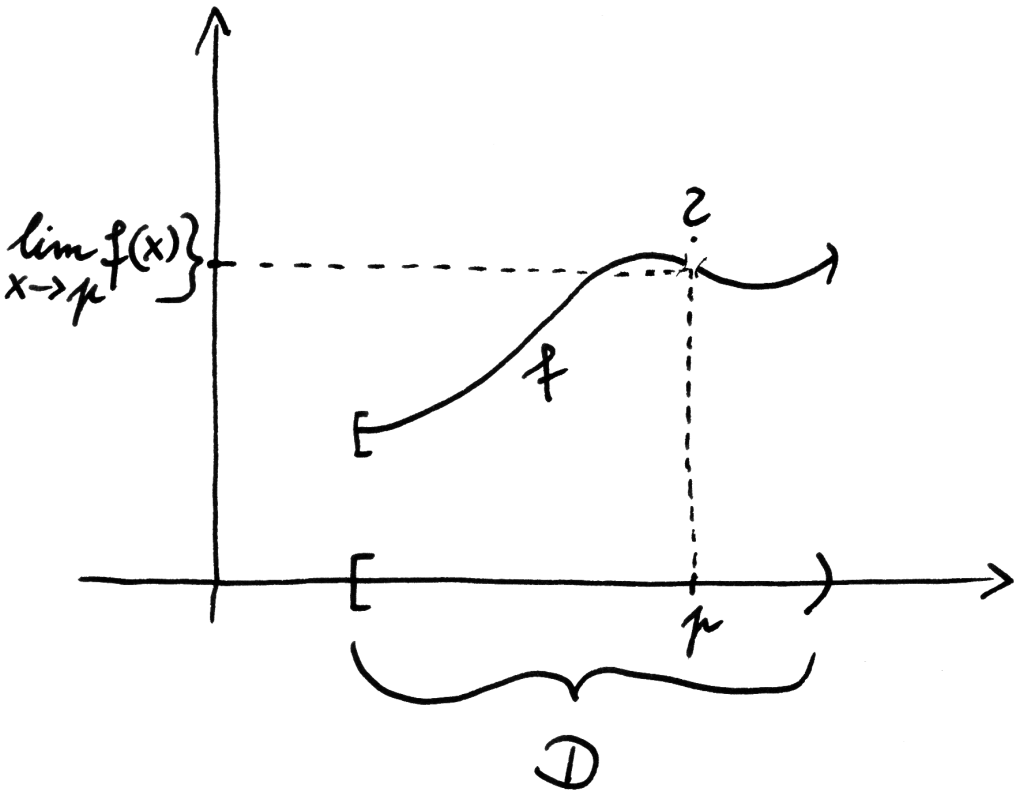
10.3.5.3 (**Diskussion der Terminologie**). Die im vorhergehenden eingeführte Terminologie der „Häufungspunkte von und zu“ ist ein Versuch, die sprachlichen Schwierigkeiten zu vermeiden, die in der üblichen Terminologie dadurch entstehen, daß ein Häufungspunkt einer Menge kein Punkt besagter Menge zu sein braucht.

Beispiele 10.3.5.4. Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen besteht aus isolierten Punkten. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen besteht aus Häufungspunkten. Die Menge $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ hat als einzigen Häufungspunkt den Punkt ∞. Daß dieser Punkt in der Tat ein Häufungspunkt ist, folgt aus der Archimedizität des angeordneten Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen 10.2.4.9.

10.3.5.5 (**Notation für Komplemente einpunktiger Teilmengen**). Wir vereinbaren für die Differenz einer Menge X und einer einpunktigen Menge $\{p\}$ die abkürzende Schreibweise $X \backslash p := X \backslash \{p\}$. Der Punkt p muß dabei nicht zu X gehören, dann haben wir eben $X \backslash p = X$.

Satz 10.3.5.6 (Eindeutigkeit stetiger Fortsetzungen in Häufungspunkten). *Seien $D \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ eine Teilmenge, $p \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f : D \backslash p \to \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Abbildung. So gibt es höchstens eine Fortsetzung von f zu einer Abbildung $f : D \to \bar{\mathbb{R}}^n$, die stetig ist bei p.*

Beweis. Wären sonst f_1, f_2 zwei stetige Fortsetzungen mit $f_1(p) \neq f_2(p)$, so fänden wir disjunkte Umgebungen U_1 und U_2 der beiden Punkte $f_1(p)$ und $f_2(p)$



Der Grenzwert oder Limes einer Funktion mit einer „Fehlstelle“ in ihrem Definitionsbereich ist, wenn er existiert, der Wert an der fraglichen Fehlstelle der einzig möglichen dort stetigen Fortsetzung.

sowie Umgebungen U_1' und U_2' von p mit $f_1(U_1' \cap D) \subset U_1$ und $f_2(U_2' \cap D) \subset U_2$. Daraus folgte aber

$$f(U_1' \cap U_2' \cap D \backslash p) \ \subset \ U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

im Widerspruch dazu, daß $U_1' \cap U_2' \cap D$ nicht nur aus unserem Häufungspunkt p bestehen kann, weil ja nach 10.3.2.32 auch $U_1' \cap U_2'$ eine Umgebung von p ist. $\square$

Definition 10.3.5.7. Seien $C \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ eine Teilmenge, $p \in \bar{\mathbb{R}}^m$ ein Häufungspunkt zu C und $f : C \backslash p \to \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Funktion. Sei b ein weiterer Punkt aus $\bar{\mathbb{R}}^n$. Wir sagen, $f(x)$ **strebt gegen** b **für** $x \to p$ und schreiben

$$\lim_{C \ni x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} f(x) = b$$

als Abkürzung für die Aussage, daß die Fortsetzung unserer Funktion f zu einer Funktion $f : C \cup \{p\} \to \bar{\mathbb{R}}^n$ durch $f(p) := b$ stetig ist bei p. In diesem Fall nennen wir b den **Grenzwert** oder lateinisierend **Limes** der Funktion f für $x \to p$.

10.3.5.8 (**Eindeutigkeit des Grenzwerts**). Nach der Eindeutigkeit 10.3.5.6 stetiger Fortsetzungen in Häufungspunkten folgt aus $\lim_{x \to p} f(x) = a$ und $\lim_{x \to p} f(x) = b$ bereits $a = b$.

10.3.5.9. Salopp gesprochen verhält es sich demnach so, daß eine Funktion mit einer einpunktigen Definitionslücke an einem Häufungspunkt ihres Definitionsbereichs auf höchstens eine Weise stetig in diese Definitionslücke hinein fortgesetzt werden kann. Der Wert dieser an besagter Stelle stetigen Fortsetzung ist dann per definitionem der Grenzwert unserer Funktion an besagter Stelle.

Beispiel 10.3.5.10. Wir haben

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

Beispiel 10.3.5.11. Wir haben $\lim_{x \to \infty} 1/x = 0$ und $\lim_{(0,1) \ni x \to 0} 1/x = \infty$, denn unser erweitertes nichtnegatives Invertieren $\overline{\mathrm{inv}}^+ : [0, \infty] \to [0, \infty]$ ist stetig nach 10.3.3.4 mit $\overline{\mathrm{inv}}^+(\infty) = 0$ und $\overline{\mathrm{inv}}^+(0) = \infty$.

10.3.5.12 (**ε-δ-Kriterium für Grenzwerte**). Seien $D \subset \mathbb{R}^m$ eine Teilmenge, $p \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f : D \backslash p \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Sei weiter $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Genau dann gilt $\lim_{x \to p} f(x) = b$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Das ist eine direkte Konsequenz des ε-δ-Kriteriums für Stetigkeit 10.3.2.21.

Lemma 10.3.5.13 (Grenzwerte für $x \to \infty$). *Sei $f : \mathbb{R} \supset C \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion und sei ∞ ein Häufungspunkt zu C. Sei weiter $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Genau dann gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{R}$ gibt mit*

$$x > N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Beweis. Wir wenden das Umgebungskriterium für Stetigkeit 10.3.2.24 an und setzen $D := C \cup \{\infty\}$. Ist die Fortsetzung von f zu $f : D \to \mathbb{R}^n$ durch $f(\infty) := b$ stetig bei ∞, so gibt es für die Umgebung $U = \mathrm{B}(b;\varepsilon)$ von $b = f(\infty)$ eine Umgebung U' von ∞ mit $f(U' \cap D) \subset \mathrm{B}(b;\varepsilon)$. Diese Umgebung U' von ∞ umfaßt aber per definitionem eine Teilmenge der Gestalt $(N, \infty]$ mit $N \in \mathbb{R}$. Wir sehen so, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$ gibt mit $x > N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Sei umgekehrt diese Bedingung erfüllt. Es gilt zu folgern, daß unsere Fortsetzung $f : D \to \mathbb{R}^d$ stetig ist bei $p := \infty$. Gegeben eine Umgebung U von $b = f(\infty)$ finden wir $\varepsilon > 0$ mit $\mathrm{B}(b;\varepsilon) \subset U$. Zu diesem ε finden wir dann ein $N \in \mathbb{R}$ mit $f((N,\infty) \cap C) \subset \mathrm{B}(b;\varepsilon)$. Somit ist $U' := (N, \infty]$ die gesuchte Umgebung von ∞ mit $f(U' \cap D) \subset U$. □

Beispiel 10.3.5.14 (**Grenzwerte konstanter Funktionen**). Wir haben $\lim_{x\to p} c = c$ für jede konstante Funktion c, denn konstante Funktionen sind stetig.

Beispiel 10.3.5.15 (**Grenzwert der Identitätsfunktion**). Wir haben $\lim_{x\to p} x = p$, denn die Identität id ist stetig.

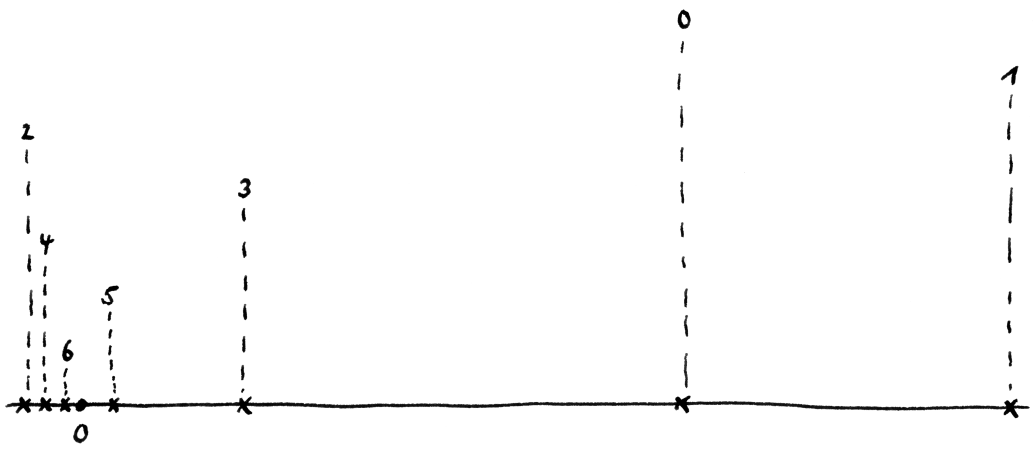
10.3.5.16. Gegeben Mengen A und I bezeichnet man eine Abbildung $I \to A$ ganz allgemein auch als eine **durch I indizierte Familie von Elementen von A** und benutzt die Notation

$$(a_i)_{i\in I}$$

Diese Sprechweise und Notation für Abbildungen verwendet man insbesondere dann, wenn man der Menge I eine untergeordnete Rolle zugedacht hat. Im Fall $I = \emptyset$ spricht man von der **leeren Familie** von Elementen von A.

Definition 10.3.5.17. Eine Abbildung $\mathbb{N} \to X$, $n \mapsto a_n$ von den natürlichen Zahlen in eine Menge X nennen wir eine **Folge in** X. Wir schreiben eine Folge meist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $a_0, a_1, a_2, \ldots$ oder auch einfach nur (a_n). Die Elemente a_n heißen die **Folgenglieder**. Manchmal nennen wir auch Abbildungen Folgen, die erst ab $n = 1$ definiert sind.

10.3.5.18 (**Folgenkonvergenz**). Eine Folge (a_n) in $\bar{\mathbb{R}}^d$ ist dasselbe wie eine Funktion $f : \bar{\mathbb{R}} \supset \mathbb{N} \to \bar{\mathbb{R}}^d$, nämlich die Funktion $f(n) := a_n$. Der Punkt ∞ ist ein Häufungspunkt zu $\mathbb{N}$ in $\bar{\mathbb{R}}$, wie wir bereits in 10.3.5.4 bemerkt hatten. Gegeben



Graphische Darstellung der Folge $a_n = 3^{3-n} - (-2)^{4-n}$, die gegen Null konvergiert, wie Sie bald werden zeigen können. Die Folgenglieder sind die kleinen Kreuzchen auf der reellen Achse, ihre Indizes tragen sie an unterschiedlich langen gestrichelt eingezeichneten Stangen.

$b \in \bar{\mathbb{R}}^d$ sagen wir, **die Folge** a_n **konvergiere gegen** a, wenn im Sinne des allgemeinen Grenzwertbegriffs 10.3.5.7 gilt

$$\lim_{\mathbb{N} \ni n \to \infty} a_n = a$$

In diesem Fall nennen wir a den **Grenzwert** oder lateinisierend **Limes** der Folge.

10.3.5.19. Sagen wir, eine Aussage gelte für **fast alle Elemente** einer Menge, so soll das bedeuten, daß sie gilt für alle Elemente bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen. Sagen wir, eine Aussage gelte für **fast alle Glieder** einer Folge, so soll das bedeuten, daß für fast alle Indizes n unsere Aussage für das n-te Folgenglied gilt.

10.3.5.20 (**ε-N-Kriterium für Folgenkonvergenz**). Gegeben eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}^d$ und $a \in \mathbb{R}^d$ ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ nach 10.3.5.13 gleichbedeutend dazu, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{R}$ gibt mit $n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

Lemma 10.3.5.21 (**Charakterisierung der Folgenkonvergenz**). *Gegeben eine Folge (a_n) in $\bar{\mathbb{R}}^d$ ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gleichbedeutend dazu, daß jede Umgebung von a fast alle Glieder unserer Folge enthält.*

Beweis. Wir setzen $D := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Bezeichne $\bar{a} : D \to \bar{\mathbb{R}}^d$ die Fortsetzung von $n \mapsto a_n$ durch $\infty \mapsto a$. Per definitionem ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gleichbedeutend dazu, daß $\bar{a}$ stetig ist bei ∞. Das ist gleichbedeutend dazu, daß es für jede Umgebung U von $a = \bar{a}(\infty)$ eine Umgebung U' von ∞ gibt mit $\bar{a}(U' \cap D) \subset U$. Das hinwiederum ist gleichbedeutend dazu, daß es für jede Umgebung U von a ein $N \in \mathbb{R}$ gibt mit $\bar{a}((N, \infty] \cap D) \subset U$ oder, wegen $\bar{a}(\infty) = a \in U$ immer noch gleichbedeutend, mit $\bar{a}((N, \infty] \cap \mathbb{N}) \subset U$. □

10.3.5.22. Eine **Nullfolge** ist eine Folge, die gegen Null konvergiert. Zum Beispiel folgt aus Korollar 10.2.4.10 zur Archimedizität der reellen Zahlen sofort, daß die Folge $n \mapsto 1/n$ gegeben für $n \geq 1$ eine Nullfolge ist, in Formeln

$$\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$$

Alternativ folgt das auch durch Einschränken der Erkenntnis $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$ aus 10.3.5.11 auf positive natürliche Zahlen. Bei dieser Argumentation versteckt sich die Archimedizität der reellen Zahlen in der implizit verwendeten Eigenschaft, daß ∞ ein Häufungspunkt zu $\mathbb{N}$ in $\bar{\mathbb{R}}$ ist.

10.3.5.23 (**Diskussion der Terminologie**). Mit unserer Konvention für die „Konvergenz gegen $\pm\infty$“ bewegen wir uns zwar im Rahmen des allgemeinen Begriffs der „Konvergenz in topologischen Räumen“ **??**, aber außerhalb der in der einführenden Literatur zur Analysis üblichen Konventionen. Üblicherweise wird

stattdessen die Terminologie **bestimmte Divergenz gegen** $\pm\infty$ verwendet. Üblicherweise bleibt in anderen Worten der Begriff der konvergenten Folge reserviert für Folgen, die gegen eine reelle Zahl konvergieren. Wir nennen solche Folgen **reell konvergent**. Falls eine Folge nicht konvergiert, auch nicht gegen ∞ oder $-\infty$, so nennt man sie **unbestimmt divergent**. Wir verlieren mit unserer Terminologie zwar etwas an terminologischer Kohärenz, da wir im weiteren „Reihen" aus wieder anderen Gründen nur dann konvergent nennen werden, wenn die Folge ihrer Partialsummen *reell* konvergent ist. Das schien mir jedoch ein kleineres Übel, als es eine unnötig einschränkende oder in Fälle aufspaltende Formulierung von Aussagen wie 10.3.5.32 wäre.

10.3.5.24 (**Lokalität des Grenzwerts**). Der Grenzwert einer Funktion für $x \to p$ hängt nur von ihrem Verhalten in einer Umgebung von p ab. Ist genauer $p \in D$ Häufungspunkt einer Teilmenge $D \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ und $f : D\backslash p \to \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Funktion und V eine Umgebung von p, so existiert $\lim_{x\to p} f(x)$ genau dann, wenn $\lim_{x\to p}(f|_{V\cap D\backslash p})(x)$ existiert, und unter diesen Umständen gilt

$$\lim_{(V\cap D)\ni x\to p} f(x) = \lim_{D\ni x\to p} f(x)$$

Beispiel 10.3.5.25 (**Grenzwerte von Einschränkungen**). Gegeben $C \subset E \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ und $p \in \bar{\mathbb{R}}^m$ ein Häufungspunkt zu C und $f : E\backslash p \to \bar{\mathbb{R}}^n$ haben wir

$$\lim_{C\ni x\to p} f(x) = \lim_{E\ni x\to p} f(x)$$

wenn der rechte Grenzwert existiert, denn Einschränkungen stetiger Funktionen sind stetig.

10.3.5.26. Man beachte den Unterschied zur Lokalität des Grenzwerts 10.3.5.24, der ein Kriterium für die Existenz eines Grenzwerts angibt, wohingegen die Aussage 10.3.5.25 über Grenzwerte von Einschränkungen nur Eigenschaften von Grenzwerten behauptet, deren Existenz bereits bekannt ist.

10.3.5.27 (**Grenzwerte von Verknüpfungen**). Die Definition des Grenzwerts 10.3.5.7 als Wert der eindeutigen stetigen Fortsetzung zusammen mit der Stetigkeit der Verknüpfung stetiger Funktionen 10.3.2.30 liefern für den Grenzwert einer Verknüpfung die folgenden drei Implikationen. Die Terminologie „Limites" meint hier das „Bilden von Grenzwerten" und soll zum Ausdruck bringen, daß eben nicht der Grenzwert selbst die fraglichen Eigenschaften hat, sondern vielmehr das Bilden von Grenzwerten.

Limites vertauschen mit dem Nachschalten stetiger Funktionen:

$$\left(\lim_{x\to p} f(x) = q \text{ und } g \text{ stetig bei } q\right) \Rightarrow \lim_{x\to p} g(f(x)) = g(q)$$

Limites bleiben gleich beim Vorschalten stetiger Funktionen:

$$\left(f \text{ stetig bei } p \text{ und } \lim_{y\to f(p)} g(y) = c\right) \Rightarrow \lim_{x\to p} g(f(x)) = c$$

Limites lassen sich iterieren:

$$\left(\lim_{x\to p} f(x) = q \text{ und } \lim_{y\to q} g(y) = c\right) \Rightarrow \lim_{x\to p} g(f(x)) = c$$

Im folgenden führen wir das genauer aus.

10.3.5.28 (**Limites vertauschen mit dem Nachschalten stetiger Funktionen**). Wir schreiben die erste Eigenschaft nach 10.3.5.27 nocheinmal mit allen Voraussetzungen und den entsprechenden Notationen aus. Seien gegeben $C \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ und $p \in \bar{\mathbb{R}}^m$ ein Häufungspunkt zu C und $f : C\backslash p \to \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Funktion mit Bild in $E \subset \bar{\mathbb{R}}^n$. Gilt $\lim_{x\to p} f(x) = q$ und $q \in E$ und ist $g : E \to \bar{\mathbb{R}}^l$ stetig bei q, so folgt

$$\lim_{x\to p} g(f(x)) = g(q)$$

Beispiel 10.3.5.29 (**Folgenkonvergenz und Nachschalten stetiger Funktionen**). Gegeben eine Funktion $g : \bar{\mathbb{R}}^k \supset E \to \bar{\mathbb{R}}^l$, die stetig ist bei einer Stelle $a \in E$, und eine Folge (a_n) in E mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(a)$$

Das zeigen wir, indem wir unsere Erkenntnisse aus 10.3.5.28 zum Vertauschen von Limites mit dem Nachschalten stetiger Funktionen anwenden auf $C := \mathbb{N}$ und den Häufungspunkt $p := \infty$ und a_n statt $f(x)$ schreiben.

Beispiel 10.3.5.30. Wenden wir unsere Erkenntnisse 10.3.5.29 zur Vertauschung von Folgenkonvergenz und stetigen Funktionen nach einer geschickten Umformung auf die Funktion $f(x) := \frac{5+x^2}{3+x}$ und die Folge $a_n := 1/n$ an, so erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+n}{3n^3+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+(1/n)^2}{3+(1/n)} = \frac{5}{3}$$

Definition 10.3.5.31. Sei $b_0, b_1, b_2, \ldots$ eine Folge. Ist $0 \le n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so nennen wir die Folge $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Gliedern

$$b_{n_0}, b_{n_1}, b_{n_2}, \ldots$$

eine **Teilfolge** der Folge b_n. Schreiben wir eine Folge in X als eine Abbildung $b : \mathbb{N} \to X$, $n \mapsto b(n) = b_n$, so ist eine Teilfolge von b demnach eine Abbildung der Gestalt $b \circ a$ für eine streng monoton wachsende Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch $a(k) := n_k$.

10.3.5.32 (**Konvergenz von Teilfolgen**). Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert, und zwar gegen denselben Grenzwert wie die ursprüngliche Folge. In der Tat liegen in jeder Umgebung des Grenzwerts fast alle Glieder unserer Folge und a forteriori auch fast alle Glieder jeder Teilfolge. Alternativ ist es auch eine formale Konsequenz aus der Regel für iterierte Limites nach 10.3.5.27, die wir spezialisieren können zu

$$(\lim_{k\to\infty} n_k = \infty \text{ und } \lim_{n\to\infty} b_n = b) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} b_{n_k} = b$$

Nach unseren Annahmen ist hier $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$ offensichtlich. Formal folgt es auch aus der Regel für den Grenzwert durch Einquetschen 10.3.5.36.

10.3.5.33 (**Grenzwert als komponentenweiser Grenzwert**). Sei $C \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ und $p \in \bar{\mathbb{R}}^m$ ein Häufungspunkt zu C und $f = (f_1, \dots, f_n) : C\backslash p \to \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Abbildung und $b = (b_1, \dots, b_n) \in \bar{\mathbb{R}}^n$ ein Punkt. So gilt

$$\lim_{x\to p} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to p} f_\nu(x) = b_\nu \ \forall \nu$$

In der Tat folgt das unmittelbar aus unserer Erkenntnis 10.3.5.33, daß Stetigkeit gleichbedeutend ist zu komponentenweiser Stetigkeit.

10.3.5.34 (**Grenzwert von Summe, Produkt und Quotient**). Seien $C \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ eine Teilmenge und $p \in \bar{\mathbb{R}}^m$ ein Häufungspunkt zu C und seien $f, g : C\backslash p \to \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen mit reellen Grenzwerten $\lim_{x\to p} f(x) = b$ und $\lim_{x\to p} g(x) = c$. So folgt aus der Stetigkeit von Summe und Produkt stetiger Funktionen 10.3.2.34 unmittelbar $\lim_{x\to p}(f+g)(x) = b+c$ und $\lim_{x\to p}(fg)(x) = bc$. Ebenso folgt aus der Stetigkeit des Quotienten 10.3.3.5 unter der zusätzlichen Annahme, daß g keine Nullstelle hat und der Grenzwert c nicht Null ist, auch $\lim_{x\to p} f(x)/g(x) = b/c$.

10.3.5.35 (**Grenzwert durch Einquetschen**). Seien $C \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ eine Teilmenge und $p \in \bar{\mathbb{R}}^m$ ein Häufungspunkt zu C und $f, g, h : C\backslash p \to \bar{\mathbb{R}}$ Funktionen mit

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \text{für alle } x \in C\backslash p.$$

So folgt aus $\lim_{x\to p} f(x) = b = \lim_{x\to p} h(x)$ schon $\lim_{x\to p} g(x) = b$. In der Tat gibt es unter diesen Annahmen für jede Intervallumgebung I von b Umgebungen U, W von p mit $f(U \cap C\backslash p) \subset I$ und $h(W \cap C\backslash p) \subset I$. Dann aber ist $V := U \cap W$ offensichtlich eine Umgebung von p mit $g(V \cap C\backslash p) \subset I$. Alternativ folgt das auch sofort aus unserer Übung zur Stetigkeit durch Einquetschen 10.3.2.46.

Beispiel 10.3.5.36. Aus $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ und $f(x) \le g(x)\ \forall x$ folgt durch Einquetschen $\lim_{x\to p} g(x) = \infty$. In diesem Fall können wir als „obere Quetschfunktion“ h die konstante Funktion $h(x) = \infty\ \forall x$ wählen.

Lemma 10.3.5.37 (Erhaltung schwacher Ungleichungen im Grenzwert). *Seien $C \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ eine Teilmenge und p ein Häufungspunkt zu C und $f, g : C \backslash p \to \bar{\mathbb{R}}$ Funktionen mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in C \backslash p$. Existieren die Grenzwerte von f und g für $x \to p$, so gilt*

$$\lim_{x \to p} f(x) \leq \lim_{x \to p} g(x)$$

10.3.5.38. Man beachte den Unterschied zum Grenzwert durch Einquetschen 10.3.5.35. Er gibt ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Grenzwerts, wohingegen Lemma 10.3.5.37 über die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert nur Eigenschaften von Grenzwerten behauptet, deren Existenz bereits bekannt ist.

Beweis. Durch Widerspruch. Sei a der Grenzwert von f und b der Grenzwert von g. Hätten wir $a > b$ alias $b < a$, so fänden wir k mit $b < k < a$. Dann wäre $[-\infty, k)$ eine Umgebung von b und $(k, \infty]$ eine Umgebung von a. Es gäbe also Umgebungen U und V von p mit $f(U \cap C \backslash p) \subset (k, \infty]$ und $g(V \cap C \backslash p) \subset [-\infty, k)$. Da p Häufungspunkt zu C ist, wäre $U \cap V \cap C \backslash p$ nicht leer. Für jeden Punkt x aus dieser Menge gälte aber $f(x) > g(x)$ im Widerspruch zu unserer Annahme. □

Proposition 10.3.5.39. *Die folgende Tabelle beschreibt das Konvergenzverhalten der Folge $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Potenzen von x in Abhängigkeit von x:*

$x > 1$	$\lim_{n \to \infty} x^n = \infty$;
$x = 1$	$\lim_{n \to \infty} x^n = 1$;
$\lvert x \rvert < 1$	$\lim_{n \to \infty} x^n = 0$;
$x \leq -1$	*Die Folge x^n divergiert unbestimmt.*

Beweis. Im Fall $x > 1$ schreiben wir $x = 1 + y$ mit $y > 0$ und erhalten mit der binomischen Formel

$$x^n = (1 + y)^n \geq 1 + ny$$

Die Folge $n \mapsto 1 + ny$ strebt aber gegen ∞ und nach 10.3.5.36 strebt dann die Folge x^n auch gegen ∞. Im Fall $x = 1$ ist die Folge konstant 1 und es ist nichts zu zeigen. Falls $0 < x < 1$ gilt nach dem Vorhergehenden $\lim_{n \to \infty} 1/x^n = \infty$ und daraus folgt $\lim_{n \to \infty} x^n = 0$ durch Anwenden der stetig von $(0, \infty)$ auf $[0, \infty]$ fortgesetzten Funktion $t \mapsto 1/t$ aus 10.3.3.4. Für $-1 < x \leq 0$ folgt die Behauptung dann wegen $-|x|^n \leq x^n \leq |x|^n$ durch Einquetschen. Im Fall $x \leq -1$ gilt $|x^n - x^{n+1}| \geq 2$ für alle n. Also kann die Folge nicht gegen eine reelle Zahl a konvergieren, denn dann müßte gelten $|a - x^n| < 1$ für fast alle n und dann nach der Dreiecksungleichung $|x^n - x^{n+1}| < 2$ für fast alle n. Die Folge kann in diesem Fall aber auch nicht gegen ∞ oder $-\infty$ konvergieren, da die Folgenglieder immer abwechselnd positiv und negativ sind. □

Satz 10.3.5.40 (Gruppenwege in $\mathbb{R}$). *Die stetigen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der additiven Gruppe der reellen Zahlen in sich selber sind genau die Abbildungen $x \mapsto \lambda x$ für beliebiges aber festes $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, als da heißt eine stetige Abbildung mit $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Es reicht zu zeigen, daß f die Gleichung $f(x) = xf(1)$ erfüllt. Auch ohne die Stetigkeit von f zu benutzen, folgern wir $f(q) = qf(1)$ zunächst für alle $q \in \mathbb{N}$, dann für alle $q \in \mathbb{Z}$, dann für alle $q \in \mathbb{Q}$. Um unsere Gleichung $f(x) = xf(1)$ sogar für alle $x \in \mathbb{R}$ zu zeigen, nutzen wir die Erkenntnis, daß nach 10.2.4.10 jede reelle Zahl x ein Häufungspunkt zu $\mathbb{Q}$ ist. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt also

$$f(x) = \lim_{\mathbb{Q} \ni q \to x} f(q) = \lim_{\mathbb{Q} \ni q \to x} qf(1) = xf(1)$$

und so folgt wie gewünscht $f(x) = \lambda x$ für $\lambda := f(1)$. □

10.3.5.41. Gegeben eine Teilmenge $C \subset \bar{\mathbb{R}}$ und ein Punkt $p \in \bar{\mathbb{R}}$, der Häufungspunkt sowohl zu $D \cap \bar{\mathbb{R}}_{<p}$ als auch zu $D \cap \bar{\mathbb{R}}_{>p}$ ist, sprechen wir vom **linksseitigen** beziehungsweise **rechtsseitigen Grenzwert** einer Funktion $f : C \backslash p \to \bar{\mathbb{R}}$, wenn wir den Grenzwert ihrer Einschränkung auf diese beiden Teilmengen untersuchen wollen, und notieren diese Grenzwerte

$$\lim_{x \nearrow p} f(x) := \lim_{x \to p} f|_{C \cap \bar{\mathbb{R}}_{<p}} \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow p} f(x) := \lim_{x \to p} f|_{C \cap \bar{\mathbb{R}}_{>p}}$$

Ofensichtlich existiert in dieser Situation der Grenzwert bei p genau dann, wenn der linkseitige Grenzwert und der rechtseitige Grenzwert existieren und übereinstimmen.

Beispiel 10.3.5.42. Es gilt $\lim_{x \searrow 0} 1/x = \infty$ und $\lim_{x \nearrow 0} 1/x = -\infty$.

Satz 10.3.5.43 (Stetigkeit als Folgenstetigkeit). *Seien $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \to \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Funktion und $a \in D$ ein Punkt. So sind gleichbedeutend:*

1. *f ist stetig bei a;*
2. *Für jede Folge $a_0, a_1, \ldots$ von Punkten aus D mit $\lim_{i \to \infty} a_i = a$ gilt bereits $\lim_{i \to \infty} f(a_i) = f(a)$.*

10.3.5.44. Dieser Satz ist für uns bis auf weiteres nicht relevant. Soweit ich sehen kann, benötigen wir ihn im hier verfolgten Aufbau der Theorie erst in Analysis 3, um zu zeigen, daß die Fouriertransformierte einer integrierbaren Funktion stetig ist. Allerdings kann es leicht passieren, daß Sie in einer Prüfung nach diesem Satz gefragt werden.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$ haben wir schon in 10.3.5.29 erledigt. Wir konzentrieren uns deshalb auf $2 \Rightarrow 1$. Das zeigen wir durch Widerspruch. Für unser $a \in \bar{\mathbb{R}}^n$ finden wir nach Übung 10.3.5.46 eine absteigende Folge von Umgebungen $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ derart, daß jede Umgebung V von a fast alle V_i umfaßt. Ist f nicht stetig bei a, so gibt es eine Umgebung U von $f(a)$ derart, daß für kein i gilt $f(V_i \cap D) \subset U$. Für jedes i finden wir also $a_i \in V_i \cap D$ mit $f(a_i) \notin U$. Die a_i bilden dann eine Folge in D mit $\lim_{i\to\infty} a_i = a$, für die nicht gilt $\lim_{i\to\infty} f(a_i) = f(a)$. $\square$

Übungen

Übung 10.3.5.45. Sei $C \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge derart, daß ∞ ein Häufungspunkt zu C ist, und sei $f : C \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Man zeige, daß genau dann gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, wenn es für jedes $M \in \mathbb{R}$ ein $N = N_M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$x > N \Rightarrow f(x) < M$$

Übung 10.3.5.46. Für jedes $a \in \bar{\mathbb{R}}^n$ gibt es eine absteigende Folge von Umgebungen $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ derart, daß jede Umgebung von a fast alle der V_i umfaßt.

Übung 10.3.5.47. Ist $A \subset \bar{\mathbb{R}}$ eine nichtleere Teilmenge, so ist $\sup A$ das größte Element in der Menge G aller Punkte aus den erweiterten reellen Zahlen, die Grenzwerte von Folgen aus A sind. Diese Übung wird verwendet für die Herleitung des Satzes über Extrema auf Kompakta.

Übung 10.3.5.48. Sei $C \subset \bar{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge. Genau dann ist $p \in \bar{\mathbb{R}}$ Häufungspunkt zu C, wenn es eine Folge reeller Zahlen x_n in $C \backslash p$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.

Übung 10.3.5.49. Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgt $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Umgekehrt folgt aus $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ bereits $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Übung 10.3.5.50. Ist (a_n) eine Folge reeller Zahlen, die gegen eine reelle Zahl konvergiert, so gilt $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.

Übung 10.3.5.51 (**Folgenkriterium für Grenzwerte von Funktionen**). Sei $C \subset \bar{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge, p ein Häufungspunkt zu C und $f : C \backslash p \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion. So gilt $\lim_{x\to p} f(x) = b$ genau dann, wenn für jede Folge x_n in $C \backslash p$ mit $x_n \to p$ gilt $f(x_n) \to b$.

Übung 10.3.5.52. Sei $C \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ eine Teilmenge, p ein Häufungspunkt zu C, $f : C \backslash p \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $b \in \mathbb{R}$. So gilt

$$\lim_{x\to p} f(x) = b \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to p} |f(x) - b| = 0$$

Übung 10.3.5.53 (**Polynomiale Funktionen als formale Ausdrücke**). Man zeige: Gilt für eine durch ein Polynom vom Grad $\leq n$ gegebene Funktion $f(x) =$

$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ und ein $p \in \mathbb{R}$ die Formel $\lim_{x \to p} f(x)/(x-p)^n = 0$, so folgt $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. Insbesondere liefert ein Polynom mit reellen Koeffizienten nur dann die Nullfunktion, wenn alle seine Koeffizienten Null sind. Wir nennen es dann das **Nullpolynom**. Hinweis: Durch Verschieben kann man sich auf den Fall $p = 0$ zurückziehen.

Übung 10.3.5.54 (**Rationale Funktionen als formale Ausdrücke**). Seien Polynome mit reellen Koeffizienten P_1, P_2, Q_1, Q_2 gegeben und seien Q_1, Q_2 nicht das Nullpolynom. Man zeige: Gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $Q_1(x) \neq 0 \neq Q_2(x)$ die Gleichheit von reellen Zahlen $P_1(x)/Q_1(x) = P_2(x)/Q_2(x)$, so folgt die Gleichheit von Polynomen $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$. Hinweis: Übung 10.3.5.53.

Übung 10.3.5.55. Man zeige: Die Regeln zum Vertauschen von Grenzwertbildung mit Addition und Multiplikation gelten auch noch, wenn wir $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ zulassen und $a + b$ beziehungsweise ab sinnvoll definiert sind im Sinne von Übung 10.3.2.44.

Ergänzende Übung 10.3.5.56. Sei $L \subset \mathbb{R}$ eine Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen, die keine Häufungspunkte in $\mathbb{R}$ hat. So gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $L = \mathbb{Z}\alpha$.

10.3.6 Vollständigkeit der reellen Zahlen

Definition 10.3.6.1. Eine Menge von reellen Zahlen heißt **beschränkt**, wenn sie in $\mathbb{R}$ eine obere und eine untere Schranke besitzt. Eine Folge von reellen Zahlen heißt beschränkt, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist. Allgemeiner heißt eine reellwertige Funktion **beschränkt**, wenn die Menge ihrer Funktionswerte beschränkt ist.

Lemma 10.3.6.2. *Jede reell konvergente Folge von reellen Zahlen ist beschränkt.*

Beweis. Ist $x \in \mathbb{R}$ der Grenzwert unserer Folge, so liegen fast alle Folgenglieder in $[x-1, x+1]$. Die endlich vielen Ausnahmen können wir durch eine hinreichend große obere und untere Schranke auch noch einfangen. □

Satz 10.3.6.3 (**Konvergenz monotoner reeller Folgen**). *Jede monoton wachsende Folge in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergiert gegen das Supremum der Menge ihrer Folgenglieder. Jede monoton fallende Folge in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergiert gegen das Infimum der Menge ihrer Folgenglieder. Jede monotone beschränkte Folge von reellen Zahlen konvergiert gegen eine reelle Zahl.*

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage, die Zweite zeigt man analog und die Dritte ist eine offensichtliche Konsequenz. Sei s das Supremum alias die kleinste obere Schranke der Menge aller Folgenglieder. Kein p mit $p < s$ ist dann eine obere Schranke der Menge aller Folgenglieder, folglich liegen für jedes $p < s$ ein und damit wegen der Monotonie fast alle x_n in $(p, s]$. Damit liegen in jeder Umgebung von s fast alle Folgenglieder. □

Lemma 10.3.6.4. *Jede Folge in einer angeordneten Menge besitzt eine monotone Teilfolge.*

10.3.6.5. Hier mögen Sie sich an unsere Sprachregelung 2.1.7.3 erinnern. Gemeint ist demnach: Jede Folge in einer angeordneten Menge besitzt *mindestens* eine monotone Teilfolge.

Beweis. Wir nennen ein Folgenglied x_n oder präziser seinen Index n einen „Aussichtspunkt" der Folge, wenn alle späteren Folgenglieder kleiner sind, in Formeln $x_n > x_m$ für alle $m > n$. Besitzt unsere Folge unendlich viele Aussichtspunkte, so bilden diese eine streng monoton fallende Teilfolge. Sonst gibt es einen letzten Aussichtspunkt x_n. Dann finden wir aber eine monoton wachsende Teilfolge, die mit x_{n+1} beginnt, denn ab dem Index $n+1$ kommt dann nach jedem Folgenglied noch ein anderes, das mindestens ebenso groß ist. □

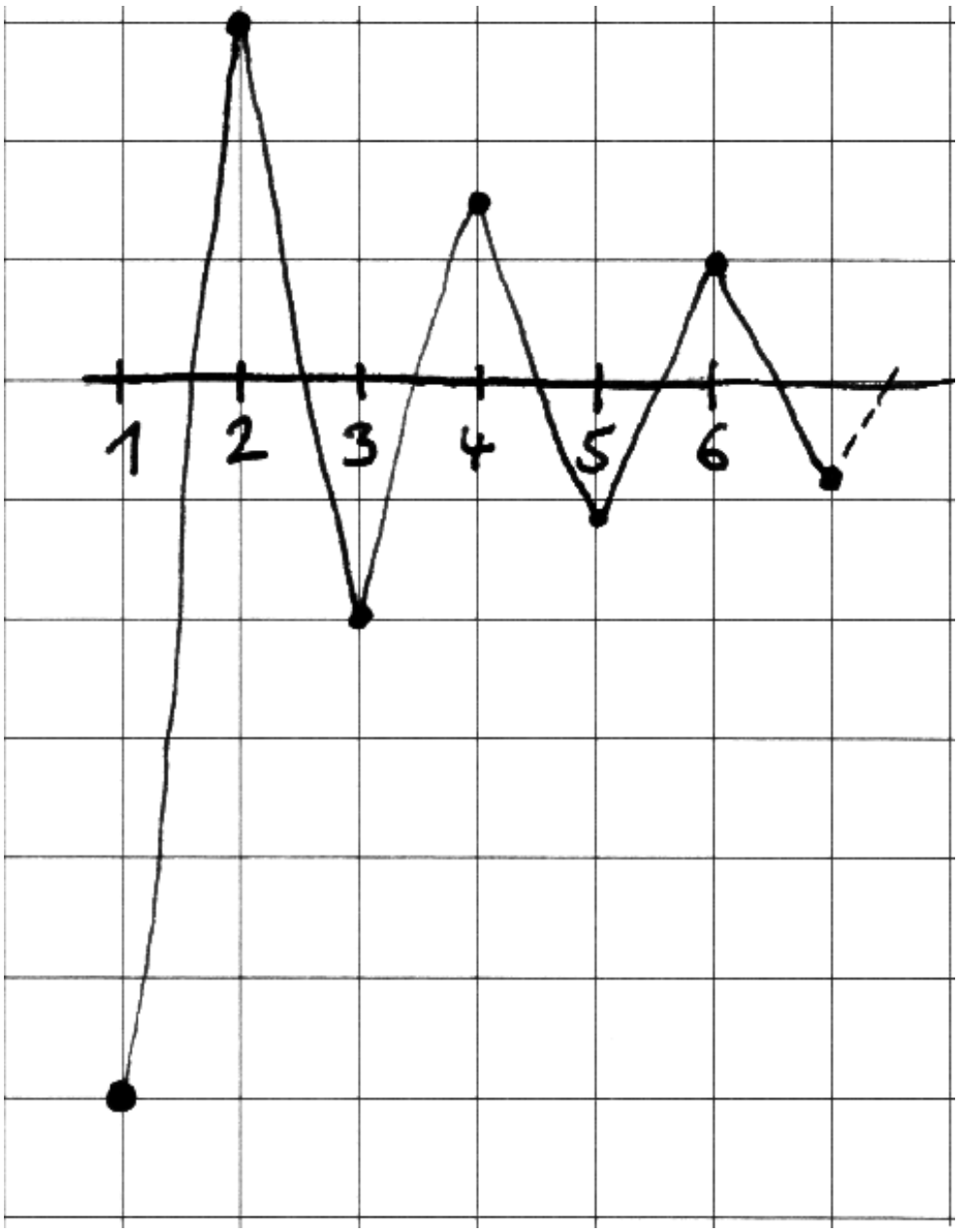
Satz 10.3.6.6 (Bolzano-Weierstraß). *Jede Folge in $\bar{\mathbb{R}}$ besitzt eine in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergente Teilfolge. Jede beschränkte Folge von reellen Zahlen besitzt eine reell konvergente Teilfolge.*

Beweis. Jede Folge in $\bar{\mathbb{R}}$ besitzt nach 10.3.6.4 eine monotone Teilfolge, und diese ist nach 10.3.6.3 konvergent in $\bar{\mathbb{R}}$. Ist unsere Folge beschränkt, so ist auch jede solche Teilfolge beschränkt und konvergiert folglich gegen eine reelle Zahl. □

Definition 10.3.6.7. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper heißt eine **Cauchy-Folge**, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt derart, daß gilt $|x_n - x_m| < \varepsilon$ falls $n, m \geq N$.

Satz 10.3.6.8. *Eine Folge reeller Zahlen konvergiert gegen eine reelle Zahl genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Daß jede reell konvergente Folge Cauchy sein muß, ist leicht zu sehen: Aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ folgt, daß es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $|x_n - x| < \varepsilon/2$ für $n \geq N$. Daraus folgt dann $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für $n, m \geq N$. Wir zeigen nun umgekehrt, daß auch jede Cauchy-Folge gegen eine reelle Zahl konvergiert. Eine Cauchy-Folge x_n ist sicher beschränkt, denn wählen wir für $\varepsilon = 1$ ein $N = N_\varepsilon$, so liegen fast alle Folgenglieder im Intervall $(x_N - 1, x_N + 1)$, und die endlich vielen Ausnahmen können wir durch eine hinreichend große Schranke auch noch einfangen. Unsere Cauchy-Folge besitzt daher nach 10.3.6.6 eine reell konvergente Teilfolge x_{n_k}, sagen wir $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Wir behaupten, daß dann auch die Folge x_n selbst gegen x konvergiert. In der Tat gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein N_ε mit $n, m \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$. Aus $n \geq N_\varepsilon$ folgt damit insbesondere $|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$ für fast alle k und dann im Grenzwert $|x_n - x| \leq \varepsilon$, da ja die Ungleichungen $-\varepsilon \leq x_n - x_{n_k} \leq \varepsilon$ bestehen bleiben beim Grenzübergang $k \to \infty$. □



Bei der Folge $(-1)^n 6/n$ ist jedes zweite Folgenglied ein Ausichtspunkt im Sinne des Beweises von Lemma 10.3.6.4.

10.3.6.9. Ein angeordneter Körper, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt **vollständig**. Dieser Begriff ist Teil einer alternativen Charakterisierung der reellen Zahlen, die wir im folgenden als Übung formulieren.

Übungen

Übung 10.3.6.10. Gegeben ein angeordneter Körper sind gleichbedeutend: (1) Jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke besitzt eine größte untere Schranke; (2) Der Körper ist archimedisch angeordnet und vollständig.

Übung 10.3.6.11 (**Intervallschachtelungsprinzip**). Gegeben eine absteigende Folge von nichtleeren kompakten reellen Intervallen $\mathbb{R} \supset I_0 \supset I_1 \supset I_2 \ldots$ ist auch ihr Schnitt $\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} I_\nu$ nicht leer.

Übung 10.3.6.12 (**Cauchy-Kriterium für Grenzwerte von Funktionen**). Sei $C \subset \bar{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge, p ein Häufungspunkt zu C und $f : C\backslash p \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Genau dann existiert der Grenzwert $\lim_{x\to p} f(x)$ und ist eine reelle Zahl, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U = U_\varepsilon$ von p gibt mit $(a, b \in U \cap C\backslash p) \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon$.

Übung 10.3.6.13. Ich erinnere an die Fibonacci-Folge und den goldenen Schnitt aus 1.1.2.2. Man zeige, daß der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder der Fibonacci-Folge gegen den goldenen Schnitt strebt, daß also in Formeln gilt

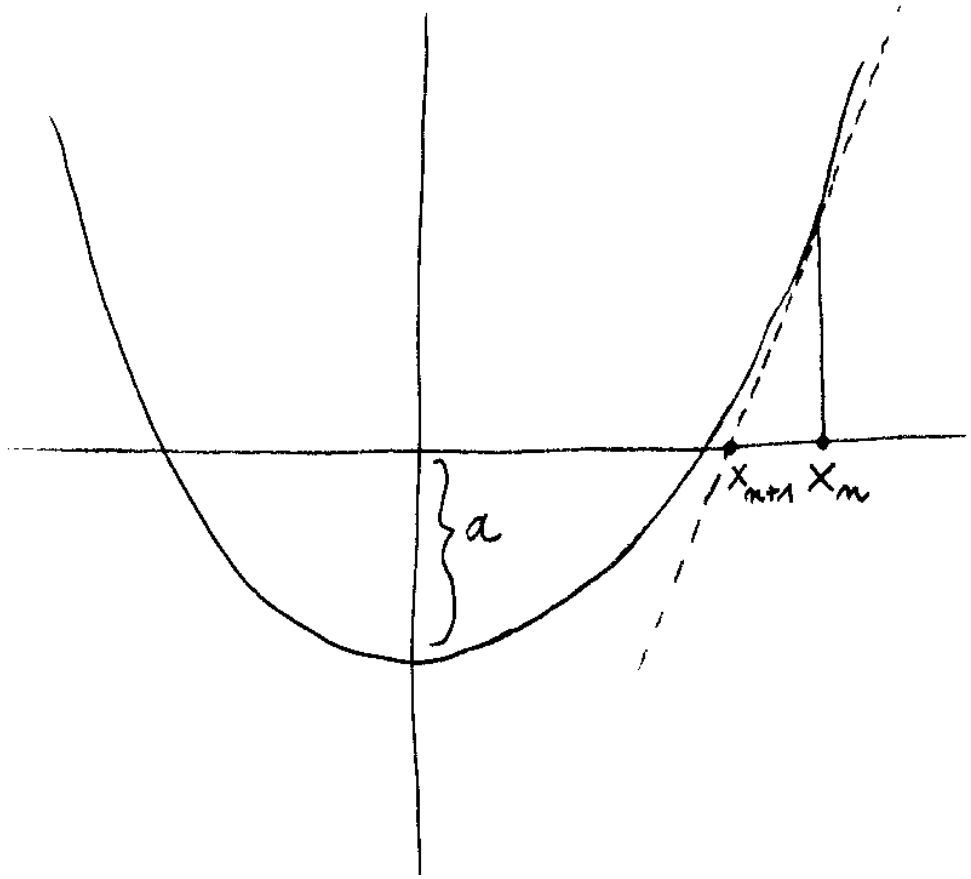
$$\lim_{i\to\infty} \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

für unsere Fibonacci-Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ aus 1.1.2.2.

Übung 10.3.6.14. Gegeben zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definiert man ihr **arithmetisches Mittel** als die Zahl $(a+b)/2$. Gegeben zwei nichtnegative reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert man ihr **geometrisches Mittel** als die Zahl $\sqrt{ab}$. Anschaulich ist das die Kantenlänge eines Quadrats, das dieselbe Fläche hat wie das Rechteck mit den Seitenlängen a und b, und daher kommt vermutlich auch die Terminologie. Man zeige für je zwei positive reelle Zahlen die Ungleichung $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$ zwischen geometrischem und arithmetischen Mittel und zeige, daß Gleichheit nur gilt im Fall $a = b = 0$.

10.3.7 Algorithmisches Wurzelziehen*

10.3.7.1. Gegeben eine reelle Zahl $a \geq 0$ geben wir ein Verfahren zur Berechnung der nichtnegativen Quadratwurzel von a an. Wir konstruieren dazu eine Folge und beginnen mit $x_0 := \max(1, a)$. Dann gilt sicherlich schon einmal $x_0^2 \geq a$. Gegeben $x_n > 0$ mit $x_n^2 \geq a$ machen wir den Ansatz $(x_n - \varepsilon)^2 = a$ und erhalten



Graphische Darstellung unserer induktiven Formel für die Glieder der Folge x_n mit Grenzwert $\sqrt{a}$ aus dem Beweis von 10.3.3.14

$\varepsilon = (x_n^2 + \varepsilon^2 - a)/2x_n$. Nun vernachlässigen wir $\varepsilon^2/2x_n$, vergessen unseren Ansatz und setzen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

Man sieht sofort, daß aus $x_n^2 \geq a$ und $x_n > 0$ folgt $x_{n+1}^2 \geq a$ und $x_n \geq x_{n+1} > 0$. Da die Folge der x_n monoton fällt und durch Null nach unten beschränkt ist, besitzt sie einen Grenzwert $x \geq 0$. Aus der Gleichung

$$2x_n x_{n+1} = x_n^2 + a$$

folgt dann $x^2 = a$ durch Übergang zum Grenzwert für $n \to \infty$ auf beiden Seiten.

10.3.7.2. Die Ungleichungen $a/x_n \leq \sqrt{a} < x_n$ erlauben uns sogar abzuschätzen, wie gut unsere Approximation x_n mindestens sein muß. Machen wir für den Fehler den Ansatz $x_n = \sqrt{a}(1 + f_n)$, so ergibt sich mit etwas Rechnen

$$f_{n+1} = \frac{f_n^2}{2(1 + f_n)}$$

und indem wir im Nenner die 1 beziehungsweise f_n verkleinern zu Null erhalten wir die Abschätzung $f_{n+1} \leq \frac{1}{2}\min(f_n, f_n^2)$. Wenn also x_n so nah bei $\sqrt{a}$ ist, daß gilt $f_n < 1$, so „verdoppelt sich die Anzahl der richtigen Stellen beim Übergang von x_n zu x_{n+1}“. Man spricht unter diesen Umständen auch von **quadratischer Konvergenz**. Anschaulich erhält man x_{n+1}, indem man von x_n senkrecht hochgeht zum Graph der Funktion $y = x^2 - a$ und dann auf der Tangente an diesen Graphen wieder herunter auf die x-Achse. Es ist damit auch anschaulich klar, daß unser Verfahren sehr schnell konvergieren sollte. Dieses Verfahren kann auch zur Bestimmung der Nullstellen allgemeinerer Funktionen anwenden. Es heißt das **Newton-Verfahren**.

10.3.7.3 (**Intervallhalbierungsverfahren**). Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Der Einfachkeit halber nehmen wir zusätzlich $f(a) \leq f(b)$ an. Gegeben $z \in [f(a), f(b)]$ suchen wir $p \in [a, b]$ mit $f(p) = z$. Dazu nehmen wir den Mittelpunkt m_0 unseres Intervalls her und werten unsere Funktion dort aus. Gilt $f(m_0) \geq z$, so setzen wir $a_1 = a$ und $b_1 = m_0$. Sonst setzen wir $a_1 = m_0$ und $b_1 = b$. In jedem Fall gilt $f(a_1) \leq z \leq f(b_1)$. Anschließend nehmen wir den Mittelpunkt m_1 des nur noch halb so großen Intervalls $[a_1, b_1]$ her und verfahren genauso. Auf diese Weise erhalten wir eine monoton wachsende Folge $a = a_0, a_1, \ldots$ und eine monoton fallende Folge $b = b_0, b_1, \ldots$ mit $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$ und $f(a_n) \leq z \leq f(b_n)$ und für alle n. Unsere beiden Folgen müssen also konvergieren, und zwar gegen denselben Grenzwert $p \in [a, b]$. Aus der Stetigkeit von f und der Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert nach 10.3.5.28 folgt dann

$$f(p) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \quad \leq \quad z \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(p)$$

und damit $z = f(p)$.

10.4 Exponentialfunktion

10.4.1 Konvergenz von Reihen

Definition 10.4.1.1. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Der Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

bezeichnet sowohl die Folge (s_n) der **Partialsummen** $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ als auch, falls die Folge der Partialsummen konvergiert, ihren Grenzwert $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Wir sagen dann, die **Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **konvergiere gegen** s. Nennen wir eine Reihe **konvergent**, so meinen wir stets, daß unsere Reihe gegen eine reelle Zahl konvergiert und nicht etwa gegen $\pm\infty$. Die a_k heißen die **Reihenglieder**.

10.4.1.2 (**Ändern endlich vieler Reihenglieder**). Es spielt für das Konvergenzverhalten einer Reihe offensichtlich keine Rolle, wenn wir endlich viele ihrer Glieder abändern. Das beeinflußt nur den Grenzwert und ändert ihn eben um die Summe unserer endlich vielen Änderungen.

10.4.1.3 (**Diskussion der Terminologie**). Es wäre terminologisch kohärenter gewesen, wie bei Folgen auch bei Reihen von „reell konvergenten Reihen“ zu sprechen. Das schien mir jedoch ungeschickt, da man den Begriff dann nicht als Verb verwenden kann: „Die Reihe reell-konvergiert“ klingt einfach zu holprig, und Sprechweisen wie „die Reihe konvergiert absolut“ sind oft praktisch.

Beispiel 10.4.1.4. Dies Beispiel illustriert den oft nützlichen **Teleskopsummentrick**.

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} (1 - \tfrac{1}{n+1}) \\ &= 1\end{aligned}$$

Satz 10.4.1.5 (**Geometrische Reihe**). *Sei* $|x| < 1$. *So gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Beweis. Sicher gilt $(1-x)(1+x+\ldots+x^n) = 1 - x^{n+1}$, die Partialsummen unserer Reihe ergeben sich also zu

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

und streben für $n \to \infty$ wie gewünscht gegen $\frac{1}{1-x}$. □

10.4.1.6 (**Herkunft der Terminologie**). Die Folgen der Gestalt ax^n heißen **geometrische Folgen**, da bei ihnen zumindest im Fall $a > 0, x > 0$ jedes Folgenglied nach dem ersten das geometrische Mittel im Sinne von 10.3.6.14 seines Vorgängers und seines Nachfolgers ist. Die geometrische Reihe hinwiederum erbt ihren Namen von der geometrischen Folge.

Beispiel 10.4.1.7. Es gilt $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$ und

$$0{,}999\ldots = \frac{9}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^k} = 1$$

Satz 10.4.1.8. *Sind $\sum a_k$ und $\sum b_k$ konvergente Reihen, so konvergieren auch die Reihen $\sum(a_k + b_k)$ und $\sum \lambda a_k$ und es gilt:*

$$\begin{aligned}\sum(a_k + b_k) &= \sum a_k + \sum b_k\\ \sum \lambda a_k &= \lambda \sum a_k\end{aligned}$$

Beweis. Das folgt, indem man die Vertauschbarkeit 10.3.5.34 von Summen und Produkten mit Grenzwerten auf die Folgen der Partialsummen anwendet. □

10.4.1.9. Eine Reihe kann nur dann konvergieren, wenn die Folge der Reihenglieder gegen Null strebt. In der Tat folgt das sofort, wenn wir Übung 10.3.5.50 auf die Folge der Partialsummen anwenden. Diese Übung besagte, nur zur Erinnerung, daß die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder einer reell konvergenten Folge stets eine Nullfolge bilden.

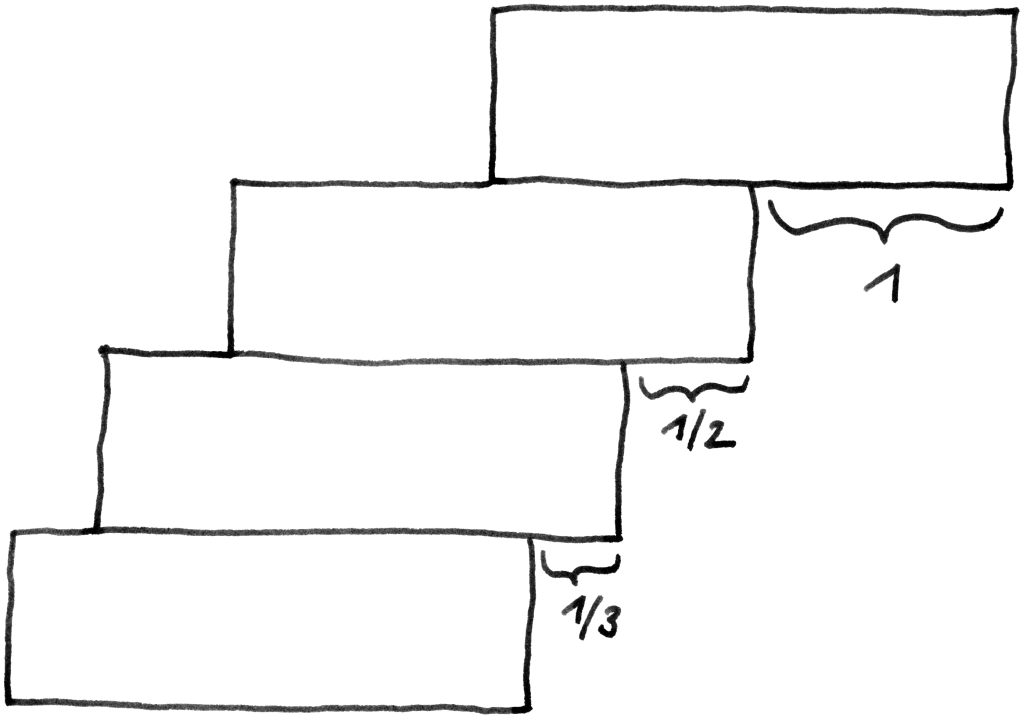
Lemma 10.4.1.10 (**Konvergenz beschränkter nichtnegativer Reihen**). *Eine Reihe, die aus nichtnegativen Gliedern besteht, konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen beschränkt ist.*

Beweis. Ist kein Reihenglied negativ, so wächst die Folge der Partialsummen monoton. Ist diese Folge auch noch beschränkt, so muß die Folge der Partialsummen nach 10.3.6.3 reell konvergent sein. Die Umkehrung ist eh klar. □

Beispiel 10.4.1.11. Die **harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ konvergiert nicht, da ja gilt

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2} &\geq \tfrac{1}{2}\\ \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} &\geq \tfrac{1}{2}\\ \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} &\geq \tfrac{1}{2}\\ \text{und so weiter.}\end{aligned}$$

Jedoch konvergieren die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$ für $s = 2, 3, 4, \ldots$, da für jede dieser Reihen die Folge der Partialsummen beschränkt ist durch $1 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)} = 2$.



Die Divergenz der harmonischen Reihe 10.4.1.11 zeigt, daß man mit hinreichend vielen identischen Bauklötzen einen beliebig weit neben seinem Grundklotz endenden Turm bauen kann. Obiges Bild zeigt etwa, wie weit man mit vier Klötzen so gerade eben mal kommen kann.

Vorschau 10.4.1.12. In der Funktionentheorie können Sie lernen, daß diese Reihen sogar eine außerordentlich interessante Funktion $\zeta(s)$ definieren, die sogenannte **Riemann'sche ζ-Funktion**. Wir werden in 14.5.2.9 zeigen, daß zum Beispiel gilt $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$ und nach 14.5.2.7 haben wir sogar ganz allgemein $\zeta(2n) \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$ für beliebige natürliche Zahlen $n \geq 1$. Alle diese Formeln sind berühmte Resultate des 1707 in Basel geborenen Mathematikers **Leonhard Euler**. Als Übung 10.5.5.28 werden Sie im übrigen zeigen, daß auch die Reihe der Kehrwerte aller Primzahlen bereits divergiert. Für diejenigen unter Ihnen, die die komplexen Zahlen bereits kennen, sei erwähnt, daß es mit etwas größerem Aufwand sogar gelingt, $\zeta(s)$ zu definieren für jede komplexe Zahl $s \neq 1$, vergleiche etwa 14.6.1.7. Die vielleicht berühmteste Vermutung der Mathematik, die **Riemann'sche Vermutung**, besagt, daß alle Nullstellen der Riemann'schen ζ-Funktion, die nicht auf der reellen Achse liegen, Realteil $1/2$ haben müssen. Ein Beweis dieser Vermutung hätte weitreichende Konsequenzen für unser Verständnis der Verteilung der Primzahlen, wie der Beweis des Primzahlsatzes 14.6.1.1 illustriert. Die Riemann'sche Vermutung ist übrigends der Kern des **achten Hilbert'schen Problems**.

Definition 10.4.1.13. Wir sagen, eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **konvergiere absolut**, wenn die Reihe der Absolutbeträge der Reihenglieder konvergiert, wenn also in Formeln gilt $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Beispiel 10.4.1.14. Die sogenannte **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

konvergiert, aber nicht absolut. Daß die Reihe nicht absolut konvergiert, hatten wir schon in 10.4.1.11 gesehen. Um zu zeigen, daß unsere Reihe dennoch konvergiert, beachten wir, daß für die Folge s_n der Partialsummen gilt

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \ldots s_5 \leq s_3 \leq s_1$$

Folglich existiert $S = \sup\{s_2, s_4, \ldots\}$. Da aber gilt $s_{2k} \leq S \leq s_{2k+1}$ für alle k erhalten wir $|S - s_n| \leq \frac{1}{n}$ und folglich $\lim_{n\to\infty} s_n = S$. Wir werden in 10.6.4.1 sehen, daß genauer gilt $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \log 2$.

Satz 10.4.1.15. *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Beweis. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ unsere absolut konvergente Reihe. Seien

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

die Partialsummen der Reihe selbst und der Reihe der Absolutbeträge. Nach Annahme konvergiert die Folge der S_n in $\mathbb{R}$ und ist also eine Cauchy-Folge. Da aber für $n > m$ gilt $|s_n - s_m| = |\sum_{k=m+1}^n a_k| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| = S_n - S_m$, ist dann auch s_n eine Cauchy-Folge und konvergiert in $\mathbb{R}$ nach 10.3.6.8. □

Proposition 10.4.1.16 (**Majorantenkriterium**). *Sei $\sum a_k$ eine Reihe. Gibt es für unsere Reihe eine konvergente* **Majorante**, *als da heißt eine konvergente Reihe $\sum b_k$ mit $|a_k| \leq b_k$ für fast alle k, so konvergiert unsere Reihe $\sum a_k$ absolut.*

Beweis. Indem wir endlich viele Glieder abändern, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $|a_k| \leq b_k$ sogar für alle k gilt. Die Reihe $\sum |a_k|$ besteht nun aus nichtnegativen Gliedern und die Folge ihrer Partialsummen ist beschränkt durch $\sum b_k$. Aus der Konvergenz beschränkter nichtnegativer Reihen 10.4.1.10 folgt damit die Konvergenz der Reihe $\sum |a_k|$. □

Korollar 10.4.1.17 (**Quotientenkriterium**). *Sei (a_k) eine Folge. Gibt es $\theta < 1$ mit $|a_{k+1}| \leq \theta |a_k|$ für fast alle k, so konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolut.*

10.4.1.18. Gilt $a_k \neq 0$, so kann man die Bedingung zu $|a_{k+1}/a_k| \leq \theta$ umschreiben, deshalb die Bezeichnung als Quotientenkriterium.

10.4.1.19. Bei diesem Kriterium ist wesentlich, daß θ nicht von k abhängt. Die Ungleichungen $|a_{k+1}/a_k| < 1$ gelten ja auch für die divergente harmonische Reihe. Es gibt jedoch auch Reihen wie $\sum \frac{1}{k^2}$, die absolut konvergieren, obwohl sie unser Kriterium nicht dazu zwingt.

Beweis. Indem wir endlich viele Glieder abändern, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $|a_{k+1}| \leq \theta |a_k|$ sogar für alle k gilt. Daraus folgt induktiv $|a_k| \leq |a_0| \theta^k$ für alle k. Mithin ist die nach 10.4.1.5 konvergente geometrische Reihe $\sum |a_0| \theta^k$ eine Majorante unserer Reihe und wir können das Majorantenkriterium 10.4.1.16 anwenden. □

Korollar 10.4.1.20. *Sei $\sum a_k$ eine Reihe mit nichtverschwindenden Gliedern. Gilt $\lim_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k| < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolut.*

Beweis. Klar nach dem Quotientenkriterium 10.4.1.17. □

Satz 10.4.1.21 (**Umordnungssatz**). *Ist $\sum_{k=0}^\infty a_k$ eine absolut konvergente Reihe und $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, so ist auch $\sum_{k=0}^\infty a_{u(k)}$ eine absolut konvergente Reihe und es gilt*

$$\sum_{k=0}^\infty a_{u(k)} = \sum_{k=0}^\infty a_k$$

Beweis. Da $\sum |a_k|$ konvergiert, finden wir schon mal für jedes $\varepsilon > 0$ ein N mit $\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon$. Ist M so groß, daß gilt $u(\{1, \ldots, M\}) \supset \{1, \ldots, N\}$, so erhalten wir daraus für alle $n \geq N$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=0}^{M} a_{u(k)} - \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq \varepsilon$$

Diese Abschätzung gilt nach der Erhaltung 10.3.5.37 von Ungleichungen im Grenzwert und der Vertauschbarkeit 10.3.5.28 von stetigen Funktionen und insbesondere der Betragsfunktion mit Grenzwerten dann auch im Grenzwert $n \to \infty$ und zeigt, daß die Folge der Partialsummen der umgeordneten Reihe konvergiert und denselben Grenzwert hat wie die Folge der Partialsummen der ursprünglichen Reihe. Wenden wir diese Erkenntnis auf die Reihe der Absolutbeträge an, so folgt auch die absolute Konvergenz der umgeordneten Reihe. □

10.4.1.22 (**Problematik der Umordnung nicht absolut konvergenter Reihen**). Ist $\sum a_k$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen, die nicht absolut konvergiert, so gibt es für jedes $x \in \bar{\mathbb{R}}$ eine Umordnung $u : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} = x$. In der Tat divergieren in diesem Fall die Reihen ihrer positiven und ihrer negativen Terme jeweils für sich genommen. Die Strategie im Fall $x \in \mathbb{R}$ ist nun, erst nur positive Reihenglieder zu nehmen, bis man oberhalb von x ist, dann nur negative, bis man wieder drunterrutscht, und immer so weiter. Für $x = \pm\infty$ muß man diese Strategie noch etwas verfeinern.

Definition* 10.4.1.23. Gegeben eine Familie von reellen Zahlen $(a_i)_{i \in I}$ und $s \in \bar{\mathbb{R}}$ schreiben wir

$$\sum_{i \in I} a_i = s$$

als Abkürzung für die Aussage, daß es für jede Umgebung U von s eine endliche Teilmenge $I_U \subset I$ gibt derart, daß für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $I_U \subset J$ gilt $\sum_{i \in J} a_i \in U$. Es ist klar, daß hier s eindeutig bestimmt ist, wenn es existiert. Ist zusätzlich s reell, so nennen wir unsere Familie von reellen Zahlen **summierbar**.

10.4.1.24. Mir gefällt am Konzept der Summierbarkeit, daß darin von einer Reihenfolge der Summanden erst gar nicht die Rede ist. Später, wenn wir auch in „normierten“ Vektorräumen unendlicher Dimension summieren, sind Summierbarkeit und absolute Konvergenz nicht mehr gleichbedeutend, und dann erweist sich das Analogon der Summierbarkeit 10.4.1.23 als der nützlichere Begriff.

Satz* 10.4.1.25 (**Summierbarkeit und absolute Konvergenz**). *Eine Familie $(a_i)_{i \in I}$ von reellen Zahlen ist genau dann summierbar, wenn entweder I endlich ist oder*

es eine Injektion $z : \mathbb{N} \hookrightarrow I$ *gibt mit* $(a_i \neq 0 \Rightarrow i \in z(\mathbb{N}))$ *derart, daß* $\sum_{k=0}^{\infty} a_{z(k)}$ *absolut konvergiert. In diesem Fall gilt dann*

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{z(k)}$$

Beweis. Bei einer summierbaren Familie kann es offensichtlich für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ höchstens endlich viele Indizes i geben mit $a_i \geq 1/n$ und ebenso höchstens endlich viele Indizes i mit $a_i \leq -1/n$. Ist I unendlich, so finden wir demnach eine Injektion $z : \mathbb{N} \hookrightarrow I$ mit $(a_i \neq 0 \Rightarrow i \in z(\mathbb{N}))$. Weiter müssen bei einer summierbaren Familie die Werte endlicher Teilsummen offensichtlich eine beschränkte Menge von reellen Zahlen bilden. Das gilt insbesondere für alle endlichen Teilsummen aus positiven a_i ebenso wie für alle endlichen Teilsummen aus negativen a_i und zeigt die absolute Konvergenz $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{z(k)}| < \infty$. Setzen wir nun $s := \sum_{k=0}^{\infty} a_{z(k)}$ und ist U eine Umgebung von s, so finden wir $\varepsilon > 0$ mit $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset U$ und wegen der absoluten Konvergenz weiter N gibt mit $\sum_{k=N}^{\infty} |a_{z(k)}| < \varepsilon$. Nehmen wir also $I_U := z(\{0, 1, \ldots, N-1\})$, so folgt für endliches $J \subset I$ aus $J \supset I_U$ bereits $\sum_{i \in J} a_i \in U$ und damit

$$\sum_{i \in I} a_i = s = \sum_{k=0}^{\infty} a_{z(k)}$$

Daß umgekehrt aus absoluter Konvergenz die Summierbarkeit folgt wie im Satz behauptet, zeigt dieses Argument gleich mit. □

Übungen

Übung 10.4.1.26. Genau dann läßt sich eine reelle Zahl durch einen periodischen Dezimalausdruck darstellen, wenn sie rational ist.

Übung 10.4.1.27. Man zeige das **Leibniz'sche Konvergenzkriterium**: Ist a_k eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Ergänzende Übung 10.4.1.28. Ist $\sum a_k$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen und $u : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ eine Umordnung mit der Eigenschaft, daß $|u(k) - k|$ beschränkt ist, so konvergiert auch die umgeordnete Reihe $\sum a_{u(k)}$ und zwar gegen denselben Grenzwert. Für derartige Umordnungen erhält man also die Aussage des Umordnungssatzes auch ohne absolute Konvergenz.

Ergänzende Übung 10.4.1.29. Gegeben eine summierbare Familie von reellen Zahlen $(a_i)_{i \in I}$ zeige man, daß auch für eine beliebige Teilmenge $J \subset I$ die Familie $(a_i)_{i \in J}$ summierbar ist und daß für eine beliebige Zerlegung $I = \bigsqcup_{k \in K} I(k)$

von I in eine Vereinigung von paarweise disjunkten Teilmengen $I(k)$ gilt

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I(k)} a_i\right)$$

Weiter zeige man für jede aufsteigende Folge von Teilmengen $I_0 \subset I_1 \subset \ldots$ mit Vereinigung I die Formel $\sum_{i\in I} a_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i\in I_n} a_i$. Diese Aussagen werden sich im übrigen als Speziallfälle des Satzes von Fubini 13.1.7.16 und des Satzes über dominierte Konvergenz 13.1.6.10 aus der Theorie des Lebesgue-Integrals erweisen.

10.4.2 Wachstum und Zerfall

Definition 10.4.2.1. Für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$

und erhalten so eine Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die **Exponentialfunktion**.

10.4.2.2. Die fragliche Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ nach dem Quotientenkriterium oder noch besser seinem Korollar 10.4.1.20, und sie konvergiert sogar außerordentlich schnell. Von einem formalen Standpunkt aus betrachtet ist unsere Definition also völlig unproblematisch und von einem rechentechnischen Standpunkt aus betrachtet ist sie sogar ziemlich geschickt. Sie hat nur den Nachteil, daß aus der Definition heraus weder klar wird, warum gerade diese Funktion den Namen Exponentialfunktion verdienen sollte, noch warum sie überhaupt von Belang ist. Ich erläutere das in den gleich anschließenden Bemerkungen 10.4.2.6 und 10.4.2.5.

Proposition 10.4.2.3 (Exponentialfunktion als Grenzwert von Potenzen). *Es gilt*

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Beweis. Mit der binomischen Formel 10.1.1.23 ergibt sich

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n\cdot n\cdot \ldots \cdot n}$$

Für beliebige $M, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt also

$$\begin{aligned}\left|\exp(x) - \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n\right| \leq \quad & \left|\exp(x) - \textstyle\sum_{k=0}^{M} \frac{x^k}{k!}\right| \\ & + \left|\textstyle\sum_{k=0}^{M} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{M} \frac{x^k}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ \ldots \ \cdot n}\right| \\ & + \left|\textstyle\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ \ldots \ \cdot n}\right|\end{aligned}$$

Da die Exponentialreihe für vorgegebenes x absolut konvergiert, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $M = M_\varepsilon$ derart, daß für jedes n der erste und der letzte Term rechts beschränkt sind durch ε. Für dies feste M geht der mittlere Term bei $n \to \infty$ gegen Null, es gibt also $N = N_\varepsilon$ derart, daß er für dies feste M kleiner wird als ε falls $n \geq N$. Damit gilt $\left|\exp(x) - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| \leq 3\varepsilon$ falls $n \geq N$. □

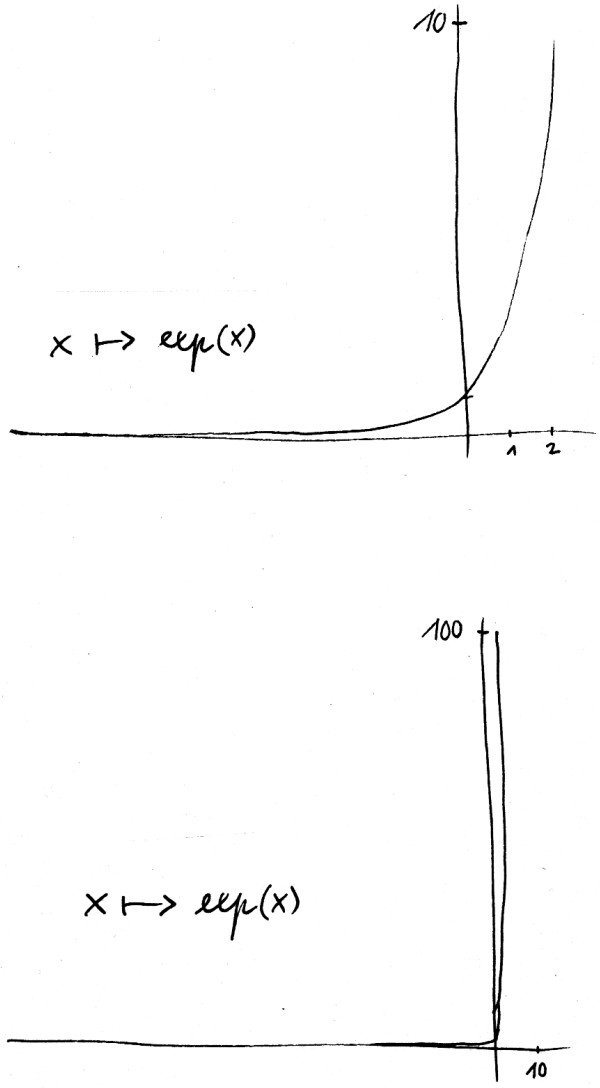
10.4.2.4. Aus unserer Proposition 10.4.2.3 folgt unmittelbar für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Formel $\exp(kx) = (\exp x)^k$ vermittels der Rechnung

$$\exp(kx) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{kx}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{kx}{kn}\right)^{kn} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{nk} = (\exp x)^k$$

Mit der Notation $\mathrm{e} := \exp(1)$ erhalten wir insbesondere $\exp(k) = \mathrm{e}^k$ und dann auch $\mathrm{e} = \exp(k/k) = (\exp(1/k))^k$ alias $\exp(1/k) = \sqrt[k]{\mathrm{e}}$ und zusammen für alle $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Formel $\exp(p/q) = (\sqrt[q]{\mathrm{e}})^p$. Alternativ folgt das alles auch aus der Funktionalgleichung 10.4.2.10.

10.4.2.5 (**Exponentialfunktion und Wachstum**). Die Darstellung der Exponentialfunktion als Grenzwert von Potenzen 10.4.2.3 kann man dahingehend interpretieren, daß $\exp(x)$ das Kapital ist, das in x Jahren aus einem Euro entsteht bei einer „kontinuierlichen Verzinsung mit einem Zinssatz von 100%“. Legen wir das Geld zum Beispiel für ein Jahr an, so haben wir bei jährlicher Verzinsung am Ende des Jahres zwei Euro auf dem Konto. Bei monatlicher Verzinsung ergeben sich mit Zinseszinsen schon $(1+\frac{1}{12})^{12}$ Euro, und bei kontinuierlicher Verzinsung $\mathrm{e} := \exp(1) = 2{,}781\ldots$ Euro. Man nennt e die **Euler'sche Zahl**. In der Schule haben Sie möglicherweise e^x statt $\exp(x)$ geschrieben, aber wir erlauben uns das erst ab 10.4.3.5, wo wir für beliebiges $a > 0$ die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a^n$ zu einer Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b \mapsto a^b$ fortsetzen und zwar nach 10.4.3.21 auf die einzig mögliche Weise, bei der die Funktion $b \mapsto a^b$ monoton ist und die „Funktionalgleichung“ $a^{b+c} = a^b a^c$ erfüllt.

10.4.2.6. In einem Ausdruck der Gestalt a^b nennt man für gewöhnlich a die **Basis** und b den **Exponenten**, weil er eben exponiert oben an die Basis geschrieben wird. Daher rührt auch die Bezeichnung als „Exponentialfunktion“. Ich würde unsere Funktion viel lieber ihrer Natur nach die „Funktion des natürlichen Wachstums“



Der Graph der Exponentialfunktion in zwei Maßstäben. Man erkennt unschwer, daß ein konstantes Wirtschaftswachstum über längere Zeiträume in einer Katastrophe enden muß. In derselben Weise entwickelt sich im Übrigen auch die Geschwindigkeit einer Vorlesung unter der Annahme, daß die Stoffmenge, die in einer Stunde vermittelt werden kann, proportional ist zur Menge des Stoffes, den die Zuhörer bereits kennen...

oder die „Wachstumsfunktion“ nennen, aber die aus der Schreibweise abgeleitete Bezeichnung hat sich nun einmal durchgesetzt, mag sie auch aus historischen Zufällen entstanden sein: Hätte sich für die Bezeichnung des Quadrats einer Zahl a statt der Notation a^2 die Notation a_2 eingebürgert, so würde in Anbetracht dieses Schemas der Begriffsbildung unsere Exponentialfunktion heute vielleicht „Pedestalfunktion“ heißen. . .

10.4.2.7 (**Didaktische Gedanken zur Einführung der Exponentialfunktion**). Eine infinitesimale Formulierung der in 10.4.2.5 erläuterten Bedeutung der Exponentialfunktion gibt Korollar 10.5.5.9, in dem die Exponentialfunktion charakterisiert wird als die eindeutig bestimmte differenzierbare Funktion von den reellen Zahlen in sich selber, die mit ihrer eigenen Ableitung übereinstimmt und bei Null den Wert Eins annimmt. Gehen wir von dieser Charakterisierung aus, so führt uns der Formalismus der Taylorreihen 10.6.2.2 ganz natürlich zu der Reihe, die wir in 10.4.2.1 haben vom Himmel fallen lassen. Ein anderer Zugang zur Exponentialfunktion besteht darin, von der Funktion $x \mapsto \int_1^x (1/t)\,\mathrm{d}t$ auszugehen, von der man unschwer zeigt, daß sie einen stetigen Gruppenisomorphismus $\mathbb{R}^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ liefert, und dann die Exponentialfunktion als deren Umkehrfunktion zu erhalten. Das bedeutet jedoch, daß man mit der Einführung der Exponentialfunktion die Konstruktion des Integrals abwarten muß. Eigentlich will ich es ja nach Möglichkeit vermeiden, Formeln vom Himmel fallen zu lassen. In diesem Fall schienen mir aber die didaktischen Vorteile der dadurch ermöglichten frühzeitigen Einführung dieser außerordentlich wichtigen Funktion zu überwiegen.

10.4.2.8. Die Exponentialfunktion wächst ungeheuer schnell. Eine gewisse Vorstellung davon mag die Erkenntnis 10.7.1.16 geben, nach der der Graph der Funktion $(\exp(x) + \exp(-x))/2$, in einem jeweils der speziellen Situation angepaßten Maßstab auf die Wand gemalt, genau die Gestalt einer zwischen zwei Nägeln durchhängenden Kette hat. Ist die Kette zwanzigmal so lang ist wie der Abstand der beiden Nägel, so stellt sie unsere Funktion in etwa auf dem Intervall von $-2{,}3$ bis $2{,}3$ dar. Ist die Kette zweihundertmal so lang wie der Abstand der beiden Nägel, so erhalten wir unsere Funktion in etwa auf dem Intervall von $-4{,}6$ bis $4{,}6$. Und eine Zwei-Meter-Kette hängt zwischen zwei im Abstand von einem knappen Zentimeter eingeschlagenen Nägeln schon recht steil!

10.4.2.9. In 10.1.3.11 habe ich erklärt, wie man mit einem Blatt Papier auf den Mond kommt und wie auch der Fortgang dieser Vorlesung exponentiellen Charakter hat. In der Wirtschaft ist es nicht anders. Ein jährliches Wirtschaftswachstum von 3% bedeutet wegen $(1,03)^{25} > 2$ etwas mehr als eine Verdopplung der Wirtschaftsleistung in 25 Jahren und muß auf die Dauer unweigerlich in einer Katastrophe enden.

Satz 10.4.2.10 (**Funktionalgleichung der Exponentialfunktion**). *Die Exponentialfunktion ist ein Monoidhomomorphismus von der additiven Gruppe der reellen*

Zahlen in das multiplikative Monoid der reellen Zahlen. In Formeln ausgedrückt gilt also $\exp(0) = 1$ *und*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

10.4.2.11. Unsere Formel $\exp(kx) = (\exp x)^k$ aus 10.4.2.4 können wir auch unschwer mit Induktion über k aus der Funktionalgleichung herleiten.

10.4.2.12. Stellen wir uns $\exp(x)$ vor als das Vermögen, daß in x Jahren aus einem Euro entsteht bei kontinuierlicher Verzinsung mit 100%, so erhalten wir offensichtlich gleichviel, ob wir unser Vermögen $\exp(x)$ nach x Jahren gleich wieder für y Jahre anlegen, oder ob wir unseren Euro gleich von Anfang an $x+y$ Jahre arbeiten lassen. Das ist die Bedeutung der Funktionalgleichung. Nach 10.1.5.43 induziert jeder Monoidhomomorphismus $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, \cdot)$ einen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$. In 10.4.3.21 werden Sie zeigen, daß die Gruppenhomomorphismen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ mit der Eigenschaft $x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$ genau die Abbildungen $\varphi(x) = \exp(ax)$ sind mit $a > 0$. In 10.4.3.2 werden wir zeigen, daß die Exponentialfunktion sogar einen Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe der reellen Zahlen und der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen liefert.

Ergänzung 10.4.2.13. Der gleich folgende Beweis der Funktionalgleichung gefällt mir nicht besonders. Ein anderer aber in seiner Weise auch etwas verwickelter Beweis wird in 10.4.2.22 vorgestellt. Ein mehr konzeptueller Zugang zur Exponentialfunktion und ihrer Funktionalgleichung wird in 10.5.8.11 und 10.5.8.22 skizziert. Er benötigt jedoch Hilfsmittel, die uns hier noch nicht zur Verfügung stehen. Er läßt auch nicht so einfach auf den Fall von komplexen Zahlen verallgemeinern, der für uns bei der Diskussion von Sinus und Cosinus eine wesentliche Rolle spielen wird. Aus diesen Gründen gebe ich für die Funktionalgleichung zunächst den algebraisch-formalen Beweis. Wir schicken dem eigentlichen Beweis einige allgemeine Betrachtungen voraus.

Satz 10.4.2.14 (Produkt von Reihen). *Sind* $\sum_{i=0}^\infty a_i$ *und* $\sum_{j=0}^\infty b_j$ *absolut konvergente Reihen, so konvergiert auch für jede Bijektion* $(u, v) : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *die Summe der Produkte* $a_{u(k)} b_{v(k)}$ *absolut und es gilt*

$$\sum_{k=0}^\infty a_{u(k)} b_{v(k)} = \left(\sum_{i=0}^\infty a_i\right)\left(\sum_{j=0}^\infty b_j\right)$$

Beweis. Natürlich haben wir

$$\sum_{k=0}^n |a_{u(k)} b_{v(k)}| \le \left(\sum_{i=0}^\infty |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^\infty |b_j|\right)$$

und das zeigt bereits die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} b_{v(k)}$. Nach dem Umordnungssatz 10.4.1.21 ist ihr Grenzwert also unabhängig von der Wahl der Bijektion $(u, v) : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Nun können wir diese Bijektion sicher so wählen, daß sie Bijektionen

$$\{0, \ldots, N^2 - 1\} \xrightarrow{\sim} \{0, \ldots, N-1\} \times \{0, \ldots, N-1\}$$

induziert. Dann gilt offensichtlich

$$\sum_{k=0}^{N^2-1} a_{u(k)} b_{v(k)} = \left(\sum_{i=0}^{N-1} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{N-1} b_j \right)$$

Im Limes für $N \to \infty$ und unter Verwendung der Erkenntnisse, daß jede absolut konvergene Reihe konvergent ist und daß jede Teilfolge einer konvergenten Folge gegen denselben Genzwert konvergiert, folgt die Behauptung. □

Beweis der Funktionalgleichung 10.4.2.10. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \exp(x+y) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} x^i y^j \right) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} \frac{x^i}{i!} \frac{x^j}{j!} \right) \end{aligned}$$

Hier verwenden wir im zweiten Schritt die binomische Formel und der Index $i + j = k$ an einer Summe bedeutet, daß wir über alle Paare $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $i+j = k$ summieren. Andererseits erhalten wir mit unserem Satz über das Produkt von Reihen 10.4.2.14 bei einer geeigneten Wahl der Bijektion $(u, v) : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und nach Übergang zu einer Teilfolge der Folge der Partialsummen auch

$$\begin{aligned} \exp(x) \exp(y) &= \left(\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} \frac{x^i}{i!} \frac{y^j}{j!} \right) \end{aligned}$$

Die Identität $\exp(0) = 1$ ist offensichtlich. □

Lemma 10.4.2.15. *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist stetig.*

Vorschau 10.4.2.16. Die Stetigkeit der Exponentialfunktion können wir später auch aus dem allgemeinen Satz 10.6.1.4 folgern, der besagt, daß Potenzreihen auf ihrem Konvergenzbereich immer stetige Funktionen darstellen.

Beweis. Wir wenden das ε-δ-Kriterium 10.3.2.21 an. Mit der Funktionalgleichung finden wir

$$|\exp(x) - \exp(p)| = |\exp(p)| \cdot |\exp(x-p) - \exp(0)|$$

Nun beachten wir, daß für $|y| \leq 1$ gilt

$$|\exp(y) - \exp(0)| = |y| \cdot \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y^{i-1}}{i!} \right| \leq |y| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|y|^{i-1}}{(i-1)!} \leq |y| \exp(1)$$

wo wir im zweiten Schritt die Dreiecksungleichung sowie die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert verwenden und die Nenner verkleinern. Aus $|x-p| \leq 1$ folgt also $|\exp(x) - \exp(p)| \leq \exp(p)|x-p| \,\mathrm{e}$ und für gegebenes $\varepsilon > 0$ können wir mithin $\delta = \inf\{1, \varepsilon/(\exp(p)\,\mathrm{e})\}$ nehmen. □

Korollar* 10.4.2.17 (Produkt summierbarer Familien). *Sind $(a_i)_{i\in I}$ und $(b_j)_{j\in J}$ summierbare Familien reeller Zahlen, so bilden auch ihre Produkte eine summierbare Familie $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ und es gilt*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$$

Beweis. Wir wissen aus 10.4.1.25, daß die Summierbarkeit einer Familie reeller Zahlen im wesentlichen gleichbedeutend ist zu absoluter Konvergenz. Damit erweist sich das Korollar als eine Umformulierung des vorhergehenden Satzes. □

Übungen

Übung 10.4.2.18. Man folgere aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion 10.4.2.10 die Formeln $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$, $\exp(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(n) = \mathrm{e}^n$, $\exp(nx) = (\exp x)^n\ \forall n \in \mathbb{Z}$ sowie $\exp(x/2) = \sqrt{\exp(x)}$.

Ergänzende Übung 10.4.2.19. Der Übersichtlichkeit halber kürzen wir hier im Vorgriff auf 10.4.3.5 schon $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ ab. Man zeige, daß für alle $i, N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \binom{nN}{i} \left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{Nn-i} = \frac{N^i\,\mathrm{e}^{-N}}{i!}$$

Dieses Resultat ist in der Stochastik wichtig, wie ich im folgenden ausführen will. Gegeben $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt die Funktion $i \mapsto \lambda^i\,\mathrm{e}^{-\lambda}/i!$ ganz allgemein die **Poisson-Verteilung** mit Parameter λ. Sie hat die folgende Bedeutung: Knetet man in einen großen Teig genau nN Rosinen ein und teilt ihn dann in n Rosinenbrötchen, so ist $\left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{Nn-i}$ die Wahrscheinlichkeit, daß i vorgegebene Rosinen in einem fest gewählten Brötchen landen und die restlichen Rosinen in den anderen Brötchen. Mithin ist $\binom{nN}{i} \left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{Nn-i}$ die Wahrscheinlichkeit, daß in einem fest gewählten Brötchen genau i Rosinen landen. Ist unser Brötchen klein im Vergleich zum ganzen Teig, so liegt diese Wahrscheinlichkeit also nahe bei

$N^i \, \mathrm{e}^{-N} / i!$ oder allgemeiner bei $\lambda^i \, \mathrm{e}^{-\lambda} / i!$ mit λ der durchschnittlichen Zahl von Rosinen in dem Teigvolumen, das man für ein Brötchen braucht. Genau genommen stimmt das allerdings nur für punktförmige Rosinen, denn sonst liefert die Größe des Brötchens eine obere Schranke für die möglichen Anzahlen der darin verbackenen Rosinen.

Ergänzende Übung 10.4.2.20. Man berechne die Euler'sche Zahl e bis auf 5 sichere Stellen hinter dem Komma.

Ergänzende Übung 10.4.2.21. Die Euler'sche Zahl e ist nicht rational. Man zeige dies, indem man von ihrer Darstellung als Reihe ausgeht und durch geeignete Abschätzungen nachweist, daß $q!\mathrm{e}$ für $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$ nie eine ganze Zahl sein kann.

Ergänzende Übung 10.4.2.22. In dieser Übung sollen Sie einen anderen Zugang zur Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ausarbeiten, den ich in einer Arbeit von Martin Kneser kennengelernt habe: Man zeige, indem man den Beweis von 10.4.2.3 verallgemeinert, daß für jede Folge reeller Zahlen $x_n \in \mathbb{R}$ aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ folgt $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \exp(x)$. Mithilfe der Identität

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right) = \left(1 + \frac{x + y + (xy/n)}{n}\right)$$

folgere man dann die Funktionalgleichung.

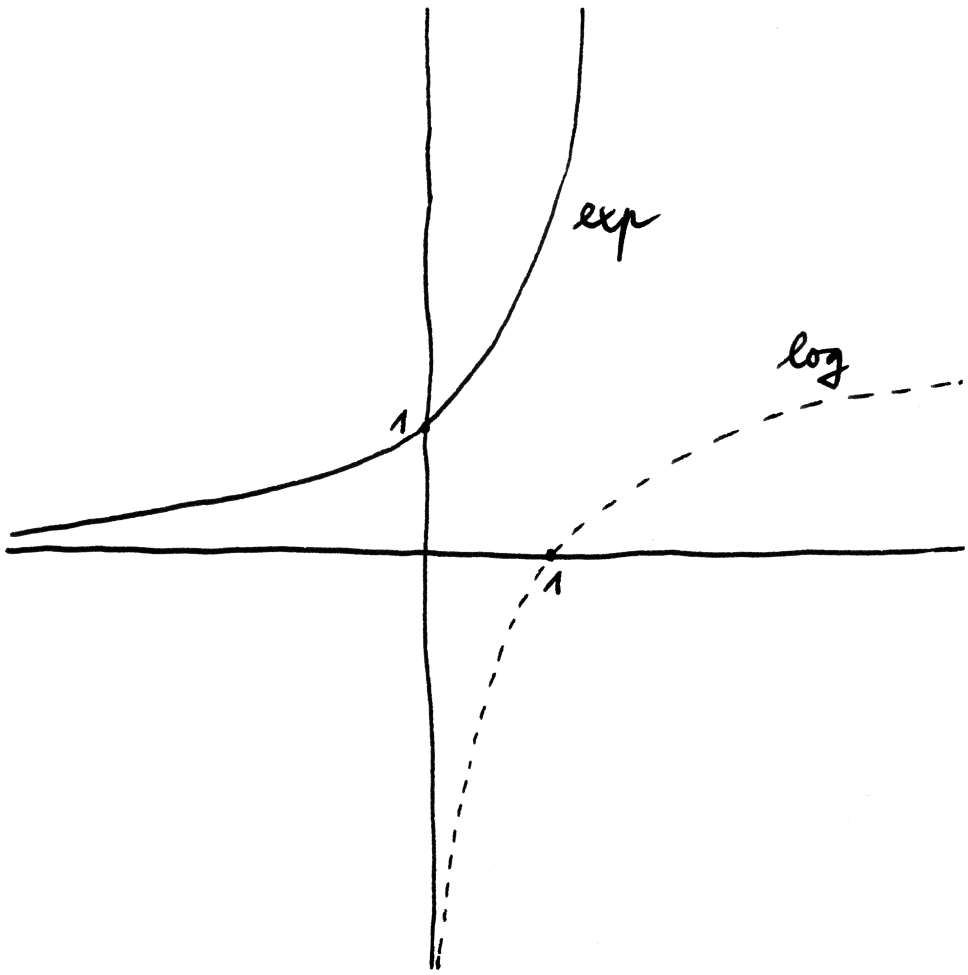
10.4.3 Logarithmus und allgemeine Potenzen

10.4.3.1 (**Monotonie der Exponentialfunktion**). Die Exponentiafunktion wächst streng monoton. In der Tat erhalten wir $(0 \leq x < y) \Rightarrow (1 \leq \exp(x) < \exp(y))$ direkt aus der Definition und $(z < w \leq 0) \Rightarrow (\exp(z) < \exp(w) \leq 1)$ folgt mit der Identität $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$.

Definition 10.4.3.2. Aus dem Zwischenwertsatz folgt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$, denn wir haben offensichtlich $\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \infty$ und damit $\lim_{n\to-\infty} \exp(n) = 0$ nach 10.3.3.4. Wir können also den **natürlichen Logarithmus** oder kurz **Logarithmus** einführen als die Umkehrfunktion

$$\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

der Exponentialfunktion, $\log(\exp(x)) = x$, und erhalten aus Satz 10.3.3.11 die Stetigkeit des Logarithmus. In der französischen Literatur bezeichnet man diese Funktion auch als **logarithme népérien** in Erinnerung an den schottischen Mathematiker John Napier, der die ersten Logarithmentafeln aufstellte.



Die Graphen von Logarithmus und Exponentialfunktion gehen wie immer bei Umkehrfunktionen durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen $x = y$ auseinander hervor.

10.4.3.3. Die Exponentialfunktion liefert nach 10.4.2.10 und 10.4.3.2 einen Isomomorphismus zwischen der additiven Gruppe der reellen Zahlen und der multiplikativen Gruppe aller positiven reellen Zahlen. Daraus folgt sofort

$$\log(xy) = \log x + \log y \text{ und } \log(\mathrm{e}) = 1.$$

Die erste Formel mag man die **Funktionalgleichung des Logarithmus** nennen.

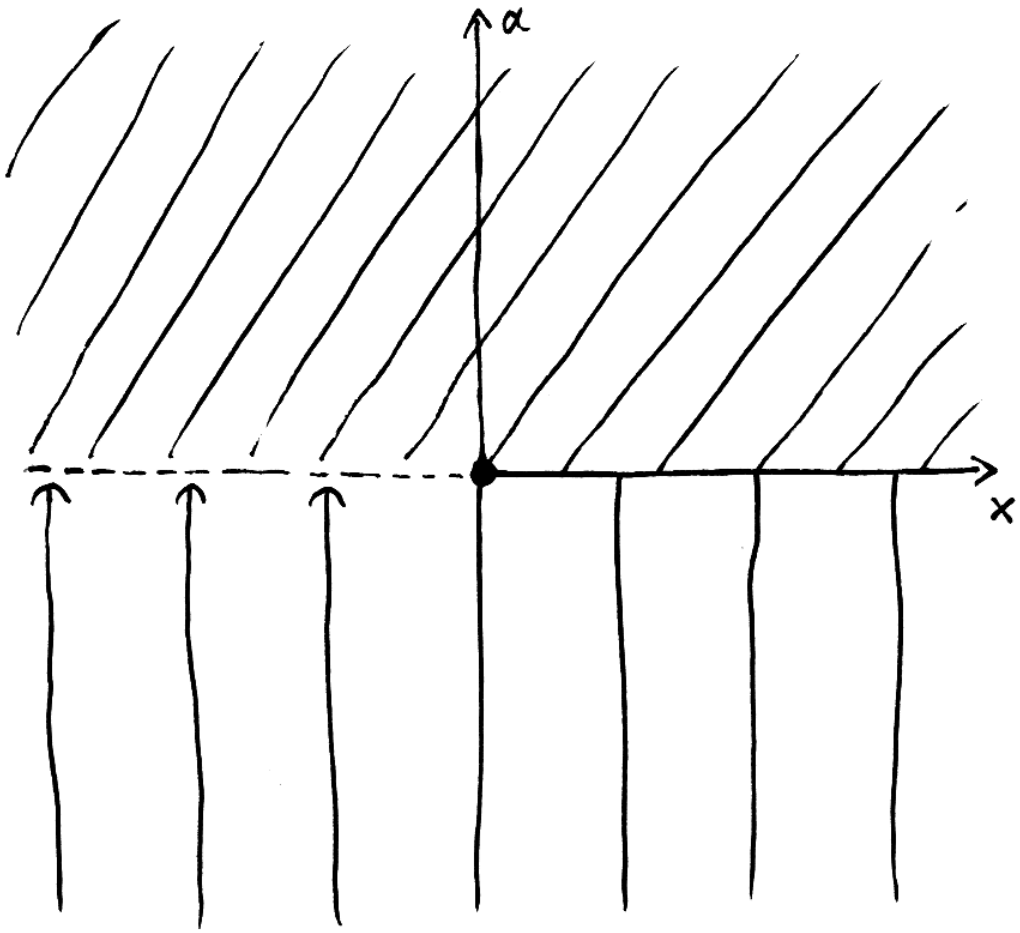
10.4.3.4 (**Diskussion der Terminologie**). Die Notation „$\log$“ ist leider nicht universell. Auf vielen Taschenrechnern und auch in älteren Büchern wird unsere Funktion „$\log$“ notiert als „$\ln$“ für „logarithmus naturalis“ oder „logarithme néperien“ und das Kürzel „$\log$“ steht für den „Logarithmus zur Basis 10“, den wir in 10.4.3.9 einführen und mit $\log_{10}$ bezeichnen werden. Der Logarithmus zur Basis 10 wird in manchen Quellen auch der „Brigg'sche Logarithmus“ genannt und mit „$\lg$“ bezeichnet. Die Norm ISO 31-11 empfiehlt die Notationen „$\ln$“ und „$\lg$“. Wir verwenden jedoch $\log$ statt $\ln$, weil das in der reinen Mathematik so üblich ist und wir damit der Konvention folgen, spezielle Funktionen nach Möglichkeit mit Kürzeln aus drei Buchstaben zu notieren. „Logarithmus“ ist das griechische Wort für „Rechnung“, und für das Rechnen waren die Logarithmentafeln, in denen die Werte des Logarithmus zur Basis Zehn aufgelistet wurden, auch außerordentlich praktisch: Mit ihrer Hilfe konnte man nämlich Divisionen in Subtraktionen verwandeln und Wurzelziehen in Divisionen, wie wir gleich näher ausführen. Die Entdeckung der Logarithmen und die ersten Logarithmentafeln von Napier bedeuteten für die damalige Wissenschaft eine ungeheure Arbeitserleichterung und wurden begeistert begrüßt.

Definition 10.4.3.5 (**Allgemeine Potenzen**). Gegeben $a, x \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ setzen wir

$$a^x := \exp(x \log a)$$

Im Fall $x > 0$ vereinbart man zusätzlich $0^x = 0$. Das führt dazu, daß für $x > 0$ die Funktion $a \mapsto a^x$ sogar stetig ist auf $[0, \infty)$. Es führt allerdings auch dazu, daß die Funktion $x \mapsto 0^x$ mit unserer Konvention $0^0 = 1$ zwar auf $[0, \infty)$ definiert aber bei $x = 0$ *nicht* stetig ist. Damit müssen wir nun weiterleben.

10.4.3.6 (**Eigenschaften der allgemeinen Potenzen**). Man prüft ohne Schwierigkeiten die Formeln $a^0 = 1$, $a^1 = a$ und $a^{x+y} = a^x a^y$ und folgert insbesondere, daß im Fall $a > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ oder $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ das hier definierte a^n übereinstimmt mit unserem a^n aus 10.1.5.16. Für beliebige $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ prüft man leicht die Rechenregeln $a^{xy} = (a^x)^y$, $(ab)^x = a^x b^x$ und $\log(a^x) = x \log a$. Ist speziell $a = \mathrm{e}$ die Euler'sche Zahl, so gilt $\log \mathrm{e} = 1$ und folglich $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. Für beliebige $a, b \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ und $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$ prüft man ebensoleicht die Rechenregeln $a^{xy} = (a^x)^y$, $(ab)^x = a^x b^x$ und $\sqrt[q]{a} = a^{1/q}$.



Dieses Bild stellt den unangenehm verzwickelten Bereich aller $(x, a) \in \mathbb{R}^2$ dar, für die a^x definiert ist: Bei $x \in \mathbb{N}$ sind das jeweils alle $a \in \mathbb{R}$, bei $x \in \mathbb{Z}_{<0}$ nur alle $a \in \mathbb{R}^\times$, bei reellem nichtganzen $x > 0$ alle $a \geq 0$, bei reellem nichtganzen $x < 0$ alle $a > 0$. Besonders schlimm ist die Unstetigkeitsstelle am Ursprung, auf der senkrechten Koordinatenachse ist ja unsere Funktion konstant Eins und auf der positiven waagerechten Koordinatenachse konstant Null. Diese Unstetigkeitsstelle ist aber auch die Einzige.

10.4.3.7 (**Einige Grenzwerte mit Exponentialfunktion und Logarithmus**). Aus dem Quetschlemma 10.3.5.35 und der Darstellung von e^x durch die Exponentialreihe folgt $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$. Aus 10.3.5.7 und 10.3.3.2 folgt dann $\lim_{y\to\infty} \log y = \infty$. Das Quetschlemma mit der Darstellung von e^x duch die Exponentialreihe liefert auch $\lim_{x\to\infty}(x/\mathrm{e}^x) = 0$ und durch Substitution $x = \log y$ und 10.3.5.7 und 10.3.2.30 folgt dann $\lim_{y\to\infty}(\log y)/y = 0$.

Satz 10.4.3.8 (**Gruppenwege in $\mathbb{R}^\times$**). *Die stetigen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen sind genau die Abbildungen $x \mapsto a^x$ für beliebiges aber festes $a \in \mathbb{R}_{>0}$.*

Beweis. Ist $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, so bildet G notwendig das neutrale Element auf das neutrale Element ab, in Formeln $G(0) = 1$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt $G(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Damit können wir den Gruppenhomomorphismus $F = \log \circ G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden und aus 10.3.5.40 folgt sofort $F(x) = xF(1)$, also $G(x) = \exp(F(x)) = \exp(xF(1)) = \exp(x \log G(1))$. □

Definition 10.4.3.9. Gegeben $a > 1$ nennt man die Umkehrabbildung der streng monoton wachsenden Abbildung $x \mapsto a^x$ auch den **Logarithmus zur Basis** a

$$\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

10.4.3.10. Der natürliche Logarithmus ist also der Logarithmus mit der Euler'schen Zahl e als Basis, in Formeln $\log = \log_{\mathrm{e}}$. Der Logarithmus zur Basis a läßt sich durch den natürlichen Logarithmus ausdrücken vermittels der Formel $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$. Man kommt deshalb meist mit dem natürlichen Logarithmus aus. Die Notation $\log_a$ ist konform mit der Norm ISO 31-11, in der zusätzlich auch noch die Abkürzung $\log_2 = \mathrm{lb}$ für den **binären Logarithmus** empfohlen wird. In Logarithmentafeln wird üblicherweise der Logarithmus zur Basis 10 tabelliert, weil ja gilt $\log_{10}(10 \cdot x) = 1 + \log_{10}(x)$ und man sich so auf Dezimalausdrücke x mit einer Null vor dem Komma und keiner Null nach dem Komma beschränken kann.

Beispiel 10.4.3.11. Für alle $a > 0$ folgt aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion und indem man für ein logisch vollständiges Argument die folgende Gleichungskette von hinten nach vorne liest

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\tfrac{1}{n} \log a\right) \\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log a\right) \\
&= \exp(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Beispiel 10.4.3.12. Aus dem Quetschlemma 10.3.5.35 und der Darstellung von e^x durch die Exponentialreihe folgt $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$. Aus 10.3.5.7 und 10.3.3.2 folgt dann weiter $\lim_{y\to\infty} \log y = \infty$. Das Quetschlemma mit der Darstellung von e^x duch die Exponentialreihe liefert auch $\lim_{x\to\infty}(x/\mathrm{e}^x) = 0$ und durch Substitution $x = \log y$ und 10.3.5.7 sowie 10.3.2.30 folgt $\lim_{y\to\infty}(\log y)/y = 0$.

Übungen

Ergänzende Übung 10.4.3.13. Sei $\sum a_k$ eine Reihe. Man zeige das **Wurzelkriterium**: Gilt $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolut. Hinweis: Analog zum Beweis des Quotientenkriteriums. Meiner Erfahrung nach ist dies Kriterium in der Praxis selten von Nutzen, da es meist auf schwer zu bestimmende Grenzwerte führt.

Übung 10.4.3.14. Man folgere aus der Funktionalgleichung 10.4.3.3 des Logarithmus die Formeln $\log(1) = 0$, $\log(x^{-1}) = -\log(x)$, $\log(x^n) = n\log(x)$ und $\log(\sqrt[q]{x}) = \frac{1}{q}\log(x)$.

Übung 10.4.3.15. Man zeige für $a > 0$ die Identität $\lim_{n\to\infty} n(1 - \sqrt[n]{a}) = \log a$.

Übung 10.4.3.16. Man zeige $\lim_{x\to\infty}(x^a/b^x) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $b > 1$. Man zeige $\lim_{x\to\infty}(\log x/x^c) = 0$ für alle $c > 0$. Man zeige $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Man zeige

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(5n)!}{(n!)^5}} = 5^5$$

Beispiel 10.4.3.17. Bei einem radiokativen Material wird nach einem Tag nur noch 90% der Strahlungsaktivität gemessen. Wie lange dauert es, bis die Aktivität auf die Hälfte abgeklungen ist? Nun, halten wir einen Referenzzeitpunkt beliebig fest, so wird die Aktivität nach Vergehen einer Zeitspanne τ gemäß Überlegungen wie in 10.4.2.5 gegeben durch eine Formel der Gestalt $M\,\mathrm{e}^{c\tau}$ mit unbekannten M und c. Wir kürzen die Zeiteinheit „Stunde“ ab mit dem Buchstaben h für lateinisch „hora“. Formal ist h eine Basis des in 1.1.2.6 angedachten eindimensionalen reellen Vektorraums „aller Zeitspannen“, und formal ist auch M ein Element eines gedachten eindimensionalen reellen Vektorraums „aller Strahlungsaktivitäten“ und c liegt im Raum der Linearformen auf dem Raum aller Zeitspannen, in dem wir mit h^{-1} dasjenige Element bezeichnen werden, das auf h den Wert Eins annimmt. So formal will ich hier aber eigentlich gar nicht werden und schreibe das Auswerten solch einer Linearform auf einer Zeitspanne schlicht als Produkt. Für $\tau = 24\,\mathrm{h}$ wissen wir nun nach unserer Messung $M\,\mathrm{e}^{c\cdot 24\,\mathrm{h}} = \frac{90}{100}M$ und damit $c = ((\log 9/10)/24)\,\mathrm{h}^{-1}$. Bezeichnet t die Zeitspanne, nach der die Aktivität auf die Hälfte abgeklungen ist, so haben wir also $M\,\mathrm{e}^{ct} = M/2$ alias

$ct = -\log 2$ und damit

$$t = -\frac{\log 2}{c} = \frac{-\log(2) \cdot 24}{\log(9/10)}\,\mathrm{h}$$

Ergänzende Übung 10.4.3.18. Das eingestrichene A liegt bei 440 Herz. Bei wieviel Herz etwa liegt das eingestrichene F? Hinweis: Die Lösung dieser Aufgabe benötigt zusätzlich zu mathematischen Kenntnissen auch physikalische und musikalische Vorkenntnisse.

Ergänzung 10.4.3.19. Versteht man eine positive reelle Zahl als das Verhältnis zweier gleichartiger Größen, so sagt man für den Zehnerlogarithmus besagter Zahl auch, er „drücke das Verhältnis in **Bel** aus". Diese Sprechweise ehrt Alexander Graham Bell, der das Telephon einführte. So könnte man etwa sagen, das Verhältnis von Gramm zu Kilo betrage 3 Bel, statt von einem Verhältnis von Eins zu Tausend alias 1 zu 10^3 zu reden. Das Verhältnis von Kilo zu Tonne beträgt natürlich auch 3 Bel, und das Verhältnis von Gramm zu Tonne folglich 6 Bel. Häufig redet man auch von **Dezibel** alias „zehntel Bel". Das ist jedoch „multiplikativ" zu verstehen, ein Verhältnis von 1 Dezibel meint also ein Verhältnis von Eins zu $\sqrt[10]{10} \approx 1{,}26$.

Ergänzung 10.4.3.20. Physikalisch beschreibt man eine Lautstärke durch die Leistung, die sie etwa an einer Membran verrichtet. Gibt man eine Lautstärke in Dezibel an, so ist allerdings das Verhältnis des Quadrats dieser Leistung zum Quadrat der Leistung einer Standardlautstärke gemeint. Diese Standardlautstärke ist so vereinbart, daß sie etwa bei der Hörschwelle eines menschliches Ohrs liegt. Eine Lautstärke von Null Dezibel bedeutet also, daß ein gesunder Mensch das Geräusch so gerade noch hören kann, und jede Erhöhung einer Lautstärke um zwanzig Dezibel bedeutet, daß das Ohr zehnmal soviel Leistung aufnehmen wird. Bei einer Erhöhung um zehn Dezibel wird das Ohr also $\sqrt{10} \approx 3$ mal soviel Leistung aufnehmen.

Ergänzende Übung 10.4.3.21. Die monotonen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen sind genau die stetigen Gruppenhomomorphismen, also genau die Abbildungen $x \mapsto a^x$ für festes $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

Ergänzende Übung 10.4.3.22. Man finde alle stetigen Funktionen $G : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$ mit $G(xy) = G(x) + G(y) \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}^\times$, also alle stetigen Gruppenhomomorphismen von der multiplikativen Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen in die additive Gruppe aller reellen Zahlen.

Ergänzende Übung 10.4.3.23. Man zeige, daß die Aussage der vorhergehenden Sätze 10.3.5.40 und 10.4.3.8 sogar folgt, wenn wir von unseren Gruppenhomomorphismen nur die Stetigkeit bei Null fordern.

10.4.4 Komplexe Zahlen

10.4.4.1. Viele mathematische Zusammenhänge werden bei einer Behandlung im Rahmen der sogenannten „komplexen Zahlen“ besonders transparent. Ich denke hier etwa an die Integration rationaler Funktionen 10.5.10 oder die Lösung der Schwingungsgleichung 10.7.3.1. Die abschreckenden Bezeichnungen „komplexe Zahlen“ oder auch „imaginäre Zahlen“ für diesen ebenso einfachen wie konkreten Körper haben historische Gründe: Als Mathematiker in Italien bemerkten, daß man polynomiale Gleichungen der Grade Drei und Vier lösen kann, wenn man so tut, als ob man aus (-1) eine Quadratwurzel ziehen könnte, gab es noch keine Mengenlehre und erst recht nicht den abstrakten Begriff eines Körpers 10.1.6.4. Das Rechnen mit Zahlen, die keine konkreten Interpretationen als Länge oder Guthaben oder zumindest als Schulden haben, schien eine „imaginäre“ Angelegenheit, ein bloßer Trick, um zu reellen Lösungen reeller Gleichungen zu kommen.

10.4.4.2. Der **Körper der komplexen Zahlen** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist die Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ mit Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{array}{rcl} (a,b)+(c,d) & := & (a+c, b+d) \\ (a,b)\cdot(c,d) & := & (ac-bd, ad+bc) \end{array}$$

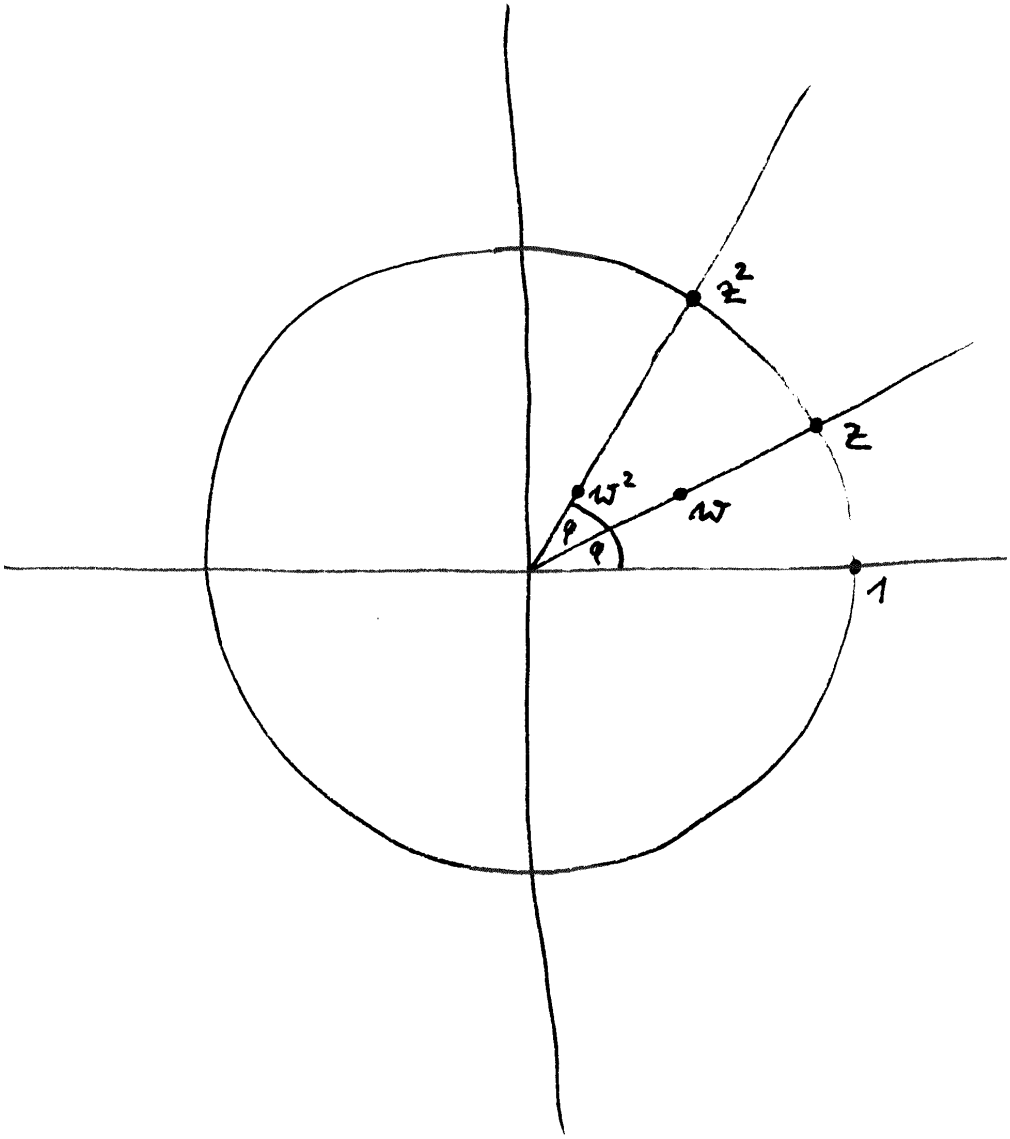
Diese Struktur ist nach Übung 10.1.6.21 ein Körper und die Abbildung $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \mapsto (a,0)$ ist ein Körperhomomorphismus. Kürzen wir $\kappa(a)$ zu a ab und setzen $\mathrm{i} := (0,1)$, so gilt $\mathrm{i}^2 = -1$ und $(a,b) = a + b\,\mathrm{i}$. Wenn wir die Vorstellung von $\mathbb{C}$ als die Menge aller Punkte der Koordinatenebene evozieren wollen, sprechen wir von der **komplexen Zahlenebene**.

10.4.4.3. Ich hoffe, Sie werden schnell merken, daß sich viele Fragestellungen bei Verwendung dieser sogenannt komplexen Zahlen sehr viel leichter lösen lassen und daß die komplexen Zahlen auch der Anschauung ebenso zugänglich sind wie die reellen Zahlen. Früher schrieb man „complex“, deshalb die Bezeichnung $\mathbb{C}$. Unser i ist eine „Wurzel aus (-1)“, und weil es so eine Wurzel in den reellen Zahlen nicht geben kann, notiert man sie i wie „imaginär“.

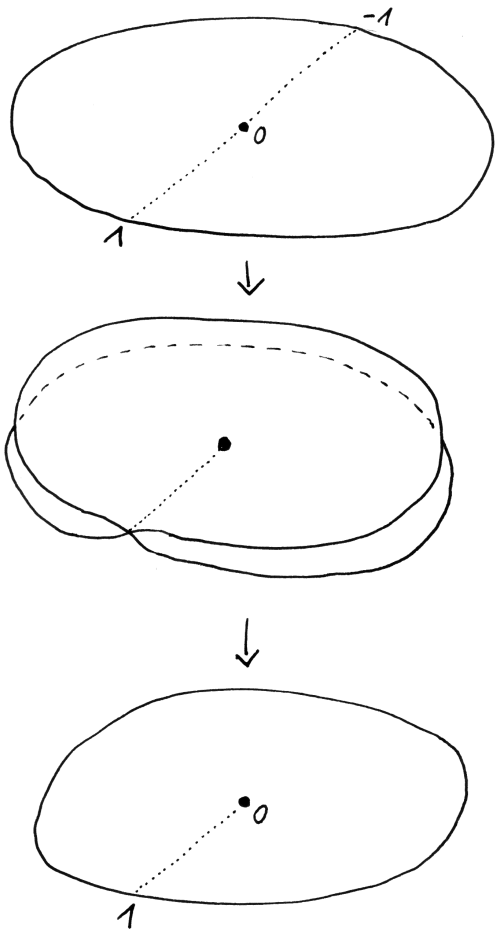
10.4.4.4. Für $w \in \mathbb{C}$ bedeutet die Additionsabbildung $(w+) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto w+z$ anschaulich die Verschiebung um den Vektor w. Die Multiplikationsabbildung $(w\cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto wz$ dahingegen bedeutet anschaulich diejenige Drehstreckung der komplexen Zahlenebene, die $(1,0)$ in w überführt.

10.4.4.5. Gegeben eine komplexe Zahl $z = x + y\,\mathrm{i}$ nennt man x ihren **Realteil** $\operatorname{Re} z := x$ und y ihren **Imaginärteil** $\operatorname{Im} z := y$. Wir haben damit zwei Funktionen

$$\operatorname{Re}, \operatorname{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$



Anschauung für das Quadrieren komplexer Zahlen in ihrer anschaulichen Interpretation als Punkte der komplexen Zahlenebene



Dies Bild soll zusätzliche Anschauung für die Abbildung $z \mapsto z^2$ der komplexen Zahlenebene auf sich selbst vermitteln. Es stellt diese Abbildung dar als die Komposition einer Abbildung der Einheitskreisscheibe auf eine räumliche sich selbst durchdringende Fläche, gegeben in etwa durch eine Formel der Gestalt $z \mapsto (z^2, \varepsilon(\operatorname{Im} z))$ in $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ für geeignetes monotones und in einer Umgebung von Null streng monotones ε, gefolgt von einer senkrechten Projektion auf die ersten beiden Koordinaten. Das hat den Vorteil, daß im ersten Schritt nur Punkte der reellen Achse identifiziert werden, was man sich leicht wegdenken kann, und daß der zweite Schritt eine sehr anschauliche Bedeutung hat, eben die senkrechte Projektion.

definiert und es gilt $z = \operatorname{Re} z + \mathrm{i} \operatorname{Im} z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Man definiert weiter die **Norm** $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + y\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ durch

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Im Fall einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist diese Norm genau unser Absolutbetrag aus 10.2.2.12, in Formeln $|x| = |x|$. In der Anschauung der komplexen Zahlenebene bedeutet die Norm einer komplexen Zahl ihren Abstand vom Ursprung.

10.4.4.6 (**Verschiedene Bedeutungen von** $|z|$). Hier ist unsere Notation nicht vollständig konsistent, da wir für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bereits $|(x, y)| = \max(|x|, |y|)$ vereinbart hatten und nun $|x + \mathrm{i}y| = \sqrt{x^2 + y^2}$ setzen. Für Stetigkeitsbetrachtungen spielt diese Verwirrung keine Rolle, da stets gilt

$$|(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2}\,|(x, y)|$$

Bei der Betrachtung komplexer Zahlen hat bei uns $|z|$ a priori die eben in 10.4.4.5 eingeführte Bedeutung als „komplexe Norm“.

10.4.4.7 (**Diskussion der Terminologie**). Bei rechtem Lichte besehen scheint mir an dieser Terminologie absonderlich, daß der Imaginärteil einer komplexen Zahl darin eine reelle Zahl ist, aber so hat es sich nun einmal eingebürgert.

10.4.4.8. Stellen wir uns $|z|$ vor als den Streckfaktor der Drehstreckung $(z\cdot)$, so wird anschaulich klar, daß für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten muß

$$|zw| = |z||w|$$

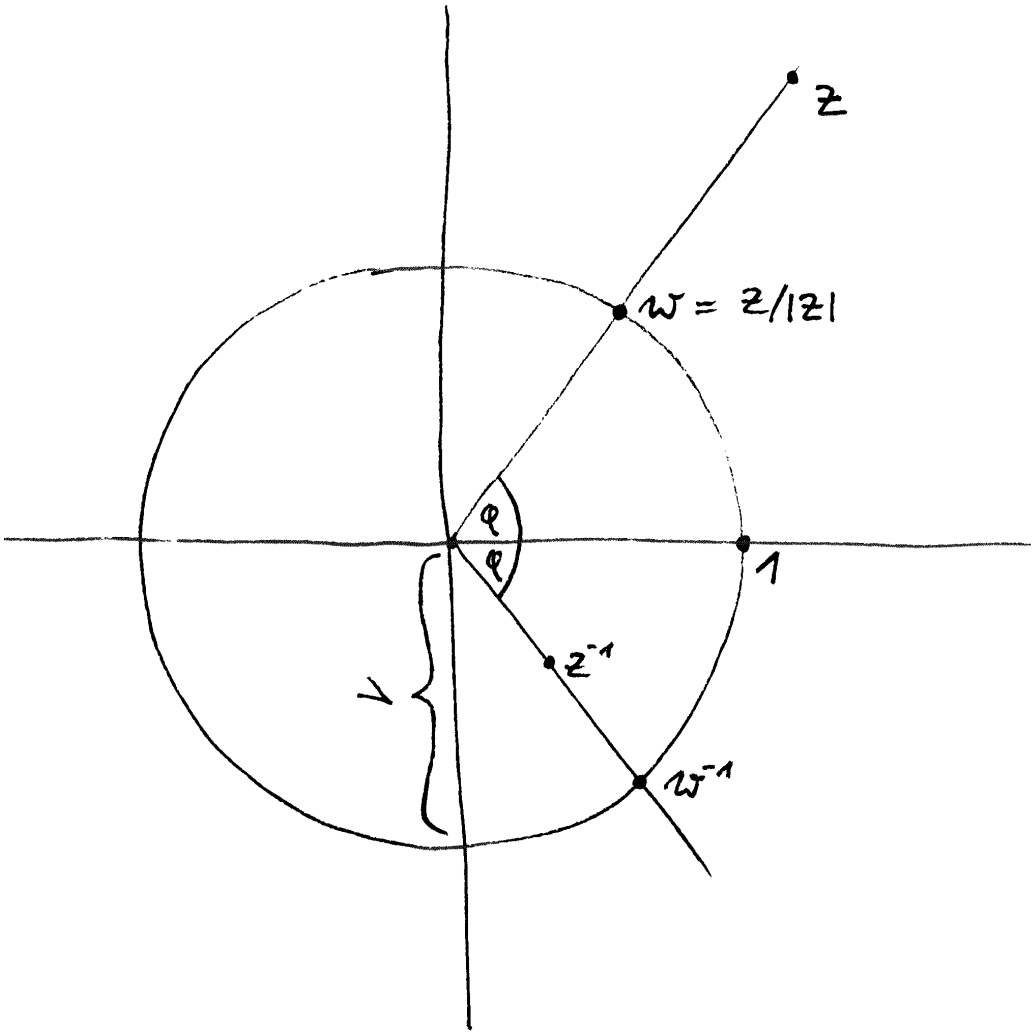
Besonders bequem rechnet man diese Formel nach, indem man zunächst für $z = x + y\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ die **konjugierte komplexe Zahl** $\bar{z} = x - y\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ einführt. Im Bild der komplexen Zahlenebene bedeutet das komplexe Konjugieren anschaulich die Spiegelung an der reellen Achse. Nun prüft man durch explizite Rechnung unschwer die Formeln

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} \\ \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w} \\ |z|^2 &= z\bar{z} \end{aligned}$$

Dann rechnet man einfach

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$$

Nach dem vorhergehenden ist $z \mapsto \bar{z}$ ein Körperisomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die **komplexe Konjugation**. Offensichtlich gilt auch $\bar{\bar{z}} = z$ und ebenso offensichtlich gilt $|z| = |\bar{z}|$.



Anschauung für das Invertieren komplexer Zahlen

10.4.4.9. Wir können den Realteil und den Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$ mithilfe der konjugierten komplexen Zahl ausdrücken als

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2\,\mathrm{i}}$$

Weiter gilt offensichtlich $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ und für komplexe Zahlen z der Norm $|z| = 1$ ist die konjugierte komplexe Zahl genau das Inverse, in Formeln $|z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = z^{-1}$. Im Bild der komplexen Zahlenebene kann man das Bilden des Inversen einer von Null verschiedenen komplexen Zahl anschaulich interpretieren als die „Spiegelung“ oder präziser **Inversion** am Einheitskreis $z \mapsto z/|z|^2$ gefolgt von der Spiegelung an der reellen Achse $z \mapsto \bar{z}$. Der Einheitskreis $S^1 := \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$ ist insbesondere eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe des Körpers der komplexen Zahlen und die Multiplikation liefert einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{R}_{>0} \times S^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times$. Wir nennen S^1 die **Kreisgruppe**.

10.4.4.10. Für unsere Norm komplexer Zahlen aus 10.4.4.5 gilt offensichtlich

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Da in einem Dreieck eine einzelne Seite nicht länger sein kann als die beiden anderen zusammengenommen, erwarten wir weiter die **Dreiecksungleichung**

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Formal mag man sie prüfen, indem man beide Seiten quadriert, wodurch die äquivalente Behauptung $(z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \leq z\bar{z} + 2|z||w| + w\bar{w}$ entsteht, und dann vereinfacht zu immer noch äquivalenten Behauptung $2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq 2|z\bar{w}|$. Die Abschätzungen $\operatorname{Re}(u) \leq |u|$ und $\operatorname{Im}(u) \leq |u|$ sind aber für jede komplexe Zahl u auch formal offensichtlich.

Übungen

Übung 10.4.4.11. Gegeben eine komplexe Zahl $z \neq -1$ vom Betrag $|z| = 1$ zeige man, daß sie genau eine Wurzel w mit positivem Realteil hat und daß diese gegeben wird durch $w = (1 + z)/|1 + z|$. Können Sie auch die geometrische Bedeutung dieser Formel erklären? Man folgere, daß für beliebiges $a < 1$ jedes Element von S^1 eine Potenz eines Elements z mit Realteil $\operatorname{Re}(z) > a$ ist.

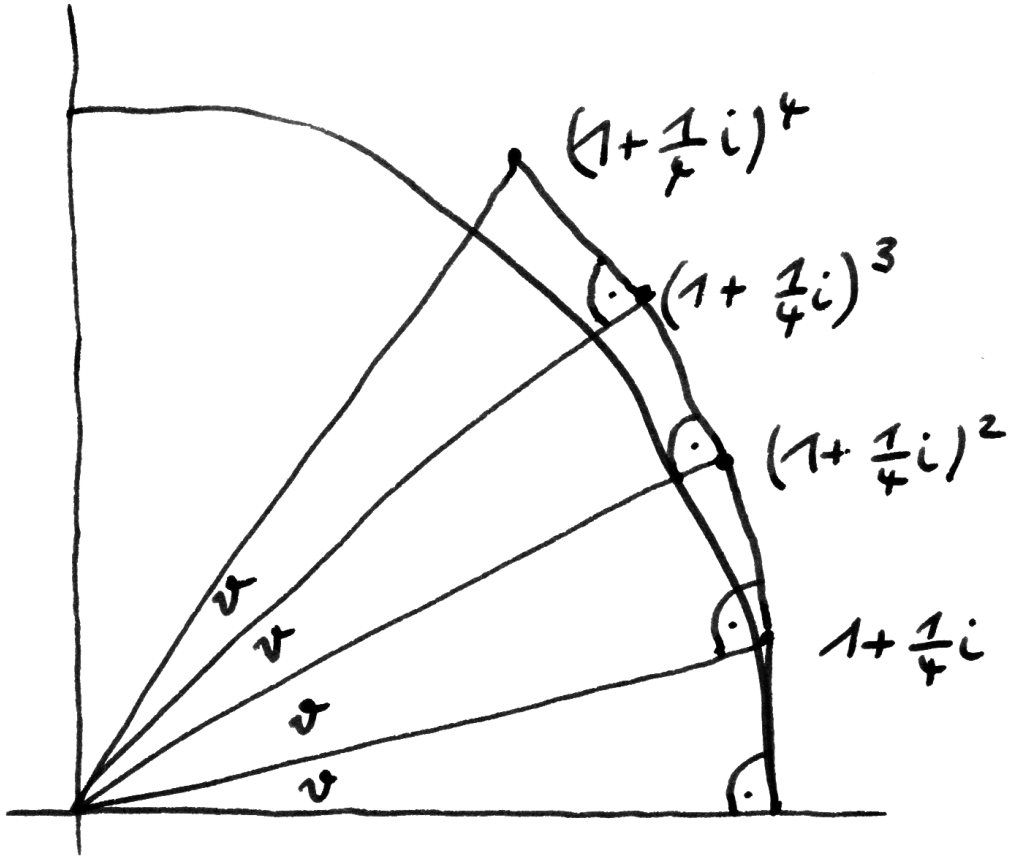
10.4.5 Trigonometrische Funktionen

Definition 10.4.5.1. Eine Reihe $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ komplexer Zahlen heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe der Absolutbeträge konvergiert, in Formeln $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k| < \infty$.

Lemma 10.4.5.2. *Jede absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen konvergiert, als da heißt, die Folge ihrer Partialsummen konvergiert gegen eine komplexe Zahl.*

Beweis. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ unsere Reihe. Aus $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$ folgt zunächst einmal $\sum_{k=0}^{\infty} |\operatorname{Re} a_k| < \infty$ und nach 10.4.1.15 konvergiert dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$. Ebenso sehen wir, daß $\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ konvergiert, und damit konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nach unserer Beschreibung des Grenzwerts als komponentenweiser Grenzwert 10.3.5.33, nur eben gegen eine komplexe Zahl. □

10.4.5.3. Der Umordnungssatz 10.4.1.21 gilt analog für absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen. Das folgt, indem wir den reellen Umordnungssatz 10.4.1.21 auf Real- und Imaginärteil anwenden.



Auch für komplexes z zeigt man wie in 10.4.2.3 die Formel

$$\exp(z) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Das obige Bild stellt unter anderem den vierten Term dieser Folge im Fall $z = \mathrm{i}$ dar. Ich finde, man kann recht gut erkennen, wie diese Folge bei wachsendem n gegen den Punkt auf der Kreislinie konvergiert, für den das Segment der Kreislinie, das von ihm zur reellen Achse herunterläuft, die Länge Eins hat.

Definition 10.4.5.4. Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ erklären wir eine weitere komplexe Zahl $\exp(z) \in \mathbb{C}$ durch die Vorschrift

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

Diese Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ nach 10.4.5.2, da sie absolut konvergiert. Wir erhalten so eine Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die **komplexe Exponentialfunktion**.

10.4.5.5 (**Funktionalgleichung der komplexen Exponentialfunktion**). Man prüft genau wie in 10.4.2.10 im Reellen auch im Komplexen die Funktionalgleichung

$$\exp(z + w) = (\exp z)(\exp w)$$

Dazu gehen wir den Beweis im reellen Fall nochmal durch und müssen insbesondere prüfen, daß der Satz 10.4.2.14 über das Produkt absolut konvergenter Reihen auch im Komplexen gilt. In der Tat funktioniert derselbe Beweis auch in diesem Fall. Offensichtlich gilt immer noch $\exp(0) = 1$. In der Sprache der Algebra ausgedrückt ist die Exponentialabbildung also ein Monoidhomomorphismus $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}, \cdot)$ und induziert damit nach 10.1.5.43 einen Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der komplexen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen komplexen Zahlen. Man erhält insbesondere $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$. Wie im Reellen 10.4.2.15 zeigt man auch die Stetigkeit von $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zunächst im Nullpunkt über die Reihenentwicklung und dann an jeder Stelle $z \in \mathbb{C}$ mithilfe der Funktionalgleichung.

10.4.5.6 (**Komplexe Exponentialfunktion und Konjugation**). Aus der Stetigkeit der komplexen Konjugation und ihrer Vertauschbarkeit mit Summe und Produkt folgern wir

$$\exp(\bar{z}) = \overline{\exp z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Für den Betrag von $\exp z$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} |\exp z|^2 &= (\exp z)(\overline{\exp z}) \\ &= \exp(z)\exp(\bar{z}) \\ &= \exp(z + \bar{z}) \\ &= \exp(2\operatorname{Re} z) \end{aligned}$$

Folglich gilt $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z)$ und speziell $|\exp(\mathrm{i}\, t)| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

10.4.5.7. Ich nenne $u : \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto \exp(\mathrm{i}t)$ die **Umlaufabbildung**. Sie beschreibt salopp gesprochen einen Punkt, der „mit konstanter Geschwindigkeit Eins im Gegenuhrzeigersinn auf dem Einheitkreis S^1 umläuft und sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle $u(0) = 1$ befindet“. In den folgenden Sätzen 10.4.5.8 und

10.4.5.10 will ich diese Anschauung rechtfertigen. Aus der Funktionalgleichung 10.4.5.5 folgt unmittelbar, daß unsere Umlaufabbildung ein Gruppenhomomorphismus von der Zahlengeraden zur Kreisgruppe ist. Aus der Abschätzung

$$|\exp(\mathrm{i}t) - \exp(\mathrm{i}s)| = |\exp(\mathrm{i}(t-s)) - 1| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}(t-s))^k}{k!}\right| \le \exp(|s-t|) - 1$$

oder auch direkt aus der Stetigkeit der komplexen Exponentialfunktion folgt, daß die Umlaufabbildung u stetig ist.

Satz 10.4.5.8 (Gruppenwege in der Kreisgruppe). *Die stetigen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R} \to S^1$ von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die Kreisgruppe sind genau alle Abbildungen der Gestalt $t \mapsto \exp(ait)$ mit $a \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Unsere Umlaufabbildung u ist nicht konstant, aus der Reihenentwicklung folgt genauer die Abschätzung $\operatorname{Im}(\exp(t\,\mathrm{i})) > 0$ für $t \in (0,1]$. Aufgrund der Stetigkeit gibt es folglich $c > 0$ mit $\operatorname{Re} u(c) < 1$ und

$$(t \in [-c,c] \Rightarrow \operatorname{Re} u(t) > 0)$$

Ist $\gamma : \mathbb{R} \to S^1$ ein weiterer Gruppenhomomorphismus mit stetigem Realteil, so gibt es auch $b > 0$ mit $(t \in [-b,b] \Rightarrow \operatorname{Re}\gamma(t) \ge \operatorname{Re} u(c))$. Es folgt, daß wir $g \in [-c,c]$ finden mit $\operatorname{Re}\gamma(b) = \operatorname{Re} u(g)$. Indem wir notfalls g durch $-g$ ersetzen, dürfen wir zusätzlich annehmen, daß auch gilt $\operatorname{Im}\gamma(b) = \operatorname{Im} u(g)$ und damit

$$\gamma(b) = u(g) \quad \text{und} \quad (|s| \le b \Rightarrow \operatorname{Re}\gamma(s) > 0) \quad \text{sowie} \quad (|t| \le g \Rightarrow \operatorname{Re} u(t) > 0).$$

Daraus aber folgt $\gamma(b/2) = u(g/2)$, denn beide Seiten sind die eindeutig bestimmte Quadratwurzel aus $\gamma(b) = u(g)$ mit positivem Realteil. Induktiv folgt erst $\gamma(b/2^n) = u(g/2^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dann $\gamma(mb/2^n) = u(mg/2^n)$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und dann aufgrund der Stetigkeit $\gamma(tb) = u(tg)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. □

10.4.5.9. Ich erinnere daran, daß in der Algebra der **Kern** $\ker\gamma$ eines Gruppenhomomorphismus $\gamma : G \to H$ erklärt wird als die Menge $\ker\gamma := \gamma^{-1}(\mathrm{e}_H)$ aller Elemente von G, die auf das neutrale Element von H abgebildet werden.

Satz 10.4.5.10 (Komplexe Exponentialfunktion und Kreiszahl). *Die Umlaufabbildung $u : t \mapsto \exp(\mathrm{i}t)$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $u : \mathbb{R} \twoheadrightarrow S^1$ mit Kern $\ker(u) = 2\pi\mathbb{Z}$ für unsere Kreiszahl π aus 10.3.4.1.*

Vorschau 10.4.5.11. Wir überlegen uns in 10.4.5.22, daß der Gruppenhomomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ gegeben durch dieselbe Formel $z \mapsto \exp(\mathrm{i}z)$ immer noch denselben Kern hat, so daß gilt $\ker(\exp(\mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times)) = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$.

Beweis. Beim Beweis von 10.4.5.8 haben wir bereits gesehen, daß es $a < 1$ gibt derart, daß alle Elemente der Kreislinie mit Realteil $> a$ im Bild von u liegen müssen. Nach Übung 10.4.4.11 sind aber alle Elemente von S^1 Potenzen derartiger Elemente. Folglich ist u eine Surjektion. Mit

$$\kappa := \inf\{t > 0 \mid u(t) = -1\}$$

gilt offensichtlich $u(\kappa) = u(-\kappa) = -1$, aber u nimmt auf dem offenen Intervall $(-\kappa, \kappa)$ den Wert (-1) nicht an. So folgt $(\ker u) \cap (0, 2\kappa) = \emptyset$ und $2\kappa\mathbb{Z} \subset \ker u$. Hätten wir in $\ker u$ noch Elemente außerhalb von $2\kappa\mathbb{Z}$, so müßten wir darin auch Elemente aus $(0, 2\kappa)$ finden und erhielten einen Widerspruch. So folgt $\ker u = 2\kappa\mathbb{Z}$ und es bleibt nur noch zu zeigen

$$\kappa = \pi$$

für unsere Kreiszahl π aus 10.3.4.1. Dieser Teil des Beweises wird sich in 10.7.1.15 als ein Spezialfall unserer Sätze über die sogenannte „Bogenlänge“ erweisen, aber hier argumentieren wir noch „zu Fuß“. Sicher gilt $u(0) = 1$ und u induziert eine Bijektion $u : (-\kappa, \kappa] \xrightarrow{\sim} S^1$, denn das Bild ist dasselbe wie das Bild von $\mathbb{R} = (-\kappa, \kappa] + 2\kappa\mathbb{Z}$ und aus $u(t) = u(s)$ folgt $t - s \in 2\kappa\mathbb{Z}$. Der Imaginärteil von u hat auf diesem Intervall also nur die beiden Nullstellen 0 und κ. Wir wissen schon vom Beginn des vorhergehenden Beweises, daß gilt $\operatorname{Im}(u(t)) > 0$ für $t \in (0, 1]$. Also induziert u eine Bijektion

$$u : [0, \kappa] \xrightarrow{\sim} \{z \in S^1 \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

und $\operatorname{Re} u$ muß auf diesem Intervall nach Übung 24.2.3.28 streng monoton fallen. Diese Erkenntnis liefert für unsere Kreiszahl π aus 10.3.4.1 die alternative Beschreibung

$$\pi = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \;\middle|\; 0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leq \kappa \right\}$$

Im Anschluß leiten wir für $t \geq 0$ die Abschätzungen $t - t^2 \leq |u(t) - 1| \leq t$ her. Für $t > s$ folgt aus der oberen Abschätzung $|u(t) - u(s)| \leq t - s$ und damit sofort $\pi \leq \kappa$. Verwenden wir andererseits für $n \geq 1$ die äquidistante Unterteilung mit $0 = t_0$ und $t_n = \kappa$, so folgt aus der unteren Abschätzung

$$\pi \geq \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \geq \kappa - n(\kappa/n)^2$$

und im Grenzwert $n \to \infty$ erhalten wir auch umgekehrt $\pi \geq \kappa$, also zusammen

$$\pi = \kappa$$

Es bleibt, für $t \geq 0$ unsere Abschätzungen $t - t^2 \leq |u(t) - 1| \leq t$ herzuleiten. Nun erhalten wir für $|t| \leq 2$ leicht die Abschätzung

$$|u(t) - 1|^2 = 2 - 2\operatorname{Re} u(t) = t^2 - 2t^4/4! + 2t^6/6! - \ldots \quad \leq t^2$$

und in der Wurzel unsere obere Abschätzung, da ja $|u(t) - 1| \leq 2$ eh klar ist für alle t. Andererseits zeigt die Reihenentwicklung auch

$$u(t) - 1 = \mathrm{i}t - t^2 \sum_{\nu=2}^{\infty} (\mathrm{i}t)^{\nu-2}/\nu!$$

und so die untere Abschätzung $|u(t) - 1| \geq t - t^2$, erst für $t \in [0, 1]$ wegen $1 = \sum_{\nu=2}^{\infty} 1/2^{\nu-1} \geq \sum_{\nu=2}^{\infty} 1/\nu!$, dann aber aus offensichtlichen Gründen sogar für alle t. □

Definition 10.4.5.12. Wir nennen den Real- beziehungsweise Imaginärteil der Umlaufabbildung $u : t \mapsto \exp(\mathrm{i}t)$ den **Cosinus** beziehungsweise den **Sinus** $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In Formeln werden die Funktionen Sinus und Cosinus bei uns also definiert durch die sogenannte **Euler'sche Gleichung**

$$\exp(\mathrm{i}t) = \cos t + \mathrm{i} \sin t$$

10.4.5.13. Das Wort **Trigonometrie** bedeutet so etwas wie „Dreiwinkelmessung". Die Wurzel „gon" taucht auch im deutschen Wort „Knie" auf und bedeutet im Griechischen sowohl „Knie" als auch im übertragenen Sinne „Winkel". In der Linearen Algebra 4.1.7.5 führe ich die „abstrakte Winkelgruppe" $\mathbb{W}$ ein sowie in 4.1.7.9 den „Standardisomorphismus"

$$\mathrm{kw} : \mathbb{W} \xrightarrow{\sim} S^1$$

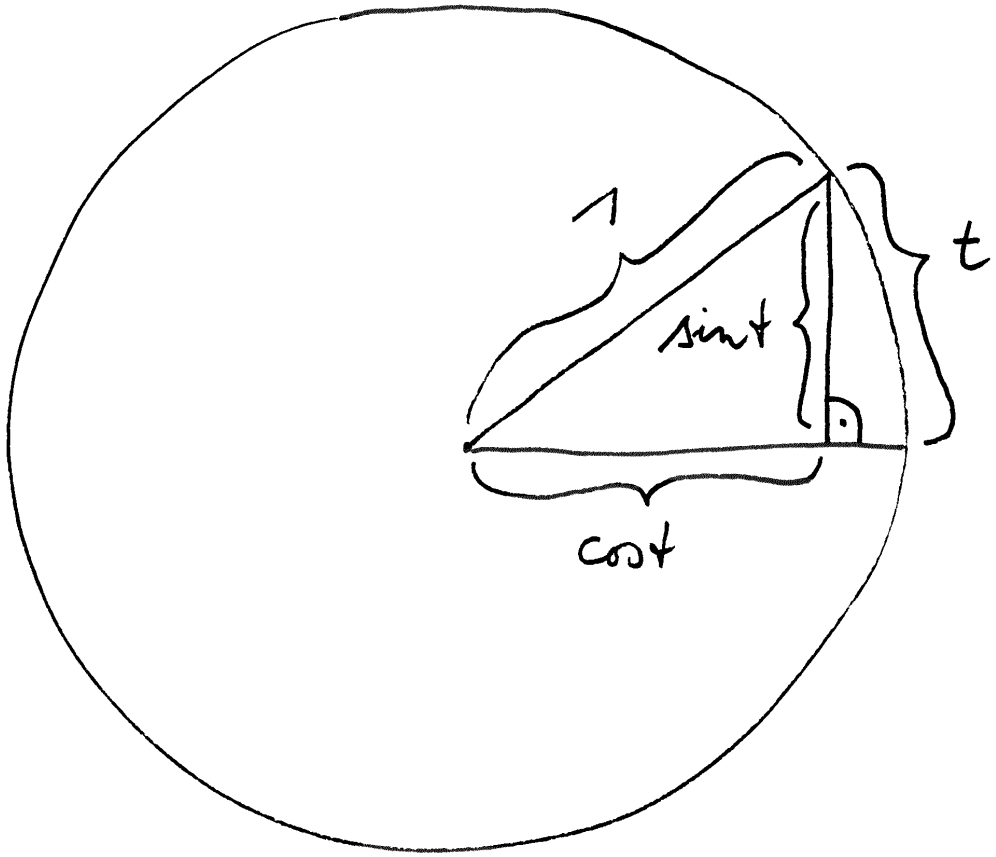
der Winkelgruppe mit der Kreisgruppe $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$. Ich schlage vor, zu unterscheiden zwischen einerseits dem **geometrischen Cosinus**, den ich in 4.1.7.11 einführe als die Abbildung

$$\cos_{\mathrm{g}} := \operatorname{Re} \circ \mathrm{kw} : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$$

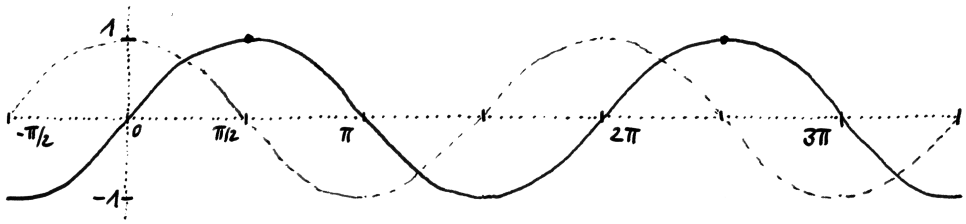
der „Winkelgruppe" in die reellen Zahlen, die durch die Regel „Ankathete durch Hypothenuse" beschrieben wird, und andererseits dem hier erklärten **analytischen Cosinus** $\cos = \cos_{\mathrm{a}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der sich daraus ergibt durch das Vorschalten der Umlaufabbildung $u : \mathbb{R} \to S^1$ gefolgt vom invertierten Standardisomorphismus als

$$\cos = \cos_{\mathrm{a}} = \cos_{\mathrm{g}} \circ \mathrm{kw}^{-1} \circ u = \operatorname{Re} \circ u$$

Analog mag man für die anderen Winkelfunktionen vorgehen.



Sinus und Cosinus am Einheitskreis



Die Graphen vom Sinus als durchgezogene Linie und vom Cosinus als gestrichelte Linie.

10.4.5.14 (**Bezug zum Bogenmaß**). Dieselbe Argumentation wie beim vorhergehenden Beweis zeigt für alle $t \geq 0$ die Formel

$$t = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \;\middle|\; 0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leq t \right\}$$

Anschaulich bedeutet mithin t die Länge des Kreisbogens von 1 bis $\exp(\mathrm{i}t)$. Auf Taschenrechnern muß man, um die hier definierten Funktionen $\sin$ und $\cos$ zu erhalten, meist noch spezifizieren, daß die Eingabe im Bogenmaß, auf englisch „Radians“ oder abgekürzt „rad“, zu verstehen sein soll. Auf lateinisch bedeutet Sinus übrigends „Bodenwelle“ und „Busen“, wortverwandt ist französisch „le sein“.

10.4.5.15 (**Eigenschaften von Sinus und Cosinus**). Aus der Definition 10.4.5.12 von Sinus und Cosinus folgen unmittelbar eine ganze Reihe von Eigenschaften.

1. Aus den Definitionen folgt sofort die Identität $\sin^2 + \cos^2 = 1$. Diese Formel wird oft nach **Pythagoras** benannt. Hier haben wir $(\sin t)^2 = \sin^2 t$ und $(\cos t)^2 = \cos^2 t$ abgekürzt. Diese Abkürzungen sind auch üblich für alle anderen Potenzen und alle anderen trigonometrischen beziehungsweise hyperbolischen trigonometrischen Funktionen, denn das spart Klammern und die alternativ möglichen Bedeutungen $\sin^2 t = \sin(\sin t)$ und dergleichen kommen nie vor. Für die Umkehrfunktionen vereinbaren wir bald die Notation $\arcsin$ sowie $\arccos$ und verwenden auch für negative obere Indizes die Notationen $\sin^{-1}(x) := 1/\sin(x)$ sowie $\cos^{-1}(x) := 1/\cos(x)$. Man findet für diese Funktionen auch die Bezeichnung als **Secans** $\sec(x) := 1/\cos(x)$ beziehungsweise **Cosecans** $\operatorname{cosec}(x) := 1/\sin(x)$.

2. Die **Symmetrie-Eigenschaften** $\sin(-t) = -\sin t$ und $\cos(-t) = \cos t$ folgen aus $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp z}$.

3. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ folgen die **Additionsformeln**

$$\begin{array}{rclcl} \cos(a+b) & = & \cos a \cos b & - & \sin a \sin b \\ \sin(a+b) & = & \cos a \sin b & + & \sin a \cos b \end{array}$$

   aus der Funktionalgleichung $\exp(\mathrm{i}(a+b)) = \exp(\mathrm{i}a)\exp(\mathrm{i}b)$.

4. Die **Periodizitäten** $\sin(t) = \sin(t + 2\pi)$ und $\cos(t) = \cos(t + 2\pi)$ folgen unmittelbar aus der Beschreibung des Kerns von $t \mapsto \exp(\mathrm{i}t)$ in 10.4.5.10.

5. Daß der Cosinus eine streng monoton fallende Bijektion $\cos : [0, \pi] \xrightarrow{\sim} [-1, 1]$ ist, wissen wir bereits aus dem Beweis von 10.4.5.10. Die Formel des Pythagoras zeigt dann, daß π die kleinste positive Nullstelle von $\sin$ ist. Zusammen mit $\sin(0) = 0$ und der Periodizität folgt, daß die **Nullstellen des Sinus** genau die ganzzahligen Vielfachen von π sind.

6. Mit den Additionsformeln erhalten wir $\sin(t+\pi) = -\sin t$ und ebenso $\cos(t+\pi) = -\cos t$ und damit $\cos(\pi/2) = 0$ und $\cos t = \sin(t+\pi/2)$ und $\sin t = -\cos(t+\pi/2)$. Die **Nullstellen des Cosinus** sind folglich genau die Elemente von $2\pi\mathbb{Z} + \pi/2$.

7. Unsere Funktionen $\cos$ und $\sin$ werden, wie sofort aus 10.4.5.12 folgt, dargestellt durch die absolut konvergenten Reihen

$$\begin{array}{rclcl} \cos t & = & \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} & = & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \\ \sin t & = & \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} & = & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \end{array}$$

10.4.5.16. Wir wissen bereits aus dem Beweis von 10.4.5.10, daß der Cosinus eine stetige streng monoton fallende Bijektion $\cos : [0,\pi] \xrightarrow{\sim} [-1,1]$ ist. Deren Umkehrabbildung ist nach 10.3.3.11 auch stetig. Sie heißt der **Arcuscosinus** und wird notiert als

$$\arccos : [-1,1] \xrightarrow{\sim} [0,\pi]$$

10.4.5.17. Der Sinus wächst wegen 10.4.5.16 und der zuvor gezeigten Identität $\sin t = -\cos(t+\pi/2)$ streng monoton auf $[-\pi/2,\pi/2]$ und definiert folglich eine Bijektion $\sin : [-\pi/2,\pi/2] \xrightarrow{\sim} [-1,1]$. Deren Umkehrabbildung ist nach 10.3.3.11 auch stetig. Sie heißt der **Arcussinus** und wird notiert als

$$\arcsin : [-1,1] \xrightarrow{\sim} [-\pi/2,\pi/2]$$

10.4.5.18. Die Bezeichnungen „arcussinus“ und „arcuscosinus“ kommen von lateinisch „arcus“ für „Bogen“. In der Tat bedeutet $\arcsin b$ für $b \in [0,1]$ die Länge des Kreisbogens, der vom Punkt $(1,0)$ bis zum Punkt $(\sqrt{1-b^2}, b)$ der Höhe b auf dem Einheitskreis reicht, wie der Leser zur Übung nachrechnen mag.

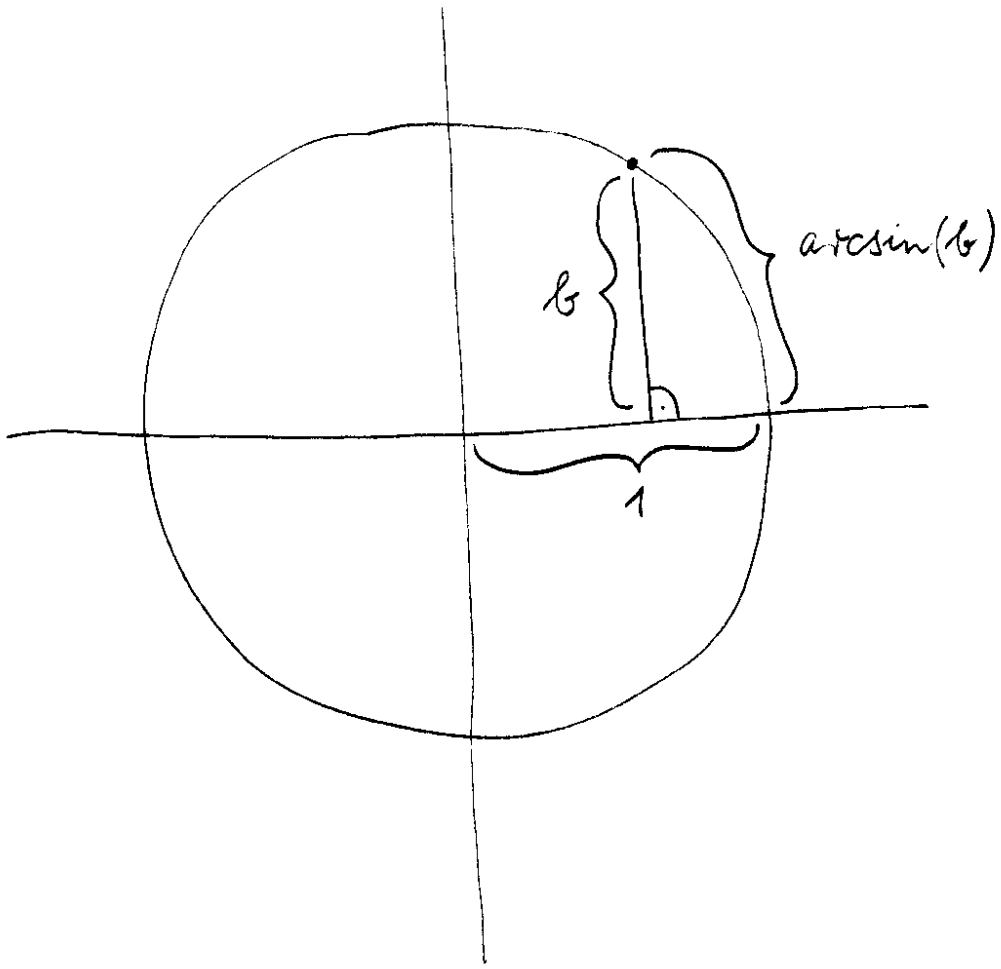
Definition 10.4.5.19. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x \neq 0$ definieren wir den **Tangens** von x durch

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

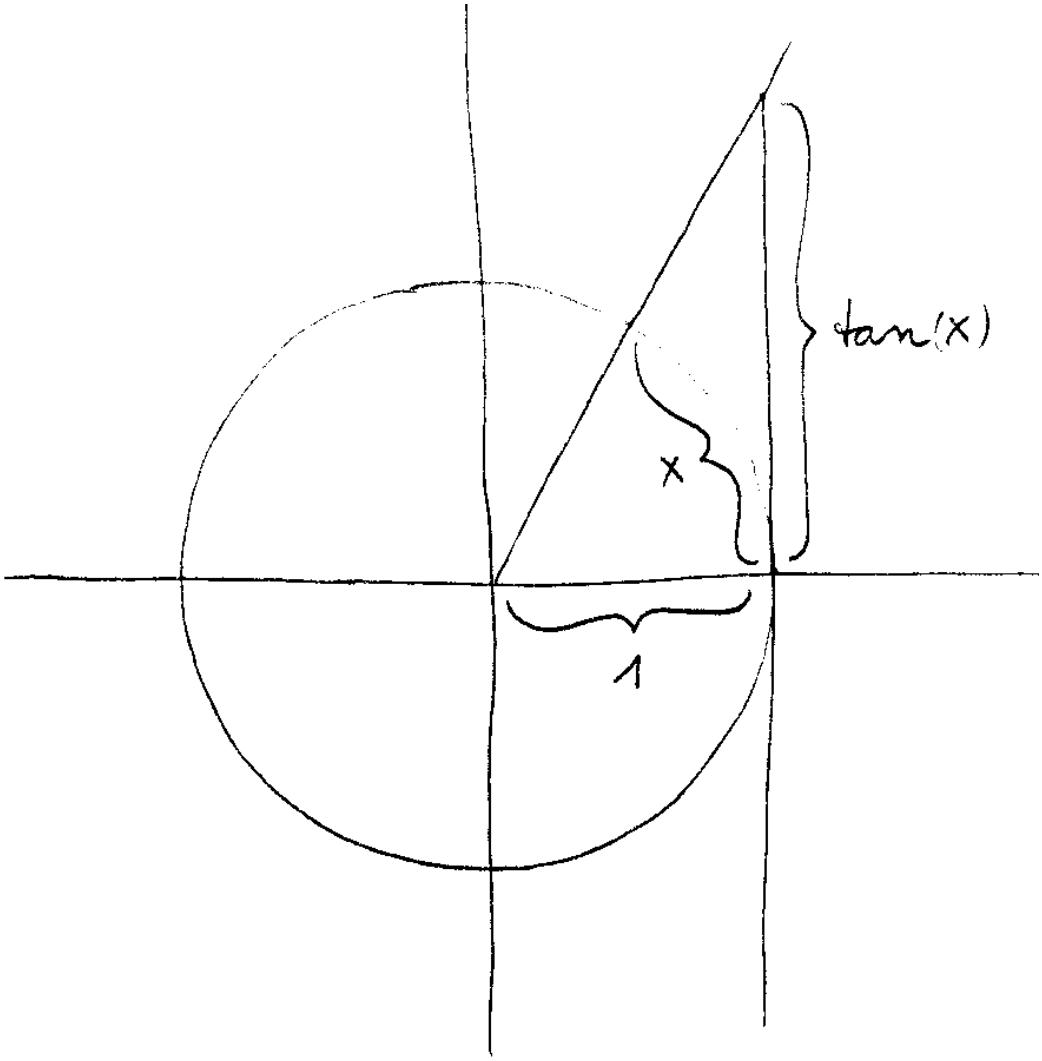
10.4.5.20. Anschaulich bedeutet $\tan(x)$ für $x \in (0,\pi/2)$ die Höhe, in der der Strahl durch den Nullpunkt und den Punkt des Einheitskreises, der mit dem Punkt $(1,0)$ ein Kreissegment der Länge x begrenzt, die Tangente an unseren Einheitskreis im Punkt $(1,0)$ trifft. Man benutzt auch den **Cotangens**

$$\cot(x) := \frac{\cos x}{\sin x}$$

10.4.5.21. Der Tangens wächst streng monoton auf dem Intervall $(-\pi/2,\pi/2)$. Wegen $\tan(-t) = -\tan(t)$ reicht es, das auf $[0,\pi/2)$ zu prüfen, und dort sind



Der Arcussinus



Der Tangens

Sinus und Cosinus nichtnegativ und der Sinus wächst streng monoton, wohingegen der Cosinus streng monoton fällt. Da der Tangens an den Grenzen sogar gegen $\pm\infty$ strebt, liefert der Tangens eine Bijektion $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion heißt der **Arcustangens**

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

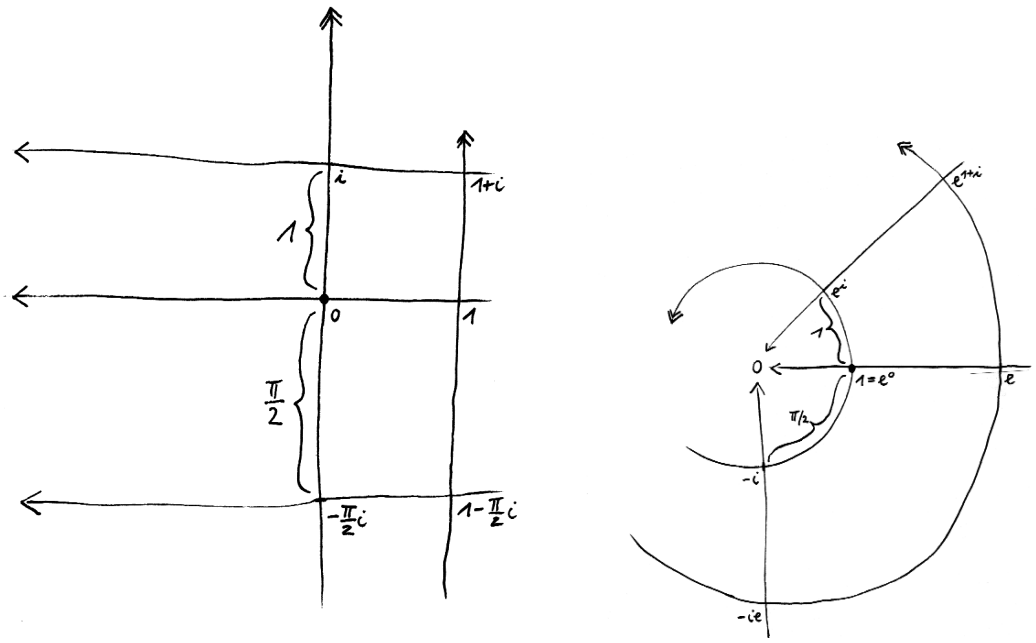
In derselben Weise erklärt man den **Arcuscotangens** $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ als die Umkehrfunktion des Kotangens $\cot : (0, \pi) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$.

10.4.5.22 (**Kern und Bild der komplexen Exponentialfunktion**). Nach 10.4.5.10 induziert die Exponentialfunktion eine Surjektion der imaginären Geraden $\mathrm{i}\mathbb{R}$ auf den Einheitskreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Daß die Exponentialfunktion eine Bijektion $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}$ induziert, wissen wir bereits aus 10.4.3.2. Da sich nun jede von Null verschiedene komplexe Zahl w schreiben läßt als Produkt $w = (w/|w|)|w|$ mit $w/|w|$ auf dem Einheitskreis und $|w|$ positiv, ist die Exponentialfunktion nach der Funktionalgleichung sogar ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\exp : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}^\times$. Der Kern dieses Gruppenhomomorphismus, als da heißt das Urbild des neutralen Elements $1 \in \mathbb{C}^\times$, besteht aufgrund unserer Gleichung $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z)$ aus allen ganzzahligen Vielfachen von $2\pi\mathrm{i}$, in Formeln

$$\ker(\exp) = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$$

10.4.5.23. Wir bestimmen mit dieser Erkenntnis die **n-ten Einheitswurzeln**, als da heißt die komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$. Nach 10.4.5.22 hat jede Lösung die Gestalt $z = \mathrm{e}^b$ für geeignetes $b \in \mathbb{C}$ und so ein z löst unsere Gleichung genau dann, wenn gilt $z^n = \mathrm{e}^{nb} = 1$ alias $nb \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$. Wir erhalten so die Lösungen $\exp(2\pi\mathrm{i}\nu/n)$ für $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ und erkennen auch, daß sie paarweise verschieden sind und es keine anderen Lösungen geben kann. In der komplexen Zahlenebene kann man sich die n-ten Einheitswurzeln veranschaulichen als die Ecken desjenigen in den Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, das als eine Ecke die 1 hat.

Ergänzung 10.4.5.24. Der Satz von **Hermite-Lindemann** besagt, daß für eine von Null verschiedene im Sinne von 10.3.4.2 algebraische komplexe Zahl α der Wert der Exponentialfunktion $\exp(\alpha)$ stets transzendent ist. Daraus folgt sowohl, daß die Euler'sche Zahl $\mathrm{e} = \exp(1)$ transzendent ist, als auch, daß $2\pi\mathrm{i}$ und damit natürlich auch π transzendent sind, da nämlich $\exp(2\pi\mathrm{i}) = 1$ nicht transzendent ist. In etwas allgemeinerer Form sagt der Satz, daß gegeben komplexe algebraische Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, die linear unabhängig sind über $\mathbb{Q}$, die Werte der Exponentialfunktion $\exp(\alpha_1), \ldots, \exp(\alpha_n)$ algebraisch unabhängig sind über $\mathbb{Q}$ im Sinne von 7.5.6.2. Mehr dazu findet man etwa in [Lor96]. Schanuels Vermutung, wie das zu verallgemeinern sein sollte, findet man in 7.5.6.17.



Die Bilder ausgewählter Teile der komplexen Zahlenebene unter der komplexen Exponentialfunktion. Die Vertikalen werden zu Kreislinien aufgewickelt, die Horizontalen in vom Nullpunkt ausgehende Strahlen transformiert. Anschaulich mag man sich die komplexe Exponentialfunktion denken als Abbildung, bei der die komplexe Zahlenebene zunächst in horizontaler Richtung verzerrt und ganz auf die Halbebene mit positivem Realteil herübergeschoben wird mit $x + \mathrm{i}y \mapsto \exp(x) + \mathrm{i}y$, gefolgt von einer Aufwicklung dieser Halbebene zu einer Wendeltreppe $a + \mathrm{i}y \mapsto (a\cos y, a\sin y, y)$ in den Raum gefolgt von einer senkrechten Projektion dieser Wendeltreppe auf die Ebene alias dem Weglassen der letzten Koordinate.

10.4.5.25 (**Potenzen mit komplexen Exponenten**). Für eine reelle Zahl $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ setzen wir wieder

$$a^z := \exp(z \log a)$$

und schreiben insbesondere auch $\exp z = \mathrm{e}^z$ für $z \in \mathbb{C}$. Mit dieser Notation liest sich die Euler'sche Formel dann als $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t$. Insbesondere erfüllen unsere Hauptdarsteller die bemerkenswerte Identität $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$. Aus $\exp(-\mathrm{i}t) = \overline{\exp(\mathrm{i}t)}$ folgern wir umgekehrt für alle $t \in \mathbb{R}$ die Formeln

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} \quad \text{und} \quad \sin t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}$$

Diese Formeln verwenden wir, um den Sinus und Cosinus zu Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auszudehnen.

Vorschau 10.4.5.26 (**Potenzen komplexer Zahlen mit komplexen Exponenten**). Die Frage, inwieweit auch Ausdrücke wie i^{i} sinnvoll als komplexe Zahlen interpretiert werden können, stellen wir zurück bis zu ersten Anwendungen in 10.5.10.15.

Übungen

Übung 10.4.5.27. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jede komplexe Zahl $a \neq 0$ besitzt die Gleichung $z^n = a$ genau n Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Übung 10.4.5.28. Man zeige: Jeder Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ mit stetigem Real- und Imaginärteil hat die Gestalt $t \mapsto \exp(at)$ für genau eine komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$. Hinweis: Man wiederhole den Beweis von 10.4.5.8 und beachte 10.4.5.22.

Übung 10.4.5.29 (**Unmöglichkeit globaler stetiger komplexer Wurzelfunktionen**). Gäbe es eine stetige Funktion $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $w(z)^2 = z$ für alle z, so folgte $w(z^2) = \pm z$ für alle z und damit wäre $\varepsilon : z \mapsto w(z^2)/z$ eine stetige Funktion $\varepsilon : \mathbb{C}^\times \to \{1, -1\}$ mit $\varepsilon(-z) = -\varepsilon(z)$. Man führe das zum Widerspruch. Hinweis: Zwischenwertsatz.

Ergänzende Übung 10.4.5.30 (**Der goldene Schnitt im regelmäßigen Fünfeck**). In einem regelmäßigen Fünfeck stehen die Längen der Diagonalen zu den Längen der Seiten im Verhältnis des goldenen Schnitts. Man prüfe diese elementargeometrisch leicht einzusehende Behauptung durch algebraische Rechnung. Hinweis: Der goldene Schnitt ist die positive Lösung der Gleichung $a/1 = (1 + a)/a$ alias $a^2 - a - 1 = 0$, seine geometrische Bedeutung wurde in 1.1.2.2 erklärt. Es gilt zu zeigen, daß für $\zeta = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/5}$ der Ausdruck $a = |1 - \zeta^2|/|1 - \zeta| = |1 + \zeta|$ die fragliche Gleichung löst. Man verwende $\zeta^4 = \bar{\zeta}$.

Ergänzende Übung 10.4.5.31. In einem regelmäßigen Siebeneck sei a der Abstand von einer Ecke zur nächsten Ecke, b der Abstand zur übernächsten Ecke, und c der Abstand zur überübernächsten Ecke. Man zeige

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

In Formeln zeige man für $\zeta = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/7}$ die Identität $|1-\zeta|^{-1} = |1-\zeta^2|^{-1}+|1-\zeta^3|^{-1}$.

Ergänzende Übung 10.4.5.32. Die Nullstellen des komplexen Sinus liegen alle auf der reellen Achse.

Ergänzende Übung 10.4.5.33. Man leite einige Formeln der nachstehenden Tabelle her.

	$\sin$	$\cos$
π	0	-1
$\pi/2$	1	0
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/5$	$\sqrt{5-\sqrt{5}}/2\sqrt{2}$	$(\sqrt{5}+1)/4$
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/7$	?	?
$\pi/8$	$\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{2}}$
$\pi/9$	?	?
$\pi/10$	$(\sqrt{5}-1)/4$	$\sqrt{5+\sqrt{5}}/2\sqrt{2}$
$\pi/11$	?	?

Man bemerkt, daß sich für $\cos(\pi/5)$ gerade die Hälfte unseres „goldenen Schnitts“ aus 10.4.5.30 ergibt. Bei der Bestimmung der Werte für $\pi/5$ und $\pi/10$ mag man von nebenstehendem Bild ausgehen, das insbesondere bei der Bestimmung von $\sin(\pi/10)$ helfen sollte. Wir zeigen in 6.4.8.9, warum es unmöglich ist, Formeln derselben Bauart auch für $\sin(\pi/7)$ oder $\sin(\pi/9)$ oder $\sin(\pi/11)$ anzugeben.

Ergänzende Übung 10.4.5.34. Man zeige mit der Euler'schen Gleichung 10.4.5.12 die Identität $\sin^3\vartheta = \frac{3}{4}\sin\vartheta - \frac{1}{4}\sin(3\vartheta)$.

Ergänzende Übung 10.4.5.35. Man zeige, daß der Sinus keine Polynomfunktion ist.

Die Überlagerung zweier Sinuswellen mit nahe beieinanderliegender Periode. Rechnerisch finden wir etwa die Identität

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_1 t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_2 t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2)t/2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t/2} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t/2})$$

und durch Betrachtung der Imaginärteile beider Seiten

$$\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) = 2\sin((\omega_1-\omega_2)t/2)\cos((\omega_1+\omega_2)t/2)$$

Liegen hier ω_1 und ω_2 nah beieinander, so ergibt sich für diesen Ausdruck als Funktion von t das obige Bild, in dem sich anschaulich gesprochen immer abwechselnd beide Sinuswellen einmal gegenseitig auslöschen und dann wieder addieren. Man kann das auch mit eigenen Ohren erfahren, wenn man sich von zwei Kommilitonen zwei nahe beieinanderliegende Töne vorsingen läßt: Es ist dann so eine Art Wummern zu hören, das eben mit der Frequenz $\omega_1 - \omega_2$ geschieht.

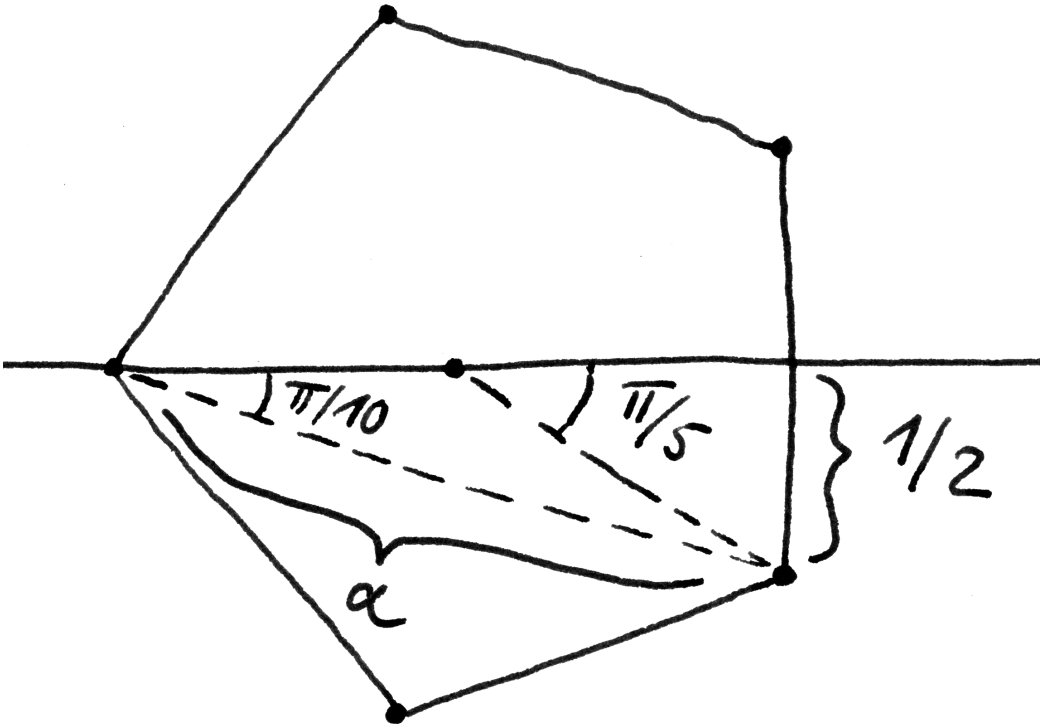


Illustration zur Berechnung von $\sin(\pi/10)$

10.5 Integration und Ableitung

10.5.1 Stetige Funktionen auf Kompakta

Definition 10.5.1.1. Man nennt eine Teilmenge $K \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ **kompakt** oder ein **Kompaktum**, wenn jede Folge in K eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt aus K konvergiert.

Beispiel 10.5.1.2 (**Kompakte Intervalle**). Der Satz von Bolzano-Weierstraß 10.3.6.6 zeigt, daß die kompakten Intervalle in $\bar{\mathbb{R}}$ genau die Intervalle der Gestalt $[a, b]$ sind mit $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.

Beispiel 10.5.1.3 (**Kompakte Rechtecke**). Gegeben $a, b, c, d \in \bar{\mathbb{R}}$ ist das Rechteck $[a, b] \times [c, a]$ kompakt. In der Tat besitzt jede Folge in diesem Rechteck nach 10.5.1.2 eine Teilfolge, bei der die ersten Koordinaten der Folgenglieder eine konvergente Folge bilden, und diese hat hinwiederum eine Teilfolge, bei der auch die zweiten Koordinaten der Folgenglieder eine konvergente Folge bilden.

Vorschau 10.5.1.4. Der Begriff der „Kompaktheit“ ist für weite Teile der Mathematik grundlegend. Sie werden in 12.4.1.3 folgende sehen, wie er im Fall allgemeiner „topologischer Räume“ in die beiden Begriffe „folgenkompakt“ und „überdeckungskompakt“ aufspaltet. Sie werden auch sehen, daß es letzterer Begriff ist, der weiter trägt und zu „kompakt“ abgekürzt wird, obwohl ersterer Begriff die natürlichere Verallgemeinerung unserer obigen Definition zu sein scheint. Aber alles zu seiner Zeit!

Satz 10.5.1.5 (**Extremwerte auf Kompakta**). *Jede stetige Funktion $f : K \to \bar{\mathbb{R}}$ auf einem nichtleeren Kompaktum K nimmt das Supremum und das Infimum der Menge ihrer Funktionswerte als Funktionswert an.*

10.5.1.6. Ist in Formeln $K \neq \emptyset$ kompakt und $f : K \to \bar{\mathbb{R}}$ stetig, so gibt es demnach $p, q \in K$ mit $f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad \forall x \in K$. Ist die Funktion f reellwertig, so ist insbesondere ihr Bild beschränkt. Salopp gesprochen kann also eine stetige reellwertige Funktion auf einem Kompaktum nicht nach Unendlich streben. Man beachte, eine wie wichtige Rolle im Falle eines kompakten Intervalls die Endpunkte hier spielen: Eine stetige reellwertige Funktion auf einem offenen Intervall kann ja durchaus nach Unendlich streben, wie etwa die Funktion $x \mapsto (1/x)$ auf dem Intervall $(0, 1)$.

Beweis. Da wir $K \neq \emptyset$ angenommen hatten, finden wir nach Übung 10.3.5.47 eine Folge x_n in K mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K)$. Diese Folge besitzt nun nach Annahme eine Teilfolge, die gegen einen Punkt q aus K konvergiert. Indem wir zu dieser Teilfolge übergehen, dürfen wir sogar annehmen, unsere Folge sei selbst

schon konvergent mit $\lim_{n\to\infty} x_n = q$. Durch Vertauschen der stetigen Funktion f mit Folgenkonvergenz nach 10.3.5.29 folgt dann

$$f(q) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K)$$

Die Existenz von $p \in K$ mit $f(p) = \inf f(K)$ zeigt man analog. □

Satz 10.5.1.7 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante komplexe Polynom besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

10.5.1.8. Der im folgenden wiedergegebene Beweis von Jean-Robert Argand hat den Vorteil, mit besonders wenigen technischen Hilfsmitteln auszukommen. Einen Überblick über die gängigsten alternativen Beweise mit ihren Stärken und Schwächen gebe ich in 3.5.3.25. Alle Beweise benutzen wesentlich analytische Methoden und das muß auch so sein, da ja $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ Objekte der Analysis sind. Merkwürdig ist eher die Bezeichnung als „Fundamentalsatz der Algebra“ für ein Resultat der Analysis.

Vorschau 10.5.1.9. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgert man unschwer, daß das Aufmultiplizieren eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \left\{\begin{array}{c}\text{Endliche Multimengen}\\ \text{von komplexen Zahlen}\end{array}\right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{\begin{array}{c}\text{Komplexe Polynome}\\ \text{mit Leitkoeffizient Eins}\end{array}\right\} \\ {}_{\mu}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\} & \mapsto & (X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_r) \end{array}$$

liefert. Das vorgestellte μ aus der linken Seite ist ein „Multimengenanzeiger“, mit dem wir es uns erlauben, Elemente mit Vielfachheiten zu betrachten und anzugeben. Den Beweis überlassen wir der Algebra. Man muß dazu im wesentlichen nur wissen, daß man für jede Nullstelle einen Linearfaktor abspalten kann. Das hinwiederum folgt aus dem Teilen mit Rest in Polynomringen.

Beweis. Sei $P \in \mathbb{C}[X]$ unser Polynom. Wir zeigen zunächst, daß es eine Stelle $p \in \mathbb{C}$ gibt, an der die Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |P(z)|$ ihr Minimum annimmt, in Formeln $|P(z)| \geq |P(p)|\ \forall z \in \mathbb{C}$. Sei dazu $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$. Aus $|z| > 0$ folgt

$$\begin{array}{rcl} |P(z)| & \geq & |a_nz^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0| \\ & \geq & |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \ldots - |a_0| \\ & \geq & |z|^n\big(|a_n| - |a_{n-1}|/|z| - \ldots - |a_0|/|z|^n\big) \end{array}$$

Nun finden wir sicher $R > 0$ mit $|a_{n-1}|/R + \ldots + |a_0|/R^n \leq |a_n|/2$. Aus $|z| > R$ folgt dann $|P(z)| \geq |z|^n(|a_n|/2)$. Nehmen wir also irgendein $u \in \mathbb{C}$ her, so gibt es $R \in \mathbb{R}$ derart, daß aus $|z| \geq R$ folgt

$$|P(z)| \geq |z|^n(|a_n|/2) \geq |P(u)|$$

Als stetige Funktion nimmt aber die Funktion $z \mapsto |P(z)|$ auf einem beliebigen kompakten Rechteck $K \subset \mathbb{C}$, das die Kreisscheibe $\{z \mid |z| \leq R\}$ umfaßt, ein Minimum an, sagen wir an der Stelle $p \in K$. Das muß dann auch das Minimum von $|P(z)|$ auf ganz $\mathbb{C}$ sein. Wir zeigen nun $P(p) = 0$ durch Widerspruch und zeigen dazu: Ist $p \in \mathbb{C}$ gegeben und P eine nichtkonstante Polynomfunktion mit $P(p) \neq 0$, so nimmt die Funktion $z \mapsto |P(z)|$ bei p nicht ihr Minimum an. Es reicht, das für $p = 0$ zu zeigen. Wir dürfen auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich $P(0) = 1$ annehmen. Dann hat unser Polynom die Gestalt

$$P(X) = 1 + bX^m + X^{m+1}Q(X)$$

mit $b \neq 0$ und $m \geq 1$ und einem weiteren Polynom $Q(X)$ und wir müssen zeigen, daß $|P(z)|$ nicht minimal ist bei $z = 0$. Dafür müssen wir nur eine Richtung $w \in \mathbb{C}$ finden derart, daß $|(P(z)|$ kleiner wird, wenn wir uns in dieser Richtung w vom Ursprung entfernen, in Formeln $|P(tw)| < 1$ für hinreichend kleines $t > 0$. Nach 10.4.5.27 gibt es jedoch $w \in \mathbb{C}$ mit $w^m b = -1$ und für solch ein w finden wir

$$P(tw) = 1 - t^m + t^{m+1}w^{m+1}Q(tw)$$

Für $t \in [0,1]$ und $C > 0$ eine positive obere Schranke für die stetige Funktion $[0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto |w^{m+1}Q(tw)|$ folgt nach der Dreiecksungleichung

$$|P(tw)| \leq 1 - t^m + t^{m+1}C$$

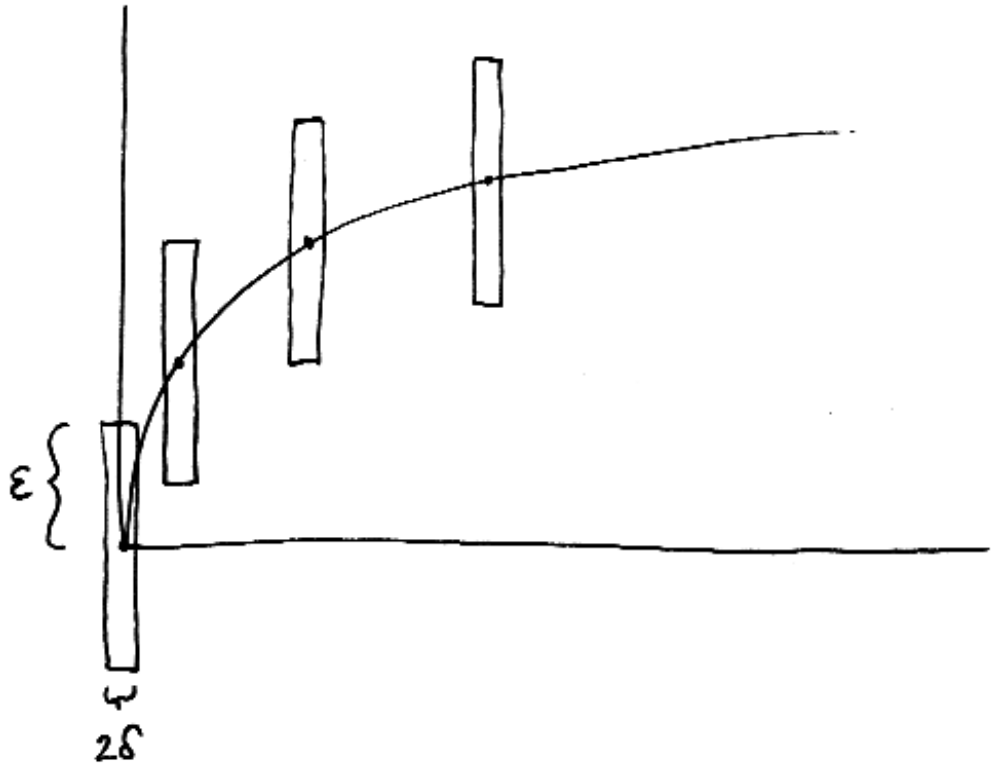
Gilt zusätzlich $0 < t < C^{-1}$, so ist das sicher kleiner als Eins. □

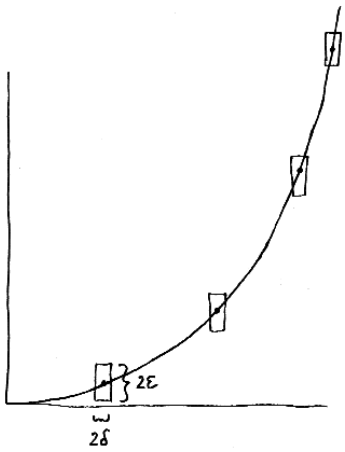
Definition 10.5.1.10. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \supset D \to \mathbb{R}^n$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn es für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, daß für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

10.5.1.11. Bei der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit kommt es wesentlich auf den Definitionsbereich D an. Da wir Funktionen vielfach angeben, ohne ihren Definitionsbereich explizit festzulegen, ist es in diesem Zusammenhang oft sinnvoll, den jeweils gemeinten Definitionsbereich zu präzisieren. Dazu benutzen wir die Sprechweise f **ist gleichmäßig stetig auf** D.

10.5.1.12. Im Gegensatz zur Stetigkeit ist die gleichmäßige Stetigkeit kein sinnvoller Begriff für Funktionen $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \to \bar{\mathbb{R}}^n$.

10.5.1.13 (**Unterschied zwischen Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit**). Ich will nun den Unterschied zwischen Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit diskutieren. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \supset D \to \mathbb{R}^n$ ist ja nach dem ε-δ-Kriterium 10.3.2.21 stetig bei $p \in D$ genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ gibt derart, daß für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta(\varepsilon, p)$ gilt $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$. Des





Gleichmäßige Stetigkeit für stetige Funktionen auf Intervallen kann man sich anschaulich wie folgt denken: Für eine beliebig für ein Rechteck vorgegebene Höhe $2\varepsilon > 0$ findet man bei gleichmäßiger Stetigkeit immer eine Breite $2\delta > 0$ derart, daß an welchen Punkt des Graphen meiner Funktion ich das Zentrum meines Rechtecks auch verschiebe, der Graph das Rechteck nie durch die Ober- oder Unterkante verläßt. So ist etwa die Wurzelfunktion gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, die Quadratfunktion jedoch nicht.

weiteren heißt sie stetig, wenn sie an jeder Stelle $p \in D$ stetig ist. Gleichmäßige Stetigkeit bedeutet nun, daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ gewählt werden kann, das es als $\delta(\varepsilon) = \delta(\varepsilon, p)$ für alle $p \in D$ gleichzeitig tut.

10.5.1.14 (**Eine nicht gleichmäßig stetige Funktion**). Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$, denn $|x^2 - y^2| = |x - y||x + y|$ kann auch für sehr kleines $|x - y|$ noch groß sein, wenn nur $|x + y|$ hinreichend groß ist. Die Einschränkung dieser Funktion auf ein beliebiges reelles Kompaktum ist aber daselbst gleichmäßig stetig nach dem anschließenden Satz.

Satz 10.5.1.15 (Gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta). *Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^m \supset K \to \mathbb{R}^d$ auf einem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^m$ ist auf besagtem Kompaktum gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir argumentieren durch Widerspruch und zeigen, daß eine Funktion auf einem Kompaktum, die nicht gleichmäßig stetig ist, auch nicht stetig sein kann. Wäre f nicht gleichmäßig stetig, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$, für das wir kein $\delta > 0$ finden könnten: Wir probieren alle $\delta = 1/n$ aus und finden immer wieder Punkte $x_n, y_n \in K$ mit $|x_n - y_n| < 1/n$, für die dennoch gilt $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Gehen wir zu einer Teilfolge über, so dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Folge der x_n gegen einen Punkt von K konvergiert, in Formeln $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ mit $x \in K$. Damit folgt natürlich auch $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Wäre nun f stetig bei x, so folgte

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

und damit lägen notwendig fast alle $f(x_n)$ und desgleichen fast alle $f(y_n)$ im Quader $\mathrm{B}(f(x); \varepsilon/2)$. Das steht jedoch im Widerspruch dazu, daß ja nach Konstruktion gilt $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ für alle n. Wir haben also gezeigt, daß eine Funktion auf einem reellen Kompaktum, die nicht gleichmäßig stetig ist, auch nicht stetig sein kann. □

Übungen

Übung 10.5.1.16. Jeder Quader der Gestalt $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ ist kompakt.

Übung 10.5.1.17. Jede endliche Vereinigung von Kompakta $K_i \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ ist kompakt.

Übung 10.5.1.18. Das Bild eines Kompaktums $K \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ unter einer stetigen Abbildung $K \to \bar{\mathbb{R}}^m$ ist stets kompakt.

Übung 10.5.1.19. Man zeige, daß jede beschränkte, monotone und stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Übung 10.5.1.20. Sind $K \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ und $L \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ kompakt, so ist auch $K \times L \subset \bar{\mathbb{R}}^{m+n}$ kompakt.

10.5.2 Integration stetiger Funktionen

Definition 10.5.2.1. Gegeben $f : \mathbb{R} \supset [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige reellwertige Funktion auf einem nichtleeren kompakten reellen Intervall erklären wir die Menge $\mathrm{T}(f) \subset \mathbb{R}$ aller „naiven Integrale zu Treppen, die unter f liegen“ durch

$$\mathrm{T}(f) := \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a_{i+1} - a_i) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Alle möglichen Wahlen von } n \in \mathbb{N} \\ \text{und von Stellen } a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n = b \\ \text{und von Werten } c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ derart,} \\ \text{daß gilt } \; f(x) \geq c_i \text{ für alle } x \in [a_i, a_{i+1}] \end{array} \right\}$$

Da f stetig ist, hat es nach 10.5.1.5 einen beschränkten Wertebereich, als da heißt, es gibt $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq f(x) \leq M \; \forall x \in [a,b]$. Daraus folgt, daß $m(b-a)$ zu $\mathrm{T}(f)$ gehört und daß $M(b-a)$ eine obere Schranke von $\mathrm{T}(f)$ ist. Als nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat $\mathrm{T}(f)$ nach 10.2.4.4 ein Supremum in $\mathbb{R}$. Wir nennen dies Supremum das **Integral der Funktion f über das Intervall** $[a,b]$ und schreiben

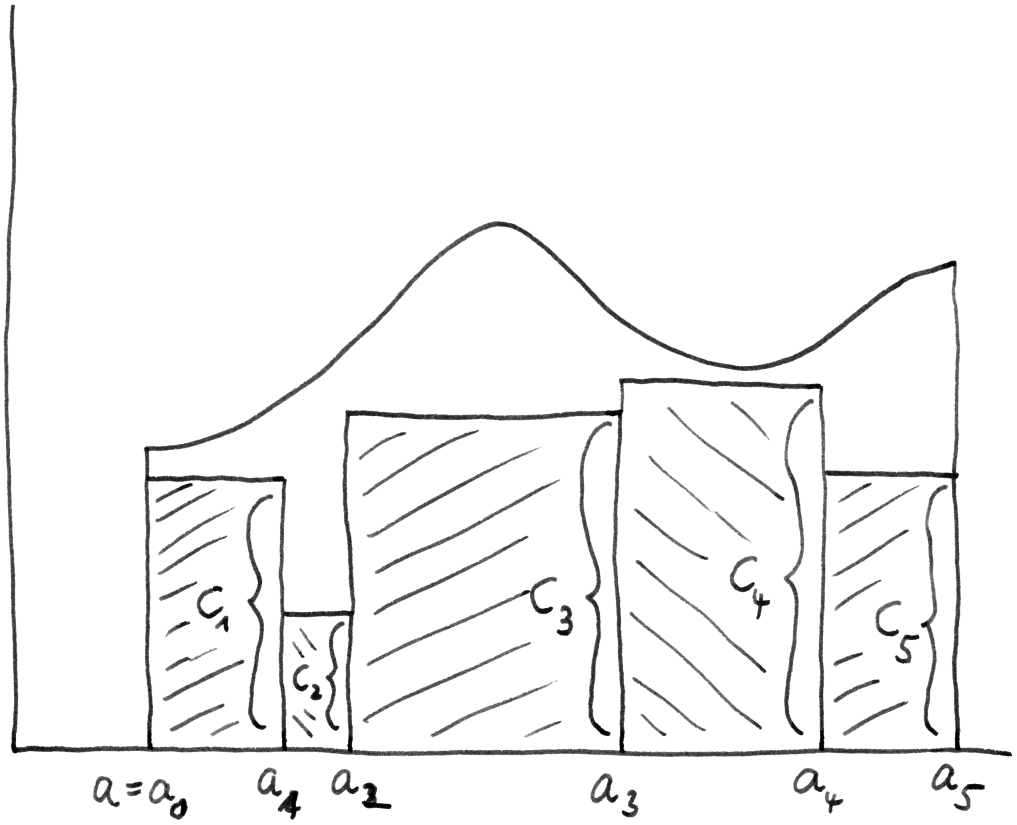
$$\sup \mathrm{T}(f) := \int_a^b f(x) \; \mathrm{d}x = \int_a^b f = \int_{[a,b]} f$$

Auf die Bedeutung der Notationen für das Integral gehen wir in 13.2.1.6 ein.

10.5.2.2. Anschaulich mißt das Integral von f die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse, wobei Flächenstücke unterhalb der x-Achse negativ zu rechnen sind. Das Wort ist aus dem Lateinischen abgeleitet und bedeutet so etwas wie „Zusammenfassung“. Der folgende Satz listet einige Eigenschaften unseres Integrals auf. Man kann leicht zeigen, daß unser Integral sogar durch diese Eigenschaften charakterisiert wird.

Satz 10.5.2.3 (Integrationsregeln). *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres kompaktes Intervall.*

1. *Für die konstante Funktion mit dem Wert 1 gilt $\int_a^b 1 = b - a$;*
2. *Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $z \in [a,b]$ gilt $\int_a^b f = \int_a^z f + \int_z^b f$;*
3. *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt $f(x) \leq g(x) \; \forall x \in [a,b]$, in Kurzschreibweise $f \leq g$, so folgt $\int_a^b f \leq \int_a^b g$;*
4. *Für $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig gilt $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;*
5. *Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.*



Die schraffierte Fläche stellt ein Element von $\mathrm{T}(f)$ dar für die durch den geschwungenen Graphen dargestellte Funktion f.

10.5.2.4. Die beiden letzten Punkte bedeuten in der Sprache der linearen Algebra, daß das Integral eine Linearform auf dem reellen Vektorraum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf unserem kompakten Intervall ist, als da heißt, eine lineare Abbildung in den Körper der reellen Zahlen.

Beweis. 1. Wir wissen ja schon, daß aus $m = 1 \leq f(x) \leq 1 = M$ folgt $b - a \leq \int_a^b f \leq b - a$.

2. Für Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ definiert man eine neue Teilmenge $A + B \subset \mathbb{R}$ durch die Vorschrift $A + B = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}$. Offensichtlich gilt

$$\mathrm{T}(f) = \mathrm{T}(f|_{[a,z]}) + \mathrm{T}(f|_{[z,b]})$$

Für beliebige nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ haben wir aber $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ nach Übung 10.2.4.18.

3. Aus $f \leq g$ folgt offensichtlich $\mathrm{T}(f) \subset \mathrm{T}(g)$.

4 & 5. Um die letzten beiden Aussagen zu zeigen, müssen wir etwas weiter ausholen. Für unsere stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und beliebiges $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ unterteilen wir unser Intervall **äquidistant**, lateinisierend für „mit gleichen Abständen“, durch

$$a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_r = b$$

Es gilt also $t_i = a + i(b - a)/r$. Wir definieren nun die r**-te Riemann-Summe** $S^r(f) \in \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$S^r(f) := \sum_{i=0}^{r-1} f(t_i)(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{r-1} f(t_i)(\tfrac{b-a}{r})$$

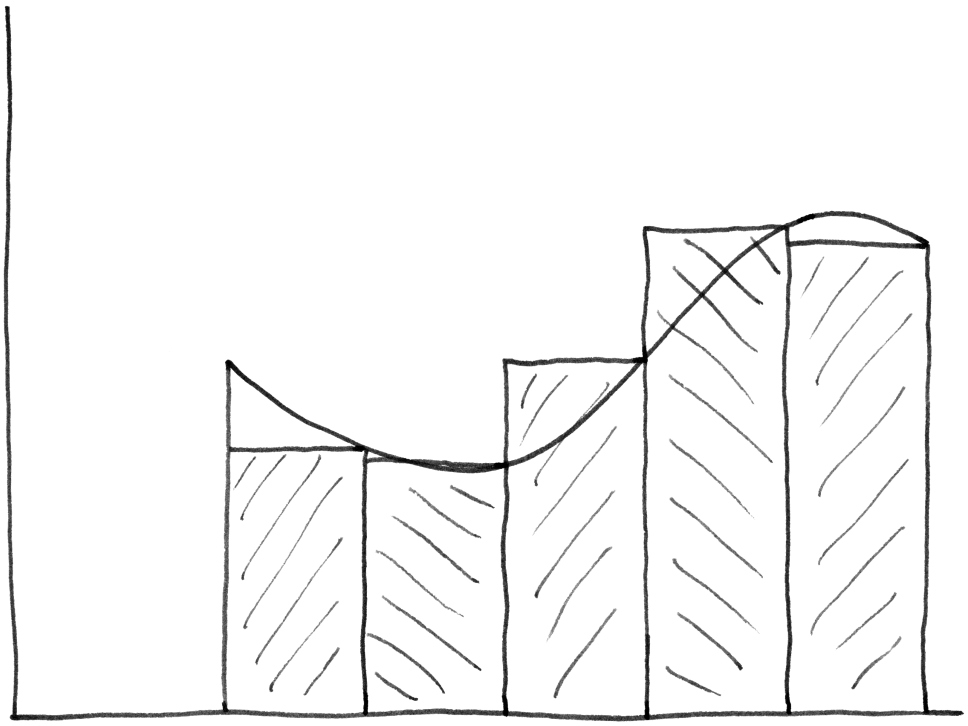
In der anschließenden Proposition 10.5.2.5 werden wir

$$\int_a^b f = \lim_{r\to\infty} S^r(f)$$

zeigen. Damit erhalten wir dann sofort

$$\begin{array}{rcl} \int_a^b (f+g) & = & \lim\limits_{r\to\infty} S^r(f+g) \\ & = & \lim\limits_{r\to\infty} (S^r(f) + S^r(g)) \\ & = & \lim\limits_{r\to\infty} S^r f + \lim\limits_{r\to\infty} S^r g \\ & = & \int_a^b f + \int_a^b g \end{array}$$

und ähnlich folgt $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$. □



Die schraffierte Fläche stellt die fünfte Riemannsumme der durch den geschwungenen Graphen beschriebenen Funktion dar.

Proposition 10.5.2.5. *Für $a \leq b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig gilt $\int_a^b f = \lim_{r\to\infty} S^r(f)$.*

Ergänzung 10.5.2.6. In der Notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, die auf den Philosophen und Mathematiker Leibniz zurückgeht, bedeutet das Integralzeichen $\int$ ein S wie „Summe“ und $\mathrm{d}x$ meint die „Differenz im x-Wert“. Manchmal verwendet man auch allgemeiner für eine weitere Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit guten Eigenschaften, etwa für g die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen, die Notation $\int f\,\mathrm{d}g$, und meint damit den Grenzwert der Summen $\sum_{i=0}^{r-1} f(t_i)(g(t_{i+1}) - g(t_i))$, dessen Existenz in 12.7.4.2 folgende in großer Allgemeinheit diskutiert wird.

10.5.2.7. Man mag versucht sein, die in Proposition 10.5.2.5 enthaltene Beschreibung gleich als Definition des Integrals zu nehmen. Ich rate davon jedoch ab, da die Existenz des fraglichen Grenzwerts nicht so leicht zu zeigen ist, und da auch die Zweite unserer Integrationsregeln 10.5.2.3 aus dieser Definition nicht so direkt folgt. Nun kommt das natürlich eigentlich nicht darauf an, wenn unsere Definitionen äquivalent sind. Aber man legt eben auch in Deutschland ein zentrales Auslieferungslager besser nach Frankfurt als nach Freiburg!

Beweis. Wir definieren zusätzlich zur r-ten Riemann-Summe die **r-ten Untersummen** und **Obersummen** durch

$$\underline{S}^r(f) := \sum_{i=0}^{r-1} (\inf f[t_i, t_{i+1}])(\tfrac{b-a}{r}) \quad \text{und} \quad \overline{S}^r(f) := \sum_{i=0}^{r-1} (\sup f[t_i, t_{i+1}])(\tfrac{b-a}{r})$$

und behaupten die Ungleichungen

$$\begin{array}{ccccc} \underline{S}^r(f) & \leq & S^r(f) & \leq & \overline{S}^r(f) \\ \underline{S}^r(f) & \leq & \int_a^b f & \leq & \overline{S}^r(f) \end{array}$$

Die erste Zeile ist offensichtlich. Die zweite Zeile erhalten wir zum Beispiel, indem wir aus den bereits bewiesenen Teilen 1 und 3 des Satzes die Ungleichungen

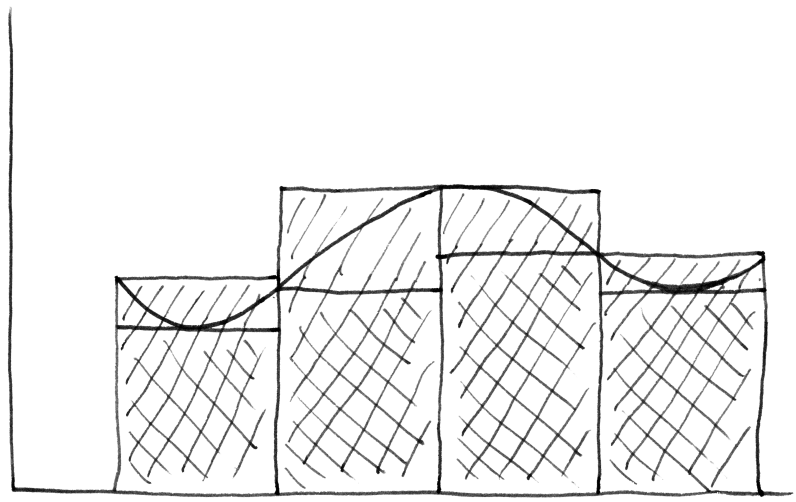
$$(\inf f[t_i, t_{i+1}])(\tfrac{b-a}{r}) \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} f \leq (\sup f[t_i, t_{i+1}])(\tfrac{b-a}{r})$$

folgern, diese Ungleichungen aufsummieren, und die Mitte mit dem auch bereits bewiesenen Teil 2 des Satzes zu $\int_a^b f$ zusammenfassen. Damit sind beide Zeilen von Ungleichungen bewiesen. Nun ist f auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig nach 10.5.1.15, für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert also $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ mit $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Wählen wir N mit $(\frac{b-a}{N}) < \delta$ und nehmen dann $r \geq N$, so schwankt unsere Funktion f auf jedem Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$ höchstens um ε, mithin gilt $0 \leq \overline{S}^r(f) - \underline{S}^r(f) \leq \varepsilon(b-a)$ und damit $|S^r(f) - \int_a^b f| \leq \varepsilon(b-a)$. Die Proposition ist gezeigt. $\square$

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\,(a_i - a_{i-1})$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

In der Notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, die auf den Philosophen und Mathematiker Leibniz zurückgeht, bedeutet das Integralzeichen $\int$ ein *S* wie „Summe“ und $\mathrm{d}x$ meint die „Differenz im x-Wert“.



Die schraffierte Fläche stellt die vierte Obersumme der durch den geschwungenen Graphen beschriebenen Funktion dar, der kreuzweise schraffierte Teil ihre Untersumme.

Beispiel 10.5.2.8 (**Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks als Integral**). Für $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ finden wir

$$\begin{aligned} \int_0^b x \ \mathrm{d}x &= \lim_{r\to\infty} \left(\tfrac{0}{r} + \tfrac{b}{r} + \tfrac{2b}{r} + \cdots \tfrac{(r-1)b}{r} \right) \tfrac{b}{r} \\ &= \lim_{r\to\infty} \tfrac{r(r-1)}{2} \cdot \tfrac{b^2}{r^2} \quad \text{nach } 10.1.1.1 \\ &= \tfrac{b^2}{2} \end{aligned}$$

Lemma 10.5.2.9 (**Standardabschätzung für Integrale**). *Gegeben $a \leq b$ reelle Zahlen und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig gilt die Abschätzung*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Beweis. Aus $-|f| \leq f \leq |f|$ folgt $-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$. □

10.5.2.10 (**Integrale mit vertauschten Grenzen**). Ist $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall ein Intervall I und sind $a, b \in I$ gegeben mit $a > b$, so erklären wir $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ durch die Vorschrift

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Mit dieser Konvention gilt dann für beliebige $a, b, c \in I$ die Formel

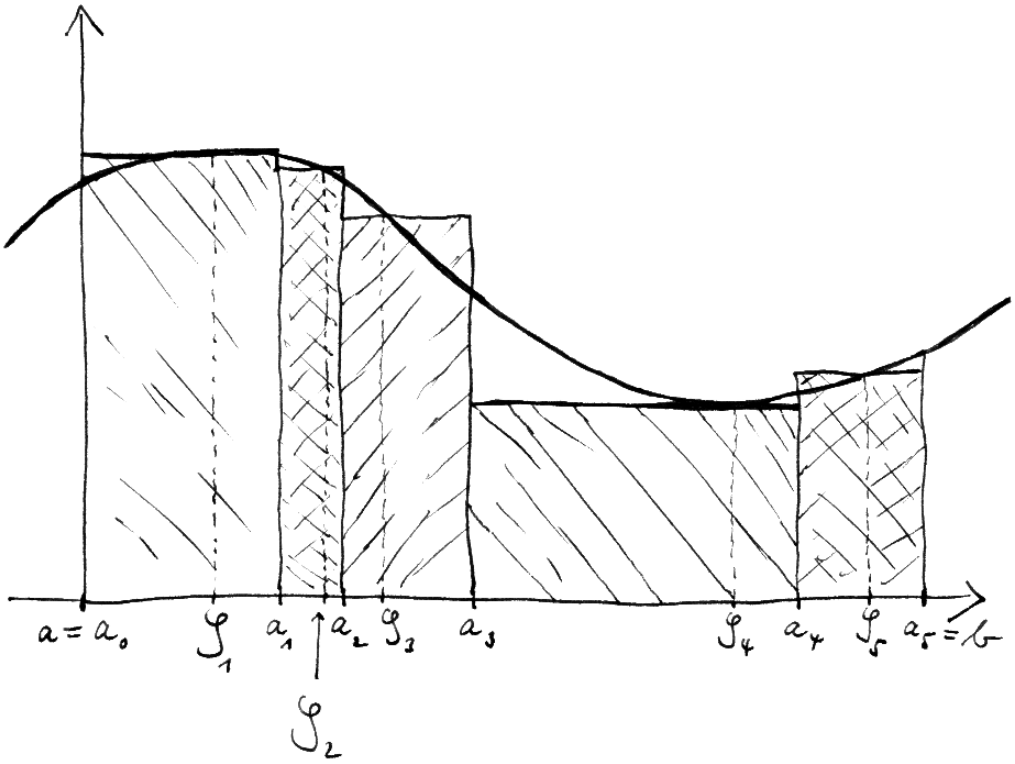
$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Übungen

Übung 10.5.2.11. Diese Übung wird verwendet bei der Diskussion der Bogenlänge. Sei $a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n = b$ eine **Unterteilung** des kompakten reellen Intervalls $[a, b]$. Gegeben eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bezeichnet man die Summen

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i)(a_{i+1} - a_i)$$

mit beliebigen $\zeta_i \in [a_i, a_{i+1}]$ als die **Riemann-Summen** von f zur vorgegebenen Unterteilung. Die maximale Länge $\sup\{a_i - a_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$ eines Teilintervalls heißt die **Feinheit** der Unterteilung. Man zeige: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß alle Riemannsummen von f zu Unterteilungen der Feinheit $\leq \delta$ vom Integral $\int f$ einen Abstand $\leq \varepsilon$ haben.



Darstellung einer Riemannsumme im Sinne von 10.5.2.11.

Ergänzung 10.5.2.12. Allgemeiner heißt eine nicht notwendig stetige Funktion auf einem kompakten reellen Intervall $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **Riemann-integrierbar mit Integral** $\int f$, wenn die Bedingung vom Ende der vorhergehenden Übung erfüllt ist, daß es nämlich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, daß alle Riemann-Summen von f zu Unterteilungen der Feinheit $\leq \delta$ von $\int f$ einen Abstand $\leq \varepsilon$ haben. Wir werden in diesem Text den Begriff der Riemann-Integrierbarkeit vermeiden: Später wird eh das sehr viel stärkere Lebesgue-Integral eingeführt, und bis dahin reicht unser Integrationsbegriff für stetige Funktionen aus. Für ein vertieftes Studium der Analysis ist jedoch auch der Begriff der Riemann-Integrierbarkeit relevant.

Ergänzende Übung 10.5.2.13. Man zeige den **Mittelwertsatz der Integralrechnung**: Gegeben ein nichtleeres kompaktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig gibt es $\xi \in [a, b]$ mit $\int f = (b - a)f(\xi)$. Gegeben eine weitere stetige Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es sogar $\xi \in [a, b]$ mit $\int fg = f(\xi) \int g$.

10.5.3 Ableitung an einer Stelle

Definition 10.5.3.1. Wir nennen eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ **halboffen**, wenn sie mit jedem Punkt auch mehrpunktiges Intervall umfaßt, das besagten Punkt enthält.

Definition 10.5.3.2. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ mit halboffenem Definitionsbereich D heißt **differenzierbar bei** $p \in D$ **mit Ableitung** $b \in \mathbb{R}$, wenn gilt

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = b$$

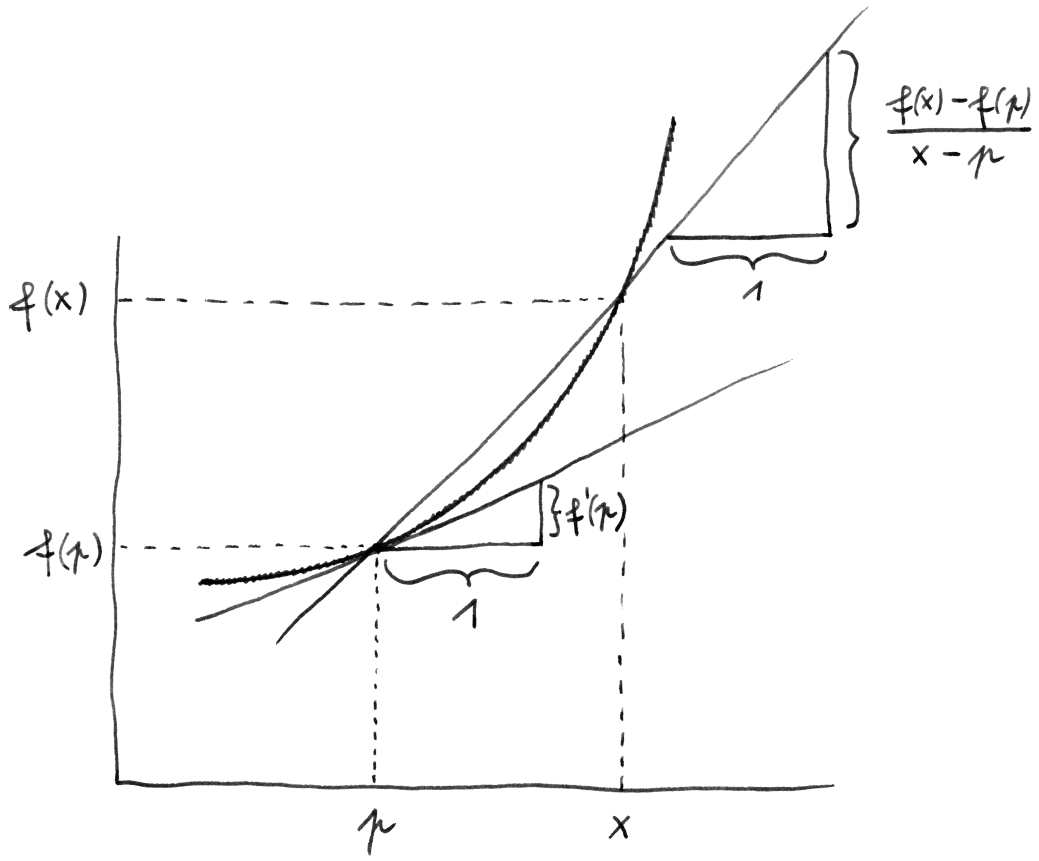
Wir kürzen diese Aussage ab durch $f'(p) = b$ oder $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(p) = b$ oder, wenn die Funktion $x \mapsto f(x)$ durch einen größeren Ausdruck in x gegeben ist, durch

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=p} f(x) = b$$

10.5.3.3. Jede nicht vertikale alias nicht zur y-Achse parallele Gerade in der Ebene ist die Lösungsmenge genau einer Gleichung der Gestalt $y = a + bx$. Die reelle Zahl b heißt in diesem Fall die **Steigung** unserer Gerade. Anschaulich bedeutet der **Differenzenquotient**

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

die Steigung der Gerade durch die Punkte $(p, f(p))$ und $(x, f(x))$. Diese Gerade heißt auch eine **Sekante**, lateinisch für „Schneidende“, da sie eben den Graphen unserer Funktion in den beiden besagten Punkten schneidet. Der Grenzwert $f'(p)$



Eine Sekantensteigung und die Tangentensteigung der durch den gezahnten Graphen dargestellten Funktion

der Sekantensteigungen bedeutet anschaulich die Steigung der **Tangente**, lateinisch für „Berührende“, an den Graphen von f im Punkt $(p, f(p))$. Die Umkehrung dieser Anschauung liefert auch eine präzise Definition besagter Tangente als der Gerade durch den Punkt $(p, f(p))$ mit der Steigung $f'(p)$.

10.5.3.4 (**Differenzierbarkeit, Umformulierungen der Definition**). Wir geben noch zwei Umformulierungen der Definition der Differenzierbarkeit. Ist $D \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge, so ist nach 10.3.5.7 eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei p mit Ableitung $f'(p) = b$ genau dann, wenn es eine Funktion $\varphi = \varphi_p : D \to \mathbb{R}$ gibt, die stetig ist bei p mit Funktionswert $\varphi(p) = b$ alias $\lim_{x\to p} \varphi(x) = \varphi(p) = b$ derart, daß für alle $x \in D$ gilt

$$f(x) = f(p) + (x - p)\varphi(x)$$

Das bedeutet, daß die **Sekantensteigungsfunktion** $\varphi(x) := (f(x)-f(p))/(x-p)$ durch die Vorschrift $\varphi(p) = b$ stetig an die Stelle p fortgesetzt werden kann. In nochmals anderen Formeln ist unsere Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei p mit Ableitung $f'(p) = b$ genau dann, wenn gilt

$$f(p + h) = f(p) + bh + \varepsilon(h)h$$

für eine Funktion ε, die stetig ist bei Null und die dort den Wert $\varepsilon(0) = 0$ annimmt, in Formeln $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$. Hierbei ist zu verstehen, daß die Funktion ε definiert sein soll auf der Menge aller h mit $h + p \in D$. Diese Formulierung des Ableitungsbegriffs hat den Vorteil, besonders gut zum Ausdruck zu bringen, inwiefern für festes p und kleines h der Ausdruck $f(p) + bh$ eine besonders gute Approximation von $f(p + h)$ ist.

Beispiele 10.5.3.5. Eine konstante Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist an jeder Stelle differenzierbar mit Ableitung Null. Die Funktion $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ hat bei jedem Punkt p die Ableitung $\mathrm{id}'(p) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}(p) = 1$.

Lemma 10.5.3.6. *Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist differenzierbar bei jedem Punkt von $\mathbb{R}^\times$ und ihre Ableitung bei einer Stelle $p \in \mathbb{R}^\times$ ist $-\frac{1}{p^2}$.*

Beweis. Wir rechnen $\lim_{x\to p} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{p}}{x-p} = \lim_{x\to p} \frac{-1}{xp} = -\frac{1}{p^2}$ nach 10.3.5.9. □

Lemma 10.5.3.7. *Ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ mit halboffenem Definitionsbereich D differenzierbar bei $p \in D$, so ist f stetig bei p.*

Beweis. Das folgt aus der Darstellung $f(x) = f(p) + (x - p)\varphi(x)$ mit φ stetig bei p aus 10.5.3.4. □

10.5.3.8. Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ definiert auf einem offenen Intervall um einen Punkt $p \in (a, b)$ und existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x \nearrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \quad \text{beziehungsweise} \quad \lim_{x \searrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

im Sinne von 10.3.5.41, so nennen wir sie die **linksseitige** beziehungsweise die **rechtsseitige Ableitung** von f an der Stelle p. Nach der Charakterisierung 10.3.5.41 eines Grenzwerts als übereinstimmender rechts- und linksseitiger Grenzwert ist f differenzierbar bei p genau dann, wenn dort die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung existieren und übereinstimmen. Man erkennt so zum Beispiel, daß der Absolutbetrag $\mathrm{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ nicht differenzierbar ist bei $p = 0$, da dort die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung zwar existieren, aber nicht übereinstimmen.

10.5.4 Ableitungsregeln

Proposition 10.5.4.1. *Seien Funktionen $f, g : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ für D halboffen differenzierbar bei $p \in D$. So sind auch die Funktionen $f + g$ und fg differenzierbar bei p und es gilt*

$$(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p) \quad \textit{und} \quad (fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$$

Beweis. Wir schreiben wie in 10.5.3.4

$$\begin{array}{rclclcl} f(p+h) & = & f(p) & + & f'(p)h & + & \varepsilon(h)h \\ g(p+h) & = & g(p) & + & g'(p)h & + & \hat{\varepsilon}(h)h \end{array}$$

für Funktionen $\varepsilon, \hat{\varepsilon}$, die stetig sind bei Null und die dort verschwinden. Lassen wir der Übersichtlichkeit halber alle (p) weg, so liest sich das

$$\begin{array}{rclclcl} f(p+h) & = & f & + & f'h & + & \varepsilon(h)h \\ g(p+h) & = & g & + & g'h & + & \hat{\varepsilon}(h)h \end{array}$$

Durch Addieren beziehungsweise Multiplizieren dieser Gleichungen erhalten wir dann

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(p+h) & = & (f+g)(p) + [f' + g']\,h \ + \big(\varepsilon(h) + \hat{\varepsilon}(h)\big)h \\ (fg)(p+h) & = & (fg)(p) + [f'g + fg']\,h \\ & & +\big(\varepsilon(h)g + f\hat{\varepsilon}(h) + (f' + \varepsilon(h))(g' + \hat{\varepsilon}(h))h\big)h \end{array}$$

Nach unseren Kenntnissen über stetige Funktionen steht aber in der letzten eckigen Klammer auf der rechten Seite jeder dieser Gleichungen eine Funktion, die stetig ist bei $h = 0$ und die dort den Wert Null annimmt. $\square$

Definition 10.5.4.2. Ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ mit D halboffen differenzierbar an jedem Punkt von D, so nennen wir f **differenzierbar auf** D und nennen die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}, p \mapsto f'(p)$ ihre **Ableitung**.

Beispiel 10.5.4.3. Die Funktion $x \mapsto 1/x$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^\times$ mit Ableitung $-1/x^2$. Sind f und g differenzierbar, so auch $f + g$ und fg und für ihre Ableitungen gelten die **Summenregel** und die **Produktregel** oder **Leibniz-Regel**

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{und} \quad (fg)' = f'g + fg'$$

Korollar 10.5.4.4 (Ableiten ganzzahliger Potenzen). *Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und unter der Voraussetzung $x \neq 0$ im Fall $n \leq 0$ ist die Ableitung der Funktion $x \mapsto x^n$ die Funktion $x \mapsto nx^{n-1}$.*

10.5.4.5. Im Fall $n = 0$ ist die Ableitung der konstanten Funktion $x^0 = 1$ natürlich überall definiert und Null, kann aber nur für $x \neq 0$ in der Form $0x^{-1}$ geschrieben werden.

Beweis. Man zeigt das durch vollständige Induktion über n separat für $n \geq 0$ und $n \leq -1$. □

Satz 10.5.4.6 (Kettenregel). *Seien $D, E \subset \mathbb{R}$ halboffene Teilmengen und $f : D \to \mathbb{R}$ sowie $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen und es gelte $f(D) \subset E$. Sei f differenzierbar bei $p \in D$ und g differenzierbar bei $f(p)$. So ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei p mit Ableitung*

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$$

Beweis. Der besseren Übersichtlichkeit halber benutzen wir hier Großbuchstaben für die Ableitungen und setzen $f'(p) = L$ und $g'(f(p)) = M$. Wir haben

$$\begin{aligned} f(p + h) &= f(p) + Lh + \varepsilon(h)h \\ g(f(p) + k) &= g(f(p)) + Mk + \hat{\varepsilon}(k)k \end{aligned}$$

für Funktionen ε und $\hat{\varepsilon}$, die stetig sind bei Null und die dort verschwinden. Wir erhalten durch Einsetzen von $Lh + \varepsilon(h)h$ für k sofort

$$\begin{aligned} g(f(p + h)) &= g\big(f(p) + Lh + \varepsilon(h)h\big) \\ &= g(f(p)) + MLh + M\varepsilon(h)h + \hat{\varepsilon}(Lh + \varepsilon(h)h)(L + \varepsilon(h))h \end{aligned}$$

Es ist nun aber offensichtlich, daß sich hier die Summe der Terme ab dem dritten Summanden einschließlich in der Gestalt $\eta(h)h$ schreiben läßt für eine Funktion η, die stetig ist bei Null und die dort verschwindet, und wir erhalten

$$(g \circ f)(p + h) = (g \circ f)(p) + MLh + \eta(h)h$$ □

Proposition 10.5.4.7 (Quotientenregel). *Sei $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ eine Funktion ohne Nullstelle und $D \subset \mathbb{R}$ halboffen.*

1. *Ist f differenzierbar bei $p \in D$, so ist auch $1/f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/f(x)$ differenzierbar bei p und hat dort die Ableitung $-f'(p)/f(p)^2$;*

2. *Ist zusätzlich $g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei p, so ist auch g/f differenzierbar bei p mit Ableitung*

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(p) = \frac{g'(p)f(p) - g(p)f'(p)}{f(p)^2}$$

Beweis. Teil 1 folgt sofort aus der Formel 10.5.3.6 für die Ableitung de Funktion $x \mapsto 1/x$ mit der Kettenregel. Teil 2 folgt aus Teil 1 mit der Produktregel. □

10.5.4.8. Seien $D \subset \mathbb{R}$ halboffen und $g, f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Hat f keine Nullstelle auf D, so ist auch g/f differenzierbar auf D mit der Ableitung

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$$

Lemma 10.5.4.9 (Ableitung der Exponentialfunktion). *Die Exponentialfunktion ist ihre eigene Ableitung, in Formeln $\exp'(p) = \exp(p)\ \forall p \in \mathbb{R}$.*

Beweis. In 10.6.1.16 werden wir lernen, daß man „Potenzreihen gliedweise differenzieren darf“. Da wir das aber bis jetzt noch nicht wissen, müssen wir etwas mehr arbeiten. Wir bestimmen zunächst die Ableitung der Exponentialfunktion an der Stelle $p = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\exp'(0) &= \lim_{x\to 0} \tfrac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0} \\
&= \lim_{x\to 0} \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \tfrac{x^{i-1}}{i!} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(1 + x \textstyle\sum_{i=2}^{\infty} \tfrac{x^{i-2}}{i!}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

nach unseren Erkenntnissen zum Grenzwert durch Einquetschen 10.3.5.35 und Grenzwert von Summe und Produkt 10.3.5.34, da ja $|\sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^{i-2}}{i!}|$ für $|x| \leq 1$ beschränkt ist durch die Euler'sche Zahl e. Um $\exp'(p)$ für beliebiges p zu bestimmen, rechnen wir

$$\begin{aligned}
\exp'(p) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{\exp(p+h)-\exp(p)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{\exp(h)-1}{h} \exp(p) \\
&= \exp(p)
\end{aligned}$$

Hier verwenden wir im letzten Schritt den schon behandelten Fall $p = 0$ und formal im ersten Schritt eine der Verknüpfungsregeln für Grenzwerte aus 10.3.5.27, um den Grenzwert $x \to p$ in einen Grenzwert $h \to 0$ umzuformen. □

10.5.4.10 (**Ableitung der trigonometrischen Funktionen**). Ganz genau wie im vorhergehenden Beweis zeigt man, daß Sinus und Cosinus bei Null differenzierbar sind mit der Ableitung $\sin'(0) = 1$ und $\cos'(0) = 0$. Mit der Additionsformel $\sin(t + h) = \sin(t)\cos(h) + \cos(t)\sin(h)$ folgt $\sin' = \cos$ und mit der anderen Additionsformel $\cos' = -\sin$.

Satz 10.5.4.11 (**Ableitung von Umkehrfunktionen**). *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall sowie $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton, stetig auf I und differenzierbar bei $p \in I$ mit Ableitung $f'(p) \neq 0$. So ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $q = f(p)$ mit Ableitung*

$$(f^{-1})'(q) = 1/f'(f^{-1}(q))$$

Beweis. Nach unseren Annahmen gibt es eine stetige Funktion ohne Nullstelle $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) - f(p) = (x - p)\varphi(x)$ und $\varphi(p) = f'(p)$. Setzen wir hier $x = f^{-1}(y)$, so ist $\psi = 1/(\varphi \circ f^{-1}) : f(I) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $(y - q)\psi(y) = f^{-1}(y) - f^{-1}(q)$ und $\psi(q) = 1/f'(p)$. □

Beispiel 10.5.4.12. Die **Ableitung des Logarithmus** ist mithin

$$\log'(q) = \frac{1}{\exp(\log q)} = \frac{1}{q}$$

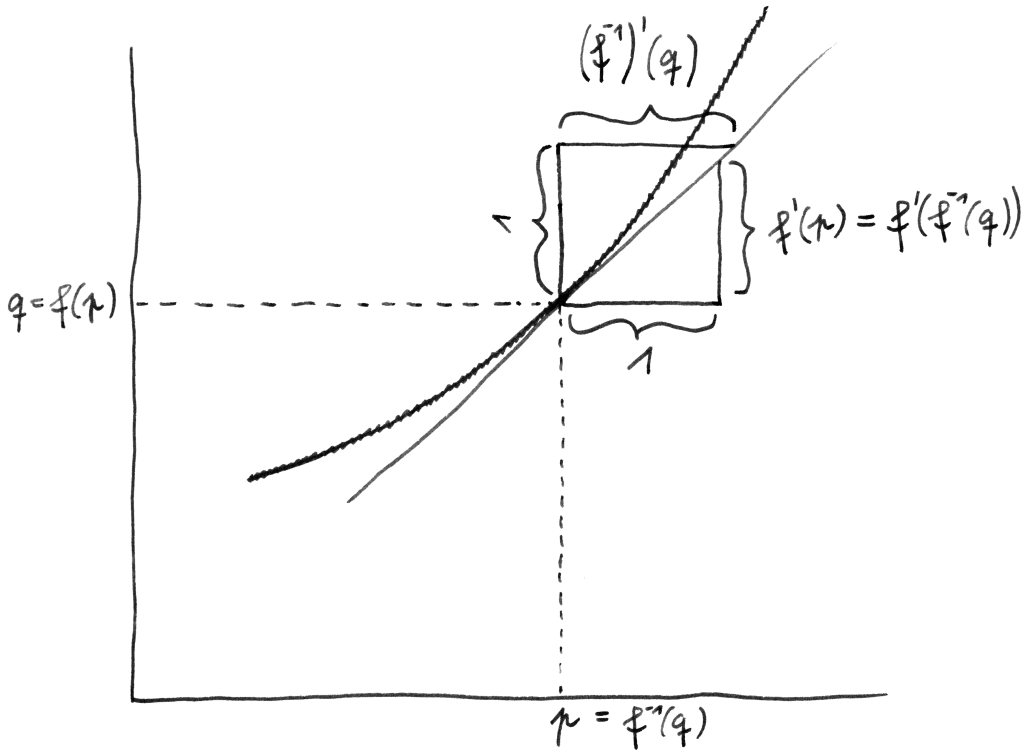
Damit ergibt sich für alle $a \in \mathbb{R}$ die **Ableitung der allgemeinen Potenzen**, also der Funktionen $(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$, zu $x \mapsto ax^{a-1}$. In der Tat, nach Definition gilt ja $x^a = \exp(a \log x)$, die Ableitung wird also $a\frac{1}{x}\exp(a \log x) = ax^{a-1}$.

Beispiel 10.5.4.13. Der Arcussinus ist nach 10.5.4.11 differenzierbar auf $(-1, 1)$ und seine Ableitung ergibt sich mit unserer Regel für die Ableitung einer Umkehrfunktion zu

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= 1/(\cos(\arcsin x)) \\ &= 1/\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} \\ &= 1/\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Beispiel 10.5.4.14. Die Ableitung des Tangens ergibt sich mit der Quotientenregel zu $\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$. Die Ableitung von $\arctan$ ergibt sich mit der Regel 10.5.4.11 über die Ableitung der Umkehrfunktion zu

$$\arctan'(t) = \frac{1}{1 + t^2}$$



Veranschaulichung der Formel 10.5.4.11 für die Ableitung von Umkehrfunktionen

Lemma 10.5.4.15. *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar.

Beweis. Wir betrachten allgemeiner für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) \quad = \quad \begin{cases} x^{-n}\,\mathrm{e}^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

und zeigen, daß sie differenzierbar ist mit Ableitung $f_n' = -nf_{n+1} + f_{n+2}$. Damit sind wir dann natürlich fertig. Das einzige Problem ist die Ableitung an der Stelle $p = 0$, wo wir nachweisen müssen, daß die Sekantensteigungen „von rechts“ auch gegen Null streben, daß also für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x \searrow 0} x^{-n-1}\,\mathrm{e}^{-1/x} = 0$$

Nun wissen wir aber nach der Definition von $\exp$, daß für jedes $m \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ gilt $\exp(x) > x^m/m!$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ gilt also $\exp(1/x) > x^{-n-2}/(n+2)!$ und wir folgern $0 < x^{-n-1}\,\mathrm{e}^{-1/x} < (n+2)!\,x$ für $x > 0$. □

Übungen

Übung 10.5.4.16 (**Eine differenzierbare Funktion mit unstetiger Ableitung**). Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2 \sin(x^{-1})$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$, aber ihre Ableitung ist nicht stetig beim Nullpunkt.

10.5.5 Folgerungen aus Eigenschaften der Ableitung

Definition 10.5.5.1. Eine Teilmenge der reellen Zahlen heißt **offen**, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist. In Formeln ist demnach eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ offen genau dann, wenn es für jeden Punkt $p \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subset U$.

Satz 10.5.5.2 (**Notwendige Bedingung für ein Extremum**). *Nimmt eine reellwertige Funktion, die auf einer offenen Teilmenge der reellen Zahlen definiert ist, an einem Punkt dieser offenen Teilmenge ihr Maximum oder ihr Minimum an, und ist sie dort differenzierbar, so verschwindet an diesem Punkt ihre Ableitung.*

10.5.5.3. In Formeln haben wir also

$$\big(f : \mathbb{R} \supseteq U \to \mathbb{R} \text{ diffbar bei } p \in U \text{ mit } f(x) \geq f(p)\ \forall x \in U\big) \Rightarrow f'(p) = 0.$$

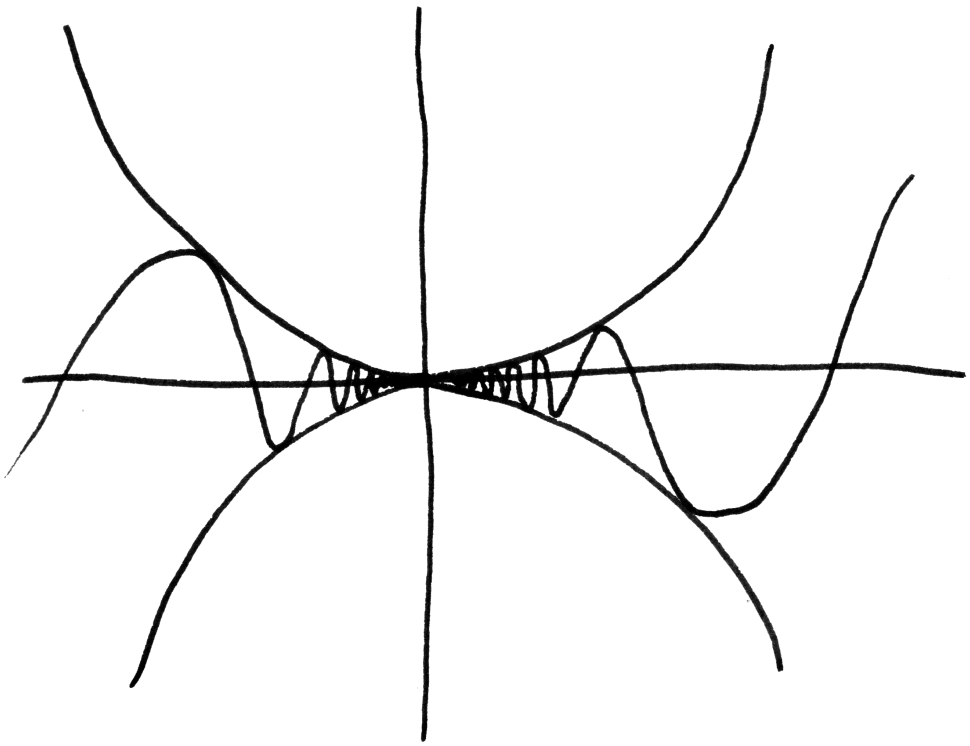


Illustration zu 10.5.4.16. Der Graph der Funktion ist zwischen zwei parabolischen Backen eingezwängt und hat deshalb am Ursprung Null Grenzwert der Sekantensteigungen, hat aber beliebig nah am Ursprung immer wieder Stellen mit Steigung Eins. Die entsprechend durch $x^2 \sin(x^{-2})$ gegebene Funktion wird sogar beliebig nah am Ursprung beliebig steil.

10.5.5.4. Die Bedingung, unsere Teilmenge sei offen, ist an dieser Stelle wesentlich: Gegeben reelle Zahlen $a < b$ nimmt etwa die Funktion $x \mapsto x$ auf dem Intervall $[a, b]$ ihr Minimum bei a und ihr Maximum bei b an, aber die Ableitung unserer Funktion verschwindet weder bei a noch bei b. Für Minima oder Maxima einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die auf (a, b) differenzierbar ist, kommen ganz allgemein nach unserem Satz nur in Frage: Einerseits Endpunkte des Intervalls, und andererseits die Punkte im Innern des Intervalls, an denen die Ableitung verschwindet. Mit etwas Glück können wir unter diesen Punkten dann durch Ausprobieren herauskriegen, wo das Minimum und das Maximum wirklich angenommen werden.

Beweis. Bezeichne $U \subset \mathbb{R}$ unsere offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}$ unsere Funktion. Nimmt f ein Maximum an bei $p \in U$, so gilt für die Sekantensteigungsfunktion $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ offensichtlich $\varphi(x) \geq 0$ für $x < p$ und $\varphi(x) \leq 0$ für $x > p$. Wenn der Grenzwert der Sekantensteigungen existiert, so folgt aus der Erhaltung 10.3.5.37 von Ungleichungen im Grenzwert $0 \leq \lim_{x \nearrow p} \varphi(x) = \lim_{x \to p} \varphi(x) = \lim_{x \searrow p} \varphi(x) \leq 0$ und damit ist dann dieser Grenzwert Null. Nimmt f ein Minimum an bei p, so argumentiert man analog. □

Beispiel 10.5.5.5. Das **Brechungsgesetz** behauptet, daß das Verhältnis vom Sinus des Eintrittswinkels zum Sinus des Austrittswinkels eines Lichtstrahls beim Übergang zwischen zwei Medien, sagen wir Luft und Wasser, konstant ist. Wir leiten es nun ab aus dem sogenannten **Fresnel'schen Prinzip**, nach dem ein Lichtstrahl „stets den schnellsten Weg nimmt". Ist sagen wir die Lichtgeschwindigkeit in Wasser das γ-fache der Lichtgeschwindigkeit in Luft, so sollte nach diesem Prinzip der Lichtstrahl mit den Bezeichnungen aus nebenstehendem Bild bei dem x in das Wasser eintauchen, für das der Ausdruck

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \gamma\sqrt{b^2 + (L - x)^2}$$

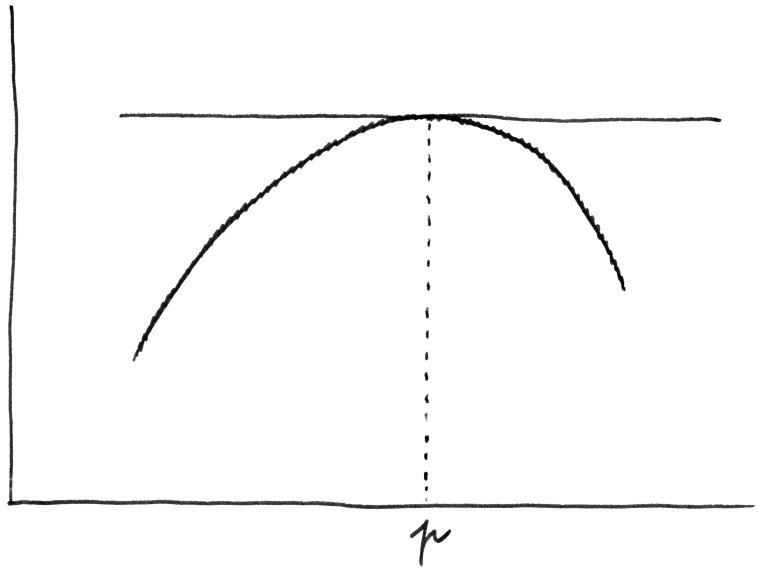
minimal wird. Ableiten liefert dafür die notwendige Bedingung

$$\frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \gamma\frac{-2(L - x)}{2\sqrt{b^2 + (L - x)^2}} = 0$$

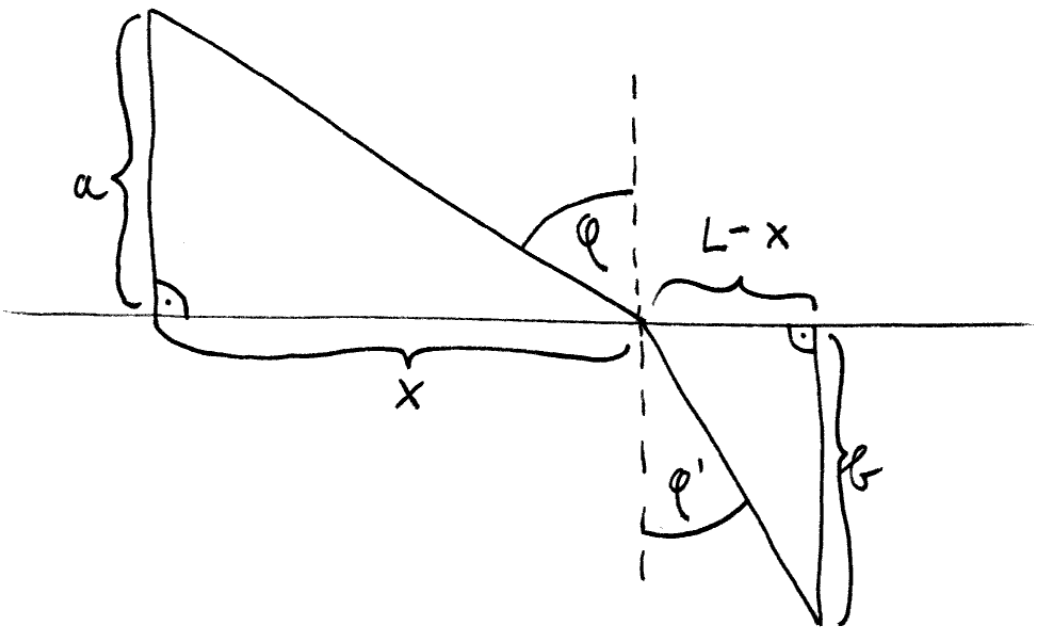
und damit steht das Brechnungsgesetz $\sin\varphi = \gamma \sin\varphi'$ auch schon da.

Satz 10.5.5.6 (von Rolle). *Seien $a < b$ aus $\bar{\mathbb{R}}$ gegeben und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall (a, b). Gilt dann $f(a) = f(b)$, so gibt es $p \in (a, b)$ mit $f'(p) = 0$.*

Beweis. Nach 10.5.1.5 gibt es Punkte $p, q \in [a, b]$, an denen f sein Maximum und sein Minimum annimmt. Liegt einer dieser Punkte im Innern (a, b) unseres



Veranschaulichung der notwendigen Bedingung für ein Maximum 10.5.5.2



Zum Brechungsgesetz

Intervalls, so verschwindet dort die Ableitung nach dem vorhergehenden Satz und wir sind fertig. Nimmt f sein Maximum und sein Minimum auf dem Rand des Intervalls an, so ist die Funktion f wegen unserer Annahme $f(a) = f(b)$ konstant und wir sind auch fertig. □

Korollar 10.5.5.7 (Mittelwertsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem ganzen kompakten Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall (a, b). So gibt es $p \in (a, b)$ mit*

$$f'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis. Man wende den vorhergehenden Satz von Rolle 10.5.5.6 an auf die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, die aus f entsteht durch „Subtraktion der globalen Sekanten“. □

Satz 10.5.5.8 (Erste Ableitung und Monotonie). *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. So gilt*

$$\begin{array}{lcl} f' > 0 & \Rightarrow & f \text{ wächst streng monoton} \\ f' \geq 0 & \Leftrightarrow & f \text{ wächst monoton} \\ f' < 0 & \Rightarrow & f \text{ fällt streng monoton} \\ f' \leq 0 & \Leftrightarrow & f \text{ fällt monoton} \\ f' = 0 & \Leftrightarrow & f \text{ ist konstant} \end{array}$$

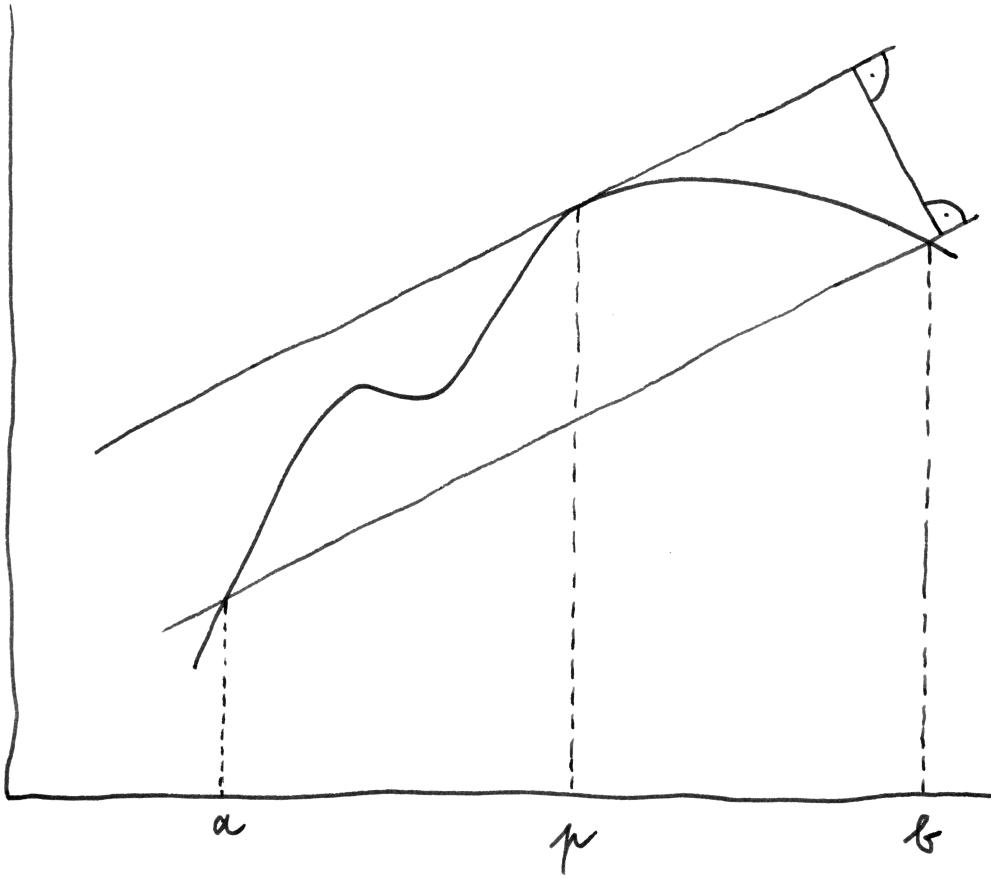
Beweis. Es reicht, die beiden ersten Aussagen zu zeigen. Wächst f nicht streng monoton, so gibt es $a < b$ mit $f(a) \geq f(b)$ und nach dem Mittelwertsatz finden wir $p \in (a, b)$ mit

$$f'(p) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq 0$$

Wächst f nicht monoton, so finden wir in derselben Weise $p \in I$ mit $f'(p) < 0$. Das zeigt schon mal $\Rightarrow$. Umgekehrt folgt aus f monoton wachsend, daß alle Sekantensteigungen nichtnegativ sind, und damit auch alle Grenzwerte von Sekantensteigungen. □

Korollar 10.5.5.9 (Funktionen, die ihre eigene Ableitung sind). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall. Genau dann stimmt eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ überein mit ihrer eigenen Ableitung, wenn sie ein Vielfaches der Exponentialfunktion ist, in Formeln*

$$f' = f \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = c \exp(x)$$



Veranschaulichung des Mittelwertsatzes 10.5.5.7

10.5.5.10. Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$ mit $f' = f$ muß keineswegs ein Vielfaches der Exponentialfunktion sein. Zum Beispiel wäre die Funktion f mit $f(x) = 0$ für $x < 0$ und $f(x) = 5\exp(x)$ für $x > 0$ auch eine Möglichkeit. Aber gut, $\mathbb{R}^\times$ ist ja auch kein Intervall.

Beweis. Bezeichne $I \subset \mathbb{R}$ unser mehrpunktiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ unsere differenzierbare Funktion mit $f = f'$. Die Ableitung der Funktion $f(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ ergibt sich mit der Produktregel zu $f'(x)\,\mathrm{e}^{-x} - f(x)\,\mathrm{e}^{-x} = 0$, mithin ist die Funktion $f(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ konstant, sagen wir mit einzigem Funktionswert c, und wir folgern $f(x) = c\,\mathrm{e}^x \ \forall x \in I$. □

10.5.5.11 (**Terminologisches zu Intervallen**). Ein reelles Intervall ist halboffen im Sinne unserer Definition 10.5.3.1 genau dann, wenn es nicht aus einem einzigen Punkt besteht. In der Literatur wird der Begriff „halboffen“ meist abweichend verwendet für Intervalle, die weder offen noch kompakt sind, also für reelle Intervalle der Gestalt $(a, b]$ oder $[a, b)$. Bei uns heißen jedoch auch Intervalle der Gestalt $[a, b]$ mit $a < b$ halboffen, da sie eben halboffen sind als Teilmengen von $\mathbb{R}$ im Sinne der obigen Definition. Da aber der Begriff eines „halboffenen Intervalls“ schon so fest besetzt ist und da auch der Terminus „unendliches Intervall“ vermutlich eher als „Intervall unendlicher Länge“ verstanden wird, will ich stattdessen lieber von „nicht einpunktigen Intervallen“ oder im Fall, daß sie auch nicht leer sind, wie bisher von „mehrpunktigen reellen Intervallen“ reden. So richtig gefällt mir das auch nicht, es hört sich so diskret an. Mir ist aber nichts Besseres eingefallen, und das Konzept wird uns so oft begegnen, daß es eine griffige Bezeichnung braucht.

Satz 10.5.5.12 (Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum). *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges reelles Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $p \in I$ ein Punkt mit $f'(p) = 0$. Sei zusätzlich die Ableitung f' von f differenzierbar bei p.*

1. *Gilt $f''(p) > 0$, so besitzt f ein* **isoliertes lokales Minimum** *bei p, als da heißt, es gibt $r > 0$ derart, daß gilt $f(q) > f(p)$ für alle $q \in I$ mit $0 < |q - p| < r$;*

2. *Gilt $f''(p) < 0$, so besitzt f ein* **isoliertes lokales Maximum** *bei p.*

Beweis. Wir schreiben

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(p) + (x - p)\varphi(x) \\ &= (x - p)\varphi(x) \end{aligned}$$

mit φ stetig in p und $\varphi(p) = f''(p) > 0$. So gibt also $r > 0$ mit $\varphi(q) > 0$ für $q \in I \cap (p - r, p + r)$, und wir folgern $f'(q) < 0$ für $q \in I \cap (p - r, p)$ und

$f'(q) > 0$ für $q \in I \cap (p, p+r)$. Unseren Funktion f fällt also streng monoton auf $I \cap (p-r, p)$ und wächst streng monoton auf $I \cap (p, p+r)$. Der andere Fall $f''(p) < 0$ wird analog behandelt. □

Definition 10.5.5.13. Wir nennen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall I **konvex** beziehungsweise **konkav**, wenn ihr Graph unter beziehungsweise über jeder seiner Sekanten liegt, wenn also in Formeln für alle $x < y < z$ aus I gilt

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

beziehungsweise $\geq$ für konkave Funktionen.

10.5.5.14. Man zeigt leicht, daß die Bedingung der Konvexität gleichbedeutend ist zu

$$f(tx + sz) \leq tf(x) + sf(z) \quad \forall s, t \in [0, 1] \text{ mit } s + t = 1.$$

Satz 10.5.5.15 (Zweite Ableitung und Konvexität). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. So gilt*

$$\begin{array}{rcl} f \text{ ist konvex} & \Leftrightarrow & f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \\ f \text{ ist konkav} & \Leftrightarrow & f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \end{array}$$

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage. Ist f nicht konvex, so gibt es x, y, z mit $x < y < z$ aber

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Nach dem Mittelwertsatz finden wir dann aber $\xi < \zeta$ mit $f'(\xi) > f'(\zeta)$ und bei nochmaligem Anwenden η mit $f''(\eta) < 0$. Ist umgekehrt f konvex, so reicht es nach 10.5.5.8 zu zeigen, daß f' monoton wächst. Kürzen wir die Steigung der Sekante durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ ab mit $s_{xy} := \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, so impliziert die Konvexität die Ungleichungskette

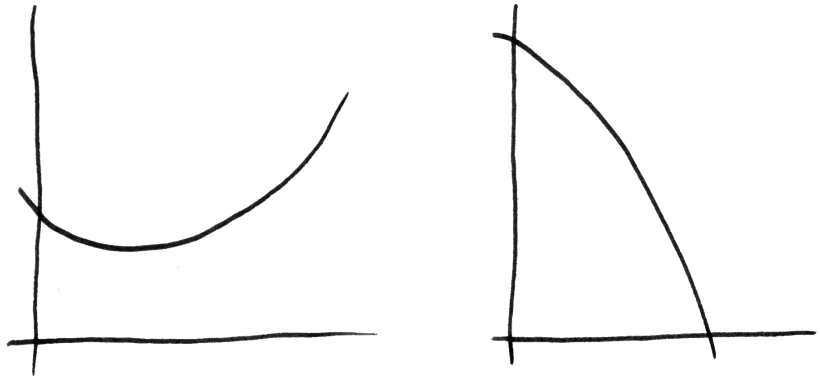
$$s_{xy} \leq s_{xz} \leq s_{yz}$$

Hier ist $s_{xy} \leq s_{yz}$ eine direkte Konsequenz der Konvexität, und da sicher gilt $(x - y)s_{xy} + (y - z)s_{yz} = (x - z)s_{xz}$, liegt s_{xz} als ein „gewichtetes Mittel“ zwischen s_{xy} und s_{yz}. Unsere Ungleichungskette schreiben wir aus zu

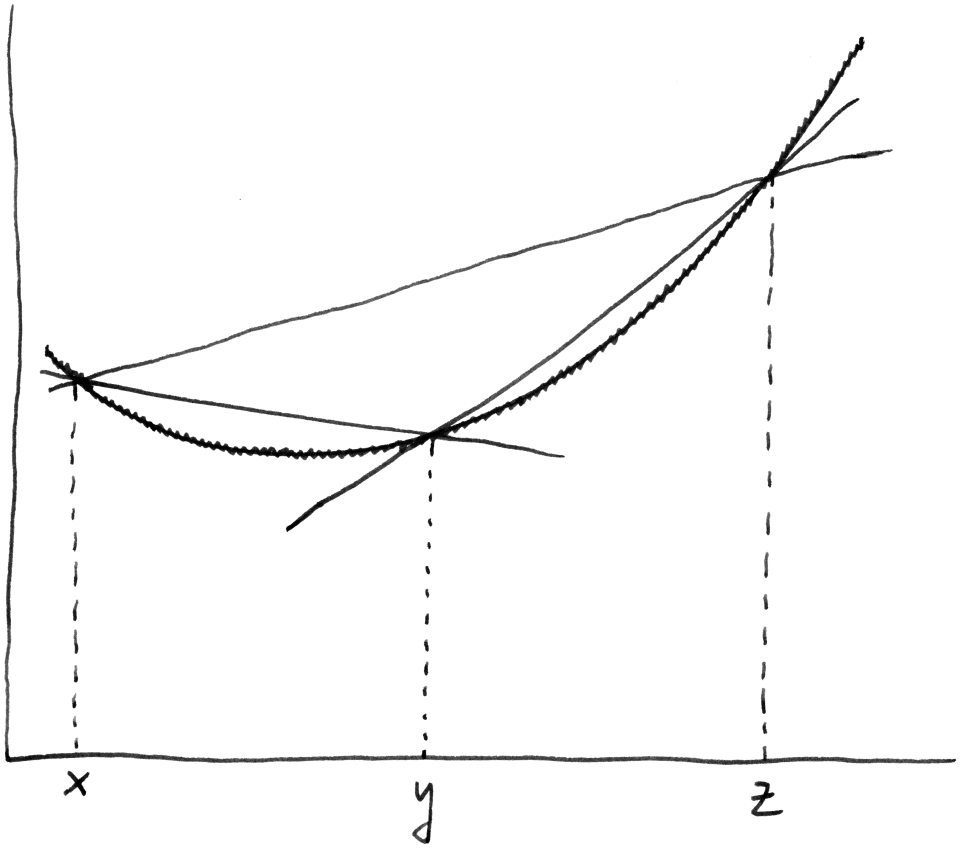
$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Die Sekantensteigungsfunktionen $y \mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ und $y \mapsto \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ wachsen insbesondere monoton auf $(x, z]$ beziehungsweise $[x, z)$ und im Grenzwert folgt

$$f'(x) \leq \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq f'(z)$$ □



Links der Graph einer konvexen, rechts der einer konkaven Funktion



Veranschaulichung unserer Ungleichungskette für die Sekantensteigungen bei konvexen Funktionen aus dem Beweis von 10.5.5.15

Definition 10.5.5.16. Wir nennen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall I **streng konvex** beziehungsweise **streng konkav**, wenn ihr Graph echt unter beziehungsweise echt über jeder Sekante liegt, wenn also in Formeln für alle $x < y < z$ aus I gilt

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

beziehungsweise $>$ für streng konkave Funktionen.

Satz 10.5.5.17. *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. So gilt*

$$\begin{array}{rcl} f \text{ ist streng konvex} & \Leftarrow & f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \\ f \text{ ist streng konkav} & \Leftarrow & f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \end{array}$$

Beweis. Übung. □

Übungen

Übung 10.5.5.18. An welchen Stellen nimmt die Funktion $[-1, 2] \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto |2 - x^2|$ ihr Minimum und Maximum an?

Ergänzende Übung 10.5.5.19. Bei welchem Verhältnis zwischen Durchmesser und Höhe umfaßt eine Konservendose mit fest vorgegebener Oberfläche das größtmögliche Volumen?

Übung 10.5.5.20. Eine differenzierbare Funktion auf einem mehrpunktigen Intervall, deren Ableitung beschränkt ist, ist gleichmäßig stetig.

Ergänzende Übung 10.5.5.21. Gegeben eine differenzierbare Funktion auf einem mehrpunktigen Intervall ist das Bild des fraglichen Intervalls unter der Ableitung unserer Funktion wieder ein Intervall. Hinweis: Mittelwertsatz. Man beachte, daß die Stetigkeit der Ableitung nicht vorausgesetzt wird.

Übung 10.5.5.22. Sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und löst die Differentialgleichung $f' = af$, so gilt $f(x) = f(0)\,\mathrm{e}^{ax}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Übung 10.5.5.23 (**Funktionen, die mindestens ihre eigene Ableitung sind**). Ist eine Funktion $f : [0, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(t) \le f(t)$ für alle $t \in [0, b)$, so folgt $f(t) \le f(0)\mathrm{e}^t$ für alle $t \in [0, b)$. Ist allgemeiner $f : [0, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, daß gilt $f'(t) \le \alpha f(t)$ für alle $t \in [0, b)$, so folgt $f(t) \le f(0)\mathrm{e}^{\alpha t}$ für alle $t \in [0, b)$.

Übung 10.5.5.24. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Eigenschaft $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$. Man zeige, daß dann f in I höchstens eine Nullstelle haben kann, und daß f links von dieser Nullstelle positiv und rechts davon negativ sein muß. Hinweis: Zwischen zwei verschiedenen

Nullstellen muß es nach Voraussetzung eine Nichtnullstelle geben und dann eine kleinste Nullstelle oberhalb und eine größte Nullstelle unterhalb dieser Nichtnullstelle. Von da aus finde man einen Widerspruch zu den Annahmen. Die Übung wird bei der Diskussion differentieller Ungleichungen helfen.

Ergänzende Übung 10.5.5.25. Man zeige, daß ein Punkt $(x, y) \in (0, 1)^2$ genau dann auf einem Geradensegment der Länge Eins mit einem Ende auf der x-Achse und dem anderen Ende auf der y-Achse liegt, wenn gilt $y^{2/3} + x^{2/3} \leq 1$. Hinweis: Man halte x fest und berechne für alle $a \in [x, 1]$ die Höhe $h_x(a)$ an der Stelle x eines Brettes der Länge 1, das bei a auf der x-Achse steht und an die y-Achse angelehnt ist. Man bestimme das Maximum dieser Höhen bei festem x und variablem a.

Übung 10.5.5.26. Gegeben reelle Zahlen $a, b \geq 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ zeige man die **Young'sche Ungleichung** $ab \leq p^{-1}a^p + q^{-1}b^q$. Hinweis: Man gehe von der Konvexität der Exponentialfunktion aus.

Übung 10.5.5.27. Gegeben reelle Zahlen $a, b \geq 0$ und $p \geq 1$ zeige man die Ungleichung $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$. Hinweis: Man gehe von der Konvexität der Funktion $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^p$ aus.

Ergänzende Übung 10.5.5.28. Für $P \subset \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen gilt

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p} = \infty$$

In der Tat folgt aus $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$ und der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung und der Entwicklung $(1 - 1/p)^{-1} = (1 + p^{-1} + p^{-2} \ldots)$ in eine geometrische Reihe, daß die Menge der partiellen Produkte des unendlichen Produkts $\prod_{p \in P}(1 - 1/p)^{-1}$ nicht beschränkt sein kann. Nun wende man den Logarithmus an und schätze ab.

10.5.6 Regeln von de l'Hospital

Satz 10.5.6.1 (Regeln von de l'Hospital). *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges reelles Intervall und p ein Häufungspunkt zu I in $\bar{\mathbb{R}}$. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen derart, daß gilt*

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = 0 \quad \textit{oder} \quad \lim_{x \to p} |g(x)| = \infty.$$

Haben g und g' keine Nullstelle auf $I \backslash p$ und existiert der Grenzwert des Quotienten der Ableitungen $\lim_{x \to p}(f'(x)/g'(x))$ in $\bar{\mathbb{R}}$, so existiert auch der Grenzwert des

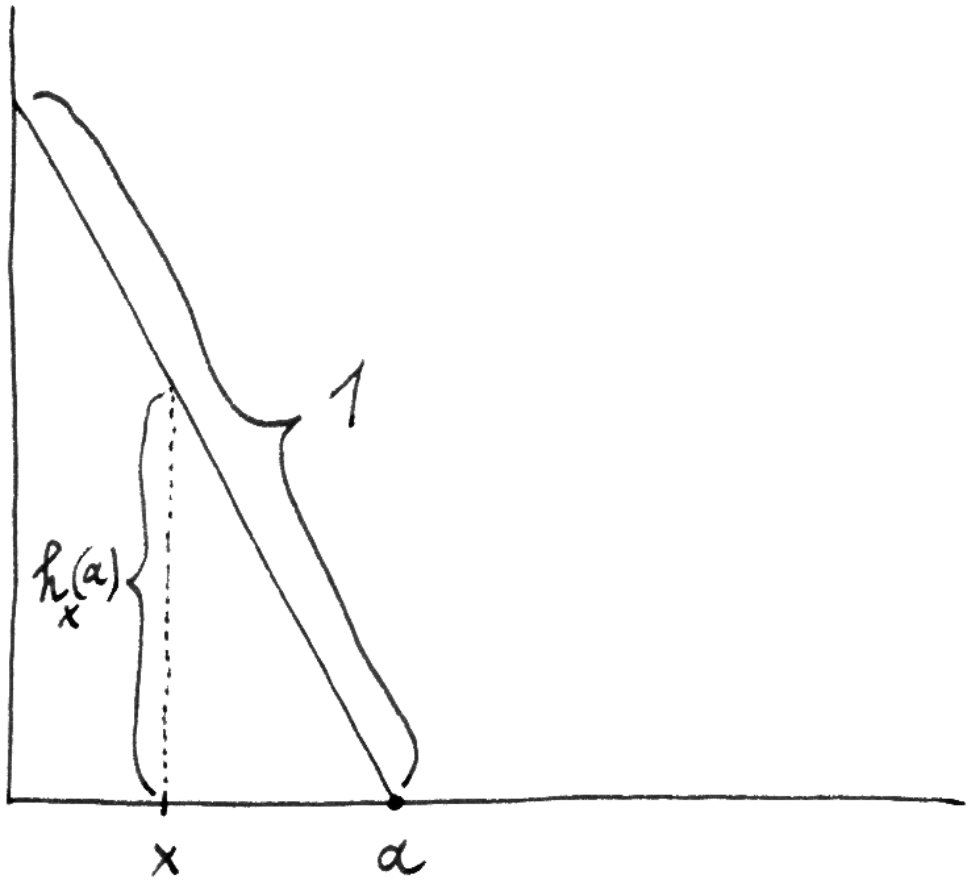


Illustration zu Übung 10.5.5.25.

Quotienten der Funktionen $\lim_{x\to p}(f(x)/g(x))$ *in* $\bar{\mathbb{R}}$ *und diese beiden Grenzwerte stimmen überein, in Formeln*

$$\lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to p}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

Beweis. Wir beginnen den Beweis mit folgendem

Lemma 10.5.6.2 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Seien* $a < b$ *in* $\bar{\mathbb{R}}$ *gegeben und seien* f, g *stetige reellwertige Funktionen auf dem kompakten Intervall* $[a, b]$*, die differenzierbar sind auf dem offenen Intervall* (a, b)*. So gibt es* $\xi \in (a, b)$ *mit*

$$f'(\xi)(g(a) - g(b)) = g'(\xi)(f(a) - f(b))$$

Vorschau 10.5.6.3. Um dieses Lemma anschaulich zu verstehen, mag man den Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ betrachten, der durch $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ gegeben wird. Es sagt dann, daß der Vektor $\gamma(a) - \gamma(b)$ und der Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t)$ nicht für alle $t \in (a, b)$ voneinander linear unabhängig sein können. Das ist eh klar, wenn $\gamma(a) - \gamma(b)$ Null ist oder $\gamma'(t)$ irgendwo den Wert Null annimmt, und scheint mir andernfalls zumindest anschaulich offensichtlich.

10.5.6.4. Verschwindet g' nirgends auf (a, b), so gilt $g(a) \neq g(b)$ nach dem Satz von Rolle 10.5.5.6 und wir können unsere Gleichung schreiben in der Form

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Ist $g(x) = x$, so erhalten wir unseren Mittelwertsatz 10.5.5.7 als Spezialfall. Der verallgemeinerte Mittelwertsatz wird in dieser Vorlesung ebenso wie die Regeln von de l'Hospital bei der Diskussion von Restgliedern in der Taylorentwicklung noch eine Rolle spielen.

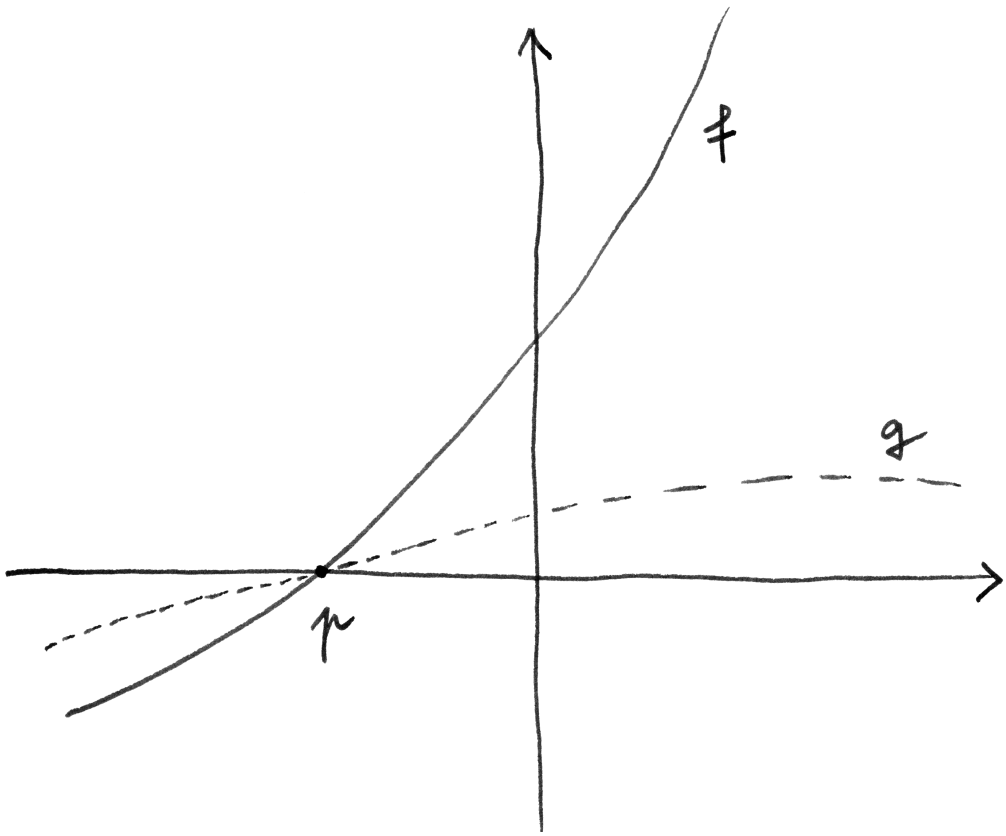
Beweis. Man wende den Satz von Rolle 10.5.5.6 an auf die Funktion

$$F(x) := f(x)\big(g(a)) - g(b)\big) \; - g(x)\big(f(a) - f(b)\big) \qquad \square$$

Jetzt zeigen wir die Regeln von de l'Hospital. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p \notin I$ annehmen, indem wir sonst I an der Stelle p in zwei Teile zerschneiden und den rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert bei p getrennt betrachten. Für jede Umgebung W des Grenzwerts

$$q := \lim_{x\to p} f'(x)/g'(x)$$

finden wir per definitionem eine Intervallumgebung V von p mit der Eigenschaft $\xi \in I \cap V \Rightarrow f'(\xi)/g'(\xi) \in W$. Für beliebige $a, b \in I \cap V$ mit $a \neq b$ gilt weiter



Veranschaulichung der Regel von de l'Hospital 10.5.6.1 im Fall $p \in \mathbb{R}$ unter der Annahme, daß beide Funktionen bei p nach Null streben. Es scheint mir anschaulich klar, daß der Grenzwert des Quotienten sich nicht ändert, wenn wir beide Funktionen durch ihre beste lineare Approximation bei p ersetzen, und das ist auch genau die anschauliche Bedeutung der Regel von de l'Hospital.

$g(a) \neq g(b)$, da nach Annahme die Ableitung von g keine Nullstelle auf $I \backslash p$ hat. Aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz 10.5.6.2 folgt dann

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} \in W \quad \text{für alle } a, b \in I \cap V \text{mit } a \neq b.$$

Von nun an müssen wir die beiden Fälle im Satz getrennt weiterbehandeln. Als erstes behandeln wir den Fall $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = 0$. Ist W ein kompaktes Intervall, so folgt $f(a)/g(a) \in W$ sofort, indem wir a festhalten, b gegen p streben lassen und uns an die Erhaltung von schwachen Ungleichungen im Grenzwert 10.3.5.37 erinnern. Die Behauptung im ersten Fall folgt dann, da für jeden Punkt $q \in \bar{\mathbb{R}}$ jede Umgebung von q eine kompakte Intervallumgebung von q umfaßt. Jetzt behandeln wir noch den Fall $\lim_{x \to p} |g(x)| = \infty$. Dafür schreiben wir unseren Quotienten um zu

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f(b)/g(b) - f(a)/g(b)}{1 - g(a)/g(b)}$$

und folgern unmittelbar

$$\frac{f(b)}{g(b)} \in \big(1 - g(a)/g(b)\big)W + f(a)/g(b) \quad \text{für alle } a, b \in I \cap V \text{mit } a \neq b.$$

Ist nun $a \in I \cap V$ fest gewählt, so finden wir für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$ eine Umgebung U_ε von p derart, daß gilt $b \in U_\varepsilon \cap I \Rightarrow |f(a)/g(b)| < \varepsilon,\ |g(a)/g(b)| < \varepsilon$ und insbesondere $a \neq b$. Damit sehen wir, daß wir für jede Umgebung W von q und jedes $\varepsilon \in (0, 1)$ eine Umgebung U_ε von p finden können mit

$$b \in U_\varepsilon \cap I \quad \Rightarrow \quad \frac{f(b)}{g(b)} \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)W + (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Die Behauptung folgt im zweiten Fall, da es für jede Umgebung W' von q eine Umgebung W von q und $\varepsilon \in (0, 1)$ gibt mit $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)W + (-\varepsilon, \varepsilon) \subset W'$. $\square$

Beispiel 10.5.6.5. Für $\lambda > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} (\log x)/x^\lambda &= \lim_{x \to \infty} (1/x)/\lambda x^{\lambda - 1} \\ &= \lim_{x \to \infty} 1/\lambda x^\lambda \\ &= 0 \end{aligned}$$

10.5.7 Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung

Satz 10.5.7.1 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Gegeben eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ auf einem mehrpunktigen reellen Intervall*

I und ein Punkt $a \in I$ ist die Funktion

$$\begin{array}{rccc} F: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array}$$

die einzige differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ und $F(a) = 0$.

10.5.7.2. Im Fall $x < a$ ist dies Integral unter Verwendung unserer Konvention 10.5.2.10 als $\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$ zu interpretieren.

Beweis. Für $p \in I$ rechnen wir

$$\lim_{x\to p} \frac{F(x) - F(p)}{x - p} = \lim_{x\to p} \frac{1}{x-p} \int_p^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

Da f stetig ist, finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß aus $|t - p| \le \delta$ folgt $f(p) - \varepsilon \le f(t) \le f(p) + \varepsilon$. Aus $0 < x - p \le \delta$ folgen also durch Bilden des Integrals und Teilen durch $(x - p)$ die Ungleichungen

$$f(p) - \varepsilon \ \le\ \frac{1}{x-p} \int_p^x f(t)\ \mathrm{d}t \ \le\ f(p) + \varepsilon$$

und aus $-\delta \le x - p < 0$ folgen mit zweimaligem Umdrehen der Ungleichungen beim Integrieren und beim Teilen durch $(x - p)$ dieselben Ungleichungen. Damit zeigt das ε-δ-Kriterium für Grenzwerte 10.3.5.12, daß der Ausdruck in der Mitte für $x \to p$ gegen $f(p)$ konvergiert. Es folgt $F'(p) = f(p)$ für alle $p \in I$. Ist $G : I \to \mathbb{R}$ auch differenzierbar mit $G' = f$, so verschwindet die Ableitung der Differenz $G - F$. Nach 10.5.5.8 ist diese Differenz also konstant. Haben wir zusätzlich $G(a) = 0$, so ist sie konstant Null und wir folgern $F = G$. □

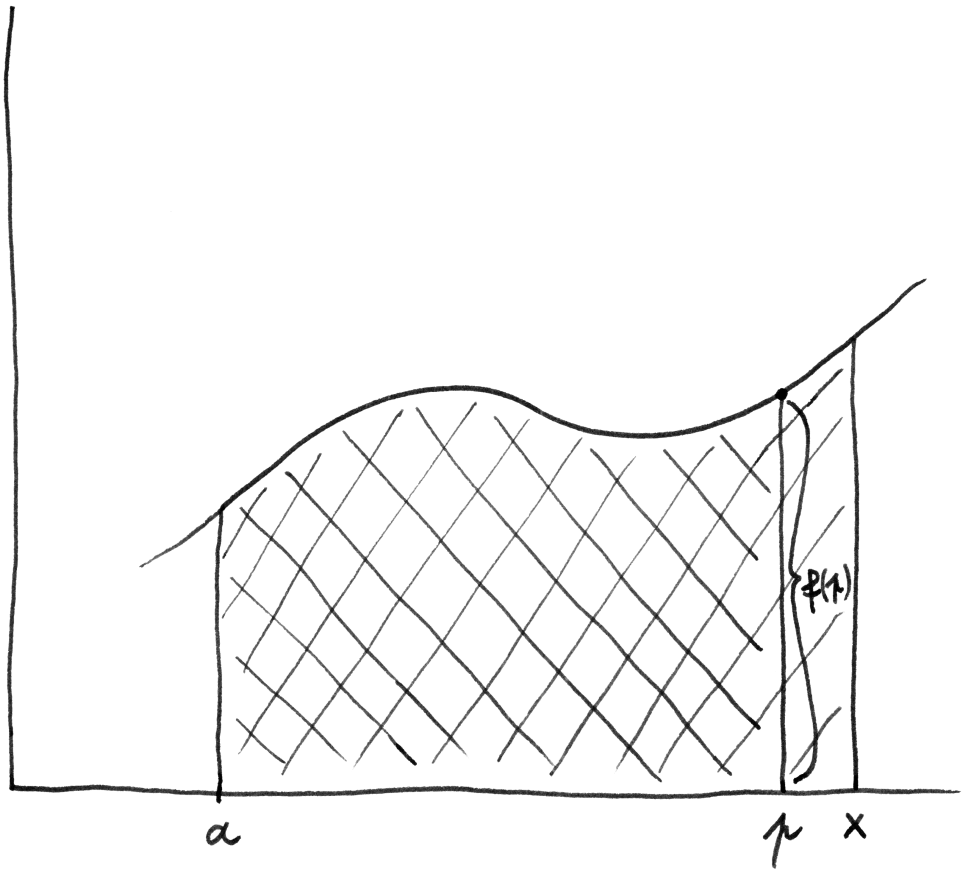
Korollar 10.5.7.3 (Integrieren mit Stammfunktionen). *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ist $G : I \to \mathbb{R}$ eine* **Stammfunktion von** *f, als da heißt eine differenzierbare Funktion mit Ableitung $G' = f$, so gilt für alle $a, b \in I$ die Formel*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = G(b) - G(a)$$

Beweis. Wir betrachten $F : I \to \mathbb{R}$ wie im Hauptsatz 10.5.7.1 und folgern aus der Eindeutigkeitsaussage von dort $F(x) = G(x) - G(a)$ für alle $x \in [a, b]$. □

10.5.7.4. Ist G ein komplizierterer Ausdruck, so ist es bequem und üblich, die Differenz $G(b) - G(a)$ mit $G(x)|_a^b$ abzukürzen. Man spricht einen solchen Ausdruck „G, ausgewertet zwischen den Grenzen a und b“. Für a, b positiv ergibt sich zum Beispiel

$$\int_a^b \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \log x|_a^b = \log b - \log a$$



Veranschaulichung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung 10.5.7.1. Die kreuzweise schraffierte Fläche stellt $F(p)$ dar, die irgendwie schraffierte $F(x)$, die einfach schraffierte $F(x) - F(p)$. Ich hoffe, man sieht, daß die Fläche unter der Kurve beim Verschieben der oberen Grenze um so stärker wächst, je größer dort der Wert unserer Funktion ist. Das ist qualitativ ausgedrückt die anschauliche Bedeutung des Hauptsatzes.

Die Ableitung von $\mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log|x|$ ist im übrigen $x \mapsto 1/x$, als da heißt, für a, b negativ würden wir $\log|b| - \log|a|$ erhalten. Über den Nullpunkt hinweg dürfen wir die Funktion $1/x$ aber trotzdem nicht in dieser Weise integrieren. Unser Korollar erlaubt das auch nicht, es trifft vielmehr nur Aussagen über die Integration von auf einem mehrpunktigen Intervall definierten stetigen Funktionen.

Übungen

Übung 10.5.7.5. Gegeben $\alpha \in \mathbb{R}$ zeige man, daß $\lim_{t\to\infty} \int_1^t x^\alpha \,\mathrm{d}x$ existiert in $\bar{\mathbb{R}}$ und daß dieser Grenzwert endlich ist genau dann, wenn gilt $\alpha < -1$. Des weiteren zeige man, daß $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x$ existiert in $\bar{\mathbb{R}}$ und daß dieser Grenzwert endlich ist genau dann, wenn gilt $\alpha > -1$. Anschaulich gesprochen ist also die Hyperbel $x \mapsto (1/x)$ gerade der Grenzfall, in dem sowohl die Fläche zwischen Kurve und x-Achse ab jedem x-Wert als auch symmetrisch die Fläche zwischen Kurve und y-Achse ab jedem y-Wert unendlich groß sind.

Ergänzende Übung 10.5.7.6. Der **Integral-Logarithmus** $\mathrm{Li} : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ wird erklärt durch die Vorschrift

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$$

Man zeige $\lim_{x\to\infty}(\log(x)\,\mathrm{Li}(x)/x) = 1$.

Übung 10.5.7.7. Eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Eigenschaften $|f(x)| \le 1$ und $|f''(x)| \le 1$ für alle x. Man zeige $|f'(x)| \le \sqrt{2}$ für alle x.

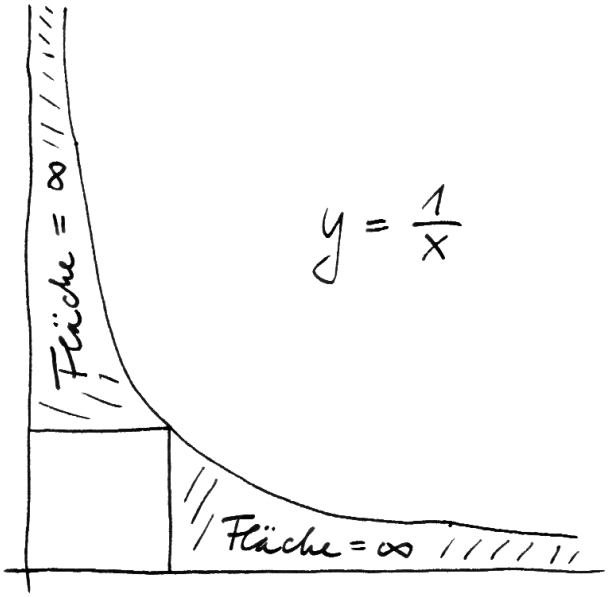
10.5.8 Integrationsregeln

Satz 10.5.8.1 (Integration durch Substitution). *Gegeben reelle Zahlen $a < b$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : g([a, b]) \to \mathbb{R}$ stetig gilt*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Im Fall $g(b) < g(a)$ ist das Integral rechts dabei der Konvention 10.5.2.10 gemäß als das Negative des Integrals über das Intervall $[g(b), g(a)]$ zu verstehen.

10.5.8.2. Es gibt durchaus differenzierbare Abbildungen, deren Ableitung nicht stetig ist, vergleiche 10.5.4.16. Das Wort „Substitution“ bedeutet ebenso wie „Prostitution“ auf lateinisch „Ersetzen“.



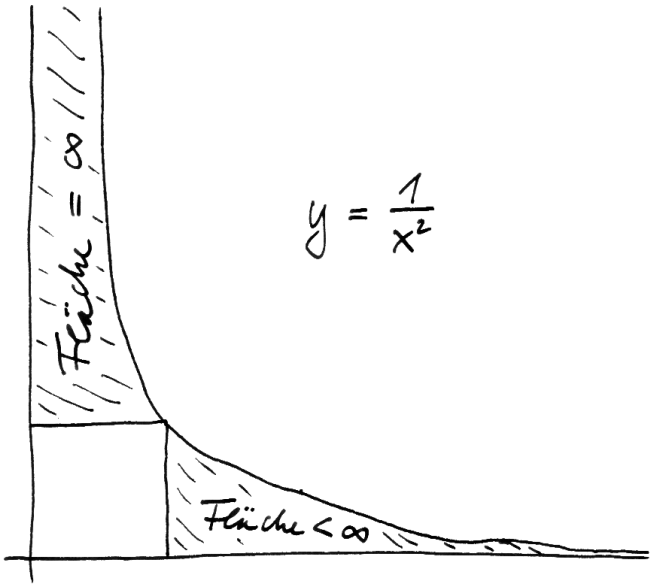


Illustration zu Übung 10.5.7.5.

Beweis. Ist g konstant, so verschwinden beide Seiten und die Formel gilt. Ist sonst F eine Stammfunktion von f, in Formeln $F' = f$, so ist $F \circ g$ nach der Kettenregel 10.5.4.6 eine Stammfunktion von $t \mapsto f(g(t))g'(t)$. Berechnen wir beide Integrale mithilfe dieser Stammfunktionen, so ergibt sich auf beiden Seiten der Wert $F(g(b)) - F(g(a))$. □

10.5.8.3 (**Anschauung für die Substitutionsregel**). Wächst g streng monoton, so kann man einen anschaulicheren Beweis geben, indem man $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = b$ äquidistant unterteilt und nach dem Mittelwertsatz $\xi_i \in (a_{i-1}, a_i)$ findet mit $g(a_i) - g(a_{i-1}) = g'(\xi_i)(a_i - a_{i-1})$. Damit gilt ja die Gleichheit von Riemannsummen

$$\sum_{i=1}^{r} f(g(\xi_i))g'(\xi_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{r} f(g(\xi_i))(g(a_i) - g(a_{i-1}))$$

Mithilfe der Beschreibung 10.5.2.11 des Integrals durch Riemann-Summen zeigt man dann, daß diese Gleichheit im Grenzübergang $r \to \infty$ gerade die Substitutionsregel liefert.

10.5.8.4. Als Gedächtnisstütze, die in 12.7.4 auch echte Bedeutung erhält, kann man sich merken, daß beim Substituieren von y durch $g(x)$ nicht nur $f(y)$ durch $f(g(x))$ ersetzt werden muß, sondern auch $\mathrm{d}y$ durch $g'(x)\,\mathrm{d}x$, wie es die Notation $g'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ suggeriert.

Beispiel 10.5.8.5. Indem wir uns das Integral etwas zurechtlegen, erhalten wir durch die Substitution $g(x) = x^2 = y$, $g'(x) = 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ leicht

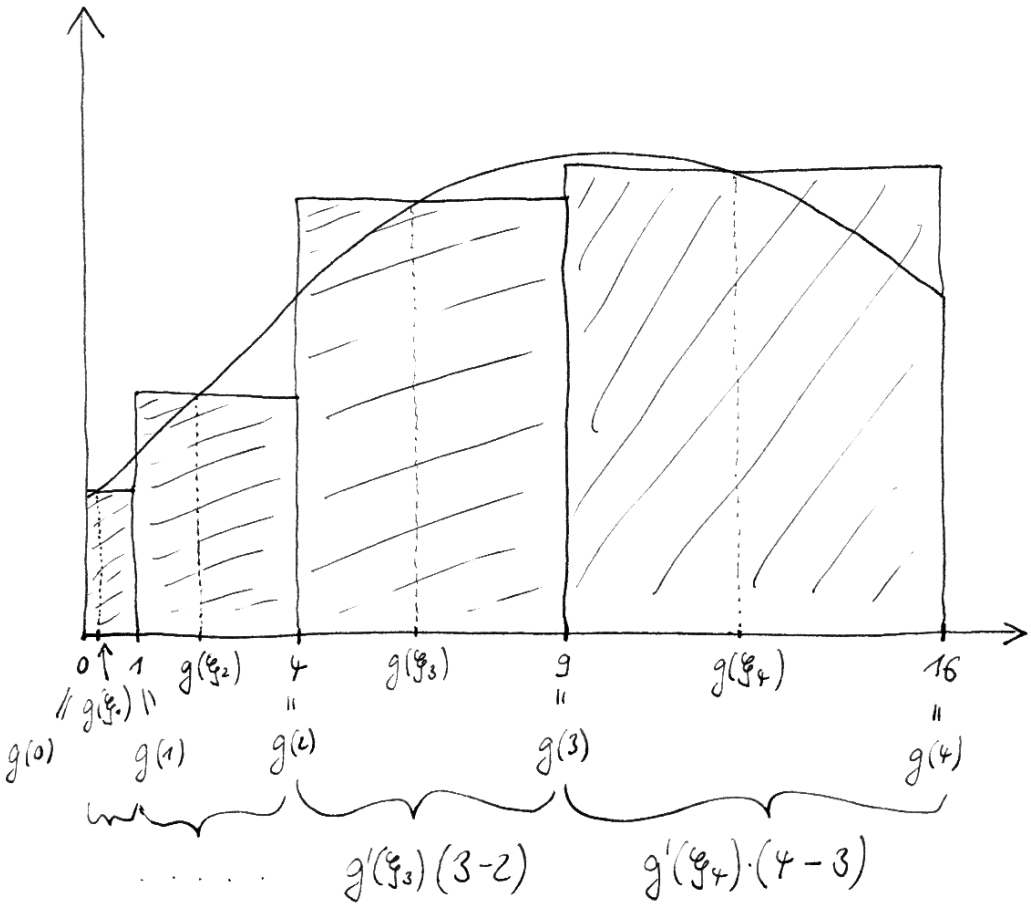
$$\int_a^b \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{2x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y}} = \sqrt{1+y}\,\Big|_{a^2}^{b^2} = \sqrt{1+x^2}\,\Big|_a^b$$

und als eine Stammfunktion des ursprünglichen Integranden ergibt sich die Funktion $\sqrt{1+x^2}$.

10.5.8.6. Beim Anwenden der Substitutionsregel wird man oft mit einer umkehrbaren Abbildung g arbeiten und die Regel in der Form

$$\int_\alpha^\beta f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$$

verwenden. Auch wenn g nicht umkehrbar ist, kann man in dieser Weise vorgehen und statt $g^{-1}(\alpha)$ und $g^{-1}(\beta)$ eben irgendwelche a, b wählen derart, daß g auf ganz $[a, b]$ stetig differenzierbar ist mit $\alpha = g(a)$ und $\beta = g(b)$. Meist arbeiten wir sogar ohne explizite Erwähnung der Grenzen: Suchen wir nur eine Stammfunktion, so kommt es auf die untere Grenze eh nicht an und die obere Grenze wird mitgedacht und nach gelungener Integration wieder „zurücksubstituiert“, wie es unsere Formel fordert.



Anschauliche Bedeutung der Substitutionsregel nach 10.5.8.3 im Fall $g(x) = x^2$. Die schraffierte Fläche stellt in diesem Spezialfall für $r = 4$ und das Intervall $[a, b] = [0, 4]$ die Summe

$$\sum_{i=0}^{r-1} f(g(\xi_i))g'(\xi_i)(a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=0}^{r-1} f(g(\xi_i))(g(a_{i+1}) - g(a_i))$$

dar. Die ξ_i sind mit dem Mittelwertsatz gerade so gewählt, daß gilt $g(a_{i+1}) - g(a_i) = g'(\xi_i)(a_{i+1} - a_i)$. Ich finde, man sieht sehr gut, daß diese Summen gegen $\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{16} f(y)\,\mathrm{d}y$ konvergieren.

Beispiel 10.5.8.7. Wir bestimmen eine Stammfunktion von $f(y) = y\sqrt{1-y}$ durch die Substitution $\sqrt{1-y} = x$, $y = 1 - x^2 = g(x)$, $\mathrm{d}y = -2x\,\mathrm{d}x$ zu

$$\begin{aligned}
\int y\sqrt{1-y}\ \mathrm{d}y &= \int (1-x^2)x(-2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int (2x^4 - 2x^2)\ \mathrm{d}x \\
&= \tfrac{2}{5}x^5 - \tfrac{2}{3}x^3 \\
&= \tfrac{2}{5}(1-y)^2\sqrt{1-y} - \tfrac{2}{3}(1-y)\sqrt{1-y}
\end{aligned}$$

Beispiel 10.5.8.8 (**Fläche des Einheitskreises**). Es gilt $\pi/2 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t$. In der schmutzigen Anschauung ist also π die Fläche des Einheitskreises. Um das zu prüfen, substituieren wir $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x\ \mathrm{d}x$ und erhalten

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\ \mathrm{d}x$$

Mithilfe der Formel $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, die ihrerseits aus den Additionsformel folgt, ergibt sich unser Integral mühelos zu

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

Satz 10.5.8.9 (**Partielle Integration**). *Gegeben reelle Zahlen $a < b$ und zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

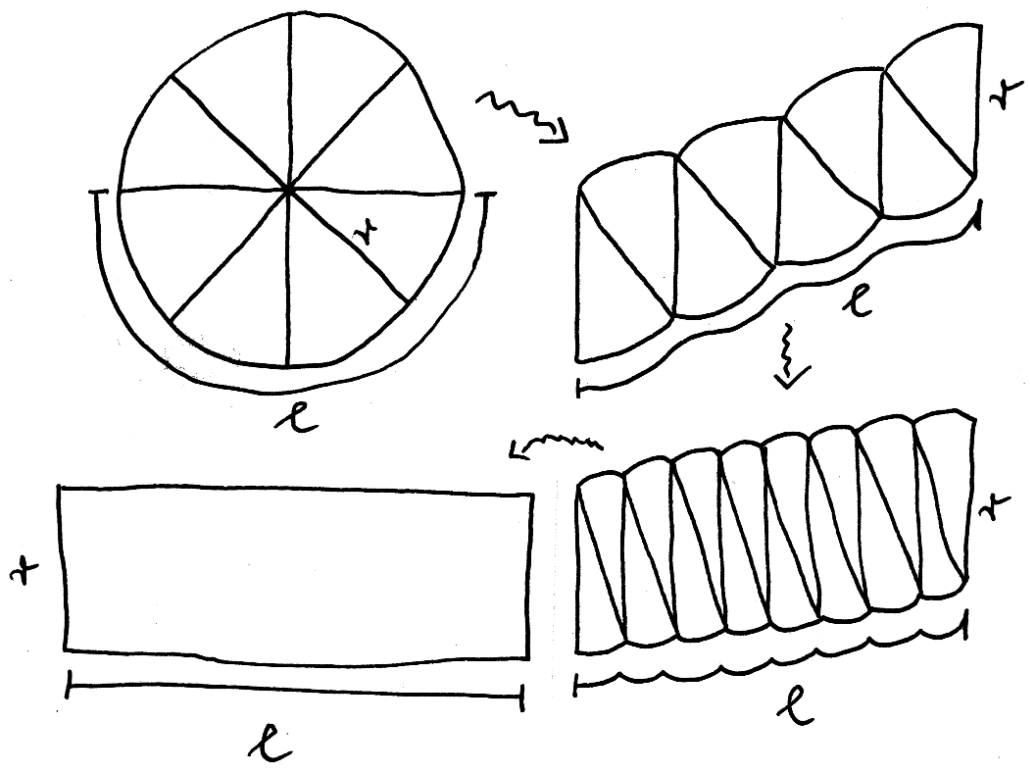
Beweis. Nach der Produktregel gilt $fg' = (fg)' - f'g$ auf $[a,b]$, folglich stimmen auch die Integrale dieser Funktionen überein. □

Beispiele 10.5.8.10.

$$\begin{aligned}
\int x^2\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x &= x^2\ e^x - \int 2x\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \\
&= x^2\,\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x + \int 2\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \\
&= (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \log x\ \mathrm{d}x &= x\log x - \int x\tfrac{1}{x}\ \mathrm{d}x \\
&= x\log x - x
\end{aligned}$$

10.5.8.11 (**Alternativer Zugang zur Exponentialfunktion**). Ich erkläre nun noch einen alternativen Zugang zur Exponentialfunktion, der unsere Definition über eine a priori unmotivierte Reihe vermeidet. Suchen wir eine stetig differenzierbare



Eine anschauliche Begründung dafür, daß die Fläche einer Kreisscheibe das Produkt aus Radius und halbem Umfang sein sollte. Der erste geschlängelte Pfeil deutet dabei ein Zerschneiden und Neu-Zusammenfügen an, die anderen einen Grenzübergang.

Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $g' = g$ und $g(0) = 1$, so haben wir nach der Substitutionsregel

$$x = \int_0^x \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{g'(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{g(x)} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$

Man definiert also notgedrungen eine Funktion $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift $\log(y) = \int_1^y \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$ und die gesuchte Funktion g muß deren Umkehrfunktion sein.

Satz* 10.5.8.12. *Die Kreiszahl π ist nicht rational, in Formeln $\pi \notin \mathbb{Q}$.*

10.5.8.13. Das wurde bereits 1766 von Johann Heinrich Lambert gezeigt. Der Beweis der Transzendenz von π ist schwieriger, mir gefällt die Darstellung in [Lor96]. Der hier gegebene Beweis der Irrationalität wirkt auf mich wie Zauberei. Ich folge der Darstellung von Stewart [Ste89].

Beweis. Man betrachte für reelles $\alpha \neq 0$ und natürliches $n \in \mathbb{N}$ das Integral

$$I_n = I_n(\alpha) = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x$$

Partielles Integrieren liefert $\alpha^2 I_n(\alpha) = 2n(2n-1)I_{n-1} - 4n(n-1)I_{n-2}$ für $n \geq 2$. Vollständige Induktion zeigt dann

$$\alpha^{2n+1} I_n = n!(P_n(\alpha)\sin\alpha + Q_n(\alpha)\cos\alpha)$$

für $P_n, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$ Polynome vom Grad $\leq 2n$. Wäre nun $\pi = a/b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und setzen wir oben $\alpha = \pi$ ein, so ergäbe sich, daß

$$\frac{a^{2n+1}}{n!} I_n(\pi)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ eine von Null verschiedene ganze Zahl sein muß. Das steht im Widerspruch dazu, daß dieser Ausdruck für $n \to \infty$ gegen Null strebt. Dasselbe Argument zeigt: Gegeben $\alpha \in \mathbb{Q}^\times$ können nicht $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ beide rational sein. □

Übungen

Übung 10.5.8.14. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **gerade**, wenn gilt $f(-x) = f(x)$ für alle x, und **ungerade**, wenn gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle x. Man zeige für jede ungerade stetige Funktion und alle reellen r die Formel $\int_{-r}^{r} f = 0$.

Übung 10.5.8.15. Man finde Stammfunktionen zu den Kehrwerten quadratischer Polynome, also zu Funktionen der Gestalt $x \mapsto (x^2 + ax + b)^{-1}$. Hinweis: Hat das fragliche quadratische Polynom zwei verschiedene reelle Nullstellen $\lambda \neq \mu$, so kann man unsere Funktion in der Gestalt $\alpha/(x - \lambda) + \beta/(x - \mu)$ schreiben. Sonst bringe man sie in die Form $((x + a/2)^2 + d)^{-1}$ mit $d \geq 0$ und erinnere sich an $\arctan'(t) = 1/(1 + t^2)$.

Übung 10.5.8.16. Man finde eine Stammfunktion von $\sqrt{1 - t^2}$. Hinweis: Bei der Berechnung 10.5.8.8 der Fläche des Einheitskreises haben wir das schon fast erreicht.

Übung 10.5.8.17. Man finde eine Stammfunktion für den Arcustangens. Hinweis: Man wende auf das Produkt $1 \cdot \arctan$ partielle Integration an.

Ergänzende Übung 10.5.8.18. Man führe die partiellen Integrationen des Beweises von 10.5.8.12 aus und prüfe die Induktionsbasis, als da heißt die Fälle $n = 0, 1$.

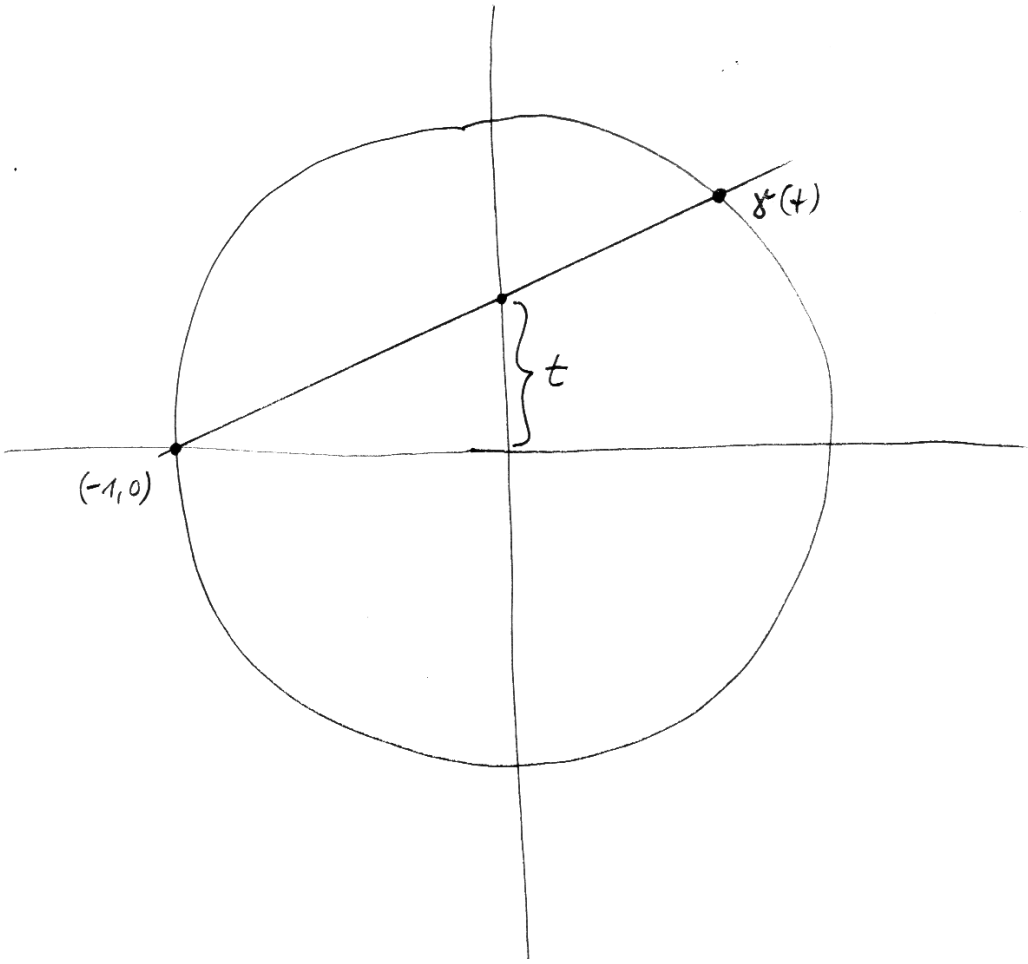
Übung 10.5.8.19. Man zeige $\lim_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \pi$.

Übung 10.5.8.20. Sei $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ der Einheitskreis. Wir konstruieren eine Bijektion $\gamma : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} S^1 \setminus (-1, 0)$, indem wir jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ den Schnittpunkt der Gerade durch $(-1, 0)$ und $(0, t)$ mit $S^1 \setminus (-1, 0)$ zuordnen. Man prüfe, daß diese Abbildung gegeben wird durch

$$\gamma(t) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right)$$

Man prüfe $\|\gamma'(t)\| = 2/(1 + t^2)$ und interpretiere die vorstehende bemerkenswerte Formel aus 10.5.8.19. Der Punkt $(\cos\tau, \sin\tau)$ für $\tau \in (-\pi, \pi)$ wird hierbei übrigends parametrisiert durch $t = \tan(\tau/2)$, wie man durch Rechnung oder elementargeometrische Überlegungen prüft. Man beachte auch die Ähnlichkeit zur Parametrisierung der Hyperbel 10.5.9.6.

Ergänzung 10.5.8.21. Die Abbildung γ aus der vorstehenden Übung liefert im Übrigen auch eine Bijektion von $\mathbb{Q}$ auf die Punkte von $S^1 \setminus (-1, 0)$ mit rationalen Koordinaten. Diese Bijektion ist äußerst hilfreich bei der Bestimmung aller **pythagoreischen Zahlentripel**, als da heißt, aller Tripel a, b, c von natürlichen Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$. Die Abbildung γ aus der vorstehenden Übung liefert allgemeiner sogar für jeden Körper k einer von Zwei verschiedenen Charakteristik eine Bijektion von k auf das Komplement des Punktes $(-1, 0)$ in der Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ in der Ebene $k^2 = k \times k$. In der algebraischen Geometrie können Sie dann lernen, wie man das zu einer Bijektion von $\mathbb{P}^1 k$ mit der Quadrik $Q \subset \mathbb{P}^2 k$ erweitert, die durch die homogenisierte Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ definiert wird.



Die Abbildung γ aus 10.5.8.20

Ergänzende Übung 10.5.8.22. Wie könnte ein Autor, der den Zugang 10.5.8.11 zur Exponentialfunktion gewählt hat, die Funktionalgleichung 10.4.2.10 beweisen?

Ergänzende Übung 10.5.8.23. Man zeige durch Vergleich mit dem Integral der Funktion $x^{-\alpha}$, daß für jedes $\alpha > 1$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$ konvergiert.

10.5.9 Hyperbolische trigonometrische Funktionen

Definition 10.5.9.1. Der **Sinus hyperbolicus** und **Cosinus hyperbolicus** sind die Abbildungen $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gegeben werden durch die Formeln

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

10.5.9.2. Den Graphen des Cosinus hyperbolicus nennt man auch die **Kettenlinie**, weil er dieselbe Gestalt hat wie eine hängende Kette. Wir zeigen das in 10.7.1.16 im Anschluß an die Diskussion der Bogenlänge.

10.5.9.3. Offensichtlich gilt $\sinh(0) = 0$, $\cosh(0) = 1$, $\sinh(-x) = -\sinh(x)$, und $\cosh(-x) = \cosh(x)$, die Ableitungen unserer Funktionen sind

$$\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh$$

es gelten $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ und die Additionstheoreme

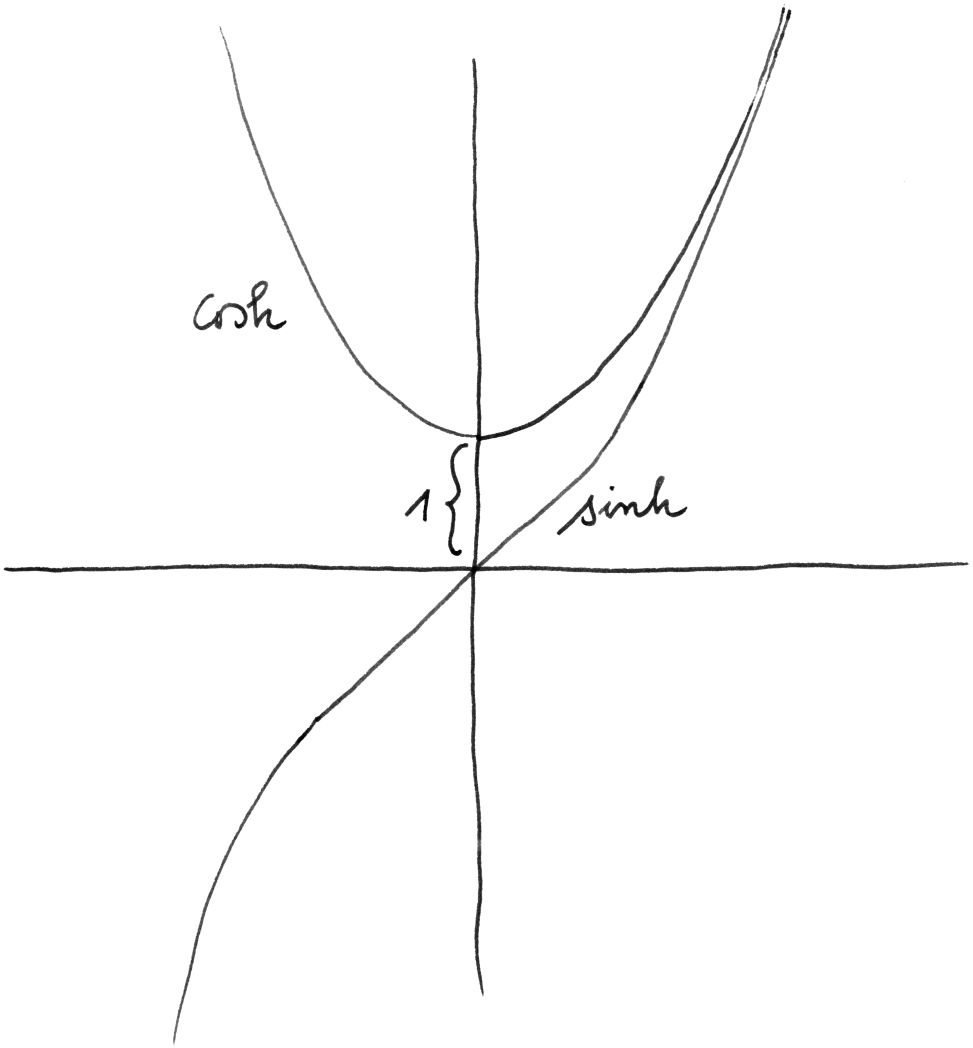
$$\begin{aligned} \sinh(a+b) &= \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b) \\ \cosh(a+b) &= \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b) \end{aligned}$$

Die Funktion $\cosh$ nimmt bei $x = 0$ ihr Minimum an und $\sinh$ ist eine Bijektion $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die inverse Abbildung nennt man **Area Sinus hyperbolicus** und bezeichnet sie mit $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sie läßt sich auch elementar ausdrücken als $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ und für die Ableitung von arsinh erhalten wir

$$\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

In der Tat gilt $\sinh'(x) = \cosh(x) = \sqrt{1 - \sinh^2(x)}$, $\sinh'(\operatorname{arsinh} y) = \sqrt{1+y^2}$. Ähnlich liefert $\cosh$ eine Bijektion $\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty)$, die inverse Abbildung **Area Cosinus hyperbolicus** $\operatorname{arcosh} : [1,\infty) \to [0,\infty)$ kann geschrieben werden als $\operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ und ist differenzierbar auf $(1,\infty)$ mit der Ableitung

$$\operatorname{arcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$



Die Graphen von Sinus und Cosinus hyperbolicus

Sehr viel seltener benutzt man den **Secans hyperbolicus** $x \mapsto 1/\cosh(x)$, den **Cosecans hyperbolicus** $x \mapsto 1/\sinh(x)$ und den **Tangens hyperbolicus** $\tanh : x \mapsto \sinh(x)/\cosh(x)$ sowie seine Umkehrung $\operatorname{artanh} : (-1,1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$.

10.5.9.4 (**Diskussion der Terminologie**). Die Namen unserer Funktionen haben den folgenden geometrischen Hintergrund: Für $t \in \mathbb{R}$ durchläuft der Punkt mit Koordinaten $(\cosh t, \sinh t)$ den Hyperbelast

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y)(x-y) = 1,\ x > 0\}$$

Hierbei ist $|t/2|$ gerade die Fläche oder lateinisch „area“, die von x-Achse, Hyperbel und dem Geradensegment von $(0,0)$ nach $(\cosh t, \sinh t)$ eingeschlossen wird. Es ist eine ausgezeichnete Übung, diese Behauptung nachzurechnen. Man sieht so die Verwandschaft zu den üblichen trigonometrischen Funktionen, bei denen man nur die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ zu ersetzen hat durch den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$. Dehnen wir die hyperbolischen trigonometrischen Funktionen in der offensichtlichen Weise zu Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ aus, so können wir die formale Analogie mit den gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen präzisieren zu den Formeln $\cos z = \cosh(\mathrm{i}z)$ und $\sin z = -\mathrm{i}\sinh(\mathrm{i}z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

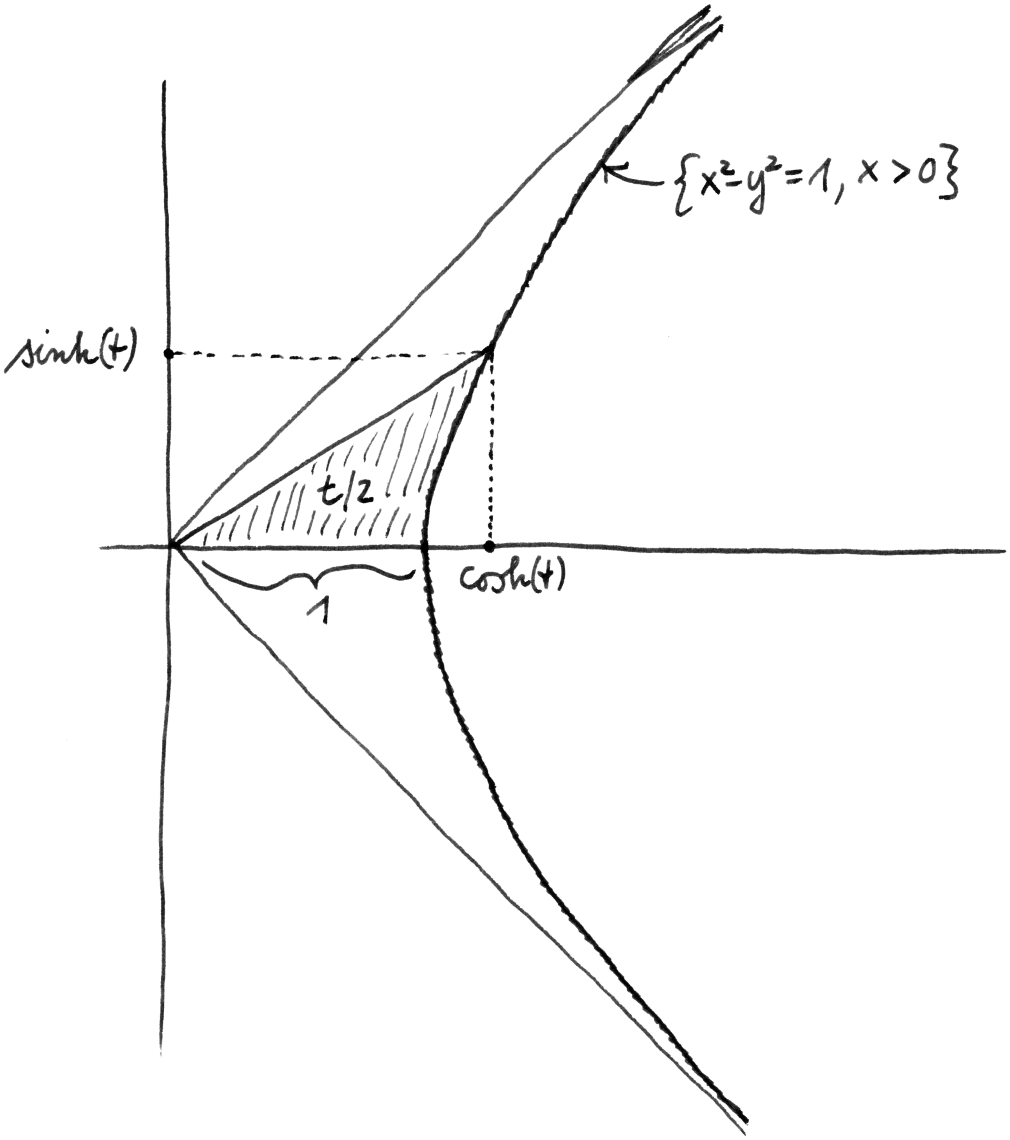
10.5.9.5. Die Lösungsmengen in der Ebene $\mathbb{R}^2$ von Gleichungen der Gestalt $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ mit $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ heißen **ebene Quadriken** oder auch **Kegelschnitte**, da man sie erhalten kann als Schnitte räumlicher Ebenen mit dem **Kegel** $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ bei geeigneter orthonormaler Identifikation unserer räumlichen Ebenen mit dem $\mathbb{R}^2$. Jeder Kegelschnitt ist bis auf Drehung und Verschiebung eine **Ellipse** $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ mit $\alpha, \beta > 0$, eine **Hyperbel** $xy = \gamma$ mit $\gamma > 0$, eine **Parabel** $x^2 = \delta y$ mit $\delta > 0$, ein Geradenkreuz, eine Gerade, ein Punkt oder die leere Menge. Die Bezeichnung „Parabel“ kommt hier vom griechischen Wort für „Werfen“. In der Tat beschreibt ein Wurfgeschoss unter Vernachlässigung des Luftwiderstands stets eine „parabolische“ Bahn, vergleiche 12.6.1.10.

Übungen

Ergänzende Übung 10.5.9.6. Sei $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ die Hyperbel. Wir konstruieren eine Bijektion $\varphi : \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} H\backslash(1,0)$, indem wir jedem Punkt $t \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ den Schnittpunkt der Geraden durch $(0,t)$ und $(1,0)$ mit $H\backslash(1,0)$ zuordnen. Man prüfe, daß diese Abbildung gegeben wird durch

$$\varphi(t) = \left(\frac{t^2+1}{t^2-1}, \frac{2t}{t^2-1}\right)$$

Eine eng verwandte Parametrisierung des Einheitskreises wurde in 10.5.8.20 besprochen.



Die geometrische Bedeutung von Sinus und Cosinus hyperbolicus

Übung 10.5.9.7. Man finde eine Stammfunktion von $\sqrt{1+t^2}$. Hinweis: Bei der Berechnung 10.5.8.8 der Fläche des Einheitskreises haben wir fast eine Stammfunktion von $\sqrt{1-t^2}$ bestimmt. Man gehe ähnlich vor mit der Substitution $t = \sinh x$.

10.5.10 Integration rationaler Funktionen

10.5.10.1 (**Das Prinzip der Integration durch Partialbruchzerlegung**). Zur Integration rationaler Funktionen erinnern wir zunächst die Partialbruchzerlegung aus 3.5.5.12. Danach bilden die Potenzen $(X^n)_{n\geq 0}$ mitsamt den Potenzen der Inversen der Linearfaktoren $((X-\mu)^{-n})_{n\geq 1,\,\mu\in\mathbb{C}}$ eine $\mathbb{C}$-Basis des Körpers der komplexen rationalen Funktionen $\mathbb{C}(X)$. Wenn wir vergessen, daß wir uns dabei in die komplexe Zahlenebene vorgewagt haben, so wird das Integrieren rationaler Funktionen sehr einfach. Es reicht damit nämlich, Stammfunktionen für die Funktionen $x \mapsto (x-\mu)^m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ anzugeben, und derartige Stammfunktionen sind für $\mu \in \mathbb{R}$ bekanntlich $\frac{1}{m+1}(x-\mu)^{m+1}$ im Fall $m \neq -1$ sowie $\log|x-\mu|$ im Fall $m = -1$. Im folgenden soll ausgeführt werden, inwiefern diese Formeln für $\mu \in \mathbb{C}$ im wesentlichen genauso gelten, wenn wir sie nur richtig interpretieren.

10.5.10.2. Es gibt auch eine Partialbruchzerlegung für reelle rationale Funktionen und man kann auch mit ihrer Hilfe reelle rationale Funktionen integrieren. So kann man die komplexen Zahlen weitgehend vermeiden, erhält aber kompliziertere Formeln gewinnt weniger konzeptuelle Klarheit.

Beispiel 10.5.10.3. Wir bestimmen eine Stammfunktion zu $1/(x^2-1)$. Die Nullstellen des Nenners sind ± 1 und der Grad des Zählers ist echt kleiner als der Grad des Nenners. Wir dürfen den Ansatz

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$$

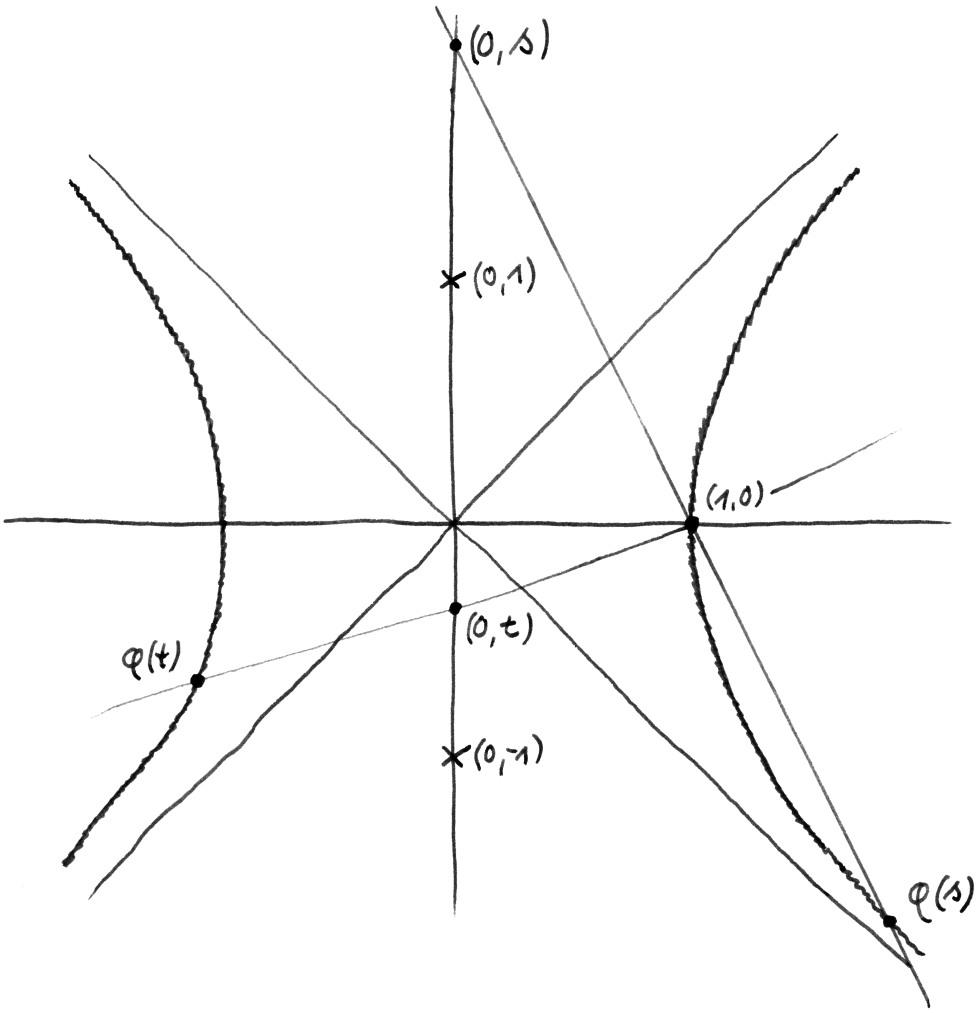
machen und finden sofort $(a+b)x - a + b = 1$, also $a+b=0$ und $b-a=1$ und folglich $a = -1/2$ und $b = 1/2$. Eine Stammfunktion ist mithin

$$\frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+1|$$

Man beachte, daß unsere Funktion zwei Definitionslücken hat und wir mit unserer Stammfunktion nur die Integrale über Intervalle $[a,b]$ bestimmen können, die keine der beiden Definitionslücken enthalten.

Beispiel 10.5.10.4. Wir bestimmen zu $(x^4+2x^2)/(x^2+2x+1)$ eine Stammfunktion. Die Partialbruchzerlegung haben wir bereits in 3.5.5.17 durchgeführt und erhielten

$$\frac{x^4+2x^2}{x^2+2x+1} = x^2 - 2x + 5 - \frac{8}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$$



Die geometrische Bedeutung der Abbildung φ aus 10.5.9.6

Als Stammfunktion finden wir damit sofort

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x - 8\log|x+1| - \frac{3}{(x+1)}$$

Beispiel 10.5.10.5. Wir bestimmen eine Stammfunktion zu $1/(x^2+1)$. Wir wissen zwar bereits aus 10.5.4.14, daß der Arcustangens $\arctan(x)$ so eine Stammfunktion ist, aber diesmal geht es uns um das allgemeine Prinzip. Die Nullstellen des Nenners sind $\pm\,\mathrm{i}$ und der Grad des Zählers ist echt kleiner als der Grad des Nenners. Wir dürfen deshalb den Ansatz

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x+\mathrm{i}} + \frac{b}{x-\mathrm{i}}$$

machen und finden sofort $(a+b)x - \mathrm{i}\,a + \mathrm{i}\,b = 1$, also $a+b=0$ und $a-b=\mathrm{i}$ und folglich $a = \mathrm{i}\,/2$ und $b = -\,\mathrm{i}\,/2$. Wir dürfen folglich die Hoffnung haben, daß

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\log(x+\mathrm{i}) - \frac{\mathrm{i}}{2}\log(x-\mathrm{i})$$

eine Stammfunktion ist, wenn wir diesen Ausdruck richtig interpretieren. Dazu lege ich eine Pause ein und diskutiere den komplexen Logarithmus.

10.5.10.6. Aus unseren Erkenntnissen 10.4.5.22 über die komplexe Exponentialfunktion folgt, daß sie eine Bijektion

$$\exp : \mathbb{R} + (-\pi,\pi]\,\mathrm{i} \;\tilde{\to}\; \mathbb{C}^\times$$

liefert. Die Umkehrfunktion

$$\log : \mathbb{C}^\times \;\tilde{\to}\; \mathbb{R} + (-\pi,\pi]\,\mathrm{i}$$

wird auf der positiven reellen Achse gegeben durch unseren üblichen Logarithmus $u \mapsto \log u$, auf der negativen reellen Achse durch $u \mapsto \log(-u) + \mathrm{i}\,\pi/2$ und auf der oberen beziehungsweise unteren komplexen Halbebene durch die Vorschrift

$$\log(u+\mathrm{i}\,v) = \log\sqrt{u^2+v^2} \;\pm\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2} - \mathrm{i}\arctan\frac{u}{v} \quad \text{für } \pm v > 0$$

Diese Funktion $\log$ heißt der **Hauptzweig des komplexen Logarithmus**. Man beachte, daß er nicht stetig ist längs der negativen reellen Achse, obwohl seine Einschränkung auf die negative reelle Achse durchaus stetig ist: Wir haben für $u<0$ genauer

$$\lim_{v\searrow 0}\log(u+\mathrm{i}\,v) = \log(u) = \lim_{v\nearrow 0}\log(u+\mathrm{i}\,v) + 2\pi\,\mathrm{i}$$

Beispiel 10.5.10.7. Wir arbeiten weiter an unserer Stammfunktion zu $1/(x^2+1)$. Interpretieren wir in unserer obigen Hoffnung $\log$ als den Hauptzweig des komplexen Logarithmus, so können wir unsere Hoffnung $\frac{\mathrm{i}}{2}\log(x+\mathrm{i})-\frac{\mathrm{i}}{2}\log(x-\mathrm{i})$ auf eine Stammfunktion zu $1/(x^2+1)$ umschreiben zu

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\log\sqrt{x^2+1}-\frac{\mathrm{i}}{2}\log\sqrt{x^2+1}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arctan(x)-\frac{1}{2}\arctan(-x)$$

und erhalten als Stammfunktion $\arctan(x)-\pi/2$ in Übereinstimmung mit unserer Berechnung der Ableitung des Arcustangens aus 10.5.4.14. Unsere Hoffnung war also berechtigt.

10.5.10.8. Um zu erklären, warum dieses Verfahren auch im allgemeinen funktioniert, diskutiere ich im folgenden einige Grundlagen der komplexen Ableitung.

Definition 10.5.10.9. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt **offen**, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist, wenn sie also anschaulich gesprochen mit jedem Punkt ein ganzes Rechteck um diesen Punkt umfaßt. Wir schreiben $U \Subset \mathbb{C}$ als Abkürzung für die Aussage, daß U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ sein soll.

Definition 10.5.10.10. Eine komplexwertige Funktion $f : \mathbb{C} \Supset U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene heißt **komplex differenzierbar bei** $p \in U$, wenn es $b \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\lim_{U \ni z \to p} \frac{f(z)-f(p)}{z-p} = b$$

Wir kürzen diese Aussage auch in dieser Situation ab durch $f'(p) = b$. Unsere Funktion heißt **komplex differenzierbar** oder gleichbedeutend **holomorph**, wenn sie bei jeder Stelle $p \in U$ komplex differenzierbar ist.

10.5.10.11 (**Regeln für die komplexe Ableitung**). Genau wie für die reelle Differenzierbarkeit zeigt man auch für komplexe Differenzierbarkeit die Summenregel, Produktregel und Kettenregel. Genau wie im Reellen zeigt man weiter, daß die Ableitung jeder konstanten Funktion die Nullfunktion ist und daß die Ableitung der Funktion $f(z) = 1/z$ gegeben wird durch $f'(z) = -1/z^2$. Genau wie im Reellen folgt, daß $(z-\mu)^n$ die Ableitung $n(z-\mu)^{n-1}$ hat für alle $n \in \mathbb{Z}$. Genau wie im Reellen zeigt man auch, daß die komplexe Exponentialfunktion ihre eigene komplexe Ableitung ist, in Formeln $\exp' = \exp$. Genau wie im Reellen zeigt man schließlich, daß wenn $f : \mathbb{C} \Supset U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und injektiv ist mit offenem Bild $V := f(U) \Subset \mathbb{C}$ und nirgends verschwindender Ableitung und wenn zusätzlich die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : V \to U$ stetig ist, daß dann auch die Umkehrfunktion g komplex differenzierbar ist mit der Ableitung

$$g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}$$

Daraus folgt, daß unser geeignet eingeschränkter Hauptzweig des Logarithmus $\log : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\log'(z) = \frac{1}{z}$$

Nach der Kettenregel hat somit $\log(z-\mu)$ auf $\mathbb{C}\backslash(\mu+\mathbb{R}_{\leq 0})$ die komplexe Ableitung $(z-\mu)^{-1}$.

Vorschau 10.5.10.12. Die Theorie holomorpher Funktionen heißt die „Funktionentheorie“ und ist der Gegenstand einer eigenen Vorlesung. Man zeigt dort zum Beispiel, daß jede injektive holomorphe Funktion bereits offenes Bild und eine holomorphe Umkehrfunktion hat.

10.5.10.13. Eine komplexwertige Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{C}$ auf $D \subset \mathbb{R}$ halboffen heißt **differenzierbar** oder genauer **reell-komplex differenzierbar bei** $p \in D$, wenn es $b \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = b$$

Wir kürzen diese Aussage auch in dieser Situation ab durch $f'(p) = b$. Nimmt hier f nur reelle Werte an, ist das unsere ganz gewöhnliche Ableitung. Nach unseren Regeln für komponentenweise Grenzwerte 10.3.5.33 ist f in dieser Situation allgemeiner genau dann reell-komplex differenzierbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ reell differenzierbar sind, und dann gilt

$$f'(p) = (\operatorname{Re} f)'(p) + \mathrm{i}(\operatorname{Im} f)'(p)$$

Schränken wir anderseits eine komplex differenzierbare Funktion $h : \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$ ein auf die reelle Achse zu $\underline{h} : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{C}$ mit $D := \mathbb{R} \cap U$, so gilt für alle $p \in D$ offensichtlich die Beziehung

$$h'(p) = \underline{h}'(p)$$

zwischen der komplexen Ableitung und der reell-komplexen Ableitung der Einschränkung auf die reelle Achse. Eine Funktion $F : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$ im Sinne der reell-komplexen Ableitung nennen wir wieder eine **Stammfunktion von** f oder ausführlicher eine **Stammfunktion im Sinne der reell-komplexen Ableitung**. Dann ist $\operatorname{Re}(F)$ eine Stammfunkton von $\operatorname{Re} f$ im ursprünglichen Sinne.

10.5.10.14 (**Stammfunktion durch komplexe Partialbruchzerlegung**). Wir erinnern, daß die Potenzen $(X^n)_{n\geq 0}$ mitsamt den Potenzen der Inversen der Linearfaktoren $((X-\mu)^{-n})_{n\geq 1,\, \mu\in\mathbb{C}}$ eine $\mathbb{C}$-Basis des Körpers der komplexen rationalen Funktionen $\mathbb{C}(X)$ bilden. Um eine Stammfunktion im Sinne der reell-komplexen Ableitung einer komplexen rationalen Funktion $P(x)/Q(x)$ anzugeben, reicht es

aus, ihre Partialbruchzerlegung zu bestimmen und Stammfunktionen aller $(x^n)_{n\geq 0}$ und aller $((x-\mu)^{-n})_{n\geq 1,\,\mu\in\mathbb{C}}$ anzugeben. Nach unseren Vorüberlegungen sind solche Stammfunktionen $x^{n+1}/(n+1)$ beziehungsweise $(x-\mu)^{-n+1}/(-n+1)$ falls $n>1$ beziehungsweise $\log(x-\mu)$ falls $n=1$, jeweils mit $\log$ unserem Hauptzweig des Logarithmus. Damit ist unsere Integrationsaufgabe zurückgeführt auf die Bestimmung der Partialbruchzerlegung. Dieses Problem hinwiederum läßt sich algorithmisch lösen, wenn man die Nullstellen des Nennerpolynoms kennt. Für die Bestimmung dieser Nullstellen jedoch gibt es nur algebraische Verfahren, wenn unser Polynom höchstens den Grad vier hat.

10.5.10.15 (**Die Problematik komplexer Potenzen**). Setzt man für $a\in\mathbb{C}^\times$ und $b\in\mathbb{C}$ ähnlich wie im Reellen $a^b := \exp(b\log a)$ mit $\log$ dem eben definierten Hauptzweig des komplexen Logarithmus, so ergibt sich $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \exp(-\pi/2)$. Insbesondere ist in diesem Sinne also i^{i} reell. Allerdings ist dann $a\mapsto a^b$ für $b\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ unstetig längs der negativen reellen Achse und wir haben im allgemeinen $a^{bc}\neq(a^b)^c$.

10.5.10.16 (**Integrale rationaler Ausdrücke** $R(\mathrm{e}^t), R(\sqrt[n]{t})$). Gegeben eine rationale Funktion $R=P/Q$ betrachten wir die Funktion $D\to\mathbb{R}$, $t\mapsto R(\mathrm{e}^t)$ mit dem Definitionsbereich $D=\{t\in\mathbb{R}\mid Q(\mathrm{e}^t)\neq 0\}$. Das Integral eines solchen rationalen Ausdrucks in e^t kann man auf das Integral einer rationalen Funktion zurückführen durch die Substitution $x=\mathrm{e}^t$, $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}t$. Zum Beispiel berechnen wir

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{\cosh t}=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+\frac{1}{\mathrm{e}^t}}=\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2+1}=2\arctan x=2\arctan(\mathrm{e}^t)$$

Das Integral eines rationalen Ausdrucks in $\sqrt[n]{t}$ für eine natürliche Zahl $n\geq 1$ kann man ähnlich durch die Substitution $\sqrt[n]{t}=x$, $\mathrm{d}t=nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$ auf das Integral einer rationalen Funktion in x zurückführen.

10.5.10.17 (**Integrale rationaler Ausdrücke** $R(\sin,\cos)$). Das Integral eines rationalen Ausdrucks im Funktionenpaar $(\sin,\cos)$ wie zum Beispiel

$$\frac{\sin^3(\tau)+\cos(\tau)}{\cos(\tau)+\cos^2(\tau)}$$

kann man auffassen als Kurvenintegral im Sinne von 10.7.1.23 einer rationalen Funktion in zwei Veränderlichen, in unserem Beispiel das Integral der Funktion

$$R(x,y)=\frac{y^3+x}{x+x^2}$$

über ein Stück des Einheitskreises. Mit der Umparametrisierung 10.5.8.20, also mithilfe der Substitution $t=\tan(\tau/2)$ und folglich $\sin(\tau)=2t/(1+t^2)$, $\cos(\tau)=(1-t^2)/(1+t^2)$, $\mathrm{d}\tau=(2/(1+t^2))\,\mathrm{d}t$ läßt es sich dann umwandeln in ein Integral einer rationalen Funktion einer Veränderlichen.

10.5.10.18 (**Integrale rationaler Ausdrücke** $R(\sqrt{1-x^2}, x)$). Integrale über rationale Ausdrücke im Funktionenpaar $(\sqrt{1-x^2}, x)$ kann man in ähnlicher Weise als Kurvenintegral auffassen und lösen, im Gegensatz zu eben hat nur $x \mapsto (\sqrt{1-x^2}, x)$ nicht konstante absolute Geschwindigkeit 1, sondern vielmehr die absolute Geschwindigkeit $1/\sqrt{1-x^2}$. Formal mag man auch $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t$ substituieren und sich so auf den bereits behandelten Fall eines rationalen Ausdrucks im Funktionenpaar $(\sin, \cos)$ zurückziehen.

10.5.10.19 (**Integrale rationaler Ausdrücke** $R(\sqrt{x^2 \pm 1}, x)$). Integrale von rationalen Ausdrücken in den Funktionenpaaren $(\sqrt{x^2+1}, x)$ oder $(\sqrt{x^2-1}, x)$ kann man auf die bereits in 10.5.10.16 behandelten Integrale rationaler Funktionen in e^t zurückführen durch die Substitution $x = \sinh t$, $\mathrm{d}x = \cosh t \, \mathrm{d}t$ beziehungsweise $x = \cosh t$, $\mathrm{d}x = \sinh t \, \mathrm{d}t$.

Ergänzung 10.5.10.20. Ein geometrischer Zugang zu all diesen Integralen wird in 12.7.4.20 diskutiert.

Übungen

Übung 10.5.10.21. Man zeige für die reell-komplexe Ableitung differenzierbarer komplexwertiger Funktionen $f, g : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{C}$ einer reellen Veränderlichen auf einer halboffenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ die Summenregel $(f+g)' = f' + g'$, die Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ und die Regel für die Ableitung des Kehrwerts $(1/f)' = -f'/f^2$.

Ergänzende Übung 10.5.10.22. Man finde eine Stammfunktion zu $1/(1+x^4)$.

Übung 10.5.10.23. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ hat die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \mathrm{e}^{\lambda z}$ die komplexe Ableitung $z \mapsto \lambda \, \mathrm{e}^{\lambda z}$.

10.6 Potenzreihen und höhere Ableitungen

10.6.1 Funktionenfolgen und Potenzreihen

Satz 10.6.1.1. *Sei $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Konvergiert für eine reelle Zahl z die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, so konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ absolut für alle reellen Zahlen x mit $|x| < |z|$.*

Vorschau 10.6.1.2. Dieser Satz gilt ganz genauso und mit demselben Beweis, wenn wir darin überall „reell“ durch „komplex“ ersetzen. Wir konzentrieren uns hier auf den Fall reeller Potenzreihen.

Beweis. Die Glieder einer konvergenten Reihe sind beschränkt, unter unseren Annahmen gibt es also eine endliche Schranke B mit $|a_\nu z^\nu| \leq B$ für alle ν. Aus $|x| < |z|$ folgt mithilfe der Konvergenz der geometrischen Reihe 10.4.1.5 dann

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu x^\nu| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu z^\nu| \, |x/z|^\nu \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} B \, |x/z|^\nu < \infty \qquad \square$$

10.6.1.3. Ein Ausdruck der Gestalt $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ heißt eine **Potenzreihe**. Eine Potenzreihe anzugeben bedeutet also nichts anderes, als die Folge $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ihrer Koeffizienten anzugeben. Der **Konvergenzradius** $r \in [0, \infty]$ einer Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ ist per definitionem das Supremum

$$r := \sup\{\ |z| \ \mid \sum a_\nu z^\nu \text{ konvergiert}\}$$

Die Bezeichnung als „Radius“ kommt vom Kontext komplexer Potenzreihen her. Nach 10.6.1.1 definiert jede Potenzreihe mit Konvergenzradius r vermittels der Abbildungsvorschrift $x \mapsto \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ eine reellwertige Funktion auf dem Intervall $(-r, r)$ sowie eine komplexwertige Funktion auf der Kreisscheibe $|z| < r$.

Satz 10.6.1.4 (Stetigkeit und gliedweises Ableiten von Potenzreihen). *Die durch eine Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ gegebene Funktion $s : (-r, r) \to \mathbb{R}$ ist stetig, ja sogar differenzierbar, und ihre Ableitung wird an jeder Stelle $x \in (-r, r)$ gegeben durch die Potenzreihe*

$$s'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu x^{\nu-1}$$

Beispiel 10.6.1.5. Dieser Satz liefert einen zweiten Beweis für die bereits in 10.5.4.9 bewiesene Tatsache, daß die Exponentialfunktion ihre eigene Ableitung ist.

Vorschau 10.6.1.6. Obiger Satz gilt auch für komplexe Potenzreihen und die komplexe Ableitung. Er braucht dann aber einen anderen Beweis, den Sie in der Funktionentheorie kennenlernen können.

10.6.1.7. Der Beweis dieses Satzes wird den größten Teil dieses Abschnitts einnehmen. Wir zeigen in 10.6.1.13, daß jede durch eine Potenzreihe definierte Funktion stetig ist, und zeigen die weitergehenden Aussagen in 10.6.1.16. Zunächst jedoch müssen wir einige technische Hilfsmittel bereitstellen.

Definition 10.6.1.8. Seien D eine Menge, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von auf D definierten Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion.

1. Wir sagen, die Folge f_n **konvergiert punktweise** gegen die Funktion f, wenn für alle $x \in D$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$;

2. Wir sagen, die Folge f_n **konvergiert gleichmäßig** gegen die Funktion f und schreiben $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, wenn es für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt derart, daß für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

10.6.1.9. Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt sicher punktweise Konvergenz. Das Umgekehrte gilt nicht: Die Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ konvergiert punktweise aber nicht gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \neq 1$ und $f(1) = 1$.

Satz 10.6.1.10 (Stetigkeit bleibt erhalten unter gleichmäßiger Konvergenz). *Konvergiert eine Folge von stetigen reellwertigen Funktionen gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion, so ist auch diese Grenzfunktion stetig.*

Beweis. Sei $D \subset \mathbb{R}$ der gemeinsame Definitionsbereich und seien $f_n : D \to \mathbb{R}$ die Funktionen unserer gleichmäßig konvergenten Folge und $f : D \to \mathbb{R}$ ihre Grenzfunktion. Es gilt, die Stetigkeit von f in jedem Punkt $p \in D$ zu zeigen. Sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sicher finden wir ein n derart, daß für alle $x \in D$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Da f_n stetig ist in p, finden wir weiter $\delta > 0$ derart, daß für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ gilt

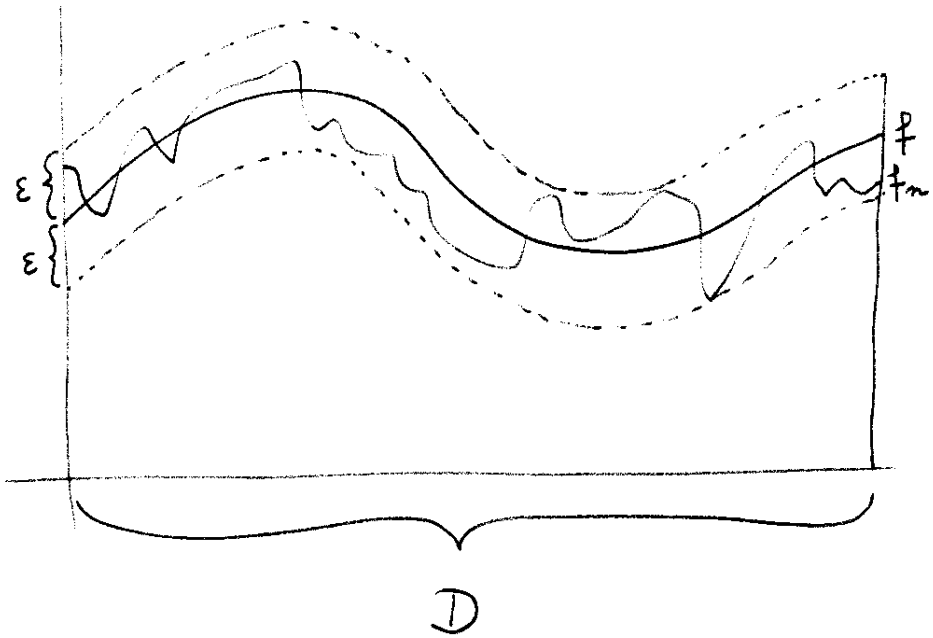
$$|f_n(x) - f_n(p)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Es folgt für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ unmittelbar

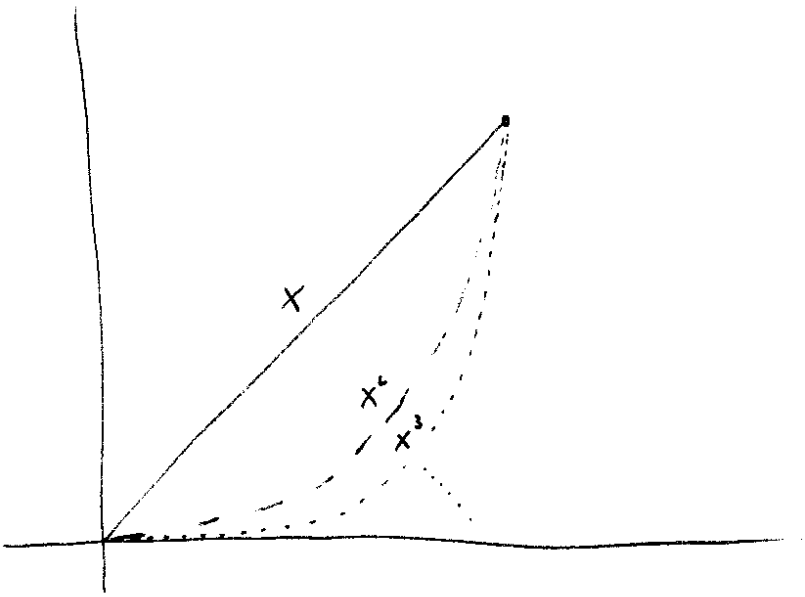
$$\begin{aligned} |f(x) - f(p)| \;\leq\; & |f(x) - f_n(x)| \\ & + |f_n(x) - f_n(p)| \\ & + |f_n(p) - f(p)| \;<\; \varepsilon \end{aligned}$$

□

Proposition 10.6.1.11 (Gleichmäßige Konvergenz bei Potenzreihen). *Ist $\sum a_\nu x^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r, so konvergiert die Folge ihrer Partialsummen $s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ für alle $\rho \in [0, r)$ gleichmäßig auf dem Kompaktum $D = [-\rho, \rho]$.*



Bei gleichmäßiger Konvergenz müssen für jedes $\varepsilon > 0$ fast alle f_n auf dem ganzen Definitionsbereich D im „ε-Schlauch um f“ bleiben.



Die punktweise aber nicht gleichmäßig konvergente Funktionenfolge der Funktionen $x \mapsto x^n$ aus 10.6.1.9

10.6.1.12. Eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r konvergiert im allgemeinen keineswegs gleichmäßig auf dem ganzen Intervall $(-r, r)$. Ein Gegenbeispiel wäre etwa die Exponentialfunktion, ein anderes die geometrische Reihe.

Beweis. Für alle $x \in [-\rho, \rho]$ gilt $|a_\nu x^\nu| \leq |a_\nu \rho^\nu|$ und folglich

$$|s_n(x) - s(x)| \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu \rho^\nu|$$

Da $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu \rho^\nu|$ konvergiert, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty} |a_\nu \rho^\nu| < \varepsilon$$

Für $n \geq N$ und beliebiges $x \in [-\rho, \rho]$ gilt dann $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$. □

Korollar 10.6.1.13 (Stetigkeit von Potenzreihen). *Die durch eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ auf $(-r, r)$ definierte Funktion ist stetig.*

Beweis. Nach Proposition 10.6.1.11 und Satz 10.6.1.10 ist unsere Funktion für alle $\rho \in [0, r)$ stetig auf $[-\rho, \rho]$ als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen. Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, muß sie damit stetig sein auf ganz $(-r, r)$. □

Satz 10.6.1.14 (Vertauschen von Integral und Grenzübergang). *Ist eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßiger Grenzwert einer Folge von stetigen Funktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, so gilt*

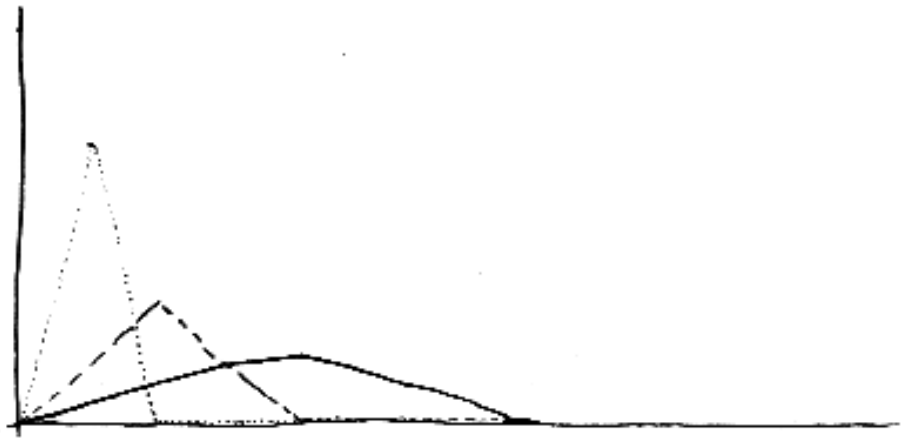
$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

Vorschau 10.6.1.15. Sehr viel stärkere Sätze in dieser Richtung werden wir im Rahmen der Integrationstheorie von Lebesgue als Satz über monotone Konvergenz 13.1.5.12 und Satz über dominierte Konvergenz 13.1.6.10 kennenlernen.

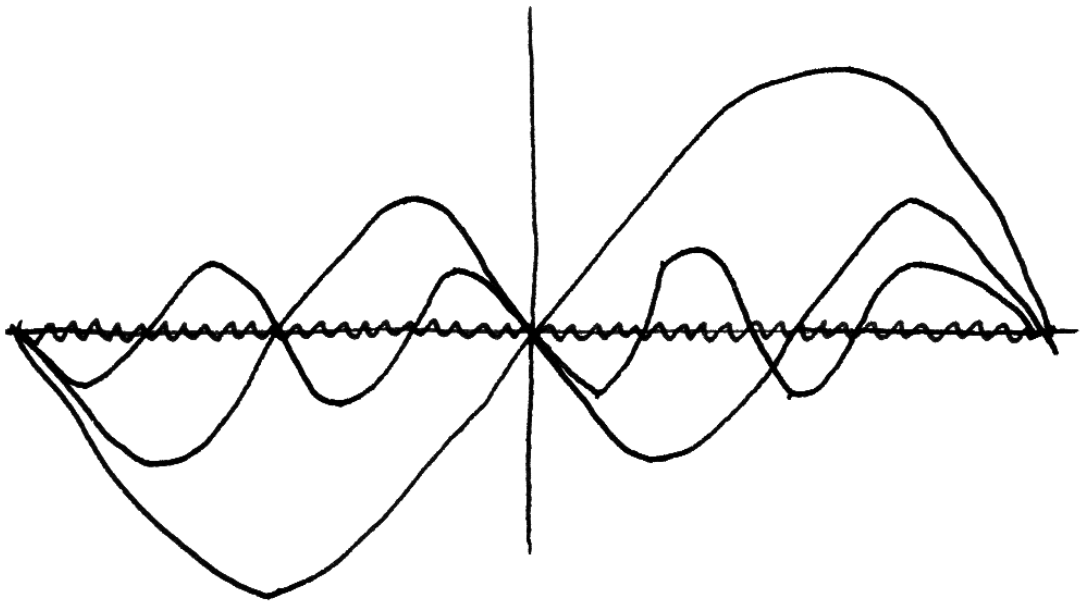
Beweis. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ derart, daß gilt $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in [a, b]$. Es folgt

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leq \int_a^b |f - f_n| \leq (b - a)\varepsilon$$

für alle $n \geq N$. □



Einige Glieder einer Funktionenfolge, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, deren Integrale jedoch nicht gegen das Integral der Nullfunktion konvergieren. Später mögen Sie lernen, daß unsere Funktionenfolge im Raum der „verallgemeinerten Funktionen“ gegen die „Dirac’sche δ-Funktion bei Null“ konvergiert.



Einige Glieder einer Funktionenfolge vom Typ $f_n = \frac{1}{n}\sin(nx)$, die gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, deren Ableitungen jedoch nicht gleichmäßig gegen die Ableitung der Nullfunktion konvergieren.

Satz 10.6.1.16 (**Integration und Ableiten von Potenzreihen**). *1. Ist eine Funktion $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Potenzreihe $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, so konvergiert auch die Potenzreihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \tfrac{1}{\nu+1} a_\nu x^{\nu+1}$$

auf $(-r, r)$, und zwar gegen eine Stammfunktion von f;

2. Ist eine Funktion $g : (-r, r) \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Potenzreihe $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$, so ist g differenzierbar und die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu x^{\nu-1}$$

konvergiert auf $(-r, r)$ gegen die Ableitung g' unserer Funktion g.

Beweis. 1. Man wende den vorhergehenden Satz 10.6.1.14 auf die Folge $f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ der Partialsummen an.

2. Wir zeigen zunächst, daß die Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu x^{\nu-1}$ auch auf $(-r, r)$ konvergiert. Nach dem Quotientenkriterium 10.4.1.17 konvergiert schon mal die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu z^{\nu-1}$ für $|z| < 1$. Für $|x| < r$ wählen wir nun ein ρ mit $|x| < \rho < r$ und dazu eine Schranke B mit $|b_\nu \rho^{\nu-1}| \leq B$ für alle ν. Dann können wir abschätzen

$$|\nu b_\nu x^{\nu-1}| = \left|\nu b_\nu \rho^{\nu-1} (x/\rho)^{\nu-1}\right| \leq \nu B z^{\nu-1}$$

für $z = |x/\rho| < 1$. Nach dem Majorantenkriterium 10.4.1.16 konvergiert also die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu x^{\nu-1}$. Dann wissen wir aber nach Teil 1, daß für die Funktion $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu x^{\nu-1}$ unser $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$ eine Stammfunktion ist. □

Definition 10.6.1.17. Die **n-te Ableitung** einer Funktion f bezeichnen wir, falls sie existiert, mit $f^{(n)}$. Es ist also $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ und allgemein $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

10.6.1.18 (**Koeffizienten konvergenter Potenzreihen und höhere Ableitungen**). Ist eine Funktion $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ gegeben durch die für $x \in (-r, r)$ konvergente Potenzreihe $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, so folgt mit gliedweisem Ableiten nach 10.6.1.16 sofort

$$f^{(n)}(0) = n!\, a_n$$

Wenn also in anderen Worten eine Funktion f in einer Umgebung des Nullpunkts durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann, so muß unsere Funktion dort beliebig oft differenzierbar sein und die fragliche Potenzreihe ist notwendig

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$$

Diese Potenzreihe hinwiederum kann man ganz allgemein für jede in einer Umgebung des Nullpunkts beliebig oft differenzierbare Funktion betrachten. Sie heißt dann die **Taylorreihe** besagter Funktion oder genauer ihre **Taylorreihe am Nullpunkt**, muß aber keineswegs positiven Konvergenzradius haben und muß, selbst wenn sie positiven Konvergenzradius haben sollte, keineswegs gegen besagte Funktion konvergieren. Zum Beispiel hat nach 10.5.4.15 die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0; \end{cases}$$

im Nullpunkt die Ableitungen $f^{(\nu)}(0) = 0 \; \forall \nu \geq 0$, aber dennoch gilt $f(x) > 0$ für $x > 0$. Inwiefern die Taylorreihe dennoch unsere Funktion recht gut approximiert, diskutieren wir in 10.6.2.

Beispiel 10.6.1.19. Die Darstellung

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad \forall x \in (-1,1)$$

ergibt sich, indem wir die geometrische Reihe $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 \dots$ gliedweise integrieren.

Beispiel 10.6.1.20. Mit unserer Formel $\arctan'(t) = 1/(1+t^2)$ für die Ableitung des Arcustangens aus 10.5.4.14 erhalten wir durch gliedweises Integrieren der geometrischen Reihe 10.4.1.5 für den Arcustangens für $|t| < 1$ die Reihenentwicklung

$$\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \dots$$

und mit dem Abel'schen Grenzwertsatz 10.6.4.2 ergibt sich

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$$

Es scheint, daß diese Formel bereits in dem 1530 erschienenen Analysis-Buch „Ganita Yuktibhasa“ des Autors Jyesthadeva zu finden ist, eines Mathematikers aus Kerala in Indien, und daß sie auf den indischen Mathematiker Madhava zurückgeht.

Beispiel 10.6.1.21. Um die fünfte Ableitung bei $x = 0$ von $(\mathrm{e}^{x^2} \sinh x)$ bestimmen, rechnen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x^2} &= 1 + x^2 + \tfrac{x^4}{2} + \tfrac{x^6}{3!} + \dots \\ \sinh x &= x + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \dots \\ \mathrm{e}^{x^2} \sinh x &= x + x^3(\tfrac{1}{3!} + 1) + x^5 \left(\tfrac{1}{5!} + \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{2}\right) + \dots \end{aligned}$$

Hier haben wir einmal unsere Erkenntnisse über das Produkt absolut konvergenter Reihen verwendet. Die gesuchte fünfte Ableitung bei $x = 0$ ergibt sich mit 10.6.1.18 zu

$$5!\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{2}\right) = 1+20+60 = 81$$

Definition 10.6.1.22 (Verallgemeinerte Binomialkoeffizienten). Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1} \text{ falls } k \geq 1 \text{ und } \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Proposition 10.6.1.23 (Binomische Reihe). *Für $|x| < 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Vorschau 10.6.1.24. Die Proposition gilt mit demselben Beweis auch für $x, \alpha \in \mathbb{C}$, vergleiche 14.3.2.15. Aus unseren Überlegungen in 10.6.1.18 zu den Koeffizienten konvergenter Potenzreihen folgt auch unmittelbar, daß die Koeffizienten einer Potenzreihenentwicklung von $(1+x)^\alpha$, wenn es sie denn gibt, notwendig die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten sein müssen. Daß es aber eine derartige Entwicklung auch wirklich gibt, muß noch gezeigt werden. Also an die Arbeit!

Beweis. Für $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ kennen wir diese Formel schon: Im Fall $\alpha \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{\alpha}{k} = 0$ falls $k > \alpha$ und wir erhalten einen Spezialfall der binomischen Formel 10.1.6.13. Im Fall $\alpha = -1$ gilt $\binom{\alpha}{k} = (-1)^k$ und wir erhalten die geometrische Reihe 10.4.1.5 für $-x$. Unter der Annahme $\alpha \notin \mathbb{N}$ sagt uns das Quotientenkriterium, daß die Potenzreihe rechts für $|x| < 1$ konvergiert, sagen wir gegen die Funktion $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$. Ich behaupte $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$. Das prüft man durch gliedweises Differenzieren der binomischen Reihe mithilfe der Beziehung

$$\binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1} = \binom{\alpha}{k}$$

Diese Beziehung kann durch eine kurze Rechnung gezeigt werden. Rechenfaule können sie auch als eine Gleichheit von Polynomen in α verstehen, von der wir bereits wissen, daß sie nach Einsetzen von $\alpha \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt, und die folglich als Gleichheit von Polynomen gelten muß, da ja Polynome nur endlich viele Nullstellen haben. Aus $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$ und $f(0) = 1$ folgt aber schon $f(x) = (1+x)^\alpha$, denn setzt man $\varphi(x) = f(x)/(1+x)^\alpha$, so gilt $\varphi(0) = 1$ und

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)(1+x)^\alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1}f(x)}{(1+x)^{2\alpha}} = 0 \qquad \square$$

Beispiel 10.6.1.25. Aus unserer Formel $\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ nach 10.5.4.13 ergibt sich die Reihenentwicklung

$$\arcsin(x) = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \quad \forall x \in (-1, 1)$$

In der Tat gilt $\arcsin(x) = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} \, \mathrm{d}t$, und nach der binomischen Reihe 10.6.1.23 haben wir

$$(1-t^2)^{-(1/2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-t^2)^k = 1 + \frac{1}{2}\, t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\, t^4 + \dots$$

Ähnlich ergibt sich die Entwicklung von $\operatorname{arsinh}(x)$ in eine Potenzreihe, indem wir in der binomischen Reihe für $(1+y)^{-1/2}$ überall y durch x^2 ersetzen und die so entstehende Potenzreihe für $(1+x^2)^{-1/2}$ gliedweise integrieren.

10.6.1.26. Die Formel für die binomische Reihe kann umgeschrieben werden zur nun für alle $y \in (0, 2)$ gültigen Darstellung

$$y^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (y-1)^k$$

Gehört allgemeiner ein Punkt p zum Definitionsbereich einer Funktion f, so bezeichnen wir eine Darstellung von f der Gestalt

$$f(p+h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu h^\nu \qquad \text{alias} \qquad f(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (y-p)^\nu$$

als eine **Entwicklung von f in eine Potenzreihe um den Punkt** p. Mit denselben Argumenten wie zuvor gilt dann $a_\nu = f^{(\nu)}(p)/\nu!$. Ist allgemeiner f beliebig oft differenzierbar bei p, so erklären wir die **Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt** p als die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!} h^\nu$$

Auch wenn die Partialsummen dieser Reihe nicht gegen $f(p+h)$ konvergieren müssen, liefern sie doch die „bestmöglichen“ Approximationen von $f(p+h)$ durch Polynome in h von einem vorgegebenen maximalen Grad, wie wir im folgenden Abschnitt 10.6.2 ausführen werden.

Übungen

Übung 10.6.1.27. Ist $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge von von Null verschiedenen reellen Zahlen und existiert der Grenzwert $\lim_{\nu \to \infty} |a_\nu / a_{\nu+1}|$ in $[0, \infty]$, so ist dieser Grenzwert der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$.

Ergänzende Übung 10.6.1.28. Eine Funktion, die für jeden Punkt ihres Definitionsbereichs in einer Umgebung besagten Punktes durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann, heißt **analytisch**. Wir werden erst in 14.3.2.8 im Rahmen der Funktionentheorie zeigen, daß Potenzreihen analytische Funktionen liefern: Dort geht es mit den Tricks der Funktionentheorie sehr elegant, wir könnten es aber etwas weniger elegant auch hier schon zeigen. Man zeige: Stimmen zwei auf demselbem reellen Intervall definierte analytische Funktionen auf der Umgebung eines Punktes aus unserem Intervall überein, so sind sie gleich. Hinweis: Man betrachte das Supremum der Menge aller Punkte, an denen unsere beiden Funktionen übereinstimmen.

Ergänzende Übung 10.6.1.29. Wie lauten die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{1+x}$? Wie lauten die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{2+x}$? Gemeint ist jeweils die Entwicklung um $x = 0$.

Ergänzende Übung 10.6.1.30. Wir würfeln mit einem Würfel eine unendlich lange Zahlenreihe. Anschaulich ist klar, daß der durchschnittliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Einsen gerade Sechs sein muß. Betrachtet man nun die Wahrscheinlichkeiten, daß die nächste Eins beim nächsten Wurf, beim übernächsten Wurf etc. kommt, multipliziert sie jeweils mit Eins, Zwei etc. und summiert diese Produkte auf, so sollte sich auch dieser dieser durchschnittliche Abstand ergeben. Die Aufgabe ist nun, zu beweisen, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$$

auch tatsächlich gegen 6 konvergiert.

Ergänzende Übung 10.6.1.31. Mithilfe der Relation $\tan(\pi/6) = 1/2$ berechne man π auf drei sichere Stellen hinter dem Komma. Es gibt im übrigen wesentlich effizientere Verfahren zur Berechnung von π, vergleiche [Cou71].

Übung 10.6.1.32 (**Vertauschen von Ableitung und Grenzübergang**). Ist eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßiger Grenzwert einer Folge stetig differenzierbarer Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ und konvergieren deren Ableitungen $f_n' : [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine Funktion g, so ist f differenzierbar auf $[a,b]$ mit Ableitung $f' = g$. Hinweis: 10.6.1.14.

10.6.2 Taylorentwicklung

10.6.2.1. Um im folgenden auch den Fall $n = 0$ zulassen zu dürfen, vereinbaren wir, daß „0-mal differenzierbar bei p“ zu verstehen sein soll als „stetig bei p“.

Satz 10.6.2.2 (Taylorentwicklung). *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ auf ganz I existiert und deren n-te Ableitung $f^{(n)}(p)$ an einer Stelle $p \in I$ existiert. So gilt:*

1. *Es gibt genau ein Polynom Q vom Grad $\leq n$ mit der Eigenschaft*

$$f(x) = Q(x) + (x-p)^n \varepsilon(x-p)$$

   für eine Funktion ε mit $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$, die also in Worten stetig ist bei Null mit Funktionswert Null;

2. *Dieses Polynom ist das eindeutig bestimmte Polynom Q vom Grad $\leq n$ mit $Q^{(\nu)}(p) = f^{(\nu)}(p)$ für $0 \leq \nu \leq n$, dessen Funktionswert und Ableitungen bei p also bis zur n-ten Ableitung einschließlich mit den entsprechenden Ableitungen bei p unserer Funktion f übereinstimmen.*

10.6.2.3. Wir nennen Q das **Approximationspolynom bis zur Ordnung n an die Funktion f bei der Stelle p.**

1. Der Graph des Approximationspolynoms bis zur nullten Ordnung ist die Parallele zur x-Achse durch $(p, f(p))$;

2. Der Graph des Approximationspolynoms bis zur ersten Ordnung heißt die **Tangente** an den Graphen von f im Punkt $(p, f(p))$;

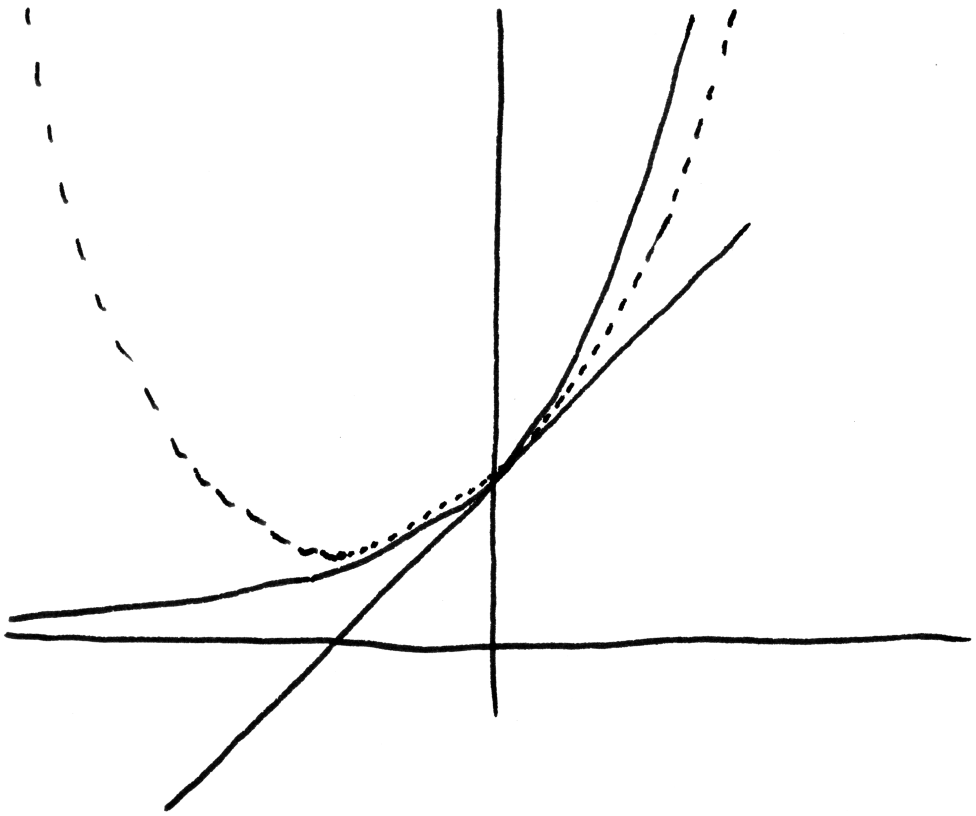
3. Der Graph des Approximationspolynoms bis zur zweiten Ordnung heißt die **Schmiegeparabel** an den Graphen von f im Punkt $(p, f(p))$.

Beweis. Sicher gibt es genau ein Polynom Q, das die Bedingung aus Teil 2 erfüllt, nämlich das Polynom

$$Q(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f^{(2)}(p)}{2!}(x-p)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

Es besteht genau aus den ersten $n+1$ Termen der Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt p. Betrachten wir für dieses Polynom Q die Differenz $r = f - Q$, so verschwinden der Funktionswert und die ersten n Ableitungen von r bei $x = p$ und wir erhalten durch wiederholte Anwendung der Regeln von de l'Hospital 10.5.6.1 und mit der Definition von $r^{(n)}(p)$ im letzten Schritt in der Tat

$$\lim_{x\to p} \frac{r(x)}{(x-p)^n} = \ldots = \lim_{x\to p} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-p)} = \frac{r^{(n)}(p)}{n!} = 0$$



Eine unvollkommene Darstellung der Tangente $y = x + 1$ und Schmiegeparabel $y = x^2/2 + x + 1$ an den Graph der Exponentialfunktion im Punkt $(0, 1)$.

Damit bleibt nur noch zu zeigen, daß kein anderes Polynom $\hat{Q}$ die Bedingung aus Teil 1 erfüllen kann. In der Tat folgt aber für zwei Polynome vom Grad $\leq n$ aus

$$\lim_{x \to p} \frac{\hat{Q}(x) - Q(x)}{(x-p)^n} = 0$$

nach Übung 10.3.5.53 bereits $\hat{Q}(x) = Q(x)$. □

10.6.2.4. Wir können die Aussage des Satzes dahingehend umformulieren, daß für jede auf einem mehrpunktigen Intervall I definierte $(n-1)$-mal differenzierbare Funktion f und jeden Punkt $p \in I$, an dem sie sogar n-mal differenzierbar ist, gilt

$$f(p+h) = f(p) + f'(p)h + \frac{f^{(2)}(p)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n + h^n\varepsilon(h)$$

für eine Funktion ε mit $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$. Schärfere Abschätzungen für das Restglied unter stärkeren Annahmen an die zu approximierende Funktion liefert die gleich folgende Proposition.

Proposition 10.6.2.5 (Restglieddarstellungen zur Taylorentwicklung). *Gegeben $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $p \in I$ ein Punkt gilt:*

Umformulierung der Taylorentwicklung: *Ist f bei p sogar $(n+1)$-mal differenzierbar, so gibt es eine Funktion ε mit $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$ und*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!}(x-p)^\nu \quad + \left(\frac{f^{(n+1)}(p)}{(n+1)!} + \varepsilon(x-p)\right)(x-p)^{n+1}$$

Lagrange'sche Form des Restglieds: *Ist f sogar $(n+1)$-mal differenzierbar auf dem ganzen Intervall I, so gibt es für alle $x \in I$ ein ξ zwischen p und x mit*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!}(x-p)^\nu \quad + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}$$

Das gilt zusätzlich für jeden reellen Punkt x im Abschluß von I, auf den die Funktion f stetig fortgesetzt werden kann.

Integraldarstellung des Restglieds: *Ist $f^{(n+1)}$ zusätzlich auch noch stetig auf ganz I, so gilt für alle $x \in I$ die Formel*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!}(x-p)^\nu \quad + \frac{1}{n!}\int_p^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Beweis. Nur die zweite und dritte Darstellung des Restglieds sind noch zu zeigen. Wir kürzen die Summe wie zuvor mit $\sum = Q(x)$ ab. Für den Rest $r(x) = f(x) - Q(x)$ verschwinden, wie wir bereits wissen, die ersten n Ableitungen bei $x = p$, und unter unseren zusätzlichen Voraussetzungen ist r sogar $(n+1)$-mal differenzierbar auf ganz I mit $r^{(n+1)} = f^{(n+1)}$. Um daraus die beiden Darstellungen des Restglieds zu erhalten, brauchen wir zwei Rechnungen.

2. Mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz 10.5.6.2 und der Erkenntnis, daß Nenner und Zähler bei $x = p$ verschwinden, erhalten wir unter der Annahme $p \neq x$ sofort

$$\frac{r(x)}{(x-p)^{n+1}} = \frac{r'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - p)^n} = \frac{r''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2 - p)^{n-1}} = \ldots = \frac{r^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

mit $\xi_1, \ldots, \xi$ im offenen Intervall zwischen p und x.

3. Durch wiederholtes partielles Integrieren erhalten wir

$$\begin{aligned} r(x) = \int_p^x r'(t)\,\mathrm{d}t = \int_p^x (x-t) r''(t)\,\mathrm{d}t &= \tfrac{1}{2}\int_p^x (x-t)^2 r'''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \ldots \\ &= \tfrac{1}{n!}\int_p^x (x-t)^n r^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \square \end{aligned}$$

10.6.2.6. Diese Abschätzungen liefern umgekehrt auch alternative Beweise für den Satz 10.6.2.2 über die Taylorentwicklung, aber eben nur unter stärkeren Voraussetzungen an die zu entwickelnde Funktion.

Übungen

Übung 10.6.2.7 (**Hinreichende Kriterien für lokale Extrema**). Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und sei $p \in I$ gegeben mit $f^{(1)}(p) = \ldots = f^{(n)}(p) = 0$. Sei weiter und $f^{(n)}$ differenzierbar an der Stelle p. Man zeige: Ist n ungerade und $f^{(n+1)}(p) > 0$ beziehungsweise $f^{(n+1)}(p) < 0$, so hat f ein isoliertes lokales Minimum beziehungsweise Maximum bei p. Ist I offen und n gerade und $f^{(n+1)}(p) \neq 0$, so hat f weder ein isoliertes lokales Minimum noch ein isoliertes lokales Maximum bei p. Hinweis: Taylorentwicklung.

Übung 10.6.2.8. Gegeben eine differenzierbare Funktion f auf einem offenen reellen Intervall $I \Subset \mathbb{R}$, deren Ableitung bei $p \in I$ differenzierbar ist, zeige man

$$f''(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) + f(p-h) - 2f(p)}{h^2}$$

Übung 10.6.2.9 (**Spezielles zu Potenzreihen mit nichtnegativen Koeffizienten**). Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit nichtnegativen Koeffizienten $a_k \geq 0$ und

sei $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ echt kleiner als ihr Konvergenzradius. Hat die Taylorreihe um den Entwickungspunkt r der durch unsere ursprüngliche Reihe gegebenen Funktion f den Konvergenzradius ρ, so hat unsere ursprüngliche Reihe mindestens den Konvergenzradius $r + \rho$. Hinweis: Man drücke $f^{(\nu)}(r)$ durch die ursprüngliche Reihe aus und folgere $\sum a_k(r+\varepsilon)^k < \infty$ für $0 \leq \varepsilon < \rho$.

10.6.3 Rechnen mit Approximationen

Definition 10.6.3.1. Seien $f, g : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ Funktionen und $p \in D$ ein Punkt und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wir sagen, f **und** g **stimmen bei** p **überein bis zur Ordnung** n und schreiben

$$f \sim_p^n g \qquad \text{oder genauer} \qquad f(x) \sim_{x=p}^n g(x)$$

wenn gilt $f(p+h) = g(p+h) + h^n \varepsilon(h)$ für eine Funktion ε, die stetig ist bei Null mit Funktionswert $\varepsilon(0) = 0$ und die definiert ist auf der Menge aller h mit $p + h \in D$.

10.6.3.2. Die Notation $f \sim_p^n g$ scheint mir bequem und suggestiv, sie ist aber nicht üblich. Häufig nennt man eine Funktion, die bei $x = 0$ mit der Nullfunktion übereinstimmt bis zur Ordnung n, auch ein **kleines o von** x^n und bezeichnet so eine Funktion mit $\mathrm{o}(x^n)$. In dieser Notation würde man statt $f \sim_p^n g$ schreiben $f(x) = g(x) + \mathrm{o}((x-p)^n)$.

10.6.3.3. Natürlich folgt aus $f \sim_p^n g$ und $g \sim_p^n h$ schon $f \sim_p^n h$. Sind P und Q Polynome vom Grad $\leq n$ und ist p ein Häufungspunkt von D, so folgt aus $P \sim_p^n Q$ schon $P = Q$. Der Satz über die Taylorentwicklung 10.6.2.2 liefert uns für eine n-mal stetig differenzierbare Funktion f auf einem mehrpunktigen Intervall D das eindeutig bestimmte Polynom Q vom Grad $\leq n$, das bei p mit f übereinstimmt bis zur Ordnung n. Genauer besagt dieser Satz, daß dieses Polynom Q charakterisiert werden kann durch die Bedingungen $Q^{(\nu)}(p) = f^{(\nu)}(p)$ für $0 \leq \nu \leq n$.

Satz 10.6.3.4. *1.* **(Höhere Summen- und Produktregel).** *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktionen. Sei $p \in D$ ein Punkt und seien P, Q Polynome mit $f \sim_p^n P$ und $g \sim_p^n Q$. So folgt*

$$f + g \sim_p^n P + Q \qquad \textit{und} \qquad fg \sim_p^n PQ$$

2. **(Höhere Kettenregel).** *Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ auf Teilmengen $D, E \subset \mathbb{R}$ definierte Funktionen mit $f(D) \subset E$. Sei $p \in D$ ein Punkt und seien P, Q Polynome mit $f \sim_p^n P$ und $g \sim_{f(p)}^n Q$. So folgt*

$$g \circ f \sim_p^n Q \circ P$$

10.6.3.5. Im Fall $n = 0$ spezialisiert dieser Satz zur Stetigkeit von Summen und Produkten 10.3.2.34 sowie Verknüpfungen 10.3.2.30. Im Fall $n = 1$ spezialisiert er zur Summenregel 10.5.4.1, Produktregel 10.5.4.1 und Kettenregel 10.5.4.6.

Vorschau 10.6.3.6. Alle Aussagen dieses Satzes werden sich als Konsequenzen des Approximationssatzes in mehreren Veränderlichen 12.2.3.6 erweisen.

Beweis. 1. Das bleibt dem Leser überlassen. Im Fall der Summe gilt das sogar für beliebige Funktionen P und Q. Im Fall des Produkts reicht anstelle der Polynomialität die schwächere Annahme, daß P und Q in einer Umgebung von p beschränkt sind.

2. Wir zeigen zunächst $g \circ f \sim_p^n Q \circ f$ und dann $Q \circ f \sim_p^n Q \circ P$. Zum Beweis der ersten Aussage schreiben wir $g(y) = Q(y) + (y - f(p))^n \varepsilon(y - f(p))$ für ε stetig bei Null mit Funktionswert Null. Durch Einsetzen von $y = f(x)$ und Erweitern des letzten Terms mit $(x - p)^n$ erhalten wir

$$(g \circ f)(x) = (Q \circ f)(x) + (x - p)^n \left[\left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right)^n \varepsilon(f(x) - f(p)) \right]$$

für alle $x \neq p$. Im Fall $n \geq 1$ stimmt f bei p bis mindestens zur Ordnung 1 überein mit dem Polynom P, folglich ist f differenzierbar bei p und der Ausdruck in eckigen Klammern strebt für $x \to p$ gegen Null. Im Fall $n = 0$ stimmt f bei p bis zur Ordnung 0 überein mit dem Polynom P, also ist f zumindest stetig in p und der Ausdruck in eckigen Klammern strebt für $x \to p$ wieder gegen Null. Wir müssen also nur noch für jedes Polynom Q zeigen

$$Q \circ f \sim_p^n Q \circ P$$

Das hinwiederum folgt sofort aus Teil 1. □

Beispiel 10.6.3.7. Beim konkreten Rechnen wird man sich nach Möglichkeit die Funktionen so zurechtlegen, daß wir nur Approximationen an der Stelle Null zu betrachten haben. Um etwa die sechste Ableitung bei $x = 0$ von $1/\cosh(x)$ zu berechnen, schreiben wir das als $g \circ f$ mit $f(x) = \cosh(x) - 1$ und $g(y) = (1 + y)^{-1}$, da dann gilt $f(0) = 0$. Nun erinnern wir uns an

$$\begin{aligned} \cosh(x) - 1 &= \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{x^6}{6!} + \dots \\ (1 + y)^{-1} &= 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + y^6 \dots \end{aligned}$$

wo wir Gleichheitszeichen und Pünktchen geschrieben haben statt $\sim^6$ mit entsprechenden Spezifikationen. Mit unserer „höheren Kettenregel“ 21.2.5.3 erhalten wir

wegen $f(0) = 0$ dann sofort

$$\begin{aligned} 1/\cosh(x) &= 1 - (\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{x^6}{6!}) \\ &\quad + (\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{x^6}{6!})^2 \\ &\quad - (\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{x^6}{6!})^3 + \ldots \end{aligned}$$

Als Koeffizient von x^6 ergibt sich

$$-\frac{1}{6!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{8} = \frac{1}{6!}(-1 + 30 - 90) = -\frac{61}{6!}$$

Die fragliche sechste Ableitung bei $x = 0$ ist mithin -61. Eine andere Möglichkeit wäre, das Approximationspolynom sechsten Grades an $1/\cosh(x)$ in $x = 0$ als $a_0 + a_1 x + \ldots + a_6 x^6$ anzusetzen und aus der „höheren Produktregel“ die Gleichung

$$\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right)\left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_6 x^6\right) = 1 + bx^8 + \ldots$$

zu folgern, die es uns hinwiederum erlaubt, induktiv die a_ν zu bestimmen. Diese Rechnung kann im vorliegenden Fall zusätzlich vereinfacht werden durch die Erkenntnis, daß eh gilt $0 = a_1 = a_3 = a_5 = \ldots$, da unsere Funktion gerade ist.

Ergänzung 10.6.3.8 (**Geschlossene Formel für die Catalan-Zahlen**). Wir zeigen nun die in 2.2.1.13 versprochene Formel

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

für die ebendort eingeführten Catalan-Zahlen C_n, die die Zahl der möglichen Verklammerungen eines Wortes in $(n+1)$ Symbolen angeben. Diese Zahlen erfüllen offensichtlich die Rekursion

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

Die **erzeugende Funktion** der Folge der Catalan-Zahlen alias die formale Potenzreihe $P = \sum_{n\geq 0} C_n x^n$ erfüllt demnach im Ring der formalen Laurentreihen aus 3.5.3.43 die Formel $xP^2 = P - 1$ alias $P^2 - \frac{1}{x}P + \frac{1}{x} = 0$. Damit folgt, immer im Ring der formalen Laurentreihen, eine Identität der Form

$$P = \frac{1}{2x} \pm \sqrt{\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x}} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

falls die fragliche Wurzel im Ring der formalen Laurentreihen existieren sollte, wobei das Vorzeichen noch zu bestimmen ist. Nach 10.6.3.9 existiert diese Wurzel jedoch in der Tat und kann beschrieben werden durch die binomische Reihe

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n$$

Deren konstanter Term ist Eins, so daß für unser Vorzeichen nur das Minus in Frage kommt. Damit muß notwendig gelten

$$P = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

Die Koeffizienten unserer binomischen Reihe lassen sich vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
\binom{1/2}{n} (-1)^n 4^n &= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\dots\left(\frac{-2n+3}{2}\right)(-1)^n 4^n \\
&= -\frac{1}{n!}(1\cdot 3\dots(2n-3))2^n \\
&= \frac{-2(2(n-1))!}{(n-1)!(n-1)!}
\end{aligned}$$

Die letzte Identität stimmt dabei nur für $n \geq 1$. Setzen wir alles zusammen, so ergibt sich wie gewünscht

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Übungen

Übung 10.6.3.9. Gegeben zwei beliebig oft differenzierbare Funktionen auf einem Intervall ist die Taylorreihe ihrer Summe die Summe der Taylorreihen und die Taylorreihe des Produkts das Produkt der Taylorreihen. Hier verstehen wir Produkt und Summe von Potenzreihen im formalen Sinn, vergleiche 3.5.3.42.

Ergänzende Übung 10.6.3.10. Man zeige, daß die Identitäten $\exp(\log(x+1)) = x+1$ und $\log((\mathrm{e}^x - 1)+1) = x$ auch als formale Identitäten von Potenzreihen gelten, daß also etwa im ersten Fall für $k \geq 2$ gilt

$$\sum_{j(1)+\dots+j(i)=k} \frac{1}{i!}\left(\frac{-(-1)^{j(1)}}{j(1)}\right)\dots\left(\frac{-(-1)^{j(i)}}{j(i)}\right) = 0$$

wo die Summe über alle $i \geq 1$ und alle Abbildungen $j : \{1,\dots,i\} \to \mathbb{N}_{\geq 1}$ läuft, bei denen k die Summe der Werte ist, wohingegen dieselbe Summe für

$k = 1$ gerade den Wert Eins ergibt. Allgemeiner führe man aus, inwiefern die Taylorreihe der Verknüpfung zweier unendlich oft differenzierbarer Funktionen gerade die Verknüpfung ihrer Taylorreihen ist.

Ergänzende Übung 10.6.3.11. Gegeben ein Kring k, für den ein Ringhomomorphismus $\mathbb{Q} \to k$ existiert, liefert das formale Einsetzen in formale Potenzreihen eine Bijektion $\exp : tk[\![t]\!] \xrightarrow{\sim} 1+tk[\![t]\!]$ mit der Inversen $\log$ gegeben durch die Potenzreihe von $\log(1+x)$. Diese Bijektion ist ein Gruppenisomorphismus zwischen der additiven Gruppe $tk[\![t]\!]$ und der multiplikativen Gruppe $1 + tk[\![t]\!]$.

10.6.4 Der Abel'sche Grenzwertsatz*

10.6.4.1. In diesem Abschnitt will ich mein Versprechen einlösen und die Formel

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \log 2$$

zeigen. Wenn wir $x = 1$ in die Reihenentwicklung von $\log(1 + x)$ einsetzen dürften, so folgte das sofort. Die Schwierigkeit liegt darin, daß wir bisher nur für $|x| < 1$ nachgewiesen haben, daß unsere Potenzreihe aus 10.6.1.19 gegen $\log(1 + x)$ konvergiert. Der folgende Satz hilft uns, diese Schwierigkeit zu überwinden, und wird auch in 10.5.4.14 bei der Herleitung der wunderbaren Formel

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots = \frac{\pi}{4}$$

benötigt. In beiden Formeln sehe aber eher schöne Blüten als zentrale Inhalte. Davon abgesehen spielt der abelsche Grenzwertsatz im weiteren Verlauf dieser Vorlesung keine Rolle.

Satz 10.6.4.2 (**Abel'scher Grenzwertsatz**). *Konvergiert eine reelle Potenzreihe auch noch auf einem Randpunkt ihres Konvergenzbereichs, so stellt sie bis in diesen Randpunkt hinein eine stetige Funktion dar.*

Vorschau 10.6.4.3. Für diejenigen Leser, die bereits mit komplexen Potenzreihen vertraut sind, sei bemerkt, daß die entsprechende Aussage im Komplexen in dieser Form nicht mehr gilt. Mehr dazu finden Sie etwa in 14.3.2.2.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $x = 1$ der besagte Randpunkt des Konvergenzbereichs ist. Sei also $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen. Wir müssen zeigen, daß die Reihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $x \in [0, 1]$ eine stetige Funktion darstellt. Dazu schreiben wir die Differenzen

der Partialsummen in der Form

$$\begin{array}{rcrl}
\sum_{k=n}^{m} a_k x^k & = & (x^n - x^{n+1}) & (a_n) \\
& + & (x^{n+1} - x^{n+2}) & (a_n + a_{n+1}) \\
& + & (x^{n+2} - x^{n+3}) & (a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) \\
& & \dots & \dots \\
& + & (x^{m-1} - x^m) & (a_n + \dots\dots\dots + a_{m-1}) \\
& + & x^m & (a_n + \dots\dots\dots + a_{m-1} + a_m)
\end{array}$$

Für alle $\varepsilon > 0$ finden wir nun wegen der Konvergenz unserer Reihe ein N derart, daß für alle n, m mit $N \leq n \leq m$ gilt $|a_n + \ldots + a_m| \leq \varepsilon$. Für alle n, m mit $N \leq n \leq m$ und alle $x \in [0, 1]$ folgt daraus die Abschätzung

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k\right| \leq (x^n - x^m)\,\varepsilon + x^m \varepsilon \leq \varepsilon$$

Diese Abschätzung zeigt die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Partialsummen auf $[0, 1]$ und damit die Stetigkeit der Grenzfunktion. □

Vorschau 10.6.4.4. Läßt sich die durch eine Potenzreihe im Inneren des Konvergenzintervalls definierte Funktion stetig auf einen Randpunkt fortsetzen, so muß die Potenzreihe an besagtem Randpunkt keineswegs konvergieren. Nehmen wir der Einfachkeit halber an, daß das Konvergenzintervall $(-1, 1)$ ist und der fragliche Randpunkt die 1, so folgt die Konvergenz von $\sum a_n$ jedoch aus der stetigen Fortsetzbarkeit der Funktion $\sum a_n x^n$ von $x \in [0, 1)$ auf $[0, 1]$ zusammen mit der **Tauber-Bedingung**, daß die Folge na_n betragsmäßig beschränkt sein möge. Unter der stärkeren Annahme $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ wurde das bereits von Tauber gezeigt.

10.7 Raumwertige Funktionen und Schwingungen

10.7.1 Bogenlänge und Geschwindigkeit

10.7.1.1. Gegeben $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\|v\| := \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$$

und nennen diese Zahl die **Skalarproduktnorm** oder kurz **Länge von** v. Offensichtlich haben wir $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Auf der Schule und in der Linearen Algebra lernen Sie, inwieweit $\|v\|$ dem entspricht, was wir anschaulich die „Länge des Vektors v" nennen würden, und daß für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ die **Dreiecksungleichung** $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ gilt.

Definition 10.7.1.2. Gegeben ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ erklären wir die **Länge** $\mathrm{L}(\gamma) \in \bar{\mathbb{R}}$ von γ als das Supremum über „die Längen aller einbeschriebenen Polygonzüge", in Formeln

$$\mathrm{L}(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{r-1} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})\| \,\middle|\, t_0, \ldots, t_r \in I,\ t_0 \leq \ldots \leq t_r \right\}$$

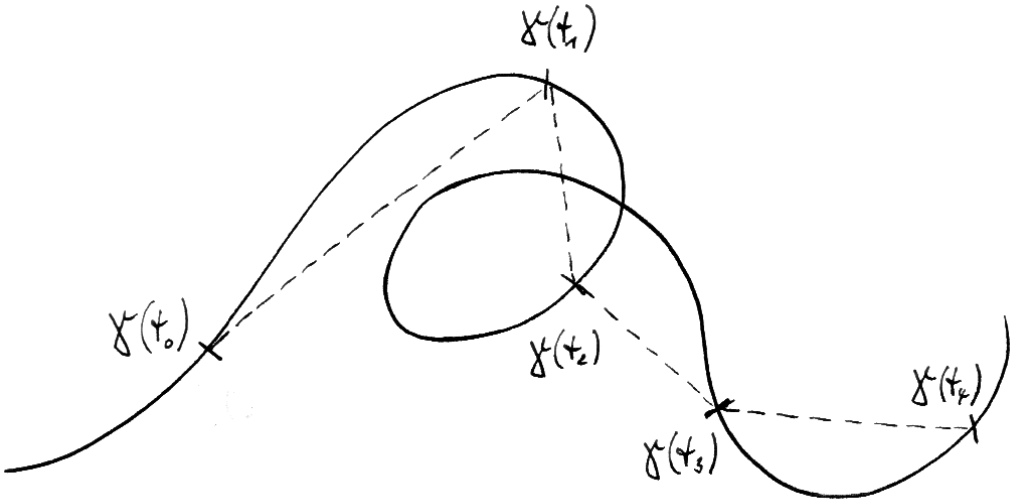
Man spricht in diesem Zusammenhang meist von der **Bogenlänge** und nennt eine stetige Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ wie oben einen **Weg** in $\mathbb{R}^n$.

10.7.1.3. Offensichtlich ist unsere Bogenlänge „invariant unter Reparametrisierung". In Formeln haben wir stärker sogar für jede monotone Surjektion $\psi : J \to I$ offensichtlich $\mathrm{L}(\gamma \circ \psi) = \mathrm{L}(\gamma)$. Unsere Definition der Kreiszahl π aus 10.3.4.1 bedeutet in dieser Terminologie $\pi = \mathrm{L}(\gamma)$ für $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, \sqrt{1 - x^2})$.

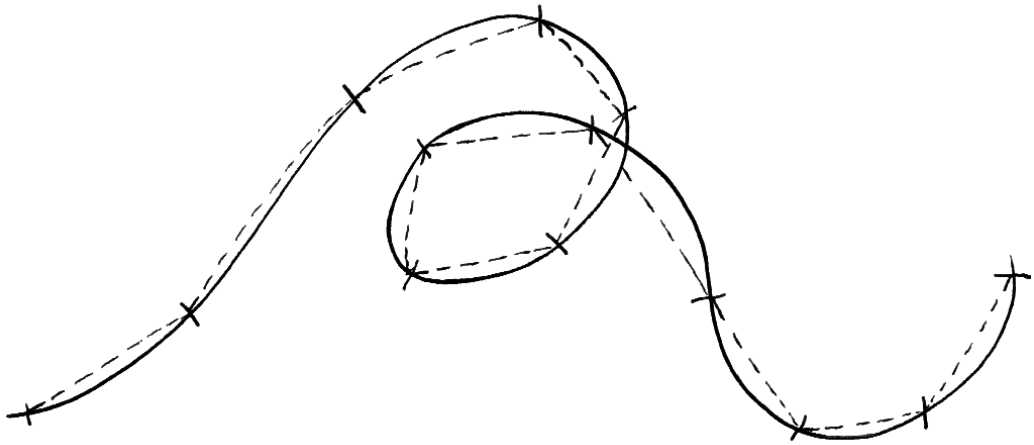
10.7.1.4. Seien $\gamma : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung von einer halboffenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$ und sei $p \in D$ ein Punkt. Wir nennen γ **differenzierbar bei** p, wenn es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$v = \lim_{t \to 0} \frac{\gamma(p + t) - \gamma(p)}{t}$$

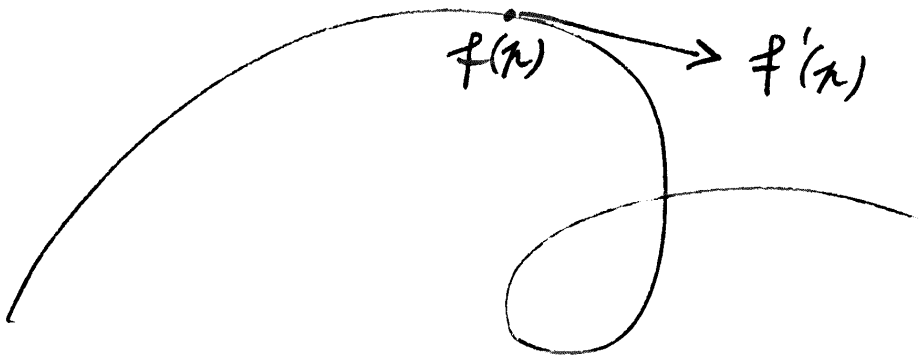
Dann schreiben wir $\gamma'(p) := v$ und nennen $\gamma'(p)$ die **Ableitung von** γ **bei** p oder, wenn wir uns t als Zeit denken, den **Geschwindigkeitsvektor**. Die Länge $\|\gamma'(p)\|$ des Geschwindigkeitsvektors nennen wir die **absolute Geschwindigkeit**. Ist γ differenzierbar an allen Stellen $p \in D$, so nennen wir γ **differenzierbar** oder genauer **differenzierbar auf** D.



Eine Approximation eines Weges durch einen Polygonzug



Eine bessere Approximation desselben Weges durch einen Polygonzug



Denken wir uns t als Zeit, so mag man $\gamma'(p)$ auch den „Geschwindigkeitsvektor“ nennen. Er ist stets tangential an die Bahnkurve. Seine Länge hängt jedoch von der Anzeige des Tachometers ab, wenn wir uns hier mal ein Auto denken, das auf einem Fußballfeld herumkurvt. Dieser Aspekt ist in einem Bild leider schwer darzustellen.

10.7.1.5. Seien $\gamma : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung von einer halboffenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$ und sei $p \in D$ ein Punkt. Nach unseren Regeln über komponentenweise Grenzwerte ist $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ differenzierbar bei p genau dann, wenn alle $\gamma_i : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind bei p, und dann haben wir

$$\gamma'(p) = (\gamma_1'(p), \ldots, \gamma_n'(p))$$

Beispiel 10.7.1.6. Für Abbildungen $\gamma : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{C}$ stimmt unsere hier erklärte Ableitung überein mit der reell-komplexen Ableitung komplexwertiger Funktionen aus 10.5.10.13.

Vorschau 10.7.1.7 (**Lamento über das Arbeiten ohne Einheiten**). Eigentlich sollte man sich mehr Mühe geben, um guten Gewissens von Länge und Geschwindigkeit reden zu können. Ich würde gerne einen „euklidischen Raum“ einführen als einen endlichdimensionalen reellen affinen Raum E mit einer ausgezeichneten $\mathbb{R}_{>0}$-Bahn von Skalarprodukten auf dem zugehörigen Richtungsraum $\vec{E}$ und dazu einen orientierten eindimensionalen Vektorraum $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\vec{E})$ konstruieren, seine „Längengerade“. Dann konstruiert man die „Länge“ als eine Abbildung

$$\| \ \| : \vec{E} \to \mathbb{L}$$

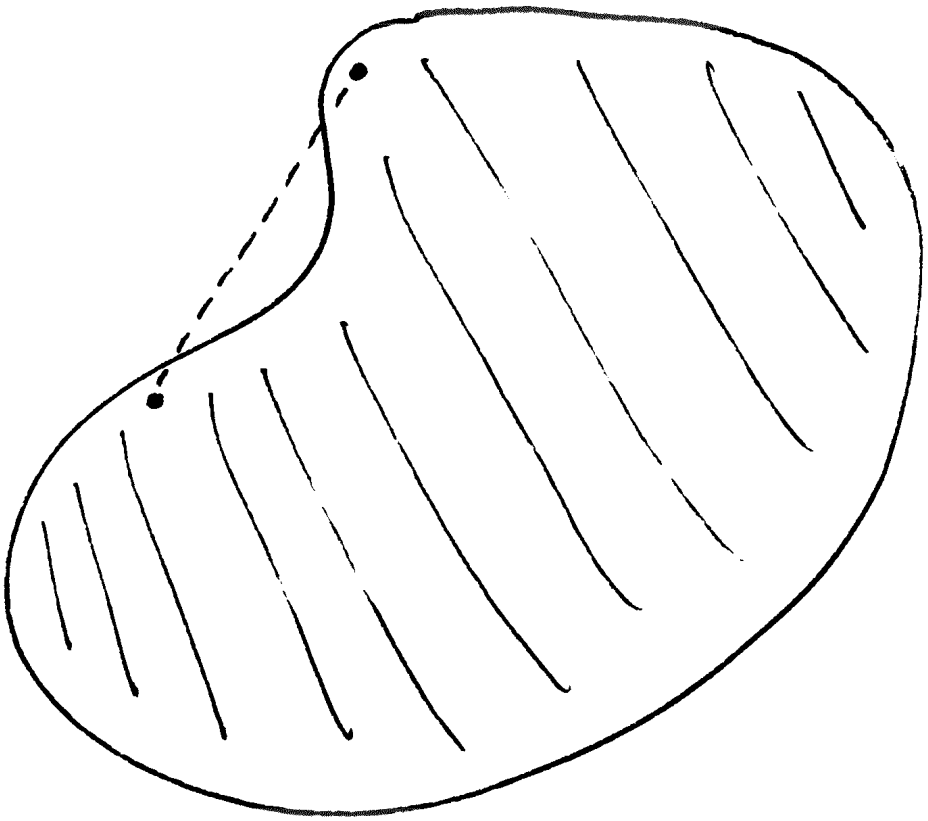
Danach postuliert man einen orientierten eindimensionalen affinen Raum $\mathbb{T}$ der „Zeitpunkte“, diskutiert differenzierbare Abbildungen $\gamma : \mathbb{T} \supset D \to E$ und erhält als Geschwindigkeitsvektor bei $p \in D$ ein Element $\dot{\gamma}(p) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{E})$. Die absolute Geschwindigkeit schließlich wird eine orientierungserhaltende lineare Abbildung $\|\dot{\gamma}(p)\| \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{T}}, \mathbb{L})$. Das wäre aussagekräftiger als, wie wir hier, $E = \vec{E} = \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{T} = \vec{\mathbb{T}} = \mathbb{L} = \mathbb{R}$ zu identifizieren. Dazu müßte ich aber auf entsprechender Vorarbeit aus der Linearen Algebra aufbauen, und selbst wenn ich das dürfte, wäre es zu viel Begrifflichkeit für einen Abschluß des ersten Semesters.

10.7.1.8. Wie in 3.3.5.2 heißt eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ **konvex**, wenn sie mit je zwei Punkten auch das ganze die beiden Punkte verbindende Geradensegment enthält. Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ heißt **offen**, wenn sie eine Umgebung eines jeden ihrer Punkte ist.

Beispiel 10.7.1.9. Für alle $\varepsilon > 0$ und $p \in \mathbb{R}^n$ ist sowohl der in 10.3.2.19 eingeführte Quader $\mathrm{B}(p;\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |p - x| < \varepsilon\}$ als auch der **euklidische Ball** $\mathrm{B}_2(p;\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|p - x\| < \varepsilon\}$ offen und konvex.

Satz 10.7.1.10 (**Schrankensatz**). *Seien $a < b$ reelle Zahlen und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Ist $C \subset \mathbb{R}^n$ eine offene konvexe Teilmenge und gilt $\gamma'(t) \in C$ für alle $t \in [a,b]$, so folgt*

$$\gamma(b) - \gamma(a) \in (b-a)C$$



Eine nicht konvexe Teilmenge der Ebene

Vorschau 10.7.1.11. Der Satz gilt genauso für C konvex und „abgeschlossen“, da wir so ein C schreiben können als den Schnitt der offenen konvexen Mengen $C = \bigcap_{\eta>0}(C + \mathrm{B}(0;\eta))$.

Beispiel 10.7.1.12 (**Anschauung für den Schrankensatz**). Anschaulich können wir den Inhalt des Satzes interpretieren wie folgt: Sei C eine Kreisscheibe im Richtungsraum der Anschauungsebene mit Radius $20\,\mathrm{km/h}$. Fahren wir mit einem Geländewagen um $14{:}00$ Uhr an einem Parkplatz los und kurven durch die Gegend und der Tacho zeigt nie mehr als $20\,\mathrm{km/h}$ an, so sind wir um $17{:}00$ Uhr höchstens $60\,\mathrm{km}$ von unserem ursprünglichen Parkplatz entfernt. Besteht C dahingegen aus einem einzigen Punkt, der sagen wir die Geschwindigkeit von $20\,\mathrm{km/h}$ in einer festen Richtung bedeutet, so besagt unser Satz: Fahren wir konstant mit $20\,\mathrm{km/h}$ in diese Richtung, so haben wir um $17{:}00$ Uhr genau $60\,\mathrm{km}$ in besagte Richtung zurückgelegt. Für dieses Beispiel wählen wir implizit einen Isomorphismus der Zeitachse $\mathbb{T}$ mit der reellen Zahlengeraden $\mathbb{R}$ derart, daß jeder Stunde ein Intervall der Länge Eins entspricht. Das bedeutet insbesondere, daß wir implizit auch vektorielle Geschwindigkeiten mit Richtungsvektoren identifizieren. Im übrigen wird in 12.1.3.11 erklärt, wie man auch mit „echten“ Geschwindigkeiten formal korrekt arbeiten kann.

10.7.1.13 (**Beziehung zwischen Schrankensatz und Mittelwertsatz**). Der Satz folgt im Fall $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ leicht aus unserem bisherigen Mittelwertsatz 10.5.5.7 und er spielt auch im allgemeinen eine ähnliche Rolle, indem er es erlaubt, „den von einem Teilchen in einem Zeitintervall $[a,b]$ gewonnenen Abstand von seinem Ausgangspunkt aus der Kenntnis seiner lokalen Geschwindigkeiten abzuschätzen“. Jedoch kann man im allgemeinen Fall des $\mathbb{R}^n$ im allgemeinen keinen Zeitpunkt mehr finden, zu dem das Teilchen „mittlere Geschwindigkeit“ hätte. Es gibt in anderen Worten im allgemeinen keinen Punkt $\xi \in [a,b]$ mit $\gamma(b) - \gamma(a) = (b-a)\gamma'(\xi)$. Man stelle sich etwa vor, daß unser Geländewagen ein Rundtour fährt, bei der er zu keiner Zeit die Geschwindigkeit Null hat. Mich befriedigt deshalb die in der älteren Literatur übliche Bezeichnung als „Mittelwertsatz in mehreren Veränderlichen“ nicht vollständig.

Beweis. Offensichtlich gilt für eine konvexe Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^n$ und beliebige reelle $s,t \geq 0$ stets $sC + tC = (s+t)C$. Das zeigt, daß in unserem Satz die Aussage für das ganze Intervall folgt, wenn wir sie für alle Stücke einer Zerlegung in endlich viele Teilintervalle zeigen können. Kürzen wir genauer für $p,q \in [a,b]$ mit $\mathrm{S}(p,q)$ die Aussage $\gamma(q) - \gamma(p) \in (q-p)C$ ab, so gilt für $a \leq p \leq q \leq r \leq b$ in Formeln ausgedrückt

$$\big(\mathrm{S}(p,q) \text{ und } \mathrm{S}(q,r)\big) \Rightarrow \mathrm{S}(p,r)$$

Da wir C offen angenommen hatten, besitzt jeder Punkt $p \in [a,b]$ eine Umgebung

U_p mit

$$q \in [a,b] \cap U_p \backslash p \;\Rightarrow\; \frac{\gamma(q)-\gamma(p)}{q-p} \in C$$

oder umgeschrieben eine Umgebung U_p mit $(q \in [a,b] \cap U_p) \;\Rightarrow\; \mathrm{S}(p,q)$. Nun setzen wir

$$s := \sup\{c \in [a,b] \mid \text{Es gilt } \mathrm{S}(a,x)\ \forall x \in [a,c]\}$$

Dann gilt $\mathrm{S}(a,s)$, denn im Fall $a = s$ ist das eh klar und sonst gibt es $x \in [a,s)$ mit $\mathrm{S}(x,s)$ wahr und $\mathrm{S}(a,x)$ gilt nach Annahme eh für alle $x \in [a,s)$. Hätten wir nun nicht $s = b$, so fänden wir $q \in (s,b]$ mit $\mathrm{S}(s,x)$ wahr für alle $x \in [s,q]$ und damit $\mathrm{S}(a,x)$ wahr für alle $x \in [a,q]$ im Widerspruch zur Wahl von s. □

Satz 10.7.1.14 (Bogenlänge als Integral). *Die Länge eines stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stimmt überein mit dem Integral über seine absolute Geschwindigkeit, in Formeln*

$$\mathrm{L}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \;\mathrm{d}t$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da γ' nach 10.5.1.15 gleichmäßig stetig ist auf $[a,b]$, finden wir ein $\delta > 0$ mit $\|\gamma'(x) - \gamma'(y)\| < \varepsilon$ falls $|x-y| \le \delta$. Gegeben eine Unterteilung $a = a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_r = b$ einer Feinheit $\le \delta$ folgern wir aus dem Schrankensatz 10.7.1.10 dann

$$\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i) \in (a_{i+1} - a_i)\,\mathrm{B}(\gamma'(a_i);\varepsilon)$$

und insbesondere $\|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\| \in (a_{i+1} - a_i)\big(\|\gamma'(a_i)\| + [-\varepsilon,\varepsilon]\big)$. Durch Aufsummieren folgt

$$\left|\sum_{i=0}^{r-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\| \;-\sum_{i=0}^{r-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1}-a_i)\right| \le (b-a)\varepsilon$$

für jede Unterteilung der Feinheit $\le \delta$. Das zeigt schon mal $\mathrm{L}(\gamma) < \infty$, da $\|\gamma'(t)\|$ beschränkt sein muß auf dem kompakten Intervall $[a,b]$. Nach Übung 10.5.2.11 zum Riemannintegral können wir δ zusätzlich so klein wählen, daß für jede Unterteilung der Feinheit $\le \delta$ auch noch gilt

$$\left|\sum_{i=0}^{r-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1}-a_i) - \int \|\gamma'\|\right| \le \varepsilon$$

Da aber die Länge approximierender Polygonzüge beim Hinzufügen von Zwischenpunkten nur größer werden kann, finden wir eine Unterteilung dieser Feinheit mit

$$\left|\mathrm{L}(\gamma) - \sum_{i=0}^{r-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\|\right| \le \varepsilon$$

Zusammen erhalten wir

$$\left|\mathrm{L}(\gamma) - \int \|\gamma'\|\right| \leq (b-a)\varepsilon + 2\varepsilon$$

Da das für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\mathrm{L}(\gamma) = \int \|\gamma'\|$ wie gewünscht. □

Beispiel 10.7.1.15 (**Kreislänge**). Unsere Definition der Kreiszahl π aus 10.3.4.1 bedeutet wie bereits ewähnt in der hier eingeführten Terminologie $\pi = \mathrm{L}(\gamma)$ für $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$. Bezeichne andererseits $\kappa > 0$ die kleinste positive Zahl mit $u(\kappa) = -1$ für unsere Umlaufabbildung $u(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Es gilt zu zeigen $\kappa = \pi$. Wir wissen $\sin(t) > 0$ für $t \in (0,\kappa)$, folglich fällt $\cos$ streng monoton auf $[0,\kappa]$ und induziert eine Bijektion $\cos : [0,\kappa] \xrightarrow{\sim} [-1,1]$. Unter der Umparametrisierung mit dem Cosinus erhalten wir $\gamma(\cos t) = (\cos t, \sin t)$. Weil die Länge sich bei monotoner Umparametrisierung nicht ändert, folgern wir

$$\pi = \mathrm{L}(\gamma) = \mathrm{L}(\gamma \circ \cos) = \int_0^\kappa \|(\gamma \circ \cos)'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_0^\kappa 1 \,\mathrm{d}t = \kappa$$

Ergänzung 10.7.1.16 (**Gestalt einer hängenden Kette**). Wir gehen davon aus, daß die Gestalt einer hängenden Kette durch den Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschrieben wird, und zeigen, daß diese Funktion bei Wahl einer geeigneten Längeneinheit und eines passenden Urspungs der Cosinus hyperbolicus sein muß. Auf das Kettensegment über einem kompakten Intervall $[a,b]$ wirken die Zugkraft in der Kette von beiden Seiten sowie die Schwerkraft. Bezeichnet L_a^b die Länge des besagten Kettensegments und $v_x = (1, f'(x))$ den Tangentenvektor an unsere Kurve bei $(x, f(x))$ mit 1 als erster Komponente, so impliziert das Kräftegleichgewicht die vektorielle Gleichung

$$0 = -c_a v_a + c_b v_b - D(0, L_a^b)$$

für geeignete positive Zahlen c_a, c_b und eine positive Konstante D, die von den physikalischen Konstanten unseres Problems abhängen. Die Positivität von c_a, c_b und D wird dabei auch nur anschaulich motiviert und nicht mathematisch hergeleitet. Mathematisch wäre auch durchaus die an der y-Achse gespiegelte „stehende Kette“ eine mögliche Lösung, aber eben mit negativen c_a, c_b. Durch Betrachtung der ersten Komponenten liefert unsere vektorielle Gleichung für das Kräftegleichgewicht erst einmal $c_a = c_b = c$. Insbesondere ist der horizontale Anteil der Zugspannung in der Kette also an jeder Stelle derselbe. Durch Betrachtung der zweiten Komponenten folgt weiter

$$cf'(a) - cf'(b) = -DL_a^b = -D\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

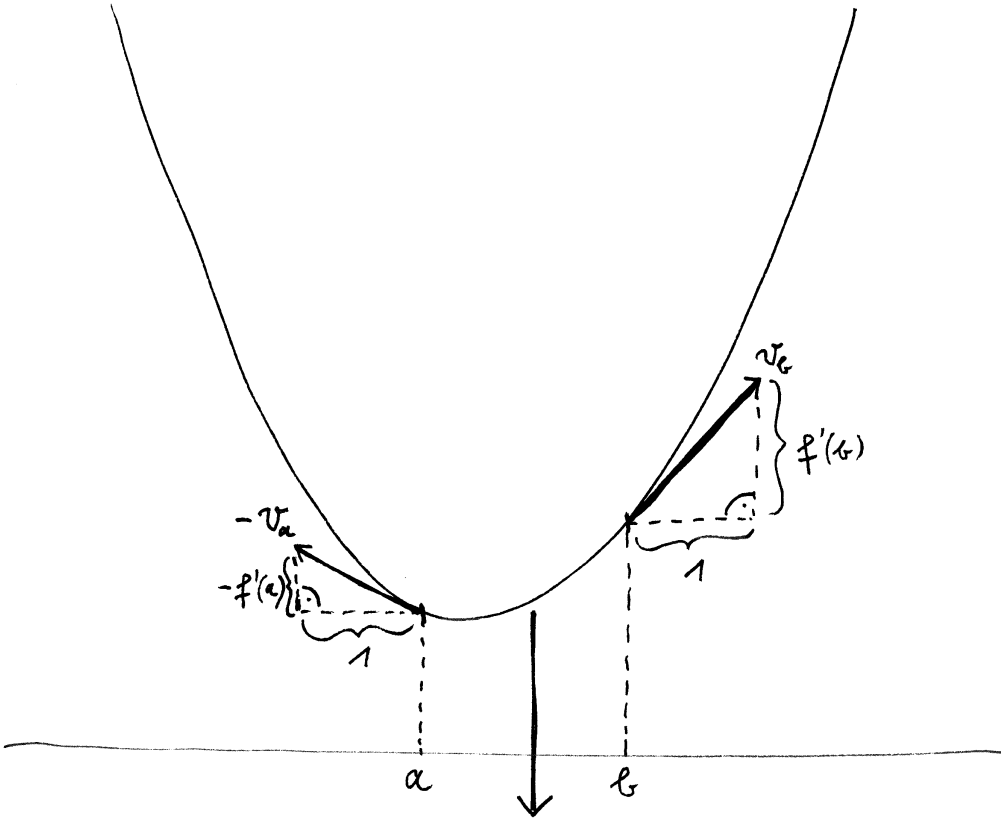


Illustration zur hängenden Kette

Folglich erfüllt unsere Funktion eine Differentialgleichung der Gestalt

$$f'(a) - f'(b) = -k \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

für positives $k := D/c$, mithin gilt $f''(x) = k\sqrt{1 + f'(x)^2}$. Daraus folgern wir

$$\int_a^b \frac{f''(x)\,\mathrm{d}x}{k\sqrt{1 + f'(x)^2}} = b - a$$

und mit der Substitution $f'(x) = y$, $f''(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ weiter

$$\int_{f'(a)}^{f'(b)} \frac{\mathrm{d}y}{k\sqrt{1 + y^2}} = b - a$$

Dies Integral lösen wir durch die Substitution $y = \sinh t$, $\mathrm{d}y = \cosh t\,\mathrm{d}t$ und erhalten als Stammfunktion für den Integranden $k^{-1}\operatorname{arsinh} y$. Damit ergibt sich $k^{-1}\operatorname{arsinh} f'(b) = b + m$ für eine Konstante m und $f'(b) = \sinh(k(b + m))$ und schließlich

$$f(b) = k^{-1}\cosh(k(b + m)) + h$$

für geeignete Konstanten k, m und h. Hier beschreibt k, wie „steil“ die Kette hängt, m ist das Negative der x-Koordinate der Stelle kleinster Höhe, und h beschreibt, wie hoch unsere Kette hängt. In Worten bedeutet das, daß es für eine vorgegebene hängende Kette stets ein orthogonales Koordinatensystem und insbesondere eine Längeneinheit gibt, für die sie genau entlang des Graphen des Cosinus hyperbolicus hängt.

Vorschau 10.7.1.17. In 15.4.6.10 skizziere ich einen Beweis dafür, daß sogar ein „Weg gegebener Länge kleinster potentieller Energie“ zwischen vorgegebenen Aufhängepunkten existiert und eindeutig bestimmt ist und unsere Kettenlinie sein muß.

Übungen

Übung 10.7.1.18. Seien $D \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge und $A : D \to \operatorname{Mat}(n \times m; \mathbb{R})$ sowie $B : D \to \operatorname{Mat}(m \times k; \mathbb{R})$ differenzierbare matrixwertige Funktionen. So ist auch das Produkt $AB : t \mapsto A(t)B(t)$ differenzierbar und die Geschwindigkeit $(AB)'$ der Produktfunktion $AB : D \to \operatorname{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$ wird gegeben durch die Formel

$$(AB)' = A'B + AB'$$

Übung 10.7.1.19. Gegeben $s \in \mathbb{R}$ bezeichne $(s\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Multiplikation mit s. Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung von einem Intervall nach $\mathbb{R}^n$. Man zeige $\mathrm{L}((s\cdot) \circ \gamma) = |s|\mathrm{L}(\gamma)$ für $s \neq 0$.

Übung 10.7.1.20. Für jede Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ gilt $\mathrm{L}(\gamma) \geq \|\gamma(a) - \gamma(b)\|$. Ist γ zusätzlich stetig, so haben wir Gleichheit genau dann, wenn γ aus dem Weg $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $t \to t\gamma(a) + (1-t)\gamma(b)$ entsteht durch monotone Umparametrisierung.

Übung 10.7.1.21. Eine Abbildung von einem reellen Intervall I nach $\mathbb{R}^n$ heiße **nach der Bogenlänge parametrisierend**, wenn ihre Einschränkung auf jedes nichtleere kompakte Teilintervall dieselbe Länge hat wie das Teilintervall selber. Man zeige, daß sich eine stetige Abbildung von einem reellen Intervall nach $\mathbb{R}^n$, die auf keinem mehrpunktigen Teilintervall konstant ist und deren Einschränkung auf jedes kompakte Teilintervall endliche Länge hat, stets „nach der Bogenlänge parametrisieren“ läßt, daß es also genauer für solch eine Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ stets eine stetige Bijektion $\psi : J \xrightarrow{\sim} I$ von einem weiteren reellen Intervall J nach I gibt derart, daß $\gamma \circ \psi$ nach der Bogenlänge parametrisierend ist.

Übung 10.7.1.22. Man zeige, daß eine stetig differenzierbare Abbildung von einem mehrpunktigen reellen Intervall in den $\mathbb{R}^n$ genau dann nach der Bogenlänge parametrisierend ist, wenn die zugehörige absolute Geschwindigkeit konstant Eins ist.

Übung 10.7.1.23. Gegeben ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}$ erklärt man das **Kurvenintegral von** f **längs** γ als die reelle Zahl

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, \mathrm{d}t$$

Man zeige, daß dies Kurvenintegral unabhängig ist von der Parametrisierung und daß es mit denselben Notationen wie oben geschrieben werden kann als der Grenzwert der Riemannsummen

$$S^r_\gamma(f) = \sum_{i=0}^{r-1} f(\gamma(a_i))\, \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\|$$

10.7.1.24 (**Anschauung zum Kurvenintegral**). Die Länge eines stetig differenzierbaren Weges ist in dieser Terminologie das Kurvenintegral der konstanten Funktion Eins längs unseres Weges. Der „Schwerpunkt“ eines durch eine Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ beschriebenen homogenen gebogenen Drahtes müßte mathematisch dadurch definiert werden, daß seine Koordinaten die Kurvenintegrale der Koordinatenfunktionen x, y, z längs γ dividiert durch die Länge unseres Weges sind. Stellen wir uns allgemeiner eine Erdwärmeanlage vor, bei der kaltes Wasser in einem Rohr durch heißes Gestein gepumpt wird, um am Ende immer noch vergleichsweise kalt aber doch etwas wärmer herauszukommen, und beschreibt γ unser Rohr und f die Wärme der Erde an den jeweiligen Stellen, so würde unser

Kurvenintegral nach Einfügen der entsprechenden physikalischen Konstanten die Temperaturdifferenz zwischen eintretendem und austretendem Wasser beschreiben.

10.7.1.25 (**Diskussion der Terminologie**). Das hier definierte Kurvenintegral wird oft auch als „Wegintegral“ bezeichnet. Ich will den Begriff des Wegintegrals jedoch für eine andere Konstruktion reservieren, die in 12.7.4 besprochen werden wird.

Übung 10.7.1.26 (**Länge des Graphen einer Funktion**). Gegeben eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wird die Länge ihres Graphen, als da heißt die Länge des Weges $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$, gegeben durch das Integral $\mathrm{L}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\ \mathrm{d}t$.

10.7.2 Systeme von linearen Differentialgleichungen

10.7.2.1. Wir bestimmen für eine gegebene quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n; \mathbb{R})$ alle differenzierbaren Abbildungen $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit

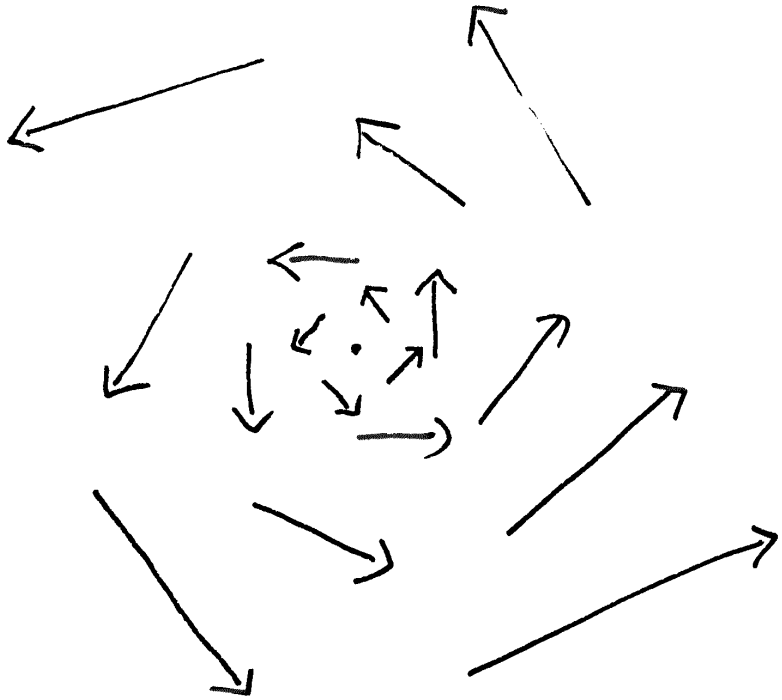
$$\gamma'(t) = A\gamma(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Bei dieser Schreibweise fassen wir implizit die Elemente des $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren auf, also $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^\top$, wo der obere Index $\top$ unsere Zeilenmatrix in eine Spaltenmatrix transponiert. Man nennt so eine Gleichung ein **homogenes System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**. Die Spezifikation „mit konstanten Koeffizienten“ grenzt unsere Gleichung ab von dem noch allgemeineren Fall, bei dem auch die Matrix A noch von t abhängen darf, also $A = A(t)$, und der noch außerhalb unserer Reichweite ist. Die Spezifikation „homogen“ grenzt es ab vom allgemeineren Fall einer Gleichung der Gestalt $\gamma'(t) = A\gamma(t) + f(t)$ für eine zusätzlich gegebene vektorwertige Funktion f, den wir in 10.7.6.1 diskutieren. Anschaulich gesprochen geben wir uns auf dem $\mathbb{R}^n$ das sehr spezielle Vektorfeld $x \mapsto Ax$ vor und interessieren uns für die Bahnen solcher Teilchen, die bei $x \in \mathbb{R}^n$ jeweils die Geschwindigkeit Ax haben.

Beispiel 10.7.2.2. Im Fall $n = 1$ hat A genau einen Eintrag $a \in \mathbb{R}$ und wir hatten schon in 10.5.5.9 im Fall $a = 1$ und in Übung 10.5.5.22 für allgemeines a gesehen, daß alle Lösungen der Differentialgleichung $\gamma' = a\gamma$ die Form $\gamma(t) = c\exp(at)$ haben.

10.7.2.3. Im Allgemeinen erklären wir die **Exponentialfunktion auf Matrizen** durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rccl} \exp: & \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R}) & \to & \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R}) \\ & A & \mapsto & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \mathrm{I} + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \ldots \end{array}$$



Das ebene Vektorfeld $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Hier bedeutet $A^0 = \mathrm{I}$ nach unserer Konvention 10.1.5.16 die Einheitsmatrix und unsere unendliche Reihe ist zu verstehen als der Grenzwert der Folge ihrer Partialsummen. Wir zeigen, daß diese Grenzwerte existieren. Bezeichnen wir dazu für eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ mit $|A|$ das Maximum der Absolutbeträge ihrer Einträge, so gilt offensichtlich $|AB| \le n|A||B|$ für jede weitere Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$. Daraus folgt $|A^k| \le (n|A|)^k$ und dann zeigt die Konvergenz der Exponentialreihe zu $n|A|$ die absolute Konvergenz aller Reihen von Matrixeinträgen in der Exponentialreihe zu A.

Lemma 10.7.2.4 (Funktionalgleichung für das Exponential von Matrizen). *Die Exponentialabbildung wirft die Null auf die Identität, in Formeln* $\exp(0) = \mathrm{I}$. *Sind A, B zwei kommutierende quadratische Matrizen $AB = BA$, so gilt*

$$\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B)$$

10.7.2.5. Insbesondere folgt $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$. Die Exponentialabbildung ist mithin eine Abbildung von der Menge aller quadratischen Matrizen in die Menge aller invertierbaren quadratischen Matrizen

$$\exp : \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$$

Beweis. Aus 10.7.2.3 wissen wir für $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ um die absolute Konvergenz

$$(\exp A)_{pq} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A^k)_{pq}$$

der Exponentialreihe in jedem Matrixeintrag. Aus unseren Erkenntnissen über Umordnung und Produkt absolut konvergenter Reihen folgt dann

$$\begin{aligned}
\big((\exp A)(\exp B)\big)_{pr} &= \textstyle\sum_{q=1}^{n} (\exp A)_{pq}(\exp B)_{qr} \\
&= \textstyle\sum_{q=1}^{n} \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{i!j!}(A^i)_{pq}(B^j)_{qr} \\
&= \textstyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{i!j!}(A^iB^j)_{pr} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\big((A+B)^k\big)_{pr} \\
&= \big(\exp(A+B)\big)_{pr}
\end{aligned}$$

Die Annahme $AB = BA$ brauchen wir, um $(A+B)^k = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} A^iB^j$ verwenden zu dürfen. □

Satz 10.7.2.6 (Erste lineare Differentialgleichungen). *Ist $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix und $c \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor, so gibt es genau eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit Anfangswert $\gamma(0) = c$ derart, daß gilt $\gamma'(t) = A\gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und diese Abbildung wird gegeben durch die Vorschrift*

$$\gamma(t) = \exp(tA)c$$

10.7.2.7. Es ist durchaus möglich, mithilfe dieses Satzes auch ganz konkrete Differentialgleichungen ganz konkret zu lösen. Wir gehen darauf in den weiteren Abschnitten näher ein.

Beweis. Wir behaupten zunächst, daß die Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$, $t \mapsto \exp(tA)$ differenzierbar ist mit der Ableitung $g'(t) = A\exp(tA)$. In der Tat wissen wir nach 10.6.1.16, daß man Potenzreihen gliedweise differenzieren darf, und unsere Formel ergibt sich, wenn wir diese Erkenntnis anwenden auf alle Einträge unserer Matrix. Nach der matrixwertigen Produktregel 10.7.1.18 ist nun auch die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \exp(tA)c$ differenzierbar mit Ableitung $\gamma'(t) = A\exp(tA)c = A\gamma(t)$ und die Bedingung $\gamma(0) = c$ ist offensichtlich. Unsere Funktion ist damit eine Lösung der Differentialgleichung mit dem vorgegebenen Anfangswert. Ist umgekehrt $\gamma(t)$ eine beliebige Lösung unserer Differentialgleichung $\gamma' = A\gamma$, so berechnen wir die Ableitung der Funktion $t \mapsto h(t) = \exp(-tA)\gamma(t)$ mithilfe der matrixwertigen Produktregel 10.7.1.18 und erhalten

$$h'(t) = -A\exp(-tA)\gamma(t) + \exp(-tA)\gamma'(t) = 0$$

Die Funktion $h(t) = \exp(-tA)\gamma(t)$ ist also konstant mit Wert $\gamma(0)$ und mit der matrixwertigen Funktionalgleichung 10.7.2.4 folgt $\gamma(t) = \exp(tA)\gamma(0)$. □

Satz 10.7.2.8 (Erste lineare Differentialgleichungen, Variante). *Ist $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix und $c \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor, und $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $t_0 \in I$ ein Punkt, so gibt es genau eine differenzierbare Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ mit Anfangswert $\gamma(t_0) = c$ derart, daß gilt $\gamma'(t) = A\gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und diese Abbildung wird gegeben durch die Vorschrift*

$$\gamma(t) = \exp((t - t_0)A)c$$

Beweis. Der Beweis ist im wesentlichen derselbe wie der Beweis von 10.7.2.6. □

10.7.2.9. Ist $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix und $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall, so bildet die Menge aller differenzierbaren Abbildungen $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma'(t) = A\gamma(t)$ für alle $t \in I$ einen Untervektorraum L im Vektorraum $\mathrm{Ens}(I, \mathbb{R}^n)$ aller Abbildungen $I \to \mathbb{R}^n$, den **Lösungsraum** unserer Differentialgleichung, und das Auswerten an einer beliebigen Stelle $t_0 \in I$ liefert einen Vektorraumisomorphismus $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$, $\gamma \mapsto \gamma(t_0)$, den **Anfangswertisomorphismus**. All das folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Satz 10.7.2.8.

Übungen

Übung 10.7.2.10. Gegeben eine Diagonalmatrix $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ haben wir $\exp(A) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{a_1}, \ldots, \mathrm{e}^{a_n})$. Analoges gilt für blockdiagonale Matrizen.

10.7.3 Gedämpfte Schwingungen

10.7.3.1. Wir interessieren uns für die Bewegung eines Massepunktes, der an einer Feder aufgehängt ist und dessen Bewegung durch eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibung gedämpft wird. Mißt die Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t)$ seine Auslenkung von der Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt t, so muß unsere Funktion aus physikalischen Gründen eine Differentialgleichung zweiten Grades der Gestalt

$$x' = -ax' - bx$$

erfüllen, wobei die Konstanten a und b die Stärke der Feder und der Dämpfung ausdrücken und in physikalisch relevanten Fällen nichtnegativ sind. Wir lösen diese Differentialgleichung hier erst einmal ad hoc und erheben danach in 10.7.4.2 diesen Zugang zur Methode.

Lemma 10.7.3.2 (**Lösung einiger Schwingungsgleichungen**). *Seien reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben.*

1. *Die Menge aller zweimal differenzierbaren Funktionen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x'' + ax' + bx = 0$ bildet einen Untervektorraum des Raums $\mathrm{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, den* **Lösungsraum** *$L$ unserer Differentialgleichung;*

2. *Die Abbildung $x \mapsto (x(0), x'(0))$ liefert einen Isomorphismus $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ dieses Lösungsraums mit dem $\mathbb{R}^2$, den* **Anfangswertisomorphismus***;*

3. *Hat das Polynom $X^2 + aX + b$ zwei verschiedene reelle Nullstellen λ und μ, so bilden die beiden Funktionen $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ und $x_2(t) = \mathrm{e}^{\mu t}$ eine Basis des Lösungsraums. Hat es dahingegen eine doppelte reelle Nullstelle λ, so bilden die beiden Funktionen $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ und $x_2(t) = t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ eine Basis des Lösungsraums.*

Vorschau 10.7.3.3. Um den Fall, daß unser Polynom keine reelle Nullstelle hat, werden wir uns gleich noch gesondert kümmern.

Beweis. Teil 1 scheint mir offensichtlich. Um Teil 2 zu zeigen beachten wir, daß die Vorschrift $x \mapsto (x, x')$ offensichtlich einen Isomorphismus zwischen unserem Lösungsraum L und dem Lösungsraum des Systems $\gamma_1' = \gamma_2$, $\gamma_2' = -b\gamma_1 - a\gamma_2$ induziert, das in Matrixschreibweise die Gestalt $\gamma' = A\gamma$ annimmt mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

Teil 2 folgt damit aus 10.7.2.9. Für Teil 3 müssen wir folglich nur prüfen, daß die beiden angegebenen Funktionen in der Tat linear unabhängige Lösungen sind. Das kann dem Leser überlassen bleiben. □

Ergänzung 10.7.3.4 (**Lösung mithilfe des Exponentials von Matrizen**). Statt beim Beweis von Teil 3 des vorhergehenden Satzes mögliche Lösungen einfach zu erraten, hätten wir uns auch daran erinnern können, daß ja nach 10.7.2.8 jede Lösung von der Form

$$x(t) = \gamma_1(t) = \mathrm{pr}_1(\exp(tA)c)$$

sein muß für $c = (x(0), x'(0))$. Jetzt brauchen wir weitergehende Kenntnisse in linearer Algebra. Das charakteristische Polynom unserer Matrix A ergibt sich zu $X^2 + aX + b$. Hat es zwei verschiedene reelle Nullstellen λ, μ und bilden wir eine Matrix P mit Eigenvektoren zu λ und μ als Spalten, so gilt $A = P\,\mathrm{diag}(\lambda, \mu)P^{-1}$ und $\exp(tA) = P\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda t}, \mathrm{e}^{\mu t})P^{-1}$ und wir erkennen auf Anhieb, daß jede Lösung eine Linearkombination der Gestalt $x(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{\lambda t} + \beta\,\mathrm{e}^{\mu t}$ sein muß. Im Fall einer doppelten reellen Nullstelle finden wir ähnlich ein P mit

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$$

und die Funktionalgleichung für das Exponential von Matrizen 10.7.2.4 liefert

$$\exp \begin{pmatrix} u & t \\ 0 & u \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^u & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^u & t\,\mathrm{e}^u \\ 0 & \mathrm{e}^u \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich so als eine Linearkombination der Gestalt $\alpha\,\mathrm{e}^{\lambda t} + \beta t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$.

10.7.3.5. Im Fall der gedämpften Schwingung hat unser Polynom $X^2 + aX + b$ die beiden Nullstellen

$$-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Bei hinreichend großer Dämpfung $a^2/4 \geq b$ erhalten wir reelle nichtpositive Lösungen und unser Massepunkt kehrt mit höchstens einmaligem Überschwingen zum Ruhezustand zurück. Im Fall kleiner Dämpfung $a^2/4 < b$ hat unser Polynom dahingegen keine reellen Nullstellen mehr und stattdessen die beiden komplexen Nullstellen $\pm\,\mathrm{i}\,\omega - a/2$ mit $\omega = \sqrt{b - a^2/4} > 0$. Um hier weiterzukommen verallgemeinern wir zunächst einmal alles bisher Gesagte ins Komplexe.

Proposition 10.7.3.6 (**Lösung der Schwingungsgleichung im Komplexen**). *Seien komplexe Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ gegeben.*

1. *Die Menge aller zweimal differenzierbaren Funktionen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $x'' + ax' + bx = 0$ bildet einen komplexen Untervektorraum des Raums $\mathrm{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ aller Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, den* **Lösungsraum** *$L$ unserer Differentialgleichung;*

2. *Die Abbildung* $x \mapsto (x(0), x'(0))$ *liefert einen Vektorraumisomorphismus* $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^2$, *den* **Anfangswertisomorphismus***;*

3. *Hat das Polynom* $X^2 + aX + b$ *zwei verschiedene Nullstellen* λ *und* μ, *so bilden die beiden Funktionen* $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ *und* $x_2(t) = \mathrm{e}^{\mu t}$ *eine Basis des Lösungsraums* L. *Hat es eine doppelte Nullstelle* λ, *so bilden die beiden Funktionen* $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ *und* $x_2(t) = t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ *eine Basis des Lösungsraums.*

Beweis. Der Beweis ist identisch zum Beweis im Reellen 10.7.3.2, sobald man die dazu benötigten Hilfsmittel ins Komplexe verallgemeinert hat. Das gelingt ohne weitere Schwierigkeiten und ich fasse es nur kurz zusammen. Man erklärt zunächst die Exponentialabbildung auf komplexen quadratischen Matrizen durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rccc} \exp: & \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C}) & \to & \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C}) \\ & A & \mapsto & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \end{array}$$

und zeigt, daß $g : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$, $g(t) = \exp(tA)$ differenzierbar ist mit der Ableitung $g'(t) = A\exp(tA)$. Dann zeigt man die Produktregel für Abbildungen der Zahlengerade in Räume komplexer Matrizen und folgert, daß die Abbildung $\gamma(t) = \exp(tA)c$ eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ ist mit Anfangswert $\gamma(0) = c$ und

$$\gamma'(t) = A\gamma(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Schließlich prüft man wieder mit der matrixwertigen Produktregel, daß für jede Lösung γ dieser Differentialgleichung die Abbildung $\exp(-tA)\gamma(t)$ die Ableitung Null hat und folglich konstant ist. Daraus folgt der Anfangswertisomorphismus und die Erkenntnis, daß die Lösungsmenge der Differentialgleichung $\gamma'(t) = A\gamma(t)$ ein n-dimensionaler komplexer Untervektorraum des Abbildungsraums $\mathrm{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ ist. Indem wir von unserer Differentialgleichung zweiter Ordnun zu einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung übergehen, ergeben sich die beiden ersten Aussagen der Proposition. Durch explizites Rechnen folgt dann leicht der dritte Teil. □

10.7.3.7 (**Beziehung zwischen reellen und komplexen Lösungen**). Sind in der Situation aus 10.7.3.6 die Koeffizienten a, b beide reell, so bilden die reellwertigen Lösungen unseres Systems nach 10.7.3.2 einen zweidimensionalen reellen Untervektorraum $L_{\mathbb{R}} \subset \mathrm{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Seine komplexwertigen Lösungen bilden dahingegen nach 10.7.3.6 einen zweidimensionalen komplexen Untervektorraum $L_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, der stabil ist unter dem Übergang zu den komplex konjugierten Funktionen, in Formeln

$$f \in L_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \bar{f} \in L_{\mathbb{C}}$$

Per definitionem gilt weiter $L_{\mathbb{R}} = L_{\mathbb{C}} \cap \mathrm{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Haben wir nun Erzeuger $f_1, \ldots, f_r$ für den $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexwertigen Lösungen gefunden, so

erzeugen deren Realteile und Imaginärteile den $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellwertigen Lösungen. In der Tat schreibt sich jede Lösung f als $f = c_1 f_1 + \ldots + c_r f_r$ mit $c_\nu \in \mathbb{C}$, und ist f reellwertig und schreiben wir $c_\nu = a_\nu + \mathrm{i} b_\nu$ mit $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}$ und nehmen auf beiden Seiten den Realteil, so ergibt sich für f die Darstellung

$$f = a_1 \operatorname{Re}(f_1) - b_1 \operatorname{Im}(f_1) + \ldots + a_r \operatorname{Re}(f_r) - b_r \operatorname{Im}(f_r)$$

10.7.3.8 (**Gedämpfte Schwingungen mit kleiner Dämpfung**). Im Fall der gedämpften Schwingungen 10.7.3.1 mit kleiner Dämpfung und folglich komplexen Nullstellen $\pm \mathrm{i}\,\omega - a/2$ erhalten wir die komplexen Lösungen $x_\pm(t) = \mathrm{e}^{-at/2}\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\,\omega t}$ und die Eulerformel liefert, daß die Funktionen

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-at/2} \cos \omega t \quad \text{und} \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{-at/2} \sin \omega t$$

den Raum der reellwertigen Lösungen aufspannen. Die Größe ω heißt in diesem Zusammenhang auch die **Winkelgeschwindigkeit**. Die Additionstheoreme zeigen, daß sich jede reelle Linearkombination $\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)$ der Funktionen $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ als Sinuswelle mit **Amplitude** k und **Phase** ϕ in der Form

$$\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t) = k \sin(\omega t + \phi)$$

schreiben läßt, für $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ und ϕ einer Lösung des Gleichungssystems $k \cos \phi = \alpha, k \sin \phi = \beta$. Im Fall kleiner Dämpfung kann die allgemeine Lösung also geschrieben werden als $x(t) = k\,\mathrm{e}^{-at/2} \sin(\omega t + \phi)$ und beschreibt eine Schwingung, deren Amplitude bei positiver Dämpfung $a > 0$ exponentiell abfällt.

Vorschau 10.7.3.9. Gegeben $A, P \in \operatorname{Mat}(n; \mathbb{C})$ mit P invertierbar zeigt man leicht die Regel $\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$. Die Berechnung des Exponentials einer beliebigen quadratischen Matrix wird Ihnen auf dieser Grundlage leicht gelingen, sobald sie in der linearen Algebra die Theorie der „Jordan'schen Normalform“ 4.3.4.5 kennengelernt haben.

Übungen

Übung 10.7.3.10. Ist $A \in \operatorname{Mat}(n; \mathbb{R})$ eine reelle Matrix und $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine komplexe Lösung der Differentialgleichung $\gamma'(t) = A\gamma(t)$, so sind ihr koordinatenweise gebildeter Real- und Imaginärteil $\operatorname{Re}\gamma$ und $\operatorname{Im}\gamma$ reelle Lösungen. Erzeugt eine Menge $\mathbb{C}^n$-wertiger Funktionen den $\mathbb{C}$-Vektorraum der $\mathbb{C}^n$-wertigen Lösungen unserer Differentialgleichung, so erzeugen ihre Real- und Imaginärteile zusammen den $\mathbb{R}$-Vektorraum der $\mathbb{R}^n$-wertigen Lösungen.

10.7.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung

10.7.4.1. Die Erfahrungen, die wir bei der Behandlung gedämpfter Schwingungen gemacht haben, fassen wir nun noch allgemeiner.

Satz 10.7.4.2. *Seien komplexe Zahlen $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ gegeben.*

1. *Die komplexwertigen n-mal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \ldots + a_0 f = 0$ bilden einen Untervektorraum im Raum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, den* **Lösungsraum** *unserer Differentialgleichung;*

2. *Die Abbildung $f \mapsto (f(0), f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0))$ ist ein Isomorphismus dieses Lösungsraums mit dem $\mathbb{C}^n$, der* **Anfangswertisomorphismus***;*

3. *Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0$ der Vielfachheit r, so sind die Funktionen $\mathrm{e}^{\lambda t}, t\mathrm{e}^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$ Lösungen unserer Differentialgleichung, und durchläuft λ alle Nullstellen unseres Polynoms, so bilden diese Lösungen eine Basis des Lösungsraums.*

Ergänzung 10.7.4.3. Der Satz bleibt gültig, wenn wir darin $\mathbb{R}$ durch ein beliebiges mehrpunktiges Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ersetzen.

Beweis. Teil 1 ist offensichtlich. Um die in Teil 2 behauptete Existenz und Eindeutigkeit zu zeigen beachten wir zunächst, daß unsere Überlegungen aus 10.7.2.6 ohne Änderungen auch im Komplexen gültig sind. Für eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n; \mathbb{C})$ mit komplexen Einträgen haben also die differenzierbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, die die Differentialgleichung $g' = Ag$ lösen, die Form $g(t) = (\exp tA)g(0)$ wo wir den Anfangswert $g(0) \in \mathbb{C}^n$ frei wählen dürfen. Insbesondere definiert die Abbildung $g \mapsto g(0)$ einen Isomorphismus vom Lösungsraum der Differentialgleichung $g' = Ag$ mit dem $\mathbb{C}^n$. Jetzt beachten wir, daß die Vorschrift $f \mapsto g = (f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)})^\top$ eine Bijektion induziert zwischen der Menge aller n-mal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die die Differentialgleichung aus dem Satz erfüllen, und der Menge aller differenzierbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, die das System von Differentialgleichungen

$$\begin{array}{rcl} g_0' & = & g_1 \\ g_1' & = & g_2 \\ & \vdots & \\ g_{n-1}' & = & a_{n-1} g_{n-1} + \ldots a_1 g_1 + a_0 g_0 \end{array}$$

lösen, wo wir etwas ungewöhnlich $g = (g_0, \ldots, g_{n-1})$ indiziert haben der besseren Übersichtlichkeit halber. Damit folgt Teil 2 aus 10.7.2.6.

3. Motiviert durch unsere Erkenntnisse bei der Lösung von 10.7.3.6 beginnen wir

mit dem Ansatz $f(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$. Mögliche λ sind dann offensichtlich genau die Nullstellen des Polynoms $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$. Ist λ eine Nullstelle der Vielfachheit r, so sind sogar, wieder in Verallgemeinerung unserer Erkenntnisse bei der Lösung von 10.7.3.6, auch $t\mathrm{e}^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$ noch Lösungen unserer Gleichung. Um das einzusehen, betrachten wir den Vektorraum $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und fassen das Ableiten auf als eine lineare Abbildung

$$D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$

Zerfällt unser Polynom in Linearfaktoren

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 = (X - \lambda_1)^{n_1} \ldots (X - \lambda_r)^{n_r}$$

so können wir den Operator $D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_0 : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ auch schreiben als Verknüpfung der Operatoren $(D - \lambda_i)^{n_i}$, und es reicht folglich $(D - \lambda)^r t^{r-1}\mathrm{e}^{\lambda t} = 0$ nachzuweisen. Nun gilt aber offensichtlich

$$(D - \lambda)t^m\mathrm{e}^{\lambda t} = mt^{m-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$$

und die Behauptung folgt per Induktion. Um zu zeigen, daß die $t^j\mathrm{e}^{t\lambda_i}$ für $0 \le j < n_i$ eine Basis des Lösungsraums bilden, reicht es deren lineare Unabhängigkeit nachzuweisen. Beherrscht man die zugehörige lineare Algebra, so erkennt man leicht, daß die $t^m\mathrm{e}^{\lambda t}$ jeweils zum Hauptraum $\mathrm{Hau}(D; \lambda)$ gehören und muß wegen 4.3.2.7 nur noch die lineare Unabhängigkeit der $t^m\mathrm{e}^{\lambda t}$ für festes λ und variables m zeigen, die hinwiederum sofort aus der linearen Unabhängigkeit der Funktionen t^m folgt. Man vergleiche hierzu auch 4.3.2.9.

Beherrscht man die zugehörige lineare Algebra noch nicht, so muß man mehr arbeiten. Man setzt dann etwa eine Linearkombination $\sum c_{ji}t^j\mathrm{e}^{\lambda_i t} = 0$ an und muß zeigen, daß alle c_{ji} verschwinden. Sonst könnten wir aber nach eventueller Umnummerierung der Nullstellen ein k finden mit $c_{k1} \neq 0$ aber $c_{j1} = 0$ für $j > k$. Wenden wir dann auf unsere Summe den Differentialoperator

$$(D - \lambda_1)^k (D - \lambda_2)^N \ldots (D - \lambda_r)^N$$

an für hinreichend grosses N, so ergibt sich $c_{k1}\mathrm{e}^{t\lambda_1} = 0$ im Widerspruch zu unserer Annahme $c_{k1} \neq 0$. □

Übungen

Ergänzende Übung 10.7.4.4. Man bestimme eine Basis des komplexen sowie des reellen Lösungsraums der Differentialgleichung $f''' = f$.

10.7.5 Gekoppelte Schwingungen*

10.7.5.1. In diesem Abschnitt wird mehr lineare Algebra benötigt, als ich im derzeitigen Studienplan voraussetzen kann.

Beispiel 10.7.5.2. An gegenüberliegenden Wänden eines Zimmers ist jeweils ein Wägelchen mit einer Feder befestigt und die beiden Wägelchen sind auch untereinander durch eine Feder verbunden. Bezeichnen $x(t)$ beziehungsweise $y(t)$ die Position des ersten beziehungsweise zweiten Wägelchens auf einer Skala, auf der $x = y = 0$ den Gleichgewichtszustand bedeuten und größere x beziehungsweise y einen größeren Abstand eines Wägelchens von „seiner“ Wand, so genügt unser System einer Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x'' &= -ax - b(x+y) \\ y'' &= -cy - d(y+x) \end{aligned}$$

für Konstanten $a, b, c, d > 0$, in die die Stärke der Federn und die Massen der Wägelchen eingehen. Erklären wir $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto v(t) = (x(t), y(t))$ und betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -(a+b) & -b \\ -d & -(c+d) \end{pmatrix}$$

so können wir unser System schreiben als

$$v''(t) = Av(t)$$

Der Leser mag als Übung zeigen, daß der Lösungsraum vierdimensional sein muß. Unsere Matrix A hat, wie man dem charakteristischen Polynom ansieht, negative reelle Eigenwerte λ_1, λ_2. Also hat bereits der $\mathbb{R}^2$ eine Basis v_1, v_2 aus Eigenvektoren von A. Dann sind die vier Funktionen

$$t \mapsto \exp((\pm\sqrt{\lambda_i})t)v_i \quad \text{mit } i = 1, 2$$

offensichtlich Lösungen, und ähnliche Argumente wie im vorhergehenden Beispiel zeigen, daß sie sogar eine Basis Lösungsraums bilden. Setzen wir $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$, so erhalten wir eine alternative Basis des Lösungsraums durch die vier Funktionen

$$\cos(t\omega_i)v_i \quad \text{und} \quad \sin(t\omega_i)v_i \quad \text{mit } i = 1, 2.$$

Ist noch spezieller unsere Situation symmetrisch unter der Vertauschung der beiden Wägelchen, haben sie also dieselbe Masse und sind durch dieselben Federn mit den Wänden verbunden, so folgt $b = d$ und $a = c$ und wir erhalten $v_1 = (1, 1)$ mit $\lambda_1 = -a - 2b$ sowie $v_2 = (1, -1)$ mit $\lambda_2 = -a$. Diese Eigenvektoren entsprechen den zwei **Eigenschwingungen** des Systems, bei denen beide Wägelchen zu

allen Zeiten in derselben beziehungsweise in entgegengesetzten Richtungen fahren. Die Bewegung der einzelnen Wägelchen $x(t) = x_+(t)$ und $y(t) = x_-(t)$ wird dann beschrieben durch

$$\operatorname{Re}\left(c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_1 t} \pm c_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_2 t}\right) = \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2)t/2}\left(c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t/2} \pm c_2 \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t/2}\right)\right)$$

mit komplexen c_i. Nimmt man hier zum Beispiel $c_1 = c_2 = 1$, so ergibt sich die Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos((\omega_1-\omega_2)t/2)\cos((\omega_1+\omega_2)t/2) \\ y(t) &= 2\sin((\omega_1-\omega_2)t/2)\sin((\omega_1+\omega_2)t/2) \end{aligned}$$

Ist die verbindende Feder schwach im Verhältnis zu den Federn gegen die Wände, in Formeln $a \gg b$, so liegen die beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 und damit auch die Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 verhältnismäßig nah beieinander. Im Versuch kann man in diesem Fall schön sehen, wie die beiden Wägelchen mit der Winkelgeschwindigkeit $(\omega_1 - \omega_2)/2$ ihre Energie untereinander austauschen.

10.7.5.3. Im Übrigen ist es auch a priori klar, daß in der symmetrischen Situation die zweielementige Symmetriegruppe unserer Gleichung, die der Vertauschung der beiden Wägelchen entspricht, auf dem Lösungsraum operieren muß, daß wir also uns schon von Anfang an hätten darauf beschränken dürfen, nur die symmetrischen und die antisymmetrischen Lösungen zu bestimmen und die allgemeine Lösung als Linearkombination solcher speziellen Lösungen zu erhalten.

10.7.6 Angeregte Schwingungen

10.7.6.1. Ist A eine komplexe $(n \times n)$-Matrix und ist zusätzlich eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ vorgegeben und man sucht alle differenzierbaren $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, die das „inhomogene“ System von Differentialgleichungen

$$\gamma'(t) = A\gamma(t) + f(t)$$

lösen, so rät einem die Methode der **Variation der Konstanten** zum Ansatz

$$\gamma(t) = \exp(tA)g(t)$$

Man erkennt leicht, daß dieser Ansatz eine Lösung liefert, wenn $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ differenzierbar ist und die Gleichung $f(t) = \exp(tA)g'(t)$ erfüllt, als da heißt für

$$g(t) = \int^t \exp(-\tau A) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Hier ist $g(t)$ als unbestimmes Integral nur bis auf eine additive Konstante aus dem $\mathbb{C}^n$ wohldefiniert. Daß wir mit diesem Verfahren tatsächlich auch alle Lösungen

$\gamma(t)$ unseres inhomogenen Systems von Differentialgleichungen erhalten ergibt sich daraus, daß ja ganz offensichtlich die Differenz von je zwei Lösungen unserer inhomogenen Gleichung eine Lösung der homogenen Gleichung $\gamma' = A\gamma(t)$ sein muß. In der Sprache der linearen Algebra bilden die Lösungen der inhomogenen Gleichung also einen affinen Teilraum des Raums aller Funktionen, dessen Raum von Richtungsvektoren der Lösungsraum der homogenen Gleichung ist.

Beispiel 10.7.6.2 (**Angeregte Schwingungen**). Eine Lampe ist mit einer Feder an einer vibrierenden Decke aufgehängt. Sei $h(t)$ die Auslenkung der Decke zur Zeit t und $x(t)$ die Höhe der Lampe zur Zeit t, beide gemessen auf einer gegen den Boden festen Skala, auf der $h = x = 0$ einen Zustand beschreibt, in dem sich die Federkraft, die die Lampe zur Decke zieht, und die Schwerkraft der Lampe die Waage halten. So genügt $x(t)$ einer Differentialgleichung der Gestalt

$$x''(t) = -a(x(t) - h(t))$$

Hierbei ist a positiv und hängt von der Masse der Lampe und der Federkonstante ab. Wir schreiben das um zu einem System erster Ordnung

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0' & = & \gamma_1 \\ \gamma_1' & = & -a\gamma_0 + ah \end{array}$$

oder in Matrixschreibweise

$$\gamma' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \gamma + \begin{pmatrix} 0 \\ ah \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom unserer Matrix A ist $X^2 + a$, die Eigenwerte ergeben sich zu $\pm \mathrm{i}\,\eta$ für $\eta = \sqrt{a}$ und als zugehörige Eigenvektoren finden wir $(1, \pm \mathrm{i}\,\eta)^\top$. Wir nehmen diese Eigenvektoren als Spalten einer Matrix

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i}\,\eta & \mathrm{i}\,\eta \end{pmatrix}$$

So haben wir offensichtlich $AP = PB$ alias $P^{-1}AP = B$ mit $B = \operatorname{diag}(-\mathrm{i}\,\eta, \mathrm{i}\,\eta)$ einer Diagonalmatrix und $\varphi := P^{-1}\gamma$ erfüllt die Differentialgleichung $\varphi'(t) = B\varphi(t) + f(t)$ mit

$$f(t) = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ ah(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\eta} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\,\eta & -1 \\ \mathrm{i}\,\eta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ ah(t) \end{pmatrix} = \frac{ah(t)}{2\,\mathrm{i}\,\eta} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ich betrachte von nun an diese Differentialgleichung, da es mir übersichtlicher scheint, mit $\exp tB$ anstelle von $\exp tA = P(\exp tB)P^{-1}$ zu hantieren. Nach

unseren Überlegungen 10.7.6.1 lautet die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$\varphi(t) = \exp(tB)g(t) \quad \text{mit} \quad g(t) = \int^t \exp(-\tau B) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Nehmen wir zum Beispiel an, unsere Decke vibriere mit $h(t) = k\sin(\omega t)$ für $\omega > 0$, so ergibt sich die erste Komponente $g_1(t)$ von $g(t)$ zu

$$\begin{aligned} g_1(t) &= -\tfrac{ka}{2\,\mathrm{i}\,\eta}\int^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tau\eta}\left(\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tau\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\tau\omega}}{2\,\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}\tau \\ &= \tfrac{ka}{4\eta}\int^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tau(\eta+\omega)}\,\mathrm{d}\tau - \tfrac{ka}{4\eta}\int^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tau(\eta-\omega)}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \text{konst} + \tfrac{ka}{4\,\mathrm{i}\,\eta(\eta+\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t(\eta+\omega)} - \begin{cases} \tfrac{ka}{4\,\mathrm{i}\,\eta(\eta-\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t(\eta-\omega)} & \text{falls} \quad \eta \neq \omega; \\ \tfrac{ka}{4\eta}t & \text{falls} \quad \eta = \omega. \end{cases} \end{aligned}$$

Ähnlich berechnen wir $g_2(t)$ und erkennen, daß in dem Fall, daß die Eigenfrequenz der Lampe nahe an der Frequenz der Decke ist, also für $|\eta - \omega|$ klein, die Schwingung sehr groß werden kann und im Fall $\eta = \omega$ die Auslenkung eventuell sogar gegen Unendlich strebt. In der Physik spricht man in diesen Fällen von **Resonanz** beziehungsweise von einer **Resonanzkatastrophe**. Seien nun die Eigenschwingung unseres Systems $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t\eta}$ und die Anregung $t \mapsto h(t)$ oder gleichbedeutend $t \mapsto f(t)$ periodisch mit derselben Periode. Nehmen wir der Einfachkeit halber $p = 2\pi$ an, so finden wir $\eta \in \mathbb{Z}$, und entwickeln wir f in eine „Fourierreihe“, so zeigt unsere obige Formel $g(t) = \int^t \exp(-\tau B) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, daß nur die Summanden $c_{\pm\eta}\mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\,t\eta}$ für die Resonanz verantwortlich sind in dem Sinne, daß alle anderen Summanden der Fourierreihe nur periodische Beiträge zu $g(t)$ liefern. Später in 13.3.1.2 folgende werden Sie lernen, daß $g_1(t)$ im allgemeinen bis auf eine Konstante auch interpretiert werden kann als der „Wert bei $-\eta$ der Fouriertransformierten des Produkts von f_1 mit der charakteristischen Funktion des Intervalls $[0, t]$“.

10.8 Danksagung

Dieser Text hat sich über lange Jahre aus meiner Auseinandersetzung mit der Lehrbuchliteratur im Rahmen meiner Vorlesungstätigkeit entwickelt. Besonders prägend waren die Einflüsse von Forster [For92], Königsberger [Kön97], Lang [Lan68], Rudin [Rud76], Bröcker [Brö95], Courant [Cou71] und Dieudonné [Die03]. Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Christina Pflanz, Olaf Schnürer, ...

Kapitel 11

Reste Analysis 1: Funktionen einer reellen Veränderlichen

Inhalt

11.1 Stetigkeit in abstrakten Räumen 1791

11.1.1 Topologische Räume und Kompatibilitäten 1791

11.1.2 Theorie der topologischen Räume 1793

11.1.3 Metrische Räume 1794

11.1.4 Grenzwerte in metrischen Räumen 1800

11.1.5 Abgeschlossene und offene Teilmengen 1803

11.1.6 Nur noch Übungen zur Topologie 1806

11.1.7 Abgeschlossene Teilmengen topologischer Räume . 1806

11.2 Kompaktheit 1808

11.2.1 Kompakte metrische Räume 1808

11.2.2 Affine Räume* 1810

11.2.3 Normierte Räume 1812

11.2.4 Überdeckungen kompakter metrischer Räume . . . 1818

11.2.5 Integrale mit Parametern 1822

11.3 Grundlegendes zu Fourierreihen 1825

11.3.1 Eindeutigkeit der Fourierreihe 1825

11.3.2 Approximationssatz von Stone-Weierstraß 1827

11.3.3 Konvergenz der Fourierreihe 1833

Hier sind Inhalte abgelegt, zu denen ich in der Vorlesung Analysis 1 im Wintersemester 22/23 nicht mehr gekommen bin. Ich muß sie erst einmal umarbeiten, dann können sie vielleicht als Stoff für ein Proseminar dienen. Zum Teil müssen sie auch in Analysis 2 oder Analysis 3 integriert werden.

11.1 Stetigkeit in abstrakten Räumen

11.1.1 Topologische Räume und Kompatibilitäten

11.1.1.1. Gegeben eine Menge X bilden wir die Menge $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen von X, die **Potenzmenge von** X. Weil es mich verwirrt, über Mengen von Mengen zu reden, nenne ich wie in 3.1.5.13 Teilmengen von $\mathcal{P}(X)$ lieber **Systeme von Teilmengen von** X und spreche im folgenden von **Teilsystemen**, wenn ich Teilmengen solcher Mengensysteme meine.

Definition 11.1.1.2. Gegeben eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Teilmengen einer Menge X im Sinne von 3.1.6.8 erklärt man ihren **Schnitt** und ihre **Vereinigung** durch die Vorschriften

$$\begin{array}{rclcl} \bigcap_{i\in I} X_i & = & \bigcap_{i\in I}^{X} X_i & := & \{x \in X \mid \text{Für alle } i \in I \text{ gilt } x \in X_i\} \\ \bigcup_{i\in I} X_i & = & \bigcup_{i\in I}^{X} X_i & := & \{x \in X \mid \text{Es existiert ein } i \in I \text{ mit } x \in X_i\} \end{array}$$

11.1.1.3 (**Schnitt und Vereinigung leerer Mengenfamilien**). Insbesondere ist der Schnitt über die leere Familie von Teilmengen von X ganz X und die Vereinigung über die leere Familie von Teilmengen von X ist die leere Menge.

Vorschau 11.1.1.4. In 4.7.7.17 und 4.7.7.7 diskutieren wir allgemeiner Produkte und „disjunkte Vereinigungen“ beliebiger nicht notwendig endlicher Familien von Mengen, die dabei auch nicht als Teilmengen einer vorgegebenen Menge angenommen werden.

Definition 11.1.1.5. Eine **Topologie** $\mathcal{T}$ **auf einer Menge** X ist ein System von Teilmengen $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, das stabil ist unter dem Bilden von endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen. In Formeln ausgedrückt fordern wir von einer Topologie $\mathcal{T}$ also:

1. $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{T} \Rightarrow V_1 \cap \ldots \cap V_n \in \mathcal{T}$ für $n \geq 0$ und insbesondere auch $X \in \mathcal{T}$ als der Spezialfall $n = 0$. Gleichbedeutend dazu sind die beiden Forderungen $X \in \mathcal{T}$ sowie $V, W \in \mathcal{T} \Rightarrow V \cap W \in \mathcal{T}$;

2. $\mathcal{V} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V \in \mathcal{T}$ und damit insbesondere auch $\emptyset \in \mathcal{T}$, da ja das leere Mengensystem $\mathcal{V} = \emptyset$ in jedem Mengensystem enthalten ist.

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge mitsamt einer Topologie. Statt $V \in \mathcal{T}$ schreiben wir meist

$$V \Subset X$$

und nennen V eine **offene Teilmenge von** X. Die Notation $\Subset$ ist in der Literatur jedoch unüblich.

Definition 11.1.1.6. Seien X ein topologischer Raum und $P \subset X$ eine Teilmenge. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt eine **Umgebung** U **von** P **in** X, wenn es eine offene Menge $V \Subset X$ gibt mit $P \subset V \subset U$. Im Fall einer einelementigen Teilmenge $P = \{p\}$ sprechen wir auch von einer **Umgebung** U **von** p **in** X.

Definition 11.1.1.7. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **stetig im Punkt** $p \in X$, wenn es für jede Umgebung U von $f(p)$ eine Umgebung U' von p gibt mit $f(U') \subset U$. Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt **stetig** genau dann, wenn sie stetig ist in jedem Punkt.

Beispiel 11.1.1.8 (**Standardtopologie auf** $\bar{\mathbb{R}}$). Auf der Menge $\bar{\mathbb{R}}$ der erweiterten reellen Zahlen erklären wir die **Standardtopologie** $\mathcal{T}$ durch die Vorschrift, daß eine Menge $V \subset \bar{\mathbb{R}}$ zu $\mathcal{T}$ gehört genau dann, wenn es für jeden Punkt $p \in V$ eine Intervallumgebung I von p gibt mit $I \subset V$. Die in Bezug auf die Standardtopologie offenen Intervalle V sind dann offensichtlich genau alle Intervalle der Gestalt $V = (a, b), [-\infty, b), (a, \infty]$ oder $[-\infty, \infty]$ mit $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.

Lemma 11.1.1.9 (**Kompatibilität unserer Umgebungsbegriffe in** $\bar{\mathbb{R}}$)**.** *Gegeben $p \in \bar{\mathbb{R}}$ ist eine Teilmenge $U \subset \bar{\mathbb{R}}$ genau dann eine Umgebung von p in Bezug auf die Standardtopologie, wenn U eine Umgebung von p ist im Sinne unserer Definition 10.3.2.11.*

Beweis. Per definitionem ist jede Umgebung von p in Bezug auf die Standardtopologie auch eine Umgebung im Sinne von 10.3.2.11. Ist umgekehrt U eine Umgebung im Sinne von 10.3.2.11, gibt es also eine Intervallumgebung I von p mit $I \subset U$, gibt es offensichtlich auch eine offene Intervallumgebung $V \Subset \bar{\mathbb{R}}$ von p mit $V \subset I$ und a forteriori $V \subset U$. □

Beispiel 11.1.1.10 (**Standardtopologie auf** $\bar{\mathbb{R}}^n$). Auf dem $\bar{\mathbb{R}}^n$ erklären wir die **Standardtopologie** $\mathcal{T}$ durch die Vorschrift, daß eine Menge $V \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ zu $\mathcal{T}$ gehört genau dann, wenn es für jeden Punkt $p = (p_1, \ldots, p_n) \in V$ Intervallumgebungen I_ν von p_ν gibt mit $I_1 \times \ldots \times I_n \subset V$.

Lemma 11.1.1.11 (**Kompatibilität unserer Umgebungsbegriffe in** $\bar{\mathbb{R}}^n$)**.** *Gegeben $p \in \bar{\mathbb{R}}^n$ ist eine Teilmenge $U \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ genau dann eine Umgebung von p in Bezug auf die Standardtopologie, wenn U eine Umgebung von p ist im Sinne unserer Definition 10.3.2.11.*

Beweis. Per definitionem ist jede Umgebung von p in Bezug auf die Standardtopologie auch eine Umgebung im Sinne von 10.3.2.11. Ist umgekehrt U eine Umgebung im Sinne von 10.3.2.11, gibt es also Intervallumgebungen I_ν der Koordinaten p_ν von p mit $I_1 \times \ldots \times I_n \subset U$, so gilt es $V \Subset \bar{\mathbb{R}}^n$ zu finden mit $p \in V \subset U$. Wie bereits besprochen finden wir aber offene Intervallumgebungen V_ν der Koordinaten p_ν mit $V_\nu \subset I_\nu$ und dann ist offensichtlich $V := V_1 \times \ldots \times V_n$ offen für die Standardtopologie mit $p \in V \subset U$. □

11.1.1.12 (**Kompatibilität unserer Stetigkeitsbegriffe**). Eine Abbildung $\bar{\mathbb{R}}^m \to \bar{\mathbb{R}}^n$ ist topologisch stetig für die Standardtopologien im Sinne der obigen Definition 11.1.1.7 genau dann, wenn sie stetig ist im Sinne unserer Definition 10.3.2.14. Das folgt unmittelbar aus der Rückwärtskompatibilität des Umgebungsbegriffs 11.1.1.11.

Definition 11.1.1.13. Gegeben eine Teilmenge $D \subset X$ eines topologischen Raums X erklärt man die **auf** D **induzierte Topologie** oder **Spurtopologie** durch die Vorschrift

$$W \Subset D \quad \Leftrightarrow \quad \exists V \Subset X \text{ mit } W = V \cap D.$$

In Worten ist also eine Teilmenge von D offen für die induzierte Topologie genau dann, wenn sie der Schnitt von D mit einer offenen Teilmenge von X ist. Ab jetzt fassen wir stillschweigend jede Teilmenge D eines topologischen Raums X als topologischen Raum mit der induzierten Topologie auf.

11.1.1.14. Es ist klar, daß das in 11.1.1.13 beschriebene Mengensystem auf einer Teilmenge eines topologischen Raums in der Tat eine Topologie auf besagter Teilmenge liefert und daß die Einbettungsabbildung stetig ist.

Beispiel 11.1.1.15 (**Kompatibilität unserer Stetigkeitsbegriffe zum Zweiten**). Eine Abbildung $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \to \bar{\mathbb{R}}^n$ ist stetig im Sinne unserer Definition 10.3.2.14 genau dann, wenn die Abbildung $f : D \to \bar{\mathbb{R}}^n$ stetig ist für die auf D induzierte Topologie. Das folgt direkt aus den Definitionen.

11.1.2 Theorie der topologischen Räume

Satz 11.1.2.1 (Verknüpfung stetiger Abbildungen). *Jede Verknüpfung von stetigen Abbildungen ist stetig. Sind genauer $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen zwischen topologischen Räumen und ist $p \in X$ ein Punkt und f stetig bei p und g stetig bei $f(p)$, so ist $(g \circ f)$ stetig bei p.*

Beweis. Ist g stetig bei $f(p)$, so finden wir für jede Umgebung U von $g(f(p))$ eine Umgebung U' von $f(p)$ mit $g(U') \subset U$. Ist zusätzlich f stetig ist bei p, finden wir für diese Umgebung U' von $f(p)$ weiter eine Umgebung U'' von p mit $f(U'') \subset U'$. Damit haben wir aber auch eine Umgebung U'' von p gefunden mit $(g \circ f)(U'') \subset U$. □

Lemma 11.1.2.2 (Universelle Eigenschaft der induzierten Topologie). *Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, $Z \subset Y$ eine Teilmenge mit $f(X) \subset Z$ und $p \in X$ ein Punkt. Genau dann ist $f : X \to Y$ stetig bei p, wenn die induzierte Abbildung $f : X \to Z$ stetig ist bei p für die auf Z induzierte Topologie.*

Beweis. Es ist klar, daß die Umgebungen $U_Z \subset Z$ eines Punktes $q \in Z$ in Bezug auf die induzierte Topologie genau die Schnitte $U_Y \cap Z$ mit Z von Umgebungen $U_Y \subset Y$ von q in Y sind. Genau dann gibt es also für jede Umgebung U_Y von $f(p)$ in Y eine Umgebung $U' \subset X$ von p mit $f(U') \subset U_Y$, wenn es für jede Umgebung U_Z von $f(p)$ in Z eine Umgebung $U' \subset X$ von p gibt mit $f(U') \subset U_Z$. □

11.1.2.3. Wir leiten unsere Aussage 10.3.2.30 über die Stetigkeit der Verknüpfung auch noch aus den obigen Aussagen ab. Gegeben $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \to \bar{\mathbb{R}}^n$ stetig bei $p \in D$ und $g : \bar{\mathbb{R}}^n \supset E \to \bar{\mathbb{R}}^l$ mit $f(D) \subset E$ stetig bei $f(p)$ ist ja nach der universellen Eigenschaft der induzierten Topologie auch $f : D \to E$ stetig bei p. Da nach Annahme $g : E \to \bar{\mathbb{R}}^l$ stetig ist bei $f(p)$, folgt die Stetigkeit der Verknüpfung nach 10.3.2.30 aus der Stetigkeit der Verknüpfung nach 11.1.2.1.

11.1.2.4. Wenn wir eine Menge einfach nur „offen“ nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies „offen“ gemeint ist. Ist X ein topologischer Raum und sind $M \subset Y \subset X$ Teilmengen, so meint $M \circledcirc Y$, daß M offen ist als Teilmenge des Raums Y mit seiner induzierten Topologie.

Lemma 11.1.2.5 (Charakterisierung offener Mengen durch Umgebungen). *Eine Teilmenge $Y \subset X$ eines topologischen Raums X ist offen genau dann, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist.*

Beweis. Per definitionem ist eine offene Menge eine Umgebung eines jeden ihrer Punkte. Ist umgekehrt $Y \subset X$ eine Umgebung jedes Punktes $p \in Y$, so gibt es für alle $p \in Y$ eine offene Menge $V_p \circledcirc X$ mit $p \in V_p \subset Y$. Es folgt

$$Y = \bigcup_{p \in Y} V_p$$

und damit ist Y offen als Vereinigung offener Teilmengen von X. □

11.1.3 Metrische Räume

Definition 11.1.3.1. Unter einer **Metrik** d auf einer Menge X versteht man eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ derart, daß für alle $x, y, z \in X$ gilt:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar $X = (X, d)$ bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf X.

Beispiel 11.1.3.2. Der Buchstabe d steht in diesem Zusammenhang vermutlich für das Wort „Distanz“. Auf $\mathbb{R}^n$ liefert der übliche **Skalarproduktabstand**

$$d(x,y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots (x_n - y_n)^2}$$

eine Metrik. Die Ungleichung aus der Definition einer Metrik wird in diesem Beispiel in 4.1.3.24 formal bewiesen und bedeutet anschaulich, daß in einem Dreieck mit Seitenlängen a, b, c stets gilt $a \leq b + c$. Sie heißt deshalb auch ganz allgemein die **Dreiecksungleichung**.

Beispiel 11.1.3.3. Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist auch der **Betragsabstand**

$$d(x,y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

eine Metrik. Wenn nichts anderes gesagt ist, fassen wir den $\mathbb{R}^n$ stets auf als einen metrischen Raum mit dem Betragsabstand als Metrik. Diese Metrik ist zwar weniger anschaulich als der Skalarproduktabstand, läßt sich aber einfacher handhaben.

Beispiel 11.1.3.4. Jede Teilmenge eines metrischen Raums ist mit der **induzierten Metrik** selbst ein metrischer Raum.

Definition 11.1.3.5. Sei X ein metrischer Raum. Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$\mathrm{B}(x;\varepsilon) := \{z \in X \mid d(x,z) < \varepsilon\}$$

Diese Menge heißt der ε**-Ball** um x oder auch die ε**-Kugel** um x oder auch die ε**-Umgebung** von x.

Beispiel 11.1.3.6. Für den Skalarproduktabstand im $\mathbb{R}^3$ ist der Ball um x mit Radius ε anschaulich tatsächlich ein Ball. Für den Betragsabstand hat $\mathrm{B}(x;\varepsilon)$ dahingegen die Gestalt eines Würfels mit Mittelpunkt x und Seitenlänge 2ε.

Definition 11.1.3.7. Eine **Umgebung** eines Punktes in einem metrischen Raum ist eine Teilmenge von besagtem Raum, die einen ganzen Ball um unseren Punkt umfaßt.

11.1.3.8 (**Vom Nutzen des Umgebungsbegriffs**). Die Umgebungen eines Punktes im $\mathbb{R}^n$ bezüglich des Betragsabstands sind dieselben wie seine Umgebungen bezüglich des Skalarproduktabstands, was man unschwer explizit prüft und was sich auch als ein Spezialfall der „Äquivalen von Normen“ 11.2.3.13 erweisen wird. Das ist der Grund dafür, daß wir im Folgenden unsere Definitionen nach Möglichkeit mithilfe von Umgebungen formulieren: Für so definierte Begriffe ist a priori klar, daß im Fall des $\mathbb{R}^n$ ihre Bedeutung nicht davon abhängt, ob wir mit dem Skalarproduktabstand oder mit dem Betragsabstand arbeiten.

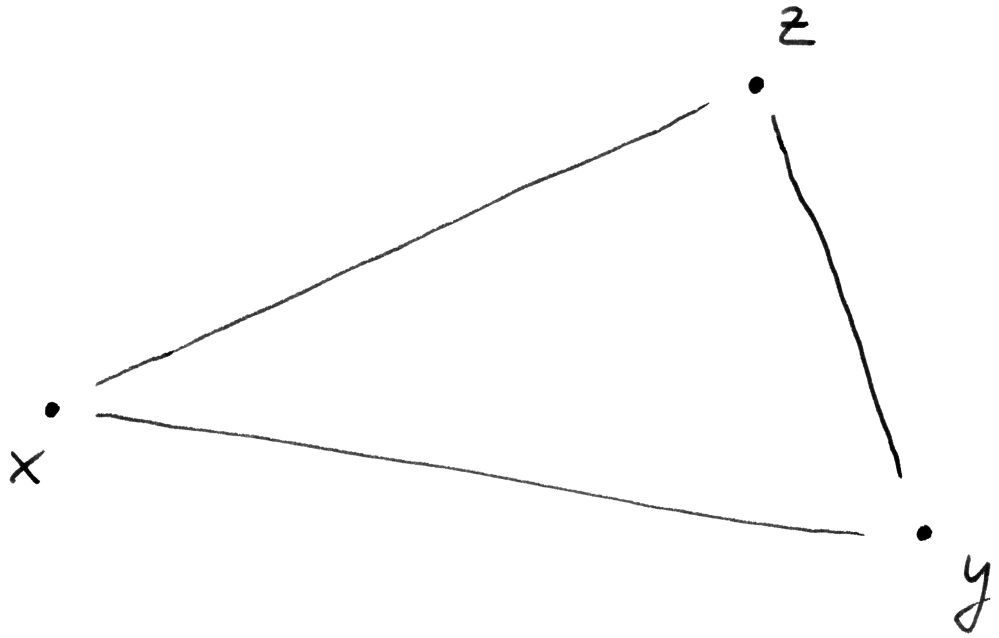
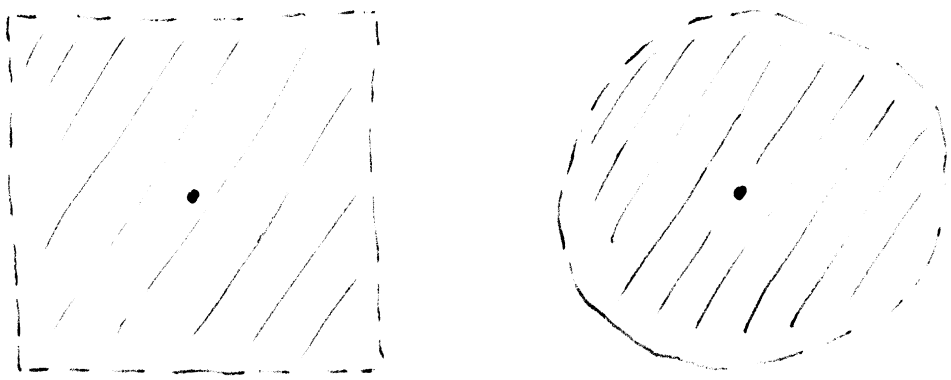


Illustration zur Dreiecksungleichung



Bälle in der Ebene für den Betragsabstand und den Skalarproduktabstand

11.1.3.9 (**Eigenschaften von Umgebugen**). Der Schnitt von endlich vielen Umgebungen eines Punktes in einem metrischen Raum ist wieder eine Umgebung besagten Punktes. Je zwei verschiedene Punkte eines metrischen Raums besitzen disjunkte Umgebungen. Genauer sind für x, y mit $d(x, y) = r > 0$ die $(r/2)$-Bälle um x und y disjunkt. In der Tat folgte für z aus dem Schnitt ja mit Hilfe der Dreiecksungleichung $r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < r$, also kann es solch ein z nicht geben.

Definition 11.1.3.10. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt **stetig im Punkt** $p \in X$, wenn es für jede Umgebung U von $f(p)$ eine Umgebung U' von p gibt mit $f(U') \subset U$. Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt **stetig**, wenn sie stetig ist in jedem Punkt.

11.1.3.11. Offensichtlich ist auch eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen stetig im Punkt $p \in X$ genau dann, wenn für jede Umgebung U von $f(p)$ ihr Urbild $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von p ist.

Lemma 11.1.3.12 (**ε-δ-Kriterium**). *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist stetig im Punkt $p \in X$ genau dann, es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ gibt derart, daß gilt $f(\mathrm{B}(p; \delta)) \subset \mathrm{B}(f(p); \varepsilon)$.*

Beweis. Ist f stetig bei p, so finden wir insbesondere für die Umgebung $U := \mathrm{B}(f(p); \varepsilon)$ von $f(p)$ eine Umgebung U' von p mit $f(U') \subset U$, und diese Umgebung U' muß dann ihrerseits einen Ball $\mathrm{B}(p; \delta)$ umfassen. Gilt umgekehrt das ε-δ-Kriterium und haben wir eine Umgebung U von $f(p)$ gegeben, so finden wir erst ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathrm{B}(f(p); \varepsilon) \subset U$, können dann dazu ein δ finden mit $f(\mathrm{B}(p; \delta)) \subset \mathrm{B}(f(p); \varepsilon)$, und $U' := \mathrm{B}(p; \delta)$ schließlich ist die gesuchte Umgebung von p mit $f(U') \subset U$. □

Beispiel 11.1.3.13. Beispiele für stetige Abbildungen sind Einbettungen von einem Teilraum oder konstante Abbildungen. In diesen Fällen können wir $\delta = \varepsilon$ nehmen.

Beispiel 11.1.3.14 (**Rückwärtskompatibilität der metrischen Stetigkeit**). Gegeben $D \subset \mathbb{R}^m$ ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^n$ offensichtlich stetig im hier gegebenen Sinne in Bezug auf den Betragsabstand 11.1.3.3 genau dann, wenn sie stetig ist im Sinne unserer bisherigen Definition 10.3.2.14. Die Rückwärtskompatibilität des Stetigkeitsbegriffs ist damit gesichert.

Definition 11.1.3.15. Gegeben metrische Räume (X_i, d_i) für $1 \leq i \leq n$ machen wir ihr Produkt $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ zu einem metrischen Raum durch die **Produktmetrik**

$$d(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Beispiel 11.1.3.16. Der Betragsabstand auf $\mathbb{R}^{n+m}$ ist die Produktmetrik zu den Betragsabständen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$.

Proposition 11.1.3.17 (Komponentenregel). *Seien Z und $X_1, \ldots, X_n$ metrische Räume und $f_i : Z \to X_i$ Abbildungen. Genau dann ist die Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_n) : Z \to X_1 \times \ldots \times X_n$ stetig, wenn alle f_i stetig sind.*

11.1.3.18. Wenden wir diese Proposition an mit f der Identität auf einem Produkt, so impliziert die Stetigkeit der Identität, daß alle Projektionsabbildungen $\mathrm{pr}_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$ stetig sein müssen.

Beweis. Da die Projektionen pr_i Abstände zwischen Punkten nie vergrößern, können wir ihre Stetigkeit direkt zeigen, indem „wir jeweils $\delta = \varepsilon$ nehmen“. Ist f stetig, so sind folglich auch die $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f$ stetig als Verknüpfungen stetiger Abbildungen. Sind umgekehrt alle f_i stetig in p, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ gewisse δ_i mit $d(p, z) < \delta_i \Rightarrow d_i(f_i(p), f_i(z)) < \varepsilon$, wo d_i die Metrik auf X_i bezeichnet. Nehmen wir $\delta = \inf \delta_i$, so gilt

$$d(p, z) < \delta \Rightarrow d(f(p), f(z)) < \varepsilon$$

und das ist gleichbedeutend zu $f(\mathrm{B}(p; \delta)) \subset \mathrm{B}(f(p); \varepsilon)$. □

Beispiel 11.1.3.19. Eine Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ aus einem metrischen Raum X ist genau dann stetig, wenn alle ihre Komponenten $f_i : X \to \mathbb{R}$ stetig sind.

Korollar 11.1.3.20 (Summen und Produkte stetiger Abbildungen sind stetig). *Ist X ein metrischer Raum und sind f, g stetige Abbildungen $X \to \mathbb{R}$, so sind auch $f + g$ und fg stetige Abbildungen $X \to \mathbb{R}$.*

Beweis. Wir schreiben $f + g$ beziehungsweise fg als die Verknüpfung der nach der Komponentenregel 11.1.3.17 stetigen Abbildung $X \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ mit der nach 10.3.2.27 beziehungsweise 10.3.2.28 stetigen Addition beziehungsweise Multiplikation $\mathrm{add}, \mathrm{mult} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. □

Übungen

Übung 11.1.3.21. Wir versehen den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit der Metrik $d(z, w) = |z - w|$. Man zeige, daß das in der Tat eine Metrik ist, und daß die Addition und die Multiplikation stetige Abbildungen $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind und das Bilden des Inversen eine stetige Abbildung $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$.

Ergänzende Übung 11.1.3.22. Man zeige, daß das Invertieren von Matrizen eine stetige Abbildung $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ ist. Hinweis: Cramer'sche Regel 3.6.4.6.

Übung 11.1.3.23. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung von metrischen Räumen, die Abstände nicht verkleinert, in Formeln $d(f(x), f(z)) \geq d(x, z)\ \forall x, z \in X$. Man zeige, daß f injektiv ist und $f^{-1} : f(X) \to X$ stetig.

Übung 11.1.3.24. Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ ist stetig. Jede multilineare Abbildung $f : \mathbb{R}^{k(1)} \times \ldots \times \mathbb{R}^{k(r)} \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.

Beispiel 11.1.3.25 (**Rückwärtskompatibilität zur metrischen Stetigkeit**). Für jeden metrischen Raum bildet das System seiner im Sinne von 11.1.5.3 offenen Teilmengen eine Topologie, die **metrische Topologie**. Wir fordern von einer Topologie *nicht*, daß ein beliebiger Schnitt offener Mengen stets wieder offen sein muß: Sonst müßten ja in unserem Beispiel der metrischen Räume alle einpunktigen Mengen offen sein, als Schnitte immer kleinerer Bälle. Da nach 11.1.5.5 Bälle in metrischen Räumen stets offen sind, ist in metrischen Räumen eine Umgebung eines Punktes im topologischen Sinne 11.1.1.6 dasselbe wie eine Umgebung im metrischen Sinne 11.1.3.7. Insbesondere ist eine Abbildung zwischen metrischen Räumen „topologisch stetig“ im Sinne der obigen Definition 11.1.1.7 genau dann, wenn sie „metrisch stetig“ ist im Sinne unserer Definition 11.1.3.10.

Beispiele 11.1.3.26. Es gibt auch Topologien, die unserer bis hierher entwickelten Anschauung eher ungewohnt sein mögen: Auf jeder Menge können wir etwa die **Klumpentopologie** betrachten, die nur aus der ganzen Menge und der leeren Menge besteht, oder die **diskrete Topologie**, bei der wir schlicht alle Teilmengen als offen ansehen. Einen topologischen Raum mit der diskreten Topologie nennen wir auch kurz einen **diskreten Raum**.

Beispiele 11.1.3.27. Jede konstante Abbildung ist stetig. Die Identität auf einem topologischen Raum ist immer stetig. Jede Abbildung in einen Raum mit der Klumpentopologie ist stetig. Jede Abbildung aus einem Raum mit der diskreten Topologie ist stetig.

Übungen

Ergänzende Übung 11.1.3.28 (**De Morgan'sche Regeln**). Man verallgemeinere die Formeln aus 10.1.3.7. Genauer schreibe man in Formeln und zeige, daß der Schnitt einer derartigen Vereinigung mit einer weiteren Menge die Vereinigung der Schnitte ist, die Vereinigung eines derartigen Schnitts mit einer weiteren Menge der Schnitt der Vereinigungen, das Komplement eines Schnitts die Vereinigung der Komplemente und das Komplement einer Vereinigung der Schnitt der Komplemente. Etwas allgemeiner zeige man für zwei Familien $(A_i)_{i\in I}$ und $(B_j)_{j\in J}$ von Teilmengen einer Menge X die Formeln

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$$

Besonders Mutige zeigen für eine durch eine Menge A indizierte Familie $(X_a)_{a\in A}$ von Teilmengen einer vorgegebenen Menge X und eine beliebige Abbildung $g : A \to J$ in eine weitere Menge J die Formel

$$\bigcap_{j\in J}\left(\bigcup_{g(a)=j} X_a\right) = \bigcup_{\substack{s:J\to A\\ g\circ s=\mathrm{id}}}\left(\bigcap_{j\in J} X_{s(j)}\right)$$

Hier läuft die Vereinigung rechts also über alle Schnitte $s : J \to A$ von g. Durch Übergang zu den Komplementen folgert man die Gültigkeit einer analogen Formel, in der $\cup$ und $\cap$ vertauscht sind.

Übung 11.1.3.29. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Ist f stetig in $p \in X$ und g stetig in $f(p) \in Y$, so ist $g \circ f$ stetig in p. Hinweis: 11.1.2.1.

Übung 11.1.3.30. Die durch den Betragsabstand auf $\mathbb{R}^n$ gegebene Topologie fällt zusammen mit der durch den Skalarproduktabstand gegebenen Topologie. Da nach 11.1.3.24 in Bezug auf diese Topologien jede lineare, ja sogar jede multilineare Abbildung stetig ist, können wir auf jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V seine **natürliche Topologie** durch die Bedingung erklären, daß für einen und jeden Vektorraumisomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$ sowohl φ als auch $\varphi^{-1} : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ stetig sein sollen. In derselben Weise erklären wir die **natürliche Topologie** auf jedem endlichdimensionalen reellen affinen Raum.

11.1.4 Grenzwerte in metrischen Räumen

11.1.4.1. Ein Punkt p eines metrischen Raums X heißt ein **Häufungspunkt von** X, wenn jede Umgebung von p außer p selbst auch noch weitere Punkte von X enthält.

Definition 11.1.4.2. Gegeben metrische Räume X, Y und ein Häufungspunkt p von X und eine Abbildung $f : X\backslash p \to Y$ gibt es höchstens eine Fortsetzung von f zu einer Abbildung $\tilde{f} : X \to Y$, die stetig ist bei p. Man zeigt das wie in 10.3.5.6. Wenn es so eine Fortsetzung gibt und sie durch den Wert $\tilde{f}(p) = y$ geschieht, so sagen wir, der **Grenzwert von** f **für** $x \to p$ **existiere in** Y und schreiben

$$\lim_{x\to p} f(x) = y$$

11.1.4.3 (**Grenzwerte von Folgen in metrischen Räumen**). Teilmengen von $\bar{\mathbb{R}}$ binden wir in den Kontext des Grenzwertbegriffs 11.1.4.2 für metrische Räume ein, indem wir irgendeine streng monotone Bijektion $[0,1] \xrightarrow{\sim} \bar{\mathbb{R}}$ wählen und sie verwenden, um die Betragsmetrik von $[0,1]$ zu einer Metrik auf $\bar{\mathbb{R}}$ zu übertragen, und uns überlegen, daß Umgebungen und Grenzwerte nach der Stetigkeit von Umkehrfunktionen 10.3.3.11 nicht von der Wahl dieser Bijektion abhängen. Vollständig befriedigend wird das erst im Kontext topologischer Räume **??**, der alle bis hierher behandelten Fälle in natürlicher Weise einschließt.

Beispiel 11.1.4.4. Gegeben $\mathbb{N} \to Y$, $n \mapsto y_n$ eine Folge in einem metrischen Raum Y und $y \in Y$ ein Punkt ist

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y$$

dann gleichbedeutend dazu, daß jede Umgebung von y fast alle Glieder unserer Folge enthält. Wir sagen dann, die Folge y_n **strebt gegen** y oder **konvergiert gegen** x und nennen y den **Grenzwert der Folge**. Gleichbedeutend können wir auch fordern, daß jeder Ball um y fast alle Glieder unserer Folge enthält.

Beispiel 11.1.4.5. Sei D eine Menge und X ein metrischer Raum. Auf dem Raum $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D,X)$ aller beschränkten Abbildungen $f : D \to X$ kann man eine Metrik erklären durch die Vorschrift

$$d(f,g) = \sup\{d(f(p),g(p)) \mid p \in D\}$$

im Fall $D \neq \emptyset$ und in offensichtlicher Weise im Fall $D = \emptyset$. Diese Metrik heißt die **Metrik der gleichmäßigen Konvergenz**. In der Tat ist für f_n, f im Funktionenraum $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D,\mathbb{R})$ mit dieser Metrik die Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

gleichbedeutend dazu, daß die Abbildungen f_n im Sinne unserer Definition 10.6.1.8 gleichmäßig gegen die Abbildung f konvergieren.

Definition 11.1.4.6 (**Punktweise und gleichmäßige Konvergenz**). Sei D eine Menge, X ein metrischer Raum, $f_n : D \to X$ eine Folge von Abbildungen und $f : D \to X$ eine weitere Abbildung.

1. Wir sagen, die Folge der f_n **konvergiere punktweise** gegen f, wenn gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(p) = f(p)$ für alle Punkte $p \in D$.

2. Wir sagen, die Folge der f_n **konvergiere gleichmäßig** gegen f, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon$ gibt mit

$$n \geq N \Rightarrow (d(f_n(p), f(p)) < \varepsilon \ \forall p \in D)$$

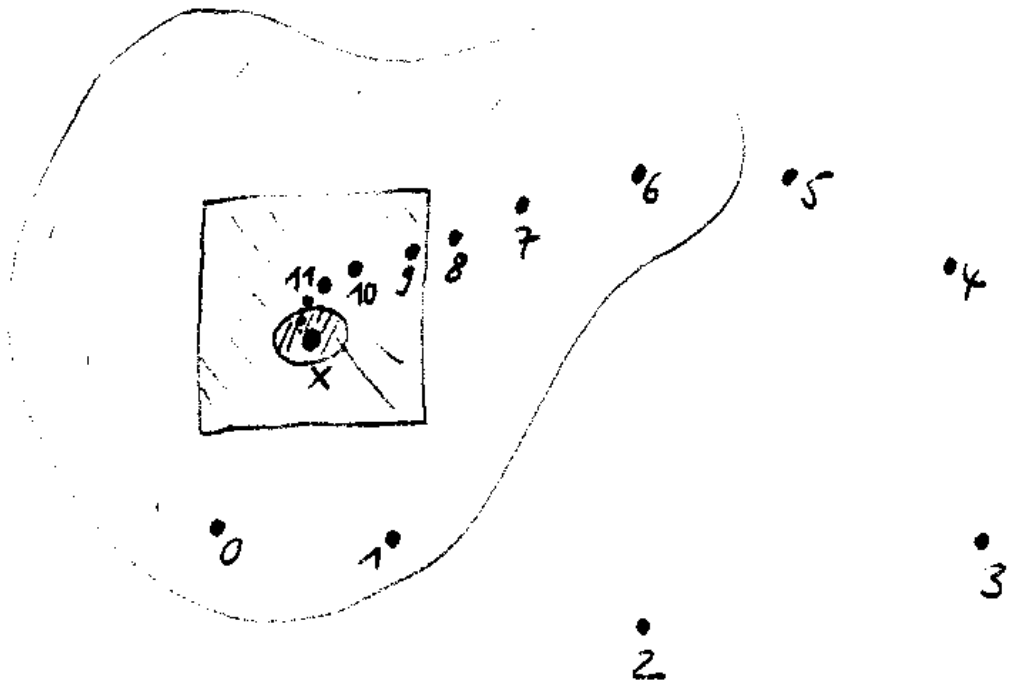


Illustration zur Konvergenz von Folgen. Eingezeichnet sind drei Umgebungen eines Punktes x, in jeder sollen fast alle Folgenglieder liegen.

Übungen

Übung 11.1.4.7. Sei (x_n, y_n) eine Folge im Produkt $X \times Y$ der metrischen Räume X und Y. Genau dann konvergiert unsere Folge gegen (x, y), wenn x_n gegen x konvergiert und y_n gegen y. Man formuliere und beweise auch die offensichtliche Verallgemeinerung auf beliebige endliche Produkte metrischer Räume.

Übung 11.1.4.8. Für beschränkte Abbildungen von einer Menge D in einen metrischen Raum X ist auch in dieser Allgemeinheit gleichmäßige Konvergenz gleichbedeutend zur Konvergenz im Raum $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, X)$ mit seiner eben erklärten „Metrik der gleichmäßigen Konvergenz“.

Übung 11.1.4.9. Für jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist die Menge der Folgenglieder beschränkt.

Übung 11.1.4.10 (**Stetigkeit als Folgenstetigkeit**). Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung von metrischen Räumen. Genau dann ist f stetig in p, wenn für jede Folge x_n mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$. Hinweis: 10.3.5.43.

Übung 11.1.4.11 (**Stetigkeit komplexer Potenzreihen**). Man zeige, daß jede komplexe Potenzreihe eine stetige komplexwertige Funktion auf ihrer Konvergenzkreisscheibe $\{z \mid |z| < r\}$ liefert, für r der Konvergenzradius. Hinweis: Man kopiere den Beweis im Reellen. Inssbesondere sehen wir so ein zweites Mal, daß die komplexe Exponentialfunktion stetig ist.

11.1.5 Abgeschlossene und offene Teilmengen

Definition 11.1.5.1. Seien X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in X$ heißt ein **Berührungspunkt von** A, wenn es eine Folge in A gibt, die gegen x konvergiert. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen** oder präziser **abgeschlossen in** X, wenn sie alle ihre Berührungspunkte enthält, wenn sie also „abgeschlossen ist unter der Bildung von Grenzwerten“. Statt „A ist eine abgeschlossene Teilmenge von X“ schreiben wir kurz aber unüblich

$$A \not\subset X$$

11.1.5.2. Wenn wir eine Menge einfach nur „abgeschlossen“ nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies „abgeschlossen“ gemeint ist. Ist X ein metrischer Raum und sind $U \subset Y \subset X$ Teilmengen, so meint $U \not\subset Y$, daß U abgeschlossen ist als Teilmenge des Raums Y mit seiner induzierten Metrik.

Definition 11.1.5.3. Eine Teilmenge eines metrischen Raums heißt **offen** oder genauer **offen in unserem metrischen Raum** genau dann, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist, d.h. wenn sie mit jedem Punkt auch einen ganzen Ball

um besagten Punkt enthält. Statt „U ist eine offene Teilmenge von X“ schreiben wir kurz aber unüblich

$$U \circledcirc X$$

11.1.5.4. Wenn wir eine Menge einfach nur „offen“ nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies „offen“ gemeint ist. Ist X ein metrischer Raum und sind $U \subset Y \subset X$ Teilmengen, so meint $U \circledcirc Y$, daß U offen ist als Teilmenge des Raums Y mit seiner induzierten Metrik.

Beispiele 11.1.5.5. In einem metrischen Raum ist ein Ball $\mathrm{B}(x;r)$ stets offen, denn für $z \in \mathrm{B}(x;r)$ gilt $d(x,z) < r$, also gibt es $\varepsilon > 0$ mit $d(x,z) < r - \varepsilon$, und dann haben wir aber $\mathrm{B}(z;\varepsilon) \subset \mathrm{B}(x;r)$ nach der Dreiecksungleichung. Insbesondere umfaßt jede Umgebung eines Punktes eine offene Umgebung desselben Punktes.

Übungen

Übung 11.1.5.6. Der Schnitt eines beliebigen Systems von abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums ist abgeschlossen. Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums ist abgeschlossen. Die leere Menge und der ganze Raum sind abgeschlossen. Jede einpunktige und damit auch jede endliche Teilmenge eines metrischen Raums ist abgeschlossen. Jedes kompakte reelle Intervall ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

Ergänzende Übung 11.1.5.7. Ein Abbildung zwischen metrischen Räumen ist stetig genau dann, wenn ihr Graph abgeschlossen ist im kartesischen Produkt unserer beiden Räume. Hinweis: 11.1.4.10

Ergänzende Übung 11.1.5.8. Jede abgeschlossene echte Untergruppe der reellen Zahlengeraden ist zyklisch, als da heißt von der Gestalt $\mathbb{Z}\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Hinweis: Ist $G \subset \mathbb{R}$ unsere Untergruppe, so betrachte man $\inf(G \cap \mathbb{R}_{>0})$.

Übung 11.1.5.9. Der Schnitt von endlich vielen offenen Teilmengen eines metrischen Raums ist offen. Die Vereinigung eines beliebigen Systems von offenen Teilmengen eines metrischen Raums ist offen. Die leere Menge und der ganze Raum sind offen. In einem endlichen metrischen Raum ist jede Teilmenge offen und abgeschlossen. Die im Sinne unserer hier gegebenen Definition „offenen“ Intervalle von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle (a,b) für $a,b \in \bar{\mathbb{R}}$, als da heißt, unsere „offenen reellen Intervalle“ aus 10.3.2.5.

Übung 11.1.5.10. Nimmt man zu einer Teilmenge M eines metrischen Raums X alle ihre Berührungspunkte hinzu, so erhält man eine abgeschlossene Menge, genauer: Die kleinste abgeschlossene Menge, die M umfaßt. Diese Menge heißt auch der **Abschluß** von M in X und wird mit $\mathrm{Cl}_X(M) = \mathrm{Cl}(M) = \overline{M}$ bezeichnet.

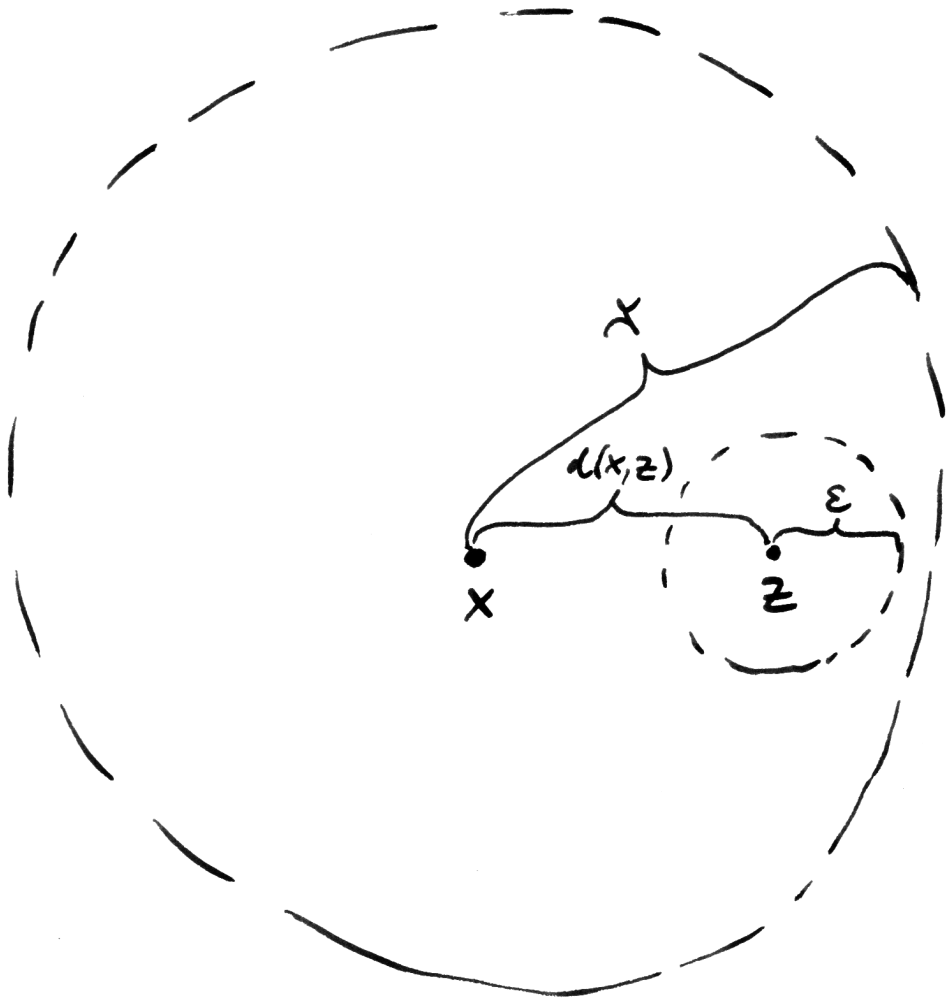


Illustration zu Beispiel 11.1.5.5: Ein Ball in einem metrischen Raum ist stets offen.

11.1.5.11 (**Diskussion der Notation**). Diese Notation beißt sich mit unserer Notation $\bar{\mathbb{R}}$ für die erweiterten reellen Zahlen, obwohl natürlich $\bar{\mathbb{R}}$ schon auch der Abschluß von $\mathbb{R}$ in $\bar{\mathbb{R}}$ ist. Ich hoffe, daß der Leser stets aus dem Kontext erschließen kann, was im Einzelfall jeweils gemeint ist. Soweit ich es abschätzen kann, werde ich $\bar{\mathbb{R}}$ nie als Bezeichnung für den Abschluß von $\mathbb{R}$ in einem anderen Raum als eben in $\bar{\mathbb{R}}$ selbst verwenden.

Ergänzende Übung 11.1.5.12. Sei X ein metrischer Raum und seien $A, B \subset X$ disjunkte, abgeschlossene Teilmengen. So gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$. Hinweis: Man betrachte d_A wie in Übung **??** mache den Ansatz $f(z) = g(d_A(z), d_B(z))$ für geeignetes $g : \mathbb{R}^2 \backslash 0 \to [0,1]$.

Übung 11.1.5.13. Sei X ein metrischer Raum, $z \in X$ ein Punkt, $r \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. So ist die Menge $\{x \in X \mid d(x,z) \leq r\}$ abgeschlossen.

Übung 11.1.5.14. Ist X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge, so kann ihr Abschluß $\bar{A}$ in der Notation von **??** beschrieben werden als die Menge $\bar{A} = \{x \in X \mid d(x,A) = 0\}$.

Ergänzende Übung 11.1.5.15. Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung metrischer Räume, so ist ihr Graph eine abgeschlossene Teilmenge $\Gamma(f) \not\subset X \times Y$.

11.1.6 Nur noch Übungen zur Topologie

Übungen

Übung 11.1.6.1. Man zeige, daß auf einer Teilmenge eines metrischen Raums die Spurtopologie zur metrischen Topologie mit der Topologie zur induzierten Metrik übereinstimmt.

Übung 11.1.6.2. Man zeige für jeden topologischen Raum: Der Schnitt von zwei Umgebungen eines Punktes ist wieder eine Umgebung besagten Punktes. Jede Umgebung eines Punktes kann verkleinert werden zu einer offenen Umgebung desselben Punktes.

Übung 11.1.6.3. Eine Teilmenge eines topologischen Raums ist offen genau dann, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist.

Übung 11.1.6.4. Sei X ein topologischer Raum und $U \Subset X$ eine offene Teilmenge. So ist eine Teilmenge $M \subset U$ offen in U genau dann, wenn sie offen ist in X. In Formeln gilt unter der Voraussetzung $U \Subset X$ für Teilmengen $M \subset U$ also $(M \Subset U \Leftrightarrow M \Subset X)$.

11.1.7 Abgeschlossene Teilmengen topologischer Räume

Definition 11.1.7.1. Gegeben ein topologischer Raum X und eine Teilmenge $M \subset X$ gibt es stets eine kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die M um-

faßt, nämlich den Schnitt über alle abgeschlossenen Teilmengen von X, die M umfassen. Wir notieren diesen Schnitt $\mathrm{Cl}_X(M) = \mathrm{Cl}(M) = \bar{M}$ und nennen sie den **Abschluß von** M oder genauer den **Abschluß von** M **in** X.

11.1.7.2 (**Diskussion der Notation**). Diese Notation beißt sich mit unserer Notation $\bar{\mathbb{R}}$ für die erweiterten reellen Zahlen. Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, was jeweils gemeint ist. Immerhin ist $\bar{\mathbb{R}}$ auch der Abschluß von $\mathbb{R}$ in den erweiterten reellen Zahlen mit ihrer Topologie aus 11.1.1.10.

11.1.7.3. Eine Abbildung ist stetig genau dann, wenn darunter das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist: Das folgt unmittelbar aus dem entsprechenden Satz **??** für offene Mengen, da das Urbild des Komplements einer Menge stets das Komplement ihres Urbilds ist.

Beispiel 11.1.7.4. Wir geben einen neuen Beweis für die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert 10.3.5.37, der zwar nur für reelle Folgen mit reellen Grenzwerten funktioniert, aber dafür viele Möglichkeiten der Verallgemeinerung aufzeigt. Zunächst ist die Menge $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ nach 11.1.7.3 als Urbild der abgeschlossenen Menge $[0, \infty) \subset\!\!\!

11.2 Kompaktheit

11.2.1 Kompakte metrische Räume

Definition 11.2.1.1. Ein metrischer Raum heißt **kompakt**, genauer **folgenkompakt**, wenn jede Folge in unserem Raum eine konvergente Teilfolge besitzt.

Vorschau 11.2.1.2. Wir werden bald sehen, wie sich der Begriff der Kompaktheit im Fall allgemeiner topologischer Räume in die beiden Begriffe „folgenkompakt“ und „überdeckungskompakt“ aufspaltet. Im Fall metrischer Räume fallen zwar beide Begriffe noch zusammen, aber bis zum Beweis dieser Tatsache in 12.4.1.5 muß man sie auch hier noch auseinanderhalten.

11.2.1.3. Eine Teilmenge A eines metrischen Raums nennen wir kompakt oder auch ein **Kompaktum**, wenn sie kompakt ist als metrischer Raum mit der induzierten Metrik, wenn also jede Folge in A eine Teilfolge besitzt, die *gegen einen Punkt aus* A konvergiert.

11.2.1.4 (**Kompaktheit ist eine absolute Eigenschaft**). Man erliegt beim ersten Lernen leicht der Versuchung, die Begriffe „offen“, „abgeschlossen“ und „kompakt“ auf eine Stufe zu stellen. Ich will deshalb besonders betonen, daß „offen“ und „abgeschlossen“ Eigenschaften sind, die ein Paar $(X \supset Y)$ bestehend aus einem metrischen Raum X mit einer Teilmenge Y hat oder nicht hat, wohingegen „kompakt“ eine Eigenschaft ist, die ein metrischer Raum selbst hat oder nicht hat. Natürlich kann man Kompaktheit auch für Teilmengen metrischer Räume mit ihrer induzierten Metrik diskutieren. Die Begriffe „offen“ und „abgeschlossen“ dahingegen sind für einen metrischen Raum allein nicht definiert.

11.2.1.5. Jeder kompakte metrische Raum ist beschränkt. Ist in der Tat ein Raum nicht beschränkt, so finden wir darin eine Folge x_n mit $d(x_0, x_n) \geq n$, und diese Folge kann nach 11.1.4.9 keine konvergente Teilfolge haben.

Proposition 11.2.1.6. *Jedes endliche Produkt von kompakten metrischen Räumen ist kompakt.*

Vorschau 11.2.1.7. Der Satz von Tychonoff 15.3.2.10 besagt allgemeiner, daß ein beliebiges Produkt von kompakten topolgischen Räumen wieder kompakt ist.

Beweis. Sei $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ mit kompakten X_i. Sei eine Folge in X gegeben. Da X_1 kompakt ist, finden wir eine Teilfolge unserer Folge, die in der ersten Koordinate konvergiert. Da auch X_2 kompakt ist, finden wir von dieser Teilfolge hinwiederum eine Teilfolge, die auch in der zweiten Koordinate konvergiert. Indem wir so weitermachen, finden wir schließlich eine Teilfolge, die in jeder Koordinate konvergiert. Diese Teilfolge konvergiert dann nach 11.1.4.7 auch in X. □

Lemma 11.2.1.8. *Eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist stets abgeschlossen.*

Beweis. Sei X unser Raum und $A \subset X$ unsere Teilmenge. Ist A nicht abgeschlossen, so gibt es eine Folge in A, die gegen einen Punkt aus $X \backslash A$ konvergiert. Solch eine Folge kann aber unmöglich eine Teilfolge haben, die gegen einen Punkt aus A konvergiert. □

Lemma 11.2.1.9. *Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten metrischen Raums ist stets kompakt.*

Beweis. Sei X unser Raum und $A \subset X$ unsere Teilmenge. Jede Folge in A besitzt nach unseren Annahmen eine Teilfolge, die gegen einen Punkt aus X konvergiert. Da A abgeschlossen ist, muß dieser Punkt dann bereits in A liegen. □

Satz 11.2.1.10 (Heine-Borel). *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Nach 11.2.1.5 und 11.2.1.8 ist in einem metrischen Raum eine kompakte Teilmenge stets beschränkt und abgeschlossen. In der anderen Richtung wissen wir schon aus 10.3.6.6, daß für jedes $k \geq 0$ das Intervall $[-k, k]$ kompakt ist. Falls eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist, finden wir ein k mit $A \subset [-k, k]^n$. Nach 11.2.1.6 ist nun $[-k, k]^n$ kompakt. Als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist nach 11.2.1.9 dann auch A selbst kompakt. □

Beispiel 11.2.1.11. Die Menge $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{Q}$ und beschränkt, ist aber nicht kompakt für die induzierte Metrik.

Proposition 11.2.1.12. *Unter einer stetigen Abbildung metrischer Räume werden Kompakta stets auf Kompakta abgebildet.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ unsere stetige Abbildung und $A \subset X$ ein Kompaktum. Ist y_n eine Folge in $f(A)$, so finden wir eine Folge x_n in A mit $f(x_n) = y_n$. Falls A kompakt ist, besitzt die Folge x_n eine Teilfolge x_{n_k}, die gegen einen Punkt $x \in A$ konvergiert. Dann ist y_{n_k} nach 11.1.4.10 eine Teilfolge der Folge y_n, die gegen einen Punkt von $f(A)$ konvergiert, nämlich gegen $f(x)$. □

Korollar 11.2.1.13. *Jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten metrischen Raum ist beschränkt und nimmt, wenn unser Raum nicht leer ist, das Supremum und das Infimum der Menge ihrer Funktionswerte an.*

11.2.1.14. Ist also in Formeln X ein nichtleerer kompakter Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es $p, q \in X$ mit $f(p) \leq f(x) \leq f(q) \;\; \forall x \in X$.

Beweis. Nach 11.2.1.12 ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt, also beschränkt und abgeschlossen. Aus $X \neq \emptyset$ folgt weiter $f(X) \neq \emptyset$. Damit besitzt $f(X)$ ein Supremum und Infimum in $\mathbb{R}$. Da $f(X)$ kompakt, also abgeschlossen ist, folgt $\sup f(X) \in f(X)$ und $\inf f(X) \in f(X)$. Es gibt in anderen Worten $p, q \in X$ mit $\sup f(X) = f(p)$ und $\inf f(X) = f(q)$. □

Definition 11.2.1.15. Eine stetige Abbildung von metrischen Räumen heißt **gleichmäßig stetig**, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, daß für beliebige Punkte x, y im Definitionsbereich gilt

$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Satz 11.2.1.16 (Gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta). *Jede stetige Abbildung von einem kompakten metrischen Raum in einen weiteren metrischen Raum ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Mutatis mutandis zeigt das der Beweis von Satz 10.5.1.15. □

Vorschau 11.2.1.17. Einen alternativen Beweis, der vom Begriff der Überdeckungskompaktheit 12.4.1.3 ausgeht, geben wir in 15.4.1.12.

Übungen

Übung 11.2.1.18. Endliche Vereinigungen kompakter Teilmengen eines metrischen Raums sind stets wieder kompakt.

Ergänzende Übung 11.2.1.19. Ist in einem metrischen Raum eine abzählbare Familie kompakter Teilmengen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit leerem Schnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset$, so gibt es schon ein N mit $K_0 \cap \ldots \cap K_N = \emptyset$. Das wird verallgemeinert auf den Fall beliebiger Familien in 12.4.1.13.

Ergänzende Übung 11.2.1.20. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap K = \emptyset$. So gibt es $\delta > 0$ mit $d(x, y) \geq \delta$ für alle $x \in A$, $y \in K$. Hinweis: **??** und 11.1.5.14.

11.2.2 Affine Räume*

11.2.2.1. Dieser Abschnitt ist ein Auszug aus Abschnitt 3.3.1.1 der linearen Algebra. Ich habe ihn hier nur eingefügt, um Unklarheiten zu vermeiden was die im weiteren verwendeten Notationen und Begriffsbildungen angeht.

Definition 11.2.2.2. Ein **affiner Raum** oder kurz **Raum** über einem Körper k ist ein Tripel

$$E = (E, \vec{E}, a)$$

bestehend aus einer nichtleeren Menge E, einer abelschen Gruppe $\vec{E} \subset \mathrm{Ens}^\times E$ von Permutationen von E, von der man fordert, daß für alle $p \in E$ das Anwenden auf p eine Bijektion $\vec{E} \xrightarrow{\sim} E$ besagter Gruppe mit unserem Raum liefert, sowie einer Abbildung $a : k \times \vec{E} \to \vec{E}$, die die abelsche Gruppe $\vec{E}$ zu einem k-Vektorraum macht. Die Elemente von $\vec{E}$ heißen die **Translationen** oder **Richtungsvektoren** unseres affinen Raums und den Vektorraum $\vec{E}$ selbst nennen wir den **Richtungsraum** unseres affinen Raums E. Die Operation von k auf $\vec{E}$ mag man die **Reskalierung von Translationen** nennen. Unter der **Dimension** unseres affinen Raums verstehen wir die Dimension seines Richtungsraums. Das Resultat der Operation von $\vec{v} \in \vec{E}$ auf $p \in E$ notieren wir $\vec{v} + p := \vec{v}(p)$ oder manchmal auch $p + \vec{v}$.

11.2.2.3 (**Diskussion der Notation**). Die eben eingeführte Notation für den Richtungsraum eines affinen Raums steht in Konflikt mit der Notation aus 12.8.3.6, nach der mit Pfeilen versehene Mannigfaltigkeiten orientierte Mannigfaltigkeiten andeuten sollen. Was jeweils gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen.

11.2.2.4. Ist E ein affiner Raum, so liefert nach Annahme für jedes $p \in E$ die Operation eine Bijektion $\vec{E} \xrightarrow{\sim} E$, $\vec{u} \mapsto \vec{u} + p$ und es gilt $\vec{0} + p = p$ sowie $\vec{u} + (\vec{v} + p) = (\vec{u} + \vec{v}) + p$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$ und $p \in E$. Flapsig gesprochen ist also ein affiner Raum ein „Vektorraum, bei dem man den Ursprung vergessen hat“. Gegeben $p, q \in E$ definieren wir $p - q$ als den Richtungsvektor $\vec{u} \in \vec{E}$ mit $p = \vec{u} + q$.

11.2.2.5 (**Vektorräume als affine Räume**). Jeder Vektorraum V kann als ein affiner Raum aufgefaßt werden, indem wir als Translationen die durch die Addition von festen Vektoren gegebenen Abbildungen nehmen, so daß unsere Gruppe von Translationen das Bild des injektiven Gruppenhomomorphismus $V \to \mathrm{Ens}^\times(V)$, $v \mapsto (v+)$ wird, und die Reskalierung von Translationen dadurch erklären, daß dieser Gruppenhomomorphismus einen Vektorraumisomorphismus auf sein Bild liefern soll. Insbesondere erhalten wir damit eine kanonische Identifikation

$$\mathrm{trans} : V \xrightarrow{\sim} \vec{V}$$

zwischen unserem Vektorraum und dem Richtungsraum des zugehörigen affinen Raums. Diese Identifikation scheint mir derart kanonisch, daß ich sie von nun an in Sprache und Notation oft so behandeln werde, als seien diese beiden Vektorräume schlicht gleich.

Beispiel 11.2.2.6. Es scheint mir besonders sinnfällig, den uns umgebenden Raum mathematisch als dreidimensionalen reellen affinen Raum zu modellieren: Hierbei denkt man sich $\vec{E}$ als die Gruppe aller „Parallelverschiebungen“. Ähnlich mag man die Zeit modellieren als einen eindimensionalen reellen affinen Raum. Die

leere Menge kann in meinen Konventionen nie ein affiner Raum sein, es gibt hierzu jedoch auch andere Konventionen.

Ergänzung 11.2.2.7. Meist findet man in der Literatur die begriffliche Variante eines **affinen Raums über einem vorgegebenen Vektorraum**: Darunter versteht man dann eine Menge E mit einer freien transitiven Operation des vorgegebenen Vektorraums. Ich ziehe die oben gegebene Variante vor, da sie jeden Bezug auf einen vorgegebenen Vektorraum vermeidet und den Anschauungsraum meines Erachtens besser modelliert.

Definition 11.2.2.8. Eine Abbildung $\varphi : E \to E'$ zwischen affinen Räumen heißt eine **affine Abbildung** genau dann, wenn es eine lineare Abbildung zwischen den zugehörigen Richtungsräumen $\vec{\varphi} : \vec{E} \to \vec{E}'$ gibt mit

$$\varphi(p) - \varphi(q) = \vec{\varphi}(p - q) \ \ \forall p, q \in E$$

Diese lineare Abbildung $\vec{\varphi}$ ist dann durch φ eindeutig bestimmt und heißt der **lineare Anteil** unserer affinen Abbildung.

11.2.3 Normierte Räume

11.2.3.1. Unter einem **reellen Vektorraum** beziehungsweise einem **reellen Raum** verstehen wir einen Vektorraum beziehungsweise einen affinen Raum über dem Körper der reellen Zahlen. Wollen wir einen reellen Vektorraum beziehungsweise affinen Raum mit einer Metrik versehen, so reicht es, wenn wir jedem seiner Vektoren beziehungsweise Richtungsvektoren in geeigneter Weise eine „Länge“ zuordnen. Einen solchen abstrakten Längenbegriff für die Vektoren eines Vektorraums nennt man eine „Norm“. Die Details folgen.

Definition 11.2.3.2. Sei V ein reeller Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\| \ \ \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}, v \mapsto \|v\|$ derart, daß gilt:

1. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$;
2. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$.

Unter einem **normierten Vektorraum** versteht man ein Paar $(V, \| \ \ \|)$ bestehend aus einem Vektorraum V und einer Norm $\| \ \ \|$ auf V. Fordert man nur die erste und dritte Bedingung, so spricht man von einer **Halbnorm**.

Ergänzung 11.2.3.3. Für Leser, die schon mit komplexen Zahlen vertraut sind, sei noch erwähnt, daß man von einer Norm auf einem komplexen Vektorraum stärker fordert, daß die erste Bedingung sogar für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten soll, wobei $|\lambda|$ als die „Norm der komplexen Zahl λ“ im Sinne von 3.2.7.9 zu verstehen ist.

11.2.3.4. Jeder normierte Vektorraum wird ein metrischer Raum vermittels der **durch die Norm induzierten Metrik**

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

Zum Beispiel gehört unser Betragsabstand auf dem $\mathbb{R}^n$ zur Maximumsnorm. Wir dürfen damit in normierten Vektorräumen über Stetigkeit und Konvergenz von Folgen reden. Allgemeiner verstehen wir unter einem **normierten affinen Raum** einen reellen oder komplexen affinen Raum im Sinne von 11.2.2.2, dessen Richtungsraum mit einer Norm versehen ist. Auch jeder normierte affine Raum trägt eine natürliche Metrik, die durch dieselbe Formel beschrieben wird. Reden wir ohne nähere Spezifikation von einem **normierten Raum**, so meinen wir einen normierten affinen Raum. Leser, die mit dem Begriff eines affinen Raums noch nicht vertraut sind, mögen sich aber auch einen normierten Vektorraum denken.

Beispiel 11.2.3.5. Mit $v \mapsto \|v\|$ ist für jedes $\alpha > 0$ auch $v \mapsto \alpha\|v\|$ eine Norm. Auf dem Nullraum gibt es nur eine Norm, die eben den Nullvektor auf Null wirft.

Beispiel 11.2.3.6. Auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert man die **Skalarproduktnorm** eines Vektors $v = (v_1, \ldots, v_n)$ durch $\|v\| = \|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$. Wie man formal zeigt, daß das tatsächlich eine Norm ist, wird in 4.1.3.24 diskutiert.

Beispiel 11.2.3.7. Auf dem $\mathbb{R}^n$ für $n > 0$ definiert man die **Maximumsnorm** von $v = (v_1, \ldots, v_n)$ durch $|v| = \|v\|_\infty = \max(|v_1|, \ldots, |v_n|)$.

Beispiel 11.2.3.8. Auf dem Raum $V = \mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, \mathbb{R})$ aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf einer Menge D haben wir die **Supremumsnorm**, gegeben für $D \neq \emptyset$ durch

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$$

und im Fall $D = \emptyset$ als die einzig mögliche Norm auf dem Nullraum. Für eine endliche Menge D mit n Punkten erhalten wir unsere Maximumsnorm auf dem $\mathbb{R}^n$ als Spezialfall der Supremumsnorm. Noch allgemeiner definieren wir für jeden normierten Vektorraum $(W, |\ |)$ auf dem Raum $V = \mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, W)$ aller beschränkten Abbildungen von D nach W die Supremumsnorm durch $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$ im Fall $D \neq \emptyset$ und im Fall $D = \emptyset$ als die einzig mögliche Norm auf dem Nullraum. Die zu unserer Supremumsnorm gehörige Metrik ist in allen diesen Fällen die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.

Beispiel 11.2.3.9. Sind $V_1, \ldots, V_n$ normierte Vektorräume, so erklären wir auf ihrem Produkt $V_1 \times \ldots \times V_n$ die **Produktnorm** durch die Vorschrift $\|(v_1, \ldots, v_n)\| = \sup \|v_i\|$ im Fall $n > 0$ und als die einzige Norm auf dem Nullraum im Fall $n = 0$. Offensichtlich induziert die Produktnorm die Produktmetrik.

Satz 11.2.3.10 (Stetigkeit linearer Abbildungen). *Eine lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen $f : V \to W$ ist stetig genau dann, wenn es eine*

Konstante $C \geq 0$ gibt mit

$$\|f(v)\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in V$$

11.2.3.11. Wir werden in 11.2.3.14 sehen, daß lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen normierten reellen Vektorräumen immer stetig sind. Sie werden in 11.2.3.26 sogar folgern, daß lineare Abbildungen von einem endlichdimensionalen normierten reellen Vektorraum in einen beliebigen weiteren normierten reellen Vektorraum immer stetig sind.

Beweis. Ist f stetig, so gibt es $\delta > 0$ mit $\|v - 0\| \leq \delta \Rightarrow \|f(v) - f(0)\| \leq 1$. Setzen wir $C = 1/\delta$, so folgt $\|f(v)\| \leq C\|v\|$ zunächst für alle Vektoren v der Norm $\|v\| = \delta$ und dann durch Multiplikation mit Skalaren für alle $v \in V$. Gibt es umgekehrt ein $C > 0$ mit $\|f(v)\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in V$, so finden wir für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \varepsilon/C > 0$ so daß gilt

$$\|v - w\| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(v) - f(w)\| = \|f(v - w)\| \leq C\delta = \varepsilon \qquad \square$$

Definition 11.2.3.12. Zwei Normen $\| \ \|$, $| \ |$ auf einem reellen Vektorraum V heißen **äquivalent**, wenn es positive Konstanten $c, C > 0$ gibt mit

$$\|v\| \leq C|v| \ \text{ und } \ |v| \leq c\|v\| \quad \forall v \in V$$

Satz 11.2.3.13 (Äquivalenz von Normen). *Auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum sind je zwei Normen äquivalent.*

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß V der $\mathbb{R}^n$ ist mit $n \geq 1$ und daß eine unserer Normen die Maximumsnorm $|v|$ ist. Sei $\| \ \|$ eine zweite Norm. Bezeichnet $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und ist $v = v_1\mathrm{e}_1 + \ldots + v_n\mathrm{e}_n$, so haben wir

$$\begin{array}{rcl} \|v\| & = & \|v_1\mathrm{e}_1 + \ldots + v_n\mathrm{e}_n\| \\ & \leq & |v_1| \cdot \|\mathrm{e}_1\| + \ldots + |v_n| \cdot \|\mathrm{e}_n\| \\ & \leq & |v| \cdot C \end{array}$$

mit $C = \|\mathrm{e}_1\| + \ldots + \|\mathrm{e}_n\|$. Insbesondere folgern wir, daß $\| \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $| \ |$-stetige Abbildung ist, also stetig für die durch die Maximumsnorm $| \ |$ gegebene Metrik auf $\mathbb{R}^n$, denn aus $d(x, y) = |x - y| < \varepsilon/C$ folgt $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \varepsilon$. Nun ist aber die Oberfläche

$$F := \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| = 1\}$$

des Hyperkubus $| \ |$-kompakt nach 11.2.1.10 und nicht leer falls gilt $n \geq 1$. Nach 11.2.1.13 nimmt folglich die Funktion $\| \ \|$ auf F ein Minimum a an, und da F

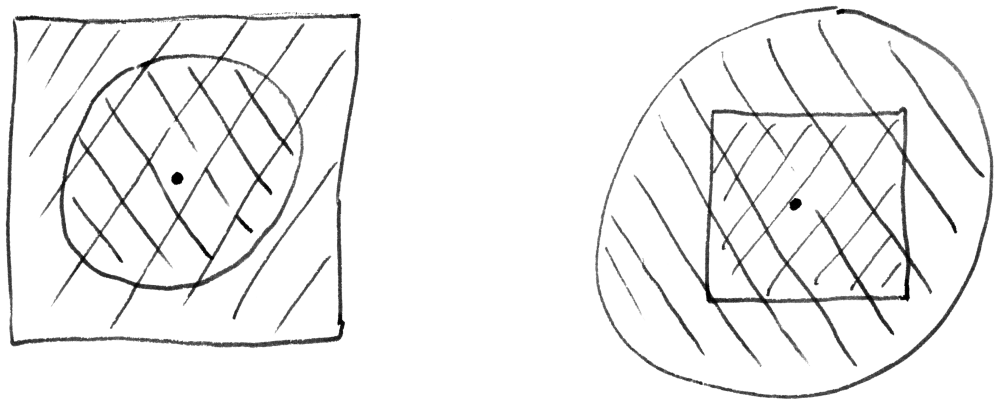


Illustration zur Äquivalenz von Normen am Beispiel der Betragsnorm und der Skalarproduktnorm auf dem $\mathbb{R}^2$.

nicht den Nullvektor enthält, ist dies Minimum notwendig positiv, $a > 0$. Wir folgern zunächst einmal $a|v| \leq \|v\|$ für alle $v \in F$. Dann gilt aber natürlich auch $a|\lambda v| \leq \|\lambda v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in F$, also $a|w| \leq \|w\| \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$. Mit $c = 1/a$ gilt also $|w| \leq c\|w\| \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$. □

Variante zum Schluß des vorhergehenden Beweises. Statt mit Kompaktheit zu argumentieren, kann man hier alternativ auch mit Induktion über n und „Vollständigkeit" argumentieren, wenn man denn diesen Begriff bereits kennt. Die Argumentation verläuft dann wie folgt: Wir betrachten die affinen Hyperebenen $H_i = \{x \mid x_i = 1\}$. Aus der Induktionsannahme können wir durch Widerspruch folgern, daß es positive Konstanten $a_i > 0$ gibt mit

$$a_i \leq \|w\| \quad \forall w \in H_i$$

In der Tat gäbe es sonst in H_i eine Folge w_ν mit $\|w_\nu\| \to 0$ für $\nu \to \infty$. Diese Folge wäre im Sinne von **??** eine Cauchy-Folge für die von $\| \ \|$ auf H_i induzierte Metrik. Dann wäre sie aber wegen der Äquivalenz der Normen nach der Induktionsannahme auch eine Cauchy-Folge für die von der Maximumsnorm $| \ |$ auf H_i induzierte Metrik und müßte nach **??** konvergieren gegen einen Punkt $w \in H_i$ mit $\|w\| = 0$. Widerspruch! Nun gibt es für $v \in \mathbb{R}^n \backslash 0$ stets $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| = |v|$ derart, daß $\lambda^{-1}v$ in einer der affinen Hyperebenen H_i liegt. Mit $a = \inf(a_i)$ folgt $a \leq \|\lambda^{-1}v\|$ und $|v| \leq c\|v\|$ für $c = 1/a$. □

Korollar 11.2.3.14. *Jede lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen normierten reellen Vektorräumen ist stetig.*

Beweis. Jeder Vektorraumisomorphismus zwischen endlichdimensionalen normierten reellen Vektorräumen ist stetig nach dem Satz über die Äquivalenz von Normen 11.2.3.13 und dem Kriterium für die Stetigkeit linearer Abbildungen 11.2.3.10. So können wir uns beim Beweis des Korollars auf den Fall 11.1.3.24 linearer Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zurückziehen. □

11.2.3.15. Wir nennen eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums **offen**, wenn sie offen ist für die von irgendeiner Norm auf seinem Richtungsraum induzierte Metrik. Nach unserem Satz 11.2.3.13 über die Äquivalenz von Normen ist sie dann notwendig offen für jede von einer Norm induzierte Metrik. Die so erklärten offenen Teilmengen bilden die sogenannte **natürliche Topologie** auf unserem endlichdimensionalen reellen Raum.

Definition 11.2.3.16. Ist $f : V \to W$ eine stetige lineare Abbildung normierter Vektorräume, so heißt die kleinstmögliche Konstante $C \geq 0$ wie in 11.2.3.10 auch die **Operatornorm** $\|f\|$ von f, in Formeln

$$\|f\| = \sup\{\|f(v)\| \mid \|v\| \leq 1\}$$

11.2.3.17. Die stetigen linearen Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen V, W nennt man auch **beschränkte Operatoren**, da sie nach 11.2.3.10 genau die linearen Abbildungen sind, die den Einheitsball auf eine beschränkte Menge abbilden. Ich notiere die Menge aller stetigen linearen Abbildungen $\mathcal{B}(V, W)$ oder auch $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(V, W)$, wenn ich besonders betonen will, daß reell-lineare Abbildungen gemeint sind und nicht etwa „komplex-lineare" Abbildungen, wie wir sie später für gewöhnlich betrachten werden. Ich werde die Notation $\mathcal{B}$ benutzen, die Terminologie jedoch vermeiden und nach Möglichkeit von **stetigen Operatoren** reden, da diese ja keineswegs beschränkte Abbildungen im Sinne von **??** zu sein brauchen.

Übungen

Übung 11.2.3.18. Gegeben ein normierter Vektorraum $(V, \| \ \|)$ sind die folgenden Abbildungen stetig: Die Norm $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$, die Addition $V \times V \to V$, und die Multiplikation mit Skalaren $\mathbb{R} \times V \to V$. Ist unsere Norm die Skalarproduktnorm zu einem Skalarprodukt $V \times V \to \mathbb{R}$, so ist auch dies Skalarprodukt stetig. Leser, die bereits mit komplexen Zahlen vertraut sind, zeigen Analoges auch für komplexe Vektorräume.

Übung 11.2.3.19 (**Gruppenwege in normierten Vektorräumen**). Die stetigen Gruppenhomomorphismen von der additive Gruppe der reellen Zahlen in die additive Gruppe eines normierten reellen Vektorraums sind genau die linearen Abbildungen. Hinweis: 10.3.5.40.

Ergänzende Übung 11.2.3.20. In einem normierten reellen Vektorraum ist jede nichtleere offene Teilmenge bereits ein Erzeugendensystem.

Übung 11.2.3.21. Man zeige: Jede stetige lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen ist gleichmäßig stetig.

Übung 11.2.3.22. Die Menge aller stetigen reellwertigen Funktionen auf einem Raum X notiere ich $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Das $\mathcal{C}$ steht hier für englisch „continous" und französisch „continu". Man zeige: Versehen wir die Menge $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf einem kompakten reellen Intervall $[a, b]$ mit der Supremumsnorm, so wird das Integral $f \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ eine stetige Abbildung $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Übung 11.2.3.23. Bezeichnet $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ den Teilraum der einmal stetig differenzierbaren Funktionen, so ist das Ableiten $f \mapsto f'$ *keine* stetige Abbildung $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Übung 11.2.3.24. Seien U, V, W normierte Vektorräume. Eine bilineare Abbildung $F : U \times V \to W$ ist stetig genau dann, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $\|F(u, v)\| \leq C\|u\|\|v\|$. Man formuliere und beweise die analoge Aussage auch für multilineare Abbildungen.

Übung 11.2.3.25. Gegeben eine Menge D und ein normierter Vektorraum V erkläre man auf dem Raum $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, V)$ der beschränkten Abbildungen $D \to V$ eine Norm derart, daß die zugehörige Metrik die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz aus 11.1.4.5 wird.

Übung 11.2.3.26. Jede lineare Abbildung von einem endlichdimensionalen Vektorraum in einen normierten Vektorraum W ist stetig. Sind allgemeiner endlichdimensionale Vektorräume $V_1, \ldots, V_n$ gegeben, so ist jede multilineare Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ stetig. Hinweis: Das Bild liegt immer in einem endlichdimensionalen Teilraum. Man erinnere 11.2.3.14 und 11.1.3.24.

Übung 11.2.3.27. Sind $f : V \to W$ und $g : W \to X$ stetige Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen, so gilt $\|g \circ f\| \leq \|g\|\|f\|$.

Übung 11.2.3.28. Man zeige: Der Raum $\mathcal{B}(V, W)$ aller stetigen linearen Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen V, W ist ein Untervektorraum im Raum $\mathrm{Hom}(V, W)$ aller linearen Abbildungen von V nach W, und die in 11.2.3.16 eingeführte Abbildung $f \mapsto \|f\|$ ist eine Norm auf $\mathcal{B}(V, W)$.

Ergänzende Übung 11.2.3.29. Sind normierte Vektorräume $V_1, \ldots, V_n$ und W gegeben und ist $f : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ eine stetige multilineare Abbildung, so heißt die kleinstmögliche Konstante $C \geq 0$ wie in 11.2.3.24 die **Norm** von f und wird notiert

$$\|f\| := \sup\{\|f(v_1, \ldots, v_n)\| \mid \|v_i\| \leq 1\}$$

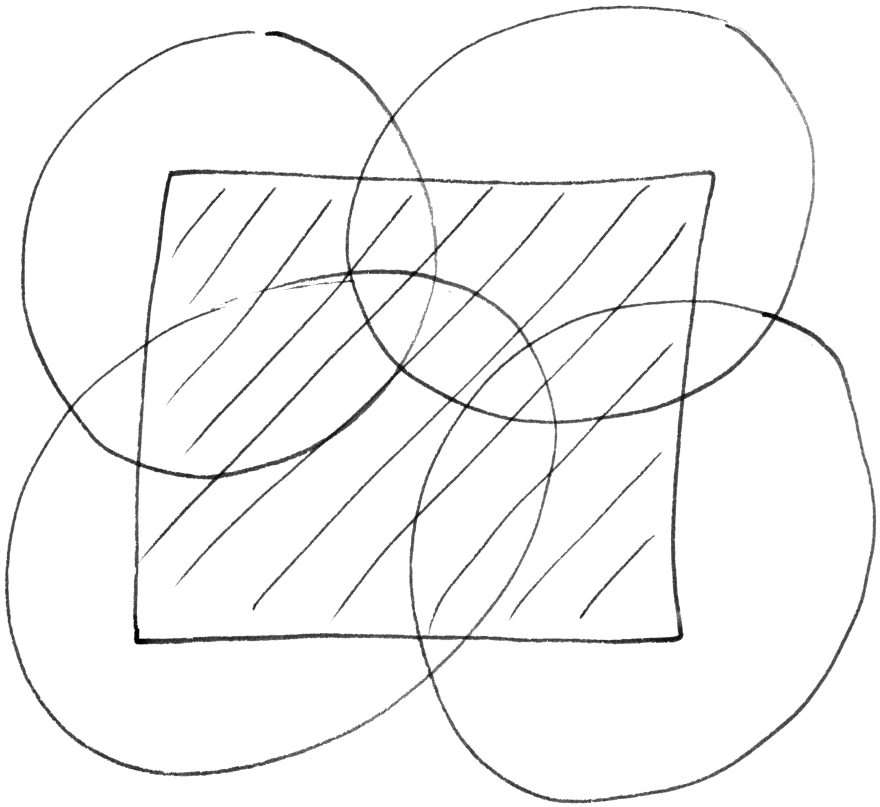
Man zeige, daß wir so eine Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{B}(V_1, \ldots, V_n; W)$ aller stetigen multilinearen Abbildungen erhalten. Weiter zeige man: Die offensichtliche Abbildung liefert einen Isomorphismus von normierten Räumen

$$\mathcal{B}(V_1, \mathcal{B}(V_2, \ldots, V_n; W)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(V_1, \ldots, V_n; W)$$

Übung 11.2.3.30. Seien V ein komplexer Vektorraum und $\| \ \|$ eine Norm als reeller Vektorraum, also $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, daß die Multiplikation mit komplexen Skalaren $\mathbb{C} \times V \to V$ stetig ist. Man zeige, daß wir dann mit dem Supremum über komplexen Zahlen α auf dem Einheitskreis $\|v\|_c := \sup_{|\alpha|=1} \|\alpha v\|$ eine Norm $\| \ \|_c$ auf V als komplexer Vektorraum erhalten, und daß diese Norm äquivalent ist zu unserer ursprünglichen Norm.

11.2.4 Überdeckungen kompakter metrischer Räume

Definition 11.2.4.1. Sei X eine Menge. Unter einer **Überdeckung** von X versteht man ein System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X mit Vereinigung X, in Formeln ausgedrückt $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Unter einer **Teilüberdeckung** einer Überdeckung $\mathcal{U}$ versteht man ein Teilsystem $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, das auch selbst schon eine Überdeckung ist.



Eine Überdeckung eines Quadrats durch vier Kreisscheiben

Definition 11.2.4.2. Unter einer **offenen Überdeckung** eines metrischen Raums oder allgemeiner eines topologischen Raums versteht man eine Überdeckung, die aus offenen Teilmengen besteht.

Satz 11.2.4.3 (**Kompaktheit und offene Mengen**). *Ein metrischer Raum ist folgenkompakt genau dann, wenn jede offene Überdeckung unseres Raums eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

11.2.4.4. Ich hoffe, daß Sie im weiteren Verlauf dieser Vorlesung noch sehen werden, wie wichtig diese Charakterisierung der Kompaktheit ist. Im Kontext topologischer Räume wird Satz 12.4.1.5 sogar die Definition der Kompaktheit. Sie ist so wichtig, daß ich sie nicht im Fließtext verstecken will. Eine ausführlichere Diskussion des Begriffs geben wir in **??** und sehr ähnlich auch in 15.1.5.

Definition 11.2.4.5. Ein topologischer Raum heißt **kompakt** und manchmal auch ausführlicher **überdeckungskompakt**, wenn jede offene Überdeckung unseres Raums eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

11.2.4.6. In dieser Terminologie besagt unser Satz 12.4.1.5, daß ein metrischer Raum genau dann folgenkompakt ist, wenn er überdeckungskompakt ist.

11.2.4.7 (**Diskussion der Terminologie**). Nennen wir einen topologischen Raum kompakt, so meinen wir a priori überdeckungskompakt. Topologische Räume mit der Eigenschaft, daß jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt, heißen dahingegen **folgenkompakt**. In der französischen Literatur ist eine abweichende Terminologie üblich: Unsere überdeckungskompakten oder kurz kompakten topologischen Räume heißen dort **quasikompakt**, und „kompakt“ meint dort „überdeckungskompakt und Hausdorff“.

Ergänzung 11.2.4.8. Ein Beispiel für einen folgenkompakten aber nicht überdeckungskompakten topologischen Raum finden Sie in 15.3.2.12 oder 6.5.4.7. Besitzt ein überdeckungskompakter topologischer Raum die zusätzliche Eigenschaft, daß man für jeden seiner Punkte eine Folge von Umgebungen derart finden kann, daß jede seiner Umgebungen mindestens eine Umgebung dieser Folge umfaßt, so ist er auch folgenkompakt mit demselben Argument, wie wir es im Beweis des Satzes verwenden.

Beweis von Satz 12.4.1.5. Sei X ein metrischer Raum. Ist X nicht folgenkompakt, so finden wir in X eine Folge ohne konvergente Teilfolge. Dann besitzt jeder Punkt von X eine offene Umgebung, die nur endlich viele Folgenglieder enthält, und alle diese offenen Umgebungen bilden eine offene Überdeckung von X ohne endliche Teilüberdeckung. Das zeigt die eine Richtung. Den Beweis der anderen Richtung beginnen wir mit einem Lemma, das auch für sich genommen oft hilfreich ist.

Lemma 11.2.4.9 (Überdeckungssatz von Lebesgue). *Ist X ein folgenkompakter metrischer Raum und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X, so gibt es $\varepsilon > 0$ derart, daß für alle Punkte $x \in X$ der ε-Ball $\mathrm{B}(x;\varepsilon)$ um x ganz in einer der überdeckenden offenen Mengen $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist.*

Erster Beweis. Gäbe es kein solches $\varepsilon > 0$, so könnten wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ einen Punkt $x_n \in X$ finden derart, daß $\mathrm{B}(x_n; 1/n)$ in keinem $U \in \mathcal{U}$ enthalten wäre. Durch Übergang zu einer Teilfolge könnten wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich annehmen, daß die Folge der x_n konvergiert, etwa gegen $x \in X$. Nun finden wir jedoch ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$ und dazu $\rho > 0$ mit $\mathrm{B}(x;\rho) \subset U$ und dazu N mit $d(x_N, x) < \rho/2$ und $1/N < \rho/2$, und dann gälte $\mathrm{B}(x_N; 1/N) \subset \mathrm{B}(x_N; \rho/2) \subset \mathrm{B}(x;\rho) \subset U$ im Widerspruch zur Wahl der x_n. $\square$

Zweiter Beweis. Man betrachte die Funktion $f : X \to \mathbb{R}_{>0}$ gegeben durch die Vorschrift

$$f(x) := \sup\{r \leq 1 \mid \text{Es gibt } U \in \mathcal{U} \text{ mit } \mathrm{B}(x;r) \subset U\}$$

Die Dreiecksungleichung liefert $|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)$, insbesondere ist f stetig. Sicher dürfen wir $X \neq \emptyset$ annehmen. Dann nimmt f nach 11.2.1.13 sein Minimum an und jede positive Zahl echt unterhalb dieses Minimums ist ein mögliches ε. $\square$

Um die andere Implikation im Satz zu zeigen sei nun X folgenkompakt und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Es gilt zu zeigen, daß sie eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wählen wir zu unserer Überdeckung $\mathcal{U}$ ein ε wie im Überdeckungssatz 12.4.1.7, so reicht es auch zu zeigen, daß es eine endliche Teilmenge $E \subset X$ gibt mit

$$X = \bigcup_{x \in E} \mathrm{B}(x;\varepsilon)$$

In der Tat liegt ja der ε-Ball $\mathrm{B}(x;\varepsilon)$ um ein beliebiges $x \in X$ nach Wahl von ε schon in einem der $U \in \mathcal{U}$. Gäbe es aber für ein $\varepsilon > 0$ keine endliche Überdeckung von X durch ε-Bälle, so könnten wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruieren mit $x_n \notin \bigcup_{0\leq\nu<n} \mathrm{B}(x_\nu;\varepsilon)$ für alle n, also $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ für $n \neq m$, und diese Folge könnte keine konvergente Teilfolge haben, im Widerspruch zur Annahme. $\square$

11.2.4.10. Sei X eine Menge. Unter einer **Überdeckung einer Teilmenge** $Y \subset X$ durch Teilmengen von X versteht man ein Mengensystem $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $Y \subset \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$. Nach unseren Definitionen ist eine Teilmenge Y eines topologischen Raums X kompakt für die induzierte Topologie genau dann, wenn jede Überdeckung von Y durch offene Teilmengen von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Übungen

Übung 11.2.4.11 (**Nichtleere Schnitte in Kompakta**). Ist in einem kompakten topologischen Raum X ein System abgeschlossener Teilmengen $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ mit leerem Schnitt $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} K = \emptyset$ gegeben, so gibt es bereits ein endliches Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ mit leerem Schnitt $\bigcap_{K \in \mathcal{E}} K = \emptyset$.

Ergänzende Übung 11.2.4.12 (**Satz von Dini**). Eine monoton wachsende Folge stetiger reellwertiger Funktionen auf einem kompakten Raum, die punktweise gegen eine stetige Funktion konvergiert, konvergiert sogar gleichmäßig. Hinweis: 12.4.1.13.

Ergänzende Übung 11.2.4.13. Man zeige, daß das Bild eines kompakten topologischen Raums unter einer stetigen Abbildung kompakt ist für die Spurtopologie. Insbesondere ist jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten topologischen Raum beschränkt.

Ergänzende Übung 11.2.4.14. Gegeben ein topologischer Raum X mit einer offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ zeige man: Eine Teilmenge Y unseres Raums ist genau dann abgeschlossen, wenn sie mit jeder Teilmenge unserer Überdeckung abgeschlossenen Schnitt hat, in Formeln

$$Y \mathrel{\text{⫫}} X \quad \Leftrightarrow \quad (Y \cap U) \mathrel{\text{⫫}} U \; \forall U \in \mathcal{U}$$

Die fraglichen Schnitte sollen hierbei abgeschlossen sein in U, nicht in X.

11.2.5 Integrale mit Parametern

Satz 11.2.5.1 (über Integrale mit Parametern). *Gegeben ein metrischer Raum X und eine stetige Funktion $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ ist auch die Funktion $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}t$ stetig.*

11.2.5.2. Ich zeige diesen Satz in großer Allgemeinheit als Anwendung unserer neuen Charakterisierung der Kompaktheit und als Illustration für die Kraft der allgemeinen Theorie metrischer Räume. Ist X offen oder abgeschlossen in einem $\mathbb{R}^n$, so kann man auch elementarer mit der gleichmäßigen Stetigkeit argumentieren. Diesen Beweis gebe ich als Alternative auch noch an.

Beweis. Versehen wir den Raum $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$ mit der Supremumsnorm, so ist nach dem gleich folgenden Satz 11.2.5.4 die von f induzierte Abbildung $\tilde{f} : X \to \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $x \mapsto f(x, \ )$ stetig. Nach Übung 11.2.3.22 ist weiter das Integrieren $\int : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ stetig. Damit ist unsere Abbildung $\int \circ \tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ stetig als eine Verknüpfung stetiger Abbildungen. $\square$

Alternativer Beweis. Ist X offen oder abgeschlossen in einem $\mathbb{R}^n$, so kann man auch elementarer argumentieren. Zunächst reicht es ja, die Stetigkeit an jeder Stelle $x \in X$ nachzuweisen. Mit dieser Überlegung können wir uns leicht auf den Fall zurückziehen, daß X kompakt ist. Dann ist aber auch $X \times [a,b]$ kompakt und nach 11.2.1.16 ist f dort gleichmäßig stetig. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es insbesondere $\delta > 0$ mit

$$|x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x,t) - f(y,t)| < \varepsilon \text{ für alle } t \in [a,b].$$

Aus $|x-y| < \delta$ folgt mithin

$$\left| \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(y,t)\,\mathrm{d}t \right| \le \int_a^b |f(x,t) - f(y,t)|\,\mathrm{d}t \le (b-a)\varepsilon$$

und das zeigt die Behauptung. □

11.2.5.3. Den Raum aller stetigen Abbildungen von einem kompakten Raum X in einen metrischen Raum Y, versehen mit der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz, wird $\mathcal{C}(X,Y)$ notiert. Das $\mathcal{C}$ steht hier für englisch „continous“ und französisch „continu“.

Satz 11.2.5.4 (Stetige Abbildungen in Abbildungsräume). *Seien X, Y und K metrische Räume. Ist K kompakt, so ist eine Abbildung $f : X \times K \to Y$ stetig genau dann, wenn die induzierte Abbildung $\tilde{f} : X \to \mathcal{C}(K,Y)$ stetig ist für die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathcal{C}(K,Y)$.*

Beweis. Daß aus der Stetigkeit von $\tilde{f}$ die Stetigkeit von f folgt, sieht man ohne weitere Schwierigkeiten. Wir zeigen nun die andere Richtung und müssen die Stetigkeit von $\tilde{f}$ an jeder Stelle $p \in X$ nachweisen. Sei diese Stelle p ab jetzt fest gewählt und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Aufgrund der Stetigkeit von f gibt es für jedes $s \in K$ ein $\delta_s > 0$ mit

$$f\,\mathrm{B}((p,s);\delta_s) \subset \mathrm{B}(f(p,s);\varepsilon)$$

Nun gilt für unsere Metrik auf $X \times K$ ja $\mathrm{B}((p,s);\delta) = \mathrm{B}(p;\delta) \times \mathrm{B}(s;\delta)$ und nach 12.4.1.5 gibt es eine endliche Teilmenge $E \subset K$ mit $K \subset \bigcup_{s \in E} \mathrm{B}(s;\delta_s)$. Für $\eta = \min_{s \in E} \delta_s$ behaupten wir dann

$$x \in \mathrm{B}(p;\eta) \;\Rightarrow\; d(f(x,t), f(p,t)) < 2\varepsilon \;\; \forall t \in K$$

In der Tat finden wir für jedes $t \in K$ ein $s \in E$ mit $t \in \mathrm{B}(s;\delta_s)$ und für dies s liegen (p,t) und (x,t) beide in $\mathrm{B}((p,s);\delta_s)$. Damit ist die Stetigkeit von $\tilde{f}$ bei p gezeigt. □

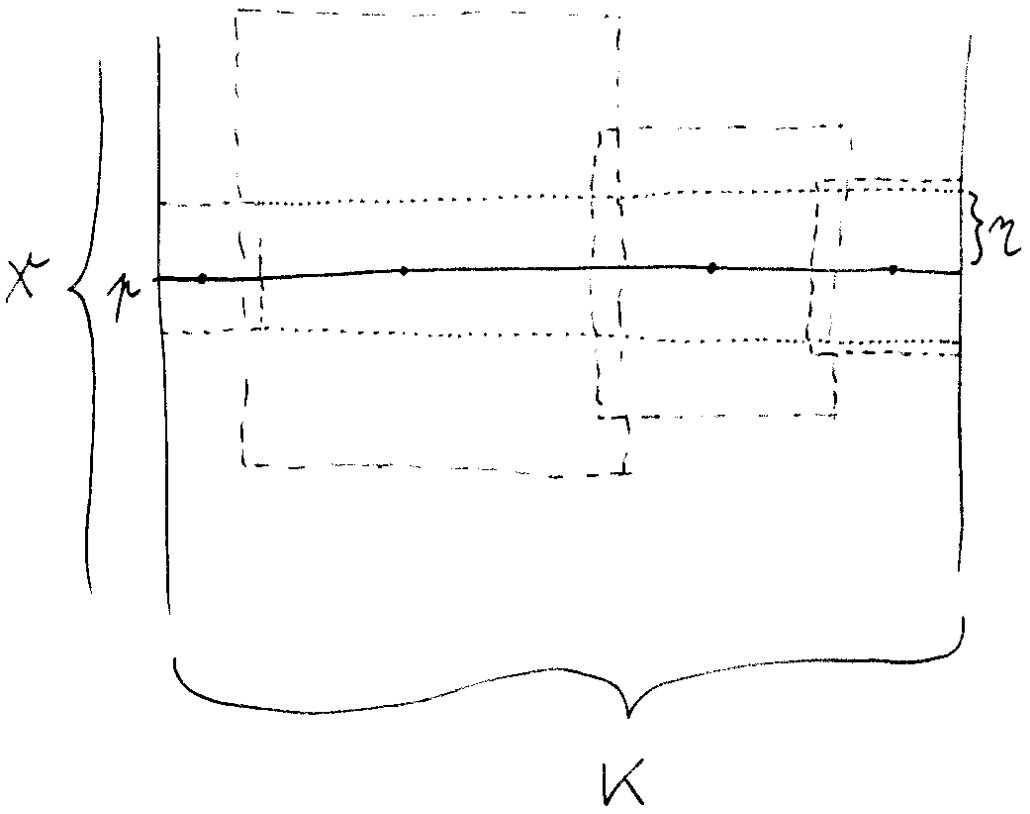


Illustration zum Beweis von Satz 11.2.5.4. Die mit gestrichelten Rändern eingezeichneten Quadrate sind so gewählt, daß unsere Abbildung f auf jedem Quadrat höchstens um den Abstand ε von ihrem Wert im Zentrum des jeweiligen Quadrats abweicht. Die gepunktelten Linien begrenzen einen Streifen der Breite 2η, in dem unsere Funktion auf jeder Vertikalen höchstens um 2ε von ihrem Wert am Schnittpunkt der besagten Vertikalen mit der fett eingezeichneten Horizontalen abweicht.

11.3 Grundlegendes zu Fourierreihen

11.3.1 Eindeutigkeit der Fourierreihe

Definition 11.3.1.1. Seien M eine Menge und $p > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir sagen, eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to M$ habe die **Periode** p, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x+p) = f(x)$.

Satz 11.3.1.2 (Fourier-Reihe, reelle Form). *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion der Periode 2π. So gibt es eindeutig bestimmte $a_\nu, b_\nu, c \in \mathbb{R}$ derart, daß gilt*

$$f(x) = c + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin(\nu x) + b_\nu \cos(\nu x)$$

in dem Sinne, daß die Folge der Partialsummen gleichmäßig gegen unsere Funktion f konvergiert.

Satz 11.3.1.3 (Fourier-Reihe, komplexe Form). *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion der Periode 2π. So gibt es eindeutig bestimmte $c_\nu \in \mathbb{C}$ derart, daß im Sinne gleichmäßiger Konvergenz gilt*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{\nu=n} c_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}$$

11.3.1.4 (**Übergang zwischen reeller und komplexer Fourierreihe**). Sicher können wir in der ersten Formulierung 11.3.1.2 unseres Satzes auch komplexwertige Funktionen erlauben, wenn wir $a_\nu, b_\nu, c \in \mathbb{C}$ zulassen. Die beiden Sätze sind dann äquivalent, da nach der Euler'schen Formel gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} &= \cos \nu x + \mathrm{i} \sin \nu x \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\nu x} &= \cos \nu x - \mathrm{i} \sin \nu x \end{aligned}$$

Gegeben eine Darstellung wie in Satz 11.3.1.3 erhalten wir also eine Darstellung wie in Satz 11.3.1.2 mit $c = c_0,\ b_\nu = c_\nu + c_{-\nu},\ a_\nu = \mathrm{i}\, c_\nu - \mathrm{i}\, c_{-\nu}$. Umgekehrt sind diese Gleichungen sind genau dann erfüllt, wenn gilt

$$c_0 = c,\ c_\nu = \frac{1}{2}(b_\nu - \mathrm{i}\, a_\nu) \text{ und } c_{-\nu} = \frac{1}{2}(b_\nu + \mathrm{i}\, a_\nu).$$

Beweis. Wir zeigen vorerst nur die Eindeutigkeit, der Beweis der Existenz wird in 11.3.3.7 nachgeholt. Aus der Euler'schen Formel folgt, daß die Ableitung von $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} = \cos \nu x + \mathrm{i} \sin \nu x$ gegeben wird durch $f'(x) = \mathrm{i}\,\nu\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} = -\nu \sin \nu x + \mathrm{i}\,\nu \cos \nu x$. Mit der komplexwertigen Variante des Hauptsatzes der Differential-

und Integralrechnung erhalten wir $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}\,\nu}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}\,|_0^{2\pi} = 0$ für $\nu \in \mathbb{Z}\backslash 0$ und für $\nu = 0$ ergibt sich $\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi$. Wir folgern

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mu x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\nu x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi & \nu = \mu; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Indem wir die gleichmäßige Konvergenz mit dem Integral vertauschen und uns überlegen, daß das auch für komplexwertige Funktionen erlaubt ist, erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\nu x}\,\mathrm{d}x = 2\pi c_\nu$$

Das zeigt die Eindeutigkeit der c_ν. Der Beweis der Existenz wird in 11.3.3.7 nachgeholt. □

11.3.1.5. Gegeben ein normierter Vektorraum V nennt man eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren aus V **summierbar mit Summe** $s \in V$ und schreibt

$$\sum_{i\in I} v_i = s$$

als Abkürzung für die Aussage, daß es für jede Umgebung U von s eine endliche Teilmenge $I_U \subset I$ gibt derart, daß für jede endliche Obermenge J von I_U in I gilt

$$\sum_{i\in J} v_i \in U$$

Satz 11.3.1.6 (**Summierbarkeit der Fourier-Reihe**). *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion der Periode 2π, so gibt es eindeutig bestimmte $c_\nu \in \mathbb{C}$ derart, daß bezüglich der Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ im Sinne der Summierbarkeit 11.3.1.5 in normierten Vektorräumen gilt*

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} = f(x)$$

11.3.1.7. Natürlich müssen hier die c_ν dieselben sein wie in der schwächeren aber einfacher zu formulierenden Version 11.3.1.3, so daß die Eindeutigkeit aus dem Vorhergehenden folgt. Der Beweis dieser stärkeren Konvergenzaussage wird in 11.3.3.7 gegeben. Ich habe etwas gezögert, auf der rechten Seite $f(x)$ zu schreiben, wo doch schlicht die Funktion f gemeint ist, aber auf der linken Seite steht ja auch $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}$ für die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}$.

Vorschau 11.3.1.8. Die obigen Sätze über die Fourierentwicklung sind erste Vertreter eines großen Theoriegebäudes, in das wir in 13.2.1.1 folgende tiefer eindringen. Insbesondere ergibt sich die Frage, welche Abbildungen $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ denn nun

etwa den stetig differenzierbaren oder den glatten periodischen Funktionen entsprechen. Diese Frage erweist sich als recht delikat. In 11.3.3.10 diskutieren wir, welche Fouriereihen beliebig oft differenzierbaren 2π-periodischen Funktionen entsprechen. In 13.2.2.3 führen wir den Raum der „quadratintegrierbaren Funktionen“ ein und zeigen, daß diese unter unserer Fourierentwicklung genau denjenigen Abbildungen $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ entsprechen, bei denen die Summe der Betragsquadrate endlich ist.

11.3.2 Approximationssatz von Stone-Weierstraß

11.3.2.1. Unter einem kompakten Raum darf man in diesem Abschnitt je nach Wissensstand einen kompakten metrischen Raum oder allgemeiner einen kompakten topologischen Raum verstehen.

11.3.2.2. Im folgenden verwende ich eine Begrifflichkeit, die in 4.7.9.1 ausführlich eingeführt wird, und bespreche an dieser Stelle nur das Nötigste. Gegeben ein Körper k bezeichnet man einen k-Vektorraum A mit einer bilinearen Verknüpfung $A \times A \to A$ ganz allgemein als eine **k-Algebra**. Ist die Verknüpfung assoziativ, so spricht man von einer **assoziativen Algebra**. Gibt es für unsere Verknüpfung ein neutrales Element, so spricht man von einer **unitären Algebra** und nennt das fragliche Element das **Eins-Element**. Eine Algebra ist also genau dann assoziativ und unitär, wenn die zugrundeliegende Menge mit der Vektorraum-Addition als Addition und der bilinearen Verknüpfung als Multiplikation im Sinne von 3.5.1.1 ein Ring ist. Ich nenne derartige Algebren **Ringalgebren**.

11.3.2.3. Gegeben ein Körper k und eine beliebige Menge X ist der k-Vektorraum $\mathrm{Ens}(X, k)$ aller k-wertigen Funkionen auf X mit der punktweisen Multiplikation als Verknüpfung eine Ringalgebra mit der konstanten Funktion Eins als Eins-Element. Wir sagen, eine Teilmenge $A \subset \mathrm{Ens}(X, k)$ **trenne die Punkte von** X, wenn es für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $a \in A$ gibt mit $a(x) \neq a(y)$.

11.3.2.4. Gegeben ein Körper k und eine k-Algebra A versteht man unter einer **Unteralgebra** $B \subset A$ einen unter der Verknüpfung unserer Algebra stabilen Untervektorraum. Gegeben ein Körper k und eine k-Ringalgebra A verstehen wir unter einer **Unterringalgebra** $B \subset A$ einen unter der Verknüpfung unserer Ringalgebra stabilen Untervektorraum, der darüber hinaus das Einselement der Ringalgebra A enthält. In anderen Worten ist eine Unterringalgebra also eine Unteralgebra, die gleichzeitig ein Teilring ist im Sinne von 6.2.2.1.

11.3.2.5. Man beachte, daß wir bereits wissen, daß die stetigen reellen Funktionen auf einem topologischen Raum X in der $\mathbb{R}$-Ringalgebra aller reellen Funktionen eine $\mathbb{R}$-Unterringalgebra

$$\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Ens}(X, \mathbb{R})$$

bilden. Des weiteren wissen wir nach **??**, daß diese Unterringalgebra stabil ist unter dem Bilden gleichmäßiger Grenzwerte. Gegeben ein kompakter Raum X bezeichne im folgenden $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ den reellen Vektorraum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf X mit seiner Supremumsnorm.

Definition 11.3.2.6. Eine Teilmenge eines metrischen oder auch eines topologischen Raums heißt **dicht**, wenn ihr Abschluß der ganze Raum ist.

Satz 11.3.2.7 (Approximationssatz von Stone-Weierstraß). *In der Ringalgebra aller stetigen reellwertigen Funktionen auf einem kompakten Raum liegt jede Unterringalgebra, die die Punkte unseres Raums trennt, bereits dicht in Bezug auf die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.*

Ergänzung 11.3.2.8. Ich erwähne noch eine Variante dieses Satzes, die man oft in der Literatur findet, die jedoch für uns hier noch nicht von Belang ist. Statt einer Unterringalgebra könnten wir mit einer Unteralgebra arbeiten und zusätzlich voraussetzen, daß es für jedes $x \in X$ ein $a \in A$ gibt mit $a(x) \neq 0$. Man sagt dann, A habe „keine simultane Nullstelle". Unser Beweis funktioniert dann im wesentlichen immer noch, man muß dazu nur Lemma 11.3.2.11 verfeinern zur Aussage, daß p_ε sogar ohne konstanten Term gefunden werden kann, und muß in Schritt 3 etwas feiner argumentieren.

Korollar 11.3.2.9 (Approximationssatz von Weierstraß). *Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Polynomfunktion $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ mit*

$$|p(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

Beweis. Das folgt sofort aus dem Satz von Stone-Weierstraß 11.3.2.7. □

Beweis von Stone-Weierstraß. Seien X unser kompakter Raum und $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ unsere Unterringalgebra. Wir ziehen uns zunächst auf den Fall zurück, daß A in $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ abgeschlossen ist.

Lemma 11.3.2.10. *Ist X kompakt und $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ eine Unteralgebra, so ist auch der Abschluß $\bar{A}$ von A eine Unteralgebra.*

Beweis. Nach 11.1.5.10 ist $\bar{A}$ genau die Menge aller stetigen Funktionen $a : X \to \mathbb{R}$ derart, daß es eine Folge a_n aus A gibt, die gleichmäßig gegen a konvergiert. Sei b ein weiteres Element von $\bar{A}$ und b_n eine Folge aus A, die gleichmäßig gegen b konvergiert. Wir behaupten, daß dann auch $a_n + b_n$ gleichmäßig gegen $a + b$ konvergiert und $a_n b_n$ gleichmäßig gegen ab. Den Beweis der ersten Aussage überlassen wir dem Leser. Für die Zweite benutze man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|ab - a_n b_n\| &\leq \|a - a_n\| \cdot \|b_n\| + \|a\| \cdot \|b - b_n\| \\ &\leq \varepsilon(\|b\| + 1 + \|a\|) \end{aligned}$$

falls gilt $\|a - a_n\| < \varepsilon$, $\|b - b_n\| < \varepsilon$ und $\varepsilon < 1$. $\square$

Erfüllt also eine Unterringalgebra $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ die Bedingungen von Stone-Weierstraß, so ist auch ihr Abschluß $\bar{A}$ eine Unterringalgebra und trennt a fortiori die Punkte von X. Um Stone-Weierstraß zu beweisen reicht es demnach aus, wenn wir unter der zusätzlichen Annahme A abgeschlossen die Gleichheit $A = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ zeigen. Nun zeigen wir zunächst einmal einen Spezialfall des Approximationssatzes von Weierstraß durch ein direktes Argument.

Lemma 11.3.2.11. *Für ein beliebiges positives $\varepsilon > 0$ gibt es ein Polynom $p = p_\varepsilon$ mit $|\sqrt{x} - p(x)| < \varepsilon \; \forall x \in [0, 1]$.*

Erster Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist auf $[0, 2]$, finden wir $\eta \in (0, 1)$ mit

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x + \eta}| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in [0, 1]$$

Da die Taylorreihe von $\sqrt{x}$ um den Entwicklungspunkt 1 nach 10.6.1.23 auf dem Intervall $[\eta, 1 + \eta]$ gleichmäßig gegen $\sqrt{x}$ konvergiert, finden wir weiter ein Polynom p mit

$$|\sqrt{x + \eta} - p(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in [0, 1]$$ $\square$

Zweiter Beweis. Bei der folgenden Alternative muß man etwas mehr denken, aber nichts wissen über die Konvergenz von Taylorreihen. Wir konstruieren induktiv eine Folge von Polynomen durch $p_0(x) = 0, p_{n+1}(x) = p_n(x) + (1/2)(x - p_n(x)^2)$ und behaupten, daß diese Folge auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen $\sqrt{x}$ konvergiert. In der Tat gilt ja

$$p_{n+1} = p_n + (\sqrt{x} - p_n)(\sqrt{x} + p_n)/2$$

und dieser Gleichung sehen wir an, daß für $x \in [0, 1]$ gilt

$$p_0 \leq p_1 \leq \ldots \leq \sqrt{x}$$

denn es folgt induktiv $(\sqrt{x} - p_n) \geq 0$ und $(\sqrt{x} + p_n)/2 \leq 1$. Andererseits folgt aus unserer Gleichung auch

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} - p_{n+1}) &= (\sqrt{x} - p_n)(2 - \sqrt{x} - p_n)/2 \\ &\leq (\sqrt{x} - p_n)(2 - \sqrt{x})/2 \end{aligned}$$

und somit konvergiert unsere Folge p_n auf jedem Intervall $[a, 1]$ mit $0 < a < 1$ gleichmässig gegen $\sqrt{x}$. Dann muß mit etwas Nachdenken unsere Folge aber auf ganz $[0, 1]$ gleichmässig gegen $\sqrt{x}$ konvergieren. $\square$

Nun zeigen wir Stone-Weierstraß 11.3.2.7 für eine abgeschlossene Unterringalgebra A, auf diesen Fall hatten wir uns ja bereits zurückgezogen, in fünf Schritten. Gegeben $a \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ bezeichne $|a| \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ die Funktion $x \mapsto |a(x)|$ und $\|a\| \in \mathbb{R}$ die Supremumsnorm von a.

1. Wir zeigen $a \in A \Rightarrow |a| \in A$. Dazu schreiben wir $a = \lambda b$ mit $\lambda \in (0, \infty)$ und $\|b\| \leq 1$ und erhalten $|a| = \lambda\sqrt{b^2}$. Nach Lemma 11.3.2.11 gibt es eine Folge p_n von Polynomen, die auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen $\sqrt{x}$ strebt, und dann strebt $\lambda p_n(b^2)$ auf X gleichmäßig gegen $|a|$. Da A eine Unteralgebra ist, liegen alle $\lambda p_n(b^2)$ auch in A, und da A abgeschlossen ist unter gleichmäßiger Konvergenz, folgt $|a| \in A$.

2. Wir zeigen $a, b \in A \Rightarrow \sup(a, b) \in A$, $\inf(a, b) \in A$. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \sup(a, b) &= 1/2(a + b + |a - b|) \\ \inf(a, b) &= 1/2(a + b - |a - b|) \end{aligned}$$

3. Für $x \neq y$ zwei verschiedene Punkte aus X und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt es $a \in A$ mit $a(x) = \alpha$, $a(y) = \beta$. In der Tat betrachte man die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} A &\to \mathbb{R}^2 \\ a &\mapsto (a(x), a(y)) \end{aligned}$$

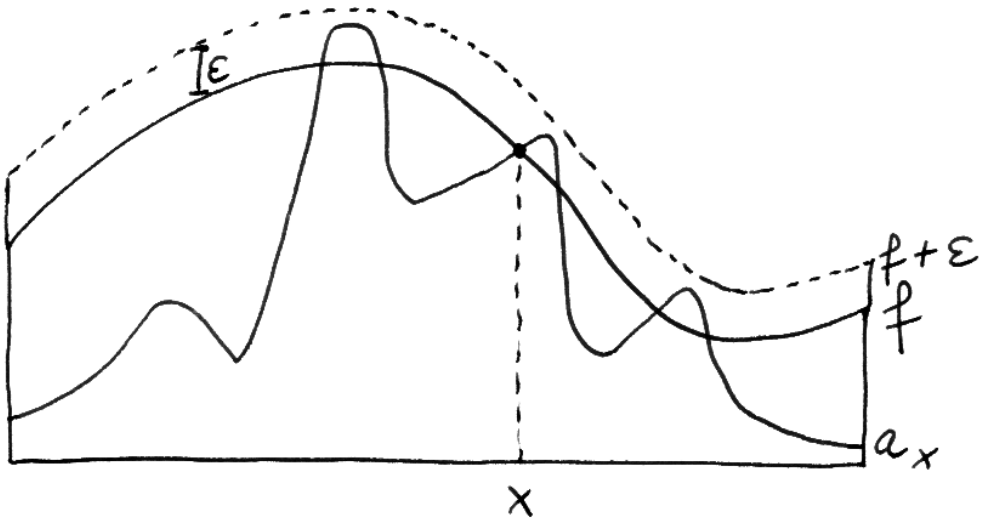
Da A Punkte trennt, gibt es $a \in A$ mit $a(x) \neq a(y)$. Da die Konstanten zu A gehören, liegt jedoch auch $(1, 1)$ im Bild unserer linearen Abbildung. Damit enthält das Bild unserer linearen Abbildung zwei linear unabhängige Vektoren und ist folglich ganz $\mathbb{R}^2$.

4. Für beliebige $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $a_x \in A$ mit $a_x(x) = f(x)$ und

$$a_x(y) < f(y) + \varepsilon \quad \forall y \in X$$

In der Tat, für alle $y \in X$ finden wir $a_{x,y} \in A$ mit $a_{x,y}(x) = f(x)$ und $a_{x,y}(y) = f(y)$. Auf einer geeigneten offenen Umgebung U_y von y gilt dann $a_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon \quad \forall z \in U_y$. Da X kompakt ist, gibt es nun $E \subset X$ endlich mit $X = \bigcup_{y \in E} U_y$. Dann nehmen wir $a_x = \inf_{y \in E} a_{x,y}$ und haben unser a_x gefunden.

5. Für beliebiges $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $a \in A$ mit $\|a - f\| < \varepsilon$. Sei in der Tat für jedes $x \in X$ ein a_x wie eben gewählt. Dann hat jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung V_x mit $f(z) - \varepsilon < a_x(z) < f(z) + \varepsilon \quad \forall z \in V_x$ wobei die zweite Ungleichung sogar gilt für alle $z \in X$. Da X kompakt ist, gibt es wieder $F \subset X$ endlich mit $X = \bigcup_{x \in F} V_x$. Ist X nicht leer, so nehmen wir nun $a = \sup_{x \in F} a_x$ und haben unser a gefunden. Der Fall $X = \emptyset$ ist eh unproblematisch. $\square$



Zum Beweis von 11.3.2.7, Schritt 4

11.3.2.12. Gegeben ein Kompaktum X bezeichne $\mathcal{C}(X)$ die $\mathbb{C}$-Ringalgebra aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf X mit der Supremumsnorm.

Korollar 11.3.2.13 (Stone-Weierstraß im Komplexen). *In der Ringalgebra aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Raum liegt jede komplexe Unterringalgebra, die die Punkte unseres Raums trennt und die stabil ist unter der komplexen Konjugation, bereits dicht in Bezug auf die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.*

Beweis. Sei X unser kompakter Raum und $B \subset \mathcal{C}(X)$ unsere komplexe Unterringalgebra, die die Punkte von X trennt und stabil ist unter der komplexen Konjugation, in Formeln $b \in B \Rightarrow \bar{b} \in B$. Wir wenden den Satz von Stone-Weierstraß 11.3.2.7 an auf $A := B \cap \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Aus $b \in B$ folgt $\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b \in A$, denn es gilt $\operatorname{Re} b = (b + \bar{b})/2$ und $\operatorname{Im} b = (b - \bar{b})/2\mathrm{i}$. Also trennt auch unser A die Punkte von X. Für $f \in \mathcal{C}(X)$ finden wir $u, v \in A$ mit $|\operatorname{Re} f(x) - u(x)| < \varepsilon/2$ und $|\operatorname{Im} f(x) - v(x)| < \varepsilon/2$ für alle $x \in X$, setzen $b = u + \mathrm{i}v$ und folgern $\|f - b\| < \varepsilon$. □

Korollar 11.3.2.14. *Das $\mathbb{C}$-Erzeugnis der $(z^\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ liegt dicht im Raum $\mathcal{C}(S^1)$ der stetigen komplexwertigen Funktionen auf der Kreislinie $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ in Bezug auf die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.*

Beweis. Wegen $\bar{z} = z^{-1}$ für alle $z \in S^1$ folgt das aus dem Satz von Stone-Weierstraß für komplexwertige Funktionen 11.3.2.13. □

Definition 11.3.2.15. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Gestalt $t \mapsto \sum_{\nu=-n}^{\nu=n} d_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu t}$ mit $d_\nu \in \mathbb{C}$ heiße ein **trigonometrisches Polynom**.

Satz 11.3.2.16 (Dichtheit der trigonometrischen Polynome). *Gegeben eine stetige Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = f(2\pi)$ gibt es für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein trigonometrisches Polynom $g = g_\varepsilon$ mit*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0, 2\pi]$$

Beweis. Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ der Einheitskreis in der komplexen Ebene. Wir betrachten die Abbildung $E : [0, 2\pi] \to S^1$, $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, die anschaulich gesprochen „unser Intervall zu einer Kreislinie zusammenbiegt“. Das Vorschalten von E liefert eine Bijektion

$$(\circ\, E) : \ \mathcal{C}(S^1) \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathcal{C}([0, 2\pi]) \mid f(0) = f(2\pi)\}$$

Das kann man unschwer direkt einsehen und auch formal aus dem anschließenden Lemma 11.3.2.17 folgern. Unter unserer Bijektion entsprechen nun die trigonometrischen Polynome auf $[0, 2\pi]$ genau den Funktionen der Form $\sum_{\nu=-n}^{n} d_\nu z^\nu$ auf der Kreislinie S^1. Der Satz folgt aus Korollar 11.3.2.14. □

Lemma 11.3.2.17. *Ist $f : X \twoheadrightarrow Y$ eine stetige Surjektion von einem kompakten Raum zu einem Hausdorffraum, so ist eine Abbildung $g : Y \to Z$ in einen weiteren Raum Z stetig genau dann, wenn $g \circ f$ stetig ist.*

Beweis. Das Problem ist nur, die Stetigkeit von g aus der Stetigkeit von $g \circ f$ zu folgern. Da f surjektiv ist, gilt für jede Teilmenge $A \subset Z$ offensichtlich

$$g^{-1}(A) = f((g \circ f)^{-1}(A))$$

Ist A abgeschlossen in Z, so ist $(g \circ f)^{-1}(A)$ abgeschlossen in X wegen der Stetigkeit von $g \circ f$, also kompakt nach 12.4.1.11. Dann ist $f((g \circ f)^{-1}(A))$ kompakt nach 12.4.1.15 als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung, mithin abgeschlossen nach 17.6.2.12, da Y ein Hausdorffraum ist. Zusammenfassend haben wir gezeigt, daß das Urbild $g^{-1}(A)$ einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subset Z$ abgeschlossen ist in Y. Daraus folgt mit **??** die Stetigkeit von g. □

11.3.3 Konvergenz der Fourierreihe

11.3.3.1. Wir verwenden im folgenden die Begrifflichkeit der Skalarprodukte, wie sie etwa in 4.1.3 eingeführt wird.

Definition 11.3.3.2. Wir versehen den komplexen Vektorraum $V = \mathcal{C}([0, 2\pi])$ aller stetigen Funktionen $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f} g$$

Die zugehörige Norm notiert man in diesem Fall mit $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

11.3.3.3. Unsere Formeln aus dem Beweis von 11.3.1.3 besagen genau, daß die $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}$ mit $\nu \in \mathbb{Z}$ in diesem Raum ein Orthonormalsystem im Sinne von 4.1.3.13 bilden, in Formeln

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu x} \rangle = \begin{cases} 1 & \nu = \mu; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Fourier-Koeffizienten schreiben sich nun kürzer $c_\nu = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}, f \rangle$. Indem wir jeder stetigen Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ die Familie ihrer „Fourierkoeffizienten“ zuordnen, in Formeln $f^\wedge(\nu) := \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}, f \rangle$, erhalten wir eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0, 2\pi]) & \to & \mathrm{Ens}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \\ f & \mapsto & f^\wedge \end{array}$$

Satz 11.3.3.4 (Quadratische Konvergenz der Fourierreihe). *Gegeben eine stetige Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit Fourierkoeffizienten $c_\nu := \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}, f\rangle$ gilt*

$$f = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}$$

im Sinne der Summierbarkeit nach 11.3.1.5 im komplexen Vektorraum $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ mit seiner Skalarproduktnorm $\| \; \|_2$.

11.3.3.5. Ich betone, daß dieser Satz keine Aussage über punktweise Konvergenz beinhaltet. Ich habe auf der linken Seite auch nur f und nicht $f(x)$ geschrieben, um das zu betonen. Punktweise Konvergenz gilt auch gar nicht in der Allgemeinheit dieses Satzes.

Beweis. Für alle endlichen Teilmengen $I \subset \mathbb{Z}$ können wir f nach 4.1.3.22 zerlegen in seine Projektion auf den von allen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}$ mit $\nu \in I$ aufgespannten Teilraum von $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ und einen auf diesem Teilraum senkrechten Anteil,

$$f = \sum_{\nu\in I} c_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x} + \left(f - \sum_{\nu\in I} c_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x} \right)$$

Wir nehmen nun zunächst zusätzlich $f(0) = f(2\pi)$ an. Für alle $\varepsilon > 0$ finden wir dann nach 11.3.2.16 eine endliche Teilmenge $I_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ und ein trigonometrisches Polynom $g = \sum_{\nu\in I_\varepsilon} d_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}$ mit

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x$$

Es folgt sofort $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Da in einem Skalarproduktraum nach 4.1.3.22 die orthogonale Projektion eines Vektors auf einen endlichdimensionalen Teilraum stets die bestmögliche Approximation durch Vektoren dieses Teilraums ist, folgt für alle endlichen $J \supset I_\varepsilon$ erst recht

$$\left\| f - \sum_{\nu\in J} c_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x} \right\|_2 < \varepsilon$$

Das zeigt die Behauptung im Fall $f(0) = f(2\pi)$. Im Fall $f(0) \neq f(2\pi)$ müssen wir noch eine zusätzliche Verrenkung machen und zunächst eine stetige Funktion $\tilde{f}$ finden mit $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(2\pi)$ sowie $\|\tilde{f} - f\|_2 < \varepsilon$. Dann gibt es wieder ein trigonometrisches Polynom g mit $\|\tilde{f} - g\|_2 < \varepsilon$, also $\|f - g\|_2 < 2\varepsilon$, und der Beweis kann wie zuvor zu Ende geführt werden. □

Korollar 11.3.3.6. *Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ stetig und seien $c_\nu = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}, f\rangle$ seine Fourierkoeffizienten. So gilt $\|f\|_2^2 = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |c_\nu|^2$.*

Beweis. Die Differenz $\|f\|_2^2 - \sum_{\nu=-n}^{\nu=n} |c_\nu|^2$ ist das Quadrat eines Ausdrucks, von dem wir gerade gezeigt haben, daß er gegen Null strebt. □

Satz 11.3.3.7 (Kriterium für gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe). *Gegeben eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Periode 2π mit Fourierkoeffizienten $c_\nu := \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}, f\rangle$ gilt*

$$f = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}$$

im Sinne der Summierbarkeit nach 11.3.1.5 im komplexen Vektorraum $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ mit der Norm $\| \;\|_\infty$ der gleichmäßigen Konvergenz.

11.3.3.8. Der Satz gilt mit fast demselben Beweis auch noch, wenn unsere Funktion nur „stückweise stetig differenzierbar“ ist, wenn es also Punkte $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = 2\pi$ gibt derart, daß die Einschränkung von f auf jedes der Intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ stetig differenzierbar ist. Die Details mag der Leser zur Übung selbst ausarbeiten.

Beweis. Die Fourier-Koeffizienten $c_\nu = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}, f\rangle$ von f ergeben sich für $\nu \neq 0$ aus den Fourier-Koeffizienten $c'_\nu = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}, f'\rangle$ von f' durch partielles Integrieren zu

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu x}}{-\mathrm{i}\nu}\,\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{i}c'_\nu}{\nu}$$

Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt jedoch $2|\alpha\beta| \le (|\alpha|^2 + |\beta|^2)$ und es folgt

$$\sum_\nu |c_\nu| \le |c_0| + \sum_{\nu\neq 0}\left(\frac{1}{\nu^2} + |c'_\nu|^2\right) < \infty$$

Also gibt es eine stetige Funktion g mit $g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ im komplexen Vektorraum $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ mit der Norm $\| \;\|_\infty$. A forteriori gilt das dann auch in Bezug auf die Norm $\| \;\|_2$. Aus dem Satz über die quadratische Konvergenz der Fourierreihe 11.3.3.4 folgt damit $g = f$ und wir sind fertig. □

Vorschau 11.3.3.9 (**Fourierreihe und Wärmeverteilung**). Fassen wir eine stetig differenzierbare 2π-periodische Funktion f als eine Funktion auf dem Einheitskreis auf und nehmen sie reellwertig an, so gilt für ihre Fourier-Koeffizienten offensichtlich $c_{-\nu} = \bar{c}_\nu$. Sie können zum Beispiel in 14.5.1 lernen, warum die Formel

$$P(z) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu + c_{-\nu}\bar{z}^\nu$$

dann die eindeutig bestimmte „stabile Wärmeverteilung mit Randverteilung f auf der Einheitskreisscheibe“ beschreibt. In diesem Zusammenhang hat Fourier, von

dem erzählt wird, daß er häufig fröstelte, ursprünglich die heute nach ihm benannten Reihenentwicklungen gefunden und in seinem Werk „Théorie analytique de la chaleur“ veröffentlicht.

Übungen

Übung 11.3.3.10. Wir erklären den **Schwarzraum** $\mathcal{S}(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{Ens}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ als den Raum aller Abbildungen $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n^k a_n| < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Man zeige, daß die Entwicklung in eine Fouriereihe $(a_n) \mapsto f$ mit $f(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \mathrm{e}^{int}$ einen Isomorphismus induziert zwischen dem Schwarzraum $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ und dem Raum der beliebig oft differenzierbaren 2π-periodischen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Hinweis: Man gehe den Beweis von 11.3.3.7 nocheinmal durch.

Kapitel 12

Analysis 2: Funktionen mehrerer reeller Veränderlichen

Inhalt

12.1 Ableitungen in mehreren Veränderlichen 1840

12.1.1 Partielle Ableitungen und Gradient 1840

12.1.2 Affine Räume 1842

12.1.3 Differential 1845

12.1.4 Kettenregel in mehreren Veränderlichen 1854

12.1.5 Differenzierbarkeit über partielle Ableitungen . . . 1858

12.1.6 Weitere Ableitungsregeln* 1859

12.2 Mehrfache Integrale und Ableitungen 1865

12.2.1 Integration über Quader 1865

12.2.2 Taylorentwicklung in mehreren Veränderlichen . . 1871

12.2.3 Rechnen mit Approximationen 1874

12.2.4 Maxima und Minima in mehreren Veränderlichen . 1876

12.3 Umkehrsatz und Anwendungen 1882

12.3.1 Umkehrsatz 1882

12.3.2 Mannigfaltigkeiten in reellen Räumen 1889

12.3.3 Implizite Funktionen 1896

12.3.4 Karten und Koordinatensysteme 1901

12.3.5 Extrema auf Mannigfaltigkeiten 1906

12.3.6 Markov-Ketten* 1910

12.4 Oberfläche und Volumen 1913

12.4.1 Überdeckungen kompakter metrischer Räume . . . 1913
12.4.2 Transformationsformel 1916
12.4.3 Integration über Mannigfaltigkeiten 1927
12.4.4 Minkowskidimension 1932
12.4.5 Integration über Fastfaltigkeiten 1933
12.4.6 Explizite Berechnung einiger Integrale 1940
12.5 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1943
12.5.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften . . . 1943
12.5.2 Beispiele und Gegenbeispiele 1947
12.5.3 Integration von vektorwertigen Funktionen 1958
12.5.4 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen 1961
12.5.5 Lineare Differentialgleichungen 1968
12.5.6 Lösungen als Funktionen ihres Anfangswerts* . . . 1972
12.5.7 Ergänzung zu differentiellen Ungleichungen* . . . 1976
12.6 Erste Schritte in klassischer Mechanik 1978
12.6.1 Newton'sche Bewegungsgleichungen 1978
12.6.2 Mathematik der Bewegungsgleichungen 1983
12.6.3 Planetenbewegung 1984
12.6.4 Systeme mit Zwangsbedingungen 1988
12.6.5 Euler-Lagrange-Gleichungen 1992
12.6.6 Hamilton'sche Gleichungen 1999
12.6.7 Geometrie der Hamilton'schen Gleichungen 2001
12.7 Wegintegrale und Potentiale 2009
12.7.1 Vektorfelder und Kovektorfelder 2009
12.7.2 Verwandtschaft 2017
12.7.3 Gradienten in krummlinigen Koordinaten* 2025
12.7.4 Wegintegrale 2032
12.7.5 Wegzusammenhang 2042
12.7.6 Felder mit Potential 2046
12.7.7 Homotopie von Wegen 2048
12.7.8 Wegintegrale über geschlossene Felder 2051
12.8 Integralsatz von Stokes 2063
12.8.1 Alternierende Formen und Dachprodukt 2063

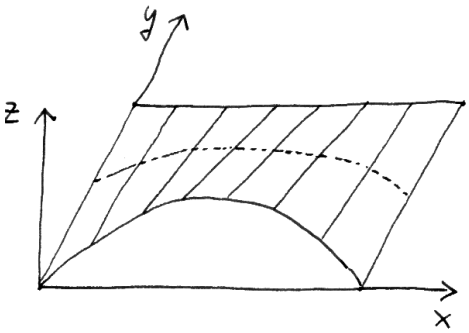
12.8.2 Differentialformen höheren Grades 2068
12.8.3 Orientierung von Mannigfaltigkeiten 2075
12.8.4 Integration von Differentialformen 2076
12.8.5 Äußere Ableitung von Differentialformen 2086
12.8.6 Randfaltigkeiten 2093
12.8.7 Integralsatz von Stokes 2098
12.8.8 Der Hodge-Operator mit Anwendungen 2111
12.9 Danksagung 2119

12.1 Ableitungen in mehreren Veränderlichen

12.1.1 Partielle Ableitungen und Gradient

Definition 12.1.1.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq A \to \mathbb{R}$ heißt **partiell differenzierbar nach der i-ten Variablen** an einer Stelle $p = (p_1, \ldots, p_n) \in A$, wenn die Funktion $x \mapsto f(p_1, \ldots, p_{i-1}, x, p_{i+1}, \ldots, p_n)$ differenzierbar ist bei $x = p_i$. Die Ableitung dieser Funktion heißt die **i-te partielle Ableitung** von f und wird notiert als

$$(\mathrm{D}_i f)(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \lim_{h \to 0} \frac{f(p_1, \ldots, p_i + h, \ldots, p_n) - f(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)}{h}$$



Veranschaulichen wir uns eine reellwertige Funktion von zwei reellen Veränderlichen durch die Hügellandschaft ihres Graphen, so beschreibt die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ die Steigung bei p derjenigen Straße durch p, die besagte Hügellandschaft in Richtung der x-Achse durchquert.

12.1.1.2. Unsere partiellen Ableitungen sind, soweit sie existieren, wieder reellwertige Funktionen. Um $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ zu berechnen denkt man sich alle x_j mit $j \neq i$ als Konstanten. Zum Beispiel berechnen wir die partiellen Ableitungen von $f(x, y) = x \sin(xy)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \sin(xy) + xy\cos(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 \cos(xy) \end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt auch die Vorteile der Notation $\frac{\partial}{\partial x}$ gegenüber der formal exakteren Notation D_i, bei der man stets eine Reihenfolge der Variablen festlegen muß und schneller in Indizes ertrinkt. Wenn die sonstige Notation es erlaubt, benutzt man auch die sehr konzisen Schreibweisen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f_x$$

12.1.1.3 (**Diskussion der Notation**). Ich will an einem Beispiel erläutern, aus welchem Grund es sinnvoll ist, im Fall mehrerer Veränderlichen unsere bisherige Notation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ zu $\frac{\partial}{\partial x}$ abzuändern. Denken wir uns einen Wanderer auf einer

Wanderung durch die Alpen, bei der schlechtes Wetter aufkommt. Der Luftdruck $D = D(t,h)$ hängt dann sowohl von der Zeit als auch von der Höhe ab. Macht unser Wanderer zum Zeitpunkt $t = t_0$ in der Höhe $h = h_0$ eine Pause, so ändert sich der Luftdruck, den sein Barometer mißt, mit der Rate $\frac{\partial D}{\partial t}(t_0, h_0)$. Geht er jedoch zum Zeitpunkt $t = t_0$ bergab oder bergauf und gibt die Funktion $h(t)$ seine Höhe zum Zeitpunkt t an, so ändert sich der Luftdruck, den sein Barometer mißt, mit der Rate $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=t_0}(D(t,h(t)))$. Wir werden zeigen, daß sich diese Rate auch ausdrücken läßt in der Gestalt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=t_0}(D(t,h(t))) = \frac{\partial D}{\partial t}(t_0, h(t_0)) + h'(t_0)\frac{\partial D}{\partial h}(t_0, h(t_0))$ oder in Kurzschreibweise

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial D}{\partial h}$$

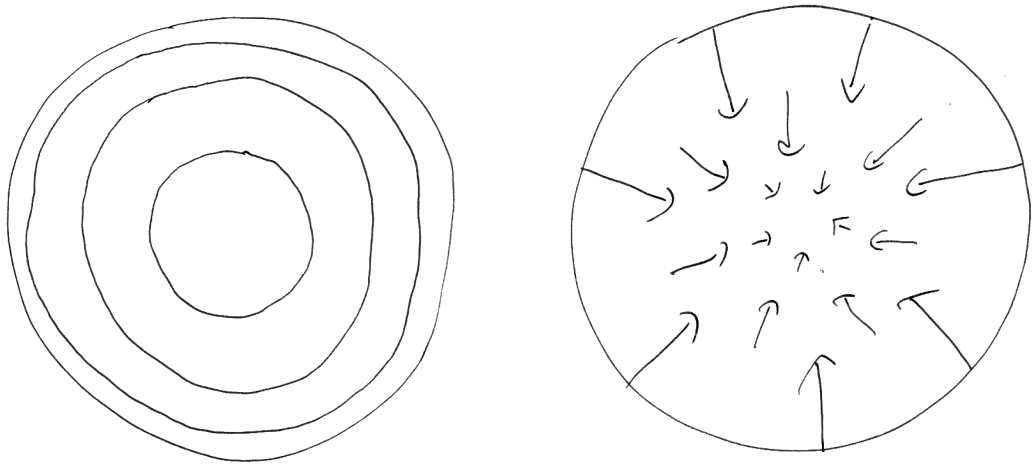
Der Zweck der Variation unserer Notation liegt nun eben darin, daß mit ihr solche Verkürzungen verständlich bleiben. Um die behauptete Formel zu beweisen, führen wir den Begriff des Differentials ein, studieren seinen Zusammenhang mit den partiellen Ableitungen und erhalten unsere Formel als Korollar 12.1.4.8 der Kettenregel für Differentiale.

Definition 12.1.1.4. Ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq A \to \mathbb{R}$ auf ganz A nach jeder der n Variablen partiell differenzierbar, so erklären wir den **Gradienten von** f als die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{grad} f : & A & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)^\top \end{array}$$

12.1.1.5. Man beachte, daß in dieser Definition das Symbol x für ein Element des $\mathbb{R}^n$ steht und nicht wie zuvor für eine reelle Zahl. Ich stelle mir $\operatorname{grad} f$ meist vor als ein Vektorfeld, das also jedem Punkt aus A einen Vektor aus dem $\mathbb{R}^n$ zuordnet. Das ist auch der Grund dafür, daß ich in obiger Definition den Zeilenvektor in einen Spaltenvektor transponiert habe. Denken wir uns im Fall $n = 2$ den Graphen von f als eine Hügellandschaft, so zeigt $\operatorname{grad} f$ stets in die Richtung, in der es am steilsten den Berg hinaufgeht, und $\operatorname{grad} f$ ist desto länger, je steiler es hinaufgeht. Diese Anschauung wird durch Bemerkung 12.1.3.10 formal gerechtfertigt.

12.1.1.6. Der Begriff des Gradienten ist nur für reellwertige Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ sinnvoll. Reellwertigen Funktionen auf abstrakten endlichdimensionalen reellen Vektorräumen kann nicht mehr sinnvoll ein Gradient in Gestalt eines Vektorfeldes zugeordnet werden. Ich vermeide deshalb im folgenden nach Möglichkeit den Begriff des Gradienten und arbeite stattdessen mit den sogenannten „Differentialen“, die in sehr viel größerer Allgemeinheit definiert sind. Die Beziehung zwischen Differentialen und Gradienten wird in 12.1.3.9 und 12.7.3.8 besprochen.



Einige Niveaulinien und das Gradientenfeld eines Hügels, hier möglicherweise der Funktion $\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2-y^2}$ auf der Kreisscheibe $x^2+y^2<\frac{1}{2}$.

Übungen

Übung 12.1.1.7. Sei $R(x,y)=\sum_{i,j} c_{ij}x^iy^j$ ein Polynom in zwei Variablen mit reellen Koeffizienten $c_{ij}\in\mathbb{R}$. Man zeige: Gibt es eine nichtleere offene Teilmenge $A \Subset \mathbb{R}^2$ derart, daß gilt $R(p)=0\ \forall p\in A$, so ist R das Nullpolynom, in Formeln $c_{ij}=0\ \forall i,j$.

12.1.2 Affine Räume

12.1.2.1. Dieser Abschnitt ist ein Auszug aus Abschnitt 3.3.1.1 einer Vorlesung zur linearen Algebra. Ich habe ihn hier eingefügt, um Unklarheiten zu vermeiden was die im weiteren verwendeten Notationen und Begriffsbildungen angeht. Meine Hoffnung ist, durch eine begriffliche Trennung von Punkten und Richtungsvektoren das Verständnis des Differentials zu erleichtern.

Definition 12.1.2.2. Ein **affiner Raum** oder kurz **Raum** über einem Körper k ist ein Tripel

$$E=(E,\vec{E},a)$$

bestehend aus einer nichtleeren Menge E, einer abelschen Gruppe $\vec{E}\subset \mathrm{Ens}^\times E$ von Permutationen von E und einer Abbildung $a: k\times\vec{E}\to\vec{E}$ derart, daß gilt:

1. Für alle $p,q\in E$ gibt es genau ein $\vec{v}\in\vec{E}$ mit $\vec{v}(p)=q$;
2. Die Abbildung $a: k\times\vec{E}\to\vec{E}$ ist die Multiplikation mit Skalaren einer Struktur als k-Vektorraum auf $\vec{E}$.

Die Elemente von $\vec{E}$ heißen die **Translationen** oder **Richtungsvektoren** unseres affinen Raums und den Vektorraum $\vec{E}$ selbst nennen wir den **Richtungsraum** unseres affinen Raums E. Die Operation von k auf $\vec{E}$ mag man die **Reskalierung von Translationen** nennen. Unter der **Dimension** unseres affinen Raums verstehen wir die Dimension seines Richtungsraums. Das Resultat der Operation von $\vec{v} \in \vec{E}$ auf $p \in E$ notieren wir $\vec{v} + p := \vec{v}(p)$ oder manchmal auch $p + \vec{v}$.

12.1.2.3 (**Diskussion der Notation**). Die eben eingeführte Notation für den Richtungsraum eines affinen Raums steht in Konflikt mit der Notation aus 12.8.3.6, nach der mit Pfeilen versehene Mannigfaltigkeiten orientierte Mannigfaltigkeiten andeuten sollen. Was jeweils gemeint ist, muß man aus dem Kontext erschließen.

12.1.2.4. Ist E ein affiner Raum, so liefert nach Annahme für jedes $p \in E$ die Operation eine Bijektion $\vec{E} \xrightarrow{\sim} E$, $\vec{u} \mapsto \vec{u} + p$ und es gilt $\vec{0} + p = p$ sowie $\vec{u} + (\vec{v} + p) = (\vec{u} + \vec{v}) + p$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$ und $p \in E$. Flapsig gesprochen ist also ein affiner Raum ein „Vektorraum, bei dem man den Ursprung vergessen hat“. Gegeben $p, q \in E$ notieren wir

$$\vec{u} = p - q$$

den Richtungsvektor $\vec{u} \in \vec{E}$ mit $p = \vec{u} + q$.

Beispiel 12.1.2.5 (**Modellierung von Raum und Zeit**). Es scheint mir besonders sinnfällig, den uns umgebenden Raum mathematisch als einen dreidimensionalen reellen affinen Raum $\mathbb{E}$ zu modellieren. Hierbei denkt man sich $\vec{\mathbb{E}}$ als die Gruppe aller „räumlichen Parallelverschiebungen“. Ähnlich mag man die Zeit modellieren als einen eindimensionalen reellen affinen Raum $\mathbb{T}$. Hierbei denkt man sich $\vec{\mathbb{T}}$ als die Gruppe aller „Zeitspannen“ und erlaubt auch „negative Zeitspannen“. Die Sekunde ist damit ein von Null verschiedener Vektor $\mathrm{s} \in \vec{\mathbb{T}}$.

12.1.2.6. Unter einem **normierten Raum** verstehen wir im folgenden einen reellen affinen Raum X, dessen Richtungsraum $\vec{X}$ mit einer Norm versehen ist. Jeden normierten Raum fassen wir als metrischen Raum auf mit der Norm $d(x, y) := \|x - y\|$ des Richtungsvektors von y nach x als Metrik und versehen ihn mit der zugehörigen metrischen Topologie. Äquivalente Normen liefern dieselbe Topologie. Insbesondere liefern auf einem endlichdimensionalen reellen Raum X nach dem Satz **??** über die Äquivalenz von Normen je zwei Normen dieselbe Topologie. Sie heißt die **natürliche Topologie auf** X.

12.1.2.7. Gegeben ein normierter Raum X ist das Verschieben $\vec{X} \times X \to X, (v, p) \mapsto v + p$ eine stetige Abbildung. Um das einzusehen, wiederholt man den Beweis zur Stetigkeit der Addition in normierten Vektorräumen aus Übung **??**.

12.1.2.8 (**Vom Nutzen allgemeiner normierter Räume**). Wir werden es vorerst nur mit endlichdimensionalen normierten Räumen zu tun haben. Ich arbeite dennoch hier und im folgenden mit beliebigen normierten Räumen, weil das zum Ersten in keiner Weise schwieriger ist, weil es zum Zweiten einen größeren Abstand

zum unübersichtlichen Gestrüpp der Koordinaten schafft, und weil es zum Dritten bei der Behandlung von Differentialgleichungen 12.5.6.2 in dieser Allgemeinheit gebraucht wird.

12.1.2.9 (**Vektorräume als affine Räume**). Jeder Vektorraum V kann als ein affiner Raum aufgefaßt werden, indem wir als Translationen die durch die Addition von festen Vektoren gegebenen Abbildungen nehmen. Als Gruppe von Translationen nehmen wir also das Bild des injektiven Gruppenhomomorphismus $V \to \mathrm{Ens}^\times(V), v \mapsto (v+)$. Die Reskalierung von Translationen erklären wir dann dadurch, daß dieser Gruppenhomomorphismus einen Vektorraumisomorphismus auf sein Bild liefern soll. Insbesondere erhalten wir damit einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathrm{trans} : V \xrightarrow{\sim} \vec{V}$$

zwischen unserem Vektorraum und dem Richtungsraum des zugehörigen affinen Raums. Diese Identifikation scheint mir derart kanonisch, daß ich sie von nun an in Sprache und Notation oft so behandeln werde, als seien diese beiden Vektorräume schlicht gleich. Manchmal versuche ich den Unterschied durch die Notation $\mathrm{trans}(v) = \vec{v}$ anzudeuten. In dieser Notation bedeutet etwa $\vec{1} \in \vec{\mathbb{R}} \subset \mathrm{Ens}^\times(\mathbb{R})$ die Verschiebung $(1+) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definition 12.1.2.10. Eine Abbildung $\varphi : E \to E'$ zwischen affinen Räumen heißt eine **affine Abbildung**, wenn es eine lineare Abbildung zwischen den zugehörigen Richtungsräumen $\vec{\varphi} : \vec{E} \to \vec{E}'$ gibt mit

$$\varphi(p) - \varphi(q) = \vec{\varphi}(p - q) \;\; \forall p, q \in E$$

Diese lineare Abbildung $\vec{\varphi}$ ist dann durch φ eindeutig bestimmt und heißt der **lineare Anteil** unserer affinen Abbildung.

Übungen

Übung 12.1.2.11 (**Produkt affiner Räume**). Gegeben affine Räume X, Y über einem Körper k gibt es genau eine Struktur als affiner Raum über k auf ihrem Produkt $X \times Y$ derart, daß die Projektionen auf X und Y affine Abbildungen werden. Die linearen Anteile der Projektionen induzieren dann einen Isomorphismus

$$(\vec{\mathrm{pr}}_X, \vec{\mathrm{pr}}_Y) : \overrightarrow{X \times Y} \xrightarrow{\sim} \vec{X} \times \vec{Y}$$

Wir verwenden das Produkt affiner Räume bei unserer Diskussion des Satzes über implizite Funktionen.

12.1.3 Differential

Definition 12.1.3.1. Seien X, Y normierte Räume. Eine Abbildung $f : X \supseteq A \to Y$ heißt **differenzierbar an einer Stelle** $p \in A$, wenn es eine stetige lineare Abbildung $L : \vec{X} \to \vec{Y}$ gibt mit

$$f(p + \vec{v}) = f(p) + L\vec{v} + \|\vec{v}\|\varepsilon(\vec{v})$$

für ε stetig bei $\vec{v} = \vec{0}$ mit Funktionswert $\vec{0}$, in Formeln $\lim_{\vec{v}\to\vec{0}} \varepsilon(\vec{v}) = \varepsilon(\vec{0}) = \vec{0}$. Hier ist implizit zu verstehen, daß die Abbildung ε definiert sein soll auf der Menge aller $\vec{v} \in \vec{X}$ mit $p + \vec{v} \in A$. Ausführlicher sagt man **total differenzierbar** oder **Fréchet-differenzierbar**. Wir zeigen gleich in 12.1.3.2, daß die lineare Abbildung L eindeutig bestimmt ist, wenn sie existiert. Sie heißt dann das **Differential von** f **bei** p und wird notiert als

$$\mathrm{d}_p f := L$$

12.1.3.2 (**Eindeutigkeit des Differentials**). Gegeben zwei Differentiale L, M derselben Abbildung am selben Punkt haben wir $\lim_{\vec{v}\to\vec{0}}(L - M)\vec{v}/\|\vec{v}\| = \vec{0}$ und damit für jeden Vektor $\vec{w} \neq \vec{0}$ auch $\lim_{t\searrow 0}(L - M)\vec{w}/\|\vec{w}\| = \vec{0}$ durch Einsetzen von $\vec{v} = t\vec{w}$, also $(L - M)\vec{w} = \vec{0}$ und insgesamt $L = M$.

12.1.3.3 (**Richtungsableitungen und Differential**). Gegeben X, Y normierte Räume und $f : X \supseteq A \to Y$ differenzierbar bei $p \in A$ gilt

$$(\mathrm{d}_p f)(\vec{w}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p + t\vec{w}) - f(p)}{t}$$

In der Tat folgt das direkt durch Einsetzen von $\vec{v} = t\vec{w}$ in der Definition des Differentials. Diesen Grenzwert in $\vec{Y}$ hinwiederum nennt man, wann immer er existiert, die **Richtungsableitung von** f **bei** p **in Richtung** $\vec{w}$ und kürzt ihn ab mit

$$(\mathrm{D}_{\vec{w}} f)(p)$$

für englisch **directional derivative**. Anschaulich mißt die Richtungsableitung im Fall $Y = \mathbb{R}$, wie schnell unsere Funktion wächst beziehungsweise abnimmt, wenn wir von p aus „mit der durch die Länge von $\vec{w}$ gegebenen Geschwindigkeit in der Richtung $\vec{w}$ gehen“. Unsere Richtungsableitung hängt insbesondere nicht nur von der Richtung des Vektors $\vec{w}$ ab, sondern auch von seiner Länge. Existiert das Differential von f an einer Stelle $p \in A$, so existieren insbesondere auch alle Richtungsableitungen und für alle Richtungsvektoren $\vec{w} \in \vec{X}$ gilt

$$(\mathrm{D}_{\vec{w}} f)(p) = (\mathrm{d}_p f)(\vec{w})$$

Vorschau 12.1.3.4. Im folgenden diskutieren wir die Bedeutung dieser Definitionen zunächst für Abbildungen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, dann für Abbildungen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, dann für Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und schließlich speziell für Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Anschließend diskutieren wir Anschauungen im abstrakten Kontext, etwa für bewegte Teilchen alias Abbildungen $\mathbb{T} \to \mathbb{E}$ von der Zeit in den Raum.

Beispiel 12.1.3.5 (**Partielle Ableitungen als Richtungsableitungen**). Für eine total differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ existieren unsere partiellen Ableitungen und sind gerade die Richtungsableitungen in Richtung der Einheitsvektoren e_i, in Formeln

$$(\mathrm{D}_{\mathrm{e}_i} f)(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

Hier haben wir in der Notation keinen Unterschied gemacht zwischen $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}$ als affinen Räumen und den zugehörigen Richtungsräumen, sonst hätten wir ausführlicher $(\mathrm{D}_{\vec{\mathrm{e}}_i} f)(p) = \operatorname{trans}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\right)$ schreiben müssen, wo trans einem Vektor seine Translation zuordnet wie in 12.1.2.9 und wir $\vec{\mathrm{e}}_i := \operatorname{trans}(\mathrm{e}_i)$ verstehen. Wir werden es auch zukünftig meist nicht ganz so genau nehmen.

Beispiel 12.1.3.6 (**Partielle Ableitungen als Richtungsableitungen, Variante**). Für $f = (f_1, \ldots, f_n)^\top : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ total differenzierbar finden wir allgemeiner

$$(\mathrm{D}_{\mathrm{e}_i} f)(p) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(p), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(p)\right)^\top = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

mit einer durch die zweite Gleichung erklärten vereinfachten Notation ganz rechts.

Beispiel 12.1.3.7 (**Differential und Jacobi-Matrix**). Gegeben eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist ihre darstellende Matrix nach 3.2.4.1 die Matrix $[L]$ mit den Spaltenvektoren $L(\mathrm{e}_i)$. Ist speziell eine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$$

differenzierbar bei p, so ist die darstellende Matrix ihres Differentials $\mathrm{d}_p f$ folglich die Matrix mit den Spaltenvektoren $(\mathrm{d}_p f)(\mathrm{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ in der in 12.1.3.6 eingeführten Notation. Hat unsere Abbildung also die Gestalt $f = (f_1, \ldots, f_n)^\top$ mit Funktionen $f_j : U \to \mathbb{R}$, so hat die darstellende Matrix ihres Differentials $\mathrm{d}_p f$ die Gestalt

$$[\mathrm{d}_p f] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix heißt die **Jacobi-Matrix** unserer Abbildung. Wir denken uns in diesem Zusammenhang Vektoren stets als Spaltenvektoren und haben unsere Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_n)^\top$ geschrieben, um das zu betonen. Für die Jacobi-Matrix

findet man häufig die Notation

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}(p)$$

Wenn Ihnen die Identifikation von Matrizen mit linearen Abbildungen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ aus 3.2.4.1 und 3.2.4.7 einmal richtig in Fleisch und Blut übergegangen ist, werden Sie sich auch nicht mehr daran stören, wenn wir später einmal mit $\mathrm{d}_p f$ sowohl das Differential als auch die Jacobimatrix bezeichnen sollten.

Vorschau 12.1.3.8 (**Differenzierbarkeit bei stetigen partiellen Ableitungen**). In 12.1.5.1 werden wir umgekehrt für $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ zeigen, daß wenn alle $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ auf ganz A existieren und stetig sind, daß dann f differenzierbar ist.

Beispiel 12.1.3.9 (**Differential und Gradient**). Gegeben eine reellwertige Abbildung $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ ist die Jacobi-Matrix die Zeilenmatrix

$$[\mathrm{d}_p f] = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(p)\right)$$

und stimmt überein mit dem Transponierten des Gradienten, der ja als Vektor in unseren Konventionen a priori als eine Spaltenmatrix aufzufassen ist, in Formeln

$$[\mathrm{d}_p f] = \big((\operatorname{grad} f)(p)\big)^\top$$

Gegeben allgemeiner ein endlichdimensionaler Raum X liefert jedes Skalarprodukt s auf seinem Richtungsraum $\vec{X}$ einen Isomorphismus $\mathrm{can}_s : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{X}^*$ vom Richtungsraum zu seinem Dualraum durch $\mathrm{can}_s(v))(w) := s(v,w)$ und wir können für eine Abbildung $f : X \supseteq A \to \mathbb{R}$ ihren **s-Gradienten bei** $p \in A$ erklären durch die Vorschrift $\mathrm{d}_p f = \mathrm{can}_s\big((\operatorname{grad}_s f)(p)\big)$ alias

$$(\operatorname{grad}_s f)(p) := \mathrm{can}_s^{-1}(\mathrm{d}_p f)$$

Im Fall des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$ erhalten wir so den üblichen Gradienten aus 12.1.1.4 zurück.

12.1.3.10 (**Gradient und Richtungsableitung**). Für die Richtungsableitung einer differenzierbaren reellwertigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq A \to \mathbb{R}$ am Punkt p in Richtung v erhalten wir speziell

$$(\mathrm{D}_v f)(p) = (\mathrm{d}_p f)(v) = \langle (\operatorname{grad} f)(p), v\rangle$$

Insbesondere wird die Richtungsableitung bei p in Richtung eines Vektors v der Länge Eins maximal genau dann, wenn der Gradient von f ein nichtnegatives Vielfaches von v ist. Für die Richtungsableitung $(\mathrm{D}_{\vec{v}} f)(p)$ einer differenzierbaren

reellwertigen Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf einem endlichdimensionalen normierten Raum am Punkt p in Richtung $\vec{v}$ erhalten wir allgemeiner

$$(\mathrm{D}_{\vec{v}} f)(p) = (\mathrm{d}_p f)(\vec{v}) = s((\mathrm{grad}_s\, f)(p), \vec{v})$$

mit der zweiten Gleichung für ein beliebiges Skalarprodukt s auf $\vec{X}$. Insbesondere wird die Richtungsableitung bei p in Richtung eines Vektors $\vec{v}$ der s-Länge Eins maximal genau dann, wenn der s-Gradient von f ein nichtnegatives Vielfaches von $\vec{v}$ ist.

Beispiel 12.1.3.11 (**Differential als physikalischer Geschwindigkeitsvektor**). Gegeben eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{T} \supseteq A \to \mathbb{E}$ von der Zeit in den Raum ist ihr Differential $\mathrm{d}_t\gamma : \vec{\mathbb{T}} \to \vec{\mathbb{E}}$ zu einem Zeitpunkt $t \in A$ ein Element

$$\mathrm{d}_t\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{\mathbb{E}})$$

Die Elemente dieses Vektorraums heißen **vektorielle Geschwindigkeiten**. Man verwendet in diesem Fall meist die alternative Notation $\mathrm{d}_t\gamma = \dot{\gamma}(t)$.

Beispiel 12.1.3.12 (**Differential als mathematischer Geschwindigkeitsvektor**). Gegeben eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \supseteq A \to E$ von einem Teil der Zahlengerade in einen normierten Raum E ist ihr Differential $\mathrm{d}_t\gamma : \vec{\mathbb{R}} \to \vec{E}$ bei $t \in A$ ein Element

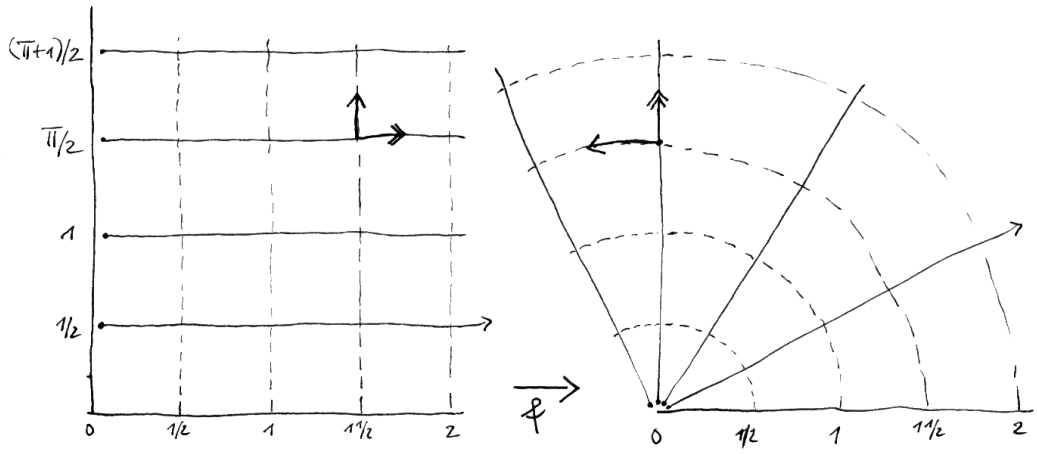
$$\mathrm{d}_t\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{R}}, \vec{E})$$

Man schreibt dann meist $\gamma'(t) := (\mathrm{d}_t\gamma)(\vec{1}) \in \vec{E}$ und nennt diesen Vektor manchmal auch den **Geschwindigkeitsvektor**. Für $E = \mathbb{R}^n$ spezialisiert unser Geschwindigkeitsvektor zu dem bereits in 10.7.1.4 eingeführten Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t)$.

Beispiel 12.1.3.13 (**Differential und Ableitung**). Gegeben eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist insbesondere ihr Differential $\mathrm{d}_p f : \vec{\mathbb{R}} \to \vec{\mathbb{R}}$ bei $p \in \mathbb{R}$ die lineare Abbildung $\mathrm{d}_p f = (f'(p)\cdot)$ der Multiplikation mit der Ableitung und ihre Jacobimatrix die (1×1)-Matrix $[\mathrm{d}_p f] = (f'(p))$.

12.1.3.14 (**Diskussion der Notation**). Für das Differential, das wir hier mit $\mathrm{d}_p f$ bezeichnen, findet man in der Literatur auch die alternativen Notationen $(\mathrm{D}f)(p)$ und $f'(p)$. Ich ziehe die Notation $\mathrm{d}_p f$ vor, weil sie kohärent ist mit unserer Notation $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ für Differenzenquotienten und der Notation $\mathrm{d}x$, mit der wir beim Integral die Integrationsvariable auszeichnen. Das wird in 12.7.4.9 ausgeführt.

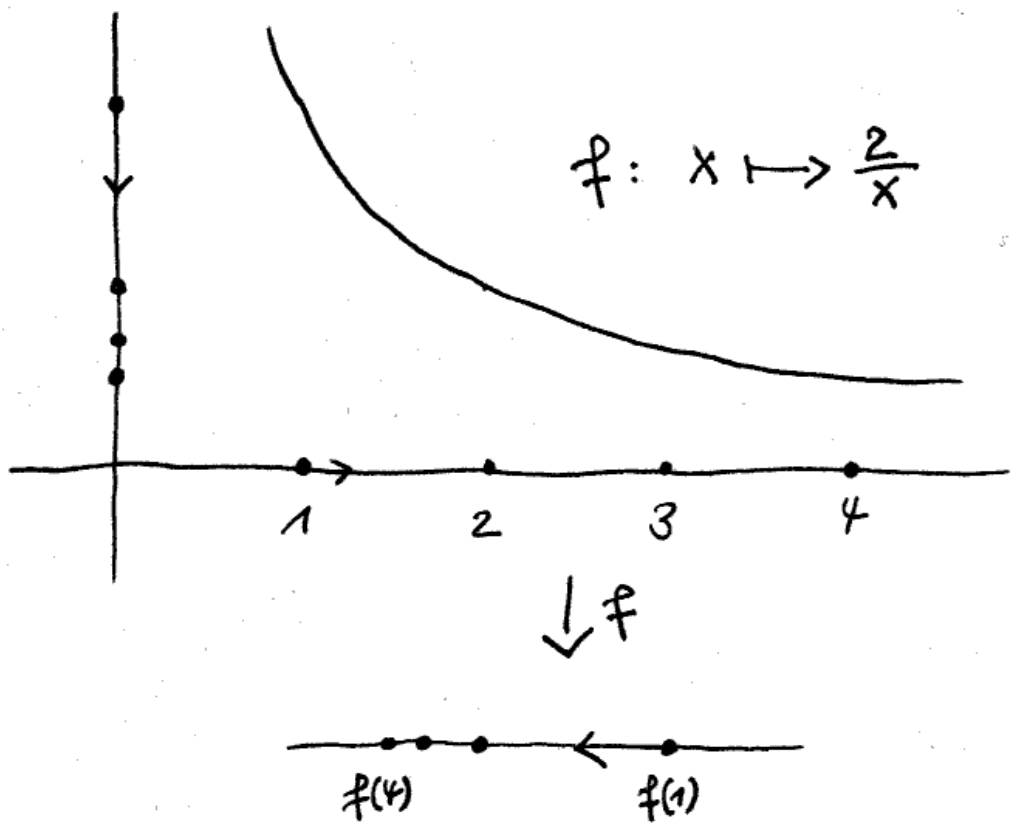
12.1.3.15 (**Äquivalente Normen liefern dasselbe Differential**). Unser Differenzierbarkeitsbegriff und das Differential ändern sich nicht, wenn wir die Normen auf den beteiligten Richtungsräumen durch äquivalente Normen ersetzen. Das sieht man direkt, es wird aber auch formal aus der Kettenregel 12.1.4.2 folgen.



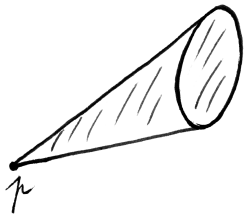
Dies Bild soll die Bedeutung des Differentials in der Anschauung einer Abbildung „als Abbildung“ verdeutlichen. Wir betrachten die **Polarkoordinatenabbildung** $f : \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $(r, \vartheta) \mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$. Ihr Differential an der Stelle $p = (r, \vartheta) = (1\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ wird beschrieben durch die Jacobi-Matrix

$$[\mathrm{d}_p f] = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Pfeile im Bild sollen zeigen, daß das in der Tat diejenige lineare Abbildung L ist, für die für kleines h die Abbildung $p + h \mapsto f(p) + Lh$ unsere Abbildung $p + h \mapsto f(p + h)$ am besten approximiert.



Dieses Bild soll das Differential einer Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ veranschaulichen, genauer der Abbildung $f : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto 2/x$ an der Stelle $x = 1$. Nach der allgemeinen Theorie wird in diesem Fall das Differential gegeben durch die (1×1)-Matrix $[\mathrm{d}_p f] = (f'(p))$ mit dem einzigen Eintrag $f'(p)$. In unserem Fall hätten wir etwa $[\mathrm{d}_1 f] = (-2)$. Im Bild habe ich versucht, unsere Abbildung sowohl durch ihren Graphen als auch durch eine echte Abbildung, in unserem Fall einem „Umdrehen und Verzerren der Zahlengeraden“, zu veranschaulichen. Ein kleiner von 1 ausgehender Richtungsvektor wird dann in etwa und im Grenzübergang ganz genau auf das Doppelte seines Negativen abgebildet. Das will unser Bild anschaulich machen.



Ein Kegelchen der Gestalt $p + [0,1]C$ in der Papierebene, für C die Menge aller Richtungsvektoren, die von p ins Innere der ellipsenförmigen Menge zeigen.

Sind insbesondere X und Y endlichdimensional, so ist unser Differenzierbarkeitsbegriff nach dem Satz über die Äquivalenz von Normen **??** unabhängig von der Wahl der Normen.

Definition 12.1.3.16. Eine Teilmenge A eines normierten Raums X nennen wir **halboffen**, wenn es für jeden Punkt $p \in A$ eine nichtleere offene Teilmenge $C \Subset \vec{X}$ gibt mit $p + [0,1]C \subset A$.

12.1.3.17. Anschaulich gesprochen ist eine Teilmenge eines normierten Raums halboffen, wenn es für jeden Punkt $p \in A$ ein kleines Kegelchen mit Spitze in p gibt, das auch noch ganz in A liegt.

12.1.3.18 (**Rückwärtskompatibilität**). Offensichtlich ist eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ genau dann halboffen im Sinne von 10.5.3.1, wenn sie halboffen ist im hier erklärten Sinne.

12.1.3.19 (**Differential bei halboffenem Definitionsbereich**). Gegeben normierte Räums X, Y und eine Abbildung $f : X \supset A \to Y$ mit $A \subset X$ halboffen ist das Differential

$$\mathrm{d}_p f : \vec{X} \to \vec{Y}$$

offensichtlich immer noch wohldefiniert and jeder Stelle $p \in A$, wenn es denn existiert. Formal folgt das zum Beispiel aus Übung 11.2.3.20, nach der ein normierter reeller Vektorraum von jeder nichtleeren offenen Teilmenge erzeugt wird.

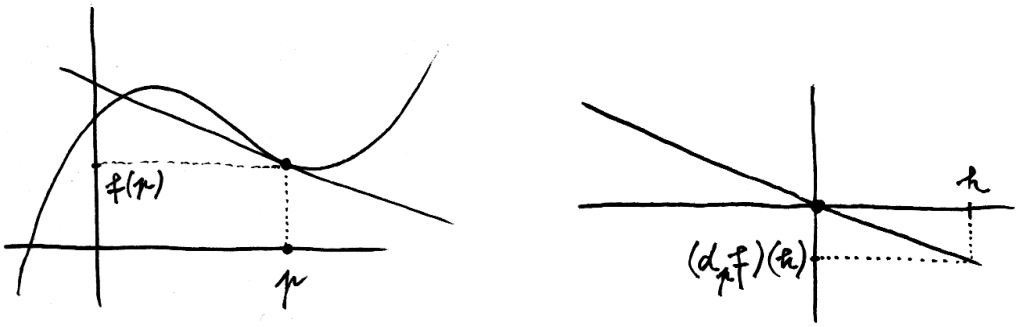
12.1.3.20 (**Diskussion der Terminologie**). Der Begriff „halboffen“ kommt in der Literatur sonst nicht vor. Er scheint mir jedoch nützlich, da er hilft, Verkrampfungen bei der Definition der Differenzierbarkeit auf abgeschlossenen Halbräumen und dergleichen zu vermeiden. Eine Definition in dieser Allgemeinheit hinwiederum benötigen wir bei der Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf höhere Dimensionen.

Ergänzung 12.1.3.21 (**Virtuelle partielle Ableitung**). Gegeben $A \subset \mathbb{R}^n$ eine halboffene Teilmenge und $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $p \in A$ setzen wir

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := (\mathrm{d}_p f)(\mathrm{e}_i)$$

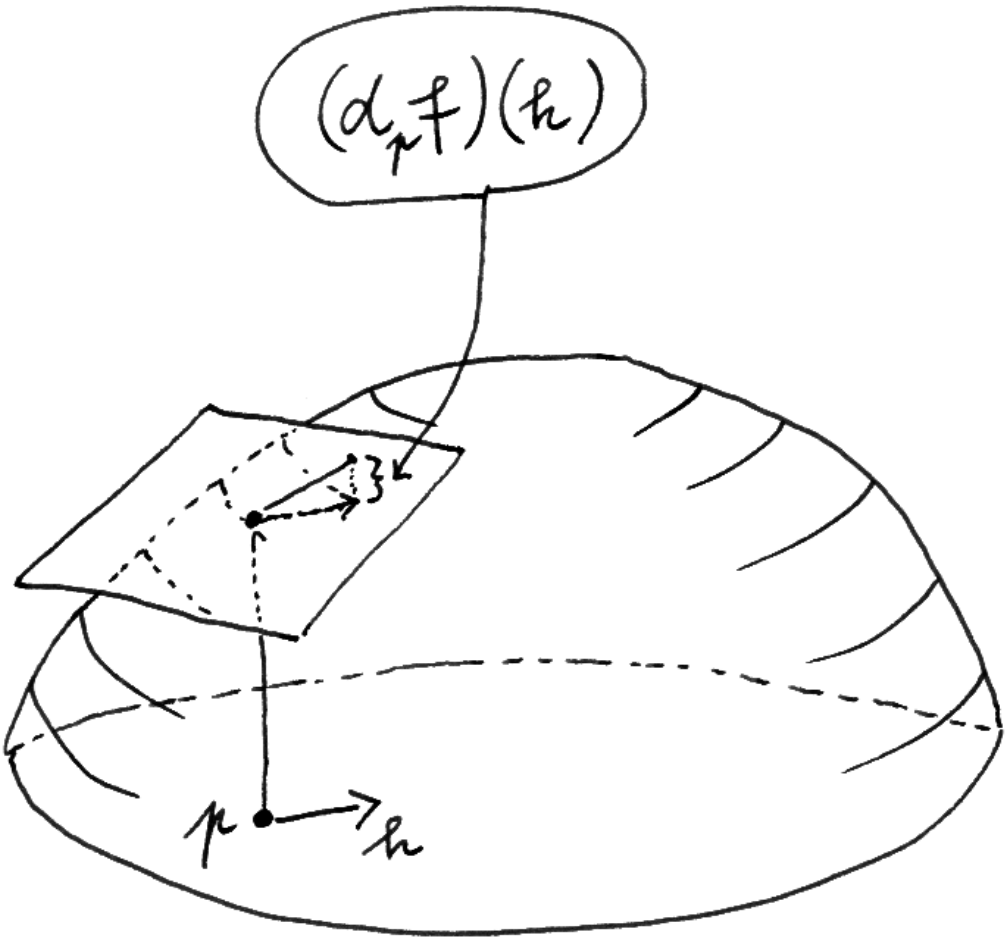
auch dann, wenn der Grenzwert $\lim_{t\to 0}$ in unserer ursprünglichen Definition einer partiellen Ableitung gar nicht gebildet werden kann, weil in $\{t \mid p + t\mathrm{e}_i \in A\}$ die Null ein isolierter Punkt ist.

Beispiel 12.1.3.22 (**Differential affiner und linearer Abbildungen**). Das Differential einer stetigen affinen Abbildung ist an jeder Stelle ihr linearer Anteil. Sind also X, Y normierte Räume und ist $\varphi : X \to Y$ stetig und affin, so gilt $\mathrm{d}_p\varphi = \vec{\varphi}$ für alle $p \in X$. Insbesondere ist das Differential einer konstanten Abbildung an jedem Punkt die Nullabbildung. Sind X, Y bereits selbst normierte Vektorräume und ist $\varphi : X \to Y$ stetig linear, so haben wir $\vec{\varphi} \circ \mathrm{trans} = \mathrm{trans} \circ \varphi : X \to \vec{Y}$. In diesem Fall macht man die Unterscheidung zwischen X und $\vec{X}$ beziehungsweise φ und $\vec{\varphi}$ meist nicht explizit und schreibt etwa $\mathrm{d}_p\varphi = \varphi$ und sagt, jede lineare Abbildung sei „ihr eigenes Differential“.



Anschauliche Bedeutung des Differentials einer reellwertigen Funktion einer reellen Variablen in der Veranschaulichung der Funktion durch ihren Graphen nach 12.1.3.23. Der Graph des Differentials ist bis auf eine Verschiebung gerade die Tangente.

12.1.3.23 (**Graph des Differentials einer reellen Funktion auf der Ebene**). Im allgemeinen kann man sich $\mathrm{d}_p f$ vorstellen als „den linearen Anteil der affinen Abbildung, die unsere Funktion in der Nähe der vorgegebenen Stelle bestmöglich approximiert“ oder in anderen Worten als „diejenige lineare Abbildung L, für die $x \mapsto f(p) + L(x - p)$ unsere Funktion $x \mapsto f(x)$ in der Nähe von p am besten approximiert“. Veranschaulichen wir uns zum Beispiel eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch ihren Graphen, eine hügelige Landschaft, so ist die schmutzige anschauliche Tangentialebene an unsere hügelige Landschaft im Punkt $(p, f(p))$ im verschobenen Koordinatensystem mit Ursprung $(p, f(p))$ der Graph des Differentials $\mathrm{d}_p f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.



Anschauliche Bedeutung des Differentials einer reellwertigen Funktion von zwei reellen Variablen in der Veranschaulichung der Funktion durch ihren Graphen nach 12.1.3.23. Der Graph des Differentials ist bis auf eine Verschiebung gerade die Tangentialebene. Der Wert des Differentials auf dem Vektor h ist etwa der im Bild durch eine geschweifte Klammer angedeutete Abstand oder noch genauer die zugehörige positive reelle Zahl.

Übungen

Übung 12.1.3.24 (**Schrankensatz, Variante**). Seien X ein normierter Raum und $\gamma : [a,b] \to X$ eine differenzierbare Abbildung und $C \Subset \vec{X}$ ein offene konvexe Teilmenge. Gilt $\gamma'(t) \in C \; \forall t \in [a,b]$, so folgt $\gamma(b) - \gamma(a) \in (b-a)C$. Hinweis: Man kopiere mutatis mutandis den Beweis des Schrankensatzes 10.7.1.10. Unser Satz gilt genauso für C konvex und abgeschlossen in $\vec{X}$, da wir so ein C schreiben können als den Schnitt der offenen konvexen Mengen $C = \bigcap_{\eta>0}(C + \mathrm{B}(0;\eta))$.

Übung 12.1.3.25 (**Bogenlänge als Integral, Variante**). Gegeben $\gamma : [a,b] \to X$ eine stetig differenzierbare Abbildung in einen normierten Raum zeige man

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\| \,\middle|\, a = a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_n = b \right\}$$

Hinweis: Man orientiere sich am Spezialfall 10.7.1.14.

Ergänzende Übung 12.1.3.26. Das Differential bei der Nullmatrix der Exponentialabbildung $\exp : \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$ ist die Identität, in Formeln gilt also $\mathrm{d}_0 \exp = \mathrm{id} : \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$. Man zeige das und zeige es allgemeiner auch für die Exponentialabbildung auf dem Raum der stetigen Endomorphismen eines beliebigen Banachraums aus **??**.

Ergänzende Übung 12.1.3.27. Man erinnere die Polarzerlegung 4.1.12.23 einer invertierbaren Matrix $A = UP$ mit $U = U(A)$ orthogonal und $P = P(A)$ symmetrisch positiv definit. Man zeige für das Differential bei der Einheitsmatrix der Abbildungen, die jeder invertierbaren Matrix ihre ihren orthogonalen beziehungsweise positiv definiten symmetrischen Anteil zuordnen, die Formeln $\mathrm{d}_{\mathrm{I}}U : D \mapsto (D - D^\top)/2$ und $\mathrm{d}_{\mathrm{I}}P : D \mapsto (D + D^\top)/2$. Im allgemeineren Fall der Polarzerlegung von Automorphismen eines Skalarproduktraums zeige man dieselbe Formel, wo $D^\top$ den zu D adjungierten Endomorphismus meint.

12.1.4 Kettenregel in mehreren Veränderlichen

12.1.4.1 (**Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit**). Weil wir in der Definition fordern, daß das Differential eine stetige lineare Abbildung sein soll, ist jede bei p differenzierbare Abbildung bei p auch stetig. Genauer verwenden wir dazu die Stetigeit der Addition, der Multiplikation mit Skalaren und der Norm nach **??**, die Stetigkeit des Verschiebens mit Richtungsvektoren 12.1.2.7, die Stetigkeit von Verknüpfungen **??** und die Komponentenregel **??**. Die Stetigkeit des Differentials $\mathrm{d}_p f : \vec{X} \to \vec{Y}$ wird auch benötigt für die Gültigkeit der Kettenregel 12.1.4.2.

Satz 12.1.4.2 (Kettenregel). *Seien A, B, C halboffene Teilmengen normierter Räume X, Y, Z. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen und $p \in A$*

ein Punkt derart, daß f differenzierbar ist bei p und g differenzierbar bei $f(p)$. So ist auch $g \circ f$ differenzierbar bei p und es gilt

$$\mathrm{d}_p(g \circ f) = (\mathrm{d}_{f(p)}g) \circ (\mathrm{d}_p f)$$

12.1.4.3. Es ist anschaulich klar, daß die bestmögliche affine Approximation an die Verknüpfung $g \circ f$ zweier Abbildungen f und g bei einer vorgegebenen Stelle p gerade die Verknüpfung der bestmöglichen affinen Approximation an f bei p mit der bestmöglichen affinen Approximation an g bei $f(p)$ sein muß. Die Kettenregel formalisiert diese Anschauung für die linearen Anteile unserer bestmöglichen affinen Approximationen.

Beispiel 12.1.4.4. Sind unsere drei normierten Räume $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l$, so bedeutet die Kettenregel die Identität von Jacobi-Matrizen

$$[\mathrm{d}_p(g \circ f)] = [\mathrm{d}_{f(p)}g] \circ [\mathrm{d}_p f]$$

oder ausgeschrieben die Identität

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial (g\circ f)_l}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial (g\circ f)_l}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(p)) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(p)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial y_1}(f(p)) & \dots & \frac{\partial g_l}{\partial y_m}(f(p)) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

Beweis. Zur Vereinfachung setzen wir $q = f(p)$, $L = \mathrm{d}_p f$ und $M = \mathrm{d}_q g$ und haben

$$\begin{aligned} f(p+h) &= f(p) + Lh \quad + \|h\|\varepsilon(h) \\ g(q+j) &= g(q) + Mj \quad + \|j\|\eta(j) \end{aligned}$$

für Abbildungen ε und η, die stetig sind bei Null und die dort verschwinden. Wir schreiben

$$f(p+h) = q + j(h)$$

mit $j(h) = Lh + \|h\|\varepsilon(h)$ und erhalten durch Einsetzen

$$\begin{aligned} (g \circ f)(p+h) &= g(q + j(h)) \\ &= g(q) + Mj(h) + \|j(h)\|\eta(j(h)) \\ &= (g \circ f)(p) + MLh + M\|h\|\varepsilon(h) + \|j(h)\|\eta(j(h)) \end{aligned}$$

Wir sind fertig, sobald wir zeigen

$$\lim_{h\to 0} M\varepsilon(h) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\|j(h)\|}{\|h\|}\eta(j(h)) = 0$$

Der erste Grenzwert ergibt sich mühelos, $h \mapsto M\varepsilon(h)$ ist eben auch stetig bei $h = 0$ und nimmt dort den Wert Null an. Um den zweiten Grenzwert zu berechnen, schätzen wir erst ab $\|j(h)\| \le \|h\|(\|L\| + \|\varepsilon(h)\|)$ und dann

$$\frac{\|j(h)\|}{\|h\|}\|\eta(j(h))\| \le (\|L\| + \|\varepsilon(h)\|)\|\eta(j(h))\|$$

Die rechte Seite ist wieder stetig bei $h = 0$ und nimmt dort den Wert Null an, gleichbedeutend strebt sie also für $h \to 0$ gegen Null, und durch Einquetschen **??** strebt die linke Seite dann erst gegen Null. □

Beispiel 12.1.4.5 (**Kettenregel beim Nachschalten affiner Abbildungen**). Gegeben normierte Räume X, Y, Z und $f : X \to Y$ differenzierbar und $\varphi : Y \to Z$ stetig affin liefert die Kettenregel $\mathrm{d}_p(\varphi \circ f) = \vec{\varphi} \circ \mathrm{d}_p f$ nach 12.1.3.22.

Beispiel 12.1.4.6 (**Kettenregel beim Nachschalten linearer Abbildungen**). Gegeben normierte Vektorräume X, Y, Z und $f : X \to Y$ differenzierbar und $\varphi : Y \to Z$ stetig linear liefert die Kettenregel unter den in diesem Fall üblichen Identifikationen $\mathrm{d}_p(\varphi \circ f) = \varphi \circ \mathrm{d}_p f$ nach 12.1.3.22 und noch spezieller folgt $\mathrm{d}_p(\lambda f) = \lambda(\mathrm{d}_p f)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beispiel 12.1.4.7 (**Kettenregel für Geschwindigkeiten**). Gegeben normierte Räume Y, Z und $\gamma : \mathbb{R} \to Y$ sowie $g : Y \to Z$ differenzierbar liefert die Kettenregel $\mathrm{d}_t(g \circ \gamma) = \mathrm{d}_{\gamma(t)} g \circ \mathrm{d}_t \gamma$. Mit der Beziehung 12.1.3.12 zwischen Differential und Geschwindigkeit erhalten wir daraus durch Auswerten auf $\vec{1} \in \vec{\mathbb{R}}$ sofort

$$(g \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}_{\gamma(t)} g\ (\gamma'(t))$$

Korollar 12.1.4.8 (**Spezialfall der Kettenregel für Geschwindigkeiten**). *Gegeben seien differenzierbare Abbildungen $x_1, \ldots, x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar. So ist die durch die Vorschrift $t \mapsto F(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ gegebene Abbildung differenzierbar und ihre Ableitung an der Stelle $t = a$ wird unter Verwendung der Abkürzung $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ gegeben durch die Formel*

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=a} F(x(t)) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x(a))\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(a) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x(a))\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}(a)$$

12.1.4.9. Natürlich gilt die Aussage auch dann noch, wenn unsere Funktionen x_i auf einer halboffenen Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ definiert sind und F auf einer halboffenen

Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, solange nur $x(t)$ stets im Definitionsbereich von F liegt. Man schreibt diese Formel meist etwas salopp in der Form

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$$

Beweis. Das ist die Kettenregel für Geschwindigkeiten 12.1.4.7 ausgeschrieben für $Y = \mathbb{R}^n$ und $Z = \mathbb{R}$ in anderen Buchstaben. Wir betrachten x als eine Abbildung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Nach Definition ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=a} F(x(t))$ der einzige Eintrag in der Matrix $[\mathrm{d}_a(F \circ x)]$ der linearen Abbildung $\mathrm{d}_a(F \circ x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mit der Kettenregel finden wir nun

$$\begin{aligned}
[\mathrm{d}_a(F \circ x)] &= [\mathrm{d}_{x(a)}F \circ \mathrm{d}_a x] \\
&= [\mathrm{d}_{x(a)}F] \circ [\mathrm{d}_a x] \\
&= \left(\tfrac{\partial F}{\partial x_1}(x(a)), \ldots, \tfrac{\partial F}{\partial x_n}(x(a))\right)\left(\tfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(a)), \ldots, \tfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}(a)\right)^\top \\
&= \left(\tfrac{\partial F}{\partial x_1}(x(a))\tfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(a) + \ldots + \tfrac{\partial F}{\partial x_n}(x(a))\tfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}(a)\right)
\end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Zeile das Produkt einer Zeilenmatrix mit einer Spaltenmatrix zu verstehen ist, wie der obere Index $\top$ andeutet. □

Ergänzung 12.1.4.10 (**Partielle Ableitungen mit Einheiten**). Oft werden auch partielle Ableitungen in größerer Allgemeinheit verwendet als in unserer Definition 12.1.1.1. Sind genauer $X_1, \ldots, X_n$ eindimensionale reelle Räume und ist Y ein normierter reeller Raum und $U \Subset X_1 \times \ldots \times X_n$ eine offene Teilmenge und $x_i : U \to X_i$ die i-te Projektion und $f : U \to Y$ eine Abbildung, so bezeichnet

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

auch das „Differential der Restriktion auf X_i bei festen anderen Variablen“, eine Abbildung $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}_i, \vec{Y})$. Unter der Identifikation des Richtungsraums unseres Produkts $X_1 \times \ldots \times X_n$ mit dem Produkt der Richtungsräume und des Raums Homomorphismen von dort nach $\vec{Y}$ mit dem Produkt der Homomorphismenräume haben wir dann

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\middle|\ldots\middle|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Im Fall $Y = \mathbb{R}^m$ erhalten wir speziell wieder unsere Jacobimatrix als eine Zeilenmatrix von Spaltenvektoren.

Übungen

Übung 12.1.4.11. Seien X, Y normierte reelle Räume. Sei $A \subset X$ halboffen und $f : A \to Y$ differenzierbar. Liegt für zwei Punkte $p, q \in A$ das ganze verbindende Geradensegment $[p, q]$ in A und ist die Operatornorm des Differentials von f auf $[p, q]$ beschränkt durch eine Konstante K, in Formeln $\| \mathrm{d}_x f\| \leq K \ \forall x \in A$, so gilt $\|f(p) - f(q)\| \leq K\|p - q\|$. Hinweis: Schrankensatz 12.1.3.24.

12.1.5 Differenzierbarkeit über partielle Ableitungen

Proposition 12.1.5.1 (Differenzierbarkeit bei stetigen partiellen Ableitungen). *Sei $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Existieren alle partiellen Ableitungen von f und sind stetig als Abbildungen $\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \to \mathbb{R}$, so ist die Abbildung f total differenzierbar.*

12.1.5.2. Es folgt unmittelbar, daß $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ total differenzierbar ist, wenn alle $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ stetig sind auf U.

Beispiel 12.1.5.3. Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, deren sämtliche Richtungsableitungen an jeder Stelle existieren, die jedoch im Ursprung nicht total differenzierbar ist, kann man wie folgt erhalten: Man wählt eine stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $g(x + \pi) = -g(x)$, die nicht identisch Null ist, und setzt $f(r \cos\theta, r \sin\theta) = rg(\theta)$ für $r > 0$ und $f(0, 0) = 0$. Ist g nicht die Nullfunktion und hat mehr als zwei Nullstellen auf $[0, 2\pi)$, so hängen die Richtungsableitungen am Ursprung unserer Funktion f nicht linear vom Richtungsvektor ab und sie kann folglich beim Ursprung nicht total differenzierbar sein.

Beweis. Es gilt, an jeder Stelle $p \in U$ die totale Differenzierbarkeit zu zeigen. Indem wir vor f eine geeignete Verschiebung davorschalten, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p = 0$ annehmen. Indem wir zu f eine geeignete Konstante sowie eine geeignete lineare Abbildung addieren, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit weiter annehmen, daß gilt $f(p) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = 0 \ \forall j$. Unter diesen zusätzlichen Annahmen müssen wir nun zeigen, daß f total differenzierbar ist bei $p = 0$ mit Differential Null, in Formeln $\mathrm{d}_p f = 0$. Gegeben $\varepsilon > 0$ finden wir nun sicher $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ derart, daß gilt $\mathrm{B}(0; \delta) \subset U$ und daß alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ auf diesem Ball nur Werte in $C := (-\varepsilon, \varepsilon)$ annehmen. Aus dem Mittelwertsatz folgt für $|h| < \delta$ schon $f(h_1, \ldots, h_{j-1}, h_j, 0, \ldots, 0) - f(h_1, \ldots, h_{j-1}, 0, 0, \ldots, 0) \in h_j C$ und insgesamt

$$f(h) = f(h) - f(0) \in (h_1 + \ldots + h_m)C$$

Für $0 < |h| < \delta_\varepsilon$ gilt also $|f(h)|/|h| \leq m\varepsilon$. Da wir für alle $\varepsilon > 0$ so ein δ_ε finden können, folgt $\lim_{h \to 0} f(h)/|h| = 0$ wie gewünscht. $\square$

Übungen

Ergänzende Übung 12.1.5.4. Man zeige, daß die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenzierbar ist mit Differential

$$\mathrm{d}_z \exp = (\exp z)\cdot : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

Ergänzende Übung 12.1.5.5. Jede stetig differenzierbare reellwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der Hyperebene $0 \times \mathbb{R}^n$ oder einer offenen Teilmenge des Halbraums $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^n$ läßt sich zu einer stetig differenzierbaren Funktion auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ fortsetzen.

12.1.6 Weitere Ableitungsregeln*

Proposition 12.1.6.1 (Komponentenregel). *Seien X, Y_1, Y_2 normierte Räume und $A \subset X$ eine halboffene Teilmenge und $f = (f_1, f_2) : A \to Y_1 \times Y_2$ eine Abbildung. Genau dann ist f differenzierbar bei $p \in A$, wenn f_1 und f_2 es sind, und dann gilt für die Differentiale die Formel*

$$\mathrm{d}_p f = (\mathrm{d}_p f_1, \mathrm{d}_p f_2) : \vec{X} \to \vec{Y_1} \times \vec{Y_2}$$

12.1.6.2. Man beachte, daß $(\mathrm{d}_p f_1, \mathrm{d}_p f_2)$ in Matrixschreibweise unter unseren Konventionen 3.2.4.12, anders als die Schreibweise suggerieren mag, als Spaltenmatrix von Homomorphismen aufzufassen wäre.

Beweis. Die Projektionen $\mathrm{pr}_i : X \to Y_i$ sind stetig und linear. Ist f differenzierbar bei p, so sind damit nach der Kettenregel auch die $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f$ differenzierbar bei p und die Kettenregel liefert zusätzlich $\mathrm{d}_p f_i = \mathrm{d}_{f(p)} \mathrm{pr}_i \circ \mathrm{d}_p f = \mathrm{pr}_i \circ \mathrm{d}_p f$, also $\mathrm{d}_p f = (\mathrm{d}_p f_1, \mathrm{d}_p f_2)$. Sind umgekehrt f_1 und f_2 differenzierbar bei p mit Differentialen L_1 und L_2, so können wir nach Definition schreiben

$$f_i(p + h) = f_i(p) + L_i h + \|h\| \varepsilon_i(h)$$

für geeignete Abbildungen ε_i, die stetig sind bei Null und die dort den Wert $\varepsilon_i(0) = 0$ annehmen. Setzen wir $L = (L_1, L_2)$ und $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, so ist L ist stetig linear und ε stetig bei 0 mit Funktionswert $\varepsilon(0) = 0$ und es gilt

$$f(p + h) = f(p) + Lh + \|h\| \varepsilon(h)$$

Das bedeutet aber, daß f differenzierbar ist bei p mit Differential $\mathrm{d}_p f = L$. $\square$

12.1.6.3. Mit Induktion folgt die analoge Aussage für eine Abbildung $f : A \to Y_1 \times \ldots \times Y_m$ in ein längeres kartesisches Produkt normierter Räume. Insbesondere

ist eine Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar bei $p \in A$ genau dann, wenn alle f_j es sind, und in diesem Fall gilt für die Differentiale die Formel

$$\mathrm{d}_p f = (\mathrm{d}_p f_1, \ldots, \mathrm{d}_p f_m) : \vec{X} \to \mathbb{R}^m$$

Wieder ist hier $(\mathrm{d}_p f_1, \ldots, \mathrm{d}_p f_m)$ gemäß unseren Konventionen, anders als die Schreibweise suggerieren mag, als Spaltenmatrix von Homomorphismen aufzufassen.

Korollar 12.1.6.4 (Summenregel). *Seien X ein normierter Raum, $\vec{Y}$ ein normierter Vektorraum und $A \Subset X$ eine halboffene Teilmenge. Sind $f, g : A \to \vec{Y}$ differenzierbar bei $p \in A$, so ist auch $f + g : A \to \vec{Y}$ differenzierbar bei p und es gilt*

$$\mathrm{d}_p(f + g) = \mathrm{d}_p f + \mathrm{d}_p g$$

Beweis. Die Addition $+ : \vec{Y} \times \vec{Y} \to \vec{Y}$, $(w, w') \mapsto w + w'$ ist linear und stetig, und wir können $f + g$ schreiben als die Verknüpfung $f + g = + \circ (f, g)$. Das Differential von $f + g$ an der Stelle p ergibt sich also mit der Kettenregel zu $\mathrm{d}_p(f + g) = + \circ (\mathrm{d}_p f, \mathrm{d}_p g) = \mathrm{d}_p f + \mathrm{d}_p g$. □

Proposition 12.1.6.5 (Differential bilinearer Abbildungen). *Seien $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ normierte Vektorräume und sei $\varphi : \vec{X} \times \vec{Y} \to \vec{Z}$, $(v, w) \mapsto \varphi(v, w)$ eine stetige bilineare Abbildung. So ist φ differenzierbar und das Differential von φ im Punkt (p, q) ist die lineare Abbildung*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d}_{(p,q)}\varphi : & \vec{X} \times \vec{Y} & \to & \vec{Z} \\ & (h, k) & \mapsto & \varphi(h, q) + \varphi(p, k) \end{array}$$

Beweis. Wir rechnen

$$\varphi(p + h, q + k) = \varphi(p, q) + \varphi(h, q) + \varphi(p, k) + \varphi(h, k)$$

und müssen nur noch $\lim_{(h,k) \to 0} \varphi(h, k)/\|(h, k)\| = 0$ zeigen. Das folgt aber mit 11.2.3.24 aus der Stetigkeit von φ. □

Beispiel 12.1.6.6. Die Leibnizregel 10.5.4.1 können wir aus der Kettenregel für Differentiale herleiten wie folgt: Gegeben $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schreiben wir das Produkt fg als die Verknüpfung $fg = \mathrm{mult} \circ (f, g)$ der Funktion $(f, g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit der Multiplikation $\mathrm{mult} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sind f und g differenzierbar bei $t \in \mathbb{R}$, so nach der Komponentenregel auch ihre Zusammenfassung (f, g), und deren Jacobi-Matrix ist die Spaltenmatrix $[\mathrm{d}_t(f, g)] = (f'(t), g'(t))^\top$. Andererseits ist die Multiplikation differenzierbar als stetige bilineare Abbildung oder auch nach

12.1.5.1 wegen der Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen und ihr Differential bei (x, y) hat als Jacobi-Matrix die Zeilenmatrix $[\mathrm{d}_{(x,y)}\,\mathrm{mult}] = (y, x)$. Mit der Kettenregel in mehreren Veränderlichen folgt dann

$$\begin{aligned}(fg)'(t) &= [\mathrm{d}_t(f \circ g)] \\ &= [\mathrm{d}_{(f(t),g(t))}\,\mathrm{mult}] \circ [\mathrm{d}_t(f, g)] \\ &= (g(t), f(t)) \circ (f'(t), g'(t))^\top \\ &= g(t)f'(t) + f(t)g'(t)\end{aligned}$$

Korollar 12.1.6.7. *Seien $A : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n \times m; \mathbb{R})$ und $B : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(m \times k; \mathbb{R})$ differenzierbare matrixwertige Funktionen. So ist auch das Produkt $AB : t \mapsto A(t)B(t)$ differenzierbar und die Geschwindigkeit $(AB)'$ der Produktfunktion $AB : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$ wird gegeben durch die Formel*

$$(AB)' = A'B + AB'$$

12.1.6.8. Das sollten Sie zur Übung schon in Koordinaten nachgerechnet haben. Der hier gegebene Beweis ist komplizierter und dient in erster Linie nicht der Herleitung des Resultats, sondern vielmehr der Illustration unserer allgemeinen Regeln durch ein übersichtliches Beispiel. Man beachte jedoch auch, wie unübersichtlich dieses Beispiel wird, sobald wir versuchen, statt mit abstrakten Differentialen mit Jacobi-Matrizen zu arbeiten.

Beweis. Die Matrixmultiplikation ist eine stetige bilineare Abbildung

$$\mathrm{Mult} : \mathrm{Mat}(n \times m; \mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}(m \times k; \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$$

und wir können AB schreiben als die Verknüpfung $AB = \mathrm{Mult} \circ (A, B)$. Mit der Kettenregel und der Komponentenregel ergibt sich

$$\mathrm{d}_t(AB) = (\mathrm{d}_{(A(t),B(t))}\,\mathrm{Mult}) \circ (\mathrm{d}_t A, \mathrm{d}_t B)$$

Wenden wir diese lineare Abbildung $\mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$ an auf $\partial \in \vec{\mathbb{R}}$, so erhalten wir mit 12.1.6.5 wie gewünscht

$$\begin{aligned}(AB)'(t) &= \mathrm{d}_t(AB)(\partial) \\ &= (\mathrm{d}_{(A(t),B(t))}\,\mathrm{Mult})(A'(t), B'(t)) \\ &= A'(t)B(t) + A(t)B'(t)\end{aligned}$$

□

12.1.6.9. Gegeben Y ein normierter Raum und $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to Y$ eine Abbildung erklären wir die partiellen Ableitungen weiter als die Richtungsableitungen nach den Vektoren der Standardbasis, in Formeln

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := (\mathrm{D}_{\mathrm{e}_i} f)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + t\mathrm{e}_i) - f(p)}{t}$$

12.1.6.10. Seien X, Y normierte Räume und $A \subset X$ halboffen. Eine Abbildung $f : A \to Y$ heißt **differenzierbar**, wenn sie differenzierbar ist bei jedem Punkt $p \in A$. Sie heißt **stetig differenzierbar**, wenn sie differenzierbar ist und wenn zusätzlich die Abbildung $A \to \mathcal{B}(\vec{X}, \vec{Y})$ gegeben durch $p \mapsto \mathrm{d}_p f$ stetig ist in Bezug auf die Operatornorm **??** auf dem Raum $\mathcal{B}(\vec{X}, \vec{Y})$ der stetigen linearen Abbildungen.

Proposition 12.1.6.11 (Differenzierbarkeit über partielle Ableitungen, Variante). *Seien Y ein normierter Raum und $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \to Y$ eine Abbildung. Existieren alle partiellen Ableitungen von f und sind stetig als Abbildungen $\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \to \vec{Y}$, so ist die Abbildung f stetig differenzierbar.*

Beweis. Es gilt, an jeder Stelle $p \in U$ die totale Differenzierbarkeit zu zeigen. Indem wir zu f eine geeignete Konstante sowie eine geeignete lineare Abbildung addieren, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gilt $f(p) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = 0 \ \forall j$. Unter diesen zusätzlichen Annahmen müssen wir nun zeigen, daß f total differenzierbar ist bei p mit Differential Null. Indem wir vor f eine geeignete Verschiebung davorschalten, dürfen wir zusätzlich auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p = 0$ annehmen. Gegeben eine punktsymmetrische offene konvexe Umgebung $C \Subset \vec{Y}$ des Nullvektors von $\vec{Y}$ finden wir nun sicher $\delta = \delta_C > 0$ derart, daß alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ auf dem Ball $\mathrm{B}(0; \delta)$ nur Werte in C annehmen und daß dieser Ball ganz in U enthalten ist. Aus dem Schrankensatz 12.1.3.24 folgt für $|h| < \delta$ schon $f(h_1, \ldots, h_{j-1}, h_j, 0, \ldots, 0) - f(h_1, \ldots, h_{j-1}, 0, 0, \ldots, 0) \in h_j C = |h_j| C$ und insgesamt

$$f(h) = f(h) - f(0) \in (|h_1| + \ldots + |h_m|)C$$

Für $h \neq 0$ und $|h| < \delta_C$ gilt also $f(h)/|h| \in mC$. Da wir für alle C so ein δ_C finden können, folgt $\lim_{h \to 0} f(h)/|h| = 0$ wie gewünscht. □

Übungen

Ergänzende Übung 12.1.6.12. Man zeige, daß auch im Kontext normierter Vektorräume stetige multilineare Abbildungen differenzierbar sind, und gebe eine zur Produktregel 12.1.6.5 analoge Formel für deren Differential. Hinweis: 11.2.3.24.

Ergänzende Übung 12.1.6.13. Gegeben ein eindimensionaler Vektorraum V hat die Abbildung $f : v \mapsto v^{\otimes n}$ bei $w \in V$ das Differential $\mathrm{d}_w f : v \mapsto n w^{\otimes n-1} \otimes v$. Hinweis: Differential multilinearer Abbildungen 12.1.6.12 und Kettenregel.

Ergänzende Übung 12.1.6.14. Man zeige, daß $\det : \mathrm{Mat}(n; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und daß das Differential der Abbildung $\det$ an der Einheitsmatrix I die

Spur tr ist, in Formeln

$$\mathrm{d}_{\mathrm{I}} \det = \mathrm{tr} : \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

Für das Differential von $\det$ an einer beliebigen Stelle P zeige man die Formel $(\mathrm{d}_P \det)(H) = \mathrm{tr}((\det P)P^{-1}H)$. Hier meint $(\det P)P^{-1}$ den Wert bei P der stetigen Fortsetzung der Abbildung $P \mapsto (\det P)P^{-1}$ vom Raum der invertierbaren Matrizen auf den Raum aller Matrizen alias die „adjungierte Matrix“ $P^\sharp$ aus 3.6.4.6. Hinweis: Man mag mit 12.1.6.12 arbeiten, oder auch mit partiellen Ableitungen. Erinnerung: Die Spur einer Matrix ist die Summe der Einträge auf der Diagonalen.

Übung 12.1.6.15. Sei $\mathrm{inv} : \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n \times n;\mathbb{R})$ das Invertieren von Matrizen, $\mathrm{inv}(X) = X^{-1}$. Man zeige für das Differential des Invertierens bei der Einheitsmatrix I die Formel $\mathrm{d}_I \mathrm{inv} : H \mapsto -H$. Man zeige allgemeiner, daß das Differential dieser Abbildung am Punkt P in Verallgemeinerung der Ableitungsregel für $x \mapsto 1/x$ gegeben wird durch

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}_P \mathrm{inv} : & \mathrm{Mat}(n \times n;\mathbb{R}) & \to & \mathrm{Mat}(n \times n;\mathbb{R}) \\ & H & \mapsto & -P^{-1}HP^{-1} \end{array}$$

Hinweis: Man zeige erst, daß inv differenzierbar ist. Dann nehme man in der Gleichung $\mathrm{inv}(X)X = I$ auf beiden Seiten das Differential an der Stelle P. Alternativer Hinweis: Man erinnere die Darstellung des Inversen durch eine Reihe **??** und die Identität $(\cdot P^{-1}) \circ \mathrm{inv} \circ (P^{-1}\cdot) = \mathrm{inv}$.

Übung 12.1.6.16. Gegeben ein Banachraum V ist das Invertieren $\mathrm{inv} : \mathcal{B}(V)^\times \to \mathcal{B}(V)$ differenzierbar mit dem Differential $\mathrm{d}_p \mathrm{inv} : h \mapsto -p^{-1}hp^{-1}$ an einer Stelle p. Hinweis: Übung **??**.

Ergänzende Übung 12.1.6.17. Sei $B \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ fest. Das Differential der Abbildung $\psi : \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ gegeben durch $A \mapsto ABA^{-1}$ bei der Einheitsmatrix ist die lineare Abbildung $H \mapsto HB - BH$.

Ergänzende Übung 12.1.6.18 (**Inversionen sind konforme Abbildungen**). Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$. Die auf dem Komplement des Nullkegels $\{v \in V \mid \langle v, v\rangle = 0\}$ erklärte Abbildung $\mathrm{inv} : v \mapsto v/\langle v, v\rangle$ heißt dann in Verallgemeinerung von 5.2.5.1 eine **Inversion**. Die Fixpunktmenge unserer Inversion ist $\{v \in V \mid \langle v, v\rangle = 1\}$. Man zeige für das Differential von inv bei v die Formel

$$(\mathrm{d}_v \mathrm{inv})(h) = \frac{h}{\langle v, v\rangle} - \frac{2\langle h, v\rangle v}{\langle v, v\rangle^2}$$

und folgere $\langle (\mathrm{d}_v \mathrm{inv})(h), (\mathrm{d}_v \mathrm{inv})(k)\rangle = \langle h, k\rangle/\langle v, v\rangle^2$ für alle h, k. In Worten erhält $\mathrm{d}_v \mathrm{inv}$ also für alle v unsere Bilinearform bis auf einen von Null verschiedenen skalaren Faktor. Abbildungen inv mit dieser Eigenschaft heißen **konforme Abbildungen**, deshalb die Überschrift.

Ergänzende Übung 12.1.6.19 (**Differential über partielle Ableitungen, Zugabe**). Seien X, Y, Z normierte Räume, $U \Subset X$ sowie $V \Subset Y$ offene Teilmengen und $f : U \times V \to Z$ eine Abbildung. Wir betrachten für alle $x \in U$ die „vertikale" Einbettung $j_x : V \to U \times V$, $y \mapsto (x, y)$ und für alle $y \in V$ die „horizontale" Einbettung $i_y : U \to U \times V$, $x \mapsto (x, y)$. Existieren für alle $(x, y) \in U \times V$ die Differentiale $\mathrm{d}_x(fi_y) : \vec{X} \to \vec{Z}$ und $\mathrm{d}_y(fj_x) : \vec{Y} \to \vec{Z}$ und sind stetig als Funktionen $U \times V \to \mathcal{B}(\vec{X}, \vec{Z})$ beziehungsweise $U \times V \to \mathcal{B}(\vec{Y}, \vec{Z})$, so ist die Abbildung f differenzierbar mit Differential

$$\mathrm{d}_{(x,y)} f : (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \mathrm{d}_x(fi_y)(\vec{v}) + \mathrm{d}_y(fj_x)(\vec{w})$$

Die offensichtliche Identifikation von $\vec{X} \times \vec{Y}$ mit dem Richtungsraum des Produkts $X \times Y$ haben wir hier der Übersichtlichkeit halber nicht explizit notiert. Hinweis: Man kopiere mutatis mutandis den Beweis von 12.1.5.1. Mutige mögen umgekehrt 12.1.5.1 aus dem Ergebnis dieser Übung ableiten durch Induktion über n.

12.2 Mehrfache Integrale und Ableitungen

12.2.1 Integration über Quader

Satz 12.2.1.1 (über Integrale mit Parametern). *Gegeben ein Kompaktum $X \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $f : X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ ist auch die Funktion $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ stetig.*

12.2.1.2. Der Satz gilt allgemeiner für einen beliebigen metrischen Raum X, ja sogar in noch größerer Allgemeinheit, aber die Formulierung und der Beweis in dieser Allgemeinheit brauchen Begriffe und Hilfsmittel, die uns noch nicht zur Verfügung stehen.

Beweis. Mit X ist auch $X \times [a,b]$ kompakt nach 10.5.1.20 und nach 10.5.1.15 ist f dort gleichmäßig stetig. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es insbesondere $\delta > 0$ mit

$$|x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x,t) - f(y,t)| < \varepsilon \text{ für alle } t \in [a,b].$$

Aus $|x-y| < \delta$ folgt mithin

$$\left| \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(y,t)\,\mathrm{d}t \right| \le \int_a^b |f(x,t) - f(y,t)|\,\mathrm{d}t \le (b-a)\varepsilon$$

und das zeigt die Behauptung. □

12.2.1.3. Ein Produkt von n Intervallen in $\mathbb{R}^n$ nennen wir einen **Quader**. Ein kompakter Quader in $\mathbb{R}^2$ ist eine Rechtecksfläche der Gestalt $[a,b] \times [c,d]$. Beispiele für nichtkompakte Quader $H \subset \mathbb{R}^n$ sind etwa ganz $\mathbb{R}^n$ oder im Fall $n > 0$ der Halbraum $\mathbb{R}_{\le 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

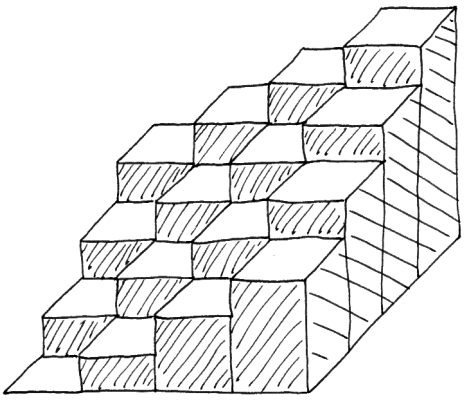
Definition 12.2.1.4. Gegeben $Q = [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n] \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader in $\mathbb{R}^n$ und $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig erklären wir das **Integral von f über Q**, eine reelle Zahl $\int_Q f \in \mathbb{R}$, durch die Formel

$$\int f = \int_Q f := \int_{a_n}^{b_n} \left(\ldots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_1 \right) \ldots \right) \mathrm{d}x_n$$

im Fall $Q \neq \emptyset$ und durch $\int_Q f = 0$ im Fall $Q = \emptyset$. Im Fall $n = 0$ interpretieren wir unsere Definition dahingehend, daß das Integral der Funktionswert am einzigen Punkt des leeren Produkts sein soll.

12.2.1.5. Satz 12.2.1.1 zeigt, daß in dieser Definition alle Integranden stetig vom Integrationsparameter abhängen, so daß alle unsere Integrale definiert sind. Aus den Eigenschaften des Integrals von Funktionen einer reellen Veränderlichen folgt

sofort die Linearität $\int(f+g) = \int f + \int g$, $\int(\lambda f) = \lambda \int f$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ sowie die Monotonie $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ und insbesondere auch $|\int f| \leq \int |f|$. Für das Integral der konstanten Funktion 1 über einen nichtleeren kompakten Quader $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ erhalten wir $\int_Q 1 = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)$. Wir nennen diese Zahl das **Volumen** des Quaders Q und notieren sie $\operatorname{vol} Q$. Anschaulich bedeutet $\operatorname{vol} Q$ ein Volumen im Fall $n = 3$, eine Fläche im Fall $n = 2$, eine Länge im Fall $n = 1$ und die Zahl 1 im Fall $n = 0$.



Die vierte Riemannsumme der Funktion $f(x, y) = (x + y)/2$ auf dem Einheitsquadrat mag man sich als das Volumen des hier gezeichneten räumlichen Gebildes denken.

12.2.1.6. Für $n = 2$ bedeutet $\int_Q f$ anschaulich den Rauminhalt zwischen dem Graphen der Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ und der xy-Ebene, wobei Rauminhalte unterhalb der xy-Ebene negativ zu zählen sind. Diese Anschauung wird im folgenden formal gerechtfertigt.

Definition 12.2.1.7. Sei $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ein nichtleerer kompakter zweidimensionaler Quader alias ein **Rechteck** und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Bezeichne $\operatorname{vol} Q = (b - a)(d - c)$ die Fläche von Q. Für $r \geq 1$ definieren wir die r-te **Riemannsumme** $S^r(f)$ von f wie folgt: Wir betrachten die äquidistanten Unterteilungen

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_r = b$$

$$c = c_0 \leq c_1 \leq \ldots \leq c_r = d$$

der Kanten unseres Rechtecks, erhalten eine Unterteilung unseres Rechtecks in r^2 kleine Rechtecke $Q_{i,j} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$ mit Flächeninhalt $(\operatorname{vol} Q)/r^2$, und setzen

$$S^r(f) := \sum_{i,j=0}^{r-1} f(a_i, c_j) \frac{\operatorname{vol} Q}{r^2}$$

Proposition 12.2.1.8 (Integral durch Riemannsummen). *Gegeben $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck und $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig ist das Integral von f über Q der Grenzwert*

unserer Riemannsummen, in Formeln

$$\int_Q f = \lim_{r\to\infty} S^r(f)$$

Beweis. Wir definieren Unter- und Obersummen durch

$$\underline{S}^r(f) = \sum_{i,j=0}^{r-1} \inf f(Q_{i,j})\ \frac{\operatorname{vol} Q}{r^2} \quad \text{und} \quad \bar{S}^r(f) = \sum_{i,j=0}^{r-1} \sup f(Q_{i,j})\ \frac{\operatorname{vol} Q}{r^2}$$

Bei den Untersummen lassen wir etwa auf unseren kleinen Quadern $Q_{i,j}$ Türmchen hochwachsen, bis sie am Graphen unserer Funktion anstoßen, und bilden die Summe der Volumina aller dieser Türmchen. Bei den Obersummen nehmen wir entsprechend die kleinstmöglichen Türmchen, aus denen unsere Funktion nicht mehr oben herausguckt. Nun behaupten wir die Ungleichungen

$$\underline{S}^r(f) \le S^r(f) \le \bar{S}^r(f)$$

$$\underline{S}^r(f) \le \int_Q f \le \bar{S}^r(f)$$

Die Ungleichungen der ersten Zeile sind offensichtlich. Um die Ungleichungen der zweiten Zeile einzusehen, benutzen wir zunächst die Regeln für Integrale einer Veränderlichen und erkennen

$$\inf f(Q_{i,j})\ \frac{\operatorname{vol} Q}{r^2} \le \int_{Q_{i,j}} f \le \sup f(Q_{i,j})\ \frac{\operatorname{vol} Q}{r^2}$$

Aus unseren Regeln für Integrale einer Veränderlichen folgt zusätzlich auch noch $\int_Q f = \sum_{i,j} \int_{Q_{i,j}} f$. Summieren wir dann für $0 \le i,j \le r-1$ alle unsere Ungleichungen auf, so ergibt sich die zweite Zeile oben. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es nun wegen der gleichmäßigen Stetigkeit unserer Funktion auf unserem kompakten Rechteck ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ mit

$$|(x_1,y_1) - (x,y)| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1,y_1) - f(x,y)| < \varepsilon$$

Ist $R = R_\varepsilon$ so groß, daß alle Kantenlängen unserer kleinen Rechtecke $Q_{i,j}$ bei äquidistanter Unterteilung in R Stücke unter δ sinken, so folgt aus $r \ge R$ damit $|\bar{S}^r(f) - \underline{S}^r(f)| < (\operatorname{vol} Q)\varepsilon$ und mit unseren beiden Zeilen von Ungleichungen ergibt sich $|\int_Q f - S^r(f)| < (\operatorname{vol} Q)\varepsilon$. Das zeigt $\int_Q f = \lim_{r\to\infty} S^r(f)$ wie behauptet. □

Korollar 12.2.1.9 (Vertauschen partieller Integrationen). *Gegeben ein Rechteck $Q = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ und $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig gilt*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Beweis. Beide Seiten sind der Grenzwert derselben Folge von Riemannsummen. □

12.2.1.10. Den gemeinsamen Wert dieses Integrals notieren wir dann kürzer auch $\int_Q f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ und benutzen analoge Notationen im Fall von noch mehr Veränderlichen. Steht dahingegen x für eine Veränderliche des $\mathbb{R}^k$, so benutzen wir die Notation $\int f(x)\ \mathrm{d}^k x$.

12.2.1.11. Da das Differenzieren so in etwa der inverse Prozess zum Integrieren ist, müssen mit den partiellen Integralen auch die partiellen Ableitungen sowie partielle Ableitung und partielles Integral vertauschen. Diese Idee wird im Folgenden ausgeführt.

Korollar 12.2.1.12 (Vertauschen partieller Ableitungen). *Seien $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck mit beiden Seiten von positiver Länge und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Existiert die gemischte partielle Ableitung $\partial_y \partial_x f$ auf Q und ist dort stetig und existiert darüber hinaus die partielle Ableitung $\partial_y f$ auf Q, so existiert sogar die umgekehrte gemischte partielle Ableitung $\partial_x \partial_y f$ auf Q und es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Vorschau 12.2.1.13. Eine anschauliche Interpretation dieses Korollars wird der Satz über die Taylorentwicklung 12.2.2.1 geben: Geeignet differenzierbare reelle Funktionen von zwei Variablen besitzen lokal an jeder Stelle eine „beste“ Approximation durch ein Polynom vom Grad höchstens zwei, in Formeln ausgedrückt $f(p+x,q+y) \sim f(p,q)+\alpha x+\beta y+\gamma x^2+\delta xy+\theta y^2$, und die gemischte partielle Ableitung unserer Funktion an besagter Stelle ist dann genau der Koeffizient δ des „gemischten Terms“.

Beispiel 12.2.1.14. Die Funktion $f(x,y) = xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ kann durch $f(0,0) = 0$ stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$ fortgesetzt werden und ist überall zweimal partiell differenzierbar, aber ihre beiden gemischten partiellen Ableitungen stimmen im Ursprung nicht überein. Das zeigt, daß unsere Forderung der Stetigkeit an eine gemischte partielle Ableitung im vorhergehenden Korollar 12.2.1.12 notwendig ist.

Beweis. Wir verwenden für die partiellen Ableitungen nach der ersten beziehungsweise zweiten Variablen die Abkürzungen f_1 und f_2 und schreiben $f_{12} = (f_1)_2$ für die gemischte partielle Ableitung „erst nach x, dann nach y“. Für (a,c) die untere linke Ecke unseres Rechtecks und $(x,y) \in Q$ beliebig finden wir

$$\begin{aligned}\int_a^x \int_c^y f_{12}(s,t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}s &= \int_a^x f_1(s,y) - f_1(s,c)\ \mathrm{d}s \\ &= f(x,y) - f(x,c) - f(a,y) + f(a,c)\end{aligned}$$

Jetzt vertauschen wir vorne die Integrationsreihenfolge, bringen hinten die drei letzten Summanden auf die andere Seite und erhalten

$$\left(\int_c^y \int_a^x f_{12}(s,t)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t\right) + f(x,c) + f(a,y) - f(a,c) = f(x,y)$$

Die linke Seite ist hier ganz offensichtlich partiell differenzierbar erst nach y und dann nach x und ihre gemischte partielle Ableitung ergibt sich zu f_{12} wie gewünscht. □

Korollar 12.2.1.15 (Differenzieren unter dem Integral). *Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ stetig mit stetiger partieller Ableitung nach der zweiten Variablen. So ist die Funktion $y \mapsto \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ differenzierbar und man darf die Integration über die erste Variable mit der partiellen Ableitung nach der zweiten Variablen vertauschen, in Formeln*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Vorschau 12.2.1.16. Einen allgemeineren Satz zum Differenzieren unter dem Integral werden Sie in Übung 13.1.6.17 im Rahmen der Lebesgue'schen Integrationstheorie herleiten.

Beweis. Wir kürzen wieder die partielle Ableitung von f nach der zweiten Variablen mit f_2 ab. Dann wählen wir $c \in I$ beliebig und finden

$$\int_a^b \int_c^y f_2(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x,y) - f(x,c)\,\mathrm{d}x$$

Vertauschen wir vorne die Integrationsreihenfolge und bringen den letzten Summanden auf die andere Seite, so ergibt sich

$$\int_c^y \int_a^b f_2(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(x,c)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Die linke Seite ist aber offensichtlich partiell differenzierbar nach y mit Ableitung $\int_a^b f_2(x,t)\,\mathrm{d}x$. □

Übungen

Übung 12.2.1.17 (**Lösungen der linearen Wellengleichung**). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion, es sollen also $\partial_x^2 f, \partial_x\partial_t f, \partial_t\partial_x f$ und $\partial_t^2 f$ alle auf ganz $\mathbb{R}^2$ existieren und stetig sein. Es gelte weiter

$$\partial_x^2 f(x,t) = \partial_t^2 f(x,t)$$

Man zeige, daß es dann zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x,t) = u(x-t) + v(x+t)$$

und daß diese Funktionen u, v durch f eindeutig bestimmt sind bis auf den Übergang zu $u + c, v - c$ mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$. Hinweis: Man untersuche zunächst zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\partial_y \partial_z g(y,z) = 0$ und zeige, daß es zweimal stetig differenzierbare Funktionen $h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit $g(y,z) = h(y) + k(z)$.

Ergänzung 12.2.1.18 (**Motivation für die lineare Wellengleichung**). Wir denken uns eine waagerechte Kette von reibungslos rutschenden Würfeln der Masse M, die durch Federn verbunden sind und einen Abstand von jeweils einem Meter

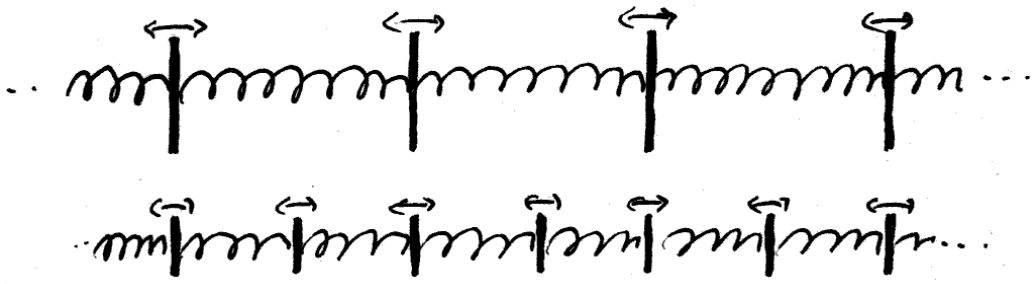


Illustration zur Motivation der linearen Wellengleichung mit Platten statt Würfeln.

haben. Stören wir dieses System und bezeichnet $f(n,t)$ die Auslenkung der n-ten Kugel zum Zeitpunkt t, so erfüllen die Funktionen $f(n,t)$ nach den Newton'schen Bewegungsgleichungen ein System von Differentialgleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} M\partial_t^2 f(n,t) &= C\big((f(n+1,t) - f(n,t)) - (f(n,t) - f(n-1,t))\big) \\ &= C\big(f(n+1,t) + f(n-1,t) - 2f(n,t)\big) \end{aligned}$$

mit einer Konstante C, die von der Federkonstante abhängt. Teilen wir die Abstände zwischen unseren Würfeln und die Masse unserer Würfel durch N, so werden die Federn entsprechend kürzer und die entsprechende Gleichung lautet

$$\frac{M}{N}\partial_t^2(x,t) = NC(f(x + \frac{1}{N}, t) + f(x - \frac{1}{N}, t) - 2f(x,t))$$

für $x \in (1/N)\mathbb{Z}$. Setzen wir stattdessen $h = 1/N$, so ergibt sich

$$M\partial_t^2 f(x,t) = C\frac{f(x+h,t) + f(x-h,t) - 2f(x,t)}{h^2}$$

für alle $x \in h\mathbb{Z}$. Gehen wir schließlich zum Grenzwert für $N \to \infty$ alias $h \to 0$ über, so erhalten wir nach 10.6.2.8 die Wellengleichung

$$M\partial_t^2 f(x,t) = C\partial_x^2 f(x,t)$$

Ergänzende Übung 12.2.1.19. Gegeben ein Vektorraum V und $A \in \operatorname{End} V$ erklärt man die lineare Abbildung $\operatorname{ad} A : \operatorname{End} V \to \operatorname{End} V$ durch die Vorschrift $\operatorname{ad} A : B \mapsto (AB - BA)$. Man zeige, daß für V endlichdimensional und reell das Differential von $\exp : \operatorname{End} V \to \operatorname{End} V$ bei $A \in \operatorname{End} V$ gegeben wird durch die Formel

$$\mathrm{d}_A \exp = (\cdot \exp A) \circ \left(\frac{\exp(\operatorname{ad} A) - 1}{\operatorname{ad} A} \right)$$

Beim letzten Faktor ist gemeint, daß $\operatorname{ad} A$ in die Potenzreihe $\sum_{\nu \geq 0} z^\nu/(\nu+1)!$ der Funktion $(\exp(z)-1)/z$ eingesetzt werden soll. Hinweis: Man wende $\partial^2/\partial s \partial t = \partial^2/\partial t \partial s$ an auf $\exp(s(A+tB))\exp(-sA)$, setze $t = 0$ und integriere über s.

12.2.2 Taylorentwicklung in mehreren Veränderlichen

Satz 12.2.2.1 (Taylorentwicklung in zwei Veränderlichen). *Gegeben eine d-mal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$ mit $(0,0) \in A$ gibt es genau ein Polynom in zwei Veränderlichen $T(x,y) = \sum_{i+j \leq d} c_{i,j} x^i y^j$ vom Grad $\leq d$ mit*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - T(x,y)}{|(x,y)|^d} = 0$$

und die Koeffizienten $c_{i,j}$ dieses Polynoms T werden gegeben durch die Formel

$$c_{i,j} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(0,0)$$

Beweis. Wir zeigen das gleich in mehreren Veränderlichen. □

12.2.2.2. Ist $f(x,y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ selbst eine Polynomfunktion, so erkennt man leicht, daß gilt

$$a_{i,j} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(0,0)$$

In diesem Fall liefert unsere Formel also $T(x,y) = \sum_{i+j \leq d} a_{i,j} x^i y^j$ und man sieht sofort, daß dieses T die geforderte Eigenschaft hat.

12.2.2.3. Um unseren Satz auch in mehr als zwei Veränderlichen übersichtlich formulieren zu können, führen wir geeignete Notationen ein. Gegeben ein **Multiindex** $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ setzen wir

$$\begin{array}{lcl} |\alpha| & := & \alpha_1 + \ldots + \alpha_m \\ \alpha! & := & \alpha_1! \ldots \alpha_m! \\ x^\alpha & := & x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m} \\ \partial^\alpha f & := & \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \end{array}$$

Für die letzte Notation nehmen wir dabei an, daß $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ eine $|\alpha|$-mal stetig partiell differenzierbare Funktion ist, so daß es beim partiellen Ableiten nicht auf die Reihenfolge ankommt.

12.2.2.4. Unter einem **Polynom in mehreren Veränderlichen** $x_1, x_2, \ldots, x_m$ mit reellen Koeffizienten versteht man eine „endliche formale Summe“ der Gestalt

$$\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha = \sum_\alpha c_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}$$

Dabei läuft die Summe über Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^m$ und alle Koeffizienten c_α sind reelle Zahlen, die darüber hinaus fast alle verschwinden müssen, wir lassen also nur endliche formale Summen zu. Mit dem **Grad** oder genauer dem **Totalgrad** eines Polynoms in mehreren Veränderlichen meint man $\sup\{|\alpha| \mid c_\alpha \neq 0\}$. Das Nullpolynom hat also den Grad $-\infty$, konstante Polynome haben den Grad 0 und

$$x^4 y^3 - z^5 y + 3 z^2 x^2 y^2$$

ist ein Polynom in den drei Veränderlichen x, y, z vom Grad 7. Wir werden in 12.2.2.7 zeigen, daß verschiedene polynomiale Ausdrücke auch verschiedene Funktionen liefern, so daß wir im Fall reeller Koeffizienten nicht so genau zu hinterfragen brauchen, was wir unter solch einem „formalen Ausdruck“ genau verstehen wollen. Den Fall beliebiger Koeffizienten diskutieren wir in 3.5.3.2 im Fall einer Variablen und in 3.5.3.30 im allgemeinen.

Satz 12.2.2.5 (Taylorentwicklung). *Gegeben $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ eine d-mal stetig partiell differenzierbare Funktion und $p \in A$ ein Punkt gibt es genau ein Polynom T vom Grad $\leq d$ mit*

$$f(p+h) = T(h) + |h|^d \varepsilon(h)$$

für eine Funktion ε mit $\varepsilon(0) = \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ und dieses Polynom wird gegeben durch die Formel

$$T(h) = \sum_{|\alpha| \leq d} \frac{(\partial^\alpha f)(p)}{\alpha!} h^\alpha$$

12.2.2.6. Dieser Satz ist schwächer als unsere verschiedenen Versionen im Fall einer Variablen in 10.6.2.2 folgende. Ich denke jedoch, daß es an dieser Stelle den Aufwand nicht wert ist, entsprechend stärkere Versionen zu zeigen. Ich habe in einer Variablen den Aufwand auch nur getrieben, um den Aspekt der „Verallgemeinerung der Ableitung durch die Taylorentwicklung“ herauszuarbeiten. In **??** deute ich an, wie der vorhergehende Satz koordinatenfrei formuliert werden kann. Ich schicke dem Beweis ein Lemma voraus.

Lemma 12.2.2.7. *Sei R ein Polynom in m Veränderlichen mit reellen Koeffizienten vom Grad $\leq d$. Gilt $\lim_{h\to 0} R(h)/|h|^d = 0$, so folgt $R = 0$.*

Beweis. Wir zeigen das durch Widerspruch. Wäre $R \neq 0$, so gäbe es $v \neq 0$ mit $R(v) \neq 0$, und $t \mapsto R(tv)$ wäre ein von Null verschiedenes Polynom in einer Veränderlichen $t \in \mathbb{R}$ vom Grad $\leq d$ mit $\lim_{t\to 0} R(tv)/|t|^d = 0$. Wir wissen aber aus 10.3.5.53, daß es solch ein Polynom in einer Variablen nicht gibt. □

Beweis des Satzes. Aus unserem Lemma folgt sofort die Eindeutigkeit von T, denn ist $\hat{T}$ ein anderes mögliches Approximationspolynom, so können wir das Lemma auf $R = T - \hat{T}$ anwenden. Um die Existenz der Taylorentwicklung nachzuweisen, nehmen wir ein $h \in \mathbb{R}^m$, das so klein ist, daß sogar das ganze Geradensegment $[p, p+h] = \{p + th \mid t \in [0,1]\}$ in A enthalten ist, und betrachten die Taylorentwicklung der Funktion $g = g_h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(p+th)$. Wir behaupten zunächst, daß die höheren Ableitungen von g gegeben werden durch

$$g^{(\nu)}(t) = \sum_{|\alpha|=\nu} \frac{\nu!}{\alpha!} \, (\partial^\alpha f)(p+th) \, h^\alpha$$

In der Tat gilt nach der Kettenregel in mehreren Veränderlichen 12.1.4.8 schon mal

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p+th) \cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(p+th) \cdot h_m$$

und wir folgern induktiv

$$g^{(\nu)}(t) = \sum_{i_1,\ldots,i_\nu} \frac{\partial^\nu f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_\nu}}(p+th) \cdot h_{i_1} \ldots h_{i_\nu}$$

wobei die Summe über alle möglichen ν-Tupel aus $\{1, \ldots, m\}$ laufen soll. Nach dem anschließenden Lemma 12.2.2.8 gibt es aber genau $\nu!/\alpha!$ Möglichkeiten, ein ν-Tupel $(i_1, \ldots, i_\nu) \in \{1, \ldots, m\}^\nu$ so zu wählen, daß unter den $i_1, \ldots, i_\nu$ jedes j genau α_j-mal vorkommt. Fassen wir also gleiche Summanden zusammen, so ergibt sich die behauptete Formel für die ν-te Ableitung $g^{(\nu)}$ von g. Jetzt schreiben wir zur Funktion $g(t)$ die Taylorreihe mit der Lagrange'schen Form des Restglieds

10.6.2.5 um den Entwicklungspunkt $t = 0$ hin und erhalten an der Stelle $t = 1$ mit einer kleinen Umformulierung die Gleichung

$$f(p+h) = \sum_{|\alpha|\le d} \frac{(\partial^\alpha f)(p)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=d} \frac{(\partial^\alpha f)(p+\xi_h h) - (\partial^\alpha f)(p)}{\alpha!} h^\alpha$$

für geeignetes $\xi_h \in (0,1)$. Es reicht also, wenn wir für $|\alpha| = d$ zeigen, daß gilt $\lim_{h\to 0}(\partial^\alpha f)(p+\xi_h h) - (\partial^\alpha f)(p) = 0$, und das folgt sofort aus der Stetigkeit der partiellen Ableitungen. □

Lemma 12.2.2.8. *Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}$ gegeben und sei $\nu = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$ ihre Summe. So gibt es genau $\nu!/\alpha_1! \ldots \alpha_m!$ Abbildungen von einer Menge X mit ν Elementen nach $\{1, \ldots, m\}$ derart, daß der Wert j jeweils genau α_j-mal angenommen wird.*

Beispiel 12.2.2.9. Wollen wir 10 nummerierte Bälle so anmalen, daß 5 Bälle blau, 3 Bälle rot und 2 Bälle gelb werden, so gibt es dafür also $10!/(5!3!2!) = 2520$ Möglichkeiten.

Beweis. Es gibt genau $\nu!$ Möglichkeiten, unsere Menge X anzuordnen. Jede dieser Möglichkeiten liefert eine Abbildung i wie folgt: Wir bilden die ersten α_1 Zahlen auf 1 ab, die nächsten α_2 Zahlen auf 2, und so weiter, bis wir zum Schluß die letzten α_m Zahlen auf m abbilden. So erhalten wir nur Abbildungen der gewünschten Form, genauer erhalten wir so jede der gewünschten Abbildungen genau $(\alpha_1! \cdots \alpha_m!)$-mal. Das Lemma ist bewiesen. □

12.2.3 Rechnen mit Approximationen

Definition 12.2.3.1. Eine Abbildung $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt **polynomial** oder auch **regulär**, wenn sie die Gestalt $P = (P_1, \ldots, P_n)$ hat für Polynome $P_1, \ldots, P_n$ in m Veränderlichen. Haben alle unsere P_j Grad $\le d$, so sagen wir, die polynomiale Abbildung P habe **Grad** $\le d$.

Definition 12.2.3.2. Seien $f, g : \mathbb{R}^m \supset D \to \mathbb{R}^n$ Abbildungen, $p \in D$ ein Punkt und $d \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wir sagen, f und g **stimmen bei** p **überein bis zur Ordnung** d und schreiben

$$f \sim_p^d g$$

als Abkürzung dafür, daß gilt $f(p+h) - g(p+h) = |h|^d \varepsilon(h)$ für eine Funktion ε, die stetig ist bei $h = 0$ mit Funktionswert $\varepsilon(0) = 0$.

12.2.3.3. Ist $p \in D$ ein Häufungspunkt von D, so ist das gleichbedeutend zur Forderung, daß gilt $f(p) = g(p)$ und

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x) - g(x)}{|x-p|^d} = 0$$

12.2.3.4. Natürlich stimmen zwei $\mathbb{R}^n$-wertige Funktionen bis zu einer gewissen Ordnung überein genau dann, wenn alle ihre Komponenten bis zu der entsprechenden Ordnung übereinstimmen. Schreiben wir also $f = (f_1, \ldots, f_n)$ und $g = (g_1, \ldots, g_n)$, so gilt

$$f \sim_p^d g \quad \Leftrightarrow \quad \left(f_i \sim_p^d g_i \ \ \forall i\right)$$

Offensichtlich folgt auch aus $f \sim_p^d g$ und $g \sim_p^d h$ schon $f \sim_p^d h$. Sind weiter $P, Q : \mathbb{R}^m \supseteq D \to \mathbb{R}^n$ polynomiale Abbildungen vom Grad $\leq d$, so folgt nach 12.2.2.7 aus $P \sim_p^d Q$ schon $P = Q$.

12.2.3.5 (**Approximation und Taylorentwicklung**). Der Satz über die Taylorentwicklung 12.2.2.5 liefert uns für d-mal stetig partiell differenzierbares f die eindeutig bestimmte polynomiale Abbildung P vom Grad $\leq d$ mit $P \sim_p^d f$. Genauer besagt unser Satz, daß diese polynomiale Abbildung $P = (P_1, \ldots, P_n)$ dadurch charakterisiert wird, daß die partiellen Ableitungen der Polynome P_i bis zur Ordnung d bei p denselben Wert annehmen wie die entsprechenden partiellen Ableitungen der Funktionen f_i. Im Fall $n = 1$ würde in den dortigen Notationen unser Polynom $P = P_1$ gegeben durch $P(p + h) = T(h)$ alias $P(x) = T(x - p)$.

Satz 12.2.3.6 (Rechnen mit Approximationen). *Seien $f : \mathbb{R}^m \supset D \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \supset E \to \mathbb{R}^l$ Abbildungen mit $f(D) \subset E$. Gegeben $p \in D$ und polynomiale Abbildungen P, Q mit $f \sim_p^d P$ und $g \sim_{f(p)}^d Q$ folgt*

$$g \circ f \ \sim_p^d \ Q \circ P$$

12.2.3.7. Im Fall $d = 0$ bedeutet die Aussage schlicht die Stetigkeit der Verknüpfung bei p von punktweise stetigen Abbildungen. Es reicht also, den Satz für $d \geq 1$ zu beweisen. Im Fall $d = 1$ ist die Aussage des Satzes im übrigen äquivalent zur Kettenregel in mehreren Veränderlichen. Dem eigentlichen Beweis schicken wir ein Lemma voraus.

Lemma 12.2.3.8. *Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^m \supset D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Gegeben $p \in D$ und Polynome P_1, P_2 mit $f_i \sim_p^d P_i$ folgt*

$$f_1 + f_2 \sim_p^d P_1 + P_2 \quad \textit{und} \quad f_1 f_2 \sim_p^d P_1 P_2$$

12.2.3.9. Dies Lemma besteht in der Tat aus zwei Spezialfällen des Satzes, man kann nämlich die Addition $(+) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ betrachten und rechnen $f_1 + f_2 = (+) \circ (f_1, f_2) \sim_p^d (+) \circ (P_1, P_2) = P_1 + P_2$ und ähnlich für die Multiplikation. Wir brauchen jedoch einen unabhängigen Beweis, damit wir das Lemma beim Beweis des Satzes verwenden dürfen.

Beweis des Lemmas. Dem Leser überlassen. Statt P_i polynomial reicht es auch, P_i stetig bei p anzunehmen. $\square$

Beweis des Satzes. Wir zeigen nun zunächst $g \circ f \sim_p^d Q \circ f$ und dann $Q \circ f \sim_p^d Q \circ P$. Für die erste Ausage schreiben wir $g(y) = Q(y) + |y - f(p)|^d \varepsilon(y - f(p))$ und erhalten durch Einsetzen von $y = f(x)$ und Erweitern des rechtesten Terms

$$(g \circ f)(x) = (Q \circ f)(x) + |x - p|^d \left[\left(\frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} \right)^d \varepsilon(f(x) - f(p)) \right]$$

für alle $x \neq p$. Wir hatten uns ja bereits in 12.2.3.7 auf den Fall $d \geq 1$ zurückgezogen. In diesem Fall stimmt f bei p bis mindestens zur Ordnung 1 überein mit der polynomialen Abbildung P, folglich ist f differenzierbar bei p, die vordere Klammer in den eckigen Klammern bleibt mithin beschränkt für $x \to p$ und der Ausdruck in eckigen Klammern strebt für $x \to p$ gegen Null. Wir müssen also nur noch für jede polynomiale Abbildung Q zeigen

$$Q \circ f \sim_p^d Q \circ P$$

Es reicht sicher, das im Fall $l = 1$ zu zeigen, also für Q ein Polynom. In diesem Fall folgt es aber sofort aus dem vorhergehenden Lemma 12.2.3.8. □

Beispiel 12.2.3.10. Wollen wir für die Funktion $f(x, y) = \sin(x\,\mathrm{e}^y)$ die partielle Ableitung $\frac{\partial^3 f}{\partial x (\partial y)^2}$ im Nullpunkt bestimmen, so benutzen wir unseren Satz 12.2.3.6 und rechnen

$$\begin{aligned} \sin t &= t - \tfrac{t^3}{3!} + \dots \\ x\,\mathrm{e}^y &= x + xy + \tfrac{xy^2}{2} + \dots \\ \sin(x\,\mathrm{e}^y) &= x + xy + \tfrac{xy^2}{2} - \tfrac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

und die gesuchte partielle Ableitung bei $x = y = 0$ ergibt sich mit der Taylorreihe zu 1.

Übungen

Übung 12.2.3.11. Eine Potenzreihe in mehreren Veränderlichen, die an allen Stellen einer offenen Menge punktweise absolut konvergiert, stellt auf dieser offenen Menge eine beliebig oft partiell differenzierbare Funktion dar.

Übung 12.2.3.12. Man zeige die Identität $\log((1 - u)(1 - v)) = \log(1 - u) + \log(1 - v)$ im Ring der formalen Potenzreihen in zwei kommutierenden Variablen u, v mit rationalen Koeffizienten.

12.2.4 Maxima und Minima in mehreren Veränderlichen

Definition 12.2.4.1. Seien A ein topologischer Raum, $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $p \in A$ ein Punkt.

1. Wir sagen, f hat bei p ein **lokales Minimum**, wenn es eine Umgebung U von p gibt mit $f(x) \geq f(p)\ \forall x \in U$;

2. Wir sagen, f hat bei p ein **isoliertes lokales Minimum**, wenn es stärker eine Umgebung U von p gibt mit $f(x) > f(p)\ \forall x \in U \backslash p$;

Analog erklären wir **lokale Maxima** und **isolierte lokale Maxima**.

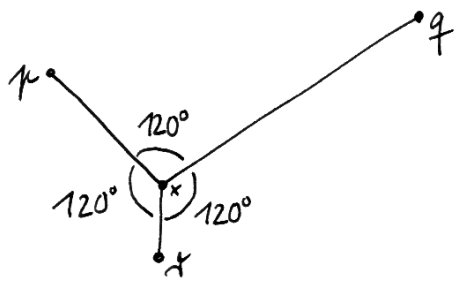
Proposition 12.2.4.2. *Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq A \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $p \in A$ ein Punkt. Besitzt f bei p ein lokales Minimum oder Maximum, so gilt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ für alle i.*

12.2.4.3. Die Bedingung, A sei offen, ist in diesem Zusammenhang wesentlich, wie wir bereits im Fall einer Veränderlichen in 10.5.5.4 diskutiert hatten.

Beweis. Für beliebiges i und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ betrachten wir das parametrisierte Geradensegment $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to A$, $t \mapsto p + t\,\mathrm{e}_i$. Natürlich muß auch $f \circ g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ ein lokales Minimum oder Maximum bei $t = 0$ haben, also gilt $(f \circ g)'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$. □

Definition 12.2.4.4. Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq A \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Verschwinden alle ersten partiellen Ableitungen unserer Funktion an einer Stelle $p \in A$, so sagt man, die Funktion habe bei p eine **kritische Stelle**.

Ergänzung 12.2.4.5. Ist allgemeiner A eine halboffene Teilmenge eines normierten reellen Vektorraums und $f : A \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion und verschwindet ihr Differential an einem Punkt $p \in A$, in Formeln $\mathrm{d}_p f = 0$, so sagt man auch, die Funktion habe bei p eine **kritische Stelle**.



Die Summe der Abstände zu drei vorgegebenen Punkten, die nicht auf einer Gerade liegen und ein Dreieck bilden, in dem kein Winkel grösergleich 120° ist, wird minimal an der Stelle, an der die Halbgeraden zu den Ecken jeweils den Winkel 120° einschließen. Ist dahingegen ein Winkel grösergleich 120°, so liegt das Minimum bei der fraglichen Ecke selbst.

Beispiel 12.2.4.6. Gegeben drei Punkte $p, q, r \in \mathbb{R}^2$ suchen wir die Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, für die die Summe der Abstände

$$S(x) = \|x - p\| + \|x - q\| + \|x - r\|$$

kleinstmöglich wird. Sicher gilt $\lim_{\|x\|\to\infty} S(x) = \infty$, folglich existiert ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^2} S(x) = \inf_{x\in K} S(x)$$

und damit nimmt unsere Funktion nach 10.5.1.5 ihr Infimum auch wirklich als Funktionswert an. Unsere Funktion ist auf $\mathbb{R}^2\backslash\{p,q,r\}$ stetig differenzierbar und ihr Gradient bei x ergibt sich nach kurzer Rechnung zu

$$(\operatorname{grad} S)(x) = \frac{x-p}{\|x-p\|} + \frac{x-q}{\|x-q\|} + \frac{x-r}{\|x-r\|}$$

Für das Minimum kommen nach unseren Erkenntnissen nur unsere drei Punkte p, q, r sowie die Nullstellen des Gradienten in Frage. Die weiteren Überlegungen führen wir nicht mehr in formaler Strenge durch, da das von unseren formalen Kenntnissen ausgehend einen unangemessenen Aufwand bedeuten würde. Anschaulich scheint es mir klar, daß unser Gradient nur dann verschwinden kann, wenn nicht alle drei Punkte p, q, r auf einer Geraden liegen und x im Inneren der zugehörigen Dreiecksfläche alias ihrer konvexen Hülle liegt und wenn die drei Vektoren $x-p$, $x-q$ und $x-r$ jeweils einen Winkel von $120°$ alias $2\pi/3$ einschließen. Das ist für einen Punkt im Innern der Dreiecksfläche jedoch nur dann möglich, wenn jeder der Winkel unseres Ausgangsdreiecks kleiner ist als $120°$. Nur unter den Voraussetzungen, daß unsere drei Punkte p, q, r nicht auf einer Geraden liegen und jeder der Winkel des Dreiecks mit den Ecken p, q, r kleiner ist als $120°$, kann also das Minimum außerhalb der drei Punkte $\{p, q, r\}$ angenommen werden. Sind sie erfüllt, so kann das Minimum hinwiederum nicht an einem dieser Punkte angenommen werden, da der Wert von $S(x)$ dann abnimmt, wenn wir auf einer Winkelhalbierenden ins Dreieck hineinlaufen, wie man etwa an unserer Beschreibung des Gradienten sehen kann. Folglich muß dann das Minimum bei der kritischen Stelle angenommen werden, die eben dadurch charakterisiert ist, daß die Vektoren $x-p$, $x-q$ und $x-r$ jeweils einen Winkel von $120° = 2\pi/3$ einschließen.

12.2.4.7. Um eine hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum oder Maximum zu erhalten, müssen wir wie im Fall einer Veränderlichen die zweiten Ableitungen untersuchen. Am Beispiel der Funktionen $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ beziehungsweise x^2 beziehungsweise $x^2 - y^2$ kann man sehen, was lokal um $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ so alles passieren kann. Wir betrachten nun allgemeiner eine beliebige **quadratische Form** $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{ij}x_ix_j$ mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$ wie in 4.2.2.1.

Definition 12.2.4.8. Eine quadratische Form $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt

positiv definit,	wenn gilt	$Q(x) > 0 \quad \forall x \neq 0;$
positiv semidefinit,	wenn gilt	$Q(x) \geq 0 \quad \forall x;$
negativ definit,	wenn gilt	$Q(x) < 0 \quad \forall x \neq 0;$
negativ semidefinit,	wenn gilt	$Q(x) \leq 0 \quad \forall x;$
indefinit,	wenn gilt	es gibt $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $Q(x) > 0,\ Q(y) < 0.$

12.2.4.9. Wir werden nachher erklären, wie man für eine gegebene quadratische Form entscheiden kann, welche Definitheitseigenschaften sie hat. Zunächst diskutieren wir jedoch, inwieweit diese Eigenschaften für den quadratischen Approximationsterm das lokale Verhalten einer Funktion an einer kritischen Stelle bestimmen.

Satz 12.2.4.10 (Maxima und Minima in mehreren Veränderlichen). *Sei $A \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : A \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $p \in A$ eine kritische Stelle. Wir bilden zu unserer Funktion eine quadratische Form $\mathrm{d}_p^{(2)} f$ als das Doppelte der quadratischen Terme der Taylorreihe, in Formeln*

$$(\mathrm{d}_p^{(2)} f)(h) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\ h_i h_j$$

1. *Ist unsere quadratische Form $\mathrm{d}_p^{(2)} f$ positiv definit, so hat f bei p ein isoliertes lokales Minimum;*
2. *Ist unsere quadratische Form $\mathrm{d}_p^{(2)} f$ negativ definit, so hat f bei p ein isoliertes lokales Maximum;*
3. *Ist unsere quadratische Form $\mathrm{d}_p^{(2)} f$ indefinit, so hat f bei p weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.*

12.2.4.11. Die Notation $\mathrm{d}_p^{(2)} f$ wird in **??** auf Ableitungen beliebigen Grades verallgemeinert. Man beachte, daß der Satz keine Aussage für die semidefiniten Fälle macht, in Verallgemeinerung der Tatsache, daß man auch für Funktionen einer Veränderlichen bei Verschwinden der ersten und zweiten Ableitung an einer vorgegebenen Stelle ohne weitere Informationen noch nichts über Maxima oder Minima aussagen kann.

Beweis. Wir verwenden für das folgende die Abkürzung $Q := \frac{1}{2}(\mathrm{d}_p^{(2)} f)$. Aus unseren Annahmen folgt mit der Taylor-Formel

$$f(p+h) = f(p) + Q(h) + \varepsilon(h)|h|^2$$

für eine Funktion ε mit $\varepsilon(0) = \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Wir behandeln nun als erstes den Fall Q positiv definit. Sei a das Minimum nach 10.5.1.5 von Q auf der Oberfläche des Einheitswürfels, $a = \inf\{Q(h) \mid |h| = 1\}$. Aus unserer Annahme folgt $a > 0$. Offensichtlich gilt $Q(h) \geq a|h|^2$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$. Wegen $\varepsilon(0) = \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ finden wir $\delta > 0$ derart, daß aus $|h| < \delta$ folgt $|\varepsilon(h)| \leq a/2$. Damit ergibt sich für $|h| < \delta$ aber

$$f(p + h) \geq f(p) + (a/2)|h|^2$$

und f hat in der Tat ein isoliertes lokales Minimum. Ist Q negativ definit, so argumentieren wir entsprechend. Ist Q indefinit, so finden wir zwei Geraden durch Null derart, daß die Einschränkung von Q auf diese Geraden außerhalb des Nullpunkts positiv beziehungsweise negativ ist. Dann muß aber die Restriktion von f auf die erste Gerade ein isoliertes lokales Minimum haben bei p, und auf der zweiten Geraden ein isoliertes lokales Maximum. Folglich hat f bei p weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum. □

12.2.4.12. Jeder reellen quadratischen Form $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ ordnen wir die symmetrische Matrix S mit Einträgen $(a_{ij} + a_{ji})/2$ zu, so daß gilt $Q(x) = x^\top Sx$. Nach den Definitionen hat die quadratische Form Q eine gewisse Definitheit im Sinne von 12.2.4.8 genau dann, wenn ihre Matrix S die entsprechende Definitheit hat im Sinne der linearen Algebra.

Definition 12.2.4.13. Die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen, die zur quadratischen Form $\mathrm{d}_p^{(2)}f$ aus unserem Satz gehört, heißt die **Hesse-Matrix** von f bei p, in Formeln

$$\mathrm{Hesse}(f) := [\mathrm{d}_p^{(2)}f] := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

Korollar 12.2.4.14 (Maxima, Minima und Hessematrix). *Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq A \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $p \in A$ ein kritischer Punkt.*

1. *Ist die Hessematrix von f bei p positiv definit, so hat f bei p ein isoliertes lokales Minimum;*

2. *Ist die Hessematrix von f bei p negativ definit, ein isoliertes lokales Maximum;*

3. *Ist die Hessematrix von f bei p indefinit, so hat f bei p weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.*

Beweis. Das ist nur eine offensichtliche Umformulierung von Satz 12.2.4.10. □

12.2.4.15. Um die Definitheitseigenschaften einer symmetrischen quadratischen Matrix zu bestimmen, bringt man sie am einfachsten durch Basiswechsel in Diagonalgestalt, wie im Beweis von 4.2.3.11 erklärt. Bei kleineren Matrizen kann auch das Hauptminoren-Kriterium 4.2.3.25 ein guter Trick sein: Danach ist eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix positiv definit genau dann, wenn für alle $k < n$ die quadratische Untermatrix, die man erhält durch Wegstreichen der letzten k Spalten und der untersten k Zeilen, eine positive Determinante hat.

Übungen

Übung 12.2.4.16. Sei V ein normierter Raum, $f : V \supseteq A \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $p \in A$ ein Punkt. Besitzt f bei p ein lokales Minimum oder Maximum, so folgt $\mathrm{d}_p f = 0$.

Übung 12.2.4.17. Man zeige in der Situation von Satz 12.2.4.10: Ist $\mathrm{d}_p^{(2)} f$ positiv semidefinit und verschieden von Null, so kann f bei p kein lokales Maximum haben.

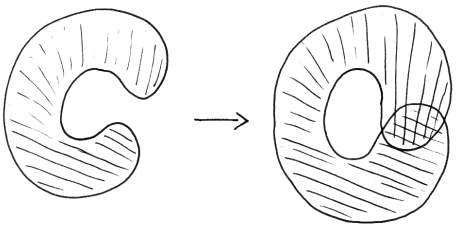
12.3 Umkehrsatz und Anwendungen

12.3.1 Umkehrsatz

Definition 12.3.1.1. Eine im Sinne von 12.1.6.10 stetig differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen normierter Räume heißt auch eine $\mathcal{C}^1$**-Abbildung**. Der Buchstabe $\mathcal{C}$ steht hier für englisch „continous“ oder französisch „continu“, zu deutsch stetig, und der obere Index 1 deutet an, daß nur die Existenz und Stetigkeit der *ersten* Ableitung gefordert wird. Eine bijektive $\mathcal{C}^1$-Abbildung, deren Umkehrung auch eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung ist, heißt ein $\mathcal{C}^1$**-Diffeomorphismus**.

Satz 12.3.1.2 (**Umkehrsatz**). *Seien X, Y endlichdimensionale reelle Räume und sei $f : X \supseteq U \to Y$ stetig differenzierbar. Ist an einer Stelle $p \in U$ das Differential ein Isomorphismus $\mathrm{d}_p f : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$, so induziert f einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus zwischen einer offenen Umgebung von p in U und einer offenen Umgebung von $f(p)$ in Y.*

12.3.1.3. In Formeln gibt es für unser p also V mit $U \supseteq V \ni p$ und $Y \supseteq f(V)$ und $f : V \xrightarrow{\sim} f(V)$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.



Eine stetig differenzierbare Abbildung von einer offenen „wegzusammenhängenden“ Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^2$ mit überall injektivem Differential ist im allgemeinen nur „lokal injektiv“.

12.3.1.4. Wir zeigen diesen Satz nach einigen Vorbereitungen zu Ende dieses Abschnitts. Als erste Prüfung für unseren Umkehrsatz überlege man sich die Gültigkeit der Behauptung im Spezialfall $X = Y = \mathbb{R}$. Die Kettenregel liefert im Übrigen für das Differential des Inversen eines $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus sofort die Formel

$$\mathrm{d}_{f(p)}(f^{-1}) = (\mathrm{d}_p f)^{-1}$$

12.3.1.5. Unser Umkehrsatz gilt auch für unendlichdimensionale normierte Räume X, Y, wenn wir zusätzlich annehmen, daß sie vollständig sind. Der Beweis bleibt derselbe, wenn wir zusätzlich voraussetzen, daß das Inverse des Vektorraumisomorphismus $\mathrm{d}_p f$ stetig ist. Der Satz vom offenen Bild 13.4.2.19 wird später einmal zeigen, daß jeder stetige Vektorraumisomorphismus von vollständigen normierten Vektorräumen eine stetige Umkehrabbildung hat, aber das soll vorerst weder bewiesen noch verwendet werden. Die Allgemeinheit unendlichdimensionaler Räume ist durchaus von Interesse, eröffnet sie doch einen direkten Zugang

zum Studium von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Das wird in 12.5.6.2 ausgeführt.

12.3.1.6 (**Polarkoordinaten**). Wir betrachten die durch $P(r,\vartheta) := (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ gegebene Polarkoordinatenabbildung $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Sie ist eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung und ihr Differential ist ein Isomorphismus an jeder Stelle (r,ϑ) mit $r \neq 0$. Gegeben $p := (r,\vartheta)$ mit $r > 0$ ist etwa $V := (0,\infty) \times (\vartheta - \pi, \vartheta + \pi)$ eine offene Umgebung mit $P(V) \Subset \mathbb{R}^2$ mit $P : V \xrightarrow{\sim} P(V)$ ein Diffeomorphismus. Haben wir noch spezieller $p := (0,1)$ und nehmen wir $V := (0,\infty) \times (0,\pi)$, so ist $P(V) = \{(x,y) \mid y > 0\}$ eine offene Halbebene und wir können die Umkehrabbildung zu

$$P : (0,\infty) \times (0,\pi) \xrightarrow{\sim} P(V)$$

explizit angeben durch die Vorschrift $(x,y) \mapsto (r(x,y), \vartheta(x,y))$ mit $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ und $\vartheta(x,y) = \operatorname{arccot}(x/y)$. Die Funktionen r und θ heißen **Radius** und **Winkel** und geben den Abstand von (x,y) zum Ursprung an sowie den orientierten Winkel von der x-Achse zur Ursprungsgerade durch (x,y). Die Komponenten dieser Umkehrabbildung alias die Funktionen Radius und Winkel nennen wir **Polarkoordinaten**.

Definition 12.3.1.7. Ein Punkt, der unter einer Abbildung auf sich selbst abgebildet wird, heißt ein **Fixpunkt** besagter Abbildung.

Definition 12.3.1.8. Eine Abbildung f von metrischen Räumen heißt **Lipschitzstetig**, wenn es eine Konstante $\lambda > 0$ gibt mit

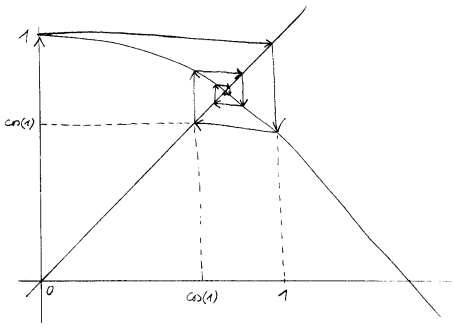
$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y)$$

für alle x, y im Ausgangsraum. Wir sagen dann auch, f sei **lipschitzstetig zur Lipschitz-Konstante** λ. Eine Abbildung f zwischen metrischen Räumen heißt **kontrahierend**, wenn sie lipschitzstetig ist zu einer Lipschitzkonstante $\lambda < 1$, wenn es also $\lambda < 1$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y) \quad \forall x, y$$

Beispiel 12.3.1.9. Natürlich ist jede lipschitzstetige Abbildung stetig. Eine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist lipschitzstetig zu einer Lipschitzkonstante λ genau dann, wenn alle ihre Sekantensteigungen betragsmäßig beschränkt sind durch λ. Es ist hoffentlich anschaulich klar, daß im Fall $\lambda < 1$ der Graph einer derart „flachen“ Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ oder auch von einem nichtleeren reellen Kompaktum K in sich selber $f : K \to K$ an genau einer Stelle die Hauptdiagonale alias den Graphen der Identität kreuzen muß. Der Cosinus ist als Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht kontrahierend, das Supremum seiner Sekantensteigungen ist ja Eins. Allerdings

ist $x \mapsto \lambda \cos(x)$ für $|\lambda| < 1$ kontrahierend und auch die Einschränkung des Cosinus zu einer Abbildung $[0,1] \to [0,1]$ ist kontrahierend. Den im Banach'schen Fixpunktsatz versteckten Algorithmus zur Bestimmung des Fixpunktes illustriert nebenstehende Abbildung.



Stellt man den Taschenrechner auf Bogenmaß und drückt wiederholt die Taste „cos", so wird die Anzeige schnell stabil. Der Cosinus liefert nämlich eine kontrahierende Selbstabbildung des Intervalls $[0,1]$ und was wir sehen ist ein Illustration für den Beweis des Fixpunktsatzes 12.3.1.10.

Lemma 12.3.1.10 (Banach'scher Fixpunktsatz). *Jede kontrahierende Selbstabbildung eines vollständigen nichtleeren metrischen Raums besitzt genau einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $f : M \to M$ unsere kontrahierende Selbstabbildung und $\lambda < 1$ eine Lipschitzkonstante. Wir wählen $x_0 \in M$ und betrachten die rekusiv definierte Folge $x_{n+1} = f(x_n)$. Mit Induktion folgt $d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1)$, und mit der Dreiecksungleichung folgt für $n \leq m$ bereits

$$d(x_n, x_{m+1}) \leq (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \ldots + \lambda^m) d(x_0, x_1) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1)$$

Also ist unsere Folge x_n eine Cauchy-Folge und konvergiert aufgrund der Vollständigkeit **??** gegen einen Punkt $\lim_{n\to\infty} x_n = p \in M$. Da nun eine kontrahierende Abbildung notwendig stetig ist, folgt aus der Vertauschbarkeit **??** von Grenzwerten mit dem Anwenden stetiger Abbildungen

$$f(p) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p$$

und wir haben schon mal einen Fixpunkt gefunden. Ist q ein zweiter Fixpunkt, so folgt $d(p,q) = d(f(p), f(q)) \leq \lambda d(p,q)$ für $\lambda < 1$ und damit $d(p,q) = 0$, also $p = q$. □

Ergänzung 12.3.1.11. Lassen wir in der Ungleichungskette aus obigem Beweis m nach Unendlich streben, so erhalten wir für den Abstand der n-ten Approximation x_n zum Fixpunkt p zusätzlich die Abschätzung

$$d(x_n, p) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1)$$

Satz 12.3.1.12 (Umkehrsatz für stetige Abbildungen). *Seien X ein vollständiger normierter Raum und $f : X \supseteq V \to X$ eine Abbildung, deren Differenz zur Identität*

$$(f - \mathrm{id}) : V \to \vec{X}$$

kontrahierend ist, als da heißt lipschitzstetig zu einer Lipschitzkonstante $\lambda < 1$. So ist unsere Abbildung injektiv mit offenem Bild $f(V) \subseteq X$ und ihre Umkehrabbildung $f^{-1} : f(V) \to V$ ist lipschitzstetig zur Lipschitzkonstante $1/(1-\lambda)$.

Beispiel 12.3.1.13. In Fall einer differenzierbaren Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $V \subseteq \mathbb{R}$ ist unsere Annahme gleichbedeutend zur Bedingung $1-\lambda \le f'(x) \le 1+\lambda \; \forall x \in V$ und die Folgerung ist klar aus Analysis 1. Anhand dieses Falls kann ich selber den Beweis am besten nachvollziehen. Ganz konkret mag man $f(x) := \sin(x)$ auf dem Intervall $V := (0,1)$ nehmen.

Ergänzung 12.3.1.14. Unter einer **Norm** auf einer abelschen Gruppe X verstehen wir eine Abbildung von unserer Gruppe in die nichtnegativen reellen Zahlen mit $\|v+w\| \le \|v\|+\|w\|$ und $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$ und $\|-v\| = \|v\|$ für alle $v, w \in X$. Der Umkehrsatz für stetige Abbildungen 12.3.1.12 gilt mit demselben Beweis für jede vollständige normierte abelsche Gruppe.

Vorschau 12.3.1.15. Man kann sogar zeigen, daß jede stetige injektive Abbildung von einer offenen Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$ offene Teilmengen auf offene Teilmengen abbildet und folglich eine stetige Umkehrabbildung hat. Dieser „Satz über die Invarianz von Gebieten“ gilt jedoch nur im endlichdimensionalen Kontext und sein Beweis benötigt stärkere Hilfsmittel, vergleiche etwa 17.3.3.14.

Ergänzung 12.3.1.16. Der Leser mag zur Übung aus den Argumenten des anschließenden Beweises folgern, daß unter den Annahmen des Umkehrsatzes für stetige Abbildungen 12.3.1.12 genauer gilt

$$\mathrm{B}(p; R) \subset V \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B}(f(p); (1-\lambda)R) \subset f(V)$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, X sei ein vollständiger normierter Vektorraum. Die Injektivität von f ergibt sich, da aus unserer Annahme $\|(f-\mathrm{id})(x) - (f-\mathrm{id})(y)\| \le \lambda\|x-y\|$ sofort folgt $\|y-x\| - \|f(x)-f(y)\| \le \lambda\|x-y\|$ alias

$$(1-\lambda)\|x-y\| \le \|f(x)-f(y)\|$$

Durch Einsetzen von $x = f^{-1}(p)$ und $y = f^{-1}(q)$ folgt weiter ohne Schwierigkeiten $(1-\lambda)\|f^{-1}(p)-f^{-1}(q)\| \le \|p-q\|$ und damit sogar die Lipschitzstetigkeit der Umkehrfunktion $f^{-1} : f(V) \to V$. Bis hierher brauchten wir weder V offen noch X vollständig anzunehmen und unsere Aussagen sind wenig mehr als ein Spezialfall der allgemeinen Resultate für „nicht abstandsverkleinernde“ Abbildungen

metrischer Räume aus Übung **??**. Der wesentliche Punkt besteht darin, zu zeigen, daß f offenes Bild hat. Dazu betrachten wir für alle $y \in X$ die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} k_y : & V & \to & X \\ & x & \mapsto & x - f(x) + y \end{array}$$

Offensichtlich sind die Fixpunkte von k_y die Urbilder von y unter f. Offensichtlich ist k_y kontrahierend, genauer gilt

$$\|k_y(x) - k_y(z)\| \leq \lambda \|x - z\| \quad \forall x, z \in V$$

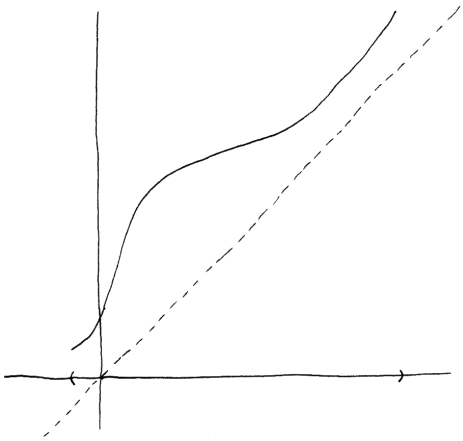
Gegeben $p \in V$ finden wir nun einen Radius $R > 0$ derart, daß der „abgeschlossene Ball“

$$\mathrm{A}(p; R) := \{x \in X \mid \|p - x\| \leq R\}$$

ganz in V enthalten ist. Für $y \in \mathrm{B}(f(p); (1-\lambda)R)$ bildet dann k_y unseren abgeschlossenen Ball $\mathrm{A}(p; R)$ in sich ab, denn für diese y gilt $\|p - k_y(p)\| = \|f(p) - y\| < (1-\lambda)R$ und damit erhalten wir für $x \in \mathrm{A}(p; R)$ sogar

$$\|p - k_y(x)\| \leq \|p - k_y(p)\| + \|k_y(p) - k_y(x)\| < (1-\lambda)R + \lambda R = R$$

Wenden wir den Banach'schen Fixpunktsatz 12.3.1.10 auf die Selbstabbildung k_y von $\mathrm{A}(p; R)$ an, das nach **??** als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums vollständig ist, so finden wir, daß k_y einen Fixpunkt in $\mathrm{A}(p; R)$ haben muß. Es folgt $f(\mathrm{A}(p; R)) \supset \mathrm{B}(f(p); (1-\lambda)R)$ und das zeigt, daß das Bild von f offen sein muß, in Formeln $f(V) \Subset X$. □



Für eine Abbildung f von einer offenen Teilmenge $V \Subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist $(f - \mathrm{id})$ kontrahierend mit Kontraktionsfaktor λ genau dann, wenn alle Sekantensteigungen von f im Intervall $[1-\lambda, 1+\lambda]$ liegen. In diesem Fall sollte es anschaulich klar sein, daß f injektiv und offen ist und daß die Sekantensteigungen der Umkehrfunktion betragsmäßig beschränkt sind durch $(1-\lambda)^{-1}$. In diesem Fall liegen alle Sekantensteigungen der Umkehrfunktion sogar im Intervall $[(1+\lambda)^{-1}, (1-\lambda)^{-1}]$.

12.3.1.17 (**Anschauung im Fall einer Veränderlichen**). Im Fall einer Veränderlichen kann man sich den Beweis auch anschaulich gut klarmachen. Die Annahmen bedeuten dann, daß die Sekantensteigungen von f alle im Intervall $[1-\lambda, 1+\lambda]$ liegen. Die Abbildung $(x,y) \mapsto (k_y(x), y)$ bedeutet anschaulich, daß wir von (x,y) senkrecht auf den Graph der Funktion f gehen und von dort parallel zur Hauptdiagonale wieder auf die Horizontale in der vorgegebenen Höhe y.

Beweis des Umkehrsatzes für $\mathcal{C}^1$-Abbildungen 12.3.1.2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien X, Y Vektorräume. Sicher reicht es, wenn wir den Satz für $(\mathrm{d}_p f)^{-1} \circ f$ statt für f zeigen. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $X = Y$ und $\mathrm{d}_p f = \mathrm{id}$ annehmen. Es folgt $\mathrm{d}_p(f - \mathrm{id}) = 0$. Wählen wir eine Norm auf X und beachten, daß f stetig differenzierbar angenommen war, so folgt leicht die Existenz eines offenen Balls B um p mit $\|\mathrm{d}_x(f-\mathrm{id})\| \leq 1/2\ \forall x \in B$. Nach der Variante zum Schrankensatz aus Übung 12.1.4.11 ist dann jedoch $(f - \mathrm{id}) : B \to X$ kontrahierend mit Lipschitzkonstante $\leq 1/2$. Mit unserem Umkehrsatz für stetige Abbildungen 12.3.1.12 angewandt auf $V := B$ folgt, daß f eine Injektion mit offenem Bild $f : B \hookrightarrow X$ liefert, deren Umkehrung lipschitzstetig ist zur Lipschitzkonstante Zwei. Um die Differenzierbarkeit von $f^{-1} : f(B) \to B$ an der Stelle $f(p)$ zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich annehmen, daß gilt $p = 0$ und $f(p) = 0$. Da wir f differenzierbar bei p mit Differential id angenommen hatten, können wir dann schreiben

$$f(x) = x + \|x\|\varepsilon(x)$$

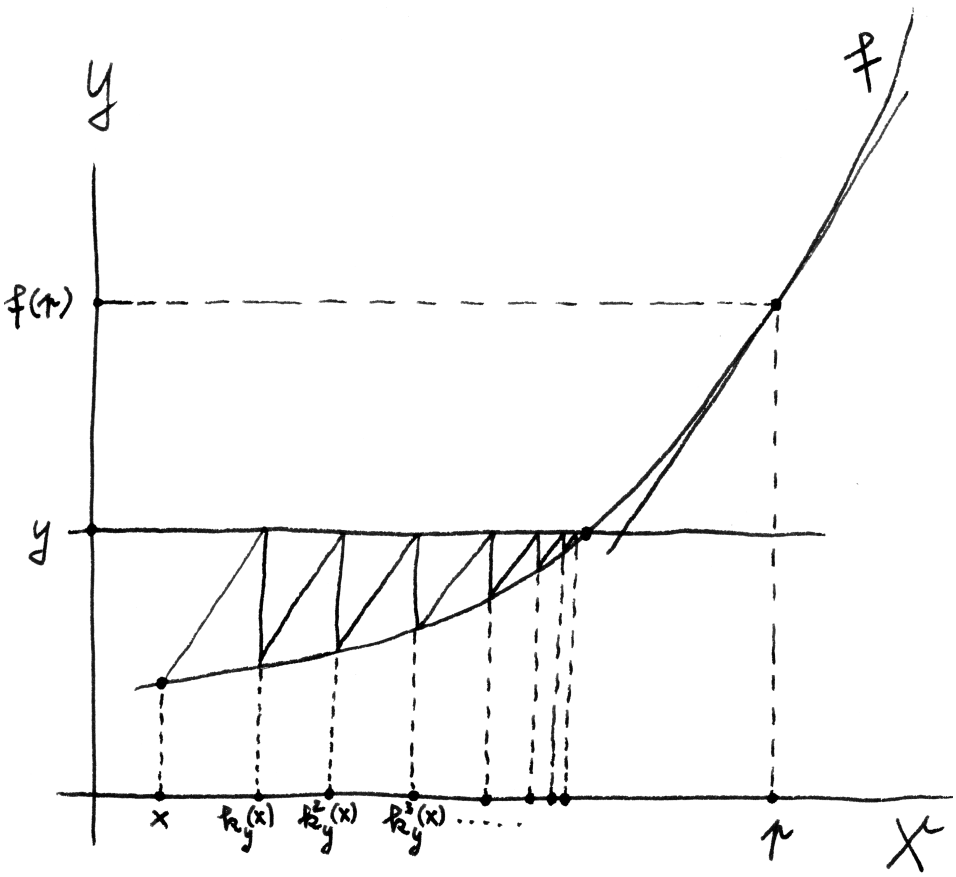
für eine Abbildung $\varepsilon : B \to X$, die stetig ist bei 0 und die dort den Wert Null annimmt. Setzen wir hier $x = f^{-1}(y)$ ein mit $y \in f(B)$, so ergibt sich

$$y = f^{-1}(y) + \|f^{-1}(y)\|\ \varepsilon(f^{-1}(y))$$

Nun liefert die Lipschitzstetigkeit der Umkehrfunktion für unseren eben gewählten offenen Ball B nach dem Umkehrsatz für stetige Funktionen 12.3.1.12 aber auch für alle $y \in f(B)$ die Abschätzung $\|f^{-1}(y)\| \leq 2\|y\|$. Zusammen ergibt sich dann leicht

$$\lim_{y \to 0} \frac{f^{-1}(y) - y}{\|y\|} = 0$$

Das aber besagt gerade, daß die Umkehrabbildung f^{-1} bei $y = 0$ differenzierbar ist mit Differential id. Verkleinern wir unsere offene Umgebung von p noch so weit, daß $\mathrm{d}f$ dort überall invertierbar ist, so folgt die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung an jeder Stelle des Bildes unserer verkleinerten offenen Umgebung. Die Stetigkeit des Differentials der Umkehrabbildung folgt dann leicht aus der Stetigkeit des Differentials der ursprünglichen Abbildung und der Stetigkeit des Invertierens linearer Abbildungen. Im Fall von Banachräumen verwende man dazu Übung 12.1.6.16. □



Das Verfahren aus dem Beweis von 12.3.1.2 ist auch durchaus von praktischer Bedeutung: Ausgeschrieben besagt es, daß wir eine Lösung x der Gleichung $f(x) = y$ unter geeigneten Annahmen finden können als den Fixpunkt der kontrahierenden Abbildung

$$\begin{array}{rccl} k_y: & V & \to & X \\ & x & \mapsto & x + (\mathrm{d}_p f)^{-1}(y - f(x)) \end{array}$$

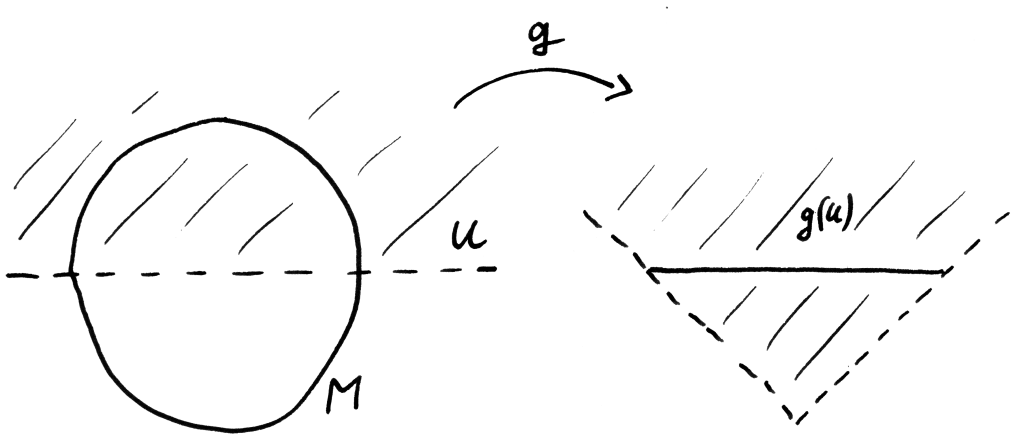
für p mit $f(p)$ hinreichend nah bei y. Es ist dem Newtonverfahren aus 10.3.7.2 eng verwandt, stimmt jedoch nicht damit überein: Beim Newtonverfahren etwa im Fall einer Veränderlichen „gehen wir ja immer auf der Tangente bei $(x, f(x))$ wieder herunter zur x-Achse“, wohingegen wir bei unserer Korrektur k_y aus besagtem Beweis stattdessen auf der Parallelen durch $(x, f(x))$ zur Tangente bei $(p, f(p))$ heruntergehen, wie im Bild dargestellt.

Übungen

Übung 12.3.1.18. Im reellen Vektorraum $\mathrm{Mat}(n \times m; \mathbb{R})$ aller reellen Matrizen bilden die Matrizen von vollem Rang eine offene Teilmenge. Hinweis: Man betrachte Determinanten von quadratischen Untermatrizen. Diese Übung gehört zur Hälfte in die lineare Algebra und steht nur an dieser Stelle, weil wir die Aussage demnächst brauchen.

12.3.2 Mannigfaltigkeiten in reellen Räumen

12.3.2.1. Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir Maxima und Minima von Funktionen auf einer Kugel, einem Ellipsoid oder einem Torus alias Schwimmring im $\mathbb{R}^3$ untersuchen. Später werden wir darüber hinaus Formeln für die Oberfläche derartiger Gebilde herleiten und Funktionen über derartige Gebilde integrieren. Um all diese Formeln in angemessener Allgemeinheit diskutieren zu können, führen wir hier den Begriff einer Mannigfaltigkeit in einem endlichdimensionalen reellen Raum ein und erklären, wie man mit diesem Begriff umgeht. Anschließend diskutieren wir dann die entsprechenden Extremwertaufgaben.



Der Einheitskreis ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit der Ebene $M \subset \mathbb{R}^2$. Eine Plättung um beliebige Punkte aus der oberen Halbebene U wird etwa gegeben durch $g(x, y) = (x, \sqrt{x^2 + y^2} - 1)$. In diesem Fall besteht $g(U)$ aus dem schraffierten Bereich, also aus allen Punkten oberhalb des Graphen der Funktion $x \mapsto |x| - 1$.

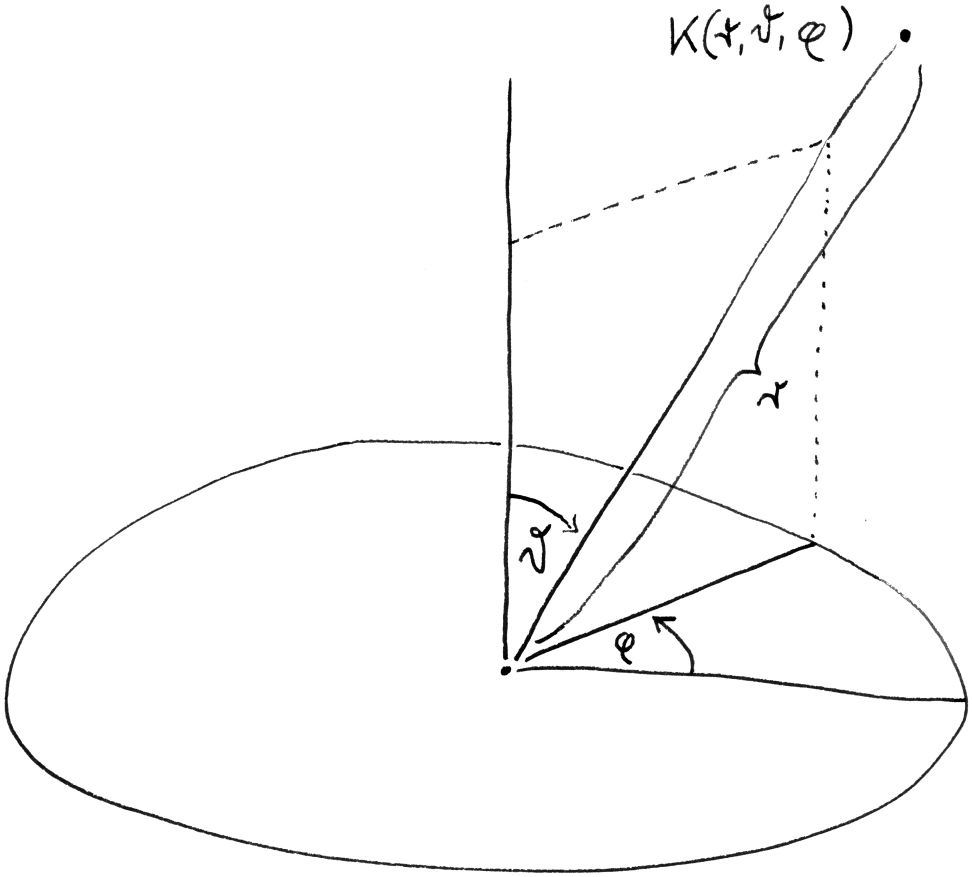
12.3.2.2. Sei X ein n-dimensionaler reeller Raum. Ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus g von einer offenen Umgebung $U \Subset X$ eines Punktes $p \in X$ zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ heißt ein **lokales $\mathcal{C}^1$-Koordinatensystem von X um den Punkt p**

und die Komponenten $g_1, \ldots, g_n : U \to \mathbb{R}$ von g heißen die **Koordinaten** unseres lokalen Koordinatensystems. Typische Beispiele sind die Polarkoordinaten auf geeigneten offenen Teilmengen von $X = \mathbb{R}^2$, bei denen man statt (g_1, g_2) meist (r, ϑ) schreibt, oder die sogenannten Kugelkoordinaten auf geeigneten offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^3$, wie wir sie in 12.3.2.3 einführen.

Beispiel 12.3.2.3. Die **Kugelkoordinaten** im Raum werden beschrieben durch eine geeignete Einschränkung der Abbildung

$$\begin{array}{rccc} K: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \vartheta, \varphi) & \mapsto & (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta) \end{array}$$

Deren anschauliche Bedeutung wird im Anschluß erläutert.



Die Kugelkoordinatenabbildung

12.3.2.4 (**Anschauliche Bedeutung der Kugelkoordinaten**). Stellen wir uns ein Teleskop vor, das im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems auf einem waagerechten, als da heißt, in der xy-Ebene liegenden Drehteller steht und senkrecht nach oben in Richtung der z-Achse zeigt. Um einen Stern zu betrachten, schwenken wir zunächst das Teleskop zur Seite in Richtung der positiven x-Achse um einen Winkel $\vartheta \in [0, \pi]$ und drehen dann den Drehteller um einen geeigneten Winkel, sagen wir um den „Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ gegen den Uhrzeigersinn", so daß etwa die Drehung um $\pi/2$ die positive x-Achse in die positive y-Achse überführt. Ist schließlich r die Entfernung unseres Sterns, so gibt $K(r, \vartheta, \varphi)$ seine kartesischen Koordinaten an. Im Fall eines senkrecht über oder unter dem Teleskop befindlichen Sterns ist der Drehwinkel φ für unseren Drehteller nicht eindeutig bestimmt, und befindet sich das gedachte Teleskop bereits im Stern, so sind beide Winkel nicht eindeutig bestimmt. Die Einschränkung unserer Abbildung auf $r > 0$, $\vartheta \in (0, \pi)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ hinwiederum ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv. Oft findet man auch eine Variante, bei der wir uns das Teleskop zu Beginn horizontal in Richtung der positiven x-Achse ausgerichtet denken und wo die zweite Koordinate $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ den Winkel bezeichnet, um den das Teleskop nach oben beziehungsweise bei negativem Winkel nach unten geschwenkt werden muß. Die Formeln lauten dann abweichend $(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \cos\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\theta)$.

12.3.2.5. Wenn wir besonders betonen wollen, daß unsere Koordinatensysteme nicht im Sinne der linearen Algebra 3.2.9.5 gemeint sind, sprechen wir von einem **lokalen System von krummlinigen Koordinaten**.

Definition 12.3.2.6. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $k \geq 0$. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt eine **k-Mannigfaltigkeit**, wenn es um jeden Punkt $p \in M$ ein lokales Koordinatensystem (U, g) von X gibt mit

$$M \cap U = \{q \in U \mid g_{k+1}(q) = \ldots = g_n(q) = 0\}$$

In Worten fordern wir also, daß es für alle $p \in M$ ein lokales Koordinatensystem (U, g) von X um p gibt, in dessen Definitionsbereich U die Punkte von M gerade diejenigen Punkte sind, auf denen die letzten $n - k$ lokalen Koordinaten verschwinden. Wir nennen dann (U, g) ein **an M angepaßtes lokales Koordinatensystem**.

Definition 12.3.2.7. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Gegeben ein Punkt $p \in M$ erklären wir den **Tangentialkegel**

$$\mathrm{K}_p M \subset \vec{X}$$

als die Menge $\mathrm{K}_p M$ aller Richtungsvektoren $v \in \vec{X}$ derart, daß es $\varepsilon > 0$ und $\gamma : [0, \varepsilon) \to M$ gibt mit $\gamma(0) = p$ derart, daß die durch Nachschalten der Einbettung $M \subset X$ gegebene Abbildung $\gamma : [0, \varepsilon) \to X$ differenzierbar ist mit $\gamma'(0) = v$.

Lemma 12.3.2.8 (**Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit**). *Gegeben X ein endlichdimensionaler Raum und $M \subset X$ eine k-Mannigfaltigkeit in X und $p \in M$ ein Punkt und (U, g) ein an M angepaßtes lokales Koordinatensystem um p gilt*

$$\mathrm{K}_p M = \ker(\mathrm{d}_p g_{k+1}) \cap \ldots \cap \ker(\mathrm{d}_p g_n)$$

12.3.2.9. Insbesondere ist der Tangentialkegel $\mathrm{K}_p M \subset \vec{X}$ an eine k-Mannigfaltigkeit in einem Punkt $p \in M$ stets ein k-dimensionaler Untervektorraum des Richtungsraums. Wir nennen ihn den **Tangentialraum bei** p an unsere Mannigfaltigkeit und notieren ihn

$$\mathrm{T}_p M$$

Die Elemente des Tangentialraums heißen **Tangentialvektoren**.

Beweis. In der Tat können wir bei einem Weg $\gamma : [0, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ unser ε so verkleinern, daß er in U landet. Dann ist nach Annahme $g_j \circ \gamma$ konstant und folglich $(g_j \circ \gamma)'(0) = (\mathrm{d}_p g_j)(\gamma'(0)) = 0$ für $j = k+1, \ldots, n$. Das zeigt $\subset$. Umgekehrt folgt $\supset$, indem man die Wege $\gamma_\lambda(t) := g^{-1}(t\lambda_1, \ldots, t\lambda_k, 0, \ldots, 0)$ betrachtet für $\lambda \in \mathbb{R}^k$. $\square$

12.3.2.10 (**Anschauung für den Tangentialraum**). Gegeben X ein endlichdimensionaler Raum und $M \subset X$ eine Mannigfaltigkeit in X und $p \in M$ ein Punkt ist $p + \mathrm{T}_p M$ in der schmutzigen Anschauung derjenige affine Teilraum von X, der M bei p am besten approximiert.

12.3.2.11. Wir nennen eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums eine **Mannigfaltigkeit**, wenn es ein k gibt derart, daß sie eine k-Mannigfaltigkeit ist. Ist unsere Mannigfaltigkeit nicht leer, so ist dieses k wohlbestimmt als die Dimension des Tangentialraums in einem und jedem Punkt. Es heißt die **Dimension** unserer Mannigfaltigkeit.

Beispiel 12.3.2.12 (**Kreislinie als Einsmannigfaltigkeit**). Die Kreislinie $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ ist eine 1-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^2$. In der Tat bilden auf der Halbebene $U := \{(x, y) \mid x > 0\}$ unsere Polarkoordinaten Radius $r(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ und Winkel $\vartheta(x, y) := \arctan(x/y)$ ein lokales Koordinatensystem und die Funktionen $g_1 := \vartheta$ und $g_2 := r - 1$ desgleichen und wir haben

$$S^1 \cap U = \{(x, y) \in U \mid g_2(x, y) = 0\}$$

In derselben Weise finden wir auch an die Kreislinie angepaßte lokale Koordinatensysteme auf den anderen drei Halbebenen zu den Koordinatenachsen. Diese vier offenen Halbebenen überdecken aber unsere Kreislinie. Mithin ist die Kreislinie in der Tat eine Einsmannigfaltigkeit in der Ebene. Für ihre Tangentialräume finden wir $\mathrm{T}_{(x,y)} S^1 = \langle (y, -x) \rangle$.

Beispiel 12.3.2.13 (**Kreislinie als Einsmannigfaltigkeit, Variante**). Ein weiteres an die Kreislinie $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ angepaßtes lokales Koordinatensystem wäre der Streifen $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, y > 0\}$ mit den beiden Koordinaten $g_1(x,y) := x$ und $g_2(x,y) := y - \sqrt{1-x^2}$.

Beispiele 12.3.2.14 (**Graph als Mannigfaltigkeit**). Der Graph jeder $\mathcal{C}^1$-Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist eine 2-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$. Als lokales Koordinatensystem mag man in diesem Fall das globale Koordinatensystem $g : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ mit $g(x,y,z) = (x,y,z-f(x,y))$ nehmen. Ähnlich ist der Graph $\Gamma(f)$ jeder $\mathcal{C}^1$-Abbildung $f : \mathbb{R}^k \supseteq W \to \mathbb{R}^n$ eine k-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{k+n}$. Die Einheitssphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine n-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{n+1}$, weil sie „lokal als Graph einer Funktion beschrieben werden kann“. Eine alternative Begründung geben wir in 12.3.2.21. Für die Tangentialräume unserer Graphen finden wir

$$\mathrm{T}_{(x,f(x))}\Gamma(f) = \Gamma(\mathrm{d}_x f)$$

Beispiele 12.3.2.15 (**Affiner Teilraum als Mannigfaltigkeit**). Jeder k-dimensionale affine Teilraum $Y \subset X$ eines endlichdimensionalen reellen Raums X ist eine k-Mannigfaltigkeit. Für seinen Tangentialraum gilt

$$\mathrm{T}_y Y = \vec{Y}$$

an jede Stelle $y \in Y$. Eine 0-Mannigfaltigkeit in X ist dasselbe wie eine Teilmenge $M \subset X$, die keine Häufungspunkte in M hat. So eine Teilmenge werden wir in 12.7.5.7 eine „diskrete Teilmenge“ nennen. Jeder Schnitt einer k-Mannigfaltigkeit in X mit einer offenen Teilmenge $W \Subset X$ ist auch selbst eine k-Mannigfaltigkeit in X.

Beispiele 12.3.2.16 (**Offene Teilmenge als Mannigfaltigkeit**). Eine n-Mannigfaltigkeit in einem n-dimensionalen Raum X ist dasselbe wie eine offene Teilmenge. In der Tat ist für $p \in M \Subset X$ jeder Isomorphismus $g : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ von affinen Räumen bereits eine angepaßtes Koordinatensystem für jeden Punkt von M und andererseits folgt aus der Existenz eines an M angepaßten lokalen Koordinatensystems (U,g) um $p \in M$ bereits $g(U \cap M) = g(U)$, also $U \cap M = U$, also $U \subset M$, also $M \Subset X$. So eine offene Teilmenge $M \Subset X$ hat an jeder Stelle $p \in M$ den Tangentialraum

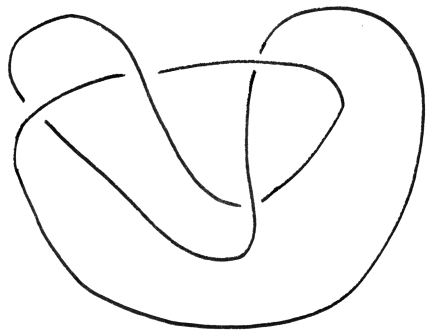
$$\mathrm{T}_p M = \vec{X}$$

12.3.2.17 (**Diskussion der Terminologie**). Wir werden im weiteren Verlauf noch weitere Varianten des Begriffs einer Mannigfaltigkeit kennenlernen. Das hier eingeführte Konzept heißt genauer eine **in den affinen Raum X eingebettete Mannigfaltigkeit** oder ganz ausführlich eine **k-dimensionale $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltigkeit von X ohne Rand**. Jenseits der Grundvorlesungen versteht man unter einer Mannigfaltigkeit meist abweichend eine „abstrakte Mannifaltigkeit“, wie wir sie

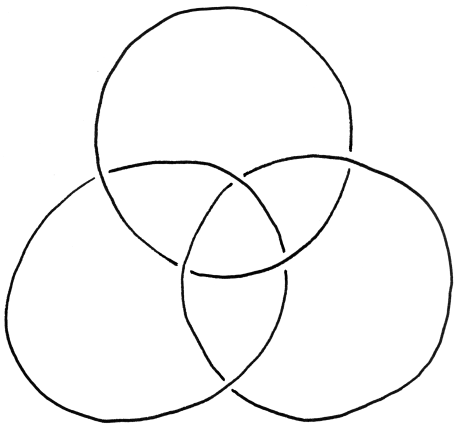
in 22.3.2.1 einführen werden, aber alles zu seiner Zeit. In 22.3.3.3 werden wir auch allgemeiner den Tangentialraum $\mathrm{T}_p M$ für abstrakte Mannigfaltigkeiten M erklären. Er ist im Fall der hier betrachteten eingebetteten Mannigfaltigkeiten „kanonisch isomorph“ zu dem oben erklärten Konzept. Wenn wir besonders betonen wollen, daß wir die obige Definition für eingebettete Mannigfaltigkeiten meinen, schreiben wir genauer

$$\mathrm{T}_p^{\subset} M$$

Vorschau 12.3.2.18. Eine kompakte 1-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ heißt eine **Verschlingung** und, wenn sie zusätzlich wegzusammenhängend ist, ein **Knoten**. Zwei Verschlingungen heißen **isotop**, wenn sie durch einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ mit überall positiver Funktionaldeterminante ineinander überführt werden können. Die „Knotentheorie“ versucht, Kriterien dafür zu entwickeln, wann zwei gegebene Verschlingungen isotop sind.



Ein Beispiel für einen Knoten.



Diese Verschlingung ist besonders bemerkenswert dadurch, daß je zwei der Ringe getrennt werden könnten, wenn eben der Dritte nicht wäre. Sie heißt die Verschlingung der **Borromäischen Ringe** nach einer italienischen Familie, die diese Ringe in ihrem Wappen führte.

12.3.2.19. Eine 1-Mannigfaltigkeit heißt eine **Kurve** und eine 2-Mannigfaltigkeit eine **Fläche**. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X und $c \leq \dim X$

versteht man unter einer **Mannigfaltigkeit der Kodimension** c in X eine k-Mannigfaltigkeit mit $k = (\dim X) - c$. Eine Mannigfaltigkeit in X der Kodimension Eins heißt eine **Hyperfläche in** X.

Proposition 12.3.2.20 (**Mannigfaltigkeiten als Urbilder**). *Seien X und Y endlichdimensionale reelle Räume und $h : X \supseteq A \to Y$ eine stetig differenzierbare Abbildung, deren Differential $\mathrm{d}_p h$ an jeder Stelle $p \in A$ surjektiv ist. So ist für alle $c \in Y$ das Urbild $M = h^{-1}(c)$ eine Mannigfaltigkeit mit den Tangentialräumen*

$$\mathrm{T}_p M = \ker(\mathrm{d}_p h)$$

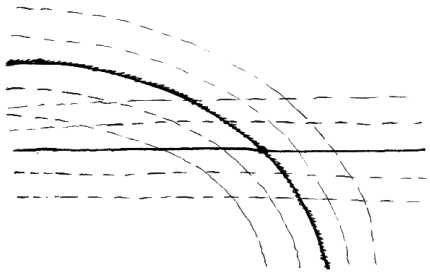


Illustration zum Beweis des Satzes 12.3.2.20 über Mannigfaltigkeiten als Urbilder. Dick gezackelt eine Niveaulinie einer Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Liegt p auf dieser Niveaulinie und ist $\mathrm{d}_p f$ surjektiv alias nicht null, so läßt sich f durch eine lineare Abbildung, im Bild die Abbildung y, zu einem lokalen Koordinatensystem ergänzen, und der Umkehrsatz 12.3.1.2 liefert dann die gesuchte lokale Plättung unserer Niveaulinie.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$ annehmen und haben $h = (h_1, \ldots, h_m)$. Für jedes $p \in M$ finden wir sicher lineare Abbildungen $l_1, \ldots, l_k : X \to \mathbb{R}$ derart, daß das Differential von $g = (l_1, \ldots, l_k, h_1, \ldots, h_m)$ in p bijektiv ist. Nach dem Umkehrsatz 12.3.1.2 erhalten wir so ein lokales Koordinatensystem auf einer Menge U mit $p \in U \subseteq A$. Das Tupel von Funktionen $(l_1, \ldots, l_k, h_1 - c_1, \ldots, h_m - c_m)$ ist dann ein an M angepaßtes lokales Koordinatensystem in X. Die Beschreibung der Tangentialräume folgt unmittelbar. □

Beispiel 12.3.2.21. Die **Sphären** $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$ sind n-Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^{n+1}$, denn das Differential von $h : x \mapsto x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2$ ist surjektiv an jeder Stelle von $\mathbb{R}^{n+1} \backslash 0$. An einer Stelle $p \in S^n$ ist $[\mathrm{d}_p h] = (2p_1, \ldots, 2p_{n+1})$ und der Kern der durch diese Zeilenmatrix gegebene Linearform ist das orthogonale Komplement zum Ortsvektor p unter dem Standardskalarprodukt, in Formeln

$$\mathrm{T}_p S^n = \{p\}^\perp$$

Übungen

Übung 12.3.2.22. Eine stetig differenzierbare Abbildung von einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums in einen weiteren endlichdimensionalen reellen Raum hat offenes Bild, wenn ihr Differential an jeder Stelle surjektiv ist. Ist unsere stetig differenzierbare Abbildung zusätzlich injektiv, so ist ihre Umkehrabbildung stetig und sogar stetig differenzierbar.

Übung 12.3.2.23. In der Situation von 12.3.2.20 ist allgemeiner auch für jede Mannigfaltigkeit $C \subset Y$ ihr Urbild $M = h^{-1}(C)$ eine Mannigfaltigkeit in X der Dimension $\dim X - \dim Y + \dim C$.

Übung 12.3.2.24. Man zeige: Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\langle\ ,\ \rangle$ eine von Null verschiedene symmetrische Bilinearform auf V und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so ist $M := \{v \in V \backslash 0 \mid \langle v, v\rangle = c\}$ eine Hyperfläche in V mit Tangentialräumn $\mathrm{T}_v M = \mathrm{trans}\{w \in V \mid \langle v, w\rangle = 0\}$ unter der üblichen Identifikation $\mathrm{trans} : V \xrightarrow{\sim} \vec{V}$ oder abkürzend geschrieben

$$\mathrm{T}_v M = v^\perp$$

Hinweis: Man erinnere das Differential bilinearer Abbildungen 12.1.6.5.

Übung 12.3.2.25. Sind X, Y endlichdimensionale reelle Räume und $M \subset X$ sowie $N \subset Y$ Mannigfaltigkeiten, so ist auch $M \times N \subset X \times Y$ eine Mannigfaltigkeit und die linearen Anteile der Projektionen liefern einen Vektorraumisomorphismus

$$\mathrm{T}_{(p,q)}(M \times N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_p M \times \mathrm{T}_q N$$

12.3.3 Implizite Funktionen

Satz 12.3.3.1 (über implizite Funktionen, geometrische Fassung). *Seien X, Y endlichdimensionale Räume und $M \subset X \times Y$ eine Mannigfaltigkeit. Liefert der lineare Anteil der Projektion auf X an einer Stelle $(p, q) \in M$ einen Isomorphismus*

$$\mathrm{T}_{(p,q)} M \xrightarrow{\sim} \vec{X}$$

zwischen dem Tangentialraum an M und dem Richtungsraum von X, so gibt es P, Q mit $p \in P \Subset X$ und $q \in Q \Subset Y$ derart, daß $M \cap (P \times Q)$ der Graph einer $\mathcal{C}^1$-Abbildung $\varphi : P \to Q$ ist.

12.3.3.2. Diese Funktion φ heißt dann die „durch M implizit gegebene Funktion“. Sobald Sie einmal den Zusammenhangsbegriff kennengelernt haben, mögen Sie zur Übung zusätzlich zeigen, daß im Fall von festem zusammenhängenden P alle möglichen Wahlen für Q dieselbe implizite Funktion φ liefern.

Beweis. Seien k die Dimension von M und (U, g) ein System von an M angepaßten lokalen Koordinaten um (p, q) und $g^{-1} : g(U) \tilde{\to} U$ die Umkehrabbildung, ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus von $g(U) \Subset \mathbb{R}^n$ nach $U \Subset (X \times Y)$. Offensichtlich induziert das Differential von g^{-1} bei $g(p, q)$ einen Vektorraumisomorphismus

$$\mathbb{R}^k \times 0 \tilde{\to} \mathrm{T}_{(p,q)}M$$

Nach Annahme induziert also das Differential von $\mathrm{pr}_X \circ g^{-1}$ bei $g(p, q)$ einen Vektorraumisomorphismus $\mathbb{R}^k \times 0 \tilde{\to} \vec{X}$. Nach dem Umkehrsatz 12.3.1.2 induziert $\mathrm{pr}_X \circ g^{-1}$ mithin einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\psi : A \tilde{\to} B$ zwischen einer offenen Umgebung $A \Subset g(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$ von $g(p, q)$ und einer offenen Umgebung $B \Subset X$ von p. Indem wir sonst U geeignet verkleinern, dürfen wir sogar $A = g(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$ annehmen. Für alle $x \in B$ ist dann $\varphi(x) := \mathrm{pr}_Y(g^{-1}(\psi^{-1}(x)))$ das einzige $y \in Y$ mit $(x, y) \in M \cap U$. Wählen wir nun offene Umgebungen $P_1 \Subset X$ von p und $Q \Subset Y$ von q mit $P_1 \times Q \subset U$ und dann eine offene Umgebung $P \Subset P_1$ von p mit $x \in P \Rightarrow \varphi(x) \in Q$, so ist $M \cap (P \times Q)$ der Graph der $\mathcal{C}^1$-Abbildung $\varphi : P \to Q$. □

Satz 12.3.3.3 (über implizite Funktionen in Koordinaten). *Gegeben sei eine stetig differenzierbare Abbildung $f : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m) \Supset D \to \mathbb{R}^m$. Wir vereinbaren die Notation $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m$ für die Variablen. Ist in diesen Notationen die Matrix*

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^m$$

nicht ausgeartet an einer Stelle $(p, q) \in D$, so gibt es P, Q mit $p \in P \Subset \mathbb{R}^k$ und $q \in Q \Subset \mathbb{R}^m$ und $P \times Q \subset D$ derart, daß

$$\{(x, y) \in P \times Q \mid f(x, y) = f(p, q)\}$$

der Graph einer $\mathcal{C}^1$-Funktion $\varphi : P \to Q$ ist. Die partiellen Ableitungen der Komponenten von φ werden dann gegeben durch die Matrix-Gleichung

$$\left(\left.\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\right|_x\right) = -\left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right|_{(x,\varphi(x))}\right)^{-1} \left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|_{(x,\varphi(x))}\right)$$

12.3.3.4. In dieser Sprache ausgedrückt kann also ein System von m Gleichungen in $m + k$ Unbekannten „im allgemeinen“ und „lokal“ in der Weise aufgelöst werden, daß wir k der Unbekannten frei wählen und die restlichen m Unbekannten dadurch im wesentlichen eindeutig festgelegt werden.

Beweis. Indem wir D verkleinern, dürfen wir annehmen, daß f nicht nur bei (p, q), sondern an jeder Stelle von D surjektives Differential hat. Damit ist

$$M := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = f(p, q)\}$$

nach 12.3.2.20 eine k-Mannigfaltigkeit. Der Tangentialraum an M in (p,q) ist nach 12.3.2.9 der Schnitt der Kerne der $\mathrm{d}_{(p,q)}f_j$ und trifft nach Annahme den Teilraum $0 \times \mathbb{R}^m$ nur in Null. Da er die Dimension k hat, muß die Projektion auf $\mathbb{R}^k$ folglich einen Isomorphismus $\mathrm{T}_{(p,q)}M \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^k$ induzieren und die erste Aussage folgt unmittelbar aus der geometrischen Fassung des Satzes über implizite Funktionen 12.3.3.1. Mit der Kettenregel folgt nun

$$\mathrm{d}_{(x,\varphi(x))}f \circ \begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ \mathrm{d}_x\varphi \end{pmatrix} = 0$$

Schreiben wir darin $\mathrm{d}_{(x,\varphi(x))}f$ als Zeilen-Blockmatrix, so ergibt sich sofort die behauptete Formel für das Differential. □

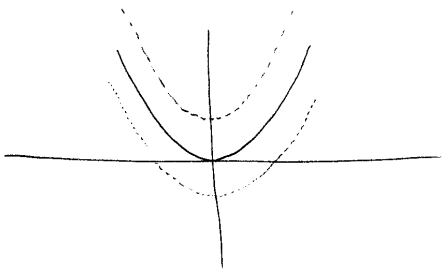
Beispiel 12.3.3.5. Wir betrachten $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ und $(p,q) = (0,1)$. Da $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht verschwindet bei $(0,1)$, sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Ein mögliches Paar (U,V) bestünde aus $U = (-1,1)$, $V = (0,\infty)$ und die zugehörige implizite Funktion ist $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$. Unsere implizite Funktion sucht sich in diesem Fall für jedes $x \in (-1,1)$ dasjenige positive $y = \varphi(x)$ aus, für das der Punkt (x,y) auf dem Einheitskreis liegt. Die Ableitung dieser impliziten Funktion ergibt sich mit unserer Regel richtig zu

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Beispiel 12.3.3.6. Wir betrachten $f(x,y) = y^3 + xy^2 - 3$ als eine Schar von Polynomen in y mit Parameter x. Für den Parameter $x = 2$ ist $y = 1$ eine Nullstelle, $f(2,1) = 0$. Wir wollen nun untersuchen, wie diese Nullstelle „mit dem Parameter x wackelt“, und wenden dazu den Satz über implizite Funktionen an. Die partielle Ableitung nach y ist $f_y = 3y^2 + 2xy$, insbesondere haben wir $f_y(2,1) = 7 \neq 0$ und nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es folglich $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ derart, daß für alle $x \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ das Polynom $f(x,\ )$ genau eine Nullstelle $y = \varphi(x) \in (1-\delta, 1+\delta)$ hat. Diese Funktion φ ist zwar schwer explizit anzugeben, aber der Satz sagt uns, daß sie in einer Umgebung von $x = 2$ differenzierbar ist, und ihre Ableitung bei $x = 2$ kennen wir auch: Wir haben nämlich $f_x = y^2$, $f_x(2,1) = 1$ und folglich

$$\varphi'(2) = -f_y(2,1)^{-1} f_x(2,1) = -\frac{1}{7}$$

Betrachten wir stattdessen $h(x,y) = y^2 - x$, so ist für $x = 0$ natürlich $y = 0$ eine Nullstelle, aber Entsprechendes gilt keineswegs: Schieben wir x etwas ins Negative, so hat $h(x,\ )$ überhaupt keine reelle Nullstelle mehr, schieben wir x dahingegen etwas ins Positive, so werden aus unserer Nullstelle plötzlich zwei Nullstellen, wie das nebenstehende Bild illustriert. Das zeigt, daß die Bedingung an die Ableitung auch wirklich notwendig ist.



Die Graphen von $h(0,\ )$, $h(-1/2,\ )$ und $h(1/2,\ )$ für die Funktion $h(x,y) = y^2 - x$ vom Ende des Beispiels 12.3.3.6. Hier haben wir anders als sonst y in horizontaler Richtung aufgetragen und denken an Nullstellen der veränderten Gleichung statt an Schnitte der Niveaulinie $h(x,y) = y^2 - x = 0$ mit verschiedenen horizontalen Geraden. Dies Bild interpretiert also diesselbe Formeln wie das vorhergehende Bild, nur eben in der alternativen Anschauung der „Abhängigkeit der Nullstellen von den Parametern“ und in einem entsprechend an der Hauptdiagonale gespiegeltem Koordinatensystem.

Satz 12.3.3.7 (über implizite Funktionen in vollständigen Räumen). *Gegeben seien vollständige normierte Räume X, Y und eine stetig differenzierbare Abbildung $f : (X \times Y) \circledcirc D \to Y$. An einer Stelle $(p, q) \in D$ induziere das Differential einen stetigen Isomorphismus mit stetiger Umkehrabbildung*

$$\mathrm{d}_{(p,q)} f \circ \mathrm{in}_{\vec{Y}} : \vec{Y} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$$

So gibt es P, Q mit $p \in P \circledcirc X$ und $q \in Q \circledcirc Y$ von q mit $P \times Q \subset D$ derart, daß $\{(x, y) \in P \times Q \mid f(x, y) = f(p, q)\}$ der Graph einer $\mathcal{C}^1$-Funktion $\varphi : P \to Q$ ist. Diese Funktion hat dann bei $x \in P$ das Differential

$$\mathrm{d}_x \varphi = -\left(\mathrm{d}_{(x,\varphi(x))} f \circ \mathrm{in}_{\vec{Y}}\right)^{-1} \circ \left(\mathrm{d}_{(x,\varphi(x))} f \circ \mathrm{in}_{\vec{X}}\right)$$

12.3.3.8. Hier können wir uns nicht mehr auf den Beweis der geometrischen Fassung stützen, ja der Satz in seiner geometrischen Fassung 12.3.3.1 gilt gar nicht mehr in dieser Allgemeinheit. Umgekehrt können wir aus dieser Fassung leicht die beiden anderen Fassungen folgern. Sie ist also stärker, ist jedoch meiner Anschauung schlechter zugänglich.

Beweis. Wir setzen $b := f(p, q)$ und betrachten die Abbildung

$$F := (\mathrm{pr}_X, f) : \begin{array}{ccc} D & \to & X \times Y \\ (x, y) & \mapsto & (x, f(x, y)) \end{array}$$

Ihr Differential bei (p, q) hat im Sinne von 3.2.4.12 Block-Gestalt

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\vec{X}} & 0 \\ \mathrm{d}_{(p,q)} f \circ \mathrm{in}_{\vec{X}} & \mathrm{d}_{(p,q)} f \circ \mathrm{in}_{\vec{Y}} \end{pmatrix}$$

und ist insbesondere invertierbar mit stetiger Umkehrabbildung. Nach der entsprechend allgemeinen Fassung des Umkehrsatzes gibt es also P, Q, W mit $p \in P \circledcirc X$ und $q \in Q \circledcirc Y$ und $F(p, q) \in W \circledcirc X \times Y$ derart, daß gilt $P \times Q \subset D$ und daß F einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus

$$F : P \times Q \xrightarrow{\sim} W$$

liefert. Die Umkehrabbildung $G := F^{-1} : W \xrightarrow{\sim} P \times Q$ hat dann offensichtlich die Gestalt $(x, y) \mapsto (x, g(x, y))$ für geeignetes $g : W \to X$. Nun ist $f(x, y) = b$ gleichbedeutend zu $F(x, y) = (x, b)$ und unter den Zusatzannahmen $(x, y) \in P \times Q$ und $(x, b) \in W$ ist das weiter gleichbedeutend zu $(x, y) = G(x, b)$ alias $x = g(x, b)$. Verkleinern wir falls nötig P derart, daß zusätzlich gilt $P \times \{b\} \subset W$, so gibt es zu jedem $x \in P$ genau ein $y = \varphi(x) \in Q$ mit $f(x, y) = b$, nämlich $\varphi(x) = g(x, b)$. Die so definierte Funktion φ ist stetig differenzierbar

nach dem Umkehrsatz. Ihre Ableitung bei $x \in U$ ergibt sich leicht, wenn man die Definitionsgleichung $f(x, \varphi(x)) = b$ als Abbildung $U \to Y$ auffaßt und auf beiden Seiten das Differential an der Stelle x nimmt. Mit der Kettenregel folgt nämlich

$$\mathrm{d}_{(x,\varphi(x))} f \circ \begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ \mathrm{d}_x \varphi \end{pmatrix} = 0$$

Zerlegen wir darin $\mathrm{d}_{(x,\varphi(x))} f = (\mathrm{d}_{(x,\varphi(x))} f \circ \mathrm{in}_{\vec{X}}, \mathrm{d}_{(x,\varphi(x))} f \circ \mathrm{in}_{\vec{Y}})$ als Zeilen-Blockmatrix im Sinne von 3.2.4.12, so ergibt sich sofort die behauptete Formel für das Differential. □

Übungen

Übung 12.3.3.9 (**Mannigfaltigkeiten als lokale Graphen in Koordinaten**). Gegeben eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \Subset \mathbb{R}^n$ und eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ derart, daß $M \cap U$ unter der entsprechenden Permutation der Koordinaten dem Graph einer $\mathcal{C}^1$-Abbildung $\mathbb{R}^k \Supset W \to \mathbb{R}^{n-k}$ entspricht. Zum Beispiel ist jede Einsmannigfaltigkeit der Ebene $\mathbb{R}^2$ lokal entweder Graph einer reellwertigen $\mathcal{C}^1$-Funktion der x-Koordinate oder der an der Hauptdiagonalen gespiegelte Graph einer reellwertigen $\mathcal{C}^1$-Funktion der y-Koordinate.

Übung 12.3.3.10. Man zeige, daß das Kreuz aus den beiden Koordinatenachsen in $\mathbb{R}^2$ keine Mannigfaltigkeit ist.

Übung 12.3.3.11. Wir betrachten das Polynom $f(x, y, z) = x^7y^2z + xyz^5$ und finden $f(1, 1, 1) = 2$. Man zeige, daß es auf einem hinreichend kleinen Ball $B \subset \mathbb{R}^2$ um $(1, 1)$ genau eine stetige Funktion $\varphi : B \to \mathbb{R}$ gibt mit $\varphi(1, 1) = 1$ und $f(x, y, \varphi(x, y)) = 2$ und bestimme bei $(1, 1)$ deren partielle Ableitungen φ_x, φ_y.

Übung 12.3.3.12 (**Schnitt von Mannigfaltigkeiten**). Man zeige: Gegeben in einem endlichdimensionalen reellen Raum X zwei Mannigfaltigkeiten $M, N \subset X$ und ein Punkt $p \in M \cap N$ mit $\mathrm{T}_pM + \mathrm{T}_pN = \vec{X}$ gibt es U mit $p \in U \Subset X$ derart, daß $U \cap M \cap N$ eine Mannigfaltigkeit ist und es gilt

$$\mathrm{T}_p(M \cap N) = \mathrm{T}_pM \cap \mathrm{T}_pN$$

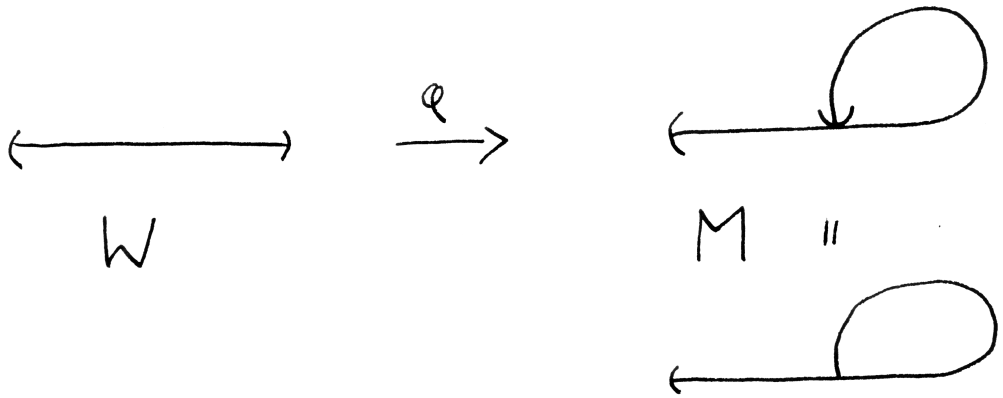
12.3.4 Karten und Koordinatensysteme

Proposition 12.3.4.1 (**Mannigfaltigkeiten als Bilder**). *Seien X ein n-dimensionaler reeller Raum und $k \geq 0$. Eine Teilmenge $M \subset X$ ist eine k-Mannigfaltigkeit genau dann, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^k \Supset W \to X$ gibt derart, daß gilt:*

1. *$p \in \varphi(W) \Subset M$;*

2. $\mathrm{d}_x\varphi$ *ist injektiv für alle* $x \in W$*;*

3. φ *ist injektiv und* $\varphi^{-1} : \varphi(W) \to W$ *ist stetig.*



Ein Beispiel einer Teilmenge M der Papierebene, die keine Untermannigfaltigkeit ist und für die die Bedingung aus 12.3.4.1 erfüllt wäre, wenn wir von unseren Karten nicht auch noch fordern würden, daß ihre Umkehrabbildungen stetig sind.

12.3.4.2. Ein Paar (W, φ) wie in der Proposition nenne ich eine **Karte** der Mannigfaltigkeit M. Eine Karte der Stadt Freiburg kann als eine Variante dieses Begriffs verstanden werden, bei der W ein Blatt Papier ist und bei der das Bild einiger Punkte unseres Blatts unter der Abbildung φ in das wirkliche Freiburg durch bildliche Symbole auf besagtem Blatt angedeutet wird.

12.3.4.3. Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt ganz allgemein ein **Homöomorphismus**, wenn sie stetig und bijektiv ist und auch ihre Umkehrabbildung stetig ist. In dieser Terminologie fordert Bedingung 3 oben, daß φ einen Homöomorphismus $\varphi : W \xrightarrow{\sim} \varphi(W)$ induziert. Zwei topologische Räume heißen **homöomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Homöomorphismus gibt.

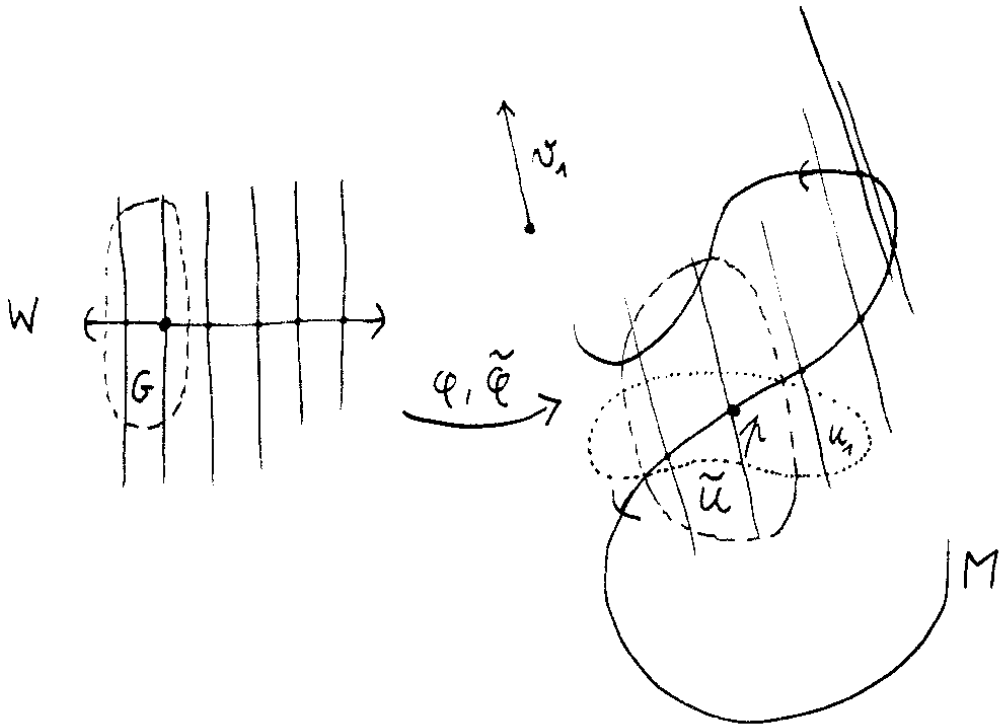
12.3.4.4. Im Fall $k = 0$ stellt bereits die erste Bedingung sicher, daß jeder Punkt von M offen ist in M, so daß M in der Tat eine nulldimensionale Untermannigfaltigkeit von X ist.

Beweis. Ist $M \subset X$ eine k-Mannigfaltigkeit und (U, g) ein an M angepaßtes lokales Koordinatensystem von X, sagen wir $g : U \xrightarrow{\sim} g(U) \Subset \mathbb{R}^n$. Bezeichne weiter $i : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ die Nullen anhängende Abbildung. So ist für $W := i^{-1}(g(U))$ die Komposition $g^{-1} \circ i : W \to M$ eine Karte von M. Folglich hat eine Mannigfaltigkeit um jeden Punkt mindestens eine Karte. Ist andererseits $\varphi : W \to M \subset X$

eine Karte von M um p mit $W \Subset \mathbb{R}^k$, so können wir Vektoren $v_1, \ldots, v_{n-k} \in \vec{X}$ finden derart, daß das Differential von

$$\begin{array}{rccl} \tilde{\varphi}: & W \times \mathbb{R}^{n-k} & \to & X \\ & (w, t_1, \ldots, t_{n-k}) & \mapsto & \varphi(w) + t_1 v_1 + \ldots + t_{n-k} v_{n-k} \end{array}$$

im Punkt $(\varphi^{-1}(p), 0^{n-k})$ bijektiv ist, mit 0^{n-k} als Abkürzung für die einelementige Menge $\{0\} \subset \mathbb{R}^{n-k}$. Nach dem Umkehrsatz 12.3.1.2 induziert $\tilde{\varphi}$ einen $\mathcal{C}^1$-



Ein Bild zum Beweis von 12.3.4.1 im Fall $n = k = 1$

Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung $G \Subset W \times \mathbb{R}^{n-k}$ des Punktes $(\varphi^{-1}(p), 0^{n-k})$ mit einer offenen Umgebung $\tilde{U} \Subset X$ von p. Das lokale Koordinatensystem $(\tilde{U}, \tilde{\varphi}^{-1})$ von X um p können wir nun zu einem an M angepaßten lokalen Koordinatensystem von X um p machen, indem wir seinen Definitionsbereich so verkleinern, daß er „M nicht zu oft trifft“. Genauer ist $i^{-1}(G)$ offen in W und damit $\varphi(i^{-1}(G))$ offen in $\varphi(W)$ und damit offen in M, aufgrund der Stetigkeit von φ^{-1} und unserer Bedingung $\varphi(W) \Subset M$. Also gibt es $U_1 \Subset X$ mit $\varphi(i^{-1}(G)) = M \cap U_1$. Dann setzen wir $U = \tilde{U} \cap U_1$ und $g := \tilde{\varphi}^{-1} : U \to \mathbb{R}^n$ ist das gesuchte an M angepaßte lokale Koordinatensystem von X um p. $\square$

12.3.4.5. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $M \subset X$ eine k-Mannigfaltigkeit. Unter einem **lokalen Koordinatensystem von** M verstehen wir

ein Paar (V, r) bestehend aus einer offenen Teilmenge $V \Subset M$ und einem Homöomorphismus $r : V \xrightarrow{\sim} W$ mit einer offenen Teilmenge $W \Subset \mathbb{R}^k$ derart, daß (W, r^{-1}) eine Karte von M ist. Die Komponenten $r_1, \ldots, r_k : V \to \mathbb{R}$ von r nennen wir dann die **lokalen Koordinaten** unseres Koordinatensystems. Salopp gesprochen ist also ein lokales Koordinatensystem einer Mannigfaltigkeit schlicht die Umkehrabbildung zu einer Karte. Viele Autoren verwenden allerdings auch eine andere Terminologie und verstehen unter einer Karte das, was wir ein Koordinatensystem genannt haben.

12.3.4.6 (**Verschiedene Arten lokaler Koordinatensysteme**). Sei X ein endlichdimensionaler Raum. Wir unterscheiden zwischen einem lokalen Koordinatensystem einer Mannigfaltigkeit $M \subset X$ und einem an eine Mannigfaltigkeit $M \subset X$ angepaßten lokalen Koordinatensystem von X. Im Fall der Mannigfaltigkeit $X \subset X$ fallen diese Begriffe zwar zusammen, im allgemeinen jedoch hat ein lokales Koordinatensystem einer Mannigfaltigkeit M nur $\dim M$ Koordinaten und dise sind nur Funktionen auf einer offenen Teilmenge von M.

Beispiel 12.3.4.7. Lokale Koordinaten um einen Punkt der Erdoberfläche, der nicht gerade auf dem sogenannten „Nullmeridian“ liegt, sind etwa die Längen- und Breitengrade.

Beispiel 12.3.4.8. Im Fall einer n-Mannigfaltigkeit M in einem n-dimensionalen Raum X alias einer offenen Teilmenge $M \Subset X$ ist ein lokales Koordinatensystem von M dasselbe wie ein lokales Koordinatensystem von X im Sinne von 12.3.2.2 mit einem in M enthaltenen Definitionsbereich.

12.3.4.9 (**Lokale Erweiterungen lokaler Koordinatensysteme**). Seien X ein reeller Raum der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} X = n$ und $M \subset X$ eine k-Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt. Ist $(V, (r_1, \ldots, r_k))$ ein lokales Koordinatensystem von M um p, so gibt es nach dem Beweis von 12.3.4.1 sogar ein an M angepaßtes lokales Koordinatensystem $(U, (g_1, \ldots, g_n))$ von X um p mit $(U \cap M) \subset V$ und $g_i|_{U \cap M} = r_i|_{U \cap M}$ für $1 \leq i \leq k$. Wir sagen dann, das lokale Koordinatensystem (U, g) von X um p sei eine **lokale Erweiterung** unseres lokalen Koordinatensystems (V, r) von M um p und notieren so eine lokale Erweiterung statt (U, g) gerne

$$(\tilde{V}, \tilde{r})$$

Beispiel 12.3.4.10. Lokale Koordinaten um einen Punkt der Erdoberfläche, der nicht gerade auf dem sogenannten „Nullmeridian“ liegt, sind etwa die Längen- und Breitengrade. Wenn wir diese Funktionen in hoffentlich offensichtlicher Weise auf die Lufthülle und Punkte der Erdkruste nicht allzuweit unter der Erdoberfläche ausdehnen und die Höhe über dem Meeresspiegel als dritte Koordinate hinzunehmen erhalten wir eine lokale Erweiterung dieses lokalen Koordinatensystems der Erdoberfläche zu einem lokalen Koordinatensystem des Raums.

12.3.4.11 (**Partielle Ableitungen in Bezug auf lokale Koordinaten**). Ist M eine Mannigfaltigkeeit und bilden Funktionen $r_1, \ldots, r_k : M \supseteq V \to \mathbb{R}$ ein System von lokalen Koordinaten von M und ist $f : V \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so bezeichnen wir mit

$$\frac{\partial f}{\partial r_i} := \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial r_i} \circ \varphi^{-1}$$

die Funktion $V \to \mathbb{R}$, die unter der zugehörigen Karte $\varphi : W \xrightarrow{\sim} V$ der partiellen Ableitung $\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial r_i}$ entspricht, wenn denn $f \circ \varphi$ partiell differenzierbar ist nach der i-ten Variablen. Dabei gilt es zu beachten, daß die i-te partielle Ableitung, auch wenn das aus der Notation nicht direkt hervorgeht, von der Wahl aller lokalen Koordinaten abhängt und keineswegs nur von Wahl der i-ten Koordinate.

Definition 12.3.4.12. Sind $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$ und (W_β, φ_β) zwei Karten einer Mannigfaltigkeit M, so setzen wir $W_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\beta(W_\beta))$ und nennen die Abbildung

$$\varphi_{\beta\alpha} := \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : W_{\alpha\beta} \to W_{\beta\alpha}$$

den **Kartenwechsel** zwischen unseren beiden Karten.

Proposition 12.3.4.13. *Seien X, Z endlichdimensionale reelle Räume und $M \subset X$ eine k-Mannigfaltigkeit und (V, r) ein System lokaler Koordinaten von M. Sei $\psi : Z \supset A \to V$ gegeben mit $A \subset Z$ halboffen und $i \circ \psi : Z \supset A \to X$ stetig differenzierbar. So ist die Verknüpfung von ψ mit unserer Koordinatenabildung eine stetig differenzierbare Abbildung*

$$r \circ \psi : Z \supset A \to \mathbb{R}^k$$

12.3.4.14 (**Kartenwechsel sind Diffeomorphismen**). Insbsondere sind in den Notationen von 12.3.4.12 unsere Kartenwechsel $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismen, denn die Umkehrabbildung $\varphi_\beta^{-1} : M \supseteq \varphi_\beta(W_\beta) \xrightarrow{\sim} W_\beta$ unserer zweiten Karte ist per definitionem ein lokales Koordinatensystem (V, r) von M und $\psi := \varphi_\alpha : \mathbb{R}^k \supseteq W_\alpha \to M$ wird stetig differenzierbar beim Nachschalten der Einbettung $i : M \hookrightarrow X$.

Beweis. Die Hauptschwierigkeit beim Verfolgen dieses Beweis liegt darin, daß man sich einige Einbettungsabbildungen dazudenken muß. Notiert man diese alle, wird es aber auch schnell unübersichtlich. Gegeben $a \in A$ finden wir nach 12.3.4.9 eine lokale Erweiterung $(\tilde{V}, \tilde{r})$ von (V, r) zu einem lokalen Koordinatensystem von X um $\psi(a)$. Wir haben also

$$r \circ \psi = (\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_k) \circ i \circ \psi$$

auf $\psi^{-1}(\tilde{V})$ und die rechte Seite ist eine Verknüpfung von $\mathcal{C}^1$-Abbildungen zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler affiner Räume. Die Abbildung $r \circ \psi$ ist also $\mathcal{C}^1$ auf einer offenen Umgebung von a in A. Da das für alle $a \in A$ gilt, ist sie damit $\mathcal{C}^1$ auf ganz A. $\square$

Übungen

Übung 12.3.4.15. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum. Gegeben eine Karte (W, φ) einer Mannigfaltigkeit $M \subset X$ und ein Punkt $p \in W$ gibt es stets ein Paar (U, g) bestehend aus einer offenen Umgebung $U \Subset X$ von $\varphi(p)$ und einer $\mathcal{C}^1$-Abbildung $g : U \to W$ derart, daß gilt $g(\varphi(y)) = y$ für alle $y \in \varphi^{-1}(U)$.

Übung 12.3.4.16. Der Doppelkegel $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ ist keine Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$. Auch die Teilmenge aller seiner Punkte mit nichtnegativer z-Koordinate ist keine Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$. Entfernen wir aus dem Doppelkegel jedoch den Ursprung, so erhalten wir eine Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$.

Übung 12.3.4.17. Gegeben $X \subset Y$ ein endlichdimensionaler reeller Raum mit einem affinen Teilraum ist eine Teilmenge $M \subset X$ eine Mannigfaltigkeit in X genau dann, wenn M eine Mannigfaltigkeit in Y ist.

Übung 12.3.4.18 (**Tangentialräume durch Karten**). Gegeben X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $M \subset X$ eine Mannigfaltigkeit und (W, φ) eine Karte von M gilt für alle $x \in W$ die Identität

$$\mathrm{T}_{\varphi(x)} M = \mathrm{im}(\mathrm{d}_x \varphi)$$

Übung 12.3.4.19. Gegeben $M \subset X$ eine Mannigfaltigkeit in einem endlichdimensionalen reellen affinen Raum heiße eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ **differenzierbar**, wenn für jede Karte φ von M die Verknüpfung $f \circ \varphi$ differenzierbar ist. Man zeige: Gegeben eine differenzierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ und ein Punkt $p \in M$ und ein Tangentialvektor $v \in \mathrm{T}_p M$ gibt es genau eine reelle Zahl

$$\mathrm{D}_v f$$

mit der Eigenschaft, daß für jede Karte φ von M um p und q den Punkt mit $\varphi(q) = p$ und w den Vektor mit $\mathrm{d}_q \varphi : w \mapsto v$ gilt $\mathrm{D}_v f = (\mathrm{D}_w (f \circ \varphi))(q)$. Diese reelle Zahl heißt die **Richtungsableitung von f in Richtung v**.

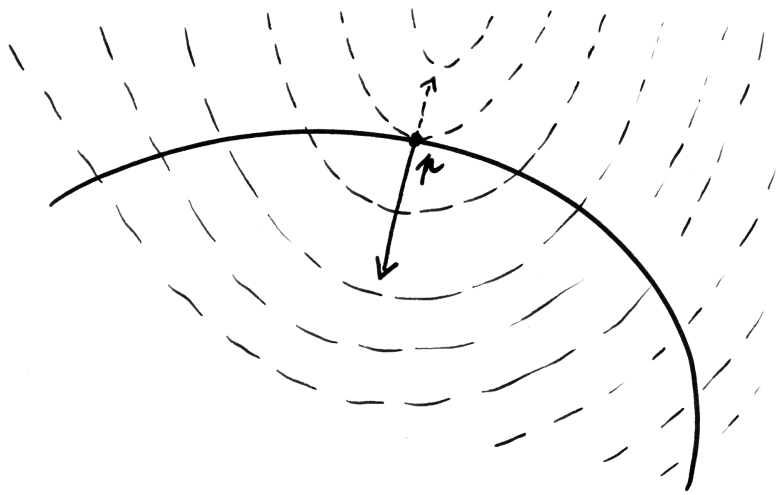
12.3.5 Extrema auf Mannigfaltigkeiten

Satz 12.3.5.1 (Extrema unter Nebenbedingungen). *Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $h : X \Supset U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und $p \in U$ ein Punkt mit $\mathrm{d}_p h$ surjektiv. Wir setzen*

$$M := \{q \in U \mid h(q) = h(p)\}$$

Besitzt dann für eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ihre Einschränkung $f|_M$ ein lokales Extremum bei p, so gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{d}_p f = \lambda_1 \, \mathrm{d}_p h_1 + \ldots + \lambda_m \, \mathrm{d}_p h_m$$



Dies Bild soll den Satz über Extrema mit Nebenbedingungen veranschaulichen für den Fall einer Funktion f auf der Papierebene, hier angedeutet durch einige gestrichelt engezeichnete Niveaulinien, die maximiert werden soll unter einer Nebenbedingung h, hier angedeutet durch die fett eingezeichnete Kurve M der Punkte, bei denen sie erfüllt ist. Es scheint mir anschaulich recht offensichtlich, daß Extrema von f auf M nur an Stellen $p \in M$ zu erwarten sind, an denen der Gradient von f senkrecht steht auf M, also ein Vielfaches des Gradienten von h ist. Im Bild hätten wir etwa grob geschätzt $(\operatorname{grad} f)(p) = -\frac{1}{2}(\operatorname{grad} h)(p)$. Allerdings ist es für reellwertige Funktionen auf der Papierebene streng genommen erst nach der Wahl eines Maßstabs sinnvoll, von Gradienten zu reden, und in allgemeineren Fällen erst nach Wahl eines Skalarprodukts auf dem Richtungsraum, weshalb ich im Satz die koordinatenfreie Formulierung mit Differentialen vorgezogen habe.

12.3.5.2. In der Situation des Satzes nennt man ein lokales Extremum der Restriktion $f|_M$ auch ein **lokales Extremum von f unter den Nebenbedingungen** $h_1(q) = c_1, \ldots, h_m(q) = c_m$ für $c := h(p)$. Die λ_i heißen die **Lagrange'schen Multiplikatoren**. Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ kann man unsere Bedingung dahingehend interpretieren, daß der Gradient der Funktion f in p auf M senkrecht stehen muß, oder auch, daß der Gradient der Funktion f in p eine Linearkombination der Gradienten der Nebenbedingungen sein muß. Die Bedingung „$\mathrm{d}_p h$ surjektiv" hinwiederum kann man dahingehend interpretieren, daß die Gradienten der h_i bei p linear unabhängig sein sollen.

Beweis. Indem wir U verkleinern, dürfen wir nach 12.3.1.18 ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathrm{d}_q h$ surjektiv ist für alle $q \in U$. Nach 12.3.2.20 ist dann $M \subset X$ eine Mannigfaltigkeit. Ist $\varphi : W \to M$ eine Karte von M um p mit $p = \varphi(w)$, so hat $f|_{M \cap U}$ ein lokales Extremum bei p genau dann, wenn $f \circ \varphi$ ein lokales Extremum bei w hat. Nach 12.2.4.16 ist eine notwendige Bedingung dafür $\mathrm{d}_w(f \circ \varphi) = 0$, als da heißt $\mathrm{d}_p f \circ \mathrm{d}_w \varphi = 0$. Andererseits haben wir $h \circ \varphi = 0$, also $\mathrm{d}_p h \circ \mathrm{d}_w \varphi = 0$. Aus Dimensionsgründen bilden die $\mathrm{d}_p h_i$ für $1 \le i \le m$ sogar eine Basis für den Untervektorraum von $\vec{X}^*$ aller Linearformen, die auf dem Bild von $\mathrm{d}_w \varphi$ verschwinden. Verschwindet auch $\mathrm{d}_p f$ auf diesem Teilraum, so muß es folglich als Linearkombination der $\mathrm{d}_p h_i$ geschrieben werden können. $\square$

Beispiel 12.3.5.3. Wir suchen lokale Extrema der Funktion $f : (x, y) \mapsto x + y$ auf dem Einheitskreis $M = S^1$ alias unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$. Diese Nebenbedingung bedeutet, daß die Funktion $h : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ den Wert 1 annehmen muß. Lokale Extrema können nach unserem Satz nur an Stellen $p \in M$ mit $\mathrm{d}_p f = \lambda \, \mathrm{d}_p h$ angenommen werden, also an Stellen $p = (x, y) \in S^1$ mit $(1, 1) = \lambda(2x, 2y)$. Damit kommen nur die beiden Stellen $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ und $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ in Frage. Hier ist offensichtlich die erste ein lokales Minimum und die zweite ein lokales Maximum.

Beispiel 12.3.5.4. Wir suchen lokale Extrema der Funktion $f : (x, y, z) \mapsto ax + by + cz$ auf dem Einheitskreis $M = S^1 \times 0$ in der xy-Ebene, d.h. unter den beiden Nebenbedingungen $h_1(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$ und $h_2(x, y, z) = z = 0$. Lokale Extrema können nach unserem Satz nur an Stellen $p \in M$ angenommen werden, für die es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mathrm{d}_p f = \lambda_1 \, \mathrm{d}_p h_1 + \lambda_2 \, \mathrm{d}_p h_2$, also an Stellen $(x, y, z) \in M$ mit

$$(a, b, c) = \lambda_1(2x, 2y, 0) + \lambda_2(0, 0, 1)$$

Daraus folgt jedoch schnell $\lambda_2 = c$, und unter der zusätzlichen Voraussetzung $(a, b) \neq (0, 0)$ kommen nur die beiden Stellen $\pm(a^2 + b^2)^{-1/2}(a, b, 0)$ in Frage. Wieder ist hier offensichtlich die eine ein lokales Minimum und die andere ein lokales Maximum.

Proposition* 12.3.5.5 (Hinreichende Bedingungen für Extrema). *Seien $U \Subset \mathbb{R}^n$ offen und $h : U \to \mathbb{R}^m$ sowie $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $p \in U$ gegeben mit $\mathrm{d}_p h$ surjektiv und sei $M := \{q \in U \mid h(q) = h(p)\}$. Sei unsere notwendige Bedingung $\mathrm{d}_p f = \lambda_1 \mathrm{d}_p h_1 + \ldots + \lambda_m \mathrm{d}_p h_m$ für ein Extremum der Restriktion $f|_M$ bei p erfüllt und sei*

$$Q := \mathrm{d}_p^{(2)} f - \lambda_1 \mathrm{d}_p^{(2)} h_1 - \ldots - \lambda_m \mathrm{d}_p^{(2)} h_m$$

die quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$, die durch die angegebene Linearkombination von Hesse-Matrizen entsteht. So gilt:

1. *Ist unsere quadratische Form Q positiv definit auf $\ker(\mathrm{d}_p h)$, so hat $f|_M$ bei p ein isoliertes lokales Minimum;*
2. *Ist unsere quadratische Form Q negativ definit auf $\ker(\mathrm{d}_p h)$, so hat $f|_M$ bei p ein isoliertes lokales Maximum;*
3. *Ist unsere quadratische Form Q indefinit auf $\ker(\mathrm{d}_p h)$, so hat $f|_M$ bei p weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.*

Beweis. Wir beginnen wie beim Beweis des Satzes 12.3.5.1 über Extrema unter Nebenbedingungen. Indem wir U verkleinern, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathrm{d}_q h$ surjektiv ist für alle $q \in U$. Nach 12.3.2.20 ist dann $M \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit. Es sei erwähnt, daß $\ker(\mathrm{d}_p h) = \mathrm{T}_p M$ nach 12.3.2.20 der Tangentialraum an unsere Mannigfaltigkeit M im Punkt p ist. Ist $\varphi : W \to M$ eine Karte von M um p mit $p = \varphi(w)$, so hat $f|_{M \cap U}$ ein lokales Extremum bei p genau dann, wenn $f \circ \varphi$ ein lokales Extremum bei w hat. Nach 12.2.4.16 ist eine notwendige Bedingung dafür $\mathrm{d}_w(f \circ \varphi) = 0$, als da heißt $\mathrm{d}_p f \circ \mathrm{d}_w \varphi = 0$, und wir hatten bereits gesehen, wie sich diese Bedingung übersetzt in die Bedingung der Existenz der Lagrange'schen Multiplikatoren. Nun approximiert die polynomiale Abbildung

$$p + \vec{v} \mapsto f(p) + (\mathrm{d}_p f)(\vec{v}) + \frac{1}{2}(\mathrm{d}_p^{(2)} f)(\vec{v})$$

unsere Funktion f bei p bis zu zweiter Ordnung im Sinne von 12.2.3.2. Ebenso approximiert die polynomiale Abbildung

$$w + k \mapsto \varphi(w) + (\mathrm{d}_w \varphi)(k) + \frac{1}{2}(\mathrm{d}_w^{(2)} \varphi)(k)$$

unsere Funktion φ bei w bis zu zweiter Ordnung. Nach 12.2.3.6 approximieren folglich die Anteile vom Grad höchstens Zwei von deren Komposition alias die polynomiale Abbildung

$$w + k \mapsto f(\varphi(w)) + \frac{1}{2}(\mathrm{d}_p^{(2)} f)((\mathrm{d}_w \varphi)(k)) + \frac{1}{2}(\mathrm{d}_p f)((\mathrm{d}_w^{(2)} \varphi)(k))$$

unsere Funktion $f \circ \varphi$ bei w bis zu zweiter Ordnung. Andererseits liefern die Bedingungen $h_i \circ \varphi = h_i(p)$ bei Übergang zu den Approximationen bis zum Grad Zwei bei w die Identitäten $(\mathrm{d}_p^{(2)} h_i)((\mathrm{d}_w \varphi)(k)) + (\mathrm{d}_p h_i)((\mathrm{d}_w^{(2)} \varphi)(k)) = 0$ und damit

$$(\mathrm{d}_p f)((\mathrm{d}_w^{(2)} \varphi)(k)) = -\sum_i \lambda_i (\mathrm{d}_p^{(2)} h_i)((\mathrm{d}_w \varphi)(k))$$

Auf diese Weise können wir die Approximation zur Ordnung Zwei von $f \circ \varphi$ bei w umschreiben zu

$$w + k \mapsto f(\varphi(w)) + \frac{1}{2}(\mathrm{d}_p^{(2)} f)((\mathrm{d}_w \varphi)(k)) - \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i (\mathrm{d}_p^{(2)} h_i)((\mathrm{d}_w \varphi)(k))$$

alias $w + k \mapsto f(\varphi(w)) + \frac{1}{2} Q((\mathrm{d}_w \varphi)(k))$. Wegen unserer Erkenntnis $\mathrm{im}(\mathrm{d}_w \varphi) = \ker(\mathrm{d}_p h)$ aus dem Beweis von 12.3.5.1 folgen unsere Behauptungen damit aus den Resultaten zu Extremwerten ohne Nebenbedingungen 12.2.4.10. □

Übungen

Übung 12.3.5.6. Man bestimme die Extrema der Funktion $f(x, y) = x + y$ auf der Ellipse $x^2 + 2y^2 = 1$. An welchen Stellen werden diese Extrema angenommen?

Übung 12.3.5.7. Man bestimme die Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x + y + z$ auf dem halben Ellipsoid $\{(x, y, z) \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1, z \geq 0\}$.

12.3.6 Markov-Ketten*

12.3.6.1. Hier bespreche ich eine Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes, die eigentlich eher in die lineare Algebra oder Wahrscheinlichkeitstheorie gehört.

12.3.6.2. Gegeben sei eine endliche Menge E, deren Elemente **Zustände** heißen mögen. Gegeben sei weiter eine $(E \times E)$-Matrix Q mit Einträgen in $[0, 1]$ und Spaltensummen Eins, in Formeln eine Abbildung $Q : E^2 \to [0, 1]$, $(i, j) \mapsto Q_{ij}$ mit $\sum_i Q_{ij} = 1$ für alle j. Wir nennen Q_{ij} die **Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand j in den Zustand i** und unsere Forderung $\sum_i Q_{ij} = 1$ für alle j bedeutet, daß „vom Zustand j aus im nächsten Schritt mit Wahrscheinlichkeit Eins wieder einer unserer Zustände erreicht werden soll". Das Datum (E, Q) nennen wir eine **Markov-Kette**. Beginnen wir mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung p auf E, also einer Abbildung $p : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{i \in E} p(i) = 1$, und fassen sie als einen Spaltenvektor auf, so stellt sich nach einem Schritt die Verteilung Qp ein und nach n Schritten die Verteilung $Q^n p$. Wir stellen uns nun die Frage, unter welchen Umständen die Folge der $Q^n p$ für alle p konvergiert, unter welchen Umständen ihr Grenzwert zusätzlich gar nicht von p abhängt, und wie schnell unsere Folge im Zweifelsfall konvergiert.

Beispiel 12.3.6.3. Zu einem endlichen Köcher im Sinne von 4.7.6.2 mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß von jeder seiner Ecken mindestens ein Pfeil ausgeht, erhalten wir die Markov-Kette der „zufälligen Wanderungen in unserem Köcher“ wie folgt: Als Zustände nehmen wir die Ecken des Köchers und denken uns dabei, daß sich ein Wanderer an besagter Ecke befinden möge. In jedem Zeitschritt sucht sich unser Wanderer dann zufällig einen ausgehenden Pfeil aus und wandert auf diesem zur nächsten Ecke. Verfeinern wir unsere Regel dadurch, daß wir jedem Pfeil $i \leftarrow j$ noch eine Wahrscheinlichkeit Q_{ij} zuordnen, mit der er von unserem Wanderer ausgesucht wird, und fassen dafür alle mehrfachen Pfeile zwischen je zwei vorgegebenen Ecken zu einem einfachen Pfeil mit entsprechend höherer Wahrscheinlichkeit zusammen, so sind wir auch schon wieder beim allgemeinen Fall gelandet.

Beispiel 12.3.6.4 (**Urnenmodell von Ehrenfest**). In zwei durch ein Loch verbundenen Kammern befinden sich insgesamt $N \geq 1$ nicht unterscheidbare Teilchen. Wir betrachten den Raum $E = \{0, 1, \ldots, N\}$ aller „Zustände“, wobei der Zustand i bedeuten möge, daß sich i Teilchen in der linken Kammer und die restlichen $N - i$ Teilchen in der rechten Kammer befinden. Als Übergangswahrscheinlichkeiten wählen wir

$$Q_{ij} = \begin{cases} j/N & i = j - 1; \\ (N - j)/N & i = j + 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In jedem Zeitschritt wechselt also genau ein Teilchen die Kammer, und die Wahrscheinlichkeit, daß das ein Teilchen aus einer Kammer mit j Teilchen ist, beträgt genau j/N. In diesem Fall konvergiert die Folge $Q^n p$ nicht für alle p, da sich ja in jeder Kammer immer abwechselnd erst eine gerade und dann wieder eine ungerade Anzahl von Teilchen befindet.

Satz 12.3.6.5 (**Konvergenz endlicher Markov-Ketten**). *Ist bei einer endlichen Markovkette (E, Q) die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen je zwei Zuständen positiv, in Formeln $Q_{ij} > 0 \ \forall i, j$, so gibt es genau eine stabile Verteilung s und für jede Anfangsverteilung p gilt*

$$\lim_{n \to \infty} Q^n p = s$$

Ergänzung 12.3.6.6 (**Bewertung von Seiten im Netz**). Die Bewertung von Seiten im Netz durch Suchmaschinen baut auf der Vorstellung auf, daß ein Surfer auf einer gegebenen Seite jeden der Verweise zu weiteren Seiten mit gleicher Wahrscheinlichkeit anklickt. Damit er nicht bei einer Seite hängenbleiben kann, die auf gar keine weitere Seite verweist, denkt man sich dabei auf jeder Seite zusätzlich einen Verweis angebracht, der einen beim Daraufklicken zu einer zufällig ausgesuchten Seite schickt, und der mit derselben Wahrscheinlichkeit angeklickt

wird wie alle anderen. Die durch diese Markovkette bestimmte stabile Verteilung ist dann die gesuchte Bewertung von Seiten im Netz. Eine Seite ist damit desto höher bewertet, je mehr Seiten darauf verweisen, wobei Verweise von Seiten, die ihrerseits höher bewertet sind, entsprechend stärker gewichtet werden.

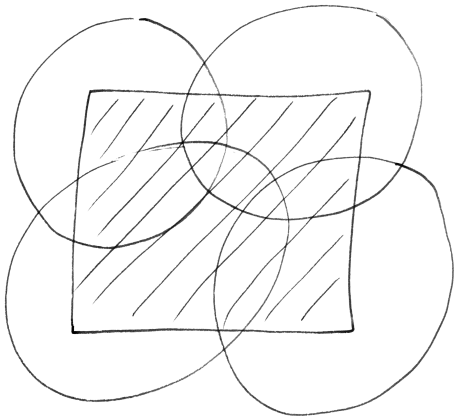
Beweis. Sicher beschreibt die Matrix Q einen Endomorphismus von $\mathrm{Ens}(E, \mathbb{R})$, der jeden Vektor der Standardbasis ins Innere des positiven Quadranten kippt und der die affine Hyperebene $H = \{(x_i)_{i \in E} \mid \sum x_i = 1\}$ auf sich selbst abbildet. Es scheint mir damit anschaulich klar, daß Q eine Kontraktion $Q : H \to H$ definiert und daß der Fixpunkt dieser Kontraktion, dessen Existenz durch den Banach'schen Fixpunktsatz 12.3.1.10 gesichert ist, im Innern des positiven Quadranten $\mathrm{Ens}(E, \mathbb{R}_{>0})$ liegen muß. Um das zu beweisen reicht es zu zeigen, daß Q bezüglich irgendeiner Norm kontrahierend wirkt auf der linearen Hyperebene L, die gegeben wird durch die Gleichung $\sum x_i = 0$. Wir zeigen das bezüglich der Norm $|x| = \sum |x_i|$. Sei δ der kleinste Eintrag von Q. Schreiben wir $Q = \delta U + R$ für U die Matrix mit einer Eins in jedem Eintrag, so hat R nur nichtnegative Einträge. Damit erhalten wir für $x \in L$ unschwer

$$|Qx| = |Rx| = \sum_i \left| \sum_j R_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i,j} R_{ij} |x_j| = \lambda |x|$$

für $\lambda = 1 - n\delta$ die Summe der Einträge von R in einer und jeder Spalte. Also ist $Q : H \to H$ kontrahierend und hat genau einen Fixvektor s, dessen Koordinaten alle positiv sein müssen. Alle anderen Eigenwerte von Q müssen auch Eigenwerte der Einschränkung auf die lineare Ebene L mit der Gleichung $\sum x_i = 0$ sein und sind folglich im Absolutbetrag beschränkt durch unsere Kontraktionskonstante $\lambda = 1 - n\delta$. $\square$

12.4 Oberfläche und Volumen

12.4.1 Überdeckungen kompakter metrischer Räume



Eine Überdeckung eines Quadrats durch vier Kreisscheiben

Definition 12.4.1.1. Eine **Überdeckung** einer Menge X ist ein System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen mit Vereinigung $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Unter einer **Teilüberdeckung** einer Überdeckung $\mathcal{U}$ versteht man ein Teilsystem $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, das auch selbst bereits eine Überdeckung ist.

Definition 12.4.1.2. Eine **offene Überdeckung** eines topologischen Raums ist eine Überdeckung, die aus offenen Teilmengen besteht.

Definition 12.4.1.3. Ein topologischer Raum heißt **kompakt** und manchmal ausführlicher **überdeckungskompakt**, wenn jede offene Überdeckung unseres Raums eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

12.4.1.4 (**Diskussion der Terminologie**). Nennen wir einen topologischen Raum kompakt, so meinen wir a priori überdeckungskompakt. Hausdorffräume mit der Eigenschaft, daß jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt, heißen dahingegen **folgenkompakt**. In der französischen Literatur ist eine abweichende Terminologie üblich, in der unsere überdeckungskompakten topologischen Räume „quasikompakt“ genannt werden und in der diejenigen Räume „kompakt“ heißen, die wir „überdeckungskompakt und Hausdorff“ nennen.

Satz 12.4.1.5 (**Kompaktheit und offene Mengen**). *Ein metrischer Raum ist folgenkompakt genau dann, wenn er überdeckungskompakt ist.*

Vorschau 12.4.1.6. Beispiele für einen folgenkompakten aber nicht überdeckungskompakten Hausdorffraum finden Sie in 15.3.2.12 oder 6.5.4.7. Ein Beispiel für

einen überdeckungskompakten aber nicht folgenkompakten Hausdorffraum ist der „Einheitsball des topologischen Dualraums mit der schwach-*-Topologie der stetigen beschränkten Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in Bezug auf die Norm der gleichmäßigen Konvergenz“. Besitzt in einem überdeckungskompakten topologischen Raum jeder Punkt eine „abzählbare Umgebungsbasis“, so ist er auch folgenkompakt mit demselben Argument, wie wir es im Beweis des Satzes verwenden.

Beweis von Satz 12.4.1.5. Sei X ein metrischer Raum. Ist X nicht folgenkompakt, so finden wir in X eine Folge ohne konvergente Teilfolge. Dann besitzt jeder Punkt von X eine offene Umgebung, die nur endlich viele Folgenglieder enthält, und diese offenen Umgebungen bilden eine offene Überdeckung von X ohne endliche Teilüberdeckung. Das zeigt die eine Richtung. Den Beweis der anderen Richtung beginnen wir mit einem Lemma, das auch für sich genommen oft hilfreich ist.

Lemma 12.4.1.7 (Überdeckungssatz von Lebesgue). *Ist X ein folgenkompakter metrischer Raum und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X, so gibt es $\varepsilon > 0$ derart, daß für alle Punkte $x \in X$ der ε-Ball $\mathrm{B}(x;\varepsilon)$ ganz in einer der überdeckenden offenen Mengen $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist.*

Erster Beweis. Gäbe es kein solches $\varepsilon > 0$, so könnten wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ einen Punkt $x_n \in X$ finden derart, daß $\mathrm{B}(x_n; 1/n)$ in keinem $U \in \mathcal{U}$ enthalten wäre. Durch Übergang zu einer Teilfolge könnten wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich annehmen, daß die Folge der x_n konvergiert, etwa gegen $x \in X$. Nun finden wir jedoch ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$ und dazu $\rho > 0$ mit $\mathrm{B}(x;\rho) \subset U$ und dazu N mit $d(x_N, x) < \rho/2$ und $1/N < \rho/2$, und dann gälte $\mathrm{B}(x_N; 1/N) \subset \mathrm{B}(x_N; \rho/2) \subset \mathrm{B}(x;\rho) \subset U$ im Widerspruch zur Wahl der x_n. $\square$

Zweiter Beweis. Man betrachte die Funktion $f : X \to \mathbb{R}_{>0}$ gegeben durch die Vorschrift

$$f(x) := \sup\{r \leq 1 \mid \text{Es gibt } U \in \mathcal{U} \text{ mit } \mathrm{B}(x;r) \subset U\}$$

Die Dreiecksungleichung liefert $|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)$, insbesondere ist f stetig. Sicher dürfen wir $X \neq \emptyset$ annehmen. Dann nimmt f nach **??** sein Minimum an und jede positive Zahl echt unterhalb dieses Minimums ist ein mögliches ε. $\square$

Um die andere Implikation im Satz zu zeigen, seien nun X folgenkompakt und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Es gilt zu zeigen, daß sie eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wählen wir zu unserer Überdeckung $\mathcal{U}$ ein ε wie im Überdeckungssatz 12.4.1.7, so reicht es auch zu zeigen, daß es eine endliche Teilmenge $E \subset X$ gibt mit

$$X = \bigcup_{x \in E} \mathrm{B}(x;\varepsilon)$$

In der Tat liegt ja der ε-Ball $\mathrm{B}(x;\varepsilon)$ um ein beliebiges $x \in X$ nach Wahl von ε schon in einem der $U \in \mathcal{U}$. Gäbe es aber für ein $\varepsilon > 0$ keine endliche Überdeckung von X durch ε-Bälle, so könnten wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruieren mit $x_n \notin \bigcup_{0\le\nu<n} \mathrm{B}(x_\nu;\varepsilon)$ für alle n, also $d(x_n, x_m) \ge \varepsilon$ für $n \ne m$, und diese Folge könnte keine konvergente Teilfolge haben im Widerspruch zur Annahme. □

12.4.1.8. Sei X eine Menge. Unter einer **Überdeckung einer Teilmenge** $Y \subset X$ durch Teilmengen von X versteht man ein Mengensystem $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $Y \subset \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$. Nach unseren Definitionen ist eine Teilmenge Y eines topologischen Raums X kompakt für die induzierte Topologie genau dann, wenn jede Überdeckung von Y durch offene Teilmengen von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Proposition 12.4.1.9. *In einem Hausdorffraum ist jedes Kompaktum abgeschlossen.*

12.4.1.10. Ausführlicher gesagt ist also eine Teilmenge eines Hausdorffraums, die mit der induzierten Topologie überdeckungskompakt ist, notwendig eine abgeschlossene Teilmenge.

Beweis. Sei $K \subset X$ unser Kompaktum in unserem Hausdorffraum. Es gilt zu zeigen, daß $X\backslash K$ offen ist in X. Gegeben $p \in X\backslash K$ gilt es also, eine Umgebung von p zu finden, die K nicht trifft. Für jedes $q \in K$ finden wir nach Annahme V_q offen um p und U_q offen um q mit $V_q \cap U_q = \emptyset$. Die U_q überdecken K, also gibt es $E \subset K$ endlich mit $K \subset \bigcup_{q\in E} U_q$. Dann ist $V := \bigcap_{q\in E} V_q$ die gesuchte Umgebung von p, die K nicht trifft. □

Lemma 12.4.1.11. *Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist stets kompakt.*

Beweis. Sei X unser kompakter Raum und $A \subset\!\!\!\!\!\!\mathrm{A}\ X$ abgeschlossen. Ist $\mathcal{U}$ ein System von offenen Teilmengen von X, deren Vereinigung A umfaßt, so schließen wir

$$\begin{aligned} A \subset \textstyle\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U \quad &\Rightarrow \quad X = (X\backslash A) \cup \textstyle\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U \\ &\Rightarrow \quad X = (X\backslash A) \cup U_1 \cup \ldots \cup U_k \\ &\Rightarrow \quad A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_k \end{aligned}$$

für geeignete $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$. □

Übungen

Übung 12.4.1.12 (**Endliche Vereinigungen von Kompakta**). Besitzt ein topologischer Raum eine endliche Überdeckung durch kompakte Teilmengen, so ist er bereits selbst kompakt.

Übung 12.4.1.13 (**Nichtleere Schnitte in Kompakta**). Man zeige: Ein topologischer Raum X ist kompakt genau dann, wenn für jedes System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit nichtleeren endlichen Schnitten auch der gesamte Schnitt nicht leer ist, in Formeln $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$.

Ergänzende Übung 12.4.1.14 (**Satz von Dini**). Eine monoton wachsende Folge stetiger reellwertiger Funktionen auf einem kompakten Raum, die punktweise gegen eine stetige Funktion konvergiert, konvergiert sogar gleichmäßig. Hinweis: 12.4.1.13.

Übung 12.4.1.15 (**Bilder von Kompakta**). Man zeige, daß das Bild eines kompakten topologischen Raums unter einer stetigen Abbildung kompakt ist für die Spurtopologie. Insbesondere ist jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten topologischen Raum beschränkt.

Ergänzende Übung 12.4.1.16. Gegeben ein topologischer Raum X mit einer offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ zeige man: Eine Teilmenge Y unseres Raums ist genau dann abgeschlossen, wenn sie mit jeder Teilmenge unserer Überdeckung abgeschlossenen Schnitt hat, in Formeln

$$Y \not\subset X \quad \Leftrightarrow \quad (Y \cap U) \not\subset U \; \forall U \in \mathcal{U}$$

Die fraglichen Schnitte sollen hierbei abgeschlossen sein in U, nicht in X.

12.4.2 Transformationsformel

Definition 12.4.2.1. Seien X ein topologischer Raum und $f : X \to A$ eine Abbildung in eine Menge mit ausgezeichnetem Element $0 \in A$. Der **Träger von** f ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, außerhalb derer die Funktion den Wert 0 annimmt. Man notiert ihn

$$\operatorname{supp} f := \overline{f^{-1}(A \backslash 0)}$$

für englisch und französisch **support**.

Definition 12.4.2.2. Sei X ein topologischer Raum. Die Menge aller stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger bezeichnet man mit $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}(X, \mathbb{R})$ und wir in diesem Skript mit

$$\mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$$

Ich ziehe letztere Notation vor, weil sie besser zur üblichen Notation des „eigentlichen Vorschubs“ paßt. Sie ist jedoch unüblich.

12.4.2.3. Gegeben ein topologischer Raum X ist die Menge $\mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums

aller reellwertigen Funktionen auf X. Das folgt unmittelbar aus Übung 12.4.1.12, nach der endliche Vereinigungen von Kompakta wieder kompakt sind, und aus Übung **??**, nach der Summen und Produkte stetiger reellwertiger Funktionen wieder stetig sind.

Lemma 12.4.2.4 (Fortsetzung durch Null). *Gegeben eine offene Teilmenge eines Hausdorffraums $U \Subset X$ und eine stetige Funktion auf U mit kompaktem Träger $f \in \mathcal{C}_!(U, \mathbb{R})$ ist ihre Fortsetzung durch Null eine stetige Funktion $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$.*

12.4.2.5. Natürlich hat $\tilde{f}$ dann auch kompakten Träger. Bezeichnet $i : U \hookrightarrow X$ die Einbettung, so verwenden wir in der Situation des Lemmas für die Fortsetzung durch Null $f \mapsto \tilde{f}$ die Notation

$$i_! : \mathcal{C}_!(U, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$$

Beweis. Nach 17.6.2.12 ist jedes Kompaktum in einem Hausdorffraum abgeschlossen. Bezeichnet $\operatorname{supp}_U f$ den Träger von $f : U \to \mathbb{R}$, so gilt also $\operatorname{supp}_U f \Subset X$. Damit ist $X = U \cup (X \backslash \operatorname{supp}_U f)$ eine offene Überdeckung von X. Da $\tilde{f}$ auf beiden überdeckenden offenen Mengen stetig ist, ist es wegen der Lokalität der Stetigkeit **??** stetig auf ganz X. □

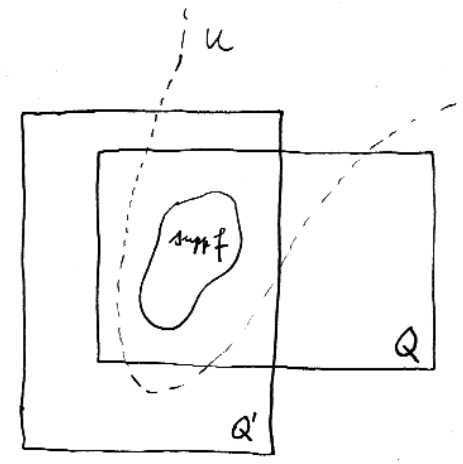


Illustration zur Definition des Integrals stetiger Funktionen mit kompaktem Träger 12.4.2.6. Man prüft ohne Schwierigkeiten, daß die Wahl des kompakten Quaders hier keine Rolle spielt, solange er nur den Träger unserer Funktion umfaßt. Im Bild kommen unter vielen anderen etwa die beiden Quader Q und Q' in Frage.

Definition 12.4.2.6. Gegeben $U \Subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f \in \mathcal{C}_!(U; \mathbb{R})$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger auf U definieren wir das **Integral** $\int_U f$ **von** f **über** U, indem wir f durch Null zu einer stetigen Funktion mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^n$ fortsetzen und diese Fortsetzung integrieren über irgendeinen kompakten Quader, der ihren Träger umfaßt. Für unser Integral vereinbaren wir die Notationen

$$\int_U f = \int_U f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_U f(x)\, \mathrm{d}^n x$$

12.4.2.7. Das so definierte Integral ist offensichtlich linear, $\int f + g = \int f + \int g$ und $\int \lambda f = \lambda \int f$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, sowie monoton, als da heißt $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$. Insbesondere folgt wie im Fall einer Veränderlichen $|\int f| \leq \int |f|$.

Satz 12.4.2.8 (Transformationsformel). *Seien $U, V \Subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $\phi : U \xrightarrow{\sim} V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus. Bezeichne $|\det \mathrm{d}\phi|$ die Abbildung $U \to \mathbb{R}$, $p \mapsto |\det \mathrm{d}_p\phi|$. So gilt für jede stetige Funktion auf V mit kompaktem Träger $f \in \mathcal{C}_!(V, \mathbb{R})$ die Identität*

$$\int_V f = \int_U (f \circ \phi)\, |\det \mathrm{d}\phi|$$

12.4.2.9. Es tut mir leid, daß f vorher immer eine Funktion auf U bezeichnet hat und in der Transformationsformel plötzlich eine Funktion auf V bezeichnet. Diese Inkonsistenz müssen wir in Kauf nehmen, um eine noch gravierendere Inkonsistenz mit unserer bisherigen Notation der Integration durch Substitution in einer Variablen zu vermeiden.

Vorschau 12.4.2.10. Im Rahmen der Lebesgue'schen Integrationstheorie folgern wir in 13.1.8.1 eine weitgehende Verallgemeinerung dieses Satzes. Eine bescheidenere für viele Rechnungen ausreichende Verallgemeinerung liefern die Sätze des folgenden Abschnitts, insbesondere Satz 12.4.5.10 zur Integration mit Integrationskarten.

Beispiele 12.4.2.11. Ist $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine abstandserhaltende Abbildung, also nach 4.1.10.6 die Verknüpfung einer orthogonalen Abbildung mit einer Translation, so liefert die Transformationsformel für jede stetige Funktion mit kompaktem Träger $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Identität $\int f = \int f \circ \phi$. Ist $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Streckung um den Faktor 2, so liefert die Transformationsformel die Identität $\int f = 4 \int f \circ \phi$. Beide Aussagen sollten auch anschaulich unmittelbar einleuchten.

Beispiel 12.4.2.12. Wir betrachten die Polarkoordinatenabbildung

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^2 \backslash (\text{abgeschlossene negative } x\text{-Achse}) \\ & (r\ ,\ \vartheta)^\top & \mapsto & (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)^\top \end{array}$$

Hier lasse man sich nicht dadurch verwirren, daß die Klammern $(\ ,\ )$ einmal ein offenes Intervall und dann wieder Elemente kartesischer Produkte andeuten, die wir anschließend noch zu Spaltenvektoren transponieren. Das Differential der Polarkoordinatenabbildung wird gegeben durch die Jacobi-Matrix

$$\mathrm{d}P = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

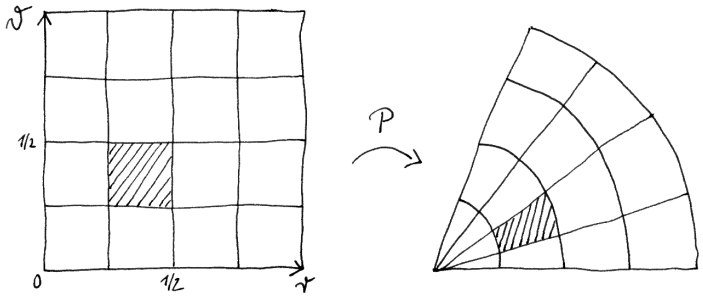


Illustration zur Transformationsformel, insbesondere zu Beispiel 12.4.2.12. Das Integral einer Funktion f über das rechte Kuchenstück kann angenähert werden, indem wir die angedeutete Unterteilung des Integrationsbereichs betrachten, in jedem der unterteilenden Stücke den Funktionswert an einer Stelle mit der Fläche des entsprechenden Stücks multiplizieren, und diese Produkte aufsummieren. Unter der Polarkoordinatenabbildung P entspricht nun die Unterteilung unseres Kuchenstücks einer Unterteilung unseres Quadrats, und die Fläche des Bildes eines Unterquadrats ist in etwa der Betrag der Funktionaldeterminante $|\det P|$ an einer Stelle unseres Unterquadrats multipliziert mit der Fläche besagten Unterquadrats. So wäre etwa die Fläche des schraffierten Teils im Kuchenstück rechts etwas weniger als halb so groß wie die Fläche des schraffierten Unterquadrats links, und $|\det P| = r$ nimmt auf unserem Unterquadrat Werte zwischen $1/4$ und $1/2$ an. Es wird also in etwa dasselbe herauskommen, wenn wir von der Funktion $(f \circ P)|\det P|$ auf unserem Quadrat in jedem der Unterquadrate den Funktionswert an einer Stelle mit der Fläche des entsprechenden Unterquadrats multiplizieren, und diese Produkte aufsummieren. Im Grenzübergang für immer feinere Unterteilungen kommt dann sogar nicht nur in etwa, sondern ganz genau dasselbe heraus. Das ist die anschauliche Bedeutung der Transformationsformel.

mit der Determinante $\det \mathrm{d}P = r$. Beim Bilden des Betrages ändert sich nichts und wir erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} f(P(r,\vartheta))\;r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta$$

für stetige Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ mit kompaktem Träger, der darüber hinaus nicht die abgeschlossene negative x-Achse treffen darf. Oft schreibt man kurz $f(r,\vartheta)$ statt $f(P(r,\vartheta))$ in der Erwartung, daß schon aus der bloßen Bezeichnung der Variablen klar wird, was genau gemeint ist. So ergibt sich dann eine Formel für die Transformation eines Integrals auf Polarkoordinaten, die man als

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta$$

abkürzen mag. Leider erhalten wir besagte Formel vorerst nur für sehr spezielle Funktionen. In der Praxis ist deshalb unser Satz kaum anwendbar. Für die Praxis brauchbare Varianten formulieren und zeigen wir in 12.4.6.2 und 13.1.8.1.

12.4.2.13. Gegeben $U \Subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar nennt man $\det \mathrm{d}\phi$ die **Funktionaldeterminante von** ϕ. Bevor wir den Satz beweisen, wollen wir versuchen, ihn mit Anschauung zu füllen. Wir beschränken uns dazu auf den Fall $n = 2$. Zunächst ist hoffentlich anschaulich klar, daß es für jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine reelle Konstante $c(L) \geq 0$ gibt derart, daß „das Bild unter L eines Flächenstücks U der Fläche $\mathrm{vol}(U)$ die Fläche $\mathrm{vol}(LU) = c(L)\,\mathrm{vol}(U)$ hat“. Unsere Transformationsformel enthält nun, wenn man sie ohne Rücksicht auf die Bedingungen des Satzes mutig auf die konstante Funktion $f = 1$ auf U anwendet und $\phi = L$ linear annimmt, die Erkenntnis

$$c(L) = |\det L|$$

Das sieht man auch anschaulich leicht ein: Zunächst sollte anschaulich klar sein, daß „eine Scherung die Fläche nicht ändert“ und „die Streckung einer Achse die Fläche genau durch Multiplikation mit dem Betrag des Streckfaktors ändert“, so daß also unsere Erkenntnis anschaulich klar ist für lineare Abbildungen L mit Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

Anschaulich klar ist weiter $c(L \circ M) = c(L)c(M)$ und nach der Multiplikationsformel für Determinanten haben wir auch $|\det L \circ M| = |\det L|\;|\det M|$. So rechtfertigen wir dann unsere Erkenntnis $c(L) = |\det L|$ im allgemeinen. Mehr dazu mag man in 3.6.2.6 nachlesen. Das Integral von f erhalten wir nun im Grenzwert, wenn wir V in lauter kleine Flächenstücke V_i zerlegen und die Produkte der

Flächen dieser Flächenstücke mit einem Funktionswert an einem Punkt $y_i \in V_i$ des jeweiligen Flächenstück aufsummieren, in Formeln

$$\int_V f \simeq \sum f(y_i)\,\mathrm{vol}(V_i)$$

Wir betrachten nun die Urbilder $x_i = \phi^{-1}(y_i)$ unserer Punkte y_i und die Zerlegung von U durch die Urbilder $U_i = \phi^{-1}(V_i)$ unserer kleinen Flächenstücke V_i. Bei x_i wird ϕ bis auf Verschiebung gut approximiert durch $\mathrm{d}_{x_i}\phi$, deshalb haben die Bilder $\phi(U_i) = V_i$ dieser Flächenstücke U_i in etwa die Fläche $\mathrm{vol}(V_i) \simeq |\det \mathrm{d}_{x_i}\phi|\,\mathrm{vol}(U_i)$ und wir folgern

$$\int_V f \simeq \sum f(y_i)\,\mathrm{vol}(V_i) \simeq \sum (f\circ\phi)(x_i)\;|\det \mathrm{d}_{x_i}\phi|\,\mathrm{vol}(U_i) \simeq \int_U (f\circ\phi)\;|\det \mathrm{d}\phi|$$

Das beendet unsere anschauliche aber doch recht vage Argumentation und wir kommen nach einem Beispiel zum eigentlichen Beweis.

Beweis. Wir zeigen den Satz durch vollständige Induktion über n. Der Fall $n = 0$ ist unproblematisch und wir behandeln gleich den Fall $n = 1$. Nach 10.3.2.42 kann jede offene Teilmenge $U \Subset \mathbb{R}$ als disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen U_i geschrieben werden. Deren Bilder in V sind wieder Intervalle nach dem Zwischenwertsatz und offen nach dem Umkehrsatz 12.3.1.2. Unsere Funktion f verschwindet außerhalb von endlich vielen der $\phi(U_i)$, da ihr Träger nach Annahme kompakt ist. Wir können folglich ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß U und V bereits offene Intervalle sind. Wir finden dann sicher ein mehrpunktiges kompaktes Intervall $[c, d] \subset V$, das den Träger von f umfaßt. Die Substitutionsregel 10.5.8.1 liefert nun

$$\int_c^d f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x$$

für $a, b \in U$ mit $\phi(a) = c$ und $\phi(b) = d$. Da ϕ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus sein soll, ist ϕ' stetig mit $\phi' \neq 0$ auf U. Wir folgern, daß auf U entweder gilt $\phi' > 0$ oder aber $\phi' < 0$. Im ersten Fall haben wir $a < b$ und $|\phi'| = \phi'$ und die in 12.4.2.8 behauptete Transformationsformel steht bereits da. Im zweiten Fall haben wir $a > b$ und $|\phi'| = -\phi'$ und die beiden dadurch entstehenden Vorzeichen heben sich weg alias

$$\int_U (f\circ\phi)\;|\det \mathrm{d}\phi| = \int_b^a f(\phi(x))|\phi'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x$$

und wir sind wieder fertig. Damit ist der Fall $n = 1$ erledigt. Nehmen wir nun also an, wir hätten $n \geq 2$ und der Satz sei für Integration im $\mathbb{R}^{n-1}$ schon bewiesen. Wir

gehen dann in mehreren Schritten vor.

1. Läßt ϕ die erste Koordinate unverändert, in Formeln $\phi_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1$, so folgt unsere Transformationsformel aus der Induktionsvoraussetzung. Um das zu sehen, betrachten wir für festes $c \in \mathbb{R}$ die Einbettung $i_c : \mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $(x_2, \ldots, x_n) \mapsto (c, x_2, \ldots, x_n)$, setzen $U_c := i_c^{-1}(U)$ sowie $V_c := i_c^{-1}(V)$ und betrachten den induzierten $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\phi_c : U_c \to V_c$, der durch die Identität $i_c \circ \phi_c = \phi \circ i_c$ charakterisiert wird. Unsere Erkenntnisse über die

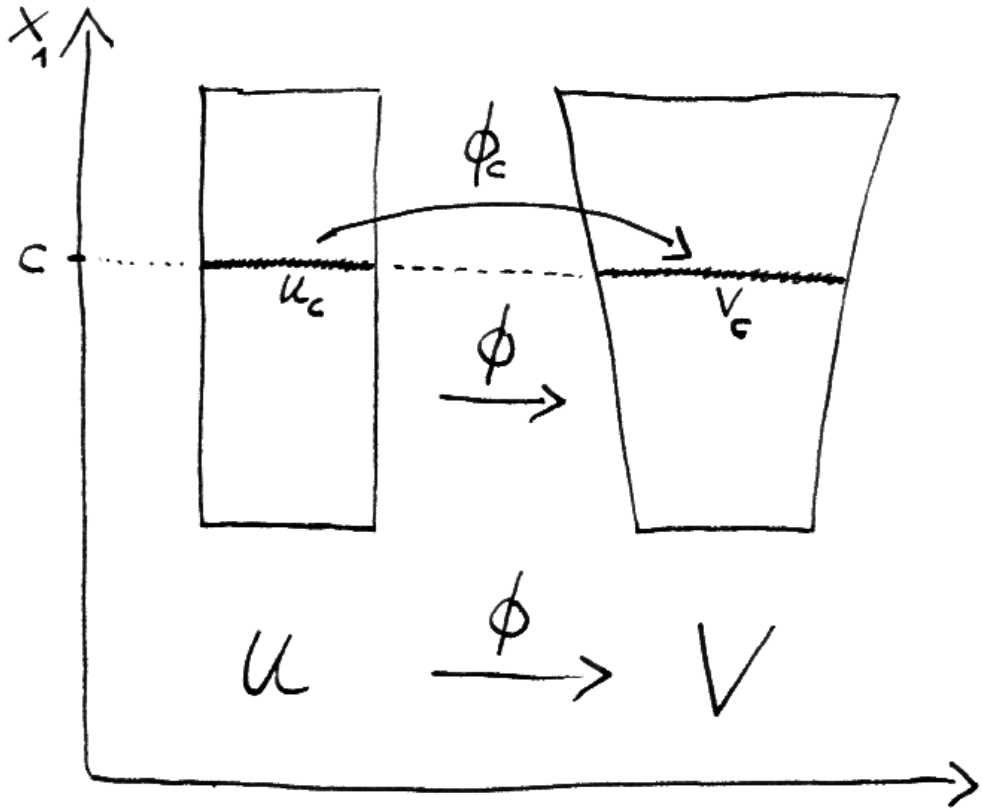


Illustration zum Beweis der Transformationsformel

Determinante von Block-unteren Dreiecksmatrizen zeigen

$$|\det \mathrm{d}_{(x_2,\ldots,x_n)}\phi_c| = |\det \mathrm{d}_{(c,x_2,\ldots,x_n)}\phi|$$

Für $f_c := f \circ i_c : V_c \to \mathbb{R}$ alias $f_c(x_2, \ldots, x_n) = f(c, x_2, \ldots, x_n)$ erhalten wir also nach der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \int f_c &= \int (f_c \circ \phi_c)\, |\det \mathrm{d}\phi_c| \\ &= \int (f \circ \phi)(c, x_2, \ldots, x_n)\, |\det \mathrm{d}_{(c,x_2,\ldots,x_n)}\phi| \end{aligned}$$

Integrieren wir diese Gleichung über alle c, so ergibt sich die Transformationsformel für unseren $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ϕ.

2. Sind $W \xrightarrow{\psi} U \xrightarrow{\phi} V$ zwei $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismen zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und gilt unsere Transformationsformel für ϕ und ψ, so gilt sie auch für $\phi \circ \psi$. In der Tat erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \int f & = & \int (f \circ \phi)\ |\det \mathrm{d}\phi| \\ & = & \int (f \circ \phi \circ \psi)(|\det \mathrm{d}\phi| \circ \psi)\ |\det \mathrm{d}\psi| \\ & = & \int (f \circ \phi \circ \psi)\ |\det \mathrm{d}\,(\phi \circ \psi)| \end{array}$$

Hier gilt die erste Zeile nach der Transformationsformel für ϕ angewandt auf die Funktion f, die zweite nach der Transformationsformel für ψ angewandt auf die Funktion $(f \circ \phi)|\det \mathrm{d}\phi|$ und die dritte nach der Kettenregel

$$\mathrm{d}_p(\phi \circ \psi) = \mathrm{d}_{\psi(p)}\phi \circ \mathrm{d}_p\psi$$

für $p \in W$ mit der Multiplikationsformel $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ für Determinanten.

3. Für ϕ eine Vertauschung der Koordinaten gilt unsere Formel. In der Tat ist so ein ϕ ja linear mit $|\det \mathrm{d}\phi| = 1$ und wir wissen bereits nach 12.2.1.9, daß es bei Mehrfachintegralen nicht auf die Reihenfolge ankommt.

4. Ist eine Komponente von ϕ eine Koordinate auf U, haben wir also in Formeln $\phi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ für geeignete i und j, so gilt unsere Formel. In der Tat finden wir dann eine Darstellung $\phi = \psi \circ \varphi \circ \chi$ derart, daß φ die erste Koordinate unverändert läßt und ψ, χ Koordinatenvertauschungen sind. Für φ gilt dann unser Satz nach Schritt 1, für ψ und χ nach Schritt 3, und damit für ϕ nach Schritt 2.

5. Jeder Punkt $p \in U$ besitzt eine offene Umgebung U_p derart, daß unsere Transformationsformel gilt für die Restriktion von ϕ auf U_p. In der Tat finden wir zunächst ein i derart, daß gilt $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}(p) \neq 0$, und dann gibt es nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung U_p von p derart, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \psi : & U & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (\phi_i(x_1, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) \end{array}$$

einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus von U_p auf eine offene Teilmenge $W_p := \psi(U_p) \Subset \mathbb{R}^n$ induziert. Wir bezeichnen das Bild von U_p unter ϕ mit $V_p := \phi(U_p) \Subset \mathbb{R}^n$ und erhalten ein kommutatives Diagramm von $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismen

$$\begin{tikzcd} U_p \arrow[rr, "\psi", "\sim"'] \arrow[dr, "\phi", "\sim"'] & & W_p \arrow[dl, "\phi\psi^{-1}", "\sim"'] \\ & V_p & \end{tikzcd}$$

Die i-te Komponente der Abbildung $\phi\psi^{-1}$ ist dann die erste Koordinate

$$(\phi\psi^{-1})_i\,(y_1,\ldots,y_n) = y_1$$

Für beide Abbildungen ψ und $(\phi\psi^{-1})$ gilt also nach Schritt 4 unsere Transformationsformel, mithin gilt sie nach Schritt 2 auch für ihre Verknüpfung, als da heißt für die Restriktion $\phi : U_p \xrightarrow{\sim} V_p$ von ϕ auf U_p. Hier ist im übrigen die Stelle im Beweis, die uns daran hindert, unsere Induktion mit dem Trivialfall $n = 0$ zu beginnen: Im Fall $n = 1$ können wir nämlich Schritt 4 auf ψ nicht anwenden, da in diesem Fall keine Komponente von ψ eine Koordinate wäre.

6. Wir behandeln nun den allgemeinen Fall. Sei $f \in \mathcal{C}_!(V,\mathbb{R})$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Für $p \in U$ wählen wir U_p wie in Schritt 5 und setzen wieder $V_p = \phi(U_p)$. Da $(\operatorname{supp} f)$ kompakt ist, finden wir eine endliche Teilmenge $E \subset U$ mit $(\operatorname{supp} f) \subset \bigcup_{p\in E} V_p$. Jetzt benutzen wir das im Anschluß formulierte und bewiesene technische Lemma 12.4.2.14 zur „Teilung der Eins“, wählen für unsere endliche Überdeckung von $(\operatorname{supp} f)$ durch die V_p mit $p \in E$ eine angepaßte Teilung der Eins α_p und schreiben

$$f = \sum_{p\in E} \alpha_p f$$

Die Summanden $\alpha_p f$ sind dann stetig mit kompaktem in V_p enthaltenen Träger. Nach der Wahl der V_p haben wir nun $\int \alpha_p f = \int ((\alpha_p f)\circ\phi)\ |\det \mathrm{d}\phi|$ für alle $p \in E$. Addieren wir diese Gleichungen, so ergibt sich wie gewünscht

$$\int f = \int (f\circ\phi)\ |\det \mathrm{d}\phi| \qquad \square$$

Lemma 12.4.2.14 (Teilung der Eins). *Sind $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $V_1,\ldots,V_r \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subset \bigcup V_i$, so gibt es stetige Funktionen $\alpha_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit kompaktem, jeweils in V_i enthaltenen Träger $\alpha_i \in \mathcal{C}_!(V_i,[0,1])$ derart, daß gilt*

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x) = 1 \quad \forall x \in K$$

12.4.2.15. Eine derartige Familie von Funktionen α_i heißt eine an die gegebene Überdeckung von K angepaßte **Teilung der Eins**.

Beweis. Wir wählen für jedes $x \in K$ ein $j(x)$ mit $x \in V_{j(x)}$ und eine stetige Funktion $\varphi_x : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ mit kompaktem, in $V_{j(x)}$ enthaltenem Träger, die bei x nicht verschwindet, in Formeln $\varphi_x(x) > 0$. Die $N_x := \varphi_x^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$ sind dann

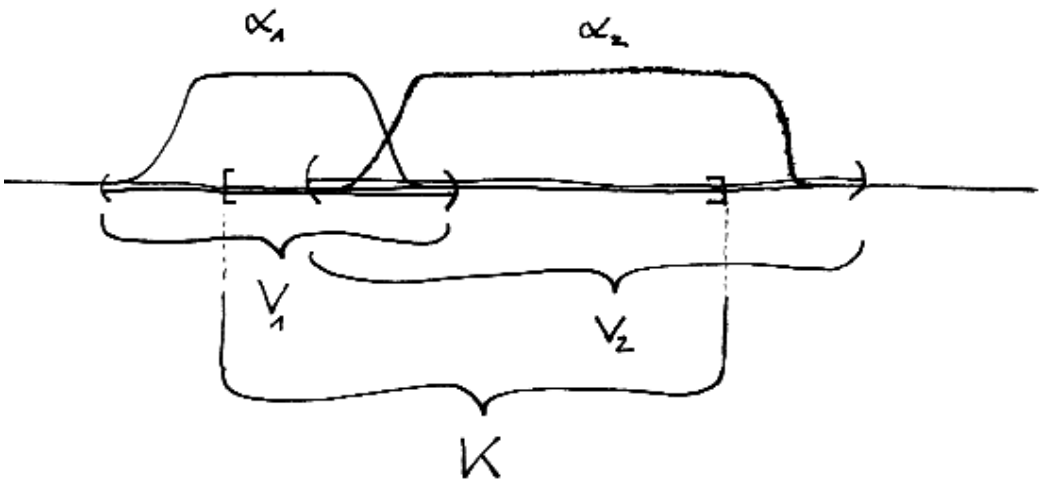


Illustration einer Teilung der Eins im Fall einer Überdeckung eines kompakten Intervalls $K \subset \mathbb{R}$ durch zwei offene Teilmengen.

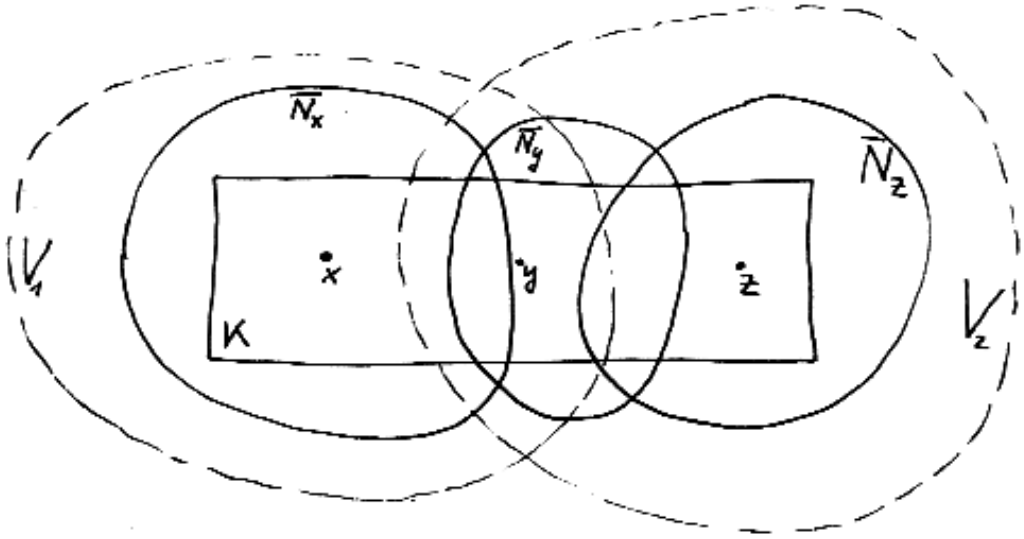


Illustration einiger Mengen, die bei unserer Konstruktion einer Teilung der Eins eine Rolle spielen, im Fall einer Überdeckung eines kompakten Quaders $K \subset \mathbb{R}^2$ durch zwei offene Teilmengen.

offen in $\mathbb{R}^n$ und überdecken K und wir haben $\overline{N}_x \subset V_{j(x)}$. Da K kompakt ist, finden wir $E \subset K$ endlich mit $K \subset \bigcup_{x \in E} N_x$. Dann bilden wir

$$\psi := \sum_{x \in E} \varphi_x$$

Diese Funktion ist stetig auf ganz $\mathbb{R}^n$, nimmt auf $N := \bigcup_{x \in E} N_x$ positive Werte an, und verschwindet außerhalb von N. Nun betrachten wir für jedes $x \in E$ auf der offenen Menge N die stetige Funktion $\psi_x = \varphi_x/\psi$. Natürlich gilt $\sum_{x \in E} \psi_x(z) = 1$ nicht nur für alle $z \in K$, sondern sogar für alle $z \in N$, und ψ_x verschwindet außerhalb von N_x. Als nächstes konstruieren wir eine stetige Funktion $\beta : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, die auf K konstant Eins ist und deren Träger in N enthalten ist. Ist zum Beispiel m das Minimum von ψ auf K, so erhalten wir ein mögliches β, indem wir setzen $\beta = h \circ \psi$ für $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $h|_{[m,\infty)} = 1$ und $h|_{(-\infty,m/2]} = 0$. Dann setzen wir schließlich

$$\alpha_i := \sum_{j(x)=i} \beta \psi_x$$

Diese Funktionen sind zwar a priori nur auf N definiert, aber da $\mathbb{R}^n$ durch N und das Komplement des Trägers von β überdeckt wird, lassen sie sich stetig durch Null auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortsetzen, und diese Fortsetzungen haben dann offensichtlich die gewünschten Eigenschaften. □

Ergänzung 12.4.2.16 (**Glatte Teilung der Eins**). Im vorherigen Lemma können die Funktionen α_i sogar **glatt**, als da heißt beliebig gemischt partiell differenzierbar gewählt werden. Um das zu sehen, sind nur wenige Zusatzüberlegungen von Nöten. Aus 10.5.4.15 kennen wir ja eine glatte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf der negativen Halbgeraden verschwindet und auf der echt positiven Halbgeraden positiv ist. Dann ist das Produkt $f(t)f(1-t)$ eine von Null verschiedene nichtnegative glatte Funktion mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}$. Man erhält von Null verschiedene nichtnegative glatte Funktionen mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^n$, indem man von Null verschiedene nichtnegative glatte Funktionen mit kompaktem Träger in den einzelnen Koordinaten nimmt und das Produkt bildet. So sehen wir, daß die φ_x im vorhergehenden Beweis sogar glatt gewählt werden können. Damit sind dann auch ψ und die ψ_x glatt. Wählen wir zusätzlich die Funktion h glatt, bis auf Reskalierung könnte man für h etwa das Integral einer von Null verschiedenen nichtnegativen glatten Funktion mit kompaktem Träger nehmen, so liefert die Konstruktion aus dem vorhergehenden Beweis sogar eine glatte Teilung der Eins.

Übungen

Übung 12.4.2.17. Man zeige, daß die Funktionaldeterminante der Kugelkoordinatenabbildung K aus 12.3.2.3 gegeben wird durch $\det \mathrm{d}K = r^2 \sin \vartheta$. Salopp

gesprochen transformieren sich also Volumenintegrale in Kugelkoordinaten vermittels der Regel

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r^2 \sin\vartheta \;\; \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta$$

12.4.3 Integration über Mannigfaltigkeiten

Satz 12.4.3.1 (**Integration über Mannigfaltigkeiten**). *Für jede k-Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es genau eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung*

$$\int_M : \mathcal{C}_!(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

derart, daß für jede Karte $\varphi : W \to M$ und jede Funktion $f \in \mathcal{C}_!(M, \mathbb{R})$ mit Träger im Bild besagter Karte $\operatorname{supp} f \subset \varphi(W)$ *gilt*

$$\int_M f = \int_W f(\varphi(x)) \sqrt{\det\,(\mathrm{d}_x\varphi)^\top (\mathrm{d}_x\varphi)} \;\; \mathrm{d}^k x$$

12.4.3.2. Für unser Integral einer Funktion f mit kompaktem Träger über eine Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ findet man in der Literatur auch die Notationen

$$\int_M f = \int_M f \;\; \mathrm{d}\sigma = \int_M f \;\; \mathrm{dS} = \int_M f \;\; \mathrm{do} = \int_M f \;\; \mathrm{dO} = \int_M f \;\; \mathrm{dvol}$$

Sie appellieren an unsere Anschauung für den zwei- oder dreidimensionalen Fall, σ und S stehen für „surface“ und o und O für „Oberfläche“ und vol für „Volumen“. Die obige Konstruktion wird auch als **Flächenintegral** bezeichnet. Im Spezialfall $k = n$ einer n-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ alias einer offenen Teilmenge erhalten wir unser Integral $\int_M f(x)\,\mathrm{d}^n x$ aus 12.4.2.6 zurück.

12.4.3.3 (**Einordnung des vorstehenden Integralbegriffs**). Die hier und im folgenden entwickelte Integrationstheorie ist insofern nützlich, als sie korrekte Definitionen und vollständige Beweise bis hin zum Satz von Stokes erlaubt. Sie erlaubt auch eine formale Rechtfertigung vieler expliziter Rechnungen, ist im Vergleich zur Lebesgue'schen Integrationstheorie 13.1 aber dennoch recht unbeholfen. Bevor ich den obigen Satz beweise, will ich erst einmal versuchen, ihn zu motivieren und den darin erklärten Integralbegriff mit Anschauung zu füllen.

Beispiel 12.4.3.4 (**Bezug unseres Flächenintegrals zum Kurvenintegral**). Ist $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ injektiv und stetig differenzierbar mit nirgends verschwindender Ableitung $\varphi'(t) \neq 0\ \forall t$, so ist das Bild $M := \varphi(a, b)$ eine 1-Mannigfaltigkeit und das Integral einer Funktion $f \in \mathcal{C}_!(M; \mathbb{R})$ über M ist genau das Kurvenintegral der durch Null auf $\varphi([a, b])$ fortgesetzten Funktion f längs der Kurve φ im Sinne von 10.7.1.23.

12.4.3.5. Hat M die Dimension k, so haben wir $\mathrm{d}_x\varphi \in \mathrm{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$ und das Produkt $(\mathrm{d}_x\varphi)^\top\ (\mathrm{d}_x\varphi)$ dieser Matrix mit ihrer Transponierten ist folglich eine $(k \times k)$-Matrix. Diese sogenannte **Gram'sche Matrix** kann aufgefaßt werden als die Matrix aller Skalarprodukte zwischen Spaltenvektoren von $\mathrm{d}_x\varphi$. Sie ist nach 4.2.3.34 insbesondere positiv semidefinit und hat damit eine nichtnegative Determinante. Gegeben eine nicht notwendig quadratische Matrix V mit Spaltenvektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ definieren wir ganz allgemein eine reelle Zahl

$$\operatorname{vol} V = \operatorname{vol}(v_1| \ldots |v_k) := \sqrt{\det(V^\top\ V)} = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j\rangle)}$$

und nennen sie das k**-dimensionale Volumen** des von den Vektoren v_i aufgespannten Parallelpipeds. Die Wurzel aus der Determinante der Gram'schen Matrix können wir mit dieser Notation auch kürzer schreiben als

$$\sqrt{\det\ (\mathrm{d}_x\varphi)^\top (\mathrm{d}_x\varphi)} = \operatorname{vol}(\mathrm{d}_x\varphi)$$

Im Fall $k = 1$ ist das eindimensionale Volumen eines Vektors nach dieser Definition schlicht seine Länge. Im Fall $k = 2$ bedeutet das zweidimensionale Volumen eines Paars von Vektoren v, w die Fläche des von ihnen aufgespannten Parallelogramms mit den Ecken $0, v, w$ und $v + w$. Um die Bezeichnung „Volumen" für die Zahl $\operatorname{vol}(v_1| \ldots |v_k)$ im Allgemeinen zu rechtfertigen, beachten wir:

1. Es gilt $\operatorname{vol}(v_0|v_1| \ldots |v_k) = \operatorname{vol}(v_1| \ldots |v_k)$ falls v_0 die Länge 1 hat und senkrecht steht auf allen anderen v_i.

2. Im Fall $k = n$ haben wir $\operatorname{vol}(v_1| \ldots |v_n) = |\det(v_1| \ldots |v_n)|$. In der Tat, bezeichnet V die in diesem Fall quadratische Matrix mit Spalten v_i, so gilt nach dem Multiplikationssatz für Determinanten $\det(V^\top V) = (\det V)^2$.

Auf diese Weise kann unsere anschauliche Interpretation der Zahl $\operatorname{vol}(v_1| \ldots |v_k)$ heuristisch auf unsere anschauliche Interpretation der Determinante in 12.4.2.13 und 3.6.2.6 zurückgeführt werden: Die Fläche eines Parallelogramms im Raum sollte eben das Volumen des Körpers sein, der entsteht, man besagtes Parallelogramm „zu einem Toast der Dicke Eins verdickt".

12.4.3.6. Wir wollen nun auch unsere Definition des Integrals anschaulich rechtfertigen. Sei dazu $Q := [a, b] \times [c, d]$ ein kompaktes Rechteck und $\varphi : Q \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $f : \varphi(Q) \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten für $r \geq 1$ die äquidistanten Unterteilungen $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = b$, $c = c_0 < c_1 < \ldots < c_r = d$ der Kanten von Q und bezeichnen mit $q_{i,j} = (a_i, c_j)$ die Gitterpunkte im so gegebenen Raster auf Q. Bezeichne weiter $p_{i,j} = \varphi(q_{i,j})$ die Bilder dieser Gitterpunkte unter φ. Damit definieren wir die r-te **Riemannsumme** $S^r_\varphi(f)$ durch die Formel

$$S^r_\varphi(f) = \sum_{i,j=0}^{r-1} f(p_{i,j}) \operatorname{vol}(p_{i+1,j} - p_{i,j}|\ p_{i,j+1} - p_{i,j})$$

Lemma 12.4.3.7. *Seien $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein kompaktes Rechteck und $\varphi : Q \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. So gilt für jede stetige Funktion $f : \varphi(Q) \to \mathbb{R}$ mit unseren eben definierten Riemannsummen*

$$\int_Q f(\varphi(x)) \operatorname{vol}(\mathrm{d}_x\varphi)\, \mathrm{d}^2x = \lim_{r\to\infty} S^r_\varphi(f)$$

Ergänzung 12.4.3.8. Eine vielleicht noch anschaulichere Variante liefert der Mittelwert von Riemannsummen $(S^r_\varphi(f) + S^r_{\varphi\circ(-1)}(f))/2$ mit $\varphi\circ(-1) : (-Q) \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $x \mapsto \varphi(-x)$. Dieser Mittelwert ist nämlich genau die Summe

$$\sum_{i,j=0}^{r-1} f(p_{i,j})\Delta(p_{i,j}, p_{i+1,j}, p_{i,j+1}) + \sum_{i,j=1}^{r} f(p_{i,j})\Delta(p_{i,j}, p_{i-1,j}, p_{i,j-1})$$

mit der Notation $\Delta(p, t, s)$ für die Fläche des Dreiecks mit Ecken $p, t, s \in \mathbb{R}^n$. Aus unserem Lemma folgt unmittelbar, daß auch dieser Mittelwert von Riemannsummen gegen das Integral strebt.

Beweis. Um Indizes zu vermeiden bezeichnen wir die Koordinaten auf $\mathbb{R}^2$ mit x, y und schreiben φ_x, φ_y für die Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix von φ. Die linke Seite ist per definitionem das Integral $\int_Q (f\circ\varphi)\ \operatorname{vol}(\varphi_x|\varphi_y)$. Dies Integral können wir nach 12.2.1.8 schreiben als den Grenzwert für $r \to \infty$ gewisser Riemannsummen, die wir der Übersichtlichkeit halber mit $T^r = T^r_\varphi(f)$ abkürzen wollen mit T wie „tangential“ und die gegeben werden durch

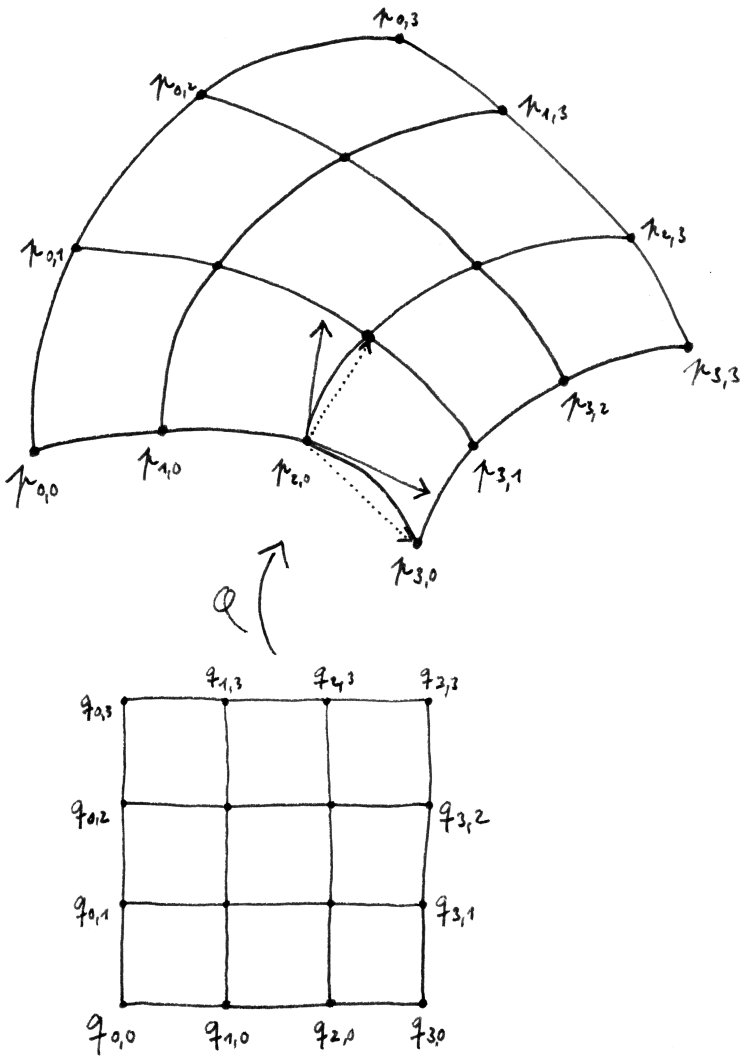
$$T^r = \sum_{i,j=0}^{r-1} f(\varphi(q_{i,j}))\ \operatorname{vol}\left(\varphi_x(q_{i,j})|\varphi_y(q_{i,j})\right)\ \frac{\operatorname{vol} Q}{r^2}$$

für $\operatorname{vol} Q$ die Fläche unseres Rechtecks Q und damit $(\operatorname{vol} Q)/r^2$ die Fläche der kleinen rechteckigen Felder $Q_{i,j} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$. Nun ist φ_x gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum Q. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $R > 0$ derart, daß gilt $\|\varphi_x(p) - \varphi_x(q)\| \le \varepsilon$, wann immer p und q im selben kleinen rechteckigen Feld für eine Unterteilung mit $r \ge R$ liegen. Jetzt erklären wir die Vektoren $\varepsilon_{i,j}(r)$ durch die Identität

$$p_{i+1,j} - p_{i,j} = \frac{b-a}{r}\left(\varphi_x(q_{i,j}) + \varepsilon_{i,j}(r)\right)$$

Mit dem Schrankensatz 10.7.1.10 folgt unter der Voraussetzung $r \ge R$ die Abschätzung $\|\varepsilon_{i,j}(r)\| \le \varepsilon$. Eine analoge Abschätzung erhalten wir für $p_{i,j+1} - p_{i,j}$. Jetzt setzen wir diese Darstellungen in S^r ein und überlassen es dem Leser, hieraus zu folgern, daß gilt

$$\lim_{r\to\infty}(S^r - T^r) = 0$$



Die gepunktelten Pfeile stellen die Vektoren $p_{3,0} - p_{2,0}$ und $p_{2,1} - p_{2,0}$ dar, die Fläche des durch sie bestimmten Parallelogramms geht in die Riemannsumme S_M^3 ein. Die durchgezogenen Pfeile stellen die Vektoren $\varphi_x(q_{2,0})$ und $\varphi_y(q_{2,0})$ dar, die Fläche des durch sie bestimmten Parallelogramms geht entsprechend in die Riemannsumme S_Q^3 ein. Beim Übergang zu immer feineren Rastern kommen wir zum selben Grenzwert, wie im Beweis von 12.4.3.7 ausgeführt wird.

Da aber die Folge T^r nach 12.2.1.8 gegen unser Integral $\int_Q$ im Lemma konvergiert, muß dasselbe auch für die Folge S^r gelten. $\square$

Beweis für Satz 12.4.3.1, Integration über Mannigfaltigkeiten. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Der Träger $\operatorname{supp} f$ unserer Funktion f besitzt als Kompaktum eine endliche Überdeckung durch Bilder von Karten (W_i, φ_i). Nach 12.4.2.14 existiert eine an diese Überdeckung von $\operatorname{supp} f$ angepaßte Teilung der Eins α_i. Dann gilt $f = \sum_i \alpha_i f$, und da unsere Bedingung bereits die Integrale der Summanden festlegt, legt die ebenfalls geforderte Linearität auch das Integral von f fest und wir haben notwendig

$$\int_M f = \sum_i \int_M \alpha_i f = \sum_i \int_{W_i} \left((\alpha_i f) \circ \varphi_i\right)(x) \operatorname{vol}(\mathrm{d}_x \varphi_i)\, \mathrm{d}^k x$$

Als nächstes zeigen wir, daß die rechte Seite nicht von den getroffenen Wahlen abhängt. Sei also eine weitere endliche offene Überdeckung von $\operatorname{supp} f$ durch die Bilder endlich vieler Karten (V_j, ψ_j) gegeben sowie eine daran angepaßte Teilung der Eins β_j. Wir behaupten die Gleichheit

$$\sum_i \int_{W_i} ((\alpha_i f) \circ \varphi_i)(x) \operatorname{vol}(\mathrm{d}_x \varphi_i)\, \mathrm{d}^k x = \sum_j \int_{V_j} ((\beta_j f) \circ \psi_j)(x) \operatorname{vol}(\mathrm{d}_x \psi_j)\, \mathrm{d}^k x$$

Sie ist aufgrund der Linearität all dieser Integrale äquivalent zur Gleichheit

$$\sum_{i,j} \int_{W_i} ((\beta_j \alpha_i f) \circ \varphi_i)(x) \operatorname{vol}(\mathrm{d}_x \varphi_i)\, \mathrm{d}^k x = \sum_{i,j} \int_{V_j} ((\beta_j \alpha_i f) \circ \psi_j)(x) \operatorname{vol}(\mathrm{d}_x \psi_j)\, \mathrm{d}^k x$$

und folgt, wenn wir die Gleichheit aller Summanden zeigen. Hier haben nun die Funktionen $\beta_j \alpha_i f$ Träger im Schnitt $\varphi_i(W_i) \cap \psi_j(V_j)$. Wir können also die Indizes weglassen und müssen nur für jede Funktion $h \in \mathcal{C}_!(M, \mathbb{R})$, deren Träger im Bild zweier Karten (W, φ) und (V, ψ) liegt, die Identität

$$\int_W h(\varphi(x)) \operatorname{vol}(\mathrm{d}_x \varphi)\, \mathrm{d}^k x = \int_V h(\psi(x)) \operatorname{vol}(\mathrm{d}_x \psi)\, \mathrm{d}^k x$$

zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $\varphi(W) = \psi(V)$ annehmen. Der Kartenwechsel ist nach 12.3.4.13 ein Diffeomorphismus $\kappa := \psi^{-1} \circ \varphi : W \xrightarrow{\sim} V$ mit $\psi \circ \kappa = \varphi : W \to M$. Es folgt $f(\varphi(x)) = f(\psi(\kappa(x)))$ und $\mathrm{d}_x \varphi = \mathrm{d}_{\kappa(x)} \psi \circ \mathrm{d}_x \kappa$. Wir erhalten mit der Multiplikativität der Determinante also

$$\operatorname{vol}(\mathrm{d}_x \varphi) = |\det \mathrm{d}_x \kappa| \operatorname{vol}(\mathrm{d}_{\kappa(x)} \psi)$$

und folgern die behauptete Gleichheit der Integrale aus der Transformationsformel, angewandt auf die Funktion $h \circ \psi$. Damit haben wir gezeigt, daß jede Überdeckung des Trägers unserer Funktion f durch Bilder von Karten und jede zugehörige Teilung der Eins in der Formel oben dieselbe Summe liefert, die wir

damit als unser $\int_M f$ erklären können. Daß die so erklärte Abbildung $f \mapsto \int_M f$ dann auch $\mathbb{R}$-linear ist und die geforderte Eigenschaft für Funktionen mit Träger im Bild einer Karte hat, folgt unmittelbar. $\square$

Übungen

Übung 12.4.3.9. Sind $M \subset \mathbb{R}^m$ sowie $N \subset \mathbb{R}^n$ Mannigfaltigkeiten und $f : M \to \mathbb{R}$ sowie $g : N \to \mathbb{R}$ kompakt getragene stetige Funktionen, so ist auch die Funktion $f \boxtimes g : M \times N \to \mathbb{R}$ kompakt getragen und stetig und es gilt

$$\int_{M \times N} f \boxtimes g = \left(\int_M f\right)\left(\int_N g\right)$$

12.4.4 Minkowskidimension

12.4.4.1. Wir verwenden die Minkowskidimension nur als Hilfsmittel zum Nachweis der Unabhängigkeit des Integrals von den bei seiner Berechnung verwendeten Integrationskarten im Kontext der Integration über Mannigfaltigkeiten und die etwas allgemeineren Fastfaltigkeiten. Sie ist aber auch unabhängig von dieser Anwendung ein interessantes Konzept und insbesondere für das Studium sogenannter Fraktale relevant.

12.4.4.2. Gegeben ein metrischer Raum X und $\rho > 0$ bezeichne $N_\rho(X)$ die Zahl der offenen Bälle vom Radius ρ, die man mindestens braucht, um X zu überdecken. Das Infimum aller $k \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^k N_\rho(X) = 0$$

heißt die **Minkowski-Dimension von** X. Wir notieren sie $\operatorname{mdim}(X)$.

Beispiele 12.4.4.3 (**Minkowskidimension kompakter Quader und ihrer Ränder**). Für die Minkowskidimension eines kompakten Quaders $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Inneren $Q^\circ \neq \emptyset$ erhalten wir $\operatorname{mdim}(Q) = n$. Für seinen Rand erhalten wir dahingegen $\operatorname{mdim}(\partial Q) < n$. Wegen der Äquivalenz von Normen ist es in diesem Zusammenhang unerheblich, welche Norm wir verwenden, um $\mathbb{R}^n$ mit einer Metrik zu versehen.

12.4.4.4 (**Minkowskidimension von Vereinigungen**). Gegeben eine endliche Überdeckung $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ eines metrischen Raums X gilt offensichtlich

$$\operatorname{mdim}(X) = \max\{\operatorname{mdim}(X_i) \mid 1 \leq i \leq r\}$$

Lemma 12.4.4.5 (**Minkowskidimension von Bildmengen**). *Sei $A \subset \mathbb{R}^m$ halboffen, kompakt und konvex. Ist $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so gilt für jede Teilmenge $T \subset A$ die Abschätzung*

$$\operatorname{mdim}(\varphi(T)) \leq \operatorname{mdim}(T)$$

Beweis. Da wir A kompakt annehmen, gibt es eine obere Schranke C für die Operatornorm der Differentiale $\mathrm{d}_p\varphi$ mit $p \in A$. Aus dem Schrankensatz folgt nun $\varphi(\mathrm{B}(p;\rho) \cap A) \subset \mathrm{B}(\varphi(p); C\rho)$ und damit $N_{C\rho}(\varphi(T)) \leq N_\rho(T)$. Daraus aber ergibt sich die Behauptung sofort. □

12.4.5 Integration über Fastfaltigkeiten

Definition 12.4.5.1. Gegeben ein topologischer Raum X und darin eine Teilmenge $T \subset X$ gibt es eine größte offene Teilmenge

$$\mathrm{Inn}_X(T) = \mathrm{Inn}(T) = T^\circ := \bigcup_{U \subset T,\, U \Subset X} U$$

von X, die in T enthalten ist, nämlich die Vereinigung aller in T enthaltenen offenen Teilmengen von X. Diese Menge $\mathrm{Inn}_X(T)$ heißt der **offene Kern** oder auch das **Innere** von T in X. Das Komplement

$$\partial T = \partial_X T := \bar{T} \backslash T^\circ$$

des Inneren von T in X im Abschluß von T in X heißt der **Rand von** T **in** X.

Beispiele 12.4.5.2. Für jeden topologischen Raum X gilt $\mathrm{Inn}_X(X) = X$. Gegeben $a \leq b$ reelle Zahlen gilt $\mathrm{Inn}_{\mathbb{R}}([a,b]) = (a,b)$ und $\mathrm{Inn}_{[a,b]}([a,b]) = [a,b]$.

Definition 12.4.5.3. Sei X ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum. Unter einer k**-Integrationskarte nach** X verstehen wir ein Paar (Q, φ) bestehend aus einer Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}^k$, die dargestellt werden kann als eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen kompakten Quadern mit nichtleerem Inneren, und einer stetig differenzierbaren Abbildung $\varphi : Q \to X$ mit $\varphi(Q^\circ) \cap \varphi(\partial Q) = \emptyset$ und $\varphi|_{Q^\circ}$ injektiv und $\mathrm{d}_p\varphi$ injektiv für alle $p \in Q^\circ$.

12.4.5.4. Wir erinnern aus 17.6.2.12, daß in einem Hausdorffraum jedes Kompaktum abgeschlossen ist. Wir erinnern aus 12.4.1.15, daß Bilder von Kompakta unter stetigen Abbildungen wieder kompakt sind. Wir erinnern aus **??**, daß jede abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums kompakt ist.

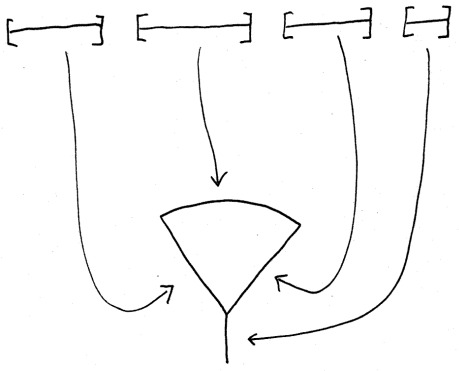
12.4.5.5 (**Einschränkung von Integrationskarten zu Karten**). Gegeben eine Integrationskarte (Q, φ) ist $\varphi(Q^\circ)$ eine Mannigfaltigkeit mit Karte $\varphi : Q^\circ \to \varphi(Q^\circ)$. Um das zu sehen, müssen wir nach unserer Beschreibung 12.3.4.1 von Mannigfaltigkeiten als Bilder nur noch prüfen, daß $\varphi^{-1} : \varphi(Q^\circ) \to Q^\circ$ stetig ist. Nun ist aber Q und damit auch $\varphi(Q)$ kompakt. Folglich bildet φ abgeschlossene alias kompakte Teilmengen von Q auf abgeschlossene alias kompakte Teilmengen von $\varphi(Q)$ ab. Für $U \subset \varphi(Q)$ impliziert $\varphi^{-1}(U) \Subset Q$ also $U \Subset \varphi(Q)$. Das

gilt im übrigen genauso für jede stetige Surjektion von einem kompakten Raum auf einen Hausdorffraum. Aus unseren Annahmen folgt für $V \subset Q^\circ$ jedoch bereits $V = \varphi^{-1}(\varphi(V))$. Aus $V \Subset Q^\circ$ folgt mithin $\varphi^{-1}(\varphi(V)) \Subset Q^\circ$ und dann $\varphi^{-1}(\varphi(V)) \Subset Q$ und nach der Vorüberlegung $\varphi(V) \Subset \varphi(Q)$ und a forteriori $\varphi(V) \Subset \varphi(Q^\circ)$.

Beispiel 12.4.5.6. Wir erinnern unser Beispiel für eine Abbildung eines offenen Intervalls in die Ebene mit einer Figur 6 mit „offenem Ende“ als Bild, die injektiv ist aber kein Homöomorphismus auf ihr Bild. Es ist nicht möglich, sie auf das abgeschlossene Intervall Q so auszudehnen, daß gilt $\varphi(Q^\circ) \cap \varphi(\partial Q) = \emptyset$. Das mag zur Illustration der vorhergehenden Argumentation dienen.

Definition 12.4.5.7. Seien $k \in \mathbb{N}$ und X ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Unter einer **k-Integrationskarte von** M verstehen wir eine k-Integrationskarte $\varphi : Q \to X$ nach X mit $\varphi(Q) \subset M$ und $\varphi(Q^\circ) \Subset M$. Eine Teilmenge $M \subset X$ heiße eine **k-Fast-Mannigfaltigkeit** oder abkürzend **Fastfaltigkeit**, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine k-Integrationskarte (Q, φ) von M gibt mit $p \in \operatorname{Inn}_M(\varphi(Q))$.

Beispiele 12.4.5.8. Die Oberfläche eines Würfels ist eine 2-Fastfaltigkeit. Wir können sie sogar als das Bild einer einzigen Integrationskarte erhalten, deren Definitionsbereich eine disjunkte Vereinigung von sechs kompakten Rechtecksflächen in $\mathbb{R}^2$ ist. Jede k-Mannigfaltigkeit ist eine k-Fastfaltigkeit. Das Bild einer k-Integrationskarte ist stets eine k-Fastfaltigkeit. Der Mercedesstern ist ein schmutziges Beispiel für eine 1-Fastfaltigkeit. Eine Eiswaffel ist ein besonders schmutziges Beispiel für eine 2-Fastfaltigkeit. Jede offene Teilmenge $U \Subset M$ einer k-Fastfaltigkeit M ist wieder eine k-Fastfaltigkeit und Integrationskarten von U sind auch Integrationskarten von M.



Eine 1-Fastfaltigkeit in der Papierebene und eine surjektive Integrationskarte derselben mit einer disjunkten Vereinigung von vier kompakten Intervallen als Definitionsbereich.

12.4.5.9 (**Diskussion der Terminologie**). Die hier eingeführten Begriffe „Integrationskarte“ und „Fastfaltigkeit“ kenne ich nicht aus der Literatur. Sie sind das Ergebnis meiner Bemühungen, einen begrifflichen Rahmen bereitzustellen, in dem

den aus der Schulzeit bekannten Figuren in der vollen Exaktheit dieser Vorlesung eine Oberfläche zugeordnet und berechnet werden kann. Für diesen Zweck scheint mir die hier eingeführte Begrifflichkeit praktisch und angemessen.

Satz 12.4.5.10 (Integration über Fastfaltigkeiten). *Gegeben eine k-Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es genau eine Linearform auf dem Raum ihrer stetigen kompakt getragenen Funktionen*

$$\int_M : \mathcal{C}_!(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

derart, daß für jede k-Integrationskarte (Q, φ) von M und jede stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit Träger im Bild besagter Integrationskarte $\operatorname{supp} f \subset \varphi(Q)$ gilt

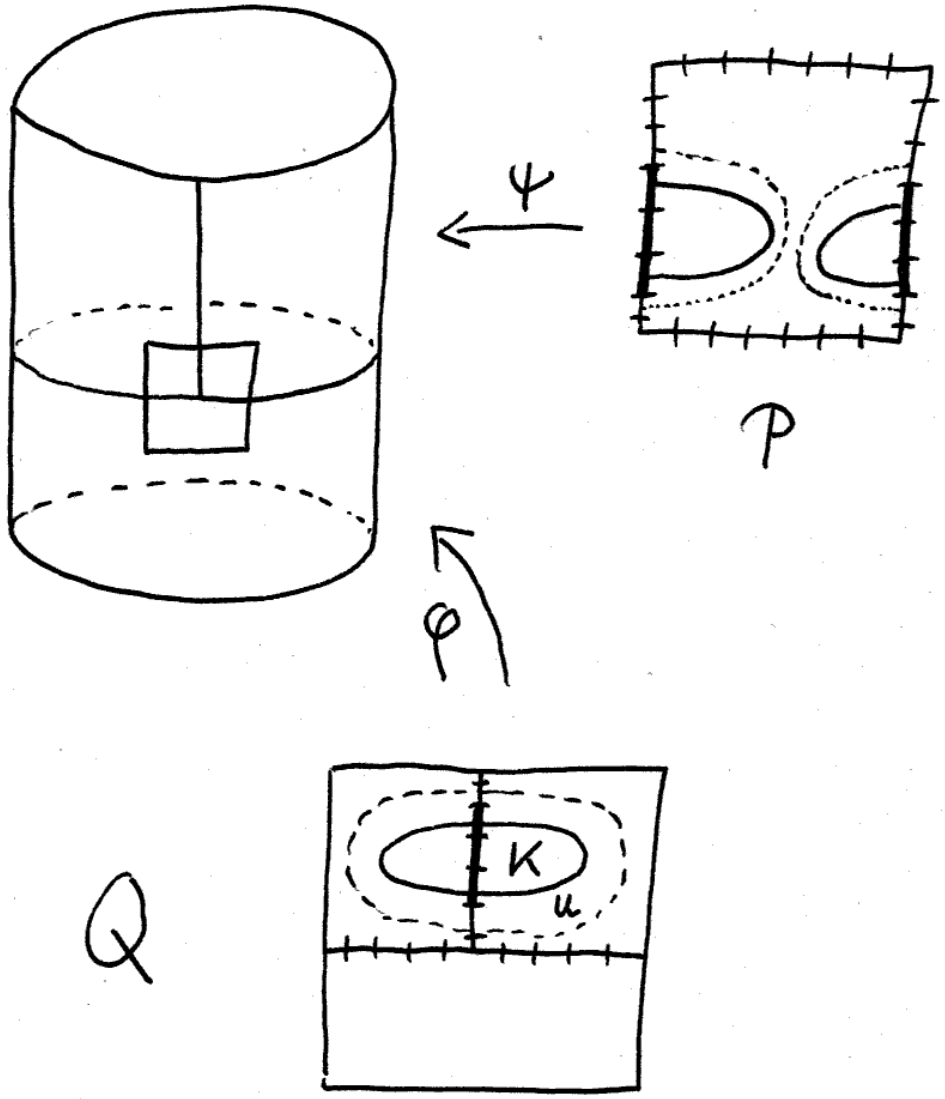
$$\int_M f = \int_Q f(\varphi(x)) \sqrt{\det\, (\mathrm{d}_x\varphi)^\top (\mathrm{d}_x\varphi)}\ \mathrm{d}^k x$$

12.4.5.11. Das Integral über eine endliche Vereinigung Q von paarweise disjunkten kompakten Quadern ist hierbei zu verstehen als die Summe der Integrale über die einzelnen Quader. Im Fall einer Mannigfaltigkeit stimmt unser neues Integral offensichtlich mit dem bereits in 12.4.3.1 definierten Integral über Mannigfaltigkeiten überein. In diesem Fall finden wir ja eine Überdeckung durch Bilder von Integrationskarten, deren Restriktion auf die Inneren der jeweiligen Definitionsbereiche eine Überdeckung durch Bilder von Karten ist. Im Spezialfall $k = n$ einer n-Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ notieren wir unser Integral $\int_M f(x)\, \mathrm{d}^n x$. Für diesen Fall werden wir in 13.1.6.1 die Verallgemeinerung zum sogenannten „Lebesgue-Maß“ kennenlernen, die Kompatibilität beider Volumenbegriffe wird in 13.1.9.5 diskutiert. Auch im Fall $k < n$ werden wir in 13.1.9.3 noch derartige Verallgemeinerungen kennenlernen.

12.4.5.12 (**Inkonsistenzen der Notation**). Ein kompakter Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit leerem Inneren ist eine k-Fastfaltigkeit für geeignetes $k < n$. In diesem Fall verschwindet unser Quaderintegral $\int_Q f$ aus 12.2.1.4 und im allgemeinen verschieden vom Integral $\int_Q f$ über die k-Fastfaltigkeit Q. Der Leser muß manchmal also aus dem Kontext erschließen, welcher Intgralbegriff mit $\int_Q f$ gemeint ist.

12.4.5.13. Die **Fläche** einer kompakten Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ erklären wir als das Integral $\int_M 1$ der konstanten Funktion Eins. Den Bezug dieser Definition zur Anschauung stellt die Beschreibung als Grenzwert von Riemannsummen 12.4.3.7 her. Umgangssprachlich würde man nur bei einer 2-Fastfaltigkeit von ihrer Fläche reden, aber wir verwenden diese Terminologie auch im allgemeinen.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Als Kompaktum besitzt $\operatorname{supp} f$ nach 12.4.5.7 eine Überdeckung $\operatorname{supp} f \subset \operatorname{Inn}_M(\varphi_1(Q_1)) \cup \ldots \cup \operatorname{Inn}_M(\varphi_r(Q_r))$ durch die Inneren von Bildern von endlich vielen Integrationskarten (Q_i, φ_i) von



Zum Beweis der Unabhängigkeit des Integrals von der Integrationskarte

M. Wählen wir eine daran angepaßte Teilung der Eins, so folgt die Eindeutigkeit wie im Fall von Mannigfaltigkeiten 12.4.3.1. Um die Existenz nachzuweisen, argumentieren wir weiter wie im Fall von Mannigfaltigkeiten. Wir müssen dann nur noch zeigen, daß gegeben zwei Integrationskarten (Q, φ) und (P, ψ) von M und eine Funktion $f \in \mathcal{C}_!(M, \mathbb{R})$ mit Träger im Bild beider Integrationskarten $\operatorname{supp} f \subset \varphi(Q) \cap \psi(P)$ gilt

$$\int_Q f(\varphi(x)) \operatorname{vol}(\mathrm{d}_x\varphi)\, \mathrm{d}^k x = \int_P f(\psi(y)) \operatorname{vol}(\mathrm{d}_y\psi)\, \mathrm{d}^k y$$

Hier verwenden wir wieder unsere Abkürzung $\operatorname{vol}(\mathrm{d}_x\varphi) = \sqrt{\det\,(\mathrm{d}_x\varphi)^\top\,(\mathrm{d}_x\varphi)}$. Im Fall $(\operatorname{supp} f) \subset \varphi(Q^\circ) \cap \psi(P^\circ)$ folgt obige Gleichheit unmittelbar aus dem bereits behandelten Fall der Integration über Mannigfaltigkeiten, angewandt auf die Mannigfaltigkeit $\varphi(Q^\circ) \cup \psi(P^\circ)$. Im allgemeinen Fall haben wir wegen unseren Annahme an Integrationskarten $\psi(\partial P) \sqcup \psi(P^\circ) = \psi(P) \not\subset M$ und folglich eine Zerlegung

$$Q = A \sqcup \varphi^{-1}(\psi(\partial P)) \sqcup \varphi^{-1}(\psi(P^\circ))$$

mit der Notation A für „den Rest“. Wir führen weitere abkürzende Notationen ein und schreiben unsere Zerlegung $Q = A \sqcup S \sqcup U$. Sicher gilt dann $A \Subset Q, S \not\subset Q$ und $U \Subset Q$. In derselben Weise bilden wir eine Zerlegung $P = B \sqcup T \sqcup V$. Zu zeigen ist eine Gleichheit

$$\int_Q g = \int_P h$$

von Integralen stetiger Funktionen $g : Q \to \mathbb{R}$ und $h : P \to \mathbb{R}$ mit $g|_A = 0$ und $h|_B = 0$ und der Eigenschaft, daß es einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus

$$\kappa : Q^\circ \cap U \xrightarrow{\sim} P^\circ \cap V$$

gibt mit $g = (h \circ \kappa)|\det \mathrm{d}\kappa|$ auf $Q^\circ \cap U$, nämlich den Kartenwechsel. Wir weisen nun geeignete „Kleinheitseigenschaften“ für S und T nach, mit deren Hilfe es dann gelingt, obige Gleichheit zu zeigen. Für $\varepsilon > 0$ bezeichne Q_ε die Menge aller Punkte von Q, die zum Komplement von Q einen Abstand $\leq \varepsilon$ haben. Wir zeigen die Abschätzung

$$\operatorname{mdim}(S \cap Q_\varepsilon) < k \quad \forall \varepsilon > 0$$

Per definitionem haben wir $S = \varphi^{-1}(\psi(\partial P))$. Nach 12.4.4.3 hat ∂P Minkowskidimension $< k$, also hat nach 12.4.4.5 auch $\psi(\partial P)$ Minkowskidimension $< k$. Andererseits ist $\varphi(Q^\circ)$ eine Mannigfaltigkeit mit Karte $\varphi : Q^\circ \to \varphi(Q^\circ)$. Das durch diese Karte gegebene Koordinatensystem auf $\varphi(Q^\circ)$ besitzt nach 12.3.4.9 um jeden Punkt von $\varphi(Q^\circ)$ eine lokale Erweiterung zu einem lokalen Koordinatensystem von $\mathbb{R}^n$. Als Bild eines Kompaktums ist $\varphi(Q_\varepsilon)$ kompakt und besitzt

also eine endliche Überdeckung

$$\varphi(Q_\varepsilon) \subset B_1 \cup \ldots \cup B_r$$

durch offene Bälle von positivem Radius $B_i \Subset \mathbb{R}^n$ derart, daß es $\mathcal{C}^1$-Abbildungen $\chi_i : \bar{B}_i \to \mathbb{R}^k$ gibt mit $\chi_i(\varphi(p)) = p \; \forall p \in Q^\circ \cap \varphi^{-1}(B_i)$. Wir haben also

$$S \cap Q_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^{r} \chi_i(\bar{B}_i \cap \psi(\partial P))$$

Für alle $\varepsilon > 0$ finden wir zusammenfassend

$$\begin{aligned} \operatorname{mdim}(\partial P) < k \text{ nach } 12.4.4.3 \quad &\Rightarrow \quad \operatorname{mdim}(\psi(\partial P)) < k \text{ nach } 12.4.4.5 \\ &\Rightarrow \quad \operatorname{mdim}(\chi_i(\bar{B}_i \cap \psi(\partial P))) < k \text{ nach } 12.4.4.5 \\ &\Rightarrow \quad \operatorname{mdim}(S \cap Q_\varepsilon) < k \text{ nach } 12.4.4.4. \end{aligned}$$

Nach Übung 13.1.7.23 wäre damit $S \cap Q_\varepsilon$ eine „Lebesgue-Nullmenge“ und damit wären auch S und analog T selbst Nullmengen als abzählbare Vereinigungen von Nullmengen und der Beweis im Rahmen der Lebesgue-Theorie wäre fertig, vergleiche 13.1.8.10. Wir wollen jedoch hier die Gleichheit

$$\int_Q g = \int_P h$$

ohne Lebesgue-Theorie zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $g \geq 0$ und $h \geq 0$ annehmen. Sicher reicht es für $g \geq 0$ mit $g|_A = 0$ zu zeigen

$$\int_Q g = \sup \left\{ \int_Q \beta g \;\middle|\; \beta \in \mathcal{C}_!(Q^\circ \cap U, [0,1]) \right\}$$

Sicher reicht es weiter, für $g \geq 0$ mit $g|_A = 0$ und alle $\varepsilon > 0$ zu zeigen

$$\int_{Q_\varepsilon} g = \sup \left\{ \int_{Q_\varepsilon} \beta g \;\middle|\; \beta \in \mathcal{C}_!(Q_\varepsilon^\circ \cap U, [0,1]) \right\}$$

Das aber folgt unmittelbar aus dem anschließenden Lemma 12.4.5.14, angewandt auf K einen der Quader, aus denen Q_ε besteht, mit $R := (S \cap K) \cup \partial K$. □

Lemma 12.4.5.14 (Minkowskidimension und Integral). *Seien $K \subset \mathbb{R}^k$ ein kompakter Quader und $g : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative stetige Funktion. Hat $R \subset K$ Minkowskidimension $\operatorname{mdim}(R) < k$, so gilt*

$$\int_K g = \sup \left\{ \int_K \beta g \;\middle|\; \beta : K \to [0,1] \textit{ stetig mit } (\operatorname{supp} \beta) \cap R = \emptyset \right\}$$

Beweis. Nach Annahme gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung $R \subset W_1 \cup \ldots \cup W_r$ durch kompakte Würfel in $\mathbb{R}^k$ mit einer festen gemeinsamen Kantenlänge und Gesamtvolumen $\sum_{i=1}^r \operatorname{vol}(W_i) < \varepsilon$. Wir können sicher jeden dieser Würfel vergrößern zu einem offenen Würfel $U_i \supset W_i$ derart, daß gilt $\sum_{i=1}^r \operatorname{vol}(U_i) < 2\varepsilon$. Dann bilden $U := \bigcup U_i$ und $V := \mathbb{R}^k \backslash \bigcup W_i$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}^k$ und für $h \in \mathcal{C}_!(U; \mathbb{R}_{\geq 0})$ gilt offensichtlich $\int h \leq 2\varepsilon \sup h$. Andererseits gibt es nach unseren Erkenntnissen zur Teilung der Eins 12.4.2.14 Funktionen $\alpha \in \mathcal{C}_!(U; [0,1])$ und $\beta \in \mathcal{C}_!(V; [0,1])$ mit $\alpha(x) + \beta(x) = 1 \; \forall x \in K$. Wir finden so

$$\int_K g = \int_K \alpha g + \int_K \beta g$$

mit $\int_K \alpha g \leq 2\varepsilon(\sup g)$ und $(\operatorname{supp} \beta) \cap R = \emptyset$. Das zeigt die Behauptung. □

12.4.5.15 (**Integration über Fastfaltigkeiten in euklidischen Räumen**). Gegeben ein endlichdimensionaler euklidischer Raum mit Längengerade $\mathbb{L}$ im Sinne von 4.1.5.9 liefern die analogen Definitionen für jedes k-Tupel von Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ ein Element

$$\operatorname{vol}(v_1, \ldots, v_k) = \sqrt{\det(s(v_i, v_j))} \in \mathbb{L}^{\otimes k}$$

Weiter liefern die analogen Definitionen für jede k-Fastfaltigkeit $M \subset X$ ein Integral

$$\int_M : \mathcal{C}_!(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{L}^{\otimes k}$$

Die **Fläche** einer kompakten Fastfaltigkeit $M \subset X$ erklären wir wieder als das Integral der konstanten Funktion Eins und erhalten so ein Element $\int_M 1 \in \mathbb{L}^{\otimes k}$. So gesehen messen sich also auch in der Mathematik „Längen in Metern, Flächen in Quadratmetern und Volumen in Kubikmetern“. Betrachten wir noch allgemeiner Funktionen mit Werten in einem Banachraum V, so wird unser Integral noch allgemeiner zu einer Abbildung $\int_M : \mathcal{C}_!(M, V) \to \mathbb{L}^{\otimes k} \otimes V$.

Übungen

Übung 12.4.5.16. Sind $M \subset \mathbb{R}^m$ sowie $N \subset \mathbb{R}^n$ Fastfaltigkeiten und $f : M \to \mathbb{R}$ sowie $g : N \to \mathbb{R}$ kompakt getragene stetige Funktionen, so ist auch $M \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ eine Fastfaltigkeit und $f \boxtimes g : M \times N \to \mathbb{R}$ eine kompakt getragene stetige Funktion und es gilt

$$\int_{M \times N} f \boxtimes g = \left(\int_M f\right)\left(\int_N g\right)$$

12.4.6 Explizite Berechnung einiger Integrale

Beispiel 12.4.6.1 (**Integration über eine Kreislinie**). Gegeben $R > 0$ ist die Kreislinie $S := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = R\}$ eine kompakte Einsmannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^2$. Die Abbildung $[0, 2\pi] \to S$ mit $\vartheta \mapsto (R\cos\vartheta, R\sin\vartheta)$ ist eine surjektive Integrationskarte von S. Gegeben $f : S \to \mathbb{R}$ stetig zeigt unser Satz 12.4.5.10 zur Integration über Fastfaltigkeiten folglich

$$\int_S f = \int_0^{2\pi} f(R\cos\vartheta, R\sin\vartheta)R\,\mathrm{d}\vartheta$$

Beispiel 12.4.6.2 (**Übergang zu Polarkoordinaten, Variante**). Gegeben $R > 0$ ist die Kreisscheibe $D := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R\}$ eine kompakte 2-Fastfaltigkeit in $\mathbb{R}^2$ und die Polarkoordinatenabbildung $P : [0, R] \times [0, 2\pi] \to D$ gegeben durch $P : (r, \vartheta)^\top \mapsto (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)^\top$ ist eine surjektive Integrationskarte von D. Gegeben $f : D \to \mathbb{R}$ stetig zeigt unser Satz 12.4.5.10 zur Integration über Fastfaltigkeiten folglich

$$\int_D f = \int_Q f \circ P \,|\mathrm{d}P| = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta$$

Beispiel 12.4.6.3 (**Oberfläche der Einheitskugel**). Die Kugelschale

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

ist eine kompakte Mannigfaltigkeit und unser Satz 12.4.3.1 ordnet ihr eine Zahl $\int_{S^2} 1$ zu, die wir als ihre Oberfläche interpretieren. Um sie zu berechnen, wenden wir unseren Satz 12.4.5.10 zur Integration über Fastfaltigkeiten an auf die surjektive Integrationskarte

$$\begin{array}{rccc} K: & [-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi, \pi] & \to & S^2 \\ & (\theta \ , \ \varphi) & \mapsto & (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta) \end{array}$$

Die Jacobi-Matrix ergibt sich zu

$$\mathrm{d}K = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten als Gram'sche Matrix

$$(\mathrm{d}K)^\top(\mathrm{d}K) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

Die Wurzel aus der Determinante der Gram'schen Matrix ergibt sich damit zu $\cos\theta$ und wir folgern für jede stetige Funktion $f : S^2 \to \mathbb{R}$ die Formel

$$\int_{S^2} f = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)\cos\theta \;\, \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Wenden wir unsere Formel auf die konstante Funktion Eins an, so erhalten wir für die Oberfläche der Einheitskugel das Ergebnis

$$\int_{S^2} 1 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \;\, \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi$$

Beispiel 12.4.6.4 (**Schwerpunkt einer Halbkugel**). Wir berechnen die Höhe des Schwerpunkts der massiven Halbkugel $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1$ und $z \ge 0\}$. Per definitionem ist das diejenige Zahl $h \in \mathbb{R}$, für die gilt $\int_H (z-h) = 0$, so daß wir unter Zuhilfenahme von 12.4.6.7 erhalten

$$h\frac{2\pi}{3} = h\int_H 1 = \int_H z$$

Durch Übergang zu Kugelkoordinaten 12.4.2.17 folgt

$$\begin{aligned}
\int_H z &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos\vartheta) r^2 \sin(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi\left(\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\right) \\
&= 2\pi\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{-\cos(2\vartheta)}{2}\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

womit sich die Höhe des Schwerpunkts ergibt zu $h = 3/8$.

Beispiel 12.4.6.5 (**Trägheitsmoment der Einheitskugel**). Wir integrieren die Funktion x^2+y^2 über die Einheitskugel $K := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$. Physikalisch Gebildete erkennen, daß wir hier im wesentlichen das Trägheitsmoment der Einheitskugel um die z-Achse berechnen, aber das spielt in unserer Rechnung keine Rolle. Durch Übergang zu Kugelkoordinaten 12.4.2.17 und mit 10.4.5.34 erhalten wir

$$\int_K x^2+y^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^4\sin^3(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{8\pi}{15}$$

Ergänzung 12.4.6.6. Es sollte wohl irgendwann einmal gezeigt werden, daß mit der in 14.5.4.1 definierten Interpolation $\Gamma : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ der Zuordnung $n \mapsto (n-1)!$ und der Konvention $x! := \Gamma(x+1)$ gilt

$$(\text{Volumen der Einheitskugel im } \mathbb{R}^n) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}$$

Diese Formel kann mithilfe der Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ aus 14.5.4.1 und der Erkenntnis $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ aus 14.5.4.5 auch leicht in eine etwas weniger elegante Formel umgeschrieben werden, in der die Γ-Funktion nicht mehr auftritt.

Übungen

Übung 12.4.6.7. Man zeige, daß die Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$ das Volumen $4\pi/3$ hat.

Übung 12.4.6.8. Man berechne das Integral der Funktion $(xyz)^2$ über die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$.

Übung 12.4.6.9 (**Oberfläche eines Rotationskörpers**). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges kompaktes Intervall und $f : I \to (0, \infty)$ stetig differenzierbar. Man zeige, daß die **Mantelfläche** $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in I,\ x^2 + y^2 = (f(z))^2\}$ eine kompakte 2-Fastfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ ist mit der Fläche

$$\int_M 1 = 2\pi \int_I f(z)\sqrt{1 + (f'(z))^2}\,\mathrm{d}z$$

Die anschauliche Bedeutung unserer Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers erkennt man, wenn man unsere Rotationsfläche durch eine Vereinigung von dünnen Bändern der Gestalt „oberer Ränder von Eiswaffeln“ approximiert.

Übung 12.4.6.10 (**Volumen eines Rotationskörpers**). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges kompaktes Intervall und $f : I \to (0, \infty)$ stetig differenzierbar. Man zeige, daß der **Rotationskörper** $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in I, x^2 + y^2 \leq (f(z))^2\}$ eine kompakte 3-Fastfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ ist mit dem Volumen

$$\int_M 1 = \pi \int_I f(z)^2\,\mathrm{d}z$$

Die anschauliche Bedeutung unserer Formel für das Volumen eines Rotationskörpers erkennt man, wenn man unseren Rotationskörper durch eine Vereinigung von dünnen Scheiben approximiert.

Übung 12.4.6.11. Gegeben eine kompakte k-Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathrm{O}(n)$ zeige man

$$\int_M 1 = \int_{A(M)} 1$$

Insbesondere und in Worten bleibt also beim Drehen und Verschieben von Flächen im Raum ihre Oberfläche unverändert.

12.5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

12.5.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

12.5.1.1 (**Unterscheidung in gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen**). Ganz allgemein versteht man unter einer **gewöhnlichen Differentialgleichung** eine Gleichung, in der die Ableitungen einer zu bestimmenden Funktion *einer* Veränderlichen zueinander und mit der Veränderlichen selbst in Beziehung gesetzt werden. Ein Beispiel ist die Gleichung

$$(f''(t))^2 f'(t) + tf(t) = t^2$$

für eine zu bestimmende zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Im Gegensatz dazu steht terminologisch der allgemeinere Fall der **partiellen Differentialgleichungen**, bei denen die partiellen Ableitungen einer Funktion *mehrerer* Veränderlichen auftreten. Ein Beispiel ist die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

für eine zweimal partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Auf Englisch benutzt man die Abkürzungen **ODE** für **ordinary differential equation** und **PDE** für **partial differential equation**. Wir besprechen in diesem Abschnitt nur gewöhnliche Differentialgleichungen. Rein formal ist dieser Abschnitt unabhängig von der Behandlung linearer gewöhlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in 10.7.2.8 folgende. Ich denke jedoch, daß eine gewisse Vertrautheit mit diesen einfachsten und wichtigsten Spezialfällen es sehr erleichtern kann, die im folgenden zu entwickelnde allgemeine Theorie zu verstehen.

12.5.1.2 (**Unterscheidung in explizite und implizite Differentialgleichungen**). Die Ordnung der höchsten in einer gewöhnlichen Differentialgleichung auftretenden Ableitung heißt die **Ordnung** unserer Differentialgleichung. Von einer **expliziten** Gleichung spricht man, wenn in unserer Gleichung die Ableitung höchster Ordnung „explizit durch die tieferen Ableitungen ausgedrückt wird“. Andernfalls spricht man von einer **impliziten** Gleichung. Bei unserem obigen Beispiel handelt es sich also um eine implizite Gleichung. Wir werden uns im folgenden jedoch nur mit expliziten gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen. Eine derartige explizite Gleichung der Ordnung n hat, wenn wir von der Spezifikation allgemeinstmöglicher Definitionsbereiche einmal absehen, die Gestalt

$$f^{(n)}(t) = C(t, f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t))$$

mit einer Abbildung $C : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Gesucht sind alle Funktionen $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ auf mehrpunktigen reellen Intervallen I, die n-mal differenzierbar sind und eben diese Gleichung erfüllen.

12.5.1.3 (**Reduktion auf Systeme erster Ordnung**). Etwas allgemeiner betrachten wir zugleich auch **Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen**, bei denen vektorwertige Funktionen $f = (f_1, \ldots, f_k) : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^k$ gesucht werden derart, daß eine Gleichung der obigen Gestalt gilt, die nun aber eine vektorwertige Gleichung meint mit einer fest vorgegebenen vektorwertigen Abbildung $C : \mathbb{R}^{kn+1} \to \mathbb{R}^k$, die auf $(n+1)$-Tupeln bestehend aus einer reellen Zahl und n Vektoren definiert ist. Die Betrachtung von *Systemen* gewöhnlicher Differentialgleichungen erlaubt uns zumindest für Fragen des allgemeinen Lösungsverhaltens die Beschränkung auf den Fall erster Ordnung. Um zu zeigen, wie diese Reduktion funktioniert, betrachten wir beispielhaft den Fall einer Gleichung dritter Ordnung

$$f'''(t) = C(t, f(t), f'(t), f''(t))$$

mit $C : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. Jede Lösung $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ liefert sicher eine Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ vermittels der Vorschrift $\phi(t) = (f(t), f'(t), f''(t))$ und natürlich gilt dann

$$\begin{aligned} \phi_1'(t) &= \phi_2(t) \\ \phi_2'(t) &= \phi_3(t) \\ \phi_3'(t) &= C(t, \phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)) \end{aligned}$$

Erklären wir nun also eine neue Abbildung $B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ durch die Vorschrift $B(t, x, y, z) = (y, z, C(t, x, y, z))$, so ist unser ϕ eine Lösung des Systems von Differentialgleichungen

$$\phi'(t) = B(t, \phi(t))$$

Umgekehrt zeigt man leicht, daß für jede Lösung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dieses Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung die erste Komponente $\phi_1(t) = f(t)$ eine Lösung unserer ursprünglichen Gleichung dritter Ordnung liefert. In derselben Weise kann auch im Allgemeinen die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen höherer Ordnung auf den Fall von Systemen erster Ordnung zurückgeführt werden. Anschaulich mag man sich dann B als ein zeitabhängiges Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^n$ denken, das jedem Ort $x \in \mathbb{R}^n$ zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ einen Vektor $B(t, x) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. In dieser Anschauung beschreibt eine Lösung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ die Bewegung eines Teilchens, das zu jedem Zeitpunkt t die für seinen Ort $\phi(t)$ zu diesem Zeitpunkt durch unser zeitabhängiges Vektorfeld B vorgegebene Geschwindigkeit $\phi'(t) = B(t, \phi(t))$ hat.

12.5.1.4 (**Reduktion auf den zeitunabhängigen Fall**). Gegeben $B : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ löst eine differenzierbare Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ unsere Differentialgleichung

$$\phi'(t) = B(t, \phi(t))$$

genau dann, wenn die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $t \mapsto (t, \phi(t))$ die Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = A(\gamma(t))$$

löst für $A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ gegeben durch $A(t, x) := (1, B(t, x))$. In diesem Sinne können wir uns also stets auf den Fall zeitunabhängiger Felder zurückziehen. Eine graphische Darstellung dieser Erkenntnis geben wir in 12.5.1.10. Allerdings erhält man für zeitabhängige Felder bei einer eigenständigen Betrachtung etwas schärfere Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen, weshalb dieser Fall insbesondere in einigen Ergänzungen weiter betrachtet werden wird. Zunächst konzentrieren wir uns nun jedoch auf den zeitunabhängigen Fall und besprechen seine geometrische Bedeutung in einer koordinatenfreien Sprache.

12.5.1.5. Unter einem **Vektorfeld** auf einer Teilmenge $U \subset X$ eines affinen Raums X verstehen wir eine Abbildung $A : U \to \vec{X}$ von U in den Richtungsraum von X. Statt $A(p)$ schreiben wir in diesem Kontext auch oft A_p.

Definition 12.5.1.6. Seien X ein normierter reeller Raum und $A : X \supset U \to \vec{X}$ ein Vektorfeld. Ein **Flußweg** unseres Vektorfelds ist eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to U$ von einem mehrpunktigen reellen Intervall I nach U mit der Eigenschaft, daß physikalisch gesprochen zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ die Geschwindigkeit unseres Flußwegs zum Zeitpunkt t der durch das Vektorfeld vorgegebene Richtungsvektor an der Stelle $\gamma(t)$ ist, in Formeln

$$\gamma'(t) = A(\gamma(t)) \quad \forall t \in I$$

Ist $p \in U$ gegeben, so verstehen wir unter einem **Flußweg mit Anfangswert** p oder kurz einem **Flußweg zu** p einen Flußweg (γ, I) mit $0 \in I$ und $\gamma(0) = p$.

12.5.1.7. Auf der Menge aller Flußwege eines Vektorfelds erklären wir eine Teilordnung durch die Vorschrift, daß ein Flußweg kleinergleich einem anderen ist, wenn er aus ihm durch Einschränkung des Definitionsbereichs hervorgeht. Die maximalen Elemente dieser Menge nennen wir **maximale Flußwege**. Ein maximaler Flußweg ist also ein Flußweg, der nicht zu einem auf einem echt größeren reellen Intervall definierten Flußweg erweitert werden kann. Mit dem Zorn'schen Lemma sieht man unmittelbar, daß jeder Flußweg zu einem maximalen Flußweg erweitert werden kann. Das größte Element in der Menge aller Flußwege zu einem vorgegebenem Anfangswert nennen wir dahingegen, wenn es denn existiert, den **größten Flußweg** zu dem vorgegebenen Anfangswert. Das ist dann natürlich auch ein maximaler Flußweg unseres Vektorfelds und sogar der einzige maximale Flußweg zum vorgegebenen Anfangswert. Es kann aber durchaus vorkommen, daß es zu einem vorgegebenen Anfangswert zwar Flußwege gibt, aber keinen größten Flußweg, sondern stattdessen mehrere maximale Flußwege.

12.5.1.8 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißen unsere Flußwege meist **Integralkurven**. Das paßt aber schlecht zu unserer Terminologie, nach der Kurven gewisse Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume und allgemeiner eindimensionale Mannigfaltigkeiten bezeichnen.

Beispiel 12.5.1.9. Ist unser Vektorfeld konstant, so laufen seine Flußwege auf den Geraden mit diesem konstanten Vektor als Richtungsvektor und mit der durch diesen Vektor vorgegebenen konstanten Geschwindigkeit. Ist unser Vektorfeld auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum $X = V$ gegeben durch eine lineare Abbildung $A \in \operatorname{End} V$ oder genauer durch $\operatorname{trans} \circ A$, so haben wir bereits in 10.7.2.6 gezeigt, daß seine maximalen Flußwege genau die Abbildungen $\mathbb{R} \to V, t \mapsto \exp(tA)c$ sind mit $c \in V$.

12.5.1.10 (**Geometrische Interpretation im zeitabhängigen Fall**). Gegeben ein normierter reeller Raum X fassen wir eine Abbildung $A : (\mathbb{R} \times X) \supset W \to \vec{X}$ gerne als ein **zeitabhängiges Vektorfeld** auf und veranschaulichen uns die Lösungen der Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = A(t, \gamma(t))$$

in dieser Weise. Unter einem **Flußweg** verstehen wir in diesem Fall eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to X$ von einem mehrpunktigen reellen Intervall I nach X mit $(t, \gamma(t)) \in W \ \forall t \in I$ derart, daß obige Gleichung erfüllt ist für alle $t \in I$. Gegeben $(s, p) \in W$ verstehen wir unter einem **Flußweg mit Anfangswert** p **zum Startzeitpunkt** s einen Flußweg (γ, I) mit $s \in I$ und $\gamma(s) = p$. Dieselbe Terminologie verwenden wir auch für zeitunabhängige Vektorfelder $A : X \supset U \to \vec{X}$, die wir als Spezialfall mit $W = \mathbb{R} \times U$ auffassen und bei denen wir a priori den Startzeitpunkt $s = 0$ wählen.

12.5.1.11 (**Zeitverschiebung**). Gegeben ein Vektorfeld auf einer halboffenen Teilmenge eines normierten reellen Raums und ein Flußweg (γ, I) ist für alle $c \in \mathbb{R}$ auch die Abbildung $t \mapsto \gamma(t + c)$ ein Flußweg, der nun eben definiert ist auf dem verschobenen Intervall $I - c$. Das gilt im Fall zeitabhängiger Vektorfelder allerdings nicht mehr.

12.5.1.12 (**Verwandtschaft von Vektorfeldern**). Gegeben halboffene Teilmengen normierter affiner Räume $U \subset X$ und $V \subset Y$ sowie Vektorfelder $A : U \to \vec{X}$ und $B : V \to \vec{Y}$ sowie eine differenzierbare Abbildung $\phi : U \to V$ schreiben wir

$$\phi : A \rightsquigarrow B$$

und sagen, unsere Vektorfelder seien **verwandt unter** ϕ, wenn für alle $p \in U$ gilt $\mathrm{d}_p\phi : A(p) \mapsto B(\phi(p))$. Ist ϕ ein Diffeomorphismus, so hat jedes Vektorfeld A auf U genau einen Vorwärtsverwandten B auf V und jedes Vektorfeld B auf

V genau einen Rückwärtsverwandten A auf U. Im allgemeinen müssen weder Vorwärtsverwandte noch Rückwärtsverwandte existieren und wenn sie existieren, müssen sie im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt sein.

12.5.1.13 (**Verwandtschaftsverträglichkeit von Flußwegen**). Offensichtlich haben verwandte Vektorfelder verwandte Flußwege. Ist genauer unter einer differenzierbaren Abbildung ϕ ein Vektorfeld A verwandt zu einem Vektorfeld B, so ist für jeden Flußweg γ von A auch $\phi \circ \gamma$ ein Flußweg von B. Ist insbesondere ein Vektorfeld A unter einer stetig differenzierbaren Abbildung ϕ verwandt zum Nullfeld, in Formeln $\phi : A \rightsquigarrow 0$, und ist γ ein Flußweg von A, so ist $\phi \circ \gamma$ ein Flußweg des Nullfelds und mithin konstant. In anderen Worten ist dann die Funktion ϕ konstant auf jedem Flußweg von A. Eine reellwertige derartige Funktion ϕ heißt ein **erstes Integral** unserer Differentialgleichung. In physikalischen Modellen liefern oft Energie, Impuls und Drehimpuls solche ersten Integrale.

Übungen

Übung 12.5.1.14. Man gebe ein glattes Vektorfeld auf $\mathbb{R}$ an, das keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Flußwege besitzt.

Übung 12.5.1.15. Man zeige für jedes Vektorfeld $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $A(p) \perp p \ \forall p \in \mathbb{R}^n$, daß seine Flußwege γ auf Sphären mit Zentrum im Ursprung verlaufen müssen, in Formeln $\|\gamma(t)\|$ konstant.

Übung 12.5.1.16. Seien $A : X \supseteq U \to \vec{X}$ ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines affinen Raums und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Man zeige: Gilt für die Richtungsableitungen $(\mathrm{D}_{A(p)} f)(p) \geq 0 \ \forall p \in U$, so ist $f(\gamma(t))$ monoton wachsend für alle Flußwege γ unseres Vektorfelds. Gilt $(\mathrm{D}_{A(p)} f)(p) > 0 \ \forall p \in U$, so ist $f(\gamma(t))$ analog streng monoton wachsend.

Übung 12.5.1.17. Seien $A : X \supseteq U \to \vec{X}$ ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines affinen Raums und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei die Null ein regulärer Wert von f, so daß $M := f^{-1}(0)$ eine Hyperfläche ist. Gilt $(\mathrm{d}_p f)(A(p)) < 0 \ \forall p \in M$ und ist $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to U$ ein Flußweg von A, so folgt aus $f(\gamma(t)) \leq 0$ für ein $t \in I$ bereits $f(\gamma(s)) < 0$ für alle $s \in I$ mit $s \geq t$. Anschaulich gesprochen kann also ein Flußweg die Hyperfläche M nur höchstens einmal kreuzen und muß dabei von der Seite $f > 0$ auf die Seite $f < 0$ wechseln. Hinweis: 10.5.5.24.

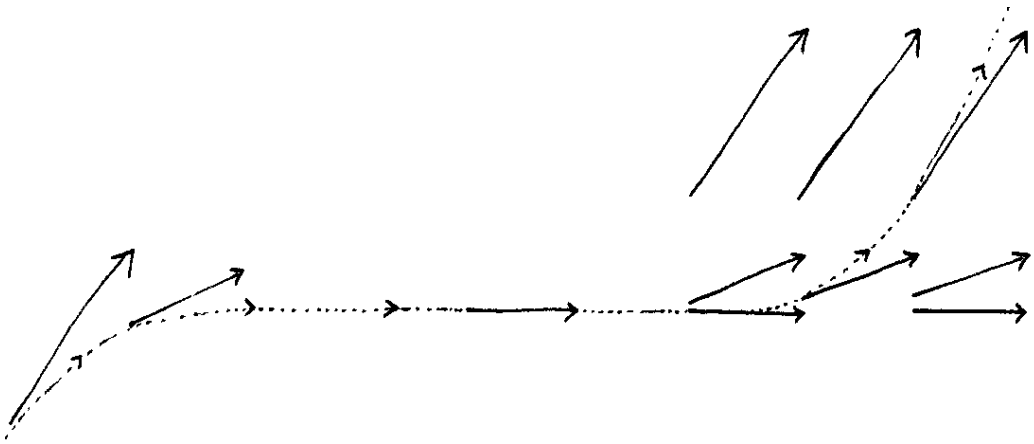
12.5.2 Beispiele und Gegenbeispiele

Satz 12.5.2.1 (Picard-Lindelöf). *1. Gegeben ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines reellen Raums endlicher Dimension gibt es zu jedem Anfangswert einen größten Flußweg;*

2. *Dieser größte Flußweg hat als Definitionsbereich ein offenes Intervall, und ist dieses Intervall nach oben beschränkt, so verläßt der fragliche Flußweg für positive Zeiten jedes Kompaktum aus unserer offenen Teilmenge irgendwann einmal endgültig.*

12.5.2.2. Wir zeigen diesen Satz als 12.5.4.9 sogar unter noch etwas schwächeren Voraussetzungen. Der letzte Teil der zweiten Aussage besagt salopp formuliert, daß der Grund dafür, daß sich ein Flußweg nicht beliebig weit in Richtung positiver Zeiten fortsetzen läßt, nur darin liegen kann, daß er bereits in endlicher Zeit „aus dem Definitionsbereich des Vektorfeldes hinausläuft". Entsprechendes gilt in Richtung negativer Zeiten, was man durch Betrachtung des mit (-1) multiplizierten Vektorfelds auch formal leicht folgern kann.

Beispiel 12.5.2.3 (**Ein Fall mit nicht eindeutigen Flußwegen**). Bei Vektorfeldern, die nicht stetig differenzierbar sind, kann es durchaus vorkommen, daß zu einem vorgegebenen Anfangswert kein größter Flußweg existiert, weil etwa mehrere maximale Flußwege mit ein und demselben Anfangswert existieren, die auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche nicht übereinstimmen. Betrachten wir zum Beispiel auf $\mathbb{R}^2$ das Vektorfeld A, für das sämtliche verschobenen Kubiken $\gamma_c(t) = (t + c, t^3)$ Flußwege sind. Wir haben $\gamma_c'(t) = (1, 3t^2)$ und damit $A(x, y) = (1, 3|y|^{2/3})$. Maximale Flußwege sind in diesem Fall nicht nur die verschobenen Kubiken γ_c, sondern auch alle Wege, die längs einer verschobenen Kubik auf die x-Achse hochsteigen und dann eine Weile auf der x-Achse entlang-



Das ebene stetige aber nicht stetig differenzierbare Vektorfeld aus Beispiel 12.5.2.3 mit einem seiner Flußwege

laufen bevor sie auf einer anderen verschobenen Kubik weitersteigen. In diesem

Fall existieren zwar maximale Flußwege zu jedem Punkt, von Eindeutigkeit kann aber keine Rede sein.

Beispiel 12.5.2.4 (**Der Fall eindimensionaler Felder ohne Nullstellen**). Gegeben ein stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen auf einer offenen Teilmenge eines eindimensionalen Raums gibt es zu jedem Anfangswert genau einen maximalen Flußweg. In diesem Fall brauchen wir also von unserem Vektorfeld nicht einmal stetige Differenzierbarkeit zu fordern. In der Tat sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $U \Subset \mathbb{R}$ ein Intervall und unser stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen zeige in Richtung der positiven x-Achse, als da heißt, es werde gegeben durch $a : U \to \mathbb{R}_{>0}$. Flußwege sind auf mehrpunktigen Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ definierte differenzierbare Funktionen $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to U$ mit

$$\gamma'(t) = a(\gamma(t)) \quad \forall t \in I$$

Aus dieser Gleichung folgt für alle $s, t \in I$ sofort

$$t - s = \int_s^t \frac{\gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{a(\gamma(\tau))} = \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{\mathrm{d}x}{a(x)} = G(\gamma(t)) - G(\gamma(s))$$

für $G : U \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $1/a$. Nun wächst G sicher streng monoton und hat folglich als Bild ein offenes Intervall $J \Subset \mathbb{R}$ und für unsere Flußwege folgt $\gamma(t) = G^{-1}(t + c)$ mit der Konstanten $c = G(\gamma(s)) - s$. In anderen Worten ist

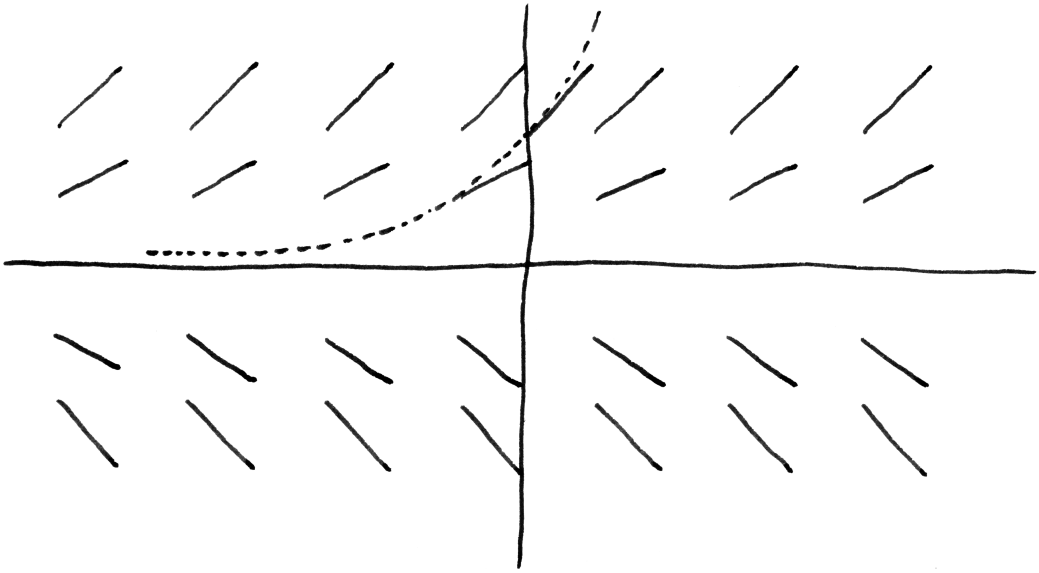
$$G^{-1} : J \xrightarrow{\sim} U$$

bis auf Zeitverschiebung der einzige maximale Flußweg. So ist etwa $a(x) = x$ ein stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen auf $U := \mathbb{R}_{>0}$ und $G(x) = \log x$ ist eine Stammfunktion von $1/x$ und jeder maximale Flußweg ist von der Gestalt $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\gamma(t) = \exp(t + c)$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

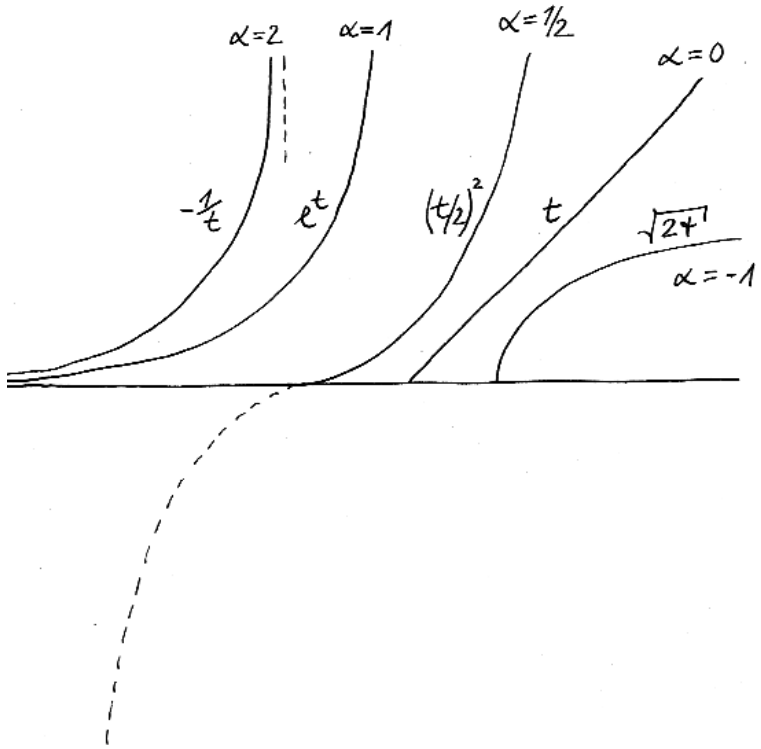
Beispiel 12.5.2.5 (**Spezielle eindimensionale Felder mit Nullstellen**). Gegeben ein stetiges Vektorfeld mit Nullstellen auf einer offenen Teilmenge eines eindimensionalen Raums liegen die Verhältnisse komplizierter als im Fall ohne Nullstellen 12.5.2.4. Wir suchen etwa für $\alpha \in \mathbb{R}$ Flußwege des Vektorfelds $a(x) = x^\alpha$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ alias auf einem mehrpunktigen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktionen $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\gamma'(t) = (\gamma(t))^\alpha \quad \forall t \in I$$

Auf $\mathbb{R}_{>0}$ hat unser Feld keine Nullstellen und die in 12.5.2.4 entwickelte Theorie sagt uns, daß unsere Flußwege gerade die Umkehrfunktionen zu Stammfunktionen von $x^{-\alpha}$ sind. Den Fall $\alpha = 1$ kennen wir bereits aus 12.5.2.4. Im Fall $\alpha \neq 1$ erhalten wir als Stammfunktion $G(x) = x^{1-\alpha}/(1 - \alpha)$. Im Unterfall $\alpha > 1$ induziert nun G eine Bijektion $G : \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{<0}$ und im Unterfall $\alpha < 1$ eine Bijektion



Im Fall eindimensionaler Felder mag man sich die Lösung der entsprechenden Differentialgleichung durch ihren im Bild gestrichelt eingezeichneten Graphen veranschaulichen und das Vektorfeld als eine Vorschrift, die diesem Graphen in jeder Höhe x eine Steigung $a(x)$ vorschreibt.



Mögliche Lösungsfunktionen mit positiven Werten der Differentialgleichung $\dot{\gamma}(t) = (\gamma(t))^\alpha$ für verschiedene Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$. Alle anderen Lösungsfunktionen mit positiven Werten erhält man durch horizontales Verschieben der entsprechenden Graphen. Im Fall $\alpha > 1$ „läuft unsere Lösung in endlicher Zeit nach Unendlich“, was die gestrichelt eingezeichnete vertikale Asymptote andeuten soll. Im Fall $1 > \alpha > 0$ kann man, wie gestrichelt angedeutet, die Lösung zu einer Lösung von $\dot{\gamma}(t) = |\gamma(t)|^\alpha$ ins Negative fortsetzen, aber eben auf vielerlei Weisen. Das war im wesentlichen auch unser Gegenbeispiel 12.5.2.3.

$G : \mathbb{R}_{>0} \tilde{\to} \mathbb{R}_{>0}$, aber die Umkehrfunktion wird jedesmal durch dieselbe Formel gegeben und wir erhalten die Flußwege

$$\gamma(t) = ((1-\alpha)t)^{(1-\alpha)^{-1}}$$

Im Fall $\alpha = 2$ etwa ergibt sich $\gamma(t) = -1/t$ und unser Flußwege „laufen in endlicher Zeit nach $+\infty$, brauchen aber, wenn wir die Zeit rückwärts laufen lassen, unendlich lange bis zum Ursprung“. Dasselbe gilt in allen Fällen mit $\alpha > 1$. Im Fall $\alpha = 0$ dahingegen ergibt sich $\gamma(t) = t$ und unser Flußweg „läuft für alle positiven Zeiten, braucht aber, wenn wir die Zeit rückwärts laufen lassen, nur endlich viel Zeit bis zum Ursprung“. Dasselbe gilt in allen Fällen mit $\alpha < 1$. In den Fällen mit $0 \leq \alpha$ können wir unser Vektorfeld stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen durch die Vorschrift $a(x) = |x|^\alpha$ und für $0 < \alpha$ hat diese Fortsetzung eine Nullstelle bei Null. In den Fällen $0 < \alpha < 1$ gibt es nun auch Flußwege, die in endlicher Zeit aus dem Negativen nach Null laufen und dort eine Weile stehenbleiben, bevor sie ins Positive weiterlaufen. Erklären wir etwa auf $\mathbb{R}$ ein stetiges Vektorfeld durch $a(x) = \sqrt[3]{x^2}$, so ist $\gamma(t) = t^3/27$ ein Flußweg, aber auch die Abbildung $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gegeben wird durch die Vorschrift

$$\psi(t) \quad = \quad \begin{cases} t^3/27 & t \leq 0; \\ 0 & 0 \leq t \leq 1; \\ (t-1)^3/27 & 1 \leq t; \end{cases}$$

ist ein Flußweg. Im Rückblick ist unser Beispiel 12.5.2.3 im wesentlichen dasselbe, nur in trivialer Weise um eine Dimension erweitert, damit es besser bildlich dargestellt werden kann.

Beispiel 12.5.2.6 (**Verhalten unter Längenänderungen**). Ändern wir bei einem Vektorfeld ohne Nullstellen nur die Längen seiner Vektoren, durchaus auch in Abhängigkeit vom Ort, so bleiben die Flußwege offensichtlich bis auf Reparametrisierung dieselben. Ist also in Formeln X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $U \Subset X$ offen, $A : U \to \vec{X}$ ein Vektorfeld ohne Nullstellen und $c : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ohne Nullstellen und ist $\gamma : I \to U$ ein Flußweg von A, so finden wir mit dem Ansatz $\psi(t) = \gamma(r(t))$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\psi'(t) = c(\psi(t))A(\psi(t))$$

In der Tat liefert diese Gleichung nämlich für die Reparametrisierung r die Gleichung

$$r'(t)\gamma'(r(t)) = c(\gamma(r(t)))A(\gamma(r(t)))$$

und damit $r'(t) = (c \circ \gamma)(r(t))$. Diese Gleichung aber haben wir bereits in 12.5.2.4 lösen gelernt.

12.5.2.7 (**Felder mit separierten Variablen**). Gegeben endlichdimensionale reelle Räume X, Y und offene Teilmengen $U \Subset X$ sowie $V \Subset Y$ und Vektorfelder $A : U \to \vec{X}$ sowie $B : V \to \vec{Y}$ sind die Flußwege des Vektorfelds $(A \times B) : U \times V \to \vec{X} \times \vec{Y}$ genau die Abbildungen (γ, ψ) mit $\gamma : I \to U$ einem Flußweg von A und $\psi : I \to V$ einem Flußweg von B mit demselben Definitionsbereich. In dieser Situation spricht man von einer Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen oder lateinisierend **separierten Variablen**. Man beachte die enge Beziehung zur „Verwandtschaftsverträglichkeit von Flußwegen" 12.5.1.12. Die in 12.5.2.9 erläuterte Methode der „Separation der Variablen" mag man auffassen als das Überführen einer Differentialgleichung in eine Gleichung mit separierten Variablen.

Beispiel 12.5.2.8 (**Eindimensionale zeitabhängige Felder**). Gegeben eine Funktion $a : \mathbb{R}^2 \Supset W \to \mathbb{R}$ interessieren wir uns für Lösungen der Gleichung

$$y' = a(t, y)$$

Unter einer „Lösung" versteht man hierbei ein Paar (γ, I) mit $I \subset \mathbb{R}$ einem mehrpunktigen Intervall und $\gamma : I \to \mathbb{R}$ einer differenzierbaren Funktion, deren Graph in U enthalten ist und für die gilt

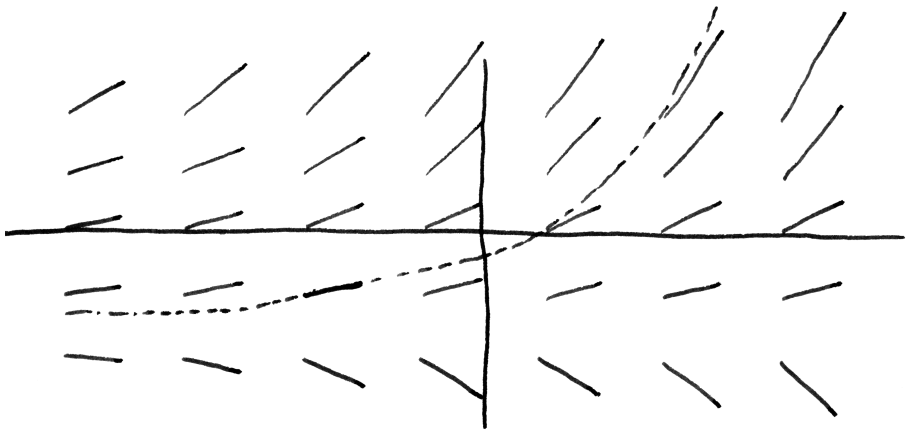
$$\gamma'(t) = a(t, \gamma(t)) \quad \forall t \in I$$

Ich habe hier Lösungen als $\gamma(t)$ und nicht als $y(t)$ geschrieben, wie es die Gleichung suggeriert, in der Hoffnung, daß das zum besseren Verständnis beiträgt. Hängt $a(t, y)$ gar nicht von y ab, also $a(t, y) = a(t)$, so sind die Lösungen unserer Differentialgleichung natürlich genau die Stammfunktionen von a. Hängt $a(t, y)$ dahingegen nicht von t ab, also $a(t, y) = a(y)$, so sind die Lösungen unserer Differentialgleichung nichts anderes als die Flußwege des auf einer geeigneten Teilmenge von $\mathbb{R}$ definierten Vektorfelds $a(y)$, die wir bereits in 12.5.2.4 diskutiert hatten.

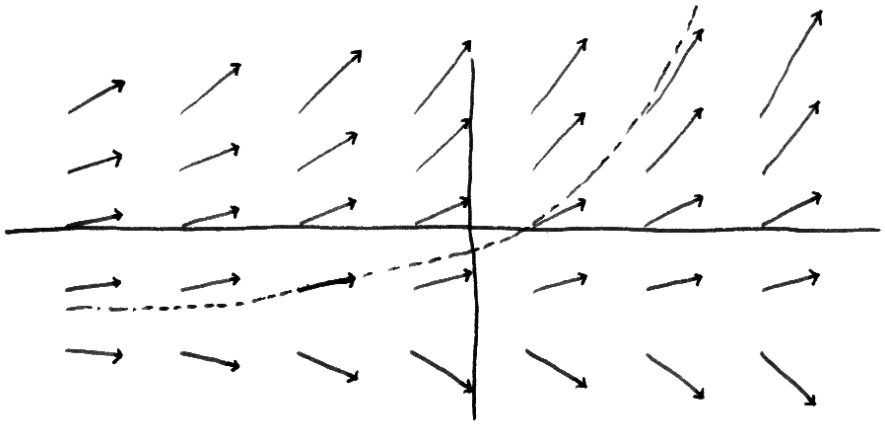
12.5.2.9. Seien $a : \mathbb{R} \Supset U \to \mathbb{R}$ und $\alpha : \mathbb{R} \Supset J \to \mathbb{R}$ stetig. Differentialgleichungen der Gestalt

$$y'(t) = \alpha(t)a(y(t))$$

für Funktionen $y = y(t)$ bedeuten geometrisch die Suche nach Flußwegen eines zeitabhängigen Vektorfelds auf $U \Subset \mathbb{R}$, das die spezielle Gestalt $A(t, y) = \alpha(t)a(y)$ hat. Ich schreibe $y(t)$ statt $\gamma(t)$, weil wir ja nur eine reellwertige Funktion suchen, also $X = \mathbb{R}$. Sie lassen sich oft mit der Methode der **Separation der Variablen** oder auf deutsch **Variablentrennung** lösen. Ich führe zunächst dieses Verfahren vor und erkläre dann, inwiefern wir dabei implizit unsere Gleichung in eine Gleichung mit separierten Variablen im Sinne von 12.5.2.7 transformieren. Wir nehmen an, a habe keine Nullstelle und U sei ein Intervall. Gegeben eine



Im Fall zeitabhängiger eindimensionaler Felder mag man sich ein Vektorfeld als ein „Steigungsfeld“ veranschaulichen, bei dem die jeweils vorgeschriebene Steigung $a(t, y)$ von beiden Koordinaten abhängen darf, und die Lösung der entsprechenden Differentialgleichung durch ihren im Bild gestrichelt eingezeichneten Graphen, der dann eben an jeder Stelle tangential an das dort vorgegebene Steigungsfeld sein soll.



In 12.5.1.10 habe ich ausgeführt, wie die Untersuchung der Flußwege zeitabhängiger Felder auf einem Raum X auf die Untersuchung der Flußwege zeitunabhängiger Felder auf dem Raum $\mathbb{R} \times X$ zurückgeführt werden kann. Dieses Bild zeigt im Spezialfall $X = \mathbb{R}$ das zeitunabhängige Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$, dessen Flußwege den Flußwegen des durch das Bild darüber dargestellten zeitabhängigen Feldes auf $\mathbb{R}$ entsprechen.

Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ kann die Gleichung $y'(t) = \alpha(t)a(y(t))$ dann auch geschrieben werden als

$$\frac{y'(t)}{a(y(t))} = \alpha(t)$$

Ist nun G eine Stammfunktion von $1/a$ und B eine Stammfunktion von α, so folgt für alle $s, t \in I$ sofort

$$G(y(t)) - G(y(s)) = \int_{y(s)}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}y}{a(y)} = \int_s^t \frac{y'(\tau)}{a(y(\tau))}\,\mathrm{d}\tau = \int_s^t \alpha(\tau)\,\mathrm{d}\tau = B(t) - B(s)$$

Hier ist G sicher streng monoton. Folglich hat es offenes Bild $G(U) \Subset \mathbb{R}$. Für die Umkehrabbildung $G^{-1} : G(U) \to \mathbb{R}$ folgt

$$y(t) = G^{-1}(B(t) + c) \qquad \forall t \in I$$

mit der Konstante $c = G(y(s)) - B(s)$. Umgekehrt prüft man auch ohne Schwierigkeiten, daß für $(s, u) \in J \times U$ die obige Formel für $c = G(u) - B(s)$ und $t \in I + B^{-1}(G(U) - c)$ die größte Lösung unserer Differentialgleichung mit $y(s) = u$ liefert. Um den Zusammenhang mit der Situation separierter Variablen im Sinne von 12.5.2.7 herzustellen, interpretieren wir unsere Gleichung wie in 12.5.1.10 als die Suche nach Flußwegen des ebenen Vektorfelds $(x, y) \mapsto (1, \alpha(x)a(y))$ und kommen unter der zusätzlichen Annahme, daß auch α keine Nullstelle hat, mit der in 12.5.2.6 erläuterten Längenänderung um $c(x, y) := \alpha(x)^{-1}$ zum Vektorfeld $(x, y) \mapsto (\alpha(x)^{-1}, a(y))$. In dieser Weise landen wir dann bei der Suche nach den Flußwegen eines Vektorfelds mit separierten Variablen.

Proposition 12.5.2.10 (Strikte differentielle Ungleichungen). *Sei eine Funktion $K : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ gegeben und seien $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit Graph in U derart, daß an jeder Stelle $t \in [a, b)$ gilt*

$$f'(t) \geq K(t, f(t)) \quad \textit{und} \quad g'(t) < K(t, g(t)).$$

Haben wir außerdem $g(a) \leq f(a)$, so folgt $g(t) < f(t)$ für alle $t \in (a, b)$.

12.5.2.11. Fordern wir hier statt der strikten Ungleichung auch für g nur die nicht-strikte Ungleichung $g'(t) \leq K(t, g(t))$, so gilt die Aussage nur noch unter zusätzlichen Annahmen an die Funktion K und ich kenne keinen so einfachen Beweis mehr. Ich diskutiere eine Variante für nicht-strikte Ungleichungen in 12.5.7.1.

Beweis. Die Funktion $h := g - f$ ist differenzierbar mit $h(a) \leq 0$ und $h(t) = 0 \Rightarrow h'(t) < 0$. Damit folgt leicht $h(t) < 0$ für alle $t \in (a, b)$, wie Sie auch in 10.5.5.24 schon zur Übung selbst zeigen durften. □

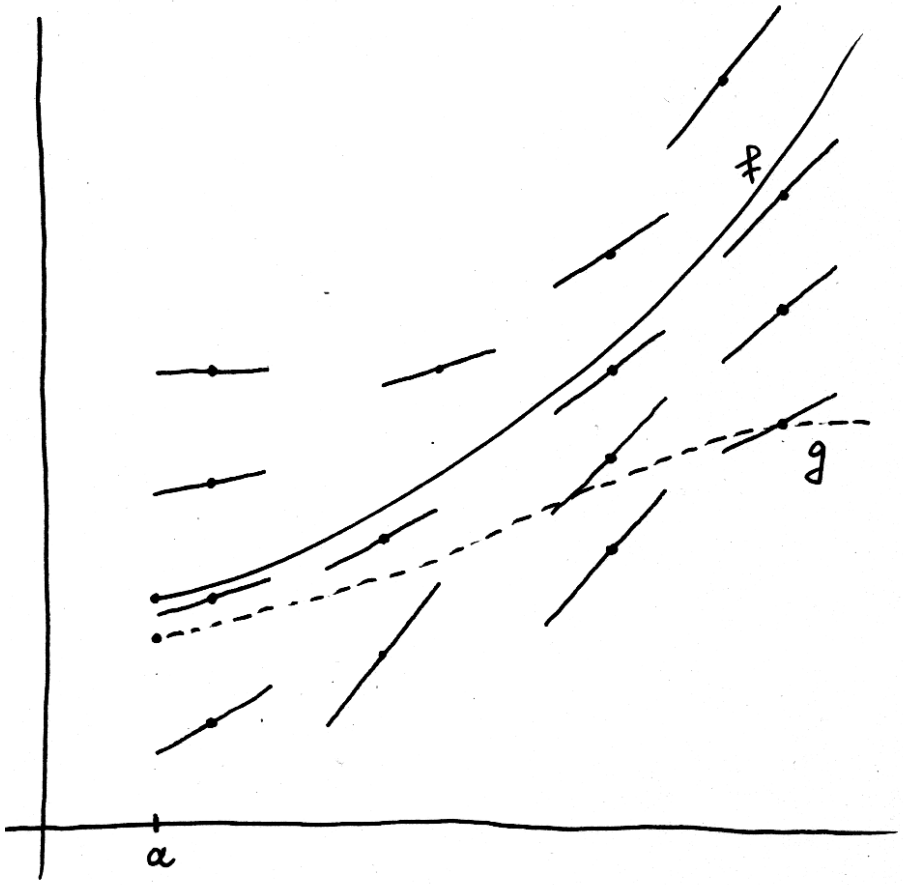


Illustration zur Proposition über strikte differentielle Ungleichungen. Ich denke mir K als ein „Steigungsfeld“. Eine Lösung der entsprechenden Differentialgleichung muß nun offensichtlich stets über einer Lösung der der entsprechenden differentiellen Ungleichung bleiben, wenn sie zum Anfangszeitpunkt darüber liegt. Das ist die anschauliche Bedeutung der Proposition.

Beispiel 12.5.2.12 (**Funktionen, die echt größer sind als ihre eigene Ableitung**). Gegeben eine differenzierbare Funktion $g : [0, b) \to \mathbb{R}$ mit $g'(t) < g(t)$ für alle $t \in [0, b)$ gilt $g(t) < g(0)\mathrm{e}^t$ für alle $t \in (0, b)$. Das folgt, indem wir unsere Proposition über differentielle Ungleichungen mit $K(x, y) = y$ anwenden. Alternativ können wir bemerken, daß $g(t)\mathrm{e}^{-t}$ negative Ableitung hat.

Beispiel 12.5.2.13 (**Funktionen, die größergleich ihrer eigenen Ableitung sind**). Gegeben eine differenzierbare Funktion $g : [0, b) \to \mathbb{R}$ mit $g'(t) \le g(t)$ für alle $t \in [0, b)$ gilt $g(t) \le g(0)\mathrm{e}^t$ für alle $t \in [0, b)$. Das können wir zeigen, indem wir bemerken, daß $g(t)\mathrm{e}^{-t}$ nichtpositive Ableitung hat, vergleiche Übung 10.5.5.23. Alternativ können wir unsere Proposition über differentielle Ungleichungen mit $K(x, y) = y + \varepsilon$ anwenden für alle $\varepsilon > 0$. Eine Lösung der Differentialgleichung $f'(t) = f(t) + \varepsilon$ mit Anfangswert $f(0) = g(0)$ ist $f(t) = (g(0) + \varepsilon)\mathrm{e}^t - \varepsilon$ und wir folgern

$$g(t) < (g(0) + \varepsilon)\mathrm{e}^t - \varepsilon \quad \forall t \in (0, b)$$

Im Grenzwert für $\varepsilon \to 0$ folgt dann die Behauptung. Das ist auch schon fast das Lemma von Gronwall, wie es im Anschluß bewiesen wird.

Korollar 12.5.2.14 (Lemma von Gronwall). *1. Gegeben Konstanten $L > 0$ und C sowie $b > 0$ und eine differenzierbare Funktion $g : [0, b) \to \mathbb{R}$ mit $g(0) \le 0$ und $g'(t) \le Lg(t) + C$ für alle $t \in [0, b)$ gelten für alle $t \in (0, b)$ die Abschätzungen*

$$g(t) \le (C/L)\mathrm{e}^{Lt} - (C/L) \quad \textit{und} \quad g'(t) \le C\mathrm{e}^{Lt}.$$

2. Ist $b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $h : [0, b) \to \mathbb{R}$ stetig und gibt es Konstanten L, C mit $L \ge 0$ und

$$h(t) \le L \int_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau + C$$

für alle $t \in [0, b)$, so erfüllt h die Abschätzung $h(t) \le C\,\mathrm{e}^{Lt}$.

Beweis. Man beachte, daß die Differentialgleichung $f'(t) = Lf(t) + C$ für $L \ne 0$ die Lösung $f(t) = (C/L)\mathrm{e}^{Lt} - (C/L)$ mit Anfangswert $f(0) = 0$ hat. Für jedes $\varepsilon > 0$ folgt aus unseren Annahmen $g'(t) < Lg(t) + C + \varepsilon$. Damit folgt die erste Ungleichung im ersten Teil sogar für beliebiges $L \ne 0$ sofort aus unseren Erkenntnissen über differentielle Ungleichungen 12.5.2.10. Die zweite Ungleichung im ersten Teil folgt durch Einsetzen der ersten Ungleichung in die Annahme. Hierbei brauchen wir $L > 0$, damit sich die erste Ungleichung bei der Multiplikation mit L nicht umdreht. Daß die zweite Ungleichung im ersten Teil auch noch für $L = 0$ gilt, ist eh klar. Wenden wir sie auf $g(t) := \int_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ an, ergibt sich der zweite Teil. □

12.5.2.15. Eine Fülle an weiteren Beispielen und Lösungsmethoden zu gewöhnlichen Differentialgleichungen findet man etwa in [MV00].

Übungen

Übung 12.5.2.16 (**Größere Felder haben schnellere Flußwege**). Gegeben $U \subset \mathbb{R}$ halboffen und $a, b : U \to \mathbb{R}$ stetig ohne Nullstelle mit $a \leq b$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $\gamma, \kappa : I \to U$ differenzierbar mit $\dot{\gamma}(t) = a(\gamma(t))$ und $\dot{\kappa}(t) = b(\kappa(t))$ für alle $t \in I$ folgt aus $\gamma(t_0) \leq \kappa(t_0)$ für ein $t_0 \in I$ bereits dieselbe Aussage für alle $t \in I$ mit $t \geq t_0$.

12.5.3 Integration von vektorwertigen Funktionen

12.5.3.1. Wir zimmern in diesem Abschnitt einen begrifflichen Rahmen, der nicht nur das Integrieren komplexwertiger Funktionen als Spezialfall umfaßt, sondern auch in natürlicher Weise unsere Überlegungen zum Differenzieren vektorwertiger Funktionen ergänzt.

Definition 12.5.3.2. Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres kompaktes Intervall, V ein reeller Vektorraum und $f : [a, b] \to V$ eine Abbildung. Wir betrachten für $r \geq 1$ die äquidistante Unterteilung $a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_r = b$ und definieren die r**-te Riemannsumme** $S^r(f) \in V$ durch

$$S^r(f) := \sum_{i=0}^{r-1} (t_{i+1} - t_i) f(t_i) = \left(\frac{b-a}{r}\right) \sum_{i=0}^{r-1} f(t_i)$$

Satz 12.5.3.3 (**Integration vektorwertiger Funktionen**). *Gegeben eine stetige Abbildung von einem nichtleeren kompakten Intervall in einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum $f : [a, b] \to V$ existiert der Grenzwert der zugehörigen Riemannsummen. Das als dieser Grenzwert erklärte* **Integral**

$$\int f = \int_a^b f = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t := \lim_{r \to \infty} S^r(f)$$

ordnet jedem f einen Vektor $(\int f) \in V$ zu und hat die folgenden Eigenschaften:

1. *Für alle $c \in [a, b]$ gilt $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$;*
2. *Ist $f = v$ konstant ein $v \in V$, so gilt $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b v\ \mathrm{d}t = (b-a)v$;*
3. *Ist $\Lambda : V \to W$ eine lineare Abbildung in einen weiteren endlichdimensionalen reellen Vektorraum W, so gilt*

$$\int (\Lambda \circ f) = \Lambda\left(\int f\right)$$

4. *Gegeben eine Norm $\| \ \|$ auf V gilt für die Norm des Integrals die Abschätzung $\| \int f \| \leq \int \|f\|$;*

5. *Im Fall $V = \mathbb{R}$ reellwertiger Funktionen erhalten wir unser Integral aus 10.5.2.1 zurück.*

Vorschau 12.5.3.4. Dieser Satz gilt genauso für Banachräume V, W. Der Beweis braucht dann aber zusätzliche Argumente.

12.5.3.5 (**Linearität des Integrals**). Sie mögen in diesem Satz die Regeln $\int \lambda f = \lambda \int f$ sowie $\int (f+g) = \int f + \int g$ für stetige vektorwertige Funktionen f, g und $\lambda \in \mathbb{R}$ vermißt haben. Sie folgen jedoch formal aus Teil 3. In der Tat dürfen wir dort $\Lambda = (\lambda \cdot) : V \to V$ nehmen und auch $\Lambda : V \times V \to V$ die Addition sowie die beiden Projektionen. So ergibt sich für die $V \times V$-wertige Funktion (f, g) zunächst $\mathrm{pr}_1 \int (f, g) = \int f$ und $\mathrm{pr}_2 \int (f, g) = \int g$ und damit $\int (f, g) = (\int f, \int g)$ und durch Anwenden der Addition dann $\int (f+g) = \int f + \int g$. Etwas allgemeiner folgt die „Komponentenregel“ $\int (f, g) = (\int f, \int g)$ auch für f, g mit Werten in verschiedenen endlichdimensionalen reellen Vektorräumen.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $V = \mathbb{R}^n$. Dann erweist sich unser Integral schlicht das „komponentenweise Integral“ und alle Aussagen des Satzes sind offensichtlich mit Ausnahme der Abschätzung $\| \int f \| \leq \int \|f\|$. Diese Abschätzung ist jedoch offensichtlich für die Riemannsummen und folgt im Grenzwert. □

12.5.3.6. Wie im Fall reellwertiger Funktionen verwenden wir auch im Fall vektorwertiger Funktionen die Konvention $\int_b^a f = -\int_a^b f$. Ist dann $f : I \to V$ eine stetige Abbildung von einem reellen Intervall in einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum, so gilt für beliebige $a, b, c \in I$ die Formel $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

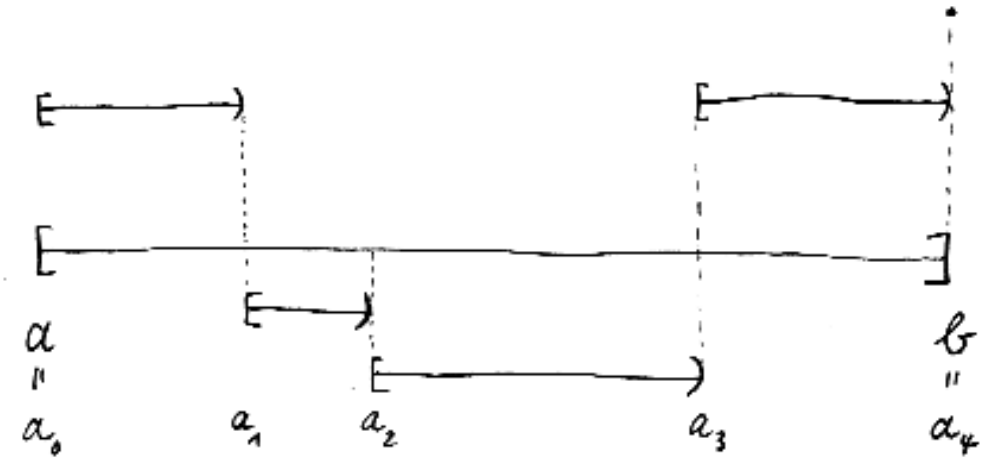
Satz 12.5.3.7 (Vektorwertige Variante des Hauptsatzes). *Gegeben ein mehrpunktiges Intervall $I \subset \mathbb{R}$, ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V, eine stetige Funktion $f : I \to V$ und ein Punkt $a \in I$ ist die Funktion*

$$\begin{array}{rccl} F: & I & \to & V \\ & x & \mapsto & \int_a^x f(t) \ \mathrm{d}t \end{array}$$

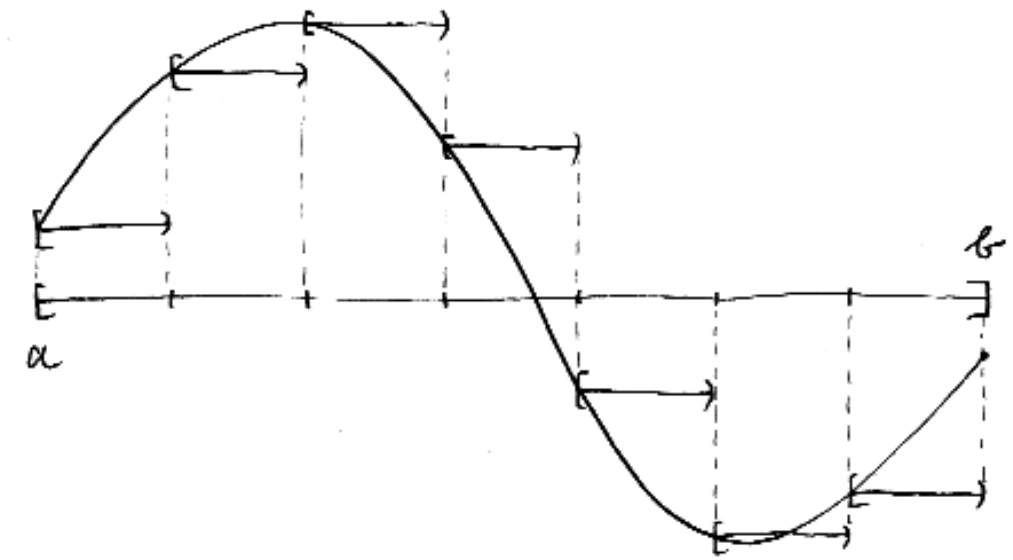
die einzige differenzierbare Funktion $F : I \to V$ mit $F' = f$ und $F(a) = 0$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $V = \mathbb{R}^n$ annehmen und können uns so auf den Fall reellwertiger Funktionen zurückziehen. □

Zweiter Beweis. Ähnlich zum Beweis für reellwertige Funktionen 10.5.7.1 und dem Leser zur Übung überlassen. Man verwende die Abschätzung aus 12.5.3.3 für die Norm des Integrals und den Schrankensatz 10.7.1.10. □



Der Graph einer reellwertigen Treppenfunktion.



Der Graph einer reellwertigen Funktion f und der zugehörigen Treppenfunktion f_7 aus dem nebenstehenden Beweis, mit $I(f_7)$ der siebten Riemannsumme von f.

Korollar 12.5.3.8 (Integrieren mit Stammfunktionen). *Seien V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a, b] \to V$ stetig. Ist $G : [a, b] \to V$ eine* **Stammfunktion** *von f, als da heißt eine differenzierbare Funktion mit Ableitung $G'(t) = f(t)$, so gilt*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a)$$

Beweis. Das folgt sofort aus dem vorhergehenden Satz 12.5.3.7. □

Übungen

Übung 12.5.3.9. Gegeben ein mehrpunktiges kompaktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und ein endlichdimensionaler normierter reeller Vektorraum V ist der Raum $\mathcal{C}^1(I, V)$ aller stetig differenzierbaren Abbildungen von I nach V vollständig für die Norm $\|\varphi\|_1 = \|\varphi\| + \|\varphi'\|$ der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen und ihrer ersten Ableitungen. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall $V = \mathbb{R}$ zurück und erinnere das Vertauschen des Integrals mit gleichmäßiger Konvergenz 10.6.1.14.

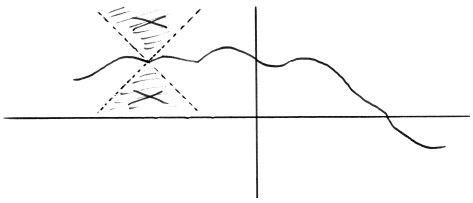
12.5.4 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

12.5.4.1. Gegeben ein auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums definiertes Vektorfeld $A : X \supseteq U \to \vec{X}$ verstehen wir unter einem **Flußweg von A mit Anfangswert p** wie in 12.5.1.6 ein Paar (I, γ) mit $I \subset \mathbb{R}$ einem mehrpunktigen Intervall, das die Null enthält, und einer differenzierbaren Abbildung $\gamma : I \to U$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(t) = A(\gamma(t))$ für alle $t \in I$.

12.5.4.2. Eine Abbildung f zwischen metrischen Räumen heißt **lipschitzstetig** wie in 12.3.1.8, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt mit $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$ für alle x, y im Ausgangsraum. Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt **lokal lipschitzstetig**, wenn jeder Punkt des Ausgangsraums eine Umgebung besitzt, auf der unsere Funktion lipschitzstetig ist.

12.5.4.3. Nach 12.1.4.11 ist jedes stetig differenzierbare Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines normierten Raums lokal lipschitzstetig, deshalb folgt der Satz über die Existenz und Eindeutigkeit im Fall stetig differenzierbarer Vektorfelder 12.5.2.1 unmittelbar aus der Fassung für lokal lipschitzstetige Vektorfelder, die wir im folgenden als 12.5.4.9 beweisen. Die Hauptlast des Beweises trägt das folgende Lemma 12.5.4.4.

Lemma 12.5.4.4 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit). *Gegeben ein endlichdimensionaler normierter reeller Raum X und ein beschränktes lipschitzstetiges Vektorfeld $A : X \supseteq U \to \vec{X}$ existieren zu jedem Anfangswert $p \in U$ Flußwege*



Die Restriktion auf die negative x-Achse der hier durch ihren Graphen dargestellten Funktion ist lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1, da sie an jeder Stelle den schraffierten verbotenen Bereich der entsprechen verschobenen Figur vermeidet. Die Begrenzungslinien haben darin als Steigung die Lipschitzkonstante, in diesem Fall die Steigung 1. Die Restriktion auf die positive x-Achse ist zwar lipschitzstetig, aber mit einer größeren Lipschitzkonstante.

von A mit offenem Definitionsbereich und je zwei Flußwege $\gamma : I \to U$ sowie $\phi : J \to U$ mit demselben Anfangswert stimmen für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ auf $I \cap J \cap [-\varepsilon, \varepsilon]$ überein.

12.5.4.5. Gegeben metrische Räume X, Y, Z heißt eine Abbildung $f : X \times Y \to Z$ **partiell lipschitzstetig in der zweiten Variable**, wenn es $L \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$d(f(x, y_1), f(x, y_2)) \leq Ld(y_1, y_2) \; \forall x \in X, y_1, y_2 \in Y$$

Das ist stärker, als nur zu fordern, daß für jedes $x \in X$ die Abbildung $y \mapsto f(x, y)$ lipschitzstetig sein soll, denn dann bräuchten wir nur für jedes $x \in X$ jeweils eine Konstante L_x mit der entsprechenden Eigenschaft zu finden.

12.5.4.6. Allgemeiner gilt der Satz über die lokale Existenz und Eindeutigkeit auch für stetige beschränkte zeitabhängige Vektorfelder $A : (-a, a) \times U \to \vec{X}$, die partiell lipschitzstetig sind im Ort. Der Beweis ist mutatis mutandis derselbe. Diese Variante ist insofern stärker, als unser Lemma beim Übergang 12.5.1.10 von zeitabhängigen zu zeitunabhängigen Vektorfeldern dieselbe Folgerung nur liefert unter der stärkeren Annahme, daß $A : (-a, a) \times U \to \vec{X}$ voll lipschitzstetig ist.

Beweis. Wir betrachten für ein beliebiges mehrpunktiges kompaktes reelles Intervall $K \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in K$ den affinen Raum

$$\mathcal{C}_p(K, X)$$

aller stetigen Wege $\gamma : K \to X$ mit $\gamma(0) = p$ und versehen seinen Richtungsraum $\mathcal{C}_0(K, \vec{X})$ mit der Norm $\| \; \|_\infty$ der gleichmäßigen Konvergenz. Nach Übung **??** erhalten wir so einen vollständigen normierten Vektorraum. Nun betrachten wir in unserem affinen Raum die offene Teilmenge $\mathcal{C}_p(K, U)$ aller in U verlaufenden Wege und die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathbb{R} \times \mathcal{C}_p(K, U) & \to & \mathbb{R} \times \mathcal{C}_p(K, X) \\ & (\rho \; , \; \gamma) & \mapsto & \big(\rho, \gamma - \rho \int (A \circ \gamma)\big) \end{array}$$

Hierbei sei $\int : \mathcal{C}(K, \vec{X}) \to \mathcal{C}_0(K, \vec{X})$ gegeben durch $(\int \psi)(t) := \int_0^t \psi(\tau) \, \mathrm{d}\tau$ mit unserem vektorwertigen Integral aus 12.5.3.3. Bezeichne κ den konstanten Weg bei p. Unter unserer Abbildung geht aufgrund der vektorwertigen Variante 12.5.3.7 des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (ρ, γ) nach (ρ, κ) genau dann, wenn $\gamma : K \to U$ ein Flußweg des reskalierten Feldes ρA ist. Insbesondere haben wir $(0, \kappa) \mapsto (0, \kappa)$. Wir wenden nun den Umkehrsatz für stetige Abbildungen 12.3.1.12 an und zeigen genauer, daß für $\eta > 0$ hinreichend klein und $K \subset [-1/4S, 1/4S]$ mit $S > 0$ einer oberen Schranke der Normen der Vektoren unseres Vektorfelds A die Restriktion von $F - \mathrm{id}$ auf $(-\eta, \eta) \times \mathcal{C}_p(K, U)$

kontrahierend ist. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}
\|(F-\mathrm{id})(\sigma,\psi)-(F-\mathrm{id})(\rho,\gamma)\| &= \left\|\sigma\int A\psi-\rho\int A\gamma\right\|_\infty \\
&\le |\sigma-\rho|\left\|\int A\psi\right\|_\infty+|\rho|\left\|\int A\psi-A\gamma\right\|_\infty \\
&\le |\sigma-\rho|(S/4S)+(\eta L/4S)\|\psi-\gamma\|_\infty \\
&\le |\sigma-\rho|/4+\|\psi-\gamma\|_\infty/4 \\
&\le (1/2)\|(\rho-\sigma,\gamma-\psi)\|
\end{aligned}$$

falls im vorletzten Schritt $\eta > 0$ so klein ist, daß gilt $\eta L/S < 1$. Dann liefert uns der Umkehrsatz für stetige Abbildungen 12.3.1.12 wegen $F : (0,\kappa) \mapsto (0,\kappa)$, daß es für $\rho > 0$ hinreichend klein genau ein Urbild (ρ,γ_ρ) von (ρ,κ) unter F gibt, also genau einen Flußweg $\gamma_\rho : K \to U$ des reskalierten Vektorfelds ρA. Gehen wir etwa von $K = [-\beta,\beta]$ aus, so ist dann $\gamma(t) := \gamma_\rho(\rho^{-1}t)$ ein auf $(-\rho\beta,\rho\beta)$ definierter Flußweg des Vektorfelds A zu p und die Existenzaussage des Lemmas ist gezeigt. Seien andererseits $\gamma : I \to U$ und $\phi : J \to U$ Flußwege mit demselben Anfangswert. Besteht $I \cap J$ nur aus dem Nullpunkt, so ist die Behauptung eh klar. Sonst gibt es $\alpha > 0$ mit $I \cap J \cap [-\alpha,\alpha]$ mehrpunktig und kompakt und in $[-1/4S, 1/4S]$ enthalten. Für alle $\rho \in [0,1]$ sind dann die Abbildungen $t \mapsto \gamma(\rho t)$ und $t \mapsto \phi(\rho t)$ auf $I \cap J \cap [-\alpha,\alpha]$ definierte Flußwege mit Anfangswert p des reskalierten Vektorfelds ρA. Für hinreichend kleines $\rho > 0$ gibt es aber nach dem, was wir gezeigt haben, nur einen derartigen Flußweg, und damit folgt auch die zweite Behauptung des Lemmas. □

12.5.4.7. Beim Beweis des Umkehrsatzes für eine stetige Abbildung f hatten wir Urbilder von y unter f konstruiert als Fixpunkte der kontrahierenden Abbildung $k_y : x \mapsto x - f(x) + y$. Hier bedeutet das, daß wir Lösungen auf K für das mit betragsmäßig hinreichend kleinem σ reskalierte Feld konstruieren als Fixpunkte der kontrahierenden Abbildung

$$k_{(\sigma,\kappa)} : (\rho,\gamma) \mapsto \left(\sigma, \kappa + \rho\textstyle\int A\circ\gamma\right)$$

und, wenn wir den ersten Term der Iteration weglassen und das σ vorne in der Klammer desgleichen, als Fixpunkte der kontrahierenden Abbildung

$$\gamma \mapsto \kappa + \sigma\textstyle\int A\circ\gamma$$

Das heißt die **Picard-Iteration**.

Ergänzung 12.5.4.8. Die allgemeinere Aussage 12.5.4.6 über lokale Existenz und Eindeutigkeit der Flußwege für stetige beschränkte im Ort partiell lipschitzstetige

zeitabhängige Vektorfelder folgt analog mithilfe der Abbildung

$$F : (\rho, \gamma) \mapsto (\rho, \gamma - \rho \int A(\rho\tau, \gamma(\tau))\,\mathrm{d}\tau)$$

mit dem Integral als Abkürzung für die Abbildung $t \mapsto \int_0^t A(\rho\tau, \gamma(\tau))\,\mathrm{d}\tau$.

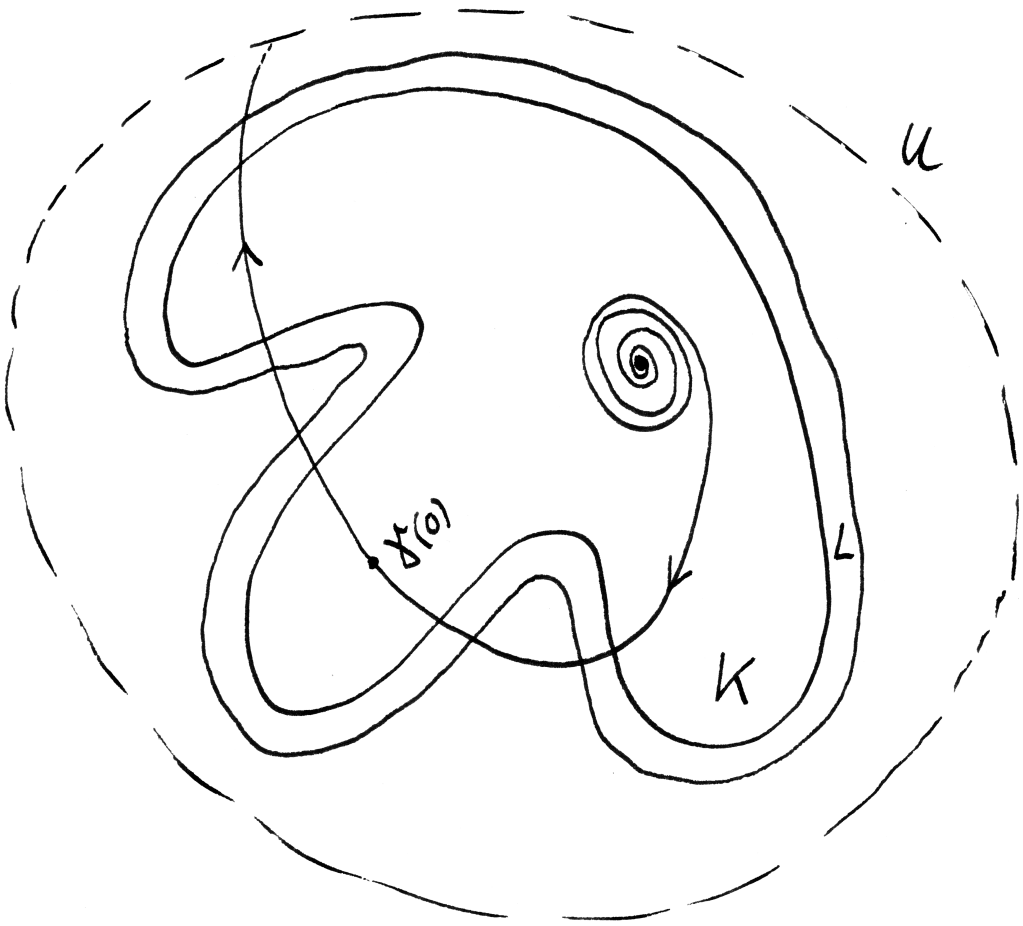
Satz 12.5.4.9 (**Picard-Lindelöf**). *1. Gegeben ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen normierten reellen Raums gibt es zu jedem Anfangswert einen größten Flußweg;*

2. Dieser größte Flußweg hat als Definitionsbereich ein offenes Intervall, und ist besagtes Intervall nach oben beschränkt, so verläßt er für positive Zeiten jedes Kompaktum aus unserer offenen Teilmenge irgendwann endgültig.

12.5.4.10 (**Flüsse von Vektorfeldern mit kompaktem Träger**). Ein Flußweg eines lokal lipschitzstetigen Vektorfelds, der durch eine Nullstelle unseres Feldes geht, ist offensichtlich konstant. Jeder Flußweg, der durch eine Nichtnullstelle unseres Feldes geht, bleibt also für alle Zeiten seines Definitionsbereichs in den Nichtnullstellen. Jeder Flußweg, der durch einen Punkt im Träger unseres Feldes geht, bleibt mithin für alle Zeiten seines Definitionsbereichs im Träger unseres Feldes. Verschwindet speziell unser Vektorfeld außerhalb von einem Kompaktum, so ist jeder maximale Flußweg auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

12.5.4.11. Beim Beweis zeigen wir stärker als in Teil 2 formuliert: Ist das Definitionsintervall unseres größten Flußwegs nach oben beschränkt, so kann er nicht ab irgendeinem Zeitpunkt ganz innerhalb irgendeiner in unserem affinen Raum abgeschlossenen Teilmenge bleiben, die im Definitionsbereich unseres Vektorfelds enthalten ist und auf der unser Vektorfeld beschränkt ist.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß je zwei Flußwege γ, ψ mit demselben Anfangswert p und demselben Definitionsintervall I übereinstimmen. Wir zeigen nur, daß sie auf $I \cap [0, \infty)$ übereinstimmen, für $I \cap (-\infty, 0]$ argumentiert man analog. Stimmen aber unsere Wege auf $I \cap [0, \infty)$ nicht überein, so wäre das Supremum s über alle $t \in I$ mit $\gamma|[0, t] = \psi|[0, t]$ nicht das Supremum von I. Wir hätten also $s \in I$ und wegen der Stetigkeit der Flußwege gälte $\gamma(s) = \psi(s)$, und nach der Eindeutigkeitsaussage in Lemma 12.5.4.4 muß dann auch gelten $\gamma|[0, s+\eta] = \psi|[0, s+\eta]$ für ein positives η im Widerspruch zur Wahl von s. Folglich stimmen je zwei Flußwege mit Anfangswert p auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche überein und es gibt unter allen Flußwegen mit Anfangswert p einen größten, dessen Definitionsbereich eben die Vereinigung der Definitionsbereiche aller Flußwege zu p ist. Wäre dieser Definitionsbereich nicht offen, so enthielte er sein Supremum oder sein Infimum. Dann könnten wir jedoch um die Bilder dieser Grenzpunkte auch wieder Flußwege mit offenem Definitionsbereich finden und „ankleben“



Ein größter Flußweg, dessen Definitionsbereich nach oben beschränkt ist und die so jedes Kompaktum wie etwa K oder L irgendwann einmal endgültig verläßt. In diesem Fall wäre der Definitionsbereich nach unten unbeschränkt und unser Flußweg würde für negative Zeiten gegen eine Nullstelle unseres Vektorfeldes konvergieren, die im Zentrum der Spirale liegt.

und unser Flußweg wäre nicht maximal gewesen. Dieser Widerspruch zeigt, daß unser größter Flußweg offenen Definitionsbereich hat. Bezeichne schließlich A unser Vektorfeld und $U \Subset X$ seinen Definitionsbereich. Ist $\gamma : [0, b) \to U$ ein Flußweg von A, dessen Bild in einem Kompaktum $M \subset U$ landet, so ist wegen $\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t))$ seine Geschwindigkeit $\|\dot{\gamma}(t)\|$ beschränkt auf $[0, b)$, mithin ist γ lipschitzstetig und besitzt nach **??** eine stetige Fortsetzung $\tilde{\gamma} : [0, b] \to M$. Die Integralform unserer Differentialgleichung zeigt dann sofort, daß auch $\tilde{\gamma}$ ein Flußweg von A sein muß. Mithin kann ein Flußweg mit nach oben beschränktem Definitionsbereich, der ganz in einem Kompaktum $M \subset U$ verläuft, schon einmal nicht maximal sein. Wir erklären nun noch, warum ein maximaler Flußweg mit nach oben beschränktem Definitionsbereich ab einem gewissen Zeitpunkt auch nicht mehr in ein vorgegebenes Kompaktum $M \subset U$ zurückkehren darf. Dazu bemerken wir zunächst, daß wir $r > 0$ finden können derart, daß für

$$N := \{x \in X \mid d_M(x) \leq r\}$$

gilt $N \subset U$. In der Tat ist das klar im Fall $U = X$ und folgt sonst, indem wir $2r = \inf d_{X \setminus U}(M)$ setzen. Nun ist aber auch N kompakt und die Norm unseres Vektorfelds ist folglich beschränkt auf N und wir finden mit derselben Argumentation wie zuvor $\varepsilon > 0$ derart, daß für jeden Flußweg $\gamma : I \to U$ und $t < s$ aus I mit $\gamma(t) \in M$ und $\gamma(s) \notin N$ folgt $s - t > \varepsilon$. Es ist deshalb nicht möglich, daß ein maximaler Flußweg mit nach oben beschränktem Definitionsbereich unendlich oft abwechselnd einen Punkt aus M und dann wieder einen Punkt aus $U \setminus N$ durchläuft. Da wir aber bereits wissen, daß er oberhalb jedes Zeitpunkts einmal N verlassen muß, kann er dann nicht oberhalb jedes Zeitpunkts auch wieder nach M zurückkehren. □

Satz 12.5.4.12 (Picard-Lindelöf, zeitabhängiger Fall). *1. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X und $A : (\mathbb{R} \times X) \Supset W \to \vec{X}$ ein stetiges und im Ort lokal partiell lipschitzstetiges zeitabhängiges Vektorfeld gibt es für jedes $(s, p) \in W$ unter allen Flußwegen unseres Feldes mit Anfangswert p zum Startzeitpunkt s einen größten;*

2. Dieser größte Flußweg γ hat als Definitionsbereich ein offenes Intervall, und ist besagtes Intervall nach oben beschränkt, so verläßt $(t, \gamma(t))$ für positive Zeiten jedes Kompaktum aus W irgendwann endgültig.

12.5.4.13. Mit **lokal partiell lipschitzstetig** ist gemeint, daß jeder Punkt von W eine offene Umgebung in W besitzen soll, auf der A im Sinne von 12.5.4.6 partiell lipschitzstetig ist.

Beweis. Mutatis mutandis derselbe wie für zeitunabhängige Vektorfelder 12.5.4.9, man muß sich nur abweichend auf die Variante 12.5.4.6 des lokalen Existenz-und Eindeutigkeitssatzes stützen. □

Übungen

Übung 12.5.4.14. Gegeben ein stetig differenzierbares Vektorfeld $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $A(p) \in \mathbb{R}^2 \times 0 \ \forall p \in \mathbb{R}^2 \times 0$ liegt jede Flußkurve, die die xy-Ebene $\mathbb{R}^2 \times 0$ trifft, bereits ganz in der xy-Ebene.

Übung 12.5.4.15. Gegeben ein stetig differenzierbares Vektorfeld $A : X \supseteq U \to \vec{X}$ auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums und eine Mannigfaltigkeit $M \subset X$ mit $M \subsetneq U$ und $A(p) \in \mathrm{T}_p M \ \forall p \in M$ verläuft jeder Flußweg von A, der M trifft, bereits ganz in M.

12.5.5 Lineare Differentialgleichungen

Satz 12.5.5.1 (**Homogene lineare Differentialgleichungen**). *Gegeben ein mehrpunktiges Intervall $I \subset \mathbb{R}$, ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V und eine stetige Abbildung $M : I \to \operatorname{End} V$ bilden die differenzierbaren Abbildungen $\gamma : I \to V$ mit*

$$\gamma'(t) = M(t)\gamma(t) \quad \forall t \in I$$

einen Untervektorraum $\mathcal{L} \subset \operatorname{Ens}(I, V)$, den **Lösungsraum** *unserer Differentialgleichung. Weiter ist für jedes $t_0 \in I$ das Auswerten bei t_0 ein Vektorraumisomorphismus $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} V, \gamma \mapsto \gamma(t_0)$, der* **Anfangswertisomorphismus**.

Ergänzung 12.5.5.2. Es ist unmittelbar klar, daß unter der Annahme, M sei k-mal stetig differenzierbar, unsere Lösungen γ sogar $(k+1)$-mal stetig differenzierbar sein müssen.

Ergänzung 12.5.5.3. Der Satz gilt mit fast demselben Beweis auch im Fall eines beliebigen Banachraums V, wenn man statt dem Raum $\operatorname{End} V$ aller Endomorphismen von V den normierten Raum $\mathcal{B}(V)$ aller stetigen Endomorphismen von V betrachtet. Wir müssen dann nur am Schluß des Beweises etwas sorgfältiger argumentieren, etwa in dem Sinne, daß ein auf $[0, b)$ definierter Flußweg nach den Abschätzungen im Beweis gleichmäßig stetig wäre und sich nach **??** stetig auf $[0, b]$ fortsetzen ließe. Das Bild dieser stetigen Fortsetzung ist in diesem Fall wieder das gesuchte Kompaktum, das nicht verlassen wird, im Widerspruch zu 12.5.4.12.

Beispiel 12.5.5.4 (**Explizite Lösung im eindimensionalen Fall**). Im eindimensionalen Fall $\dim V = 1$ oder der Einfachkeit halber noch besser $V = \mathbb{R}$ haben wir in 12.5.2.9 schon allgemeinere Differentialgleichungen explizit gelöst. In diesem Fall ist M eine reellwertige Funktion. Bezeichnen wir sie statt mit M mit $h : I \to \mathbb{R}$ und bezeichnet $H : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von h, so sind die Lösungen unserer Differentialgleichung $\gamma'(t) = h(t)\gamma(t)$ insbesondere schlicht die Funktionen $\gamma(t) = c \exp(H(t))$ für $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Daß unser Lösungsraum $\mathcal{L} \subset \operatorname{Ens}(I, V)$ ein Untervektorraum ist und das Auswerten bei t_0 linear scheint mir beides offensichtlich. Es bleibt nur, Injektivität und Surjektivität des Auswertens zu zeigen. Falls I nicht offen ist, wählen wir eine stetige Fortsetzung von M auf ein offenes Intervall $J \supset I$. Nun erfüllt $\gamma : J \to V$ nach 12.5.1.10 unsere Differentialgleichung genau dann, wenn es ein Flußweg des zeitabhängigen Vektorfelds $(t, v) \mapsto M(t)v$ auf $J \times V$ ist. Dies zeitabhängige Vektorfeld ist lokal partiell lipschitzstetig im Sinne von 12.5.4.13, also gibt es nach 12.5.4.12 zu jedem (t_0, v_0) mit $t_0 \in J$ und $v_0 \in V$ unter allen Flußwegen γ mit $\gamma(t_0) = v_0$ einen größten und insbesondere im Fall $t_0 \in I$ höchstens einen derartigen auf I definierten Flußweg. Das zeigt die Injektivität. Für den Beweis der Surjektivität reicht es zu zeigen, daß der größte Flußweg des zeitabhängigen Vektorfelds $(t, v) \mapsto M(t)v$ mit $\gamma(t_0) = v_0$ auf ganz J definiert ist. Sicher reicht es zu zeigen, daß er bis zum oberen Ende von J definiert ist. Sonst gäbe es aber $b \in J$ derart, daß die Lösung nicht in positiver Richtung über $[t_0, b)$ hinaus fortgesetzt werden könnte. Es gibt jedoch L mit $\|M(t)\| \le L$ für alle $t \in [t_0, b]$, daraus folgt für $t \in [t_0, b)$ erst

$$\|\gamma(t)\| = \left\| v_0 + \int_{t_0}^{t} M(\tau)\gamma(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\| \le \|v_0\| + L \int_{t_0}^{t} \|\gamma(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau$$

und dann $\|\gamma(t)\| \le \|v_0\|\,\mathrm{e}^{L(t-t_0)}$ nach dem Lemma von Gronwall 12.5.2.14. Dann wäre aber $\|\gamma(t)\|$ beschränkt auf $t \in [t_0, b)$, nämlich durch $\|v_0\|\,\mathrm{e}^{L(b-t_0)}$, im Widerspruch zur letzten Aussage im Satz über die Existenz und Eindeutigkeit 12.5.4.9 oder genauer ihrer Verallgemeinerung 12.5.4.12 auf den Fall zeitabhängiger Vektorfelder. □

Korollar 12.5.5.5 (Inhomogene lineare Differentialgleichungen). *Gegeben $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall, V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum sowie stetige Abbildungen $M : I \to \operatorname{End} V$ und $f : I \to V$ bilden die differenzierbaren Abbildungen $\gamma : I \to V$ mit*

$$\gamma'(t) = M(t)\gamma(t) + f(t) \quad \forall t \in I$$

einen affinen Teilraum $\mathcal{L}_{\mathrm{i}} \subset \operatorname{Ens}(I, V)$ mit dem Lösungsraum der zugehörigen linearen Gleichung als Raum von Richtungsvektoren. Für jedes $t_0 \in I$ definiert weiter das Auswerten bei t_0 eine Bijektion $\mathcal{L}_{\mathrm{i}} \xrightarrow{\sim} V$, $\gamma \mapsto \gamma(t_0)$, den **Anfangswertisomorphismus**.

Ergänzung 12.5.5.6. Dies Korollar gilt wieder mit fast demselben Beweis auch im Fall eines beliebigen Banachraums V, wenn man statt dem Raum $\operatorname{End} V$ aller Endomorphismen von V den normierten Raum $\mathcal{B}(V)$ aller stetigen Endomorphismen von V betrachtet.

Beweis. Die Differenz von je zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung ist offensichtlich eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, und die Summe einer Lösungen der homogenen und einer Lösung der inhomogenen Gleichung ist offensichtlich eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Damit bleibt nur zu zeigen, daß die inhomogene Gleichung überhaupt eine Lösung besitzt. Das folgt ähnlich wie im homogenen Fall und ohne weitere Schwierigkeiten aus unseren allgemeinen Prinzipien. Wir geben nun aber sogar eine Lösungsmethode an, die Methode der **Variation der Konstanten**. Dazu wählen wir eine Basis $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ des Lösungsraums der homogenen Gleichung und fassen sie zusammen zu einer Lösung $X : I \to V^n = \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, V)$ der homogenen linearen Differentialgleichung

$$X'(t) = M(t)X(t)$$

für Funktionen $I \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, V)$. Da die Werte von $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ an jeder Stelle eine Basis von V bilden, ist $X(t)$ an jeder Stelle ein Vektorraumisomorphismus. Nun machen wir für die Lösung unserer inhomogenen Gleichung den Ansatz $\gamma(t) = X(t)c(t)$ mit $c : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar alias $\gamma(t) = c_1(t)\gamma_1(t) + \ldots + c_n(t)\gamma_n(t)$ und finden

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= X'(t)c(t) + X(t)c'(t) \\ &= M(t)X(t)c(t) + X(t)c'(t) \\ &= M(t)\gamma(t) + X(t)c'(t) \end{aligned}$$

Unser Ansatz führt also zu einer Lösung der inhomogenen Gleichung genau dann, wenn gilt $X(t)c'(t) = f(t)$ alias $c'(t) = X^{-1}(t)f(t)$. Ein c mit dieser Eigenschaft existiert aber ganz offensichtlich, eben das Integral der rechten Seite. □

12.5.5.7 (**Verhalten benachbarter Flußwege**). Sei $A : X \supseteq U \to \vec{X}$ ein lipschitzstetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen Raums mit Lipschitzkonstante L. Sind $\gamma_p, \gamma_q : [0, b] \to U$ Flußwege zu Anfangswerten $p, q \in U$, so finden wir für alle $t \in [0, b]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\gamma_p(t) - \gamma_q(t)\| &= \left\| p + \int_0^t A(\gamma_p(\tau))\,\mathrm{d}\tau \; - q - \int_0^t A(\gamma_q(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right\| \\ &\leq \|p - q\| + L \int_0^t \|\gamma_p(\tau) - \gamma_q(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

und das Lemma von Gronwall 12.5.2.14 liefert für alle $t \in [0, b]$ die Abschätzung

$$\|\gamma_p(t) - \gamma_q(t)\| \leq \|p - q\|\,\mathrm{e}^{Lt}$$

Salopp gesprochen besagt diese Abschätzung, daß zwei Flußwege eines lipschitzstetigen Vektorfelds „höchstens exponentiell auseinanderlaufen können“. Das Argument vom Schluß des Beweises des Satzes über homogene lineare Differentialgleichungen 12.5.5.1 mag man vergröbernd dahingehend zusammenfassen, daß sich in diesem Fall eine beliebige Lösung höchstens exponentiell von der Null-Lösung entfernt und insbesondere nicht in endlicher Zeit ins Unendliche entweichen kann.

Proposition* 12.5.5.8 (Lösungswachstum für lineare Differentialgleichungen). *Seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $M : [b, c) \to \operatorname{End} V$ stetig. Bezeichne $\| \ \|$ eine Norm auf V und die zugehörige Operatornorm auf $\operatorname{End} V$. Erfüllt M die Abschätzung $\|M(t)\| \leq S(t)$ für ein stetiges $S : [b, c) \to \mathbb{R}_{>0}$ und ist $h : [b, c) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $h'(t) = S(t)h(t)$ zum Anfangswert $h(b) = 1$, so gilt für alle Lösungen $\gamma : [b, c) \to V$ der Differentialgleichung $\gamma'(t) = M(t)\gamma(t)$ die Abschätzung*

$$\|\gamma(t)\| \leq h(t)\|\gamma(b)\| \quad \forall t \in [b, c)$$

12.5.5.9. Die Aussage gilt allgemeiner und mit demselben Beweis, wenn V ein beliebiger reeller Banachraum ist.

Beweis. Unsere Differentialgleichung kann umgeschrieben werden zur Integralgleichung

$$\gamma(t) = \gamma(b) + \int_b^t M(\tau)\gamma(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

So erhalten wir die Abschätzung

$$\|\gamma(t)\| < C + \int_b^t S(\tau)\|\gamma(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau$$

für alle $t \in [b, c)$ und alle C mit $\|\gamma(b)\| < C$. Das Integral definiert eine Funktion $g(t)$ mit $g'(t) = S(t)\|\gamma(t)\| < S(t)C + S(t)g(t)$ und mit $g(b) = 0$. Für $f(t) = Ch(t) - C$ gilt nun sicher $f'(t) = S(t)C + S(t)f(t)$ und $f(b) = 0$. Nach unseren Erkenntnissen über strikte differentielle Ungleichheiten 12.5.2.10 folgt $g(t) \leq f(t)$ für alle $t \in [b, c)$ und damit

$$\|\gamma(t)\| \leq Ch(t) \quad \forall t \in [b, c)$$

Da das für alle C mit $\|\gamma(b)\| < C$ gilt, folgt die Proposition. □

Korollar* 12.5.5.10. *Seien $b > 0$ und V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $M : (0, b] \to \operatorname{End} V$ stetig. Bezeichne $\| \ \|$ eine Norm auf V und die zugehörige Operatornorm auf $\operatorname{End} V$. Erfüllt M die Abschätzung $\|M(t)\| < N/t$ für ein $N \in \mathbb{R}_{>0}$, so gilt für alle Lösungen $\gamma(t)$ der Differentialgleichung $\gamma'(t) = M(t)\gamma(t)$ die Abschätzung*

$$\|\gamma(t)\| \leq \|\gamma(b)\|(b/t)^N$$

Übungen

Übung 12.5.5.11 (**Nahe lineare Differentialgleichungen haben nahe Lösungen**). Seien V ein endlichdimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $b > 0$. Seien $A, B : [0, b] \to \operatorname{End} V$ stetig mit durch $M > 0$ beschränkter Operatornorm. Für Lösungen $\phi, \psi : [0, b] \to V$ der Differentialgleichungen $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$ und $\psi'(t) = B(t)\psi(t)$ mit demselben Anfangswert $v = \phi(0) = \psi(0)$ zeige man die Abschätzung

$$\|\phi(t) - \psi(t)\| \leq \exp(t\|A - B\|_\infty \cdot \|v\|\mathrm{e}^{Mb})$$

Hinweis: Man finde zunächst mit 12.5.5.7 Schranken für die Lösungen und dann durch nochmalige Anwendung eine Schranke für ihre Differenz.

Übung 12.5.5.12. Bestimmen Sie alle Lösungen der linearen Differentialgleichung $y' + y\sin(x) = \cos(x)\sin(x)$.

12.5.6 Lösungen als Funktionen ihres Anfangswerts*

Definition 12.5.6.1. Ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge U eines endlichdimensionalen reellen Raums X besitzt nach 12.5.2.1 zu jedem Anfangswert $q \in U$ einen größten Flußweg $\gamma_q : I_q \to U$. Wir erklären seinen **Fluß** als die Abbildung

$$\Phi : (t, q) \mapsto \gamma_q(t)$$

von der Menge $\tilde{U} := \{(t, q) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in I_q\}$, dem **Definitionsbereich des Flusses**, in den Definitionsbereich U unseres Vektorfelds. Allgemeiner vereinbaren wir dieselbe Definition für jedes Vektorfeld, das zu jedem Anfangswert einen größten Flußweg besitzt.

Satz 12.5.6.2 (Lösungen als Funktionen ihres Anfangswerts). *Gegeben ein glattes Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums hat sein Fluß offenen Definitionsbereich und ist ebenfalls glatt.*

Ergänzung 12.5.6.3. Auch dieser Satz gilt mit fast demselben Beweis allgemeiner für jeden Banachraum. Beim Beweis zeigen wir sogar, daß für jedes $\mathcal{C}^k$-Vektorfeld mit $k \geq 1$ sein Fluß einen offenen Definitionsbereich hat und auch von der Klasse $\mathcal{C}^k$ ist.

Beweis. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X, ein $\mathcal{C}^k$-Vektorfeld $A : X \supseteq U \to \vec{X}$ mit $k \geq 1$ und ein Punkt $p \in U$ wählen wir zunächst offene Umgebungen $V \Subset U$ von p und $W \Subset \vec{X}$ von Null mit $V + W \subset U$. Weiter wählen

wir eine Norm auf $\vec{X}$. Dann betrachten wir für ein mehrpunktiges kompaktes reelles Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ den affinen Raum

$$\mathcal{C}_p^1(I, X)$$

aller stetig differenzierbaren Wege $\gamma : I \to X$ mit $\gamma(0) = p$. Seinen Richtungsraum $\mathcal{C}_0^1(I, \vec{X})$ versehen wir mit der Norm $\|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty$ der gleichmäßigen Konvergenz von Funktion und erster Ableitung. Nach 12.5.3.9 erhalten wir so einen reellen Banachraum. Nun betrachten wir die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} \times V \times \mathcal{C}_0^1(I, W) & \to & \mathcal{C}(I, \vec{X}) \\ & (\tau\ ,\ q\ ,\ \psi) & \mapsto & \psi' - \tau(A \circ (q + \psi)) \end{array}$$

Genau dann wird (τ, q, ψ) auf Null abgebildet, wenn $t \mapsto \gamma(t) = q + \psi(t)$ ein Flußweg des reskalierten Vektorfelds τA zum Anfangswert $\gamma(0) = q$ ist. Nach Summenregel 12.1.6.4, Produktregel 12.1.6.5 und dem im Anschluß bewiesenen Lemma 12.5.6.4 ist F differenzierbar mit Differential

$$(\mathrm{d}_{(\tau,q,\psi)}F)(h, v, \alpha) = \alpha' - h(A \circ (q + \psi)) - \tau((\mathrm{d}A) \circ (q + \psi, v + \alpha))$$

Insbesondere gilt $(\mathrm{d}_{(0,p,0)}F)(0, 0, \alpha) = \alpha'$, und da $\alpha \mapsto \alpha'$ eine stetige und stetig umkehrbare Bijektion $\mathcal{C}_0^1(I, \vec{X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(I, \vec{X})$ definiert und F nach unserer Formel stetig differenzierbar ist, dürfen wir den Satz über implizite Funktionen 12.3.3.7 anwenden. Er liefert uns ein Paar (A_1, B_1) mit $(0, p) \in A_1 \Subset \mathbb{R} \times V$ und $0 \in B_1 \Subset \mathcal{C}_0^1(I, W)$ derart, daß es für jedes $(\tau, q) \in A_1$ genau ein $\psi_{\tau,q} \in B_1$ gibt, für das $\gamma_{\tau,q} = q + \psi_{\tau,q}$ ein auf I definierter Flußweg des reskalierten Vektorfelds τA mit Anfangswert q ist. Wählen wir also etwa $I = [-1, 1]$, so finden wir in A_1 eine offene Umgebung von $(0, p)$ der Gestalt $(-\eta, \eta) \times D$, und daselbst ist dann auch der Fluß definiert. Da Flußwege unter Zeitverschiebung Flußwege bleiben, zeigt das schon mal, daß unser Fluß einen offenen Definitionsbereich hat. Weiter ist F nach obiger Formel für sein Differential sogar von der Klasse $\mathcal{C}^k$ im Sinne von **??**. Damit zeigt der Satz über implizite Funktionen mit den Resultaten und Definitionen von **??** aber auch, daß die Zuordnung $(\tau, q) \mapsto \gamma_{\tau,q}$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung $(-\eta, \eta) \times D \to \mathcal{C}^1(I, U)$ ist. Verknüpfen wir diese mit dem Auswerten an einer festen Stelle $t \in I \backslash 0$, einer stetigen affinen Abbildung, und beachten $\gamma_{\tau,q}(t) = \gamma_q(\tau t)$, so folgt, daß der Fluß selbst eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung ist. $\square$

Lemma 12.5.6.4. *Seien X, Y normierte Räume und $A : X \Subset U \to Y$ stetig differenzierbar. Für jedes Kompaktum K ist dann auch die Abbildung $(A\circ) : \mathcal{C}(K, U) \to \mathcal{C}(K, Y)$ differenzierbar und ihr Differential paßt in ein kommuta-*

tives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(K,U) \times \mathcal{C}(K,\vec{X}) \arrow[r, "\mathrm{d}(A\circ)"] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{C}(K,\vec{Y}) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{C}(K,U \times \vec{X}) \arrow[r, "(\mathrm{d}A)\circ"] & \mathcal{C}(K,\vec{Y})
\end{tikzcd}$$

12.5.6.5. Hier verstehen wir für jeden normierten Raum Z den Abbildungsraum $\mathcal{C}(K,Z)$ mit seiner Norm der gleichmäßigen Konvergenz und identifizieren den Richtungsraum unseres Abbildungsraums in der hoffentlich offensichtlichen Weise mit $\mathcal{C}(K,\vec{Z})$. In der oberen Horizontalen meinen wir die Abbildung $(\gamma,\alpha) \mapsto (\mathrm{d}_\gamma(A\circ))(\alpha)$ und in der unteren Horizontalen meint $\mathrm{d}A$ entsprechend die Abbildung $\mathrm{d}A : U \times \vec{X} \to \vec{X}$, $(x,v) \mapsto (\mathrm{d}_x A)(v)$.

Beweis. Es reicht, an jeder Stelle $\gamma \in \mathcal{C}(K,U)$ die Differenzierbarkeit zu untersuchen und das Differential $\mathrm{d}_\gamma(A\circ)$ zu bestimmen. Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es für alle $x \in \gamma(K)$ ein größtes $\eta(x) = \eta_\varepsilon(x) \in (0,1)$ derart, daß gilt $\mathrm{B}(x;\eta(x)) \subset U$ und

$$\|x - z\| < \eta(x) \;\Rightarrow\; \|\,\mathrm{d}_x A - \mathrm{d}_z A\| \le \varepsilon$$

Man erkennt unschwer, daß $\eta : \gamma(K) \to (0,1)$ stetig ist, ja sogar lipschitzstetig mit Lipschitz-Konstante Zwei. Sei $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ das Minimum von η auf unserem Kompaktum $\gamma(K)$. Für $x \in \gamma(K)$ und $h \in \vec{X}$ mit $\|h\| \le \delta$ liefert dann der Schrankensatz oder vielmehr sein Korollar 12.1.4.11 die Abschätzung

$$\|A(x+h) - A(x) - (\mathrm{d}_x A)(h)\| \le \|h\|\varepsilon$$

Für jedes $\alpha : K \to \vec{X}$ mit $\|\alpha\| \le \delta$ gilt also

$$\|A \circ (\gamma + \alpha) - A \circ \gamma - (\mathrm{d}A) \circ (\gamma,\alpha)\| \le \|\alpha\|\varepsilon$$

Das war im wesentlichen die Behauptung. □

Satz 12.5.6.6 (Normalform eines Vektorfelds ohne Nullstelle). *Gegeben ein glattes Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums, das an einer festen Stelle nicht verschwindet, ist unser Feld auf einer offenen Umgebung dieser Stelle unter einem Diffeomorphismus verwandt zu einem konstanten Feld.*

12.5.6.7. In Koordinaten gesprochen hat also jedes Vektorfeld, daß an einer vorgegebenen Stelle nicht verschwindet, in geeigneten lokalen Koordinaten $x_1,\ldots,x_n$ um diese Stelle die Gestalt $\frac{\partial}{\partial x_1}$.

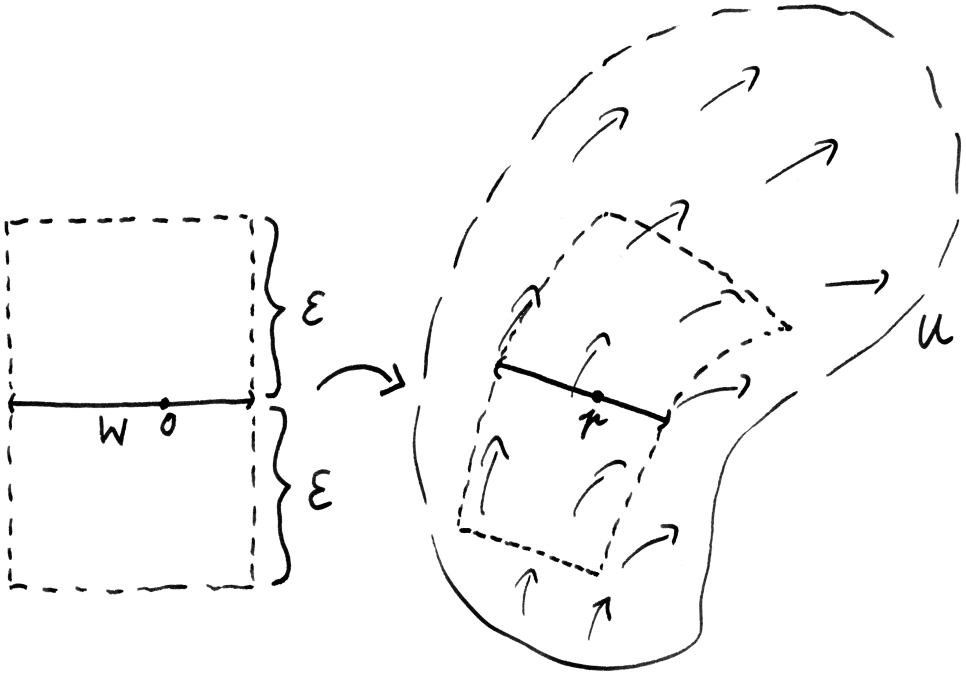


Illustration zum Beweis von Satz 12.5.6.6 zur lokalen Normalform eines Vektorfelds ohne Nullstelle

Beweis. Sei $A : X \supseteq U \to \vec{X}$ unser Vektorfeld und $p \in U$ die vorgegebene Stelle. Wir wählen $\vec{Y} \subset \vec{X}$ komplementär zur Geraden mit Richtungsvektor A_p und wählen einen Isomorphismus $L : \mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$. Gegeben ein glattes Vektorfeld A auf einer offenen Teilmenge U eines endlichdimensionalen affinen Raums schreiben wir im folgenden $A^t q$ für die Stelle $A^t q \in U$, an der der Punkt $q \in U$ landet, wenn er sich für die Zeitspanne t mit dem Fluß des Vektorfelds A treiben läßt. Man zeigt mühelos, daß für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ und eine hinreichend kleine Umgebung $W \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ des Ursprungs die Abbildung $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W \to U$, $(t, \vec{w}) \mapsto A^t(p + L\vec{w})$ sinnvoll definiert und ein Diffeomorphismus der gewünschten Art ist. □

12.5.7 Ergänzung zu differentiellen Ungleichungen*

Lemma* 12.5.7.1 (Nicht-strikte differentielle Ungleichungen). *Seien eine stetig differenzierbare Funktion $K : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}$ und $a < b$ gegeben und seien $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit Graph in U derart, daß an jeder Stelle $t \in [a, b)$ gilt*

$$f'(t) \geq K(t, f(t)) \quad \textit{und} \quad g'(t) \leq K(t, g(t)).$$

Haben wir außerdem $g(0) \leq f(0)$, so folgt $g(t) \leq f(t)$ für alle $t \in [a, b)$.

12.5.7.2. Die analoge Aussage mit einer strikten Ungleichung in der Formelzeile ist leichter zu zeigen und gilt sogar für beliebige Funktionen K, vergleiche 12.5.2.10.

12.5.7.3. Ich erwarte, daß die Aussage weiter gilt, wenn wir K nur stetig und in Bezug auf die zweite Variable lokal partiell lipschitzstetig annehmen, kann es aber nicht beweisen. Am liebsten hätte ich eh auch schon für obige Aussage einen einfacheren Beweis.

Beweis. Die Beweisidee besteht darin, sich durch einen geeigneten Koordinatenwechsel auf den Fall zurückzuziehen, daß K die Nullfunktion ist. Wir argumentieren durch Widerspruch. Wäre die Aussage des Lemmas falsch, so gehörte

$$t := \inf\{s \in [a, b) \mid g(s) > f(s)\}$$

zu $[a, b)$ und wir hätten $g(t) = f(t)$. Wir setzen $y := g(t) = f(t)$. Für jedes $(t, y) \in U$ gibt es nach Satz 12.5.6.2 über den Fluß, genauer seiner Variante 12.5.6.3 für stetig differenzierbare Vektorfelder, positive $\varepsilon, \delta > 0$ und $F : (t - \delta, t + \delta) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $(s, F(s, z)) \in U$ für alle (s, z) aus dem Definitionsbereich von F und $k_z : s \mapsto F(s, z)$ einer Lösung der Differentialgleichung $k_z'(s) = K(s, k_z(s))$ mit Anfangswert $k_z(t) = z$ für

alle $z \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$. Indem wir, um uns zusätzliches Nachdenken zu ersparen, möglicherweise ε und δ noch verkleinern, dürfen wir sogar annehmen, daß die Abbildung $\bar{F} : (s,z) \mapsto (s, F(s,z))$ offenes Bild $V \Subset U$ und eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $\bar{H} : V \xrightarrow{\sim} (t-\delta, t+\delta) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ hat, die wir natürlich als $\bar{H}(s,u) = (s, H(s,u))$ schreiben können mit $H : V \to \mathbb{R}$. Nun können wir $\delta > 0$ sogar so klein wählen, daß gilt $(s, f(s)), (s, g(s)) \in V$ für alle $s \in [t, t+\delta)$. Offensichtlich gilt $\partial_u F > 0$ und dann auch $\partial_u H > 0$ auf den jeweiligen Definitionsbereichen. Wir erreichen also bereits den gesuchten Widerspruch, wenn wir $H(s, g(s)) \le H(s, k_y(s)) \le H(s, f(s))$ zeigen für $s \in [t, t+\delta)$. Es reicht, die erste Ungleichung zu zeigen. Nach Konstruktion von H gilt $z = H(s, k_z(s))$ für alle (s,z). Damit müssen wir einerseits nur noch $H(s, g(s)) \le y$ zeigen für $s \in [t, t+\delta)$, und andererseits erhalten wir

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} H(s, k_z(s)) = \frac{\partial H}{\partial s}(s, k_z(s)) + \frac{\partial H}{\partial u}(s, k_z(s)) k_z'(s)$$

alias $0 = \frac{\partial H}{\partial s}(s,u) + \left(\frac{\partial H}{\partial u}(s,u)\right) K(s,u)$ für alle $(s,u) \in V$. Insbesondere haben wir

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} H(s, g(s)) &= \tfrac{\partial H}{\partial s}(s, g(s)) + \tfrac{\partial H}{\partial u}(s, g(s)) g'(s) \\ &\le \tfrac{\partial H}{\partial s}(s, g(s)) + \left(\tfrac{\partial H}{\partial u}(s, g(s))\right) K(s, g(s)) = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt aber sofort $H(s, g(s)) \le y$ für $s \in [t, t+\delta)$. $\square$

12.6 Erste Schritte in klassischer Mechanik

12.6.1 Newton'sche Bewegungsgleichungen

12.6.1.1. Wie in 3.6.5.11 fixieren wir einen eindimensionalen orientierten reellen affinen Raum

$$\mathbb{T}$$

und nennen ihn die **Zeit**. Die **Sekunde** entspricht einer orientierten Zeitspanne $\mathrm{s} \in \vec{\mathbb{T}}_{>0}$. Weiter fixieren wir einen dreidimensionalen euklidischen affinen Raum

$$\mathbb{E}$$

im Sinne von 4.1.5.1 und nennen ihn den **Anschauungsraum**. Wie in 4.1.5.12 konstruieren wir zu unserem euklidischen Raum $\mathbb{E}$ einen ausgezeichneten orientierten eindimensionalen reellen Vektorraum, seine **Längengerade** $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\mathbb{E})$, und erinnern aus 4.6.4.6 das **kanonische Skalarprodukt**

$$\langle\ ,\ \rangle : \vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{E}} \to \mathbb{L}^{\otimes 2}$$

mit Werten in der **Gerade der Flächeneinheiten** $\mathbb{L}^{\otimes 2}$. In Europa wird die schmutzige Längengerade meist vermittels des in der französischen Revolution gewählten **Meters** $\mathrm{m} \in \mathbb{L}_{>0}$ mit der Zahlengerade $\mathbb{R}$ identifiziert. Das kanonische Skalarprodukt auf dem Richtungsraum des schmutzigen Anschauungsraums nimmt also Werte in einem eindimensionalen reellen Vektorraum an, für den das Quadratmeter m^2 eine Basis ist. Des weiteren haben wir nach 4.1.5.12 auch eine natürliche Abbildung $\|\ \| : \vec{\mathbb{E}} \to \mathbb{L}_{\geq 0}$, die **Längenabbildung**, die mit unserem kanonischen Skalarprodukt geschrieben werden kann als $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

12.6.1.2. Um die Newton'schen Bewegungsgleichungen zu formulieren, wählen wir zusätzlich einen eindimensionalen orientierten reellen Vektorraum

$$\mathbb{M}$$

und nennen dessen nichtnegative Elemente **Massen**. Ein schmutziges nichtnegatives Element von $\mathbb{M}$ ist beispielsweise das in der französischen Revolution gewählte **Gramm** $\mathrm{g} \in \mathbb{M}_{>0}$, das dadurch bestimmt wird, daß $1000\,\mathrm{g}$ in etwa die Masse eines Wasserwürfels der Kantenlänge $0{,}1\,\mathrm{m}$ ist. Die Newton'schen Bewegungsgleichungen beschreiben die Bewegung eines Körpers oder Teilchens in Abhängigkeit von seiner Masse. Diese Masse kann etwa bestimmt werden durch das Aufwiegen mit Wasser und Bestimmung des benötigten Wasservolumens oder, wenn man es genauer braucht, durch den Vergleich mit der Masse eines im „Bureau international des poids et mésures“ in Sèvres bei Paris seit 1889 sorgsam gehüteten Zylinders aus einer Platin-Iridium-Legierung, des **Urkilogramms**.

12.6.1.3. Gegeben ein bewegtes Teilchen im Sinne der Newton'schen Mechanik alias eine Abbildung von der Zeit oder allgemeiner von einem mehrpunktigen Intervall $I \subset \mathbb{T}$ in den Anschauungsraum

$$\gamma : \mathbb{T} \supset I \to \mathbb{E}$$

ist ihr Differential 12.1.3.1, wenn es denn existiert, eine Abbildung $\dot\gamma : t \mapsto \mathrm{d}_t\gamma$, $I \to \mathrm{Hom}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{\mathbb{E}})$. Unter unserer Identifikation $\mathrm{Hom}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{\mathbb{E}}) \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$ aus 4.6.1.21 wird es zu einer Abbildung

$$\dot\gamma : I \to \vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$$

Man nennt $\dot\gamma(t)$ die **Geschwindigkeit** oder präziser **vektorielle Geschwindigkeit** unseres Teilchens zum Zeitpunkt $t \in I$. Das kanonische Skalarprodukt auf $\vec{\mathbb{E}}$ liefert offensichtlich auf $\vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$ ein Skalarprodukt mit Werten in $(\mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2}$ und der zugehörige Absolutbetrag des Geschwindigkeitsvektors $\dot\gamma(t) \in \vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$ heißt die **absolute Geschwindigkeit** $\|\dot\gamma(t)\| \in (\mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)_{\geq 0}$ unseres Teilchens zum Zeitpunkt $t \in I$.

12.6.1.4 (**Notationen mit Einheiten**). Um unserer Notation der Einheiten die Schwere zu nehmen, vereinbaren wir für unsere eindimensionalen Vektorräume von Einheiten die Notation als Erzeugnis eines üblichen Erzeugers in Erzeugerklammern, also etwa

$$\begin{array}{rcll} \vec{\mathbb{T}} & = & \langle \mathrm{s} \rangle & \text{mit } \mathrm{s} \text{ für „Sekunde“;} \\ \mathbb{L} & = & \langle \mathrm{m} \rangle & \text{mit } \mathrm{m} \text{ für „Meter“;} \\ \mathbb{M} & = & \langle \mathrm{g} \rangle & \text{mit } \mathrm{g} \text{ für „Gramm“.} \end{array}$$

Weiter notieren wir bei unseren eindimensionalen Räumen die duale Basis des Dualraums statt $v^\top$ meist v^{-1} oder $1/v$, so daß wir den Dualraum $\vec{\mathbb{T}}^*$ des Raums der Zeitspannen $\vec{\mathbb{T}}^* = \langle 1/\mathrm{s} \rangle$ oder $\vec{\mathbb{T}}^* = \langle \mathrm{s}^{-1} \rangle$ schreiben können. Schließlich lassen wir in diesem Zusammenhang die $\otimes$-Zeichen meist weg und schreiben für ganze Zahlen $r \in \mathbb{Z}$ kürzer v^r für unser Element $v^{\otimes r} \in V^{\otimes r}$ aus 4.6.1.14. So wäre etwa $\langle \mathrm{m}^2 \rangle = \mathbb{L}^{\otimes 2}$ eine Notation für den eindimensionalen orientierten reellen Vektorraum der Flächeneinheiten. In derselben Weise schreiben wir m/s für den Vektor $\mathrm{m} \otimes \mathrm{s}^{\otimes(-1)} \in \mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$ und notieren diesen Raum $\mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^* = \mathbb{L}\langle 1/\mathrm{s} \rangle = \langle \mathrm{m}/\mathrm{s} \rangle$.

12.6.1.5. Gegeben $I \subset \mathbb{T}$ ein mehrpunktiges Zeitintervall und $\gamma : \mathbb{T} \supset I \to \mathbb{E}$ zweimal differenzierbar ist das Differential der vektoriellen Geschwindigkeit eine Abbildung $\ddot\gamma : I \to \vec{\mathbb{E}} \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2}$ oder in unserer neuen Notation

$$\ddot\gamma : I \to \vec{\mathbb{E}} \langle 1/\mathrm{s}^2 \rangle$$

Wir denken uns γ als die mathematische Beschreibung eines bewegten Teilchens und nennen $\ddot\gamma(t)$ die **Beschleunigung** oder genauer **vektorielle Beschleunigung** unseres Teilchens zum Zeitpunkt $t \in I$. Die **absolute Beschleunigung** bezeichnet dahingegen den Betrag $\|\ddot\gamma(t)\| \in \langle \mathrm{m}/\mathrm{s}^2 \rangle$ der vektoriellen Beschleunigung.

12.6.1.6. Unter einem **Kraftfeld** versteht man eine Abbildung

$$F : \mathbb{E} \to \vec{\mathbb{E}}\langle \mathrm{g}/\mathrm{s}^2 \rangle$$

Hierbei ist im Sinne unserer neuen Notation $\langle \mathrm{g}/\mathrm{s}^2 \rangle = \mathbb{M} \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2}$ zu verstehen. Der Buchstabe F erinnert an englisch **force**. Unter der **Newton'schen Bewegungsgleichung** für die Bewegung eines Teilchens einer Masse $m \in \mathbb{M}$ in einem Kraftfeld F versteht man die Forderung „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung" und in Formeln ausgedrückt die Gleichheit

$$F \circ \gamma = m\ddot{\gamma}$$

von Abbildungen $I \to \vec{\mathbb{E}}\langle \mathrm{g}/\mathrm{s}^2 \rangle$, der die Bewegung $\gamma : \mathbb{T} \supset I \to \mathbb{E}$ unseres Teilchens gehorchen soll, die wir uns wieder auf einem mehrpunktigen Zeitintervall $I \subset \mathbb{T}$ definiert denken.

12.6.1.7. Unter einem **Gravitationsfeld** versteht man eine Abbildung

$$G : \mathbb{E} \to \vec{\mathbb{E}}\langle 1/\mathrm{s}^2 \rangle$$

Die von einem derartigen Feld auf ein Teilchen der Masse $m \in \mathbb{M}$ ausgeübte Kraft wird per definitionem gegeben durch die Gleichung

$$F = mG$$

Die Bewegungsgleichung für ein Teilchen beliebiger Masse in einem Gravitationsfeld G lautet folglich

$$G \circ \gamma = \ddot{\gamma}$$

Sie ist eine Gleichheit von Abbildungen $\mathbb{T} \supset I \to \vec{\mathbb{E}}\langle 1/\mathrm{s}^2 \rangle$ für $I \subset \mathbb{T}$ ein mehrpunktiges Zeitintervall wie zuvor.

Ergänzung 12.6.1.8. A priori könnte man auch eine konsistente Theorie formulieren, die zwei Arten von Massen postuliert, als da heißt zwei orientierte eindimensionale reelle Vektorräume $\mathbb{M}_{\mathrm{sch}}$ und $\mathbb{M}_{\mathrm{tr}}$, und in der jedem Teilchen zwei Arten von Masse zugeordnet würden, seine **schwere Masse** $m_{\mathrm{sch}} \in \mathbb{M}_{\mathrm{sch}}$ und seine **träge Masse** $m_{\mathrm{tr}} \in \mathbb{M}_{\mathrm{tr}}$. Ein Kraftfeld hätte per definitionem Werte in $\vec{\mathbb{E}}\langle 1/\mathrm{s}^2 \rangle \otimes \mathbb{M}_{\mathrm{tr}}$ und die Bewegungsgleichung in besagtem Kraftfeld hätte die Gestalt

$$m_{\mathrm{tr}}\ddot{\gamma} = F \circ \gamma$$

Dahingegen würde ein Gravitationsfeld Werte in $\vec{\mathbb{E}}\langle 1/\mathrm{s}^2 \rangle \otimes \mathbb{M}_{\mathrm{tr}} \otimes \mathbb{M}_{\mathrm{sch}}^*$ annehmen und die jeweils auf unser Teilchen wirkende Kraft wäre durch die Multiplikation des Gravitationsfelds mit seiner schweren Masse m_{sch} zu berechnen. Mit der Waage mäße man also die schwere Masse und durch die Beobachtung etwa von

Stößen mit einem „Referenzteilchen“ und Ausnützen der im folgenden noch zu besprechenden „Impulserhaltung“ die träge Masse. Ein durch viele Experimente bestätigtes Prinzip der klassischen Mechanik ist die **Gleichheit von träger und schwerer Masse**, so daß wir stets $m_{\mathrm{sch}} = m_{\mathrm{tr}}$ annehmen und ohne nähere Spezifikation schlicht von der **Masse** eines Teilchens reden werden.

12.6.1.9. Das Gravitationsfeld an der Erdoberfläche kann lokal recht gut approximiert werden durch ein konstantes Feld $\vec{\mathrm{g}}$ mit $\vec{\mathrm{g}} \sim (9{,}8)\vec{\mathrm{m}}/\mathrm{s}^2$, wobei $\vec{\mathrm{m}} \in \vec{\mathbb{E}}$ denjenigen einen Meter langen Vektor bezeichnet, der an der gegebenen Stelle in Richtung des Erdmittelpunktes zeigt. Man schreibt auch $\|\vec{\mathrm{g}}\| := \mathrm{g} \sim (9{,}8)\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$ für den Betrag dieses konstanten Feldes und nennt diese Beschleunigung die **Erdbeschleunigung**. Ob der Buchstabe g das Gramm oder die Erdbeschleunigung meint, muß aus dem Kontext erschlossen werden.

Beispiel 12.6.1.10 (**Flugbahn eines geworfenen Massenpunktes**). Für die Bewegung $\gamma : \mathbb{T} \to \mathbb{E}$ eines nur der Gravitationskraft ausgesetzten Massepunktes an der Erdoberfläche, etwa einer Kanonenkugel oder eines Schneeballs, muß nach dem Vorhergehenden die Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt die Erdbeschleunigung sein, in Formeln

$$\ddot{\gamma}(t) = \vec{\mathrm{g}}$$

für alle Zeiten t. Um das zu konkretisieren, bezeichne $t : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}$ die Identifikation der reellen Zahlengeraden mit der Zeitachse vermittels der Abbildungsvorschrift $t : x \mapsto t_0 + x\mathrm{s}$ für einen beliebigen Zeitpunkt t_0 und unsere Zeiteinheit Sekunde $\mathrm{s} \in \vec{\mathbb{T}}$. Dann werden die Ableitungen der Verknüpfung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{E}, x \mapsto \gamma(t_0 + x\mathrm{s})$ nach der Kettenregel gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \mathrm{s}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}^2\gamma}{(\mathrm{d}x)^2} = \mathrm{s}\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{(\mathrm{d}t)^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \mathrm{s}^2\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{(\mathrm{d}t)^2}$$

Hier ist nun bereits alles mögliche implizit zu verstehen, aber das alles auszuschreiben führt zu ungenießbaren Formeln. So erhalten wir für die Bewegung unseres Teilchens in unserer von Einheiten befreiten Zeitkoordinate x die Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{(\mathrm{d}x)^2} = \mathrm{s}^2\,\vec{\mathrm{g}}$$

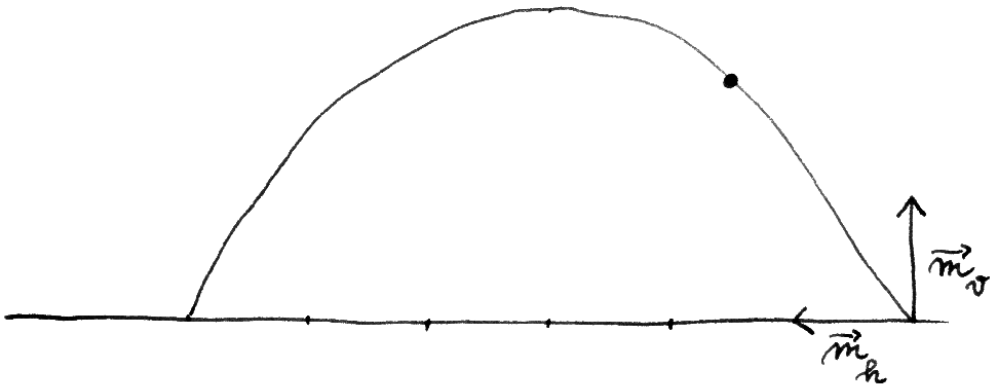
Deren allgemeine Lösung ergibt sich durch direktes Integrieren zu

$$\gamma(x\mathrm{s} + t_0) = (x^2/2)\,\mathrm{s}^2\,\vec{\mathrm{g}} + x\vec{a}_0 + p_0$$

mit $\vec{a}_0 \in \vec{\mathbb{E}}$ einem festen Richtungsvektor und $p_0 \in \mathbb{E}$ einem festen Ort. Durch Einsetzen von $x\mathrm{s} = \tau$ erhalten wir schließlich

$$\gamma(\tau + t_0) = (\tau^2/2)\vec{\mathrm{g}} + \tau\vec{v}_0 + p_0 \sim (4{,}9)\tau^2(\vec{\mathrm{m}}/\mathrm{s}^2) + \tau\vec{v}_0 + p_0$$

mit $\vec{v}_0 = \vec{a}_0/\mathrm{s}$ der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 und $p_0 \in \mathbb{E}$ dem Ort zum Zeitpunkt t_0. Mit etwas Übung oder sogar schon vorher wird der hier noch ganz pedantisch ausgeführte Zwischenschritt der Wahl eines Isomorphismus von affinen Räumen $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}$ meist weggelassen.



Die Flugbahn einer Kanonenkugel ist bei Vernachlässigung des Luftwiderstands eine Parabel im Sinne von 12.1.2.11. Die Bezeichung „Parabel“ kommt eben nicht umsonst vom griechischen Wort für „Werfen“.

Beispiel 12.6.1.11 (**Reichweite eines Geschützes**). Wollen wir wissen, in welcher Entfernung eine an einer Stelle $p_0 \in \mathbb{E}$ unter einem gegebenen Winkel ϑ gegen die Horizontale mit einer gegebenen Mündungsgeschwindigkeit $v_0 \in \langle \mathrm{m/s} \rangle$ abgeschossene Kugel einschlägt, so betrachten wir einen vertikalen einen Meter langen Vektor $\vec{\mathrm{m}}_v = -\vec{\mathrm{m}}$ und einen horizontalen einen Meter langen Vektor in Richtung der Mündung $\vec{\mathrm{m}}_h$ und finden für die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = a\vec{\mathrm{m}}_v/\mathrm{s} + b\vec{\mathrm{m}}_h/\mathrm{s}$ die Bahnkurve

$$\gamma(t + t_0) = -(4{,}9)t^2\ \vec{\mathrm{m}}_v/\mathrm{s}^2 + ta\ \vec{\mathrm{m}}_v/\mathrm{s} + tb\ \vec{\mathrm{m}}_h/\mathrm{s} + p_0$$

Die Zeit, nach der die Kugel wieder den Boden erreicht, ist folglich die Lösung der Gleichung $(-4{,}9)t^2/\mathrm{s}^2 + ta/\mathrm{s} = 0$ alias $t = (a/(4,9))\mathrm{s}$. Der Einschlagsort ist mithin

$$p_0 + \frac{ab}{4{,}9}\vec{\mathrm{m}}_h$$

Mündungsgeschwindigkeit v_0 und Abschlußwinkel ϑ berechnen sich aus a und b vermittels $v_0 = (\sqrt{a^2 + b^2})\mathrm{m/s}$ und $\tan\vartheta = a/b$. Wir finden aber auch umgekehrt für $v_0 = c(\mathrm{m/s})$ die Identitäten $\sin\vartheta = a/c$ und $\cos\vartheta = b/c$ alias $a = c\sin\vartheta$ und

$b = c\cos\vartheta$. Der Abschußwinkel, unter dem die Kugel am weitesten kommt, ist das Maximum von $(\cos\vartheta\sin\vartheta)$ für $\vartheta \in [0, \pi/2]$ alias das Maximum von $\frac{1}{2}\sin 2\vartheta$. Der optimale Abschußwinkel ist also $\pi/4 = 45°$, und die Kugel schlägt dann bei einer Mündungsgeschwindigkeit von $v_0 = c(\mathrm{m/s})$ in einer Entfernung von $(c/(9{,}8))\,\mathrm{m}$ ein.

12.6.2 Mathematik der Bewegungsgleichungen

12.6.2.1. Wähen wir eine affine Bijektion zwischen der reellen Zahlengeraden $\mathbb{R}$ und der Zeitachse $\mathbb{T}$, so wird unsere Bewegungsgleichung 12.6.1.7 in der Terminologie aus 12.5.1.1 folgende ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die allgemeine Theorie 12.5.1.3 legt uns die Reduktion auf ein System von doppelt so vielen Gleichungen erster Ordnung nahe. In unserem konkreten Fall betrachten wir dazu den sogenannten **Phasenraum**, genauer den **Geschwindigkeitsphasenraum** $\mathbb{E} \times \vec{\mathbb{E}}\langle 1/\mathrm{s}\rangle$ aller Paare (r, v) bestehend aus einem Ort $r \in \mathbb{E}$ und einer Geschwindigkeit $v \in \vec{\mathbb{E}}\langle 1/\mathrm{s}\rangle$. Jede differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{T} \to \mathbb{E}$ liefert uns eine Abbildung in den Phasenraum

$$\psi := (\gamma, \dot\gamma) : \mathbb{T} \to \mathbb{E} \times \vec{\mathbb{E}}\langle 1/\mathrm{s}\rangle$$

Mit dieser Notation erfüllt γ die Newton'schen Bewegungsgleichungen $m\ddot\gamma = F \circ \gamma$ genau dann, wenn $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ das System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot\psi_1 &= \psi_2 \\ \dot\psi_2 &= \frac{1}{m} F \circ \psi_1 \end{aligned}$$

erfüllt. In geometrischer Sprache entsprechen die Lösungen ψ dieses letzteren Systems unter jeder affinen Identifikation der Zeitachse mit der reellen Zahlengeraden den Flußwegen eines Vektorfelds auf dem Phasenraum. Um auch diese Identifikation noch zu vermeiden, vereinbaren wir für jede offene Teilmenge $U \Subset X$ eines affinen Raums X, daß wir unter einem **Geschwindigkeitsfeld auf** U eine Abbildung

$$A : U \to \vec{X}\langle 1/\mathrm{s}\rangle$$

verstehen wollen. Flußwege derartiger Geschwindigkeitsfelder A verstehen wir dann als auf mehrpunktigen Zeitintervallen $I \subset \mathbb{T}$ definierte Abbildungen $\psi : I \to U$ mit

$$\dot\psi = A \circ \psi$$

Unter vernünftigen Annahmen, etwa für jedes stetig differenzierbare Kraftfeld F, gibt es dann nach dem Satz von Picard-Lindelöf 12.5.2.1 zu jedem Punkt (x_0, v_0)

des Phasenraums und jedem Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{T}$ genau einen maximalen Flußweg

$$\psi : I \to \mathbb{E} \times \vec{\mathbb{E}}\langle 1/\mathrm{s}\rangle$$

mit $t_0 \in I$ und $\psi(t_0) = (x_0, v_0)$ alias genau eine maximale Lösung $\gamma : I \to \mathbb{E}$ der ursprünglichen Bewegungsgleichungen mit vorgegebenem Ort $x_0 = \gamma(t_0)$ und vorgegebener Geschwindigkeit $v_0 = \dot{\gamma}(t_0)$ zum vorgegebenen Zeitpunkt t_0.

12.6.2.2. Unter einem **Potential** eines Kraftfelds $F : \mathbb{E} \to \vec{\mathbb{E}}\langle \mathrm{g}/\mathrm{s}^2\rangle$ versteht man eine differenzierbare Abbildung $V : \mathbb{E} \to \langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2\rangle$ mit der Eigenschaft

$$-(\mathrm{d}_x V)(v) = \langle F(x), v\rangle \qquad \forall x \in \mathbb{E}, v \in \vec{\mathbb{E}}$$

Anders gesagt fordern wir von einem Potential also, daß das Negative seines Differentials $-\,\mathrm{d}V : \mathbb{E} \to \vec{\mathbb{E}}^*\langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2\rangle$ unter der durch unser kanonisches Skalarprodukt $\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{E}} \to \langle \mathrm{m}^2\rangle$ gegebenen Identifikation $\mathrm{can} : \vec{\mathbb{E}} \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}}^*\langle \mathrm{m}^2\rangle$ dem Kraftfeld $F : \mathbb{E} \to \vec{\mathbb{E}}\langle \mathrm{g}/\mathrm{s}^2\rangle$ entsprechen soll.

Satz 12.6.2.3 (**Energieerhaltung**). *Für die Bewegung γ eines Massepunktes der Masse m in einem Kraftfeld mit Potential V erhalten wir eine Invariante der Bewegung alias eine von der Zeit t unabhängige Konstante durch den Ausdruck*

$$\frac{m}{2}\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\rangle + V(\gamma(t))$$

12.6.2.4. Der erste Summand heißt die **kinetische Energie** und der Zweite die **potentielle Energie**. Unser Satz ist ein Spezialfall des allgemeinen physikalischen Prinzips der „Energieerhaltung“.

Beweis. Ableiten nach t liefert mit unserer Formel 12.1.6.5 für das Differential bilinearer Abbildungen

$$m\langle \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\rangle + (\mathrm{d}_{\gamma(t)} V)(\dot{\gamma}(t)) = \langle m\ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\rangle - \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle = 0 \qquad \square$$

12.6.3 Planetenbewegung

12.6.3.1 (**Heuristische Vorüberlegung**). Stellen wir uns einmal vor, wir wären Newton. Kepler hat bereits aus den akribischen Beobachtungen von Tycho Brahe herausdestilliert, daß die Planeten auf elliptischen Bahnen um die Sonne kreisen, wobei die Sonne in einem der Brennpunkte der Ellipse steht. Wir gehen von der zumindest nicht unvernünftigen Annahme aus, daß die von der Sonne ausgehende Gravitationskraft mit wachsendem Abstand schwächer wird in derselben Weise, wie sich ein Gas verdünnen würde, das von der Sonne ausgeschwitzt wird und sich, indem es nach allen Seiten mit konstanter Geschwindigkeit von der Sonne

wegströmt, in den unendlichen Weiten des Weltraums verteilt. Dann ist klar, daß durch jede in der Sonne zentrierte Kugelschale in einer festen Zeitspanne dieselbe Gasmenge strömen muß. Da aber die Oberfläche einer Kugelschale vom Radius r ein festes Vielfaches r^2 ist, muß unser Gas in einem Abstand r von der Sonne eine zu $1/r^2$ proportionale Dichte haben. Durch derartige Überlegungen motiviert machen wir für das Gravitationsfeld G der Sonne den Ansatz

$$G(x) = c \cdot \frac{S - x}{\|S - x\|^3}$$

für $S \in \mathbb{E}$ den Ort der Sonne, den wir uns fest denken, und $c \in \langle \mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2 \rangle$ eine Konstante. Ist M die Masse unseres Planeten, so ist MG das zu unserer Bewegung gehörige Kraftfeld und dieselbe Rechnung wie in 12.7.1.19 liefert uns für dieses Feld das Potential

$$V(x) = -\frac{Mc}{\|S - x\|}$$

Nun setzen wir die Bewegung unseres Planeten an als

$$\gamma(t) = S + \vec{\gamma}(t)$$

für $\vec{\gamma} : \mathbb{T} \to \vec{\mathbb{E}}$. Da ein **Zentralfeld** vorliegt, die auf unseren Planeten wirkende Kraft zeigt nämlich stets in Richtung der Sonne, ist auch das mit Einheiten, genauer als Element von $\vec{\mathbb{E}} \otimes \mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^* \otimes \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{E}})$ verstandene und in 4.6.4.9 konstruierte Kreuzprodukt

$$L := \vec{\gamma}(t) \times \dot{\vec{\gamma}}(t)$$

eine Invariante der Bewegung: In der Tat ergibt sich seine zeitliche Ableitung nach der Produktregel für bilineare Abbildungen zu

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) \times \dot{\vec{\gamma}}(t) + \vec{\gamma}(t) \times \ddot{\vec{\gamma}}(t) = 0$$

Multiplizieren wir diese Invariante noch mit der Masse des Planeten, so erhalten wir den sogenannten **Drehimpuls** des Planeten um die Sonne. Ist dieser Drehimpuls Null, so liegt eine Lösung vor, bei der unser Planet auf geradem Wege in die Sonne stürzt oder sich umgekehrt längs eines Sonnenstrahls von der Sonne entfernt. Ist der Drehimpuls nicht Null, was wir von nun an annehmen wollen, so muß unser Planet in derjenigen Ebene durch die Sonne bleiben, auf der sein Drehimpuls senkrecht steht, und kann nie in die Sonne stürzen. Wir wählen in dieser Ebene nun ein Orthogonalsystem $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ bestehend aus zwei Vektoren gleicher Länge $l = \|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\|$ und gehen zu Polarkoordinaten über und betrachten genauer die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} & \to & \vec{\mathbb{E}} \\ & (r\ ,\ \varphi) & \mapsto & r((\cos\varphi)\vec{e_1} + (\sin\varphi)\vec{e_2}) \end{array}$$

Da wir bereits wissen, daß die Bewegung in einer Ebene bleiben muß und nicht durch die Sonne führt, können wir $\vec{\gamma}(t) = P(r(t), \varphi(t))$ ansetzen, zumindest für t aus einem kleinen Zeitintervall. Wir erhalten

$$\dot{\vec{\gamma}} = \dot{r}((\cos\varphi)\vec{e_1} + (\sin\varphi)\vec{e_2}) + r\dot{\varphi}(-(\sin\varphi)\vec{e_1} + (\cos\varphi)\vec{e_2})$$

und insbesondere

$$\langle\dot{\vec{\gamma}}, \dot{\vec{\gamma}}\rangle = l^2(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2)$$

Der Energieerhaltungssatz liefert damit, daß die Gesamtenergie

$$\frac{M}{2}l^2(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) - \frac{Mc}{rl} = E$$

eine Konstante der Bewegung ist. Dasselbe gilt für die Länge unseres Kreuzprodukts alias den Drehimpuls und damit für

$$r^2\dot{\varphi} = D$$

Insbesondere gilt unter unseren Annahmen stets $\dot{\varphi} \neq 0$. Wir wollen nun zeigen, daß diese beiden Gleichungen bereits implizieren, daß unsere Bewegung auf einem Kegelschnitt mit der Sonne in einem Brennpunkt geschehen muß. Die Kunst besteht dabei darin, in einem ersten Schritt die vollständige Berechnung der Bewegung zu vermeiden, die auf ziemlich komplizierte Ausdrücke führt. Vielmehr interessieren wir uns vorerst nur für die Form der Bahnkurve. Der zeitliche Ablauf, in dem sie durchlaufen wird, folgt dann ohne weitere physikalische Schwierigkeiten aus dem Energieerhaltungssatz, aber die Berechnung der dabei entstehenden Integrale wollen wir eben vermeiden. Dazu bilden wir aus den beiden vorhergehenden Gleichungen, die die Energieerhaltung und Drehimpulserhaltung in Polarkoordinaten ausdrücken, eine einzige Gleichung, in der die zeitlichen Ableitungen unserer neuen Koordinaten nur in der Kombination $\dot{r}/\dot{\varphi}$ vorkommen: Dieser Quotient ist nämlich von der Parametrisierung der Bahnkurve durch die Zeit unabhängig. Teilen wir etwa das Quadrat der zweiten Gleichung aus der ersten Gleichung weg, so ergibt sich mit

$$\frac{Ml^2}{2r^4}\left(\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}\right)^2 + \frac{Ml^2}{2r^2} - \frac{Mc}{rlD^2} = \frac{E}{D^2}$$

eine Gleichung der gewünschten Form. Da nun gilt $\dot{\varphi} \neq 0$, können wir den Radius als Funktion des Winkels schreiben, $r = r(\varphi)$. Da auch der Radius bei Lösungen mit von Null verschiedenem Drehimpuls nie Null wird, können wir weiter auch den inversen Radius als Funktion des Winkels schreiben und setzen $u(\varphi) := 1/r(\varphi)$. Für die Ableitung u' von u nach dem Winkel erhalten wir dann

$$u' = -r'/r^2 = -\dot{r}/\dot{\varphi}r^2$$

und unsere Differentialgleichung erhält die Gestalt

$$(u')^2 + u^2 + Au = B$$

mit $A = 2c/D^2l^3$ und $B = 2E/Ml^2D^2$. Ableiten nach φ liefert unmittelbar

$$2u'u'' + 2uu' + Au' = 0$$

Alle Lösungen müssen auf dem Teil ihres Definitionsbereichs, auf dem die Ableitung u' nicht verschwindet, demnach auch der Differentialgleichung

$$2u'' + 2u = -A$$

gehorchen. Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Eine Basis des Lösungsraums der zugehörigen homogenen Gleichung bilden $u_1(\vartheta) = \sin\vartheta$ und $u_2(\vartheta) = \cos\vartheta$. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist etwa $u_s(\vartheta) = -A/2$. Die allgemeine Lösung ist also $u(\vartheta) = b\cos(\vartheta - \vartheta_0) - A/2$ für Konstanten b, ϑ_0. Indem wir das in unsere ursprüngliche Differentialgleichung einsetzen, erhalten wir $b^2 - A^2/4 = B$ alias $b = \sqrt[\pm]{B + A^2/4}$. Damit ist unser Problem gelöst. Wir prüfen nun nur noch, daß die Lösungen Kegelschnitte sein müssen.

12.6.3.2 (**Ellipsen sind Planetenbahnen**). Es gilt, eine Ellipse mit einem Brennpunkt im Ursprung $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten zu schreiben. Nach der Diskussion in 4.1.12.40 lautet die entsprechende Gleichung

$$c = r + \sqrt{(r\cos\varphi - a)^2 + r^2\sin^2\varphi}$$

für $(a,0)$ den zweiten Brennpunkt und $((a+c)/2, 0)$ den Schnittpunkt unserer Ellipse mit der positiven x-Achse. Wir subtrahieren r auf beiden Seiten und quadrieren zu

$$r^2 - 2ar\cos\varphi + a^2 = r^2 - 2cr + c^2$$

Elementare Umformungen liefern

$$r = \frac{c^2 - a^2}{2c - 2a\cos\varphi}$$

Durch Ändern der Parameter zu $\beta := a/c$ und $\alpha := (c^2 - a^2)/2c$ landen wir bei der Gleichung

$$r = \frac{\alpha}{1 - \beta\cos\varphi}$$

Um unsere obige Gleichung zu prüfen, dürfen wir die Durchlaufgeschwindigkeit beliebig wählen, so etwa auch $\varphi(t) = t$. Damit erhalten wir $\dot\varphi = 1$ und

$$\dot r = \frac{-\alpha\beta\sin t}{(1 - \beta\cos t)^2} = \frac{-\beta\sin t}{\alpha} r^2$$

und Einsetzen in unsere obige Gleichung liefert

$$\frac{Ml^2}{2\alpha^2}\beta^2\sin^2 t + \frac{Ml^2}{2\alpha^2}(1 - 2\beta\cos t + \beta^2\cos^2 t) - \frac{Mc}{\alpha l D^2}(1 - \beta\cos t) = \frac{E}{D^2}$$

Hier ist aber in der Tat die linke Seite unabhängig von t falls gilt

$$\frac{Ml^2}{\alpha^2} = \frac{Mc}{\alpha l D^2}$$

alias $\alpha = l^3 D^2/c$. Wir sehen so, daß in der Tat unsere Ellipsen mögliche Lösungskurven sein müssen.

Ergänzung 12.6.3.3. Daß die Lösungskurven Kegelschnitte sein müssen, kann man auch unschwer einsehen, indem man nachrechnet, daß der sogenannte **Runge-Lenz-Vektor**

$$\frac{1}{c}\dot{\vec{\gamma}} \times L + \frac{\vec{\gamma}}{\|\vec{\gamma}\|}$$

mit L, c wie in 25.2.6.2 der Drehimpuls geteilt durch die Masse des Planeten und einer die Stärke des Gravitationsfelds beschreibenden Konstanten eine Invariante der Bewegung sein muß. Man beachte $L \in \vec{\mathbb{E}}\langle \mathrm{m/s}\rangle \otimes \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{E}})$, also $\dot{\vec{\gamma}} \times L \in \vec{\mathbb{E}}\langle \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2\rangle$. Wegen $c \in \langle \mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2\rangle$ gehören damit beide Summanden zum Raum $\vec{\mathbb{E}}\langle 1/\mathrm{m}\rangle$. Dieser Zugang gefällt mir weniger, da man den Runge-Lenz-Vektor dabei „vom Himmel fallen läßt“.

12.6.4 Systeme mit Zwangsbedingungen

Beispiel 12.6.4.1 (**Ein Massepunkt mit einer Zwangsbedingung**). Wir untersuchen als erstes Beispiel das Verhalten eines einzigen Massepunktes alias Teilchens, dessen Bewegung auf eine Fläche im Raum eingeschränkt ist. Als physikalisches Modell mag man an ein nasses Stück Seife denken, das in der Schwerelosigkeit und ohne Reibung im leeren Tank einer Raumfähre herumrutscht, in den es ein übermütiger Astronaut mit Schwung hat hineingleiten lassen. Wir modellieren diesen Tank als eine 2-Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{E}$ im Anschauungsraum, die wir der Einfachkeit halber glatt annehmen wollen. Zu jedem Zeitpunkt übt unsere Fläche eine Kraft auf unser Teilchen aus, deren Richtung, das jedenfalls deklarieren wir als „physikalisch sinnvoll“, senkrecht zur Fläche steht an der Stelle, an der sich unser Teilchen eben gerade befindet, und deren Größe gerade so bemessen ist, daß sie das Teilchen auf der Fläche hält. Die Bewegung wird unter dieser Annahme beschrieben durch eine zweimal differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{T} \to M$ mit der Eigenschaft

$$\ddot{\gamma}(t) \perp \mathrm{T}_{\gamma(t)}M$$

für alle Zeiten $t \in \mathbb{T}$. Die zweifache Ableitung ist hierbei für diejenige Abbildung $\gamma : \mathbb{T} \to \mathbb{E}$ zu verstehen, die aus γ durch das Nachschalten der Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{E}$ entsteht. Formal betrachtet liegt $\ddot{\gamma}(t)$ zwar in $\vec{\mathbb{E}}\langle 1/\mathrm{s}^2\rangle$ und unsere Tangentialräume aus 12.6.5.2 sind für alle Punkte $p \in M$ Untervektorräume $\mathrm{T}_p M \subset \vec{\mathbb{E}}$, aber die Bedingung des Senkrechtstehens ist dennoch sinnvoll. Für die Leser, die die entsprechende mathematische Terminologie kennen, kann das formuliert werden als die Aussage, daß sich unser Teilchen mit konstanter absoluter Geschwindigkeit auf einer Geodäte von M bewegt. Bewegt sich unser Teilchen zusätzlich in einem Kraftfeld $F : \mathbb{E} \to \vec{\mathbb{E}}\langle \mathrm{g}/\mathrm{s}^2\rangle$ und hat die Masse m, so lauten die Bewegungsgleichungen analog

$$\big(m\ddot{\gamma}(t) - F(\gamma(t))\big) \perp \mathrm{T}_{\gamma(t)} M$$

für alle Zeiten $t \in \mathbb{T}$. Bevor wir Lösungswege diskutieren, besprechen wir erst einmal ein etwas komplizierteres System.

Beispiel 12.6.4.2 (**Eine Hantel in der Schwerelosigkeit**). Denken wir uns zwei durch einen starren masselosen Stab positiver Länge $l \in \mathbb{L}_{>0}$ verbundene Punkte der Massen $m_1, m_2 \in \mathbb{M}_{>0}$, also eine Art unausgewogene Hantel, die in der Schwerelosigkeit durch das Weltall torkelt. Die Bewegung unserer Hantel wird dann beschrieben durch zwei Abbildungen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 : \mathbb{T} \to \mathbb{E}$ mit $\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| = l$ für alle Zeiten $t \in \mathbb{T}$, also durch eine Abbildung $\gamma : \mathbb{T} \to M$ der Zeitachse $\mathbb{T}$ in die 5-Mannigfaltigkeit

$$M := \{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in \mathbb{E}^2 \mid \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| = l\} \subset \mathbb{E}^2$$

Hier und im folgenden gilt es zu beachten, daß Einträge in Tupeln keineswegs immer reelle Zahlen zu sein brauchen. So meinen im vorhergehenden etwa $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ Punkte des Anschauungsraums $\mathbb{E}$ und können ihrerseits durch die Wahl eines Koordinatensystems mit Elementen des $\mathbb{R}^3$ identifiziert werden, so daß man unser Paar $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ nach der Wahl geeigneter Koordinaten auch mit einem Sextupel von reellen Zahlen identifizieren könnte. Im folgenden notieren wir Punkte von $\mathbb{E}$ und Richtungsvektoren aus $\vec{\mathbb{E}}$ oder Elemente von $\vec{\mathbb{E}} \otimes L$ für eindimensionales L meist als fette Buchstaben. Nach dem Newton'schen Prinzip „actio est reactio“ gilt $\vec{\mathbf{Z}}_1 = -\vec{\mathbf{Z}}_2$ für die vom Stab auf die jeweiligen Massepunkte ausgeübten „Zwangskräfte“ $\vec{\mathbf{Z}}_1$ und $\vec{\mathbf{Z}}_2$. Des weiteren deklarieren wir die Annahme als „physikalisch sinnvoll“, daß diese Zwangskräfte stets in Richtung unseres Stabes wirken. Zusammengefaßt und in Formeln geschrieben nehmen wir also an, daß gilt

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{Z}}_1(t) &= a(t)(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)) \\ \vec{\mathbf{Z}}_2(t) &= a(t)(\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)) \end{aligned}$$

für unbekanntes $a : \mathbb{T} \to \langle \mathrm{g/s^2} \rangle$. Damit erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1(t) &= a(t)(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)) \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2(t) &= a(t)(\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)) \end{aligned}$$

für $\gamma = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) : \mathbb{T} \to M$. Um diese Gleichungen als Geodätengleichung zu interpretieren, berechnen wir zunächst das orthogonale Komplement des Tangentialraums von M. Per definitionem ist M eine Niveaufläche der Funktion $f : (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mapsto \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2$. Das Differential dieser Abbildung bei $r = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ ergibt sich mit 12.1.6.5 zu

$$\mathrm{d}_r f : (\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2) \mapsto 2\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \vec{\mathbf{v}}_1 \rangle - 2\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \vec{\mathbf{v}}_2 \rangle$$

Der Kern dieser Abbildung ist der Tangentialraum $\mathrm{T}_r M$. Wir erkennen so, daß für alle $r = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in M$ der Vektor $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ auf $\mathrm{T}_r M$ senkrecht steht, da nämlich für das komponentenweise $\langle \mathrm{m}^2 \rangle$-wertige Skalarprodukt auf dem Richtungsraum $\vec{\mathbb{E}}^2$ des Raums $\mathbb{E}^2$ das Skalarprodukt dieses Vektors mit allen weiteren Vektoren ein festes Vielfaches des Wertes von $\mathrm{d}_r f$ auf den fraglichen weiteren Vektoren ist. Definieren wir nun zusätzlich auf $\vec{\mathbb{E}}^2$ das **massebehaftete Skalarprodukt**

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{g}} : \vec{\mathbb{E}}^2 \times \vec{\mathbb{E}}^2 \to \langle \mathrm{gm}^2 \rangle$$

durch $\langle (\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2), (\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2) \rangle_{\mathrm{g}} := m_1 \langle \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{w}}_1 \rangle + m_2 \langle \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{w}}_2 \rangle$, so wird das bezüglich dieses massebehafteten Skalarprodukts orthogonale Komplement zu $\mathrm{T}_r M$ aufgespannt von $((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/m_1, (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/m_2)$. Dieser Vektor liegt zwar von seinen Einheiten her in $\vec{\mathbb{E}}^2 \langle 1/\mathrm{g} \rangle$, aber da es uns nur auf seine Richtung ankommt, dürfen wir das ignorieren. Wir sehen so, daß unsere Bewegungsgleichungen zusammengefaßt werden können zur Bedingung

$$\ddot{\gamma}(t) \perp_{\mathrm{g}} \mathrm{T}_{\gamma(t)} M$$

mit der Notation $\perp_{\mathrm{g}}$ für das Senkrechtstehen in Bezug auf das massebehaftete Skalarprodukt. Für Leser, die die entsprechende mathematische Terminologie bereits kennen, sind die möglichen Bewegungen also gerade die verallgemeinerten Geodäten auf M in Bezug auf unser massebehaftetes Skalarprodukt. Wirken zusätzlich noch externe Kräfte, sind etwa unsere Massepunkte elektrisch geladen und bewegt sich unsere Hantel in einem Raum mit einem elektrischen Feld und einem Gravitationsfeld, und beschreiben etwa $\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2 : \mathbb{E} \to \vec{\mathbb{E}} \langle \mathrm{g/s^2} \rangle$ die auf die jeweiligen Massepunkte wirkenden externen Kräfte, so bilden wir die **massebereinigte externe Gesamtkraft**

$$\tilde{F} : \mathbb{E}^2 \to \vec{\mathbb{E}}^2 \langle 1/\mathrm{s}^2 \rangle$$

mit $\tilde{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\vec{\mathbf{F}}_1(\mathbf{r}_1)/m_1, \vec{\mathbf{F}}_2(\mathbf{r}_2)/m_2)$ und unsere Bewegungsgleichungen an $\gamma : \mathbb{T} \to M$ erhalten allgemeiner die Gestalt

$$\big(\ddot{\gamma}(t) - \tilde{F}(\gamma(t))\big) \perp_{\mathrm{g}} \mathrm{T}_{\gamma(t)}M$$

12.6.4.3 (**Allgemeine Systeme mit Zwangsbedingungen**). Nun betrachten wir allgemeiner den Fall eines Systems von Λ Massepunkten der Massen $m_1, \ldots, m_\Lambda$, deren Bewegung in der Weise eingeschränkt sei, daß die Zusammenfassung ihrer Orte $(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_\Lambda) \in \mathbb{E}^\Lambda$ sich stets auf einer fest vorgegebenen glatten Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{E}^\Lambda$ befindet. Wir nennen das Datum $(m_1, \ldots, m_\Lambda, M)$ ein **mechanisches System** und M seinen **Konfigurationsraum**. Man mag hier an unsere Hantel aus Beispiel 12.6.4.2 denken, an unser Seifenstück im Tank aus Beispiel 12.6.4.1, an ein Doppelpendel, und noch an vieles andere. Auch dieser Allgemeinheit betrachten wir das **massebehaftete Skalarprodukt** $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{g}} : \vec{\mathbb{E}}^\Lambda \times \vec{\mathbb{E}}^\Lambda \to \langle \mathrm{gm}^2 \rangle$ gegeben durch

$$\langle (\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_\Lambda), (\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_\Lambda) \rangle_{\mathrm{g}} := m_1 \langle \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{w}}_1 \rangle + \ldots + m_\Lambda \langle \vec{\mathbf{v}}_\Lambda, \vec{\mathbf{w}}_\Lambda \rangle$$

Im folgenden soll erklärt werden, wie man durch physikalische Überlegungen für die Bewegung $\gamma : I \to M$ unseres Systems während eines mehrpunktigen Zeitintervalls $I \subset \mathbb{T}$ auf die Bewegungsgleichungen

$$\big(\ddot{\gamma}(t) - \tilde{F}(\gamma(t))\big) \perp_{\mathrm{g}} \mathrm{T}_{\gamma(t)}M$$

geführt wird, für $\tilde{F} := (\vec{\mathbf{F}}_1/m_1, \ldots, \vec{\mathbf{F}}_\Lambda/m_\Lambda)$ die **Zusammenfassung der massebereinigten externen Kräfte** und $\perp_{\mathrm{g}}$ das Senkrechtstehen bezüglich des massebehafteten Skalarprodukts. Wesentlich ist dabei zusätzlich zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen das sogenannte **d'Alembert'sche Prinzip**, nach dem „die Zwangskräfte unter infinitesimalen Verrückungen keine Arbeit verrichten". Wird genauer im Verlauf der Bewegung an einer Stelle $p \in M$ auf unser System die Zwangskraft $Z := (\vec{\mathbf{Z}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{Z}}_\Lambda) \in \vec{\mathbb{E}}^\Lambda \langle \mathrm{g/s}^2 \rangle$ ausgeübt und ist $\varphi : (-a, a) \to M$ ein glatter Weg in M mit $\varphi(0) = p$, dann soll, so kann man dies Prinzip in Formeln ausdrücken, stets gelten

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \langle Z, \varphi'(\zeta) \rangle \, \mathrm{d}\zeta = 0$$

Ds bedeutet aber genau $\langle Z, \varphi'(0) \rangle = 0$ und damit $Z \perp \mathrm{T}_p M$ für das komponentenweise gebildete Skalarprodukt auf $\vec{\mathbb{E}}^\Lambda$. Für die **massebereinigte Zwangskraft** $\tilde{Z} := (\vec{\mathbf{Z}}_1/m_1, \ldots, \vec{\mathbf{Z}}_\Lambda/m_\Lambda)$ haben wir dann natürlich auch $\tilde{Z} \perp_{\mathrm{g}} \mathrm{T}_p M$ mit dem Senkrechtstehen in Bezug auf das massebehaftete Skalarprodukt. Nun liefern die Newton'schen Bewegungsgleichungen die Identität $\ddot{\gamma}(t) = \tilde{F}(\gamma(t)) + \tilde{Z}(\gamma(t))$ und wir erhalten wie behauptet für unser System mit Zwangsbedingungen die Bewegungsgleichungen

$$\big(\ddot{\gamma}(t) - \tilde{F}(\gamma(t))\big) \perp_{\mathrm{g}} \mathrm{T}_{\gamma(t)}M$$

Beispiele 12.6.4.4 (**Beispiele für das d'Alembert'sche Prinzip**). Das Vorhergehende gilt nur für Systeme ohne Reibung. Im Fall unserer Seife im Tank besagt das d'Alembert'sche Prinzip, daß Zwangskräfte ausschließlich senkrecht zur Innenfläche des Tanks an der Stelle, an der sich unser Seifenstück gerade befindet, ausgeübt werden. Im Fall unserer Hantel besagt das d'Alembert'sche Prinzip, daß Zwangskräfte ausschließlich in Richtung des Stabes ausgeübt werden und dem Prinzip „actio est reactio" gehorchen. Im Fall dreier schwerer Perlen, die auf einem masselos gedachten Seilring aufgefädelt sind, liefert das d'Alembert'sche Prinzip bei genauerer Betrachtung, daß sich (1) die Zwangskräfte auf jede Perle als Summe zweier Kräfte in den beiden Richtungen, in denen das Seil sie verläßt, schreiben lassen, und daß (2) alle diese Kräfte betragsmäßig gleich groß sind, daß also anschaulich gesprochen die Seilspannung konstant ist. All das wirkt physikalisch vernünftig, und es erweist sich, daß die so erhaltenen Bewegungsgleichungen auch in guter Übereinstimmung zum Experiment stehen.

12.6.5 Euler-Lagrange-Gleichungen

12.6.5.1 (**Motivation**). Die Bedingung des Senkrechtstehens in den Bewegungsgleichungen, die wir in 12.6.4.3 hergeleitet haben, eignet sich nicht für explizite Rechnungen. Die „Euler-Gleichungen" und „Euler-Lagrange-Gleichungen" schreiben unsere Bewegungsgleichungen

$$\big(\ddot{\gamma}(t) - \tilde{F}(\gamma(t))\big) \perp_{\mathrm{g}} \mathrm{T}_{\gamma(t)}M$$

aus 12.6.4.3 um zu einem System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Das braucht jedoch einige Vorbereitungen.

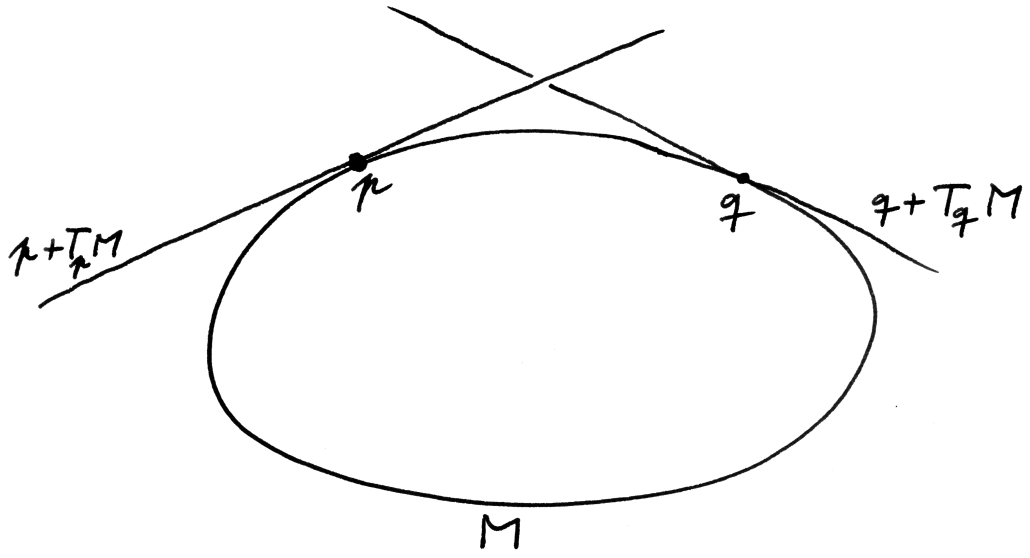
12.6.5.2. Sei X ein endlichdimensionaler Raum und $M \subset X$ eine Mannigfaltigkeit. In 12.3.2.9 hatten wir zu jedem Punkt $p \in M$ seinen Tangentialraum $\mathrm{T}_pM \subset \vec{X}$ erklärt. Wir erklären nun das **Tangentialbündel von** M als

$$\mathrm{T}M := \bigcup_{p\in M} \{p\} \times \mathrm{T}_pM \quad \subset \quad M \times \vec{X}$$

Die Komposition $\pi : \mathrm{T}M \to M$ der Einbettung nach $M \times \vec{X}$ mit der Projektion auf M heißt die **Bündelprojektion**.

12.6.5.3 (**Tangentialbündel als Mannigfaltigkeit**). Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum. Ist $M \subset X$ eine glatte Untermannigfaltigkeit, so ist ihr Tangentialbündel $\mathrm{T}M \subset X \times \vec{X}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $2(\dim M)$. Seien $\varphi : \mathbb{R}^n \supseteq W \to M$ eine glatte Karte von M, so ist $\mathrm{d}\varphi : W \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}M$ gegeben durch

$$\mathrm{d}\varphi : (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \mapsto (\mathrm{d}_{(x_1,\ldots,x_n)}\varphi)(y_1, \ldots, y_n)$$



In diesem Bild habe ich zu einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit der Ebene zwei affine Räume eingezeichnet, deren Richtungsräume ihre Tangentialräume an den beiden fett eingezeichneten Punkten wären. Diese affinen Räume schneiden sich natürlich und ihre Richtungsräume schneiden sich desgleichen. Im bildlich dargestellten Fall besteht dieser Schnitt der Richtungsräume aus dem Nullvektor, aber im allgemeinen kann er auch größer sein. Ich habe die beiden Geraden dennoch als nicht-schneidend gemalt, um bildlich anzudeuten, daß alle diese Überschneidungen von uns bei der Definition des Tangentialbündels sozusagen wegdefiniert werden.

eine Karte des Tangentialbündels $\mathrm{T}M$. Der Beweis bleibe dem Leser zur Übung überlassen.

12.6.5.4 (**Bewegungsgleichungen in lokalen Koordinaten**). Wir betrachten wie in 12.6.4.3 den Fall eines mechanischen Systems von Λ Massepunkten der Massen $m_1, \ldots, m_\Lambda$, deren Bewegung in der Weise durch Zwangsbedingungen eingeschränkt sei, daß die Zusammenfassung ihrer Orte $(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_\Lambda) \in \mathbb{E}^\Lambda$ sich stets auf einer fest vorgegebenen glatten Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{E}^\Lambda$ befindet, dem Konfigurationsraum unseres mechanischen Systems. Seien $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $\varphi : U \hookrightarrow M$ eine Karte, die wir der Einfachheit der Notation halber bijektiv annehmen, also $\varphi : U \xrightarrow{\sim} M$. Nach Übung 12.6.5.3 ist nun das Tangentialbündel von M eine Mannigfaltigkeit $\mathrm{T}M \subset \mathbb{E}^\Lambda \times \vec{\mathbb{E}}^\Lambda$ und unsere Karte liefert eine Karte $\mathrm{d}\varphi : U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}M$ vermittels der Abbildungsvorschrift

$$\mathrm{d}\varphi : (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \mapsto (\mathrm{d}_{(x_1,\ldots,x_n)}\varphi)(y_1, \ldots, y_n)$$

Wir können demnach $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ als ein Koordinatensystem auf $\mathrm{T}M$ auffassen. Wir nennen es das **natürliche Koordinatensystem des Tangentialbündels** zum vorgegebenen Koordinatensystem $(x_1, \ldots, x_n)$ unserer Mannigfaltigkeit. In derselben Weise ist auch das mit Einheiten $\langle 1/\mathrm{s}\rangle$ versehene Tangentialbündel mit dem faserweise zu verstehenden Tensorprodukt eine Mannigfaltigkeit

$$\mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s}\rangle \subset \mathbb{E}^\Lambda \times \vec{\mathbb{E}}^\Lambda\langle 1/\mathrm{s}\rangle$$

Sie heißt der **Phasenraum** oder genauer der **Geschwindigkeitsphasenraum** unseres Systems mit Zwangsbedingungen. Wir erweitern unser Koordinatensystem $(x_1, \ldots, x_n)$ in derselben Weise durch die Funktionen oder vielleicht besser Abbildungen $y_i := y_i \otimes \mathrm{id} : \mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s}\rangle \to \langle 1/\mathrm{s}\rangle$ zum **natürlichen Koordinatensystem** $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ des Phasenraums mit der Besonderheit, daß die Koordinaten y_i als Werte duale Zeitspannen alias Frequenzen annehmen. In der physikalischen Literatur schreibt man statt y_i meist $\dot{x}_i$. Die **kinetische Energie** erklären wir als die Abbildung $K : \mathbb{E}^\Lambda \times \vec{\mathbb{E}}^\Lambda\langle 1/\mathrm{s}\rangle \to \langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2\rangle$ gegeben durch

$$(\mathbf{r}_\nu, \vec{\mathbf{v}}_\nu)_{\nu=1}^\Lambda \mapsto \sum_{\nu=1}^\Lambda m_\nu \langle \vec{\mathbf{v}}_\nu, \vec{\mathbf{v}}_\nu\rangle/2$$

Andererseits betrachten wir die durch die Orte unserer einzelnen Massepunkte gegebenen Abbildungen $\mathbf{r}_\nu : M \to \mathbb{E}$ für $1 \le \nu \le \Lambda$. Für $\vec{\mathbf{F}}_\nu : \mathbb{E} \to \vec{\mathbb{E}}\langle \mathrm{g}/\mathrm{s}^2\rangle$ die am jeweiligen Ort auf den jeweiligen Massepunkt wirkende Kraft erklären wir nun die l-te **generalisierte Kraft** zu unserem Koordinatensystem durch

$$Q_l := \sum_{\nu=1}^\Lambda \left\langle \vec{\mathbf{F}}_\nu \circ \mathbf{r}_\nu, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle$$

Die partielle Ableitung ist dabei in Bezug auf unser lokales Koordinatensystem $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ im Sinne von 12.3.4.5 zu verstehen. Unsere generalisierten Kräfte sind also Funktionen $Q_l : M \to \langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2 \rangle$ und können auch als Funktionen auf dem Geschwindigkeitsphasenraum aufgefaßt werden.

Satz 12.6.5.5 (Euler-Gleichungen). *Seien $(x_1, \ldots, x_n)$ Koordinaten auf dem Konfigurationsraum M eines mechanischen Systems und $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ die zugehörigen natürlichen Koordinaten auf $\mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s} \rangle$. Genau dann erfüllt ein glatter Weg $\gamma : I \to M$ für ein mehrpunktiges Zeitintervall I unsere Bewegungsgleichungen $\big(\ddot{\gamma}(t) - \tilde{F}(\gamma(t))\big) \perp_{\mathrm{g}} \mathrm{T}_{\gamma(t)}M$ aus 12.6.4.3, wenn für die zugehörige Abbildung $(\gamma, \dot{\gamma}) : I \to \mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s} \rangle$ in den Geschwindigkeitsphasenraum gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial y_l} \circ (\gamma, \dot{\gamma})\right) - \frac{\partial K}{\partial x_l} \circ (\gamma, \dot{\gamma}) - Q_l \circ \gamma = 0 \quad \textit{für } 1 \leq l \leq n$$

mit K unserer kinetischen Energie und Q_l unseren generalisierten Kräften.

Beweis. Unsere Koordinaten liefern eine Bijektion $(x_1, \ldots, x_n) : M \xrightarrow{\sim} U$ für $U \Subset \mathbb{R}^n$. Deren Umkehrung notieren wir $\varphi : U \xrightarrow{\sim} M$, so daß wir haben

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (\mathbf{r}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mathbf{r}_\Lambda(x_1, \ldots, x_n))$$

Oft kürzen wir für $\gamma : I \to M$ auch $x_i \circ \gamma$ zu x_i ab, so daß wir etwa schreiben können

$$\gamma_\nu(t) = \mathbf{r}_\nu(x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

Indem wir auch noch t aus der Notation weglassen, ergeben sich für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen unserer Λ Teilchen die Formeln

$$\dot{\gamma}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \ldots + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_n}\dot{x}_n$$

$$\ddot{\gamma}_\nu = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j \partial x_k}\dot{x}_j\dot{x}_k + \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}\ddot{x}_j$$

Die griechischen Indizes zeigen hierbei an, daß diese Gleichungen in $\mathbb{E}$ beziehungsweise $\vec{\mathbb{E}}\langle 1/\mathrm{s} \rangle$ beziehungsweise $\vec{\mathbb{E}}\langle 1/\mathrm{s}^2 \rangle$ oder genauer als Gleichungen von Abbildungen von einem mehrpunktigen Intervall der Zeitachse $I \subset \mathbb{T}$ in besagte Räume zu verstehen sind. Da weiter für $x \in U$ der Tangentialraum $\mathrm{T}_{\varphi(x)}M$ an M bei $\varphi(x)$ nach 12.6.5.2 von den ausgewertet bei x zu verstehenden Vektoren

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x_l}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{r}_\Lambda}{\partial x_l}\right) \in \vec{\mathbb{E}}^\Lambda$$

für $1 \leq l \leq n$ aufgespannt wird, ist unsere Bedingung des Senkrechtstehens auf dem Tangentialraum $\big(\ddot{\gamma}(t) - \tilde{F}(\gamma(t))\big) \perp_{\mathrm{g}} \mathrm{T}_{\gamma(t)}M$ für das massebehaftete Skalarprodukt gleichbedeutend dazu, daß für alle l die Summe

$$\sum_{\nu,j,k} m_\nu \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle \dot{x}_j \dot{x}_k + \sum_{\nu,j} m_\nu \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle \ddot{x}_j - \sum_{\nu} \left\langle \mathbf{F}_\nu \circ \mathbf{r}_\nu, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle$$

verschwindet. Wir nennen die l-te dieser Verschwindungsbedingungen im folgenden die **l-te Bewegungsgleichung**. Jetzt erinnern wir den Geschwindigkeitsphasenraum $\mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s}\rangle \subset \mathbb{E}^\Lambda \times \vec{\mathbb{E}}^\Lambda\langle 1/\mathrm{s}\rangle$. Der $\vec{\mathbf{v}}_\nu$-Anteil eines Punktes, aufgefaßt als Abbildung $\mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s}\rangle \to \vec{\mathbb{E}}\langle 1/\mathrm{s}\rangle$, wird in den natürlichen Koordinaten gegeben durch den Ausdruck

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j} y_j$$

Dieser Ausdruck ist eine Geschwindigkeit alias ein Element von $\vec{\mathbb{E}}\langle 1/\mathrm{s}\rangle$. Die Einschränkung unserer kinetischen Energie K auf den Phasenraum des Systems mit Zwangsbedingungen hat in diesen Koordinaten die Gestalt

$$K(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\nu,j,k} \frac{m_\nu}{2} \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_k} \right\rangle y_j y_k$$

In der Notation 12.1.4.10 folgt sofort

$$\frac{\partial K}{\partial y_l} = \sum_{\nu,j} m_\nu \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle y_j$$

Hier bestehen wir darauf, daß diese partiellen Ableitungen der kinetischen Energie $K : \mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s}\rangle \to \langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2\rangle$ in Bezug auf das natürliche lokale Koordinatensystem des Geschwindigkeitsphasenraums zu verstehen sind. Nun betrachten wir eine glatte Kurve $\gamma : I \to M$ für $I \subset \mathbb{T}$ ein mehrpunktiges Zeitintervall. Zusammen mit ihrem Differential $\dot{\gamma} = \mathrm{d}\gamma$ liefert sie eine Abbildung $(\gamma, \dot{\gamma}) : I \to \mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s}\rangle$. Interpretieren wir die y_i weiter als Koordinaten des Geschwindigkeitsphasenraums oder genauer als Abbildungen $y_i : \mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s}\rangle \to \langle 1/\mathrm{s}\rangle$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial y_l} \circ (\gamma, \dot{\gamma})\right) &= \sum_{\nu,i,j,k} m_\nu \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle \dot{x}_k \dot{x}_j \\
&\quad + \sum_{\nu,i,j,k} m_\nu \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l \partial x_k} \right\rangle \dot{x}_k \dot{x}_j \\
&\quad + \sum_{\nu,j} m_\nu \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle \ddot{x}_j
\end{aligned}$$

Die ersten beiden Terme unserer l-ten Bewegungsgleichung von oben können demnach dargestellt werden in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial y_l}\circ(\gamma,\dot\gamma)\right)-\frac{\partial K}{\partial x_l}\circ(\gamma,\dot\gamma)$$

Der letzte Term ist gerade unsere generalisierte Kraft und der Satz folgt. □

12.6.5.6 (**Euler-Lagrange-Gleichungen bei Kräften mit Potential**). Bisher haben wir unsere Kräfte als mit Einheiten $\langle \mathrm{g}/\mathrm{s}^2\rangle$ versehene Vektorfelder aufgefaßt. Benutzen wir nun unsere durch das kanonische Skalarprodukt $\vec{\mathbb{E}}\times\vec{\mathbb{E}}\to\langle\mathrm{m}^2\rangle$ gegebene Identifikation $\vec{\mathbb{E}}\xrightarrow{\sim}\vec{\mathbb{E}}^*\langle\mathrm{m}^2\rangle$, um sie stattdessen als mit Einheiten in $\langle\mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2\rangle$ versehene Kovektorfelder aufzufassen, und fassen die Gesamtheit F der Kräfte entsprechend als ein mit denselben Einheiten versehenes Kovektorfeld auf $\mathbb{E}^\Lambda$ auf, also als Abbildung $F:\mathbb{E}^\Lambda\to(\vec{\mathbb{E}}^*)^\Lambda\langle\mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2\rangle$, so hat das unter der Karte zurückgezogene Kovektorfeld die Gestalt

$$\varphi^*F=\sum_{l=1}^n Q_l\,\mathrm{d}x_l$$

und unsere generalisierten Kräfte zeigen ihre eigentliche Bedeutung. Ist dann weiter $V:\mathbb{E}^\Lambda\to\langle\mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2\rangle$ ein **Potential** für unsere Kraft F, in Formeln $F=-\,\mathrm{d}V$, so folgt

$$\varphi^*F=-\,\mathrm{d}(V\circ\varphi)=-\sum_{l=1}^n\frac{\partial V}{\partial x_l}\,\mathrm{d}x_l$$

Wir finden auf diese Weise mit den üblichen Abkürzungen für die generalisierten Kräfte die Darstellung $Q_l=-\frac{\partial V}{\partial x_l}$, die wir uns als eine Identität von Funktionen auf M oder ebensogut auch auf U denken können. Fassen wir nun V durch Vorschalten der Bündelprojektion als Funktion auf dem Geschwindigkeitsphasenraum $\mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s}\rangle$ auf, so verschwinden natürlich die partiellen Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial y_l}$ bezüglich unseres Systems $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ von natürlichen Koordinaten. Bilden wir also die **Lagrangefunktion**

$$L:=V-K$$

als Differenz zwischen der potentiellen und der kinetischen Energie unseres Systems, so erfüllt für eine mögliche Bewegung $\gamma:I\to M$ die zugehörige Abbildung in den Phasenraum $(\gamma,\dot\gamma):I\to\mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s}\rangle$ die sogenannten **Euler-Lagrange-Gleichungen**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial y_l}\circ(\gamma,\dot\gamma)\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x_l}\right)\circ(\gamma,\dot\gamma)=0\qquad\text{für } 1\le l\le n.$$

Beispiel 12.6.5.7 (**Bewegung einer Töpferscheibe nach Euler-Lagrange**). Wir betrachten eine Töpferscheibe mit Zentrum in $\mathbf{p} \in \mathbb{E}$. Wir denken sie uns zusammengesetzt aus Massepunkten $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N$ der Massen $m_1, \ldots, m_N$. Der Konfigurationsraum M ist eine Kreislinie. Als lokale Koordinate wählen wir den Drehwinkel im Bogenmaß $x_1 = x$, wobei wir den Nullwinkel willkürlich festlegen. Wir denken uns unsere Scheibe waagerecht, so daß das Potential V unabhängig ist von x und die generalisierte Kraft für alle x verschwindet. Die kinetische Energie $K(y) = K(\dot{x})$ ergibt sich zu

$$K(y) = \frac{1}{2} \sum y^2 \|\mathbf{r}_i - \mathbf{p}\|^2 m_i = Jy^2/2$$

für $J := \sum \|\mathbf{r}_i - \mathbf{p}\|^2 m_i \in \langle \mathrm{gm}^2 \rangle$ das **Trägheitsmoment** unserer Töpferscheibe. Die Euler-Lagrange-Gleichungen für $\gamma = \gamma_1$ spezialisieren zu $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\dot{\gamma}) = 0$ alias $\dot{\gamma}$ konstant. Unsere Töpferscheibe dreht sich folglich ohne Einwirkung äußerer Kräfte mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bis in alle Ewigkeit.

Beispiel 12.6.5.8 (**Kleine Schwingungen**). Seien $(x_1, \ldots, x_n)$ Koordinaten auf dem Konfigurationsraum M eines mechanischen Systems und seien weiter

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$$

die zugehörigen natürlichen Koordinaten auf $\mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s} \rangle$. Ist $x_1 = \ldots = x_n = 0$ eine kritische Stelle der Potentialfunktion V, so kann V bis auf eine für unsere Gleichungen unerhebliche additive Konstante lokal bis zu dritter Ordnung approximiert werden durch eine quadratische Form $V = \sum a_{ij} x_i x_j$ und wir dürfen dabei die Matrix (a_{ij}) symmetrisch annehmen. Hier nehmen wir unsere Koordinaten x_i reellwertig und die Koeffizienten unserer quadratischen Form haben folglich die Einheit einer Energie $a_{ij} \in \langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2 \rangle$. Die zugehörigen y_i ordnen einem Tangentialvektor $\partial_j \otimes \langle 1/\mathrm{s} \rangle$ den Wert $\delta_{ij} \langle 1/\mathrm{s} \rangle$ zu. Weiter kann die Lagrangefunktion L nach unseren Überlegungen im Beweis von 12.6.5.5 bis auf dieselbe für unsere Gleichungen unerhebliche additive Konstante lokal um $x_1 = \ldots = x_n = 0$ und $y_1 = \ldots = y_n = 0$ bis zu dritter Ordnung approximiert werden durch eine quadratische Form

$$L = \sum a_{ij} x_i x_j - \sum b_{ij} y_i y_j$$

und wir dürfen dabei die Matrix (b_{ij}) mit Einträgen $b_{ij} \in \langle \mathrm{gm}^2 \rangle$ symmetrisch und positiv definit annehmen. Für das approximierende System, dessen Langrangefunktion nun wirklich genau diese Differenz von quadratischen Formen ist, findet man nach dem Satz über Hauptachsentransformationen 4.2.2.7 einen linearen Koordinatenwechsel derart, daß in den neuen Koordinaten A Diagonalgestalt hat, in Formeln $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in \langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2 \rangle$, und daß B ein Vielfaches des

Einheitsmatrix wird, etwa $B = \operatorname{diag}(c/2, \ldots, c/2)$ mit $c \in \langle \mathrm{gm}^2 \rangle$. Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten dann in diesen Koordinaten

$$\ddot{\gamma}_l = -(\lambda_l/c)\gamma_l \quad \text{für } 1 \leq l \leq n.$$

Ist unsere kritische Stelle des Potentials ein lokales Minimum und ist die Hesse-Matrix dort nicht ausgeartet, so ist auch A positiv definit und alle $\lambda_l/c \in \langle 1/\mathrm{s}^2 \rangle$ sind positiv und die l-te Koordinate unserer Bewegung ist eine Schwingung mit der Periode $2\pi/\sqrt{\lambda_l/c}$, genauer $\gamma_l(t) = C\sin(t\sqrt{\lambda_l/c} + \phi)$ für frei wählbare reelle Zahlen C, ϕ. Die zugehörigen Frequenzen $(1/2\pi)\sqrt{\lambda_l/c}$ heißen die **Eigenfrequenzen** unseres Systems. Wir diskutieren hier nicht, wie gut die Lösungen des approximierenden Systems die Lösungen des ursprünglichen Systems approximieren. Mithilfe unserer Aussagen über differentielle Ungleichungen 12.5.2.10 kann man hier aber durchaus recht gute Abschätzungen erhalten.

12.6.6 Hamilton'sche Gleichungen

12.6.6.1. Von ihrer Struktur her sind die Euler-Lagrange-Gleichungen 12.6.5.6 ein System impliziter gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Bewegung γ unseres Systems. Um sie zu einem System expliziter Differentialgleichungen erster Ordnung umzuschreiben, führen wir die sogenannten **kanonischen Impulse** ein durch die Vorschrift

$$p_i := \frac{\partial K}{\partial y_i} = -\frac{\partial L}{\partial y_i}$$

Die kanonischen Impulse sind Funktionen auf dem Phasenraum $\mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s} \rangle$, genauer Funktionen mit Werten in $\langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s} \rangle$. Zusammen mit den Ortskoordinaten bilden sie ein weiteres Koordinatensystem $(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ mit Einheiten auf dem Phasenraum $\mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s} \rangle$. Um das zu sehen, erinnern wir unsere Formel

$$\frac{\partial K}{\partial y_l} = \sum_{\nu,j} m_\nu \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle y_j$$

aus der Herleitung der Euler-Gleichungen 12.6.5.5. Sie besagt, daß unter einer Abbildung $M \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} M \times \mathbb{R}^n$ der Gestalt $(x, y) \mapsto (x, (A(x))y)$ mit glattem $A : M \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ die n hinteren Koordinatenfunktionen zu den kanonischen Impulsen zurückgezogen werden. Bei der Diskussion abstrakter Mannigfaltigkeiten in 22.5.11 werden wir sehen, daß unserer kanonischen Impulse geometrisch als „natürliche Koordinaten des Kotangentialbündels“ verstanden werden können, aber dazu muß erst einmal der Formalismus der abstrakten Mannigfaltigkeiten entwickelt werden.

12.6.6.2 (**Herleitung der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen**). Die kinetische Energie als Funktion auf dem Phasenraum läßt sich mithilfe unserer neuen Funktionen p_i darstellen als

$$K = \frac{1}{2}\sum_i p_i y_i$$

Wir finden so für ihre partielle Ableitung nach x_l im System der Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ die Darstellung

$$\frac{\partial K}{\partial x_l} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x_l} y_i$$

Nun kommen wir auf unsere Euler-Lagrange-Gleichung zurück. Betrachten wir für die Bewegung $\gamma : I \to M$ unseres Systems den zugehörigen Weg $\psi = (\gamma, \dot{\gamma}) : I \to \mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s}\rangle$ im Phasenraum und kürzen wieder $p_i \circ \psi = p_i$ ab, so liest sich die l-te Euler-Lagrange-Gleichung als

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial L}{\partial x_l}$$

Hier ist die partielle Ableitung rechts noch im natürlichen Koordinatensystem des Tangentialbündels $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ zu verstehen. Jetzt gehen wir zum neuen Koordinatensystem $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ des Phasenraums über mit $q_i := x_i$ und p_i unseren kanonischen Impulsen. Obwohl die ersten n Koordinaten in diesen beiden Koordinatensystemen übereinstimmen, sind die partiellen Ableitungen einer Funktion auch nach diesen ersten Koordinaten im allgemeinen verschieden, da sie ja von der Gesamtheit der Koordinaten abhängen. Das ist auch der Grund, aus dem wir von nun an für ein- und dieselbe Funktion die beiden Notationen $x_i = q_i$ verwenden: Bei $\partial/\partial q_i$ meinen wir von nun an partielles Ableiten im Koordinatensystem $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$, bei $\partial/\partial x_i$ dahingegen partielles Ableiten im Koordinatensystem $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. In diesen Notationen finden wir dann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_l} &= \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_l}\frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_l}\frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{\partial L}{\partial x_l} - \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_l} p_i \\
\frac{\partial K}{\partial q_l} &= \frac{1}{2}\sum_i p_i \frac{\partial y_i}{\partial q_l}
\end{aligned}$$

Für $H := L + 2K = V + K$ die totale Energie, auch genannt die **Hamilton-Funktion**, ergibt sich so $\frac{\partial H}{\partial q_l} = \frac{\partial L}{\partial x_l}$. Damit können wir unsere l-te Bewegungsgleichung auch schreiben als

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l}$$

Andererseits gilt unter unserer Annahme, daß das Potential V nicht von den Geschwindigkeiten y_i abhängt, die Identität

$$\frac{\partial H}{\partial p_l} = \frac{\partial V}{\partial p_l} + \frac{\partial K}{\partial p_l} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial p_l}\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2}y_l + \frac{1}{2}\sum_i p_i \frac{\partial y_i}{\partial p_l}$$

Da $x_i = q_i$ nicht von den Impulsen abhängt, verschwindet rechts der erste Summand. Der letzte Summand schließlich darf faserweise berechnet werden und auf jeder Faser bestehen lineare Beziehungen $y_i = \sum_j \alpha_{ij} p_j$ mit konstanten $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$. Die explizite Beschreibung dieser linearen Beziehungen zu Beginn von 12.6.6.1 zeigt darüber hinaus $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. So erkennen wir schließlich $\frac{\partial H}{\partial p_l} = y_l$, und da wir ja nur Wege im Phasenraum der Gestalt $\psi = (\gamma, \dot{\gamma})$ betrachten, folgt als weitere Bewegungsgleichung

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l}$$

Zusammenfassend erfüllt unsere Bewegung, aufgefaßt als Abbildung in den Phasenraum und ausgedrückt in beliebigen Ortskoordinaten $q_i = x_i$ zusammen mit den zugehörigen kanonischen Impulskoordinaten p_i, also die **Hamilton'schen Gleichungen**

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} \quad \text{und} \quad \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l} \quad \text{für } 1 \le l \le n.$$

Beispiel 12.6.6.3 (**Bewegung einer Töpferscheibe nach Hamilton**). Wir betrachten eine Töpferscheibe mit Zentrum in $\mathbf{p} \in \mathbb{E}$. Wir denken sie uns zusammengesetzt aus Massepunkten $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N$ der Massen $m_1, \ldots, m_N$. Der Konfigurationsraum M ist eine Kreislinie. Als lokale Koordinate wählen wir den Drehwinkel im Bogenmaß $x_1 = x$, wobei wir den Nullwinkel willkürlich festlegen. Wie in 12.6.5.7 ist die kinetische Energie $K(y) = Jy^2/2$ und unsere Impulskoordinate zur Ortskoordinate $q = x$ wird $p = Jy$. Sie heißt in dieser Situation der **Drehimpuls**. Die Hamiltonfunktion ist $H(q,p) = p^2/2J$ und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen spezialisieren zu den Gleichungen

$$\dot{q} = p/J \quad \text{und} \quad \dot{p} = 0.$$

Also ist der Drehimpuls p konstant und die zeitliche Ableitung $\dot{q}$ von q ist auch konstant und unsere Töpferscheibe dreht sich ohne Einwirkung äußerer Kräfte mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bis in alle Ewigkeit.

12.6.7 Geometrie der Hamilton'schen Gleichungen

12.6.7.1 (**Motivation**). Die Bedingung des Senkrechtstehens in den Bewegungsgleichungen, die wir in 12.6.4.3 hergeleitet haben, eignet sich nicht für explizite

Rechnungen. Im sogenannten „Hamilton'schen Formalismus“ werden unsere Bewegungsgleichungen

$$\big(\ddot{\gamma}(t) - \tilde{F}(\gamma(t))\big) \perp_{\mathrm{g}} \mathrm{T}_{\gamma(t)}M$$

aus 12.6.4.3 für ein System mit Zwangsbedingungen umgeschrieben zu einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Das braucht jedoch einige Vorbereitungen. Wir beginnen mit dem Fall eines Systems ohne Zwangsbedingungen, in dem das Umschreiben zu einem System erster Ordung noch keinerlei Schwierigkeiten aufwirft, behandeln es aber in einer Weise, die sich gut auf den Fall eines Systems mit Zwangsbedingungen verallgemeinern läßt.

12.6.7.2 (**Symplektischer Gradient im Fall affiner Räume**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum P und auf seinem Richtungsraum eine symplektische Form $\omega : \vec{P} \times \vec{P} \to \mathbb{R}$ erklären wir in Spezialisierung von 12.7.3.8 für jede differenzierbare Funktion $f : P \to \mathbb{R}$ ihren **symplektischen Gradienten** als das Vektorfeld $\mathrm{grad}_\omega f$, dessen Wert an einer Stelle $p \in P$ gegeben wird durch die Bedingung, daß für alle Vektoren $v \in \vec{P}$ gilt

$$\omega((\mathrm{grad}_\omega f)(x), v) = (\mathrm{D}_v f)(p)$$

mit $(\mathrm{D}_v f)(p) = (\mathrm{d}_p f)(v)$ der Richtungsableitung von f in Richtung v an der Stelle p. Mit unserer Identifikation $\mathrm{can}_\omega : \vec{P} \to \vec{P}^*$ durch $u \mapsto \omega(u, \ )$ haben wir also $(\mathrm{grad}_\omega f)(p) = \mathrm{can}_\omega^{-1}(\mathrm{d}_p f)$.

12.6.7.3 (**Bewegung ohne Zwangsbedingung als Flußwegprojektion**). Nun betrachten wir ein System von Λ Massepunkten der Massen $m_1, \ldots, m_\Lambda$ im Anschauungsraum $\mathbb{E}$. Das massebehaftete Skalarprodukt aus 12.6.4.3 induziert einen Isomorphismus $\kappa : \vec{\mathbb{E}}^\Lambda \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}}^{*\Lambda}\langle \mathrm{gm}^2 \rangle$. Wir betrachten den Isomorphismus

$$\iota := \mathrm{id} \oplus \kappa : \vec{\mathbb{E}}^\Lambda \oplus \vec{\mathbb{E}}^\Lambda\langle 1/\mathrm{s} \rangle \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}}^\Lambda \oplus \vec{\mathbb{E}}^{*\Lambda}\langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s} \rangle$$

Unter diesem Isomorphismus entspricht die **kanonische** $\langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s} \rangle$**-wertige symplektische Form** ω auf dem Wertebereich gegeben durch $\omega((v, \phi), (w, \psi)) := \psi(v) - \phi(w)$ einer $\langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s} \rangle$-wertigen symplektischen Form η auf dem Definitionsbereich, die gegeben wird durch die Formel

$$\eta((v_1, v_2), (w_1, w_2)) := \langle w_2, v_1 \rangle_{\mathrm{g}} - \langle v_2, w_1 \rangle_{\mathrm{g}}$$

Erklären wir den **Geschwindigkeitsphasenraum** oder kurz **Phasenraum**

$$P := \mathbb{E}^\Lambda \times \vec{\mathbb{E}}^\Lambda\langle 1/\mathrm{s} \rangle$$

als den Raum aller möglichen Orte und Geschwindigkeiten der Teilchen unseres Systems, so ist η eine symplektische Form auf seinem Richtungsraum $\vec{P}$. Die

Funktion der **kinetischen Energie** $K : P \to \langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2 \rangle$, gegeben in Formeln durch $K : (x, v) \mapsto \frac{1}{2}\langle v, v\rangle_{\mathrm{g}}$, hat nun das Differential $(\mathrm{d}_{(x,v)}K) : (w_1, w_2) \mapsto \langle w_2, v\rangle_{\mathrm{g}}$ für $w_1 \in \vec{\mathbb{E}}^\Lambda$ und $w_2 \in \vec{\mathbb{E}}^\Lambda\langle 1/\mathrm{s}\rangle$ und hat folglich als symplektischen Gradienten das Geschwindigkeitsfeld mit den Werten

$$(\mathrm{grad}_\eta K)(x, v) = (v, 0)$$

Dahingegen hat die Funktion $V : P \to \langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2 \rangle$ der **potentiellen Energie** das Differential $(\mathrm{d}_{(x,v)}V) : (w_1, w_2) \mapsto -\langle \tilde{F}(x), w_1\rangle_{\mathrm{g}}$ für $\tilde{F}(x)$ die Zusammenfassung der massebereinigten externen Kräfte, gewissermaßen per definitionem, und hat folglich als symplektischen Gradienten das Geschwindigkeitsfeld

$$(\mathrm{grad}_\eta V)(x, v) = (0, \tilde{F}(x))$$

Für die **Gesamtenergie** $E : P \to \langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2 \rangle$ gegeben durch $E := K + V$ wird der symplektische Gradient $\mathrm{grad}_\eta E$ mithin gegeben durch das Geschwindigkeitsfeld

$$(\mathrm{grad}_\eta E)(x, v) = (v, \tilde{F}(x))$$

Die Flußwege $\alpha : I \to P,\ t \mapsto (\gamma(t), \rho(t))$ des symplektischen Gradienten der Gesamtenergie auf dem Phasenraum für $I \subset \mathbb{T}$ ein mehrpunktiges Zeitintervall sind genau die differenzierbaren Abbildungen mit $\dot{\gamma}(t) = \rho(t)$ und $\dot{\rho}(t) = \tilde{F}(\gamma(t))$ alias $\ddot{\gamma}(t) = \tilde{F}(\gamma(t))$ für alle Zeiten $t \in I$ alias die Abbildungen $t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ für γ eine Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichungen ohne Zwangsbedingungen. Speziell sind im Fall $\Lambda = 1$ der Bewegung eines Teilchens der Masse $m_1 = m$ die Projektionen unserer Flußwege α auf ihren Ortsanteil genau die Lösungen der Newton'schen Bewegungsgleichung

$$\ddot{\gamma}(t) = \tilde{F}(\gamma(t)) = \frac{F(\gamma(t))}{m}$$

aus 12.6.1.6 und auch allgemeiner sind die Lösungen der Bewegungsgleichungen genau die Projektionen der Flußwege des symplektischen Gradienten der Gesamtenergie auf dem Phasenraum. Im folgenden werden wir sehen, wie sich diese Beschreibung auf den Fall eines Systems mit Zwangsbedingungen verallgemeinern läßt.

Proposition 12.6.7.4 (**Bewegung als Projektion von Flußwegen**). *Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $V : X \to \mathbb{R}$ glatt und s ein Skalarprodukt auf $\vec{X}$. Seien $\eta = \eta_s$ die symplektische Form auf $\vec{X} \times \vec{X}$ gegeben durch*

$$\eta((v_1, v_2), (w_1, w_2)) := s(v_1, w_2) - s(v_2, w_1)$$

und $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall. So ist $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to X$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\gamma''(t) = -(\operatorname{grad}_s V)(\gamma(t))$$

genau dann, wenn γ die Projektion auf X eines Flußwegs des symplektischen Gradienten $\operatorname{grad}_\eta E$ ist für $E : X \times \vec{X} \to \mathbb{R}, E(x,v) := V(x) + s(v,v)/2$.

12.6.7.5. Wir verwenden hier implizit die offensichtliche Identifikation zwischen $\vec{X} \times \vec{X}$ und dem Richtungsraum von $X \times \vec{X}$.

12.6.7.6. Als Beispiel mag man sich $X = \mathbb{E}^\Lambda$ und $s = \langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{g}}$ und V unsere Potentialfunktion denken, letztere zur Vereinfachung befreit von ihren Einheiten. Physikalisch ist $X \times \vec{X}$ der Geschwindigkeitsphasenraum und unsere Proposition bringt zum Ausdruck, daß die Lösungen der Bewegungsgleichungen als die Fußpunktprojektionen der Flußwege des symplektischen Gradienten der Gesamtenergie auf dem Phasenraum beschrieben werden können.

12.6.7.7. Unser Skalarprodukt induziert einen Isomorphismus $\operatorname{can}_s : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{X}^*$ und dann auch einen Isomorphismus $\operatorname{id} \times \operatorname{can}_s : \vec{X} \times \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{X} \times \vec{X}^*$. Unsere symplektische Form η_s entspricht unter letzterem Ismorphismus der kanonischen symplektischen Form auf $\vec{X} \times \vec{X}^*$ gegeben durch die Formel $\omega((v,\phi),(w,\psi)) := \psi(v) - \phi(w)$.

Beweis. Für $(x,v) \in X \times \vec{X}$ und $(w_1,w_2) \in \vec{X} \times \vec{X}$ und $V : X \times \vec{X} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $V(x,v) := V(x)$ finden wir

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}_{(x,v)}V)(w_1,w_2) &= (\mathrm{d}_x V)(w_1)\\ &= s\big((\operatorname{grad}_s V)(x), w_1\big)\\ &= \eta\big((0, -(\operatorname{grad}_s V)(x)), (w_1,w_2)\big)\end{aligned}$$

und somit $(\operatorname{grad}_\eta V)(x,v) = (0, -(\operatorname{grad}_s V)(x))$. Für $K : X \times \vec{X} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $K(x,v) := s(v,v)/2$ finden wir andererseits

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}_{(x,v)}K)(w_1,w_2) &= s(v,w_2)\\ &= \eta\big((v,0),(w_1,w_2)\big)\end{aligned}$$

und so $(\operatorname{grad}_\eta K)(x,v) = (v,0)$. Für $E = V + K$ haben wir mithin

$$(\operatorname{grad}_\eta E)(x,v) = (v, -(\operatorname{grad}_s V)(x))$$

Die Flußwege $\alpha : I \to X \times \vec{X}, t \mapsto (\gamma(t), \rho(t))$ dieses Vektorfelds sind demnach genau die differenzierbaren Abbildungen $\alpha = (\gamma,\rho)$, für deren Komponenten gilt $\gamma'(t) = \rho(t)$ und $\rho'(t) = -(\operatorname{grad}_s V)(\gamma(t))$, und entsprechen unter $\gamma \mapsto (\gamma,\gamma')$ eineindeutig den zweimal differenzierbaren Abbildungen $\gamma : I \to X$ mit

$$\gamma''(t) = -(\operatorname{grad}_s V)(\gamma(t)) \qquad \square$$

12.6.7.8. Um Zwangsbedingungen in den obigen Formalismus einzubauen, und das ist unser eigentliches Ziel, muß ich einige Grundbegriffe aus der Differentialgeometrie erklären. Hier bespreche ich sie nur ad hoc und sozusagen zu Fuß für eingebettete Mannigfaltigkeiten. Den vollen Formalismus können Sie in der Differentialgeometrie kennenlernen.

12.6.7.9 (**Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten und ihre Flußwege**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum Y und eine glatte Mannigfaltigkeit $N \subset Y$ erinnere ich an ihr Tangentialbündel $\mathrm{T}N \subset Y \times \vec{Y}$, das wir in 12.6.5.3 als eine glatte Mannigfaltigkeit in $Y \times \vec{Y}$ erklärt hatten. Ein **Vektorfeld auf** N ist definiert als ein Schnitt A der Bündelprojektion $\pi : \mathrm{T}N \twoheadrightarrow N$, also eine Abbildung $A : N \to \mathrm{T}N$ mit $\pi \circ A = \mathrm{id}_N$, die mithin jedem Punkt $q \in N$ einen Tangentialvektor $A_q \in \mathrm{T}_q N$ an N bei q zuordnet. Ein **Flußweg** eines Vektorfelds A ist eine differenzierbare Abbildung $\gamma : I \to N$ von einem mehrpunktigen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach N mit $\gamma'(t) = A_{\gamma(t)}$ für alle $t \in I$. Mit differenzierbar ist hier gemeint, daß die durch Nachschalten der Einbettung $N \hookrightarrow Y$ entstehende Abbildung $\gamma : I \to Y$ differenzierbar sein soll im bereits in **??** definierten Sinne.

12.6.7.10 (**Symplektische Gradienten auf Mannigfaltigkeiten**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum Y und eine glatte Mannigfaltigkeit $N \subset Y$ versteht man unter einem **kovarianten** 2**-Tensor** ω **auf** N eine Zuordnung ω, die jedem Punkt $q \in N$ eine Bilinearform ω_q auf seinem Tangentialraum $\mathrm{T}_q N$ zuordnet. Sind alle diese Bilinearformen nichtausgeartet, so heißt unser 2-Tensor **nichtausgeartet**. Ist $f : Y \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und ω ein nichtausgearteter 2-Tensor auf N, so erklären ein Vektorfeld

$$\mathrm{grad}_\omega f$$

auf N, den ω**-Gradienten von** f, dessen Wert bei $q \in N$ gegeben wird durch die Formel $\omega_q((\mathrm{grad}_\omega f)(q), v) = \mathrm{D}_v(f)\ \forall v \in \mathrm{T}_q N$. Für Leser, die bereits das Differential glatter Funktionen auf Mannigfaltigkeiten kennen, sei bemerkt, daß die Richtungsableitung $\mathrm{D}_v(f)$ von f bei q in Richtung v mit dem Differential von f bei q verknüpft ist durch die Beziehung $\mathrm{D}_v(f) = (\mathrm{d}_q f)(v)$. Ist speziell ω eine punktweise symplektische Form, so nennen wir unseren ω-Gradienten auch den **symplektischen Gradienten**.

Satz 12.6.7.11 (**Bewegung unter Zwang als Projektion von Flußwegen**). *Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $V : X \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, s ein Skalarprodukt auf $\vec{X}$ und $M \subset X$ eine glatte Mannigfaltigkeit. So gilt:*

1. *Die Restriktion der symplektischen Form $\eta = \eta_s$ aus 12.6.7.4 von $\vec{X} \times \vec{X}$ auf die Tangentialräume $\mathrm{T}_{(x,v)}(\mathrm{T}M)$ des Tangentialbündels $\mathrm{T}M \subset X \times \vec{X}$ induziert einen nichtausgearteten punktweise symplektischen kovarianten 2-Tensor $\bar{\eta}$ auf dem Tangentialbündel;*

2. *Für $E : \mathrm{T}M \to \mathbb{R}$ die Gesamtenergie wie in 12.6.7.4 sind die Flußwege $\alpha : I \to \mathrm{T}M$ ihres symplektischen Gradienten $\operatorname{grad}_{\bar\eta} E$ auf $\mathrm{T}M$ genau alle Abbildungen der Gestalt $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$ für $\gamma : I \to M$ ein glatter Weg mit*
$$\big(\gamma''(t) + (\operatorname{grad}_s V)(\gamma(t))\big) \perp_s \mathrm{T}_{\gamma(t)}M \quad \forall t \in I$$

12.6.7.12. Nennen wir $P := \mathrm{T}M$ den **Phasenraum** unseres Systems mit Zwangsbedingungen, so sind damit die Lösungskurven der Bewegungsgleichungen wieder die Projektionen der Flußwege des symplektischen Gradienten $\operatorname{grad}_{\bar\eta} E$ der Gesamtenergie $E : P \to \mathbb{R}$. Die physikalische Interpretation erhält man wie in 12.6.7.4, indem man den Raum $X = \mathbb{E}^\Lambda$ aller möglichen Ortsbestimmungen von Λ Massepunkten betrachtet und $M \subset X$ die Mannigfaltigkeit aller auch noch mit den Zwangsbedingungen verträglichen Ortsbestimmungen und $s = \langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{g}}$ das massebehaftete Skalarprodukt auf $\vec{X}$ aus 12.6.4.3 und V das Potential.

Vorschau 12.6.7.13. Verwendet man die durch das Skalarprodukt gegebene Identifikation $\mathrm{T}M \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^*M$ des Tangentialbündels von M mit dem sogenannten „Kotangentialbündel“ von M, so entspricht unser $\bar\eta$ quasi per definitionem der sogenannten „kanonischen symplektischen Form auf dem Kotangentialbündel“ und unsere Funktion E entspricht der sogenannten „Hamiltonfunktion“ H und unsere Bewegungsgleichungen nehmen in sogenannten „kanonischen Koordinaten“ die besonders transparente Form

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

an. Um das alles zu verstehen, müssen Sie jedoch zunächst mehr Differentialgeometrie lernen. Ich bespreche es in 22.5.11.

Beweis. Zunächst erhalten wir für $(x, v) \in \mathrm{T}M$ eine natürliche kurze exakte Sequenz als obere Horizontale eines kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{T}_v(\mathrm{T}_xM) & \hookrightarrow & \mathrm{T}_{(x,v)}(\mathrm{T}M) & \twoheadrightarrow & \mathrm{T}_xM \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\vec{X} & \overset{\mathrm{in}_2}{\hookrightarrow} & \vec{X} \times \vec{X} & \overset{\mathrm{pr}_1}{\twoheadrightarrow} & \vec{X}
\end{array}$$

mit dem Differential der Bündelprojektion $\mathrm{T}M \twoheadrightarrow M$ als zweiter horizontaler Abbildung und dem Differential der Einbettung der Faser $\mathrm{T}_xM \hookrightarrow \mathrm{T}M$ als erster horizontaler Abbildung und den von $M \hookrightarrow X$ und $\mathrm{T}M \hookrightarrow X \times \vec{X}$ induzierten Vertikalen. Gegeben $(v_1, v_2) \in \mathrm{T}_{(x,v)}(\mathrm{T}M)$ folgt aus

$$\bar\eta\big((v_1, v_2), (w_1, w_2)\big) = 0 \quad \forall (w_1, w_2) \in \mathrm{T}_{(x,v)}(\mathrm{T}M)$$

erst $s(v_1, w_2) = 0\ \forall w_2 \in \mathrm{T}_x M$ und so $v_1 = 0$ und dann wegen der Surjektivität des Differentials der Bündelprojektion oben rechts leicht auch $v_2 = 0$. Das zeigt den ersten Teil. Nun erinnern wir aus 12.6.7.3 unsere Formel für den symplektischen Gradienten der Gesamtenergie $(\mathrm{grad}_\eta E)(x, v) = (v, -(\mathrm{grad}_s V)(x))$. Aus $\mathrm{pr}_1((\mathrm{grad}_{\bar\eta} E)(x, v)) \in \mathrm{T}_x M$ folgt nun leicht $\mathrm{pr}_1((\mathrm{grad}_{\bar\eta} E)(x, v)) = v$ und dann ebensoleicht

$$(\mathrm{grad}_{\bar\eta} E)(x, v) = (v, -(\mathrm{grad}_s V)(x) + w)$$

mit $w = w(x, v) \in (\mathrm{T}_x M)^{\perp_s}$, das dabei so zu wählen ist, daß unser Paar auch tatsächlich zu $\mathrm{T}_{(x,v)}(\mathrm{T}M)$ gehört. So sehen wir, daß wir die Flußwege $\alpha : I \to \mathrm{T}M$ von $\mathrm{grad}_{\bar\eta} E$ genau die glatten Wege sind, die in Komponenten als

$$\alpha(t) = (\gamma(t), \rho(t))$$

mit $\gamma : I \to X$ und $\rho : I \to \vec{X}$ zerlegt die Bedingungen $\gamma(t) \in M$ und $\gamma'(t) = \rho(t)$ und

$$\big(\rho'(t) + (\mathrm{grad}_s V)(\gamma(t))\big) \perp_s \mathrm{T}_{\gamma(t)} M \quad \forall t \in I$$

erfüllen. Der Satz folgt unmittelbar. □

12.6.7.14 (**Bewegungen unter Zwang und Einheiten**). Ich erkläre nun noch, wie das Ganze zu variieren ist, wenn man mit Einheiten arbeiten will. Dazu betrachten wir ein mechanisches System von Λ Massepunkten der Massen $m_1, \ldots, m_\Lambda$, deren Bewegung in der Weise eingeschränkt sei, daß die Zusammenfassung ihrer Orte $(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_\Lambda) \in \mathbb{E}^\Lambda$ sich stets auf einer fest vorgegebenen glatten Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{E}^\Lambda$ befindet, dem **Konfigurationsraum** unseres Systems. Insoweit könnten wir einfach unseren Satz 12.6.7.11 auf $X = \mathbb{E}^\Lambda$ spezialisieren. Jetzt gilt es aber, mit dem massebehafteten Skalarprodukt

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{g}} : \vec{X} \times \vec{X} \to \langle \mathrm{gm}^2 \rangle$$

aus 12.6.4.3 zu arbeiten und mit dem **Geschwindigkeitsbündel**

$$\mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s}\rangle := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times (\mathrm{T}_p M)\langle 1/\mathrm{s}\rangle \ \subset\ X \times \vec{X}\langle 1/\mathrm{s}\rangle$$

Wir nennen es den **Geschwindigkeitsphasenraum** oder kurz **Phasenraum**. Unser $\bar\eta$ wird ein nichtausgearteter $\langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s}\rangle$-wertiger 2-Tensor auf dem Phasenraum $\mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s}\rangle$ und die Gesamtenergie eine glatte Abbildung

$$E : \mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s}\rangle \to \langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2 \rangle$$

und deren symplektischer Gradient $\mathrm{grad}_{\bar\eta} E$ ein Geschwindigkeitsfeld auf dem Phasenraum $\mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s}\rangle$. Die nun auf mehrpunktigen Zeitintervallen $I \subset \mathbb{T}$ erklärten Flußwege $\alpha : I \to \mathrm{T}M\langle 1/\mathrm{s}\rangle$ unseres symplektischen Gradienten sind dann genau alle Paare $\alpha = (\gamma, \dot\gamma)$ mit γ einer Lösung der Bewegungsgleichungen

$$\big(\ddot\gamma(t) - \tilde{F}(\gamma(t))\big) \perp_{\mathrm{g}} \mathrm{T}_{\gamma(t)} M$$

aus 12.6.4.3 für $\tilde{F}$ die Zusammenfassung der massebereinigten externen Kräfte.

12.7 Wegintegrale und Potentiale

12.7.1 Vektorfelder und Kovektorfelder

Definition 12.7.1.1. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Ein **Vektorfeld** oder genauer ein **relatives Vektorfeld auf** U ist wie in 12.5.1.5 eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} A: & U & \to & \vec{X} \\ & p & \mapsto & A_p \end{array}$$

von U in den Richtungsraum $\vec{X}$ von X.

12.7.1.2 (**Diskussion der Terminologie**). Später einmal werden wir ein „Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M“ erklären als eine Abbildung, die jedem Punkt $p \in M$ einen Tangentialvektor $A_p \in \mathrm{T}_p M$ zuordnet. Das ist etwas spezielleres als ein „relatives“ Vektorfeld, das jedem Punkt $p \in M \subset X$ einfach irgendeinen Richtungsvektor $A_p \in \vec{X}$ zuordnet. Vorerst jedoch werden wir nur mit Vektorfeldern auf halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler Räume X arbeiten, und in diesem Fall sind unsere „relativen“ Vektorfelder bereits die „richtigen“ Vektorfelder. Deshalb kommt es auf derartige Feinheiten hier noch nicht an.

12.7.1.3. Wir schreiben im Zusammenhang mit Differentialgleichungen statt A_p auch $A(p)$. Die Notation A_p dahingegen ist praktisch, wenn wir unsere Vektorfelder wie in 12.7.1.20 auf Funktionen anwenden wollen. In der physikalischen Terminologie heißen Vektorfelder **kontravariant** aus Gründen, die in 12.7.2.17 diskutiert werden.

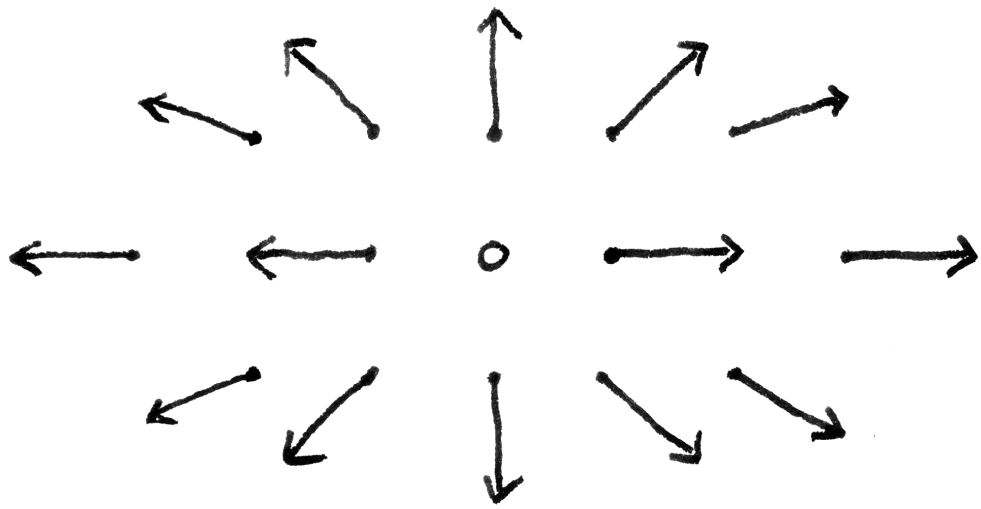
12.7.1.4. Zu jedem reellen Vektorraum V bilden wir wie in der linearen Algebra in 3.2.9.1 seinen **Dualraum** $V^* = V^\top := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$.

Definition 12.7.1.5. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Ein **Kovektorfeld** oder genauer **relatives Kovektorfeld auf** U ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \omega: & U & \to & \vec{X}^* \\ & p & \mapsto & \omega_p \end{array}$$

von U in den Dualraum $\vec{X}^*$ des Richtungsraums von X.

12.7.1.6 (**Diskussion der Terminologie**). Später einmal werden wir ein Kovektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M erklären als eine Abbildung, die jedem Punkt $p \in M$ ein Element $\omega_p \in (\mathrm{T}_p M)^*$ zuordnet. Das ist etwas anderes als ein relatives Kovektorfeld, das jedem Punkt $p \in M \subset X$ einfach irgendeine Linearform



Graphische Darstellung eines Vektorfelds auf der Papierebene, das in geeigneten Koordinaten in der Notation von 12.7.1.21 durch die Formel

$$\left(x/\sqrt{x^2+y^2}\right)\partial_x + \left(y/\sqrt{x^2+y^2}\right)\partial_y$$

gegeben würde. Hier haben wir zu ausgewählten Punkten den ihnen zugeordneten Richtungsvektor als Pfeil von besagtem Punkt zu dem um diesen Richtungsvektor verschobenen Punkt dargestellt.

$\omega_p \in \vec{X}^*$ zuordnet. Vorerst jedoch werden wir nur mit Kovektorfeldern auf halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler Räume X arbeiten, und in diesem Fall sind unsere relativen Kovektorfelder bereits die endgültigen Kovektorfelder. Deshalb kommt es auf derartige Feinheiten hier noch nicht an.

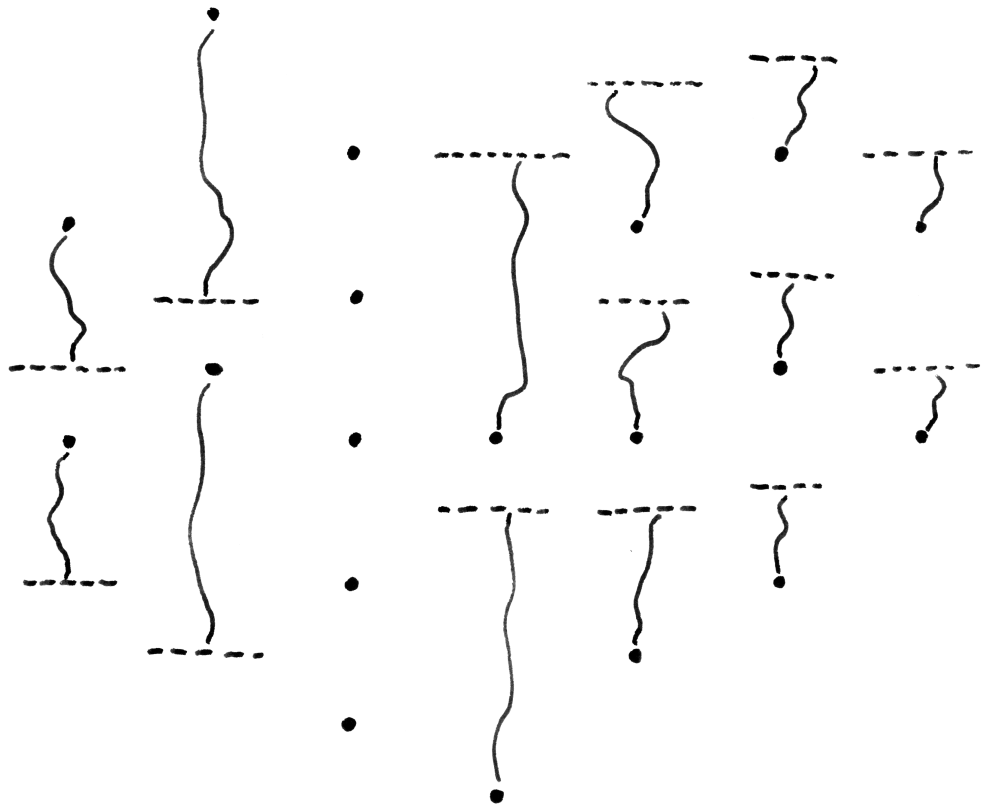
12.7.1.7. Wir schreiben ω_p statt $\omega(p)$, damit $\omega_p(v) \in \mathbb{R}$ den Wert der Linearform ω_p auf einem Vektor $v \in \vec{X}$ bezeichnen kann. Ein Kovektorfeld nennt man auch eine **Pfaff'sche Form** oder eine **Differentialform erster Ordnung** oder eine **1-Form** oder eine **Einsform**. In der physikalischen Terminologie heißen Kovektorfelder **kovariant** aus Gründen, die in 12.7.2.17 diskutiert werden.

12.7.1.8 (**Graphische Darstellung ebener Kovektorfelder**). Für die graphische Darstellung eines Kovektorfelds ω auf der Tafelebene X denke ich mir Kreisscheiben um einzelne fett eingezeichnete Punkte $p \in X$ und zeichne jeweils deren Schnitt mit $\{p + \vec{v} \mid \omega_p(\vec{v}) \in \mathbb{N}\}$. Im Fall $\omega_p = 0$ muß ich die ganze Kreisscheibe ausmalen, weshalb ich diesen Fall nach Möglichkeit vermeide. Im Fall $\omega_p \neq 0$ sehr klein ist nur ein Stück der Gerade $p + \ker \omega_p$ zu sehen und man kann nicht erkennen, auf welcher Seite dieser Gerade die Punkte $p + \vec{v}$ liegen mit $\omega_p(\vec{v}) > 0$, weshalb ich auch diesen Fall nach Möglichkeit vermeide. Ich hoffe, daß der Leser die so erzeugte Anschauung auf den räumlichen Fall übertragen kann, in dem ich die entsprechenden Bilder nicht mehr malen kann, und ebenso auf den eindimensionalen Fall, in dem die entsprechenden Bilder wie so vieles im eindimensionalen Fall weniger Aussagekraft haben.

Beispiel 12.7.1.9 (**Kovektorfelder auf der Zeitachse**). Ein Kovektorfeld ohne Nullstelle auf der Zeitachse $\mathbb{T}$ aus 3.3.1.11 können wir uns in der in 3.2.9.4 noch genauer erklärten Weise denken als eine Vorschrift, die jedem Zeitpunkt ein Paar bestehend aus einer Frequenz und einer Orientierung der Zeitachse zuordnet.

12.7.1.10 (**Addition von Feldern und Multiplikation mit Funktionen**). Wir addieren Vektorfelder wie auch Kovektorfelder punktweise, die Summe $\omega + \eta$ zweier Kovektorfelder ist also etwa erklärt durch $(\omega + \eta)_p = \omega_p + \eta_p$, wobei letzteres Summenzeichen die Addition in $\vec{X}^*$ meint. Wir multiplizieren Vektorfelder und auch Kovektorfelder mit Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ ebenfalls punktweise, indem wir setzen $(fA)_p = f(p)A_p$ beziehungsweise $(f\omega)_p = f(p)\omega_p$.

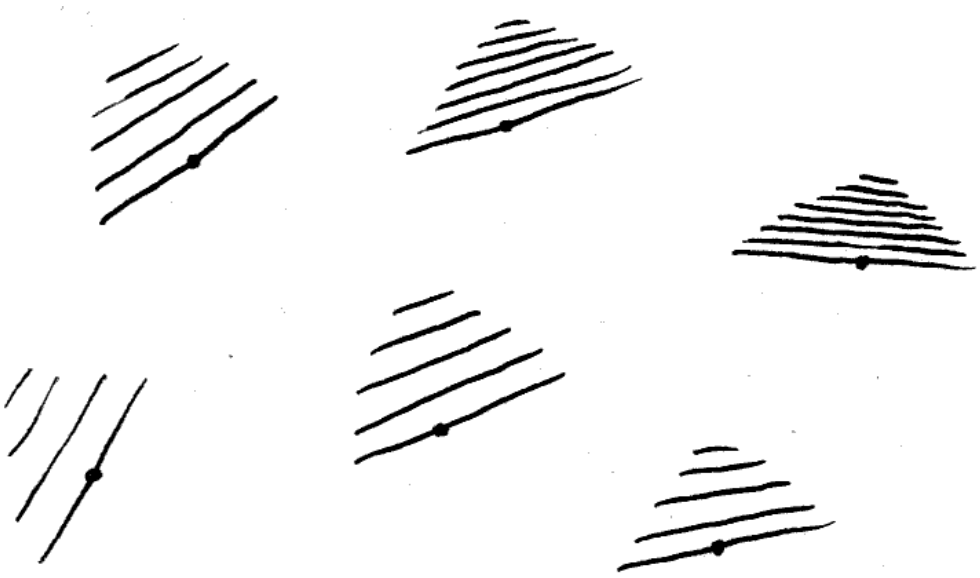
12.7.1.11 (**Paaren von Vektorfeldern mit Kovektorfeldern**). Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Ist $A : U \to \vec{X}$ ein Vektorfeld und $\omega : U \to \vec{X}^*$ ein Kovektorfeld, so können wir das Vektorfeld A in das Kovektorfeld ω einsetzen oder, vielleicht besser gesagt, das Kovektorfeld ω auf dem Vektorfeld A auswerten oder, besonders ausgewogen und immer noch gleichbedeutend, das **Kovektorfeld ω mit dem Vektorfeld A paaren**. Wir



Versuch der graphischen Darstellung eines Kovektorfelds auf der Papierebene, das in geeigneten Koordinaten in der Notation 12.7.1.13 durch die Formel

$$x \, \mathrm{d}y$$

gegeben würde.



Alternativer Versuch der graphischen Darstellung eines Kovektorfelds auf der Papierebene. Hier legen wir die Konvention aus 3.2.9.1 zur graphischen Darstellung von Kovektoren zugrunde, der Wert auf einem Vektor ist also salopp gesagt die Anzahl der gekreuzten Striche. Insbesondere bedeuten „enger zusammenliegende Striche“ hier „größere Kovektoren“. Bei einer Streckung etwa um einen Faktor Zwei werden also Vektoren doppelt so lang, aber in Gegensatz dazu Kovektoren halb so lang, weil die Striche weiter auseinander rücken.

erhalten dann eine Funktion

$$\begin{array}{rccc} \omega(A) = \langle \omega, A \rangle : & U & \to & \mathbb{R} \\ & p & \mapsto & \omega_p(A_p) \end{array}$$

12.7.1.12 (**Verschiedene Interpretationen von Kovektorfeldern**). Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Im Sinne des Exponentialgesetzes 2.1.6.5 können wir ein Kovektorfeld $\omega : U \to \vec{X}^*$ auch auffassen als eine Abbildung $U \times \vec{X} \to \mathbb{R}$ oder sogar als eine Abbildung $\vec{X} \to \mathrm{Ens}(U, \mathbb{R})$. Es gehört etwas Übung dazu, alle diese verschiedenen Aspekte gleichzeitig präsent zu haben. Wir können also ein Kovektorfeld einerseits an einem Punkt $p \in U$ auswerten und so eine Linearform $\omega_p : \vec{X} \to \mathbb{R}$ auf dem Richtungsraum erhalten, wir können es aber andererseits auch auf einem Richtungsvektor $v \in \vec{X}$ auswerten und so eine reellwertige Funktion $U \to \mathbb{R}, p \mapsto \omega_p(v)$ erhalten. Wir können es sogar etwas allgemeiner, wie in 12.7.1.11 besprochen, auf einem Vektorfeld $p \mapsto v_p$ auswerten und auch so eine reellwertige Funktion $U \to \mathbb{R}, p \mapsto \omega_p(v_p)$ erhalten. Man beachte, daß beim Auswerten von Kovektorfeldern auf Vektorfeldern keinerlei Differentiation stattfindet sondern ausschließlich lineare Algebra, nur eben „in Abhängigkeit vom Punkt p“.

Definition 12.7.1.13 (**Differential einer Funktion als Kovektorfeld**). Seien X ein reeller endlichdimensionaler Raum und $U \subset X$ eine halboffene Teilmenge. Ist $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist das Differential von f bei p eine lineare Abbildung $\mathrm{d}_p f : \vec{X} \to \mathbb{R}$. Unter dem **Differential** $\mathrm{d}f$ **von** f verstehen wir dann das Kovektorfeld auf U, das gegeben wird durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f : & U & \to & \vec{X}^* \\ & p & \mapsto & \mathrm{d}_p f \end{array}$$

Für das Differential von einem Produkt gilt nach 12.1.6.5 die Produktregel $\mathrm{d}(fg) = f\,\mathrm{d}g + g\,\mathrm{d}f$ und für das Differential einer Summe haben wir $\mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$.

12.7.1.14 (**Anschauung für das Differential einer Funktion**). In der in 12.7.1.8 erklärten Anschauung für ebene Kovektorfelder als „Liniendichten“ wäre das Differential einer Funktion auf der Ebene, aufgefaßt als die Höhe in einer Landkarte in Metern, salopp gesprochen zu verstehen als eine Linearisierung des durch die Höhenlinien gegebenen Bildes, mit einer Höhenlinie pro Meter und wo wir nur die Höhenlinie durch unseren Punkt und ein paar Höhenlinien oberhalb einzeichnen.

12.7.1.15 (**Darstellung von Kovektorfeldern in Koordinaten**). Ist speziell $X = \mathbb{R}^n$ und $U \Subset \mathbb{R}^n$ offen und bezeichnet $x_i : U \to \mathbb{R}$ die Restriktion der i-ten Koordinate auf U, so ist $\mathrm{d}x_i : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ konstant die i-te Koordinate selber. Die Bezeichnung $\mathrm{d}x_i$ für dieses konstante Kovektorfeld vereinbaren wir allgemeiner

auch für beliebige Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$. Die Koordinaten bilden nun eine Basis des Dualraums von $\mathbb{R}^n$. Folglich läßt sich jedes Kovektorfeld auf U schreiben in der Gestalt $\sum a_i \, \mathrm{d}x_i$ mit eindeutig bestimmten $a_i : U \to \mathbb{R}$. Ich vermute, daß hier der Ursprung der alternativen Bezeichnung von Kovektorfeldern als „Differentialformen“ zu suchen ist: In gewisser Weise können wir eben unsere Kovektorfelder als „Linearkombinationen von Differentialen“ schreiben. Für eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $U \Subset \mathbb{R}^n$ haben wir dann

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x_i$$

Man prüft das durch Auswerten beider Seiten an einer Stelle $p \in U$ und Anwenden der so entstehenden Linearformen auf alle Vektoren der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Speziell haben wir für $f : \mathbb{R} \supset A \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit A halboffen in $\mathbb{R}$ also

$$\mathrm{d}f = f'(x) \, \mathrm{d}x$$

12.7.1.16 (**Übergang von Vektorfeldern zu Kovektorfeldern**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X mit einem Skalarprodukt s auf seinem Richtungsraum erinnern wir aus 12.1.3.9 den Isomorphismus $\mathrm{can}_s : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{X}^*$ gegeben durch die Vorschrift $v \mapsto (w \mapsto s(v, w))$. Jedem Vektorfeld $v : X \supset A \to \vec{X}$ können wir so das Kovektorfeld

$$\mathrm{can}_s(v) := \mathrm{can}_s \circ v : X \supset A \to \vec{X}^*$$

zuordnen. Im Spezialfall $(\mathbb{R}^n, s)$ des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ mit seinem Standardskalarprodukt kennen wir bereits aus 12.1.3.9 die Beziehung

$$\mathrm{d}f = \mathrm{can}_s(\mathrm{grad}\, f)$$

12.7.1.17 (**Differential einer Funktion mit halboffenem Definitionsbereich**). Ist $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf einer halboffenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, so gilt dasselbe, wenn die partiellen Ableitungen dabei im Sinne unserer Notation 12.1.3.21 als virtuelle partielle Ableitungen verstehen. Ist speziell $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf einem mehrpunktigen Intervall, so gilt $\mathrm{d}f = f'(x) \, \mathrm{d}x$.

12.7.1.18 (**Anschauliche Bedeutung von Formeln in Differentialen**). Anschaulich gesprochen beschreibt die in 12.7.1.15 herausgestellte Gleichung, wie sich der Funktionswert der Funktion f in erster Näherung ändert, wenn wir an den Koordinaten x_i wackeln: Genauer gilt bei festen $x_1, \ldots, x_n$ für $\delta x_1, \ldots, \delta x_n \in \mathbb{R}$ so nah bei Null, daß alles definiert ist, eben

$$f(x_1 + \delta x_1, \ldots, x_n + \delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i \quad + R(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$$

mit einem Rest R, der auch nach dem Teilen durch das Maximum der Beträge aller δx_i noch gegen Null strebt, wenn alle δx_i gegen Null streben. Hierbei ist zu verstehen, daß die fraglichen partiellen Ableitungen an unserer festen Stelle $(x_1, \ldots, x_n)$ ausgewertet werden sollen, und um die partiellen Ableitungen zu bilden, müssen die x_i natürlich noch als variabel gedacht werden. Vielleicht wäre es hier konsistenter gewesen, die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ zu notieren oder sogar $(\partial_i f)(x_1, \ldots, x_n)$ um anzudeuten, daß sie ja an der festen Stelle $(x_1, \ldots, x_n)$ auszuwerten sind. Bei komplizierteren Formeln führt aber größere Präzision auch nicht notwendig zu besserer Verständlichkeit. Die Notation δx_i könnten wir zu δ_i abkürzen, aber dann wirkt die Formel weniger suggestiv. Kürzen wir auch noch die linke Seite zu δf ab, so können wir unsere Identität mit der in 12.2.3.2 eingeführten Notation auch schreiben als die Übereinstimmung erster Ordnung von Funktionen der „Verrückungen“ δx_i in der Gestalt

$$\delta f \sim_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i$$

Beispiel 12.7.1.19. Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \backslash 0 \to \mathbb{R}$, $v \mapsto 1/\|v\|$ hat mit der Konvention $v := (x, y, z)$ das Differential $\mathrm{d}f = -(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z)/\|v\|^3$.

Definition 12.7.1.20 (**Ableiten einer Funktion in Richtung eines Vektorfeldes**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X, eine halboffene Teilmenge $U \subset X$, ein Vektorfeld $A : U \to \vec{X}$ und eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ erklären wir eine Funktion $(Af) : U \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$(Af)(p) := (\mathrm{d}_p f)(A_p)$$

Ist U eine Umgebung von p, so ist nach 12.1.3.3 also $(Af)(p) = (\mathrm{D}_{A_p} f)(p)$ die Richtungsableitung 12.1.3.1 von f bei p in der Richtung A_p. Wir sagen deshalb auch, die Funktion Af entstehe aus f durch **Ableiten in Richtung des Vektorfelds** A. In anderen Worten entsteht diese Funktion durch das Paaren des Vektorfelds A mit dem durch das Differential der Funktion f gegebenen Kovektorfeld $\mathrm{d}f$. Mit unserer Notation 12.7.1.11 kann diese Funktion auch $Af = \langle \mathrm{d}f, A \rangle$ geschrieben werden.

12.7.1.21 (**Darstellung von Vektorfeldern in Koordinaten**). Meist werden Vektorfelder identifiziert mit den zugehörigen Differentialoperatoren. So notiere ich etwa das konstante Vektorfeld v wie die zugehörige Richtungsableitung D_v. Spezieller bezeichnet man das konstante Vektorfeld mit Wert e_i auf $\mathbb{R}^n$ oft als „das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x_i}$“ oder „das Vektorfeld ∂_i“ und im Fall nicht nummerierter Koordinaten wie etwa x, y, z auf $\mathbb{R}^3$ schreiben wir für die fraglichen Vektorfelder auch

$\partial_x, \partial_y, \partial_z$ und dergleichen. Sicher läßt sich für $U \subset \mathbb{R}^n$ jedes Vektorfeld auf U schreiben in der Gestalt

$$\sum c_i \partial_i$$

mit eindeutig bestimmten $c_i : U \to \mathbb{R}$. Paaren wir das Vektorfeld $\sum c_i \partial_i$ auf $\mathbb{R}^n$ mit dem Kovektorfeld $\sum a_i \, \mathrm{d}x_i$, so ergibt sich die Funktion $\sum a_i c_i$. In unserer Notation 12.7.1.11 und mit dem Kroneckerdelta haben wir nämlich

$$\langle \mathrm{d}x_i, \partial_j \rangle = \delta_{ij}$$

12.7.2 Verwandtschaft

12.7.2.1 (**Diskussion des Verwandtschaftsbegriffs**). Zentral für das weitere sind die zu unseren jeweiligen Feldern gehörigen Verwandtschaftsbegriffe, die wir im folgenden diskutieren. Im Fall der ϕ-Verwandtschaft unter einem Diffeomorphismus ϕ mit einer halboffenen Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ mag man sich darunter eine „Darstellung in lokalen Koordinaten“ denken, aber das Konzept trägt weiter. Unsere Vektorfelder müssen im allgemeinen weder „Vorwärtsverwandte“ noch, anders als man es als Mensch gewohnt ist, „Rückwärtsverwandte“ haben. Bei Kovektorfeldern ist es etwas besser, sie haben immer genau einen „Rückwärtsverwandten“. Wir beginnen unsere Diskussion mit der einfacheren und grundlegenderen Diskussion der Verwandtschaft von Funktionen und von Wegen. Eine wesentliche Eigenschaft von Verwandtschaft, die „Transitivität“, besprechen wir erst in 12.7.2.18.

Definition 12.7.2.2 (Verwandtschaft von Funktionen). Gegeben eine Abbildung $\phi : U \to V$ und reelle Funktionen $g : U \to \mathbb{R}$ sowie $f : V \to \mathbb{R}$ heißen unsere Funktionen **ϕ-verwandt** und wir schreiben $\phi : g \rightsquigarrow f$, wenn gilt $g(x) = f(\phi(x))$ für alle $x \in U$ alias

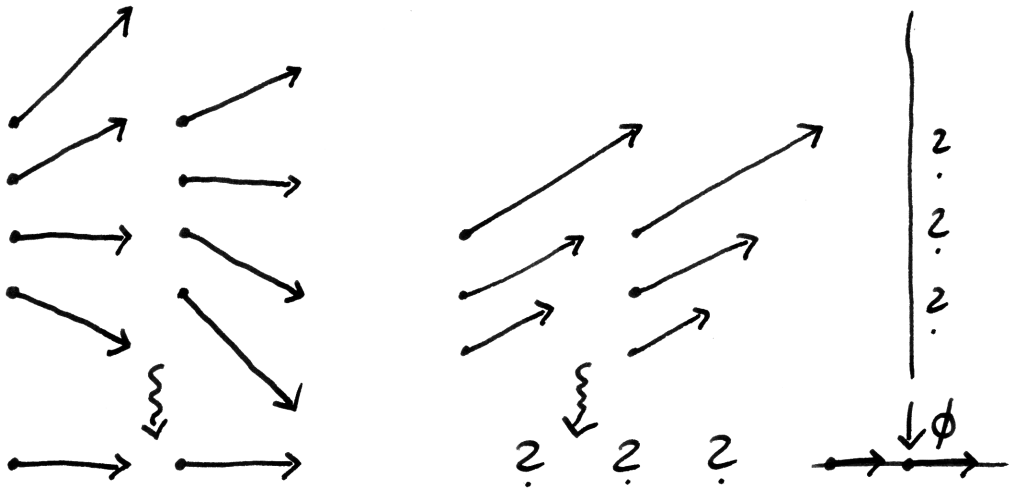
$$g = f \circ \phi$$

Definition 12.7.2.3 (Verwandtschaft von Wegen). Seien U und V topologische Räume und $\phi : U \to V$ eine stetige Abbildung. Zwei Wege $\gamma : I \to U$ und $\kappa : J \to V$ heißen **ϕ-verwandt** und wir schreiben $\phi : \gamma \rightsquigarrow \kappa$, wenn sie denselben Definitionsbereich $I = J$ haben und wenn für alle $t \in I$ gilt $\kappa(t) = \phi(\gamma(t))$ alias

$$\kappa = \phi \circ \gamma$$

12.7.2.4 (**Auswerten auf Wegen respektiert Verwandtschaft**). Das Auswerten verwandter Funktionen auf verwandten Wegen liefert trivialerweise dieselbe Funktion auf dem Parameterintervall, in Formeln folgt in den Notationen der vorhergehenden Definitionen aus $\phi : g \rightsquigarrow f$ und $\phi : \gamma \rightsquigarrow \kappa$ also

$$g \circ \gamma = f \circ \kappa$$



Ganz links ist zuerst ein Vektorfeld auf der Ebene abgebildet, das unter der orthogonalen Projektion auf die x-Achse verwandt ist zu einem ebenfalls eingezeichneten konstanten Vektorfeld auf der x-Achse. In der Mitte dann ein Vektorfeld auf der Ebene, das unter dieser Projektion zu keinem Vektorfeld auf der x-Achse verwandt ist. Schließlich ganz rechts die konstante Abbildung der y-Achse auf einen Punkt der x-Achse und ein Vektorfeld auf der x-Achse, das darunter zu keinem Vektorfeld auf der y-Achse verwandt ist.

Definition 12.7.2.5 (Verwandtschaft von Vektorfeldern). Sei $\phi : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume X und Y. Vektorfelder $A : U \to \vec{X}$ und $B : V \to \vec{Y}$ heißen **ϕ-verwandt** und wir schreiben $\phi : A \rightsquigarrow B$ wie in 12.5.1.12, wenn für alle $x \in U$ gilt

$$(\mathrm{d}_x\phi)(A_x) = B_{\phi(x)}$$

12.7.2.6 (**Summe und Produkt respektiert Verwandtschaft**). Gegeben in den vorherigen Notationen verwandte Vektorfelder $\phi : A \rightsquigarrow B$ und $\phi : C \rightsquigarrow D$ haben wir auch $\phi : (A + C) \rightsquigarrow (B + D)$. Gegeben weiter verwandte Funktionen $\phi : f \rightsquigarrow g$ haben wir auch $\phi : fA \rightsquigarrow gB$. und, wenn wir schon dabei sind, gegeben zusätzlich verwandte Funktionen $\phi : h \rightsquigarrow k$ haben wir ebenso $\phi : (f + h) \rightsquigarrow (g + k)$ und $\phi : fh \rightsquigarrow gk$.

12.7.2.7 (**Ableiten nach Vektorfeldern respektiert Verwandtschaft**). Wenden wir verwandte Vektorfelder auf verwandte differenzierbare Funktionen an, so erhalten wir verwandte Funktionen. Ist genauer $\phi : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume, so impliziert in Formeln $\phi : A \rightsquigarrow B$ und $\phi : g \rightsquigarrow f$ bereits $\phi : Ag \rightsquigarrow Bf$ oder umgeschrieben $(Bf) \circ \phi = A(f \circ \phi)$. Das folgt direkt aus der Kettenregel in mehreren Veränderlichen. Letzteres ist sogar eine hinreichende Bedingung: Gilt $(Af) \circ \phi = B(f \circ \phi)$ für alle differenzierbaren Funktionen f, so folgt $\phi : A \rightsquigarrow B$.

12.7.2.8 (**Flußwege respektieren Verwandtschaft**). Ein Weg $\gamma : I \to U$ in einer halboffenen Teilmenge $U \subset X$ eines endlichdimensionalen reellen Raums heißt ein **Flußweg** eines Vektorfelds $A : U \to \vec{X}$, wenn er differenzierbar ist und wenn für alle $t \in I$ gilt $\gamma'(t) = A_{\gamma(t)}$. Ist nun $\phi : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung in eine weitere halboffene Teilmenge V eines endlichdimensionalen reellen Raums Y und B ein Vektorfeld auf V mit $\phi : A \rightsquigarrow B$ und $\kappa = \phi \circ \gamma$ der verwandte Weg $\phi : \gamma \rightsquigarrow \kappa$ und ist γ ein Flußweg von A, so ist auch κ ein Flußweg von B. Das ist einigermaßen offensichtlich und wurde bereits im Zusammenhang mit gewöhnlichen Differentialgleichungen in 12.5.1.12 besprochen.

Definition 12.7.2.9 (Verwandtschaft von Kovektorfeldern). Sei $\phi : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume X und Y. Kovektorfelder $\eta : U \to \vec{X}^*$ und $\omega : V \to \vec{Y}^*$ heißen **ϕ-verwandt** und wir schreiben $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$, wenn für alle Punkte $x \in U$ gilt $\eta_x = \omega_{\phi(x)} \circ \mathrm{d}_x\phi$. Gleichbedeutend mit der transponierten Abbildung zum Differential notiert ist die Forderung, daß für alle $x \in U$ gilt

$$\eta_x = (\mathrm{d}_x\phi)^\top(\omega_{\phi(x)})$$

12.7.2.10 (**Summe und Produkt respektiert Verwandtschaft**). Gegeben in den vorherigen Notationen verwandte Kovektorfelder $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$ und $\phi : \sigma \rightsquigarrow \tau$ haben

wir auch $\phi : (eta + \sigma) \rightsquigarrow (\omega + \tau)$ und gegeben verwandte Funktionen $\phi : f \rightsquigarrow g$ haben wir auch $\phi : f\eta \rightsquigarrow g\omega$.

12.7.2.11 (**Paaren respektiert Verwandtschaft**). Sei $\phi : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume X und Y. Seien $A : U \to \vec{X}$ sowie $B : V \to \vec{Y}$ Vektorfelder und $\omega : U \to \vec{X}^*$ sowie $\eta : V \to \vec{Y}^*$ Kovektorfelder. So gilt

$$(\phi : A \rightsquigarrow B \text{ und } \phi : \omega \rightsquigarrow \eta) \Rightarrow \phi : \langle \omega, A \rangle \rightsquigarrow \langle \eta, B \rangle$$

12.7.2.12 (**Existenz und Eindeutigkeit von Verwandten**). Unter einer differenzierbaren Bijektion zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume mit differenzierbarer Umkehrabbildung haben alle Vektorfelder, Kovektorfelder, Wege und Funktionen jeweils genau einen Verwandten und unter der Identität sind sie jeweils selbst dieser einzige Verwandte. Ist allgemeiner $\phi : U \to V$ eine beliebige differenzierbare Abbildung von einer halboffenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums $U \subset X$ in eine weiteren reellen Raum Y, die in einer Teilmenge $V \subset Y$ landet, so hat jedes Kovektorfeld ω auf V immer noch genau einen „Rückwärtsverwandten“ auf U, der eben gegeben wird durch die Formel $\eta_x = (\mathrm{d}_x\phi)^\top(\omega_{\phi(x)})$. Für diesen eindeutig bestimmten Rückwärtsverwandten von ω unter ϕ vereinbaren wir die Notation

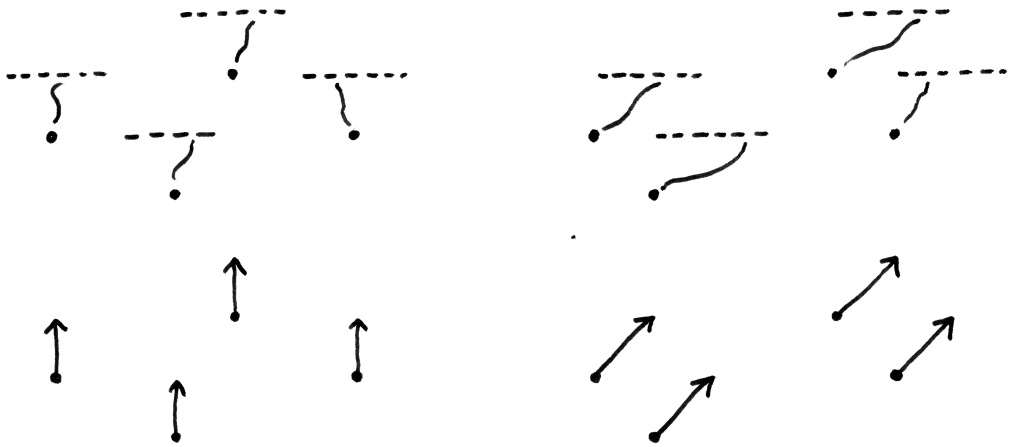
$$\phi^*(\omega)$$

Er heißt das **mit ϕ zurückgezogene** oder **zurückgeholte Kovektorfeld**. Ebenso hat jede Funktion f auf V genau einen „Rückwärtsverwandten“, nämlich die Funktion $f \circ \phi$, die man auch die **mit ϕ zurückgezogene Funktion** nennt und manchmal $\phi^*(f)$ notiert. Bei Vektorfeldern liegen die Verhältnisse nicht so einfach, aber ist ϕ surjektiv, so hat jedes Vektorfeld auf U zumindest nicht mehr als einen „Vorwärtsverwandten“ auf V, und ist das Differential von ϕ an jeder Stelle bijektiv, so hat jedes Vektorfeld auf V genau einen Rückwärtsverwandten auf U.

12.7.2.13. Weil Verwandtschaft Summe und Produkt respektiert, muß auch das Zurückholen Summe und Produkt von Funktionen und Kovektorfeldern respektieren, in Formeln $\phi^*(\omega + \tau) = \phi^*(\omega) + \phi^*(\tau)$ und $\phi^*(g\omega) = \phi^*(g)\phi^*(\omega)$.

12.7.2.14 (**Differential respektiert Verwandtschaft**). Verwandte Funktionen haben verwandte Differentiale. Ist genauer $\phi : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume, so impliziert in Formeln $\phi : g \rightsquigarrow f$ bereits $\phi : \mathrm{d}g \rightsquigarrow \mathrm{d}f$. Gleichbedeutend haben wir für alle f die Identität $\phi^*(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(\phi^*(f)) = \mathrm{d}(f \circ \phi)$. In der Tat gilt für jeden Punkt y nach der Definition der Verwandtschaft und der Kettenregel

$$(\phi^*(\mathrm{d}f))_y = (\mathrm{d}_{\phi(y)}f) \circ \mathrm{d}_y\phi = \mathrm{d}_y(f \circ \phi)$$



Dieses Bild soll den Effekt der Scherung $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, y)$ auf dem Kovektorfeld $\mathrm{d}y$ und dem Vektorfeld ∂_y darstellen. Bei der bildlichen Darstellung unseres Kovektorfelds folgen wir den auf Seite **??** im Anschluß an 12.7.1.1 eingeführten Konventionen. Man erkennt, daß $\mathrm{d}y$ unter dieser Scherung verwandt ist zu sich selber, in Formeln $\phi : \mathrm{d}y \rightsquigarrow \mathrm{d}y$, wohingegen ∂_y verwandt ist zu $\partial_x + \partial_y$, in Formeln $\phi : \partial_y \rightsquigarrow \partial_x + \partial_y$. Alternativ und im wesentlichen gleichbedeutend mag man sich auch auf den Standpunkt stellen, daß wir auf dem Wertebereich von ϕ ein „verschertes Koordinatensystem“ (u, v) eingeführt haben mit u und v den Komponenten der zu ϕ inversen Abbildung, also $u(x, y) = x - y$ und $v(x, y) = y$. Dann erhalten wir statt der obigen Verwandtschaften die Formeln $\mathrm{d}v = \mathrm{d}y$ sowie $\partial_v = \partial_x + \partial_y$.

12.7.2.15 (**Verwandtschaft von Gradienten**). Gegeben $U, V \Subset \mathbb{R}^n$ und ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\phi : U \xrightarrow{\sim} V$ haben verwandte differenzierbare Funktionen zwar verwandte Differentiale, aber im allgemeinen keineswegs verwandte Gradienten. Das gilt nur unter sehr viel stärkeren Voraussetzungen. Ist etwa ϕ die Einschränkung eines Isomorphismus von affinen Räumen mit orthogonalem linearen Anteil $\vec{\phi} \in \mathrm{O}(n)$ und $f : V \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so haben wir

$$\phi : \mathrm{grad}(f \circ \phi) \rightsquigarrow \mathrm{grad}(f)$$

In der Tat ist unter diesen Annahmen die Verwandtschaft $\phi : v \rightsquigarrow w$ von Vektorfeldern gleichbedeutend zur Verwandtschaft $\phi : \mathrm{can}_s(v) \rightsquigarrow \mathrm{can}_s(w)$ von Kovektorfeldern und unsere Verwandtschaft von Gradienten so nach 12.7.1.16 gleichbedeutend zur Verwandtschaft der Differentiale $\phi : \mathrm{d}(f \circ \phi) \rightsquigarrow \mathrm{d}f$. Sind allgemeiner $\phi : X \xrightarrow{\sim} Y$ ein Isomorphismus von endlichdimensionalen affinen Räumen und s, t Skalarprodukte auf $\vec{X}$ beziehungsweise $\vec{Y}$ und ist $\vec{\phi} : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$ dafür orthogonal, ist in anderen Worten ϕ ein isometrischer Isomrphismus, so erhalten wir für unsere verallgemeinerten Gradienten aus 12.1.3.9 mit derselben Argumentation

$$\phi : \mathrm{grad}_s(f \circ \phi) \rightsquigarrow \mathrm{grad}_t(f)$$

Noch allgemeinere Aussagen in dieser Richtung diskutieren wir in 12.7.3.10.

12.7.2.16 (**Partielle Ableitungen in lokalen Koordinaten**). Gegeben ein endlichdimensionaler affiner Raum X und eine halboffene Teilmenge $U \subset X$ und ein Diffeomorphismus alias ein System lokaler Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n) : U \xrightarrow{\sim} V$ mit einer halboffenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet man mit $\frac{\partial}{\partial x_i}$ oder ∂_i auch diejenigen Vektorfelder auf U, die unter diesem Diffeomorphismus zu den eben eingeführten Vektorfeldern auf $\mathbb{R}^n$ verwandt sind. Man beachte jedoch, daß für eine einzelne Funktion $x : U \to \mathbb{R}$ nicht sinnvoll ein Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x}$ auf U erklärt werden kann: Selbst wenn sich unsere Funktion zu einem Koordinatensystem ergänzen lassen sollte, wird doch das durch diese Ergänzung erklärte Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x}$ wesentlich von der Wahl der anderen Koordinaten abhängen. All das steht im Gegensatz zum Differential $\mathrm{d}x$ einer Funktion x, das durchaus auch für eine einzelne Funktion sinnvoll definiert ist.

12.7.2.17 (**Kovariante und kontravariante Transformation**). Zumindest unter linearen Koordinatentransformationen verhalten sich Kovektorfelder „so wie Koordinaten“. Ist etwa $x_1, \ldots, x_n$ ein System linearer Koordinaten auf einem reellen Vektorraum X im Sinne einer Familie von linearen Abbildungen $x_i : X \to \mathbb{R}$, die zusammen einen Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ liefern, und ist $y_1, \ldots, y_n$ ein anderes System linearer Koordinaten, und haben wir etwa $y_i = \sum_j a_{ij} x_j$ für eine Matrix von reellen Zahlen a_{ij}, so gilt die Identität von Kovektorfeldern $\mathrm{d}y_i = \sum_j a_{ij}\, \mathrm{d}x_j$.

Für die durch unsere Koordinatensysteme bestimmten Vektorfelder haben wir dahingegen umgekehrt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i a_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

und benötigen die inverse Matrix, um $\frac{\partial}{\partial y_i}$ durch die $\frac{\partial}{\partial x_j}$ auszudrücken. In diesem Sinne „transformieren sich Kovektorfelder wie Koordinaten“ und heißen deshalb auch „kovariant“, wohingegen Vektorfelder sich „vermittels der inversen transponierten Matrix transformieren“ und deshalb „kontravariant“ heißen.

12.7.2.18 (**Transitivität von Verwandtschaft**). Seien $\phi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume. Ist ein Vektorfeld C auf W unter ψ verwandt zu B, so ist auch A unter $\psi \circ \phi$ verwandt zu C, in Formeln implizieren $\phi : A \rightsquigarrow B$ und $\psi : B \rightsquigarrow C$ also $\psi \circ \phi : A \rightsquigarrow C$. Analoges gilt für Wege und Funktionen und Kovektorfelder und läßt sich in den beiden letzteren Fällen auch schreiben als $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$, so daß etwa für jedes Kovektorfeld κ auf W gilt

$$(\psi \circ \phi)^*(\kappa) = \phi^*(\psi^*(\kappa))$$

Aus Gründen der formalen Vollständigkeit sei noch ergänzt, daß unter der Identität, wie bereits in 12.7.2.12 erwähnt, jedes Vektorfeld und jedes Kovektorfeld und jede Funktion und jeder Weg verwandt ist zu sich selber und nur zu sich selber. Es gilt also in Formeln $(\mathrm{id} : A \rightsquigarrow B) \Leftrightarrow A = B$ und dergleichen. Weiter sei erwähnt, daß W für alle diese Überlegungen sogar eine beliebige Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums sei darf.

Beispiel 12.7.2.19 (**Zurückholen von Kovektorfeldern in Koordinaten**). Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ mit Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ und $Y = \mathbb{R}^m$ mit Koordinaten $y_1, \ldots, y_m$ und $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$ eine differenzierbare Abbildung von einer halboffenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ in eine halboffene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ ergibt sich $\phi^*(\mathrm{d}y_j) = \mathrm{d}(\phi^* y_j) = \mathrm{d}\phi_j = \sum_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$, da das Differential Verwandtschaft respektiert 12.7.2.14 und wir für das Differential einer Funktion bereits die explizite Formel 12.7.1.13 kennen. Folglich kann das Zurückholen von Kovektorfeldern in Koordinaten beschrieben werden durch die Formel

$$\phi^* \left(\sum_j b_j \, \mathrm{d}y_j \right) = \sum_{i,j} \left((b_j \circ \phi) \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \right) \, \mathrm{d}x_i$$

Beispiel 12.7.2.20 (**Verwandtschaften unter der Polarkoordinatenabbildung**). Wir betrachten die Polarkoordinatenabbildung

$$\begin{array}{rccc} P : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \vartheta) & \mapsto & (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \end{array}$$

und benutzen die üblichen Koordinaten x, y auf dem Wertebereich. Unter dieser Abbildung ist etwa das Kovektorfeld $\mathrm{d}x$ auf dem Wertebereich verwandt zum Kovektorfeld

$$P^*(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}(P^*x) = \mathrm{d}(x \circ P) = \mathrm{d}(r\cos\vartheta) = (\cos\vartheta)\,\mathrm{d}r - (r\sin\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$$

Ebenso ist das Kovektorfeld $\mathrm{d}y$ auf dem Wertebereich unter P verwandt zum Kovektorfeld $\mathrm{d}(r\sin\vartheta) = (\sin\vartheta)\,\mathrm{d}r + (r\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$. Um einen Verwandten für ∂_ϑ zu suchen, wenn dieses Vektorfeld denn einen Verwandten haben sollte, machen wir den Ansatz $\partial_\vartheta \rightsquigarrow a\partial_x + b\partial_y$ mit unbestimmten Funktionen a, b und finden durch Paaren mit $\mathrm{d}x$ leicht $-(r\sin\vartheta) \rightsquigarrow a$ und durch Paaren mit $\mathrm{d}y$ ebenso $(r\cos\vartheta) \rightsquigarrow b$, womit wir für das Vektorfeld ∂_ϑ links als einzigen Verwandten das Vektorfeld $-y\partial_x + x\partial_y$ rechts finden. Das Vektorfeld ∂_r links hat keinen Verwandten rechts, denn derselbe Ansatz $\partial_r \rightsquigarrow a\partial_x + b\partial_y$ führt zu $P : \sin\vartheta \rightsquigarrow a$ und $P : \cos\vartheta \rightsquigarrow b$ und derartige Funktionen a, b gibt es nicht. Schränken wir jedoch unsere Polarkoordinatenabbildung ein zu einer Abbildung $P : \{(r,\vartheta) \mid r > 0\} \to \mathbb{R}^2\backslash 0$, so gibt es derartige Funktionen doch und unser Vektorfeld ∂_r hat unter dieser Einschränkung den einzigen Verwandten

$$\partial_r \rightsquigarrow \left(x/\sqrt{x^2+y^2}\right)\partial_x + \left(y/\sqrt{x^2+y^2}\right)\partial_y$$

Meist wird man mit diesen Begriffen etwas großzügiger umgehen, zwischen verwandte Objekte schlicht ein Gleichheitszeichen schreiben und es auch mit den Definitionsbereichen nicht so genau nehmen, so daß wir etwa schreiben würden

$$\begin{aligned}
\partial_r &= (\cos\vartheta)\partial_x + (\sin\vartheta)\partial_y = \left(x/\sqrt{x^2+y^2}\right)\partial_x + \left(y/\sqrt{x^2+y^2}\right)\partial_y \\
\partial_\vartheta &= -(r\sin\vartheta)\partial_x + (r\cos\vartheta)\partial_y = -y\partial_x + x\partial_y \\
\partial_x &= (\cos\vartheta)\partial_r - \left(r^{-1}\sin\vartheta\right)\partial_\vartheta \\
\partial_y &= (\sin\vartheta)\partial_r + \left(r^{-1}\cos\vartheta\right)\partial_\vartheta \\
\mathrm{d}x &= (\cos\vartheta)\,\mathrm{d}r - (r\sin\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \\
\mathrm{d}y &= (\sin\vartheta)\,\mathrm{d}r + (r\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \\
\mathrm{d}\vartheta &= \left(-y/(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}x + \left(x/(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}y \\
\mathrm{d}r &= \left(x/\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x + \left(y/\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Das kann allerdings nur dann gutgehen, wenn die Bezeichnung der Koordinaten dem Leser erlaubt zu erraten, welche Art von Verwandtschaft gemeint ist. Man kann die unteren Formeln auch so verstehen, daß eben $\mathrm{d}r$ das Differential der Funktion $r : (\mathbb{R}^2\backslash 0) \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto r(x,y)$ meint. Bei $\mathrm{d}\vartheta$ wird es schon kritischer, da ja eigentlich ϑ nur auf geschlitzten Ebenen definiert werden kann. Allerdings unterscheiden sich die auf verschiedenen geschlitzten Ebenen definierten ϑ

nur um additive Konstanten, so daß sie alle dasselbe Differential haben und wir ausnahmsweise doch ein wohldefiniertes Kovektorfeld $\mathrm{d}\vartheta$ auf $\mathbb{R}^2\backslash 0$ erhalten. Das ist auch der tiefere Grund dafür, daß alle unsere Standardvektorfelder in diesem Fall unter der Einschräkung $r > 0$ wohldefinierte Verwandte haben und wir mit unseren Gleichheitszeichen nicht in Teufels Küche kommen. Bei komplizierteren Vektorfeldern sähe das anders aus: So hat etwa das Vektorfeld $\vartheta\partial_\vartheta$ gar keinen Verwandten, es sei denn, wir schränken unsere Polarkoordinatenabbildung noch weiter ein.

Übungen

Übung 12.7.2.21. Unter der Inversion am Einheitskreis $\mathbb{R}^2\backslash 0 \tilde{\to} \mathbb{R}^2\backslash 0$, $(x,y) \mapsto (u,v) := (x^2+y^2)^{-1}(x,y)$ zeige man die Verwandtschaft von Vektorfeldern

$$\begin{array}{rcl} \partial_x & \rightsquigarrow & (v^2-u^2)\partial_u - 2uv\partial_v \\ \partial_y & \rightsquigarrow & (u^2-v^2)\partial_v - 2uv\partial_u \end{array}$$

Übung 12.7.2.22. Gegeben auf einer halboffenen Teilmenge $U \subset E$ eines n-dimensionalen reellen Raums Vektorfelder $A_1, \ldots, A_n$ und Kovektorfelder $\omega_1, \ldots, \omega_n$ mit $\langle \omega_i, A_j \rangle = \delta_{ij}$ an jeder Stelle $p \in U$ gilt für jede differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ die Identität $\mathrm{d}f = (A_1 f)\omega_1 + \ldots + (A_n f)\omega_n$.

Übung 12.7.2.23. Man bestimme die Rückwärtsverwandten unter $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von ∂_x und ∂_y.

12.7.3 Gradienten in krummlinigen Koordinaten*

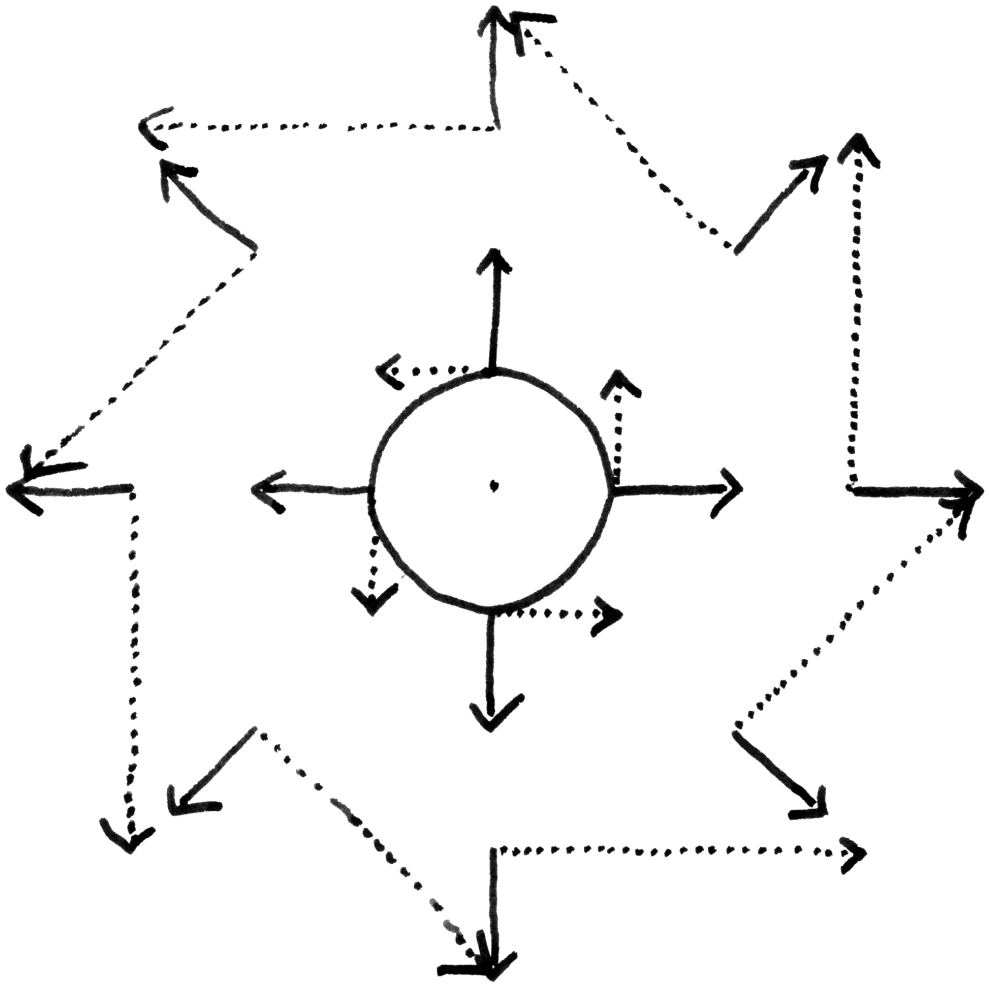
12.7.3.1 (**Motivation und erstes Beispiel**). Gegeben eine halboffene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine partiell differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ erklärt man wie in 12.1.1.4 ihren **Gradienten** als das Vektorfeld

$$\operatorname{grad} f \;:=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}\partial_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\partial_n$$

auf U. Ich will nun diskutieren, welche Form dieses Konstrukt in krummlinigen Koordinaten annimmt. Formal ist damit folgendes gemeint: Man betrachte zusätzlich eine halboffene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\phi : V \tilde{\to} U$. Nun finde man Vektorfelder $A_1, \ldots, A_n$ auf V mit

$$\phi : \; (A_1(f\circ\phi))\partial_1 + \ldots + (A_n(f\circ\phi))\partial_n \;\rightsquigarrow\; (\partial_1 f)\partial_1 + \ldots + (\partial_n f)\partial_n$$

In der Notation wird vielfach ϕ einfach weggelassen und nur die Bezeichnungen der Koordinaten deuten das Gemeinte an. Ist etwa $\phi = P : \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi,\pi) \tilde{\to}$



Einige Werte des Vektorfelds ∂_r als durchgezogene Pfeile und des Vektorfeld ∂_ϑ als gepunktelte Pfeile, gezeichnet in der xy-Ebene.

$\{(x,y) \mid y = 0 \Rightarrow x > 0\}$ wie in 12.7.2.20 die Polarkoordinatenabbildung, so erhalten wir mit den Formeln aus 12.7.2.20 sofort $f_x = \cos\vartheta\ f_r - r^{-1}\sin\vartheta\ f_\vartheta$ und $f_y = \sin\vartheta\ f_r + r^{-1}\cos\vartheta\ f_\vartheta$ und nach kurzer Rechnung die Verwandtschaft von Vektorfeldern

$$P : \big(\partial_r(f \circ P)\big)\partial_r + \frac{1}{r^2}\big(\partial_\vartheta(f \circ P)\big)\partial_\vartheta \rightsquigarrow (\partial_x f)\partial_x + (\partial_y f)\partial_y$$

oder kurz gefaßt $\operatorname{grad} f = f_x\partial_x + f_y\partial_y = f_r\partial_r + \frac{1}{r^2}f_\vartheta\partial_\vartheta$. Man nennt sie die **Darstellung des Gradienten in Polarkoordinaten**. Hier haben wir die Notation $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ für die entsprechende partielle Ableitung aus 12.1.1.1 und die Abkürzung $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ aus 12.7.1.21 für den besagten Differentialoperator alias besagtes Vektorfeld verwendet. Bereits bei der Transformation des Gradienten in Kugelkoordinaten wird die Rechnung jedoch recht aufwendig. Ich will im folgenden erklären, mit welchen Kunstgriffen man sie strukturieren und übersichtlicher gestalten kann.

12.7.3.2 (**Tensornotation für Bilinearformen**). Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k notieren wir

$$\operatorname{Bil}(V) = \operatorname{Bil}_k(V)$$

den Vektorraum aller bilinearen Abbildungen $V \times V \to k$ alias Bilinearformen auf V. Gegeben Linearformen $\lambda, \eta : V \to k$ notieren wir $(\lambda \otimes \eta) \in \operatorname{Bil}(V)$ die Bilinearform $(v,w) \mapsto \lambda(v)\eta(w)$. Sicher ist $(\lambda,\eta) \mapsto \lambda \otimes \eta$ selbst eine bilineare Abbildung $V^* \times V^* \to \operatorname{Bil}(V)$. Statt $\eta \otimes \eta$ schreibt man meist kürzer $\eta^{\otimes 2}$. Das Symbol $\otimes$ wird in 4.6.1.2 noch mit zusätzlicher Bedeutung aufgeladen. Hier darf und soll es ausschließlich als bequeme Notation verstanden werden. Wir nennen $\lambda \otimes \eta$ das **Tensorprodukt** unserer Linearformen.

Definition 12.7.3.3. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Ein **Zweitensor** oder genauer ein **relativer kovarianter Zweitensor auf** U ist eine Abbildung

$$g : U \to \operatorname{Bil}(\vec{X})$$

von U in den Raum $\operatorname{Bil}(\vec{X})$ aller Bilinearformen auf $\vec{X}$. Eine **riemannsche Metrik** auf einer halboffenen Teilmenge $U \subset X$ ist ein glatter Zweitensor g, der jedem Punkt $p \in U$ ein Skalarprodukt g_p auf $\vec{X}$ zuordnet.

Beispiel 12.7.3.4. Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist der konstante Zweitensor, der jedem Punkt das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ zuordnet, eine riemannsche Metrik s. Sie heißt die **Standardmetrik** auf dem $\mathbb{R}^n$.

12.7.3.5 (**Einschränkung von Zweitensoren**). Gegeben ein endlichdimensionaler Raum X und ein Zweitensor g auf einer halboffenen Teilmenge $U \subset X$ und

eine weitere halboffene Teilmenge $V \subset X$ mit $V \subset U$ erhalten wir durch Einschränkung einen Zweitensor $g|V$ auf V. War g eine riemannsche Metrik, so ist auch $g|V$ eine riemannsche Metrik.

12.7.3.6 (**Notation für Zweitensoren**). Gegeben Kovektorfelder ω und η auf einer Teilmenge U eines endlichdimensionalen reellen Raums X können wir den Zweitensor

$$\begin{array}{rccc} \omega \otimes \eta : & U & \to & \mathrm{Bil}(\vec{X}) \\ & p & \mapsto & \omega_p \otimes \eta_p \end{array}$$

bilden. Wir können Zweitensoren punktweise addieren und mit Funktionen multiplizieren. Wir können unsere konstante riemannsche Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$ in diesen Konventionen schreiben als $s = \mathrm{d}x_1^{\otimes 2} + \ldots + \mathrm{d}x_n^{\otimes 2}$. Eine beliebiger Zweitensor g auf einer halboffenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ hat in diesen Notationen die Gestalt

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j$$

für Funktionen $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$. Er ist eine riemannsche Metrik genau dann, wenn die g_{ij} glatte Funktionen sind und ihre Werte $g_{ij}(p)$ an jedem Punkt $p \in U$ eine positiv definite symmetrische Matrix bilden.

12.7.3.7 (**Partielles Auswerten von Bilinearformen**). Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k liefert jede Bilinearform $g \in \mathrm{Bil}(V)$ eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{can}_g : & V & \to & V^* \\ & v & \mapsto & (w \mapsto g(v,w)) \end{array}$$

von unserem Vektorraum in seinen Dualraum, die jedem Vektor v die Linearform $g(v,\ )$ zuordnet. Wir nennen sie die **Linkseinsetzung von** g. Zum Beispiel haben wir $\mathrm{can}_{\lambda\otimes\eta}(v) = \lambda(v)\eta$. Gleichberechtigt können wir auch die „Rechtseinsetzung“ betrachten, aber sei's drum. Ist g nichtausgeartet und V endlichdimensional, so ist unsere Linkseinsetzung ein Isomorphismus $\mathrm{can}_g : V \xrightarrow{\sim} V^*$.

12.7.3.8 (**Partielles Auswerten von Zweitensoren**). Gegeben ein Vektorfeld A und ein Zweitensor g auf einer Teilmenge U eines endlichdimensionalen reellen Raums können wir ein Kovektorfeld $\mathrm{can}_g(A)$ bilden durch das Einsetzen von A in die erste Stelle von g. Ist unser Zweitensor g an keiner Stelle ausgeartet, ist etwa g eine riemannsche Metrik, so ist diese Abbildung eine Bijektion

$$\mathrm{can}_g : \{\text{Vektorfelder auf } U\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Kovektorfelder auf } U\}$$

Bezeichnet speziell s das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$, so haben wir etwa $\mathrm{can}_s(a\partial_i) = a\,\mathrm{d}x_i$ für jede Funktion a. Für unseren Gradienten aus 12.1.1.4 einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$ gilt folglich wie bereits in 12.1.3.9 besprochen

$\operatorname{grad} f = \operatorname{can}_s^{-1}(\mathrm{d}f)$ in Bezug auf die konstante riemannsche Standardmetrik s. Im allgemeinen verwendet man die Notation

$$\operatorname{grad}_g f := \operatorname{can}_g^{-1}(\mathrm{d}f)$$

und nennt dies Vektorfeld den **g-Gradienten von** f zur riemannschen Metrik g oder allgemeiner zum nichtausgearteten Zweitensor g.

Definition 12.7.3.9 (**Verwandtschaft von Zweitensoren**)**.** Seien $U \subset X$, $V \subset Y$ Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume. Sei U halboffen und sei $\phi : U \to V$ differenzierbar. Vorgegebene Zweitensoren s auf U und g auf V heißen **ϕ-verwandt** und wir schreiben $\phi : s \rightsquigarrow g$, wenn für alle $x \in U$ und $v, w \in \vec{X}$ gilt

$$s_x(v, w) = g_{\phi(x)}\left((\mathrm{d}_x\phi)(v), (\mathrm{d}_x\phi)(w)\right)$$

12.7.3.10 (**Verträglichkeiten unserer Verwandtschaften**). Verwandtschaft ist verträglich mit allen natürlichen Operationen, genauer mit Addition, der Multiplikation mit Funktionen, dem Einsetzen von Vektorfeldern und unserer Konstruktion $\otimes$. Insbesondere haben verwandte differenzierbare Funktionen unter verwandten riemannschen Metriken verwandte Gradienten, in Formeln impliziert die Verwandtschaft $\phi : s \rightsquigarrow g$ von nichtausgearteten Zweitensoren also für jede differenzierbare Funktion f die Verwandtschaft von Vektorfeldern

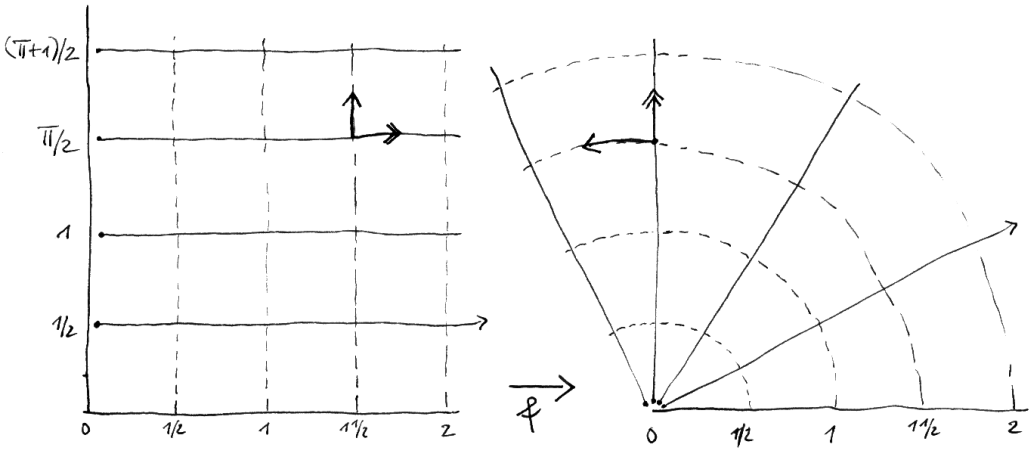
$$\phi : \operatorname{grad}_s(f \circ \phi) \rightsquigarrow \operatorname{grad}_g f$$

Offensichtlich hat jeder Zweitensor g auf V genau einen Rückwärtsverwandten auf U, den wir mit $\phi^* g$ bezeichnen und den **zurückgeholten Zweitensor** nennen. Gegeben eine parametrisierte Fläche im Raum oder allgemeiner eine differenzierbare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ halboffen bezeichnet man den symmetrischen Zweitensor auf $\mathbb{R}^2$, der durch das Zurückholen der Standardmetrik entsteht, als die **erste Fundamentalform** unserer parametrisierten Fläche.

Beispiel 12.7.3.11 (**Gradienten in Polarkoordinaten**). Unter der Polarkoordinatenabbildung P aus 12.7.2.20 ist die Standardmetrik $s = \mathrm{d}x^{\otimes 2} + \mathrm{d}y^{\otimes 2}$ auf der xy-Ebene verwandt zum Zweitensor

$$\begin{aligned} g &= (\cos\vartheta\,\mathrm{d}r - r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta) \otimes (\cos\vartheta\,\mathrm{d}r - r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta) \\ &\quad + (\sin\vartheta\,\mathrm{d}r + r\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta) \otimes (\sin\vartheta\,\mathrm{d}r + r\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta) \\ &= \mathrm{d}r^{\otimes 2} + r^2\,\mathrm{d}\vartheta^{\otimes 2} \end{aligned}$$

auf der $r\vartheta$-Ebene, der auf dem Komplement der Nullstellenmenge von r auch wieder eine riemannsche Metrik ist. Daß hier im Resultat keine gemischten Tensoren $\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}\vartheta$ auftreten, hat den Grund, daß die Vektorfelder ∂_r und ∂_ϑ auch in der



Dies Bild soll die Verwandtschaft von riemannschen Metriken $f : \mathrm{d}r^{\otimes 2} + r^2\,\mathrm{d}\vartheta^{\otimes 2} \rightsquigarrow \mathrm{d}x^{\otimes 2} + \mathrm{d}y^{\otimes 2}$ verdeutlichen, mit $f = P$ der Polarkoordinatenabbildung. Das Differential an der Stelle $(r, \vartheta) = (1\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist dargestellt durch seinen Effekt auf der Standardbasis, die wir auch $(\partial_r, \partial_\vartheta)$ notieren könnten. Die Standardbasis geht an jeder Stelle über in eine Orthogonalbasis und das Bild des ersten Basisvektors hat auch wieder die Länge Eins, das Bild des zweiten Basisvektors jedoch im allgemeinen die Länge r und in unserem Fall die Länge $1\frac{1}{2}$. Die Standardmetrik auf der xy-Ebene entspricht folglich einer Metrik auf der $r\vartheta$-Ebene, bei der ∂_r und ∂_ϑ aufeinander senkrecht stehen und ∂_r die Länge Eins hat, wohingegen ∂_ϑ die Länge r hat. Diese Eigenschaften aber charakterisieren genau unsere Metrik $\mathrm{d}r^{\otimes 2} + r^2\,\mathrm{d}\vartheta^{\otimes 2}$.

xy-Ebene an jedem Punkt aufeinander senkrecht stehen. Die Koeffizienten 1 und r^2 bedeuten gerade die quadrierten Längen $s(\partial_r, \partial_r)$ und $s(\partial_\vartheta, \partial_\vartheta)$ der Vektoren dieser Vektorfelder. Für eine Funktion $f = f(x, y)$ muß schließlich $\mathrm{d}f$ unter P verwandt sein zu $\mathrm{d}(f \circ P)$ und dann muß auch $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad}_s f = \operatorname{can}_s^{-1}(\mathrm{d}f)$ verwandt sein zu

$$\operatorname{grad}_g(f \circ P) = \operatorname{can}_g^{-1}(\mathrm{d}\,(f \circ P)) = \operatorname{can}_g^{-1}(f_r\,\mathrm{d}r + f_\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta) = f_r\partial_r + \frac{1}{r^2} f_\vartheta \partial_\vartheta$$

Damit haben wir die Darstellung des Gradienten in Polarkoordinaten ein weiteres Mal hergeleitet.

Ergänzung 12.7.3.12 (**Im Ingenieurwesen gebräuchliche alternative Notation**). Ingenieure arbeiten gerne mit einer anderen Darstellung von Vektorfeldern und betrachten etwa auf dem $\mathbb{R}^2$ die auf Skalarproduktnorm Eins normierten Vektorfelder $\mathbf{e}_r = \partial_r$ und $\mathbf{e}_\vartheta = r^{-1}\partial_\vartheta$. Natürlich kann jedes Vektorfeld v auf dem Komplement des Ursprungs auch als $v = a\mathbf{e}_r + b\mathbf{e}_\vartheta$ geschrieben werden mit geeigneten reellwertigen Funktionen a, b. In Formelsammlungen findet man häufig Formeln für Gradienten und dergleichen in dieser Darstellung, zum Beispiel hätten wir $\operatorname{grad} f = (\partial_r f)\mathbf{e}_r + r^{-1}(\partial_\vartheta f)\mathbf{e}_\vartheta$. Meist heißen die Koeffizienten eines Vektorfelds $v = a\mathbf{e}_r + b\mathbf{e}_\vartheta$ dann auch noch $a = v_r, b = v_\vartheta$. Das verbietet sich für uns jedoch, da wir die Indexnotation bereits als Kürzel für partielle Ableitungen verwenden.

Ergänzung 12.7.3.13. Ein Zweitensor auf einem endlichdimensionalen reellen Raum X heißt **symmetrisch** beziehungsweise **antisymmetrisch**, wenn er jedem Punkt eine symmetrische beziehungsweise antisymmetrische Bilinearfom auf $\vec{X}$ zuordnet. Antisymmetrische Zweitensoren werden wir später als sogenannte 2-Formen wiedertreffen. Eine riemannsche Metrik ist per definitionem ein symmetrischer Zweitensor mit der zusätzlichen Eigenschaft, an jedem Punkt positiv definit zu sein.

Übungen

Übung 12.7.3.14 (**Riemannsche Metrik in Kugelkoordinaten**). Man zeige, daß die Standardmetrik im xyz-Raum unter Kugelkoordinaten, wie sie 12.3.2.3 eingeführt werden, verwandt ist zur Metrik

$$g = \mathrm{d}r^{\otimes 2} + r^2\,\mathrm{d}\vartheta^{\otimes 2} + (r\sin\vartheta)^2\,\mathrm{d}\varphi^{\otimes 2}$$

Übung 12.7.3.15 (**Gradient in Kugelkoordinaten**). Man zeige, daß der Gradient in Kugelkoordinaten, wie sie 12.3.2.3 eingeführt werden, ausgedrückt wird durch die Formel

$$\operatorname{grad} f = f_r\partial_r + r^{-2} f_\vartheta \partial_\vartheta + (r\sin\vartheta)^{-2} f_\varphi \partial_\varphi$$

12.7.4 Wegintegrale

12.7.4.1. Ich verallgemeinere die in 10.7.1.2 eingeführte Terminologie. Eine stetige Abbildung von einem mehrpunktigen reellen Intervall in einen topologischen Raum nennen wir einen **Weg** in unserem Raum. Ist das Definitionsintervall kompakt, sprechen wir von einem **kompakten Weg**. Ist das Definitionsintervall das Einheitsintervall $[0,1]$, so sprechen wir von einem **normierten Weg**. Oft lassen wir diese Zusätze aber auch weg und hoffen, daß aus dem Kontext hervorgeht, was jeweils gemeint ist.

Definition 12.7.4.2. Gegeben $A \subset X$ eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums und $\gamma : [a,b] \to A$ ein stetig differenzierbarer Weg und $\omega : A \to \vec{X}^*$ ein stetiges Kovektorfeld auf A erklären wir eine reelle Zahl $\oint_\gamma \omega$ durch die Vorschrift

$$\oint_\gamma \omega := \int_a^b \omega_{\gamma(t)}\left(\gamma'(t)\right) \mathrm{d}t$$

Sie heißt das **Integral des Kovektorfelds** ω **längs des Weges** γ. Sobald ich hoffe, Sie davon überzeugt zu haben, daß keine Verwechslungen zu befürchten sind, notiere ich Wegintegrale meist ohne Kringel mit $\int$ statt $\oint$.

12.7.4.3. In der physikalisch motivierten Terminologie aus 10.7.1.4 gilt es also, zu jedem Zeitpunkt $t \in [a,b]$ den Kovektor $\omega_{\gamma(t)}$ auf dem Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t)$ auszuwerten und die so entstehende reellwertige Funktion über das Intervall $[a,b]$ zu integrieren.

12.7.4.4 (**Diskussion der Terminologie**). Ich unterscheide zwischen dem „Kurvenintegral“ aus 10.7.1.23 und dem „Wegintegral“ wie es eben definiert wurde. In der Literatur findet man stattdessen vielfach die Terminologie „Kurvenintegral erster Art“ und „Kurvenintegral zweiter Art“.

Vorschau 12.7.4.5. Das in der Funktionentheorie betrachtete Wegintegral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ ist eine Erweiterung des hier eingeführten Wegintegrals auf „komplexwertige Einsformen“, wie in 12.7.4.23 und 14.2.5 folgende ausgeführt wird.

12.7.4.6 (**Vage Anschauung für das Wegintegral**). In der vor 12.7.1.11 erklärten Anschauung für ebene Kovektorfelder als „Liniendichten“ wäre das Wegintegral zu verstehen als eine Präzisierung der Idee der „Zahl der von unserem Weg gekreuzten Linien“. Da das arg vage ist, gebe ich auch noch eine präzise Variante in Form eines Lemmas.

Lemma 12.7.4.7 (Wegintegral durch Riemannsummen). *Seien $\gamma : [a,b] \to A$ ein stetig differenzierbarer Weg in einer Teilmenge A eines endlichdimensionalen reellen Raums X und $\omega : A \to \vec{X}^*$ ein stetiges Kovektorfeld auf A. Man betrachte*

für $r \geq 1$ die äquidistante Unterteilung $a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_r = b$ und bilde die **Riemannsumme**

$$S_\gamma^r(\omega) = \sum_{i=0}^{r-1} \omega_{\gamma(a_i)} \left(\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\right)$$

So ist unser Wegintegral der Grenzwert der Folge von Riemannsummen

$$\oint_\gamma \omega = \lim_{r\to\infty} S_\gamma^r(\omega)$$

Beweis. Sei $\| \ \|$ eine Norm auf dem Richtungsraum $\vec{X}$ und bezeichne $\| \ \|$ auch die zugehörige Operatornorm auf $\vec{X}^*$. Nach 10.5.2.5 ist unser Integral der Grenzwert der Folge von Riemannsummen

$$S^r = \sum_{i=0}^{r-1} \omega_{\gamma(t_i)} \left(\gamma'(t_i)\right) \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

Gegeben $\varepsilon > 0$ finden wir wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von γ' ein $\delta > 0$ derart, daß gilt $|s - t| < \delta \Rightarrow \|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| < \varepsilon$. Ist $R = R_\varepsilon$ so groß, daß die Länge der Intervalle $t_{i+1} - t_i$ unter δ sinkt, so folgt für $r \geq R$ mit dem Schrankensatz 10.7.1.10 oder genauer seiner offensichtlichen Variante für einen beliebigen endlichdimensionalen normierten Raum $\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) \in (t_{i+1} - t_i)\,\mathrm{B}(\gamma'(t_i); \varepsilon)$. Das können wir umschreiben zu

$$\|(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) - (t_{i+1} - t_i)\gamma'(t_i)\| < (t_{i+1} - t_i)\varepsilon$$

Das hinwiederum liefert für $r \geq R$ die Abschätzung

$$|S_\gamma^r(\omega) - S^r| \leq \sum_{i=0}^{r-1} \|\omega_{\gamma(t_i)}\| \ (t_{i+1} - t_i)\varepsilon \leq \left(\sup_{t\in[a,b]} \|\omega_{\gamma(t)}\|\right) (b - a)\varepsilon$$

Diese Differenz strebt also gegen Null für $r \to \infty$, folglich strebt die Folge $S_\gamma^r(\omega)$ gegen denselben Grenzwert wie die Folge S^r. □

Beispiel 12.7.4.8 (**Wegintegral eines Kovektorfelds auf der Zeitachse**). Ein Kovektorfeld auf der Zeitachse kann, wie in 12.7.1.9 erklärt, als eine Vorschrift aufgefaßt werden, die jedem Zeitpunkt eine Frequenz und eine Orientierung der Zeitachse zuordnet. Nehmen wir der Einfachkeit halber an, alle diese Orientierungen seien die Standardorientierung der Zeitachse und unser Weg gehe in Richtung positiver Zeiten von einem Anfangszeitpunkt zu einem Endzeitpunkt, so liefert unser Wegintegral anschaulich gesprochen die Zahl der Schwingungen zwischen Anfangszeitpunkt und Endzeitpunkt.

Satz 12.7.4.9 (**Formelsammlung für das Wegintegral**). *Das Wegintegral hat die folgenden Eigenschaften:*

1. **(Wegintegral über Identitätswege)**. *Gegeben reelle Zahlen $a < b$ und eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stimmt das Wegintegral des Kovektorfelds $f(x)\,\mathrm{d}x$ über den Identitätsweg $\mathrm{id} : [a, b] \to [a, b]$ überein mit dem in 10.5.2.1 eingeführten Integral von f, in Formeln*
$$\oint_{\mathrm{id}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. **(Verwandtschaftsverträglichkeit)**. *Gegeben X und Y endlichdimensionale reelle Räume, $A \subset X$ und $B \subset Y$ Teilmengen mit A halboffen, $\gamma : [a, b] \to A$ ein stetig differenzierbarer Weg, $\phi : A \to B$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $\eta : B \to \vec{Y}^*$ ein stetiges Kovektorfeld auf B gilt*
$$\oint_\gamma \phi^*\eta = \oint_{\phi\circ\gamma} \eta$$

3. **(Zerstückeln von Wegintegralen)**. *Gegeben X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge, $\omega : A \to \vec{X}^*$ ein stetiges Kovektorfeld, $\gamma : [a, b] \to A$ ein stetig differenzierbarer Weg und $c \in (a, b)$ ein Zwischenpunkt gilt*
$$\oint_\gamma \omega = \oint_{\gamma|[a,c]} \omega + \oint_{\gamma|[c,b]} \omega$$

4. **(Wegintegral über ein totales Differential)**. *Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X, eine halboffene Teilmenge $A \subset X$, ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [a, b] \to A$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : A \to \mathbb{R}$ gilt*
$$\oint_\gamma \mathrm{d}g = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

Beweis. Die Formel für das Wegintegral über Identitätswege folgt unmittelbar aus den Definitionen. Die Verwandtschaftsverträglichkeit des Wegintegrals entpuppt sich so im Fall eines Identitätsweges $\gamma = \mathrm{id} : [a, b] \xrightarrow{\sim} [a, b] = A \subset \mathbb{R} = X$ als unsere Definition des Wegintegrals über den Weg ϕ vermittels $\oint_\phi \eta := \oint_{\mathrm{id}} \phi^*\eta$ wegen $\phi^*\eta = \eta_{\phi(t)}\,(\phi'(t))\,\mathrm{d}t$. Im Fall eines allgemeinen Weges γ folgt sie durch zweifaches Anwenden dieser Erkenntnis aus der Gleichungskette
$$\oint_\gamma \phi^*\eta = \oint_{\mathrm{id}} \gamma^*\phi^*\eta = \oint_{\mathrm{id}} (\phi\circ\gamma)^*\eta = \oint_{\phi\circ\gamma} \eta$$

Die Möglichkeit der stückweisen Berechnung eines Wegintegrals folgt unmittelbar durch Zurückholen auf den Identitätsweg aus den ersten beiden Aussaagen oder auch direkt aus den Definitionen. Schließlich folgern wir die Formel für das Wegintegral eines totalen Differentials aus den beiden ersten Aussagen durch die Rechnung

$$\oint_\gamma \mathrm{d}g = \oint_{\mathrm{id}} \gamma^*(\mathrm{d}g) = \oint_{\mathrm{id}} \mathrm{d}(g \circ \gamma) = \int_a^b (g \circ \gamma)'(x)\,\mathrm{d}x = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung im letzten Schritt. □

12.7.4.10 (**Diskussion der Verwandtschaftsverträglichkeit**). Jeder Weg γ in A hat genau einen Verwandten in B, nämlich den Weg $\kappa := \phi \circ \gamma$. Die Verwandtschaftsverträglichkeit in unserem Satz 12.7.4.9 besagt in dieser Terminologie, daß die Verwandtschaft von Wegen $\phi : \gamma \rightsquigarrow \kappa$ zusammen mit der Verwandtschaft von Kovektorfeldern $\phi : \omega \rightsquigarrow \eta$ die Gleichheit der Wegintegrale $\oint_\gamma \omega = \oint_\kappa \eta$ impliziert.

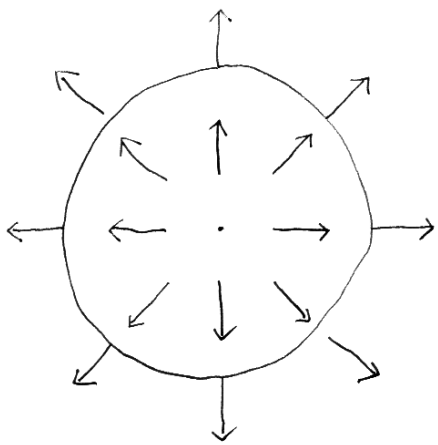
Beispiel 12.7.4.11 (**Berechnung von Wegintegralen**). Sei A eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums X. Für einen beliebigen stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a,b] \to A$ und ein beliebiges stetiges Kovektorfeld ω auf A hat das mit dem Weg zurückgeholte Kovektorfeld nach 12.7.2.11 die Gestalt $\gamma^*\omega = \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t$ und wir kommen mit den Umformungen

$$\oint_\gamma \omega = \oint_{\mathrm{id}} \gamma^*\omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t$$

wieder zu unserer ursprünglichen Definition zurück, die wir in diesem Sinne als ein „Zurückholen auf den Parameterbereich“ auffassen können. Integrieren wir zum Beispiel das Kovektorfeld $\omega = x\,\mathrm{d}x + x^4\,\mathrm{d}y$ auf der Ebene $\mathbb{R}^2$ über den Weg $\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = (\sqrt{t}, \log t)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \omega &= \oint_\gamma x\,\mathrm{d}x + x^4\,\mathrm{d}y \\
&= \oint_{\mathrm{id}} \sqrt{t}\,\mathrm{d}(\sqrt{t}) + (\sqrt{t})^4\,\mathrm{d}(\log t) \\
&= \int_1^2 \sqrt{t}\tfrac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t + t^2 t^{-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^2 (\tfrac{1}{2} + t)\,\mathrm{d}t = 2
\end{aligned}$$

Ergänzung 12.7.4.12 (**Wegintegrale von Vektorfeldern**). Redet man vom Integral eines Vektorfelds $v : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^n$ längs eines Weges $\gamma : [a,b] \to A$ oder von der **Zirkulation eines Vektorfelds in einem Weg**, so ist das Integral des Kovektorfelds $\omega = \mathrm{can}_s(v)$ nach 12.7.1.16 gemeint, das in Formeln gegeben wird



Der Fluß des Vektorfelds $\partial_r = (x/r)\partial_x + (y/r)\partial_y$ durch den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (3\cos t, 3\sin t)$ ergibt sich nach kurzer Rechnung zu 6π. Die Zirkulation desselben Vektorfeldes in demselben Weg ist dahingegen Null.

durch $\omega = v_1 \,\mathrm{d}x_1 + \ldots + v_n \,\mathrm{d}x_n$. In der Physik wird das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ meist $s(v,w) = v \cdot w$ notiert und unser Wegintegral über einen Weg $\gamma : [a,b] \to A$ würde geschrieben als

$$\oint_\gamma \omega = \int_\gamma v \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_a^b v \cdot \mathrm{d}\gamma = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \,\mathrm{d}t$$

Die Bedeutung der Terme des rechtesten Integrals sollte hier klar sein. In der Mitte ist zu verstehen $\mathrm{d}\gamma = \mathrm{d}_t\gamma = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$. Weiter links meint $\mathrm{d}\mathbf{x}$ ein „kleines vektorielles Kurvenelement“ und das $\mathbf{x}$ ist fett gedruckt um anzudeuten, daß ein Vektor gemeint ist. Ich mag diese Notation nicht besonders, die fette Schreibweise ist auch an der Tafel schlecht umzusetzen. Allgemeiner kann man Wegintegrale von Vektorfeldern v bilden, wann immer ein Skalarprodukt oder allgemeiner ein ausgezeichneter Zweitensor g zur Verfügung steht, indem wir eben zu unserem Vektorfeld das Kovektorfeld $\omega = \mathrm{can}_g(v)$ bilden und dieses Kovektorfeld dann integrieren wie in 12.7.4.2 erklärt.

12.7.4.13 (**Wegintegral über Feld mit Potential, Variante**). Die letzte Aussage von Satz 12.7.4.9 liest sich für Wegintegrale über Vektorfelder auf dem $\mathbb{R}^n$ als die Formel

$$\int_a^b (\operatorname{grad} g) \cdot \mathrm{d}\gamma = g(\gamma(a)) - g(\gamma(b))$$

Die „Verträglichkeit des Wegintegrals mit Verwandtschaft“ 12.7.4.9.2 hat für Wegintegrale über Vektorfelder in $\mathbb{R}^n$ keine Entsprechung. Das ist ein wesentlicher Grund dafür, daß der Begriff des Wegintegrals über Kovektorfelder weiter trägt.

Ergänzung 12.7.4.14. Redet man im Fall $X = \mathbb{R}^2$ vom **Fluß eines Vektorfelds** $F = (F_x, F_y) : \mathbb{R}^2 \supset A \to \mathbb{R}^2$ **durch einen Weg**, so ist das Integral über das Kovektorfeld $\omega_F := F_x \,\mathrm{d}y - F_y \,\mathrm{d}x$ gemeint. Dies Kovektorfeld kann alternativ auch beschrieben werden durch die Formel $(\omega_F)_p(u) = \det(F(p)|u)$, in der $F(p)$ und u als Spaltenvektoren aufzufassen sind.

12.7.4.15 (**Wegintegral versus Kurvenintegral**). In der Literatur scheint mir eine gewisse Verwirrung zu herrschen was die Begriffe „Wegintegral“ und „Kurvenintegral“ angeht. Die hier gewählte Terminologie soll zum Ausdruck bringen, daß für einen injektiven stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ unser Kurvenintegral nur von der Bildmenge $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$ abhängt, die wir im Sinne unserer Definition 12.8.6.1 eine „Kurve“ werden nennen dürfen. Unser Wegintegral dahingegen hängt auch von der „durch den Weg γ gegebenen Richtung auf unserer Kurve“ ab und ändert sein Vorzeichen, wenn wir die Kurve „in der umgekehrten Richtung durchlaufen“. Andererseits bleibt das Wegintegral unverändert selbst bei nicht notwendig monotoner „Neuparametrisierung“, wenn diese nur den Anfang

beziehungsweise das Ende des neuen Parameterintervalls auf den Anfang beziehungsweise das Ende des Alten wirft, siehe 12.7.4.17. Das Kurvenintegral dahingegen ändert sich bei derartigen Neuparametrisierungen im allgemeinen sehr wohl.

12.7.4.16 (**Wegintegrale in eindimensionalen Räumen**). Ist X ein eindimensionaler reeller Raum und $A \subset X$ eine endliche Vereinigung von mehrpunktigen Intervallen oder auch eine beliebige offene Teilmenge, so ist offensichtlich jedes stetige Kovektorfeld ω auf A das Differential $\omega = \mathrm{d}g$ einer stetig differenzierbaren Funktion $g : A \to \mathbb{R}$. Gegeben $c, d \in A$ und ein stetig differenzierbarer Weg γ von c nach d hängt also $\oint_\gamma \omega = g(d) - g(c)$ nach unserem Satz 12.7.4.9 vom Weg γ gar nicht ab. Wir notieren dies Integral dann kürzer

$$\oint_c^d \omega := \oint_\gamma \omega$$

Diese Notation ist allerdings nur sinnvoll, wenn es auch in der Tat einen Weg von c nach d gibt, der ganz in A verläuft. Ist $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so prüft man unschwer, daß mit dieser Notation unsere Formel

$$\oint_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

aus 12.7.4.9.1 für beliebige $c, d \in A$ gültig bleibt. Ist schließlich $\gamma : [a, b] \to A$ ein stetig differenzierbarer Weg von c nach d, so entpuppt sich die bloße Abhängigkeit des Wegintegrals von den Endpunkten als verkleidete Fassung der Substitutionsregel, indem wir sie für $\omega = f(x)\,\mathrm{d}x$ ausschreiben zu

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \oint_a^b \gamma^*\omega = \oint_\gamma \omega = \oint_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} \omega = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Korollar 12.7.4.17 (**Wegintegrale sind unabhängig von der Parametrisierung**). *Sei $\gamma : [c, d] \to X$ ein stetig differenzierbarer Weg in einem endlichdimensionalen reellen Raum X und ω ein stetiges Kovektorfeld auf einer Teilmenge, die sein Bild umfaßt. Sei $u : [a, b] \to [c, d]$ stetig differenzierbar mit $u(a) = c$ und $u(b) = d$. So gilt*

$$\oint_{\gamma\circ u} \omega = \oint_\gamma \omega$$

Beweis. Mit der Verwandtschaftsverträglichkeit des Wegintegrals 12.7.4.9 schreiben wir die Behauptung um zu $\oint_u \gamma^*\omega = \oint_{\mathrm{id}} \gamma^*\omega$ mit id dem Identitätsweg des Intervalls $[a, b]$. In eindimensionalen Räumen hängt aber nach 12.7.4.16 das Wegintegral über stetige Kovektorfelder nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab, und diese sind bei unserem Weg u und dem Identitätsweg dieselben. □

12.7.4.18 (**Verhalten unter richtungsumkehrender Umparametrisierung**). Der vorstehende Beweis zeigt auch, daß bei einer richtungsumkehrenden Umparametrisierung alias $u(a) = d$ und $u(b) = c$ das Wegintegral über den umparametrisierten Weg das Negative des Wegintegrals über den ursprünglichen Weg ist.

Vorschau 12.7.4.19. In 12.8.4.3 werden wir unter anderem das Integral von stetigen Kovektorfeldern mit kompaktem Träger über eindimensionale „orientierte" Fastfaltigkeiten einführen. Es gießt die in der Proposition enthaltene Unabhängigkeit des Wegintegrals von der Parametrisierung zu einer Definition um.

12.7.4.20 (**Wegintegrale rationaler Funktionen über ebene Quadriken**). Wir können nun auch den in 10.5.10.19 erklärten Trick zur Berechnung der Integrale von rationalen Ausdrücken in $(x, \sqrt{x^2+1})$ geometrisch verstehen. Gegeben solch ein rationaler Ausdruck $R(x, y)$ betrachten wir dazu auf einer geeigneten Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ die Differentialform $R(x, y)\,\mathrm{d}x$ und den Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = \left(t, \sqrt{t^2+1}\right)$ und fassen unser Integral auf als Wegintegral

$$\int_a^b R\left(t, \sqrt{t^2+1}\right) \mathrm{d}t = \oint_\gamma R(x, y)\,\mathrm{d}x$$

Solch ein Wegintegral ist nach 12.7.4.17 unabhängig von der Parametrisierung. Unser Weg durchläuft ein Stück der Hyperbel $y^2 - x^2 = 1$, genauer ein Stück des Hyperbelastes mit $y > 0$. Diesen Ast können wir nach 10.5.9.6 auch parametrisieren durch $\varphi : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(\tau) = \left(\frac{2\tau}{\tau^2-1}, \frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}\right)$$

und bei dieser Parametrisierung führt uns unser Wegintegral ganz offensichtlich auf das Integral einer rationalen Funktion in τ, das wir nach 10.5.10 im Prinzip durch bekannte Funktionen ausdrücken können. In derselben Weise kann man auch das Integral eines rationalen Ausdrucks im Funktionenpaar $(\sin, \cos)$ wie zum Beispiel

$$\frac{\sin^3(\tau) + \cos(\tau)}{\cos(\tau) + \cos^2(\tau)}$$

angehen, das bereits in 10.5.10.17 diskutiert wurde. Noch natürlicher als dort mag man es auffassen als Wegintegral im Sinne von 10.7.1.23 eines Kovektorfelds mit rationalen Koeffizienten in zwei Veränderlichen, in unserem Beispiel etwa das Integral des Kovektorfelds

$$R(x, y)\frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{y^3 + x}{x + x^2}\frac{\mathrm{d}y}{x}$$

über ein Stück des Einheitskreises. Mit der rationalen Parametrisierung 10.5.8.20 des Einheitskreises durch die stereographische Projektion läßt es sich dann umwandeln in ein Integral einer rationalen Funktion einer Veränderlichen. Im wesentlichen dasselbe Vefahren funktioniert auch für rationale Ausdrücke in den Funktionenpaaren $(\sinh, \cosh)$ und $(\sqrt{1+x^2}, x)$.

Ergänzung 12.7.4.21. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum, W ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Ein **W-wertiges Kovektorfeld auf** A ist eine Abbildung

$$\omega : A \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$$

Sie ordnet also jedem Punkt $p \in A$ eine lineare Abbildung des Richtungsraums in den Raum W zu. Ist etwa Y ein weiterer endlichdimensionaler reeller Raum und $A \subset X$ halboffen und $f : A \to Y$ differenzierbar, so ist $\mathrm{d}f$ oder genauer $p \mapsto \mathrm{d}_p f$ ein $\vec{Y}$-wertiges Kovektorfeld auf A. Ist nun $\varphi : [a,b] \to A$ ein stetig differenzierbarer Weg in einer Teilmenge A eines endlichdimensionalen reellen Raums X und $\omega : A \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$ ein stetiges Kovektorfeld auf A mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum W, so definieren wir in Verallgemeinerung des Falls reellwertiger Kovektorfelder aus 12.7.4 einen Vektor $(\oint_\varphi \omega) \in W$, das **Integral des W-wertigen Kovektorfelds ω längs des Weges φ**, durch die Vorschrift

$$\oint_\varphi \omega = \int_a^b \omega_{\varphi(t)}\left(\varphi'(t)\right) \mathrm{d}t$$

Rechts ist also für jeden Zeitpunkt t der Homomorphismus $\omega_{\varphi(t)} : \vec{X} \to W$ auszuwerten auf dem Geschwindigkeitsvektor $\varphi'(t) \in \vec{X}$, und die so entstehende stetige Abbildung $[a,b] \to W$ ist als vektorwertige Funktion zu integrieren im Sinne von 12.5.3.3.

Ergänzendes Beispiel 12.7.4.22. In der Physik begegnen einem insbesondere oft Kovektorfelder mit Werten in eindimensionalen reellen Vektorräumen. Zum Beispiel wird man sich ein Kraftfeld auf dem Anschauungsraum $\mathbb{E}$ aus 4.1.6.4 a priori wie in 12.6.1.6 erklärt als ein „Vektorfeld mit Einheiten“ denken, genauer als eine Abbildung

$$F : \mathbb{E} \to \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle \mathrm{g}/\mathrm{s}^2 \rangle$$

Da es sich jedoch mit Kovektorfeldern bei Koordinatenwechseln sehr viel besser rechnen läßt als mit Vektorfeldern, ist es oft günstiger, die durch das kanonische Skalarprodukt $s : \vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{E}} \to \mathbb{L}^{\otimes 2}$ aus 4.6.4.6 gegebene Identifikation $\acute{s} : \vec{\mathbb{E}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{E}}, \mathbb{L}^{\otimes 2})$ nachzuschalten und unser Kraftfeld stattdessen als eine Abbildung

$$\tilde{F} : \mathbb{E} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{E}}, \langle \mathrm{g\,m}^2/\mathrm{s}^2 \rangle)$$

aufzufassen. Die Elemente des eindimensionalen Vektorraums

$$\langle \mathrm{g\,m^2/s^2} \rangle = \mathbb{M} \otimes \mathbb{L}^{\otimes 2} \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2}$$

heißen in der Physik auch **Energien**. In diesem Sinne können wir ein Kraftfeld also als ein energiewertiges Kovektorfeld auffassen. Das Wegintegral über dieses Kovektorfeld heißt die bei Durchlaufen des Weges in besagtem Kraftfeld freiwerdende Energie und, wenn es negativ ist, die zu verrichtende **Arbeit**. Anschaulich und etwas vage gesprochen ordnet das Negative dieses Kovektorfelds nämlich gerade „jeder kleinen Verrückung die Arbeit zu, die bei dieser kleinen Verrückung gegen das Kraftfeld zu leisten wäre“. Eine energiewertige Abbildung $V : \mathbb{E} \to \langle \mathrm{g\,m^2/s^2} \rangle$ mit $\mathrm{d}V = -\tilde{F}$ heißt in der Physik ein **Potential** unseres Kraftfelds.

Ergänzendes Beispiel 12.7.4.23. Zentral in der „Funktionentheorie“ sind die Wegintegrale komplexwertiger Kovektorfelder, die auf Teilmengen der komplexen Zahlenebene definiert sind, vergleiche 14.2.1.1 und 14.2.5. Üblicherweise bezeichnet in diesem Kontext $z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Identität und $\mathrm{d}z$ ihr Differential, ein komplexwertiges Kovektorfeld auf $\mathbb{C}$. Mit $f(z)\,\mathrm{d}z$ bezeichnet man dann das Produkt dieses Kovektorfelds mit einer komplexwertigen Funktion $z \mapsto f(z)$. Das Integral derartiger Kovektorfelder heißt das „komplexe Wegintegral“ und liefert entsprechend komplexe Zahlen.

Übungen

Übung 12.7.4.24. Auf $\mathbb{R}^2 \backslash 0$ ist der Winkel im Bogenmaß ϑ lokal eine „bis auf eine additive Konstante wohl definierte Funktion“. Das Differential $\mathrm{d}\vartheta$ ist somit ein wohldefiniertes Kovektorfeld, wenn es auch global nicht das Differential einer Funktion auf ganz $\mathbb{R}^2 \backslash 0$ zu sein braucht. Man berechne das Wegintegral $\int_\gamma \mathrm{d}\vartheta$ für den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Man folgere, daß $\mathrm{d}\vartheta$ nicht das Differential einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \backslash 0 \to \mathbb{R}$ sein kann.

Ergänzende Übung 12.7.4.25 (**Ein divergierendes Wegintegral**). Man betrachte den Weg $\gamma(t) := r(t)(\cos t, \sin t)$ für $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ glatt und monoton fallend mit $\lim_{t\to\infty} r(t) = 0$. Man zeige, daß man r so wählen kann, daß die Wegintegrale $\int_{\gamma|[0,b]} x\,\mathrm{d}y$ bei wachsendem b über alle Grenzen wachsen. Hinweis: Man wähle r so, daß gilt $\sin(2t) > 0 \Rightarrow r'(t) = 0$ und daß r nur sehr langsam fällt. Durch Umparametrisieren des Weges γ von $[0, \infty)$ auf $[0, 1)$ und stetiges Fortsetzen durch $\beta(1) := (0, 0)$ erhält man dann einen Weg $\beta : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, der auf $[0, 1)$ glatt ist und bei dem die Wegintegrale $\int_{\beta|[0,c]} x\,\mathrm{d}y$ für $c \to 1$ monoton über alle Grenzen wachsen.

12.7.5 Wegzusammenhang

Definition 12.7.5.1. Ist X ein topologischer Raum und sind $x, y \in X$ Punkte, so nennen wir eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to X$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ einen **Weg von** x **nach** y. Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, wenn er nicht leer ist und es für je zwei Punkte unseres Raums einen Weg vom einen zum anderen gibt.

Definition 12.7.5.2. Unter einem **stückweise linearen Weg** in einem reellen Raum verstehen wir einen Weg, der aus endlich vielen Geradensegmenten zusammengesetzt ist. Genauer und in Formeln heißt also ein Weg $\gamma : [a, b] \to X$ in einem reellen Raum stückweise linear, wenn es eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ gibt derart, daß γ auf jedem Teilintervall $[a_{i-1}, a_i]$ mit der Restriktion einer affinen Abbildung $\mathbb{R} \to X$ übereinstimmt.

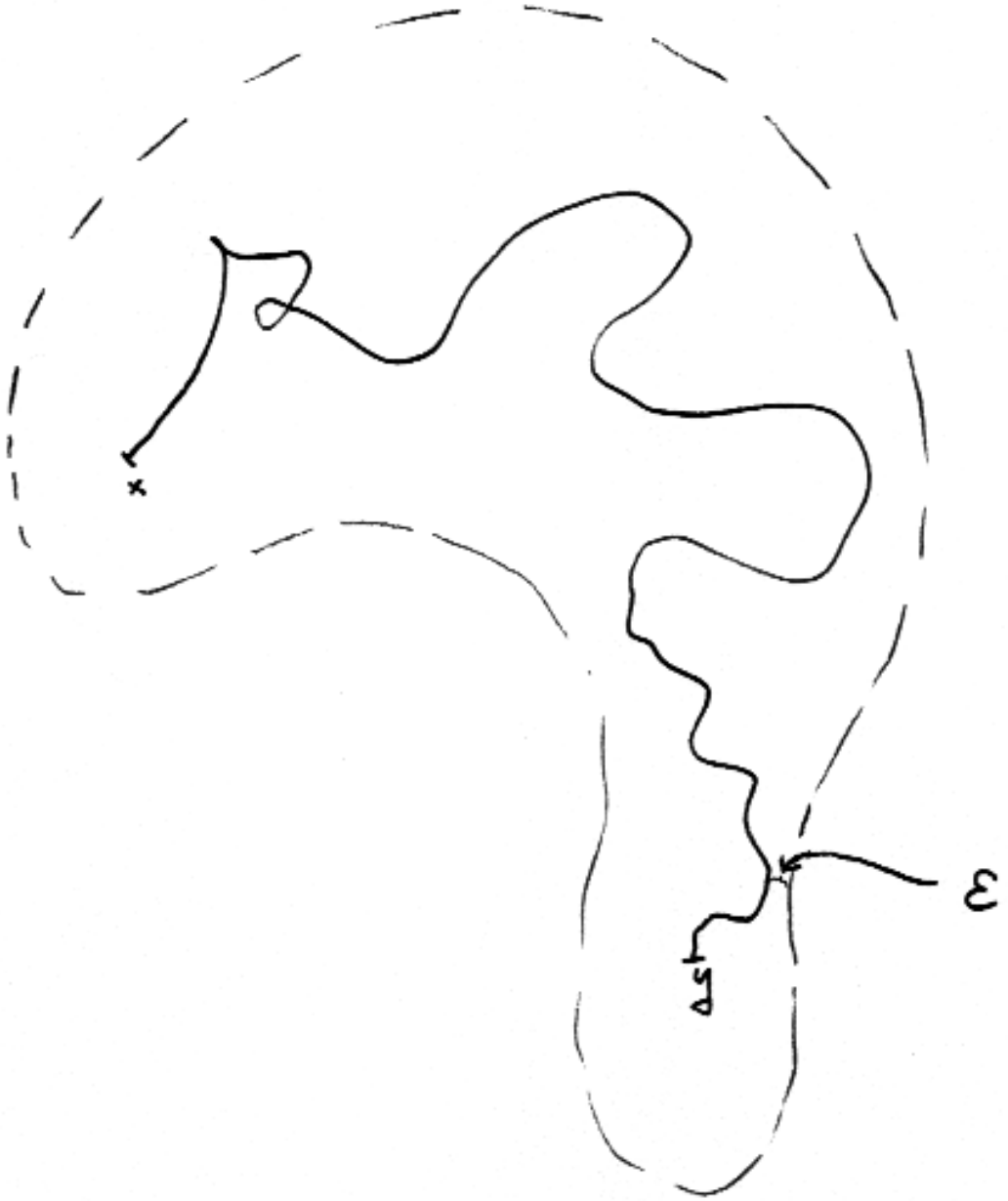
12.7.5.3. Im Lichte unserer allgemeinen Definitionen müßten wir eigentlich von einem „stückweise affinen Weg“ reden, aber das tut kein Mensch.

Lemma 12.7.5.4. *In einer wegzusammenhängenden offenen Teilmenge eines normierten reellen Raums lassen sich je zwei Punkte auch durch einen stückweise linearen Weg verbinden.*

Beweis. Sei $U \Subset X$ unsere Teilmenge und seien $x, y \in U$ gegeben. Nach Annahme gibt es einen Weg $\gamma : [a, b] \to U$ von x nach y. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $U \neq X$ annehmen. Dann ist der Abstand zum Komplement von U nach **??** eine stetige Funktion $d_{X \setminus U} : X \to \mathbb{R}$ ohne Nullstelle auf U. Also hat $d_{X \setminus U} \circ \gamma$ nach 10.5.1.5 auf $[a, b]$ ein Minimum $\varepsilon > 0$, als da heißt, es gibt $\varepsilon > 0$ derart, daß alle Punkte aus $\gamma([a, b])$ mindestens den Abstand ε zum Komplement von U haben. Andererseits ist γ gleichmäßig stetig, wir finden also eine Unterteilung $a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n = b$ unseres Intervalls mit $\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\| < \varepsilon$ für $1 \leq i \leq n$. Ein zwischen den Eckpunkten $x = \gamma(a_0), \gamma(a_1), \ldots, \gamma(a_n) = y$ jeweils gerade verlaufender Weg bleibt also ganz in U. Damit ist gezeigt, daß sich je zwei Punkte aus U auch durch einen stückweise linearen Weg in U verbinden lassen. □

Lemma 12.7.5.5. *Auf einer offenen wegzusammenhängenden Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums ist jede differenzierbare reellwertige Funktion mit verschwindendem Differential konstant.*

Beweis. Eine differenzierbare Funktion mit verschwindendem Differential muß nach 12.7.4.16 am Anfang und Ende jedes stetig differenzierbaren Weges und dann auch am Anfang und Ende jedes stückweise linearen Weges denselben Wert annehmen. Das Lemma folgt damit aus 12.7.5.4. □


x
ε
δr

Übungen

12.7.5.6. Ich führe für die Übungen noch einige Begrifflichkeiten ein, die im Rest der Vorlesung vorest nicht benötigt werden.

Definition 12.7.5.7. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt **diskret**, wenn jeder ihrer Punkte eine Umgebung besitzt, in der kein anderer Punkt besagter Teilmenge liegt. In anderen Worten nennen wir also eine Teilmenge eines topologischen Raums diskret, wenn sie mit der Spurtopologie ein diskreter topologischer Raum wird.

12.7.5.8. Zum Beispiel ist die Menge aller Brüche $\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ mit einer Eins im Zähler eine diskrete Teilmenge der reellen Zahlengeraden.

12.7.5.9 (**Diskussion der Terminologie**). Andere Autoren verstehen unter einer „diskreten Teilmenge“ eines topologischen Raums abweichend eine Teilmenge derart, daß jeder Punkt des gesamten Raums eine Umgebung besitzt, in der höchstens ein Punkt besagter Teilmenge liegt. In unserer Terminologie sind das genau die diskreten abgeschlossenen Teilmengen.

Definition 12.7.5.10. Eine Funktion auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die in einer Umgebung eines jeden Punktes ihres Definitionsbereichs durch ihre Taylorreihe dargestellt werden kann, heißt **analytisch**.

12.7.5.11. Wir werden in 14.3.2.8 zeigen, daß Potenzreihen in einer Veränderlichen analytische Funktionen liefern. Analog kann man dasselbe auch für Potenzreihen in mehreren Veränderlichen zeigen.

12.7.5.12. Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht leer ist und jede nichtleere Teilmenge, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist, bereits der ganze Raum sein muß.

Vorschau 12.7.5.13. Als Übung 12.7.5.21 werden Sie zeigen, daß jeder wegzusammenhängende Raum zusammenhängend ist. Als Übung 12.7.5.15 werden Sie zeigen, daß ein zusammenhängender Raum genau dann wegzusammenhängend ist, wenn darin jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt. Insbesondere ist eine offene Teilmenge eines reellen normierten Raums genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist. Wir benutzen deshalb in diesen Fällen meist das kürzere Wort „zusammenhängend“. In 15.1.3.23geben wir ein Beispiel für einen zusammenhängenden aber nicht wegzusammenhängenden Raum. Mehr zu diesem Themenkomplex wird in 15.1.3.3 besprochen.

Übung 12.7.5.14. Auf jedem topologischen Raum X definiert man die Relation W der „Wegverbindbarkeit“ durch die Vorschrift, daß gilt xWy, wenn es in X einen Weg von x nach y gibt. Man zeige, daß das eine Äquivalenzrelation ist. Hinweis: Die Transitivität ergibt sich durch das „Aneinanderhängen von Wegen“ und

die Stetigkeit der so entstehenden Wege folgt mit **??**. Die Äquivalenzklassen für die Äquivalenzrelation der Wegverbindbarkeit heißen die **Wegzusammenhangskomponenten** unseres Raums.

Übung 12.7.5.15. Man zeige, daß die Wegzusammenhangskomponenten eines topologischen Raums offen sind genau dann, wenn jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt. Insbesondere ist ein Raum, in dem jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt, genau dann zusammenängend, wenn er wegzusammenhängend ist.

Übung 12.7.5.16. Das Komplement einer abgeschlossenen diskreten Teilmenge in einer wegzusammenhängenden offenen Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ ist für $n > 1$ wegzusammenhängend. Dasselbe gilt im Übrigen auch ohne die Bedingung „abgeschlossen“, ist dann aber schwerer zu zeigen.

Übung 12.7.5.17. Ist $U \Subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend und $A \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Teilraum einer Dimension $\dim A \leq n-2$ alias einer Kodimension mindestens Zwei, so ist auch $U \backslash A$ wegzusammenhängend. Für Teilräume A der Kodimension Eins alias affine Hyperebenen A gilt das natürlich nicht!

Übung 12.7.5.18. Stimmen zwei auf derselben wegzusammenhängenden offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ definierte analytische Funktionen auf einer Umgebung eines Punktes überein, so sind sie gleich. Hinweis: Man ziehe sich mithilfe stückweise linearer Wege auf den Fall $n = 1$ zurück.

Ergänzende Übung 12.7.5.19. Die Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ aller orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen mit Determinante Eins ist wegzusammenhängend. Hinweis: 4.1.11.3. Weiter ist auch die Gruppe $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})^+$ aller invertierbaren reellen $(n \times n)$-Matrizen mit positiver Determinante wegzusammenhängend. Hinweis: 4.1.11.9. Die Gruppen $\mathrm{SU}(n)$ und $\mathrm{U}(n)$ und $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ sind wegzusammenhängend. Die vorgeschlagenen Lösungsansätze laufen auf eine Flickschusterei hinaus. Einen konzeptionellen Beweis werden wir in 15.2.3.14 kennenlernen.

Ergänzende Übung 12.7.5.20. Das Bild eines wegzusammenhängenden Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets wieder wegzusammenhängend. Die wegzusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind gerade die nichtleeren Intervalle.

Übung 12.7.5.21. Gegeben ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist jede Teilmenge, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist, entweder leer oder bereits der ganze Raum. Hinweis: Man wähle sonst einen Weg von einem Punkt unserer Teilmenge in ihr Komplement und konstruiere einen Widerspruch. Wir führen auch beim Beweis von 14.3.3.4 ein Argument aus.

Übung 12.7.5.22. Man zeige: Gegeben ein von Null verschiedenes Polynom $P \in \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n]$ ist die Menge seiner Nichtnullstellen in $\mathbb{C}^n$ offen, dicht und wegzusammenhängend.

12.7.6 Felder mit Potential

12.7.6.1. Wir interessieren uns im weiteren für die Frage, unter welchen Bedingungen ein stetiges Kovektorfeld das Differential einer Funktion ist und inwieweit diese Funktion dann eindeutig bestimmt ist.

Proposition 12.7.6.2 (**Felder mit Potential**). *Gegeben X ein endlichdimensionaler Raum und $\omega : X \supseteq U \to \vec{X}^*$ ein stetiges Kovektorfeld sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Kovektorfeld ω ist das Differential $\omega = \mathrm{d}f$ einer differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$;*

2. *Das Integral unseres Kovektorfelds über beliebige stetig differenzierbare Wege in U hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab;*

3. *Das Integral unseres Kovektorfelds über jeden geschlossenen stetig differenzierbaren Weg in U verschwindet.*

12.7.6.3 (**Diskussion der Terminologie**). In physikalischer Terminologie 12.7.4.22 hat also ein Kraftfeld oder genauer das zugehörige energiewertige Kovektorfeld ein Potential genau dann, wenn die längs beliebiger Wege geleistete Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt.

Beweis. Es ist im folgenden bequem, für etwas allgemeinere als nur stetig differenzierbare Wege den Begriff des Wegintegrals zur Verfügung zu haben.

Definition 12.7.6.4. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum. Ein Weg $\gamma : [a, b] \to X$ heißt **stückweise stetig differenzierbar**, wenn es eine Zerlegung $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = b$ unseres Intervalls gibt derart, daß die Restriktionen $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ stetig differenzierbar sind für alle i. Wir bezeichnen stückweise stetig differenzierbare Wege abkürzend als **Integrationswege**.

12.7.6.5 (**Wegintegral über Integrationswege**). Gegeben $\gamma : [a, b] \to X$ ein Integrationsweg in einem endlichdimensionalen reellen Raum X und ω ein auf dem Bild von γ definiertes stetiges relatives Kovektorfeld setzen wir

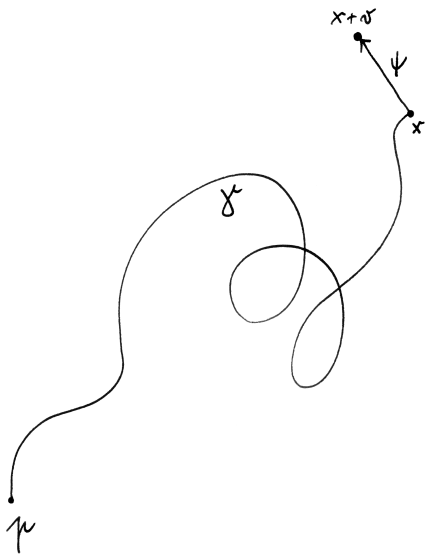
$$\oint_\gamma \omega = \int_\gamma \omega = \int_{\gamma|_{[a,a_1]}} \omega + \int_{\gamma|_{[a_1,a_2]}} \omega + \ldots + \int_{\gamma|_{[a_{r-1},b]}} \omega$$

für $a_1 < \ldots < a_{r-1}$ die Stellen in (a, b), an denen γ nicht differenzierbar ist. Sicher gilt dann $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma|_{[a,c]}} \omega + \int_{\gamma|_{[c,b]}} \omega$ für alle $c \in (a, b)$.

Wir behaupten nun zunächst, daß die Aussagen 2 beziehungsweise 3 der Proposition 12.7.6.2 jeweils gleichbedeutend sind zu

$2'$. Das Integral von ω über beliebige Integrationswege in U hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.

$3'$. Das Integral von ω über jeden geschlossenen Integrationsweg in U verschwindet.



Ein beliebiger Weg mit angehängtem geraden Stück aus dem Beweis von $2' \Rightarrow 1$.

Hier ist $2' \Rightarrow 2$ offensichtlich. Andererseits können wir aber jeden Integrationsweg so umparametrisieren, daß er stetig differenzierbar wird. Das Integral ändert sich dabei nicht, und so folgt auch die andere Richtung $2 \Rightarrow 2'$. Ebenso zeigt man $3 \Leftrightarrow 3'$. Nach diesen Vorarbeiten beginnen wir nun mit dem eigentlichen Beweis der Proposition. Die Folgerungen $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ sind offensichtlich. Wir zeigen als nächstes $3' \Rightarrow 2$ durch Widerspruch: Gäbe es zwei Integrationswege mit demselben Anfangs- und Endpunkt aber verschiedenen Integralen, so könnten wir den einen dieser Wege umdrehen und an den anderen anhängen und so einen geschlossenen Integrationsweg erhalten, über den das Integral von ω nicht Null wäre. Damit ist $3' \Rightarrow 2$ gezeigt. Zeigen wir nun noch $2' \Rightarrow 1$, so haben wir alles bewiesen. Nach Übung 12.7.5.14 und 12.7.5.4 dürfen wir annehmen, daß U nicht leer ist und sich je zwei Punkte aus U durch einen Integrationsweg verbinden lassen. Dann wählen wir $p \in U$ fest und definieren eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$f(x) = \int_\gamma \omega$$

für einen und nach $2'$ dann auch jeden Integrationsweg γ von p nach x. Ist nun ψ

ein stetig differenzierbarer Weg in U von x nach y, so behaupten wir

$$\int_\psi \omega = f(y) - f(x)$$

In der Tat können wir ja ψ am γ anhängen und so einen Integrationsweg von p nach y erhalten, so daß also gilt $\int_\gamma \omega + \int_\psi \omega = f(y)$. Mit dieser Erkenntnis läßt sich das Differential von f nun sehr leicht berechnen. Gegeben $x \in U$ sei $B \Subset X$ ein offener Ball um Null mit $x + B \subset U$. Gegeben $v \in B$ betrachten wir den Weg $\psi : [0,1] \to U$, $\psi(t) = x + tv$ und erhalten

$$f(x+v) - f(x) = \int_\psi \omega = \int_0^1 \omega_{x+tv}\,(v)\,\mathrm{d}t = \omega_x\,(v) + \int_0^1 (\omega_{x+tv} - \omega_x)(v)\,\mathrm{d}t$$

Das letzte Integral läßt sich aber schreiben als $\|v\|$ mal eine Funktion, die beschränkt ist für $v \in B$ durch $\sup\{\|\omega_{x+w} - \omega_x\| \mid \|w\| \leq \|v\|\}$ und die folglich mit v gegen Null strebt. Das zeigt $\mathrm{d}_x f = \omega_x$ wie gewünscht. $\square$

12.7.7 Homotopie von Wegen

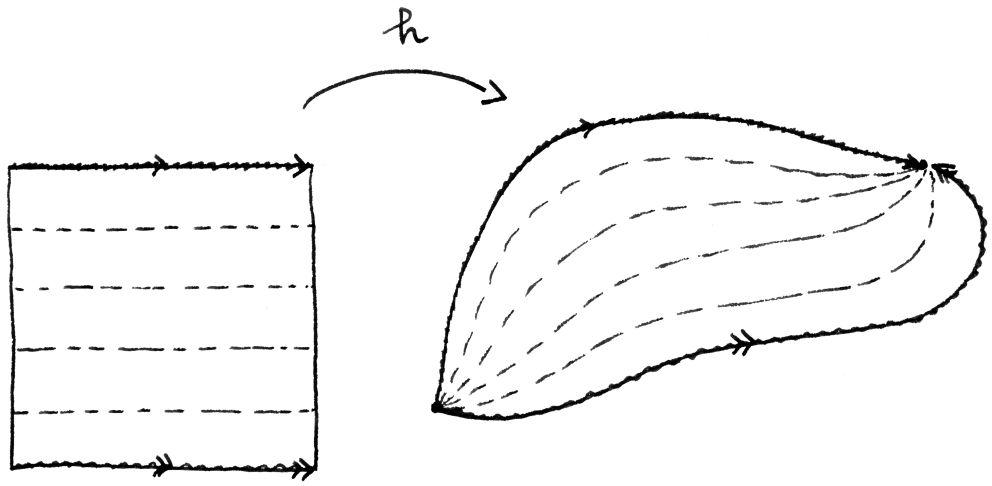
12.7.7.1. Einen durch das Einheitsintervall parametrisierten Weg $\gamma : [0,1] \to X$ in einem topologischen Raum X nennen wir im folgenden einen **normierten Weg**. Zu jedem Weg $\gamma : [a,b] \to X$ bilden wir den zugehörigen normierten Weg $\hat{\gamma} : t \mapsto \gamma((1-t)a + tb)$.

Definition 12.7.7.2. Seien x, y Punkte eines topologischen Raums X. Zwei normierte Wege α, β von x nach y heißen **homotop** oder präziser **homotop in** X oder ganz pedantisch **homotop mit festen Randpunkten** und wir schreiben $\alpha \simeq \beta$, wenn es eine stetige Abbildung

$$h : [0,1]^2 \to X$$

des Einheitsquadrats in unseren Raum gibt, die auf der Unter- beziehungsweise Oberkante unseres Quadrats mit α beziehungsweise β übereinstimmt und die auf der Vorder- und der Hinterkante konstant ist. In Formeln ausgedrückt fordern wir also $h(t,0) = \alpha(t)$ und $h(t,1) = \beta(t)$ für alle $t \in [0,1]$ sowie $h(0,\tau) = x$ und $h(1,\tau) = y$ für alle $\tau \in [0,1]$. Wir sagen dann auch, h sei eine **Homotopie zwischen** α **und** β und schreiben $h : \alpha \simeq \beta$. Zwei beliebige Wege von x nach y nennen wir **homotop** genau dann, wenn die zugehörigen normierten Wege homotop sind.

12.7.7.3. Vielleicht anschaulicher kann man Homotopie von Wegen auch dahingehend interpretieren, daß es eine durch $\tau \in [0,1]$ parametrisierte Familie von

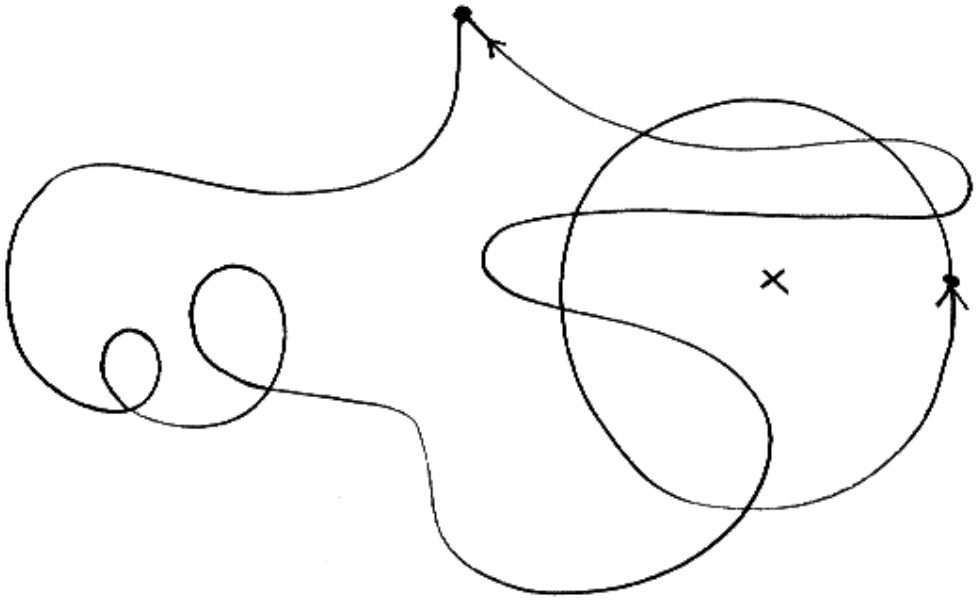


Eine Homotopie zwischen zwei Wegen, in diesem Fall zwischen den beiden Randwegen unserer Banane.

normierten Wegen h_τ von x nach y geben soll derart, daß gilt $h_0 = \alpha$, $h_1 = \beta$ und daß unsere Familie stetig von τ abhängt in dem Sinne, daß die Abbildung $[0,1]^2 \to X$, $(t,\tau) \mapsto h_\tau(t)$ stetig ist.

Beispiel 12.7.7.4. Für eine konvexe Teilmenge X eines endlichdimensionalen reellen Raums und zwei beliebige Punkte $x, y \in X$ sind je zwei Wege α, β von x nach y homotop in X. Sind unsere Wege normiert, so kann man eine Homotopie explizit angeben vermittels $h(t,\tau) = (1-\tau)\alpha(t) + \tau\beta(t)$.

12.7.7.5 (**Vorwärtsverwandte homotoper Wege sind homotop**). Ist in Formeln $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, so folgt aus $h : \alpha \simeq \beta$ schon $f \circ h : f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$. Speziell ist ein Weg homotop zu allen seinen Umparametrisierungen, denn nach 12.7.7.4 sind je zwei Wege in $[0,1]$ von 0 nach 1 homotop und damit gilt dasselbe für ihre Verknüpfung mit einer beliebigen stetigen Abbildung $\gamma : [0,1] \to Y$.



Ein zusammenziehbarer und ein nicht zusammenziehbarer geschlossener Weg in Komplement des durch ein Kreuzchen markierten Punktes in der Papierebene

Definition 12.7.7.6. Ein Weg in einem topologischen Raum heißt ein **geschlossener Weg**, wenn sein Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Ein geschlossener Weg heißt **zusammenziehbar**, wenn er homotop ist zu einem konstanten Weg.

Ein topologischer Raum heißt **schleifenfüllend**, wenn jeder geschlossene Weg in unserem Raum zusammenziehbar ist.

Vorschau 12.7.7.7. In der Literatur heißen wegzusammenhängende schleifenfüllende Räume auch „einfach zusammenhängend“, aber ich nenne sie gerne genauer „einfach wegzusammenhängend“.

Vorschau 12.7.7.8. Ist $U \Subset \mathbb{R}^n$ offen und schleifenfüllend und ist $A \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Teilraum einer Kodimension ≥ 3, so ist auch $U \backslash A$ schleifenfüllend. Für einen Beweis dieses Analogons zu 12.7.5.17 verweise ich auf die Topologie 16.5.1.7.

Übungen

Übung 12.7.7.9. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege zwischen zwei fest vorgegebenen Punkten. Hinweis: Verkleben stetiger Abbildungen **??**.

Übung 12.7.7.10. Ein Raum ist schleifenfüllend genau dann, wenn je zwei Wege mit demselben Anfangs- und demselben Endpunkt darin homotop sind.

Ergänzende Übung 12.7.7.11. Jeder Weg in einer offenen Teilmenge eines normierten reellen Vektorraums ist in besagter offener Teilmenge homotop zu einem stückweise linearen Weg. Hinweis: 12.7.5.4.

12.7.8 Wegintegrale über geschlossene Felder

Definition 12.7.8.1. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $A \subset X$ eine halboffene Teilmenge. Ein stetig differenzierbares Kovektorfeld $\omega : A \to \vec{X}^*$ heißt **geschlossen**, wenn an jeder Stelle $p \in A$ sein Differential $\mathrm{d}_p\omega : \vec{X} \to \vec{X}^*$ eine symmetrische Bilinearform auf $\vec{X}$ liefert im Sinne der Gleichheit von reellen Zahlen

$$(\mathrm{d}_p\omega)(\vec{v})(\vec{w}) = (\mathrm{d}_p\omega)(\vec{w})(\vec{v}) \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in \vec{X}$$

12.7.8.2 (**Diskussion der Terminologie**). Die Bezeichnung als „geschlossenes Kovektorfeld“ geht vermutlich auf den gleich folgenden Satz 12.7.8.8 zurück, nach dem ein stetig differenzierbares Kovektorfeld geschlossen ist genau dann, wenn seine Wegintegrale über alle geschlossenen und im Definitionsbereich zusammenziehbaren Wege verschwinden.

12.7.8.3 (**Rückwärtsverwandtschaft erhält Geschlossenheit**). Gegeben ein stetig differenzierbares geschlossenes Kovektorfeld ist, wie man leicht sieht, auch sein Rückwärtsverwandter unter jeder affinen Abbildung geschlossen.

Vorschau 12.7.8.4. Dasselbe zeigen wir in 12.8.5.11 sogar für Rückwärtsverwandte unter beliebigen zweimal stetig differenzierbaren Abbildungen.

Beispiel 12.7.8.5 (**Geschlossene Kovektorfelder auf** $\mathbb{R}^n$). Ein stetig differenzierbares Kovektorfeld $\omega = \sum u_i \, \mathrm{d}x_i$ auf einer offenen Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ ist geschlossen genau dann, wenn gilt

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j$$

In der Tat liefern unsere Definitionen in diesem Fall $(\mathrm{d}_p\omega)(\mathrm{e}_i)(\mathrm{e}_j) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p)$.

Beispiel 12.7.8.6 (**Differentiale sind stets geschlossen**). Gegeben eine zweimal stetig differenzierbare Funktion f auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums X ist ihr Differential $\mathrm{d}f$ stets geschlossen. In der Tat reicht es aufgrund unserer Erkenntnis 12.7.8.3, daß Rückwärtsverwandte geschlossener Kovektorfelder unter affinen Abbildungen wieder geschlossen sind, den Fall $X = \mathbb{R}^n$ zu betrachten. Für $\omega = \sum u_i \, \mathrm{d}x_i = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x_i = \mathrm{d}f$ gilt dann in der Tat wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen stets

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

und damit ist $\mathrm{d}f$ geschlossen nach 12.7.8.5. Nebenbei bemerkt sieht man leicht ein, daß die $\mathrm{d}_p(\mathrm{d}f)$ entsprechende symmetrische Bilinearform gerade das Doppelte des „quadratischen Anteils der Taylorentwicklung der Funktion f um p“ ist.

Vorschau 12.7.8.7. Später werden wir in 12.8.5.4 ganz allgemein die „äußere Ableitung von Differentialformen“ einführen. In dieser Terminologie sind dann unsere geschlossenen Kovektorfelder aus der vorhergehenden Definition 12.7.8.1 genau diejenigen differenzierbaren Kovektorfelder, deren „äußere Ableitung“ $d\omega$ verschwindet, die grob gesprochen definiert wird als der „antisymmetrische Anteil von $\mathrm{d}\omega$“. Daß Rückwärtsverwandschaft Geschlossenheit erhält, ist in diesem Kalkül eine unmittelbare Folgerung aus der Verträglichkeit von äußerer Ableitung mit Verwandtschaft 12.8.5.11.

Satz 12.7.8.8 (**Wegintegrale und Geschlossenheit von Kovektorfeldern**). *Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum. Für ein stetig differenzierbares Kovektorfeld $\omega : X \supseteq U \to \vec{X}^*$ sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Kovektorfeld ist geschlossen;*
2. *Die Wegintegrale unseres Kovektorfelds über je zwei in U homotope Integrationswege stimmen überein;*
3. *Das Wegintegral unseres Kovektorfelds über jeden in U zusammenziehbaren geschlossenen Integrationsweg verschwindet.*

12.7.8.9. Einen alternativen und besonders glatten Beweis des Satzes unter stärkeren Voraussetzungen geben wir in 12.8.7.29.

12.7.8.10 (**Beziehung zur Proposition über Wegintegral und Potential**). Unsere Proposition 12.7.6.2 zu Wegintegral und Potential oder besser ihre Erweiterung zu Integrationswegen im Laufe des Beweises besagt, daß gegeben eine offene Teilmenge U eines endlichdimensionalen reellen Raums und ein stetiges Kovektorfeld auf U gleichbedeutend sind:

1. Unser Kovektorfeld ist das Differential einer differenzierbaren Funktion;
2. Die Wegintegrale unseres Kovektorfelds über je zwei Integrationswege in U mit demselben Anfangs- und Endpunkt stimmen überein;
3. Das Wegintegral unseres Kovektorfelds über jeden geschlossenen Integrationsweg in U verschwindet.

Alle diese gleichbedeutenden Bedingungen sind stärker als die entsprechenden Bedingungen in unserem Satz 12.7.8.8 über Wegintegrale und die Geschlossenheit von Kovektorfeldern: Die erste, da nach 12.7.8.6 Differentiale, wenn sie stetig differenzierbare Kovektorfelder sind, stets geschlossen sein müssen, die anderen aus offensichtlichen Gründen.

Korollar 12.7.8.11 (Geschlossenheit und Potential). *Auf einer schleifenfüllenden offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums ist ein stetig differenzierbares Kovektorfeld genau dann geschlossen, wenn es das Differential einer differenzierbaren Funktion ist.*

Beweis. Für U schleifenfüllend und ein stetig differenzierbares Kovektorfeld ω auf U ist die letzte der äquivalenten Eigenschaften aus Satz 12.7.8.8, daß nämlich das Wegintegral über jeden in U zusammenziehbaren Integrationsweg in U verschwinden möge, gleichbedeutend zur letzten der äquivalenten Eigenschaften aus Proposition 12.7.6.2, daß nämlich das Wegintegral über jeden geschlossenen Integrationsweg in U verschwinden möge. Mithin sind für U schleifenfüllend alle sechs Eigenschaften aus 12.7.8.8 und 12.7.6.2 gleichbedeutend. Insbesondere ist unter dieser Voraussetzung jedes stetig differenzierbare geschlossene Kovektorfeld auf U das Differential einer Funktion. □

12.7.8.12 (**Übersetzung in Aussagen über Gradientenfelder**). Für $U \Subset \mathbb{R}^n$ schleifenfüllend besagt Korollar 12.7.8.11 in der Terminologie der Gradientenfelder, daß ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v = (v_1, \ldots, v_n) : U \to \mathbb{R}^n$ genau dann das Gradientenfeld einer differenzierbaren Funktion ist, wenn gilt

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j$$

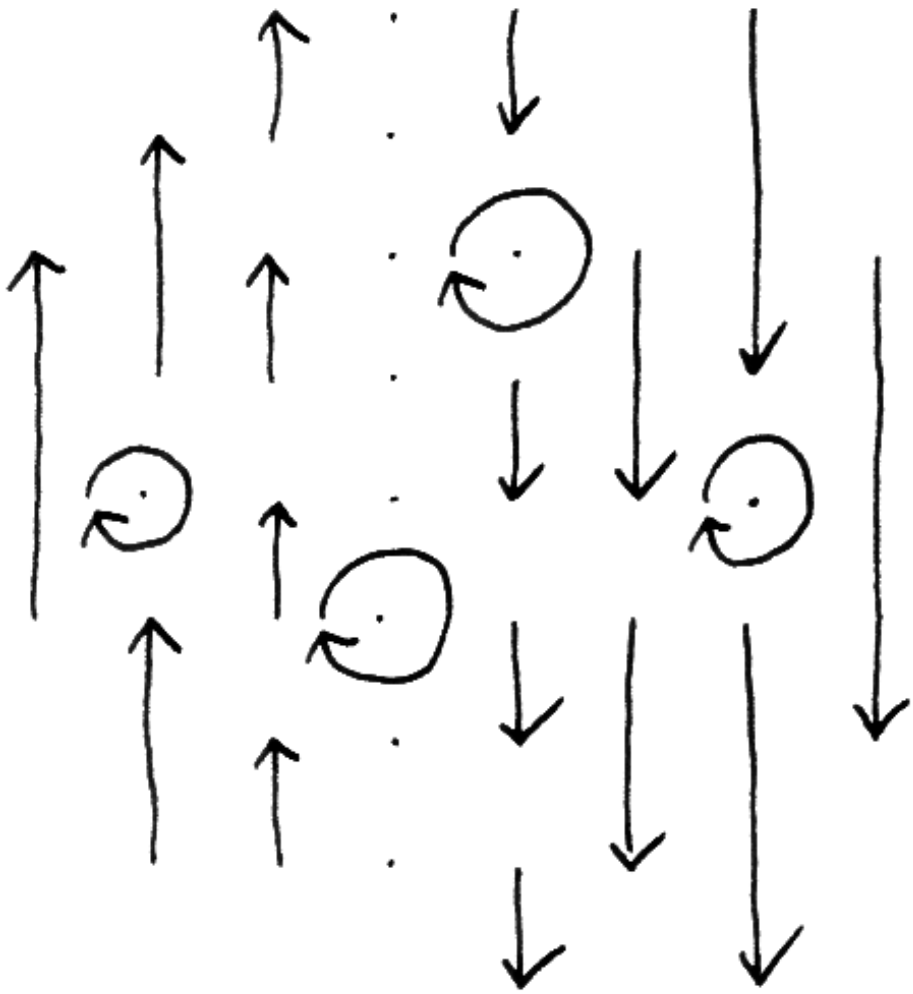
Insbesondere ist für $n = 1$ jedes stetig differenzierbare Vektorfeld ein Gradientenfeld, aber in diesem Fall wissen wir bereits stärker, daß sogar jede stetige Funktion eine Stammfunktion hat. Weiter ist für $n = 2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld v genau dann ein Gradientenfeld, wenn seine **skalare Rotation** alias **Wirbeldichte** $\operatorname{rot} v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ verschwindet. Und schließlich ist für $n = 3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld v genau dann ein Gradientenfeld, wenn seine **Rotation** verschwindet, die man in diesem Falle definiert als das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \, , \, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \, , \, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

Um für das Konzept der Rotation von Vektorfeldern in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ eine Anschauung zu entwickeln, mag man sich unser Vektorfeld v als ein Kraftfeld vorstellen. Läßt man im ebenen Fall $n = 2$ dieses Kraftfeld auf den Rand einer kleinen Kreisscheibe wirken, die an einer Stelle unserer Ebene drehbar befestigt ist, so beginnt sie sich zu drehen. Drehsinn und Drehmoment geteilt durch die Fläche der Kreisscheibe entsprechen Vorzeichen und Betrag der skalaren Rotation. Läßt man im räumlichen Fall dieses Kraftfeld auf die Oberfläche eines kleinen Bällchens wirken, den man an einer Stelle p hineinhält, so beginnt auch er sich zu drehen. Die Drehachse ist dann die von der Rotation unseres Vektorfeldes bei p erzeugte Gerade und Drehsinn sowie Drehmoment geteilt durch die Fläche der vom Äquator berandeten Kreischeibe zu unserem Bällchen entsprechen Richtung und Länge der Rotation. Allgemeiner kann man die Rotation eines Vektorfelds definieren und geometrisch interpretieren wie oben angedeutet, wenn X zwei- oder dreidimensional ist und $\vec{X}$ versehen mit einem ausgezeichneten Skalarprodukt und im dreidimensionalen Fall zusätzlich mit einer ausgezeichneten Orientierung.

Beweis von Satz 12.7.8.8. Die Implikation 2⇒3 ist offensichtlich. Um 3⇒1 zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß U konvex ist. Dann ist in U jeder geschlossene Weg zusammenziehbar und unsere Erkenntnisse zu Wegintegral und Potential 12.7.6.2 zeigen, daß unser Kovektorfeld auf besagter konvexer Teilmenge das Differential $\omega = \mathrm{d}f$ einer differenzierbaren Funktion sein muß. Solch ein Differential aber ist nach 12.7.8.6 stets geschlossen. Alternativ können wir die Implikation 3⇒1 auch leicht aus Übung 12.7.8.19 herleiten. Damit bleibt nur noch 1⇒2 zu zeigen, daß also für jedes stetig differenzierbare geschlossene Kovektorfeld seine Wegintegrale über homotope Wege übereinstimmen. Wir beginnen unseren Beweis von 1⇒2, indem wir ein Korollar unseres Satzes als Lemma formulieren und dafür einen eigenständigen Beweis geben.

Lemma 12.7.8.13. *Ist $U \Subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kugel und ω darauf ein stetig differenzierbares geschlossenes Kovektorfeld, so ist ω das Differential einer Funktion $f : U \to \mathbb{R}$.*



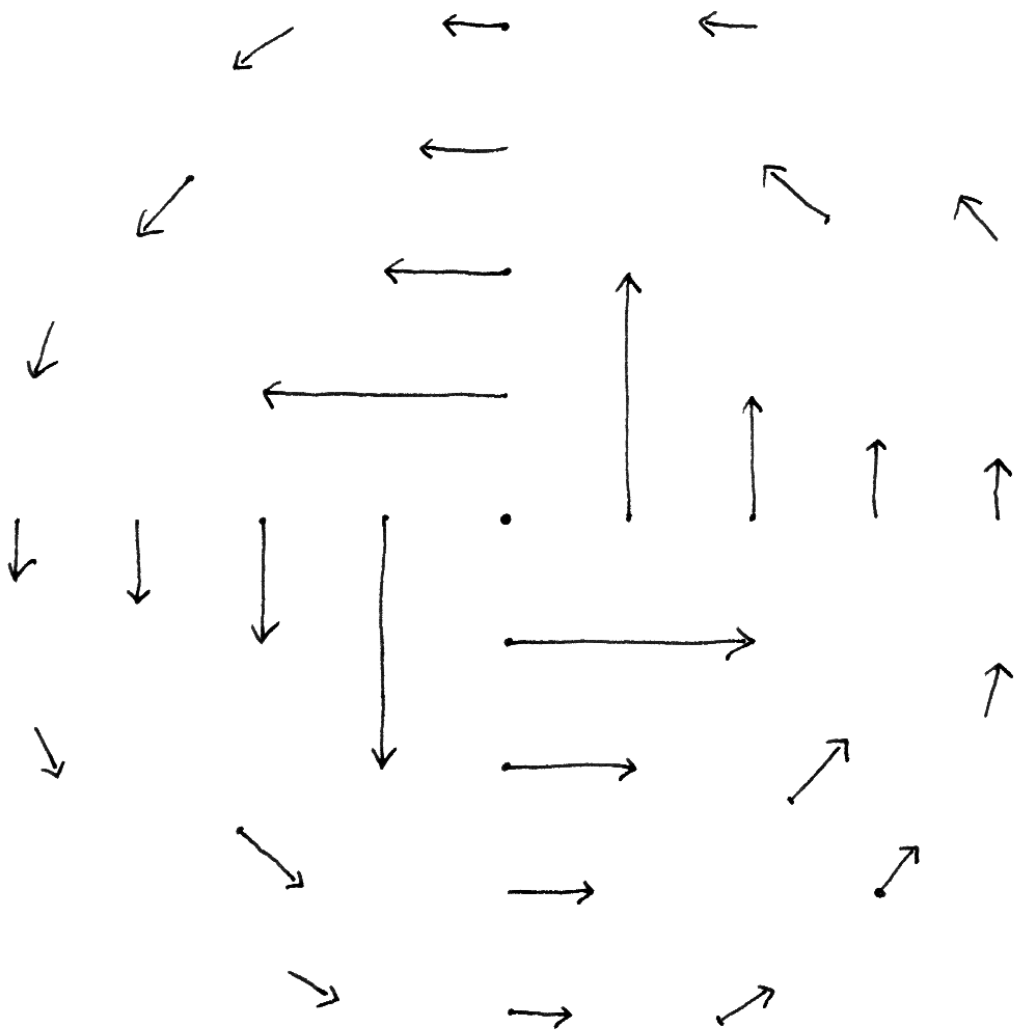
Das ebene Vektorfeld $(x, y) \mapsto (0, -x)$ hat konstant die Rotation -1.

12.7.8.14. Ich gebe für dies Lemma zwei Beweise: Erst einen sehr kurzen mehr rechnerischen Beweis und im Anschluß einen etwas längeren mehr konzeptionellen Beweis.

Beispiel 12.7.8.15. Daß ein rotationsfreies Vektorfeld auf einer nicht einfach wegzusammenhängenden offenen Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ nicht notwendig ein Potential besitzt, zeigt das Vektorfeld $\operatorname{grad}\theta$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, wo $\theta(x,y)$ der eben nur bis auf eine additive Konstante wohlbestimmte Winkel ist, den der Strahl vom Nullpunkt nach (x,y) mit der horizontalen Koordinatenachse einschließt. Der Gradient $\operatorname{grad}\theta$ ist dann ein wohldefiniertes rotationsfreies Vektorfeld auf dem Komplement des Ursprungs, hat aber kein global definiertes Potential. Es heißt das **Winkelfeld**. Dies Vektorfeld ist nicht ganz leicht zu zeichnen, da die Längen seiner Vektoren gegen den Ursprung hin ins Unendliche wachsen. Auf den ersten Blick mag es absurd wirken, dieses Feld wirbelfrei zu nennen. Eine außerhalb des Ursprungs zum Testen hereingelegte kleine Kreisscheibe würde aber in der Tat nicht gedreht, die stärkeren Vektoren zerren zwar an der dem Ursprung zugewandten Seite, aber von diesen Vektoren greifen andererseits auch weniger an. In gewisser Weise konzentriert sich hier das gesamte Wirbeln im Ursprung, und der gehört nun eben gerade nicht zu unserem Definitionsbereich. In mathematischer Sprechweise ist $\mathrm{d}\vartheta$ ein geschlossenes Kovektorfeld auf der punktierten Ebene, das jedoch nicht das Differential einer global definierten Funktion ist. Anschaulich mag man sich das Winkelfeld als das „Steigungsfeld einer Wendeltreppe“ denken, bei dem auf dem Boden unter einer Wendeltreppe an jeder Stelle eingezeichnet wird, in welcher Richtung es auf der Wendeltreppe darüber am steilsten hochgeht und wie steil es da hochgeht.

Rechnerischer Beweis. Sei $\omega = \sum u_j \,\mathrm{d}x_j$. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 \in U$ annehmen. Wir bezeichnen nun mit $x \in U \Subset \mathbb{R}^n$ einen Punkt und betrachten den Weg $\psi_x : [0,1] \to U, t \mapsto tx$ und die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \int_{\psi_x} \omega = \int_0^1 \omega_{tx}(x)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{j=1}^n u_j(tx) \cdot x_j \,\mathrm{d}t$$



Ein rotationsfreies Vektorfeld ohne Potential auf der punktierten Ebene.

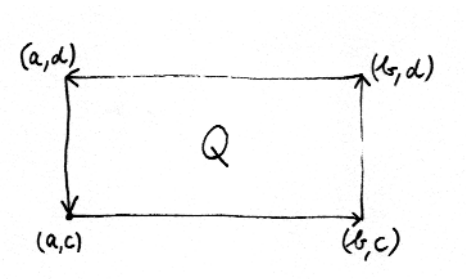
Ihre partielle Ableitung nach x_i ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) &= \textstyle\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i}|_{x=p} \left(\sum_{j=1}^n (u_j \circ (t\cdot)) \cdot x_j\right) \mathrm{d}t \\
&= \textstyle\int_0^1 \sum_{j=1}^n t \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(tp) \cdot p_j + u_i(tp)\,\mathrm{d}t \\
&= \textstyle\int_0^1 \sum_{j=1}^n t \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(tp) \cdot p_j + u_i(tp)\,\mathrm{d}t \\
&= \textstyle\int_0^1 t \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_i(tp)) + u_i(tp)\,\mathrm{d}t \\
&= \textstyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t \cdot (u_i(tp))\,\mathrm{d}t \\
&= t \cdot u_i(tp)\,|_0^1 \\
&= u_i(p)
\end{aligned}$$

und wir sehen, daß in der Tat gilt $\mathrm{d}f = \omega$. □

Konzeptioneller Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall $n = 2$ als eigenständiges Lemma.

Lemma 12.7.8.16. *Ist $U \Subset \mathbb{R}^2$ eine ebene Kreisscheibe und ω darauf ein stetig differenzierbares geschlossenes Kovektorfeld, so ist ω das Differential einer Funktion $f : U \to \mathbb{R}$.*



Das Rechteck aus dem Beweis von 12.7.8.16.

Beweis. Um Indizes zu vermeiden schreiben wir bei der Behandlung dieses Spezialfalls (x, y) statt (x_1, x_2) in der Hoffnung, durch das Einsparen von Indizes mehr an Klarheit zu schaffen als durch die Verwendung der Buchstaben x, y mit verschiedenen Bedeutungen an Verwirrung. Betrachten wir ein Rechteck $Q := [a, b] \times [c, d] \subset U$ und integrieren unser Kovektorfeld einmal im Gegenuhrzeigersinn auf dem Rand entlang, den wir dazu als einen Weg ρ parametrisieren, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_\rho \omega &= \textstyle\int_a^b u_1(x, c)\,\mathrm{d}x + \int_c^d u_2(b, y)\,\mathrm{d}y - \int_a^b u_1(x, d)\,\mathrm{d}x - \int_c^d u_2(a, y)\,\mathrm{d}y \\
&= \textstyle\int_c^d \int_a^b \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Für ein stetig differenzierbares geschlossenes Kovektorfeld verschwindet also das Wegintegral einmal um den Rand unseres Rechtecks und der „obere“ beziehungsweise der „untere“ Weg auf den Kanten des Rechtecks von einem Punkt zum diagonal gegenüberliegenden Punkt liefern dasselbe Wegintegral. Halten wir nun einen Punkt $(p,q) \in U$ fest, so liefert dieses gemeinsame Wegintegral eine Funktion

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_p^x u_1(t,q)\,\mathrm{d}t + \int_q^y u_2(x,s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_q^y u_2(p,s)\,\mathrm{d}s + \int_p^x u_1(t,y)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Für diese Funktion gilt wegen der ersten Darstellung offensichtlich $f_y = u_2$ und wegen der zweiten Darstellung $f_x = u_1$. Damit gilt $\omega = \mathrm{d}f$ wie behauptet. □

Jetzt führen wir unseren konzeptionellen Beweis des Lemmas im Fall allgemeiner Dimension zu Ende. Wir betrachten dazu alle Wege, die längs der Kanten eines achsenparallelen Quaders vom Ursprung nach p laufen. Genauer betrachten wir für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ den Weg $[\sigma] = [\sigma; p]$ vom Ursprung nach p, der gerade verläuft zwischen den Eckpunkten

$$0,\ p_{\sigma(1)}\vec{\mathrm{e}}_{\sigma(1)},\ p_{\sigma(1)}\vec{\mathrm{e}}_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)}\vec{\mathrm{e}}_{\sigma(2)},\ \ldots,\ p$$

Ist $\tau = (i, i+1)$ eine Transposition benachbarter Zahlen, so unterscheiden sich $[\sigma]$ und $[\sigma \circ \tau]$ nur dadurch, daß sie beim i-ten und $(i+1)$-ten Geradenstück auf verschiedenen Kantenwegen diagonal gegenüberliegende Punkte eines ebenen Rechtecks verbinden. Ziehen wir unser Kovektorfeld auf eine geeignete Ebene zurück, so landen wir im bereits behandelten Fall und folgern

$$\int_{[\sigma]} \omega = \int_{[\sigma\circ\tau]} \omega$$

für jede Transposition τ der Gestalt $\tau = (i, i+1)$. Wissen wir nun bereits nach 3.6.1.8, daß derartige Transpositionen die symmetrische Gruppe erzeugen, so können wir sofort folgern, daß $\int_{[\sigma]} \omega$ gar nicht von $\sigma \in \mathcal{S}_n$ abhängt. Die durch

$$f(p) = \int_{[\sigma;p]} \omega$$

für ein und alle σ definierte Funktion f hat dann Differential $\mathrm{d}f = \omega$, da ihre partielle Ableitung nach x_i auch aus jeder Darstellung durch ein σ mit $\sigma(n) = i$ berechnet werden kann, für die $\frac{\partial f}{\partial x_i} = u_i$ offensichtlich ist. □

Jetzt können wir schließlich in unserem Satz 12.7.8.8 auch noch die Implikation 1⇒2 zeigen, daß also bei stetig differenzierbaren geschlossenen Kovektorfeldern die Wegintegrale über homotope Integrationswege übereinstimmen. Sei

$h : [0,1]^2 \to U$ eine Homotopie zwischen unseren beiden Integrationswegen, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit normiert annehmen dürfen. Analog wie beim Beweis von 12.7.5.4 zeigen wir mithilfe von **??** und 10.5.1.5, daß es für den Abstand von Punkten aus dem Bild unseres Einheitsquadrats und Punkten außerhalb von U eine positive untere Schranke gibt. Da h nach 10.5.1.15 gleichmäßig stetig ist, finden wir weiter ein $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ derart, daß bei Unterteilung des Einheitsquadrats in r^2 kleine Schachfelder der Kantenlänge $1/r$ die einzelnen Felder unter h jeweils ganz in einen offenen Ball in U abgebildet werden. Jetzt betrachten wir die Integrale längs der Geradensegmente zwischen den Bildern in U von benachbarten Ecken unserer Schachfelder

$$c_{i,j} = \int_{h\left(\frac{i}{r},\frac{j}{r}\right)}^{h\left(\frac{i+1}{r},\frac{j}{r}\right)} \omega \quad \text{und} \quad d_{i,j} = \int_{h\left(\frac{i}{r},\frac{j}{r}\right)}^{h\left(\frac{i}{r},\frac{j+1}{r}\right)} \omega$$

Indem wir unsere Erkenntnisse zur Existenz einer Stammfunktion Lemma 12.7.8.13 zusammen mit Proposition 12.7.6.2 auf unsere offenen Bälle in U anwenden, finden wir $c_{i,j} + d_{i+1,j} - d_{i,j} - c_{i,j+1} = 0$ und durch Aufsummieren

$$\sum_{0\leq i<r} c_{i,0} + \sum_{0\leq j<r} d_{r,j} - \sum_{0\leq j<r} d_{0,j} - \sum_{0\leq i<r} c_{i,r} = 0$$

Indem wir nochmals Lemma 12.7.8.13 auf unsere offenen Bälle anwenden sehen wir dann weiter, daß diese vier Summen jeweils den Wegintegralen von ω über die durch die vier Kanten unseres Quadrats gegebenen Wege gleichen. Zwei von diesen Wegen sind eh konstant und die übrigen sind eben gerade die beiden homotopen Integrationswege, von denen wir ausgegangen waren. □

Satz 12.7.8.17 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante komplexe Polynom besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Ergänzung 12.7.8.18. Einen Überblick über die gängigsten alternativen Beweise mit ihren Stärken und Schwächen gebe ich in 3.5.3.25. Einen recht elementaren analytischen Beweis hatten wir bereits in 10.5.1.7 gesehen.

Beweis. Sei $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ unser Polynom. Wir argumentieren durch Widerspruch und betrachten für jeden Radius $r > 0$ den geschlossenen Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = r\cos t + \mathrm{i}r\sin t$, der einmal auf dem Kreis mit Radius r umläuft. Nach 12.7.7.4 ist er in $\mathbb{C}$ zusammenziehbar. Hätte unser Polynom keine Nullstelle, so lieferte es eine stetige Abbildung $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$, und nach 12.7.7.5 wären alle $P \circ \gamma_r$ zusammenziehbar in $\mathbb{C}^\times$. Für hinreichend großes r gilt nun jedoch $r^n > |a_{n-1}|r^{n-1} + \ldots + |a_1|r + |a_0|$, und für solche r ist der Weg $P \circ \gamma_r$ in $\mathbb{C}^\times$ homotop zum Weg $t \mapsto \gamma_r(t)^n$, da nämlich für kein t die Strecke von $P(\gamma_r(t))$ nach $\gamma_r(t)^n$ den Nullpunkt trifft. Hätte also P keine Nullstelle, so wäre der Weg $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}^\times$, $t \mapsto \gamma_r(t)^n$ zusammenziehbar in $\mathbb{C}^\times$. Das steht jedoch im Widerspruch zu Übung 12.7.8.20. □

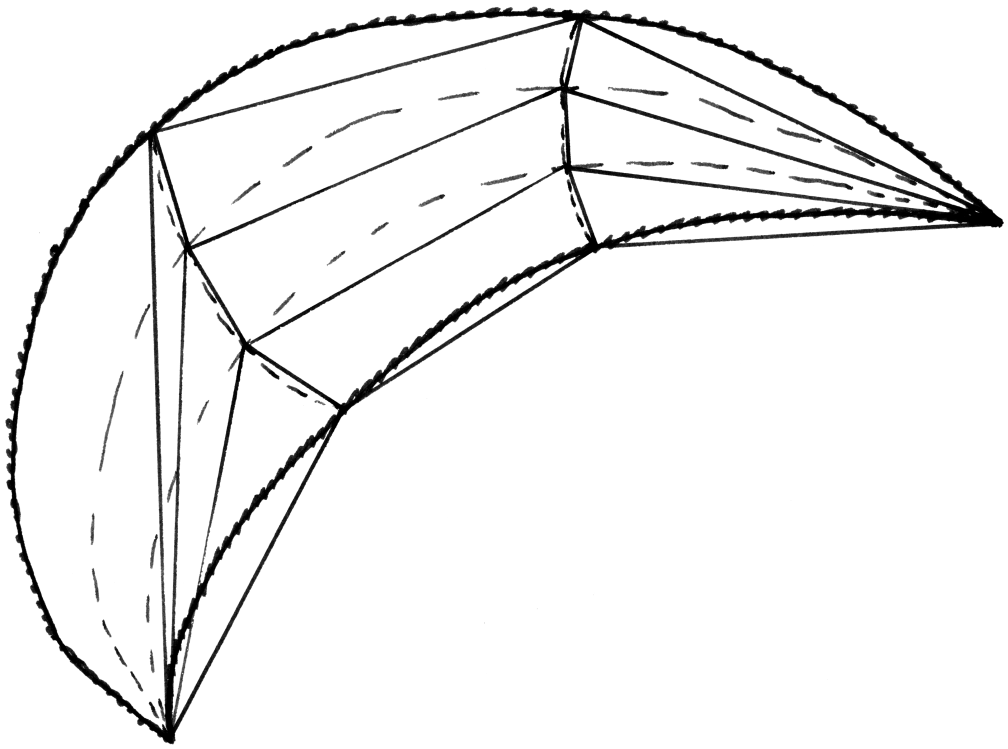
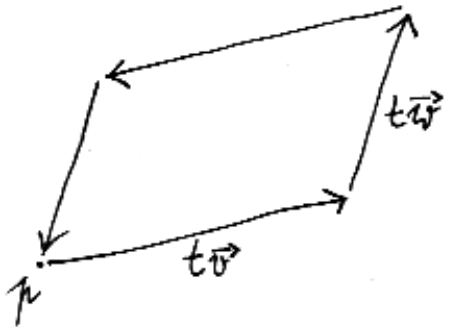


Illustration zum Beweis von Satz 12.7.8.8 über die Homotopieinvarianz von Wegintegralen bei gewissen Kovektorfeldern. Die beiden Wege werden durch dicke gezackte Linien dargestellt, die Homotopie zwischen ihnen durch feine gestrichelte Linien. Es gilt, diese Unterteilung so fein zu wählen, daß jeder dieser „Ziegel“ ganz in einem im Definitionsbereich unserer geschlossenen Differentialform enthaltenen Ball liegt.

Übungen



Der Weg $\gamma(p, t\vec{v}, t\vec{w})$ aus Übung 12.7.8.19. Mit $t \to 0$ wird er natürlich immer kleiner.

Übung 12.7.8.19. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $A \Subset X$ eine offene Teilmenge, $p \in A$ ein Punkt und $\omega : A \to \vec{X}^*$ ein stetig differenzierbares Kovektorfeld. So gilt in den Notationen der vorhergehenden Definition 12.7.8.1 für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{X}$ die Identität

$$(\mathrm{d}_p\omega)(\vec{v})(\vec{w}) - (\mathrm{d}_p\omega)(\vec{w})(\vec{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} \int_{\gamma(p,t\vec{v},t\vec{w})} \omega$$

mit der Notation $\gamma(p, t\vec{v}, t\vec{w})$ für den Weg, der einmal das Parallelogramm mit einer Ecke p und Kantenvektoren $t\vec{v}$ und $t\vec{w}$ umläuft, oder genauer, der stückweise linear läuft erst von p nach $p+t\vec{v}$, dann weiter nach $p+t\vec{v}+t\vec{w}$, von da nach $p+t\vec{w}$, und dann wieder zurück nach p. Hinweis: Es mag die Rechnung vereinfachen, wenn man das fragliche Integral zu einer Funktion von zwei Veränderlichen s, t erweitert.

Übung 12.7.8.20. Man zeige, daß gegeben $n \in \mathbb{Z}$ der geschlossene Weg in der punktierten Ebene $\gamma_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\backslash 0$ mit $\gamma(t) = (\cos nt, \sin nt)$ in $\mathbb{R}^2\backslash 0$ nur für $n = 0$ zusammenziehbar ist. Hinweis: Man berechne das Integral des Winkelfeldes über diesen Weg und beachte 12.7.8.8. Ich empfinde es allerdings als Umweg, diese Aussage mithilfe von Wegintegralen nachzuweisen, und ziehe den topologischen Beweis über Liftungseigenschaften in 16.1.3 folgende vor.

Ergänzende Übung 12.7.8.21. Gegeben ein Rechteck $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ und darauf ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v : Q \to \mathbb{R}^2$ stimmt das Integral seiner Wirbeldichte alias skalaren Rotation $\operatorname{rot} v$ über das Rechteck Q überein mit seinem Wegintegral als Vektorfeld einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Rand des Rechtecks. In 12.8.7.26 werden wir diese Aussage als Spezialfall des allgemeinen Stokes'schen Satzes zu verstehen lernen.

12.8 Integralsatz von Stokes

In Abschnitt 12.4.5.1 haben wir unser Kurvenintegral aus 10.7.1.23 verallgemeinert zum Integral einer Funktion über eine Fastfaltigkeit in einem $\mathbb{R}^n$. In diesem Abschnitt werden wir unser Wegintegral aus 12.7.4, als da heißt das Integral eines Kovektorfelds auf einem endlichdimensionalen reellen Raum längs eines Weges, verallgemeinern zum Integral einer „Differentialform“ auf einem endlichdimensionalen reellen Raum über eine „orientierte“ Fastfaltigkeit. Als Spezialfälle enthält diese Konstruktion inbesondere die Definition des „Flusses eines Vektorfelds in $\mathbb{R}^3$ durch eine orientierte Fläche in $\mathbb{R}^3$“. Unser eigentliches Ziel ist dann der sogenannte „allgemeine Satz von Stokes“ 12.8.7.2, der den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 10.5.7.1 auf höhere Dimensionen verallgemeinert.

12.8.1 Alternierende Formen und Dachprodukt

Definition 12.8.1.1. Sei k ein Körper. Gegeben ein k-Vektorraum V und eine natürliche Zahl p bilden wir den Raum der **alternierenden p-Multilinearformen** oder kurz **p-Formen**

$$\operatorname{Alt}^p V := \{\omega : V \times \ldots \times V \to k \mid \omega \text{ ist multilinear und alternierend}\}$$

Hier meint alternierend wie in 3.6.3.1, daß $\omega(v_1, \ldots, v_p)$ verschwindet wann immer es $i \neq j$ gibt mit $v_i = v_j$.

12.8.1.2. Hat unser Körper nicht die Charakteristik 2, so mag man gleichbedeutend fordern, daß $\omega(v_1, \ldots, v_p)$ sein Vorzeichen ändert, wenn man zwei Einträge v_i und v_j vertauscht. Daher kommt die Bezeichnung „alternierend“. Unter Nullformen verstehen wir Skalare, in Formeln setzen wir also $\operatorname{Alt}^0 V = k$. Einsformen sind Elemente des Dualraums alias Linearformen, wir haben also $\operatorname{Alt}^1 V = V^\top$. Gegeben Linearformen $f_1, \ldots, f_p \in V^\top$ erklären wir $\operatorname{alt}(f_1, \ldots, f_p) \in \operatorname{Alt}^p V$ durch die Vorschrift

$$\operatorname{alt}(f_1, \ldots, f_p)(v_1, \ldots, v_p) := \det(f_i(v_j))$$

Wir nennen es bis auf weiteres das „Determinantenprodukt“ der f_i.

12.8.1.3. Wir werden unmittelbar im Anschluß das Dachprodukt von alternierenden Multilinearformen einführen und dessen Assoziativität beweisen ebenso wie die Formel $\operatorname{alt}(f_1, \ldots, f_p) = f_1 \wedge \ldots \wedge f_p$. Sobald das geleistet ist, wird die Notation $\operatorname{alt}(f_1, \ldots, f_p)$ obsolet und statt „Determinantenprodukt“ dürfen und werden wir „iteriertes Dachprodukt“ sagen.

Vorschau 12.8.1.4 (**Bezug zur äußeren Algebra**). Im Rahmen unserer Diskussion des Tensorprodukts werden die Begriffsbildungen dieses Abschnitts auch noch unter einem anderen Gesichtspunkt besprochen. Genauer konstruieren wir in 4.6.5.3 einen kanonischen Isomorphismus $\operatorname{Alt}^p \xrightarrow{\sim} (\bigwedge^p V)^\top$ zwischen dem hier definierten Raum der alternierenden Multilinearformen auf V und dem Dualraum der dort definierten p-ten äußeren Potenz $\bigwedge^p V$ von V. Zusätzlich erklären wir in 4.6.5.6 für endlichdimensionales V kanonische Isomorphismen $(\bigwedge^p V)^\top \xrightarrow{\sim} \bigwedge^p(V^\top)$ zwischen den Dualräumen der äußeren Potenzen und den äußeren Potenzen des Dualraums und erhalten so zusammen endlichdimensionales V einen kanonischen Isomorphismus $\operatorname{Alt}^p V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^p(V^\top)$.

12.8.1.5. Sind Linearformen $f_1, \ldots, f_n \in V^\top$ gegeben und ist $I \subset \{1, \ldots, n\}$ eine Teilmenge mit p Elementen, so setzen wir

$$f_I := \operatorname{alt}(f_{i_1}, \ldots, f_{i_p}) \in \operatorname{Alt}^p V$$

für das entsprechende Determinantenprodukt der Basisvektoren mit $i_1 < \ldots < i_p$ den der Größe nach gereihten Elemente von I. Für $I = \emptyset$ vereinbaren wir $f_\emptyset = 1$.

Proposition 12.8.1.6 (**Basis des Raums der p-Formen**). *Ist V ein Vektorraum und $f_1, \ldots, f_n$ eine Basis seines Dualraums $V^\top$, so bilden die Determinantenprodukte f_I mit $|I| = p$ eine Basis von $\operatorname{Alt}^p V$.*

12.8.1.7. Für einn n-dimensionalen Vektorraum V gilt also $\dim \operatorname{Alt}^n V = 1$ und $\operatorname{Alt}^p V = 0$ für $p > n$.

Beweis. Ist $v_1, \ldots, v_n$ die duale Basis von V und ist auch $J = \{j_1, \ldots, j_p\} \subset \{1, \ldots, n\}$ gegeben mit $j_1 < \ldots < j_p$, so gilt offensichtlich

$$f_I(v_{j_1}, \ldots, v_{j_p}) = \begin{cases} 1 & I = J; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das zeigt die lineare Unabhängigkeit der f_I. Andererseits ist klar, daß eine alternierende Multilinearform schon festgelegt wird durch ihre Werte auf den p-Tupeln $(v_{j_1}, \ldots, v_{j_p})$ mit $j_1 < \ldots < j_p$. Das zeigt, daß die f_I auch $\operatorname{Alt}^p V$ erzeugen. $\square$

12.8.1.8. Im Vorgriff auf unsere zukünftige Notation $f_1 \wedge \ldots \wedge f_p$ für $\operatorname{alt}(f_1, \ldots, f_p)$ ist im Fall eines Vektorraums V der Dimension $\dim V = 4$ also $\operatorname{Alt}^2 V$ ein Vektorraum der Dimension $\dim(\operatorname{Alt}^2 V) = 6$ und für $f_1, \ldots, f_4 \in V^*$ eine Basis seines Dualraums ist $f_1 \wedge f_2, f_1 \wedge f_3, f_1 \wedge f_4, f_2 \wedge f_3, f_2 \wedge f_4, f_3 \wedge f_4$ eine Basis von $\operatorname{Alt}^2 V$.

Proposition 12.8.1.9. *Seien k ein Körper, V ein k-Vektorraum endlicher Dimension und $p, q \geq 0$. So gibt es genau eine bilineare Abbildung, das* **Dachprodukt**

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Alt}^p V \times \operatorname{Alt}^q V & \to & \operatorname{Alt}^{p+q} V \\ (\omega \quad , \quad \eta) & \mapsto & \omega \wedge \eta \end{array}$$

derart, daß für alle $f_1, \ldots, f_{p+q} \in V^\top$ gilt

$$\operatorname{alt}(f_1, \ldots, f_p) \wedge \operatorname{alt}(f_{p+1}, \ldots, f_{p+q}) = \operatorname{alt}(f_1, \ldots, f_p, f_{p+1}, \ldots, f_{p+q})$$

12.8.1.10. Mit 12.8.1.6 folgt unmittelbar die **Assoziativität des Dachprodukts**

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \xi = \omega \wedge (\eta \wedge \xi)$$

Damit brauchen wir auch bei längeren Dachprodukten keine Klammern zu setzen und unsere Notation „alt“ wird obsolet, denn offensichtlich folgt aus der Proposition auch

$$\operatorname{alt}(f_1, \ldots, f_p) = f_1 \wedge \ldots \wedge f_p$$

Vorschau 12.8.1.11. Die vorhergehende Definition ist unnötig einschränkend. Man kann durchaus auch im unendlichdimensionalen Fall sinnvoll ein Dachprodukt von alternierenden Formen erklären, vergleiche **??**, aber die damit verbundenen Komplikationen möchte ich hier vermeiden.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt sofort aus 12.8.1.6 und nur die Existenz ist noch zu zeigen. Wir betrachten dazu die Menge $\mathcal{S}_{p,q} \subset \mathcal{S}_{p+q}$ aller Permutationen, die die Reihenfolge der ersten p Einträge und die der letzten q Einträge unverändert lassen. Stellen wir uns unsere Permutationen als Mischvorschriften für ein Spiel von $p + q$ Karten vor, so heben wir also p Karten ab und schieben die beiden so gebildeten Stapel von p beziehungsweise q Karten irgendwie ineinander. Solche Permutationen heißen auch (p, q)**-Shuffles**, in Formeln haben wir

$$\mathcal{S}_{p,q} = \{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q} \mid \sigma(1) < \ldots < \sigma(p) \text{ und } \sigma(p+1) < \ldots < \sigma(p+q)\}$$

Weiter betrachten wir in $\mathcal{S}_{p+q}$ die Untergruppe $\mathcal{S}_p \boxtimes \mathcal{S}_q$ aller Permutationen, die die ersten p Einträge unter sich vertauschen und die letzten q Einträge ebenso. Die Verknüpfung von Permutationen liefert dann offensichtlich eine Bijektion

$$\mathcal{S}_{p,q} \times (\mathcal{S}_p \boxtimes \mathcal{S}_q) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{p+q}$$

Jetzt definieren wir für ω und η wie oben eine Multilinearform $\omega \wedge \eta$ durch die Vorschrift

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{p+q}) := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p,q}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})\, \eta(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})$$

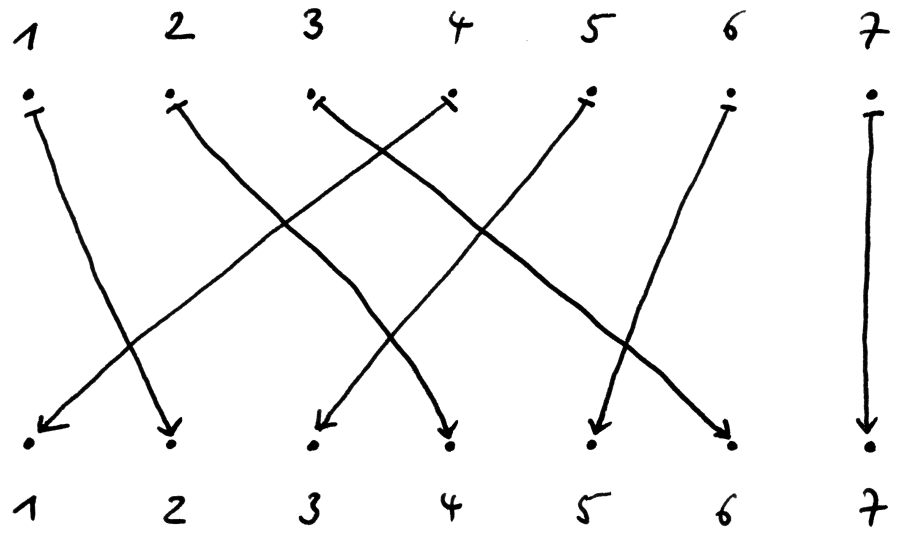
Betrachten wir nun unsere Definition des Determinantenprodukts, die wir nach der Leibnizformel schreiben können als

$$\operatorname{alt}(f_1, \ldots, f_n)(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\tau) f_1(v_{\tau(1)}) \ldots f_n(v_{\tau(n)})$$

Setzen das mit $n = p, q$ in unsere Definition von $\wedge$ ein, so ergibt sich mithilfe der Bijektion $\mathcal{S}_{p,q} \times (\mathcal{S}_p \boxtimes \mathcal{S}_q) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{p+q}$ wie gewünscht

$$\operatorname{alt}(f_1, \ldots, f_p) \wedge \operatorname{alt}(f_{p+1}, \ldots, f_{p+q}) = \operatorname{alt}(f_1, \ldots, f_p, f_{p+1}, \ldots, f_{p+q})$$

Die Bilinearität von $\wedge$ zeigt dann weiter, daß die Multilinearform $\omega \wedge \eta$ auch im allgemeinen alternierend ist, so daß unsere Formel für $\wedge$ in der Tat eine Abbildung $\operatorname{Alt}^p V \times \operatorname{Alt}^q V \to \operatorname{Alt}^{p+q} V$ mit den geforderten Eigenschaften liefert. $\square$



Ein $(3, 4)$-Shuffle

Lemma 12.8.1.12 (Graduierte Kommutativität des Dachprodukts). *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Für beliebige $\omega \in \operatorname{Alt}^p V$ und $\eta \in \operatorname{Alt}^q V$ gilt $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$. Bezeichnet $|\omega|$ den Grad von ω, also $|\omega| = p$ für $\omega \in \operatorname{Alt}^p$, so können wir diese Regel auch schreiben in der Gestalt*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{|\omega||\eta|} \eta \wedge \omega$$

Beweis. Aus 12.8.1.9 folgt sofort $f_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge f_{\sigma(n)} = (\operatorname{sgn} \sigma) f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$ für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ und alle $f_1, \ldots, f_n \in V^\top$. Die Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{p+q}$, die die ersten p Einträge an den Schluß schiebt und die letzten q Einträge an den Anfang, hat aber nach 3.6.1.3 das Signum $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{pq}$. Das Lemma folgt so zunächst für ω, η iterierte Dachprodukte und dann auch für allgemeine endlichdimensionale Räume. □

12.8.1.13 (**Funktorialität alternierender Multilinearformen**). Zu jeder linearen Abbildung $L : V \to W$ bilden wir wie in 3.2.9.13 ihre transponierte Abbildung $L^\top : W^\top \to V^\top$, $f \mapsto f \circ L$ und allgemeiner auch die linearen Abbildungen

$$\begin{array}{rccl} L^\top : & \operatorname{Alt}^p W & \to & \operatorname{Alt}^p V \\ & \omega & \mapsto & \omega \circ (L \times \ldots \times L) \end{array}$$

mit $L \times \ldots \times L$ wie in 3.1.3.5 alias $(L^\top \omega)(v_1, \ldots, v_p) = \omega(Lv_1, \ldots, Lv_p)$. Wir nennen auch sie **transponierte Abbildungen**. Aus den Definitionen folgen leicht die Formeln $\operatorname{id}^\top = \operatorname{id}$ und $(L \circ M)^\top = M^\top \circ L^\top$ für die transponierten Abbildungen sowie die Verträglichkeit mit dem Dachprodukt

$$L^\top(\omega \wedge \eta) = (L^\top \omega) \wedge (L^\top \eta)$$

Ergänzung 12.8.1.14. In der Sprache der Kategorientheorie 4.7.2.1 ausgedrückt bilden demnach für jedes p die Zuordnungen $V \mapsto \operatorname{Alt}^p V$, $L \mapsto L^\top$ einen kontravarianten Funktor Alt^p von der Kategorie der k-Vektorräume in sich selber, dessen Effekt auf Morphismen ich nur der Bequemlichkeit der Notation halber $L \mapsto L^\top$ statt $L \mapsto \operatorname{Alt}^p(L)$ notiert habe, und $V \mapsto \operatorname{Alt} V := \bigoplus_p \operatorname{Alt}^p V$ ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der k-Vektorräume in die Kategorie der k-Ringalgebren.

Lemma 12.8.1.15 (**Dachprodukt und Determinante**). *Gegeben ein n-dimensionaler Vektorraum V und eine lineare Abbildung $L : V \to V$ gilt*

$$L^\top = (\det L) : \operatorname{Alt}^n V \to \operatorname{Alt}^n V$$

Beweis. Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum, so ist $\operatorname{Alt}^n V$ eindimensional. Für $L : V \to V$ linear muß also $L^\top : \operatorname{Alt}^n V \to \operatorname{Alt}^n V$ die Multiplikation mit einem Skalar aus dem Grundkörper sein. Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $f_1, \ldots, f_n$ die duale Basis von $V^\top$, so ist $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$ eine Basis von $\operatorname{Alt}^n V$ und das Lemma folgt mit expliziter Rechnung, für $(\det L)$ die Determinante der Matrix von L in der gewählten Basis. Daß die fragliche Determinante von der Wahl der Basis gar nicht abhängt und deshalb in der Tat $(\det L)$ notiert werden darf, erhält man als Konsequenz. □

Ergänzung 12.8.1.16. Nehmen wir 12.8.1.13 und 12.8.1.15 zusammen, so ergibt sich unmittelbar die Multiplikationsformel für Determinanten 3.6.4.1.

Ergänzung 12.8.1.17. Gegeben endlichdimensionale Vektorräume V, W und Formen $\omega \in \operatorname{Alt}^p V$ und $\eta \in \operatorname{Alt}^q W$ verwenden wir für die $(p+q)$-Form $(\operatorname{pr}_1^\top \omega) \wedge (\operatorname{pr}_2^\top \eta)$ auf $V \times W$ die Notation $\omega \boxtimes \eta$. Manche Autoren verwenden allerdings auch $\wedge$ für dieses „äußere Dachprodukt“.

Übungen

Übung 12.8.1.18. Für jeden Vektorraum V endlicher Dimension $\dim V = n$ liefert das Dachprodukt $V^\top \times \operatorname{Alt}^{n-1} V \to \operatorname{Alt}^n V$ eine nichtausgeartete Paarung im Sinne von 4.2.3.35, als da heißt, jeder Isomorphismus $\operatorname{Alt}^n V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ liefert vermittels unserer Paarung einen Isomorphismus $\operatorname{Alt}^{n-1} V \xrightarrow{\sim} V^{\top\top} \xrightarrow{\sim} V$.

12.8.2 Differentialformen höheren Grades

Definition 12.8.2.1. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Ein **Feld von p-Formen auf** U alias eine **p-Differentialform** ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \omega : & U & \to & \operatorname{Alt}^p \vec{X} \\ & x & \mapsto & \omega_x \end{array}$$

Ausgeschrieben ordnet ω also jedem Punkt $x \in U$ eine alternierende p-Multilinearform $\omega_x : \vec{X} \times \ldots \times \vec{X} \to \mathbb{R}$ zu.

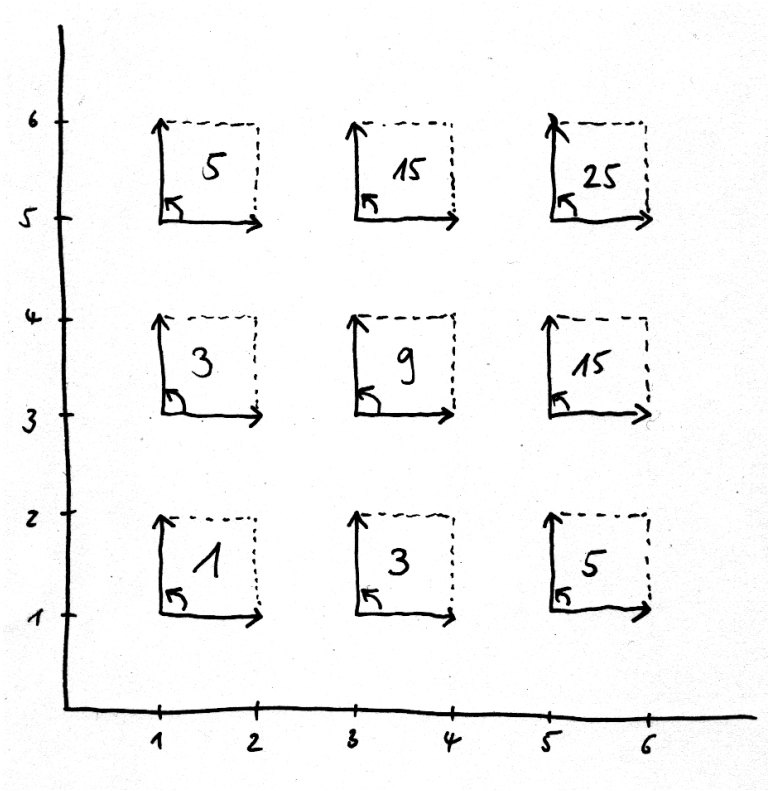
12.8.2.2 (**Diskussion der Terminologie**). In der Differentialgeometrie werden wir allgemein Differentialformen auf abstrakten Mannigfaltigkeiten erklärt als Zuordnungen, die jedem Punkt eine alternierende Multilinearform auf dem Tangentialraum am entsprechenden Punkt zuordnen. Im Fall einer eingebetteten Mannigfaltigkeit $U \subset X$ positiver Kodimension ist das natürlich etwas anderes, als jedem Punkt eine alternierende Multilinearform auf dem Richtungsraum des umgebenden affinen Raums zuzuordnen. Zur Unterscheidung mag man das hier eingeführte elementarere Konzept eine **relative Differentialform** nennen und den Begriff aus der Differentialgeometrie eine **absolute Differentialform**. Jede relative Differentialform liefert durch Einschränkung eine absolute Differentialform. Diese Feinheiten werden erst relevant, wenn es einmal um „de-Rham-Kohomologie“ und dergleichen geht. Manchmal redet man auch ganz knapp von einer **p-Form** und der Leser muß aus dem Kontext erschließen, ob eine p-Differentialform oder vielmehr ein Element von $\operatorname{Alt}^p V$ gemeint ist. Reden wir etwa von einer **konstanten Form**, so ist stets ein konstantes Formenfeld gemeint.

Beispiel 12.8.2.3. Sei U eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums X. Eine 0-Form auf U ist eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$. Eine relative 1-Form auf U ist ein relatives Kovektorfeld im Sinne von 12.7.1.5.

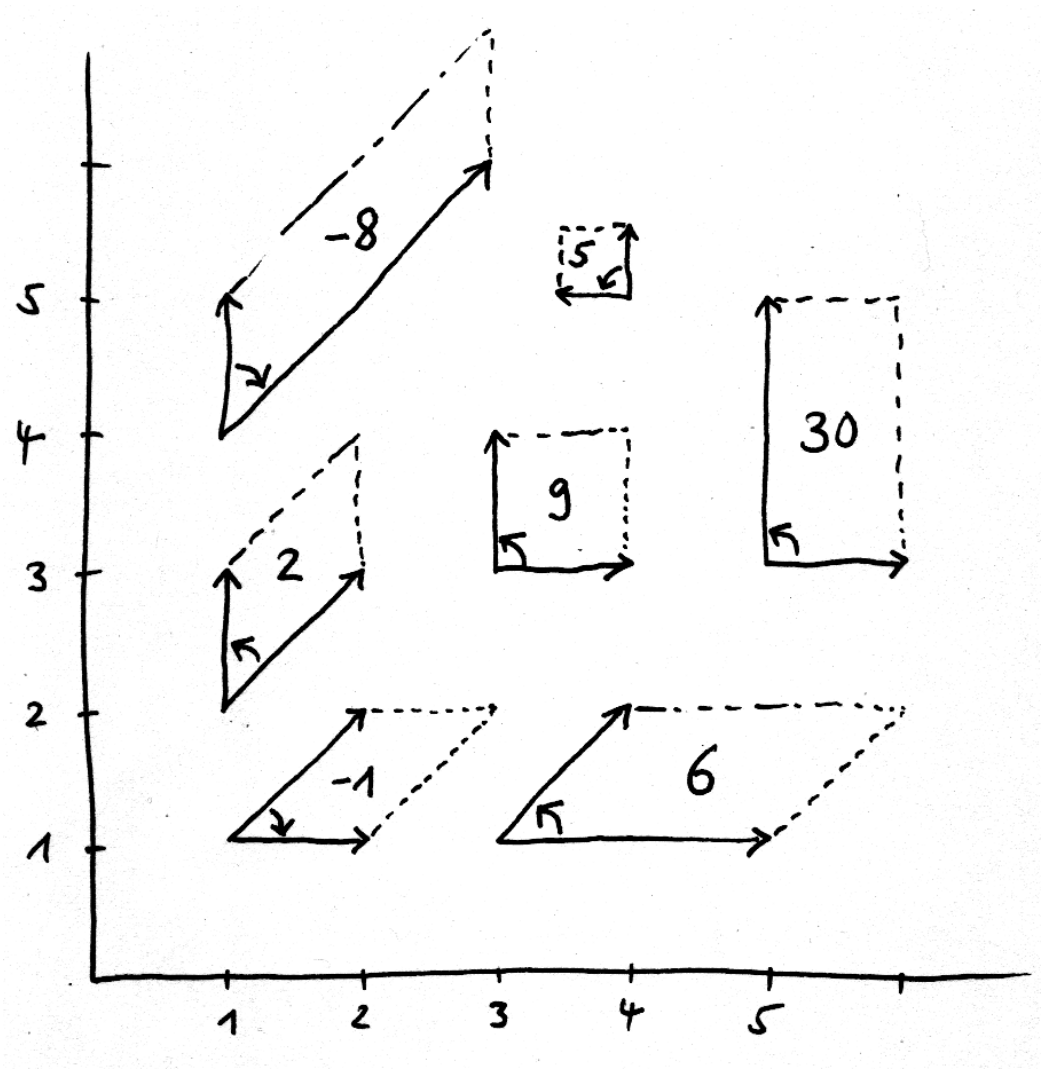
Beispiel 12.8.2.4 (**Anschauung für Differentialformen**). In einem dreidimensionalen orientierten reellen affinen Raum X, dessen Richtungsraum nicht notwendig mit einem Skalarprodukt versehen ist, bewege sich ein Gas. Wir halten ein kurzes Zeitintervall fest und ordnen jedem Tripel $(p, v, w) \in X \times \vec{X} \times \vec{X}$ bestehend aus einem Punkt und zwei Vektoren, aufgefaßt als „kleine orientierte Parallelogrammfläche“ alias „orientiertes Flächenelement“, die Zahl der Gasmoleküle zu, die in diesem Zeitintervall hindurchtritt, wobei wir je nach der Richtung, in der unsere Moleküle hindurchtreten, noch das Negative nehmen: Nämlich dann, wenn ein und jeder Richtungsvektor u in Richtung des Durchtritts zusammen mit v, w eine negativ orientierte angeordnete Basis (u, v, w) des Richtungsraums $\vec{X}$ bildet. Diese Zuordnung wäre ein schmutziges Feld von 2-Formen. Man nennt es die **Flußdichte**. Ruht das Gas und ordnen wir jedem Quadrupel bestehend aus einem Punkt und drei Vektoren, aufgefaßt als „kleines orientiertes Parallelpiped“ alias „orientiertes Volumenelement“ die Zahl der darin befindlichen Gasmoleküle zu, gewichtet mit einem Vorzeichen, das von der Orientierung bestimmt wird, so erhalten wir ein schmutziges Feld von 3-Formen auf unserem affinen Raum. Man nennt es die **Dichte** unseres Gases. Wählen wir zusätzlich auf dem Richtungsraum unseres affinen Raums ein Skalarprodukt, so erhalten wir eine Identifikation von Vektorfeldern mit 2-Formen, indem wir jedem Vektor u die 2-Form $(v, w) \mapsto \mathrm{vol}(u, v, w)$ zuordnen, mit $\mathrm{vol}(u, v, w)$ dem „Volumen“ des Parallelpipeds mit Kanten u, v, w und einem Vorzeichen, das von der „Orientierung“ unseres Tripels abhängt. Ähnlich erhalten wir dann auch eine Identifikation von Funktionen mit 3-Formen. Die Möglichkeit dieser Identifikationen mag ein Grund dafür sein, daß Differentialformen der Intuition weniger gut zugänglich sind. Es fällt uns einfach nicht zu, einen dreidimensionalen Raum ohne Skalarprodukt zu visualisieren, geschweige denn Räume höherer Dimension: Das beste Beispiel für eine 2-Form wäre dann nämlich, nach Wahl der dazu nötigen physikalischen Einheiten, das elektromagnetische Feld auf der Raumzeit. Um auch in nichtorthogonalen und eventuell sogar krummlinigen Koordinatensystemen Dichten und Flußdichten anzugeben und mit ihnen zu rechnen, sind unsere Differentialformen jedoch in jedem Falle ein geschickter Formalismus.

Definition 12.8.2.5. Gegeben zwei Differentialformen ω und η erklären wir ihr **Dachprodukt** $\omega \wedge \eta$ als punktweises Dachprodukt im Sinne von 12.8.1.9, in Formeln $(\omega \wedge \eta)_x = \omega_x \wedge \eta_x$. Für f eine Funktion alias Nullform schreiben wir meist $f\eta$ statt $f \wedge \eta$. Dies Dachprodukt ist auch wieder assoziativ.

12.8.2.6. Ist speziell $X = \mathbb{R}^n$ und sind $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Koordinatenfunktionen,



Versuch einer graphischen Darstellung der 2-Form auf der Papierebene, die in den durch die Koordinatenachsen gegebenen Koordinaten durch die Formel $xy\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ dargestellt werden könnte. Eingezeichnet ist an jedem Punkt ein geordnetes Paar von Richtungsvektoren, gestrichelt ergänzt zu einem Parallelogramm, und hineingeschrieben der Wert unserer Zweiform auf diesem geordneten Paar. Die Anordnung wird hierbei durch einen kleinen Pfeil vom ersten zum zweiten Vektor angezeigt. Natürlich ist dies Vektorenpaar in keinster Weise eindeutig, wir könnten dieselbe 2-Form auch ganz anders darstellen, die beteiligten Vektoren müssen dabei auch keineswegs parallel zu Koordinatenachsen sein.



Eine alternative Darstellung derselben Form $xy\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$

so läßt sich für $U \subset X$ nach 12.8.1.6 jede relative p-Form ω auf U schreiben als

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n} a_{i_1,\ldots,i_p} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen $a_{i_1,\ldots,i_p} : U \to \mathbb{R}$. Das Dachprodukt zweier so in Koordinaten gegebenen Formen ergibt sich dann leicht mittels der Regeln $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0$ und $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$.

12.8.2.7. Die 2-Form $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ auf dem $\mathbb{R}^3$ kann man sich veranschaulichen als Vorschrift, die „jeder kleinen orientierten Parallelogrammfläche den Flächeninhalt ihrer orthogonalen Projektion auf die (x, y)-Ebene zuordnet, mit einem von der Orientierung abhängigen Vorzeichen“.

Definition 12.8.2.8. Gegeben endlichdimensionale reelle Räume X, Y und eine stetig differenzierbare Abbildung $\phi : A \to B$ von einer halboffenen Teilmenge $A \subset X$ in eine Teilmenge $B \subset Y$ und eine Differentialform $\omega : B \to \mathrm{Alt}^p \vec{Y}$ auf B erklären wir die **zurückgeholte Differentialform** $\phi^*\omega$ auf A durch die Vorschrift

$$(\phi^*\omega)_x := (\mathrm{d}_x\phi)^\top(\omega_{\phi(x)})$$

Hier bezeichnet $(\mathrm{d}_x\phi)^\top : \mathrm{Alt}^p \vec{Y} \to \mathrm{Alt}^p \vec{X}$ die vom Differential $\mathrm{d}_x\phi : \vec{X} \to \vec{Y}$ von ϕ an der Stelle $x \in A$ induzierte Abbildung. Alternativ könnten wir auch schreiben $(\phi^*\omega)_x(v_1, \ldots, v_p) := \omega_{\phi(x)}((\mathrm{d}_x\phi)(v_1), \ldots, (\mathrm{d}_x\phi)(v_p))$.

12.8.2.9. Dies Zurückholen ist bei der Begrifflichkeit der Differentialformen die eigentliche Hauptsache. Das Zurückholen von Funktionen alias Nullformen mit einer Abbildung ist schlicht das „Vorschalten“ von besagter Abbildung, in Formeln $\phi^*(g) = g \circ f$ für eine Funktion $g : B \to \mathbb{R}$. Das Zurückholen von 1-Formen haben wir bereits in 12.7.2.12 diskutiert. Wir verallgemeinern die dort eingeführte Terminologie auf den vorliegenden Fall und nennen Differentialformen η und ω **verwandt unter** ϕ und schreiben $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$, wenn gilt $\eta = \phi^*(\omega)$.

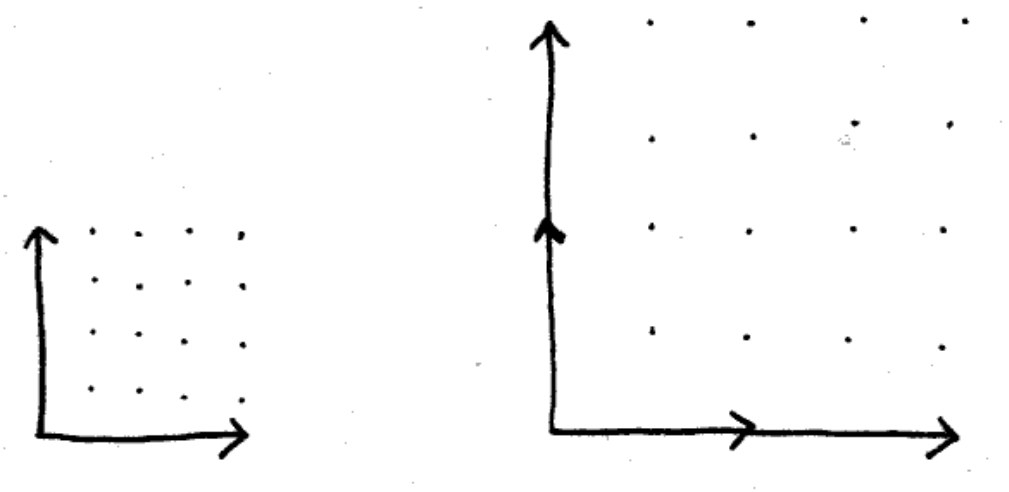
12.8.2.10. Wir erinnern aus 12.7.2.14, daß das Differential Verwandtschaft respektiert, in Formeln

$$\phi(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(f \circ \phi)$$

für $\phi : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung und $f : V \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wir werden demnächst auch für allgemeine Differentialformen ω ihre sogenannte „äußere Ableitung“ erklären und deren Verwandtschaftsverträglichkeit $\phi(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\phi^*\omega)$ zeigen.

Beispiel 12.8.2.11. Unter der Abbildung $(2\cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ erhalten wir für das Zurückholen der Standard-Volumenform $(2\cdot)^*(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = 4\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. In der Tat, denken wir uns schmutzig ein „ebenes Gas“ mit vielen einzelnen Molekülen und

expandieren es mit einer Streckung um den Faktor Zwei, so verdünnt es sich um den Faktor Vier. Allgemeiner haben wir $(2\cdot)^*(a(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = 4a(2x,2y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.



Versuch einer Veranschaulichung der Verwandtschaft $(2\cdot) : 4\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \rightsquigarrow \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Man mag sich den Wert an einer Stelle (a,b) des Koeffizienten vor $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ als ein Maß für die „Zahl der Moleküle eines ebenen Gases im Quader $[a, a+1] \times [b, b+1]$“ denken.

Lemma 12.8.2.12. *Für das Zurückholen von Differentialformen gilt die Kettenregel, wir haben genauer und in Formeln ausgedrückt stets* $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$ *und*

$$\psi^*(\phi^*\omega) = (\phi \circ \psi)^*(\omega)$$

Beweis. Das folgt mit der üblichen Kettenregel 12.1.4.2 sofort aus den Definitionen. Wir können die Aussage des Lemmas auch im Sinne von 12.7.2.18 dahingehend verstehen, daß Verwandtschaft transitiv ist. □

Lemma 12.8.2.13. *Verwandtschaft alias das Zurückholen ϕ^* von Differentialformen ist verträglich mit dem Dachprodukt, in Formeln gilt also*

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\eta)$$

Beweis. Das folgt, indem wir die Regel $L^\top(\omega \wedge \eta) = (L^\top\omega) \wedge (L^\top\eta)$ aus 12.8.1.13 für lineare Abbildungen L punktweise anwenden. □

Beispiel 12.8.2.14 (**Zurückholen von 1-Formen**). Wir erinnern 12.7.2.19. Für $X = \mathbb{R}^n$ mit Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ und $Y = \mathbb{R}^m$ mit Koordinaten $y_1, \ldots, y_m$

und $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ eine differenzierbare Abbildung von einer halboffenen Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ in eine halboffene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ergibt sich $\phi^*(\mathrm{d}x_i) = \mathrm{d}(\phi^* x_i) = \mathrm{d}\phi_i = \sum_j \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} \mathrm{d}y_j$. Folglich kann das Zurückholen von 1-Formen in Koordinaten beschrieben werden durch die Formel

$$\phi^* \left(\sum_i a_i \, \mathrm{d}x_i \right) = \sum_{i,j} (a_i \circ \phi) \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} \ \mathrm{d}y_j$$

Beispiel 12.8.2.15. Ist ϕ die Polarkoordinatenabbildung

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \vartheta) & \mapsto & (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \end{array}$$

und haben wir auf $\mathbb{R}^2$ die 1-Form $y \, \mathrm{d}x$ gegeben, so wird sie zurückgeholt zu

$$\begin{array}{rcl} \phi^*(y \, \mathrm{d}x) & = & \phi^*(y) \phi^*(\mathrm{d}x) \\ & = & r \sin \vartheta \, \mathrm{d}(r \cos \vartheta) \\ & = & r \sin \vartheta \cos \vartheta \ \mathrm{d}r - r^2 \sin^2 \vartheta \ \mathrm{d}\vartheta \end{array}$$

und für die 2-Form $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \phi^*(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) & = & \phi^*(\mathrm{d}x) \wedge \phi^*(\mathrm{d}y) \\ & = & \mathrm{d}(r \cos \vartheta) \wedge \mathrm{d}(r \sin \vartheta) \\ & = & (\cos \vartheta \ \mathrm{d}r - r \sin \vartheta \ \mathrm{d}\vartheta) \wedge (\sin \vartheta \ \mathrm{d}r + r \cos \vartheta \ \mathrm{d}\vartheta) \\ & = & r \, \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\vartheta \end{array}$$

Man mag sich letztere Formel dahingehend veranschaulichen, daß „ein kleines orientiertes Flächenelement in der xy-Ebene unter der Polarkoordinatenabbildung einem entsprechend größeren oder auch kleineren orientierten Flächenelement in der $r\vartheta$-Ebene entspricht, je nachdem, in welchem Abstand vom Ursprung unser ursprüngliches Flächenelement liegt“.

Satz 12.8.2.16 (Funktionaldeterminante und Rückzug von Volumenformen). *Für A halboffen in $\mathbb{R}^n$ und $\phi : A \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar gilt stets*

$$\phi^*(\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n) = (\det \mathrm{d}\phi) \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$$

Beweis. Für jeden Endomorphismus L eines n-dimensionalen Vektorraums V ist die induzierte Abbildung $L^\top : \mathrm{Alt}^n V \to \mathrm{Alt}^n V$ nach 12.8.1.15 gerade die Multiplikation mit $\det L$. □

12.8.3 Orientierung von Mannigfaltigkeiten

12.8.3.1. Ich erinnere daran, daß nach 3.6.5.2 eine **Orientierung** eines endlichdimensionalen rellen Vektorraums V eine Vorschrift ε ist, die jeder angeordneten Basis B unseres Vektorraums ein Vorzeichen $\varepsilon(B) \in \{+1, -1\}$ zuordnet und zwar so, daß für je zwei angeordnete Basen B, B' die Determinante der Basiswechselmatrix das Vorzeichen $\varepsilon(B)\varepsilon(B')$ hat. In 3.6.5.2 werden in diesem Zusammenhang noch weitere Begriffsbildungen formal eingeführt, deren Bedeutung hier nicht wiederholt werden soll und von denen ich hoffe, daß sie sich weitgehend von selbst verstehen.

12.8.3.2. Gegeben X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $M \subset X$ eine Mannigfaltigkeit und ein Punkt $p \in M$ erinnern wir aus 12.3.2.9 ihren Tangntialraum $\mathrm{T}_p M \subset \vec{X}$. Gegeben (W, φ) eine Karte von M gilt für alle $w \in W$ nach Übung 12.3.4.18 die Identität

$$\mathrm{T}_{\varphi(w)} M = \mathrm{im}(\mathrm{d}_w \varphi)$$

Definition 12.8.3.3. Eine **Orientierung einer k-Mannigfaltigkeit** M ist eine Vorschrift, die jedem Punkt $p \in M$ eine Orientierung des Tangentialraums $\mathrm{T}_p M$ zuordnet derart, daß es um jeden Punkt $p \in M$ eine Karte $\varphi : W \to M$ von M gibt mit der Eigenschaft, daß für $w \in W$ die Isomorphismen $\mathrm{d}_w \varphi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\varphi(w)} M$ entweder alle orientierungserhaltend oder alle orientierungsumkehrend sind.

Beispiel 12.8.3.4 (**Orientierungen einer 0-Mannigfaltigkeit**). Die Menge aller Orientierungen einer nulldimensionalen Mannigfaltigkeit M ist in Bijektion zur Menge aller Abbildungen $\varepsilon : M \to \{+1, -1\}$ vermittels der Vorschrift, die jeder Orientierung und jedem Punkt $p \in M$ das Vorzeichen der angeordneten Basis $\emptyset$ des Tangentialraums $\mathrm{T}_p M$ in Bezug auf unsere Orientierung zuordnet.

12.8.3.5. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum. Ein Punkt p einer k-Fastfaltigkeit $M \subset X$ heiße **regulär**, wenn es eine offene Umgebung $U \Subset X$ von p gibt derart, daß $U \cap M$ eine k-Mannigfaltigkeit ist. Die regulären Punkte einer k-Fastfaltigkeit M bilden offensichtlich eine k-Mannigfaltigkeit. Wir notieren sie

$$M_{\mathrm{reg}}$$

Definition 12.8.3.6. Unter einer **Orientierung einer Fastfaltigkeit** verstehen wir eine Orientierung der Mannigfaltigkeit ihrer regulären Punkte. Unter einer **orientierten Fastfaltigkeit** verstehen wir ein Paar bestehend aus einer Fastfaltigkeit M und einer Orientierung von M.

12.8.3.7. Ich notiere orientierte Fastfaltigkeiten M oft mit einem Pfeil als

$$\vec{M}$$

Das ist aber nicht allgemein üblich. Eine Fastfaltigkeit, die mindestens eine Orientierung zuläßt, heißt **orientierbar**. Das „Möbiusband“, das in der schmutzigen Wirklichkeit entsteht, wenn man einen Papierstreifen einmal verdrillt zu einem Ring verklebt, ist ein Beispiel für eine nicht orientierbare 2-Fastfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$.

12.8.3.8 (**Inkonsistenzen der Notation**). Den Pfeil über einem Symbol benutze ich auch als Notation für den Richtungsraum eines affinen Raums. Was im Einzelfall gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen.

Definition 12.8.3.9. Wir sagen, eine Integrationskarte (Q, φ) einer orientierten Fastfaltigkeit M **habe die Orientierung** ε für $\varepsilon \in \{+1, -1\}$, wenn für jeden Punkt $w \in Q^\circ$ das Bild der Standardbasis mit ihrer Standardanordnung unter dem Isomorphismus $\mathrm{d}_w\varphi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\varphi(w)}M_{\mathrm{reg}}$ die Orientierung ε hat.

12.8.3.10. Integrationskarten einer orientierten Fastfaltigkeit, deren Definitionsbereich nicht zusammenhängend ist, haben im allgemeinen keine Orientierung. Eine Integrationskarte der Orientierung $+1$ nennen wir **orientierungsverträglich**.

Übungen

Übung 12.8.3.11. Jede orientierbare zusammenhängende Mannigfaltigkeit M besitzt genau zwei Orientierungen. Hinweis: Gegeben zwei Orientierungen ist die Menge aller Punkte p, an denen sie dieselbe Orientierung von T_pM liefern, ebenso offen wie die Menge aller Punkte p, an denen sie verschiedene Orientierungen von T_pM liefern. Nun verwende man 12.7.5.21.

12.8.4 Integration von Differentialformen

Definition 12.8.4.1. Gegeben eine Fastfaltigkeit M in einem endlichdimensionalen reellen Raum X und $k \geq 0$ bezeichne $\mathcal{C}_!\Omega^k(M) = \mathcal{C}_!\Omega^k_{\subset X}(M)$ den reellen Vektorraum aller stetigen relativen k-Formen auf M mit kompaktem Träger im Sinne von 12.4.2.1.

Vorschau 12.8.4.2. Schon bei der folgenden Definition der Integration einer Differentialform über eine Mannigfaltigkeit kommt es eigentlich nur darauf an, welche Werte unsere Form an jeder Stelle auf Tupeln von Tangentialvektoren an unsere Mannigfaltigkeit am entsprechenden Punkt annimmt. In der Differentialgeometrie wird eine Differentialform auf einer abstrakten Mannigfaltigkeit sogar definiert als eine Vorschrift, die jedem Punkt unserer Mannigfaltigkeit eine alternierende Multilinearform auf seinem Tangentialraum zuordnet. So weit will ich aber hier nicht gehen, da für diese Art von Formen schon die bloße Definition der Stetigkeit die Entwicklung zusätzlicher Begrifflichkeiten notwendig macht.

Satz 12.8.4.3 (Integration von Differentialformen). *Gegeben eine orientierte k-Fastfaltigkeit M in einem endlichdimensionalen reellen Raum gibt es genau eine Linearform $\int : \mathcal{C}_!\Omega^k(M) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß für jede Integrationskarte $\varphi : Q \to M$ der Orientierung ε und jede kompakt getragene k-Form ω mit Träger im Bild dieser Karte $\operatorname{supp}\omega \subset \varphi(Q)$ gilt*

$$\int_{\vec{M}} \omega = \varepsilon \int_Q (\varphi^*\omega)(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k)\, \mathrm{d}^k x$$

12.8.4.4. Für die Form $\varphi^*\omega = \eta = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$ ist $(\varphi^*\omega)(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k) = \eta(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k)$ per definitionem genau die Funktion f. Das Integral auf der rechten Seite ist hier als Quaderintegral im Sinne von 12.2.1.4 zu verstehen, beziehungsweise als die Summe endlich vieler solcher Quaderintegrale, wenn der Definitionsbereich unserer Integrationskarte aus mehreren Quadern bestehen sollte. Ist unsere Fastfaltigkeit M bereits selbst ein kompakter Quader mit nichtleerem Inneren $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^k$ und $\eta = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$ eine stetige Differentialform auf Q und geben wir Q die von der Standardorientierung des $\mathbb{R}^k$ induzierte Orientierung, so können wir die Identität als Integrationskarte nehmen und unsere Definitionen liefern

$$\int_{\vec{Q}} f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k = \int_Q f(x)\, \mathrm{d}^k x = \int_{a_k}^{b_k} \ldots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_k)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k$$

Gegeben $\varphi : Q \to M$ eine Integrationskarte der Orientierung ε einer orientierten Fastfaltigkeit $\vec{M}$ und eine stetige p-Form auf M mit Träger in $\varphi(Q)$ und $\vec{Q}$ der Definitionsbereich unserer Integrationskarte mit seiner Standardorientierung gilt also insbesondere

$$\int_{\vec{M}} \omega = \varepsilon \int_{\vec{Q}} \varphi^*\omega$$

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Sei $\omega \in \mathcal{C}_!\Omega^k(M)$ gegeben. Wir finden eine endliche Überdeckung von $\operatorname{supp}\omega$ durch die Inneren von Bildern von Integrationskarten $\operatorname{Inn}_M(\varphi_i(Q_i))$ der Orientierungen ε_i und nach 12.4.2.14 eine an diese Überdeckung angepaßte Teilung der Eins, also stetige Funktionen $\alpha_i \in \mathcal{C}_!(M, \mathbb{R})$ mit Träger $\operatorname{supp}\alpha_i \subset \varphi_i(Q_i)$ und $\sum_i \alpha_i(x) = 1$ für alle $x \in \operatorname{supp}\omega$. Dann haben wir $\omega = \sum_i \alpha_i\omega$. Wenn also überhaupt eine lineare Abbildung mit den geforderten Eigenschaften existiert, so muß gelten

$$\int_{\vec{M}} \omega = \sum_i \int_{\vec{M}} \alpha_i\omega = \sum_i \varepsilon_i \int_{Q_i} (\varphi_i^*(\alpha_i\omega))(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k)\, \mathrm{d}^k x$$

Das ganze Problem ist zu zeigen, daß die rechte Seite nicht von den Integrationskarten und der Teilung der Eins abhängt. Das geht wie bei unserer Diskussion

12.4.5.10 der Integration von Funktionen mit kompaktem Träger über Fastfaltigkeiten 12.4.5.10 in $\mathbb{R}^n$. Genau wie dort zieht man sich darauf zurück, für je zwei Integrationskarten (Q, φ) und (P, ψ) der Orientierungen ε und η und für ω mit Träger $\operatorname{supp}\omega \subset \varphi(Q) \cap \psi(P)$ die Gleichheit

$$\varepsilon \int_Q (\varphi^*\omega)(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k) = \eta \int_P (\psi^*\omega)(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k)$$

zu zeigen. Wie dort findet man Zerlegungen $Q = A \sqcup S \sqcup U$ und $P = B \sqcup T \sqcup V$ mit $A, U \Subset Q$ und $B, V \Subset P$ und Nullmengen S, T derart, daß unsere Gleichheit die Gleichheit von Integralen stetiger Funktionen $g : Q \to \mathbb{R}$ und $h : P \to \mathbb{R}$ behauptet mit $g|_A = 0$ und $h|_B = 0$, für die es einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\kappa : U \cap Q^\circ \xrightarrow{\sim} V \cap P^\circ$ gibt mit

$$\varepsilon g = \eta(h \circ \kappa)|\det \mathrm{d}\kappa|$$

Die Herleitung dieser Formel besprechen wir gleich noch genauer. Von dort ausgehend kommt man dann genau wie in 12.4.5.10 zum Ziel, entweder ganz bequem mit Lebesgue'scher Integrationstheorie oder sozusagen zu Fuß mit etwas mehr Aufwand. Besprechen wir also den Kartenwechsel κ genauer. Per definitionem induzieren unsere Integrationskarten φ, ψ Bijektionen

$$U \cap Q^\circ \xrightarrow{\sim} \varphi(Q^\circ) \cap \psi(P^\circ) \xleftarrow{\sim} V \cap P^\circ$$

und beide sind Karten der Mannigfaltigkeit $\varphi(Q^\circ) \cap \psi(P^\circ)$. Der Kartenwechsel ist nach 12.3.4.13 ein Diffeomorphismus $\kappa := \psi^{-1} \circ \varphi$ mit $\psi \circ \kappa = \varphi$. Nach 12.8.2.12 folgt $\kappa^*\psi^*\omega = \varphi^*\omega$. Für $g := (\varphi^*\omega)(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k)$ gilt per definitionem $\varphi^*\omega = g dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$. Für $h := (\psi^*\omega)(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k)$ gilt ebenso $\psi^*\omega = h dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$. Mit dr Formel 12.8.2.16 für den Rückzug von Volumenformen im letzten Schritt folgt nun

$$\begin{aligned} g dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k &= \kappa^*(h dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k) \\ &= (h \circ \kappa)\kappa^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k) \\ &= (h \circ \kappa) \det(\mathrm{d}\kappa) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k \end{aligned}$$

alias $g = (h \circ \kappa) \det(\mathrm{d}\kappa)$. Die Verträglichkeiten der jeweiligen Orientierungen mit den Karten zeigen aber $\varepsilon \det \mathrm{d}\kappa = \eta|\det \mathrm{d}\kappa|$ und wir erhalten wie behauptet $\varepsilon g = \eta(h \circ \kappa)|\det \mathrm{d}\kappa|$. □

12.8.4.5 (**Riemannsummen für Differentialformen**). Um die Integration von Differentialformen anschaulich zu machen, erkläre ich ihre Interpretation durch Riemannsummen. Sei dazu $Q := [a, b] \times [c, d]$ ein kompaktes Rechteck und $\varphi : Q \to X$ eine Integrationskarte in einen endlichdimensionalen reellen Raum

und $\omega : \varphi(Q) \to \mathrm{Alt}^2(\vec{X})$ eine stetige 2-Form auf $\varphi(Q)$. Wir betrachten für $r \geq 1$ die äquidistanten Unterteilungen $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = b$ sowie $c = c_0 < c_1 < \ldots < c_r = d$ der Kanten von Q und bezeichnen mit $q_{i,j} = (a_i, c_j)$ die Gitterpunkte im so gegebenen Raster auf Q. Bezeichne weiter $p_{i,j} = \varphi(q_{i,j})$ die Bilder dieser Gitterpunkte unter φ. Damit erklären wir die r-te **Riemannsumme** $S^r_\varphi(\omega)$ durch die Formel

$$S^r_\varphi(\omega) = \sum_{i,j=0}^{r-1} \omega_{p_{i,j}}(p_{i+1,j} - p_{i,j}, p_{i,j+1} - p_{i,j})$$

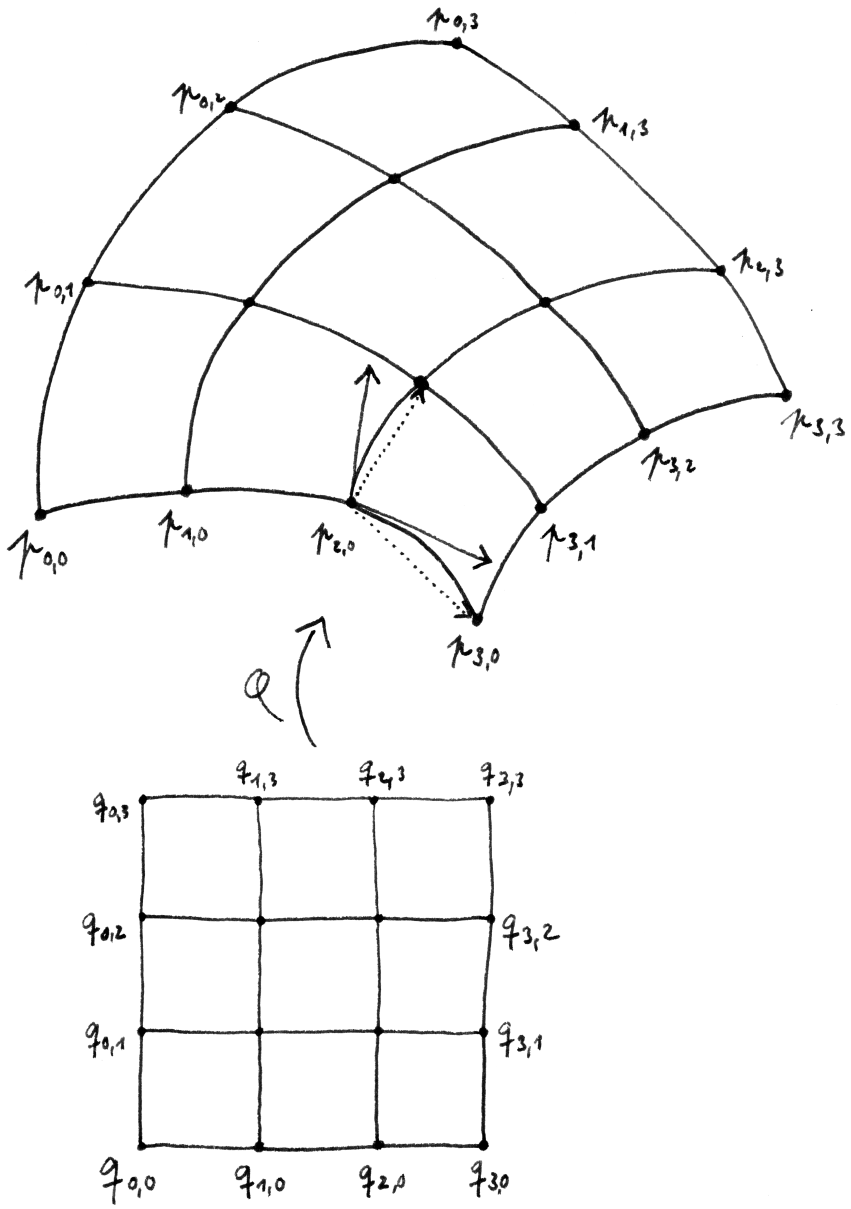
Wir können nun das Integral von ω über $\varphi(Q)$ mit der Orientierung, für die φ eine orientierte Integrationskarte ist, anschaulich verstehen als den Grenzwert

$$\int_{\varphi(Q)} \omega = \lim_{r\to\infty} S^r_\varphi(\omega)$$

Den Beweis dieser Tatsache entlang der Grundlinie des Beweises von 12.4.3.7 überlassen wir dem Leser zur Übung.

12.8.4.6 (**Sinnhaftigkeit der Integration alternierender Formen**). Unter der Voraussetzung einer auf einem Quadrat definierten Integrationskarte, in Formeln $b-a = d-c$, betrachten wir nun die Spiegelung τ an der Hauptdiagonalen und die neue Integrationskarte $\varphi \circ \tau$. Sie ist negativ orientiert und ihre Riemannsummen sind dieselben wie die Riemannsummen von eben, wenn man nur in jedem Summanden den ersten und den zweiten Eintrag der bilinearen Abbildung ω vertauscht und das von der negativen Orientierung der Integrationskarte herrührende Vorzeichen berücksichtigt. Ist also ω alternierend, so liefert unsere neue Integrationskarte dieselben Riemannsummen und dasselbe Integral. Das soll die in unserem Satz enthaltene Aussage veranschaulichen, daß das Integral einer alternierenden Form unabhängig ist von den zur Berechnung gewählten Integrationskarten.

Beispiel 12.8.4.7 (**Integral über eine Hemisphäre**). Wir berechnen das Integral der 2-Form $x^2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ über die obere Hemisphäre $H := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ mit der Orientierung, für die die beiden ersten Vektoren $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$ der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ in dieser Reihenfolge eine orientierte Basis des Tangentialraums am Pol $\mathrm{T}_{(0,0,1)}H$ bilden. Wir betrachten das Rechteck $R := [0,\pi] \times [0,\pi] \subset \mathbb{R}^2$ und die orientierte Integrationskarte $\phi : R \to H$ gegeben durch die Formeln $(\vartheta, \varphi) \mapsto (\cos\vartheta, \cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta)$, anschaulich gesprochen eine „liegende



Die gepunktelten Pfeile stellen die Vektoren $p_{3,0} - p_{2,0}$ und $p_{2,1} - p_{2,0}$ dar, der Wert von $\omega_{p_{2,0}}$ auf diesem Paar von Vektoren, genommen in einer durch die Orientierung gegebenen Reihenfolge, geht in die Riemannsumme S^3_φ ein.

Version“ unserer Kugelkoordinaten aus 12.3.2.3, und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{H}} x^2 \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= \int_{\vec{R}} \cos^2\vartheta \,\mathrm{d}(\cos\vartheta) \wedge \mathrm{d}(\cos\varphi \sin\vartheta) \\
&= \int_{\vec{R}} \cos^2\vartheta(-\sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta) \wedge (\cos\varphi\cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta \,\mathrm{d}\varphi) \\
&= \int_{\vec{R}} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta \sin\varphi \,\mathrm{d}\vartheta \wedge \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{R} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta \sin\varphi \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^\pi \int_0^\pi \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta \sin\varphi \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \tfrac{1}{4}\int_0^\pi \sin^2(2\vartheta) \,\mathrm{d}\vartheta \int_0^\pi \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \tfrac{1}{2} - \tfrac{\cos 4\vartheta}{2} \,\mathrm{d}\vartheta = \tfrac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Hier ist der erste Schritt 12.8.4.4 mitsamt dem Vertauschen vom Zurückholen mit Dachprodukt und Differential 12.7.2.14, der Zweite die Formel 12.7.1.13 für das Differential einer Funktion, der Dritte beruht auf dem Alternieren und der Bilinearität des Dachprodukts, und der Vierte auf 12.8.4.3.

12.8.4.8. Die Integrale von Differentialformen über orientierte Fastfaltigkeiten der Dimensionen 0 oder 1 sowie der Kodimensionen 0 oder 1 in einem $\mathbb{R}^n$ trifft man oft in anderen Gestalten an, die den Formalismus der Differentialformen vermeiden. Besonders wichtig sind in diesem Zusammenhang die Fälle mit $n \leq 3$.

Beispiel 12.8.4.9 (**Summation als Differentialformenintegral**). Im Fall einer nulldimensionalen Fastfaltigkeit M alias diskreten Teilmenge ist eine Nullform eine Funktion und eine Nullform mit kompaktem Träger eine Funktion, die nur an endlich vielen Stellen von Null verschiedene Werte annimmt. Unser Integral ist dann die Summe der Funktionswerte multipliziert mit den durch die auf M gewählte Orientierung ε bestimmten Vorzeichen ε_p, in Formeln

$$\int_{\vec{M}} f = \sum_{p \in M} \varepsilon_p f(p)$$

Beispiel 12.8.4.10 (**Funktionenintegral als Differentialformenintegral**). Für eine stetige n-Form $f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ mit kompaktem Träger auf einer n-Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ mit der von der Standardorientierung des $\mathbb{R}^n$ induzierten Orientierung liefern unsere Definitionen

$$\int_{\vec{M}} f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k = \int_M f(x) \,\mathrm{d}^k x$$

Das Integral der Funktion f rechts ist dabei im Sinne von 12.4.5.10 oder für hinreichend vorgebildete Leser auch als das Lebesgue-Integral der integrierbaren Funktion f über die meßbare Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ zu verstehen. Ein typisches Beispiel für eine 3-Fastfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ wäre etwa eine massive Halbkugel $M \subset \mathbb{R}^3$.

Beispiel 12.8.4.11 (**Wegintegral als Differentialformenintegral**). Gegeben eine orientierte 1-Fastfaltigkeit M und eine surjektive orientierungsverträgliche Integrationskarte $\varphi : [a,b] \twoheadrightarrow M$ fällt das Integral einer 1-Form ω über M zusammen mit dem Wegintegral der 1-Form ω über den Weg φ, denn beide fallen zusammen mit dem Integral der zurückgeholten 1-Form $\varphi^*\omega$ über die in der offensichtlichen Weise orientierte Fastfaltigkeit $[a,b]$, in Formeln

$$\int_{\vec{M}} \omega = \oint_a^b \varphi^*\omega = \oint_\varphi \omega$$

Ist speziell unsere Fastfaltigkeit in den $\mathbb{R}^n$ eingebettet, so hat unsere 1-Form ω die Gestalt $\omega = \omega_1 \,\mathrm{d}x_1 + \ldots + \omega_n \,\mathrm{d}x_n$ und unser Wegintegral wird von Anwendern meist geschrieben als das Wegintegral des Vektorfelds $v = \mathrm{can}_s^{-1}(\omega) = (\omega_1, \ldots, \omega_n)^\top$ längs φ, in Formeln

$$\int_{\vec{M}} \omega = \oint_\varphi \omega = \int_a^b \langle v, \mathrm{d}\varphi \rangle = \int_a^b v \cdot \mathrm{d}\varphi$$

Vorschau 12.8.4.12. Die Interpretation der Integration von Differentialformen über orientierte Hyperflächen in $\mathbb{R}^{n+1}$ als „Fluß“ benötigt von den hier explizit behandelten Fällen den größten begrifflichen Aufwand und wird uns bis zum Ende dieses Abschnitts beschäftigen.

Definition 12.8.4.13. Ist $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, so gibt es zu jedem Punkt $p \in M$ genau zwei Vektoren der Länge Eins in $\mathbb{R}^{n+1}$, die auf dem Tangentialraum T_pM senkrecht stehen. Ist M darüber hinaus orientiert, so hat genau ein Vektor N_p von diesen beiden die Eigenschaft, daß für jede angeordnete Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von T_pM der Orientierung ε die Standardorientierung der angeordneten Basis $(N_p, v_1, \ldots, v_n)$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ auch ε ist. Wir erhalten so eine stetige Abbildung, das **orientierte Normalenfeld**

$$\begin{array}{rccc} N: & M & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & p & \mapsto & N_p \end{array}$$

12.8.4.14. Wir indizieren nun die Koordinaten auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$ etwas unüblich als $x_0, x_1, \ldots, x_n$ und ordnen jedem Vektor $F \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine alternierende Multilinearform $\omega_F \in \mathrm{Alt}^n(\mathbb{R}^{n+1})$ zu durch die Vorschrift

$$\omega_F(v_1, \ldots, v_n) := \det(F|v_1|\ldots|v_n)$$

Rechts ist hier die Matrix mit den entsprechenden Spaltenvektoren zu verstehen. In derselben Weise ordnen wir auch jedem Vektorfeld F auf $\mathbb{R}^{n+1}$ eine n-Form

ω_F zu und erkennen durch das Auswerten auf Tupeln der Standardbasis, daß sie geschrieben werden kann in der Gestalt

$$\omega_F = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F_i \ \mathrm{d}x_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$$

Wir nennen ω_F die **zu unserem Vektorfeld gehörige n-Form**. Im $\mathbb{R}^3$ entspricht speziell einem Vektorfeld $F = (F_x, F_y, F_z)$ die 2-Form

$$\omega_F = F_x \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + F_y \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + F_z \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Die unteren Indizes dürfen dabei nicht als partielle Ableitungen mißverstanden werden, sondern meinen vielmehr die Komponenten unseres Vektorfelds, die wir auch F_1, F_2, F_3 oder in unserer aktuellen Indizierung F_0, F_1, F_2 hätten notieren können. Im $\mathbb{R}^2$ hatten wir ω_F bereits in 12.7.4.14 kennengelernt.

Proposition 12.8.4.15 (**Fluß als Differentialformenintegral**). *Seien $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine orientierte Hyperfläche, $F : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein stetiges relatives Vektorfeld auf M mit kompaktem Träger und N das orientierte Normalenfeld auf M. So gilt für die zu unserem Vektorfeld F gehörige n-Form ω_F die Identität*

$$\int_{\vec{M}} \omega_F = \int_M \langle F, N \rangle = \int_M F \cdot N$$

12.8.4.16. Die Mitte und die rechte Seite unterscheiden sich hier nur in der Notation für das Skalarprodukt und sind als Flächenintegrale im Sinne von 12.4.3.1 zu verstehen. Die rechte Seite heißt der **Fluß des Vektorfelds F durch die orientierte Hyperfläche** M. Dies Oberflächenintegral mag der Anschauung besser zugänglich sein als unser Integral über eine Differentialform. Für das explizite Rechnen ist die Darstellung als Integral einer Differentialform im allgemeinen günstiger.

Beispiel 12.8.4.17 (**Integration einer Flußdichte**). Ist X ein dreidimensionaler orientierter reeller affiner Raum und $M \subset X$ eine zweidimensionale orientierte Mannigfaltigkeit alias Fläche und ω die 2-Form der Flußdichte eines bewegten Gases wie in 12.8.2.4, so beschreibt das Integral von ω über M die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall in einer durch die Orientierung bestimmten Richtung durch unsere Fläche M hindurchtritt. Gas, das in der Gegenrichtung durch unsere Fläche tritt, schlägt dabei negativ zu Buche.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es Karte $\varphi : W \to M$ der Orientierung ε gibt mit $(\operatorname{supp} F) \cap M \subset \varphi(W)$. Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir unser Vektorfeld F in der Form $p \mapsto F_p$, wobei

der Index unglücklicherweise eine völlig andere Bedeutung hat als in 12.8.4.14. Wir zerlegen nun unser Vektorfeld F an jedem Punkt $p \in M$ in einen orthogonalen und einen tangentialen Anteil als $F_p = \langle F_p, N_p \rangle N_p + R_p$ mit $R_p \in \mathrm{T}_p M$ und finden für alle $x \in W$

$$\begin{aligned}(\varphi^*\omega)_x(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n) &= \omega_{\varphi(x)}(\mathrm{d}_x\varphi(\mathrm{e}_1), \ldots, \mathrm{d}_x\varphi(\mathrm{e}_n)) \\ &= \det(F_{\varphi(x)} | [\mathrm{d}_x\varphi]) \\ &= \langle F_{\varphi(x)}, N_{\varphi(x)} \rangle \det(N_{\varphi(x)} | [\mathrm{d}_x\varphi]) \\ &= \langle F_{\varphi(x)}, N_{\varphi(x)} \rangle \operatorname{vol}(\mathrm{d}_x\varphi)\end{aligned}$$

In der zweiten Zeile ist die quadratische Matrix gemeint, die aus der Jacobi-Matrix $[\mathrm{d}_x\varphi]$ entsteht durch Anfügen des Vektors $F_{\varphi(x)}$ als erste Spalte. Für die dritte Gleichheit verwenden wir unseres Zerlegung $F_p = \langle F_p, N_p \rangle N_p + R_p$ mit $R_p \in \mathrm{T}_p M = \operatorname{im}(\mathrm{d}_x\varphi)$ und daß eine quadratische Matrix mit linear abhängigen Spalten die Determinante Null hat. Für die vierte Gleichheit verwenden wir unsere erste Formel aus 12.4.3.5 für Gram'sche Determinanten. Die Gleichheit der beiden Integrale folgt nun aus den Definitionen. □

12.8.4.18 (**Flüsse durch Fastfaltigkeiten**). Im Fall einer orientierten n-Fastfaltigkeit im $\mathbb{R}^{n+1}$ wie etwa die Oberfläche eines Würfels in $\mathbb{R}^3$ ist der orientierte Normalenvektor nicht mehr in allen Punkten sinnvoll definiert, aber das Differentialformenintegral ist immer noch sinnvoll erklärt.

Beispiel 12.8.4.19 (**Fluß durch eine Hemisphäre**). Anschaulich kann man unser Integral aus 12.8.4.7 also auch als den Fluß durch die obere Hemisphäre des senkrechten Vektorfelds $x^2\,\mathrm{e}_3$ verstehen. In der Notation von dort hätten wir etwa

$$\int_{\vec{H}} x^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_H x^2\,\mathrm{e}_3 \cdot N$$

Hier meint N das „nach außen weisende Normalenfeld", das in unserem Fall auch das „orientierte Normalenfeld" nach 12.8.4.13 ist. Zur Probe rechne ich hier die rechte Seite auch noch direkt aus. Auf der Einheitssphäre stimmen ja der Ortsvektor und der nach außen weisende Normalenvektor überein, so daß der Rückzug der Funktion $x^2\,\mathrm{e}_3 \cdot N$ bezüglich unserer Karte $\phi : R \to H$ die Funktion $\cos^2\vartheta \sin\varphi \sin\vartheta$ ist. Um das Flächenintegral rechts zu bestimmen, gilt es die Gram'sche Matrix zu berechnen. In unserem Fall haben wir

$$\mathrm{d}\phi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & 0 \\ \cos\varphi\cos\vartheta & -\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

und die Matrix der Skalarprodukte der Spaltenvektoren ergibt sich zu

$$(\mathrm{d}\phi)^\top\,\mathrm{d}\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

und die Wurzel aus deren Determinante zu $\sin\vartheta$, so daß wir bei demselben Doppelintegral über $\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\sin\varphi$ landen wie in 12.8.4.7.

Übungen

Übung 12.8.4.20. Berechnen Sie das Integral der 2-Form $xdy \wedge dz + ydx \wedge dz$ über den Zylinder $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1, z \in [0,1]\}$ mit einer Orientierung ihrer Wahl.

Übung 12.8.4.21. Berechnen Sie den Fluß des Vektorfelds $F : (x,y,z) \mapsto (x,0,0)$ durch die Einheitssphäre, die Sie dazu mit einer Orientierung ihrer Wahl versehen mögen.

Übung 12.8.4.22 (**Verwandtschaftsverträglichkeit des Integrals**). Seien zwei Tripel $M \subset A \subset X$ und $N \subset B \subset Y$ gegeben bestehend aus endlichdimensionalen reellen Räumen X, Y und halboffenen Teilmengen A, B und in diesen halboffenen Teilmengen enthaltenen k-Fastfaltigkeiten M, N. Sei $\phi : A \to B$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung, die einen Homöomorphismus $M \xrightarrow{\sim} N$ induziert sowie Isomorphismen $\mathrm{T}_pM \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\phi(p)}N$. Seien M und N darunter mit verträglichen Orientierungen versehen. So gilt für jede stetige k-Form ω auf B, deren Träger N in einem Kompaktum trifft, die Identität

$$\int_{\vec{M}} \phi^*\omega = \int_{\vec{N}} \omega$$

Übung 12.8.4.23 (**Fluß durch einen ebenen Weg und Wegintegral**). Berechnen sie den Fluß des radialen Vektorfelds $v : (x,y) \mapsto (x,y)$ durch den im Gegenuhrzeigersinn orientierten Einheitskreis und ebenso das Wegintegral desselben Vektorfelds längs derselben orientierten 1-Mannigfaltigkeit. Was sind die zugehörigen Integrale von Differentialformen?

Ergänzende Übung 12.8.4.24 (**Integral eines äußeren Produkts**). Seien $M \subset X$ und $N \subset Y$ jeweils eine Fastfaltigkeit in einem endlichdimensionalen reellen Raum. So gilt $(M \times N)_{\mathrm{reg}} = M_{\mathrm{reg}} \times N_{\mathrm{reg}}$ und gegeben je eine Orientierung von M und von N erhalten wir die **Produktorientierung** auf $M \times N$ durch die Vorschrift, daß wir gegeben reguläre Punkte $p \in M$ und $q \in N$ jeweils diejenige Orientierung auf $\mathrm{T}_{(p,q)}(M \times N)_{\mathrm{reg}}$ auszeichnen, die unter dem Isomorphismus $\mathrm{T}_{(p,q)}(M \times N)_{\mathrm{reg}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_pM_{\mathrm{reg}} \times \mathrm{T}_qN_{\mathrm{reg}}$ aus 12.3.2.25 der Produktorientierung nach 3.6.5.17 entsprechen. Sind ω und η jeweils stetige Differentialformen mit kompaktem Träger auf M und N vom Grad der Dimension, so gilt für die Integrale in Bezug auf die jeweiligen Orientierungen

$$\int_{M\times N} \omega \boxtimes \eta = \left(\int_M \omega\right)\left(\int_N \eta\right)$$

12.8.5 Äußere Ableitung von Differentialformen

12.8.5.1. Gegeben ein Vektorraum V definieren wir für alle $k \geq 0$ eine lineare Abbildung $\mathrm{alt} : \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Alt}^k V) \to \mathrm{Alt}^{k+1} V$ durch die Vorschrift

$$(\mathrm{alt}\, f)(v_0, v_1, \ldots, v_k) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^i f(v_i)(v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k)$$

Hier soll die „Tarnkappe“ über v_i wie üblich bedeuten, daß dieser Eintrag beim entsprechenden Summanden auszulassen ist. Wir nennen unsere Abbildung den **Alternator**.

Beispiel 12.8.5.2. Gegeben ein Vektorraum V und $\lambda \in V^*$ und $\omega \in \mathrm{Alt}^k V$ bezeichne $\lambda \otimes \omega$ die Abbildung $V \to \mathrm{Alt}^k V$ gegeben durch $v \mapsto \lambda(v)\omega$. So finden wir

$$\mathrm{alt}(\lambda \otimes \omega) = \lambda \wedge \omega$$

In der Tat besteht die Menge $\mathcal{S}_{1,k}$ der Shuffles, die bei der Definition des Dachprodukts auf der rechten Seite vorkommen, genau aus denjenigen Permutationen, die „das erste Element und irgendwo dazwischenschieben“.

12.8.5.3. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $A \subset X$ halboffen. Eine Differentialform $\omega : A \to \mathrm{Alt}^k \vec{X}$ heißt **differenzierbar**, wenn sie als Abbildung von der halboffenen Teilmenge A des endlichdimensionalen reellen Raums X in den endlichdimensionalen reellen Vektorraum $\mathrm{Alt}^k \vec{X}$ differenzierbar ist im Sinne von 12.1.3.1. Sie heißt **stetig differenzierbar**, wenn sie stetig differenzierbar ist im Sinne von 12.1.6.10, wenn also ihr Differential auch stetig ist als Abbildung $A \to \mathrm{Hom}(\vec{X}, \mathrm{Alt}^k \vec{X})$ gegeben durch $x \mapsto \mathrm{d}_x\omega$.

Definition 12.8.5.4. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $A \subset X$ halboffen. Gegeben eine differenzierbare k-Form $\omega : A \to \mathrm{Alt}^k \vec{X}$ erklären wir eine $(k+1)$-Form

$$d\omega : A \to \mathrm{Alt}^{k+1} \vec{X}$$

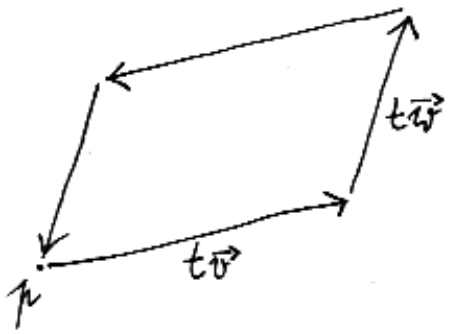
durch die Vorschrift $(d\omega)_x := \mathrm{alt}(\mathrm{d}_x\omega)$ für $\mathrm{d}_x\omega : \vec{X} \to \mathrm{Alt}^k \vec{X}$ das Differential im Sinne von 12.1.3.1 unserer Form $\omega : A \to \mathrm{Alt}^k \vec{X}$ an einer Stelle $x \in A$. Wir nennen $d\omega$ die **äußere Ableitung von** ω. Den Unterschied zwischen Differential $\mathrm{d}\omega$ und äußerer Ableitung $d\omega$ bringen wir nur durch die Wahl der Schriftart zum Ausdruck.

Beispiel 12.8.5.5. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $A \subset X$ halboffen. Gegeben eine differenzierbare Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ und $\omega_\circ \in \mathrm{Alt}^k \vec{X}$ finden wir $\mathrm{d}_x(f\omega_\circ) = (\mathrm{d}_x f) \otimes \omega_\circ$ für alle $x \in A$ und nach 12.8.5.2 folglich

$$d(f\omega_\circ) = \mathrm{d}f \wedge \omega_\circ$$

Insbsondere haben wir etwa $d(x^2 y dy \wedge dz) = 2xydx \wedge dy \wedge dz$.

12.8.5.6. Eine stetig differenzierbare Differentialform, deren äußere Ableitung verschwindet, heißt **geschlossen**. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum ist ein stetig differenzierbares Kovektorfeld $\omega : X \supseteq U \to \vec{X}^*$ geschlossen im hier erklärten Sinne genau dann, wenn ω geschlossen ist im Sinne von 12.7.8.1, wenn also nach 12.7.8.8 das Wegintegral von ω über jeden geschlossenen in U zusammenziehbaren Integrationsweg verschwindet.



Der Weg $\gamma(p, t\vec{v}, t\vec{w})$ aus Übung 12.7.8.19. Mit $t \to 0$ wird er natürlich immer kleiner.

12.8.5.7 (**Anschauung für die äußere Ableitung**). Um uns die äußere Ableitung $d\omega$ zu veranschaulichen, erinnern wir zunächst an den Fall einer Nullform alias Funktion, die wir dann statt ω lieber f nennen. Deren äußere Ableitung $(df)_x$ ist schlicht das Differential $\mathrm{d}_x f$ bei x und kann dadurch beschrieben werden, daß es jedem Richtungsvektor $\vec{v} \in \vec{X}$ die Zahl

$$(df)_x(\vec{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x + t\vec{v}) - f(x))$$

zuordnet. Im Fall einer Einsform alias eines Kovektorfelds ω kann seine äußere Ableitung $(d\omega)_x$ bei x analog dadurch beschrieben werden, daß sie jedem geordneten Paar von Richtungsvektoren $(\vec{v}, \vec{w}) \in \vec{X}^2$ die Zahl

$$(d\omega)_x(\vec{v}, \vec{w}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} \int_{\gamma(x,t\vec{v},t\vec{w})} \omega$$

zuordnet mit der Notation $\gamma(x, t\vec{v}, t\vec{w})$ für den Weg, der einmal das Parallelogramm mit einer Ecke x und Kantenvektoren $t\vec{v}$ und $t\vec{w}$ umläuft, und zwar stückweise linear erst von x nach $x + t\vec{v}$, dann weiter nach $x + t\vec{v} + t\vec{w}$, von da nach $x + t\vec{w}$, und dann wieder zurück nach x. Möglicherweise haben Sie das bereits als Übung 12.7.8.19 gezeigt. Im allgemeinen Fall einer k-Form ω schließlich haben wir

$$(d\omega)_x(\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_k) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^{k+1}} \int_{F(x,t\vec{v}_0,\ldots,t\vec{v}_k)} \omega$$

mit F zumindest für $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_k$ linear unabhängig der in geeigneter Weise orientierte Oberfläche eines Parallelpipeds mit Ecke x und Kantenvektoren $t\vec{v}_i$, über die wir dann unsere k-Form integrieren. Das wird recht direkt aus dem Satz von Stokes mit Ecken 12.8.7.19 folgen, wie sie als Übung 12.8.7.30 werden ausarbeiten dürfen.

12.8.5.8. Gegeben eine offene Teilmenge $U \Subset \mathbb{R}^n$ heißt eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ **glatt** oder **beliebig differenzierbar** oder auch eine $\mathcal{C}^\infty$**-Abbildung**, wenn zu allen Komponenten f_μ von f für $1 \leq \mu \leq m$ alle gemischten höheren partiellen Ableitungen, in der Multiindexschreibweise aus 12.2.2.3 also alle $\partial^\alpha f_\mu$ für beliebige $\alpha \in \mathbb{N}^n$, auf ganz U existieren. Existieren sie bis zum Totalgrad $|\alpha| \leq k$ und sind stetig, so spricht man von einer $\mathcal{C}^k$**-Abbildung**. Das $\mathcal{C}$ steht hier wie bisher für „continous“ alias stetig.

12.8.5.9 (**Räume multilinearer Abbildungen**). Gegeben Vektorräume V, W und $k \geq 0$ bilden wir den Vektorraum

$$\mathrm{Mult}^k(V, W)$$

aller multilinearen Abbildungen des Produkts von k Kopien von V nach W. Im Fall $k = 0$ verstehen wir $\mathrm{Mult}^0(V, W) = W$. Man bemerke die Isomorphismen $\mathrm{mult} : \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Mult}^k(V, W)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mult}^{k+1}(V, W)$ gegeben durch

$$\mathrm{mult}(f)(v_0, v_1, \ldots, v_k) := (f(v_0))(v_1, \ldots, v_k)$$

12.8.5.10 (**Höhere Ableitungen ohne Koordinaten**). Gegeben X, Y endlichdimensionale reelle Räume und $A \subset X$ eine halboffene Teilmenge und $f : A \to Y$ eine Abbildung setzen wir $\mathrm{d}^{(0)} f := f$ und $\mathrm{d}^{(1)} f := \mathrm{d} f : x \mapsto \mathrm{d}_x f$ und erklären induktiv für $k \geq 2$ die k**-te Ableitung**

$$\mathrm{d}^{(k)} f : A \to \mathrm{Mult}^k(\vec{X}, \vec{Y})$$

durch $x \mapsto \mathrm{d}_x^{(k)} f := \mathrm{mult}(\mathrm{d}_x(\mathrm{d}^{(k-1)} f))$, falls die $(k-1)$-te Ableitung existiert und differenzierbar ist auf A. Existieren alle Ableitungen von f bis zur Ordnung k und sind stetig, so nennen wir f **von der Klasse** $\mathcal{C}^k$ oder auch eine $\mathcal{C}^k$**-Abbildung**. Zum Beispiel bedeutet $\mathcal{C}^1$ stetig differenzierbar und $\mathcal{C}^0$ stetig. Ist f von der Klasse $\mathcal{C}^k$ für alle k, so heißt die Abbildung f **glatt** oder **beliebig differenzierbar** oder **von der Klasse** $\mathcal{C}^\infty$ oder eine $\mathcal{C}^\infty$**-Abbildung**. Im Fall $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$ erhalten wir den in 12.8.5.8 besprochenen Begriff einer $\mathcal{C}^k$-Abbildung zurück. Der Leser mag zur Übung zeigen, daß jede Verknüpfung von $\mathcal{C}^k$-Abbildungen wieder eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung ist.

Satz 12.8.5.11 (Rechnen mit der äußeren Ableitung). *Sei $A \subset X$ eine halboffene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums.*

1. *Die Zuordnung $\omega \mapsto d\omega$ vom Vektorraum der differenzierbaren k-Formen auf A zum Vektorraum der $(k+1)$-Formen auf A ist linear;*

2. *Für differenzierbare Nullformen alias Funktionen f gilt $df = \mathrm{d}f$;*

3. *Das Dachprodukt differenzierbarer Differentialformen ω und η auf A ist differenzierbar und für seine äußere Ableitung gilt die* **Leibniz-Regel**

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^{|\omega|}\omega \wedge d\eta$$

4. *Gegeben eine $\mathcal{C}^2$-Abbildung $\phi : A \to B$ in eine halboffene Teilmenge B eines weiteren endlichdimensionalen reellen Raums Y und eine differenzierbare Differentialform η auf B haben wir die* **Verwandtschaftsverträglichkeit der äußeren Ableitung**

$$d(\phi^*\eta) = \phi^*(d\eta)$$

5. *Ist die Differentialform ω auf A stetig differenzierbar und ist $d\omega$ auch stetig differenzierbar, so gilt*

$$d(d\omega) = 0$$

12.8.5.12. Diese Formeln zusammen mit der graduierten Kommutativität 12.8.1.12 des Dachprodukts $\omega \wedge \eta = (-1)^{|\omega||\eta|}\eta \wedge \omega$ und mit unserer Regel

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i$$

für das Differential einer differenzierbaren Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ auf einer offenen oder allgemeiner halboffenen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ aus 12.7.1.15 beziehungsweise 12.7.1.17 machen das Rechnen mit Differentialformen außerordentlich bequem. Der Formalismus der Differentialformen geht auf Élie Cartan's Arbeiten zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts zurück. Die Verträglichkeit der äußeren Ableitung mit Verwandtschaft macht die Umrechnung zwischen verschiedenen Koordinatensystemen derart einfach, daß es auch bei anderen Umrechnungen oft der bequemste Weg ist, sie auf diesen Formalismus zurückzuführen. Als Beispiel bespreche ich die Umrechnung des Laplace-Operators auf krummlinige Koordinaten in 12.8.8.10 folgende.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind offensichtlich. Wir führen den Beweis der restlichen Aussagen in mehreren Schritten.

Leibnizregel. Wir können ω und η schreiben als Summen von Formen der Gestalt

$f\omega_\circ$, $g\eta_\circ$ mit $\omega_\circ$, $\eta_\circ$ konstant und f, g differenzierbaren Funktionen. Es reicht also, die Behauptung für $\omega = f\omega_\circ$ und $\eta = g\eta_\circ$ zu prüfen. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \eta) &= d(fg\omega_\circ \wedge \eta_\circ) \quad \text{mit Einsetzen,} \\
&= \mathrm{d}(fg) \wedge \omega_\circ \wedge \eta_\circ \quad \text{nach Beispiel 12.8.5.5,} \\
&= (g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g) \wedge \omega_\circ \wedge \eta_\circ \quad \text{nach der Produktregel 12.7.1.13,} \\
&= \mathrm{d}f \wedge \omega_\circ \wedge g\eta_\circ + (-1)^{|\omega|} f\omega_\circ \wedge \mathrm{d}g \wedge \eta_\circ \quad \text{nach 12.8.1.12,} \\
&= d\omega \wedge \eta + (-1)^{|\omega|}\omega \wedge d\eta \quad \text{nach Beispiel 12.8.5.5.}
\end{aligned}$$

So haben wir die Leibnizregel für Differentialformen zurückgeführt auf den Fall 12.7.1.13 von Nullformen alias Funktionen und den Fall 12.8.5.5 des Produkts einer Nullform alias Funktion mit einer konstanten Form.

$dd = 0$ *im Fall* $A \subset X = \mathbb{R}^n$. Für eine stetig differenzierbare Nullform alias Funktion $\omega = f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ erhalten wir ganz explizit $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Wenn f sogar zweimal stetig differenzierbar ist, finden wir weiter

$$ddf = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_i = 0$$

Hierbei haben wir die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen 12.2.1.12 verwendet, die hinwiederum aus unserer Annahme der Stetigkeit der zweiten Ableitungen folgt. Für eine stetig differenzierbare k-Form ω auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, sagen wir $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$, mit $d\omega$ stetig differenzierbar erhalten wir damit sofort $d(d\omega) = \sum d(df_I) \wedge dx_I = 0$. Für eine zweimal stetig differenzierbare k-Form ω auf einer halboffenen Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ folgt unsere Behauptung dann aus der Stetigkeit von $d(d\omega)$.

Verwandtschaftsverträglichkeit für ϕ affin. Gilt $d\phi^* = \phi^* d$ für ω und η, so nach der Produktregel auch für $\omega \wedge \eta$. Es reicht also, unsere Formel für Funktionen alias Nullformen und für konstante 1-Formen zu zeigen. Der Fall von Funktionen ist 12.7.2.14. Für eine konstante 1-Form $\omega_\circ$ und ϕ affin ist andererseits auch $\phi^*\omega_\circ$ eine konstante 1-Form, mithin gilt wie gewünscht $d(\phi^*\omega_\circ) = 0 = \phi^*(d\omega_\circ)$.

$dd = 0$ *im Allgemeinen.* Ist $\phi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} X$ ein Isomorphismus von affinen Räumen, so folgt $\phi^*(dd\omega) = dd(\phi^*\omega) = 0$ und mithin $dd\omega = 0$.

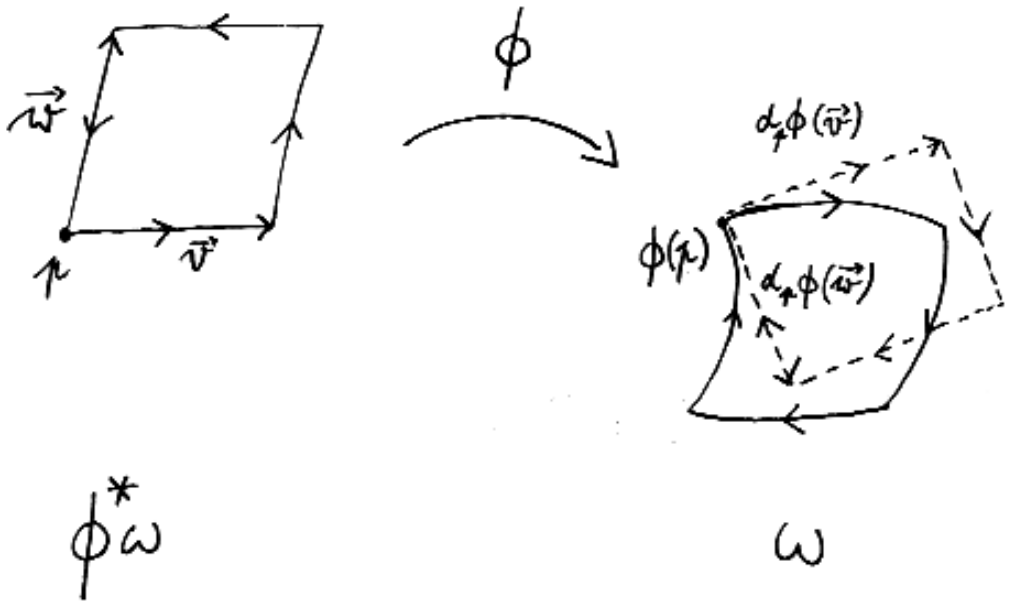
Verwandtschaftsverträglichkeit im Allgemeinen. Gilt $d\phi^* = \phi^* d$ für ω und η, so nach der Produktregel auch für $\omega \wedge \eta$. Es reicht also, unsere Formel für Funktionen alias Nullformen und für konstante 1-Formen zu zeigen. Der Fall von Funktionen ist 12.7.2.14. Für eine konstante 1-Form $\omega_\circ$ haben wir hinwiederum $\omega_\circ = df$ für eine geeignete Funktion f, genauer für jede affine Abbildung $f : Y \to \mathbb{R}$ mit linearem Anteil $\omega_\circ$. Damit ergibt sich für ϕ beliebig unmittelbar

$d\phi^*\omega_\circ = d\phi^* df = dd\phi^* f = 0 = \phi^* 0 = \phi^* d\omega_\circ$, wo wir im mittleren Schritt verwenden, daß uns die Regel $\phi^* df = d\phi^* f$ für differenzierbare Funktionen f ja bereits aus 12.7.2.14 zur Verfügung steht. □

12.8.5.13 (**Unterschiede zum Kalkül mit beliebigen Multilinearformen**). Man beachte den dramatischen Unterschied zu unseren Ableitungen **??** von nicht notwendig alternierenden Multilinearformen, die wir dort sogar im vektorwertigen Fall betrachtet hatten. Die Definition dort war fast dieselbe, bis auf das Detail, daß wir dort beliebige Multilinearformen betrachtet hatten und folgerichtig nach dem Ableiten auch nicht den alternierenden Anteil genommen hatten. Dennoch sind alle drei Aussagen des vorhergehenden Satzes in dieser analogen Situation falsch. Etwas vage gesprochen folgen unsere Aussagen eben gerade aus den Zusammenspiel zwischen dem Kommutieren der partiellen Ableitungen und dem Antikommutieren des Dachprodukts.

12.8.5.14 (**Diskussion der Eigenschaften der äußeren Ableitung**). Unsere Regel 12.8.5.11.4 können wir auch $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega \quad \Rightarrow \quad \phi : d\eta \rightsquigarrow d\omega$ schreiben. Sie besagt also in Worten, daß die äußere Ableitung mit Verwandtschaft verträglich ist. Der Leser sei ermutigt, sich das im Lichte unserer Anschauung 12.8.5.7 auch bildlich klarzumachen. Die Regel $dd\omega = 0$ ist zumindest für Nullformen im Lichte unserer Anschauung 12.8.5.7 leicht einzusehen, da das Integral des Differentials einer Funktion über jeden geschlossenen Integrationsweg verschwindet. Für Kovektorfelder sollte die Identität $dd\omega = 0$ aus dem Stokes'schen Satz 12.8.7.2 heraus klar werden: Er besagt, daß das Integral von $d\omega$ über eine Fläche unseres Parallelpipeds auch als Integral von ω über dessen Rand geschrieben werden kann, und die Summe aller Randintegrale über die sechs Flächen unseres Parallelpipeds ist offensichtlich wieder Null.

12.8.5.15. In nebenstehendem Bild wage ich den Versuch einer anschaulichen Interpretation der Verträglichkeit zwischen der äußeren Ableitung und dem Zurückholen von Kovektorfeldern. Gegeben ist ein Kovektorfeld ω rechts und ein Punkt p mit zwei Richtungsvektoren $\vec{v}, \vec{w}$ links. Das Wegintegral von $\phi^*\omega$ über den kleinen Parallelogrammweg links approximiert $(d(\phi^*\omega))_p(\vec{v}, \vec{w})$. Es stimmt nach 12.7.4.9.2 überein mit dem Wegintegral des Kovektorfelds ω über seinen Bildweg rechts, eingezeichnet als durchgezogener Rundweg aus vier krummen Stücken. Dahingegen approximiert das Wegintegral über den kleinen gestrichelten Parallelogrammweg rechts $(d\omega)_{\phi(p)}(\mathrm{d}_p\phi(\vec{v}), \mathrm{d}_p\phi(\vec{w}))$. Die Anschauung soll uns nun sagen, daß im Grenzwert $t \to 0$ wie in 12.8.5.7 die entsprechenden beiden Wegintegrale rechts nach Teilen durch t^2 gegen denselben Wert streben. In der Tat werden ja nicht nur die beiden Rundwegsintegrale klein von zweiter Ordnung, sondern die beiden Wege werden sich bei $t \to 0$ auch sehr ähnlich, und das sorgt dafür, daß die Differenz ihrer Rundwegsintegrale für $t \to 0$ sogar von dritter Ordnung verschwindet.



Versuch einer anschaulichen Interpretation der Verträglichkeit zwischen der äußeren Ableitung und dem Zurückholen von Kovektorfeldern.

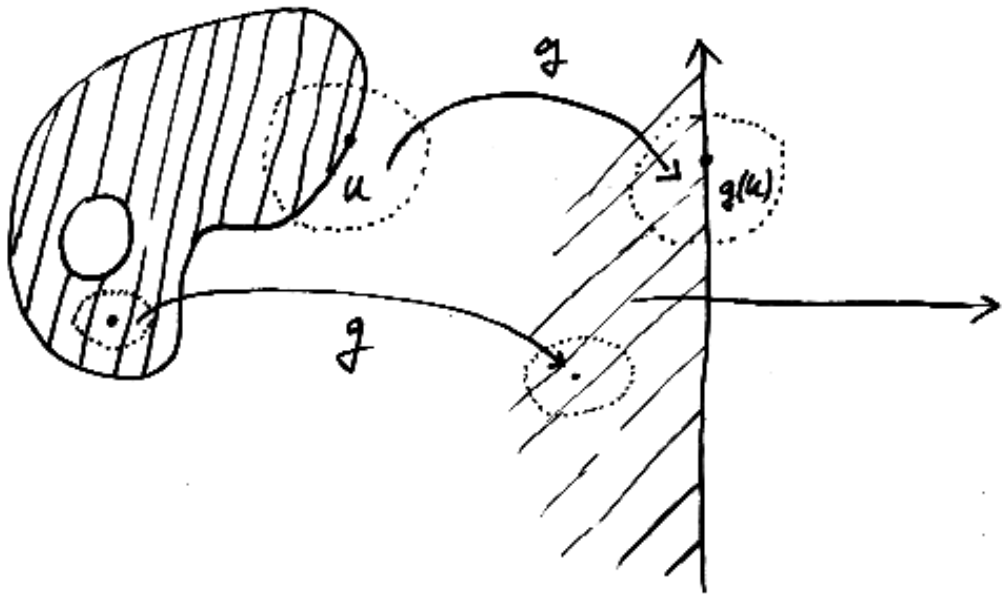
Übungen

Übung 12.8.5.16. Prüfen Sie für beliebige glatte Funktionen $f, a, b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\varphi(a, b) = (a(x, y), b(x, y))$ die Verwandtschaftsverträglichkeit der äußeren Ableitung $d\varphi^*(f(x, y)\,\mathrm{d}x) = \varphi^* d(f(x, y)\,\mathrm{d}x)$.

Übung 12.8.5.17. Prüfen Sie für die Differentialform $x^2 dx \wedge dy - 4\,\mathrm{e}^y\, dx \wedge dz$, daß erst die äußere Ableitung bilden und dann auf Kugelkoordinaten übergehen dasselbe Resultat liefert wie erst auf Kugelkoordinaten übergehen und dann die äußere Ableitung bilden.

12.8.6 Randfaltigkeiten

Definition 12.8.6.1. Seien X ein reeller Raum der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} X = n$ und $k \geq 1$. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt eine k**-dimensionale berandete Mannigfaltigkeit** oder kurz k**-Randfaltigkeit in** X, wenn es um jeden Punkt $p \in M$ ein lokales Koordinatensystem (U, g) von X gibt mit



Eine zweidimensionale berandete Untermannigfaltigkeit der Papierebene mit angepaßten lokalen Koordinatensystemen um zwei ausgewählte Punkte.

$$U \cap M = \{q \in U \mid g_1(q) \leq 0,\ g_{k+1}(q) = \ldots = g_n(q) = 0\}$$

Wir nennen dann (U, g) ein **an die Randfaltigkeit** M **angepaßtes lokales Koordinatensystem von** X.

12.8.6.2. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X und eine k-Randfaltigkeit $M \subset X$ erzeugt ihr Tangentialkegel in einem Punkt $p \in M$ offensichtlich einen k-dimensionalen Untervektorraum von $\vec{X}$. Er heißt der **Tangentialraum an** M **in** p und wird wie bei Mannigfaltigkeiten notiert als

$$\mathrm{T}_p M := \langle \mathrm{K}_p M \rangle$$

Definition 12.8.6.3. Sei X ein reeller Raum der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} X = n$. Unter einer **Randkarte** einer k-Randfaltigkeit $M \subset X$ verstehe ich ein Paar (W, φ) bestehend aus einer offenen Teilmenge $W \Subset \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1}$ und einer injektiven Abbildung

$$\varphi : W \hookrightarrow M$$

derart, daß es um jeden Punkt $p \in \varphi(W)$ ein an die Randfaltigkeit M angepaßtes lokales Koordinatensystem (U, g) von X gibt mit $U \cap M \subset \varphi(W)$ und $\varphi(g_1(q), \ldots, g_k(q)) = q \; \forall q \in U \cap M$.

12.8.6.4. Insbesondere induziert für jede Randkarte (W, φ) einer k-Randfaltigkeit $M \subset X$ und alle $p \in W$ das Differential einen Isomorphismus

$$\mathrm{d}_p \varphi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\varphi(p)} M$$

Sind $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$ und (W_β, φ_β) zwei Randkarten einer Mannigfaltigkeit M, so setzen wir $W_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\beta(W_\beta))$ und nennen die Abbildung

$$\varphi_{\beta\alpha} := \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : W_{\alpha\beta} \to W_{\beta\alpha}$$

den **Kartenwechsel** zwischen unseren beiden Karten. Wie in 12.3.4.12 zeigt man, daß auch jeder Kartenwechsel von Randkarten stetig differenzierbar ist.

Beispiel 12.8.6.5 (**Randkarte zu angepaßtem lokalen Koordinatensystem**). Gegeben ein an eine Randfaltigkeit $M \subset X$ angepaßtes lokales Koordinatensystem $g : X \supseteq U \xrightarrow{\sim} V \Subset \mathbb{R}^n$ liefert seine Umkehrabbildung $g^{-1} : \mathbb{R}^n \supseteq V \xrightarrow{\sim} U \Subset X$ eine Randkarte (W, φ) von M, wenn wir die durch das Anfügen von Nullen gegebene Abbildung $i : \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ betrachten und auf $W := i^{-1}(V)$ die Abbildung $\varphi := g^{-1} \circ i : W \to M$ betrachten.

12.8.6.6. Jede Mannigfaltigkeit ist auch eine Randfaltigkeit. In diesem Fall ist eine Randkarte nach 12.3.4.9 dasselbe wie eine Karte, deren Definitionsbereich im offenen Halbraum aller Punkte von $\mathbb{R}^k$ mit negativer erster Koordinate enthalten ist.

12.8.6.7. Eine berandete Untermannigfaltigkeit der Kodimension Null in einem endlichdimensionalen reellen Raum heißt auch eine $\mathcal{C}^1$**-berandete Teilmenge**. Unser Bild von eben stellt eine $\mathcal{C}^1$-berandete Teilmenge der Papierebene dar.

Beispiele 12.8.6.8. Alle mehrpunktigen Intervalle in $\mathbb{R}$ sind $\mathcal{C}^1$-berandete Teilmengen. Die abgeschlossene Vollkugel $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ ist eine $\mathcal{C}^1$-berandete Teilmenge des $\mathbb{R}^3$.

Lemma 12.8.6.9. *Jede k-Randfaltigkeit M ist eine k-Fastfaltigkeit und für jede Randkarte $\varphi : W \hookrightarrow M$ von M gilt $M_{\text{reg}} \cap \varphi(W) = \varphi(W^\circ)$ für $W^\circ := \operatorname{Inn}_{\mathbb{R}^k}(W)$.*

12.8.6.10. Insbesondere ist das Komplement $\partial M := M \backslash M_{\text{reg}}$ der Menge der regulären Punkte einer k-Randfaltigkeit eine $(k-1)$-Mannigfaltigkeit. Wir nennen sie den **Rand von** M.

Beweis. Daß jede Randfaltigkeit eine Fastfaltigkeit ist, scheint mir offensichtlich. Für das weitere bemerken wir, daß gegeben zwei Randkarten (V,ψ) und (W,φ) einer Randfaltigkeit mit $\varphi(W) = \psi(V)$ durch Anwenden des Umkehrsatzes 12.3.1.2 auf den Kartenwechsel $\kappa = \psi^{-1} \circ \varphi$ folgt $\kappa(W^\circ) \subset V^\circ$ und durch Anwenden auf den umgekehrten Kartenwechsel sogar $\kappa(W^\circ) = V^\circ$. Daß ∂M eine $(k-1)$-Mannigfaltigkeit ist, ergibt sich unmittelbar. □

12.8.6.11 (**Diskussion der Notation**). Das Symbol ∂ ist ein griechisches d. Die Notation ∂M für den Rand ist wohl darauf zurückzuführen, daß sich das Bilden des Randes nach dem Satz von Stokes 12.8.7.2 als eine in gewisser Weise „duale Operation“ zum Differenzieren auffassen läßt und in jedem Falle dazu eng verwandt ist. Der eben erklärte Begriff des Randes ∂M fällt im Fall, daß gilt $n = k$ und daß außerdem M abgeschlossen ist im umgebenden affinen Raum, mit dem in der Topologie verwendeten Begriff von Rand 12.4.5.1 zusammen. Er ist jedoch im allgemeinen davon verschieden, obwohl man für beide Begriffe dieselbe Notation benutzt. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

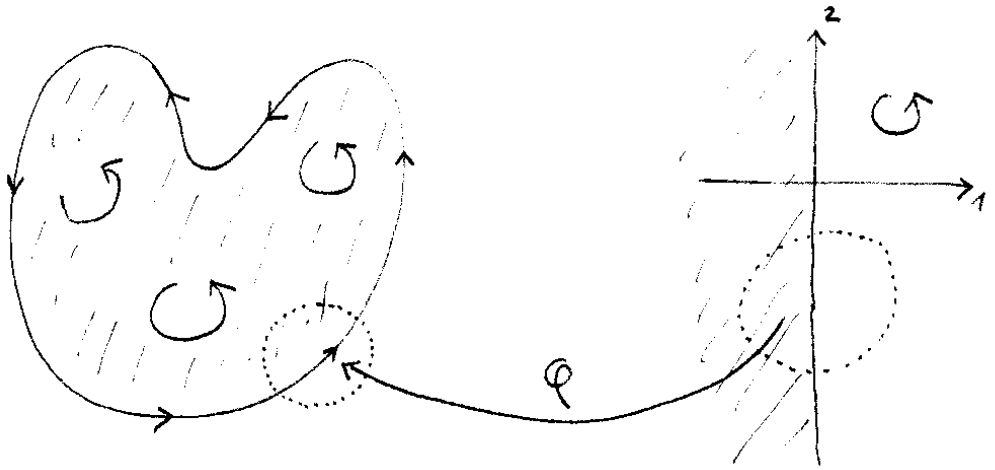
Beispiele 12.8.6.12. Der Rand der Randfaltigkeit $[a,b) \subset \mathbb{R}$ besteht aus dem Punkt a. Eine abgeschlossene Kreisscheibe in der Ebene ist auch als Teilmenge des Raums aufgefaßt eine zweidimensionale Randfaltigkeit mit dem Einheitskreis als Rand.

Definition 12.8.6.13. Gegeben eine Randkarte (W,φ) einer $(k+1)$-Randfaltigkeit M erklären wir die **induzierte Karte** $(\bar{W},\bar{\varphi})$ **des Randes** ∂M durch die Vorschrift

$$(\bar{W},\bar{\varphi}) := (i^{-1}(W), \varphi \circ i)$$

mit $i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k$ der Einbettung $x \mapsto (0,x)$.

12.8.6.14. Unter einer **Orientierung** einer Randfaltigkeit verstehen wir wie bei allgemeinen Fastfaltigkeiten eine Orientierung ihres regulären Teils.



Eine orientierte berandete zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit der induzierten Orientierung auf ihrem Rand und einer Randkarte

Lemma 12.8.6.15. *Gegeben eine orientierte $(k+1)$-Randfaltigkeit M gibt es genau eine Orientierung ihres Randes ∂M derart, daß für jede Randkarte der Orientierung ε auch die induzierte Karte des Randes die Orientierung ε hat. Wir nennen sie die* **induzierte Orientierung des Randes**.

Beweis. Seien $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$ und (W_β, φ_β) zwei Randkarten von M. Der Kartenwechsel $\varphi_{\beta\alpha} : W_{\alpha\beta} \tilde{\to} W_{\beta\alpha}$ induziert nach 12.8.6.9 eine Bijektion $W_{\alpha\beta} \cap (0 \times \mathbb{R}^k) \tilde{\to} W_{\beta\alpha} \cap (0 \times \mathbb{R}^k)$ und diese Bijektion kann durch den Kartenwechsel $\bar{\varphi}_{\beta\alpha}$ der auf dem Rand induzierten Karten beschrieben werden als $\varphi_{\beta\alpha}(0, x_2, \ldots, x_k) = (0, \bar{\varphi}_{\beta\alpha}(x_2, \ldots, x_k))$. Gegeben $y \in \bar{W}_{\alpha\beta}$ hat die Jacobimatrix $[\mathrm{d}_{(0,y)}\varphi_{\beta\alpha}]$ des Kartenwechsels mithin die Gestalt

$$[\mathrm{d}_{(0,y)}\varphi_{\beta\alpha}] = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial(\varphi_{\beta\alpha})_1}{\partial x_1}(0,y) & 0 \\ \hline * & [\mathrm{d}_y\bar{\varphi}_{\beta\alpha}] \end{array}\right)$$

Des weiteren ist der Eintrag oben links nicht negativ, denn $(\varphi_{\beta\alpha})_1$ verschwindet auf allen $(0, y)$ und nimmt auf allen $(t, y) \in W_{\alpha\beta}$ mit $t < 0$ negative Werte an. Mithin hat in jedem Randpunkt die Funktionaldeterminante eines Kartenwechsels zweier Randkarten von M dasselbe Vorzeichen wie die Funktionaldeterminante des Kartenwechsels der auf dem Rand induzierten Karten. Dieses Vorzeichen ist jedoch eine stetige Funktion und muß deshalb auf den Punkten mit erster Koordinate Null dasselbe sein wie auf den Punkten mit negativer erster Koordinate. □

Beispiel 12.8.6.16. Gegeben reelle Zahlen $a < b$ und $\varphi : [a, b] \hookrightarrow X$ eine stetig differenzierbare injektive Abbildung in einen endlichdimensionalen reellen Raum zeigt man unschwer, daß $M := \varphi([a, b])$ eine 1-Randfaltigkeit ist und φ eine Integrationskarte von M und daß M genau eine Orientierung besitzt, für die diese Integrationskarte orientierungsverträglich ist. Dann besteht der Rand der Randfaltigkeit M aus den beiden Punkten $\partial M = \{\varphi(a), \varphi(b)\}$ und die induzierte Orientierung gibt dem Ersten dieser Punkte ein negatives Vorzeichen und dem Zweiten ein positives. Im höherdimensionalen Fall bedeutet unsere Definition anschaulich, daß die orientierten Basen der Tangentialräume des Randes diejenigen angeordneten Basen sind, die orientierte Basen der Tangentialräume der Randfaltigkeit liefern, wenn man noch einen Vektor davorschreibt, der tangential an die Randfaltigkeit ist und an unserem Randpunkt „aus der Randfaltigkeit heraus zeigt“. Ist speziell $M = \partial K$ der Rand einer glatt berandeten Teilmenge K mit der von einer Orientierung des umgebendem Raums induzierten Orientierung, so nennt man das orientierte Normalenfeld auch das **äußere Normalenfeld**, da dann anschaulich gesprochen N_p stets „aus K heraus zeigt“.

Übungen

Übung 12.8.6.17. Seien X und Y endlichdimensionale reelle Räume, $U \Subset X$ eine offene Teilmenge und $f : U \to Y$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit überall surjektivem Differential. So ist für jede Randfaltigkeit $C \subset Y$ ihr Urbild $M = f^{-1}(C)$ eine Randfaltigkeit von X der Dimension $\dim X - \dim Y + \dim C$ mit Rand $\partial M = f^{-1}(\partial C)$. Man erkennt so zum Beispiel, daß alle Vollkugeln Randfaltigkeiten sind. Hinweis: 12.3.2.20 und 12.3.2.23.

12.8.7 Integralsatz von Stokes

12.8.7.1. Bisher haben wir bei der Definition von Fastfaltigkeiten, Randfaltigkeiten und Mannigfaltigkeiten sowie ihren Koordinatensystemen, Karten und Randkarten alle beteiligten Abbildungen für gewöhnlich als stetig differenzierbar angenommen. Wenn wir stattdessen $\mathcal{C}^l$ für $1 \leq l \leq \infty$ fordern wollen, schreiben wir das explizit dazu und sagen statt $\mathcal{C}^\infty$ auch **glatt**. Den Fall $l = 0$ betrachten wir hier nicht, da dabei zusätzliche Schwierigkeiten auftreten und da dieser Fall für das folgende nicht relevant ist. Zur Illustration der im Fall $l = 0$ zu erwartenden Schwierigkeiten sei nur bemerkt, daß in diesem Fall bereits unser Beweis 12.8.6.9 für die Wohldefiniertheit des Randes einer Randfaltigkeit versagt.

Satz 12.8.7.2 (Stokes'scher Integralsatz). *Seien M eine kompakte orientierte $\mathcal{C}^2$-Randfaltigkeit der Dimension $(k+1)$ in einem endlichdimensionalen reellen Raum und ω eine stetig differenzierbare k-Form auf einer halboffenen Teilmenge unseres Raums, die M umfaßt. So gilt mit der induzierten Orientierung des Randes ∂M auf der rechten Seite*

$$\int_{\vec{M}} d\omega = \int_{\partial \vec{M}} \omega$$

12.8.7.3 (**Verallgemeinerungen des Stokes'schen Integralsatzes**). Der Beweis wird zeigen, daß wir statt der Kompaktheit unserer Randfaltigkeit M schwächer nur vorauszusetzen brauchen, daß der Träger der Differentialform unsere Mannigfaltigkeit in einem Kompaktum trifft, in Formeln $\operatorname{supp} \omega \cap M$ kompakt. In 12.8.7.19 erklären wir eine Verallgemeinerung des Stokes'schen Integralsatzes von Randfaltigkeiten auf „Eckfaltigkeiten", die für die im „wirklichen Leben" auftretenden Situationen besonders relevant ist.

12.8.7.4. Konkrete Spezialfälle des vorhergehenden Satzes werden ab 12.8.7.22 diskutiert. Bereits hier sei angemerkt, daß für eine kompakte Mannigfaltigkeit alias eine kompakte Randfaltigkeit mit leerem Rand das Integral auf der linken Seite verschwinden muß, in Formeln $\partial M = \emptyset \;\Rightarrow\; \int_{\vec{M}} d\omega = 0$.

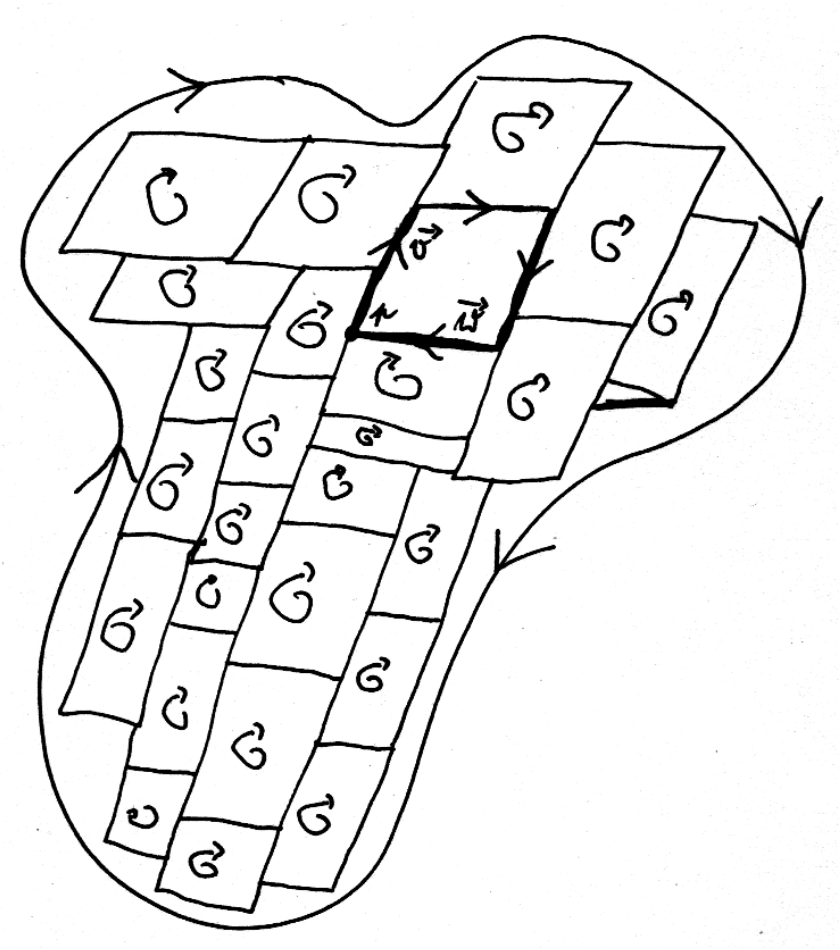


Illustration zum Stokes'schen Satz. Gegeben ein Kovektorfeld ω erinnern wir uns dazu daran, daß nach 12.8.5.7 seine äußere Ableitung $(d\omega)_p(\vec{v}, \vec{w})$ ausgewertet auf Richtungsvektoren $\vec{v}, \vec{w}$ eine Approximation des Wegintegrals von ω über den Rundweg von p erst nach $p + \vec{v}$, dann weiter nach $p + \vec{v} + \vec{w}$, von dort nach $p + \vec{w}$ und zurück nach p ist. Es sollte nun anschaulich klar sein, daß die Summe über viele derartige kleine Rundwegsintegrale das Randintegral über den ganzen Bereich approximiert. Der Satz von Stokes formalisiert diese Anschauung.

Beweis. Gilt die Aussage für ω und ω', so auch für $\omega + \omega'$. Wir können also nach der Beschreibung 12.4.1.5 der Kompaktheit und unseren Erkenntnissen 12.4.2.14 über glatte Teilungen der Eins ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unsere Randfaltigkeit M eine Randkarte (W, φ) einer Orientierung ε besitzt mit $(\operatorname{supp}\omega \cap M) \subset \varphi(W)$. So gilt per definitionem die erste Gleichung in der Gleichungskette

$$\int_{\vec{M}} d\omega = \varepsilon \int_W \varphi^*(d\omega) = \varepsilon \int_W d(\varphi^*\omega)$$

Da nach 12.8.5.11.4 im Fall einer $\mathcal{C}^2$-Abbildung die äußere Ableitung mit dem Zurückholen vertauscht, gilt unter unseren Annahmen auch die zweite Gleichung. Bezeichnet $(\bar{W}, \bar{\varphi})$ wie in 12.8.6.13 die induzierte Karte des Randes und $i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k$, $x \mapsto (0, x)$ die offensichtliche Einbettung, so gilt nach unseren Definitionen und wegen $\bar{\varphi} = \varphi \circ i$ und $\bar{W} = i^{-1}(W)$ auch

$$\int_{\partial\vec{M}} \omega = \varepsilon \int_{\bar{W}} \bar{\varphi}^*\omega = \varepsilon \int_{i^{-1}W} i^*(\varphi^*\omega)$$

Bezeichnen wir mit η die Fortsetzung durch Null von $\varphi^*\omega$ auf den ganzen Halbraum, so reduziert sich unser Satz so auf den Spezialfall, den wir im Anschluß als eigenständiges Lemma formulieren und beweisen. □

Lemma 12.8.7.5. *Gegeben eine stetig differenzierbare k-Form η mit kompaktem Träger auf dem Halbraum $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^k} i^*\eta = \int_{\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k} d\eta$$

für $i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k$ die Einbettung $x \mapsto (0, x)$.

Beweis. Wir nennen unsere Koordinaten ausnahmsweise $x_0, x_1, \ldots, x_k$ und können schreiben

$$\eta = \sum_{\nu=0}^{k} \eta_\nu \; dx_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_\nu} \wedge \ldots \wedge dx_k$$

für stetig differenzierbare Funktionen η_ν mit kompaktem Träger. Es ergibt sich $i^*\eta = (\eta_0 \circ i) \; dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$. Die linke Seite ist also $\int_{\mathbb{R}^k} (\eta_0 \circ i) \, \mathrm{d}^k x$. Auf der rechten Seite erhalten wir

$$d\eta = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{\partial \eta_\nu}{\partial x_\nu} dx_0 \wedge \ldots \wedge dx_k$$

Für $\nu \neq 0$ verschwindet jedoch beim entsprechenden Summanden das ν-te partielle Integral, da die Stammfunktion η_ν kompakten Träger hat und von $-\infty$ bis

∞ integriert wird. Nur der erste Summand liefert folglich überhaupt einen Beitrag und dieser Beitrag ist

$$\int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_0} \right) = \int_{\mathbb{R}^k} (\eta_0 \circ i) \, \mathrm{d}^k x \qquad \square$$

Vorschau 12.8.7.6 (**Variante für abstrakte Randfaltigkeiten**). Später werden wir lernen, was eine „abstrakte Randfaltigkeit“ sowie eine „Differentialform auf einer abstrakten Randfaltigkeit“ sind und wie man solche Differentialformen ableitet und k-Formen über orientierte k-dimensionale abstrakte Randfaltigkeiten integriert. In dieser Allgemeinheit gilt dann dieselbe Formel für eine beliebige stetig differenzierbare k-Form ω mit kompaktem Träger auf einer beliebigen orientierten $(k+1)$-dimensionalen $\mathcal{C}^2$-Randfaltigkeit M.

Beispiel 12.8.7.7 (**Satz von Stokes im Fall einer Flußdichte**). Seien X ein dreidimensionaler orientierter reeller affiner Raum und $K \subset X$ eine kompakte orientierte dreidimensionale $\mathcal{C}^2$-Randfaltigkeit alias ein Körper wie etwa eine massive Kugel oder ein massiver Eisenring, den wir uns aber nur als wohlbestimmte Region in X denken, die durchaus von Gas durchströmt werden kann. Der Rand ∂K ist dann eine Fläche, etwa eine Kugelschale oder die Oberfläche unseres Rings. Sei nun ω die 2-Form der Flußdichte eines bewegten Gases wie in 12.8.2.4. Nach 12.8.4.17 beschreibt das Integral von ω über ∂K die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall in einer durch die Orientierung bestimmten Richtung durch unsere Fläche ∂K hindurchtritt. Nach 12.8.5.7 beschreibt die 3-Form $d\omega$ an jeder Stelle für jede angeordnete Basis aus drei kleinen Vektoren die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall aus dem entsprechenden kleinen Parallelpiped entweicht oder in dieses einströmt, je nach Vorzeichen. Nach 12.8.4.17 beschreibt das Integral über K dieser 3-Form die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall aus der Region K entweicht oder in diese einströmt, je nach Vorzeichen. Der Satz von Stokes besagt dann schlicht, daß diese Gesamtmasse dieselbe ist wie die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall durch die Oberfläche ∂K hindurchtritt.

Beispiel 12.8.7.8 (**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**). Jedes mehrpunktige kompakte reelle Intervall $M = [a, b]$ ist eine eindimensionale glatte Randfaltigkeit in $\mathbb{R}$ und erbt von $\mathbb{R}$ eine Orientierung. Sein Rand ist die nulldimensionale Mannigfaltigkeit $\partial M = \{a, b\}$ und die induzierte Orientierung darauf gibt dem Punkt a das Vorzeichen -1 und dem Punkt b das Vorzeichen $+1$. Eine stetig differenzierbare Nullform ω auf M ist eine stetig differenzierbare Funktion G und ihre äußere Ableitung ist das Kovektorfeld $d\omega = \mathrm{d}G = G'(x) \, \mathrm{d}x$. Wir erkennen so, daß unser Satz von Stokes 12.8.7.2 in diesem Fall zum Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung 10.5.7.3 spezialisiert.

Beispiel 12.8.7.9 (**Fluß durch eine Hemisphäre**). Wir kommen nocheinmal auf unser Integral über die obere Hemisphäre H der 2-Form $x^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ aus 12.8.4.7 zurück, wobei unsere Orientierung der oberen Hemisphäre unter der Projektion auf die Ebene die übliche Orientierung des $\mathbb{R}^2$ entsprach. Nun haben wir das Glück, $x^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -d(x^2 y\,\mathrm{d}x)$ schreiben zu können. Der Rand von $\vec{H}$ ist dann der im Gegenuhrzeigersinn orientierte Einheitskreis in der xy-Ebene $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1,\ z=0\}$ und aus dem Satz von Stokes folgt

$$\int_{\vec{H}} x^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{\vec{S}} -x^2 y\,\mathrm{d}x$$

Zur Sicherheit machen wir noch die Probe und landen mit

$$\int_{\vec{S}} -x^2 y\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} -\cos^2\varphi \sin\varphi\,\mathrm{d}(\cos\varphi) = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

im wesentlichen bei demselben Integral wie dem, das wir bereits in 12.8.4.7 berechnet hatten. Genauer wird der fehlende Faktor 2 von $\int_0^\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ in der Rechnung dort hier dadurch ausgeglichen, daß das Integral bis 2π läuft.

12.8.7.10 (**Bedeutung des Formalismus der Differentialformen**). Der hier vorgeführte Beweis des Stokes'schen Satzes ist sehr kurz. Das liegt daran, daß die hier gewählte Formulierung in der Sprache der Differentialformen so gut mit Koordinatenwechseln verträglich ist, daß wir uns beim Beweis sehr leicht auf einen einfachen Spezialfall zurückziehen können. In gewisser Weise haben wir also mit der Entwicklung der Sprache der Differentialformen die Hauptarbeit bereits geleistet. Als wesentliche nichttriviale Aussage möchte ich dabei insbesondere die Verträglichkeit der äußeren Ableitung mit $\mathcal{C}^2$-Koordinatenwechseln 12.8.5.11.4 hervorheben, die sich auch noch in vielen anderen Zusammenhängen als ein äußerst starkes Hilfsmittel erweisen wird.

Beispiel 12.8.7.11. Wir wiederholen unser Beispiel einer Flußdichte 12.8.7.7 und übertragen es in eine andere Formelwelt. Gegeben eine kompakte $\mathcal{C}^1$-berandete Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ im Sinne von 12.8.6.7 bezeichne $N : \partial K \to \mathbb{R}^n$ das äussere Normalenfeld. Gegeben ein stetig differenzierbares Vektorfeld $F : K \to \mathbb{R}^n$ erklären wir seine sogenannte **Quelldichte** oder auch **Divergenz** durch die Vorschrift $\operatorname{div} F := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$. Ist K sogar $\mathcal{C}^2$-berandet im Sinne von 22.1.2.8, so zeigen wir den **Gauß'schen Integralsatz**

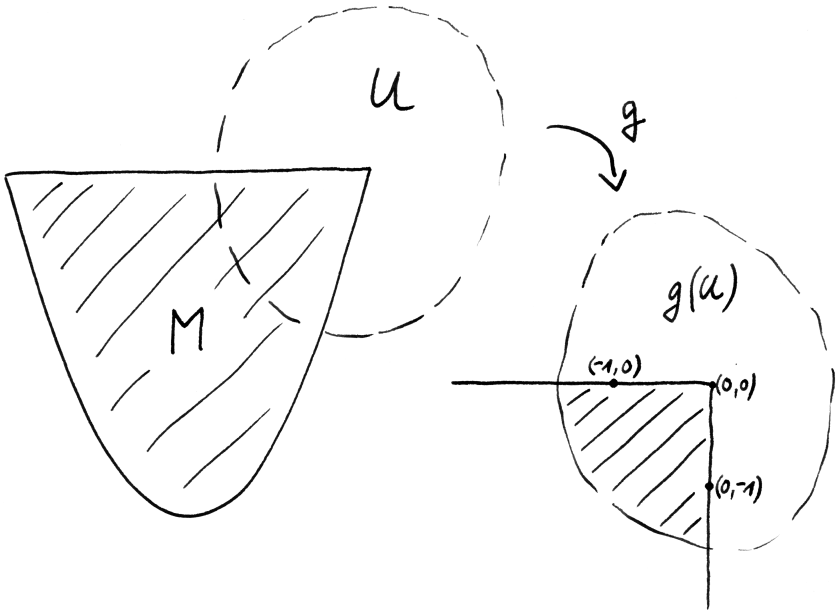
$$\int_K \operatorname{div} F = \int_{\partial K} F \cdot N$$

Bilden wir in der Tat zu F wie in 12.8.4.14 die zugehörige $(n-1)$-Form $\omega = \omega_F$, so finden wir $d\omega = (\operatorname{div} F)\ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Mit unseren Übersetzungen 12.8.4.4

und 12.8.4.15 zeigt der Satz von Stokes 12.8.7.2 dann

$$\int_K \operatorname{div} F = \int_{\vec{K}} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\vec{K}} \omega = \int_{\partial K} F \cdot N$$

In Worten ist also der Fluß eines Vektorfelds durch den Rand eines $\mathcal{C}^2$-berandeten Kompaktums im $\mathbb{R}^n$ gleich dem Integral seiner Quelldichte über besagtes Kompaktum. Anschaulich mag man sich im Fall $n = 2$ die Oberfläche K eines ebenen Moores denken, in dem Wasser nach oben dringt und über das Moor an den Rand des Moores fließt. Nehmen wir das Geschwindigkeitsfeld dieses Flusses als unser Vektorfeld, so wäre die Divergenz eben die Quelldichte in unserem Moor, das Randintegral mißt die Wassermenge, die pro Zeiteinheit am Rand unseres Moores herausläuft, und unser Satz besagt, daß sie gleich der Wassermenge sein muß, die pro Zeiteinheit im Inneren emporquillt.



Eine kompakte 2-dimensionale Eckfaltigkeit M der Papierebene mitsamt einer Eckenplättung in die dafür in geeigneter Weise mit $\mathbb{R}^2$ zu identifizierende Papierebene.

Definition 12.8.7.12. Seien X ein reeller affiner Raum endlicher Dimension n und $k \in \mathbb{N}$. Eine Teilmenge $M \subset X$ heiße eine k-**Eckfaltigkeit**, wenn für jeden Punkt $p \in M$ ein lokales Koordinatensystem (U, g) von X existiert mit

$$U \cap M = \{q \in U \mid g_1(q) \leq 0, \ldots, g_k(q) \leq 0,\ g_{k+1}(q) = \ldots = g_n(q) = 0\}$$

Wir nennen dann (U, g) ein **an die Eckfaltigkeit M angepaßtes lokales Koordinatensystem von X**.

12.8.7.13 (**Diskussion der Terminologie**). Den Begriff einer „Eckfaltigkeit“ gibt es bisher in der Literatur noch nicht. Er ist das Ergebnis meiner Versuche, eine Begrifflichkeit zu entwickeln, in der der Stokes'sche Integralsatz ohne viel zusätzlichen Aufwand in einer für Anwendungen nützlichen Allgemeinheit präzise formuliert und bewiesen werden kann.

Beispiele 12.8.7.14. Eine nulldimensionale Eckfaltigkeit ist dasselbe wie eine nulldimensionale Mannigfaltigkeit alias eine diskrete Teilmenge. Eine eindimensionale Eckfaltigkeit ist dasselbe wie eine eindimensionale Randfaltigkeit. Eine zweidimensionale Eckfaltigkeit wäre zum Beispiel ein „abgeschlossenes Segment einer Kreischeibe“. Eine dreidimensionale Eckfaltigkeit im dreidimensionalen Raum ist etwa ein Würfel oder ein massiver Zylinder oder eine Vollkugel. Jede Mannigfaltigkeit ist auch eine Eckfaltigkeit. Eine n-dimensionale Eckfaltigkeit in einem n-dimensionalen Raum nenne ich auch eine **eckig berandete Teilmenge** und im $\mathcal{C}^l$-Fall eine **$\mathcal{C}^l$-eckig berandete Teilmenge**, die also salopp gesprochen „lokal um jeden Punkt mit einem $\mathcal{C}^l$-Diffeomorphismus in eine offene Teilmenge einer Kopie der Standardecke transformiert werden kann“.

Definition 12.8.7.15. Sei X ein reeller Raum der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} X = n$. Unter einer **Eckenkarte** einer k-Eckfaltigkeit $M \subset X$ verstehe ich ein Paar (W, φ) bestehend aus einer offenen Teilmenge $W \Subset (\mathbb{R}_{\leq 0})^k$ und einer injektiven Abbildung

$$\varphi : W \to M$$

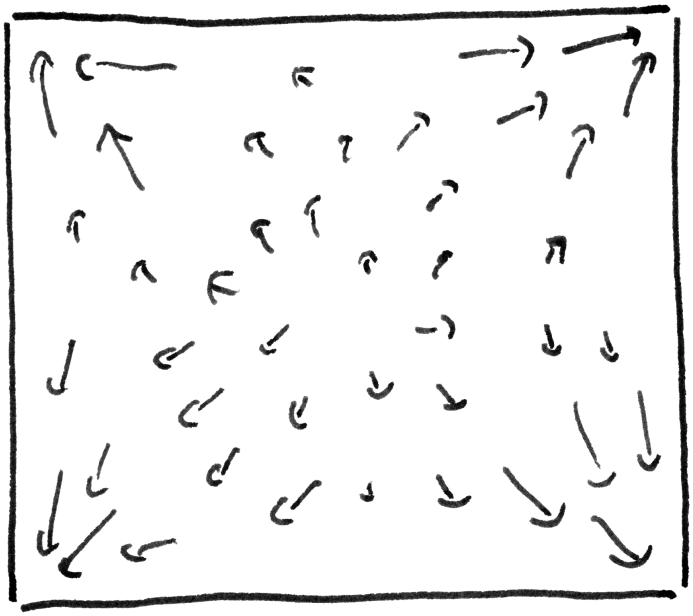
derart, daß es um jeden Punkt $p \in \varphi(W)$ ein an die Eckfaltigkeit M angepaßtes lokales Koordinatensystem (U, g) von X gibt mit $U \cap M \subset \varphi(W)$ und $\varphi(g_1(q), \ldots, g_k(q)) = q \; \forall q \in U \cap M$.

Lemma 12.8.7.16. *Jede k-Eckfaltigkeit M ist eine k-Fastfaltigkeit und für jede Eckenkarte $\varphi : W \hookrightarrow M$ von M gilt $M_{\text{reg}} \cap \varphi(W) = \varphi(W^\circ)$.*

12.8.7.17. Insbesondere ist das Komplement $\partial M := M \backslash M_{\text{reg}}$ der Menge der regulären Punkte eine $(k-1)$-Fastfaltigkeit. Wir nennen sie den **Rand von M**. Weiter ist $M_{\text{reg}} \sqcup (\partial M)_{\text{reg}}$ eine k-Randfaltigkeit.

Beweis. Dieser Beweis ist fast identisch zum Beweis der entsprechenden Aussage für Randfaltigkeiten 12.8.6.9. Daß jede Eckfaltigkeit eine Fastfaltigkeit ist, scheint mir offensichtlich. Für das weitere bemerken wir, daß gegeben zwei Eckenkarten (V, ψ) und (W, φ) einer Eckfaltigkeit mit $\varphi(W) = \psi(V)$ durch Anwenden des Umkehrsatzes 12.3.1.2 auf den Kartenwechsel $\kappa = \psi^{-1} \circ \varphi$ folgt $\kappa(W^\circ) \subset V^\circ$ und durch Anwenden auf den umgekehrten Kartenwechsel sogar $\kappa(W^\circ) = V^\circ$. Das Lemma folgt. $\square$

12.8.7.18. Unter einer **Orientierung** einer Eckfaltigkeit M verstehen wir eine Orientierung als Fastfaltigkeit alias eine Orientierung der Mannigfaltigkeit M_{reg}. Das ist auch dasselbe wie eine Orientierung der Randfaltigkeit $M_{\text{reg}} \cup (\partial M)_{\text{reg}}$ und induziert damit nach 12.8.6.15 eine Orientierung der Mannigfaltigkeit $(\partial M)_{\text{reg}}$ alias eine Orientierung der Fastfaltigkeit ∂M, die **induzierte Orientierung des Randes**.



Ein expandierendes Gas, das durch die Ecken entweicht, als Beispiel dafür, daß die Kompaktheitsbedingung beim Satz von Stokes notwendig ist.

Satz 12.8.7.19 (Stokes'scher Integralsatz mit Ecken). *Seien M eine orientierte $\mathcal{C}^2$-Eckfaltigkeit der Dimension $(k+1)$ in einem endlichdimensionalen reellen Raum und ω eine stetig differenzierbare k-Form auf einer halboffenen Teilmenge unseres Raums, die M umfaßt und für die $(\operatorname{supp}\omega) \cap M$ kompakt ist. Versehen wir den Rand ∂M von M mit der induzierten Orientierung, so gilt*

$$\int_{\vec{M}} d\omega = \int_{\partial \vec{M}} \omega$$

Beweis. Mit denselben Tricks wie beim Beweis für Randfaltigkeiten 12.8.7.2 ziehen wir uns auf den Fall $M = (\mathbb{R}_{\leq 0})^{k+1} \subset \mathbb{R}^{k+1}$ zurück. Wir müssen damit nur zeigen, daß für $i_\nu : (\mathbb{R}_{\leq 0})^k \to (\mathbb{R}_{\leq 0})^{k+1}$ das Einfügen einer Null an der ν-ten Stelle und η eine stetig differenzierbare k-Form mit kompaktem Träger auf $(\mathbb{R}_{\leq 0})^{k+1}$

gilt

$$\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}\int_{(\mathbb{R}_{\leq 0})^k} i_\nu^*\eta = \int_{(\mathbb{R}_{\leq 0})^{k+1}} d\eta$$

Das Nachrechnen dieser Verallgemeinerung von Lemma 12.8.7.5 bleibe dem Leser überlassen. □

12.8.7.20 (**Bedeutung der Kompaktheitsannahmen**). Im allgemeinen gilt der Satz von Stokes keineswegs für nichtkompakte Randfaltigkeiten, selbst wenn am Rand „nur ein Punkt fehlt und das die Kompaktheit zerstört“. Ist zum Beispiel Q ein Quadrat in der Ebene ohne die Ecken, so können wir auf einer offenen Menge, die unser eckenloses Quadrat umfaßt, ein Vektorfeld konstruieren, das den Fluß eines expandierenden Gases beschreibt, das „durch die Löcher in den Ecken entweicht“ aber dessen Fluß durch die Randkanten des Quadrats verschwindet. In dieser Allgemeinheit gälte der Satz von Stokes also nicht. Allerdings müßte unser Gas „mit unendlicher Geschwindigkeit durch die Ecken pfeifen“ und sein Geschwindigkeitsfeld könnte nicht stetig auf besagte Ecken fortgesetzt werden, weshalb auch die Voraussetzungen für unseren Satz von Stokes mit Ecken in diesem Fall nicht erfüllt wären. Es gibt noch sehr viel allgemeinere Versionen des Stokes'schen Satzes mit Ecken, vergleiche etwa [Kön97], mit denen sich zum Beispiel auch der Fluß durch die Oberfläche eines Ikosaeders oder einer Eiswaffel direkt diskutieren ließen. Der hier besprochene Fall scheint mir jedoch für die meisten Anwendungen ausreichend und hat den Vorteil, daß sowohl seine Formulierung als auch sein Beweis nur wenig begrifflichen Aufwand benötigen. Den Fall eines Ikosaeders kann man daraus im übrigen auch noch erhalten, etwa indem man besagten Ikosaeder in Dreieckspyramiden mit einer Ecke im Ursprung zerlegt.

12.8.7.21. Ich formuliere nun einige Spezialfälle des allgemeinen Stokes'schen Satzes 12.8.7.2 in klassischer Notation, um die Lektüre älterer Texte zu erleichtern. Ich hoffe jedoch, daß sich der für explizite Rechnungen und theoretische Überlegungen gleichermaßen bestens geeignete Formalismus der Differentialformen mit der Zeit auch bei den Anwendern durchsetzen wird.

Beispiel 12.8.7.22 (**Wegintegral über ein Gradientenfeld**). Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine eindimensionale Randfaltigkeit und $\varphi : [a,b] \xrightarrow{\sim} M$ eine surjektive Integrationskarte. So besitzt M genau eine Orientierung, für die φ eine orientierte Integrationskarte ist. Gegeben eine Nullform alias Funktion f auf einer halboffenen Menge $U \Subset \mathbb{R}^n$, die M umfaßt, haben wir $\mathrm{d}f = \mathrm{can}_s(\operatorname{grad} f)$ und der Satz von Stokes erhält nach 12.8.6.16 und 12.8.4.9 die Gestalt

$$\int_a^b \langle \operatorname{grad} f, \mathrm{d}\varphi\rangle = \oint_\varphi \mathrm{d}f = \int_{\vec{M}} \mathrm{d}f = \int_{\partial\vec{M}} f = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$$

In dieser Situation erhalten wir also erst einmal nur spezielle Fälle unserer Erkenntnis $\oint_\varphi \mathrm{d}f = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$, die wir bereits allgemeiner für beliebiges stetig differenzierbares $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ gezeigt hatten. Wir erhalten die dortige Erkenntnis im allgemeinen, wenn wir mit der Randfaltigkeit $\vec{I} := [a,b]$ mit ihrer offensichtlichen Orientierung und mit der Funktion $f \circ \varphi$ arbeiten. Dann ergibt sich

$$\oint_\varphi \mathrm{d}f = \oint_a^b \varphi^*(\mathrm{d}f) = \int_{\vec{I}} \varphi^*(\mathrm{d}f) = \int_{\vec{I}} \mathrm{d}(f \circ \varphi) = \int_{\partial \vec{I}} f \circ \varphi = (f \circ \varphi)|_a^b$$

Beispiel 12.8.7.23 (**Schwerpunkt und Auftrieb homogener Körper**). Ein homogener, als da heißt überall gleich dichter schwerer Körper K wird an einem Seil ins Wasser gelassen. Wir wollen uns überlegen, daß auch im Wasser der Schwerpunkt unseres Körpers in der Vertikalen unter dem Aufhängepunkt bleibt. Für inhomogene Körper gilt das im allgemeinen keineswegs. Wir denken uns unseren Körper als kompakte glatt berandete Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^3$ mit Schwerpunkt auf der z-Achse, also $\int_K x = \int_K y = 0$. Die Wasseroberfläche möge die Ebene $z = 0$ sein. Der Wasserdruck steigt linear mit der Tiefe, auf ein Oberflächenelement der Fläche σ um $p \in \partial K$ wirkt also die Kraft $z(p)N_p\sigma$ mit N_p dem nach außen orientierten Normalenvektor bei p. Befindet sich der Aufhängepunkt etwa in der Höhe $h < 0$, so wird das Drehmoment um diesen Aufhängepunkt das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial K} z(p)(N_p \times (p + h\,\mathrm{e}_3))$$

Die Komponenten dieses Vektors bei $p = (x,y,z)$ mit $N_p = (N_1, N_2, N_3)$ sind $z(N_2(z+h) - N_3 y), z(N_3 x - N_1(z+h))$ und $z(N_1 y - N_2 x)$ und können auch dargestellt werden als die Skalarprodukte von N_p mit den Vektorfeldern $v_1(x,y,x) = (0, z^2 + hz, -zy)$, $v_2(x,y,z) = (-z^2 - hz, 0, zx)$ und $v_3(x,y,z) = (zy, -zx, 0)$. Es gilt also $\int_{\partial K}(N \cdot v_i)\sigma = 0$ zu zeigen. Mit dem Satz von Gauß können wir diese Integrale verwandeln in die Integrale $\int_K \operatorname{div} v_i$ und wegen $\operatorname{div} v_1 = -y$, $\operatorname{div} v_2 = x$ und $\operatorname{div} v_3 = 0$ verschwinden sie in der Tat alle drei.

Beispiel 12.8.7.24 (**Klassischer Satz von Stokes**). Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte orientierte berandete Fläche oder präziser $\mathcal{C}^2$-Randfaltigkeit der Dimension 2. Sei N ihr orientiertes Normalenfeld 12.8.4.13. Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \Subset \mathbb{R}^3$, die M umfaßt, und bezeichne $\eta = \mathrm{can}_s(F)$ die zugehörige 1-Form. So finden wir $d\eta = \omega_{\operatorname{rot} F}$ in der Notation von 12.8.4.14 für das durch die Vorschrift

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\,,\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\,,\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

ggebene Vektorfeld auf U. Dies Vektorfeld ist die Rotation unseres Vektorfelds F, wie wir sie in 12.7.8.12 eingeführt haben. Nehmen wir nun zusätzlich an, der

Weg $\varphi : [a, b] \to \partial M$ sei eine positiv orientierte surjektive Integrationskarte des Randes ∂M der Randfaltigkeit M. Unser allgemeiner Satz von Stokes 12.8.7.2 spezialisiert in dieser Situation zum **klassischen Satz von Stokes**

$$\int_M N \cdot (\operatorname{rot} F) = \int_{\vec{M}} \mathrm{d}\eta = \int_{\partial \vec{M}} \eta = \int_a^b F \cdot \mathrm{d}\varphi$$

Allgemeiner könnte eine surjektive orientierte Integrationskarte des Randes als Definitionsbereich auch eine endliche disjunkte Vereinigung von kompakten Intervallen haben und dann erhalten wir rechts die Summe über die entsprechenden Wegintegrale. In Worten ist also das Wegintegral eines Vektorfeldes über den Rand einer Fläche gleich dem Fluß der Rotation des Vektorfelds durch besagte Fläche.

12.8.7.25. Bei Anwendern, die hauptsächlich im $\mathbb{R}^3$ arbeiten, ist eine andere symbolische Schreibweise für grad, rot und div sehr beliebt: Sie betrachten den sogenannten **Nabla-Operator** ∇, den man sich denkt als den „Vektor von Symbolen“ $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, und schreiben

$\nabla f = \operatorname{grad} f$, zu verstehen als symbolisches Produkt des Nabla-Vektors mit einer skalaren Funktion;

$\nabla \cdot F = \operatorname{div} f$, zu verstehen als symbolisches Skalarprodukt des Nabla-Vektors mit einer vektorwertigen Funktion; das Skalarprodukt wird von diesen Anwendern meist $v \cdot w$ notiert statt wie bei uns $\langle v, w \rangle$;

$\nabla \times F = \operatorname{rot} F$, zu verstehen als symbolisches Vektorprodukt des Nabla-Vektors mit einer vektorwertigen Funktion, wo eben das Vektorprodukt $v \times w = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 - w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$ aus der Geometrie des Raums 4.1.9.1 zugrundegelegt wird.

In dieser Notation wird dann unsere Formel $dd\omega = 0$ für ω eine Funktion beziehungsweise eine 1-Form auf dem $\mathbb{R}^3$ verstanden als formal-symbolische Konsequenz der Formeln $v \times v = 0$ beziehungsweise $v \cdot (v \times w) = 0$ aus der Geometrie des Raums.

Beispiel 12.8.7.26 (**Green'sche Formel**). Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte $\mathcal{C}^2$-eckig berandete Teilmenge, versehen mit der von der Standardorientierung des $\mathbb{R}^2$ herkommenden Orientierung. Sei $\varphi : Q \to \mathbb{R}^2$ eine surjektive orientierte Integrationskarte ihres Randes mit Q einer Vereinigung der paarweise disjunkten Intervalle $[a_i, b_i]$ für $1 \leq i \leq n$. Anschaulich sind die $\varphi : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^2$ Stücke eines „im Gegenuhrzeigersinn auf dem Rand umlaufenden geschlossenen Integrationswegs“. Gegeben ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v = (v_1, v_2)$ auf einer offenen

Umgebung von G betrachten wir die 1-Form $\langle v, \ \rangle = \eta = v_1 \, \mathrm{d}x_1 + v_2 \, \mathrm{d}x_2$. Sie hat das Differential $d\eta = (\operatorname{rot} v) \, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ für

$$\operatorname{rot} v = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

die in 12.7.8.12 erklärte skalare Rotation eines Vektorfelds in der Ebene. Der Satz von Stokes mit Ecken 12.8.7.19 spezialisiert dann zur **Green'schen Formel**

$$\int_G \operatorname{rot} v = \int_{\vec{G}} \mathrm{d}\eta = \int_{\partial \vec{G}} \eta = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} v \cdot \mathrm{d}\varphi$$

Diese Formel konnten Sie für G ein Rechteck bereits in 12.7.8.21 zur Übung prüfen.

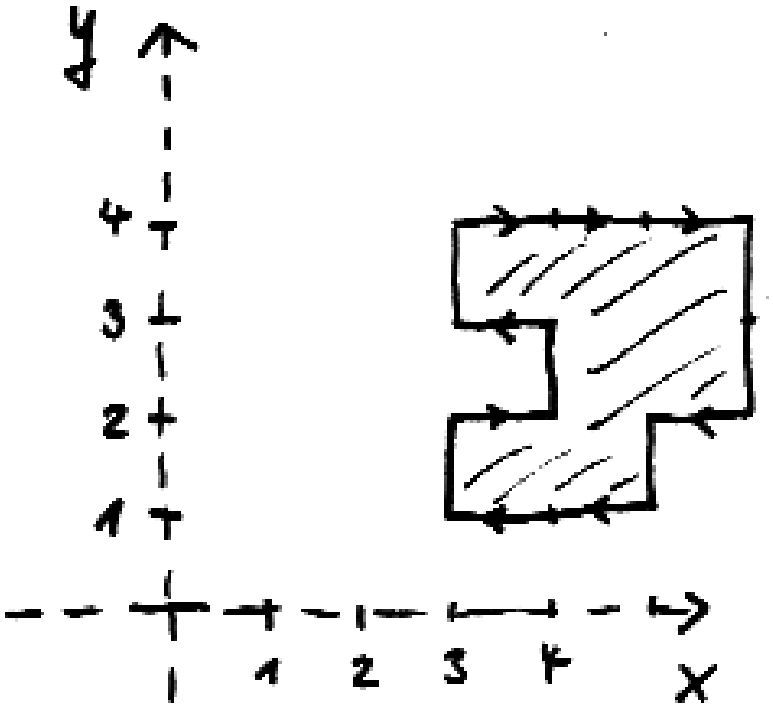
Beispiel 12.8.7.27 (**Fläche eines ebenen Gebiets**). Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ wie in 12.8.7.26 eine kompakte $\mathcal{C}^2$-eckig berandete Teilmenge mit der von der Standardorientierung des $\mathbb{R}^2$ herkommenden Orientierung. Sei $\varphi : Q \to \mathbb{R}^2$ eine surjektive orientierte Integrationskarte ihres Randes mit Q der Vereinigung der disjunkten Intervalle $[a_i, b_i]$ für $1 \leq i \leq n$ und mit den Komponenten $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$. Betrachten wir die 2-Form $\omega = x \, \mathrm{d}y$ mit Differential $d\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ und $\varphi^* \omega = \varphi_1(t) \varphi_2'(t) \, \mathrm{d}t$, so spezialisiert der allgemeine Satz von Stokes 12.8.7.2 zu einer Formel für die Fläche des Gebietes G, genauer zu der Regel

$$\int_G 1 = \int_{\vec{G}} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{\partial \vec{G}} x \wedge \mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \varphi_1(t) \varphi_2'(t) \, \mathrm{d}t$$

Für achsenparallele Rechtecke prüft man das auch leicht ganz explizit nach.

12.8.7.28. Ich selber finde die alternative Interpretation dieser Formel mithilfe des Gauß'schen Integralsatzes besonders anschaulich: Quillt in einem Moor überall gleichviel Wasser hoch, so können wir seine Fläche bestimmen, indem wir messen, wieviel Wasser in einem Graben um unser Moor abläuft. Wie genau das Wasser auf unserem Moor zum Randgraben läuft, ist dabei völlig unerheblich. Statt $\omega = x \, \mathrm{d}y$ könnten wir also ein beliebiges ω mit $d\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ nehmen und so weitere Formeln für die Fläche eines ebenen Gebiets erhalten.

12.8.7.29 (**Alternativer Zugang zur Homotopieinvarianz bei Wegintegralen**). Wir können nun auch einen besonders kurzen Beweis für die Homotopieinvarianz von Wegintegralen in geschlossenen Kovektorfeldern 12.7.8.8 geben für den Fall, daß wir zwei stetig differenzierbare Wege $\gamma, \psi : [0,1] \to A$ betrachten und daß es dazwischen sogar eine zweimal stetig differenzierbare Homotopie $h : [0,1]^2 \to A$ gibt. Wir nehmen genauer A offen in einem reellen Raum X an und $\omega : A \to \vec{X}^*$



Die Formel 12.8.7.27 für die Fläche eines ebenen Gebiets gilt nun natürlich ebenso für „Gebiete mit Ecken“. Diese Formel kann etwa angewandt werden, um ein GPS-Gerät so zu programmieren, daß es einem die Fläche des Gebiets berechnet, das man bei einem Rundweg umrundet hat. Im Spezialfall eines Gebiets, das von einem den Kanten eines Rechenpapiers folgenden Weg im Uhrzeigersinn umrundet wird, ergibt sich, wenn wir Stokes auf die Form $y\,\mathrm{d}x$ anwenden, die Fläche als die Höhe des Schwerpunkts der Menge der horizontalen Kanten, wenn wir jede Kante nach rechts mit ihrer Höhe gewichten und jede Kante nach links mit dem Negativen ihrer Höhe. Für die Fläche des obigen Gebiets ergibt sich so

$$3 \times 4 + 2 - 2 \times 1 - 2 - 3 = 7$$

ein stetig differenzierbares Kovektorfeld. Die Behauptung in 12.7.8.8 besagt ja gerade, daß aus $d\omega = 0$ folgt $\int_\gamma \omega = \int_\psi \omega$. Aber nun finden wir

$$\int_\gamma \omega - \int_\psi \omega = \int_{\partial([0,1]^2)} h^*\omega = \int_{[0,1]^2} d(h^*\omega) = \int_{[0,1]^2} h^*(d\omega) = 0$$

nach der Definition einer Homotopie, dem Satz von Stokes mit Ecken, der Verträglichkeit des Zurückholens von Formen mit dem äußeren Differential 12.8.5.11.4 und unserer Annahme $d\omega = 0$.

Übungen

Übung 12.8.7.30. Im Fall einer stetig differenzierbaren k-Form ω auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen rellen affinen Raums X zeige man für $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_k \in \vec{X}$ linear unabhängig die Formel

$$(d\omega)_x(\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_k) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^{k+1}} \int_{F(x,t\vec{v}_0,\ldots,t\vec{v}_k)} \omega$$

mit $F(x, \vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_k)$ der in geeigneter Weise orientierten Oberfläche eines Parallelpipeds mit Ecke x und Kantenvektoren $\vec{v}_i$, über die wir dann unsere k-Form integrieren. Hinweis: Satz von Stokes mit Ecken 12.8.7.19.

Übung 12.8.7.31. Man prüfe die Formel für die Fläche eines ebenen Gebiets im Fall eines achsenparallelen Rechtecks.

12.8.8 Der Hodge-Operator mit Anwendungen

Proposition 12.8.8.1 (Hodge-*-Operator). *Gegeben ein endlichdimensionaler orientierter reeller Vektorraum V der Dimension n mit einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinarform t und $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p + q = n$ gibt es genau eine lineare Abbildung $* = *_t : \operatorname{Alt}^p V \to \operatorname{Alt}^q V$ mit*

$$\mathrm{e}_1^\top \wedge \ldots \wedge \mathrm{e}_p^\top \mapsto \varepsilon\eta_1 \ldots \eta_p\, \mathrm{e}_{p+1}^\top \wedge \ldots \wedge \mathrm{e}_n^\top$$

für jede angeordnete Orthogonalbasis $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ von V der Orientierung ε mit $\eta_i := t(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_i) = \pm 1\ \forall i$.

12.8.8.2. Im Fall eines pseudoeuklidischen n-dimensionalen Vektorraums (V, S) mit vorgegebener Orientierung von S liefert dieselbe Konstruktion natürliche Isomorphismen

$$* : \operatorname{Alt}^p(V) \otimes \mathbb{L}^{\otimes p} \xrightarrow{\sim} \operatorname{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \operatorname{Alt}^q(V) \otimes \mathbb{L}^{\otimes q}$$

mit $*(v_1^\top \wedge \ldots \wedge v_p^\top) \otimes \|v_1\| \otimes \ldots \otimes \|v_p\| = \varepsilon \eta_1 \ldots \eta_p \otimes (v_{p+1}^\top \wedge \ldots \wedge v_n^\top) \otimes \|v_{p+1}\| \otimes \ldots \otimes \|v_n\|$ für eine und jede angeordnete Basis $v_1, \ldots, v_n$ der Orientierung ε aus paarweise orthogonalen Vektoren mit η_i dem Vorzeichen von $t(v_i, v_i)$ für $t \in S_{>0}$. In diesem Fall gilt dann $*(*\beta) = \eta_1 \ldots \eta_n (-1)^{pq} \beta$.

Beweis. Ein möglicher Beweis besteht darin, das tapfer durchzurechnen. Dieser Zugang sei Ihnen zur Übung überlassen. Ein struktureller Beweis gelingt mit feineren Methoden der multilinearen Algebra und geht aus von einer gewissen Vertrautheit mit den äußeren Potenzen $\bigwedge^r V$ eines K-Vektorraums V nach 4.6.5.14, mit ihrem Dachprodukt, mit der durch das Dachprodukt gegebenen nichtausgearteten Paarung $\bigwedge^p V \times \bigwedge^q V \to \bigwedge^n V$ nach 4.6.5.17 und mit den durch Zusammendachen und Einsetzen gegebenen Morphismen $\bigwedge^p (V^\top) \to \operatorname{Alt}^r V \xrightarrow{\sim} (\bigwedge^p (V))^\top$ nach 4.6.5.9. Weiter erinnern wir die durch unsere Bilinearform t gegebene lineare Abbildung $\operatorname{can}_t : V \to V^\top$ mit $\mathrm{e}_i \mapsto \eta_i \, \mathrm{e}_i^\top$ für eine Orthogonalbasis wie oben mit $t(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_i) = \varepsilon_i$. Schließlich erinnern wir das durch t und die Orientierung gegebene kanonische Element $\omega_t \in \bigwedge^n V$ maximalen Grades aus 4.6.5.19, das bezüglich jeder Basis wie oben gegeben wird durch $\omega_t = \varepsilon \, \mathrm{e}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{e}_n$. Sie liefern Isomorphismen

$$\operatorname{Alt}^p V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^p (V^\top) \xrightarrow{\sim} \bigwedge^p V \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(\bigwedge^q V, \bigwedge^n V) \xrightarrow{\sim} (\bigwedge^q V)^\top \xrightarrow{\sim} \operatorname{Alt}^q V$$

und deren Verknüpfung hat die behauptete Eigenschaft. □

12.8.8.3 (**Diskussion der Konventionen**). Die in der obigen Definition des Hodge-$*$-Operators 12.8.8.1 versteckten und in gewisser Weise willkürlichen Wahlen von Vorzeichen wurden so getroffen, daß im Fall eines Skalarproduktes t für alle α die n-Form $\alpha \wedge *\alpha$ auf verträglich orientierten angeordneten Basen nichtnegative Werte annimmt. Es wäre auch nicht besser oder schlechter, die Vorzeichen so zu wählen, daß das „umgekehrte Dach-Produkt“ in diesem Sinne „positiv definit“ wäre, aber auf eine Konvention muß man sich an dieser Stelle einigen.

Beispiel 12.8.8.4. Jedem Vektor $F \in \mathbb{R}^{n+1}$ hatten wir in 12.8.4.14 eine n-Form $\omega_F \in \operatorname{Alt}^n(\mathbb{R}^{n+1})$ zugeordnet. Jedem Vektor v in einem endlichdimensionalen Skalarproduktraum (V, t) hatten wir in 12.7.1.16 den Kovektor $\operatorname{can}_t(v) \in V^*$ zugeordnet. Im Fall $(\mathbb{R}^{n+1}, s)$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit seinem Standardskalarprodukt und seiner Standardorientierung finden wir unmittelbar die Beziehung

$$\omega_F = *_s \operatorname{can}_s(F)$$

Im Fall eines beliebigen endlichdimensionalen orientierten Skalarproduktraums nehmen wir diese Identität als Definition von ω_F.

Definition 12.8.8.5. Gegeben eine offene Teilmenge $U \Subset X$ eines endlichdimensionalen reellen Raums X und eine Riemann'sche Metrik t auf U und ein

differenzierbares Vektorfeld $v : U \to \vec{X}$ definieren wir die **Divergenz** unseres Vektorfelds als die Funktion

$$\operatorname{div}_t(v) = (*_t \circ d \circ *_t \circ \operatorname{can}_t)(v)$$

Obwohl der $*$-Operator von einer zu wählenden Orientierung abhängt, ist die Divergenz wegen des doppelten Auftretens unseres $*$-Operators davon unabhängig. Eine vielleicht noch natürlichere Beschreibung der Divergenz mithilfe der „Lie-Ableitung" erklären wir in **??**.

Ergänzung 12.8.8.6. Die Divergenz eines Vektorfeldes ist dieselbe in Bezug auf je zwei Riemann'sche Metriken, die durch Multiplikation mit einer positiven Konstanten auseinander hervorgehen.

Beispiel 12.8.8.7. Sei $X = \mathbb{R}^3$ mit der Standardorientierung und dem Standardskalarprodukt $t = s$ versehen. Gegeben ein differenzierbares Vektorfeld der Gestalt $v = a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z$ mit differenzierbaren Funktionen $a, b, c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ finden wir die übliche Formel $\operatorname{div}(v) = a_x + b_y + c_z$, indem wir rechnen

$$\begin{aligned}
v &= a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z \\
\operatorname{can}_s(v) &= adx + bdy + cdz \\
*_s(\operatorname{can}_s(v)) &= ady \wedge dz - bdx \wedge dz + cdx \wedge dy \\
d(*_s(\operatorname{can}_s(v))) &= a_x dx \wedge dy \wedge dz - b_y dy \wedge dx \wedge dz + c_z dz \wedge dx \wedge dy \\
*_s(d(*_s(\operatorname{can}_s(v)))) &= a_x + b_y + c_z
\end{aligned}$$

Hier wäre es zwar in der Tat sehr viel einfacher gewesen, schlicht diese letzte Formel hinzuschreiben. Unsere neue Interpretation verträgt sich jedoch besser mit der Verwandtschaft, insbesondere da die äußere Ableitung d sich so gut mit Verwandtschaft verträgt, und ermöglicht so eine übersichtliche Darstellung in anderen orthogonalen Koordinaten. Um etwa die Divergenz in Polarkoordinaten zu bestimmen, erinnern wir uns daran, daß nach 12.7.3.11 unter der Polarkoordinatenabbildung P die Standardmetrik $s = \mathrm{d}x^{\otimes 2} + \mathrm{d}y^{\otimes 2}$ auf der xy-Ebene verwandt ist zum 2-Tensor $g = \mathrm{d}r^{\otimes 2} + r^2\,\mathrm{d}\vartheta^{\otimes 2}$. Damit rechnen wir dann vergleichsweise mühelos

$$\begin{aligned}
v &= a\partial_r + b\partial_\vartheta \\
\operatorname{can}_g(v) &= adr + br^2 d\vartheta \\
*_g(\operatorname{can}_g(v)) &= ard\vartheta - brdr \\
d(*_g(\operatorname{can}_g(v))) &= (a_r r + a)dr \wedge d\vartheta + b_\vartheta r dr \wedge d\vartheta \\
\operatorname{div}_g(v) = *_g(d(*_g(\operatorname{can}_g(v)))) &= a_r + b_\vartheta + r^{-1}a
\end{aligned}$$

Definition 12.8.8.8. Gegeben $U \Subset \mathbb{R}^n$ und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ setzen wir

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

und nennen Δ den **Laplaceoperator**.

12.8.8.9 (**Anschauung für den Laplaceoperator**). Der Wert $(\Delta f)(x)$ der durch Anwenden des Laplaceoperators Δ auf eine Funktion f entstehenden Funktion an einer Stelle x mißt die Abweichung des Funktionswerts bei x vom Durchschnitt der Funktionswerte in einer kleinen Umgebung von x. In einer Veränderlichen gilt zum Beispiel für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$f''(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{\varepsilon^2} \left(\frac{f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon)}{2} - f(x) \right)$$

wie der Leser mithilfe der Taylorentwicklung leicht nachprüfen kann und vielleicht auch als Übung 10.6.2.8 bereits geprüft hat. In mehreren Veränderlichen gilt in derselben Weise für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion mit der Notation e_i für die Vektoren der Standardbasis

$$(\Delta f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2^n}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2^n} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x + \varepsilon\, \mathrm{e}_i) + f(x - \varepsilon\, \mathrm{e}_i) \right) - f(x) \right)$$

12.8.8.10 (**Laplace-Operator in anderen Koordinaten**). Um den Laplaceoperator Δ in anderen Koordinaten auszudrücken, kann man von der Darstellung

$$\Delta f = *_s\, d *_s df$$

ausgehen, mit s der üblichen Riemann'schen Metrik auf $\mathbb{R}^n$ und $*_s$ dem zu dieser Metrik und der Standardorientierung gehörenden Hodge-$*$-Operator. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X und eine offene Teilmenge $V \Subset X$ und ein differenzierbare Abbildung $\phi : V \to U$ mit bijektivem Differential an jeder Stelle und eine zur Standardmetrik ϕ-verwandte Riemann'sche Metrik t auf V haben wir dann die Verwandtschaft $\phi : *_t\, d *_t d(f \circ \phi) \rightsquigarrow *_s\, d *_s df = \Delta f$. Ist speziell etwa ϕ die Polarkoordinaten- oder die Kugelkoordinatenabbildung, so läßt sich das auch sehr konkret und explizit berechnen.

Beispiel 12.8.8.11 (**Laplaceoperator in Polarkoordinaten**). Wir berechnen den Laplaceoperator einer Funktion f in Polarkoordinaten und finden ähnlich wie in 12.8.8.7 der Reihe nach

$$\begin{aligned}
df &= f_r dr + f_\vartheta d\vartheta \\
*_g(df) &= f_r r d\vartheta - r^{-1} f_\vartheta dr \\
d(*_g(df)) &= (f_{rr} r + f_r + r^{-1} f_{\vartheta\vartheta}) dr \wedge d\vartheta \\
*_g(d(*_g(df))) &= f_{rr} + r^{-1} f_r + r^{-2} f_{\vartheta\vartheta}
\end{aligned}$$

Übungen

Übung 12.8.8.12. Gegeben ein endlichdimensionaler orientierter reeller Skalarproduktraum mit Skalarprodukt t finden wir für den Hodge-$*$-Operator $*_t : \operatorname{Alt}^p V \xrightarrow{\sim} \operatorname{Alt}^q V$ für alle $\lambda \in V^\top$ die Identität

$$* \circ (\lambda\wedge) \circ * = (-1)^{n-p+1} i_v$$

für $\operatorname{can}_t : v \mapsto \lambda$ mit den Einsetzungshomomorphismen i_v aus 4.6.5.21. Im allgemeinen finden wir dasselbe mit einem Vorzeichen, auf das es uns hier nicht ankommen soll.

Weiterführende Übung 12.8.8.13 (**Anschauliche Bedeutung der Divergenz**). Man zeige, daß die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfelds auf $\mathbb{R}^n$ genau die „lokale Volumenänderung unter dem Fluß 12.5.6.1 des besagten Vektorfelds" beschreibt, daß genauer für jede stetige Funktion mit kompaktem Träger f gilt

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \int f \circ X^t = -\int f \operatorname{div} X$$

Hier ist zu beachten, daß auf jedem Kompaktum der Fluß für eine positive Zeitspanne existiert. Hinweis: Man schränke sich auf den Fall von glattem f ein, ziehe die zeitliche Ableitung unter das Integral und beachte, daß das Integral über ganz $\mathbb{R}^n$ jeder partiellen Ableitung einer stetig differenzierbaren Funktion mit kompaktem Träger verschwindet.

Übung 12.8.8.14. Für r-Formen α auf einem orientierten n-dimensionalen Vektorraum mit nichtausgearteter symmetrischer Bilinearform t und $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ prüfe man die Formel $*_{\lambda t}\alpha = (\lambda^r/|\lambda|^{n/2}) *_t \alpha$. Insbesondere gilt für 2-Formen α auf einem vierdimensionalen Raum und $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ stets $*_{\lambda t}\alpha = *_t\alpha$.

Übung 12.8.8.15. Wir betrachten wieder Kugelkoordinaten wie in 12.3.2.3. Man zeige, daß für das zum Vektorfeld $a\partial_r + b\partial_\vartheta + c\partial_\varphi$ verwandte Feld auf dem xyz-Raum die Divergenz verwandt ist zur Funktion $a_r + b_\vartheta + c_\varphi + 2r^{-1}a + b\cot\vartheta$.

Übung 12.8.8.16 (**Mehr Anschauung für den Laplaceoperator**). Man zeige, daß der Laplaceoperator invariant ist unter Drehungen. Ist genauer $A \in \mathrm{O}(n)$ eine orthogonale Matrix und bezeichnet $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die zugehörige lineare Abbildung, so zeige man für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Formel $\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A$. Man folgere die Formel

$$(\Delta f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2^n}{\varepsilon^2} \left(\frac{\int_{\|y-x\|=\varepsilon} f(y)\ \sigma\langle y\rangle}{\int_{\|y-x\|=\varepsilon} \sigma\langle y\rangle} - f(x) \right)$$

auf deren rechter Seite nach dem Faktor $2^n/\varepsilon^2$ bis auf ein Vorzeichen die Differenz zwischen dem Funktionswert $f(x)$ und dem Durchschnitt der Funktionswerte

auf einer Kugelschale mit Zentrum in x und Radius ε steht. Hinweis: Man mittle 12.8.8.9. Die Taylorentwicklung oben liefert in einer Veränderlichen sogar präziser die Darstellung

$$\frac{2}{\varepsilon^2}\left(\frac{f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon)}{2}-f(x)\right)=(f''(\xi^+)+f''(\xi^-))/2$$

mit $\xi^+ \in (x, x+\varepsilon)$ und $\xi^- \in (x-\varepsilon, x)$.

Ergänzende Übung 12.8.8.17 (**Drehinvariante Differentialoperatoren**). Die polynomialen Funktionen $D \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ auf dem $\mathbb{R}^n$, die invariant sind unter allen Drehungen $A \in \mathrm{SO}(n)$, sind genau alle Polynome im quadrierten Abstand vom Nullpunkt, in Formeln

$$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]^{\mathrm{SO}(n)} = \mathbb{C}[(X_1^2 + \ldots + X_n^2)]$$

Die Differentialoperatoren $D \in \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ mit konstanten Koeffizienten auf dem $\mathbb{R}^n$, die invariant sind unter allen Drehungen $A \in \mathrm{SO}(n)$, sind genau alle Polynome im Laplace-Operator, in Formeln

$$\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_n]^{\mathrm{SO}(n)} = \mathbb{C}[\Delta]$$

Übung 12.8.8.18 (**Laplaceoperator in Kugelkoordinaten**). Man zeige, daß der Laplaceoperator einer Funktion f in den Kugelkoordinaten aus 12.3.2.3 gegeben wird durch die Formel

$$\Delta f = f_{rr} + 2r^{-1}f_r + r^{-2}f_{\vartheta\vartheta} + r^{-2}f_\vartheta \cot\vartheta + (r\sin\vartheta)^{-2}f_{\varphi\varphi}$$

Hinweis: Statt das direkt zu rechnen, kann man auch von 12.7.3.15 und 12.8.8.15 ausgehen.

Ergänzende Übung 12.8.8.19 (**Die Maxwell'schen Gleichungen**). Wir bezeichnen die Koordinaten des $\mathbb{R}^4$ mit x, y, z, t und betrachten auf dem $\mathbb{R}^4$ oder allgemeiner einer halboffenen Teilmenge desselben eine glatte 2-Form

$$\begin{aligned} F &= E^1 dx \wedge dt + E^2 dy \wedge dt + E^3 dz \wedge dt \\ &\quad + B^1 dy \wedge dz + B^2 dz \wedge dx + B^3 dx \wedge dy \end{aligned}$$

So ist die Gleichung $dF = 0$ äquivalent zu den beiden Gleichungen

$$\operatorname{div} B = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

für $\operatorname{rot} E$ der Rotation wie in 12.7.8.12 und $\operatorname{div} B$ der Divergenz alias der Summe der partiellen Ableitungen nach x, y und z wie in 12.8.7.11. Leser mit physikalischer Vorbildung erkennen die beiden ersten Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum. Betrachten wir zusätzlich die sogenannte „Lorentzmetrik“

$$l := dx^{\otimes 2} + dy^{\otimes 2} + dz^{\otimes 2} - c^2 dt^{\otimes 2}$$

mit einer reellen Konstante $c \neq 0$, so ist die Gleichung $d(*_l F) = 0$ äquivalent zu den beiden anderen Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum

$$\operatorname{div} E = 0 \quad \text{und} \quad c^2 \operatorname{rot} B = \frac{\partial E}{\partial t}$$

Der Formalismus der Verwandtschaft von Differentialformen sagt uns dann, in welcher Weise ein elektromagnetisches Feld F in andere Koordinaten umgeschrieben werden muß, und daß die Maxwell'schen Gleichungen in diesem Sinne nicht von der Wahl der Koordinaten abhängen.

Ergänzung 12.8.8.20 (**Lichtwellen**). Fassen wir die Raumzeit in der in 4.2.7.5 erklärten Weise auf als einen pseudoeuklidischen Raum X von Typ $(3,1)$, so ist ein elektromagnetisches Feld eine glatte Zweiform $F : X \to \operatorname{Alt}^2(\vec{X})$ und die Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum bedeuten die Bedingungen

$$dF = d(*F) = 0$$

Wir denken uns nun allgemeiner einen endlichdimensionalen Raum X mit einer symmetrischen nichtausgearteten Bilinearform l auf $\vec{X}$ und interessieren uns für komplexe p-Formen $F : X \to \operatorname{Alt}^p(\vec{X}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ mit $dF = 0$ und $d(*_l F) = 0$. Speziell untersuchen wir Lösungen der Gestalt

$$F(p + \vec{v}) = \exp(\mathrm{i}\lambda(\vec{v}))A$$

mit $A \in \operatorname{Alt}^p(\vec{X})_{\mathbb{C}}$. Für die Funktion $\vec{X} \to \mathbb{C}$, $\vec{v} \mapsto \exp(\mathrm{i}\lambda(\vec{v}))$ finden wir als Differential $\operatorname{dexp}(\mathrm{i}\lambda(\vec{v})) = \exp(\mathrm{i}\lambda(\vec{v}))\mathrm{i}\lambda$ und unsere Gleichungen $dF = 0$ und $d(*_l F) = 0$ für $F(p+\vec{v}) = \exp(\mathrm{i}\lambda(\vec{v}))A$ erweisen sich als äquivalent zu $\lambda \wedge A = 0$ sowie $\lambda \wedge (*_l A) = 0$. Bezeichne l auch die auf $\vec{X}^*$ induzierte Bilinearform. Im Fall $l(\lambda, \lambda) \neq 0$ könnten wir λ zu einer orthogonalen Basis von $\vec{X}^*$ ergänzen. Indem wir dann A in der zugehörigen Basis der äußeren Potenz schreiben, folgt sofort $A = 0$. Aus $A \neq 0$ folgt mithin

$$l(\lambda, \lambda) = 0$$

Im Fall $\lambda = 0$ erhalten wir so die konstanten Lösungen $F = A$ für A beliebig. Gilt dahingegen $\lambda \in \vec{X}^* \backslash 0$, so bedeutet unsere Erkenntnis $l(\lambda, \lambda) = 0$ im Fall der Maxwell'schen Gleichungen, daß sich „Lichtwellen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten". Jetzt konzentrieren wir uns auf den Fall der Raumzeit. Unter der Annahme $\lambda \neq 0$ folgt aus $\lambda \wedge A = 0$ sofort $A = \lambda \wedge \mu$. Außerdem ist $\lambda \wedge (*A) = 0$ mit 12.8.8.12 gleichbedeutend zu $i_{l(\lambda,\,)}(A) = 0$ und wegen $l(\lambda, \lambda) = 0$ weiter zu $l(\lambda, \mu) = 0$. Mögliche Lösungen der Gleichungen $\lambda \wedge A = 0 = \lambda \wedge (*A)$ für $A \in \operatorname{Alt}^2(\vec{X})$ sind also alle

$$A = \lambda \wedge \mu$$

mit $l(\lambda, \mu) = 0$, wobei μ und $\mu + b\lambda$ für alle $b \in \mathbb{R}$ dieselbe Lösung A liefern. Zeichnen wir nun eine Zeitachse aus, also eine Gerade $\vec{T} \subset \vec{X}$, auf der l negativ definit ist, und setzen $\vec{R} := T^\perp$ und zerlegen $\vec{X} = \vec{T} \oplus \vec{R}$ und zerlegen $\lambda = \tau + \eta$ entsprechend, so kann jede Lösung eindeutig in der Form $A = \lambda \wedge \mu$ geschrieben werden mit $\mu \in \vec{R} \cap \eta^\perp$. Anschaulich gesprochen ist $\vec{R}$ der dreidimensionale Raum der räumlichen Richtungsvektoren in Bezug auf unsere ausgezeichnete Zeitachse, der räumliche Richtungsvektor η kodiert Richtung und Frequenz unserer Lichtwelle und $\vec{R} \cap \eta^\perp$ ist der zweidimensionale Raum der räumlichen auf der Lichtrichtung η senkrechten Richtungsvektoren. Jede komplexe Lösung für $A \in \operatorname{Alt}^2(\vec{X})_\mathbb{C}$ hat dann entsprechend die Gestalt $A = \lambda \wedge \mu$ mit $\mu \in (R \cap \eta^\perp)_\mathbb{C}$ und wir erhalten auch einen Isomorphismus zwischen $(R \cap \eta^\perp)_\mathbb{C}$ und dem Raum der reellen Lösungen der Gestalt $F(p + \vec{v}) = \exp(\mathrm{i}\lambda(\vec{v}))A^+ + \exp(-\mathrm{i}\lambda(\vec{v}))A^-$ durch die Vorschrift

$$\mu \mapsto \operatorname{Re}\big(\exp(\mathrm{i}\lambda(\vec{v}))\lambda \wedge \mu\big)$$

In der physikalischen Terminologie kodiert unser Kovektor λ die „Ausbreitungsrichtung und Frequenz“ unserer Lichtwelle und $\mu \in (R \cap \eta^\perp)_\mathbb{C}$ ihre „Stärke und Polarisierung“. Schreiben wir $\mu = \mu_1 + \mathrm{i}\mu_2$ mit $\mu_1, \mu_2 \in (R \cap \eta^\perp)$, so erkennen wir unschwer, daß wir $\alpha \in S^1$ finden können mit $\alpha\mu = \mu_1' + \mathrm{i}\mu_2'$ und $\mu_1' \perp \mu_2'$. Der allgemeine Fall heißt der Fall **elliptischer Polarisierung**. Im Fall $\mu_1 \perp \mu_2$ und $\|\mu_1\| = \|\mu_2\|$ spricht man von **zirkularer Polarisierung** und im Fall von linear abhängigen μ_1, μ_2 von **linearer Polarisierung**.

Ergänzung 12.8.8.21. Auf einem Raum V einer geraden Dimension $2n$ mit nichtausgearteter symmetrischer Bilinearform l hängt nach 12.8.8.2 sogar $*_l : \operatorname{Alt}^n V \to \operatorname{Alt}^n V \otimes \operatorname{or}_\mathbb{R} V$ nur von der durch l repräsentierten pseudoeuklidischen Struktur ab. Das zeigt die „konforme Invarianz“ der Maxwell’schen Gleichungen.

12.9 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Christina Pflanz, ...

Kapitel 13

Analysis 3: Maß und Integral mit Fouriertheorie

Inhalt

13.1 Maß und Integral 2123

13.1.1 Maßräume und Maße 2123

13.1.2 Konstruktion des Lebesguemaßes auf $\mathbb{R}$ 2131

13.1.3 Vervollständigung von Maßräumen* 2143

13.1.4 Meßbare Abbildungen 2144

13.1.5 Integral von nichtnegativen Funktionen 2153

13.1.6 Integrierbare Funktionen und ihr Integral 2160

13.1.7 Integration auf Produkträumen 2166

13.1.8 Rechnen mit dem Lebesgueintegral 2178

13.1.9 Flächenmaß einer Fastfaltigkeit 2183

13.1.10 Regularität von Borelmaßen 2187

13.2 Funktionenräume und Fourierreihen 2191

13.2.1 Lebesgueintegral vektorwertiger Funktionen 2191

13.2.2 Quadratintegrierbare Funktionen 2192

13.2.3 Räume integrierbarer Funktionen 2197

13.2.4 Hilberträume und Hilbertbasen 2202

13.2.5 Vervollständigung metrischer Räume* 2207

13.2.6 Fourierreihen quadratintegrierbarer Funktionen . . 2211

13.2.7 Fourierreihen und Charaktere 2213

13.2.8 Orthogonale Projektionen in Hilberträumen 2221

13.3 Fouriertransformation 2226
13.3.1 Definition und erste Eigenschaften 2226
13.3.2 Fouriertransformation ohne Koordinaten 2232
13.3.3 Poissonformel und Inversionsformel 2241
13.3.4 Natürlichkeit der Fouriertransformation 2247
13.3.5 Faltung von Maßen und Funktionen 2251
13.3.6 Wellengleichung und Fouriertransformation 2260
13.3.7 Inversionsformel für Fouriergruppen* 2263
13.3.8 Translationsinvariante Teilräume* 2271
13.3.9 Faltung von Maßen und Funktionen* 2273
13.3.10 Topologie der Charaktergruppe* 2277
13.4 Spektraltheorie in Hilberträumen* 2284
13.4.1 Unitäre Darstellungen von $\mathbb{R}$ 2284
13.4.2 Selbstadjungierte Operatoren 2291
13.4.3 Spektren in Banach-Ringalgebren 2297
13.4.4 Weitere Eigenschaften des Spektrums* 2302
13.4.5 Spektren selbstadjungierter Operatoren 2304
13.4.6 Riesz'scher Darstellungssatz 2310
13.4.7 Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren . . . 2313
13.4.8 Beweis des Spektralsatzes 2319
13.4.9 Spektralzerlegung unitärer Darstellungen 2323
13.4.10 Operationen von Maßen auf Darstellungen 2326
13.4.11 Variationen zum Spektralsatz 2331
13.4.12 Unbeschränkte Operatoren 2334
13.5 Danksagung 2339

13.1 Maß und Integral

Es mag nahe liegen zu versuchen, jeder Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ein „Volumen“ in $[0, \infty]$ so zuordnen, daß (1) das Verschieben oder Verdrehen von Mengen ihr Volumen nicht ändert, daß (2) bei beliebigen disjunkten Vereinigungen das Volumen der Vereinigung die Summe der Volumina ist, und daß (3) dem Einheitswürfel $[0, 1]^n$ das Volumen Eins zugeordnet wird. Kurzes Nachdenken zeigt jedoch, daß das unmöglich gelingen kann: Für solch ein Volumen müßte nämlich jeder Punkt Volumen Null haben, da ja unendlich viele Punkte im Einheitswürfel liegen, und dann müßte auch der ganze Einheitswürfel Volumen Null haben als disjunkte Vereinigung einpunktiger Teilmengen. Um diesen Widerspruch zu vermeiden, mag man etwas schwächer statt (2) nur noch bei *abzählbaren* oder noch schwächer *endlichen* disjunkten Vereinigungen fordern wollen, daß das Volumen der Vereinigung die Summe der Volumina ist, aber auch solch einen Volumenbegriff kann es für beliebige Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ nicht geben, wie im abzählbaren Fall in 13.1.1.34 bereits für $n = 1$ ausgeführt wird und im endlichen Fall für $n \geq 3$ aus dem sogenannten „Banach-Tarski-Paradoxon“ 13.1.1.35 oder auch schon aus seinem Vorläufer, dem sogenannten „Hausdorff-Paradoxon“ folgt. Hausdorff zeigte in seinem Buch über Mengenlehre aus dem Jahre 1914 auch, daß es in den Dimensionen $n \leq 2$ durchaus endlich additive Volumenbegriffe der oben beschriebenen Art gibt, aber diese haben in der Mathematik wenig Relevanz. Es ist jedoch möglich, für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gewisse Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ als „meßbar“ auszuzeichnen derart, daß alle „einigermaßen vernünftigen“ Teilmengen meßbar sind, und jeder dieser meßbaren Mengen ein Volumen so zuzuordnen, daß Bedingung (1), die abzählbare Variante von (2) sowie (3) entsprechend gelten. Im folgenden will ich das ausführen und auch zeigen, wie davon ausgehend eine sehr allgemeine Integrationstheorie entwickelt werden kann, die sich sowohl in der weiteren Entwicklung der Analysis als auch bei der mathematischen Modellierung der Wahrscheinlichkeit als außerordentlich nützlich erweisen wird: Das Lebesgue-Integral.

13.1.1 Maßräume und Maße

13.1.1.1. Gegeben eine Menge X erinnere ich daran, daß wir nach 2.1.2.6 die Menge aller ihrer Teilmengen bilden dürfen und daß diese Menge die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(X)$ von X heißt. Weiter erinnere ich daran, daß in diesem Text aus rein didaktischen Erwägungen heraus Teilmengen der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X vorzugsweise als **Systeme von Teilmengen von** X oder **Mengensysteme** angesprochen werden.

Definition 13.1.1.2. Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen einer Menge X alias eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine **Mengenalgebra**, wenn gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; (A \cup B) \in \mathcal{A}$;
3. $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; (X \backslash A) \in \mathcal{A}$.

In Worten ist ein System von Teilmengen einer Menge X also eine Mengenalgebra, wenn es stabil ist unter dem Bilden von endlichen Vereinigungen und unter dem Bilden von Komplementen bezüglich X.

13.1.1.3. Ich will kurz diskutieren, warum unsere Definition in Formeln zu unserer Definition in Worten gleichbedeutend ist. Bei der Definition in Worten ist mitgemeint, daß eine Mengenalgebra die leere Menge enthalten soll als „die Vereinigung über überhaupt keine Teilmenge von X“, vergleiche 3.1.5.13. Bei der Definition in Formeln folgt umgekehrt die Stabilität von $\mathcal{A}$ unter endlichen Vereinigungen von mehr als zwei Mengen induktiv.

13.1.1.4. Eine Mengenalgebra ist nach den de Morgan'schen Regeln 2.1.3.7 auch stabil unter dem Bilden von endlichen Schnitten und von Differenzmengen.

Definition 13.1.1.5. Eine Mengenalgebra, die sogar stabil ist unter abzählbaren Vereinigungen, heißt eine **σ-Algebra**. Ein Paar $(X, \mathcal{M})$ bestehend aus einer Menge X und einer σ-Algebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein **Meßraum**. Die Mengen aus $\mathcal{M}$ heißen dann die **meßbaren Mengen** von $(X, \mathcal{M})$ oder kurz die **meßbaren Teilmengen von** X.

13.1.1.6. In Formeln ist eine σ-Algebra also eine Mengenalgebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ derart, daß für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \in \mathcal{M}\ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$. Gegeben ein Meßraum $(X, \mathcal{M})$ ist natürlich auch ganz X meßbar und abzählbare Schnitte meßbarer Mengen sind wieder meßbar nach den de Morgan'schen Regeln in ihrer etwas allgemeineren Form **??**.

13.1.1.7. Auf Französisch heißt eine σ-Algebra **tribu**.

Beispiel 13.1.1.8. In jeder Menge bilden die endlichen Teilmengen mitsamt ihren Komplementen eine Mengenalgebra, die jedoch nur dann eine σ-Algebra ist, wenn wir unsere Konstruktion in einer endlichen Menge durchführen. In jeder Menge bilden die abzählbaren Teilmengen mitsamt ihren Komplementen eine σ-Algebra.

Beispiel 13.1.1.9. Alle endlichen Vereinigungen von Intervallen bilden eine Mengenalgebra von Teilmengen von $\mathbb{R}$. Die abzählbaren Vereinigungen von Intervallen bilden *keine* σ-Algebra von Teilmengen von $\mathbb{R}$, da dieses Mengensystem nicht unter dem Bilden von Komplementen stabil ist: Zum Beispiel ist die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ eine abzählbare Vereinigung von Intervallen, genauer von einpunktigen Intervallen, aber ihr Komplement $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ist keine abzählbare Vereinigung von Intervallen.

13.1.1.10. Ich benutze gerne wie in 4.7.7.18 erklärt für Vereinigungen das Symbol $\sqcup$ statt $\cup$, wenn ich andeuten will, daß die zu vereinigenden Teilmengen paarweise disjunkt sein sollen.

Definition 13.1.1.11. Sei $X = (X, \mathcal{M})$ ein Meßraum. Ein **Maß** oder genauer ein **nichtnegatives Maß** auf X ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ derart, daß gilt $\mu(\emptyset) = 0$ und

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten meßbaren Mengen, in Formeln Mengen mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Diese Gleichheit ist in $[0, \infty]$ zu verstehen. Die Summe auf der rechten Seite ist dabei zu verstehen als das Supremum über alle $\sum_{n=0}^{N} \mu(A_n)$ mit $N \in \mathbb{N}$ und diese endlichen Summen hinwiederum sind zu verstehen im offensichtlichen Monoid $([0, \infty], +)$.

Lemma 13.1.1.12. *Sei $X = (X, \mathcal{M})$ ein Meßraum. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ ist genau dann ein Maß, wenn für jede abzählbare Familie $(A_i)_{i\in N}$ von paarweise disjunkten meßbaren Mengen gilt*

$$\mu\left(\bigsqcup_{i\in N} A_i\right) = \sum_{i\in N} \mu(A_i)$$

mit der Summe auf der rechten Seite zu verstehen als das Supremum über alle Teilsummen $\sum_{i\in E} \mu(A_i)$ für $E \subset N$ endlich.

13.1.1.13. Die durch dieses Lemma gegebene äquivalente Charakterisierung von Maßen scheint mir konzeptionell richtiger. Sie verwendet aber verschiedene weniger vertraute Konventionen und ist deshalb vielleicht weniger verständlich.

Beweis. Erfüllt eine Abbildung μ also die Bedingungen des Lemmas, so ist sie ein Maß. In der Tat sind sowohl $N = \mathbb{N}$ als auch $N = \emptyset$ abzählbare Mengen. Genauer ist die leere Menge in unseren Konventionen zwar nicht abzählbar unendlich, aber wie jede andere endliche Menge durchaus abzählbar. Weiter ist in unseren Konventionen die Summe über eine die Familie von Elementen von $([0, \infty], +)$ stets Null. Andererseits erfüllt auch jedes Maß μ die Bedingungen des Lemmas. Wir können nämlich ohne Beschränkung der Allgemeinheit $N \subset \mathbb{N}$ annehmen und unsere Mengenfamilie $(A_i)_{i\in N}$ zu einer Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ergänzen durch die Bedingung $n \notin N \Rightarrow A_n = \emptyset$ dann gilt

$$\mu\left(\bigsqcup_{i\in N} A_i\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{i\in N} \mu(A_i)$$

wegen $\bigsqcup_{i\in N} A_i = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und den Eigenschaften eines Maßes. $\square$

Definition 13.1.1.14. Ein **Maßraum** ist ein Tripel $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ bestehend aus einer Menge X, einer σ-Algebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ und einem Maß $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$.

Ergänzung 13.1.1.15. Ein Maßraum, bei dem die ganze Menge Maß Eins hat, heißt ein **Wahrscheinlichkeitsraum**. Mit diesem Wort geht meist eine eigene Motivation, Intuition und Buchstabenwahl einher: Das Ziel ist dann nicht mehr ein begrifflicher Rahmen zur Berechnung von Volumina und dergleichen, sondern die mathematische Modellierung des Zufalls. Man notiert Wahrscheinlichkeitsräume statt $(X, \mathcal{M}, \mu)$ meist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und denkt sich dabei Ω als eine völlig unstrukturierte und von der speziell untersuchten Fragestellung unabhängige Menge von „sich paarweise ausschließenden Möglichkeiten“. Das Maß $P(A)$ mit P wie „Probability“ denkt man sich dann als die **Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten einer Möglichkeit aus A. Die meßbaren Teilmengen von Ω heißen auch **Ereignisse**. Ist jede einelementige Teilmenge von Ω meßbar, so mag man die Elemente der Menge Ω **Elementar-Ereignisse** nennen.

Beispiele 13.1.1.16. Einfache Beispiele für Maße auf der gesamten Potenzmenge einer beliebigen Menge X sind das **Dirac-Maß** δ_x an einem Punkt $x \in X$, gegeben durch

$$\delta_x(A) \quad = \quad \begin{cases} 1 & x \in A; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Des weiteren das **Zählmaß** $\zeta(A) = |A| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, das jeder Teilmenge die Zahl ihrer Elemente zuordnet. Allgemeiner kann man für jede Menge X und jede Abbildung $f : X \to [0, \infty]$ wieder auf der gesamten Potenzmenge von X das Maß $A \mapsto \sum_{x \in A} f(x)$ betrachten, bei dem in gewisser Weise „jeder Punkt $x \in X$ mit dem Faktor $f(x)$ gewichtet wird“. Das vielleicht wichtigste Beispiel für ein Maß ist das „Lebesgue-Maß“ auf den „topologisch meßbaren Mengen“ oder „Borelmengen“ des $\mathbb{R}^n$, dessen Konstruktion noch aussteht.

13.1.1.17. Sei X eine feste Menge. Sind $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ zwei σ-Algebren, so ist auch ihr Schnitt $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ eine σ-Algebra. Sogar ein beliebiger Schnitt von σ-Algebren in X ist wieder eine σ-Algebra in X.

Definition 13.1.1.18. Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ irgendein System von Teilmengen einer Menge X, so betrachten wir den Schnitt aller σ-Algebren, die $\mathcal{E}$ umfaßen. Dieser Schnitt ist offensichtlich die kleinste σ-Algebra in X, die $\mathcal{E}$ umfaßt. Er heißt die **von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra** und wird $\sigma(\mathcal{E})$ notiert.

13.1.1.19 (**Diskussion des Konzepts einer σ-Algebra**). Eine umgangssprachlich „explizite“ Beschreibung für die von einem Mengensystem erzeugte σ-Algebra zu geben, ist salopp gesprochen unmöglich, aber für uns im weiteren Verlauf dieser Vorlesung auch nicht relevant. Um Ihnen die Schwierigkeiten einer expliziten Beschreibung zu zeigen, will ich erst einmal andeuten, wie es *nicht* geht. Man

könnte versucht sein, unser Mengensystem zunächst einmal zu ergänzen durch das Hinzunehmen aller abzählbaren Vereinigungen. Dann durch Hinzunehmen aller Komplementmengen solcher abzählbaren Vereinigungen. Dann wieder durch Hinzunehmen aller abzählbaren Vereinigungen, und immer so weiter. Kriegt man so jede Menge der von unserem Mengensystem erzeugten σ-Algebra in endlich vielen Schritten? Eben nicht: Denn nun muß man auch noch die Vereinigungsmengen aller Mengenfolgen dazunehmen, bei denen die erste Menge nach einem Schritt erhalten wurde, die zweite nach zwei Schritten und so weiter. Um die ganze σ-Algebra zu beschreiben, muß man stattdessen mit transfiniter Induktion arbeiten, wie etwa im Beweis von Lemma 6.5.4.5 ausgeführt wird, und expliziter wird's nicht mehr.

13.1.1.20. Gegeben eine Menge X und ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ gibt es stets eine kleinste Topologie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, die $\mathcal{E}$ umfaßt, nämlich den Schnitt aller Topologien, die $\mathcal{E}$ umfassen. Dieser Schnitt heißt die **von $\mathcal{E}$ erzeugte Topologie**. Man kann diese Topologie explizit beschreiben, indem man erst die Gesamtheit $\mathcal{S}$ aller endlichen Schnitte von Mengen aus $\mathcal{E}$ betrachtet und dann beliebige Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{S}$ bildet. In der Tat ist das so entstehende Mengensystem schon automatisch stabil unter endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen.

13.1.1.21. Man beachte den Kontrast zwischen der von einem Mengensystem erzeugten Topologie, die recht explizit angegeben werden kann, und der von einem Mengensystem erzeugten σ-Algebra. Der Ursprung dieser Diskrepanz liegt darin, daß die Potenzmenge einer endlichen Menge stets wieder endlich ist, die Potenzmenge einer abzählbaren Menge aber im allgemeinen nicht abzählbar. Man könnte aber das kleinste Mengensystem, das ein vogegebenes Mengensystem umfaßt und stabil ist unter abzählbaren Schnitten und beliebigen Vereinigungen, ebenso explizit angeben wie die von einem Mengensystem erzeugte Topologie.

Definition 13.1.1.22. Die von den offenen Mengen eines metrischen oder allgemeiner eines topologischen Raums X erzeugte σ-Algebra nennen wir die σ-Algebra der **topologisch meßbaren Teilmengen** oder auch der **Borelmengen** von X oder auch die **borelsche σ-Algebra** und notieren sie

$$\mathrm{Borel}(X)$$

Unter einem **topologischen Maß** verstehen wir ein Maß auf der σ-Algebra aller topologisch meßbaren Mengen eines topologischen Raums. Ein **Borelmaß** auf einem topologischen Raum definieren wir als ein topologisches Maß, das auf allen abgeschlossenen Kompakta endliche Werte annimmt.

13.1.1.23. In einem Hausdorffraum ist nach 17.6.2.12 jedes Kompaktum abgeschlossen.

13.1.1.24 (**Diskussion der Terminologie**). Das Zählmaß auf $\mathbb{R}$ ist in unserem Sinne ein topologisches Maß, aber kein Borelmaß. Für den Begriff eines Borelmaßes sind jedoch auch viele andere Bedeutungen in der Literatur verbreitet.

Ergänzung 13.1.1.25. Auch ohne die Kontinuumshypothese vorauszusetzen kann man zeigen, daß jede überabzählbare Borelmenge in $\mathbb{R}$ bereits in Bijektion zu ganz $\mathbb{R}$ ist. Wie das genau geht, können Sie etwa in der Mengenlehre lernen.

13.1.1.26. Natürlich sind mit unserer Definition auch alle abgeschlossenen Mengen topologisch meßbar. Für jede Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und beliebiges $a \in \mathbb{R}^n$ ist weiter auch die verschobene Menge $a + A$ eine Borelmenge.

Definition 13.1.1.27. Ein topologisches Maß auf $\mathbb{R}^n$ heißt **translationsinvariant**, wenn für beliebiges $a \in \mathbb{R}^n$ und jede Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\lambda(a + A) = \lambda(A)$.

Satz 13.1.1.28 (Charakterisierung des Lebesguemaßes). *Es gibt auf dem $\mathbb{R}^n$ genau ein translationsinvariantes topologisches Maß λ, das dem Einheitswürfel das Maß Eins zuordnet $\lambda([0,1]^n) = 1$.*

13.1.1.29. Dieses Maß λ heißt das **Lebesgue-Maß** auf dem $\mathbb{R}^n$. Wenn wir zum Ausdruck bringen wollen, welches n gemeint ist, notieren wir es auch λ^n. Die zweite Bedingung an unser Lebesguemaß nennen wir seine **Normierung**. In dieser Terminologie können wir also das Lebesguemaß charakterisieren als das eindeutig bestimmte normierte translationsinvariante Maß auf den Borelmengen des $\mathbb{R}^n$. Anschaulich ordnet λ jeder Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ihr **Volumen** oder **Maß** $\lambda(A) \in [0, \infty]$ zu. Der Nachweis der Eindeutigkeit wird dem Leser als Übung 13.1.2.35 und 13.1.2.36 überlassen. Die Existenz zeigen wir für $n = 1$ im folgenden Abschnitt in Bemerkung 13.1.2.13 und für beliebiges n in 13.1.7.3.

13.1.1.30 (**Diskussion der Terminologie**). Viele Autoren verstehen unter dem Lebesguemaß abweichend die „Vervollständigung“ im Sinne von 13.1.3.2 des hier beschriebenen Maßes. Wenn es auf derlei Feinheiten ankommt, mag man das in Satz 13.1.1.28 beschriebene Maß genauer das „Lebesguemaß auf den Borelmengen“ nennen.

Satz 13.1.1.31 (Regularität des Lebesguemaßes). *Für das Lebesguemaß λ auf dem $\mathbb{R}^n$ und jede Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\lambda(A) = \inf_{\substack{U \supset A \\ U \text{ offen in } \mathbb{R}^n}} \lambda(U) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ kompakt}}} \lambda(K)$$

13.1.1.32. Dieser Satz wird in 13.1.10.1 gezeigt. Er deutet eine mögliche Konstruktion des Lebesgue-Maßes λ auf dem $\mathbb{R}^n$ an: Um das Lebesguemaß einer Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ zu bestimmen können, wir beginnen mit dem Fall endlicher disjunkter Vereinigungen von Produkten von Intervallen. Solche „Quadermengen“

haben noch ein anschauliches Volumen. Dann wird für U offen der Wert $\lambda(U)$ definiert als das Supremum über die Volumina aller in U enthaltenen Quadermengen, und schließlich erhält man das Maß $\lambda(A)$ einer beliebigen Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ als Infimum von $\lambda(U)$ über alle offenen U, die A umfassen. Diese Beschreibung von $\lambda(A)$ ähnelt unserer definitiven Konstruktion des Lebesguemaßes. Die wesentliche Schwierigkeit ist, zu zeigen, daß die so konstruierte Abbildung von den Borelmengen in die um ∞ erweiterten nichtnegativen reellen Zahlen auch tatsächlich ein Maß ist.

13.1.1.33. Wir wollen uns zur besseren Motivation sofort überlegen, daß es schon im Fall $n = 1$ keinen vernünftigen Volumenbegriff für *beliebige* Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ geben kann.

Lemma 13.1.1.34. *Es gibt kein Maß $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ auf der σ-Algebra aller Teilmengen von $\mathbb{R}$, das translationsinvariant und normiert ist.*

Erster Beweis, mit etwas Algebra. Wir argumentieren durch Widerspruch. Gäbe es solch ein Maß, so fänden wir auch ein „rotationsinvariantes“ Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Kreislinie mit allen Teilmengen als meßbaren Mengen, in Formeln

$$\mu : \mathcal{P}(S^1) \to [0, \infty]$$

mit $\mu(zB) = \mu(B)$ für alle $z \in S^1, B \subset S^1$ und mit $\mu(S^1) = 1$. Wir können etwa $\mu(B) := \lambda(\varphi^{-1}B)$ setzen für $\varphi : [0, 1) \xrightarrow{\sim} S^1$ gegeben durch $\varphi(t) := \exp(2\pi \mathrm{i} t)$. Ist nun $z \in S^1$ keine Einheitswurzel, so sind seine Potenzen z^n für $n \in \mathbb{Z}$ paarweise verschieden. Ist dann $B \subset S^1$ ein Repräsentantensystem für die Nebenklassen der von z erzeugten Untergruppe $\langle z \rangle \subset S^1$, so liefert die Multiplikation eine Bijektion $\langle z \rangle \times B \xrightarrow{\sim} S^1$. In andern Worten haben wir eine disjunkte Zerlegung

$$S^1 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} z^n B$$

Es folgt $1 = \mu(S^1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu(z^n B) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu(B)$ und das kann weder für $\mu(B) = 0$ noch für $\mu(B) > 0$ gelten. Widerspruch! $\square$

Zweiter Beweis, mit wenig Algebra. Wir werden eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ und Folgen r_n und q_n reeller Zahlen konstruieren derart, daß gilt:

1. Die Mengen $r_n + A$ sind paarweise disjunkt und alle in $[0, 3]$ enthalten.
2. Die Mengen $q_n + A$ überdecken $\mathbb{R}$.

Für unsere Menge A müßte also gleichzeitig gelten

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(A) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(r_n + A) &&\leq \lambda([0, 3]) \leq 3\lambda([0, 1]) = 3 \\ \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(A) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(q_n + A) &&\geq \lambda(\mathbb{R}) \geq \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(2n + [0, 1]) = \infty \end{aligned}$$

und dieser Widerspruch zeigt dann das Lemma. Um unsere Menge A zu konstruieren, wählen wir mithilfe von 3.1.9.20 eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ derart, daß $\{1\} \cup I$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{R}$ ist, und betrachten den von I erzeugten $\mathbb{Q}$-Untervektorraum $\langle I \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$ und die Menge $A = \langle I \rangle_{\mathbb{Q}} \cap [0,2]$. Für jede Folge r_n von paarweise verschiedenen rationalen Zahlen aus $[0,1]$ sind dann die $r_n + A$ paarweise disjunkt und in $[0,3]$ enthalten. Andererseits finden wir auch für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein $b_n \in \langle I \rangle_{\mathbb{Q}} \cap [n-1, n]$, es folgt $\langle I \rangle_{\mathbb{Q}} = \bigcup b_n + A$ und dann

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q},\, n \in \mathbb{Z}} q + b_n + A \qquad \square$$

Ergänzung 13.1.1.35. Es kommt sogar noch schlimmer: Nach Banach und Tarski ist es möglich, die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ so in sechs paarweise disjunkte Teilmengen zu zerlegen, daß sich diese Teilmengen geeignet verschoben und im Raum gedreht ohne Überlappungen zu *zwei* Einheitskugeln zusammenfügen lassen. Das ist das sogenannte **Banach-Tarski-Paradoxon**. Die fraglichen sechs Teilmengen sind dann natürlich nicht alle meßbar.

Übungen

Übung 13.1.1.36. Man zeige, daß die offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten die σ-Algebra aller Borelmengen der reellen Zahlengeraden erzeugen.

Übung 13.1.1.37. Gegeben ein Maßraum und darin eine aufsteigende Folge meßbarer Mengen $A_0 \subset A_1 \subset \ldots$ zeige man

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Hinweis: Man schreibe die fragliche Vereinigung als die disjunkte Vereinigung der $A_{n+1} \backslash A_n$.

Übung 13.1.1.38. Gegeben ein Maßraum und darin eine absteigende Folge meßbarer Mengen endlichen Maßes $A_0 \supset A_1 \supset \ldots$ zeige man

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Man zeige auch durch ein Gegenbeispiel, daß das nicht mehr gelten muß, wenn alle Mengen unserer Folge unendliches Maß haben.

Übung 13.1.1.39 (**Vorbereitungen zum Beweis des Satzes von Fubini**). Seien X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Mengenalgebra. Man zeige: (1) Genau dann ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, wenn $\mathcal{A}$ stabil ist unter abzählbaren *disjunkten* Vereinigungen. (2) Genau dann ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, wenn $\mathcal{A}$ stabil ist unter abzählbaren *aufsteigenden* Vereinigungen im Sinne von 13.1.2.19.

Übung 13.1.1.40. Konstruieren Sie in $\mathbb{R}$ eine offene dichte Teilmenge von endlichem Lebesguemaß.

Übung 13.1.1.41 (**Restriktion von Maßen**). Ist $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $A \subset X$ eine meßbare Teilmenge, so bilden die in A enthaltenen meßbaren Mengen von X eine σ-Algebra $\mathcal{M}|_A \subset \mathcal{P}(A)$ und die Einschränkung von μ ist ein Maß $\mu : \mathcal{M}|_A \to [0, \infty]$, das wir je nach Kontext auch ausführlicher $\mu|_A$ oder $\mu|A$ oder $i^!\mu$ notieren für $i : A \hookrightarrow X$ die Einbettung. Wir nennen $(A, \mathcal{M}|_A, \mu|_A)$ den **induzierten Maßraum**.

Übung 13.1.1.42 (**Verkleben von Maßen**). Sei ein Meßraum X die Vereinigung einer Folge X_n meßbarer Teilmengen. Sei auf jeder unserer Teilmengen X_n ein Maß μ_n gegeben derart, daß gilt $\mu_n|(X_n \cap X_m) = \mu_m|(X_n \cap X_m)$ für alle m, n. Man zeige, daß es dann genau ein Maß μ auf X gibt mit $\mu_n = \mu|X_n$ für alle n.

Ergänzende Übung 13.1.1.43. Seien X ein Meßraum und μ_i eine Folge von endlichen Maßen derart, daß für jedes meßbare $A \subset X$ die Folge der $\mu_i(A)$ monoton wachsend und beschränkt ist. So wird durch die Formel $\mu(A) := \lim_{i\to\infty} \mu_i(A)$ ein weiteres Maß auf X erklärt.

Übung 13.1.1.44. Ist $A_0, A_1, \ldots$ eine Folge von Mengen aus einer σ-Algebra, so gehört auch die Menge

$$\limsup A_n := \{x \mid x \in A_n \text{ für unendlich viele } n\}$$

zu unserer σ-Algebra. Man nennt sie den **Limes superior** unserer Mengenfolge.

13.1.2 Konstruktion des Lebesguemaßes auf $\mathbb{R}$

Definition 13.1.2.1. Ein System von Teilmengen einer gegebenen Menge heißt ein **Mengenring**, wenn es stabil ist unter dem Bilden von endlichen Vereinigungen und von Differenzmengen. In Formeln ausgedrückt ist ein System von Teilmengen $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ einer Menge X also ein Mengenring, wenn gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$;
2. $A, B \in \mathcal{I} \;\Rightarrow\; (A \cup B) \in \mathcal{I}$;
3. $A, B \in \mathcal{I} \;\Rightarrow\; (B \backslash A) \in \mathcal{I}$.

13.1.2.2. Daß unsere Definition in Worten und unsere Definition in Formeln gleichbedeutend sind, erkennt man wie in 13.1.1.3. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ist eine Mengenalgebra genau dann, wenn $\mathcal{A}$ ein Mengenring ist mit $X \in \mathcal{A}$.

13.1.2.3 (**Diskussion der Terminologie**). Identifiziert man $\mathcal{P}(X)$ mit der Menge $\mathrm{Ens}(X, \mathbb{F}_2)$ aller Abbildungen von X in den zweielementigen Körper, indem man jeder Menge ihre Indikatorfunktion zuordnet, so entsprechen unsere Mengenringe $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ genau den „nicht-unitären Teilringen“ oder in unserer Terminologie den $\mathbb{Z}$-Unteralgebren von $\mathrm{Ens}(X, \mathbb{F}_2)$. Unsere Mengenalgebren $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ dahingegen entsprechen den „unitären Teilringen“, die wir in unserer Terminologie 6.2.2.1 schlicht Teilringe nennen. Ich komme nicht umhin, hier einen Zusammenstoß kollidierender Begriffswelten zu konstatieren.

Definition 13.1.2.4. Seien X eine Menge und $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengenring. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ heißt ein **Prämaß auf** $\mathcal{I}$ oder gleichbedeutend **σ-additiv**, wenn gilt $\mu(\emptyset) = 0$ und wenn für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen aus unserem Mengenring mit der Eigenschaft, daß ihre Vereinigung wieder zu unserem Mengenring gehört $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{I}$, gilt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

13.1.2.5 (**Alternative Definition der σ-Additivität**). Unsere Forderungen an ein Prämaß auf einem Mengenring $\mathcal{I}$ sind gleichbedeutend zur Bedingung, daß für jede abzählbare Familie $(A_n)_{n\in N}$ von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{I}$, deren Vereinigung wieder zu $\mathcal{I}$ gehört, gilt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{n\in N} \mu(A_n)$$

Man zeigt das wie im Fall von Maßen 13.1.1.12.

13.1.2.6 (**Eigenschaften von Prämaßen**). Seien X eine Menge und $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengenring und $\mu : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ ein Prämaß. Gegeben $A, B \in \mathcal{I}$ mit $B \supset A$ folgt $\mu(B) \geq \mu(A)$, es gilt ja sogar genauer $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B\backslash A)$. Gegeben $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{I}$ nicht notwendig paarweise disjunkt gilt weiter

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i)$$

In der Tat können wir $B_i := A_i\backslash(A_{i-1} \cup \ldots \cup A_0)$ betrachten und finden damit $\bigcup_{i=0}^{n} A_i = \bigsqcup_{i=0}^{n} B_i$. Ist schließlich $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein Folge in $\mathcal{I}$ mit $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ in $\mathcal{I}$, so folgt in derselben Weise

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$$

Lemma 13.1.2.7 (Ein Prämaß zum Lebesguemaß). *Auf dem Mengenring aller endlichen Vereinigungen von beschränkten Intervallen $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gibt es genau ein Prämaß λ derart, daß für jedes nichtleere beschränkte Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gilt*

$$\lambda(I) = \sup I - \inf I$$

Beweis. Gegeben $A \in \mathcal{I}$ betrachten wir die bis auf Reihenfolge eindeutige Darstellung $A = I_1 \cup \ldots \cup I_r$ von A als disjunkte Vereinigung der maximalen in A enthaltenen Intervalle und müssen setzen

$$\lambda(A) = \lambda(I_1) + \ldots + \lambda(I_r)$$

Das zeigt die Eindeutigkeit. Es gilt nur noch zu zeigen, daß für $A := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eine disjunkte Vereinigung mit $A, A_n \in \mathcal{I}$ gilt

$$\lambda(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n)$$

Offensichtlich gilt schon einmal $\lambda(B \sqcup C) = \lambda(B) + \lambda(C)$ für $B, C \in \mathcal{I}$ disjunkt. Wir setzen nun $B_n := A \backslash (A_0 \sqcup \ldots \sqcup A_n)$. Dann gilt $B_n \in \mathcal{I}$ und $B_0 \supset B_1 \supset \ldots$ sowie $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$. Es reicht, wenn wir folgern

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(B_n) = 0$$

Wären unsere B_n kompakt, so folgte mit 12.4.1.13 bereits $B_n = \emptyset$ für fast alle n und wir wären fertig. Der Rest des Beweises besteht darin, zu zeigen, daß wir salopp gesprochen beliebig nah an dieser Situation sind. Sei genauer $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir finden für jedes n ein kompaktes $C_n \in \mathcal{I}$ mit $C_n \subset B_n$ und

$$\lambda(B_n \backslash C_n) \leq 2^{-n}\varepsilon$$

Jetzt betrachten wir $D_n := C_0 \cap \ldots \cap C_n$. Auch die D_n sind kompakt, es gilt $D_n \subset C_n \subset B_n$ und zusätzlich haben wir nach Konstruktion $D_0 \supset D_1 \supset \ldots$ Wir zeigen nun $\lambda(B_n \backslash D_n) \leq 2\varepsilon$ für alle n. In der Tat gilt ja

$$B_n \backslash D_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_n \backslash C_k \subset \bigcup_{k=0}^{n} B_k \backslash C_k$$

und folglich

$$\lambda(B_n \backslash D_n) \leq \sum_{k=0}^{n} \lambda(B_k \backslash C_k) \leq \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}\varepsilon \leq 2\varepsilon$$

Nun folgt aber aus $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n = \emptyset$ und der Kompaktheit der D_n und 12.4.1.13 bereits $D_N = \emptyset$ für ein N. Damit ergibt sich $\lambda(B_n) \leq 2\varepsilon$ für $n \geq N$. $\square$

13.1.2.8. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **linksseitig stetig**, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{y \nearrow x} f(y) = f(x)$.

Lemma 13.1.2.9 (Stieltjes-Prämaße). *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und linksseitig stetig. So gibt es auf dem Mengenring $\mathcal{I}$ aller endlichen Vereinigungen beschränkter Intervalle der Gestalt $[a, b)$ genau ein Prämaß $\lambda = \mathrm{d}f$ mit $\lambda([a, b)) = f(b) - f(a)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.*

Beweis. Wir können den Beweis des vorhergehenden Lemmas 13.1.2.7 im wesentlichen übernehmen. Im hier betrachteten Mengenring ist allerdings $\emptyset$ das einzige Kompaktum. Stattdessen suchen wir nun Elemente $C_n \in \mathcal{I}$ mit $\bar{C}_n \subset B_n$ und $\lambda(B_n \backslash C_n) \leq 2^{-n}\varepsilon$. Wir finden solche C_n aufgrund unserer Annahme, daß f linksseitig stetig sein soll. Dann argumentieren wir wie zuvor und folgern $D_N = \emptyset$ für hinreichend großes N aus $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{C}_n = \emptyset$. Die $\bar{C}_n$ sind ja schließlich kompakt und wir können wieder 12.4.1.13 anwenden. □

Definition 13.1.2.10. Eine Teilmenge eines Raums mit Prämaß heißt **σ-endlich**, wenn sie sich durch eine abzählbare Familie von Mengen endlichen Maßes aus dem entsprechenden Mengenring überdecken läßt. Ein Prämaß heißt **σ-endlich**, wenn der ganze Raum in diesem Sinne σ-endlich ist.

Satz 13.1.2.11 (Maßfortsetzung nach Caratheodory). *Gegeben eine Menge X, ein Mengenring $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ und ein σ-endliches Prämaß $\mu : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ existiert genau eine Fortsetzung von μ zu einem Maß auf der von $\mathcal{I}$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{I})$.*

13.1.2.12. Sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit von Maßfortsetzungen unter den gegebenen Voraussetzungen sind zentrale Aussagen der Maßtheorie. Der Beweis des Maßfortsetzungssatzes wird nach einigen Vorbereitungen direkt vor 13.1.2.27 geführt werden.

13.1.2.13 (**Lebesguemaß auf** $\mathbb{R}$). In 13.1.2.7 haben wir auf dem Mengenring aller endlichen Vereinigungen beschränkter reeller Intervalle ein translationsinvariantes Prämaß konstruiert, das dem abgeschlossenen Einheitsintervall den Wert Eins zuweist. Mit dem Satz über Maßfortsetzungen 13.1.2.11 folgt sofort die in 13.1.1.28 behauptete Existenz eines normierten translationsinvarianten topologischen Maßes auf der reellen Zahlengeraden. Den Nachweis der Eindeutigkeit in 13.1.1.28 überlassen wir dem Leser als Übung 13.1.2.35.

13.1.2.14. Gegeben Maße μ, ν auf demselben Meßraum $(X, \mathcal{M})$ sagen wir, μ sei **größergleich** ν und schreiben $\mu \geq \nu$, wenn gilt $\mu(A) \geq \nu(A)\ \forall A \in \mathcal{M}$. Unter einer **größten Maßfortsetzung** eines Prämaßes auf einem Mengenring verstehen wir das in dieser Teilordnung größte Maß auf der von unserem Mengenring erzeugten σ-Algebra, das unser Prämaß fortsetzt. Als größtes Element einer teilgeordneten Menge ist so eine größte Maßfortsetzung eindeutig, wenn sie existiert.

Proposition 13.1.2.15 (Konstruktion der größten Maßfortsetzung). *Gegeben eine Menge X, ein Mengenring $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ und ein Prämaß $\mu : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ existiert eine größte Fortsetzung von μ zu einem Maß μ^* auf der von $\mathcal{I}$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{I})$ und der Wert dieser größten Maßfortsetzung wird für alle $M \in \sigma(\mathcal{I})$ gegeben durch*

$$\mu^*(M) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \,\middle|\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Folge in } \mathcal{I} \text{ mit } M \subset \bigcup A_n \right\}$$

13.1.2.16. Ich erinnere hier an unsere Konvention, nach der das Infimum der leeren Menge das Element $\infty \in \bar{\mathbb{R}}$ ist. Der Beweis der Proposition wird im Anschluß an den Beweis des Zerlegerlemmas 13.1.2.25 gegeben. Wir zeigen darin nur noch, daß die Formel in der Proposition auch wirklich eine Maßfortsetzung liefert. Daß diese Maßfortsetzung die größte Maßfortsetzung sein muß, ist dann eh klar.

13.1.2.17. Ist unser Prämaß nicht σ-endlich, so muß die größte Maßfortsetzung nicht die einzige Maßfortsetzung sein. Als erstes Beispiel betrachte man in einer nichtleeren Menge den Mengenring, der nur aus der leeren Menge besteht. Als etwas feineres Beispiel betrachte man den Mengenring aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ und darauf das Prämaß, das jeder endlichen Menge die Null zuordnet. Die von unserem Mengenring erzeugte σ-Algebra besteht aus allen Teilmengen von $\mathbb{R}$, die entweder abzählbar sind oder abzählbares Komplement haben, und die möglichen Fortsetzungen unseres Prämaßes sind alle die Abbildungen, die allen abzählbaren Mengen die Null zuordnen und allen Komplementen abzählbarer Mengen ein beliebiges aber festes Element von $[0, \infty]$. Die größte Fortsetzung kann im übrigen auch charakterisiert werden als die eindeutig bestimmte Fortsetzung, die allen den Mengen von $\sigma(\mathcal{I})$ das Maß Unendlich zuordnet, die nicht in einer abzählbaren Vereinigung von Mengen endlichen Maßes aus $\mathcal{I}$ enthalten sind.

Definition 13.1.2.18. Seien X eine Menge und $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra. Ein **äußeres Maß auf** $\mathcal{N}$ ist eine Abbildung $\alpha : \mathcal{N} \to [0, \infty]$ derart, daß aus $Y \subset Z$ folgt $\alpha(Y) \le \alpha(Z)$ und daß gilt $\alpha(\emptyset) = 0$ und daß für jede Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus unserer σ-Algebra $\mathcal{N}$ gilt

$$\alpha\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha(Y_n)$$

Die erste Bedingung nennen wir die **Monotonie**, die zweite die **σ-Subadditivität**.

13.1.2.19. Wir werden in diesem Text äußere Maße fast nur auf der gesamten Potenzmenge einer vorgegebenen Menge betrachten. Nach den in 13.1.2.6 sogar für Prämaße gezeigten Abschätzungen ist jedes Maß auch ein äußeres Maß.

Lemma 13.1.2.20 (Konstruktion äußerer Maße). *Gegeben eine Menge X, ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\emptyset \in \mathcal{E}$ und eine Abbildung $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ erhalten wir ein äußeres Maß $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ durch die Vorschrift*

$$\mu^*(Y) := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \,\middle|\, (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Folge in } \mathcal{E} \text{ mit } Y \subset \bigcup A_n \right\}$$

13.1.2.21. Die Bedingungen $\emptyset \in \mathcal{E}$ und $\mu(\emptyset) = 0$ könnten unterdrückt werden, wenn wir statt mit Folgen allgemeiner mit abzählbaren Familien arbeiten würden, was ja nach unseren Konventionen die leere Familie mit einschließt. Mir schien aber hier das Arbeiten mit Folgen vom didaktischen Standpunkt aus so viel günstiger, daß ich diese Unnatürlichkeit der Darstellung dafür in Kauf genommen habe.

Beweis. Es ist klar, daß μ^* die von einem äußeren Maß geforderte Monotonie hat. Es bleibt, die σ-Subadditivität zu zeigen. Es reicht, die fragliche Abschätzung für jede Folge $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen $Y_n \subset X$ mit $\mu^*(Y_n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$ nachzuweisen. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir finden für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(A_n^i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}$ mit $Y_n \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_n^i$ und

$$\mu^*(Y_n) \le \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_n^i) \le \mu^*(Y_n) + \varepsilon/2^n$$

Dann gilt aber $\bigcup Y_n \subset \bigcup_{i,n} A_n^i$ und aus der Definition von μ^* folgern wir

$$\mu^* \left(\bigcup Y_n \right) \le \sum_{i,n} \mu(A_n^i) \le \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(Y_n) \ + 2\varepsilon$$

Da das nun gilt für alle $\varepsilon > 0$, ist μ^* auch σ-subadditiv. □

Lemma 13.1.2.22 (Ausdehnen von Prämaß zu äußerem Maß). *Gegeben eine Menge X, ein Mengenring $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ und ein Prämaß $\mu : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ stimmt das in 13.1.2.20 konstruierte äußere Maß μ^* auf dem vorgegebenen Mengenring $\mathcal{I}$ mit dem vorgegebenen Prämaß μ überein, in Formeln*

$$\mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{I}$$

Beweis. Die Abschätzungen $\mu^*(A) \le \mu(A) \ \forall A \in \mathcal{I}$ folgen daraus, daß jede Menge A sich selber überdeckt. Wir müssen also nur noch $\mu(A) \le \mu^*(A) \ \forall A \in \mathcal{I}$ zeigen. Es reicht zu zeigen $\mu(A) \le \mu^*(A) + \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$. Für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir aber eine Folge A_n in $\mathcal{I}$ mit $A \subset \bigcup A_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \le \mu^*(A) + \varepsilon$. Indem wir A_n verkleinern zu $A_n \backslash (A_{n-1} \cup \ldots \cup A_0)$, dürfen wir hier sogar die Fogenglieder paarweise disjunkt annehmen. Wegen $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap A_n)$ erhalten wir dann wie gewünscht

$$\mu(A) = \sum \mu(A \cap A_n) \le \sum \mu(A_n) \le \mu^*(A) + \varepsilon$$ □

13.1.2.23. Gegeben eine feste Menge X und eine Teilmenge $A \subset X$ verwenden wir im folgenden für das Komplement von A die Abkürzung $A^c := X \backslash A$.

Definition 13.1.2.24. Seien X eine Menge und α ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **α-meßbar** oder auch ein **α-Zerleger**, wenn für jede Teilmenge $Y \subset X$ gilt

$$\alpha(Y) = \alpha(Y \cap A) + \alpha(Y \cap A^c)$$

Lemma 13.1.2.25 (Zerleger-Lemma). *Gegeben eine Menge X und ein äußeres Maß $\alpha : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ auf ihrer Potenzmenge ist das System $\mathcal{Z} \subset \mathcal{P}(X)$ aller α-Zerleger eine σ-Algebra und α ist ein Maß auf $\mathcal{Z}$.*

Ergänzung 13.1.2.26. Ist allgemeiner X eine Menge und α ein äußeres Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$, so definieren wir analog das System $\mathcal{Z} \subset \mathcal{N}$ der $\mathcal{N}$-α-Zerleger. Derselbe Beweis zeigt, daß auch diese Zerleger eine σ-Algebra bilden und daß unser äußeres Maß zu einem Maß auf $\mathcal{Z}$ einschränkt.

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir, daß $\mathcal{Z}$ eine Mengenalgebra ist. Sicher gilt $\emptyset \in \mathcal{Z}$, und aus $A \in \mathcal{Z}$ folgt $A^c \in \mathcal{Z}$. Wir müssen nun noch zeigen, daß aus $A, B \in \mathcal{Z}$ folgt $A \cap B \in \mathcal{Z}$. Sei dazu $Y \subset X$ beliebig. Es gilt, für α-Zerleger A und B zu zeigen

$$\alpha(Y) = \alpha(Y \cap (A \cap B)) + \alpha(Y \cap (A \cap B)^c)$$

Da A und B schon α-Zerleger sind, finden wir aber in der Tat

$$\begin{aligned}
\alpha(Y \cap (A \cap B)^c) + \alpha(Y \cap A \cap B) &= \alpha(Y \cap (A \cap B)^c \cap A) \\
&\quad + \alpha(Y \cap (A \cap B)^c \cap A^c) \\
&\quad\quad + \alpha(Y \cap A \cap B) \\
&= \alpha(Y \cap B^c \cap A) \\
&\quad + \alpha(Y \cap A^c) \\
&\quad\quad + \alpha(Y \cap A \cap B) \\
&= \alpha(Y \cap A) + \alpha(Y \cap A^c) = \alpha(Y)
\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{Z}$ schon mal eine Mengenalgebra. Als nächstes zeigen wir, daß $\mathcal{Z}$ auch stabil ist unter abzählbaren disjunkten Vereinigungen und damit eine σ-Algebra. Sind zunächst einmal $A, B \in \mathcal{Z}$ disjunkt, so gilt

$$\alpha(Y \cap (A \sqcup B)) = \alpha(Y \cap A) + \alpha(Y \cap B)$$

für beliebiges $Y \subset X$, denn unter der Voraussetzung $A \cap B = \emptyset$ können wir schreiben $Y \cap A = Y \cap (A \sqcup B) \cap A$ und $Y \cap B = Y \cap (A \sqcup B) \cap A^c$. Induktiv

folgt für $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{Z}$ paarweise disjunkt und $Y \subset X$ beliebig die Gleichheit

$$\alpha(Y \cap (A_0 \sqcup \ldots \sqcup A_n)) = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha(Y \cap A_\nu)$$

Haben wir also eine Folge (A_ν) von paarweise disjunkten Zerlegern mit Vereinigung $A := \bigsqcup_{\nu \in \mathbb{N}} A_\nu$ gegeben, so gilt für jede Teilmenge $Y \subset X$ aufgrund der Monotonie unseres äußeren Maßes die Abschätzung

$$\begin{aligned} \alpha(Y) &= \alpha(Y \cap (A_0 \sqcup \ldots \sqcup A_n)^c) + \alpha(Y \cap (A_0 \sqcup \ldots \sqcup A_n)) \\ &\geq \alpha(Y \cap A^c) + \textstyle\sum_{\nu=0}^{n} \alpha(Y \cap A_\nu) \end{aligned}$$

Im Grenzwert $n \to \infty$ ergibt sich so die erste Ungleichung der Ungleichungskette

$$\alpha(Y) \;\geq\; \alpha(Y \cap A^c) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha(Y \cap A_\nu) \;\geq\; \alpha(Y \cap A^c) + \alpha(Y \cap A) \;\geq\; \alpha(Y)$$

Die anderen beiden Ungleichungen folgen aus der σ-Subadditivität unseres äußeren Maßes. Damit haben wir überall Gleichheit und A ist auch ein Zerleger und $\mathcal{Z}$ eine σ-Algebra. Setzen wir in unserer Ungleichungskette $Y = A$, so folgt hinwiederum die σ-Additivität von $\alpha : \mathcal{Z} \to [0,1]$. Also ist α in der Tat ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{Z}$ aller Zerleger. □

Beweis zur größten Maßfortsetzung. Seien $\mathcal{I}$ ein Mengenring, $\mu : \mathcal{I} \to [0,\infty]$ ein Prämaß auf $\mathcal{I}$ und $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ das in 13.1.2.22 konstruierte äußere Maß. Um Proposition 13.1.2.15 zur Konstruktion der größten Maßfortsetzung aus dem Zerlegerlemma 13.1.2.25 abzuleiten, müssen wir nur noch zeigen, daß $\mathcal{I}$ aus μ^*-Zerlegern besteht. Für jedes äußere Maß auf $\mathcal{P}(X)$ und beliebige $A, Y \subset X$ gilt per definitionem

$$\mu^*(Y) \leq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c)$$

Wir müssen für $A \in \mathcal{I}$ und beliebiges $Y \subset X$ auch die andere Ungleichung zeigen. Das ist nur im Fall $\mu^*(Y) < \infty$ problematisch. Unter dieser Voraussetzung finden wir aber für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Folge (B_n) in $\mathcal{I}$ mit $Y \subset \bigcup_n B_n$ und

$$\begin{aligned} \mu^*(Y) + \varepsilon &\geq \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) \\ &\geq \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n \cap A) + \mu(B_n \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c) \end{aligned}$$

Da das für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die andere Ungleichung

$$\mu^*(Y) \geq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c)$$

und damit die Gleichheit. Also besteht $\mathcal{I}$ in der Tat aus μ^*-meßbaren Mengen und die Proposition 13.1.2.15 ist bewiesen. □

Beweis des Maßfortsetzungssatzes von Caratheodory 13.1.2.11. Die Existenz einer Maßfortsetzung haben wir bereits als Proposition 13.1.2.15 gezeigt und nur die Eindeutigkeit ist noch zu zeigen. Sei dazu ν eine zweite Fortsetzung. Es gilt zu zeigen $\mu(C) = \nu(C)$ für alle $C \in \mathcal{M}$. Aus der Konstruktion von μ in 13.1.2.15 folgt bereits $\nu(C) \leq \mu(C)$. Da wir unser Prämaß σ-endlich angenommen hatten, gibt es jedoch eine aufsteigende Folge $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ in $\mathcal{I}$ mit $\bigcup A_n = X$ und $\mu(A_n) < \infty \; \forall n$. Wir müssen nur für alle n die Gleichungen

$$\mu(C \cap A_n) = \nu(C \cap A_n)$$

zeigen, dann ergibt sich $\mu(C) = \nu(C)$ im Grenzwert $n \to \infty$. Wie bereits erwähnt gilt jedoch $\nu(C \cap A_n) \leq \mu(C \cap A_n)$ und ganz genauso auch $\nu(C^c \cap A_n) \leq \mu(C^c \cap A_n)$, und da die Summe dieser Ungleichungen die Gleichung $\nu(A_n) = \mu(A_n)$ liefert, müssen unsere Ungleichungen beide schon Gleichungen gewesen sein. □

Proposition 13.1.2.27 (Maße und ihre Integrale). *Gegeben Intervall $I \subset \bar{\mathbb{R}}$ mit $(\sup I) \notin I$ alias ein „nach oben offenes Intervall“ und ein Punkt $p \in I$ erhalten wir eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{Borelmaße auf } I\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Monoton wachsende} \\ \textit{linksseitig stetige Funktionen} \\ f : I \to \mathbb{R} \textit{ mit } f(p) = 0 \end{array} \right\} \\ \mu & \mapsto & \left(f_\mu : x \mapsto \left\{ \begin{array}{rl} \mu[p,x) & \textit{falls } x \geq p; \\ -\mu[x,p) & \textit{falls } x \leq p. \end{array} \right\} \right) \end{array}$$

13.1.2.28. Die Umkehrabbildung zur Bijektion aus unserer Proposition notieren wir $f \mapsto \mathrm{d}f$. Das Maß $\mathrm{d}f$ heißt auch das **Stieltjes-Maß zu** f. Insbesondere notieren wir das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ auch $\mathrm{d}x$ für $x = \mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Beweis. Man prüft leicht, daß unsere Abbildungsvorschrift $\mu \mapsto f_\mu$ in der Tat eine Abbildung zwischen den im Satz beschriebenen Mengen liefert. Es gilt, eine Umkehrabbildung zu konstruieren. Zunächst nehmen wir $I = \mathbb{R}$ an, betrachten zu f monoton wachsend linksseitig stetig das in 13.1.2.9 konstruierte Prämaß $\mathrm{d}f$ und erweitern es mit dem Maßfortsetzungssatz zu einem Maß $\mathrm{d}f$ auf den Borelmengen. Das so konstruierte Maß $\mu = \mu_f$ hat offensichtlich die Eigenschaft $f = f_\mu + f(p)$. Gehen wir andererseits von μ aus, so stimmt das Maß $\mathrm{d}f_\mu$ auf einem erzeugenden Mengenring der borelschen σ-Algebra mit μ überein und wir haben folglich $\mu = \mathrm{d}f_\mu$. Es bleibt, den Fall $I = [0, \infty)$ zu diskutieren. In diesem Fall setzen wir f konstant durch $f(0)$ zu einer linksseitig stetigen Funktion auf $\mathbb{R}$ fort und schränken das zugehörige Stieltjes-Maß $\mathrm{d}f$ auf $[0, \infty)$ ein. □

13.1.2.29. Es gibt also für jede linksseitig stetige monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau ein topologisches Maß $\mathrm{d}f$ auf $\mathbb{R}$ mit $(\mathrm{d}f)([a,b)) = f(b) - f(a)$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Unser Lebesguemaß kann man in dieser Notation auch schreiben als das Maß $\mathrm{d}x$, mit x als alternativer Bezeichnung für die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ auf der reellen Zahlengeraden. Etwas allgemeiner kann man so auch für jeden orientierten eindimensionalen reellen affinen Raum X und jede linksseitig stetige monoton wachsende Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ in natürlicher Weise ein topologisches Maß $\mathrm{d}f$ auf X erklären. Die Beziehung zu unseren Kovektorfeldern $\mathrm{d}f$ für differenzierbare Funktionen f diskutieren wir in 13.1.5.28.

Korollar 13.1.2.30 (Wahrscheinlichkeitsmaße und Verteilungsfunktionen). *Wir erhalten eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{Wahrscheinlichkeitsmaße auf } \mathbb{R}\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Monoton wachsende} \\ \textit{linksseitig stetige Funktionen} \\ V : \mathbb{R} \to [0,1] \textit{ mit} \\ \inf V(\mathbb{R}) = 0 \textit{ und } \sup V(\mathbb{R}) = 1 \end{array} \right\} \\ \mu & \mapsto & \big(V_\mu : x \mapsto \mu(-\infty, x)\big) \end{array}$$

Ergänzung 13.1.2.31. Im Fall von Wahrscheinlichkeitsmaßen μ auf $\mathbb{R}$ mit seiner σ-Algebra der topologisch meßbaren Mengen ist es üblich, eine Variante der Konstruktion aus Satz 13.1.2.27 zu betrachten und die **Verteilungsfunktion** des Wahrscheinlichkeitsmaßes μ zu definieren durch die Vorschrift $V_\mu(x) = \mu(-\infty, x)$ und allgemeiner $V_\mu(x_1, \ldots, x_n) = \mu((-\infty, x_1) \times \ldots \times (-\infty, x_n))$ für Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}^n$. Damit erhalten wir dann, wie oben formuliert, eine eineindeutige Entsprechung zwischen der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ und der Menge aller linksseitig stetigen monoton wachsenden Funktionen $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Infimum Null und Supremum Eins, in Formeln $\inf(V(\mathbb{R})) = 0$ und $\sup(V(\mathbb{R})) = 1$, oder allgemeiner zwischen der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}^n$ und der Menge aller in jeder Variablen linksseitig stetigen monoton wachsenden Funktionen $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit Infimum Null und Supremum Eins. Andere Quellen erklären die Verteilungsfunktion abweichend als $F_\mu(x) = \mu(-\infty, x]$ und erhalten dann analog eine eineindeutige Entsprechung zwischen der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ und der Menge aller *rechts*seitig stetigen monoton wachsenden Funktionen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Infimum Null und Supremum Eins.

Übungen

Übung 13.1.2.32. Gegeben Mengen X und Y sowie Mengenringe $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(X)$ ist auch das System aller endlichen Vereinigungen von paarweise

disjunkten Mengen der Gestalt $A \times B$ mit $A \in \mathcal{I}$ und $B \in \mathcal{J}$ ein Mengenring in $\mathcal{P}(X \times Y)$. Diese Übung ist wichtig zur Vorbereitung der Diskussion von Produktmaßen.

Übung 13.1.2.33 (**Mengenalgebra oder -ring erzeugt von Mengensystem**). Seien X eine Menge und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen. Der Schnitt aller Mengenalgebren, die $\mathcal{E}$ umfassen, heißt die **von $\mathcal{E}$ erzeugte Mengenalgebra**. Weiter heißt der Schnitt aller Mengenringe, die $\mathcal{E}$ umfassen, der **von $\mathcal{E}$ erzeugte Mengenring**. Man zeige: Die von einem endlichen System $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Teilmengen einer gegebenen Menge X erzeugte Mengenalgebra kann beschrieben werden als das System aller Mengen, die man erhält, wenn man erst für alle $I \subset \Lambda$ die paarweise disjunkten Mengen

$$A_{(I)} = \bigcap_{\lambda\in I} A_\lambda \cap \bigcap_{\lambda\notin I}(X\backslash A_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in I} A_\lambda \backslash \bigcup_{\lambda\notin I} A_\lambda$$

bildet und dann Vereinigungen derartiger $A_{(I)}$ nimmt. Nimmt man Vereinigungen derartiger $A_{(I)}$ mit $I \neq \emptyset$, so ergibt sich der von den A_λ erzeugte Mengenring. Die von einem beliebigen System von Teilmengen einer gegebenen Menge erzeugte Mengenalgebra ist die Vereinigung der von allen endlichen Teilsystemen erzeugten Mengenalgebren. Der von einem beliebigen System von Teilmengen einer gegebenen Menge erzeugte Mengenring ist die Vereinigung der von allen endlichen Teilsystemen erzeugten Mengenringe.

Übung 13.1.2.34 (**Vergleich von Maßen**). Gegeben eine Menge X heißt ein Mengensystem $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ **zweischnittstabil**, wenn gilt $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$. Man zeige, daß zwei Maße auf ein- und derselben σ-Algebra übereinstimmen, sobald sie auf einem zweischnittstabilen Erzeugendensystem unserer σ-Algebra übereinstimmen, das darüber hinaus für beide Maße **σ-endlich** ist in dem Sinne, daß die ganze Menge durch eine Folge von Mengen endlichen Maßes aus besagtem Erzeugendensystem überdeckt werden kann. Hinweis: Man zeige, daß die beiden Maße auf dem von $\mathcal{S}$ erzeugten Mengenring übereinstimmen, und wende dann Caratheodory an. In der Literatur sagt man meist einfacher „schnittstabil“, aber das könnte dahingehend mißverstanden werden, daß möglicherweise die Stabilität unter endlichen Schnitten oder gar unter beliebigen Schnitten gefordert würde.

Übung 13.1.2.35. Zeigen Sie, daß es höchstens ein normiertes translationsinvariantes topologisches Maß λ auf $\mathbb{R}$ geben kann. Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\lambda(\{a\}) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$; Zeigen Sie anschließend, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\lambda([0, 1/n]) = 1/n$. Erweitern Sie als nächstes die Aussage auf Intervalle mit rationalen Endpunkten und schließlich auf beliebige Intervalle. Wenden Sie dann den Satz über Maßfortsetzungen an.

Übung 13.1.2.36. Zeigen Sie, daß es höchstens ein normiertes translationsinvariantes topologisches Maß λ auf $\mathbb{R}^n$ geben kann. Hinweis: 13.1.2.35.

Ergänzende Übung 13.1.2.37 (**Benford's Gesetz**). Zeigen Sie, daß es auf jedem nichtleeren kompakten Intervall $I = [a, b]$ genau ein topologisches Maß μ gibt, das dem ganzen Intervall das Maß Eins zuweist und das „partiell translationsinvariant" ist in dem Sinne, daß für jede Borelmenge $A \subset I$ und jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $a + A \subset I$ gilt $\mu(A) = \mu(a + A)$. Zeigen Sie, daß es auf jedem nichtleeren kompakten Intervall $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_{>0}$ genau ein topologisches Maß μ gibt, das dem ganzen Intervall das Maß Eins zuweist und das „partiell skaleninvariant" ist in dem Sinne, daß für jede Borelmenge $A \subset I$ und jedes $c \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $cA \subset I$ gilt $\mu(A) = \mu(cA)$. Zeigen Sie weiter, daß dieses Maß, wenn unser Intervall nicht nur aus einem Punkt besteht, von der Gestalt $a \,\mathrm{d}\log$ ist mit $a > 0$. Gegeben ein derartiges Maß und I so groß, daß gilt $\beta > 10^n\alpha$ für $n \geq 1$, wird dann für jede Ziffer $i \in \{1, \ldots, 9\}$ das Maß der Menge M_i aller $x \in I$, die als Dezimalbruch mit erster von Null verschiedener Ziffer i geschrieben werden können, von $(\log(i + 1) - \log(i))/\log(10)$ um weniger als $1/(n + 1)$ abweichen. Diese Verteilung der Anfangsziffern „zufälliger" Zahlenreihen tritt in der Wirklichkeit häufig auf und heißt **Benford's Gesetz**. Benford fand es beim Nachdenken über die Tatsache, daß bei gut gebrauchten Büchern mit Logarithmentafeln die Seiten mit den Logarithmen zu kleinen Anfangsziffern am Rand viel schwärzer sind als die Seiten mit den Logarithmen zu großen Anfangsziffern. Benford's Gesetz wird unter anderem eingesetzt, um Steuerbetrug zu entlarven, da von Menschen willkürlich hingeschriebene Zahlenreihen typischerweise eine andere Verteilung von Anfangsziffern haben.

Ergänzende Übung 13.1.2.38 (**Gleichverteilung im Folgenraum**). Auf dem Raum $\mathrm{Ens}(\mathbb{N}, \{W, Z\})$ aller Folgen in der zweielementigen Menge $\{W, Z\}$ mit der in **??** erklärten Metrik gibt es genau ein Borelmaß, das für jeden n-gliedrigen Folgenanfang der Menge aller Folgen mit diesem Anfang das Maß 2^{-n} zuordnet. Man zeige weiter, daß die durch die dyadische Entwicklung gegebene Surjektion $\mathrm{Ens}(\mathbb{N}, \{W, Z\}) \twoheadrightarrow [0, 1]$ stetig ist und daß hier das Maß des Urbilds einer Borelmenge gerade das Lebesguemaß der ursprünglichen Menge ist. Hinweis: Man mag eine Teilmenge unseres Folgenraums „n-vernünftig" nennen, wenn sie mit einer Folge auch alle anderen Folgen enthält, die sich von dieser frühestens im n-ten Folgenglied unterscheiden. Man mag eine Teilmenge unseres Folgenraums „vernünftig" nennen, wenn sie n-vernünftig ist für mindestens ein n. Man mag von der Erkenntnis ausgehen, daß die vernünftigen Teilmengen einen Mengenring bilden, und verwenden, daß alle vernünftigen Teilmengen sowohl offen als auch abgeschlossen und damit nach **??** kompakt sind. Jede Überdeckung einer vernünftigen Teilmenge durch vernünftige Teilmengen besitzt folglich eine endliche Teilüberdeckung.

Ergänzende Übung 13.1.2.39. Wir betrachten die **Cantor-Menge** C, die aus dem Einheitsintervall $C_0 = [0, 1]$ entsteht, indem wir das mittlere Drittel $(1/3, 2/3)$

herausnehmen, dann aus den beiden so entstehenden kompakten Intervallen wieder jeweils das offene mittlere Drittel und so weiter, und schließlich als C den

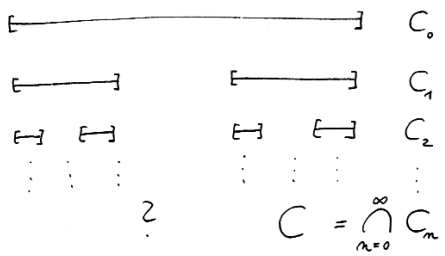


Illustration zur Cantor-Menge

Schnitt über alle Mengen C_n nehmen, die wir in dieser Weise in n Schritten erhalten. Man zeige, daß die Cantor-Menge das Lebesguemaß $\lambda(C) = 0$ Null hat und überabzählbar ist. Hinweis: Man kann die Cantor-Menge auch beschreiben als die Menge aller Zahlen, die sich in der Basis Drei mit einer Null vor dem Komma und ohne die Ziffer Eins ausdrücken lassen, in Formeln

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} \,\middle|\, a_i \in \{0, 2\} \right\}$$

Ergänzende Übung 13.1.2.40. Die Menge aller reellen Zahlen, die sich darstellen lassen durch einen unendlichen Dezimalbruch, in dem die Ziffer 6 nicht vorkommt, bilden eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ vom Lebesguemaß Null.

13.1.3 Vervollständigung von Maßräumen*

Definition 13.1.3.1. Eine Teilmenge eines Maßraums, die in einer meßbaren Menge vom Maß Null enthalten ist, heißt eine **Nullmenge** unseres Maßraums. Ein Maßraum $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ heißt **vollständig**, wenn jede Nullmenge bereits meßbar ist alias zu $\mathcal{M}$ gehört.

Proposition 13.1.3.2 (Vervollständigung von Maßräumen). *1. Gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ gibt es genau eine Fortsetzung von μ zu einem Maß μ^* auf der von $\mathcal{M}$ und den μ-Nullmengen erzeugten σ-Algebra $\mathcal{M}^*$ und der so entstehende Maßraum $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$ ist vollständig;*

2. Die σ-Algebra $\mathcal{M}^*$ besteht aus allen $E \subset X$ derart, daß es $A, B \in \mathcal{M}$ gibt mit $A \subset E \subset B$ und $\mu(B \backslash A) = 0$.

Beweis. Erweitern wir μ zu einem äußeren Maß μ^* auf $\mathcal{P}(X)$ wie in Lemma 13.1.2.22 und wenden auf dieses äußere Maß das Zerlegerlemma 13.1.2.25 an, so folgt, daß alle μ-Nullmengen bereits μ^*-meßbar sind und daß mithin μ^* ein Maß

ist auf $\mathcal{M}^*$. Das zeigt die Existenz von μ^*. Für die Eindeutigkeit prüft man, daß $\mathcal{M}^*$ genau aus allen Teilmengen $E \subset X$ besteht derart, daß es $A, B \in \mathcal{M}$ gibt mit $A \subset E \subset B$ und $\mu(B \backslash A) = 0$. In der Tat bilden nämlich alle diese E eine σ-Algebra, wie Sie als Übung 13.1.3.4 selbst prüfen mögen. Jedes erweiterte Maß μ^* nimmt aber auf einer solchen Teilmenge E notwendig den Wert $\mu^*(E) = \mu(A)$ an. □

13.1.3.3. Der Maßraum $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$ heißt die **Vervollständigung** des Maßraums $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Die bezüglich der Vervollständigung des Lebesguemaßes meßbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ oder auch $\mathbb{R}^n$ nennt man die **Lebesgue-meßbaren** Teilmengen oder kurz **Lebesgue-Mengen**. Es ist nicht ganz einfach, eine Lebesgue-Menge in $\mathbb{R}$ explizit anzugeben, die nicht topologisch meßbar ist. Genauer gesagt wüßte ich selbst nicht, wie ich das machen sollte, und müßte einen Logiker um Hilfe bitten. Man kann jedoch zeigen, daß es im Sinne der Mengenlehre „mehr“ Lebesgue-Mengen in $\mathbb{R}$ gibt als topologisch meßbare Teilmengen, vergleiche etwa 6.5.4.6.

Übungen

Übung 13.1.3.4. Man arbeite den Schluß des Beweises von 13.1.3.2 aus und zeige, daß gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ das Mengensystem aller $E \subset X$ derart, daß es $A, B \in \mathcal{M}$ gibt mit $A \subset E \subset B$ und $\mu(B \backslash A) = 0$, eine σ-Algebra ist.

Übung 13.1.3.5. Zeigen Sie, daß es in $\mathbb{R}$ Teilmengen gibt, die nicht Borel-meßbar und noch nicht einmal Lebesgue-meßbar sind. Hinweis: 13.1.1.34.

Übung 13.1.3.6. Man zeige: Eine Teilmenge der reellen Zahlengeraden ist eine Nullmenge in Bezug auf das Lebesguemaß genau dann, wenn sie sich für jedes $\varepsilon > 0$ durch eine Folge von kompakten Intervallen $[a_n, b_n]$ überdecken läßt derart, daß gilt $\sum_{n=0}^{\infty}(b_n - a_n) < \varepsilon$. Hinweis: 13.1.2.11 und 13.1.2.15.

13.1.4 Meßbare Abbildungen

13.1.4.1. Bis jetzt haben wir uns nur mit dem Messen von Mengen beschäftigt. Wir haben gesehen, daß das Messen ganz beliebiger Teilmengen der reellen Zahlengerade problematisch ist, konnten jedoch gewisse Mengen als meßbar auszeichnen und solchen Mengen sinnvoll ein Maß zuordnen. Nun wollen wir reellwertigen Funktionen auf Maßräumen ein Integral zuordnen. Wieder ist das für ganz beliebige Funktionen problematisch, und wieder können wir gewisse Funktionen als „meßbar“ auszeichnen und zumindest allen nichtnegativen meßbaren Funktionen sinnvoll ein Integral zuordnen. In einem zweiten Schritt geben wir dann auch eine Definition für das Integral beliebiger meßbarer reellwertiger Funktionen, wann immer ihr Betrag ein endliches Integral hat.

Definition 13.1.4.2. Seien $(X, \mathcal{M})$ und $(Y, \mathcal{N})$ Meßräume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **meßbar**, wenn das Urbild jeder meßbaren Menge meßbar ist, in Formeln $V \in \mathcal{N} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$.

Beispiel 13.1.4.3. Nach Übung 13.1.3.5 sind nicht alle Teilmengen von $\mathbb{R}$ borelmeßbar. Die charakteristische Funktion einer nicht borelmeßbaren Teilmenge ist dann eine nicht borelmeßbare Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ergänzung 13.1.4.4. Eine meßbare Abbildung von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ in einen Meßraum heißt eine **Zufallsvariable** auf unserem Wahrscheinlichkeitsraum mit Werten in besagtem Meßraum oder ein **zufälliges Element** von besagtem Meßraum. So würde etwa ein gerechter Würfel modelliert durch eine Abbildung $W : \Omega \to \{1, \ldots, 6\}$ mit $W^{-1}(i)$ meßbar und $P(W^{-1}(i)) = 1/6$ für $1 \leq i \leq 6$. Das Interesse konzentriert sich in diesem Zusammenhang auf das Studium der Beziehungen zwischen derartigen Zufallsvariablen.

Lemma 13.1.4.5. *Jede Verknüpfung meßbarer Abbildungen ist meßbar.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der Definition. □

13.1.4.6. Wenn nichts anderes gesagt ist, denken wir uns metrische oder allgemeiner topologische Räume stets mit der durch die Borel'sche σ-Algebra gegebenen Struktur eines Meßraums versehen. Wir machen unsere erweiterten reellen Zahlen $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ zu einem Meßraum, indem wir darauf die von allen Intervallen erzeugte σ-Algebra betrachten. Für die natürliche Topologie auf $\bar{\mathbb{R}}$ im Sinne von **??** ist das auch genau die Borel'sche σ-Algebra.

Proposition 13.1.4.7. *Alle stetigen Abbildungen sind meßbar.*

Beweis. Da die Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen nach **??** offen sind, folgt das aus dem anschließenden Lemma 13.1.4.10. □

Definition 13.1.4.8. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

1. Ist $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra, so ist offensichtlich auch das Mengensystem $f_*\mathcal{M} := \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{M}\}$ eine σ-Algebra. Es heißt das **Bild unter** f der σ-Algebra $\mathcal{M}$;

2. Ist $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine σ-Algebra, so ist offensichtlich auch das Mengensystem $f^*\mathcal{N} := \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{N}\}$ eine σ-Algebra. Sie heißt das **Urbild unter** f der σ-Algebra $\mathcal{N}$;

Beispiel 13.1.4.9. Ist $i : B \hookrightarrow Y$ die Einbettung einer Teilmenge $B \subset Y$ eines Meßraums $(Y, \mathcal{N})$, so erklären wir die **auf** B **induzierte** σ**-Algebra** durch

$$\mathcal{N}|_B := i^*\mathcal{N}$$

Die auf B induzierte σ-Algebra besteht also gerade aus allen Schnitten mit B von meßbaren Mengen in Y, in Formeln $\mathcal{N}|_B = \{Z \cap B \mid Z \in \mathcal{N}\}$.

Lemma 13.1.4.10. *Seien $(X, \mathcal{M})$ und $(Y, \mathcal{N})$ Meßräume und sei die σ-Algebra $\mathcal{N}$ erzeugt von einem Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{N}$, in Formln $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{N}$. Genau dann ist $f : X \to Y$ meßbar, wenn die Urbilder aller Mengen aus $\mathcal{E}$ meßbar sind, wenn also in Formeln gilt*

$$V \in \mathcal{E} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$$

Beweis. Wir verwenden unsere Notation $f_*\mathcal{M}$ für das Bild einer σ-Algebra und insbesondere die Erkenntnis 13.1.4.8, daß $f_*\mathcal{M}$ auch selbst wieder eine σ-Algebra ist. Aus $\mathcal{E} \subset f_*\mathcal{M}$ folgt also $\sigma(\mathcal{E}) \subset f_*\mathcal{M}$ und damit $\mathcal{N} \subset f_*\mathcal{M}$. Das aber bedeutet gerade die Meßbarkeit von f. □

13.1.4.11. Weil die Beweise vollständig analog sind und die Terminologie sich als nützlich erweisen wird, formulieren wir auch gleich noch die Analoga dieser Aussagen für topologische Räume.

Definition 13.1.4.12. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

1. Ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Topologie, so ist offensichtlich auch das Mengensystem $f_*\mathcal{T} := \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie, die **Finaltopologie**;

2. Ist $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine Topologie, so ist offensichtlich auch das Mengensystem $f^*\mathcal{S} := \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{S}\}$ eine Topologie auf X, die **Initialtopologie**;

Beispiel 13.1.4.13. Ist $i : B \hookrightarrow Y$ die Einbettung einer Teilmenge in einen topologischen Raum, so ist die Initialtopologie unsere induzierte Topologie aus **??**.

Lemma 13.1.4.14. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ zwei topologische Räume und sei die Topologie $\mathcal{S}$ erzeugt im Sinne von 13.1.1.20 von einem Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$. Genau dann ist $f : X \to Y$ stetig, wenn die Urbilder aller Mengen aus $\mathcal{E}$ offen sind, wenn also in Formeln gilt*

$$V \in \mathcal{E} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$$

Beweis. Vollständig analog zum Beweis von 13.1.4.10. □

Definition 13.1.4.15. Gegeben Meßräume $(X, \mathcal{M})$ und $(Y, \mathcal{N})$ heißt die von allen Produkten $A \times B$ mit $A \in \mathcal{M}$ und $B \in \mathcal{N}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ die **Produkt-σ-Algebra** oder auch das **äußere Produkt** unserer σ-Algebren.

13.1.4.16. Die Projektionen eines Produkts von Meßräumen auf seine Faktoren sind meßbar nach 13.1.4.10. Sind X, Y, Z Meßräume und $f : Z \to X$ sowie $g : Z \to Y$ Abbildungen, so sind weiter nach 13.1.4.10 Abbildungen f und g meßbar genau dann, wenn $(f, g) : Z \to X \times Y$ meßbar ist. In der Sprache der Kategorientheorie 4.7.7.1 bedeutet das, daß wir so ein „Produkt in der Kategorie der Meßräume“ erhalten, mit Meßräumen als Objekten und meßbaren Abbildungen als Morphismen.

Definition 13.1.4.17. Gegeben topologische Räume X, Y erklärt man auf $X \times Y$ die **Produkttopologie** als die Topologie, die erzeugt wird von allen $U \times V$ mit $U \Subset X$ und $V \Subset Y$.

Vorschau 13.1.4.18. Mehr zur Produkttopologie, insbesondere im Fall unendlicher Produkte, findet man in 15.1.6.17.

13.1.4.19. Die Projektionen eines Produkts topologischer Räume auf seine Faktoren sind stetig nach 13.1.4.14. Sind X, Y, Z topologische Räume und $f : Z \to X$ sowie $g : Z \to Y$ Abbildungen, so sind weiter nach 13.1.4.14 Abbildungen f und g stetig genau dann, wenn $(f, g) : Z \to X \times Y$ stetig ist. In der Sprache der Kategorientheorie 4.7.7.1 bedeutet das, daß wir so ein „Produkt in der Kategorie der topologischen Räume“ erhalten, mit topologischen Räumen als Objekten und stetigen Abbildungen als Morphismen.

13.1.4.20. Man sieht zusätzlich leicht ein, daß gegeben zwei metrische Räume die Topologie zur Produktmetrik mit der Produkttopologie zusammenfällt.

Definition 13.1.4.21. Gegeben ein topologischer Raum X heißt ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ eine **Basis der Topologie**, wenn die offenen Mengen unseres topologischen Raums X alle beliebigen Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{E}$ sind. Ein topologischer Raum heißt **abzählbar basiert**, wenn er eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

Beispiel 13.1.4.22 (**Basis der Produkttopologie**). Gegeben X, Y topologische Räume bilden die Produkte $U \times V$ mit $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ eine Basis der Produkttopologie. In der Tat ist das System all dieser Produkte stabil unter endlichen Schnitten und nun müssen wir nur unsere explizite Beschreibung 13.1.1.20 der von einem Mengensystem erzeugten Topologie erinnern.

Beispiel 13.1.4.23 (**Basis der Produkttopologie, Variante**). Gegeben topologische Räume X, Y und $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ jeweils eine Basis der Topologie bilden die Produkte $U \times V$ mit $U \in \mathcal{E}$ und $V \in \mathcal{F}$ eine Basis der Produkttopologie. In der Tat folgt das sofort aus dem vorhergehenden Beispiel.

Beispiel 13.1.4.24 (**Beispiele zur Eigenschaft „abzählbar basiert“**). Ein überabzählbarer diskreter Raum ist nicht abzählbar basiert. Der $\mathbb{R}^n$ ist abzählbar basiert, wie man leicht einsieht und auch aus der anschließenden Bemerkung folgern kann. Jede Teilmenge eines abzählbar basierten Raums ist abzählbar basiert in Bezug auf ihre Spurtopologie.

Lemma 13.1.4.25 (**Abzählbar basierte metrische Räume**). *Ein metrischer Raum ist genau dann abzählbar basiert, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.*

Beweis. Wählen wir aus jeder Menge einer Basis der Topologie einen Punkt aus, so erhalten wir sicher eine dichte Teilmenge. Ist umgekehrt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in einem metrischen Raum, so bilden die offenen Bälle $\mathrm{B}(x_n; 1/m)$ eine abzählbare Basis der Topologie. □

13.1.4.26 (**Diskussion der Terminologie**). Man nennt metrische Räume, die eine abzählbare dichte Teilmenge besitzen, auch **separabel**. Statt „abzählbar basiert" sagt man in der Literatur meist, der Raum „besitze eine abzählbare Basis" oder er „gehorche dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom". Weiter nennen viele Autoren auch einen allgemeinen topologischen Raum „separabel", wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Das gefällt mir nicht, da dies Konzept meines Erachtens in dieser Allgemeinheit nicht relevant genug ist, um eine eigene Bezeichnung zu verdienen. Im Buch von Halmos zur Maßtheorie wird der Begriff „separabel" für allgemeine topologische Räume als Synonym für unser „abzählbar basiert" verwendet, aber damit steht er alleine da.

13.1.4.27. Besitzt ein topologischer Raum eine abzählbare Basis der Topologie, so erzeugen die offenen Mengen aus dieser Basis die Borel'sche σ-Algebra.

Proposition 13.1.4.28. *Gegeben abzählbar basierte topologische Räume X, Y ist die Borel'sche σ-Algebra ihres Produkts die Produkt-σ-Algebra der Borel'schen σ-Algebren der Faktoren, in Formeln*

$$\mathrm{Borel}(X) \boxtimes \mathrm{Borel}(Y) = \mathrm{Borel}(X \times Y)$$

Beweis. Die Projektionen auf die Faktoren sind stetig, also sind die Urbilder von Borelmengen wieder Borelmengen. Gegeben $A \in \mathrm{Borel}(X)$ und $B \in \mathrm{Borel}(Y)$ folgt so $A \times Y, X \times B \in \mathrm{Borel}(X \times Y)$. Dann gilt aber auch für den Schnitt $A \times B \in \mathrm{Borel}(X \times Y)$ und es folgt

$$\mathrm{Borel}(X) \boxtimes \mathrm{Borel}(Y) \subset \mathrm{Borel}(X \times Y)$$

sogar für beliebige topologische Räume X, Y. Um die Gegenrichtung zu zeigen, wählen wir zu X und Y jeweils eine abzählbare Basis $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ der Topologie. Nach 13.1.4.23 bilden dann die Produkte $U \times V$ mit $U \in \mathcal{E}$ und $V \in \mathcal{F}$ eine Basis der Produkttopologie. Nach 13.1.4.27 erzeugen aber diese Produkte bereits die Borel'sche σ-Algebra von $X \times Y$ und so folgt die umgekehrte Inklusion $\mathrm{Borel}(X) \boxtimes \mathrm{Borel}(Y) \supset \mathrm{Borel}(X \times Y)$. □

Korollar 13.1.4.29. *Die Summe und das Produkt reellwertiger meßbarer Funktionen sind wieder meßbar.*

Beweis. Sei X ein Meßraum und seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ meßbare Funktionen. Nach 13.1.4.19 ist dann $(f, g) : X \to \mathbb{R}^2$ meßbar in Bezug auf die Produkt-σ-Algebra

$\mathrm{Borel}(\mathbb{R}) \boxtimes \mathrm{Borel}(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^2$. Andererseits sind Addition und ebenso die Multiplikation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und folglich meßbar für die σ-Algebra $\mathrm{Borel}(\mathbb{R}^2)$. Da $\mathbb{R}$ abzählbar basiert ist, stimmen diese σ-Algebren nach 13.1.4.28 überein. Folglich sind $f + g$ und fg als Verknüpfungen meßbarer Abbildungen auch wieder meßbar. □

Satz 13.1.4.30 (Meßbarkeit von Grenzwerten von Funktionenfolgen). *Sei ein Meßraum $(X, \mathcal{M})$ gegeben.*

1. *Eine Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann meßbar, wenn für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \mid f(x) > a\} = f^{-1}(a, \infty]$ meßbar ist in X;*

2. *Für jede Folge meßbarer Funktionen $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$ sind auch ihr Supremum und ihr Infimum $s, i : X \to \bar{\mathbb{R}}$, $s(x) = \sup_n f_n(x)$ beziehungsweise $i(x) = \inf_n f_n(x)$ meßbar;*

3. *Konvergiert eine Folge meßbarer Funktionen $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$ punktweise gegen $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$, so ist auch f meßbar.*

Beweis. 1. Die Intervalle der Form $(a, \infty]$ erzeugen die σ-Algebra der Borel-Mengen in $\bar{\mathbb{R}}$ und wir können 13.1.4.10 anwenden.

2. Es gilt $s^{-1}(a, \infty] = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}(a, \infty]$ und $i^{-1}[-\infty, a) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}[-\infty, a)$ und wir können wieder 13.1.4.10 anwenden.

3. Nach 2 sind auch die Funktionen $s_N(x) = \sup_{n \geq N} f_n(x)$ meßbar, und dann auch die Funktion $g : X \to \bar{\mathbb{R}}$, $g(x) = \inf_N s_N(x)$. Diese Funktion bezeichnet man auch mit $g = \limsup f_n$ und wir habn gezeigt, daß sie meßbar ist für eine beliebige Folge meßbarer Funktionen. Falls die f_n nun sogar punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergieren, so gilt $f = \limsup f_n$ und mithin ist dann auch f meßbar. □

Lemma* 13.1.4.31 (Meßbarkeit punktweiser Grenzwerte, Variante). *Ist X ein Meßraum und Y ein metrischer Raum und konvergiert eine Folge meßbarer Funktionen $f_n : X \to Y$ punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : X \to Y$, so ist auch die Grenzfunktion f meßbar.*

13.1.4.32. Wir können den dritten Teil von Satz 13.1.4.30 alternativ als Spezialfall dieses Lemmas erhalten, wenn wir etwa beachten, daß unsere Topologie auf $\bar{\mathbb{R}}$ auch als eine metrische Topologie erhalten werden kann. Das Lemma gilt im übrigen mit demselben Beweis für einen beliebigen Hausdorffraum mit der Eigenschaft, daß jede seiner abgeschlossenen Mengen als der Schnitt einer abzählbaren Familie offener Mengen geschrieben werden kann.

Beweis. Nach 13.1.4.10 reicht es, für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \not\subset Y$ zu zeigen, daß ihr Urbild $f^{-1}(A)$ unter f meßbar ist. Nun gibt es jedoch eine absteigende Folge offener Mengen $U_0 \supset U_1 \supset \ldots$ mit Schnitt A. Dann ist $f(x) \in A$ gleichbedeutend dazu, daß es für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $N = N(x,i)$ gibt mit $f_n(x) \in U_i$ für $n \geq N(x,i)$. Damit können wir $f^{-1}(A)$ wie folgt beschreiben: Wir bilden zunächst für jedes i die Menge

$$V_i := \{x \in X \mid \exists N \text{ mit } n \geq N \Rightarrow f_n(x) \in U_i\} = \bigcup_{N \geq 0} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(U_i)$$

und erhalten $f^{-1}(A) = \bigcap_{i \geq 0} V_i$. Diese Darstellung zeigt, daß mit den $f_n^{-1}(U_i)$ auch $f^{-1}(A)$ meßbar sein muß. □

Ergänzung 13.1.4.33. Eine Funktion auf einem Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$, die meßbar ist auf dem in Bezug auf das Maß μ vervollständigten Maßraum $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$, nennen wir **$\mu$-meßbar**. Insbesondere heißt eine Abbildung $\mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ **Lebesguemeßbar**, wenn sie **λ-meßbar** ist für λ das Lebesguemaß. Wir werden nach Möglichkeit versuchen, ohne diese Begrifflichkeit auszukommen. Die Beziehung dieses Begriffs zur Meßbarkeit in Bezug auf $\mathcal{M}$ klärt 13.1.5.17.

13.1.4.34. Geht man von diskreten Mengen zu allgemeineren „Räumen“ über, so gibt es zwei besonders natürliche Verallgemeinerungen für das Konzept einer Funktion: Funktionen und Maße. Gegeben eine Abbildung $X \to Y$ können Funktionen auf Y zu Funktionen auf X zurückgezogen werden, Maße auf X jedoch liefern in der Gegenrichtung Bildmaße auf Y. Diese zugegebenermaßen vagen Andeutungen werden im folgenden in speziellen Situationen ausgeführt.

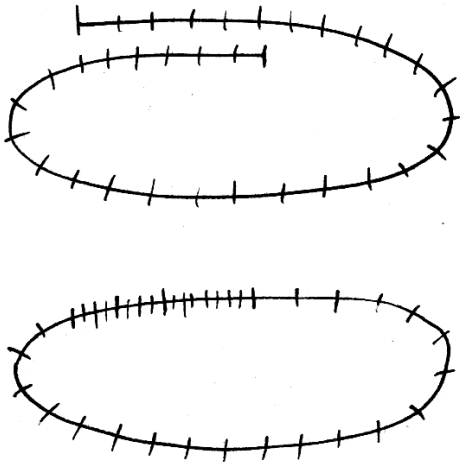
Definition 13.1.4.35. Gegeben eine meßbare Abbildung $\phi : X \to Y$ von Meßräumen und ein Maß μ auf X erklärt man das **Bildmaß** $\phi_*\mu$ auf Y dadurch, daß man für jede meßbare Menge $A \subset Y$ setzt

$$(\phi_*\mu)(A) := \mu(\phi^{-1}A)$$

13.1.4.36. Offensichtlich liefert diese Vorschrift in der Tat ein Maß auf Y. Zusätzlich gilt für jede weitere meßbare Abbildung $\psi : Y \to Z$ von Meßräumen die Formel $\psi_*(\phi_*\mu) = (\psi \circ \phi)_*\mu$ und für die Identität auf X die Formel $\mathrm{id}_*\,\mu = \mu$.

Beispiel 13.1.4.37 (**Diracmaß als Bildmaß**). Das Bildmaß des Diracmaßes δ auf dem **einpunktigen Meßraum** $\mathrm{meß}$ unter einer meßbaren Abbildung in einen Meßraum X ist das Diracmaß am Bildpunkt, in Formeln gilt also für jeden Punkt $x \in X$ und $\mathrm{em}_x : \mathrm{meß} \to X$ die Abbildung mit Bild $\{x\}$ die Identität

$$\delta_x = \mathrm{em}_{x*}\,\delta$$



Versuch der graphischen Darstellung eines Bildmaßes. Das Maß einer Teilmenge ist hier so in etwa zu verstehen als die Zahl der Strichle in besagter Teilmenge.

13.1.4.38. Gegeben ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt das Bildmaß des Wahrscheinlichkeitsmaßes unter einer Zufallsvariable $X : \Omega \to Y$ die **Verteilung der Zufallsvariable** und wird $P^X := X_* P$ notiert. Im Fall einer reellwertigen Zufallsvariable $Y = \mathbb{R}$ ist also P^X ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$. Seine Verteilungsfunktion im Sinne von 13.1.2.31 heißt die **Verteilungsfunktion** oder präziser die **kumulative Verteilungsfunktion** unserer Zufallsvariablen.

Beispiel 13.1.4.39. Die **geometrische Verteilung** mit Parameter $p \in [0, 1)$ auf $\mathbb{N}_{\geq 1}$ ist das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu = \mu_p$ auf $\mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $\mu(i) = p^{i-1}(1-p)$. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem gerechten Würfel beim i-ten Wurf zum ersten Mal eine Sechs zu würfeln, ist zum Beispiel $\mu_{5/6}(i) = (5/6)^{i-1}(1/6)$.

13.1.4.40. Manchmal scheint mir die äquivalente Terminologie der **Verwandtschaft** transparenter, die ich nun einführe. Gegeben eine meßbare Abbildung $\phi : X \to Y$ von Meßräumen und ein Maß μ auf X und ein Maß ν auf Y heißen die beiden Maße **ϕ-verwandt** und wir schreiben

$$\phi : \mu \rightsquigarrow \nu$$

wenn gilt $\nu(A) = \mu(\phi^{-1}A)$ für jede meßbare Teilmenge $A \subset Y$. Gleichbedeutend ist per definitionem $\nu = \phi_* \mu$. Jedes Maß hat also unter jeder meßbaren Abbildung genau einen „Vorwärtsverwandten“. Das mag den konzeptionellen Unterschied zwischen Maßen und Funktionen deutlich machen, die im Gegensatz dazu stets genau einen „Rückwärtsverwandten“ haben. Die Verwandtschaft von Maßen erfüllt offensichtlich die für Verwandtschaften gewohnten Regeln, genauer gilt $\mathrm{id} : \mu \rightsquigarrow \mu$ und aus $\psi : \lambda \rightsquigarrow \mu$ sowie $\phi : \mu \rightsquigarrow \nu$ folgt $(\phi \circ \psi) : \lambda \rightsquigarrow \nu$.

13.1.4.41. Unter einer **Verfeinerung** eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ verstehe ich eine meßbare Abbildung $\Omega' \to \Omega$ von einem weiteren Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ nach Ω derart, daß P das Bildmaß von P' ist. Ganz allgemein interessieren in der Wahrscheinlichkeitstheorie nur diejenigen Konstruktionen und Definitionen, die veträglich sind mit dem Zurückholen unter einer beliebigen Verfeinerung. Im Fall eines Würfels könnte die Menge Ω etwa aus den sechs möglichen Ausgängen eines Würfelexperiments bestehen, sie könnte jedoch auch viel größer sein und etwa aus allen möglichen Ausgängen eines einmaligen Würfelns mit hundert Würfeln bestehen, von denen unser Würfel nur einer ist, oder aus allen Paaren in $\{1, \ldots, 6\} \times \{\text{an}, \text{aus}\}$ bestehen, bei denen der zweite Eintrag erinnert, ob das Licht in dem Raum, in dem gewürfelt wurde, nun an oder aus war. Man beachte, daß bei Verfeinerungen neue Ereignisse hinzukommen können und Elementarereignisse im allgemeinen keine Elementarereignisse bleiben werden. Insofern ist der Begriff eines Elementarereignisses der Wahrscheinlichkeitstheorie fremd.

Übungen

Übung 13.1.4.42. Man zeige, daß jede linksseitig stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar ist. Hinweis: Man schreibe f als punktweisen Grenzwert stückweise konstanter Funktionen. Man zeige, daß jede in jeder Variablen monoton wachsende und linksseitig stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbar ist.

Übung 13.1.4.43. Alle monotonen Abbildungen $\mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ sind meßbar.

Ergänzende Übung 13.1.4.44. Jeder kompakte metrische Raum ist abzählbar basiert.

Übung 13.1.4.45. Jede offene Überdeckung eines abzählbar basierten Raums besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung. In einem abzählbar basierten Raum ist jede diskrete Teilmenge abzählbar.

Übung 13.1.4.46. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt **final**, wenn Y die Finaltopologie in Bezug auf f trägt. Man zeige: Gegeben $f : X \to Y$ final und ein weiterer topologischer Raum Z ist eine Abbildung $g : Y \to Z$ genau dann stetig, wenn $g \circ f$ stetig ist.

Übung 13.1.4.47. Das Produkt von zwei kompakten topologischen Räumen ist wieder kompakt. Hinweis: Es reicht zu zeigen, daß jede Übderdeckung durch „offene Quader“ eine endliche Teilüberdeckung hat.

13.1.5 Integral von nichtnegativen Funktionen

Definition 13.1.5.1. Eine Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt, nenne ich eine **Stufenfunktion**.

13.1.5.2. Ist X eine Menge und $A \subset X$ eine Teilmenge, so ist die **charakteristische Funktion** $\chi_A = [A] : X \to \{0, 1\}$ **von** A eine Stufenfunktion. Ich erinnere daran, daß sie definiert wird durch die Vorschrift

$$[A](x) := \begin{cases} 1 & x \in A; \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Sie heißt auch die **Indikatorfunktion von** A und wird oft alternativ 1_A notiert. Ich ziehe jedoch in meinem Kampf gegen den Index die Notation $[A]$ vor.

Beispiele 13.1.5.3. Ist $(X, \mathcal{M})$ ein Meßraum, so ist jede reellwertige meßbare Stufenfunktion $s : X \to \mathbb{R}$ von der Form

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i [A_i]$$

für eine Zerlegung $X = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ von X in endlich viele paarweise disjunkte meßbare Teilmengen und geeignete $c_i \in \mathbb{R}$. Offensichtlich bilden dann auch die

reellwertigen meßbaren Stufenfunktionen einen Untervektorraum im Raum aller reellwertigen Funktionen auf X.

Definition 13.1.5.4 (**Integral nichtnegativer meßbarer Stufenfunktionen**). Gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und eine meßbare reellwertige nichtnegative Stufenfunktion $s : X \to [0, \infty)$ erklärt man das **Integral** $\int s = \int_X s = \int_X s\mu \in [0, \infty]$ **von** s **über** X durch die Formel

$$\int_X s\mu := \sum_{c \in s(X) \setminus 0} c \cdot \mu(s^{-1}(c))$$

13.1.5.5. Ich habe in dieser Formel den Summanden für $c = 0$ weggelassen, um den Ausdruck $0 \cdot \infty$ zu vermeiden. Im folgenden erweist es sich jedoch als bequemer, diesen Summanden zuzulassen und mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0$ zu arbeiten. Weiter habe ich nur $c \in s(X)$ statt $c \in \mathbb{R}$ geschrieben, um eine endliche Summe zu erhalten. Da aber die Summanden für $c \notin s(X)$ eh Null sind, hätten wir, ohne etwas am Resultat zu ändern, mit dem Begriff der Summierbarkeit beliebiger Familien 10.4.1.23 auch über alle $c \in \mathbb{R}$ summieren können.

13.1.5.6 (**Eigenschaften des Integrals reeller meßbarer Stufenfunktionen**). Natürlich gilt $\int \alpha s = \alpha \int s \ \forall \alpha \in (0, \infty)$. Ist $t : X \to [0, \infty)$ eine zweite meßbare Stufenfunktion, so gilt weiter

$$\int s + t = \int s \ + \int t$$

und mithin auch $s \leq t \ \Rightarrow \ \int s \leq \int t$. In der Tat, schreiben wir $X_{a,b} := s^{-1}(a) \cap t^{-1}(b)$, so ergibt sich mit der Additivität des Maßes unmittelbar

$$\begin{array}{rll} \int s + t & = \sum_c c \cdot \mu\left(\bigcup_{c=a+b} X_{a,b}\right) & = \sum_{a,b} (a+b) \cdot \mu(X_{a,b}) \\ \int s & = \sum_a a \cdot \mu\left(\bigcup_b X_{a,b}\right) & = \sum_{a,b} a \cdot \mu(X_{a,b}) \\ \int t & = \sum_b b \cdot \mu\left(\bigcup_a X_{a,b}\right) & = \sum_{a,b} b \cdot \mu(X_{a,b}) \end{array}$$

Für $s := \sum_{i=1}^n c_i [A_i]$ mit $c_i \in [0, \infty)$ wird also das Integral gegeben durch die Formel $\int s = \sum_i c_i \mu(A_i)$.

Definition 13.1.5.7 (**Integral nichtnegativer Funktionen**). Gegeben ein Maßraum $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ und eine meßbare Abbildung $f : X \to [0, \infty]$ definieren wir ein Element $\int f\mu$ aus $[0, \infty]$, das **Integral von** f **über** X, als das Supremum der Integrale aller reellwertigen nichtnegativen meßbaren Stufenfunktionen $s : X \to [0, \infty)$ mit $s(x) \leq f(x)$ für alle $x \in X$, in Formeln

$$\int f\mu := \sup_{s \leq f} \int_X s\mu$$

13.1.5.8. Ist f bereits selbst eine reelle Stufenfunktion, so wird das fragliche Supremum bei $s = f$ angenommen, da ja für Stufenfunktionen gilt $s \leq f \Rightarrow \int s \leq \int f$, und wir erhalten unser Integral von Stufenfunktionen 13.1.5.4 für $s = f$.

13.1.5.9. Wir verwenden für dies Integral auch die Notationen

$$\int f = \int_X f\mu = \int_X f(x)\mu\langle x\rangle$$

Die eckigen Klammern sollen andeuten, daß mit $\mu\langle x\rangle$ nicht der Wert einer etwaigen Funktion μ an einer Stelle x gemeint ist. Vielmehr wird dieser Ausdruck erst in Verbindung mit dem Integralzeichen sinnvoll.

13.1.5.10 (**Diskussion der Notation**). In der Literatur findet man meist die Notation $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$. Diese leider allgemein übliche Notation scheint mir jedoch im Lichte der ursprünglichen Bedeutung des Symbols d unter dem Integralzeichen völlig abwegig, um nicht zu sagen irreführend: Das Differential d kann aus einer Funktion ein Maß machen, wie etwa in 13.1.2.9, aber wo bereits ein Maß steht, hat das Differential nichts mehr zu suchen. Neuerdings sieht man vielfach die Notation $\int f(x)\mu(\mathrm{d}x)$, die mich aber im Fall allgemeiner Maßräume auch nicht überzeugt: Man denke nur einmal an das Zählmaß auf einem diskreten Raum.

13.1.5.11 (**Bedeutung der Meßbarkeit**). Unsere Definition des Integrals 13.1.5.7 ist sogar für beliebige nicht notwendig meßbare Funktionen $f : X \to [0, \infty]$ sinnvoll. Das Supremum heißt dann das **Unterintegral von** f. Der Beweis des folgenden Satzes über monotone Konvergenz zeigt, welche Rolle die Meßbarkeit von f spielt. Der Beweis des gleich anschließenden Satzes 13.1.5.14 wird weiter zeigen, wie die Meßbarkeit von f und g in den Beweis der Additivität $\int f + g = \int f + \int g$ eingeht, die im allgemeinen nicht mehr gilt.

Satz 13.1.5.12 (über monotone Konvergenz). *Gegeben $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und (f_n) eine monoton wachsende Folge $0 \leq f_0 \leq f_1 \leq \ldots$ meßbarer Funktionen $f_n : X \to [0, \infty]$ ist auch der punktweise Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ der f_n eine meßbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ und es gilt*

$$\int_X f\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\mu$$

13.1.5.13. Das Bild zu 10.6.1.14 der immer spitzeren Dächer direkt rechts vom Ursprung zeigt eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergieren, ohne daß ihre Integrale gegen Null streben. Die Annahme der Monotonie unserer Folge ist also wesentlich.

Beweis. Die Meßbarkeit von f folgt aus 13.1.4.30. Die Abschätzung $\geq$ ist evident. Es gilt, $\leq$ zu zeigen. Dafür reicht es, wenn wir für jede meßbare Stufenfunk-

tion $s : X \to [0, \infty)$ mit $s \leq f$ und jedes $\eta \in (0, 1)$ die Abschätzung

$$\eta \int s \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

zeigen. Nun haben wir ja $s = \sum_{i=0}^{r} c_i[A_i]$ für geeignete paarweise disjunkte meßbare Mengen A_i und $c_i \in (0, \infty)$. Setzen wir $A_i^n = \{x \in A_i \mid f_n(x) \geq \eta c_i\}$, so sind auch die A_i^n meßbar und es gilt $A_i^0 \subset A_i^1 \subset A_i^2 \subset \ldots$ sowie $\bigcup A_i^n = A_i$. Nach 13.1.1.37 gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_i^n) = \mu(A_i)$$

Betrachten wir die Stufenfunktionen $s_n = \sum_i c_i[A_i^n]$, so gilt mithin

$$\lim_{n\to\infty} \int \eta s_n = \int \eta s$$

Andererseits haben wir aber nach Konstruktion $\eta s_n \leq f_n$ und folglich $\int \eta s_n \leq \int f_n$. Bilden wir nun auf beiden Seiten den Grenzwert für $n \to \infty$, so ergibt sich zusammenfassend $\int \eta s \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n$ wie gewünscht. □

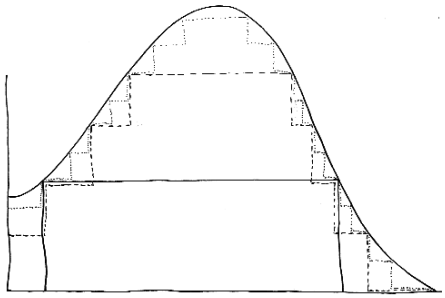
Satz 13.1.5.14 (Eigenschaften des Integrals nichtnegativer Funktionen). *Gegeben nichtnegative meßbare Funktionen f, g mit Werten in $[0, \infty]$ auf einem Maßraum gilt*

1. $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$;
2. $\int cf = c \int f \quad \forall c \in (0, \infty)$;
3. $\int f + g = \int f + \int g$.

Beweis. Nur der dritte Punkt braucht einen Beweis. Sind f und g reelle Stufenfunktionen, so haben wir die Behauptung schon in 13.1.5.6 gezeigt. Um den allgemeinen Fall daraus abzuleiten, brauchen wir ein Lemma.

Lemma 13.1.5.15 (Monotone Approximation durch Stufenfunktionen). *Gegeben $(X, \mathcal{M})$ ein Meßraum und $f : X \to [0, \infty]$ eine meßbare Funktion existiert eine monotone Folge $0 \leq \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \ldots$ von meßbaren Stufenfunktionen mit Werten in $[0, \infty)$, die punktweise gegen f konvergiert.*

Beweis. Wir konstruieren φ_n zum Beispiel wie folgt: Sei $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = n$ die äquidistante Einteilung von $[0, n]$ in Stücke der Länge 2^{-n}, also $r = n2^n$ und $a_i = i2^{-n}$. Wir setzen $A_i = f^{-1}[a_i, a_{i+1})$ für $0 \leq i < r$ sowie $A_r = f^{-1}[n, \infty]$ und bilden $\varphi_n = \sum_{i=0}^{r} a_i[A_i]$. Es ist offensichtlich, daß wir so eine monotone Folge von Stufenfunktionen erhalten, die punktweise gegen f konvergiert. □



Die ersten Glieder unserer monotonen Folge von nichtnegativen Stufenfunktionen, die punktweise gegen eine gegebene nichtnegative Funktion konvergieren.

Jetzt schreiben wir f und g als punktweise Grenzwerte von monotonen Folgen meßbarer Stufenfunktionen $0 \leq \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \ldots$ und $0 \leq \psi_0 \leq \psi_1 \leq \ldots$ nach 13.1.5.15 und folgern mit dem Satz 13.1.5.12 über monotone Konvergenz

$$\int f + g = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n + \psi_n = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n = \int f + \int g \qquad \square$$

13.1.5.16 (**Integrale über Restriktionen von Maßen**). Ist $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $A \subset X$ eine meßbare Teilmenge und $(A, \mathcal{M}|_A, \mu|_A)$ der induzierte Maßraum nach 13.1.1.41, so notieren wir Integrale in Bezug auf diesen Maßraum gerne $\int_A f\mu$ oder auch $\int_A f$. Ist $f : X \to [0, \infty]$ meßbar, so haben wir offensichtlich

$$\int_A f = \int_X [A]f$$

Hier ist links das Integral der Restriktion von f auf A gemeint und rechts das Integral des Produkts von f mit der charakteristischen Funktion von A, gebildet mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0$.

Ergänzung 13.1.5.17. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Für jede μ-meßbare Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ im Sinne von 13.1.4.33 gibt es eine meßbare Funktion $\tilde{f} : X \to \bar{\mathbb{R}}$, die außerhalb einer μ-Nullmenge mit f übereinstimmt. In der Tat können wir f nach 13.1.5.15 schreiben als punktweisen Grenzwert einer Folge von μ-meßbaren Stufenfunktionen $f(x) = \lim s_n(x)$. Wir können nun nach 13.1.3.2 die Grundflächen aller Stufen von s_n zu meßbaren Mengen verkleinern, indem wir jeweils eine μ-Nullmenge wegnehmen. Die Vereinigung dieser Nullmengen ist eine meßbare Nullmenge A_n mit $[A_n]s_n$ meßbar. Die Vereinigung aller A_n ist dann eine meßbare Menge A vom Maß Null mit $[A]s_n$ meßbar für alle n. Dann ist aber $[A]f$ der punktweise Grenzwert der $[A]s_n$ und ist auch meßbar.

Übungen

Übung 13.1.5.18 (**Verwandtschaftsverträglichkeit des Integrals**). Sei $\phi : X \to Y$ eine meßbare Abbildung von Meßräumen. Seien μ und ν unter ϕ verwandte Maße auf X beziehungsweise Y, in Formeln $\phi : \mu \rightsquigarrow \nu$, und seien f und g unter ϕ verwandte meßbare Funktionen nach $[0, \infty]$, in Formeln $\phi : f \rightsquigarrow g$. So gilt

$$\int_X f\mu = \int_Y g\nu$$

Ist gleichbedeutend in unserer alternativen Terminologie μ ein Maß auf X und $g : Y \to [0, \infty]$ meßbar, so gilt $\int_X (g \circ \phi)\mu = \int_Y g(\phi_*\mu)$.

Übung 13.1.5.19. Sei $(X, \mathcal{M})$ ein Meßraum. Man zeige: Die Summe zweier Maße μ, ν auf $\mathcal{M}$ ist wieder ein Maß $\mu + \nu$ auf $\mathcal{M}$ und für jede meßbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ gilt $\int f(\mu + \nu) = \int f\mu + \int f\nu$.

Übung 13.1.5.20. Sei (N, μ) ein Maßraum mit dem Nullmaß $\mu(N) = 0$. So verschwindet für jede meßbare Funktion $f : N \to [0, \infty]$ das Integral, in Formeln

$$\int_N f\mu = 0$$

Übung 13.1.5.21. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $X = \bigsqcup_{n \in N} X_n$ eine Zerlegung in abzählbar viele paarweise disjunkte meßbare Teilmengen. So gilt für jede meßbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ die Formel

$$\int_X f = \sum_{n \in N} \int_{X_n} f$$

Ergänzende Übung 13.1.5.22. Gegeben eine meßbare nichtnegative Funktion g auf einem Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mit $\int_X g\mu < \infty$ gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\alpha = \alpha_\varepsilon > 0$ derart, daß für alle $A \in \mathcal{M}$ gilt

$$\mu(A) < \alpha \quad \Rightarrow \quad \int_A g\mu < \varepsilon$$

Hinweis: Es gibt sicher eine meßbare Stufenfunktion $h : X \to [0, \infty)$ mit $h \leq g$ und $\int g\mu \leq \int h\mu \; + \varepsilon/2$.

Ergänzende Übung 13.1.5.23. Gegeben eine meßbare nichtnegative Funktion g auf einem Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mit $\int_X g\mu < \infty$ gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\beta = \beta_\varepsilon > 0$ mit

$$\int \inf(g, \beta)\mu < \varepsilon$$

Hinweis: Es gibt sicher eine meßbare Stufenfunktion $h : X \to [0, \infty)$ mit $h \leq g$ und $\int g\mu \leq \int h\mu \; + \varepsilon/2$.

Übung 13.1.5.24. Man zeige: Gegeben ein Maßraum X und eine Folge (f_n) nichtnegativer meßbarer Funktionen $f_n : X \to [0, \infty]$ ist auch ihre Summe $\sum f_n$ meßbar und es gilt

$$\int \sum f_n = \sum \int f_n$$

Diese Aussage wird sich als ein Spezialfall des positiven Fubini 13.1.7.6 erweisen.

Übung 13.1.5.25 (**Produkte von Maßen mit Funktionen**). Man zeige: Ist (X, μ) ein Maßraum und $g : X \to [0, \infty]$ meßbar, so erhalten wir ein weiteres Maß $g\mu$ auf X durch die Vorschrift $(g\mu)(A) := \int_A g\mu$. Für jede weitere meßbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ gilt mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0 = \infty \cdot 0$ die Identität von Maßen $f(g\mu) = (fg)\mu$.

Übung 13.1.5.26 (**Bildmaße zu Produkten von Maßen mit Funktionen**). Sei $\phi : X \to Y$ ein Isomorphismus von Meßräumen. Seien $f : X \to [0, \infty]$ und $g : Y \to [0, \infty]$ die dazu verwandte meßbare Funktion $\phi : f \rightsquigarrow g$. Seien μ ein Maß auf X und ν das dazu verwandte Maß auf Y, also $\phi : \mu \rightsquigarrow \nu$. So sind auch die Maße $f\mu$ und $g\nu$ verwandt, in Formeln

$$\phi : f\mu \rightsquigarrow g\nu$$

Übung 13.1.5.27. Ist (X, μ) ein σ-endlicher Maßraum und sind $f, g : X \to [0, \infty]$ meßbar, so gilt die Gleichheit von Maßen $f\mu = g\mu$ genau dann, wenn f und g außerhalb einer meßbaren Menge vom Maß Null übereinstimmen. Man gebe auch ein Gegenbeispiel im Fall nicht σ-endlicher Maßräume. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall $\mu(X) < \infty$ zurück und betrachte dann zunächst die Mengen $\{x \mid n > f(x) > g(x) + 1/n\}$.

Ergänzende Übung 13.1.5.28. Nach 13.1.2.27 gibt es für jede linksseitig stetige monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau ein topologisches Maß $\mathrm{d}f$ auf $\mathbb{R}$ mit $(\mathrm{d}f)([a, b)) = f(b) - f(a)$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Man zeige: Ist unser f zusätzlich stetig differenzierbar, so stimmt $\mathrm{d}f$ überein mit dem Vielfachen $f'(x)\,\mathrm{d}x$ des Lebesguemaßes im Sinne von 13.1.5.25.

13.1.6 Integrierbare Funktionen und ihr Integral

Definition 13.1.6.1. Gegeben ein Maßraum $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ heißt eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ **integrierbar**, wenn sie meßbar ist und wenn zusätzlich gilt $\int |f| < \infty$ im Sinne des Integrals nichtnegativer Funktionen 13.1.5.7. Wir erklären das **Integral** $\int f \in \mathbb{R}$ einer integrierbaren Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$\int f := \int f^+ - \int f^-$$

Hier bezeichnet $f^+, f^- : X \to [0, \infty)$ den **positiven** beziehungsweise **negativen Anteil** von f, der gegeben wird durch $f^\pm(x) = \sup(\pm f(x), 0)$. Die Menge aller integrierbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ notieren wir je nach der gewünschten Präzision $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X; \mu) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X; \mathcal{M}, \mu)$.

13.1.6.2 (**Beziehung unserer beiden Varianten des Integralbegriffs**). Wir haben nun genau genommen für jeden Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ zwei Integrale definiert: Ein Integral für meßbare nichtnegative Funktionen mit Werten in $[0, \infty]$, das Werte in $[0, \infty]$ annimmt, und ein Integral für integrierbare Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$, das Werte in $\mathbb{R}$ annimmt. Offensichtlich stimmen im Fall einer nichtnegativen reellwertigen integrierbaren Funktion diese beiden Integrale überein, auf dem

Schnitt ihrer Definitionsbereiche liefern unsere beiden Varianten des Integralbegriffs in anderen Worten dasselbe. Es ist deshalb sinnvoll, für beide Konzepte dasselbe Symbol zu verwenden.

Ergänzung 13.1.6.3 (**Erweiterungen des Integralbegriffs**). Man kann in einer gemeinsamen Verallgemeinerung unserer beiden Varianten des Integralbegriffs auch beliebigen meßbaren Funktionen mit Werten in $(-\infty, \infty]$ und integrierbarem Negativteil f_- noch sinnvoll ein Integral in $(-\infty, \infty]$ zuordnen. In dieser Allgemeinheit werde ich jedoch das Integral nie verwenden.

Ergänzung 13.1.6.4 (**Erweiterungen des Begriffs der Integrierbarkeit**). Der Begriff der Integrierbarkeit wird in der Literatur oft weiter gefaßt als in diesem Text, um alle Funktionen einzuschließen, denen man „noch irgendwie in sinnvoller Weise ein Integral zuordnen kann“. Eine so abgeänderte Terminologie entspricht möglicherweise besser unserem Sprachempfinden, sie schien mir jedoch für die präzise Formulierung der Theorie ungeschickt. Hier will ich die verschiedenen in der Literatur gängigen Begriffsvarianten Revue passieren lassen. Zunächst mag man auch solche Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ noch „integrierbar“ nennen wollen, die im Sinne der vorhergehenden Definition integrierbar sind in Bezug auf den vervollständigten Maßraum. In einer anderen Richtung mag man auch solche Funktionen $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ noch „integrierbar“ nennen wollen, für die die Stellen, an denen sie einen der Werte $\pm\infty$ annimmt, eine Nullmenge bilden, auf deren Komplement sie in dann unserem Sinne integrierbar sind. Weiter kann man diese beiden Erweiterungen auch noch kombinieren. Und schließlich versteht man oft unter einer „integrierbaren Funktion“ gewisse Objekte, die im Sinne der Mengenlehre streng genommen gar keine Funktionen mehr sind und die wir in 13.2.2.20 als „integrierbare fast überall definierte Funktionen“ einführen werden. Diese Objekte hängen dann nicht mehr davon ab, mit Hilfe welcher der obigen Begriffsvarianten wir sie konstruieren.

Ergänzung 13.1.6.5. Gegeben eine reellwertige integrierbare Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt ihr Integral der **Erwartungswert** der Zufallsvariable und wird $\mathrm{E}(X) := \int_\Omega X(\omega) P\langle\omega\rangle$ notiert.

Beispiel 13.1.6.6 (**Integrierbarkeit und absolute Konvergenz**). Ist I eine abzählbare Menge, so ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar für das Zählmaß genau dann, wenn für eine oder gleichbedeutend jede „Abzählung“ von I die Reihe $\sum_{i\in I} f(i)$ absolut konvergiert. Das Integral unserer Funktion ist in diesem Fall genau der Grenzwert der Reihe. Ist I eine beliebige Menge, so ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar für das Zählmaß genau dann, wenn die Familie der $f(i)$ summierbar ist im Sinne von 10.4.1.23, was ja nach 10.4.1.25 auch im Wesentlichen absolute Konvergenz bedeutet.

13.1.6.7. Aus der Definition erhalten wir für f, g integrierbar sofort $|\int f| \le \int |f|$ und $f \le g \Rightarrow \int f \le \int g$.

Satz 13.1.6.8 (**Linearität des Integrals**). *Gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ist der Raum $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ aller integrierbaren Funktionen ein Untervektorraum im Raum aller Funktionen $X \to \mathbb{R}$ und das Integral ist eine lineare Abbildung*

$$\int : \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}$$

Beweis. Wir überlassen den Nachweis der ersten Aussage dem Leser und zeigen nur die Linearität des Integrals. Man kann sie direkt aus Übung 3.3.6.14 alias der anschließenden Ergänzung 13.1.6.9 folgern, und im folgenden schreiben wir nur eine Lösung dieser Übung in unserem Spezialfall aus. Zunächst zeigen wir die Additivität

$$\int f + g = \int f + \int g$$

Seien $f = f^+ - f^-,\ g = g^+ - g^-$ und $f + g = h = h^+ - h^-$ die Zerlegungen in den positiven und negativen Anteil. Wir folgern durch Einsetzen $f^+ + g^+ + h^- = f^- + g^- + h^+$ und mit 13.1.5.14 ergibt sich $\int f^+ + \int g^+ + \int h^- = \int f^- + \int g^- + \int h^+$, woraus mit der Definition dann wieder $\int f + \int g = \int f + g$ folgt. Nun zeigen wir noch die Verträglichkeit mit der Multiplikation mit Skalaren

$$\int cf = c \int f$$

Für $c = -1$ folgt das aus den Definitionen, für $c \geq 0$ folgt es aus 13.1.5.14, und der allgemeine Fall ergibt sich aus diesen beiden Spezialfällen. □

13.1.6.9 (**Integral als lineare Fortsetzung**). Gegeben Vektorräume V, W über einem angeordneten Körper und ein erzeugender Konvexkegel $C \subset V$ erinnere ich daran, daß man nach Übung 3.3.6.14 jede positivlineare Abbildung $\varphi : C \to W$ eindeutig fortsetzen kann zu einer linearen Abbildung $V \to W$. Unser Raum $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ ist quasi per definitionem der vom Konvexkegel der nichtnegativen integrierbaren Funktionen erzeugte Untervektorraum im Raum aller Funktionen, unser Lebesgueintegral ist genau diese Fortsetzung und unsere Argumentation liefert allgemeiner auch eine Lösung der erwähnten Übungsaufgabe aus der linearen Algebra. Allgemeiner zeigt man induktiv, daß gegeben Vektorräume $V_1, \ldots, V_r, W$ über einem angeordneten Körper und erzeugende Konvexkegel $C_i \subset V_i$ auch jede in jeder Variablen positivlineare Abbildung

$$\varphi : C_1 \times \ldots \times C_r \to W$$

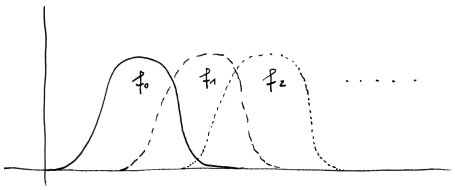
auf genau eine Weise zu einer multilinearen Abbildung $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_r \to W$ fortgesetzt werden kann. Auch das wird sich in der Integrationstheorie als hilfreich erweisen.

Satz 13.1.6.10 (über dominierte Konvergenz). *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine Folge meßbarer Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Gibt es eine integrierbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ mit $|f_n| \leq g$ für alle n, so sind alle f_n und auch f integrierbar und es gilt*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

13.1.6.11. Eine eher unwesentliche Verallgemeinerung erhält man, wenn man allgemeiner nur eine Domination der Konvergenz durch eine meßbare Funktion $g : X \to [0, \infty]$ mit $\int g < \infty$ voraussetzt: Aus dieser Annahme folgt nämlich, daß g außerhalb einer Nullmenge doch wieder reelle Werte annehmen muß, und so finden wir uns dann unmittelbar in der Situation des Satzes wieder.

13.1.6.12. Andere Quellen sprechen gleichbedeutend vom **Satz über majorisierte Konvergenz**.



Eine Folge integrierbarer Funktionen auf der reellen Zahlengeraden, die zwar punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, deren Integrale jedoch keine Nullfolge bilden. In diesem Fall können wir auch offensichtlich keine alle Funktionen unserer Folge dominierende integrierbare Funktion g finden.

Beweis. Aus unseren Annahmen folgt $\int |f_n| \leq \int g < \infty$, also sind die f_n integrierbar. Weiter ist f auch meßbar als punktweiser Grenzwert meßbarer Funktionen und dann ist mit demselben Argument auch f integrierbar. Um die Vertauschbarkeit des Grenzwerts mit dem Integral zu zeigen, betrachten wir nun die Funktionenfolgen

$$\begin{aligned} i_n(x) &= \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots\} \\ s_n(x) &= \sup\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots\} \end{aligned}$$

Sie bestehen aus meßbaren Funktionen, beide Folgen konvergieren punktweise gegen f, und es gilt

$$-g \leq i_0 \leq i_1 \leq \ldots \leq f \leq \ldots \leq s_1 \leq s_0 \leq g$$

Mit dem Satz über monotone Konvergenz erhalten wir also $\lim_{n\to\infty} \int g + i_n = \int g + f$ und $\lim_{n\to\infty} \int g - s_n = \int g - f$, also

$$\lim_{n\to\infty} \int i_n = \int f = \lim_{n\to\infty} \int s_n$$

Da aber nach Definition gilt $i_n \leq f_n \leq s_n$, folgt die Behauptung aus dem Quetschlemma 10.3.5.35. □

Korollar 13.1.6.13 (**Riemannintegral als Lebesgueintegral**). *Jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten reellen Intervall ist integrierbar im Sinne der vorhergehenden Definition 13.1.6.1 und ihr Riemannintegral stimmt mit ihrem Lebesgueintegral überein.*

Beweis. Jede stetige reellwertige Funktion f auf einem kompakten reellen Intervall $[a, b]$ ist meßbar und beschränkt. Aus $|f| \leq M$ folgt dann sofort $\int |f| \leq M(b-a) < \infty$ und damit die Integrierbarkeit von f. Bilden wir Stufenfunktionen f_r, indem wir $[a, b]$ äquidistant unterteilen durch Zwischenpunkte $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = b$ und f_r auf $[a_{i-1}, a_i)$ konstant den Wert $f(a_i)$ geben und bei b den Wert $f(b)$, so konvergieren die f_r wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f punktweise gegen f. Andererseits sind ihre Integrale offensichtlich genau unsere Riemannsummen $S^r(f)$ aus 10.5.2.5, in Formeln $S^r(f) = \int f_r$, und für $r \to \infty$ strebt die linke Seite nach 10.5.2.5 gegen das Riemannintegral und die Rechte nach dem Satz über dominierte Konvergenz 13.1.6.10 gegen das Lebesgueintegral von f. □

Übungen

Übung 13.1.6.14 (**Produkte von Maßen mit Funktionen, Variante**). Ist (X, μ) ein Maßraum und $g : X \to [0, \infty]$ meßbar und $f : X \to \mathbb{R}$ meßbar, so ist f integrierbar in Bezug das Maß $(g\mu)$ aus Übung 13.1.5.25 genau dann, wenn unter der Konvention $0 \cdot \infty = 0$ die Funktion fg integrierbar ist in Bezug auf μ, und unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\int (fg)\, \mu = \int f\, (g\mu)$$

Übung 13.1.6.15. Auf einem topologischen Raum mit einem Borelmaß ist jede stetige reellwertige Funktion mit kompaktem Träger integrierbar.

Übung 13.1.6.16. Man zeige, daß für jede integrierbare Funktion die Menge der Punkte, auf denen sie nicht den Wert Null annimmt, σ-endlich sein muß.

Übung 13.1.6.17 (**Vertauschen von Integration und Ableitung**). Sei (X, μ) ein Maßraum und $I \subset \mathbb{R}$ halboffen und $f : X \times I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung derart, daß $x \mapsto f(x,t)$ integrierbar ist für alle $t \in I$ und $t \mapsto f(x,t)$ differenzierbar für alle $x \in X$. Existiert eine integrierbare Abbildung $g : X \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \geq |\partial_t f(x,t)|$ für alle x und t, so ist $x \mapsto \partial_t f(x,t)$ integrierbar für alle t und es gilt

$$\partial_t \int f(x,t)\ \mu\langle x\rangle = \int \partial_t f(x,t)\ \mu\langle x\rangle$$

Hinweis: Dominierte Konvergenz 13.1.6.10 und Mittelwertsatz.

Übung 13.1.6.18 (**Integrale unter Bildmaßen**). Man folgere aus 13.1.5.18, daß das Integral auch in dieser Situation Verwandschaft respektiert. Sind genauer $\phi : X \to Y$ eine meßbare Abbildung von Meßräumen, μ ein Maß auf X und $g : Y \to \mathbb{R}$ eine meßbare Abbildung, so ist $g : Y \to \mathbb{R}$ integrierbar in Bezug auf $\phi_*\mu$ genau dann, wenn $g \circ \phi$ integrierbar ist in Bezug auf μ, und unter dieser Voraussetzung

$$\int_Y g(\phi_*\mu) = \int_X (g \circ \phi)\mu$$

Übung 13.1.6.19 (**Satz von Beppo Levi**). Sei f_n eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen. Ist die Folge ihrer Integrale beschränkt, so ist die Menge N aller $x \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$ meßbar vom Maß Null und die Funktion $f = \lim_{n\to\infty} f_n : (X \backslash N) \to \mathbb{R}$ ist integrierbar mit Integral $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

Übung 13.1.6.20. Sei $Q = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ ein nichtleerer kompakter zweidimensionaler Quader und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Träger in Q. Sei weiter μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}^2$. Für $r \geq 1$ definieren wir dann die r-te **Riemannsumme** $S^r(f;\mu)$ von f wie folgt: Wir betrachten die äquidistanten Unterteilungen

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_r = b$$

$$c = c_0 \leq c_1 \leq \ldots \leq c_r = d$$

der Kanten unseres Rechtecks, erhalten auf diese Weise r^2 klitzekleine halboffene Rechtecke $Q^{\llcorner}_{i,j} = [a_i, a_{i+1}) \times [c_j, c_{j+1})$ und setzen

$$S^r(f;\mu) = \sum_{i,j=0}^{r-1} f(a_i, c_j)\mu(Q^{\llcorner}_{i,j})$$

Man zeige, daß unter unseren Annahmen diese Riemannsummen gegen das Integral streben, in Formeln

$$\int_Q f\mu = \lim_{r\to\infty} S^r(f;\mu)$$

Übung 13.1.6.21. Ist (X, μ) ein Maßraum und $g : X \to [0, \infty]$ meßbar und $g\mu$ das in 13.1.5.25 konstruierte Maß, so zeige man für $f : X \to \mathbb{R}$ meßbar, daß f integrierbar ist in Bezug auf $(g\mu)$ genau dann, wenn unter der üblichen Konvention $0 \cdot \infty = 0$ die Funktion fg integrierbar ist in Bezug auf μ, und daß unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\int (fg)\ \mu = \int f\ (g\mu)$$

Übung 13.1.6.22. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und (Ω, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $f : \Omega \to I$ integrierbar. Man zeige, daß dann auch $\int_\Omega f\mu$ in I liegt.

Übung 13.1.6.23. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\phi : I \to \mathbb{R}$ konvex, also nach 10.3.2.48 stetig im Inneren von I. Seien weiter (Ω, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $f : \Omega \to I$ integrierbar. So gilt die **Jensen'sche Ungleichung**

$$\phi\left(\int_\Omega f\mu\right) \le \int_\Omega (\phi \circ f)\ \mu$$

Auf der rechten Seite ist die Formulierung etwas sorglos, man möge genauer $\int_\Omega (\phi \circ f)^-\ \mu < \infty$ zeigen und die rechte Seite als $\int_\Omega (\phi \circ f)^+\ \mu - \int_\Omega (\phi \circ f)^-\ \mu$ verstehen. Hinweis: Ist $t := \int_\Omega f\mu$ ein Randpunkt von I, so muß f außerhalb einer Nullmenge konstant sein. Sonst liegt der Graph von ϕ oberhalb einer Geraden durch $(t, \phi(t))$, es gibt also in Formeln $c \in \mathbb{R}$ mit $\phi(s) \ge \phi(t) + c(s - t)$ für alle $s \in I$. Nun setze man $s = f(\omega)$ ein und integriere. Einen diskreten Spezialfall kennen Sie im übrigen bereits aus 10.2.2.17.

Übung 13.1.6.24. Besitzt die nichtnegative reelle Zufallsvariable X einen Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$, so gilt für alle $\varepsilon > 0$ die **Markov-Ungleichung**

$$\mathrm{P}(X \ge \varepsilon)\ \le\ \varepsilon^{-1}\mathrm{E}(X)$$

13.1.7 Integration auf Produkträumen

Satz 13.1.7.1 (Produktmaß). *Für σ-endliche Maßräume $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ gibt es auf der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ genau ein Maß $\mu \boxtimes \nu$ derart, daß für alle $A \in \mathcal{M}$ und $B \in \mathcal{N}$ gilt*

$$(\mu \boxtimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

13.1.7.2. Die Produkte rechts sind im Sinne unserer Konvention $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ zu verstehen. In der Literatur wird für die Produkt-σ-Algebra und Produktmaße meist das Symbol $\otimes$ verwendet, aber mir gefällt das Symbol $\boxtimes$ hier besser, da es sich beim Produkt von Maßen eher um eine Art „äußeres Produkt“ und jedenfalls nicht um ein Tensorprodukt handelt.

13.1.7.3. Mit diesem Satz und der Erkenntnis $\mathrm{Borel}(\mathbb{R}^n)\boxtimes\mathrm{Borel}(\mathbb{R}) = \mathrm{Borel}(\mathbb{R}^{n+1})$ aus 13.1.4.28 können wir durch Induktion über n das Lebesguemaß auf dem $\mathbb{R}^n$ aus dem Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ konstruieren und so dessen in 13.1.1.28 behauptete Existenz im allgemeinen zeigen.

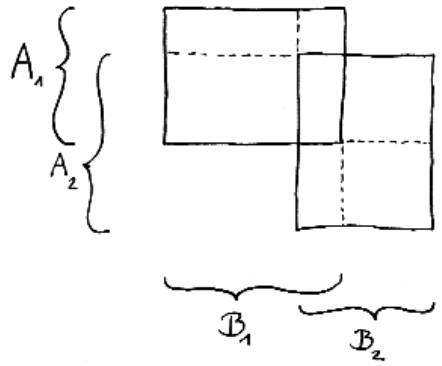


Illustration der Tatsache, daß die Vereinigung zweier Quader auch als die disjunkte Vereinigung von sieben Quadern geschrieben werden kann.

Beweis. Die Gesamtheit aller endlichen disjunkten Vereinigungen von Quadern $A \times B$ mit $A \in \mathcal{M}$ und $B \in \mathcal{N}$ bildet nach Übung 13.1.2.32 einen Mengenring, ja sie bildet offensichtlich sogar eine Mengenalgebra, die wir $[\mathcal{M} \times \mathcal{N}]$ notieren. Wir zeigen, daß es auf dieser Mengenalgebra $[\mathcal{M}\times\mathcal{N}]$ genau ein Prämaß $\mu\times\nu$ gibt mit $(\mu\times\nu)(A\times B) = \mu(A)\nu(B)\ \forall A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}$. Dessen Eindeutigkeit ist klar. Um die Existenz zu zeigen, bemerken wir, daß für $C \in [\mathcal{M} \times \mathcal{N}]$ und beliebiges $y \in Y$ die Abbildung $x \mapsto [C](x, y)$ eine meßbare Stufenfunktion $X \to \{0, 1\}$ ist und daß wir weiter mit $y \mapsto \int_X [C](x, y)\mu\langle x\rangle$ eine meßbare Stufenfunktion $Y \to [0, \infty]$ erhalten. Wir können also für $C \in [\mathcal{M} \times \mathcal{N}]$ in $[0, \infty]$ das Element

$$(\mu \times \nu)(C) := \int_Y \left(\int_X [C](x, y)\mu\langle x\rangle \right) \nu\langle y\rangle$$

bilden. Die σ-Additivität von $\mu \times \nu$ folgt dann aus der Additivität der Integrale 13.1.5.14 zusammen mit dem Satz über monotone Konvergenz 13.1.5.12. Unser Satz zum Produktmaß folgt damit, und erst hier wird die σ-Endlichkeit der beteiligten Maße benötigt, aus dem Maßfortsetzungssatz 13.1.2.11. □

13.1.7.4. Bezeichnet $\tau : X \times Y \to Y \times X$ das Vertauschen der Komponenten in einem Produkt σ-endlicher Maßräume, so haben wir offensichtlich eine Verwandschaft von Maßen $\tau : \mu \boxtimes \nu \rightsquigarrow \nu \boxtimes \mu$.

13.1.7.5 (**Einschränkung und Produkt von Maßen**). Gegeben $A \subset X$ und $B \subset Y$ meßbare Teilmengen σ-endlicher Maßräume $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{N}, \nu)$

stimmt die Einschränkung des Produktmaßes überein mit dem Produktmaß der Einschränkungen, in Formeln

$$(\mu \boxtimes \nu)|(A \times B) = (\mu|A) \boxtimes (\nu|B)$$

In der Tat stimmen beide Maße auf einem zweischnittstabilen Erzeugendensystem nach 13.1.2.34 überein, das darüberhinaus für beide Maße σ-endlich ist.

Satz 13.1.7.6 (positiver Fubini). *Gegeben σ-endliche Maßräume (X, μ) und (Y, ν) sowie eine meßbare Funktion $f : X \times Y \to [0, \infty]$ ist $x \mapsto f(x, y)$ für alle $y \in Y$ eine meßbare Funktion $X \to [0, \infty]$ und das partielle Integral $y \mapsto \int f(x, y)\mu\langle x\rangle$ ist eine meßbare Funktion $Y \to [0, \infty]$ und es gilt*

$$\int_{X \times Y} f(x, y)\ (\mu \boxtimes \nu)\langle x, y\rangle = \int_Y \left(\int_X f(x, y)\mu\langle x\rangle \right) \nu\langle y\rangle$$

13.1.7.7. Unser Satz impliziert, daß unter den gegebenen Voraussetzungen die partiellen Integrale vertauscht werden dürfen. Bezeichnet genauer $\tau : X \times Y \to Y \times X$ das Vertauschen, so haben wir die Verwandschaft $\tau : \mu \boxtimes \nu \rightsquigarrow \nu \boxtimes \mu$ von Maßen und die Verwandschaft $\tau : f \rightsquigarrow \tilde{f}$ von Funktionen mit $\tilde{f}(y, x) := f(x, y)$ und damit unmittelbar und formal nach 13.1.5.18 die Gleichheit

$$\int_{X \times Y} f(x, y)\ (\mu \boxtimes \nu)\langle x, y\rangle = \int_{Y \times X} \tilde{f}(y, x)\ (\nu \boxtimes \mu)\langle y, x\rangle$$

13.1.7.8. Dieser Satz und verschiedene seiner Varianten werden auch oft als **Satz von Tonelli** zitiert. Daß die partiellen Integrale bei nicht notwendig σ-endlichen Maßräumen im allgemeinen nicht mehr vertauscht werden dürfen, zeigt das folgende Beispiel. Seien $X = Y = [0, 1]$ versehen mit der borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}$ und dem Lebesguemaß λ beziehungsweise dem Zählmaß ζ. Die Diagonale Δ ist dann meßbar, für ihre charakteristische Funktion $[\Delta]$ gilt jedoch

$$\int_Y \left(\int_X [\Delta](x, y)\lambda\langle x\rangle \right) \zeta\langle y\rangle = 0 \quad \neq \quad 1 = \int_X \left(\int_Y [\Delta](x, y)\zeta\langle y\rangle \right) \lambda\langle x\rangle$$

Für das Produktmaß **??** hätte unsere Diagonale im übrigen das Maß ∞ und wäre noch nicht einmal σ-endlich. Das ist auch besser so, denn für meßbare Abbildungen $X \times Y \to [0, \infty]$, die außerhalb einer σ-endlichen Menge verschwinden, gilt der positive Fubini 13.1.7.6 analog und kann leicht aus 13.1.7.6 in der oben formulierten Gestalt abgeleitet werden.

13.1.7.9 (**Korollar zum Satz über monotone Konvergenz**). Gegeben $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $A_0 \subset A_1 \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge meßbarer Teilmengen

von X mit Vereinigung $A := \bigcup_n A_n$ gilt für jede meßbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ die Identität

$$\int_A f\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\mu$$

In der Tat können wir die Behauptung mit 13.1.5.16 umschreiben zur Behauptung $\int_X [A] f\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X [A_n] f\mu$ und in dieser Gestalt folgt sie unmittelbar aus dem Satz über monotone Konvergenz 13.1.5.12.

Beweis. Für jedes $y \in Y$ ist die y-Horizontale $i_y : X \to X \times Y$, $x \mapsto (x, y)$ meßbar nach Lemma 13.1.4.10, da die Urbilder von Erzeugern der σ-Algebra der meßbaren Mengen des Produkts meßbar sind. Also ist auch $x \mapsto f(x, y)$ meßbar auf X als die Verknüpfung $f \circ i_y$ von f mit der y-Horizontalen. Um die anderen Aussagen des Satzes zu zeigen, müssen wir weiter ausholen. Zunächst einmal dürfen wir annehmen, daß X und Y endliches Maß haben: Sonst schreiben wir X beziehungsweise Y als aufsteigende Vereinigungen von meßbaren Teilmengen X_n beziehungsweise Y_m endlichen Maßes und erhalten aus dem Fall, in dem die Gesamträume endliches Maß haben, die Meßbarkeit des partiellen Integrals über X_n und die Gleichheit

$$\int_{X_n \times Y_m} f(x, y)\ (\mu \boxtimes \nu)\langle x, y\rangle = \int_{Y_m} \left(\int_{X_n} f(x, y)\mu\langle x\rangle \right) \nu\langle y\rangle$$

Im Grenzwert $n \to \infty$ ergibt sich dann auf der linken Seite nach dem Korollar 13.1.7.9 zur monotonen Konvergenz $\int_{X\times Y_m} f(x, y)\ (\mu \boxtimes \nu)\langle x, y\rangle$ und auf der rechten Seite streben die meßbaren Funktionen $y \mapsto \int_{X_n} f(x, y)\mu\langle x\rangle$ ebenfalls nach dem Korollar 13.1.7.9 zur monotonen Konvergenz punktweise monoton gegen $y \mapsto \int_X f(x, y)\mu\langle x\rangle$. Mithin ist diese Funktion auch meßbar und wir finden im Grenzwert

$$\int_{X\times Y_m} f(x, y)\ (\mu \boxtimes \nu)\langle x, y\rangle = \int_{Y_m} \left(\int_X f(x, y)\mu\langle x\rangle \right) \nu\langle y\rangle$$

Bilden wir dann den Grenzwert für $m \to \infty$, so folgt wieder nach dem Korollar 13.1.7.9 zur monotonen Konvergenz $\int_{X\times Y} f = \int_Y \int_X f$ wie gewünscht. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß X und Y endliches Maß haben. Wir zeigen nun den Satz zunächst für Funktionen der Gestalt $f = [C]$ mit $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$. Dazu brauchen wir einen neuen Begriff.

Definition 13.1.7.10. Sei Z eine Menge. Ein System $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(Z)$ von Teilmengen von Z heißt **monoton**, wenn die beiden folgenden Aussagen gelten:

1. Es gilt $\emptyset \in \mathcal{O}$ und liegen $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ alle in $\mathcal{O}$, so auch $\bigcup A_n$;
2. Es gilt $Z \in \mathcal{O}$ und liegen $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ alle in $\mathcal{O}$, so auch $\bigcap B_n$.

In Worten fordern wir also, daß die Vereinigung und der Schnitt über jedes abzählbare angeordnete Teilsystem wieder zu unserem Mengensystem gehören sollen.

Lemma 13.1.7.11 (über monotone Systeme). *Gegeben eine Menge Z und eine Mengenalgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Z)$ ist die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{A})$ das kleinste monotone System $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(Z)$, das $\mathcal{A}$ umfaßt, alias als der Schnitt aller monotonen Systeme, die $\mathcal{A}$ umfassen.*

Beweis. Offensichtlich gilt $\mathcal{A} \subset \mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{A})$. Wir müssen also nur zeigen, daß $\mathcal{O}$ eine σ-Algebra ist. Dazu reicht es nach 13.1.1.39 zu zeigen, daß $\mathcal{O}$ eine Mengenalgebra ist. Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. Zunächst zeigen wir, daß $\mathcal{O}$ stabil ist unter dem Bilden von Komplementen. Bezeichne für $Y \subset Z$ wieder $Y^c := Z \backslash Y$ sein Komplement. Gegeben ein Mengensystem $\mathcal{T}$ setzen wir $\mathcal{T}^c := \{T^c \mid T \in \mathcal{T}\}$. Ist nun $\mathcal{A}$ ein beliebiges System von Teilmengen von Z und $\mathcal{O} \supset \mathcal{A}$ das kleinste monotone System über $\mathcal{A}$, so ist offensichtlich $\mathcal{O}^c \supset \mathcal{A}^c$ das kleinste monotone System über $\mathcal{A}^c$. Insbesondere folgt aus $\mathcal{A} = \mathcal{A}^c$ sofort $\mathcal{O} = \mathcal{O}^c$ und $\mathcal{O}$ ist in der Tat stabil unter dm Bilden von Komplementen.

2. Jetzt bemerken wir eine Hilfsaussage, nämlich daß für jede Teilmenge $Y \subset Z$ mit $\mathcal{O}$ auch $\mathcal{O}_Y := \{A \in \mathcal{O} \mid A \cap Y \in \mathcal{O}\}$ ein monotones System ist.

3. Für $Y \in \mathcal{A}$ gilt, da unser $\mathcal{A}$ ja eine Mengenalgebra ist, stets $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_Y$. Daraus folgt mit der Minimalität von $\mathcal{O}$ sofort $\mathcal{O} = \mathcal{O}_Y$. Damit haben wir gezeigt:

$$A \in \mathcal{O} \text{ und } Y \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap Y \in \mathcal{O}.$$

4. Mit dieser Erkenntnis lassen wir nun dasselbe Argument nocheinmal laufen: Nicht nur für $Y \in \mathcal{A}$ sondern sogar für $Y \in \mathcal{O}$ wissen wir nach dem vorhergehenden Schritt nämlich, daß gilt $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_Y$. Daraus folgt wie zuvor $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_Y$ und sogar $\mathcal{O} = \mathcal{O}_Y$ sogar für alle $Y \in \mathcal{O}$. Damit haben wir gezeigt

$$A \in \mathcal{O} \text{ und } Y \in \mathcal{O} \Rightarrow A \cap Y \in \mathcal{O}.$$

Also ist $\mathcal{O}$ eine Mengenalgebra. Da es auch stabil ist unter abzählbaren aufsteigenden Vereinigungen, ist es dann wie bereits erwähnt sogar eine σ-Algebra. $\square$

Mit dem Lemma über monotone Systeme 13.1.7.11 können wir nun den positiven Fubini im Fall $f = [C]$ für $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ zeigen. Da wir uns nämlich bereits auf den Fall $\mu(X), \nu(Y) < \infty$ zurückgezogen haben, ist die konstante Funktion $1 = [X \times Y]$ integrierbar auf $X \times Y$. Natürlich dominiert diese Funktion die charakteristischen Funktionen aller Teilmengen von $X \times Y$. Aus dem Satz über dominierte Konvergenz 13.1.6.10 folgt also, daß das System $\mathcal{O}$ aller der $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$, für deren charakteristische Funktion der Satz gilt, ein monotones

System ist. Dies monotone System enthält aber offensichtlich alle $C \in [\mathcal{M} \times \mathcal{N}]$, mithin besteht es nach dem Lemma über monotone Systeme 13.1.7.11 aus allen meßbaren Mengen $C \subset X \times Y$ des Produkts alias allen $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$. Damit ist der Satz für $f = [C]$ mit $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ bewiesen und folgt sofort für meßbare Stufenfunktion $f : X \times Y \to [0, \infty)$. Für beliebiges meßbares $f : X \times Y \to [0, \infty]$ folgert man die Aussage, indem man f mithilfe von 13.1.5.15 als punktweisen Grenzwert einer monoton wachsenden Folge meßbarer Stufenfunktionen schreibt und beachtet, daß nach dem Satz über monotone Konvergenz 13.1.5.12 auf beiden Seiten Integral und Grenzwert vertauscht werden dürfen. □

13.1.7.12. Nimmt man im vorherigen Satz für f die charakteristische Funktion einer σ-endlichen meßbaren Menge $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$, so ergibt sich, daß für $C_x = i_x^{-1}(C)$ das Urbild von C unter der x-Vertikalen $i_x : Y \to X \times Y$, $y \mapsto (x, y)$ die Abbildung $X \to [0, \infty]$, $x \mapsto \mu(C_x)$ meßbar ist und daß gilt

$$(\mu \boxtimes \nu)(C) = \int_X \nu(C_x)\mu\langle x\rangle$$

Kippen wir das in unserer Vorstellung, so folgt das **Prinzip von Cavalieri**, nach dem zwei Borelmengen $C, D \subset \mathbb{R}^3$ dasselbe Volumen haben, wenn ihre horizontalen Schnitte in jeder Höhe dieselbe Fläche haben, in Formeln

$$\lambda^2(i_z^{-1}(C)) = \lambda^2(i_z^{-1}(D))\ \forall z \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda^3(C) = \lambda^3(D)$$

mit $i_z : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $i_z : (x, y) \mapsto (x, y, z)$. Weiter können wir so beweisen, daß das Integral einer nichtnegativen meßbaren Funktion auf $\mathbb{R}$ tatsächlich die zwischen ihrem Graphen und der x-Achse eingeschlossene Fläche ist, wie im folgenden Korollar ausgeführt wird.

Korollar 13.1.7.13 (Integral als Fläche unter dem Graphen). *Gegeben (X, μ) ein σ-endlicher Maßraum und $f : X \to [0, \infty]$ eine meßbare Funktion ist auch die Teilmenge $M_f \subset X \times \mathbb{R}$ gegeben durch $M_f := \{(x, y) \mid 0 \le y < f(x)\}$ meßbar und es gilt*

$$(\mu \boxtimes \lambda)(M_f) = \int_X f\mu$$

Beweis. Um zu zeigen, daß M_f meßbar ist, schreiben wir es als abzählbare Vereinigung von Quadern $M_f = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_{>0}} f^{-1}([q, \infty]) \times [0, q)$. Die Formel für das Maß von M_f folgt sofort aus dem positiven Fubini 13.1.7.6. □

13.1.7.14. Im Rückblick könnten wir das Integral über σ-endliche Maßräume auch mit Hilfe des Produktmaßes als Fläche unter dem Graphen im Sinne von 13.1.7.13 einführen. Wir müßten dazu aber bei der Konstruktion des Produktmaßes auf den Satz über monotone Konvergenz verzichten. Das wäre nun nicht

weiter schlimm, wir brauchen ihn dabei nur für meßbare Stufenfunktionen, für die er besonders leicht zu zeigen ist. Ich habe diesen Zugang dennoch nicht gewählt, weil mir die direkte Konstruktion des Integrals didaktisch geschickter schien. Man kann so nämlich früher einen Kontakt zu bekannten Konzepten herstellen.

Ergänzung 13.1.7.15. Man findet bei Lebesgue und auch in vielen anderen Texten die Bemerkung, das Lebesgue-Integral unterscheide sich vom Riemann-Integral dadurch, daß die Fläche unter dem Graphen der Funktion in horizontale statt in vertikale Streifen aufgeschnitten werde, deren Flächen man dann addiert. Ich kann das nur bedingt nachvollziehen. Nach Cavalieri liefert ja beides dasselbe Integral. Der wesentliche Schritt ist meines Erachtens vielmehr der Übergang vom Messen reeller Intervalle zum Messen beliebiger „meßbarer Mengen“. Ich gebe aber zu, daß die horizontalen Streifen im Gegensatz zu den vertikalen Streifen eben keine Intervalle und dadurch näher an allgemeinen meßbaren Mengen sind.

Satz 13.1.7.16 (Fubini). *Gegeben σ-endliche Maßräume (X, μ) und (Y, ν) und eine integrierbare Funktion $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ ist die Menge N aller $y \in Y$, für die $x \mapsto f(x, y)$ nicht integrierbar ist, meßbar vom Maß $\nu(N) = 0$, und die Funktion $Y \backslash N \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \int_X f(x, y)\mu\langle x\rangle$ ist integrierbar mit Integral*

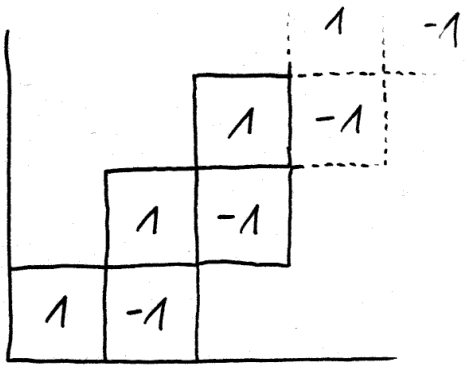
$$\int_{Y\backslash N} \left(\int_X f(x, y)\mu\langle x\rangle \right) \nu\langle y\rangle = \int_{X\times Y} f(x, y)\ (\mu \boxtimes \nu)\langle x, y\rangle$$

13.1.7.17. Will man diesen Satz in der Praxis anwenden, so wird man in der Regel zuerst den positiven Fubini 13.1.7.6 benutzen, um die Integrierbarkeit von f nachzuweisen.

Beweis. Ist f nichtnegativ, so folgt die Behauptung aus dem positiven Fubini 13.1.7.6, denn aus $\int_Y \left(\int_X f(x, y)\mu\langle x\rangle \right) \nu\langle y\rangle < \infty$ folgt, daß die Menge N aller $y \in Y$ mit $\int_X f(x, y)\mu\langle x\rangle = \infty$ Maß Null hat. Im allgemeinen folgt die Behauptung dann mit der Zerlegung $f = f^+ - f^-$ unsere Funktion in ihren positiven und negativen Anteil wie bei der Definition des Integrals 13.1.6.1. □

Beispiel 13.1.7.18. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die außerhalb der x-Achse verschwindet und auf der x-Achse bei $(x, 0)$ jeweils den Wert x annimmt, ist integrierbar auf $\mathbb{R}^2$. Jedoch ist $x \mapsto f(x, y)$ nur integrierbar für $y \neq 0$.

Beispiel 13.1.7.19 (**Probleme beim Vertauschen der Integrationsreihenfolge**). Unser Satz sagt insbesondere, daß wir unter gewissen Umständen „die Integrationsreihenfolge vertauschen dürfen“. Das folgende Beispiel zeigt, welche Probleme beim Vertauschen der Integrationsreihenfolge im allgemeinen auftreten können. Sei ζ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit Träger in der „treppenförmigen“ Menge $\{(i, j) \mid 0 \leq i - j \leq 1\}$ mit $f(i, j) = (-1)^{i-j}$.



Eine meßbare Funktion auf $\mathbb{R}^2$ wie in 13.1.7.19 derart, daß die partiellen Integrale existieren und selbst wieder integrierbar sind, das Endresultat jedoch von der Integrationsreihenfolge abhängt. Der „positive Fubini“ greift hier nicht, da unsere Funktion auch negative Werte annimmt, der „Fubini“ greift nicht, da unsere Funktion nicht integrierbar ist.

Die beiden partiellen Integrale von f existieren und sind integrierbar. Ihre Integrale sind jedoch verschieden, genauer gilt

$$\int \left(\int f(n,m)\zeta\langle n\rangle \right) \zeta\langle m\rangle = 0 \quad \neq \quad 1 = \int \left(\int f(n,m)\zeta\langle m\rangle \right) \zeta\langle n\rangle$$

Indem wir unsere Funktion etwas „verschmieren“ erhalten wir auch eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^2$ mit entsprechenden Eigenschaften, und durch eine geeignete Transformation sogar eine stetige reellwertige Funktion auf dem offenen Einheitsquadrat derart, daß die partiellen Integrale existieren und selbst wieder integrierbar sind, das Endresultat jedoch von der Integrationsreihenfolge abhängt.

Beispiel 13.1.7.20. Wir integrieren die Funktion y über die durch eine Parabel und die Gerade $y = 0$ begrenzte Fläche $P = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int_P y &= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{1-x^2} y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^2}{2} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \bigg|_{-1}^{1} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Teilen wir noch durch die Gesamtfläche

$$\int_P 1 = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) \,\mathrm{d}x = x - \frac{x^3}{3} \bigg|_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

so ergibt sich die Höhe des Schwerpunkts unserer abgeschnittenen Parabelfläche zu $2/5$. Hier haben wir den Satz von Fubini in seiner positiven Variante 13.1.7.6 angewandt auf das Produkt der Funktion y mit der charakteristischen Funktion $[P]$ unserer Fläche P. Die Funktion y ist meßbar, weil sie stetig ist. Die Funktion $[P]$ ist meßbar als charakteristische Funktion einer meßbaren da abgeschlossenen Menge. Das Produkt dieser beiden meßbaren Funktionen ist damit auch meßbar nach 13.1.4.29.

Proposition 13.1.7.21 (Partielle Integration). *Gegeben reelle Zahlen $a < b$ und integrierbare Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit „Stammfunktionen“ $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(y) = \int_a^y f(x) \,\mathrm{d}x$ und $G(x) = \int_a^x g(y) \,\mathrm{d}y$ gilt*

$$\int_a^b Fg = FG|_a^b - \int_a^b fG$$

Dieselbe Formel gilt allgemeiner auch dann noch, wenn wir F oder G jeweils um eine additive Konstante abändern.

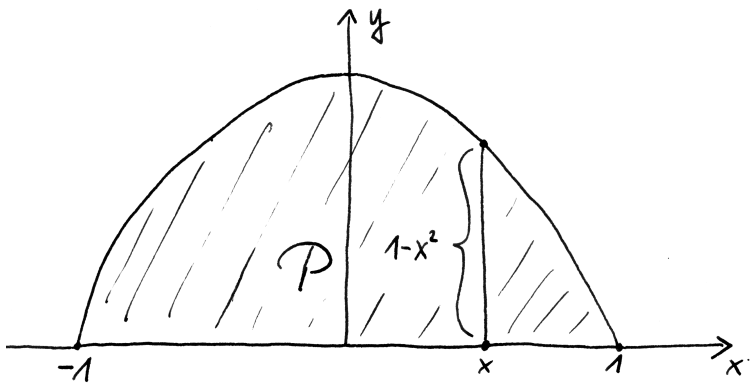


Illustration zur Anwendung des Satzes von Fubini in 13.1.7.20.

Beweis. Die zweite Aussage folgt leicht aus der ersten. Um die erste Aussage zu zeigen, berechnen wir das Integral der Funktion $f(x)g(y)$ über das Quadrat $[a,b]^2$ und finden mit Fubini $F(b)G(b)$. Andererseits können wir dies Integral auch schreiben als das Integral über das dreieckige Gebiet unterhalb der Diagonalen plus das Integral über das dreieckige Gebiet oberhalb der Diagonalen. Diese Integrale ergeben sich aber wieder mit Fubini leicht zu $\int_a^b Fg$ und $\int_a^b fG$. $\square$

Übungen

Ergänzende Übung 13.1.7.22 (**Gitterpunkte und Volumen**). Gegeben eine kompakte konvexe Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ zeige man

$$\lambda(K) = \lim_{l \searrow 0} l^n |K \cap l\mathbb{Z}^n| = \lim_{l \searrow 0} l^n |\{q \in l\mathbb{Z}^n \mid K \cap (q + [0,l]^n) \neq \emptyset\}|$$

In Worten hängt das Maß von K also eng zusammen mit der Zahl der Gitterpunkte in K, und je feiner das Gitter wird, desto besser wird diese Approximation. Hinweis: Liegt K nicht in einem echten affinen Teilraum von $\mathbb{R}^n$, so umfaßt es einen offenen Ball, ohne Beschränkung der Allgemeinheit einen offenen Ball um den Ursprung. Dann versuche man, K auf Rechenpapier zu zeichnen und zwischen K und eine gestreckte Kopie $(1+\varepsilon)K$ eine Vereinigung von Rechenkästchen einzuschachteln.

Übung 13.1.7.23. Hat $T \subset \mathbb{R}^n$ Minkowskidimension $\operatorname{mdim}(T) < n$ im Sinne von 12.4.4.2, so hat der Abschluß von T Lebesguemaß $\lambda(\bar{T}) = 0$.

Ergänzende Übung 13.1.7.24. Gegeben zwei Mengen X, Y erhalten wir eine Bijektion

$$\operatorname{Ens}(X, \mathcal{P}(Y)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(X \times Y)$$

durch die Vorschrift $f \mapsto \{(x,y) \mid y \in f(x)\}$. Die Gesamtheit aller Abbildungen, die nur abzählbar viele Werte annehmen, entspricht dann sicher einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$. Diese fällt zusammen mit der von allen Produkten $A \times B$ mit $A \subset X$ und $B \subset Y$ in $\mathcal{P}(X \times Y)$ erzeugten σ-Algebra. Für zwei überabzählbare diskrete metrische Räume ist mithin das Produkt der borelschen σ-Algebren eine echte Teilmenge der borelschen σ-Algebra des Produkts.

Übung 13.1.7.25 (**Formelsammlung für Produktmaße**). Für Produktmaße gelten die folgenden Identitäten:

Natürlichkeit: Gegeben meßbare Abbildungen $f : X \to A$ und $g : Y \to B$ von Meßräumen gilt für Maße μ auf X und ν auf Y mit σ-endlichen Vorschüben $f_*\mu, g_*\nu$ im Raum der Maße auf $A \times B$ die Gleichheit

$$(f_*\mu) \boxtimes (g_*\nu) = (f \times g)_*(\mu \boxtimes \nu)$$

Eins: Gegeben ein Meßraum X und ein Maß μ auf X und das Diracmaß δ auf dem einpunktigen Meßraum gilt

$$(\mathrm{pr}_X)_*(\mu \boxtimes \delta) = \mu$$

Assoziativität: Gegeben X, Y, Z Meßräume und μ, ν, λ jeweils σ-endliche Maße ist die offensichtliche Bijektion $\mathrm{ass} : (X \times Y) \times Z \xrightarrow{\sim} X \times (Y \times Z)$ meßbar und es gilt

$$\mathrm{ass}_*((\mu \boxtimes \nu) \boxtimes \lambda) = \mu \boxtimes (\nu \boxtimes \lambda)$$

Kommutativität: Gegeben $\tau : X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X$ die Vertauschungsabbildung für Meßräume X, Y und σ-endliche Maße μ auf X und ν auf Y gilt

$$\tau_*(\mu \boxtimes \nu) = \nu \boxtimes \mu$$

Ich will schlage für die obigen Formeln die zusammenfassende Bezeichnung als „Verschmelzungsidentitäten“ vor. Der Hintergrund dafür wird in der folgenden Bemerkung erklärt.

Vorschau 13.1.7.26. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit ausgezeichnetem Produkt $X \times Y$ für jedes Paar (X, Y) von Objekten und ausgezeichnetem finalen Objekt pt. Sei weiter ein Tripel

$$(M, \boxtimes, \delta)$$

gegeben bestehend aus einem Funktor $M : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$, den wir auf Morphismen $M(f) = f_*$ notieren, sowie Abbildungen $M(X) \times M(Y) \to M(X \times Y)$, $(a, b) \mapsto a \boxtimes b$ und einem ausgezeichneten Element $\delta \in M(\mathrm{pt})$. In diesem Kontext bleiben die in der obigen Übung 13.1.7.25 durchdeklinierten Eigenschaften Natürlichkeit, Eins, Assoziativität und Kommutativität sinnvoll und wir fassen sie zusammen unter der Bezeichnung **Verschmelzungsidentitäten**. In 18.4.1.19 wird erklärt, inwiefern Daten $(M, \boxtimes, \delta)$, für die die Verschmelzungsidentitäten gelten, eineindeutig sogenannten „Schmelzfunktoren“ $M : \mathrm{kart}(\mathcal{C}) \to \mathrm{kart}(\mathrm{Ens})$ entsprechen.

13.1.7.27. Im Spezialfall der Kategorie $\mathrm{Meß}$ der Meßräume erhalten wir so einen „Schmelzfunktor“ $\mathrm{M} : \mathrm{kart}(\mathrm{Meß}) \to \mathrm{kart}(\mathrm{Ens})$ von der kartesischen Schmelzkategorie der Meßräume in die kartesische Schmelzkategorie der Mengen, der jedem Meßraum X die Menge $\mathrm{M}(X; [0, \infty))$ aller endlichen Maße auf X zuordnet und jeder Verschmelzung $X \curlyvee Y \to Z$ alias meßbaren Abbildung $f : X \times Y \to Z$ die Abbildung $(\mu, \nu) \mapsto f_*(\mu \boxtimes \nu)$. Das Diracmaß δ auf dem einpunktigen Meßraum ist in diesem Kontext zu verstehen als das Produktmaß mit überhaupt keinem Faktor auf dem kartesischen Produkt über die leere Familie von Meßräumen. Die Assoziativität zeigt, daß man auch für drei Faktoren sinnvoll Produktmaße $\lambda \boxtimes \mu \boxtimes \nu$ auf $X \times Y \times Z$ und allgemeiner sinnvoll Produktmaße mit endlich vielen Faktoren erklären kann.

Übung 13.1.7.28 (**Bildmaß unter Projektion und partielle Integration**). Gegeben σ-endliche Maßräume $(X, \mu), (Y, \nu)$ und eine meßbare Funktion $f : X \times Y \to [0, \infty]$ gilt für das Bildmaß unter der Projektion auf die zweite Komponente

$$\mathrm{pr}_{Y*}\left(f(x,y)\ \mu \boxtimes \nu\right) = \left(\int_X f(x,y)\mu\langle x\rangle\right)\nu$$

Ergänzende Übung 13.1.7.29. Gegeben ein endlichdimensionaler Raum X induziert das Bilden des Produkts mit dem Lebesguemaß eine Bijektion zwischen der Menge aller Borelmaße auf X und der Menge derjenigen Borelmaße auf $X \times \mathbb{R}$, die invariant sind unter allen Translationen in der zweiten Komponente. Hinweis: Gegeben ein in dieser Weise translationsinvariantes Borelmaß μ auf $X \times \mathbb{R}$ beachte man, daß für $A \subset X$ mit kompaktem Abschluß die Vorschrift $B \mapsto \mu(A \times B)$ ein translationsinvariantes Borelmaß auf $\mathbb{R}$ definiert.

Übung 13.1.7.30. Jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten Quader im $\mathbb{R}^n$ ist integrierbar und ihr Riemannintegral nach 12.2.1.4 stimmt mit ihrem Lebesgueintegral überein. Hinweis: 13.1.6.13.

Übung 13.1.7.31. Zeige: Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le x_1 \le \ldots \le x_n \le 1\}$ hat das Volumen $(n!)^{-1}$.

Übung 13.1.7.32. Man diskutiere den Zusammenhang zwischen dem Satz von Fubini und dem Satz über das Produkt von Reihen 10.4.2.14.

Übung 13.1.7.33 (**Partielle Integration, Variante**). Proposition 13.1.7.21 gilt noch etwas allgemeiner. Ist $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und linksseitig stetig und $\mathrm{d}G$ das zugehörige Maß auf $[a, b)$ nach 13.1.2.9 und $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrierbar nach dem Lebesguemaß λ und F eine Stammfunktion wie in der Proposition, so gilt

$$\int_{[a,b)} F\,\mathrm{d}G = FG|_a^b - \int_a^b fG\lambda$$

Dieselbe Formel gilt auch allgemeiner, wenn wir F noch um eine additive Konstante abändern. Hinweis: Man berechne $\int_{[a,b)^2} f(x)(\lambda \boxtimes \mathrm{d}G)\langle x, y\rangle$ auf zwei Weisen wie im Beweis der Proposition.

13.1.8 Rechnen mit dem Lebesgueintegral

Satz 13.1.8.1 (**Transformationsformel**). *Gegeben $U, V \Subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $\phi : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus gilt in $[0, \infty]$ für jede meßbare Funktion $f : V \to [0, \infty]$ die Gleichheit*

$$\int_V f = \int_U (f \circ \phi)\ |\det \mathrm{d}\phi|$$

Ist stattdessen $f : V \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, so ist auch die Funktion $(f \circ \phi)\ |\det \mathrm{d}\phi| : U \to \mathbb{R}$ integrierbar und dieselbe Formel gilt in $\mathbb{R}$.

13.1.8.2. Wir kennen unsere Formel aus 12.4.2.8 bereits für stetige Funktionen f mit kompaktem Träger.

13.1.8.3. Steht x für eine Veränderliche des $\mathbb{R}^n$, so benutzen wir auch für Integrale bezüglich des Lebesguemaßes die Notation $\int f(x)\,\mathrm{d}^n x$. In diesem Zusammenhang hat also $\mathrm{d}^n x$ dieselbe Bedeutung wie $\lambda^n\langle x\rangle$. Wir können die Aussage des Satzes mit dieser Notation interpretieren als die Verwandtschaft von Maßen

$$\phi : |\det \mathrm{d}\phi|\,\mathrm{d}^n x \rightsquigarrow \mathrm{d}^n y$$

Lemma 13.1.8.4. *Gegeben eine offene Teilmenge $W \Subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine monoton wachsende Folge von stetigen, ja sogar von glatten nichtnegativen Funktionen mit kompaktem Träger, die punktweise gegen die charakteristische Funktion $[W]$ von W strebt.*

Beweis. Man schreibe W als Vereinigung einer Folge offener Quader Q_k mit kompaktem Abschluß. Man wähle etwa mithilfe von 10.5.4.15 für jeden Quader Q_k eine glatte Funktion g_k auf $\mathbb{R}^n$, die auf Q_k positiv ist und außerhalb von Q_k verschwindet, und betrachte die Folge der Funktionen $f_k = g_1 + \ldots + g_k$. Des weiteren wähle man eine Folge von glatten Funktionen $h_k : \mathbb{R} \to [0,1]$ derart, daß h_k unterhalb von $1/(k+1)$ verschwindet und oberhalb von $1/k$ konstant den Wert 1 annimmt. Die Verknüpfungen $h_k \circ f_k$ bilden dann eine Folge von Funktionen der gewünschten Art. □

Beweis der Transformationsformel 13.1.8.1. Es gilt, die Gleichheit von Maßen

$$\phi_*(|\det \mathrm{d}\phi|\,\mathrm{d}^n x) = \mathrm{d}^n y$$

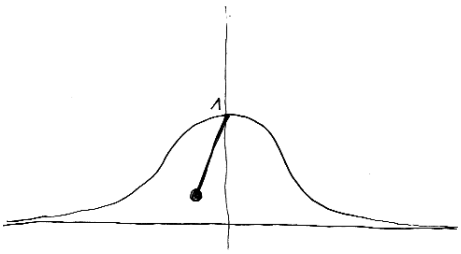
zu zeigen. Mit Lemma 13.1.8.4 folgt unsere Transformationsformel schon einmal für die charakteristischen Funktionen $f = [W]$ von offenen Teilmengen $W \Subset V$, indem wir $[W]$ als punktweisen Grenzwert einer monoton wachsenden Folge aus $\mathcal{C}_!(V, [0,\infty])$ schreiben und den Satz über monotone Konvergenz 13.1.5.12 verwenden und erinnern, daß wir die Transformationsformel für stetige Funktionen mit kompaktem Träger bereits als 12.4.2.8 gezeigt haben. Folglich nehmen unsere beiden Maße auf allen offenen Mengen dieselben Werte an. Andererseits bilden die offenen Mengen im Sinne von Übung 13.1.2.34 ein zweischnittstabiles Erzeugendensystem der σ-Algebra der Borelmengen von V, das σ-endlich ist für unsere beiden Maße, deshalb stimmen sie dann nach Übung 13.1.2.34 bereits überein. Alternativ sind unsere Maße beide Borelmaße und damit nach 13.1.10.10 regulär. Folglich müssen unsere beiden Maße, wenn sie auf allen offenen Mengen dieselben Werte annehmen, bereits auf allen Borelmengen dieselben Werte annehmen. □

Proposition 13.1.8.5 (Nützliche Nullmengen). *Gegeben $U \Subset \mathbb{R}^k$ offen, $k < n$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist $\varphi(U)$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.*

Ergänzung 13.1.8.6. Der **Satz von Sard** besagt, daß auch für $k \geq n$ und φ mindestens $(k - n + 1)$-mal stetig partiell differenzierbar auf U das Bild unter φ der Menge aller Stellen $p \in U$, an denen $\mathrm{d}_p\varphi$ nicht surjektiv ist, eine Lebesgue-Nullmenge sein muß. Wir werden das nicht zeigen.

Beweis. Nach Übung 13.1.4.45 können wir U schreiben als abzählbare Vereinigung über eine Folge von offenen Quadern Q_ν mit $\bar{Q}_\nu$ kompakt und $\bar{Q}_\nu \subset U$. Folglich dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\bar{U}$ selbst ein kompakter Quader ist und daß $|\mathrm{d}\varphi|$ beschränkt ist auf U. Von hier ausgehend können wir mit der Minkowski-Dimension argumentieren und 12.4.4.5 sowie Übung 13.1.7.23 verwenden. Wir können aber auch mit weniger Begrifflichkeit auskommen und die Argumentation explizit ausschreiben. Nach einer affinen Koordinatentransformation dürfen wir zusätzlich sogar $U = (0,1)^k$ annehmen. Wir arbeiten wie immer mit der Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^k$, die Bälle $\mathrm{B}(x,\delta)$ sind also offene Würfel und ihre Abschlüsse $\bar{\mathrm{B}}(x;\delta)$ abgeschlossene Würfel. Ist C eine Schranke für $|\mathrm{d}\varphi|$, so gilt nach dem Schrankensatz $\varphi(U \cap \bar{\mathrm{B}}(x;\delta)) \subset \bar{\mathrm{B}}(\varphi(x); C\delta)$ für alle $x \in U$. Für $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ finden wir nun eine Überdeckung von $(0,1)^k$ durch r^k abgeschlossene Würfelchen der Gestalt $\bar{\mathrm{B}}(x; 1/r)$, also finden wir eine Überdeckung von $\varphi(U)$ durch r^k abgeschlossene Würfelchen der Gestalt $\bar{\mathrm{B}}(y; C/r)$ mit Gesamtvolumen $r^k(2C/r)^n$. Dies Gesamtvolumen strebt aber gegen Null für $r \to \infty$, mithin ist $\varphi(U)$ eine Nullmenge. □

Satz 13.1.8.7 (Fläche unter der Gauß'schen Glockenkurve). *Für die Fläche unter der Gauß'schen Glockenkurve gilt die Formel $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.*



Skizze der Gauß'schen Glockenkurve alias dem Graphen von $x \mapsto \exp(-x^2)$ mit zusätzlich eingezeichnetem Klöppel.

Vorschau 13.1.8.8. Als **Gauß'sche Glockenkurve** bezeichnet man den Graphen de Funktion $x \mapsto \exp(-x^2)$. Diese Funktion spielt eine zentrale Rolle in der Wahrscheinlichkeitstheorie, wie wir in 13.3.5.18 noch sehen werden.

Beweis. Wir rechnen das Integral über die Ebene der nichtnegativen Funktion $\exp(-(x^2+y^2))$ auf zwei Weisen aus, einmal direkt mit dem positiven Fubini und ein zweites Mal, indem wir mithilfe von 13.1.8.5 die Ebene längs der negativen x-Achse aufschneiden und mit 13.1.8.1 zu Polarkoordinaten übergehen. Ein Vergleich der Resultate liefert die Behauptung. Genauer rechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2+y^2)) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\exp(-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2+y^2)) &= \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)|x\le 0\}} \exp(-(x^2+y^2))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{(0,\infty)\times(-\pi,\pi)} \exp(-r^2)\;r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-r^2)\;r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\pi\exp(-r^2)|_0^{\infty} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

□

13.1.8.9. Wir hätten dies Ergebnis auch mit unseren Resultaten zur Integration über Fastfaltigkeiten 12.4.5.10 erzwingen können, indem wir geeignete Integrationskarten verwenden, um $\sup_h \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\exp(-(x^2+y^2))$ mit dem Supremum über alle kompakt getragenen stetigen Funktionen $h:\mathbb{R}^2\to[0,1]$ auf zwei Weisen ausrechnen. So ist es zwar viel transparenter, aber die Frage ist dennoch berechtigt, ob das den Aufbau von so viel Theorie rechtfertigen kann. Sobald wir aber zur Fouriertheorie kommen, werden aber hoffentlich auch die letzten Zweifler von der Sinnhaftigkeit der Lebesgue'schen Integrationstheorie überzeugt werden.

Beispiel 13.1.8.10 (**Beweisvariante zur Integration über Fastfaltigkeiten**). Ich will nochmal auf unseren Beweis zur Integration über Fastfaltigkeiten 12.4.5.10 zurückgehen und ausführen, wie einfach er sich im Rahmen der Lebesgue'schen Integrationstheorie zu Ende bringen läßt. Ich gebe zu, daß das ziemlich überflüssig ist, da das in 13.1.9.2 eingeführte Flächenmaß einer Fastfaltigkeit ein viel stärkeres Hilfsmittel ist, aber sei's drum. Wir hatten beim Beweis von 12.4.5.10 eine endliche disjunkte Vereinigung kompakter Quader $Q\subset\mathbb{R}^k$ betrachtet, in unserer Anwendung den Definitionsbereich einer Integrationskarte. Wir hatten sie zerlegt als $Q = A\sqcup S\sqcup U$ mit $S \mathrel{\not\Subset} Q$ und $A,U \mathrel{\Subset} Q$ und so, daß S eine abzählbare Vereinigung von Teilmengen einer Minkowskidimension $\operatorname{mdim} S < k$ ist, nach 13.1.7.23 also eine Nullmenge. Wir hatten ein zweites Datum $P = B\sqcup T\sqcup V$ derselben Art zu unserer zweiten Karte konstruiert und es galt, die Gleichheit

$$\int_Q g = \int_P h$$

von Integralen stetiger Funktionen $g : Q \to \mathbb{R}$ und $h : P \to \mathbb{R}$ zu zeigen unter der Annahme, daß gilt $g|_A = 0$ und $h|_B = 0$ und daß es einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus

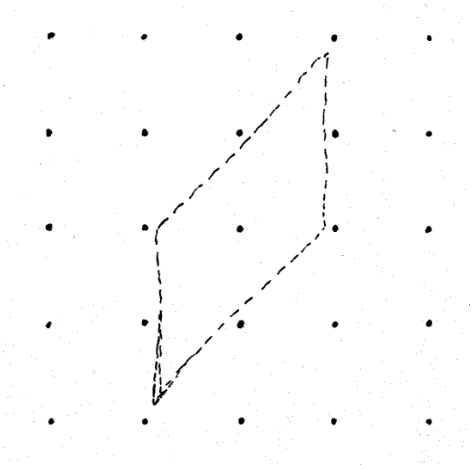
$$\kappa : Q^\circ \cap U \xrightarrow{\sim} P^\circ \cap V$$

gibt mit $g = (h \circ \kappa)|\det \mathrm{d}\kappa|$ auf $Q^\circ \cap U$, in unserer Anwendung den Kartenwechsel. Hier bezeichnet Q°, P° das jeweilige Innere. Um das im Rahmen der Lebesgue-Theorie zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß g als stetige Funktion auf einem Kompaktum integrierbar ist. Damit ist auch die Einschränkung von g auf jede meßbare Teilmenge von Q integrierbar. Da der Rand ∂Q eine Nullmenge ist, gilt für die Integrale $\int_Q g = \int_{Q^\circ} g$. Nun zerlegen wir Q° in die meßbaren Teilmengen

$$Q^\circ = (Q^\circ \cap A) \sqcup (Q^\circ \cap S) \sqcup (Q^\circ \cap U)$$

Wieder ist das Integral die Summe der Integrale der Einschränkungen. Wegen $g|A = 0$ und $\lambda(S) = 0$ finden wir also weiter $\int_{Q^\circ} g = \int_{Q^\circ \cap U} g$. In derselben Weise finden wir, daß $h|(P^\circ \cap V)$ integrierbar ist und daß gilt $\int_P h = \int_{P^\circ \cap V} h$. Die Gleichheit $\int_{Q^\circ \cap U} g = \int_{P^\circ \cap V} h$ folgt dann mit der Transformationsformel 13.1.8.1 direkt aus unseren Annahmen.

Übungen



Skizze zum Gitterpunktsatz einer konvexen zum Ursprung punktsymmetrischen Teilmenge der Ebene, die fast die Fläche 4 hat und dennoch außer dem Ursprung keinen Punkt des Gitters $\mathbb{Z}^2$ trifft. Der Gitterpunktsatz besagt, daß das ab einer Fläche > 4 nicht mehr möglich ist.

Übung 13.1.8.11 (**Gitterpunktsatz von Minkowski**). Für jede offene konvexe Teilmenge K eines $\mathbb{R}^n$ mit $x \in K \Rightarrow (-x) \in K$ und Lebesguemaß $\lambda(K) > 1$ enthält $2K$ außer dem Ursprung noch weitere Punkte aus $\mathbb{Z}^n$. Hinweis: Wir schreiben K als disjunkte Vereinigung der $K \cap (x + [0,1)^n)$ für $x \in \mathbb{Z}^n$. Aus Volumengründen gibt es $x \neq y \in \mathbb{Z}^n$ mit $x + K \cap y + K \neq \emptyset$, also $k, h \in K$ mit $k - h = x - y$, also $(x - y) \in 2K$. Die Bedingung K offen ist hier sogar

unnötig nach 13.1.8.16. Ist K kompakt, so reicht sogar die Annahme $\lambda(K) \geq 1$, denn dann ist das Bild von K in $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ abgeschlossen.

Übung 13.1.8.12. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge. Man zeige: Liefern zwei Borelmaße auf A dasselbe Integral für alle stetigen Funktionen auf A mit kompaktem Träger, so stimmen sie überein. Hinweis: Man verwende 13.1.8.4 und die Regularität 13.1.10.10.

Übung 13.1.8.13. Sei $W \Subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Man zeige: Liefern zwei Borelmaße auf W dasselbe Integral für alle glatten Funktionen auf W mit kompaktem Träger, so stimmen sie überein. Hinweis: Man verwende 13.1.8.4 und die Regularität 13.1.10.10 oder Übung 13.1.2.34 zum Vergleich von Maßen.

Übung 13.1.8.14. Man zeige: Gegeben eine meßbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda(cA) = |c|^n \lambda(A)$. Zum Beispiel hat eine Kugel vom doppelten Radius das achtfache Volumen.

Übung 13.1.8.15. Gegeben ein Polynom $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ mit $P \neq 0$ hat seine Nullstellenmenge $P^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ Lebesguemaß Null. Hinweis: Induktion über den Grad des Polynoms. Außerhalb der kritischen Stellen ist $P^{-1}(0)$ eine Untermannigfaltigkeit.

Übung 13.1.8.16. Jede konvexe Teilmenge K eines $\mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-meßbar, genauer ist $\bar{K} \backslash K^\circ$ eine Nullmenge. Hinweis: Man zeige zunächst, daß K entweder in einem echten affinen Teilraum von $\mathbb{R}^n$ enthalten ist oder aber einen inneren Punkt besitzt. Weiter zeige man im Fall, daß die Null ein innerer Punkt von K ist, daß gilt $\bar{K} \subset \lambda K^\circ$ für alle $\lambda > 1$. Schließlich ziehe man sich auf den Fall von beschränktem K zurück.

13.1.9 Flächenmaß einer Fastfaltigkeit

13.1.9.1. Ich erinnere aus 12.4.5.7 an die Begriffe einer Fastfaltigkeit und einer Integrationskarte.

Satz 13.1.9.2. *Auf jeder k-Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es genau ein topologisches Maß $\sigma = \sigma_M$ derart, daß für jede Integrationskarte $\varphi : Q \to M$ und jede topologisch meßbare Menge $A \subset \varphi(Q)$ gilt*

$$\sigma(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det(\mathrm{d}_x\varphi)^\top(\mathrm{d}_x\varphi)}\ \mathrm{d}^k x$$

mit dem Lebesgue-Integral über $\varphi^{-1}(A) \subset Q \subset \mathbb{R}^k$ auf der rechten Seite. Dieses Maß heißt das **Flächenmaß von** M. *Es ist ein Borelmaß.*

Beweis von Satz 13.1.9.2. Wie bereits in 13.1.4.24 erwähnt ist jede Teilmenge eines abzählbar basierten topologischen Raums abzählbar basiert für die Spurtopologie. Insbesondere gilt das für jede Teilmenge und a forteriori jede Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Nach 13.1.4.45 besitzt jede offene Überdeckung eines abzählbar basierten Raums eine abzählbare Teilüberdeckung. Folglich existiert eine Folge von Integrationskarten (Q_n, φ_n), deren Bilder unsere Fastfaltigkeit überdecken. Auf dem Bild jeder dieser Integrationskarten (Q, φ) liefert unsere Vorschrift ein topologisches Maß, den Vorschub unter φ des Produkts nach 13.1.5.25 des Lebesguemaßes $\mathrm{d}^k x$ mit der stetigen Funktion $\mathrm{vol}(\mathrm{d}_x\varphi) := \sqrt{\det(\mathrm{d}_x\varphi)^\top(\mathrm{d}_x\varphi)}$. Wir wollen diese Maße mit Hilfe von Übung 13.1.1.42 verkleben. Wir müssen dazu nur zeigen, daß gegeben zwei Integrationskarten (Q, φ) und (P, ψ) von M und $A \subset \varphi(Q) \cap \psi(P)$ meßbar gilt

$$\int_{\varphi^{-1}(A)} \mathrm{vol}(\mathrm{d}_x\varphi)\,\mathrm{d}^k x = \int_{\psi^{-1}(A)} \mathrm{vol}(\mathrm{d}_y\psi)\,\mathrm{d}^k y$$

Im Fall $A \subset \varphi(Q^\circ) \cap \psi(P^\circ)$ folgt das analog zu 12.4.3.1 aus der Transformationsformel 13.1.8.1, angewandt auf den Kartenwechsel. Es reicht also, im Fall $A = (\varphi(Q) \cap \psi(P)) \backslash (\varphi(Q^\circ) \cap \psi(P^\circ))$ zu zeigen, daß beide Seiten Null werden. Es reicht weiter, das für die linke Seite zu zeigen. Dafür hinwiederum reicht es zu zeigen, daß für die Restriktion $\varphi_\circ : Q^\circ \hookrightarrow M$ von φ auf Q° das Urbild $\varphi_\circ^{-1}(\psi(\partial P))$ von $\psi(\partial P)$ unter dieser Restriktion eine Nullmenge ist. Nach 12.3.4.13 angewandt auf die Mannigfaltigkeit $\varphi(Q^\circ)$ ist aber $(\varphi_\circ^{-1} \circ \psi) : \psi^{-1}(\varphi(Q^\circ)) \to Q^\circ$ stetig differenzierbar und nach 13.1.8.5 wird darunter $\psi^{-1}(\varphi(Q^\circ)) \cap \partial P$ in der Tat auf eine Nullmenge abgebildet. Wir zeigen nun noch, daß unser Flächenmaß ein Borelmaß ist. Es ist sicher endlich auf dem Bild jeder Integrationskarte. Da sich nun jedes Kompaktum aus M durch endlich viele Bilder von Integrationskarten überdecken läßt, ist unser Flächenmaß in der Tat endlich ist auf Kompakta und damit ein Borelmaß. □

13.1.9.3 (**Rückwärtskompatibilität zur Integration über Fastfaltigkeiten**). Gegeben eine k-Fastfaltigkeit M und eine stetige Funktion mit kompaktem Träger $f \in \mathcal{C}_!(M, \mathbb{R})$ gilt die Gleichheit

$$\int_M f = \int_M f(x)\sigma\langle x\rangle$$

des Integrals nach 12.4.5.10 und des Integrals der Funktion f über den Maßraum $(M, \mathrm{Borel}(M), \sigma)$ in Bezug auf das Flächenmaß σ auf M aus 13.1.9.2. Unsere Funktion f ist auf diesem Maßraum integrierbar, da sie meßbar ist und betragsmäßig beschränkt durch die integrierbare Funktion $(\sup|f|)[\mathrm{supp}\, f]$. Folglich ist auch die rechte Seite eine wohldefinierte reelle Zahl. Die behauptete Gleichheit

folgt für f mit Träger im Bild einer Integrationskarte (Q, φ) unmittelbar aus der Erkenntnis $\sigma|_{\varphi(Q)} = \varphi_*\big((\operatorname{vol} \mathrm{d}_x\varphi)\, \mathrm{d}^k x\big)$ und damit

$$\int_M f(x)\sigma\langle x\rangle = \int_{\varphi(Q)} f(x)\sigma\langle x\rangle = \int_Q (f \circ \varphi)(\operatorname{vol} \mathrm{d}_x\varphi)\, \mathrm{d}^k x = \int_M f$$

Im allgemeinen folgt sie dann, da beide Seiten $\mathbb{R}$-linear sind und wir jede Funktion $f \in \mathcal{C}_!(M, \mathbb{R})$ mithilfe einer Teilung der Eins als Summe endlich vieler Funktionen aus $\mathcal{C}_!(M, \mathbb{R})$ schreiben können, deren Träger jeweils im Bild nur einer Integrationskarte liegt.

13.1.9.4 (**Diskussion der Notation**). Der Buchstabe σ steht für englisch und französisch „surface“. Die Bezeichnung suggeriert zwar die Vorstellung zweidimensionaler Fastfaltigkeiten, aber wir benutzen sie auch in anderen Dimensionen. Gegeben eine integrierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ notieren wir ihr Integral bezüglich des Flächenmaßes

$$\int_M f = \int_M f\sigma = \int_M f(x)\ \sigma\langle x\rangle$$

In der Literatur ist es üblich, stattdessen $\mathrm{d}\sigma$ hinter das Integral zu schreiben. Man findet auch die Notationen $\mathrm{d}S$ und in der deutschen Literatur $\mathrm{d}\omega$ oder $\mathrm{d}\mathrm{O}$ mit ω oder O wie „Oberfläche“.

13.1.9.5 (**Rückwärtskompatibilität zum Lebesguemaß**). Wie bereits beim Beweis des Satzes zum Flächenmaß 13.1.9.2 diskutiert existiert für jede Fastfaltigkeit eine Folge von Integrationskarten (Q_i, φ_i), deren Bilder unsere Fastfaltigkeit überdecken. Insbesondere ist jede k-Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ eine abzählbare Vereinigung von Kompakta und damit eine borelmeßbare Teilmenge. Wir zeigen nun, daß im Fall $k = n$ unser Flächenmaß aus 13.1.9.2 mit dem auf M eingeschränkten Lebesguemaß des $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt, in Formeln

$$\sigma_M = \lambda|_M$$

Gegeben eine Folge von Integrationskarten wie zuvor sind die Bilder der Ränder $\varphi_i(\partial Q_i)$ Nullmengen für beide Maße und dasselbe folgt für ihre Vereinigung. Damit ist a forteriori das Komplement in M der Vereinigung $U := \bigcup_i \varphi_i(Q_i^\circ)$ eine Nullmenge für beide Maße und es reicht $\sigma_M|_U = \lambda|_U$ zu zeigen. Nun haben wir sowohl $U \Subset M$ als auch $U \Subset \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist U selbst eine n-Fastfaltigkeit und jede Integrationskarte von U ist auch eine Integrationskarte von M. Für jeden kompakten Quader $Q \subset U$ haben wir also $\sigma_M(Q) = \lambda(Q)$. Da nun diese kompakten Quader ein zweischnittstabiles Erzeugendensystem der σ-Algebra $\operatorname{Borel}(U)$ bilden und unsere Maße $\sigma_M|_U$ und $\lambda|_U$ für dieses Erzeugendensystem beide σ-endlich sind, folgt mit Übung 13.1.2.34 wie gewünscht $\sigma_M|_U = \lambda|_U$.

Beispiel 13.1.9.6. Man kriegt also salopp gesprochen dasselbe Kugelvolumen heraus, egal ob man wie in 12.4.6.7 eine Integrationskarte zu Hilfe nimmt oder ob man vielmehr mit dem Prinzip von Cavalieri 13.1.7.12 arbeitet.

Beispiel 13.1.9.7. Es folgt sofort, daß für $k < n$ die Teilmenge $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist. Es folgt weiter mit 10.5.8.8, daß das Lebesguemaß einer Kreisscheibe D vom Radius r in der Tat gegeben wird durch $\lambda^2(D) = \pi r^2$. Ist schließlich $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall oder allgemeiner eine meßbare Teilmenge und $f : I \to [0, \infty]$ stetig oder allgemeiner meßbar, so folgt für das **Volumen des Rotationskörpers** $R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in I,\ x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$ die Formel

$$\lambda^3(R) = \pi \int_I f(z)^2 \,\mathrm{d}z$$

Sie verallgemeinert unsere Formel aus 12.4.6.10 im Fall, daß I ein kompaktes Intervall ist und $f : I \to (0, \infty)$ stetig differenzierbar. Das ist ein Spezialfall der Rückwärtskompatibilität zum Lebesguemaß 13.1.9.5.

Übungen

Übung 13.1.9.8. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-Fastfaltigkeit. Man zeige: Ist $K \subset \mathbb{R}^{k-1}$ ein kompakter Quader und $\varphi : K \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit Bild $\varphi(K) \subset M$, so ist $\varphi(K)$ für das Flächenmaß von M eine Nullmenge.

Übung 13.1.9.9. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \to (0, \infty)$ stetig differenzierbar. So ist die **Mantelfläche**

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times I \mid x^2 + y^2 = (f(z))^2\}$$

eine zweidimensionale Randfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$. Man zeige man für das Bildmaß des Oberflächenmaßes unter der orthogonalen Projektion $p : M \to I$ unserer Mantelfläche auf die z-Achse die Formel $p_*\sigma = 2\pi f(z)\sqrt{1 + (f'(z))^2}\,\mathrm{d}z$. Ist speziell M die Einheitskugel, so zeige man $p_*\sigma = 2\pi\,\mathrm{d}z$ und berechne nochmals die Oberfläche der Einheitskugel.

Übung 13.1.9.10 (**Zwiebelformel**). Ist $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ die Einheitssphäre mit ihrem Flächenmaß σ, so ist unter der Multiplikationsabbildung $\mathrm{mult} : \mathbb{R}_{>0} \times S^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \backslash 0$ das Produktmaß $r^{n-1}\,\mathrm{d}r \boxtimes \sigma$ verwandt zum Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n \backslash 0$, in Formeln

$$\mathrm{mult} : r^{n-1}\,\mathrm{d}r \boxtimes \sigma \rightsquigarrow \lambda^n$$

Hinweis: Man rechne mit einer beliebigen Integrationskarte von S^{n-1} und erweitere sie zu einer Integrationskarte von $\mathbb{R}^n \backslash 0$. Man beachte, daß für eine differenzierbare Kurve, die ganz in der Einheitssphäre verläuft, der Geschwindigkeitsvektor stets auf dem Ortsvektor senkrecht steht.

Übung 13.1.9.11. Genau dann ist die Funktion $\mathbb{R}^n \to [0,\infty]$, $x \mapsto \|x\|^\alpha$ für gegebenes $\alpha \in \mathbb{R}$ integrierbar auf dem Komplement eines und jedes offenen Balls um den Ursprung, wenn gilt $\alpha < (-n)$. Hinweis: Zwiebelformel 13.1.9.10.

Übung 13.1.9.12. Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter, als da heißt das Gruppenerzeugnis einer Basis von $\mathbb{R}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Genau dann konvergiert $\sum_{\omega\in\Gamma\setminus 0} \|\omega\|^\alpha$, wenn gilt $\alpha < (-n)$. Hinweis: 13.1.9.11.

13.1.10 Regularität von Borelmaßen

Satz 13.1.10.1 (Regularität des Lebesguemaßes). *Für das Lebesguemaß λ auf dem $\mathbb{R}^n$ und jede Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\lambda(A) = \inf_{\substack{U\supset A \\ U \text{ offen in } \mathbb{R}^n}} \lambda(U) = \sup_{\substack{K\subset A \\ K \text{ kompakt}}} \lambda(K)$$

13.1.10.2. Das „umgekehrte“ Approximieren durch Kompakta von außen oder durch offene Mengen von innen ist nicht möglich. Das zeigen bereits die Fälle der Mengen M aller rationalen beziehungsweise aller irrationalen Punkte in $[0,1]$.

Beispiel 13.1.10.3. Das Maß auf der Zahlengrade, das allen abzählbaren Teilmengen Null zuordnet und allen überabzählbaren Borelmengen unendlich, ist kein Borelmaß. In der Tat ist es nicht endlich auf allen Kompakta. Für dieses Maß gilt die Aussage des Satzes auch nicht.

Beweis. Wir betrachten in $\mathbb{R}^n$ das Mengensystem aller endlichen disjunkten Vereinigungen von „halboffenen Quadern“, worunter wir Teilmengen der Gestalt $(a_1,b_1] \times \ldots \times (a_n,b_n]$ verstehen. Sie bilden einen Mengenring $\mathcal{Q}$, der die Borel'sche σ-Algebra erzeugt. Nach dem Maßfortsetzungssatz von Caratheodory 13.1.2.11 gibt es also für jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda(M) < \infty$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine überdeckende Folge Q_ν in $\mathcal{Q}$ mit

$$\lambda(M) \le \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(Q_\nu) \le \lambda(M) + \varepsilon$$

Weiter finden wir für jedes dieser Q_ν offensichtlich eine offene Obermenge U_ν mit $\lambda(Q_\nu) \le \lambda(U_\nu) \le \lambda(Q_\nu) + 2^{-\nu}\varepsilon$. Für die offene Menge $U = \bigcup_\nu U_\nu$ folgt dann

$$\lambda(M) \le \lambda(U) \le \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(U_\nu) \le \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(Q_\nu) + 2^{-\nu}\varepsilon \le \lambda(M) + 3\varepsilon$$

Da das für alle $\varepsilon > 0$ gilt, ist das Maß von M in der Tat das Infimum über die Maße aller offenen Mengen, die M umfassen. Um die zweite Behauptung zu zeigen, wählen wir eine Folge $L_0 \subset L_1 \subset \ldots$ kompakter Teilmengen von X mit

$\bigcup L_i = \mathbb{R}^n$. Nach Übung 13.1.1.37 gilt $\lambda(M) = \lim_{i\to\infty} \lambda(M \cap L_i)$ und es reicht folglich, die zweite Behauptung für alle $M \cap L_i$ zu zeigen. In anderen Worten dürfen wir also annehmen, daß es ein Kompaktum L gibt mit $M \subset L$. Nach dem schon bewiesenen Teil und mit der Notation $M^c := L \backslash M$ gilt für alle meßbaren Teilmengen $M \subset L$ a forteriori

$$\lambda(M) = \inf_{M \subset U,\, U \Subset L} \lambda(U) = \inf_{M^c \supset A,\, A \Subset L} \lambda(L) - \lambda(A)$$

und wir finden $\lambda(M^c) = \lambda(L) - \lambda(M) = \sup_{M^c \supset A,\, A \Subset L} \lambda(A)$ wie gewünscht. $\square$

13.1.10.4. Im folgenden zeigen wir, daß das vorhergehende analog für beliebige Borelmaße auf abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffräumen gilt. Das ist für den Rest dieser Vorlesung allerdings nicht mehr relevant. Wir beginnen mit topologischen Vorbereitungen.

13.1.10.5. Ein topologischer Raum heißt **lokal kompakt**, wenn sich jede Umgebung jedes Punktes zu einer kompakten Umgebung desselben Punktes verkleinern läßt.

13.1.10.6 (**Diskussion der Terminologie**). Diese Terminologie ist nicht unumstritten. Viele Autoren schreiben „lokalkompakt“ zusammen und nennen einen Raum „lokalkompakt“, wenn er Hausdorff ist und jeder Punkt darin eine kompakte Umgebung besitzt. Nach Übung 13.1.10.15 ist ein Raum „lokalkompakt“ genau dann, wenn er Hausdorff ist und lokal kompakt im Sinne unserer Definition 13.1.10.5. Ich befolge die Konvention, nach der für jede Eigenschaft (E) topologischer Räume ein Raum „lokal (E)“ heißt, wenn sich jede Umgebung jedes Punktes zu einer Umgebung deeslben Punktes mit der Eigenschaft (E) verkleinern läßt.

Beispiele 13.1.10.7. Der $\mathbb{R}^n$ ist lokal kompakt. Jede abgeschlossene Teilmenge eines lokal kompakten Raums ist lokal kompakt. Jede offene Teilmenge eines lokal kompakten Raums ist lokal kompakt. Jeder kompakte Hausdorffraum ist lokal kompakt nach Übung 13.1.10.15.

13.1.10.8. Wir erinnern aus 17.6.2.12, daß in einem Hausdorffraum jedes Kompaktum abgeschlossen ist. Wir erinnern aus 12.4.1.12, daß jede endliche Vereinigung von Kompakta kompakt ist.

13.1.10.9. In einem lokal kompakten Hausdorffraum liegt jede kompakte Menge in einer offenen Menge mit kompaktem Abschluß. In der Tat besitzt jeder Punkt eine offene Umgebung mit kompaktem Abschluß und endlich viele solcher offenen Umgebungen überdecken bereits unsere kompakte Menge.

Satz 13.1.10.10 (Regularität von Borelmaßen). *Gegeben ein Borelmaß λ auf einem abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffraum X gelten für jede Borelmenge $M \subset X$ die Identitäten*

$$\lambda(M) = \inf_{\substack{U \supset M \\ U \text{ offen in } X}} \lambda(U) = \sup_{\substack{K \subset M \\ K \text{ kompakt}}} \lambda(K)$$

13.1.10.11. Ein Borelmaß auf einem Hausdorffraum heißt **regulär**, wenn das Maß jeder offenen Menge das Supremum über die Maße der in ihr enthaltenen Kompakta ist und das Maß jeder Borelmenge das Infimum über die Maße der sie umfassenden offenen Mengen. Satz 13.1.10.10 zeigt insbesondere, daß auf einem abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffraum jedes Borelmaß regulär ist.

Ergänzung 13.1.10.12. Der Beweis unseres Satzes 13.1.10.10 zeigt unter anderem auch, daß gegeben ein reguläres Borelmaß auf einem Hausdorffraum das Maß jeder σ-endlichen Borelmenge das Supremum über die Maße der in ihr enthaltenen Kompakta sein muß.

Beweis. Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. Der von den Kompakta eines Hausdorffraums erzeugte Mengenring $\mathcal{Q}$ läßt sich nach Übung 13.1.2.33 beschreiben als das Mengensystem aller endlichen disjunkten Vereinigungen von Komplementen eines Kompaktums in einem anderen.

2. In einem abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffraum X ist jede offene Menge $U \Subset X$ die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Kompakta. Sei in der Tat $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis der Topologie. Für jeden Punkt $p \in U$ finden wir eine offene Umgebung V von p mit $\bar{V} \subset U$ und $\bar{V}$ kompakt. Da $V \Subset X$ eine Vereinigung von Mengen unserer Basis ist, finden wir ein n mit $p \in U_n \subset V$ und folglich $\bar{U}_n$ kompakt und $\bar{U}_n \subset U$. Die Vereinigung dieser $\bar{U}_n$ ist dann U.

3. Wir zeigen, daß sich jede Menge $Q \in \mathcal{Q}$ als Schnitt einer absteigenden Folge offener Mengen mit kompaktem Abschluß schreiben läßt. Es reicht offensichtlich, das für jedes Komplement Q eines Kompaktum in einem anderen zu zeigen alias für den Schnitt eines Kompaktums mit einer offenen Menge. Es reicht dann offensichtlich sogar, das für jedes Kompaktum Q zu zeigen. Nun liegt nach 13.1.10.9 jede kompakte Menge Q in einer offenen Menge U mit kompaktem Abschluß $\bar{U}$. Dann ist $(U\backslash Q)$ nach Schritt 2 Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Kompakta $L_0 \subset L_1 \subset \ldots$ und damit Q der Schnitt der absteigenden Folge offener Mengen $(U\backslash L_0) \supset (U\backslash L_1) \subset \ldots$

4. Gegeben ein Borelmaß λ auf X existiert nach 13.1.1.38 also für jedes $Q \in \mathcal{Q}$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Obermenge U mit $\lambda(Q) \le \lambda(U) \le \lambda(Q) + \varepsilon$. Nun erzeugt der Mengenring $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(X)$ unter unseren Annahmen die borelsche σ-Algebra. Indem wir die Beschreibung der größten Maßfortsetzung 13.1.2.15 in Verbindung mit der Eindeutigkeitsaussage aus dem Satz von Caratheodory 13.1.2.11 auf diesen Mengenring anwenden, erhalten wir für jede Borelmenge $M \subset X$ die Identität $\lambda(M) = \inf\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(Q_\nu)\right)$ mit dem Infimum über alle Folgen Q_ν in $\mathcal{Q}$ mit $M \subset \bigcup_\nu Q_\nu$. Für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir demnach eine

überdeckende Folge Q_ν in $\mathcal{Q}$ mit

$$\lambda(M) \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(Q_\nu) \leq \lambda(M) + \varepsilon$$

Weiter finden wir für jedes dieser Q_ν eine offene Obermenge U_ν mit $\lambda(Q_\nu) \leq \lambda(U_\nu) \leq \lambda(Q_\nu) + 2^{-\nu}\varepsilon$. Für die offene Menge $U = \bigcup_\nu U_\nu$ folgt dann

$$\lambda(M) \leq \lambda(U) \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(U_\nu) \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(Q_\nu) + 2^{-\nu}\varepsilon \leq \lambda(M) + 3\varepsilon$$

Da das für alle $\varepsilon > 0$ gilt, ist das Maß von M in der Tat das Infimum über die Maße aller offenen Mengen, die M umfassen.

5. Um die zweite Behauptung zu zeigen, wählen wir eine Folge $L_0 \subset L_1 \subset \ldots$ kompakter Teilmengen von X mit $\bigcup L_i = X$. Nach Übung 13.1.1.37 gilt $\lambda(M) = \lim_{i\to\infty} \lambda(M \cap L_i)$ und es reicht folglich, die zweite Behauptung für alle $M \cap L_i$ zu zeigen. In anderen Worten dürfen wir also annehmen, daß es ein Kompaktum L gibt mit $M \subset L$. Nun ist auch L ein abzählbar basierter lokal kompakter Hausdorffraum. Nach dem schon bewiesenen Teil und mit der Notation $M^c := L \backslash M$ gilt für alle meßbaren Teilmengen $M \subset L$ also

$$\lambda(M) = \inf_{M \subset U,\, U \Subset L} \lambda(U) = \inf_{M^c \supset A,\, A \Subset L} \lambda(L) - \lambda(A)$$

und wir finden $\lambda(M^c) = \lambda(L) - \lambda(M) = \sup_{M^c \supset A,\, A \Subset L} \lambda(A)$ wie gewünscht. $\square$

Übungen

Übung 13.1.10.13. Eine Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge in Bezug auf das Lebesguemaß genau dann, wenn sie sich für jedes $\varepsilon > 0$ durch eine Folge von kompakten Quadern Q_n überdecken läßt mit $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{vol} Q_n < \varepsilon$.

Übung 13.1.10.14 (**Disjunkte Umgebungen disjunkter Kompakta**). Sind A, B disjunkte kompakte Teilmengen eines Hausdorffraums X, so gibt es disjunkte offene Mengen $U, V \Subset X$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$. Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß A nur aus einem Punkt besteht.

Übung 13.1.10.15. In einem kompakten Hausdorffraum läßt sich jede Umgebung eines Punktes zu einer abgeschlossenen Umgebung desselben Punktes verkleinern. Hinweis: 13.1.10.14. Man folgere, daß ein Hausdorffraum, in dem jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt, bereits lokal kompakt ist.

13.2 Funktionenräume und Fourierreihen

13.2.1 Lebesgueintegral vektorwertiger Funktionen

13.2.1.1. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Eine Abbildung $f : X \to V$ heißt **integrierbar**, wenn sie meßbar ist und für eine und jede Norm auf V gilt $\int \|f\| < \infty$. Unter diesen Umständen erklären wir das **Integral** unserer Funktion f als den eindeutig bestimmten Vektor

$$v = \int f = \int_X f(x)\mu\langle x\rangle$$

mit der Eigenschaft $L(v) = \int L(f(x))\mu\langle x\rangle$ für jede Linearform $L : V \to \mathbb{R}$. Um die Existenz und Eindeutigkeit von v zu zeigen, können wir etwa $V = \mathbb{R}^n$ annehmen und müssen nur prüfen, daß dann das komponentenweise Integral den einzig möglichen Vektor v mit den angeführten Eigenschaften liefert. Das ist leicht zu sehen.

13.2.1.2. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Die integrierbaren V-wertigen Funktionen auf X bilden einen Untervektorraum $\mathcal{L}^1_V(X;\mu) \subset \mathrm{Ens}(X, V)$ im Raum aller V-wertigen Funktionen auf X. Ist V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum, so bilden sie sogar einen komplexen Untervektorraum. Das Integral ist dann eine $\mathbb{R}$-lineare beziehungsweise $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\int : \mathcal{L}^1_V(X;\mu) \to V$$

Im Fall $V = \mathbb{C}$ bezeichnen wir den komplexen Vektorraum der komplexwertigen integrierbaren Funktionen auf X mit $\mathcal{L}^1(X;\mu)$.

13.2.1.3 (**Rückwärtskompatibilität**). In 12.5.3.3 hatten wir bereits eine Verallgemeinerung des Integrationsbegriffs zu einem Integral für stetige Funktionen auf kompakten reellen Intervallen mit Werten in endlichdimensionalen reellen Vektorräumen besprochen. Obige Variante liefert offensichtlich dasselbe Integral für stetige Funktionen.

Übungen

Übung 13.2.1.4. Unsere Sätze über dominierte Konvergenz und Integration auf Produkträumen gelten unverändert auch für Funktionen mit Werten in endlichdimensionalen reellen Vektorräumen. Für jede lineare Abbildung $\Lambda : V \to W$ in einen weiteren endlichdimensionalen reellen Vektorraum gilt weiter die Formel $\int(\Lambda \circ f) = \Lambda\left(\int f\right)$.

Übung 13.2.1.5. Sei (X, μ) ein Maßraum. Nimmt eine integrierbare Abbildung $f : X \to V$ mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum nur endlich viele Werte an, so haben wir

$$\int_X f(x)\mu\langle x\rangle = \sum_{v\neq 0} \mu(f^{-1}(v))\, v$$

Übung 13.2.1.6. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Gegeben eine integrierbare Abbildung $f : X \to V$ mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum gilt für jede Norm $\| \ \|$ auf V die Abschätzung

$$\left\| \int f \right\| \leq \int \|f\|$$

Hinweis: Man zeige das zunächst für meßbare Stufenfunktionen und argumentiere dann mit dem Satz über dominierte Konvergenz.

Ergänzung 13.2.1.7. Im Fall komplexwertiger Funktionen und der Standardnorm auf $\mathbb{C}$ kann man die Abschätzung $|\int f| \leq \int |f|$ aus 13.2.1.6 auch einfacher zeigen, indem man $\lambda \in \mathbb{C}$ wählt mit $|\lambda| = 1$ und $\lambda \int f > 0$, woraus dann folgt

$$\left|\int f\right| = \lambda \int f = \int \lambda f = \int \mathrm{Re}(\lambda f) \leq \int |\lambda f| = \int |f|$$

13.2.2 Quadratintegrierbare Funktionen

13.2.2.1. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt **quadratintegrierbar**, wenn sie meßbar ist und ihr Betragsquadrat integrierbar ist, in Formeln $\int |f|^2 < \infty$. Die Menge $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(X; \mu)$ aller quadratintegrierbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ ist ein Untervektorraum im $\mathbb{C}$-Vektorraum aller meßbaren komplexwertigen Funktionen auf X, denn wir haben $2|f| \cdot |g| \leq |f|^2 + |g|^2$ und folglich $|f+g|^2 \leq |f|^2+2|f|\cdot|g|+|g|^2 \leq 2(|f|^2+|g|^2)$. Dieselben Abschätzungen zeigen, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \langle\ ,\ \rangle : & \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2 & \to & \mathbb{C} \\ & (f, g) & \mapsto & \langle f, g\rangle = \int \bar{f} g \end{array}$$

wohldefiniert ist und schieflinear im ersten Eintrag sowie linear im zweiten. Es gilt auch offensichtlich $\langle f, f\rangle \geq 0$ für alle $f \in \mathcal{L}^2$. Dennoch liefert unsere Paarung im allgemeinen kein Skalarprodukt auf $\mathcal{L}^2$ im Sinne von 17.6.4.10, da aus $\langle f, f\rangle = 0$ nicht notwendig folgt $f = 0$. Um einen Skalarproduktraum zu erhalten, betrachten wir den Untervektorraum $\mathcal{R} := \{f \in \mathcal{L}^2 \mid \langle f, g\rangle = 0\ \forall g \in \mathcal{L}^2\}$, das sogenannte Radikal. Unsere hermitesche Form induziert dann offensichtlich und formal nach Übung 4.4.5.9 ein Skalarprodukt auf dem Quotientenvektorraum

$$\mathrm{L}^2(X, \mu) := \mathcal{L}^2/\mathcal{R}$$

13.2.2.2. Ich erinnere an den Begriff der Summierbarkeit von Familien 11.3.1.5. Gegeben ein normierter Vektorraum V nennt man eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren aus V **summierbar mit Summe** $s \in V$ und schreibt $\sum_{i\in I} v_i = s$, wenn es für jede Umgebung U von s eine endliche Teilmenge $I_U \subset I$ gibt derart, daß für jede endliche Obermenge J von I_U in I gilt $\sum_{i\in J} v_i \in U$.

Satz 13.2.2.3 (**Fourierreihen quadratintegrierbarer Funktionen**). *Sei das Intervall* $[0, 2\pi]$ *mit dem auf Gesamtmaß Eins normierten Lebesguemaß* $\mu := \mathrm{d}t/2\pi$ *versehen und* $\mathbb{Z}$ *mit dem Zählmaß* ζ. *So liefert* $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ *einen Isomorphismus von Skalarprodukträumen*

$$\mathrm{L}^2(\mathbb{Z}, \zeta) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2([0, 2\pi], \mu)$$

Insbesondere und noch genauer ausgeschrieben ist für jede Familie $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *von komplexen Zahlen mit* $\sum |c_n|^2 < \infty$ *die Familie der Nebenklassen* $c_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} + \mathcal{R}$ *summierbar in* $\mathrm{L}^2([0, 2\pi], \mu)$.

13.2.2.4. Den Beweis dieses Satzes müssen wir zurückstellen, bis wir die Theorie weiter ausgebaut haben. Er wird dann im Anschluß an 13.2.6.4 ausgeführt. Im folgenden geben wir alternative Beschreibungen unserer Räume $\mathrm{L}^2(X, \mu)$, die eine bessere Anschauung geben mögen und sich auch sonst als nützlich erweisen.

Definition 13.2.2.5. Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und Y eine Menge. Auf der Menge $\mathrm{Ens}(X, Y)$ aller Abbildungen von unserem Maßraum X in die Menge Y können wir eine Äquivalenzrelation $\sim_\mu$ erklären durch die Vorschrift

$$f \sim_\mu g \Leftrightarrow \{\exists N \in \mathcal{M} \text{ mit } \mu(N) = 0 \text{ und } f(x) = g(x)\ \forall x \in X \backslash N\}$$

In Worten sind also Abbildungen f, g äquivalent, wenn sie außerhalb einer Nullmenge übereinstimmen. Die Äquivalenzklassen von $\sim_\mu$ heißen **μ-fast überall definierte Abbildungen** von X nach Y. Wir notieren fast überall definierte Abbildungen

$$f : X \dashrightarrow Y$$

Wenn wir betonen wollen, daß eine Abbildung im ursprünglichen Sinne zu verstehen ist, sprechen wir von einer **überall definierten Abbildung**. Die Menge aller μ-fast überall definierten Abbildungen von X nach Y notieren wir

$$\mathrm{Ens}_\mu(X, Y) := \mathrm{Ens}(X, Y)/\sim_\mu$$

13.2.2.6. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Gilt eine Aussage für alle $x \in X$ außerhalb einer Nullmenge, so sagt man auch, die Aussage gelte **fast überall** oder genauer **μ-fast überall**.

13.2.2.7 (**Nachschalten einer überall definierten Abbildung**). Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Gegeben eine überall definierte Abbildung $h : Y \to Z$ von Mengen liefert das Nachschalten von h eine wohlbestimmte Abbildung

$$h\circ : \mathrm{Ens}_\mu(X, Y) \to \mathrm{Ens}_\mu(X, Z)$$

13.2.2.8 (**Vektorräume von fast überall definierten Funktionen**). Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Ist K ein Körper, so bildet im Vektorraum $\mathrm{Ens}(X, K)$ der K-wertigen Funktionen auf X die Teilmenge

$$\mathcal{N} := \{f : X \to K \mid f \sim_\mu 0\}$$

der fast überall verschwindenden Funktionen einen Untervektorraum. Offensichtlich ist auch $f \sim_\mu g$ gleichbedeutend zu $(f - g) \in \mathcal{N}$. Folglich induziert die kanonische Surjektion $\mathrm{Ens}(X, K) \twoheadrightarrow \mathrm{Ens}_\mu(X, K)$ eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}(X, K)/\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_\mu(X, K)$$

und die Menge $\mathrm{Ens}_\mu(X, K)$ der fast überall definierten K-wertigen Funktionen besitzt genau eine Struktur als K-Vektorraum derart, daß die kanonische Surjektion $\mathrm{Ens}(X, K) \twoheadrightarrow \mathrm{Ens}_\mu(X, K)$ linear ist.

13.2.2.9 (**Diskussion der Terminologie**). Den Begriff *fast überall* verwende ich in zwei Bedeutungen: Auf einem Maßraum X als Abkürzung für „die Ausnahmen bilden eine Nullmenge“, auf einer beliebigen Menge X als Abkürzung für „die Ausnahmen bilden eine endliche Menge“. Mir ist keine griffige Terminologie eingefallen, die diese Unschärfe ausräumt. Ich kann nur hoffen, daß aus dem Kontext erschlossen werden kann, welche Bedeutung im Einzelfall gemeint ist.

13.2.2.10 (**Operationen mit fast überall definierten Funktionen**). Man kann reellwertige oder auch komplexwertige fast überall definierte Funktionen addieren und multiplizieren, man darf beim Rechnen mit fast überall definierten Funktionen sogar auch dann noch den Quotienten f/g bilden, falls g nur fast überall von Null verschieden ist. Es ist sinnvoll, von einer Folge fast überall definierter Funktionen zu sagen, daß sie fast überall punktweise gegen eine weitere fast überall definierte Funktion konvergiert. Man kann die Verknüpfung $g \circ f$ einer fast überall definierten Funktion f mit einer überall definierten Funktion g bilden und erhält so wieder eine fast überall definierte Funktion. Nicht sinnvoll ist das Auswerten einer fast überall definierten Funktion an einem Punkt, es sei denn, der fragliche Punkt habe positives Maß.

Definition 13.2.2.11. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und Y ein Meßraum. Eine fast überall definierte Abbildung $f : X \dashrightarrow Y$ heißt **meßbar**, wenn sie einen meßbaren Repräsentanten besitzt. Wir notieren die Menge der meßbaren fast überall definierten Abbildungen

$$\mathrm{Meß}_\mu(X, Y)$$

13.2.2.12. Ist unser Maßraum nicht vollständig, so kann eine meßbare fast überall definierte Abbildung durchaus auch nicht-meßbare Repräsentanten haben.

13.2.2.13. Gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und eine meßbare überall definierte Abbildung $h : Y \to Z$ induziert das Nachschalten von h nach 13.2.2.7 eine wohldefinierte Abbildung

$$h\circ : \mathrm{Meß}_\mu(X, Y) \to \mathrm{Meß}_\mu(X, Z)$$

Definition 13.2.2.14. Gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ setzen wir

$$\mathrm{L}^1(X; \mu) := \mathrm{im}(\mathcal{L}^1(X; \mu) \to \mathrm{Ens}_\mu(X, \mathbb{C}))$$

Die Elemente von L^1 sind mithin alle μ-fast überall definierten komplexwertigen Funktionen auf X mit mindestens einem integrierbaren Repräsentanten.

13.2.2.15. Es ist etwas unglücklich, daß eine L^1-Funktion damit genau genommen gar keine Funktion ist sondern vielmehr eine Äquivalenzklasse von Funktionen. Der Buchstabe L steht in diesem Zusammenhang für „Lebesgue“.

13.2.2.16. Gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ verschwindet das Integral auf allen fast überall verschwindenden integrierbaren Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(X; \mu) \cap \mathcal{N}$ und induziert mithin eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\int : \mathrm{L}^1(X; \mu) \to \mathbb{C}$$

13.2.2.17. Gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und zwei fast überall gleiche meßbare Funktionen $f, g : X \to \mathbb{C}$ sind auch $|f|, |g| : X \to \mathbb{C}$ meßbar und fast überall gleich nach 13.2.2.7 und 13.2.2.13.

Lemma 13.2.2.18. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty]$ eine nichtnegative meßbare Funktion. Genau dann gilt $\int f = 0$, wenn f außerhalb einer Nullmenge verschwindet.*

Beweis. Verschwindet f außerhalb von einer Nullmenge, so gilt offensichtlich $\int f = 0$. Gilt umgekehrt $\int f = 0$, so hat $f^{-1}([1/n, \infty])$ Maß Null für alle n, und damit hat auch $f^{-1}((0, \infty])$ Maß Null als abzählbare Vereinigung von Mengen vom Maß Null. □

Satz 13.2.2.19. *Gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ist $\|g\|_1 := \int |g|$ eine Norm auf dem komplexen Vektorraum $\mathrm{L}^1(X)$.*

Beweis. Wir überlassen alles dem Leser bis auf den Nachweis der Implikation $\|g\|_1 = 0 \Rightarrow g = 0$. Per definitionem haben wir $\|g\|_1 = \int |\tilde{g}|$ für einen und jeden integrierbaren Repräsentanten $\tilde{g} : X \to \mathbb{C}$ von g. Aus $\|g\|_1 = \int |\tilde{g}| = 0$ folgt nun erst $|\tilde{g}| \sim_\mu 0$ nach 13.2.2.18 und dann offensichtlich $\tilde{g} \sim_\mu 0$ und dann aus den Definitionen $g = 0$. □

Definition 13.2.2.20. Gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ setzen wir

$$\mathrm{L}^2(X;\mu) := \mathrm{im}(\mathcal{L}^2(X;\mu) \to \mathrm{Ens}_\mu(X, \mathbb{C}))$$

Die Elemente von L^2 sind mithin alle μ-fast überall definierten komplexwertigen Funktionen auf X mit mindestens einem quadratintegrierbaren Repräsentanten.

13.2.2.21. Wieder ist es etwas unglücklich, daß eine L^2-Funktion damit genau genommen gar keine Funktion ist, sondern vielmehr eine Äquivalenzklasse von Funktionen.

Satz 13.2.2.22. *Gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und $f, g \in \mathrm{L}^2(X)$ haben wir $\bar{f}g \in \mathrm{L}^1(X)$ und $\langle f, g\rangle := \int \bar{f}g$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathrm{L}^2(X)$.*

Beweis. Dem Leser überlassen. Das Produkt ist in $\mathrm{Ens}_\mu(X, \mathbb{C})$ zu verstehen. □

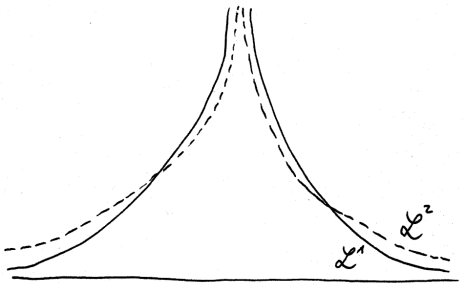
Lemma 13.2.2.23. *Gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ induziert die kanonische Surjektion $\mathcal{L}^2(X;\mu) \to \mathrm{L}^2(X;\mu)$ einen Isomorphismus*

$$\mathrm{L}^2(X, \mu) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2(X;\mu)$$

Beweis. Wir hatten in 13.2.2.1 den Raum $\mathrm{L}^2(X, \mu) := \mathcal{L}^2(X, \mu)/\mathcal{R}$ erklärt als den Quotient von $\mathcal{L}^2$ nach dem Radikal $\mathcal{R} = \{f \in \mathcal{L}^2 \mid \langle f, g\rangle = 0 \ \forall g \in \mathcal{L}^2\}$. Nach dem allgemeinen Isomorphismus $V/(\ker L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}\, L$ für lineare Abbildungen $L : V \to W$ reicht es zu zeigen, daß das Radikal übereinstimmt mit dem Raum der fast überall verschwindenden Funktionen aus $\mathcal{L}^2$, in Formeln $\mathcal{R} = \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{N}$. In der Tat ist $\supset$ offensichtlich und $\subset$ folgt aus der Kette von Implikationen

$$f \in \mathcal{R} \ \Rightarrow\ \langle f, f\rangle = 0 \ \Rightarrow\ \int |f|^2 = 0 \ \Rightarrow\ |f|^2 \sim_\mu 0 \ \Rightarrow\ f \sim_\mu 0$$

Die dritte Implikation kommt dabei von 13.2.2.18 her. □



Anschaulich und unpräzise gesprochen ist die Quadratintegrierbarkeit im Vergleich zur Integrierbarkeit für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine schwächere Bedingung an das Abfallen für $x \to \pm\infty$, aber eine stärkere Bedingung an die Natur möglicher Polstellen.

Übungen

Übung 13.2.2.24. Man gebe eine quadratintegrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die nicht integrierbar ist. Man gebe eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die nicht quadratintegrierbar ist. Man zeige, daß jede quadratintegrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger integrierbar ist.

Übung 13.2.2.25. Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ fast überall gleich und stetig bei $p \in \mathbb{R}^n$, so gilt $f(p) = g(p)$.

Ergänzende Übung 13.2.2.26. Seien X ein topologischer Raum und $p \in X$ ein Punkt und μ ein Maß auf X, das auf jeder offenen Umgebung von p positiv ist. Sind $f, g : X \to \mathbb{R}$ fast überall gleich und stetig bei p, so gilt $f(p) = g(p)$.

Übung 13.2.2.27. Man zeige für $f, g \in \mathrm{L}^2$ die sogenannte **Hölder-Ungleichung** $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. Hinweis: Man wende die Cauchy-Schwartz'sche Ungleichung auf die Beträge unserer Funktionen an.

13.2.3 Räume integrierbarer Funktionen

13.2.3.1. Um unsere Räume integrierbarer und quadratintegrierbarer fast überall definierter Funktionen simultan behandeln zu können, führen wir eine gemeinsame Verallgemeinerung ein, die sogenannten L^p-Räume. Im Rahmen dieser Vorlesung könnte man im Folgenden stets mit $p \in \{1, 2\}$ arbeiten und so die Diskussion allgemeiner L^p-Räume vermeiden. In anderen Zusammenhängen scheinen jedoch auch die L^p-Räume für andere p von Bedeutung zu sein.

13.2.3.2. Wir erinnern aus 10.5.5.26 und 10.5.5.27 zwei nützliche Ungleichungen: Gegeben reelle Zahlen $a, b \geq 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ folgt die **Young'sche Ungleichung** $ab \leq p^{-1}a^p + q^{-1}b^q$ aus der Konvexität der Exponentialfunktion. Weiter folgt, sogar für $p \geq 1$, die Ungleichung $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ aus der Konvexität der Funktion $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^p$.

Definition 13.2.3.3. Gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und $p \in [1, \infty)$ setzen wir

$$\mathcal{L}^p(X; \mu) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ meßbar mit } \textstyle\int |f|^p < \infty\}$$

13.2.3.4. Die Abschätzung $|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$ nach 13.2.3.2 zeigt, daß $\mathcal{L}^p(X; \mu) \subset \mathrm{Ens}(X, \mathbb{C})$ ein Untervektorraum ist.

Definition 13.2.3.5. Gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und $p \in [1, \infty)$ setzen wir

$$\mathrm{L}^p(X; \mu) := \mathrm{im}(\mathcal{L}^p(X; \mu) \to \mathrm{Ens}_\mu(X, \mathbb{C}))$$

Die Elemente von L^p sind mithin alle μ-fast überall definierten komplexwertigen Funktionen auf X mit mindestens einem Repräsentanten aus $\mathcal{L}^p$.

Beispiel 13.2.3.6. Für $p = 1$ und $p = 2$ erhalten wir die bereits in 13.2.2 ausführlich diskutierten Räume $\mathrm{L}^1(X)$ und $\mathrm{L}^2(X)$.

Proposition 13.2.3.7. *Gegeben ein Maßraum (X, μ) und $p \in (1, \infty)$ erhalten wir eine Norm auf $\mathrm{L}^p(X)$ durch die Vorschrift*

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$$

Beweis. Sicher gilt $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$ und aus $\|f\|_p = 0$ folgt $f = 0$ fast überall mit 13.2.2.18. Um die Dreiecksungleichung zu zeigen müssen wir weiter ausholen. Wir finden sicher $q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alias $p + q = pq$. Solche p, q heißen **konjugierte Exponenten**. Nach 13.2.3.2 gilt für reelle $a, b > 0$ dann

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Aus $f \in \mathrm{L}^p$ und $g \in \mathrm{L}^q$ folgt mithin $fg \in \mathrm{L}^1$. Wir behaupten unter diesen Annahmen sogar stärker die **Hölder-Ungleichung**

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Auch das folgt im Fall $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ sofort aus unserer obigen Ungleichung, dann müssen wir ja nur $\|fg\|_1 \leq 1$ zeigen. Im allgemeinen folgt es durch Reskalieren. Gegeben $f, g \in \mathrm{L}^p$ zeigen wir nun schließlich $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir f und g nichtnegativ und von Null verschieden annehmen. Setzen wir $h := (f + g)^{p-1}$, so ergibt sich $h^q = (f + g)^p$. Es folgt $h \in \mathrm{L}^q$ und wir erhalten

$$\|f + g\|_p^p \;=\; \|(f + g)h\|_1 \;\leq\; \|fh\|_1 + \|gh\|_1 \;\leq\; \|f\|_p \|h\|_q + \|g\|_p \|h\|_q$$

Beachten wir nun $\|h\|_q = \|f + g\|_p^{(p/q)}$ und teilen das auf beiden Seiten weg, so ergibt sich die Behauptung. □

Definition 13.2.3.8. Gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und setzen wir

$$\mathcal{L}^\infty(X; \mu) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ meßbar mit } |f| \text{ beschränkt}\}$$

13.2.3.9. Offensichtlich ist $\mathcal{L}^\infty(X; \mu) \subset \mathrm{Ens}(X, \mathbb{C})$ ein Untervektorraum. Offensichtlich ist $\|f\|_\infty := \sup\big(\{|f(x)| | x \in X\} \cup \{0\}\big)$ eine Norm auf $\mathcal{L}^\infty$.

Definition 13.2.3.10. Gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ setzen wir

$$\mathrm{L}^\infty(X; \mu) := \mathrm{im}(\mathcal{L}^\infty(X; \mu) \to \mathrm{Ens}_\mu(X, \mathbb{C}))$$

Die Elemente von L^∞ sind mithin alle μ-fast überall definierten komplexwertigen Funktionen auf X mit mindestens einem meßbaren betragsmäßig beschränkten Repräsentanten.

Lemma 13.2.3.11. *Gegeben ein Maßraum* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *erhalten wir eine Norm* $\| \|_\infty^{\text{ess}}$ *auf* $\mathrm{L}^\infty(X;\mu)$ *durch die Vorschrift*

$$\|f\|_\infty^{\text{ess}} := \inf\{\|g\|_\infty \mid g \in \mathcal{L}^\infty(X;\mu) \textit{ repräsentiert } f\}$$

Beweis. Alle Eigenschaften einer Norm sind klar bis auf die Eigenschaft, daß nur der Nullvektor die Norm Null haben kann. Sei $h \in \mathcal{L}^\infty$ ein Repräsentant von $f \in \mathrm{L}^\infty$. Gilt $\|f\|_\infty^{\text{ess}} = 0$, so wird aber für alle $n \in \mathbb{N}$ unser f auch repräsentiert durch ein g mit $\|g\|_\infty \leq 1/n$ und es folgt $\mu(\{x \mid |h(x)| > 1/n\}) = 0$. Das gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit ist auch die abzählbare Vereinigung dieser Nullmengen eine Nullmenge und wir folgern $h \sim_\mu 0$ alias $f = 0$. □

13.2.3.12. Ähnlich wie im vorherigen Beweis sieht man auch, daß jedes $f \in \mathrm{L}^\infty$ einen Repräsentanten $g \in \mathcal{L}^\infty$ hat mit $\|f\|_\infty^{\text{ess}} = \|g\|_\infty$.

13.2.3.13. Gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ führen wir für $g \in \mathcal{L}^\infty(X;\mu)$ das **essentielle Supremum** ein durch

$$\|g\|_\infty^{\text{ess}} := \sup\big(\{c \mid \mu\{x \mid |g(x)| \geq c\} > 0\} \cup \{0\}\big)$$

Dann haben fast überall gleiche $\mathcal{L}^\infty$-Funktionen dasselbe essentielle Supremum und man erkennt unschwer, daß die so auf L^∞ induzierte Abbildung genau unsere Norm $\| \|_\infty^{\text{ess}}$ aus 13.2.3.11 ist.

13.2.3.14 (**Diskussion der Notation**). Vielfach kürzt man $\| \|_\infty^{\text{ess}}$ zu $\| \|_\infty$ ab und der Leser muß aus dem Kontext erschließen, was genau gemeint ist.

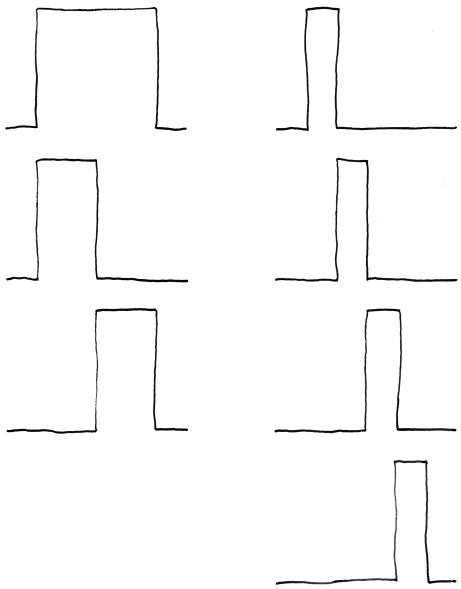
13.2.3.15. Man bezeichnet etwas allgemeiner als zuvor eingeführt auch 1 und ∞ als **konjugierte Exponenten**. Ist dann (X, μ) ein Maßraum und sind $p, q \in [1, \infty]$ konjugierte Exponenten, so folgt aus $f \in \mathrm{L}^p$ und $g \in \mathrm{L}^q$ stets $fg \in \mathrm{L}^1$ und

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Für $p, q \in (1, \infty)$ hatten wir das bereits im vorhergehenden Beweis gesehen und im verbleibenden Fall ist es eh klar.

Satz 13.2.3.16 (Vollständigkeit der L^p-Räume). *Für jeden Maßraum X und alle $p \in [1, \infty]$ sind die normierten Vektorräume $\mathrm{L}^p(X)$ vollständig. Jede konvergente Folge in einem dieser Räume besitzt des weiteren eine Teilfolge, die fast überall punktweise gegen die Grenzfunktion konvergiert.*

Beispiel 13.2.3.17. Die charakteristischen Funktionen der Intervalle $[0, 1]$, $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$, $[0, 1/4]$, $[1/4, 2/4]$, $[2/4, 3/4]$, $[3/4, 1]$, $[0, 1/8]$, $[1/8, 2/8], \ldots$ bilden eine Nullfolge im Raum der L^1-Funktionen auf dem Einheitsintervall, die nicht fast überall punktweise gegen Null konvergiert. Diese Folge besitzt aber durchaus eine Teilfolge, die fast überall punktweise gegen Null konvergiert.



Spaltenweise aufgereiht hier die ersten Glieder der Nullfolge in L^1 aus 13.2.3.17, die nicht fast überall punktweise gegen Null konvergiert. Die graphische Darstellung ist etwas fragwürdig, da Graphen von Funktionen keine senkrechten Linien enthalten dürfen, aber wir vereinbaren einfach, daß in diesem Fall stets der oberste mögliche Wert gemeint ist.

Beweis. Wir überlassen den Fall $p = \infty$ dem Leser zur Übung und führen den Beweis nur im Fall $p < \infty$. Es gilt zu zeigen, daß jede Cauchy-Folge in $\mathrm{L}^p(X)$ konvergiert. Seien die $f_n : X \to \mathbb{C}$ Repräsentanten aus $\mathcal{L}^p(X)$ der Glieder einer Cauchy-Folge in $\mathrm{L}^p(X)$. Indem wir falls nötig zu einer Teilfolge übergehen, dürfen wir $\|f_n - f_{n+1}\|_p \le 2^{-n}$ annehmen. Wir betrachten nun die Funktionen $g_k, g : X \to [0, \infty]$ gegeben durch

$$g_k = \sum_{n=0}^{k} |f_n - f_{n+1}| \quad \text{und} \quad g = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n - f_{n+1}|$$

Aus unseren Annahmen folgt $\|g_k\|_p \le 2$ für alle k. Da die Funktion g^p der monotone punktweise Grenzwert der g_k^p ist, erhalten wir mit dem Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz $\int g^p \le 2^p$. Insbesondere gilt also $g(x) < \infty$ fast überall auf X. Sicher gilt aber auch

$$f_0 - f_{k+1} = \sum_{n=0}^{k} (f_n - f_{n+1})$$

und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) - f_{n+1}(x)$ konvergiert absolut an allen Stellen $x \in X$ mit $g(x) < \infty$, als da heißt fast überall. Mithin konvergiert auch die Folge der $f_k(x)$ außerhalb der meßbaren Menge vom Maß Null $N := g^{-1}(\infty)$ und wir erhalten als ihren punktweisen Grenzwert eine meßbare Funktion f auf $X \backslash N$, die wir durch Null fortsetzen können zu einer meßbaren Funktion $f : X \to \mathbb{C}$. Wir zeigen nun, daß f in $\mathcal{L}^p$ liegt und daß die Folge der f_k auch in der L^p-Norm gegen f konvergiert. Offensichtlich sind die Funktionen $|f_0 - f_k|$ auf $X \backslash N$ beschränkt durch g, folglich ist $|f_0 - f|$ auf $X \backslash N$ beschränkt durch g, also gilt $f_0 - f \in \mathcal{L}^p$ und dann auch $f \in \mathcal{L}^p$. Weiter können wir mit 13.2.3.2 abschätzen

$$|f - f_k|^p \le 2^{p-1}(|f - f_0|^p + |f_0 - f_k|^p) \le 2^p g^p$$

Damit folgt dann $\lim_{k\to 0} \|f - f_k\|_p = 0$ aus dem Satz über dominierte Konvergenz, angewandt auf die Funktionenfolge $|f - f_k|^p$, die auf $X \backslash N$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. □

13.2.3.18. Ich habe mir bis hierher Mühe gegeben, sorgfältig zwischen Funktionen und fast überall definierten Funktionen zu unterscheiden. Im weiteren Verlauf der Vorlesung werde ich nachlässiger werden in der Hoffnung, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, was genau gemeint ist und wann es auf diese Unterscheidung überhaupt ankommt.

Übungen

Übung 13.2.3.19. Ist (X, μ) ein Maßraum und $E \subset X$ eine meßbare Teilmenge endlichen Maßes, so liefert für alle $p \in [1, \infty]$ die Einschränkung von Funktionen eine stetige Abbildung $\mathrm{L}^p(X) \to \mathrm{L}^1(E)$. Hinweis: Hölder-Ungleichung.

Übung 13.2.3.20. Gegeben (E, μ) ein Maßraum endlichen Maßes und $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt $\mathrm{L}^q(E) \subset \mathrm{L}^p(E)$. Hinweis: Gegeben $f \in \mathrm{L}^q(E)$ gilt $|f|^p \in \mathrm{L}^{q/p}(E)$. Nun multipliziere man mit der konstanten Funktion 1 und wende die Hölderungleichung an mit konjugierten Exponenten, von denen der erste q/p ist.

Übung 13.2.3.21 (**Dichtheit der integrierbaren Stufenfunktionen**). Gegeben ein Maßraum liegen für $1 \leq p < \infty$ die Bilder der integrierbaren Stufenfunktionen auf unserem Raum dicht im Raum der L^p-Funktionen. Hinweis: Man verwende Lemma 13.1.5.15 zur monotonen Approximation durch Stufenfunktionen.

Übung 13.2.3.22. Gegeben eine Menge X und ein Prämaß μ auf einem Mengenring $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ erzeugen für $1 \leq p < \infty$ die charakteristischen Funktionen der Mengen endlichen Maßes aus $\mathcal{A}$ einen dichten Teilraum im Raum der L^p-Funktionen in Bezug auf die größte Maßfortsetzung auf der von $\mathcal{A}$ erzeugten σ-Algebra. Hinweis: Man verwende die vorhergehende Übung 13.2.3.21 und die Konstruktion der größten Maßfortsetzung 13.1.2.15.

Übung 13.2.3.23. Gegeben Maßräume (X, μ) und (Y, ν) erzeugen für alle $p \in [1, \infty)$ die charakteristischen Funktionen $[A \times B]$ für $A \subset X$ und $B \subset Y$ meßbar von endlichem Maß einen dichten Teilraum von $\mathrm{L}^p(X \times Y; \mu \boxtimes \nu)$. Speziell erzeugen die Funktionen mit $(f \boxtimes g)(x, y) := f(x)g(y)$ mit $f \in \mathrm{L}^2(X; \mu)$ und $g \in \mathrm{L}^2(Y; \nu)$ einen dichten Teilraum von $\mathrm{L}^2(X \times Y; \mu \boxtimes \nu)$. Hinweis: 13.2.3.22.

Übung 13.2.3.24. Gegeben ein Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist der Raum $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}; \mu)$ endlichdimensional genau dann, wenn μ eine endliche Linearkombination von Diracmaßen ist. Hinweis: Man betrachte die Variante 13.1.2.27 der Verteilungsfunktion unseres Maßes.

13.2.4 Hilberträume und Hilbertbasen

Definition 13.2.4.1. Ein **Hilbertraum** ist ein komplexer Skalarproduktraum, der vollständig ist für die von diesem Skalarprodukt induzierte Metrik. Bezeichnet $\langle\ ,\ \rangle$ unser Skalarprodukt, so wird die davon induzierte Metrik gegeben durch die Vorschrift $d(x, y) = \|x - y\|_2$ mit $\|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, vergleiche 4.1.3.8. Einen reellen oder komplexen Skalarproduktraum bezeichnet man insbesondere dann, wenn unser Raum nicht vollständig ist, auch als **Prähilbertraum**.

13.2.4.2 (**Diskussion der Terminologie**). Manche Quellen fordern von einem Hilbertraum zusätzlich noch, daß er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzen

möge. Wir schließen uns dieser Konvention nicht an und nennen derartige Hilberträume „separabel“, da es sich dabei offensichtlich genau um die Hilberträume handelt, die als metrische Räume separabel sind im Sinne von 13.1.4.26.

Beispiel 13.2.4.3. Nach 13.2.3.16 ist für jeden Maßraum $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ der Raum $\mathrm{L}^2(X)$ der fast überall definierten quadratintegrierbaren Funktionen auf X ein Hilbertraum. Wir werden im folgenden zeigen, daß es keine wesentlich anderen Beispiele für Hilberträume gibt, ja sogar, daß jeder Hilbertraum bereits isomorph ist zum Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf einer mit dem Zählmaß versehenen Menge. Dazu müssen wir jedoch zunächst etwas mehr Theorie entwickeln.

13.2.4.4. Ich erinnere daran, daß nach 4.1.3.13 eine Familie von Vektoren $(e_i)_{i\in I}$ eines Skalarproduktraums ein **Orthonormalsystem** heißt, wenn mit dem Kroneckerdelta aus 3.2.4.2 gilt $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Ich erinnere daran, daß nach 4.1.3.14 eine Teilmenge eines Skalarproduktraums ein **Orthonormalsystem** heißt, wenn alle ihre Vektoren die Norm 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht sehen, wenn also unsere Teilmenge als durch sich selbs indizierte Familie die fragliche Eigenschaft für Familien hat.

Definition 13.2.4.5. Eine **Hilbertbasis** eines Hilbertraums oder gleichbedeutend ein **vollständiges Orthonormalsystem** ist ein Orthonormalsystem, dessen Vektorraumerzeugnis dicht ist in unserem Hilbertraum.

13.2.4.6. Eine Hilbertbasis ist im allgemeinen keine Basis unseres Hilbertraums im Sinne der linearen Algebra. Genauer gilt das nur für endlichdimensionale Hilberträume und für diese ist eine Hilbertbasis dasselbe wie eine Orthonormalbasis. Man vergleiche dazu auch Übung 13.2.4.19.

Definition 13.2.4.7. Für eine Menge I bezeichne $\mathrm{L}^2(I) = \mathrm{L}^2(I;\zeta)$ den Raum der in Bezug auf das Zählmaß ζ quadratintegrierbaren Funktionen $I \to \mathbb{C}$ und $\chi_i \in \mathrm{L}^2(I)$ die charakteristische Funktion der einelementigen Menge $\{i\}$. In der Literatur wird unser $\mathrm{L}^2(I)$ auch oft $l^2(I)$ notiert.

13.2.4.8. Nach 13.2.3.21 bilden die χ_i eine Hilbertbasis von $\mathrm{L}^2(I)$. Nach 10.4.1.25 ist jede quadratintegrierbare Funktion $I \to \mathbb{C}$ höchstens auf einer abzählbaren Teilmenge von I verschieden von Null.

13.2.4.9. Wir erinnern daran, daß wir nach 11.3.1.5 eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren eines normierten Vektorraums V summierbar mit Summe $s \in V$ nennen und

$$\sum_{i\in I} v_i = s$$

schreiben als Abkürzung für die Aussage, daß es für jede Umgebung U von s eine endliche Teilmenge $I_U \subset I$ gibt derart, daß für jede endliche Obermenge J von I_U in I gilt $\sum_{i\in J} v_i \in U$.

Satz 13.2.4.10 (über Hilbertbasen). *1. Ist $(e_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, so gibt es genau eine stetige lineare Abbildung $\varphi : \mathrm{L}^2(I) \to \mathcal{H}$ mit $\chi_i \mapsto e_i$ für alle $i \in I$, und diese Abbildung erhält das Skalarprodukt;*

2. Ist $(e_i)_{i\in I}$ sogar eine Hilbertbasis, so ist besagte Abbildung ein Isomorphismus von Hilberträumen $\mathrm{L}^2(I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$ und ihre Inverse $\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2(I)$, $v \mapsto \hat{v}$ wird gegeben durch $\hat{v}(i) = \langle e_i, v\rangle$;

3. Gegeben eine Hilbertbasis $(e_i)_{i\in I}$ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ gilt für jeden Vektor $v \in \mathcal{H}$ im Sinne von 13.2.4.9 die Darstellung

$$v = \sum_{i\in I} \langle e_i, v\rangle e_i$$

13.2.4.11. Wir schicken dem Beweis zwei Lemmata voraus.

Lemma 13.2.4.12 (Stetige Fortsetzung von dichten Teilmengen). *Seien X, Y metrische Räume und $A \subset X$ eine dichte Teilmenge. So gilt:*

1. Jede Abbildung $g : A \to Y$ besitzt höchstens eine Fortsetzung zu einer stetigen Abbildung $\tilde{g} : X \to Y$;

2. Ist $g : A \to Y$ gleichmäßig stetig und Y vollständig, besitzt g genau eine Fortsetzung zu einer stetigen Abbildung $\tilde{g} : X \to Y$.

13.2.4.13. Im wesentlichen haben Sie das Lemma bereits als Übung **??** gezeigt. Die Abbildung $(0, 1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1/x)$ ist stetig aber nicht gleichmäßig stetig. Sie läßt sich nicht stetig auf die Vervollständigung $[0, 1]$ des offenen Intervalls $(0, 1)$ fortsetzen.

Vorschau 13.2.4.14. In 15.1.6.30 wird erklärt, unter welchen Voraussetzungen sich die erste Aussage auf den Fall topologischer Räume verallgemeinern läßt. Die zweite Aussage läßt sich allgemeiner für sogenannte „uniforme Räume“ zeigen, wie sie in 15.4.1 eingeführt werden. Wir gehen hier darauf nicht näher ein.

Beweis. Gegeben $x \in X$ finden wir eine Folge a_n in A mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. Natürlich muß für jede stetige Erweiterung $\tilde{g}$ von g gelten

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = \tilde{g}(x)$$

und das zeigt auch schon die Eindeutigkeit von $\tilde{g}$. Ist g nun gleichmäßig stetig, so ist mit a_n auch $g(a_n)$ eine Cauchy-Folge, und ist Y vollständig, so muß $g(a_n)$

konvergieren. Haben weiter zwei Folgen a_n, b_n in A denselben Grenzwert x, so strebt auch die Folge c_n mit den Gliedern $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ gegen x. Wir folgern

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = \lim_{n\to\infty} g(c_n) = \lim_{n\to\infty} g(b_n)$$

und können also definieren $\tilde{g}(x) = \lim_{n\to\infty} g(a_n)$ für eine und jede Folge a_n aus A, die gegen x strebt. Wir müssen nur noch zeigen, daß $\tilde{g}$ stetig ist. Sei dazu für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gegeben mit $d(a,b) \leq \delta \Rightarrow d(g(a), g(b)) \leq \varepsilon$. Wir zeigen $d(x,z) \leq \delta/2 \Rightarrow d(\tilde{g}(x), \tilde{g}(z)) \leq \varepsilon$ für alle $x, z \in X$. In der Tat, ist $x = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $z = \lim_{n\to\infty} b_n$, so folgt aus der Dreiecksungleichung $d(a_n, b_n) \leq \delta$ für fast alle n und damit $d(g(a_n), g(b_n)) \leq \varepsilon$ für fast alle n und dann im Grenzwert auch $d(\tilde{g}(x), \tilde{g}(z)) \leq \varepsilon$ mithilfe der Stetigkeit der Metrik $d : Y \times Y \to \mathbb{R}$ nach **??**. □

13.2.4.15. Wir erinnern daran, daß nach 4.1.4.1 eine lineare Abbildung zwischen zwei Skalarprodukträumen $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ **unitär** heißt, wenn sie das Skalarprodukt erhält, wenn also in Formeln gilt $\langle Lv, Lw\rangle = \langle v, w\rangle \; \forall v, w \in \mathcal{H}$.

13.2.4.16. Eine unitäre Einbettung von einem Hilbertraum in einen Prähilbertraum und allgemeiner eine normerhaltende Einbettung von einem Banachraum in einen weiteren normierten Vektorraum hat stets abgeschlossenes Bild. In der Tat ist nach **??** eine vollständige Teilmenge eines metrischen Raums stets abgeschlossen.

Lemma 13.2.4.17. *Seien X, Y normierte Vektorräume, $A \subset X$ ein dichter Teilraum und $g : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ist die Einschränkung $g|_A : A \to Y$ linear, so ist auch g linear. Sind X, Y Skalarprodukträume und ist die Einschränkung $g|_A : A \to Y$ unitär, so ist auch g unitär.*

Beweis. Die Abbildung $X \times X \to Y$, $(v, w) \mapsto g(v) + g(w)$ ist stetig und stimmt auf der dichten Teilmenge $A \times A$ mit der stetigen Abbildung $(v, w) \mapsto g(v + w)$ überein. Also sind diese Abbildungen gleich und es gilt $g(v + w) = g(v) + g(w)$ für alle $v, w \in X$. Mit ähnlichen Argumenten beendet man den Nachweis der Linearität von g und zeigt die Verträglichkeit mit dem Skalarprodukt. □

Beweis von Satz 13.2.4.10 über Hilbertbasen. Bezeichne $\mathbb{C}I \subset \mathrm{L}^2(I)$ den Raum aller Abbildungen $I \to \mathbb{C}$, die nur an endlich vielen Stellen von Null verschieden sind. Natürlich bilden die χ_i eine Basis von $\mathbb{C}I$ und wir erhalten eine lineare Abbildung $\mathbb{C}I \to \mathcal{H}$ mit $\chi_i \mapsto e_i$. Da sowohl die χ_i als auch die e_i Orthonormalsysteme sind, ist unsere Abbildung mit den Skalarprodukten verträglich, insbesondere erhält sie Abstände. Da $\mathcal{H}$ vollständig ist und $\mathbb{C}I$ dicht liegt in $\mathrm{L}^2(I)$, läßt sich unsere Abbildung nach Lemma 13.2.4.12 auf genau eine Weise zu einer stetigen Abbildung $\varphi : \mathrm{L}^2(I) \to \mathcal{H}$ ausdehnen, und nach 13.2.4.17 ist diese Ausdehnung

sogar unitär. Damit ist Teil 1 bewiesen. Nach 13.2.4.16 ist das Bild unserer unitären Abbildung notwendig abgeschlossen, und im Fall einer Hilbertbasis folgt ihre Surjektivität. Um die inverse Abbildung zu beschreiben, rechnen wir

$$\hat{v}(i) = \langle \chi_i, \hat{v} \rangle = \langle \varphi(\chi_i), \varphi(\hat{v}) \rangle = \langle e_i, v \rangle$$

Mit der Notation aus 13.2.4.9 kann die im Beweis konstruierte Abbildung $\varphi : \mathrm{L}^2(I) \to \mathcal{H}$ auch suggestiver geschrieben werden in der Form

$$\varphi : f \mapsto \sum_{i \in I} f(i) e_i$$

In der Tat gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches $I_\varepsilon \subset I$ mit $\sum_{i \notin I_\varepsilon} |f(i)|^2 < \varepsilon^2$, und für J endlich mit $I_\varepsilon \subset J \subset I$ und der Notation χ_A für die charakteristische Funktionen einer Teilmenge $A \subset I$ folgt $f = \chi_J f + (1 - \chi_J) f$ und zusätzlich $\|(1 - \chi_J) f\|_2 < \varepsilon$, mithin $\|\varphi(f) - \varphi(\chi_J f)\|_2 < \varepsilon$. Daraus folgt unmittelbar der letzte Teil des Satzes. □

Übungen

Übung 13.2.4.18. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von paarweise orthogonalen Vektoren eines Hilbertraums ist summierbar genau dann, wenn gilt $\sum_{i \in I} \|v_i\|^2 < \infty$, und in diesem Fall haben wir

$$\left\| \sum_{i \in I} v_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|v_i\|^2$$

Übung 13.2.4.19. Man zeige, daß ein unendlichdimensionaler Hilbertraum keine Orthonormalbasis im Sinne der linearen Algebra besitzen kann.

Ergänzende Übung 13.2.4.20. Gegeben ein Maßraum (X, μ) und ein abzählbar basierter alias separabler Hilbertraum $\mathcal{H}$ bilden die meßbaren fast überall definierten Funktionen $f : X \to \mathcal{H}$, für die $\| \ \|^2 \circ f : X \to \mathbb{R}$ integrierbar ist, mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int \langle f(x), g(x) \rangle$ selbst einen Hilbertraum

$$\mathrm{L}^2(X, \mathcal{H}) = \mathrm{L}^2(X, \mathcal{H}; \mu)$$

und die meßbaren Stufenfunktionen mit Träger von endlichem Maß bilden darin einen dichten Teilraum. Hinweis: Man verallgemeinere den Beweis von 13.2.3.16. Die Bedingung der Separabilität von $\mathcal{H}$ ist nötig wegen 13.1.4.28, da im allgemeinen $\langle f(x), g(x) \rangle$ nicht meßbar sein müßte, etwa wenn X endliches Maß hat und f jedem Punkt von X den durch diesen Punkt indizierten Vektor einer durch X indizierten Orthonormalbasis zuordnet. Die Aussage gilt aber entsprechend für beliebige Hilberträume $\mathcal{H}$, wenn wir $\mathrm{L}^2(X, \mathcal{H})$ feiner erklären als die Menge aller meßbaren fast überall definierten Funktionen $f : X \dashrightarrow \mathcal{H}$, deren Bild in

einem separablen Teilraum von $\mathcal{H}$ enthalten ist und für die $\| \ \|^2 \circ f : X \dashrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist.

Ergänzende Übung 13.2.4.21. Gegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und eine Menge Z notieren wir die Menge der fast überall definierten Abbildungen von X nach Z als $\mathrm{Ens}_\mu(X, Z)$. Gegeben zwei σ-endliche Maßräume X, Y und eine Menge Z induziert die offensichtliche Bijektion zwischen den entsprechenden Räumen überall definierter Abbildungen aus 2.1.6.5 nach Fubini eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}_\mu(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_\mu(X, \mathrm{Ens}_\mu(Y, Z))$$

Man zeige, daß diese Abbildung im Spezialfall $X = Y = \mathbb{R}$, $Z = \mathbb{C}$ einen Isomorphismus $\mathrm{L}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathrm{L}^2(\mathbb{R}))$ induziert. Hinweis: Geeignete Stufenfunktionen bilden auf beiden Seiten dichte Teilräume, die als Prähilberträume unter unserer Abbildung identifiziert werden. Dann benutze man, daß punktweise Konvergenz fast überall unter unserer Abbildung punktweise Konvergenz fast überall wird, und schließe mit 13.2.3.16.

13.2.5 Vervollständigung metrischer Räume*

13.2.5.1. Dieser Abschnitt ist für den weiteren Fortgang der Vorlesung nicht unmittelbar relevant. Es stellt sich jedoch heraus, daß viele unserer Funktionenräume auch als Vervollständigungen einfacherer Funktionenräume konstruiert werden können. So mag dieser alternative Zugang zum Verständnis beitragen. In vielen Zusammenhängen spielen auch direkte Summen von unendlichen Familien von Hilberträumen eine wichtige Rolle, die bequem als Vervollständigungen konstruiert werden können. Wir erinnern aus 4.1.10.3, daß eine Abbildung von metrischen Räumen isometrisch heißt, wenn sie alle Abstände unverändert läßt. Sind (X, d) und (X', d') unsere metrischen Räume, so heißt also in Formeln eine Abbildung $f : X \to X'$ isometrisch, wenn gilt

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Definition 13.2.5.2. Eine isometrische Abbildung mit dichtem Bild von einem metrischen Raum in einen vollständigen metrischen Raum heißt eine **Vervollständigung** des Ausgangsraums.

Satz 13.2.5.3 (Vervollständigung). *1. Für jeden metrischen Raum X existiert eine isometrische Abbildung mit dichtem Bild $a : X \to Y$ in einen vollständigen metrischen Raum Y;*

2. Ist $b : X \to Z$ eine weitere isometrische Abbildung mit dichtem Bild in einen vollständigen metrischen Raum Z, so existiert genau eine stetige Abbildung $f : Y \to Z$ mit $f \circ a = b$, und diese Abbildung f ist isometrisch und bijektiv.

13.2.5.4. Der vollständige metrische Raum Y oder genauer das Paar (Y, a) ist also durch X eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus von metrischen Räumen. Wir gönnen ihm deshalb den bestimmten Artikel und nennen (Y, a) oder auch einfach den Raum Y selbst die **Vervollständigung von** X.

Beweis. 2. Nach 13.2.4.12 kann man jede gleichmäßig stetige Abbildung von einer dichten Teilmenge eines metrischen Raums in einen vollständigen metrischen Raum auf genau eine Weise stetig fortsetzen. Sind also $a : X \to Y$ und $b : X \to Z$ Vervollständigungen eines metrischen Raums X, so gibt es genau eine stetige Abbildung $f : Y \to Z$ mit $fa = b$ und genau eine stetige Abbildung $g : Z \to Y$ mit $gb = a$ und wegen $gfa = a$ und $fgb = b$ gilt $gf = \mathrm{id}$ und $fg = \mathrm{id}$. Weiter prüft man leicht, daß auch f und g Isometrien sein müssen.

1. Zu jedem metrischen Raum (X, d) kann man wie folgt eine Vervollständigung $\mathrm{can} : X \to \hat{X}$ konstruieren: Auf der Menge $\mathcal{C}$ aller Cauchy-Folgen in X betrachte man die Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben durch

$$a \sim b \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0$$

und erkläre $\hat{X}$ als die Menge aller Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen in X unter dieser Äquivalenzrelation, in Formeln

$$\hat{X} = \mathcal{C}/\sim$$

Gegeben eine Cauchyfolge $a \in \mathcal{C}$ bezeichne $[a] \in \hat{X}$ ihre Äquivalenzklasse. Der Leser mag selbst prüfen, daß es genau eine Abbildung $d : \hat{X} \times \hat{X} \to \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft

$$d([a], [b]) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) \qquad \forall a, b \in \mathcal{C}$$

und daß diese Abbildung eine Metrik auf $\hat{X}$ ist. Die Abbildung $\mathrm{can} : X \to \hat{X}$, die jedem Punkt $x \in X$ die Klasse der konstant bei x verweilenden Folge zuordnet, heißt die **kanonische Einbettung**. Sie ist offensichtlich isometrisch mit dichtem Bild. Es bleibt nur zu zeigen, daß jede Cauchy-Folge in $\hat{X}$ konvergiert. Seien dazu $a_0, a_1, \ldots \in \mathcal{C}$ Repräsentanten für die Glieder einer Cauchy-Folge in $\hat{X}$. Jedes a_i ist also eine Cauchy-Folge in X alias eine Abbildung $a_i : \mathbb{N} \to X$, und wir notieren die Glieder dieser Folge $a_i(0), a_i(1), \ldots$ Man zeigt nun mühelos, daß die „diagonale“ Folge $l : \mathbb{N} \to X$ mit $i \mapsto a_i(i)$ eine Cauchy-Folge in X ist und daß die Klasse $[l] \in \hat{X}$ von l der Limes in $\hat{X}$ der Folge der $[a_i]$ ist. □

13.2.5.5 (**Produkt von Vervollständigungen**). Das Produkt zweier Vervollständigungen ist wieder eine Vervollständigung. Sind also in Formeln $X \to V$ und

$Y \to W$ Vervollständigungen, so ist auch $X \times Y \to V \times W$ eine Vervollständigung. In der Tat ist $V \times W$ nach **??** wieder vollständig. Nach der Eindeutigkeit von Vervollständigungen 13.2.5.4 existiert also für metrische Räume X, Y stets genau eine Isometrie zwischen dem Produkt ihrer Vervollständigungen und der Vervollständigung ihres Produkts, die als untere Horizontale das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & = & X \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{X} \times \hat{Y} & \tilde{\to} & (X \times Y)^\wedge \end{array}$$

zum Kommutieren bringt, mit dem Produkt der kanonischen Einbettungen beziehungsweise der kanonischen Einbettung des Produkts als vertikalen Abbildungen.

Definition 13.2.5.6. Gegeben ein normierter Vektorraum $(V, \| \ \|)$ bildet man einen weiteren normierten Vektorraum $(\hat{V}, \| \ \|)$, seine **Vervollständigung**, indem man auf dem vervollständigten metrischen Raum $\hat{V}$ die Addition, Multiplikation mit Skalaren und Norm „durch stetige Fortsetzung“ nach 13.2.4.12 erklärt. So erhält man etwa die Addition als stetige Fortsetzung auf $\hat{V} \times \hat{V}$ von $\mathrm{can} \circ \mathrm{add} : V \times V \to \hat{V}$, und so weiter. Die Axiome eines normierten Vektorraums folgen dann aus der Eindeutigkeit der stetigen Fortsetzungen nach 13.2.4.12.

Ergänzung 13.2.5.7. Eine **Pseudometrik** auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die alle Eigenschaften einer Metrik **??** hat mit Ausnahme der Eigenschaft, daß verschiedene Punkte positiven Abstand haben müssen. Ein **pseudometrischer Raum** ist eine Menge mit einer Pseudometrik. Eine isometrische Abbildung mit dichtem Bild von einem pseudometrischen Raum in einen vollständigen metrischen Raum heißt wieder eine **Vervollständigung** des Ausgangsraums. Alle oben gezeigten Eigenschaften übertragen sich auf den pseudometrischen Fall, in dem nur die kanonische Abbildung $X \to \hat{X}$ in die Vervollständigung eben nicht mehr injektiv zu sein braucht.

Ergänzung 13.2.5.8 (**Alternativer Zugang zur Integrationstheorie**). Man könnte das Konzept der Vervollständigung dazu benutzen, sich eine Weile alle Maßtheorie zu sparen und etwa $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ schlicht definieren als die Vervollständigung des Raums der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Bezug auf die L^p-Norm, für $p \in [0, \infty)$. Mithilfe einer Variante von 13.2.3.16 identifiziert man dann Elemente dieser Vervollständigungen mit gewissen fast überall definierten Funktionen, wobei Nullmengen ohne Rückgriff auf das Lebesgue-Maß erklärt werden als solche Mengen, die von einer Folge von Quadern mit beliebig kleinem Gesamtvolumen überdeckt werden können. Im Fall $n = 1$ erklärt man dann das Integral $\int : \mathrm{L}^1 \to \mathbb{C}$ als die stetige Fortsetzung des Riemann-Integrals, und erklärt schließlich Lebesgue-Mengen endlichen Maßes als solche Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, deren charakteristische Funktion integrierbar ist, und das Maß der Menge

eben als besagtes Integral. Dieser Zugang scheint mir recht elegant, da sich das Konzept eines Maßes und eines Meßraums natürlich ergibt und nicht willkürlich vorgegeben werden muß. Ich habe dennoch den maßtheoretischen Zugang vorgezogen, da er mit sehr viel weniger Vorkenntnissen verstanden werden kann und die grundlegenden Resultate direkt in der Allgemeinheit liefert, in der sie auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie gebraucht werden.

Übungen

Übung 13.2.5.9. Die Vervollständigung eines Prähilbertraums besitzt stets genau eine Struktur als Hilbertraum derart, daß die kanonische Einbettung unitär ist. Hinweis: Man dehne zuerst das Skalarprodukt mit einem festen Vektor auf die Vervollständigung aus.

Übung 13.2.5.10. Gegeben eine dichte Teilmenge A eines vollständigen metrischen Raums X liefert 13.2.4.12 eine isometrische Bijektion $\hat{A} \xrightarrow{\sim} X$. Insbesondere erhalten wir so für jede offene Teilmenge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ einen Isomorphismus von Hilberträumen $\mathcal{C}_!(\Omega)^\wedge \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2(\Omega)$, wo die Komplettierung des Prähilbertraums $\mathcal{C}_!(\Omega)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger $f : \Omega \to \mathbb{C}$ bezüglich der L^2-Norm $\|f\|_2 := (\int |f|^2)^{1/2}$ gemeint ist.

Übung 13.2.5.11. Gegeben eine Familie von Hilberträumen $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ erklären wir auf der direkten Summe $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$ der zugrundeliegenden Vektorräume ein Skalarprodukt durch die Vorschrift $\langle (v_i), (w_i)\rangle := \sum_{i\in I} \langle v_i, w_i\rangle$. Die Vervollständigung dieses Prähilbertraums im Sinne von 13.2.5.9 heißt die **Hilbertsumme** unserer Hilberträume und wird

$$\hat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i$$

notiert. Man zeige, daß sich die Hilbertsumme auch beschreiben läßt als der Teilraum ihres Produkts aller Tupel (v_i) mit der Eigenschaft $\sum_{i\in I} \|v_i\|^2 < \infty$, mit dem Skalarprodukt $\langle (v_i), (w_i)\rangle := \sum_{i\in I} \langle v_i, w_i\rangle$. Ist speziell $B_i \subset \mathcal{H}_i$ jeweils eine Hilbertbasis, so ist die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{i\in I} \mathrm{in}_i(B_i)$ eine Hilbertbasis unserer Hilbertsumme.

Übung 13.2.5.12. Man erinnere die Konstruktion $\mathrm{L}^2(X, \mathcal{H})$ aus 13.2.4.20. Gegeben ein σ-endlicher Maßraum und eine abzählbare Familie $\mathcal{H}_i$ von separablen Hilberträumen liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\hat{\bigoplus} \mathrm{L}^2(X, \mathcal{H}_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2\left(X, \hat{\bigoplus} \mathcal{H}_i\right)$$

Ergänzende Übung 13.2.5.13. Gegeben zwei Hilberträume $\mathcal{H}$ und $\mathcal{L}$ definiert man ihr **vervollständigtes Tensorprodukt**

$$\mathcal{H} \hat{\otimes} \mathcal{L}$$

als die Vervollständigung ihres algebraischen Tensorprodukts mit seiner offensichtlichen Struktur als Prähilbertraum. Man zeige, daß für (v_i) eine Hilbertbasis von $\mathcal{H}$ und (w_j) eine Hilbertbasis von $\mathcal{L}$ die Tensoren $(v_i \otimes w_j)$ eine Hilbertbasis von $\mathcal{H}\hat{\otimes}\mathcal{L}$ bilden. Gegeben Maßräume (X, μ) und (Y, ν) zeige man allgemeiner: Für das Produktmaß $\mu \boxtimes \nu$ nach **??** liefert die von $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ mit $(f \boxtimes g)(x, y) := f(x)g(y)$ induzierte Abbildung einen Hilbertraumisomorphismus

$$\mathrm{L}^2(X; \mu)\hat{\otimes}\mathrm{L}^2(Y; \nu) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2(X \times Y; \mu \boxtimes \nu)$$

Hinweis: Das Bild ist dicht nach 13.2.3.23.

13.2.6 Fourierreihen quadratintegrierbarer Funktionen

Satz 13.2.6.1 (Approximation durch glatte Funktionen). *Ist $U \Subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und μ ein Borelmaß auf U, so liegen die glatten Funktionen mit kompaktem in U enthaltenen Träger für alle $p \in [1, \infty)$ dicht im Raum der L^p-Funktionen auf U, in Formeln*

$$\overline{\mathcal{C}_!^\infty(U)} = \mathrm{L}^p(U; \mu)$$

13.2.6.2. Diese Aussage ist im Fall $p = \infty$ nicht mehr richtig. Zum Beispiel kann man auf $\mathbb{R}$ mit dem Lebesguemaß die konstante Funktion 1 in L^∞ nicht als Grenzwert einer Folge von Funktionen mit kompaktem Träger erhalten.

Beweis. Natürlich ist $\overline{\mathcal{C}_!^\infty(U)} \subset \mathrm{L}^p(U; \mu)$ ein Untervektorraum. Wir zeigen nun für immer größere Funktionenklassen, daß sie zu $\overline{\mathcal{C}_!^\infty(U)}$ gehören.

1. Ist $A \Subset U$ offen von endlichem Maß $\mu(A) < \infty$, so gehört die charakteristische Funktion $[A]$ von A zu $\overline{\mathcal{C}_!^\infty(U)}$. Das folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz sofort aus Lemma 13.1.8.4, nach dem eine Folge nichtnegativer glatter Funktionen mit kompaktem, in A enthaltenem Träger monoton gegen die charakteristische Funktion von A konvergiert.

2. Ist $B \subset U$ meßbar von endlichem Maß $\mu(B) < \infty$, so gehört $[B]$ zu $\overline{\mathcal{C}_!^\infty(U)}$. In der Tat, für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir aufgrund der Regularität unseres Maßes nach 13.1.10.10 eine offene Teilmenge $A \Subset U$ mit $B \subset A$ und $\mu(B) \leq \mu(A) \leq \mu(B) + \varepsilon$. Für deren charakteristische Funktion gilt dann $\|[B] - [A]\|_p < \varepsilon^{1/p}$. Also ist $[B]$ Grenzwert einer Folge aus $\overline{\mathcal{C}_!^\infty(U)}$ und gehört mithin selbst zu $\overline{\mathcal{C}_!^\infty(U)}$.

3. Für jeden Maßraum liegen die integrierbaren Stufenfunktionen für alle $p \in [1, \infty)$ dicht im Raum der L^p-Funktionen, siehe 13.2.3.21. □

Korollar 13.2.6.3 (Approximation durch stetige Funktionen). *Ist $A \Subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge und μ ein Borelmaß auf A, so liegen die stetigen*

Funktionen mit kompaktem Träger auf A für alle $p \in [1, \infty)$ dicht im Raum der L^p-Funktionen auf A, in Formeln

$$\overline{\mathcal{C}_!(A)} = \mathrm{L}^p(A; \mu)$$

Beweis. Wir wenden den obigen Satz an auf das Borelmaß $i_*\mu$ für $i : A \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ die Einbettungsabbildung. □

Vorschau 13.2.6.4. Ist (X, μ) ein abzählbar basierter lokal kompakter Hausdorffraum mit einem Borelmaß, so liegen für $p \in [1, \infty)$ die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht im Raum der L^p-Funktionen. Das zeigen wir hier nicht.

Satz 13.2.6.5 (Fourierreihen für L^2-Funktionen). *Sei das Intervall $[0, 2\pi]$ mit dem auf Gesamtmaß Eins normierten Lebesgue-Maß $\mu := \mathrm{d}t/2\pi$ versehen und $\mathbb{Z}$ mit dem Zählmaß ζ. So liefert die Fourierentwicklung $f \mapsto f^\wedge$ gegeben durch $f^\wedge(n) := \int_0^{2\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\, \mu\langle t\rangle$ einen Isomorphismus von Hilberträumen*

$$\mathrm{L}^2([0, 2\pi]; \mu) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2(\mathbb{Z}; \zeta)$$

Beweis. Wir müssen nach 13.2.4.10 nur zeigen, daß die Funktionen $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt})_{n\in\mathbb{Z}}$ im Sinne von 13.2.4.5 eine Hilbertbasis von $\mathrm{L}^2([0, 2\pi]; \mu)$ bilden. Wir haben schon im Beweis von 11.3.1.3 gesehen, daß sie ein Orthonormalsystem bilden. Aus 11.3.2.16 wissen wir weiter, daß sich jede stetige Funktion der Periode 2π beliebig gut gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximieren läßt. Da hinwiederum die stetigen, ja sogar die glatten Funktionen auf $[0, 2\pi]$ mit Träger im offenen Intervall $(0, 2\pi)$ nach 13.2.6.1 ihrerseits dicht in L^2 liegen, liegen auch die trigonometrischen Polynome dicht in L^2. □

Übungen

Übung 13.2.6.6. Man berechne die Fourierkoeffizienten der Sägezahnfunktion $t \mapsto |t|$ für $t \in [-\pi, \pi]$ und der Funktion $t \mapsto \exp(\exp(\mathrm{i}t))$.

Übung 13.2.6.7. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von der Periode 2π und integrierbar auf $[0, 2\pi]$. So gilt $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\, \mathrm{d}t = 0$.

Ergänzende Übung 13.2.6.8. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von der Periode 2π und integrierbar auf $[0, 2\pi]$ und sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Lassen sich die Restriktionen $f|_{(-\infty,a)}$ und $f|_{(a,\infty)}$ auf die jeweiligen abgeschlossenen reellen Intervalle fortsetzen zu bei a differenzierbaren Funktionen, so konvergiert die die Folge $\sum_{|\nu|\le n} c_\nu\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu a}$ der Partialsummen der Fourierreihe von f bei a gegen den Wert

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t\nearrow a} f(t) + \lim_{t\searrow a} f(t)\right)$$

Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a = 0$ und f gerade und stetig bei Null mit $f(0) = 0$. Nun setze man $P_n = \sum_{\nu=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu t}$ und prüfe $P_n(t) = \cos(nt) + \cot(t/2)\sin(nt)$. Dann zeige man $\langle f, P_n\rangle \to 0$.

Übung 13.2.6.9 (**Fourierreihen in mehreren Veränderlichen**). Man zeige, daß die Funktionen $x \mapsto \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}$ für $\xi \in \mathbb{Z}^n$ eine Hilbertbasis des Raums $\mathrm{L}^2([0,1]^n;\lambda)$ der in Bezug auf das Lebesgue-Maß quadratintegrierbaren Funktionen auf dem n-dimensionalen Einheitswürfel bilden.

Übung 13.2.6.10. Gegeben $y \in \mathbb{R}^n$ und $p \in [1,\infty)$ bezeichne $\tau_y : \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ die Verschiebung, in Formeln $(\tau_y f)(x) = f(x-y)$. Man zeige die Stetigkeit der Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $(y,f) \mapsto \tau_y f$. Hinweis: Man zeige zunächst die Stetigkeit von $y \mapsto \tau_y f$ für $f \in \mathcal{C}_!(\mathbb{R}^n)$. Der Buchstabe τ seht für das Wort „Translation“.

Ergänzende Übung 13.2.6.11. Hier dürfen Sie zeigen, daß für $A, B \subset \mathbb{R}^n$ meßbar von positivem Maß die Menge $A + B$ eine nichtleere offene Teilmenge umfaßt. Man folgere zunächst aus 13.2.6.10, daß für alle $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n;\lambda)$ die Funktion $y \mapsto \int f(y-x)[B](x)\ \lambda\langle x\rangle$ stetig sein muß. Dann beachte man, daß diese Funktion im Fall $f = [A]$ mit A meßbar von positivem endlichen Maß nichtnegativ ist und positives Integral hat. Man folgere, daß jede meßbare echte Untergruppe von $\mathbb{R}^n$ Maß Null haben muß. Man folgere, daß jeder meßbare Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{Z}^n$ konstant sein muß.

Ergänzende Übung 13.2.6.12. Ist $U \Subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und μ darauf ein Borelmaß, so gibt es für jede beschränkte meßbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ eine Folge f_n in $\mathcal{C}_!^\infty(U)$ mit $\|f_n\|_\infty \le \|f\|_\infty$ für alle n und $f_n(x) \to f(x)$ für fast alle $x \in U$. Hinweis: Da unser Maß notwendig σ-endlich ist, findet man ein endliches Maß mit denselben Nullmengen, für das dann f integrierbar ist. Nun verwende man 13.2.3.16.

13.2.7 Fourierreihen und Charaktere

13.2.7.1. Seine natürlichste Form erhält unser Satz über Fourierreihen, wenn man das Intervall $[0,2\pi]$ zur Kreislinie $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ zusammenbiegt. Das soll im folgenden ausgeführt werden.

Definition 13.2.7.2. Eine **topologisches Monoid** ist ein Monoid G mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung $G \times G \to G$ stetig ist für die Produkttopologie auf $G \times G$. Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe G mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung $G \times G \to G$ und die Inversenabbildung $G \to G$ stetig sind. Eine Hausdorff'sche topologische Gruppe nenne ich eine **Hausdorffgruppe**.

13.2.7.3. Gegeben topologische Gruppen G, H bezeichne $\mathrm{GrpTop}(G, H)$ die Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen von G nach H.

Beispiele 13.2.7.4. Die additive Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ mit der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ ist eine topologische Gruppe. Die additive Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums mit seiner natürlichen Topologie ist eine topologische Gruppe. Die additive Gruppe jedes normierten reellen Vektorraums mit der metrischen Topologie ist eine topologische Gruppe. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times$ des Körpers der komplexen Zahlen ist eine topologische Gruppe. Die **Kreisgruppe** S^1 aller komplexen Zahlen der Norm Eins ist mit der von $\mathbb{C}$ induzierten Topologie eine topologische Gruppe. Jede Gruppe ist mit der diskreten Topologie eine topologische Gruppe. In der Zahlentheorie sind auch die topologischen Gruppen der sogenannten „p-adischen Zahlen“ und „Adele“ von großer Bedeutung.

Definition 13.2.7.5. Gegeben eine topologische Gruppe G nennen wir die stetigen Gruppenhomomorphismen von der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ nach G alias die Elemente von $\mathrm{GrpTop}(\mathbb{R}, G)$ die **Gruppenwege in** G.

13.2.7.6 (**Diskussion der Terminologie**). Unsere Gruppenwege heißen in der Literatur meist „Einparameteruntergruppen“. Diese Terminologie schien mir jedoch ungeschickt, da es sich dabei nicht um Untergruppen handelt.

Beispiele 13.2.7.7. Gruppenwege in $\mathbb{R}^\times$ haben wir bereits in 10.4.3.8 besprochen und Gruppenwege in der Kreisgruppe in 10.4.5.8. Genauer haben wir dort gezeigt, daß jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to S^1$ von der Gestalt $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}at}$ ist für genau ein $a \in \mathbb{R}$.

Definition 13.2.7.8. Gegeben eine topologische Gruppe G nennen wir die stetigen Gruppenhomomorphismen von G in die Kreisgruppe S^1 alias die Elemente von $\mathrm{GrpTop}(G, S^1)$ die **Charaktere** oder genauer die **unitären multiplikativen Charaktere von** G.

13.2.7.9. Sei G eine topologische Gruppe. Die Menge der Charaktere von G bildet mit der Verknüpfung $(\chi \dot{+} \psi)(g) := \chi(g)\psi(g)$ eine abelsche Gruppe

$$\hat{G} = \mathfrak{X}(G) := \mathrm{GrpTop}(G, S^1)$$

Diese Gruppe heißt die **Charaktergruppe von** G. Ihre Verknüpfung notiert man additiv, wenn man sich die Charaktere als Elemente einer abstrakten abelschen Gruppe denkt, und multiplikativ, wenn man sie sich als konkrete Funktionen denkt. Für jeden unitären Charakter χ ist sein Negatives alias Inverses in der Charaktergruppe der komplex konjugierte Charakter $\bar{\chi}$, denn für jede komplexe Zahl z vom Betrag Eins gilt $z^{-1} = \bar{z}$.

13.2.7.10 (**Mehrdeutigkeiten bei der Addition von Charakteren**). Meist notiert man die Verknüpfung der Charaktergruppe einfacher $\chi + \psi$ statt $\chi \dot{+} \psi$. Das führt jedoch leicht zu Verwirrung, da $\chi + \psi$ alternativ auch die Summe der Funktionen $\chi, \psi : G \to \mathbb{C}$ bedeuten kann, die ihrerseits kein Charakter mehr ist. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

Beispiel 13.2.7.11 (**Charaktere der Zahlengeraden**). Unser Satz 13.2.7.7 über die Gruppenwege in der Kreisgruppe beschreibt auch die Charaktere der additiven Gruppe $\mathbb{R}$. Genauer erhalten wir durch die Abbildungsvorschrift $y \mapsto (x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy})$ einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathbb{R})$$

Dies Beispiel wird bei der Fouriertransformation wichtig werden.

Beispiel 13.2.7.12 (**Charaktere zyklischer Gruppen**). Das Auswerten eines Charakters auf dem Erzeuger $1 \in (\mathbb{Z}, +)$ liefert nach der universellen Eigenschaft 2.2.3.31 von $\mathbb{Z}$ einen Gruppenisomorphismus

$$\mathfrak{X}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} S^1$$

Gegeben $m \in \mathbb{N}$ liefert das Auswerten eines Charakters auf der Nebenklasse der Eins nach der universellen Eigenschaft 4.4.2.1 des Quotienten weiter einen Gruppenisomorphismus

$$\mathfrak{X}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mu_m := \{\zeta \in S^1 \mid \zeta^m = 1\}$$

der Charaktergruppe von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit der Gruppe μ_m der m-ten Einheitswurzeln. Wir können das Auswerten auch als Paarung $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mu_m \to S^1$, $(\bar{n}, \zeta) \mapsto \zeta^n$ lesen. Diese Paarung liefert dann auch umgekehrt einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mu_m)$$

In der Tat prüft man leicht die Injektivität. Weil es nun aber Gruppenisomorphismen $\mu_m \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gibt, haben beide Seiten gleichviele Elemente.

Lemma 13.2.7.13 (**Charaktere der Kreisgruppe**). *Jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\chi : S^1 \to S^1$ ist von der Form $\chi = \chi_n : z \mapsto z^n$ für genau ein $n \in \mathbb{Z}$ und die Abbildung $n \mapsto \chi_n$ ist ein Gruppenisomorphismus*

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(S^1)$$

Beweis. Das einzige Problem ist nachzuweisen, daß es außer den χ_n keine weiteren stetigen Gruppenhomomorphismen $\chi : S^1 \to S^1$ gibt. Ist aber χ solch ein Gruppenhomomorphismus, so ist $\varphi : t \mapsto \chi(\exp(\mathrm{i}t))$ ein Gruppenweg in S^1. Nach 13.2.7.7 gibt es folglich $a \in \mathbb{R}$ mit $\chi(\exp(\mathrm{i}t)) = \exp(\mathrm{i}at)$. Wegen $\chi(1) = 1$ folgt erst $\exp(2\pi\mathrm{i}a) = 1$ und dann $a \in \mathbb{Z}$ und dann schließlich $\chi(\exp(\mathrm{i}t)) = (\exp(\mathrm{i}t))^n$ alias $\chi = \chi_n$. $\square$

Zweiter Beweis. Die Algebra zeigt, daß das Auswerten an der Restklasse von 1 für jede Gruppe G eine Bijektion $\mathrm{Grp}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} \{g \in G \mid g^n = e\}$ liefert. Jeder Gruppenhomomorphismus $\chi : S^1 \to S^1$ induziert nun auf den 2^s-ten Einheitswurzeln einen Gruppenhomomorphismus, der nach dem Vorhergehenden die Gestalt $\chi(z) = z^{n(s)}$ haben muß. Hier wird $n(s)$ durch die zusätzlichen Bedingung $-2^{s-1} < n(s) \leq 2^{s-1}$ eindeutig festgelegt. Ist χ stetig, so liegt für hinreichend großes s das Bild von $\exp(2\pi\mathrm{i}/2^s)$ in der Halbebene aller komplexen Zahlen mit positivem Realteil, und dann gilt sogar $-2^{s-2} < n(s) \leq 2^{s-2}$. Dann zeigt aber die Rückwärtskompatibilität $n(s) \equiv n(s+1) \pmod{2^s}$, daß unsere Folge stagnieren muß, und ein Dichtheitsargument beendet den Beweis. □

Definition 13.2.7.14. Unter einer **Fourier-Gruppe** verstehen wir eine topologische Gruppe, die isomorph ist zum Produkt einer endlich erzeugten diskreten abelschen Gruppe mit endlich vielen Kopien der Kreisgruppe und endlich vielen Kopien der additiven Gruppe $\mathbb{R}$.

13.2.7.15 (**Verträglichkeit von induzierter Topologie und Produkttopologie**). Aus der Definition der Produkttopologie folgt, daß gegeben $A \subset X$ und $B \subset Y$ die Produkttopologie der induzierten Topologien auf $A \times B$ übereinstimmt mit der induzierten Topologie unter der Einbettung $A \times B \hookrightarrow X \times Y$ zur Produkttopologie auf $X \times Y$. Insbesondere ist jede Fouriergruppe homöomorph zu einer abgeschlossenen Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$.

13.2.7.16 (**Diskussion der Terminologie**). Der Begriff einer „Fouriergruppe“ ist nicht gebräuchlich. Für diese topologischen Gruppen läßt sich jedoch die Theorie der allgemeinen Fouriertransformation sehr viel leichter entwickeln als für allgemeine abelsche lokal kompakte Hausdorffgruppen. Für die meisten Anwendungen außerhalb der Zahlentheorie ist diese Allgemeinheit darüberhinaus ausreichend. Deshalb will ich mich hier auf diesen Fall beschränken und dafür braucht er einen griffigen Namen. In der üblichen Terminologie, wie sie in 22.3.2.19 eingeführt wird, sind unsere Fouriergruppen genau die „abelschen Liegruppen mit endlich erzeugter Komponentengruppe“, vergleiche 22.4.5.20 und 22.4.5.2.

Beispiel 13.2.7.17. Die multiplikativen Gruppen $\mathbb{C}^\times$ und $\mathbb{R}^\times$ sind Fouriergruppen. Jeder endlichdimensionale reelle Vektorraum ist eine Fouriergruppe.

Definition 13.2.7.18. Ein **Haar-Maß** auf einer Fouriergruppe G ist ein von Null verschiedenes Borelmaß μ mit $\mu(gA) = \mu(A)$ für jede Borelmenge $A \subset G$ und alle $g \in G$.

Beispiele 13.2.7.19. Ein erstes Beispiel für ein Haarmaß ist das Lebesguemaß. Vielleicht sogar noch davor kommt das Zählmaß auf einer beliebigen diskreten endlichen abelschen Gruppe. Ein Haarmaß auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V konstruiert man unschwer als Bildmaß des mehrdimensionalen Lebesguemaßes mit einem Isomorphismus $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$ von Vektorräumen.

Vorschau 13.2.7.20. Allgemeiner betrachtet man Haarmaße auf beliebigen lokal kompakten Hausdorffgruppen G und versteht darunter von Null verschiedene reguläre Borelmaße μ mit $\mu(gA) = \mu(A)$ für jede Borelmenge $A \subset G$ und alle $g \in G$. Die Regularität mußten wir im Fall von Fouriergruppen in unserer Definition nicht extra fordern, da sie in diesem Fall bereits aus Satz 13.1.10.10 über die Regularität von Borelmaßen folgt. Für Matrixliegruppen diskutieren wir Haarmaße in 22.2.4.4, in der Allgemeinheit abzählbar basierter lokal kompakter Hausdorffgruppen in 15.4.3.14 und in der Allgemeinheit beliebiger lokal kompakter Hausdorffgruppen als Radonmaße in 15.4.3.3.

Satz 13.2.7.21 (Haarmaße auf Fouriergruppen, Existenz und Eindeutigkeit). *Auf jeder Fouriergruppe existiert ein Haarmaß und je zwei Haarmaße unterscheiden sich höchstens um eine positive multiplikative Konstante.*

Beweis. Im Fall $G = \mathbb{R}$ hatten wir das Lebesguemaß bereits dadurch definiert, daß es das einzige Haarmaß ist, das dem Einheitsintervall den Wert Eins zuordnet. In diesem Fall stimmt also unser Satz. Den Fall der Kreisgruppe kann der Leser leicht ableiten. Im Fall einer endlich erzeugten abelschen Gruppe sind offensichlich das Zählmaß und seine Vielfachen die einzigen Haarmaße. Im allgemeinen können wir die Existenz eines Haarmaßes zeigen, indem wir Produkte dieser Haarmaße bilden. Für die Eindeutigkeit reicht es zu zeigen, daß gegeben zwei Fouriergruppen G, H mit einem jeweils bis auf eine positive multiplikative Konstante eindeutigen Haarmaß jedes Haarmaß ν auf dem Produkt das Produktmaß zu Haarmaßen auf den Faktoren ist. An die Arbeit! Sicher gibt es in $G \times H$ ein Kompaktum C derart, daß abzählbar viele verschobene Kopien von C ganz $G \times H$ überdecken. Für unser Haarmaß ν gilt wegen $\nu \neq 0$ folglich $\nu(C) > 0$. Die Projektionen von C sind dann Kompakta $K \subset G$ und $L \subset H$ mit $\nu(K \times L) > 0$. Durch Multiplikation mit einer Konstante dürfen wir sogar $\nu(K \times L) = 1$ annehmen. Dann erhalten wir offensichtlich ein Haarmaß λ auf G durch die Vorschrift $\lambda(A) := \nu(A \times L)$ und ein Haarmaß μ auf H durch die Vorschrift $\mu(B) := \nu(K \times B)$. Ist A enthalten in einem Kompaktum, so liefert weiter die Vorschrift $\mu_A(B) := \nu(A \times B)$ ein Haarmaß oder das Nullmaß auf H. Also gibt es nach Annahme eine nur von A abhängende Konstante $c_A \geq 0$ mit $\mu_A(B) = c_A\mu(B)$ und durch Einsetzen von $B = L$ ergibt sich

$$\lambda(A) = \nu(A \times L) = \mu_A(L) = c_A\mu(L) = c_A$$

Das zeigt für alle meßbaren Mengen $A \subset G$ und $B \subset H$ mit A enthalten in einem Kompaktum die Identität

$$\nu(A \times B) = \mu_A(B) = c_A\mu(B) = \lambda(A)\mu(B)$$

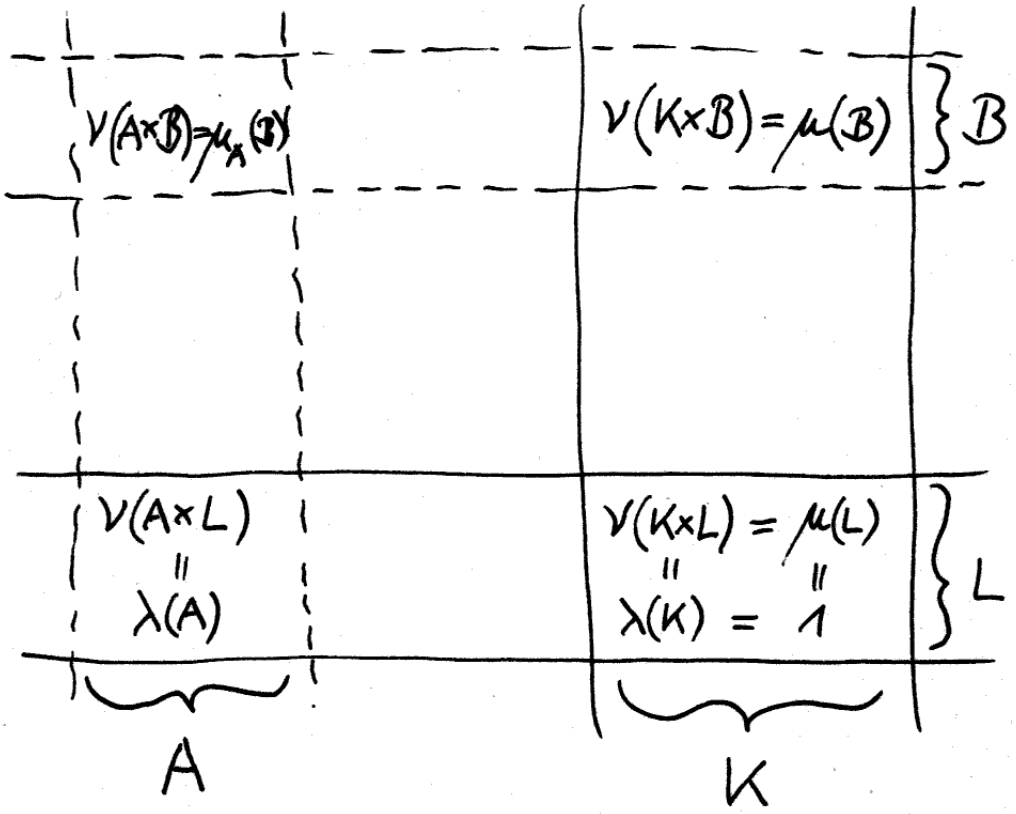


Illustration zum Beweis der Eindeutigkeit von Haarmaßen für Fouriergruppen.

Da aber jede Fouriergruppe als abzählbare Vereinigung von Kompakta geschrieben werden kann, erzeugen die Produkte $A \times B$ mit in Kompakta enthaltenen meßbaren Mengen A, B bereits die borelsche σ-Algebra von $A \times B$. Mit dem Maßfortsetzungssatz von Caratheodory 13.1.2.11 folgt wie gewünscht $\nu = \lambda \boxtimes \mu$. $\square$

Definition 13.2.7.22. Ein Haarmaß heißt **normiert**, wenn es der ganzen Gruppe das Maß Eins zuordnet.

Satz 13.2.7.23 (Fourierreihen und Charaktere). *Jede kompakte Fouriergruppe K besitzt genau ein normiertes Haarmaß $\mu = \mu_K$ und die Menge $\mathfrak{X}(K)$ ihrer Charaktere ist eine Hilbertbasis des Raums $\mathrm{L}^2(K;\mu)$ der quadratintegrierbaren Funktionen auf K.*

Vorschau 13.2.7.24. Der Satz gilt allgemeiner für jede abelsche kompakte Hausdorffgruppe. Für einen Beweis in dieser Allgemeinheit verweise ich auf 15.4.7.8.

Beispiel 13.2.7.25 (**Der Fall einer Kreisgruppe**). Im Fall der Kreisgruppe liefert die Abbildung $E : t \mapsto \exp(\mathrm{i}t)$ einen Isomorphismus $([0,2\pi), \mathrm{d}t/2\pi) \xrightarrow{\sim} (S^1, \mu)$ von Maßräumen und folglich einen Isomorphismus von Hilberträumen

$$\mathrm{L}^2([0,2\pi); \mathrm{d}t/2\pi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2(S^1;\mu)$$

Die Charaktere $\chi_n : z \mapsto z^n$ bilden also genau dann eine Hilbertbasis von $\mathrm{L}^2(S^1;\mu)$, wenn die Funktionen $\chi_n \circ E : t \mapsto \exp(\mathrm{i}nt)$ eine Hilbertbasis von $\mathrm{L}^2([0,2\pi); \mathrm{d}t/2\pi)$ oder gleichbedeutend von $\mathrm{L}^2([0,2\pi]; \mathrm{d}t/2\pi)$ bilden. So sehen wir, daß unser Satz 13.2.7.23 in diesem Fall nur eine Umformulierung des Satzes 13.2.6.5 über die Fourierreihe ist.

Beispiel 13.2.7.26 (**Der Fall einer endlichen Gruppe**). Unser Satz ist bereits im Fall einer endlichen Gruppe durchaus relevant, wenn er auch in diesem Fall besser in eine Vorlesung über Algebra paßt. Im Spezialfall einer zyklischen Gruppe von Einheitswurzeln $\mu_m := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^m = 1\} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ etwa sind die Charaktere genau alle Abbildungen $\chi_n : \zeta \mapsto \zeta^n$ für $n = 0, 1, \ldots, m-1$ und der in unserem Satz versteckte Hilbertraumisomorphismus

$$\mathrm{L}^2(\mathfrak{X}(K);\zeta) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2(K;\mu)$$

heißt die **diskrete Fouriertransformation**. Die diskrete Fouriertransformation ist für konkrete Anwendungen von besonderer Bedeutung, da in der Praxis stets nur endlich viele Messungen durchgeführt werden können.

Vorschau 13.2.7.27. In der Algebra werden wir dieses Beispiel in 8.1.2.14 auf den Fall allgemeinerer Grundkörper verallgemeinern und in 8.4.3.6 auf den Fall endlicher nicht notwendig kommutativer Gruppen. In 15.4.9.5 schließlich führen wir im Fall komplexer Koeffizienten diese Verallgemeinerungen in verschiedene Richtungen wieder zusammen unter dem Dach einer „Fouriertransformation für kompakte Hausdorffgruppen“.

Beweis des Satzes über Fourierreihen und Charaktere. Nach 13.2.7.21 gibt es auf jeder Fouriergruppe ein bis auf eine positive multiplikative Konstante eindeutiges Haarmaß. Damit gibt es offensichtlich auf jeder kompakten Fouriergruppe genau ein normiertes Haarmaß μ. Für jedes Element $g \in K$ gilt nun per definitionem $(g\cdot)_*\mu = \mu$. Gegeben ein Charakter $\chi : K \to S^1$ gilt weiter $\chi(gh) = \chi(g)\chi(h)$ und damit

$$\int \chi\mu = \int \chi\,(g\cdot)_*\mu = \int (\chi \circ (g\cdot))\,\mu = \int \chi(g)\chi\mu = \chi(g)\int \chi\mu$$

Ist insbesondere χ ein nichttrivialer Charakter von K, gibt es in anderen Worten $g \in K$ mit $\chi(g) \neq 1$, so folgt $\int \chi\mu = 0$. Gegeben zwei Charaktere χ, ψ gilt in $\mathrm{L}^2(K;\mu)$ also

$$\langle \chi, \psi \rangle = \int \bar{\chi}\psi\,\mu = \delta_{\chi,\psi}$$

Das zeigt, daß die Charaktere ein Orthonormalsystem bilden. Es bleibt zu zeigen, daß es vollständig ist. Wir wissen das bereits für K endlich zyklisch durch Dimensionsvergleich und für K die Kreisgruppe aus der Theorie der Fourierreihen. Im allgemeinen folgt es dann aus 13.2.3.23 oder alternativ aus dem Approximationssatz von Stone-Weierstraß 11.3.2.13. In der Tat ist der von den Charakteren aufgespannte Untervektorraum $\langle \mathfrak{X}(K)\rangle_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{C}(K)$ eine unter der komplexen Konjugation stabile Unterringalgebra, die die Punkte trennt, und folglich eine dichte Teilmenge für die Norm $\| \ \|_\infty$ der gleichmäßigen Konvergenz. Die stetigen Funktionen hinwiederum sind nach 13.2.6.3 dicht in $\mathrm{L}^2(K;\mu)$. □

Übungen

Übung 13.2.7.28. Gegeben eine topologische Gruppe G ist jede Untergruppe $H \subset G$ mit ihrer induzierten Topologie auch eine topologische Gruppe. Hinweis: 13.2.7.15.

Übung 13.2.7.29. Man konstruiere eine Bijektion zwischen der Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen $(S^1)^m \to (S^1)^n$ und der Menge $\mathrm{Mat}(n \times m; \mathbb{Z})$ aller $(n \times m)$-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen. Hinweis: 13.2.7.13.

Ergänzende Übung 13.2.7.30. Gegeben $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon \in \{0, 1\}$ betrachten wir den Gruppenhomomorphismus $\rho_{\lambda,\varepsilon} : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{C}^\times$ mit $\rho_{\lambda,\varepsilon}(x) = |x|^\lambda(\mathrm{sgn}(x))^\varepsilon$. Man zeige, daß wir so genau alle stetigen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R}^\times \to \mathbb{C}^\times$ erhalten. Hinweis: Man beachte $\mathbb{R} \times \{1, -1\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0} \times \{1, -1\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^\times$ vermittels $(\exp \times \mathrm{id})$ beziehungsweise der Multiplikation und wende Übung 10.4.5.28 an, in der alle Gruppenwege in $\mathbb{C}^\times$ beschrieben werden.

Übung 13.2.7.31 (**Charaktere von Produkten**). Gegeben G, H topologische Gruppen zeige man, daß die durch $\chi \mapsto (\chi \circ i, \chi \circ j)$ gegebene Abbildung ein Gruppenisomorphismus

$$\mathfrak{X}(G \times H) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(H)$$

ist, mit $i : G \hookrightarrow G \times H$, $g \mapsto (g, 1)$ und $j : H \hookrightarrow G \times H$, $h \mapsto (1, h)$.

Übung 13.2.7.32 (**Meßbare Homomorphismen von Fouriergruppen**). Man zeige, daß jeder meßbare Gruppenhomomorphismus von Fouriergruppen stetig ist. Hier darf meßbar sogar in Bezug auf die Vervollständigung der Borel'schen σ-Algebra nach dem Haar-Maß verstanden werden. Hinweis: Man zeigt wie in 13.2.6.10 für jede Fouriergruppe G, daß die Abbildung $G \times \mathrm{L}^2(G) \to \mathrm{L}^2(G)$ gegeben durch $(w, f) \mapsto (f \circ (w\cdot))$ stetig ist. Man folgere, daß für kompaktes G jeder meßbare Gruppenhomomorphismus $G \to S^1$ stetig ist. Wie in 13.2.6.11 zeigt man, daß für jede Fouriergruppe G jeder meßbare Gruppenhomomorphismus $G \to \Gamma$ in eine diskrete Fouriergruppe stetig ist. Damit kann man sich dann durchtricksen.

13.2.8 Orthogonale Projektionen in Hilberträumen

13.2.8.1. Wir holen den Beweis nach für unsere Behauptung, daß jeder Hilbertraum eine Hilbertbasis besitzt. Dem liegt der folgende allgemeine Satz zugrunde.

Satz 13.2.8.2 (**Hilbertraumkomplemente**). *1. Gegeben eine Teilmenge U eines Prähilbertraums $\mathcal{H}$ ist ihr Orthogonalraum $U^\perp := \{v \in \mathcal{H} \mid \langle u, v\rangle = 0 \ \forall u \in U\}$ ein abgeschlossener Teilraum;*

2. Gegeben ein vollständiger Teilraum U eines Prähilbertraums $\mathcal{H}$ liefert die Addition eine Bijektion $U \times U^\perp \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$;

3. Gegeben ein abgeschlossener Teilraum U eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ liefert die Addition eine Bijektion $U \times U^\perp \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$;

Beweis. 1. Sicher ist für alle $x \in \mathcal{H}$ die Abbildung $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$, $v \mapsto \langle x, v\rangle$ stetig und linear. Das Urbild $x^\perp$ von $0 \in \mathbb{C}$ unter dieser Abbildung ist also ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$, und dann muß auch für beliebiges $U \subset \mathcal{H}$ die Menge

$$U^\perp = \{v \in \mathcal{H} \mid \langle x, v\rangle = 0 \quad \forall\, x \in U\} = \bigcap_{x \in U} x^\perp$$

ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$ sein.

2. Ist U ein Teilraum, so gilt offensichtlich $U \cap U^\perp = 0$ und damit ist unsere Additionsabbildung injektiv. Um für U einen vollständigen Teilraum ihre Surjektivität zu zeigen, wählen wir ein $v \in \mathcal{H}$ und setzen $d = d(v, U) := \inf_{u \in U} \|v - u\|$. Sicher gibt es eine Folge u_n von Vektoren aus U mit $\lim_{n\to\infty} \|v - u_n\| = d$. Wir erinnern nun die Parallelogrammregel 4.1.1.25, nach der die Summe der Quadrate der vier Seiten eines Parallelogramms gleich ist zur Summe der Quadrate der beiden Diagonalen. Ist also eine Diagonale fast so lang wie der halbe Umfang, so muß die andere Diagonale sehr kurz sein. In Formeln erhalten wir

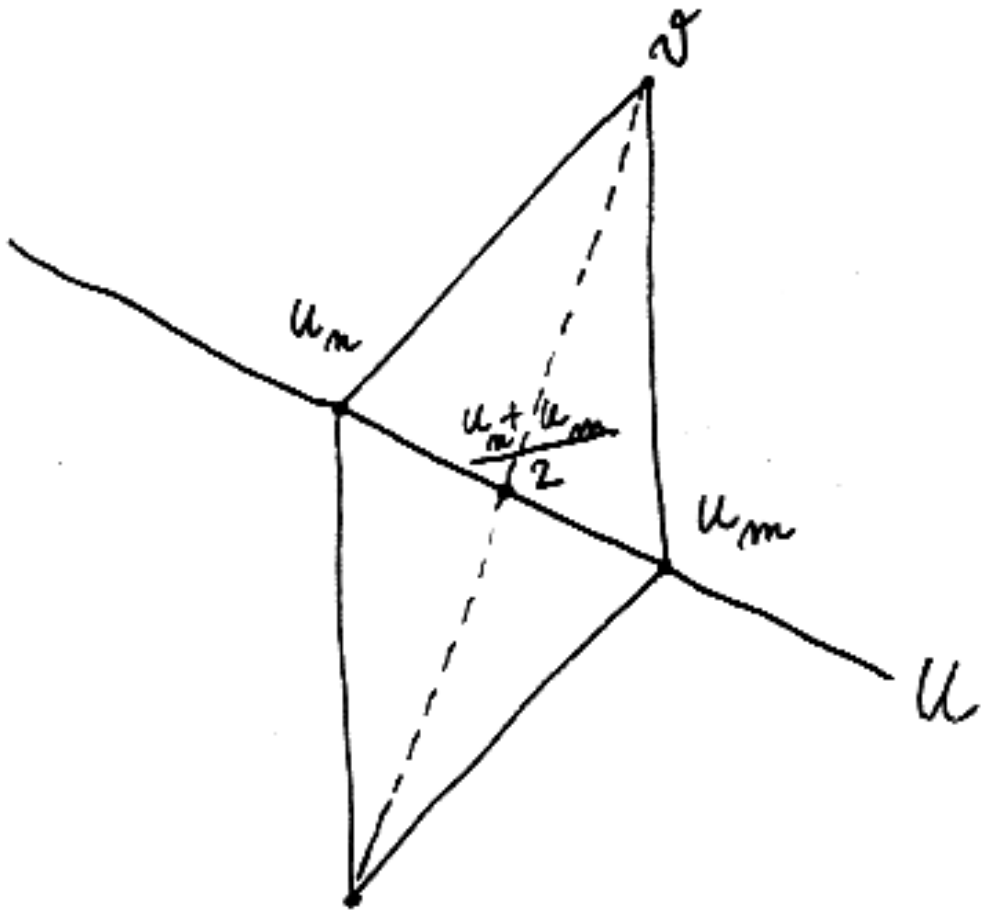


Illustration zum Beweis des Satzes über das orthogonale Komplement: Ist in einem Parallelogramm eine Diagonale, hier etwa die gestrichelt eingezeichnete, fast so lang wie der halbe Umfang, so muß die andere Diagonale sehr kurz sein.

$$\begin{aligned} 2\|v-u_n\|^2 + 2\|v-u_m\|^2 &= \|u_n-u_m\|^2 + \|2v-u_n-u_m\|^2 \\ &= \|u_n-u_m\|^2 + 4\|v-(u_n+u_m)/2\|^2 \end{aligned}$$

Da aber $(u_n+u_m)/2$ auch in U liegt, folgt

$$2\|v-u_n\|^2 + 2\|v-u_m\|^2 - 4d^2 \;\geq\; \|u_n-u_m\|^2$$

Aus dieser Abschätzung erkennt man, daß die u_n eine Cauchyfolge bilden. Da U vollständig ist, gibt es $u \in \mathcal{H}$ mit $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. Da die Norm stetig ist, gilt weiter $d = \|v-u\|$. Wir behaupten $(v-u) \in U^\perp$. In der Tat, für alle $h \in U$ nimmt die Funktion

$$t \mapsto \|v-u+th\|^2 = \|v-u\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}\langle v-u, h\rangle + t^2\|h\|^2$$

bei $t = 0$ ein Minimum an, folglich verschwindet dort ihre Ableitung und wir erhalten $\mathrm{Re}\langle v-u, h\rangle = 0$ für alle $h \in U$. Damit haben wir die gesuchte Zerlegung $v = u + (v-u)$ mit $u \in U$ und $(v-u) \in U^\perp$ gefunden.

3. Im Fall eines Hilbertraums sind nach **??** und **??** die vollständigen Teilräume genau die abgeschlossenen Teilräume. Damit folgt unsere Behauptung aus Teil 2. □

Korollar 13.2.8.3 (**Riesz'scher Darstellungssatz für Hilberträume**). *Jede stetige Linearform auf einem Hilbertraum kann beschrieben werden als das Bilden des Skalarprodukts mit einem durch die besagte Linearform eindeutig bestimmten Vektor.*

Beweis. Sei $\mathcal{H}$ unser Hilbertraum und $l : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ unsere Linearform. Der Kern $\ker l \subset \mathcal{H}$ ist ein abgeschlossener Teilraum und die Linearform l induziert eine Injektion $(\ker l)^\perp \hookrightarrow \mathbb{C}$. Wir haben also $\dim(\ker l)^\perp \leq 1$. Im Fall $l = 0$ ist $x = 0$ das gesuchte Element von $\mathcal{H}$. Sonst finden wir genau ein $x \in (\ker l)^\perp$ mit $\langle x, v\rangle = l(v)\ \forall v \in (\ker l)^\perp$. Da diese Gleichung eh gilt für alle $v \in \ker l$, folgt sie für alle $v \in \mathcal{H}$. □

Korollar 13.2.8.4. *Jeder Hilbertraum besitzt eine Hilbertbasis.*

Beweis. Nach dem Zorn'schen Lemma finden wir ein bezüglich Inklusion maximales Orthonormalsystem. Wäre der Abschluß seines Erzeugnisses nicht der ganze Raum, so könnten wir unser Orthonormalsystem nach 13.2.8.2 doch noch vergrößern durch Hinzunahme eines Vektors der Länge Eins aus seinem orthogonalen Komplement im Widerspruch zur Maximalität. □

13.2.8.5. Damit ist insbesondere gezeigt, daß sich jeder Hilbertraum schreiben läßt als ein Raum von quadratintegrierbaren Funktionen, und das sogar auf einer Menge mit Zählmaß.

Ergänzung 13.2.8.6 (**Keele-Vermutung**). Gegeben eine abgeschlossene beschränkte nichtleere Teilmenge eines Hilbertraums wird vermutet, daß es zu jedem Punkt unseres Hilbertraums nur einen nächsten Punkt in unserer Teilmenge gibt genau dann, wenn unsere Teilmenge konvex ist. Das ist derzeit (2004) meines Wissens nur für endlichdimensionale Räume bewiesen.

Beispiel 13.2.8.7. Der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum muß keine abzählbare Hilbertbasis besitzen. Um ein Beispiel dafür anzugeben, muß ich jedoch mehr Wissen voraussetzen. Betrachten wir den Raum $X = \mathrm{Ens}(I, \{1, -1\})$ aller Abbildungen von einer beliebigen Menge I in die zweielementige Menge $\{1, -1\}$. Mit der Produkttopologie zur diskreten Topologie auf $\{1, -1\}$ ist X kompakt nach dem Satz von Tychonoff 15.3.2.10. Jetzt liefert eine analoge Argumentation wie in 13.1.2.38 ein wohlbestimmtes Borelmaß auf X, das jedem Urbild eines Punktes unter der Projektion auf einen der Faktoren das Maß $1/2$ zuordnet. Die Projektionen auf die Faktoren bilden dann ein Orthonormalsystem in $\mathrm{L}^2(X)$.

Definition 13.2.8.8. Sei $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ eine lineare Abbildung von Hilberträumen und $B : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ eine lineare Abbildung in die Gegenrichtung. Die beiden Abbildungen A und B heißen **adjungiert**, wenn gilt

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, Bw\rangle \quad \forall v \in \mathcal{H},\ w \in \mathcal{H}'$$

13.2.8.9. Wir werden in 13.4.2.1 zeigen, daß eine lineare Abbildung zwischen Hilberträumen genau dann stetig ist, wenn sie eine adjungierte Abbildung besitzt. In Übung 13.2.8.10 sollen Sie von dieser Aussage die einfache Richtung zeigen.

Übungen

Übung 13.2.8.10. Jede stetige lineare Abbildung von Hilberträumen hat genau eine adjungierte Abbildung und diese ist auch stetig. Man notiert die adjungierte Abbildung zu A in der mathematischen Literatur meist A^*, in der physikalischen Literatur dahingegen meist $A^\dagger$. Man zeige nun weiter $(A^*)^* = A$ und $(AB)^* = B^*A^*$ und $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\|A\| = \|A^*\|$ sowie $\|A^*A\| = \|A\|^2$ für die Operatornorm. Hinweis: Zuerst mag der Riesz'sche Darstellungssatz helfen, angewandt auf $v \mapsto \langle Av, w\rangle$ für festes w, dann die Erkenntnis $\|A\| = \sup\{\langle Av, v'\rangle \mid \|v\| = \|v'\| = 1\}$ im Fall, daß keiner unserer beiden Räume der Nullraum ist.

Übung 13.2.8.11. Die orthogonalen Projektionen auf abgeschlossene Teilräume eines Hilbertraums sind genau die idempotenten selbstadjungierten Operatoren, als da heißt die stetigen linearen Selbstabbildungen P unseres Hilbertraums mit $P^2 = P$ und $P^* = P$.

Übung 13.2.8.12. Eine stetige lineare Abbildung zwischen Hilberträumen hat dichtes Bild genau dann, wenn die adjungierte Abbildung injektiv ist. Allgemeiner zeige man, daß das orthogonale Komplement des Bildes der Kern der adjungierten Abbildung ist.

Übung 13.2.8.13. Hier sollen sie ein direktes Argument ausarbeiten, das für jeden selbstadjungierten Operator T auf einem Hilbertraum die Identität

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \mid \|x\| \leq 1\}$$

zeigt: Bezeichnet M die rechte Seite, so ist $\|T\| \geq M$ eh klar. Für die andere Ungleichung betrachte man für x von der Länge Eins mit $Tx \neq 0$ sein auf Länge Eins normiertes Bild $y = Tx/\|Tx\|$. Dann gilt $\|Tx\| = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ und man erhält von der Mitte ausgehend

$$4M = M(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \geq \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle = 4\|Tx\|$$

Übung 13.2.8.14. Man zeige: Genau dann besitzt ein Hilbertraum eine abzählbare dichte Teilmenge, wenn er eine abzählbare Hilbertbasis besitzt.

13.3 Fouriertransformation

13.3.1 Definition und erste Eigenschaften

13.3.1.1 (**Motivation**). Im akustischen Beispiel bedeutet die Fouriertransformation, ein zeitabhängiges Signal nach seinen Frequenzanteilen zu zerlegen und in der umgekehrten Richtung eine Vorgabe von Frequenzanteilen mit ihren jeweiligen Stärken zu einem zeitabhängigen Signal zusammenzufassen. Letztere Operation leistet etwa eine Orgel und Erstere unser Ohr, so daß man fast Lust hätte, statt von Fouriertransformationen und ihren Inversen von „Orgeltransformationen“ und „Hörtransformationen“ zu reden. Mich verblüfft immer wieder, daß diese Transformationen beide durch dieselbe mathematische Formel beschrieben werden. Aber genug geredet, her mit den Formeln!

Definition 13.3.1.2. Gegeben eine in Bezug auf das Lebesguemaß 13.1.1.28 integrierbare Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ erklärt man ihre **Fouriertransformierte** als die Funktion $f^\wedge : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, die gegeben wird durch die Vorschrift

$$f^\wedge(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot y}\, \mathrm{d}^n x$$

Hier bezeichnet $x \cdot y \in \mathbb{R}$ das Standardskalarprodukt der Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wenn ich auf der in diese Formeln eingearbeiteten Standardisierung bestehen will, rede ich von der **physikalisch standardisierten Fouriertransformierten**. Offensichtlich liefert die Abbildungsvorschrift $f \mapsto f^\wedge$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Ens}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

von zumindest im Fall $n \geq 1$ unendlichdimensionalen komplexen Vektorräumen, die **Fouriertransformation** oder genauer **Fouriertransformation auf integrierbaren Funktionen**.

13.3.1.3. Natürlich kann man die Fouriertransformierte auch berechnen, wenn man eine integrierbare Funktion nur fast überall kennt. Unsere Fouriertransformation induziert also eine lineare Abbildung

$$\mathcal{F} : \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Ens}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

mit $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ dem Raum der fast überall definierten integrierbaren Funktionen alias L^1-Funktionen aus 13.2.2.14 und auch diese nennen wir Fouriertransformation. Das Vorzeichen im Exponenten kommt her vom Vorzeichen aus unserer Formel für die Koeffizienten der Fourierreihe am Ende des Beweises von 11.3.1.3 und verbessert die Verträglichkeit beider Formalismen. Es gibt noch verschiedene andere

gängige Standardisierungen. Für das Lösen von Differentialgleichungen besonders beliebt und praktisch ist die Variante $f^\wedge(y) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\, \mathrm{d}^n x$. Ich nenne sie die **mathematisch standardisierte Fouriertransformation**. In der Stochastik arbeitet man meist mit der Variante $f^\wedge(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot y}\, \mathrm{d}^n x$. Ich nenne sie die **stochastisch standardisierte Fouriertransformation** ohne implizieren zu wollen, daß die Stochastik kein Teil der Mathematik sei. Normalisierungsfragen werden wir später noch ausführlicher besprechen. In jeder unserer Normalisierungen werden wieder andere Formeln besonders einfach. Ich ziehe die physikalische Standardisierung vor, weil sie am besten zu meiner Anschauung paßt. Wenn nichts anderes gesagt ist, ist im folgenden stets die physikalische Standardisierung gemeint.

Beispiel 13.3.1.4. Wir berechnen die Fouriertransformierte der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-|x|}$ und erhalten

$$\begin{aligned} f^\wedge(y) &= \int \mathrm{e}^{-|x|}\, \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(2\pi\mathrm{i}y+1)x}\, \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-(2\pi\mathrm{i}y-1)x}\, \mathrm{d}x \\ &= \left(\tfrac{1}{2\pi\mathrm{i}y+1} - \tfrac{1}{2\pi\mathrm{i}y-1}\right) \\ &= \tfrac{2}{4\pi^2y^2+1} \end{aligned}$$

Satz 13.3.1.5 (Formeln für die Fouriertransformation). *Gegeben eine integrierbare Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt:*

1. *Die Fouriertransformierte $f^\wedge$ von f ist stetig und beschränkt und es gilt genauer $|f^\wedge(y)| \le \|f\|_1$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$;*
2. *Für $g(x) := f(x)\, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha\cdot x}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^n$ haben wir $g^\wedge(y) = f^\wedge(y-\alpha)$;*
3. *Für $g(x) := f(x-b)$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ haben wir $g^\wedge(y) = f^\wedge(y)\, \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}b\cdot y}$;*
4. *Für $g(x) := \overline{f(x)}$ haben wir $g^\wedge(y) = \overline{f^\wedge(-y)}$;*
5. *Für $g(x) := f(cx)$ mit $c \in \mathbb{R}^\times$ haben wir $g^\wedge(y) = |c|^{-n} f^\wedge(y/c)$;*
6. *Ist für ein ν mit $1 \le \nu \le n$ die Funktion g mit $g(x) := x_\nu f(x)$ auch integrierbar, so ist $f^\wedge$ partiell differenzierbar nach der ν-ten Variablen und es gilt $g^\wedge(y) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \frac{\partial f^\wedge}{\partial y_\nu}(y)$;*
7. *Ist für ein ν mit $1 \le \nu \le n$ die Funktion f stetig partiell differenzierbar nach der ν-ten Variablen und ist $h(x) := \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x)$ auch integrierbar, so gilt $h^\wedge(y) = 2\pi\mathrm{i}y_\nu f^\wedge(y)$.*

Vorschau 13.3.1.6. In 13.3.1.16 zeigen wir zusätzlich, daß die Fouriertransformierte $f^\wedge$ einer integrierbaren Funktion f für $\|y\| \to \infty$ stets gegen Null strebt.

Beweis. Per definitionem ist die Fouriertransformierte von f beschränkt durch $\|f\|_1$. Nach der Charakterisierung der Stetigkeit als Folgenstetigkeit aus 10.3.5.43 reicht es zum Nachweis der Stetigkeit (1), wenn wir für jede konvergente Folge $y_r \to y$ zeigen, daß gilt $f^\wedge(y_r) \to f^\wedge(y)$. Das folgt jedoch leicht aus dem Satz über dominierte Konvergenz 13.1.6.10. Die Behauptungen (2) bis (5) ergeben sich durch mühelose Rechnungen. Um (6) zu zeigen, wenden wir unsere Erkenntnisse zum Differenzieren unter dem Integral aus 13.1.6.17 an. Formal ist das allerdings etwas mühsam, da wir dort noch keine vektorwertigen Funktionen betrachtet hatten und hier zumindest mit komplexwertigen Funktionen arbeiten müssen. Ich führe deshalb den Beweis nochmal in unserem Fall mit den entsprechenden Variationen aus. Dazu bezeichnen wir mit $\mathrm{e}_\nu \in \mathbb{R}^n$ den ν-ten Einheitsvektor und rechnen

$$\frac{f^\wedge(y + t\,\mathrm{e}_\nu) - f^\wedge(y)}{t} = \int f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot y}\,\frac{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}tx_\nu} - 1}{t}\,\mathrm{d}^n x$$

Jetzt beachten wir die Abschätzung $|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - 1| \le |a|$ für $a \in \mathbb{R}$. Der Integrand ist damit beschränkt durch die integrierbare Funktion $|2\pi x_\nu f(x)|$. Nach dem Satz über dominierte Konvergenz gilt also für jede Folge t_r aus $\mathbb{R}^\times$ mit $t_r \to 0$ notwendig

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f^\wedge(y + t_r\,\mathrm{e}_\nu) - f^\wedge(y)}{t_r} = \int f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot y}(-2\pi\mathrm{i}x_\nu)\,\mathrm{d}^n x = -2\pi\mathrm{i}g^\wedge(y)$$

Die Behauptung folgt damit aus Übung 10.3.5.51. Um (7) zu zeigen beginnen wir mit dem Fall $n = 1$ und finden

$$f'^\wedge(y) = \int f'(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{a_r}^{b_r} f'(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x$$

für beliebige Folgen a_r, b_r mit $a_r \to -\infty$ und $b_r \to \infty$. Mit einer partiellen Integration dürfen wir das umschreiben zu

$$f'^\wedge(y) = \lim_{r\to\infty} \left(f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\,|_{a_r}^{b_r} - \int_{a_r}^{b_r} f(x)(-2\pi\mathrm{i}y)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x \right)$$

Da f integrierbar ist, können wir unsere Folgen a_r, b_r sogar so wählen, daß gilt $\lim_{r\to\infty} f(a_r) = \lim_{r\to\infty} f(b_r) = 0$. Auf diese Weise sehen wir

$$f'^\wedge(y) = 2\pi\mathrm{i}y f^\wedge(y)$$

Für beliebiges n folgt unsere Behauptung dann mit dem Satz von Fubini. □

13.3.1.7. Nach dem vorhergehenden faktorisiert die Fouriertransformation über eine wohlbestimmte Abbildung

$$\mathcal{F} : \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$$

vom Raum der integrierbaren Funktionen in den Raum der stetigen beschränkten Funktionen.

13.3.1.8. Bezeichnet $\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertransformation und τ_a die Verschiebung wie in 13.2.6.10, also $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$, so bedeuten die Formeln 2 und 3 der Proposition 13.3.1.5 kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\tau_b"'] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}b\cdot y}"] \\ \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a\cdot x}"'] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "\tau_a"] \\ \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \end{tikzcd}$$

Steht hier neben einem vertikalen Pfeil eine Funktion, so ist die durch Multiplikation mit besagter Funktion gegebene Abbildung gemeint.

Definition 13.3.1.9. Der **Schwartzraum** $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist der Raum aller glatten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ derart, daß für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ die Funktion $x^\alpha \partial^\beta f$ beschränkt ist. Hier verwenden wir die Multiindexschreibweise aus 12.2.2.3. Im Fall einer Veränderlichen bedeutet unsere Forderung also in Worten, daß alle Ableitungen unserer Funktion multipliziert mit beliebigen Polynomfunktionen beschränkt bleiben.

13.3.1.10. Im Schwartzraum liegen insbesondere alle glatten Funktionen mit kompaktem Träger. Offensichtlich ist der Schwartzraum stabil unter Multiplikationen mit beliebigen x^α und unter allen partiellen Ableitungen ∂^β. Offensichtlich sind alle Funktionen des Schwartzraums integrierbar.

Beispiel 13.3.1.11. Die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ liegt im Schwartzraum.

Lemma 13.3.1.12. *Die Fouriertransformation führt den Schwartzraum in sich selber über.*

Beweis. Für eine Funktion aus dem Schwartzraum $f \in \mathcal{S}$ finden wir nach 13.3.1.10 und Proposition 13.3.1.5 induktiv, daß $f^\wedge$ beliebig stetig partiell differenzierbar ist und daß für alle Multiindizes α, β gilt

$$(\partial^\beta x^\alpha f)^\wedge = (2\pi\mathrm{i})^{|\beta|-|\alpha|} y^\beta \partial^\alpha f^\wedge$$

Die Fouriertransformierten integrierbarer Funktionen sind aber nach 13.3.1.5.1 stets beschränkt, und damit gehört $f^\wedge$ auch zum Schwartzraum. □

13.3.1.13. Bezeichnet $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ die Fouriertransformation auf dem Schwartzraum und bezeichnet τ_a die Verschiebung wie in 13.2.6.10, in Formeln gegeben

durch $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$, so liefert die Proposition 13.3.1.5 uns vier kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\tau_b"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}b\cdot y}"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathcal{S} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a\cdot x}"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "\tau_a"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathcal{S} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "x_\nu"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial y_\nu}"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathcal{S} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\frac{\partial}{\partial x_\nu}"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "2\pi\mathrm{i}y_\nu"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathcal{S} \end{tikzcd}$$

Steht hier neben einem vertikalen Pfeil eine Funktion, so ist die durch Multiplikation mit besagter Funktion gegebene Abbildung $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ gemeint, im Fall des vertikalen Pfeils links unten also die Abbildung $f \mapsto x_\nu f$, wobei $x_\nu f$ die Funktion meint mit den Werten $(x_\nu f)(x_1, \ldots, x_n) = x_\nu f(x_1, \ldots, x_n)$. Die Fouriertransformation verwandelt nach den unteren Diagrammen insbesondere partielles Ableiten in algebraische Operationen. Eine beliebte Anwendung ist denn auch das Lösen von Differentialgleichungen. Im weiteren Verlauf wird die Inversionsformel 13.3.3.19 auch noch zwei unserer vier Diagramme überflüssig machen.

Ergänzung 13.3.1.14. Hätten wir hier statt mit unseren Konventionen mit der mathematischen Standardisierung $(\mathcal{F}f)(y) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\, \mathrm{d}^n x$ gearbeitet, so würden sich obige Diagramme dahingehend vereinfachen, daß alle Faktoren 2π darin wegfallen. Der Vorfaktor $(2\pi)^{-n/2}$ bei der mathematischen Standardisierung ist an dieser Stelle noch irrelevant.

13.3.1.15 (**Grenzwertbegriff, Variante**). Gegeben $f : X \to Y$ und $g : X \to Z$ Abbildungen von einer Menge X in topologische Räume Y, Z schreibt man manchmal

$$\lim_{g(x)\to z} f(x) = y$$

als Abkürzung für die Aussage, daß es für jede Umgebung U von y eine Umgebung U' von z gibt mit $g(x) \in U' \backslash z \Rightarrow f(x) \in U$. Wir erlauben uns das nur, wenn Y Hausdorff ist und z ein Häufungspunkt zu $g(X)$ in Z, weil nur dann solch ein Grenzwert auch eindeutig bestimmt ist, wenn er existiert. Im Fall $g = \mathrm{id}$ erhalten wir unseren üblichen Grenzwertbegriff zurück.

13.3.1.16 (**Werte von Fouriertransformierten fern vom Ursprung**). Für integrierbare Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\lim_{\|y\|\to\infty} f^\wedge(y) = 0$$

mit der Notation 13.3.1.15. Für $f \in \mathcal{C}_!^\infty$ folgt das bereits aus unserer Erkenntnis 13.3.1.12, daß die Fouriertransformation den Schwartzraum in sich selber überführt. Für beliebiges $f \in \mathcal{L}^1$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ finden wir nach 13.2.6.1 ein $g \in \mathcal{C}_!^\infty$ mit $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ und damit folgt dann sofort $|f^\wedge(y) - g^\wedge(y)| < \varepsilon \ \forall\, y$. So erhalten wir unsere Aussage für beliebiges integrierbares f. Anschaulich mag man das etwa im Fall $n = 1$ wie folgt verstehen: Ist $|y|$ sehr groß, so beschreibt $x \mapsto \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xy}$ eine Funktion, die sehr schnell oszilliert. Ändert sich f nicht ganz so schnell, so wird sich beim Integrieren von $f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xy}$ sehr viel wegheben, so daß das Integral sehr klein wird.

Übungen

Übung 13.3.1.17 (**Fouriertransformierte der Glockenkurve**). Die Gauß'sche Glockenkurve ist unter der mathematisch standardisierten Fouriertransformation 13.3.1.3 ihre eigene Fouriertransformierte, in Formeln gilt für die Funktion $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ also $g^\wedge(y) = \mathrm{e}^{-y^2/2}$. Hinweis: g erfüllt die Differentialgleichung $g'(x) = -xg(x)$. Auch ohne den Eindeutigkeitssatz über Lösungen von Differentialgleichungen zu bemühen, kann man durch Ableiten von $f(x)/(\mathrm{e}^{-x^2/2})$ zeigen, daß diese Differentialgleichung bis auf konstante Faktoren keine anderen Lösungen f hat. Jetzt zeige man, daß $\hat{g} := g^\wedge$ dieselbe Differentialgleichung löst. So folgt $g = c\hat{g}$. Die Konstante c schließlich ergibt sich aus 13.1.8.7.

Übung 13.3.1.18. Gegeben integrierbare Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ einer reellen Veränderlichen ist die Fouriertransformierte von $f(x) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)$ das Produkt $f^\wedge(y) = f_1^\wedge(y_1) \ldots f_n^\wedge(y_n)$. Das gilt für alle drei Standardisierungen. Speziell ist die Funktion $g(x) = \mathrm{e}^{-x \cdot x/2}$ auf $\mathbb{R}^n$ für die mathematische Standardisierung ihre eigene Fouriertransformierte $\hat{g} = g$.

Übung 13.3.1.19 (**Fouriertransformierte einer Rechtecksfunktion**). Man berechne die Fouriertransformierte der Rechtecksfunktion f, die gegeben wird durch die Vorschrift $f(x) = 1$ für $|x| \leq 1/2$ und Null sonst, und zeige $f^\wedge(y) = (\sin \pi y)/\pi y$. Man berechne auch die Fouriertransformierten der Produkte $f(x)\sin(\alpha x)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und diskutiere den Zusammenhang mit dem Hören von Akkorden.

Weiterführende Übung 13.3.1.20. Für $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ mit $g|_{(-\infty,0]} = 0$ gibt es eine holomorphe Funktion $g^\wedge$ auf der komplexen oberen Halbebene $\operatorname{Im} z > 0$, die die auf $\mathbb{R} = \{z \mid \operatorname{Im} z = 0\}$ definierte stochastisch standardisierte Fouriertransformierte $g^\wedge$ stetig fortsetzt. Im übrigen kann man im Rahmen der Funktionentheorie 14.3.3.13 zeigen, daß diese stetige Fortsetzung sogar eindeutig ist. Die unter der Einbettung $\mathbb{R}_{\geq 0} \hookrightarrow \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ gegeben durch $t \mapsto \mathrm{i}t$ zurückgezogene holomorphe Fortsetzung der stochastisch standardisierten Fouriertransformierten $(\mathcal{F}g)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x$ heißt die **Laplace-Transformierte** $\mathcal{L}\{g\}$ von g, in

Formeln

$$\mathcal{L}\{g\}(t) = (\mathcal{F}g)(\mathrm{i}t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}x$$

Die Laplacetransformierte kann auch für allgemeinere Funktionen oft noch sinnvoll berechnet werden, eventuell auch erst für hinreichend großes t, vergleiche 14.6.1.13. Sie hat weiter sehr ähnliche Eigenschaften wir die Fouriertransformation und wird von Ingenieuren gerne zum Lösen der bei Schwingungsvorgängen relevanten Differentialgleichungen benutzt.

Ergänzung 13.3.1.21. Wir erinnern den Gruppenisomorphismus $\exp : (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Gegeben eine „vernünftige“ Funktion $h : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}$ heißt die Laplace-Transformation von $h \circ \exp$, wenn man ihr noch die Multiplikation mit (-1) vorschaltet, auch die **Mellin-Transformation** $\mathcal{M}h$ von h. In Formeln haben wir also

$$(\mathcal{M}h)(t) := \mathcal{L}\{h\}(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} h(s)s^{t-1}\,\mathrm{d}s$$

mit der Substitution $s = \mathrm{e}^x$ und $\mathrm{d}x = \mathrm{d}s/s$ im letzten Schritt.

Übung 13.3.1.22. Die Fouriertransformierte $f^\wedge$ einer Funktion $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ist genau dann reellwertig, wenn gilt $f(-x) = \overline{f(x)}$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$.

Ergänzende Übung 13.3.1.23. Wir betrachten in dieser Übung der Einfachkeit halber nur Funktionen auf der reellen Zahlengeraden. Man zeige: Die Fouriertransformierte einer geraden Funktion ist gerade; die Fouriertransformierte einer ungeraden Funktion ist ungerade. Die Fouriertransformierte einer geraden reellwertigen Funktion ist reellwertig; die Fouriertransformierte einer ungeraden reellwertigen Funktion nimmt nur rein imaginäre Werte an. Schreiben wir eine integrierbare Funktion f als Summe $f = g+u$ ihres geraden und ihres ungeraden Anteils, so gilt $g^\wedge(y) = (2\pi)^{-1/2}\int f(x)\cos(xy)\,\mathrm{d}x$ und $\mathrm{i}u^\wedge(y) = (2\pi)^{-1/2}\int f(x)\sin(xy)\,\mathrm{d}x$ für die mathematische Fouriertransformation. Diese beiden Integrale, aufgefaßt als Funktionen von y, sind auch bekannt als die **Cosinustransformation** und die **Sinustransformation** von f. Sie haben den Vorteil, reelle Funktionen wieder zu reellen Funktionen zu machen. Ihre diskreten Analoga sind von großer technischer Bedeutung.

Übung 13.3.1.24. Man zeige für $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(\alpha) < 0$, daß die Funktion g gegeben durch $g(x) = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\alpha}$ für $x > 0$ und $g(x) = 0$ für $x \leq 0$ die Fouriertransformierte $g^\wedge(y) = -1/(y+\alpha)$ hat.

13.3.2 Fouriertransformation ohne Koordinaten

13.3.2.1. Um die Beziehung zwischen Fouriertransformationen und Fourierreihen herauszuarbeiten, um die verschiedenen Standardisierungen zu vereinheitlichen und insbesondere, um der wahren Natur unserer Konstruktionen näher zu kommen, diskutiere ich nun einen allgemeineren Formalismus.

Definition 13.3.2.2. Sei $(X, \mathcal{M})$ ein Meßraum. Ein nichtnegatives Maß auf X im Sinne von 13.1.1.11 heißt **endlich**, wenn es den Wert ∞ nicht annimmt. Ein **komplexes Maß auf** X ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$, die sich schreiben läßt als eine endliche Linearkombination mit komplexen Koeffizienten von endlichen nichtnegativen Maßen $\mathcal{M} \to [0, \infty)$. Ein komplexes Maß, das nur reelle Werte annimmt, nennen wir ein **reelles Maß**. Wir verwenden für die Räume aller komplexen, reellen, endlichen nichtnegativen und beliebigen nichtnegativen Maße auf einem vorgegebenen Meßraum X die Bezeichnungen

$$\mathrm{M}(X) \supset \mathrm{M}(X; \mathbb{R}) \supset \mathrm{M}(X; [0, \infty)) \subset \mathrm{M}(X; [0, \infty])$$

Manchmal schreiben wir statt $\mathrm{M}(X)$ auch ausführlicher $\mathrm{Maß}(X)$ und erweitern unsere anderen Notationen entsprechend. Mehr zu komplexen Maßen diskutieren wir in den Übungen.

13.3.2.3. Eine **reelle Form** eines $\mathbb{C}$-Vektorraums V ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum $V_\mathbb{R}$ derart, daß die Abbildung $(v, w) \mapsto v + \mathrm{i}w$ eine Bijektion $V_\mathbb{R} \times V_\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} V$ induziert. Zum Beispiel sind unsere Räume integrierbarer reeller Funktionen stets reelle Formen der entsprechenden äume integrierbarer komplexer Funktionen.

13.3.2.4 (**Komplexe Fortsetzung multilinearer Abbildungen**). Gegeben $\mathbb{C}$-Vektorräume $V_1, \ldots, V_r, W$ und reelle Formen $V_{i,\mathbb{R}} \subset V_i$ besitzt jede $\mathbb{R}$-multilineare Abbildung $V_{1,\mathbb{R}} \times \ldots \times V_{r,\mathbb{R}} \to W$ genau eine Fortsetzung zu einer $\mathbb{C}$-multilinearen Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_r \to W$. Das scheint mir offensichtlich. Es wird im folgenden oft implizit verwendet.

Beispiel 13.3.2.5 (**Integration über komplexe Maße**). Gegeben ein Meßraum X betrachten wir die Mengen

$$\mathrm{Meß}^{\mathrm{b}}(X, \mathbb{C}) \supset \mathrm{Meß}^{\mathrm{b}}(X, \mathbb{R}) \supset \mathrm{Meß}^{\mathrm{b}}(X, [0, \infty))$$

der betragsmäßig beschränkten meßbaren komplexwertigen Funktionen mit ihrer reellen Form der reellwertigen Funktionen und dem erzeugenden Konvexkegel der nichtnegativen Funktionen. Nach 13.1.6.9 und 13.3.2.4 läßt sich die in beiden Variablen positivlineare Abbildung $\mathrm{Meß}^{\mathrm{b}}(X, [0, \infty)) \times \mathrm{M}(X; [0, \infty)) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(f, \mu) \mapsto \int f\mu$ auf genau eine Weise zu einer $\mathbb{C}$-bilinearen Abbildung

$$\mathrm{Meß}^{\mathrm{b}}(X, \mathbb{C}) \times \mathrm{M}(X) \to \mathbb{C}$$

fortsetzen. Für das so definierte Integral verwenden wir dieselbe Notation wie für seine reellen Varianten

$$\int f\mu = \int_X f(x)\mu\langle x\rangle$$

13.3.2.6. Gegeben ein Maßraum (X, λ) und $f \in \mathrm{L}^1(X; \lambda)$ erhalten wir offensichtlich ein komplexes Maß $f\lambda$ auf X durch die Vorschrift $(f\lambda)(A) := \int_A f(x)\lambda\langle x\rangle$.

Definition 13.3.2.7. Gegeben drei abelsche Gruppen A, B, C heißt eine Abbildung $p : A \times B \to C$ ein **Bimorphismus**, wenn gilt $p(a+a', b) = p(a, b)+p(a', b)$ und $p(a, b + b') = p(a, b) + p(a, b')$ für alle $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$.

13.3.2.8. In der Notation sind wir hier von additiv notierten Gruppen ausgegangen. In diesem Zusammenhang nenne ich einen Bimorphismus auch eine **biadditive Abbildung**. Alternativ sagt man in diesem Kontext auch oft „$\mathbb{Z}$-bilinear".

13.3.2.9 (**Topologie der Charaktergruppe**). Gegeben eine Fouriergruppe G und $K \subset G$ kompakt und $U \Subset \mathbb{C}$ offen setzen wir

$$\mathcal{O}(K, U) := \{\chi \in \hat{G} \mid \chi(K) \subset U\}$$

und versehen die Charaktergruppe $\hat{G}$ mit der Topologie, die von allen diesen Teilmengen $\mathcal{O}(K, U)$ erzeugt wird. Sie heißt die **kompakt-offene Topologie** oder auch die „Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta". Offensichtlich macht diese Topologie $\hat{G}$ zu einem Hausdorffraum.

Definition 13.3.2.10. Unter einer **Charakterpaarung** von Fouriergruppen G, H verstehen wir einen stetigen Bimorphismus $s : G \times H \to S^1$ in die Kreisgruppe, der sowohl einen Homöomorphismus $G \xrightarrow{\sim} \hat{H}$, $g \mapsto s(g, \ )$ als auch einen Homöomorphismus $H \xrightarrow{\sim} \hat{G}$, $h \mapsto s(\ , h)$ induziert. Wir notieren Charakterpaarungen meist in der Form $s : (g, h) \mapsto \langle\!\langle g, h\rangle\!\rangle = \langle\!\langle g, h\rangle\!\rangle_s$. Unter der **dualen Charakterpaarung zu** s verstehen wir die Charakterpaarung $\bar{s} : H \times G \to S^1$ gegeben durch

$$\langle\!\langle h, g\rangle\!\rangle_{\bar{s}} := \overline{\langle\!\langle g, h\rangle\!\rangle_s}$$

Vorschau 13.3.2.11. Sie mögen als Übung 13.3.2.30 zeigen, daß für jede Fouriergruppe G auch $\hat{G}$ eine Fouriergruppe und das Auswerten $a = a_G : G \times \hat{G} \to S^1$ gegeben durch $(g, \chi) \mapsto \langle\!\langle g, \chi\rangle\!\rangle := \chi(g)$ eine Charakterpaarung ist. Dasselbe gilt für die duale Paarung

$$\langle\!\langle \chi, g\rangle\!\rangle := \overline{\langle\!\langle g, \chi\rangle\!\rangle}$$

Ich vermeide im folgenden die Notation $\chi(g)$, da ich weniger durcheinanderkomme, wenn eine Änderung der Reihenfolge dieser Symbole standardmäßig eine komplexe Konjugation bedeutet.

Beispiele 13.3.2.12. Charakterpaarungen von Fouriergruppen sind etwa die Ab-

bildungen

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{Z} \times S^1 & \to & S^1, & (n,z) \mapsto z^n \\
\mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & S^1, & (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} \\
\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} & \to & S^1, & (a,y) \mapsto a^{\mathrm{i}y} \\
\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & S^1, & (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot y} \\
\vec{\mathbb{T}}^* \times \vec{\mathbb{T}} & \to & S^1, & (\nu,t) \mapsto \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\nu t} \\
V^* \times V & \to & S^1, & (\phi,v) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(v)} \\
\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & \to & S^1, & (a,b) \mapsto \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}ab/m}
\end{array}$$

für $\vec{\mathbb{T}}$ den Raum der Zeitspannen, Richtungsraum des affinen Raums $\mathbb{T}$ der Zeiten, und $\vec{\mathbb{T}}^*$ seinen Dualraum, den Raum der Frequenzen, und V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit Dualraum V^*. Etwas allgemeiner ist auch $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1, (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}cxy}$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}^\times$ eine Charakterpaarung.

Definition 13.3.2.13 (Fouriertransformation zu einer Charakterpaarung). Gegeben eine Charakterpaarung von Fouriergruppen $s : G \times H \to S^1$ und ein Maß $\mu \in \mathrm{M}(G)$ erklären wir seine **Fouriertransformierte** $\mu^\wedge : H \to \mathbb{C}$ als die Funktion, die bei $h \in H$ den Wert

$$\mu^\wedge(h) := \int_G \langle\!\langle g,h \rangle\!\rangle \mu\langle g \rangle$$

annimmt. Wir erklären die zu unserer Charakterpaarung s gehörige **Fouriertransformation** als die durch $\mathcal{F} : \mu \mapsto \mu^\wedge$ gegebene lineare Abbildung

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_s : \mathrm{M}(G) \to \mathrm{Ens}(H, \mathbb{C})$$

vom Raum der komplexen Maße auf G in den Raum der komplexwertigen Funktionen auf H.

13.3.2.14 (**Eigenschaften der Fouriertransformierten von Maßen**). Gegeben eine Charakterpaarung von Fouriergruppen $s : G \times H \to S^1$ ist die Fouriertransformierte $\mu^\wedge$ eines komplexen Maßes notwendig stetig und beschränkt. Es reicht, das für endliche nichtnegative Maße μ zu zeigen. Für diese folgt die Folgenstetigkeit von $\mu^\wedge$ aus dem Satz über dominierte Konvergenz und die Beschränktheit ergibt sich aus der Schranke

$$|\mu^\wedge(h)| = \left| \int_G \langle\!\langle g,h \rangle\!\rangle \mu\langle g \rangle \right| \le \int_G |\langle\!\langle g,h \rangle\!\rangle| \mu\langle g \rangle = \int_G 1 \mu\langle g \rangle = \mu(G)$$

Unsere Fouriertransformation zur Charakterpaarung $s : G \times H \to S^1$ ist mithin eine Abbildung

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_s : \mathrm{M}(G) \to \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(H)$$

Beispiel 13.3.2.15 (**Fouriertransformierte von Diracmaßen**). Gegeben eine Charakterpaarung $s : G \times H \to S^1$ wirft die zugehörige Fouriertransformation für alle $g \in G$ das Diracmaß $\delta_g \in \mathrm{M}(G)$ auf den zugehörigen Charakter, in Formeln

$$\big(\mathcal{F}_s(\delta_g)\big)(h) = \langle\!\langle g, h \rangle\!\rangle_s \quad \forall h \in H$$

Beispiel 13.3.2.16 (**Orgeltransformation**). Die Fouriertransformation

$$\mathrm{M}(\vec{\mathbb{T}}^*) \to \mathcal{C}^{\mathrm{b}}\vec{\mathbb{T}})$$

ordnet salopp gesprochen jeder Wahl von Tasten einer Orgel, aufgefaßt als Linearkombination von Diracmaßen zu verschiedenen Frequenzen, diejenige Funktion auf der Zeitachse zu, die den Luftdruck als Funktion der Zeit angibt, der beim Anschlagen unseres Akkordes entsteht. Noch genauer würde diese Anschauung von der Abbildung

$$\mathrm{M}(\vec{\mathbb{T}}^*_{>0}) \to \mathcal{C}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{T}})$$

modelliert, die durch $\mu \mapsto (\bar{\mu} + \iota_* \mu)^\wedge$ gegeben wird mit $\bar{\mu}$ dem komplex konjugierten Maß und $\iota : \nu \mapsto -\nu$ dem Negativieren, vergleiche 13.3.1.22. Der komplexe Vorfaktor beim Diracmaß zu einer Taste kodiert dabei die Lautstärke und „Phase“ der entsprechenden Schwingung. Die Taste zur Frequenz Null haben wir weggelassen, sie würde salopp gesprochen den „durchschnittlichen Luftdruck in der Kirche einstellen“. Die Fouriertheorie ist der Ausgangspunkt eines Teilgebiets der Mathematik, das man als **Harmonische Analysis** bezeichnet.

13.3.2.17 (**Hörtransformation**). Wenn wir den durch unsere Orgel erzeugten Luftdruck als Funktion der Zeit auf ein im Vergleich zum Inversen der Frequenz jedes einzelnen Tons großes Zeitintervall einschränken, durch Null ausdehnen, und dann die Fouriertransformation zur dualen Charakterpaarung anwenden, so erhalten wir wieder eine Funktion auf dem Raum aller möglichen Tonhöhen alias Frequenzen, die in der Nähe der angeschlagenen Tonhöhen sehr große Werte annimmt und sonst nur sehr kleine Werte, vergleiche 13.3.1.19. In diesem Sinne ist sowohl das Verwandeln eines durch die beteiligten Frequenzen bestimmten Akkordes in eine Funktion der Zeit als auch das Auflösen dieser Funktion der Zeit in einzelne Töne eine Fouriertransformation. Diese Transformationen sind sogar zueinander invers in dem Sinne, in dem es die „Inversionsformel“ 13.3.3.5 präzisieren wird.

Beispiel 13.3.2.18 (**Physikalische Standardisierung**). Betrachtet man die Charakterpaarung $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to S^1$ gegeben durch $p : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \cdot y}$ und die durch $f \mapsto f(x)\,\mathrm{d}^n x$ gegebene Einbettung $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathrm{M}(\mathbb{R}^n)$, so ist die Verknüpfung

$$\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\mathrm{d}^n x} \mathrm{M}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\mathcal{F}_p} \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$$

der abstrakten Fouriertransformation zur Charakterpaarung p mit der Einbettung des Raums der integrierbaren Funktionen in den Raum der komplexen Maße unsere physikalisch standardisierte Fouriertransformation aus 13.3.1.2.

Beispiel 13.3.2.19 (**Mathematische Standardisierung**). Betrachtet man die Charakterpaarung $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to S^1$ gegeben durch $s : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot y}$ und die durch $f \mapsto (2\pi)^{-n/2} f(x)\,\mathrm{d}^n x$ gegebene Einbettung $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathrm{M}(\mathbb{R}^n)$, so ist die Verknüpfung

$$\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{(2\pi)^{-n/2}\,\mathrm{d}^n x} \mathrm{M}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\mathcal{F}_s} \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$$

der abstrakten Fouriertransformation zur Charakterpaarung s mit einer entsprechend reskalierten Einbettung des Raums der integrierbaren Funktionen in den Raum der komplexen Maße unsere mathematisch standardisierte Fouriertransformation aus 13.3.1.3.

Beispiel 13.3.2.20 (**Entwicklung in eine Fourierreihe**). Betrachtet man die Charakterpaarung $p : S^1 \times \mathbb{Z} \to S^1$ gegeben durch $p : (z, n) \mapsto z^{-n}$, so können wir die Abbildung, die jeder integrierbaren periodischen Funktion mit der Periode 2π ihre Fourierkoeffizienten zuordnet, schreiben als die Komposition

$$\mathrm{L}^1([0, 2\pi)) \xrightarrow{\mathrm{d}t/2\pi} \mathrm{M}([0, 2\pi)) \xrightarrow{u_*} \mathrm{M}(S^1) \xrightarrow{\mathcal{F}_p} \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Z})$$

der abstrakten Fouriertransformation zur Charakterpaarung p mit einer entsprechend reskalierten Einbettung des Raums der integrierbaren Funktionen in den Raum der komplexen Maße gefolgt vom Bilden des Bildmaßes unter der Einschränkung der Umlaufabbildung $u : [0, 2\pi) \xrightarrow{\sim} S^1$ gegeben durch $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

Beispiel 13.3.2.21 (**Aufsummieren einer Fourierreihe**). Das Aufsummieren einer Fourierreihe ist die Komposition

$$\mathrm{L}^1(\mathbb{Z}; \zeta) \xrightarrow{\zeta} \mathrm{M}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathcal{F}_{\bar{p}}} \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(S^1) \xrightarrow{\circ u} \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R})$$

der Multiplikation einer absolut summierbaren Familie mit dem Zählmaß ζ gefolgt von der abstrakten Fouriertransformation zu der zur Charakterpaarung p aus dem vorhergehenden Beispiel dualen Charakterpaarung $\bar{p}$ gefolgt vom Vorschalten der Umlaufabbildung $u : \mathbb{R} \to S^1$.

Beispiel 13.3.2.22 (**Diskrete Fouriertransformation**). Unsere diskrete Fouriertransformation aus 13.2.7.26 kann geschrieben werden als abstrakte Fouriertransformation zur Charakterpaarung $s : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to S^1$ mit der Abbildungsvorschrift $(a, b) \mapsto \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}ab/m}$, genauer als die Komposition

$$\mathrm{L}^2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}; \zeta/m) \xrightarrow{\zeta/m} \mathrm{M}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathcal{F}_s} \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathrm{L}^2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}; \zeta)$$

13.3.2.23. Die Frage nach einer Verallgemeinerung des Schwartzraums in dieser Allgemeinheit stellen wir zurück bis 13.3.7.8 und entwickeln im nächsten Abschnitt erst einmal die konkrete Theorie weiter.

Vorschau 13.3.2.24. Ich schlage vor, die Fouriergruppen als Objekte einer Schmelzkategorie Fou im Sinne von 18.1.1 zu betrachten, mit analog zu unseren Bimorphismen aus 13.3.2.7 erklärten Verschmelzungen. Insbesondere sind Leerverschmelzungen nach G Elemente von G und $1 \in \mathbb{Z}$ ist eine stabil universelle Leerverschmelzung. Diese Schmelzkategorie besitzt nach 13.3.10.8 internes Hom, aber der Auswertungsmorphismus $G \to ((G \Rrightarrow \mathbb{Z}) \Rrightarrow \mathbb{Z})$ ist im allgemeinen kein Isomorphismus. Dahingegen ist der Auswertungsmorphismus nach 13.3.10.16 stets ein Isomorphismus

$$G \xrightarrow{\sim} ((G \Rrightarrow S^1) \Rrightarrow S^1)$$

Ich schlage nun vor, die Superisierung sFou von Fou nach 18.2.1.18 zu betrachten und die Wertegruppe S^1 der Charaktere als Objekt von geradem Grad verstehen, also $S^1 = (S^1)^{\bar{0}}$, unsere Fouriergruppen G dahingegen a priori als Objekte von ungeradem Grad $G = G^{\bar{1}}$. Ein Paar von zueinander dualen Charakterpaarungen ist in dieser Sprache eine Verschmelzung $G \curlyvee H \to S^1$ in sFou, die Isomorphismen $G \xrightarrow{\sim} (H \Rrightarrow S^1)$ und $H \xrightarrow{\sim} (G \Rrightarrow S^1)$ induziert. Ich erinnere daran, daß so eine Verschmelzung eine Vorschrift ist, die jeder Anordnung der verschmolzenen Objekte eine Verschmelzung in Fou zuordnet derart, daß eine Änderung der Anordnung nach gewissen festen Regeln dasselbe Resultat oder das inverse Resultat liefert. Die im weiteren bessere Wahl des Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(G))$ ergibt sich dann nach 18.2.1.25, indem man dem offensichtlichen Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(G))$ das Invertieren nachschaltet.

Übungen

Übung 13.3.2.25. Die Charaktergruppe $\hat{V}$ eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums V wird selbst ein reeller Vektorraum, indem man für jeden Charakter χ und jeden Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ den Charakter $\alpha\chi$ erklärt durch die Vorschrift

$$\langle\!\langle v, \alpha\chi \rangle\!\rangle := \langle\!\langle \alpha v, \chi \rangle\!\rangle$$

Ich nenne die Charaktergruppe in diesem Fall auch den **Charakterraum**. Der Charakterraum hat dieselbe Dimension wie der ursprüngliche Raum. Jede lineare Abbildung $L : V \to W$ von endlichdimensionalen reellen Vektorräumen liefert durch Vorschalten eine lineare Abbildung $\hat{L} : \hat{W} \to \hat{V}$ in die Gegenrichtung auf den Charakterräumen.

Übung 13.3.2.26 (**Charakterrraum und Dualraum**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V liefert das Nachschalten der Exponentialabbildung einen Isomorphismus von reellen Vektorräumen

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathrm{i}\,\mathbb{R}) & \tilde{\to} & \hat{V} \\ \phi & \mapsto & \exp \circ \phi \end{array}$$

Dessen Inverse kann durch die Formel $\chi \mapsto \mathrm{d}_0\chi$ beschrieben werden, wobei man $\chi \in \hat{V}$ als Abbildung $\chi : V \to \mathbb{C}$ auffaßt und beachtet, daß deren Differential im Ursprung $\mathrm{d}_0\chi : V \to \mathbb{C}$ nur rein imaginäre Werte annehmen kann.

13.3.2.27. Gegeben ein komplexes Maß μ auf einem Meßraum $(X, \mathcal{M})$ erklärt man ein nichtnegatives reelles Maß $|\mu|$, seine **Variation**, durch die Vorschrift

$$|\mu|(A) = \sup \sum |\mu(A_\nu)|$$

mit dem Supremum über alle Zerlegungen $A = \bigsqcup A_\nu$ von A in eine disjunkte Vereinigung einer abzählbaren Familie von meßbaren Teilmengen.

Übung 13.3.2.28. Man zeige für die Fouriertransformation zu einer Charakterpaarung $G \times H \to S^1$ additiv notierter Fouriergruppen $(G, +), (H, +)$ und $a, g \in G$ sowie $b, h \in H$ die Verallgemeinerungen

$$((a+)_*\mu)^\wedge(h) = \langle\!\langle a, h \rangle\!\rangle \mu^\wedge(h) \quad \text{und} \quad (\langle\!\langle g, b \rangle\!\rangle \mu)^\wedge(h) = \mu^\wedge(b + h)$$

unserer Formeln 13.3.1.5.2 und 13.3.1.5.3.

Übung 13.3.2.29. Man zeige für die stochastische Fouriertransformierte eines Maßes $\mu \in \mathrm{M}(\mathbb{R})$, daß unter der Voraussetzung, daß x integrierbar ist nach μ, die Fouriertransformierte differenzierbar ist mit der Ableitung $(\mu^\wedge)'(y) = \mathrm{i}(x\mu)^\wedge$.

Übung 13.3.2.30. Man zeige: Gegeben Fouriergruppen G, H ist die in 13.2.7.31 angegebene Bijektion ein Homöomorphismus $\mathfrak{X}(G \times H) \tilde{\to} \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(H)$. Zusammen mit den Beispielen 13.3.2.12 für Charakterpaarungen zeigt das, daß für jede Fouriergruppe G auch $\hat{G}$ eine Fouriergruppe und das Auswerten $G \times \hat{G} \to S^1$ eine Charakterpaarung ist.

Übung 13.3.2.31. Gegeben ein komplexes Maß μ auf einem Meßraum $(X, \mathcal{M})$ nimmt seine in 13.3.2.27 erklärte Variation $|\mu|$ Werte in $[0, \infty)$ an und ist ein Maß auf $\mathcal{M}$. Weiter ist $\mu \mapsto \|\mu\| = |\mu|(X)$ eine Norm auf dem Raum $\mathrm{M}(X)$ der komplexen Maße auf X, die **Variationsnorm**. Jedes komplexe Maß μ auf einem Meßraum läßt sich darstellen als Linearkombination von vier nichtnegativen reellen Maßen in der Form

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + \mathrm{i}\mu_3 - \mathrm{i}\mu_4$$

und so, daß zusätzlich gilt $\mu_r \leq |\mu|$ für $1 \leq r \leq 4$ als da heißt $\mu_r(A) \leq |\mu|(A)$ für jede meßbare Menge $A \subset X$. Hinweis: Im Fall eines rellen Maßes mag man etwa mit $\mu_1 = (|\mu| + \mu)/2$ beginnen.

Übung 13.3.2.32 (**Integration nach komplexen Maßen**). Gegeben ein komplexes Maß μ auf einem Meßraum $(X, \mathcal{M})$ gibt es genau eine Linearform $\mathrm{L}^1(X; |\mu|) \to \mathbb{C}$,

$$f \mapsto \int f\mu$$

mit der Eigenschaft $\int f\mu = \int f\mu_1 - \int f\mu_2 + \mathrm{i} \int f\mu_3 - \mathrm{i} \int f\mu_4$ für eine und jede Darstellung von μ wie in 13.3.2.31. Man zeige weiter die Abschätzung $|\int f\mu| \leq \int |f||\mu|$. Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß f eine Stufenfunktion ist.

Übung 13.3.2.33 (**Produkte komplexer Maße mit Funktionen**). Gegeben ein komplexes Maß μ auf einem Meßraum $(X, \mathcal{M})$ und eine Funktion $f \in \mathrm{L}^1(X; |\mu|)$ erhalten wir ein weiteres komplexes Maß $f\mu$ auf X durch die Vorschrift

$$(f\mu)(A) = \int [A] f \ \mu \quad \text{für alle meßbaren } A \subset X$$

Dieses Maß hat dann die Variation $|f\mu| = |f||\mu|$. Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß f eine Stufenfunktion ist. Ist $g : X \to \mathbb{C}$ eine weitere meßbare Funktion, so gilt $g \in \mathrm{L}^1(X; |f\mu|)$ genau dann, wenn fg zu $\mathrm{L}^1(X; |\mu|)$ gehört, und in diesem Fall haben wir die Gleichheit komplexer Maße

$$g(f\mu) = (gf)\mu$$

Übung 13.3.2.34. Sei (X, μ) ein Maßraum und $f \in \mathrm{L}^1(X; \mu)$ integrierbar. Ist das Maß $f\mu$ Null, so war f bereits die Null von $\mathrm{L}^1(X; \mu)$.

Übung 13.3.2.35 (**Formelsammlung für komplexe Maße**). Bezeichnet $X \times Y$ das Produkt zweier Meßräume, versehen mit der Produkt-σ-Algebra aus 13.1.7.1, so liefert das Bilden des Produktmaßes mit zweimaligem Anwenden von 13.3.2.5 eine bilineare Abbildung auf den zugehörigen Räumen komplexwertiger Maße

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}(X) \times \mathrm{M}(Y) & \to & \mathrm{M}(X \times Y) \\ (\mu, \nu) & \mapsto & \mu \boxtimes \nu \end{array}$$

Gegeben eine meßbare Abbildung $f : X \to Y$ von Meßräumen und ein komplexes Maß μ auf X erklärt man wie in 13.1.4.35 das **Bildmaß** $f_*\mu$ auf Y dadurch, daß man für jede meßbare Menge $A \subset Y$ setzt

$$(f_*\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A))$$

Offensichtlich gilt wieder $\mathrm{id}_* \mu = \mu$ und für verknüpfbare Abbildungen haben wir $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$. Man zeige, daß auch die anderen Formel unserer Formelsammlung 13.1.7.25 weiter gelten.

Übung 13.3.2.36 (**Integration über Bildmaße**). Gegeben eine meßbare Abbildung $f : X \to Y$ von Meßräumen und ein komplexes Maß μ auf X ist die Variation des Bildmaßes nach oben beschränkt durch das Bildmaß der Variation, in Formeln

$$|f_*\mu| \leq f_*|\mu|$$

Gehört für eine meßbare Funktion $h : Y \to \mathbb{C}$ die Verknüpfung $h \circ f$ zu $\mathrm{L}^1(X; |\mu|)$, so ist h integrierbar nach $|f_*\mu|$ und es gilt

$$\int_Y h\ (f_*\mu) = \int_X (h \circ f)\ \mu$$

Ergänzende Übung 13.3.2.37. Man zeige: Gegeben eine stetige beschränkte Abbildung von einem topologischen Raum in einen Hilbertraum $f : X \to \mathcal{H}$ und ein komplexes Maß $\mu \in \mathrm{M}(X)$ gibt es genau einen Vektor $\int f(x)\ \mu\langle x\rangle$ in $\mathcal{H}$ mit Eigenschaft

$$\left\langle w, \int f(x)\ \mu\langle x\rangle \right\rangle = \int \langle w, f(x)\rangle\ \mu\langle x\rangle \quad \forall w \in \mathcal{H}$$

Man zeige weiter, daß dieses Integral $\int f(x)\ \mu\langle x\rangle$ linear ist in f und μ. Hinweis: 13.2.8.3.

Übung 13.3.2.38. Man zeige, daß jeder abgeschlossene Teilraum von $\mathrm{L}^2(S^1)$, der unter dem Vorschalten aller Multiplikationen $(z\cdot)$ für $z \in S^1$ stabil ist, der Abschluß des Erzeugnisses der in ihm enthaltenen Charaktere sein muß. Hinweis: Man betrachte die linearen Abbildungen $p_n : \mathrm{L}^2(S^1) \to \mathrm{L}^2(S^1)$ mit

$$(p_n(f))(w) = \int_{S^1} z^n f(zw)\mu\langle z\rangle$$

und überlege sich etwa mit 13.3.2.37, daß sie auch unsere abgeschlossenen Teilräume von oben in sich überführen müssen.

13.3.3 Poissonformel und Inversionsformel

13.3.3.1. In diesem Abschnitt treiben wir wieder die konkrete Theorie voran, bevor wir in den anschließenden Abschnitten ihre koordinatenfreie Bedeutung und Verallgemeinerungen diskutieren.

Satz 13.3.3.2 (Poisson'sche Summationsformel). *Seien $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eine Schwartzfunktion und $f^\wedge$ ihre physikalisch standardisierte Fouriertransformierte gegeben durch $f^\wedge(y) := \int f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xy}\, \mathrm{d}x$. So gilt*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f^\wedge(n)$$

13.3.3.3. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ zeigt man analog $\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f^\wedge(n)$. In 13.3.7.16 werden wir lernen, wie man diese Aussage aus allgemeinen Prinzipien herleiten kann.

Beweis. Wir betrachten die Funktion $g(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)$ mit der Periode Eins. Sie ist glatt nach 10.6.1.32. Ihre Entwicklung in eine Fourierreihe hat die Form $g(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t k}$ mit $a_k = \int_0^1 g(t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}tk}\,\mathrm{d}t$ im Sinne der Summierbarkeit bezüglich $\|\ \|_\infty$ nach 11.3.3.7. Damit finden wir

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = g(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 g(t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}tk}\,\mathrm{d}t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}tk}\,\mathrm{d}t$$

Im letzten Schritt haben wir die Identität $\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}tk} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(t-n)k}$ verwendet. □

Ergänzung 13.3.3.4. Sogar für jede integrierbare Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ konvergiert die Summe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)$ für fast alle t absolut und für die so gegebene L^1-Funktion g gilt $\int_0^1 g(t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}tk}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}tk}\,\mathrm{d}t$. Man erkennt das, indem man von dem durch Addition gegebenen Isomorphismus von Maßräumen $\mathbb{Z} \times [0,1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ ausgeht und den Satz von Fubini 13.1.7.16 anwendet.

Satz 13.3.3.5 (Inversionsformel für Schwartzfunktionen). *Gegeben eine Schwartzfunktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt für die zweimal fouriertransformierte Funktion $f^{\wedge\wedge}$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ die Identität*

$$f^{\wedge\wedge}(x) = f(-x)$$

13.3.3.6. In $\mathbb{R}^d$ folgt dieselbe Aussage analog. Die Aussage gilt auch für unsere mathematische Fouriertransformation aus 13.3.1.3. Genau um das zu erreichen wird bei dieser Normalisierung der merkwürdige Vorfaktor $(2\pi)^{-d/2}$ mit hinzugenommen.

Beweis. Unsere Formeln 13.3.1.5.2 und 13.3.1.5.3 zeigen $\tau_a(f^{\wedge\wedge}) = (\tau_{-a}f)^{\wedge\wedge}$. Es reicht also, die Identität $f^{\wedge\wedge}(0) = f(0)$ zu zeigen. Die Poisson'sche Summationsformel 13.3.3.2 liefert durch Umnormieren für alle $b > 0$ die Identität

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nb) = \frac{1}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f^\wedge(n/b)$$

Die linke Seite strebt für $b \to \infty$ gegen $f(0)$, da f eine Schwarzfunktion ist. Andererseits ist dann auch $g := f^\wedge$ eine Schwartzfunktion und damit strebt, wie wir uns gleich überlegen, die rechte Seite gegen $\int f^\wedge = f^{\wedge\wedge}(0)$. Es reicht, wenn wir uns das für $b = 2^N$ und $N \to \infty$ überlegen. Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es sicher $K \in \mathbb{N}$ mit $|\int_{-\infty}^{-K} g| < \varepsilon$ und $|\int_K^\infty g| < \varepsilon$ und $|\frac{1}{b}\sum_{n/b\le -K} g(n/b)| < \varepsilon$ und $|\frac{1}{b}\sum_{n/b\ge K} g(n/b)| < \varepsilon$. Da aber auf dem Intervall $[-K,K]$ die Riemannsummen von g gegen das Integral von g streben, folgt die Behauptung. □

Satz 13.3.3.7 (Fouriertransformation von L^2-Funktionen). *Die physikalisch standardisierte Fouriertransformation nach 13.3.1.2 läßt sich auf genau eine Weise vom Schwartzraum fortsetzen zu einem unitären Isomorphismus von Hilberträumen*

$$\mathcal{F} : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

Beispiel 13.3.3.8. In Übung 13.3.1.24 haben wir für $\mathrm{Im}(\alpha) < 0$ eine integrierbare Funktion g angegeben mit Fouriertransformierter $g^\wedge(y) = -1/(y+\alpha)$. Die Fouriertransforierte ist als quadratintegrierbar, aber nicht integrierbar. Wir wissen dennoch $g^{\wedge\wedge} = g\iota$. Ich wüßte jedoch nicht, wie ich die Fouriertransformierte von $g^\wedge$ mit den uns hier zur Verfügung stehenden Methoden direkt berechnen sollte.

Beweis. Bezeichne $\iota : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Multiplikation mit (-1) und $f\iota = f \circ \iota$. Natürlich gilt dann $(f^\wedge)\iota = (f\iota)^\wedge$ und unsere Inversionsformel sagt $f = (f\iota)^{\wedge\wedge}$. Als nächstes prüfen wir, daß die Abbildungen $f \mapsto f^\wedge$ und $g \mapsto (g\iota)^\wedge$ für die L^2-Skalarprodukte auf unseren Schwartzräumen zueinander adjungiert sind. In Formeln behaupten wir also $\langle f^\wedge, g\rangle = \langle f, (g\iota)^\wedge\rangle$ oder ausgeschrieben

$$\int \overline{f(x)} g(-y) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xy} \,\mathrm{d}^n x \,\mathrm{d}^n y = \int \overline{f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xy}} g(y) \,\mathrm{d}^n x \,\mathrm{d}^n y$$

Das war auch schon der Beweis für die behauptete Adjunktion. Für jede Schwartzfunktion f folgt daraus

$$\langle f^\wedge, f^\wedge\rangle = \langle f, (f\iota)^{\wedge\wedge}\rangle = \langle f, f\rangle$$

mit der Inversionsformel 13.3.3.5 im zweiten Schritt. Nach 13.2.6.1 liegt jedoch der Schwartzraum dicht im Raum der quadratintegrierbaren Funktionen. Unser Satz folgt damit aus dem Lemma über die Existenz stetiger Fortsezungen 13.2.4.12 und dem Lemma über die Linearität und Unitarität stetiger Fortsetzungen 13.2.4.17. □

Proposition 13.3.3.9. *Für Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ stimmt die durch unsere explizite Formel 13.3.1.2 gegebene Fouriertransformierte überein mit der durch stetige Fortsetzung vom Schwartzraum 13.3.3.7 erhaltenen.*

Beweis. Wir bezeichnen nur für diesen Beweis unsere durch stetige Fortsetzung vom Schwartzraum 13.3.3.7 konstruierte Fouriertransformation mit $\mathcal{F}_2$. Nun bilden wir den algebraischen Dualraum $\mathcal{S}^*$ des Schwartzraums, also den Raum

$$\mathcal{S}^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}, \mathbb{C})$$

aller Linearformen auf dem Schwartzraum. Das „Daranmultiplizieren und Integrieren“ liefert für alle $p \in [1, \infty]$ eine lineare Abbildung $\mathrm{int} : \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}^*$,

die in Formeln durch die Vorschrift $f \mapsto \big(g \mapsto \int fg\big)$ gegeben wird. Mit der zu unserer Fouriertransformation auf dem Schwartzraum transponierten Abbildung $\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}^* \to \mathcal{S}^*$ erhalten wir, wie wir gleich prüfen, kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\mathrm{int}"'] & \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "\mathrm{int}"] \\ \mathcal{S}^* \arrow[r, "\mathcal{F}^\top"] & \mathcal{S}^* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\mathcal{F}_2"] \arrow[d, "\mathrm{int}"'] & \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "\mathrm{int}"] \\ \mathcal{S}^* \arrow[r, "\mathcal{F}^\top"] & \mathcal{S}^* \end{tikzcd}$$

Die Kommutativität des linken Diagramms zeigt dieselbe Rechnung, wie wir sie bereits im Beweis der Inversionsformel durchgeführt haben, wenn man darin das komplexe Konjugieren wegläßt. Die Kommutativität des rechten Diagramms folgt, wenn man statt quadratintegrierbarer Funktionen sich in der oberen Horizontale auf Schwartzfunktionen beschränkt. Für beliebige Schwartzfunktionen f, g gilt also $(\mathrm{int}\,\mathcal{F}f)(g) = (\mathrm{int}(f))(\mathcal{F}g)$ alias $\langle \overline{\mathcal{F}f}, g\rangle = \langle \bar{f}, \mathcal{F}g\rangle$ mit unserem L^2-Skalarprodukt. Aus Stetigkeitsgründen gilt das dann für beliebige L^2-Funktionen f und das zeigt dann die Kommutativität des rechten Diagramms. Im folgenden konstruieren wir in 13.3.3.13 einen Raum $\mathrm{L}^{\mathrm{loc}}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ von fast überall definierten meßbaren Funktionen, der alle $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ umfaßt, nebst einer linearen Abbildung $\mathrm{int} : \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}^*$, die alle unsere vorherigen Abbildungen int fortsetzt. Zusätzlich zeigen wir noch, daß diese Abbildung injektiv ist. Dann ist der Beweis zu Ende und wir können unsere Notation $\mathcal{F}_2$ wieder stornieren. □

Ergänzung 13.3.3.10. Man kann allgemeiner zeigen, daß unter $\mathcal{F}^\top$ für konjugierte Exponenten p, q mit $1 \le p \le 2$ Funktionen aus $\mathrm{L}^p \subset \mathcal{S}^*$ in Funktionen aus $\mathrm{L}^q \subset \mathcal{S}^*$ übergehen, vergleiche etwa [Wer05].

Definition 13.3.3.11. Eine fast überall definierte Funktion $f : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{C}$ heißt **lokal integrierbar**, wenn jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt derart, daß die Einschränkung unserer Funktion auf besagte Umgebung integrierbar ist in Bezug auf das Lebesguemaß. Wir bezeichnen die Räume aller reellwertigen beziehungsweise komplexwertigen lokal integrierbaren Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ mit

$$\mathrm{L}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

Lemma 13.3.3.12. *Zwei lokal integrierbare Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$, deren Produkt mit jeder kompakt getragenen glatten Funktion dasselbe Integral hat, stimmen bereits als fast überall definierte Funktionen überein.*

Beweis. In Formeln ausgedrückt besagt unser Lemma, daß $f \mapsto (g \mapsto \int fg)$ eine Injektion

$$\mathrm{L}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty_!(\mathbb{R}^n)^*$$

induziert. Sicher reicht es, wenn wir zeigen, daß dieselbe Abbildungsvorschrift im Fall reellwertiger Funktionen eine Injektion

$$\mathrm{L}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{C}_!^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^*$$

liefert. Sicher reicht es sogar zu zeigen, daß die Restriktion dieser Abbildung auf die Teilmenge $\mathrm{L}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_{\geq 0})$ aller nichtnegativen lokal integrierbaren Funktionen injektiv ist, denn gilt $f \neq 0$ und schreiben wir $f = f^+ - f^-$ mit f^+, f^- nichtnegativ, so gilt $f^+ \neq f^-$, und finden wir g glatt mit kompaktem Träger und $\int gf^+ \neq \int gf^-$, so gilt $\int gf \neq 0$. Unsere Restriktion jedoch können wir schreiben als die Verknüpfung von Injektionen

$$\mathrm{L}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_{\geq 0}) \hookrightarrow \{\text{Borelmaße auf } \mathbb{R}^n\} \hookrightarrow \mathcal{C}_!^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^*$$

Die erste Abbildung ordnet dabei jeder Funktion f das Borelmaß $f(x)\,\mathrm{d}^n x$ zu und ist injektiv nach Übung 13.1.5.27. Die zweite Abbildung ordnet jedem Borelmaß das Integrieren nach diesem Maß zu und ist injektiv nach Übung 13.1.8.13. □

13.3.3.13. Etwas feiner betrachten wir den Raum $\mathrm{L}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ aller meßbaren fast überall definierten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß ihr Produkt mit jeder Schwartzfunktion integrierbar ist. Offensichtlich erhalten wir so einen Untervektorraum

$$\mathrm{L}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

und ebenso offensichtlich liegen alle L^p-Funktionen, ja sogar alle meßbaren Funktionen von höchstens polynomialem Wachstum bereits in diesem Untervektorraum. Nach 13.3.3.12 erhalten wir aber durch die Vorschrift $f \mapsto \big(g \mapsto \int fg\big)$ erst recht eine Inklusion

$$\mathrm{int} : \mathrm{L}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}^*$$

13.3.3.14 (**Berechnung der Fouriertransformierten einer L^2-Funktion**). Es ist etwas delikat, eine explizite Formel für die Fouriertransformierte einer L^2-Funktion $f : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{C}$ anzugeben. In der Tat kann man nicht erwarten, daß das Integral 13.3.1.2 für alle y konvergiert, ja das wäre sogar beunruhigend, da es uns unter Verwendung der Inversionsformel erlauben würde, zu jeder quadratintegrierbaren Funktion einen wohlbestimmten „überall definierten Repräsentanten“ auszuzeichnen. Stattdessen können wir wie folgt vorgehen: Wir wählen reelle Folgen a_n, b_n mit $a_n \to -\infty$ und $b_n \to \infty$ und betrachten die integrierbaren Funktionen f_n, die durch Restriktion von f auf das kompakte Intervall $[a_n, b_n]$ und Ausdehnen durch Null entstehen. Dann gilt $f_n \to f$ in L^2 und folglich auch $\mathcal{F}(f_n) \to \mathcal{F}(f)$ in L^2. Da die f_n integrierbar sind, kann nach Proposition 13.3.3.9 nun aber $\mathcal{F}(f_n) = f_n^\wedge$ mit unserer Formel 13.3.1.2 jedenfalls im Prinzip ausgerechnet werden. Die so gebildeten fast überall definierten Funktionen $f_n^\wedge$ streben demnach in L^2 gegen

$\mathcal{F}(f)$. Gelingt es uns nun, Folgen a_n, b_n so geschickt zu wählen, daß die Folge der Fouriertransformierten $f_n^\wedge$ fast überall punktweise konvergiert, so ist dieser punktweise Grenzwert nach 13.2.3.16 notwendig bereits quadratintegrierbar und ist unsere gesuchte Fouriertransformierte $\mathcal{F}(f)$.

Proposition 13.3.3.15. *Die Fouriertransformation von Maßen ist injektiv, als da heißt, nur das Nullmaß liefert die Nullfunktion.*

13.3.3.16. Das rechtfertigt die in der Stochastik übliche Bezeichnung der Fouriertransformierten eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $\mathbb{R}$ als dessen **charakteristische Funktion**. Man beachte jedoch, daß man in der Stochastik üblicherweise mit der Charakterpaarung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1$ gegeben durch $(x, y) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}$ arbeitet.

Beweis. Nach 13.1.8.13 ist, wie bereits im vorhergehenden Beweis bemerkt, auch $\mathrm{int} : \mathrm{M}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}^*$ gegeben durch $\mu \mapsto (f \mapsto \int f\mu)$ eine Injektion. Mit derselben Rechnung wie zuvor erhalten wir auch ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\mathrm{int}"'] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "\mathrm{int}"] \\ \mathcal{S}^* \arrow[r, "\mathcal{F}^\top"] & \mathcal{S}^* \end{tikzcd}$$

Das zeigt, daß verschiedene reelle Maße in $\mathrm{M}(\mathbb{R}^n)$ auch verschiedene Fouriertransformierte haben. $\square$

Vorschau 13.3.3.17. Bezeichne λ das Lebesguemaß auf dem $\mathbb{R}^n$. Motiviert durch die vorhergehenden Überlegungen erklärt man den Raum

$$\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}^*$$

aller **temperierten Distributionen** als den kleinsten Untervektorraum des vollen Dualraums $\mathcal{S}^*$ des Raums der Schwartzfunktionen, der (1) alle Linearformen umfaßt, die die Gestalt $\varphi \mapsto \int f\varphi\lambda$ haben für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ stetig von höchstens polynomialem Wachstum, und der (2) stabil ist unter den Transponierten $\partial_\nu^\top : \mathcal{S}^* \to \mathcal{S}^*$ der partiellen Ableitungen $\partial_\nu : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Man überlegt sich ohne große Schwierigkeiten, daß die Transponierte der Fouriertransformation $\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^*$ einen Vektorraumisomorphismus

$$\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}'$$

auf den temperierten Distributionen induziert und daß sich alle L^p-Funktionen f als temperierte Distributionen auffassen lassen, ja daß das Bild unserer Einbettung $\mathrm{int} : \mathrm{L}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}^*$ aus 13.3.3.13 gegeben durch die Vorschrift $\varphi \mapsto \int f\varphi\lambda$ aus

temperierten Distributionen besteht, in Formeln $\mathrm{L}^p \subset \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'$. Darüberhinaus lassen sich auch alle endlichen Borelmaße μ als temperierte Distributionen auffassen vermittels der immergleichen Vorschrift $\varphi \mapsto \int \varphi\mu$ und alle bisher betrachteten Varianten der Fouriertransformation können als Einschränkung unserer Transformation $\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}'$ verstanden werden. Welche Vorteile die temperierten Distributionen gegenüber allgemeinen Linearformen auf dem Schwartzraum bieten und wie allgemeiner beliebige, nicht notwendig temperierte Distributionen erklärt werden, mögen Sie in Vorlesungen zur Funktionalanalysis lernen.

Übungen

Übung 13.3.3.18. Jede L^p-Funktion auf $\mathbb{R}^n$ für $p \in [1, \infty]$ ist lokal integrierbar. Genau dann ist eine fast überall definierte Funktion lokal integrierbar, wenn ihre Einschränkung auf jedes Kompaktum integrierbar ist. Jede lokal integrierbare Funktion ist meßbar.

Übung 13.3.3.19. Ist die Fouriertransformierte einer integrierbaren Funktion $f \in \mathcal{L}^1$ wieder integrierbar, so gilt $f^{\wedge\wedge}(x) = f(-x)$ für fast alle x. Insbesondere besitzt jede L^1-Funktion mit einer integrierbaren Fouriertransformierten einen stetigen Repräsentanten.

Ergänzende Übung 13.3.3.20. Ist μ ein topologisches Maß auf einem topologischen Raum X, so nennen wir eine μ-fast überall definierte Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ **lokal integrierbar in Bezug auf** μ, wenn jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt derart, daß die Einschränkung unserer Funktion auf besagte Umgebung integrierbar ist in Bezug auf μ. Diesen Funktionenraum notieren wir dann $\mathrm{L}^{\mathrm{loc}}(X; \mu)$. Gegeben $U \Subset \mathbb{R}^n$ und ein Borelmaß μ auf U zeige man, daß lokal integrierbare Funktionen aus $\mathrm{L}^{\mathrm{loc}}(U; \mu)$ genau dann fast überall übereineinstimmen, wenn ihr Produkt mit jeder Funktion aus $\mathcal{C}^\infty_!(U)$ in Bezug auf μ dasselbe Integral hat.

Übung 13.3.3.21. Die Fouriertransformation zu unserer Charakterpaarung $S^1 \times \mathbb{Z} \to S^1$ mit $(z, n) \mapsto z^n$ ist eine Injektion $\mathrm{M}(S^1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Z})$. Das wir beim Beweis des Abtastsatzes gebraucht.

13.3.4 Natürlichkeit der Fouriertransformation

13.3.4.1. Ist G eine Fouriergruppe und $\hat{G}$ ihre Charaktergruppe, so ist das Auswerten eines Charakters auf einem Gruppenelement nach 13.3.2.30 stets eine Charakterpaarung $a_G = a : G \times \hat{G} \to S^1$. Die zugehörige Fouriertransformation $\mathcal{F}_a$ notieren wir meist ohne Index als $\mathcal{F}$ oder manchmal als $\mathcal{F}_G$ und schreiben $\mathcal{F} : \mu \mapsto \mu^\wedge$ und nennen sie die **kanonische Fouriertransformation**

$$\mathcal{F} : \mathrm{M}(G) \to \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\hat{G})$$

13.3.4.2 (**Natürlichkeit der Fouriertransformation**). Für jeden stetigen Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von Fouriergruppen ist das Vorwärtsdrücken von Maßen eine Abbildung $\varphi_* : \mathrm{M}(G) \to \mathrm{M}(H)$. Umgekehrt liefert das Vorschalten von φ eine Abbildung $\hat{\varphi} : \hat{H} \to \hat{G}$ auf den Charakteren in die Gegenrichtung. Nach unseren Erkenntnissen 13.1.6.18 zu Integralen über Bildmaße kommutiert mit unseren kanonischen Fouriertransformationen in den Horizontalen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M}(G) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\hat{G}) \arrow[d, "\circ\hat{\varphi}"] \\ \mathrm{M}(H) \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\hat{H}) \end{tikzcd}$$

13.3.4.3 (**Natürlichkeit der Fouriertransformation, Variante**). Gegeben Charakterpaarungen von Fouriergruppen $a : G \times \hat{G} \to S^1$ und $b : H \times \hat{H} \to S^1$ gibt es für jeden stetigen Homomorphismus $\varphi : G \to H$ genau einen stetigen Homomorphismus $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_{a,b} : \hat{H} \to \hat{G}$ in die Gegenrichtung mit

$$\langle\!\langle g, \hat{\varphi}\hat{h} \rangle\!\rangle_a = \langle\!\langle \varphi g, \hat{h} \rangle\!\rangle_b \quad \forall g \in G, \hat{h} \in \hat{H}$$

Wir nennen ihn den **adjungierten Homomorphismus**. In diesen Notationen kommutiert mit den Fouriertransformationen zu den besagten Charakterpaarungen in den Horizontalen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M}(G) \arrow[r, "\mathcal{F}_s"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\hat{G}) \arrow[d, "\circ\hat{\varphi}"] \\ \mathrm{M}(H) \arrow[r, "\mathcal{F}_t"] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\hat{H}) \end{tikzcd}$$

Das ist nur eine Umformulierung der vorhergehenden Aussage in die Sprache der Charakterpaarungen.

13.3.4.4 (**Eigenschaften der Fouriertransformierten von Maßen, Variante**). Wir geben noch einen natürlicheren Beweis für unsere Erkenntnis aus 13.3.2.14, daß die Fouriertransformierte eines komplexen Maßes stets eine stetige Funktion auf der Charaktergruppe ist. Sei G unsere Fouriergruppe. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei μ ein endliches nichtnegatives Maß. Da G als die Vereinigung einer Folge von Kompakta geschrieben werden kann, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein Kompaktum $K \subset G$ mit $\mu(K) \leq \mu(G) \leq \mu(K) + \varepsilon$. Gilt dann $|\chi - \psi| \leq \varepsilon$ auf diesem Kompaktum und beachten wir $|\chi - \psi| \leq 2$ überall, so folgt die Abschätzung

$$|\mu^\wedge(\chi) - \mu^\wedge(\psi)| \;\leq\; \int_G |\chi - \psi|\mu \;\leq\; 2\varepsilon + \int_K |\chi - \psi|\mu \;\leq\; 2\varepsilon + \varepsilon\mu(G)$$

Also ist $\mu^\wedge$ stetig für die kompaktoffene Topologie.

Beispiel 13.3.4.5 (**Fouriertransformation und Koordinatenwechsel**). Wir betrachten den Homomorphismus $A : \mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ zu einer Matrix $A \in \operatorname{Mat}(n \times m; \mathbb{R})$ und unsere üblichen physikalisch standardisierten Charakterpaarungen. Der zugehörige adjungierte Homomorphismus im Sinne von 13.3.4.3 wird gegeben durch die transponierte Matrix $A^\top : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$ und wir erhalten nach 13.3.4.3 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}(\mathbb{R}^m) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "A_*"'] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^m) \arrow[d, "\circ A^\top"] \\
\mathrm{M}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)
\end{tikzcd}$$

Gilt $m = n$ und ist A ein Isomorphismus, so können wir es mit Hilfe der Transformationsformel erweitern zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\mathrm{d}^n x"] \arrow[d, "|\det A|^{-1}(\circ A^{-1})"'] & \mathrm{M}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "A_*"'] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "\circ A^\top"] \\
\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\mathrm{d}^n x"] & \mathrm{M}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)
\end{tikzcd}$$

Explizit gilt also

$$\int |\det A|^{-1} f(A^{-1}x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x^\top y} \, \mathrm{d}^n x = \int f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x^\top A^\top y} \, \mathrm{d}^n x$$

Das sieht man auch ohne alle Theorie leicht ein. Es verallgemeinert unsere Formel 13.3.1.5.5 für die Fouriertransformierte einer „gestreckten“ Funktion und zeigt, daß unsere Fouriertransformationen salopp gesprochen „mit dem Vorschalten orthogonaler Abbildungen A vertauschen“.

Ergänzung 13.3.4.6. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Der **Satz von Bochner** beschreibt das Bild der durch die Fouriertransformation gegebenen Einbettung $\mathcal{F} : \mathrm{M}(V; [0, \infty)) \hookrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\hat{V})$ des Raums der nichtnegativen endlichen Borelmaße in den Raum der beschränkten stetigen Funktionen auf der Charaktergruppe als die Menge aller beschränkten stetigen Funktionen $\phi : \hat{V} \to \mathbb{C}$, die „positiv semidefinit“ sind in dem Sinne, daß für beliebiges n und beliebige paarweise verschiedene $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \hat{V}$ die quadratische Matrix mit Einträgen $\phi(\chi_i - \chi_j)$ positiv semidefinit ist. Daß unsere Abbildung in den positiv semidefiniten Funktionen landet, mag der Leser zur Übung selbst prüfen. Daß auch alle beschränkten positiv semidefiniten Funktionen im Bild liegen, ist nicht so leicht zu sehen.

13.3.4.7 (**Abtastsatz für bandbeschränkte Signale**). Wir gehen aus von der Charakterpaarung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1$ mit $(x, y) \mapsto \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xy}$ und der Charakterpaarung

$S^1 \times \mathbb{Z} \to S^1$ mit $(z,n) \mapsto z^{-n}$. Der stetige Gruppenhomomorphisms $\varphi : \mathbb{R} \to S^1$ gegeben durch $x \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$ ist dann adjungiert im Sinne von 13.3.4.3 zur Einbettung $\bar{\varphi} = i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Damit liefert uns 13.3.4.3 das rechte Quadrat in einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}([-1/2,1/2)) \arrow[r, "j_*"] \arrow[dr, "\sim"] & \mathrm{M}(\mathbb{R}) \arrow[r, hook, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\varphi_*"] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}) \arrow[d, "\circ i"] \\
& \mathrm{M}(S^1) \arrow[r, hook, "\mathcal{F}"] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Die Injektivität der Fouriertransformation auf Maßen kennen wir aus 13.3.3.15 beziehungsweise 13.3.3.21. In voller Allgemeinheit werden wir sie in 13.3.7.17 kennenlernen. Von links kommend bezeichnet $j : [-1/2,1/2) \hookrightarrow \mathbb{R}$ die Einbettungsabbildung. Unser Diagramm zeigt, daß die Komposition von links oben nach rechts unten längs der oberen Kante gefolgt von der Vertikalen eine Injektion ist. Das besagt im Sprech der Signalverarbeiter, daß ein „auf ein Frequenzband beschränktes Signal“ durch das „Abtasten mit dem Doppelten der Maximalfrequenz“ eindeutig wiedererkannt werden kann.

13.3.4.8. Um eine Formel dafür anzugeben, wie aus den abgetasteten Werten das bandbeschränkte Signal zurückgewonnen werden kann, ziehen wir uns auf quadratintegierbare Funktionen zurück, weil wir die Inversionsformel nur in dieser Allgemeinheit kennen. Unser Diagramm enthält ein Teildiagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L}^2([-1/2,1/2)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"] & \chi_{[-1/2,1/2)}\,\mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{F}\big(\chi_{[-1/2,1/2)}\,\mathrm{L}^2(\mathbb{R})\big) \arrow[d, "\circ i"] \\
& \mathrm{L}^2(S^1) \arrow[r, "\mathcal{F}", "\sim"'] & \mathrm{L}^2(\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Die quadratintegrierbaren Funktionen links oben machen wir bei dieser Einbettung zu Maßen durch Multiplikation mit $\mathrm{d}x$ und links unten durch Multiplikation mit dem normierten Haarmaß. Das ist möglich, da alle unsere L^2-Funktionen in diesem Kontext auch L^1-Funktionen sind. Oben rechts stehen unsere frequenzbandbeschränkten Funktionen, sie sind sogar stetig. Um eine frequenzbandbeschränkte Funktion f aus ihren ganzzahligen Werten $(f(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ zurückzugewinnen, gegen wir in unserem Diagramm einmal ganz herum von unten rechts nach oben rechts und erhalten der Reihe nach mit in den jeweiligen L^2-Räumen zu verstehenden Summen

$$\begin{tikzcd}
\sum_n f(n)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n x} \arrow[r, mapsto] & \sum_n f(n)\chi_{[-1/2,1/2)}\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n x} \arrow[r, mapsto] & \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\frac{\sin \pi(y-n)}{\pi(y-n)} \\
& \sum_n f(n) z^n \arrow[ul, mapsto] & (f(n))_{n\in\mathbb{Z}} \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Hier verwenden wir im letzten Schritt die Formel $\mathcal{F}(\chi_{[-1/2,1/2)})(y) = (\sin \pi y)/\pi y$ aus 13.3.1.19 für die Fouriertransformation von Rechtecksfunktionen und die Formel 13.3.1.5.2 für die Fouriertransformierte des Produkts mit einem Charakter.

Definition 13.3.4.9. Wir sagen, ein topologisches Maß auf einem topologischen Raum sei **kompakt getragen**, wenn es in unserem Raum ein Kompaktum gibt, in dessen Komplement allen meßbaren Teilmengen die Null zugeordnet wird.

13.3.4.10 (**Fouriertransformierte kompakt getragener Maße**). Die Fouriertransformierte eines von Null verschiedenen kompakt getragenen Maßes $\lambda \in \mathrm{M}(\mathbb{R})$ kann nie kompakten Träger haben. In der Tat fänden wir zu solch einem Maß mithilfe der Natürlichkeit 13.3.4.3 auch ein von Null verschiedenes Maß auf der Kreisgruppe $\mu \in \mathrm{M}(S^1)$, das allen Teilmengen des „oberen Halbkreises“ Null zuordnet und dessen Fouriertransformierte dennoch nur auf endlich vielen Elementen von $\mathbb{Z}$ von Null verschiedene Werte annähme. Wegen der Injektivität der Fouriertransformation $\mathrm{M}(S^1) \hookrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Z})$ muß aber dann μ das Produkt von einem Haarmaß mit einem Laurentpolynom in $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ sein und ein von Null verschiedenes Laurentpolynom kann unmöglich auf dem oberen Halbkreis verschwinden.

13.3.4.11 (**Abtastsatz mit Einheiten**). Jetzt versuche ich, den Abtastsatz nocheinmal physikalischer aufzuschreiben. Wir gehen aus vom orientierten eindimensionalen reellen Vektorraum $\vec{\mathbb{T}}$ der Zeitspannen und der Charakterpaarung $\vec{\mathbb{T}}^* \times \vec{\mathbb{T}} \to S^1$ durch $(\omega, t) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Gegeben eine positive Frequenz $F \in \vec{\mathbb{T}}^*_{>0}$ und $k \in \mathbb{N}$ liefert uns die zur Auswertung duale Charakterpaarung $\vec{\mathbb{T}}^* \times \vec{\mathbb{T}} \to S^1$ das rechte Quadrat in einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}([-(k+1)F, -kF) \cup [kF, (k+1)F)) \arrow[r, "u_*"] \arrow[dr, "\sim"] & \mathrm{M}(\vec{\mathbb{T}}^*) \arrow[r, hook, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "p_*"] & \mathcal{C}(\vec{\mathbb{T}}) \arrow[d, "\circ i"] \\
& \mathrm{M}(\vec{\mathbb{T}}^*/2F\mathbb{Z}) \arrow[r, hook, "\mathcal{F}"] & \mathcal{C}((2F)^{-1}\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Es sagt uns salopp gesprochen, daß wir ein auf das Frequenzband $[kF, (k+1)F]$ beschränktes Signal zurückgewinnen können, indem wir es in Zeitintervallen der Länge $(2F)^{-1}$ alias mit der verdoppelten Frequenz $2F$ abtasten. Ich verzichte in diesem Fall darauf, die Formel explizit anzugeben, die das Signal aus seinen Abtastwerten zurückgewinnt.

13.3.4.12. Auf Englisch heißt unser Abtastsatz das **Sampling Theorem** und wird Shannon und Nyquist zugeschrieben, neuerdings auch Kotelnikow.

13.3.5 Faltung von Maßen und Funktionen

13.3.5.1 (**Formelsammlung für komplexe Maße**). Ich fasse für das folgende zusammen, was wir über Bildmaße und Produkte komplexer Maße auf Meßräumen

nach 13.1.7.25 und 13.3.2.35 wissen.

Funktorialität: Gegeben meßbare Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gilt $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* : \mathrm{M}(X) \to \mathrm{M}(Z)$. Für die Identität auf einem Meßraum X gilt $\mathrm{id}_* = \mathrm{id} : \mathrm{M}(X) \to \mathrm{M}(X)$;

Natürlichkeit von Produkten: Gegeben meßbare Abbildungen $f : X \to A$ und $g : Y \to B$ gilt für Maße $\mu \in \mathrm{M}(X)$ und $\nu \in \mathrm{M}(Y)$ stets die Gleichheit $(f_*\mu) \boxtimes (g_*\nu) = (f \times g)_*(\mu \boxtimes \nu)$ in $\mathrm{M}(A \times B)$;

Eins: Gegeben ein Meßraum X und $\mu \in \mathrm{M}(X)$ und auf dem einpunktigen Meßraum $\mathrm{meß}$ das Diracmaß $\delta \in \mathrm{M}(\mathrm{meß})$ gilt $(\mathrm{pr}_X)_*(\mu \boxtimes \delta) = \mu$;

Assoziativität: Gegeben X, Y, Z Meßräume und μ, ν, λ jeweils komplexe Maße ist die offensichtliche Bijektion $\mathrm{ass} : (X \times Y) \times Z \xrightarrow{\sim} X \times (Y \times Z)$ meßbar und es gilt $\mathrm{ass}_*((\mu \boxtimes \nu) \boxtimes \lambda) = \mu \boxtimes (\nu \boxtimes \lambda)$;

Kommutativität: Gegeben $\tau : X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X$ die Vertauschungsabbildung für Meßräume X, Y und $\mu \in \mathrm{M}(X)$ und $\nu \in \mathrm{M}(Y)$ gilt $\tau_*(\mu \boxtimes \nu) = \nu \boxtimes \mu$.

Vorschau 13.3.5.2. Diese ganze Formelsammlung kann man in der entsprechenden Terminologie zusammenfassen als die Aussage, daß $X \mapsto \mathrm{M}(X)$ ein Schmelzfunktor von der kartesischen Schmelzkategorie der Meßräume in die Schmelzkategorie der komplexen Vektorräume ist. Eine Verschmelzung von Meßräumen $f : X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \to Y$ ist dabei zu verstehen als eine meßbare Abbildung $f : X_1 \times \ldots \times X_r \to Y$ und eine Verschmelzung von komplexen Vektorräumen $V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r \to W$ als eine multilineare Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_r \to W$ und eine Verschmelzung von Meßräumen wie oben wird dabei abgebildet auf die Verschmelzung von Vektorräumen $\mathrm{M}(X_1) \curlyvee \ldots \curlyvee \mathrm{M}(X_r) \to \mathrm{M}(Y)$ alias die multilineare Abbildung $\mathrm{M}(X_1) \times \ldots \times \mathrm{M}(X_r) \to \mathrm{M}(Y)$ gegeben durch $(\mu_1, \ldots, \mu_r) \mapsto f_*(\mu_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \mu_r)$.

Definition 13.3.5.3. Ein **Meßmonoid** ist ein Monoid $(G, \top)$ mit der Struktur eines Meßraums derart, daß die Verknüpfung $\top : G \times G \to G$ meßbar ist.

Beispiel 13.3.5.4. Jedes abzählbar basierte topologische Monoid ist mit seiner borelschen σ-Alebra ein Meßmonoid, denn die Verknüpfung $G \times G \to G$ ist stetig, also borelmeßbar, und wegen $\mathrm{Borel}(G \times G) = \mathrm{Borel}(G) \boxtimes \mathrm{Borel}(G)$ nach 13.1.4.28 auch meßbar in Bezug auf die Produkt-σ-Algebra.

Definition 13.3.5.5. Gegeben komplexe Maße μ, ν auf einem Meßmonoid G erklären wir ein Maß $\mu * \nu$ auf G, die **Faltung** oder **Konvolution** unserer beiden Maße, als das Bildmaß unter der Verknüpfung $\top : G \times G \to G$ des Produktmaßes $\mu \boxtimes \nu$, in Formeln

$$\mu * \nu = \mu *_\top \nu := \top_*(\mu \boxtimes \nu)$$

13.3.5.6. Der Begriff der Faltung scheint auf eine Arbeit aus dem Jahre 1923 von Gustav Doetsch mit dem Titel „Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus“ zurückzugehen. Doetsch begründete den Gebrauch der Laplace-Transformation in den Ingenieurwissenschaften und wurde 1931 Professor in Freiburg.

13.3.5.7 (**Faltung σ-endlicher Maße**). Die obige Definition der Faltung bleibt sinnvoll für σ-endliche nichtnegative Maße. Allerdings muß die Faltung σ-endlicher Maße nicht mehr σ-endlich sein. Zum Beispiel liefert die Faltung des Lebesguemaßes auf $\mathbb{R}$ mit sich selbst das Maß, das jeder meßbaren Nullmenge den Wert Null zuordnet und jeder anderen meßbaren Menge den Wert Unendlich.

Beispiele 13.3.5.8 (**Faltung mit Diracmaßen**). Sei $(G, \top)$ ein Meßmonoid. Die Faltung des Diracmaßes an einer Stelle $g \in G$ mit dem Diracmaß bei $h \in G$ ist das Diracmaß bei $g \top h$, in Formeln $\delta_g * \delta_h = \delta_{g \top h}$. Die Faltung eines beliebigen komplexen Maßes μ mit dem Diracmaß bei $g \in G$ ist das „um g verschobene Maß μ“, in Formeln

$$\delta_g * \mu = (g\top)_* \mu \qquad \mu * \delta_g = (\top g)_* \mu$$

Insbesondere gilt stets $\delta_e * \mu = \mu * \delta_e = \mu$ für $e \in G$ das neutrale Element. Ich zeige nun beispielhaft, wie man die Formel $\mu * \delta_g = (\top g)_* \mu$ aus den Formeln unserer Formelsammlung 13.3.5.1 herleiten kann. Bezeichne dazu $\mathrm{em}_g : \mathrm{meß} \hookrightarrow G$ die Abbildung, die den Punkt auf $g \in G$ wirft. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \times \mathrm{meß} \arrow[r, "\mathrm{id} \times \mathrm{em}_g"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & G \times G \arrow[d, "\top"] \\ G \arrow[r, "(\top g)"'] & G \end{tikzcd}$$

Oben links füllen wir das Maß $\mu \boxtimes \delta$ ein. Sein Bildmaß unter der oberen und der unteren Verknüpfung muß übereinstimmen. Mit den Formeln unserer Formelsammlung und der Identität $\delta_g = \mathrm{em}_{g*}\, \delta$ bedeutet diese Erkenntnis dann genau die behauptete Formel $\mu * \delta_g = (\top g)_* \mu$.

Lemma 13.3.5.9 (**Faltungsalgebra**). *Die Faltung von komplexen Maßen auf einem Meßmonoid ist assoziativ und im Fall eines kommutativen Monoids kommutativ.*

13.3.5.10. Da wir bereits wissen, daß die Faltung bilinear ist und das Dirac-Maß beim neutralen Element ein Einselement, ist für jedes Meßmonoid G der Vektorraum $\mathrm{M}(G)$ mit der Konvolution als Multiplikation eine $\mathbb{C}$-Ringalgebra.

Beispiel 13.3.5.11 (**Polynomring als Faltungsalgebra**). Für $(G, \top) = (\mathbb{N}, +)$ mit der diskreten Topologie liefert etwa die Vorschrift $\sum a_n X^n \mapsto \sum a_n \delta_n$ einen

injektiven Homomorphismus von Ringalgebren $\mathbb{C}[X] \hookrightarrow \mathrm{M}(\mathbb{N})$. Dieselbe Vorschrift liefert auch im Fall $(G, \top) = (\mathbb{Z}, +)$ einen injektiven Homomorphismus von Ringalgebren $\mathbb{C}[X, X^{-1}] \hookrightarrow \mathrm{M}(\mathbb{Z})$.

Beweis. Sei G unser Meßmonoid. Wir zeigen nur die Assoziativität und überlassen den Beweis der zweiten Aussage dem Leser zur Übung. Wir gehen aus vom kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(G \times G) \times G \arrow[r, "\top \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{ass}"] & G \times G \arrow[r, "\top"] & G \arrow[d, equal] \\
G \times (G \times G) \arrow[r, "\mathrm{id} \times \top"] & G \times G \arrow[r, "\top"] & G
\end{tikzcd}$$

Gegeben komplexe Maße $\mu, \nu, \lambda \in \mathrm{M}(G)$ wird $(\mu \boxtimes \nu) \boxtimes \lambda$ auf beiden Wegen auf dasselbe Maß abgebildet. Das zeigt $(\mu * \nu) * \lambda = \mu * (\nu * \lambda)$ wie behauptet. $\square$

Satz 13.3.5.12 (Fouriertransformation und Faltung). *Die Fouriertransformierte der Faltung zweier komplexer Maße auf einer Fouriergruppe ist das punktweise Produkt der Fouriertransformierten unserer beiden Maße, in Formeln*

$$\mathcal{F}(\mu * \nu) = \mathcal{F}\mu \cdot \mathcal{F}\nu$$

Beispiel 13.3.5.13. Im Fall eines Diracmaßes $\mu = \delta_g$ erhalten wir insbesondere in Verallgemeinerung von 13.3.1.5.3 die Formel $\big(\mathcal{F}(g\top)_*\nu\big)(\chi) = \langle\!\langle g, \chi \rangle\!\rangle \big((\mathcal{F}\nu)(\chi)\big)$. Im Fall der Charakterpaarung $\mathbb{Z} \times S^1 \to S^1$ mit $(n, z) \mapsto z^n$ ist die Verknüpfung

$$\mathbb{C}[X, X^{-1}] \hookrightarrow \mathrm{M}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(S^1)$$

das Einsetzen der durch die Einbettung gegebenen Funktion $z : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$ in ein Laurentpolynom.

Beweis. Sei $(G, +)$ unsere Fouriergruppe und seien $\mu, \nu \in \mathrm{M}(G)$ komplexe Maße. Da in der Behauptung beide Seiten bilinear sind, dürfen wir unsere Maße endlich und nichtnegativ annehmen, vergleiche 13.1.6.9, 13.3.2.4. Gegeben $\chi \in \hat{G}$ gilt es zu zeigen $(\mu * \nu)^\wedge(\chi) = \mu^\wedge(\chi)\nu^\wedge(\chi)$ alias

$$\int_G \langle\!\langle g, \chi \rangle\!\rangle \; (\mu * \nu)\langle g \rangle = \left(\int_G \langle\!\langle h, \chi \rangle\!\rangle \mu\langle h \rangle \right) \left(\int_G \langle\!\langle k, \chi \rangle\!\rangle \nu\langle k \rangle \right)$$

Mit der Verwandtschaftsverträglichkeit des Integrals 13.1.6.18 und der Definition der Faltung können wir die linke Seite umformen zu

$$\int_{G \times G} (\chi \circ +)(h, k) \; (\mu \boxtimes \nu)\langle h, k \rangle = \int_{G \times G} \langle\!\langle h + k, \chi \rangle\!\rangle \; (\mu \boxtimes \nu)\langle h, k \rangle$$

Wegen $\chi(h + k) = \chi(h)\chi(k)$ folgt die Behauptung so aus dem Satz von Fubini. $\square$

13.3.5.14. Gegeben Mengen X, Y und Abbildungen $f : X \to \mathbb{C}$ sowie $g : Y \to \mathbb{C}$ notieren wir $f \boxtimes g : X \times Y \to \mathbb{C}$ die Funktion $f \boxtimes g : (x, y) \mapsto f(x)g(y)$ und nennen $f \boxtimes g$ das **äußere Produkt** der Funktionen f und g.

13.3.5.15 (**Fouriertransformation und äußeres Produkt**). Gegeben Charakterpaarungen $a : G \times \hat{G} \to S^1$ und $b : H \times \hat{H} \to S^1$ von Fouriergruppen kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}(G) \times \mathrm{M}(H) \arrow[r, "\mathcal{F}_a \times \mathcal{F}_b"] \arrow[d, "\boxtimes"'] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\hat{G}) \times \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\hat{H}) \arrow[d, "\boxtimes"] \\
\mathrm{M}(G \times H) \arrow[r, "\mathcal{F}_{a \boxtimes b}"] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\hat{G} \times \hat{H})
\end{tikzcd}$$

mit der Fouriertransformation zur Charakterpaarung $a \boxtimes b : (G \times H) \times (\hat{G} \times \hat{H}) \to S^1$ gegeben durch $a \boxtimes b : \big((g, h), (\hat{g}, \hat{h})\big) \mapsto a(g, \hat{g})b(h, \hat{h})$. Sind in Formeln $\sigma \in \mathrm{M}(G)$ und $\tau \in \mathrm{M}(H)$ komplexe Maße, so gilt

$$\mathcal{F}_{a \boxtimes b}(\sigma \boxtimes \tau) = \mathcal{F}_a \sigma \boxtimes \mathcal{F}_b \tau$$

Um das zu sehen, muß man nur für $\hat{g} \in \hat{G}$ und $\hat{h} \in \hat{H}$ die Werte beider Seiten an der Stelle $(\hat{g}, \hat{h})$ vergleichen. Es gilt also, die Identität

$$\int_{G \times H} (\hat{g} \boxtimes \hat{h})\, \sigma \boxtimes \tau = \left(\int_G \hat{g}\sigma\right)\left(\int_H \hat{h}\tau\right)$$

zu prüfen. Die aber ist klar nach dem Satz von Fubini erst für nichtnegative reelle Maße, dann aber mit der Bilinearität beider Seiten auch im allgemeinen.

Beweisvariante zu 13.3.5.12. Wir zeigen nun unsere Identität $\mathcal{F}(\sigma * \tau) = \mathcal{F}\sigma \cdot \mathcal{F}\tau$ für komplexe Maße auf einer Fouriergruppe $(G, +)$ ein weiteres Mal. Wir können im Fall $G = H$ unser Diagramm von 13.3.5.15 durch eine untere Hälfte ergänzen zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}(G) \times \mathrm{M}(G) \arrow[r, "\mathcal{F} \times \mathcal{F}"] \arrow[d, "\boxtimes"] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\hat{G}) \times \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\hat{G}) \arrow[d, "\boxtimes"] \\
\mathrm{M}(G \times G) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "+_*"] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\hat{G} \times \hat{G}) \arrow[d, "\circ\Delta"] \\
\mathrm{M}(G) \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\hat{G})
\end{tikzcd}$$

Das folgt aus 13.3.4.3, denn die Verknüpfung $+$ und die diagonale Einbettung Δ sind adjungiert für die Charakterpaarungen $a \boxtimes a$ und a alias

$$\langle\!\langle +(g, h), \hat{g} \rangle\!\rangle_a = \langle\!\langle (g, h), \Delta(\hat{g}) \rangle\!\rangle_{a \boxtimes a} \quad \forall g, h \in G, \hat{g} \in \hat{G}$$

In der Tat können wir das umschreiben zu $a(g+h,\hat{g}) = a(g,\hat{g})a(h,\hat{g})$ und das gilt, da a eine Charakterpaarung ist. $\square$

13.3.5.16 (**Falten von Maßen mit integrierbaren Funktionen**). Gegeben $(G,+,\lambda)$ eine Fouriergruppe mit Haarmaß betrachten wir die Einbettung $(\cdot\lambda) : \mathrm{L}^1(G;\lambda) \hookrightarrow \mathrm{M}(G)$. Das Bild dieser Einbettung ist stabil unter der Faltung mit beliebigen komplexen Maßen. Genauer behaupten wir für alle $\sigma \in \mathrm{M}(G)$ und $f \in \mathcal{L}^1(G;\lambda)$ die Gleichheit

$$\sigma * (f\lambda) = h\lambda$$

mit h der fast überall definierten Funktion $h(y) := \int f(y-x)\sigma\langle x\rangle$. Es reicht, das für σ ein reelles nichtnegatives Maß zu zeigen. Hier gilt es zu beachten, daß $(x,y) \mapsto f(y-x)$ in Bezug auf $(\sigma \boxtimes \lambda)\langle x,y\rangle$ integrierbar ist auf $G \times G$ nach Fubini, denn wir können $|f(y-x)|$ erst über $\lambda\langle y\rangle$ integrieren und erhalten eine von x unabhängige endliche Konstante. Also liefert nach Fubini 13.1.7.16 auch das partielle Integral nach $\sigma\langle x\rangle$ eine integrierbare Funktion $h(y)$. Um nun die behauptete Identität von Maßen zu zeigen, nehmen wir eine meßbare Funktion $\phi : G \to [0,\infty]$ her und finden

$$\int \phi(x)\ (\sigma*(f\lambda))\langle x\rangle = \int \phi(x+y)(\sigma\boxtimes(f\lambda))\langle x,y\rangle = \int \phi(x+y)f(y)(\sigma\boxtimes\lambda)\langle x,y\rangle$$

$$\int \phi(x)\ (h\lambda)\langle x\rangle = \int \phi(y)\int f(y-x)\sigma\langle x\rangle\lambda\langle y\rangle = \int \phi(y)f(y-x)(\sigma\boxtimes\lambda)\langle x,y\rangle$$

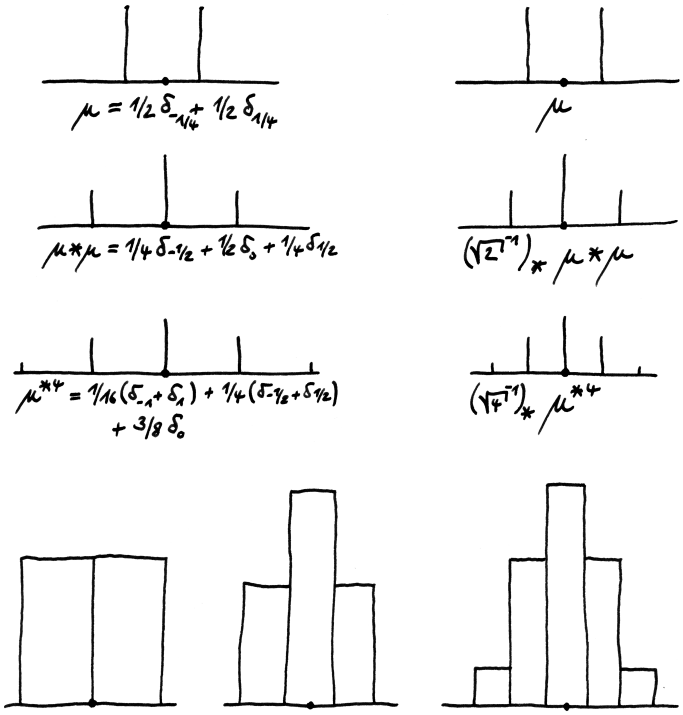
Auf der rechten Seite können wir hier erst über y und dann über x integrieren und im ersten Schritt beim unteren Integral y durch $x+y$ substituieren und sehen so, daß das in der Tat gleich ist.

13.3.5.17 (**Falten integrierbarer Funktionen**). Gegeben $(G,+,\lambda)$ eine Fouriergruppe mit Haarmaß erhalten wir für integrierbare Funktionen $f,g \in \mathrm{L}^1(G;\lambda)$ insbesondere $(f\lambda)*(g\lambda) = (h\lambda)$ mit der Funktion $h \in \mathrm{L}^1(G;\lambda)$ gegeben durch $h(y) = \int f(y-x)g(x)\lambda\langle x\rangle$. Man erklärt oft die Faltung von Funktionen direkt vermittels dieser Formel und setzt

$$f*g = f*_\lambda g := \int f(y-x)g(x)\lambda\langle x\rangle$$

Satz 13.3.5.18 (**Abstrakter zentraler Grenzwertsatz**). *Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$, unter dem x und x^2 integrierbar sind mit $\int x\mu\langle x\rangle = 0$ und $\int x^2\mu\langle x\rangle = 1$, so konvergiert die Folge der jeweils um den Faktor $\sqrt{n}$ gestauchten iterierten Faltungen μ^{*n} gegen die* **Standard-Normalverteilung** $\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x/\sqrt{2\pi}$ *im Sinne einer gleichmäßigen Konvergenz der Verteilungsfunktionen. In Formeln haben wir also gleichmäßig in $a \in \mathbb{R}$ die Konvergenz*

$$\int_{-\infty}^{\sqrt{n}\cdot a} \mu^{*n} \quad\longrightarrow\quad \int_{-\infty}^{a} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x \qquad \textit{für } n \to \infty.$$



In der linken Spalte sind die erste, zweite und vierte Faltungspotenz desjenigen Wahrscheinlichkeitsmaßes μ darsgestellt, das die Summe der Hälfte der Diracmaße an den Stellen $1/4$ und $-1/4$ ist. Diese Faltungspotenzen sind wieder Summen von Diracmaßen, und das Maß eines Punktes entspricht der Länge des an der entsprechenden Stelle angehefteten vertikalen Strichleins. In der rechten Spalte sind entsprechend für $n = 1, 2, 4$ die um den Faktor $\sqrt{n}$ in x-Richtung gestauchten Maße dagestellt. Die untere Zeile schließlich entsteht aus der rechten Spalte, indem wir jedes Strichlein durch ein Türmchen ersetzen, dessen Fläche gerade die Länge unseres Strichleins ist. Der zentrale Grenzwertsatz bedeutet in obigem Spezialfall anschaulich, daß auf jedem kompakten Intervall die Treppenfunktionen der unteren Zeile gleichmäßig gegen eine entsprechend normalisierte Gauss'sche Glockenkurve streben.

Ergänzung 13.3.5.19. In der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie hört sich unser zentraler Grenzwertsatz 13.3.5.18 dann so an: Gegeben eine Folge identisch verteilter stochastisch unabhängiger reeller Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ mit Erwartungswert Null und Varianz Eins konvergiert die Folge der Zufallsvariablen

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \ldots + X_n)$$

in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung.

Beweis. Wir arbeiten mit der stochastisch standardisierten Fouriertransformation, also der Charakterpaarung $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1$ gegeben durch $s(x, y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}$. Unsere Bedingungen liefern, daß die Fouriertransformierte alias die charakteristische Funktion $\mu^\wedge$ von μ im Sinne von 13.3.3.16 zweimal stetig differenzierbar ist. Ihre Taylorentwicklung um den Nullpunkt liefert mithilfe einer offensichtlichen Verallgemeinerung von 13.3.1.5.6 eine Darstellung

$$\mu^\wedge(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + y^2\varepsilon(y)$$

für $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\varepsilon(0) = 0$. Nach 13.3.5.12 ist nun die Fouriertransformierte der Faltung das Produkt der Fouriertransformierten. Verwenden wir zusätzlich die Natürlichkeit 13.3.1.5.5 oder besser 13.3.2.29, so ergibt sich für die charakteristische Funktion der um den Faktor $\sqrt{n}$ gestauchten n-fach iterierten Faltung die Darstellung

$$\left((n^{-1/2})_*\mu^{*n}\right)^\wedge(y) = \left(1 - \frac{y^2}{2n} + \frac{y^2}{n}\,\varepsilon\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

Hier steht $(n^{-1/2})_*$ für das Bildmaß im Sinne von 13.1.4.35 unter der durch die Multiplikation mit $n^{-1/2}$ gegebenen Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Unsere Funktionenfolge strebt nun nach 10.4.2.22 punktweise gegen die Funktion $\mathrm{e}^{-y^2/2}$ und all ihre Glieder sind als charakteristische Funktionen von Wahrscheinlichkeitsmaßen betragsmäßig beschränkt durch Eins. Aus dem Satz über dominierte Konvergenz folgt damit für jede Funktion ψ des Schwartzraums

$$\int \left((n^{-1/2})_*\mu^{*n}\right)^\wedge(y)\;\psi(y)\,\mathrm{d}y \to \int \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\psi(y)\,\mathrm{d}y$$

bei $n \to \infty$. Nach 13.3.1.17 ist die Funktion $\mathrm{e}^{-y^2/2}$ die charakteristische Funktion im Sinne von 13.3.3.16 des Maßes $\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x/\sqrt{2\pi}$, so daß wir wie im Beweis von 13.3.3.15 mit der Erkenntnis, daß die Fouriertransformation im wesentlichen ihre

eigene Transponierte ist, folgern können, daß für alle Funktionen φ des Schwarzraums gilt

$$\int \varphi(x)\left((n^{-1/2})_*\mu^{*n}\right)\langle x\rangle \to \int \varphi(x)\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x$$

bei $n \to \infty$. Das anschließende Lemma 13.3.5.20 beendet dann den Beweis. □

Lemma 13.3.5.20. *Seien $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}$ und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit einer stetigen Verteilungsfunktion $V = V_\mu$. Gilt*

$$\int \varphi(x)\mu_n\langle x\rangle \to \int \varphi(x)\mu\langle x\rangle \quad \textit{bei } n \to \infty$$

für jede Schwartzfunktion φ, so streben die Verteilungsfunktionen V_n der μ_n gleichmäßig gegen die Verteilungsfunktion V von μ.

Beweis. 1. Alle unsere Verteilungsfunktionen streben gegen Null für $b \to -\infty$ und gegen Eins für $b \to \infty$ und wachsen monoton. Die Funktion V ist stetig und sogar gleichmäßig stetig nach 10.5.1.19. Es ist damit nicht schwer einzusehen, daß aus der punktweisen Konvergenz $V_n(b) \to V(b)$ bereits die gleichmäßige Konvergenz folgt.

2. Gegeben $I \subset J \subset \mathbb{R}$ beschränkte Intervalle mit $\bar{I} \subset J^\circ$ finden wir eine glatte Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$, die auf I Eins ist und die außerhalb von J verschwindet. Sicher gilt dann $\mu(I) \le \int \varphi(x)\mu\langle x\rangle \le \mu(J)$ und ebenso für alle μ_n. Wir finden folglich für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(I,J,\varepsilon)$ derart, daß für $n \ge N$ sowohl gilt $\mu_n(I) \le \int \varphi(x)\mu_n\langle x\rangle \le \mu(J) + \varepsilon$ als auch $\mu(I) - \varepsilon \le \int \varphi(x)\mu_n\langle x\rangle \le \mu_n(J)$.

3. Sind also $I \subset J \subset K \subset \mathbb{R}$ beschränkte Intervalle mit $\bar{I} \subset J^\circ$ und $\bar{J} \subset K^\circ$, so folgt

$$\mu(I) - \varepsilon \le \mu_n(J) \le \mu(K) + \varepsilon$$

für hinreichend großes $n \ge N(I,J,K,\varepsilon)$.

4. Da wir die Verteilungsfunktion von μ stetig angenommen hatten, können wir für ein gegebenes beschränktes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ auch beschränkte Intervalle I, K wie oben finden mit $\mu(K) - \mu(I) \le \varepsilon$. Zusammen folgt so für jedes beschränkte Intervall $J \subset \mathbb{R}$ bereits

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(J) = \mu(J)$$

5. Schließlich finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein Intervall $[a,b)$ mit $\mu([a,b)) \ge 1 - \varepsilon$ und folglich $\mu((-\infty,a)) \le \varepsilon$. Für hinreichend großes n gilt dann $\mu_n([a,b)) \ge 1 - 2\varepsilon$ und damit $\mu_n((-\infty,a)) \le 2\varepsilon$. Für $x \le a$ gilt bereits für diese n die Abschätzung $|\mu((-\infty,x)) - \mu_n((-\infty,x))| \le 3\varepsilon$. Für $x > a$ müssen wir zusätzlich

n noch so groß wählen, daß $|\mu([a,x)) - \mu_n([a,x))| \leq \varepsilon$, und dann folgt für derart große n offensichtlich

$$|\mu((-\infty,x)) - \mu_n((-\infty,x))| \leq 4\varepsilon$$

alias die punktweise Konvergenz der Verteilungsfunktionen. □

Vorschau 13.3.5.21. Wir haben nun zwei Schmelzfunktoren von der kartesischen Schmelzkategorie der Fouriergruppen in die Schmelzkategorie der komplexen Vektorräume, den Schmelzfunktor $G \mapsto \mathrm{M}(G)$ aus der Spezialisierung von 13.3.5.2 und einen Schmelzfunktor $G \mapsto \mathcal{C}(\hat{G})$. Die Fouriertransformation ist nach dem vorhergehenden eine Transformation vom ersten dieser Schmelzfunktoren zum zweiten.

13.3.6 Wellengleichung und Fouriertransformation

13.3.6.1. Eine **Halbmetrik** auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $d(x,y) = d(y,x)$ und $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ für alle $x,y,z \in X$.

13.3.6.2 (**Topologie zu einer Halbmetrik**). Gegeben eine Halbmetrik d auf einer Menge X erklären wir die zugehörige Topologie als die Topologie, die von allen Bällen

$$\mathrm{B}(x;r) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$

für $x \in X$ und $r > 0$ erzeugt wird. Diese Topologie ist Hausdorff genau dann, wenn d eine Metrik ist.

13.3.6.3. Eine **Halbnorm** auf einem reellen oder komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung $\| \ \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v,w \in V$ und $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ für alle reellen beziehungsweise komplexen Skalare.

13.3.6.4 (**Halbmetrik zu einer Halbnorm**). Jede Halbnorm auf einem reellen oder komplexen Vektorraum V induziert eine Halbmetrik durch die Vorschrift $d(v,w) := \|v-w\|$.

13.3.6.5 (**Topologie auf dem Schwartzraum**). Wir betrachten auf dem Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Halbnormen

$$\|f\|_{s,r} := \|x^s \partial^r f\|_\infty$$

für $s,r \in \mathbb{N}$ und versehen ihn mit der Topologie, die von den Topologien zu allen diesen Halbnormen erzeugt wird. Mit dieser Topologie wird der Schwartzraum offensichtlich ein Hausdorffraum.

Proposition 13.3.6.6 (Fouriertransformation als Homöomorphismus). *Die Fouriertransformation induziert auf dem Schwartzraum einen Homöomorphismus*

$$\mathcal{F} \circ (\cdot\, \mathrm{d}x) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Beweis. Wir arbeitem mit der Charakterpaarung $s(x,y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}$. Aufgrund der Inversionsformel 13.3.3.5 reicht es, die Stetigkeit zu zeigen. Wir bemerken nun, daß auch die Halbnormen

$$\|f\|_{(r,s)} := \|\partial^r x^s f\|_\infty$$

unsere Topologie erzeugen, wie der Leser leicht selbst einsehen kann. Nun ist $1/(1+x^2)$ integrierbar. Bezeichnet C sein Integral, so finden wir von der Mitte ausgehend

$$\begin{aligned}\big(\|f\|_{0,0} \le A/2 \text{ und } \|f\|_{2,0} \le A/2\big) &\Rightarrow \|(1+x^2)f\|_\infty \le A \\ &\Rightarrow |f| \le A/(1+x^2) \\ &\Rightarrow \|\mathcal{F}f\|_\infty = \|\mathcal{F}f\|_{0,0} \le AC\end{aligned}$$

und mit den Formeln 13.3.1.13 für das Vertauschen zwischen Multiplikation mit Koordinaten und Ableitung unter der Fouriertransformation ebenso

$$\big(\|f\|_{(r,s)} \le A/2 \text{ und } \|f\|_{(r,s+2)} \le A/2\big) \Rightarrow \|\mathcal{F}f\|_{s,r} \le AC. \qquad \square$$

13.3.6.7 (**Fouriertransformation und Wellengleichung**). Wir erinnern aus 12.2.1.17 die eindimensionale Wellengleichung $\partial_t^2 f = \partial_x^2 f$ für $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ und die Menge ihrer Lösungen. Hier diskutiere ich einen anderen Zugang, der sich auf höhere Dimensionen verallgemeinern läßt. Wir suchen bei diesem Zugang zweimal stetig differenzierbare Abbildungen der Zahlengeraden in den Schwartzraum

$$q : \mathbb{R} \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

in der Notation $q : t \mapsto q(t)$ oder $(q(t))(x) = q(x,t)$ mit

$$\partial_t^2 q = \partial_x^2 q$$

Hier meinen wir mit $(\partial_t q)(s) := \lim_{h\to 0}\big(q(s+h) - q(s)\big)/h$ den Grenzwert im Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit seiner in 13.3.6.5 erklärten Topologie. Es ist leicht zu sehen, daß $f(x,t) := q(x,t)$ unsere ursprüngliche Wellengleichung löst, wenn der Weg $q : \mathbb{R} \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ im Schwartzraum die oben beschriebene Eigenschaft hat. Wir erhalten so zwar nicht alle Lösungen, weil wir ja in 12.2.1.17 durchaus Lösungen gefunden hatten, deren Einschränkung auf eine feste Zeit t nicht im Schwartzraum liegt. Dahingegen erhalten wir ein Lösungsverfahren, das sich auf höhere Dimensionen verallgemeinern läßt. Die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}_s \circ (\cdot\,\mathrm{d}x) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

zur Charakterpaarung $s(x,y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}$ ist nun nämlich Vektorraumisomorphismus und nach 13.3.6.6 auch ein Homöomorphismus und das Nachschalten von $\mathcal{F}_s \circ$

$(\cdot\,\mathrm{d}x)$ liefert folglich eine Bijektion zwischen den Lösungen q unserer Gleichung und der Menge der zweimal stetig differenzierbaren Abbildungen $\hat{q} : \mathbb{R} \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit

$$\partial_t^2 \hat{q} = -y^2 \hat{q}$$

Halten wir hier y fest, so ist das eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, die wir mit dem Ansatz $\hat{q}(y,t) = \exp \lambda(y)t$ lösen können. Wir erhalten $\lambda(y)^2 = -y^2$ und $\lambda(y) = \pm \mathrm{i}y$ und die allgemeine Lösung

$$\hat{q}(y,t) = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}yt} + b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yt} = (a+b)\cos(yt) + \mathrm{i}(a-b)\sin(yt)$$

mit $\hat{q}(y,0) = a+b$ sowie $\hat{q}_t(y,0) = \mathrm{i}y(a-b)$. Wir können mithin jede Lösung $\hat{q}$ schreiben als

$$\hat{q}(y,t) = (\cos yt)\hat{q}(y,0) + \big((\sin yt)/y\big)\hat{q}_t(y,0)$$

Mit etwas sorgfältigeren Abschätzungen sehen wir auch, daß die durch diese Gleichung gegebene Funktion $\hat{q}(y,t)$ für beliebige Vorgaben von zwei Schwartzfunktionen $\hat{q}(y,0)$ und $\hat{q}_t(y,0)$ in der Tat eine zweimal stetig nach t differenzierbare Abbildung $\hat{q} : \mathbb{R} \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ liefert. Nun wissen wir bereits $\mathcal{F}_s(\delta_t + \delta_{-t})/2 = \cos yt$ für $\delta_{\pm t}$ das Diracmaß bei $y = \pm t$ und als Variante von 13.3.1.19 erhalten wir $\mathcal{F}_s(\chi_{[-t,t]}\,\mathrm{d}x)/2 = (\sin yt)/y$ für $t \geq 0$ und entsprechend $\mathcal{F}_s(-\chi_{[t,-t]}\,\mathrm{d}x)/2 = (\sin yt)/y$ für $t \leq 0$. Da die Fouriertransformation Faltung in Multiplikation verwandelt, ist unsere Beschreibung von $\hat{q}$ äquivalent zu

$$\mathcal{F}_s\big(q(x,t)\mathrm{d}x\big) = \mathcal{F}_s\big(\tfrac{1}{2}(\delta_t+\delta_{-t})*q(x,0)\mathrm{d}x\big)+\mathcal{F}_s\big(\tfrac{1}{2}(\chi_{[-t,t]}-\chi_{[t,-t]})\mathrm{d}x*q_t(x,0)\mathrm{d}x\big)$$

Da die Fouriertransformation des weiteren injektiv und komplexlinear ist, können wir sie weglassen und erhalten

$$q(x,t)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(\delta_t + \delta_{-t}) * q(x,0)\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}(\chi_{[-t,t]} - \chi_{[t,-t]})\mathrm{d}x * q_t(x,0)\mathrm{d}x$$

oder ausgeschrieben

$$q(x,t) = \frac{q(x-t,0) + q(x+t,0)}{2} + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} q_t(x+s,0)\,\mathrm{d}s$$

Das ist also die Beschreibung einer beliebigen zweimal stetig differenzierbaren Abbildung $q : \mathbb{R} \to \mathcal{S}(R)$, die die obige Gleichung $\partial_t^2 q = \partial_x^2 q$ erfüllt, durch „Ort und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$“.

13.3.6.8 (**Anschauliche Bedeutung obiger Lösungen der Wellengleichung**). In meiner Anschauung tritt die Bedeutung der in 13.3.6.7 beschriebenen Lösungen der Wellengleichung besonders deutlich hervor, wenn wir darin, obwohl das

unser begrifflicher Rahmen bis jetzt noch nicht erlaubt, $q(x,0) = \delta_0/\mathrm{d}x$ und $q_t(x,0) = 0$ beziehungsweise $q(x,0) = 0$ und $q_t(x,0) = \delta_0/\mathrm{d}x$ einsetzen. Im ersten Fall sehe ich zwei Teilchen der Masse $1/2$, die von rechts und links kommend sich zum Zeitpunkt Null zu einem Teilchen der Masse 1 am Ursprung ergänzen um dann wieder auseinanderzulaufen. Im zweiten Fall sehe ich eine am Ursprung zentrierte Rechtecksfunktion der Höhe $-1/2$, deren Träger mit der Zeit immer schmaler wird um beim Zeitpunkt $t = 0$ zu verschwinden, wobei die Funktion ins Positive umschlägt um sich als Rechtecksfunktion der Höhe $1/2$ wieder zunehmend zu verbreitern. Einen begrifflichen Rahmen, der diese Anschauung erlaubt und rechtfertigt, bilden die sogenannten Distributionen. Mit deren Hilfe läßt sich dann auch die Wellengleichung in höherdimensionalen Räumen ganz ähnlich lösen. Mehr dazu können Sie in Vorlesungen über Funktionalanalysis oder partielle Differentialgleichungen lernen.

13.3.7 Inversionsformel für Fouriergruppen*

13.3.7.1. Wir beginnen mit der Konstruktion des Schwartzraums für allgemeine Fouriergruppen und verallgemeinern dazu unsere Formeln 13.3.1.5.7 und 13.3.1.5.6 für die Beziehung zwischen partiellen Ableitungen und der Fouriertransformation.

Definition 13.3.7.2. Gegeben ein Gruppenweg $\xi : \mathbb{R} \to G$ in einer Fouriergruppe $(G, +)$ und eine Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$ sagen wir, f besitze bei $g \in G$ eine **Richtungsableitung in Richtung** ξ, wenn $t \mapsto f(\xi(t) + g)$ bei $t = 0$ differenzierbar ist. Die Ableitung dieser Abbildung bei $t = 0$ notieren wir dann

$$(\partial_\xi f)(g)$$

Existiert sie für alle $g \in G$, so nennen wir f **differenzierbar nach** ξ und notieren die entsprechende Funktion auf unserer Gruppe $\partial_\xi f$. Ist $\partial_\xi f(\xi(t) + g)$ zusätzlich stetig in t für alle g, so nennen wir f **partiell stetig differenzierbar nach** ξ.

13.3.7.3. Gegeben eine Fouriergruppe G nennen wir einen stetigen Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{i}\mathbb{R}$ eine **Imaginärkoordinate von** G.

13.3.7.4. Sei $a : G \times \hat{G} \to S^1$ eine Charakterpaarung von Fouriergruppen. Gegeben eine Imaginärkoordinate $\xi : G \to \mathrm{i}\mathbb{R}$ erklären wir den **adjungierten Gruppenweg** $\hat{\xi} = \hat{\xi}_a : \mathbb{R} \to \hat{G}$ durch die Identität

$$\langle\!\langle g, \hat{\xi}(t) \rangle\!\rangle_a = \mathrm{e}^{\xi(g)t} \quad \forall g \in G, t \in \mathbb{R}$$

In der Terminologie aus 13.3.4.3 ist das der zu ξ adjungierte Homomorphismus in Bezug auf die Charakterpaarung $s : \mathrm{i}\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1$ gegeben durch $(r, t) \mapsto \mathrm{e}^{rt}$ und wir könnten ihn ausführlicher $\hat{\xi}_a = \hat{\xi}_{a,s}$ notieren. Weiter erklären wir für jeden Gruppenweg $\kappa : \mathbb{R} \to G$ die **adjungierte Imaginärkoordinate** $\hat{\kappa} = \hat{\kappa}_a : \hat{G} \to \mathrm{i}\mathbb{R}$ durch die Identität

$$\mathrm{e}^{-t\hat{\kappa}(\hat{g})} = \langle\!\langle \kappa(t), \hat{g} \rangle\!\rangle_a \quad \forall t \in \mathbb{R}, \hat{g} \in \hat{G}$$

In der Terminologie aus 13.3.4.3 ist das der zu κ in Bezug auf die duale Charakterpaarung $\hat{s} : \mathbb{R} \times \mathrm{i}\mathbb{R} \to S^1$ adjungierte Homomorphismus und wir könnten ihn auch ausführlicher $\hat{\kappa}_a = \hat{\kappa}_{\hat{s},a}$ notieren.

Beispiel 13.3.7.5. Gehen wir von der Charakterpaarung $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to S^1$ aus, die gegeben wird durch $a(x, y) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x \cdot y}$, so ist $-\mathrm{i}x_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Imaginärkoordinate mit adjungiertem Gruppenweg $t \mapsto t\mathrm{e}_\nu$ im $\mathbb{R}^n$ mit y-Koordinaten. Umgekehrt ist $t \mapsto t\mathrm{e}_\nu$ ein Gruppenweg im $\mathbb{R}^n$ mit x-Koordinaten mit $\mathrm{i}y_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als adjungierter Imaginärkoordinate.

Proposition 13.3.7.6. *Seien $a : G \times \hat{G} \to S^1$ eine Charakterpaarung von Fouriergruppen, λ ein Haarmaß auf G und $\kappa : \mathbb{R} \to G$ ein Gruppenweg. Ist $f \in \mathcal{L}^1(G, \lambda)$ partiell stetig differenzierbar nach κ mit $\partial_\kappa f \in \mathcal{L}^1(G, \lambda)$, so gilt für die adjungierte Imaginärkoordinate*

$$\mathcal{F}((\partial_\kappa f)\lambda) = \hat{\kappa}\mathcal{F}(f\lambda)$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $G \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}, (g, t) \mapsto f(\kappa(t) + g)$. An jeder Stelle $(g, t) \in G \times \mathbb{R}$ ist sie differenzierbar nach t mit der Ableitung

$$\partial_t \left(f(\kappa(t) + g)\right) = (\partial_\kappa f)(\kappa(t) + g)$$

und diese Ableitung ist stetig in t. Also gilt für festes $g \in G$ und $c \in \mathbb{R}$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_0^c (\partial_\kappa f)(\kappa(t) + g)\,\mathrm{d}t = f(\kappa(c) + g) - f(g)$$

Nach unseren Annahmen ist $(g,t) \mapsto (\partial_\kappa f)(\kappa(t)+g)$ für festes $c > 0$ integrierbar auf $G \times [0,c]$ und wir erhalten durch Multiplikation mit $\langle\!\langle g, \hat{g} \rangle\!\rangle$ und Integration über G für jeden Charakter $\hat{g} \in \hat{G}$ die Identität

$$\begin{aligned}
\big(\langle\!\langle \kappa(-c), \hat{g} \rangle\!\rangle - 1\big)(\mathcal{F}f\lambda)(\hat{g}) &= \int_G \int_0^c \langle\!\langle g, \hat{g} \rangle\!\rangle \; (\partial_\kappa f)(\kappa(t)+g) \; \mathrm{d}t \boxtimes \lambda \\
&= \int_0^c \int_G \langle\!\langle \kappa(-t)+g, \hat{g} \rangle\!\rangle \; (\partial_\kappa f)(g) \; \lambda \boxtimes \mathrm{d}t \\
&= (\mathcal{F}(\partial_\kappa f)\lambda)(\hat{g}) \int_0^c \langle\!\langle \kappa(-t), \hat{g} \rangle\!\rangle \; \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Teilen wir beide Seiten unserer obigen Identität durch c und erinnern $\mathrm{e}^{-t\hat{\kappa}(\hat{g})} = \langle\!\langle \kappa(t), \hat{g} \rangle\!\rangle$, so sehen wir, daß im Grenzwert $c \to 0$ der Quotient $(\mathrm{e}^{c\hat{\kappa}(\hat{g})} - 1)/c$ wie gewünscht gegen $\hat{\kappa}(\hat{g})$ strebt. □

Proposition 13.3.7.7. *Seien $a : G \times \hat{G} \to S^1$ eine Charakterpaarung von Fouriergruppen, λ ein Haarmaß auf G und $\xi : G \to \mathrm{i}\mathbb{R}$ eine Imaginärkoordinate. Gegeben $f \in \mathcal{L}^1(G,\lambda)$ mit $\xi f \in \mathcal{L}^1(G,\lambda)$ ist $\mathcal{F}(f\lambda) \in \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\hat{G})$ partiell differenzierbar nach $\hat{\xi}$ und es gilt*

$$\mathcal{F}(\xi f \lambda) = \partial_{\hat{\xi}}(\mathcal{F}f\lambda)$$

Beweis. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\frac{(\mathcal{F}f\lambda)(\hat{\xi}(t)+\hat{g}) - (\mathcal{F}f\lambda)(\hat{g})}{t} &= \frac{1}{t}\int_G \Big(\langle\!\langle g, \hat{\xi}(t)+\hat{g} \rangle\!\rangle - \langle\!\langle g, \hat{g} \rangle\!\rangle\Big) f(g)\lambda\langle g \rangle \\
&= \int_G \frac{\langle\!\langle g, \hat{\xi}(t) \rangle\!\rangle - 1}{t} \langle\!\langle g, \hat{g} \rangle\!\rangle f(g)\lambda\langle g \rangle
\end{aligned}$$

Nun gilt per definitionem $\langle\!\langle g, \hat{\xi}(t) \rangle\!\rangle = \mathrm{e}^{\xi(g)t}$. Damit strebt der Bruch gegen $\xi(g)$ für $t \to 0$. Die Aussage folgt so aus dem Satz über dominierte Konvergenz. □

Definition 13.3.7.8. Der **Schwartzraum** $\mathcal{S}(G)$ einer Fouriergruppe G bestehe aus allen Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ derart, daß für beliebige Gruppenwege $\kappa_1, \ldots, \kappa_r : \mathbb{R} \to G$ die iterierten partiellen Ableitungen $\partial_{\kappa_1} \ldots \partial_{\kappa_r} f$ existieren und daß für beliebige Imaginärkoordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_l : G \to \mathrm{i}\mathbb{R}$ die Produkte $\xi_1 \ldots \xi_l \partial_{\kappa_1} \ldots \partial_{\kappa_r} f$ betragsmäßig beschränkt bleiben.

Beispiel 13.3.7.9. Im Fall der Fouriergruppe $\mathbb{Z}$ ist der Schwartzraum der Untervektorraum $\mathcal{S}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Z})$ aller $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n^l a_n| < \infty$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

Beispiel 13.3.7.10. Im Fall der Kreisgruppe S^1 besteht der Schwartzraum $\mathcal{S}(S^1)$ aus allen Funktionen $f : S^1 \to \mathbb{C}$, für die $t \mapsto f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ eine glatte Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist.

Lemma 13.3.7.11 (**Fouriertransformierte von Schwartzfunktionen**). *Gegeben eine Fouriergruppe G ist für jede Schwartzfunktion f und jedes Haarmaß λ auch die Fouriertransformierte von $f\lambda$ eine Schwartzfunktion, in Formeln*

$$f \in \mathcal{S}(G) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(f\lambda) \in \mathcal{S}(\hat{G})$$

Beweis. Man prüft unschwer $\partial_\kappa(\xi f) = (\partial_\kappa \xi) f + \xi(\partial_\kappa f)$ und $\partial_\kappa \xi$ ist eine Konstante. □

13.3.7.12. Der Raum der **Schwartzmaße** $\mathcal{M}(G) \subset \mathrm{M}(G)$ einer Fouriergruppe G bestehe aus allen Maßen, die Vielfache eines Haarmaßes mit einer Schwarzfunktion sind. Die Multiplikation mit jedem Haarmaß λ von G induziert folglich einen Isomorphismus

$$(\cdot\lambda) : \mathcal{S}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(G)$$

Satz 13.3.7.13 (**Inversionsformel für Fouriergruppen**). *Sei $a : G \times \hat{G} \to S^1$ eine Charakterpaarung von Fouriergruppen mit dualer Charakterpaarung $\hat{a}$. So gilt:*

1. *Für jedes Haarmaß λ auf G gibt es genau ein Haarmaß $\hat{\lambda}$ auf $\hat{G}$ derart, daß im Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(G) \arrow[r, "\mathcal{F}_a", "\sim"'] & \mathcal{S}(\hat{G}) \arrow[d, "\wr"', "\cdot\hat{\lambda}"] \\ \mathcal{S}(G) \arrow[u, "\cdot\lambda", "\wr"'] & \mathcal{M}(\hat{G}) \arrow[l, "\mathcal{F}_{\hat{a}}"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

   das „Einmal-im-Kreis-Herumgehen“ an jeder Stelle die Identität liefert. Man nennt $\hat{\lambda}$ das **Plancherel-Maß zu** λ. *Wir nennen es auch das* **zu** λ **duale Haarmaß** *in Bezug auf unsere Charakterpaarung;*

2. *Für λ und $\hat{\lambda}$ duale Haarmaße erhalten die zwischen den Schwartzräumen induzierten Isomorphismen $\mathcal{F}_a \circ (\cdot\lambda)$ und $\mathcal{F}_{\hat{a}} \circ (\cdot\hat{\lambda})$ die L^2-Norm und induzieren zueinander inverse Hilbertraumisomorphismen*

$$\mathrm{L}^2(G;\lambda) \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2(\hat{G};\hat{\lambda})$$

13.3.7.14. Das Vorzeichen bei der Formel $f^{\wedge\wedge}(x) = f(-x)$ aus 13.3.3.5 zeigt sich im hier diskutierten Formalismus darin, daß man die Fouriertransformation in die Gegenrichtung zur dualen Charakterpaarung nimmt.

Beweis. Im Fall $G = \mathbb{R}$ sind das genau unsere Inversionsformeln 13.3.3.5 und 13.3.3.7. Im Fall der Kreisgruppe $G = S^1$ ist das Übung 11.3.3.10 und 13.2.7.23, 13.2.7.26. Der Fall der Gruppe $\mathbb{Z}$ ist damit auch abgedeckt. Im Fall einer endlichen

abelschen Gruppe ist die Aussage in 13.2.7.23, 13.2.7.26 enthalten, das Plancherelmaß zum normierten Haarmaß ist das Zählmaß. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß unser Satz für das Produkt $G = G_1 \times G_2$ zweier Fouriergruppen folgt, wenn wir ihn für die Faktoren kennen. Seien λ_1 und λ_2 Haarmaße. Das Erzeugnis von äußeren Produkten $f_1 \boxtimes f_2$ mit $f_1 \in \mathcal{S}(G_1)$ und $f_2 \in \mathcal{S}(G_2)$ liegt sicher dicht in $\mathrm{L}^2(G_1 \times G_2; \lambda_1 \boxtimes \lambda_2)$. Stetige Fortsetzung zeigt, daß es genau einen Isomorphismus von Hilberträumen

$$\mathrm{L}^2(G_1 \times G_2; \lambda_1 \boxtimes \lambda_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2(\hat{G}_1 \times \hat{G}_2; \hat{\lambda}_1 \boxtimes \hat{\lambda}_2)$$

gibt mit $f_1 \boxtimes f_2 \mapsto \mathcal{F}(f_1\lambda_1) \boxtimes \mathcal{F}(f_2\lambda_2)$ für alle $f_1 \in \mathcal{S}(G_1), f_2 \in \mathcal{S}(G_2)$. Da wir das für die Schwartzfunktionen auf G_1 und G_2 bereits wissen, folgt auch hier, daß der zur dualen Charakterpaarung in derselben Weise konstruierte Isomorphismus die inverse Abbildung sein muß. Da schließlich beide Transformationen Schwartzfunktionen zu Schwartzfunktionen machen, folgt auch unsere Inversionsformel für Schwartzfunktionen auf beliebigen Fouriergruppen. □

13.3.7.15. Die Propositionen 13.3.7.6 und 13.3.7.7 liefern für $a : G \times \hat{G} \to S^1$ eine Charakterpaarung von Fouriergruppen, λ ein Haarmaß auf G und $\kappa : \mathbb{R} \to G$ ein Gruppenweg und $\xi : G \to \mathrm{i}\mathbb{R}$ eine Imaginärkoordinate jeweils ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(G) \arrow[r, "\mathcal{F}_a", "\sim"'] \arrow[d, "\partial_\kappa"'] & \mathcal{S}(\hat{G}) \arrow[d, "\hat{\kappa}\cdot"] \\ \mathcal{M}(G) \arrow[r, "\mathcal{F}_a", "\sim"'] & \mathcal{S}(\hat{G}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{M}(G) \arrow[r, "\mathcal{F}_a", "\sim"'] \arrow[d, "\xi\cdot"'] & \mathcal{S}(\hat{G}) \arrow[d, "\partial_{\hat{\xi}}"] \\ \mathcal{M}(G) \arrow[r, "\mathcal{F}_a", "\sim"'] & \mathcal{S}(\hat{G}) \end{tikzcd}$$

mit der hoffentlich offensichtlichen partiellen Ableitung von Schwartzmaßen nach Gruppenwegen. Diese beiden Diagramme sind äquivalent unter der Inversionsformel. Schalten wir genauer an jeder Stelle rechts $(\lambda\cdot) : \mathcal{S}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(G)$ vor und gehen im rechten Diagramm zu den inversen Horizontalen $\mathcal{F}_{\hat{a}} \circ (\hat{\lambda}\cdot)$ über und beachten, daß ξ die unter $\hat{a}$ adjungierte Imaginärkoordinate zu $\hat{\xi}$ ist, so verwandelt sich das rechte Diagramm in das linke Diagramm beim Übergang zur dualen Charakterpaarung.

Beispiel 13.3.7.16 (**Poissonformel und Natürlichkeit**). Wir betrachten den Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to S^1$ gegeben durch $t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$ sowie die Charakterpaarungen $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1$ mit $(t, \omega) \mapsto \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t\omega}$ und $p : S^1 \times \mathbb{Z} \to S^1$ mit $(z, n) \mapsto z^{-n}$, so daß die Einbettung $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ adjungiert ist zu φ. Mit der Natürlichkeit der Fouriertransformation 13.3.4.3 erhalten wir das Kommutatiren

im oberen rechten Quadrat des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(\mathbb{R}) \arrow[r, "\cdot\,\mathrm{d}t"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathcal{M}(\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathcal{F}_b"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & \mathcal{S}(\mathbb{R}) \arrow[d, "\circ i"] \\
\mathcal{S}(S^1) \arrow[r, "\cdot\mu"] \arrow[dr, equal] & \mathcal{M}(S^1) \arrow[r, "\mathcal{F}_p"] & \mathcal{S}(\mathbb{Z}) \arrow[d, "\cdot\zeta"] \\
& \mathcal{S}(S^1) \arrow[u, "\cdot\mu"'] & \mathcal{M}(\mathbb{Z}) \arrow[l, "\mathcal{F}_{\bar{p}}"']
\end{tikzcd}$$

Im Quadrat unten rechts meint μ das normierte Haarmaß auf der Kreisgruppe und ζ dem Zählmaß auf $\mathbb{Z}$, das das zugehörige Plancherelmaß ist, so daß einmal im Kreis herumgehen an jeder Stelle die Identität ist nach der Inversionsformel 13.3.7.13. Ganz links ist $\sigma : f \mapsto \tilde{g}$ gegeben durch das Aufsummieren $\tilde{g}(\varphi(t)) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)$ und macht das linke obere Quadrat kommutativ. Füllen wir oben links eine Schwartzfunktion ein und lassen sie auf beiden Wegen nach unten in die Mitte laufen und werten das Resultat bei Null aus, so ergibt sich die Poissonformel.

13.3.7.17 (**Injektivität der Fouriertransformation auf Maßen**). Gegeben eine Fouriergruppe G erhalten wir durch die Vorschrift $f \mapsto \big(\mu \mapsto \int f\mu\big)$ eine Inklusion $\mathrm{int} : \mathrm{L}^\infty(G) \hookrightarrow \mathcal{M}(G)^*$ und durch die Vorschrift $\mu \mapsto \big(f \mapsto \int f\mu\big)$ eine Inklusion $\mathrm{int} : \mathrm{M}(G) \hookrightarrow \mathcal{S}(G)^*$ und mit diesen Vertikalen und der Transponierten der Fouriertransformation $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_{\bar{a}}$ zur Charakterpaarung $\bar{a} : \hat{G} \times G \to S^1$, $(\chi, g) \mapsto \chi(g)$ in der unteren Horizontalen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}(G) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\mathrm{int}"'] & \mathrm{L}^\infty(\hat{G}) \arrow[d, "\mathrm{int}"] \\
\mathcal{S}(G)^* \arrow[r, "\bar{\mathcal{F}}^\top"] & \mathcal{M}(\hat{G})^*
\end{tikzcd}$$

Es zeigt, daß unsere Fouriertransformation von komplexen Maßen nur das Maß Null zur Nullfunktion macht. Die behaupteten Injektivitäten in den Vertikalen zeigt man wie im Fall $G = \mathbb{R}^n$ in 13.3.3.12 folgende.

13.3.7.18 (**Verträglichkeit der Transformation von Maßen und L^2-Funktionen**). Gegeben eine Fouriergruppe G betrachten wir den Raum $\mathrm{L}^{\mathrm{loc}}_{\mathcal{S}}(G)$ aller meßbaren fast überall definierten Funktionen $f : G \dashrightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß ihr Produkt mit jeder Schwartzfunktion nach jedem Haarmaß integrierbar ist. Offensichtlich liegen für alle $p \in [1, \infty]$ alle L^p-Funktionen in Bezug auf ein und jedes Haarmaß in diesem Teilraum. Halten wir ein Haarmaß λ fest, so erhalten wir durch die Vorschrift $f \mapsto \big(g \mapsto \int fg\lambda\big)$ eine Inklusion $\mathrm{int}_\lambda : \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}_{\mathcal{S}}(G) \hookrightarrow \mathcal{S}(G)^*$. Mit

diesen Abbildungen erhalten wir nun kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L}^1(G;\lambda) \arrow[r, "\cdot\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{int}_\lambda"'] & \mathrm{M}(G) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\mathrm{int}"'] & \mathrm{L}^\infty(\hat{G}) \arrow[d, "\mathrm{int}"] \\
\mathcal{S}(G)^* \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathcal{S}(G)^* \arrow[r, "\bar{\mathcal{F}}^\top"] & \mathcal{M}(\hat{G})^*
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{L}^2(G;\lambda) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\mathrm{int}_\lambda"'] & \mathrm{L}^2(\hat{G};\hat{\lambda}) \arrow[d, "\mathrm{int}"] \\
\mathcal{S}(G)^* \arrow[r, "\bar{\mathcal{F}}^\top"] & \mathcal{M}(\hat{G})^*
\end{tikzcd}$$

mit derselben Abbildung $\bar{\mathcal{F}}^\top$ wie in 13.3.7.17 und der Fouriertransformation für L^2-Funktionen oben rechts. Man zeigt das wie im Fall von $\mathbb{R}^n$ beim Beweis von 13.3.3.9, ich führe das hier nicht mehr so genau aus. Es folgt wieder, daß die durch direktes Integrieren auf L^1-Funktionen erklärte Transformation und die durch stetige Fortsetzung vom Schwartzraum auf L^2-Funktionen erklärte Transformation auf dem Schnitt $\mathrm{L}^1(G;\lambda) \cap \mathrm{L}^2(G;\lambda)$ übereinstimmen. Ebenso folgt auch, daß uns für L^1-Funktionen f mit nach Haarmaßen integrierbarer Fouriertransformierten eine nochmalige Transformation ihres Produkts mit dem Plancherelmaß die ursprüngliche Funktion zurückgibt, in Formeln $\mathcal{F}(\mathcal{F}f\lambda)\hat{\lambda} = f$.

Vorschau 13.3.7.19. Sei G eine Fouriergruppe mit Haarmaß μ. Wie in 13.3.3.17 mag man wieder den Raum

$$\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}^*$$

aller **temperierten Distributionen** als den kleinsten Untervektorraum des vollen Dualraums $\mathcal{S}^*$ des Raums der Schwartzfunktionen erklären, der (1) alle Linearformen umfaßt, die die Gestalt $\varphi \mapsto \int f\varphi\mu$ haben für $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und betragsmäßig beschränkt durch ein Vielfaches eines Produkts von stetigen Gruppenhomomorphismen $G \to \mathbb{R}$, und der (2) stabil ist unter den Transponierten $\partial_\xi^\top : \mathcal{S}^* \to \mathcal{S}^*$ der partiellen Ableitungen $\partial_\xi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ nach Gruppenwegen $\xi : \mathbb{R} \to G$. Man überlegt sich ohne große Schwierigkeiten, daß die Transponierte der Fouriertransformation $\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^*$ einen Vektorraumisomorphismus

$$\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'$$

auf den temperierten Distributionen induziert und daß sich alle L^p-Funktionen f als temperierte Distributionen auffassen lassen. Darüberhinaus lassen sich auch alle endlichen Borelmaße μ als die temperierte Distributionen auffassen vermittels der immergleichen Vorschrift $\varphi \mapsto \int \varphi\mu$, und alle bisher betrachteten Varianten der Fouriertransformation können als Einschränkung unserer Transformation $\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'$ verstanden werden. Es sollte nun weiter so sein, daß es für Fouriergruppen G, H und temperierte Distributionen Λ auf G und Γ auf H genau eine temperierte Distribution $\Lambda \boxtimes \Gamma$ auf $G \times H$ gibt mit $(\Lambda \boxtimes \Gamma)(f \boxtimes g) = \Lambda(f)\Gamma(g)$ und daß die Fouriertransformation von temperierten Distributionen mit $\boxtimes$ verträglich ist. Das habe ich mir aber nicht so genau überlegt.

Beispiel 13.3.7.20. Zum Beispiel sollte die Dirac'sche δ-Distribution δ_1 auf S^1 der konstanten Funktion auf $\mathbb{Z}$ entsprechen, so daß wir sie formal als $\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n$ zu entwickeln hätten.

Ergänzung 13.3.7.21 (**Fouriertransformation von Halbdichten**). Ich will kurz erklären, wie man die Inversionsformel für quadratintegrierbare Funktionen von der Wahl Haar'scher Maße befreien kann. Gegeben eine Fouriergruppe G erklärt man dazu den Vektorraum $\mathcal{H}(G)$ der **Schwartz-Halbdichten auf** G, indem man ausgeht von der Menge aller Paare (f,λ) bestehend aus einer Schwartzfunktion $f \in \mathcal{S}(G)$ und einem Haarmaß λ, modulo der Äquivalenzrelation gegeben durch $(f, a\lambda) \sim (\sqrt{a}f, \lambda)$ für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Äquivalenzklasse von (f,λ) notieren wir $f\sqrt{\lambda}$ und die Äquivalenzklasse von $(1,\lambda)$ abkürzend $\sqrt{\lambda}$. Es ist klar, wie wir Schwartzhalbdichten mit Schwartzfunktionen zu multiplizieren haben, und daß für jedes Haarmaß λ das Multiplizieren mit $\sqrt{\lambda}$ eine Bijektion

$$(\cdot\sqrt{\lambda}) : \mathcal{S}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(G)$$

induziert. Weiter ist klar, daß es auf $\mathcal{H}(G)$ genau eine Struktur als $\mathbb{C}$-Vektorraum gibt, unter der alle diese Bijektionen Vektorraumisomorphismen werden. Schließlich ist auch klar, daß wir für jedes Haarmaß λ einen Vektorraumisomorphismus

$$(\cdot\sqrt{\lambda}) : \mathcal{H}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(G)$$

erklären können durch die Vorschrift, daß er nach Vorschalten mit dem zuvor erklärten Isomorphismus den offensichtlichen Isomorphismus $(\cdot\lambda) : \mathcal{S}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(G)$ liefert. Der Sinn dieser Konstruktion besteht nun darin, daß für eine exakte Charakterpaarung $p : G \times H \to S^1$ von Fouriergruppen und ein Haarmaß λ auf G mit zugehörigem Plancherelmaß $\hat{\lambda}$ auf H die Komposition

$$\mathcal{H}(G) \xrightarrow{\sqrt{\lambda}} \mathcal{M}(G) \xrightarrow{\mathcal{F}_p} \mathcal{S}(H) \xrightarrow{\sqrt{\hat{\lambda}}} \mathcal{H}(H)$$

von der Wahl von λ gar nicht mehr abhängt und daß die duale Charakterpaarung die inverse Abbildung liefert. Weiter können wir auf $\mathcal{H}(G)$ ein Skalarprodukt erklären durch die Vorschrift $\langle f\sqrt{\lambda}, g\sqrt{\lambda}\rangle := \int \bar{f}g\lambda$ für ein und jedes Haarmaß λ und unsere Fouriertransformation von Halbdichten wird dann ein Isomorphismus von Skalarprodukträumen. Die Vervollständigung des Skalarproduktraums $\mathcal{H}(G)$ zu einem Hilbertraum notieren wir $\mathrm{L}^2(G)$ und beachten, daß dieser Hilbertraum von keinerlei Wahlen mehr abhängt und daß die Fouriertransformation zu jeder exakten Charakterpaarung $p : G \times H \to S^1$ von Fouriergruppen einen vollständig kanonischen Hilbertraumisomorphismus $\mathcal{F}_{p,2} : \mathrm{L}^2(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2(H)$ mit Inversem $\mathcal{F}_{\bar{p},2}$ induziert. Die Elemente von $\mathrm{L}^2(G)$ nennen wir **quadratintegrierbare Halbdichten auf** G. Wir können also unser Diagramm aus 13.3.7.13 ergänzen zu einem

kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}(G) \arrow[r, "\mathcal{F}_p", "\sim"'] & \mathcal{S}(H) \arrow[dr, "\cdot\sqrt{\mu}", "\sim"'] & \\
\mathcal{H}(G) \arrow[ur, "\cdot\sqrt{\lambda}", "\sim"'] \arrow[r, hook] & \mathrm{L}^2(G) \arrow[r, leftrightarrow, shift left, "\mathcal{F}_{p,2}"] & \mathrm{L}^2(H) \arrow[l, shift left, "\mathcal{F}_{\bar{p},2}"] & \mathcal{H}(H) \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "\cdot\sqrt{\mu}", "\sim"'] \\
 & \mathcal{S}(G) \arrow[ul, "\cdot\sqrt{\lambda}", "\sim"'] & \mathcal{M}(H) \arrow[l, "\mathcal{F}_{\bar{p}}", "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

In diesem Diagramm sind alle Morphismen des äußeren Sechsecks Isomorphismen und einmal im Kreis herumgehen ist die Identität und zusätzlich hängen weder unsere Räume von glatten und quadratintegrierbaren Halbdichten noch die jeweils dazwischen induzierten Isomorphismen von der Wahl eines Haarmaßes λ mit zugehörigem Plancherelmaß μ ab.

Übungen

Übung 13.3.7.22 (**Koordinatenfreie Poisson'sche Summationsformel**). Gegeben seien eine Charakterpaarung $a : V \times \hat{V} \to S^1$ endlichdimensionaler reeller Vektorräume und $\Gamma \subset V$ ein Gitter alias das Gruppenerzeugnis einer Basis von V und $\lambda = \lambda_\Gamma$ das Haarmaß auf V, das dadurch normalisiert ist, daß für eine und jede Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V, die das Gitter Γ erzeugt, gilt $\lambda(\sum_{i=1}^n [0,1]v_i) = 1$. Sei weiter

$$\Gamma^\wedge := \{\hat{v} \in \hat{V} \mid \langle\!\langle \gamma, \hat{v} \rangle\!\rangle_a = 1 \ \forall \gamma \in \Gamma\}$$

das zu Γ „duale Gitter". Ist dann $f \in \mathcal{S}(V)$ eine Schwartzfunktion auf V und $\hat{f} := \mathcal{F}_a(f\lambda)$ die Fouriertransformierte des Maßes $f\lambda$, so gilt

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) = \sum_{\kappa \in \Gamma^\wedge} \hat{f}(\kappa)$$

13.3.8 Translationsinvariante Teilräume*

13.3.8.1. In diesem Abschnitt wird erklärt, wie man mithilfe der Fouriertheorie die abgeschlossenen translationsinvarianten Teilräume des Raums der quadratintegrierbaren Funktionen auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum bestimmen kann. Wir werden das Resultat nicht benötigen, es wird später durch die Theorie der unitären Darstellungen von Vektorräumen überholt. Jedoch mag es für manche Vorlesung einen netten Abschluß liefern.

Definition 13.3.8.2. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Ein Teilraum $M \subset \mathrm{L}^2(V)$ heißt **translationsinvariant**, wenn er für alle $a \in V$ invariant

ist unter der Translation $\tau_a : \mathrm{L}^2(V) \to \mathrm{L}^2(V)$ gegeben durch $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$, wenn also in Formeln gilt

$$f \in M \;\Rightarrow\; \tau_a f \in M \quad \forall\, a \in V$$

Beispiel 13.3.8.3. Für $E \subset \hat{V}$ Borel-meßbar ist das Bild von $\chi_E \mathrm{L}^2(\hat{V}) = \mathrm{L}^2(E)$ unter der Fouriertransformation nach 13.3.5.13 ein translationsinvarianter Teilraum von $\mathrm{L}^2(V)$, und nach **??** ist dieser Teilraum auch abgeschlossen. Wir zeigen nun, daß diese Konstruktion bereits alle Beispiele für abgeschlossene translationsinvariante Teilräume liefert.

Satz 13.3.8.4 (**Translationsinvariante Teilräume in** $\mathrm{L}^2(V)$)**.** *Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. So gilt:*

1. *Jeder translationsinvariante abgeschlossene Teilraum $M \subset \mathrm{L}^2(V)$ ist von der Form $M = \mathrm{L}^2(E)^\wedge$ für eine Borelmenge $E \subset \hat{V}$.*
2. *Gegeben eine weitere Borelmenge $F \subset \hat{V}$ gilt $\mathrm{L}^2(E)^\wedge = \mathrm{L}^2(F)^\wedge$ genau dann, wenn $E \backslash F$ und $F \backslash E$ in Bezug auf ein und jedes Haarmaß Nullmengen sind.*

13.3.8.5. Im Fall einer Veränderlichen mag man die Aussage dieses Satzes dahingegehend zusammenfassen, daß die translationsinvarianten abgeschlossenen Teilräume durch die Vorgabe gewisser „erlaubter Frequenzanteile“ beschrieben werden können, also umgangssprachlich durch die Angabe des „erlaubten Tonumfangs“.

Beweis. Die zweite Behauptung ist klar. Für die Erste wählen wir ein Haarmaß λ und bemerken, daß ein Teilraum von $\mathrm{L}^2(V;\lambda)$ nach 13.3.5.13 invariant ist unter allen Translationen genau dann, wenn sein Bild unter der Fouriertransformation invariant ist unter allen Multiplikationen mit Charakteren. Damit folgt unser Satz aus der anschließenden Proposition 13.3.8.6. □

Proposition 13.3.8.6. *Seien W ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und μ ein Borelmaß auf W. So hat jeder unter der Multiplikation mit allen unitären Charakteren von W invariante abgeschlossene Teilraum $M \subset \mathrm{L}^2(W;\mu)$ die Gestalt $M = \mathrm{L}^2(E)$ für eine Borelmenge in $E \subset W$.*

Beweis. Sei $P : \mathrm{L}^2(W;\mu) \to M$ der orthogonale Projektor. Natürlich gilt

$$\langle Pf, g\rangle = \langle Pf, Pg\rangle = \langle f, Pg\rangle$$

für alle $f, g \in \mathrm{L}^2(W;\mu)$. Für jeden Charakter $\chi \in \hat{W}$ gilt offensichtlich $P(\chi f) = \chi(Pf)$. Wir folgern $\langle Pf, \chi g\rangle = \langle f, \chi Pg\rangle$ für alle $\chi \in \hat{W}$ oder ausgeschrieben

$$\int \overline{Pf} \cdot \chi g = \int \bar{f} \cdot \chi Pg$$

Nach 13.3.3.15 haben aber zwei kompexe Maße nur dann dieselbe Fouriertransformierte, wenn sie übereinstimmen. Damit folgt die Gleichheit von Maßen

$$(\overline{Pf})g\mu = \bar{f}(Pg)\mu$$

Wir wählen nun $g \in \mathcal{L}^2$ Borelmeßbar und quadratintegrierbar mit $g(y) > 0$ für alle $y \in W$ und setzen $\varphi(y) = (Pg)(y)/g(y)$. Dann folgt aus unserer Gleichheit von Maßen mit 13.3.2.34 die Gleichheit $(Pf)(y) = \varphi(y)f(y)$ für fast alle y. Da aber gilt $P^2 = P$, nimmt $\varphi(y)$ fast überall nur die Werte 0 und 1 an. Also gibt es eine Borelmenge $E \subset W$ mit $Pf = [E]f$. Nun gilt aber $f = [E]f \Leftrightarrow f \in \mathrm{L}^2(E)$ und es folgt $M = \mathrm{L}^2(E)$. □

13.3.9 Faltung von Maßen und Funktionen*

Definition 13.3.9.1 (Faltung von Maßen mit stetigen Funktionen). Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\mu \in \mathrm{M}(V)$ ein komplexes Maß auf V und $f : V \to \mathbb{C}$ stetig und beschränkt, so erklären wir eine weitere stetige beschränkte Funktion $\mu * f$ auf V durch die Vorschrift

$$(\mu * f)(x) := \int f(x-y)\ \mu\langle y\rangle$$

Es reicht hier, die Stetigkeit der Funktion $\mu * f$ im Fall positiver endlicher Maße μ zu zeigen, in dem sie leicht aus dem Satz über dominierte Konvergenz folgt.

Beispiel 13.3.9.2 (**Faltung mit Diracmaßen**). Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $E \subset V$ eine endliche Teilmenge und $\mu = \sum_{y\in E} a_y\delta_y$ eine Linearkombination von Diracmaßen mit komplexen Koeffizienten, so haben wir

$$\mu * f = \sum_{y\in E} a_y(\tau_y f)$$

für $\tau_y f$ die um y verschobene Funktion gegeben durch $(\tau_y f)(x) = f(x-y)$. Ähnliches gilt allgemeiner für abzählbare Linearkominationen von Diracmaßen mit einer absolut konvergenten Familie von Koeffizienten.

Lemma 13.3.9.3 (Faltung von Maßen mit L^p-Funktionen). *Seien V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\mu \in \mathrm{M}(V;[0,\infty))$ ein endliches Maß auf V und $f : V \to \mathbb{C}$ eine L^p-Funktion in Bezug auf ein Haar-Maß λ für $1 \le p < \infty$. So ist die Funktion $y \mapsto f(x-y)$ für alle $x \in V$ außerhalb einer λ-Nullmenge integrierbar in Bezug auf μ und die fast überall definierte Funktion*

$$x \mapsto \int f(x-y)\ \mu\langle y\rangle$$

ist wieder eine L^p-Funktion. Sie heißt die **Faltung** $(\mu * f)(x)$ **des Maßes** μ **mit der Funktion** f *und erfüllt die Abschätzung $\|\mu * f\|_p \le \mu(V)\|f\|_p$.*

13.3.9.4. Wir erklären die Faltung von beliebigen komplexen Maßen mit L^p-Funktionen $\mathrm{M}(V) \times \mathrm{L}^p(V) \to \mathrm{L}^p(V)$, $(\mu, f) \mapsto \mu * f$ dann durch lineare Fortsetzung. Im Rückblick wird sich die Konvolution von Maßen mit stetigen Funktionen oder auch mit L^p-Funktionen als Spezialfall der allgemeinen Konstruktion einer „Operation von Maßen auf Darstellungen“ erweisen, wie sie in 13.4.10.3 in einem anderen Spezialfall diskutiert wird.

Beweis. Der Satz von Fubini zeigt, daß für jedes Haar-Maß λ das Produktmaß $\lambda \boxtimes \mu$ unter der Scherung $S : V \times V \to V \times V$, $(x, y) \mapsto (x - y, y)$ invariant ist, in Formeln $S : \lambda \boxtimes \mu \rightsquigarrow \lambda \boxtimes \mu$. Wir behandeln nun zunächst den Fall $p = 1$. Für $f \in \mathrm{L}^1(V; \lambda)$ bilden wir die Funktion $(f \circ \mathrm{pr}_1) : (x, y) \mapsto f(x)$ und nach Fubini gilt

$$(f \circ \mathrm{pr}_1) \in \mathrm{L}^1(V \times V; \lambda \boxtimes \mu)$$

Daraus folgt, daß auch $(f \circ \mathrm{pr}_1 \circ S) : (x, y) \mapsto f(x - y)$ integrierbar ist unter dem Produktmaß, und der Satz von Fubini zeigt dann die Behauptung. Im Fall von beliebigem p können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit f nichtnegativ annehmen. Dann können wir unsere bis hier gewonnenen Erkenntnisse auf die Funktion f^p anwenden und erhalten so, daß $y \mapsto f(x - y)^p$ für alle x außerhalb einer λ-Nullmenge nach $\mu\langle y\rangle$ integriert werden kann. Bemerkung 13.2.3.15 aus dem Kontext der Hölderungleichung angewandt auf die Funktion $h_x(y) = f(x - y)$ aus $\mathrm{L}^p(V; \mu)$ und die konstante Funktion 1 aus $\mathrm{L}^q(V; \mu)$ zeigt dann, daß für alle x außerhalb derselben λ-Nullmenge die Funktion h_x nach $\mu\langle y\rangle$ integrierbar ist. Bezeichnen wir dies Integral wie im Satz mit $(\mu * f)(x)$, so zeigt die Hölderungleichung 13.2.3.15 weiter

$$|(\mu * f)(x)| \le \|h_x\|_1 \le \|1\|_q \|h_x\|_p$$

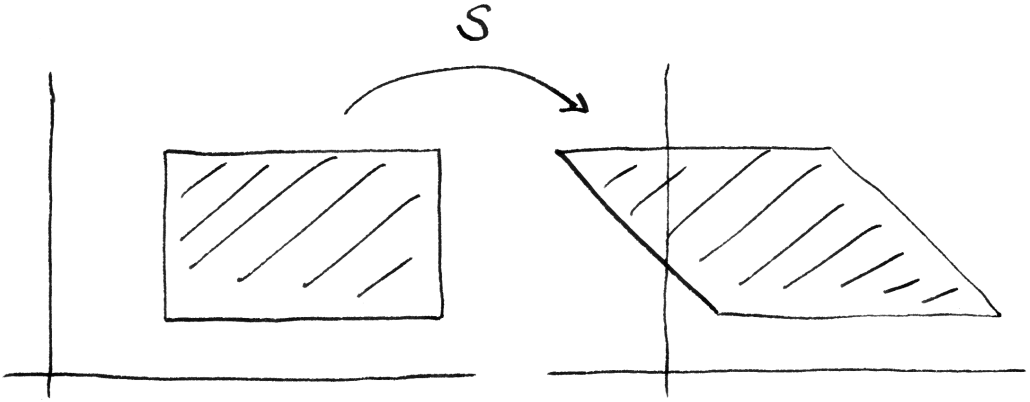
für alle x außerhalb unserer λ-Nullmenge. Schreiben wir andererseits f als punktweisen Grenzwert einer monoton wachsenden Folge nichtnegativer integrierbarer Funktionen, so zeigt der bereits behandelte Fall $p = 1$ auch, daß $x \mapsto (\mu * f)(x)$ als fast überall definierte Funktion meßbar sein muß. Bilden wir nun auf beiden Seiten die p-te Potenz und integrieren über $\lambda\langle x\rangle$, so ergibt sich wegen $\|1\|_q = \mu(V)^{1/q}$ sofort

$$\begin{aligned} \int |(\mu * f)(x)|^p \, \lambda\langle x\rangle &\le \mu(V)^{p/q} \left(\int |f(x - y)|^p \, (\lambda \boxtimes \mu)\langle x, y\rangle \right) \\ &= \mu(V)^{1+p/q} \|f\|_p^p = \mu(V)^p \|f\|_p^p \end{aligned}$$

und damit ist $\mu * f$ wieder eine L^p-Funktion mit $\|\mu * f\|_p \le \mu(V) \|f\|_p$. □

13.3.9.5 (**Faltung von integrierbaren Funktionen**). Sei λ ein Haar-Maß auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V. Gegeben integrierbare Funktionen $f, g \in \mathrm{L}^1(V; \lambda)$ erklären wir ihre **Faltung**, eine weitere integrierbare Funktion, durch die Vorschrift

$$f *_\lambda g := (f\lambda) * g$$



Ein Quader Q und sein Bild $S(Q)$ unter der Scherung $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $(x, y) \mapsto (x - y, y)$. Berechnen wir die Maße unter $\lambda \boxtimes \mu$ für λ ein Haarmaß und μ ein beliebiges σ-endliches Maß, indem wir erst horizontal nach x und dann vertikal nach y integrieren, so erkennen wir unmittelbar, daß Q und $S(Q)$ dasselbe Maß haben.

oder explizit $(f *_\lambda g)(x) = \int g(x-y)f(y)\lambda\langle y\rangle$. Die durch Multiplikation mit dem Maß λ nach 13.3.2.34 induzierte Einbettung $\mathrm{L}^1(V;\lambda) \hookrightarrow \mathrm{M}(V)$ ist nach 13.3.9.7 verträglich mit den jeweiligen Konvolutionen, in Formeln

$$(f *_\lambda g)\lambda = (f\lambda) * (g\lambda)$$

Insbesondere ist also auch die Faltung $*_\lambda$ von integrierbaren Funktionen assoziativ und kommutativ. Unsere mathematisch standardisierte Fouriertransformation aus 13.3.1.2 verträgt sich jedoch nicht so gut mit der Faltung von Funktionen wie die abstrakte Fouriertransformation mit der Faltung von Maßen, genauer gilt für integrierbare Funktionen f, g auf $\mathbb{R}^n$ und Faltung in Bezug auf das Lebesgue-Maß die Formel

$$(f * g)^\wedge = (2\pi)^{n/2}(f^\wedge \cdot g^\wedge)$$

Der Vorfaktor rührt daher, daß wir ja die mathematisch standardisierte Fouriertransformierte einer Funktion $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n; \mathrm{d}^n x)$ erklärt hatten als die Fouriertransformierte des Maßes $(2\pi)^{-n/2} f \,\mathrm{d}^n x$. In diesem Zusammenhang erweist sich die in 13.3.1.3 erwähnte stochastisch standardisierte Fouriertransformation als günstiger, die jedoch hinwiederum in 13.3.1.5 Komplikationen verursacht.

Übungen

Übung 13.3.9.6. Sind V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\mu, \nu \in \mathrm{M}(V)$ komplexe Maße auf V und $f : V \to \mathbb{C}$ stetig und beschränkt, so gilt

$$\mu * (\nu * f) = (\mu * \nu) * f$$

Übung 13.3.9.7. Gegeben ein Haarmaß λ auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und $f \in \mathrm{L}^1(V;\lambda)$ zeige man für jedes weitere komplexe Maß $\mu \in \mathrm{M}(V)$ die Gleichheit von Maßen $(\mu * f)\lambda = \mu * (f\lambda)$.

Übung 13.3.9.8. Für die für $v > 0$ um den Faktor $\sqrt{v}$ verzerrten und auf Integral Eins normierten Gauss'schen Glockenkurven $G_v(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp(-x^2/2v)$ wird die Faltung in Bezug auf das Lebesguemaß gegeben durch

$$G_u * G_v = G_{u+v}$$

Übung 13.3.9.9. Man prüfe für die Standard-Normalverteilung $\mu = \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x/\sqrt{2\pi}$ die Formel $\int x^2\mu\langle x\rangle = 1$. Weiter prüfe man für das G_v aus 13.3.9.8 auch die Formel $\int x^2 G_v(x)\,\mathrm{d}x = v$. In der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie hat also eine reelle Zufallsvariable mit der Verteilung $G_v(x)\,\mathrm{d}x$ Varianz v und Standardabweichung $\sqrt{v}$.

13.3.10 Topologie der Charaktergruppe*

13.3.10.1. In diesem Abschnitt soll besprochen werden, warum und inwiefern es zu jeder Fouriergruppe im wesentlichen nur genau eine Charakterpaarung gibt.

Definition 13.3.10.2. Gegeben topologische Räume X, Y bezeichne $\mathrm{Top}(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y. Gegeben Teilmengen $K \subset X$ und $U \subset Y$ bezeichne

$$\mathcal{O}(K, U) \subset \mathrm{Top}(X, Y)$$

die Menge aller stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ mit $f(K) \subset U$. Die auf $\mathrm{Top}(X, Y)$ von den Mengen $\mathcal{O}(K, U)$ für $K \subset X$ kompakt und $U \Subset Y$ offen erzeugte Topologie heißt die **kompakt-offene Topologie**. Wir denken uns Räume stetiger Abbildungen im Zweifelsfall stets mit dieser Topologie versehen und verwenden für den so entstehenden topologischen Raum die Notation

$$\mathcal{C}(X, Y)$$

Lemma 13.3.10.3 (Funktorialitäten der kompaktoffenen Topologie). *Gegeben stetige Abbildungen $f : X' \to X$ und $g : Y \to Y'$ sind auch die induzierten Abbildungen $(\circ f) : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(X', Y)$ und $(g\circ) : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(X, Y')$ stetig.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus $(\circ f)^{-1}\mathcal{O}(K', U) = \mathcal{O}(f(K'), U)$, da das Bild $f(K')$ eines Kompaktums K' nach **??** wieder kompakt ist. Die zweite Behauptung folgt aus $(g\circ)^{-1}\mathcal{O}(K, U') = \mathcal{O}(K, g^{-1}(U'))$, da das Urbild $g^{-1}(U')$ einer offenen Menge U' wieder offen ist. □

Satz 13.3.10.4 (Exponentialgesetz). *Gegeben X, Y, Z topologische Räume und $f : X \times Y \to Z$ eine stetige Abbildung ist auch die induzierte Abbildung $F : X \to \mathcal{C}(Y, Z)$ stetig. Ist Y lokal kompakt, so erhalten wir auf diese Weise eine Bijektion*

$$\mathrm{Top}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$$

Beweis. Gegeben $K \subset Y$ kompakt und $W \Subset Z$ offen und $x \in X$ mit $F(x) \in \mathcal{O}(K, W)$ gilt es, eine Umgebung $U \Subset X$ von x zu finden mit $F(U) \subset \mathcal{O}(K, W)$, denn dann ist $F^{-1}(\mathcal{O}(K, W))$ offen und damit F nach 13.1.4.14 stetig. Nun sagen unsere Annahmen $f(x \times K) \subset W$. Für jedes $y \in K$ gibt es nach der Definition der Produkttopologie eine Umgebung $U_y \Subset X$ von x und eine Umgebung $V_y \Subset Y$ von y mit $f(U_y \times V_y) \subset W$. Endlich viele der V_y überdecken das Kompaktum K, sagen wir die V_y für $y \in E$ mit $E \subset K$ endlich. Dann ist $U := \bigcap_{y \in E} U_y$ die gesuchte Umgebung U von x. Sei nun umgekehrt $F : X \to \mathcal{C}(Y, Z)$ stetig und sei $f : X \times Y \to Z$ die induzierte Abbildung. Es gilt zu zeigen, daß f

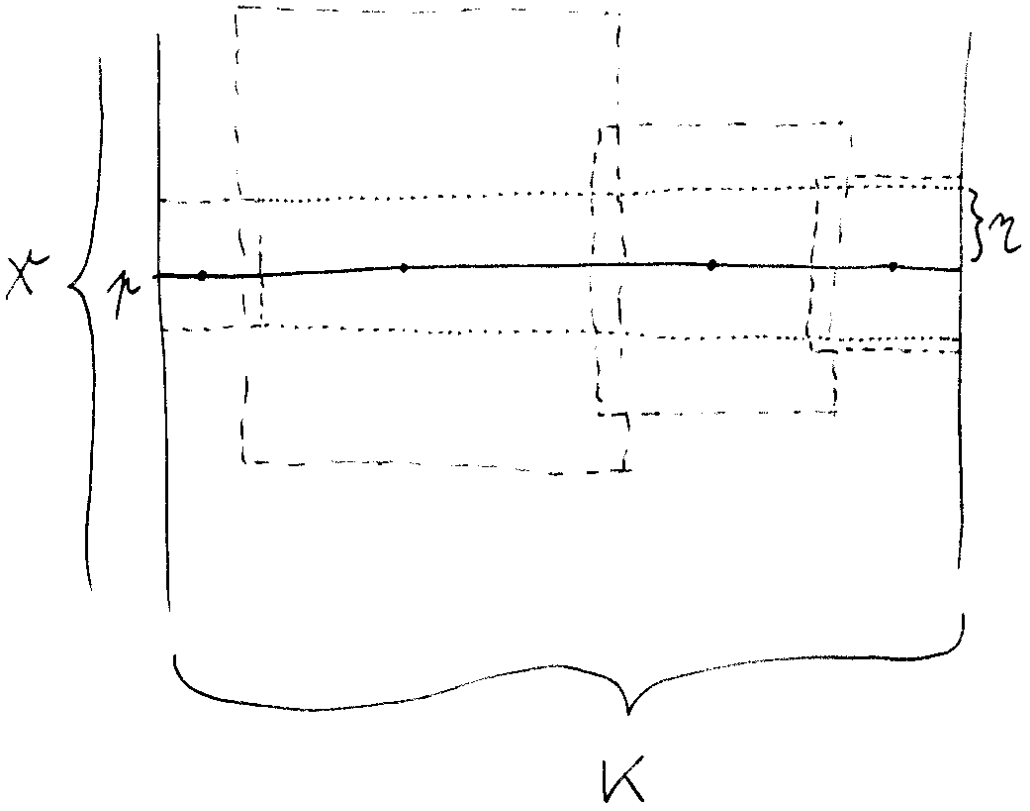


Illustration zum Beweis von Satz 13.3.10.4. Das Bild kommt von dem Beweis des Spezialfalls 11.2.5.4. Das p im Bild heißt in unserem Beweis x, das η im Bild ist so gewählt, daß der η-Ball um x alias p in V enthalten wäre.

stetig ist an jeder Stelle $(x, y) \in X \times Y$. Sei also $W \Subset Z$ eine offene Umgebung von $f(x, y) = (F(x))(y)$. Nach Annahme ist $F(x) : Y \to Z$ stetig und Y lokal kompakt, folglich gibt es eine kompakte Umgebung K von y mit $(F(x))(K) \subset W$ alias $F(x) \in \mathcal{O}(K, W)$. Da nun auch die Abbildung $F : X \to \mathcal{C}(Y, Z)$ stetig ist bei x, gibt es dann auch eine Umgebung $U \subset X$ von x mit $F(U) \subset \mathcal{O}(K, W)$, also mit $f(U \times K) \subset W$. Damit ist $U \times K$ die gesuchte Umgebung von (x, y), die unter f nach W abgebildet wird. □

Korollar 13.3.10.5. *Gegeben topologische Räume X, Y, Z mit X lokal kompakt liefert die offensichtliche stetige Abbildung einen Homöomorphismus*

$$\mathcal{C}(X, Y \times Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Z)$$

Vorschau 13.3.10.6. In kategorieller Sprache ausgedrückt besagt unser Korollar, daß der Funktor $\mathcal{C}(X, \ ) : \mathrm{Top} \to \mathrm{Top}$ verträglich ist mit Produkten.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß für jeden topologischen Raum T unsere stetige Abbildung eine Bijektion

$$\mathrm{Top}\big(T, \mathcal{C}(X, Y \times Z)\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}\big(T, \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Z)\big)$$

induziert. Mit dem Exponentialgesetz 13.3.10.4 folgt das, wenn wir zeigen, daß die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\mathrm{Top}(T \times X, Y \times Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}(T \times X, Y) \times \mathrm{Top}(T \times X, Z)$$

induziert. Das aber ist klar. □

Korollar* 13.3.10.7 (Starkes Exponentialgesetz). *Gegeben X und Y lokal kompakt ist die Bijektion des Exponentialgesetzes ein Homöomorphismus*

$$\mathcal{C}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß unsere Bijektion für jeden topologischen Raum T eine Bijektion

$$\mathrm{Top}\big(T, \mathcal{C}(X \times Y, Z)\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}\big(T, \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))\big)$$

induziert. Da Produkte von Kompakta nach Übung 13.1.4.47 kompakt sind und da sich die induzierte Topologie nach 13.2.7.15 mit der Produkttopologie verträgt, ist auch $X \times Y$ lokal kompakt. Nach dem Exponentialgesetz 13.3.10.4 können wir also beide Seiten in verträglicher Weise identifizieren mit $\mathrm{Top}(T \times X \times Y, Z)$. □

Korollar 13.3.10.8. *Die Schmelzkategorie der Fouriergruppen hat internes Hom.*

Beweis. Seien B, Z Fouriergruppen. Wir versehen die Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen $\mathrm{AbTop}(B, Z) \subset \mathcal{C}(B, Z)$ mit der kompaktoffenen Topologie und erhalten nach 13.3.10.9 eine topologische Gruppe $B \Rightarrow^? Z$, von der wir zeigen wollen, daß sie das fragliche interne Hom realisiert. Gegeben weitere Fouriergruppen $A_1, \ldots, A_s$ induziert die Bijektion

$$\mathrm{Top}(A_1 \times \ldots \times A_s, \mathcal{C}(B, Z)) \tilde{\to} \mathrm{Top}(A_1 \times \ldots \times A_s \times B, Z)$$

aus dem Exponentialgesetz 13.3.10.4 eine Bijektion

$$\mathrm{AbTop}(A_1 \times \ldots \times A_s, B \Rightarrow^? Z) \tilde{\to} \mathrm{AbTop}(A_1 \times \ldots \times A_s \times B, Z)$$

Wir sind also fertig, sobald wir zeigen, daß die abelsche topologische Gruppe $B \Rightarrow^? Z$ auch selbst wieder eine Fouriergruppe ist. Dazu müssen wir nur unsere Fälle $\mathbb{R}, S^1, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ jeweils für B und Z durchgehen und in allen sechzehn Fällen prüfen, daß es paßt. □

Lemma 13.3.10.9. *Gegeben ein lokal kompakter topologischer Raum X und eine topologische Gruppe S ist auch $\mathcal{C}(X, S)$ mit seiner kompaktoffenen Topologie eine topologische Gruppe.*

Beweis. Die Verknüpfung von $\mathcal{C}(X, S)$ ist stetig als die Komposition

$$\mathcal{C}(X, S) \times \mathcal{C}(X, S) \tilde{\to} \mathcal{C}(X, S \times S) \to \mathcal{C}(X, S)$$

unserer Produktverträglichkeit 13.3.10.5 mit dem Nachschalten der stetigen Verknüpfung $S \times S \to S$. Die Inversenbildung ist stetig als das Nachschalten der Inversenbildung in S. □

Beispiel 13.3.10.10 (**Topologie der Charaktergruppe**). Gegeben eine lokal kompakte topologische Gruppe G wird ihre Charaktergruppe

$$\hat{G} = \mathfrak{X}(G) \subset \mathcal{C}(G, S^1)$$

mit der von der kompaktoffenen Topologie induzierten Topologie als Untergruppe einer topologischen Gruppe nach Übung 13.2.7.28 selbst eine topologische Gruppe. Wir denken uns die Charaktergruppe einer lokal kompakten topologischen Gruppe von nun an stets mit dieser Topologie versehen. Jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ in eine weitere lokal kompakte topologische Gruppe induziert nach 13.3.10.3 durch Vorschalten einen stetigen Gruppenhomomorphismus $\hat{\varphi} : \hat{H} \to \hat{G}$ alias $\mathfrak{X}(\varphi) : \mathfrak{X}(H) \to \mathfrak{X}(G)$ in die Gegenrichtung auf den Charaktergruppen.

Beispiel 13.3.10.11 (**Charaktergruppe von $\mathbb{R}$**). Die durch $(x, y) \mapsto \exp(\mathrm{i}xy)$ gegebene Charakterpaarung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1$ induziert einen Homöomorphismus

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathbb{R})$$

In der Tat ist diese Abbildung bijektiv aufgrund unserer Beschreibung 13.2.7.7 der Einparameteruntergruppen der Kreisgruppe. Sie ist stetig nach dem schwachen Exponentialgesetz 13.3.10.4, da die ursprüngliche Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1$ stetig war. Schließlich ist das Bild des offenen Intervalls $(-a, a)$ die offene Menge $\mathcal{O}([-\pi/2a, \pi/2a], (\mathrm{Re}(z) > 0))$ aller Abbildungen, die besagtes Kompaktum in die offene Halbebene $\{z \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ abbilden. Durch Verschieben sehen wir, daß alle offenen Intervalle $c + (-a, a) = (c - a, c + a)$ auf offene Mengen abgebildet werden. Damit ist unsere Abbildung auch offen.

Beispiel 13.3.10.12 (**Charaktergruppe von S^1**). Ganz allgemein ist die Topologie auf der Charaktergruppe jeder kompakten Hausdorffgruppe K, die ja stets lokal kompakt sein muß nach 13.1.10.7, die diskrete Topologie. In der Tat besteht die offene Teilmenge $\mathfrak{X}(K) \cap \mathcal{O}(K, (\mathrm{Re}(z) > 0))$ nur aus dem neutralen Element, denn unsere Halbebene umfaßt keine nichttriviale Untergruppe von S^1. Die Charakterpaarung $S^1 \times \mathbb{Z} \to S^1$ gegeben durch $(z, n) \mapsto z^n$ liefert mithin einen Homöomorphismus

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(S^1)$$

Beispiel 13.3.10.13 (**Charaktergruppe von $\mathbb{Z}$**). Die durch $(z, n) \mapsto z^n$ gegebene Charakterpaarung $S^1 \times \mathbb{Z} \to S^1$ liefert einen Homöomorphismus

$$S^1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathbb{Z})$$

Die Stetigkeit ist wieder klar. Andererseits ist $\mathfrak{X}(\mathbb{Z})$ Hausdorff, ja $\mathcal{C}(X, Y)$ ist für Y Hausdorff offensichtlich stets auch Hausdorff. Unsere stetige Abbildung $S^1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathbb{Z})$ bildet nun Kompakta auf Kompakta ab und damit auch abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen und ist folglich ein Homöomorphismus.

Beispiel 13.3.10.14 (**Charaktergruppen endlicher Gruppen**). Die Charaktergruppe einer endlichen Gruppe ist diskret als Charaktergruppe einer kompakten Hausdorffgruppe, vergleiche 13.3.10.12, und ist offensichtlich endlich, da jedes Element endliche Ordnung hat und unter einem Gruppenhomomorphismus nach S^1 nur auf die endlich vielen entsprechenden Einheitswurzeln abgebildet werden kann.

Lemma 13.3.10.15 (**Produktverträglichkeit der Charaktergruppe**). *Gegeben lokal kompakte Hausdorffgruppen G, H ist die vom Rückzug längs der Einbettungen $\mathrm{in}_G : G \to G \times H, g \mapsto (g, 1)$ und $\mathrm{in}_H : H \to G \times H, h \mapsto (1, h)$ induzierte Abbildung ein Homöomorphismus*

$$(\mathfrak{X}(\mathrm{in}_G), \mathfrak{X}(\mathrm{in}_H)) : \mathfrak{X}(G \times H) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(H)$$

Beweis. Sie haben bereits in 13.2.7.31 geprüft, daß diese Abbildung bijektiv ist. Die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit von $\mathfrak{X}(\mathrm{in}_G)$ und $\mathfrak{X}(\mathrm{in}_H)$. Andererseits betrachten wir die stetigen Abbildungen $\mathfrak{X}(\mathrm{pr}_G) : \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(G \times H)$ und $\mathfrak{X}(\mathrm{pr}_H) : \mathfrak{X}(H) \to \mathfrak{X}(G \times H)$. Die Abbildung

$$(+) \circ (\mathfrak{X}(\mathrm{pr}_G) \times \mathfrak{X}(\mathrm{pr}_H)) : \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(H) \to \mathfrak{X}(G \times H)$$

ist dann stetig als Verknüpfung stetiger Abbildungen. Man sieht aber leicht, daß sie zur Abbildung aus unserem Lemma invers ist. □

Satz 13.3.10.16 (Pontrjagin-Dualität für Fouriergruppen). *Gegeben eine Fouriergruppe G ist auch ihre Charaktergruppe $\hat{G} = \mathfrak{X}(G)$ eine Fouriergruppe, das Auswerten induziert eine Charakterpaarung $a : G \times \mathfrak{X}(G) \to S^1$ und die zugehörige Abbildung ist ein Isomorphismus von topologischen Gruppen*

$$G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(G))$$

Beweis. Für G die reelle Zahlengerade, die Kreisgruppe oder eine diskrete zyklische Gruppe hatten wir das schon in den vorangehenden Beispielen gesehen. Der Fall einer beliebigen Fouriergruppe folgt dann aus der Produktverträglichkeit der Charaktergruppe 13.3.10.15. □

Vorschau 13.3.10.17. Der vorhergehende Satz gilt allgemeiner für lokal kompakte abelsche Hausdorffgruppen an Stelle unserer Fouriergruppen, aber die Beweise werden dann mühsamer.

Satz 13.3.10.18 (Eindeutigkeit von Charakterpaarungen). *Ist $G \times X \to S^1$ eine Charakterpaarung von Fouriergruppen, so ist die davon induzierte Bijektion ein Homöomorphismus $X \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G)$.*

Beweis. Ist $G \times X \to S^1$ eine Charakterpaarung von Fouriergruppen, so folgt die Stetigkeit der induzierten Bijektion $X \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G)$ aus dem schwachen Exponentialgesetz 13.3.10.4. Als stetiger bijektiver Homomorphismus von Fouriergruppen muß unsere Abbildung dann nach dem anschließenden Lemma 13.3.10.19 ein Homöomorphismus sein. □

Lemma 13.3.10.19. *Jeder stetige bijektive Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von Fouriergruppen ist bereits ein Homöomorphismus.*

13.3.10.20. Dieses Lemma ist für lokal kompakte Hausdorffgruppen nicht mehr richtig. Zum Beispiel ist der stetige Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R}^\delta \to \mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie nach $\mathbb{R}$ mit seiner üblichen Topologie kein Homöomorphismus.

Beweis. Jeder stetige Homomorphismus bildet die Zusammenhangskomponente der Eins alias die **Einskomponente** $G^\circ \subset G$ in die Einskomponente $H^\circ \subset H$ ab. Diese Einskomponenten sind offene Untergruppen und isomorph zu topologischen Gruppen der Gestalt $\mathbb{R}^a \times (S^1)^b$. Wir finden nach dem, was wir schon wissen, eine Ergänzung der von φ induzierten Abbildung $\varphi^\circ : G^\circ \to H^\circ$ zu einem kommutativen Diagramm von stetigen Gruppenhomomorphismen

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathbb{R}^n \arrow[d, two heads] \\ G^\circ \arrow[r, "\varphi^\circ"] & H^\circ \end{tikzcd}$$

mit offenen Surjektionen mit abzählbarem Kern in den Vertikalen und einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung als oberer Horizontale. Ist φ injektiv, so muß diese $\mathbb{R}$-lineare Abbildung abzählbaren Kern haben, also injektiv sein. Ist φ surjektiv, so muß $H^\circ/\varphi^\circ(G^\circ)$ abzählbar sein, da G/G° für eine Fouriergruppe G stets abzählbar ist. Also muß unsere $\mathbb{R}$-lineare Abbildung dann surjektiv sein. Ist φ bijektiv, so muß sie mithin bijektiv und insbesondere offen sein. Dann aber ist auch $\varphi : G^\circ \to H^\circ$ und schließlich $\varphi : G \to H$ selbst offen, also ein Homöomorphismus. $\square$

Übungen

Übung 13.3.10.21 (**Nichtunitäre Charaktergruppe**). Gegeben eine lokal kompakte Hausdorffgruppe G erklären wir ihre **nichtunitäre Charaktergruppe** als die Gruppe

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{nu}}(G) := \mathrm{GrpTop}(G, \mathbb{C}^\times)$$

aller stetigen Gruppenhomomorphismen nach $\mathbb{C}^\times$. Man zeige, daß $\mathfrak{X}_{\mathrm{nu}}(G) \subset \mathcal{C}(G, \mathbb{C}^\times)$ mit der von der kompaktoffenen Topologie induzierten Topologie eine topologische Gruppe ist und daß jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ durch Vorschalten einen stetigen Gruppenhomomorphismus in die Gegenrichtung $\hat{\varphi} : \mathfrak{X}_{\mathrm{nu}}(H) \to \mathfrak{X}_{\mathrm{nu}}(G)$ induziert.

Übung 13.3.10.22 (**Nichtunitäre Charaktergruppe von $\mathbb{R}$**). Die Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ gegeben durch $(x, y) \mapsto \exp(\mathrm{i}xy)$ induziert einen Homöomorphismus

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}_{\mathrm{nu}}(\mathbb{R})$$

13.4 Spektraltheorie in Hilberträumen*

13.4.1 Unitäre Darstellungen von $\mathbb{R}$

Definition 13.4.1.1. Die unitären Automorphismen eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ bilden eine Gruppe $\mathrm{U}(\mathcal{H})$. Eine **unitäre Darstellung von** $\mathbb{R}$ ist ein Paar $(\mathcal{H}, \rho)$ bestehend aus einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und einem Gruppenhomomorphismus $\rho : \mathbb{R} \to \mathrm{U}(\mathcal{H})$ derart, daß die zugehörige Operation $\mathbb{R} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $(t, v) \mapsto (\rho(t))(v)$ stetig ist für die Produktmetrik auf $\mathbb{R} \times \mathcal{H}$. Gleichbedeutend reden wir auch von einer **unitären Operation** von $\mathbb{R}$ auf $\mathcal{H}$.

13.4.1.2. In Formeln fordern wir von unserer Abbildung ρ also

$$\rho(s + t) = \rho(s) \circ \rho(t) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Unitäre Darstellungen von $\mathbb{R}$ sind in der Quantenmechanik von grundlegender Bedeutung, da die zeitliche Entwicklung jedes quantenmechanischen Systems durch eine unitäre Operation von $\mathbb{R}$ oder noch präziser von der dazu isomorphen Gruppe $\vec{\mathbb{T}}$ der Zeitspannen auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ seiner Zustände modelliert wird. Als erstes Beispiel betrachten wir auf $\mathbb{R}$ das Lebesgue-Maß $\mathrm{d}t$ und die unitäre Darstellung von $\mathbb{R}$ auf $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mathrm{d}t)$ durch das Verschieben von Funktionen $\rho(t)f = \tau_t f$, deren Stetigkeit in 13.2.6.10 gezeigt wurde. Der folgende Satz 13.4.1.4 soll als Leitbild für die Entwicklung der Spektraltheorie dienen, die wir anschließend in Angriff nehmen werden. Er stellt eine große Klasse von Beispielen bereit und wirft zugleich Licht auf die allgemeine Struktur.

Vorschau 13.4.1.3. Man kann $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ so mit der Struktur einer topologischen Gruppe versehen, daß unsere unitären Darstellungen gerade die Gruppenwege in $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ sind. Das leistet die sogenannte „starke Operatortopologie“, die definiert ist als die „Initialtopologie“ zu allen Auswertungen an Vektoren $\mathrm{U}(\mathcal{H}) \to \mathcal{H}$, vergleiche 15.2.1.27.

Satz 13.4.1.4 (Lokale Struktur unitärer Darstellungen von $\mathbb{R}$). *Gegeben $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\rho : \mathbb{R} \to \mathrm{U}(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung von $\mathbb{R}$ und $v \in \mathcal{H}$ ein Vektor gibt es genau ein Paar (μ, φ) bestehend aus einem endlichen nichtnegativen Borelmaß $\mu = \mu_v$ auf $\mathbb{R}$ und einer unitären Einbettung $\varphi : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ derart, daß gilt $\varphi(1) = v$ und*

$$\rho(t) \circ \varphi = \varphi \circ (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \cdot) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

13.4.1.5. Das Symbol x ist hier in dem Sinne zu verstehen, daß Elemente $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu)$ durch Funktionen $f(x)$ repräsentiert werden. Für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ ist also mit $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \cdot)$ die Abbildung $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \cdot) : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu)$ gemeint ist, die ein

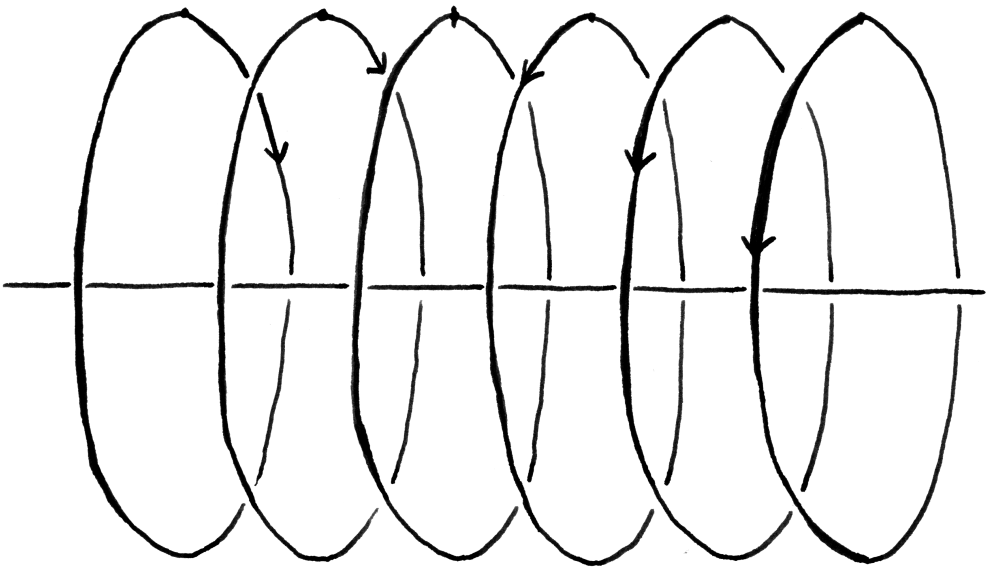


Illustration zur Operation von $\mathbb{R}$ auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu)$. Den Graph einer Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mag man sich als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ vorstellen, die eingezeichneten Kreise sind jeweils als $S^1 \subset \mathbb{C}$ zu verstehen und die Multiplikation mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}$ für festes t bedeutet das Drehen um geeignet von x abhängende Winkel in den jeweiligen Ebenen $\{x\} \times \mathbb{C}$, anschaulich also ein Verdrillen des Graphen.

$f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu)$ auf diejenige fast überall definierte Funktion abbildet, die an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ den Wert $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(x)$ annimmt. Die 1 meint die konstante Funktion 1 auf $\mathbb{R}$, die ja in Bezug auf jedes endliche Borelmaß quadratintegrierbar ist. Das Wörtchen „lokal“ spielt darauf an, daß die Darstellung in gewisser Weise nur „lokal um den Vektor v“ beschrieben wird. Eine globale Beschreibung werden wir als „Spektralzerlegung“ in 13.4.9.1 kennenlernen und aus dieser Spektralzerlegung leiten wir dann auch erst den obigen Satz über die lokale Struktur her. Der besseren Übersichtlichkeit halber stelle ich die Abbildungen dieses Satzes auch noch in einem kommutativen Diagramm dar:

$$\begin{array}{ccccc}
(x \mapsto f(x)) \in & \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu) & \overset{\varphi}{\hookrightarrow} & \mathcal{H} \\
\downarrow & {\scriptstyle (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\cdot)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho(t)} \\
(x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(x)) \in & \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu) & \overset{\varphi}{\hookrightarrow} & \mathcal{H} \\
 & 1 & \mapsto & v
\end{array}$$

13.4.1.6. Ich formuliere diesen Satz auch noch im unwesentlich allgemeineren Fall einer **Geradengruppe**, als da heißt der additiven Gruppe G eines eindimensionalen reellen Vektorraums. Diese Allgemeinheit scheint mir aus mehreren Gründen sinnvoll: Erstens hoffe ich, daß selbst im Fall $G = \mathbb{R}$ die Aussage übersichtlicher wird, wenn in der Notation die drei verschiedenen Bedeutungen von $\mathbb{R}$ als (1) dargestellte Gruppe, (2) deren Charaktergruppe und (3) auf dem Hilbertraum als Unterkörper von $\mathbb{C}$ durch die Multiplikation mit Skalaren operierender Körper getrennt werden. Zweitens sind Operationen von Geradengruppen auf Hilberträumen in der Quantenmechanik besonders natürlich, da die zeitliche Entwicklung jedes quantenmechanischen Systems genau genommen durch eine unitäre Operation der Gruppe $G = \vec{\mathbb{T}}$ aller Zeitspannen auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ aller Zustände des Systems modelliert wird. Und drittens gilt unser Satz in dieser Gestalt unverändert für die additive Gruppe jedes endlichdimensionalen reellen Vektorraums G, etwa auch für die Gruppe $\vec{\mathbb{E}}$ der Translationen des Anschauungsraums, und mutatis mutandis für G eine beliebige Fouriergruppe oder sogar eine beliebige kommutative „lokal kompakte Hausdorff'sche topologische Gruppe“. Bezeichne $\hat{G} = \mathrm{Grpto}(G, S^1)$ den Charakterraum unserer Geradengruppe im Sinne von 13.3.2.25, also die Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen von G in die Kreislinie $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$. Auf diesem Charakterraum haben wir in 13.3.2.25 die Struktur eines reellen Vektorraums erklärt und haben gezeigt, daß er im Fall einer Geradengruppe die Dimension Eins hat.

Satz 13.4.1.7 (Lokale Struktur unitärer Darstellungen von Geradengruppen). *Gegeben G eine Geradengruppe, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\rho : G \to \mathrm{U}(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung und $v \in \mathcal{H}$ ein Vektor gibt es genau ein Paar (μ, φ) bestehend aus einem endlichen Borelmaß $\mu = \mu_v$ auf der Charaktergruppe $\hat{G}$ und einer unitären*

Einbettung $\varphi : \mathrm{L}^2(\hat{G};\mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ *derart, daß gilt* $\varphi(1) = v$ *und*

$$\rho(g) \circ \varphi = \varphi \circ (g\cdot) \quad \forall g \in G$$

13.4.1.8. Hier ist $(g\cdot)$ zu verstehen als die Multiplikation mit der durch das Auswerten an der Stelle g definierten Funktion $\hat{G} \to \mathbb{C}$ auf der Charaktergruppe. Der besseren Übersichtlichkeit halber stellen wir die Abbildungen dieses Satzes auch noch in einem kommutativen Diagramm dar:

$$\begin{array}{ccccc}
(\chi \mapsto f(\chi)) & \mathrm{L}^2(\hat{G};\mu) & \overset{\varphi}{\hookrightarrow} & \mathcal{H} \\
\downarrow & {\scriptstyle (g\cdot)}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \rho(g)} \\
(\chi \mapsto \chi(g)f(\chi)) & \mathrm{L}^2(\hat{G};\mu) & \overset{\varphi}{\hookrightarrow} & \mathcal{H} \\
 & 1 & \mapsto & v
\end{array}$$

Hierbei meint $\chi \in \hat{G}$ einen variablen Charakter und $f(\chi)$ sowie $\chi(g)$ sind nur nur etwas ausführlichere Darstellungen einer Funktion $f : \hat{G} \to \mathbb{C}$ beziehungsweise der durch das Auswerten bei $g \in G$ gegebenen Funktion $\hat{G} \to \mathbb{C}$. Ich schlage vor, das Maß μ aus dem obigen Satz das **Frequenzmaß** des Vektors v zu nennen. Im Fall $G = \vec{\mathbb{T}}$ mißt es in gewisser und im endlichdimensionalen Fall in 13.4.1.13 präzisierter Weise, „wie stark verschiedene Frequenzanteile in v vorkommen“. Die Abbildung φ nenne ich die **kanonische Einbettung** zu unserem Vektor v.

13.4.1.9. Eine **Unterdarstellung** einer unitären Darstellung $(\mathcal{H}, \rho)$ ist ein abgeschlossenener Teilraum von $\mathcal{H}$, der unter allen $\rho(t)$ in sich selber überführt wird. Ein Vektor $v \in \mathcal{H}$ einer Darstellung heißt ein **zyklischer Vektor** unserer Darstellung, wenn es außer $\mathcal{H}$ selbst keine Unterdarstellung gibt, die unseren Vektor enthält. Ist im vorhergehenden Satz v ein zyklischer Vektor, so ist φ ein Isomorphismus und liefert sogar eine explizite Beschreibung der „globalen Struktur“ unserer Darstellung. Umgekehrt ist in unserem Satz auch die Aussage enthalten, daß für jedes Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ die Funktion 1 die unitäre Darstellung $\mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu)$ nach 13.4.1.23 zyklische Vektoren besitzt, ja sogar, daß für jedes endliche Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ die konstante Funktion $1 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu)$ ein zyklischer Vektor ist, denn andernfalls läge 1 in einer echten Unterdarstellung $\mathcal{H} \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu)$ und wir fänden dazu neben dem Paar (μ, id) noch ein weiteres mögliches Paar (ν, φ), bei dem φ über $\mathcal{H}$ faktorisiert, im Widerspruch zur behaupteten Eindeutigkeit. Im allgemeinen gibt es zwar keinen zyklischen Vektor, aber in jedem Fall ist unser Raum die Hilbertsumme 13.2.5.11 von abgeschlossenen Unterdarstellungen, die jeweils einen zyklischen Vektor besitzen. Natürlich kann es viele verschiedene derartige Zerlegungen geben und im Fall der Existenz eines zyklischen Vektors auch noch viele andere zyklische Vektoren. Die dadurch erzeugten Mehrdeutigkeiten werden wir in späteren Abschnitten noch sorgfältig studieren. Jetzt diskutieren wir zunächst einmal beispielhaft den endlichdimensionalen Fall.

Proposition 13.4.1.10 (**Endlichdimensionale unitäre Darstellungen von $\mathbb{R}$**). *Ist $\rho : \mathbb{R} \to \mathrm{U}(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung von $\mathbb{R}$ durch unitäre Endomorphismen eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ endlicher Dimension, so gibt es eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von $\mathcal{H}$ und reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ mit*

$$\rho(t)v_\nu = \exp(\mathrm{i}x_\nu t)v_\nu \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R} \textit{ und } 1 \leq \nu \leq n.$$

13.4.1.11. In anderen Worten operiert also bezüglich einer geeigneten angeordneten Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ jedes $t \in \mathbb{R}$ durch die diagonale Matrix

$${}_{\mathcal{B}}[\rho(t)]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1 t}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_n t})$$

Beweis. Nach 4.1.11.1 ist jede unitäre Matrix diagonalisierbar und hat nur Eigenwerte der Länge Eins. Insbesondere gilt das für alle $\rho(t)$. Nach 4.7.8.10 ist weiter jede Familie von paarweise kommutierenden diagonalisierbaren Matrizen simultan diagonalisierbar, wir finden also eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathcal{H}$ aus simultanen Eigenvektoren aller $\rho(t)$. In Bezug auf diese Basis werden alle $\rho(t)$ durch Diagonalmatrizen dargestellt. Die diagonalen Matrixeinträge sind dann stetige Gruppenhomomorphismen $\rho_{\nu\nu} : \mathbb{R} \to S^1$ und damit nach 13.2.7.7 von der Gestalt $\rho_{\nu\nu}(t) = \exp(\mathrm{i}x_\nu t)$ für wohlbestimmte $x_\nu \in \mathbb{R}$. Da die Eigenräume der unitären Automorphismen $\rho(t)$ jeweils paarweise aufeinander senkrecht stehen, gilt

$$x_\nu \neq x_\mu \Rightarrow e_\nu \perp e_\mu$$

Indem wir jeweils im Erzeugnis der e_ν zu festem $x = x_\nu$ eine Orthonormalbasis wählen, erhalten wir die gesuchte Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von $\mathcal{H}$ mit $\rho(t)v_\nu = \exp(\mathrm{i}x_\nu t)v_\nu$ für alle $t \in \mathbb{R}$. □

Vorschau 13.4.1.12. Mit den Methoden der Lietheorie geht das auch schneller. Nach 22.1.4.5 und 22.1.2.26 ist jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\rho : \mathbb{R} \to \mathrm{U}(\mathcal{H})$ von der Gestalt $\rho : t \mapsto \exp(tA)$ für genau ein schiefhermitisches alias schiefadjungiertes $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$, und damit folgt die Behauptung unmittelbar aus dem Spektralsatz 4.1.12.15 für selbstadjungierte Abbildungen, angewandt auf die selbstadjungierte Abbildung $\mathrm{i}A$.

Beispiel 13.4.1.13 (**Frequenzmaß im Fall endlicher Dimension**). Gegeben ein Vektor $v = \sum \alpha_\nu v_\nu$ mit seiner Zerlegung in simultane Eigenvektoren in unserer in der obigen Proposition 13.4.1.10 diskutierten endlichdimensionalen Darstellung erhalten wir ein mögliches Paar (μ, φ) zu Satz 13.4.1.4, also eine äquivariante unitäre Einbettung

$$\varphi : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$$

mit $1 \mapsto v$, indem wir als Borelmaß μ die Linearkombination von Diracmaßen

$$\mu = |\alpha_1|^2 \delta_{x_1} + \ldots + |\alpha_n|^2 \delta_{x_n}$$

nehmen und als unitäre Einbettung $\varphi : \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ die Abbildung $\varphi : f \mapsto \sum f(x_\nu)\alpha_\nu v_\nu$. Der Nachweis, daß das in diesem Fall auch das einzige mögliche derartige Paar ist, sei dem Leser zur Übung überlassen.

Beispiel 13.4.1.14 (**Frequenzmaß in einem Fall unendlicher Dimension**). Wir betrachten auf $\mathbb{R}$ das Lebesgue-Maß $\mathrm{d}t$ und die unitäre Darstellung von $\mathbb{R}$ auf $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mathrm{d}t)$ durch das Verschieben von Funktionen, $\rho(t)f = \tau_t f$, deren Stetigkeit in 13.2.6.10 gezeigt wurde. Eine entsprechend normalisierte Variante der Fouriertransformation induziert in diesem Fall einen unitären Isomorphismus von Hilberträumen

$$\mathcal{F} : \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mathrm{d}x/2\pi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mathrm{d}t)$$

Durch stetige Fortsetzung von 13.3.1.5.2 erkennt man, daß auch für quadratintegrierbare Funktionen f gilt $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\cdot h) = \rho(t)(\mathcal{F}h)$. Betrachten wir nun als φ die Verknüpfung dieser Fouriertransformation mit der unitären Einbettung

$$(f^\wedge\cdot) : \mathrm{L}^2(\mathbb{R};(|f^\wedge|^2/2\pi)\,\mathrm{d}x) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mathrm{d}x/2\pi)$$

so ergibt sich zum Vektor $g = (f^\wedge)^\wedge$, also der Funktion $g : x \mapsto f(-x)$, ein mögliches Paar (μ,φ) mit $\mu = (|f^\wedge(x)|^2/2\pi)\,\mathrm{d}x$ als Frequenzmaß von g. Daß es auch das einzig mögliche Paar ist, muß jedoch erst noch gezeigt werden.

13.4.1.15. Um die eben vorgestellten Sätze zu beweisen gilt es, die Theorie weiter zu entwickeln. Ist $(\rho,\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung von $\mathbb{R}$, so nennen wir einen Vektor $v \in \mathcal{H}$ **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$Sv = \lim_{t\to 0} \frac{\rho(t)v - v}{t}$$

existiert. Sicher bilden die differenzierbaren Vektoren einen Teilraum $\mathcal{H}^1 \subset \mathcal{H}$ und $S = S_\rho : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}$ ist eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Ich will bereits verraten, daß diese lineare Abbildung der **infinitesimale Erzeuger** unserer Darstellung heißt, obwohl wir noch nicht wissen, in welcher Weise diese Abbildung denn nun unsere Darstellung erzeugt. Man beachte jedoch, daß weder der Teilraum der differenzierbaren Vektoren abgeschlossen zu sein braucht noch unser infinitesimaler Erzeuger stetig.

Definition 13.4.1.16. Eine lineare Selbstabbildung eines Hilbertraums heißt **selbstadjungiert**, wenn sie ihre eigene Adjungierte ist. Ist in Formeln $\mathcal{H}$ unser Hilbertraum und $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unsere lineare Abbildung, so heißt in Formeln ausgedrückt A selbstadjungiert, wenn gilt

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle \quad \forall v, w \in \mathcal{H}$$

13.4.1.17. Eine lineare Selbstabbildung eines Hilbertraums heißt **schiefadjungiert**, wenn sie das Negative ihrer Adjungierten ist. Eine lineare Abbildung S ist demnach schiefadjungiert genau dann, wenn $\mathrm{i}S$ selbstadjungiert ist.

Proposition 13.4.1.18. *Ist $(\rho, \mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung von $\mathbb{R}$, in der sämtliche Vektoren differenzierbar sind, so ist ihr infinitesimaler Erzeuger S stetig und schiefadjungiert und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\rho(t) = \exp(tS)$$

mit der Exponentialfunktion von Operatoren aus **??**.

Beweis. Sicher gilt ganz allgemein für alle differenzierbaren Vektoren v, w unserer Darstellung die Formel

$$\langle Sv, w\rangle = \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{\rho(t)v - v}{t}, w \right\rangle = \lim_{t\to 0} \left\langle v, \frac{\rho(-t)w - w}{t} \right\rangle = -\langle v, Sw\rangle$$

Sind alle Vektoren von $\mathcal{H}$ differenzierbar, in Formeln $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}$, so ist demnach $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ eine schiefadjungierte lineare Abbildung. Die Stetigkeit von S folgt damit aus der im Anschluß bewiesenen Proposition 13.4.2.1, nach der schlicht alle selbstadjungierten und damit natürlich auch alle schiefadjungierten Selbstabbildungen eines Hilbertraums stetig sind. Damit folgt dann, daß für alle $v \in \mathcal{H}$ die Abbildung $t \mapsto \exp(-tS)\rho(t)v$ differenzierbar ist und die Ableitung Null hat, wie der Leser in der anschließenden Übung 13.4.1.21 selbst ausarbeiten mag. Nach **??** ist diese Abbildung also konstant und die Proposition ist bewiesen. □

13.4.1.19. Um unitäre Darstellungen von Geradengruppen zu verstehen, gilt es also, schiefadjungierte oder äquivalent selbstadjungierte Operatoren zu studieren. Damit werden wir uns nun zunächst beschäftigen.

Übungen

Übung 13.4.1.20. Besitzt jede endlichdimensionale unitäre Darstellung von $\mathbb{R}$ einen zyklischen Vektor? Man finde eine dreidimensionale unitäre Darstellung von $\mathbb{R}$ mit zyklischem Vektor.

Übung 13.4.1.21. Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$, eine stetige lineare Abbildung $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ und eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ zeige man, daß auch die Abbildung $t \mapsto \exp(tS)f(t)$ differenzierbar ist mit der Ableitung $S\exp(tS)f(t) + \exp(tS)f'(t)$. Hinweis: Man beachte dazu die Differenzierbarkeit von $\mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $t \mapsto tS$, von $\exp : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ bei Null nach 12.1.3.26 und von der Operation $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ nach 12.1.6.5.

Übung 13.4.1.22. Man zeige, daß für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ der translationsinvariante Teilraum $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(K; \mathrm{d}x)^\wedge \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mathrm{d}t)$ aller Fouriertransformierten quadratintegrierbarer Funktionen mit Träger in K in Bezug auf die Darstellung von $\mathbb{R}$ durch Translationen vollständig aus differenzierbaren Vektoren besteht und daß der infinitesimale Erzeuger S in diesem Fall schlicht das negative Ableiten $-\partial$ ist. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Gleichung $\exp(-t\partial)f = \tau_t f$ und der Taylorentwicklung?

Übung 13.4.1.23. Gegeben ein Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ zeige man, daß die Abbildung $\rho : \mathbb{R} \to \mathrm{U}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu))$ mit $(\rho(t)f)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(x)$ für $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu)$ eine unitäre Darstellung ist, daß jedoch ρ als Abbildung von $\mathbb{R}$ in den Raum der Operatoren auf unserem Hilbertraum mit seiner Operatornorm im allgemeinen nicht stetig ist: Ist μ das Lebesguemaß, so gilt sogar $s \neq t \Rightarrow \|\rho(t) - \rho(s)\| = 2$.

Übung 13.4.1.24. Man zeige unter der Annahme der Gültigkeit von 13.4.1.4: Betrachten wir zu einem Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ den Raum $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu)$ als unitäre Darstellung von $\mathbb{R}$ wie in 13.4.1.23, so wird für $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu)$ das zugehörige Maß μ_f gegeben durch die Formel $\mu_f = |f|^2\mu$.

Übung 13.4.1.25. Man zeige: Ein Vektor aus einer unitären Darstellung von $\mathbb{R}$ ist differenzierbar im Sinne von 13.4.1.15 genau dann, wenn die Funktion x in Bezug auf sein Frequenzmaß quadratintegrierbar ist. Ist weiter $\varphi : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ die kanonische Einbettung im Sinne von 13.4.1.8 zu solch einem Vektor v, so gilt

$$Sv = \varphi(\mathrm{i}x)$$

13.4.2 Selbstadjungierte Operatoren

Proposition 13.4.2.1 (Hellinger-Toeplitz). *Jede lineare Abbildung von einem Hilbertraum in einen weiteren Hilbertraum, die eine Adjungierte besitzt, ist stetig.*

Beweis. Sei $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ unsere lineare Abbildung und $B : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ ihre Adjungierte, es gelte also $\langle Av, w\rangle = \langle v, Bw\rangle$ für alle $v \in \mathcal{H}$ und $w \in \mathcal{H}'$. Die schieflinearen Abbildungen

$$T_w : v \mapsto \langle Av, w\rangle$$

sind stetig, da sie auch als $v \mapsto \langle v, Bw\rangle$ geschrieben werden können. Die Werte der stetigen linearen Abbildungen T_w mit $\|w\| = 1$ sind auf jedem Vektor $v \in \mathcal{H}$ beschränkt durch $c(v) = \|A(v)\|$. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit 13.4.2.10, das wir gleich im Anschluß diskutieren, gibt es also C mit $\|T_w\| \leq C$ für alle w der Länge Eins alias mit

$$\langle Av, w\rangle \leq C\|v\|\|w\|$$

für alle $v \in \mathcal{H}$ und $w \in \mathcal{H}'$. Das hinwiederum zeigt $\|Av\|^2 \leq C\|v\|\|Av\|$ und damit $\|Av\| \leq C\|v\|$ für alle $v \in \mathcal{H}$. Als auf dem Einheitsball beschränkte lineare Abbildung ist damit A stetig nach 11.2.3.10. □

13.4.2.2. Wir beginnen die anschließende Diskussion des „Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit“ mit einem etwas schwächeren, aber allgemeineren und anschaulicheren Lemma.

Lemma 13.4.2.3 (**Prinzip der lokalen Beschränktheit**). *Gegeben ein vollständiger nichtleerer metrischer Raum X und eine Menge $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ stetiger reellwertiger Funktionen auf X, deren Werte an jedem Punkt nach oben beschränkt sind, gibt es eine nichtleere offene Teilmenge, auf der unsere Funktionen gleichmäßig nach oben beschränkt sind.*

Beweis. Unsere Annahme bedeutet $\sup\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} < \infty \ \forall x \in X$. Wir betrachten nun in X die abgeschlossenen Teilmengen

$$X_n := \{x \in X \mid f(x) \leq n \ \forall f \in \mathcal{F}\}$$

Nach Voraussetzung ist X die Vereinigung der abgeschlossenen Teilmengen X_n und nach dem Satz von Baire 13.4.2.5, den wir im Anschluß beweisen, besitzt folglich mindestens eines der X_n einen inneren Punkt. □

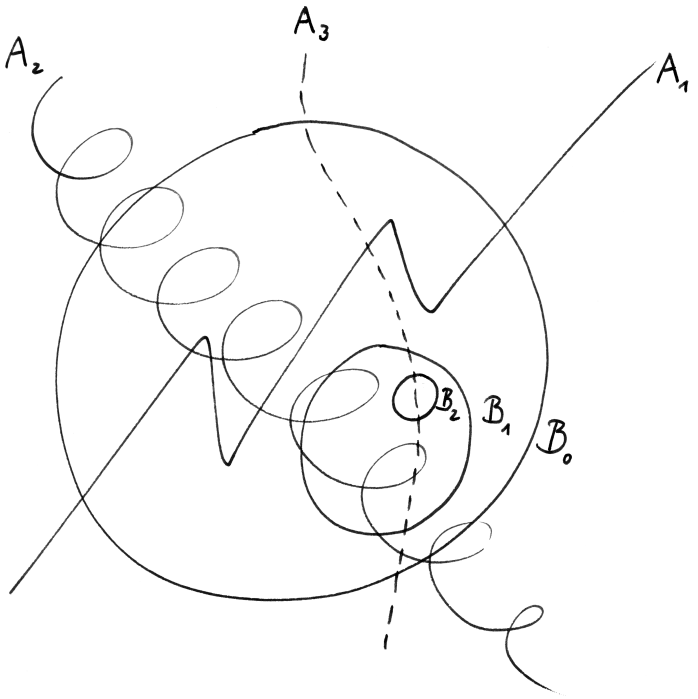
Definition 13.4.2.4. Seien X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Ein Element $x \in A$ heißt ein **innerer Punkt von** A oder genauer ein **innerer Punkt von** A **in Bezug auf** X, wenn A eine Umgebung von x in X ist.

Satz 13.4.2.5 (**Baire'scher Kategoriensatz**). *In einem vollständigen metrischen Raum hat jede abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen ohne innere Punkte auch selbst keine inneren Punkte.*

13.4.2.6. Die Bezeichnung „Baire'scher Kategoriensatz“ kommt daher, daß Baire eine Teilmenge „von erster Kategorie“ nennt, wenn sie eine abzählbare Vereinigung ist von Mengen, deren Abschlüsse jeweils keinen inneren Punkt enthalten. Mit dieser Terminologie kann man den Satz umformulieren zu der Aussage, daß „in jedem vollständigen metrischen Raum eine Menge erster Kategorie keine inneren Punkte hat“.

Ergänzung 13.4.2.7. Der Baire'sche Kategoriensatz gilt mit fast demselben Beweis auch für jeden lokal kompakten Hausdorffraum. Statt der Vollständigkeit benutzt man beim Beweis dann 12.4.1.13.

Beweis. Sei X unser vollständiger Raum und seien $A_1, A_2, \ldots$ abgeschlossene Teilmengen. Wir argumentieren durch Widerspruch. Unter einem Ball verstehen



Die Bild soll illustrieren, wie mit der Methode aus dem Beweis des Satzes von Baire 13.4.2.5 die Annahme, die Papierebene sei eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Teilmengen ohne innere Punkte, zum Widerspruch geführt werden kann. Die abgeschlossenen Bälle B_i sollen hier die Kreisscheiben sein, von denen ich der besseren Übersichtlichkeit halber nur die Ränder eingezeichnet habe.

wir stets einen Ball mit positivem Radius. Hätte die Vereinigung $A = \bigcup A_i$ einen inneren Punkt, so enthielte sie einen abgeschlossenen Ball B_0. Da A_1 keinen inneren Punkt hat, kann der zugehörige offene Ball nicht in A_1 enthalten sein, und es gibt folglich einen abgeschlossenen Ball $B_1 \subset B_0$ mit $B_1 \cap A_1 = \emptyset$. Wir dürfen dabei sogar annehmen, daß der Radius von B_1 kleiner als 1 ist. Da auch A_2 keinen inneren Punkt hat, gibt es weiter einen abgeschlossenen Ball $B_2 \subset B_1$ mit $B_2 \cap A_2 = \emptyset$ und wir dürfen sogar annehmen, daß der Radius von B_2 kleiner als $1/2$ ist. Indem wir immer so weitermachen, finden wir eine absteigende Folge von abgeschlossenen Bällen $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \ldots$, deren Radien gegen Null streben und deren Schnitt die Menge A nicht trifft. Wegen $A \supset B_0$ muß der Schnitt dann leer sein. Die Zentren unserer Bälle bilden jedoch eine Cauchy-Folge, und deren Grenzwert liegt notwendig im Schnitt aller unserer Bälle. Dieser Widerspruch beendet den Beweis. □

Definition 13.4.2.8. Wir nennen eine Menge von stetigen Operatoren zwischen normierten Vektorräumen **gleichmäßig beschränkt** oder lateinisierend **uniform beschränkt**, wenn die Menge ihrer Operatornormen eine reelle obere Schranke besitzt.

13.4.2.9. Es wird hierbei nicht vorausgesetzt, daß unsere Operatoren alle von demselben Raum ausgehen oder in demselben Raum landen. Wir denken also in Formeln an eine Menge von stetigen Operatoren $T_i : V_i \to W_i$.

Satz 13.4.2.10 (**Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit**). *Eine Familie stetiger Operatoren von einem festen Banachraum in weitere normierte Vektorräume ist gleichmäßig beschränkt genau dann, wenn für jeden Vektor des Ausgangsraums die Normen seiner Bilder unter unseren Operatoren eine beschränkte Menge bilden.*

13.4.2.11. Dieses Resultat wird auch als **Satz von Banach-Steinhaus** zitiert. Eine alternative äquivalente Formulierung lautet: Eine Menge stetiger Operatoren von einem festen Banachraum in weitere normierte Vektorräume ist gleichmäßig beschränkt genau dann, wenn für jede Gerade in unserem Ausgangsraum die Menge der Restriktionen unserer Operatoren auf diese Gerade gleichmäßig beschränkt ist.

Beweis. Wir zeigen nur die nichttriviale Implikation. Sei V unser Ausgangsraum und $\mathcal{T}$ unsere Menge von stetigen Operatoren. Es gilt also, die Implikation

$$\left(\sup_{T\in\mathcal{T}} \|Tv\| < \infty \;\; \forall v \in V\right) \Rightarrow \sup_{T\in\mathcal{T}} \|T\| < \infty$$

zu zeigen. Dazu betrachten wir in V die abgeschlossenen Teilmengen

$$V_n = \{v \in V \mid \|Tv\| \leq n \quad \forall T \in \mathcal{T}\}$$

Nach Voraussetzung ist V die Vereinigung aller V_n und nach dem Satz von Baire 13.4.2.5 besitzt folglich mindestens eines der V_n einen inneren Punkt. Natürlich gilt $V_n = nV_1$, also hat dann auch V_1 einen inneren Punkt und wegen $V_1 + V_1 \subset V_2$ ist damit der Ursprung ein innerer Punkt von V_2. Folglich gibt es $\varepsilon > 0$ mit $\mathrm{B}(0;\varepsilon) \subset V_2$ und das zeigt $\|v\| < \varepsilon \Rightarrow \|Tv\| \le 2\ \forall T \in \mathcal{T}$ alias $\|T\| \le 2/\varepsilon\ \forall T \in \mathcal{T}$. □

Ergänzung 13.4.2.12. Hier noch eine witzige wenn auch unwesentliche Anwendung. Es gibt ja eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die an allen irrationalen Stellen stetig ist und an allen rationalen Stellen unstetig, zum Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q}; \\ 1/q & x = p/q \text{ unkürzbarer Bruch mit } q \ge 1. \end{cases}$$

Es gibt jedoch keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die an allen rationalen Stellen stetig ist und an allen irrationalen Stellen unstetig: Für jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nämlich

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt eine Umgebung } V \text{ von } x \text{ mit} \\ |f(y) - f(z)| \le 1/n \ \ \forall y, z \in V \end{array} \right\}$$

offen in $\mathbb{R}$, und $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ ist genau die Menge der Stetigkeitsstellen von f. Also sind die Komplemente $A_n = \mathbb{R}\backslash U_n$ abgeschlossen und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ist die Menge der Unstetigkeitsstellen. Wäre diese Vereinigung $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, so wäre die Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}$ ganz $\mathbb{R}$ und nach dem Baire'schen Kategoriensatz 13.4.2.5 müßte dann ein A_n oder ein $\{q\}$ einen inneren Punkt haben, im Widerspruch zu $A_n \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

13.4.2.13. Ist μ ein kompakt getragenes Borelmaß auf $\mathbb{R}$ und T die Multiplikation $(x\cdot) : \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu)$ mit der Identität auf $\mathbb{R}$, so ist T selbstadjungiert.

Satz 13.4.2.14 (Lokale Struktur selbstadjungierter Operatoren). *Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator und $v \in \mathcal{H}$ ein Vektor, so gibt es genau ein Paar $(\mu, \varphi) = (\mu_v, \varphi_v)$ bestehend aus einem kompakt getragenen Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ und einer unitären Einbettung $\varphi : \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ mit $\varphi(1) = v$ und $\varphi(xf) = T(\varphi(f))\ \forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu)$.*

13.4.2.15. Der Beweis wird im Anschluß an 13.4.5.8 gegeben. Wir stellen die Aussage dieses Satzes graphisch dar im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu) & \overset{\varphi}{\hookrightarrow} & \mathcal{H} \\ {\scriptstyle (x\cdot)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu) & \overset{\varphi}{\hookrightarrow} & \mathcal{H} \\ 1 & \mapsto & v \end{array}$$

Hier meint $1 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu)$ die konstante Funktion Eins und $(x\cdot)$ das Multiplizieren mit der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Ich nenne φ_v im folgenden die **kanonische Einbettung zu** v und μ_v das **Spektralmaß von** v.

13.4.2.16. In der Quantenmechanik modelliert man ein „physikalisches System" als einen Hilbertraum, einen „Zustand" des Systems als einen von Null verschiedenen Vektor und die Messung eines reellen Parameters als einen möglicherweise unbeschränkten selbstadjungierten Operator mit der Maßgabe, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Meßergebnis bei einem gegebenen Zustand gerade das auf Gesamtmasse Eins normierte Spektralmaß unseres Zustands sein soll. Den Fall unbeschränkter selbstadjungierter Operatoren besprechen wir allerdings erst in 13.4.12.5. Messungen mit Werten in allgemeineren Meßräumen werden modelliert als Teilungen Φ der Identität im Sinne von 13.4.7.4 und die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Meßergebnis bei einem gegebenen Zustand v ist dann das auf Gesamtmasse Eins normierte Maß $\langle v, \Phi v\rangle$.

Beispiel 13.4.2.17 (**Spektralmaß im endlichdimensionalen Fall**). Gegeben ein endlichdimensionaler Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit einem selbstadjungierten Operator T und ein Vektor $v \in \mathcal{H}$ können wir wir sein Spektralmaß $\mu = \mu_v$ und die kanonische Einbettung $\varphi = \varphi_v$ nach 13.4.2.14 wie folgt erhalten: Wir schreiben $v = v_1 + \ldots + v_n$ als Summe von paarweise orthogonalen Eigenvektoren zu Eigenwerten $x_1, \ldots, x_n$ und nehmen als Spektralmaß von v das Maß

$$\mu = \|v_1\|^2\delta_{x_1} + \ldots + \|v_n\|^2\delta_{x_n}$$

und als Einbettung $\varphi : \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ die Abbildung $\varphi : f \mapsto \sum f(x_\nu)v_\nu$. Der Nachweis, daß das in diesem Fall auch das einzige mögliche derartige Paar ist, sei dem Leser zur Übung überlassen. Hinweis: Nach 13.2.3.24 kann unser Raum von quadratintegrierbaren Funktionen nur endlichdimensional sein, wenn das Maß μ eine endliche Linearkombination von Diracmaßen ist.

13.4.2.18. Eine Abbildung von topologischen Räumen heißt **offen**, wenn das Bild jeder offenen Menge offen ist.

Satz* 13.4.2.19 (Satz vom offenen Bild). *Jede stetige surjektive lineare Abbildung von Banachräumen ist offen. Gegeben eine stetige bijektive lineare Abbildung von Banachräumen ist insbesondere auch die Umkehrabbildungen stetig.*

Beweis. Sei $f : V \twoheadrightarrow W$ unsere surjektive lineare Abbildung und $A \subset V$ der abgeschlossene Einheitsball. Sicher gilt

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{f(nA)}$$

Nach dem Baire'schen Kategoriensatz 13.4.2.5 muß dann ein $\overline{f(nA)}$ und damit auch $\overline{f(A)}$ selber mindestens einen inneren Punkt besitzen. Da $\overline{f(A)}$ konvex ist und stabil unter der Multiplikation mit (-1), folgt leicht, daß auch der Nullpunkt ein innerer Punkt von $\overline{f(A)}$ sein muß. Sei also $U \Subset W$ ein offener Ball um den Ursprung mit $U \subset \overline{f(A)}$. Offensichtlich gilt

$$\overline{f(A)} \subset f(A) + \frac{1}{2}U$$

Wegen $U \subset \overline{f(A)}$ finden wir für jedes $w \in \overline{f(A)}$ induktiv eine Folge von Elementen $w_n \in f(A)$ mit $w = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} w_n$ im Sinne der Konvergenz der Partialsummen. Wählen wir nun Urbilder $v_n \in A$ unserer w_n, so gilt offensichtlich $v = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} v_n \in 2A$ und $f(v) = w$. Es folgt $f(2A) \supset \overline{f(A)} \supset U$, mithin umfaßt $f(2A)$ eine offene Umgebung des Ursprungs. Daß dann f eine offene Abbildung sein muß, folgt ohne weitere Schwierigkeiten. □

Satz* 13.4.2.20 (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Eine lineare Abbildung von Banachräumen ist genau dann stetig, wenn ihr Graph abgeschlossen ist.*

Beweis. Ganz allgemein hat jede stetige Abbildung von metrischen Räumen nach Übung 11.1.5.15 einen abgeschlossenen Graphen. Ist umgekehrt $f : V \to W$ unsere lineare Abbildung und ist $\Gamma(f) \subset V \times W$ abgeschlossen, so ist $\Gamma(f)$ selbst ein Banachraum mit der von der Produktnorm induzierten Norm und die Projektionen auf beide Faktoren sind stetig. Die Projektion auf den ersten Faktor ist aber sogar eine Bijektion $\Gamma(f) \xrightarrow{\sim} V$ und hat damit nach 13.4.2.19 eine stetige Umkehrung. So erhalten wir f als Verknüpfung stetiger Abbildungen $V \xrightarrow{\sim} \Gamma(f) \to W$. □

Übungen

Übung 13.4.2.21. In einem vollständigen metrischen Raum ist der Schnitt einer abzählbaren Familie offener dichter Teilmengen zumindest noch dicht.

13.4.3 Spektren in Banach-Ringalgebren

Definition 13.4.3.1. Eine **Banach-Ringalgebra** ist ein Banachraum A mit einer stetigen bilinearen Verknüpfung $A \times A \to A$, die A zu einem Ring macht.

13.4.3.2. Wird nicht explizit das Gegenteil gesagt, nehmen wir $\mathbb{C}$ als Grundkörper an. Meinen wir ausnahmsweise den Grundkörper $\mathbb{R}$, so sprechen wir von einer **reellen Banachringalgebra**. Wir verwenden in Formeln oft die Abkürzung $\lambda 1_A = \lambda$ für λ aus dem jeweiligen Grundkörper. In der Literatur wird diese Struktur meist als **Banach-Algebra** bezeichnet.

13.4.3.3 (**Kanonische Norm**). Auf jeder Banachringalgebra A erhält man eine Norm $\| \ \|$, die **kanonische Norm**, indem man den durch Multiplikation gegebenen Ringhomomorphismus $A \hookrightarrow \mathcal{B}(A)$, $a \mapsto (a\cdot)$ betrachtet und die Einschränkung der Operatornorm bezüglich der Ursprungsnorm $\| \ \|_{\mathrm{u}}$ nimmt. Die kanonische Norm ist äquivalent zur Ursprungsnorm, denn es gilt $\|a\| \leq \|a\|_{\mathrm{u}} \leq \|a\|\|1_A\|_{\mathrm{u}}$. Weiter haben wir für die kanonische Norm offensichtlich $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ und $\|1_A\| \leq 1$ mit $\|1_A\| = 1$ falls $A \neq 0$.

13.4.3.4. Ist A eine Banachringalgebra und gelten für ihr Ursprungsnorm $\| \ \|_{\mathrm{u}}$ die Abschätzungen $\|1_A\|_{\mathrm{u}} \leq 1$ und $\|ab\|_{\mathrm{u}} \leq \|a\|_{\mathrm{u}}\|b\|_{\mathrm{u}}$ für alle $a, b \in A$, so ist $\| \ \|_{\mathrm{u}}$ offensichtlich bereits die kanonische Norm. Wenn nichts anderes explizit gesagt ist, nehmen wir meist implizit an, daß eine Banachringalgebra bereits mit ihrer kanonischen Norm versehen ist.

Beispiel 13.4.3.5. Alle stetigen linearen Selbstabbildungen eines vorgegebenen Banachraums bilden mit der Operatornorm eine Banachringalgebra, vergleiche **??** und 11.2.3.27, und diese Norm ist auch bereits ihre kanonische Norm.

Definition 13.4.3.6. Das **Spektrum** eines Elements x einer Banachringalgebra A ist die Menge

$$\sigma(x) = \sigma_A(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda - x) \text{ ist nicht invertierbar in } A\}$$

Reden wir vom Spektrum eines Operators auf einem Banachraum alias einer stetigen linearen Abbildung $T : E \to E$ von besagtem Banachraum in sich selbst, so meinen wir sein Spektrum in Bezug auf die Banachringalgebra aller stetigen linearen Selbstabbildungen unseres Banachraums als da heißt die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $(T - \lambda\,\mathrm{id}) : E \to E$ nicht stetig invertierbar ist.

Beispiel 13.4.3.7. Jede Norm auf $\mathbb{C}^n$ liefert eine Operatornorm auf dem Matrizenring $\mathrm{Mat}(n; \mathbb{C})$, der diesen Ring zu einer Banachringalgebra macht. Das Spektrum einer Matrix ist in diesem Fall genau die Menge ihrer Eigenwerte.

Ergänzung 13.4.3.8. In 13.4.4.4 zeigen wir, daß im Komplexen das Spektrum eines Elements einer von Null verschiedenen Banachringalgebra nie leer sein kann.

Ergänzung 13.4.3.9. Das Spektrum des Schrödinger-Operators, der ein quantenmechanisches Elektron im elektrischen Potential eines Protons beschreibt, besitzt viele isolierte Punkte. Sie entsprechen genau den Frequenzen, in die das Licht eines angeregten Wasserstoffgases beim Durchgang durch ein Prisma zerfällt. Unter diesem Blickwinkel ist die von Hilbert gewählte Bezeichnung als „Spektrum“ besonders passend.

Proposition 13.4.3.10 (**Spektrum eines Multiplikationsoperators**). *Gegeben ein Maßraum* (X, μ) *und darauf eine* L^∞*-Funktion* $f : X \to \mathbb{C}$ *im Sinne von 13.2.3.5*

und $p \in [0, \infty]$ ist der durch Multiplikation mit unserer Funktion erklärte Operator

$$(f\cdot) : \mathrm{L}^p(X;\mu) \to \mathrm{L}^p(X;\mu)$$

stetig. Ist unser Maßraum σ-endlich, so ist weiter die Operatornorm unseres Multiplikationsoperators das essentielle Supremum $\|f\|_\infty$ von f aus **??** *und sein Spektrum ist die Menge*

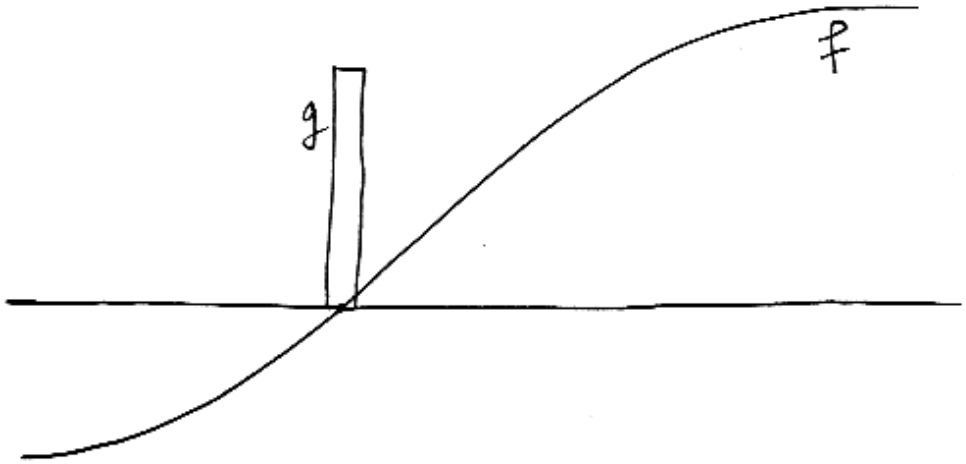
$$\sigma(f\cdot) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mu(f^{-1}(U)) > 0 \textit{ für jede Umgebung } R \textit{ von } \lambda\}$$

Beweis. Hat f einen Repräsentanten mit $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in X$, so folgt $|f(x)g(x)| \leq C|g(x)|$ für alle $x \in X$. Diese Ungleichung bleibt erhalten beim Potenzieren mit p, Integrieren über X und Ziehen der p-ten Wurzel. Das zeigt $\|(f\cdot)\| \leq \|f\|_\infty$ für $p < \infty$. Ist andererseits $0 < a < \|f\|_\infty$, so gibt es $A \subset X$ meßbar von positivem Maß mit $|f(x)| \geq a \ \forall x \in A$. Ist X sogar σ-endlich, so können wir zusätzlich sogar $\mu(A)$ endlich annehmen. Dann liegt die charakteristische Funktion $[A]$ in $\mathrm{L}^p(X;\mu)$ und ist dort nicht Null, und wir erkennen unschwer, daß gilt $\|f \cdot [A]\| \geq a\|[A]\|$. Es folgt umgekehrt $\|(f\cdot)\| \geq a$ und damit $\|(f\cdot)\| \geq \|f\|_\infty$. Damit ist die erste Aussage gezeigt im Fall $p < \infty$. Der Fall $p = \infty$ bleibe dem Leser überlassen. Für die Beschreibung des Spektrums reicht es, indem wir f durch $f - \lambda$ ersetzen, den Fall $\lambda = 0$ zu betrachten. Gibt es für $\lambda = 0$ eine Umgebung U mit $\mu(f^{-1}(U)) = 0$, so können wir für unsere fast überall definierte Funktion f auch einen Repräsentanten f wählen, der keine Werte in U annimmt, und dann ist f^{-1} beschränkt und der zugehörige Multiplikationsoperator stetig und invers zu $(f\cdot)$. Also gehört in diesem Fall $\lambda = 0$ nicht zum Spektrum. Gibt es dahingegen für $\lambda = 0$ keine Umgebung U mit $\mu(f^{-1}(U)) = 0$, so finden wir in jeder ε-Umgebung eine Teilmenge A_ε endlichen positiven Maßes, und deren charakteristische Funktion $[A_\varepsilon]$ ist ein von Null verschiedener Vektor in $\mathrm{L}^p(X;\mu)$ mit der Eigenschaft $\|f[A_\varepsilon]\|_p \leq \varepsilon\|[A_\varepsilon]\|_p$. Da also unser Multiplikationsoperator von Null verschiedene Vektoren um beliebig große Faktoren verkürzt, kann er unmöglich eine stetige Umkehrung besitzen: Selbst wenn er bijektiv wäre, müßte seine Umkehrabbildung von Null verschiedene Vektoren um beliebig große Faktoren verlängern und wäre mithin nie und nimmer stetig. □

Lemma 13.4.3.11. *Gegeben eine Banachringalgebra A ist für jedes Element $x \in A$ einer kanonischen Norm $\|x\| < 1$ die Differenz $(1 - x)$ invertierbar in A.*

Beweis. Die absolut konvergente Reihe $1 + x + x^2 \ldots$ liefert nach **??** ein Inverses. □

Lemma 13.4.3.12. *Die invertierbaren Elemente einer Banachringalgebra bilden eine offene Teilmenge $A^\times \Subset A$.*



Eine beschränkte stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine meßbare Funktion alias ein Vektor $g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}; \lambda)$, der vom Multiplikationsoperator $(f\cdot)$ sehr viel kürzer gemacht wird. Indem wir eine geeignete Folge derartiger Vektoren g_n nehmen, die alle dieselbe Norm haben aber immer kleineren Träger, erkennen wir, daß der Multiplikationsoperator $(f\cdot)$ nicht stetig invertierbar sein kann, als da heißt, daß sein Spektrum den Nullpunkt enthält.

Beweis. Nach 13.4.3.11 besitzt das Einselement eine Umgebung aus invertierbaren Elementen. Andererseits ist die Multiplikation mit jeder Einheit ein Homöomorphismus von A auf sich selbst, der Einheiten zu Einheiten macht. Das Lemma folgt. □

Lemma 13.4.3.13. *Das Spektrum eines Elements einer Banachringalgebra ist stets eine kompakte Teilmenge der komplexen Zahlenebene und ist enthalten in der abgeschlossenen Kreisscheibe mit der kanonischen Norm unseres Elements als Radius.*

Beweis. Das Spektrum ist abgeschlossen, da sein Komplement offen ist nach 13.4.3.12. Es ist beschränkt, da für $|\lambda| > \|x\|$ die Differenz $\lambda - x = \lambda(1 - \lambda^{-1}x)$ stets invertierbar ist nach 13.4.3.11, und dies Argument liefert auch gleichzeitig die behauptete Schranke. □

13.4.3.14. Der **Spektralradius** eines Elements x einer Banachringalgebra A ist definiert als

$$\rho(x) = \rho_A(x) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_A(x)\}$$

Ist das Spektrum leer, so erhalten wir folglich $-\infty$ als Spektralradius. Wir zeigen in 13.4.4.4, daß dieser Fall nur bei der Banachringalgebra $A = 0$ auftritt. Das vorhergehende Lemma 13.4.3.13 liefert die Abschätzung $\rho(x) \leq \|x\|$ für $\|x\|$ die kanonische Norm. Das Beispiel einer von Null verschiedenen nilpotenten Matrix zeigt, daß hier im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

Lemma 13.4.3.15 (Polynomialer spektraler Abbildungssatz). *Gegeben ein Element x einer Banachringalgebra A und ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ ist das Spektrum des Bildes von x unter P das Bild des Spektrums von x unter P, in Formeln*

$$\sigma_A(P(x)) = P(\sigma_A(x))$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei P nicht das Nullpolynom. Gegeben $\lambda \in \mathbb{C}$ schreiben wir $P(X) - \lambda$ als Produkt von Linearfaktoren $P(X) - \lambda = \gamma(X - \mu_1) \ldots (X - \mu_r)$. Dann sind die μ_i genau die Stellen, an denen unser Polynom den Wert λ annimmt, in Formeln $P^{-1}(\lambda) = \{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$. Setzen wir nun x ein, so folgt $P(x) - \lambda = \gamma(x - \mu_1) \ldots (x - \mu_r)$. Hier ist nun die linke Seite nicht invertierbar alias $\lambda \in \sigma_A(P(x))$ genau dann, wenn einer der Faktoren auf der rechten Seite nicht invertierbar ist, wenn also $\mu \in \sigma_A(x)$ existiert mit $P(\mu) = \lambda$. □

Übungen

Übung 13.4.3.16. Gegeben eine beschränkte stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zeige man, daß das Spektrum des durch Multiplikation mit f erklärten Operators auf

$\mathrm{L}^p(\mathbb{R};\mathrm{d}x)$ genau der Abschluß des Bildes $\overline{f(\mathbb{R})}$ ist. Was ist die Operatornorm dieses Operators? Hinweis: 13.4.3.10.

Übung 13.4.3.17. Man zeige, daß für $a \in \mathbb{R}$ der durch $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$ gegebene Verschiebungsoperator $\tau_a : \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mathrm{d}x) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mathrm{d}x)$ als Spektrum die Einheitskreislinie hat im Fall $a \neq 0$ und die einpunktige Menge $\{1\}$ im Fall $a = 0$. Hinweis: 13.3.1.13 und 13.4.3.16.

Übung 13.4.3.18. Man gebe einen Operator mit Spektrum $\{0\} \cup [1,2]$ an.

Übung 13.4.3.19. Versehen wir $\mathbb{N}$ mit dem Zählmaß und betrachten den Operator T auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{N})$ mit $(Tf)(n) = f(n+1)$, so gehört die Null zum Spektrum von T, ist aber kein Eigenwert von T. Genauer zeige man, daß das Spektrum von T genau die abgeschlossene Einheitskreisscheibe ist. Andererseits zeige man, etwa mit Fouriertheorie, daß das Spektrum des in derselben Weise auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{Z})$ erklärten Operators der Einheitskreis ist. Anders als im endlichdimensionalen Fall kann das Spektrum eines Operator also größer werden, wenn wir ihn auf einen unter unserem Operator stabilen Teilraum einschränken.

Übung 13.4.3.20. Man zeige: Ist x ein invertierbares Element einer Banachringalgebra, so gilt $\sigma(x^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(x)\}$. Hinweis: $(x-\lambda)(\lambda x)^{-1} = (\lambda^{-1} - x^{-1})$.

Übung 13.4.3.21. Für jeden unitären Automorphismus x eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ ist das Spektrum von x als Element der Banachringalgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ enthalten in der Kreislinie $S^1 \subset \mathbb{C}$. Hinweis: Aus 13.4.3.11 folgt leicht, daß besagtes Spektrum in der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe enthalten sein muß. Dann beachte man, daß dasselbe für das Spektrum von x^{-1} gelten muß und wende 13.4.3.20 an.

13.4.4 Weitere Eigenschaften des Spektrums*

13.4.4.1. Mit Funktionentheorie vertraute Leser können auch noch einige weitere fundamentale Eigenschaften des Spektrums unschwer einsehen. Sie werden jedoch im weiteren Verlauf dieser Vorlesung nicht benötigt.

13.4.4.2 (**Funktionentheorie für banachwertige Funktionen**). Große Teile der Funktionentheorie lassen sich ohne wesentliche Änderungen auf Funktionen auf offenen Teilmengen der komplexen Zahlenebene mit Werten in komplexen Banachräumen verallgemeinern. Die komplex differenzierbaren Funktionen nennen wir wieder **holomorph**. Für stetige banachwertige Funktionen erklären wir Wegintegrale durch die übliche Formel 14.2.1.1 mithilfe unseres banachwertigen Integrals **??**. Mutatis mutandis zeigt man auch für holomorphe banachwertige Funktionen den Integralsatz von Cauchy 14.2.3.1, die Integralformel von Cauchy 14.3.1.1, den Satz von Liouville 14.3.1.6, sowie die Sätze über die Potenzreihenentwicklung 14.3.2.8 und Laurententwicklung 14.4.1.11, bei denen dann eben die Koeffizienten Vektoren unseres Banachraums werden. Vielfach heißen unsere ho-

lomorphen banachwertigen Funktionen auch **analytisch** oder genauer **komplex-analytisch**, da sie sich eben lokal in Potenzreihen entwickeln lassen. Umgekehrt liefern auch alle Potenzreihen auf ihren Konvergenzbereich holomorphe Funktionen.

Beispiel 13.4.4.3. Sei A eine komplexe Banachringalgebra und $x \in A$ ein Element. So ist die Abbildung $\mathbb{C}\backslash\sigma(A) \to A$ gegeben durch $\lambda \mapsto (\lambda - x)^{-1}$ holomorph. Halten wir in der Tat ein λ fest und setzen $a := \lambda - x$, so gilt

$$(a - z)^{-1} = (a(1 - a^{-1}z))^{-1} = a^{-1}(1 + a^{-1}z + a^{-2}z^2 + \ldots)$$

für $|z| < \|a^{-1}\|^{-1}$ und das ist eine Entwicklung in eine Potenzreihe.

Satz 13.4.4.4 (**Operatornorm und Spektralradius**). *In einer von Null verschiedenen komplexen Banachringalgebra A hat jedes Element $x \in A$ nichtleeres Spektrum und sein Spektralradius kann durch die kanonischen Normen seiner Potenzen ausgedrückt werden als*

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

Beweis. Für alle $n \geq 1$ gilt $\rho(x)^n = \rho(x^n) \leq \|x^n\|$ nach dem polynomialen spektralen Abbildungssatz 13.4.3.15 und der allgemeinen Abschätzung 13.4.3.14, also $\rho(x) \leq \sqrt[n]{\|x^n\|}$ für alle $n \geq 1$. Andererseits ist $\lambda \mapsto (\lambda - x)^{-1}$ nach 13.4.4.3 eine holomorphe A-wertige Funktion $\mathbb{C}\backslash\sigma(x) \to A$. Diese Funktion läßt sich sogar holomorph „durch Null nach ∞ fortsetzen“. Konkreter und in Formeln läßt sich die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times\backslash\{\mu \mid \mu^{-1} \in \sigma(x)\} & \to & A \\ \mu & \mapsto & (\mu^{-1} - x)^{-1} \end{array}$$

holomorph auf den Ursprung fortsetzen, indem man $\mu = 0$ die Null aus A zuordnet: Für hinreichend kleines μ, genauer $|\mu| \cdot \|x\| < 1$ wird diese Abbildung nämlich dargestellt durch die Potenzreihe

$$\begin{array}{rcl} (\mu^{-1} - x)^{-1} & = & \mu(1 - \mu x)^{-1} \\ & = & \mu + \mu^2 x + \mu^3 x^2 + \mu^4 x^3 + \ldots \end{array}$$

Da diese Potenzreihe auf jeder Kreisscheibe um den Ursprung konvergieren muß, auf der unsere Funktion holomorph ist, ist für alle $\lambda > \rho(x)$ die Folge $\lambda^{-n}\|x^n\|$ beschränkt und wir folgern $\lambda \geq \sqrt[n]{\|x^n\|}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Das zeigt die noch fehlende Abschätzung. Daß das Spektrum nicht leer ist, folgt mit der banachwertigen Variante des Satzes von Liouville: Da $(\lambda - x)^{-1}$ beschränkt ist, muß diese Funktion, wenn sie denn für alle λ definiert ist, bereits konstant sein. Eine Konstante hat aber unter der Annahme $A \neq 0$ stets nichtleeres Spektrum. $\square$

Übungen

Übung 13.4.4.5. Gegeben ein Banachraum V und ein abgeschlossener Teilraum $N \mathrel{\underset{\mathbb{A}}{\subset}} V$ wird V/N ein Banachraum mit der **Quotientennorm**

$$\|v + N\| := \inf\{\|v + n\| \mid n \in N\}$$

Gegeben eine Banachringalgebra A und ein abgeschlossenes Ideal $I \mathrel{\underset{\mathbb{A}}{\subset}} A$ ist auch A/I mit der Quotientennorm eine Banachringalgebra.

Übung 13.4.4.6. Jedes maximale Ideal einer Banachringalgebra ist abgeschlossen. Hinweis: Die Einheitengruppe einer Banachringalgebra ist offen.

Übung 13.4.4.7 (**Gelfand-Mazur**). Ist eine Banachringalgebra ein Schiefkörper, so ist die Einbettung von $\mathbb{C}$ ein Isomorphismus. Hinweis: Jedes Element hat nichtleeres Spektrum. Insbesondere induziert für den Quotienten einer Banachkringalgebra nach einem maximalen Ideal stets die Einbettung von $\mathbb{C}$ einen Isomorphismus mit $\mathbb{C}$.

Übung 13.4.4.8. Sei A eine Banachkringalgebra und $a \in A$ ein Element. Genau dann gehört $\lambda \in \mathbb{C}$ zu Spektrum von a, wenn es einen Ringalgebrenhomomorphismus $\varphi : A \to \mathbb{C}$ gibt mit $\varphi(a) = \lambda$. Hinweis: Man konstruiert φ, indem man ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ über $(a - \lambda 1)$ wählt, das nach 13.4.4.6 abgeschlossen sein muß, und dann folgert, daß nach Gelfand-Mazur 13.4.4.7 die offensichtlich Einbettung ein Isomorphismus $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}$ sein muß.

13.4.5 Spektren selbstadjungierter Operatoren

Proposition 13.4.5.1 (**Spektralradius und Operatornorm**). *Für jeden selbstadjungierten Operator T auf einem von Null verschiedenen Hilbertraum stimmen Spektralradius und Operatornorm überein, in Formeln*

$$\rho(T) = \|T\|$$

13.4.5.2. Unsere Formel zeigt zumindest für jeden selbstadjungierten Operator auf einem von Null verschiedenen Hilbertraum, daß sein Spektrum nicht leer sein kann. Später werden wir unsere Formel allgemeiner für „normale“ Operatoren zeigen.

Beweis. Sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unser Operator. Gegeben ein Vektor v der Länge Eins gilt $\|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv\rangle = \langle v, T^2 v\rangle \le \|v\|\|T^2 v\| = \|T^2 v\|$. Das zeigt $\|T\|^2 \le \|T^2\|$. Die andere Ungleichung gilt eh, womit wir für jeden selbstadjungierten Operator T folgern

$$\|T\|^2 = \|T^2\|$$

Da unser Raum $\mathcal{H}$ nicht Null ist, finden wir in $\mathcal{H}$ eine Folge von Einheitsvektoren v_n mit $\lim_{n\to\infty} \|T^2 v_n\| = \|T^2\|$. Wegen $\|T^2 v_n\| \le \|T\|\|Tv_n\| \le \|T\|^2 = \|T^2\|$ folgt $\lim_{n\to\infty} \|Tv_n\| = \|T\|$ zumindest falls $\|T\| \neq 0$, und im Fall $\|T\| = 0$ ist das eh klar. Wir setzen nun $c = \|T\|$ und behaupten, daß c^2 zum Spektrum von T^2 gehört. In der Tat gilt ja

$$\|(T^2 - c^2)v_n\|^2 = \langle v_n, (T^4 - 2c^2T^2 + c^4)v_n\rangle = \|T^2 v_n\|^2 - 2c^2\|Tv_n\|^2 + c^4$$

und das strebt für $n \to \infty$ offensichtlich gegen Null. Damit haben wir per definitionem $c^2 \in \sigma(T^2)$ und es folgt $\|T^2\| \le \rho(T^2)$ und, da wir die andere Abschätzung nach 13.4.3.14 bereits kennen, $\|T^2\| = \rho(T^2)$. Der spektrale Abbildungssatz 13.4.3.15 zeigt jedoch $\rho(T^2) = \rho(T)^2$ und wegen $\|T^2\| = \|T\|^2$ folgt die Behauptung. □

Proposition 13.4.5.3 (**Spektren selbstadjungierter Operatoren**). *Jeder selbstadjungierte Operator T auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ hat ein rein reelles Spektrum, in Formeln $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Beweis. Ist T selbstadjungiert, so gilt $\langle v, Tv\rangle = \langle Tv, v\rangle = \overline{\langle v, Tv\rangle}$ für alle $v \in \mathcal{H}$, mithin ist $\langle v, Tv\rangle$ stets reell. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ erhalten wir so wegen der offensichtlichen Abschätzung $|\operatorname{Im} z| \le |z|\ \forall z \in \mathbb{C}$ von der Mitte ausgehend die Ungleichungen

$$|\operatorname{Im}\lambda|\ \|v\|^2 \le |\langle (T-\lambda)v, v\rangle| \le \|(T-\lambda)v\|\ \|v\|$$

und damit $|\operatorname{Im}\lambda|\ \|v\| \le \|(T-\lambda)v\|$. Unter der Annahme $\lambda \notin \mathbb{R}$ ist demnach die Abbildung $(T-\lambda)$ injektiv und nach 13.4.5.5 hat sie sogar abgeschlossenes Bild und ihre auf diesem Bild definierte Umkehrabbildung ist stetig. Andererseits ist mit demselben Argument auch $(T-\lambda)^* = (T-\bar{\lambda})$ injektiv und damit hat $(T-\lambda)$ nach 13.2.8.12 dichtes Bild. Zusammen folgt, daß $(T-\lambda)$ invertierbar sein muß, so daß λ nicht zum Spektrum von T gehören kann. □

Lemma 13.4.5.4. *Eine stetige lineare Abbildung von einem Banachraum in einen normierten Vektorraum, die keinen Vektor verkürzt, hat abgeschlossenes Bild und ihre auf diesem Bild definierte Umkehrabbildung ist stetig.*

13.4.5.5. Dieselbe Aussage folgt offensichtlich auch, wenn es eine positive reelle Zahl gibt derart, daß unsere Abbildung jeden Vektor höchstens um diesen Faktor verkürzt.

Beweis. Ist allgemeiner $f : V \to W$ eine stetige lineare Abbildung von einem Banachraum in einen normierten Vektorraum und existiert eine Konstante $c > 0$ mit $\|f(v)\| \ge c\|v\| \quad \forall v \in V$, so ist das Bild von f abgeschlossen, denn jede konvergente Folge $f(v_0), f(v_1), \ldots$ im Bild $f(V)$ ist Cauchy, also ist auch $v_0, v_1, \ldots$ Cauchy in V und konvergiert gegen ein $v \in V$, und dann muß $f(v)$ der Grenzwert der $f(v_i)$ sein, der damit auch in $f(V)$ liegt. □

Lemma 13.4.5.6 (Anwenden stetiger Funktionen auf Operatoren). *Gegeben ein selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ gibt es genau einen stetigen $\mathbb{C}$-linearen Ringhomomorphismus*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\sigma(T)) & \to & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ f & \mapsto & f(T) \end{array}$$

vom Ring aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf dem Spektrum von T in den Ring aller beschränkten Operatoren unseres Hilbertraums, der die Einbettung $\sigma(T) \hookrightarrow \mathbb{R}$ auf den Operator T wirft, und dieser Ringhomomorphismus wirft konjugierte Funktionen auf adjungierte Operatoren, in Formeln $\bar{f}(T) = f(T)^*$.

13.4.5.7. Die Stetigkeit ist hier gemeint in Bezug auf die Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathcal{C}(\sigma(T))$ und die Operatornorm auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Schreiben wir im folgenden $f(T)$ für eine stetige auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion, so meinen wir, daß der Operator T im Sinne des vorhergehenden Lemmas in ihre Einschränkung $f|_{\sigma(T)}$ eingesetzt werden soll. Ich habe dieser Aussage nur den Status eines Lemmas gegeben, da sie sich als eine direkte Konsequenz aus dem Spektralsatz 13.4.7.8 ergeben wird und unter diesem Blickwinkel nur ein Schritt zum Beweis dieses zentralen Resultats ist.

Beweis. Der Teilring $\mathbb{C}[t] \subset \mathcal{C}(\sigma(T))$ aller Einschränkungen von Polynomfunktionen liegt nach Weierstraß 11.3.2.13 dicht im Raum aller stetigen Funktionen bezüglich der Norm der gleichmäßigen Konvergenz. Gegeben ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ haben wir nach dem polynomialen spektralen Abbildungssatz $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$, und hat P reelle Koeffizienten, so ist auch $P(T)$ selbstadjungiert und es folgt $\|P(T)\| = \|P|_{\sigma(T)}\|_\infty$ wegen der Gleichheit von Norm und Spektralradius bei selbstadjungierten Operatoren 13.4.5.1 auf einem von Null verschiedenen Hilbertraum. Ist P komplex, so können wir immer noch $P = A + \mathrm{i}B$ schreiben mit reellen Polynomen A, B und folgern

$$\|P(T)\| \le \|A(T)\| + \|B(T)\| \le \|A|_{\sigma(T)}\|_\infty + \|B|_{\sigma(T)}\|_\infty \le 2\|P|_{\sigma(T)}\|_\infty$$

Der offensichtliche Ringhomomorphismus $\mathbb{C}[X] \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $P \mapsto P(T)$ faktorisiert also über einen stetigen Ringhomomorphismus $\mathbb{C}[t] \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, und dessen eindeutig bestimmte stetige Ausdehnung auf $\mathcal{C}(\sigma(T))$ nach 13.2.4.17 ist die gesuchte Abbildung und ist wieder ein Ringhomomorphismus aufgrund der Stetigkeit der Multiplikationen. Ist $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom, so ist $P(T)$ offensichtlich adjungiert zu $\bar{P}(T)$. Im allgemeinen ist $f(T)$ Grenzwert in Bezug auf die Operatornorm gewisser $P(T)$ und die Behauptung $\bar{f}(T) = f(T)^*$ folgt ohne weitere Schwierigkeiten. $\square$

Proposition 13.4.5.8 (Spektraler Abbildungssatz). *Ist T ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum und $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ stetig, so hat $f(T)$ das Spektrum*

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$$

Beweis. Gehört $\lambda \in \mathbb{C}$ nicht zum Bild von f, so ist $f - \lambda$ invertierbar in $\mathcal{C}(\sigma(T))$ und damit $f(T) - \lambda\,\mathrm{id}$ invertierbar in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und wir haben $\lambda \notin \sigma(f(T))$. Das zeigt von der behaupteten Gleichheit die Inklusion $\subset$. Gehört $\lambda \in \mathbb{C}$ zum Bild von f, sagen wir $\lambda = f(x)$ für $x \in \sigma(T)$, so ist f der gleichmäßige Grenzwert einer Folge $P_0, P_1, \ldots$ von Polynomen mit $P_n(x) = \lambda$. Also ist $P_n(T) - \lambda\,\mathrm{id}$ nicht invertierbar für alle n und damit auch $f(T) - \lambda\,\mathrm{id}$ nicht invertierbar nach 13.4.3.12. Das zeigt die andere Inklusion $\supset$. □

Beweis von 13.4.2.14. Gegeben ein Vektor $v \in \mathcal{H}$ betrachten wir die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_!(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \langle v, f(T)v\rangle \end{array}$$

Um den Riesz'schen Darstellungssatz 13.4.6.2 anwenden zu können, gilt es zu zeigen, daß unter dieser Abbildung nichtnegative reelle Funktionen nichtnegative reelle Zahlen liefern. Das ist aber klar, da jede nichtnegative reelle Funktion ein Quadrat ist, so daß wir haben $\langle v, f(T)v\rangle = \|\sqrt{f}(T)v\|^2$. Es gibt nach dem Darstellungssatz von Riesz 13.4.6.2 also ein und sogar genau ein Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ mit

$$\int f(t)\ \mu\langle t\rangle = \langle v, f(T)v\rangle$$

für alle stetigen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger. Für dieses Maß μ hat die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathcal{C}_!(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{H} \\ & f & \mapsto & f(T)v \end{array}$$

dann die Eigenschaft $\|\varphi(f)\|^2 = \int |f|^2\mu$. Damit faktorisiert sie erstens über das Bild der offensichtlichen Abbildung $\mathcal{C}_!(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu)$ und läßt sich nach 13.2.4.12 zweitens von diesem Bild zu einer unitären Einbettung $\varphi : \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ erweitern und wir haben ein mögliches Paar (μ, φ) gefunden. Um zu sehen, daß es auch das einzig mögliche Paar ist, müssen wir nur im Beweis einige Schritte rückwärts gehen: Gegeben ein Paar (μ, φ) haben wir ja für jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ offensichtlich $\varphi(P) = P(T)v$ und folglich $\int P\mu = \langle v, P(T)v\rangle$. Ein kompakt getragenes Borelmaß auf $\mathbb{R}$ wird jedoch nach dem Riesz'schen Darstellungssatz 13.4.6.2 und dem Approximationssatz von Weierstraß 11.3.2.9 durch die Kenntnis der Integrale aller Polynome nach diesem Maß bereits eindeutig festgelegt. □

13.4.5.9. Wir können nun den Satz über die lokale Struktur unitärer Darstellungen der reellen Zahlengeraden 13.4.1.4 zeigen im Fall, daß alle Vektoren unserer Darstellung $(\mathcal{H}, \rho)$ differenzierbar sind. In der Tat ist dann der infinitesimale Erzeuger S unserer Darstellung schiefadjungiert und folglich $\mathrm{i}S$ selbstadjungiert. Dann aber finden wir nach 13.4.2.14 genau ein Paar (μ, φ) bestehend aus einem kompakt getragenen Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ und einer unitären Einbettung $\varphi : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ mit $\varphi(1) = v$, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu) & \hookrightarrow & \mathcal{H} \\ {\scriptstyle (x\cdot)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{i}S} \\ \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu) & \hookrightarrow & \mathcal{H} \end{array}$$

zum Kommutieren bringt. Damit kommutiert das Diagramm auch, wenn wir beide Vertikalen mit $-\mathrm{i}t$ multiplizieren und darauf $\exp$ anwenden, und das zeigt die in 13.4.1.4 behauptete Existenz von (μ, φ) in diesem Fall. Der Nachweis der Eindeutigkeit im vorliegenden Fall, also immer noch unter der Annahme, daß alle Vektoren unserer Darstellung differenzierbar sind, mag dem Leser überlassen bleiben.

Definition 13.4.5.10. Gegeben ein positiv semidefiniter selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum erklären wir

$$\sqrt{T}$$

als den positiv semidefiniten Operator, der daraus durch Anwenden der Funktion $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ entsteht. Das ist erlaubt, da nach 13.4.5.13 für das Spektrum gilt $\sigma(T) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Definition 13.4.5.11. Gegeben ein beschränkter Operator A auf einem Hilbertraum ist A^*A selbstadjungiert und positiv semidefinit und wir setzen

$$|A| := \sqrt{A^*A}$$

Übungen

Übung 13.4.5.12. Eine stetige Abbildung von einem vollständigen metrischen Raum in einen weiteren metrischen Raum, die keinen Abstand verkleinert, ist injektiv mit abgeschlossenem Bild, und die auf dem Bild definierte Umkehrabbildung ist gleichmäßig stetig.

Übung 13.4.5.13. Ein beschränkter selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt **positiv semidefinit**, wenn gilt

$$\langle Tv, v \rangle \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{H}$$

Man zeige, daß das Spektrum eines positiv semidefiniten Operators stets in der nichtnegativen reellen Zahlengeraden enthalten ist. Hinweis: Man orientiere sich am Beweis von 13.4.5.3.

Übung 13.4.5.14. Genau dann besteht das Spektrum eines selbstadjungierten Operators aus einem einzigen Punkt λ, wenn unser Operator die Multiplikation mit dem Skalar λ auf einem von Null verschiedenen Hilbertraum ist. Hinweis: 13.4.5.1.

Übung 13.4.5.15. Jeder beschränkte Operator A auf einem Hilbertraum besitzt eine eindeutige Darstellung als Produkt

$$A = DP$$

mit P positiv semidefinit und D einer partiellen Isometrie im Sinne von 4.1.12.29 mit $\ker D = (\operatorname{im} P)^\perp$. In einer solchen Darstellung gilt stets $P = |A|$. Man nennt diese Darstellung auch die **Polarzerlegung** von A. Ebenso besitzt er auch eine eindeutige Darstellung als Produkt $A = P'D'$ mit P' selbstadjungiert positiv semidefinit und D' einer partiellen Isometrie derart, daß gilt $\operatorname{im} D' = (\ker P')^\perp$. Hinweis: 4.1.12.30.

Übung 13.4.5.16. Gegeben ein Maßraum (X, μ) und eine beschränkte meßbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ ist das Multiplizieren mit g ein selbstadjungierter Operator T auf $\mathrm{L}^2(X; \mu)$. Gegeben $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist $f(T)$ ist dann das Multiplizieren mit der Funktion $f \circ g$.

Übung 13.4.5.17. Gegeben ein kommutatives Diagramm von Hilberträumen und stetigen linearen Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "T"'] & \mathcal{H}' \arrow[d, "T'"] \\ \mathcal{H} \arrow[r, "A"] & \mathcal{H}' \end{tikzcd}$$

mit T, T' selbstadjungiert kommutiert für jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ auch das entsprechende Diagramm mit $f(T)$, $f(T')$ statt T, T', in Formeln $AT = T'A \;\Rightarrow\; Af(T) = f(T')A$.

Übung 13.4.5.18. Wird ein selbstadjungierter Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ auf einem endlichdimensionalen Hilbertraum in einer geeigneten Basis gegeben durch eine Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n)$, so wird $f(T)$ in derselben Basis gegeben durch die Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(f(x_1), \ldots, f(x_n))$.

Übung 13.4.5.19. Gegeben ein selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ verschwindet das Spektralmaß μ jedes Vektors auf dem Komplement des Spektrums unseres Operators, in Formeln $\mu(\mathbb{R} \backslash \sigma(T)) = 0$. In anderen Worten paßt also unsere kanonische Einbettung in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}_!(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}(\sigma(T)) & \to & \mathcal{H} \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{L}^2(\sigma(T); \mu) & \hookrightarrow & \mathcal{H} \end{array}$$

Die obere Horizontale wird dabei durch $f \mapsto f(T)v$ gegeben.

13.4.6 Riesz'scher Darstellungssatz

Definition 13.4.6.1. Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}_!(X,\mathbb{R})$ der reelle Vektorraum aller stetigen Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Eine Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_!(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ heißt **nichtnegativ**, wenn sie jeder nichtnegativen Funktion eine nichtnegative reelle Zahl zuordnet.

Satz 13.4.6.2 (**Darstellungssatz von Riesz**). *Ist X ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum, so liefert das Bilden des Integrals eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{Borelmaße auf } X\} & \xrightarrow{\sim} & \{\textit{Nichtnegative Linearformen auf } \mathcal{C}_!(X,\mathbb{R})\} \\ \mu & \mapsto & \left(f \mapsto \int f\mu\right) \end{array}$$

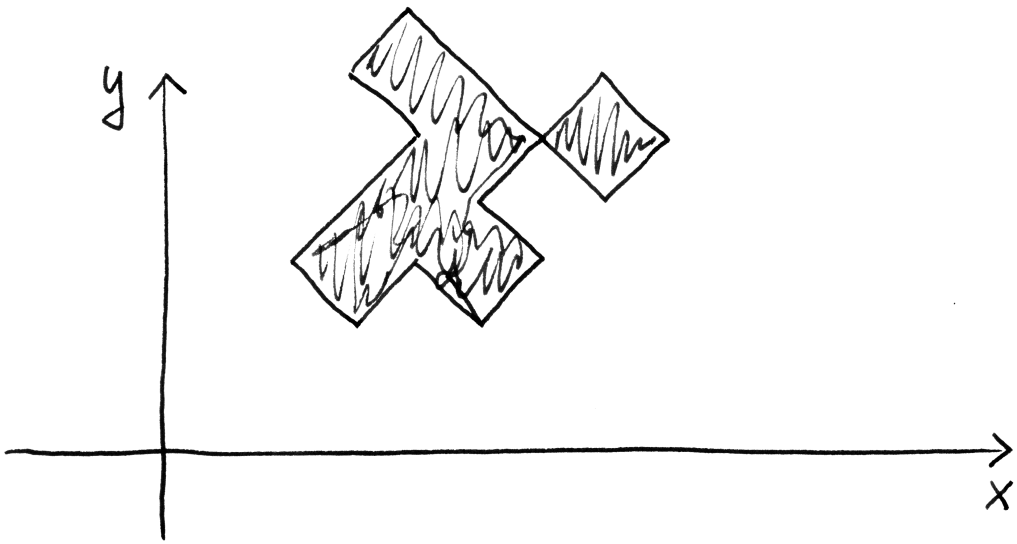
Vorschau 13.4.6.3. Dieser Satz gilt allgemeiner für jeden lokal kompakten abzählbar basierten Hausdorffraum X, vergleiche 15.4.2.4.

13.4.6.4. Auf der linken Seite sind nichtnegative Borelmaße gemeint, die also durchaus auch den Wert ∞ annehmen dürfen, nur eben nicht auf Kompakta. Statt nichtnegativen reell-linearen Abbildungen $\Lambda : \mathcal{C}_!(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mag man gleichbedeutend komplexlineare Abbildungen $\Lambda : \mathcal{C}_!(X) \to \mathbb{C}$ betrachten, die nichtnegativ sind in dem Sinne, daß sie jeder nichtnegativen reellen Funktion eine nichtnegative reelle Zahl zuordnen.

13.4.6.5. Für jedes Kompaktum $K \subset X$ in unserem endlichdimensionalen reellen Raum X ist die Einschränkung einer nichtnegativen Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_!(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ auf den Raum $\mathcal{C}_K(X,\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen mit Träger in K stetig für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz. In der Tat gibt es offensichtlich eine stetige nichtnegative Funktion $h \in \mathcal{C}_!(X,\mathbb{R})$, die auf unserem Kompaktum K konstant Eins ist. Für $f \in \mathcal{C}_K(X,\mathbb{R})$ gilt dann $-\|f\|_\infty\, h \le f \le \|f\|_\infty\, h$ und Anwenden von Λ liefert $|\Lambda(f)| \le \Lambda(h)\, \|f\|_\infty$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $X = \mathbb{R}^n$. Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die Gegenrichtung. Sicher wird die σ-Algebra der Borelmengen von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ erzeugt durch den Mengenring aller endlichen Vereinigungen von Produkten endlicher Intervalle. Sicher wird sie auch erzeugt durch den Mengenring $\mathcal{D}$, der daraus durch Anwenden eines beliebigen Vektorraumautomorphismus von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ entsteht. Wählen wir nun unseren Automorphismus so, daß er keine der Koordinatenhyperebenen von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ auf eine Koordinatenhyperebene abbildet, dann ist für $D \in \mathcal{D}$ offensichtlich das Integral seiner charakteristischen Funktion $[D]$ nach der letzten Koordinate $\int [D]\,\mathrm{d}y$ stetig mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^n$ und wir können für jede nichtnegative Linearform Λ wie oben die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_\Lambda : & \mathcal{D} & \to & [0,\infty) \\ & D & \mapsto & \Lambda\left(\int [D]\,\mathrm{d}y\right) \end{array}$$



Eine Menge des Mengenrings $\mathcal{D}$ von Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, der durch Drehung um $45°$ aus dem Mengenring aller endlichen Vereinigungen von Produkten endlicher Intervalle entsteht.

betrachten. Nun zeigt der Satz von Dini 12.4.1.14 zusammen mit 13.4.6.5, daß $\tilde{\mu}$ ein Prämaß auf $\mathcal{D}$ ist. Nach dem Maßerweiterungssatz 13.1.2.11 besitzt dies Prämaß genau eine Fortsetzung zu einem Borelmaß $\tilde{\mu}$ auf $X \times \mathbb{R}$. Schließlich erklären wir ein Borelmaß $\mu = \mu_\Lambda$ auf X, indem wir für jede Borelmenge $B \subset X$ setzen

$$\mu(B) = \tilde{\mu}(B \times [0,1])$$

Damit haben wie eine Abbildung $\Lambda \mapsto \mu$ in die Gegenrichtung konstruiert und müssen nur noch zeigen, daß unsere beiden Abbildungen zueinander invers sind. Wir beginnen mit der Situation $\nu \mapsto \Lambda \mapsto \tilde{\mu} \mapsto \mu$ und zeigen die Gleichheit von Maßen $\mu = \nu$. Nach Fubini stimmen die Maße $\tilde{\mu}$ und $\nu \boxtimes \mathrm{d}y$ auf $\mathcal{D}$ überein und nach dem Maßerweiterungssatz 13.1.2.11 sind sie folglich gleich. Damit folgt dann für jede Borelmenge $B \subset X$ sofort $\nu(B) = \tilde{\mu}(B \times [0,1]) = \mu(B)$. Nun gehen wir umgekehrt von Λ aus, betrachten also die Situation $\Lambda \mapsto \tilde{\mu} \mapsto \mu \mapsto \Gamma$ und zeigen die Gleichheit von Linearformen $\Gamma = \Lambda$. Es reicht zu zeigen, daß beide Seiten auf allen nichtnegativen Funktionen $f \in \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$ denselben Wert $\Gamma(f) = \Lambda(f)$ annehmen. Nun läßt sich jedoch das offene durch $X \times \{0\}$ und den Graphen von f begrenzte Gebiet

$$G = \{(x,y) \mid 0 < y < f(x)\}$$

als die Vereinigung einer aufsteigenden Folge $D_0 \subset D_1 \subset \ldots$ von Mengen aus $\mathcal{D}$ darstellen. Nach dem Satz von Dini 12.4.1.14 gilt dann $\int [D_r]\,\mathrm{d}y \to f$ gleichmäßig und folglich $\Lambda(\int [D_r]\,\mathrm{d}y) \to \Lambda(f)$ für $r \to \infty$. Da $\tilde{\mu}$ per definitionem invariant ist unter Verschiebung in der letzten Koordinate, haben wir nach 13.1.7.29 notwendig $\tilde{\mu} = \mu \boxtimes \mathrm{d}y$. Also strebt $\Lambda(\int [D_r]\,\mathrm{d}y)$ auch gegen

$$\tilde{\mu}(G) = (\mu \boxtimes \mathrm{d}y)(G) = \int f(x)\ \mu\langle x \rangle = \Gamma(f) \qquad \square$$

Übungen

Übung 13.4.6.6. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum und sei weiter $\Lambda : \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine Linearform mit der Eigenschaft, daß für alle Kompakta $K \subset X$ ihre Restriktion auf $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ stetig ist für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz. So ist Λ die Differenz zweier nichtnegativer Linearformen. Hinweis: Für $f \in \mathcal{C}_!(X)$ mit $f \geq 0$ setze man

$$\Lambda_+(f) = \sup\{\Lambda(g) \mid 0 \leq g \leq f\}$$

und zeige, daß das endlich ist mit $\Lambda_+(f+h) = \Lambda_+(f) + \Lambda_+(h)$ für $f, h \geq 0$ und $\Lambda_+(af) = a\Lambda_+(f)$ für $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Gegeben $f \in \mathcal{C}_!(X)$ setze man $\Lambda_+(f) = \Lambda_+(f_+) - \Lambda_+(f_-)$ für $f = f_+ - f_-$ die Zerlegung in einen positiven und einen negativen Teil wie in 13.1.6.1 und zeige, daß $\Lambda_+ : \mathcal{C}_!(X) \to \mathbb{R}$ nichtnegativ und linear ist. Schließlich zeige man, daß auch $\Lambda_+ - \Lambda$ nichtnegativ ist.

13.4.7 Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

Definition 13.4.7.1. Seien $(X, \mathcal{M})$ ein Meßraum und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ein auf X definiertes **$\mathcal{H}$-teilraumwertiges Maß** ist eine Abbildung E, die jeder meßbaren Menge $M \in \mathcal{M}$ einen abgeschlossenen Teilraum $E(M) \not\subset \mathcal{H}$ zuordnet derart, daß gilt:

1. Für je zwei disjunkte Mengen M, M' aus $\mathcal{M}$ sind die zugehörigen Teilräume orthogonal, in Formeln $M \cap M' = \emptyset \;\Rightarrow\; E(M) \perp E(M')$;
2. Für jede abzählbare Familie $(M_\nu)_{\nu \in N}$ von meßbaren Mengen mit Vereinigung M ist das Erzeugnis der $E(M_\nu)$ ein dichter Teilraum von $E(M)$.

13.4.7.2. Aus der ersten Bedingung folgt über den Fall $M = M' = \emptyset$ insbesondere $E(\emptyset) = 0$.

13.4.7.3. Das Konzept eines teilraumwertigen Maßes scheint mir besonders gut verständlich. Bei der expliziten Arbeit erweist sich jedoch das gleichwertige Konzept eines projektorwertigen Maßes als praktischer, das wir als nächstes diskutieren. Die Äquivalenz beider Konzepte dürfen sie als Übung 13.4.7.19 selbst ausarbeiten.

Definition 13.4.7.4. Seien $(X, \mathcal{M})$ ein Meßraum und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Abbildung $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt ein auf X definiertes **projektorwertiges Maß**, wenn die Operatoren $\Phi(M)$ alle selbstadjungiert und idempotent sind, also nach 13.2.8.11 orthogonale Projektoren auf abgeschlossene Teilräume, und wenn darüber hinaus gilt:

1. Aus $M \cap M' = \emptyset$ folgt $\Phi(M) \circ \Phi(M') = 0$;
2. Für jede aufsteigende Folge meßbarer Mengen $M_0 \subset M_1 \subset \ldots$ mit Vereinigung M gilt $\Phi(M_n)v \to \Phi(M)v \;\; \forall v \in \mathcal{H}$.

Ein projektorwertiges Maß mit der zusätzlichen Eigenschaft $\Phi(X) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ nennen wir eine **Teilung der Identität von $\mathcal{H}$**.

13.4.7.5. Gegeben ein Meßraum $(X, \mathcal{M})$ bezeichne $\mathcal{L}^\infty(X)$ den Vektorraum aller beschränkten meßbaren Abbildungen $X \to \mathbb{C}$ mit der Supremumsnorm. Man erkennt leicht, daß die meßbaren Stufenfunktionen darin einen dichten Teilraum bilden.

Lemma 13.4.7.6 (Integration nach projektorwertigen Maßen). *Gegeben ein Meßraum $(X, \mathcal{M})$, ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ und ein projektorwertiges Maß $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gibt es genau eine stetige lineare Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}^\infty(X) & \to & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ f & \mapsto & \int f\Phi = \int f(x)\Phi\langle x\rangle \end{array}$$

vom Raum aller beschränkten meßbaren Funktionen auf X in den Raum aller beschränkten Operatoren auf unserem Hilbertraum mit der Eigenschaft, daß der charakteristischen Funktion jeder meßbaren Menge der entsprechende Projektor zugeordnet wird, in Formeln $\int [M]\Phi = \Phi(M)\ \forall M \in \mathcal{M}$.

Beweis. Auf meßbaren Stufenfunktionen $s : X \to \mathbb{C}$ muß unsere Abbildung, wenn es sie denn überhaupt gibt, gegeben sein durch die Formel

$$\int s\Phi = \sum_{z\in\mathbb{C}} z \cdot \Phi(s^{-1}(z))$$

Wir haben gewonnen, sobald wir zeigen können, daß mit dieser Regel für jede Stufenfunktion s die Abschätzung $\|\int s\Phi\| \leq \|s\|_\infty$ gilt, da sich unsere Abbildung dann nach 13.2.4.17 und 13.4.7.5 auf genau eine Weise stetig und linear vom Raum aller Stufenfunktionen auf den Raum aller beschränkten meßbaren Funktionen fortsetzen läßt. Sei also s eine meßbare Stufenfunktion, die wir etwa als $s = c_1[M_1] + \ldots + c_n[M_n]$ schreiben können mit $M_1, \ldots, M_n$ paarweise disjunkt und meßbar. Es gilt, für alle $v \in \mathcal{H}$ zu zeigen

$$\left\|\left(\int s\Phi\right) v\right\| \leq \|s\|_\infty \|v\|$$

oder ausgeschrieben

$$\|c_1\Phi(M_1)v + \ldots + c_n\Phi(M_n)v\| \leq \|s\|_\infty \|v\|$$

Nun bilden jedoch die $v_i = \Phi(M_i)v$ zusammen mit einem weiteren w eine Zerlegung $v = v_1 + \ldots + v_n + w$ von v in eine Summe von paarweise orthogonalen Vektoren. Durch Quadrieren beider Seiten sehen wir dann, daß unsere Behauptung äquivalent ist zu der offensichtlichen Aussage

$$\|c_1v_1\|^2 + \ldots + \|c_nv_n\|^2 \leq \|s\|_\infty^2(\|v_1\|^2 + \ldots + \|v_n\|^2 + \|w\|^2) \qquad \square$$

Definition 13.4.7.7. Ein projektorwertiges Maß auf den Borelmengen eines topologischen Raums heißt **kompakt getragen**, wenn es Kompakta gibt, deren Komplement der Nulloperator zugeordnet wird.

Satz 13.4.7.8 (**Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren**).

1. *Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ erhalten wir eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \left\{\begin{array}{c}\textit{Auf } \mathbb{R} \textit{ definierte kompakt getragene}\\ \textit{Teilungen der Identität von } \mathcal{H}\end{array}\right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{\begin{array}{c}\textit{Selbstadjungierte}\\ \textit{Operatoren auf } \mathcal{H}\end{array}\right\} \\ \Phi & \mapsto & \int x\Phi\langle x\rangle \end{array}$$

2. *Für die dem selbstadjungierten Operator T entsprechende Teilung der Identität Φ_T ist das Spektrum $\sigma(T)$ von T das kleinste Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ mit $\Phi_T(K) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.*

3. *Gegeben eine stetige lineare Abbildung von Hilberträumen $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ und selbstadjungierte Operatoren $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ mit $AT = T'A$ gilt für die zugehörigen projektorwertigen Maße Φ, Φ' und jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ die Identität*

$$A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$$

13.4.7.9. In diesem Satz ist $\mathbb{R}$ mit seiner durch die Borelmengen gegebenen Struktur eines Meßraums zu verstehen. Die folgende Übung 13.4.7.25 zeigt, daß die durch einen selbstadjungierten Operator definierte Teilung der Identität die Zerlegung in Eigenräume 4.1.12.38 verallgemeinert. Die letzte Aussage 13.4.7.8.3 verallgemeinert dann unsere Erkenntnis 4.3.2.5, nach der A zumindest schon mal Eigenräume von T in Eigenräume von T' zum selben Eigenwert abbilden muß.

Beispiel 13.4.7.10. Sei $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2([0,1];\lambda)$ und $T = (x\cdot)$ der Operator $f \mapsto Tf$ mit $(Tf)(x) = xf(x)$. So kann die zugehörige Teilung der Identität $\Phi = \Phi_T$ beschrieben werden durch die Vorschrift, daß $\Phi(M)$ die Multiplikation mit der charakteristischen Funktion von M oder besser von $(M \cap [0,1])$ ist, in Formeln $\Phi(M) = (([M] \cap [0,1])\cdot) : \mathrm{L}^2([0,1];\lambda) \to \mathrm{L}^2([0,1];\lambda)$.

Ergänzung 13.4.7.11. Wir werden später auch zeigen, daß dieser Satz immer noch gilt, wenn wir darin „selbstadjungiert“ durch „unitär“ und $\mathbb{R}$ durch S^1 ersetzen. Noch allgemeiner werden wir „normale“ Operatoren auf einem Hilbertraum definieren als Operatoren, die mit ihrem Adjungierten kommutieren, und zeigen, daß der obige Satz auch dann noch gilt, wenn wir darin überall „selbstadjungiert“ durch „normal“ und $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzen. Und schließlich will ich auch noch erwähnen, daß der erste Teil immer noch gilt, wenn man oben links die Forderung „kompakt getragen“ fallen läßt und oben rechts auch sogenannte „unbeschränkte Operatoren“ im Sinne von 13.4.12.5 zuläßt.

Ergänzung 13.4.7.12. Der besonders einfache Fall kompakter selbstadjungierter Operatoren wird in 15.4.5.2 unabhängig behandelt.

13.4.7.13. Der Beweis des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren wird uns bis zum Ende des anschließenden Abschnitts beschäftigen. Zunächst einmal zeigt 13.4.7.14 unter anderem, daß die im Satz erklärte Abbildung in der Tat jedem kompakt getragenen projektorwertigen Maß auf $\mathbb{R}$ einen selbstadjungierten Operator zuordnet. Dann konstruieren wir in 13.4.8.5 eine Abbildung $T \mapsto \Phi_T$ in die Gegenrichtung und zeigen in 13.4.8.7 und 13.4.8.9, daß unsere beiden Konstruktionen zueinander invers sind. Der zweite Teil des Satzes folgt aus 13.4.7.15

und der letzte Teil aus 13.4.8.10 mit der in 13.4.8.5 gegebenen Beschreibung von Φ_T.

Lemma 13.4.7.14 (Integration nach projektorwertigem Maß, Eigenschaften). *Gegeben $(X, \mathcal{M})$ ein Meßraum, $f, g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ beschränkt und meßbar, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein projektorwertiges Maß gilt*

1. $\int \bar{f}\Phi = (\int f\Phi)^*$
2. $\int fg\ \Phi = (\int f\Phi) \circ (\int g\Phi)$
3. $\| \int f\Phi \| \leq \|f\|_\infty$

Beweis. Das alles ist für Stufenfunktionen leicht explizit zu sehen und folgt dann durch Grenzübergang im allgemeinen. Die Details können dem Leser überlassen bleiben. Man beachte, daß in Teil 2 das Produkt der Funktionen f und g gemeint ist, nicht etwa ihre Verknüpfung. □

Lemma 13.4.7.15 (Spektrum eines Integrals). *Ist Φ eine auf $\mathbb{C}$ definierte kompakt getragene Teilung der Identität eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ und $T = \int x\Phi\langle x\rangle$, so ist $\sigma(T)$ das kleinste Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ mit $\Phi(K) = \mathrm{id}_\mathcal{H}$.*

Beweis. Ist $K \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum mit $\Phi(K) = \mathrm{id}_\mathcal{H}$, so ist nach 13.4.7.14 für $\lambda \notin K$ der Operator $\int_K (x-\lambda)^{-1}\Phi\langle x\rangle$ invers zu $\int_K (x-\lambda)\Phi\langle x\rangle = T - \lambda$ und es folgt $\lambda \notin \sigma(T)$. Das zeigt $\sigma(T) \subset K$. Andererseits ist für $\lambda \notin \sigma(T)$ der Operator $T - \lambda$ invertierbar, folglich existiert $c > 0$ derart, daß $T - \lambda$ von Null verschiedene Vektoren höchstens um den Faktor c verkürzt. Alle von Null verschiedenen Vektoren aus dem Bild von $\Phi(\mathrm{B}(\lambda; c/2))$ werden jedoch von $T - \lambda$ nach 13.4.7.14 mindestens um den Faktor $c/2$ verkürzt, da die Funktion $(x - \lambda)$ auf $\mathrm{B}(\lambda; c/2)$ eben beschränkt ist durch $c/2$, woraus wir sofort $\Phi(\mathrm{B}(\lambda; c/2)) = 0$ folgern. Damit erhalten wir dann auch leicht $\Phi(H) = 0$ für jedes Kompaktum aus dem Komplement von $\sigma(T)$. Da nun dies Komplement wie jede offene Teilmenge der komplexen Zahleneben als eine abzählbare Vereinigung von Kompakta dargestellt werden kann, folgt $\Phi(\mathbb{C}\backslash\sigma(T)) = 0$. □

Lemma 13.4.7.16 (Integral und Grenzübergang vertauschen). *Seien $(X, \mathcal{M})$ ein Meßraum, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein projektorwertiges Maß. Konvergiert eine Folge f_n meßbarer und simultan beschränkter Funktionen punktweise gegen eine Funktion f, so gilt $\left(\int f_n\Phi\right) v \to \left(\int f\Phi\right) v$ für alle $v \in \mathcal{H}$.*

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f = 0$ annehmen. Gegeben $\varepsilon > 0$ bilden dann die

$$X_n = X_n^\varepsilon = \{x \in X \mid |f_\nu(x)| \leq \varepsilon \quad \forall \nu \geq n\}$$

eine aufsteigende Folge meßbarer Mengen mit Vereinigung X. Aus den Eigenschaften eines projektorwertigen Maßes folgt $\Phi(X_n)v \to \Phi(X)v$ für alle $v \in \mathcal{H}$. Nun schreiben wir

$$\int f_n \Phi = \int_{X_n} f_n \Phi + \int_{X \setminus X_n} f_n \Phi$$

Das erste Integral liefert einen Operator der Operatornorm $\leq \varepsilon$, und für C eine simultane Schranke der $\|f_n\|_\infty$ liefert das zweite Integral einen Operator der Operatornorm $\leq C$, der mit v dasselbe tut wie mit $\Phi(X)v - \Phi(X_n)v$. Gegeben v sinkt der Betrag von $\left(\int f_n \Phi\right) v$ also für hinreichend großes n unter $\varepsilon\|v\| + \varepsilon$, und da das für jedes positive ε gilt, folgt die Behauptung. □

Übungen

Übung 13.4.7.17. Seien $(X, \mathcal{M})$ ein Meßraum, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein projektorwertiges Maß. Gegeben $v \in \mathcal{H}$ und $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ gilt

$$\left\langle v, \left(\int f \Phi\right) v \right\rangle = \int f \langle v, \Phi v \rangle$$

für das in 13.4.7.20 definierte Maß $\langle v, \Phi v \rangle$ auf $(X, \mathcal{M})$.

Übung 13.4.7.18 (**Funktorialität des Integrals**). Ist $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ eine stetige lineare Abbildung von Hilberträumen und sind auf einem Meßraum $(X, \mathcal{M})$ projektorwertige Maße Φ in $\mathcal{H}$ und Φ' in $\mathcal{H}'$ gegeben mit der Eigenschaft $A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A \quad \forall M \in \mathcal{M}$ oder in Kurzschreibweise $A \circ \Phi = \Phi' \circ A$, so gilt für jede beschränkte meßbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ die Identität

$$A \circ \left(\int f \Phi\right) = \left(\int f \Phi'\right) \circ A$$

Übung 13.4.7.19. Sei $(X, \mathcal{M})$ ein Meßraum und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Wir erhalten zueinander inverse Bijektionen zwischen teilraumwertigen Maßen und projektorwertigen Maßen vermittels der Zuordnungen $E \mapsto \Phi_E$ mit $\Phi_E(M)$ der orthogonalen Projektion auf $E(M)$ und $\Phi \mapsto E_\Phi$ mit $E_\Phi(M) = \operatorname{im} \Phi(M)$ dem Bild des Projektors $\Phi(M)$.

Übung 13.4.7.20. Ist $(X, \mathcal{M})$ ein Meßraum, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein projektorwertiges Maß, so ist für jeden Vektor $v \in \mathcal{H}$ die Zuordnung $M \mapsto \langle v, \Phi(M)v \rangle$ ein nichtnegatives endliches Maß $\langle v, \Phi v \rangle$ auf $(X, \mathcal{M})$, und stimmen bei zwei projektorwertigen Maßen für alle Vektoren v diese nichtnegativen Maße überein, so stimmen die besagten projektorwertigen Maße bereits selbst überein. Hinweis: Gegeben ein orthogonaler Projektor alias selbstadjungierter Idempotenter P auf einem Hilbertraum gilt $\ker P = \{v \mid \langle v, Pv \rangle = 0\}$.

Übung 13.4.7.21. Man folgere aus dem Spektralsatz: Ist $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum und $\Phi = \Phi_T$ die zugehörige Teilung der Identität, so gilt für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Formel $f(T) = \int f\Phi$. Hinweis: Man beginne mit dem polynomialen Fall.

Übung 13.4.7.22. Man folgere aus dem Spektralsatz: Ist μ ein kompakt getragenes Borelmaß auf $\mathbb{R}$ und T die Multiplikation mit x auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu)$, so ist der Projektor $\Phi(M)$ der zugehörigen Teilung Φ der Identität für eine Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ gerade die Multiplikation mit der charakteristischen Funktion $[M]$ von M und der Operator $\int f\Phi$ für $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ ist schlicht die Multiplikation $(f\cdot) : \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu)$. Hinweis: Man berechne $(\int x\Phi\langle x\rangle)(h)$ für h quadratintegrierbar vermittels einer Approximation der Identität auf einem geeigneten Kompaktum von $\mathbb{R}$ durch immer feinere Stufenfunktionen.

Übung 13.4.7.23. Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit einer Teilung Φ der Identität und f beschränkt und meßbar und $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom haben wir

$$P\left(\int f\Phi\right) = \int (P \circ f)\Phi$$

Übung 13.4.7.24. Seien $(X, \mathcal{M})$ ein Meßraum, $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ beschränkt und meßbar, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine Teilung der Identität. So gilt für alle $v \in \mathcal{H}$ die Abschätzung

$$\left\|\left(\int f\Phi\right) v\right\| \geq (\inf_{x\in X} |f(x)|)\, \|v\|$$

Übung 13.4.7.25. Man folgere aus dem Spektralsatz: Ist $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum und $(e_i)_{i\in I}$ eine Hilbertbasis von $\mathcal{H}$ aus Eigenvektoren von T, sagen wir mit $Te_i = \lambda_i e_i$, so hat für die im Sinne von 13.4.7.8 zugehörige Zerlegung $\Phi = \Phi_T$ der Identität und jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ der zugehörige Projektor $\Phi(M)$ als Bild den Abschluß der Summe aller Eigenräume zu Eigenwerten aus M, in Formeln

$$\mathrm{im}(\Phi(M)) = \overline{\langle e_i \mid \lambda_i \in M\rangle}$$

13.4.8 Beweis des Spektralsatzes

13.4.8.1. Das folgende Diagramm faßt den Aufbau des sogenannten „Funktionalkalküls“ in der hier gegebenen Darstellung zusammen:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(\mathbb{R}) \arrow[dd] & & \mathcal{C}_!(\mathbb{R}) \arrow[ll, hook'] \arrow[rr, hook] \arrow[d] & & \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \arrow[dl] \arrow[dd] \\
 & & & \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu_v) \arrow[ddd] & & \\
\mathbb{C}[X] \arrow[uur, hook] \arrow[r, two heads] \arrow[ddrr, bend right] & \mathbb{C}[t] \arrow[r, hook] \arrow[ddr] & \mathcal{C}(\sigma(T)) \arrow[rrr, hook] \arrow[ddr] \arrow[dr] & & & \mathcal{L}^\infty(\sigma(T)) \arrow[dl] \arrow[ddl, bend left] \\
 & & & \mathrm{L}^2(\sigma(T);\mu_v) \arrow[d, "\varphi_v"] & & \\
 & & & \mathcal{H} & & \\
 & & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \arrow[ur, "\cdot v"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Wir gehen aus von der Vertikale links außen, dem Einsetzen unseres selbstadjungierten Operators T in Polynome aus $\mathbb{C}[X]$. Nach dem polynomialen spektralen Abbildungssatz und der Gleichheit von Norm und Spektralradius faktorisiert sie über den Ring $\mathbb{C}[t]$ aller polynomialen Funktionen auf dem Spektrum, und zwar durch eine in Bezug auf die sup-Norm stetige Abbildung, die sich von dort mithilfe des Approximationssatzes von Weierstraß stetig auf den Ring $\mathcal{C}(\sigma(T))$ aller stetigen Funktionen auf dem Spektrum fortsetzen läßt. Gegeben ein Vektor $v \in \mathcal{H}$ führt diese Fortsetzung zu einer nichtnegativen Linearform $f \mapsto \langle v, f(T)v\rangle$ auf $\mathcal{C}_!(\mathbb{R})$ und mit dem Riesz'schen Darstellungssatz zum sogenannten Spektralmaß μ_v unseres Vektors und wieder durch stetige Fortsetzung zur kanonischen Einbettung $\varphi : \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu_v) \hookrightarrow \mathcal{H}$, die im Diagramm durch die Verknüpfung des mit φ_v bezeichneten Pfeils mit dem darüberstehenden Pfeil dargestellt ist, der eh einen Isomorphismus darstellt. Diese kanonischen Einbettungen schließlich verwenden wir dann, um auch das Einsetzen unseres Operators in meßbare beschränkte Funktionen f zu erklären durch die Vorschrift $f(T)v := \varphi_v(f)$, wie wir im folgenden genauer ausführen werden.

Definition 13.4.8.2 (Anwenden meßbarer Funktionen auf Operatoren). Gegeben ein selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und eine beschränkte meßbare Funktion $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ auf seinem Spektrum erklären wir

eine Abbildung

$$f(T) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

durch die Vorschrift $f(T)v := \varphi_v(f)$ für $\varphi_v : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu_v) \hookrightarrow \mathcal{H}$ die kanonische Einbettung zu v im Sinne von 13.4.2.15. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da nach 13.4.5.19 das Spektralmaß μ_v jedes Vektors $v \in \mathcal{H}$ auf dem Komplement des Spektrums von T verschwindet. Schreiben wir $f(T)$ für eine meßbare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, so setzen wir implizit voraus, daß $f|_{\sigma(T)}$ beschränkt sein soll, und meinen das Anwenden dieser Einschränkung auf T.

13.4.8.3. Sobald wir den Spektralsatz zur Verfügung haben, können wir $f(T)$ auch als $f(T) = \int f(x)\Phi_T\langle x\rangle$ schreiben, wie in 13.4.8.7 ausgeführt wird, und dann die Aussagen des anschließenden Lemmas 13.4.8.4 aus 13.4.7.21, 13.4.7.14 und 13.4.7.16 folgern. Das anschließende Lemma ist also nur für den Beweis des Spektralsatzes von Bedeutung. Das Anwenden geeigneter Funktionen auf Operatoren ist auch als **Funktionalkalkül** bekannt.

Lemma 13.4.8.4 (Eigenschaften des Funktionalkalküls). *Sei T ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und sei $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ meßbar und beschränkt. So gilt:*

1. *Ist f stetig, so stimmt unser eben in 13.4.8.2 definiertes $f(T)$ mit unserem in 13.4.5.6 durch polynomiale Approximation definierten $f(T)$ überein;*
2. *Die Abbildung $f(T)$ ist linear und stetig und für ihre Operatornorm gilt $\|f(T)\| \le \|f\|_\infty$;*
3. *Die adjungierte Abbildung zu $f(T)$ ist $f(T)^* = \bar{f}(T)$;*
4. *Ist $g : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ eine weitere meßbare und beschränkte Abbildung, so haben wir $(f \cdot g)(T) = f(T) \circ g(T)$;*
5. *Konvergiert eine Folge f_n meßbarer und simultan beschränkter Funktionen punktweise gegen f, so gilt $f_n(T)v \to f(T)v$ für alle $v \in \mathcal{H}$.*

Beweis. 1. Das folgt sofort aus den Definitionen, wir hatten ja unsere kanonische Einbettung φ gerade konstruiert als die stetige Fortsetzung der Abbildung $\mathcal{C}_!(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}$ mit $f \mapsto f(T)v$.

2. Die Abschätzung $\|f(T)v\| \le \|f\|_\infty \|v\|$ folgt auch sofort aus den Definitionen, aber die Linearität unserer Abbildung $f(T)$ muß noch gezeigt werden. Klar ist immerhin, daß gegeben eine Folge f_n beschränkter meßbarer Funktionen auf $\sigma(T)$, die für das Spektralmaß μ eines Vektors v im Hilbertraum $\mathrm{L}^2(\sigma(T); \mu)$ gegen eine weitere beschränkte meßbare Funktion auf $\sigma(T)$ konvergiert, notwendig gilt

$$f_n(T)v \to f(T)v$$

Um nun die Additivität $f(T)(v+w) = f(T)v + f(T)w$ zu zeigen, suchen wir eine Folge $f_n \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ stetiger Funktionen mit $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, die fast überall punktweise gegen f konvergiert, und zwar fast überall bezüglich der Summe der Spektralmaße der Vektoren v, w und $v + w$. Die Behauptung folgt dann im Grenzwert aus der Linearität der $f_n(T)$ für die stetigen Funktionen f_n. In derselben Weise zeigen wir $f(T)(\lambda v) = \lambda f(T)(v)$ und damit die Linearität von $f(T)$.

3. Es gilt für je zwei Vektoren v, w zu zeigen $\langle f(T)v, w\rangle = \langle v, \bar{f}(T)w\rangle$. Für stetige f wissen wir das bereits aus 13.4.5.6. Um es im allgemeinen zu zeigen, suchen wir eine Folge $f_n \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ stetiger Funktionen mit $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, die fast überall punktweise gegen f konvergiert, und zwar bezüglich der Summe der Spektralmaße von v und w. Es folgt $\langle f_n(T)v, w\rangle = \langle v, \bar{f}_n(T)w\rangle$ für alle n und $f_n(T)v \to f(T)v$ sowie $\bar{f}_n(T)w \to \bar{f}(T)w$ und damit die Behauptung.

4. Es reicht, für alle $v, w \in \mathcal{H}$ die Formel $\langle (f \cdot g)(T)v, w\rangle = \langle g(T)v, \bar{f}(T)w\rangle$ zu zeigen. Für stetige f, g folgt das aus 13.4.5.6. Um es im allgemeinen zu zeigen, suchen wir Folgen $f_n, g_n \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ von stetigen Funktionen mit $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ und $\|g_n\|_\infty \leq \|g\|_\infty$, die fast überall punktweise gegen f beziehungsweise g konvergiert, und zwar bezüglich der Summe der Spektralmaße von v und w, und gehen zum Grenzwert über.

5. Das folgt mit dem Satz über dominierte Konvergenz aus den Definitionen. □

Lemma 13.4.8.5 (Identitätsteilung zu einem selbstadjungierten Operator). *Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit einem selbstadjungierten Operator T sind die Operatoren $[M](T)$ für Borelmengen $M \subset \mathbb{R}$ die Projektoren einer kompakt getragenen Teilung Φ_T der Identität von $\mathcal{H}$.*

13.4.8.6. Hier meint $[M] : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die charakteristische Funktion der Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ und $[M](T)$ den Operator auf $\mathcal{H}$, der daraus im Rahmen unseres Funktionalkalküls durch Anwenden auf T entsteht.

Beweis. Die charakteristische Funktion $[M]$ von M ist reellwertig und idempotent, in Formeln $[M]^2 = [M]$, folglich ist $[M](T)$ selbstadjungiert und idempotent. Aus $M \cap M' = \emptyset$ folgt weiter $[M] \cdot [M'] = 0$ und nach 13.4.8.4 damit $[M](T) \circ [M'](T) = 0$. Als nächstes bemerken wir, daß nach 13.4.8.4.5 für jede aufsteigende Folge $M_0 \subset M_1 \subset \ldots$ von meßbaren Mengen mit Vereinigung M und für alle $v \in \mathcal{H}$ die Folge der $[M_n](T)v$ gegen $[M](T)v$ konvergiert. Schließlich bemerken wir noch, daß die Definition 13.4.8.2 für die konstante Funktion 1 auf dem Spektrum die Gleichung $[\sigma(T)](T) = \mathrm{id}$ liefert und sind fertig. □

Lemma 13.4.8.7 (Rekonstruktion eines Operators aus seiner Identitätsteilung). *Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit einem selbstadjungierten Operator T und*

zugehöriger Teilung der Identität Φ_T im Sinne von 13.4.8.5 haben wir stets

$$T = \int x\Phi_T\langle x\rangle$$

13.4.8.8. Der Beweis zeigt sogar allgemeiner für jede meßbare beschränkte Funktion $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ die Identität

$$f(T) = \int f(x)\Phi_T\langle x\rangle$$

Sobald der Spektralsatz also einmal bewiesen ist, wird das Anwenden meßbarer Funktionen auf selbstadjungierte Operatoren sehr einfach.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß beide Seiten auf jedem Vektor $v \in \mathcal{H}$ denselben Wert annehmen. Ist $\varphi : \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ die kanonische Einbettung zu v, so folgt aus den Definitionen die Gleichung

$$\varphi(s) = \left(\int s(x)\Phi_T\langle x\rangle\right)(v)$$

erst für die charakteristische Funktion s jeder Borelmenge, dann für jede meßbare Stufenfunktion und dann wegen der Stetigkeit beider Seiten in Bezug auf die Supremumsnorm für jede beschränkte meßbare Funktion auf $\sigma(T)$, insbesondere auch für die Funktion $s(x) = x$. □

Lemma 13.4.8.9. *Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit einer kompakt getragenen auf $\mathbb{R}$ definierten Teilung Φ der Identität und zugehörigem selbstadjungierten Operator $T = \int x\Phi\langle x\rangle$ haben wir stets*

$$\Phi = \Phi_T$$

Beweis. Es gilt zu zeigen $[M](T) = \Phi(M)$ für jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$. Da hier beide Seiten orthogonale Projektionen sind, reicht es zu zeigen

$$\langle v, [M](T)v\rangle = \langle v, \Phi(M)v\rangle$$

für alle $v \in \mathcal{H}$. Hier sind nun aber beide Seiten kompakt getragene Borelmaße, weshalb wir nach 13.4.6.2 und 13.4.6.5 und 11.3.2.9 nur zeigen müssen, daß sie für jede Polynomfunktion P dasselbe Integral liefern. Die linke Seite ist per definitionem das Spektralmaß μ des Vektors v für den Operator T, für μ das Maß auf der linken Seite haben wir also

$$\int P(t)\mu\langle t\rangle = \langle v, P(T)v\rangle$$

Das Maß ν auf der rechten Seite hinwiederum hat die Eigenschaft

$$\int P(t)\nu\langle t\rangle = \left\langle v, \left(\int P\Phi\right) v \right\rangle$$

erst einmal für jede meßbare Stufenfunktion P aber dann wegen der Stetigkeit beider Seiten unter der Norm gleichmäßiger Konvergenz in P sogar für jede beschränkte meßbare Funktion P und damit auch für jede Polynomfunktion P. Damit folgt die Behauptung dann aus 13.4.7.23. □

Übungen

Übung 13.4.8.10 (**Funktorialität des Funktionalkalküls**). Gegeben ein kommutatives Diagramm von Hilberträumen und stetigen linearen Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "T"'] & \mathcal{H}' \arrow[d, "T'"] \\ \mathcal{H} \arrow[r, "A"] & \mathcal{H}' \end{tikzcd}$$

mit T, T' selbstadjungiert kommutiert für jede beschränkte meßbare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ auch das entsprechende Diagramm mit $f(T)$, $f(T')$ statt T, T', in Formeln $AT = T'A \;\Rightarrow\; Af(T) = f(T')A$. Hinweis: Man erinnere sich an 13.4.5.17 und finde für $v \in \mathcal{H}$ eine Folge stetiger durch $\|f\|_\infty$ beschränkter Funktionen, die bezüglich der Summe der Spektralmaße von v und Av fast überall gegen f strebt.

Übung 13.4.8.11. (Vorbereitung für 13.4.11.7.) Gegeben ein selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit zugehöriger Teilung der Identität Φ_T kann für jede abgeschlossene Teilmenge $C \not\subset \mathbb{R}$ das Bild des zugehörigen Projektors beschrieben werden als

$$\begin{aligned} \operatorname{im} \Phi_T(C) &= \{v \in \mathcal{H} \mid \inf_{\lambda \in C} \|(T-\lambda)v\| = 0\} \\ &= \{v \in \mathcal{H} \mid \mu_v(\mathbb{R} \setminus C) = 0 \text{ für } \mu_v \text{ das Spektralmaß von } v\} \end{aligned}$$

13.4.9 Spektralzerlegung unitärer Darstellungen

Satz 13.4.9.1 (**Spektralzerlegung unitärer Darstellungen**). *Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ haben wir eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Auf } \mathbb{R} \textit{ definierte Teilungen} \\ \textit{der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Unitäre Darstellungen} \\ \textit{von } \mathbb{R} \textit{ in } \mathcal{H} \end{array} \right\} \\ \Phi & \mapsto & \left(\rho : t \mapsto \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, \Phi\langle x\rangle\right) \end{array}$$

13.4.9.2. Gegeben eine unitäre Darstellung $(\mathcal{H}, \rho)$ von $\mathbb{R}$ gibt es also genau eine Teilung $\Phi = \Phi_\rho$ der Identität von $\mathcal{H}$ auf $\mathbb{R}$ mit

$$\rho(t) = \int_{x \in \mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, \Phi\langle x \rangle \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Diese Teilung der Identität nennen wir das **zu unserer Darstellung gehörige projektorwertige Maß** und die zugehörigen $\Phi(M)$ nennen wir **Spektralprojektoren**. In der Hoffnung, dadurch die zugrundeliegende Struktur deutlicher zu machen, formuliere ich auch noch eine koordinatenfreie Variante des Satzes, deren Beweis dem Leser überlassen sei: Gegeben eine Geradengruppe G mit Charaktergruppe $\hat{G}$ und ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ haben wir eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Auf } \hat{G} \text{ definierte Teilungen} \\ \text{der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Unitäre Darstellungen} \\ \text{von } G \text{ in } \mathcal{H} \end{array} \right\} \\ \Phi & \mapsto & \left(\rho : g \mapsto \int \chi(g)\Phi\langle\chi\rangle\right) \end{array}$$

Diese Aussage gilt auch für die additive Gruppe eines beliebigen endlichdimensionalen reellen Vektorraums, ja sogar für die Gruppen S^1, $\mathbb{Z}$ und in voller Allgemeinheit für jede „abzählbar basierte lokal kompakte Hausdorff'sche kommutative topologische Gruppe“, aber in dieser Allgemeinheit werden wir sie nicht beweisen.

Beweis. Wir beginnen mit dem Nachweis der Surjektivität. Sind alle Vektoren unserer Darstellung differenzierbar, so existiert nach 13.4.1.18 ein selbstadjungierter Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit $\rho(t) = \exp(t\mathrm{i}T)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ist $\Phi = \Phi_T$ die nach 13.4.7.8 zu T gehörige Teilung der Identität, in Formeln $T = \int x\Phi\langle x\rangle$, so folgt mit 13.4.7.21 angewandt auf $f(x) = \exp(\mathrm{i}tx)$ sofort

$$\rho(t) = \exp(t\mathrm{i}T) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, \Phi\langle x \rangle$$

und wir haben bereits ein mögliches Φ gefunden. Im allgemeinen finden wir mit 13.4.10.2 und dem Bilden sukzessiver orthogonaler Komplemente in unserer Darstellung eine Familie $(\mathcal{H}_\iota, \rho_\iota)_{\iota \in I}$ von paarweise orthogonalen Unterdarstellungen, deren Summe dicht liegt und in denen jeweils jeder Vektor differenzierbar ist. Für jedes $\iota \in I$ finden wir dann nach dem bereits Bewiesenen eine auf $\mathbb{R}$ definierte Teilung Φ_ι der Identität von $\mathcal{H}_\iota$ mit

$$\rho_\iota(t) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, \Phi_\iota\langle x \rangle$$

Die Summe dieser teilraumwertigen Maße im Sinne von 13.4.9.3 ist dann eine Teilung Φ der Identität von $\mathcal{H}$ mit

$$\rho(t)v = \left(\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, \Phi\langle x \rangle\right) v$$

erst für alle v aus einem der $\mathcal{H}_\iota$, aber dann wegen der Linearität und Stetigkeit beider Seiten sogar für alle $v \in \mathcal{H}$. Das zeigt die Surjektivität. Um die Eindeutigkeit von Φ zu zeigen, beachten wir zunächst, daß die in 13.4.7.20 erklärten Maße $\langle \Phi v, v \rangle$ für $v \in \mathcal{H}$ unser Φ bereits eindeutig festlegen. Nach 13.4.7.17 entspricht aber die Fouriertransformierte des Maßes $\langle \Phi v, v \rangle$ unter der Identifikation $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{R}}$, $t \mapsto (x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx})$ gerade der Funktion $t \mapsto \langle \rho(t)v, w \rangle$, und nach 13.3.3.15 wird ein reelles Maß durch seine Fouriertransformierte bereits eindeutig festgelegt. □

Lemma 13.4.9.3. *Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$, eine Familie $(\mathcal{H}_\iota)_{\iota \in I}$ von paarweise orthogonalen Teilräumen mit dichter Summe und Teilungen Φ_ι der Identität auf jedem $\mathcal{H}_\iota$ erhalten wir eine Teilung der Identität auf $\mathcal{H}$ durch die Vorschrift*

$$\operatorname{im} \Phi(M) = \overline{\sum_{\iota \in I} \operatorname{im} \Phi_\iota(M)}$$

Beweis. Dem Leser überlassen. Man nutze 13.4.7.19. □

Definition 13.4.9.4. Ein Homomorphismus zwischen Darstellungen $(\mathcal{H}, \rho)$ und $(\mathcal{H}', \rho')$, auch genannt ein **Verflechtungsoperator**, ist eine stetige lineare Abbildung $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ mit $A\rho(t) = \rho'(t)A$ für alle Elemente t der dargestellten Gruppe.

Satz 13.4.9.5 (Funktorialität der Spektralzerlegung). *Gegeben unitäre Darstellungen von $\mathbb{R}$ in Hilberträumen $\mathcal{H}$ beziehungsweise $\mathcal{H}'$ sind die Verflechtungsoperatoren $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ genau die stetigen linearen Abbildungen mit der Eigenschaft, daß für die zugehörigen projektorwertigen Maße Φ, Φ' und jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ gilt*

$$A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$$

Beweis. Daß alle stetigen linearen Abbildungen mit dieser Eigenschaft Verflechtungsoperatoren sind, scheint mir offensichtlich. Sei nun umgekehrt A ein Verflechtungsoperator und $M \subset \mathbb{R}$ eine Borelmenge. Natürlich reicht es, $A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$ auf einem dichten Teilraum von $\mathcal{H}$ zu zeigen. Mithilfe von 13.4.10.2 können wir uns also auf den Fall beschränken, daß unsere beiden Darstellungen jeweils ganz aus differenzierbaren Vektoren bestehen. Dann gilt jedoch für die infinitesimalen Erzeuger S, S' offensichtlich $A \circ S = S' \circ A$ und die Behauptung folgt aus der Funktorialität des Spektralmaßes im Fall selbstadjungierter Operatoren 13.4.7.8.3. □

Beweis von Satz 13.4.1.4 zur lokalen Struktur unitärer Darstellungen. Gegeben eine unitäre Darstellung $(\rho, \mathcal{H})$ von $\mathbb{R}$ betrachten wir die zugehörige Teilung Φ der Identität und zu jedem Vektor $v \in \mathcal{H}$ das Maß $\mu = \langle \Phi v, v \rangle$ nach 13.4.7.20 und die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{H} \\ & f & \mapsto & \left(\int f \Phi\right) v \end{array}$$

Nach 13.4.7.17 gilt hier $\|\varphi(f)\|^2 = \int |f|^2\mu$. Folglich faktorisiert φ über das Bild von $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu)$ und läßt sich nach 13.2.4.17 von diesem Bild stetig zu einer unitären Einbettung $\varphi : \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ ausdehnen. Die Formel $\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \cdot f) = \rho(t)(\varphi(f))$ folgt für alle Funktionen f mit beschränktem meßbaren Repräsentanten aus 13.4.7.14.2 und dann auf ganz $\mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu)$ durch stetige Fortsetzung. Damit haben wir die Existenz eines Paars (μ, φ) mit den in 13.4.1.4 behaupteten Eigenschaften nachgewiesen. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, gehen wir von einem möglichen Paar (μ, φ) aus. Aus 13.4.9.5 und 13.4.9.6 folgt

$$\Phi(M) \circ \varphi = \varphi \circ ([M]\cdot)$$

und durch Anwenden beider Seiten auf die konstante Funktion 1 und Bilden des Skalarprodukts mit v weiter $\langle v, \Phi(M)v\rangle = \mu(M)$, womit die Eindeutigkeit von μ bereits gezeigt wäre. Andererseits zeigt die vorige Gleichung auch $\varphi([M]) = \Phi(M)v$, und das legt φ wegen der Linearität auf meßbaren Stufenfunktionen und dann wegen der Stetigkeit auf allen quadratintegrierbaren Funktionen fest. □

Übungen

Übung 13.4.9.6. Gegeben ein Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ und die unitäre Darstellung von $\mathbb{R}$ durch Automorphismen von $\mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu)$, bei der $t \in \mathbb{R}$ durch Multiplikation mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$ operiert, ist für das zugehörige projektorwertige Maß Φ der einer Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ zugeordnete Projektor $\Phi(M)$ gerade die Multiplikation mit der charakteristischen Funktion $[M]$ von M.

Übung 13.4.9.7. Betrachten wir auf $\mathbb{R}$ das Lebesguemaß $\mathrm{d}t$ und die unitäre Darstellung von $\mathbb{R}$ auf $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mathrm{d}t)$ durch das Verschieben von Funktionen, $\rho(t)f = \tau_t f$, deren Stetigkeit in 13.2.6.10 gezeigt wurde, so hat für das zugehörige projektorwertige Maß Φ der einer Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ zugeordnete Projektor $\Phi(M)$ die Gestalt $\mathcal{F} \circ ([M]\cdot) \circ \mathcal{F}^{-1}$ für $\mathcal{F}$ die wie in 13.3.1.2 normalisierte Fouriertransformation.

13.4.10 Operationen von Maßen auf Darstellungen

13.4.10.1. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und Φ eine auf $\mathbb{R}$ definierte Teilung der Identität von $\mathcal{H}$ und $\rho : t \mapsto \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, \Phi\langle x\rangle$ die dazu wie in 13.4.9.1 gebildete unitäre Darstellung von $\mathbb{R}$ in $\mathcal{H}$. Wenn wir einmal von unserem Satz 13.4.9.1 ausgehen, so kann man leicht sehen, daß für $M \subset \mathbb{R}$ beschränkt und meßbar das Bild des zugehörigen Projektors $(\operatorname{im}\Phi(M)) \subset \mathcal{H}$ jeweils ganz aus differenzierbaren Funktionen besteht und daß der infinitesimale Erzeuger dort durch das Integral $\int \mathrm{i}t\Phi\langle t\rangle$ beschrieben werden kann. Wir werden nun für jede unitäre Darstellung der Gruppe $\mathbb{R}$ oder allgemeiner einer Geradengruppe G in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und jedes

komplexe Maß $\mu \in \mathrm{M}(\mathbb{R})$ beziehungsweise $\mu \in \mathrm{M}(G)$ einen beschränkten Operator

$$\mu* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

einführen, die „Operation durch Konvolution“, von der wir später die Formel $\mu* = \int \mu^\wedge(x)\Phi\langle x\rangle$ zeigen werden. Die Konvolution mit μ wird also mit dem Integral seiner Fouriertransformierten $\mu^\wedge \in \mathcal{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R})$ nach dem zu unserer Darstellung gehörigen projektorwertigen Maß übereinstimmen. Obwohl das alles noch nicht bewiesen ist, zeigt es uns doch schon eine Möglichkeit, auch ohne die Existenz von Φ zu kennen, gewisse Teilräume „mit Frequenzbeschränkungen“ zu definieren. Beim Beweis des folgenden technischen Lemmas, das wir bei unserer Herleitung der Spektralzerlegung unitärer Darstellungen von $\mathbb{R}$ gebraucht und bereits im Vorgriff verwendet haben, ist dann der wesentliche Punkte der Nachweis, daß diese Teilräume aus differenzierbaren Vektoren bestehen und daß ihre Vereinigung dicht liegt.

Lemma 13.4.10.2. *Es ist möglich, simultan in jeder unitären Darstellung $\mathcal{H}$ von $\mathbb{R}$ eine aufsteigende Folge von unitären Unterdarstellungen $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_1 \subset \ldots$ so zu wählen, daß (1) in jedem $\mathcal{H}_i$ jeder Vektor differenzierbar ist, daß (2) deren Vereinigung dicht liegt, und daß (3) jeder Verflechtungsoperator $\mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ auch $\mathcal{H}_i$ nach $\mathcal{H}'_i$ abbildet.*

Beweis. In 13.4.10.8 werden wir zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $C \subset\!\!\!

Ist $\mu = a_1\delta_{t(1)} + \ldots + a_n\delta_{t(n)}$ eine Linearkombination von Diracmaßen, so gilt mit dieser Notation $\mu * v = a_1 t(1) * v + \ldots + a_n t(n) * v$. In der Tat ist unsere Operation von Maßen sicher eine bilineare Abbildung $\mathrm{M}(G) \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

Lemma 13.4.10.5 (Stetigkeit der Konvolution). *Gegeben eine unitäre Darstellung $\mathcal{H}$ einer Geradengruppe G gilt für jedes komplexe Maß $\mu \in \mathrm{M}(G)$ und jeden Vektor $v \in \mathcal{H}$ die Abschätzung*

$$\|\mu * v\| \leq \|\mu\| \cdot \|v\|$$

mit $\|\mu\|$ der Variationsnorm unseres Maßes aus 13.3.2.31.

Beweis. Für alle $w \in \mathcal{H}$ haben wir

$$|\langle w, \mu * v\rangle| = \left|\int \langle w, t * v\rangle \; \mu\langle t\rangle\right| \leq \int |\langle w, t * v\rangle| \; |\mu|\langle t\rangle \leq \|\mu\| \cdot \|v\| \cdot \|w\|$$

Setzen wir hier $w = \mu * v$, so ergibt sich die Behauptung sofort. □

Lemma 13.4.10.6 (Assoziativität der Konvolution). *Gegeben eine unitäre Darstellung $\mathcal{H}$ einer Geradengruppe G und Maße $\mu, \nu \in \mathrm{M}(G)$ und ein Vektor $v \in \mathcal{H}$ gilt stets*

$$\mu * (\nu * v) = (\mu * \nu) * v$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß beide Seiten mit jedem Vektor $w \in \mathcal{H}$ dasselbe Skalarprodukt haben. Wir finden nun nach den Definitionen

$$\begin{aligned}
\langle w, \mu * (\nu * v)\rangle &= \int \langle w, t * (\nu * v)\rangle \; \mu\langle t\rangle \\
&= \int \langle (-t) * w, \nu * v\rangle \; \mu\langle t\rangle \\
&= \int \left(\int \langle (-t) * w, s * v\rangle \; \nu\langle s\rangle\right) \; \mu\langle t\rangle \\
\langle w, (\mu * \nu) * v\rangle &= \int \langle w, x * v\rangle (\mu * \nu)\langle x\rangle \\
&= \int \langle w, (s+t) * v\rangle (\mu \boxtimes \nu)\langle s, t\rangle
\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt so aus dem Satz von Fubini. □

Lemma 13.4.10.7. *Sei $\mathcal{H}$ eine unitäre Darstellung einer Geradengruppe G und $\mu_n \in \mathrm{M}(G)$ eine Folge von nichtnegativen Maßen mit $\mu_n(G) = 1$ und der Eigenschaft, daß für jede offene Umgebung U des neutralen Elements $0 \in G$ fast alle unserer Maße auf $G \setminus U$ verschwinden. So gilt für jeden Vektor $v \in \mathcal{H}$ die Formel*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n * v = v$$

Beweis. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Umgebung U des neutralen Elements mit $\|t * v - v\| \leq \varepsilon$ für alle $t \in U$. Falls n so groß ist, daß gilt $\mu_n(G \setminus U)$, so haben wir demnach

$$|\langle w, \mu_n * v - v\rangle| = \left|\int \langle w, t * v - v\rangle \; \mu_n\langle t\rangle\right| \leq \int |\langle w, t * v - v\rangle| \; \mu_n\langle t\rangle \leq \varepsilon\|w\|$$

□

Definition 13.4.10.8. Gegeben eine Geradengruppe G notieren wir die Inverse der abstrakten Fouriertransformation $\mathcal{M}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\hat{G})$ von den Schwartzmaßen in die Schwartzfunktionen aus 13.3.2.13 als $h \mapsto h^\vee$. Gegeben eine unitäre Darstellung $\mathcal{H}$ von G und eine abgeschlossene Teilmenge $C \not\subset \hat{G}$ setzen wir

$$\mathcal{H}_C = \{v \in \mathcal{H} \mid h^\vee * v = 0 \text{ für alle } h \in \mathcal{S}(\hat{G}) \text{ mit } h|_C = 0\}$$

Nach 13.4.10.5 ist das ein abgeschlossener Teilraum und wegen der Kommutativität der Konvolution ist er sogar eine Unterdarstellung. Offensichtlich folgt aus $C \subset D$ auch $\mathcal{H}_C \subset \mathcal{H}_D$.

13.4.10.9. Im folgenden will ich versuchen klar zu machen, daß man sich diesen Raum denken kann als die Menge aller Vektoren, die „keine spektralen Anteile zu Charakteren außerhalb von C besitzen“.

Beispiel 13.4.10.10. Gegeben $f \in \mathcal{S}(\hat{G})$ mit Träger in C gilt $f^\vee * \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_C$. In der Tat haben wir ja $h^\vee * (f^\vee * v) = (h^\vee * f^\vee) * v = (h \cdot f)^\vee * v = 0$ für alle $h \in \mathcal{S}(\hat{G})$ mit $h \cdot f = 0$.

Lemma 13.4.10.11. *Für jede unitäre Darstellung $\mathcal{H}$ einer Geradengruppe G und jedes Kompaktum $C \subset \hat{G}$ besteht $\mathcal{H}_C$ aus differenzierbaren Vektoren.*

Beweis. Wir behaupten zunächst für alle $v \in \mathcal{H}_C$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\hat{G})$ mit $\varphi|_C = 1$ die Formel

$$\varphi^\vee * v = v$$

Aus den Definitionen folgt schon mal, daß für jede weitere derartige Funktion ϕ gilt $\phi^\vee * v = \varphi^\vee * v$. Es reicht demnach, unsere Formel für ein derartiges φ zu zeigen, das wir konstant Eins auf einem C und den Ursprung umfassenden Intervall annehmen dürfen, so daß insbesondere für $r \geq 1$ auch $\varphi_r = \varphi \circ (r^{-1}\cdot)$ auf C konstant Eins ist. Damit hängt also $\varphi_r^\vee * v$ gar nicht von $r \geq 1$ ab. Unsere Formel ist mithin gezeigt, sobald wir nachweisen, daß $\langle \varphi_r^\vee * v, w\rangle$ für alle w bei $r \to \infty$ gegen $\langle v, w\rangle$ strebt. Ist nun λ ein Haarmaß auf G und $\varphi^\vee = \psi\lambda$, so haben wir $\varphi_r^\vee = r(\psi \circ (r\cdot))\lambda$ und

$$\langle w, \varphi_r^\vee * v\rangle = \int \langle w, t * v\rangle r\psi(rt) \; \lambda\langle t\rangle = \int \langle w, (u/r) * v\rangle \psi(u) \; \lambda\langle u\rangle$$

und das strebt nach dem Satz über dominierte Konvergenz bei $r \to \infty$ gegen $\langle v, w\rangle$. Damit ist die oben behauptete Formel bewiesen. Um nun zu zeigen, daß $v \in \mathcal{H}$ differenzierbar ist, beschränken wir uns auf den Fall $G = \mathbb{R}$. Für jede Funktion ψ aus dem Schwartzraum strebt dann $(\tau_t\psi - \psi)/t$ für $t \to 0$ in der L^1-Norm gegen ψ' und damit ist $\psi\lambda * v$ differenzierbar nach 13.4.10.5 mit Ableitung $\psi'\lambda * v$. □

Lemma 13.4.10.12. *Gegeben eine unitäre Darstellung $\mathcal{H}$ einer Geradengruppe G liegt die Vereinigung der $\mathcal{H}_C$ über alle Kompakta $C \subset \hat{G}$ dicht in $\mathcal{H}$.*

Beweis. Nach 13.4.10.7 liegt $\mathcal{M}(G)*\mathcal{H}$ dicht in $\mathcal{H}$. Nach 13.4.10.13 liegt $\mathcal{C}_!^\infty(\hat{G})^\vee$ dicht in $\mathcal{M}(G)$ für die Variationsnorm. Nach 13.4.10.5 liegt dann auch $\mathcal{C}_!^\infty(\hat{G})^\vee * \mathcal{H}$ dicht in $\mathcal{H}$. □

Lemma 13.4.10.13. *Die Fouriertransformierten glatter Funktionen mit kompaktem Träger auf der reellen Zahlengeraden bilden einen dichten Teilraum im Raum aller integrierbaren Funktionen auf der reellen Zahlengeraden.*

Beweis. Zunächst einmal liegt der Schwartzraum dicht im Raum aller integrierbaren Funktionen, es reicht also für jede Funktion des Schwartzraums $f \in \mathcal{S}$ eine Folge $g_n \in \mathcal{C}_!^\infty(\mathbb{R})$ anzugeben mit $\lim_{n\to\infty} \|g_n^\wedge - f\|_1 = 0$. Dazu schreiben wir $f = g^\wedge$ mit $g \in \mathcal{S}$ und wählen $h \in \mathcal{C}_!^\infty(\mathbb{R})$ mit $h|_{[-1,1]} = 1$ und betrachten die Funktionen h_n mit $h_n(x) = h(x/n)$ und setzen $g_n = h_n g$. Jetzt behaupte ich

$$(g_n)^{(i)} \to g^{(i)}$$

in der L^2-Norm für $i = 0, 1, 2$, also für die Funktionen selbst und für ihre erste und zweite Ableitung. Sobald das gezeigt ist, folgern wir $y^i g_n^\wedge \to y^i g^\wedge$ in der L^2-Norm für $i = 0, 1, 2$ und damit $(1+y^2)g_n^\wedge \to (1+y^2)g^\wedge$ in der L^2-Norm. Da aber $(1+y^2)^{-1}$ selbst quadratintegrierbar ist, folgt mit 13.4.10.14 sofort $g_n^\wedge \to g^\wedge$ in der L^1-Norm. Warum aber gilt $(h_n g)^{(i)} \to g^{(i)}$ in der L^2-Norm? Nun, wir finden eine Schranke C für $|h-1|$ und eine Schranke M mit $|g(x)| \le Mx^{-2}$ für $x \ge 1$ und folgern $|h_n g - g| = |h_n - 1| \cdot |g| \le MCx^{-2}$ für $x \ge 1$. Für $|x| \le n$ verschwindet andererseits diese Differenz identisch, und so folgt

$$\|h_n g - g\|_2 \le 2MC \int_n^\infty x^{-2}\,\mathrm{d}x$$

und das strebt für $n \to \infty$ gegen Null. Die Behauptung für die höheren Ableitungen zeigt man ähnlich. □

Übungen

Übung 13.4.10.14. Gegeben ein Maßraum X definiert für jede quadratintegrierbare Funktion $g \in \mathrm{L}^2(X)$ das Multiplizieren mit g eine stetige lineare Abbildung $(g\cdot) : \mathrm{L}^2(X) \to \mathrm{L}^1(X)$ mit der Operatornorm $\|g\|_2$.

Übung 13.4.10.15. Gegeben unitäre Darstellungen $(\mathcal{H}, \rho)$ und $(\mathcal{H}', \rho')$ einer Geradengruppe G und ein Verflechtungsoperator $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ zeige man für jedes komplexe Maß $\mu \in \mathrm{M}(G)$ und alle $v \in \mathcal{H}$ die Formel $\mu * (Av) = A(\mu * v)$.

13.4.11 Variationen zum Spektralsatz

Satz 13.4.11.1 (Simultane Spektralzerlegung). *Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ haben wir eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Kompakt getragene auf} \\ \mathbb{R}^n \textit{ definierte Teilungen} \\ \Phi \textit{ der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} n\textit{-Tupel } (T_1, \ldots, T_n) \textit{ von} \\ \textit{paarweise kommutierenden} \\ \textit{selbstadjungierten Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\} \\ \Phi & \mapsto & \left(\int x_1 \Phi, \ldots, \int x_n \Phi\right) \end{array}$$

Gegeben eine stetige lineare Abbildung $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ von Hilberträumen und paarweise kommutierende selbstadjungierte Operatoren $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sowie $T_1', \ldots, T_n' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ mit $AT_\nu = T_\nu' A$ für $1 \le \nu \le n$ haben wir für die zugehörigen projektorwertigen Maße Φ, Φ' und jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ weiter die Identität

$$A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$$

13.4.11.2. Der Beweis variiert den Beweis des Spektralsatzes 13.4.7.8 und wird uns bis zum Ende dieses Abschnitts beschäftigen. Wir beginnen mit einer sehr groben Abschätzung für die Operatornorm eines polynomialen Ausdrucks in paarweise kommutierenden selbstadjungierten Operatoren.

Lemma 13.4.11.3. *Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$, darauf paarweise kommutierende selbstadjungierte Operatoren $T_1, \ldots, T_n$ und ein kompaktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $\sigma(T_\nu) \subset (a, b)$ für $1 \le \nu \le n$ gilt für jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ die Abschätzung*

$$\|P(T_1, \ldots, T_n)\| \le \sup\{P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mid \lambda_\nu \in [a, b]\ \forall \nu\}$$

Beweis. Bezeichne Φ_ν die nach dem Spektralsatz 13.4.7.8 durch T_ν definierte Teilung der Identität von $\mathcal{H}$. Wir bilden für jedes r die äquidistante Unterteilung $a = a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_r = b$ und betrachten die Intervalle $I_i = (a_{i-1}, a_i]$ und die Operatoren

$$S_\nu^r = \sum_{i=1}^{r} a_i \Phi_\nu(I_i)$$

Nach dem Spektralsatz gilt in der Operatornorm $S_\nu^r \to T_\nu$ für $r \to \infty$ und daraus ergibt sich sofort ebenfalls in der Operatornorm

$$P(S_1^r, \ldots, S_n^r) \to P(T_1, \ldots, T_n) \quad \text{für } r \to \infty$$

Der Operator $P(S_1^r, \ldots, S_n^r)$ kann hinwiederum wie folgt beschrieben werden: Man betrachte für jedes n-Tupel $(i(1), i(2), \ldots i(n))$ von Indizes aus $\{1, \ldots, r\}$ den Projektor $\Phi_1(I_{i(1)}) \circ \ldots \circ \Phi_n(I_{i(n)})$. Die Bilder dieser r^n Projektoren bilden eine Zerlegung unseres Hilbertraums $\mathcal{H}$ in r^n paarweise orthogonale abgeschlossene Teilräume und unser Operator $P(S_1^r, \ldots, S_n^r)$ operiert auf dem entsprechenden Teilraum als der Skalar $P(a_{i(1)}, a_{i(2)}, \ldots, a_{i(n)})$. Im Fall $n = 2$ etwa ist das genau der Wert, den unser Polynom an der oberen linken Ecke des Rechtecks $I_{i(1)} \times I_{i(2)}$ annimmt. Damit ist klar, daß die Norm von $P(S_1^r, \ldots, S_n^r)$ in der behaupteten Weise abgeschätzt werden kann, und dasselbe ergibt sich im Grenzwert auch für die Norm von $P(T_1, \ldots, T_n)$. □

Beweis von 13.4.11.1. Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die Gegenrichtung. Seien $T_1, \ldots, T_n$ paarweise kommutierende selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Lemma 13.4.11.3 zeigt, daß es ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ gibt derart, daß für jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ gilt

$$\|P(T_1, \ldots, T_n)\| \leq \|P|_K\|_\infty$$

Daraus folgern wir die Existenz und Eindeutigkeit der durch gestrichelte Pfeile angedeuteten stetigen Ringhomomorphismen im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] \arrow[r, two heads] \arrow[dr] & \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed] & \mathcal{C}(K) \arrow[dl, dashed] \\
& \mathcal{B}(\mathcal{H}) &
\end{tikzcd}$$

und haben so bereits das Anwenden einer stetigen Funktion auf einen selbstadjungierten Operator verallgemeinert zum Anwenden einer stetigen Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ auf ein n-Tupel von paarweise kommutierenden selbstadjungierten Operatoren. Wie beim Beweis von 13.4.2.14 im Anschluß an 13.4.5.8 folgern wir, daß es für jeden Vektor $v \in \mathcal{H}$ genau ein Paar (μ, φ) gibt bestehend aus einem kompakt getragenen Borelmaß μ auf $\mathbb{R}^n$ und einer unitären Einbettung $\varphi : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ mit $\varphi(1) = v$ und $\varphi \circ (x_i \cdot) = T_i \circ \varphi$ für $1 \leq i \leq n$. Wie in 13.4.8.2 folgende zeigen wir dann, daß es für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ meßbar und beschränkt genau einen Operator $f(T_1, \ldots, T_n)$ gibt mit $f(T_1, \ldots, T_n)v = \varphi(f)$ für φ die kanonische Einbettung zu v wie eben, und daß wir so eine Teilung der Identität mit den gewünschten Eigenschaften erhalten. Der Rest des Beweises ist vollständig analog zum Beweis des Spektralsatzes aus 13.4.8 und mag dem Leser überlassen bleiben. □

Korollar 13.4.11.4 (Spektralsatz für unitäre Operatoren). *Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ haben wir eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc}
\left\{ \begin{array}{c} \textit{Auf der Kreislinie } S^1 \textit{ definierte} \\ \textit{Teilungen } \Phi \textit{ der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Unitäre Automorphismen} \\ \textit{des Hilbertraums } \mathcal{H} \end{array} \right\} \\
\Phi & \mapsto & \int_{S^1} z \Phi\langle z \rangle
\end{array}$$

Beweis. Nach 13.4.7.14 liefert für jede Teilung der Identität auf der Kreislinie besagtes Integral einen unitären Automorphismus unseres Hilbertraums. Daß diese Konstruktion eine Bijektion liefert, folgt mit mit 13.4.3.21 aus dem etwas allgemeineren Fall 13.4.11.6 sogenannter „normaler“ Operatoren. □

Definition 13.4.11.5. Ein Operator auf einem Hilbertraum heißt **normal**, wenn er mit seinem Adjungierten vertauscht. In Formeln ist also ein Operator $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal, wenn gilt $NN^* = N^*N$. Insbesondere ist jeder selbstadjungierte und jeder unitäre Operator normal. Ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Hilbertraums ist normal genau dann, wenn er diagonalisierbar ist mit paarweise aufeinander senkrecht stehenden Eigenräumen, und für jedes projektorwertige Maß Φ auf einem Meßraum und jede beschränkte meßbare komplexwertige Funktion f auf besagtem Raum ist $\int f\Phi$ normal.

Korollar 13.4.11.6 (Spektralsatz für normale Operatoren).

1. *Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ erhalten wir eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Auf } \mathbb{C} \textit{ definierte kompakt getragene} \\ \textit{Teilungen der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Normale} \\ \textit{Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\} \\ \Phi & \mapsto & \int z\Phi\langle z\rangle \end{array}$$

2. *Für die einem normalen Operator N entsprechende Teilung der Identität Φ_N ist das Spektrum $\sigma(N)$ von N das kleinste Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ mit $\Phi_N(K) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ und der adjungierte Operator wird gegeben durch das Integral*

$$N^* = \int \bar{z}\Phi_N\langle z\rangle$$

3. *Gegeben eine stetige lineare Abbildung von Hilberträumen $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ und normale Operatoren $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $N' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ mit $AN = N'A$ gilt für die zugehörigen projektorwertigen Maße Φ, Φ' und $M \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Borelmenge*

$$A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$$

Beweis. Jeder normale Operator N läßt sich in eindeutiger Weise darstellen als

$$N = R + \mathrm{i}I$$

mit kommutierenden selbstadjungierten Operatoren R und I, nämlich mit $R = (N + N^*)/2$ und $I = (N - N^*)/2\mathrm{i}$. Betrachten wir zu R und I die simultane

Spektralzerlegung, d.h. die auf $\mathbb{R}^2$ definierte kompakt getragene Teilung Φ der Identität von $\mathcal{H}$ mit

$$R = \int x\Phi\langle x, y\rangle \quad \text{und} \quad I = \int y\Phi\langle x, y\rangle$$

Wir erhalten unter der Identifikation $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x + \mathrm{i}y$ eine Teilung Φ der Identität auf $\mathbb{C}$ mit

$$N = \int z\Phi\langle z\rangle$$

Der Rest des Beweises kann dem Leser überlassen bleiben, für Teil 3 benutze man das anschließende Lemma 13.4.11.7. □

Lemma 13.4.11.7. *Gegeben $N : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ und $N' : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}'$ normale Operatoren auf Hilberträumen und $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ eine stetige lineare Abbildung mit $AN = N'A$ gilt auch für ihre Adjungierten $AN^* = N'^*A$.*

Beweis. Seien $\Phi_N, \Phi_{N'}$ die zugehörigen Teilungen der Identität auf $\mathbb{C}$. Zunächst einmal gilt es, 13.4.8.11 auf den Fall normaler Operatoren zu verallgemeinern. Das zeigt dann $A\Phi_N(C) = \Phi_{N'}(C)A$ erst für $C \not\subset \mathbb{C}$ und dann durch die Betrachtung geeigneter Differenzmengen auch allgemeiner für halboffene Rechtecke der Gestalt $C = (a, b] \times \mathrm{i}(c, d]$. Jetzt schreiben wir N^* und N'^* als Grenzwert von Riemannsummen wie im Beweis von 13.4.11.3 und das Lemma folgt. □

Übungen

Übung 13.4.11.8. Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit einer Teilung Φ der Identität und f beschränkt und meßbar und $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom haben wir nach 13.4.7.23 die Identität

$$P\left(\int f\Phi\right) = \int (P \circ f)\Phi$$

Man zeige diese Identität nun für beliebige beschränkte meßbare Funktionen $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

13.4.12 Unbeschränkte Operatoren

13.4.12.1. In der Literatur trifft man unitäre Darstellungen von $\mathbb{R}$ meist in einer mehr traditionellen Tracht als sogenannte „unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren“ an. Ich stelle hier dieses Konzept vor und erkläre in Satz 13.4.12.9 seine Beziehung zu unitären Darstellungen, beweise von diesem Satz jedoch nur noch einen Teil.

Definition 13.4.12.2. Unter einer **partiell definierten linearen Abbildung** von einem Vektorraum V in einen Vektorraum W verstehen wir ein Paar $(\mathcal{D}, T)$ bestehend aus einem Untervektorraum $\mathcal{D} \subset V$ und einer linearen Abbildung $T : \mathcal{D} \to W$. Wir notieren solch eine partiell definierte lineare Abbildung auch $T : V \dashrightarrow W$ und schreiben $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T)$ und nennen diesen Untervektorraum den **Definitionsbereich von** T. Ist V ein normierter Vektorraum und $\mathcal{D} \subset V$ dicht, so sprechen wir von einer **dicht definierten** linearen Abbildung $V \dashrightarrow W$.

Beispiel 13.4.12.3. Ein typisches Beispiel für eine dicht definierte lineare Abbildung wäre $V = W = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mathrm{d}x)$ mit dem Teilraum $\mathcal{D} = \{f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mathrm{d}x) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid f' \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mathrm{d}x)\}$ als Definitionsbereich und dem Ableiten $Tf = f'$ als linearer Abbildung.

Definition 13.4.12.4. Gegeben $T : \mathcal{H} \dashrightarrow \mathcal{H}'$ eine dicht definierte lineare Abbildung von Hilberträumen erklären wir eine weitere partiell definierte lineare Abbildung $T^* : \mathcal{H}' \dashrightarrow \mathcal{H}$, ihre **adjungierte Abbildung**, indem wir den Teilraum $\mathcal{D}(T^*) = \{v' \in \mathcal{H}' \mid v \mapsto \langle v', Tv\rangle$ ist stetig auf $\mathcal{D}(T)\}$ als ihren Definitionsbereich wählen und dann $T^* : \mathcal{D}(T^*) \to \mathcal{H}$ unter Verwendung des Satzes von Riesz 13.2.8.3 erklären durch die Vorschrift

$$\langle T^* v', v\rangle = \langle v', Tv\rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(T), v' \in \mathcal{D}(T^*)$$

Definition 13.4.12.5. Ein **unbeschränkter selbstadjungierter Operator** auf einem Hilbertraum ist eine dicht definierte lineare Abbildung von unserem Hilbertraum in sich selber, die mit ihrer Adjungierten zusammenfällt, in Formeln $T : \mathcal{H} \dashrightarrow \mathcal{H}$ mit $T^* = T$. Mit gefordert wird hier implizit insbesondere auch die Gleichheit der Definitionsbereiche $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$.

13.4.12.6. Mich befriedigt diese Terminologie nicht vollständig, da natürlich auch alle beschränkten selbstadjungierten Operatoren Beispiele für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren sind. Stattdessen stets von „nicht notwendig beschränkten“ selbstadjungierten Operatoren zu reden, wäre aber auch wieder umständlich.

Lemma 13.4.12.7. *Für jedes nichtnegative Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ ist das Paar $(\mathcal{D}, T)$ bestehend aus dem Teilraum $\mathcal{D} = \{f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu) \mid xf \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu)\}$ und der Abbildung $T : \mathcal{D} \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu)$, $f \mapsto xf$ ein unbeschränkter selbstadjungierter Operator auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu)$. Hierbei meint x die Identität auf $\mathbb{R}$.*

Beweis. Per definitionem besteht $\mathcal{D}(T^*)$ aus allen $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu)$ derart, daß sich die Abbildung $f \mapsto \int \bar{g} x f \mu$ stetig von $\mathcal{D}$ auf ganz $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu)$ fortsetzen läßt. Die Inklusion $\mathcal{D}(T^*) \supset \mathcal{D}$ scheint mir damit offensichtlich. Läßt sich andererseits für vorgegebenes $g \in \mathrm{L}^2$ unsere Abbildung stetig von $\mathcal{D}$ nach L^2 fortsetzen, so wird diese Fortsetzung nach 13.2.8.3 gegeben durch das Integrieren gegen eine Funktion $h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu)$ als $f \mapsto \int \bar{h} f \mu$. Insbesondere gilt also für jede glatte Funktion

f mit kompaktem Träger $\int \bar{g}xf\mu = \int \bar{h}f\mu$ und daraus folgt mit 13.3.3.12 dann $\bar{g}x = \bar{h}$ fast überall, also $xg \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mu)$ und damit $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}$. □

Beispiel 13.4.12.8. Ich komme nocheinmal auf das Beispiel 13.4.12.3 zurück. Gegeben $f, g \in \mathcal{D}$ gilt ja sicher

$$\int_a^b \bar{g}f' = \bar{g}f\,|_a^b - \int_a^b \bar{g}'f$$

und wegen $\bar{g}f \in \mathrm{L}^1$ finden wir Folgen a_n, b_n mit $a_n \to -\infty$, $b_n \to \infty$ und $(\bar{g}f)(a_n) \to 0$, $(\bar{g}f)(b_n) \to 0$. Daraus folgern wir

$$\langle g, Tf\rangle = -\langle Tg, f\rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{D}$$

Mithin unterscheidet sich in diesem Fall der Operator $(\mathrm{i}T)^*$ vom Operator $\mathrm{i}T$ höchstens dadurch, daß er eventuell einen größeren Definitionsbereich hat. Und den hat er in unserem Fall in der Tat, zum Beispiel gehört zu besagtem Definitionsbereich auch noch jede stetige Funktion, die auf $(-\infty, a]$ und $[a, \infty)$ stetig differenzierbar ist und deren Ableitung dort jeweils quadratintegrierbar ist. Genauer erhalten wir eine Erweiterung unseres Operators zu einem selbstadjungierten Operator, wenn wir t statt x schreiben und den folgenden Satz 13.4.12.9 auf die unitäre Darstellung von $\mathbb{R}$ auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mathrm{d}t)$ anwenden, bei der $t \in \mathbb{R}$ durch Verschiebung um t operiert, in Formeln $\rho(t) = \tau_t$.

Satz 13.4.12.9. *Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ liefert das Bilden des infinitesimalen Erzeugers S_ρ zu einer unitären Darstellung ρ im Sinne von 13.4.1.15 eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Unitäre Darstellungen} \\ \textit{von } \mathbb{R} \textit{ in } \mathcal{H} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Unbeschränkte selbstadjungierte} \\ \textit{Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\} \\ \rho & \mapsto & (\mathcal{H}^1, -\mathrm{i}S_\rho) \end{array}$$

Beweis. Wir zeigen hier nur, daß wir so eine Abbildung erhalten. Das einzige Problem dabei ist zu zeigen, daß der adjungierte Operator zu $\mathrm{i}S_\rho$ auch keinen größeren Definitionsbereich hat als $\mathcal{H}^1$. Das folgt jedoch sofort aus der lokalen Darstellung 13.4.1.4 in Verbindung mit 13.4.12.7. Daß die so konstruierte Abbildung eine Bijektion ist, wird erst später gezeigt werden. □

13.4.12.10. Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ folgern wir aus dem vorhergehenden Satz 13.4.12.9 in Verbindung mit dem Satz über die Spektralzerlegung unitärer Darstellungen 13.4.9.1 sogar ein kommutatives Dreieck von Bijektionen

$$\begin{array}{ccc} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Unitäre Darstellungen} \\ \text{von } \mathbb{R} \text{ in } \mathcal{H} \end{array} \right\} & \\ \nearrow\sim & & \sim\searrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Auf } \mathbb{R} \text{ definierte Teilungen} \\ \text{der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Unbeschränkte selbstadjun-} \\ \text{-gierte Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\} \\ \Phi & \mapsto & \int x\Phi\langle x\rangle \end{array}$$

Hier ist der fragliche Operator nur auf den $v \in \mathcal{H}$ mit $\int |x|\langle v, \Phi v\rangle < \infty$ definiert, für $\langle v, \Phi v\rangle$ das in 13.4.7.20 erklärte Maß, und für diese v ist er definiert durch die Bedingung

$$\left\langle w, \left(\int x\Phi\langle x\rangle\right) v\right\rangle = \int x\langle w, \Phi v\rangle \qquad \forall w \in \mathcal{H}$$

Weiter meint $\nearrow$ unsere Bijektion aus dem Satz über die Spektralzerlegung unitärer Darstellungen 13.4.9.1 und $\searrow$ unsere Bijektion aus dem vorhergehenden Satz 13.4.12.9 und das a priori völlig unmotivierte Vorzeichen in 13.4.12.9 habe ich nur eingeführt, damit ein kommutatives Dreieck entsteht, ohne daß wir irgendwo anders ein noch unnatürlicheres Vorzeichen einführen müßten.

13.4.12.11. In der Quantenmechanik modelliert man die Menge aller möglichen Zustände eines vorgegebenen physikalischen Systems als die Menge $\mathbb{P}\mathcal{H}$ aller eindimensionalen Teilräume eines Hilbertraums $\mathcal{H}$. Messungen mit zwei möglichen Resultaten – Ja oder Nein – modelliert man als abgeschlossene Teilräume $T \subset \mathcal{H}$. Wenden wir auf einen Zustand $\mathbb{C}v \in \mathbb{P}\mathcal{H}$ eine Messung T an, so gilt es, den Vektor v auf den vorgegebenen Teilraum $T \subset \mathcal{H}$ zu projizieren vermittels des zugehörigen orthogonalen Projektors pr_T, und das Verhältnis von $\|\operatorname{pr}_T(v)\|^2$ zu $\|v\|^2$ wird dann interpretiert als die Wahrscheinlichkeit $P(v)$ für das Meßergebnis „Ja“, in Formeln

$$P(v) = \frac{\|\operatorname{pr}_T(v)\|^2}{\|v\|^2}$$

Feinere Messungen, die als Meßergebnisse etwa beliebige reelle Zahlen liefern können, modelliert man als Teilungen Φ der Identität von $\mathcal{H}$, die etwa auf der reellen Zahlengeraden definiert sind, und interpretiert dann für jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ den Projektor $\Phi(M)$ in der Weise, daß $\|\Phi(M)v\|^2/\|v\|^2$ die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß der Zustand $\mathbb{C}v$ bei unserer Messung ein Resultat aus M liefert.

13.4.12.12. Eine partiell definierte lineare Abbildung von Banachräumen heißt ein **abgeschlossener Operator**, wenn ihr Graph abgeschlossen ist im Produktraum. Das ist nicht zu verwechseln mit dem Begriff der Abgeschlossenheit für Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß für eine konvergente Folge v_n im Definitionsbereich unseres Operators, für die auch die Folge der Bilder Tv_n konvergiert, der Grenzwert v auch im Definitionsbereich unseres Operators liegt und zusätzlich gilt $Tv_n \to Tv$. Man kann zeigen, daß jeder unbeschränkte selbstadjungierte Operator abgeschlossen ist.

Übungen

Übung 13.4.12.13. Ist Φ eine kompakte getragene auf $\mathbb{R}$ definierte Teilung der Identität eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ und T der zugehörige selbstadjungierte Operator, so ist $\langle Tv, v\rangle / \|v\|^2$ der Erwartungswert für das Ergebnis, das man erhält, wenn man die durch Φ beschriebene Messung auf den Zustand $\mathbb{C}v$ anwendet. Das ist im übrigen genau die Zahl, für die wir im Beweis von 4.1.12.15 die Bezeichnung als „Raleigh-Quotient“ eingeführt hatten.

13.5 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Kinan Halabi, Christina Pflanz, Vivien Vogelmann, ...

Kapitel 14

Funktionentheorie 1

Inhalt

14.1 Differenzierbarkeit im Komplexen 2343

14.1.1 Holomorphe Funktionen (28.4) 2343

14.1.2 Komplexe und reelle Differenzierbarkeit (3.5) . . . 2346

14.1.3 Integration komplexwertiger Funktionen (5.5) . . . 2353

14.2 Wegintegrale und Integralsatz von Cauchy 2358

14.2.1 Komplexe Wegintegrale (10.5) 2358

14.2.2 Homotopie von Wegen (12.5) 2366

14.2.3 Integralsatz von Cauchy (17&19.5) 2370

14.2.4 Integralsatz von Cauchy durch Topologie* 2382

14.2.5 Bezug zu Wegintegralen im Reellen* 2383

14.3 Lokale Struktur holomorpher Funktionen 2387

14.3.1 Cauchy's Integralformel (31.5) 2387

14.3.2 Potenzreihenentwicklung (2.6) 2394

14.3.3 Nullstellenmengen holomorpher Funktionen (7.6) . 2398

14.3.4 Lokale Struktur holomorpher Funktionen (9.6) . . 2402

14.4 Singuläre Stellen holomorpher Funktionen 2408

14.4.1 Isolierte Singularitäten und Laurentreihen (14&16.6) 2408

14.4.2 Umlaufzahl und Residuensatz (21.6) 2416

14.4.3 Anwendungen des Residuensatzes (23.6) 2421

14.5 Verschiedene weiterführende Resultate 2430

14.5.1 Harmonische Funktionen (28.6) 2430

14.5.2 Reihenentwicklung des Kotangens (30.6) 2437
14.5.3 Produktentwicklung des Sinus (30.6) 2441
14.5.4 Gammafunktion (5.7) 2444
14.5.5 Riemann'scher Abbildungssatz (7.7) 2448
14.6 Erste Anwendungen in der Zahlentheorie* 2453
14.6.1 Verteilung von Primzahlen (12&14.7) 2453
14.6.2 Primzahlen in Restklassen (19.7) 2462
14.6.3 Dirichlet-Reihen (21.7) 2466
14.6.4 Summen von drei Quadraten 2471
14.7 Danksagung 2474

14.1 Differenzierbarkeit im Komplexen

14.1.1 Holomorphe Funktionen (28.4)

14.1.1.1. Seien X, Y topologische Räume, $p \in X$ ein Häufungspunkt, Y Hausdorff und $f : X \backslash p \to Y$ eine Abbildung. Ich erinnere an unsere Definition des Grenzwerts $\lim_{x \to p} f(x)$ aus **??** als dem „Wert der einzig möglichen bei p stetigen Fortsetzung von f auf ganz X, wenn es denn solch eine Fortsetzung gibt“. Hier ist ein Film über die Definition der komplexen Ableitung.

Definition 14.1.1.2. Seien $U \Subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $p \in U$ ein Punkt. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt **komplex differenzierbar bei** p **mit Ableitung** $b \in \mathbb{C}$, wenn gilt

$$\lim_{z \to p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p} = b$$

Wir kürzen diese Aussage ab durch $f'(p) = b$ und nennen $f'(p)$ die **Ableitung** oder ausführlicher die **komplexe Ableitung** der Funktion f an der Stelle p.

14.1.1.3. Man muß sich hier von der in der Schule liebgewonnenen Anschauung der Ableitung als „Steigung der Tangente“ verabschieden. Welche Anschauung man stattdessen mit dem Konzept der komplexen Ableitung verbinden mag, werden wir im folgenden noch ausführlich diskutieren.

Definition 14.1.1.4. Eine **holomorphe Funktion** ist eine auf einer offenen Teilmenge $U \Subset \mathbb{C}$ der komplexen Zahlenebene definierte komplexwertige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, die an jeder Stelle $p \in U$ komplex differenzierbar ist. Wir erklären dann ihre Ableitung $f' : U \to \mathbb{C}$ durch $p \mapsto f'(p)$.

Beispiel 14.1.1.5. Jede konstante Funktion auf $U \Subset \mathbb{C}$ ist holomorph mit der Nullfunktion als Ableitung.

Beispiel 14.1.1.6. Die Einbettung einer offenen Teilmenge $U \Subset \mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion $i : U \to \mathbb{C}$ mit Ableitung $i'(p) = 1 \; \forall p \in U$ alias $i' = 1$.

Beispiel 14.1.1.7. Das Invertieren $z \mapsto 1/z$ ist eine holomorphe Abbildung $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ mit der Ableitung $-1/z^2$. Man zeigt das mit derselben Rechnung wie im Reellen 10.5.3.6.

14.1.1.8 (**Anschauliche Bedeutung der komplexen Differenzierbarkeit**). Hier ist ein Film über die anschauliche Bedeutung der komplexen Ableitung. Gegeben $U \Subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Abbildung und $p \in U$ ein Punkt ist offensichtlich f komplex differenzierbar bei p mit Ableitung $f'(p) = b$ genau dann, wenn es eine komplexwertige Funktion ε gibt mit $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ und

$$f(p + h) = f(p) + bh + h\varepsilon(h)$$

Bis auf den Fehler $h\varepsilon(h)$, der für kleines h derart klein wird, daß er für $h \to 0$ sogar dann noch gegen Null strebt, wenn man ihn durch h teilt, ist also f nah bei p die Drehstreckung $p + h \mapsto p + bh$ mit Zentrum p und Faktor $b \in \mathbb{C}$ gefolgt von der Verschiebung $+(f(p) - p)$. Anschaulich bedeutet das insbesondere im Fall $f'(p) \neq 0$, daß jede bei p komplex differenzierbare Abbildung bei p „winkeltreu und orientierungserhaltend“ ist.

14.1.1.9 (**Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit**). Quasi per definitionem **??** ist $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ gleichbedeutend dazu, daß die einzige bei $h = 0$ stetige Fortsetzung von ε an die Stelle $h = 0$ durch $\varepsilon(0) = 0$ geschieht. Insbesondere ist nach 14.1.1.8 eine komplex differenzierbare Funktion auch stetig.

14.1.1.10 (**Rechenregeln für die komplexe Ableitung**). Auch für komplex differenzierbare Funktionen gelten die Summenregel $(f + g)' = f' + g'$, Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ und Kettenregel $(f \circ g)' = g'(f' \circ g)$ mit demselben Beweis wie in 10.5.4.1 beziehungsweise 10.5.4.6. Insbesondere ist jede komplexe Polynomfunktion holomorph. Weiter folgt aus der Kombination von Produktregel, Kettenregel und unseren Erkenntnissen zum Ableiten des Invertierens 14.1.1.7 auch im Komplexen die Quotientenregel.

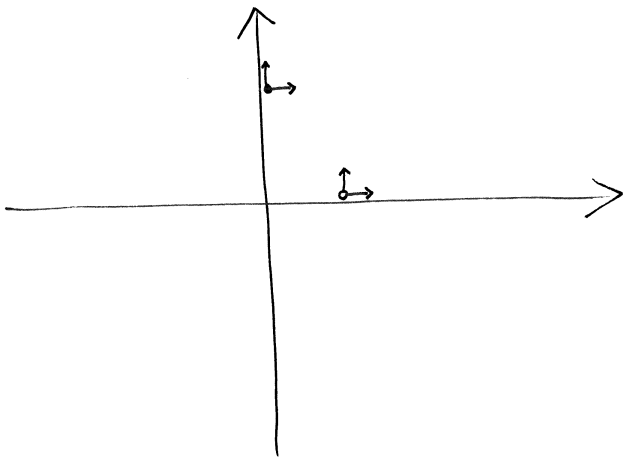
14.1.1.11 (**Ableiten ganzzahliger Potenzen**). Induktiv folgert man wie im Reellen für die Ableitung von z^n die Formel nz^{n-1} erst für $n \geq 0$ und dann mit der Quotientenregel für $n \leq -1$.

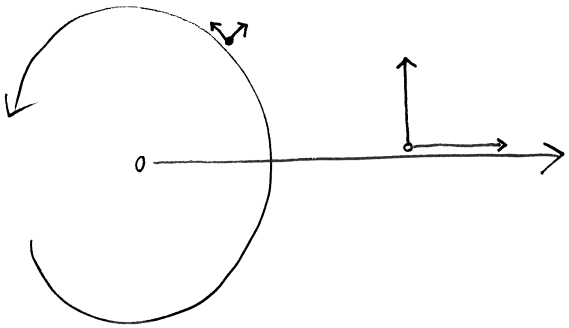
14.1.1.12 (**Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion**). Genau wie im Fall der reellen Exponentialfunktion 10.5.4.9 zeigt man, daß die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist und mit ihrer eigenen Ableitung übereinstimmt, in Formeln $\exp' = \exp$. Ich will nun beispielhaft die anschauliche Bedeutung der Identität $\exp'(\pi\mathrm{i}/2) = \exp(\pi\mathrm{i}/2)$ herausarbeiten. Wir haben ja $\exp(\pi\mathrm{i}/2) = \mathrm{i}$ und die imaginäre Achse wird unter $\exp$ auf den Einheitskreis aufgewickelt. So sehen wir, daß $\exp((\pi\mathrm{i}/2) + h) = \mathrm{i}\exp h$ für kleines h in erster Näherung $\mathrm{i} + \mathrm{i}\,h$ ist, also eine Rotation um einen rechten Winkel im Gegenuhrzeigersinn gefolgt von einer Verschiebung, und diese Rotation ist eine Drehstreckung um den Faktor i und das ist folglich auch unsere Ableitung $\mathrm{i} = \exp'(\pi\mathrm{i}/2)$.

Übungen

Übung 14.1.1.13 (**Funktionen mit komplexer Ableitung Null**). Ein holomorphe Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich, deren komplexe Ableitung identisch verschwindet, ist konstant.

Übung 14.1.1.14. Sei $g : U \to \mathbb{C}^\times$ stetig ohne Nullstelle mit $f := g^2$ holomorph. Man zeige daß auch g holomorph ist mit Ableitung $g' = f'/2g$.





Anschauliche Bedeutung der Ableitung der komplexen Exponentialfunktion. Das untere Bild entsteht aus dem oberen durch Anwenden der komplexen Exponentialfunktion. Man sieht, daß das Differential dieser Abbildung an einer Stelle auf der reellen Achse eine Streckung um einen reellen Faktor ist, an einer Stelle auf der imaginären Achse dahingegen eine Drehung alias eine Streckung um einen komplexen Faktor vom Absolutbetrag Eins.

Übung 14.1.1.15. Sei $H := \{z \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ die offene obere Halbebene. Man zeige, daß es für je zwei Punkte $p, q \in H$ eine holomorphe Bijektion $h : H \xrightarrow{\sim} H$ gibt mit $h(p) = q$. Hinweis: **??**.

Übung 14.1.1.16. Sei $E := \{z \mid |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe. Man zeige, daß es für je zwei Punkte $p, q \in E$ eine holomorphe Bijektion $h : E \xrightarrow{\sim} E$ gibt mit $h(p) = q$. Hinweis: 14.1.1.15 und **??**.

14.1.2 Komplexe und reelle Differenzierbarkeit (3.5)

14.1.2.1. Hier ist ein Film über Differenzierbarkeit im Reellen. In 12.1.3.16 haben wir vereinbart, daß wir eine Teilmenge A eines normierten reellen Raums X **halboffen** nennen wollen, wenn es für jeden Punkt $p \in A$ eine nichtleere offene Teilmenge $C \Subset \vec{X}$ gibt mit $p + [0,1]C \subset A$, wenn es also anschaulich gesprochen ein kleines Kegelchen mit Spitze in p gibt, das ganz in A liegt. Gegeben eine halboffene Teilmenge A eines normierten reellen Raums X und eine Abbildung $f : A \to Y$ in einen weiteren reellen Raum haben wir in 12.1.3.1 und 12.1.3.19 ihr **Differential**

$$\mathrm{d}_p f : \vec{X} \to \vec{Y}$$

bei p definiert als eine stetige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung L, für die es eine $\vec{Y}$-wertige Abbildung ε gibt mit $\lim_{\vec{v} \to \vec{0}} \varepsilon(\vec{v}) = 0$ und

$$f(p + \vec{v}) = f(p) + L\vec{v} + \|\vec{v}\|\varepsilon(\vec{v})$$

Wir haben gezeigt, daß so eine Abbildung L eindeutig ist, wenn sie existiert, so daß sie Namen und Notation auch verdient. Wenn das Differential existiert, nennen wir f **differenzierbar**. Wenn wir den Unterschied zur partiellen Differenzierbarkeit besonders betonen wollen, sagen wir genauer **total differenzierbar**. Wenn wir den Unterschied zur komplexen Differenzierbarkeit besonders betonen wollen, sagen wir genauer **reell differenzierbar**.

14.1.2.2. Möglicherweise haben Sie diese Definition bisher nur im Fall $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$ und für $A \Subset X$ offen gesehen. In diesem Fall ist es nicht nötig, zwischen den affinen Räumen X, Y und ihren Richtungsräumen $\vec{X}, \vec{Y}$ zu unterscheiden, und die darstellende Matrix des Differentials ist die **Jacobi-Matrix**

$$[\mathrm{d}_p f] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

In diesem Kontext ist jede total differenzierbare Abbildung auch partiell differenzierbar. Existieren umgekehrt alle partiellen Ableitungen auf ganz A und sind stetig, so ist nach 12.1.5.1 unsere Funktion auch total differenzierbar.

14.1.2.3. Hier ist ein Film über Geschwindigkeit und Differential. Im Fall einer differenzierbaren Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to X$ der Zahlengerade in einen normierten reellen Raum X verwendet man die Notation $\gamma'(t) := (\mathrm{d}_t\gamma)(1)$ und erkennt, daß der Richtungsvektor $\gamma'(t) \in \vec{X}$ auch beschrieben werden kann als der Grenzwert

$$\gamma'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

Das ist, von den fehlenden Einheiten abgesehen, der **Geschwindigkeitsvektor** aus der Physik. Dasselbe gilt, wenn γ auf einem mehrpunktigen Intervall oder allgemeiner einer beliebigen halboffenen Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert ist.

14.1.2.4. Im Fall einer differenzierbaren Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ von einem normierten reellen Raum X in die Zahlengerade ist $p \mapsto \mathrm{d}_p f$ eine Abbildung $X \to \vec{X}^*$ von X in den Dualraum des Richtungsraums. Sie heißt das **Differential von** f und wird notiert als

$$\mathrm{d}f : X \to \vec{X}^*$$

Eine Abbildung $X \to \vec{X}^*$ heißt ein **Kovektorfeld auf** X. Kovektorfelder werden punktweise addiert und mit reellwertigen Funktionen $X \to \mathbb{R}$ multipliziert. Im Spezialfall $X = \mathbb{R}^n$ sind die Funktionen x_i die Projektionen auf die Koordinaten, also linear, also „ihr eigenes Differential“. Ihre Differentiale $\mathrm{d}x_i$ ordnen mithin jedem Punkt ebenfalls die Projektion auf die i-te Koordinate $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zu. Für eine beliebige differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ findet man dann

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n$$

alias für alle p die Identität $\mathrm{d}_p f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\,\mathrm{d}_p x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\,\mathrm{d}_p x_n$ in $(\mathbb{R}^n)^*$. Analoges gilt, wenn f auf einer offenen Teilmenge von X beziehungsweise $\mathbb{R}^n$ definiert ist.

14.1.2.5. Spezialisieren wir unsere allgemeine Definition der Differenzierbarkeit auf den Fall $X = Y = \mathbb{C}$ und vergleichen sie mit der Charakterisierung 14.1.1.8 der komplexen Differenzierbarkeit, so erkennen wir, daß für $p \in U \Subset \mathbb{C}$ eine Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ genau dann komplex differenzierbar ist, wenn sie reell total differenzierbar ist und ihr a priori $\mathbb{R}$-lineares Differential $\mathrm{d}_p f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sogar eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist alias durch die Multiplikation mit einer komplexen Zahl gegeben wird, in Formeln

$$\mathrm{d}_p f = (f'(p)\cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

für die komplexe Ableitung $f'(p)$. Wir verwenden dabei, daß $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ gleichbedeutend ist zu $\lim_{h\to 0}(|h|/h)\varepsilon(h) = 0$ für reelles und auch komplexes h.

Satz 14.1.2.6. *Sei* $U \Subset \mathbb{R}^2$ *eine offene Teilmenge und bezeichne* $\mathrm{can} : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x + \mathrm{i}y$ *die übliche Identifikation. Gegeben stetig partiell differenzierbare reelle Funktionen* $u, v : U \to \mathbb{R}$ *ist die Funktion* $f : \mathrm{can}(U) \to \mathbb{C}$ *mit*

$$f(x + \mathrm{i}y) := u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

genau dann holomorph, wenn das Paar (u, v) *die* **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen** *erfüllt, die da lauten*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Vorschau 14.1.2.7. Aus dem Satz von Goursat 14.3.1.5 werden Sie im weiteren Verlauf als Übung 14.3.1.17 folgern, daß gegeben eine holomorphe Funktion f auch umgekehrt ihr Realteil u und ihr Imaginärteil v stetig partiell differenzierbar sind.

14.1.2.8. Man kann sich diese Gleichungen veranschaulichen als die Bedingung, daß an jeder Stelle der Gradient des Imaginärteils v unserer Funktion aus dem Gradienten ihres Realteils u hervorgeht durch die Drehung um einen rechten Winkel im Gegenuhrzeigersinn.

14.1.2.9 (**Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen, Variante**). Verwenden wir partielle Ableitungen vektorwertiger Funktionen 12.1.6.9 und nehmen der Einfachkeit halber $\mathrm{can} = \mathrm{id}$ an, so können wir die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen auch zusammenfassen zur Gleichung

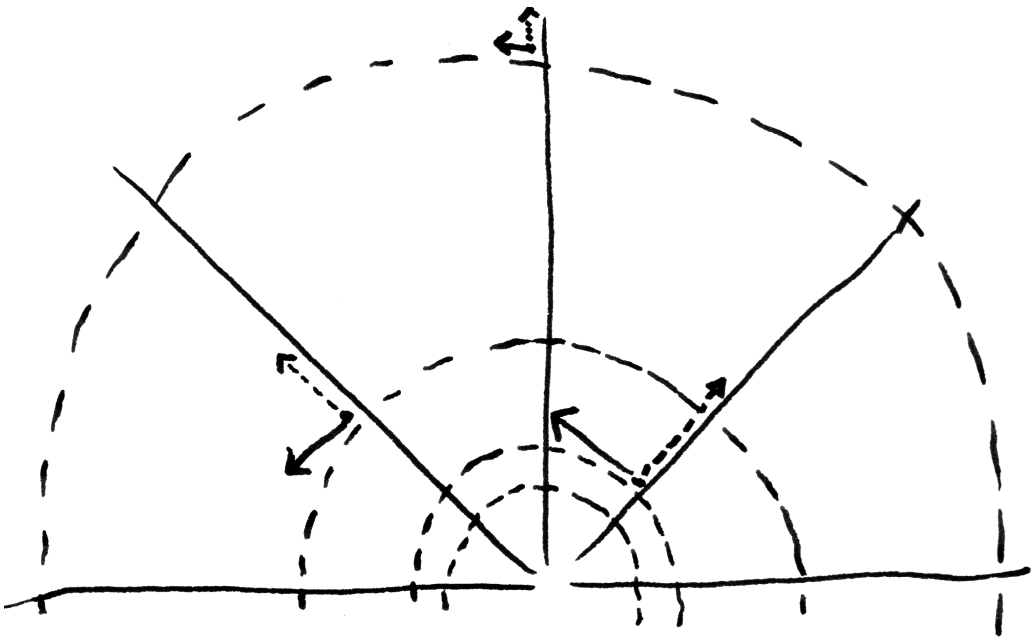
$$\mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Die komplexe Ableitung von f wird dann gegeben durch $f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$ und wird auch bereits durch Real- oder Imaginärteil unserer Funktion festgelegt als $f' = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$. Fassen wir komplexwertige Funktionen auf einer Teilmenge der komplexen Zahlen als Vektorfelder auf, so entspricht die komplex konjugierte Ableitung mithin dem Gradienten des Realteils unserer Funktion, in Formeln

$$\overline{f'} = \mathrm{grad}(\mathrm{Re}\, f)$$

Beweis der Hin-Richtung. Hier ist ein erster Film über die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. Die komplexe Ableitung können wir schreiben als

$$f'(z) = \lim_{h \to 0_{\mathbb{C}}} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}$$



Dieses Bild soll die Bedeutung der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen veranschaulichen. Die gestrichelten beziehungsweise durchgezogenen Linien deuten die Niveaumengen seines Real- beziehungsweise Imaginärteils eines Zweiges des Logarithmus an, die gestrichelten beziehungsweise durchgezogenen Pfeile deren Gradienten. Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen bedeuten gerade, daß an jeder Stelle der Gradient des Imaginärteils durch eine Drehung um $90°$ im Gegenuhrzeigersinn aus dem Gradienten des Realteils hervorgeht.

mit dem Grenzwert über komplexes h, was ich versuche dadurch anzudeuten, daß ich $0_{\mathbb{C}}$ schreibe für die Null der komplexen Zahlenebene. Natürlich haben wir a forteriori

$$f'(z) = \lim_{h \to 0_{\mathbb{R}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad \text{und} \quad f'(z) = \lim_{h \to 0_{\mathbb{R}}} \frac{f(z+\mathrm{i}h) - f(z)}{\mathrm{i}h}$$

mit dem Grenzwert über reelle h, was ich durch die Notation $0_{\mathbb{R}}$ andeute. Erinnern wir nun $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ und multiplizieren beide Seiten der rechten Gleichung mit i, so finden wir

$$f'(x+\mathrm{i}y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \quad \text{und} \quad \mathrm{i}f'(x+\mathrm{i}y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

Daraus folgen die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen sofort. □

Beweis. Hier ist ein Film über die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen vom höheren Standpunkt. Ich habe mir Mühe gegeben, den Satz so zu formulieren, daß er zu unserer Beschreibung der komplexen Zahlen bis auf eindeutigen Isomorphismus in **??** paßt. Für den Beweis dürfen wir uns ein beliebiges Modell der komplexen Zahlen aussuchen und mithin ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathrm{can} : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ die Identität ist. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist nun nach 14.1.1.8 komplex differenzierbar bei $p \in U$ mit Ableitung b genau dann, wenn es eine komplexwertige Funktion ε gibt mit $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ und $f(p+h) = f(p) + bh + h\varepsilon(h)$ oder auch gleichbedeutend eine komplexwertige Funktion η mit $\lim_{h\to 0} \eta(h) = 0$ und

$$f(p+h) = f(p) + bh + |h|\eta(h)$$

In der Tat unterscheiden sich $\eta(h)$ und $\varepsilon(h)$ dabei für $h \neq 0$ nur um den Faktor $h/|h|$ der Norm Eins und für $h = 0$ kommt es auf die genauen Werte dieser Funktionen eh nicht an. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist andererseits nach 12.1.3.1 reell total differenzierbar bei $p \in U$ mit Differential $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ genau dann, wenn es eine komplexwertige Funktion η gibt mit $\lim_{h\to 0} \eta(h) = 0$ und

$$f(p+h) = f(p) + Bh + |h|\eta(h)$$

Unsere Funktion ist also komplex differenzierbar bei p mit der komplexen Ableitung $f'(p) = b$ genau dann, wenn f reell differenzierbar ist bei p und sein Differential $\mathrm{d}_p f = B \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ eine komplexlineare Abbildung ist, eben die Abbildung $(b\cdot)$. Gleichbedeutend ist dann auch die Forderung, daß $\mathrm{d}_p f$ mit der Multiplikation $(\mathrm{i}\cdot)$ mit i kommutiert. Um diese Bedingung in die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen zu übersetzen, ziehen wir uns nun auf

unser Modell $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ der komplexen Zahlen zurück. Sind u und v stetig partiell differenzierbar, so ist dann nach 12.1.5.1 auch die Funktion $f = (u, v)$ reell differenzierbar an jeder Stelle $p \in U$ und ihr Differential $\mathrm{d}_p f = \mathrm{d}_p(u, v)$ wird nach 12.1.3.3 beschrieben durch die Jacobi-Matrix

$$[\mathrm{d}_p(u, v)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

an der jeweiligen Stelle p. Damit ist $f = (u, v)$ komplex differenzierbar bei p genau dann, wenn diese Matrix kommutiert mit der Matrix $[(\mathrm{i}\cdot)] = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ der Multiplikation mit i, wenn also an der jeweiligen Stelle p gilt

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \square$$

Proposition 14.1.2.10 (Holomorphie der Umkehrfunktion, schwache Form). *Gegeben $U \Subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine injektive holomorphe Funktion mit stetiger nirgends verschwindender Ableitung ist auch ihr Bild eine offene Teilmene $f(U) \Subset \mathbb{C}$ und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(U) \to U$ ist holomorph mit der Ableitung*

$$(f^{-1})'(q) = 1/f'(f^{-1}(q))$$

14.1.2.11. Gegeben $U \Subset \mathbb{C}$ nennen wir eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ eine **biholomorphe Einbettung**, wenn sie injektiv ist mit offenem Bild $f(U) \Subset \mathbb{C}$ und wenn die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(U) \xrightarrow{\sim} U$ auch wieder eine holomorphe Funktion $f^{-1} : f(U) \to \mathbb{C}$ ist. Unsere Proposition besagt in dieser Terminologie, daß jede injektive holomorphe Funktion mit stetiger nirgends verschwindender Ableitung eine biholomorphe Einbettung ist. In 14.3.4.8 zeigen wir stärker, daß überhaupt jede injektive holomorphe Funktion eine biholomorphe Einbettung ist. Unser Beweis dort stützt sich aber auf die hier gegebene Proposition.

Vorschau 14.1.2.12. In 14.2.3.19 wird skizziert, wie man beim Beweis dieser Proposition vorgehen kann, wenn man den Umkehrsatz der Analysis nicht voraussetzen will.

Beweis. Per definitionem ist eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ stets reell differenzierbar im Sinne von 12.1.3.1 und ihr Differential bei $p \in U$ ist die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathrm{d}_p f = (f'(p)\cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ in sich selber. Ist f' stetig ohne Nullstelle, so ist f offen nach dem Satz über die Umkehrabbildung 12.3.1.2. Ist f zusätzlich injektiv, so ist mithin seine Umkehrabbildung stetig, ja sogar stetig differenzierbar wieder nach dem Satz über die Umkehrabbildung 12.3.1.2, und ihr Differential in $q = f(p)$ ist die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$(\mathrm{d}_q(f^{-1}) = (\mathrm{d}_p f)^{-1} = (f'(p)^{-1}\cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

In anderen Worten gilt $f^{-1}(q+h) = f^{-1}(q)+f'(p)^{-1}h+\varepsilon(h)|h|$ für eine Funktion ε mit $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$, und das bedeutet ja genau die komplexe Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion an der Stelle q sowie die Formel $(f^{-1})'(q) = f'(p)^{-1}$ für ihre Ableitung. □

Beispiel 14.1.2.13 (**Komplexe Wurzelfunktionen**). Das Quadrieren liefert eine Bijektion zwischen der Halbebene aller komplexen Zahlen mit positivem Realteil und der „geschlitzten Zahlenebene“

$$\{z \mid \mathrm{Re}(z) > 0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$$

Die Umkehrfunktion notieren wir $z \mapsto \sqrt{z}$ und nennen sie die „Quadratwurzel mit positivem Realteil“. Sie ist nach 14.1.2.10 eine holomorphe Funktion auf der geschlitzten Zahlenebene mit Ableitung $1/(2\sqrt{z})$. Ist allgemeiner $U \Subset \mathbb{C}$ irgendeine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, auf der das Quadrieren eine Injektion $q : U \hookrightarrow \mathbb{C}$ induziert, so gilt offensichtlich $0 \notin U$ und die Umkehrfunktion $w : q(U) \to \mathbb{C}$ ist holomorph mit der Ableitung $w'(z) = 1/(2w(z))$. Analoges gilt für höhere Wurzeln.

Beispiel 14.1.2.14. Ist $U \Subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge derart, daß die komplexe Exponentialfunktion eine Injektion $\exp : U \hookrightarrow \mathbb{C}$ liefert, so ist nach 14.1.2.10 auch die Umkehrfunktion $\log : \exp(U) \to \mathbb{C}$ holomorph mit der Ableitung

$$\log'(z) = 1/z$$

In der Tat finden wir $\log'(q) = 1/\exp(\log q) = 1/q$. Diese Funtionen heißen **Zweige des Logarithmus**. Im Spezialfall $U = \mathbb{R} + (-\pi, \pi)\,\mathrm{i}$ spricht man vom **Hauptzweig des Logarithmus**. Wir hatten ihn bereits in **??** eingeführt und sogar auch noch auf der negativen reellen Achse erklärt, aber nicht in stetiger Weise.

14.1.2.15. Hier ist ein Film über die reell-komplexe Kettenregel. Schließlich erinnern wir auch noch an die Kettenregel in mehreren Veränderlichen

$$\mathrm{d}_p(f \circ g) = (\mathrm{d}_{g(p)}f) \circ (\mathrm{d}_p g)$$

aus 12.1.4.2 und wiederholen an dieser Stelle nicht mehr die Bedeutung aller Notationen und die jeweiligen Voraussetzungen. Geht etwa g von der reellen Zahlengerade aus und benennen wir es um in $\gamma : \mathbb{R} \to X$ und werten beide Seiten der Kettenregel auf $1_{\mathbb{R}}$ aus, so folgt

$$(f \circ \gamma)'(t) = (\mathrm{d}_{\gamma(t)}f)(\gamma'(t))$$

Insbesondere folgt so im Fall $X = \mathbb{C}$ für jede differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und jede holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die **reell-komplexe Kettenregel** in der Gestalt

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$$

mit einem Produkt von komplexen Zahlen auf der rechten Seite. Dasselbe gilt für Funktionen, die nur auf halboffenen Teilmengen definiert sind.

Definition 14.1.2.16. Bezeichne $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation. Sei $U \Subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt **antiholomorph**, wenn $\bar{f} := c \circ f$ holomorph ist.

Übungen

Übung 14.1.2.17. Man zeige, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ der Hauptzweig des Logarithmus von $1 + z$ auch dargestellt werden kann durch die Potenzreihe

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Hinweis: Es reicht zu zeigen, daß für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$ das Einsetzen von $z = wt$ auf beiden Seiten dieselbe Funktion in $t \in (-1, 1)$ liefert. Beide Seiten nehmen aber bei $z = 0$ den Wert Null an, so daß es reicht, die Gleichheit ihrer Ableitungen zu zeigen. In 14.3.2.11 dürfen Sie diese Übung mit mehr Theorie und weniger Rechnen ein weiteres Mal lösen.

Übung 14.1.2.18. Sei $U \Subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Man zeige, daß eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ antiholomorph ist genau dann, wenn $f \circ c : c(U) \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Insbesondere ist die Verknüpfung antiholomorpher Funktionen stets holomorph.

Übung 14.1.2.19. Eine holomorphe Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich, die nur reelle Werte annimmt, ist konstant.

Übung 14.1.2.20. Gegeben eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ohne Nullstelle erklärt man ihre **logarithmische Ableitung** durch die Vorschrift

$$\frac{\mathrm{dlog}\, f(z)}{\mathrm{d}z} := \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Man zeige, daß die logarithmische Ableitung eines Produkts die Summe der logarithmischen Ableitungen der Faktoren ist. Gibt es einen Zweig des Logarithmus $\log : V \to \mathbb{C}$ auf einer Teilmenge $V \Subset \mathbb{C}$ mit $f(U) \subset V$, so ist die logarithmische Ableitung von f für jeden solchen Zweig die Ableitung der Verknüpfung $\log \circ f$.

14.1.3 Integration komplexwertiger Funktionen (5.5)

14.1.3.1. Man muß sich hier von der in der Schule liebgewonnenen Anschauung des Integrals als „Fläche unter einer Kurve“ verabschieden. Welche Anschauung man stattdessen damit verbinden mag, werden wir im folgenden noch ausführlich diskutieren. Hier ist ein Film über Integration vektorwertiger Funktionen.

14.1.3.2. Ich erinnere aus 12.5.3 das Integrieren stetiger Funktionen auf kompakten reellen Intervallen mit Werten in endlichdimensionalen reellen Vektorräumen. Uns wird besonders der Fall von komplexwertigen Funktionen betreffen.

Definition 14.1.3.3. Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres kompaktes Intervall, V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $f : [a,b] \to V$ eine Abbildung. Wir betrachten für $r \geq 1$ die äquidistante Unterteilung $a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_r = b$ und definieren die r**-te Riemannsumme** $S^r(f) \in V$ durch

$$S^r(f) := \sum_{i=0}^{r-1} (t_{i+1} - t_i) f(t_i) = \left(\frac{b-a}{r}\right) \sum_{i=0}^{r-1} f(t_i)$$

Satz 14.1.3.4 (Integration vektorwertiger Funktionen). *Ist $f : [a,b] \to V$ eine stetige Abbildung von einem nichtleeren kompakten reellen Intervall in einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum V, so existiert der Grenzwert der zugehörigen Riemannsummen. Das als dieser Grenzwert erklärte* **Integral**

$$\int f = \int_a^b f = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t := \lim_{r \to \infty} S^r(f)$$

ordnet jedem f einen Vektor $(\int f) \in V$ zu und hat die folgenden Eigenschaften:

1. *Für alle $c \in [a,b]$ gilt $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$;*
2. *Ist $f = v$ konstant ein $v \in V$, so gilt $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b v\ \mathrm{d}t = (b-a)v$;*
3. *Ist W ein weiterer endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\Lambda : V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt*
$$\int (\Lambda \circ f) = \Lambda\left(\int f\right)$$
4. *Gegeben eine Norm auf V gilt für die Norm des Integrals die Abschätzung $\|\int f\| \leq \int \|f\|$;*
5. *Im Fall $V = \mathbb{R}$ reellwertiger Funktionen erhalten wir unser Integral aus 10.5.2.1 zurück.*

14.1.3.5. Sie mögen in diesem Satz die Regeln $\int \lambda f = \lambda \int f$ sowie $\int (f+g) = \int f + \int g$ für stetige vektorwertige Funktionen f, g und $\lambda \in \mathbb{R}$ vermißt haben. Sie folgen jedoch formal aus Teil 3. In der Tat dürfen wir dort $\Lambda = (\lambda \cdot) : V \to V$ nehmen und auch $\Lambda : V \times V \to V$ die Addition sowie die beiden Projektionen. So ergibt sich für die $V \times V$-wertige Funktion (f,g) zunächst $\mathrm{pr}_1 \int (f,g) = \int f$ und $\mathrm{pr}_2 \int (f,g) = \int g$ und damit $\int (f,g) = (\int f, \int g)$ und durch Anwenden der Addition dann $\int (f+g) = \int f + \int g$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $V = \mathbb{R}^n$. Alle Aussagen bis auf die Abschätzung der Norm des Integrals folgen dann unmittelbar aus dem wohlbekannten Fall der Integrale reellwertiger Funktionen. Die Abschätzung der Norm des Integrals folgt aus der entsprechenden Abschätzung der Normen der Riemannsummen durch Übergang zum Grenzwert. □

Beispiel 14.1.3.6. Wir prüfen $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = 0$. In der Tat erkennt man leicht, daß in diesem Fall sogar bereits alle Riemannssummen ab $r \geq 2$ verschwinden als „Summen über die Speichenvektoren eines Rades mit r Speichen". Alternativ finden wir auch mit der Euler'schen Formel

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos t + \mathrm{i}\sin t\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos t\ \mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \sin t\ \mathrm{d}t = 0 + \mathrm{i}0 = 0$$

14.1.3.7. Wie im Fall reellwertiger Funktionen verwenden wir auch im Fall vektorwertiger Funktionen die Konvention $\int_b^a f = -\int_a^b f$. Ist dann $f : I \to V$ eine stetige Abbildung von einem reellen Intervall in einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum, so gilt für beliebige $a, b, c \in I$ die Formel $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Satz 14.1.3.8 (Vektorwertige Variante des Hauptsatzes). *Gegeben ein mehrpunktiges Intervall $I \subset \mathbb{R}$, ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V, eine stetige Funktion $f : I \to V$ und ein Punkt $a \in I$ ist die Funktion*

$$\begin{array}{rccl} F: & I & \to & V \\ & x & \mapsto & \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array}$$

die einzige differenzierbare Funktion $F : I \to V$ mit $F' = f$ und $F(a) = 0$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $V = \mathbb{R}^n$. □

Korollar 14.1.3.9 (Integrieren mit Stammfunktionen). *Seien V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a, b] \to V$ stetig. Ist $G : [a, b] \to V$ eine* **Stammfunktion** *von f, als da heißt eine differenzierbare Funktion mit Ableitung $G'(t) = f(t)$, so gilt*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a)$$

Beweis. Das folgt sofort aus dem vorhergehenden Satz 14.1.3.8. □

Beispiel 14.1.3.10. Wir berechnen gleich noch ein drittes Mal unser $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$. Mit der reell-komplexen Kettenregel 14.1.2.15 finden wir, daß $\frac{1}{\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ eine Stammfunktion des Integranden ist. So folgt ein weiteres Mal

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} - \mathrm{e}^0) = 0$$

14.1.3.11 (**Substitutionsregel**). Man folgert unmittelbar das Analogon

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(g(s)))g'(s)\,\mathrm{d}s$$

der Substitutionsregel 10.5.8.1 für $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : g([a,b]) \to V$ stetig mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V. Damit das uneingeschränkt gilt, muß man wie vereits in der Analysis besprochen $\int_c^d = -\int_d^c$ vereinbaren im Fall vertauschter Grenzen.

14.1.3.12 (**Integration rationaler Funktionen**). Hier ist ein Film über Integration rationaler Funktionen. Ich will nun im Lichte unserer neuen Erkenntnisse nocheinmal die Integration rationaler Funktionen diskutieren. Wir erinnern zunächst die Partialbruchzerlegung aus 3.5.5.12. Danach bilden die Potenzen $(X^n)_{n\geq 0}$ mitsamt den Potenzen der Inversen der Linearfaktoren $((X-\mu)^{-n})_{n\geq 1,\,\mu\in\mathbb{C}}$ eine $\mathbb{C}$-Basis des Funktionenkörpers $\mathbb{C}(X) = \operatorname{Quot}\mathbb{C}[X]$. Es reicht also, die Funktionen $\mathbb{R}\backslash\mu \to \mathbb{C}$, $x \mapsto (x-\mu)^m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $\mu \in \mathbb{C}$ zu integrieren, und Stammfunktionen für diese Funktionen sind eben

$$\frac{1}{m+1}(x-\mu)^{m+1} \text{ für } m \neq -1 \;\text{ und }\; \log(x-\mu) \text{ für } m = -1$$

für einen und jeden Zweig des Logarithmus, der auf der entsprechenden Parallele zur reellen Achse beziehungsweise der reellen Achse selbst mit Ausnahme des Ursprungs definiert ist, vergleiche unsere Formel $\log'(z) = 1/z$ aus 14.1.2.14 für die Ableitung des komplexen Logarithmus.

Beispiel 14.1.3.13. Wir bestimmen eine Stammfunktion zu $1/(1+x^2)$. Die Nullstellen des Nenners sind $\pm\,\mathrm{i}$ und der Grad des Zählers ist echt kleiner als der Grad des Nenners. Wir dürfen folglich den Ansatz

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x+\mathrm{i}} + \frac{b}{x-\mathrm{i}}$$

machen und finden sofort $(a+b)x - \mathrm{i}\,a + \mathrm{i}\,b = 1$, also $a+b=0$ und $a-b=\mathrm{i}$ und folglich $a = \mathrm{i}/2$ und $b = -\mathrm{i}/2$. Eine Stammfunktion ist mithin

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\log(x+\mathrm{i}) - \frac{\mathrm{i}}{2}\log(x-\mathrm{i})$$

Aus **??** erinnern wir für den Hauptzweig des Logarithmus die Formel

$$\log(u+\mathrm{i}\,v) = \log\sqrt{u^2+v^2} \;\pm\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2} - \mathrm{i}\arctan\frac{u}{v} \quad \text{für } \pm v > 0$$

Um die weitere Rechnung zu vereinfachen beachten wir, daß unsere Stammfunktion bis auf eine Konstante eh eine reellwertige Funktion sein muß. Wir dürfen

also bereits vor dem Addieren die Realteile nehmen. Die Konstanten dürfen wir eh weglassen und erhalten so als reelle Stammfunktion sofort

$$\frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\arctan(-x) = \arctan(x)$$

in Übereinstimmung mit unseren Ergebnissen aus 10.5.4.14.

Übungen

Übung 14.1.3.14. Man finde eine Stammfunktion von $1/(x^4+1)$.

Übung 14.1.3.15 (**Komplexes Ableiten unter dem Integral**). Seien $U \Subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \times [a,b] \to \mathbb{C}$, $(z,t) \mapsto f(z,t)$ stetig. Ist f für alle t komplex differenzierbar in z und $\frac{\partial f}{\partial z} : U \times [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, so ist auch die Abbildung $F : z \mapsto \int_a^b f(z,t)\,\mathrm{d}t$ holomorph und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial z}(w) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(w,t)\,\mathrm{d}t$$

Hinweis: 12.2.1.15. In 14.3.1.15 diskutieren wir noch eine etwas stärkere Variante. Die Aussage dieser Übung wird im weiteren Verlauf der Vorlesung eine wichtige Rolle spielen.

Übung 14.1.3.16 (**Partielle Integration für komplexwertige Funktionen**). Man schreibe die Regel für die partielle Integration für stetig differenzierbare komplexwertige Funktionen einer reellen Variablen aus und geben einen Beweis. Hinweis: Es geht wie im Reellen, vergleiche 10.5.8.9.

14.2 Wegintegrale und Integralsatz von Cauchy

14.2.1 Komplexe Wegintegrale (10.5)

Definition 14.2.1.1. Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stetig differenzierbarer Weg und f eine stetige auf seinem Bild definierte komplexwertige Funktion, so definieren wir das **komplexe Wegintegral der Funktion f über den Weg γ**, eine komplexe Zahl $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, durch die Vorschrift

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Ist allgemeiner γ stückweise stetig differenzierbar im Sinne von 12.7.6.4, so nennen wir γ einen **Integrationsweg** und definieren das Wegintegral wie in 12.7.6.5 als die Summe der Wegintegrale über seine maximalen stetig differenzierbaren Teilstücke. Hier ist ein Film über das komplexe Wegintegral.

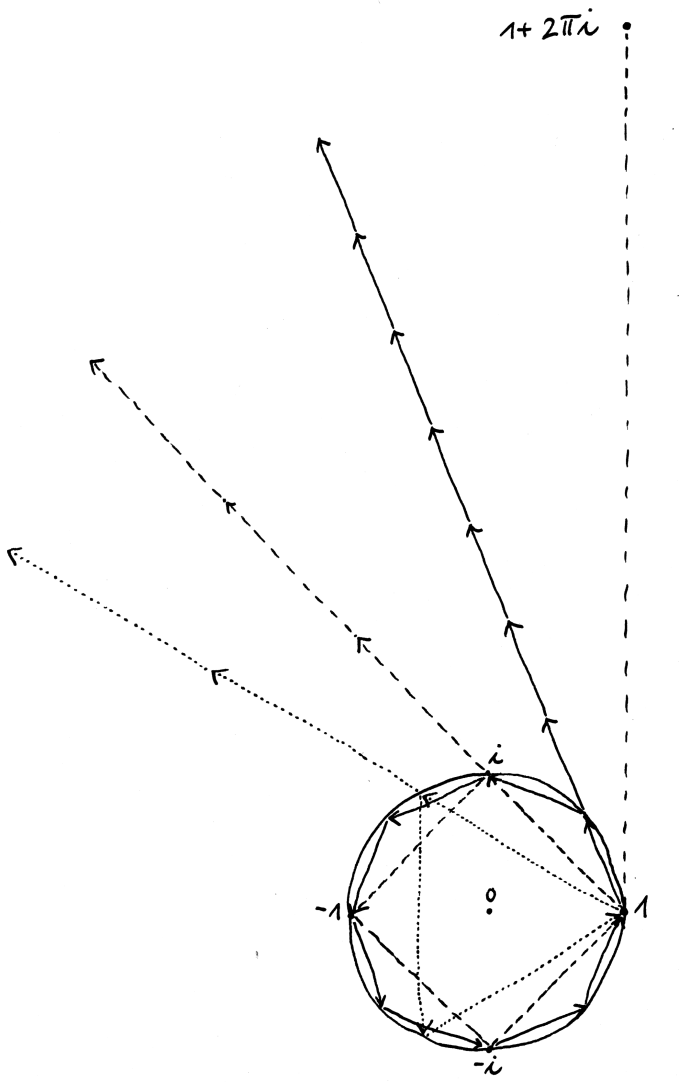
14.2.1.2 (**Komplexe Wegintegrale als Wegintegrale von Kovektorfeldern**). In 14.2.5.7 erlären wir die Bedeutung von $f(z)\,\mathrm{d}z$ als „komplexwertiges Kovektorfeld“ und besprechen, in welcher Weise die vorstehende Definition als eine Verallgemeinerung unserer Definition des Wegintegrals über Kovektorfelder aus 12.7.4 verstanden werden kann. Ich denke, dieser Zugang trägt am weitesten.

14.2.1.3 (**Komplexe Wegintegrale als Wegintegrale von Vektorfeldern**). Realteil und Imaginärteil des komplexen Wegintegrals können auch als Wegintegrale von Vektorfeldern auf $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ mit seinem Standardskalarprodukt im Sinne von 12.7.4.12 verstanden werden, aber das wird dann ziemlich verquast. Noch in der vernünftigen Sprache der komplexwertigen Kovektorfelder aus 14.2.5.7 folgt aus $z = x + \mathrm{i}y$ sofort $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y$ und mit $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ dann $f(z)\,\mathrm{d}z = u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}(v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)$. Da das Wegintegral eines Vektorfeldes $w = (w_1, w_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ mit dem Wegintegral des Kovektorfeldes $w_1\,\mathrm{d}x + w_2\,\mathrm{d}y$ zusammenfällt, in Formeln $\int_\gamma w \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\gamma w_1\,\mathrm{d}x + w_2\,\mathrm{d}y$, finden wir so

$$\operatorname{Re}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma (u, -v) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma (v, u) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Diese Formeln sind auch in Koordinaten schnell nachgerechnet. Das erste Vektorfeld mag man hier auch noch $(u, -v) = \bar{f}$ schreiben und das zweite $(v, u) = \mathrm{i}\bar{f}$. Wie gesagt scheint mir das alles ziemlich verquast. Einem Leser, der Wegintegrale von Vektorfeldern gewohnt ist, mag es dennoch weiterhelfen.

14.2.1.4 (**Anschauung für das komplexe Wegintegral**). Auf der rechten Seite ist $\gamma'(t) \in \mathbb{C}$ zu verstehen als Geschwindigkeit im Sinne von 14.1.2.3 und das



Dieses Bild soll dazu helfen, eine Anschauung für die Riemannsummen zum Integral der Funktionen z^n über den Einheitskreis zu entwickeln. Im Fall $n = 0$ sind alle Riemannsummen schlicht Null. Im Fall $n = -1$ dahingegen werden durch den Faktor z^{-1} alle „Kanten unserer Vielecke in die Richtung der ersten Kante gedreht“, und man erkennt, wie die Riemannsummen, hier gezeichnet für $n = 3, 4$ und 8, gegen den Vektor alias die komplexe Zahl $2\pi\mathrm{i}$ konvergieren.

Integral der stetigen komplexwertigen Funktion $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ ist zu verstehen als Integral einer vektorwertigen Funktion im Sinne von 14.1.3.4. Betrachtet man in der Situation der Definition für alle $r \geq 1$ die äquidistanten Unterteilungen $a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_r = b$ und bildet die „Riemannsummen“

$$S_\gamma^r(f) = \sum_{i=0}^{r-1} f(\gamma(a_i))\,(\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i))$$

mit nun in $\mathbb{C}$ zu bildenden Produkten rechts, so ist unser Wegintegral mit denselben Argumenten wie in 12.7.4.7 der Grenzwert der Folge der Riemannsummen

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{r\to\infty} S_\gamma^r(f)$$

14.2.1.5 (**Abschätzungen für das komplexe Wegintegral**). Der Absolutbetrag eines Wegintegrals ist beschränkt durch das Produkt der Länge des Weges im Sinne von 12.7.5.1 mit dem Supremum der Absolutbeträge der Funktionswerte auf dem Weg. Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ unser Integrationsweg, so gilt also in Formeln

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \left(\sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|\right) \mathrm{L}(\gamma)$$

Man kann das direkt an der Darstellung des Wegintegrals durch Riemannsummen ablesen. Es folgt mit der Darstellung $\mathrm{L}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$ der Weglänge nach 10.7.1.14 auch sofort aus der Abschätzung 14.1.3.4 der Norm des Integrals einer vektorwertigen Funktion durch das Integral über die Normen der Funktionswerte, angewandt im Spezialfall einer komplexwertigen Funktion.

Beispiele 14.2.1.6. Ist der Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ die Identität $\gamma(t) = t$, so haben wir offensichtlich

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ist unser Weg gegeben durch $t \mapsto \mathrm{i}t$, so haben wir ebenso offensichtlich

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_a^b f(\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t$$

Bilden wir das komplexe Wegintegral über die konstante Funktion 1, so ist offensichtlich bereits die Folge der Riemannsummen konstant $\gamma(b) - \gamma(a)$, und das kommt nach elementarer Rechnung dann auch aus unserer Definition des komplexen Wegintegrals heraus und wird durch 14.2.1.7 verallgemeinert, in Formeln

$$\int_\gamma \mathrm{d}z = \gamma(b) - \gamma(a)$$

Ist unser Weg ein kreisförmiger Weg im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung, der durch den Winkel parametrisiert ist und der also in Formeln gegeben wird durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für einen festen Radius $r > 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_\gamma z^n \,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{i}r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{i}r^{n+1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & n = -1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Im Fall $n \neq -1$ und ganz besonders im Fall $n = 0$ scheint es mir in dieser Situation auch anschaulich recht klar, daß bereits fast alle Riemannsummen verschwinden, da die k-te Riemannsumme die Summe aller k-ten Einheitswuzeln ist, und damit verschwindet natürlich auch ihr Grenzwert. Der Fall $n \neq -1$ läßt sich im Übrigen auch elegant als Spezialfall der anschließenden Proposition behandeln.

Proposition 14.2.1.7 (Komplexes Wegintegral durch Stammfunktion). *Seien $U \Subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar und $\gamma : [a, b] \to U$ ein Integrationsweg. So gilt*

$$\int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir γ stetig differenzierbar annehmen. Nach der reell-komplexen Kettenregel 14.1.2.15 hat $(f \circ \gamma) : [a, b] \to \mathbb{C}$ die Ableitung $t \mapsto f'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Damit finden wir

$$\int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = (f \circ \gamma)|_a^b$$

nach der Definition und der vektorwertigen Variante 14.1.3.9 des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. □

Vorschau 14.2.1.8. In der Sprache der komplexwertigen Kovektorfelder finden wir für f holomorph $\mathrm{d}f = f'(z)\,\mathrm{d}z$ und unsere Formel erweist sich als eine komplexwertige Variante der Formel 12.7.4.9 des Wegintegrals über ein totales Differential.

14.2.1.9. Insbesondere ist also das Integral einer Ableitung über einen geschlossenen Weg stets Null. Das zeigt sofort $\int_\gamma z^n\,\mathrm{d}z = 0$ für $n \neq -1$ und jeden geschlossenen Weg γ in der komplexen Zahlenebene. Im Fall $n = -1$ kann dies Argument so nicht angewandt werden, da die Funktion $1/z$ keine auf ganz $\mathbb{C}^\times$ definierte Stammfunktion besitzt. Definieren wir aber $\log : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ als Umkehrung von $\exp : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)\mathrm{i} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$, so ist $\log$ nach 14.1.2.10 holomorph mit Ableitung $1/z$, und integrieren wir für $\varepsilon > 0$ die Funktion $1/z$ über einen Integrationsweg von $-1 - \mathrm{i}\varepsilon$ bis $-1 + \mathrm{i}\varepsilon$ durch die geschlitzte Zahlenebene $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$,

so ergibt sich $\log(-1+\mathrm{i}\varepsilon)-\log(-1-\mathrm{i}\varepsilon)$ und das strebt für $\varepsilon \searrow 0$ gegen $2\pi\mathrm{i}$. So finden wir

$$\int_\gamma z^{-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}$$

für jeden geschlossenen Integrationsweg, der an einem Punkt der negativen reellen Zahlengeraden beginnt und endet, der sonst $\mathbb{R}_{\le 0}$ nicht trifft, und der „nach unten losgeht und von oben ankommt“.

14.2.1.10 (**Funktionen mit komplexer Ableitung Null**). Wir geben noch ein alternatives Argument für Übung 14.1.1.13, nach der eine holomorphe Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich, deren Ableitung identisch verschwindet, konstant sein muß. Nach **??** lassen sich ja je zwei Punkte des Definitionsbereichs durch einen Integrationsweg verbinden. Nach 14.2.1.7 hat also unsere Funktion an je zwei Punkten denselben Wert.

14.2.1.11 (**Stückweises Integrieren**). Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und f eine auf seinem Bild definierte stetige komplexwertige Funktion, so gilt für alle $c \in (a,b)$ offensichtlich oder genauer nach 14.1.3.4 die Identität

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma|[a,c]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma|[c,b]} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Proposition 14.2.1.12 (Unabhängigkeit von der Parametrisierung). *Seien $U \Subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [a,b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Ist $t : [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar mit $t(c) = a$ und $t(d) = b$, so gilt*

$$\int_{\gamma\circ t} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

Ergänzung 14.2.1.13. Kehrt hier alternativ unsere Reparametrisierung die Richtung um, gilt also $t(c) = b$ und $t(d) = a$, so ändert unter unserer Reparametrisierung das Integral sein Vorzeichen. Die Proposition ist im übrigen eine Variante des Satzes über die Unabhängigkeit von der Parametrisierung von Wegintegralen im Reellen 12.7.4.17 wird auch im wesentlichen genauso bewiesen. Hier ist ein Film über das Umparametrisieren und Integrationswege.

Beweis. Wir beachten $(\gamma\circ t)'(\tau) = \gamma'(t(\tau))t'(\tau)$ nach der komplex-reellen Kettenregel, können unsere Behauptung demnach ausschreiben zur Behauptung

$$\int_d^c f(\gamma(t(\tau)))\gamma'(t(\tau))t'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{t(d)}^{t(c)} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

und diese Gleichung folgt aus der Substitutionsregel 10.5.8.1, angewandt auf Real- und Imaginärteil, oder eleganter aus der Substitutionsregel 14.1.3.11 für vektorwertige Funktionen. □

Proposition 14.2.1.14 (Existenz von Stammfunktionen). *Eine stetige komplexwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene besitzt eine Stammfunktion genau dann, wenn ihr Wegintegral über jeden geschlossenen Integrationsweg in unserer offenen Teilmenge verschwindet.*

Beweis. Hier ist ein Film über Wegintegral und komplexe Stammfunktionen. Besitzt unsere Funktion eine Stammfunktion, so verschwinden alle Wegintegrale über geschlossene Integrationswege nach 14.2.1.7. Um die Gegenrichtung zu zeigen dürfen wir, da nach 12.7.5.14 die Wegzusammenhangskomponenten einer offenen Teilmenge de komplexen Zahlenebene auch selbst offen sind, ohne Beschränkung der Allgemeinheit unsere offene Teilmenge $U \Subset \mathbb{C}$ zusammenhängend annehmen. Dann wählen wir $p \in U$ fest und betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rccl} F: & U & \to & \mathbb{C} \\ & w & \mapsto & \int_{\gamma_w} f(z)\,\mathrm{d}z \end{array}$$

für γ_w einen beliebigen Integrationsweg von p nach w, den es nach **??** geben muß und von dessen Wahl unser Wegintegral nach Annahme ja nicht abhängt. Für kleines $h \in \mathbb{C}$ können wir dann $F(w+h)$ berechnen, indem wir an den Weg γ_w noch das Geradensegment $[w, w+h]$ anhängen. Für kleines $h \in \mathbb{C}$ gilt damit

$$F(w+h) - F(w) = \int_0^1 f(w+\tau h)h\,\mathrm{d}\tau$$

Teilen wir durch h, so erhalten wir $\int_0^1 f(w+\tau h)\,\mathrm{d}\tau$, und das strebt gegen $f(w)$ für $h \to 0$. Genauer haben wir $|f(w) - \int_0^1 f(w+\tau h)\,\mathrm{d}\tau| = |\int_0^1 f(w) - f(w+\tau h)\,\mathrm{d}\tau| \le \sup_{0\le\tau\le 1}|f(w) - f(w+\tau h)| \to 0$ für $h \to 0$ aufgrund der Stetigkeit von f an der Stelle w. Folglich ist F eine Stammfunktion unserer stetigen Funktion f. □

14.2.1.15. Unter einem **Rechteck** oder genauer einem **achsenparallelen Rechteck** verstehen wir eine Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}^2$, die das Produkt von zwei kompakten reellen mehrpunktigen Intervallen ist. Unter dem **Randweg** $\partial\vec{Q}$ eines Rechtecks Q verstehen wir den geschlossenen Weg, der von der unteren linken Ecke ausgehend „einmal im Gegenuhrzeigersinn auf dem Rand unseres Rechtecks umläuft“, sagen wir mit konstanter Geschwindigkeit Eins auf jeder Kante. Hier vom „Gegenuhrzeigersinn“ zu sprechen, appelliert an unsere Anschauung und die übliche Identifikation des $\mathbb{R}^2$ mit der Papierebene gemäß der Vereinbarung „x-Achse nach rechts, y-Achse nach oben“ und ist keine sehr mathematische Formulierung, aber ich hoffe, daß dem Leser umso genauer klar ist, welcher Weg gemeint ist. Der Pfeil über dem Q soll daran erinnern, daß es uns bei diesem Randweg auf die Richtung ankommt. Unter dem **Randintegral** einer stetigen komplexwertigen Funktion in Bezug auf ein Rechteck verstehen wir ihr komplexes Wegintegral über diesen Randweg.

Ergänzung 14.2.1.16. Diese Notation ist mit unserer Notation aus 12.8.3 verträglich in dem Sinne, daß beide Notationen Spezialisierungen aus dem noch allgemeineren Rahmen der Integration von Differentialformen über orientierte Fastfaltigkeiten sind. Versehen wir genauer $\mathbb{C}$ mit der durch unsere übliche Identifikation $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ gegebenen Orientierung, so meint $\vec{Q}$ das Rechteck mit seiner induzierten Orientierung und unter $\partial\vec{Q}$ ist der Rand von Q mit seiner induzierten Orientierung im Sinne von 12.8.7.18. Das ist dann zwar recht eigentlich kein Weg, sondern vielmehr eine orientierte 1-Fastfaltigkeit, aber das Integral der komplexwertigen 1-Form $f(z)\,\mathrm{d}z$ im Sinne von 14.2.5.8 über diese 1-Fastfaltigkeit fällt zusammen mit dem hier definierten komplexen Wegintegral.

Lemma 14.2.1.17 (**Stammfunktionen auf offenen Kreisscheiben**). *Eine stetige komplexwertige Funktion auf einer offenen Kreisscheibe in der komplexen Zahlenebene besitzt auf besagter Kreisscheibe eine Stammfunktion genau dann, wenn für jedes in unserer Kreisscheibe enthaltene achsenparallele Rechteck das Randintegral verschwindet.*

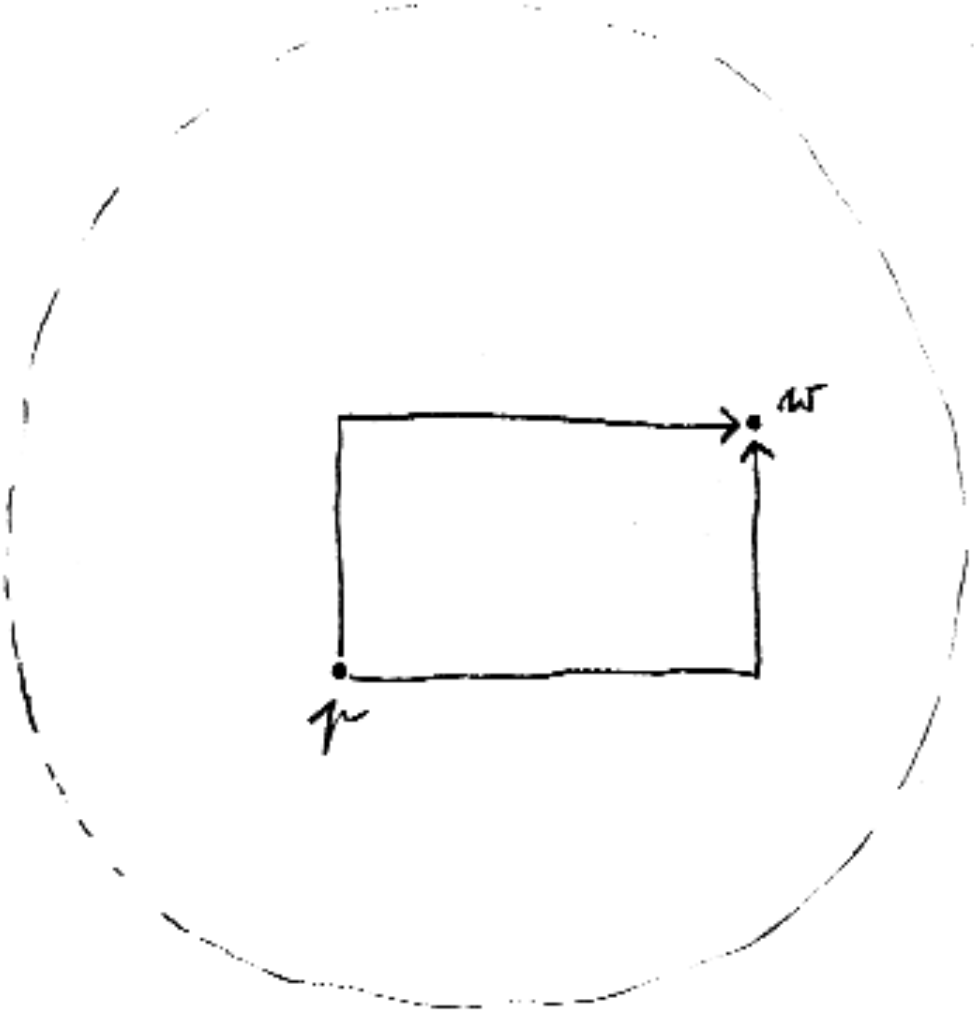
14.2.1.18. Diese Variante des Satzes über die Stammfunktion werden wir beim Beweis des Integralsatzes von Cauchy 14.2.3.1 und beim Beweis des Satzes von Morera 14.3.1.9 brauchen. Unter einem achsenparallelen Rechteck verstehen wir hier und im Folgenden ein Rechteck, dessen Kanten parallel sind zu den Koordinatenachsen oder in unserem Falle zur reellen beziehungsweise imaginären Achse.

Beweis. Man variiert das Argument des vorhergehenden Beweises für 14.2.1.14 dahingehend, daß man als Wege γ_w nur die beiden Wege nimmt, die längs der Kanten eines achsenparallelen Rechtecks mit Ecken p und w von p nach w laufen. Damit erkennt man zwar für die Stammfunktion in spe F zunächst nur $\frac{\partial F}{\partial x} = f$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = \mathrm{i}f$, da man F nur über ganz spezielle Wege erklärt hat und damit nur seine Veränderung auf vertikalen und horizontalen Geraden unmittelbar durch Integrale beschreiben kann, aber nach der Charakterisierung der komplexen Differenzierbarkeit durch die stetige partielle reelle Differenzierbarkeit zusammen mit den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen 14.1.2.6 folgt daraus bereits $F' = f$. Hier ist ein Film über komplexe Stammfunktionen auf Kreisscheiben. □

Übungen

Übung 14.2.1.19 (**Das komplexe Wegintegral respektiert Verwandtschaft**). Man zeige: Gegeben $U, V \Subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [a, b] \to U$ ein Integrationsweg, $\phi : U \to V$ holomorph mit stetiger komplexer Ableitung und $f : V \to \mathbb{C}$ stetig gilt

$$\int_\gamma f(\phi(w))\phi'(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\phi\circ\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$



Die beiden Integrationswege, die wir im Beweis von Lemma 14.2.1.17 betrachten, um die Existenz einer Stammfunktion zu zeigen.

Diese Identität kann in der in 14.2.5.7 eingeführten Terminologie verstanden werden als eine Variante für komplexwertige Kovektorfelder unserer Erkenntnis 12.7.4.9, daß das Wegintegral Verwandtschaft respektiert. Als Vorschau sei erwähnt, daß der Satz von Goursat 14.3.1.5 zeigen wird, daß die komplexe Ableitung einer holomorphen Funktionen immer stetig und sogar immer holomorph ist.

14.2.2 Homotopie von Wegen (12.5)

14.2.2.1. Ich erinnere an die in 12.7.5.1 eingeführte Terminologie. Eine stetige Abbildung von einem mehrpunktigen reellen Intervall in einen topologischen Raum X heißt ein **Weg** in unserem Raum. Im folgenden mag man sich je nach Vorkenntnissen statt einem allgemeinen topologischen Raum X auch eine Teilmenge der komplexen Zahlenebene denken. Ist das Definitionsintervall kompakt, sprechen wir von einem **kompakten Weg**. Ist das Definitionsintervall das Einheitsintervall $[0,1]$, sprechen wir von einem **normierten Weg**. Oft lassen wir diese Zusätze aber auch weg und hoffen, daß aus dem Kontext hervorgeht, was genau jeweils gemeint ist. Zu jedem kompakten Weg $\gamma : [a,b] \to X$ bilden wir den zugehörigen normierten Weg $\hat{\gamma} : [0,1] \to X$ gegeben durch $\hat{\gamma} : t \mapsto \gamma((1-t)a+tb)$.

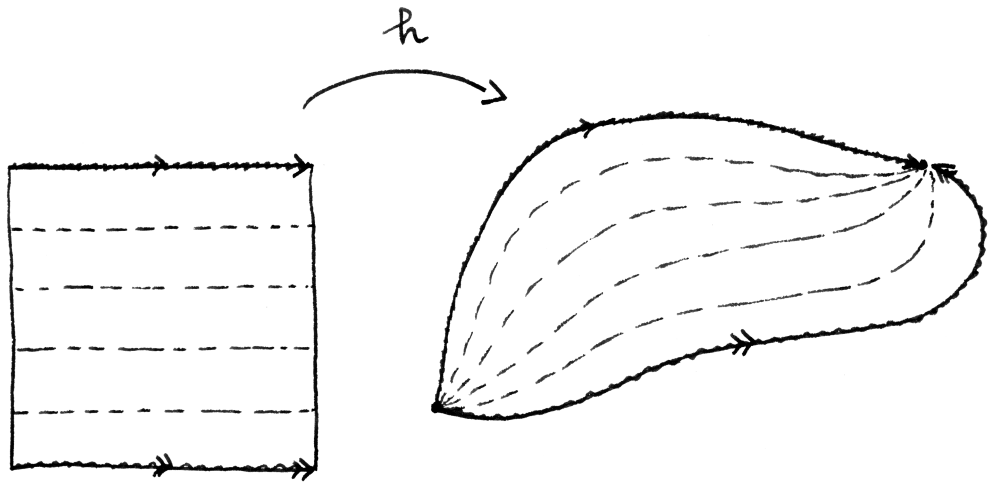
14.2.2.2. Wir erinnern im folgenden an Homotopie von Wegen und zusammenziehbare Wege, wie sie in 12.7.7.2 und 12.7.7.6 eingeführt wurden. Hier ist ein Film über Homotopie von Wegen.

Definition 14.2.2.3. Seien x, y Punkte eines topologischen Raums X. Zwei normierte Wege α, β von x nach y heißen **homotop** oder präziser **homotop in** X oder ganz pedantisch **homotop in** X **mit festen Endpunkten** und wir schreiben $\alpha \simeq \beta$, wenn es eine stetige Abbildung

$$h : [0,1]^2 \to X$$

des Einheitsquadrats in unseren Raum gibt, die auf der Unter- beziehungsweise Oberkante unseres Quadrats mit α beziehungsweise β übereinstimmt und die auf der Vorder- und der Hinterkante konstant ist. In Formeln ausgedrückt fordern wir also $h(t,0) = \alpha(t)$ und $h(t,1) = \beta(t)$ für alle $t \in [0,1]$ sowie $h(0,\tau) = x$ und $h(1,\tau) = y$ für alle $\tau \in [0,1]$. Wir sagen dann auch, h sei eine **Homotopie zwischen** α **und** β und schreiben $h : \alpha \simeq \beta$. Zwei beliebige Wege von x nach y nennen wir **homotop**, wenn die zugehörigen normierten Wege homotop sind.

14.2.2.4. Vielleicht anschaulicher kann man Homotopie von normierten Wegen auch dahingehend interpretieren, daß es eine durch $\tau \in [0,1]$ parametrisierte Familie von normierten Wegen h_τ von x nach y geben soll derart, daß gilt $h_0 = \alpha$, $h_1 = \beta$ und daß unsere Familie stetig von τ abhängt in dem Sinne, daß die Abbildung $[0,1]^2 \to X$, $(t,\tau) \mapsto h_\tau(t)$ stetig ist.



Eine Homotopie zwischen zwei Wegen, in diesem Fall zwischen den beiden Randwegen unserer Banane.

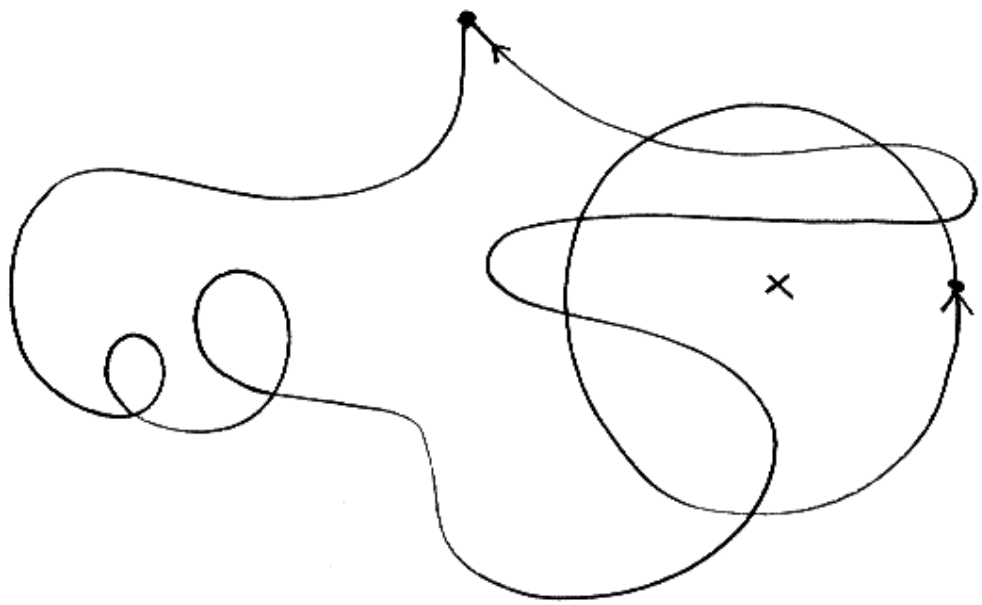
Beispiel 14.2.2.5. Für eine konvexe Teilmenge K eines endlichdimensionalen reellen Raums und zwei beliebige Punkte $x, y \in K$ sind je zwei Wege α, β von x nach y homotop in K. Sind unsere Wege normiert, so kann man eine Homotopie explizit angeben vermittels $h(t, \tau) := (1 - \tau)\alpha(t) + \tau\beta(t)$.

14.2.2.6 (**Vorwärtsverwandte homotoper Wege sind homotop**). Ist genauer und in Formeln $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, so folgt aus $h : \alpha \simeq \beta$ schon $f \circ h : f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$. Speziell ist jeder Weg homotop zu allen seinen Umparametrisierungen, denn nach 14.2.2.5 sind je zwei Wege in $K := [a, b]$ mit denselben Anfangs- und Endpunkten homotop, also je zwei von a nach b, und damit gilt dasselbe für ihre Verknüpfung mit einer beliebigen stetigen Abbildung $\gamma : [a, b] \to Y$.

Definition 14.2.2.7. Ein Weg in einem topologischen Raum heißt **geschlossen**, wenn sein Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Ein Weg in einem topologischen Raum heißt **zusammenziehbar**, wenn er homotop ist zu einem konstanten Weg. Per definitionem ist also jeder zusammenziehbare Weg geschlossen. Ein topologischer Raum heißt **schleifenfüllend**, wenn darin jeder geschlossene Weg zusammenziehbar ist.

14.2.2.8 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur nennt man wegzusammenhängende schleifenfüllende Räume „einfach zusammenhängend“ und bei mir ausführlicher „einfach wegzusammenhängend“. Ich halte es nämlich für inkonsequent, erst die Unterscheidung zwischen „wegzusammenhängend“ und „zusammenhängend“ herauszuarbeiten und sie dann in der vergleichbaren Situation von einfachem Zusammenhang unter den Teppich zu kehren. In 16.3.1.15 erklären wir „einfach zusammenhängende“ topologische Räume als Synonym für „überlagerungstriviale“ Räume alias nichtleere Räume, deren Überlagerungen sämtlich trivial sind, und zeigen, daß offene Teilmengen der komplexen Zahlenebene genau dann einfach zusammenhängend alias überlagerungstrivial sind, wenn sie im Sinne von 14.2.2.7 einfach wegzusammenhängend alias wegzusammenhängend und schleifenfüllend sind. In der Funktionentheorie sind wir deshalb in der glücklichen Lage, daß uns diese Begriffsverwirrung nicht eigentlich betrifft. Relevante Phänomene sind aber nicht weit: Lassen wir eine überlagerungstriviale abgeschlossene Teilmenge aus der komplexen Zahlenebene weg, so ist das Komplement nach 19.4.10.29 zusammenhängend. Lassen wir dahingegen eine wegzusammenhängende schleifenfüllende abgeschlossene Teilmenge aus der komplexen Zahlenebene weg, so muß das Komplement keineswegs zusammenhängend sein.

14.2.2.9. Im Rahmen der Funktionentheorie betrachten wir einfachen Zusammenhang nur für offene Teilmengen der komplexen Zahlenebene. Wir vereinfachen



Ein zusammenziehbarer und ein nicht zusammenziehbarer
geschlossener Weg in Komplement des durch ein Kreuzchen markierten Punktes
in der Papierebene

deshalb unsere Terminologie und sagen in diesem Kontext statt „einfach wegzusammenhängend“ schlicht **einfach zusammenhängend**, obwohl wir weder den Begriff des topologischen einfachen Zusammenhangs eingeführt haben, noch seine Äquivalenz zum einfachen Wegzusammenhang im Fall offener Teilmengen der komplexen Zahlenebene. Hier ist ein Film über einfachen Zusammenhang.

Übungen

Übung 14.2.2.10. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege zwischen zwei fest vorgegebenen Punkten. Hinweis: **??**.

Übung 14.2.2.11. Ein Raum ist schleifenfüllend genau dann, wenn je zwei Wege mit demselben Anfangs- und demselben Endpunkt darin homotop sind.

Ergänzende Übung 14.2.2.12. Jeder Weg in einer offenen Teilmenge eines normierten reellen Vektorraums ist in besagter offener Teilmenge homotop zu einem stückweise linearen Weg. Hinweis: 12.7.5.4.

14.2.3 Integralsatz von Cauchy (17&19.5)

Satz 14.2.3.1 (**Integralsatz von Cauchy**). *Das komplexe Wegintegral einer holomorphen Funktion längs eines in ihrem Definitionsbereich zusammenziehbaren Integrationsweges ist stets Null. Hier ist ein Film über den Integralsatz von Cauchy.*

Vorschau 14.2.3.2. Formal gesehen gilt Vergleichbares auch im Reellen: Das Wegintegral einer stetigen Einsform auf einer offenen Teilmenge der Zahlengeraden längs eines geschlossenen Integrationsweges ist stets Null. Vom höheren Standpunkt ist sogar der Beweis fast derselbe: Beide Male geschieht das Integral über eine Einsform, die aus Dimensionsgründen geschlossen ist.

14.2.3.3 (**Struktur des Beweises des Integralsatzes von Cauchy**). Hier ist ein Film über den Beweis des Integralsatzes von Cauchy. Ist $U \Subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a, b] \to U$ ein in U zusammenziehbarer geschlossener Integrationsweg, so behauptet der Integralsatz von Cauchy in Formeln

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Wir werden diesen Satz in 14.2.3.10 aus dem noch allgemeineren Satz 14.2.3.9 folgern, bei dem sogar beliebige stetige, nicht notwendig stückweise stetig differenzierbare Wege zugelassen werden. Wir führen den Beweis in einer Art Kaminkletterei. Zunächst zeigen wir in 14.2.3.4 das Verschwinden des Randintegrals einer holomorphen Funktion für jedes ganz in ihrem Definitionsbereich liegende

achsenparallele Rechteck. Daraus folgern wir mit 14.2.1.17, daß jede holomorphe Funktion auf einer offenen Kreisscheibe dort auch eine Stammfunktion besitzt. Mithilfe dieser Erkenntnis erklären wir in 14.2.3.8 für holomorphe Funktionen das Wegintegral längs beliebiger stetiger nicht notwendig stückweise stetig differenzierbarer Wege. Dann zeigen wir sogar in dieser Allgemeinheit die Homotopieinvarianz 14.2.3.9 des Wegintegrals. Den Cauchy'schen Integralsatz erhalten wir schließlich in 14.2.3.10 als eine einfache Konsequenz der Homotopieinvarianz. Der Cauchy'sche Integralsatz ist im übrigen auch selbst der Beginn einer noch größeren Kaminkletterei. Sie wird uns schließlich zum Residuensatz 14.4.2.11 führen, der den Cauchy'schen Integralsatz und viele weitere auf dem Weg dorthin bewiesene Sätze als Spezialfälle enthält.

Lemma 14.2.3.4 (**Integralsatz für Rechtecke**). *Gegeben eine holomorphe Funktion und ein achsenparalleles Rechteck, dessen ganze Fläche mitsamt ihrem Rand im Definitionsbereich unserer Funktion liegt, verschwindet das komplexe Wegintegral unserer Funktion über den Rand unseres Rechtecks.*

14.2.3.5. Dies Lemma kann für holomorphe Funktionen mit stetiger Ableitung mithilfe von 14.2.5 ohne Mühe aus dem Verschwinden des Wegintegrals geschlossener stetig differenzierbarer Kovektorfelder über zusammenziehbare Integrationswege 12.7.8.8 gefolgert werden. Wir wollen es jedoch unter anderem benutzen, um zu zeigen, daß die Ableitung einer holomorphen Funktion stets stetig sein muß. Deshalb sowie der logischen Vollständigkeit halber geben wir hier auch noch einen eigenständigen Beweis.

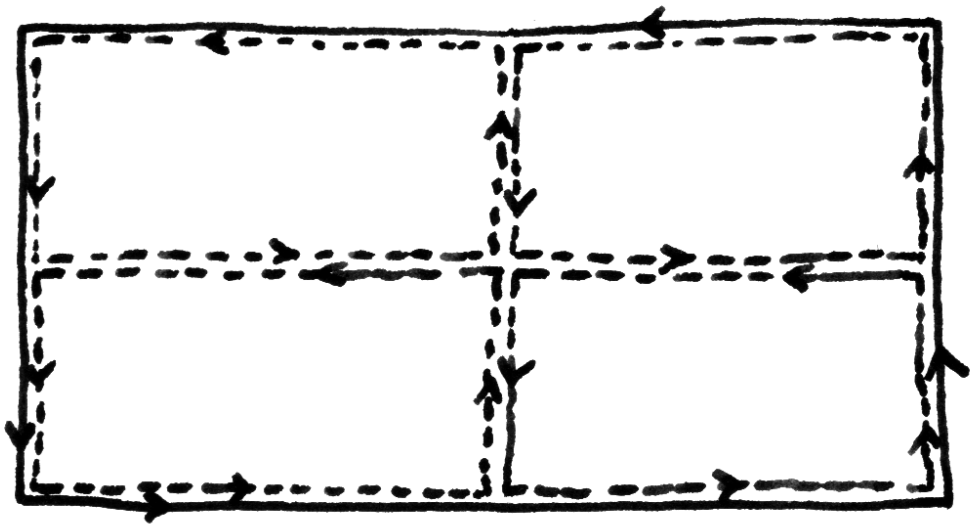
Beweis. Hier ist ein Film über den Beweis Integralsatzes für Rechteckswege. Bezeichne Q_0 unser Rechteck und I_0 sein Randintegral. Unterteilen wir unser Rechteck Q_0 in vier gleichgroße Teilrechtecke, so wird I_0 die Summe der entsprechenden Randintegrale für diese vier Teilrechtecke und es gibt unter diesen notwendig ein Teilrechteck Q_1 derart, daß für das zugehörige Randintegral I_1 gilt

$$|I_0| \leq 4|I_1|$$

Indem wir so weitermachen, finden wir eine absteigende Folge $Q_0 \supset Q_1 \supset \ldots$ von Rechtecken Q_n mit Umfang $2^{-n}a$ für konstantes a derart, daß für die zugehörigen Randintegrale I_n gilt

$$|I_0| \leq 2^{2n}|I_n|$$

Nun ist aber mit doppelter Anwendung des Intervallschachtelungsprinzips 10.3.6.11 oder auch nach 11.2.1.19 der Schnitt aller dieser Rechtecke Q_n nicht leer und



Das Randintegral des grossen Rechtecks ist die Summe der Randintegrale der vier kleinen Rechtecke.

besteht genauer aus einem einzigen Punkt p. Bezeichnet f unsere holomorphe Funktion, so können wir nach 14.1.1.8 schreiben

$$f(z) = f(p) + (z-p)f'(p) + (z-p)\varepsilon(z-p)$$

für eine stetige Funktion ε mit $\varepsilon(0) = 0$. Da der lineare Anteil eine Stammfunktion besitzt, trägt er nach 14.2.1.7 zum Randintegral I_n nichts bei und wir finden

$$I_n = \int_\gamma (z-p)\varepsilon(z-p)\,\mathrm{d}z$$

für γ den Randweg um Q_n. Bezeichnet d die Länge der Diagonale von Q_0, so gilt $|z-p| \leq 2^{-n}d$ für alle $z \in Q_n$ und wir können unser Integral mit 14.2.1.5 abschätzen durch

$$|I_n| \leq (2^{-n}a)(2^{-n}d) \sup_{z \in Q_n} |\varepsilon(z-p)|$$

Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} 2^{2n}|I_n| = 0$ und damit dann auch $I_0 = 0$. Das zeigt den Integralsatz im Fall, daß unser Weg der Randweg eines im Definitionsbereich unserer Funktion enthaltenen Rechtecks ist. □

Lemma 14.2.3.6. *Eine holomorphe Funktion auf einer offenen Kreisscheibe besitzt dort stets eine Stammfunktion.*

Vorschau 14.2.3.7. In 14.2.3.11 werden wir aus dem Integralsatz von Cauchy allgemeiner ableiten, daß jede holomorphe Funktion mit schleifenfüllendem Definitionsbereich eine Stammfunktion besitzt.

Beweis. Das eben gezeigte Verschwinden des Randintegrals für alle Rechtecke 14.2.3.4 ist genau die hinreichende Bedingung aus Lemma 14.2.1.17 für die Existenz einer Stammfunktion auf offenen Kreisscheiben. □

Definition 14.2.3.8 (Wegintegrale längs beliebiger Wege). Für eine holomorphe Funktion f und einen beliebigen Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ in ihrem Definitionsbereich erklären wir das komplexe Wegintegral, indem wir erst eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ so wählen, daß jedes Wegstück ganz in einer offenen Kreisscheibe aus dem Definitionsbereich verläuft, dann auf diesen Kreisscheiben jeweils mit 14.2.3.6 eine Stammfunktion F_ν von f wählen und schließlich setzen

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu(\gamma(a_\nu)) - F_\nu(\gamma(a_{\nu-1}))$$

Um die Existenz einer derartigen Unterteilung zu zeigen, mag man von der Bemerkung ausgehen, daß der Abstand von $\gamma(t)$ zum Komplement von U nach **??**

stetig von t abhängt und folglich sein Minimum annimmt, das notwendig positiv sein muß, und daß andererseits γ gleichmäßig stetig ist. Die weiteren Details seien dem Leser überlassen. Durch Übergang zu einer gemeinsamen Verfeinerung wird klar, daß dies Integral weder von der gewählten Unterteilung noch von den jeweils gewählten Stammfunktionen abhängt. Wegen der Beschreibung 14.2.1.7 des Wegintegrals über Integrationswege durch Stammfunktionen ist diese Definition im Fall von Integrationswegen verträglich mit unserem Wegintegral für Integrationswege nach 14.2.1.1. Man beachte jedoch, daß in dieser Allgemeinheit, also längs beliebiger, nicht notwendig stückweise stetig differenzierbarer Wege, das Wegintegral nur noch für sehr spezielle Funktionen, wie etwa holomorphe Funktionen, sinnvoll erklärt werden kann.

Satz 14.2.3.9 (**Homotopieinvarianz des Wegintegrals**). *Die Wegintegrale einer holomorphen Funktion über je zwei in ihrem Definitionsbereich homotope Wege stimmen überein.*

14.2.3.10. Der Cauchy'sche Integralsatz 14.2.3.1 folgt sofort, da ein zusammenziehbarer Weg per definitionem homotop ist zu einem konstanten Weg und da Wegintegale über konstante Wege offensichtlich verschwinden.

Erster Beweis. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ unsere holomorphe Funktion. Sei $h : [0,1]^2 \to U$ eine Homotopie zwischen unseren Wegen, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit normiert annehmen dürfen. Unser Quadrat $[0,1]^2$ können wir so in kleine „Schachfelder" unterteilen, daß jedes dieser Felder unter h ganz in einer in U enthaltenen offenen Kreisscheibe landet: In der Tat wird ja U von offenen in U enthaltenen Kreisschreiben überdeckt, unser kompaktes Quadrat $[0,1]^2$ also von deren Urbildern, und nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue 12.4.1.7 gibt es dann sogar ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für jedes $x \in [0,1]^2$ der Ball $\mathrm{B}(x;\varepsilon)$ bereits ganz in einem dieser Urbilder liegt. Bezeichnet nun $\rho_{i,j}$ die Randwege unserer Schachfelder, so verschwindet das Wegintegral über jeden der Wege $h \circ \rho_{i,j}$, da unsere Funktion auf Kreisscheiben ja nach 14.2.3.6 jeweils eine Stammfunktion hat. Die Summe der Wegintegrale über die $h \circ \rho_{i,j}$ ist aber offensichtlich gerade die Differenz der Wegintegrale über unsere beiden ursprünglichen homotopen Wege. □

Zweiter Beweis. Alternativ mag man auch wie beim Beweis von 12.7.8.8 vorgehen. Das hat den Vorteil, daß wir keine Integrale über allgemeine stetige Wege zu diskutieren brauchen, aber dafür braucht die Argumentation einen zusätzlichen Schritt: Wir gehen erst von unseren ursprünglichen Wegen zu approximierenden Polygonzügen über und betrachten dann statt den möglicherweise nicht mehr differenzierbaren „ganz kleinen" Wegen $h \circ \rho_{i,j}$ die „ganz kleinen" Wege, die zwischen den Bildern unter h der Ecken unserer kleinen Schachfelder gerade verlaufen. □

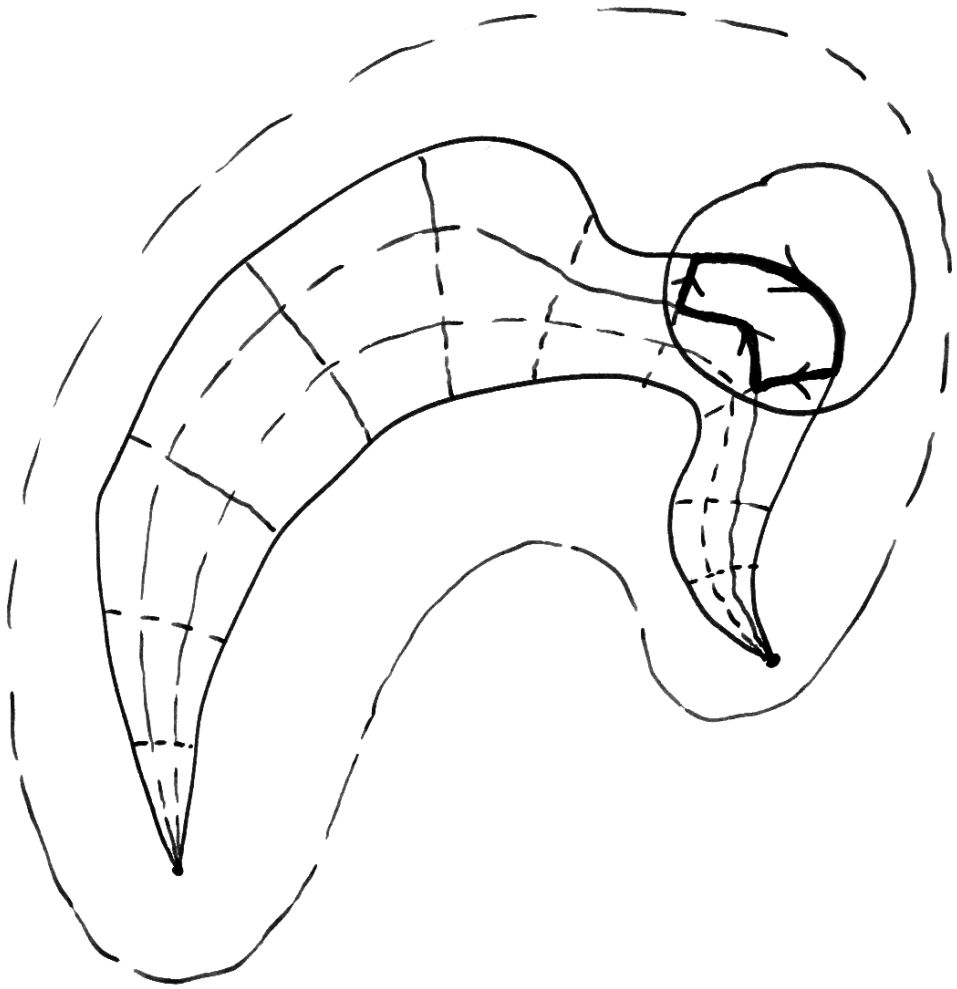


Illustration zum Beweis der Homotopieinvarianz des Wegintegrals holomorpher Funktionen. Eine Homotopie liefert wie angedeutet eine Darstellung der Differenz der Wegintegrale zweier homotoper Wege als eine Summe über die Wegintegrale von „ganz kleinen“ geschlossenen Wegen, wo „ganz klein“ bedeutet, daß sie jeweils ganz in einer im Definitionsbereich unserer Funktion enthaltenen offenen Kreisscheibe verlaufen. Auf jeder Kreisscheibe hat eine holomorphe Funktion aber, das haben wir bereits aus dem Integralsatz für Rechteckswege gefolgert, eine Stammfunktion, folglich sind die Wegintegrale aller unserer ganz kleinen Wege Null.

Proposition 14.2.3.11 (Stammfunktionen holomorpher Funktionen). *Jede holomorphe Funktion mit schleifenfüllendem Definitionsbereich besitzt eine auf dem ganzen Definitionsbereich definierte Stammfunktion.*

Beweis. Nach 14.2.1.14 müssen wir nur zeigen, daß das Wegintegral unserer Funktion über jeden geschlossenen Weg verschwindet. Nach Annahme ist aber jeder geschlossene Weg aus dem Definitionsbereich bereits im Definitionsbereich zusammenziehbar und damit verschwindet das Wegintegral nach dem Integralsatz von Cauchy 14.2.3.1, den wir ja in 14.2.3.10 mittlerweile bewiesen haben. □

Definition 14.2.3.12. Zwei normierte geschlossene Wege α, β in einem metrischen oder allgemeiner topologischen Raum heißen **frei homotop**, wenn es eine durch $\tau \in [0,1]$ parametrisierte Familie geschlossener normierter Wege γ_τ gibt mit $\gamma_0 = \alpha$, $\gamma_1 = \beta$ und so, daß $(t,\tau) \mapsto \gamma_\tau(t)$ stetig ist auf $[0,1]^2$. Zwei geschlossene Wege heißen frei homotop, wenn die zugehörigen normierten Wege frei homotop sind.

Satz 14.2.3.13 (Invarianz des Wegintegrals unter freier Homotopie). *Die Wegintegrale über je zwei im Definitionsbereich einer holomorphen Funktion frei homotope geschlossene Wege stimmen überein.*

Beweis. Das folgt leicht aus der Homotopieinvarianz des Wegintegrals für holomorphe Funktionen 14.2.3.9. Hier ist ein Film über die Invarianz des Wegintegrals unter freier Homotopie. Die Details seien dem Leser zur Übung überlassen. □

Vorschau 14.2.3.14 (**Integralsatz für nullhomologe Wege**). Wir gehen aus von der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$, entfernen daraus zwei Punkte a, b und betrachten den Integrationsweg γ gegeben durch das nebenstehende Bild. Es ist nicht klar, ob dieser Weg in $\mathbb{C}\backslash\{a,b\}$ zusammenziehbar ist, und in 16.2.5.10 zeigen wir, daß er es in der Tat nicht ist. Klar ist jedoch, daß dennoch das Integral jeder auf $\mathbb{C}\backslash\{a,b\}$ holomorphen Funktion längs dieses Weges verschwinden muß: Zerlegen wir nämlich unseren Weg in Stücke, indem wir ihn an den drei Selbstschnittstellen aufschneiden, und setzen diese Stücke so wieder zu zwei geschlossenen Wegen zusammen, daß der eine das Gebiet berandet, das von oben an das Mittelkreuz grenzt, und der andere das Gebiet, das von unten an das Mittelkreuz grenzt, so erhalten wir zwei in $\mathbb{C}\backslash\{a,b\}$ zusammenziehbare Wege, über die das Wegintegral nach dem Integralsatz von Cauchy 14.2.3.1 jeweils verschwinden muß. Diesen Trick verwandeln wir im Rahmen der Homologietheorie in eine Methode, vergleiche 17.1.2.19.

Beispiel 14.2.3.15. Wir zeigen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \pi$$

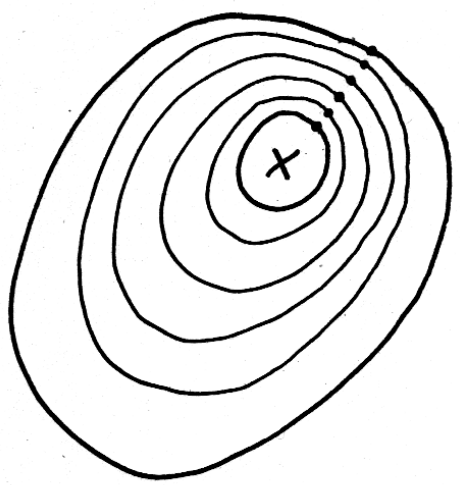


Illustration einer freien Homotopie zwischen zwei geschlossenen Wegen im Komplement eines Punktes der Ebene.

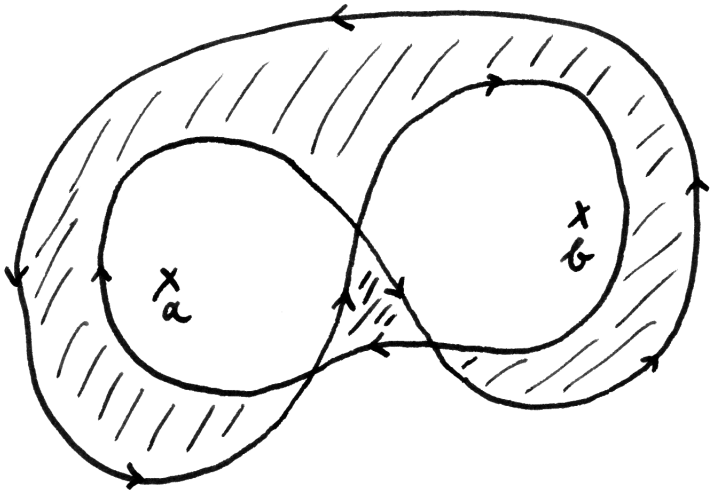
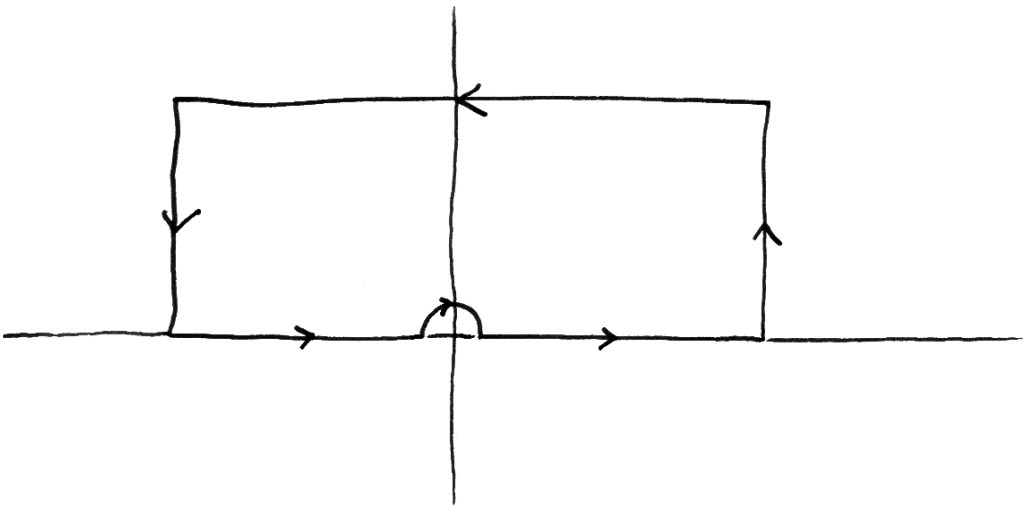


Illustration zu 14.2.3.14: Ein geschlossener nicht zusammenziehbarer aber Weg im Komplement einer zweielementigen Teilmenge der komplexen Zahlenebene, der dennoch die Eigenschaft hat, daß jedes Integral einer holomorphen Funktion auf unserem Komplement darüber verschwindet. Denkt man sich den Weg als Schnur und bei a und b Nägel in der Wand, so bleibt die Schnur durchaus hängen, fällt aber herunter, sobald nur Ein Nagel herausgezogen wird.



Einer der Integrationswege bei der Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. Zum Nachweis der Existenz des Grenzwerts betrachten wir allerdings auch entsprechend verschobene rechteckige Integrationswege, die ganz rechts oder links der imaginären Achse verlaufen.

in dem Sinne, daß sowohl $\lim_{r\to\infty}\int_0^r$ als auch $\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^0$ existieren und ihre Summe den angegebenen Wert hat. Um das zu sehen, bemerken wir zunächst, daß der Integrand außerbalb des Ursprungs mit der Einschränkung des Imaginärteils von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/z$ auf die reelle Achse zusammenfällt. Dann betrachten wir für $a < b$ in $\mathbb{R}^\times$ und $h > 0$ Integrationswege, die einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Rand des Rechtecks mit Ecken $a, b, a + \mathrm{i}h, b + \mathrm{i}h$ umlaufen und im Fall $a < 0 < b$ auf einem kleinen Halbkreis γ_ε mit Radius ε über die Polstelle beim Ursprung hoppeln. Das Wegintegral von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/z$ längs eines derartigen Weges ist Null nach dem Integralsatz. Die Integrale über die drei Kanten ρ, λ, ω für „rechts, links und oben" außerhalb der reellen Achse können wir jedoch auf der rechten Kante abschätzen durch

$$\left|\int_\rho \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^h \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(b+\mathrm{i}t)}}{b+\mathrm{i}t}\mathrm{i}\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{|b|}\int_0^h \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{|b|}$$

und analog auf der linken Kante durch $1/|a|$, auf der oberen Kante dahingegen durch

$$\left|\int_\omega \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z\right| \le (b-a)\frac{\mathrm{e}^{-h}}{h}$$

Für festes $a > 0$ folgt so die Existenz des Grenzwerts $\lim_{r\to\infty}\int_a^r$ aus dem Cauchy-Kriterium 10.3.6.12. Die Existenz des anderen Grenzwerts für $b < 0$ in Richtung der negativen reellen Achse $\lim_{r\to-\infty}\int_r^b$ zeigt man analog. Indem wir nun $-a = b = h$ nehmen und das nach Unendlich streben lassen, ergibt sich für jedes $\varepsilon > 0$ andererseits

$$0 = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z + \int_\varepsilon^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

Durch explizite Rechnung erkennen wir, daß das Integral über den kleinen Halbkreis für $\varepsilon \to 0$ gegen $-\pi\mathrm{i}$ strebt. Jetzt brauchen wir nun noch den Imaginärteil unserer Gleichung zu nehmen. Nebenbei bemerkt ist $\frac{\sin x}{x}$ Lebesgue'schen Sinne gar nicht auf $\mathbb{R}$ integrierbar.

Übungen

Übung 14.2.3.16. Sei γ ein stetiger geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und $U \Subset \mathbb{C}$ das Komplement seines Bildes. Man zeige, daß die Funktion $u_\gamma : U \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$u_\gamma(w) = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-w}$$

lokal konstant ist, als da heißt holomorph mit Ableitung Null. In 14.4.2 werden wir sehen, daß f nur Werte in $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ annimmt, und werden diese Werte als das $2\pi\mathrm{i}$-fache der „Umlaufzahl von γ um den Punkt w" verstehen lernen.

Ergänzende Übung 14.2.3.17. Man zeige, daß $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(z-x)^2}\,\mathrm{d}x$ nicht von $z \in \mathbb{C}$ abhängt. Vermittels quadratischer Ergänzung liefert das einen weiteren Zugang zur Berechnung der Fouriertransformierten der Gauß'schen Glockenkurve. Man kann auch den umgekehrten Weg gehen.

Übung 14.2.3.18. Das in 14.2.3.8 erklärte Wegintegral bleibt in Verallgemeinerung von 14.2.1.12 gleich bei beliebiger stetiger Umparametrisierung unseres Weges. Es ändert in Verallgemeinerung von 14.2.1.13 sein Vorzeichen bei einer Änderung der Durchlaufrichtung des Weges, wir dürfen wie in 14.2.1.11 stückweise integrieren, und das Integral über einen geschlossenen Weg von einer Funktion mit Stammfunktion verschwindet.

Übung 14.2.3.19 (**Umkehrsatz für holomorphe Funktionen**). Gegeben eine holomorphe Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ und $p \in U$ mit $f'(p) \neq 0$ existieren offene Umgebungen $V \Subset U$ von p und $W \Subset \mathbb{C}$ von $f(p)$ derart, daß f eine Bijektion $f : V \xrightarrow{\sim} W$ mit stetiger Umkehrabbildung induziert, die dann sogar holomorph sein muß. Einen Beweis dieser Tatsache mithilfe des Umkehrsatzes aus der reellen Analysis 12.3.1.2 haben wir in 14.3.4.1 gegeben. Hier wird ein alternativer Beweis skizziert. Man zeige der Reihe nach:

1. Es gibt eine offene Umgebung $A \Subset U$ von p, auf der f injektiv ist und auf der f' keine Nullstelle hat;

2. Für jeden Punkt $q \in A$ ist für einen hinreichend kleinen Kreisweg $\gamma_{\varepsilon,q} : [0, 2\pi] \to V$, $t \mapsto q + \varepsilon \exp(\mathrm{i}t)$ um q der Weg $f \circ \gamma_{\varepsilon,q}$ in $\mathbb{C} \backslash f(q)$ frei homotop zu einem Kreisweg um $f(q)$;

3. Ist für $\varepsilon = \varepsilon_q$ wie im vorhergehenden Punkt B eine Kreisscheibe um $f(q)$, die den Weg $f \circ \gamma_{\varepsilon,q}$ nicht trifft, so gilt $B \subset f(A)$;

4. Nach unseren Annahmen gibt es eine stetige Funktion ohne Nullstelle $\varphi : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) - f(p) = (z - p)\varphi(z)$ und $\varphi(p) = f'(p)$. Setzen wir hier $z = f^{-1}(w)$, so ist $\psi = 1/(\varphi \circ f^{-1}) : f(U) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $(w - q)\psi(w) = f^{-1}(w) - f^{-1}(q)$ und $\psi(q) = 1/f'(p)$.

Hinweis: Beim Nachweis der vorletzten Aussage verwende man für $b \in B$ und $\gamma = \gamma_{\varepsilon,q}$ die Formel

$$\int_{f\circ\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z - b} = \int_{\gamma} \frac{f'(w)\,\mathrm{d}w}{f(w) - b}$$

aus 14.2.1.19 und beachte, daß die linke Seite nach Teil 2 nicht verschwindet.

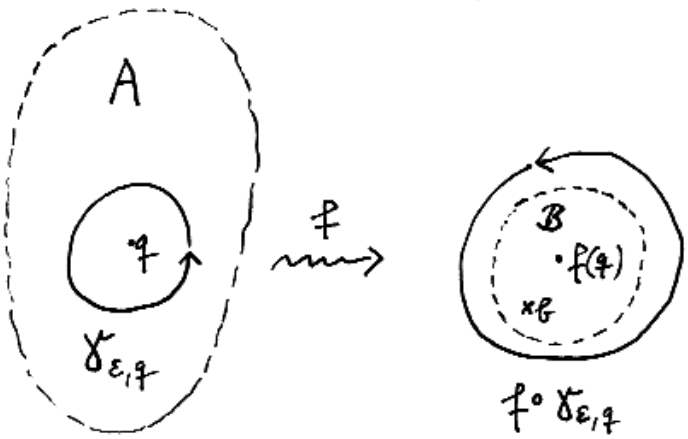


Illustration zu Übung 14.2.3.19. Wenn der Punkt b nicht in $f(A)$ läge, müßte ein Wegintegral verschwinden, das nun einmal nach unserer Transformationsformel für Wegintegrale 14.2.1.19 definitiv nicht verschwindet.

14.2.4 Integralsatz von Cauchy durch Topologie*

14.2.4.1. Die Suche nach einem besseren Verständnis grundlegender Sätze der Funktionentheorie und möglicher Verallgemeinerungen war eine wesentliche Motivation zur Entwicklung topologischer Methoden wie etwa der Überlagerungstheorie oder der Theorie der Garben. Ich will hier noch einen Zugang zum Beweis des Integralsatzes von Cauchy skizzieren, wie er sich von den Höhen dieser Theoriegebäude aus betrachtet im Rückblick darstellt. Das sprengt den Rahmen der Vorlesung. In gewisser Weise ist der Beweis derselbe, nur werden die meisten Beweisschritte als Folgerungen aus sehr viel allgemeineren Sätzen gesehen, was zu einem besseren Verständnis führen mag. Wir gehen dabei davon aus, daß wir die Theorie holomorpher Funktionen auf offenen Kreischeiben so weit entwickelt haben, daß dort die Existenz von Stammfunktionen holomorpher Funktionen 14.2.3.6 bereits bewiesen ist.

14.2.4.2 (**Garbe holomorpher Funktionskeime**). Wir betrachten auf der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ die Garbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Funktionen im Sinne von 19.2.2.2 und ihren étalen Raum $\bar{\mathcal{O}}$ nach 19.2.2.17. Seine Punkte sind Keime holomorpher Funktionen. Um den Satz von Goursat an dieser Stelle nicht verwenden zu müssen, betrachten wir zusätzlich die Garbe $\mathcal{O}_1$ aller holomorphen Funktionen mit holomorpher Ableitung. Der Satz von Goursat sagt uns später einmal $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}$.

14.2.4.3 (**Ableiten als Überlagerung**). Das komplexe Ableiten ist ein Garbenhomomorphismus und induziert eine stetige Abbildung $D : \bar{\mathcal{O}}_1 \to \bar{\mathcal{O}}$ zwischen den étalen Räumen der jeweiligen Garben. Diese Abbildung ist eine surjektive Überlagerung im Sinne von 16.3.1.2, da wir ja auf offenen Kreisscheiben stets Stammfunktionen finden und da diese eindeutig sind bis auf eine additive Konstante. Insbesondere liefert die „Additionen von Konstanten“ $(c+) : \bar{\mathcal{O}}_1 \to \bar{\mathcal{O}}_1$ eine Einbettung von $(\mathbb{C}, +)$ in die Gruppe der Decktransformationen unserer Überlagerung und diese Untergruppe operiert frei und transitiv auf jeder Faser.

14.2.4.4 (**Existenz von Stammfunktionen**). Wir folgern die Existenz von Stammfunktionen holomorpher Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ mit schleifenfüllendem Definitionsbereich U, die wir in 14.2.3.11 bereits auf direktem Wege gezeigt hatten. Unter unseren Annahmen ist nämlich jede Komponente von U offen und überlagerungstrivial nach **??** und nach Satz 16.3.4.13 über das Liften bei überlagerungstrivialem Definitionsbereich besitzt der zu f gehörige stetige Schnitt $\bar{f} : U \to \bar{\mathcal{O}}$ einen Lift, es gibt also in Formeln ausgedrückt $\bar{F} : U \to \bar{\mathcal{O}}_1$ stetig mit $D \circ \bar{F} = \bar{f}$. Die zugehörige Funktion F ist dann die gesuchte Stammfunktion von f.

14.2.4.5 (**Integration durch Wegeliften**). Gegeben $U \Subset \mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und ein Integrationsweg $\gamma : [a, b] \to U$ können wir den Weg $\bar{f} \circ \gamma : [a, b] \to \bar{\mathcal{O}}$ betrachten. Die Möglichkeit des Wegeliftens nach **??** und 16.3.4.13 zeigt, daß es Wege $\tilde{\gamma}_f : [a, b] \to \bar{\mathcal{O}}_1$ gibt mit $D \circ \tilde{\gamma}_f = \bar{f} \circ \gamma$. Bezeichnet A :

$\bar{\mathcal{O}}_1 \to \mathbb{C}$ das Auswerten eines Funktionskeims an seinem Punkt, so zeigen unsere Erkenntnisse zum Integrieren mit Stammfunktionen

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = A(\tilde{\gamma}_f(b)) - A(\tilde{\gamma}_f(a))$$

Ist γ ein stetiger Weg, so beachten wir, daß allgemein der Lift eines Weges in eine Überlagerung und speziell $\tilde{\gamma}_f$ durch seinen Ausgangspunkt eindeutig bestimmt ist und daß sich je zwei mögliche Ausgangspunkte durch eine Decktransformation der Gestalt $(c+)$ ineinander überführen lassen. Das zeigt, daß $A(\tilde{\gamma}_f(b)) - A(\tilde{\gamma}_f(a))$ nicht von der Wahl von $\tilde{\gamma}_f$ abhängt. Das war im wesentlichen unsere Definition des Wegintegrals holomorpher Funktionen über stetige Integrationswege.

14.2.4.6 (**Cauchy's Integralsatz durch Liften von Homotopien**). Gegeben $U \Subset \mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und Wege $\gamma, \beta : [0,1] \to U$ und $h : [0,1]^2 \to U$ eine Homotopie ist auch $\bar{f} \circ h : [0,1]^2 \to \bar{\mathcal{O}}$ eine Homotopie zwischen $\bar{f} \circ \gamma$ und $\bar{f} \circ \beta$ und nach **??** und 16.3.4.13 kann jede derartige Homotopie geliftet werden zu einer Homotopie $\tilde{h}_f : [0,1]^2 \to \bar{\mathcal{O}}_1$ zwischen Lifts $\tilde{\gamma}_f$ und $\tilde{\beta}_f$ von $\bar{f} \circ \gamma$ und $\bar{f} \circ \beta$. Diese Lifts haben dann dieselben Anfangs- und Endpunkte und mit unseren Erkenntnissen 14.2.4.5 zur Integration durch Wegeliften folgt unmittelbar

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = A(\tilde{\gamma}_f(1)) - A(\tilde{\gamma}_f(0)) = A(\tilde{\beta}_f(1)) - A(\tilde{\beta}_f(0)) = \int_\beta f(z)\,\mathrm{d}z$$

14.2.5 Bezug zu Wegintegralen im Reellen*

14.2.5.1. Dieser Abschnitt ist für das Folgende entbehrlich. Er soll die Notation für komplexe Wegintegrale verständlich machen und den Zusammenhang des Satzes von Cauchy mit den Sätzen über Wegintegrale in rotationsfreien Vektorfeldern oder besser geschlossenen Kovektorfeldern 12.7.8.8 erklären. Zunächst erinnere ich an Wegintegrale vektorwertiger Kovektorfelder nach 12.7.4.21.

14.2.5.2 (**Vektorwertige Kovektorfelder**). Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum, W ein reeller Vektorraum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Ein **W-wertiges Kovektorfeld auf** A ist eine Abbildung

$$\omega : A \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$$

Ein W-wertiges Kovektorfeld ordnet also jedem Punkt $p \in A$ eine lineare Abbildung des Richtungsraums $\vec{X}$ in den zusätzlich vorgegebenen Vektorraum W zu. Um hier noch Richtungsvektoren $v \in \vec{X}$ einsetzen zu können, notieren wir vektorwertige Kovektorfelder $p \mapsto \omega_p$, so daß dann $\omega_p(v)$ ein Vektor aus W wird. Im Fall $W = \mathbb{C}$ sprechen wir von einem **komplexwertigen Kovektorfeld**.

14.2.5.3 (**Nachschalten linearer Abbildungen**). Gegeben ein Homomorphismus $L : W \to V$ von reellen Vektorräumen und ein W-wertiges Kovektorfeld ω erhalten wir ein V-wertiges Kovektorfeld $L \circ \omega$ durch $(L \circ \omega)_p := L \circ \omega_p$. Ist $M : V \to Z$ eine weitere lineare Abbildung, so haben wir $M \circ (L \circ \omega) = (M \circ L) \circ \omega$ und natürlich gilt auch $\mathrm{id}_W \circ \omega = \omega$. Ist ω ein komplexwertiges Kovektorfeld und $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation, so verwenden wir die Notation $\bar{\omega} := c \circ \omega$ und finden $\bar{\bar{\omega}} = \omega$.

14.2.5.4 (**Nachschalten variabler linearer Abbildungen**). Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum, W ein reeller Vektorraum und $A \Subset X$ eine Teilmenge. Sei W ein reeller Vektorraum und $\omega : A \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$ ein W-wertiges Kovektorfeld auf A. Gegeben eine Abbildung $L : A \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V)$ erhalten wir ein V-wertiges Kovektorfeld $L \circ \omega$ durch $(L \circ \omega)_p := L(p) \circ \omega_p$. Natürlich haben wir $M \circ (L \circ \omega) = (M \circ L) \circ \omega$ auch für das iterierte Nachschalten variabler linearer Abbildungen. Als Speziallfälle erhalten wir das Produkt $f\omega$ eines W-wertigen Kovektorfelds ω mit einer reellwertigen Funktion f und das Produkt $f\omega$ eines komplexwertigen Kovektorfelds ω mit einer komplexwertigen Funktion f und die Verträglichkeit $\overline{g\omega} = \bar{g}\bar{\omega}$ mit der komplexen Konjugation.

14.2.5.5 (**Differentiale als Kovektorfelder**). Ist X ein endlichdimensionaler reeller Raum, W ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $U \subset X$ offen oder allgemeiner halboffen und $f : U \to W$ differenzierbar, so ist $\mathrm{d}f$ oder genauer $p \mapsto \mathrm{d}_p f$ ein W-wertiges Kovektorfeld auf U. Ist $L : W \to V$ eine lineare Abbildung in einen weiteren endlichdimensionalen reellen Vektorraum, so haben wir aufgrund der Kettenregel $L \circ \mathrm{d}_p f = \mathrm{d}_p(L \circ f)$. Man mag das die **Veträglichkeit des Differentials mit linearen Abbildungen** nennen. Sie impliziert formal eine „Komponentenregel“ und eine „Summenregel“ in derselben Weise, wie das bei der Integration in 12.5.3.5 ausgeführt wurde. Beide Regeln kann man aber auch ohne diese formale Argumentation leicht einzusehen.

Beispiele 14.2.5.6. In der Funktionentheorie bezeichnet für $U \Subset \mathbb{C}$ meist $z : U \to \mathbb{C}$ die Einbettung und $\mathrm{d}z$ ihr Differential, ein komplexwertiges Kovektorfeld auf $\mathbb{C}$. Mit

$$f(z)\,\mathrm{d}z$$

bezeichnet man dann das Produkt dieses komplexwertigen Kovektorfelds mit einer beliebigen komplexwertigen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$. Ist $g : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so ist g auch reell differenzierbar und quasi per definitionem kann sein Differential durch die komplexe Ableitung beschrieben werden als

$$\mathrm{d}g = g'(z)\,\mathrm{d}z$$

14.2.5.7 (**Wegintegrale vektorwertiger Kovektorfelder**). Sei $\varphi : [a, b] \to X$ ein stetig differenzierbarer Weg in einem endlichdimensionalen reellen Raum X und

sei $\omega : X \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$ ein stetiges Kovektorfeld auf X mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum W. So definieren wir wie in 12.7.4.21 einen Vektor $(\int_\varphi \omega) \in W$, das **Integral des W-wertigen Kovektorfelds ω längs des Weges φ**, durch die Vorschrift

$$\int_\varphi \omega = \int_a^b \omega_{\varphi(t)}\left(\varphi'(t)\right) \mathrm{d}t$$

Auf der rechten Seite ist also für jedes t der Homomorphismus $\omega_{\varphi(t)} : \vec{X} \to W$ auszuwerten auf dem Geschwindigkeitsvektor $\varphi'(t) \in \vec{X}$ und die so entstehende stetige Abbildung $[a, b] \to W$ ist als vektorwertige Funktion zu integrieren im Sinne von 14.1.3.4. Im Übrigen muß unser stetiges Kovektorfeld gar nicht auf ganz X definiert sein, wenn es auf $\varphi([a, b])$ definiert ist, reicht völlig aus. Zur Anschauung verweise ich auf die Darstellung als Grenzwert von Riemannsummen im Fall reellwertiger Kovektorfelder in 12.7.4.7, die sich wortwörtlich übertragen läßt. Im Spezialfall $X = W = \mathbb{C}$ stimmt das auf diese Weise definierte Wegintegral $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z$ überein mit dem Wegintegral gemäß der in 14.2.1.1 für diesen Spezialfall explizit gegebenen Definition und erklärt so insbesondere die für dieses Konzept übliche Notation.

Ergänzung 14.2.5.8 (**Integrale von Kovektorfeldern über Fastfaltigkeiten**). Ähnlich wie in 12.8.4.3 für gewöhnliche Kovektorfelder alias Einsformen erklärt können wir auch kompakt getragene Kovektorfelder mit Werten in einem beliebigen endlichdimensionalen reellen Vektorraum und insbesondere mit Werten in $\mathbb{C}$ integrieren über orientierte 1-Fastfaltigkeiten. Salopp gesprochen liegt das daran, daß „sich für jede Parametrisierung unserer 1-Fastfaltigkeit durch einen Integrationsweg dasselbe Wegintegral ergibt“.

14.2.5.9 (**Geschlossene Kovektorfelder und Integralsatz von Cauchy**). Ist X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \Subset X$ eine offene Teilmenge und W ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\omega : U \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$ ein stetig differenzierbares W-wertiges Kovektorfeld auf U, so ist wie in 12.7.8.8 eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Homotopieinvarianz der Wegintegrale zu ω, daß unser Kovektorfeld geschlossen ist im zu 12.7.8.1 analogen Sinn, daß also in Formeln für alle $p \in U$ im Vektorraum W gilt

$$(\mathrm{d}_p\omega)(\vec{v})(\vec{w}) = (\mathrm{d}_p\omega)(\vec{w})(\vec{v}) \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in \vec{X}$$

Ein komplexwertiges Kovektorfeld der Gestalt $f(z)\,\mathrm{d}z$ können wir umschreiben zu $f(z)\,\mathrm{d}z = f(z)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y)$ und geschlossen bedeutet $\partial_y f = \mathrm{i}\partial_x f$ alias die Gültigkeit der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. Für f stetig reell differenzierbar sind also Wegintegrale über $f(z)\,\mathrm{d}z$ gleich für homotope Integrationswege genau dann, wenn f holomorph ist. Wir erhalten so einen alternativen

Beweis für den Integralsatz von Cauchy, allerdings nur unter der stärkeren Annahme, daß f nicht nur komplex differenzierbar ist, sondern daß seine komplexe Ableitung f' zusätzlich auch noch stetig ist.

14.2.5.10 (**Wirtinger-Ableitung**). In der Funktionentheorie bezeichnet für $U \Subset \mathbb{C}$ meist $\bar{z} := c \circ z : U \to \mathbb{C}$ die Einbettung gefolgt von der komplexen Konjugation und $x : U \to \mathbb{R}$ den Realteil und $y : U \to \mathbb{R}$ den Imaginärteil. Die Identitäten $z = x + \mathrm{i}y$ und $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ von komplexwertigen Funktionen führen dann aufgrund der Veträglichkeit des Differentials mit linearen Abbildungen 14.2.5.5 im Raum der komplexwertigen Kovektorfelder auf U zu den Identitäten

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y.$$

Ist $f : U \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar, so haben wir weiter

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

für die partiellen Ableitungen zum Koordinatensystem x, y im Sinne von 12.7.2.16. Für eine reell total differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ erklärt man zusätzlich zwei komplexwertige Funktionen auf A, ihre **Wirtinger-Ableitungen** $\partial f = \partial_z f = \frac{\partial f}{\partial z}$ und $\bar{\partial} f = \bar{\partial}_z f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, durch die Vorschrift

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z}$$

Die Beziehung dieser Wirtingerableitungen zu den partiellen Ableitungen von eben wird nach dem vorhergehenden gegeben durch die Formeln

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Nach den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen ist also eine stetig partiell differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph genau dann, wenn gilt $\bar{\partial} f = 0$, und in diesem Fall ist $\partial f = f'$ ihre komplexe Ableitung. Weiter prüft man unschwer $\overline{\partial f} = \bar{\partial}\bar{f}$. Die Wirtingerableitungen sind jedoch keine Vektorfelder in Bezug auf lokale Koordinatensysteme im Sinne von 12.7.2.16.

Übungen

Übung 14.2.5.11 (**Rechnen mit Wirtinger-Ableitungen**). Man zeige $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}$. Man zeige weiter für $w = w(z)$ eine reell differenzierbare Funktion von einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ in eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, auf der hinwiederum eine reell differenzierbare komplexwertige Funktion f definiert ist, die Identitäten

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}$$

Hinweis: Man gehe aus von den Identitäten $\mathrm{d}(\bar{f}) = \overline{\mathrm{d}f}$ und $\mathrm{d}(f \circ w) = w^*(\mathrm{d}f)$.

14.3 Lokale Struktur holomorpher Funktionen

14.3.1 Cauchy's Integralformel (31.5)

Satz 14.3.1.1 (Cauchy's Integralformel). *Seien $U \Subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $K \subset U$ eine ganz in U enthaltene abgeschlossene Kreisscheibe. Bezeichne $\partial\vec{K}$ einen Weg, der auf dem Rand unserer Kreisscheibe einmal im Gegenuhrzeigersinn umläuft. So gilt für alle Punkte w aus dem Inneren unserer Kreisscheibe die Formel*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\vec{K}} \frac{f(z)}{z-w} \, \mathrm{d}z$$

14.3.1.2. Hier ist ein Film über die Cauchyformel. Beim ersten Hinsehen mag es so scheinen, als ob in dieser Formel die komplexe Zahl i eine ungebührliche Sonderrolle spielte, denn warum sollte eine der beiden Wurzeln aus -1 hier besser sein als die andere? Dieser scheinbare Widerspruch löst sich jedoch auf, wenn wir bedenken, daß es auch von der Wahl einer Wurzel aus -1 abhängt, welchen Weg um eine Kreisscheibe wir als „im Gegenuhrzeigersinn umlaufend" bezeichnen. Das ist ja überhaupt keine streng mathematische Formulierung und hängt sowohl von der Konvention der Uhr ab als auch von der Konvention, daß wir in der Zahlenebene 1 nach rechts und i nach oben abtragen. Ist streng mathematisch formuliert p das Zentrum unserer Kreisscheibe und R ihr Radius, so meinen wir in Formeln den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $t \mapsto p + R\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$. Die Integralformel von Cauchy wird sich später als ein Spezialfall des Residuensatzes 14.4.2.11 erweisen.

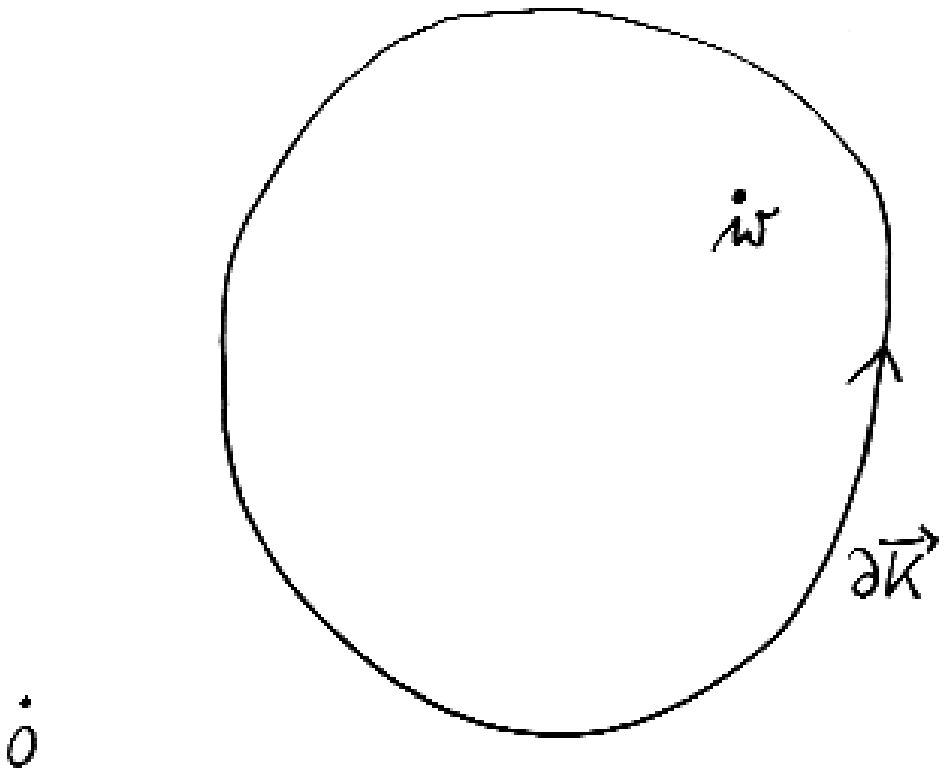
Ergänzung 14.3.1.3. Der Pfeil über dem K soll wie in 12.8.3.6 die Wahl der Orientierung dieser berandeten Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}$ andeuten. Genauer versehen wir den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ mit der Orientierung, für die $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto x + \mathrm{i}y$ eine positiv orientierte Karte ist. Dann erbt K eine Orientierung als glatt berandete Teilmenge und ∂K schließlich wird versehen mit der auf dem Rand induzierten Orientierung.

Beweis. Nach der Invarianz des Wegintegrals unter freier Homotopie 14.2.3.13 bleibt die rechte Seite unverändert, wenn wir unseren Weg $\partial\vec{K}$ ersetzen durch den kreisförmigen Weg γ_ε um w mit beliebigem Radius ε, sofern nur besagter Weg ganz in unserer Kreisscheibe verläuft. Es reicht also zu zeigen

$$f(w) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-w} \, \mathrm{d}z$$

Hier können wir etwa $\gamma_\varepsilon : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto w + \varepsilon\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ nehmen. Die fraglichen Integrale ergeben sich damit zu

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(w + \varepsilon\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{\varepsilon\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i}\varepsilon\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + \varepsilon\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \, \mathrm{d}t$$



Die Grundsituation bei Cauchy's Integralformel

und konvergieren wegen der Stetigkeit von f bei w offensichtlich gegen $f(w)$. Hier ist ein Film zu den anschließenden Folgerungen aus der Cauchyformel. □

Korollar 14.3.1.4 (Mittelwerteigenschaft). *Der Wert einer holomorphen Funktion im Zentrum einer beliebigen abgeschlossenen Kreisscheibe aus ihrem Definitionsbereich ist der Durchschnitt über ihre Funktionswerte auf dem Rand besagter Kreisscheibe.*

Beweis. Dieser Satz gibt nur in Worten die Aussage der Integralformel in dem Spezialfall wieder, daß w das Zentrum der Kreisscheibe ist, wie in den letzten Zeilen des vorhergehenden Beweises bereits ausgeführt wurde. □

Korollar 14.3.1.5 (Goursat). *Die Ableitung einer holomorphen Funktion ist auch selbst wieder holomorph.*

Beweis. Übung 14.1.3.15 über das komplexe Ableiten unter dem Integral zeigt, daß die rechte Seite der Cauchy'schen Integralformel 14.3.1.1 beliebig oft komplex nach w abgeleitet werden kann. Das liefert für die höheren Ableitungen einer holomorphen Funktion f, die auf einer offenen Umgebung einer abgeschlossenen Kreisscheibe K definiert ist, und beliebiges $w \in K \backslash \partial K$ sogar die explizite Darstellung

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial \vec{K}} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$ □

Satz 14.3.1.6 (Liouville). *Jede holomorphe auf der ganzen komplexen Zahlenebene definierte und beschränkte Funktion ist konstant.*

14.3.1.7. Eine auf der ganzen komplexen Zahlenebene definierte holomorphe Funktion heißt auch eine **ganze Funktion**. Einen alternativen Beweis für den Satz von Liouville geben wir in 14.4.1.15.

Beweis. Lassen wir bei der Darstellung der Ableitung, also dem Fall $n = 1$ der Formeln vom Ende des vorhergehenden Beweises des Satzes von Goursat 14.3.1.5 den Radius R unserer Kreisscheibe gegen Unendlich streben, so strebt die Länge des Integrationsweges linear mit dem Radius gegen Unendlich, das Supremum der zu integrierenden Funktion aber ist für $R > |w|$ betragsmäßig beschränkt durch eine beliebige obere Schranke von $|f|$ multipliziert mit $(R - |w|)^{-2}$, fällt also salopp gesprochen quadratisch mit dem Radius. Da unsere Formel hier auch für beliebig große Radien gilt, folgt $f'(w) = 0$ für alle $w \in \mathbb{C}$. □

14.3.1.8 (**Fundamentalsatz der Algebra**). Hier ist ein Film zur Herleitung des Fundamentalsatzes der Algebra aus dem Satz von Liouville. Ich erinnere den an Fundamentalsatz der Algebra 3.5.3.25: Jede Polynomfunktion ohne Nullstelle

$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist konstant. Wir zeigen das nun mit den Mitteln der Funktionentheorie. Da für jedes Polynom P positiven Grades gilt $\lim_{z\to\infty} |P(z)| = \infty$, ist für jede Polynomfunktion ohne Nullstelle aber $1/P$ eine beschränkte holomorphe Funktion. Nach dem Satz von Liouville 14.3.1.6 ist dann $1/P$ und folglich auch P konstant.

Satz 14.3.1.9 (Morera). *Eine stetige komplexwertige auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene definierte Funktion ist holomorph genau dann, wenn für jedes achsenparallele Rechteck, dessen Fläche mitsamt ihrem Rand ganz im Definitionsbereich enthalten ist, das Randintegral verschwindet.*

Ergänzung 14.3.1.10. Eine in der Literatur oft bewiesene schwächere Variante besagt, daß eine stetige komplexwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene holomorph ist genau dann, wenn ihr Wegintegral über jeden „Dreiecksrand“ verschwindet, sobald die ganze „Dreiecksfläche“ im Definitionsbereich unserer Funktion liegt.

Beweis. Hier ist ein Film zum Satz von Morera und seinem Korollar. Für holomorphe Funktionen verschwinden diese Integrale nach dem Integralsatz 14.2.3.1. Für die Umkehrung dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, unsere Teilmenge sei eine offene Kreisscheibe. Verschwinden dann alle die fraglichen Integrale, so besitzt unsere Funktion nach 14.2.1.17 eine Stammfunktion und ist folglich als Ableitung einer holomorphen Funktion nach dem Satz von Goursat 14.3.1.5 selbst holomorph. □

Korollar 14.3.1.11 (Holomorphie durch Stetigkeit). *Ist $U \Subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die holomorph ist auf dem Komplement einer oder auch endlich vieler reeller affiner Geraden, so ist f bereits holomorph auf ganz U.*

14.3.1.12. Salopp gesprochen folgt also aus der komplexen Differenzierbarkeit „fast überall“ zusammen mit der Stetigkeit überall bereits die komplexe Differenzierbarkeit überall. Das steht in scharfem Kontrast zum Fall reeller Funktionen, in dem etwa der Absolutbetrag stetig ist und mit Ausnahme des Ursprungs überall differenzierbar, aber dennoch im Ursprung eben nicht differenzierbar ist. Man kann in ähnlicher Weise sehr viel stärkere Sätze beweisen. Als Übung mögen sie zeigen, daß eine stetige Funktion, die holomorph ist auf dem Komplement einer endlichen Vereinigung eindimensionaler in U abgeschlossener $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltigkeiten der komplexen Zahlenebene im Sinne von 12.3.2.6, bereits auf ganz U holomorph ist.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß unsere Funktion auf dem Komplement einer einzigen reellen Geraden holomorph ist und

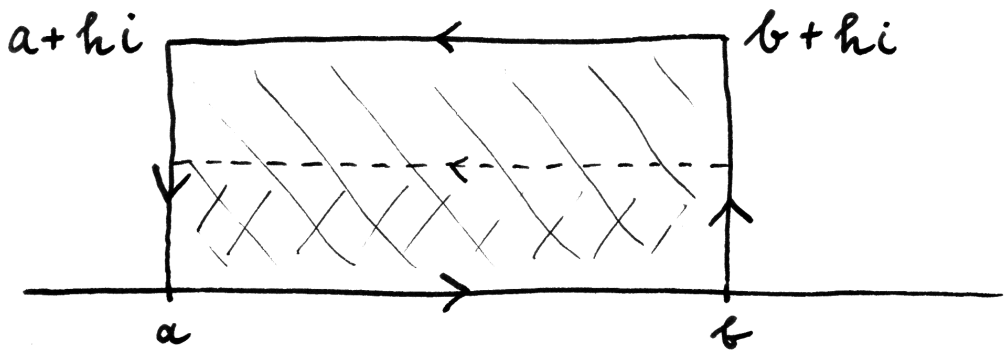


Illustration zum Beweis von 14.3.1.11. Die reelle Achse in der komplexen Zahlenebene ist als durchgehende Gerade eingezeichnet. Integrieren wir eine stetige Funktion, die außerhalb der reellen Gerade holomorph ist, über den Rand des großen Rechtecks, so kommt dasselbe heraus, wie wenn wir sie über den Rand des kleinen unteren doppelt schraffierten Rechtecks integrieren, denn das Integral über den Rand des einfach schraffierten oberen Rechtecks ist Null.

daß diese Gerade sogar die reelle Achse ist. Nach 14.3.1.9 reicht es nun zu zeigen, daß für jedes achsenparallele ganz in unserer Teilmenge enthaltene Rechteck das Randintegral verschwindet. Durch entsprechendes Zerschneiden von Rechtecken ziehen wir uns auf den Fall zurück, daß eine Kante unseres Rechtecks auf der reellen Achse liegt. Seien also $a, b, a + h\mathrm{i}, b + h\mathrm{i}$ mit $a, b, h \in \mathbb{R}$ und $a < b$ sowie $0 \neq h$ die Ecken unseres Rechtecks. Nach elementaren Abschätzungen ist dies Randintegral für jedes stetige f eine stetige Funktion von h, die sich durch den Wert Null stetig nach $h = 0$ fortsetzen läßt. Nach dem Integralsatz von Cauchy ist für f holomorph auf $U \backslash \mathbb{R}$ dies Randintegral aber unabhängig von h für $h > 0$ und, a priori eventuell mit einem anderen Wert, für $h < 0$. Das zeigt, daß unser Randintegral Null sein muß für alle h. $\square$

Übungen

Übung 14.3.1.13 (**Maximumsprinzip, schwache Form**). Man zeige: Gegeben eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ und ein nichtleeres Kompaktum $K \subset U$ gibt es $p \in K$ derart, daß keine Kreisscheibe mit Zentrum p ganz in K liegt und daß gilt $|f(p)| \geq |f(z)| \ \forall z \in K$. Salopp gesprochen nimmt also die Restriktion unserer Funktion auf unser Kompaktum ihr Betragsmaximum stets in einem „Randpunkt“ unseres Kompaktums an. Eine noch stärkere Aussage in dieser Richtung liefert das Maximumsprinzip 14.3.3.9.

Übung 14.3.1.14 (**Schwarz'sches Spiegelungsprinzip**). Sei $U \Subset \mathbb{C}$ offen und stabil unter der komplexen Konjugation. Wir zerlegen U in seinen Schnitt mit der reellen Achse und der oberen und unteren Halbebene in der Form

$$U = U^+ \sqcup (U \cap \mathbb{R}) \sqcup U^-$$

mit $U^\pm := \{z \in U \mid \pm \operatorname{Im} z > 0\}$. Man zeige: Ist $f : U^+ \sqcup (U \cap \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ stetig, holomorph auf U^+ und reellwertig auf $U \cap \mathbb{R}$, so können wir f zu einer holomorphen Funktion auf U ausdehnen, indem wir für alle $z \in U^-$ setzen $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Hinweis: 14.1.2.18 und 14.3.1.11.

Übung 14.3.1.15 (**Integrale über Familien holomorpher Funktionen**). Seien $U \Subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \times [a, b] \to \mathbb{C}$, $(z, t) \mapsto f(z, t)$ stetig. Ist $z \mapsto f(z, t)$ für alle $t \in [a, b]$ holomorph, so ist auch die Abbildung $F : z \mapsto \int_a^b f(z, t)\,\mathrm{d}t$ holomorph. Des weiteren ist dann $\frac{\partial f}{\partial z} : U \times [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial z}(w) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(w, t)\,\mathrm{d}t$$

Hinweis: Man folgere aus dem Satz von Morera 14.3.1.9, daß F holomorph ist, und aus der expliziten Formel für die Ableitung aus dem Beweis des Satzes von

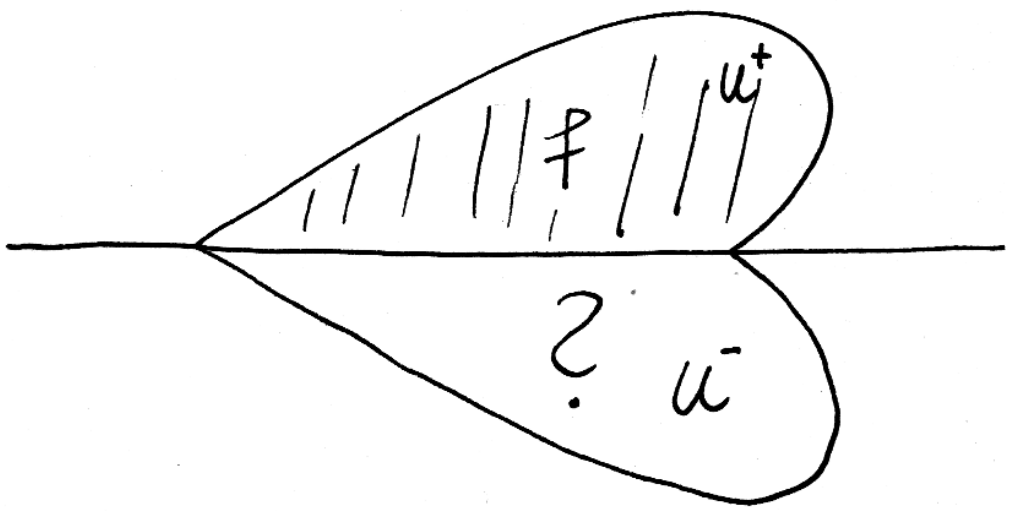


Illustration zum Schwarz'schen Spiegelungsprinzip

Goursat 14.3.1.5, daß $\frac{\partial f}{\partial z}$ stetig ist. Dann kann man Übung 14.1.3.15 zum holomorphn Ableiten unter dem Integral anwenden.

Übung 14.3.1.16. Jede nicht konstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat dichtes Bild. Hinweis: Für $w \notin f(\mathbb{C})$ betrachte man die Funktionen $g : z \mapsto 1/(f(z) - w)$. In 14.4.1.18 werden sie stärker zeigen, daß dasselbe auch für jede nicht konstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash E \to \mathbb{C}$ gilt im Fall einer endlichen Teilmenge $E \subset \mathbb{C}$.

Übung 14.3.1.17. Man folgere aus dem Satz von Goursat 14.3.1.5, daß für jede holomorphe Funktion f die durch $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ gegebenen reellen Funktionen u, v stetig partiell differenzierbar sind.

14.3.2 Potenzreihenentwicklung (2.6)

14.3.2.1. Hier ist ein Film über die Konvergenz komplexer Potenzreihen und die Holomorphie der durch sie dargestellten Funktionen. Einen Ausdruck der Form $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ mit $a_\nu \in \mathbb{C}$ im Sinne von 3.5.3.42 nennen wir eine **komplexe Potenzreihe**. Eine Potenzreihe anzugeben bedeutet also nichts anderes, als die Folge ihrer Koeffizienten a_ν anzugeben. Ist nun $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ eine komplexe Potenzreihe und konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für ein $z \in \mathbb{C}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^\nu$ absolut für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < |z|$. Der Beweis dieser Tatsache ist identisch zum Beweis der entsprechenden Aussage im Reellen 10.6.1.1, den wir dort nur deshalb nicht im Komplexen geführt haben, weil uns die komplexen Zahlen noch nicht zur Verfügung standen. Wir erklären den **Konvergenzradius** $r \in [0, \infty]$ einer Potenzreihe $\sum a_\nu z^\nu$ wie im Reellen in 10.6.1.3 durch

$$r = \sup\{|z| \mid \sum a_\nu z^\nu \text{ konvergiert}\}$$

und erkennen dabei auch gleich den geometrischen Ursprung der Bezeichnung „Konvergenzradius“, die im Rahmen der reellen Analysis noch recht unmotiviert daherkommt. Genau wie in 10.6.1.4 zeigt man, daß die Partialsummen einer komplexen Potenzreihe mit Konvergenzradius r gleichmäßig konvergieren auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe mit Zentrum im Ursprung und Radius $\rho < r$. Das folgende Korollar 14.3.2.6 zeigt dann, daß eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius r auf der ganzen offenen Kreisscheibe $\{z \mid |z| < r\}$ vom Radius r eine holomorphe Funktion darstellt.

Ergänzung 14.3.2.2 (**Komplexe Analoga des Abel'schen Grenzwertsatzes**). Der Abel'sche Grenzwertsatz 10.6.4.2 muß im Komplexen sorgfältiger formuliert werden: Konvergiert eine komplexe Potenzreihe auch noch auf einem Randpunkt ihrer offenen Konvergenzkreisscheibe, so stellt sie nicht notwendig auf der ganzen offenen Kreisscheibe vereinigt mit diesem Randpunkt eine stetige Funktion

dar, sondern nur auf jedem abgeschlossenen Winkelsegment, das „vom fraglichen Randpunkt aus ins Innere der Kreisscheibe geht“. Diese Stetigkeit auf Winkelsegmenten zeigen wir im allgemeineren Kontext der Dirichlet-Reihen in 14.6.3.2. Welche Schwierigkeiten im allgemeinen auftreten können, zeigt die Poissontransformation 14.5.1.13.

14.3.2.3. Einen Ausdruck der Form $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-p)^\nu$ mit $a_\nu \in \mathbb{C}$ nennt man auch eine **Potenzreihe mit Entwicklungspunkt** p. Ihr Konvergenzbereich besteht dann aus allen z in einer geeigneten offenen Kreisscheibe mit Zentrum p, möglicherweise noch zusammen mit einigen Punkten auf deren Rand.

Definition 14.3.2.4. Eine Folge komplexwertiger Funktionen auf einem metrischen oder allgemeiner topologischen Raum heißt **kompakt konvergent** gegen eine Grenzfunktion, wenn sie auf allen Kompakta unseres Raums gleichmäßig gegen besagte Grenzfunktion konvergiert.

14.3.2.5. Im Rahmen der Funktionentheorie nennt man eine Reihe von Funktionen **normal konvergent**, wenn die Folge ihrer Partialsummen im Sinne der vorhergehenden Definition 15.4.6.6 kompakt konvergiert.

Korollar 14.3.2.6 (Grenzwerte von Folgen holomorpher Funktionen). *Konvergiert eine Folge holomorpher Funktionen kompakt, so ist die Grenzfunktion holomorph und die Folge der Ableitungen konvergiert kompakt gegen die Ableitung der Grenzfunktion.*

Beweis. Hier ist ein Film über kompakte Konvergenz und das gliedweise Ableiten komplexer Potenzreihen. Die erste Aussage folgt sofort aus der Charakterisierung 14.3.1.9 der Holomorphie durch das Verschwinden von Randintegralen zu Rechtecken. Was die zweite Aussage angeht, so erhalten wir aus der expliziten Formel für die Ableitung als Wegintegral aus dem Beweis von 14.3.1.5 schon mal, daß jeder Punkt eine Umgebung besitzt, auf der die Ableitungen unserer Funktionen gleichmäßig gegen die Ableitung der Grenzfunktion streben. Mit 12.4.1.5 besitzt dann jedes Kompaktum eine endliche Überdeckung durch Teilmengen, auf denen die Konvergenz der Ableitungen gleichmäßig ist, und damit ist auch die Konvergenz der Ableitungen gleichmäßig auf Kompakta. □

Beispiel 14.3.2.7. Für eine in einer Umgebung des Ursprungs durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion $f(w) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu w^\nu$ gilt stets $f^{(n)}(0) = n! a_n$. In der Tat konvergieren komplexe Potenzreihen wie in 14.3.2.1 erklärt kompakt auf dem Inneren ihres Konvergenzbereichs, nach 14.3.2.6 dürfen wir sie also auch im Komplexen gliedweise ableiten, und der konstante Term der durch n-maliges Ableiten entstehenden Potenzreihe ist offensichtlich $n! a_n$.

Satz 14.3.2.8 (**Entwicklung in eine Potenzreihe**). *Eine komplexwertige Funktion auf einer offenen Kreisscheibe in der komplexen Zahlenebene ist holomorph genau dann, wenn sie auf der ganzen offenen Kreisscheibe durch eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt im Zentrum besagter Kreisscheibe dargestellt werden kann.*

Beweis. Hier ist ein Film über die Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen. Warum Potenzreihen im Inneren ihrer Konvergenzkreisscheibe holomorphe Funktionen darstellen, haben wir bereits in 14.3.2.1 diskutiert. Um umgekehrt zu zeigen, daß jede auf einer offenen Kreisscheibe holomorphe Funktion auch tatsächlich durch eine auf der ganzen offenen Kreisscheibe konvergente Potenzreihe dargestellt werden kann, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unsere offene Kreisscheibe, sie heiße etwa K, ihr Zentrum im Ursprung hat. Nun beachten wir für $|w| < |z|$ die Entwicklung

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-(w/z)}\right) = \frac{1}{z}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^{\nu}$$

Die Konvergenz der Partialsummen geschieht hier bei festem w gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Kreisring $|z| = \rho$ mit $\rho > |w|$, da die rechte Reihe für alle z auf diesem Kreisring majoriert wird durch die konvergente Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}(|w|/\rho)^{\nu}$. Folglich können wir unsere Summe mit der Integration in der Integralformel von Cauchy vertauschen und erhalten

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)}{z^{\nu+1}}\,\mathrm{d}z\right)w^{\nu}$$

für jedes $w \in K$ und jedes ρ mit $|w| < \rho < r$ für r den Radius unserer offenen Kreisscheibe K. Bei unserem Wegintegral ist dabei der geschlossene Weg gemeint, der im Gegenuhrzeigersinn auf der Kreislinie $|z| = \rho$ einmal um den Ursprung läuft. Da unser Integral von ρ gar nicht abhängt, steht damit auch schon eine Entwicklung in eine Potenzreihe da. Deren Koeffizienten müssen wegen dem nach 14.3.2.6 erlaubten gliedweisen Ableiten gerade die $f^{(\nu)}(0)/\nu!$ sein, so daß unsere Funktion auf der ganzen offenen Kreisscheibe dargestellt wird durch ihre **Taylorreihe**

$$f(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}w^{\nu}$$ □

14.3.2.9 (**Konvergenzradius und holomorphe Fortsetzung**). Hat die Taylorreihe einer holomorphen Funktion an einer Stelle einen gegebenen Konvergenzradius, so kann unsere Funktion nicht holomorph auf eine offene Kreisscheibe mit Zentrum in besagter Stelle und echt größerem Radius fortgesetzt werden: Sonst

müßte sich nämlich diese Fortsetzung auf der größeren offenen Kreisscheibe nach unserem Korollar auch durch ihre Taylorreihe, notwendig dieselbe, darstellen lassen, im Widerspruch zu unseren Annahmen an den Konvergenzradius.

Übungen

Übung 14.3.2.10. Man bestimme den Konvergenzradius der Taylorreihe des Arcustangens zum Entwicklungspunkt Eins.

Übung 14.3.2.11. Man zeige, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ der Hauptzweig des Logarithmus von $1 + z$ auch dargestellt werden kann durch die Potenzreihe

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Hinweis: Mit etwas Tricksen hatten wir das in 14.1.2.17 schon einmal gesehen.

Übung 14.3.2.12. Man zeige, daß eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, für die $|f(z)|/|z^n|$ für $|z| > 1$ beschränkt bleibt, ein Polynom vom Grad $\leq n$ sein muß.

Übung 14.3.2.13 (**Cauchy-Abschätzung der Koeffizienten einer Potenzreihe**). Für alle komplexen Potenzreihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ und alle $n \geq 0$ und alle nichtnegativen R unterhalb ihres Konvergenzradius gilt die Abschätzung

$$|a_n| R^n \leq \sup_{|z|=R} |\textstyle\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu|$$

Salopp gesprochen können also komplexe Potenzreihen, die „nur relativ kleine“ Werte annehmen, auch „nur relativ kleine Koeffizienten“ haben. Selbst im Fall von komplexen Polynomen kenne ich keinen anderen Beweis für diese Tatsache, deren reelles Analogon im Übrigen ziemlich falsch ist, man denke nur etwa an die Gauß'sche Glockenkurve. Hinweis: Beweis des Satzes von Goursat 14.3.1.5.

Übung 14.3.2.14 (**Abschätzung für Potenzreihen von Operatoren**). Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Wir wählen eine Norm auf V und versehen den Raum $\operatorname{End} V$ aller Endomorphismen von V mit der Operatornorm. Gegeben eine komplexe Potenzreihe $\sum a_\nu z^\nu$ mit Konvergenzradius $r \in [0, \infty]$ und ein Endomorphismus $A \in \operatorname{End} V$ mit $\|A\| < r$ zeige man, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu A^\nu$ absolut summierbar ist und daß für $\|A\| < R < r$ gilt

$$\left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu A^\nu \right\| \leq (1 - (\|A\|/R))^{-1} \left(\sup_{|z|=R} |\textstyle\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu| \right)$$

Man notiert die Summe dieser absolut summierbaren Familie $f(A) \in \operatorname{End} V$. Unternehmende Leser betrachten allgemeiner den Fall eines Banachraums V. Hinweis: Cauchy-Abschätzung 14.3.2.13 und geometrische Reihe.

Übung 14.3.2.15 (**Binomische Reihe im Komplexen**). Man zeige, daß auch für $z, \alpha \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ die binomische Reihe 10.6.1.23 gegen $(1+z)^\alpha$ konvergiert. Hier verwendet man die offensichtliche Erweiterung der Binomialkoeffizienten ins Komplexe und versteht $(1+z)^\alpha = \exp(\alpha \log(z+1))$ für $\log$ den Hauptzweig des Logarithmus, vergleiche 10.5.10.15.

Übung 14.3.2.16 (**Potenzreihenentwicklung einer Verknüpfung**). Gegeben $U, V \Subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$, $g : V \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(U) \subset V$ und $p \in U$ erhält man die Taylorreihe von $g \circ f$ bei p durch das „Einsetzen der Taylorreihe von f bei p in die Taylorreihe von g bei $f(p)$". Sind genauer $f(p+z) = \sum a_\nu z^\nu$ und $g(f(p)+w) = \sum b_\mu w^\mu$ und $g(f(p+z)) = \sum c_\lambda z^\lambda$ die jeweiligen Taylorreihen, so gilt

$$c_\lambda = \sum_{\nu(1)+\ldots+\nu(\mu)=\lambda} b_\mu a_{\nu(1)} \ldots a_{\nu(\mu)}$$

mit der Summe über alle $\mu \geq 0$ und alle Abbildungen $\nu : \{1, \ldots, \mu\} \to \mathbb{N}_{\geq 1}$, bei denen die Summe der Werte gerade λ ist. Im Fall $\lambda = 0$ gibt es so eine Abbildung ν nur für $\mu = 0$ und wir erhalten speziell $c_0 = b_0$. Der Koeffizient a_0 geht nur insofern ein, als g eben um $f(p) = a_0$ entwickelt werden muß.

Übung 14.3.2.17 (**Exponential und Logarithmus für Matrizen**). Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Wir wählen eine Norm auf V und versehen den Raum $\operatorname{End} V$ aller Endomorphismen von V mit der Operatornorm und betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \log : & \mathrm{B}(\mathrm{id}; 1) & \to & \operatorname{End} V \\ & (A + \mathrm{id}) & \mapsto & A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \frac{A^4}{4} \ldots \end{array}$$

Man zeige die Formel $\exp(\log X) = X$ für alle X im offenen Ball um die Identität mit Radius Eins. Hinweis: Schneiden wir unsere Potenzreihen geeignet ab, so erhalten wir durch Verknüpfen eine Folge von Polynomen, die gleichmäßig auf jedem Kompaktum aus $\mathrm{B}(1; 1)$ gegen die Funktion z konvergiert. Nun verwende man 14.3.2.14. Ein schlechter verallgemeinerbares aber elementareres Argument findet man in 14.1.2.20.

Übung 14.3.2.18 (**Kompakte Konvergenz und loarithmische Ableitung**). Gegeben $U \Subset \mathbb{C}$ und eine Folge $f_n : U \to \mathbb{C}$ holomorpher Funktionen ohne Nullstelle, die kompakt gegen eine holomorphe Funktion f ohne Nullstelle konvergiert, konverieren auch die logarithmischen Ableitungen der f_n kompakt gegen die logarithmische Ableitung von f.

14.3.3 Nullstellenmengen holomorpher Funktionen (7.6)

Lemma 14.3.3.1 (Nullstellenordnung holomorpher Funktinen). *Hat eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ auf $U \Subset \mathbb{C}$ bei $p \in U$ eine Nullstelle, verschwindet*

aber auf keiner Umgebung von p identisch, so gibt es genau ein $n \geq 1$ und genau eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit $g(p) \neq 0$ derart, daß für alle $z \in U$ gilt

$$f(z) = (z - p)^n g(z)$$

Beweis. Das folgt sofort aus der Potenzreihenentwicklung 14.3.2.8. Hier ist ein erster Film über Nullstellen holomorpher Funktionen. □

14.3.3.2. Die fragliche Zahl n heißt die **Ordnung der Nullstelle** und wir verwenden dafür die Notation $n = v_p(f)$. Verschwindet f identisch in einer Umgebung von p, so setzen wir $v_p(f) = \infty$. Der Buchstabe v steht hier für „valuation", zu deutsch „Bewertung".

14.3.3.3. Eine Nullstelle einer Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, die in einer offenen Teilmenge ihres Definitionsbereichs U die einzige Nullstelle ist, nennen wir ganz allgemein eine **isolierte Nullstelle** unserer Funktion. Die nicht isolierten Nullstellen einer Funktion nennen wir ihre **nichtisolierten Nullstellen**. Im Fall einer stetigen Funktion ist klar, daß ihre Nullstellen eine abgeschlossene Teilmenge von U bilden. Ebenso ist aber auch klar, daß ihre nichtisolierten Nullstellen eine abgeschlossene Teilmenge von U bilden, weil ihr Komplement ja offensichtlich offen sein muß. Im Fall einer holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ auf $U \Subset \mathbb{C}$ zeigt unser Lemma 14.3.3.1 darüber hinaus, daß die nichtisolierten Nullstellen von f auch eine offene Teilmenge von U bilden.

Satz 14.3.3.4 (**Nullstellenmengen holomorpher Funktionen**). *Hat eine holomorphen Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich eine nichtisolierte Nullstelle, so ist unsere Funktion die Nullfunktion.*

14.3.3.5. Insbesondere hat also eine von Null verschiedene holomorphe Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich nur isolierte Nullstellen. Allerdings können sich diese Nullstellen durchaus „am Rand des Definitionsbereichs häufen". Hier ist ein Film zur anschaulichen Bedeutung des Satzes. Hier ist ein Film zum Beweis.

Beweis. Wir verwenden hier den topologischen Zusammenhangsbegriff, der ja nach **??** in unserer Situation gleichbedeutend ist zum Wegzusammenhang. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ unsere holomorphe Funktion. Nach 14.3.3.3 ist die Menge N der nichtisolierten Nullstellen von f sowohl offen als auch abgeschlossen in U. Da U zusammenhängend ist, gilt entweder $N = \emptyset$ oder $N = U$ und unter den Annahmen des Satzes also $N = U$. □

Korollar 14.3.3.6 (**Identitätssatz**). *Stimmen zwei auf einer zusammenhängenden offenen Menge definierte holomorphe Funktionen überein auf einer Teilmenge mit einem nichtisolierten Punkt, so sind sie gleich.*

Beweis. Man wende den vorhergehenden Satz 14.3.3.4 über Nullstellenmengen holomorpher Funktionen auf die Differenz unserer beiden Funktionen an. □

Beispiel 14.3.3.7. Die komplexe Exponentialfunktion ist die einzige holomorphe Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die auf der reellen Achse mit der reellen Exponentialfunktion übereinstimmt.

Vorschau 14.3.3.8. Man kann sich fragen, ob jede holomorphe Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich eine größte holomorphe Fortsetzung hat. Der komplexe Logarithmus und viele andere Beispiele zeigen schnell, daß das nicht richtig sein kann. Es wird jedoch richtig, wenn man „mehrwertige" Funktionen erlaubt, vergleiche 19.2.2.32. Wir gehen darauf an dieser Stelle nicht weiter ein.

Korollar 14.3.3.9 (Maximumsprinzip). *Eine nicht konstante holomorphe Funktion auf einer zusammenhängenden offenen Menge kann nirgends ein Betragsmaximum annehmen.*

Beweis. Hier ist ein Film zum Maximumsprinzip. Nach der Mittelwerteigenschaft 14.3.1.4 gilt für jede holomorphe Funktion und jede abgeschlossene Kreisscheibe in ihrem Definitionsbereich, daß der Funktionswert im Zentrum der Durchschnitt über die Funktionswerte auf dem Rand sein muß. Daß die Werte auf dem Rand betragsmäßig höchstens so groß sind wie der im Zentrum ist offensichtlich nur dann möglich, wenn alle diese Werte gleich sind. In der Tat können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Wert $f(p)$ im Zentrum zusätzlich reell nichtnegativ annehmen und dann folgt aus

$$f(p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(p+\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f(p+\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}))\,\mathrm{d}t$$

und $f(p) = |f(p)| \geq |f(p+\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| \geq \mathrm{Re}(f(p+\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}))$ für alle t erst in dieser Gleichungskette Gleichheit für alle t und dann $f(p) = f(p+\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ für alle t. Nimmt also unsere Funktion irgendwo ihr Betragsmaximum an, so ist sie auf einer Umgebung dieser Stelle konstant und damit nach dem Identitätssatz 14.3.3.6 global konstant. □

Satz 14.3.3.10 (Schwarz'sches Lemma). *Für jede holomorphe Abbildung der offenen Einheitskreisscheibe in sich selber, die den Ursprung festhält, gilt:*

1. *Das Bild jedes Punktes liegt mindestens ebenso nah am Ursprung wie besagter Punkt selbst und die Ableitung unserer Abbildung im Ursprung hat höchstens den Betrag Eins;*

2. *Hat für mindestens einen Punkt außerhalb des Ursprungs sein Bild denselben Abstand zum Ursprung wie der besagte Punkt selbst oder hat die Ableitung im Ursprung den Betrag Eins, so ist unsere Abbildung eine Drehung.*

Beweis. Hier ist ein Film zum Schwarz'schen Lemma. Wir betrachten die offene Einheitskreisscheibe $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Für eine holomorphe Abbildung $f : E \to E$ mit $f(0) = 0$ behauptet unser Satz in Formeln

$$|f(z)| \leq |z| \text{ für alle } z \in E \text{ und } |f'(0)| \leq 1.$$

Des weiteren behauptet er für die Fälle $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in E\backslash 0$ oder $|f'(0)| = 1$, daß f eine Drehung sein muß. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es, wenn f die offene Einheitskreisscheibe in sich selber abbildet, sicher ein $\delta \in (0,1)$ mit $|z| \geq \delta \Rightarrow |f(z)/z| \leq 1 + \varepsilon$. Dieser Quotient kann also salopp gesprochen „betragsmäßig um so weniger über die Eins hinauskommen, je näher z am Rand der Einheitskreisscheibe liegt". Nun erhält man nach dem Satz über die Potenzreihenentwicklung 14.3.2.8 eine holomorphe Funktion durch die Vorschrift $z \mapsto f(z)/z$ für $z \neq 0$ beziehungsweise $z \mapsto f'(0)$ für $z = 0$. Da diese Funktion nach 14.3.3.9 auf einer offenen Kreisscheibe ihr Betragsmaximum nicht annehmen kann, wenn sie nicht konstant ist, folgt $|f(z)/z| \leq 1$ für alle $z \in E\backslash 0$ sowie $|f'(0)| \leq 1$. Steht hier an einer Stelle eine Gleichheit, so ist $f(z)/z$ konstant und folglich f eine Drehung. □

Übungen

Übung 14.3.3.11. Man zeige, daß jede holomorphe Bijektion von der Einheitskreisscheibe auf sich selber, die den Ursprung festhält, eine Drehung alias Multiplikation mit einer komplexen Zahl der Norm Eins sein muß. Hinweis: Man wende das Schwarz'sche Lemma auch auf die Umkehrfunktion an.

Übung 14.3.3.12. Man konstruiere eine bijektive holomorphe Abbildung von der offenen Einheitskreisscheibe in die Halbebene aller komplexen Zahlen mit positivem Imaginärteil, der sogenannten „oberen Halbebene". Hinweis: Möbius-Geometrie 5.2.5.1. Man zeige, daß die dort eingeführte Operation der speziellen linearen Gruppe $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene die Restklassengruppe $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R}) := \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\{\pm\,\mathrm{id}\}$ identifiziert mit der Gruppe aller bijektiven holomorphen Abbildung von der oberen Halbebene auf sich selber. Hinweis: 14.3.3.11.

Übung 14.3.3.13. Eine stetige komplexwertige Funktion auf der reellen Achse besitzt höchstens eine Fortsetzung auf die abgeschlossene obere Halbebene, die sowohl stetig ist auf der abgeschlossenen oberen Halbebene als auch holomorph

auf der offenen oberen Halbebene. Man zeige auch, daß nicht jede stetige komplexwertige Funktion auf der reellen Achse in dieser Weise fortgesetzt werden kann. Hinweis: Spiegelungsprinzip 14.3.1.14.

Ergänzende Übung 14.3.3.14. Man zeige, daß sich die auf der offenen Einheitskreisscheibe durch die Reihen $\sum_{k\geq 1} z^k/k^n$ definierten Funktionen holomorph auf das Komplement von $\mathbb{R}_{\geq 1}$ in der komplexen Zahlenebene fortsetzen lassen. Die zugehörigen Funktionen heißen **Polylogarithmen** oder präziser **n-Logarithmen** und werden $\mathrm{Li}_n(z)$ oder auch $\mathrm{L}_n(z)$ notiert. Insbesondere den **Dilogarithmus** Li_2 trifft man des öfteren. Für den 1-Logarithmus gilt $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$ nach 10.6.1.19. Man zeige allgemeiner, daß sie sich für jede schleifenfüllende offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}\backslash\{1,0\}$ und jede Zusammenhangskomponente des Schnitts von U mit der offenen Einheitskreisscheibe eindeutig von diesem Schnitt auf die ganze Menge U fortsetzen lassen. In der Terminologie aus 19.2.2.32 liefert also in der „Riemannschen Fläche unseres Funktionskeims das Urbild des Komplements von $\{1,0\}$ eine Überlagerung dieses Komplements“.

Übung 14.3.3.15 (**Holomorphe Funktionen und formale Potenzreihen**). Die Entwicklung in eine Potenzreihe liefert für jede offene Umgebung $U \Subset \mathbb{C}$ des Ursprungs in der Zahlenebene einen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}^{\mathrm{an}}(U) \to \mathbb{C}[\![z]\!]$ vom Ring $\mathcal{O}^{\mathrm{an}}(U)$ der holomorphen Funktionen auf U in den Ring der formalen Potenzreihen $\mathbb{C}[\![z]\!]$ aus 3.5.3.42. Ist U wegzusammenhängend, so erhalten wir auf diese Weise sogar einen injektiven Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}^{\mathrm{an}}(U) \hookrightarrow \mathbb{C}[\![z]\!]$$

14.3.4 Lokale Struktur holomorpher Funktionen (9.6)

Lemma 14.3.4.1 (**Lokaler Umkehrsatz für holomorphe Funktionen**). *Ist $U \Subset \mathbb{C}$ offen und $p \in U$ ein Punkt und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(p) \neq 0$, so gibt es eine offene Umgebung $V \Subset U$ von p derart, daß die Restriktion von f auf V eine biholomorphe Einbettung ist.*

Beweis. Hier ist ein Film über dies Lemma und seinen Beweis. Nach dem Satz von Goursat 14.3.1.5 ist die Ableitung von f stetig. Der Satz über die Umkehrabbildung 12.3.1.2 aus der Analysis sagt uns dann, daß f eine offene Umgebung von p bijektiv mit einer offenen Umgebung von $f(p)$ identifiziert. Proposition 14.1.2.10 über Umkehrfunktionen holomorpher Funktionen liefert damit den Rest der Behauptung. □

14.3.4.2 (**Komplexe Wurzelfunktionen**). Wenden wir dieses Lemma auf die Abbildungen $z \mapsto z^n$ an, so ergibt sich, daß jeder Punkt $p \in \mathbb{C}^\times$ eine offene Umgebung V besitzt, die unter $z \mapsto z^n$ biholomorph auf eine offene Umgebung W

von p^n abgebildet wird. Umgekehrt besitzt also jeder Punkt $q \in \mathbb{C}^\times$ eine offene Umgebung W, auf der eine holomorphe Funktion $w : W \to \mathbb{C}$ existiert mit $w(z)^n = z$ für alle $z \in W$. Es ist auch explizit leicht zu sehen, daß es solche n-ten Wurzelfunktionen w sogar auf jeder geschlitzten komplexen Zahlenebene $W = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}s$ mit $s \in \mathbb{C}^\times$ gibt. Als Übung mögen Sie zeigen, daß es sie sogar auf jeder schleifenfüllenden offenen Teilmenge von $\mathbb{C}^\times$ gibt.

Satz 14.3.4.3 (Wurzeln holomorpher Funktionen an Nullstellen). *Seien $U \Subset \mathbb{C}$ offen und $p \in U$ ein Punkt und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer Nullstelle endlicher Ordnung $n \geq 1$ bei p. So gibt es eine offene Umgebung $V \Subset U$ von p und eine biholomorphe Einbettung $b : V \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit $b(p) = 0$ derart, daß für alle $z \in V$ gilt*

$$f(z) = b(z)^n$$

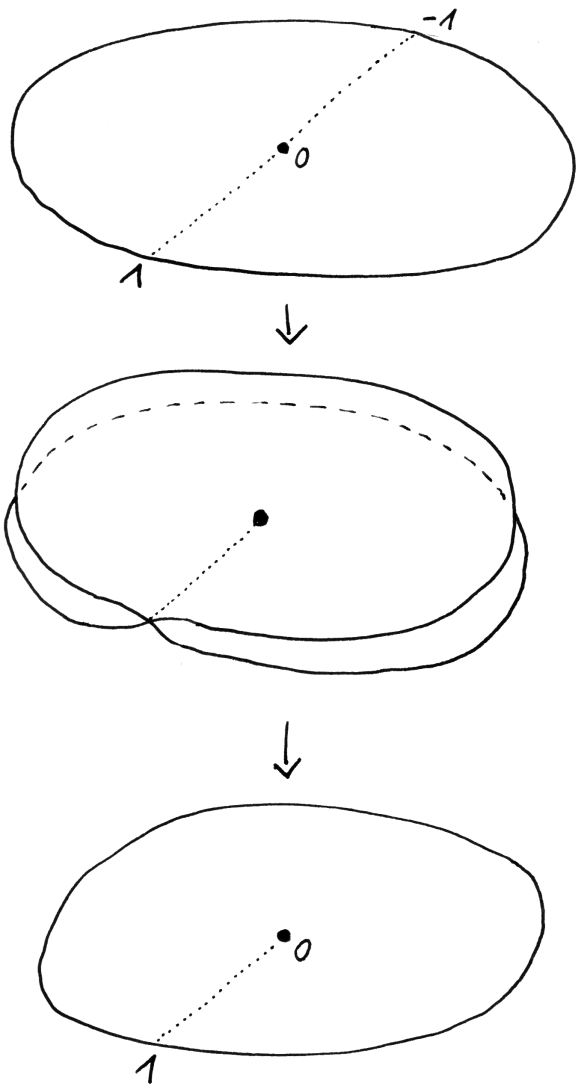
Beweis. Hier ist ein Film über diesen Satz und seinen Beweis. Im Fall $n = 1$ gilt es nur zu zeigen, daß f selbst eine biholomorphe Einbettung auf einer offenen Umgebung von p induziert, und das ist gerade die Aussage des lokalen Umkehrsatzes für holomorphe Funktionen 14.3.4.1. Im allgemeinen dürfen wir sicher $p = 0$ annehmen. Wir entwickeln f in eine Potenzreihe und erhalten

$$f(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu z^\nu = z^n \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu} z^\nu = z^n g(z)$$

für eine holomorphe Funktion g mit $g(0) \neq 0$. Nun finden wir sicher eine offene Umgebung $W \Subset U$ des Ursprungs derart, daß $g(W)$ ganz in einer geschlitzten Ebene liegt, auf der es eine holomorphe n-te Wurzelfunktion w gibt, so daß wir auf W eine holomorphe Funktion $h(z) := w(g(z))$ finden können mit $h(z)^n = g(z)\ \forall z \in W$. Dann gilt $f(z) = (zh(z))^n\ \forall z \in W$ und die Funktion $b : z \mapsto zh(z)$ ist nach dem lokalen Umkehrsatz 14.3.4.1 nach Restriktion zu einer gegebenenfalls noch kleineren Umgebung V des Ursprungs eine biholomorphe Einbettung. $\square$

Korollar 14.3.4.4 (Lokale Struktur holomorpher Funktionen). *Seien $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf $U \Subset \mathbb{C}$ und $p \in U$ ein Punkt. So gibt es biholomorphe Einbettungen $u : E \hookrightarrow U$ und $v : E \hookrightarrow \mathbb{C}$ der offenen Einheitskreisscheibe in den Definitions- beziehungsweise Wertebereich von f mit $u(0) = p$ und $v(0) = f(p)$ sowie $n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \sqcup \{\infty\}$ derart, daß das Diagramm bepunkteter Räume*

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[d, mapsto] & (E,0) \arrow[r, hook, "u"] \arrow[d] & (U,p) \arrow[d, "f"] \\
z^n & (E,0) \arrow[r, hook, "v"] & (\mathbb{C}, f(p))
\end{tikzcd}$$



Dies Bild soll Anschauung für die Abbildung $z \mapsto z^2$ der Einheitskreisscheibe auf sich selbst vermitteln. Es stellt diese Abbildung dar als die Komposition einer Abbildung der Einheitskreisscheibe auf eine räumliche sich selbst durchdringende Fläche, gegeben in etwa durch eine Formel der Gestalt $z \mapsto (z^2, \varepsilon(\operatorname{Im} z))$ in $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ für geeignetes monotones und in einer Umgebung von Null streng monotones ε, gefolgt von einer senkrechten Projektion auf die ersten beiden Koordinaten. Das hat den Vorteil, daß im ersten Schritt nur gegenüberliegende Punkte der reellen Achse identifiziert werden, was man sich leicht wegdenken kann, und daß der zweite Schritt eine sehr anschauliche Bedeutung hat, eben die senkrechte Projektion.

kommmutiert, mit der Vereinbarung, daß $z \mapsto z^\infty$ die konstante Abbildung Null bedeuten möge. Wir haben dabei $n = \inf\{\nu \geq 1 \mid f^{(\nu)}(p) \neq 0\}$.

Beweis. Hier ist ein Film über diese Aussage und ein weiterer über ihren Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(p) = 0$ annehmen. Hat f eine Nullstelle unendlicher Ordnung bei p, so ist f konstant Null in einer Umgebung von p und u und v sind leicht zu finden. Andernfalls können wir unseren Satz 14.3.4.3 über Wurzeln holomorpher Funktionen bei Nullstellen anwenden und eine offene Umgebung $V \Subset U$ von p nebst einer biholomorphen Einbettung $b : V \hookrightarrow \mathbb{C}$ finden mit $b(p) = 0$ und $f(z) = b(z)^n$ für alle $z \in V$. Indem wir eine offene Kreisscheibe $K \Subset b(V)$ mit Zentrum im Ursprung wählen und mit $\bar{u} : K \hookrightarrow U$ als die Umkehrfunktion von $b : b^{-1}(K) \xrightarrow{\sim} K$ erklären, finden wir $f(\bar{u}(z)) = z^n$ für alle $z \in K$. Wählen wir nun noch ein $\lambda \in \mathbb{C}$, das eine Bijektion $(\lambda\cdot) : E \xrightarrow{\sim} K$ induziert, und setzen $u(z) := \bar{u}(\lambda z)$, so folgt $f(u(z)) = \lambda^n z^n$ und mit $v := (\lambda^n\cdot)$ haben wir unser Ziel erreicht. Hier können wir sogar $\lambda > 0$ reell und positiv wählen. □

Korollar 14.3.4.5 (Gebietstreue). *Das Bild einer offenen zusammenhängenden Teilmenge der komplexen Zahlenebene unter einer nicht konstanten holomorphen Funktion ist stets wieder eine offene zusammenhängende Teilmenge der komplexen Zahlenebene.*

14.3.4.6. Eine zusammenhängende offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene heißt auch ein **Gebiet** und eine zusammenhängende schleifenfüllende offene Teilmenge ein **Elementargebiet**. In dieser Terminologie kann das Korollar dahingehend formuliert werden, daß das Bild eines Gebietes unter einer nicht konstanten holomorphen Funktion wieder ein Gebiet ist. Daher rührt auch sein Name. Der einzige Grund, aus dem wir den Definitionsbereich zusammenhängend annehmen müssen, liegt darin, daß es sonst Funktionen geben könnte, die auf einer Wegzusammenhangskomponente des Definitionsbereichs konstant sind ohne global konstant zu sein.

Beweis. Hier ist ein Film über die Gebietstreue. Nach dem Identitätssatz ist unsere Funktion nie in der Umgebung eines Punktes konstant. Das Korollar folgt damit sofort aus Satz 14.3.4.4 über die lokale Struktur holomorpher Funktionen. □

14.3.4.7 (**Alternativer Beweis des Maximumsprinzips**). Das Maximumsprinzip aus 14.3.3.9 folgt auch unmittelbar aus dem Satz über die Gebietstreue 14.3.4.5, das Bild einer nichtkonstanten holomorphen Funktion auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge der Zahlenebene ist eben offen und besitzt damit offensichtlich keine Punkte von maximalem Betrag. Dieser Beweis ist zwar schnell und elegant, wirkt auf mich aber global gesehen doch eher wie der „Besuch eines Aussichtspunkts beim Abstieg von einem höheren Gipfel“.

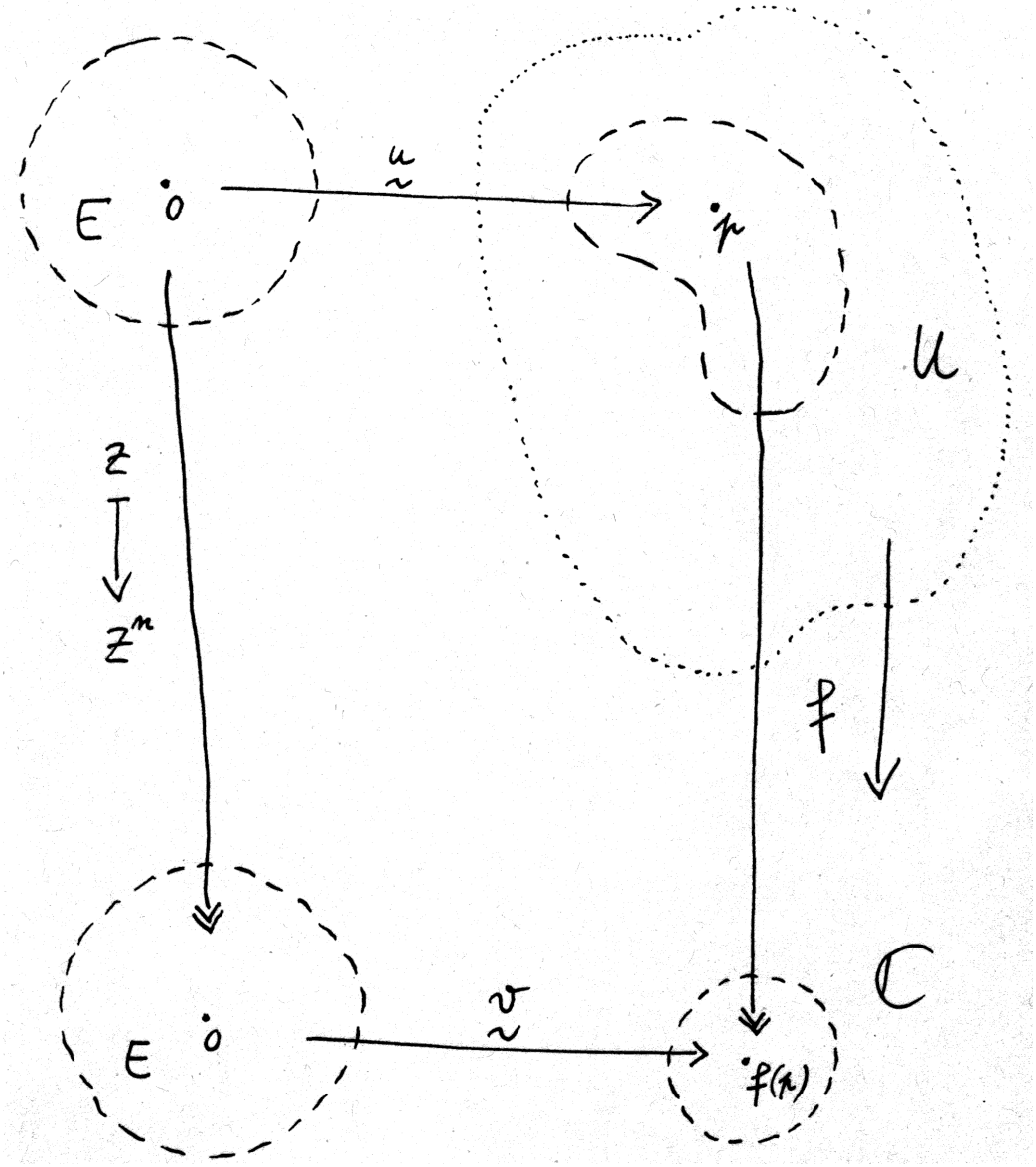


Illustration zum Satz über die lokale Struktur holomorpher Funktionen. Im Bild ist zusätzlich eine Erkenntnis aus dem Beweis angedeutet, nach der man u und v sogar so wählen kann, daß v von der Gestalt $z \mapsto \mu z + f(p)$ ist mit $\mu > 0$. Die durch die Doppelspitzen angedeutete Surjektivität gilt natürlich nur im Fall $n \neq \infty$ einer Abbildungen f, die in keiner Umgebung von p konstant ist.

Korollar 14.3.4.8 (Holomorphie von Umkehrfunktionen). *Gegeben eine injektive holomorphe Funktion ist ihr Bild offen und ihre Umkehrabbildung holomorph.*

14.3.4.9. In anderen Worten ist also jede injektive holomorphe Funktion eine biholomorphe Einbettung. In diesem Film versuche ich, eine Anschauung für eine allgemeine holomorphe Funktion zu geben.

Beweis. Hier ist ein Film über die Holomorphie der Umkehrfunktion. Unsere Funktion hat offenes Bild nach dem Satz über die Gebietstreue 14.3.4.5 und nirgends verschwindende Ableitung nach dem Satz über die lokale Struktur 14.3.4.4. Darüber hinaus ist die Ableitung stetig ist nach dem Satz von Goursat 14.3.1.5. Unter diesen Voraussetzungen aber haben wir die Holomorphie der Umkehrung bereits in 14.1.2.10 gezeigt. □

14.4 Singuläre Stellen holomorpher Funktionen

14.4.1 Isolierte Singularitäten und Laurentreihen (14&16.6)

Definition 14.4.1.1. Sei $U \Subset \mathbb{C}$ offen. Unter einer **holomorphen Funktion mit isolierten Singularitäten auf** U versteht man eine auf dem Komplement einer Teilmenge $T \subset U$ ohne Häufungspunkt in U definierte und dort holomorphe Funktion

$$f : U \backslash T \to \mathbb{C}$$

Jeder Punkt $p \in T$ heißt dann eine **isolierte Singularität von** f. Läßt sich f zu einer holomorphen Funktion auf $(U \backslash T) \cup \{p\}$ fortsetzen, so heißt p eine **hebbare Singularität**. Ist eine Singularität $p \in T$ zwar nicht hebbar, wird aber hebbar nach Multiplikation unserer Funktion f mit einer geeigneten Potenz $(z-p)^n$, so spricht man von einem **Pol** oder ausführlicher von einer **Polstelle** und das kleinstmögliche solche n heißt die **Polordnung**. Ist die Singularität weder hebbar noch ein Pol, so spricht man von einer **wesentlichen Singularität**. Hier ist ein Film über die drei Typen von Singularitäten.

Beispiel 14.4.1.2. Die Funktion $z \mapsto \exp(z^{-1})$ hat im Ursprung eine wesentliche Singularität.

Satz 14.4.1.3 (Riemann'scher Hebbarkeitssatz). *Bleibt eine holomorphe Funktion in einer Umgebung einer isolierten Singularität betragsmäßig beschränkt, so ist die Singularität hebbar.*

Beweis. Sei $U \Subset \mathbb{C}$ offen, $p \in U$ ein Punkt und $f : U \backslash p \to \mathbb{C}$ unsere holomorphe Funktion. Sicher kann man die Funktion $z \mapsto (z-p)f(z)$ unter unserer Voraussetzung durch Null stetig auf ganz U fortsetzen. Dann ist die Fortsetzung durch Null von $g : z \mapsto (z-p)^2 f(z)$ offensichtlich sogar holomorph auf ganz U mit $g(p) = g'(p) = 0$. Nach dem Satz über die Potenzreihenentwicklung 14.3.3.1 kann g also geschrieben werden in der Gestalt $g : z \mapsto (z-p)^2 h(z)$ für $h : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dies h ist dann die gesuchte holomorphe Fortsetzung von f. Hier ist ein Film zum Riemann'schen Hebbarkeitssatz. □

Alternative zum Beweis. Sicher kann man die Funktion $k : z \mapsto (z-p)f(z)$ unter unserer Voraussetzung durch Null stetig auf ganz U fortsetzen. Nach Korollar 14.3.1.11 über Holomorphie durch Stetigkeit ist dann k bereits holomorph auf ganz U und nach dem Satz über die Potenzreihenentwicklung 14.3.3.1 kann k also geschrieben werden in der Gestalt $k : z \mapsto (z-p)h(z)$ für $h : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dies h ist dann die gesuchte holomorphe Fortsetzung von f. □

14.4.1.4 (**Lokale Struktur von Polstellen**). Sei $U \Subset \mathbb{C}$ offen und $p \in U$ ein Punkt. Genau dann hat eine holomorphe Funktion $f : U \backslash p \to \mathbb{C}$ mit einer isolierten Singularität bei p einen Pol n-ter Ordnung bei p, wenn f die Gestalt

$$f(z) = (z-p)^{-n} g(z)$$

hat für g holomorph auf U mit $g(p) \neq 0$. Um die eine Richtung zu zeigen, gilt es nur zu bemerken, daß die Funktion auf der rechten Seite eine Polstelle der Ordnung n bei p hat. Für die andere Implikation bemerken wir, daß es gemäß der Definition ein $n > 0$ und g holomorph gibt mit $f(z) = (z-p)^{-n} g(z)$ außerhalb von p, und im Fall $g(p) = 0$ wäre nach 14.3.3.1 unser n nicht kleinstmöglich mit $(z-p)^n f(z)$ holomorph. Hier ist ein Film über Polstellen.

14.4.1.5. Wir verwenden von nun an die Notation $\mathbb{P}^1\mathbb{C} := \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ für die disjunkte Vereinigung der komplexen Zahlenebene mit einem weiteren Element ∞. Die Herkunft dieser Notation wird in 5.1.4.18 erklärt und in 5.1.4.19 oder besser 15.2.3.2 erklären wir auch die Herkunft der Bezeichnung von $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ als **Riemann'sche Zahlenkugel** und eine natürliche Topologie auf dieser Menge. In 22.3.2.13 werden wir sie zusätzlich mit der Struktur einer „Riemann'schen Fläche" versehen, aber alles zu seiner Zeit.

Definition 14.4.1.6. Eine **meromorphe Funktion** auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene $U \Subset \mathbb{C}$ ist eine Abbildung $f : U \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit den Eigenschaften, daß $f^{-1}(\infty)$ in U keinen Häufungspunkt hat, daß f holomorph ist auf $U \backslash f^{-1}(\infty)$, und daß für alle $p \in f^{-1}(\infty)$ die Funktion f bei p eine Polstelle hat.

14.4.1.7. Hier ist ein Film über meromorphe Funktionen. In Worten ist also eine meromorphe Funktion eine Funktion, die „holomorph ist bis auf isolierte Polstellen". Insbesondere darf eine meromorphe Funktion keine wesentlichen Singularitäten haben. Sicher ist jede holomorphe Funktion auch meromorph. Weitere Beispiele liefert das anschließende Lemma. Eine gute Anschauung für meromorphe Funktionen liefert die Interpretation von $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ als Riemann'sche Zahlenkugel. Eine meromorphe Funktion kann in diesem Bild aufgefaßt werden als eine Art „Aufwicklung auf die Kugelschale" und die Meromorphie ist äquivalent zur Bedingung, daß es um jeden Punkt p mit $f(p) = \infty$ eine offene Umgebung gibt, auf der $z \mapsto f(z)^{-1}$ eine hebbare Singularität bei p hat. Mehr zu diesem Gesichtspunkt mögen Sie später einmal im Zusammenhang mit den sogenannten „Riemann'schen Flächen" lernen.

14.4.1.8 (**Der Körper der meromorphen Funktionen**). Wir definieren die Summe und das Produkt meromorpher Funktionen f, g auf $U \Subset \mathbb{C}$, indem wir sie erst punktweise addieren beziehungsweise multiplizieren auf dem Komplement

$U \backslash (f^{-1}(\infty) \cup g^{-1}(\infty))$ der Vereinigung ihrer Polstellenmengen, dann alle hebbaren Singularitäten aus der Vereinigung der Polstellenmengen heben, und schließlich an den nicht hebbaren Singularitäten der Vereinigung der Polstellenmengen den Wert ∞ vergeben. Die Menge der meromorphen Funktionen auf einer zusammenhängenden offenen Menge $U \Subset \mathbb{C}$ wird so zu einem Körper

$$\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(U)$$

Der Leser mag das zur Übung zeigen. Ich verwende die Bezeichnung $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}$, um diese „analytischen“ Funktionen zu unterscheiden von ihren algebraischen Analoga, den rationalen Funktionen auf einer irreduziblen algebraischen Varietät U, die ich in der kommutativen Algebra $\mathcal{M}(U)$ notiere.

Satz 14.4.1.9 (Casorati-Weierstraß). *Besitzt eine holomorphe Funktion an einer Stelle eine wesentliche Singularität, so ist ihr Bild eine dichte Teilmenge der komplexen Zahlen.*

14.4.1.10. Natürlich besitzt auch die Einschränkung unserer Funktion auf eine beliebige Umgebung dieser wesentlichen Singularität dort eine wesentliche Singularität, das Bild jeder Umgebung der singulären Stelle ist also dicht in der komplexen Zahlenebene. Der sogenannte „Große Satz von Picard“ sagt sogar stärker, daß jedes dieser Bilder alle komplexen Zahlen bis auf höchstens eine Ausnahme enthalten muß. Hier ist ein Film zum Satz von Casorati-Weierstraß.

Beweis. Sei $f : U \backslash p \to \mathbb{C}$ unsere Funktion und p die Singularität. Wäre $f(U \backslash p)$ nicht dicht, so gäbe es eine offene Kreisscheibe $\mathrm{B}(w; \varepsilon)$ außerhalb des Bildes. Dann wäre $(f(z) - w)^{-1}$ beschränkt und holomorph auf $U \backslash p$, ließe sich also nach dem Hebbarkeitssatz 14.4.1.3 zu einer holomorphen Funktion h auf U fortsetzen, und h hätte keine Nullstelle auf $U \backslash p$. Also wäre unsere Funktion $f(z) = h(z)^{-1} + w$ meromorph auf U. □

Satz 14.4.1.11 (Laurententwicklung). *Gegeben ein Kreisring in der komplexen Zahlenebene der Gestalt $U = \{z \mid r < |z| < R\}$ mit $0 \le r < R \le \infty$ und darauf eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ derart, daß gilt*

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$$

im Sinne der kompakten Konvergenz auf unserem Kreisring der Folge P_n der Partialsummen über alle k mit $|k| \le n$. Sogar die positiven und die negativen Terme unserer Reihe bilden in dieser Situation für sich genommen jeweils kompakt konvergente Reihen auf besagtem Kreisring. Hier ist ein Film zur Laurententwicklung.

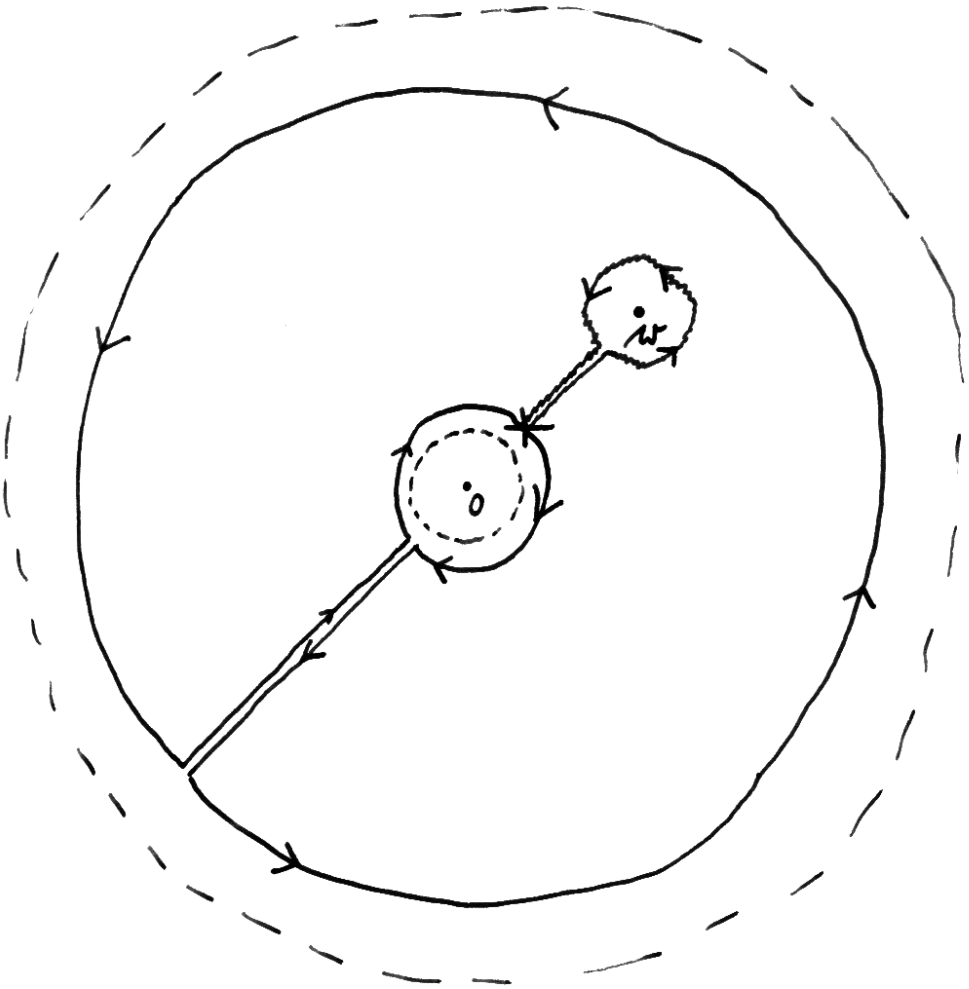


Illustration zum Beweis der Laurententwicklung. Der glatt eingezeichnete Weg ist unser γ.

Beweis. Hier ist ein Film zur Herleitung der Laurententwicklung. Die Koeffizienten sind durch die Funktion eindeutig bestimmt, denn für jeden kreisförmigen Weg γ, der in unserem Kreisring einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung läuft, muß gelten

$$\int_\gamma f(z)z^n \,\mathrm{d}z = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \int_\gamma z^{k+n} \,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}c_{-n-1}$$

Es bleibt also nur die Existenz einer derartigen Entwicklung zu zeigen. Gegeben w aus unserem Kreisring wählen wir a, A mit $r < a < |w| < A < R$ und betrachten einen Integrationsweg γ, der auf demselben Strahl wie w beginnend erst im Gegenuhrzeigersinn die Kreislinie $|z| = A$ halb herumläuft, dann auf einem Radius zur Kreislinie $|z| = a$, darauf einmal im Uhrzeigersinn herum, wieder auf dem Radius zurück nach aussen, und auf der Kreislinie $|z| = A$ weiter zum Ausgangspunkt. Dieser Weg ist offensichtlich homotop zu jedem Weg, der vom selben Ausgangspunkt erst ein Stück auf dem Radius in Richtung w läuft, dann auf einem kleinen Kreisweg im Gegenuhrzeigersinn um w, um dann wieder auf dem Radius zurück zum Ausgangspunkt. Mit der Integralformel von Cauchy und der Homotopieinvarianz des Wegintegrals folgt

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z|=A} \frac{f(z)}{z-w} \,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z|=a} \frac{f(z)}{z-w} \,\mathrm{d}z$$

Die Notation ist an dieser Stelle etwas schlampig, denn selbst wenn sie wüßten, wie man komplexwertige Einsformen über kompakte orientierte 1-Mannigfaltigkeiten wie unsere Kreislinien integriert, fehlt in unserer Notation doch die Orientierung. Ich hoffe aber, daß Sie sich dazudenken, daß mit unserer Notation das komplexe Wegintegral beim einmaligen Durchlaufen unserer Kreislinien im Gegenuhrzeigersinn gemeint ist. Das erste dieser Integrale verwandeln wir wie beim Beweis des Potenzreihenentwicklungssatzes 14.3.2.8 in die Potenzreihe

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{|z|=A} \frac{f(z)}{z^{k+1}} \,\mathrm{d}z \right) w^k$$

mit Konvergenzradius $\geq A$. Das zweite Integral behandeln wir ähnlich, nur schreiben wir nun, da auf dem Integrationsweg ja $|w| > |z|$ gilt,

$$\frac{-1}{z-w} = \frac{1}{w} \left(\frac{1}{1-(z/w)} \right) = \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{w^k}$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz in z auf dem Kreisring $|z| = a$ und erhalten

$$\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z|=a} \frac{f(z)}{z-w} \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{|z|=a} f(z)z^k \,\mathrm{d}z \right) w^{-k-1}$$

zunächst im Sinne punktweiser Konvergenz an jeder Stelle w mit $a < |w| < A$. Hier steht nun aber eine Potenzreihe im w^{-1}, die konvergiert für $|w^{-1}| < a^{-1}$. Also ist für $|w| \geq a + \varepsilon$ bei beliebigem $\varepsilon > 0$ die Konvergenz gleichmäßig in w. Das zeigt die Existenz der Entwicklung in eine Laurentreihe. □

14.4.1.12. Insbesondere können wir jede holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität im Ursprung in eine Laurentreihe entwickeln. Unsere Funktion hat einen Pol im Ursprung genau dann, wenn ihre Laurentreihe mindenstens einen und höchstens endlich viele von Null verschiedene Koeffizienten vor negativen Potenzen von z stehen hat. Allgemeiner folgt unmittelbar, daß wir jede holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität bei p in einer Umgebung von p in eine Reihe der Gestalt

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z-p)^k$$

entwickeln können. Diese Darstellung heißt die **Laurententwicklung bei** p. Die Summe $\sum_{k<0} c_k (z-p)^k$ heißt dann der **Hauptteil von** f **bei** p. Besonders üblich ist dieser Begriff im Zusammenhang mit Polstellen.

14.4.1.13. Ein auf der ganzen komplexen Zahlenebene definierte holomorphe Funktion nennt man eine **ganze Funktion**. Der sogenannte „Kleine Satz von Picard“ besagt, daß jede nicht konstante ganze Funktion alle Werte mit höchstens einer Ausnahme annimmt. Ein Beispiel für eine ganze Funktion, die nicht alle Werte annimmt, ist die komplexe Exponentialfunktion. Der kleine Picard folgt leicht aus dem großen Picard 14.4.1.10, da ja nichtkonstante Polynome eh alle Werte annehmen und da jede ganze Funktion, die kein Polynom ist, eine wesentliche Singularität „im Unendlichen“ haben muß, also eine wesentliche Singularität bei Null kriegt beim Vorschalten von $z \mapsto 1/z$.

Satz 14.4.1.14 (von Mittag-Leffler zu vorgegebenen Hauptteilen). *Gegeben eine abgeschlossene diskrete Teilmenge $P \subset \mathbb{C}$ und an jeder Stelle $p \in P$ eine außerhalb von p konvergente Laurentreihe h_p existiert eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \backslash P$, die an allen Stellen $p \in P$ denselben Hauptteil hat wie h_p.*

Beweis. Hier ist ein Film zum Satz von Mittag-Leffler. Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Summen

$$S_n = \sum_{n \leq |p| < n+1} h_p$$

der Hauptteile zu Punkten aus P aus dem entsprechenden Kreisring oder, im Fall $n = 0$, der entsprechenden Kreisscheibe. Sicher ist S_n holomorph auf der Kreisscheibe $\{z \mid |z| < n\}$ und durch Entwicklung in eine Potenzreihe um den Ursprung finden wir ein Polynom Q_n mit $|S_n(z) - Q_n(z)| \leq 2^{-n}$ für alle z aus der kleineren Kreisscheibe $\{z \mid |z| < n-1\}$. Es ist dann klar, daß die Reihe

$\sum_{n\in\mathbb{N}}(S_n - Q_n)$ auf $\mathbb{C}\backslash P$ kompakt konvergiert gegen eine holomorphe Funktion mit den vorgegebenen Hauptteilen an allen Stellen $p \in P$. $\square$

Übungen

Übung 14.4.1.15. Man folgere den Satz von Liouville 14.3.1.6, indem man für eine beschränkte holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz die Funktion $z \mapsto f(1/z)$ über den Punkt $z = 0$ fortsetzt und dann das Maximumsprinzip 14.3.3.9 anwendet.

Ergänzende Übung 14.4.1.16 (**Charakterisierung der rationalen Funktionen**). Jede rationale Funktion $f \in \mathbb{C}(T)$ im Sinne von 3.5.5.7 liefert eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$, wenn wir ihr an allen Polstellen im Sinne von 3.5.5.7 den Wert ∞ zuweisen. Man zeige, daß das Bild der so erklärten Einbettung $\mathbb{C}(T) \hookrightarrow \mathcal{M}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})$ genau aus allen meromorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ besteht, für die es ein $N \geq 1$ gibt mit $\lim_{|z|\to\infty} f(z)/z^N = 0$. Hinweis: 14.4.1.3.

Übung 14.4.1.17. Besitzt eine holomorphe Funktion an einer Stelle eine wesentliche Singularität, so ist sie nicht injektiv. Hinweis: Man kombiniere den Satz von der Gebietstreue 14.3.4.5 mit Casorati-Weierstraß 14.4.1.9.

Übung 14.4.1.18. Hat $T \subset \mathbb{C}$ keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$, so hat jede nicht konstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash T \to \mathbb{C}$ dichtes Bild in $\mathbb{C}$.

Ergänzende Übung 14.4.1.19. Stärker als in 14.4.1.17 zeige man: Besitzt eine holomorphe Funktion an einer Stelle eine wesentliche Singularität, so besitzt sie mindestens eine unendliche Faser. Hinweis: Man kombiniere den Satz von der Gebietstreue 14.3.4.5 mit Casorati-Weierstraß 14.4.1.9 und dem Baire'schen Kategoriensatz 13.4.2.5 oder besser seinem Korollar 13.4.2.21. Noch stärker zeigen dieselben Methoden, daß die Werte, die unendlich oft angenommen werden, sogar eine dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$ bilden.

Übung 14.4.1.20 (**Biholomorphe Automorphismen der Zahlenebene**). Man zeige, daß jede holomorphe injektive Abbildung $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ von der Gestalt $z \mapsto az + b$ ist für $a \in \mathbb{C}^\times$, $b \in \mathbb{C}$. Hinweis: Potenzreihenentwicklung und 14.4.1.17.

Übung 14.4.1.21. Man zeige, daß die meromorphen Funktionen auf jeder zusammenhängenden offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene einen Körper bilden.

Übung 14.4.1.22. Gegeben $U \Subset \mathbb{C}$ und $p \in U$ erkläre man die **Bewertung bei** p **einer meromorphen Funktion** f **auf** U durch die Vorschrift

$$v_p(f) := \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid (z-p)^{-n} f(z) \text{ ist holomorph bei } p\}$$

In Formeln ist die Bewertung also eine Abbildung $v_p : \mathcal{M}^{\mathrm{an}}(U) \to \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$. Unsere Bewertung ist positiv auf Funktionen, die bei p eine Nullstelle haben, negativ auf Funktionen, die bei p eine Polstelle haben, und unendlich genau dann,

wenn unsere Funktion in einer Umgebung des Punktes p identisch verschwindet. Man zeige für alle meromorphen Funktionen $f, g \in \mathcal{M}^{\mathrm{an}}(U)$ und alle $p \in U$ die Formeln $v_p(fg) = v_p(f) + v_p(g)$ und $v_p(f+g) \geq \min(v_p(f), v_p(g))$ sowie im Fall $v_p(f) \neq v_p(g)$ die Gleichheit $v_p(f+g) = \min(v_p(f), v_p(g))$. Ist U zusammenhängend, so ist v_p mithin eine diskrete Bewertung im Sinne von 7.8.1.2 auf dem Körper $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(U)$.

Vorschau 14.4.1.23. Für jede Primzahl p erklärt man analog auch eine Bewertung $v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ durch die Vorschrift, daß gilt $v_p(0) = \infty$ und $v_p(p^n a/b) = n$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremd zu p. Diese Bewertung hat analoge Eigenschaften wie unsere Bewertung meromorpher Funktionen aus der vorhergehenden Übung 14.4.1.22. Die hier aufscheinende formale Analogie zwischen dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und Körpern von meromorphen Funktionen geht noch sehr viel weiter und hat sich für die Zahlentheorie als äußerst fruchtbar erwiesen.

Übung 14.4.1.24. Bezeichne $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation und bezeichne derselbe Buchstabe die Fortsetzung dieser Abbildung auf $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ durch $\infty \mapsto \infty$. Sei $U \Subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Ist $f : U \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ meromorph, so ist auch $cfc : c(U) \to P^1\mathbb{C}$ meromorph und für alle $q \in U$ gilt $v_{\bar{q}}(cfc) = v_q(f)$.

Übung 14.4.1.25. Die Entwicklung in eine Laurentreihe liefert für jede zusammenhängende offene Umgebung $U \Subset \mathbb{C}$ des Ursprungs in der komplexen Zahlenebene einen Körperhomomorphismus

$$\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(U) \to \mathbb{C}(\!(z)\!)$$

vom Körper der meromorphen Funktionen auf U in den Ring der formalen Laurentreihen $\mathbb{C}(\!(z)\!)$ aus 3.5.3.43.

Übung 14.4.1.26. Man gebe eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ an, die $\mathbb{C}$ surjektiv auf $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ abbildet.

Übung 14.4.1.27. Gegeben eine meromorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit diskreten Nullstellen erklärt man ihre **logarithmische Ableitung** wie in 14.1.2.20 durch die Vorschrift

$$\frac{\mathrm{dlog}\, f(z)}{\mathrm{d}z} := \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Man zeige, daß auch im Fall meromorpher Funktionen die logarithmische Ableitung eines Produkts die Summe der logarithmischen Ableitungen der Faktoren ist. Gibt es einen Zweig des Logarithmus $\log : V \to \mathbb{C}$ auf einer Teilmenge $V \Subset \mathbb{C}$ mit $f(U) \subset V$, so ist wie in 14.1.2.20 bereits gezeigt die logarithmische Ableitung von f für jeden solchen Zweig die Ableitung der Verknüpfung $\log \circ f$.

14.4.2 Umlaufzahl und Residuensatz (21.6)

Satz 14.4.2.1. *Jeder geschlossene Weg in der punktierten Ebene $\mathbb{C}^\times$ ist für genau eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ frei homotop zu dem geschlossenen Weg, der gegeben wird durch die Vorschrift $[0,1] \to \mathbb{C}^\times$, $t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n t}$. Diese ganze Zahl n heißt die* **Umlaufzahl** *oder auch* **Windungszahl** *des geschlossenen Weges γ um den Ursprung.*

14.4.2.2. Hier ist ein Film zur Definition der Umlaufzahl. Analog definiert man die Windungszahl eines geschlossenen Weges γ um einen beliebigen Punkt w der komplexen Zahlenebene, der nicht auf dem Bild des Weges liegt. Wir notieren sie

$$\mathrm{Um}(\gamma, w)$$

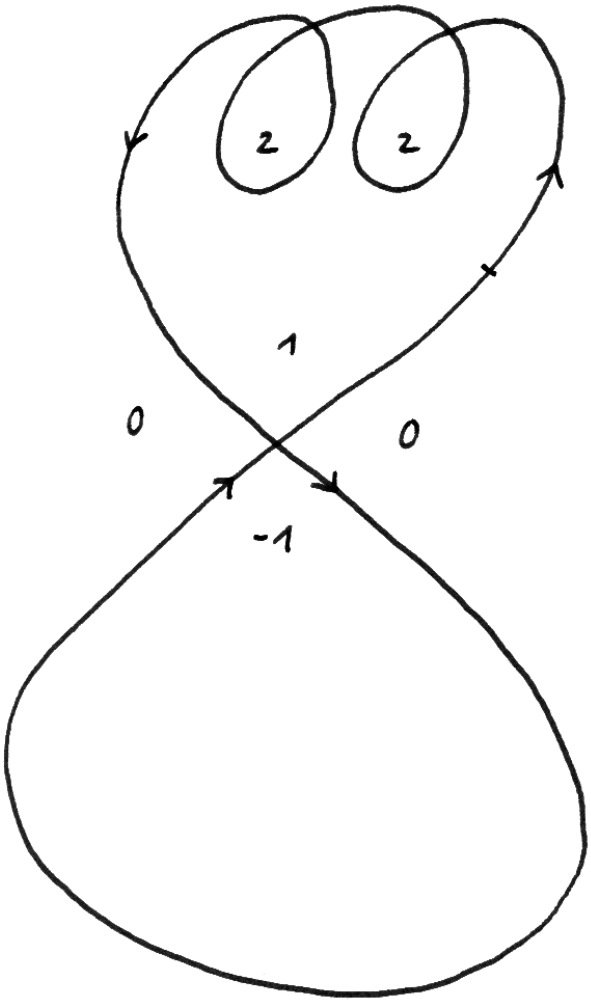
14.4.2.3. Anschaulich beschreibt für $n \geq 1$ die Abbildung $[0,1] \to \mathbb{C}^\times, t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n t}$ einen Weg, der vom Punkt 1 ausgehend mit konstanter absoluter Geschwindigkeit n-mal im Gegenuhrzeigersinn auf dem Einheitskreis umläuft; für $n \leq -1$ ist es der Weg, der $(-n)$-mal im Uhrzeigersinn umläuft; für $n = 0$ haben wir den konstanten Weg vor uns, der schlicht auf dem Punkt 1 sitzenbleibt.

Vorschau 14.4.2.4. Noch natürlicher wäre es, statt der Umlaufzahl gleich das Element $2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Um}(\gamma, w)$ von $\ker(\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times) = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ zu betrachten: Dieses Element ist nämlich auch für einen Körper von „vergeßlichen komplexen Zahlen“ im Sinne von 3.2.7.7 wohldefiniert. So weit will ich aber hier nicht gehen. Man notiert die Gruppe $\ker(\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times)$ auch $\mathbb{Z}(1) = \mathbb{Z}_\mathbb{C}(1) := \ker(\exp)$ und nennt sie den **Tate-Twist von** $\mathbb{Z}$.

Beweis von Satz 14.4.2.1. Hier ist ein Film zum Beweis des Satzes über die Umlaufzahl. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^\times$ unser geschlossener Weg. Wir zeigen zunächst, daß es einen Weg $\tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{C}$ gibt mit $\gamma = \exp \circ \tilde{\gamma}$, und das sogar zu jedem vorgegebenen Anfangspunkt $\tilde{\gamma}(a)$ mit $\exp(\tilde{\gamma}(a)) = \gamma(a)$. Falls γ ganz in der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$ verläuft, ist das klar: Wir nehmen einfach

$$\tilde{\gamma}(t) = \log(\gamma(t)) + 2\pi\mathrm{i}k$$

mit $\log$ der Umkehrung von $\exp : \mathbb{R} \times (-\pi\mathrm{i}, \pi\mathrm{i}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$ und $k \in \mathbb{Z}$ so gewählt, daß unser „hochgehobener Weg“ $\tilde{\gamma}$ beim vorgegebenen Anfangspunkt beginnt. Falls γ ganz in einer andersartig geschlitzten Ebene $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}w$ mit $w \in \mathbb{C}^\times$ verläuft, finden wir unsere Hochhebung analog. Im allgemeinen wählen wir $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = b$ so, daß $\gamma[a_{i-1}, a_i]$ jeweils ganz in einer geschlitzten Ebene enthalten ist, wählen induktiv Hochhebungen $\tilde{\gamma}_i$ der $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ so, daß $\tilde{\gamma}_i$ dort beginnt, wo $\tilde{\gamma}_{i-1}$ aufhört, und setzen diese stückweisen Hochhebungen dann zum gesuchten Weg $\tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{C}$ zusammen. Da das Urbild der Eins unter der komplexen Exponentialfunktion nach 10.4.5.22 gerade $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ ist, haben wir natürlich



In jede Zusammenhangskomponente aus dem Komplement des hier gezeichneten Weges habe ich hier die Umlaufzahl des besagten Weges um einen und jeden Punkt aus besagter Zusammenhangskomponente geschrieben.

$\tilde{\gamma}(b) = \tilde{\gamma}(a) + 2\pi \mathrm{i} n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Nach 14.2.2.5 oder auch kurzem Nachdenken sind je zwei Wege in $\mathbb{C}$ mit demselben Anfangs- und Endpunkt homotop, folglich muß $\tilde{\gamma}$ sein homotop zum Weg $\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \tilde{\gamma}(a) + \mathrm{i}nt$. Dann ist aber nach 14.2.2.6 auch $\gamma = \exp \circ \tilde{\gamma}$ homotop zu $\exp \circ \beta$. Dieser Weg ist aber offensichtlich in $\mathbb{C}^\times$ frei homotop zum Weg $[0, 1] \to \mathbb{C}^\times, t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nt}$ und das zeigt im Satz die Existenz. Mit der Homotopieinvarianz des Wegintegrals 14.2.3.13 erhalten wir für die Umlaufzahl eines geschlossenen Weges γ um einen beliebigen Punkt w außerhalb des Bildes von γ die Integraldarstellung

$$n = \mathrm{Um}(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{z - w} \, \mathrm{d}z$$

Sie zeigt sofort die Eindeutigkeit der Umlaufzahl. □

Ergänzung 14.4.2.5. Wenden wir unsere Erkenntnis 14.2.1.19, nach der das Wegintegral mit Verwandtschaft verträglich ist, auf die Situation vom Ende des vorhergehenden Beweises an, so erhalten wir zumindest im Fall eines Integrationsweges γ die Identität

$$\int_{\tilde{\gamma}} \mathrm{d}w = \int_\gamma \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z$$

So ergibt sich ein weiteres Mal $\tilde{\gamma}(b) - \tilde{\gamma}(a) = 2\pi \mathrm{i} n$ für n die Umlaufzahl von γ um den Ursprung.

Vorschau 14.4.2.6. Der oben gegebene Beweis für die Eindeutigkeit der Umlaufzahl mithilfe eines Integrals ist zwar im Rahmen der Funktionentheorie bequem, scheint mir für sich allein betrachtet jedoch unangemessen verwickelt. Ich ziehe den Beweis im Rahmen der Topologie vor, der in 16.1.7.7 besprochen wird.

Vorschau 14.4.2.7. Der Begriff der Umlaufzahl ermöglicht auch eine noch allgemeinere Fassung des Cauchy'schen Integralsatzes, die sogenannte **Umlaufzahlversion des Integralsatzes**: Ist im Definitionsbereich einer holomorphen Funktion ein geschlossener Weg gegeben, der keinen Punkt außerhalb des Definitionsbereichs umläuft, so verschwindet das Wegintegral unserer Funktion längs dieses Weges. Wir diskutieren seinen Beweis im Rahmen der singulären Homologietheorie in 17.1.6.5.

Definition 14.4.2.8. Der Koeffizient von $(z - p)^{-1}$ in der Laurententwicklung nach 14.4.1.12 einer holomorphen Funktion $f(z)$ mit isolierter Singularität bei w heißt das **Residuum**

$$\mathrm{Res}(f, p) = \mathrm{Res}_p f$$

von f bei p. Ist die Funktion f durch einen Ausdruck in einer komplexen Variablen gegeben, etwa als Ausdruck in der Variablen z, so verwenden wir für das Residuum von f bei p in Bezug auf z auch die Notation $\mathrm{Res}_{z=p} f(z)$.

14.4.2.9. Nach dem Satz über die Laurententwicklung 14.4.1.11 oder genauer seinem Beweis haben wir also

$$\operatorname{Res}(f,p) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z-p|=r} f(z)\,\mathrm{d}z$$

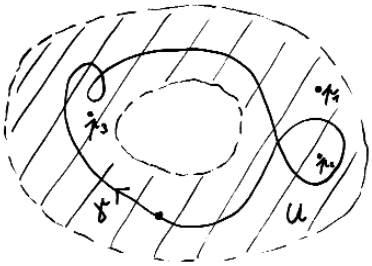
für jeden positiven Radius $r > 0$ derart, daß unsere Funktion f mit Ausnahme der singulären Stelle p auf einer Umgebung der abgeschlossenen Kreisscheibe $\{z \mid |z-p| \leq r\}$ definiert ist und dort keine weiteren Singularitäten hat. Das Integral verstehen wir wie bei unserer Diskussion der Laurentreihen als das komplexe Wegintegral beim einmaligen Durchlaufen der fraglichen Kreislinie im Gegenuhrzeigersinn. Die Bezeichnung als „Residuum“, lateinisierend für „Überbleibsel“, hat wohl damit zu tun, daß diese Zahl den einzigen Term der Laurentreihe beschreibt, der in diesem Zusammenhang beim Integrieren übrigbleibt.

14.4.2.10. Hat unsere Funktion f nur einen Pol erster Ordnung bei p, so läßt sich $g(z) = (z-p)f(z)$ stetig über $z = p$ fortsetzen und wir haben offensichtlich $g(p) = \operatorname{Res}(f,p)$. Läßt sich allgemeiner für irgendein $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $g(z) = (z-p)^{n+1}f(z)$ stetig über $z = p$ fortsetzen, so ist diese Fortsetzung holomorph und ihre n-te Ableitung bei p liefert das Residuum von f bei p vermittels der Identität $g^{(n)}(p) = n!\operatorname{Res}(f,p)$, die man leicht mithilfe der Laurententwicklung von f um p einsehen kann.

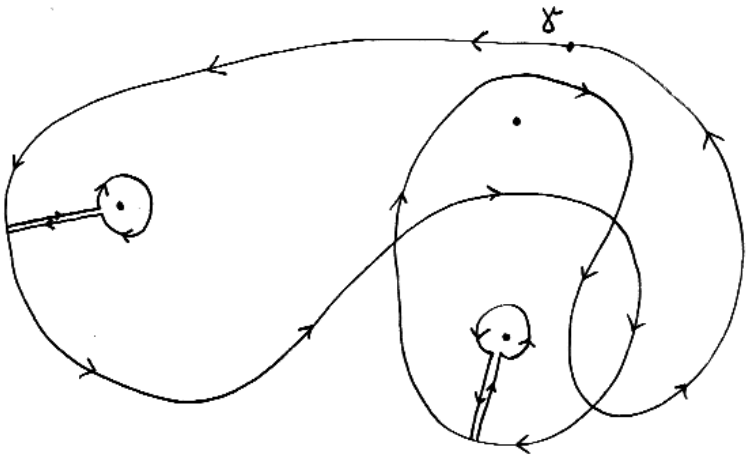
Satz 14.4.2.11 (Residuensatz). *Ist $U \Subset \mathbb{C}$ offen, $P \subset U$ endlich, $f : U\backslash P \to \mathbb{C}$ holomorph und γ ein geschlossener Weg in $U\backslash P$, der in U zusammenziehbar ist, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{p\in P} \operatorname{Um}(\gamma,p)\operatorname{Res}(f,p)$$

14.4.2.12. Hier ist ein Film zum Residuensatz. Integrieren wir also in Worten eine holomorphe Funktion mit endlich vielen isolierten Singularitäten längs eines geschlossenen Weges, der in ihrem Definitionsbereich vereinigt mit den singulären Stellen zusammenziehbar ist, so ist das Wegintegral bis auf den Faktor $2\pi\mathrm{i}$ die Summe der Residuen, jeweils gewichtet mit der Umlaufzahl unseres Weges um die entsprechende singuläre Stelle. Ist unser geschlossener Weg sogar bereits im Komplement $U\backslash P$ der singulären Stellen zusammenziehbar, so verschwindet das Wegintegral nach den Cauchy'schen Integralsatz, und der Residuensatz liefert auch Null für den Wert der Integrals, da dann bereits alle Umlaufzahlen um Punkte aus P Null sind. In 17.1.6.6 diskutieren wir auch noch eine etwas allgemeinere Version für „in U nullhomologe Wege“.



Ein geschlossener Weg in einer ringförmigen offenen Menge $U \Subset \mathbb{C}$, der in U nicht zusammenziehbar ist. Mit $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ dürfen wir also in diesem Fall den Residuensatz nicht anwenden: Das geht nur, wenn sich unsere Funktion „holomorph auf das fehlende innere Ei fortsetzen läßt“.



Anschaulicher Beweis des Residuensatzes in einem Spezialfall. Ergänzen wir unseren Weg durch die zwei kleinen Extrawege, die von unserem großen Weg auf kleinen Stichwegen zu den fraglichen Punkten hinlaufen, einmal im Kreis darum herum und, auf demselben Stichweg wieder zurück auf unseren großen Weg, so ändert sich das Wegintegral nur um die Integrale der beiden kleinen Kreiswege. Diese sind jedoch mit Hilfe der Laurententwicklung um die besagten singulären Stellen leicht zu berechnen. Der so ergänzte Weg ist dann zusammenziehbar in $U \backslash P$, und deshalb verschwindet das Wegintegral über diesen ergänzten Weg nach Cauchy. Um diese meines Erachtens wunderbar anschauliche Argumentation zu einem Beweis des Residuensatzes auszubauen, benötigen wir jedoch die Umlaufzahlversion des Cauchy'schen Integralsatzes 14.4.2.7, die wir im Rahmen dieser Vorlesung nicht bewiesen haben.

Beweis. Hier ist ein Film zum Beweis des Residuensatzes. Entwickeln wir f um ein $p \in P$ in seine Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-p)^n$$

und fassen darin alle Terme für $n \leq -2$ zusammen zur auf der punktierten Ebene kompakt konvergenten Reihe $h_p(z) := \sum_{n \leq -2} a_n (z-p)^n$, so ist h_p eine wohldefinierte holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \backslash p$ und besitzt sogar eine Stammfunktion, gegeben durch die Reihe $\sum_{n \leq -2} a_n (z-p)^{n+1}/(n+1)$. Die Funktion

$$f(z) - \sum_{p \in P} h_p(z) - \sum_{p \in P} \frac{\operatorname{Res}(f,p)}{z-p}$$

hat nun offensichtlich hebbare Singularitäten bei allen $p \in P$, mithin verschwindet nach dem Integralsatz von Cauchy 14.2.3.1 ihr Wegintegral über unseren in U zusammenziehbaren Weg γ. Da die h_p Stammfunktionen haben, verschwindet auch ihr Wegintegral über den geschlossenen Weg γ. Mit unserer funktionentheoretischen Beschreibung der Umlaufzahl aus dem Beweis von 14.4.2.1 ergibt sich damit

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{p \in P} \operatorname{Res}(f,p) \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-p} = 2\pi\mathrm{i} \sum_{p \in P} \operatorname{Res}(f,p)\operatorname{Um}(\gamma,p) \qquad \square$$

Übungen

Übung 14.4.2.13. Man erkläre, inwiefern Cauchy's Integralformel 14.3.1.1 ein Spezialfall des Residuensatzes ist.

14.4.3 Anwendungen des Residuensatzes (23.6)

Satz 14.4.3.1 (Zählen von Null- und Polstellen). *Seien $U \Subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f \in \mathcal{M}^{\mathrm{an}}(U)$ eine meromorphe Funktion auf U und γ ein in U zusammenziehbarer Weg, der keine Nullstelle und keine Polstelle von f trifft. So gilt*

$$\operatorname{Um}(f \circ \gamma, 0) = \sum_{p \in U} \operatorname{Um}(\gamma,p) v_p(f)$$

Beweis. Hier ist ein Film zum Beweis des Satzes über das Zählen von Null- und Polstellen. Wir zeigen feiner die Gleichungskette

$$\operatorname{Um}(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,\mathrm{d}w = \sum_{p \in U} \operatorname{Um}(\gamma,p) v_p(f)$$

Die erste Gleichung folgt unmittelbar aus dem Residuensatz. Die Zweite folgt aus der Erkenntnis 14.2.1.19, daß das Wegintegral Verwandtschaft respektiert. Für die Dritte schreiben wir $f(w) = (w-p)^n g(w)$ mit $g(w)$ holomorph ohne Nullstelle bei p. Damit erhalten wir

$$\frac{f'(w)}{f(w)} = \frac{n(w-p)^{n-1}g(w) + (w-p)^n g'(w)}{(w-p)^n g(w)} = \frac{n}{(w-p)} + \frac{g'(w)}{g(w)}$$

und das Residuum ergibt sich zu $\operatorname{Res}(f'/f, p) = v_p(f) = n$. Der Satz folgt damit aus dem Residuensatz. □

Ergänzung 14.4.3.2 (**Vereinfachung durch den Kalkül von Einsformen**). Diejenigen unter Ihnen, die sich mit Einsformen bereits wohlfühlen, mögen alternativ die komplexwertige Einsform $\operatorname{dlog} f := (f'/f)\,\mathrm{d}z$ integrieren und sich die linke Seite lokal durch irgendeinen Zweig des Logarithmus definiert denken, auf den es dann nach dem Ableiten gar nicht mehr ankommt. Damit folgt dann sofort die Formel $\operatorname{dlog}(fh) = \operatorname{dlog} f + \operatorname{dlog} h$ und bei $f(z) = (z-p)^n g(z)$ ergibt sich speziell $\operatorname{dlog} f = n \operatorname{dlog}(z-p) + \operatorname{dlog} g$.

14.4.3.3 (**Anschauung für den Satz zum Zählen von Null- und Polstellen**). Besonders anschaulich scheint mir der Fall $f(z) = z^n$ mit γ einem Kreisweg um den Ursprung. Hier ist ein Film zur anschaulichen Bedeutung des Satzes über das Zählen von Null- und Polstellen. Im Fall einer allgemeinen holomorphen Funktion f kann man sich überlegen, daß unser Weg γ homotop sein muß zu einer „Verkettung“ von Wegen, die erst von einem festen Punkt zu einer ihrer Nullstellen laufen, dann auf einem kleinen Kreisweg um diese herum, und danach auf demselben Weg wieder zurück. Für Wege dieser Art und dann auch für ihre Verkettungen scheint mir die Aussage anschaulich klar, wenn man den Satz 14.3.4.4 über die lokale Struktur holomorpher Funktionen beachtet. Die Erweiterung dieser Anschauung auf den meromorphen Fall bleibe dem Leser überlassen.

Vorschau 14.4.3.4 (**Topologische Variante zum Zählen von Nullstellen**). Der Satz bleibt richtig, wenn wir eine beliebige stetige Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ betrachten, bei der die Faser $f^{-1}(0)$ über dem Ursprung endlich ist. Wir müssen dann nur $v_p(f)$ interpretieren als die Umlaufzahl $\operatorname{Um}(f \circ \beta_p, 0)$ um den Ursprung für β_p einen „sehr kleinen“ Kreisweg um p im Gegenuhrzeigersinn und müssen zeigen, daß das wohldefiniert ist. Diese Summe geht dann über alle Punkte der Faser $f^{-1}(0)$ über dem Ursprung, und für Punkte dieser Faser ist das so erklärte $v_p(f)$ ein Spezialfall eines Konzepts, das wir in 17.4.3.16 in größerer Allgemeinheit als „lokalen Abbildungsgrad“ einführen. Unsere Formel folgt dann aus Argumenten im Beweis von 17.4.3.18. Die Erweiterung dieser Anschauung auf den Fall einer stetigen Abbildung in die Sphäre $f : U \to S^2$ bleibe dem Leser überlassen.

14.4.3.5 (**Im Satz ist die Summe auf der rechten Seite sinnvoll**). Wir erinnern daran, daß die Bewertung $v_p(f)$ von f bei p, wenn f nicht in einer Umgebung von p identisch verschwindet, in 14.4.1.22 definiert wurde als die Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit $f(z) = (z-p)^n g(z)$ für g holomorph um p ohne Nullstelle bei p. Wir haben also $v_p(f) > 0$ bei Nullstellen, $v_p(f) < 0$ bei Polstellen, und $v_p(f) = 0$ sonst. Für einen zusammenziehbaren Weg läßt sich nun per definitionem die zugehörige Abbildung vom Einheitskreis stetig auf die ganze Einheitskreisscheibe fortsetzen. Außerhalb des kompakten Bildes dieser Fortsetzung kann er dann keinen Punkt umlaufen, und innerhalb dieses Bildes können nur endlich viele Nullstellen und Polstellen liegen. Damit hat die Summe auf der rechten Seite unserer Formel auch wirklich nur endlich viele von Null verschiedene Terme. Sollte f auf einer Komponente von U identisch verschwinden, so kann der Weg keinen Punkt dieser Komponente umlaufen und wir interpretieren die Beiträge $0 \cdot \infty$ zu unserer Summe durch Punkte aus einer derartigen Komponente als Null.

Korollar 14.4.3.6 (Satz von Rouché). *Im Definitionsbereich einer holomorphen Funktion f sei eine abgeschlossene Kreisscheibe B gegeben. Sei weiter g holomorph mit demselben Definitionsbereich und $|f(z)| > |g(z)|\ \forall z \in \partial B$. So haben f und $f+g$ mit Vielfachheiten gezählt gleichviele Nullstellen in B.*

Ergänzung 14.4.3.7. Dasselbe gilt mit demselben Beweis, wenn wir f und g meromorph ohne Pole auf ∂B nehmen und „Polstellen als Nullstellen negativer Vielfachheit“ werten. Dasselbe gilt mit demselben Beweis auch, wenn wir statt dem Rand einer Kreisscheibe einen beliebigen im Definitionsbereich unserer beiden meromorphen Funktionen zusammenziehbaren Weg nehmen und alle Polstellen und Nullstellen zusätzlich mit der Umlaufzahl gewichten.

Beweis. Hier ist ein Film zum Beweis des Satzes von Rouché. Nach Annahme können auf dem Rand ∂B unserer Kreisscheibe weder f noch $f+g$ Nullstellen haben. Mit unserem Satz 14.4.3.1 über das Zählen von Null- und Polstellen und γ einem auf ∂B einmal im Gegenuhrzeigersinn umlaufenden Weg finden wir

$$\mathrm{Um}(f \circ \gamma, 0) = \sum_{p \in B} v_p(f) \quad \text{und} \quad \mathrm{Um}((f+g) \circ \gamma, 0) = \sum_{p \in B} v_p(f+g).$$

Wegen $|f(z)| > |g(z)|\ \forall z \in \partial B$ sind aber $f(z) + tg(z)$ für $t \in [0,1]$ und $z \in \partial B$ nie Null und diese Formel liefert eine freie Homotopie unserer beiden geschlossenen Wege $f \circ \gamma$ und $(f+g) \circ \gamma$ in $\mathbb{C}^\times$. Folglich haben beide Wege dieselbe Umlaufzahl um den Ursprung. □

Satz 14.4.3.8 (Weierstraß). *Gegeben eine abgeschlossene diskrete Teilmenge $P \subset \mathbb{C}$ und eine Abbildung $n : P \to \mathbb{N}$ gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die an jeder Stelle $p \in P$ eine Nullstelle der Ordnung $n(p)$ hat und außerhalb von P keine Nullstellen.*

Beweis. Hier ist ein Film zum Beweis der Existenz holomorpher Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen. Existiert solch eine Funktion f, so löst ihre logarithmische Ableitung f'/f offensichtlich die Hauptteilverteilung $n(p)/(z-p)$ für $p \in P$, die Differenz $(f'/f) - (n(p)/(z-p))$ hat also eine hebbare Singularität bei p. Ist umgekehrt g eine Lösung dieser Hauptteilverteilung nach 14.4.1.14, so gilt für jeden geschlossenen Weg γ in $\mathbb{C}\backslash P$ nach dem Residuensatz

$$\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

Wählen wir einen Ausgangspunkt $q \in \mathbb{C}\backslash P$ fest und erklären für $w \in \mathbb{C}\backslash P$ beliebig $f(w) := \exp \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$ für irgendeinen Weg γ in $\mathbb{C}\backslash P$ von q nach w, so hängt $f(w)$ nicht von der Wahl des Weges ab. Halten wir einen Weg zu einer Stelle w_0 fest und betrachten eine offene Kreisscheibe D um w_0 in $\mathbb{C}\backslash P$ und betrachten nur solche Wege nach $w \in D$, die erst unser fester Weg nach w_0 sind und danach ganz in D verlaufen, so ist $G(w) := \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$ eine Stammfunktion von g auf D und $f(w) = \exp \circ G$ holomorph auf D mit g als logarithmischer Ableitung. Also ist f auf ganz $\mathbb{C}\backslash P$ holomorph ohne Nullstellen mit logarithmischer Ableitung $f'/f = g$. Genauer gibt es um jeden Punkt $p \in P$ eine offene Kreisscheibe U, die keinen anderen Punkt von P enthält und in der folglich gilt $g(z) = h_p(z) + n(p)/(z-p)$ für $h_p : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist H_p eine Stammfunktion von h_p auf U, so finden wir durch explizite Rechnung $f(w) = c\exp(H_p(w))(w-p)^{n(p)}$ für festes $c \in \mathbb{C}^\times$ und alle $w \in U\backslash p$. □

Beispiel 14.4.3.9 (**Integrale rationaler Funktionen**). Hier ist ein Film zur Anwendung des Residuensatzes auf rationale Funktionen. Gegeben eine rationale Funktion f ohne Polstellen auf der reellen Achse, bei der der Grad des Nenners um mindestens zwei größer ist als der Grad des Zählers, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im}\zeta>0} \operatorname{Res}(f,\zeta)$$

Nach dem Residuensatz ergibt sich nämlich die rechte Seite, wenn wir für r größer als der Betrag aller Polstellen das Wegintegral von $-r$ bis r entlang der reellen Achse und dann auf einen großen Halbkreis durch die obere Halbebene zurück ausrechnen. Lassen wir hier r gegen unendlich streben, so strebt die Länge dieses Halbkreises linear gegen unendlich, das Betragsmaximum der Funktion darauf strebt jedoch quadratisch gegen Null. Folglich streben die Wegintegrale über immer größere Halbkreise gegen Null und die Formel folgt. Diese Anwendung war allerdings die Mühe des Residuensatzes nicht wert. Wir hätten auch einfach wie in 14.1.3.12 erklärt die Funktion f in einem Partialbruch entwickeln und eine Stammfunktion explizit angeben und zwischen $-\infty$ und ∞ auswerten können.

Als Übung mögen Sie zeigen, daß dabei dasselbe herausgekommen wäre. Als Beispiel bestimmen wir nochmal das Integral über die ganze reelle Achse von $f(x) = 1/(1+x^2) = 1/((x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i}))$. Diese Funktion hat einfache Pole bei $\pm\,\mathrm{i}$. Ihr Residuum bei i können wir bestimmen, indem wir unsere Funktion mit $(x-\mathrm{i})$ multiplizieren und dann bei $x = \mathrm{i}$ auswerten. So folgt $\operatorname{Res}(f,\mathrm{i}) = 1/(2\,\mathrm{i})$ und wir erhalten $\int_{-\infty}^{\infty} 1/(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \pi$ in Übereinstimmung mit 10.5.4.14.

14.4.3.10 (**Summe aller Residuen rationaler Funktionen**). Dasselbe Argument liefert für jede rationale Funktion ohne Pole auf der reellen Achse, bei der der Grad des Nenners um mindestens Zwei größer ist als der Grad des Zählers, auch die Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im}\zeta<0} \operatorname{Res}(f,\zeta)$$

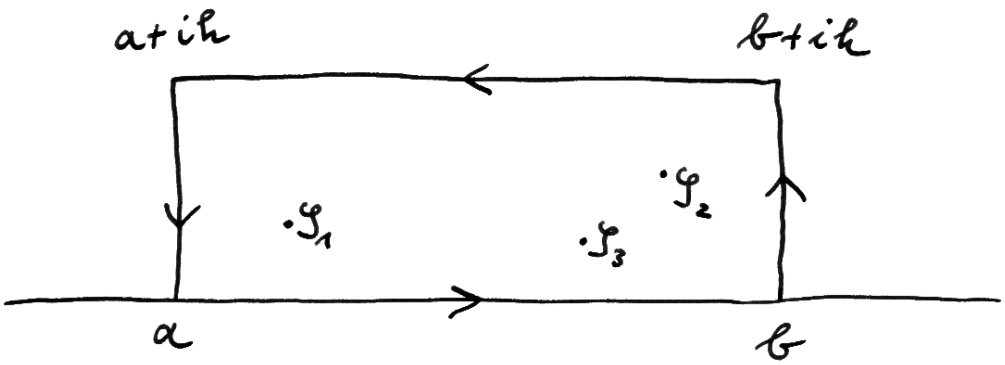
Der geneigte Leser mag sich anhand der Partialbruchzerlegung auch auf algebraischem Wege davon überzeugen, daß sich diese beiden Formeln nicht widersprechen, sondern vielmehr auch über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper die Summe der analog definierten Residuen einer rationalen Funktion Null sein muß, wenn der Grad des Nenners um mindestens zwei größer ist als der Grad des Zählers. Von einem höheren Standpunkt betrachtet ist das eine Konsequenz der Erkenntnis, daß für jede rationale Einsform auf der projektiven Grade die Summe ihrer Residuen verschwindet.

Beispiel 14.4.3.11 (**Integrale rationaler Funktionen mit Exponentialterm**). Gegeben eine rationale Funktion f ohne Polstellen auf der reellen Achse, bei der der Grad des Nenners größer ist als der Grad des Zählers, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im}\zeta>0} \operatorname{Res}_{z=\zeta} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$$

in dem Sinne, daß sowohl $\lim_{r\to\infty}\int_0^r$ als auch $\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^0$ existieren und ihre Summe den angegebenen Wert hat. Im Fall, daß der Grad des Nenners sogar um mindestens zwei größer ist als der Grad des Zählers, kann das in 14.4.3.9 angewandte Argument unverändert übernommen werden. Im allgemeinen betrachten wir ähnlich wie in 14.2.3.15 Wege einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Rand des Rechtecks mit Ecken $a, b, a+\mathrm{i}h, b+\mathrm{i}h$ für $a < b$ in $\mathbb{R}$ und $h > 0$. Ist unser Rechteck so groß, daß es alle Polstellen von f in der oberen Halbebene umfaßt, so ist das Wegintegral um seinen Rand nach dem Residuensatz genau die rechte Seite der behaupteten Formel. Die Integrale über die drei Kanten ρ, λ, ω für „rechts, links und oben“ außerhalb der reellen Achse können wir jedoch abschätzen durch

$$\left|\int_\rho f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z\right| \le \sup_{z\in\rho}|f(z)| \int_0^h \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \le \sup_{z\in\rho}|f(z)|$$



Der Integrationsweg bei der Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$

und analog auf der linken Kante, auf der oberen Kante dahingegen durch

$$\left|\int_\omega f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z\right| \le (b-a)\,\mathrm{e}^{-h}\sup_{z\in\omega}|f(z)|$$

Halten wir a fest und nehmen $b = h$ und lassen h nach Unendlich streben, so ergibt sich die Existenz des Grenzwerts $\lim_{r\to\infty}\int_0^r$. Die Existenz des anderen Grenzwerts zeigt man analog, und die behauptete Formel folgt, wenn wir $h = b = -a$ nehmen und das gegen Unendlich streben lassen.

Ergänzung 14.4.3.12 (**Fouriertransformierte rationaler Funktionen**). Eine rationale Funktion f ohne Polstellen auf der reellen Achse, bei der der Grad des Nenners um mindestes Zwei größer ist als der Grad des Zählers, ist quadratintegrierbar und ihre stochastisch standardisierte Fouriertransformierte wird nach 13.3.1.3 gegeben durch die Vorschrift

$$f^\wedge(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x$$

Unsere Formel 14.4.3.9 berechnet also $f^\wedge(0)$ und 14.4.3.11 berechnet $f^\wedge(1)$. Für allgemeines $y \neq 0$ liefert uns die Substitution $u = xy$ alias $x = u/y$ und $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/y$ die Identität

$$f^\wedge(y) := \frac{1}{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(u/y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\,\mathrm{d}u$$

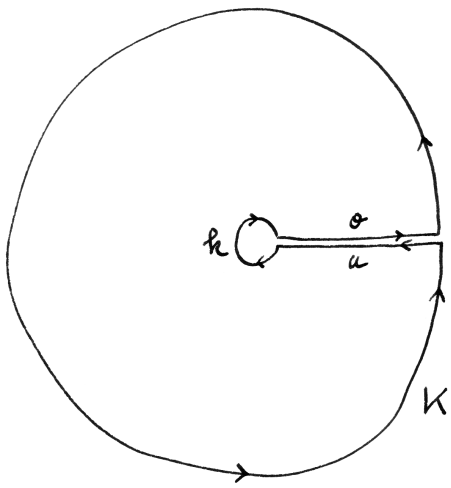
und das können wir wieder mit unserer Formel 14.4.3.11 ausrechnen und, wenn die Partialbruchzerlegung von f bekannt ist, sogar ganz explizit bestimmen. Ist der Grad des Nenners nur um Eins größer als der Grad des Zählers, so ist f immer noch quadratintegrierbar und wir können auf diesem Wege seine Fouriertransformierte im Sinne von 13.3.3.7 finden. Beispielhaft nehmen wir $f(x) = 1/(x-\alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und finden bei Beachtung der Tatsache, daß bei unserer Substitution im Fall $y < 0$ auch die Integrationsgrenzen zu vertauschen sind, unschwer

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x}{x-\alpha} = \frac{y}{|y|}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\,\mathrm{d}u}{u-y\alpha} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}(y/|y|)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\alpha} & \mathrm{Im}(y\alpha) > 0;\\ 0 & \mathrm{Im}(y\alpha) < 0.\end{cases}$$

Gehen wir noch zur physikalisch standardisierten Fouriertransformierten über und substituieren dazu y durch $-2\pi y$, so finden wir für $f(x) = 1/(x-\alpha)$ mit Hilfe von 13.3.3.14 als Fouriertransformierte

$$f^\wedge(y) = \begin{cases} -2\pi\mathrm{i}(y/|y|)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}y\alpha} & \mathrm{Im}(y\alpha) < 0;\\ 0 & \mathrm{Im}(y\alpha) > 0.\end{cases}$$

Mit Hilfe der Inversionsformel 13.3.3.5 und Übung 13.3.1.24 kann man das auch direkt einsehen.



Integrationsweg zu Beispiel 14.4.3.13 des Integrals $\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$, von einem Punkt weit außen dicht über der reellen Achse auf einem großen Kreis bis dicht unter die reelle Achse, dann längs der reellen Achse ganz nah zum Ursprung, einmal eng um den Ursprung herum, und dann wieder längs der reellen Achse weit nach außen.

Beispiel 14.4.3.13 (**Integrale rationaler Funktionen mit allgemeiner Potenz**). Sei $0 < \alpha < 1$ und sei f eine rationale Funktion ohne Pole auf der positiven reellen Achse, bei der der Grad des Nenners mindestens um zwei größer ist als der Grad des Zählers und die in Null holomorph ist oder einen Pol erster Ordnung hat. So existiert das Integral

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$$

nach 10.5.7.5 und wir können seinen Wert wie folgt bestimmen: Wir wählen einen vom Ursprung ausgehenden Strahl S_1 in den dritten Quadraten, der einen so kleinen Winkel zur positiven reellen Achse hat, daïm offenen Winkelsegment zwischen unserem Strahl und der nichtnegativen reellen Achse keine Polstellen von f liegen. Dann wählen wir einen weiteren Strahl S_2, der bis auf den Ursprung ganz in diesem offenen Winkelsegment liegt. Nun wählen wir auf der durch diesen Strahl geschlitzten Ebene $\mathbb{C}\backslash S_2$ denjenigen Zweig des Logarithmus $\log^+$, der auf der positiven reellen Achse der übliche reelle Logarithmus ist. Weiter wählen wir auf der durch $-S_2$ geschlitzten Ebene $\mathbb{C}\backslash(-S_2)$ denjenigen Zweig des Logarithmus $\log^-$, der auf $S_1\backslash 0$ mit $\log^+$ übereinstimmt. Auf der positiven reellen Achse gilt dann $\log^-(x) = \log^+(x) + 2\pi\mathrm{i}$. Dann setzen wir $z^{\alpha\pm} := \exp(\alpha \log^\pm z)$ und betrachten den in nebenstehendem Bild gezeigten Integrationsweg γ. Die Radien $r < R$ der Kreise seien so gewählt, daß alle Pole von f außerhalb des Ursprung innerhalb des durch unsere Kreise gegebenen offenen Kreisrings liegen. Nun unterteilen wir unseren Integrationsweg längs des ersten Strahls S_1 in zwei Wege $\gamma^\pm$, die jeweils ganz im Definitionsbereich von $\log^\pm$ verlaufen. Wir finden

$$\int_{\gamma^+} z^{\alpha+} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\zeta\neq 0} \operatorname{Res}_{z=\zeta} f(z) z^{\alpha+} \quad \text{sowie} \quad \int_{\gamma^-} z^{\alpha-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

und durch Summation

$$2\pi\mathrm{i}\sum_{\zeta\neq 0} \operatorname{Res}_{z=\zeta} f(z) z^{\alpha+} = (1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha})\int_r^R x^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{|z|\in\{r,R\}} z^{\alpha\pm} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Hier haben wir beim letzten Summanden weder die Durchlaufrichtung spezifiert noch ausgeführt, wo welche unserer Varianten von z^α zu verwenden ist, da das wegen $|z^{\alpha\pm}| = |z|^\alpha$ eh gegen Null strebt, wenn wir den inneren Radius gegen Null und den äußeren Radius gegen ∞ streben lassen. So folgt dann schließlich

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}} \sum_{\zeta\neq 0} \operatorname{Res}_{z=\zeta} f(z) z^\alpha$$

In der in 13.3.1.21 eingeführten Terminologie ist das der Wert $(\mathcal{M}f)(\alpha+1)$ der sogenannten „Mellin-Transformation von f“ an der Stelle $\alpha+1$. Die Mellin-Transformation ist ein naher Verwandter der Fouriertransformation, wie in 13.3.1.21 ausgeführt wird.

14.5 Verschiedene weiterführende Resultate

14.5.1 Harmonische Funktionen (28.6)

Definition 14.5.1.1. Eine auf einer offenen Teilmenge einer euklidischen Ebene definierte stetige reellwertige Funktion heißt **harmonisch**, wenn für jede in unserer Teilmenge enthaltene abgeschlossene Kreisscheibe der Funktionswert im Zentrum der Durchschnitt ist über die Funktionswerte auf dem Rand. Hier ist ein Film über harmonische Funktionen.

Ergänzung 14.5.1.2. Analog definiert man die Harmonizität vektorwertiger Funktionen mit Werten, die je nach den Vorkenntnissen des Lesers in endlichdimensionalen reellen Vektorräumen, in reellen Banachräumen oder gar in beliebigen reellen von-Neumann-Räumen liegen mögen.

Vorschau 14.5.1.3 (**Harmonische Funktionen in anderen Dimensionen**). Allgemeiner heißt eine auf einer offenen Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ oder noch allgemeiner auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen euklidischen Raums definierte stetige reellwertige Funktion harmonisch, wenn für jede in unserer Teilmenge enthaltene abgeschlossene Kugel der Funktionswert in ihrem Zentrum der Durchschnitt ist über die Funktionswerte auf ihrer Randsphäre.

14.5.1.4. In Formeln fordern wir im ebenen Fall also, daß unsere harmonische Funktion h auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ definiert sein soll und daß für jeden Punkt p aus dem Definitionsbereich von h und jedes $r > 0$ derart, daß der abgeschlossene r-Ball um p noch ganz zum Definitionsbereich von h gehört, unter der üblichen Identifikation von $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ gilt

$$h(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(p + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t$$

Anschaulich mag man sich eine harmonische Funktion als eine stabile Wärmeverteilung denken. Alternativ mag man sich im ebenen Fall eine Ameisendichte vorstellen, die unter der Annahme eines unabhängigen ziellosen Hin- und Herkrabbelns sämtlicher Ameisen zeitlich konstant bleibt. Beide Vorstellungen sind allerdings nur lokal sinnvoll und erweisen sich global als wirklichkeitsfern, da eine nichtkonstante harmonische Funktion auf einem $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ stets alle reellen Zahlen als Werte annimmt, insbesondere also auch beliebig negative Zahlen, die sich ja nicht mehr gut als Ameisendichte oder Temperatur interpretieren lassen.

14.5.1.5. In der Literatur wird eine harmonische Funktion meist definiert als eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die vom **Laplaceoperator**

$$\Delta = \partial_1^2 + \ldots + \partial_n^2$$

annulliert wird. Diese Bedingung ist zwar leichter zu prüfen, scheint mir jedoch weniger anschaulich. Wir zeigen die Äquivalenz beider Bedingungen im ebenen Fall in 14.5.1.9.

Proposition 14.5.1.6 (Harmonische Funktionen mit Extrema). *Nimmt eine harmonische Funktion auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ ihr Maximum oder ihr Minimum an, so ist sie konstant.*

Beweis. Die Menge aller Stellen, an denen eine stetige Funktion ihr Maximum oder auch irgendeinen anderen festen Wert annimmt, ist stets abgeschlossen. Ist unsere Funktion harmonisch und nimmt sie ihr Maximum bei p an, so muß andererseits unsere Funktion auf einer ganzen Kreisscheibe beziehungsweise Kugel $\mathrm{B}(p;\varepsilon(p))$ um p konstant sein, da sonst der Durchschnitt über die Funktionswerte auf gewissen Kreisringen beziehungsweise Kugelschalen um p zu klein wäre. Die Menge der Stellen, an denen das Maximum angenommen wird, ist also auch offen. Ist der Definitionsbereich zusammenhängend, so ist diese Menge nach 12.7.5.21 folglich alles oder nichts. □

Lemma 14.5.1.7. *Je zwei stetige Funktionen auf einer abgeschlossenen Kreisscheibe, die im Inneren harmonisch sind und auf dem Rand übereinstimmen, stimmen auf der ganzen Kreisscheibe überein.*

14.5.1.8. Analoges gilt mit demselben Beweis in allen Dimensionen.

Beweis. Die Differenz unserer beiden Funktionen ist stetig, verschwindet auf dem Rand unserer Kreisscheibe und ist im Inneren harmonisch. Als stetige Funktion muß sie auf der abgeschlossenen Kreisscheibe ihr Maximum und ihr Minimum annehmen. Wäre eines von diesen nicht Null, so würde es im Innern unserer Kreisscheibe angenommen im Widerspruch zu 14.5.1.6. Also sind das Maximum und das Minimum beide Null und die Differenz verschwindet auf der ganzen Kreisscheibe. □

Satz 14.5.1.9 (Harmonizität und Laplace-Operator). *Eine stetige Funktion auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist harmonisch genau dann, wenn sie zweimal stetig reell differenzierbar ist und vom Laplaceoperator $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ annulliert wird.*

Satz 14.5.1.10 (Harmonizität und Holomorphie). *Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind stets harmonisch. Jede reelle harmonische Funktion mit schleifenfüllendem Definitionsbereich ist umgekehrt der Realteil einer holomorphen Funktion und diese ist bis auf eine additive rein imaginäre Konstante sogar eindeutig bestimmt.*

Beispiel 14.5.1.11 (**Harmonisch, aber nicht Realteil**). Die Funktion $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \log|z|$ alias $\mathbb{R}^2\backslash 0 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (1/2)\log(x^2+y^2)$ ist harmonisch. In der Tat ist sie auf jeder geschlitzten Ebene der Realteil jedes Zweiges des komplexen Logarithmus und diese Zweige sind holomorph als Umkehrfunktionen der geeignet eingeschränkten komplexen Exponentialfunktion. Sie ist aber nicht der Realteil einer holomorphen Funktion auf der ganzen punktierten Ebene $\mathbb{C}^\times$, weil so eine holomorphe Funktion sich auf der geschlitzten Zahlenebene $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\le 0}$ nur um eine Konstante vom Hauptzweig des Logarithmus unterscheiden könnte und damit nicht auf ganz $\mathbb{C}^\times$ stetig sein könnte. Hier ist ein Film zu diesem Gegenbeispiel.

Beweis beider Sätze. Wir untersuchen für stetige reelle Funktionen auf offenen Teilmengen der Ebene $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ die Beziehungen zwischen den folgenden drei Eigenschaften: (1) „ist harmonisch“, (2) „ist zweimal stetig differenzierbar und wird vom Laplace-Operator annulliert“ sowie (3) „ist Realteil einer holomorphen Funktion“. Hier ist ein Film über den Beweis beider Sätze mit Ausnahme der Herleitung irgendwelcher Konsequenzen aus unserer Definition harmonischer Funktionen über die Mittelwerteigenschaft.

(3) $\Rightarrow$ (1): Die Harmonizität des Realteils einer holomorphen Funktion F ergibt sich aus der Integralformel von Cauchy 14.3.1.1 vermittels der Umformungen

$$F(a) = \tfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=r}\tfrac{F(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\tfrac{F(a+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\mathrm{i}r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(a+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t$$

In der Tat können wir hier überall den Realteil nehmen und im Integral rechts unten stimmt der Realteil des Integrals offensichtlich mit dem Integral des Realteils überein. Das ist gerade die Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen 14.3.1.4.

(3) $\Rightarrow$ (2): Daß der Realteil jeder holomorphen Funktion zweimal stetig partiell differenzierbar ist und vom Laplace-Operator annulliert wird, folgt leicht aus dem Satz von Goursat 14.3.1.5 und den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen 14.1.2.6. Man beachte hier die Identität $f' = \partial f/\partial_x$, die sich direkt aus den Definitionen ergibt.

(2) $\Rightarrow$ (3) bei schleifenfüllendem Definitionsbereich: Wir bemerken, daß für jede zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion h mit $\Delta h = 0$ die Funktion $f = \frac{\partial h}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial h}{\partial y}$ holomorph ist nach 14.1.2.6, da sie eben stetig partiell differenzierbar ist und die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt. Sie hat also nach 14.2.3.11 auf jedem schleifenfüllenden Definitionsbereich eine holomorphe Stammfunktion F, für die dann gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \mathrm{i}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial h}{\partial x}$$

Daraus folgern wir, daß der Realteil von F denselben Gradienten hat wie h, in Formeln $\operatorname{grad}(\operatorname{Re} F) = \operatorname{grad} h$. Ändern wir also F um eine geeignete additive Konstante ab, so erhalten wir $\operatorname{Re} F = h$ wie gewünscht. Geometrisch gesprochen bilden wir zu h das Gradientenfeld, drehen es an jeder Stelle um einen rechten Winkel im Gegenuhrzeigersinn und erhalten wegen der $\Delta h = 0$ wieder ein wirbelfreies Vektorfeld. Jedes Potential dieses Vektorfeldes ist ein möglicher Imaginärteil, der unsere Funktion h zu einer holomorphen Funktion ergänzt. In der Tat ist ein solches Vorgehen ja nach der geometrischen Interpretation 14.1.2.9 der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen auch eine natürliche Methode, um zu einer reellwertigen Funktion einen Imaginärteil zu finden, der sie zu einer holomorphen Funktion ergänzt.

(1) $\Rightarrow$ (2): Es reicht zu zeigen, daß jede stetige Funktion auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe, die harmonisch ist auf der offenen Einheitskreisscheibe, auf der offenen Einheitskreisscheibe der Realteil einer holomorphen Funktion ist, denn dann ist unsere Funktion zweimal stetig differenzierbar und sogar beliebig partiell differenzierbar mit $\Delta = 0$ nach der bereits gezeigten Implikation (3) $\Rightarrow$ (2). Das und noch viel mehr leistet die „Poisson-Transformation" nach 14.5.1.13, die wir im Folgenden als eigenständigen Satz formulieren und beweisen. $\square$

14.5.1.12 (**Motivation für die Poisson-Transformation***). Ich will zunächst erklären, wie man von der Fourier-Entwicklung in natürlicher Weise zur Poisson-Transformation geführt wird. Wir denken uns dazu eine reellwertige harmonische Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \Subset \mathbb{C}$, die die abgeschlossene Einheitskreisscheibe D umfaßt, und suchen eine holomorphe Funktion F auf der offenen Einheitskreisscheibe D° mit $\operatorname{Re} F = h$. Dazu entwickeln wir zunächst einmal die Restriktion $h|S^1$ unserer Funktion auf den Einheitskreis in eine Fourierreihe. Nach 11.3.3.4 finden wir wohlbestimmte $c_\nu \in \mathbb{C}$ mit

$$h = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu z^\nu$$

auf S^1 im Sinne der Summierbarkeit nach 11.3.1.5 im komplexen Vektorraum $\mathcal{C}(S^1)$ mit seiner Skalarproduktnorm $\| \ \|_2$ und insbesondere gilt die Abschätzung $\sum |c_\nu|^2 < \infty$. Da h reellwertig ist, haben wir $c_{-\nu} = \overline{c}_\nu$ und können unsere Darstellung von $h|S^1$ umschreiben zu

$$h = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu + \overline{c}_\nu \overline{z}^\nu$$

Hierbei ist wieder die Summierbarkeit im komplexen Vektorraum $\mathcal{C}(S^1)$ mit seiner Skalarproduktnorm $\| \ \|_2$ gemeint. Da die c_ν beschränkt sind, liefert die Po-

tenzreihe

$$F(z) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2c_\nu z^\nu$$

eine holomorphe Funktion auf der offenen Einheitskreisscheibe. Unter der Voraussetzung, daß diese Potenzreihe einen Konvergenzradius > 1 hat, gilt für die Partialsummen $F_n = c_0 + \sum_{\nu=1}^{n} 2c_\nu z^\nu$ sowohl $F_n \to F$ gleichmäßig auf S^1 und erst recht $\mathrm{Re}F_n \to \mathrm{Re}F$ gleichmäßig auf S^1, als auch $\mathrm{Re}F_n \to h$ im quadratischen Mittel auf S^1, woraus sofort folgt $\mathrm{Re}F = h$ erst auf S^1 und dann wegen 14.5.1.7 auf der ganzen Einheitskreisscheibe D und wir haben unsere harmonische Funktion wie gewünscht als Realteil einer holomorphen Funktion geschrieben. Das gilt insbesondere für alle h mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Fourierkoeffizienten, die sogenannten „trigonometrischen Polynome“. Hier ist ein Film über die Argumentation bis zu dieser Stelle. Um auch ohne die Voraussetzung, daß unsere Potenzreihe einen Konvergenzradius > 1 hat, die Gleichheit $\mathrm{Re}\, F = h$ auf der offenen Einheitskreisscheibe D° zu zeigen, müssen wir feiner argumentieren. Die Fourierkoeffizienten c_ν sind ja nach 11.3.3.2 gegeben als

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t}\, \mathrm{d}t$$

Wir können also unsere Funktion F für $|z| < 1$ nach Vertauschen eines gleichmäßigen Grenzwerts mit dem Integral auch schreiben in der Gestalt

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \left(1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t}\, z^\nu \right) \mathrm{d}t$$

Beim Ausdruck in Klammern ziehen wir einen Faktor $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\, z$ aus der Summe, die dadurch zu einer geometrischen Reihe wird, und erhalten

$$1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t}\, z^\nu = 1 + \frac{2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\, z}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\, z} = \frac{1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\, z}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\, z} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z}$$

So ergibt sich schließlich für die durch unsere Potenzreihe erklärte Funktion die Darstellung

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z}\, \mathrm{d}t$$

Wir zeigen im anschließenden Satz, daß für jede stetige Funktion $h : S^1 \to \mathbb{R}$ der Realteil der durch diese Formel gegebenen Funktion $F(z)$ für $z \in D^\circ$ eine stetige Fortsetzung von h auf die ganze abgeschlossene Einheitskreisscheibe liefert.

Satz* 14.5.1.13 (Poisson-Transformation). *Jede stetige reellwertige Funktion auf dem Einheitskreis $h : S^1 \to \mathbb{R}$ läßt sich auf genau eine Weise zu einer stetigen Funktion auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe D fortsetzen, die auf der offenen Einheitskreisscheibe D° harmonisch ist, und diese Fortsetzung wird für alle $z \in D^\circ$ gegeben durch die Formel*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z}\right) \mathrm{d}t$$

14.5.1.14. Hier ist ein Film über die Poisson-Transformation. Anschaulich mag man sich die Funktion h als eine fest vorgegebene Temperaturverteilung auf dem Rand der Einheitskreisscheibe denken, die dann eine unter diesen Randbedingungen stabile Temperaturverteilung auf der ganzen Einheitskreisscheibe erzeugt. Der zweite Faktor unter dem Integral heißt der **Poisson-Kern**. Mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = w$ wird er dargestellt durch

$$P(w, z) = \operatorname{Re}\left(\frac{w + z}{w - z}\right)$$

für $w \in S^1$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq w$. Bei festem w verschwindet dieser Realteil für alle $z \in S^1$ mit $z \neq w$, denn wir haben dann

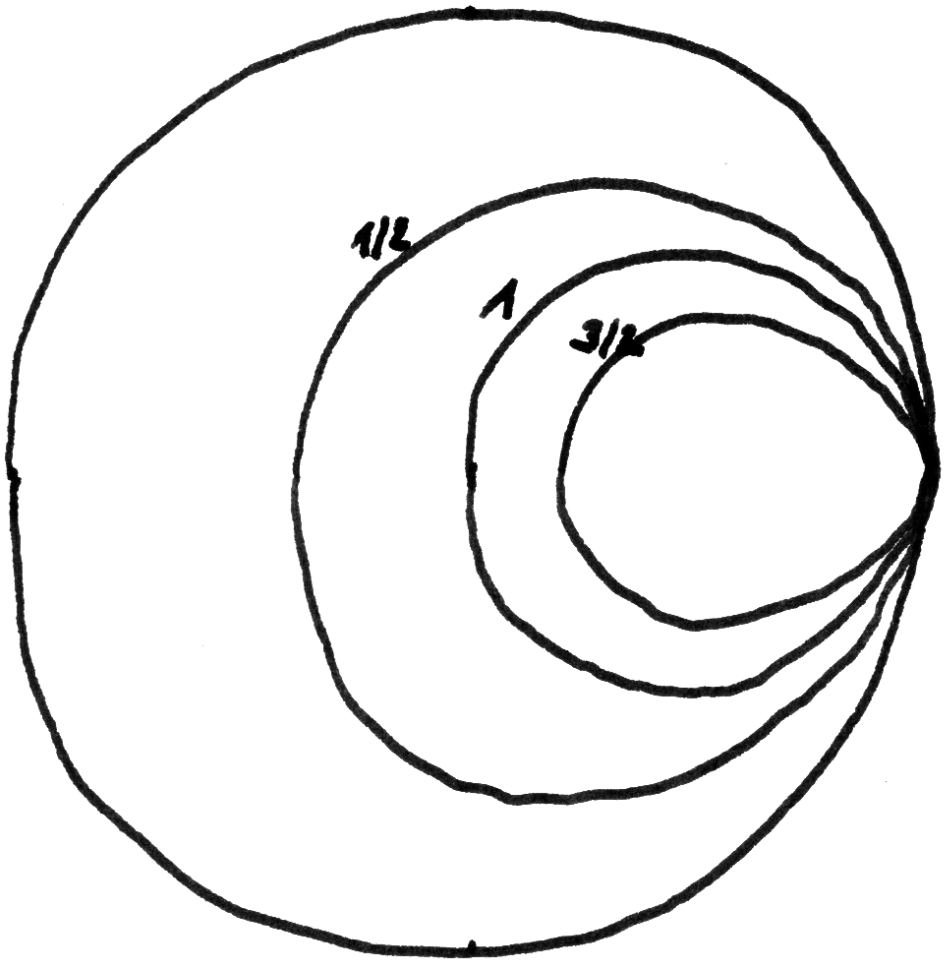
$$\frac{w + z}{w - z} = \frac{z^{-1} + w^{-1}}{z^{-1} - w^{-1}} = \frac{\bar{z} + \bar{w}}{\bar{z} - \bar{w}}$$

als da heißt, das komplex Konjugierte unseres Bruches ist gerade das Negative unseres Bruches. Lassen wir aber z aus dem Inneren der Einheitskreisscheibe radial gegen w laufen, also $z = \lambda w$ mit $\lambda \nearrow 1$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, so erhalten wir

$$P(w, \lambda w) = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \to \infty$$

Anschaulich mag man für festes $w \in S^1$ die Funktion $z \mapsto P(w, z)$ auf der offenen Einheitskreisscheibe verstehen als diejenige geeignet normalisierte Wärmeverteilung, die sich einstellt, wenn man „den Punkt w sehr heiß macht und den ganzen übrigen Rand S^1 auf Temperatur Null hält“. Die Niveaulinien dieser Funktion sind übrigends Kreise, die den Einheitskreis in w berühren, wie zum Beispiel aus der in 5.2.5.1 diskutierten „Möbius-Geometrie“ folgt.

Beweis mit Stone-Weierstraß. Hier ist ein Film zum Beweis des Satzes über die Poisson-Transformation. Bezeichne $\hat{h} : D \to \mathbb{R}$ die Funktion, die auf dem Einheitskreis h selbst ist und auf dem Inneren de Einheitskreisscheibe durch die Formel aus unserem Satz gegeben wird. Wir sind fertig, sobald wir zeigen können, daß $\hat{h}$ auf der ganzen abgeschlossenen Einheitskreisscheibe stetig ist. Wir wissen



Einige Niveaulinien der Poissonverteilung $z \mapsto P(1, z) = \mathrm{Re}((1 + z)/(1 - z))$ zu $w = 1$. Sie sollten eigentlich Kreislinien sein und sind nur aufgrund meiner zeichnerischen Schwäche etwas eiförmig geraten. Anschaulich mag man für festes $w \in S^1$ die Funktion $z \mapsto P(w, z)$ auf der offenen Einheitskreisscheibe verstehen als diejenige geeignet normalisierte Wärmeverteilung, die sich einstellt, wenn man „den Punkt w sehr heiß macht und den ganzen übrigen Rand S^1 auf Temperatur Null hält“. Die Niveaulinien dieser Funktion sind die hier gezeichneten Kreise, die den Einheitskreis in w berühren, wie zum Beispiel aus der in 5.2.5.1 diskutierten „Möbius-Geometrie“ folgt.

bereits aus dem vorhergehenden, daß das gilt, wenn h ein trigonometrisches Polynom ist, wenn also in anderen Worten die Fourierreihe von h nur höchstens endlich viele von Null verschiedene Terme hat. Insbesondere gilt unser Satz für die konstante Funktion $h = 1$. Das hinwiederum liefert für beliebiges h und $|z| < 1$ sofort die Abschätzung $\hat{h}(z) \leq \sup(h(S^1))$ und dann auch

$$\|\hat{h}\|_\infty \leq \|h\|_\infty$$

Hier gilt ist die Supremumsnorm links für die nicht notwendig stetige aber doch betragsmäßig beschränkte Funktion $\hat{h} : D \to \mathbb{R}$ immer noch sinnvoll definiert und rückblickend gilt natürlich sogar Gleichheit, aber das ist für uns nicht von Belang. Nun können wir ein beliebiges h mithilfe von 11.3.2.16 als gleichmäßigen Grenzwert $h_n \to h$ einer Folge von trigonometrischen Polynomen h_n schreiben. Daraus wird mit unserer Konstruktion ein gleichmäßiger Grenzwert $\hat{h}_n \to \hat{h}$ von Funktionen auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe, und da alle $\hat{h}_n$ stetig sind, muß dann auch $\hat{h}$ stetig sein. □

Übungen

Übung 14.5.1.15. Man zeige durch direkte Abschätzungen, daß eine stetige Funktion auf dem Einheitskreis durch ihre Poisson-Transformierte stetig auf die ganze Einheitskreisscheibe fortgesetzt wird. Dies Argument hat den Vorteil, daß es sich ohne Schwierigkeiten auf höhere Dimensionen verallgemeinern läßt. Im Übrigen verallgemeinern sich alle hier für harmonische Funktionen bewiesenen Aussagen ziemlich direkt auf den Fall harmonischer Funktionen auf offenen Teilmengen eines beliebigen $\mathbb{R}^n$.

Übung 14.5.1.16. Man zeige, daß für $U \Subset \mathbb{C}$ schleifenfüllend eine stetige komplexwertige Funktion $U \to \mathbb{C}$ harmonisch ist genau dann, wenn sie als Summe einer holomorphen Funktion mit einer antiholomorphen Funktion dargestellt werden kann.

14.5.2 Reihenentwicklung des Kotangens (30.6)

Satz 14.5.2.1 (Summe der $(z-k)^{-1}$). *Für alle nicht ganzen komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ gilt im Sinne absoluter Konvergenz*

$$\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right) = \pi \cot(\pi z)$$

14.5.2.2. Hier ist ein Film zur Reihenentwicklung des Kotangens. Die Summe der $(z-k)^{-1}$ über alle ganzen k konvergiert nicht absolut, aber fassen wir wie

angedeutet vor dem Summieren jeweils gegenüberliegende Terme zusammen, so entsteht eine absolut konvergente Reihe, die auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ kompakt konvergiert. „Vernünftiges“ anderes Zusammenzufassen von jeweils einem positiven und einem negativen Term liefert a posteriori dasselbe Ergebnis, der Kotangens ist ja periodisch von der Periode π, aber a priori ist das nicht so klar. Formeln für die Summen der $(z-k)^{-a}$ bei beliebigem ganzen $a \geq 1$ gewinnen wir aus unserem Satz leicht durch Ableiten. Allerdings stützt sich der hier gegebene Beweis von 14.5.2.1 auf Proposition 14.5.2.5, die den Fall $a = 2$ beschreibt, so daß wir besagte Proposition auf andere Weise herleiten müssen.

14.5.2.3. Zu diesem Beweis gibt es eine wunderbare Alternative, den „Herglotz-Trick“. Mir gefällt aber das hier gegebene Argument mindestens ebensogut.

Beweis. Leiten wir beide Seiten der behaupteten Gleichung nach z ab, so ergibt sich die Gleichung 14.5.2.5, die wir im Anschluß zeigen. Die Differenz beider Seiten ist also eine Konstante. Da beide Seiten ungerade Funktionen von z sind, ist diese Konstante Null. □

14.5.2.4. Unter dem **Hauptteil** einer meromorphen Funktion an einer gegebenen Stelle versteht man wie in 14.4.1.12 die Summe derjenigen Terme ihrer Laurententwicklung an besagter Stelle, die dort einen Pol haben. Haben zwei meromorphe Funktionen an einer gegebenen Stelle denselben Hauptteil, so ist ihre Differenz dort natürlich holomorph.

Proposition 14.5.2.5 (Summe der $(z-k)^{-2}$). *Für alle nicht ganzen komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ gilt im Sinne absoluter Konvergenz*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-k)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$$

Vorschau 14.5.2.6. Summiert man nur über die nichtpositiven k, so erhält man die zweite Ableitung des Logarithmus der Γ-Funktion, vergleiche 14.5.4.9.

Beweis. Hier ist ein Film zu diesem Beweis. Die Summe auf der linken Seite konvergiert offenbar unabhängig von der Reihenfolge der Summanden kompakt gegen eine Grenzfunktion, die meromorph ist auf ganz $\mathbb{C}$ mit Polen an allen ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ und mit den Hauptteilen $(z-k)^{-2}$ an diesen Polen. Die rechte Seite hat nun jedoch dieselben Polstellen mit denselben Hauptteilen. Die Differenz beider Seiten ist folglich ein holomorphe Funktion $\delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\delta(z+1) = \delta(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$. Wir lassen nun im Streifen $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ den Imaginärteil von z sehr groß oder sehr klein werden und behaupten, daß beide Seiten unserer Gleichung und erst recht ihre Differenz δ gegen Null streben, und zwar gleichmäßig im Realteil von z, in Formeln

$$\lim_{|\operatorname{Im}(z)|\to\infty} \delta(z) = 0$$

Damit ist dann ihre Differenz δ beschränkt, nach Liouville 14.3.1.6 also konstant, also Null. Es bleibt damit nur, diese Behauptung zu zeigen. Sie lohnt nur für die linke Seite einen Beweis. Für z in unserem Streifen mit $|\operatorname{Im}(z)| \geq n$ schätzen wir dazu die Terme unserer Summe mit $-n \leq k \leq n+1$ jeweils ab durch $1/n^2$, so daß sie alle zusammen höchstens $(2n+2)/n^2$ beitragen. Die übrigen Terme können jeweils abgeschätzt werden durch $1/k^2$, und da die Summe der inversen Quadrate aller natürlichen Zahlen ≥ 1 konvergiert, muß die Summe dieser übrigen Terme bei hinreichend großem n auch beliebig klein werden. □

Korollar 14.5.2.7 (**Einige Werte der Riemann'schen ζ-Funktion**). *An den positiven geraden ganzzahligen Stellen ist der Wert der Riemann'schen ζ-Funktion ein rationales Vielfaches der entsprechenden Potenz der Kreiszahl π. Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt also in Formeln*

$$\sum_{k\geq 1} k^{-2n} \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$$

Ergänzung 14.5.2.8. Für die Summe $\zeta(u)$ der ungeraden Potenzen k^{-u} für ungerades natürliches u, die sogenannten „ungeraden ζ-Werte", ist derzeit (2021) meines Wissens keine Aussage dieser Art bekannt. Vermutet wird, daß die reellen Zahlen $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots$ algebraisch unabhängig sind über $\mathbb{Q}$. Apéry hat gezeigt, daß $\zeta(3)$ irrational ist. Bekannt ist weiter, daß unendlich viele ungerade ζ-Werte irrational sind, und daß von den vier ungeraden ζ-Werten $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ mindestens einer irrational ist.

Beweis. Hier ist ein Film zur diesem Beweis. Multiplizieren wir die Reihenentwicklung des Kotangens 14.5.2.1 mit z, so erhalten wir

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 + z \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right)$$

im Sinne der kompakten Konvergenz, erst auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, aber dann sehr leicht auch auf $(\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}) \cup \{0\}$. Sicher sind beide Seiten gerade Funktionen von z. Leiten wir beide Seiten $2n$-mal ab und werten bei $z = 0$ aus, so ergibt sich, da wir ja nach 14.3.2.6 Grenzwert und Ableitung vertauschen dürfen, für $n \geq 1$ die Formel

$$\left.\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}z^{2n}}\right|_{z=0} \pi z \cot(\pi z) = 2n \sum_{k=1}^{\infty} 2\, \frac{-(2n-1)!}{k^{2n}}$$

Diese Formel drückt den Wert der Riemann'schen ζ-Funktion an allen positiven geraden natürlichen Zahlen aus in den Laurentkoeffizienten des Kotangens. Nun ergibt sich die Laurentreihe des Kotangens durch Multiplikation und Inversenbildung aus den Taylorreihen von Sinus und Cosinus und hat nach elementaren Überlegungen insbesondere stets rationale Koeffizienten. Das Korollar folgt. □

14.5.2.9. Um die Werte der ζ-Funktion an den geraden positiven ganzen Zahlen explizit zu berechnen, beachte man

$$\cot z = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}} = \mathrm{i} + \frac{2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}} = \mathrm{i} + \frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 1}$$

Die **Bernoulli-Zahlen** $\mathrm{B}_2, \mathrm{B}_4, \ldots$ sind nun definiert als die höheren Ableitungen von $z/(\mathrm{e}^z - 1)$ am Ursprung, in Formeln

$$\mathrm{B}_{2n} := \left.\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}z^{2n}}\right|_{z=0} \left(\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1}\right)$$

Sie sind natürlich rational und lassen sich induktiv berechnen, indem man die wohlbekannte Taylorreihe von $(\mathrm{e}^z - 1)/z$ formal invertiert. Der Kotangens ist ungerade, so daß die höheren Ableitungen ungerader Ordnung bei Null verschwinden. Vermittels dieser Zahlen lassen sich dann die Werte der Riemann'schen ζ-Funktion an den positiven geraden ganzen Zahlen nach dem Vorhergehenden und elementarer Rechnung, die dem Leser zur Übung überlassen sei, ausdrücken in der Gestalt

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}\mathrm{B}_{2n}\pi^{2n}$$

Vorschau 14.5.2.10. Will man Bernoulli-Zahlen für beliebige Indizes erklären, so setzt man besser

$$\mathrm{B}_k := \left.\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\right|_{z=0} \left(\frac{z}{1 - \mathrm{e}^{-z}}\right)$$

Diese Zahlen sind dann Null für ungerades $k > 1$ und stimmen mit unseren Bernoulli-Zahlen von oben überein für gerades k und haben den Vorteil, daß die Funktionalgleichung der Riemann'schen ζ-Funktion für sie die wunderbare Formel $\mathrm{B}_k = -k\zeta(1-k)$ liefert, die mit der gebührenden Vorsicht interpretiert sogar für $k = 0$ gilt.

Übungen

Übung 14.5.2.11 (**Alternierende Summe der** $(z-k)^{-1}$). Für alle nicht ganzen komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Hinweis: Man addiere die alternierende und die nicht alternierende Summe.

Übung 14.5.2.12. Man zeige für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ die Relation

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k(2k+1)^{-2n-1} \in \mathbb{Q}\pi^{2n+1}$$

Hinweis: Den Fall $n = 0$ hatten wir bereits in 10.5.4.14 behandelt. Für den allgemeinen Fall leite man die Identität 14.5.2.11 ab und werte bei $z = 1/2$ aus. Speziell zeige man im Fall $n = 1$ die Formel

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots = \frac{\pi^3}{32}$$

14.5.3 Produktentwicklung des Sinus (30.6)

Satz 14.5.3.1 (Produktentwicklung des Sinus). *Der Sinus läßt sich im Sinne der kompakten Konvergenz der partiellen Produkte darstellen als das unendliche Produkt*

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{k}\right)\left(1 + \frac{z}{k}\right)$$

Beweis. Hier ist ein Film über die Herleitung Produktentwicklung des Sinus, aufbauend auf unseren allgemeinen Erkenntnissen zu Produktentwicklungen 14.5.3.3 folgende, mit denen man daf"ur vertraut sein sollte. Nach 14.5.3.5 konvergieren auf der rechten Seite die Partialprodukte kompakt gegen eine Grenzfunktion und wenn wir den k-ten Faktor weglassen, hat diese Grenzfunktion immer noch nach 14.5.3.5 keine Nullstelle bei $\pm k$. Als Grenzfunktion unter kompakter Konvergenz einer Folge holomorpher Funktionen ist unsere Genzfunktion nach 14.3.2.6 wieder holomorph und hat nach dem vorhergehenden einfache Nullstellen an allen ganzen Zahlen und keinen weiteren Nullstellen. Ihr Quotient nach $\sin \pi z$ ist nach dem gleich anschließenden Lemma 14.5.3.6 also von der Gestalt $\exp(h(z))$ für $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann bilden wir auf beiden Seiten die logarithmische Ableitung im Sinne von 14.1.2.20. Sie vertauscht auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ mit dem Grenzübergang, weil ja wieder nach 14.3.2.6 die Ableitungen einer kompakt konvergenten Folge holomorpher Funktionen auch wieder kompakt gegen die Ableitung der Grenzfunktion konvergieren. Wir finden mit unserer Formel 14.5.2.5 für die Summe der $(z-k)^{-2}$, daß h konstant ist. Teilen wir nun beide Seiten durch z und setzen $z = 0$, so erkennen wir, daß h sogar identisch verschwinden muß. □

14.5.3.2. Setzen wir in der Produktentwicklung des Sinus 14.5.3.1 speziell $z = 1/2$, so ergibt sich die **Wallis'sche Produktformel**

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}$$

Satz 14.5.3.3 (Produktentwicklung). *Seien X eine Menge und $f_\nu : X \to \mathbb{C}$ Funktionen derart, daß die Folge der Partialsummen $\sum_{\nu=1}^n |f_\nu(x) - 1|$ gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion konvergiert. So konvergiert auch die Folge der Partialprodukte $\prod_{\nu=1}^n f_\nu(x)$ gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion $X \to \mathbb{C}$, die wir*

$$x \mapsto \prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$$

notieren und deren Nullstellen genau die Stellen $x \in X$ sind, an denen einer der Faktoren verschwindet. Darüber hinaus ist dann der Grenzwert der Partialprodukte unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.

14.5.3.4. Sind in der Situation aus 14.5.3.3 zusätzlich alle unsere Funktionen f_ν von Null weg beschränkt, liegt also die Null nicht im Abschluß ihres Wertebereichs, so konvergiert mit $\sum_{\nu=1}^n |f_\nu(x)-1|$ auch $\sum_{\nu=1}^n |(f_\nu(x))^{-1}-1|$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion. In der Tat zeigt man für z hinreichend nah bei 1 leicht die Abschätzung $|z^{-1} - 1| \le 2|z - 1|$. Sind alle unsere Funktionen f_ν von Null weg beschränkt, so können wir unseren Satz mithin auch auf die Funktionen f_ν^{-1} anwenden.

14.5.3.5. Ist X ein metrischer oder allgemeiner ein topologischer Raum und sind die f_ν stetig und konvergiert die Folge der Partialsummen $\sum_{\nu=1}^n |f_\nu(x) - 1|$ kompakt, so konvergiert auch die Folge der Partialprodukte $\prod_{\nu=1}^n f_\nu(x)$ kompakt. Um das zu zeigen, brauchen wir nur 14.5.3.3 auf die Einschränkungen unserer Funktionen auf Kompakta anzuwenden. Haben in dieser Situation unsere Funktionen f_ν keine Nullstellen, so erfüllen auch die f_ν^{-1} unsere Bedingungen und auch die Folge der Partialprodukte $\prod_{\nu=1}^n f_\nu(x)$ konvergiert kompakt. Um das zu zeigen, brauchen wir nur 14.5.3.4 auf die Einschränkungen unserer Funktionen auf Kompakta anzuwenden.

Beweis. Hier ist ein Film über allgemeine Produktentwicklungen. Ableiten liefert für den Hauptzweig des Logarithmus die Formel

$$\lim_{z \to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$$

Es gibt also $d \in (0,1)$ derart, daß aus $|z| < d$ folgt $|\log(1+z)| \le 3|z|/2$ und daß ebenso aus $|z-1| < d$ folgt $|\log(z)| \le 3|z-1|/2$. Nun gibt es sicher ein N mit $\sum_{\nu=N}^\infty |f_\nu(x) - 1| \le d$ für alle $x \in X$. Für $\nu \ge N$ sind dann alle $\log(f_\nu(x))$ wohldefiniert und nach unserer Abschätzung und dem Majorantenkriterium muß auch die Folge der Funktionen $\sum_{\nu=N}^n \log \circ f_\nu$ gleichmäßig konvergieren gegen eine betragsmäßig beschränkte Grenzfunktion $L : X \to \mathbb{C}$. Wenden wir $\exp$ an und beachten, daß $\exp$ auf jedem Kompaktum in $\mathbb{C}$ gleichmäßig stetig ist, so

folgt die gleichmäßige Konvergenz der partiellen Produkte $\prod_{\nu=N}^{n} f_\nu$ gegen eine beschränkte Funktion $X \to \mathbb{C}$ ohne Nullstelle, nämlich gegen $\exp \circ L$. Der Satz folgt, da wieder nach unserer Annahme die Faktoren mit $1 \leq \nu < N$ und damit auch ihr Produkt betragsmäßig beschränkt sind und das Produkt mit ihnen deshalb nicht die gleichmäßige Konvergenz zerstören kann. Die Unabhängigkeit des unendlichen Produkts von der Reihenfolge der Faktoren folgt leicht aus dem Umordnungssatz für Reihen 10.4.1.21. □

Lemma 14.5.3.6 (Logarithmen von Funktionen). *Gegeben $U \Subset \mathbb{C}$ schleifenfüllend und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph ohne Nullstelle gibt es $h : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = \exp h(z)$ für alle $z \in U$.*

Beweis. Hier ist ein Film über Logarithmen von Funktionen ohne Nullstelle mit schleifenfüllendem Definitionsbereich. Wenn h unsere Funktion ist, so könnten wir ja lokal immer schreiben $h = \log \circ f$ mit irgendeinem Zweig des Logarithmus und es folgt $h' = f'/f$. Ein guter Ansatz ist also $h = g + c$ für g eine Stammfunktion von f'/f. Nach 14.2.3.11 hat nun die holomorphe Funktion f'/f in der Tat eine Stammfunktion g auf U. Ableiten zeigt nach kurzer Rechnung, daß $(\exp \circ g)/f$ konstant sein muß. Wir können also in der Tat $h = c + g$ nehmen für eine geeignete Konstante $c \in \mathbb{C}$. □

Beweis mit Überlagerungstheorie. Ich will auch noch einen alternativen Beweis mit den Mitteln der Topologie geben, der mir besser gefällt, der aber den Rahmen dieser Vorlesung sprengt. Die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ ist im Sinne von 16.3.1.2 eine surjektive Überlagerung. Gegeben ein überlagerungstrivialer topologischer Raum U und eine stetige Abbildung $f : U \to \mathbb{C}^\times$ gibt es nach Satz 16.3.4.13 über das Liften bei überlagerungstrivialem Definitionsbereich eine stetige Abbildung $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ mit $\exp \circ \tilde{f} = f$. Ist speziell $U \Subset \mathbb{C}$ zusammenhängend und schleifenfüllend, so ist es auch überlagerungstrivial nach **??**. Ist zusätzlich $f : U \to \mathbb{C}^\times$ holomorph, so folgt aus der lokalen Umkehrbarkeit von $\exp$, daß auch $\tilde{f}$ holomorph sein muß. □

Übungen

Übung 14.5.3.7 (**Wurzeln aus holomorphen Funktionen**). Für jede holomorphe Funktion f ohne Nullstellen mit schleifenfüllendem Definitionsbereich und jedes $n \geq 1$ gibt es eine holomorphe Funktion g mit demselben Definitionsbereich und mit der Eigenschaft $g(z)^n = f(z)$ für alle Punkte z aus dem Definitionsbereich.

14.5.4 Gammafunktion (5.7)

Satz 14.5.4.1. *Es gibt genau eine meromorphe Funktion* $\Gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ *derart, daß für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\operatorname{Re} z > 0$ *gilt*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1}\, \mathrm{d}t$$

Sie heißt die **Gammafunktion** *und hat die Werte* $\Gamma(n+1) = n!$ *für alle natürlichen Zahlen* $n \in \mathbb{N}$. *Im Körper der meromorphen Funktionen auf* $\mathbb{C}$ *gilt die* **Funktionalgleichung** $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. *Unsere Gammafunktion ist auf* $\mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,\ldots\}$ *holomorph und hat für* $n \in \mathbb{N}$ *bei* $z = -n$ *jeweils eine einfache Polstelle mit* $(-1)^n/n!$ *als Residuum.*

14.5.4.2. Ich will zumindest zwei Gründe dafür angeben, warum diese Funktion von Bedeutung ist: Erstens tritt sie in der Funktionalgleichung der Riemann'schen ζ-Funktion 14.6.1.8 auf, und zweitens führt sie zu Abschätzungen von $n!$, die in der Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich sind.

Beweis. Hier ist ein Film über diesen Beweis. Die obere Abschätzung des Absolutbetrags des Integranden durch t^{a-1} für $\operatorname{Re} z \geq a$ zeigt, daß die Folge der nach 14.1.3.15 holomorphen Funktion

$$F_n(z) = \int_{1/n}^1 \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1}\, \mathrm{d}t$$

für $\operatorname{Re} z > 0$ kompakt konvergiert gegen eine nach 14.3.2.6 holomorphe Grenzfunktion auf der offenen rechten Halbebene. Die Abschätzung $\mathrm{e}^t\, t^{-a} \geq t^2/(a+2)!$ für $a \in \mathbb{N}$ und $t > 0$ liefert $|\,\mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1}| \leq (a+2)!\; t^{-2}$ für $\operatorname{Re} z < a+1$ und zeigt, daß die Folge von holomorphen Funktionen

$$G_n(z) = \int_1^n \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1}\, \mathrm{d}t$$

für $\operatorname{Re} z > 0$ kompakt konvergiert gegen eine holomorphe Grenzfunktion auf der offenen rechten Halbebene. In diesem Sinne liefert also das Integral aus dem Satz eine holomorphe Funktion auf der offenen rechten Halbebene. Für $\operatorname{Re} z > 0$ erhalten wir mit partieller Integration 14.1.3.16 sogar

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^z\, \mathrm{d}t = -\,\mathrm{e}^{-t}\, t^z\Big|_0^\infty + z\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1}\, \mathrm{d}t = z\Gamma(z)$$

Hier habe ich darauf verzichtet, wirklich korrekt erst nach dem partiellen Integrieren den Grenzübergang zu vollziehen. Diese Formel können wir für $\operatorname{Re}(z) > 1$

auch umschreiben zu $\Gamma(z-1) = \Gamma(z)/(z-1)$ und sie liefert uns dann eine meromorphe Fortsetzung unserer Gammafunktion erst auf die Halbebene $\operatorname{Re} z > -1$, dann auf die Halbebene $\operatorname{Re} z > -2$ und so nach und nach auf ganz $\mathbb{C}$. Offensichtlich gilt $\Gamma(1) = 1 = 0!$ und Iteration mit der Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ liefert dann sofort $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine Iteration der Funktionalgleichung liefert auch sofort $\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)\dots z\Gamma(z)$ alias

$$\Gamma(z) = (z+n)^{-1}(z+n-1)^{-1}\dots z^{-1}\Gamma(z+n+1)$$

Das aber ist ein Produkt von $(z+n)^{-1}$ mit einer Funktion, die bei $z = -n$ holomorph ist und die dort den Wert $(-1)^n/n!$ annimmt. □

Satz 14.5.4.3 (Gauss'sche Formel). *Auf dem Komplement der nichtpositiven ganzen Zahlen in der komplexen Zahlenebene gilt im Sinne kompakter Konvergenz*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

Satz 14.5.4.4 (Produktentwicklung der Gammafunktion). *Im Sinne der kompakten Konvergenz der Partialprodukte auf dem Komplement der nichtpositiven ganzen Zahlen gilt mit der Abkürzung* $\gamma = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n)$ *die Formel*

$$\Gamma(z) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \mathrm{e}^{z/k}$$

14.5.4.5. Insbesondere hat die Γ-Funktion keine Nullstellen. Aus den Produktentwicklungen der Gammafunktion 14.5.4.4 und des Sinus 14.5.3.1 sowie der Funktionalgleichung $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$ der Gammafunktion folgt sofort die Gleichheit von meromorphen Funktionen

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

und insbesondere die Identität $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Man nennt die erste Identität auch die **Spiegelungsformel**. Das ist die Identität, auf die es uns eigentlich ankommt. Ich erwarte nicht, daß Sie die Gauß'sche Formel oder die Produktentwicklung der Gammafunktion und ihre Beweise auswendig lernen oder in einer Prüfung reproduzieren können.

14.5.4.6. Um zu sehen, daß der Grenzwert γ existiert, interpretieren wir diese Folge als Eins plus die Differenz zwischen einer geeigneten Untersumme und dem Integral der Funktion $x \mapsto 1/x$ auf $[1, n]$. Diese Differenzen sind dann offensichtlich beschränkt durch Eins. So sehen wir auch $\gamma > 0$. Unser γ heißt die **Euler-Konstante** oder auch **Euler-Mascheroni-Konstante**.

Beweis der beiden Sätze. (1) Wir prüfen zunächst den ersten Satz im Fall $\operatorname{Re} z > 1$. Man geht aus von der Identität

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^n \frac{n!\,t^{z+n-1}\,\mathrm{d}t}{n^n z(z+1)\dots(z+n-1)} = \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

Man prüft sie leicht durch partielle Integration. Es gilt damit nur noch zu zeigen, daß die linke Seite für $\operatorname{Re} z > 1$ gegen $\Gamma(z)$ strebt. Man kann das mit elementaren Methoden unschwer sehen, vergleiche zum Beispiel [Con78]. Es folgt aber auch direkt aus dem Satz von Lebesgue über das Vertauschen von Integralen und punktweiser monotoner Konvergenz 13.1.5.12, wenn wir für alle $t \in [0, n)$ die Abschätzungen

$$\left(1 - \frac{t}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

nachweisen. Dazu nehmen wir auf beiden Seiten den Logarithmus und müssen zeigen, daß für $t \in [0, n)$ die Funktion $x \mapsto x \log(1 - \frac{t}{x})$ monoton wächst auf $[n, \infty)$. Ihre Ableitung ergibt sich zu

$$\log\left(1 - \frac{t}{x}\right) + \frac{t}{x}\left(1 - \frac{t}{x}\right)^{-1}$$

und es reicht folglich zu zeigen, daß die Funktion $y \mapsto \log(1-y) + y(1-y)^{-1}$ nichtnegativ ist für $y \in [0, 1)$. Bei $y = 0$ nimmt diese Funktion jedoch den Wert Null an und ihre Ableitung

$$\frac{-1}{1-y} + \frac{(1-y)+y}{(1-y)^2} = \frac{y}{(1-y)^2}$$

wird auf $[0, 1)$ nicht negativ.

(2) Als nächstes prüfen wir, daß das unendliche Produkt aus dem zweiten Satz in den in 14.5.3.3 vorgegebenen Rahmen fällt, daß also die Partialsummen der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\mathrm{e}^{-z/k}\left(1 + \frac{z}{k}\right)\right) - 1 \right|$$

kompakt konvergieren. Dazu beachten wir, daß nach der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion gilt

$$1 + t - \mathrm{e}^t = t^2 f(t)$$

für eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Wählen wir also ein Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$, so finden wir eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit

$$|1 + (z/k) - \mathrm{e}^{z/k}\,| \leq C/k^2$$

für alle $z \in K$ und alle natürlichen Zahlen $k \geq 1$, und für das Produkt der linken Seite mit $|\,\mathrm{e}^{-z/k}\,|$ gilt offensichtlich eine Abschätzung derselben Gestalt, nur möglicherweise mit größerem C. Nun zeigt 14.5.3.3, daß die Formel im Satz eine meromorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert mit einfachen Polstellen an allen nichtpositiven ganzen Zahlen und keinen weiteren Pol- oder Nullstellen.

(3) Als letztes prüfen wir, daß die Partialprodukte Γ_n in unserer Produktentwicklung im zweiten Satz bis auf einen kompakt gegen die konstante Funktion Eins konvergierenden Korrekturterm genau die Glieder unserer Funktionenfolge aus dem ersten Satz sind. Formen wir in der Tat die Partialprodukte etwas um, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Gamma_n(z) &= \mathrm{e}^{-\gamma z}\, z^{-1} \textstyle\prod_{\nu=1}^n \left(\frac{\nu+z}{\nu}\right)^{-1} \mathrm{e}^{z/\nu} \\
&= \mathrm{e}^{-\gamma z}\, \tfrac{n!}{z(z+1)\ldots(z+n)} \exp\left(\left(\textstyle\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu}\right) z\right) \\
&= \tfrac{n!\, n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} \exp\left(\left(\textstyle\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \log(n) - \gamma\right) z\right)
\end{aligned}$$

Der letzte Faktor strebt nun für $n \to \infty$ kompakt gegen 1, womit beide Sätze bewiesen wären. □

Übungen

Ergänzende Übung 14.5.4.7. Für komplexe $x, y \in \mathbb{C}$ mit positivem Realteil definiert man die **Euler'sche Betafunktion** als das Integral

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

Man zeige die Identität $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$. Hinweis: Per definitionem gilt $\Gamma(x) = \int_0^\infty a^{x-1}\mathrm{e}^{-a}\,\mathrm{d}a$, $\Gamma(y) = \int_0^\infty b^{y-1}\mathrm{e}^{-b}\,\mathrm{d}b$, $\Gamma(x+y) = \int_0^\infty s^{x+y-1}\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$. Man zeige $B(x,y)\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$ mithilfe des Satzes von Fubini und der Substitution $s = a+b$, $t = a/(a+b)$.

Übung 14.5.4.8. Man zeige $\Gamma'(1) = \gamma$ mit der Euler-Konstante γ aus 14.5.4.4. Hinweis: Man mag von der Gauß'schen Formel 14.5.4.3 ausgehen.

Übung 14.5.4.9. Man zeige

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \log \Gamma(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(z+k)^2}$$

für $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ Hinweis: Man mag von der Produktentwicklung 14.5.4.4 ausgehen.

Übung 14.5.4.10. Man zeige die **Legendre'sche Verdopplungsformel**

$$\Gamma(2z) = \Gamma(z)\Gamma(z + (1/2))\, 2^{2z-1}/\sqrt{\pi}$$

Hinweis: Man mag von Übung 14.5.4.9 ausgehen um zu zeigen, daß die Funktion $\Gamma(z)\Gamma(z + (1/2))/\Gamma(2z)$ von $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \log$ zu Null gemacht wird, so daß der Logarithmus $\log(\Gamma(2z)/\Gamma(z)\Gamma(z + (1/2))) = az + b$ ein Polynom vom Grad Eins sein muß. Durch Einsetzen geeigneter Werte bestimmt man dann a und b.

14.5.5 Riemann'scher Abbildungssatz (7.7)

Satz 14.5.5.1 (**Riemann'scher Abbildungssatz**). *Jede zusammenhängende schleifenfüllende echte offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ läßt sich biholomorph mit der offenen Einheitskreisscheibe identifizieren.*

14.5.5.2. Der Beweis dieses Satzes wird den ganzen Abschnitt füllen. Wir geben ihn nach einigen Vorbereitungen im Anschluß an 14.5.5.8. Unter einer **biholomorphen Identifikation** von zwei offenen Teilmengen U, V der komplexen Zahlenebene verstehen wir eine biholomorphe Einbettung $f : U \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(U) = V$. Dann ist auch die Umkehrabbildung eine biholomorphe Identifikation $f^{-1} : V \xrightarrow{\sim} U$.

14.5.5.3. Die Bedingung, eine echte Teilmenge zu sein, schließt den Fall aus, daß unsere offene Teilmenge die ganze komplexe Zahlenebene ist. In der Tat ist diese nicht biholomorph zur offenen Einheitskreisscheibe, denn es gibt darauf keine nichtkonstanten beschränkten holomorphen Funktionen. Der Fall der leeren Menge wird durch die Bedingung ausgeschlossen, daß unsere Teilmenge zusammenhängend sein soll.

Vorschau 14.5.5.4 (**Der große Riemann'sche Abbildungssatz**). Die tiefere Bedeutung des obigen Satzes wird erst klar im Lichte des sogenannten „großen Riemann'schen Abbildungssatzes", der besagt, daß es bis auf biholomorphen Isomorphismus genau drei zusammenhängende schleifenfüllende „Riemann'sche Flächen" gibt: Die Riemann'sche Zahlenkugel $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$, die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ und die offene Einheitskreisscheibe E. Man findet einen Beweis zum Beispiel in [For77].

14.5.5.5. Seien $U \Subset \mathbb{C}$ offen und $f_n : U \to \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge. Wir nennen unsere Folge **betragsmäßig simultan beschränkt**, wenn es ein $R \in \mathbb{R}$ gibt mit $|f_n(x)| \leq R$ für alle $x \in U$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Wir nennen unsere Folge **lokal betragsmäßig simultan beschränkt**, wenn jeder Punkt von U eine Umgebung besitzt derart, daß unsere Folge auf besagter Umgebung betragsmäßig simultan beschränkt ist.

Satz 14.5.5.6 (**Montel**). *Jede lokal betragsmäßig simultan beschränkte Folge von holomorphen Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $U \Subset \mathbb{C}$ besitzt eine kompakt konvergente Teilfolge.*

Vorschau 14.5.5.7 (**Bezug zum Satz von Arzela-Ascoli**). Man kann diesen Satz verstehen als ein Korollar des Satzes von Arzela-Ascoli 15.4.6.4, wenn man beachtet, daß für jede Folge von holomorphen Funktionen mit lokal betragsmäßig simultan beschränktem Wertebereich auch ihre Ableitungen lokal simultan beschränkt sind, etwa nach der ihrer Darstellung durch ein Integral aus dem Beweis von 14.3.1.5. Wir geben hier jedoch einen eigenständigen Beweis, der im wesentlichen der Beweis von Arzela-Ascoli mit einigen in unserem Spezialfall möglichen Vereinfachungen ist.

Beweis. Hier ist ein Film über diesen Beweis. Wir wählen eine dichte Folge $p_0, p_1, \ldots$ in U. Mit Heine-Borel 11.2.1.10 finden wir eine Teilfolge f_n^0, bei der die Funktionswerte bei p_0 konvergieren. Von dieser finden wir eine Teilfolge f_n^1, bei der die Funktionswerte auch bei p_1 konvergieren. Von dieser hinwiederum finden wir eine Teilfolge f_n^2, bei der die Funktionswerte auch bei p_2 konvergieren. So machen wir immer weiter. Die „diagonale“ Folge f_n^n konvergiert dann punktweise an allen p_i und ist damit kompakt konvergent nach Lemma 14.5.5.8, das wir im Anschluß beweisen. □

Lemma 14.5.5.8. *Eine lokal simultan betragsmäßig beschränkte Folge von holomorphen Funktionen, die an allen Punkten einer dichten Teilmenge ihres gemeinsamen Definitionsbereichs punktweise konvergiert, konvergiert bereits kompakt auf dem gesamten Definitionsbereich.*

Beweis. Hier ist ein Film über diesen Beweis. Es reicht zu zeigen, daß unsere Folge f_n auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe K aus dem gemeinsamen Definitionsbereich gleichmäßig konvergiert. Nun kann jede solche abgeschlossene Kreisscheibe vergrößert werden zu einer echt größeren abgeschlossenen Kreisscheibe L aus dem gemeinsamen Definitionsbereich, und mit der Integralformel für die Ableitung aus dem Beweis von 14.3.1.5 folgt aus der simultanen Beschränktheit der Funktionen unserer Folge auf dem Rand dieser größeren Kreisscheibe L die simultane Beschränktheit ihrer Ableitungen auf unserer ursprünglichen Kreisscheibe K, sagen wir durch eine Konstante $c > 0$. Aus dem Mittelwertsatz **??** folgt nun $|f_n(x) - f_n(y)| \le c|x - y|$ für alle $x, y \in K$. Wählen wir für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E = E_\varepsilon$ unserer dichten Teilmenge derart, daß die Kreisscheiben um $x \in E$ mit Radius $\varepsilon/2c$ bereits K überdecken, so überdecken die Kreisscheiben um $x \in E \cap K$ mit Radius ε/c auch bereits K und dann folgt aus $|f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon \ \forall x \in E \cap K$ bereits $|f_n(y) - f_m(y)| \le 3\varepsilon \ \forall y \in K$. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es also $N \in \mathbb{N}$ mit $N \le m \le n \Rightarrow |f_n(y) - f_m(y)| \le 3\varepsilon \ \forall y \in K$. □

Beweis des Riemann'schen Abbildungssatzes 14.5.5.1. Sei $G \Subset \mathbb{C}$ eine einfach zusammenhängende echte offene Teilmenge. Wir gehen in drei Schritten vor.

(1) Hier ist ein Film über diesen Beweisteil. Wir zeigen zunächst, daß es eine holomorphe Injektion von G in eine Kreisscheibe von endlichem Radius gibt. In der Tat sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 \notin G$. Nach 14.5.3.6 gibt es dann auf G einen Zweig des Logarithmus, in Formeln $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $z = \exp(f(z)) \quad \forall z \in G$ und insbesondere ist f injektiv. Das Bild von f ist offen und umfaßt folglich eine offene Kreisscheibe D vom Radius kleinergleich π. Dann hat es aber notwendig leeren Schnitt mit der um $2\pi\mathrm{i}$ verschobenen Kreisscheibe $2\pi\mathrm{i} + D$. Durch Nachschalten einer Verschiebung finden wir also $f_1 : G \hookrightarrow \mathbb{C}$ holomorph derart, daß $f_1(G)$ eine Kreisscheibe mit Zentrum im Ursprung nicht trifft. Setzen wir dann $f_2(z) := f_1(z)^{-1}$, so ist in der Tat f_2 eine Einbettung von G in eine Kreisscheibe von endlichem Radius mit Zentrum im Ursprung.

(2) Hier ist ein Film über diesen Beweisteil. Nach dem ersten Schritt können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unser G den Nullpunkt enthält und in der offenen Einheitskreisscheibe E enthalten ist. Wir behaupten nun, daß es unter allen holomorphen Injektionen $f : G \to E$ mit $f(0) = 0$ eine gibt, für die $|f'(0)|$ maximal wird. Das gilt sogar, ohne daß wir G einfach zusammenhängend annehmen. In der Tat umfaßt G eine Kreisscheibe $\mathrm{B}(0;\varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$, woraus folgt, daß für holomorphe Abbildungen $f : G \to E$ die Ableitung am Nullpunkt, die ja nach dem Beweis von 14.3.1.5 durch die Formel

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z^2} \, \mathrm{d}z$$

gegeben wird, betragsmäßig beschränkt ist durch ε^{-1}. Also gibt es ein Supremum S der Menge der möglichen $|f'(0)|$ und eine Folge von holomorphen Injektionen $f_n : G \to E$ derart, daß $|f_n'(0)|$ gegen dieses Supremum strebt. Nach dem Satz von Montel 14.5.5.6 dürfen wir sogar annehmen, daß diese Folge kompakt konvergiert. Die Grenzfunktion f ist dann nach 14.3.2.6 wieder holomorph mit $|f'(0)| = S$. Sie ist auch injektiv nach dem Korollar 14.5.5.10, das wir im Anschluß beweisen, und landet nicht nur in der abgeschlossenen, sondern sogar in der offenen Einheitskreisscheibe nach dem Satz über die Gebietstreue 14.3.4.5. Also haben wir eine holomorphe Injektion $f : G \to E$ gefunden mit $f(0) = 0$, für die die Ableitung $|f'(0)|$ den unter diesen Einschränkungen größtmöglichen Wert annimmt.

(3) Hier ist ein Film über diesen Beweisteil. Jetzt gilt es noch zu zeigen, daß die im vorherigen Schritt konstruierte Abbildung f surjektiv auf die ganze Einheitskreisscheibe geht. Dazu führen wir die gegenteilige Annahme zum Widerspruch, indem wir zu jeder nicht surjektiven holomorphen Injektion $f : G \hookrightarrow E$ mit

$f(0) = 0$ eine weitere konstruieren, die auch den Ursprung festhält und deren Ableitung im Ursprung betragsmäßig noch größer ist. Sei also $p \in E \backslash f(G)$. Wir erinnern, daß es nach 14.1.1.16 zu je zwei Punkten der offenen Einheitskreisscheibe $p, q \in E$ eine holomorphe Bijektion $h : E \xrightarrow{\sim} E$ gibt mit $h(p) = q$. Hier ist ein Film mit einer anschaulichen Argumentation zu dieser Aussage. Wir finden also $h_1 : E \xrightarrow{\sim} E$ biholomorph mit $h_1(p) = 0$. Da G schleifenfüllend ist, gibt es dann nach 14.5.3.7 eine Wurzel von $h_1 \circ f$ alias eine Funktion w mit $q \circ w = h_1 \circ f$ für $q : z \mapsto z^2$ das Quadrieren. Auch diese Wurzel ist eine holomorphe Injektion $w : G \hookrightarrow E$. Schließlich finden wir dann noch $h_2 : E \xrightarrow{\sim} E$ biholomorph mit $h_2(w(0)) = 0$. Wir behaupten nun, daß $g := h_2 \circ w$ eine betragsmäßig größere Ableitung im Ursprung hat als f. Um das zu sehen, beachten wir $q \circ h_2^{-1} \circ g = h_1 \circ f$ alias $(h_1^{-1} \circ q \circ h_2^{-1}) \circ g = f$. Nun ist aber der Ausdruck in Klammern eine holomorphe nicht injektive Abbildung $E \to E$, die den Ursprung festhält. Ihre Ableitung im Ursprung ist nach dem Schwarz'schen Lemma 14.3.3.10 also betragsmäßig echt kleiner als Eins und mit der Kettenregel folgt $|g'(0)| > |f'(0)|$. Hier ist ein Film, der die Konstruktion der verbesserten Funktion g zu einer nicht surjektiven Funktion f in einem Beispiel beschreibt. □

Satz 14.5.5.9 (Nullstellenanzahl von Grenzfunktionen). *Sei auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen gegeben. Haben alle Funktionen unserer Folge mit Vielfachheiten gerechnet höchstens N Nullstellen und ist unsere Grenzfunktion nicht die Nullfunktion, so hat auch unsere Grenzfunktion mit Vielfachheiten gerechnet höchstens N Nullstellen.*

Beweis. Hier ist ein Film über die Zahl von Nullstellen von Grenzfunktionen. Seien $f_n : U \to \mathbb{C}$ unsere Funktionen und $f : U \to \mathbb{C}$ ihre Grenzfunktion. Sind $p_1, \ldots, p_r$ paarweise verschiedene Nullstellen von f, so können wir paarweise disjunkte abgeschlossene Kreisscheiben $K_1, \ldots, K_r \subset U$ wählen derart, daß p_s jeweils die einzige Nullstelle von f aus K_s ist. Sicher verschwinden nur endlich viele der f_n auf dem Rand einer unserer Kreisscheiben. Wegen der kompakten Konvergenz der Ableitungen nach 14.3.2.6 haben wir also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial \vec{K}_s} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial \vec{K}_s} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z$$

Das aber besagt nach Satz 14.4.3.1 über das Zählen von Null- und Polstellen, daß für hinreichend großes n die Funktion f_n mit Vielfachkeiten gerechnet ebensoviele Nullstellen in der Kreisscheibe K_s hat wie die Grenzfunktion f. □

Korollar 14.5.5.10. *Ist $U \Subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, so ist die Grenzfunktion einer kompakt konvergenten Folge injektiver holomorpher Funktionen auf U entweder injektiv oder konstant.*

Beweis. Injektive Funktionen können höchstens eine Nullstelle haben und diese kann dann keine höhere Vielfachkeit haben. Also kann nach 14.5.5.9 auch die Grenzfunktion, wenn sie nicht die Nullfunktion ist, höchstens eine Nullstelle haben, und diese muß dann eine einfache Nullstelle sein. Das Korollar folgt, wenn man diese Erkenntnis auf die Differenz unserer Funktionen zu festen konstanten Funktionen anwendet. □

Übungen

Übung 14.5.5.11. Man zeige, daß der Satz über die Nullstellenanzahl von Grenzfunktionen analog auch gilt, wenn wir die Vielfachheiten nicht beachten: Ist auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen gegeben, und haben alle Funktionen unserer Folge höchstens N Nullstellen, und ist unsere Grenzfunktion nicht die Nullfunktion, so hat auch unsere Grenzfunktion höchstens N Nullstellen.

14.6 Erste Anwendungen in der Zahlentheorie*

14.6.1 Verteilung von Primzahlen (12&14.7)

Satz 14.6.1.1 (Primzahlsatz). *Bezeichnet $\pi(x)$ für jede reelle Zahl x die Zahl der Primzahlen $\leq x$, so gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log(x)}{x} = 1$$

14.6.1.2. Das Symbol $\log$ ist hier wie immer in diesem Text zu interpretieren als der natürliche Logarithmus alias die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp$. Anders gesagt strebt der Quotient der Funktionen $\pi(x)/x$ und $1/\log(x)$ gegen Eins für $x \to \infty$. Etwas vage gesagt ist also für großes x also die Wahrscheinlichkeit, daß eine natürliche Zahl $\leq x$ prim ist, in etwa $1/\log(x)$. Die Konvergenz ist jedoch sehr langsam: Bei $x = 100000$ finden wir für den Quotienten als Wert etwa $1{,}1$ und bei $x = 10^9$ als Wert etwa $1{,}05$. Der Beweis wird uns diesen ganzen Abschnitt beschäftigen und wird erst ganz am Ende gegeben. Im Grundgedanken zeigen wir den Primzahlsatz, indem wir einen „Taubersatz“ anwenden auf die logarithmische Ableitung der Riemann'schen ζ-Funktion, geteilt durch z und bereinigt um den Hauptteil dieses Quotienten bei $z = 1$.

Definition 14.6.1.3. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 1$ definieren wir den Wert der **Riemann'schen ζ-Funktion** an der Stelle z durch die absolut konvergente Reihe

$$\zeta(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$$

14.6.1.4. Mit 10.5.8.23 sieht man leicht, daß die Partialsummen dieser Reihe für jedes $\alpha > 1$ auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) \geq \alpha$ gleichmäßig konvergieren. Folglich definiert unsere Reihe eine holomorphe Funktion auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 1$.

Satz 14.6.1.5 (Produktentwicklung der ζ-Funktion). *Bezeichnet $P \subset \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen, so gilt*

$$\zeta(z) = \prod_{p\in P} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}$$

im Sinne der kompakten Konvergenz der partiellen Produkte auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 1$, unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.

14.6.1.6. Hier ist ein Film über die Produktentwicklung der ζ-Funktion. Diese Produktentwicklung geht auf Euler zurück. Ihre Faktoren heißen die **Euler-Faktoren**. Diese Terminologie verallgemeinert man dann auf allgemeinere ζ-Funktionen und sogenannte „L-Reihen“, die uns später begegnen werden.

Beweis. Unsere allgemeinen Überlegungen 14.5.3.4 zeigen, daß das Produkt auf der rechten Seite auf $\mathrm{Re}(z) > 1$ kompakt konvergiert. Nun können wir für $\mathrm{Re}(z) > 1$ ja die Faktoren in eine geometrische Reihe entwickeln in der Form

$$\left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \dots$$

Wählen wir $E \subset P$ endlich und bezeichnen mit $\mathbb{N}(E)$ die Menge aller natürlichen Zahlen ≥ 1, deren sämtliche Primfaktoren zu E gehören, so erhalten wir mit 10.4.2.14 für die Partialprodukte die Darstellung

$$\prod_{p \in E} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}(E)} \frac{1}{k^z}$$

Betrachten wir auf beiden Seiten jeweils die Menge $E = E_n$ der ersten n Primzahlen und lassen n gegen unendlich streben, so konvergiert die rechte Seite gegen $\zeta(z)$ nach dem Satz über dominierte Konvergenz 13.1.6.10, der im vorliegenden Spezialfall im wesentlichen auch bereits als Übung 10.4.1.29 behandelt wurde und den wir hier auf Real- und Imaginärteil unserer komplexen Funktion anwenden. □

Lemma 14.6.1.7 (Fortsetzbarkeit der Riemann'schen ζ-Funktion). *Die ζ-Funktion läßt sich zu einer meromorphen Funktion auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 0$ fortsetzen und diese Fortsetzung ist holomorph bis auf eine Singularität bei $z = 1$, wo sie einen einfachen Pol mit dem Residuum Eins hat.*

Vorschau 14.6.1.8. Die Riemann'sche ζ-Funktion läßt sich sogar zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen und die mit dieser Fortsetzung und der Γ-Funktion aus 14.5.4.1 erklärte meromorphe Funktion $\Lambda(z) := \pi^{-z/2}\Gamma(z/2)\zeta(z)$ erfüllt die **Funktionalgleichung** $\Lambda(z) = \Lambda(1-z)$ alias ist punktsymmetrisch um den Punkt $1/2$, in Formeln $\Lambda((1/2)+z) = \Lambda((1/2)-z)$. Des weiteren hat Λ nur bei 0 und 1 Polstellen. Anders gesagt unter Verwendung der Verdopplungsformel 14.5.4.10 gilt $\zeta(1-z) = (2/(2\pi)^z)\cos(\pi z/2)\Gamma(z)\zeta(z)$. Das alles zeigen wir hier jedoch nicht.

Beweis. Hier ist ein Film über die meromorphe Fortsetzbarkeit der ζ-Funktion. Für $\mathrm{Re}(z) > 1$ gilt

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^z}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z}\right)\mathrm{d}x$$

Die Partialsummen dieser Reihe jedoch bilden eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 0$, da wir die Summanden

für $\operatorname{Re}(z) > 0$ abschätzen können durch

$$\left|\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^z}-\frac{1}{x^z}\right)\mathrm{d}x\right| = \left|z\int_n^{n+1}\left(\int_n^x \frac{\mathrm{d}u}{u^{z+1}}\right)\mathrm{d}x\right| \le \frac{|z|}{n^{\operatorname{Re}(z)+1}} \qquad \square$$

Lemma 14.6.1.9 (**Nullstellen der Riemann'schen ζ-Funktion**). *Die Riemann'sche ζ-Funktion hat keine Nullstellen z mit Realteil* $\operatorname{Re}(z) \ge 1$.

Ergänzung 14.6.1.10. Die **Riemann'sche Vermutung** besagt sehr viel stärker, daß die Riemann'sche ζ-Funktion sogar keine Nullstellen mit Realteil $> 1/2$ haben sollte. Mit der Funktionalgleichung 14.6.1.8 und den Eigenschaften der Γ-Funktion folgt daraus sofort, daß außer den „trivialen" Nullstellen bei den negativen geraden ganzen Zahlen alle Nullstellen der ζ-Funktion auf der Gerade $\operatorname{Re}(z) = 1/2$ liegen müßten. Diese Vermutung ist eine der berühmtesten und wichtigsten offenen Fragen der Mathematik.

14.6.1.11. Den folgenden Beweis und insbesondere sein Ende verstehe ich leider nur oberflächlich. Ich kann insbesondere kein Prinzip erkennen, das einen auf diese Idee hätte führen sollen. Hier ist ein Film über die Unmöglichkeit von Nullstellen der ζ-Funktion mit Realteil Eins.

Ergänzung 14.6.1.12. Der Integrallogarithmus wird definiert durch die Formel

$$\operatorname{Li}(x) := \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log(t)}$$

Er sollte für $x \to \infty$ die Primzahlfunktion $\pi(x)$ noch sehr viel besser approximieren als $\frac{x}{\log x}$. Man kann sogar zeigen, daß die Riemann'sche Vermutung äquivalent ist zur Aussage, daß es eine Konstante C gibt mit

$$|\pi(x) - \operatorname{Li}(x)| \le C\sqrt{x}\log(x)$$

für hinreichend großes x, vergleiche etwa [Bru01]. Die Verträglichkeit dieser Vermutung mit dem Primzahlsatz zeigt Übung 10.5.7.6. Wie bereits erwähnt finden wir bei $x = 100000$ als Wert von $\pi(x)\log(x)/x$ ungefähr $1{,}1$ und bei $x = 10^9$ ungefähr $1{,}05$. Die entsprechenden Werte von $\pi(x)/\operatorname{Li}(x)$ sind dahingegen ungefähr $0{,}991$ und $0{,}99997$.

Beweis. Für Realteil $\operatorname{Re}(z) > 1$ folgt das mit 14.5.3.4 aus der Produktentwicklung. Um auch Nullstellen mit Realteil Eins auszuschließen, reicht es zu zeigen, daß die logarithmische Ableitung der ζ-Funktion außer bei $z = 1$ keine Polstellen auf der Geraden $\operatorname{Re}(z) = 1$ hat. Für $\operatorname{Re}(z) > 1$ erhalten wir aus der Produktentwicklung für die logarithmische Ableitung der ζ-Funktion mit 14.3.2.18 die Darstellung

$$\frac{\mathrm{d}\log\zeta}{\mathrm{d}z} = \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{p\in P}\frac{\log p}{p^z-1}$$

Wir wissen, daß diese Funktion nur einfache Polstellen q hat mit der jeweiligen Nullstellenordnung $v_q(\zeta)$ der ζ-Funktion als Residuum. Nun unterscheidet sich die rechte Seite von der einfacher handhabbaren Funktion

$$\Phi(z) := \sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z}$$

nur um das Vorzeichen und um die Reihe

$$\sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z - 1} - \sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z} = \sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z(p^z - 1)}$$

Diese Reihe konvergiert offensichtlich sogar auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2}$ kompakt gegen eine holomorphe Funktion. Mit der logarithmischen Ableitung der ζ-Funktion hat also auch unsere Funktion Φ eine meromorphe Fortsetzung auf die Halbebene $\mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2}$, die nur einfache Polstellen q hat mit dem jeweiligen Residuum $\mathrm{Res}_q \Phi = -v_q(\zeta)$. Nun beachte man für alle $\alpha > 0$ und $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 \le \sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \left(p^{\mathrm{i}\alpha/2} + p^{-\mathrm{i}\alpha/2}\right)^4 = \; & \Phi(1+\varepsilon+2\mathrm{i}\alpha) + 4\Phi(1+\varepsilon+\mathrm{i}\alpha) \\ & +6\Phi(1+\varepsilon) \\ & +4\Phi(1+\varepsilon-\mathrm{i}\alpha) + \Phi(1+\varepsilon-2\mathrm{i}\alpha) \end{aligned}$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit $\varepsilon > 0$, lassen ε von oben gegen Null streben und beachten $\zeta(\bar{z}) = \overline{\zeta(z)}$ und insbesondere $v_q(\zeta) = v_{\bar{q}}(\zeta)$ nach 14.4.1.24, so erhalten wir

$$0 \le -6v_1(\zeta) - 8v_{1+\mathrm{i}\alpha}(\zeta) - 2v_{1+2\mathrm{i}\alpha}(\zeta)$$

Wegen $v_1(\zeta) = -1$ folgt dann sofort, daß die ζ-Funktion keine Nullstellen mit Realteil Eins haben kann. □

14.6.1.13. Gegeben eine beschränkte meßbare Funktion $f : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{C}$ erklärt man eine holomorphe Funktion F auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 0$, ihre **Laplace-Transformierte**, durch die Vorschrift

$$F(z) := \int_0^\infty f(t)\, \mathrm{e}^{-zt}\, \mathrm{d}t$$

Daß diese Funktion tatsächlich holomorph ist, folgert man aus der Vertauschbarkeit von Ableitung und Integral 13.1.6.17 im Reellen, die wir im Fall der Fouriertransformation bereits beim Beweis von 13.3.1.5 genauer ausgeführt hatten, unter Verwendung der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen.

Ergänzung 14.6.1.14. Die Laplacetransformation wird allgemeiner für gewisse Borelmaße auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ erklärt. Sie ist bei der Lösung von Differentialgleichungen oft hilfreich, da sie diese in algebraische Gleichungen umwandelt. Man kann sie auch für meßbare Funktionen oder Borelmaße auf ganz $\mathbb{R}$ untersuchen, muß dann aber, insbesondere wenn der Träger von f keine reelle untere Schranke hat, mehr Sorgfalt bei Konvergenzbetrachtungen walten lassen.

Satz 14.6.1.15 (**Taubersatz von Newman**). *Ist $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ beschränkt und meßbar und läßt sich die Laplacetransformierte F von f holomorph auf eine offene Umgebung der abgeschlossenen Halbebene $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ fortsetzen, so gilt für den Wert bei Null dieser Fortsetzung die Formel*

$$F(0) = \lim_{T \to \infty} \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

14.6.1.16. Der Trick zum Beweis des Primzahlsatzes 14.6.1.1 besteht dann darin, den Taubersatz von Newman auf die Funktion

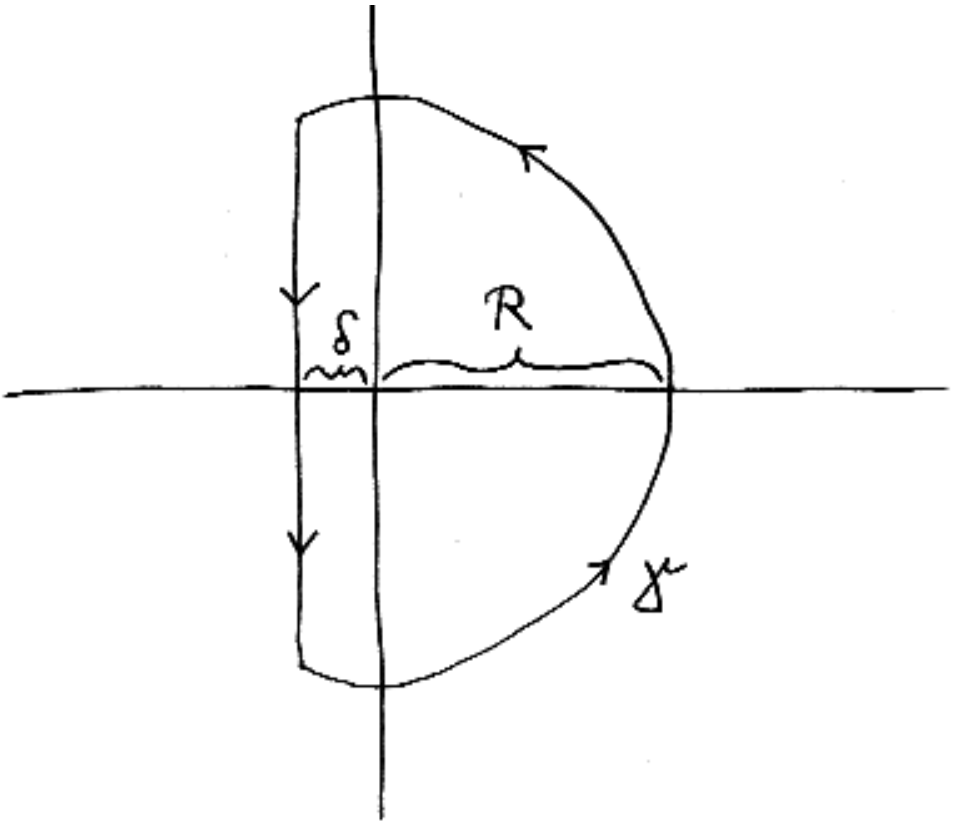
$$F(z) := \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}$$

mit unserem Φ aus dem Beweis von 14.6.1.9 anzuwenden. In der Tat wissen wir aus diesem Beweis, daß Φ wie die logarithmische Ableitung der ζ-Funktion zu einer meromorphen Funktion auf die offene Halbebene aller komplexen Zahlen mit Realteil $> 1/2$ fortgesetzt werden kann und auf der Gerade $\operatorname{Re} z = 1$ nur bei $z = 1$ eine Polstelle hat mit dem Hauptteil $1/(z-1)$. Also hat F eine holomorphe Fortsetzung auf die Halbebene $\operatorname{Re}(z) > -1/2$. Dann müssen wir unsere Funktion F als Laplace-Transformierte schreiben und die Bedingungen des Taubersatzes prüfen und danach auch noch den Primzahlsatz folgern, aber jetzt konzentrieren wir uns erst einmal auf den Beweis des Taubersatzes.

Ergänzung 14.6.1.17. Statt der Meßbarkeit von f ist für unsere Anwendung die elementarere Bedingung ausreichend, daß f stetig sein soll auf dem Komplement des Bildes einer streng monoton wachsenden Folge. Die Bezeichnung als „Taubersatz“ kommt von der vagen Analogie zum ursprünglichen Satz von Tauber her, den wir in 10.6.4.4 diskutieren.

Beweis. Hier ist ein Film über den Taubersatz von Newman. Für $T \in [0, \infty)$ und $z \in \mathbb{C}$ setzen wir $F_T(z) = \int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t$. Diese Funktionen sind sicher holomorph. Betrachten wir nun $R > 0$ und wählen $\delta > 0$ so klein, daß F sich holomorph fortsetzen läßt auf eine offene Menge, die

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R,\ \operatorname{Re} z \geq -\delta\}$$



Der Integralweg aus dem Beweis des Taubersatzes von Newman

umfaßt. Ist γ der Randweg dieses Gebiets, so liefert der Integralsatz von Cauchy

$$F(0) - F_T(0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (F(z) - F_T(z))\, \mathrm{e}^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

Das Hinzufügen der beiden hinteren Faktoren ist ein Kunstgriff, dessen Herkunft ich nicht verstehe. Wir schätzen nun unser Wegintegral ab. Auf dem offenen Halbkreis $|z| = R, \operatorname{Re} z > 0$, ja sogar auch der ganzen offenen Halbebene $\operatorname{Re} z > 0$, finden wir unter der Annahme $|f(t)| \le B$ die Schranke

$$|F(z) - F_T(z)| = \left| \int_T^\infty f(t)\, \mathrm{e}^{-zt}\, \mathrm{d}t \right| \le B \int_T^\infty |\, \mathrm{e}^{-zt}\, |\, \mathrm{d}t = \frac{B\, \mathrm{e}^{-(\operatorname{Re} z)T}}{\operatorname{Re} z}$$

Da für $|w| = 1$ stets gilt $|1 + w^2| = |w^{-1} + w| = 2|\operatorname{Re} w|$, erhalten wir auf der Halbebene $\operatorname{Re}(z) > 0$ für den Betrag der hinteren Faktoren auf unserem Weg

$$\left| \mathrm{e}^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| \quad = \quad \mathrm{e}^{(\operatorname{Re} z)T} \quad \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{R^2}$$

Das Integral über den Teil unseres Weges mit Realteil größergleich Null ist also betragsmäßig beschränkt durch $2\pi B/R$. Das Integral über den Teil des Weges γ in der Halbebene $\operatorname{Re} z \le 0$ schätzen wir für F und für F_T separat ab. Da F_T holomorph ist auf ganz $\mathbb{C}$, können wir ebensogut das Integral über den Halbkreis $|z| = R, \operatorname{Re} z \le 0$ berechnen. Für $\operatorname{Re} z < 0$ finden wir

$$|F_T(z)| \;=\; \left| \int_0^T f(t)\, \mathrm{e}^{-zt}\, \mathrm{d}t \right| \;\le\; B \int_0^T |\, \mathrm{e}^{-zt}\, |\, \mathrm{d}t \;\le\; \frac{B\, \mathrm{e}^{-(\operatorname{Re} z)T}}{-\operatorname{Re} z}$$

und mit derselben Abschätzung wie zuvor ist dieser Anteil des Integrals betragsmäßig beschränkt durch $2\pi B/R$. Das Integral von

$$F(z)\, \mathrm{e}^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z}$$

über den Teil unseres Weges γ, der in der Halbebene $\operatorname{Re}(z) \le 0$ verläuft, strebt nun aber offensichtlich gegen Null für $T \to \infty$, da die Funktionenfolge e^{zn} auf der Halbebene $\operatorname{Re}(z) < 0$ kompakt gegen die Nullfunktion konvergiert und simultan beschränkt ist auf der abgeschlossenen Halbebene $\operatorname{Re}(z) \le 0$. Damit folgt, daß es für jedes $R > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $T(R, \varepsilon)$ gibt mit

$$T \ge T(R, \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |F(0) - F_T(0)| \;\le\; \frac{2B}{R} + \varepsilon \qquad \square$$

14.6.1.18. Hier ist ein Film über die Struktur des Beweises des Primzahlsatzes. Das folgende Lemma liefert in der uns interessierenden Anwendung des Taubersatzes die Beschränktheit der zu transformierenden Funktion.

Lemma 14.6.1.19. *Für die Funktion* $\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p$ *mit* $x \in \mathbb{R}$ *und der Summe wie immer nur über Primzahlen* p *gibt es eine Konstante* C *mit* $\vartheta(x) \le Cx \ \forall x \in [0, \infty)$.

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} \ge \binom{2n}{n} \ge \prod_{n < p \le 2n} p = \mathrm{e}^{\vartheta(2n) - \vartheta(n)}$$

und damit $\vartheta(2n) - \vartheta(n) \le 2n(\log 2)$. Gegeben $x \ge 0$ finden wir $n \in \mathbb{N}$ mit $2n \le x < 2n+2$ und folglich $\vartheta(2n) \le \vartheta(x) \le \vartheta(2n) + \log(2n+1)$ und $\vartheta(n) = \vartheta(x/2)$. Daraus folgt aber leicht

$$\begin{aligned} \vartheta(x) - \vartheta(x/2) &\le \vartheta(2n) - \vartheta(n) + \log(2n+1) \\ &\le 2n(\log 2) + \log(2n+1) \\ &\le x(\log 2) + \log(x+1) \\ &\le x((\log 2) + 1) \end{aligned}$$

und schließlich durch Aufsummieren $\vartheta(x) \le 2x(\log(2) + 1)$. □

Lemma 14.6.1.20. *Sei* $\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p$ *wie im vorhergehenden Lemma. So existiert in* $\mathbb{R}$ *der Grenzwert*

$$\lim_{T \to \infty} \int_1^T \frac{\vartheta(x) - x}{x^2} \, \mathrm{d}x$$

Beweis. Für $\mathrm{Re}(z) > 1$ können wir die Funktion $\Phi(z)$ aus dem Beweis von 14.6.1.9 darstellen in der Form

$$\Phi(z) = \sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z} = z \int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{z+1}} \, \mathrm{d}x = z \int_0^\infty \vartheta(\mathrm{e}^t) \, \mathrm{e}^{-zt} \, \mathrm{d}t$$

wobei wir uns das mittlere Integral für die zweite Gleichheit als die konvergente Reihe $\sum_{p \in P} \int_p^\infty \frac{\log p}{x^{z+1}} \, \mathrm{d}x$ geschrieben denken. Wären wir etwas gebildeter und wüßten, daß die Laplacetransformation Konvolutionen in Produkte verwandelt, so könnten wir auch von der offensichtlichen Darstellung von $\Phi(z)$ als Laplace-Transformierte eines diskreten Maßes und von $1/z$ als Laplace-Transformierte der konstanten Funktion 1 ausgehen und so die inverse Laplace-Transformierte von $\Phi(z)/z$ finden. Substituieren wir $z+1$ für z, so ergibt sich für $\mathrm{Re}(z) > 0$ die Gleichung

$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} = \int_0^\infty \vartheta(\mathrm{e}^t) \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{e}^{-zt} \, \mathrm{d}t$$

und weiter

$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = \int_0^\infty (\vartheta(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^{-t} - 1)\,\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t$$

Auf der linken Seite steht aber eine Funktion, die sich nach unseren Erkenntnissen im Beweis von 14.6.1.9 holomorph auf eine offene Umgebung der abgeschlossenen Halbebene $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ fortsetzen läßt. Auf der rechten Seite ist $(\vartheta(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^{-t} - 1)$ für $t \in [0, \infty)$ betragsmäßig beschränkt nach 14.6.1.19. Also existiert nach dem Taubersatz 14.6.1.15 der Grenzwert $\lim_{T\to\infty} \int_0^T \vartheta(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^{-t} - 1\ \mathrm{d}t$ und ist eine reelle Zahl. Substituieren wir nun wieder $x = \mathrm{e}^t$, so folgt das Lemma. □

Lemma 14.6.1.21. *Sei $\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \log p$ wie im vorhergehenden Lemma. So gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \vartheta(x)/x = 1$$

Beweis. Gäbe es für $\lambda > 1$ beliebig große x mit $\vartheta(x) \geq \lambda x$, so hätten wir für alle solchen x die Abschätzung

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\,\mathrm{d}t \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^\lambda \frac{\lambda - s}{s^2}\,\mathrm{d}s = C(\lambda) > 0$$

im Widerspruch zur Konvergenz des fraglichen Integrals nach 14.6.1.20. Gäbe es für $\lambda < 1$ beliebig große x mit $\vartheta(x) \leq \lambda x$, so fänden wir ähnlich für alle derartigen x die Abschätzung

$$\int_{\lambda x}^{x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_{\lambda x}^{x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_\lambda^1 \frac{\lambda - s}{s^2}\,\mathrm{d}s = c(\lambda) < 0$$

im Widerspruch zur Konvergenz des fraglichen Integrals nach 14.6.1.20. □

Beweis des Primzahlsatzes 14.6.1.1. Sicher haben wir stets

$$\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \log p \leq \sum_{\{p\in P|p\leq x\}} \log x = \pi(x)\log(x)$$

Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ haben wir aber auch

$$\begin{aligned}
\vartheta(x) &\geq \textstyle\sum_{\{p\in P|x^{1-\varepsilon}<p\leq x\}} \log p \\
&\geq \textstyle\sum_{\{p\in P|x^{1-\varepsilon}<p\leq x\}} (1-\varepsilon)(\log x) \\
&\geq (1-\varepsilon)(\log x)(\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})) \\
&\geq (1-\varepsilon)(\log x)(\pi(x) - x^{1-\varepsilon})
\end{aligned}$$

Teilen wir durch x, so ergibt sich wegen $\lim_{x\to\infty} \vartheta(x)/x = 1$ nach 14.6.1.21 daraus für alle $\varepsilon \in (0,1)$

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log(x)}{x} \geq 1 \geq \limsup_{x\to\infty} (1-\varepsilon)\frac{\pi(x)\log(x)}{x}$$ □

14.6.1.22. Bezeichnet man für reelles x mit $\pi_2(x)$ die Zahl der **Primzahlzwillinge** unter x, also die Zahl derjenigen Primzahlen $p \leq x$, für die $p-2$ auch prim ist, so besteht die Vermutung

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi_2(x)(\log(x))^2}{x} = c$$

für eine reelle Konstante $c > 0$, die genauer gegeben sein sollte durch das unendliche über alle Primzahlen p zu verstehende Produkt $c = 2\prod_p(1-(p-1)^{-2})$. Bisher (2005) weiß man jedoch noch nicht einmal, ob es überhaupt unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

Quellen 14.6.1.23. Die Darstellung in diesem Abschnitt hält sich eng an einen Artikel von Don Zagier im American Mathematical Monthly [Zag97], wo man auch zusätzliche Quellenangaben und interessante historische Anmerkungen finden kann. Eine stärker auf allgemeinen Methoden der Funktionalanalysis basierende Darstellung findet man zum Beispiel in Rudin's Funktionalanalysis [Rud73] als Anwendung anderer Taubersätze. Ein guter Zugang zu modernen Entwicklungen in der analytischen Zahlentheorie scheint mir [Kow04].

14.6.2 Primzahlen in Restklassen (19.7)

Satz 14.6.2.1 (Primzahlen in Restklassen). *Gegeben teilerfremde natürliche Zahlen $r < m$ gibt es stets unendlich viele Primzahlen p, die beim Teilen durch m den Rest r lassen, in Formeln $p \in \mathbb{Z}m + r$.*

14.6.2.2. Hier ist ein Film zur die Aussage des Satzes über Primzahlen in Restklassen. Zum Beispiel gibt es unendlich viele Primzahlen, deren Dezimaldarstellung mit der Ziffer 3 endet. Der Beweis des Satzes wird erst ganz zu Ende dieses Abschnitts gegeben und stützt sich auf den Satz 14.6.2.7 über die meromorphen Fortsetzungen der sogenannten L-Reihen, die wir gleich einführen werden, sowie auf elementare Charaktertheorie, die wir im Anschluß besprechen. Den Beweis von 14.6.2.7 holen wir dann im anschließenden Abschnitt 14.6.3 über Dirichlet-Reihen nach.

14.6.2.3. Wir erinnern daran, daß man zu jedem Ring R seine Einheitengruppe $R^\times$ bilden kann. Für $m \in \mathbb{Z}$ erinnern wir weiter an den Restklassenring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Für $k \in \mathbb{Z}$ bezeichne $\bar{k} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ seine Restklasse.

Definition 14.6.2.4. Gegeben $m \in \mathbb{Z}\backslash 0$ und $\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ ein Gruppenhomomorphismus erklärt man eine holomorphe Funktion auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 1$ durch die sogenannte **L-Reihe**

$$\mathrm{L}(z,\chi) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^z}$$

mit der Konvention $\chi(k) := \chi(\bar{k})$ für $\bar{k} \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ und $\chi(k) := 0$ sonst. Die Konvergenz der Reihe für $\mathrm{Re}(z) > 1$ ist unproblematisch, da unser Gruppenhomomorphismus notwendig in den Einheitswurzeln landet. Das Symbol L mag auf Dirichlet's Vornamen Lejeune zurückzuführen sein. Hier ist ein Film über die Definition von L-Reihen.

14.6.2.5. Wir führen nun die übliche an unsere Definition besonders gut angepaßte Begrifflichkeit ein. Sei $m \in \mathbb{Z}\backslash 0$ gegeben. Eine Abbildung $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ heißt ein **Dirichlet-Charakter modulo** m, wenn es einen Gruppenhomomorphismus $\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ gibt mit $\chi(k) = \chi(\bar{k})$ für k teilerfremd zu m und $\chi(k) = 0$ sonst. Unter dem **trivialen Dirichlet-Charakter modulo** m verstehen wir den Dirichletcharakter, der zum konstanten Gruppenhomomorphismus $\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ gehört und für den also gilt $\chi(k) = 1$ für k teilerfremd zu m und $\chi(k) = 0$ sonst.

Lemma 14.6.2.6 (Produktdarstellung von L-Reihen). *Gegeben $m \in \mathbb{Z}\backslash 0$ und χ ein Dirichletcharakter modulo m besitzt die L-Reihe $\mathrm{L}(z, \chi)$ auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 1$ die Darstellung als Produkt*

$$\mathrm{L}(z, \chi) = \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^z}\right)^{-1}$$

im Sinne der kompakten Konvergenz der Teilprodukte unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren. Das Produkt ist hier zu bilden über alle Primzahlen, die m nicht teilen.

Beweis. Man beachte $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$. Mit dieser Erkenntnis kann der Beweis ebenso geführt werden wie im Fall der Riemann'schen ζ-Funktion in 14.6.1.5. Hier ist ein Film über die Produktzerlegung und Fortsetzbarkeit von L-Reihen, wie sie in diesem und im anschließenden Satz formuliert wird. □

Satz 14.6.2.7 (Fortsetzbarkeit von L-Reihen). *Alle L-Reihen $\mathrm{L}(z, \chi)$ lassen sich meromorph auf die Halbebene $\mathrm{Re}\, z > 0$ fortsetzen. Ist χ nicht der triviale Charakter, so ist diese Fortsetzung holomorph und hat keine Nullstelle bei $z = 1$. Ist χ der triviale Charakter, so hat diese Fortsetzung einen einfachen Pol bei Eins, der dann aber auch ihr einziger Pol ist.*

Beweis. Im Fall des trivialen Charakters zeigt die Produktentwicklung, daß unsere L-Reihe aus der Riemann'schen ζ-Funktion entsteht durch das Wegteilen der Eulerfaktoren zu allen Primteilern von m. In diesem Fall folgt damit unsere Behauptung aus der entsprechenden Aussage für die Riemann'sche ζ-Funktion 14.6.1.7. Den Beweis im Fall allgemeiner L-Reihen verschieben wir auf das Ende des anschließenden Abschnitts 14.6.3. □

Vorschau 14.6.2.8. Unsere L-Reihen lassen sich sogar meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen und erfüllen bemerkenswerte Funktionalgleichungen. Das soll aber hier nicht weiter ausgeführt werden.

14.6.2.9. Gegeben eine Gruppe G notieren wir $\mathfrak{X}(G) := \mathrm{Grp}(G, \mathbb{C}^\times)$ die Menge aller Gruppenhomomorphismen von G nach $\mathbb{C}^\times$. Sie heißen die **Charaktere** oder genauer die **multiplikativen komplexen Charaktere** unserer Gruppe G. Offensichtlich bilden die Charaktere eine Untergruppe $\mathfrak{X}(G) \subset \mathrm{Ens}(G, \mathbb{C}^\times)$ in der Gruppe aller $\mathbb{C}^\times$-wertigen Abbildungen mit punktweiser Multiplikation als Verknüpfung. Wir nennen deshalb $\mathfrak{X}(G)$ auch die **Charaktergruppe von** G.

Beispiel 14.6.2.10 (**Charaktergruppen der zyklischen Gruppen**). Die Charaktere der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ für $a \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sind die Abbildungen $\bar{n} \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} bn/a}$ für $b \in \{0, \ldots, a-1\}$. Man überlegt sich leicht, daß für die Charaktergruppen der zyklischen Gruppen sogar gilt $\mathfrak{X}(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$.

Proposition 14.6.2.11 (**Nichtverschwinden von Fourierkoeffizienten**). *Gegeben eine endliche abelsche Gruppe G ist die Menge $\mathfrak{X}(G) \subset \mathrm{Ens}(G, \mathbb{C})$ ihrer Charaktere eine Basis des Raums der komplexwertigen Funktionen auf unserer Gruppe und in der Darstellung*

$$\delta_g = \sum_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} a_g^\chi \, \chi$$

der charakteristischen Funktion δ_g eines beliebigen Gruppenelements $g \in G$ als Linearkombination von Charakteren kommen stets alle Charaktere mit von Null verschiedenem Koeffizienten vor, in Formeln $a_g^\chi \neq 0 \; \forall g \in G, \chi \in \mathfrak{X}(G)$.

Andeutungen zum Beweis. Hier ist ein Film über das Nichtverschwinden von Fourierkoeffizienten. Diese Proposition faßt im folgenden benötigte Aussagen zusammen, deren Beweis eigentlich in einen anderen Kontext gehört. Man mag sie als Konsequenz der in 13.2.7.23 erklärten Aussagen zu Fourierreihen verstehen, wenn man diese auf den Fall diskreter Fouriergruppen spezialisiert. Man mag sie als Konsequenz der in 8.4.3.6 erklärten Aussagen zu Charakteren endlicher Gruppen verstehen, wenn man diese auf den Fall endlicher abelscher Gruppen spezialisiert. Man mag sie explizit für endliche zyklische Gruppen prüfen und dann zeigen, daß unsere Proposition, wenn sie denn für zwei Gruppen gilt, auch für deren Produkt gelten muß. So kommt man auch zum Ziel, wenn man weiß, daß jede endliche abelsche Gruppe isomorph ist zu einem Produkt zyklischer Gruppen. Wie auch immer gehört der Beweis dieser Proposition in einen anderen Kontext und ich will an dieser Stelle nicht näher darauf eingehen. □

14.6.2.12. Jede kurze exakte Sequenz $K \hookrightarrow G \twoheadrightarrow H$ von endlichen abelschen Gruppen induziert eine kurze exakte Sequenz $\mathfrak{X}(H) \hookrightarrow \mathfrak{X}(G) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(K)$ auf den

Charaktergruppen. Man folgert das leicht aus der Identität $|G| = \mathfrak{X}(G)$, die ihrerseits unmittelbar aus unserer Proposition 14.6.2.11 folgt. Insbesondere induziert jede Injektion von endlichen abelschen Gruppen eine Surjektion auf ihren Charaktergruppen.

Beweis von 14.6.2.1. Wir leiten nun den Satz über Primzahlen in Restklassen aus unserem Satz 14.6.2.7 über Fortsetzungen von L-Reihen her, dessen Beweis noch aussteht. Hier ist ein Film über diese Herleitung. Die logarithmischen Ableitungen unserer L-Reihen werden nach einfacher Rechnung für $\mathrm{Re}(z) > 1$ gegeben durch die nach 14.3.2.18 kompakt konvergenten Reihen

$$\frac{\mathrm{dlog}\,\mathrm{L}(z,\chi)}{\mathrm{d}z} = -\sum_{p\nmid m} \frac{\chi(p)\log(p)}{p^z - \chi(p)}$$

Die durch die Reihen auf der rechten Seite auf $\mathrm{Re}(z) > 1$ definierten holomorphen Funktionen sind nach 14.6.2.7 beschränkt auf dem reellen Intervall $(1,2)$, wenn χ nicht konstant ist, und unbeschränkt auf $(1,2)$ für den konstanten Charakter. Dasselbe gilt für die holomorphen Funktionen, die durch die Ausdrücke

$$-\sum_{p\nmid m} \frac{\chi(p)\log(p)}{p^z}$$

gegeben werden, denn deren Differenz zu den zuvor betrachteten logarithmischen Ableitungen wird gegeben durch die Reihen $\sum_{p\nmid m} \frac{\chi(p)^2\log(p)}{p^z(p^z-\chi(p))}$, die sogar auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 1/2$ holomorphe Funktionen definieren. Unsere Erkenntnisse 14.6.2.11 zum Nichtverschwinden von Fourierkoeffizienten liefern uns von Null verschiedene $a_{\bar r}^{\chi} \in \mathbb{C}^\times$ derart, daß für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}} a_{\bar r}^{\chi}\,\chi(n) = \begin{cases} 1 & \bar n = \bar r; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt für $\mathrm{Re}(z) > 1$ die Identität

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}} a_{\bar r}^{\chi} \sum_{p\nmid m} \frac{\chi(p)\log(p)}{p^z} = \sum_{p\equiv r(\mathrm{mod}\,m)} \frac{\log p}{p^z}$$

Links steht hier eine auf dem reellen Intervall $(1,2)$ unbeschränkte Funktion, da nach 14.6.2.7 für alle nichtkonstanten Charaktere die L-Reihe holomorph ist ohne Nullstelle bei Eins, für den konstanten Charakter jedoch meromorph mit einem Pol bei Eins, und da der entsprechende Vorfaktor $a_{\bar r}^{\chi}$ nicht Null ist. Rechts steht folglich auch eine auf auf dem reellen Intervall $(1,2)$ unbeschränkte Funktion und insbesondere eine unendliche Summe. $\square$

Ergänzung 14.6.2.13. Ein Dirichletcharakter modulo m liefert einen Dirichletcharakter modulo mn für jedes $n \geq 1$ vermittels dem vom offensichtlichen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ auf den Einheitengruppen induzierten Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$. Gegeben ein Dirichletcharakter $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ heißt das kleinste positive m derart, daß er von einem Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ herkommt, der **Führer von** χ. Wir sagen dann auch, χ sei ein **primitiver Dirichletcharakter modulo** m.

14.6.3 Dirichlet-Reihen (21.7)

14.6.3.1. Gegeben ein Zweig des Logarithmus $\log$ auf einer Teilmenge U der komplexen Zahlenebene erklären wir für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Abbildung $U \to \mathbb{C}$, $x \mapsto x^\lambda$ durch die Vorschrift $x^\lambda = \exp(\lambda \log x)$. Ich verwende vorerst den Buchstaben x für unsere komplexe Variable, weil ich mir den Buchstaben z für eine weitere komplexe Variable aufsparen will. Gegeben zwei Folgen a_k und $\lambda(k)$ von komplexen Zahlen können wir auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$ mithilfe unseres Hauptzweiges des Logarithmus die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda(k)}$$

bilden. Wir zeigen im Folgenden, daß sie sich für monoton wachsende Folgen $\lambda(0) \leq \lambda(1) \leq \ldots$ reeller Zahlen $\lambda(k) \in \mathbb{R}$ sehr ähnlich verhält wie eine Potenzreihe. Genauer folgt aus der Konvergenz an einer Stelle x_0 die kompakte Konvergenz auf dem Schnitt der offenen Kreisscheibe $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < |x_0|\}$ mit unserer geschlitzten Ebene. Darüber hinaus ist dieser „Konvergenzradius“ derselbe für jede andersartig geschlitzte Ebene und jeden Zweig des Logarithmus auf einem derartigen Gebiet. Um diese Mehrdeutigkeiten aufzulösen, substituiert man sinnvoll gleich $x = \mathrm{e}^{-z}$ und erhält so eine Reihe der Gestalt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \mathrm{e}^{-\lambda(k)z}$$

Reihen dieser Gestalt mit komplexen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ und einer monoton wachsenden Folge von reellen Zahlen $\lambda(0) \leq \lambda(1) \leq \lambda(2) \leq \ldots$ heißen **Dirichlet-Reihen**. Zum Beispiel wird die Riemann'sche ζ-Funktion durch die über $k \geq 1$ zu summierende Dirichletreihe mit $a_k = 1$ für alle k und $\lambda(k) = \log(k)$ gegeben. Man kann die durch eine Dirichletreihe erklärte Funktion im Standardfall einer streng monotonen Folge $\lambda(k)$ im Übrigen auch auffassen als die Laplacetransformierte im Sinne von 14.6.1.13 des diskreten komplexen Maßes, das jedem Punkt $\lambda(k)$ die Masse a_k zuweist. Wir formulieren und beweisen

die bisher behaupteten Aussagen nun als eigenständigen Satz. Hier ist ein Film über allgemeine Eigenschaften von Dirichletreihen.

Satz 14.6.3.2 (**Konvergenzbereiche von Dirichletreihen**). *Konvergiert eine Dirichletreihe an einer Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$, so konvergiert sie auch für alle komplexen Zahlen z mit größerem Realteil $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$ und die Konvergenz ist für beliebiges $r \geq 0$ gleichmäßig auf dem abgeschlossenen Winkelsegment*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r \operatorname{Re}(z - z_0)\}$$

14.6.3.3. Insbesondere ist der Konvergenzbereich einer Dirichletreihe im wesentlichen eine Halbebene und genauer eine Menge der Gestalt $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > c\}$ für $c \in \bar{\mathbb{R}}$, wobei man über die Konvergenz auf der Randgeraden im allgemeinen keine Aussagen machen kann. Im Unterschied zu Potenzreihen kann es durchaus vorkommen, daß eine Dirichletreihe auf einem Teil ihrer Konvergenzhalbebene nicht absolut konvergiert. Genauer sieht man leicht, daß auch der Bereich der absoluten Konvergenz einer Dirichletreihe eine Menge der Gestalt $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > c_{\text{abs}}\}$ für $c_{\text{abs}} \in \bar{\mathbb{R}}$, wobei man über die absolute Konvergenz auf der Randgeraden im allgemeinen wieder keine Aussagen machen kann. Zum Beispiel zeigen wir im folgenden, daß unsere L-Reihen zu nichtkonstantem Charakter für $\operatorname{Re}(z) > 0$ konvergieren, aber man sieht sehr leicht, daß diese Konvergenz nur für $\operatorname{Re}(z) > 1$ absolut ist.

Beweis. Dieser Beweis verallgemeinert den Beweis des abelschen Grenzwertsatzes 10.6.4.2. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \mathrm{e}^{-\lambda(k)z}$ unsere Dirichletreihe. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $z_0 = 0$ annehmen. Wir kürzen $\mathrm{e}^{-\lambda(k)z} = b_k$ ab und schreiben die Differenzen von Partialsummen unserer Reihe in der Gestalt

$$\begin{array}{rcrl}
\sum_{k=n}^{m} a_k \, \mathrm{e}^{-\lambda(k)z} & = & \sum_{k=n}^{m} a_k b_k & \\
& = & (b_n - b_{n+1}) & a_n \\
& + & (b_{n+1} - b_{n+2}) & (a_n + a_{n+1}) \\
& + & (b_{n+2} - b_{n+3}) & (a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) \\
& & \cdots & \cdots \\
& + & (b_{m-1} - b_m) & (a_n + \ldots\ldots\ldots + a_{m-1}) \\
& + & b_m & (a_n + \ldots\ldots\ldots + a_{m-1} + a_m)
\end{array}$$

Jetzt beachte man für $x := \operatorname{Re} z > 0$ die Abschätzung

$$\begin{array}{rcl}
\left|\mathrm{e}^{-\lambda(n)z} - \mathrm{e}^{-\lambda(n+1)z}\right| & = & \left| z \int_{\lambda(n)}^{\lambda(n+1)} \mathrm{e}^{-tz} \, \mathrm{d}z \right| \\
& \leq & |z| \int_{\lambda(n)}^{\lambda(n+1)} \mathrm{e}^{-tx} \, \mathrm{d}x \\
& \leq & \frac{|z|}{x} \left(\mathrm{e}^{-\lambda(n)x} - \mathrm{e}^{-\lambda(n+1)x}\right)
\end{array}$$

Für alle $\varepsilon > 0$ finden wir wegen der Konvergenz bei $z = 0$ sicher ein N derart, daß für alle ν, μ mit $N \le \nu \le \mu$ gilt $|a_\nu + \ldots + a_\mu| \le \varepsilon$. Für alle z mit $x = \operatorname{Re}(z) > 0$ folgt dann für alle n, m mit $N \le n \le m$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \, \mathrm{e}^{-\lambda(k)z} \right| \le \frac{|z|}{x} \left(\mathrm{e}^{-\lambda(n)x} - \mathrm{e}^{-\lambda(m)x} \right) \varepsilon + \mathrm{e}^{-\lambda(m)x} \, \varepsilon$$

Für $z = 0$ wird derselbe Ausdruck schlicht durch ε selbst abgeschätzt und zusammen ergibt sich daraus die behauptete gleichmäßige Konvergenz auf Bereichen $0 \le |z| \le rx$ für jede feste Steigung r der den Winkel nach oben begrenzenden Geraden. □

Proposition 14.6.3.4 (Hinreichende Bedingung für Konvergenz). *Sind bei einer Dirichletreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \mathrm{e}^{-\lambda(k)z}$ die Summen $\sum_{k=n}^{m} a_k$ simultan betragsmäßig beschränkt und gilt $\lambda(k) \to \infty$, so konvergiert die Reihe für $\operatorname{Re}(z) > 0$.*

Beweis. Ist B unsere simultane Schranke, so erhalten wir wie im vorhergehenden Beweis für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ dieselbe Abschätzung mit B statt ε und damit folgt aus unserer Annahme $\lambda(k) \to \infty$ die Konvergenz. □

14.6.3.5. Hier ist ein Film über die holomorphe Fortsetzbarkeit von L-Reihen zu nichttrivialen Charakteren. Für nichttriviale Charaktere $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ einer endlichen Gruppe G folgt aus $\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(hg) = \chi(h) \sum_{g \in G} \chi(g)$ sofort $\sum_{g \in G} \chi(g) = 0$. Aus unserer hinreichenden Bedingung 14.6.3.4 für die Konvergenz von Dirichletreihen folgt sofort, daß L-Reihen für nichttriviale Dirichletcharaktere χ sogar auf der Halbebene $\operatorname{Re}(z) > 0$ konvergieren. Das liefert ihre in 14.6.2.7 behauptete Fortsetzbarkeit zu holomorphen Funktionen auf dieser Halbebene. Die in 14.6.2.7 behauptete meromorphe Fortsetzbarkeit im Fall des trivialen Dirichletcharakters haben wir bereits direkt im Anschluß an die Formulierung unseres Satzes gezeigt. Der Satz über die Fortsetzungen 14.6.2.7 ist damit bewiesen bis auf die Behauptung, daß die holomorphen Fortsetzungen im Falle nichttrivialer Dirichletcharaktere bei Eins nicht verschwinden.

Satz 14.6.3.6 (Konvergenzbereiche im Fall nichtnegativer Koeffizienten). *Konvergiert eine Dirichletreihe $\sum a_k \, \mathrm{e}^{-\lambda(k)z}$ mit nichtnegativen Koeffizienten $a_k \ge 0$ auf der Halbebene $\operatorname{Re}(z) > r$ und läßt sich die so erklärte Funktion holomorph auf eine Umgebung von r fortsetzen, so konvergiert unsere Reihe sogar auf einer echt größeren Halbebene $\operatorname{Re}(z) > r - \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$.*

14.6.3.7. Dieser Satz ist eine Variante unserer Erkenntnis 10.6.2.9 über den Konvergenzradius einer Potenzreihe mit nichtnegativen Koeffizienten und auch der Beweis ist im wesentlichen derselbe. In der Sprache der Funktionentheorie kann

man diese Erkenntnis dahingehend formulieren, daß eine Potenzreihe mit nichtnegativen Koeffizienten und Konvergenzradius mindestens $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, deren Summe sich holomorph auf eine Umgebung von r fortsetzen läßt, einen echt größeren Konvergenzradius als r haben muß.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $r = 0$ und für alle k gelte $\lambda(k) \geq 0$. Nach Annahme finden wir $\varepsilon > 0$ derart, daß die durch unsere Dirichletreihe definierte Funktion f sich holomorph auf eine offene Umgebung der Kreisscheibe $|z-1| \leq 1+\varepsilon$ fortsetzen läßt. Die Taylorentwicklung liefert dann

$$f(-\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(1)}{\nu!}(-(1+\varepsilon))^{\nu}$$

im Sinne absoluter Konvergenz. Die fraglichen Ableitungen hinwiederum ergeben sich zu

$$f^{(\nu)}(1) = \sum a_k(-\lambda(k))^{\nu}\,\mathrm{e}^{-\lambda(k)}$$

auch im Sinne absoluter Konvergenz, da alle Terme dasselbe Vorzeichen haben. Folglich gilt

$$\sum_{k,\nu} \frac{a_k}{\nu!}(1+\varepsilon)^{\nu}(\lambda(k))^{\nu}\,\mathrm{e}^{-\lambda(k)} < \infty$$

Nach Zusammenfassen der Summen über ν in Exponentialreihen ergibt sich

$$\sum_k a_k\,\mathrm{e}^{(1+\varepsilon)\lambda(k)}\,\mathrm{e}^{-\lambda(k)} = \sum_k a_k\,\mathrm{e}^{\lambda(k)\varepsilon} < \infty$$

alias die Konvergenz der Dirichletreihe bei $z = -\varepsilon$. □

Beweis von 14.6.2.7. Hier ist ein Film über die Nichtnullstelleneigenschaft von L-Reihen zu nichttrivialen Charakteren bei $z = 1$. Daß die L-Reihe zum trivialen Charakter eine meromorphe Fortsetzung hat wie behauptet, ergibt sich wie bereits bemerkt aus der entsprechenden Aussage 14.6.1.7 für die Riemann'sche ζ-Funktion, die ja bis auf endlich viele Faktoren durch dasselbe Eulerprodukt dargestellt wird. Daß die anderen L-Reihen holomorphe Fortsetzungen haben, haben wir schon in 14.6.3.5 bemerkt. Um schließlich zu zeigen, daß die anderen Reihen keine Nullstellen bei $z = 1$ haben, reicht es zu zeigen, daß das Produkt

$$\zeta_m(z) = \prod_{\chi} \mathrm{L}(z,\chi)$$

einen Pol hat bei $z = 1$. Dieses Produkt ist nun für $\mathrm{Re}(z) > 1$ das Produkt über alle zu m teilerfremden Primzahlen $p \nmid m$ der endlichen Produkte

$$\prod_{\chi}\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^z}\right)^{-1}$$

Nun beachten wir im Polynomring $\mathbb{C}[T]$ die Zerlegung

$$(T^g - 1) = \prod_{\xi^g=1} (T - \xi)$$

Bezeichnet $\varphi = \varphi(m) = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times|$ die Ordnung unserer Gruppe und $g(p)$ die Ordnung des Elements $\bar{p}$ in $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ und $f(p)$ die Kardinalität der Restklassengruppe nach dem Erzeugnis $\langle\bar{p}\rangle$ von $\bar{p}$, so daß also gilt $\varphi = f(p)g(p)$, so finden wir mit der Beschreibung 14.6.2.10 der Charaktere zyklischer Gruppen und der Fortsetzbarkeit 14.6.2.12 der Charaktere von Untergruppen zu Charakteren der ganzen Gruppe unschwer

$$\prod_\chi (T - \chi(p)) = (T^{g(p)} - 1)^{f(p)}$$

Indem wir auf beiden Seiten T^φ wegteilen und $T = p^z$ einsetzen ergibt sich

$$\prod_\chi \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^z}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{p^{g(p)z}}\right)^{-f(p)}$$

Multiplizieren wir alle diese Produkte für $p \nmid m$, so erhalten wir offensichtlich für $\mathrm{Re}(z) > 1$ eine Darstellung von $\zeta_m(z)$ durch eine Dirichletreihe der Gestalt

$$\zeta_m(z) = \sum_{k\geq 1} a_k k^{-z}$$

mit $a_k \in \mathbb{N}$. Hätte die Funktion $\zeta_m(z)$ keinen Pol bei $z = 1$, so wäre sie holomorph für $\mathrm{Re}(z) > 0$ und nach 14.6.3.6 müßte dann auch ihre Dirichletreihe konvergieren für alle z mit $\mathrm{Re}(z) > 0$. Nun ist der p-Faktor von ζ_m jedoch $(1 + p^{-g(p)z} + p^{-2g(p)z} + \ldots)^{f(p)}$ und hat dieselben oder größere Koeffizienten vor den entsprechenden p-Potenzen wie die Reihe

$$(1 + p^{-\varphi z} + p^{-2\varphi z} + \ldots)$$

mit φ wie oben. Die Dirichletreihe von $\zeta_m(z)$ hat also dieselben oder größere Koeffizienten wie die Reihe

$$\sum_{\langle n,m\rangle=\langle 1\rangle} n^{-\varphi z}$$

und diese Reihe divergiert für $z = \varphi^{-1}$ selbst dann, wenn wir nur über prime n summieren. Dieser Widerspruch beendet den Beweis. □

Quellen 14.6.3.8. Die hier gegebene Darstellung lehnt sich an den Cours d'Arithmétique von Serre [Ser70] an.

14.6.4 Summen von drei Quadraten

Satz 14.6.4.1. *Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann eine Summme von drei Quadraten $n = x^2 + y^2 + z^2$ mit $x, y, z \in \mathbb{N}$, wenn sie nicht die Gestalt $n = 4^r(8s + 7)$ hat für $r, s \in \mathbb{N}$.*

Beweis. In $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sind $0, 1, 4$ die einzigen Quadrate. Mithin ist 7 in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ keine Summe von drei Quadraten. Damit kann auch $8s+7$ in $\mathbb{Z}$ nie eine Summe von drei Quadraten sein. In $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sind weiter $0, 1$ die einzigen Quadrate. Die einzige Darstellung von 0 in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ als Summe von drei Quadraten ist folglich $0 = 0+0+0$. Ist mithin $n = x^2+y^2+z^2$ durch vier teilbar, so sind auch x^2, y^2, z^2 durch vier teilbar und damit x, y, z gerade. Genau dann ist also $4n$ eine Summe von drei Quadraten, wenn n eine Summe von drei Quadraten ist. Das zeigt sowohl, daß $n = 4^r(8s+7)$ nie eine Summe von drei Quadraten sein kann, als auch, daß wir zum Beweis des Satzes nur noch zu prüfen brauchen, daß sich alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, die nicht von der Gestalt $n = 8s + 7$ sind, als Summe von drei Quadraten schreiben lassen. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich n quadratfrei und $n > 1$ annehmen. Nach 4.4.4.38 kann jede positiv definite symmetrische Bilinearformen auf $\mathbb{Z}^3$, deren Fundamentalmatrix Determinante Eins hat, durch einen Basiswechsel in das Standardskalarprodukt überführt werden. Es reicht also zu zeigen, daß es für $n \in \mathbb{N}$ von der Gestalt $n = 8s + 7$ eine positiv definite Matrix mit Determinante Eins der Gestalt

$$M := \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 0 \\ 1 & 0 & n \end{pmatrix}$$

gibt. Die fragliche Determinante ergibt sich zu $\det M = n(ac - b^2) - c$. Gilt zusätzlich zu $\det M = 1$ noch $ac - b^2 > 0$, so folgt aus $n > 1$ bereits $c > 0$ und nach dem Hurwitz-Kriterium ist erst der Block oben links und dann sogar die ganze Matrix positiv definit. Es reicht also, für $n > 1$ von der Gestalt $n = 8s + 7$ ganze Zahlen a, b, c zu finden mit $1 = n(ac - b^2) - c$ und $ac - b^2 > 0$. Nochmal anders gesagt reicht es, $d > 0$ so zu finden, daß $-d$ ein quadratischer Rest ist modulo $nd - 1$, denn dann können wir $c := nd - 1$ nehmen und dazu a, b finden derart, daß die obigen Gleichungen erfüllt sind. Wir machen eine Fallunterscheidung.

Fall 1: $n \equiv 2 \pmod 4$. Dann finden wir nach dem Satz über Primzahlen in Restklassen 14.6.2.1 unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv n - 1 \pmod{4n}$ und finden insbesondere $v > 0$ mit $p = n(4v + 1) - 1$ prim. Wir behaupten, daß dann $d := 4v + 1$ unser Problem löst. Nun, wir finden $nd - 1 = p$ und unsere Annahme an n zeigt $p \equiv 1 \pmod 4$. Die Frage, ob $-d$ ein Quadrat ist modulo p, läßt sich mit Legendre-Symbolen und ihren Rechenregeln 6.4.5.18, 20.3.4.15 lösen durch

die Rechnung

$$\left(\frac{-d}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{4v+1}{p}\right) = \left(\frac{p}{4v+1}\right) = \left(\frac{-1}{4v+1}\right) = 1$$

wegen $p \equiv 1 \pmod 4$ und dem Reziprozitätsgesetz für Jacobi-Symbole und $p = n(4v+1) - 1$ und der Formel für Jacobi-Symbole mit -1 im Zähler. Also ist $-d$ ein Quadrat modulo $nd - 1$.

Fall 2: $n \equiv 1 \pmod 4$. Dann ist $(3n-1)/2$ ungerade und teilerfremd zu $4n$ und wir finden nach dem Satz über Primzahlen in Restklassen 14.6.2.1 eine Primzahl p der Gestalt $p = 4nv + (3n-1)/2$ mit $v \in \mathbb{N}$, also mit $2p = n(8v+3) - 1$. Wir behaupten, daß dann $d := 8v + 3$ unser Problem löst. Wir müssen also zeigen, daß $-d$ ein Quadrat ist modulo $2p = nd - 1$. Zur Vorbereitung dieser Rechnung bemerken wir

$$\left(\frac{-2}{8v+3}\right) = \left(\frac{-1}{8v+3}\right) = \left(\frac{2}{8v+3}\right) = (-1)(-1) = 1$$

nach unseren Formeln für Jacobi-Symbole und unterteilen dann unseren Fall in zwei Unterfälle.

Fall 2a: $n \equiv 1 \pmod 8$. Dann folgt $2p \equiv 2 \pmod 8$ und $p \equiv 1 \pmod 4$ und es reicht zu zeigen, daß $-(8v+3)$ ein Quadrat ist modulo p, da ja jede Zahl ein Quadrat ist modulo Zwei. Dazu rechnen wir

$$\left(\frac{-d}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{8v+3}{p}\right) = \left(\frac{p}{8v+3}\right) = \left(\frac{-2p}{8v+3}\right) = \left(\frac{1}{8v+3}\right) = 1$$

wegen $p \equiv 1 \pmod 4$ und dem Reziprozitätsgesetz für Jacobi-Symbole und der Vorbemerkung und in der Tat ist $-(8v+3)$ ein Quadrat modulo p.

Fall 2b: $n \equiv 5 \pmod 8$. Dann folgt $2p \equiv 6 \pmod 8$ und $p \equiv 3 \pmod 4$. Es reicht wieder zu zeigen, daß $-d$ ein Quadrat ist modulo p, da ja jede Zahl ein Quadrat ist modulo Zwei. Dazu rechnen wir

$$\left(\frac{-d}{p}\right) = -\left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{p}{8v+3}\right) = \left(\frac{-2p}{8v+3}\right) = \left(\frac{1}{8v+3}\right) = 1$$

wegen $p \equiv 1 \pmod 4$ und dem Reziprozitätsgesetz für Jacobi-Symbole und der Vorbemerkung und in der Tat ist $-(8v+3)$ ein Quadrat modulo p.

Fall 3: $n \equiv 3 \pmod 8$. Dann ist $(n-1)/2$ ungerade und teilerfremd zu $4n$ und wir finden nach dem Satz über Primzahlen in Restklassen 14.6.2.1 eine Primzahl p der Gestalt $p = 4nv + (n-1)/2$ für $v \in \mathbb{N}$ alias $2p = n(8v+1) - 1$. Wir finden $p \equiv 1 \pmod 4$. Nun behaupten wir, daß $d := 8v + 1$ unser Problem löst.

Wir müssen also zeigen, daß $-d$ ein Quadrat ist modulo $2p = nd - 1$. Es reicht wieder zu zeigen, daß $-d$ ein Quadrat ist modulo p, da ja jede Zahl ein Quadrat ist modulo Zwei. Dazu rechnen wir

$$\left(\frac{-d}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{p}{8v+1}\right) = \left(\frac{-2p}{8v+1}\right) = \left(\frac{1}{8v+1}\right) = 1$$

wegen $p \equiv 1 \pmod 4$ und dem Reziprozitätsgesetz für Jacobi-Symbole und in der Tat ist $-(8v+1)$ ein Quadrat modulo p. $\square$

Quellen 14.6.4.2. In der hier wiedergegebenen Form stammt der Beweis von Mordell [Mor58] mit verschiedenen Überarbeitungen.

14.7 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Frau Sandrine Gümbel, Herr Christian Rein, Herr Nils Kornacker, . . .

Teil D

Topologie

Ausführlicher sollte der Titel „Von der Topologie zur homologischen Algebra“ heißen. Ich will den Versuch unternehmen, zusammen mit der algebraischen Topologie die Sprache der Kategorientheorie und der abstrakten homologischen Algebra im Sinne von Grothendieck zu entwickeln. Die Entwicklung der Theorie von der Fundamentalgruppe über Homologie und Kohomologie bis hin zur Garbenkohomologie soll dabei einhergehen mit einer Entwicklung der Kategorientheorie von den Anfängen bis zu derivierten Kategorien. Meine Hoffnung ist, daß sich diese beiden Gebiete so gegenseitig stützen: Die algebraische Topologie stellt Anschauung und Motivation bereit, die Kategorientheorie und abstrakte homologische Algebra trägt einerseits zur Klarheit der Darstellung bei und ermöglicht andererseits den Transfer der topologischen Anschauung in andere Gebiete der Mathematik. In gewisser Weise will ich damit auch die geschichtliche Entwicklung nachzeichnen.

Ich verstehe mein Unterfangen als Teil des allgemeinen Knet- und Reinigungsprozesses, in dem viele Beteiligte versuchen, zentrale Gebiete der Mathematik möglichst griffig zu präsentieren. Darstellungen von Teilen des Stoffes durch andere Autoren haben Teile des hier vorliegenden Versuches entscheidend geprägt, und mein Ziel ist es, an der einen oder anderen Stelle und insbesondere durch die Auswahl und Zusammenstellung des Stoffes noch etwas Nützliches beizutragen. Besonders geholfen haben mir die Darstellungen von Dold [Dol95], Ossa [Oss09], Stöcker-Zieschang [SZ94], Greenberg-Harper [GH81], Godement [God64] und Kashiwara-Schapira [KS90], und in gewisser Weise ist dieser Text als eine Einführung zu letzterem Werk gedacht. Besonders gut gefallen hat mir das Lehrbuch zur Topologie tom Dieck [tD91], das sich aber mehr zur Homotopie hin orientiert.

2478

Kapitel 15

Topologie und kompakte Gruppen

Inhalt

15.1 Mengentheoretische Topologie 2481

15.1.1 Topologische Räume 2481

15.1.2 Inneres, Abschluß, Umgebungsbegriff 2485

15.1.3 Zusammenhang 2490

15.1.4 Topologische Mannigfaltigkeiten* 2494

15.1.5 Kompakte Räume 2497

15.1.6 Initialtopologie 2500

15.1.7 Finaltopologie 2506

15.1.8 Abzählbar basierte Einsmannigfaltigkeiten* 2513

15.1.9 Topologisches Exponentialgesetz 2516

15.2 Topologie und algebraische Strukturen 2522

15.2.1 Topologische Gruppen 2522

15.2.2 Quotienten nach Gruppenwirkungen 2525

15.2.3 Projektive Räume 2529

15.2.4 Eigentlichkeit und hausdorffsche Quotienten* . . . 2535

15.3 Funktionen auf topologischen Räumen 2540

15.3.1 Stetige Funktionen auf normalen Räumen 2540

15.3.2 Filter und Satz von Tychonoff 2543

15.3.3 Produkte von Wahrscheinlichkeitsräumen* 2546

15.3.4 Topologische Räume und Kringalgebren* 2549

15.4 Funktionen auf topologischen Gruppen* 2556

15.4.1 Uniforme Strukturen 2556
15.4.2 Riesz'scher Darstellungssatz 2559
15.4.3 Haarmaße 2564
15.4.4 Matrixkoeffizienten 2571
15.4.5 Kompakte Operatoren 2573
15.4.6 Faltungen als kompakte Operatoren 2575
15.4.7 Satz von Peter und Weyl 2579
15.4.8 Ringalgebra der kompakt getragenen Maße 2583
15.4.9 Fouriertheorie für kompakte Gruppen 2586
15.5 Danksagung 2593

15.1 Mengentheoretische Topologie

15.1.1 Topologische Räume

15.1.1.1. Wir beginnen mit einigen Erinnerungen zur Begriffswelt der topologischen Räume aus 11.1.1, wo im wesentlichen derselbe Stoff in größerer Ausführlichkeit und unter besonderer Betonung der Motivation durch Fragen der Analysis entwickelt wurde.

15.1.1.2. Gegeben eine Menge X können wir die Menge $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen von X bilden, die sogenannte Potenzmenge von X. Weil es mich verwirrt, über Mengen von Mengen zu reden, nenne ich wie in 3.1.5.13 Teilmengen von $\mathcal{P}(X)$ lieber **Systeme von Teilmengen von** X und spreche im folgenden von **Teilsystemen**, wenn ich Teilmengen solcher Mengensysteme meine.

Definition 15.1.1.3. Eine **Topologie** $\mathcal{T}$ **auf einer Menge** X ist ein System von Teilmengen $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, das stabil ist unter dem Bilden von endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen. Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge mitsamt einer Topologie. Statt $U \in \mathcal{T}$ schreiben wir meist

$$U \circledcirc X$$

und nennen U eine **offene Teilmenge von** X. Die Notation $\circledcirc$ ist in der Literatur nicht üblich.

15.1.1.4. In Formeln ausgedrückt fordern wir von einer Topologie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ auf einer Menge X also:

1. $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{T}$ für $n \geq 0$ und insbesondere auch $X \in \mathcal{T}$ als der Spezialfall $n = 0$. Gleichbedeutend dazu sind die beiden Forderungen $X \in \mathcal{T}$ sowie $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$;

2. $\mathcal{U} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}$ und damit insbesondere auch $\emptyset \in \mathcal{T}$, da ja das leere Mengensystem $\mathcal{U} = \emptyset$ in jedem Mengensystem enthalten ist.

Beispiel 15.1.1.5. Für jeden metrischen Raum bildet das System seiner im Sinne von 11.1.5.3 offenen Teilmengen eine Topologie, die **metrische Topologie**. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum liefert jede Norm auf seinem Richtungsraum eine Metrik auf unserem affinen Raum und diese liefert dann eine Topologie. Der Satz über die Äquivalenz von Normen 11.2.3.13 zeigt nun, daß diese Topologie gar nicht von der gewählten Norm abhängt, vergleiche 11.2.3.15. Sie heißt die **natürliche Topologie** auf unserem endlichdimensionalen reellen affinen Raum.

Beispiel 15.1.1.6. Auf der Menge $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, \infty\}$ der erweiterten reellen Zahlen erklären wir eine Topologie, indem wir alle Teilmengen offen nennen, die mit jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ ein ganzes offenes Intervall um unseren Punkt enthalten, mit ∞ ein ganzes Intervall der Gestalt $(a, \infty]$ für $a \in \mathbb{R}$ und mit $-\infty$ ein ganzes Intervall der Gestalt $[-\infty, b)$ für $b \in \mathbb{R}$.

Beispiel 15.1.1.7. Auf jeder Menge können wir die **Klumpentopologie** betrachten, die nur aus der ganzen Menge und der leeren Menge besteht, oder die **diskrete Topologie**, bei der wir alle Teilmengen als offen ansehen. Einen topologischen Raum mit der diskreten Topologie nennen wir auch kurz einen **diskreten Raum**.

Definition 15.1.1.8. Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge, so erklärt man die **induzierte Topologie** oder **Spurtopologie** auf Y durch die Vorschrift

$$U \Subset Y \Leftrightarrow \exists V \Subset X \text{ mit } U = V \cap Y$$

In Worten ist also eine Teilmenge von Y offen für die induzierte Topologie, wenn sie der Schnitt von Y mit einer offenen Teilmenge von X ist. Es ist klar, daß dieses Mengensystem in $\mathcal{P}(Y)$ in der Tat eine Topologie auf Y ist. Ab jetzt fassen wir stillschweigend jede Teilmenge Y eines topologischen Raums X auf als topologischen Raum mit der induzierten Topologie.

15.1.1.9 (**Offen als relativer Begriff**). Wenn wir eine Menge einfach nur „offen“ nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies „offen“ gemeint ist. Ist X ein topologischer Raum und sind $M \subset Y \subset X$ Teilmengen, so meint $M \Subset Y$, daß M offen ist als Teilmenge des Raums Y mit seiner induzierten Topologie.

15.1.1.10. Gegeben ein topologischer Raum X gilt $V \Subset U \Subset X \Rightarrow V \Subset X$. Ist in der Tat V offen in der Spurtopologie, so gibt es $W \Subset X$ mit $V = W \cap U$ und daraus folgt $V \Subset X$.

Definition 15.1.1.11. Eine Abbildung von einem topologischen Raum in einen weiteren heißt **stetig**, wenn darunter das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

Satz 15.1.1.12. *Die Verknüpfung stetiger Abbildungen ist stetig.*

Beweis. Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig, so gelten beide Implikationen der Implikationskette $V \Subset Z \Rightarrow g^{-1}(V) \Subset Y \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(V)) \Subset X$. Da nun gilt $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$, ist damit auch $(g \circ f)$ stetig. □

Beispiele 15.1.1.13. Jede konstante Abbildung ist stetig. Die Identität auf einem topologischen Raum ist immer stetig. Jede Abbildung in einen Raum mit der Klumpentopologie ist stetig. Jede Abbildung aus einem Raum mit der diskreten Topologie ist stetig.

Beispiel 15.1.1.14 (**Metrische Stetigkeit als topologische Stetigkeit**). Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen ist „metrisch stetig“ im Sinne von 11.1.3.10 genau dann, wenn sie „topologisch stetig“ ist im Sinne unserer Definition 15.1.1.11. In der Tat, sei $f : X \to Y$ unsere Abbildung zwischen metrischen Räumen. Jeder Ball $\mathrm{B}(y;\varepsilon)$ im metrischen Raum Y ist offen nach 11.1.5.5. Ist f topologisch stetig, so ist demnach sein Urbild $f^{-1}\mathrm{B}(y;\varepsilon)$ offen in X. Für jedes $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt es nach der Definition der metrischen Topologie also $\delta > 0$ mit $\mathrm{B}(x;\delta) \subset f^{-1}\mathrm{B}(y;\varepsilon)$ alias $f(\mathrm{B}(x;\delta)) \subset \mathrm{B}(y;\varepsilon)$, und das zeigt die metrische Stetigkeit von f. Ist umgekehrt f metrisch stetig, so ist nach derselben Argumentation das Urbild jedes Balls offen, und dann natürlich auch das Urbild jeder offenen Menge als Vereinigung von Urbildern solcher Bälle.

Lemma 15.1.1.15 (**Universelle Eigenschaft der induzierten Topologie**). *Gegeben $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und $Z \subset Y$ eine Teilmenge mit $f(X) \subset Z$ ist f stetig genau dann, wenn die induzierte Abbildung $f : X \to Z$ stetig ist für die auf Z induzierte Topologie.*

Beweis. Die Einbettung $i : Z \hookrightarrow Y$ ist offensichtlich stetig. Ist also $f : X \to Z$ stetig, so auch $f : X \to Y$ als Verknüpfung stetiger Abbildungen. Sei umgekehrt $f : X \to Y$ stetig mit $f(X) \subset Z$. Gegeben $U \Subset Z$ existiert $V \Subset Y$ mit $V \cap Z = U$. Dann ist $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ offen in X aufgrund der Stetigkeit von $f : X \to Y$. □

Definition 15.1.1.16. Eine Teilmenge M eines topologischen Raums X heißt **abgeschlossen** oder präziser **abgeschlossen in** X und wir schreiben in Formeln $M \mathrel{\Subset\!\!\!\!\!\!\;\!\!\!\!\!\!\;\!\!\!\!\!\!\;

15.1.1.19 (**Stetigkeit und abgeschlossene Mengen**). Eine Abbildung ist stetig genau dann, wenn darunter das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist: Das folgt unmittelbar aus der Definition 15.1.1.11, da das Urbild des Komplements einer Menge stets das Komplement ihres Urbilds ist.

Proposition 15.1.1.20. *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung topologischer Räume.*

1. *Gegeben $\mathcal{U}$ eine* **offene Überdeckung** *von X alias ein System offener Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ ist f stetig genau dann, wenn $f|_U$ stetig ist für alle $U \in \mathcal{U}$. Etwas vage gesprochen ist demnach* **Stetigkeit eine lokale Eigenschaft**.

2. *Gegeben eine* **endliche abgeschlossenene Überdeckung** *von X, in Formeln $A_1, \ldots, A_n \mathrel{\not\subset\!\!\!\!\!\!\mathrel{\mathbb{A}}} X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$, ist f stetig genau dann, wenn $f|_{A_i}$ stetig ist für alle $i = 1, \ldots n$.*

Vorschau 15.1.1.21. Etwas allgemeiner gilt das auch noch für eine „lokal endliche abgeschlossene Überdeckung“, vergleiche 15.1.7.19.

Beweis. Ist f stetig, so sind alle $f|_U$ stetig als Verknüpfung von f mit der stetigen Inklusion $U \hookrightarrow X$. Sind andererseits alle $f|_U$ stetig, so ist für alle $W \mathrel{\Subset} Y$ und alle $U \in \mathcal{U}$ das Urbild $f^{-1}(W) \cap U$ offen in U, nach 15.1.1.10 ist also $f^{-1}(W) \cap U$ sogar offen in X, und damit ist dann natürlich auch $f^{-1}(W) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f^{-1}(W) \cap U$ offen in X als Vereinigung offener Mengen. Mithin ist f stetig. Teil 2 zeigt man ähnlich: Nach 15.1.1.19 muß nur gezeigt werden, daß für jede abgeschlossene Teilmenge $B \mathrel{\not\subset\!\!\!\!\!\!\mathrel{\mathbb{A}}} Y$ von Y ihr Urbild $f^{-1}(B)$ abgeschlossen ist in X. Da aber gilt $f^{-1}(B) = f_1^{-1}(B) \cup \ldots \cup f_n^{-1}(B)$ und $f_i^{-1}(B) \mathrel{\not\subset\!\!\!\!\!\!\mathrel{\mathbb{A}}} A_i$ nach Annahme folgt die Proposition aus Übung 15.1.1.25 und den Definitionen. □

Definition 15.1.1.22. Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt ein **Homöomorphismus** oder auch eine **topologische Abbildung**, wenn sie stetig und bijektiv ist und zusätzlich die inverse Abbildung auch stetig ist. Zwei topologische Räume heißen **homöomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Homöomophismus gibt. In Formeln schreiben wir dann $X \cong Y$.

Übungen

Übung 15.1.1.23. Auf jeder Menge kann man die **koendliche Topologie** erklären durch die Vorschrift, daß außer der leeren Menge nur die Komplemente endlicher Mengen offen sein sollen.

Übung 15.1.1.24. Auf jeder teilgeordneten Menge kann man die **Ordnungstopologie**, auch genannt **Alexandroff-Topologie**, erklären durch die Vorschrift, daß

genau die Teilmengen offen sein sollen, die mit einem Element auch jedes kleinere Element enthalten. Genau dann entsteht eine Topologie in dieser Weise aus einer Teilordnung, wenn es für jedes Element eine kleinste offene Menge gibt, die es umfaßt.

Übung 15.1.1.25. Gegeben ein topologischer Raum X mit einer Teilmenge Y zeige man: $A \mathrel{\not\subset\!\!\!

Raum X ist natürlich der offene Kern von X in X ebenso wie der Abschluß von X in X schlicht X selber, und der Rand von X in X ist leer.

Lemma 15.1.2.4. *Seien X ein topologischer Raum und $M, N \subset X$ Teilmengen.*

1. *Es gilt $\overline{X \backslash M} = X \backslash M^\circ$ und $(X \backslash M)^\circ = X \backslash \overline{M}$;*
2. *Es gilt $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$ und $(M \cap N)^\circ = M^\circ \cap N^\circ$.*

Beweis. 1. Wir rechnen

$$X \backslash M^\circ = X \backslash \bigcup_{\substack{U \text{ offen} \\ U \subset M}} U = \bigcap_{\substack{U \text{ offen} \\ U \subset M}} (X \backslash U) = \bigcap_{\substack{A \text{ abgeschlossen} \\ A \supset (X \backslash M)}} A = \overline{X \backslash M}$$

Die Gleichheit $(X \backslash M)^\circ = X \backslash \overline{M}$ ergibt sich, wenn wir in der schon bewiesenen Gleichheit auf beiden Seiten das Komplement nehmen und M durch $X \backslash M$ ersetzen.

2. $\overline{M \cup N}$ ist abgeschlossen und umfaßt M und N, also auch $\overline{M}$ und $\overline{N}$. Andererseits ist $\overline{M} \cup \overline{N}$ abgeschlossen und umfaßt $M \cup N$, also auch $\overline{M \cup N}$. Die Gleichheit $(M \cap N)^\circ = M^\circ \cap N^\circ$ zeigt man analog. □

Definition 15.1.2.5. Seien X ein topologischer Raum, $M \subset X$ eine Teilmenge und $p \in X$ ein Punkt. So benutzt man die Sprechweisen

$$\begin{array}{lcl} p \in M^\circ & \Leftrightarrow & p \text{ ist } \textbf{innerer Punkt} \text{ von } M; \\ p \in \overline{M} & \Leftrightarrow & p \text{ ist } \textbf{Berührungspunkt} \text{ von } M; \\ p \in \partial M & \Leftrightarrow & p \text{ ist } \textbf{Randpunkt} \text{ von } M. \end{array}$$

Hier ist wieder zu beachten, daß es ganz entscheidend von X abhängt, welche Punkte nun innere Punkte, Berührungspunkte oder Randpunkte von M sind.

Definition 15.1.2.6. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt **dicht**, wenn ihr Abschluß der ganze Raum ist.

Definition 15.1.2.7. Seien X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt eine **Umgebung von** A, wenn es eine offene Menge $V \Subset X$ gibt mit $A \subset V \subset U$. Im Fall einer einelementigen Teilmenge $A = \{p\}$ sprechen wir auch von einer **Umgebung von** p.

15.1.2.8. Eine Teilmenge eines topologischen Raums ist genau dann offen, wenn sie eine Umgebung eines jeden ihrer Punkte ist. In der Tat, ist sie eine Umgebung eines jeden ihrer Punkte, so ist sie eine Vereinigung von offenen Mengen und damit offen. Die andere Implikation ist eh klar.

Definition 15.1.2.9. Gegeben $f : X \to Y$ eine Abbildung von topologischen Räumen und $p \in X$ ein Punkt heißt f **stetig bei** p, wenn für jede Umgebung $V \subset Y$ von $f(p)$ ihr Urbild $f^{-1}(U) \subset X$ eine Umgebung von p ist.

15.1.2.10. Eine Abbildung von topologischen Räumen $X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn sie an jedem Punkt $p \in X$ stetig ist. Der Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen.

Lemma 15.1.2.11. *Gegeben X ein topologischer Raum, $M \subset X$ eine Teilmenge und $p \in X$ ein Punkt haben wir:*

1. $p \in M^\circ \quad \Leftrightarrow \quad M$ *ist eine Umgebung von* p;
2. $p \in \overline{M} \quad \Leftrightarrow \quad M$ *trifft jede Umgebung von* p;
3. $p \in \partial M \quad \Leftrightarrow \quad M$ *und* $X \backslash M$ *treffen jede Umgebung von* p.

Beweis. 1 ist klar nach den Definitionen. Für 2 bemerken wir, daß nach Lemma 15.1.2.4.1 gilt

$$\begin{aligned} p \in \overline{M} \quad &\Leftrightarrow \quad p \notin (X \backslash M)^\circ \\ &\Leftrightarrow \quad X \backslash M \text{ ist keine Umgebung von } p \\ &\Leftrightarrow \quad \text{jede Umgebung von } p \text{ trifft } M. \end{aligned}$$

Sicher gilt weiter $p \in \partial M \Leftrightarrow p \in \overline{M} \cap \overline{(X \backslash M)}$. Nun folgt 3 aus der eben unter 2 bewiesenen Aussage. □

15.1.2.12. Ein topologischer Raum X heißt **Hausdorff**, wenn darin je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen. Gleichbedeutend wird auch die Bezeichnung **separiert** verwendet.

Beispiel 15.1.2.13. Die metrische Topologie einer Metrik ist stets Hausdorff. Die Klumpentopologie auf einer Menge mit mindestens zwei Elementen ist nicht Hausdorff. Die koendliche Topologie auf einer unendlichen Menge ist nicht Hausdorff.

15.1.2.14. Ein Punkt eines topologischen Raums X heißt ein **Häufungspunkt von** X, wenn die nur aus unserem Punkt bestehende Teilmenge nicht offen ist. Man mag gleichbedeutend von einem **nichtoffenen Punkt** reden.

Satz 15.1.2.15 (Eindeutigkeit stetiger Fortsetzungen in Häufungspunkten). *Seien X, Y topologische Räume, $p \in X$ ein Häufungspunkt und $f : X \backslash p \to Y$ eine Abbildung. Ist Y Hausdorff, so gibt es höchstens eine Fortsetzung von f zu einer Abbildung $\tilde{f} : X \to Y$, die stetig ist bei p.*

Beweis. Wäre sonst $\hat{f}$ eine weitere bei p stetige Fortsetzung mit $\hat{f}(p) \neq \tilde{f}(p)$, so fänden wir disjunkte Umgebungen $\hat{V}$ und $\tilde{V}$ dieser beiden Bildpunkte und dazu Umgebungen $\hat{U}$ und $\tilde{U}$ von p mit $\hat{f}(\hat{U}) \subset \hat{V}$ und $\tilde{f}(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$. Daraus folgte aber

$$f(\hat{U} \cap \tilde{U} \backslash p) \ \subset \ \hat{V} \cap \tilde{V} = \emptyset$$

im Widerspruch dazu, daß die Umgebung $\hat{U} \cap \tilde{U}$ von p nicht nur aus unserem Häufungspunkt p selbst bestehen darf. $\square$

Definition 15.1.2.16. Seien X, Y topologische Räume mit Y Hausdorff. Seien weiter $p \in X$ ein Häufungspunkt und $f : X \backslash p \to Y$ eine Abbildung. Sei schließlich $b \in Y$ ein Punkt. Wir sagen, $f(x)$ **strebt gegen** b **für** $x \to p$ und schreiben

$$\lim_{x \to p} f(x) = b$$

als Abkürzung für die Aussage, daß die Fortsetzung von f zu $\tilde{f} : X \to Y$ durch $\tilde{f}(p) := b$ stetig ist bei p. In diesem Fall nennen wir b den **Grenzwert** oder lateinisierend **Limes** der Funktion f für $x \to p$. Nach der Eindeutigkeit stetiger Fortsetzungen 15.1.2.15 ist dieser Grenzwert eindeutig bestimmt, wenn er existiert.

15.1.2.17. Salopp gesprochen verhält es sich demnach so, daß eine Abbildung in einen Hausdorffraum mit einer einpunktigen Definitionslücke an einem Häufungspunkt ihres Definitionsbereichs auf höchstens eine Weise stetig in diese Definitionslücke hinein fortgesetzt werden kann. Der Wert dieser an besagter Stelle stetigen Fortsetzung heißt dann der Grenzwert unserer Abbildung an besagter Stelle. Dieselbe Definition hatten wir bereits in der Analysis in **??** gegeben.

15.1.2.18. Grenzwerte von Folgen sind der Spezialfall $X := \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ mit der von $\bar{\mathbb{R}}$ induzierten Topologie und dem Häufungspunkt $p = \infty$. Ausgeschrieben bedeutet $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, daß in jeder Umgebung von b fast alle Glieder unserer Folge alias alle bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen liegen.

15.1.2.19. Eine Teilmenge F eines topologischen Raums X heißt **folgenabgeschlossen**, wenn sie mit jeder in X konvergierenden Folge auch deren Grenzwerte enthält. In metrischen Räumen sind folgenabgeschlossene Teilmengen stets abgeschlossen. In beliebigen topologischen Räumen gilt das nicht mehr, wie das im folgenden diskutierte Beispiel 15.1.2.26 zeigt.

Übungen

Übung 15.1.2.20. Man zeige, daß im allgemeinen gilt $\overline{M \cap N} \neq \overline{M} \cap \overline{N}$. Welche Inklusion gilt stets?

Übung 15.1.2.21. In jedem topologischen Raum ist der Schnitt einer offenen dichten Teilmenge mit einer beliebigen dichten Teilmenge wieder dicht.

Übung 15.1.2.22. Eine Abbildung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen ist stetig genau dann, wenn für alle Teilmengen $M \subset X$ gilt $f\left(\overline{M}\right) \subset \overline{f(M)}$.

Übung 15.1.2.23. Man zeige für jeden topologischen Raum: Der Schnitt von zwei Umgebungen eines Punktes ist wieder eine Umgebung besagten Punktes. Jede Umgebung eines Punktes kann verkleinert werden zu einer offenen Umgebung desselben Punktes.

Übung 15.1.2.24. Eine Teilmenge eines topologischen Raums ist offen genau dann, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist.

Übung 15.1.2.25. Eine Teilmenge eines topologischen Raums $T \subset X$ ist abgeschlossen genau dann, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt derart, daß $T \cap U$ abgeschlossen ist in U.

Ergänzende Übung 15.1.2.26 (**Folgenabgeschlossen heißt nicht abgeschlossen**). Diese Übung liefert ein Beispiel für eine folgenabgeschlossene aber nicht abgeschlossene Teilmenge eines Hausdorffraums. Wir betrachten auf der Menge $\mathrm{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die „Topologie der punktweisen Konvergenz“ : Eine Teilmenge $U \subset \mathrm{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist in Bezug auf diese Topologie offen genau dann, wenn es für jedes $f \in U$ ein $\varepsilon > 0$ und eine endliche Teilmenge $E \subset \mathbb{R}$ gibt mit

$$(|g(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall x \in E) \quad \Rightarrow \quad g \in U$$

Man zeige, daß das in der Tat eine Topologie ist, daß in dieser Topologie je zwei verschiedene Funktionen disjunkte Umgebungen besitzen, und daß die meßbaren Funktionen darin eine unter Konvergenz von Folgen abgeschlossene aber nicht topologisch abgeschlossene Teilmenge bilden. Unsere „Topologie der punktweisen Konvergenz“ wird sich im übrigen in 15.1.6.17 folgende als ein Spezialfall der sogenannten „Produkttopologie“ erweisen.

Ergänzende Übung 15.1.2.27. Unter einer **Umgebungsbasis** eines Punktes in einem topologischen Raum versteht man ein System von Umgebungen besagten Punktes derart, daß jede Umgebung unseres Punktes mindestens eine Umgebung unseres Systems umfaßt. Man zeige: Besitzt in einem topologischen Raum jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis, so ist jede unter Konvergenz von Folgen abgeschlossene Teilmenge bereits abgeschlossen, und jede „folgenstetige“ Abbildung in einen weiteren topologischen Raum ist bereits stetig.

Ergänzung 15.1.2.28. Besitzt in einem topologischen Raum jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis, so sagt man auch, er „gehorche dem **ersten Abzählbarkeitsaxiom**“.

Übung 15.1.2.29. Sind X, Y, Z topologische Räume und ist $f : X \to Y$ stetig in p und $g : Y \to Z$ stetig in $f(p)$, so ist $g \circ f$ stetig in p.

15.1.3 Zusammenhang

Definition 15.1.3.1. Ist X ein topologischer Raum und sind $x, y \in X$ Punkte, so nennen wir eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to X$ von einem mehrpunktigen kompakten reellen Intervall $[a, b]$ nach X mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ einen **Weg von** x **nach** y. Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, wenn er nicht leer ist und es für je zwei Punkte unseres Raums einen Weg vom einen zum anderen gibt.

15.1.3.2. Das Bild eines wegzusammenhängenden Raums unter einer stetigen Abbildung ist offensichtlich stets wieder wegzusammenhängend.

Definition 15.1.3.3. Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht leer ist und sich nicht als disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren offenen Teilmengen schreiben läßt.

Beispiel 15.1.3.4. Ein diskreter topologischer Raum ist zusammenhängend genau dann, wenn er aus genau einem Punkt besteht.

15.1.3.5. Gleichbedeutend könnten wir natürlich auch fordern, daß unser Raum nicht leer ist und sich nicht als disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen schreiben läßt. Eine Teilmenge eines topologischen Raums nennen wir nach unseren allgemeinen Konventionen zusammenhängend, wenn sie zusammenhängend ist als topologischer Raum mit der induzierten Topologie.

15.1.3.6 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur wird meist auch die leere Menge zusammenhängend genannt. Mir scheint das unnatürlich, da sich mit dieser Konvention jeder zusammenhängende Raum in eine Vereinigung von zwei disjunkten offenen zusammenhängenden Teilmengen zerlegen ließe.

Proposition 15.1.3.7. *Das Bild eines zusammenhängenden Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets zusammenhängend.*

Beweis. Es reicht, wenn wir für eine stetige Surjektion $f : X \to Y$ aus Y nicht zusammenhängend folgern, daß auch X nicht zusammenhängend ist. Ist jedoch $Y = Y_0 \sqcup Y_1$ eine Zerlegung in zwei offene, disjunkte, nichtleere Teilmengen, so auch $X = f^{-1}(Y_0) \sqcup f^{-1}(Y_1)$. Ist Y leer, so auch X. Die Proposition folgt. $\square$

Proposition 15.1.3.8 (**Charakterisierung zusammenhängender Räume**). *Gegeben ein topologischer Raum sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Raum ist zusammenhängend;*
2. *Jede stetige Abbildung von unserem Raum in einen Raum mit der diskreten Topologie ist einwertig;*

3. *Jede stetige Abbildung von unserem Raum in einen zweielementigen Raum mit der diskreten Toplogie ist einwertig.*

15.1.3.9. Wir verwenden hier unsere Konvention 2.1.4.10, nach der eine Abbildung einwertig heißt, wenn ihr Bild aus genau einem Element besteht.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$ folgt aus 15.1.3.7, da das Bild einer stetigen Abbildung unseres zusammenhängenden Raums in einen diskreten Raum notwendig zusammenhängend und diskret ist und damit nach 15.1.3.4 aus einem einzigen Punkt bestehen muß. $2 \Rightarrow 3$ ist klar. $3 \Rightarrow 1$ zeigt man durch Widerspruch: Ist unser Raum nicht zusammenhängend, so ist er entweder leer und die einzige Abbildung in unseren zweielementigen Raum ist nicht einwertig, oder er besitzt eine Zerlegung in zwei disjunkte nichtleeren offenen Teilmengen. Dann aber können wir eine stetige nicht einwertige Abbildung in unsere zweielementige Menge angeben durch die Vorschrift, daß sie auf der einen Teilmenge das eine Element als Wert annehmen soll und auf der anderen das andere. □

Lemma 15.1.3.10 (**Zusammenhängende Teilmengen von** $\mathbb{R}$)**.** *Eine Teilmenge der reellen Zahlengerade ist zusammenhängend genau dann, wenn sie ein nichtleeres Intervall ist.*

Beweis. Ist $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und kein Intervall, so gibt es $p \in \mathbb{R} \backslash A$ mit $A \cap \mathbb{R}_{<p} \neq \emptyset \neq A \cap \mathbb{R}_{>p}$, und das ist eine Zerlegung von A in zwei nichtleere offene Teilmengen. Umgekehrt ist jedes nichtleere reelle Intervall zusammenhängend nach Proposition 15.1.3.8 und dem Zwischenwertsatz. Man kann auch ohne den Zwischenwertsatz argumentieren wie folgt. Sei sonst $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall mit einer Zerlegung $I = I_0 \sqcup I_1$ in zwei für die Spurtopologie offene nichtleere Teilmengen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, es gebe $a \in I_0$ und $b \in I_1$ mit $a < b$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir weiter annehmen, es sei sogar $I = [a, b]$. Nun sind I_0, I_1 auch abgeschlossen in I und damit in $\mathbb{R}$. Für $p = \sup I_0$ folgt $p \in I_0$ und $p < b$ und damit $(p, b] \subset I_1$ und dann auch $p \in I_1$, im Widerspruch zu $I_0 \cap I_1 = \emptyset$. Von dieser Argumentation ausgehend können wir nun sogar den Zwischenwertsatz als Korollar unseres Lemmas erhalten, nach 15.1.3.7 sind ja Bilder zusammenhängender Räume zusammenhängend und damit nach unserem Lemma Bilder nichtleerer reeller Intervalle unter stetigen reellwertigen Funktionen wieder nichtleere reelle Intervalle. □

15.1.3.11 (**Wegzusammenhängende Teilmengen von** $\mathbb{R}$). Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist wegzusammenhängend genau dann, wenn A ein nichtleeres Intervall ist. In der Tat ist jedes nichtleere reelle Intervall offensichtlich wegzusammenhängend. Ist umgekehrt $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und kein Intervall, so gibt es reelle Zahlen $x <$

$p < y$ mit $x, y \in A$ aber $p \notin A$. Dann aber kann es nach dem Zwischenwertsatz keinen Weg von x nach y geben, der ganz in A verläuft.

15.1.3.12. Wir sehen insbesondere, daß die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{Q}$ genau die einelementigen Teilmengen sind. Topologische Räume mit dieser Eigenschaft heißen **total unzusammenhängend**.

Satz 15.1.3.13. *Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

Beweis. Wir argumentieren durch Widerspruch. Sei X nicht leer und nicht zusammenhängend, also die disjunkte Vereinigung $X = U \sqcup V$ zweier nichtleerer offener Teilmengen. Gäbe es einen Weg $\varphi : [a, b] \to X$ mit $\varphi(a) \in U$ und $\varphi(b) \in V$, so wäre $[a, b] = \varphi^{-1}(U) \sqcup \varphi^{-1}(V)$ eine disjunkte Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in zwei nichtleere offene Teilmengen, und das stünde im Widerspruch zu unserer Erkenntnis, daß Intervalle zusammenhängend sind. Also kann es keinen solchen Weg geben und X ist auch nicht wegzusammenhängend. □

Definition 15.1.3.14. Auf jedem topologischen Raum X definiert man die Relation W der **Wegverbindbarkeit** durch die Vorschrift, daß gilt xWy, wenn es in X einen Weg von x nach y gibt. Man zeige, daß das eine Äquivalenzrelation ist. Hinweis: Die Transitivität ergibt sich durch das „Aneinanderhängen von Wegen“ und die Stetigkeit der so entstehenden Wege folgt mit 15.1.1.20.2. Die Äquivalenzklassen für die Äquivalenzrelation der Wegverbindbarkeit heißen die **Wegzusammenhangskomponenten** unseres Raums. Die Menge der Wegzusammenhangskomponenten eines Raums X notieren wir $\pi_0(X)$.

Lemma 15.1.3.15. *Besitzt in einem topologischen Raum jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung, so sind seine Wegzusammenhangskomponenten offen und unser Raum zusammenhängend genau dann, wenn er wegzusammenhängend ist.*

Beweis. Besitzt jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung, so sind die Wegzusammenhangskomponenten sicher offen. Ist unser Raum nicht leer und nicht wegzusammenhängend, so hat er mindestens zwei Wegzusammenhangskomponenten, und nehmen wir eine dieser Komponenten und die Vereinigung der Übrigen, so erhalten wir eine Überdeckung durch zwei nichtleere offene Teilmengen. Also ist unter diesen Voraussetzungen unser Raum auch nicht zusammenhängend. Daß umgekehrt jeder wegzusammenhängende Raum auch zusammenhängend ist, wissen wir bereits aus 15.1.3.13. □

Definition 15.1.3.16. Eine maximale zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raums heißt eine **Zusammenhangskomponente**.

Proposition 15.1.3.17 (**Zerlegung in Zusammenhangskomponenten**). *Gegeben ein topologischer Raum X gilt:*

1. *Jeder Punkt liegt in genau einer Zusammenhangskomponente;*

2. *Ist eine Teilmenge unseres Raums zusammenhängend, so ist auch ihr Abschluß zusammenhängend. Insbesondere sind Zusammenhangskomponenten stets abgeschlossen;*

3. *Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von zusammenhängenden Teilmengen von X mit nichtleerem Schnitt $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \neq \emptyset$, so ist auch die Vereinigung $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ zusammenhängend.*

Beweis. 2. Sei A unsere zusammenhängende Teilmenge. Da nach Annahme A nicht leer ist, gilt dasselbe für $\bar{A}$. Ist $\bar{A}$ nicht zusammenhängend, so zerfällt $\bar{A}$ also in zwei nichtleere disjunkte abgeschlossene Teilmengen $\bar{A} = A_1 \sqcup A_2$. Nach der Definition von $\bar{A}$ kann keines der A_i schon A enthalten, also ist $A = (A_1 \cap A) \sqcup (A_2 \cap A)$ eine disjunkte Zerlegung in zwei nichtleere abgeschlossene Teilmengen, und damit ist auch A nicht zusammenhängend im Widerspruch zur Voraussetzung.

3. Wir setzen $Y = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$. Sei $Y = U \cup V$ eine Zerlegung von Y in zwei offene disjunkte Teilmengen. Es gilt zu zeigen, daß U oder V schon ganz Y sein muß. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen $U \cap \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \neq \emptyset$. Da die A zusammenhängend sind, folgt dann schon $U \supset A$ für alle A und damit $U = Y$.

1. Nach 3 ist die Vereinigung über alle zusammenhängenden Teilmengen, die einen gegebenen Punkt enthalten, selbst zusammenhängend. □

Ergänzung 15.1.3.18. Wir geben einen alternativen Beweis für den Satz 15.1.3.13, nach dem jeder wegzusammenhängende Raum zusammenhängend ist. Sei dazu X unser Raum. Als wegzusammenhängender Raum ist X nicht leer. Ist $x \in X$ ein Punkt, so ist X die Vereinigung über die Bilder aller Wege γ in X mit Anfangspunkt x, in Formeln

$$X = \bigcup_{\gamma(0)=x} \gamma([0,1])$$

Alle diese Bilder $\gamma([0,1])$ sind zusammenhängend als Bilder zusammenhängender Mengen und ihr Schnitt ist nicht leer, denn er enthält x. Nach 15.1.3.17.3 ist also X zusammenhängend.

Definition 15.1.3.19. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt **diskret**, wenn sie mit der Spurtopologie ein diskreter topologischer Raum wird.

15.1.3.20. Der Leser möge sich zur Übung überlegen, daß das gleichbedeutend ist zu unserer Bedingung in 12.7.5.7, daß jeder Punkt unserer Teilmenge eine Umgebung besitzt, in der kein anderer Punkt besagter Teilmenge liegt.

Beispiel 15.1.3.21. Die Menge aller Brüche $\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ mit einer Eins im Zähler ist eine diskrete Teilmenge der reellen Zahlengeraden.

15.1.3.22 (**Diskussion der Terminologie**). Andere Autoren verstehen unter einer „diskreten Teilmenge“ eines topologischen Raums abweichend, was in unserer Terminologie eine „diskrete abgeschlossene Teilmenge“ ist.

Übungen

Übung 15.1.3.23 (**Die Sinuskurve des Topologen**). Man betrachte in $\mathbb{R}^2$ die Vereinigung des Graphen der Funktion $\mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(1/x)$ mit der y-Achse. Man zeige zur Übung, daß diese Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Übung 15.1.3.24. Besitzt jeder Punkt eines topologischen Raums eine zusammenhängende Umgebung, so sind seine Zusammenhangskomponenten offen.

Übung 15.1.3.25. Das Komplement einer abgeschlossenen diskreten Teilmenge in einer zusammenhängenden offenen Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ ist für $n > 1$ zusammenhängend. Dasselbe gilt im Übrigen auch ohne die Bedingung „abgeschlossen“, ist dann aber schwerer zu zeigen.

Übung 15.1.3.26. Ist $U \Subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend und $A \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Teilraum einer Dimension $\dim A \leq n-2$ alias einer Kodimension mindestens Zwei, so ist auch $U \backslash A$ zusammenhängend. Für Teilräume A der Kodimension Eins alias affine Hyperebenen A gilt das natürlich nicht!

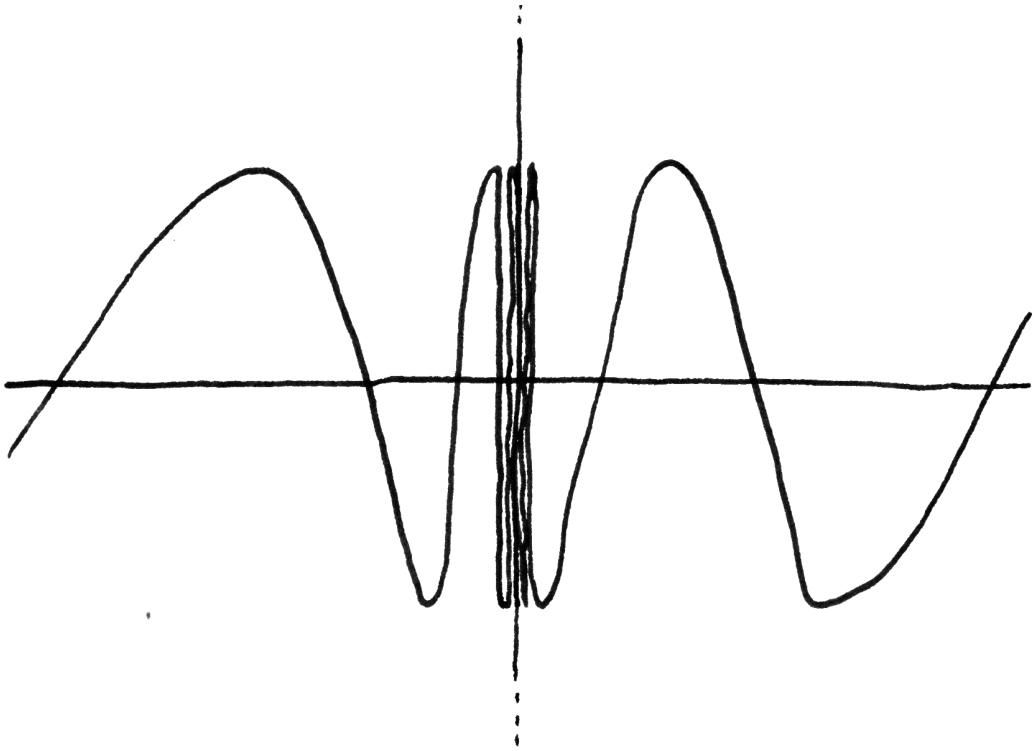
15.1.4 Topologische Mannigfaltigkeiten*

Definition 15.1.4.1. Eine stetige Abbildung topologischer Räume heißt eine **topologische Einbettung** oder kürzer **Einbettung**, wenn sie einen Homöomorphismus mit ihrem Bild induziert, für die induzierte Topologie auf besagtem Bild.

Vorschau 15.1.4.2. Ist allgemeiner $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem ausgezeichneten Funktor $v : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ in die Kategorie der Mengen, so nennen wir einen Morphismus $i : U \to X$ in $\mathcal{C}$ eine **Einbettung** oder genauer eine v**-Einbettung**, wenn $v(i)$ injektiv ist und für alle $Z \in \mathcal{C}$ das Nachschalten von i eine Bijektion

$$\mathcal{C}(Z, U) \xrightarrow{\sim} \{\varphi \in \mathcal{C}(Z, X) \mid \mathrm{im}(v(\varphi)) \subset \mathrm{im}(v(i))\}$$

induziert. In anderen Worten stehen rechts alle Morphismen φ, für die $v(\varphi)$ über $v(i)$ faktorisiert. In dieser Situation nennen wir weiter eine Teilmenge $T \subset v(X)$ ein v**-Unterobjekt** alias v**-Teilobjekt**, wenn es eine Einbettung $i : U \to X$ gibt mit $\mathrm{im}(v(i)) = T$. Die Bijektion $v(i) : v(U) \xrightarrow{\sim} T$ mag man die **induzierte** $\mathcal{C}$**-Struktur auf** T nennen.



Ein Teil der Sinuskurve des Topologen, die in der Nähe der y-Achse allerdings schwer zu zeichnen ist

Definition 15.1.4.3. Eine d**-Mannigfaltigkeit** oder ausführlicher d**-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand** ist ein topologischer Hausdorffraum X, in dem jeder Punkt $p \in X$ eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph ist zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^d$.

15.1.4.4. Viele Autoren fordern von einer Mannigfaltigkeit zusätzlich, daß sie „parakompakt“ sein soll, oder sogar noch stärker, daß ihre Topologie „eine abzählbare Basis“ haben soll. Wir werden solche Bedingungen stets explizit erwähnen, bis jetzt sind sie für uns belanglos.

15.1.4.5. Bis jetzt haben wir unter „Mannigfaltigkeiten“ meist „eingebettete $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeiten“ im Sinne von 12.3.2.6 verstanden. Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, welcher Begriff jeweils gemeint ist.

15.1.4.6. Genau dann ist ein Hausdorffraum eine d-Mannigfaltigkeit, wenn jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph ist zu $\mathbb{R}^d$.

Beispiele 15.1.4.7. Jede offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit. Die Sphäre S^d ist eine d-Mannigfaltigkeit.

Beispiel 15.1.4.8. Welche Fälle die Bedingung „Hausdorff“ in der Definition einer Mannigfaltigkeit ausschließt, erkennt man am Beispiel der **Zahlengeraden mit verdoppeltem Nullpunkt**. Wir betrachten genauer die disjunkte Vereinigung $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{\tilde{0}\}$ von $\mathbb{R}$ mit einer einelementigen Menge $\{\tilde{0}\}$ und die Abbildung $\pi : \tilde{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\pi(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$, $\pi(\tilde{0}) = 0$. Auf $\tilde{\mathbb{R}}$ erklären wir eine Topologie durch die Vorschrift „U ist offen in $\tilde{\mathbb{R}}$ genau dann, wenn $\pi(U)$ offen ist in $\mathbb{R}$“. In diesem topologischen Raum haben 0 und $\tilde{0}$ in $\tilde{\mathbb{R}}$ keine disjunkten Umgebungen, aber jeder Punkt besitzt eine zu $\mathbb{R}$ homöomorphe offene Umgebung.

Übungen

Übung 15.1.4.9. Man zeige, daß die Verknüpfung von zwei Einbettungen stets wieder eine Einbettung ist.

Übung 15.1.4.10. Ist ein $\mathbb{R}^n$ homöomorph zur reellen Geraden $\mathbb{R}$, so folgt $n = 1$. In Formeln gilt also $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R} \Rightarrow n = 1$. Hinweis: Das Komplement eines beliebigen Punktes in $\mathbb{R}$ ist nicht wegzusammenhängend.

Übung 15.1.4.11. Man zeige: Das Achsenkreuz $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ ist nicht homöomorph zur Zahlengerade $\mathbb{R}$.

Übung 15.1.4.12. Je zwei nichtleere offene konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind homömorph. Sind unsere Mengen zusätzlich beschränkt, so gibt es sogar einen Homöomorphismus zwischen ihren Abschlüssen, der Homöomorphismen zwischen ihren Rändern induziert.

Übung 15.1.4.13. Das Komplement einer abgeschlossenen diskreten Teilmenge in einer zusammenhängenden topologischen Mannigfaltigkeit der Dimension mindestens zwei ist zusammenhängend. Dasselbe gilt im Übrigen auch ohne die Bedingung „abgeschlossen“, ist dann aber schwerer zu zeigen.

Übung 15.1.4.14. Jede Wegzusammenhangskomponente einer Mannigfaltigkeit ist in unserer Mannigfaltigkeit sowohl offen als auch abgeschlossen. Eine Mannigfaltigkeit ist insbesondere wegzusammenhängend genau dann, wenn sie zusammenhängend ist.

15.1.5 Kompakte Räume

15.1.5.1. Ich erinnere nun an Grundlagen zum Begriff der Kompaktheit allgemeiner topologischer Räume aus **??** und beginne mit einer Wiederholung der Definition.

Definition 15.1.5.2. Ein topologischer Raum heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung unseres Raums eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

15.1.5.3. Ist X unser topologischer Raum, so fordern wir also in Formeln ausgedrückt, daß es für jedes System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von offenen Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ ein endliches Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$ gibt mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U$.

15.1.5.4 (**Diskussion der Terminologie**). Die Konventionen sind, was den Begriff der Kompaktheit angeht, nicht einheitlich. Die hier gewählte Konvention ist im englischen Sprachraum weit verbreitet. Bourbaki und mit ihm die meisten französischen und auch viele andere Autoren nennen die in unserem Sinne kompakten Räume nur „quasikompakt“ und fordern von kompakten Räumen zusätzlich die Hausdorff-Eigenschaft. Eine Teilmenge eines topologischen Raums, deren Abschluß kompakt ist, nennt man **relativ kompakt**.

15.1.5.5 (**Kompaktheit metrischer Räume**). Nach 12.4.1.5 ist ein metrischer Raum „folgenkompakt“, als da heißt, jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge, genau dann, wenn er für seine metrische Topologie kompakt ist im Sinne der obigen Definition 15.1.5.2.

Beispiele 15.1.5.6. Eine Menge mit der diskreten Topologie ist kompakt genau dann, wenn sie endlich ist. Eine Menge mit der Klumpentopologie ist stets kompakt.

15.1.5.7 (**Ausformulierung der Kompaktheit in der Spurtopologie**). Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. So sind gleichbedeutend nach unseren Definitionen (1) die Teilmenge A ist kompakt mit der induzierten Topologie und (2) für jedes System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von offenen Teilmengen von X mit $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ finden wir ein endliches Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$ mit $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U$.

15.1.5.8 (**Kompaktheit ist ein absoluter Begriff**). Man beachte, daß „kompakt“ im Gegensatz zu „offen“ oder „abgeschlossen“ eine Eigenschaft topologischer Räume ist und nicht nur eine Eigenschaft von Teilmengen topologischer Räume.

Lemma 15.1.5.9. *Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist stets kompakt.*

Beweis. Sei X unser kompakter Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Ist $\mathcal{U}$ ein System von offenen Teilmengen von X, deren Vereinigung A umfaßt, so schließen wir

$$\begin{array}{rcl} A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U & \Rightarrow & X = (X \backslash A) \cup \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \\ & \Rightarrow & X = (X \backslash A) \cup U_1 \cup \ldots \cup U_k \\ & \Rightarrow & A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_k \end{array}$$

für geeignete $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$. □

Satz 15.1.5.10. *Das Bild eines kompakten Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets kompakt.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ stetig und X kompakt. Es gilt zu zeigen, daß auch $f(X)$ kompakt ist. Sei dazu $\mathcal{U}$ ein System von offenen Teilmengen von Y. So gilt

$$\begin{array}{rcl} f(X) \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U & \Rightarrow & X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f^{-1}(U) \\ & \Rightarrow & X = f^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_k) \\ & \Rightarrow & f(X) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_k \end{array}$$

für geeignete $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$. □

Lemma 15.1.5.11. *Eine kompakte Teilmenge eines Hausdorffraums ist stets abgeschlossen.*

Beweis. Durch Widerspruch. Sei X unser Hausdorffraum und $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Ist A nicht abgeschlossen, so gibt es $x \in \bar{A} \backslash A$. Für jedes $a \in A$ finden wir in X disjunkte offene Umgebungen U_a und V_a von a und x. Natürlich gilt $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$, also gibt es auch endlich viele $a, \ldots, b \in A$ mit $A \subset U_a \cup \ldots \cup U_b$. Als endlicher Schnitt offener Mengen ist dann jedoch auch $V_a \cap \ldots \cap V_b$ offen und nach Konstruktion gilt $A \cap V_a \cap \ldots \cap V_b = \emptyset$ im Widerspruch zu unserer Annahme $x \in \bar{A}$. □

Definition 15.1.5.12. Eine nicht notwendig stetige Abbildung von topologischen Räumen heißt **abgeschlossen**, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Menge wieder abgeschlossen ist.

Satz 15.1.5.13. *Eine stetige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum ist stets abgeschlossen. Eine stetige bijektive Abbildung von einem kompakten Raum auf einen Hausdorffraum ist stets ein Homöomorphismus.*

Beweis. Seien X kompakt, Y Hausdorff und $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Es reicht zu zeigen, daß f abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet. Aber in der Tat gilt ja $A \mathrel{\not\subset\!\!\!

Übungen

Übung 15.1.5.18. Man sagt, ein System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen einer Menge X habe **nichtleere endliche Schnitte**, wenn für jedes endliche Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ der Schnitt $\bigcap_{A \in \mathcal{E}} A$ nicht leer ist. Man zeige: Ein topologischer Raum X ist kompakt genau dann, wenn für jedes System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit nichtleeren endlichen Schnitten auch der gesamte Schnitt nicht leer ist, in Formeln $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$.

Übung 15.1.5.19 (**Disjunkte Umgebungen disjunkter Kompakta**). Sind A, B disjunkte kompakte Teilmengen eines Hausdorffraums X, so gibt es disjunkte offene Mengen $U, V \Subset X$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$. Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß A nur aus einem Punkt besteht.

Übung 15.1.5.20. In einem kompakten Hausdorffraum läßt sich jede Umgebung eines Punktes zu einer abgeschlossenen Umgebung desselben Punktes verkleinern. Hinweis: 15.1.5.19.

Übung 15.1.5.21. Die Abbildung $(0, 2\pi) \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \exp(\mathrm{i}t)$ ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild.

Übung 15.1.5.22. Gegeben ein topologischer Raum X können wir auf $X \sqcup \{\infty\}$ eine Topologie $\mathcal{T}$ erklären durch die Vorschrift

$$\mathcal{T} := \{U \mid U \Subset X\} \sqcup \{U \sqcup \{\infty\} \mid U \Subset X \text{ mit } X \backslash U \text{ kompakt}\}$$

Man zeige, daß $X \sqcup \{\infty\}$ mit dieser Topologie ein kompakter topologischer Raum ist. Er heißt die **Ein-Punkt-Kompaktifizierung von** X. Gegeben irgendeine weitere Menge Z und eine Hausdorff'sche Topologie auf $X \sqcup Z$, für die in_X eine offene Einbettung ist, muß dann die Abbildung $X \sqcup Z \to X \sqcup \{\infty\}$ stetig sein, die auf X die Identität ist und auf Z konstant den Wert ∞ annimmt.

15.1.6 Initialtopologie

15.1.6.1. Die Initialtopologie ist eine Verallgemeinerung der induzierten Topologie von der Einbettung einer Teilmenge in einen topologischen Raum zu Familien von Abbildungen einer vorgegebenen Menge in verschiedene topologische Räume. Wir besprechen im folgenden diese Konstruktion und ihre Eigenschaften.

15.1.6.2. Gegeben Topologien $\mathcal{T}, \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ auf derselben Menge X sagt man, $\mathcal{T}$ sei **größergleich** $\mathcal{S}$, wenn gilt

$$\mathcal{T} \supset \mathcal{S}$$

In diesem Zusammenhang nennt man eine größere Topologie auch **feiner** und eine kleinere Topologie entsprechend **gröber**.

15.1.6.3 (**Schnitt von Topologien**). Sind $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{P}(X)$ Topologien auf ein- und derselben Menge X, für i aus einer Indexmenge I, so ist offensichtlich auch ihr Schnitt $\mathcal{T} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ eine Topologie.

Definition 15.1.6.4. Ist X eine Menge und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X, so erklärt man auf X die **von $\mathcal{E}$ erzeugte Topologie** $\langle \mathcal{E} \rangle$ als den Schnitt in $\mathcal{P}(X)$ über alle Topologien auf X, die $\mathcal{E}$ umfassen, alias die kleinste Topologie auf X, die $\mathcal{E}$ umfaßt.

15.1.6.5. In der teilgeordneten Menge aller Topologien auf einer vorgegeben „Trägermenge“ hat jede Menge von Topologien ein Supremum nach 15.1.6.4 und ein Infimum nach 15.1.6.3.

15.1.6.6 (**Von Mengensystem erzeugte Topologie, explizite Beschreibung**). Natürlich ist $\langle \mathcal{E} \rangle$ damit die kleinste Topologie auf X, die $\mathcal{E}$ umfaßt. Wir können $\langle \mathcal{E} \rangle$ alternativ auch wie folgt beschreiben: Zunächst bilden wir das Mengensystem $\tilde{\mathcal{E}} = \{U \subset X \mid \exists V_1, \ldots, V_k \in \mathcal{E} \text{ mit } U = V_1 \cap \ldots \cap V_k\}$ aller endlichen Schnitte von Mengen aus $\mathcal{E}$, mitgemeint ist hier $X \in \tilde{\mathcal{E}}$ als der „Schnitt über gar keine Menge aus $\mathcal{E}$“, und anschließend bilden wir das Mengensystem $\langle \mathcal{E} \rangle = \{W \subset X \mid \text{Es gibt } \mathcal{U} \subset \tilde{\mathcal{E}} \text{ mit } W = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U\}$ aller beliebigen Vereinigungen von Mengen aus $\tilde{\mathcal{E}}$, mitgemeint ist hier $\emptyset \in \langle \mathcal{E} \rangle$ als die „Vereinigung über gar keine Menge aus $\tilde{\mathcal{E}}$“. In der Tat ist auch das so konstruierte Mengensystem $\langle \mathcal{E} \rangle$ eine Topologie auf X, und für jede Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit $\mathcal{T} \supset \mathcal{E}$ folgt umgekehrt erst $\mathcal{T} \supset \tilde{\mathcal{E}}$ und dann $\mathcal{T} \supset \langle \mathcal{E} \rangle$.

Definition 15.1.6.7. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine **Subbasis** der Topologie $\mathcal{T}$, wenn es die Topologie erzeugt, in Formeln $\langle \mathcal{E} \rangle = \mathcal{T}$. Es heißt eine **Basis** der Topologie, wenn die offenen Mengen unseres topologischen Raums X gerade alle beliebigen Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{E}$ sind.

Beispiel 15.1.6.8. Die übliche Topologie aus 11.1.1.10 auf der Menge der erweiterten reellen Zahlen $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{\pm\infty\}$ können wir in dieser Terminologie beschreiben als die Topologie, die erzeugt wird von allen Teilmengen der Gestalt $\{x \mid x < a\}$ und allen Teilmengen der Gestalt $\{x \mid x > a\}$ für beliebige $a \in \bar{\mathbb{R}}$.

Definition 15.1.6.9. Eine Familie von stetigen Abbildungen $f_i : X \to Y_i$ heißt **gesamthaft initial**, wenn für jede Abbildung $e : W \to X$ von einem weiteren topologischen Raum nach X gilt:

$$(f_i \circ e \text{ stetig } \forall i) \Rightarrow (e \text{ stetig})$$

15.1.6.10. Wir nennen eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ **initial**, wenn sie als einelementige Familie gesamthaft initial ist. Zum Beispiel ist die Identität auf einem topologischen Raum stets initial. Eine initiale injektive Abbildung topologischer Räume nennen wir eine **topologische Einbettung**.

Lemma 15.1.6.11. *Gegeben X eine Menge, Y_i topologische Räume indiziert durch $i \in I$ und $f_i : X \to Y_i$ eine Familie von Abbildungen gibt es genau eine Topologie auf X derart, daß unsere Familie gesamthaft initial wird. Sie heißt die* **Initialtopologie** *zu unserer Familie.*

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Sind $\mathcal{T}$ und $\mathcal{S}$ zwei Topologien auf X, für die unsere Famlie gesamthaft initial wird, so sind sowohl $\mathrm{id} : (X, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T})$ als auch $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ stetig. Das zeigt $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ und die Eindeutigkeit ist bewiesen. Nun zeigen wir noch, daß die kleinste Topologie $\mathcal{I}$ auf X, für die alle die f_i stetig werden, die von einer Initialtopologie geforderte Eigenschaft hat. In der Tat ist die Finaltopologie zu e aus Übung 15.1.1.26 auch eine Topologie auf X, für die alle f_i stetig sind, und es folgt $\mathcal{T} \supset \mathcal{I}$ alias e stetig. □

15.1.6.12. Explizit kann man die Initialtopologie für $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ beschreiben als die Topologie auf X, die von allen $f_i^{-1}(V)$ mit $i \in I$ und $V \Subset Y_i$ erzeugt wird.

Beispiel 15.1.6.13. Ist Y ein topologischer Raum und $X \subset Y$ eine Teilmenge, so stimmt die auf X induzierte Topologie überein mit der Initialtopologie zur Inklusion $X \hookrightarrow Y$.

15.1.6.14 (**Transitivität gesamthaft initialer Familien**). Seien $f_i : X \to Y_i$ und $g_{ji} : Y_i \to Z_{ji}$ Familien von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen. Ist die Familie der $g_{ji} f_i$ gesamthaft initial, so auch die Familie der f_i. Ist die Familie der $(g_{ji})_j$ gesamthaft initial für alle i und die Familie der f_i gesamthaft initial, so ist auch die Familie der $g_{ji} f_i$ gesamthaft initial. Das alles folgt unmittelbar aus der Definition.

15.1.6.15. Die vorhergehende Bemerkung 15.1.6.14 besagt unter anderem, daß die Verknüpfung von zwei initialen Abbildungen stets initial ist und daß eine Verknüpfung $g \circ f$ von zwei stetigen Abbildungen nur dann initial sein kann, wenn f initial ist. Insbesondere ist jede stetige Abbildung initial, die eine stetige Linksinverse besitzt.

Vorschau 15.1.6.16. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ nennen wir ganz allgemein eine Familie von Morphismen $f_i : X \to Y_i$ in $\mathcal{S}$ **gesamthaft initial in Bezug auf** v, wenn für alle $W \in \mathcal{S}$ gilt

$$v : \mathcal{S}(W, X) \xrightarrow{\sim} \{e \in \mathcal{C}(vW, vX) \mid v f_i \circ e \in v(\mathcal{S}(W, Y_i)) \ \forall i\}$$

Unsere Aussagen zur Transitivität gesamthaft initialer Familien gelten auch in dieser Allgemeinheit. Im Fall des Vergißfunktors $v : \mathfrak{U}\mathrm{Top} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ für geeignete Mengensysteme $\mathfrak{U}$ erhalten wir die obigen Resultate zurück. Die Initialtopologie kann als Spezialfall der „initialen $(\mathcal{S}, v)$-Struktur“ verstanden werden, wie wir im Zusammenhang mit sogenannten „$(\mathcal{S}, v)$-Strukturen auf Objekten von $\mathcal{C}$“ an anderer Stelle diskutieren.

Definition 15.1.6.17. Gegeben $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume ist die **Produkttopologie** auf ihrem kartesischen Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ definiert als die Initialtopologie zu den Projektionen auf die Koordinaten $\mathrm{pr}_j : \prod X_i \to X_j$.

15.1.6.18. Abstrakt gefaßt erhalten wir so genau das Produkt im Sinne der Kategorientheorie 4.7.7.1 in der Kategorie der topologischen Räume. Im Fall von zwei Faktoren erhalten wir unsere Produkttopologie aus 13.1.4.17 zurück.

15.1.6.19. Ausformuliert bedeutet diese Definition: Alle pr_j sind stetig, und eine Abbildung $e : W \to \prod X_i$ von einem topologischen Raum W in das Produkt ist stetig genau dann, wenn alle $\mathrm{pr}_j\, e : W \to X_j$ es sind. Etwas expliziter liefert die Konstruktion der Initialtopologie, daß die Produkttopologie auf $\prod X_i$ erzeugt wird durch alle Mengen der Form $\mathrm{pr}_i^{-1}(U_i)$ für $i \in I$ und $U_i \Subset X_i$. Eine Basis der Topologie wird folglich gegeben durch alle endlichen Schnitte solcher Mengen alias die „offenen Quader“

$$U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_k} \times \prod_{i\neq i_1,\ldots,i_k} X_i$$

mit $U_{i_\nu} \Subset X_{i_\nu}$ für paarweise verschiedene i_ν.

15.1.6.20. Auf einem endlichen Produkt metrischer Räume liefert die Produktmetrik „Maximum der Abstände auf den Koordinaten“ stets die Produkttopologie. Speziell stimmt auf dem $\mathbb{R}^n$ die Produkttopologie überein mit der natürlichen Topologie aus 11.2.3.15.

15.1.6.21 (**Initalität ist verträglich mit Produkten**). Das Produkt einer Familie von stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen ist eine stetige Abbildung zwischen den Produkten der jeweiligen Räume. Sind hier alle Abbildungen Einbettungen, so auch ihr Produkt. Sind alle Abbildungen initial, so auch ihr Produkt. Das alles ist eine einfache Anwendung unserer allgemeinen Aussagen zur Transitivität gesamthaft initialer Familien 15.1.6.14.

Proposition 15.1.6.22 (**Abgeschlossenheit der Diagonale bedeutet hausdorffsch**). *Genau dann ist ein topologischer Raum X hausdorffsch, wenn die Diagonale eine abgeschlossene Teilmenge des Produkts unseres Raums mit sich selbst ist, in Formeln*

$$\Delta(X) \not\Subset X \times X$$

Beweis. Ist X hausdorffsch, so gibt es für $(x, y) \in (X\times X)\backslash\Delta(X)$ disjunkte offene Umgebungen $U, V \Subset X$ von x beziehungsweise y. Dann ist $(U\times V) \Subset (X\times X)$ eine offene Umgebung von (x, y), die die Diagonale nicht trifft, also liegt (x, y) nicht im Abschluß der Diagonale. Ist umgekehrt die Diagonale abgeschlossen, so gibt es für $x \neq y$ eine offene Umgebung von (x, y), die die Diagonale nicht trifft.

Diese Umgebung ist eine Vereinigung von Quadern $U \times V$ mit $U, V \Subset X$ und U disjunkt zu V, und einer von diesen Quadern muß (x, y) enthalten, wir haben also also $x \in U$ und $y \in V$ und X ist hausdorffsch. □

Definition 15.1.6.23. Eine Abbildung von topologischen Räumen heißt **offen**, wenn das Bild jeder offenen Menge offen ist. Eine Abbildung von topologischen Räumen heißt **abgeschlossen**, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist. Wir fordern von einer offenen oder abgeschlossenen Abbildung nicht, daß sie stetig sein muß.

Beispiel 15.1.6.24. Die Projektionen eines Produkts von topologischen Räumen auf seine Faktoren sind stets offen, sie sind jedoch im allgemeinen nicht abgeschlossen. Zum Beispiel ist die sogenannte Hyperbel $\{(x, y) \mid xy = 1\}$ eine abgeschlossene Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$, ihre Projektion auf die x-Achse ist jedoch keine abgeschlossene Teilmenge der Zahlengerade $\mathbb{R}$.

15.1.6.25 (**Produkte offener Abbildungen**). Jedes endliche Produkt von offenen Abbildungen ist offen. Jedes beliebige Produkt von offenen Surjektionen ist eine offene Surjektion. Beides folgt leicht aus der expliziten Beschreibung der Produkttopologie 15.1.6.19.

Satz 15.1.6.26 (**Zusammenhang von Produkten**). *Ein Produkt von topologischen Räumen ist zusammenhängend genau dann, wenn alle Faktoren zusammenhängend sind.*

15.1.6.27. Um diesen Satz so prägnant formulieren zu können, müssen wir unsere Konvention zugrundelegen, nach der die leere Menge kein zusammenhängender topologischer Raum ist.

Beweis. Ist das Produkt zusammenhängend, so nach 15.1.3.7 auch die Faktoren als die Bilder der stetigen Projektionen. Für die Rückrichtung prüfen wir unser Zusammenhangskriterium 15.1.3.8. Sei $(X_i)_{i \in I}$ unsere Familie von topologischen Räumen und $f : \prod X_i \to \{0, 1\}$ stetig. Wenn X_i zusammenhängend ist, so folgt $f(x) = f(y)$, wenn sich x und y nur in der i-ten Koordinate unterscheiden. Daraus folgt induktiv $f(x) = f(y)$, wenn sich x und y nur in endlich vielen Koordinaten unterscheiden. Gilt nun $f^{-1}(0) \neq \emptyset$, so folgt $f^{-1}(0) \supset U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_k} \times \prod_{i \neq i_1, \ldots, i_k} X_i$ für geeignete paarweise verschiedene Indizes $i_1, \ldots, i_k$ und geeignete nichtleere offene Teilmengen $U_{i_1} \Subset X_{i_1}, \ldots, U_{i_k} \Subset X_{i_k}$. Mit unserer Vorüberlegung folgt daraus sofort, daß f konstant sein muß. □

Übungen

Übung 15.1.6.28. Für jeden topologischen Raum X ist die diagonale Einbettung $X \to X \times X$ initial.

Übung 15.1.6.29. Ist $f : X \to Y$ stetig und Y Hausdorff, so ist der Graph von f eine abgeschlossene Teilmenge $\Gamma(f) \not\subset X \times Y$.

Übung 15.1.6.30. Stimmen zwei stetige Abbildungen von einem topologischen Raum in einen Hausdorffraum auf einer dichten Teilmenge überein, so sind sie gleich. Hinweis: Zusammen liefern unsere beiden stetigen Abbildungen eine Abbildung in das kartesische Produkt, unter der das Urbild der Diagonale wegen 15.1.6.22 abgeschlossen sein muß.

Ergänzende Übung 15.1.6.31. Ein Produkt von abgeschlossenen Teilmengen ist stets eine abgeschlossene Teilmenge des Produkts. Allgemeiner zeige man für topologische Räume X, Y und Teilmengen$A \subset X$ und $B \subset Y$ die Gleichheit $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$ des Abschlusses des Produkts mit dem Produkt der Abschlüsse.

Übung 15.1.6.32. Für beliebige topologische Räume X, Y, Z ist die offensichtliche Abbildung $X \times Y \times Z \to (X \times Y) \times Z$ ein Homöomorphismus.

Übung 15.1.6.33. Ein beliebiges Produkt von Hausdorffräumen ist Hausdorff.

Ergänzende Übung 15.1.6.34. Man zeige, daß die Menge aller $(x, y) \in \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$ mit $x \leq y$ abgeschlossen ist. Man folgere, daß bei Grenzwerten von Funktionen mit Werten in $\bar{\mathbb{R}}$ Ungleichungen erhalten bleiben. Hinweis: 15.1.2.22.

Ergänzende Übung 15.1.6.35. Sind $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen, so ist auch die Abbildung $H : X \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ mit $(x, \tau) \mapsto \tau f(x) + (1 - \tau)g(x)$ stetig.

Ergänzende Übung 15.1.6.36. Das Produkt von zwei Mannigfaltigkeiten der Dimensionen n und m ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n + m$.

Ergänzende Übung 15.1.6.37. Jede kompakte d-Mannigfaltigkeit X läßt sich stetig in einen $\mathbb{R}^n$ einbetten. Hinweis: Man findet für jedes $x \in X$ eine stetige Abbildung $f_x : X \to \mathbb{R}^d$, die injektiv ist auf einer offenen Umgebung U_x von x. Endlich viele dieser U_x überdecken X.

Übung 15.1.6.38. Man zeige: Das Produkt von zwei kompakten Räumen ist kompakt. Der Satz von Tychonoff 15.3.2.10 wird uns sagen, daß sogar ein beliebiges Produkt von kompakten Räumen kompakt ist.

Ergänzende Übung 15.1.6.39. Gegeben topologische Räume X und Y sowie Kompakta $K \subset X$ und $L \subset Y$ sowie $W \Subset X \times Y$ mit $K \times L \subset W$ gibt es $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ mit $K \subset U$ und $L \subset V$ sowie

$$U \times V \subset W$$

Ergänzende Übung 15.1.6.40. Man zeige, daß es keinen topologischen Raum X gibt derart, daß $X \times X$ homöomorph ist zu $\mathbb{R}$. Hinweis: Man zeige, daß für X zusammenhängend mit mehr als einem Punkt das Komplement eines Punktes in

$X \times X$ auch zusammenhängend ist. Man zeige allgemeiner, daß es keine zwei topologischen Räume X, Y mit jeweils mindestens zwei Punkten so gibt, daß $X \times Y$ homöomorph ist zu $\mathbb{R}$. Höherdimensionale Analoga zeigen wir in 17.5.7.12.

Ergänzende Übung 15.1.6.41. Auf dem Produkt einer abzählbaren Familie metrischer Räume existieren stets Metriken, die die Produkttopologie induzieren. Weiter zeige man, daß das Produkt einer abzählbaren Familie kompakter metrischer Räume kompakt ist. Hinweis: Man mag sich an **??** orientieren. In 15.3.2.10 zeigen wir allgemeiner aber auch mühsamer den Satz von Tychonoff, nach dem beliebige Produkte kompakter Räume kompakt sind.

15.1.7 Finaltopologie

15.1.7.1. Die Finaltopologie in Bezug auf eine Abbildung von einem topologischen Raum in eine Menge kennen wir bereits aus 15.1.1.26. Hier besprechen wir eine Variante für Familien von Abbildung von topologischen Räumen in eine Menge und Eigenschaften dieser Konstruktion.

Definition 15.1.7.2. Eine Familie von stetigen Abbildungen $f_i : X_i \to Y$ heißt **gesamthaft final**, wenn für jede Abbildung $h : Y \to W$ in einen weiteren topologischen Raum gilt:

$$(hf_i \text{ stetig } \forall i) \Rightarrow (h \text{ stetig})$$

15.1.7.3. Wir eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ **final**, wenn sie als einelementige Familie gesamthaft final ist. Zum Beispiel ist die Identität auf einem topologischen Raum stets final. Wir sagen, eine Abbildung $f : X \to Y$ sei **final auf ihr Bild**, wenn die induzierte Abbildung $f : X \to f(X)$ final ist.

Lemma 15.1.7.4. *Gegeben $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume, Y eine Menge und $f_i : X_i \to Y$ eine Familie von Abbildungen gibt es genau eine Topologie auf Y, für die unsere Familie gesamthaft final wird. Sie heißt die* **Finaltopologie** *zu unserer Familie.*

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Sind $\mathcal{T}$ und $\mathcal{S}$ zwei Topologien auf Y, für die unsere Famlie gesamthaft final wird, so sind sowohl $\mathrm{id} : (Y, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ als auch $\mathrm{id} : (Y, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ stetig. Das zeigt $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ und so die Eindeutigkeit. Andererseits ist klar, daß $\mathcal{T} := \{V \subset Y \mid f_i^{-1}(V) \Subset X_i \ \forall i\}$ eine Topologie ist und die von einer Finaltopologie geforderte Eigenschaft hat. $\square$

15.1.7.5 (**Transitivität gesamthaft finaler Familien**). Seien $e_{ij} : W_{ij} \to X_i$ und $f_i : X_i \to Y$ Familien von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen. Ist die Familie der $f_i e_{ij}$ gesamthaft final, so auch die Familie der f_i. Ist die Familie der e_{ij} gesamthaft final für alle i und die Familie der f_i gesamthaft final, so ist

auch die Familie der $f_i e_{ij}$ gesamthaft final. Das alles folgt unmittelbar aus der Definition.

15.1.7.6. Die vorhergehende Bemerkung 15.1.7.5 besagt unter anderem, daß die Verknüpfung von zwei finalen Abbildungen stets final ist und daß eine Verknüpfung fe von zwei stetigen Abbildungen nur dann final sein kann, wenn f final ist. Insbesondere ist jede stetige Abbildung final, die eine stetige Rechtsinverse alias einen stetigen **Schnitt** besitzt. Gibt es in anderen Worten eine stetige Abbildung s mit $f \circ s = \mathrm{id}$, so ist f final. Insbesondere ist jede Projektion von einem Produkt mit nichtleeren Faktoren auf einen der Faktoren final.

15.1.7.7. Ist $f : X \twoheadrightarrow Y$ eine Surjektion, so heißt die Finaltopologie auf Y auch die **Quotiententopologie**.

15.1.7.8. In unserem abstrakten Kontext aus 15.1.6.16 sind gesamthaft finale Familien stetiger Abbildungen genau die gesamthaft initialen Familien in Bezug auf den treuen Funktor $v^{\mathrm{opp}} : \mathfrak{U}\mathrm{Top}^{\mathrm{opp}} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}}$ für jedes Mengensystem $\mathfrak{U}$, das alle beteiligten Räume X_i, Y enthält.

Beispiel 15.1.7.9. Wir konstruieren das **Möbiusband**. Zu dem Behufe betrachten wir auf $[0,1] \times [-1,1]$ die Äquivalenzrelation $\sim$, die erzeugt wird von $(0,y) \sim (1,-y)$. Die Menge der Äquivalenzklassen versehen wir mit der Quotiententopologie, und fertig ist das Möbiusband. Als Übung zeige man, daß unser so konstruiertes Möbiusband kompakt ist.

Beispiel 15.1.7.10 (**Verkleben topologischer Räume**). Wir zeigen, wie man mit unserem Formalismus zwei topologische Räume X und Y verkleben kann. Wir brauchen dazu als „Kleber“ eine Menge K und Abbildungen $f : K \to X$, $g : K \to Y$. Dann betrachten wir auf der disjunkten Vereinigung $Y \sqcup X$ die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt von $f(z) \sim g(z) \;\; \forall z \in K$ und nehmen als Topologie auf der Verklebung

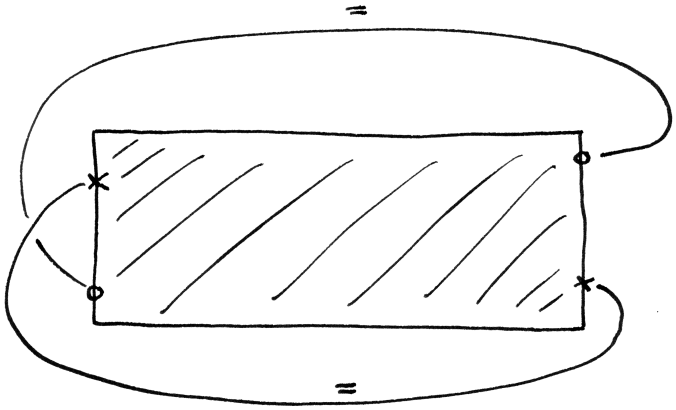
$$Y \sqcup_K X = (Y \sqcup X)/\sim$$

die Finaltopologie zu den beiden offensichtlichen Abbildungen $X \to Y \sqcup_K X$, $Y \to Y \sqcup_K X$.

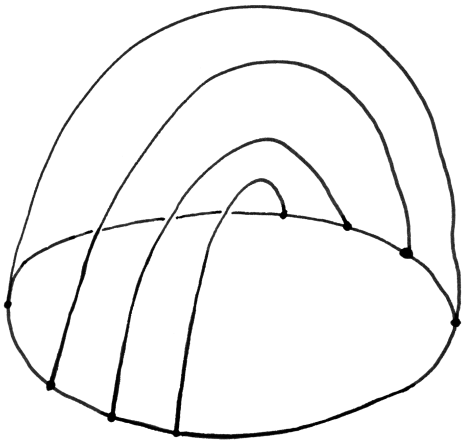
Definition 15.1.7.11. Gegeben $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume erklärt man ihre **topologische Summe** als ihre disjunkten Vereinigung $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ definiert als die finale Topologie zu den Injektionen $\mathrm{in}_j : X_j \to \bigsqcup X_i$.

15.1.7.12. Abstrakt gefaßt erhalten wir so genau das Koprodukt im Sinne der Kategorientheorie 4.7.7.16 in der Kategorie der topologischen Räume.

15.1.7.13. Ausformuliert bedeutet diese Definition: Alle in_j sind stetig, und eine Abbildung $g : \bigsqcup X_i \to Z$ vom Koprodukt in einen topologischen Raum Z ist stetig genau dann, wenn alle $g \circ \mathrm{in}_j : X_j \to Z$ es sind. Etwas expliziter liefert die



Versuch einer graphischen Darstellung unserer Konstruktion des Möbiusbands. Der besseren Vorstellung halber habe ich hier das Rechteck $[0,5] \times [-1,1]$ gezeichnet und die Identifikationsvorschrift für die senkrechten Kanten durch mit $=$ bezeichnete Linien beispielhaft angedeutet.



Man erhält eine stetige Abbildung des Möbiusbands nach $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ vermittels der Formel $(t,\tau) \mapsto (\tau\,\mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\,t}, \sqrt{1-\tau^2}\cos^2 \pi t)$. Anschaulich gesprochen verbindet man je zwei gegenüberliegende Punkte des Einheitskreises durch einen Bogen mit variierender mittlerer Höhe. Das Bild ist eine sich selbst durchdringende räumliche Fläche, bei der man sich die Selbstdurchdringung leicht wegdenken kann. Man nennt sie auch die **Kreuzhaube**. In dieser Anschauung für das Möbiusband bezahlt man in gewisser Weise mit der Selbstdurchdringung für die gute Sichtbarkeit des Randkreises.

Konstruktion der Finaltopologie, daß eine Teilmenge der topologischen Summe genau dann offen ist, wenn ihr Schnitt mit jedem X_j offen ist in X_j.

Lemma 15.1.7.14 (Finalität von Restriktionen). *Ist $f : X \to Y$ eine finale Abbildung von topologischen Räumen und ist $V \subset Y$ offen oder abgeschlossen, so ist auch die induzierte Abbildung $f : f^{-1}(V) \to V$ final. Dasselbe gilt analog auch für gesamthaft finale Familien.*

15.1.7.15. Für beliebiges $V \subset Y$ ist die entsprechende Aussage meines Wissens nicht richtig.

Beweis. Wir zeigen das nur im Fall $V \Subset Y$, den anderen Fall behandelt man analog. Es gilt für $U \subset V$ zu zeigen $U \Subset V \Leftrightarrow f^{-1}(U) \Subset f^{-1}(V)$. Dazu überlegen wir uns $U \Subset V \Leftrightarrow U \Subset Y \Leftrightarrow f^{-1}(U) \Subset X \Leftrightarrow f^{-1}(U) \Subset f^{-1}(V)$. Die äußeren Implikationen folgen dabei aus 15.1.1.10, die mittlere aus der Finalität von f. □

Lemma 15.1.7.16 (Finalität von Surjektionen). *Jede stetige offene oder abgeschlossene Surjektion ist final.*

Beweis. Gegeben eine Surjektion $f : X \twoheadrightarrow Y$ gilt für jede Teilmenge $V \subset Y$ bereits $V = f(f^{-1}(V))$. Ist f zusätzlich offen, so folgt aus $f^{-1}(V) \Subset X$ also $V \Subset Y$ und f ist in der Tat final. Im Fall einer stetigen abgeschlossenen Surjektion argumentiert man genauso. □

Beispiel 15.1.7.17. Jede stetige Surjektion von einem kompakten Raum auf einen Hausdorffraum ist final nach 15.1.7.16, denn sie ist abgeschlossen nach 15.1.5.13.

15.1.7.18. Sei X ein topologischer Raum. Ein System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt **lokal endlich**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung besitzt, die nur endlich viele der Teilmengen unseres Systems trifft.

Proposition 15.1.7.19 (Gesamthafte Finalität von Überdeckungen). *Gegeben eine offene oder eine lokal endliche abgeschlossene Überdeckung eines topologischen Raums bilden die zugehörigen Einbettungen eine gesamthaft finale Familie.*

Beweis. Im Fall einer offenen Überdeckung ist das nur eine Umformulierung unserer Proposition 15.1.1.20, nach der Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist. Im Fall einer endlichen abgeschlossenen Überdeckung folgt das ebenso direkt aus Proposition 15.1.1.20. Im Fall einer lokal endlichen abgeschlossenen Überdeckung folgt es aus einer Kombination dieser beiden Aussagen oder alternativ, da je eine Abbildung stetig ist, wenn sie stetig ist in jedem Punkt. □

Beispiel 15.1.7.20 (**Finalität ist lokal in der Basis**). Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Mit der „Basis“ ist der Raum Y gemeint. Besitzt diese Basis Y eine offene Überdeckung $\mathcal{V}$ derart, daß $f : f^{-1}(V) \to V$ final ist für alle $V \in \mathcal{V}$,

zum Beispiel weil es jeweils einen Schnitt besitzt, so ist auch f selbst final. In der Tat bilden dann nach der Transitivität gesamthaft finaler Familien 15.1.7.5 und der gesamthaften Finalität von Überdeckungen 15.1.7.19 die Abbildungen $f^{-1}(V) \to Y$ eine gesamthaft finale Familie, und da diese über $f : X \to Y$ faktorisiert, ist nach der zweiten Aussage in 15.1.7.5 auch f final.

Beispiel 15.1.7.21. Die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ ist final, da sie lokal stetige Schnitte besitzt, zum Beispiel über jeder geschlitzten Ebene. Eine Funktion $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ ist also genau dann stetig, wenn $f \circ \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig ist.

Beispiel 15.1.7.22. Das Potenzieren $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ ist final für $n \geq 1$. In diesem Fall besitzt $\mathbb{C}$ nämlich eine endliche Überdeckung durch abgeschlossene Teilmengen, etwa geeignete abgeschlossene Winkelsegmente, auf denen sie jeweils einen stetigen Schnitt besitzt, und man kann 15.1.7.28 anwenden. Alternativ mögen sie aus der Funktionentheorie wissen, daß nichtkonstante holomorphe Abbildungen mit zusammenhängendem Definitionsbereich offen sind, und offene stetige Surjektionen sind nach 15.1.7.16 final. Als drittes Argument mögen sie nochmal mit 15.1.7.28 argumentieren und eine lokal endliche Überdeckung durch abgeschlossene Kreisringe konstruieren, auf die zurückgezogen unsere Abbildung jeweils final ist nach 15.1.7.17 als stetige surjektive Abbildung von einem Kompaktum auf einen Hausdorffraum.

Vorschau 15.1.7.23 (**Finalität und Produkte**). Es ist meines Wissens im allgemeinen nicht richtig, daß daß für $f : X \to Y$ final und Z ein beliebiger topologischer Raum auch $f \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ final wäre. Wir zeigen jedoch in 15.1.9.15, daß gegeben eine finale Surjektion $f : X \twoheadrightarrow Y$ und Z lokal kompakt auch $f \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ final ist.

Übungen

Übung 15.1.7.24. Gegeben ein diskreter Raum F und ein beliebiger Raum X stimmt die Produkttopologie auf $X \times F$ überein mit der Finaltopologie in Bezug auf die Abbildungen $i_f : X \to X \times F$ für alle $f \in F$, die gegeben werden durch $x \mapsto (x, f)$.

Übung 15.1.7.25 (**Eigenschaften stetiger offener Surjektionen**). Wir wissen aus 15.1.7.16 bereits, daß stetige offene Surjektionen final sind. Man zeige darüber hinaus die folgenden Eigenschaften.

1. Ist $f : X \to Y$ eine stetige offene Surjektion und Z ein topologischer Raum, so ist auch $f \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ eine stetige offene Surjektion;

2. Ist $f : X \to Y$ eine stetige offene Surjektion und $V \subset X$ ein Teilmenge, so ist auch $f : f^{-1}(V) \to V$ eine stetige offene Surjektion;

3. Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen und ist $gf : X \to Z$ eine stetige offene Surjektion, so auch g. Insbesondere ist jede stetige Abbildung, die einen stetigen Schnitt besitzt, eine stetige offene Surjektion;

4. Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $Y = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$ eine offene Überdeckung derart, daß alle $f : f^{-1}(V) \to V$ stetige offene Surjektionen sind, so ist auch f eine stetige offene Surjektion.

Salopp gesprochen sind stetige offene Surjektionen „die besseren finalen Abbildungen“.

Übung 15.1.7.26 (**Verträglichkeit von endlichen Produkten mit Koprodukten**). In der Kategorie der Mengen kommutieren Koprodukte mit beliebigen Produkten. In der Kategorie der topologischen Räume kommutieren Koprodukte mit beliebigen endlichen Produkten. In der Kategorie der abelschen Gruppen gilt noch nicht einmal das.

Übung 15.1.7.27. Gegeben X ein topologischer Raum, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ ein Mengensystem ist f ist stetig für die von $\mathcal{E}$ erzeugte Topologie auf Y genau dann, wenn die Urbilder aller $V \in \mathcal{E}$ offen sind in X. Hinweis: Sind die Urbilder aller $V \in \mathcal{E}$ offen, so ist $\mathcal{E}$ enthalten in der finalen Topologie auf Y.

Übung 15.1.7.28 (**Finalitätskriterium über abgeschlossene Überdeckungen**). Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Besitzt die Basis Y eine lokal endliche Überdeckung $\mathcal{V}$ durch abgeschlossene Teilmengen derart, daß $f : f^{-1}(V) \to V$ final ist für alle $V \in \mathcal{V}$, so ist auch f selbst final. Hinweis: Man passe die Argumentation aus 15.1.7.20 an.

Übung 15.1.7.29 (**Finale Abbildungen und Zusammenhang**). Ist $f : X \to Y$ final mit zusammenhängenden Fasern, so sind die Zusammenhangskomponenten von X die Urbilder der Zusammenhangskomponenten von Y. Ist insbesondere Y zusammenhängend, so auch X.

Ergänzende Übung 15.1.7.30. Sei $f : X \twoheadrightarrow Y$ eine stetige Surjektion auf einen Hausdorffraum. Besitzt Y eine lokal endliche Überdeckung durch Teilmengen, deren Urbilder unter f kompakt sind, so ist f final. Hinweis: 15.1.7.17 und 15.1.7.28. Besitzt insbesondere ein Hausdorffraum eine lokal endliche Überdeckung durch Kompakta, so kann man keine offenen Mengen hinzufügen, ohne die lokal endliche Überdeckbarkeit durch Kompakta zu verlieren.

Übung 15.1.7.31 (**Stetigkeitseigenschaften der Nullstellen von Polynomen**). Die Vorschrift $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto (T - \lambda_1) \ldots (T - \lambda_n)$ liefert für jedes n eine finale Abbildung $\pi : \mathbb{C}^n \twoheadrightarrow \mathrm{Pol}^n$ in den affinen Raum Pol aller normierten komplexen

Polynome vom Grad n, und die davon induzierte Abbildung ist ein Homöomorphismus

$$\mathbb{C}^n/\mathcal{S}_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pol}^n$$

Hier meint $\mathbb{C}^n/\mathcal{S}_n$ den Bahnenraum für die Operation der symmetrischen Gruppe durch Vertauschung der Koordinaten mit der Quotiententopologie alias den Raum der Multimengen komplexer Zahlen der Kardinalität n. Auf unserem Raum Pol^n dahingegen betrachten wir die natürliche Topologie. Unser Satz ist ein topologisches Analogon des Hauptsatzes über symmetrische Polynome 6.2.9.6, vergleiche 7.5.3.7. Hinweis: Man mag etwa davon ausgehen, daß aufgrund der Abschätzung 3.5.3.33 Urbilder von Kompakta K unter π stets wieder kompakt sind.

Beispiel 15.1.7.32. Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig, so ist auch die Abbildung $\mathrm{Pol} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $(T - \lambda_1) \ldots (T - \lambda_n) \mapsto f(\lambda_1) + \ldots + f(\lambda_n)$ stetig.

Übung 15.1.7.33. Man zeige, daß im Raum aller normierten reellen Polynome vom Grad n die über $\mathbb{R}$ zerfallenden Polynome eine abgeschlossene Teilmenge bilden und daß darin die offene Teilmenge der Polynome ohne Nullstelle bei Null in $(n+1)$ Zusammenhangskomponenten zerfällt, die durch die Zahl der mit Vielfachheit genommenen positiven Nullstellen der in ihnen enthaltenen Polynome charakterisiert werden können.

Vorschau 15.1.7.34. In der Homotopietheorie arbeitet man oft mit sogenannten **CW-Komplexen**. Darunter versteht man einen Hausdorffraum X mit einer Familie von stetigen Abbildungen $\varphi_\alpha : D^{n(\alpha)} \to X$ von geschlossenen Bällen $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ nach X derart, daß gilt:

1. Die Restriktionen unserer Abbildungen auf die offenen Bälle sind Homöomorphismen auf ihr Bild $\varphi_\alpha : (D^{n(\alpha)} \backslash S^{n(\alpha)}) \xrightarrow{\sim} \varphi_\alpha(D^{n(\alpha)} \backslash S^{n(\alpha)})$ und unser Raum X ist als Menge die disjunkte Vereinigung der Bilder der offenen Bälle $X = \bigsqcup_\alpha \varphi_\alpha(D^{n(\alpha)} \backslash S^{n(\alpha)})$. Diese Bilder der offenen Bälle heißen die **Zellen** unseres CW-Komplexes;

2. Für jedes α ist $\varphi_\alpha(S^{n(\alpha)})$ enthalten in einer endlichen Vereinigung von Bildern von anderen φ_β mit $n(\beta) < n(\alpha)$;

3. Der Raum X trägt die finale Topologie in Bezug auf die Familie der $\varphi_\alpha : D^{n(\alpha)} \to X$.

Die zweite Bedingung heißt auf Englisch „closure finiteness“, die Dritte „weak topology“, daher die Terminologie. Große Vorsicht ist bei Produkten angesagt: Das Produkt von zwei CW-Komplexen mit seiner offensichtlichen Zellstruktur muß keineswegs wieder ein CW-Komplex sein, sondern kann mehr offene Teilmengen haben als die finale Topologie zur offensichtlichen Zellstruktur. Mehr Details stehen bei Hatcher.

Ergänzende Übung 15.1.7.35. Gegeben ein CW-Komplex X ist die Vereinigung $X^{\leq n}$ aller Zellen der Dimension $\leq n$ abgeschlossen. Sie heißt das n**-Skelett** unseres CW-Komplexes.

Ergänzende Übung 15.1.7.36. Ein Kompaktum in einem CW-Komplex trifft höchstens endlich viele Zellen. Hinweis: Eine Teilmenge, die jede Zelle nur in endlich vielen Punkten trifft, ist diskret.

15.1.8 Abzählbar basierte Einsmannigfaltigkeiten*

15.1.8.1. Dieser Abschnitt ist für das Weitere entbehrlich. Er dient im Wesentlichen dazu, den Leser davon zu überzeugen, daß die bisher entwickelten abstrakten Begriffsbildungen immer noch eine enge Beziehung zur Anschauung haben.

Satz 15.1.8.2 (Klassifikation kompakter Einsmannigfaltigkeiten). *Jede zusammenhängende kompakte topologische Einsmannigfaltigkeit ist homöomorph zur Kreislinie S^1.*

15.1.8.3. Weitere Resultate in dieser Richtung kann man etwa in [FR84, p. 139] finden. Wir schicken dem eigentlichen Beweis ein Lemma voraus.

Lemma 15.1.8.4. *Läßt sich ein zusammenhängender Hausdorffraum schreiben als Vereinigung von zwei offenen zu $\mathbb{R}$ homöomorphen Teilmengen, so ist er homöomorph zur Zahlengeraden $\mathbb{R}$ oder zur Kreislinie S^1.*

Beweis. Sei X unser Raum und seien $\varphi, \psi : \mathbb{R} \hookrightarrow X$ stetige offene Einbettungen, deren Bilder X überdecken. Da X zusammenhängend ist, haben wir $\varphi(\mathbb{R}) \cap \psi(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Sicher ist $\varphi^{-1}(\psi(\mathbb{R}))$ offen in $\mathbb{R}$, folglich ist jede Zusammenhangskomponente dieser Menge ein offenes Intervall. Wäre solch eine Zusammenhangskomponente beschränkt, sagen wir von der Gestalt (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$, so folgte $(\psi^{-1} \circ \varphi)((a, b)) = (\psi^{-1} \circ \varphi)([a, b])$, und da $\varphi([a, b])$ kompakt und damit abgeschlossen ist, wäre $(\psi^{-1} \circ \varphi)((a, b))$ sowohl offen als auch abgeschlossen und damit ganz $\mathbb{R}$ und es folgte $\varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} X$ und wir wären fertig. Wir dürfen also annehmen, jede Zusammenhangskomponente von $\varphi^{-1}(\psi(\mathbb{R}))$ sei ein unbeschränktes Intervall. Folglich besitzt dieser Raum und damit auch $\varphi(\mathbb{R}) \cap \psi(\mathbb{R})$ entweder eine oder zwei Zusammenhangskomponenten. Wir beginnen mit dem Fall einer Komponente. Indem wir notfalls φ beziehungsweise ψ durch ihre Verknüpfung mit $t \mapsto -t$ ersetzen, dürfen wir annehmen, daß es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt derart, daß φ und ψ Homöomorphismen

$$(-\infty, a) \xrightarrow{\sim} \varphi(\mathbb{R}) \cap \psi(\mathbb{R}) \xleftarrow{\sim} (b, \infty)$$

induzieren. Die Verknüpfung ist also streng monoton. Wäre sie streng monoton fallend, so hätten wir

$$\lim_{x \nearrow a} \varphi(x) = \varphi(a) = \psi(b) = \lim_{y \searrow b} \psi(y)$$

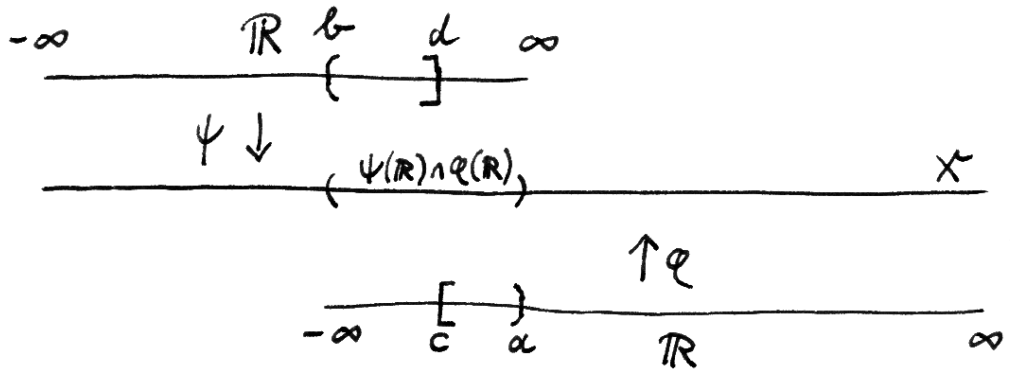


Illustration zum Beweis von 15.1.8.4.

im Widerspruch zur Wahl von a und b. Also ist unsere Verknüpfung streng monoton wachsend und gegeben c, d mit $\varphi(c) = \psi(d)$ haben wir

$$X = \psi((-\infty, d]) \cup \varphi([c, \infty))$$

wobei $\varphi(c) = \psi(d)$ der einzige gemeinsame Punkt dieser beiden Mengen ist. Sie sind beide abgeschlossen in X, da ihre Urbilder unter ψ und φ es sind. Daraus folgt dann, daß X homöomorph ist zu $\mathbb{R}$. Im Fall zweier Komponenten argumentieren wir analog. □

Beweis von Satz 15.1.8.2. Sei $X = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_r$ eine offene Überdeckung durch zu $\mathbb{R}$ homöomorphe Teilmengen. Wir können die Mengen unserer Überdeckung so anordnen, daß $U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_i$ für jedes $i \geq 1$ zusammenhängend ist. Ist i minimal derart, daß $U_1 \cup \ldots \cup U_i$ nicht homöomorph ist zu $\mathbb{R}$, so muß nach dem Lemma diese Vereinigung bereits homöomorph zu S^1 sein und damit als nichtleere abgeschlossene und offene Teilmenge mit ganz X zusammenfallen. □

Satz 15.1.8.5 (Klassifikation abzählbar basierter Einsmannigfaltigkeiten). *Jede abzählbar basierte topologische Einsmannigfaltigkeit besitzt abzählbar viele Zusammenhangskomponenten und jede von diesen ist homöomorph zur Kreislinie S^1 oder zur reellen Zahlengerade $\mathbb{R}$.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß jede nichtkompakte abzählbar basierte zusammenhängende Einsmannigfaltigkeit M homöomorph zur reellen Zahlengeraden $\mathbb{R}$ ist. Per definitionem besitzt M eine abzählbare Überdeckung durch zu $\mathbb{R}$ homöomorphe offene Teilmengen $M = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$. Wir greifen willkürlich ein $I \in \mathcal{I}$ heraus und nennen es $U_0 := I_0$. Gilt $U_0 = M$, so sind wir fertig und setzen nur proForma $U_1 := U_0$. Andernfalls muß es es, da M zusammenhängend vorausgesetzt war, $I_1 \in \mathcal{I}$ geben mit $U_0 \cap I_1 \neq \emptyset$. Nach 15.1.8.4 ist $U_0 \cup I_1$ homöomorph zu S^1 oder zu $\mathbb{R}$. Im ersteren Fall wäre $U_0 \cup I_1$ kompakt, also abgeschlossen, also ganz M im Widerspruch zu unserer Annahme. Also gilt $U_0 \cup I_1 \cong \mathbb{R}$ und wir setzen $U_1 := U_0 \cup I_1$. So machen wir immer weiter und finden eine Überdeckung

$$M = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$$

durch eine Folge von zu $\mathbb{R}$ homöomorphen offenen Teilmengen

$$U_0 \subset U_1 \subset \ldots$$

Offensichtlich finden wir dann eine monoton fallende Folge a_n und eine monoton wachsende Folge b_n in $\mathbb{R}$ und mit den Einbettungen verträgliche Homöomorphismen $(a_n, b_n) \xrightarrow{\sim} U_n$. Der Satz folgt. □

15.1.9 Topologisches Exponentialgesetz

Definition 15.1.9.1. Gegeben topologische Räume X, Y bezeichne $\mathrm{Top}(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y. Gegeben Teilmengen $K \subset X$ und $U \subset Y$ bezeichne

$$\mathcal{O}(K, U) \subset \mathrm{Top}(X, Y)$$

die Menge aller stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ mit $f(K) \subset U$. Die auf $\mathrm{Top}(X, Y)$ von den Mengen $\mathcal{O}(K, U)$ für $K \subset X$ kompakt und $U \Subset Y$ offen erzeugte Topologie heißt wie in 13.3.10.2 die **kompakt-offene Topologie**. Wir denken uns Räume stetiger Abbildungen im Zweifelsfall stets mit dieser Topologie versehen und verwenden für den so entstehenden topologischen Raum die Notation

$$\mathcal{C}(X, Y)$$

15.1.9.2 (**Diskussion der Notation**). Manche Quellen verwenden die Notation $Y^X = \mathcal{C}(X, Y)$. Ich will versuchen, diese exponentielle Schreibweise zu vermeiden. Sie hat den Nachteil, daß in wieder anderen Quellen die Notation Y^X vielmehr die Menge aller Abbildungen $\mathrm{Ens}(X, Y)$ bezeichnet.

Lemma 15.1.9.3 (**Funktorialitäten**). *Gegeben stetige Abbildungen $f : X' \to X$ und $g : Y \to Y'$ sind auch die induzierten Abbildungen $(\circ f) : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(X', Y)$ und $(g\circ) : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(X, Y')$ stetig.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus $(\circ f)^{-1}\mathcal{O}(K', U) = \mathcal{O}(f(K), U)$. Die zweite Behauptung folgt aus $(g\circ)^{-1}\mathcal{O}(K, U') = \mathcal{O}(K, g^{-1}(U'))$. □

15.1.9.4. Unter einer **Eigenschaft** von Objekten einer Kategorie $\mathcal{C}$ versteht man formal einen Funktor $\mathcal{C}^\times \to \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ von der Isomorphismenkategorie von $\mathcal{C}$ in die diskrete Kategorie der zweielementigen Menge der Wahrheitswerte.

Definition 15.1.9.5. Sei (E) eine Eigenschaft topologischer Räume. Sagen wir, ein topologischer Raum X sei **lokal** (E), so meinen wir, daß sich jede Umgebung eines beliebigen Punkts von X verkleinern läßt zu einer Umgebung desselben Punktes, die als topologischer Raum mit der induzierten Topologie die Eigenschaft (E) hat.

Beispiel 15.1.9.6. Speziell heißt ein topologischer Raum **lokal kompakt**, wenn sich jede Umgebung eines jeden seiner Punkte zu einer kompakten Umgebung des besagten Punktes verkleinern läßt. Diese Terminologie hatten wir bereits in 13.1.10.5 eingeführt.

15.1.9.7 (**Diskussion der Terminologie**). In der Terminologie von Bourbaki wird von einem lokal kompakten Raum zusätzlich die Hausdorff-Eigenschaft gefordert. Ich schließe mich dieser Terminologie nicht an, da sie im Widerspruch steht zu der eben vereinbarten allgemeinen Bedeutung des Adjektivs „lokal". Im Deutschen bringt man diesen Unterschied zumindest in der alten Rechtschreibung dadurch zum Ausdruck, daß man „lokalkompakt" zusammenschreibt, wenn die Hausdorff-Bedingung mit gemeint ist.

Lemma 15.1.9.8. *Besitzt in einem Hausdorffraum jeder Punkt eine kompakte Umgebung, so ist unser Raum bereits lokal kompakt im Sinne von 15.1.9.5.*

Beweis. Seien X unser Hausdorffraum und $p \in U \subset K \subset X$ ein Punkt, eine in X offene Menge $U \Subset X$ und ein Kompaktum K. Es gilt, $V \Subset X$ zu finden mit $p \in \bar{V} \subset U$. Nach 15.1.5.19 finden wir $V, W \Subset K$ disjunkt mit $K \backslash U \subset W$ und $p \in V$. Aus $V \Subset K$ und $V \subset U$ folgt erst $V \Subset U$ und dann $V \Subset X$. Wir haben $\bar{V} := \mathrm{Cl}_X(V) = \mathrm{Cl}_K(V)$ und $V \cap W = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Cl}_K(V) \cap W = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Cl}_K(V) \subset U$ alias $\bar{V} \subset U$ wie gewünscht. □

Satz 15.1.9.9 (**Exponentialgesetz, schwache Form**). *Seien X, Y, Z topologische Räume. Ist Y lokal kompakt, so induziert die Bijektion aus dem Exponentialgesetz $\mathrm{Ens}(X \times Y, Z) \tilde{\to} \mathrm{Ens}(X, \mathrm{Ens}(Y, Z))$ eine Bijektion zwischen den entsprechenden Teilmengen von stetigen Abbildungen*

$$\mathrm{Top}(X \times Y, Z) \tilde{\to} \mathrm{Top}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$$

15.1.9.10. In der Terminologie der Kategorientheorie 16.4.3 bedeutet dieser Satz, daß für lokal kompaktes Y der Funktor $\mathcal{C}(Y, \ ) : \mathrm{Top} \to \mathrm{Top}$ rechtsadjungiert ist zum Funktor $\ \times Y$. In Korollar 15.1.9.13 folgern wir, daß die Abbildung im Satz unter der zusätzlichen Annahme, daß auch X lokal kompakt ist, sogar einen Homöomorphismus $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \tilde{\to} \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$ induziert. Das heißt dann eigentlich erst das Exponentialgesetz aus Gründen, die dort erläutert werden. In 13.3.10.4 formulieren wir bereits das sehr schwache Exponentialgesetz, nach dem für beliebige Räume X, Y, Z und $f : X \times Y \to Z$ stetig auch die induzierte Abbildung $F : X \to \mathcal{C}(Y, Z)$ stetig ist. Der Beweis wird gleich wiederholt.

Beweis. Sei $f : X \times Y \to Z$ stetig und $F : X \to \mathcal{C}(Y, Z)$ die induzierte Abbildung. Es ist im folgenden wichtig zu unterscheiden zwischen der Abbildung F und der Abbildung $F(x) : Y \to Z$ für festes $x \in X$. Wir wiederholen zunächst, noch ohne irgendwelche Bedingungen an Y, den Beweis aus 13.3.10.4, daß F stetig ist. Es reicht, diese Stetigkeit an jeder Stelle $x \in X$ zu zeigen. Gegeben $K \subset Y$ kompakt und $U \Subset Z$ offen mit $F(x) \in \mathcal{O}(K, U)$ gilt es, eine offene Umgebung V von x zu finden mit $F(V) \subset \mathcal{O}(K, U)$. In der Tat folgt dann

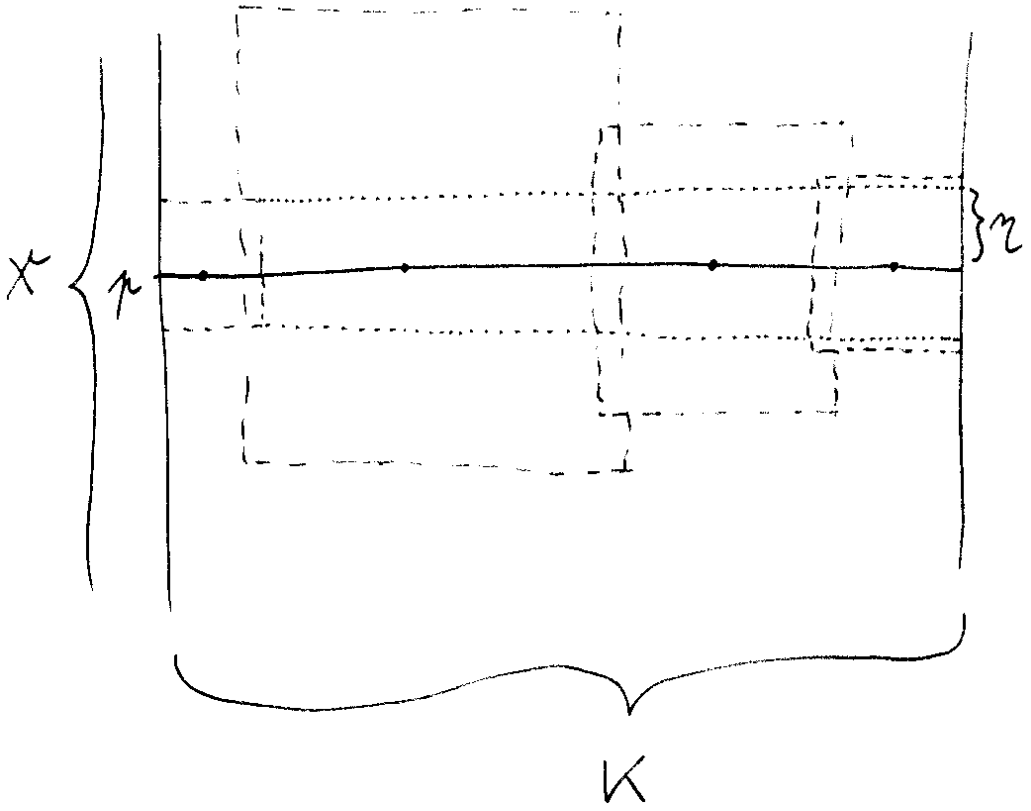


Illustration zum Beweis von Satz 15.1.9.9. Das Bild kommt von dem Beweis des Spezialfalls 11.2.5.4. Das p im Bild heißt in unserem Beweis x, das η im Bild ist so gewählt, daß der η-Ball um x alias p in V enthalten wäre.

$F^{-1}(\mathcal{O}(K,U)) \Subset X$ und mit 15.1.7.27 die Stetigkeit von F. Nun besagt unsere Bedingung gerade $(x \times K) \subset f^{-1}(U)$. Wir finden für all $y \in K$ offene Teilmengen $V_y \Subset X$ und $W_y \Subset Y$ mit

$$(x,y) \in V_y \times W_y \subset f^{-1}(U)$$

Wegen der Kompaktheit von K finden wir sogar $E \subset K$ endlich mit $K \subset \bigcup_{y \in E} W_y$. Jetzt setzen wir $V := \bigcap_{y \in E} V_y$ und haben $(V \times K) \subset f^{-1}(U)$ alias $F(V) \subset \mathcal{O}(K,U)$ wie gewünscht. Sei nun umgekehrt $F : X \to \mathcal{C}(Y,Z)$ stetig und sei $f : X \times Y \to Z$ die induzierte Abbildung. Es gilt zu zeigen, daß f stetig ist an jeder Stelle $(x,y) \in X \times Y$. Sei also $U \Subset Z$ eine offene Umgebung von $f(x,y) = (F(x))(y)$. Nach Annahme ist $F(x) : Y \to Z$ stetig und Y lokal kompakt, folglich gibt es eine kompakte Umgebung K von y mit $(F(x))(K) \subset U$ alias $F(x) \in \mathcal{O}(K,U)$. Da nun auch die Abbildung $F : X \to \mathcal{C}(Y,Z)$ stetig ist bei x, gibt es dann auch eine Umgebung V von x mit $F(V) \subset \mathcal{O}(K,U)$, also mit $f(V \times K) \subset U$. Damit ist $V \times K$ die gesuchte Umgebung von (x,y), die unter f nach U abgebildet wird. □

Korollar 15.1.9.11 (Stetigkeit des Auswertens). *Ist Y lokal kompakt und Z ein beliebiger topologischer Raum, so ist das Auswerten $\mathcal{C}(Y,Z) \times Y \to Z$ stetig.*

Beweis. Das Auswerten entspricht unter der Bijektion aus unserem Adjunktionssatz 15.1.9.9 der Identität auf $\mathcal{C}(Y,Z) = X$ rechts. □

Korollar 15.1.9.12. *Gegeben ein lokal kompakter topologischer Raum X und eine Familie topologischer Räume (Y_i) liefert die offensichtliche Abbildung einen Homöomorphismus*

$$\mathcal{C}\left(X, \prod_i Y_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_i \mathcal{C}(X, Y_i)$$

Beweis. In kategorieller Sprache ausgedrückt besagt unser Lemma, daß der Funktor $\mathcal{C}(X, \ ) : \mathrm{Top} \to \mathrm{Top}$ verträglich ist mit Produkten. Das folgt mit der Adjunktion 15.1.9.9 unmittelbar aus der allgemeinen Erkenntnis 17.7.1.30, daß ein rechtsadjungierter Funktor stets mit Limites vertauscht. □

Korollar* 15.1.9.13 (Exponentialgesetz). *Seien X, Y, Z topologische Räume. Sind X und Y lokal kompakt, so induziert unser Exponentialgesetz für Mengen einen Homöomorphismus*

$$\mathcal{C}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y,Z))$$

Ergänzung 15.1.9.14. In der anderen Schreibweise liest sich das $Z^{X \times Y} \xrightarrow{\sim} (Z^Y)^X$, daher die Terminologie. Ich benutze diese Aussage im weiteren nicht und zeige sie nur der Vollständigkeit halber.

Beweis. Die Stetigkeit dieser Abbildung ist nach 15.1.9.9 gleichbedeutend erst zur Stetigkeit der induzierten Abbildung $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \times X \to \mathcal{C}(Y, Z)$ und durch erneutes Anwenden von 15.1.9.9 auch zur Stetigkeit der induzierten Abbildung $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \times X \times Y \to Z$. Diese Stetigkeit folgt jedoch aus 15.1.9.11, da mit X und Y auch $X \times Y$ lokal kompakt ist. Also ist die im Korollar betrachtete Bijektion stetig und es bleibt nur noch, die Stetigkeit ihrer Umkehrabbildung zu zeigen. Die Stetigkeit dieser Umkehrabbildung ist jedoch nach 15.1.9.9 gleichbedeutend zur Stetigkeit der induzierten Abbildung $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \times X \times Y \to Z$, die hinwiederum stetig sein muß als die Verknüpfung von zwei nach 15.1.9.9 stetigen Abbildungen $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \times X \times Y \to \mathcal{C}(Y, Z) \times Y \to Z$. □

Proposition 15.1.9.15. *Ist $p : X \to Y$ final und surjektiv und Z lokal kompakt, so ist auch $p \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ final und surjektiv.*

15.1.9.16. Wir geben in 17.3.4.7 noch einen direkteren Beweis für dieselbe Aussage.

Beweis. Sei W ein topologischer Raum und $g : Y \times Z \to W$ eine Abbildung. Ist $g \circ (p \times \mathrm{id}) : X \times Z \to W$ stetig, so nach 15.1.9.9 auch die induzierte Abbildung $X \to \mathcal{C}(Z, W)$. Diese Abbildung faktorisiert jedoch als $X \to Y \to \mathcal{C}(Z, W)$ mit p als erstem Pfeil und der von g induzierten Abbildung als zweitem Pfeil, da wir p surjektiv vorausgesetzt hatten. Ist zusätzlich p final, so ist folglich mit $g \circ (p \times \mathrm{id})$ auch die von g induzierte Abbildung $Y \to \mathcal{C}(Z, W)$ stetig und damit nach 15.1.9.9 wiederum g selbst. □

Ergänzung 15.1.9.17. Ein Raum Y heißt **kompakt erzeugt**, wenn er Hausdorff ist und wenn die offensichtliche Abbildung $\bigsqcup_{K \in \mathcal{K}} K \to Y$ final ist, für $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(Y)$ das System aller kompakten Teilräume, vergleiche etwa [**?**]. Man kann zeigen, daß es in der Kategorie der kompakt erzeugten Räume Produkte gibt, die allerdings nicht mit den üblichen Produkten in der Kategorie aller topologischen Räume übereinstimmen, daß das Darankreuzen einen Rechtsadjungierten hat, der allerdings nicht mit dem Raum der stetigen Abbildungen und seiner kompakt-offenen Topologie übereinstimmt, und daß in dieser Begrifflichkeit auch eine Variante des Exponentialgesetzes gilt.

Übungen

Übung 15.1.9.18. Ist X ein kompakter topologischer Raum, so stimmt die kompakt-offene Topologie auf $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ überein mit der von der Supremumsnorm induzierten Topologie.

Übung 15.1.9.19. Gegeben topologische Räume X, Y ist diejenige Abbildung $Y \to \mathcal{C}(X, Y)$ stetig, die jedem Punkt $y \in Y$ die entsprechende konstante Abbildung zuordnet, die eben ganz X auf diesen einen Punkt y wirft.

Übung 15.1.9.20. Gegeben topologische Räume X, Y mit X lokal kompakt ist das Auswerten eine stetige Abbildung $X \to \mathcal{C}(\mathcal{C}(X,Y),Y)$. Hinweis: Man verwende die Stetigkeit des Auswertens 15.1.9.11 und das sehr schwache Exponentialgesetz 15.1.9.10.

Übung 15.1.9.21. Die stetigen Abbildungen von einem lokal kompakten topologischen Raum in einen topologischen Vektorraum bilden unter der punktweisen Verknüpfung und mit der kompaktoffenen Topologie selbst einen topologischen Vektorraum. Hinweis: 15.1.9.12.

Übung 15.1.9.22. Ist $Y \to Y'$ initial und X ein beliebiger topologischer Raum, so ist auch $\mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Y')$ initial.

Ergänzende Übung 15.1.9.23. Man zeige, daß für jeden lokal kompakten Raum Y die Verknüpfung $\mathcal{C}(X,Y)\times\mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z)$ stetig ist. Hinweis: Gegeben $Q \subset V \Subset Y$ eine kompakte Teilmenge in einer offenen Teilmenge gibt es unter unseren Annahmen stets eine kompakte Teilmenge $R \subset Y$ und eine offene Teilmenge $W \Subset Y$ mit $Q \subset W \subset R \subset V$. Sind X und Y lokal kompakt, folgt das auch leicht aus dem schwachen Exponentialgesetz 15.1.9.9 und der Stetigkeit des Auswertens 15.1.9.11.

Übung 15.1.9.24. Ich erinnere an unsere Abkürzung $\mathcal{C}(X,\mathbb{C}) = \mathcal{C}(X)$. Man zeige: Ist X ein lokal kompakter Raum und $F : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{C}$ differenzierbar nach der ersten Variablen mit stetiger partieller Ableitung $\partial F : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{C}$, so gilt für die Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathcal{C}(X)$, $t \mapsto F(t,\ )$ im topologischen Vektorraum $\mathcal{C}(X)$ die Identität

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = (\partial F)(0,\ )$$

Analoges gilt für Abbildungen $F : \mathbb{R} \times X \to V$ in einen beliebigen normierten reellen Vektorraum.

Übung 15.1.9.25. Jede stetige Surjektion $f : X \twoheadrightarrow Y$ auf einen lokal kompakten Hausdorffraum derart, daß alle Urbilder unter f von Kompakta wieder kompakt sind, ist final. Hinweis: Finalität von Restriktionen 15.1.7.14 und Lokalität von Finalität in der Basis 15.1.7.20.

15.2 Topologie und algebraische Strukturen

15.2.1 Topologische Gruppen

15.2.1.1. Ich erinnere an die Produkttopologie 15.1.6.17. Im folgenden denken wir uns alle Produkte von topologischen Räumen mit dieser Topologie vershehen.

Definition 15.2.1.2. Ein **topologisches Magma** ist ein Magma M mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung $M \times M \to M$ stetig ist.

Definition 15.2.1.3. Ein **topologisches Monoid** ist ein Monoid M mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung $M \times M \to M$ stetig ist.

Definition 15.2.1.4. Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe G mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung $G \times G \to G$ und die Inversenabbildung $G \to G$ stetig sind.

15.2.1.5 (**Diskussion der Terminologie**). Manche Autoren fordern von ihren topologischen Gruppen zusätzlich auch noch die Hausdorff-Eigenschaft, aber ich schließe mich dieser Konvention nicht an und nenne eine hausdorffsche topologische Gruppe kurz eine **Hausdorffgruppe**.

Ergänzung 15.2.1.6. Segal und Nikolov haben gezeigt, daß eine kompakte Hausdorffgruppe keinen surjektiven Gruppenhomomorphismus auf eine unendliche aber endlich erzeugte Gruppe besitzen kann. Gemeint sind hier Homomorphismen von abstrakten Gruppen, also nach Vergessen der Topologie.

Beispiele 15.2.1.7. Die Gruppen $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ sind topologische Gruppen in der von der natürlichen Topologie auf dem endlichdimensionalen reellen Vektorraum aller reellen $(n \times n)$-Matrizen induzierten Topologie. Jeder normierte Vektorraum ist mit der Addition als Verknüpfung und der metrischen Topologie eine topologische Gruppe.

15.2.1.8 (**Stetigkeit von Translationen**). Gegeben ein topologisches Magma M ist die Linkstranslation $(x\cdot) : M \to M$ stetig als die Verknüpfung

$$M \xrightarrow{(x,\mathrm{id})} M \times M \to M$$

mit x der entsprechenden konstanten Abbildung $M \to M$, die ja stets stetig ist. In derselben Weise folgt, daß auch die Rechtstranslationen $(\cdot x)$ stetig sind und daß im Fall einer topologischen Gruppe alle Translationen und ebenso die Konjugationen $g \mapsto xgx^{-1}$ für alle x Homöomorphismen sind.

15.2.1.9. Jede offene Untergruppe einer topologischen Gruppe ist auch abgeschlossen als das Komplement der Vereinigung ihrer nichttrivialen Linksnebenklassen.

Lemma 15.2.1.10. *Eine zusammenhängende topologische Gruppe wird von jeder Umgebung ihres neutralen Elements erzeugt.*

Beweis. In der Tat erzeugt in jeder topologischen Gruppe jede Umgebung des neutralen Elements eine offene Untergruppe. Nach 15.2.1.9 ist diese offene Untergruppe auch abgeschlossen. Ist unsere Gruppe zusammenhängend, so muß sie also bereits mit besagter Untergruppe übereinstimmen. □

Ergänzung 15.2.1.11. Ein stetiger Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in eine topologische Gruppe heißt ein **Gruppenweg** in unserer topologischen Gruppe. In der Literatur ist auch die Bezeichnung als **Einparameteruntergruppe** gebräuchlich. In 11.2.3.19 bestimmen wir die Gruppenwege in der additiven Gruppe eines normierten reellen Vektorraums, in 22.1.4.5 die Gruppenwege in Matrixliegruppen.

Ergänzung 15.2.1.12. Gegeben eine Umgebung $U \subset G$ des neutralen Elements einer topologischen Gruppe gibt es stets eine weitere Umgebung $V \subset G$ des neutralen Elements mit $V^2 \subset U$ alias $xy \in U \ \forall x, y \in V$. In der Tat gibt es eine Umgebung von $(1, 1)$ in $G \times G$, die unter der Verknüpfung in U landet, und jede solche Umgebung umfaßt eine Umgebung der Gestalt $A \times B$ für Umgebungen A, B von $1 \in G$. Der Schnitt $A \cap B$ ist dann die gesuchte Umgebung V des neutralen Elements.

Übungen

Übung 15.2.1.13. Ist G eine Hausdorffgruppe und $A \subset G$ eine abelsche Untergruppe, so ist auch der Abschluß $\bar{A}$ unserer Untergruppe abelsch. In der Tat folgt aus $aba^{-1}b^{-1} = 1$ für alle $a, b \in A$ dasselbe zunächst für alle $a \in A, b \in \bar{A}$ und dann für alle $a, b \in \bar{A}$.

Übung 15.2.1.14. Man zeige, daß eine zusammenhängende topologische Gruppe mit einer abzählbar basierten Umgebung des neutralen Elements stets abzählbar basiert ist. Hinweis: Gegeben eine offene Teilmenge $U \Subset G$ ist die Multiplikation $U^n \to G$ stets offen.

Übung 15.2.1.15. Jede Untergruppe einer topologischen Gruppe ist mit der induzierten Topologie selbst eine topologische Gruppe. Jedes Produkt topologischer Gruppen ist mit der Produkttopologie wieder eine topologische Gruppe.

Ergänzende Übung 15.2.1.16. Die Einheiten jeder Banach-Algebra bilden mit der metrischen Topologie eine topologische Gruppe. Die unitären Automorphismen eines Hilbertraums bilden eine abgeschlossene Untergruppe in der Einheitengruppe der Banach-Algebra der beschränkten Operatoren auf unserem Hilbertraum.

Übung 15.2.1.17. Ein Gruppenhomomorphismus von topologischen Gruppen ist stetig genau dann, wenn er stetig ist beim neutralen Element.

Übung 15.2.1.18. Gegeben eine Untergruppe einer topologischen Gruppe ist auch ihr Abschluß eine Untergruppe.

Übung 15.2.1.19. In jeder topologischen Gruppe ist die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements eine Untergruppe, ja sogar ein Normalteiler. Man nennt sie meist die **Einszusammenhangskomponente** oder kurz **Einskomponente**. Die Einskomponente einer topologischen Gruppe G wird G° notiert.

Übung 15.2.1.20. In einer topologischen Gruppe erzeugt jede zusammenhängende Umgebung der Eins die Einskomponente.

Übung 15.2.1.21. Jeder diskrete Normalteiler einer zusammenhängenden topologischen Gruppe liegt bereits im Zentrum besagter Gruppe.

Übung 15.2.1.22. Sei G eine Gruppe mit einer Topologie. Sind die Translationen $(g\cdot) : G \to G$ und $(\cdot g) : G \to G$ stetig für alle $g \in G$, ist die Inversenbildung stetig beim neutralen Element e, und ist die Verknüpfung $G \times G \to G$ stetig bei (e, e), so ist G eine topologische Gruppe.

Übung 15.2.1.23. Ein **topologischer Schiefkörper** ist ein Schiefkörper k mit einer Topologie derart, daß die Addition und die Multiplikation stetig sind als Abbildungen $k \times k \to k$ sowie, für die auf $k^\times$ induzierte Topologie, auch das Bilden des Inversen $k^\times \to k^\times$. Man zeige, daß für einen Hausdorff'schen topologischen Schiefkörper k die Gruppen $\mathrm{GL}(d; k)$ topologische Gruppen sind.

Ergänzende Übung 15.2.1.24. Jede topologische Gruppe, die homöomorph ist zur additiven Gruppe $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, ist bereits als topologische Gruppe isomorph zur Gruppe $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Übung 15.2.1.25. Ist G eine topologische Gruppe und $H \subset G$ eine diskrete Untergruppe, so gibt es eine Umgebung $U \subset G$ des neutralen Elements derart, daß die Multiplikation eine Injektion $H \times U \hookrightarrow G$ induziert. In einer Hausdorffgruppe ist jede diskrete Untergruppe abgeschlossen. Hinweis: Man verwende 15.2.1.12 und führe für den zweiten Teil die Annahme $\bar{H} \neq H$ zum Widerspruch.

Übung 15.2.1.26. Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ die Gruppe seiner unitären Automorphismen. Man zeige, daß $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ eine topologische Gruppe wird, wenn wir sie mit der Initialtopologie zu allen Auswertungen an Vektoren $\mathrm{ev}_v : \mathrm{U}(\mathcal{H}) \to \mathcal{H}$ für $v \in \mathcal{H}$ versehen, der sogenannten **starken Topologie**. Man zeige weiter: Ist G eine topologische Gruppe und $\alpha : G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ eine Operation durch unitäre Abbildungen, so ist α genau dann stetig, wenn der induzierte Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{U}(\mathcal{H})$ stetig ist für die starke Operatortopologie auf $\mathrm{U}(\mathcal{H})$.

Übung 15.2.1.27. Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ die Gruppe seiner unitären Automorphismen. Man zeige, daß auf $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ die starke Topologie übereinstimmt mit der sogenannten **schwachen Topologie**, die definiert ist als Initialtopologie zu allen Abbildungen $\mathrm{U}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$, $A \mapsto \langle w, Av\rangle$ für $v, w \in \mathcal{H}$. Hinweis: Mit

$|\langle v, Av\rangle - \langle v, v\rangle|$ ist auch $\|v - Av\|$ klein. Man zeige weiter: Ist $\mathcal{H}$ abzählbar basiert, so auch $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ mit seiner starken Topologie.

Übung 15.2.1.28. Die stetigen Abbildungen von einem lokal kompakten topologischen Raum in eine topologische Gruppe bilden unter der punktweisen Verknüpfung und mit der kompakt-offenen Topologie selbst eine topologische Gruppe. Hinweis: 15.1.9.12.

15.2.2 Quotienten nach Gruppenwirkungen

15.2.2.1. Eine Operation $M \times X \to X$ eines topologischen Monoids auf einem topologischen Raum heißt **stetig**, wenn sie stetig ist in Bezug auf die Produkttopologie auf $M \times X$. Denken wir uns hier M mit der diskreten Topologie versehen, so sprechen wir von einer **Operation durch stetige Abbildungen**.

15.2.2.2. Stetige Abbildungen $f : X \to Y$ mit $f \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ final für beliebiges Z nennen wir **produktfest final**. Jede stetige offene Surjektion ist final nach 15.1.7.16 und bleibt unter dem Darankreuzen beliebiger Identitäten nach 15.1.6.25 eine stetige offene Surjektion. Stetige offene Surjektionen sind mithin produktfest final.

15.2.2.3. Operiert eine Gruppe G auf einem topologischen Raum X, so versehen wir den **Bahnenraum** X/G a priori mit der Quotiententopologie zur Projektion $X \twoheadrightarrow X/G$.

Lemma 15.2.2.4 (Gruppenquotienten). *Operiert eine Gruppe G durch stetige Abbildungen auf einem topologischen Raum X, so ist die Quotientenabbildung $\pi : X \twoheadrightarrow X/G$ eine stetige offene Surjektion und insbesondere produktfest final. Ist G endlich, so ist π zusätzlich abgeschlossen.*

15.2.2.5. Operiert eine Gruppe G durch stetige Abbildungen auf einem topologischen Raum X, so ist nach 15.2.2.2 insbesondere für jeden weiteren Raum Y die induzierte Abbildung $Y \times X \twoheadrightarrow Y \times X/G$ final. Mithin ist die Identität ein Homöomorphismus $(Y \times X)/G \xrightarrow{\sim} Y \times X/G$.

Beweis. Das Urbild des Bildes einer Teilmenge $U \subset X$ ist die Vereinigung all ihrer mit der Gruppenoperation verschobenen Kopien, $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g\in G} gU$. Aus $U \Subset X$ folgt so $\pi^{-1}(\pi(U)) \Subset X$ und damit $\pi(U) \Subset X/G$. □

Beispiel 15.2.2.6. Die offensichtliche Operation von $\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{R})$ auf $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ ist stetig für die Topologie auf $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ als Bahnenraum der Operation von $\mathbb{R}^\times$ auf $\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$. Um das zu sehen, betrachte man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(n+1;\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}\backslash 0 & \to & \mathbb{R}^{n+1}\backslash 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{GL}(n+1;\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^n\mathbb{R} & \to & \mathbb{P}^n\mathbb{R} \end{array}$$

Die obere Horizontale ist offensichtlich stetig und die linke Vertikale ist final nach 15.2.2.2, da die Quotientenabbildung nach Lemma 15.2.2.4 produktfest final ist. Mithin ist auch die untere Horizontale stetig.

Definition 15.2.2.7. Ein topologischer Raum X mit einer stetigen transitiven Operation einer topologischen Gruppe G heißt ein **homogener G-Raum**.

Lemma 15.2.2.8 (Quotienten als homogene Räume). *Gegeben eine topologische Gruppe G und eine Untergruppe $H \subset G$ ist die Operation von G auf G/H stetig.*

Beweis. Man betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times G/H & \to & G/H \end{array}$$

und beachte, daß die linke Vertikale nach 15.2.2.4 final ist. □

15.2.2.9. Gegeben eine Menge X mit einer transitiven Operation einer topologischen Gruppe G gibt es offensichtlich genau eine Topologie auf X derart, daß für jeden Punkt $x \in X$ das Anwenden $G \to X$, $g \mapsto gx$ eine finale Abbildung ist. Wir nennen sie die **feinste Topologie als homogener Raum** auf X. In der Tat ist für jeden Punkt $x \in X$ die offensichtliche Bijektion $G/G_x \xrightarrow{\sim} X$ automatisch stetig und ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn X die feinste Topologie als homogener Raum trägt.

Proposition 15.2.2.10 (Quotienten nach abgeschlossenen Untergruppen). *Eine Untergruppe einer topologischen Gruppe ist abgeschlossen genau dann, wenn der Quotient nach unserer Untergruppe Hausdorff ist.*

Beweis. Seien $G \supset H$ besagte Gruppen. Ist der Quotient G/H Hausdorff, so sind seine Punkte abgeschlossen und damit ist auch H abgeschlossen in G als Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge von G/H. Für die Umkehrung gilt es nach 15.1.6.22 zu zeigen, daß die Diagonale $\Delta_{G/H}$ in $G/H \times G/H$ abgeschlossen ist. Das Produkt der Projektionen $G \times G \to G/H \times G/H$ ist als Produkt offener stetiger Surjektionen auch selbst final. Es reicht also zu zeigen, daß das Urbild der Diagonale $\Delta_{G/H}$ in $G \times G$ abgeschlossen ist. Dies Urbild kann aber auch beschrieben werden als das Urbild von H unter der Abbildung $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ und ist abgeschlossen, wenn H abgeschlossen ist. □

15.2.2.11 (**Zusammenhangskomponenten von Bahnenräumen**). Operiert eine zusammenhängende topologische Gruppe G stetig auf einem topologischen Raum X, so ist X zusammenhängend genau dann, wenn X/G zusammenhängend ist.

Operiert allgemeiner eine zusammenhängende topologische Gruppe G stetig auf einem topologischen Raum X, so induziert die Quotientenabbildung $X \twoheadrightarrow X/G$ eine Bijektion zwischen der Menge $\mathrm{Zus}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ der Zusammenhangskomponenten von X und der Menge $\mathrm{Zus}(X/G) \subset \mathcal{P}(X/G)$ der Zusammenhangskomponenten von X/G. Das alles folgt sofort aus Übung 15.1.7.29 über finale Abbildungen und Zusammenhang.

Beispiel 15.2.2.12 (**Zusammenhang der speziellen orthogonalen Gruppen**). Die Gruppen $\mathrm{SO}(n)$ sind zusammenhängend. In der Tat folgt mit der Finalität 15.1.7.17 stetiger Surjektionen von kompakten Räumen auf Hausdorffräume, daß die Operation auf der n-Sphäre S^n einen Homöomorphismus $\mathrm{SO}(n{+}1)/\mathrm{SO}(n) \xrightarrow{\sim} S^n$ liefert, und mit Induktion über n und 15.2.2.11 folgt die Behauptung. In derselben Weise zeigt man, daß auch die Gruppen $\mathrm{SU}(n)$ zusammenhängend sind. Ein Beweis mit mehr Algebra und weniger Topologie wird in 12.7.5.19 skizziert.

Übungen

Übung 15.2.2.13. Ist $f : X \twoheadrightarrow Y$ eine stetige offene Surjektion von topologischen Räumen, die äquivariant ist für Operationen einer Gruppe G auf beiden Räumen, in Formeln $f(gx) = gf(x)$, und ist G mit einer Topologie versehen, für die die Operation auf X stetig ist, so ist auch die Operation auf Y stetig. Hinweis: 15.2.2.8.

Übung 15.2.2.14. Operiert eine kompakte Hausdorffgruppe stetig auf einem lokal kompakten Hausdorffraum, so ist auch der Bahnenraum Hausdorff. Hinweis: Man beginne mit einem Punkt aus einer von zwei Bahnen und wähle dazu eine kompakte Umgebung, die die andere Bahn nicht trifft. Die Aussage gilt im übrigen auch ohne die Annahme lokal kompakt nach 15.2.4.5, aber dann kenne ich keinen so direkten Beweis.

Übung 15.2.2.15. Gegeben eine topologische Gruppe G und eine normale Untergruppe $N \subset G$ ist der Quotient G/N mit seiner Quotiententopologie und der induzierten Verknüpfung eine topologische Gruppe.

Übung 15.2.2.16. Operiert eine topologische Gruppe G stetig auf einem topologischen Raum X und ist $N \subset G$ ein Normalteiler, dessen Elemente X punktweise festhalten, so ist auch die induzierte Operation von G/N auf X stetig.

Übung 15.2.2.17. Gegeben $G \supset H \supset K$ eine topologische Gruppe mit zwei Normalteilern ist der Isomorphismus aus dem noetherschen Isomorphiesatz 4.4.2.15 ein Homöomorphismus $G/H \xrightarrow{\sim} (G/K)/(H/K)$.

Übung 15.2.2.18. Man zeige, daß die Einbettung $\mathrm{U}(n) \hookrightarrow \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ einen Homöomorphismus $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ induziert.

Übung 15.2.2.19. Der Abschluß des neutralen Elements in einer topologischen Gruppe ist stets ein Normalteiler und der Quotient danach eine Hausdorffgruppe und die Surjektion auf den Quotienten nicht nur final, sondern auch initial.

Übung 15.2.2.20. Seien X ein topologischer Raum und $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation. Ist X/R Hausdorff, so ist $R \subset X \times X$ abgeschlossen. Ist $R \subset X \times X$ abgeschlossen und $X \twoheadrightarrow X/R$ offen, so ist X/R Hausdorff. Hinweis: Jede stetige offene Surjektion ist produktfest final.

Übung 15.2.2.21. Ist $Y \to X$ eine initiale stetige G-äquivariante Abbildung von topologischen Räumen mit einer stetigen Operation einer Gruppe G, so ist auch die induzierte Abbildung $Y/G \to X/G$ initial. Hinweis: Es gilt zu zeigen, daß jede für die Quotiententopologie auf Y/G offene Menge auch für die Initialtopologie offen ist.

Ergänzende Übung 15.2.2.22 (**Zusammenhangskomponenten von** $\mathrm{SO}(p,1)$). Gegeben $p, q \in \mathbb{N}$ betrachte man die Diagonalmatrizen mit p Einsen und q Minus--Einsen $J = J_{p,q} := \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ und erkläre Gruppen

$$\mathrm{GO}(p,q) \supset \mathrm{O}(p,q) \supset \mathrm{SO}(p,q)$$

wie folgt: $\mathrm{O}(p,q) := \{A \in \mathrm{GL}(p+q;\mathbb{R}) \mid A^\top J A = J\}$, $\mathrm{SO}(p,q) := \{A \in \mathrm{O}(p,q) \mid \det A = 1\}$, und $\mathrm{GO}(p,q) := \mathbb{R}^\times \mathrm{O}(p,q)$. Im Spezialfall $q = 1$ betrachten wir die Quadrik $Q := \{v \in \mathbb{R}^{p+1} \mid v^\top J v = -1\}$. Man zeige, daß sie genau zwei Komponenten hat. Wir erklären weiter

$$\mathrm{SO}(p,1)^+ \subset \mathrm{O}(p,1)^+$$

als die Gruppe aller Elemente von $\mathrm{SO}(p,1)$ beziehungsweise $\mathrm{O}(p,1)$, die beide Komponenten von Q stabilisieren. Man zeige, daß $\mathrm{SO}(p,1)^+$ die Einskomponente von $\mathrm{O}(p,1)$ ist. Hinweis: Der Satz von Witt 4.2.4.2 zeigt, daß $\mathrm{O}(p,1)$ transitiv auf Q operiert. Etwas Nachdenken zeigt dasselbe für $\mathrm{SO}(p,1)$ unter der Annahme $p > 0$. In diesem Fall zeige man, daß wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$(\det, \mathrm{komp}) : \mathrm{O}(p,1) \twoheadrightarrow \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$$

erhalten, wo komp erklärt sei durch $\mathrm{komp}(g) = 1$, wenn g beide Komponenten von Q stabilisiert.

Übung 15.2.2.23. Der Quotient G/G° einer Gruppe nach ihrer Einskomponente heißt die **Komponentengruppe** von G. Ist G° offen in G, so ist besagte Komponentengruppe diskret. Ist G außerdem kompakt, so ist die Komponentengruppe endlich. Gegeben ein stetiger surjektiver Gruppenhomomorphismus einer kompakten Gruppe mit endlicher Komponentengruppe in eine Hausdorffgruppe ist das Bild der Einskomponente die Einskomponente.

Übung 15.2.2.24 (**Realisierung von** $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ **durch Matrizen**). Wir betrachten die Menge $Y \subset \mathrm{Mat}(2;\mathbb{R})$ aller positiv definiten Matrizen mit der Determinante Eins und fassen sie auf als eine Menge von Skalarprodukten auf $\mathbb{R}^2$. Sie trägt eine transitive Wirkung von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ durch die Vorschrift $A \cdot S := ASA^\top$ und die Standgruppe der Einheitsmatrix alias des Standardskalarprodukts ist $\mathrm{SO}(2)$. Also erhalten wir eine Bijektion $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2) \xrightarrow{\sim} Y$ durch $A \mapsto AA^\top$. Sie besitzt eine stetige Spaltung, die wir etwa erhalten können, indem wir jedem Skalarprodukt die Matrix zuordnen, in deren Spalten die Vektoren derjenigen Orthonormalbasis stehen, die in ihm aus der Standardbasis durch das Gram-Schmidt-Verfahren entsteht. Folglich ist die von $\mathrm{Mat}(2;\mathbb{R})$ induzierte Topologie auf Y auch in der Tat die feinste Topologie als homogener Raum. Diese Realisierung ist eng verwandt zur Polarzerlegung 4.1.12.23. Eine alternative Realisierung als obere Halbebene besprechen wir in 15.2.3.16.

Übung 15.2.2.25. Gegeben ein Körper $\mathbb{K}$ erinnere man aus 4.5.6.1 die Bruhat-Zerlegung

$$\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})/B = \bigsqcup_{w \in \mathcal{S}_n} BwB/B$$

für B die invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen und zeige für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ die Existenz von Homöomorphismen $BwB/B \cong \mathbb{K}^{l(w)}$ für $l(w)$ die Zahl der Fehlstände der Permutation w.

15.2.3 Projektive Räume

Beispiele 15.2.3.1. Die wichtigsten hausdorffschen topologischen Schiefkörper sind für uns im folgenden der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und der Schiefkörper der Quaternionen $\mathbb{H}$.

Definition 15.2.3.2. Die **projektiven Räume** $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ für $n \geq 0$ und einen hausdorffschen topologischen Schiefkörper $\mathbb{K}$ erhält man als die Menge aller Ursprungsgeraden oder genauer aller von einem von Null verschiedenen Element erzeugten Rechtsuntermoduln in $\mathbb{K}^{n+1}$. Wir versehen unsere projektiven Räume mit der Quotiententopologie bezüglich der offensichtlichen Surjektionen

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{K}^{n+1}\backslash 0 & \twoheadrightarrow & \mathbb{P}^n\mathbb{K} \\ & x & \mapsto & x\mathbb{K} \end{array}$$

Die natürliche Operation von $\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{K})$ auf $\mathbb{K}^{n+1}$ induziert eine Operation von $\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{K})$ auf $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$, von der man wie in 15.2.2.6 sieht, daß sie stetig sein muß.

Lemma 15.2.3.3. *Gegeben ein hausdorffscher topologischer Schiefkörper* $\mathbb{K}$ *stimmt auf* $\mathbb{K}^d\backslash 0$ *die von* $\mathbb{K}^d$ *induzierte Topologie überein mit der feinsten Topologie als homogener Raum von* $\mathrm{GL}(d;\mathbb{K})$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß das Anwenden auf den ersten Vektor der Standardbasis $\pi : A \mapsto A\,\mathrm{e}_1$ eine finale Abbildung $\mathrm{GL}(d;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^d\backslash 0$ ist. Da Finalität nach 15.1.7.20 lokal ist in der Basis, reicht es, für jeden Vektor $v \neq 0$ eine offene Umgebung U zu finden derart, daß $\pi : \pi^{-1}(U) \to U$ final ist. Nach 15.1.7.5 reicht es, besagte offene Umgebung U so zu finden, daß $\pi : \pi^{-1}(U) \to U$ einen stetigen Schnitt besitzt. Dazu wählen wir zu unserem von Null verschiedenen Vektor v eine invertierbare Matrix $A = (v|a_2|\ldots|a_d)$ mit erster Spalte v und nehmen als $U := \mathbb{K}^d\backslash\langle a_2,\ldots,a_d\rangle$ das Komplement des Rechtserzeugnisses ihrer anderen Spalten und als stetigen Schnitt auf U die Abbildung $w \mapsto (w|a_2|\ldots|a_d)$, die jedem $w \in U$ diejenige Matrix zuordnet, die aus A entsteht beim Ersetzen der ersten Spalte durch w. Die Hausdorffeigenschaft haben wir dabei implizit verwendet, um zu sehen, daß das Erzeugnis $\langle a_2,\ldots,a_d\rangle$ abgeschlossen ist. □

15.2.3.4. Alternativ könnte man argumentieren, daß unsere Abbildung π eine stetige offene Surjektion ist, weil sie lokal stetige Schnitte besitzt. Bei dieser Argumentation braucht man weniger Wissen über finale Abbildungen.

15.2.3.5 (**Existenz globaler Schnitte**). Der Beweis von Lemma 15.2.3.3 beruht auf der Erkenntnis, daß die Abbildung, die jeder invertierbaren Matrix ihre erste Spalte zuordnet, lokal stetige Schnitte besitzt. Im Fall von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2\backslash 0$ ist es auch nicht schwer, einen globalen stetigen Schnitt anzugeben. Im Fall von $\mathrm{GL}(3;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3\backslash 0$ hingegen gibt es keinen globalen stetigen Schnitt: Aus solch einem Schnitt könnte man nämlich unschwer eine „Kämmung des Igels“ konstruieren, und wir werden in 16.1.4.4 zeigen, daß es solch eine Kämmung nicht geben kann.

Lemma 15.2.3.6 (**Projektive Räume als homogene Räume**). *Gegeben ein hausdorffscher topologischer Schiefkörper $\mathbb{K}$ stimmt die Topologie auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ als Quotient von $\mathbb{K}^{n+1}\backslash 0$ überein mit der feinsten Topologie als homogener Raum in Bezug auf die offensichtliche Operation von $\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{K})$. Insbesondere ist der projektive Raum $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ Hausdorff.*

Beweis. Wir versehen $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ mit seiner Topologie als Quotient von $\mathbb{K}^{n+1}\backslash 0$ und betrachten die Abbildungen

$$\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{K}) \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{n+1}\backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{K}$$

gegeben durch das Anwenden auf den ersten Vektor der Standardbasis e_1 und die offensichtliche Projektion. Die erste Abbildung ist final nach Lemma 15.2.3.3, die zweite nach Annahme. Also ist nach 15.1.7.5 auch ihre Verknüpfung final. Damit stimmt auf $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ die feinste Topologie als homogener Raum überein mit der Topologie als Quotient von $\mathbb{K}^{n+1}\backslash 0$ aus 15.2.3.2. Die Hausdorffeigenschaft folgt dann aus 15.2.2.10, da die Standgruppen unseres homogenen Raums $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ offensichtlich abgeschlossen sind. □

Proposition 15.2.3.7 (Projektive Räume als Mannigfaltigkeiten). *Für* $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *oder* $\mathbb{H}$ *ist der projektive Raum* $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ *eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit der Dimension* $n(\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K})$.

Beispiele 15.2.3.8. Die reelle projektive Gerade $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ ist homöomorph ist zu einer Kreislinie S^1, die komplexe projektive Gerade $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ zur Kugelschale S^2, und die quaternionale projektive Gerade $\mathbb{P}^1\mathbb{H}$ homöomorph zur 4-Sphäre S^4. Weiter ist $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ homöomorph ist zu einer Kugelschale, in die man ein kreisrundes Loch geschnitten hat, um dort ein Möbiusband einzukleben. All das zu zeigen ist eine gute Übung.

Vorschau 15.2.3.9. Die offensichtlichen Projektionen von den geeignet erklärten Einheitssphären auf die jeweiligen projektiven Räume $S^2 \to \mathbb{P}^1\mathbb{R} \cong S^1$, $S^3 \to \mathbb{P}^1\mathbb{C} \cong S^2$ und $S^7 \to \mathbb{P}^1\mathbb{H} \cong S^4$ sind Faserbündel, ja sogar Hauptfaserbündel mit Fasern S^0, S^1 und S^3. Faserbündel mit Basis, Faser und Totalraum jeweils einer Sphäre heißen **Hopf-Faserungen**. Mithilfe der Oktonionen kann man auch eine Hopf-Faserung über der S^8 mit Faser S^7 und Totalraum S^{15} konstruieren. Man kann sogar zeigen, daß es außerhalb dieser Dimensionen keine Hopf-Faserungen gibt, aber das ist für uns vorerst außer Reichweite.

Beweis von 15.2.3.7. Identifizieren wir in $\mathbb{R}$-linearer Weise $\mathbb{K}^{n+1} \cong \mathbb{R}^m$ und bezeichnen mit $S := S^{m-1} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ die Menge aller Vektoren der Länge Eins für das Standard-Skalarprodukt des $\mathbb{R}^m$, eine hochdimensionale Sphäre, so erhalten wir eine stetige Surjektion $S \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{K}$. Als Bilder kompakter Räume sind demnach unsere projektiven Räume kompakt. Somit müssen wir nur noch für jeden Punkt eine zu $\mathbb{K}^n$ homöomorphe offene Umgebung finden. Wir betrachten dazu einen beliebigen endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum W und zeigen, daß für jede affine Hyperebene $H \subset W$, die den Ursprung vermeidet, die Injektion $i_H : H \hookrightarrow \mathbb{P}W$ gegeben durch $v \mapsto \langle v \rangle$ eine offene Einbettung ist. Ist in der Tat $\vec{H} \subset W$ der Richtungsraum unserer affinen Hyperebene H, so ist $\pi^{-1}(\pi(H)) = W \backslash \vec{H}$ offen in $W \backslash 0$. Mithin hat unsere Injektion $i_H : H \hookrightarrow \mathbb{P}W$ offenes Bild. Nun betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & W\backslash\vec{H} \arrow[dl] \arrow[dr, "\pi"] & \\ H \arrow[rr] & & i_H(H) \end{tikzcd}$$

Der linke schräge Pfeil ordne jedem Punkt den Schnittpunkt mit H der durch ihn verlaufenden Ursprungsgeraden zu. Er ist stetig, denn ist $\lambda_H : W \to k$ die Linearform, deren Niveaufläche zum Wert Eins gerade H ist, so wird er gegeben durch die Formel $w \mapsto w\lambda_H(w)^{-1}$. Er ist nach 15.1.7.5 sogar final, da er einen Schnitt

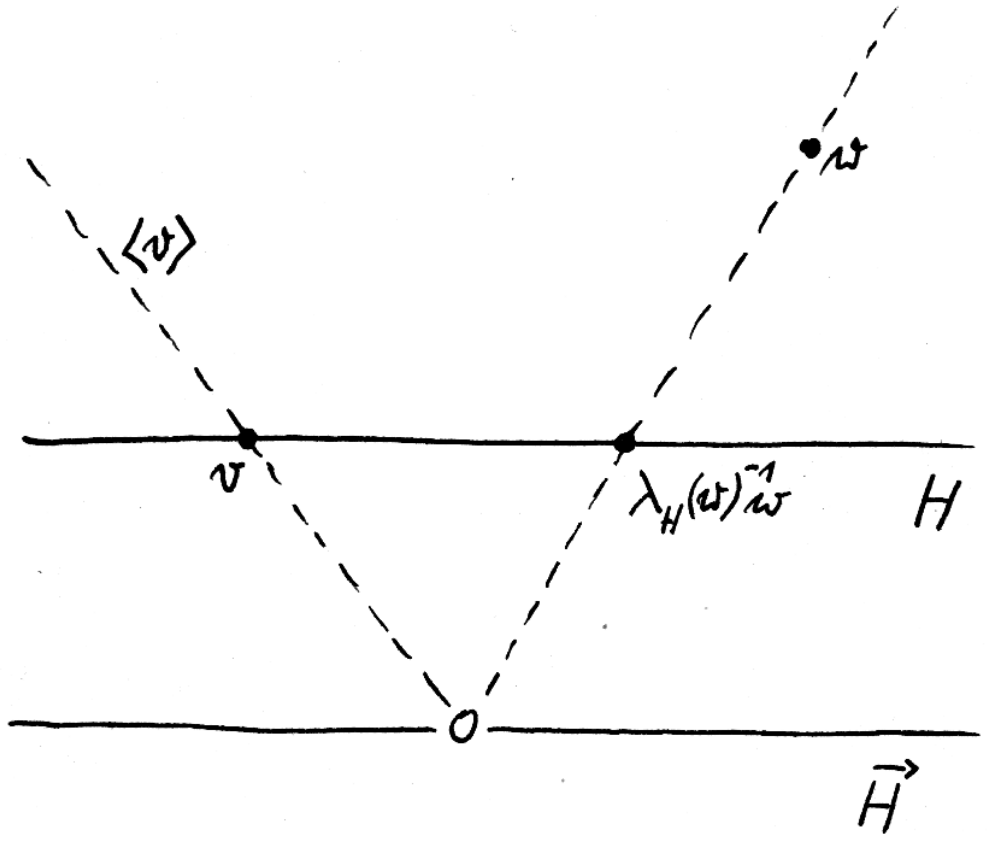


Illustration zum Beweis von 15.2.3.7

besitzt, eben die Einbettung $H \hookrightarrow W\backslash\vec{H}$. Der rechte schräge Pfeil ist final nach 15.1.7.14 als Einschränkung einer finalen Abbildung auf eine offene Teilmenge der Basis. Zusammen folgt, daß die horizontale Bijektion ein Homöomorphismus $H \xrightarrow{\sim} i_H(H)$ sein muß. Damit ist $\mathbb{P}W$ in der Tat eine Mannigfaltigkeit. $\square$

Beispiel 15.2.3.10. Unter einer **vollständigen Fahne** von Untervektorräumen eines endlichdimensionalen Vektorraums V über einem Körper k versteht man eine Folge von Untervektorräumen

$$V = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_1 \supset V_0 = 0$$

mit $\dim V_i = i$. Die Menge aller derartigen Fahnen notieren wir $\mathcal{F}(V)$ und nennen sie die Fahnenmannigfaltigkeit. Auf dieser Menge operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ in offensichtlicher Weise, und diese Operation ist auch sicher transitiv. Die Standgruppe der Fahne

$$k^n = \langle \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n \rangle \supset \langle \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_{n-1} \rangle \supset \ldots \supset \langle \mathrm{e}_1 \rangle \supset 0$$

ist die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen $B \subset \mathrm{GL}(n;k)$. Wir erhalten so eine Bijektion

$$\mathrm{GL}(n;k)/B \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(k^n)$$

Analoges gilt für einen Schiefkörper k, wobei wir vereinbaren, Vektorräume als Rechtsmoduln verstehen zu wollen. Arbeiten wir über dem Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ oder dem Schiefkörper $\mathbb{H}$, so ist die Fahnenmannigfaltigkeit mit ihrer feinsten Topologie als homogener Raum kompakt aufgrund der Iwasawa-Zerlegung 4.1.11.9, 4.1.11.11 und 22.1.6.11.

Übungen

Übung 15.2.3.11. Man prüfe die Beschreibungen von $\mathbb{P}^1\mathbb{K}$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ aus 15.2.3.8.

Übung 15.2.3.12. Man zeige, daß $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ homöomorph ist zu einer Kreislinie S^1, $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ homöomorph zur Kugelschale S^2, und $\mathbb{P}^1\mathbb{H}$ homöomorph zur 4-Sphäre S^4. Man zeige weiter, daß $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ homöomorph ist zu einer Kugelschale, in die man ein kreisrundes Loch geschnitten hat, um dort ein Möbiusband einzukleben.

Übung 15.2.3.13. Sei V ein dreidimensionaler reeller Vektorraum. Wir betrachten in $\mathcal{P}(V) \times \mathcal{P}(V)$ alle Paare bestehend aus einer Halbebene und einer Halbgeraden auf ihrem Rand, also alle Paare (H, L), für die es $v, w \in V$ gibt mit $H = \mathbb{R}_{\geq 0}w + \mathbb{R}v$ und $L = \mathbb{R}_{\geq 0}v$. Man zeige, daß die Menge aller derartigen Paare ein homogener Raum für $\mathrm{GL}(V)$ ist und daß dieser homogene Raum kompakt ist.

Übung 15.2.3.14. Man zeige, daß die Gruppe $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})^+$ aller reellen $(n \times n)$-Matrizen mit positiver Determinante zusammenhängend ist. Hinweis: Induktion über n. Aus 15.2.3.3 folgert man unschwer, daß im Fall $n > 1$ für den homogenen Raum $\mathbb{R}^n \backslash 0$ unserer Gruppe seine Topologie als homogener Raum mit der offensichtlichen Topologie übereinstimmt, so daß dieser homogene Raum zusammenhängend ist. Damit müssen wir nach 15.2.2.11 nur noch zeigen, daß die Standgruppe eines Punktes zusammenhängend ist.

Übung 15.2.3.15. Versehen wir $\mathbb{R}^d \backslash 0$ mit der von $\mathbb{R}^d$ induzierten Topologie, so liefert für $d > 1$ das Anwenden auf einen beliebigen von Null verschiedenen Vektor eine finale Abbildung $\mathrm{SL}(d;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^d \backslash 0$. Dasselbe gilt im Komplexen.

Übung 15.2.3.16 (**Realisierung von** $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ **als obere Halbebene**). Wir betrachten die Operation von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ auf der Riemann'schen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Sie stabilisiert den Äquator $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ und man prüft ohne Schwierigkeiten, daß sie außer dem Äquator nur zwei weitere Bahnen hat, nämlich die „nördliche und die südliche Hemisphäre". Die Kreislinie $\mathrm{SO}(2)$ operiert durch Rotationen um die Polachse, aber „mit verdoppelter Geschwindigkeit". Insbesondere operiert $(-\mathrm{I})$ als die Identität und unsere Operation faktorisiert über eine Operation von $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R}) := \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\{\pm\mathrm{I}\}$. Die Standgruppe jedes der beiden Pole unter $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ ist $\mathrm{SO}(2)$ und wir erhalten so je eine Bijektion von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ mit jeder der beiden Hemisphären. Unter der natürlichen Identifikation $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit $z \mapsto \langle 1, z\rangle$ entsprechen unsere beiden Hemisphären den beiden Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und die Pole den Punkten $\pm\mathrm{i}$ und die Operation erhält die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{c + dz}{a + bz}$$

wie in 4.5.1.25. Wählen wir stattdessen die Identifikation $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit $z \mapsto \langle z, 1\rangle$, so erhält unsere Operation die den meisten Mathematikern besser vertraute Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Man findet leicht eine stetige Spaltung, explizit hat man etwa auf der oberen Halbebene die Spaltung

$$x + y\mathrm{i} \mapsto y^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$$

Diese Spaltung zeigt, daß die von $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ induzierte Topologie auf unserer Hemisphäre mit ihrer feinsten Topologie also homogener Raum von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ übereinstimmt. Sie ist auch eine unmittelbare Konsequenz der Iwasawa-Zerlegung 4.1.11.9. Diese Spaltungen zeigen im übrigen sehr direkt, daß das Urbild jedes Kompaktums unter $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R}) \twoheadrightarrow \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ kompakt ist, was nach

15.2.4.17 und 15.2.4.20 auch ganz allgemein für Quotienten einer topologischen Gruppe nach einer kompakten Untergruppe gilt. Eine alternative Realisierung durch Matrizen haben wir in 15.2.2.24 besprochen.

15.2.4 Eigentlichkeit und hausdorffsche Quotienten*

Definition 15.2.4.1. Eine Abbildung von topologischen Räumen $f : X \to Y$ heißt **eigentlich**, wenn sie stetig ist und wenn darüber hinaus für jeden weiteren Raum Z die Abbildung $f \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ abgeschlossen ist.

15.2.4.2 (**Diskussion der Terminologie**). Auf Französisch verwendet man für „eigentlich“ den Begriff **propre**, auf Deutsch sagt man alternativ auch **universell abgeschlossen**. In einer hoffentlich selbsterklärenden Terminologie, die ich hier nicht formal einführen will, könnte man auch **produktfest abgeschlossen** sagen. Die Terminologie ist nicht ganz einheitlich, in der Literatur werden verschiedene andere Varianten der Definition des Begriffs einer eigentlichen Abbildung verwendet.

Vorschau 15.2.4.3. Wir zeigen in 15.2.4.13, daß eine stetige Abbildung zwischen lokal kompakten Hausdorffräumen eigentlich ist genau dann, wenn das Urbild jedes Kompaktums kompakt ist. Das mag eine erste Anschauung für dieses Konzept geben.

Lemma 15.2.4.4 (**Eigentliche Abbildungen auf einen Punkt**). *Ein topologischer Raum ist kompakt genau dann, wenn die konstante Abbildung von besagtem Raum auf den einpunktigen Raum eigentlich ist.*

Beweis. Sei X kompakt und Z beliebig. Ich denke mir X vertikal und Z horizontal. Sei $A \not\subset X \times Z$ abgeschlossen und $z \in Z$ gegeben derart, daß A die vertikale Faser bei z nicht trifft, in Formeln $A \cap (X \times \{z\}) = \emptyset$. So gibt es für jedes $x \in X$ offene Umgebungen $U_x \Subset X$ von x und $V_x \Subset Z$ von z mit $A \cap (U_x \times V_x) = \emptyset$. Endlich viele U_x überdecken nun aber X und der Schnitt der zugehörigen V_x ist eine offene Umgebung von z, die die Projektion von A nicht trifft. Also ist die konstante Abbildung von einem Kompaktum auf einen einpunktigen Raum eigentlich. Die Umkehrung ist für uns weniger wichtig. Um sie zu zeigen, betrachten irgendein System abgeschlossener Teilmengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ mit nichtleeren endlichen Schnitten und müssen nach 15.1.5.18 nur zeigen, daß auch sein gesamter Schnitt nicht leer ist. Dazu dürfen wir annehmen, daß $\mathcal{A}$ stabil ist unter endlichen Schnitten, und bilden den Raum

$$Z := X \sqcup \{\infty\}$$

mit der Topologie, für die die offenen Teilmengen alle Teilmengen sind, die entweder ∞ vermeiden oder ∞ enthalten und mindestens ein $A \in \mathcal{A}$ umfassen.

Aufgrund unserer Annahme an $\mathcal{A}$ liegt ∞ im Abschluß von $X \subset Z$. Betrachten wir die Diagonale $\Delta \subset X \times Z$, so muß das Bild ihres Abschlusses $\bar{\Delta}$ unter der Projektion auf die zweite Koordinate ganz Z sein. Es gibt also ein $x \in X$ mit $(x, \infty) \in \bar{\Delta}$ und daraus folgt sofort $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$. □

Proposition 15.2.4.5. *Operiert eine kompakte topologische Gruppe G auf einem Hausdorffraum X, so ist auch der Bahnenraum X/G Hausdorff.*

15.2.4.6. Ich hätte einen Beweis vorgezogen, der das Konzept eigentlicher Abbildungen vermeidet, aber mir ist keiner eingefallen. Unter stärkeren Voraussetzungen wird der Beweis einfacher, vergleiche 15.2.2.14.

Beweis. Wegen der Kompaktheit von G ist die Projektion $G \times X \to X$ eigentlich. Damit ist auch die Wirkung eigentlich als Komposition der Projektion mit dem Homöomorphismus $G \times X \xrightarrow{\sim} G \times X$, $(g, x) \mapsto (g, gx)$. Damit ist auch das Produkt der Wirkung $G \times X \times X \to X \times X$ mit der Identität auf X eine eigentliche Abbildung, und schalten wir $\mathrm{id} \times \Delta$ davor, so erkennen wir mit 15.1.6.22 und Übung 15.2.4.16, daß die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \to & X \times X \\ (g\ ,\ x) & \mapsto & (gx, x) \end{array}$$

eigentlich ist. Insbesondere ist ihr Bild $\Gamma \subset X \times X$ abgeschlossen und das Komplement offen. Dann ist aber nach 15.2.2.3 und 15.2.2.4 auch das Bild dieses Komplements in $X/G \times X/G$ offen und die Diagonale in $X/G \times X/G$ folglich abgeschlossen. □

Ergänzung 15.2.4.7. Die Operation einer topologischen Gruppe G auf einem topologischen Raum X heißt **eigentlich**, wenn die Abbildung $G \times X \to X \times X$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$ eigentlich ist. Die zweite Hälfte des Beweises von 15.2.4.5 zeigt, daß bei einer eigentlichen Operation der Bahnenraum stets Hausdorff ist. Die erste Hälfte des Beweises von 15.2.4.5 zeigt, daß eine Operation einer kompakten Gruppe stets eigentlich ist.

Ergänzung 15.2.4.8. Man kann zeigen, daß eine stetige Abbildung eigentlich ist genau dann, wenn sie abgeschlossen ist und alle ihre Fasern kompakt sind. Bei Bourbaki kann man nachlesen, warum ein beliebiges Produkt von eigentlichen Abbildungen wieder eigentlich ist. Diese Aussage heißt der **Satz von Frolik-Tychonoff**.

Definition 15.2.4.9. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt **separiert**, wenn die Diagonale eine abgeschlossene Teilmenge $X \not\subset X \times_Y X$ ist.

Beispiele 15.2.4.10. Die konstante Abbildung von einem topologischen Raum auf einen Punkt ist nach 15.1.6.22 separiert genau dann, wenn der fragliche Raum Hausdorff alias separiert ist. Jede topologische Einbettung ist separiert. Ist in einem kartesischen Diagramm topologischer Räume ein Ursprungspfeil separiert, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem Faserprodukt.

Lemma 15.2.4.11. *Ist $g \circ f$ eigentlich und g separiert, so ist auch f eigentlich.*

15.2.4.12. Landet g in einem Punkt, so liefert dieses Lemma insbesondere die bereits aus 15.1.5 bekannte Aussage, daß das Bild einer stetigen Abbildung von einem Kompaktum in einen Hausdorffraum stets abgeschlossen ist. Bei Bourbaki findet sich unser Lemma zumindest schon einmal für g injektiv.

Beweis. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$. Wir betrachten zum Morphismus f das in Top_Z kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y \arrow[d] \\ X \times_Z Y \arrow[r] & Y \times_Z Y \end{tikzcd}$$

aus 16.2.2.13 und sehen, daß mit der Diagonale $Y \hookrightarrow Y \times_Z Y$ auch die Abbildung $(\mathrm{id}, f) : X \to X \times_Z Y$ eine abgeschlossene Einbettung ist. Der Morphismus f ergibt sich als deren Verknüpfung mit dem eigentlichen da durch Basiswechsel aus $X \to Z$ entstehenden Morphismus $X \times_Z Y \to Y$. □

Lemma 15.2.4.13. *Eine stetige Abbildung zwischen lokal kompakten Hausdorffräumen ist eigentlich genau dann, wenn das Urbild jedes Kompaktums kompakt ist.*

Beweis. Daß Urbilder von Kompakta unter eigentlichen Abbildungen stets kompakt sind, haben wir bereits in 15.2.4.17 gesehen. Daß eine stetige Abbildung von kompakten Hausdorffräumen eigentlich ist, folgt aus 15.2.4.11 und aus der Erkenntnis 15.2.4.4, daß die konstante Abbildung eines Kompaktums auf einen Punkt eigentlich ist. Das Lemma folgt damit aus der Lokalität der Eigentlichkeit in der Basis 15.2.4.15. □

15.2.4.14. Eine Teilmenge in einem topologischen Raum heißt **relativ Hausdorff**, wenn je zwei verschiedene Punkte unserer Teilmenge disjunkte Umgebungen im ursprünglichen Raum besitzen.

Übungen

Übung 15.2.4.15 (**Eigentlichkeit ist lokal in der Basis**). Seien $f : X \to Y$ stetig und $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine offene Überdeckung von Y. Genau dann ist f eigentlich, wenn die induzierten Abbildungen $f^{-1}(U) \to U$ eigentlich sind für alle $U \in \mathcal{U}$.

Übung 15.2.4.16 (**Permanenzeigenschaften eigentlicher Abbildungen**). Die Verknüpfung eigentlicher Abbildungen ist eigentlich. Eine Einbettung ist eigentlich genau dann, wenn sie abgeschlossen ist. Ist $g \circ f$ eigentlich und f surjektiv, so ist auch g eigentlich. Landet g in einem Punkt, so spezialisiert die letzte Behauptung zur Aussage, daß stetige Bilder von Kompakta stets kompakt sind.

Ergänzende Übung 15.2.4.17 (**Eigentlichkeit ist stabil unter Basiswechsel**). Leser, die bereits mit Faserprodukten 16.2.2.8 vertraut sind, werden leicht zeigen können, daß gegeben eine eigentliche Abbildung $X \to Y$ und eine beliebige stetige Abbildung $Z \to Y$ auch die erweiterte Abbildung $X \times_Y Z \to Z$ eigentlich ist. Insbesondere bedeutet das im Fall von einpunktigem Z, daß alle Fasern einer eigentlichen Abbildung kompakt sind, und im Fall einer kompakten Teilmenge $K \subset Y$ ergibt sich mit 15.2.4.16 und 15.2.4.4, daß die Urbilder von Kompakta unter eigentlichen Abbildungen kompakt sind.

Übung 15.2.4.18. Sind $X \to Y$ und $X' \to Y$ eigentlich, so auch $(X \sqcup X') \to Y$. Ist insbesondere $Z \to Y$ stetig und sind Teilräume $X, X' \subset Z$ gegeben mit $X \to Y$ und $X' \to Y$ eigentlich, so ist auch $(X \cup X') \to Y$ eigentlich mit der vorhergehenden Übung 15.2.4.16.

Übung 15.2.4.19. Gegeben eine kompakte Hausdorff'sche Gruppe enthält jede Umgebung des neutralen Elements eine unter Konjugation stabile offene Umgebung des neutralen Elements.

Weiterführende Übung 15.2.4.20. Ist G eine topologische Gruppe und $K \subset G$ eine kompakte Untergruppe, so ist die Multiplikation $G \times K \twoheadrightarrow G$ eigentlich. Hinweis: 15.2.4.17. Ist G eine topologische Gruppe und $K \subset G$ eine kompakte Untergruppe, so ist die Projektion $G \twoheadrightarrow G/K$ eigentlich. Hinweis: Man verwende das kartesische Diagramm zum Quotienten 16.2.2.15 und die Erkenntnis, daß Quotienten nach 15.2.2.4 produktfest final sind.

Weiterführende Übung 15.2.4.21. Seien G eine Hausdorffgruppe und $K \subset G$ eine kompakte Untergruppe und $\Gamma \subset G$ eine diskrete Untergruppe. So besitzt jeder Punkt $x \in G/K$ eine offene Umgebung U mit der Eigenschaft, daß für $\gamma \in \Gamma$ gilt

$$\gamma(U) \cap U \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \gamma(x) = x \text{ und } \gamma(U) = U.$$

Hinweis: Die Untergruppe Γ ist abgeschlossen nach 15.2.1.25 und für jede Teilmenge $A \subset \Gamma$ ist dann $AK \not\trianglelefteq G$ abgeschlossen in G nach 15.2.4.20.

Übung 15.2.4.22. Die Quotientenabbildung für die Operation einer endlichen Gruppe auf einem topologischen Raum ist stets eigentlich. Hinweis: Quotienten nach Gruppenoperationen sind produktfest final nach 15.2.2.4.

Übung 15.2.4.23. Ist $X \to Y$ eine eigentliche äquivariante Abbildung von Räumen mit einer Operation einer Gruppe G durch stetige Abbildungen, so ist auch die auf den Bahnenräumen induzierte Abbildung $X/G \to Y/G$ eigentlich. Hinweis: Quotientenabbildungen sind produktfest final.

Übung 15.2.4.24. Es operiere eine topologische Gruppe G auf einem Raum X und sei $P \subset G$ eine Untergruppe mit G/P kompakt. Man zeige, daß die Operation eine eigentliche Abbildung $G \times_{/P} X \to X$ induziert. Hinweis: Man betrachte $G \times X \xrightarrow{\sim} G \times X$ mit $(g, x) \mapsto (g, gx)$. Ist weiter $A \mathrel{\underset{\mathbb{A}}{\subset}} X$ abgeschlossen und P-stabil, so ist auch GA abgeschlossen in X. Hinweis: $G \times_{/P} A \to G \times_{/P} X$ ist eine abgeschlossene Einbettung. Diese Übung verallgemeinert unsere Erkenntnis 15.2.4.7, daß Operationen kompakter Gruppen stets eigentlich sind.

Übung 15.2.4.25 (**Bruhatzellen sind offen in ihrem Abschluß**). Wir betrachten $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und betrachten in $G := \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen B. Wir wollen zeigen, daß jede Doppelnebenklasse BwB offen in ihrem Abschluß ist. Dazu zeige man der Reihe nach: (1) Ist s die Permutationsmatrix einer Permutation mit nur einem Fehlstand, so ist $P_s := B \sqcup BsB$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ aus „Block-oberen Dreiecksmatrizen mit einem (2×2)-Block und sonst nur (1×1)-Blöcken. (2) Die Quotienten P_s/B sind homöomorph zu $\mathbb{P}^1\mathbb{K}$ und insbesondere kompakt. (3) Alle Produkte der Gestalt $P_r P_s \ldots P_t$ sind abgeschlossen in G wegen 15.2.4.24. (4) Ist die Zahl $l(x)$ der Fehlstände eines Produkts $x = rs \ldots t$ die Zahl seiner Faktoren, so ist das Produkt $P_r P_s \ldots P_t$ nach 4.5.6.4 die Vereinigung der Doppelnebenklasse $Brs \ldots tB$ mit Doppelnebenklassen BxB für $l(x) < l(rs \ldots t)$. Im übrigen zeigen wir für Bahnen von „algebraischen Gruppen auf algebraischen Varietäten“ in 9.2.3.7 in voller Allgemeinheit, daß sie offen sind in ihrem Abschluß und das sogar in Bezug auf die „Zariski-Topologie“.

Übung 15.2.4.26. Eine stetige Abbildung ist separiert genau dann, wenn alle ihre Fasern relativ Hausdorff sind im Sinne von 15.2.4.14. Jede Verknüpfung separierter Abbildungen ist separiert. Das Urbild einer relativ Hausdorff'schen Teilmenge unter einer separierten Abbildung ist wieder relativ Hausdorff'sch.

Übung 15.2.4.27. Sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine relativ Hausdorff'sche Teilmenge. Gegeben zwei zueinander disjunkte Kompakta $K, L \subset Y$ gibt es dann disjunkte offene Mengen $U, V \mathrel{\underset{\mathbb{o}}{\subset}} X$ mit $K \subset U$ und $L \subset V$.

Übung 15.2.4.28. Ist $f : X \to Y$ eigentlich und separiert und $i : A \hookrightarrow X$ eine Einbettung derart, daß $f \circ i$ eigentlich ist, so muß i eine abgeschlossene Einbettung sein. Hinweis: 15.2.4.11 und 15.2.4.16.

15.3 Funktionen auf topologischen Räumen

15.3.1 Stetige Funktionen auf normalen Räumen

Definition 15.3.1.1. Ein topologischer Raum heißt **normal**, wenn sich je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen unseres Raums zu disjunkten offenen Teilmengen vergrößern lassen.

Ergänzung 15.3.1.2. In der Literatur ist es üblich, von normalen Räumen zusätzlich die Hausdorff-Eigenschaft zu fordern und unsere normalen Räume „T_4-Räume“ zu nennen. Die Bezeichnung T_4 steht für das **vierte Trennungsaxiom**. Das Trennungsaxiom T_2 ist synonym zu Hausdorff. Die Trennungsaxiome T_0, T_1 und T_3 spielen für uns keine Rolle.

Beispiel 15.3.1.3. Nach Übung 15.1.5.19 ist jeder kompakte Hausdorffraum normal.

Lemma 15.3.1.4. *Jeder metrische Raum ist normal.*

Beweis. Sei (X, d) unser metrischer Raum. Gegeben eine nichtleere Teilmenge $M \subset X$ betrachten wir die Funktion $d_M : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $d_M(x) := \inf\{d(y, x) \mid y \in M\}$. Wie Sie in **??** zeigen durften, ist sie stetig mit Nullstellenmenge $d_M^{-1}(0) = \bar{M}$. Gegeben $Y, Z \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ X$ disjunkte abgeschlossene nichtleere Teilmengen sind nun sicher $U := \{x \in X \mid d_Y(x) < d_Z(x)\}$ und $V := \{x \in X \mid d_Y(x) > d_Z(x)\}$ disjunkte offene Teilmengen mit $U \supset Y$ und $V \supset Z$. □

Satz 15.3.1.5 (Tietze's Erweiterungslemma). *Jede stetige Abbildung von einer abgeschlossenen Teilmenge eines normalen Raums in ein nichtleeres reelles Intervall läßt sich fortsetzen zu einer stetigen Abbildung des ganzen Raums in besagtes Intervall.*

15.3.1.6. Wir behandeln zunächst als Spezialfall das sogenannte „Lemma von Urysohn“ und im Anschluß den Fall der Intervalle $[0, 1]$ und $[0, 1)$. Der allgemeine Fall bleibt von da an dem Leser überlassen.

Lemma 15.3.1.7 (von Urysohn). *Gegeben ein normaler Raum X und disjunkte abgeschlossene Teilmengen $A, B \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ X$ gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.*

Beispiel 15.3.1.8. Im Fall eines metrischen Raums ist das leicht zu sehen: Wir dürfen ohne Beschränkung annehmen, daß weder A noch B leer sind. Die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} g: & X & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (d_A(x), d_B(x)) \end{array}$$

ist in diesem Fall stetig mit Werten im ersten Quadranten ohne Ursprung, in Formeln mit Werten in $Q = (\mathbb{R}_{\geq 0})^2 \backslash (0,0)$. Ist nun $h : Q \to [0,1]$ eine stetige Abbildung derart, daß h auf der Achse $\mathbb{R}_{>0} \times 0$ konstant Eins ist und auf der Achse $0 \times \mathbb{R}_{>0}$ konstant Null, so ist die Abbildung $f = h \circ g : X \to [0,1]$ stetig mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.

Beweis. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung. Ist X normal und sind Teilmengen $C \subset U \subset X$ gegeben mit $C \not\subset X$ und $U \Subset X$, so gibt es eine offene Menge $W \Subset X$ mit

$$C \subset W \subset \overline{W} \subset U$$

Um das einzusehen nehme man disjunkte offene Umgebungen W von C und D von $X \backslash U$, dann gilt nämlich $C \subset W \subset \overline{W} \subset X \backslash D \subset U$. Das war unsere Vorüberlegung. Wir finden danach $U(0) \Subset X$ mit

$$A \subset U(0) \subset \overline{U(0)} \quad \subset \quad X \backslash B$$

Wir finden danach weiter $U(1/2) \Subset X$ mit

$$\overline{U(0)} \subset U(1/2) \subset \overline{U(1/2)} \subset X \backslash B$$

Indem wir so weitermachen finden wir induktiv für alle $r \in [0,1)$ der Form $r = k/2^n$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine offene Menge $U(r) \subset X \backslash B$ derart, daß gilt $r < r' \Rightarrow \overline{U(r)} \subset U(r')$. Schließlich setzen wir noch $U(1) = X$ und erklären $f : X \to [0,1]$ durch

$$f(x) := \inf\{r \in [0,1] \mid x \in U(r)\}$$

Sicher gilt $f|_A = 0$, $f|_B = 1$. Wir müssen nur noch zeigen, daß f stetig ist. Für $0 < t < 1$ finden wir schon mal

$$\begin{array}{rcll} f^{-1}([0,t)) & = & \bigcup_{r<t} U(r) & \Subset X \\ f^{-1}((t,1]) & = & \bigcup_{r>t} X \backslash \overline{U(r)} & \\ & = & \bigcup_{s>t} X \backslash \overline{U(s)} & \Subset X \end{array}$$

Da aber die Intervalle $[0,t)$ und $(t,1]$ die metrische Topologie auf $[0,1]$ erzeugen, ist f damit nach 15.1.7.27 stetig. □

15.3.1.9. Im folgenden Beweis verwenden wir, daß die Summe von zwei stetigen reellwertigen Funktionen auf einem topologischen Raum wieder stetig ist. Das hatten wir uns bereits in 11.1.7.7 überlegt. Es folgt aber auch sofort aus der universellen Eigenschaft der Produkttopologie 15.1.6.17 zusammen mit der Stetigkeit der Addition $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Beweis des Erweiterungslemmas 15.3.1.5. Jetzt zeigen wir das Erweiterungslemma für das Intervall $[0,1]$. Sei wieder X unser Raum und $Y \not\subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f : Y \to [0,1]$ eine stetige Abbildung. Wir suchen $F : X \to [0,1]$ stetig mit $F|_Y = f$. Nach Urysohn finden wir $F_0 : X \to [0,1/3]$ stetig mit $f(x) \leq 1/3 \Rightarrow F_0(x) = 0$ und $f(x) \geq 2/3 \Rightarrow F_0(x) = 1/3$ für alle $x \in Y$. Es folgt

$$F_0(x) \leq f(x) \leq 2/3 + F_0(x)$$

für alle $x \in Y$. Nun nehmen wir die Funktion $f_1 := f - F_0 : Y \to [0,2/3]$ und finden ebenso $F_1 : X \to [0,(1/3)(2/3)]$ mit $F_1(x) \leq f_1(x) \leq (2/3)^2 + F_1(x)\ \forall x \in Y$ und mithin

$$F_0(x) + F_1(x) \leq f(x) \leq (2/3)^2 + F_0(x) + F_1(x)$$

für alle $x \in Y$. Wir machen immer so weiter und konstruieren schließlich F als Summe der gleichmäßig konvergenten Reihe

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + \dots$$

Sie strebt gegen eine stetige Funktion wegen **??**. Jetzt zeigen wir das Erweiterungslemma noch für das Intervall $[0,1)$. Wir benutzen dieselben Notationen wie eben und finden nach dem vorhergehenden jedenfalls eine stetige Erweiterung von f zu einer stetigen Abbildung $F : X \to [0,1]$. Dann ist natürlich $F^{-1}(1)$ abgeschlossen in X und disjunkt zu Y. Wir finden also $G : X \to [0,1]$ stetig mit $G|_Y = 1$ und $G|_{F^{-1}(1)} = 0$ und $H = \inf(F,G)$ ist unsere gesuchte stetige Erweiterung von f. Den Rest des Beweises können wir getrost dem Leser überlassen. □

Übungen

Übung 15.3.1.10. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum läßt sich jede auf einer kompakten Teilmenge definierte stetige reellwertige Funktion stetig auf den ganzen Raum fortsetzen, und das sogar zu einer Funktion mit kompaktem Träger.

Übung 15.3.1.11. Jede offene Teilmenge eines lokal kompakten abzählbar basierten Hausdorff-Raums X läßt sich darstellen als abzählbare Vereinigung von Mengen der Gestalt $\{x \mid f(x) > 0\}$ für $f : X \to [0,\infty)$ stetig mit kompaktem Träger.

Übung 15.3.1.12. Jede abgeschlossene Teilmenge eines lokal kompakten Raums ist lokal kompakt.

Übung 15.3.1.13. Ein topologischer Raum ist genau dann Hausdorff und lokal kompakt, wenn seine Ein-Punkt-Kompaktifizierung Hausdorff und kompakt ist.

15.3.2 Filter und Satz von Tychonoff

Definition 15.3.2.1. Sei X eine Menge. Ein System von Teilmengen $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein **Filter auf** X, wenn es stabil ist unter endlichen Schnitten und dem Bilden von Obermengen, in Formeln

1. $(A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F})$ und $X \in \mathcal{F}$;
2. $(A \in \mathcal{F}$ und $B \supset A) \Rightarrow B \in \mathcal{F}$.

Unter einem **echten Filter** verstehen wir einen Filter, der nicht die ganze Potenzmenge ist. Gleichbedeutend ist die Forderung $\emptyset \notin \mathcal{F}$. In vielen Quellen wird ein Filter abweichend definiert als das, was wir hier einen echten Filter nennen.

Ergänzung 15.3.2.2 (**Filter und Ideale**). Unter der Bijektion $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(X, \mathbb{F}_2)$, die jeder Teilmenge die charakteristische Funktion ihres Komplements zuordnet, entsprechen die Filter eineindeutig den Idealen des Funktionenrings.

Beispiele 15.3.2.3. Ist X eine Menge und $x \in X$ ein Punkt, so ist das System aller Teilmengen von X, die den Punkt x enthalten, ein Filter. Ist $x_0, x_1, \ldots$ eine Folge in X, so ist das System derjenigen Teilmengen von X, die fast alle Folgenglieder enthalten, ein Filter. Ist $Y \subset X$ eine unendliche Teilmenge von X, so ist das System derjenigen Teilmengen von X, die fast alle Elemente von Y enthalten, ein Filter. Ist X ein topologischer Raum und $x \in X$ ein Punkt, so bilden alle Umgebungen von x einen Filter, den **Umgebungsfilter** $\mathcal{U}_x$ **von** x. Das leere Mengensystem ist kein Filter.

Definition 15.3.2.4. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Filter und $x \in X$ ein Punkt. Wir sagen, der **Filter** $\mathcal{F}$ **konvergiert gegen den Punkt** x, wenn jede Umgebung von x zum Filter $\mathcal{F}$ gehört, in Formeln $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$. Wir sagen, der **Filter** $\mathcal{F}$ **konvergiert**, wenn es einen Punkt $x \in X$ gibt derart, daß $\mathcal{F}$ gegen x konvergiert.

Definition 15.3.2.5. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X heißt ein **Ultrafilter**, wenn er ein echter Filter ist und wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ entweder A selbst oder ihr Komplement $X \backslash A$ zu $\mathcal{F}$ gehört.

Beispiel 15.3.2.6. Ist X eine Menge und $x \in X$ ein Punkt, so ist das System aller Teilmengen von X, die x enthalten, ein Ultrafilter.

Lemma 15.3.2.7. *Die Ultrafilter auf einer Menge sind genau die maximalen Elemente der Menge der echten Filter und jeder echte Filter läßt sich vergrößern zu einem Ultrafilter.*

Beweis. Ein Ultrafilter ist offensichtlich maximal in der Menge aller echten Filter. Ist umgekehrt $\mathcal{F}$ ein echter Filter aber kein Ultrafilter, so gibt es $B \subset X$ mit $B \notin \mathcal{F}$ und $X \backslash B \notin \mathcal{F}$. Wir behaupten, daß entweder gilt $B \cap F \neq \emptyset \; \forall F \in \mathcal{F}$ oder $(X \backslash B) \cap F \neq \emptyset \; \forall F \in \mathcal{F}$. Sonst gäbe es nämlich $F, G \in \mathcal{F}$ mit $B \cap F = \emptyset$ und $(X \backslash B) \cap G = \emptyset$ und damit $F \cap G = \emptyset$ im Widerspruch zur Annahme, daß $\mathcal{F}$ ein echter Filter ist. Sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $B \cap F \neq \emptyset \; \forall F \in \mathcal{F}$. Dann bilden alle Obermengen zu solchen Schnitten selbst einen echten Filter $\tilde{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}$ mit $B \in \tilde{\mathcal{F}}$ und $\mathcal{F}$ war nicht maximal in der Menge der echten Filter. Die zweite Aussage folgt aus der ersten mit dem Zorn'schen Lemma 3.1.9.15. Es gilt nur zu beachten, daß eine aufsteigende Vereinigung von Filtern wieder ein Filter ist und eine aufsteigende Vereinigung von echten Filtern wieder ein echter Filter, da die Vereinigung ja nicht $\emptyset$ enthalten kann, wenn keine der vereinigten Filter $\emptyset$ enthält. □

Ergänzung 15.3.2.8. Unter der Bijektion $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(X, \mathbb{F}_2)$, die jeder Teilmenge die charakteristische Funktion ihres Komplements zuordnet, entsprechen die Ultrafilter eineindeutig den maximalen Idealen, die ja auch als maximale echte Ideale definiert sind.

Lemma 15.3.2.9. *Ein topologischer Raum ist kompakt genau dann, wenn jeder Ultrafilter in besagtem Raum konvergiert.*

Beweis. $\Rightarrow$). Sei X kompakt. Ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ ein echter Filter, so hat die Familie $(F)_{F \in \mathcal{F}}$ und dann erst recht die Familie $(\bar{F})_{F \in \mathcal{F}}$ nichtleere endliche Schnitte. Mit Übung 15.1.5.18 folgt $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \bar{F} \neq \emptyset$. Wählen wir x aus diesem Schnitt und U eine Umgebung von x, so gilt $U \cap F \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Aus $U \cap (X \backslash U) = \emptyset$ folgt dann $(X \backslash U) \notin \mathcal{F}$, und wenn $\mathcal{F}$ sogar ein Ultrafilter ist folgt weiter $U \in \mathcal{F}$. Also konvergiert dann $\mathcal{F}$ gegen x.

$\Leftarrow$). Ist X nicht kompakt, so finden wir wieder nach Übung 15.1.5.18 eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen mit nichtleeren endlichen Schnitten, für die gilt $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$. Alle Mengen, die einen Schnitt von endlich vielen unserer A_i umfassen, bilden einen echten Filter. Folglich gibt es auch einen Ultrafilter, der alle A_i enthält. Nun besitzt aber jeder Punkt von x eine Umgebung, die eines der A_i nicht trifft und die also nicht in unserem Ultrafilter liegt. Daher kann unser Ultrafilter gegen keinen Punkt $x \in X$ konvergieren. □

Satz 15.3.2.10 (Tychonoff). *Das Produkt über eine beliebige Familie von kompakten Räumen ist kompakt.*

15.3.2.11. Den einfacheren Fall einer abzählbaren Familie kompakter metrischer Räume sollten Sie bereits als Übung 15.1.6.41 erledigt haben. Es scheint, daß man das Auswahlaxiom hier nur in seiner vollen Stärke braucht, wenn die beteiligten Räume nicht Hausdorff sind, um im letzten Schritt des folgenden Beweises

eine Familie von y_i auszuwählen. Für die anderen Argumente reicht schon das schwächere „Ultrafilterlemma“.

Beweis. Seien $(Y_i)_{i\in I}$ unsere Familie von kompakten Räumen und $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter im Produktraum. Für jedes $i \in I$ betrachten wir in Y_i den Ultrafilter

$$\mathcal{F}_i := \{F \subset Y_i \mid F \times \prod_{j\neq i} Y_j \in \mathcal{F}\}$$

Da die Y_i kompakt sind, gibt es $y_i \in Y_i$ derart, daß $\mathcal{F}_i$ gegen y_i konvergiert. Dann konvergiert aber offensichtlich $\mathcal{F}$ gegen $y := (y_i)_{i\in I}$. □

15.3.2.12 (**Ein folgenkompakter aber nicht kompakter Raum**). Wir können nun auch ein Beispiel für einen folgenkompakten aber nicht überdeckungskompakten Hausdorffraum angeben: Der Raum $\mathrm{Ens}(\mathbb{R}, [0,1])$ aller Abbildungen $\mathbb{R} \to [0,1]$, aufgefaßt als Produkt von Kopien des kompakten Intervalls $[0,1]$, ist kompakt nach dem Satz von Tychonoff. Die borelmeßbaren Funktionen bilden darin eine folgenabgeschlossene, aber nicht abgeschlossene Teilmenge, wie wir bereits in 15.1.2.26 gesehen haben. Folglich bilden die borelmeßbaren Funktionen mit der induzierten Topologie auch einen folgenkompakten aber nach 15.1.5.11 nicht kompakten topologischen Hausdorffraum.

Ergänzung 15.3.2.13. Gegeben eine Boole'sche Algebra B im Sinne von 2.2.6.1 betrachten wir die Menge aller Homomorphismen $\mathrm{Boole}(B, \{0,1\})$ in die zweielementige Boole'sche Algebra. Als Teilmenge von $\mathrm{Ens}(B, \{0,1\}) = \{0,1\}^B$ mit seiner Produkttopologie ist $\mathrm{Boole}(B, \{0,1\})$ offensichtlich abgeschlossen und wird so ein kompakter Hausdorffraum. Er heißt der **Stone-Raum** unserer Boole'schen Algebra. Der **Satz von Stone** besagt, daß der so konstruierte Funktor

$$\mathrm{Boole} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{opp}}$$

volltreu ist und eine Äquivalenz der Kategorie der Boole'schen Algebren mit der Opponierten der Kategorie der total unzusammenhängenden kompakten Hausdorffräume induziert. Hier meint total unzusammenhängend, daß jede offene Teilmenge eine Vereinigung von abgeschlossen-offenen Mengen ist, also von Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Es scheint, daß das im Fall kompakter Hausdorffräume dazu gleichbedeutend ist, daß nur die einpunktigen Teilmengen zusammenhängend sind, aber das habe ich mir nicht überlegt. Im übrigen hat unser Funktor einen Rechtsadjungierten, der jedem topologischen Raum die Boole-Algebra seiner abgeschlossen-offenen Mengen zuordnet. Mehr dazu mag man im Buch von Halmos „Boolean Algebras“ nachlesen. Jede Boole'sche Algebra ist nach 2.2.6.7 ein Verband und kann so nach 10.2.3.9 als eine spezielle teilgeordnete Menge aufgefaßt werden. Eine Boole'sche Algebra heißt

vollständig, wenn in der zugehörigen teilgeordneten Menge jede Teilmenge ein Supremum und gleichbedeuten ein Infimum hat. Ich habe bei Wikipedia gelernt, daß unter obigem Funktor die vollständigen Boole'schen Algebren den extremal unzusammenhängenden kompakten Hausdorffräumen entsprechen, also den kompakten Hausdorffräumen, in denen der Abschluß jeder offenen Menge offen ist.

Übungen

Übung 15.3.2.14. Ist X ein Hausdorffraum und konvergiert ein echter Filter gegen die Punkte x und y aus X, so gilt $x = y$.

Übung 15.3.2.15. Die Charaktergruppe $\mathfrak{X}(\Gamma)$ einer diskreten Gruppe Γ ist mit ihrer kompakt-offenen Topologie eine kompakte topologische Gruppe. Hinweis: Man schreibe sie als abgeschlossene Untergruppe eines Produkts von Kreisgruppen. Daß das eine topologische Gruppe ist, wissen wir bereits aus 15.1.9.21 oder auch 13.3.10.9.

Übung 15.3.2.16. Viele Aussagen verallgemeinern sich von metrischen auf beliebige topologische Räume, wenn man „Folgen durch Filter ersetzt". Zum Beispiel zeige man, daß eine Abbildung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen genau dann stetig ist, wenn sie **filterstetig** ist, als da heißt, wenn für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X mit Grenzwert $x \in X$ der **Bildfilter** $f_*\mathcal{F} := \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Übung 15.3.2.17 (**Topologie durch Umgebungsfilter**). Sei X eine Menge und sei für jeden Punkt $x \in X$ ein Filter $\mathcal{U}_x$ von X gegeben, das aus Obermengen von $\{x\}$ besteht. Genau dann ist unser Datum das Datum der Umgebungsfilter einer Topologie auf X, wenn es für jedes $x \in X$ und jedes $U \in \mathcal{U}_x$ ein $V \in \mathcal{U}_x$ gibt mit $V \subset U$ und $y \in V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_y$.

15.3.3 Produkte von Wahrscheinlichkeitsräumen*

Definition 15.3.3.1 (Produkt von Meßräumen). Gegeben eine Familie von Meßräumen $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ erklärt man ihr Produkt, indem man die Produktmenge

$$\prod_{i\in I} \Omega_i$$

mit der kleinsten σ-Algebra versieht derart, daß die Projektionsabbildungen auf die Faktoren Ω_i alle meßbar werden.

Übung 15.3.3.2. Eine Abbildung von einem Meßraum in ein Produkt von Meßräumen ist meßbar genau dann, wenn alle ihre Komponenten meßbar sind. Hinweis: Man betrachte das Bild der σ-Algebra der meßbaren Mengen aus dem Definitionsbereich unserer Abbildung. In kategorientheoretischer Terminologie ist

unser Produkt von Meßräumen also in der Tat das Produkt in der Kategorie der Meßräume.

Definition 15.3.3.3. Ein Meßraum heißt **diskret**, wenn seine meßbaren Teilmengen alle Teilmengen der Grundmenge sind. Ein Meßraum heißt **Borel'sch**, oder ein **Borelraum**, wenn er isomorph ist zu einer meßbaren Teilmenge eines abzählbaren Produkts endlicher diskreter Meßräume.

Beispiele 15.3.3.4. Die reelle Zahlengerade $\mathbb{R}$ ist mit ihrer Borel'schen σ-Algebra ein Borel'scher Meßraum. In der Tat liefert die Dezimalbruchentwicklung „ohne Neunerperioden" eine meßbare Abbildung $[0,1) \hookrightarrow \operatorname{Ens}(\mathbb{N}, \{0,1,\ldots,9\})$ mit meßbarem Bild. Umgekehrt ist auch jeder Borel'sche Meßraum isomorph zu einer meßbaren Teilmenge der reellen Zahlengeraden. In der Tat können wir ihn leicht als meßbare Teilmenge von $\operatorname{Ens}(\mathbb{N}, \{0,1,\ldots,8\})$ realisieren, und die Dezimalbruchentwicklung realisiert das hinwiederum als meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}$. Damit ist auch jeder Borel'sche Meßraum isomorph zu einer meßbaren Teilmenge des Intervalls $[0,1]$.

Ergänzung 15.3.3.5. Im allgemeinen weiß ich nicht, wie man ein beliebiges Produkt von beliebigen Wahrscheinlichkeitsräumen wieder mit der Struktur eines Wahrscheinlichkeitsraums versehen sollte. Man konstruiert zwar relativ leicht eine Abbildung von den offensichtlichen Erzeugern der σ-Algebra nach $[0,1]$, es aber gelingt mir im allgemeinen nicht, deren σ-Additivität nachzuweisen. Im folgenden zeigen wir, wie das im Fall eines Produkts von Borelräumen doch gelingt.

Lemma 15.3.3.6 (Projektiver Limes von Maßräumen). *Sei T eine Indexmenge und sei für jedes endliche $I \subset T$ ein endliches Maß μ_I auf $\operatorname{Ens}(I,[0,1])$ gegeben derart, daß für $J \subset I$ und mit der Notation $\Phi_I^J : \operatorname{Ens}(I,[0,1]) \to \operatorname{Ens}(J,[0,1])$ für das Vorschalten der Injektion $J \hookrightarrow I$ stets gilt*

$$\left(\Phi_I^J\right)_* \mu_I = \mu_J$$

So existiert genau ein Borelmaß μ auf $\operatorname{Ens}(T,[0,1])$ mit $\left(\Phi_T^I\right)_* \mu = \mu_I$ für alle endlichen $I \subset T$.

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß die Mengen $\left(\Phi_T^I\right)^{-1}(A)$ für $A \subset \operatorname{Ens}(I,[0,1])$ meßbar und $I \subset T$ endlich aber beliebig einen Mengenring $\mathcal{I}$ bilden, und daß es genau eine Abbildung μ von diesem Mengenring $\mathcal{I}$ nach $[0,\infty)$ gibt mit

$$\mu\left(\left(\Phi_T^I\right)^{-1}(A)\right) = \mu_I(A)$$

wann immer $I \subset T$ endlich ist und $A \subset \operatorname{Ens}(I,[0,1])$ meßbar. Ebenso leicht sieht man, daß diese Abbildung μ additiv ist. Sobald wir die σ-Additivität von μ zeigen

können, folgt unser Lemma aus dem Maßfortsetzungssatz von Caratheodory. Um die σ-Additivität zu zeigen, argumentieren wir wie im Vorfeld der Konstruktion des Lebesguemaßes beim Beweis von Lemma 13.1.2.7. Es gilt zu zeigen, daß für $A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eine disjunkte Vereinigung mit $A, A_n \in \mathcal{I}$ gilt

$$\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Offensichtlich gilt schon einmal $\mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C)$ für $B, C \in \mathcal{I}$ disjunkt. Wir setzen nun $B_n = A \backslash (A_0 \cup \ldots \cup A_n)$. Natürlich gehören dann auch die B_n zu $\mathcal{I}$, es gilt $B_0 \supset B_1 \supset \ldots$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$, und es reicht, wenn wir zeigen

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aufgrund der Regularität von Borel-Maßen auf $[0,1]^r$ nach 13.1.10.10 und dem Satz von Tychonoff 15.3.2.10 finden wir für jedes n eine kompakte Menge $C_n \subset B_n$ aus $\mathcal{I}$ für die gilt

$$\mu(B_n \backslash C_n) \leq 2^{-n}\varepsilon$$

Jetzt betrachten wir $D_n = C_0 \cap \ldots \cap C_n$. Auch die D_n gehören zu $\mathcal{I}$, es gilt $D_n \subset C_n \subset B_n$, und zusätzlich haben wir $D_0 \supset D_1 \supset D_2 \ldots$ Wir zeigen nun $\mu(B_n \backslash D_n) \leq 2\varepsilon$ für alle n. In der Tat gilt ja

$$B_n \backslash D_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_n \backslash C_k \subset \bigcup_{k=0}^{n} B_k \backslash C_k$$

und folglich

$$\mu(B_n \backslash D_n) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k \backslash C_k) \leq \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}\varepsilon \leq 2\varepsilon$$

Nun folgt aber aus $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n = \emptyset$ und der Kompaktheit der D_n und 11.2.1.19 schon $D_N = \emptyset$ für ein N, und damit ergibt sich $\mu(B_n) \leq 2\varepsilon$ für $n \geq N$. □

Satz 15.3.3.7 (von Kolmogoroff für projektive Limites von Borelräumen). *Sei T eine Indexmenge und sei für jedes $i \in T$ ein Borelraum B_i gegeben und für jedes endliche $I \subset T$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_I auf $\prod_{i\in I} B_i$ derart, daß für $J \subset I$ und mit der Notation Φ_I^J für die Projektion auf den entsprechenden Teil der Faktoren stets gilt*

$$\left(\Phi_I^J\right)_* \mu_I = \mu_J$$

So existiert genau ein Borelmaß μ auf $\prod_{i\in T} B_i$ mit $\left(\Phi_T^I\right)_* \mu = \mu_I$ für alle endlichen $I \subset T$.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Lemma 15.3.3.6. □

15.3.4 Topologische Räume und Kringalgebren*

15.3.4.1. Unter einer **Ringalgebra über** $\mathbb{C}$ verstehen wir nach 4.7.9.1 einen Vektorraum A über $\mathbb{C}$ mit einer bilinearen Abbildung

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \to & A \\ (a,b) & \mapsto & ab \end{array}$$

derart, daß das Assoziativgesetz $a(bc) = (ab)c$ gilt und daß es ein Element $1_A = 1 \in A$ gibt mit $1a = a1 = a \ \forall a \in A$. Ein **Ringalgebrenhomomorphismus** von einer Ringalgebra A in eine weitere Ringalgebra Z ist eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\varphi : A \to Z$ derart, daß gilt $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für alle $a, b \in A$. Wir bezeichnen die Menge all dieser Ringalgebrenhomomorphismen mit $\mathrm{Ralg}_{\mathbb{C}}(A, Z)$ oder kurz $\mathrm{Ralg}(A, Z)$. Eine kommutative Ringalgebra nennen wir abkürzend eine **Kringalgebra**.

15.3.4.2. Jedem topologischen Raum X können wir die $\mathbb{C}$-Kringalgebra

$$\mathcal{C}(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$$

der stetigen komplexwertigen Funktionen auf X zuordnen. Wir benutzen im weiteren Verlauf dieses Abschnitts für den Wert einer Funktion $f \in \mathcal{C}(X)$ an einer Stelle $x \in X$ die symmetrischere Notation $f(x) = \langle f, x\rangle$ und erhalten eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X) \times X & \to & \mathbb{C} \\ (f\ ,\ x) & \mapsto & \langle f, x\rangle \end{array}$$

15.3.4.3. Jeder $\mathbb{C}$-Ringalgebra A ordnen wir umgekehrt einen topologischen Raum $\mathrm{Spek}\, A$ zu, das **Spektrum von** A. Als zugrundeliegende Menge nehmen wir die Menge

$$\mathrm{Spek}\, A := \mathrm{Ralg}(A, \mathbb{C})$$

aller Homomorphismen von $\mathbb{C}$-Ringalgebren $A \to \mathbb{C}$. Für $a \in A$ und $\varphi \in \mathrm{Spek}\, A$ benutzen wir analog wie oben die Notation $\varphi(a) = \langle a, \varphi\rangle$ und erhalten eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} A \times \mathrm{Spek}\, A & \to & \mathbb{C} \\ (a\ ,\ \varphi) & \mapsto & \langle a, \varphi\rangle \end{array}$$

Wir definieren die Topologie auf $\mathrm{Spek}\, A$ als die Initialtopologie zur Familie von Abbildungen $\langle a,\ \rangle : \mathrm{Spek}\, A \to \mathbb{C}$ für $a \in A$. Die komplexen Zahlen denken wir uns dabei mit ihrer natürlichen Topologie versehen.

Vorschau 15.3.4.4 (**Bezug zum Spektrum eines Operators**). Wie unser Spektrum hier mit dem Spektrum eines Operators zusammenhängt, wird in 15.3.4.23 erklärt.

Vorschau 15.3.4.5 (**Bezug zum Spektrum in der kommutativen Algebra**). In der kommutativen Algebra in 7.4.2.4 definieren wir das Spektrum $\operatorname{Spec} R$ eines kommutativen Rings abweichend als die Menge aller Primideale von R. Allerdings schreiben wir dann auch $\operatorname{Spec} R$ mit einem c und nicht wie hier mit k. Für jede $\mathbb{C}$-Kringalgebra A liefert die Abbildungsvorschrift $\phi \mapsto \ker \phi$ eine Einbettung $\operatorname{Spek} A \hookrightarrow \operatorname{Spec} A$, deren Bild wir $\operatorname{Max}_{\mathbb{C}} A$ notieren und das für ringendliche $\mathbb{C}$-Kringalgebren nach dem Hilbert'schen Nullstellensatz mit der Menge $\operatorname{Max} A$ aller maximalen Ideale von A übereinstimmt.

Satz 15.3.4.6 (Räume und ihre Ringe). *Das Spektrum des Rings der stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorffraum ist homömorph zu unserem kompakten Hausdorffraum selber.*

Ergänzung 15.3.4.7. Analoges gilt mit demselben Beweis auch, wenn man im vorhergehenden $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt. Allerdings gilt der anschließende Satz 15.3.4.19 von Gelfand-Naimark nicht mehr analog über $\mathbb{R}$. Das ist der Grund, warum ich mich hier auf die komplexe Version konzentriere.

Vorschau 15.3.4.8. Die Sprache der Kategorientheorie und insbesondere der adjungierten Funktoren 16.4.3 erlauben es, die Struktur der folgenden Argumentation besonders gut herauszuarbeiten. In dieser Sprache konstruiert man zunächst eine Adjunktion zwischen dem Funktor $\operatorname{Spek} : \operatorname{Ralg}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{opp}} \to \operatorname{Top}$ als Rechtsadjungiertem zum Funktor $\mathcal{C} : \operatorname{Top} \to \operatorname{Ralg}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{opp}}$ als seinem Linksadjungierten. Unsere Konstruktionen aus 15.3.4.10 erweisen sich als der Opponierte der Koeinheit und die Einheit dieser Adjunktion. Die Präzisierung 15.3.4.11 des Satzes besagt in dieser Sprache, daß diese Einheit der Adjunktion für kompakte Hausdorffräume stets ein Isomorphismus ist. Nach den allgemeinen Erkenntnissen 16.4.8.15 zu adjungierten Funktoren ist damit der Funktor $\mathcal{C} : \operatorname{Top} \to \operatorname{Ralg}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{opp}}$ volltreu auf der Kategorie der kompakten Hausdorffräume mit Spek als Quasiinversem wie in 15.3.4.6 behauptet.

Scholium 15.3.4.9. Ein kompakter Hausdorffraum X ist also vollständig „kodiert“ in der $\mathbb{C}$-Ringalgebra $\mathcal{C}(X)$ der stetigen komplexwertigen Funktionen auf X, einem rein algebraischen Objekt. Eine Variante dieser Entsprechung zwischen „Räumen und Ringen“ steht im Zentrum der „algebraischen Geometrie“. Eine andere Variante führt zur sogenannten „nichtkommutativen Geometrie“. Die Grundidee ist hierbei, daß ja nur ganz spezielle kommutative Ringe kompakte Hausdorffräume beschreiben. Allgemeinere Klassen von eventuell nichtkommutativen Ringen kann man aber in analoger Weise auch „geometrisch“ verstehen und so neue Arten von „nichtkommutativen Räumen“ gewinnen.

15.3.4.10. Bevor wir den Satz beweisen, will ich seine Aussage noch etwas präzisieren. Per definitionem haben wir ja für jede $\mathbb{C}$-Ringalgebra A einen Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Ringalgebren $A \to \mathcal{C}(\operatorname{Spek} A)$, $a \mapsto \langle a, \ \rangle$. Ebenso haben wir

für jeden topologischen Raum X eine stetige Abbildung $\mathrm{ev} : X \to \operatorname{Spek} \mathcal{C}(X)$, $x \mapsto \langle\ , x\rangle$. Wir werden den obigen Satz in der folgenden präziseren Form zeigen:

Satz 15.3.4.11 (**Räume und ihre Ringe**). *Gegeben ein kompakter Hausdorffraum X ist unsere Evaluationsabbildung* ev *ein Homöomorphismus*

$$\mathrm{ev} : X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spek} \mathcal{C}(X)$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $\operatorname{Spek} \mathcal{C}(X)$ und sogar allgemeiner $\operatorname{Spek} A$ für eine beliebige $\mathbb{C}$-Ringalgebra A ein Hausdorffraum ist. In der Tat, sind $\varphi, \psi : A \to \mathbb{C}$ zwei verschiedene Elemente von $\operatorname{Spek} A$, so gibt es $a \in A$ mit $\langle a, \varphi\rangle \neq \langle a, \psi\rangle$. Die Urbilder unter $\langle a,\ \rangle$ von disjunkten offenen Umgebungen dieser verschiedenen komplexen Zahlen sind dann disjunkte offene Umgebungen von φ und ψ im $\operatorname{Spek} A$. Wir müssen jetzt nur noch zeigen, daß für kompaktes und Hausdorff'sches X unsere Evaluationsabbildung $\mathrm{ev} : X \to \operatorname{Spek} \mathcal{C}(X)$ bijektiv ist, denn nach 15.1.5.13 ist eine stetige Bijektion von einem kompakten Raum auf einen Hausdorffraum stets ein Homöomorphismus. Aus Urysohns Lemma folgt bereits, daß ev injektiv ist, denn für $x \neq y$ gibt es $f \in \mathcal{C}(X)$ mit $\langle f, x\rangle \neq \langle f, y\rangle$ und daraus folgt $\langle\ , x\rangle \neq \langle\ , y\rangle$. Es bleibt zu zeigen, daß ev surjektiv ist. Ist in anderen Worten $\varphi : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{C}$ ein Ringalgebrenhomomorphismus, so müssen wir $x \in X$ finden mit $\varphi = \langle\ , x\rangle$. Finden wir $x \in X$ mit $\langle \ker \varphi, x\rangle = 0$, so ist notwendig $\varphi = \langle\ , x\rangle$, denn beide Seiten sind dann Linearformen, die denselben Kern haben und die konstante Funktion $1 \in \mathcal{C}(X)$ auf $1 \in \mathbb{C}$ werfen. Wir nehmen also an, es gebe keinen Punkt $x \in X$, an dem alle Funktionen aus $\ker \varphi$ verschwinden, und führen diese Annahme zum Widerspruch. In der Tat gäbe es ja dann für jeden Punkt $x \in X$ eine Funktion $f_x \in \ker \varphi$ mit $f_x(x) \neq 0$. Natürlich gibt es dann auch eine offene Umgebung U_x von x, auf der f_x nicht verschwindet. Endlich viele dieser U_x überdecken aber X, es gäbe also eine endliche Teilmenge $E \subset X$ mit $X = \bigcup_{x \in E} U_x$ und $f = \sum_{x \in E} f_x \bar{f}_x$ wäre ein Element von $\ker \varphi$ ohne Nullstelle. Dann wäre aber auch $1/f \in \mathcal{C}(X)$ eine wohldefinierte stetige Funktion auf X, es folgte $1 = (1/f)f \in \ker \varphi$ und das kann nicht sein. $\square$

Ergänzung 15.3.4.12 (**Bezug zwischen stetigen und polynomialen Funktionen**). Gegeben ein Kring R und ein Ideal $I \subset R[T_1, \ldots, T_n]$ mit simultaner Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(I) \subset R^n$ ist es im Rahmen der Algebra unmittelbar klar, daß wir eine Bijektion

$$\mathcal{Z}(I) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Kring}^R(R[T_1, \ldots, T_n]/I, R)$$

erhalten, wenn wir jedem Punkt den zugehörigen Auswertungshomomorphismus zuordnen. Ist speziell $R = \mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen und $\mathcal{Z}(I)$ kompakt in der von der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie, so liefert nach 15.3.4.7 andererseits dieselbe Abbildungsvorschrift auch eine Bijektion

$$\mathcal{Z}(I) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Kring}^{\mathbb{R}}(\mathcal{C}(\mathcal{Z}(I), \mathbb{R}), \mathbb{R})$$

In anderen Worten läßt sich also unter diesen Annahmen jeder $\mathbb{R}$-lineare Ringhomomorphismus $\mathbb{R}[T_1, \ldots, T_n]/I \to \mathbb{R}$ auf genau eine Weise zu einem $\mathbb{R}$-linearen Ringhomomorphismus $\mathcal{C}(\mathcal{Z}(I), \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ausdehnen. Das ist explizit deshalb klar, da jeder Ringhomomorphismus der letzteren Art nach 15.3.4.7 stetig sein muß in Bezug auf die Norm der gleichmäßigen Konvergenz und da die polynomialen Funktionen für diese Norm dicht liegen nach dem Satz von Stone-Weierstraß.

15.3.4.13. Diejenigen komplexen Ringalgebren, die isomorph sind zur Ringalgebra der stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorffraum, werden charakterisiert durch den Satz von Gelfand-Naimark 15.3.4.19, den wir im folgenden beweisen. Wir beginnen mit einigen Erinnerungen. Eine **Banach-Ringalgebra** ist nach 13.4.3.1 ein Banachraum A mit einer stetigen bilinearen Verknüpfung $A \times A \to A$, die A zu einem Ring macht. Auf jeder Banach-Ringalgebra gibt es nach loc.cit. genau eine zur urprünglichen Norm äquivalente Norm $\| \ \|$ mit der Eigenschaft $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ und $\|1\| \leq 1$. Wir nennen sie die kanonische Norm und denken uns jede Banachringalgebra mit ihrer kanonischen Norm versehen. Man prüft leicht $\|1\| = 1$ falls $A \neq 0$. Das **Spektrum** eines Elements a einer Banachringalgebra ist die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $(a - \lambda 1)$ nicht invertierbar. Es ist nach 13.4.3.13 stets kompakt und enthalten in der abgeschlossenen Kreischeibe $\bar{\mathrm{B}}(0; \|a\|)$. Das Supremum über die Beträge der Elemente des Spektrums von a heißt der **Spektralradius** $\rho(a)$ **von** a, so daß sich unsere Aussage als die Ungleichung $\rho(a) \leq \|a\|$ schreiben läßt. In 13.4.4.4 zeigen wir unter Vorwegnahme von Resultaten aus der Funktionentheorie für jede von Null verschiedene Banachringalgebra A, daß jedes Element $a \in A$ nichtleeres Spektrum hat und daß genauer gilt

$$\rho(a) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$$

Im übrigen zeigen wir in 13.4.4.8 für jede Banachkringalgebra A, daß die Abbildung, die jedem Ringalgebrenhomomorphismus nach $\mathbb{C}$ seinen Kern zuordnet, eine Bijektion

$$\operatorname{Spek} A \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} A$$

mit der Menge der rein algebraisch zu verstehenden maximalen Ideale von A induziert.

Satz 15.3.4.14 (**Kompaktheit von Spektren**). *Für jede Banachringalgebra A ist ihr Spektrum* $\operatorname{Spek} A$ *ein kompakter Hausdorffraum.*

Beweis. Gegeben ein Ringalgebrenhomomorphismus $\varphi : A \to \mathbb{C}$ muß $\varphi(a)$ stets Werte im Spektrum annehmen, da φ keine invertierbaren Elemente von A auf Null schicken kann. Wir betrachten die Injektion $\operatorname{Spek} A \hookrightarrow \prod_{a \in A} \bar{\mathrm{B}}(0; \|a\|)$, $\varphi \mapsto (\varphi(a))_{a \in A}$ unseres Spektrums in ein Produkt abgeschlossener Kreisscheiben in der komplexen Zahlenebene, deren Existenz durch die Abschätzung $\rho(a) \leq \|a\|$

gesichert ist. Per definitionem trägt $\operatorname{Spek} A$ die Spurtopologie. Andererseits ist $\operatorname{Spek} A$ genau die Menge aller Tupel $(\psi(a))_{a\in A}$ mit $\psi(1) = 1, \psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b)$ und $\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$ für alle $a, b \in A$ und damit eine abgeschlossene Teilmenge. Nach dem Satz von Tychonoff 15.3.2.10 ist also $\operatorname{Spek} A$ kompakt, und als Teilraum eines Hausdorffraums ist $\operatorname{Spek} A$ eh Hausdorff. □

Definition 15.3.4.15. Eine **Involution** und genauer **schieflineare Involution** auf einer $\mathbb{C}$-Algebra A ist eine $\mathbb{C}$-schieflineare Abbildung $a \mapsto a^*$ derart, daß gilt $a^{**} = a$ und $(ab)^* = b^*a^*$ für alle $a, b \in A$.

Definition 15.3.4.16. Eine C^***-Ringalgebra** ist ein Tripel $(A, \| \ \|, *)$ bestehend aus einer Banachringalgebra mit kanonischer Norm im Sinne von 13.4.3.1 und einer schieflinearen Involution derart, daß gilt $\|aa^*\| = \|a\|^2 \ \forall a \in A$. Ein **Homomorphismus von** C^***-Ringalgebren** ist ein stetiger Ringalgebrenhomomorphismus, der verträglich ist mit den Involutionen. Eine kommutative C^*-Ringalgebra nennen wir eine C^***-Kringalgebra**.

15.3.4.17 (**Diskussion der Terminologie**). In Teilen der Literatur heißen unsere C^*-Ringalgebren abweichend C^***-Algebren** oder B^***-Algebren**. Vielfach wird aber bei einer C^*-Algebra auch nur die Assoziativität gefordert und nicht die Existenz einer Einselements.

Beispiel 15.3.4.18. Die Ringalgebra $\mathcal{C}(X)$ aller stetigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorffraum X mit der Norm $\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$ und der durch $f \mapsto \bar{f}$ gegebenen Involution ist eine C^*-Kringalgebra.

Satz 15.3.4.19 (**Gelfand-Naimark**). *Gegeben eine* C^**-Kringalgebra* A *ist* $\operatorname{Spek} A$ *ein kompakter Hausdorffraum und die offensichtliche Abbildung liefert einen Isomorphismus von* $\mathbb{C}$*-Kringalgebren*

$$h : A \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(\operatorname{Spek} A)$$

Dieser Isomorphismus identifiziert die Norm und Involution auf A *mit der offensichtlichen Norm und Involution auf* $\mathcal{C}(\operatorname{Spek} A)$.

15.3.4.20. Dieser Satz sagt insbesondere, daß die Norm und die Involution auf einer C^*-Kringalgebra schon durch die unterliegende Struktur einer $\mathbb{C}$-Kringalgebra eindeutig festgelegt sind, ja daß der vergeßliche Funktor von den C^*-Kringalgebren in die $\mathbb{C}$-Kringalgebren volltreu ist.

15.3.4.21. In der Terminologie, wie wir sie in 4.7.2.19 einführen, liefern die Funktoren Spek und $\mathcal{C}$ sogar zueinander quasiinverse Äquivalenzen von Kategorien

$$\left\{\begin{array}{c}\text{kompakte}\\ \text{Hausdorffräume,}\\ \text{stetige Abbildungen}\end{array}\right\} \underset{\operatorname{Spek}}{\overset{\mathcal{C}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\approx}}}} \left\{\begin{array}{c}\mathrm{C}^*\text{-Kringalgebren,}\\ \text{Homomorphismen von}\\ \mathbb{C}\text{-Kringalgebren}\end{array}\right\}^{\mathrm{opp}}$$

15.3.4.22. Wir haben bereits besprochen, daß $h(a)$ nur Werte aus dem Spektrum von a annehmen kann. In Übung 13.4.4.8 haben wir genauer gesehen, daß im Fall einer kommutativen Banachringalgebra A umgekehrt alle Elemente des Spektrums eines Elements $a \in A$ auch tatsächlich als Werte der Funktion $h(a)$ angenommen werden.

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A \neq 0$, also $\|1\| = 1$. Zunächst zeigen wir, daß für $a = a^* \in A$ unser $h(a)$ eine reellwertige Funktion ist. Haben wir nämlich $h(a) = \alpha + \mathrm{i}\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so folgt $h(a + \mathrm{i}t1) = \alpha + \mathrm{i}(\beta + t)$ und für $b := a + \mathrm{i}t1$ mit $t \in \mathbb{R}$ ergibt sich die von der Mitte zu entwickelnde Ungleichungskette

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t + t^2 = |h(b)|^2 \leq \|b\|^2 = \|bb^*\| = \|a^2 + t^2 1\| \leq \|a\|^2 + t^2$$

Da kann aber nur dann für alle $t \in \mathbb{R}$ gelten, wenn gilt $\beta = 0$. Indem wir ein beliebiges $a \in A$ als $(a+a^*)/2+\mathrm{i}((a-a^*)/2\mathrm{i})$ schreiben, folgern wir $h(a^*) = \overline{h(a)}$ für alle $a \in A$. Dann zeigt Stone-Weierstraß, daß $h(A)$ dicht liegt in $\mathcal{C}(\mathrm{SpekA})$ für die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Gegeben ein Element a einer Banachringalgebra erinnere ich nun aus 13.4.4.4 an die Formel

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$$

für den Spektralradius, deren Beweis mit einem Vorgriff auf Methoden aus der Funktionentheorie gelang. Ist A sogar eine C^*-Kringalgebra, so folgt aus der Identität $\|aa^*\| = \|a\|^2$ sofort $\rho(b) = \|b\|$ für alle $b \in A$ mit $b^* = b$. Gegeben $a \in A$ und $b = aa^*$ erhalten wir damit $\rho(b) = \|b\|$, mit unserer Vorbemerkung 15.3.4.22 also $\|h(b)\|_\infty = \|b\|$. Daraus aber folgt $\|a\|^2 = \|aa^*\| = \|b\| = \|h(b)\|_\infty = \|h(a)\|_\infty^2$ alias $\|a\| = \|h(a)\|_\infty$ für alle $a \in A$. Also ist h isometrisch. Da A vollständig ist, muß h abgeschlossenes Bild haben. Also ist h ein isometrischer Isomorphismus. □

15.3.4.23. Wir geben noch eine konkrete Anwendung. Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $N : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter Operator, als da heißt eine stetige lineare Abbildung. Man nennt N **normal**, wenn N mit seinem Adjungierten N^* kommutiert. Normal sind also insbesondere alle beschränkten selbstadjungierten Operatoren und ebenso alle unitären Operatoren. Das **Spektrum** $\sigma(N) \subset \mathbb{C}$ eines beschränkten Operators N ist die Menge

$$\sigma(N) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid N - \lambda\,\mathrm{id} \text{ ist nicht invertierbar}\}$$

Das Spektrum eines beschränkten Operators ist nach 13.4.3.13 stets eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Nun bilden wir in der Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ aller beschränkten Operatoren von $\mathcal{H}$ in sich selber die von N und N^* erzeugte Unterringalgebra

und bezeichnen mit A ihren Abschluß bezüglich der Operatornorm. So ist A eine C^*-Kringalgebra, nach Gelfand-Naimark 15.3.4.19 ist also die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$A \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(\operatorname{Spek} A)$$

Andererseits kann man zeigen, daß das Auswerten an N einen Homöomorphismus $\operatorname{Spek} A \xrightarrow{\sim} \sigma(N)$ liefert. In der Tat entspricht nach Gelfand-Naimark unter jeden Ringalgebrenhomomorphismus $\varphi : A \to \mathbb{C}$ die Abbildung $a \mapsto a^*$ der komplexen Konjugation und stetig ist er auch, also festgelegt durch seinen Wert an der Stelle N. Mithin liefert das Auswerten eine Injektion $\operatorname{Spek} A \hookrightarrow \mathbb{C}$. Sie ist per definitionem stetig. Ihr Bild muß in $\sigma(N)$ landen, da invertierbare Elemente unter φ invertierbar bleiben. Andererseits erzeugt jede Nichteinheit von A ein maximales Ideal, das einem Element von $\operatorname{Spek} A$ entspricht. So erkennt man, daß das Bild unserer Injektion genau das Spektrum $\sigma(N)$ von N ist. Zusammengesetzt ergibt sich so ein Isomorphismus

$$\mathcal{C}(\sigma(N)) \xrightarrow{\sim} A$$

Wir kürzen ihn $f \mapsto f(N)$ ab. Er ist sehr nützlich, zum Beispiel, wenn man eine Wurzel aus dem Operator N ziehen will. Wir haben die Verknüpfung unseres Isomorphismus mit der Einbettung $A \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ bereits in 13.4.8 kennengelernt.

15.4 Funktionen auf topologischen Gruppen*

15.4.1 Uniforme Strukturen

15.4.1.1. Der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit kann nicht sinnvoll von Abbildungen zwischen metrischen Räumen auf Abbildungen zwischen beliebigen topologischen Räumen erweitert werden. Eine derartige Erweiterung gelingt jedoch für Räume mit einer sogenannten „uniformen Struktur“ und insbesondere für topologische Gruppen und Teilmengen derselben. Das soll im folgenden diskutieren werden.

Definition 15.4.1.2. Gegeben eine Menge X und eine Relation auf X alias eine Teilmenge $A \subset X \times X$ setzen wir

$$\begin{aligned} A^{-1} &:= \{(y,x) \mid (x,y) \in A\} \\ A^2 &:= \{(x,z) \mid \exists y \in A \text{ mit } (x,y) \in A \text{ und } (y,z) \in A\} \end{aligned}$$

Definition 15.4.1.3. Eine **uniforme Struktur auf einer Menge** X ist ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ derart, daß gilt:

1. $\mathcal{A}$ ist stabil unter endlichen Schnitten und enthält demnach insbesondere auch ganz $X \times X$;
2. Mit einer Menge gehört auch jede ihrer Obermengen zu $\mathcal{A}$;
3. Alle Mengen aus $\mathcal{A}$ umfassen die Diagonale;
4. Mit A gehört auch A^{-1} zu $\mathcal{A}$;
5. Für jedes $A \in \mathcal{A}$ gibt es $B \in \mathcal{A}$ mit $B^2 \subset A$.

Die beiden ersten Bedingungen lassen sich in der in 15.3.2.1 eingeführten Terminologie auch als die Forderung zusammenfassen, daß $\mathcal{A}$ ein Filter sein soll. Eine Menge mit einer ausgezeichneten uniformen Struktur heißt ein **uniformer Raum**. Die Elemente von $\mathcal{A}$ nennen wir **verallgemeinerte Abstände** oder auch kürzer **Abstände**.

Beispiel 15.4.1.4. Für jede Metrik oder allgemeiner Pseudometrik d auf einer Menge X erhält man eine uniforme Struktur $\mathcal{A}$ auf X durch die Vorschrift

$$\mathcal{A} := \{A \subset X \times X \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } (d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow (x,y) \in A)\}$$

Es gibt jedoch bereits in dieser uniformen Struktur im allgemeinen sehr viel mehr Möglichkeiten für Abstände als im zugrundeliegenden metrischen Raum.

Beispiel 15.4.1.5. Jede Teilmenge eines uniformen Raums erbt eine uniforme Struktur in offensichtlicher Weise.

Beispiel 15.4.1.6. Auf jeder topologischen Gruppe G erhält man zwei uniforme Strukturen $\mathcal{A}_l$ und $\mathcal{A}_r$ durch die Vorschriften

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_l &:= \{A \subset G \times G \mid \exists V \Subset G \text{ mit } e \in V \text{ und } (x^{-1}y \in V \Rightarrow (x,y) \in A)\} \\ \mathcal{A}_r &:= \{A \subset G \times G \mid \exists V \Subset G \text{ mit } e \in V \text{ und } (xy^{-1} \in V \Rightarrow (x,y) \in A)\} \end{aligned}$$

Beispiel 15.4.1.7. Gegeben eine abelsche Gruppe G mit einem System von Untergruppen $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(G)$, das stabil ist unter endlichen Schnitten, können wir auf G eine uniforme Struktur erklären durch die Vorschrift

$$\mathcal{A} := \{A \subset G \times G \mid \exists V \in \mathcal{U} \text{ mit } (x - y \in V \Rightarrow (x,y) \in A)\}$$

Definition 15.4.1.8. Gegeben ein Punkt $x \in X$ und ein Abstand $A \in \mathcal{A}$ erklären wir den A**-Ball um** x als die Menge

$$\mathrm{B}(x; A) := \{y \in X \mid (y,x) \in A\}$$

Wir nennen eine Menge $U \subset X$ **uniform offen** oder meist einfach nur **offen**, wenn sie mit einem Element stets auch einen ganzen Ball um besagtes Element umfaßt. Die uniform offenen Mengen bilden dann eine Topologie auf X, die **uniforme Topologie**.

Beispiel 15.4.1.9. Unsere uniformen Strukturen auf einer topologischen Gruppe aus 15.4.1.6 geben uns beide als uniforme Topologie die ursprüngliche Topologie unserer topologischen Gruppe zurück.

15.4.1.10 (**Offene Kerne in der uniformen Topologie**). Bezüglich der uniformen Topologie auf einem uniformen Raum X besteht der offene Kern einer Menge $M \subset X$ genau aus allen Punkten $p \in M$, um die es einen Ball $\mathrm{B}(p; A)$ gibt, der auch noch ganz in M enthalten ist. In der Tat ist diese Menge offen, denn für jedes A finden wir C mit $C^2 \subset A$ und für jeden Punkt $q \in \mathrm{B}(p; C)$ ist damit auch $\mathrm{B}(q; C)$ noch ganz in M enthalten. Daß unser offener Kern in spe die größtmögliche in M enthaltene offene Menge ist, ist dann eh klar. Insbesondere ist jeder Ball um einen Punkt auch eine Umgebung von besagtem Punkt. Dahingegen müssen unsere Bälle keineswegs offen sein.

Definition 15.4.1.11. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen uniformen Räumen $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn es für jedes $B \in \mathcal{B}$ ein $A \in \mathcal{A}$ gibt mit $(f \times f)(A) \subset B$ alias $f(\mathrm{B}(x; A)) \subset \mathrm{B}(f(x); B)$ für alle $x \in X$.

Satz 15.4.1.12 (Gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta). *Jede stetige Abbildung von einem kompakten uniformen Raum in einen weiteren uniformen Raum ist gleichmäßig stetig.*

Beweis für metrische Räume. Im Fall metrischer Räume haben wir dafür bereits in 11.2.1.16 einen Beweis skizziert, der vom Begriff der Folgenkompaktheit ausgeht. Zur Vorübung geben wir nun erst einmal einen alternativen Beweis im Fall metrischer Räume, der vom Begriff der Überdeckungskompaktheit ausgeht. Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ unsere stetige Abbildung. Gegeben $\beta > 0$ setzen wir $\gamma := \beta/2$ und gegeben $x \in X$ finden wir $\alpha_x > 0$ mit $f(\mathrm{B}(x;\alpha_x)) \subset \mathrm{B}(f(x);\gamma)$. Nun setzen wir $\delta_x := \alpha_x/2$ und Wegen der Kompaktheit von X gibt es eine endliche Teilmenge $E \subset X$ derart, daß die Bälle $\mathrm{B}(x;\delta_x)$ für $x \in E$ bereits ganz X überdecken. Jedes $z \in X$ liegt also in einem $\mathrm{B}(x;\delta_x)$ für ein $x \in E$ und damit gilt auch $\mathrm{B}(z;\delta_x) \subset \mathrm{B}(x;\alpha_x)$. Nehmen wir nun $\delta := \min\{\delta_x \mid x \in E\}$, so gibt es für jedes $z \in X$ ein $x \in E$ mit $\mathrm{B}(z;\delta) \subset \mathrm{B}(x;\alpha_x)$ und folglich $f(\mathrm{B}(z;\delta)) \subset \mathrm{B}(f(x);\gamma)$. Nun haben aber je zwei Elemente des γ-Balls einen Abstand unter $2\gamma = \beta$ und so folgt $f(\mathrm{B}(z;\delta)) \subset \mathrm{B}(f(z);\beta)$. □

Beweis. Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ unsere uniformen Räume und $f : X \to Y$ unsere stetige Abbildung. Gegeben $B \in \mathcal{B}$ wählen wir zunächst $C \in \mathcal{B}$ mit $C = C^{-1}$ und $C^2 \subset B$. Für jedes $x \in X$ finden wir dann $A_x \in \mathcal{A}$ mit $f(\mathrm{B}(x;A_x)) \subset \mathrm{B}(f(x);C)$. Weiter finden wir $D_x \in \mathcal{A}$ mit $D_x^2 \subset A_x$ und $D_x = D_x^{-1}$. Wegen der Kompaktheit von X gibt es nun eine endliche Teilmenge $E \subset X$ derart, daß die Bälle $\mathrm{B}(x;D_x)$ für $x \in E$ bereits ganz X überdecken. Jedes $z \in X$ liegt also in einem $\mathrm{B}(x;D_x)$ für ein $x \in E$ und damit gilt auch $\mathrm{B}(z;D_x) \subset \mathrm{B}(x;A_x)$. Nehmen wir nun $D := \bigcap_{x\in E} D_x$, so gibt es für jedes $z \in X$ ein $x \in E$ mit $\mathrm{B}(z;D) \subset \mathrm{B}(x;A_x)$ und folglich $f(\mathrm{B}(z;D)) \subset \mathrm{B}(f(x);C)$. Für alle Elemente von $\mathrm{B}(f(x);C)$ und insbesondere für $f(z)$ gilt aber $\mathrm{B}(f(z);C^2) \supset \mathrm{B}(f(x);C)$. So folgt schließlich $f(\mathrm{B}(z;D)) \subset \mathrm{B}(f(z);B)$. □

Übungen

Übung 15.4.1.13. Jede stetige Abbildung von einem uniformen Raum in einen weiteren uniformen Raum, die außerhalb von einem Kompaktum konstant ist, ist gleichmäßig stetig. Hinweis: Man arbeite zunächst auf dem besagten Kompaktum K und finde dort zu B ein A. Dann betrachte man $F \in \mathcal{A}$ mit $F = F^{-1}$ und $F^2 \subset A$. Trifft nun ein Ball $\mathrm{B}(z;F)$ das Kompaktum K, so ist er bereits in einem Ball $\mathrm{B}(y;A)$ mit $y \in K$ enthalten.

Übung 15.4.1.14. Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ eine uniforme Struktur. Eine Teilmenge $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ heißt ein **Erzeugendensystem der uniformen Struktur** $\mathcal{A}$, wenn die Elemente von $\mathcal{A}$ genau alle Obermengen von Elementen von $\mathcal{E}$ sind. Man zeige, daß in einer abzählbar erzeugten uniformen Struktur jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Übung 15.4.1.15. Jede Verknüpfung gleichmäßig stetiger Abbildungen zwischen uniformen Räumen ist gleichmäßig stetig. Die Identität auf einem uniformen Raum ist gleichmäßig stetig. Die uniformen Räume bilden mithin eine Kategorie Unif. Man zeige, daß diese Kategorie Produkte besitzt.

15.4.2 Riesz'scher Darstellungssatz

15.4.2.1. Unter einem **Borelmaß** auf einem topologischen Raum verstehen wir wie in 13.1.1.22 ein topologisches Maß, das auf allen abgeschlossenen Kompakta unseres Raums endliche Werte annimmt. Diese Terminologie ist gängig, aber kein universeller Standard. Wir werden jedoch Borelmaße eh nur auf abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffräumen betrachten, für die die Konventionen der meisten Autoren dieselben Borelmaße liefern. Die Menge aller Borelmaße auf X notieren wir

$$\mathrm{M}^{\mathrm{bor}}(X;[0,\infty])$$

Definition 15.4.2.2. Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}_!(X,\mathbb{R})$ der reelle Vektorraum aller stetigen Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Eine Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_!(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ heißt **nichtnegativ**, wenn sie jeder nichtnegativen Funktion eine nichtnegative reelle Zahl zuordnet. Eine nichtnegative Linearform heißt ein **Radon-Maß** oder genauer ein **nichtnegatives Radon-Maß** auf unserem topologischen Raum. Die Menge aller nichtnegativen Radonmaße auf X notieren wir

$$\mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X;[0,\infty))$$

15.4.2.3. Ein Radon-Maß ist kein Maß im Sinne einer Funktion auf einer σ-Algebra 13.1.1.11. Der folgende Satz zeigt jedoch, daß diese Begriffe eng verwandt sind. Man beachte, daß wir von unserer Linearform keinerlei zusätzliche Stetigkeitseigenschaften fordern. Wir werden in 15.4.2.7 sehen, daß die Forderung der Nichtnegativität bereits gewisse Stetigkeitseigenschaften impliziert.

Satz 15.4.2.4 (Riesz'scher Darstellungssatz). *Für jeden lokal kompakten abzählbar basierten Hausdorffraum X liefert das Bilden des Integrals eine Bijektion*

$$\mathrm{M}^{\mathrm{bor}}(X;[0,\infty]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X;[0,\infty))$$

zwischen der Menge aller Borelmaße und der Menge aller Radonmaße auf X.

15.4.2.5. In anderen Worten können wir also jede nichtnegative Linearform durch genau ein Borelmaß darstellen, deshalb auch die Bezeichnung als Darstellungssatz. Wir beginnen den Beweis des Satzes mit dem Nachweis, daß nichtnegative Linearformen automatisch gewisse Stetigkeitseigenschaften haben.

Ergänzung 15.4.2.6 (**Verallgemeinerung auf nicht abzählbar basierte Räume**). Für jeden lokal kompakten Hausdorffraum X liefert allgemeiner das Bilden des Integrals eine Bijektion

$$\{\text{Reguläre Borelmaße auf } X\} \quad \tilde{\to} \quad \{\text{Radonmaße auf } X\}$$

Hier sind reguläre Borelmaße wie in 13.1.10.12 zu verstehen als Borelmaße mit den Eigenschaften, daß (1) das Maß jeder offenen Menge das Supremum über die Maße der in ihr enthaltenen Kompakta ist und (2) das Maß jeder meßbaren Menge das Infimum über die Maße der sie umfassenden offenen Mengen. Man mag das in [Hal70] oder [Rud87] oder [**?**] nachlesen. Betrachten wir zum Beispiel eine überabzählbare Menge mit der diskreten Topologie und das Borelmaß, das jeder abzählbaren Menge Null zuordnet und jeder überabzählbaren Menge Unendlich, so ist das Integral jeder stetigen Funktion mit kompaktem Träger Null, obwohl unser Maß nicht identisch verschwindet. Allerdings sind in diesem Fall auch unsere Regularitätsbedingungen nicht erfüllt, genauer ist hier unsere erste Regularitätsbedingung verletzt. Meines Erachtens sind auf topologischen Räumen Radonmaße der natürlichere Begriff. Dennoch ist der Übergang zu regulären Borelmaßen oft von Nutzen.

Lemma 15.4.2.7 (**Stetigkeitseigenschaften nichtnegativer Linearformen**). *Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X und eine nichtnegative Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ und ein Kompaktum $K \subset X$ ist die Einschränkung von Λ auf den Raum $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen mit Träger in K stetig für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz.*

Beweis. Das Lemma von Urysohn oder genauer 15.3.1.10 liefert eine stetige nichtnegative Funktion $h \in \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$, die auf unserem Kompaktum K konstant Eins ist. Für $f \in \mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ gilt dann $-\|f\|_\infty\, h \le f \le \|f\|_\infty\, h$ und Anwenden von Λ liefert $|\Lambda(f)| \le \Lambda(h)\, \|f\|_\infty$. □

Ergänzung 15.4.2.8. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X verstehen wir unter einem **reellen Radonmaß auf** X eine Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß für jedes Kompaktum $K \subset X$ die Einschränkung von Λ auf den Raum $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen mit Träger in K stetig ist für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz. Den Vektorraum der reellen Radonmaße notieren wir

$$\mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X; \mathbb{R})$$

Das Analogon des Riesz'schen Darstellungssatzes für reelle Maße gilt nicht. Bereits für $X = \mathbb{Z}$ mit der diskreten Topologie ist $f \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n f(n)$ ein reelles Radonmaß, das nicht als eine Integration über ein reelles Borelmaß $\mu \in \mathrm{M}^{\mathrm{bor}}(X; \mathbb{R})$ realisiert werden kann.

Beweis des Darstellungssatzes 15.4.2.4. Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die Gegenrichtung und betrachten die σ-Algebra aller Borelmengen in $X \times \mathbb{R}$. Wir behaupten, daß sie bereits erzeugt wird von den „Graphenflächen“

$$G(f) = \{(x,t) \mid 0 \leq t < f(x)\}$$

für alle nichtnegativen $f \in \mathcal{C}_!(X, [0,\infty))$ sowie ihren in der zweiten Koordinate verschobenen Kopien $\{(x,t) \mid 0 \leq t + a < f(x)\}$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Um das nachzuweisen, reicht es zu zeigen, daß die von den verschobenen Graphenflächen erzeugte σ-Algebra bereits alle Quader $U \times [a,b)$ mit $U \Subset X$ offen enthält. Sicher dürfen wir uns hier auf Quader $U \times [0,b)$ beschränken, und nach 15.3.1.11 dürfen wir, da wir X abzählbar basiert voraussetzen, sogar annehmen, daß gilt $U = \{x \mid f(x) > 0\}$ für eine stetige Funktion $f : X \to [0,\infty)$ mit kompaktem Träger. Dann aber erhalten wir für den fraglichen Quader die Darstellung

$$U \times [0,b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G(\inf(nf, b))$$

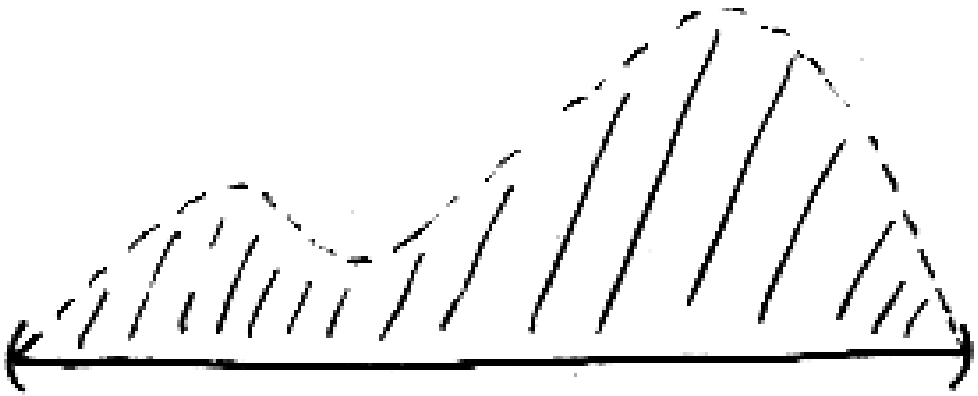
Bezeichne nun $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X \times \mathbb{R})$ den von allen verschobenen Graphenflächen erzeugten Mengenring und bezeichne λ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$. Wir behaupten, daß für alle $G \in \mathcal{G}$ die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} f_G : & X & \to & [0,\infty) \\ & x & \mapsto & \lambda(G \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x)) \end{array}$$

stetig ist. Um das zu sehen, betrachten wir für alle stetigen $f : X \to \mathbb{R}$ den „Halbraum“

$$H(f) := \{(x,t) \mid t < f(x)\}$$

Sicher gilt $H(f) \cap H(g) = H(\inf(f,g))$ und $H(f) \cup H(g) = H(\sup(f,g))$. Betrachten wir die leere Menge und die ganze Menge auch als Halbräume, so ist das System aller Halbräume mithin stabil unter endlichen Schnitten und endlichen Vereinigungen. Der von allen Halbräumen erzeugte Mengenring besteht nach 13.1.2.33 folglich aus endlichen disjunkten Vereinigungen von Differenzmengen von derartigen Halbräumen. Insbesondere ist jede Menge $G \in \mathcal{G}$ eine endliche disjunkte Vereinigung von Mengen der Gestalt $H(f) \backslash H(g)$ mit $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig, und das zeigt, daß f_G stetig ist für alle $G \in \mathcal{G}$. Wir behaupten nun, daß für $\Lambda : \mathcal{C}_!(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Linearform die Zuordnung $G \mapsto \Lambda(f_G)$ sogar ein Prämaß auf $\mathcal{G}$ ist. In der Tat folgt das aus der Stetigkeitseigenschaft 15.4.2.7 nichtnegativer Linearformen mit dem Satz von Dini 12.4.1.14, der besagt, daß auf einem Kompaktum jede monotone Folge stetiger reellwertiger Funktionen, die punktweise gegen eine stetige Funktion konvergiert, bereits gleichmäßig konvergieren muß. Jede nichtnegative Linearform auf $\mathcal{C}_!(X,\mathbb{R})$ liefert so erst ein Prämaß auf $\mathcal{G}$ und mit dem Erweiterungssatz von Caratheodory



Eine verschobene Graphenfläche

13.1.2.11 dann ein topologisches Maß π_Λ auf $X \times \mathbb{R}$. Wir erhalten schließlich ein topologisches Maß μ_Λ auf X, indem wir für jede topologisch meßbare Teilmenge $A \subset X$ setzen

$$\mu_\Lambda(A) = \pi_\Lambda(A \times [0,1))$$

Dieses Maß μ_Λ ist endlich auf Kompakta, da wir nach 15.3.1.10 für jedes Kompaktum K die konstante Funktion Eins auf K zu einer stetigen Funktion mit kompaktem Träger $h : X \to [0,\infty)$ ausdehnen können, und aus $K \times [0,1) \subset G(h)$ folgt dann sofort $\mu_\Lambda(K) \leq \Lambda(h)$. Damit haben wir zu unserer durch das Integrieren erklärten Abbildung im Darstellungssatz eine Abbildung in die Gegenrichtung konstruiert, der man ohne Schwierigkeiten ansieht, daß sie eine Rechtsinverse ist, in Formeln $\int f\mu_\Lambda = \Lambda(f)$. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die Abbildung aus unserem Satz injektiv ist, als da heißt, daß verschiedene Borelmaße $\mu \neq \nu$ auf X auch verschiedene Funktionale auf $\mathcal{C}_!(X,\mathbb{R})$ liefern. Sicher liefern sie verschiedene Maße $\mu \boxtimes \lambda \neq \nu \boxtimes \lambda$ auf $X \times \mathbb{R}$ und wegen der Eindeutigkeitsaussage im Maßerweiterungssatz 13.1.2.11 nehmen sie dann auch auf mindestens einer Menge $G \in \mathcal{G}$ verschiedene Werte an. Mit Fubini folgt daraus aber, daß μ und ν verschieden sind auf $f_G \in \mathcal{C}_!(X,\mathbb{R})$. □

Übungen

Übung 15.4.2.9. Gegeben ein reguläres Borelmaß μ auf einem lokal kompakten Hausdorffraum X liegen die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht im Raum der L^p-Funktionen für jedes $p < \infty$, in Formeln

$$\overline{\mathcal{C}_!(X)} = \mathrm{L}^p(X;\mu)$$

Hinweis: Nach 13.2.3.21 liegt das Erzeugnis der charakteristischen Funktionen von Mengen endlichen Maßes dicht. Aufgrund der Regularität liegt sogar das Erzeugnis der charakteristischen Funktionen von offenen Mengen endlichen Maßes dicht. Und wieder aufgrund der Regularität können wir in jede offene Menge endlichen Maßes eine kompakte Menge fast desselben Maßes hineinlegen und dann eine nichtnegative stetige Funktion mit kompaktem Träger finden, die auf diesem Kompaktum Eins ist und außerhalb unserer offenen Menge Null.

Übung 15.4.2.10. Jedes reelle Radonmaß auf einem lokal kompakten Hausdorffraum ist die Differenz von zwei nichtnegativen Radonmaßen. Hinweis: Man orientiert sich an den Hinweisen zu 13.4.6.6.

Übung 15.4.2.11. Gegeben ein lokal kompakter abzählbar basierter Hausdorffraum X liefert das Bilden des Produkts mit dem Lebesguemaß eine Bijektion

$$\{\text{Borelmaße auf } X\} \xrightarrow{\sim} \{\text{translationsinvariante Borelmaße auf } X \times \mathbb{R}\}$$

15.4.3 Haarmaße

15.4.3.1. Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}_!(X,\mathbb{R})$ der reelle Vektorraum aller stetigen Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Ich erinnere daran 15.4.2.2, daß nach wir unter einem **Radonmaß auf** X eine Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_!(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ verstehen, die jeder nichtnegativen Funktion eine nichtnegative reelle Zahl zuordnet.

Definition 15.4.3.2. Unter einem **Haar-Maß** oder genauer einem **linksinvarianten Haar-Radonmaß** auf einer topologischen Gruppe G verstehen wir ein von Null verschiedenes nichtnegatives Radonmaß μ mit der Eigenschaft $\mu(f \circ (x\cdot)) = \mu(f)$ für alle $x \in G$ und alle $f \in \mathcal{C}_!(G,\mathbb{R})$.

Satz 15.4.3.3 (über Haar'sche Maße). *1. Auf jeder lokal kompakten Hausdorffgruppe gibt es ein Haarmaß und je zwei Haarmaße darauf unterscheiden sich höchstens um einen positiven konstanten reellen Faktor;*

2. Ein Haarmaß auf einer lokal kompakten Hausdorffgruppe ordnet jeder von Null verschiedenen nichtnegativen Funktion mit kompaktem Träger eine positive Zahl zu.

Ergänzung 15.4.3.4. Die Hausdorff-Bedingung im Satz ist überflüssig. Genauer kann man mit 15.2.2.19 den allgemeinen Fall auf den Fall einer Hausdorffgruppe zurückführen.

Beispiele 15.4.3.5. Haarmaße auf Matrixliegruppen werden in 22.2.4 diskutiert, Haarmaße auf beliebigen Liegruppen in 22.5.9.23. Typische Beispiele sind das Zählmaß auf diskreten Gruppen, das Lebesguemaß auf den additiven Gruppen $\mathbb{R}$ und allgemeiner $\mathbb{R}^n$, sowie das Maß $f \mapsto \int f(t)t^{-1}\,\mathrm{d}t$ auf der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}^\times$.

15.4.3.6. Ein Haarmaß auf einer kompakten topologischen Gruppe, das der konstanten Funktion Eins den Wert Eins zuordnet, heißt ein **normiertes Haarmaß**.

Ergänzung 15.4.3.7. Ich gebe hier einen Beweis der Existenz, der den Satz von Tychonoff 15.3.2.10 verwendet und so implizit das Auswahlaxiom. Es ist natürlich merkwürdig, das Auswahlaxiom zu verwenden bei der Konstruktion von etwas, das im wesentlichen eindeutig ist. Einen etwas längeren Beweis, der ohne das Auswahlaxiom auskommt, kann man in [HR63] finden.

Beweis. Bezeichne $\mathcal{C}_!^+(G)$ die Menge aller $f \in \mathcal{C}_!(G,\mathbb{R})$ mit $f \geq 0$. Gegeben $f, g \in \mathcal{C}_!^+(G)$ mit $g \neq 0$ gibt es $x_1, \ldots, x_n \in G$ und $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ mit

$$f(z) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i g(x_i z) \quad \forall z \in G$$

Wir definieren $(f : g) \in \mathbb{R}$ als das Infimum der möglichen $\sum_{i=1}^{n} a_i$ für alle Wahlen wie eben und haben für alle $f, f_1, f_2, h \in \mathcal{C}_!^+(G)$ offensichtlich

1. $(f \circ (x\cdot) : g) = (f : g) \;\; \forall x \in G$;
2. $(f_1 + f_2 : g) \leq (f_1 : g) + (f_2 : g)$;
3. $(cf : g) = c(f : g)$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;
4. $f_1 \leq f_2 \Rightarrow (f_1 : g) \leq (f_2 : g)$;
5. $(f : g) \leq (f : h)(h : g)$ falls $h \neq 0$;
6. $f \neq 0 \Rightarrow (f : g) > 0$.

Jetzt wählen wir ein für allemal ein festes $w \in \mathcal{C}_!^+(G)$ mit $w(e) \neq 0$. Es existiert, denn das neutrale Element besitzt eine offene Umgebung mit kompaktem Abschluß und wir können nach Urysohn 15.3.1.7 eine stetige Funktion von diesem Abschluß nach $[0, 1]$ finden, die auf seinem Rand Null ist und beim neutralen Element Eins. Dann dehnen wir diese stetige Funktion durch Null aus auf die ganze Gruppe. Jetzt betrachten wir für jedes von Null verschiedene $g \in \mathcal{C}_!^+(G)$ die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \mu_g : & \mathcal{C}_!^+(G) & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & f & \mapsto & \mu_g(f) = (f : g)/(w : g) \end{array}$$

Diese Abbildungen sind zu verstehen als Approximationen unseres Haar'schen Maßes, normalisiert durch die Bedingung $\mu_g(w) = 1$. Sicher gilt für diese Approximationen:

1. $\mu_g(f \circ (x\cdot)) = \mu_g(f) \;\; \forall x \in G$;
2. $\mu_g(cf) = c\mu_g(f)$ für beliebiges $c \geq 0$;
3. $\mu_g(f_1 + f_2) \leq \mu_g(f_1) + \mu_g(f_2)$.

Des weiteren gelten für beliebige von Null verschiedene $f, g \in \mathcal{C}_!^+(G)$ die Abschätzungen

$$(f : w) = \frac{(f : w)(w : g)}{(w : g)} \geq \mu_g(f) \geq \frac{(f : g)}{(w : f)(f : g)} = \frac{1}{(w : f)}$$

Wir zeigen als Zwischenschritt sogar eine Abschätzung in der Gegenrichtung.

Lemma 15.4.3.8. *Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_!^+(G)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. So gibt es eine offene Umgebung $V = V(f_1, f_2, \varepsilon)$ von $e \in G$ derart, daß für alle $g \in \mathcal{C}_!^+(V)\backslash 0$ gilt*

$$\mu_g(f_1) + \mu_g(f_2) \leq \mu_g(f_1 + f_2) + \varepsilon$$

Beweis. Zunächst einmal finden wir eine Funktion $h \in \mathcal{C}_!^+(G)$ mit $h(z) = 1\ \forall z \in \operatorname{supp}(f_1 + f_2)$. Diese Funktion halten wir für den folgenden Beweis fest. Gegeben ein $\delta > 0$, das am Schluß genügend klein gewählt werden muß, setzen wir nun $f = f^\delta = f_1 + f_2 + \delta h$ und betrachten die Funktionen $h_\nu = h_\nu^\delta = f_\nu / f$, stetig fortgesetzt durch Null auf die Nullstellenmenge von f. Wegen der in 15.4.1.13 gezeigten gleichmäßigen Stetigkeit der h_ν finden wir eine offene Umgebung $V = V(\delta, f_1, f_2)$ des neutralen Elements mit $|h_\nu(z) - h_\nu(y)| < \delta$ falls $y \in zV$ für $\nu = 1, 2$. Nehmen wir nun irgendein $g \in \mathcal{C}_!^+(G)$ mit $g \neq 0$ und wählen irgendwelche $a_i \geq 0$ und $x_i \in G$ mit

$$f(z) \leq \sum_{i=1}^n a_i g(x_i z) \quad \forall z,$$

so folgt unter der Zusatzbedingung $\operatorname{supp}(g) \subset V$ bereits

$$\begin{array}{rcl} f_\nu(z) & \leq & \sum_{i=1}^n a_i g(x_i z) h_\nu(z) \\ & \leq & \sum_{i=1}^n a_i g(x_i z)(h_\nu(x_i^{-1}) + \delta) \end{array}$$

da ja gilt $g(x_i z) \neq 0 \Rightarrow x_i z \in V \Rightarrow z \in x_i^{-1} V$. Immer unter unserer Zusatzbedingung $\operatorname{supp}(g) \subset V$ folgt weiter erst

$$(f_\nu : g) \leq \sum a_i (h_\nu(x_i^{-1}) + \delta)$$

und wegen $h_1 + h_2 \leq 1$ dann

$$\begin{array}{rcl} (f_1 : g) + (f_2 : g) & \leq & \sum a_i (1 + 2\delta) \\ (f_1 : g) + (f_2 : g) & \leq & (f : g)(1 + 2\delta) \\ & \leq & ((f_1 + f_2 : g) + \delta(h : g))(1 + 2\delta) \\ \mu_g(f_1) + \mu_g(f_2) & \leq & (\mu_g(f_1 + f_2) + \delta \mu_g(h))(1 + 2\delta) \\ & \leq & (\mu_g(f_1 + f_2) + \delta(h : w))(1 + 2\delta) \end{array}$$

Das Lemma ergibt sich, wenn wir zu Beginn δ in Abhängigkeit von ε klein genug wählen und das zugehörige V nehmen. □

Setzen wir für $f \neq 0$ nun $I_f = [(w : f)^{-1}, (f : w)]$, so gilt nach einer früheren Abschätzung $\mu_g(f) \in I_f$ für alle $f \neq 0$. Damit kann man μ_g auffassen als einen Punkt des Produkts

$$I := \prod_{0 \neq f \in \mathcal{C}_!^+(G)} I_f$$

Mit der Produkttopologie wird I ein Kompaktum nach dem Satz von Tychonoff 15.3.2.10. Für $V \Subset G$ eine offene Umgebung des neutralen Elements betrachten wir nun

$$K_V := \overline{\{\mu_g | \operatorname{supp} g \subset V\}} \subset I$$

Sicher gilt $V \subset W \Rightarrow K_V \subset K_W$ und wir folgern, daß es ein $\mu \in I$ gibt mit $\mu \in K_V \; \forall V$. Wir verstehen nun μ als eine Abbildung $\mu : \mathcal{C}_!^+(G) \to \mathbb{R}$, indem wir $\mu(f)$ als die Projektion von μ auf seine f-Komponente definieren für $f \neq 0$ und $\mu(0) = 0$ setzen. Dann behaupten wir, daß das so erklärte μ additiv ist und mit der Multiplikation mit nichtnegativen Skalaren vertauscht. Gegeben $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_!^+(G)$ und $\varepsilon > 0$ und V eine Umgebung des neutralen Elements finden wir ja nach der Definition der Produkttopologie ein $g \in \mathcal{C}_!^+(V)$ mit

$$|\mu(f_i) - \mu_g(f_i)| < \varepsilon \text{ für } i = 1, 2.$$

Es folgt für $f, f_1, f_2 \in \mathcal{C}_!^+(G)$ bereits $\mu(cf) = c\mu(f)$ falls $c \geq 0$, $\mu(f_1 + f_2) = \mu(f_1) + \mu(f_2)$ sowie $\mu(f \circ (x\cdot)) = \mu(f) \quad \forall x \in G$. Für beliebiges $f \in \mathcal{C}_!(G)$ setzen wir $f^\pm = \sup(\pm f, 0)$ und $\mu(f) = \mu(f^+) - \mu(f^-)$ und haben damit die Existenz eines Haar'schen Maßes nachgewiesen. Wir zeigen nun noch die Eindeutigkeit. Dazu benötigen wir Produktmaße, wie sie im Anschluß in 15.4.3.10 diskutiert werden. Gegeben zwei Haarmaße μ, ν auf einer lokal kompakten Hausdorff'schen Gruppe G benutzen wir im Folgenden die Konvention, nach der über die Variable x nach μ und über die Variable y nach ν integriert werden möge. Damit finden wir nach 15.4.3.10 oder im abzählbar basierten Fall auch alternativ nach Riesz 15.4.2.4 und Fubini 13.1.7.16 für $f, h \in \mathcal{C}_!(G, \mathbb{R})$ beliebig

$$\begin{aligned} \mu(f)\nu(h) - \nu(f)\mu(h) &= \int f(x)h(y) - f(y)h(x) \\ &= \int f(x)h(x^{-1}y) - f(y)h(x) \\ &= \int f(yx)h(x^{-1}) - f(y)h(x) \end{aligned}$$

Unter der zusätzlichen Annahme, daß h nichtnegativ und symmetrisch sei, in Formeln $h \geq 0$ und $h(x) = h(x^{-1}) \; \forall x \in G$, ergibt sich die Abschätzung

$$|\mu(f)\nu(h) - \nu(f)\mu(h)| \leq \mu(h) \sup |f(yx) - f(y)|$$

Dabei ist das Supremum über alle $x \in \operatorname{supp} h$ und $y \in G$ zu bilden. Indem wir die gleichmäßige Stetigkeit von f nach 15.4.1.13 ausnützen und h mit sehr kleinem Träger um das neutrale Element herum wählen, finden wir bei festem $f \geq 0$ mit $f \neq 0$ für alle $\varepsilon > 0$ eine Umgebung des neutralen Elements derart, daß für alle $h \geq 0$ mit $h \neq 0$ und Träger in dieser Umgebung $U(f, \varepsilon)$ gilt

$$\left| \frac{\nu(h)}{\mu(h)} - \frac{\nu(f)}{\mu(f)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(f)}$$

Daraus folgt dann die Eindeutigkeit, denn gegeben von Null verschiedene $f, g \geq 0$ kommen wir mit demselben $\frac{\nu(h)}{\mu(h)}$ sowohl an $\frac{\nu(f)}{\mu(f)}$ als auch an $\frac{\nu(g)}{\mu(g)}$ beliebig nah heran. $\square$

15.4.3.9. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X mit einem Radonmaß μ und eine stetige Funktion mit kompaktem Träger $f : X \to \mathbb{C}$ verwende ich auch die Schreibweise

$$\mu(f) =: \int_X f(x)\mu\langle x\rangle$$

Proposition 15.4.3.10 (Produkte von Radonmaßen). *Seien lokal kompakte Hausdorffräume X, Y mit Radonmaßen μ, ν gegeben. So gilt:*

1. *Es gibt genau ein Radonmaß $\mu \boxtimes \nu$ auf dem Produktraum $X \times Y$ mit*

$$\int f(x)g(y)(\mu \boxtimes \nu)\langle x, y\rangle = \left(\int f(x)\mu\langle x\rangle\right)\left(\int g(y)\nu\langle y\rangle\right)$$

   für alle $f \in \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$ und $g \in \mathcal{C}_!(Y, \mathbb{R})$;

2. *Für alle $h \in \mathcal{C}_!(X \times Y; \mathbb{R})$ gehört die Abbildung $x \mapsto \int h(x, y)\nu(y)$ zu $\mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$ und es gilt $\int h(x, y)(\mu \boxtimes \nu)\langle x, y\rangle = \int(\int h(x, y)\nu\langle y\rangle)\mu\langle x\rangle$;*

Insbesondere darf also die Integrationsreihenfolge vertauscht werden.

15.4.3.11. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X und ein Kompaktum $K \subset X$ bezeichne $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$ den Raum aller stetigen reellen Funktionen mit Träger in K, versehen mit seiner $\sup$-Norm. In dieser Situation ist jedes positive Funktional $\varphi : \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ stetig auf $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$, denn es gibt $h \in \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$ mit $h \geq 0$ und $h_K = 1$, und für $f \in \mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ folgt aus $\|f\| \leq 1$ sofort $|\varphi(f)| = |\varphi(f^+) - \varphi(f^-)| \leq \varphi(h)$.

Beweis. Ist X ein beliebiger topologischer Raum und Y kompakt, so macht die offensichtliche Identifikation $\mathrm{Ens}(X \times Y, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(X, \mathrm{Ens}(Y, \mathbb{R}))$ jede stetige Abbildung $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ zu einer stetigen Abbildung $X \to \mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$ für die $\sup$-Norm auf $\mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$, vergleiche 15.1.9.9. Sind also X und Y lokal kompakte Hausdorffräume und ist $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger und ν ein Radonmaß auf Y, so ist auch $x \mapsto \int h(x, y)\nu\langle y\rangle$ stetig mit kompaktem Träger. Das zeigt schon mal, daß das Doppelintegral im zweiten Teil des Satzes existiert wie behauptet. Insbesondere erhalten wir so ein Radonmaß auf $X \times Y$, das die Bedingung aus Teil 1 erfüllt. Es bleibt zu zeigen, daß es das Einzige ist. Dazu reicht es zu zeigen, daß sich für beliebige Kompakta $K \subset X$ und $L \subset Y$ jedes $h \in \mathcal{C}_{K\times L}(X \times Y, \mathbb{R})$ beliebig gut gleichmäßig appoximieren läßt durch endliche Linearkombinationen von äußeren Produkten $u \boxtimes v$ mit $u \in \mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ und $v \in \mathcal{C}_L(Y, \mathbb{R})$. Auf dem kompakten Raum Z, der aus $X \times Y$ entsteht, wenn man den Abschluß des Komplements von $K \times L$ zu einem Punkt $*$ identifiziert, bilden diese Linearkombinationen aber zusammen mit der Eins eine Unteralgebra von $\mathcal{C}(Z, \mathbb{R})$, die die Punkte trennt. Damit sagt uns Stone-Weierstraß 11.3.2.7,

daß wir beliebige $h \in \mathcal{C}(Z, \mathbb{R})$ beliebig gut durch Elemente dieser Unteralgebra approximieren können, und Funktionen mit $h(*) = 0$ sogar beliebig gut durch Linearkombinationen von externen Produkten $u \boxtimes v$. □

15.4.3.12 (**Modulare Funktion**). Gegeben eine Gruppe G und $h \in G$ ist das Vorschalten der Rechtsverschiebung $(\cdot h) : G \to G$ eine Abbildung $(\circ(\cdot h)) : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G)$. Gegeben eine lokal kompakte Hausdorffgruppe G mit Haarmaß μ ist für jedes Gruppenelement $h \in G$ auch $\mu \circ (\circ(\cdot h))$ ein Haarmaß und es gibt folglich $\Delta(h) \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\mu \circ (\circ(\cdot h)) = \Delta(h)\mu$. Offensichtlich ist dann

$$\Delta : G \to \mathbb{R}_{>0}$$

ein Gruppenhomomorphismus. Er heißt die **modulare Funktion** von G. Sie ist stetig, denn halten wir eine nichtnegative von Null verschiedene stetige Funktion $f : G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit kompaktem Träger fest und wählen eine kompakte Umgebung $K \subset G$ des neutralen Elements, so gibt es eine stetige Funktion $s : G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $s = 1$ auf $(\operatorname{supp} f)K$ und $s = 0$ außerhalb von $(\operatorname{supp} f)K^2$ und aus Gründen der gleichmäßigen Stetigkeit gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U_ε des neutralen Elements mit $|f(g) - f(gx)| \leq \varepsilon \ \forall x \in U_\varepsilon, \ g \in G$. Für $x \in U_\varepsilon \cap K$ folgt $|\mu(f) - \mu(f \circ (\cdot x))| \leq \varepsilon\mu(s)$ und das zeigt die Stetigkeit von Δ bei $h = 1$ und damit die Stetigkeit überhaupt.

Definition 15.4.3.13. Unter einem **Haar'schen Borelmaß** oder genauer einem **linksinvarianten Haar'schen Borelmaß** auf einer topologischen Gruppe G verstehen wir ein von Null verschiedenes nichtnegatives Borelmaß μ mit der Eigenschaft $\mu(gA) = \mu(A)$ für jede Borelmenge $A \subset G$ und alle $g \in G$.

Korollar* 15.4.3.14 (Existenz und Eindeutigkeit Haar'scher Borelmaße). *Auf jeder abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorff'schen Gruppe gibt es ein Haar'sches Borelmaß, und je zwei Haar'sche Borelmaße auf einer derartigen topologischen Gruppe unterscheiden sich höchstens um einen konstanten positiven reellen Faktor.*

Beweis. Man kombiniere die Existenz und Eindeutigkeit Haar'scher Radonmaße 15.4.3.3 mit dem Riesz'schen Darstellungssatz 15.4.2.4. □

Ergänzung 15.4.3.15. Die Forderung der Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie ist jedenfalls notwendig, um die Eindeutigkeit bis auf einen konstanten Faktor zu sichern. Ist zum Beispiel G eine überabzählbare Gruppe mit der diskreten Topologie, so wäre das Zählmaß ein Haar'sches Borelmaß in unserem Sinne, aber auch das Maß, das jeder abzählbaren Teilmenge das Maß Null zuordnet und jeder überabzählbaren Teilmenge das Maß Unendlich. In diesem Fall gälte die Eindeutigkeit bis auf einen konstanten Faktor also nicht. Man kann die Eindeutigkeit Haar'scher Borelmaße durch zusätzliche Forderungen an die fraglichen

Borelmaße auch in dieser Allgemeinheit sichern, vergleiche etwa [**?**]. Diesen Aufwand will ich jedoch vermeiden, da den meisten von uns aller Voraussicht nach kaum einmal lokal kompakte topologische Gruppen begegnen werden, die nicht abzählbar basiert sind.

Übungen

Übung 15.4.3.16. Man zeige, daß jedes linksinvariante Haarmaß auf einer kompakten topologischen Gruppe auch rechtsinvariant ist.

Übung 15.4.3.17. Gegeben ein Haar'sches Borelmaß auf einer abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorff'schen Gruppe hat jede nichtleere offene Teilmenge positives Maß. Hinweis: Urysohn.

Übung 15.4.3.18. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X und eine lokal kompakte Hausdorffgruppe G mit einem Haar'schen Radonmaß μ ist jedes Radonmaß π auf $X \times G$, das unter G linksinvariant ist, von der Gestalt $\pi = \nu \boxtimes \mu$ für ein wohlbestimmtes Radonmaß ν auf X. Hinweis: Für $f \in \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$ erkläre man $\mu_f : \mathcal{C}_!(G, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch $\mu_f(k) := \pi(f \boxtimes k)$ und erhält ein Haarmaß, also $\mu_f = \nu(f)\mu$ für eine wohlbestimmte Konstante $\nu(f)$.

Übung 15.4.3.19. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X mit einem Radonmaß ν und eine lokal kompakte Hausdorffgruppe G mit einem Haar'schen Radonmaß μ ist das Produktmaß $\nu \boxtimes \mu$ invariant unter der Eichgruppe des trivialen G-Hauptfaserbündels $X \times G$, als da heißt unter allen Abbildungen der Gestalt $(x, g) \mapsto (x, s(x)g)$ für $s : X \to G$ stetig.

Übung 15.4.3.20. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X und eine lokal kompakte Hausdorffgruppe G und ein G-Hauptfaserbündel $P \twoheadrightarrow X$ bilden wir ein $\mathbb{R}_{>0}$-Hauptfaserbündel $\Delta(P)$, indem wir jedem Punkt $x \in X$ den $\mathbb{R}_{>0}$-Torsor der G-rechtsinvarianten Haarmaße auf der Faser P_x zuordnen und die disjunkte Vereinigung dieser $\mathbb{R}_{>0}$-Torsoren in der offensichtlichen Weise mit einer Topologie versehen.

Übung 15.4.3.21 (**Formelsammlung für Radonmaße**). Bildmaße von Radonmaßen konstruiert man leicht für eigentliche stetige Abbildungen sowie im Fall kompakt getragener Radonmaße auch für beliebige stetige Abbildungen, jeweils von lokal kompakten Hausdorffräumen. Man zeige, daß in beiden Fällen alle Formeln unserer Formelsammlung 13.1.7.25 gelten, als da wären die Natürlichkeit, Eins, Assoziativität und Kommutativität von Produktmaßen sowie die Funktorialität von Bildmaßen.

15.4.4 Matrixkoeffizienten

15.4.4.1. Ich beginne mit Erinnerungen zu 8.4.5.4. Ist V eine Darstellung eines Monoids G über einem Körper k, so erklärt man für $v \in V$ und $\varphi \in V^*$ den **Matrixkoeffizienten** $c_{\varphi,v} : G \to k$ durch die Vorschrift $c_{\varphi,v}(g) := \varphi(gv)$ für alle $g \in G$. So erhalten wir eine Abbildung, die **Matrixkoeffizientenabbildung**

$$\begin{array}{ccc} V \otimes_k V^* & \to & \mathrm{Ens}(G,k) \\ v \otimes \varphi & \mapsto & c_{\varphi,v} \end{array}$$

15.4.4.2. Jedes Monoid G trägt eine natürliche Operation des Monoids $G \times G^{\mathrm{opp}}$ vermittels der Vorschrift $(x, y^\circ)z := xzy$. Gegeben eine Menge E erhalten wir auch eine Operation von $G \times G^{\mathrm{opp}}$ auf $\mathrm{Ens}(G, E)$ durch die Vorschrift $((y, x^\circ)f)(z) := f(xzy)$. Ich verwende die abkürzenden Notationen (yf) für die Funktion gegeben durch $(yf)(z) = f(zy)$ und $(x^\circ f) = (fx)$ für die Funktion gegeben durch $(x^\circ f)(z) = (fx)(z) = f(xz)$. Insbesondere erhalten wir damit $u^\circ(x^\circ f) = (u^\circ x^\circ)f = (xu)^\circ f$, was im Sinne unserer Notation 2.2.3.33 vernünftig ist. Gegeben ein Körper k und eine Darstellung V von G über k ist unsere Matrixkoeffizientenabbildung ein Homomorphismus

$$V \boxtimes_k V^* \to \mathrm{Ens}(G,k)$$

von Darstellungen des Monoids $G \times G^{\mathrm{opp}}$.

15.4.4.3 (**Funktionen auf Monoiden als Matrixkoeffizienten**). Sei G ein Monoid und k ein Körper. Jede Abbildung $f : G \to k$ ist der Matrixkoeffizient $c_{\delta,f}$ der Linksoperation von G auf $V := \mathrm{Ens}(G,k)$ für $\delta := \delta_e \in V^*$ das Auswerten am neutralen Element. In der Tat rechnen wir $c_{\delta,f}(a) = \delta(af) = (af)(e) = f(a)$. Analog gilt für die Linksoperation von G^{opp} auf demselben Raum auch die Gleichheit $c_{\delta,f} = f$ von Funktionen auf G^{opp}.

Lemma 15.4.4.4 (Darstellende Funktionen). *Sei k ein Körper. Für eine k-wertige Funktion auf einem Monoid sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Funktion spannt zusammen mit ihren Linkstranslaten einen endlichdimensionalen Untervektorraum im Raum aller k-wertigen Funktionen auf unserem Monoid auf;*

2. *Unsere Funktion spannt zusammen mit ihren Rechtstranslaten einen endlichdimensionalen Untervektorraum im Raum aller k-wertigen Funktionen auf unserem Monoid auf;*

3. *Unsere Funktion ist ein Matrixkoeffizient einer endlichdimensionalen Darstellung unseres Monoids über k.*

Beweis. Gegeben eine Darstellung eines Monoids G durch Endomorphismen eines endlichdimensionalen k-Vektorraums V liefern die Matrixkoeffizienten eine $(G \times G^{\mathrm{opp}})$-äquivariante Abbildung $V \boxtimes_k V^* \to \mathrm{Ens}(G,k)$ unter der Operation aus 15.4.4.2. Damit erhalten wir sofort $3 \Rightarrow 1\&2$. Spannt umgekehrt eine Funktion $f : G \to k$ mit ihren Rechtstranslaten einen endlichdimensionalen Teilraum $V \subset \mathrm{Ens}(G,k)$ auf, so ist f eben der Matrixkoeffizient dieser endlichdimensionalen Darstellung zum Vektor $f \in V$ und dem Auswerten am neutralen Element $\delta \in V^*$. Das zeigt $2 \Rightarrow 3$. Spannt schließlich f mit seinen Linkstranslaten einen endlichdimensionalen Teilraum $W \subset \mathrm{Ens}(G,k)$ auf, so ist f Matrixkoeffizient der endlichdimensionalen Darstellung W von G^{opp}, und dann ist f auch ein Matrixkoeffizient der kontragredienten Darstellung W^* von G. □

Lemma 15.4.4.5 (Stetige darstellende Funktionen). *Für eine stetige Funktion auf einem topologischen Monoid, reellwertig oder komplexwertig oder auch mit Werten in einem beliebigen topologischen Körper, sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Funktion spannt zusammen mit ihren Linkstranslaten einen endlichdimensionalen Untervektorraum im Raum aller Funktionen auf unserem Monoid auf;*

2. *Unsere Funktion spannt zusammen mit ihren Rechtstranslaten einen endlichdimensionalen Untervektorraum im Raum aller Funktionen auf unserem Monoid auf;*

3. *Unsere Funktion ist ein Matrixkoeffizient einer stetigen endlichdimensionalen Darstellung unseres Monoids.*

Beweis. Gegeben eine endlichdimensionale stetige Darstellung V eines topologischen Monoids G liefern die Matrixkoeffizienten eine $(G \times G^{\mathrm{opp}})$-äquivariante Abbildung $V \boxtimes V^* \to \mathcal{C}(G)$. Damit erhalten wir sofort $3 \Rightarrow 1\&2$. Ist umgekehrt eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und spannt mit ihren Rechtstranslaten einen endlichdimensionalen Teilraum $V \subset \mathcal{C}(G)$ auf, so finden wir $x_1, \ldots, x_n \in G$ derart, daß die Rechtstranslate $x_1 f, \ldots, x_n f$ eine Basis dieses Teilraums bilden. Da eine Funktion, die an jeder Stelle verschwindet, schon identisch Null ist, finden wir Stellen $y_1, \ldots, y_n \in G$ derart, daß die Auswertungen dort eine Basis des Dualraums V^* liefern. Da die zugehörigen Matrixkoeffizienten $g \mapsto (g x_i f)(y_j) = f(y_j g x_i)$ alle stetig sind, muß V eine stetige Darstellung von G sein. Und nun ist f eben der Matrixkoeffizient dieser stetigen endlichdimensionalen Darstellung zum Vektor $f \in V$ und dem Auswerten am neutralen Element $\varphi \in V^*$. Das zeigt $2 \Rightarrow 3$. Spannt schließlich f mit seinen Linkstranslaten einen endlichdimensionalen Teilraum $W \subset \mathrm{Ens}(G,k)$ auf, so ist f Matrixkoeffizient der endlichdimensionalen Darstellung W von G^{opp}, und dann ist f auch ein Matrixkoeffizient der kontragredienten Darstellung W^* von G. □

15.4.4.6 (**Die Ringalgebra der darstellenden Funktionen**). Gegeben ein ein topologisches Monoid G bilden die stetigen komplexwertigen darstellenden Funktionen in $\mathcal{C}(G)$ eine unter der komplexen Konjugation stabile Unterringalgebra

$$\mathcal{R}(G)$$

Ist in der Tat $f = c_{\varphi,v}$ für $v \in V$ und $\varphi \in V^*$, so haben wir $\bar{f} = c_{\bar{\varphi},\bar{v}}$ für $\bar{v} \in \overline{V}$, $\bar{\varphi} \in \overline{V}^*$ im Sinne von 4.7.4.22. Spannen weiter $f_1, \ldots, f_d$ und $h_1, \ldots, h_s$ jeweils einen unter Linkstranslation invarianten Teilraum von $\mathcal{C}(G)$ auf, so gilt offensichtlich dasselbe für die Produkte $f_i h_j$.

Übungen

Ergänzende Übung 15.4.4.7. Sei G eine kompakte Liegruppe und $f : G \to \mathbb{C}$ eine darstellende Funktion mit $f(e) = 1$. Gibt es stets eine stetige Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$, für die wir $f = \rho_{11}$ haben?

Ergänzende Übung 15.4.4.8. Der Ring der stetigen reellen oder komplexen darstellenden Funktionen auf der Gruppe $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ besteht genau aus allen Funktionen, die sich durch Polynome in den vier Matrixeinträgen ausdrücken lassen. Hinweis: 22.2.3.16.

15.4.5 Kompakte Operatoren

Definition 15.4.5.1. Eine lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen heißt **kompakt**, wenn sie die Einheitskugel auf eine Menge mit kompaktem Abschluß abbildet.

Satz 15.4.5.2 (**Spektrum kompakter selbstadjungierter Operatoren**). *Gegeben ein kompakter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum ist das Erzeugnis seiner Eigenräume dicht und alle seine Eigenräume zu von Null verschiedenen Eigenwerten sind endlichdimensional.*

Beweis. Sei $\mathcal{H}$ unser Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unser kompakter selbstadjungierter Operator. Wir zeigen zunächst, daß unter der Annahme $\mathcal{H} \neq 0$ entweder $\|T\|$ oder $-\|T\|$ ein Eigenwert ist, und wiederholen dazu erst einmal den Beginn des Beweises für den Satz über den Spektralradius 13.4.5.1. Gegeben ein Vektor v der Länge Eins gilt $\|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv\rangle = \langle v, T^2 v\rangle \leq \|v\|\|T^2 v\| = \|T^2 v\|$. Das zeigt $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$. Die andere Ungleichung gilt eh, womit wir für jeden selbstadjungierten Operator T folgern

$$\|T\|^2 = \|T^2\|$$

Unter der Annahme $\mathcal{H} \neq 0$ finden wir in $\mathcal{H}$ eine Folge von Einheitsvektoren v_n mit $\lim_{n\to\infty} \|T^2 v_n\| = \|T^2\|$. Wegen $\|T^2 v_n\| \leq \|T\|\|Tv_n\| \leq \|T\|^2 = \|T^2\|$ folgt $\lim_{n\to\infty} \|Tv_n\| = \|T\|$ zumindest falls $\|T\| \neq 0$, und im Fall $\|T\| = 0$ ist das eh klar. Wir setzen nun $c = \|T\|$ und behaupten zunächst, daß c^2 ein Eigenwert von von T^2 ist. In der Tat gilt ja

$$\|(T^2 - c^2)v_n\|^2 = \langle v_n, (T^4 - 2c^2T^2 + c^4)v_n\rangle = \|T^2 v_n\|^2 - 2c^2\|Tv_n\|^2 + c^4$$

und das strebt für $n \to \infty$ offensichtlich gegen Null. Da wir nun T kompakt angenommen hatten, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Folge Tv_n konvergent annehmen. Im Fall $c = 0$ ist unsere Behauptung eh klar, und im Fall $c \neq 0$ folgt erst die Konvergenz von $T^2 v_n$ und dann die Konvergenz der Folge $c^2 v_n$ und damit die Konvergenz der Folge v_n selber. Gilt nun etwa $\lim_{n\to\infty} v_n = v$, so folgt unmittelbar $\|v\| = 1$ und $T^2 v = c^2 v$ und c^2 ist in der Tat ein Eigenwert von von T^2. Aus $(T + c)(T - c)v = 0$ folgt dann aber auch, daß entweder v ein Eigenvektor von T zum Eigenwert c ist, oder $(T - c)v$ ein Eigenvektor von T zum Eigenwert $-c$. Damit haben wir gezeigt, daß in der Tat entweder $\|T\|$ oder $-\|T\|$ ein Eigenwert von T ist. Der Rest des Beweises ist nun schnell erledigt. Wäre das Erzeugnis der Eigenräume nicht dicht, so wäre sein orthogonales Komplement nicht Null und unser Operator hätte darin folglich einen Eigenvektor, Widerspruch. Wäre der Eigenraum zu einem von Null verschiedenen Eigenwert nicht endlichdimensional, so gäbe es darin eine Folge von paarweise orthogonalen Einheitsvektoren, und deren Bild könnte keine konvergente Teilfolge besitzen, Widerspruch. □

Übungen

Ergänzende Übung 15.4.5.3. Eine Komposition von zwei stetigen Operatoren zwischen normierten Vektorräumen ist kompakt, wenn einer der Faktoren kompakt ist.

Ergänzende Übung 15.4.5.4. Die kompakten linearen Abbildungen von einem normierten Vektorraum in einen Banachraum bilden eine abgeschlossene Teilmenge im Raum aller stetigen linearen Abbildungen mit der Operatornorm.

Übung 15.4.5.5. Ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum ist genau dann kompakt, wenn das Erzeugnis seiner Eigenräume dicht liegt, alle seine Eigenräume zu von Null verschiedenen Eigenwerten endlichdimensional sind, und wenn zusätzlich in jeder Umgebung von Null fast alle seiner Eigenwerte enthalten sind.

Ergänzende Übung 15.4.5.6. Gegeben ein kompakter Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ von einem Hilbertraum in einen weiteren Hilbertraum gibt es durch eine abzählbare

Menge N indizierte Orthonormalsysteme $(v_n)_{n\in N}$ von $\mathcal{H}$ und $(w_n)_{n\in N}$ von $\mathcal{H}'$ und $\lambda_n > 0$ derart, daß für alle $v \in \mathcal{H}$ gilt

$$T(v) = \sum_{n\in N} \lambda_n \langle v_n, v\rangle w_n$$

Hinweis: Man gehe von einer Hilbertbasis aus Eigenvektoren des kompakten selbstadjungierten Operators T^*T aus.

15.4.6 Faltungen als kompakte Operatoren

15.4.6.1. Ein metrischer Raum heißt **total beschränkt**, wenn er für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung durch ε-Bälle besitzt.

Satz 15.4.6.2. *Ein metrischer Raum ist kompakt genau dann, wenn er vollständig und total beschränkt ist.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß jeder kompakte metrische Raum vollständig ist. In der Tat besitzt ja unter unserer Annahme insbesondere auch jede Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge und muß damit schon selbst konvergent sein. Daß jeder kompakte metrische Raum total beschränkt sein muß, ist eh klar. Sei nun umgekehrt X vollständig und total beschränkt und sei $v : \mathbb{N} \to X$ eine Folge in X. Wir überdecken X durch endlich viele Bälle mit Radius 1. In einem dieser Bälle müssen unendlich viele Folgenglieder liegen, und diese bilden eine Teilfolge $v^1 = v \circ i_1$ für eine geeignete Injektion $i_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Als nächstes überdecken wir X durch endlich viele Bälle vom Radius $1/2$. In einem dieser Bälle müssen unendlich viele Folgenglieder der Folge v^1 liegen, und diese bilden eine Teilfolge $v^2 = v^1 \circ i_2$ von v^1, für eine geeignete Injektion $i_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Als nächstes überdecken wir X durch endlich viele Bälle vom Radius $1/3$, und indem wir immer so weitermachen erhalten wir eine Kette von Teilfolgen v^ν derart, daß Folgenglieder von v^ν höchstens den Abstand $2/\nu$ voneinander haben. Die Folge $y_\nu = v^\nu(\nu)$ ist dann eine Teilfolge unserer Folge v, die eine Cauchy-Folge ist und mithin konvergiert. □

Definition 15.4.6.3. Eine Menge $\mathcal{F}$ von Abbildungen von einem topologischen Raum X in einen metrischen Raum heißt **gleichgradig stetig**, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U(x, \varepsilon)$ von x gibt derart, daß gilt

$$y \in U(x, \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y)) \le \varepsilon \; \forall f \in \mathcal{F}$$

Satz 15.4.6.4 (Arzela-Ascoli). *Im Raum aller stetigen Abbildungen eines kompakten Raums in einen kompakten metrischen Raum, versehen mit der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz, hat eine Teilmenge kompakten Abschluß genau dann, wenn sie gleichgradig stetig ist.*

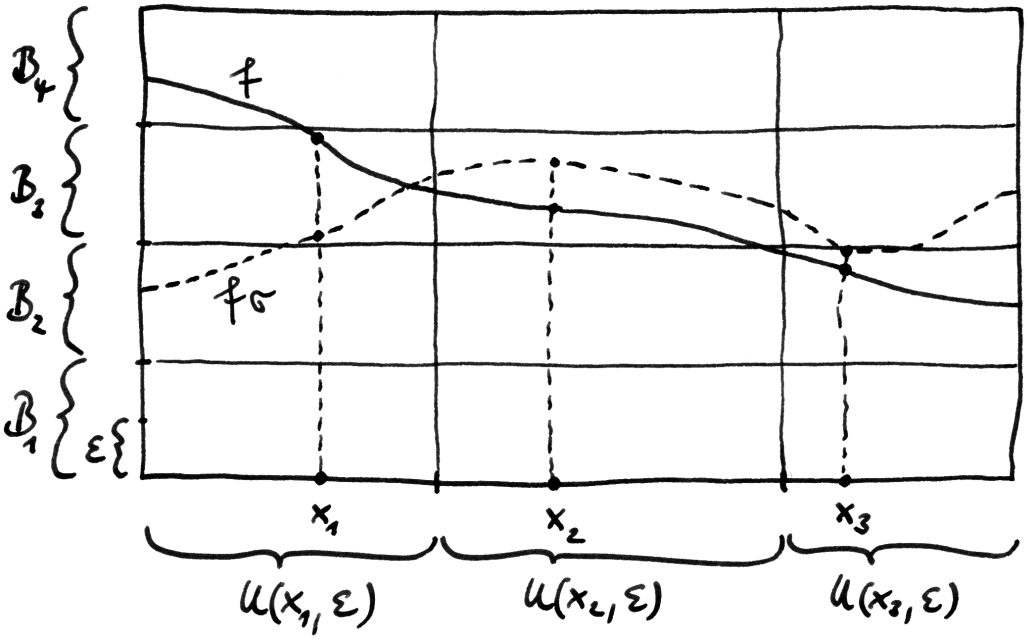


Illustration zum Beweis von Arzela-Ascoli. Die Bälle B_i sowie die Umgebungen $U(x_i, \varepsilon)$ sind hier abgeschlossen zu verstehen, das ist im Beweis unerheblich. Im allgemeinen würden sich natürlich unsere Bälle in M und auch die Umgebungen in X sehr viel mehr überlappen, aber dann kann man im Bild kaum noch etwas sehen. In unserem Fall wäre das einzig mögliche σ zu f gegeben durch $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 2$. Alle Funktionen, insbesondere auch f und f_σ, können auf $U(x_i, \varepsilon)$ höchstens um ε von ihrem Wert bei x_i abweichen. Ich hoffe, man kann nun sehen, daß f höchstens um 4ε von jedem zu σ gewählten f_σ abweichen kann.

Beweis. Unser Raum von stetigen Abbildungen ist nach **??** schon mal vollständig in seiner Metrik der gleichmäßigen Konvergenz. Nach 15.4.6.2 reicht es also zu zeigen, daß eine Teilmenge darin total beschränkt ist genau dann, wenn sie gleichgradig stetig ist. Die Herleitung gleichgradigen Stetigkeit aus der totalen Beschränktheit überlassen wir dem Leser als Übung 15.4.6.8. Ist umgekehrt eine Menge $\mathcal{F}$ von Abbildungen $f : X \to M$ gleichgradig stetig, so finden wir ja für jedes $\varepsilon > 0$ und jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U(x, \varepsilon)$ von x derart, daß gilt

$$y \in U(x, \varepsilon) \;\Rightarrow\; d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \;\forall f \in \mathcal{F}$$

Endlich viele dieser $U(x, \varepsilon)$ überdecken dann X, etwa die zu den Punkten x_1, ..., x_r, und endlich viele ε-Bälle $B_1, \ldots, B_s$ überdecken M. Für jede Abbildung $\sigma : \{1, \ldots r\} \to \{1, \ldots s\}$ wählen wir nun wenn möglich eine Funktion $f_\sigma \in \mathcal{F}$ mit $f_\sigma(x_i) \in B_{\sigma(i)}$ $\forall i$ und behaupten, daß die Bälle um diese f_σ mit Radius 4ε bereits ganz $\mathcal{F}$ überdecken. In der Tat, zu jeder Funktion $f \in \mathcal{F}$ gibt es ja mindestens ein σ mit $f(x_i) \in B_{\sigma(i)}$ $\forall i$. Für solch ein σ existiert dann notwendig auch ein f_σ und es gilt offensichtlich $d(f(x_i), f_\sigma(x_i)) \leq 2\varepsilon$ für alle i. Da jedes x in einem $U(x_i, \varepsilon)$ liegt, folgt dann jedoch $d(f(x), f_\sigma(x)) \leq 4\varepsilon$ für alle $x \in X$. □

Definition 15.4.6.5. Eine lineare Abbildung von einem reellen Vektorraum mit einer Seminorm in einen reellen topologischen Vektorraum heißt **kompakt**, wenn sie die Menge aller Vektoren der Seminorm ≤ 1 auf eine Menge mit kompaktem Abschluß abbildet.

Proposition 15.4.6.6 (Kompaktheit gewisser Konvolutionsoperatoren). *Gegeben kompakte Räume X, Y mit X Hausdorff und ein Radonmaß μ auf X und eine stetige Funktion $h \in \mathcal{C}(Y \times X)$ erhalten wir einen kompakten Operator $K = K_h : (\mathcal{C}(X), \| \|_{2,\mu}) \to (\mathcal{C}(Y), \| \|_\infty)$ durch die Abbildungsvorschrift*

$$(Kf)(y) := \int_X h(y, x) f(x) \mu\langle x \rangle$$

Beweis. Wir versehen hier $\mathcal{C}(X)$ mit der positiv semidefiniten Sesquilinearform $\langle f, g \rangle := \int_X \bar{f} g \mu$ und $\|f\|_{2,\mu} := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ meint die zugehörige Seminorm. Gegeben $y \in Y$ erklären wir $h_y \in \mathcal{C}(X)$ durch $h_y : x \mapsto h(x, y)$. Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung oder genauer ihrer Variante 4.1.3.30 finden wir die Abschätzung

$$|(Kf)(y)| = |\langle h_y, f \rangle| \leq \|h_y\|_2 \, \|f\|_2 \leq \|h_y\|_\infty \mu(X) \|f\|_2$$

Nun erinnern wir aus 15.1.9.9, daß wegen X kompakt Hausdorff und damit insbesondere X lokal kompakt die Abbildung $Y \to \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, $y \mapsto h_y$ stetig ist für

die kompakt-offene Topologie alias die Topologie zur Norm $\| \ \|_\infty$ auf $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Für jedes $\varepsilon > 0$ und jeden Punkt $y \in Y$ existiert folglich eine Umgebung U_ε von y mit $z \in U_\varepsilon \Rightarrow \|h_z - h_y\|_\infty < \varepsilon$. Wir folgern für $z \in U_\varepsilon$

$$|(Kf)(z) - (Kf)(y)| = |\langle h_z - h_y, f\rangle| \le \|h_z - h_y\|_\infty \mu(X)\|f\|_2 \le \varepsilon\mu(X)\|f\|_2$$

Insgesamt ist folglich die Menge $\mathcal{F} := \{Kf \mid \|f\|_2 \le 1\} \subset \mathcal{C}(Y)$ gleichgradig stetig. Unsere obige Abschätzung zeigt weiter, daß sie in $\mathcal{C}(Y, M)$ liegt für $M := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le \|h\|_\infty \mu(X)\}$. Nach Arzela-Ascoli 15.4.6.4 hat dann $\mathcal{F}$ kompakten Abschluß in $\mathcal{C}(Y, M)$ oder gleichbedeutend in $\mathcal{C}(Y)$ und unser Operator K ist kompakt. □

Ergänzung 15.4.6.7. Eine stetige lineare Abbildung von topologischen Vektorräumen heißt ein **Fredholm-Operator**, wenn ihr Bild abgeschlossen ist und ihr Kern und ihr Kokern endliche Dimension haben. Der **Index** eines Fredholmoperators $A : X \to Y$ ist die ganze Zahl

$$\operatorname{ind}(A) := \dim(\ker A) - \dim(\operatorname{coker} A)$$

Ist $A : X \to X$ ein kompakter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum, so zeigt der Spektralsatz, daß $A - \mathrm{id}$ Fredholm vom Index Null ist. Allgemeiner folgt sofort, daß $A - \lambda\,\mathrm{id}$ Fredholm vom Index Null ist für alle $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Man kann das auch allgemeiner für einen beliebigen kompakten Operator auf einem Banachraum zeigen, aber das soll an dieser Stelle nicht ausgeführt werden.

Übungen

Übung 15.4.6.8. Man zeige, daß eine Menge beschränkter stetiger Abbildungen von einem topologischen Raum in einen metrischen Raum, die für die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz total beschränkt ist im Sinne von 15.4.6.1, schon gleichgradig stetig sein muß.

Übung 15.4.6.9. Die Kompaktheit des Ausgangsraums ist wesentlich im Satz von Arzela-Ascoli: So ist etwa für die „Dächle-Funktion“ $d(x) = \sup(1 - |x|, 0)$ auf $\mathbb{R}$ die Menge ihrer verschobenen Kopien $f_n(x) = d(x - n)$ zwar gleichgradig stetig, hat aber keinen kompakten Abschluß.

Übung 15.4.6.10 (**Nocheinmal die hängende Kette**). Ich erinnere an den Begriff eines rektifizierbaren Weges in einem metrischen Raum 12.7.5.1. Man zeige, daß die rektifizierbaren nach der Bogenlänge parametrisierten Wege $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit vorgegebenem Ausgangs- und Endpunkt $\gamma(a), \gamma(b)$ und vorgegebener Länge L eine kompakte Teilmenge im Raum aller stetigen Abbildungen mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz bilden. Man zeige, daß im Fall $n = 2$ das Kurvenintegral $\gamma \mapsto \int_\gamma y$ im Sinne von 10.7.1.23 eine stetige Funktion auf dieser

kompakten Teilmenge ist und folglich ihr Minimum annimmt. Das zeigt, daß es „im Fall einer hängenden Kette eine Lösung kleinster potentieller Energie gibt“. Jetzt wäre noch zu zeigen, daß im Fall $\gamma_1(a) \neq \gamma_1(b)$ von Aufhängepunkten mit verschiedener x-Koordinate jede Kette kleinster Energie durch den Graphen einer stetigen Funktion beschrieben wird. Hinweis: Trifft unser Weg eine nicht vertikale Gerade in $\gamma(s)$ und $\gamma(t)$ aber nicht für $\tau \in (s,t)$, so muß er für $\tau \in (s,t)$ unterhalb besagter Gerade verlaufen. Hinweis: Vertikale Stücke oder Stücke und vertikale Tangenten kann man ausschließen, indem man zuerst das Argument zu Ende bringt und zeigt, daß Stücke ohne dem Kettenlinien sind; daß diese Funktion konvex sein muß; daß sie damit in jedem Punkt im Inneren des Definitionsintervalls linksseitig und rechtsseitig differenzierbar sein muß; daß sie unter der Annahme minimaler Energie sogar differenzierbar sein muß; daß die Ableitung monoton und dann nach 10.3.3.2 und 10.5.5.21 sogar stetig sein muß; und daß man dann mit Methoden der Variationsrechnung, wie mir Ernst erklärt hat, zeigen kann, daß nur die Kettenlinie als Möglichkeit übrigbleibt.

15.4.7 Satz von Peter und Weyl

15.4.7.1. Auf jeder kompakten Hausdorffgruppe G existiert nach 15.4.3.3 genau ein normiertes Haar-Radonmaß $\mu = \mu_G$. Wir machen $\mathcal{C}(G)$ zu einem Prähilbertraum vermittels der Vorschrift

$$\langle f, h\rangle := \int_G \bar{f} h \mu$$

Die Vervollständigung dieses Prähilbertraums notieren wir $\mathrm{L}^2(G)$ und ignorieren hierbei im allgemeinen die Frage, inwieweit man Elemente dieser Vervollständigung als Äquivalenzklassen von Funktionen auf G interpretieren kann. Ist G abzählbar basiert, so können wir unser Haar-Radonmaß nach 15.4.3.14 mit einem Haar-Borelmaß identifizieren und unsere Vervollständigung ist kanonisch isomorph zum zugehörigen Raum quadratintegrierbarer Funktionen aus 13.2.2.20.

15.4.7.2. Gegeben eine kompakte Hausdorffgruppe G mit normiertem Haar-Maß μ erklären wir auf $\mathcal{C}(G)$ die **Faltung** $(h, f) \mapsto h * f$ alias **Konvolution** durch die Vorschrift

$$(h * f)(x) := \int_G h(y) f(y^{-1}x) \mu\langle y\rangle$$

Unsere Erkenntnisse 15.4.3.10 über Produkte von Radonmaßen zeigen, daß auch $h * f$ stetig ist. Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung zeigt $|(h * f)(x)| \leq \|h\|_2 \|f\|_2$ und impliziert insbesondere, daß sich $(h*)$ zu einer stetigen Abbildung von normierten Vektorräumen $(h*) : \mathrm{L}^2(G) \to \mathcal{C}(G)$ fortsetzen läßt.

Lemma 15.4.7.3. *Gegeben eine kompakte Hausdorffgruppe ist für jede stetige Funktion $h \in \mathcal{C}(G)$ die Faltung mit h ein kompakter Operator*

$$(h*) : \mathrm{L}^2(G) \to \mathcal{C}(G)$$

Beweis. Das folgt aus Proposition 15.4.6.6 zur Stetigkeit von Konvolutionen, indem wir unsere Definition umschreiben zu $(h*f)(x) = \int_G h(xy^{-1})f(y)\mu\langle y\rangle$. □

Lemma 15.4.7.4. *Sei G eine kompakte Hausdorffgruppe. Gegeben $h, k \in \mathcal{C}(G)$ mit $\overline{h(x)} = k(x^{-1})$ für alle $x \in G$ sind $(h*)$ und $(k*)$ als Operatoren auf $\mathrm{L}^2(G)$ zueinander adjungiert.*

Ergänzung 15.4.7.5. Die Operation durch Verschiebung von G auf $\mathrm{L}^2(G)$ geschieht durch unitäre Operatoren, so daß offensichtlich das Verschieben um $x \in G$ adjungiert ist zum Verschieben um sein Inverses $x^{-1} \in G$. Unser Lemma und diese Aussage haben eine gemeinsame Verallgemeinerung im Rahmen der Faltung von Maßen mit Funktionen, deren Ausformulierung dem Leser überlassen bleiben möge.

Beweis. Gegeben $f, g \in \mathrm{L}^2(G)$ gilt es zu zeigen $\langle h * f, g\rangle = \langle f, k * g\rangle$. Es reicht, das für $f, g \in \mathcal{C}(G)$ zu zeigen. In diesem Fall können wir unsere Behauptung ausschreiben zu

$$\int\int \overline{h(xy^{-1})f(y)}g(x) = \int\int \overline{f(x)}k(xy^{-1})g(y)$$

Hier ist zu verstehen, daß jeweils über x und y integriert werden soll. Um diese Identität einzusehen, müssen wir nur auf einer Seite unserer Gleichung x mit y vertauschen. □

15.4.7.6 (**Eigenfunktionen von Faltungen als darstellende Funktionen**). Gegeben eine kompakte Hausdorffgruppe G und $h : G \to \mathbb{R}$ stetig mit $h(x) = h(x^{-1})$ für alle x ist $(h*) : \mathrm{L}^2(G) \to \mathrm{L}^2(G)$ nach 15.4.7.4 ein selbstadjungierter Operator und nach 15.4.7.3 auch ein kompakter Operator mit Bild in $\mathcal{C}(G)$. Seine Eigenräume sind offensichtlich stabil unter allen Rechtstranslationen und seine Eigenräume zu von Null verschiedenen Eigenwerten bestehen aus stetigen darstellenden Funktionen: Stetig, da sie im Bild unseres Operators enthalten sind, darstellend, da die fraglichen Eigenräume sowohl endlichdimensional als auch unter allen Rechtstranslationen stabil sind.

Satz 15.4.7.7 (**Peter-Weyl**). *Auf einer kompakten Hausdorffgruppe kann jede stetige Funktion beliebig gut gleichmäßig durch darstellende Funktionen approximiert werden.*

Beweis. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und $\varepsilon > 0$. Nach 15.4.1.12 ist f gleichmäßig stetig, es gibt also eine Umgebung V des neutralen Elements mit $|f(zx) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in G$ und $z \in V$. Wählen wir nun eine stetige Funktion $h : G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit Träger in V und Integral $\int h = 1$, so folgt

$$|(h * f)(x) - f(x)| = \left| \int h(z^{-1})(f(zx) - f(x))\mu\langle z\rangle \right| \leq \varepsilon$$

für alle $x \in G$ und damit

$$\|h * f - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

Nehmen wir nun zusätzlich $h(z) = h(z^{-1})$ für alle $z \in G$ an und betrachten die Eigenräume $\mathrm{L}^2(G)_\lambda$ von $(h*)$, so liegt nach dem Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren 15.4.5.2 deren Erzeugnis $\bigoplus \mathrm{L}^2(G)_\lambda$ dicht in $\mathrm{L}^2(G)$ und wir finden folglich ein g aus diesem Erzeugnis mit $\|g - f\|_2 \leq \varepsilon / \|h\|_2$. Daraus folgt dann aber

$$\|h * g - h * f\|_\infty \leq \varepsilon$$

und $\|h * g - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$ und damit haben wir gewonnen, da $h * g \in \bigoplus_{\lambda \neq 0} \mathrm{L}^2(G)_\lambda$ nach unserer Vorbemerkung 15.4.7.6 eine darstellende Funktion ist. □

Korollar 15.4.7.8 (Diskret-kompakte Pontrjagin-Dualität). *1. Gegeben eine kompakte abelsche Hausdorffgruppe A ist die Menge ihrer Charaktere $\mathfrak{X}(A) \subset \mathrm{L}^2(A)$ eine Hilbertbasis des Raums der quadratintegrierbaren Funktionen auf unserer Gruppe;*

2. Gegeben eine diskrete abelsche Gruppe Γ ist ihre Charaktergruppe $\mathfrak{X}(\Gamma)$ eine kompakte Hausdorffgruppe und die Auswertungsabbildung ein Isomorphismus von topologischen Gruppen $\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(\Gamma))$;

3. Gegeben eine kompakte abelsche Hausdorffgruppe A ist ihre Charaktergruppe $\mathfrak{X}(A)$ eine diskrete abelsche Gruppe und die Auswertungsabbildung ein Isomorphismus von topologischen Gruppen $A \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(A))$.

Beweis. 1. Wie in 13.2.7.23 oder in größerer Allgemeinheit gleich anschließend in 15.4.9.15 zeigt man, daß die Charaktere ein Orthonormalsystem bilden. Sein Vektorraumerzeugnis ist ein Teilraum des Raums der darstellenden Funktionen. Wäre unser Orthonormalsystem nicht vollständig, so müßte es nach dem Satz von Peter und Weyl 15.4.7.7 ein echter Teilraum sein, und damit müßte es in seinem orthogonalen Komplement eine von Null verschiedene darstellende Funktion geben. Nach dem Schur'schen Lemma 8.3.2.1 sind in unserem Fall jedoch alle endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen eindimensional, es müßte also in diesem orthogonalen Komplement eine Funktion geben, die mit ihren Translaten einen

eindimensionalen Teilraum aufspannt. Damit müßte es dann in diesem orthogonalen Komplement noch einen weiteren Charakter geben, und dieser Widerspruch zeigt die erste Aussage.

2. Daß die Charaktergruppe $\mathfrak{X}(\Gamma)$ eine kompakte Hausdorffgruppe ist, folgt aus dem Satz von Tychnoff und Sie durften es als Übung 15.3.2.15 ausarbeiten. Es ist nun klar, daß das Bild der natürlichen Einbettung $\Gamma \hookrightarrow \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(\Gamma))$ eine Menge von Funktionen $\Gamma \subset \mathcal{C}(\mathfrak{X}(\Gamma))$ ist, die die Punkte trennt und stabil ist unter der komplexen Konjugation. Der vom Bild von Γ erzeugte Untervektorraum $B \subset \mathcal{C}(\mathfrak{X}(\Gamma))$ ist sogar eine Unterringalgebra, die die Punkte trennt und stabil ist unter der komplexen Konjugation. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß 11.3.2.13 ist folglich B dicht in der Norm der gleichmäßigen Konvergenz. Das aber zeigt, daß B auch dicht liegt im Hilbertraum $\mathrm{L}^2(\mathfrak{X}(\Gamma))$. Folglich ist das Bild von Γ bereits eine Hilbertbasis von $\mathrm{L}^2(\mathfrak{X}(\Gamma))$ und $\mathfrak{X}(\Gamma)$ kann keine weiteren Charaktere besitzen und die natürliche Abbildung ist ein Gruppenisomorphismus $\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(\Gamma))$. Daß die kompakt-offene Topologie auf $\mathfrak{X}(\mathfrak{X}(\Gamma))$ diskret ist, überlegen wir wir uns gleich beim Beweis des letzten Teils.

3. Das Bild jedes nichttrivialen Charakters unserer abelschen kompakten Hausdorffgruppe A ist eine kompakte nichttriviale Untergruppe der Kreisgruppe und jede echte kompakte Untergruppe der Kreisgruppe ist zyklisch nach 11.1.5.8. Insbesondere enthält sie ein Element, das vom neutralen Element einen Abstand ≥ 1 hat. Es folgt, daß die kompakt-offene Topologie auf $\mathfrak{X}(A)$ diskret ist. Nach Teil 2 ist damit $\mathfrak{X}(\mathfrak{X}(A))$ kompakt. Andererseits ist die Einbettung $A \hookrightarrow \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(A))$ stetig nach 15.1.9.20 und 15.1.9.22. Ihr Bild ist also eine kompakte und damit abgeschlossene Untergruppe. Der Quotient $\mathfrak{X}(\mathfrak{X}(A))/A$ ist nach 15.2.2.10 und 15.2.2.15 selbst wieder eine kompakte Hausdorffgruppe. Wäre er nicht trivial, so besäße er mithin einen nichttrivialen Charakter $\chi \neq 1$. Die induzierte Abbildung $\theta : \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(\mathfrak{X}(A))) \to \mathfrak{X}(A)$ wäre also kein Isomorphismus. Wir wissen aber bereits für jede diskrete abelsche Gruppe Γ um den kanonischen Isomorphismus $\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(\Gamma))$ und mit 2.1.6.13 ist leicht zu sehen, daß im Fall $\Gamma = \mathfrak{X}(A)$ dieser Isomorphismus gefolgt von θ die Identität auf $\mathfrak{X}(A)$ induzieren muß. Folglich muß auch θ ein Isomorphismus sein, und damit die Einbettung $A \hookrightarrow \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(A))$ eine Bijektion $A \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(A))$. Als stetige bijektive Abbildung eines Kompaktums auf einen Hausdorffraum ist sie dann nach 15.1.5.13 sogar ein Homöomorphismus. $\square$

Übungen

Übung 15.4.7.9. Seien $G \supset H$ eine kompakte Hausdorffgruppe mit einer abgeschlossenen Untergruppe. Man zeige: Induziert die Einschränkung auf den komplexen darstellenden Funktionen einen Isomorphismus $\mathcal{R}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}(H)$, so gilt

schon $G = H$. Hinweis: Man kopiere die im Beweis von 9.1.9.3 gegebene Argumentation.

15.4.8 Ringalgebra der kompakt getragenen Maße

15.4.8.1. Im Fall einer diskreten Gruppe hatten wir den Gruppenring definiert als den Vektorraum aller Funktionen auf der Gruppe mit einer etwas merkwürdigen nichtkommutativen Multiplikation. Im Fall einer lokal kompakten Hausdorffgruppe zersplittert dieses Konzept in eine Vielzahl vernünftiger feinerer Begriffsbildungen. Besonders wichtig scheint mir der Vektorraum der komplexen kompakt getragenen Radonmaße, der im folgenden diskutiert werden soll. Es ist möglich und sogar üblich, die Diskussion dieses Konzeptes zu vermeiden. Dabei büßen allerdings die Formeln in meinen Augen viel von ihrer Transparenz ein.

Definition 15.4.8.2. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X versteht man unter einem **komplexen Radonmaß auf** X eine Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_!(X) \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß für jedes Kompaktum $K \subset X$ die Einschränkung von Λ auf den Raum $\mathcal{C}_K(X)$ aller stetigen Funktionen mit Träger in K stetig ist für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz. Die Gesamtheit aller komplexen Radonmaße auf X notieren wir

$$\mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X)$$

Dieser Raum wird ein Modul über dem Ring $\mathcal{C}(X)$ der stetigen komplexwertigen Funktionen auf X, indem wir $f\mu$ erklären durch die Vorschrift $(f\mu)(g) := \mu(fg)$ für $f, g \in \mathcal{C}(X)$ und $\mu \in \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X)$.

15.4.8.3. Gegeben ein kompakter Hausdorffraum X ist insbesondere ein komplexes Radonmaß auf X eine Linearform $\mu : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{C}$, die stetig ist für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz.

Definition 15.4.8.4. Gegeben eine eigentliche Abbildung $f : X \to Y$ von lokal kompakten Hausdorffräumen induziert die transponierte Abbildung zur Restriktion $(\circ f) : \mathcal{C}_!(Y) \to \mathcal{C}_!(X)$ eine Abbildung auf Radonmaßen, das **direkte Bild**

$$f_* : \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X) \to \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(Y)$$

Statt $f_*\mu = \nu$ schreiben wir auch $f : \mu \rightsquigarrow \nu$ und sagen, unsere Maße seien **verwandt unter** f.

15.4.8.5 (**Produkt komplexer Radonmaße**). Gegeben lokal kompakte Hausdorffräume X, Y mit komplexen Radonmaßen μ, ν zeigt man, wie es im Fall reeller Maße in 15.4.3.10 bereits ausgeführt wurde, die Existenz eines eindeutig bestimmten Radonmaßes

$$\mu \boxtimes \nu \in \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X \times Y)$$

mit $(\mu \boxtimes \nu)(f \boxtimes g) = \mu(f)\nu(g)$ für alle $f \in \mathcal{C}_!(X)$ und $g \in \mathcal{C}_!(Y)$. Auf dem einpunktigen Raum betrachten wir das Radonmaß $\delta \in \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(\mathrm{top})$, das jeder Funktion ihren einzigen Wert zuordnet, und verstehen es als „das Produktmaß mit gar keinem Faktor über dem Produkt einer leeren Familie von Räumen".

15.4.8.6. Für Radonmaße auf lokal kompakten Hausdorffräumen und ihre Produkte und Bildmaße unter eigentlichen Abbildungen gelten offensichtlich alle Formeln unserer Formelsammlung für das Produktmaß aus 13.1.7.25 analog, als da wären die Natürlichkeit, Eins, Assoziativität, Kommutativität und Funktorialität.

15.4.8.7. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X und $x \in X$ bezeichne $\mathrm{em}_x : \mathrm{top} \to X$ die Abbildung mit Bild x und $\delta_x := \mathrm{em}_{x*}\delta \in \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X)$ das Bildmaß des Diracmaßes auf dem einpunktigen Raum. Auf stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger haben wir dann $\delta_x(f) = f(x)$.

15.4.8.8 (**Radonmaße mit kompaktem Träger**). Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum. Standardargumente mit Teilungen der Eins zeigen, daß für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X gilt

$$\mathcal{C}_!(X) = \sum_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{C}_!(U)$$

mit den implizit verstandenen Einbettungen $\mathcal{C}_!(U) \hookrightarrow \mathcal{C}_!(X)$ vermittels der jeweiligen Ausdehnung durch Null. Für jedes Radonmaß $\mu \in \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X)$ gibt es folglich eine größte offene Teilmenge $U \Subset X$ mit $\mu(f) = 0 \ \forall f \in \mathcal{C}_!(U)$. Deren Komplement heißt der **Träger** unseres Radonmaßes und wir notieren sie $\operatorname{supp}\mu$. Den Raum der Radonmaße auf X mit kompaktem Träger notieren wir

$$\mathrm{M}^{\mathrm{rad}}_!(X)$$

15.4.8.9 (**Bilder von Radonmaßen mit kompaktem Träger**). Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X gilt offensichtlich

$$\mathrm{M}^{\mathrm{rad}}_!(X) = \bigcup_{K \subset X \text{ kompakt}} i_{K*}\left(\mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(K)\right)$$

mit $i_K : K \hookrightarrow X$ der jeweiligen Einbettung. Wir folgern, daß das Produkt von kompakt getragenen Maßen kompakt getragen ist und daß es für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ in einen weiteren lokal kompakten Hausdorffraum Y genau eine Abbildung

$$f_* : \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}_!(X) \to \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}_!(Y)$$

gibt mit $f_*(i_{K*}\mu) = (f \circ i_K)_*\mu$ für alle Kompakta $K \subset X$ und alle $\mu \in \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(K)$. Hier steht uns das Bild $(f \circ i_K)_*$ bereits zur Verfügung, da $f \circ i_K$ eigentlich ist.

15.4.8.10. Für kompakte getragene Radonmaße auf lokal kompakten Hausdorffräumen und ihre Produkte und Bildmaße unter beliebigen Abbildungen gelten nun offensichtlich auch alle Formeln unserer Formelsammlung für das Produktmaß aus 13.1.7.25 alias unsere Verschmelzungsidentitäten analog, als da wären die Natürlichkeit, Eins, Assoziativität, Kommutativität und Funktorialität.

15.4.8.11 (**Maßring einer lokal kompakten Hausdorffgruppe**). Der komplexe Vektorraum $\mathrm{M}_!^{\mathrm{rad}}(G)$ der Radonmaße auf einem lokal kompakten Hausdorffmonoid G wird eine komplexe Ringalgebra mit der Faltung

$$\mu * \nu := \mathrm{mult}_*(\mu \boxtimes \nu)$$

als Multiplikation. Man zeigt das genau wie in 13.3.5.9. Die Vorschrift $x \mapsto \delta_x$ liefert einen Ringhomomorphismus $\mathbb{C}G \hookrightarrow \mathrm{M}_!^{\mathrm{rad}}(G)$, der im Fall eines diskreten Monoids G ein Isomorphismus ist.

15.4.8.12 (**Faltung von Funktionen**). Gegeben eine lokal kompakte Hausdorffgruppe und ein Haarmaß μ ist das Bild der Einbettung $\mathcal{C}_!(G) \to \mathrm{M}_!^{\mathrm{rad}}(G)$ gegeben durch $f \mapsto f\mu$ stabil unter Faltung. In der Tat finden wir für $f, g, h \in \mathcal{C}_!(G)$ unschwer

$$\begin{aligned}
(f\mu * g\mu)(h) &= \textstyle\int_{G\times G} f(x)g(y)h(xy)(\mu \boxtimes \mu)\langle x, y\rangle \\
&= \textstyle\int_G f(x) \left(\int_G g(y)h(xy)\mu\langle y\rangle\right) \mu\langle x\rangle \\
&= \textstyle\int_G f(x) \left(\int_G g(x^{-1}y)h(y)\mu\langle y\rangle\right) \mu\langle x\rangle \\
&= \left(\textstyle\int_G f(x)g(x^{-1}y)\mu\langle x\rangle\right) h(y)\mu\langle y\rangle \\
&= ((f *_\mu g)\mu)(h)
\end{aligned}$$

für die Funktion $f *_\mu g$ gegeben durch $(f *_\mu g)(y) := \int_G f(x)g(x^{-1}y)\mu\langle x\rangle$, die wir bereits in 15.4.7.2 im kompakten Fall kennengelernt und $f * g$ notiert hatten.

15.4.8.13 (**Integration vektorwertiger Funktionen**). Gegeben X ein lokal kompakter Hausdorffraum und $\mu \in \mathrm{M}_!^{\mathrm{rad}}(X)$ ein komplexes kompakt getragenes Radonmaß auf X, ja ein beliebiger topologischer Raum X mit einer Linearform $\mu : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{C}$, erhalten wir für jeden endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V eine lineare Abbildung

$$\mu = \mu_V : \mathcal{C}(X, V) \to V$$

als die Verknüpfung des Inversen zum hoffentlich offensichtlichen Isomorphismus $\mathcal{C}(X) \otimes V \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, V)$ mit $\mu \otimes \mathrm{id}$. Im Fall $V = \mathbb{C}^n$ ist das schlicht die komponentenweise Integration. Wir schreiben $\mu_V(f) = \int_X f(x)\mu\langle x\rangle$. Man prüft auch leicht für jede lineare Abbildung $L : V \to W$ von endlichdimensionalen komplexen Vektorräumen die Verträglichkeit $\mu_W(L \circ f) = L(\mu_V f)$ für alle stetigen Funktionen $f : X \to V$.

15.4.8.14 (**Darstellungen als Moduln über dem Maßring**). Gegeben eine endlichdimensionale komplexe stetige Darstellung V eines lokal kompakten Hausdorffmonoids G läßt sich die Operation des Monoidrings $\mathbb{C}G$ auf V mit unserem Integral vektorwertiger Funktionen aus 15.4.8.13 offensichtlich erweitern zu einer Operation des Maßrings $\mathrm{M}_!^{\mathrm{rad}}(G)$ durch die Vorschrift

$$\mu * v := \int gv \; \mu\langle g\rangle$$

Ist G eine lokal kompakte Hausdorffgruppe und μ ein Haarmaß auf G und $f \in \mathcal{C}_!(G)$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger auf G, so verwenden wir die Abkürzung $f *_\mu v := (f\mu) * v$ und schreiben dafür im kompakten Fall mit dem normierten Haarmaß auch noch kürzer $f * v$.

15.4.9 Fouriertheorie für kompakte Gruppen

Lemma 15.4.9.1 (Existenz invarianter Skalarprodukte). *Auf jeder endlichdimensionalen stetigen reellen oder komplexen Darstellung einer kompakten Hausdorffgruppe gibt es ein invariantes Skalarprodukt.*

Beweis. Bezeichne K unsere kompakte Hausdorffgruppe und V unsere Darstellung. Nach 15.4.3.3 gibt es ein Haarmaß μ auf K. Ist nun $b : V \times V \to \mathbb{C}$ irgendein Skalarprodukt, so liefert die Formel

$$(v, w) := \int_K b(gv, gw) \; \mu\langle g\rangle$$

ein K-invariantes Skalarprodukt, es gilt also $(gv, gw) = (v, w) \forall g \in K$. Damit das richtig ist, muß a priori μ ein rechtsinvariantes Haarmaß sein. Im kompakten Fall wissen wir aber bereits, daß linksinvariante Haarmaße auch rechtsinvariant sind und umgekehrt. □

15.4.9.2 (**Eindeutigkeit invarianter Skalarprodukte**). Auf einer irreduziblen endlichdimensionalen stetigen komplexen Darstellung V einer kompakten Hausdorffgruppe K gibt es bis auf eine multiplikative Konstante in $\mathbb{R}_{>0}$ nur ein invariantes Skalarprodukt. In der Tat ist der Raum der hermiteschen Sesquilinearformen eindimensional nach dem Schur'schen Lemma, da er mit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C},K}(\bar{V}, V^*)$ identifiziert werden kann.

Satz 15.4.9.3 (Vollständige Reduzibilität). *Jede stetige Darstellung endlicher Dimension einer kompakten Hausdorffgruppe ist eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen.*

Beweis. Nach Lemma 15.4.9.1 finden wir auf unserer Darstellung stets ein unter der Gruppenoperation invariantes Skalarprodukt. Nun argumentieren wir durch Induktion über die Dimension unserer Darstellung. Ist sie Null, so ist nichts zu zeigen. Sonst besitzt sie eine einfache Unterdarstellung, und deren orthogonales Komplement ist auch eine Unterdarstellung, auf die wir dann nur noch die Induktionsannahme anzuwenden brauchen. □

15.4.9.4. Gegeben eine kompakte Hausdorffgruppe G bezeichne $\hat{G}$ die Menge aller Isomorphieklassen von endlichdimensionalen irreduziblen unitären Darstellungen von G. Gegeben eine irreduzible unitäre Darstellung L wissen wir aus 15.4.9.1, daß sie ein invariantes Skalarprodukt besitzt, und aus 15.4.9.2, daß dieses eindeutig bestimmt ist bis auf eine multiplikative Konstante aus $\mathbb{R}_{>0}$. Insbesondere hängt für $A \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L$ der Adjungierte $A^\dagger$ nicht von dieser Wahl ab und die Vorschrift $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\dagger B)$ liefert ein wohlbestimmtes Skalarprodukt auf $\operatorname{End}_{\mathbb{C}} L$.

Satz 15.4.9.5 (Fourierreihe für kompakte Gruppen). *Gegeben eine kompakte Hausdorffgruppe G gibt es genau einen Isomorphismus von Hilberträumen*

$$\mathcal{F} : \mathrm{L}^2(G) \xrightarrow{\sim} \hat{\bigoplus}_{L \in \hat{G}} (\operatorname{End}_{\mathbb{C}} L)_{\dim L}$$

mit der Eigenschaft, daß jede stetige Funktion $f \in \mathcal{C}(G)$ darunter auf das Tupel der Endomorphismen $(f*) : L \to L$ abgebildet wird. Unter der Umkehrabbildung wird dabei $A \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L$ abgebildet auf $c_A^* : g \mapsto (\dim L) \operatorname{tr}\big(\rho_L(g^{-1}) A | L\big)$.

15.4.9.6. Die Notation $(f*)$ wurde in 15.4.8.14 eingeführt. Auf der rechten Seite meint der untere Index $\dim L$, daß das von einem und jedem invarianten Skalarprodukt auf L nach 15.4.9.4 herkommende Skalarprodukt auf dem Raum der Endomorphismen noch mit diesem Faktor zu multiplizieren ist. Der Hut über der direkten Summe meint, daß die algebraische direkte Summe mit dem offensichtlichen Skalarprodukt noch zu einem Hilbertraum zu vervollständigen ist. Der Stern bei der Notation c_A^* erinnert daran, daß das nicht genau die Matrixkoeffizientenabbildung ist, die ich in 8.4.2.3 im Fall endlicher Gruppen $c_A : g \mapsto \operatorname{tr}\big(\rho_L(g) A | L\big)$ notiert habe.

15.4.9.7. Den Fall einer endlichen Gruppe G haben wir bereits in 8.4.3.5 behandelt. Im Fall der Kreisgruppe $G = S^1$ spezialisiert unsere Inverse der Fourierentwicklung $\mathcal{F}$ zum durch das Aufsummieren der Fouriereihe gegebenen Isomorphismus $\mathrm{L}^2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2(S^1)$.

Beweis. Zunächst einmal behauptet unser Satz, daß gegeben $A \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L$ und $B \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} M$ mit M, L nichtisomorphen irreduziblen Darstellungen in $\mathcal{C}(G)$ gilt $\langle c_A^*, c_B^* \rangle = 0$. Sicher dürfen wir dazu annehmen, daß A und B Rang höchstens

Eins haben, sagen wir $A : l \mapsto \langle a, l\rangle v$ für $a, v \in L$ und $B : m \mapsto \langle b, m\rangle w$ für $b, w \in M$ und jeweils fest gewählte invariante Skalarprodukte. Dann ergibt sich

$$\frac{\langle c_A^*, c_B^*\rangle}{(\dim L)^2} = \int \overline{\langle a, gv\rangle}\langle b, gw\rangle = \int \langle v, g^{-1}a\rangle\langle b, gw\rangle = \langle v| \left(\int g^{-1}|a\rangle\langle b|g\right)|w\rangle$$

mit der Notation $|a\rangle\langle b|$ für die lineare Abbildung $M \to L$ gegeben durch $w \mapsto \langle b, w\rangle a$. Dann steht in der großen Klammer rechts ein Homomorphismus von Darstellungen $M \to L$, also die Null, und das zeigt $\langle c_A^*, c_B^*\rangle = 0$. Im Fall $M = L$ steht dahingegen in der großen Klammer ein Vielfaches von id_L mit derselben Spur wie $|a\rangle\langle b|$, also das Vielfache $(\langle b, a\rangle/\dim L)\,\mathrm{id}_L$, und wir folgern mit elementarer Rechnung

$$\frac{\langle c_A^*, c_B^*\rangle}{(\dim L)^2} = \frac{\langle b, a\rangle\langle v, w\rangle}{\dim L} = \frac{\mathrm{tr}(A^\dagger B|L)}{\dim L}$$

Damit wissen wir schon einmal, daß unsere Abbildungsvorschrift $A \mapsto c_A^*$ einen Homomorphismus von Prähilberträumen

$$\mathcal{C}(G) \leftarrow \bigoplus_{L\in\hat{G}} (\mathrm{End}_{\mathbb{C}} L)_{\dim L}$$

liefert. Da die darstellenden Funktionen aber nach dem Satz 15.4.7.7 von Peter-Weyl dicht liegen im Raum der quadratintegrierbaren Funktionen, muß die auf den Vervollständigungen induzierte Abbildung ein Isomorphismus von Hilberträumen sein. Es bleibt damit nur noch zu zeigen, daß dessen Umkehrabbildung jeder stetigen Funktion $f \in \mathcal{C}(G)$ das Tupel der Endomorphismen $(f*) : L \to L$ zuordnet. Da nun die darstellenden Funktionen nach dem Satz 15.4.7.7 von Peter-Weyl sogar für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz dicht liegen in $\mathcal{C}(G)$, müssen wir das nur für darstellende Funktionen f prüfen. Für $L \in \hat{G}$ und $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} L$ müssen wir also zeigen, daß gilt $c_A^* * w = 0\ \forall w \in M$ mit $M \not\cong L$ und $c_A^* * w = Aw\ \forall w \in L$. Nun dürfen wir sicher wieder $A(l) = \langle a, l\rangle v$ annehmen, also haben wir diesmal $c_A^*(g) = (\dim L)\langle a, g^{-1}v\rangle = (\dim L)\overline{\langle v, ga\rangle}$ und erhalten mit unseren Ergebnissen vom ersten Teil des Beweises

$$\langle b|c_A^* * w\rangle = \langle b|\int c_A^*(g)gw\rangle = (\dim L)\int \overline{\langle v, ga\rangle}\langle b, gw\rangle = 0$$

falls $M \not\cong L$, wohingegen sich im Fall $M = L$ gerade $\langle b, v\rangle\langle a, w\rangle = \langle b, Aw\rangle$ ergibt. □

15.4.9.8. Ich erinnere an unsere Inversionsformel für Fouriergruppen 13.3.7.13 und will nun eine analoge Formel für nicht notwendig kommutative kompakte

Liegruppen G angeben. Im Fall endlicher Gruppen habe ich das bereits in 8.4.3.5 ausgeführt. Bezeichne $\hat{G}$ die Menge der Isomorphieklassen von endlichdimensionalen irreduziblen stetigen Darstellungen. Bezeichne $\mathcal{S}^{\mathrm{alg}}(G) := \mathcal{R}(G)$ den Ring der darstellenden Funktionen und $\mathcal{M}^{\mathrm{alg}}(G)$ den Teilring des Maßrings, der aus allen Produkten einer darstellenden Funktion mit einem Haarmaß besteht. So erhalten wir, indem wir jedem derartigen Maß das Tupel der davon induzierten Endomorphismen der irreduziblen Darstellungen zuordnen, die obere Horizontale eines Zykels aus Isomorphismen der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^{\mathrm{alg}}(G) \arrow[r, "\sim"'] & \bigoplus_{L\in\hat{G}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[d, "\wr"', "\cdot\mu"] \\
\mathcal{S}^{\mathrm{alg}}(G)^{\leftrightarrow} \arrow[u, "\cdot\lambda", "\wr"'] & \bigoplus_{L\in\hat{G}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[l, "c^*", "\sim"']
\end{tikzcd}$$

mit der Eigenschaft, daß einmal im Kreis herumgehen die Identität liefert. Als untere Horizontale nehme ich die Variante der Matrixkoeffizientenabbildung, unter der $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} L$ auf die Funktion $c_A^* : g \mapsto \mathrm{tr}\left(\rho_L(g^{-1})A : L \to L\right)$ abgebildet wird. Der obere Index $\leftrightarrow$ erinnert daran, daß die Operation von $G \times G^{\mathrm{opp}}$ anders als für Funktionenräume natürlich zu verstehen ist, wenn man erreichen will, daß alle beteiligten Abbildungen äquivariant werden. Die linke Vertikale ist die Multiplikation mit einem Haarmaß λ, die rechte Vertikale ist die Multiplikation mit dem zugehörigen Plancherelmaß μ, hier einer reellwertigen Funktion auf $\hat{G}$, die dadurch bestimmt wird, daß „einmal im Kreis herumgehen an jeder Stelle die Identität ist“. Ist λ normiert auf Gesamtmasse $\lambda(G) = 1$, so müssen wir nach 15.4.9.5 für μ die Funktion $\mu(L) = \dim L$ nehmen. Arbeiten wir über $\mathbb{C}$, so können wir unser Diagramm ergänzen zu einem kommutativen nach 13.3.7.21 modellierten Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}^{\mathrm{alg}}(G) \arrow[r, "\sim"] & \bigoplus_{L\in\hat{G}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[dr, "\cdot\sqrt{\mu}", "\sim"'] & \\
\mathcal{H}^{\mathrm{alg}}(G) \arrow[ur, "\cdot\sqrt{\lambda}", "\sim"'] \arrow[r, hook] & \mathrm{L}^2(G) \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] & \hat{\bigoplus}_{L\in\hat{G}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}} L & \bigoplus_{L\in\hat{G}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "\sim", "\cdot\sqrt{\mu}"'] \\
 & \mathcal{S}^{\mathrm{alg}}(G)^{\leftrightarrow} \arrow[ul, "\sim", "\cdot\sqrt{\lambda}"'] & \bigoplus_{L\in\hat{G}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[l, "c^*", "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

Hier meint $\mathcal{H}^{\mathrm{alg}}(G)$ einen Raum von „algebraischen Halbdichten auf G“, den man formal als einen Teilraum des Raums aller „Schwartz-Halbdichten“ erklären mag, vergleiche 13.3.7.21. Das äußere Sechseck besteht wieder aus Isomorphismen und einmal im Kreis herumgehen liefert die Identität. Darüber hinaus ist aber der Isomorphismus zwischen den sich horizontal gegenüberliegenden Räumen in

der mittleren Horizontale ein Isomorphismus von Prähilberträumen für die explizit beschriebenen Skalarprodukte und induziert einen Isomorphismus von Hilberträumen der in der Mitte des Diagramms angedeuteten Gestalt. Dies Diagramm, wenn wir es zum normierten Haarmaß $\lambda(G) = 1$ und der zugehörigen Funktion $\mu(L) = \dim L$ spezialisieren, liefert sofort Korollar 15.4.9.12.

15.4.9.9. Wir erinnern daran, daß wir in 8.4.2.19 für jede endlichdimensionale Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ einer Gruppe G über einem Körper k ihren **Charakter** $\chi_\rho : G \to k$ erklärt hatten durch die Formel $\chi_\rho(g) := \mathrm{tr}(\rho(g))$, und daß wir so eine **Klassenfunktion** erhalten, also eine Funktion, die konstant ist auf Konjugationsklassen.

Korollar 15.4.9.10 (Charakter-Projektor-Formel). *Sei G eine kompakte Hausdorffgruppe mit Haarmaß μ. Wir erklären für jede endlichdimensionale einfache komplexe Darstellung L von G den* **Projektor** $\mathrm{e}_L \in \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(G)$ *im Maßring durch die Vorschrift*

$$\mathrm{e}_L := \frac{\dim L}{\mu(G)}(\chi_L \circ \mathrm{inv})\mu$$

So gilt $\mathrm{e}_L * \mathrm{e}_L = \mathrm{e}_L$ und $\mathrm{e}_L * v = v \ \forall v \in L$. Für jede nicht zu L isomorphe endlichdimensionale einfache Darstellung M gilt dahingegen $\mathrm{e}_L * \mathrm{e}_M = 0$ und damit dann natürlich auch $\mathrm{e}_L * w = 0 \ \forall w \in M$.

15.4.9.11. Hier meint $\mathrm{inv} : G \to G$ das Invertieren. Im Fall einer endlichen Gruppe kennen wir unsere Formel bereits aus 8.4.2.19.

Beweis. Wir dürfen unser Haarmaß μ ohne Beschränkung der Allgemeinheit normiert annehmen. Die Identität $c^*_{\mathrm{id}_L} = (\dim L)(\chi_L \circ \mathrm{inv})$ und die Behauptung folgen dann sofort aus unseren Formeln in 15.4.9.5 oder vielleicht direkter 15.4.9.8. □

Korollar 15.4.9.12 (Orthogonalität komplexer Matrixkoeffizienten). *Bilden gewisse $\rho_L : G \to \mathrm{U}(d_L)$ ein Repräsentantensystem für die einfachen unitären Darstellungen einer kompakten Hausdorffgruppe G, so bilden die renormalisierten Matrixkoeffizienten $\sqrt{d_L}\,(\rho_L)_{ij}$ eine Hilbertbasis von $\mathrm{L}^2(G)$.*

Beweis. Die Matrizen E_{ij} bilden eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Mat}(d;\mathbb{C})$ für das durch $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\dagger B)$ gegebene Skalarprodukt. Die $(1/\sqrt{d})E_{ij}$ bilden folglich eine Orthonormalbasis für denselben Raum $\mathrm{Mat}(d;\mathbb{C})_d$ mit dem um den Faktor d vergrößerten Skalarprodukt. Unter der inversen Fouriertransformation gehen die nun aber gerade in die Funktionen $\sqrt{d_L}\,(\rho_L)_{ij} \circ \mathrm{inv}$ über. Die Behauptung folgt so aus unseren Fourierformeln 15.4.9.5 oder vielleicht direkter 15.4.9.8. □

15.4.9.13 (**Darstellende Funktionen kompakter Matrixliegruppen**). Gegeben eine kompakte Matrixliegruppe $G \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ liefert die Restriktion von Funktionen eine Surjektion

$$\mathbb{R}[X_{ij}] \twoheadrightarrow \mathcal{R}(G,\mathbb{R})$$

des Polynomrings in den Matrixeinträgen auf die Ringalgebra der reellwertigen darstellenden Funktionen. In der Tat restringieren Polynomfunktionen offensichtlich zu darstellenden Funktionen, genauer zu allen Matrixkoeffizienten von einfachen Darstellungen, die in einer Tensorpotenz der durch unsere Einbettung gegebenen Darstellung $\mathbb{R}^n$ auftreten. Nach Stone-Weierstraß restringieren sie sogar zu einem bezüglich der Norm der gleichmäßigen Konvergenz dichten Teilraum von $\mathcal{C}(G,\mathbb{R})$. Dann aber können die Matrixkoeffizienten keiner endlichdimensionalen stetigen irreduziblen Darstellung fehlen, da diese sonst nach 15.4.9.5 orthogonal auf allen stetigen Funktionen stehen müßten.

15.4.9.14. Sei G eine kompakte Hausdorffgruppe. Unter dem Raum der **quadratintegrierbaren Klassenfunktionen** auf G verstehen wir den Raum der unter der Operation durch Konjugation invarianten Elemente von $\mathrm{L}^2(G)$.

Satz 15.4.9.15 (**Klassenfunktionen kompakter Hausdorffgruppen**). *Gegeben eine kompakte Hausdorffgruppe bilden die Charaktere der einfachen komplexen Darstellungen eine Hilbertbasis des Raums aller quadratintegrierbaren Klassenfunktionen auf unserer Gruppe und spannen einen in der Supremumsnorm dichten Teilraum des Raums der stetigen Klassenfunktionen auf.*

Beweis. Unsere **irreduziblen Charaktere** bilden nach 15.4.9.8 ein Orthonormalsystem. Jetzt betrachten wir die nach 15.4.3.10 wohldefinierte Abbildung $P : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G)$ gegeben durch

$$(Pf)(x) = \int f(g^{-1}xg)\mu\langle g\rangle$$

Sie ist eine Projektion auf den Raum der stetigen Klassenfunktionen und ist stetig für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz. Folglich liegen die Bilder der Matrixkoeffizienten in Bezug auf die Norm der gleichmäßigen Konvergenz dicht im Raum der stetigen Klassenfunktionen. Das Bild eines Matrixkoeffizienten einer irreduziblen Darstellung ist jedoch offensichtlich wieder ein Matrixkoeffizient besagter Darstellung und damit ein Vielfaches ihres Charakters. Das zeigt die gleichmäßige Dichtigkeit im Raum der stetigen Klassenfunktionen. Weiter bemerken wir, daß eine quadratintegrierbare Klassenfunktion f senkrecht stehen muß auf jedem unter Konjugation stabilen endlichdimensionalen Teilraum $E \subset \mathcal{C}(G)$, in dem die triviale Darstellung nicht als Summand auftritt, da ja für $h \in E$ offensichtlich gilt $\langle f,h\rangle = \langle f,Ph\rangle$. Damit muß eine quadratintegrierbare Klassenfunktion senkrecht stehen auf den Bildern unter der Matrixkoeffizientenabbildung

aller $\{A \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L \mid \operatorname{tr} A = 0\}$ für $L \in \hat{G}$, und damit muß sie dann sogar im Abschluß des Erzeugnisses der irreduziblen Charaktere liegen. $\square$

Übungen

Übung 15.4.9.16. Auf einer kompakten Hausdorffgruppe ist das Faltungsprodukt von Matrixkoeffizienten zu nichtisomorphen endlichdimensionalen einfachen Darstellungen stets Null. Gegeben eine einfache unitäre Darstellung $\rho : G \to \mathrm{U}(d)$ gilt dagegen für die Faltung der Matrixkoeffizienten $\rho_{ij} * \rho_{kl} = d^{-1}\delta_{jk}\rho_{il}$.

Übung 15.4.9.17. Eine endlichdimensionale Darstellung V einer kompakten Hausdorffgruppe, für die die Matrixkoeffizientenabbildung $V \otimes_{\mathbb{C}} V^* \to \mathcal{C}(G)$ injektiv ist, muß irreduzibel sein oder Null.

Übung 15.4.9.18. Man beschreibe die Verknüpfung der Matrixkoeffizientenabbildung $\bigoplus_{L \in \hat{G}} \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L \to \mathcal{C}(G)$ mit dem Integral nach dem normierten Haarmaß.

Übung 15.4.9.19. Man zeige, daß für eine kompakte Hausdorffgruppe G die Fouriertransformation von Maßen nach 15.4.8.14 stets eine Injektion

$$\mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(G) \hookrightarrow \prod_{M \in \operatorname{irrf} G} \operatorname{End}_{\mathbb{C}} M$$

liefert. Hinweis: Man zeige als Zwischenschritt: Konvolutiert ein Maß mit jeder darstellenden Funktion zur Nullfunktion, so konvolutiert es mit jeder stetigen Funktion zur Nullfunktion und ist folglich das Nullmaß.

15.5 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Olaf Schnürer, Leonardo Patimo, ...

Kapitel 16

Fundamentalgruppe und Überlagerung

Inhalt

16.1 Homotopie und Fundamentalgruppe 2598

16.1.1 Einführung in die algebraische Topologie 2598

16.1.2 Definition der Fundamentalgruppe 2603

16.1.3 Fundamentalgruppe der Kreislinie 2609

16.1.4 Anwendungen und Beispiele 2613

16.1.5 Homotopien zwischen stetigen Abbildungen 2617

16.1.6 Kategorien und Funktoren 2618

16.1.7 Homotopie und Fundamentalgruppe 2624

16.1.8 Abelisierte Fundamentalgruppe* 2631

16.1.9 Selbsthomotopien der Kreislinie 2633

16.2 Beschreibung einiger Fundamentalgruppen 2640

16.2.1 Produkte und Koprodukte in Kategorien 2640

16.2.2 Kartesische Diagramme 2642

16.2.3 Kokartesische Diagramme 2645

16.2.4 Satz von Seifert und van Kampen 2648

16.2.5 Freie Monoide und freie Gruppen 2653

16.2.6 Push-out von Gruppen 2660

16.2.7 Simplizialkomplexe und triangulierbare Flächen . . 2661

16.2.8 Klassifikation der geschlossenen Flächen 2669

16.2.9 Gruppen durch Erzeugende und Relationen 2679
16.2.10 Die Fundamentalgruppen geschlossener Flächen . . 2680
16.3 Überlagerungstheorie 2683
16.3.1 Überlagerungen 2683
16.3.2 Kategorien von Mengen mit Operation 2688
16.3.3 Quotientenabbildungen als Überlagerungen 2690
16.3.4 Lifts und Decktransformationen 2692
16.3.5 Initiale und universelle Überlagerungen 2698
16.3.6 Existenz universeller Überlagerungen 2703
16.4 Überlagerungen und Gruppenwirkungen 2708
16.4.1 Eigenschaften von Funktoren 2708
16.4.2 Transformationen 2709
16.4.3 Adjungierte Funktoren 2712
16.4.4 Überlagerungen und Gruppenwirkungen 2715
16.4.5 Überlagerungen und Fundamentalgruppe 2719
16.4.6 Erzeuger und Relationen für $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$* 2728
16.4.7 Das Yoneda-Lemma* 2730
16.4.8 Mehr zu adjungierten Funktoren* 2732
16.5 Weiterführende Resultate 2739
16.5.1 Die Zopfgruppe 2739
16.5.2 Überlagerungen topologischer Gruppen* 2746
16.5.3 Überlagerungen und Homotopie* 2748
16.6 Danksagung 2752

Im folgenden setze ich Grundkenntnisse in mengentheoretischer Topologie voraus, wie sie etwa in 15.1 aufbauend auf 12.7.5, 12.7.7 und 11.1.1 erklärt werden.

16.1 Homotopie und Fundamentalgruppe

16.1.1 Einführung in die algebraische Topologie

16.1.1.1. Ich erinnere an den vertrauten Begriff der Stetigkeit von Funktionen mehrerer reellen Veränderlichen. Weiter bezeichne $\| \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Skalarproduktnorm, $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, und

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

die n**-dimensionale Kugelschale** oder n**-Sphäre**. Es ist also $S^{-1} = \emptyset$, $S^0 = \{+1, -1\}$, S^1 die Kreislinie, S^2 die Kugelschale und so weiter. Zur Motivation liste ich nun einige typische Probleme der Topologie auf.

1. Man zeige, daß es für $n \geq 0$ keine stetige Injektion $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ der n-dimensionalen Kugelschale in die n-dimensionale Ebene gibt. Als Übung empfehlen sich die Fälle $n = 0, 1$. Der Fall $n = 2$ wird in 16.1.9.10 erledigt, der allgemeine Fall ergibt sich als Konsequenz aus 17.3.3.17.

2. „Ein Igel läßt sich nicht kämmen ohne Wirbel“. In Formeln zeige man: Es gibt keine stetige Abbildung $\kappa : S^2 \to S^2$ derart, daß $\kappa(x)$ senkrecht steht auf x für alle $x \in S^2$. Wir zeigen das in 16.1.4.4.

3. Es bezeichne stets $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ die n**-dimensionale Vollkugel**. Es ist also D^0 ein Punkt, $D^1 = [-1, +1]$ ein kompaktes Intervall, D^2 die abgeschlossene Kreisscheibe und so weiter. Man zeige, daß jede stetige Abbildung $f : D^n \to D^n$ von einer abgeschlossenen Vollkugel in sich selber einen Fixpunkt hat. Diese Aussage heißt der **Brouwer'sche Fixpunktsatz**. Als Übung empfehlen sich wieder die Fälle $n = 0, 1$. Der Fall $n = 2$ wird in 16.1.4.3 behandelt, der allgemeine Fall in 17.2.3.12.

16.1.1.2. Gegeben Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ heißt eine Abbildung $f : A \to B$ heißt ein **Homöomorphismus**, wenn sie stetig und bijektiv ist und ihre Inverse $f^{-1} : B \to A$ auch stetig ist. Des weiteren heißen A und B **homöomorph**, wenn es einen Homöomorphismus von A nach B gibt. Wir schreiben kurz $A \cong B$ für die Aussage „A ist homöomorph zu B“. Anschaulich bedeutet $A \cong B$, daß sich A durch „Verbeulen und Verbiegen“ aus B erhalten läßt. Zum Beispiel sind je zwei offene Intervalle in $\mathbb{R}$ homöomorph, und „Die Oberfläche einer Kaffeetasse mit einem Henkel ist homöomorph zur Oberfläche eines Rettungsrings“. Man bezeichnet die Topologie deshalb auch scherzhaft als „Gummigeometrie“. Zur weiteren Motivation liste ich auch noch einige typische Probleme im Zusammenhang mit dem Homöomorphiebegriff auf.

1. **Invarianz der Dimension**: Man zeige, daß für natürliche Zahlen $n, m \geq 0$ gilt $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \Rightarrow n = m$. In Worten sind also endlichdimensionale reelle Räume verschiedener Dimension, wenn man sie mit ihrer natürlichen Topologie versieht, auch nicht homöomorph.

2. Man zeige, daß der Rettungsring, auch genannt der zweidimensionale **Torus** $S^1 \times S^1$, nicht homöomorph ist zur 2-Sphäre S^2.

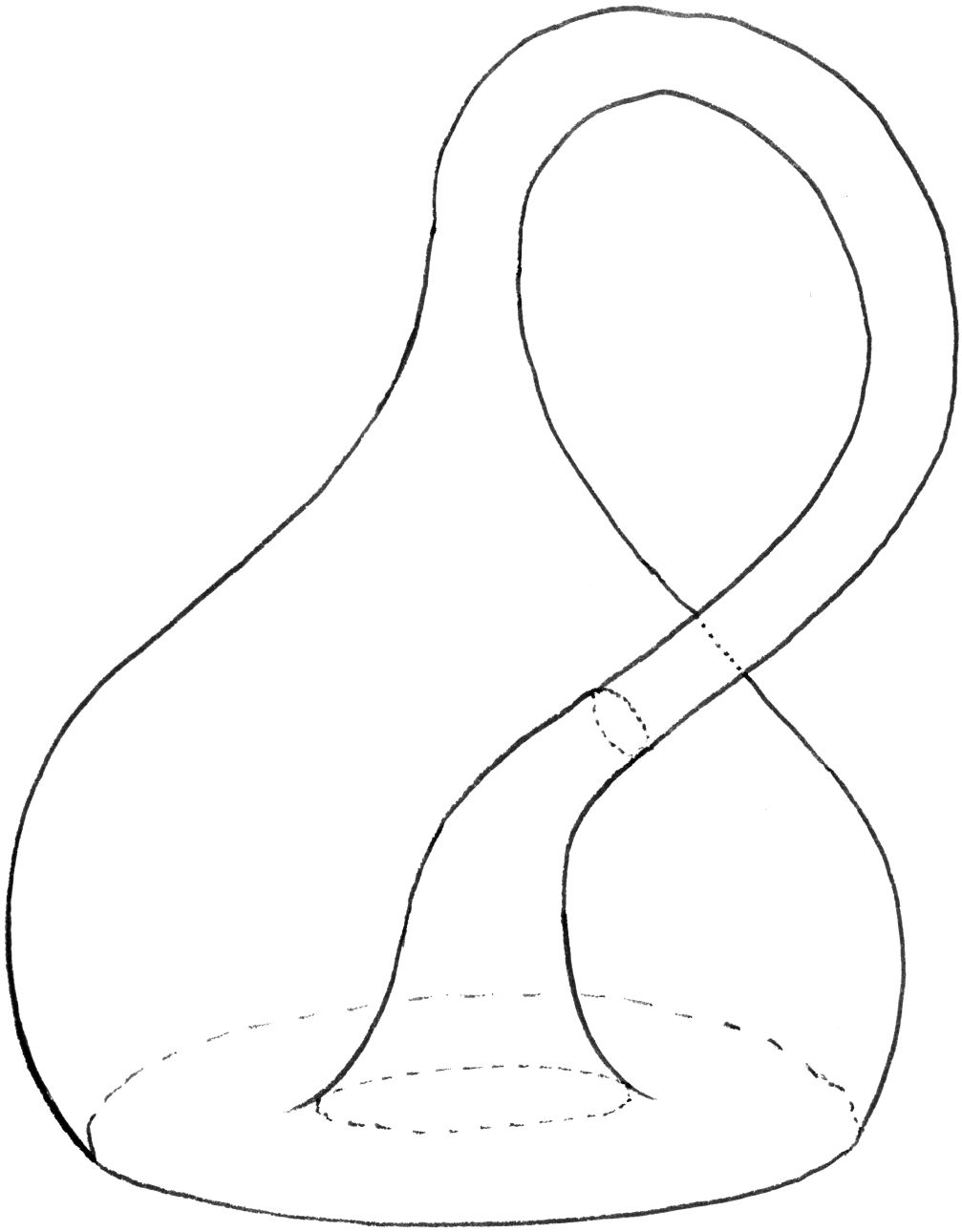
3. Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge der Ebene, die homöomorph ist zur Kreislinie, $S \cong S^1$. Man zeige, daß auch das Komplement von S homöomorph ist zum Komplement der Kreislinie, $\mathbb{R}^2 \backslash S \cong \mathbb{R}^2 \backslash S^1$. Der Beweis dieser Aussage gelingt erst unter Zuhilfenahme von Methoden der Analysis. Man kann sie etwa aus 17.3.3.11 zusammen mit 17.1.6.10 und dem „kleinen" Riemann'schen Abbildungssatz 14.5.5.1 der Funktionentheorie recht leicht folgern.

Ergänzung 16.1.1.3. Man kann für $S \subset \mathbb{R}^2$ homöomorph zur Kreislinie sogar zeigen, daß es einen Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ gibt mit $f(S^1) = S$, aber den Beweis dieses **Satzes von Schönflies** werden wir nicht behandeln. Im übrigen erweisen sich die höherdimensionalen Analoga der Aussagen des letzten Punktes der vorangehenden Aufzählung sämtlich als falsch: Zum Beispiel ist die sogenannte **gehörnte Sphäre von Alexander** eine zur Kugelschale S^2 homöomorphe Teilmenge des Raums $\mathbb{R}^3$, bei der eine Zusammenhangskomponente des Komplements noch nicht einmal schleifenfüllend ist.

16.1.1.4. In mathematisch nicht ganz so präziser Formulierung will ich auch noch die Klassifikation zusammenhängender geschlossener Flächen besprechen. Ich gebe zunächst eine Definition, die etwas unbeholfen ist, da sie die Sprache der Topologie noch weitgehend vermeidet.

Definition 16.1.1.5. Eine Teilmenge $F \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine **geschlossene topologische in $\mathbb{R}^n$ eingebettete d-Mannigfaltigkeit** genau dann, wenn F kompakt ist und es für jeden Punkt $p \in F$ eine offene Teilmenge $U \Subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $p \in U$ und $U \cap F \cong \mathbb{R}^d$.

16.1.1.6. Beispiele für geschlossene d-Mannigfaltigkeiten sind die Sphären S^d. Wir zeigen in 15.1.8.2, daß jede geschlossene 1-Mannigfaltigkeit homöomorph ist zu einer endlichen disjunkten Vereinigung von Kopien von S^1. Eine geschlossene 2-Mannigfaltigkeit nennen wir auch eine **geschlossene Fläche**. Beipiele für geschlossene Flächen sind die Kugelschale S^2, der Torus $S^1 \times S^1$, oder auch die Oberfläche einer massiven Acht, die homöomorph ist zur Oberfläche einer dickwandigen Suppentasse mit zwei Henkeln. Ein etwas komplizierteres Beispiel für eine geschlossene Fläche ist die sogenannte **Klein'sche Flasche**, die man erhält,



Die Klein'sche Flasche

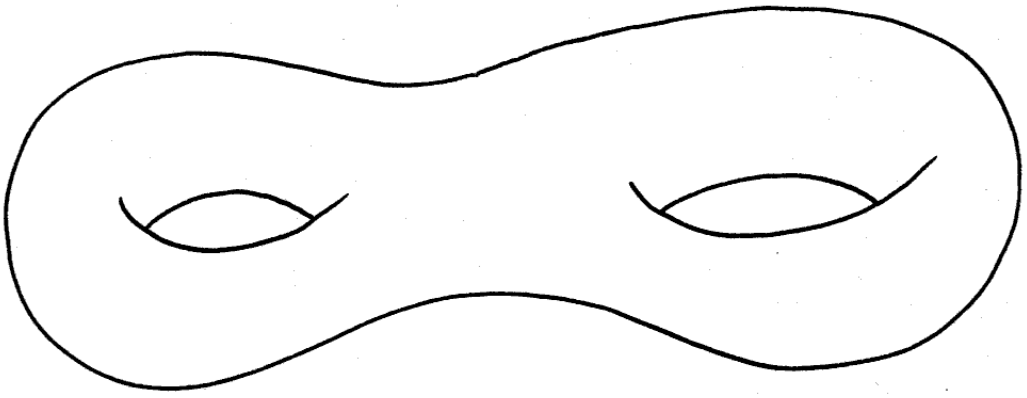
indem man bei einer Flasche den Flaschenhals langzieht, umbiegt, ihn von aussen unter Durchdringung der Flaschenwand ins Innere der Flasche schiebt, dann ein kreisrundes Loch in den Boden der Flasche schneidet, und schließlich die Flaschenöffnung in das Loch unten am Boden einklebt. Genauer erhält man so in der Anschauung noch keine geschlossene Fläche in unserem Sinne, da sich unsere Fläche selbst überschneidet an der Stelle, an der der Flaschenhals in die Flasche eindringt. In der vierten Dimension jedoch kann man diese Selbstüberschneidung vermeiden. Stellen wir uns dazu die vierte Koordinate als Farbe vor und malen unsere Flasche changierend so an, daß der Flaschenhals und der Flaschenboden rot, der Flaschenkörper aber blau sind. Dann ist klar, daß unsere Fläche ohne Selbstüberschneidung im vierdimensionalen Raum liegt, und das ist dann wirklich unsere Klein'sche Flasche. Die Klein'sche Flasche ist nicht homöomorph zu einer Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, wie wir in 19.4.10.20 beweisen werden. Im folgenden Satz brauchen wir noch das berühmte Möbiusband, das man erhält, wenn man einen Papierstreifen einmal verdrillt zu einem Ring verklebt. Der Rand des Möbiusbandes ist eine einzige geschlossene Kreislinie.

Satz 16.1.1.7 (**Klassifikation der geschlossenen Flächen**). *Jede zusammenhängende geschlossene Fläche ist homöomorph zu genau einer der im folgenden beschriebenen Flächen:*

- *Man nehme die Kugelschale S^2, schneide in diese $2g$ kreisrunde Löcher hinein und verbinde diese Löcher paarweise durch g hohle Henkel. Für $g = 0, 1, 2, \ldots$ liefert das jeweils eine Fläche, die* **orientierbare Fläche vom Geschlecht** *g;*

- *Man nehme die Kugelschale S^2, schneide in diese g kreisrunde Löcher hinein und klebe Möbiusbänder in diese Löcher ein. Für $g = 1, 2, \ldots$ liefert das jeweils eine Fläche, die* **nichtorientierbare Fläche vom Geschlecht** *g.*

16.1.1.8. Die orientierbaren Flächen vom Geschlecht $g = 0, 1, 2$ sind die Kugelschale, der Torus und die Oberfläche einer Kaffeetasse mit zwei Henkeln oder auch eines Abseilachters, wie ihn Bergsteiger verwenden. Die nichtorientierbaren Flächen vom Geschlecht $g = 1, 2$ sind die reelle projektive Ebene $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ aus 15.2.3 und die Klein'sche Flasche. Die nicht orientierbaren Flächen zeichnen sich dadurch aus, daß man bei einem Rundweg als Spaziergänger auf der Fläche unter Umständen „mit dem Kopf nach unten“ wieder am Ausgangspunkt ankommt. Statt des Einklebens von Möbiusbändern mag man sich gleichbedeutend auch das Ankleben sogenannter „Kreuzhauben“ vorstellen, wie sie auf Seite 2678 vorgestellt werden. Zum Nachdenken hier noch eine Frage: Welche Fläche unserer Liste erhält man, wenn man an die Klein'sche Flasche einen Henkel anklebt? Die Antwort liefert die „Henkelelimination“ im Beweis des Klassifikationssatzes



Eine orientierbare kompakte Fläche vom Geschlecht zwei

16.2.8.11: Wir erhalten die nichtorientierbare Fläche vom Geschlecht 4. Jetzt gilt es aber zunächst, einen präzisen und effektiven Begriffsapparat für die Behandlung derartiger Fragestellungen aufzubauen.

Übungen

Übung 16.1.1.9. Läßt man aus der Kugelschale S^n für $n \geq 0$ einen Punkt weg, so entsteht ein zu $\mathbb{R}^n$ homöomorpher Raum. Hinweis: Stereographische Projektion.

16.1.2 Definition der Fundamentalgruppe

16.1.2.1. Ich erinnere daran, daß wir einen Weg in einem topologischen Raum in 12.7.5.1 definiert hatten als eine stetige Abbildung eines mehrpunktigen kompakten reellen Intervalls in besagten Raum. Ist unser Intervall das Einheitsintervall $[0,1]$, so reden wir von einem **normierten Weg** oder einfach von einem **Weg** in der Hoffnung, daß aus dem Kontext heraus klar wird, was gemeint ist.

Definition 16.1.2.2. Seien X ein topologischer Raum und $x, y \in X$ Punkte. Die Menge aller normierten Wege von x nach y bezeichnen wir mit

$$\Omega(X,x,y) := \{\alpha : [0,1] \to X \mid \alpha \text{ ist stetig}, \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y\}$$

Für zwei Wege $\alpha \in \Omega(X,x,y)$ und $\gamma \in \Omega(X,y,z)$, von denen der eine da aufhört wo der andere anfängt, erklären wir ihre **Verknüpfung** oder auch **Aneinanderhängung** $\gamma * \alpha \in \Omega(X,x,z)$ durch

$$(\gamma * \alpha)(t) \quad := \quad \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq 1/2; \\ \gamma(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

16.1.2.3. Die Abbildung $\gamma * \alpha$ ist stetig nach 15.1.1.20, da es eine Überdeckung ihres Definitionsbereichs durch zwei abgeschlossene Mengen gibt derart, daß die Restriktion darauf jeweils stetig ist.

16.1.2.4. Anschaulich gesprochen entsteht der Weg $\gamma * \alpha$ dadurch, daß wir erst den Weg α und dann den Weg γ jeweils mit doppelter Geschwindigkeit durchlaufen, so daß wir insgesamt wieder einen normierten alias durch das Einheitsintervall parametrisierten Weg erhalten.

16.1.2.5. Sei X ein topologischer Raum. Wir erklären für $x \in X$ den **konstanten Weg** $\varepsilon_x \in \Omega(X,x,x)$ durch $\varepsilon_x(t) = x\ \forall t \in [0,1]$. Wir erklären zu jedem Weg $\alpha \in \Omega(X,x,y)$ den **umgekehrten Weg** $\bar{\alpha} \in \Omega(X,y,x)$ durch die Vorschrift $\bar{\alpha}(t) := \alpha(1-t)$. Ein Weg, bei dem Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen, heißt **geschlossen**.

Definition 16.1.2.6. Seien x, y Punkte eines topologischen Raums X. Zwei Wege α, β von x nach y heißen **homotop** oder präziser **homotop mit festen Randpunkten** und wir schreiben $\alpha \simeq \beta$, wenn es eine stetige Abbildung

$$h : [0,1]^2 \to X$$

des Einheitsquadrats in unseren Raum gibt, die auf der Unter- beziehungsweise Oberkante unseres Quadrats mit α beziehungsweise β übereinstimmt und die auf der Vorder- und der Hinterkante konstant ist. In Formeln ausgedrückt fordern wir also $h(t,0) = \alpha(t)$ und $h(t,1) = \beta(t)$ für alle $t \in [0,1]$ sowie $h(0,\tau) = x$ und $h(1,\tau) = y$ für alle $\tau \in [0,1]$. Wir schreiben unter diesen Umständen auch kurz

$$h : \alpha \simeq \beta$$

Definition 16.1.2.7. Ein geschlossener Weg heißt **zusammenziehbar**, wenn er homotop ist zu einem konstanten Weg.

16.1.2.8. Vielleicht anschaulicher kann man Homotopie von Wegen dahingehend interpretieren, daß es eine durch $\tau \in [0,1]$ parametrisierte Familie h_τ von normierten Wegen von x nach y geben soll derart, daß gilt $h_0 = \alpha$, $h_1 = \beta$ und daß unsere Familie stetig von τ abhängt in dem Sinne, daß die Abbildung $[0,1]^2 \to X$, $(t,\tau) \mapsto h_\tau(t)$ stetig ist.

Beispiel 16.1.2.9 (**Konvexität impliziert Homotopie von Wegen**). Gegeben $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $x, y \in X$ sind je zwei Wege $\alpha, \beta \in \Omega(X, x, y)$ homotop vermittels $h(t,\tau) = (1-\tau)\alpha(t) + \tau\beta(t)$.

Beispiel 16.1.2.10 (**Bilder homotoper Wege sind homotop**). Ist genauer eine Abbildung $f : X \to Y$ stetig, so folgt aus $h : \alpha \simeq \beta$ schon $f \circ h : f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$.

Beispiel 16.1.2.11 (**Umparametrisierungen liefern homotope Wege**). Ein Weg ist homotop zu jeder seiner Umparametrisierungen. Ist genauer $v : [0,1] \to [0,1]$ stetig mit $v(0) = 0$ und $v(1) = 1$ und ist $\gamma : [0,1] \to X$ ein Weg, so folgt $\gamma \simeq \gamma \circ v$. In der Tat finden wir erst $\mathrm{id} \simeq v$ mit 16.1.2.9, da das eben beides Wege in der konvexen Teilmenge $[0,1] \subset \mathbb{R}$ sind, und dann $\gamma \circ \mathrm{id} \simeq \gamma \circ v$, da nach 16.1.2.10 Bilder homotoper Wege homotop sind.

Lemma 16.1.2.12 (Homotopie ist eine Äquivalenzrelation). *Für jeden topologischen Raum X und beliebige Punkte $x, y \in X$ ist Homotopie eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\Omega(X, x, y)$ aller Wege von x nach y.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß gilt erstens $\alpha \simeq \alpha$, zweitens $\alpha \simeq \beta \Rightarrow \beta \simeq \alpha$, und daß drittens aus $\alpha \simeq \beta$ und $\beta \simeq \gamma$ folgt $\alpha \simeq \gamma$. Wir überlassen dem Leser

den Beweis der beiden ersten Aussagen und zeigen nur die letzte Aussage. Seien also $h : \alpha \simeq \beta$ und $g : \beta \simeq \gamma$ Homotopien. Wir definieren $f : [0,1]^2 \to X$ durch

$$f(t,\tau) = \begin{cases} h(t,2\tau) & 0 \le \tau \le 1/2; \\ g(t,2\tau - 1) & 1/2 \le \tau \le 1. \end{cases}$$

Dann ist in der Tat die Abbildung f stetig, denn ihre Restriktionen auf die abgeschlossenen Teilmengen $[0,1] \times [0,1/2]$ und $[0,1] \times [1/2,1]$ des Einheitsquadrats sind es und wir können 15.1.1.20 anwenden. Nach Konstruktion ist aber nun f eine Homotopie $f : \alpha \simeq \gamma$. □

Definition 16.1.2.13. Äquivalenzklassen von Wegen unter der Äquivalenzrelation der Homotopie nennen wir **Homotopieklassen von Wegen**. Die Menge aller Homotopieklassen von Wegen von einem Punkt x zu einem Punkt y in einem Raum X notieren wir $\pi_1(X,x,y)$. In Formeln setzen wir also

$$\pi_1(X,x,y) := \Omega(X,x,y)/\simeq$$

Die Homotopieklasse eines Weges α notieren wir $[\alpha]$.

Definition 16.1.2.14. Ein **bepunkteter Raum** (X,x) ist ein topologischer Raum X mit einem ausgezeichneten Punkt $x \in X$, seinem **Basispunkt**. Für einen bepunkteten Raum (X,x) vereinbaren wir die Abkürzungen $\Omega(X,x) := \Omega(X,x,x)$ für die Menge aller Wege mit unserem ausgezeichneten Punkt x als Anfangs- und Endpunkt sowie $\pi_1(X,x) := \pi_1(X,x,x)$ für die Menge aller Homotopieklassen derartiger Wege.

16.1.2.15 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur nennt man einen bepunkteten Raum auch häufig einen „punktierten Raum“. Ich ziehe es vor, von einem bepunkteten Raum zu reden, da man wieder an anderer Stelle unter einer „punktierten Ebene“ oder einer „punktierten Kreisscheibe“ für gewöhnlich das Komplement eines Punktes in der Ebene oder das Komplement des Ursprungs in der Kreisscheibe versteht. Auf Englisch wird unterschieden zwischen „pointed space“ und „punctured plane“ oder auch „punctured disc“. Ich vermute sorglose Übersetzung als Grund für die unklare Terminologie im Deutschen.

Vorschau 16.1.2.16. Versehen wir die Menge $\Omega(X,x,y)$ mit der kompakt-offenen Topologie 15.1.9.1 und setzen $h(t,\tau) = h_\tau(t)$, so ist h nach dem Exponentialgesetz 15.1.9.9 stetig genau dann, wenn die Abbildung $[0,1] \to \Omega(X,x,y)$, $\tau \mapsto h_\tau$ stetig ist. Mit dieser Topologie heißt $\Omega(X,x,y)$ ein **Wegeraum** und zwei Wege sind homotop genau dann, wenn sie zur selben Wegzusammenhangskomponente des Wegeraums gehören. Speziell heißt $\Omega(X,x)$ ein **Schleifenraum** und $\pi_1(X,x)$ ist die Menge der Wegzusammenhangskomponenten des Schleifenraums. Notieren wir $\pi_0(X)$ die Menge der Wegzusammenhangskomponenten eines topologischen Raums X, so haben wir demnach in Formeln $\pi_1(X,x) = \pi_0(\Omega(X,x))$

und Lemma 16.1.2.12 erweist sich als Spezialfall der allgemeinen Erkenntnis 15.1.3.14, daß auf jedem topologischen Raum die Wegverbindbarkeit eine Äquivalenzrelation ist.

Satz 16.1.2.17 (Fundamentalgruppe). *Gegeben ein bepunkteter Raum (X, x) induziert das Verknüpfen von Wegen eine Verknüpfung auf der Menge $\pi_1(X, x)$ aller Homotopieklassen von Wegen von x nach x und mit dieser Verknüpfung wird diese Menge eine Gruppe, die* **Fundamentalgruppe unseres bepunkteten Raums**

$$\pi_1(X, x)$$

Beispiel 16.1.2.18. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge, so ist die Fundamentalgruppe von X nach 16.1.2.9 für jeden Basispunkt $x \in X$ trivial.

Beweis. Die beiden ersten Aussagen des anschließenden Lemmas 16.1.2.19 sagen uns, daß die Homotopieklasse der Verknüpfung von zwei Wegen nur von den Homotopieklassen der verknüpften Wege abhängt. Die weiteren Aussagen liefern das neutrale Element, die Inversen und das Assoziativgesetz. □

Lemma 16.1.2.19. *Wann immer die folgenden Verknüpfungen von Wegen in einem topologischen Raum X sinnvoll sind in dem Sinne, daß der eine aufhört wo der andere anfängt, gilt:*

1. $\alpha \simeq \alpha' \Rightarrow \alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta$
2. $\beta \simeq \beta' \Rightarrow \alpha * \beta \simeq \alpha * \beta'$
3. $\varepsilon * \alpha \simeq \alpha \simeq \alpha * \varepsilon$
4. $\alpha * \bar{\alpha} \simeq \varepsilon$, $\bar{\alpha} * \alpha \simeq \varepsilon$
5. $\overline{(\alpha * \beta)} = \bar{\beta} * \bar{\alpha}$
6. $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$

Beweis. Wir zeigen nur beispielhaft die letzte Behauptung. Sicher gilt

$$\alpha * (\beta * \gamma) = ((\alpha * \beta) * \gamma) \circ v$$

für eine stetige Umparametrisierung alias eine stetige Abbildung $v : [0, 1] \to [0, 1]$ mit $v(0) = 0$ und $v(1) = 1$. Da nach 16.1.2.11 ein Weg homotop ist zu allen seinen derartigen Umparametrisierungen, folgt die Behauptung. □

16.1.2.20. Ein topologischer Raum heißt **schleifenfüllend**, wenn jeder geschlossene Weg in unserem Raum zusammenziehbar ist. Er heißt **einfach wegzusammenhängend**, wenn er wegzusammenhängend und schleifenfüllend ist.

Satz 16.1.2.21 (Kriterium für schleifenfüllende Räume). *Kann ein topologischer Raum überdeckt werden durch zwei schleifenfüllende offene Teilmengen mit wegzusammenhängendem Schnitt, so ist er bereits selbst schleifenfüllend.*

Vorschau 16.1.2.22. Das Resultat wird sich später als ein Spezialfall des Satzes von Seifert-van Kampen 16.2.4.1 erweisen.

Beweis. Sei $X = U \cup V$ unser Raum mit seiner Überdeckung. Nach Übung 16.1.2.27 reicht es zu zeigen, daß $\pi_1(X, x)$ für $x \in U \cap V$ trivial ist. Sei dazu $\gamma \in \Omega(X, x)$ ein geschlossener Weg. Nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue 15.1.5.17 gibt es eine Unterteilung des Einheitsintervalls $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$ derart, daß $[a_{i-1}, a_i]$ unter γ abwechselnd ganz in U oder ganz in V landet. Dann gilt $\gamma(a_i) \in U \cap V \ \forall i$ und wir finden für $0 < i < n$ Wege β_i, die in $U \cap V$ von x nach $\gamma(a_i)$ laufen. Bezeichnet andererseits $\gamma_i : [0, 1] \to X$ den „auf dem Intervall $[a_{i-1}, a_i]$ reparametrisierten“ Weg $\gamma_i := \gamma \circ v_i$ für $v_i : [0, 1] \xrightarrow{\sim} [a_{i-1}, a_i]$ die Restriktion auf $[0, 1]$ der affinen Abbildung mit $v_i(0) = a_{i-1}$ und $v_i(1) = a_i$, so ist nach 16.1.2.11 unser Weg γ homotop zu $\gamma_n * \gamma_{n-1} * \ldots * \gamma_2 * \gamma_1$, wobei es auf die Klammerung nach Lemma 16.1.2.19 nicht ankommt, da wir nur an „Wegen bis auf Homotopie“ interessiert sind. Nach Lemma 16.1.2.19 ist das nun weiter homotop zu

$$\gamma_n * (\beta_{n-1} * \bar{\beta}_{n-1}) * \gamma_{n-1} * (\beta_{n-2} * \bar{\beta}_{n-2}) * \ldots * \gamma_2 * (\beta_1 * \bar{\beta}_1) * \gamma_1$$

und dann auch homotop zu

$$(\gamma_n * \beta_{n-1}) * (\bar{\beta}_{n-1} * \gamma_{n-1} * \beta_{n-2}) * \ldots * (\bar{\beta}_2 * \gamma_2 * \beta_1) * (\bar{\beta}_1 * \gamma_1)$$

Da aber nach Annahme $\gamma_n * \beta_{n-1}$ beziehungsweise $\bar{\beta}_i * \gamma_i * \beta_{i-1}$ beziehungsweise $\bar{\beta}_1 * \gamma_1$ jeweils ein geschlossener Weg ist, der ganz in U oder ganz in V verläuft und somit homotop ist zum konstanten Weg ε_x nach Annahme, muß dann auch die ganze Verknüpfung homotop sein zum konstanten Weg ε_x. □

Korollar 16.1.2.23. *Die Sphären S^n sind für $n \geq 2$ schleifenfüllend.*

16.1.2.24. Daß jeder Weg in einer n-Sphäre für $n \geq 2$, der nicht surjektiv ist, bereits zusammenziehbar sein muß, zeigt man leicht mit einer geeigneten stereographischen Projektion. Es gibt jedoch auch in höherdimensionalen Sphären surjektive Wege, die man etwa mit Hilfe der Hilbertkurve **??** konstruieren kann. Der Beweis gilt diesen Fällen.

Beweis. Entfernen wir für $n \geq 0$ aus S^n einen Punkt, so erhalten wir einen topologischen Raum, der homöomorph ist zu $\mathbb{R}^n$ vermittels einer stereographischen Projektion und der insbesondere schleifenfüllend ist. Nehmen wir U das Komplement eines Punktes und V das Komplement eines anderen Punktes, so ist $S^n = U \cup V$ eine offene Überdeckung. Ab $n \geq 2$ ist außerdem $U \cap V$ wegzusammenhängend, und dann greift unser Kriterium 16.1.2.21 für schleifenfüllende Räume. □

Vorschau 16.1.2.25. Die **Poincaré-Vermutung** besagt, daß jede wegzusammenhängende schleifenfüllende topologische kompakte 3-Mannigfaltigkeit ohne Rand homöomorph ist zur dreidimensionalen Sphäre S^3. Sie wurde 2002 mit analytischen Methoden von G. Perelman bewiesen.

16.1.2.26 (**Funktorialität der Fundamentalgruppe**). Sei $f : (X, x) \to (Y, y)$ ein **Morphismus bepunkteter Räume** alias eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(x) = y$. So erhält man einen Homomorphismus der Fundamentalgruppen $\pi_1(f) = f_\sharp$ durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rccc} \pi_1(f) = f_\sharp : & \pi_1(X, x) & \to & \pi_1(Y, y) \\ & [\alpha] & \mapsto & [f \circ \alpha] \end{array}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da nach 16.1.2.10 Bilder homotoper Wege homotop sind. Sie ist ein Gruppenhomomorphismus, da stets gilt $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$. Offensichtlich haben wir $\mathrm{id}_\sharp = \mathrm{id}$ und $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$ wann immer $f : (X, x) \to (Y, y)$ und $g : (Y, y) \to (Z, z)$ Morphismen bepunkteter Räume sind. In der Terminologie, die wir gleich in 16.1.6 besprechen, ist die Fundamentalgruppe demnach ein „Funktor von der Kategorie der bepunkteten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen“.

Übungen

Übung 16.1.2.27. Ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist genau dann schleifenfüllend, wenn seine Fundamentalgruppe in Bezug auf einen und gleichbedeutend jeden Basispunkt trivial ist.

Übung 16.1.2.28 (**Komplemente von Geradenstücken im Raum**). Sei $I \not\subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und eine echte Teilmenge eines Untervektorraums der Kodimension Zwei. So ist die Fundamentalgruppe des Komplements von I trivial, in Formeln $\pi_1(\mathbb{R}^n \backslash I, p) = 1$ für jeden Punkt p des Komplements. Ein Argument, das ohne die Bedingung I abgeschlossen auskommt, findet man in 16.1.7.12. Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $\emptyset \neq I \subsetneq 0 \times \mathbb{R}^{n-2}$. Jetzt lasse man die Sonne aus der Richtung der positiven ersten Koordinatenachse leuchten und betrachte die Menge U_+ aller Punkte, die nicht auf I oder im Schatten von I liegen, also

$$U_+ := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \leq 0 \Rightarrow (0, x_2, x_3, \ldots, x_n) \notin I\}$$

Ähnlich erkläre man U_- durch Beleuchtung aus der Richtung der negativen ersten Koordinatenachse. So erhalten wir eine Überdeckung unseres Komplements durch zwei zusammenziehbare offene Teilmengen mit wegzusammenhängendem Schnitt.

Übung 16.1.2.29. Sei G ein topologischer Raum mit einer stetigen Verknüpfung $G \times G \to G$ und sei $e \in G$ ein neutrales Element. Man zeige, daß unter diesen Annahmen die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$ kommutativ ist.

Ergänzende Übung 16.1.2.30 (**Endlich erzeugte Fundamentalgruppen**). Man zeige: Die Fundamentalgruppe einer bepunkteten kompakten Mannigfaltigkeit ist stets endlich erzeugt. Hinweis: Bezeichne $B = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| < 1\}$ den 1-Ball um den Ursprung und $\bar{B} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq 1\}$ seinen Abschluß. Für unsere Mannigfaltigkeit X wähle man stetige Karten $\varphi_1, \ldots, \varphi_r : \mathbb{R}^n \to X$ derart, daß die $\varphi_i(B)$ schon X überdecken. Für jedes Paar von Indizes i, j mit $i \neq j$ wähle man eine endliche Überdeckung des Schnitts $\varphi_i(\bar{B}) \cap \varphi_j(\bar{B})$ durch zusammenhängende offene Teilmengen U_{ij}^ν von $\varphi_i(\mathbb{R}^n) \cap \varphi_j(\mathbb{R}^n)$. Für jedes ν wähle man einen Weg γ_{ij}^ν von $\varphi_j(0)$ nach $\varphi_i(0)$, der erst innerhalb von $\varphi_j(\mathbb{R}^n)$ nach U_{ij}^ν läuft und dann innerhalb von $\varphi_i(\mathbb{R}^n)$ nach $\varphi_i(0)$. Seien β_i Wege von $p := \varphi_1(0)$ nach $\varphi_i(0)$ mit der einzigen Einschränkung, daß β_1 der konstante Weg sein soll. So erzeugen die Verknüpfungen $\bar{\beta}_i * \gamma_{ij}^\nu * \beta_j$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, p)$.

Ergänzende Übung 16.1.2.31 (**Abzählbare Fundamentalgruppen**). Man zeige: Die Fundamentalgruppe einer bepunkteten abzählbar basierten Mannigfaltigkeit ist stets abzählbar. Hinweis: Man orientiere sich an den Hinweisen zur vorhergehenden Übung 16.1.2.30.

16.1.3 Fundamentalgruppe der Kreislinie

Satz 16.1.3.1 (Fundamentalgruppe der Kreislinie). *Die Fundamentalgruppe der Kreislinie $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist isomorph zur additiven Gruppe der ganzen Zahlen. Genauer ist die Abbildung, die jeder ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$ die Homotopieklasse des Weges $[0, 1] \to S^1$, $t \mapsto \exp(2\pi \mathrm{i} nt)$ zuordnet, ein Isomorphismus*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{wind}: & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(S^1, 1) \\ & n & \mapsto & [t \mapsto \exp(2\pi \mathrm{i} nt)] \end{array}$$

16.1.3.2. Unter der **Umlaufzahl** eines Weges $\gamma \in \Omega(S^1, 1)$ versteht man das Urbild seiner Homotopieklasse $[\gamma]$ unter diesem Isomorphismus. In anderen Worten ist also die Umlaufzahl von γ diejenige ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, für die γ homotop ist zum Weg $t \mapsto \exp(2\pi \mathrm{i} nt)$.

Ergänzung 16.1.3.3. Arbeiten wir mit einem Körper $\mathbb{C}$ von vergesslichen komplexen Zahlen im Sinne von 3.2.7.7, so liefert uns die obige Konstruktion einen kanonischen Isomorphismus $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1, 1)$, der jedem $a \in \ker(\exp) = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ eben den normierten Weg $t \mapsto \exp(ta)$ zuordnet. Man notiert diese Gruppe auch $\mathbb{Z}(1) = \mathbb{Z}_{\mathbb{C}}(1) := \ker(\exp)$ und nennt sie den **Tate-Twist von** $\mathbb{Z}$.

Beweis. Zur Vereinfachung betrachten wir die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Exp}: & \mathbb{R} & \to & S^1 \\ & t & \mapsto & \cos(2\pi t) + \mathrm{i}\sin(2\pi t) \end{array}$$

Mit der Euler'schen Formel können wir auch schreiben $\mathrm{Exp}(t) = \exp(2\pi \mathrm{i} t)$. Das erklärt erstens unsere Notation und zweitens sieht man so leichter, daß Exp ein Gruppenhomomorphismus ist von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen der Länge 1. Anschaulich wickelt Exp die reelle Gerade auf die Kreislinie auf und aufgrund des Faktors 2π haben wir $\mathrm{Exp}^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. In dieser Notation erhält die Abbildungsvorschrift aus unserem Satz die Gestalt

$$\mathrm{wind} : n \mapsto [t \mapsto \mathrm{Exp}(nt)]$$

Als erstes zeigen wir nun, daß sie einen Gruppenhomomorphismus definiert. Gegeben $m, n \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir mit $(m + n\cdot)$ den normierten Weg $t \mapsto m + nt$ aus $\Omega(\mathbb{R}, m, m + n)$. Da je zwei Wege in $\mathbb{R}$ mit denselben Endpunkten homotop sind, haben wir

$$(n + m\cdot) * (n\cdot) \simeq ((m + n)\cdot)$$

Diese Homotopie bleibt bestehen, wenn wir beide Seiten mit Exp verknüpfen. Dies Exp dürfen wir dann auf die beiden Faktoren des $*$-Produkts verteilen und wegen $\mathrm{Exp} \circ (n + m\cdot) = \mathrm{Exp} \circ (m\cdot)$ erkennen wir, daß unsere Abbildungsvorschrift $\mathrm{wind} : n \mapsto [\mathrm{Exp} \circ (n\cdot)]$ in der Tat einen Gruppenhomomorphismus liefert. Um zu zeigen, daß er ein Isomorphismus ist, konstruieren wir eine inverse Abbildung. Der erste Schritt dazu ist die folgende Definition.

Definition 16.1.3.4. Gegeben Y ein topologischer Raum und $f : Y \to S^1$ eine stetige Abbildung heißt eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Y \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Exp} \circ \tilde{f} = f$ ein **Lift** oder eine **Hochhebung** von f.

Lemma 16.1.3.5 (Eindeutigkeit von Lifts). *Seien Y zusammenhängend, $f : Y \to S^1$ eine stetige Abbildung und $\tilde{f}, \hat{f} : Y \to \mathbb{R}$ zwei Lifts von f. So gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $\hat{f}(y) = \tilde{f}(y) + k$ für alle $y \in Y$.*

Beweis. Sicher gilt $\mathrm{Exp}(\tilde{f}(y) - \hat{f}(y)) = 1$, also $\tilde{f}(y) - \hat{f}(y) \in \mathbb{Z}$ für alle $y \in Y$. Ist nun Y zusammenhängend, so muß $\tilde{f}(y) - \hat{f}(y)$ nach 15.1.3.8 konstant sein. □

Lemma 16.1.3.6. *Jede stetige Abbildung $f : [0, 1] \to S^1$ besitzt einen Lift.*

Beweis. Unser Exp liefert Homöomorphismen $\mathrm{Exp}_x : (x, x + 1) \xrightarrow{\sim} S^1 \setminus \mathrm{Exp}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, siehe Übung 15.1.5.21. Ist also f nicht surjektiv, liegt sagen wir $\mathrm{Exp}(x)$ nicht in seinem Bild, so ist $\mathrm{Exp}_x^{-1} \circ f = \tilde{f}$ ein Lift und wir sind fertig. Weil nun f gleichmäßig stetig ist, finden wir $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k = 1$ derart, daß f auf allen Teilintervallen $[a_{i-1}, a_i]$ nicht surjektiv ist. Wir wählen nun

Lifts $\tilde{f}_i$ von $f|[a_{i-1}, a_i]$ für $i = 1, \ldots, k$ und können diese Lifts durch Addition von Elementen von $\mathbb{Z}$ so abändern, daß stets gilt $\tilde{f}_i(a_i) = \tilde{f}_{i+1}(a_i)$. Dann erklären wir $\tilde{f}$ durch $\tilde{f}|[a_i, a_{i+1}] = \tilde{f}_i$ und sind fertig. □

Lemma 16.1.3.7. *Jede stetige Abbildung $f : [0,1]^2 \to S^1$ besitzt einen Lift.*

Beweis. Wir zerlegen zunächst unser Quadrat $[0,1]^2$ in so kleine Schachfelder, daß das Bild keines unserer Felder ganz S^1 ist. Die Einschränkung von f auf jedes dieser Felder läßt sich wie im Beweis zuvor leicht liften. Als nächstes konzentrieren wir uns auf eine Zeile von Schachfeldern und ändern in dieser Zeile unsere Lifts so um Konstanten aus $\mathbb{Z}$ ab, daß sie auf dem Schnitt benachbarter Felder zusammenpassen. So erhalten wir einen Lift auf der ganzen Zeile. Das machen wir für jede Zeile, passen dann diese Lifts wieder aneinander an, und erhalten so schließlich einen Lift auf unserem ganzen Quadrat. □

16.1.3.8. Gegeben $x \in S^1$ und einen geschlossenen Weg $\alpha \in \Omega(S^1, x)$ erklären wir seine **Ganghöhe** $\mathrm{gh}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ durch

$$\mathrm{gh}(\alpha) := \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0)$$

für einen und jeden Lift $\tilde{\alpha}$ von α. Am Ende des Beweises werden wir sehen, daß die Ganghöhe mit der Umlaufzahl übereinstimmt.

Proposition 16.1.3.9. *Geschlossene Wege in der Kreislinie sind homotop genau dann, wenn sie dieselbe Ganghöhe haben. In Formeln gilt für Wege $\alpha, \beta \in \Omega(S^1, 1)$ also*

$$\alpha \simeq \beta \;\Leftrightarrow\; \mathrm{gh}(\alpha) = \mathrm{gh}(\beta)$$

Beweis. $\Rightarrow$.) Zu jeder Homotopie $h : \alpha \simeq \beta$ finden wir mit Lemma 16.1.3.7 einen Lift $\tilde{h}$. Sicher ist $\tilde{h}$ auf der Unterkante des Einheitsquadrats ein Lift $\tilde{\alpha}$ von α und auf der Oberkante ein Lift $\tilde{\beta}$ von β. Weiter muß $\tilde{h}$ auf der Vorder- und Hinterkante wie h selbst konstant sein. Insbesondere haben wir $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ und $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ und damit folgt $\mathrm{gh}(\alpha) = \mathrm{gh}(\beta)$.

$\Leftarrow$.) Die Gleichheit der Ganghöhen $\mathrm{gh}(\alpha) = \mathrm{gh}(\beta)$ bedeutet, daß je zwei Lifts $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ von α und β mit demselben Anfangspunkt auch denselben Endpunkt haben. Als Wege in $\mathbb{R}$ mit demselben Anfangs- und demselben Endpunkt sind dann aber besagte Lifts $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ homotop nach 16.1.2.9. Da Bilder homotoper Wege homotop sind nach 16.1.2.10, folgt $\alpha \simeq \beta$. □

Unsere Ganghöhe $\mathrm{gh} : \Omega(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ induziert nach der vorhergehenden Proposition 16.1.3.9 eine wohlbestimmte injektive Abbildung

$$\mathrm{gh} : \pi_1(S^1, 1) \hookrightarrow \mathbb{Z}$$

Es reicht zu zeigen, daß sie linksinvers ist zur Abbildung aus unserem Satz, in Formeln $\mathrm{gh} \circ \mathrm{wind} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Das prüft man ohne Schwierigkeiten. $\square$

16.1.3.10 (**Fundamentalgruppe der punktierten Ebene**). Geht man alle Argumente dieses Abschnitts nocheinmal durch, so sieht man, daß wir überall statt S^1 genausogut $\mathbb{C}^\times$ hätten schreiben können, wenn wir statt $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$ eben $\mathrm{Exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ betrachten. Wieder besitzt jeder Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ einen Lift, der bis auf eine additive Konstante $k \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt ist, und wieder erhalten wir einen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \\ n & \mapsto & [t \mapsto \exp(2\pi \mathrm{i} n t)] \end{array}$$

und dessen Inverses wird durch die Ganghöhe gegeben. In 16.3.1.1 folgende werden wir sogenannte „Überlagerungen“ betrachten, denen sich diese beiden Situationen als Spezialfälle unterordnen.

Beispiel 16.1.3.11 (**Unmöglichkeit komplexer Wurzelfunktionen**). Mit den hier entwickelten Hilfsmitteln können wir sehr schnell sehen, daß es keine stetige Abbildung $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit $q \circ w = \mathrm{id}$ für $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ das Quadrieren. In der Tat gälte ja $q_\sharp \circ w_\sharp = \mathrm{id}$ auf $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$ und diese Gruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z}$ und wir haben $q_\sharp(c) = c^2$, wie Sie sich gleich in 16.1.3.13 überlegen dürfen. Es gibt jedoch, jetzt in additiver Notation, keine Abbildung $w_\sharp : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $2w_\sharp(n) = n \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Übungen

Übung 16.1.3.12. Sei (X, x) ein bepunkteter Raum. Ist $\alpha \in \Omega(X, x)$ ein geschlossener Weg, so gibt es genau eine stetige Abbildung $\hat{\alpha} : S^1 \to X$ mit $\alpha = \hat{\alpha} \circ \mathrm{Exp}$, und die Verknüpfung von $\hat{\alpha}_\sharp : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(X, x)$ mit dem Isomorphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1, 1)$ aus unserem Satz 16.1.3.1 wird gegeben durch $n \mapsto [\alpha]^n$.

Übung 16.1.3.13. Die Abbildung $[n] : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ induziert auf der Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1, 1)$ die Abbildung $[n]_\sharp : c \mapsto c^n$ in multiplikativer Schreibweise, also $[n]_\sharp : c \mapsto nc$ in additiver Schreibweise.

Übung 16.1.3.14. Ist Y ein kartesisches Produkt von endlich vielen reellen Intervallen, so besitzt jede stetige Abbildung $Y \to S^1$ einen Lift.

Übung 16.1.3.15. Man zeige: Ein geschlossener Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ in $\mathbb{R}_{>0}$ und der Eigenschaft, daß es $a \in (0,1)$ gibt mit $\gamma(a) \in \mathbb{R}_{<0}$ und $\mathrm{Im}(\gamma(t)) \geq 0 \ \forall t \in [0, a]$ und $\mathrm{Im}(\gamma(t)) \leq 0 \ \forall t \in [a, 1]$, hat die Umlaufzahl Eins um den Ursprung.

16.1.4 Anwendungen und Beispiele

Satz 16.1.4.1 (Retraktionen einer Kreisscheibe auf ihren Rand). *Es gibt keine stetige Abbildung von einer abgeschlossenen Kreisscheibe auf ihren Randkreis, deren Einschränkung auf besagten Randkreis die Identität ist.*

16.1.4.2. Ist $X \supset A$ ein topologischer Raum mit einer Teilmenge, so versteht man ganz allgemein unter einer **Retraktion von X auf** A eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$.

Beweis. Bezeichne $D = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe und $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| = 1\}$ ihren Randkreis. Wir führen den Beweis durch Widerspruch und nehmen an, es gäbe solch eine stetige Abbildung $r : D \to S^1$ mit $r(z) = z$ für alle $z \in S^1$. Bezeichne $i : S^1 \hookrightarrow D$ die Einbettung. Wir hätten also ein kommutatives Diagramm von topologischen Räumen

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & D \arrow[d, "r"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

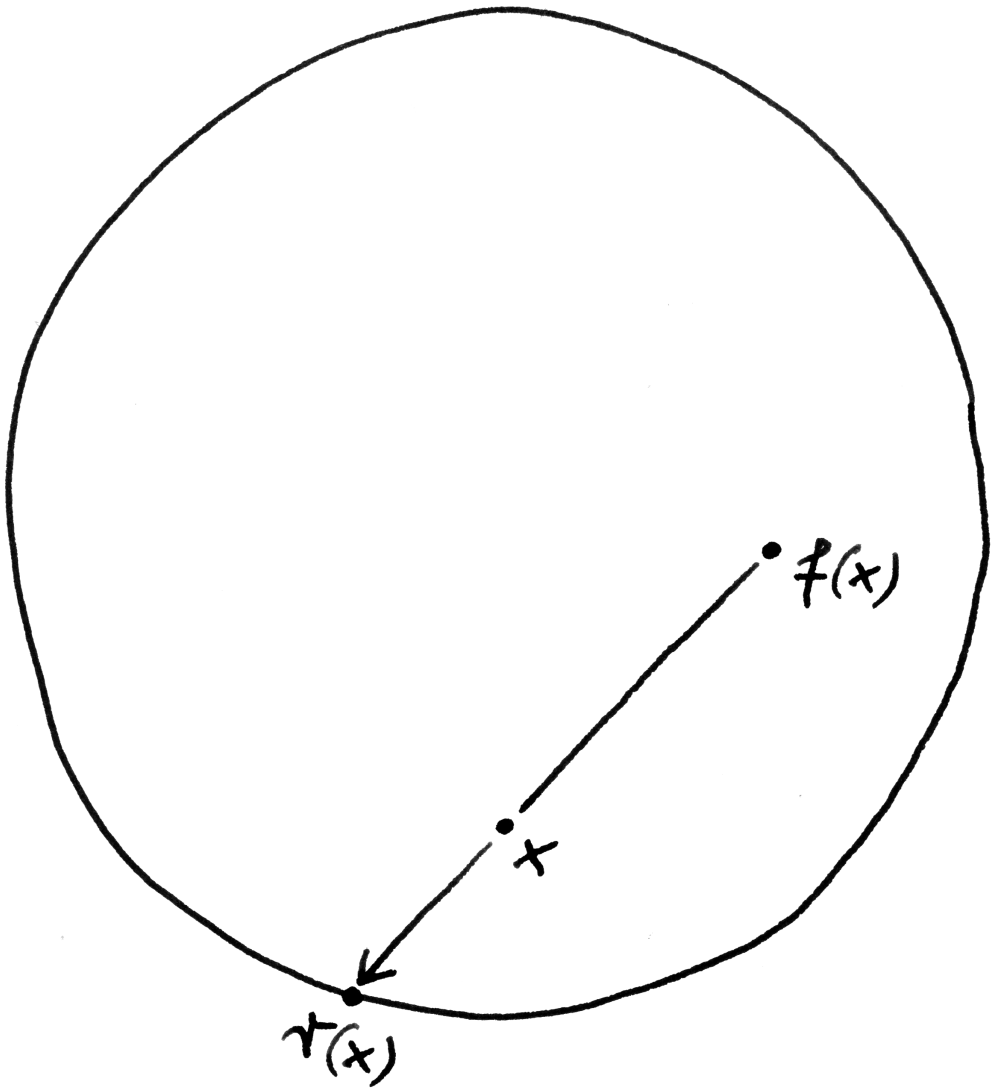
und erhielten nach 16.1.2.26 mit π_1 ein kommutatives Diagramm von Gruppen

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1, 1) \arrow[r, "i_\sharp"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \pi_1(D, 1) \arrow[d, "r_\sharp"] \\ & \pi_1(S^1, 1) \end{tikzcd}$$

Das ist aber unmöglich, da ja gilt $\pi_1(D, 1) \cong 1$ nach 16.1.2.9 und $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ nach 16.1.3.1. □

Satz 16.1.4.3 (Fixpunktsatz von Brouwer für die Kreisscheibe). *Jede stetige Abbildung von der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe in sich selbst hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $f : D \to D$ unsere stetige Selbstabbildung der Einheitskreisscheibe D. Wäre $f : D \to D$ stetig mit $f(x) \neq x$ für alle $x \in D$, so könnten wir eine Abbildung $r : D \to S^1$ der Einheitskreisscheibe auf ihren Rand S^1 definieren durch die Vorschrift, daß sie jedem $x \in D$ denjenigen Punkt $r(x) \in S^1$ zuordnet, „in dem der Strahl, der in $f(x)$ beginnt und durch x läuft, die Kreislinie S^1 trifft“. Offensichtlich wäre r stetig und $r(z) = z$ für alle $z \in S^1$, als da heißt, r wäre eine Rektraktion der Kreisscheibe auf ihren Rand, im Widerspruch zum vorhergehenden Satz 16.1.4.1. □



Die Retraktion r aus dem Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer

Satz 16.1.4.4 (vom Igel). *Es gibt keine stetige Selbstabbbildung der Kugelschale $\kappa : S^2 \to S^2$ derart, daß $\kappa(x)$ senkrecht steht auf x für alle $x \in S^2$.*

16.1.4.5. Man stelle sich vor, die Abbildung κ ordne jedem Punkt x auf der Außenfläche eines kugelförmig zusammengerollten Igels die Richtung $\kappa(x)$ des dort entspringenden Stachels zu. Diese Vorstellung mag auf bei Nachvollziehen des anschließenden Beweises hilfreich sein. Die Bedingung „$\kappa(x)$ steht senkrecht auf x“ bedeutet, daß die Stacheln flach anliegen müssen, und unser Satz sagt, daß sich ein Igel nicht „wirbelfrei kämmen läßt“. Man beachte jedoch, daß sich ein „Igel von der Form eines Rettungsrings“ durchaus wirbelfrei kämmen läßt.

Vorschau 16.1.4.6. Einen eleganteren Beweis einer allgemeineren Aussage werden wir mit singulärer Homologie in 17.4.1.3 geben können.

Beweis. Wir zeigen das durch Widerspruch und nehmen also an, es gäbe so eine Kämmung κ. Bezeichne S^2_+ beziehungsweise S^2_- die nördliche beziehungsweise südliche abgeschlossene Hemisphäre und $S^1 = S^2_+ \cap S^2_-$ den Äquator. Für $p \in S^2_+$ bezeichne R^+_p die Rotation mit Rotationsachse in der Äquatorebene, die p auf den Nordpol $(0,0,1)$ dreht. Dann ist $p \mapsto R^+_p(\kappa(p))$ eine stetige Abbildung $\kappa_+ : S^2_+ \to S^1$. Analog definieren wir $\kappa_- : S^2_- \to S^1$. Offensichtlich gilt für alle p auf dem Äquator $p \in S^1$ die Beziehung

$$\kappa_+(p) = s_p(\kappa_-(p)),$$

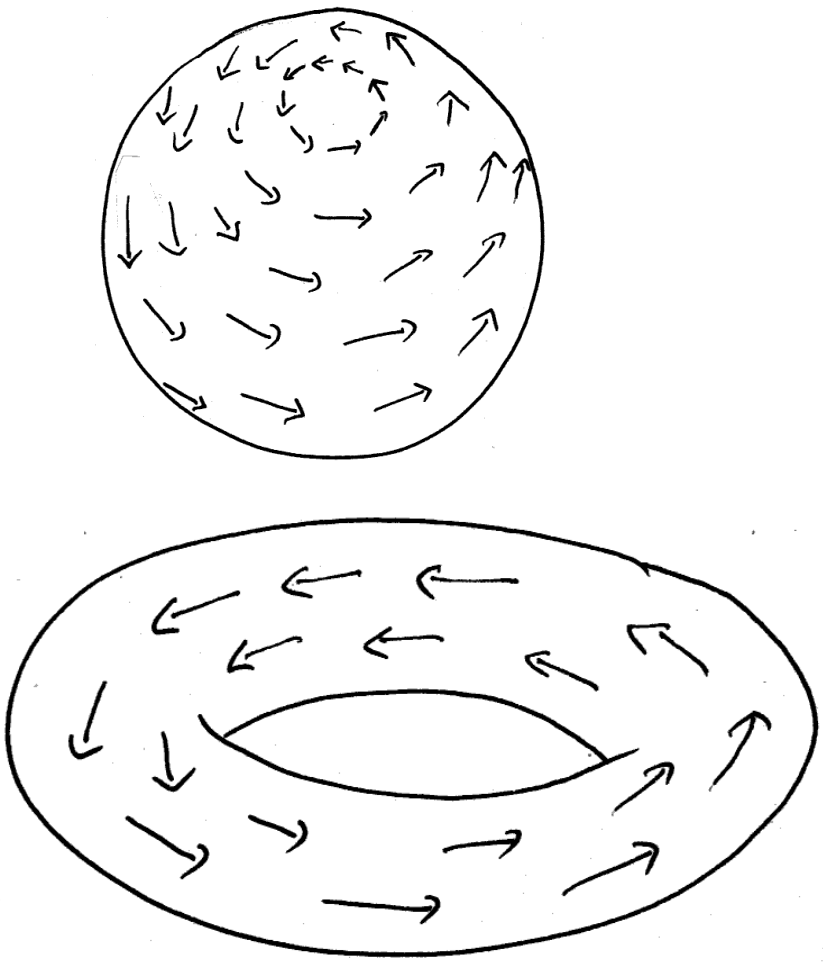
mit $s_p : S^1 \to S^1$ der Spiegelung an der zu p senkrechten Geraden in der Äquatorebene, die also p auf $-p$ abbildet. Fassen wir $S^1 \subset \mathbb{C}$ auf als die komplexen Zahlen der Länge 1, so wird die Abbildung $s : S^1 \times S^1 \to S^1$, $(p,x) \mapsto s_p(x)$ beschrieben durch die Formel $(p,x) \mapsto -p^2x^{-1}$. Wir erhalten also

$$-\kappa_+(p)\kappa_-(p) = p^2 \quad \forall p \in S^1$$

Das ist aber unmöglich, denn $p \mapsto p^2$ induziert auf $\pi_1(S^1,1)$ nach 16.1.3.13 die Multiplikation mit 2, wohingegen die linke Seite auf $\pi_1(S^1,1)$ eine konstante Abbildung liefert: In der Tat läßt sich die stetige Abbildung $S^1 \to S^1$, $p \mapsto -\kappa_+(p)\kappa_-(p)$ ja faktorisieren in

$$S^1 \xrightarrow{\Delta} (S^2_+ \times S^2_-) \xrightarrow{\kappa_+\times\kappa_-} (S^1 \times S^1) \xrightarrow{\text{mult}} S^1 \xrightarrow{(-1)} S^1$$

mit $\Delta(z) = (z,z)$. Die Fundamentalgruppe von $(S^2_+ \times S^2_-)$ ist jedoch trivial, da dieser Raum homöomorph ist zur konvexen Teilmenge $D \times D \subset \mathbb{R}^4$. Dieser Widerspruch beendet den Beweis. $\square$



Satz vom Igel

Wirbelfreie Kämmung eines toroidalen Igels

Übungen

Übung 16.1.4.7 (**Jeder Mensch hat einen Haarwirbel**). Wir gehen dabei davon aus, daß die Haare am Rand des Haarwuchses alle nach unten wachsen. Man zeige: Es gibt keine stetige Abbildung $\kappa : S^2_+ \to S^2$ von der oberen Hemisphäre in die Sphäre, die den Äquator in die untere Hemisphäre abbildet und so, daß $\kappa(x)$ senkrecht steht auf x für alle $x \in S^2_+$.

Übung 16.1.4.8 (**Die Fundamentalgruppe von einem Produkt**). Man zeige: Für zwei bepunktete Räume (X, x) und (Y, y) induzieren die beiden Projektionen pr_1 und pr_2 von $X \times Y$ auf X und Y einen Isomorphismus

$$(\pi_1(\mathrm{pr}_1), \pi_1(\mathrm{pr}_2))^\top : \pi_1(X \times Y, (x, y)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$$

und dessen Inverses wird gegeben durch $(\pi_1(\mathrm{id}_X, y), \pi_1(x, \mathrm{id}_Y))$ mit der Notation (id_X, y) für die Abbildung $X \to X \times Y$ gegeben durch $x \mapsto (x, y)$. Der Rettungsring $S^1 \times S^1$ hat also für jeden Basispunkt die Fundamentalgruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Anschaulich liefert ja auch jeder geschlossene Weg auf dem Rettungsring zwei Umlaufzahlen: „Wie oft der Weg um die Luftkammer läuft“ und „Wie oft er um den hypothetischen Matrosen im Ring läuft“.

16.1.5 Homotopien zwischen stetigen Abbildungen

Definition 16.1.5.1. Seien $f, g : Y \to X$ stetige Abbildungen. Eine **Homotopie von f nach g** ist eine stetige Abbildung

$$H : Y \times [0, 1] \to X$$

derart, daß gilt $H(y, 0) = f(y)$ und $H(y, 1) = g(y)$ für alle $y \in Y$. Man sagt, die Abbildung f sei **homotop zu** g und schreibt $f \simeq g$, wenn es eine Homotopie von f nach g gibt.

16.1.5.2 (**Diskussion der Terminologie**). Dieser Begriff von Homotopie ist für Wege wesentlich verschieden von unserem Begriff aus 16.1.2.6, den wir deshalb genauer die **Homotopie mit festen Randpunkten** genannt haben. Es gibt jedoch eine gemeinsame Verallgemeinerung, bei der man zusätzlich eine Teilmenge $Z \subset Y$ festlegt und fordert, daß $H(z, \tau)$ für $z \in Z$ von τ unabhängig sein soll. Zwei Abbildungen $f, g : Y \to X$, die in dieser Weise homotop sind und die damit auf Z übereinstimmen müssen, heißen **homotop relativ zu** Z. Für $Y = [0, 1]$ und $Z = \{0, 1\}$ erhält man dann unsere Homotopie mit festen Randpunkten als Spezialfall.

Proposition 16.1.5.3. *Gegeben topologische Räume X, Y ist die Relation $\simeq$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathrm{Top}(X, Y)$ aller stetigen Abbildungen von X nach Y.*

Beweis. Wir überlassen den Nachweis der Symmetrie und Reflexivität dem Leser und zeigen nur die Transitivität ($f \simeq g$ und $g \simeq h$) $\Rightarrow f \simeq h$. Gegeben Homotopien F, G von f nach g beziehungsweise von g nach h erhält man eine Homotopie H von f nach h durch

$$H(x,\tau) \quad = \quad \begin{cases} F(x,2\tau) & 0 \le \tau \le 1/2; \\ G(x,2\tau-1) & 1/2 \le \tau \le 1. \end{cases} \qquad \square$$

Definition 16.1.5.4. Die Äquivalenzklasse einer stetigen Abbildung f unter der Äquivalenzrelation der Homotopie bezeichnen wir mit $[f]$ und nennen sie die **Homotopieklasse von** f. Gegeben topologische Räume X, Y verwenden wir die beiden Notationen $\mathrm{hTop}(X,Y) = [X,Y]$ für die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen von X nach Y.

16.1.5.5. Bei dieser Notation ist Vorsicht geboten, denn für Wege α hat nun das Symbol $[\alpha]$ zwei verschiedene Bedeutungen. Im Zweifelsfall ist bei Wegen immer die Homotopieklasse von α unter Homotopie mit festen Randpunkten gemeint.

Beispiel 16.1.5.6. Gegeben $D \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge und Y ein beliebiger topologischer Raum sind je zwei stetige Abbildungen $f, g : Y \to D$ homotop. In der Tat ist $H(y,\tau) = \tau f(y) + (1-\tau)g(y)$ eine Homotopie.

Proposition 16.1.5.7. *Seien $f, g : Y \to X$ stetige homotope Abbildungen, in Formeln $f \simeq g$. So gilt auch $h \circ f \simeq h \circ g$ für jede stetige Abbildung $h : X \to Z$ und $f \circ h \simeq g \circ h$ für jede stetige Abbildung $h : Z \to Y$.*

Beweis. Ist $H : Y \times [0,1] \to X$ eine Homotopie von f nach g, so ist die Abbildung $h \circ H : Y \times [0,1] \to Z$ eine Homotopie von $h \circ f$ nach $h \circ g$ und die Abbildung $H \circ (h \times \mathrm{id}) : Z \times [0,1] \to X$ eine Homotopie von $f \circ h$ nach $g \circ h$. $\square$

16.1.5.8. Da nach Proposition 16.1.5.7 die Homotopieklasse einer Verknüpfung von stetigen Abbildungen nur von den Homotopieklassen der verknüpften Abbildungen abhängt, können wir eine **Verknüpfung von Homotopieklassen** definieren durch die Vorschrift $[f] \circ [g] = [f \circ g]$.

16.1.6 Kategorien und Funktoren

16.1.6.1. An dieser Stelle möchte ich damit beginnen, in die Sprache der Kategorien und Funktoren einzuführen, die auch in 4.7.1.1 in größerer Ausführlichkeit und vor einem anderen Hintergrund besprochen wird.

Definition 16.1.6.2. Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ ist ein Datum bestehend aus:

a. einer Menge von **Objekten** $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$;

b. einer Menge $\mathcal{C}(X,Y)$ von **Morphismen** für je zwei Objekte $X,Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$;

c. einer Abbildung $\mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z),\ (f,g) \mapsto g \circ f$ für je drei Objekte $X,Y,Z \in \mathcal{C}$, genannt die **Verknüpfung** von Morphismen,

derart, daß folgende Axiome erfüllt sind:

1. Die Morphismenmengen sind paarweise disjunkt;

2. Die Verknüpfung ist **assoziativ**, als da heißt, es gilt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ für Morphismen f, g und h, wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind;

3. Für jedes Objekt $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ gibt es einen Morphismus $\mathrm{id}_X \in \mathcal{C}(X,X)$, die **Identität auf** X, so daß gilt $\mathrm{id}_X \circ f = f$ und $g \circ \mathrm{id}_X = g$ für Morphismen f und g wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind. Die üblichen Argumente zeigen, daß es für jedes X höchstens einen derartigen Morphismus geben kann, womit auch die Verwendung des bestimmten Artikels gerechtfertigt wäre.

16.1.6.3. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X,Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ Objekte. Statt $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ sagen wir auch, f sei ein **Morphismus von** X **nach** Y und schreiben kurz

$$f : X \to Y$$

Statt id_X schreiben wir oft nur id. Statt $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ schreiben wir oft kürzer $X \in \mathcal{C}$. Statt $\mathcal{C}(X,X)$ schreibe ich gerne kürzer $\mathcal{C}(X)$ und nenne diese Menge mit ihrer Verknüpfung das **Monoid der Endomorphismen von** X.

Beispiel 16.1.6.4 (**Kategorie der topologischen Räume**). Als erstes Beispiel hätte ich gerne die Kategorie $\mathcal{C} = \mathrm{Top}$ aller topologischen Räume eingeführt, mit topologischen Räumen als Objekten und stetigen Abbildungen als Morphismen. Das ist jedoch nicht ohne weiteres möglich, da die „Gesamtheit aller Mengen“ nach 2.1.3.9 nicht als Menge angesehen werden darf, und da wir von unseren Kategorien stets annehmen, daß ihre Objekte eine Menge bilden sollen. Um diese Untiefen der Logik zu umschiffen, betrachten wir feiner ein Mengensystem alias eine Menge $\mathfrak{U}$ von Mengen und die Kategorie

$$\mathfrak{U}\mathrm{Top}$$

aller topologischen Räume X, die als Menge betrachtet Elemente unseres Mengensystems $\mathfrak{U}$ sind, in Formeln $X \in \mathfrak{U}$. Meist wird das Mengensystem $\mathfrak{U}$ in der Notation dann aber doch weggelassen und nur insgeheim dazugedacht. So wollen wir es im folgenden meist auch halten.

16.1.6.5 (**Morphismen versus Abbildungen**). Das vorhergehende Beispiel ist zwar typisch, aber man lasse sich davon nicht in die Irre führen. Bei einer allgemeinen Kategorie müssen die Objekte a priori keineswegs Mengen mit Zusatzstruktur sein und die Morphismen keineswegs strukturerhaltenden Abbildungen.

16.1.6.6. In vielen Quellen fordert man stattdessen, daß die Objekte einer Kategorie eine „Klasse“ bilden sollen. Mir gefällt die hier gegebene Formulierung besser, da sie im Rahmen der Terminologie der Mengenlehre bleibt. Statt mit „Klassen“ werden wir zu gegebener Zeit mit „Universen“ arbeiten. Das hat den zusätzlichen Vorteil, daß man, wenn es einmal nötig sein sollte und man etwa die Kategorie aller Kategorien betrachten will, noch zu höheren Universen aufsteigen kann. Es hat den Nachteil, beim Aufbau im Rahmen der Mengenlehre, wie er hier jedenfalls im Hintergrund mitgedacht wird, recht starke zusätzliche Axiome der Mengenlehre zu benötigen, die Existenz sogenannter „unerreichbarer Kardinalzahlen“.

Beispiel 16.1.6.7 (**Homotopiekategorie der topologischen Räume**). Wir betrachten die Kategorie hTop aller topologischen Räume mit Homotopieklassen stetiger Abbildungen als Morphismen, also

$$\mathrm{hTop}(X,Y) := \mathrm{Top}(X,Y)/\simeq$$

Die Verknüpfung von Abbildungen kommt dabei von 16.1.5.8 her. Die Axiome einer Kategorie sind offensichtlich erfüllt. Für die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen zwischen zwei Räumen ist auch die Notation $\mathrm{hTop}(X,Y) = [X,Y]$ gebräuchlich.

Beispiel 16.1.6.8 (**Kategorie der Mengen**). Wir betrachten die Kategorie aller Mengen Ens oder genauer die Kategorie

$$\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$$

aller Mengen $X \in \mathfrak{U}$ für ein vorgegebenes Mengensystem $\mathfrak{U}$. Ihre Objekte sind beliebige Mengen $X \in \mathfrak{U}$. Für zwei Mengen $X, Y \in \mathfrak{U}$ ist die Morphismenmenge $\mathrm{Ens}(X,Y)$ die Menge aller Abbildungen von X nach Y. Die Verknüpfung ordnet jedem Paar (f,g) von Abbildungen ihre Komposition $g \circ f$ zu, und $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Ens}(X)$ ist schlicht die identische Abbildung $\mathrm{id}_X(x) = x \ \forall x \in X$.

Beispiel 16.1.6.9 (**Kategorie der Gruppen**). Wir betrachten die Kategorie Grp aller Gruppen mit Gruppenhomomorphismen als Morphismen.

Definition 16.1.6.10. 1. Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ in einer Kategorie heißt ein **Isomorphismus** oder **Iso** und als Adjektiv **iso**, wenn es einen Morphismus $g \in \mathcal{C}(Y,X)$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Wir notieren Isomorphismen oft $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.

2. Zwei Objekte X und Y einer Kategorie heißen **isomorph**, wenn es einen Iso $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ gibt. Man schreibt dann auch kurz $X \cong Y$.

Beispiele 16.1.6.11. Isomorphismen in der Kategorie der Mengen nennt man Bijektionen, Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume Homöomorphismen, Isomorphismen in der Kategorie der Gruppen Isomorphismen von Gruppen. Stetige Abbildungen, die Isomorphismen in der Homotopiekategorie der topologischen Räume repräsentieren, heißen **Homotopieäquivalenzen**. Zwei topologische Räume heißen **homotopieäquivalent**, wenn es eine Homotopieäquivalenz vom einen zum anderen gibt.

16.1.6.12. In der Linearen Algebra erklärt man oft Isomorphismen als „bijektive Homomorphismen". Das ist in meinen Augen didaktisch verwerflich, da es zwar im Fall der Kategorien der Mengen, Gruppen, Vektorräume, Ringe und Körper eine alternative Beschreibung der Isomorphismen im Sinne der Kategorientheorie liefert, aber die korrekte Definition im Fall allgemeiner Kategorien nicht vorspurt, sondern eher verdeckt.

16.1.6.13. Eine stetige Abbildung heißt **nullhomotop**, wenn sie homotop ist zu einer einwertigen Abbildung alias konstanten Abbildung mit nichtleerem Bild, wenn sie also in der Homotopiekategorie über den einpunktigen Raum faktorisiert. Ein Raum X heißt **zusammenziehbar**, wenn er homotopieäquivalent ist zu einem Punkt. Das ist gleichbedeutend dazu, daß die Identität auf X nullhomotop ist.

16.1.6.14. Ausgeschrieben ist ein topologischer Raum X also zusammenziehbar genau dann, wenn es einen Punkt $x_0 \in X$ und eine stetige Abbildung $H : X \times [0,1] \to X$ gibt mit $H(x,0) = x_0$ und $H(x,1) = x$ für alle $x \in X$. Zum Beispiel ist jede konvexe Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ zusammenziehbar.

16.1.6.15. Eine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist, heißt ein **Gruppoid**. Man erklärt zu jedem topologischen Raum X das **fundamentale Gruppoid** $\mathcal{W} = \mathcal{W}_X = \mathcal{W}(X)$. Seine Objekte sind die Punkte von X, in Formeln $\mathrm{Ob}(\mathcal{W}) = X$, und die Morphismenmenge $\mathcal{W}(x,y)$ besteht aus allen Homotopieklassen von Wegen mit Anfangspunkt x und Endpunkt y, in Formeln

$$\mathcal{W}(x,y) := \pi_1(X,x,y)$$

Die Verknüpfung von Morphismen ist das Aneinanderhängen von Wegen. Man benutzt Lemma 16.1.2.19, um die Axiome einer Kategorie zu prüfen. Unsere Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x)$ ist damit genau das Monoid der Endomorphismen des Punktes x im fundamentalen Gruppoid, in Formeln $\pi_1(X,x) = \mathcal{W}_X(x)$.

Definition 16.1.6.16. Ein **Funktor** $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von einer Kategorie $\mathcal{A}$ in eine Kategorie $\mathcal{B}$ ist ein Datum bestehend aus:

a. einer Abbildung $F : \operatorname{Ob}\mathcal{A} \to \operatorname{Ob}\mathcal{B}$, $X \mapsto FX$;

b. einer Abbildung $F : \mathcal{A}(X,Y) \to \mathcal{B}(FX,FY)$, $f \mapsto Ff$ für je zwei Objekte $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$,

derart, daß gilt:

1. $F(f \circ g) = (Ff) \circ (Fg)$ für beliebige verknüpfbare Morphismen f und g aus der Kategorie $\mathcal{A}$;

2. $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{FX}$ für jedes Objekt $X \in \mathcal{A}$.

Ich nenne in diesem Zusammenhang $\mathcal{A}$ die **Ausgangskategorie** und $\mathcal{B}$ die **Zielkategorie** des Funktors F.

16.1.6.17. Man gibt bei einem Funktor F meist nur die Abbildung $X \mapsto FX$ auf den Objekten an in der Hoffnung, daß dadurch vom Leser erraten werden kann, welche Abbildung $f \mapsto Ff$ auf den Morphismen gemeint ist.

Beispiel 16.1.6.18 (**Die Fundamentalgruppe als Funktor**). Man betrachte die Kategorie Top^* der bepunkteten topologischen Räume alias topologischen Räume mit einem ausgezeichnetem Punkt, dem **Basispunkt**. Morphismen sind stetige Abbildungen, die den ausgezeichnetem Punkt in den ausgezeichnetem Punkt überführen. Das Bilden der Fundamentalgruppe ist dann ein Funktor

$$\pi_1 : \mathrm{Top}^* \to \mathrm{Grp}$$

Jedem bepunkteten Raum $(X,x) \in \mathrm{Top}^*$ wird eine Gruppe $\pi_1(X,x) \in \mathrm{Grp}$ zugeordnet und jeder stetigen basispunkterhaltenden Abbildung $f : (X,x) \to (Y,y)$ ein Gruppenhomomorphismus $f_\sharp = \pi_1(f) : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$. Daß diese Daten die Eigenschaften eines Funktors haben, steht in 16.1.2.26. Jetzt haben wir allerdings den Ärger, daß für ein beliebig vorgegebenes Mengensystem $\mathfrak{U}$ die Fundamentalgruppe keineswegs einen Funktor $\pi_1 : \mathfrak{U}\mathrm{Top}^* \to \mathfrak{U}\mathrm{Grp}$ zu induzieren braucht. Diesem Ärger kann man jedoch entgehen, indem man annimmt, daß das zugrundeliegende Mengensystem ein „Universum“ im Sinne von 4.7.11.3 sein soll, vergleiche auch 4.7.11.6. Im weiteren will ich diese Feinheiten schlicht ignorieren.

Beispiel 16.1.6.19 (**Vorschub als Funktor der fundamentalen Gruppoide**). Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ liefert einen Funktor zwischen den zugehörigen fundamentalen Gruppoiden $f_\sharp : \mathcal{W}(X) \to \mathcal{W}(Y)$, der ein Objekt $x \in X$ auf das Objekt $f(x) \in Y$ abbildet und einen Morphismus $[\gamma]$ auf den Morphismus $[f \circ \gamma]$.

Beispiel 16.1.6.20 (**Wegzusammenhangskomponenten als Funktor**). Das Bilden der Menge der Wegzusammenhangskomponenten eines topologischen Raums

ist ein Funktor $\pi_0 : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ens}$. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist dabei $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ zu verstehen als die Abbildung, die jeder Wegzusammenhangskomponente $Z \in \pi_0(X)$ von X diejenige Wegzusammenhangskomponente $W \in \pi_0(Y)$ von Y zuordnet, für die gilt $f(Z) \subset W$.

Vorschau 16.1.6.21. Man mag die **Homotopiekategorie bepunkteter Räume** betrachten mit bepunkteten Räumen als Objekten und Homotopieklassen für basispunkterhaltende Homotopie alias Homotopie relativ zum Basispunkt im Sinne von 16.1.5.2 als Morphismen. Wir notieren sie hTop^*. So wird die Fundamentalgruppe, aufgefaßt als Funktor $\pi_1 : \mathrm{hTop}^* \to \mathrm{Ens}$, dargestellt im Sinne von 4.7.10.7 durch die bepunktete Kreislinie. Die bepunktete Kreislinie kann im Übrigen versehen werden mit der Struktur eines „Gruppenobjekts“ in $(\mathrm{hTop}^*)^{\mathrm{opp}}$ im Sinne von 9.1.2.1. Das liefert in diesem Kontext die Gruppenstruktur auf $\pi_1(X, x)$.

Übungen

Übung 16.1.6.22. Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ in einer Kategorie ist ein Isomorphismus genau dann, wenn es Morphismen $g, h \in \mathcal{C}(Y, X)$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $h \circ f = \mathrm{id}_X$, und unter diesen Voraussetzungen gilt bereits $g = h$. Wir nennen diesen Morphismus dann den **inversen Morphismus zu** f und notieren ihn f^{-1}.

Übung 16.1.6.23. Gegeben Morphismen $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ und $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ in einer Kategorie derart, daß $f \circ g$ und $g \circ f$ Isomorphismen sind, müssen f und g bereits selbst Isomorphismen sein.

Übung 16.1.6.24. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $f : X \to Y$ ein Morphismus. Man zeige, daß f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn das Vorschalten von f für jedes weitere Objekt Z eine Bijektion $\mathcal{C}(Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, Z)$ induziert. Man zeige dual, daß f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn das Nachsschalten von f für jedes weitere Objekt Z eine Bijektion $\mathcal{C}(Z, X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Z, Y)$ induziert. Genauere Aussagen in dieser Richtung macht das sogenannte Yoneda-Lemma 4.7.10.2.

Übung 16.1.6.25. Man zeige, daß eine stetige Abbildung $S^n \to X$ von einer Sphäre in einen topologischen Raum X genau dann nullhomotop ist, wenn sie sich stetig auf das Innere der Sphäre fortsetzen läßt.

Übung 16.1.6.26. Man zeige, daß eine stetige Abbildung $f : S^1 \to \mathbb{C}^\times$ genau dann eine Homotopieäquivalenz ist, wenn sie einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen $\pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{C}^\times, f(1))$ induziert.

Übung 16.1.6.27. Ist Y beliebig und X zusammenziehbar, so sind je zwei Abbildungen $f, g : Y \to X$ homotop. Ist zusätzlich Y wegzusammenhängend, so sind auch je zwei Abbildungen $X \to Y$ homotop.

Übung 16.1.6.28. Jeder zusammenziehbare Raum ist wegzusammenhängend.

Übung 16.1.6.29. Die Einbettung $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$ ist eine Homotopieäquivalenz. Allgemeiner zeige man, daß für jeden Punkt $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ und jedes $r \geq 0$ mit $r + \|y\| < 1$ die Einbettung $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}\backslash \mathrm{A}(y;r)$ eine Homotopieäquivalenz ist, für $\mathrm{A}(y;r) = \{x \mid \|x-y\| \leq r\}$ der abgeschlossene Ball. Ebenso zeige man, daß für jeden Punkt $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ und jedes $r > 0$ mit $r + \|y\| \leq 1$ die Einbettung $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}\backslash \mathrm{B}(y;r)$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Übung 16.1.6.30 (**Funktoren erhalten Isomorphie**). Ein Funktor bildet stets Isomorphismen auf Isomorphismen ab. Insbesondere haben isomorphe Objekte unter einem Funktor stets isomorphe Bilder.

Übung 16.1.6.31. Homotope Abbildungen $f, g : X \to Y$ induzieren dieselben Abbildungen auf der Menge der Wegzusammenhangskomponenten, in Formeln $f \cong g \Rightarrow \pi_0(f) = \pi_0(g) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$. Das Bilden der Menge der Wegzusammenhangskomponenten liefert mithin sogar einen Funktor

$$\pi_0 : \mathrm{hTop} \to \mathrm{Ens}$$

16.1.7 Homotopie und Fundamentalgruppe

16.1.7.1. Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen Fundamentalgruppe und Homotopie. Zunächst interessieren wir uns dafür, wie die Fundamentalgruppe vom Basispunkt abhängt. Falls es keinen Weg von x nach y gibt, haben $\pi_1(X,x)$ und $\pi_1(X,y)$ nichts miteinander zu tun. Gibt es aber einen Weg, so erhalten wir isomorphe Gruppen. Genauer gilt:

Satz 16.1.7.2 (**Wechsel des Basispunkts**). *Gegeben Punkte x, y eines topologischen Raums X liefert jeder stetige Weg γ von x nach y einen Isomorphismus*

$$\begin{array}{rccc} i_\gamma : & \pi_1(X,x) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(X,y) \\ & [\alpha] & \mapsto & [\gamma * \alpha * \bar{\gamma}] \end{array}$$

16.1.7.3. Hier und im folgenden kürzen wir $\alpha * (\beta * \gamma)$ mit $\alpha * \beta * \gamma$ ab, für verknüpfbare Wege α, β und γ. Wann immer wir diese Notation verwenden, wird es eh nicht auf die Klammern ankommen, da wir Wege nur bis auf Homotopie betrachten.

Beweis. $\alpha \simeq \alpha' \Rightarrow \gamma * \alpha * \bar{\gamma} \simeq \gamma * \alpha' * \bar{\gamma}$ nach Lemma 16.1.2.19, also ist i_γ wohldefiniert. Wegen $\bar{\gamma} * \gamma \simeq \varepsilon_x$ und $\gamma * \bar{\gamma} \simeq \varepsilon_y$ ist $i_{\bar{\gamma}}$ invers zu i_γ und insbesondere i_γ eine Bijektion. Um zu prüfen, daß i_γ auch ein Gruppenhomomorphismus ist, rechnen wir

$$\begin{array}{rcl} i_\gamma([\alpha] * [\beta]) & = & [\gamma * (\alpha * \beta) * \bar{\gamma}] \\ i_\gamma([\alpha]) * i_\gamma([\beta]) & = & [(\gamma * \alpha * \bar{\gamma}) * (\gamma * \beta * \bar{\gamma})] \end{array}$$

und sehen, daß auf der rechten Seite in der oberen und unteren Zeile dieselbe Homotopieklasse steht. □

Alternativer Beweis in der Sprache der Kategorien. Ist $\gamma : A \xrightarrow{\sim} B$ ein Isomorphismus zwischen zwei Objekten einer Kategorie $\mathcal{C}$, so erhalten wir offensichtlich einen Isomorphismus zwischen den Monoiden der Endomorphismen unserer beiden Objekte

$$i_\gamma : \mathcal{C}(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(B)$$

durch die Vorschrift $i_\gamma : \alpha \mapsto \gamma\alpha\gamma^{-1}$. Unser Satz 16.1.7.2 und sein Beweis spezialisieren diese Erkenntnis auf den Fall des fundamentalen Gruppoids eines topologischen Raums. □

Satz 16.1.7.4 (Homotopie und Fundamentalgruppe). *Seien stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ gegeben und sei H eine Homotopie von f nach g. Sei $x \in X$ ein fest gewählter Basispunkt und bezeichne γ den Weg $\gamma(t) = H(x,t)$ von $f(x)$ nach $g(x)$. So gilt $g_\sharp = i_\gamma \circ f_\sharp$, als da heißt, es kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x) & \xrightarrow{f_\sharp} & \pi_1(Y,f(x)) \\ \| & & \wr\downarrow i_\gamma \\ \pi_1(X,x) & \xrightarrow{g_\sharp} & \pi_1(Y,g(x)) \end{array}$$

Vorschau 16.1.7.5. Eine noch etwas allgemeinere und natürlichere Aussage dürfen Sie als Übung 21.6.4.6 selbst zeigen: Jede Homotopie $H : f \cong g$ induziert eine „Isotransformation“ $H_\sharp : f_\sharp \overset{\sim}{\Rightarrow} g_\sharp$ zwischen den auf den fundamentalen Gruppoiden induzierten Funktoren.

Beweis. Es gilt zu zeigen $\bar\gamma * (g \circ \alpha) * \gamma \simeq (f \circ \alpha)$ für alle $\alpha \in \Omega(X,x)$. Es reicht dazu, eine Homotopie $\bar\gamma * (g \circ \alpha) * \gamma \simeq \varepsilon * (f \circ \alpha) * \varepsilon$ anzugeben. Zunächst ist $H \circ \alpha : [0,1]^2 \to Y$ auf der unteren Kante $f \circ \alpha$, auf der oberen Kante $g \circ \alpha$ und auf der linken und rechten Kante γ. Weiter ist $[0,1]^2 \to Y$ gegeben durch $(t,\tau) \mapsto \gamma(t\tau)$ auf der oberen und auf der rechten Kante γ, auf der unteren und linken Kante dahingegen konstant $f(x)$. Schließlich ist $[0,1]^2 \to Y$ gegeben durch $(t,\tau) \mapsto \gamma((1-t)\tau)$ auf der der rechten Kante γ, auf der oberen Kante $\bar\gamma$ und auf der unteren und linken Kante konstant $f(x)$. Setzen wir unsere drei Quadrate richtig nebeneinander, so verkleben unsere Abbildungen längs der senkrechten Kanten zu einer stetigen Abbildung $[0,3] \times [0,1] \to Y$ und Umparametrisieren in x-Richtung liefert die gesuchte Homotopie. Unsere Zwischenwege bestehen anschaulich darin, daß wir erst γ ein Stück weit gehen, dann das mit der Homotopie deformierte $f \circ \alpha$ herumgehen und anschließend wieder mit γ zurückgehen. □

Korollar 16.1.7.6 (Fundamentalgruppen homotopieäquivalenter Räume). *Jede Homotopieäquivalenz induziert Isomorphismen auf den Fundamentalgruppen.*

Jede nullhomotope Abbildung induziert die konstante Abbildung auf den Fundamentalgruppen. Die Fundamentalgruppe eines zusammenziehbaren Raums ist trivial.

Beweis. Jede stetige Abbildung $f : X \to X$, die homotop ist zur Identität, induziert die Identität auf der Menge der Wegzusammenhangskomponenten. Das folgt formal aus Übung 16.1.6.31 und ist auch so klar. Sie induziert auch Isomorphismen $f_\sharp : \pi_1(X,x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X,f(x))$ nach unserem Satz 16.1.7.4 über Homotopie und Fundamentalgruppe. Ist $u : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, so gibt es per definitionem eine Abbildung $v : Y \to X$ mit $u \circ v \simeq \mathrm{id}$ und $v \circ u \simeq \mathrm{id}$. Also liefern $(u \circ v)_\sharp = u_\sharp \circ v_\sharp$ und $(v \circ u)_\sharp = v_\sharp \circ u_\sharp$ Isomorphismen $\pi_1(X,x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X,v(u(x)))$ und $\pi_1(Y,y) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y,u(v(y)))$. Daraus folgt aber sofort, daß $v_\sharp : \pi_1(Y,u(x)) \to \pi_1(X,v(u(x)))$ für alle $x \in X$ injektiv und surjektiv, mithin ein Isomorphismus sein muß. Ist $y \in Y$ beliebig, so gibt es nach 16.1.6.31 einen Punkt $x \in X$ und einen Weg γ von y nach $u(x)$ und da offensichtlich gilt $v_\sharp \circ i_\gamma = i_{v\circ\gamma} \circ v_\sharp : \pi_1(Y,y) \to \pi_1(X,v(u(x)))$ muß schließlich $v_\sharp : \pi_1(Y,y) \to \pi_1(X,v(y))$ für alle $y \in Y$ ein Isomorphismus sein. Die anderen Aussagen des Korollars sind offensichtlich. □

Beispiel 16.1.7.7 (**Fundamentalgruppe der punktierten Ebene**). Wir können nun ein weiteres Mal beweisen, daß die Fundamentalgruppe des Komplements eines Punktes in der Ebene zu $\mathbb{Z}$ isomorph ist: Die Einbettung $S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ ist nämlich nach Übung 16.1.6.29 eine Homotopieäquivalenz und induziert folglich einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen. In derselben Weise folgt, daß für $x \neq z$ zwei Punkte der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ der Weg $t \mapsto z + x\exp(2\pi \mathrm{i} t)$ einen Erzeuger von $\pi_1(\mathbb{C}\backslash z, x)$ repräsentiert.

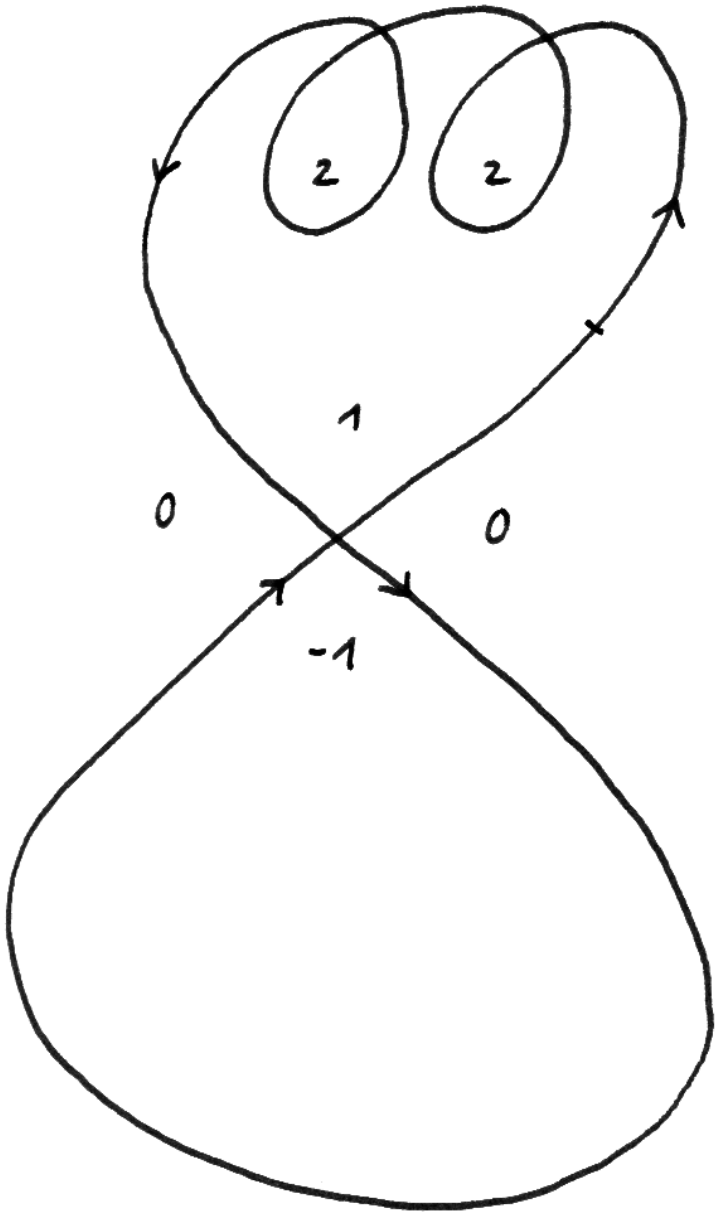
16.1.7.8. Gegeben $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg in der komplexen Zahlenebene und $z \in \mathbb{C}\backslash\gamma([0,1])$ ein Punkt, der nicht auf besagtem Weg liegt, erklären wir die **Umlaufzahl**

$$\mathrm{Um}(\gamma, z)$$

von unserem Weg γ um unseren Punkt z als diejenige ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, für die γ als Weg in $\mathbb{C}\backslash z$ homotop ist zum Weg $t \mapsto z + (\gamma(0) - z)\exp(2\pi \mathrm{i} n t)$. Nach dem vorhergehenden gibt es stets genau eine solche Zahl.

Proposition 16.1.7.9 (Stetigkeit der Umlaufzahl). *Gegeben ein geschlossener Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene liefert die Umlaufzahl eine stetige Abbildung $\mathbb{C}\backslash\gamma([0,1]) \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto \mathrm{Um}(\gamma, z)$, die auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\backslash\gamma([0,1])$ verschwindet.*

Beweis. Gegeben eine offene Kreischeibe von endlichem Radius $D \Subset \mathbb{C}$ und $z \in D$ ist $\mathbb{C}\backslash D \hookrightarrow \mathbb{C}\backslash z$ eine Homotopieäquivalenz und induziert folglich einen



In jede Zusammenhangskomponente aus dem Komplement des hier gezeichneten Weges habe ich hier die Umlaufzahl des besagten Weges um einen und jeden Punkt aus besagter Zusammenhangskomponente geschrieben.

Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen. Trifft unser geschlossener Weg γ die Kreisscheibe D nicht und ist zusätzlich der Durchmesser von D kleiner als der Abstand von D zu $\gamma(0)$, so kann die Umlaufzahl $\mathrm{Um}(\gamma, z)$ mithin beschrieben werden als diejenige ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, für die γ als Weg in $\mathbb{C}\backslash D$ homotop ist zum Weg $t \mapsto z + (\gamma(0) - z)\exp(2\pi \mathrm{i} n t)$. Alle diese Wege für verschiedene $z \in D$ sind jedoch offensichtlich zueinander homotop in $\mathbb{C}\backslash D$. Das zeigt, daß die Umlaufzahl von γ um alle Punkte von D dieselbe sein muß. Liegt schließlich z außerhalb einer Kreisscheibe K, die das Bild unseres Weges umfaßt, so ist unser Weg in K und erst recht in $\mathbb{C}\backslash z$ zusammenziehbar und muß um z die Umlaufzahl Null haben. □

Satz* 16.1.7.10 (Umlaufzahlen kreuzungsfreier Wege in der Ebene). *Ein geschlossener Weg in der punktierten Ebene $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$, der in der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$ weder das neutrale Element noch einen Erzeuger repräsentiert, kann nicht auf $(0,1]$ injektiv sein.*

16.1.7.11. Einen alternativen Beweis, der auch höherdimensionale Analoga unserer Aussage zeigt, geben wir in 19.4.10.26.

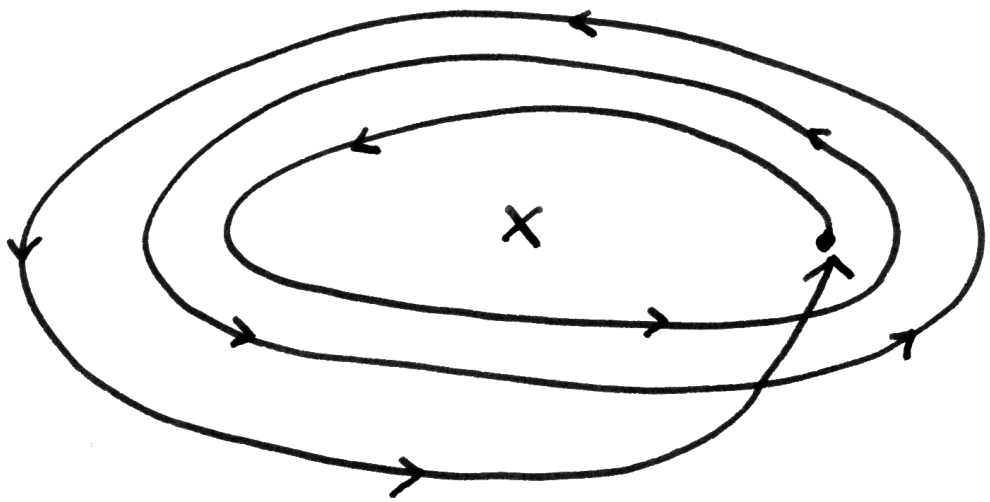
Beweis. Repräsentiert ein Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ das n-fache eines Erzeugers der Fundamentalgruppe und gilt $n \neq 0$, so können wir nach 16.1.3.10 einen Lift $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}$ finden alias eine stetige Abbildung mit $\mathrm{Exp} \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, und dann ist $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ mit $\alpha(t) = \mathrm{Exp} \circ \tilde{\gamma}(t/n)$ ein geschlossener Weg mit $\gamma(t) = \alpha(t)^n$ für alle t. Induzierte nun γ eine Einbettung $\hat{\gamma} : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$, so hätte die von α induzierte Abbildung $\hat{\alpha} : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ die Eigenschaft $z \neq w \Rightarrow \hat{\alpha}(z) \neq \zeta\hat{\alpha}(w)$ für jede n-te Einheitswurzel $\zeta \neq 1$. Wir erhielten mithin für jede n-te Einheitswurzel $\zeta \neq 1$ eine stetige Abbildung

$$\varphi = \varphi_\zeta : S^1 \times S^1 \to \mathbb{C}^\times$$

durch die Vorschrift $\varphi(z,w) = \hat{\alpha}(z) - \zeta\hat{\alpha}(w)$. Nun betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[dr, "{(\mathrm{id},1)}"] & & \\
S^1 \arrow[r, "{(\mathrm{id},\mathrm{id})}"] & S^1 \times S^1 \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{C}^\times \\
S^1 \arrow[ur, "{(1,\mathrm{id})}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ich behaupte, daß darin alle drei Kompositionen Homotopieäquivalenzen sind alias, nach Übung 16.1.6.26 gleichbedeutend, daß sie Isomorphismen auf den Fundamentalgruppen induzieren. Zunächst induziert nach Konstruktion $\hat{\alpha} : S^1 \to \mathbb{C}^\times$



Ein geschlossener Weg in der punktierten Ebene mit Umlaufzahl Drei um den als Kreuz eingezeichneten Punkt, der „so injektiv ist wie irgend möglich“.

einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen und ist also eine Homotopieäquivalenz. Dasselbe gilt für die mittlere Komposition $z \mapsto (1-\zeta)\hat{\alpha}(z)$, denn sie ist zu $\hat{\alpha}$ homotop. Die obere Komposition hinwiederum ist homotop zu $z \mapsto \hat{\alpha}(z) - \zeta\hat{\alpha}(w)$ für alle $w \in S^1$. Wählen wir w_0 mit $|\hat{\alpha}(w_0)|$ kleinstmöglich, so liegt $\zeta\hat{\alpha}(w_0)$ in derselben Komponente von $\mathbb{C}\backslash\hat{\alpha}(S^1)$ wie der Ursprung. Aus der Stetigkeit der Umlaufzahl 16.1.7.9 folgt $\mathrm{Um}(\alpha, \zeta\hat{\alpha}(w_0)) = \mathrm{Um}(\alpha, 0) = 1$ und damit ist $z \mapsto \hat{\alpha}(z) - \zeta\hat{\alpha}(w)$ eine Homotopieäquivalenz erst für $w = w_0$ und dann für alle w, insbesondere auch für $w = 1$. Für die untere Komposition argumentiert man genauso, also haben wir in der Tat drei Homotopieäquivalenzen vor uns. Das aber widerspricht der Tatsache, daß nach 16.1.4.8 für $c \in \pi_1(S^1, 1)$ gilt

$$(\mathrm{id}, 1)_\sharp c + (1, \mathrm{id})_\sharp c = (\mathrm{id}, \mathrm{id})_\sharp c$$

und damit $\varphi_\sharp(\mathrm{id}, 1)_\sharp c + \varphi_\sharp(1, \mathrm{id})_\sharp c = \varphi_\sharp(\mathrm{id}, \mathrm{id})_\sharp c$ in $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$ im Widerspruch dazu, daß für jeden Erzeuger c von $\pi_1(S^1, 1)$ alle diese drei Elemente nach dem bereits Bewiesenen Erzeuger von $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$ sein müssen. □

Proposition* 16.1.7.12 (Schleifenfüllende Komplemente). *Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $W \subset V$ ein Teilraum der Kodimension zwei. So ist für $I \subsetneq W$ eine echte Teilmenge das Komplement $V\backslash I$ schleifenfüllend, für alle Punkte $*$ unseres Komplements gilt also in Formeln*

$$\pi_1(V\backslash I, *) = 1$$

Beweis. Den Fall $I \not\subset W$ haben Sie bereits in 16.1.2.28 behandelt. Um das im allgemeinen zu sehen, dürfen wir $V = \mathbb{C} \times Y$ annehmen mit einem endlichdimensionalen Vektorraum Y und $W = 0 \times Y$. Es gilt für irgendeinen Basispunkt $*$ zu zeigen, daß gilt $\pi_1(V\backslash I, *) = 1$, etwa für den Basispunkt $* := (1, 0)$. Es reicht zu zeigen, daß jeder geschlossene Weg von $*$ nach $*$ homotop ist in $V\backslash W$, denn die Abbildung $\pi_1(V\backslash W, *) \to \pi_1(V\backslash I, *)$ ist sicher konstant. Es reicht also zu zeigen, daß jeder Weg $\gamma \in \Omega(V\backslash I, *)$, der W trifft, homotop ist zum konstanten Weg. Wir schreiben dazu $\gamma(t) = (z(t), y(t))$. Auf $U := \{t \in [0,1] \mid z(t) \neq 0\}$ können wir dann $\varphi : U \to S^1$ erklären durch $\varphi(t) = z(t)/|z(t)|$. Nun gilt $U \Subset [0,1]$ und $0, 1 \in U$, aber nach Annahme $U \neq [0,1]$. Mithin existiert ein stetiger Lift $\tilde{\varphi} : U \to \mathrm{i}\mathbb{R}$ mit $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}(1) = 0$ und $\varphi(t) = \exp(\tilde{\varphi}(t))$ für alle $t \in U$. Es gilt also $z(t) = \exp(\tilde{\varphi}(t))|z(t)|$ für alle $t \in U$. Jetzt erklären wir $h : [0,1]^2 \to V\backslash I$ durch die Vorschrift

$$h(t, \tau) = \begin{cases} (\exp(\tilde{\varphi}(\tau t))|z(t)|, y(t)) & \text{falls } t \in U, \\ (0, y(t)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist sicher stetig an allen Stellen (t, τ) mit $t \in U$. An Stellen (t, τ) mit $t \notin U$ kann man die Stetigkeit aber auch zeigen, da in einer Umgebung

von $t \notin U$ unser $|z(t)|$ sehr klein sein muß. Damit ist $h(t,\tau)$ eine Homotopie in $V \backslash I$ zwischen unserem Weg γ und dem Weg $t \mapsto (|z(t)|, y(t))$, der seinerseits offensichtlich in $V \backslash I$ zusammenziehbar ist. $\square$

Übungen

Ergänzende Übung 16.1.7.13. Feiner liefert der Beweis von 16.1.7.10 bei Betrachtung aller n-ten Einheitwurzeln $\zeta \neq 1$, daß der in gewisser Weise die Zahl der Selbstüberkreuzungen messende Ausdruck $\sum_{p \in \gamma[0,1]} (|\gamma^{-1}(p)| - 1)$ mindestens so groß sein muß wie der Betrag der Umlaufzahl. Das mag der Leser zur Übung ausarbeiten.

Übung 16.1.7.14. Für die Basispunktwechselisomorphismen i_γ aus 16.1.7.2 zeige man: Homotope Wege liefern denselben Isomorphismus, in Formeln $\gamma \simeq \delta \Rightarrow i_\gamma = i_\delta$. Außerdem gilt $i_{\gamma * \delta} = i_\gamma \circ i_\delta$ für verknüpfbare Wege γ, δ, für γ ein Weg von x zu sich selbst ist $i_\gamma = \operatorname{int} \gamma$ die Konjugation mit γ, und für den konstanten Weg $\varepsilon = \varepsilon_x$ ist speziell i_ε die Identität auf $\pi_1(X, x)$.

Übung 16.1.7.15 (**Fundamentalgruppe und freie Homotopie**). Gegeben ein bepunkteter wegzusammenhängender Raum (X, x) zeige man, daß die Abbildung $\Omega(X, x) \to \mathrm{hTop}(S^1, X)$, die jedem geschlossenen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ die Homotopieklasse der induzierten Abbildung $\tilde{\gamma} : S^1 \to X$ zuordnet, eine Bijektion zwischen der Menge der Konjugationsklassen in $\pi_1(X, x)$ und $\mathrm{hTop}(S^1, X)$ induziert.

Übung 16.1.7.16 (**Fundamentalsatz der Algebra**). Man zeige den Fundamentalsatz der Algebra mit den hier entwickelten Methoden. Man zeige also in anderen Worten, daß jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten eine Nullstelle hat. Hinweis: Hat unsere Polynomfunktion $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ keine Nullstelle, so sind die Abbildungen $P_\tau : S^1 \to \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto P(\tau z)$ alle homotop zur konstanten Abbildung P_0.

Übung 16.1.7.17. Man zeige, daß die Fundamentalgruppe des Komplements einer Gerade im $\mathbb{R}^3$ isomorph ist zu $\mathbb{Z}$. Man zeige, daß die Fundamentalgruppe des Raums, der entsteht, wenn man aus dem $\mathbb{R}^3$ die z-Achse sowie den Einheitskreis in der xy-Ebene herausnimmt, isomorph ist zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Hinweis: 16.1.4.8. Eventuell benötigte Homotopien sollen anschaulich plausibel gemacht werden, eine formelhafte Ausarbeitung ist nicht gefordert.

16.1.8 Abelisierte Fundamentalgruppe*

Definition 16.1.8.1. Gegeben eine Gruppe G definiert man ihren **maximalen kommutativen Quotienten**, auch genannt ihre **Abelisierung**, als den Quotien-

ten

$$G^{\mathrm{ab}} := G/(G,G)$$

nach dem Normalteiler $(G,G) \subset G$, der von allen **Kommutatoren** $ghg^{-1}h^{-1}$ mit $g,h \in G$ erzeugt wird. Die Untergruppe (G,G) heißt im übrigen die **derivierte Gruppe** von G.

16.1.8.2 (**Diskussion der Notation**). Die Notation (G,G) geht zurück auf die in der Gruppentheorie übliche Notation $ghg^{-1}h^{-1} =: (g,h)$ für den Kommutator. Im Sinne unserer allgemeinen Konvention 2.2.1.3 sollte natürlich (G,G) eigentlich nur die Menge aller Kommutatoren aus G bezeichnen und der davon erzeugte Normalteiler sollte $\langle\langle (G,G) \rangle\rangle$ notiert werden. Da aber letzteres Konzept soviel häufiger vorkommt, ist es üblich, hier eine Ausnahme zu machen und mit (G,G) kurzerhand den von den Kommutatoren erzeugten Normalteiler zu bezeichnen, der nebenbei bemerkt mit der von den Kommutatoren erzeugten Untergruppe übereinstimmt.

Lemma 16.1.8.3 (**Universelle Eigenschaft der Abelisierung**). *Für jede Gruppe G ist ihre Abelisierung G^{ab} eine abelsche Gruppe, und jeder Morphismus von G in eine abelsche Gruppe faktorisiert über G^{ab}. In Formeln liefert also für jede abelsche Gruppe A das Verknüpfen mit der Projektion $G \twoheadrightarrow G^{\mathrm{ab}}$ eine Bijektion*

$$\mathrm{Grp}(G^{\mathrm{ab}}, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Grp}(G, A)$$

Beweis. Dem Leser überlassen. □

16.1.8.4. Ist X ein wegzusammenhängender Raum und sind $x, y \in X$ Punkte, so liefern nach 16.1.7.2 je zwei Wege γ von x nach y denselben Isomorphismus $i_\gamma : \pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \pi_1(X,y)^{\mathrm{ab}}$, den wir dann auch i_{yx} nennen dürfen, und für je drei Punkte x, y, z gilt $i_{zx} = i_{zy} i_{yx}$. Folglich können wir für jeden wegzusammenhängenden Raum X die **basispunktfreie abelisierte Fundamentalgruppe** erklären als die Untergruppe

$$\pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \subset \prod_{x \in X} \pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}}$$

aller Tupel $(\alpha_x)_{x \in X}$ mit $i_{yx}(\alpha_x) = (\alpha_y)$ für alle $x, y \in X$. Die Projektion auf den entsprechenden Faktor liefert dann für jeden Punkt einen kanonischen Isomorphismus $\pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}}$. Sind alle Fundamentalgruppen eh abelsch, so schreiben wir statt $\pi_1(X)^{\mathrm{ab}}$ auch kürzer $\pi_1(X)$. Ist weiter $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung von wegzusammenhängenden Räumen, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $f_\sharp : \pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \to \pi_1(Y)^{\mathrm{ab}}$, der für alle $x \in X$ mit unseren $f_\sharp : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y, f(x))$ verträglich ist in der hoffentlich offensichtlichen Weise. Wir erhalten so einen Funktor $X \mapsto \pi_1(X)^{\mathrm{ab}}$ von der Kategorie der

wegzusammenhängenden topologischen Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Vorschau 16.1.8.5 (**Umlaufzahl und Orientierung**). Wir betrachten die Kategorie $\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}(2)^{\times}$ mit zweidimensionalen reellen Vektorräumen als Objekten und Vektorraumisomorphismen als Morphismen. Wir erhalten einen Funktor

$$\mathrm{dreh} : \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}(2)^{\times} \to \mathrm{Ens}$$

durch die Vorschrift, daß wir jedem zweidimensionalen reellen Vektorraum V die Menge der beiden Erzeuger der basispunktfreien abelisierten Fundamentalgruppe $\pi_1(V\backslash 0)^{\mathrm{ab}}$ des Komplements des Ursprungs zuordnen. Andererseits erinnern wir den Funktor $\mathrm{or} : \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}(2)^{\times} \to \mathrm{Ens}$ aus 3.6.5.3, der jedem zweidimensionalen reellen Vektorraum die Menge seiner beiden Orientierungen zuordnet. Es gibt nun offensichtlich genau zwei Transformationen $\mathrm{or} \Rightarrow \mathrm{dreh}$ und ebenso offensichtlich sind sie beide Isotransformationen. Wir vereinbaren, daß wir von nun an diejenige dieser beiden Transformationen als die **Standardtransformation**

$$\mathrm{std} : \mathrm{or} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{dreh}$$

auszeichnen, die unserer Standardorientierung von $\mathbb{C}$ vermittels der angeordneten Basis $(1, \mathrm{i})$ den durch $t \mapsto \exp(2\pi \mathrm{i} t)$ repräsentierten Erzeuger der Fundamentalgruppe von $\mathbb{C}\backslash 0$ zuordnet. Mit dem **durch eine Orientierung gegebenen Drehsinn** meinen wir den durch diese Standardtransformation unserer Orientierung zugeordneten Drehsinn.

16.1.9 Selbsthomotopien der Kreislinie

Satz 16.1.9.1 (**Selbstabbildungen der Kreislinie bis auf Homotopie**). *Man erhält eine Bijektion zwischen der Menge der ganzen Zahlen und der Menge aller Homotopieklassen von Selbstabbildungen der Kreislinie, indem man jeder ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$ die Homotopieklasse des n-fachen Potenzierens $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ zuordnet. In Formeln haben wir also eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \overset{\sim}{\to} & \mathrm{hTop}(S^1, S^1) \\ n & \mapsto & [z \mapsto z^n] \end{array}$$

16.1.9.2. Mit dem **Abbildungsgrad** $\mathrm{grad}(f)$ einer stetigen Selbstabbildung der Kreislinie $f : S^1 \to S^1$ meint man das Urbild ihrer Homotopieklasse unter dieser Bijektion. In anderen Worten ist also der Abbildungsgrad einer stetigen Selbstabbildung $f : S^1 \to S^1$ diejenige ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, für die f homotop ist zu $z \mapsto z^n$. In 17.4.3.13 führen wir allgemeiner den Abbildungsgrad stetiger Abbildungen zwischen „kompakten orientierten zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten derselben Dimension“ ein.

16.1.9.3. Eine Selbstabbildung der Kreislinie, die nicht surjektiv ist, ist nullhomotop. Eine nicht nullhomotope Selbstabbildung der Kreislinie muß also surjektiv sein.

Beweis. Das folgt sofort aus Übung 16.1.7.15 über den Zusammenhang zwischen freier Homotopie geschlossener Wege und Fundamentalgruppe. □

Zweiter Beweis. Wir konstruieren explizit eine Inverse zur Zuordnung aus unserem Satz. Dazu erinnern wir an unsere Abbildung $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto \exp(2\pi \mathrm{i} t)$. Sei $f : S^1 \to S^1$ stetig. Da wir den Begriff des Abbildungsgrads eben schon vergeben haben, erklären wir nur für diesen Beweis die **Ganghöhe** $\mathrm{gh}(f) \in \mathbb{Z}$ von f durch die Formel $\mathrm{gh}(f) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$, wo $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ ein beliebiger Lift von $f \circ \mathrm{Exp} : [0,1] \to S^1$ ist, als da heißt eine Abbildung derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \mathrm{Exp} \downarrow & & \downarrow \mathrm{Exp} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Nach 16.1.3.6 gibt es stets solch ein $\tilde{f}$ und es ist sogar eindeutig bis auf eine additive Konstante aus $\mathbb{Z}$. Folglich ist die Ganghöhe $\mathrm{gh}(f)$ wohldefiniert.

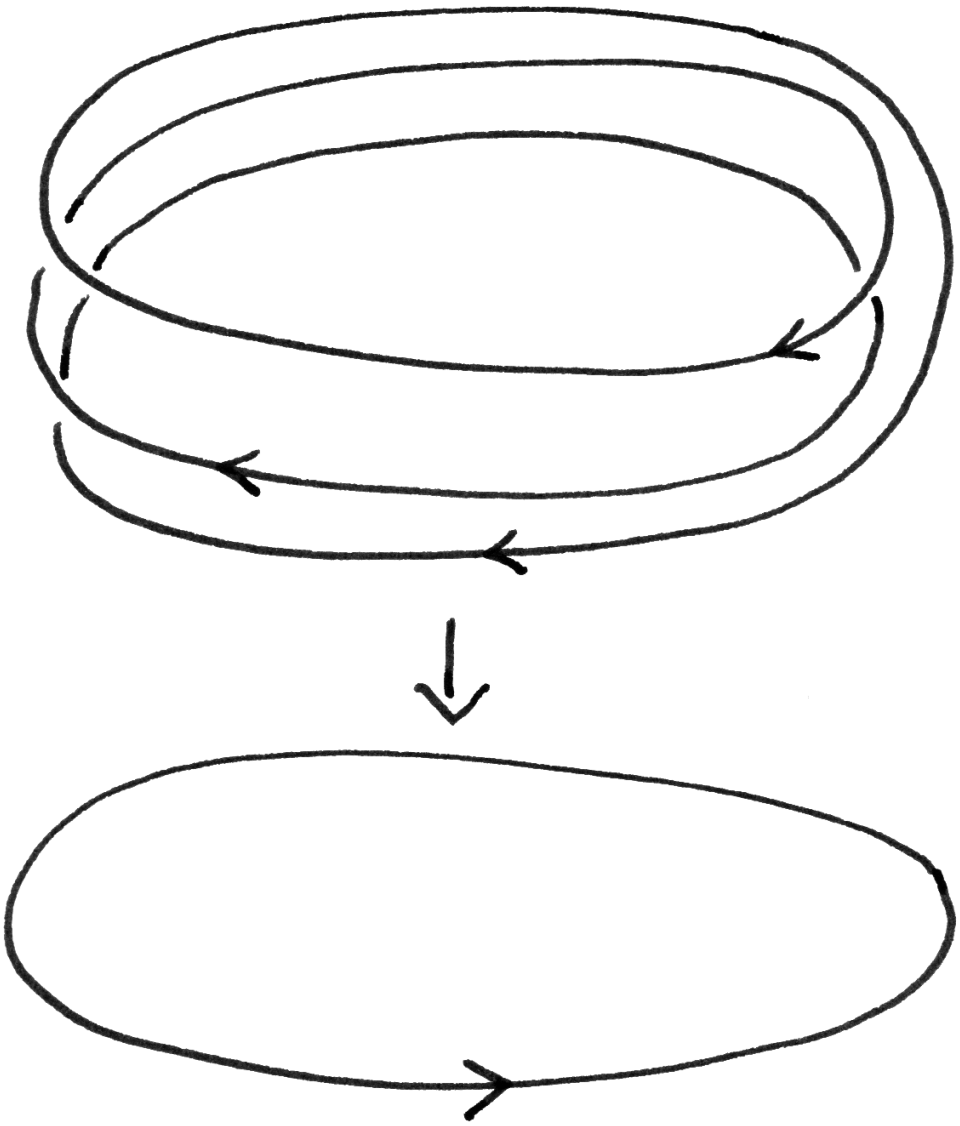
Lemma 16.1.9.4. *Genau dann sind zwei Selbstabbildungen der Kreislinie homotop, wenn sie dieselbe Ganghöhe haben.*

Beweis. Seien $f, g : S^1 \to S^1$ gegeben und sei $H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ eine Homotopie von f nach g. Nach unseren Erkenntnissen 16.1.3.7 zum Liften von auf dem Einheitsquadrat definierten Abbildungen finden wir $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ derart, daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] \times [0,1] & \xrightarrow{\tilde{H}} & \mathbb{R} \\ \mathrm{Exp} \times \mathrm{id} \downarrow & & \downarrow \mathrm{Exp} \\ S^1 \times [0,1] & \xrightarrow{H} & S^1 \end{array}$$

Es folgt $\tilde{H}(0,\tau) - \tilde{H}(1,\tau) \in \mathbb{Z} \quad \forall \tau$, mithin ist diese Abbildung konstant und wir erhalten $\mathrm{gh}(f) = \mathrm{gh}(g)$. Also haben homotope Selbstabbildungen der Kreislinie dieselbe Ganghöhe. Seien umgekehrt $f, g : S^1 \to S^1$ zwei stetige Selbstabbildungen der Kreislinie mit derselben Ganghöhe. Es gilt zu zeigen, daß sie homotop sind. Seien dazu $\tilde{f}, \tilde{g} : [0,1] \to \mathbb{R}$ gewählt wie in der Definition der Ganghöhe. Wir erklären $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$\tilde{H}(t,\tau) = (1-\tau)\tilde{f}(t) + \tau \tilde{g}(t)$$



Eine Selbstabbildung der Kreislinie vom Abbildungsgrad (-3).

Aus $\mathrm{gh}(f) = \mathrm{gh}(g)$ folgt nun $\tilde{H}(0,\tau) + \mathrm{gh}(f) = \tilde{H}(1,\tau)$, also $(\mathrm{Exp} \circ \tilde{H})(0,\tau) = (\mathrm{Exp} \circ \tilde{H})(1,\tau)$ für alle τ. Folglich gibt es eine Abbildung von Mengen H wie in der unteren Zeile des obigen Diagramms derart, daß das Diagramm kommutiert. Da $\mathrm{Exp} \times \mathrm{id} : [0,1] \times [0,1] \to S^1 \times [0,1]$ nach 15.1.7.17 final ist, ist H sogar stetig. Das ist dann die gesuchte Homotopie von f nach g. □

Nach Lemma 16.1.9.4 liefert unsere Ganghöhe eine Injektion

$$\mathrm{gh} : \mathrm{hTop}(S^1, S^1) \hookrightarrow \mathbb{Z}$$

Aus den Definitionen folgt mühelos, daß $z \mapsto z^n$ die Ganghöhe n hat. Der Satz ist bewiesen und wir haben zusätzlich gezeigt, daß der Abbildungsgrad mit der Ganghöhe übereinstimmt, in Formeln $\mathrm{grad}(f) = \mathrm{gh}(f)$. □

16.1.9.5. Wir nennen eine Abbildung f **gerade** beziehungsweise **ungerade**, wenn gilt $f(-x) = f(x)$ beziehungsweise $f(-x) = -f(x)$ für alle x, und das in großer Allgemeinheit und einem vorsätzlich offen gelassenen Kontext.

Proposition 16.1.9.6. *Jede stetige ungerade Selbstabbildung der Kreislinie hat ungeraden Abbildungsgrad und ist insbesondere nie nullhomotop.*

16.1.9.7 (**Versuch einer Veranschaulichung**). Sei $f : S^1 \to S^1$ unsere stetige ungerade Selbstabbildung der Kreislinie. Das Urbild

$$\tilde{\Gamma} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{Exp}(y) = f(\mathrm{Exp}(x))\}$$

des Graphen von f unter $\mathrm{Exp} \times \mathrm{Exp}$ ist dann stabil unter der Verschiebung mit den Vektoren $\pm(1,0)$, $\pm(0,1)$ und $\pm(1/2,1/2)$ und zu jedem x haben je zwei y, z mit $(x,y), (x,z) \in \tilde{\Gamma}$ ganzzahlige Differenz $y - z \in \mathbb{Z}$.

Beweis. In Formeln gilt es zu zeigen, daß für $f : S^1 \to S^1$ stetig mit $f(-x) = -f(x)\ \forall x$ der Abbildungsgrad von f notwendig ungerade ist. Nach 16.1.3.6 finden wir stets $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig derart, daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \mathrm{Exp} \downarrow & & \downarrow \mathrm{Exp} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Aus $f(-x) = -f(x)$ folgt $\tilde{f}(t + \frac{1}{2}) \in \tilde{f}(t) + \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ für alle t, es gibt also ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{f}(t + \frac{1}{2}) = \tilde{f}(t) + \frac{1}{2} + k\ \forall t \in \mathbb{R}$. Wir erhalten insbesondere

$$\begin{aligned} \tilde{f}(1) &= \tilde{f}(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2} + k \\ &= \tilde{f}(0) + 1 + 2k \end{aligned}$$

und folglich $\mathrm{grad}(f) = \mathrm{gh}(f) = 1 + 2k$. □

Satz 16.1.9.8 (**Borsuk-Ulam**). *Jede stetige ungerade Abbildung von der Kugelschale in die Ebene hat eine Nullstelle.*

16.1.9.9. Versuchen wir einmal, uns das vorzustellen. Eine ungerade Abbildung $f_1 : S^2 \to \mathbb{R}$, die nicht identisch verschwindet, nimmt an einer Stelle einen positiven Wert an und gegenüber einen negativen Wert. Denken wir uns ihre Nullstellenmenge als die Menge der Punkte auf einem Globus, an denen Land ist und nicht Meer, so könnten wir nicht mit einem Schiff vom Norpol zum Südpol segeln. Es ist dann zumindest anschaulich klar, daß es auf unserer Landmasse zwei gegenüberliegende Städte geben sollte derart, daß wir trockenen Fußes von der einen zur anderen wandern können, mit beliebig kleiner positiv vorgegebener erlaubter Schrittweite. Hätten wir nun eine zweite ungerade Funktion f_2 und hätten f_1, f_2 keine gemeinsame Nullstelle, so könnten wir von einer dieser Städte zur anderen gehen ohne Nullstellen von f_2 zu treffen. Das stünde jedoch im Widerspruch zur Stetigkeit von f_2. Ein ähnliches Resultat wird in 17.7.4.10 diskutiert. Diese Überlegungen mögen den Satz anschaulicher machen, dürfen aber nicht als Beweisskizze geschweige denn als Beweis mißverstanden werden.

Beweis. Gegeben $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig mit $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in S^2$ gilt es zu zeigen, daß ein $x \in S^2$ existiert mit $f(x) = 0$. Sonst wäre jedoch $x \mapsto f(x)/\|f(x)\|$ eine stetige ungerade Abbildung $g : S^2 \to S^1$. Die Einschränkung von g auf den Äquator $S^1 \subset S^2$ wäre also nicht nullhomotop nach Proposition 16.1.9.6, aber sie faktorisiert über die zusammenziehbare nördliche Hemisphäre $S^2_+ \subset S^2$. Widerspruch! □

Korollar 16.1.9.10 (**Das Plattdrücken einer Kugelschale ist nie injektiv**). *Für jede stetige Abbildung der Kugelschale in die Ebene gibt es sogar ein Paar von gegenüberliegenden Punkten der Kugelschale, die auf denselben Punkt der Ebene abgebildet werden.*

16.1.9.11. Daß eine stetige Abbildung von der Kugelschale in die Ebene nie injektiv sein kann, ist Ihnen hoffentlich anschaulich sofort klar. Ich kenne jedoch keinen einfacheren Beweis.

Beweis. Sei $h : S^2 \to \mathbb{R}^2$ unsere stetige Abbildung. Gäbe es kein $x \in S^2$ mit $h(x) = h(-x)$, so wäre $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = h(x) - h(-x)$ stetig und ungerade ohne Nullstelle, im Widerspruch zum Satz 16.1.9.8 Borsuk-Ulam. □

Korollar 16.1.9.12 (**Satz vom Butterbrot mit Schinken**). *Gegeben drei kompakte Teilmengen des Raums gibt es stets eine Ebene, die sie alle drei in jeweils zwei volumengleiche Teile teilt.*

16.1.9.13. Ist also ein Butterbrot mit Schinken gegeben und betrachtet man die Mengen der Punkte des Raums, an denen sich Schinken beziehungsweise Butter beziehungsweise Brot befindet, so kann man mit einem Schnitt das Brot so teilen, daß zwei Hungrige jeweils gleichviel sowohl vom Schinken, als auch von der Butter als auch vom Brot erhalten.

Beweis. Um dieses Korollar zu beweisen, formulieren wir es zunächst einmal um. Seien $A, B, C \subset \mathbb{R}^3$ unsere drei Kompakta. Sicher finden wir eine stetige Abbildung $\alpha : S^2 \to \mathbb{R}$ derart, daß für alle $x \in S^2$ die Ebene durch den Punkt $\alpha(x)x$ mit Normalenvektor x die Menge A halbiert: Hat A nicht Volumen Null, so ordnen wir zum Beispiel jedem x das maximal mögliche $\alpha(x)$ zu, sonst dürfen wir $\alpha(x)$ eh beliebig wählen. Sicher dürfen wir weiter sogar α ungerade annehmen, indem wir sonst α durch $(\alpha(x) - \alpha(-x))/2$ ersetzen. Ebenso finden wir stetige ungerade $\beta, \gamma : S^2 \to \mathbb{R}$ für B und C, und es gilt zu zeigen, daß wir $x \in S^2$ finden mit $\alpha(x) = \beta(x) = \gamma(x)$. Nach dem Satz 16.1.9.8 von Borsuk-Ulam hat aber jede stetige ungerade Abbildung von der Kugelschale in die Ebene eine Nullstelle, insbesondere also auch die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} f: & S^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (\alpha(x) - \beta(x), \beta(x) - \gamma(x)) \end{array}$$ □

Korollar* 16.1.9.14 (Lusternik-Schnirelmann). *Gegeben eine Überdeckung der Kugelschale durch drei abgeschlossene Teilmengen enthält mindestens eine unserer drei Mengen ein Paar von gegenüberliegenden Punkten.*

Beweis. Wäre $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ein Gegenbeispiel, so könnten wir stetige ungerade Funktionen $f_i : S^2 \to \mathbb{R}$ finden mit $f_i(x) = 1$ für $x \in A_i$, zum Beispiel indem wir mit den Funktionen $d(A_i, \ )$ spielen, oder indem wir nach Tietze's Erweiterungslemma 15.3.1.5 eine stetige Funktion g_i finden mit $g_i(\pm x) = \pm 1$ für $x \in A_i$ und dann $f_i(y) = (g_i(y) - g_i(-y))/2$ setzen für alle y. Dann könnten wir den Satz von Borsuk-Ulam 16.1.9.8 anwenden auf $f = (f_1, f_2) : S^2 \to \mathbb{R}^2$ und fänden $x \in S^2$ mit $\pm x \notin A_1$, $\pm x \notin A_2$, also notwendig $x, -x \in A_3$. □

Übungen

Übung 16.1.9.15. Sei $f : S^1 \to S^1$ stetig. Für alle $z \in S^1$ enthält $f^{-1}(z)$ mindestens $|\operatorname{grad} f|$ Punkte.

Übung 16.1.9.16. Sei $f : S^1 \to S^1$ stetig, $z \in S^1$. So kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, z) & \xrightarrow{f_\sharp} & \pi_1(S^1, f(z)) \\ \mathrm{Um} \downarrow & & \downarrow \mathrm{Um} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{(\operatorname{grad} f)\cdot} & \mathbb{Z} \end{array}$$

wo in der unteren Horizontale die Multiplikation mit $(\operatorname{grad} f)$ gemeint ist. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall $f(z) = z^n$ zurück.

16.2 Beschreibung einiger Fundamentalgruppen

16.2.1 Produkte und Koprodukte in Kategorien

Definition 16.2.1.1. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und A, B Objekte von $\mathcal{C}$. Ein **Produkt** von A und B ist ein Datum (P, p, q) bestehend aus (1) einem Objekt $P \in \mathcal{C}$ und (2) Morphismen $p : P \to A$ und $q : P \to B$, den sogenannten **Projektionen**, derart daß gilt: Ist $T \in \mathcal{C}$ ein Objekt und sind $f : T \to A$, $g : T \to B$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $h : T \to P$ mit $p \circ h = f$ und $q \circ h = g$. Wir notieren diesen Morphismus dann $h = (f, g)$ oder, ganz pedantisch und wenn wir ihn von den Morphismen aus einem Koprodukt absetzen wollen, als Spalte $h = (f, g)^\top$.

Beispiele 16.2.1.2. In der Kategorie der Mengen ist $P = A \times B$ mit p, q den üblichen Projektionsabbildungen ein Produkt von A und B. Dasselbe gilt in der Kategorie der topologischen Räume, wenn wir $A \times B$ mit der Produkttopologie versehen.

16.2.1.3 (**Eindeutigkeit von Produkten**). Produkte in Kategorien sind im wesentlichen eindeutig, falls sie existieren. Sind genauer (P, p, q) und $(\tilde{P}, \tilde{p}, \tilde{q})$ zwei mögliche Produkte der Objekte A und B, so gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft von P genau ein $h : \tilde{P} \to P$ mit $p \circ h = \tilde{p}$ und $q \circ h = \tilde{q}$ und ebenso genau ein $\tilde{h} : P \to \tilde{P}$ mit $\tilde{p} \circ \tilde{d} = p$ und $\tilde{q} \circ \tilde{h} = q$. Weiter gibt es auch genau ein $i : P \to P$ mit $p \circ i = p$ und $q \circ i = q$, und da sowohl $i = \mathrm{id}$ als auch $i = h \circ \tilde{h}$ diese Bedingung erfüllen, folgt $h \circ \tilde{h} = \mathrm{id}$. Ebenso erhalten wir $\tilde{h} \circ h = \mathrm{id}$, mithin sind c und d zueinander inverse Isomorphismen. Aufgrund dieser Eindeutigkeit sprechen wir ab jetzt meist von *dem* Produkt und notieren es

$$(A \times B, \mathrm{pr}_A, \mathrm{pr}_B)$$

Sind schließlich Morphismen $u : A \to X$, $v : B \to Y$ gegeben und existieren die Produkte $A \times B$ und $X \times Y$, so benutzen wir die Abkürzung $(u \circ \mathrm{pr}_A, v \circ \mathrm{pr}_B) = u \times v$ und nennen diesen Morphismus den **Produktmorphismus**

$$u \times v : A \times B \to X \times Y$$

16.2.1.4. Analoge Definitionen sind auch für größere Familien von Objekten ein- und derselben Kategorie sinnvoll, vergleiche 4.7.7.8.

Beispiel 16.2.1.5. Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ bildet man die **opponierte Kategorie** $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ wie folgt: Man setzt

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} := \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{C}^{\mathrm{opp}}(A, B) := \mathcal{C}(B, A)$$

und erklärt die Verknüpfung von Morphismen in $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ wie folgt: Man notiert einen Morphismus f als f°, wenn er in der opponierten Kategorie aufgefaßt werden soll, und setzt $g^\circ \circ f^\circ := (f \circ g)^\circ$.

16.2.1.6. Produkte in der opponierten Kategorie heißen „Koprodukte“. Im folgenden sprechen wir diese Definition gleich für Familien explizit aus.

Definition 16.2.1.7. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten aus $\mathcal{C}$. Ein **Koprodukt** der A_i ist ein Datum $(K, (\mathrm{in}_i)_{i\in I})$ bestehend aus einem Objekt $K \in \mathcal{C}$ und Morphismen $\mathrm{in}_i : A_i \to K$ derart, daß gilt: Ist $T \in \mathcal{C}$ ein Objekt und sind $f_i : A_i \to T$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $f : K \to T$ mit $f \circ \mathrm{in}_i = f_i \quad \forall i \in I$. Wir notieren diesen Morphismus dann auch $(f_i)_{i\in I}$ und hoffen, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, wann damit ein Morphismus aus einem Koprodukt und wann ein Morphismus in ein Produkt gemeint ist. Wenn es drauf ankommt, mag ein Morphismus in ein Produkt eben als Spalte mit einem hochgestellten $\top$ notiert werden und ein Morphismus aus einem Koprodukt als Zeile. Wir notieren Koprodukte $\bigsqcup_{i\in I} A_i$, bei endlich vielen Faktoren auch $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$.

Beispiele 16.2.1.8. In der Kategorie der Mengen ist das Koprodukt die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{i\in I} A_i$, vergleiche 4.7.7.17. In der Kategorie der topologischen Räume gilt dasselbe. Kategorie der bepunkteten topologischen Räume ist das Koprodukt die **Einpunktverbindung** $\bigvee_{i\in I} A_i = \bigsqcup A_i/\sim$, wo die Äquivalenzrelation $\sim$ dadurch erklärt sei, daß alle Basispunkte der verschiedenen A_i unter $\sim$ eine Äquivalenzklasse bilden und die anderen Äquivalenzklassen einelementig sind.

Definition 16.2.1.9. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt **verträglich mit beliebigen Produkten** genau dann, wenn für jedes Produkt $(P, (p_i)_{i\in I})$ einer Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Objekten von $\mathcal{A}$ das Datum $(F(P), (F(p_i))_{i\in I})$ ein Produkt in $\mathcal{B}$ der Familie $(F(A_i))_{i\in I}$ ist. Gilt das nur für Produkte endlicher Familien, so sagen wir, unser Funktor sei **verträglich mit endlichen Produkten**. Dual erklären wir die Verträglichkeit mit beliebigen beziehungsweise endlichen Koprodukten.

Beispiel 16.2.1.10. Der vergeßliche Funktor $\mathrm{Grp} \to \mathrm{Ens}$ ist verträglich mit beliebigen Produkten, aber nicht mit beliebigen, ja noch nicht einmal mit endlichen Koprodukten. Der Funktor der Fundamentalgruppe $\pi_1 : \mathrm{Top}^* \to \mathrm{Grp}$ ist verträglich mit endlichen Produkten nach 16.1.4.8, ja er ist sogar mit derselben Argumentation verträglich mit beliebigen Produkten.

Übungen

Übung 16.2.1.11. Gegeben Objekte X, Y, Z einer Kategorie derart, daß das iterierte Produkt $(X \times Y) \times Z$ existiert, zeige man, daß es zusammen mit den Abbildungen $\mathrm{pr}_1 \circ \mathrm{pr}_1$, $\mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{pr}_1$ und pr_2 die universelle Eigenschaft hat, die das Produkt $X \times Y \times Z$ charakterisiert.

Übung 16.2.1.12. Sei k ein Körper. Man zeige daß der Dualraumfunktor $\mathrm{Mod}_k \to \mathrm{Mod}_k^{\mathrm{opp}}$ verträglich ist mit endlichen Produkten aber nicht mit beliebigen Produkten.

Übung 16.2.1.13. Man zeige, daß das Bilden der Fundamentalgruppe $\pi_1 : \mathrm{Top}^* \to \mathrm{Grp}$ verträglich ist mit beliebigen Produkten.

16.2.2 Kartesische Diagramme

Definition 16.2.2.1. Ein Diagramm in einer Kategorie $\mathcal{C}$ der Gestalt

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & A \arrow[d, "a"] \\ B \arrow[r, "b"] & X \end{tikzcd}$$

heißt **kartesisch** oder ein **pull-back-Diagramm**, wenn es kommutativ ist, in Formeln $ap = bq$, und wenn es für ein beliebiges Objekt $T \in \mathcal{C}$ und Morphismen $f : T \to A$ und $g : T \to B$ mit $af = bg$ genau einen Morphismus $h : T \to P$ gibt mit $f = hp$ und $g = hq$, im Diagramm

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, dashed] \arrow[drr] \arrow[ddr] & & \\ & P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ & B \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Definition 16.2.2.2. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ erklären wir die Kategorie $\mathcal{C}_X$ der **Objekte von $\mathcal{C}$ über** X. Objekte von $\mathcal{C}_X$ sind Paare (A, a) mit $A \in \mathcal{C}$ und $a \in \mathcal{C}(A, X)$, Morphismen in $\mathcal{C}_X$ von einem Objekt (A, a) in ein weiteres Objekt (B, b) sind Morphismen $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$ mit $b \circ f = a$, in Formeln

$$\mathcal{C}_X(A, B) := \{f \in \mathcal{C}(A, B) \mid bf = a\}$$

mit der abkürzenden Notation A, B für $(A, a), (B, b)$ auf der linken Seite. Wir nennen sie auch die **Morphismen über** X.

16.2.2.3 (**Kartesische Diagramme als Produkte**). Ein kommtatives Quadrat wie oben ist genau dann kartesisch, wenn mit dem diagonalen Morphismus $d =:= ap = bq : P \to X$ das Tripel $((P, d), p, q)$ in der Katgorie $\mathcal{C}_X$ der Objekte über X ein Produkt von (A, a) und (B, b) ist. Das zeigt insbesondere, daß darin (P, p, q) durch (A, a, B, b, X) bereits eindeutig festgelegt ist bis auf eindeutigen Isomorphismus in derselben Weise, wie wir es für Produkte ausformuliert hatten.

Definition 16.2.2.4. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ erklären wir opponiert die Kategorie $\mathcal{C}^X$ der **Objekte von $\mathcal{C}$ unter** X. Objekte von $\mathcal{C}^X$ sind Paare (a, A) mit $A \in \mathcal{C}$ und $a \in \mathcal{C}(X, A)$, Morphismen in $\mathcal{C}^X$ von einem Objekt (a, A) in ein weiteres Objekt (b, B) sind Morphismen $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$ mit $f \circ a = b$, in Formeln

$$\mathcal{C}^X(A, B) := \{f \in \mathcal{C}(A, B) \mid fa = b\}$$

mit der abkürzenden Notation A, B für $(a, A), (b, B)$ auf der linken Seite. Wir nennen sie auch die **Morphismen unter** X.

16.2.2.5. Wir erhalten einen Isomorphismus von Kategorien $(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}})_X \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^X)^{\mathrm{opp}}$ durch die Vorschrift $(A, a^\circ) \mapsto (a, A)$ auf Objekten und $f^\circ \mapsto f$ auf Morphismen. Bei der Diskussion allgemeiner Aussagen können wir uns deshalb meist auf einen dieser beiden Fälle beschränken.

Beispiele 16.2.2.6. Die Kategorie der bepunkteten topologischen Räume Top^* ist die „Kategorie der topologischen Räume unter dem einpunktigen Raum“. Die Kategorie der Körpererweiterungen eines Körpers k ist die „Kategorie aller Körper unter k“.

16.2.2.7. Daß ein Diagramm kartesisch ist, mag man auch durch das Symbol $\lrcorner$ in seiner Mitte notieren, etwa in der Form

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Dies Symbol deutet an, aus welchen Winkel unser Diagramm durch pullback entsteht.

16.2.2.8. Ein Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

nennen wir ein **Winkeldiagramm** oder kurz einen **Winkel**. In einer beliebigen Kategorie läßt sich nicht jeder Winkel zu einem kartesischen Diagramm vervollständigen, aber wenn er sich vervollständigen läßt, dann ist diese Vervollständigung als ein Produkt in $\mathcal{C}_Y$ im wesentlichen eindeutig. Wir erlauben uns deshalb den bestimmten Artikel, schreiben

$$W = X \times_Y Z$$

und nennen dieses Objekt das **Faserprodukt** von X mit Z über Y. Vom Morphismus $X \times_Y Z \to Z$ sagen wir, er entstehe aus f durch **Zurückholen mit** p oder gleichbedeutend durch **Basiswechsel**.

16.2.2.9 (**Herkunft der Terminologie**). Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung und $y \in Y$ ein Punkt, so nennt man sein Urbild $X_y = f^{-1}(y)$ vielfach auch die „Faser“ über y. Das Faserprodukt in der Kategorie der Mengen können wir nun verstehen als ein „faserweises Produkt“, in der Kategorie der Mengen ist nämlich

$$X \times_Y Z := \{(x, z) \in Y \times Z \mid f(x) = p(z)\}$$

mit den offensichtlichen Projektionen ein Rückzug und wir haben insbesondere $(X \times_Y Z)_y = X_y \times Z_y$ für alle $y \in Y$. Im Fall einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ topologischer Räume denken wir uns die Fasern X_y mit ihrer induzierten Topologie versehen und verstehen so unsere Abbildung als eine durch $y \in Y$ indizierte „topologische Familie topologischer Räume über der Basis Y“. Der Übergang zur Abbildung $X \times_Y Z \to Z$ bedeutet in diesem semantischen Umfeld dann einen „Wechsel der Basis“.

Übungen

Übung 16.2.2.10 (**Transitivität des Rückzugs**). Sei in einer Kategorie ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} X' & \to & Y' & \to & Z' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y & \to & Z \end{array}$$

gegeben mit einem kartesischen Quadrat rechts. Man zeige, daß dann das linke Quadrat genau dann kartesisch ist, wenn das einhüllende Rechteck kartesisch ist, mit den horizontalen Verknüpfungen als horizontalen Pfeilen.

Übung 16.2.2.11. Man zeige: Ist $i : Z \hookrightarrow X$ die Einbettung eines Teilraums und $f : Y \to X$ eine stetige Abbildung, so ist das folgende Diagramm kartesisch in der Kategorie der topologischen Räume:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(Z) & \hookrightarrow & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Z & \hookrightarrow & X \end{array}$$

Übung 16.2.2.12. Gegeben zwei kartesische Quadrate ist auch das „Produktquadrat“, bei dem an jeder Ecke das Produkt der zugehörigen Objekte aus unseren beiden Ausgangsquadraten steht, ein kartesisches Quadrat, wenn diese vier Produkte alle existieren.

Übung 16.2.2.13. Seien ein kartesisches Diagramm in einer Kategorie

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

und ein Objekt V gegeben, dessen Produkte mit den Objekten der unteren Horizontale existieren. So erhalten wir für jeden Morphismus $h : X \to V$ ein weiteres kartesisches Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "q"] \arrow[d, "{(g,hq)}"'] & X \arrow[d, "{(f,h)}"] \\ W \times V \arrow[r, "p\times\mathrm{id}"] & Y \times V \end{tikzcd}$$

Übung 16.2.2.14. Gegeben ein kartesisches Diagramm in der Kategorie der topologischen Räume zeige man: Ist eine Ausgangskante offen, so auch die gegenüberliegende Kante aus dem Faserprodukt. Ist eine Ausgangskante surjektiv, so auch die gegenüberliegende Kante aus dem Faserprodukt.

Übung 16.2.2.15. Gegeben $G \supset H$ eine topologische Gruppe mit einer Untergruppe erhalten wir ein kartesisches Diagramm von topologischen Räumen

$$\begin{tikzcd} G \times H \arrow[r, "\mathrm{mult}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & G \arrow[d] \\ G \arrow[r] & G/H \end{tikzcd}$$

16.2.3 Kokartesische Diagramme

Definition 16.2.3.1. Kartesische Diagramme in der opponierten Kategorie heißen **kokartesische Diagramme** oder auch **push-out-Diagramme**. Ausgeschrieben heißt ein Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & Y \arrow[d, "c_y"] \\ Z \arrow[r, "c_z"] & W \end{tikzcd}$$

also kokartesisch, wenn es kommutiert und wenn es für jedes andere kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

genau einen Morphismus $u : W \to G$ gibt mit $f = u \circ c_y$ und $g = u \circ c_z$. Man mag diese verschiedenen Daten auch zusammenfassen im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
Z \arrow[r] \arrow[drr] & W \arrow[dr, dashed] & \\
& & G
\end{tikzcd}$$

Unsere Eindeutigkeitsaussagen 16.2.2.8 für kartesische Diagramme gelten entsprechend auch für kokartesische Diagramme. Winkeldiagramme in der opponierten Kategorie nennen wir **Kowinkeldiagramme** oder kurz **Kowinkel**.

16.2.3.2. Daß ein Diagramm kokartesisch ist, notiert man auch durch das Symbol $\ulcorner$ in seiner Mitte, etwa in der Form

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d] \\
Z \arrow[r] & W
\end{tikzcd}$$

Dies Symbol deutet an, aus welchen Kowinkel unser Diagramm durch pushout entsteht.

Übungen

Übung 16.2.3.3. Man beschreibe den push-out in der Kategorie der Mengen. Hinweis: $W = (Z \sqcup Y)/\sim$ für $\sim$ die Äquivalenzrelation, die von $\mathrm{in}_Y(f(x)) \sim \mathrm{in}_Z(g(x))$ für $x \in X$ erzeugt wird. Ist f injektiv, so ist diese Relation bereits eine Äquivalenzrelation. Dann können wir uns den pushout vorstellen als den Raum, der entsteht, indem wir Y an Z ankleben längs $f(X) \subset Y$ in der durch $g \circ f^{-1} : f(X) \to Z$ spezifizierten Weise.

Übung 16.2.3.4. Ist in einem kartesischen oder kokartesischen Diagramm ein Ursprungspfeil ein Isomorphismus, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem pull-back beziehungsweise in den push-out.

Ergänzende Übung 16.2.3.5 (**Mengentheoretischer Basiswechsel**). In einem kartesischen Diagramm von Mengen

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "p"'] & Y
\end{tikzcd}$$

gilt für jede Teilmenge $A \subset X$ die Gleichheit $p^{-1}(f(A)) = g(q^{-1}(A))$ von Teilmengen von Z. In einem kokartesischen Diagramm gilt das im allgemeinen nicht mehr. Es gilt jedoch unter der Zusatzannahme, daß q oder g injektiv sind.

Übung 16.2.3.6 (**Pushout und pullback für abelsche Gruppen**). In der Kategorie der abelschen Gruppen ist ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

kartesisch beziehungsweise kokartesisch genau dann, wenn die Sequenz $W \to X \oplus Z \to Y$ mit Morphismen $(q, g)^\top$ und $(f, -p)$ linksexakt beziehungsweise rechtsexakt ist. Insbesondere läßt sich jeder Winkel beziehungsweise Kowinkel zu einem kartesischen beziehungsweise kokartesischen Diagramm vervollständigen. Ist in einem kokartesischen Diagramm von abelschen Gruppen von zwei parallelen Pfeilen einer eine Surjektion, so auch der andere. Ist in einem kokartesischen Diagramm von abelschen Gruppen ein Ursprungspfeil eine Injektion, so auch der gegenüberliegende Pfeil in den push-out. Hinweis: Man argumentiere mit einer expliziten Konstruktion des push-out. Wer spickeln will, vergleiche 17.6.6.8. Ein allgemeines Argument wird in 20.1.5.11 gegeben.

Ergänzende Übung 16.2.3.7 (**Basiswechsel für Untergruppen**). Sowohl in einem kartesischen als auch in einem kokartesischen Diagramm von abelschen Gruppen

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

gilt für jede Untergruppe $A \subset X$ die Gleichheit $p^{-1}(f(A)) = g(q^{-1}(A))$ von Untergruppen von Z. Hinweis: Jedes kartesische Diagramm von abelschen Gruppen ist kartesisch als Diagramm von Mengen. Jedes kokartesische Diagramm von abelschen Gruppen wird kartesisch, wenn wir seine obere linke Ecke ersetzen durch ihren Quotienten nach dem Schnitt der Kerne der von ihr ausgehenden Morphismen. So kann man sich auf 16.2.3.5 zurückziehen. In der größerer Allgemeinheit der „abelschen Kategorien“ diskutieren wir das in 19.6.3.30.

Übung 16.2.3.8. Jeder Rückzug einer offenen Abbildung von topologischen Räumen ist offen. Hinweise: Mengentheoretischer Basiswechsel 16.2.3.5. Produkte offener Abbildungen sind offen. Die Einbettung des Definitionsbereichs einer stetigen Abbildung in ihren Graphen ist initial.

Ergänzende Übung 16.2.3.9 (**Pushout von Kringen**). Die algebraisch Gebildeten unter Ihnen mögen sich überlegen, daß in der Kategorie Kring der kommutativen Ringe alle Diagramme der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} C & \to & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \to & A \otimes_C B \end{array}$$

kokartesisch sind, mit beliebigen Ringhomomorphismen $C \to A$ und $C \to B$, der hoffentlich offensichtlichen Multiplikation auf dem Tensorprodukt, und den hoffentlich offensichtlichen Ringhomomorphismen in das Tensorprodukt.

Ergänzende Übung 16.2.3.10. In der Kategorie der Mengen ist das Faserprodukt zweier Objekte über ihrem Koprodukt stets das initiale Objekt alias die leere Menge. Der Pushout eines Produkts dahingegen ist nur dann das finale Objekt alias die einpunktige Menge, wenn keiner der beiden Faktoren die leere Menge ist.

16.2.4 Satz von Seifert und van Kampen

Satz 16.2.4.1 (**Seifert-van Kampen**). *Sei ein topologischer Raum X die Vereinigung zweier offener Teilmengen $U, V \Subset X$. Ist der Schnitt $U \cap V$ wegzusammenhängend, so bilden für jeden Basispunkt $x \in U \cap V$ die Vorschübe der Fundamentalgruppen ein kokartesisches Diagramm von Gruppen*

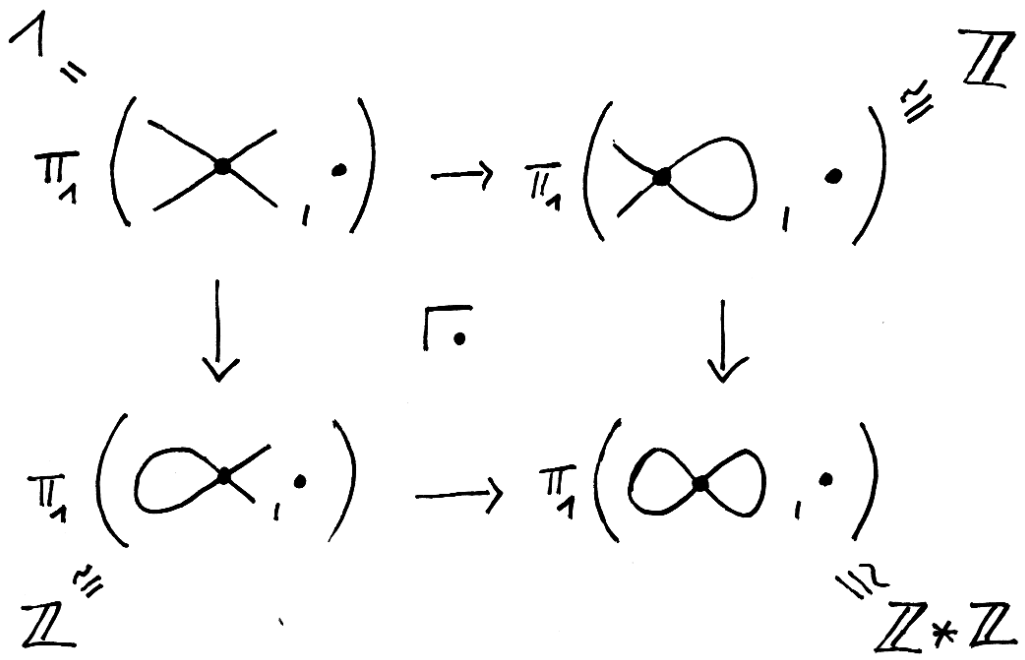
$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V, x) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \pi_1(V, x) \arrow[d] \\ \pi_1(U, x) \arrow[r] & \pi_1(X, x) \end{tikzcd}$$

16.2.4.2. Der Beweis dieses Satzes wird uns bis zum Ende dieses Abschnitts beschäftigen. In 16.2.6.4 diskutieren wir ganz allgemein, daß und wie sich jeder Kowinkel von Gruppen zu einem kokartesischen Diagramm ergänzen läßt. Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen.

16.2.4.3 (**Die Kategorie der Kategorien**). Die Gesamtheit aller Kategorien bildet mit Funktoren als Morphismen selbst eine Kategorie

$$\mathrm{Cat}$$

Etwas sorgfältiger sollte man ein Universum $\mathfrak{U}$ festhalten und dann etwa die Kategorie $\mathfrak{U}\mathrm{Cat}$ aller Kategorien betrachten, deren Morphismenmengen und Objektmenge Elemente von $\mathfrak{U}$ sind, aber diese Feinheiten sind hier nicht relevant.



Berechnung der Fundamentalgruppe der Figur 8 mit Seifert-van Kampen. Das Symbol in der Mitte soll andeuten, daß wir ein push-out-Diagramm vor uns haben. Die Formel $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ meint das Koprodukt von Gruppen, wie es in 16.2.6.2 noch ausführlicher besprochen werden wird. Ich hoffe, es verwirrt nicht zu sehr, daß die triviale Gruppe darin multiplikativ notiert ist als 1, wohingegen die freie Gruppe mit einem Erzeuger darin $\mathbb{Z}$ notiert wird, also in additiver Notation mit dem neutralen Element 0.

16.2.4.4. Wir erinnern aus 16.1.6.15 das fundamentale Gruppoid $\mathcal{W}_X = \mathcal{W}(X)$ eines topologischen Raums X. Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist die Objektabbildung eines Funktors $f : \mathcal{W}(X) \to \mathcal{W}(Y)$, dessen Effekt auf Morphismen durch $[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ gegeben wird.

Satz 16.2.4.5 (Seifert-van Kampen für das fundamentale Gruppoid). *Gegeben ein topologischer Raum X mit einer Überdeckung $X = U \cup V$ durch zwei offene Teilmengen $U, V \Subset X$ erhalten wir mit den durch die Einbettungen gegebenen Funktoren in der Kategorie der Kategorien ein kokartesisches Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{W}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathcal{W}(V) \arrow[d] \\ \mathcal{W}(U) \arrow[r] & \mathcal{W}(X) \end{tikzcd}$$

Beweis. Für den Beweis verwenden wir eine andere Schreibweise und setzen $U = U_+$ und $V = U_-$ und $U_\cap = U_+ \cap U_-$. Jeder Morphismus in $\mathcal{W}(X)$ läst sich als Verknüpfung von Morphismen schreiben, die von $\mathcal{W}(U_+)$ oder von $\mathcal{W}(U_-)$ herkommen. In der Tat gibt es für jeden Weg $\gamma : [0,1] \to X$ eine Unterteilung $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_r = 1$ des Einheitsintervalls derart, daß für $1 \le \rho \le r$ gilt $\gamma[a_{\rho-1}, a_\rho] \subset U_+$ oder $\gamma[a_{\rho-1}, a_\rho] \subset U_-$. Das folgt etwa aus dem Überdeckungssatz von Lebesgue 12.4.1.7 angewandt auf die offene Überdeckung des Kompaktums $[0,1]$ durch $\gamma^{-1}(U_+)$ und $\gamma^{-1}(U_-)$. Ein Funktor $F : \mathcal{W}(X) \to \mathcal{C}$ in eine weitere Kategorie $\mathcal{C}$ wird also bereits eindeutig festgelegt durch die Funktoren $F \circ i_+ : \mathcal{W}(U_+) \to \mathcal{C}$ und $F \circ i_- : \mathcal{W}(U_-) \to \mathcal{C}$, wobei $i_\pm : U_\pm \hookrightarrow X$ ebenso die Einbettungen wie die zugehörigen Funktoren auf den fundamentalen Gruppoiden bezeichnen. Es bleibt zu zeigen, daß es für eine weitere Kategorie $\mathcal{C}$ und Funktoren $I_\pm : \mathcal{W}(U_\pm) \to \mathcal{C}$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{W}(U_\cap) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{W}(U_-) \arrow[d, "I_-"] \\ \mathcal{W}(U_+) \arrow[r, "I_+"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

kommutiert, auch in der Tat einen Funktor $F : \mathcal{W}(X) \to \mathcal{C}$ gibt mit $F \circ i_\pm = I_\pm$. Konstruieren wir also einen derartigen Funktor F. Auf Objekten ist klar, welche Abbildungsvorschrift wir nehmen können und müssen. Es ist auch klar, daß der Funktor F, wenn es ihn denn gibt, auf einem Morphismus $g \in \mathcal{W}_X(x,y)$ wie folgt berechnet werden kann: Man wählt einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ von x nach y mit $g = [\gamma]$, wählt dazu eine Unterteilung $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_r = 1$ wie oben, wählt für jedes ρ ein Vorzeichen $\varepsilon(\rho)$ mit $\gamma[a_{\rho-1}, a_\rho] \subset U_{\varepsilon(\rho)}$, bezeichnet mit $\gamma_\rho : [0,1] \to U_{\varepsilon(\rho)}$ den zugehörigen auf das Einheitsintervall umparametrisierten

Weg, bezeichnet mit $[\gamma_\rho]_{\varepsilon(\rho)}$ den zugehörigen Morphismus in $\mathcal{W}(U_{\varepsilon(\rho)})$, und hat dann

$$F(g) = (I_{\varepsilon(r)}[\gamma_r]_{\varepsilon(r)}) \circ \ldots \circ (I_{\varepsilon(2)}[\gamma_2]_{\varepsilon(2)}) \circ (I_{\varepsilon(1)}[\gamma_1]_{\varepsilon(1)})$$

Es ist schließlich klar, daß wir einen Funktor F mit den gesuchten Eigenschaften durch diese Vorschrift konstruieren können, wenn es gelingt zu zeigen, daß $F(g)$ unabhängig ist von allen diesen Wahlen. Daß es auf die Wahl der jeweiligen Vorzeichen $\varepsilon(\rho)$ nicht ankommt, folgt aus unserer Annahme der Kommutativität des letzten Diagramms. Daß es auf die Wahl der Unterteilung von γ nicht ankommt, erkennt man, indem man bei zwei Wahlen zu einer gemeinsamen Verfeinerung übergeht und die Annahme ausnutzt, daß unsere $I_\pm$ Funktoren sind. Damit liefert jeder Repräsentant γ von g schon mal ein wohldefiniertes $F_\gamma(g)$. Bleibt zu zeigen, daß es auch auf die Wahl des Repräsentanten γ der Homotopieklasse g nicht ankommt. Aber sei sonst ψ ein weiterer Repräsentant und $h : \gamma \simeq \psi$ eine Homotopie mit festen Endpunkten. Wieder nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue gibt es Unterteilungen $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_r = 1$ und $0 = b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_s = 1$ derart, daß jedes Feld $[a_{\rho-1}, a_\rho] \times [b_{\sigma-1}, b_\sigma]$ unter unserer Homotopie h ganz nach U_+ oder ganz nach U_- abgebildet wird. Sind p, q benachbarte Ecken eines Feldes, so bezeichnen wir mit $d_{p,q} : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ die affine Abbildung mit $d_{p,q}(0) = q$, $d_{p,q}(1) = p$ und setzen $\gamma_{p,q} = h \circ d_{p,q}$. Für ein von h ganz nach U_ε abgebildetes Feld mit Ecken

$$\begin{pmatrix} y & z \\ x & w \end{pmatrix}$$

sind die Wege $\gamma_{z,w} * \gamma_{w,x}$ und $\gamma_{z,y} * \gamma_{y,x}$ dann in U_ε homotop. In der Tat folgt aus 16.1.2.9 sofort die Homotopie $d_{z,w} * d_{w,x} \simeq d_{z,y} * d_{y,x}$ in $\Omega(\text{Feld}, x, z)$. Betrachten wir nun irgendeinen Weg ϕ im Einheitsquadrat, dem Definitionsbereich unserer Homotopie h, der mit konstanter absoluter Geschwindigkeit auf den Kanten unserer Felder von $(0,0)$ nach $(1,1)$ läuft und dabei immer nach rechts oder nach oben läuft. Nach dem vorhergehenden ist $F_{h\circ\phi}(g)$ unabhängig von ϕ. Andererseits gilt, jetzt mit der Notation ε für konstante Wege, offensichtlich $\epsilon * \gamma = h \circ \phi_1$ für ϕ_1 das ϕ, das erst die Unterkante entlangläuft und dann die rechte Seite hoch, und $\psi * \epsilon = h \circ \phi_2$ für ϕ_2 das ϕ, das erst die limke Seite hochläuft und dann die Oberkante entlang. So aber folgt

$$F_\gamma(g) = F_{\epsilon*\gamma}(g) = F_{h\circ\phi_1}(g) = F_{h\circ\phi_2}(g) = F_{\psi*\epsilon}(g) = F_\psi(g) \qquad \square$$

Beweis von Seifert-van Kampen. Gegeben ein Monoid M bezeichne $[M]$ die zugehörige **Ein-Objekt-Kategorie** mit einem einzigen Objekt, dessen Monoid von Endomorphismen gerade M ist. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $A \in \mathcal{C}$ haben wir stets einen tautologischen Funktor $[\mathcal{C}(A)] \to \mathcal{C}$, der das einzige Objekt auf das Objekt A abbildet. Ein Gruppoid heißt **zusammenhängend**, wenn es

zwischen je zwei seiner Objekte mindestens einen Morphismus gibt. Ist $\mathcal{W}$ ein zusammenhängendes Gruppoid und wählen wir ein Objekt $x \in \mathcal{W}$ und für jedes $y \in \mathcal{W}$ einen ausgezeichneten Morphismus $g_y : x \to y$, so erhalten wir umgekehrt einen Funktor $\mathcal{W} \to [\mathcal{W}(x)]$ durch die Vorschrift $f \mapsto g_z^{-1} \circ f \circ g_y$ für alle Morphismen $f : y \to z$. Ist dabei speziell $g_x = \mathrm{id}_x$, so ist die Verknüpfung

$$[\mathcal{W}(x)] \to \mathcal{W} \to [\mathcal{W}(x)]$$

unserer beiden eben diskutierten Funktoren der Identitätsfunktor. Beim Beweis des Satzes von Seifert-van Kampen dürfen wir nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit außer $U \cap V$ auch U und V und damit X wegzusammenhängend annehmen, indem wir andernfalls jeweils zur Wegzusammenhangskomponente unseres Basispunkts x übergehen. Dann können wir für jeden Punkt $y \in X$ einen Weg von x nach y wählen so, daß unser Weg der konstante Weg ist im Fall $y = x$ und ganz in U beziehungsweise V verläuft, falls y in U beziehungsweise V liegt. Mit diesen Wahlen erhalten wir nach dem vorhergehenden im Schaubild

$$\begin{tikzcd} \mathcal{W}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathcal{W}(V) \arrow[d] \\ \mathcal{W}(U) \arrow[r] & \mathcal{W}(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {[\pi_1(U \cap V, x)]} \arrow[r] \arrow[d] & {[\pi_1(V, x)]} \arrow[d] \\ {[\pi_1(U, x)]} \arrow[r] & {[\pi_1(X, x)]} \end{tikzcd}$$

Funktoren von allen vier Ecken des linken in alle vier Ecken des rechten Diagramms. Sie lassen sogar einen kommutativen Würfel entstehen und sind halbinvers zu den offensichtlichen Einbettungen. Da das linke Diagramm kokartesisch ist, folgt dasselbe für das rechte Diagramm. Ist genauer G eine Gruppe, so liefert jede Ergänzung des Kowinkels im rechten Diagramm zu einem kommutativen Quadrat

$$\begin{tikzcd} {[\pi_1(U \cap V, x)]} \arrow[r] \arrow[d] & {[\pi_1(V, x)]} \arrow[d] \\ {[\pi_1(U, x)]} \arrow[r] & {[G]} \end{tikzcd}$$

eine Ergänzung des Kowinkels im linken Diagramm zu einem kommutativen Quadrat mit $[G]$ als rechter unterer Ecke. Diese Ergänzung muß von einem Funktor $\mathcal{W}(X) \to [G]$ herkommen, der dann hinwiederum einen möglichen Funktor $[\pi_1(X, x)] \to [G]$ liefert, der zu dem ursprünglichen kommutativen Quadrat führt. Jeder derartige Funktor hinwiederum kommt von einem eindeutig bestimmten Funktor $\mathcal{W}(X) \to [G]$ her und ist damit auch selbst eindeutig bestimmt. $\square$

Übungen

Übung 16.2.4.6. Ist M eine zusammenhängende d-Mannigfaltigkeit der Dimension $d \geq 3$ und $E \subset M$ eine endliche Teilmenge, so induziert die Einbettung

$M \backslash E \hookrightarrow M$ einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen.

Übung 16.2.4.7. Man zeige, daß die Fundamentalgruppe des Komplements einer Kreislinie im $\mathbb{R}^3$ isomorph ist zu $\mathbb{Z}$. Hinweis: Die Fundamentalgruppe ändert sich nach 16.2.4.6 nicht, wenn wir den $\mathbb{R}^3$ durch Hinzufügen eines Punktes zur S^3 machen. Dann kann man 16.1.7.17 anwenden.

16.2.5 Freie Monoide und freie Gruppen

Satz 16.2.5.1. *1. Gegeben eine Menge X existiert ein Paar (W, ε) bestehend aus einem Monoid W und einer Abbildung $\varepsilon : X \to W$ derart, daß für jedes weitere Monoid M das Vorschalten von ε eine Bijektion*

$$(\circ\varepsilon) : \mathrm{Mon}(W, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(X, M)$$

zwischen der Menge aller Monoidhomomorphismen $W \to M$ und der Menge aller Abbildungen $X \to M$ induziert. Wir nennen solch ein ε eine **universelle Mengen-Monoid-Abbildung***;*

2. Gegeben zwei universelle Mengen-Monoid-Abbildungen $\varepsilon : X \to W$ und $\tau : X \to V$ existiert genau ein Monoidhomomorphismus $c : W \to V$ mit $c \circ \varepsilon = \tau$ und genau ein Monoidhomomorphismus $d : V \to W$ mit $d \circ \tau = \varepsilon$, und diese Abbildungen c und d sind zueinander inverse Isomorphismen.

16.2.5.2. Unsere Paare (W, ε) sind nach Teil 2 eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Eine universelle Mengen-Monoid-Abbildung $\varepsilon : X \to W$ verdient damit den bestimmten Artikel. Man nennt (W, ε) das **freie Monoid über** X. Wir verwenden für die universelle Mengen-Monoid-Abbildung aus einer Menge X die Notation

$$\varepsilon : X \to \mathrm{Mon}^{\backslash} X$$

16.2.5.3. Die charakterisierende Eigenschaft einer universellen Mengen-Monoid-Abbildung $\varepsilon : X \to W$ bedeutet in anderen Worten: Ist M ein Monoid und $\varphi : X \to M$ eine Abbildung von Mengen, so soll es genau einen Monoidhomomorphismus $\hat{\varphi} : W \to M$ geben mit $\hat{\varphi} \circ \varepsilon = \varphi$, im Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varphi"'] & W \arrow[d, dashed, "\exists!\hat{\varphi}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Beispiele 16.2.5.4. Für das einelementige Monoid $\{1\}$ ist die Abbildung $\emptyset \to \{1\}$ universell. Das freie Monoid über der leeren Menge besteht in anderen Worten nur aus dem neutralen Element. Für das additive Monoid $(\mathbb{N}, +)$ ist die Abildung $\{*\} \to \mathbb{N}$ mit $* \mapsto 1$ universell. Das freie Monoid über der einelementigen Menge ist in anderen Worten das additive Monoid der natürlichen Zahlen.

Beweis. Gegeben eine Menge X konstruieren wir eine universelle Abbildung von X in ein Monoid W wie folgt: Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ betrachten wir zunächst die Mengen $W_n := \mathrm{Ens}(\{1, \ldots, n\}, X)$. Wir notieren unsere Abbildungen $a : \{1, \ldots, n\} \to X$ als $a : i \mapsto a_i$ und interpretieren Elemente $a \in W_n$ als endliche Wörter $a_1 a_2 \ldots a_n$ aus Elementen von X. Die Menge W_0 besteht insbesondere nur aus einem Wort, dem „leeren" Wort, notiert e. Wir betrachten dann die „Menge aller Wörter" $W := \bigsqcup_{n \geq 0} W_n$ und erklären darauf die Verknüpfung des „Hintereinanderschreibens von Wörtern"

$$\begin{array}{ccc} W \times W & \to & W \\ (a, b) & \mapsto & ab \end{array}$$

Diese Verknüpfung ist offensichtlich assoziativ, die Längen von Wörtern addieren sich beim Verknüpfen und das leere Wort ist ein neutrales Element. Die Abbildung $\varepsilon : X \to W$, die jedem Element $x \in X$ das Wort $x \in W_1$ bestehend aus x als einzigem Buchstaben zuordnet, ist dann offensichtlich eine universelle Mengen-Monoid-Abbildung. Die Argumentation ist beim Beweis von Teil 2 sehr ähnlich wie beim Nachweis der Eindeutigkeit von Produkten bis auf eindeutigen Isomorphismus 16.2.1.3 und bleibe dem Leser überlassen. Formal sind alle diese Aussagen Spezialfälle der Eindeutigkeit darstellender Objekte 4.7.10.17. □

Satz 16.2.5.5. *1. Gegeben eine Menge X existiert ein Paar (F, ε) bestehend aus einer Gruppe F und einer Abbildung $\varepsilon : X \to F$ derart, daß für jede weitere Gruppe G das Vorschalten von ε eine Bijektion*

$$(\circ\varepsilon) : \mathrm{Grp}(F, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(X, G)$$

zwischen der Menge aller Gruppenhomomorphismen $F \to G$ und der Menge aller Abbildungen $X \to G$ induziert. Wir nennen solch ein ε eine **universelle Mengen-Gruppen-Abbildung***;*

2. Gegeben zwei universelle Mengen-Gruppen-Abbildungen $\varepsilon : X \to F$ und $\tau : X \to H$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $c : F \to H$ mit $c \circ \varepsilon = \tau$ und genau ein Gruppenhomomorphismus $d : H \to F$ mit $d \circ \tau = \varepsilon$, und diese Abbildungen c und d sind zueinander invers.

16.2.5.6. Unsere Paare (F, ε) sind nach Teil 2 „eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus", wenn sie existieren. Eine universelle Mengen-Gruppen-Abbildung $\varepsilon : X \to F$ verdient damit den bestimmten Artikel. Man nennt (F, ε) die **freie Gruppe über** X. Wir verwenden für die universelle Mengen-Gruppen-Abbildung aus einer Menge X die Notation

$$\varepsilon : X \to \mathrm{Grp}^{\backslash} X$$

16.2.5.7. Die charakterisierende Eigenschaft einer universellen Mengen-Gruppen-Abbildung $\varepsilon : X \to F$ bedeutet in anderen Worten: Ist G eine Gruppe und $\varphi : X \to G$ eine Abbildung von Mengen, so soll es genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi} : F \to G$ geben mit $\tilde{\varphi} \circ \varepsilon = \varphi$, im Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varphi"'] & F \arrow[d, dashed, "\exists!\tilde{\varphi}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Beispiele 16.2.5.8. Für die einelementige Gruppe $\{1\}$ ist die Abbildung $\emptyset \to \{1\}$ universell. Die freie Gruppe über der leeren Menge besteht in anderen Worten nur aus dem neutralen Element. Für die additive Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist sowohl die Abbildung $\{*\} \to \mathbb{Z}$ mit $* \mapsto 1$ als auch die Abbildung $\{*\} \to \mathbb{Z}$ mit $* \mapsto -1$ universell.

Beweis. Gegeben eine Menge X konstruieren wir eine universelle Mengen-Gruppen-Abbildung $\varepsilon : X \to F$ wie folgt: Wir beginnen mit dem freien Monoid

$$W^{\pm} := \mathrm{Mon}^{\backprime}(X \times \{+1, -1\})$$

über dem kartesischen Produkt $X \times \{+1, -1\}$. Wir interpretieren Elemente a dieses Monoids als endliche Wörter $a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \dots a_n^{\sigma_n}$ mit $a_i \in X$ und $\sigma_i \in \{+1, -1\}$. Ein typisches Element unseres Monoids wäre etwa das Wort $xyx^{-1}xy^{-1}$ mit $x, y \in X$. Sei nun $\sim$ die kleinste Äquivalenzrelation auf $W^{\pm}$ derart, daß mit unserer Notation e für das leere Wort gilt:

1. $xx^{-1} \sim e \sim x^{-1}x \;\; \forall x \in X$;
2. $a \sim b \;\Rightarrow\; ca \sim cb$ und $ac \sim bc \;\; \forall a, b, c \in W^{\pm}$.

Bezeichne $F := W^{\pm}/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Die Klasse von $a \in W^{\pm}$ heiße $[a]$. Offensichtlich definiert die Verknüpfung auf $W^{\pm}$ eine Verknüpfung auf F. Das Assoziativgesetz gilt schon in $W^{\pm}$, also erst recht in F. Das leere Wort e ist schon neutral in $W^{\pm}$, also ist erst recht $[e]$ neutral in F. Um die Existenz von Inversen nachzuweisen, betrachte man zu $a = a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \dots a_n^{\sigma_n}$ das Wort $b = a_n^{-\sigma_n} \dots a_2^{-\sigma_2} a_1^{-\sigma_1}$ oder in Formeln zu $a : \{1, \dots, n\} \to (X \times \{+1, -1\})$ das Wort b gegeben durch $b(i) = (a_{n-i}, -\sigma_{n-i})$. Ist zum Beispiel $a = xyx^{-1}yxx$, so nehmen wir $b = x^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}$. Dann gilt offensichtlich $[b][a] = [a][b] = [e]$. Mithin ist F eine Gruppe. Wir betrachten nun die Abbildung $\varepsilon : X \to F$ gegeben durch $x \mapsto [x]$ und zeigen sie universell ist. Seien dazu G eine Gruppe und $\varphi : X \to G$ eine Abbildung. Man definiere $\hat{\varphi} : W^{\pm} \to G$ durch

$$\hat{\varphi}(a_1^{\sigma_1} \dots a_n^{\sigma_n}) = \varphi(a_1)^{\sigma_1} \dots \varphi(a_n)^{\sigma_n}$$

Betrachten wir auf $W^{\pm}$ die Äquivalenz-Relation $a \sim_\varphi b \Leftrightarrow \hat{\varphi}(a) = \hat{\varphi}(b)$, so erfüllt $\sim_\varphi$ sicher die Bedingungen 1 und 2 an unsere Äquivalenzrelation auf $W^{\pm}$. Also ist $\hat{\varphi}$ konstant auf den Äquivalenzklassen zu $\sim$ und definiert eine Abbildung $\tilde{\varphi} : F \to G$ mit $\tilde{\varphi}([a]) = \hat{\varphi}(a)$. Damit ist die Existenz von $\tilde{\varphi}$ gezeigt. Die Eindeutigkeit ist klar, unsere Abbildung $\varepsilon : X \to F$ ist also in der Tat universell. Die Argumentation ist beim Beweis von Teil 2 sehr ähnlich wie beim Nachweis der Eindeutigkeit von Produkten bis auf eindeutigen Isomorphismus 16.2.1.3 und bleibe dem Leser überlassen. Formal sind alle diese Aussagen Spezialfälle der Eindeutigkeit darstellender Objekte 4.7.10.17. □

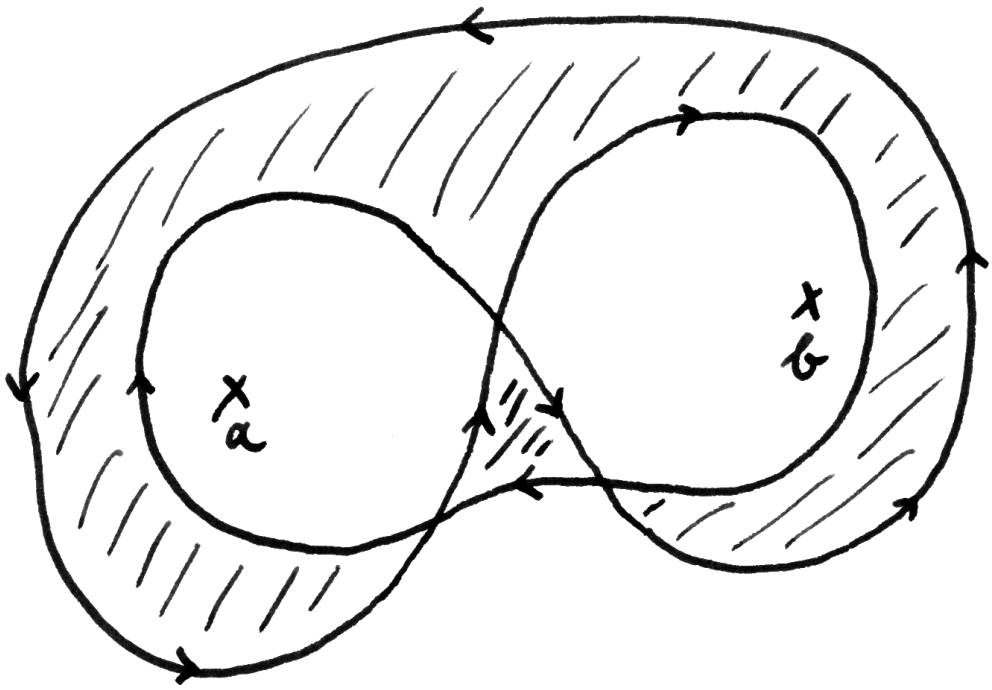
Vorschau 16.2.5.9. Die Notationen $\mathrm{Mon}^{\setminus} X$ und $\mathrm{Grp}^{\setminus} X$ werden in 16.4.8.7 verallgemeinert auf beliebige Kategorien $\mathcal{C}$ mit einem ausgezeichneten Funktor in die Kategorie der Mengen $v : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$. Auch in dieser Situation erklären wir eine „universelle Mengen-$\mathcal{C}$-Abbildung“ als eine Abbildung $\varepsilon : X \to vC$ mit $X \in \mathrm{Ens}$ und $C \in \mathcal{C}$ mit der Eigenschaft, daß das Anwenden von v und Vorschalten von ε für alle $D \in \mathcal{C}$ eine Bijektion $(\circ\varepsilon) : \mathcal{C}(C, D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(X, vD)$ liefert. Auch in dieser Allgemeinheit notieren wir C dann gerne $\mathcal{C}^{\setminus} X$.

Beispiel 16.2.5.10 (**Fundamentalgruppe koendlicher Teilmengen der Ebene**). Gegeben $E \subset \mathbb{C}$ eine endliche Teilmenge und $* \in \mathbb{C} \backslash E$ ein Basispunkt derart, daß keine zwei Punkte aus E mit $*$ kollinear sind, erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathrm{Grp}^{\setminus} E \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{C} \backslash E, *)$$

durch die Vorschrift $p \mapsto [\alpha_p]$ mit α_p einem Weg, der erst auf geradem Wege von $*$ so nah an p herangeht, daß man näher bei p ist als bei allen anderen $q \in E$, dann einmal im Gegenuhrzeigersinn um p herum, und dann wieder auf geradem Wege zu $*$ zurück“. Das folgert man induktiv mit Seifert-van Kampen und Übung 16.2.5.16 und der offenen Überdeckung, die wir erhalten, indem wir erst die Ebene von $*$ ausgehend so in Kuchenstücke aufschneiden, daß in jedem Kuchenstück genau ein Punkt von E liegt, und dann diese Kuchenstücke etwas aufdicken, indem wir alle Punkte mit einem Abstand $< \varepsilon$ vom gegebenen Kuchenstück mit dazunehmen und dabei $\varepsilon > 0$ so klein wählen, daß auch in jedem dieser aufgedickten Kuchenstücke nur genau ein Punkt von E liegt. Im Fall eines allgemeinen Basispunktes können wir uns mit unseren Erkenntnisse zum Wechsel des Basispunktes 16.1.7.2 unschwer auf den bereits behandelten Fall zurückziehen.

Ergänzung 16.2.5.11. Gegeben eine Menge X kann man die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}X$ aller derjenigen Abbildungen $X \to \mathbb{Z}$ betrachten, die an höchstens endlich vielen Stellen von Null verschiedene Werte annehmen. Die Abbildung $\varepsilon : X \to \mathbb{Z}X$, die jedem Element von X seine charakteristische Funktion zuordnet, hat dann die universelle Eigenschaft, daß das Vorschalten dieser Abbildung für jede abelsche



Ein geschlossener nicht zusammenziehbarer Weg im Komplement einer zweielementigen Teilmenge der komplexen Zahlenebene. Denken wir uns das Mittelkreuz als Basispunkt und bezeichnet α beziehungsweise β in der Fundamentalgruppe das Umrunden gegen den Uhrzeigersinn von a beziehungsweise b, so ist unser Fundamentalgruppe nach 16.2.5.10 frei erzeugt von α und β und unser Weg repräsentiert das Element $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ in der Fundamentalgruppe. Denken wir uns an den beiden Kreuzen je einen Nagel in die Wand geschlagen, bleibt unsere Schnur hängen, weil sie eben ein nichttriviales Element der Fundamentalgruppe repräsentiert. Sobald wir einen der beiden Nägel herausziehen, wird jedoch die Fundamentalgruppe des Komplements des verbleibenden Nagels kommutativ und die Schnur fällt herunter.

Gruppe A eine Bijektion

$$(\circ\varepsilon) : \mathrm{Ab}(\mathbb{Z}X, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(X, A)$$

zwischen der Menge aller Homomorphismen von abelschen Gruppen $\mathbb{Z}X \to A$ und der Menge aller Abbildungen $X \to A$ induziert. Sie ist also eine universelle Mengen-(abelsche-Gruppen)-Abbildung. Aufgrund dieser universellen Eigenschaft heißt $\mathbb{Z}X$ die **freie abelsche Gruppe über** X und wir notieren sie auch $\mathrm{Ab}^{\setminus} X$ und notieren unsere universelle Abbildung $\varepsilon : X \to \mathrm{Ab}^{\setminus} X$. Wieder legt diese universelle Eigenschaft unser Paar $(\varepsilon, \mathbb{Z}X)$ bereits bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig fest. So erkennen wir, daß der durch das letztere ε induzierte Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varepsilon} : \mathrm{Grp}^{\setminus} X \to \mathrm{Ab}^{\setminus} X$ einen Isomorphismus

$$(\mathrm{Grp}^{\setminus} X)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}^{\setminus} X$$

von der Abelisierung im Sinne von 16.1.8.1 der freien Gruppe über X in die freie abelsche Gruppe über X induzieren muß. Das hinwiederum zeigt, daß die freien Gruppen über zwei Mengen X, Y nur dann isomorph sein können, wenn gilt $|X| = |Y|$, denn für $A := \mathrm{Ab}^{\setminus} X$ können wir das daraus folgern, daß $A/2A$ in Bijektion ist zur Menge aller endlichen Teilmengen von X. Wir nennen die Kardinalität von X den **Rang** der freien Gruppe $\mathrm{Grp}^{\setminus} X$.

Vorschau 16.2.5.12. Da die Vorschrift $X \mapsto \mathbb{Z}X$ einen kovarianten Funktor $\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}$ liefert, ist es richtiger, die Elemente von $\mathbb{Z}X$ als eine Art „kompakt getragener Maße“ auf X aufzufassen. Wenn wir diesen Gesichtspunkt betonen wollen, verwenden wir die Notation $\mathbb{Z}X = \mathrm{Maß}_!(X)$ und $\varepsilon(x) = \delta_x$.

Ergänzung 16.2.5.13 (**Freie Untergruppen einer Matrixgruppe**). Man kann sich mit Möbiusgeometrie anschaulich leicht klar machen, daß die Gruppe $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$, ja selbst die Gruppe $\mathrm{PGL}(2;\mathbb{C})$ freie Untergruppen von beliebigem endlichem Rang besitzt. Dazu betrachtet man ihre Operation auf der Zahlenkugel $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Für jedes Paar von abgeschlossenen Kreisscheiben $K, L \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit $K \subset L^\circ$ findet man $\gamma \in \mathrm{PGL}(2;\mathbb{C})$ mit $\gamma(K^\circ) = L^\circ$. Erinnert man etwa $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ und nimmt zwei konzentrische Kreisscheiben in $\mathbb{C}$, so wäre etwa eine geeignete Streckung ein mögliches γ. Wählt man nun endlich viele paarweise disjunkte abgeschlossene Kreisscheiben $K_i \subset L^\circ$ und betrachtet das Untergruppenerzeugnis $\Gamma := \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_r \rangle$ der zugehörigen γ_i, so erhält man eine freie Gruppe vom Rang r. In der Tat, betrachtet man die Menge A aller Translate des $A := \Gamma(\partial L)$ des Randkreises von L und die Menge $E := \mathrm{Zus}(A)$ ihrer Zusammenhangskomponenten und verbindet je zwei Elemente $p, q \in E$ durch eine Kante, wenn die entsprechenden Kreise im Abschluß derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{P}^1\mathbb{C}\backslash A$ liegen. So erhält man einen zykelfreien eindimensionalen Simplizialkomplex alias Baum, bei dem von jeder Ecke $2r$ Kanten ausgehen. Die induzierte Operation

von Γ auf diesem Simplizialkomplex geschieht in der Weise, daß unsere Erzeuger γ_i und ihre Inversen jede Ecke $p \in E$ auf alle ihre $2r$ Nachbarn schieben. So kann man zumindest anschaulich gut einsehen, daß Γ eine freie Gruppe vom Rang r sein muß. Diese freien Untergruppen von $\mathrm{PGL}(2;\mathbb{C})$ heißen **Schottky-Gruppen**.

Übungen

Übung 16.2.5.14 (**Freie Gruppe als Menge unkürzbarer Worte**). Sei X eine Menge. Man zeige, daß jedes Element der freien Gruppe $\mathrm{Grp}^{\setminus} X$ über X genau einen Repräsentanten kürzester Länge im freien Monoid $\mathrm{Mon}^{\setminus}(X \times \{+1,-1\})$ hat, und daß diese Repräsentanten genau die „unkürzbaren Worte“ aus diesem freien Monoid sind. Hinweis: Man konstruiere eine Operation der Gruppe $\mathrm{Grp}^{\setminus} X$ auf der Menge aller unkürzbaren Worte.

Übung 16.2.5.15. Man zeige, daß x und $a := yxyx^{-1}y^{-1}$ in der freien Gruppe über den beiden Symbolen x, y eine echte Untergruppe erzeugen, die surjektiv auf die Abelianisierung unserer freien Gruppe abbildet. Hinweis: 16.2.5.14.

Übung 16.2.5.16. Jede Abbildung von Mengen $\varphi : X \to Y$ setzt sich auf genau eine Weise fort zu einer Abbildung von Gruppen $\mathrm{Grp}^{\setminus} X \to \mathrm{Grp}^{\setminus} Y$, und unser $\mathrm{Grp}^{\setminus}$ ist so in natürlicher Weise ein Funktor von den Mengen in die Gruppen. Man zeige, daß dieser Funktor $\mathrm{Grp}^{\setminus}$ kokartesische Diagramme von Mengen zu kokartesischen Diagrammen von Gruppen macht. Das wird später zu 16.4.3.12 verallgemeinert. Sind insbesondere X und Y zwei Mengen, so ist das folgende Diagramm kokartesisch in der Kategorie der Gruppen:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Grp}^{\setminus}(X \cap Y) & \to & \mathrm{Grp}^{\setminus} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Grp}^{\setminus} Y & \to & \mathrm{Grp}^{\setminus}(X \cup Y) \end{array}$$

Übung 16.2.5.17. Man zeige, daß wir einen Isomorphismus zwischen der freien Gruppe über einer endlichen Menge I und der Fundamentalgruppe der Einpunktverbindung $\bigvee_{i \in I} S^1$ von Kopien der bepunkteten Räume $(S^1, 1)$ erhalten, wenn wir jedem $i \in I$ das „einfache Durchlaufen der i-ten Kreislinie“ zuordnen.

Übung 16.2.5.18 (**Verschlungene und nicht verschlungene Kreislinien**). Die Fundamentalgruppe des Komplements der Vereinigung von zwei „nicht ineinander verschlungenen“ Kreislinien in $\mathbb{R}^3$ ist isomorph zur freien Gruppe in zwei Erzeugern. Hinweis: 16.2.4.7. Die Fundamentalgruppe des Komplements von zwei „ineinander verschlungenen“ Kreislinien in $\mathbb{R}^3$ ist isomorph zur freien abelschen Gruppe in zwei Erzeugern. Hinweis: $\mathbb{R}^3$ mithilfe von 16.2.4.6 zu S^3 ergänzen, 16.1.7.17 anwenden. Es gibt also keinen Homöomorphismus des $\mathbb{R}^3$ mit sich selber, der ein Paar von verschlungenen Kreislinien zu einem Paar von nicht verschlungenen Kreislinien macht.

Übung 16.2.5.19. Man bestimme die Fundamentalgruppe des Komplements einer Acht in $\mathbb{R}^3$.

16.2.6 Push-out von Gruppen

16.2.6.1. Schon beim Satz von Seifert und van Kampen wird sich der Leser gefragt haben, ob sich jedes Kowinkeldiagramm von Gruppen zu einem kokartesischen Diagramm vervollständigen läßt. Das ist in der Tat der Fall und soll nun bewiesen werden. Wir beginnen mit einem besonders einfachen Fall.

Satz 16.2.6.2 (**Koprodukte von Gruppen**). *In der Kategorie der Gruppen existiert zu je zwei Gruppen ein Koprodukt.*

Ergänzung 16.2.6.3. Man zeigt ähnlich, daß für eine beliebige Familie von Gruppen ein Koprodukt in der Kategorie der Gruppen existiert.

Beweis. Das Koprodukt von zwei Gruppen G_1 und G_2 heißt auch das **freie Produkt** der Gruppen G_1 und G_2 und wird notiert als

$$G_1 * G_2$$

Nach der universellen Eigenschaft der freien Gruppe $\mathrm{Grp}^{\setminus} G$ über der Menge G haben wir für jede Gruppe G genau einen Gruppenhomomorphismus $\eta = \eta_G : \mathrm{Grp}^{\setminus} G \to G$, dessen Verknüpfung mit $\varepsilon : G \to \mathrm{Grp}^{\setminus} G$ die Identität auf G ist. Den Kern $RG \subset \mathrm{Grp}^{\setminus} G$ dieses Gruppenhomomorphismus nennen wir die „Relationen von G". Wir definieren die Gruppe $G_1 * G_2$ als den Quotienten der freien Gruppe über der disjunkten Vereinigung unserer beiden Gruppen nach dem von den Relationen in beiden Gruppen erzeugten Normalteiler, in Formeln

$$G_1 * G_2 := \mathrm{Grp}^{\setminus}(G_1 \sqcup G_2)/\langle\langle RG_1 \cup RG_2 \rangle\rangle$$

Hier haben wir der Einfachheit halber das Bild von RG_i unter der von der Inklusion induzierten Abbildung $\mathrm{Grp}^{\setminus} G_i \to \mathrm{Grp}^{\setminus}(G_1 \sqcup G_2)$ auch mit RG_i bezeichnet. Wir behaupten nun, daß diese Gruppe $G_1 * G_2$ mit den offensichtlichen Abbildungen $\mathrm{can}_i : G_i \to G_1 * G_2$ ein Koprodukt ist. In der Tat, ist irgendeine Gruppe H gegeben mitsamt Abbildungen $f_1 : G_1 \to H$ und $f_2 : G_2 \to H$, so erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus $f : \mathrm{Grp}^{\setminus}(G_1 \sqcup G_2) \to H$. Ist zusätzlich f_i ein Gruppenhomomorphismus, so liegt RG_i im Kern von f. Sind f_1, f_2 Gruppenhomomorphismen, so definiert f mithin einen Gruppenhomomorphismus $\bar{f} : G_1 * G_2 \to H$. □

Korollar 16.2.6.4. *Jedes Kowinkeldiagramm von Gruppen läßt sich zu einem push-out-Diagramm vervollständigen.*

16.2.6.5. Man nennt so einen push-out auch ein **amalgamiertes Produkt** und bezeichnet ihn mit $G_1 *_G G_2$.

Beweis. Sei

$$\begin{array}{ccc} G & \stackrel{\varphi_2}{\to} & G_2 \\ {\scriptstyle\varphi_1}\downarrow & & \\ G_1 & & \end{array}$$

unser Kowinkeldiagramm. Wir konstruieren dann unseren Pushout als den Quotienten $G_1 * G_2/\langle\langle\varphi_1(x)^{-1}\varphi_2(x) \mid x \in G\rangle\rangle$ und überlassen es dem Leser, die universelle Eigenschaft zu prüfen. □

Übungen

Übung 16.2.6.6. Ist in einem kokartesischen Diagramm von Gruppen einer der Ausgangspfeile eine Surjektion, so auch der parallele Pfeil in den Pushout. Hinweis: Sein Bild hat die universelle Eigenschaft.

Übung 16.2.6.7 (**Explizite Beschreibung des freien Produkts**). Seien G_1, G_2 Gruppen. Man zeige, daß sich jedes Element des freien Produkts $G_1 * G_2$ in eindeutiger Weise als ein Produkt $g_1 g_2 \dots g_n$ schreiben läßt mit $n \geq 0$ und $g_k \in G_{\varepsilon(k)}$ nicht das neutrale Element und $\varepsilon(k) \neq \varepsilon(k+1)$ für $1 \leq k < n$. Wie üblich soll hier das leere Produkt mit $n = 0$ das neutrale Element von $G_1 * G_2$ darstellen. Hinweis: Man orientiere sich am Beweis von Übung 16.2.5.14.

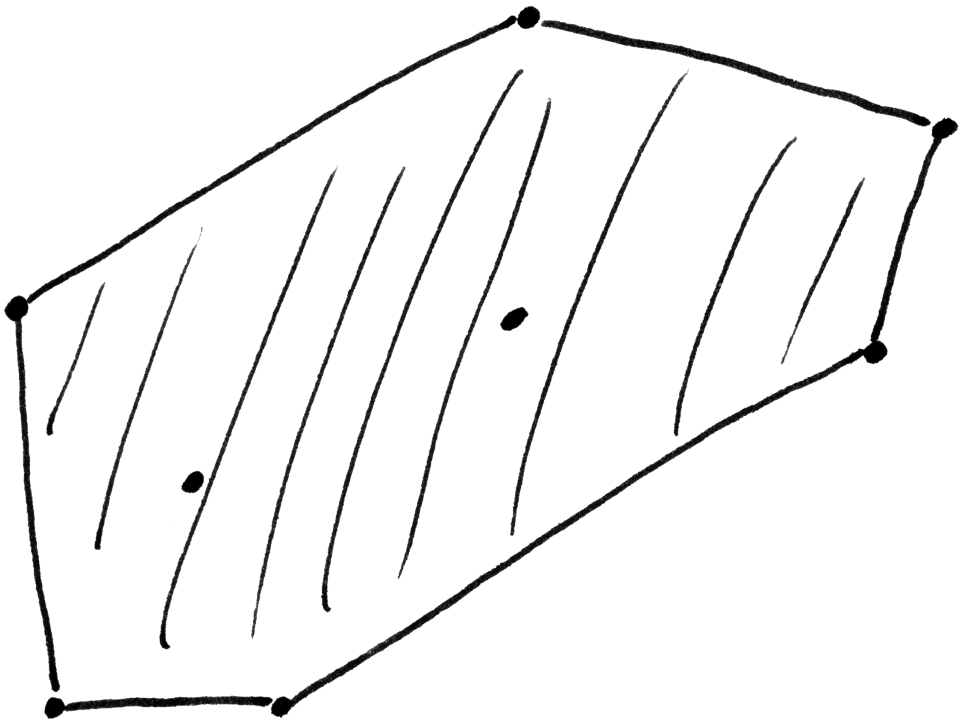
16.2.7 Simplizialkomplexe und triangulierbare Flächen

16.2.7.1. Gegeben V ein reeller Raum und $M \subset V$ eine Teilmenge definiert man die **konvexe Hülle von** M als als den Schnitt aller konvexen Teilmengen von V, die M umfassen. Explizit wird die konvexe Hülle einer nichtleeren Menge im Fall eines Vektorraums gegeben durch die Vorschrift

$$\operatorname{konv}(M) := \{\textstyle\sum_{i=0}^n t_i p_i \mid n \geq 0,\ \ p_i \in M,\ \ t_i \geq 0,\ \ \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$$

Im Fall eines affinen Raums gilt dieselbe Formel, wenn man die Summe interpretiert als $q + \sum_{i=0}^n t_i(p_i - q)$ für irgendeinen Punkt q.

Definition 16.2.7.2. Ich erinnere daran, daß eine nichtleere Familie $(p_0, \dots, p_n)$ von Punkten eines reellen affinen Raums **affin unabhängig** heißt, wenn es keinen $(n-1)$-dimensionalen affinen Teilraum gibt, der alle ihre Punkte enthält. Dann nennt man ihre konvexe Hülle $\operatorname{konv}(p_0, \dots, p_n)$ den **vollen Simplex mit Ecken** $p_0, \dots, p_n$.



Eine endliche Teilmenge der Ebene, dargestellt durch fette Punkte, und ihre konvexe Hülle, dargestellt als schraffierter Bereich.

Beispiele 16.2.7.3. Ein einzelner Punkt p ist stets affin unabhängig und wir haben $\operatorname{konv}(p) = \{p\}$. Ein Zweitupel (p, q) von Punkten ist affin unabhängig genau dann, wenn die beiden Punkte verschieden sind, und in diesem Fall ist $\operatorname{konv}(p, q)$ das „abgeschlossene Streckenstück zwischen p und q“, das wir manchmal auch $[p, q]$ notieren. Ein Dreitupel (p, q, r) von Punkten ist affin unabhängig genau dann, wenn die drei Punkte nicht auf einer affinen Gerade liegen, und in diesem Fall ist $\operatorname{konv}(p, q, r)$ die „abgeschlossene Fläche des Dreiecks mit den Ecken p, q und r“.

16.2.7.4 (**Diskussion der Terminologie**). Die Bezeichnung „Simplex“ kann wohl zurückgeführt werden auf denselben Wortstamm wie „simpel“. In jedem Fall werden volle Simplizes verwendet als einfachste Grundbausteine bei der Konstruktion komplizierterer Räume. Die Konstruktionsvorschrift ist dabei ein rein kombinatorisches Datum, das wir gleich definieren und einen „Simplizialkomplex“ nennen werden. Den zugehörigen topologischen Raum nennen wir dann seine „topologische Realisierung“.

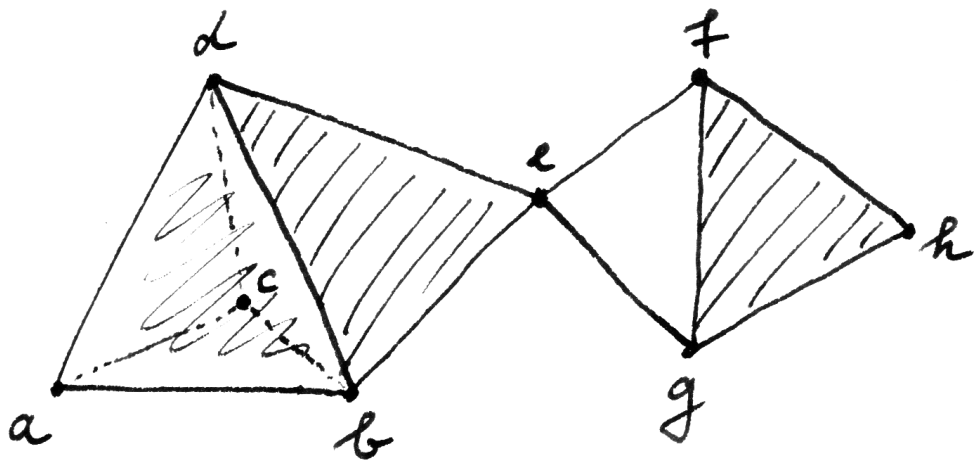
Definition 16.2.7.5. Ein **Simplizialkomplex** $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ist eine Menge E mitsamt einem System $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ von nichtleeren endlichen Teilmengen von E, das unter dem Bilden von nichtleeren Teilmengen stabil ist und alle einelementigen Teilmengen von E enthält. In Formeln ausgedrückt fordern wir von unserem Mengensystem $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ also:

1. $0 < |K| < \infty \; \forall K \in \mathcal{K}$;
2. $(K \in \mathcal{K}$ und $\emptyset \neq L \subset K) \Rightarrow L \in \mathcal{K}$;
3. $\{e\} \in \mathcal{K} \; \forall e \in E$.

Wir nennen die Elemente von E die **Ecken** und die Elemente von $\mathcal{K}$ die **Simplizes** oder ausführlicher **kombinatorischen Simplizes** unseres Simplizialkomplexes. Die Simplizes der Kardinalität $(n + 1)$ nennen wir n**-Simplizes** und die Menge aller n-Simplizes notieren wir $\mathcal{K}_n$. Wir identifizieren oft stillschweigend die Menge E der Ecken mit der Menge $\mathcal{K}_0$ der 0-Simplizes.

Vorschau 16.2.7.6 (**Diskussion der Terminologie**). Wenn in der Literatur von einem Simplizialkomplex die Rede ist, ist auch oft eine „Menge mit einer simplizialen Teilordnung“ im Sinne von Übung 16.2.7.19 gemeint. Wir diskutieren dort, inwiefern das „im wesentlichen dasselbe Datum“ ist wie ein Simplizialkomplex.

Beispiel 16.2.7.7. Jede Menge E ist mit dem System $\mathcal{K} = \mathcal{M}_E$ all ihrer nichtleeren endlichen Teilmengen ein Simplizialkomplex $\mathcal{M}_E = (E, \mathcal{M}_E)$. Ich nenne ihn den **maximalen Simplizialkomplex mit Eckenmenge** E.



Versuch der graphischen Darstellung der topologischen Realisierung eines Simplizialkomplexes mit acht Ecken $E = \{a, b, \ldots, h\}$, einem 3-Simplex $\{a, b, c, d\}$, sechs 2-Simplizes $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{b, d, e\}$, $\{f, g, h\}$, und dreizehn 1-Simplizes.

Definition 16.2.7.8. Wir ordnen jedem Simplizialkomplex $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ einen topologischen Raum $\Delta(\mathcal{K})$ zu, den wir seine **topologische Realisierung** oder kurz **Realisierung** nennen. Als zugrundeliegende Menge nehmen wir

$$\Delta(\mathcal{K}) := \left\{ t : E \to \mathbb{R}_{\geq 0} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Es gibt einen kombinatorischen Simplex } \sigma \in \mathcal{K} \\ \text{mit } (\operatorname{supp} t) = \sigma \text{ und es gilt } \sum_{e \in E} t(e) = 1 \end{array} \right\}$$

Hier verwenden wir die übliche Notation $\operatorname{supp} t := \{e \in E \mid t(e) \neq 0\}$ für den Träger oder englisch und französisch „support“ von t. Unsere Menge $\Delta(\mathcal{K})$ ist enthalten im Vektorraum $\mathbb{R}E$ aller Abbildungen $E \to \mathbb{R}$ mit endlichem Träger. Für $\sigma \in \mathcal{K}$ betrachten wir nun die Teilmenge $\Delta(\sigma) \subset \Delta(\mathcal{K})$ aller t mit Träger in σ. Bezeichnen wir für $e \in E$ mit $1e = \delta_e \in \mathbb{R}E$ das zugehörige Element der Standardbasis und besteht σ aus den $n+1$ Ecken $e_0, \ldots, e_n \in E$, so ist $\Delta(\sigma)$ gerade die konvexe Hülle der $1e_i$, in Formeln

$$\Delta(\sigma) = \operatorname{konv}(1e_0, \ldots, 1e_n)$$

Unsere topologische Realisierung ist die Vereinigung aller dieser vollen Simplizes. Ist E endlich, so nehmen wir als Topologie auf $\Delta(\mathcal{K})$ schlicht die Topologie, die induziert wird von der natürlichen Topologie auf dem endlichdimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{R}E$. Im allgemeinen versehen wir $\Delta(\mathcal{K})$ mit der Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen $\Delta(\mathcal{L}) \subset \Delta(\mathcal{K})$ von Realisierungen endlicher Unterkomplexe $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ oder gleichbedeutend der Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen $\Delta(\sigma) \subset \Delta(\mathcal{K})$ der vollen Simplizes zu $\sigma \in \mathcal{K}$. In Übung 16.2.7.17 wird erklärt, warum wir unsere Menge nicht mit der Kofinaltopologie zur Familie der Auswertungen an allen Ecken E unseres Komplexes versehen wollen.

Ergänzung 16.2.7.9. Für die Realisierung eines Simplizialkomplexes $\mathcal{K}$ ist statt $\Delta(\mathcal{K})$ auch die Notation $|\mathcal{K}|$ gängig. Ob im Zweifelsfall die Kardinalität der Menge $\mathcal{K}$ oder die Realisierung des Simplizialkomplexes $\mathcal{K}$ gemeint ist, muß der Leser dann aus dem Kontext erschließen.

Ergänzung 16.2.7.10. Ein grundlegendes und weitgehend ungelöstes Problem der Topologie ist die Klassifikation aller Realisierungen endlicher Simplizialkomplexe bis auf Homotopie, vergleiche zum Beispiel den Artikel von Baues in [Jam95].

16.2.7.11 (**Sparsame Realisierung von Simplizialkomplexen**). Wir können die Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ eines Simplizialkomplexes $(E, \mathcal{K})$ oft auch in affine Räume X einer Dimension $\dim_{\mathbb{R}} X < |E|$ einbetten. Ist genauer $E \to X$, $e \mapsto \bar{e}$ irgendeine Abbildung der Ecken unseres Simplizialkomplexes in einen reellen affinen Raum X, so gibt es genau eine affine Abbildung $\{t \in \mathbb{R}E \mid \sum t(e) = 1\} \to X$ mit $e \mapsto \bar{e}$. Ist diese Abbildung darüber hinaus injektiv auf $\Delta(\mathcal{K})$ und ist X endlichdimensional und unser Simplizialkomplex endlich, so induziert unsere Abbildung

nach 15.1.5.13 einen Homöomorphismus von der gemetrischen Realisierung unseres Simplizialkomplexes mit ihrem Bild. Dasselbe gilt mit 15.1.7.30, wenn wir statt $|\mathcal{K}| < \infty$ schwächer nur fordern, daß die Bilder der vollen Simplizes eine lokal endliche Überdeckung des Bildes von $\Delta(\mathcal{K})$ bilden. Notwendig und hinreichend für die Injektivität ist, daß (1) für jeden Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ die Familie $(\bar{p})_{p\in\sigma}$ affin unabhängig ist in X und daß (2) gegeben zwei Simplizes $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$ für die vollen Simplizes $\operatorname{konv}(\bar{\sigma}) \subset X$ gilt $\operatorname{konv}(\bar{\sigma}) \cap \operatorname{konv}(\bar{\tau}) = \operatorname{konv}(\overline{\sigma \cap \tau})$.

Definition 16.2.7.12. Eine **simpliziale Abbildung** φ von einem Simplizialkomplex $(E, \mathcal{K})$ in einen Simplizialkomplex $(F, \mathcal{L})$ ist eine Abbildung auf den Ecken $\varphi : E \to F$ derart, daß gilt $\sigma \in \mathcal{K} \Rightarrow \varphi(\sigma) \in \mathcal{L}$. So eine simpliziale Abbildung liefert eine stetige Abbildung $\Delta(\varphi) : \Delta(\mathcal{K}) \to \Delta(\mathcal{L})$ zwischen den zugehörigen topologischen Räumen durch „affine Fortsetzung auf das Innere der vollen Simplizes“, in Formeln $\Delta(\varphi) : t \mapsto s$ mit

$$s(f) := \sum_{\varphi(e)=f} t(e) \quad \forall f \in F$$

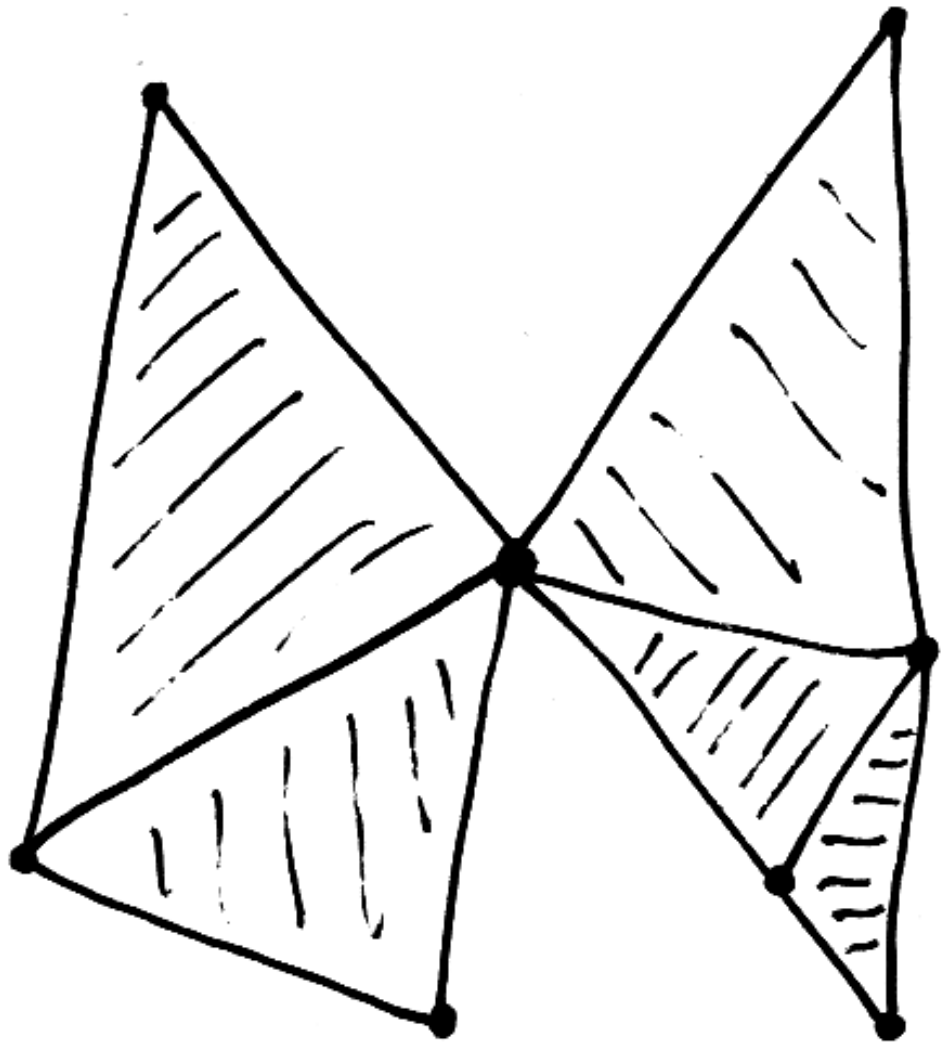
Wir nennen $\Delta(\varphi)$ die **topologische Realisierung** unserer simplizialen Abbildung und schreiben oft einfacher φ statt $\Delta(\varphi)$.

Definition 16.2.7.13. Eine **kombinatorische Fläche** ist ein endlicher Simplizialkomplex $\mathcal{F}$ derart, daß gilt:

1. Jeder Simplex liegt in einem 2-Simplex;
2. Jeder 1-Simplex liegt in höchstens zwei 2-Simplizes;
3. Alle 2-Simplizes, die einen gegebenen 0-Simplex enthalten, lassen sich so durchnummerieren als $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$, daß jeweils σ_i und σ_{i+1} eine Kante gemeinsam haben, in Formeln $|\sigma_i \cap \sigma_{i+1}| = 2$ für $1 \le i < r$.

Diejenigen 1-Simplizes, die nur zu einem einzigen 2-Simplex gehören, nennen wir die **Randkanten** unserer kombinatorischen Fläche. Gehört sogar jeder 1-Simplex zu genau zwei 2-Simplizes, so nennen wir unseren Simplizialkomplex eine **geschlossene kombinatorische Fläche** oder auch eine **kombinatorische Fläche ohne Rand**.

16.2.7.14. Es ist leicht zu sehen und auch nicht schwer zu beweisen, daß die topologische Realisierung einer geschlossenen kombinatorischen Fläche $\mathcal{F}$ eine geschlossene Fläche $\Delta(\mathcal{F})$ alias eine kompakte 2-Mannigfaltigkeit im Sinne unserer Definition 16.1.1.5 ist.



Dieser Simplizialkomplex ist keine kombinatorische Fläche, da im „mittleren Punkt“ die dritte Bedingung unserer Definition 16.2.7.13 verletzt ist.

Definition 16.2.7.15. Eine **Triangulierung** einer geschlossenen Fläche X ist ein Paar bestehend aus einer geschlossenen kombinatorischen Fläche $\mathcal{F}$ und einem Homöomorphismus $\Delta(\mathcal{F}) \tilde{\to} X$.

Ergänzung 16.2.7.16. Rado [**?**, **?**] hat gezeigt, daß jede geschlossene Fläche eine Triangulierung besitzt. Der Beweis ist nicht ganz einfach. In höheren Dimensionen gibt es kompakte topologische Mannigfaltigkeiten, die nicht homöomorph sind zur Realisierung eines Simplizialkomplexes, die also „nicht triangulierbar" sind.

Übungen

Übung 16.2.7.17. Die Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ eines Simplizialkomplexes $(E, \mathcal{K})$ ist stets Hausdorff und jede kompakte Teilmenge $A \subset \Delta(\mathcal{K})$ ist schon enthalten in einer Vereinigung von endlich vielen vollen Simplizes. Hinweis: Eine Teilmenge von $\Delta(\mathcal{K})$, die jeden Simplex in höchstens endlich vielen Punkten trifft, ist stets abgeschlossen und diskret. Besteht unser Simplizialkomplex aus abzählbar vielen Kanten, die in einen zentralen Punkt hereinlaufen, so gälte diese Aussage nicht für die von den Auswertungen an allen Ecken induzierte Initialtopologie.

Übung 16.2.7.18. Ein Simplizialkomplex heißt **lokal endlich**, wenn jede seiner Ecken nur zu endlich vielen Simplizes gehört. Man zeige, daß ein Simplizialkomplex genau dann lokal endlich ist, wenn seine topologische Realisierung lokal kompakt ist. Hinweis: 16.2.7.17.

Übung 16.2.7.19. Ein Teilordnung $\leq$ auf Menge K heiße **simplizial**, wenn gilt:

1. K hat ein kleinstes Element;

2. Jede zweielementige Teilmenge von K besitzt eine größte untere Schranke;

3. Die Menge aller Elemente kleinergleich einem beliebig vorgegebenen Element ist als teilgeordnete Menge isomorph zum System aller Teilmengen einer endlichen Menge.

Gegeben ein Simplizialkomplex $(E, \mathcal{K})$ setzen wir $\tilde{\mathcal{K}} := \mathcal{K} \sqcup \{\emptyset\}$ und nennen diese Menge seine **Augmentierung**. Dann ist für jeden Simplizialkomplex im Sinne von 16.2.7.5 die auf seiner Augmentierung $\tilde{\mathcal{K}}$ durch die Inklusion gegebenen Teilordnung simplizial. Man zeige, daß auch umgekehrt jede Menge mit einer simplizialen Teilordnung isomorph ist zur Augmentierung eines bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmten Simplizialkomplexes im Sinne von 16.2.7.5.

Ergänzende Übung 16.2.7.20. Gegeben eine Menge E nennen wir die topologische Realisierung $\Delta(\mathcal{M}_E)$ des maximalen Simplizialkomplexes $\mathcal{M}_E$ mit Eckenmenge E den **vollen Simplex mit Eckenmenge** E. Man zeige, daß für $E \neq \emptyset$ der volle Simplex $\Delta(\mathcal{M}_E)$ zusammenziehbar ist.

16.2.8 Klassifikation der geschlossenen Flächen

16.2.8.1. Wir werden im folgenden den in 16.1.1.7 formulierten Satz unter der Zusatzannahme der „Triangulierbarkeit“ beweisen, wir klassifizieren also die triangulierbaren geschlossenen Flächen bis auf Homöomorphie. Dieser Abschnitt nimmt insofern eine Sonderstellung ein, als die Argumentation nicht so weit in die formalen Details getrieben wird wie in den übrigen Abschnitten.

Definition 16.2.8.2. Sei $\mathcal{F}$ eine kombinatorische Fläche. Eine **Zerschneidung von** $\mathcal{F}$ ist eine kombinatorische Fläche $\mathcal{Z}$ mit einer simplizialen Abbildung $\varphi : \mathcal{Z} \to \mathcal{F}$, die auf den 2-Simplizes eine Bijektion $\varphi : \mathcal{Z}_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_2$ induziert. Umgekehrt sagen wir in dieser Situation auch, $\mathcal{F}$ entstehe durch **Verklebung von** $\mathcal{Z}$.

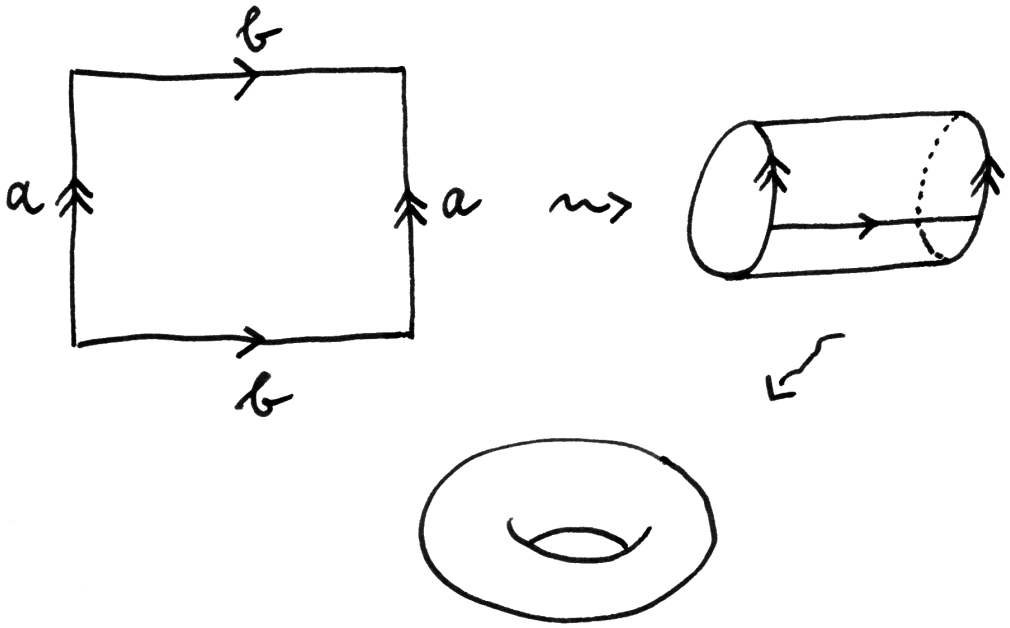
Definition 16.2.8.3. Eine kombinatorische Fläche $\mathcal{Z}$ heiße ein **Vieleck**, wenn ihre topologische Realisierung $\Delta(\mathcal{Z})$ homöomorph ist zur abgeschlossenen Kreisscheibe $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Lemma 16.2.8.4. *Ist eine kombinatorische Fläche $\mathcal{Z}$ ein Vieleck und $\varphi : D^2 \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{Z})$ ein Homöomorphismus, so ist das Bild der Kreislinie $\varphi(S^1)$ die Vereinigung der Randkanten von $\mathcal{Z}$ im Sinne von 16.2.7.13.*

Beweis. Das Komplement von S^1 kann man in der Kreisscheibe D^2 charakterisieren als die Menge aller Punkte z, die eine zusammenziehbare Umgebung U besitzen derart, daß $U \backslash z$ nichttriviale Fundamentalgruppe hat. Das Komplement der Vereinigung der Randkanten in $\Delta(\mathcal{Z})$ kann man genauso charakterisieren. $\square$

Lemma 16.2.8.5. *Jede zusammenhängende kombinatorische Fläche besitzt eine Zerschneidung zu einem Vieleck.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ unsere kombinatorische Fläche. Sicher gibt es eine Zerschneidung von $\mathcal{F}$ in eine disjunkte Vereinigung endlich vieler Vielecke. Sei $\mathcal{Z} \to \mathcal{F}$ eine solche Zerschneidung mit der kleinstmöglichen Zahl von Zusammenhangskomponenten. Nehmen wir einmal an, es gäbe hier mehr als eine Komponente. Dann könnten wir also 2-Simplizes $\sigma, \tau \in \mathcal{F}_2$ finden, die von verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{Z}$ herkommen. Da $\mathcal{F}$ zusammenhängend ist, könnten wir σ, τ in $\mathcal{F}$ durch eine Kette von 2-Simplizes $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_r = \tau$ verbinden derart, daß gilt $\sigma_i \cap \sigma_{i+1} \neq \emptyset$. Aufgrund unserer Annahmen an eine kombinatorische



Dieses Bild zeigt eine Zerschneidung des Schwimmrings alias Torus zu einem Viereck. In der demnächst eingeführten Terminologie wird es auch die Definition der Fläche $F(aba^{-1}b^{-1})$ anschaulich machen. Verkleben wir nur längs der b-Kanten, so entsteht eine Klopapierrolle. Verkleben weiter längs der b-Kanten, so entsteht ein Schwimmring alias Torus.

Fläche können wir sogar annehmen, daß $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ jeweils ein 1-Simplex ist. Dann finden wir aber notwendig ein i derart, daß σ_i und σ_{i+1} von verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{Z}$ herkommen. Verkleben wir nun diese beiden Zusammenhangskomponenten entlang der Randkante $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$, so erhalten wir eine Zerschneidung von $\mathcal{F}$ in weniger Vielecke, im Widerspruch zur angenommenen Minimalität. $\square$

16.2.8.6. Seien $\mathcal{F}$ eine geschlossene kombinatorische Fläche und $\varphi : \mathcal{Z} \to \mathcal{F}$ eine Zerschneidung zu einem Vieleck. Sicher werden unter φ die Randkanten von $\mathcal{Z}$ paarweise identifiziert. Insbesondere ist also die Zahl der Randkanten unseres Vielecks gerade. Im folgenden führen wir eine Notation für mögliche Identifizierungsvorschriften der Randkanten eines Vielecks mit einer geraden Anzahl von Kanten ein.

Definition 16.2.8.7. Sei A eine endliche Menge, die wir in diesem Zusammenhang unser „Alphabet“ nennen, mit $|A| = r \geq 0$ Elementen, den „Buchstaben“. Ein **Flächenwort** im Alphabet A ist eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \{1,2,3,\ldots,2r\} & \to & A \times \{1,-1\} \\ i & \mapsto & (a(i), \varepsilon(i)) \end{array}$$

derart, daß jeder Buchstabe genau zweimal als ein $a(i)$ vorkommt.

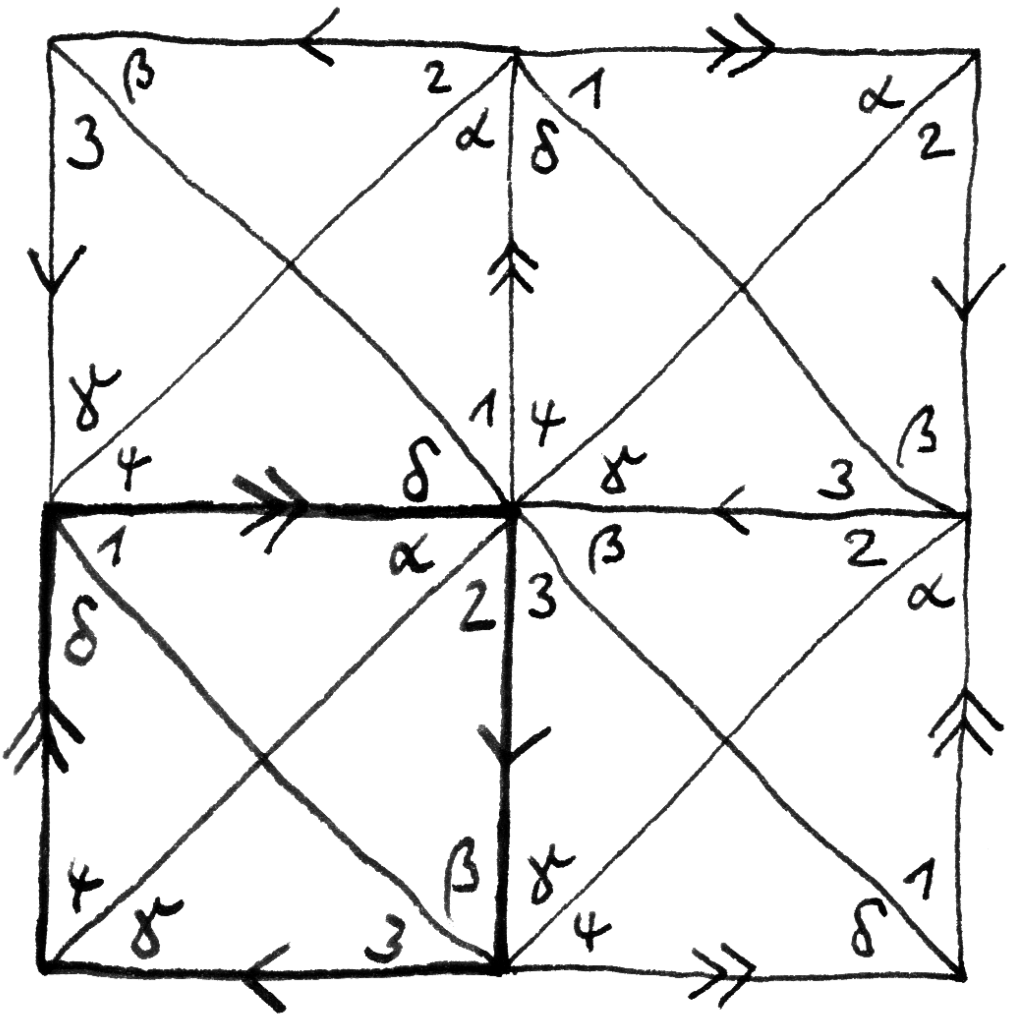
16.2.8.8. Wir schreiben Flächenworte in der Form $a(1)^{\varepsilon(1)} \ldots a(2r)^{\varepsilon(2r)}$ und nennen $2r$ die „Länge“ so eines Flächenworts. Beispiele für Flächenworte im Alphabet $A = \{a, b\}$ sind etwa die Ausdrücke $aabb^{-1}$ und $aba^{-1}b$.

16.2.8.9. Gegeben ein Flächenwort w in $r \geq 2$ Buchstaben konstruieren wir einen topologischen Raum

$$F(w)$$

wie folgt: Wir betrachten ein regelmäßiges $2r$-Eck, mit $2r$ der Länge unseres Flächenworts, und schreiben die Buchstaben unseres Flächenworts der Reihe nach an seine Kanten. Weiter versehen jede Kante mit einem Pfeil im Gegenuhrzeigersinn beziehungsweise im Uhrzeigersinn, je nachdem ob der Exponent ihres Buchstabens 1 beziehungsweise -1 ist. Dann verkleben wir jeweils die Kanten mit den gleichen Buchstaben so, daß die Spitzen der Pfeile identifiziert werden. Im Fall $r = 1$ erlauben wir dem 2-Eck krumme Kanten und erhalten so zum Beispiel $F(aa) \cong \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ und $F(aa^{-1}) \cong S^2$. Im Fall $r = 0$ setzen wir $F(\ ) = S^2$.

Lemma 16.2.8.10 (**Fläche zu einem Flächenwort**). *Der auf diese Weise zu einem Flächenwort w konstruierte topologische Raum $F(w)$ ist stets eine geschlossene Fläche.*



Dieses Bild soll die Definition der Fläche $F(aabb)$ anschaulich machen. Statt die zu jeweils zu verklebenden Randkanten mit denselben Buchstaben zu benennen, habe ich sie jeweils mit demselben Typ von Pfeilen, hier Doppelpfeilen beziehungsweise einfachen Pfeilen, gekennzeichnet. Verklebt wird eigentlich nur das fett eingezeichnete Viereck. Ich finde, man erkennt in der Mitte recht gut, wie das Verkleben eine Fläche liefert, in der alle vier Eckpunkte unseres Quadrats dasselbe Bild haben. Es ist jedoch nicht so leicht zu sehen, daß diese Fläche homöomorph ist zur Klein'schen Flasche. Um sich das zu überlegen, sollte man wohl am besten die Klein'sche Flasche zerschneiden: Einmal rund um den Flaschenhals, ein zweites Mal in Längsrichtung Flasche und Hals.

Beweis. Die größte Schwierigkeit scheint mir hierbei der Nachweis, daß auch die Bilder der Ecken unseres Vielecks im verklebten Raum $F(w)$ eine zu einer offenen Kreisscheibe homöomorphe offene Umgebung besitzen. Um das zu sehen, muß man sich überlegen, daß lokal um das Bild einer Ecke schlicht „mehrere Winkelsegmente zu einer Kreisscheibe verklebt werden". Wir überlassen die Details dem Leser. □

Satz 16.2.8.11 (**Klassifikation der geschlossenen Flächen**). *Jede zusammenhängende triangulierbare geschlossene Fläche ist homöomorph zur Fläche $F(w)$ für genau ein Flächenwort w aus der folgenden Liste:*

1. $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ *mit* $g \geq 0$;
2. $a_1a_1a_2a_2\dots a_ga_g$ *mit* $g \geq 1$.

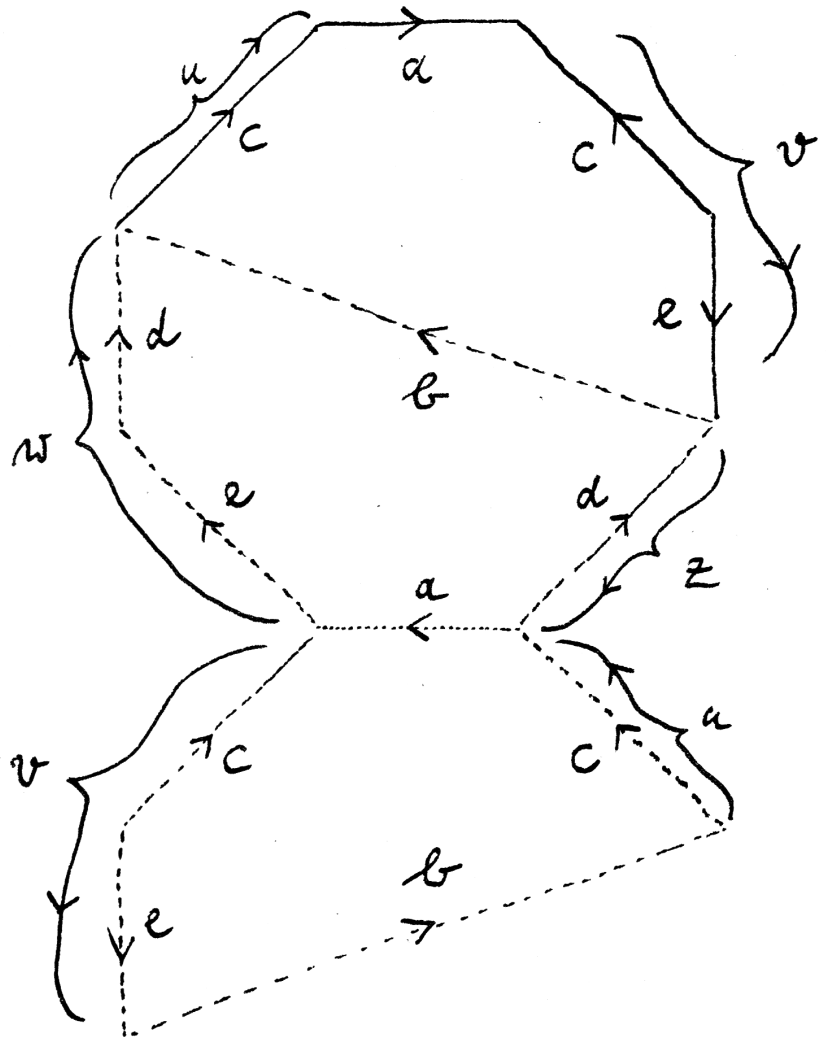
Beweis. Wir zeigen zunächst die „Ausschöpfung", daß also jede zusammenhängende triangulierbare geschlossene Fläche homöomorph ist zu mindestens einer Fläche unserer Liste. Die „Minimalität" unserer Liste, daß also keine zwei der gelisteten Flächen homöomorph sind, zeigen wir erst als letzten Punkt von Abschnitt 16.2.10. □

16.2.8.12. Dieser Satz präzisiert die in der Einleitung besprochene Klassifikation der geschlossenen Flächen 16.1.1.7. Wenn wir den Satz von Rado glauben, können wir hier sogar auf die Annahme der Triangulierbarkeit verzichten, da nach diesem Satz jede zusammenhängende geschlossene Fläche triangulierbar ist.

16.2.8.13. Zur Vorbereitung des Beweises listen wir zunächst einmal einige fundamentale Operationen auf der Menge aller Flächenwörter auf, die offensichtlich den Homöomorphietyp der zugehörigen Fläche nicht ändern. In den folgenden Formeln bedeuten a, b, c, d mit und ohne Hut stets Buchstaben unseres Alphabets A, dahingegen bedeuten u, v, w, z Abschnitte von Flächenwörtern.

1. „Zyklisches Vertauschen" und „von hinten nach vorne Lesen", in Formeln $F(vw) \cong F(wv)$ und $F(w) \cong F(w^{-1})$;
2. „Substituieren" von a^{-1} für a, in Formeln $F(va^{\varepsilon}wa^{\eta}z) \cong F(va^{-\varepsilon}wa^{-\eta}z)$;
3. „Aufschneiden des Vielecks längs der Gerade zwischen zwei Ecken und Zusammenkleben längs einer äußeren Kante" wie im nebenstehenden Bild dargestellt, in Formeln

$$\begin{array}{lcl} F(uavza^{-1}w) & \cong & F(uw\hat{a}^{-1}zv\hat{a}) \\ F(uavzaw) & \cong & F(uz^{-1}\hat{a}w^{-1}v\hat{a}) \end{array}$$



Dieses Bild soll die zweite Regel $F(uavzaw) \cong F(uz^{-1}bw^{-1}vb)$ zum Aufschneiden und Verkleben anschaulich machen. Kleben wir das darin enthaltene achteckige „Stoppschild“ zu einer Fläche zusammen, so entsteht dieselbe Fläche wie beim Zusammenkleben des mit gestricheltem Rand gezeichneten „Schmetterlings“. Hierbei könnten wir etwa konkret an ein Flächenwort in vier Buchstaben a, c, d, e denken und etwa $u = c$, $v = c^{-1}e$, $z = d^{-1}$ und $w = ed$ setzen, dieser Fall ist als Beispiel eingezeichnet.

Bei der Notation versuche ich, das Nachvollziehbarkeit zu erleichtern, in dem ich dem neu entstehenden Kantenpaar denselben Buchstaben gebe wie der durch Verkleben verschwundenen Kante, ihn aber mit einem Hut versehe. Bei der Richtung der neu entstehenden Kanten lege ich mich fest.

4. „Kürzen“, in Formeln $F(uava^{-1}) \cong F(uv)$ unter der Annahme, daß die beiden Enden der a-Kanten verschiedene Bilder in der verklebten Fläche haben. Sind hier u oder v leer, so haben die Enden der a-Kanten automatisch verschiedene Bilder und die Formel scheint mir offensichtlich. Sind u und v nicht leer, so betrachten wir in unserem Vieleck das Viereck mit den beiden a-Kanten als gegenüberliegenden Seiten. Sein Bild in der verklebten Fläche ist ein Zylinder, den wir zu einer Kreislinie identifizieren können, ohne den Homöomorphietyp der verklebten Fläche zu ändern.

16.2.8.14. Zu jedem Flächenwort w erklären wir seine **Eckenzahl** als die Zahl der Punkte in der zugehörigen Fläche $F(w)$, die Bilder von Ecken unseres Vielecks sind. Kombinatorisch betrachtet man auf der Menge der Ecken die kleinste Äquivalenzrelation, unter der je zwei Ecken mit einer Ausgangskante zum selben Buchstaben oder einer Eingangskante zum selben Buchstaben äquivalent sind, und kann dann die Eckenzahl verstehen als die Kardinalität der Äquivalenzklassen. Die Eckenzahl des leeren Worts sei Eins.

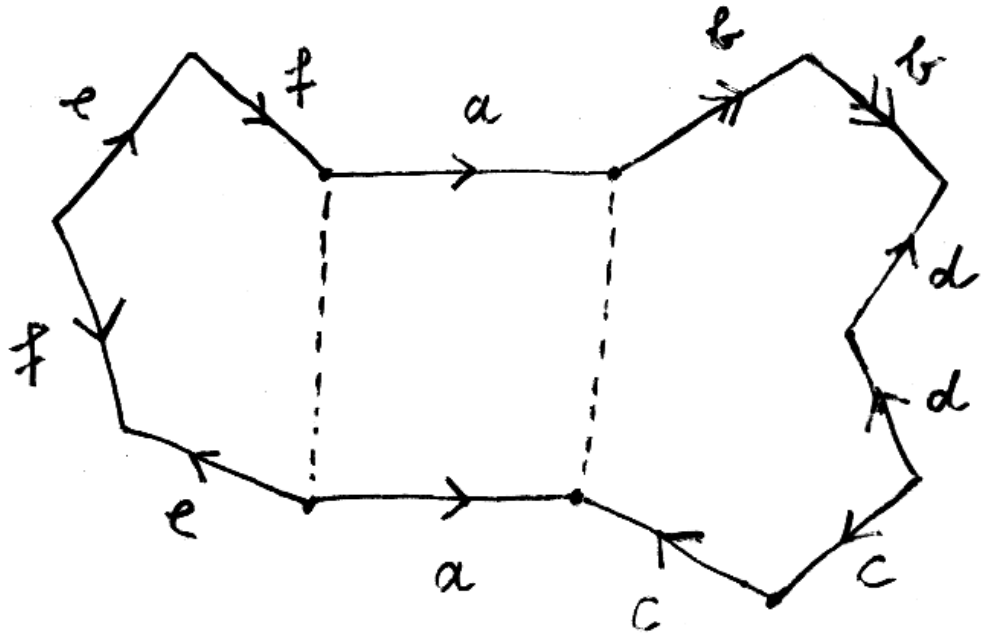
Lemma 16.2.8.15 (Eckenreduktion). *Für jedes vorgegebene Flächenwort w gibt es ein Flächenwort v mit Eckenzahl Eins und $F(w) \cong F(v)$.*

Beweis. Sei w ein Flächenwort mit Eckenzahl ≥ 2 und mehr als einem Buchstaben. Wir wählen einen Punkt P in $F(w)$, der das Bild einer Ecke unseres Vielecks ist, und nennen diejenigen Ecken unseres Vielecks „gut“, die nach P gehen. Die übrigen Ecken nennen wir „schlecht“ und geben ein Verfahren an, das entweder die Zahl der Ecken überhaupt oder die Zahl der schlechten Ecken unseres Eckenworts verringert, ohne die zugehörige Fläche zu ändern. Sei in der Tat a eine Kante von einer guten Ecke zu einer schlechten Ecke. Zwei Fälle sind möglich:

1. Die beiden a-Kanten unseres Vielecks erscheinen mit demselben Exponenten. In diesem Fall können sich nach unserer Annahme die a-Kanten nicht berühren. Wir schneiden dann zwischen den guten Enden der a-Kanten auf und verkleben längs der a-Kanten. So verringert sich die Zahl der schlechten Ecken um Eins.

2. Die beiden a-Kanten unseres Vielecks erscheinen mit verschiedenen Exponenten. In diesem Fall können wir sie kürzen und so die Eckenzahl um Eins verringern. Das zeigt das Lemma. □

Beweis des Klassifikationssatzes 16.2.8.11, Ausschöpfung. Nach der Eckenreduktion 16.2.8.15 ist jede triangulierbare Fläche homöomorph zu einer Fläche $F(w)$



Dieses Bild soll die vierte Regel zum „Kürzen“ anschaulich machen.

für ein Flächenwort w mit Eckenzahl 1. Wir bemerken für das folgende, daß sich die Eckenzahl beim Aufschneiden und Verkleben nicht ändert. Wir können uns also im Weiteren auf Worte der Eckenzahl 1 beschränken und werden von nun an nur noch solche Worte betrachten. Man beachte nun als Spezialfälle des Aufschneidens und Verklebens die beiden folgenden Regeln:

Kreuzhaubennormierung: Man findet $F(ubvbw) \cong F(uv^{-1}\hat{b}\hat{b}w)$ durch Aufschneiden zwischen den Enden von b und Verkleben längs b. Die Bezeichnung rührt daher, daß wir wie auf Seite 2678 erklärt ein Möbiusband auch als eine sogenannte Kreuzhaube realisieren können.

Henkelnormierung: Man findet $F(uavbwa^{-1}zb^{-1}x) \cong F(u\hat{a}\hat{b}\hat{a}^{-1}\hat{b}^{-1}zwvx)$. In der Tat, Aufschneiden zwischen den Enden von a und Verkleben längs b liefert $u\hat{b}^{-1}zwa^{-1}\hat{b}avx$. Nochmaliges Aufschneiden zwischen den Anfangspunkten der Kanten $\hat{b}$ und Verkleben längs a liefert das gewünschte Ergebnis.

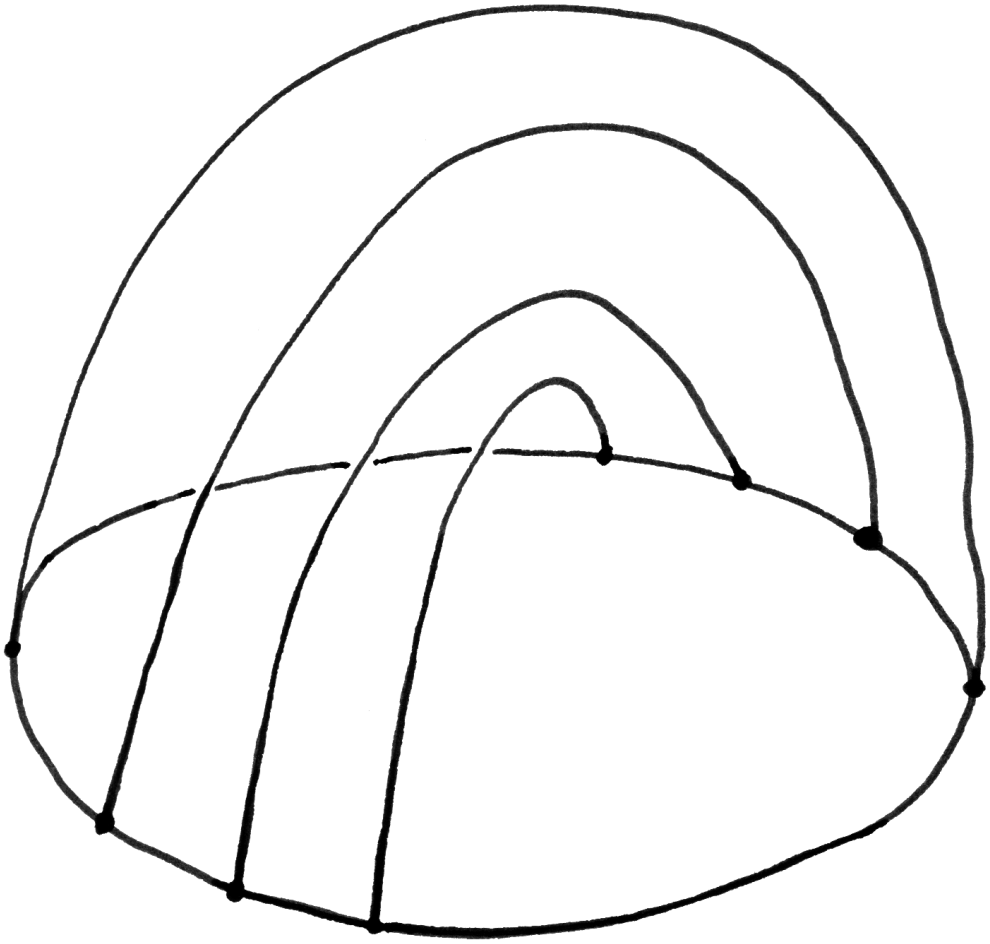
Unter Verwendung der ersten Regel normieren wir zunächst Kreuzhauben, bis wir ein Wort erreicht haben, bei dem jeder Buchstabe entweder als normierte Kreuzhaube aa beziehungsweise $a^{-1}a^{-1}$ oder in der Form $\ldots a \ldots a^{-1} \ldots$ vorkommt. Im letzteren Fall finden wir ein b derart, daß unser Wort feiner sogar die Form

$$\ldots a \ldots b \ldots a^{-1} \ldots b^{-1} \ldots$$

hat, denn sonst müßten alle Buchstaben entweder doppelt oder gar nicht zwischen a und a^{-1} vorkommen, und dann hätten Anfangs- und Endpunkt der a-Kanten verschiedene Bilder in der Fläche, im Widerspruch zu unserer Annahme der Eckenzahl 1. Mit sukzessiven Henkelnormierungen landen wir also bei einem Wort, das eine Verkettung von Kreuzhauben cc und Henkeln $aba^{-1}b^{-1}$ ist. Henkelnormierung rückwärts und dann mehrfaches Anwenden der Kreuzhaubennormierung liefert aber auch die sogenannte **Henkelelimination**, in Formeln und unter mehrfacher Verwendung der Aufschneidesymbole $\hat{a}, \hat{b}$ für unterschiedliche Kanten

$$\begin{aligned} F(u\hat{a}\hat{b}\hat{a}^{-1}\hat{b}^{-1}ccx) &\cong F(uabca^{-1}cb^{-1}x) \\ &\cong F(uaba\hat{c}\hat{c}b^{-1}x) \\ &\cong F(ub^{-1}\hat{a}\hat{a}\hat{c}\hat{c}b^{-1}x) \\ &\cong F(u(\hat{a}\hat{a}\hat{c}\hat{c})^{-1}\hat{b}\hat{b}x) \end{aligned}$$

Folglich liefert jede Verkettung von Kreuzhauben und Henkeln, in der mindestens eine Kreuzhaube auftritt, dieselbe Fläche wie ein reines Produkt von Kreuzhauben. Damit ist gezeigt, daß jede triangulierbare Fläche homöomorph ist zu mindestens einer Fläche, die durch ein Flächenwort aus unserer Liste beschrieben wird. Wir zeigen in 16.2.10, daß diese Flächen paarweise nichtisomorphe Fundamentalgruppen haben. Daraus folgt, daß sie paarweise nicht homöomorph sind, und das beendet dann den Beweis des Klassifikationssatzes. □



Man erhält eine stetige Abbildung des Möbiusbands nach $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ vermittels der Formel $(t, \tau) \mapsto (\tau\, \mathrm{e}^{\pi\, \mathrm{i}\, t}, \sqrt{1 - \tau^2} \cos^2 \pi t)$. Anschaulich gesprochen verbindet man je zwei gegenüberliegende Punkte des Einheitskreises durch einen Bogen mit variierender mittlerer Höhe. Das Bild ist eine sich selbst durchdringende räumliche Fläche, bei der man sich die Selbstdurchdringung leicht wegdenken kann. Man nennt sie auch die **Kreuzhaube**. In dieser Anschauung für das Möbiusband bezahlt man in gewisser Weise mit der Selbstdurchdringung für die gute Sichtbarkeit des Randkreises.

16.2.9 Gruppen durch Erzeugende und Relationen

16.2.9.1. Ist G eine Gruppe und $T \subset G$ eine Teilmenge, so hatten wir in 3.4.3.5 den Schnitt über alle Untergruppen von G, die T umfassen, die „von T erzeugte Untergruppe“ genannt und mit $\langle T \rangle$ bezeichnet.

Definition 16.2.9.2. Seien G eine Gruppe und $T \subset G$ eine Teilmenge. Der Schnitt über alle Normalteiler von G, die T umfassen, heißt der **von T in G erzeugte Normalteiler** $\langle\langle T \rangle\rangle_G = \langle\langle T \rangle\rangle$. Er kann auch beschrieben werden als die Untergruppe $\langle\langle T \rangle\rangle = \langle gtg^{-1} \mid g \in G, t \in T \rangle$, die von der Elementen $t \in T$ und allen ihren Konjugierten erzeugt wird.

16.2.9.3 (**Schwierigkeiten der Terminologie**). Hier treffen wir auf die semantische Schwierigkeit, daß „der von T erzeugte Normalteiler“ ja auch bedeuten könnte, daß wir die von T erzeugte Untergruppe nehmen und daß diese zusätzlich ein Normalteiler ist. In Formelsprache sollte jedoch klar werden, was jeweils gemeint ist.

Lemma 16.2.9.4. *Seien $\varphi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus und $T \subset G$ eine Teilmenge mit $\varphi(T) \subset \{e\}$. So gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi} : G/\langle\langle T \rangle\rangle \to G'$ mit $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$, im Diagramm*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[dr] & G/\langle\langle T \rangle\rangle \arrow[d, dashed] \\ & G' \end{tikzcd}$$

Beweis. Nach Annahme gilt $T \subset \ker \varphi$. Da $\ker \varphi$ stets ein Normalteiler ist, folgt $\langle\langle T \rangle\rangle \subset \ker \varphi$. Jetzt folgt die Aussage aus der universellen Eigenschaft der Restklassengruppe 4.4.2.1. □

Definition 16.2.9.5. Sei X eine Menge und $R \subset \mathrm{Grp}^{\setminus} X$ eine Teilmenge der freien Gruppe über X. Der Quotient $\mathrm{Grp}^{\setminus} X/\langle\langle R \rangle\rangle$ der freien Gruppe über X nach dem von R erzeugten Normalteiler heißt die **von der Menge X mit den Relationen R erzeugte Gruppe**. Meist werden die Relationen in der Form $a_i = b_i$ mit Wörtern $a_i, b_i \in \mathrm{Mon}^{\setminus} X$ angegeben. Gemeint ist dann $R = \{[a_i][b_i]^{-1}\}$.

Beispiel 16.2.9.6. Die von zwei Elementen x und y mit der Relation $xy = yx$ erzeugte Gruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

16.2.9.7. Die Darstellung einer Gruppe durch Erzeugende und Relationen ist nicht „effektiv“ : Es gibt nachweislich keinen Algorithmus, der bestimmt, ob so eine Gruppe trivial ist, also nur aus einem Element besteht.

Übungen

Übung 16.2.9.8. Sei eine Menge X die Vereinigung zweier Teilmengen $X = X_1 \cup X_2$ mit Schnitt $X_0 = X_1 \cap X_2$. Seien $R_i \subset \mathrm{Grp}^{\setminus} X_i$ Relationen, $i = 0, 1, 2$. Gilt zusätzlich $R_0 \subset \langle\langle R_i \rangle\rangle$ für $i = 1, 2$, so ist das folgende Diagramm ein Pushout:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Grp}^{\setminus} X_0/\langle\langle R_0 \rangle\rangle & \to & \mathrm{Grp}^{\setminus} X_1/\langle\langle R_1 \rangle\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Grp}^{\setminus} X_2/\langle\langle R_2 \rangle\rangle & \to & \mathrm{Grp}^{\setminus} X/\langle\langle R_1 \cup R_2 \rangle\rangle \end{array}$$

Übung 16.2.9.9. Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ kann beschrieben werden als die Gruppe mit Erzeugern $s_1, \ldots, s_{n-1}$ und den Relationen $s_i^2 = 1$, $s_i s_j = s_j s_i$ für $|i - j| > 1$, $(s_i s_{i+1})^3 = 1$. Die Tetraedergruppe alias die alternierende Gruppe A_4 kann beschrieben werden als die Gruppe erzeugt von zwei Elementen s, t mit Relationen $s^2 = t^3 = (st)^3 = 1$. Die Ikosaedergruppe alias die die alternierende Gruppe A_5 kann beschrieben werden als die Gruppe erzeugt von zwei Elementen u, v mit Relationen $u^2 = v^3 = (uv)^5 = 1$.

Übung 16.2.9.10. Die Abelisierung der freien Gruppe über einer Menge ist kanonisch isomorph zur freien abelschen Gruppe über besagter Menge.

16.2.10 Die Fundamentalgruppen geschlossener Flächen

Satz 16.2.10.1 (Fundamentalgruppen geschlossener Flächen). *Gegeben ein Flächenwort w im Alphabet A mit Eckenzahl Eins wird die Fundamentalgruppe der zugehörigen Fläche $F(w)$ erzeugt von der Menge A mit dem Flächenwort w als einziger Relation. Bezeichnet genauer $* \in F(w)$ das Bild der Ecken unseres Vielecks, so erhalten wir einen Isomorphismus*

$$(\mathrm{Grp}^{\setminus} A)/\langle\langle w \rangle\rangle \xrightarrow{\sim} \pi_1(F(w), *)$$

dadurch, daß wir jedem Buchstaben das Bild der entsprechenden Kante mit der durch den Exponenten unseres Buchstabens gegebenen Durchlaufrichtung zuordnen.

Beweis. Sei $v : Z \to F$ die Verklebung unseres Vielecks $Z \subset \mathbb{R}^2$ zur Fläche $F = F(w)$. Das Bild $v(\partial Z)$ vom Rand unseres Vielecks in unserer Fläche F besteht aus $|A|$ Kreislinien, die alle in einem Punkt zusammengeklebt sind. Solch einen Raum nennt man ein **Bouquet von Kreislinien**. Bezeichne nun Z° das Innere unseres Vielecks und sei $z \in Z^\circ$ sein Mittelpunkt. Unter der Verklebung v geht Z° homöomorph auf eine offene Teilmenge unserer Fläche $z : Z^\circ \xrightarrow{\sim} v(Z^\circ) \Subset F$. Wir und wenden den Satz von Seifert und van Kampen 16.2.4.1 an auf die offene Überdeckung

$$F = (F \setminus z) \cup v(Z^\circ)$$

unserer Fläche. Nehmen wir einen Punkt $e \in Z^\circ$, der auf dem offenen Geradensegment von z zur „Ausgangsecke q unseres Flächenworts w“ liegt, und setzen $\bar{e} := v(e)$, so liefert Seifert-van-Kampen 16.2.4.1 ein kokartesisches Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Z^\circ \backslash z, e) & \to & \pi_1(Z^\circ, e) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(F \backslash z, \bar{e}) & \to & \pi_1(F, \bar{e}) \end{array}$$

Nun verwenden wir den Weg, der radial von e nach q läuft, und noch genauer sein Bild in F, um die Fundamentalgruppen in der unteren Zeile mit den entsprechenden Fundamentalgruppen zum Basispunkt $*$ zu identifizieren. Weiter zeigt das „radial nach außen schieben“ von Punkten aus $Z \backslash z$, daß die Einbettung unseres Bouquets von Kreislinien $p(\partial Z) \hookrightarrow F \backslash z$ eine Homotopieäquivalenz ist und folglich einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen zum Basispunkt $*$ induziert. Die Fundamentalgruppe solch eines Bouquets haben Sie bereits in 16.2.5.17 mit der freien Gruppe über A identifiziert. Nun muß man sich überzeugen, daß unter den beschriebenen Identifikationen

$$\pi_1(F \backslash z, \bar{e}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(F \backslash z, *) \xleftarrow{\sim} \pi_1(p(\partial Z), *) \xleftarrow{\sim} \operatorname{Grp}^{\nwarrow} A$$

das Bild eines der beiden Erzeuger von $\pi_1(Z^\circ \backslash z, e)$ gerade auf das Wort w geht, aufgefaßt als Element der freien Gruppe $\operatorname{Grp}^{\nwarrow} A$. So ergibt sich ein kokartesisches Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Grp}^{\nwarrow} A & \to & \pi_1(F, *) \end{array}$$

Die Abbildung $\mathbb{Z} \to \operatorname{Grp}^{\nwarrow} A$ bildet darin die $1 \in \mathbb{Z}$ gerade auf das Flächenwort w unserer Fläche in $\operatorname{Grp}^{\nwarrow} A$ ab und die untere Horizontale unseres Diagramms induziert mithin den gesuchten Isomorphismus $(\operatorname{Grp}^{\nwarrow} A)/\langle\langle w \rangle\rangle \xrightarrow{\sim} \pi_1(F, *)$, vergleiche Übung 16.2.10.3. $\square$

Beweis des Klassifikationssatzes 16.2.8.11, Minimalität. Sicher wird jedes kokartesische Diagramm in der Kategorie der Gruppen unter der Abelisierung 16.1.8.1 ein kokartesisches Diagramm in der Kategorie der abelschen Gruppen und die Abelisierung einer freien Gruppe $\operatorname{Grp}^{\nwarrow} A$ ist die freie abelsche Gruppe $\operatorname{Ab}^{\nwarrow} A = \mathbb{Z}A$ aller endlichen formalen Linearkombinationen von Elementen von A mit ganzzahligen Koeffizienten. Für den maximalen kommutativen Quotienten π_1^{ab} der Fundamentalgruppe einer der Flächen unserer in 16.2.8.11 angegebenen Liste erhalten wir damit $\pi_1^{\mathrm{ab}}(F(w)) = \mathbb{Z}A \cong \mathbb{Z}^{2g}$ im Fall von g Henkeln und

$$\pi_1^{\mathrm{ab}}(F(w)) = \mathbb{Z}A/2\mathbb{Z}(c_1 + \ldots + c_g) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{g-1}$$

im Fall von g Kreuzhauben. Da diese Gruppen paarweise nicht isomorph sind, nach 4.4.4.4 oder auch elementar durch Zählen der Elemente endlicher Ordnung und Berechnung der Dimensionen der Vektorräume aller Gruppenhomomorphismen nach $\mathbb{Q}$, sind auch die zugehörigen Flächen paarweise nicht homöomorph. Das beendet den Beweis des Klassifikationssatzes. $\square$

Übungen

Übung 16.2.10.2. Gegeben X eine zusammenhängende geschlossene Fläche vom Geschlecht g und $E \subset X$ eine endliche nichtleere Teilmenge ist $\pi_1(X \backslash E, *)$ frei in $2g + |E| - 1$ Erzeugern.

Übung 16.2.10.3. Gegeben eine Gruppe H und ein Element $w \in H$ ist das Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \to & H/\langle\langle w \rangle\rangle \end{array}$$

mit $1 \mapsto w$ in der linken Vertikale stets kokartesisch.

16.3 Überlagerungstheorie

16.3.1 Überlagerungen

Definition 16.3.1.1. Eine stetige Abbildung $p : \tilde{U} \to U$ heißt eine **triviale Überlagerung**, wenn U nicht leer ist und es einen diskreten Raum D mitsamt einem Homöomorphismus $\tau : D \times U \xrightarrow{\sim} \tilde{U}$ gibt derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} D \times U \arrow[r, "\tau", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] & \tilde{U} \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, equal] & U \end{tikzcd}$$

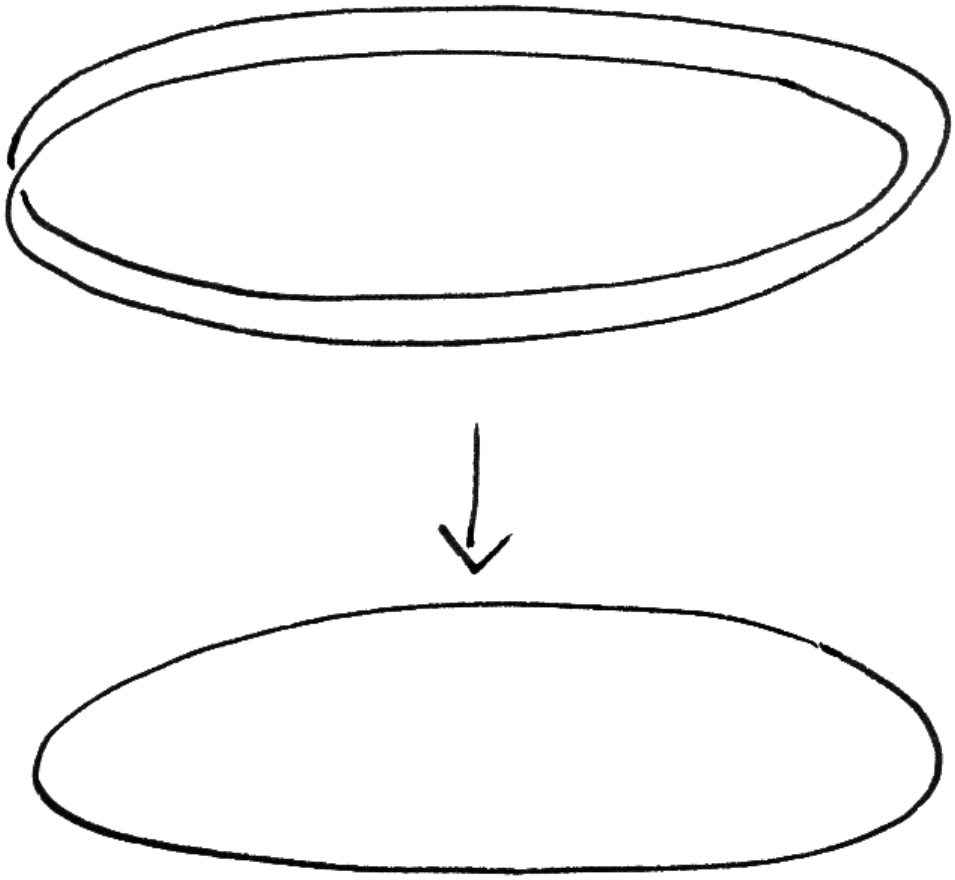
kommutiert. Solch ein Homöomorphismus heißt dann eine **Trivialisierung** unserer trivialen Überlagerung.

Definition 16.3.1.2. Eine stetige Abbildung $p : \tilde{X} \to X$ heißt eine **Überlagerung**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt derart, daß die induzierte Abbildung $p : p^{-1}(U) \to U$ eine triviale Überlagerung ist. Wir nennen U dann eine **trivial überlagerte Umgebung von** x. Der Definitionsbereich $\tilde{X}$ von p heißt der **Totalraum** unserer Überlagerung, der Wertebereich X ihre **Basis**.

16.3.1.3. Ich erinnere daran, daß gegeben eine Abbildung $f : X \to Y$ und ein Punkt $y \in Y$ sein Urbild $f^{-1}(y)$ die **Faser von** f **über** y heißt.

16.3.1.4 (**Diskussion der Terminologie**). Wir fordern nicht, daß eine Überlagerung surjektiv sein muß. Insbesondere ist für uns $\emptyset \to X$ stets eine Überlagerung. Wir fordern auch nicht, daß die Fasern einer Überlagerung konstante Kardinalität haben müssen. Eine Überlagerung mit dieser Eigenschaft nennen wir eine **Faserung mit diskreter Faser**. In der Funktionentheorie arbeitet man oft mit einem etwas allgemeineren Überlagerungsbegriff, in dem etwa die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$ noch als eine „im Ursprung verzweigte Überlagerung“ durchgehen würde. Die Überlagerungen im Sinne der obigen Definition heißen in der in der Funktionentheorie üblichen Terminologie **unverzweigte Überlagerungen**.

Beispiele 16.3.1.5. Die Abbildung $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto \exp(2\pi \mathrm{i} t) = \cos(2\pi t) + \mathrm{i}\sin(2\pi t)$ aus dem Beweis von 16.1.3.1, die die Zahlengerade auf den Einheitskreis aufwickelt, ist eine Überlagerung. Ebenso sind $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ und die Projektion $S^n \to \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ Überlagerungen und für jeden diskreten Raum F ist die Projektion $\mathrm{pr}_2 : F \times X \to X$ eine Überlagerung. Als weiteres Beispiel betrachte man $\mathrm{Exp} \times \mathrm{Exp} : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$. Sind allgemeiner $f : \tilde{X} \to X$ und $g : \tilde{Y} \to Y$ Überlagerungen, so auch $f \times g : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to X \times Y$.



Eine zweifache Überlagerung der Kreislinie.

16.3.1.6 (**Lokalkonstanz der Faserkardinalität**). Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, so ist die Kardinalität der Fasern $p^{-1}(x)$ konstant auf den Zusammenhangskomponenten von X. Genauer sind für jede Menge E die Mengen $\{x \in X \mid |p^{-1}(x)| = |E|\}$ beziehungsweise $\{x \in X \mid |p^{-1}(x)| \neq |E|\}$ aller Punkte $x \in X$, deren Fasern $p^{-1}(x)$ dieselbe beziehungsweise nicht dieselbe Kardinalität wie E haben, offen in X, da sie mit jedem Punkt auch jede trivial überlagerte Umgebung des besagten Punktes umfassen. Ist X zusammenhängend, so nennt man die Zahl der Elemente einer und gleichbedeutend jeder Faser die **Blätterzahl** der Überlagerung.

Lemma 16.3.1.7 (**Komponenten von Überlagerungen**). *Die Einschränkung einer Überlagerung eines lokal zusammenhängenden Raums auf eine Zusammenhangskomponente ihres Totalraums ist auch selbst wieder eine Überlagerung.*

Beispiel 16.3.1.8. Die Menge $\mathbb{Q}$ mit ihrer von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie ist nicht lokal zusammenhängend und für die Überlagerung $\mathrm{id} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sind die Einschränkungen auf Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{Q}$ alias Punkte keine Überlagerungen mehr. Ein Beispiel mit zusammenhängender Basis ist $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_p \to (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}$ für p prim und $\mathbb{Z}_p$ die sogenannten „p-adischen Zahlen“ und die diagonale $\mathbb{Z}$-Operation.

Vorschau 16.3.1.9. Es wird sich im folgenden mehr und mehr erweisen, daß die Überlagerungstheorie eigentlich eine Theorie der Überlagerungen lokal zusammenhängender Räume ist. Ich erinnere daran, daß ein lokal zusammenhängender Raum in unserer Terminologie ein Raum ist, bei dem sich jede Umgebung eines jeden Punktes zu einer zusammenhängenden Umgebung desselben Punktes verkleinern läßt.

Beweis. Sei $p : \tilde{X} \to X$ unsere Überlagerung und $Z \subset \tilde{X}$ eine Zusammenhangskomponente. Gegeben $z \in Z$ finden wir eine trivial überlagerte zusammenhängende Umgebung $U \subset X$ von $p(z)$. Gegeben eine Trivialisierung $\tau : D \times U \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U)$ unserer Überlagerung über U sind die $\tau(\{d\} \times U)$ für $d \in D$ zusammenhängend. Jede dieser Mengen ist damit entweder enthalten in Z oder disjunkt zu Z. Das zeigt, daß auch $Z \to X$ eine Überlagerung ist. $\square$

Definition 16.3.1.10. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt **étale**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \Subset X$ besitzt derart, daß die Restriktion $f : U \to Y$ eine offene Einbettung ist.

16.3.1.11. Das Wort „étale“ kommt aus dem Französischen und bedeutet „ausgebreitet“. Jede étale Abbildung ist offen, jede surjektive étale Abbildung ist nach 15.1.7.16 also final.

16.3.1.12. Ich erinnere daran, daß in unserer Terminologie eine Einbettung eine stetige Abbildung ist, die einen Homöomorphismus mit ihrem Bild induziert. Weiter heißt eine Abbildung offen, wenn sie offene Mengen zu offenen Mengen macht. Für Einbettungen ist letztere Bedingung gleichbedeutend dazu, offenes Bild zu haben.

Beispiele 16.3.1.13. Jede Überlagerungsabbildung ist étale. Die Projektion unserer Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt $\mathbb{R} \sqcup \{\tilde{0}\}$ aus 15.1.4.8 auf die Gerade $\mathbb{R}$ ist étale. Jede Einbettung einer offenen Teilmenge ist étale. Jede Verknüpfung étaler Abbildungen ist étale. Eine Abbildung auf einen Punkt ist genau dann étale, wenn sie von einem Raum mit diskreter Topologie ausgeht.

Lemma 16.3.1.14. *Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen und sind g und gf étale, so ist auch f étale.*

Beweis. Sei $x \in X$ gegeben. Nach Annahme besitzt $f(x)$ eine offene Umgebung $V \Subset Y$ derart, daß $g : V \to Z$ eine offene Einbettung ist. Nach Annahme besitzt x eine offene Umgebung $U \Subset X$ derart, daß $gf : U \to Z$ eine offene Einbettung ist. Indem wir andernfalls U ersetzen durch $U \cap f^{-1}(V)$ dürfen wir $f(U) \subset V$ annehmen. Für die von f und g induzierten Abbildungen $U \to V \to Z$ sind damit sowohl $gf : U \to Z$ als auch $g : V \to Z$ offene Einbettungen. Dann aber ist notwendig $f : U \to V$ initial mit offenem Bild $f(U) = g^{-1}((gf)(U))$ alias eine offene Einbettung und damit auch $f : U \to Y$. □

Definition 16.3.1.15. Wir nennen einen Raum **überlagerungstrivial**, wenn jede Überlagerung unseres Raums trivial ist.

16.3.1.16. Jeder überlagerungstriviale Raum ist zusammenhängend, da eine disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen stets nichttriviale Überlagerungen besitzt. Der leere Raum ist nicht überlagerungstrivial, da Überlagerungen der leeren Menge in unserer Terminologie keine trivialen Überlagerungen sind.

Beispiel 16.3.1.17 (**Das Einheitsintervall ist überlagerungstrivial**). Ist in der Tat $p : \tilde{X} \to [0,1]$ eine Überlagerung, so finden wir mit dem Überdeckungssatz von Lebesgue Punkte $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = 1$ derart, daß $[a_{i-1}, a_i]$ jeweils trivial überlagert ist. Wir finden also Trivialisierungen

$$\tau_i : [a_{i-1}, a_i] \times D_i \xrightarrow{\sim} p^{-1}([a_{i-1}, a_i])$$

Diese induzieren für $2 \leq i \leq r$ Bijektionen $D_i \xrightarrow{\sim} p^{-1}(a_{i-1}) \xrightarrow{\sim} D_{i-1}$, die wir verwenden können, um alle D_i so mit einer festen Menge D zu identifizieren, daß unsere Trivialisierungen zu einer Bijektion

$$\tau : [0,1] \times D \xrightarrow{\sim} \tilde{X}$$

verkleben. Diese ist stetig, da sie aus endlich vielen stetigen Abbildungen auf abgeschlossenen Teilmengen zusammengeklebt ist. Sie ist offen und sogar étale nach Lemma 16.3.1.14 und folglich ein Homöomorphismus alias eine Trivialisierung unserer Überlagerung $\tilde{X} \to [0,1]$.

Vorschau 16.3.1.18. In 16.5.3.2 zeigen wir, daß das Produkt zweier überlagerungstrivialer Räume wieder überlagerungstrivial sein muß, falls einer der Faktoren zusätzlich lokal zusammenhängend ist.

16.3.1.19. Wir nennen einen topologischen Raum **wegetrivial**, wenn er zusammenhängend, schleifenfüllend und lokal wegzusammenhängend ist.

Satz 16.3.1.20 (**Wegetrivial impliziert überlagerungstrivial**). *Jeder wegetriviale Raum ist überlagerungstrivial.*

Beispiel 16.3.1.21. Insbesondere ist jede zusammenhängende schleifenfüllende offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene überlagerungstrivial. Diese Erkenntnis wird in der Funktionentheorie meist implizit verwendet und in den jeweils benötigten Spezialfällen separat bewiesen.

Beispiel 16.3.1.22. Ersetzen wir im Rand des Quadrats $[-1,1] \times [0,2]$ das Stück $(0,\pi^{-1}]$ durch ein Stück der Sinuskurve des Topologen 15.1.3.23, genauer durch den Graphen von $(0,\pi^{-1}] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(1/x)$, so erhalten wir einen schleifenfüllenden zusammenhängenden Raum, der nicht überlagerungstrivial ist. Er ist aber nicht lokal wegzusammenhängend, deshalb liefert er kein Gegenbeispiel zu unserem Satz.

Beweis. Sei X unser Raum. Wäre X nicht überlagerungstrivial, so hätte X eine nichttriviale Überlagerung. Deren Zusammenhangskomponenten wären nach 16.3.1.7, da unser Raum lokal zusammenhängend ist, auch Überlagerungen und insbesondere offene Teilmengen und wären nach 15.1.3.15 sogar wegzusammenhängend. Mindestens eine von ihnen müßte eine nichttriviale Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ sein, sonst wäre unsere Überlagerung ja trivial. Es gäbe also $x \in X$ und zwei verschiedene Punkte $\tilde{x}_0 \neq \tilde{x}_1$ der Faser über x und einen Weg $\tilde{\gamma}$ von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{x}_1$. Der geschlossene Weg $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$ in X kann dann nicht zusammenziehbar alias nullhomotop sein, da man nach Übung 16.3.1.23 den Lift $\tilde{\gamma}$ von γ zu einem Lift der ganzen Homotopie erweitern könnte und da dieser Lift konstant sein müßte auf drei Kanten des Quadrats $[0,1]^2$, womit $\tilde{\gamma}$ doch geschlossen wäre. □

Übungen

Übung 16.3.1.23. Das Einheitsquadrat $[0,1]^2$ ist überlagerungstrivial.

Übung 16.3.1.24 (**Pullback von étalen Abbildungen**). Ist $\tilde{X} \to X$ étale und $Y \to X$ eine stetige Abbildung, so ist auch der pullback $\tilde{X} \times_X Y \to Y$ étale.

Übung 16.3.1.25 (**Pullback von Überlagerungen**). Ist $\tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $Y \to X$ eine stetige Abbildung, so ist auch der pullback $\tilde{X} \times_X Y \to Y$ eine Überlagerung. Das wird in 16.3.4.13 für die Existenz von Lifts gebraucht.

Übung 16.3.1.26. Sind $\tilde{X} \to X$ und $\hat{X} \to X$ Überlagerungen, so auch ihr Faserprodukt $\tilde{X} \times_X \hat{X} \to X$. Des weiteren hat die Diagonale $\tilde{X} \to \tilde{X} \times_X \tilde{X}$ abgeschlossenes Bild alias jede Überlagerung ist separiert im Sinne von 15.2.4.9. Das brauchen wir beim Beweis von 16.3.4.10.

Übung 16.3.1.27. Sind $p : X \to Y$ und $q : Y \to Z$ Überlagerungen und besitzt jeder Punkt $z \in Z$ eine überlagerungstriviale Umgebung, so ist auch $q \circ p$ eine Überlagerung.

Ergänzung 16.3.1.28. Dasselbe kann man für beliebiges Z zeigen, wenn die Fasern von q endlich sind, aber diese Variante ist für uns im folgenden nebensächlich.

Ergänzende Übung 16.3.1.29. Jede étale Abbildung von einem kompakten Hausdorffraum in einen Hausdorffraum ist eine Überlagerung. Besonders Mutige zeigen: Eine eigentliche separierte étale Abbildung ist dasselbe wie eine Überlagerung mit endlichen Fasern.

Ergänzende Übung 16.3.1.30. Gegeben $f : X \to Y$ eine Überlagerung mit endlichen Fasern und $X = U \sqcup V$ eine Zerlegung von X in zwei offene Teilmengen sind auch die Restriktionen von f auf U und V Überlagerungen.

16.3.2 Kategorien von Mengen mit Operation

16.3.2.1. Wir gehen nun davon aus, daß der Leser mit den grundlegenden Begriffsbildungen zu Operationen von Gruppen und allgemeiner von Monoiden vertraut ist, wie sie zum Beispiel in 4.5.1.1 entwickelt werden.

Definition 16.3.2.2. Sei G ein Monoid. Eine Abbildung $\phi : X \to Y$ von einer G-Menge X in eine G-Menge Y heißt ein G**-Morphismus** oder auch G**-äquivariant**, wenn gilt $\phi(gx) = g\phi(x)\ \forall g \in G, x \in X$. Mit den äquivarianten Abbildungen als Morphismen bilden die G-Mengen eine Kategorie, die wir mit $G\text{-}\mathrm{Ens}$ oder $\mathrm{Ens}_{G\searrow}$ bezeichnen. In derselben Weise bilden auch die G-Rechtsmengen eine Kategorie, die wir mit $\mathrm{Ens}\text{-}G$ oder $\mathrm{Ens}_{\swarrow G}$ bezeichnen.

Ergänzung 16.3.2.3. Im Rahmen der Kategorientheorie können wir die Kategorie der G-Mengen auch beschreiben als die Kategorie $G\text{-}\mathrm{Ens} = \mathrm{Cat}([G], \mathrm{Ens})$ aller Funktoren von der Ein-Objekt-Kategorie $[G]$ aus 4.7.1.6 in die Kategorie der Mengen.

Übungen

Ergänzende Übung 16.3.2.4. Ich erinnere daran, daß wir unter einem „homogenen Raum“ für eine vorgegebene Gruppe eine Menge mit einer transitiven Wirkung unserer Gruppe verstehen. Man zeige: Genau dann stimmen für einen gegebenen homogenen Raum alle Standgruppen überein, wenn er isomorph ist zum Quotienten der Gruppe nach einem Normalteiler. Wir sagen dann auch, der homogene Raum sei **normal**. Hinweis: 4.5.2.2.

Übung 16.3.2.5. Jede Gruppe operiert auf der Menge aller ihrer Untergruppen durch Konjugation. Die Bahnen dieser Operation nennt man **Konjugationsklassen von Untergruppen**. Man zeige, daß für jede Gruppe G das Bilden der Gesamtheit aller Standgruppen eine Bijektion liefert

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Transitive } G\text{-Mengen,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Konjugationsklassen von} \\ \text{Untergruppen von } G \end{array} \right\} \\ X & \mapsto & \{G_x \mid x \in X\} \end{array}$$

Im übrigen ist das schlicht die von der Äquivalenz von Kategorien 16.3.2.8 auf Isomorphieklassen von Objekten induzierte Bijektion.

Übung 16.3.2.6. Man zeige, daß die Linksoperation eines Monoids G auf sich selbst einen Isomorphismus induziert zwischen dem Monoid G und dem Monoid der Endomorphismen der G-Rechtsmenge G, in Formeln also einen Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Ens}\text{-}G)(G)$, $g \mapsto (g\cdot)$. Ebenso induziert die Rechtsoperation eines Monoids G auf sich selbst einen Isomorphismus $G^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} (G\text{-}\mathrm{Ens})(G)$, $g^\circ \mapsto (\cdot g)$.

Übung 16.3.2.7. Der **Normalisator** einer Untergruppe H in einer Gruppe G ist definiert als die Untergruppe $\mathrm{N}_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ von G. Man zeige, daß die Zuordnung $g \mapsto (\cdot g^{-1})$, die also jedem $g \in G$ die Multiplikation von rechts mit g^{-1} zuordnet, einen Isomorphismus

$$\mathrm{N}_G(H)/H \xrightarrow{\sim} (G\text{-}\mathrm{Ens})^\times(G/H)$$

induziert zwischen der Quotientengruppe $\mathrm{N}_G(H)/H$ und der Automorphismengruppe der G-Menge G/H. In derselben Weise erhält man durch die Abbildung $g \mapsto (\cdot g)$, immer noch für $G \supset H$ eine Gruppe mit einer Untergruppe einen Isomorphismus

$$(\{g \in G \mid Hg \subset gH\}/H)^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} (G\text{-}\mathrm{Ens})(G/H)$$

von Monoiden. Betrachtet man in $G = \mathrm{SL}(2;\mathbb{Q})$ die Untergruppe H aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale und einem ganzzahligen Eintrag in der oberen rechten Ecke, und nimmt als g eine geeignete Diagonalmatrix, so erhält man ein Beispiel mit $Hg \subsetneq gH$.

Übung 16.3.2.8 (**Die Untergruppenkategorie**). Sei G eine Gruppe. Wir machen die Menge UGr_G aller Untergruppen von G zu einer Kategorie durch die Vorschrift

$$\mathrm{UGr}_G(H,K) := \{gK \in G/K \mid HgK = gK\}$$

mit der Verknüpfung $\mathrm{UGr}_G(H,K) \times \mathrm{UGr}_G(K,M) \to \mathrm{UGr}_G(H,M)$ gegeben durch $(gK, fM) \mapsto gKfM = gfM$. Man zeige, daß wir eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{UGr}_G \xrightarrow{\approx} \{\text{Transitive } G\text{-Mengen}\}$$

erhalten, indem wir jeder Untergruppe $H \subset G$ den homogenen Raum G/H zuordnen und jedem Morphismus $gK \in \mathrm{UGr}_G(H,K)$ die G-äquivariante Abbildung $G/H \to G/K$, $aH \mapsto aHgK = agK$. Diese Übung ist wichtig für gewisse Formulierungen der Überlagerungstheorie.

Ergänzende Übung 16.3.2.9. Gegeben Gruppen H, G bezeichne H-Ens-G die Kategorie aller Mengen X mit einer Linksoperation von H und einer Rechtsoperation von G derart, daß gilt $(hx)g = h(xg)$ für alle $h \in H$, $x \in X$ und $g \in G$. Man erkläre, in welcher Weise diejenigen Objekte dieser Kategorie, auf denen die Rechtsoperation von G frei und transitiv ist, klassifiziert werden durch G-Konjugationsklassen von Gruppenhomomorphismen $H \to G$.

Übung 16.3.2.10. Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $G = \mathcal{C}(A)$ das Monoid seiner Endomorphismen, so erhalten wir stets einen Funktor $\mathcal{C}(A, \ ) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}\text{-}G$, indem wir setzen $fg = f \circ g$ für $B \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}(A,B)$ und $g \in \mathcal{C}(A)$.

16.3.3 Quotientenabbildungen als Überlagerungen

Definition 16.3.3.1. Unter einer **Operation eines Monoids auf einem Objekt einer Kategorie** versteht man einen Homomorphismus von besagtem Monoid in das Monoid der Endomorphismen von besagtem Objekt.

16.3.3.2. Eine Operation eines Monoids M auf einem topologischen Raum X ist also ein Monoidhomomorphismus $\varphi : M \to \mathrm{Top}(X)$. Unter der durch das Exponentialgesetz gegebenen Bijektion

$$\mathrm{Ens}(M, \mathrm{Ens}(X,X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(M \times X, X)$$

entsprechen die Monoidhomoorphismen $\varphi : M \to \mathrm{Top}(X,X)$ denjenigen Abbildungen $\tilde{\varphi} : M \times X \to X$, für die mit der vereinfachenden Notation $gx := \tilde{\varphi}(g,x)$ und der durch Hintereinanderschreiben notierten Verknüpfung in M und $1 \in M$ dem neutralen Element gilt $(hg)x = h(gx)$ $\forall h,g \in M, x \in X$ sowie $1x = x$ $\forall x \in X$ und für die $x \mapsto gx$ für alle $g \in M$ eine stetige Abbildung

$X \to X$ ist. Oft versteht man unter einer **Operation eines Monoids** M **auf einem topologischen Raum** X auch direkt eine Abbildung

$$M \times X \to X$$

mit den eben aufgeführten Eigenschaften.

16.3.3.3. Ich erinnere daran, daß eine Operation einer Gruppe auf einer Menge **frei** heißt, wenn außer dem neutralen Element kein Element unserer Gruppe irgendeinen Punkt unserer Menge festhält.

Definition 16.3.3.4. Eine Operation einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X heißt **topologisch frei**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, für die die Operation eine Injektion $G \times U \hookrightarrow X$ liefert.

16.3.3.5 (**Terminologisches**). In der Literatur heißen unsere topologisch freien Operationen meist **freie eigentlich diskontinuierliche Operationen**.

Beispiele 16.3.3.6. Die Gruppe $\mathbb{Z}^n$ operiert topologisch frei durch Addition auf $\mathbb{R}^n$. Die Gruppe $\{+1, -1\}$ operiert topologisch frei durch Multiplikation auf S^n und $\mathbb{R}^n \backslash 0$. Für festes k operiert die Gruppe $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^k = 1\}$ der k-ten Einheitswurzeln topologisch frei auf $\mathbb{C}^n \backslash 0$. Die Operation von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ durch Addition ist frei, aber nicht topologisch frei.

Ergänzung 16.3.3.7. Ist G eine topologische Gruppe und $H \subset G$ eine diskrete Untergruppe, so ist die Operation von H auf G durch Linkstranslation topologisch frei. Dasselbe gilt dann natürlich auch für die Operation durch Rechtstranslation. Sie durften das im Zusammenhang mit topologischen Gruppen als Übung 15.2.1.25 zeigen.

Ergänzung 16.3.3.8. Seien G eine Hausdorffgruppe und $K \subset G$ eine kompakte Untergruppe und $\Gamma \subset G$ eine diskrete Untergruppe. So bilden nach 15.2.4.21 die Punkte $\bar{x} \in G/K$ des Quotienten mit trivialer Standgruppe $\Gamma_{\bar{x}} = 1$ eine offene Teilmenge $V \Subset G/K$, auf der Γ topologisch frei operiert.

16.3.3.9 (**Bahnenraum**). Ist X ein topologischer Raum mit einer Operation einer Gruppe G, so geben wir dem Bahnenraum X/G die Quotiententopologie bezüglich der Surjektion $X \twoheadrightarrow X/G$. Wie wir in 15.2.2.4 gesehen haben, ist in diesem Fall sogar für einen beliebigen weiteren Raum Y die Abbildung $Y \times X \twoheadrightarrow Y \times (X/G)$ final, die offensichtliche Abbildung liefert mithin einen Homöomorphismus $(Y \times X)/G \xrightarrow{\sim} Y \times (X/G)$.

Satz 16.3.3.10 (**Quotientenabbildungen als Überlagerungen**). *Ist X ein topologischer Raum mit einer topologisch freien Operation einer Gruppe G, so ist die Surjektion auf den Bahnenraum $p : X \twoheadrightarrow X/G$, $x \mapsto Gx$ eine Überlagerung.*

Beweis. Gegeben $x \in X$ und U eine offene Umgebung von x mit $G \times U \hookrightarrow X$ sind sowohl $p : U \to p(U)$ als auch $G \times U \to p^{-1}(p(U))$ Homöomorphismen, da diese Abbildungen beide bijektiv, offen und stetig sind. Folglich ist $p(U)$ eine trivial überlagerte Umgebung von Gx. □

Beispiel 16.3.3.11. Die Klein'sche Flasche kann realisiert werden als der Quotient der Ebene nach einer topologisch frei operierenden Gruppe, wie nebenstehendes Bild illustriert.

Übungen

Übung 16.3.3.12. Jede freie Operation einer endlichen Gruppe auf einem Hausdorffraum ist topologisch frei.

Übung 16.3.3.13 (**Quotient einer Überlagerung**). Ist $p : X \to Y$ eine Überlagerung eines lokal zusammenhängenden Raums Y und operiert eine Gruppe G topologisch frei auf X und stabilisiert die Fasern von p, so ist auch $X/G \to Y$ eine Überlagerung.

Übung 16.3.3.14. Seien G eine Gruppe und $f : X \to Y$ eine stetige G-äquivariante Abbildung von topologischen Räumen mit G-Operation. Man zeige: Operiert G topologisch frei auf Y, so auch auf X. Operiert G topologisch frei auf Y, so liefert das Bilden des Bahnenraums eine Äquivalenz von Kategorien

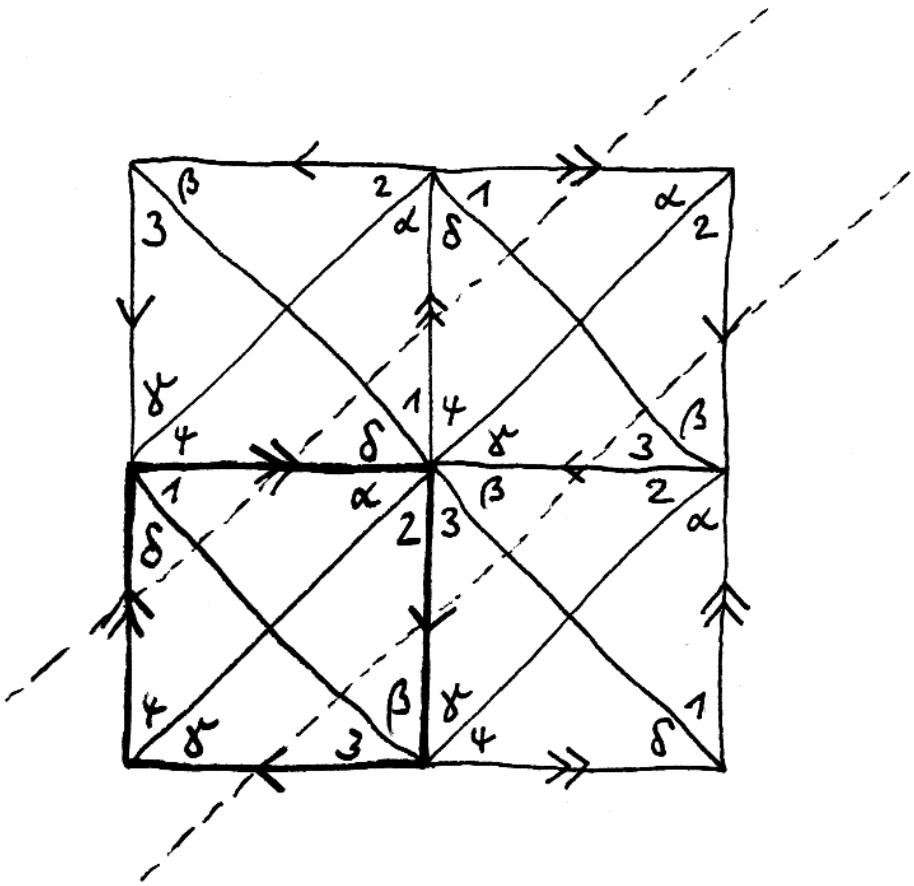
$$\mathrm{Top}_Y^G \xrightarrow{\approx} \mathrm{Top}_{Y/G}$$

zwischen der Kategorie der topologischen Räume über Y mit einer äquivarianten G-Operation und der Kategorie der topologischen Räume über Y/G. Hinweis: Man mag einen Quasiinversen konstruieren als das Faserprodukt mit Y über Y/G. Unter diesen zueinander inversen Äquivalenzen bleiben alle Eigenschaften erhalten, die lokal sind in der Basis.

16.3.4 Lifts und Decktransformationen

Definition 16.3.4.1. Seien $p : \tilde{X} \to X$ und $f : Y \to X$ stetige Abbildungen. Eine stetige Abbildung $h : Y \to \tilde{X}$ mit $p \circ h = f$ heißt ein **Lift** oder eine **Hochhebung** von f.

16.3.4.2. In der Kategorientheorie hatten wir so einen Lift einen „Morphismus über X" genannt. Der Begriff Lift ist insbesondere dann gebräuchlich, wenn $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung ist. Man mag sich einen Lift durch das folgende



Dieses Bild der Fläche $F(aabb)$ von Seite 2672 kann gelesen werden als eine Darstellung der Klein'schen Flasche als der Quotient der Ebene nach einer topologisch frei operierenden Gruppe, die von zwei Gleitspiegelungen mit parallelen Achsen und demselben Verschiebungsvektor erzeugt wird. Die Gleitspiegelachsen zweier erzeugender Gleitspiegelungen sind hier gestrichelt eingezeichnet.

kommutative Diagramm veranschaulichen, das gleichzeitig auch die Terminologie erklärt:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

16.3.4.3. Sind $p : \tilde{X} \to X$ und $q : \hat{X} \to X$ Überlagerungen eines topologischen Raums X, so heißt ein Lift von q alias eine stetige Abbildung $h : \hat{X} \to \tilde{X}$ mit $p \circ h = q$ eine **Decktransformation** zwischen unseren Überlagerungen. Wir erhalten so die Kategorie

$$\mathrm{Üb}_X$$

der Überlagerungen von X mit Überlagerungen als Objekten und Decktransformationen als Morphismen. Wir bezeichnen die Menge aller Decktransformationen zwischen zwei Überlagerungen $\hat{X}$ und $\tilde{X}$ eines Raums X nach unseren Konventionen mit $\mathrm{Top}_X(\hat{X}, \tilde{X})$. Die Automorphismen einer Überlagerung heißen auch ihre **Deckbewegungen**. Wir schreiben nach unseren Konventionen $\mathrm{Top}_X^\times(\tilde{X})$ für die Gruppe der Deckbewegungen von $\tilde{X}$ über X.

Beispiele 16.3.4.4. Die Deckbewegungen unserer Überlagerung $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$ sind genau die Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Ist allgemeiner X zusammenhängend und operiert die Gruppe G topologisch frei auf X, so sind die Abbildungen $x \mapsto gx$ für $g \in G$ genau die Deckbewegungen der Überlagerung $X \to G\backslash X$. Das folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit von Lifts auf zusammenhängenden Räumen 16.3.4.10.

16.3.4.5. Da jede Überlagerungsabbildung étale ist, muß nach 16.3.1.14 auch jede Decktransformation étale sein. Insbesondere ist also jede Decktransformation offen und jede bijektive Decktransformation ein Isomorphismus von Überlagerungen.

Satz 16.3.4.6 (Decktransformationen als Überlagerungen). *Jede Decktransformation zwischen Überlagerungen eines lokal zusammenhängenden Raums ist bereits selbst eine Überlagerungsabbildung.*

16.3.4.7. Insbesondere hat jede Decktransformation zwischen Überlagerungen eines lokal zusammenhängenden Raums offenes und abgeschlossenes Bild, denn nach der Lokalkonstanz der Faserkardinalität 16.3.1.6 gilt das für jede Überlagerungsabbildung.

Beweis. Seien $q : \hat{X} \to X$ und $p : \tilde{X} \to X$ unsere Überlagerungen und $h : \hat{X} \to \tilde{X}$ unsere Decktransformation. Gegeben $\tilde{x} \in \tilde{X}$ hat sein Bild $x \in X$ eine zusammenhängende Umgebung U, auf der unsere beiden Überlagerungen Trivialisierungen $\kappa : U \times \hat{D} \xrightarrow{\sim} q^{-1}(U)$ und $\tau : U \times \tilde{D} \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U)$ besitzen.

Wir dürfen weiter annehmen, daß $\tilde{D} = \tilde{p}^{-1}(x)$ die Faser über x ist und daß gilt $\tau(x, \tilde{d}) = \tilde{d}$ für alle $\tilde{d} \in \tilde{D}$ und entsprechend für die erste Überlagerung. Dann gilt notwendig $h(\kappa(z, \hat{d})) = \tau(z, h(\hat{d}))$ und das zeigt, daß auch h eine Überlagerung ist. □

Ergänzung 16.3.4.8. Mir ist nicht klar, ob im Fall einer beliebigen Basis jede Decktransformation bereits selbst eine Überlagerungsabbildung sein muß. Ich erwarte eher ein Gegenbeispiel.

16.3.4.9. Eine Decktransformation einer Überlagerung auf sich selber muß keine Deckbewegung sein. Man findet leicht Gegenbeispiele mit unzusammenhängendem Totalram. Es gibt sogar Gegenbeispiele mit zusammenhängendem Totalram für absolut vernünftige Räume, vergleiche 16.4.4.4. Eine Überlagerung muß auch durchaus nicht der Quotient nach einer Gruppenwirkung sein. Wir sehen bald absolut vernünftige Gegenbeispiele.

Satz 16.3.4.10 (Eindeutigkeit von Lifts). *Seien $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f : Y \to X$ stetig und $g, h : Y \to \tilde{X}$ zwei Lifts von f. Ist Y zusammenhängend und gibt es $y \in Y$ mit $g(y) = h(y)$, so gilt $g = h$.*

Ergänzung 16.3.4.11. Dasselbe gilt mit demselben Beweis, wenn wir von f nur fordern, daß es étale und separiert sein soll.

Beweis. Nach 16.3.1.26 ist $\tilde{X} \times_X \tilde{X}$ eine Überlagerung von X und die Diagonale $\Delta : \tilde{X} \hookrightarrow \tilde{X} \times_X \tilde{X}$ hat abgeschlossenes Bild. Da Δ eine Decktransformation ist, muß aber das Bild auch offen sein. Die Abbildung $(g, h) : Y \to \tilde{X} \times_X \tilde{X}$ ist nun stetig und das Urbild der Diagonale unter dieser Abbildung ist folglich offen und abgeschlossen in Y. Für Y zusammenhängend muß dies Urbild also entweder leer sein oder ganz Y. Da es y enthält, ist es nicht leer und es folgt $g = h$. □

Elementarer Beweis. Wir zeigen, daß die Mengen $Y_1 := \{z \in Y \mid g(z) = h(z)\}$ und $Y_2 := \{z \in Y \mid g(z) \neq h(z)\}$ beide offen sind. Aus $y \in Y_1$ und Y zusammenhängend folgt dann $Y_2 = \emptyset$. Sei also $z \in Y$ ein Punkt. Man wähle eine trivial überlagerte Umgebung U von $f(z)$ und eine Trivialisierung $\tau : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} D \times U$ von p auf U. Gilt $\tau g(z) \in \{d\} \times U$, so besitzt z eine Umgebung V mit $g(V) \subset p^{-1}(U)$ und sogar $\tau g(V) \subset \{d\} \times U$. Analoges gilt für h. Also sind Y_1 und Y_2 beide offen. □

16.3.4.12. Ein **bepunkteter Raum** ist ein Paar (X, x) aus einem topologischen Raum X und einem Punkt $x \in X$, dem **Basispunkt** unseres bepunkteten Raums. Von einer stetigen Abbildung $f : (X, x) \to (Y, y)$ bepunkteter Räume fordern wir stets implizit $f(x) = y$.

Satz 16.3.4.13 (Existenz von Lifts). *Seien $f : (Y, y) \to (X, x)$ eine stetige Abbildung und $(\hat{X}, \hat{x}) \to (X, x)$ eine Überlagerung. Ist Y überlagerungstrivial, so besitzt f genau einen Lift $\hat{f} : (Y, y) \to (\hat{X}, \hat{x})$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Satz 16.3.4.10 über die Eindeutigkeit von Lifts, da ja Y zusammenhängend ist nach 16.3.1.16. Die wesentliche neue Aussage betrifft die Existenz. Wir betrachten dazu das pull-back-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X \hat{X} & \to & \hat{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & X \end{array}$$

Nach Übung 16.3.1.25 ist auch die linke Vertikale eine Überlagerung. Wenn Y überlagerungstrivial ist, muß die linke Vertikale eine triviale Überlagerung sein. Wir finden also eine stetige Abbildung $Y \to Y \times_X \hat{X}$ mit $y \mapsto (y, \hat{x})$. Verknüpfen mit der oberen Horizontale gibt den gesuchten Lift. □

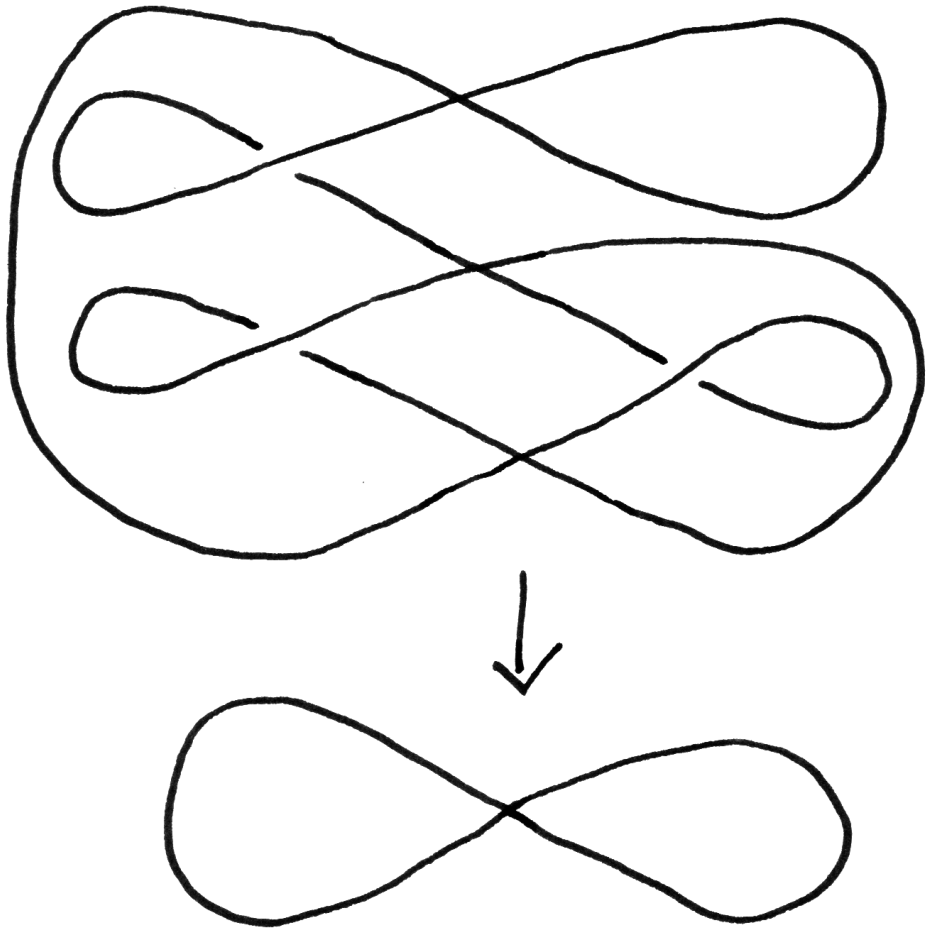
Beispiel 16.3.4.14. Ist $U \subset \mathbb{C}$ überlagerungstrivial und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig ohne Nullstelle, so gibt es für jedes $n \in \mathbb{Z}\backslash 0$ eine stetige Funktion $g : U \to \mathbb{C}^\times$ mit $g(z)^n = f(z)$ für alle $z \in U$. Weiter gibt es $g : U \to \mathbb{C}$ stetig mit $\exp(g(z)) = f(z)$ für alle $z \in U$. Beide Behauptungen bedeuten ja nur die Existenz eines Lifts in Bezug auf die Überlagerung $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto z^n$ beziehungsweise die Überlagerung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$. Sind wir in der Funktionentheorie und ist U zusätzlich offen, so zeigt der Umkehrsatz für holomorphe Funktionen 14.3.4.1, daß mit f auch g holomorph sein muß.

Proposition 16.3.4.15 (Freiheit der Operation der Deckbewegungsgruppe). *Gegeben eine Überlagerung mit zusammenhängendem Totalraum operiert ihre Deckbewegungsgruppe stets topologisch frei auf dem Totalraum.*

Beweis. Sei $p : \tilde{X} \to X$ unsere Überlagerung und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ein Punkt und $x \in X$ sein Bild. Es hat eine trivial überlagerte offene Umgebung $U \Subset X$ und gegeben eine Trivialisierung $\tau : U \times D \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U)$ gibt es ein $d \in D$ mit $\tau(x, d) = \tilde{x}$. Ich behaupte, daß dann die Operation eine Injektion $G \times \tau(U \times \{d\}) \hookrightarrow \tilde{X}$ induziert. In der Tat folgt aus $g\tau(u, d) = h\tau(v, d)$ durch Anwenden von p sofort $u = v$ und daraus $\tau(u, d) = \tau(v, d)$ und mit dem Satz über die Eindeutigkeit von Lifts schließlich $g = h$ wie gewünscht. □

Definition 16.3.4.16. Eine zusammenhängende Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ derart, daß für jeden Punkt $x \in X$ die Gruppe der Deckbewegungen transitiv auf der Faser $p^{-1}(x)$ operiert, nennen wir eine **Galois-Überlagerung** oder **galois**.

16.3.4.17 (**Diskussion der Terminologie**). Statt „galois“ sagt man auch **normal** oder **regulär**. Ich ziehe galois vor, denn normalerweise ist eine Überlagerung keineswegs galois.



Versuch der bildlichen Darstellung einer dreiblättrigen Überlagerung der Acht, die keine nichttrivialen Decktransformationen zuläßt. Diese Überlagerung ist also nicht galois.

Übungen

Übung 16.3.4.18 (**Normale Hülle**). Man zeige, daß jede endliche zusammenhängende lokal zusammenhängende surjektive Überlagerung selbst eine endliche Überlagerung besitzt derart, daß die Verknüpfung der beiden Überlagerungsabbildungen eine normale Überlagerung ist. Hinweis: Man bilde über der Basis das Faserprodukt einiger Kopien unserer Überlagerung mit sich selbst und nehme darin eine geeignete Zusammenhangskomponente. Man zeige auch, daß es zu je zwei endlichen zusammenhängenden lokal zusammenhängenden surjektiven Überlagerungen eine weitere endlichen zusammenhängende Überlagerung gibt, die über beide als Überlagerungsabbildung faktorisiert.

16.3.5 Initiale und universelle Überlagerungen

Definition 16.3.5.1. Eine bepunktete Überlagerung $(\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ heißt **initial** oder ausführlich eine **initiale bepunktete Überlagerung**, wenn es für jede weitere bepunktete Überlagerung $(\hat{X}, \hat{x}) \to (X, x)$ ihrer Basis genau eine basispunkterhaltende Decktransformation $(\tilde{X}, \tilde{x}) \to (\hat{X}, \hat{x})$ gibt.

Beispiele 16.3.5.2 (**Initialität bei überlagerungstrivialem Totalraum**). Nach unseren Sätzen 16.3.4.10 und insbesondere 16.3.4.13 über die Existenz und Eindeutigkeit von Lifts ist jede Überlagerung durch einen überlagerungstrivialen Raum bepunktet initial für jede mögliche Bepunktung. Da nach 16.3.1.20 jeder wegetriviale Raum bereits überlagerungstrivial sein muß, ist etwa $\exp : (\mathbb{R}, x) \to (S^1, \exp(x))$ eine initiale bepunktete Überlagerung für alle $x \in \mathbb{R}$.

16.3.5.3. Eine initiale bepunktete Überlagerung ist stets zusammenhängend. In der Tat, wäre andernfalls $\tilde{X} = \tilde{X}_1 \sqcup \tilde{X}_2$ eine Zerlegung in zwei nichtleere offene Teilmengen, so könnten wir leicht zwei verschiedene Decktransformationen $\tilde{X} \to \tilde{X} \sqcup \tilde{X}$ angeben, unter denen $\tilde{x}$ dasselbe Bild hat. Das Bild $p(\tilde{X}) \subset X$ ist also zusammenhängend und nach unseren Erkenntnissen zur Kardinalität der Fasern einer Überlagerung 16.3.1.6 ist es auch offen und abgeschlossen in X.

16.3.5.4 (**Eindeutigkeit initialer bepunkteter Überlagerungen**). In kategorientheoretischer Terminologie ist eine initiale bepunktete Überlagerung eines bepunkteten Raums ein initiales Objekt in der Kategorie aller seiner bepunkteten Überlagerungen. Insbesondere ist sie eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus, weshalb wir guten Gewissens mit einem bestimmten Artikel von der initialen bepunkteten Überlagerung reden dürfen.

Satz 16.3.5.5 (**Eigenschaften initialer bepunkteter Überlagerungen**). *Gegeben eine initiale bepunktete Überlagerung $u : (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ eines zusammenhängenden lokal zusammenhängenden Raums gilt:*

1. *Jede Decktransformation von $\tilde{X}$ zu sich selbst ist bereits eine Deckbewegung, in Formeln* $\mathrm{Top}_X^\times(\tilde{X}) = \mathrm{Top}_X(\tilde{X})$*;*

2. *Die Deckbewegungsgruppe $G := \mathrm{Top}_X^\times(\tilde{X})$ operiert topologisch frei auf dem Totalraum $\tilde{X}$;*

3. *Unsere Überlagerungsabbildung induziert einen Homöomorphismus*

$$\tilde{X}/G \xrightarrow{\sim} X$$

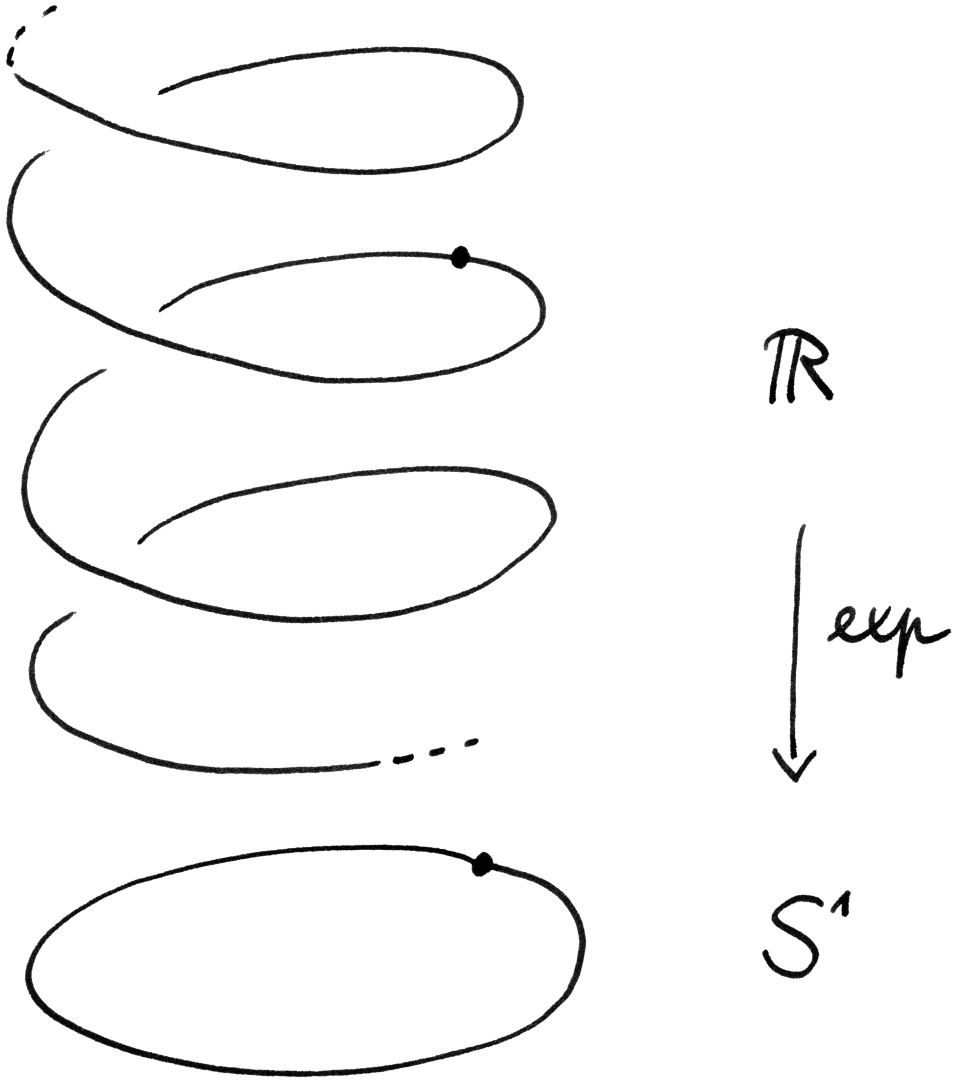
4. *Für jeden Punkt $\tilde{z} \in \tilde{X}$ ist auch $u : (\tilde{X}, \tilde{z}) \to (X, u(\tilde{z}))$ eine initiale bepunktete Überlagerung.*

Beweis. 1. Jede Decktransformation $\varphi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ ist surjektiv nach 16.3.4.6, weil wir unsere Basis lokal zusammenhängend angenommen hatten. Es gibt also $\hat{x} \in \tilde{X}$ mit $\varphi(\hat{x}) = \tilde{x}$. Aufgrund der Initialität gibt es dann auch eine Decktransformation $\psi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ mit $\psi(\tilde{x}) = \hat{x}$. Sowohl $\psi\varphi$ als auch $\varphi\psi$ sind Decktransformationen, die einen Punkt festhalten, also nach der Eindeutigkeit von Lifts die Identität. Also ist jede Decktransformation eine Deckbewegung.

2. Da jede initiale bepunktete Überlagerung $\tilde{X}$ zusammenhängend ist, operiert nach 16.3.4.15 die Deckbewegungsgruppe topologisch frei auf $\tilde{X}$.

3. Da X lokal zusammenhängend angenommen war, muß $\tilde{X}/G \to X$ nach Übung 16.3.3.13 ebenfalls eine Überlagerung sein. Nun besteht aber bei letzterer Überlagerung die Faser über unserem Basispunkt x nur aus einem Punkt, da nach dem ersten Teil alle Decktransformationen bereits Deckbewegungen sind und die Deckbewegungsgruppe mithin und aufgrund der Initialität transitiv auf $p^{-1}(x)$ operiert. Da nach 16.3.1.6 die Faserkardinalität lokal konstant ist und X zusammenhängend angenommen war, muß diese Überlagerung einblättrig und damit ein Homöomorphismus $\tilde{X}/G \xrightarrow{\sim} X$ sein.

4. Sei $(\hat{X}, \hat{z}) \to (X, u(\tilde{z}))$ eine bepunktete Überlagerung. Wir müssen zeigen, daß es genau eine bepunktete Decktransformation $(\tilde{X}, \tilde{z}) \to (\hat{X}, \hat{z})$ gibt. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit von Lifts. Um die Existenz zu zeigen, dürfen wir $\hat{X}$ durch die Zusammenhangskomponente von $\hat{z}$ ersetzen, die nach 16.3.1.7 unter unseren Annahmen auch eine Überlagerung von X sein muß, und dürfen damit $\hat{X}$ zusammenhängend annehmen. Nach **??** ist $\hat{X} \to X$ surjektiv. Aufgrund der Initialität von $\tilde{X}$ gibt es damit eine Decktransformation $d : \tilde{X} \to \hat{X}$ und diese ist nach 16.3.4.7 surjektiv und wir finden $\check{z} \in \tilde{X}$ mit $d(\check{z}) = \hat{z}$. Wegen $u(\check{z}) = u(\tilde{z})$ gibt es aber nach Teil 3 ein $g \in G$ mit $g(\tilde{z}) = \check{z}$ und dann ist dg die gesuchte Decktransformation mit $\tilde{z} \mapsto \hat{z}$. $\square$



Versuch der graphischen Darstellung einer universellen Überlagerung einer bepunkteten Kreislinie. Gemeint ist eine nach oben und unten unendliche Spirale, die vertikal auf die Kreislinie projeziert wird.

Definition 16.3.5.6. Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ eines zusammenhängenden Raums heißt eine **universelle Überlagerung**, wenn $\tilde{X}$ nicht leer ist und wenn für alle $\tilde{x} \in \tilde{X}$ die Überlagerung von bepunkteten Räumen $(\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, p(\tilde{x}))$ bepunktet initial ist.

16.3.5.7. Jede initiale bepunktete Überlagerung eines zusammenhängenden und lokal zusammenhängenden Raums ist nach 16.3.5.5 universell. Die Bezeichnung „universell“ bezieht sich auf die „universelle Eigenschaft“, die wir „bepunktet initial“ genannt hatten und die wir bei universellen Überlagerungen stärker sogar für alle Punkte des Totalraums fordern.

16.3.5.8 (**Eindeutigkeit universeller Überlagerungen**). Universelle Überlagerungen haben keine vernünftige universelle Eigenschaft und sind nur eindeutig bis auf nicht-eindeutigen Isomorphismus, was man leicht aus der Eindeutigkeit im bepunkteten Fall folgert. Wir erlauben uns dennoch auch in dieser Situation den bestimmten Artikel.

Beispiel 16.3.5.9. Die Überlagerung $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$ ist nach 16.3.5.2 universell.

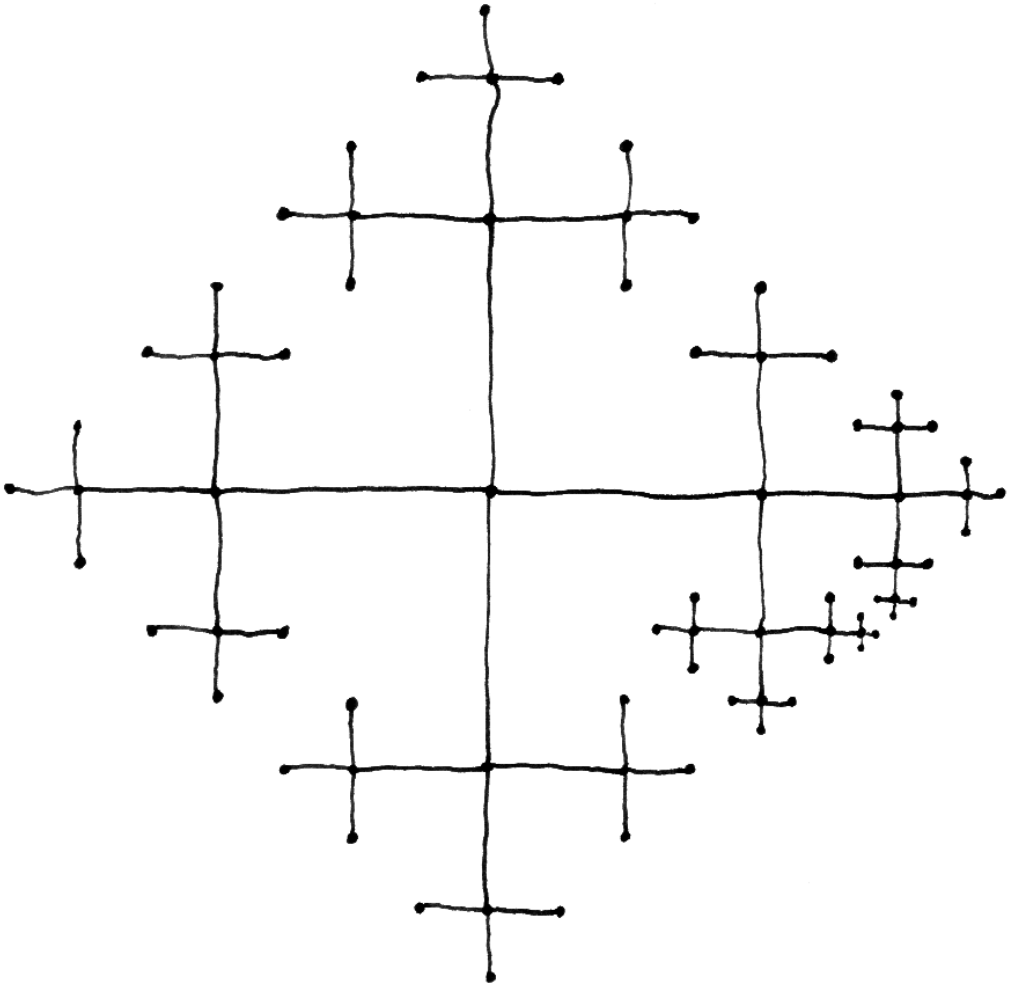
16.3.5.10 (**Deckbewegungen universeller Überlagerungen**). Gegeben eine universelle Überlagerung $\tilde{X} \to X$ ist jede Decktransformation $\tilde{X} \to \tilde{X}$ bereits eine Deckbewegung, die Deckbewegungsgruppe G operiert topologisch frei auf $\tilde{X}$ und die Überlagerungsabbildung induziert einen Homöomorphismus $\tilde{X}/G \xrightarrow{\sim} X$. Das alles folgt genau wie im bepunkteten Fall 16.3.5.5, nur daß wir die Bedingung „lokal zusammenhängend“ aufgrund der stärkeren Annahmen nicht mehr benötigen.

Lemma 16.3.5.11. *Ein Raum ist überlagerungstrivial genau dann, wenn die Identität auf unserem Raum eine universelle Überlagerung ist.*

Beweis. Daß die Identität auf jedem überlagerungstrivialen Raum eine universelle Überlagerung ist, folgt sofort aus der Existenz und Eindeutigkeit von Lifts 16.3.4.13. Ist umgekehrt die Identität auf einem Raum Y eine universelle Überlagerung, so ist nach unseren Definitionen Y nicht leer. Wählen wir also $y \in Y$. Ist dann $p : \hat{Y} \to Y$ eine Überlagerung, so finden wir für jedes $\hat{y} \in p^{-1}(y)$ genau einen Lift $s_{\hat{y}} : (Y, y) \to (\hat{Y}, \hat{y})$ von p und in ihrer Gesamtheit liefern diese Lifts eine stetige Abbildung

$$\tau : Y \times p^{-1}(y) \to \hat{Y}$$

gegeben durch $(z, \hat{y}) \mapsto s_{\hat{y}}(z)$. Als Decktransformation ist τ nach 16.3.4.5 auch offen, ja sogar étale. Wenden wir die Annahme des Lemmas auf die anderen Punkte von Y an, so erkennen wir unschwer, daß unsere Abbildung zusätzlich injektiv und surjektiv ist und damit die Überlagerung $\hat{Y} \to Y$ trivialisiert. $\square$



Graphische Darstellung eines Teils einer universellen Überlagerung der Figur 8. Jede vertikale Kante dieses Bildes geht unter der Überlagerungsabbildung homöomorph auf die obere Schlaufe der 8, jede horizontale Kante auf die untere Schlaufe der 8, und zwar soll das Durlaufen von unten nach oben beziehungsweise von rechts nach links dabei jeweils dem Durchlaufen im Uhrzeigersinn entsprechen. Es gilt also salopp gesagt, „sich alle Kanten dieses Bildes gleich lang zu denken“. Die Kreuzungspunkte sind nach **??** in Bijektion zu den Elementen der freien Gruppe in zwei Erzeugern x und y, indem man etwa von der Mitte ausgehend jedes x interpretiert als „gehe nach rechts zum nächsten Kreuzungspunkt“, jedes x^{-1} als „gehe nach links“, jedes y als „gehe nach oben“ und y^{-1} als „gehe nach unten“.

Beispiel 16.3.5.12 (**Universelle Überlagerung der Figur 8**). Will man nicht nur Bilder malen, muß man zunächst spezifizieren, was die Figur 8 sein soll. Wir definieren sie hier noch etwas unbeholfen als die geometrische Realisierung des Simplizialkomplexes $\mathcal{K}(8)$ mit fünf Ecken $\mathcal{K}(8)_0 := \{a, b, c, d, e\}$ und sechs Kanten $\mathcal{K}(8)_1 := \{\{c, a\}, \{c, b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$. Die universelle Überlagerung können wir dann ähnlich als geometrische Realisierung eines unendlichen Simplizialkomplexes konstruieren.

Wir definieren sie als die geometrische Realisierung der semisimplizialen Menge $\mathcal{K}(8)$ mit einem Nullsimplex $\mathcal{K}(8)_0$ und zwei Einssimplizes $\mathcal{K}(8)_1 := \{a, b\}$ nach **??**.

Satz 16.3.5.13 (**Überlagerungen mit überlagerungstrivialem Totalraum**). *Eine Überlagerung eines zusammenhängenden lokal überlagerungstrivialen Raums ist genau dann universell, wenn sie einen überlagerungstrivialen Totalraum hat.*

Ergänzung 16.3.5.14. Ich erinnere daran, daß nach unseren allgemeinen Konventionen „lokal überlagerungstrivial“ bedeutet, daß jede Umgebung jedes Punktes verkleinert werden kann zu einer überlagerungstrivialen Umgebung desselben Punktes. Ich weiß nicht, ob jede universelle Überlagerung eines beliebigen Raums einen überlagerungstrivialen Totalraum haben muß.

Beweis. Das Liften bei überlagerungstrivialem Definitionsbereich 16.3.4.13 zeigt, daß eine Überlagerung eines zusammenhängenden Raums durch einen überlagerungstrivialen Raum stets universell ist. Für den Beweis der anderen Implikation sei X unser Raum und $p : \tilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung. Ist $q : \hat{X} \to \tilde{X}$ eine Überlagerung dieser universellen Überlagerung, so ist nach Übung 16.3.1.27 auch die Verknüpfung $pq : \hat{X} \to X$ eine Überlagerung. Gegeben $\hat{x} \in \hat{X}$ mit Bild $\tilde{x} \in \tilde{X}$ gibt es mithin genau eine Decktransformation $d : (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (\hat{X}, \hat{x})$ über X. Wegen $qd(\tilde{x}) = \tilde{x}$ gilt nach der Eindeutigkeit von Lifts $qd = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ und q ist sogar eine Decktransformation über $\tilde{X}$. Wir sehen so, daß die Identität auf $\tilde{X}$ eine universelle Überlagerung von $\tilde{X}$ ist. Damit aber ist $\tilde{X}$ überlagerungstrivial nach 16.3.5.11 . □

Beispiel 16.3.5.15. Die Klein'sche Flasche hat nach 16.3.3.11 als universelle Überlagerung die Ebene, denn diese ist überlagerungstrivial nach dem Schleifenkriterium 16.3.1.20. Dasselbe gilt im Übrigen für alle unsere kompakten zusammenhängenden Flächen mit Ausnahme der Kugelschale S^2 und des zweidimensionalen reell-projektiven Raums $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.

16.3.6 Existenz universeller Überlagerungen

Satz 16.3.6.1 (**Universelle Überlagerung lokal überlagerungstrivialer Räume**). *Jeder zusammenhängende lokal überlagerungstriviale Raum besitzt eine überla-*

gerungstriviale universelle Überlagerung.

Beweis. Jede initiale bepunktete Überlagerung $(\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ eines zusammenhängenden und lokal zusammenhängenden Raums ist nach Satz 16.3.5.5 bereits eine universelle Überlagerung und jede universelle Überlagerung eines zusammenhängenden lokal überlagerungstrivialen Raums ist nach 16.3.5.13 überlagerungstrivial. Es reicht demnach zu zeigen, daß unser Raum X für einen Punkt $x \in X$ eine initiale bepunktete Überlagerung besitzt. Wir beginnen damit, eine obere Abschätzung für die Kardinalität $|\tilde{X}|$ einer zusammenhängenden bepunkteten Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ herzuleiten. Wir wählen dazu für jeden Punkt $y \in X$ eine überlagerungstriviale Umgebung $U(y)$. Zu jedem Punkt $\tilde{y} \in \tilde{X}$ und jeder Folge $p(\tilde{y}) = x_0, z_0, x_1, z_1, \ldots, x_r$ in X mit $z_i \in U(x_i) \cap U(x_{i+1})$ erhalten wir eine wohlbestimmte Folge $\tilde{x}_0, \tilde{z}_0, \tilde{x}_1, \tilde{z}_1, \ldots, \tilde{x}_r$ in $\tilde{X}$ mit $\tilde{x}_0 = \tilde{y}$, die unter p auf unsere ursprüngliche Folge abgebildet wird und so, daß $\tilde{z}_i$ in derselben Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U(x_i))$ liegt wie $\tilde{x}_i$ und in derselben Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U(x_{i+1}))$ wie $\tilde{x}_{i+1}$ falls $i \neq r$. Es ist klar, daß alle $\tilde{x}_r$, die wir auf diese Weise für irgendein $r \geq 0$ erhalten, eine offene zusammenhängende Teilmenge $Z(\tilde{y}) \Subset \tilde{X}$ bilden, die $\tilde{y}$ enthält. Es ist auch klar, daß diese $Z(\tilde{y})$ eine Partition von $\tilde{X}$ bilden. Ist also $\tilde{X}$ zusammenhängend, so folgt $\tilde{X} = Z(\tilde{x})$ und das liefert uns die gewünschte obere Schranke für die Kardinalität einer zusammenhängenden bepunkteten Überlagerung von (X, x). Sei nun Ω eine Menge echt größerer Kardinalität. Wir betrachten die Gesamtheit I aller Quadrupel (Z, z, τ, q) mit $Z \subset \Omega$ einer Teilmenge, $z \in Z$ einem Punkt, $\tau \subset \mathrm{Pot}(Z)$ einer Topologie auf Z und $q : Z \to X$ einer in Bezug auf die Topologie τ stetigen Abbildung, unter der (Z, z) eine bepunktete Überlagerung von (X, x) wird. Das durch $i \in I$ gegebene Quadrupel notieren wir (Z_i, z_i, τ_i, q_i). Wir betrachten weiter die Menge

$$T \subset \prod_{i \in I} Z_i$$

aller Tupel $t = (t_i)$ derart, daß für jede Decktransformation von bepunkteten Überlagerungen $d : (Z_i, z_i) \to (Z_j, z_j)$ gilt $d(t_i) = t_j$. Die Menge T besitzt einen ausgezeichneten Punkt $z := (z_i)$ und eine offensichtliche ausgezeichnete Abbildung von bepunkteten Mengen $\mathrm{pr} : (T, z) \to (X, x)$ mit $q_i \circ \mathrm{pr}_i = \mathrm{pr}\ \forall i \in I$. Unsere Menge T versehen wir nun mit einer Topologie, indem wir ein Fundamentalsystem von Umgebungen für jeden Punkt $t \in T$ angeben derart, daß die davon erzeugten Filter die in 15.3.2.17 gegebenen Axiome erfüllen. Gegeben $U \subset V \subset X$ eine zusammenhängende Umgebung U von $\mathrm{pr}(t)$, die in einer überlagerungstrivialen Teilmenge V von X liegt, besitzt ja jede Überlagerung $q_i : Z_i \to X$ genau einen stetigen Schnitt $s_i : V \to Z_i$, dessen Bild t_i enthält, und a forteriori genau einen stetigen Schnitt $s_i : U \to Z_i$, dessen Bild t_i enthält. Diese Schnitte liefern in ihrer Gesamtheit eine Abbildung $s : U \to T$ mit $s(\mathrm{pr}(t)) = t$ und die so er-

haltenen Teilmengen $s(U) \subset T$ nehmen wir als unsere Fundamentalsysteme von Umgebungen von $t \in T$. Es ist klar, daß wir so eine Topologie auf T erhalten und daß $\mathrm{pr} : (T, z) \to (X, x)$ eine bepunktete Überlagerung ist. Die Zusammenhangskomponente $\tilde{X} \subset T$ von z ist dann nach 16.3.1.7 auch eine bepunktete Überlagerung von (X, x) und ist initial nach Konstruktion. □

16.3.6.2. Wir nennen einen topologischen Raum nach 16.3.1.19 **wegetrivial**, wenn er zusammenhängend, schleifenfüllend und lokal wegzusammenhängend ist.

Satz 16.3.6.3 (Universelle Überlagerung lokal wegetrivialer Räume). *Jeder zusammenhängende lokal wegetriviale Raum besitzt eine wegetriviale universelle Überlagerung.*

Beweis. Wir wählen $x \in X$ fest und betrachten die Menge $\tilde{X}$ aller Homotopieklassen von Wegen mit Anfangspunkt x unter Homotopie mit festen Randpunkten, in Formeln,

$$\tilde{X} := \{\gamma : [0,1] \to X \mid \gamma \text{ ist stetig}, \gamma(0) = x\}/\simeq$$

Äquivalent und vielleicht suggestiver aber komplizierter könnten wir $\tilde{X}$ auch erklären als die Menge aller Paare (g, y) bestehend aus einem Punkt $y \in X$ und einer Homotopieklasse von Wegen $g \in \mathcal{W}(x, y)$. Die Homotopieklasse eines Weges γ heiße wieder $[\gamma]$. Insbesondere haben wir also eine Abbildung $u : \tilde{X} \to X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$, die jeder Homotopieklasse von Wegen ihren gemeinsamen Endpunkt zuordnet. Sie ist surjektiv, da X wegzusammenhängend ist. Wir erklären nun auf $\tilde{X}$ eine Topologie. Für jeden stetigen Weg γ mit Anfangspunkt x und jede offene Umgebung V seines Endpunktes $\gamma(1)$ setzen wir dazu

$$U(\gamma, V) := \{[\beta * \gamma] \mid \beta : [0,1] \to V \text{ ist stetig mit } \beta(0) = \gamma(1)\}$$

und betrachten auf $\tilde{X}$ die von allen $U(\gamma, V)$ erzeugte Topologie. Offensichtlich ist $u : \tilde{X} \to X$ stetig, das Urbild von V ist ja gerade die Vereinigung der $U(\gamma, V)$ über alle Wege γ mit Endpunkt in V. Wir müssen zeigen, daß u eine Überlagerung ist. Für $z \in X$ wählen wir dazu eine offene wegzusammenhängende Umgebung V von z, die ganz in einer schleifenfüllenden Umgebung enthalten ist. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\Phi : u^{-1}(z) \times V \to \tilde{X}, \quad ([\gamma], v) \mapsto [\beta * \gamma]$$

Hier meint $\beta : [0,1] \to V$ irgendeinen Weg von z nach v, der ganz in V verläuft. Aufgrund unserer Voraussetzungen an V ist Φ wohldefiniert und eine Injektion mit Bild $u^{-1}(V)$. Wir zeigen, daß Φ ein Homöomorphismus auf sein Bild ist.

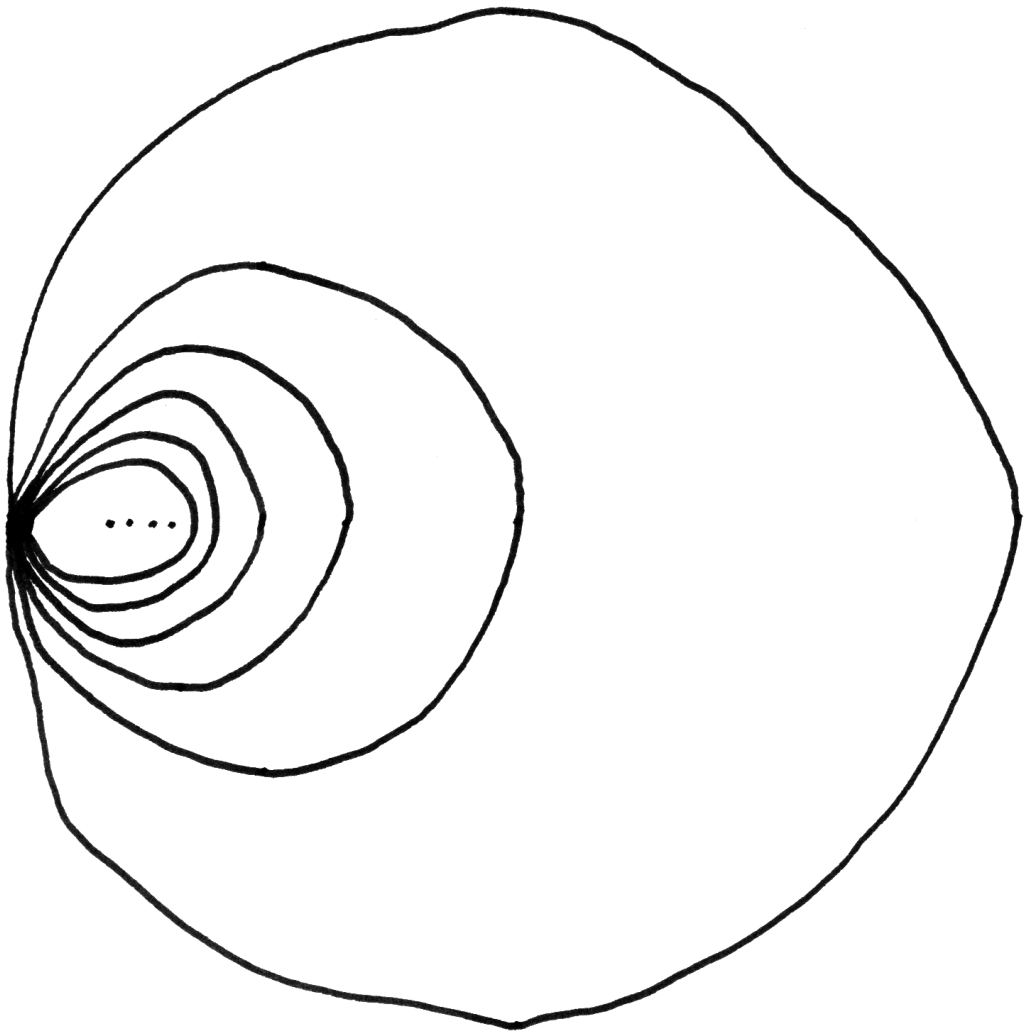
1. Φ ist stetig. In der Tat, liegt $\Phi([\gamma], v)$ in $U(\alpha, W)$, so auch $\Phi(\{[\gamma]\} \times V_1)$ für jede offene wegzusammenhängende Umgebung V_1 von v in $V \cap W$;

2. Φ ist offen. In der Tat, für wegzusammenhängendes offenes $V_1 \subset V$ gilt $\Phi(\{[\gamma]\} \times V_1) = U(\beta * \gamma, V_1)$ für jeden Weg $\beta : [0,1] \to V$ mit $\beta(0) = z$, $\beta(1) \in V_1$.

Also ist $u : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und wir müssen nur noch zeigen, daß $\tilde{X}$ wegzusammenhängend und schleifenfüllend ist. Bezeichne $\tilde{x} \in \tilde{X}$ die Klasse des konstanten Weges x. Jeder Weg $\omega : ([0,1],0) \to (X,x)$ mit Anfangspunkt x hat als Lift zum Anfangspunkt $\tilde{x}$ den Weg $\tilde{\omega} : ([0,1],0) \to (\tilde{X},\tilde{x})$ gegeben durch $\tilde{\omega}(s) = [\omega_s]$ mit $\omega_s(t) = \omega(st)$. Die Wege $\omega_s : [0,1] \to X$ sind also Anfangsstücke von ω, die so langsam durchlaufen werden, daß gilt $\omega_s(1) = \omega(s)$. Offensichtlich hat $\tilde{\omega}$ den Endpunkt $[\omega]$. Mit X ist also auch $\tilde{X}$ wegzusammenhängend. Jeder geschlossene Weg $\tilde{\alpha} \in \Omega(\tilde{X},\tilde{x})$ von unserem Punkt $\tilde{x}$ zu sich selber schließlich ist umgekehrt der Lift seines Bildes $\alpha \in \Omega(X,x)$ zum Anfangspunkt $\tilde{x}$ und hat nach dem vorhergehenden folglich den Endpunkt $[\alpha]$. Aus $[\alpha] = \tilde{x}$ folgt aber, daß es eine Homotopie $h : \alpha \simeq \varepsilon_x$ zum konstanten Weg gibt. Diese können wir liften nach 16.3.4.13, da $[0,1]^2$ überlagerungstrivial ist, und erhalten so $\tilde{h} : \tilde{\alpha} \simeq \tilde{\varepsilon}_x = \varepsilon_{\tilde{x}}$. Also ist jeder geschlossene Weg in $\tilde{X}$ zusammenziehbar und $\tilde{X}$ ist eine wegetriviale Überlagerung. Dann ist sie aber nach 16.3.1.20 auch überlagerungstrivial sowie lokal überlagerungstrivial und nach 16.3.5.13 eine universelle Überlagerung. □

Übungen

Übung 16.3.6.4. Für $n \geq 1$ betrachte man den Kreis $K_n \subset \mathbb{R}^2$ mit Radius $1/n$, der rechts von der y-Achse liegt und diese im Ursprung berührt. Man zeige, daß der Raum $X = \bigcup_{n \geq 1} K_n$ keine einfach wegzusammenhängende Überlagerung besitzt. Dieser sogenannte **Kreisraum** dient oft als Gegenbeispiel.



Versuch der graphischen Darstellung des Kreisraums. Man muß sich dabei allerdings noch unendlich viele immer kleinere Kreise hinzudenken.

16.4 Überlagerungen und Gruppenwirkungen

16.4.1 Eigenschaften von Funktoren

16.4.1.1. Ich erinnere einige Begriffe zu Funktoren aus 4.7.2.19.

Definition 16.4.1.2.

1. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt **treu**, wenn er auf den Morphismen Injektionen $F : \mathcal{A}(A, A') \hookrightarrow \mathcal{B}(FA,\ FA')$ induziert, für alle $A, A' \in \mathcal{A}$;

2. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt **volltreu**, wenn er auf den Morphismen Bijektionen $F : \mathcal{A}(A, A') \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(FA,\ FA')$ induziert. Ich notiere volltreue Funktoren $\hookrightarrow\!\!\!\!\sim$;

3. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt eine **Äquivalenz von Kategorien**, wenn er volltreu ist und zusätzlich eine Surjektion auf Isomorphieklassen von Objekten induziert, wenn es also in Formeln für alle $B \in \mathcal{B}$ ein $A \in \mathcal{A}$ gibt mit $FA \cong B$. Ich notiere Äquivalenzen von Kategorien $\xrightarrow{\approx}$. Die doppelte Schlange soll andeuten, daß dieser Begriff schwächer ist als der Begriff eines Isomorphismus von Kategorien, wie er im Anschluß eingeführt wird;

4. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt ein **Isomorphismus von Kategorien**, wenn er bijektiv ist auf Objekten und auf Morphismen, wenn er also ein Isomorphismus ist in der Kategorie der Kategorien aus 20.1.1.6. Ich notiere Isomorphismen von Kategorien $\xrightarrow{\sim}$.

Beispiel 16.4.1.3. Sei k ein Körper. Wir betrachten die Kategorie Modf_k aller endlichdimensionalen alias endlich erzeugten k-Vektorräume mit linearen Abbildungen als Morphismen. Das Kürzel steht für „finitely generated k-Module“, eine andere Bezeichnung für dasselbe Objekt. Weiter betrachten wir, und zwar sogar für einen beliebigen Ring k, die **Matrixkategorie** $\mathrm{Mat} = \mathrm{Mat}_k$ mit Objekten $\mathrm{Ob}(\mathrm{Mat}) := \mathbb{N}$ und Matrizen mit Einträgen in k des entsprechenden Formats als Morphismen, in Formeln $\mathrm{Mat}(m, n) := \mathrm{Mat}(n \times m; k)$. Die Verknüpfung von Morphismen in Mat schließlich sei die Matrixmultiplikation. Im Fall eines Körpers k ist dann der offensichtliche Funktor $n \mapsto k^n$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Mat}_k \xrightarrow{\approx} \mathrm{Modf}_k$$

zwischen unserer Matrixkategorie Mat_k und der Kategorie der endlich erzeugten k-Vektorräume, aber ist natürlich kein Isomorphismus von Kategorien. Diese Aussage faßt eine Vielzahl von Aussagen der linearen Algebra zusammen und illustriert meines Erachtens recht gut die Kraft und Eleganz der Sprache der Kategorientheorie. Wenn unser Ring k selbst durch einen größeren Ausdruck gegeben ist, schreiben wir für unsere Matrixkategorie statt Mat_k auch manchmal $\mathrm{Mat}(k)$.

Übungen

Übung 16.4.1.4. Jede Äquivalenz von Kategorien induziert eine Bijektion zwischen den zugehörigen Isomorphieklassen von Objekten. Zum Beispiel werden die endlichdimensionalen k-Vektorräume klassifiziert durch ihre Dimension, alias durch Elemente von $\mathbb{N}$, alias durch Isomorphieklassen der Matrixkategorie.

16.4.2 Transformationen

16.4.2.1. Ich erinnere nun an das Konzept einer Transformation von Funktoren, wie es in 4.7.4 ausführlicher besprochen wird.

Definition 16.4.2.2. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien und $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktoren. Eine **Transformation** $\tau : F \Rightarrow G$ ist eine Vorschrift, die jedem Objekt $X \in \mathcal{A}$ einen Morphismus $\tau_X \in \mathcal{B}(FX, GX)$ zuordnet derart, daß für jeden Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{A}$ das folgende Diagramm in $\mathcal{B}$ kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\tau_X} & GX \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FY & \xrightarrow{\tau_Y} & GY \end{array}$$

In Formeln meint dies „Kommutieren“ die Gleichheit $(Gf) \circ \tau_X = \tau_Y \circ (Ff)$ in der Morphismenmenge $\mathcal{B}(FX, GY)$. Ob ein Doppelpfeil eine Transformation von Funktoren oder vielmehr eine Implikation meint, muß der Leser aus dem Kontext erschließen. Sind alle τ_X Isomorphismen, so nenne ich τ eine **Isotransformation** und notiere sie $\tilde{\Rightarrow}$. Gibt es zwischen zwei Funktoren eine Isotransformation, so heißen sie **isomorph**.

16.4.2.3 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißen unsere Transformationen meist „natürliche Transformationen“. Diese Terminologie schien mir jedoch unnötig umständlich und entspricht auch nicht meinem Sprachempfinden: Ich möchte zum Beispiel unter der „natürlichen“ Transformation des Identitätsfunktors auf der Kategorie aller $\mathbb{R}$-Vektorräume in den Bidualraumfunktor gerne die in 16.4.2.4 gegebene Transformation verstehen, die zwar keineswegs die einzige Transformation zwischen diesen Funktoren ist, aber vielleicht schon die „natürlichste“. In der Literatur heißen unsere Isotransformationen auch und sogar meist **Isomorphismen von Funktoren** oder **Äquivalenzen von Funktoren**.

Beispiel 16.4.2.4 (**Bidualraum und Identitätsfunktor**). Seien k ein Körper und $B : \mathrm{Mod}_k \to \mathrm{Mod}_k$ der Funktor, der jedem k-Vektorraum V seinen Bidualraum $BV := V^{\top\top}$ zuordnet. So liefern die Evaluationen $\mathrm{ev}_V : V \to V^{\top\top}$, $v \mapsto (f \mapsto f(v))$ eine Transformation $\mathrm{ev} : \mathrm{Id} \Rightarrow B$ und eine Isotransformation zwischen den Restriktionen dieser Funktoren auf die Kategorie der endlichdimensionalen

k-Vektorräume, vergleiche 3.2.9.26. Oft formalisiert man Situationen dieser Art nicht bis ins Letzte aus und spricht etwa von **kanonischen Abbildungen** oder **kanonischen Isomorphismen**, wenn bei formaler Betrachtung Abbildungen oder Isomorphismen $\tau_X : FX \to GX$ gemeint sind, die in ihrer Gesamtheit eine Transformation beziehungsweise Isotransformation von Funktoren $\tau : F \overset{\sim}{\Rightarrow} G$ bilden.

Beispiel 16.4.2.5 (**Dualraum und Transponieren**). Sei k ein Körper. Wir betrachten den Dualraumfunktor $D : \mathrm{Mod}_k \to \mathrm{Mod}_k^{\mathrm{opp}}$, der jedem Raum seinen Dualraum zuordnet. Sei $T : \mathrm{Mat}_k \to \mathrm{Mat}_k^{\mathrm{opp}}$ der Funktor auf der Matrizenkategorie Mat_k aus 16.4.1.3, der die Objekte festhält und Matrizen transponiert. Sei schließlich noch $R : \mathrm{Mat}_k \to \mathrm{Mod}_k$ unser Realisierungsfunktor $n \mapsto k^n$ aus 16.4.1.3. So erhalten wir eine Isotransformation

$$\tau : R^{\mathrm{opp}}T \overset{\sim}{\Rightarrow} DR$$

dadurch, daß wir jeder natürlichen Zahl alias jedem Objekt $n \in \mathrm{Mat}_k$ den offensichtlichen Isomorphismus $\tau_n : k^n \xrightarrow{\sim} (k^n)^\top$ zuordnen. Es kann hilfreich sein, durch Doppelpfeile in Diagrammen von Kategorien und Funktoren klarzumachen, zwischen welchen Funktoren eine Transformation gemeint ist. So wäre etwa in diesem Beispiel unser τ ein möglicher Doppelpfeil im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mat}_k \arrow[r, "T"] \arrow[d, "R"'] & \mathrm{Mat}_k^{\mathrm{opp}} \arrow[d, "R^{\mathrm{opp}}"] \arrow[dl, Rightarrow, "\tau"'] \\
\mathrm{Mod}_k \arrow[r, "D"] & \mathrm{Mod}_k^{\mathrm{opp}}
\end{tikzcd}$$

In diesem Fall könnten wir zusätzlich unseren Doppelpfeil noch mit einer Schlange versehen, da er ja einen Isomorphismus von Funktoren darstellt.

Beispiel 16.4.2.6. Sind $\tau : F \Rightarrow G$ und $\sigma : G \Rightarrow H$ Transformationen, so ist auch $\sigma \circ \tau : F \Rightarrow H$ gegeben durch $(\sigma \circ \tau)_X := \sigma_{FX} \circ \tau_X$ für jedes Objekt X der Ausgangskategorie von F eine Transformation. Des weiteren gibt es für jeden Funktor F die **identische Transformation** $\mathrm{id} = \mathrm{id}_F$ von besagtem Funktor zu sich selber, gegeben durch $(\mathrm{id}_F)_X := \mathrm{id}_{FX}$ für jedes Objekt X der Ausgangskategorie unseres Funktors. Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien, so bilden die Funktoren $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ selbst eine Kategorie, mit Funktoren als Objekten und Transformationen als Morphismen. Ich verwende für diese **Funktorkategorie** die beiden Notation $\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$, so daß etwa für Funktoren $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ die Menge der Transformationen

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(F, G) = \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(F, G)$$

notiert werden kann. Werden die Kategorien selber durch größere Ausdrücke gegeben, so sind für die Menge der Transformationen auch abkürzende Notationen

wie etwa $\mathrm{Trans}(F, G)$ sinnvoll und üblich. Unsere Isotransformationen sind genau die Isomorphismen der Funktorkategorie.

Beispiel 16.4.2.7. Seien $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktoren und $\tau : F \Rightarrow G$ eine Transformation. Gegeben ein weiterer Funktor $H : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ erhalten wir eine Transformation $H\tau : HF \Rightarrow HG$ durch $(H\tau)_X := H(\tau_X)$. Gegeben ein weiterer Funktor $K : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ erhalten wir eine Transformation $\tau K : FK \Rightarrow GK$ durch $(\tau K)_W := \tau_{KW}$. Offensichtlich liefern diese Konstruktionen ihrerseits Funktoren $\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ und $\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathrm{Cat}(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ zwischen den entsprechenden Funktorkategorien, die wir als das **Nachschalten von** H beziehungsweise **Vorschalten von** K bezeichnen.

16.4.2.8 (**Schwierigkeiten der Notation**). Die Notationen τK und $H\tau$ führen leicht zu Verwirrung, sobald nicht aus der Art der Symbole klar ist, welche Symbole Funktoren und welche Transformationen darstellen. Ich kenne keine generelle Lösung für diese Schwierigkeiten der Notation. Hier versuche ich, eine gewisse Übersichtlichkeit dadurch zu erreichen, daß ich systematisch lateinische Großbuchstaben für Funktoren und kleine griechische Buchstaben für Transformationen verwende.

Übungen

Übung 16.4.2.9 (**Homotopie und fundamentales Gruppoid**). Gegeben stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ liefert jede Homotopie $H : f \simeq g$ eine Isotransformation $H_\sharp : f_\sharp \overset{\sim}{\Rightarrow} g_\sharp$ zwischen den auf den Wegekategorien induzierten Funktoren $f_\sharp, g_\sharp : \mathcal{W}_X \to \mathcal{W}_Y$ vermittels der Isomorphismen $(H_\sharp)_x = [H(x,t)] \in \mathcal{W}_Y(f(x), g(x))$.

Übung 16.4.2.10. Sind zwei Funktoren isomorph und ist der eine eine Äquivalenz von Kategorien, so auch der andere.

Übung 16.4.2.11. Sei G ein Monoid. Die G-Mengen mit den äquivarianten Abbildungen als Morphismen bilden dann eine Kategorie $G\text{-}\mathrm{Ens}$. Bilden wir zu unserem Monoid G die Ein-Objekt-Kategorie $[G]$, so liefert der hoffentlich offensichtliche Funktor einen Isomorphismus von Kategorien

$$G\text{-}\mathrm{Ens} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}([G], \mathrm{Ens})$$

Übung 16.4.2.12. Man zeige: Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist genau dann eine Äquivalenz von Kategorien, wenn es eine Äquivalenz von Kategorien in die Gegenrichtung $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ gibt nebst einer Isotransformation $\tau : \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \overset{\sim}{\Rightarrow} GF$. Die Äquivalenz G oder genauer das Paar (G, τ) heißt dann ein **quasiinverser Funktor zu** F. Man zeige weiter: Zu jedem Paar (G, τ) wie eben gibt es genau eine Isotransformation $\eta : FG \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ mit $(\eta F) \circ (F\tau) = \mathrm{id}_F$.

Übung 16.4.2.13. Man zeige: Genau dann ist ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine Äquivalenz von Kategorien, wenn es einen Funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ gibt derart, daß FG isomorph ist zum Identitätsfunktor auf $\mathcal{B}$ und GF isomorph zum Identitätsfunktor auf $\mathcal{A}$.

Übung 16.4.2.14. Man zeige: Gegeben eine Äquivalenz von Kategorien $F : \mathcal{A} \xrightarrow{\approx} \mathcal{B}$ und ein Funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ nebst einer Isotransformation $\tau : FG \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ ist auch G eine Äquivalenz von Kategorien und (G, τ) quasiinvers zu F.

Übung 16.4.2.15 (**Äquivalenzen von Funktorkategorien**). Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien und ist $K : \mathcal{A}' \xrightarrow{\approx} \mathcal{A}$ eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Vorschalten von K eine Äquivalenz von Funktorkategorien

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Cat}(\mathcal{A}', \mathcal{B})$$

Ist ähnlich $H : \mathcal{B} \xrightarrow{\approx} \mathcal{B}'$ eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Nachschalten von H eine Äquivalenz von Funktorkategorien

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}')$$

Ergänzende Übung 16.4.2.16 (**Exponentialgesetz für Kategorien**). Man zeige, daß man für je drei Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ einen Isomorphismus von Kategorien

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathrm{Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{C})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

erhält durch die Vorschrift $F \mapsto \tilde{F}$ mit $\tilde{F}(A, B) = (F(A))(B)$ auf Objekten und eine vom Leser zu spezifizierende Vorschrift auf Morphismen.

16.4.3 Adjungierte Funktoren

16.4.3.1. Das Konzept adjungierter Funktoren gehört zu den Grundbegriffen der Kategorientheorie. Die Terminologie kommt vermutlich vom Fall der Restriktions- und Induktionsfunktoren aus der Darstellungstheorie endlicher Gruppen her, die ein Paar von adjungierten Funktionen bilden und deren Effekte auf Charakteren adjungierte lineare Abbildungen im Sinne der linearen Algebra sind.

Definition 16.4.3.2. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien und $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren. Eine **Adjunktion** α **von** L **mit** R oder in Kurzschreibweise $\alpha : L \dashv R$ ist eine Isotransformation

$$\alpha : \mathcal{B}(L\ ,\ ) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathcal{A}(\ , R\ )$$

von Funktoren $\mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{B} \to \mathrm{Ens}$, also explizit eine Familie von Bijektionen $\alpha_{A,B} : \mathcal{B}(LA, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(A, RB)$ für $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ mit gewissen Natürlichkeitseigenschaften, genauer mit $\alpha(\varphi \circ Lf) = \alpha(\varphi) \circ f$ sowie $\alpha(g \circ \varphi) = Rg \circ \alpha(\varphi)$ für $f : A' \to A$ und $\varphi : LA \to B$ und $g : B \to B'$.

Beispiel 16.4.3.3 (**Freie Gruppen als adjungierter Funktor**). Der Vergißfunktor von den Gruppen in die Mengen hat als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge die freie Gruppe über besagter Menge zuordnet, wie sie in 16.2.5.6 eingeführt wird. Mit der Notation $v : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Ens}$ für den vergeßlichen Funktor haben wir für jede Gruppe G und jede Menge X eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{Grp}(\mathrm{Grp}^{\backprime} X, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(X, vG)$$

Der Vergißfunktor von den abelschen Gruppen in die Mengen hat ähnlich als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge die freie abelsche Gruppe über besagter Menge zuordnet, für die wir die Notationen $\mathrm{Ab}^{\backprime} X = \mathbb{Z}X$ verwenden.

Beispiel 16.4.3.4 (**Das Exponentialgesetz als Adjunktion**). Gegeben eine Menge Z ist der Funktor $(Z\times) : \mathrm{Ens} \to \mathrm{Ens}$ linksadjungiert zum Funktor $\mathrm{Ens}(Z, \ ) : \mathrm{Ens} \to \mathrm{Ens}$ vermittels der kanonischen Bijektionen

$$\mathrm{Ens}(Z \times X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(X, \mathrm{Ens}(Z, Y))$$

aus dem Exponentialgesetz 2.1.6.5. Weiter ist der Funktor $\mathrm{Ens}(\ , Z) : \mathrm{Ens} \to \mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}}$ linksadjungiert zum Funktor $\mathrm{Ens}(\ , Z)^{\mathrm{opp}} : \mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ens}$ vermittels der in derselben Weise konstruierten kanonischen Bijektionen

$$\mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}}(\mathrm{Ens}(X, Z), Y) = \mathrm{Ens}(Y, \mathrm{Ens}(X, Z)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(X, \mathrm{Ens}(Y, Z))$$

Beispiele 16.4.3.5 (**Adjunktionen mit** Hom **und** $\otimes$). Gegeben ein Körper k und ein k-Vektorraum E ist der Funktor $E\otimes_k : \mathrm{Mod}_k \to \mathrm{Mod}_k$ linksadjungiert zu $\mathrm{Hom}_k(E, \ ) : \mathrm{Mod}_k \to \mathrm{Mod}_k$ und der Funktor $\mathrm{Hom}_k(\ , E) : \mathrm{Mod}_k \to \mathrm{Mod}_k^{\mathrm{opp}}$ hat als Rechtsadjungierten den Funktor $\mathrm{Hom}_k(\ , E)^{\mathrm{opp}} : \mathrm{Mod}_k^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Mod}_k$. Ausgezeichnete derartige Adjunktionen werden in 4.6.1.19 und 3.2.3.16 angegeben. Sie sind als Spezialfälle der Adjunktionen 18.1.4.12 und 18.1.4.13 in Schmelzkategorien.

16.4.3.6 (**Einheit und Koeinheit einer Adjunktion**). Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien und $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren. Gegeben eine Adjunktion $\alpha : L \dashv R$ von Funktoren erhalten wir Transformationen $\hat{\alpha} : \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow RL$ und $\check{\alpha} : LR \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$ durch $\hat{\alpha}_A := \alpha(\mathrm{id}_{LA})$ und $\check{\alpha}_B := \alpha^{-1}(\mathrm{id}_{RB})$. Sie heißen die **Einheit** und **Koeinheit** der Adjunktion. Oft versteht sich die zugrundeliegende Adjunktion α von selbst und wir brauchen dafür gar keine Notation vorzusehen. Dann notieren wir die Einheit und Koeinheit meist $\varepsilon_A : A \to RLA$ und $\eta_B : LRB \to B$.

Beispiel 16.4.3.7 (**Einheit und Koeinheit im Fall freier Gruppen**). Unsere Adjunktion $\mathrm{Grp}(\mathrm{Grp}^{\backprime} X, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(X, vG)$ hat als Einheit die kanonischen Abbildungen $\varepsilon_X : X \to v\,\mathrm{Grp}^{\backprime} X$ und als Koeinheit die kanonischen Gruppenhomomorphismen $\eta_G : \mathrm{Grp}^{\backprime}(vG) \to G$ aus dem Beweis von 16.2.6.2.

Beispiel 16.4.3.8. Der Funktor $\operatorname{Spek} : \operatorname{Ralg}_{\mathbb{C}}^{\operatorname{opp}} \to \operatorname{Top}$ aus 15.3.4 ist rechtsadjungiert zum Funktor $\mathcal{C} : \operatorname{Top} \to \operatorname{Ralg}_{\mathbb{C}}^{\operatorname{opp}}$. Diese Aussage ist der Kern der Argumentation in 15.3.4.6.

Lemma 16.4.3.9 (Äquivalenz durch Adjunktion). *Seien $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren und $\alpha : L \dashv R$ eine Adjunktion.*

1. *Genau dann besteht die Einheit der Adjunktion $\hat{\alpha}$ aus Isomorphismen $\hat{\alpha}_X : X \xrightarrow{\sim} RLX$, wenn der Funktor L volltreu ist;*

2. *Genau dann besteht die Koeinheit der Adjunktion $\check{\alpha}$ aus Isomorphismen $\check{\alpha}_Y : LRY \xrightarrow{\sim} Y$, wenn der Funktor R volltreu ist;*

3. *Genau dann bestehen $\hat{\alpha}$ und $\check{\alpha}$ beide aus Isomorphismen, wenn L und R Äquivalenzen von Kategorien sind. Man nennt L und R dann zueinander* **quasiinverse Funktoren** *und versteht dabei die Adjunktion als einen Teil des Datums. In diesem Fall liefern $\hat{\alpha}^{-1}$ und $\check{\alpha}^{-1}$ auch eine Adjunktion (R, L).*

Beweis. Aus unseren Erkenntnissen zu Einheiten und Koeinheiten von Adjunktionen 16.4.8.1 folgt die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(X,Y) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\hat{\alpha}_Y \circ"'] & \mathcal{B}(LX,LY) \arrow[d, "\wr"', "\alpha_{X,LY}"] \\
\mathcal{A}(X,RLY) \arrow[r, equal] & \mathcal{A}(X,RLY)
\end{tikzcd}$$

Das zeigt die erste Aussage. Die zweite Aussage zeigt man genauso. Für die dritte Aussage bemerkt man, daß unter der Annahme $\check{\alpha}_B : LRB \xrightarrow{\sim} B$ jedes $B \in \mathcal{B}$ isomorph ist zu einem Objekt der Gestalt LX. □

Beispiel 16.4.3.10 (**Der Dualraumfunktor als sein eigener Adjungierter**). Der Rechtsadjungierte des Dualraumfunktors $D : k\text{-}\operatorname{Mod} \to k\text{-}\operatorname{Mod}^{\operatorname{opp}}$ ist der Funktor $D^{\operatorname{opp}} : k\text{-}\operatorname{Mod}^{\operatorname{opp}} \to k\text{-}\operatorname{Mod}$, der durch dieselbe Abbildungsvorschrift gegeben wird, vermittels der Adjunktion, die gegeben wird durch die kanonischen Identifikationen

$$\operatorname{Hom}_k(V, DW) \xleftarrow{\sim} \operatorname{Hom}_k^{(2)}(V, W; k) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_k(DW, V)$$

Vorschau 16.4.3.11. Mehr zu adjungierten Funktoren diskutieren wir in 16.4.8.

Übungen

Übung 16.4.3.12. Besitzt ein Funktor einen Rechtsadjungierten, so vertauscht er mit Koprodukten und macht kokartesische Diagramme zu kokartesischen Diagrammen. Besitzt ein Funktor einen Linksadjungierten, so vertauscht er mit Produkten und macht er kartesische Diagramme zu kartesischen Diagrammen. Stärker zeigen Sie etwa in 17.7.1.30, daß Linksadjungierte mit „Kolimites“ vertauschen und Rechtsadjungierte mit „Limites“.

Ergänzende Übung 16.4.3.13 (**Adjunktionen auf Funktorkategorien**). Seien Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ gegeben. Man zeige, daß jedes Paar (L, R) von adjungierten Funktoren $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ auch ein Paar $(L\circ, R\circ)$ von adjungierten Funktoren zwischen den Funktorkategorien $(L\circ) : \mathcal{A}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{B}^{\mathcal{C}}$ und $(R\circ) : \mathcal{B}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ liefert.

Übung 16.4.3.14 (**Opponierte Adjunktionen**). Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien und $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren. Jede Adjunktion $\alpha : L \dashv R$ kann auch als Adjunktion $\alpha^{\mathrm{opp}} : R^{\mathrm{opp}} \dashv L^{\mathrm{opp}}$ der zugehörigen Funktoren $L^{\mathrm{opp}} : \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{B}^{\mathrm{opp}}$ und $R^{\mathrm{opp}} : \mathcal{B}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}^{\mathrm{opp}}$ zwischen den jeweiligen opponierten Kategorien aufgefaßt werden. Ich nenne α^{opp} die **opponierte Adjunktion**.

16.4.4 Überlagerungen und Gruppenwirkungen

16.4.4.1. Gegeben $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $G := \mathcal{C}(A)$ das Monoid seiner Endomorphismen erhalten wir stets einen Funktor in die Kategorie der G-Rechtsmengen

$$\mathcal{C}(A, \ ) : \mathcal{C} \ \to \ \mathrm{Ens}\text{-}G$$

Wir setzen dazu $fg := f \circ g$ für alle $B \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}(A, B)$ und $g \in \mathcal{C}(A)$. Man beachte für das Folgende, daß das Monoid der Endomorphismen einer universellen Überlagerung nach 16.3.5.5 stets eine Gruppe ist.

Satz 16.4.4.2 (Überlagerungen und Gruppenwirkungen). *Gegeben eine universelle Überlagerung $u : \tilde{X} \to X$ mit Deckbewegungsgruppe $G := \mathrm{Top}_X^{\times}(\tilde{X})$ liefert der Funktor $T := \mathrm{Top}_X(\tilde{X}, \ )$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der Überlagerungen von X und der Kategorie der G-Rechtsmengen*

$$T : \ddot{\mathrm{U}}\mathrm{b}_X \ \xrightarrow{\approx} \ \mathrm{Ens}_{/G}$$

Beispiel 16.4.4.3. Man überlege sich die Bedeutung des Satzes zunächst im Fall der universellen Überlagerung $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$ der Kreislinie. In diesem Fall erhalten wir für die Deckbewegungsgruppe einen Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ durch $g \mapsto g(0)$.

Beweis. Wir konstruieren zunächst einen Funktor in die Rückrichtung. Gegeben eine G-Rechtsmenge M konstruieren wir eine stetige Abbildung

$$M \times_{/G} \tilde{X} \to X$$

Wir betrachten dazu auf $M \times \tilde{X}$ die Operation von G gegeben durch $g(m, \tilde{x}) = (mg^{-1}, g\tilde{x})$. Die Bahn von $(m, \tilde{x})$ notieren wir $[m, \tilde{x}]$. Da G topologisch frei operiert auf $\tilde{X}$ nach 16.3.4.15, operiert es erst recht topologisch frei auf $M \times \tilde{X}$. Nach 16.3.3.13 ist also der Bahnenraum $M \times_{/G} \tilde{X}$ eine Überlagerung von X. Den in dieser Weise konstruierten Funktor in die Rückrichtung bezeichnen wir mit A, in Formeln

$$A := (\ \times_{/G} \tilde{X}) : \mathrm{Ens}_{/G} \ \to \ \ddot{\mathrm{U}}\mathrm{b}_X$$

Als nächstes erklären wir eine Adjunktion $A \dashv T$. Gegeben eine G-Rechtsmenge M und eine Überlagerung $\hat{p} : \hat{X} \to X$ gilt es, eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/G}(M, \mathrm{Top}_X(\tilde{X}, \hat{X})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}_X(M \times_{/G} \tilde{X}, \hat{X})$$

zwischen der Menge der G-äquivarianten Abbildungen links und der Menge der stetigen Abbildungen über X rechts anzugeben. Man erhält sie durch Einschränken der offensichtlichen Bijektion

$$\mathrm{Ens}(M, \mathrm{Top}(\tilde{X}, \hat{X})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}(M \times \tilde{X}, \hat{X})$$

auf die Fixpunkte einer geeigneten G-Operation auf beiden Seiten. Jetzt müssen wir nach 16.4.3.9 nur noch zeigen, daß die durch unsere Adjunktion definierten Transformationen $\mathrm{Id} \Rightarrow TA$ und $AT \Rightarrow \mathrm{Id}$ Isotransformationen sind. Die Erste spezialisiert auf einer G-Menge M zur Abbildung $M \to \mathrm{Top}_X(\tilde{X}, M \times_{/G} \tilde{X})$ gegeben durch $m \mapsto (z \mapsto [m, z])$ und ist eine Bijektion aufgrund der universellen Eigenschaft der universellen Überlagerung. Die Zweite spezialisiert auf einer Überlagerung $\hat{X}$ zur Abbildung $\mathrm{Top}_X(\tilde{X}, \hat{X}) \times_{/G} \tilde{X} \to \hat{X}$ gegeben durch $[d, z] \mapsto d(z)$ und ist ebenfalls bijektiv aufgrund der universellen Eigenschaft der universellen Überlagerung. Als bijektive Decktransformation muß sie dann sogar ein Homöomorphismus sein. □

16.4.4.4 (**Zusammenhängende Überlagerungen und Untergruppen**). Gegeben eine universelle Überlagerung $\tilde{X} \to X$ ist $\tilde{X}$ nach 16.3.5.7 stets zusammenhängend. Für die Gruppe G der Decktransformationen und eine G-Rechtsmenge M ist also $M \times_{/G} \tilde{X}$ genau dann zusammenhängend, wenn M eine transitive G-Menge ist. In Worten induziert also unser Funktor $T := \mathrm{Top}_X(\tilde{X},\ )$ aus 16.4.4.2 auch eine Äquivalenz

$$\{\hat{X} \in \ddot{\mathrm{U}}\mathrm{b}_X \mid \hat{X} \text{ zusammenhängend}\} \ \xrightarrow{\approx} \ \{M \in \mathrm{Ens}_{/G} \mid M \text{ transitiv}\}$$

zwischen der Kategorie der zusammenhängenden Überlagerungen von X und der Kategorie der transitiven G-Rechtsmengen. Nach 16.3.2.5 werden also die zusammenhängenden Überlagerungen von X klassifiziert durch Konjugationsklassen von Untergruppen von G und man prüft leicht, daß dabei die Klasse der Unterguppe $H \subset G$ auf die Isomorphieklasse der Überlagerung $\tilde{X}/H \to X$ geht. Genauer erhalten wir mit 16.3.2.8 eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der zusammenhängenden Überlagerungen von X und der opponierten Untergruppenkategorie zu G aus 16.3.2.8.

Ergänzung 16.4.4.5 (**Bezug zur Galoistheorie**). Die hier vorgestellte Theorie ist strukturell eng verwandt mit der Galoistheorie. Ist $\tilde{K}/K$ eine endliche Galoiserweiterung, so kann man den Hauptsatz der Galoistheorie 6.4.3.1 nämlich dahingehend interpretieren, daß der Funktor $\mathrm{Kring}^K(\ ,\tilde{K})$ der K-linearen Körperhomomorphismen nach $\tilde{K}$ eine Äquivalenz von Kategorien

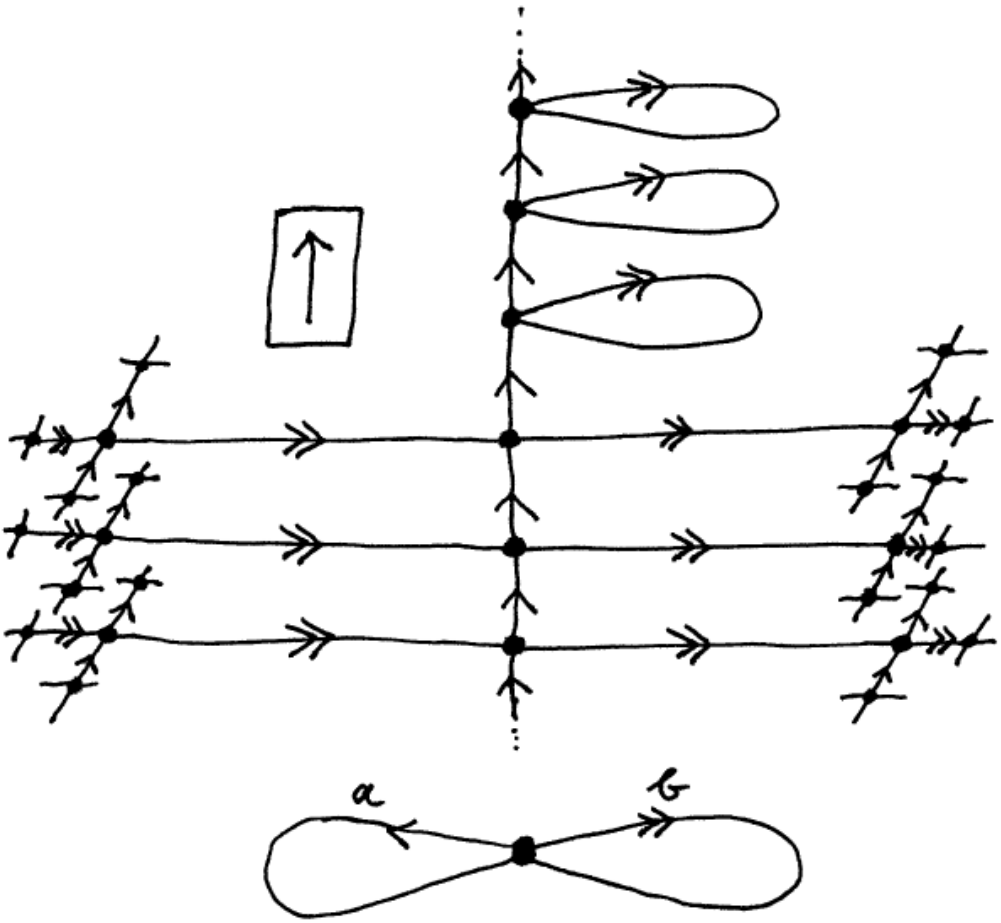
$$\left\{\begin{array}{c}\text{Körpererweiterungen von } K,\\ \text{die sich in } \tilde{K} \text{ einbetten lassen}\end{array}\right\}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\approx} \{\text{transitive } \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)\text{-Mengen}\}$$

liefert, für $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K) = (\mathrm{Kring}^K)^\times(\tilde{K})$ die Galoisgruppe. Die Kategorie der zusammenhängenden Überlagerungen kann im Licht von 16.4.4.2 also aufgefaßt werden als ein geometrisches Analogon zur opponierten Kategorie unserer Kategorie von Körpererweiterungen. Noch besser würde die Analogie, wenn wir auch nur alle zusammenhängenden Überlagerungen betrachten würden, die eine Decktransformation von einer fest gewählten Galois-Überlagerung empfangen können.

Ergänzung 16.4.4.6 (**Die Kategorie der G-Mengen bestimmt die Gruppe G**). Gegeben eine Gruppe G kennt die Kategorie der G-Mengen bereits die Gruppe G bis auf Isomorphismus. Wir betrachten genauer eine Menge $\mathcal{C}$ von G-Mengen, die die Gruppe G selbst enthält und mindestens je eine einelementige und eine zweielementige Menge mit der trivialen G-Operation, und betrachten die Kategorie $\mathcal{C}$ all dieser G-Mengen. Darin gibt es nach unseren Annahmen ein finales Objekt pt und ein Koprodukt $\mathrm{pt} \sqcup \mathrm{pt}$ dieses finalen Objekts mit sich selbst. Sicher ist unsere Kategorie $\mathcal{C}$ eine $\mathfrak{V}$-Kategorie für ein geeignetes Mengensystem $\mathfrak{V}$. Man überzeugt sich leicht, daß ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ genau dann ein homogener Raum ist, wenn für den dadurch dargestellten Funktor $F := \mathcal{C}(X,\ ) : \mathcal{C} \to \mathfrak{V}\mathrm{Ens}$ die kanonische Abbildung eine Bijektion

$$F(\mathrm{pt}) \sqcup F(\mathrm{pt}) \xrightarrow{\sim} F(\mathrm{pt} \sqcup \mathrm{pt})$$

liefert. Weiter ist die G-Operation auf einem homogenen Raum X genau dann frei, gilt $\mathcal{C}(X, G) \neq \emptyset$ alias wenn es von X zu jedem Objekt von $\mathcal{C}$ einen Morphismus gibt. Die G-Torsoren können somit als Objekte der Kategorie $\mathcal{C}$ unter alleiniger Verwendung der Struktur dieser Kategorie charakterisiert werden. Die Gruppe G erhält man dann bis auf Isomorphismus als die Opponierte der Automorphismengruppe eines jeden solchen G-Torsors.



Graphische Darstellung einer Überlagerung mit zusammenhängendem Totalraum, bei der nicht jede Decktransformation eine Deckbewegung ist. Überlagert wird die Figur einer Acht. Die fragliche Decktransformation schiebt „um eins nach oben“ und „faltet die beiden obersten der sich ins unendliche verzweigenden Äste über den Rest“. Die Fundamentalgruppe der Überlagerung für den zentralen Punkt als Basispunkt ist die von den Lifts aller $a^{-n}ba^n$ für $n > 0$ erzeugte Untergruppe $H \subset G$ der Fundamentalgruppe der Basis und unsere Decktransformation entspricht der durch $(\cdot a)$ induzierten Abbildung $G/H \to G/H$.

16.4.5 Überlagerungen und Fundamentalgruppe

Definition 16.4.5.1. Seien $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $\gamma \in \Omega(X, x, y)$ ein Weg. Der **Transport durch Wegeliften**

$$\langle\gamma\rangle : p^{-1}(x) \to p^{-1}(y)$$

längs des Weges γ von der Faser bei x in die Faser bei y wird erklärt als diejenige Abbildung, die jedem Punkt $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ den Endpunkt des Lifts $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$ unseres Weges γ mit Anfangspunkt $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(0) = \tilde{x}$ zuordnet, in Formeln $\langle\gamma\rangle(\tilde{x}) := \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1)$. Hier verwenden wir, daß nach 16.3.1.17 das Intervall $[0, 1]$ überlagerungstrivial ist und daß damit nach 16.3.4.13 unser Weg genau einen Lift hat mit Anfangspunkt $\tilde{x}$.

Lemma 16.4.5.2 (**Eigenschaften des Wegeliftungstransports**). *Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung.*

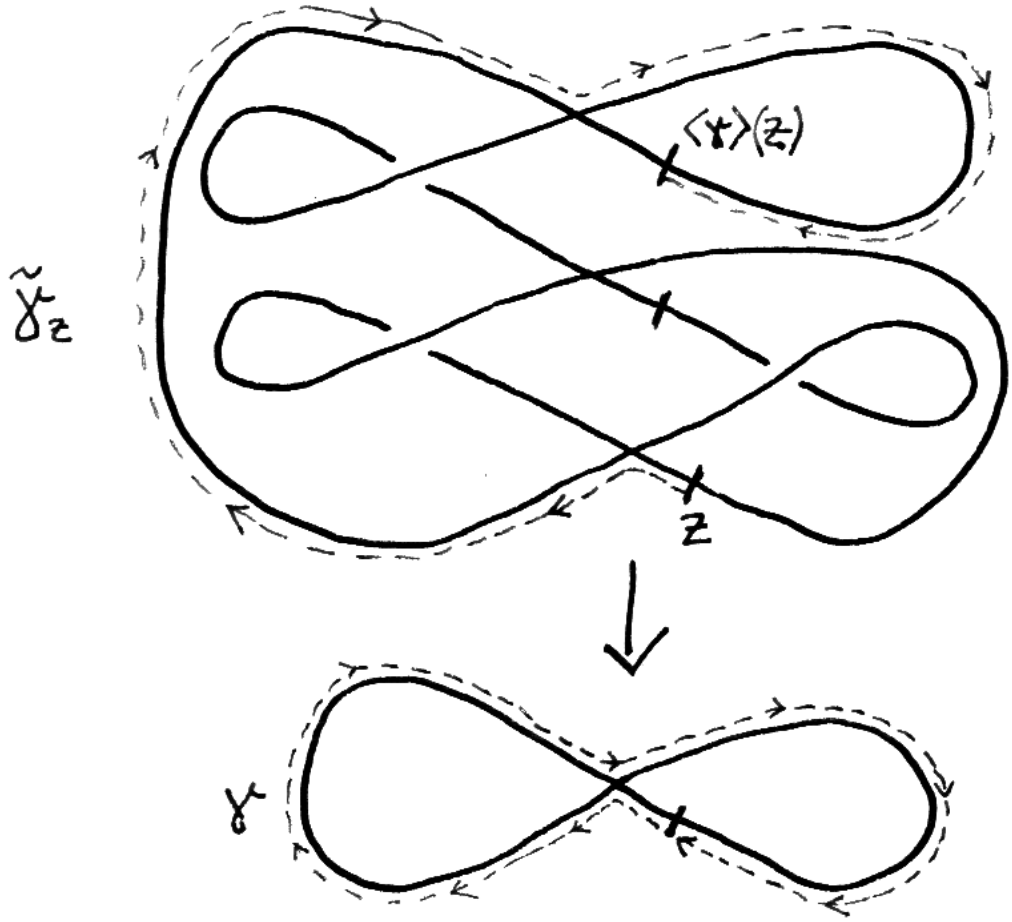
Homotopieinvarianz: *Homotope Wege in der Basis liefern denselben Transport durch Wegeliften auf den Fasern, in Formeln $\gamma \simeq \beta \Rightarrow \langle\gamma\rangle = \langle\beta\rangle$. Insbesondere ist auch für jede Homotopieklasse γ von Wegen die Abbildung $\langle\gamma\rangle$ wohldefiniert;*

Funktorialität: *Der Transport durch Wegeliften längs des konstanten Weges ε_x bei $x \in X$ ist die identische Abbildung $\langle\varepsilon_x\rangle = \mathrm{id}$ auf der Faser $p^{-1}(x)$. Sind β und γ verknüpfbare Wege in X, so gilt $\langle\beta\rangle \circ \langle\gamma\rangle = \langle\beta * \gamma\rangle$;*

Natürlichkeit: *Ist $q : \tilde{Y} \to Y$ eine weitere Überlagerung und sind $f : X \to Y$ und $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ stetige Abbildungen mit $q \circ \tilde{f} = f \circ p$ und ist γ ein Weg in X, so gilt $\tilde{f} \circ \langle\gamma\rangle = \langle f\gamma\rangle \circ \tilde{f}$.*

Ergänzung 16.4.5.3. Man mag den zweiten Punkt dahingehend zusammenfassen, daß jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ einen Funktor $[\tilde{X}] : \mathcal{W}_X \to \mathrm{Ens}$ des fundamentalen Gruppoids von X in die Kategorie der Mengen liefert vermittels der Vorschrift $x \mapsto p^{-1}(x)$ auf Objekten und $\gamma \mapsto \langle\gamma\rangle$ auf Morphismen. Der letzte Punkt besagt in dieser Sprache, daß die von $\tilde{f}$ auf den Fasern induzierte Abbildung eine Transformation unseres Funktors $[\tilde{Y}] : \mathcal{W}_Y \to \mathrm{Ens}$ zur Verknüpfung des Funktors Funktor $f_\sharp : \mathcal{W}_Y \to \mathcal{W}_X$ mit dem Funktor $[\tilde{X}] : \mathcal{W}_X \to \mathrm{Ens}$ ist, in Formeln also eine Transformation $[\tilde{Y}] \Rightarrow [\tilde{X}] \circ f_\sharp$.

Beweis. Wir zeigen nur die Homotopieinvarianz, die anderen Eigenschaften sind klar nach den Definitionen. Sei $h : [0, 1]^2 \to X$ eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen unseren Wegen. Auf der vorderen beziehungsweise hinteren Kante unseres Quadrats haben wir also $h(0, t) = \gamma(t)$ beziehungsweise $h(1, t) = \beta(t)$, und auf der oberen und der unteren Kante ist H konstant. Da



Eine dreiblättrige Überlagerung der Acht, ein Punkt unten und die drei Punkte der Faser darüber, ein geschlossener Weg unten und die zugehörige Operation auf der Faser am Beispiel des „untersten“ Punktes der Faser, der in diesem Fall auf den „obersten“ Punkt der Faser geschoben wird.

unser Quadrat nach 16.3.1.23 überlagerungstrivial ist, gibt es für alle $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ einen Lift $\tilde{h} : [0,1]^2 \to \tilde{X}$ von h mit $\tilde{h}(0,0) = \tilde{x}$. Nach dem Satz über die Eindeutigkeit von Lifts ist dieser Lift konstant $\tilde{x}$ auf der unteren Kante, folglich ist er auf der vorderen beziehungsweise hinteren Kante der Lift mit Anfangspunkt $\tilde{x}$ von γ beziehungsweise β. Da aber unser Lift auch konstant sein muß auf der oberen Kante, folgt $\langle\gamma\rangle(\tilde{x}) = \langle\beta\rangle(\tilde{x})$. □

16.4.5.4. Gegeben eine Menge F bezeichnen wir die Gruppe aller Permutationen von F mit $\mathrm{Ens}^\times(F)$. Das ist auch die Menge der invertierbaren Elemente des Monoids $\mathrm{Ens}(F)$ aller Abbildungen von F in sich selber.

Satz 16.4.5.5. *1. Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $x \in X$ ein Punkt, so liefert der Wegeliftungstransport eine Operation der Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x)$ auf der Faser $p^{-1}(x)$, die* **Wegeliftungsoperation***;*

2. Ist $q : \hat{X} \to X$ eine weitere Überlagerung und $d : \tilde{X} \to \hat{X}$ eine Decktransformation, so ist deren Einschränkung $d : p^{-1}(x) \to q^{-1}(x)$ auf die Fasern eine $\pi_1(X,x)$-äquivariante Abbildung.

Beweis. Das folgt alles sofort aus den im vorhergehenden Lemma 16.4.5.2 gezeigten Eigenschaften des Wegeliftungstransports. □

16.4.5.6. Für jeden bepunkteten topologischen Raum (X,x) erhalten wir damit einen Funktor von der Kategorie seiner Überlagerungen in die Kategorie der Mengen mit Operation der Fundamentalgruppe, indem wir jeder Überlagerung von X ihre Faser bei x zuordnen. Dieser sogenannte **Faserfunktor** $F = F_x$ wird in Formeln gegeben durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rcl} F : \mathrm{Üb}_X & \to & \pi_1(X,x)\text{-Ens} \\ p & \mapsto & p^{-1}(x) \end{array}$$

Satz 16.4.5.7 (Fundamentalgruppe einer Überlagerung).

1. Jede Überlagerung bepunkteter Räume $p : (\tilde{X},\tilde{x}) \to (X,x)$ induziert eine Injektion $p_\sharp : \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}) \hookrightarrow \pi_1(X,x)$ auf den Fundamentalgruppen und das Bild dieser Injektion ist die Standgruppe von $\tilde{x}$ unter der Wegeliftungsoperation, in Formeln

$$\operatorname{im} p_\sharp = \{\gamma \in \pi_1(X,x) \mid \langle\gamma\rangle(\tilde{x}) = \tilde{x}\}$$

2. Ist zusätzlich unsere Überlagerung $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, so operiert die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x)$ transitiv auf der Faser über dem Basispunkt $p^{-1}(x)$.

Beweis. Seien $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ beliebig und $x, y \in X$ ihre Bilder. So liefert nach unseren Definitionen und wegen der Eindeutigkeit von Lifts 16.3.4.10 das Nachschalten von p eine Bijektion

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{x}, \tilde{y}) \xrightarrow{\sim} \{\gamma \in \Omega(X, x, y) \mid \langle\gamma\rangle(\tilde{x}) = \tilde{y}\}$$

Diese Bijektion induziert dann eine Bijektion auf Homotopieklassen. Setzen wir $\tilde{y} = \tilde{x}$, so ergibt sich der erste Teil. Läßt sich jeder Punkt $\tilde{y}$ aus der Faser $p^{-1}(x)$ in $\tilde{X}$ durch einen Weg α mit $\tilde{x}$ verbinden, so liegt die Homotopieklasse von $\gamma = p \circ \alpha$ in $\pi_1(X, x)$ und wir haben $\tilde{y} = \langle\gamma\rangle(\tilde{x})$. □

Proposition 16.4.5.8. *Gegeben X ein Raum mit einer topologisch freien Operation einer Gruppe G erhalten wir für jeden Punkt $x \in X$ durch die Vorschrift $c_x(\gamma)^{-1}x = \langle\gamma\rangle x$ einen Gruppenhomomorphismus, den* **Faserwirkungsvergleich**

$$c_x : \pi_1(X/G, \bar{x}) \to G$$

Beweis. Bezeichne $p : X \to X/G$ die Quotientenabbildung. Nach 16.3.3.10 ist sie eine Überlagerung. Per definitionem operiert G frei und transitiv auf der Faser $p^{-1}(\bar{x})$ über $\bar{x} := p(x)$ und nach 16.4.5.5 kommutiert diese Operation mit der Operation von $\pi_1(X/G, \bar{x})$ durch Wegeliften. Das anschließende algebraische Lemma 16.4.5.9 beendet den Beweis. □

Lemma 16.4.5.9 (Homomorphismen durch Torsoren). *Sei F eine Menge mit einer Linksoperation einer Gruppe H und einer freien transitiven Rechtsoperation einer Gruppe G, die in dem Sinne kommutieren, daß gilt $(hf)g = h(fg)$ $\forall h \in H$, $f \in F$, $g \in G$. So liefert jedes Element $f \in F$ einen Gruppenhomomorphismus*

$$c_f : H \to G$$

durch die Vorschrift $hf = fc_f(h)$. Ist die Operation von H frei, so ist c_f injektiv. Ist die Operation von H transitiv, so ist c_f surjektiv.

Ergänzung 16.4.5.10. Analoges gilt für Monoide, wenn wir zusätzlich f so wählen, daß die Operation von G eine Bijektion $G \xrightarrow{\sim} X$, $g \mapsto fg$ liefert.

Beweis. Wir überlassen die formale Rechnung dem Leser und versuchen stattdessen eher informell, die Aussage transparent zu machen. Da G frei und transitiv operiert, ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} G & \to & F \\ g & \mapsto & fg \end{array}$$

eine G-äquivariante Bijektion. Die G-äquivarianten Abbildungen $\phi : G \to G$, also die Abbildungen ϕ mit $\phi(xg) = \phi(x)g \;\; \forall x, g \in G$, sind nun genau die Linksmultiplikationen mit Elementen $c \in G$ und entsprechen unter unserer Bijektion

$G \tilde{\to} F$ den Abbildungen $fg \mapsto fcg$. Insbesondere gilt das für die Abbildungen $\phi = (h\cdot)$. Das ist der strukturelle Grund für unser Lemma, das sich so als unmittelbare Konsequenz der Übung 16.3.2.6 erweist. □

16.4.5.11 (**Fundamentalgruppe von Bahnenräumen**). Operiert eine Gruppe G topologisch frei auf einem wegzusammenhängenden schleifenfüllenden Raum X, so ist der Faserwirkungsvergleich 16.4.5.8 für alle $x \in X$ ein Isomorphismus

$$c_x : \pi_1(X/G, \bar{x}) \tilde{\to} G$$

In der Tat operiert nach 16.4.5.7 die Fundamentalgruppe $\pi_1(X/G, \bar{x})$ frei und transitiv auf der Faser über $\bar{x}$ und dasselbe gilt per definitionem für G und die Behauptung folgt damit aus unserem algebraischen Lemma 16.4.5.9. Eine Variante für allgemeine Räume X wird in Übung 16.4.5.20 besprochen.

Beispiele 16.4.5.12. Aus 16.4.5.11 folgt insbesondere $\pi_1(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) = \pi_1(S^n/\{\pm 1\}) = \{\pm 1\}$ für $n \geq 2$ und $\pi_1(S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

16.4.5.13 (**Fundamentalgruppe als Deckbewegungsgruppe**). Hat ein Raum X eine universelle Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ und ist diese wegzusammenhängend und schleifenfüllend, so ist der Faserwirkungsvergleich 16.4.5.8 für alle $x \in X$ und $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ ein Isomorphismus

$$c_{\tilde{x}} : \pi_1(X, x) \tilde{\to} G$$

In der Tat operiert nach 16.3.5.10 die Deckbewegungsgruppe G jeder universellen Überlagerung topologisch frei und die Überlagerungsabbildung induziert einen Homöomorphismus $\tilde{X}/G \tilde{\to} X$, so daß wir 16.4.5.11 anwenden können. Ich erinnere daran, daß nach 16.3.6.3 jeder zusammenhängende lokal wegetriviale Raum eine wegetriviale universelle Überlagerung besitzt.

Satz 16.4.5.14 (über den Faserfunktor). *Gegeben ein zusammenhängender lokal wegetrivialer bepunkteter Raum (X, x) liefert der Faserfunktor $F = F_x : p \mapsto p^{-1}(x)$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der Überlagerungen von X und der Kategorie der $\pi_1(X, x)$-Mengen*

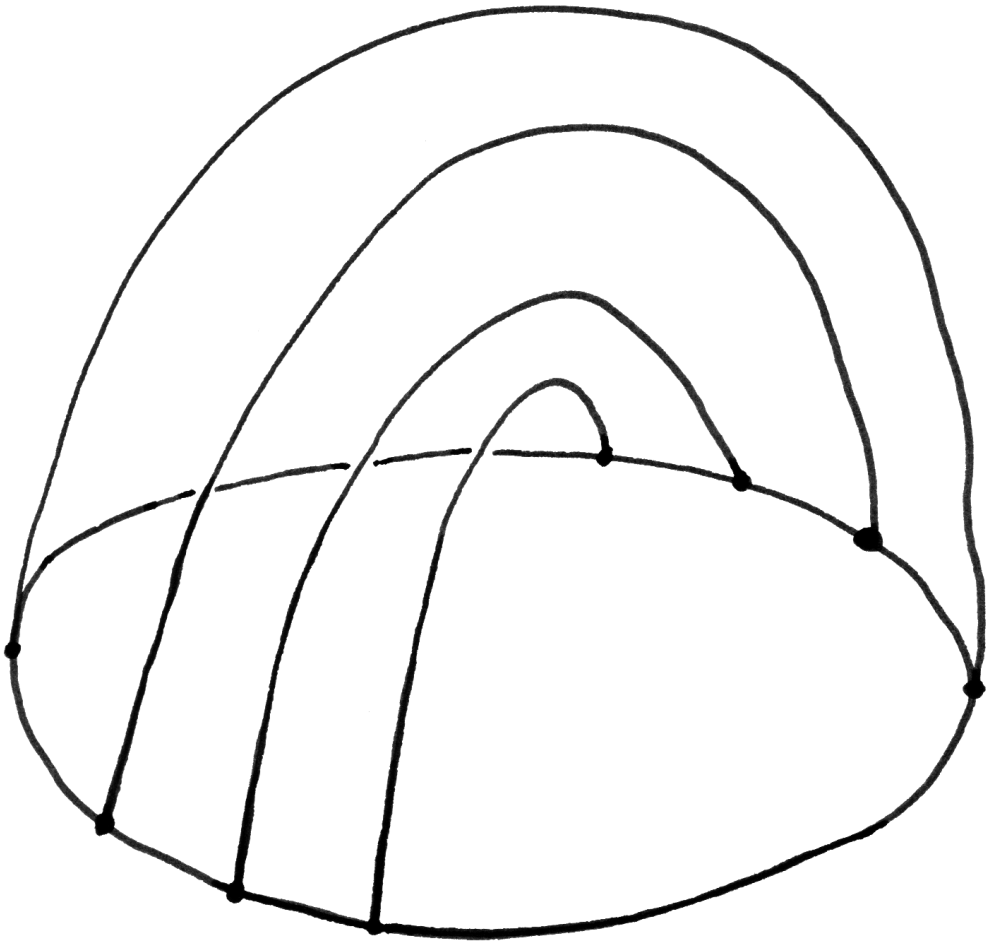
$$F : \ddot{\mathrm{U}}\mathrm{b}_X \ \tilde{\tilde{\to}} \ \pi_1(X, x)\text{-Ens}$$

Beweis. Ich erinnere aus 16.4.4.2 die Äquivalenz von Kategorien

$$T : \ddot{\mathrm{U}}\mathrm{b}_X \ \tilde{\tilde{\to}} \ \mathrm{Ens}\text{-}G$$

für $T = \mathrm{Top}_X(\tilde{X}, \ )$ und $p : \tilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung und G ihre Deckbewegungsgruppe. Ich erinnere weiter aus 16.4.5.13 den Faserwirkungsvergleich $c_{\tilde{x}} : \pi_1(X, x) \tilde{\to} G$ für $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Er liefert eine Äquivalenz

$$C = C_{\tilde{x}} : \mathrm{Ens}\text{-}G \tilde{\tilde{\to}} \pi_1(X, x)\text{-Ens}$$



Anschaulich gesprochen kann es passieren, daß man bei einem Rundweg auf $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ „mit dem Kopf nach unten wieder am Ausgangspunkt ankommt“. Diese Rundwege sind genau die nichtzusammenziehbaren Rundwege auf $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$. Um wieder in sein Auto einsteigen zu können, muß man sie noch ein zweites Mal gehen. Um das zu sehen, mag man sich $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ vorstellen als Kugelschale, in die ein Kreisrundes Loch geschnitten wurde, um dort ein Möbiusband alias eine Kreuzhabe einzukleben, wie ich sie hier gezeichnet habe.

vermittels der Vorschrift, daß wir erst die G-Rechtsoperation durch Inversenbildung in eine Linksoperation verwandeln und diese G-Linksoperation dann mithilfe von $c_{\tilde{x}}$ in eine Linksoperation von $\pi_1(X,x)$. Wir erhalten nun eine Isotransformation $\tau = \tau_{\tilde{x}} : CT \overset{\sim}{\Rightarrow} F$ wie im Doppelpfeil des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\ddot{\mathrm{Ub}}_X \arrow[r, "T"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ens}\text{-}G \arrow[d, "C"] \arrow[dl, Rightarrow, "\tau", "\sim"'] \\
\ddot{\mathrm{Ub}}_X \arrow[r, "F"] & \pi_1(X,x)\text{-}\mathrm{Ens}
\end{tikzcd}$$

angedeutet durch die Isomorphismen $\tau_{\hat{X}} : CT\hat{X} \xrightarrow{\sim} F\hat{X}$, $d \mapsto d(\tilde{x})$ von Mengen mit $\pi_1(X,x)$-Operation, wie der Leser leicht prüfen kann. Da C und T Äquivalenzen von Kategorien sind, muß auch F eine Äquivalenz von Kategorien sein. $\square$

Beispiel 16.4.5.15. Das nebenstehende Bild zeigt eine Überlagerung der Figur 8. Die Fundamentalgruppe dieser Überlagerung ist offensichtlich eine nicht endlich erzeugte Untergruppe der Fundamentalgruppe der Figur 8, die ihrerseits durchaus endlich erzeugt ist.

Satz* 16.4.5.16 (Liftbarkeitskriterium). *Seien $p : (\tilde{X},\tilde{x}) \to (X,x)$ eine Überlagerung, (Y,y) ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender bepunkteter Raum und $f : (Y,y) \to (X,x)$ stetig. Genau dann existiert ein Lift $\tilde{f}$ von f, wenn in $\pi_1(X,x)$ die Inklusion $\operatorname{im} f_\sharp \subset \operatorname{im} p_\sharp$ gilt.*

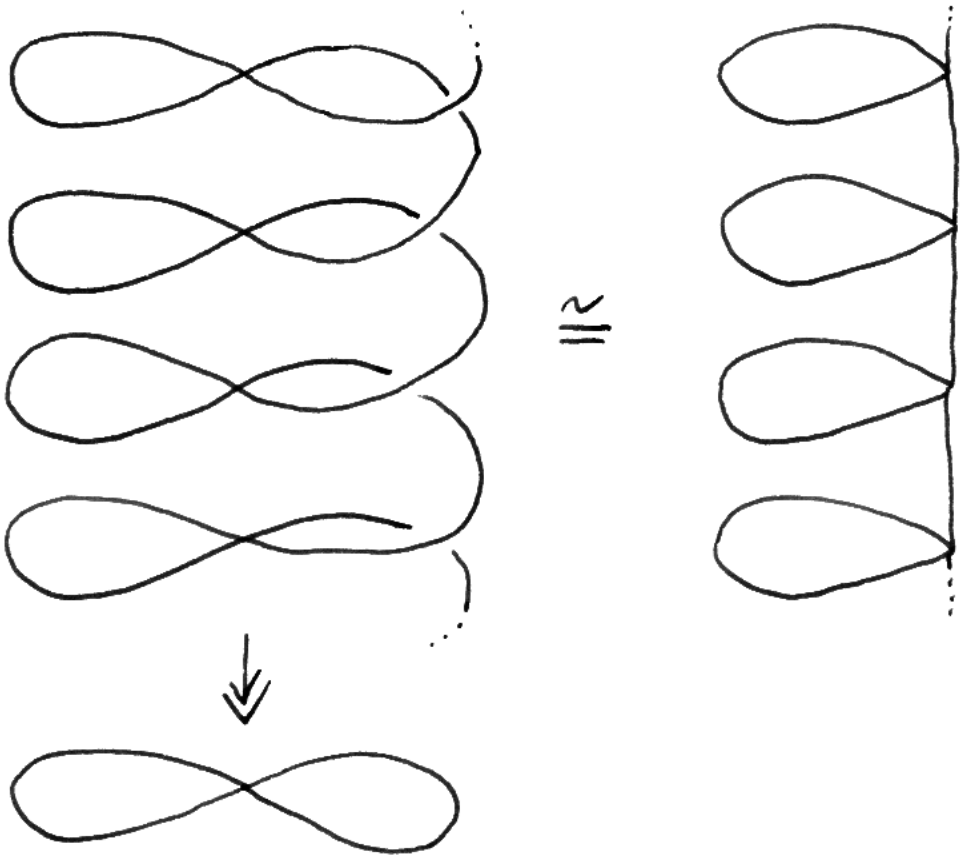
Beweis. Wir veranschaulichen uns die Situation mit dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & (\tilde{X},\tilde{x}) \arrow[d, "p"] \\
(Y,y) \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & (X,x)
\end{tikzcd}$$

Existiert ein Lift $\tilde{f}$, so folgt $p_\sharp \circ \tilde{f}_\sharp = f_\sharp$ und damit $\operatorname{im} f_\sharp \subset \operatorname{im} p_\sharp$. Um die andere Richtung zu zeigen, bilden wir das kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{Y},\tilde{y}) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "q"'] & (\tilde{X},\tilde{x}) \arrow[d, "p"] \\
(Y,y) \arrow[r, "f"] & (X,x)
\end{tikzcd}$$

und behaupten, daß unter unseren Annahmen $q_\sharp : \pi_1(\tilde{Y},\tilde{y}) \to \pi_1(Y,y)$ surjektiv ist. Sonst gäbe es nämlich nach unserer Beschreibung 16.4.5.7 der Fundamentalgruppe einer Überlagerung als Standgruppe einen geschlossenen Weg $\gamma \in \Omega(Y,y)$



Eine Überlagerung der Figur 8 mit nicht endlich erzeugter Fundamentalgruppe.

mit $\langle\gamma\rangle(\tilde{y}) \neq \tilde{y}$. Es folgte $\langle f \circ \gamma\rangle(\tilde{x}) \neq \tilde{x}$, da ja die obere Horizontale in unserem Quadrat eine Bijektion $q^{-1}(y) \xrightarrow{\sim} p^{-1}(x)$ induziert, nochmal nach 16.4.5.7 also $[f \circ \gamma] \notin \operatorname{im} p_\sharp$ im Widerspruch zur Annahme. Da wir Y lokal wegzusammenhängend angenommen hatten, folgt andererseits mit 16.3.1.7, daß die Zusammenhangskomponenten von $\tilde{Y}$ selbst schon Überlagerungen von Y und darüberhinaus wegzusammenhängend sind. Nach 16.4.5.7 bildet dann die Zusammenhangskomponente von $\tilde{y}$ in $\tilde{Y}$ eine einblättrige Überlagerung von Y, und die schenkt uns dann schließlich den gesuchten Lift. □

Übungen

Übung 16.4.5.17 (**Klassifikation bepunkteter Überlagerungen, Variante**). Gegeben ein zusammenhängender lokal wegetrivialer bepunkteter Raum (X, x) erhalten eine Bijektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen zusammenhängender bepunkteter Überlagerungen $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ und der Menge der Untergruppen von $\pi_1(X, x)$ vermittels der Zuordnung

$$p \mapsto \operatorname{im}\Big(p_\sharp : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \to \pi_1(X, x)\Big)$$

Übung 16.4.5.18 (**Klassifikation von Überlagerungen, Variante**). Gegeben ein zusammenhängender lokal wegetrivialer bepunkteter Raum (X, x) induziert die Umkehrabildung unserer Bijektion aus 16.4.5.17 eine Bijektion zwischen der Menge der Konjugationsklassen von Untergruppen von $\pi_1(X, x)$ und der Menge der Isomorphieklassen zusammenhängender Überlagerungen von X.

Übung 16.4.5.19. Man erkläre die Operation der Fundamentalgruppe auf den Fasern im Fall der auf Seite 2697 dargestellten Überlagerung der Acht.

Übung 16.4.5.20 (**Fundamentalgruppe eines Bahnenraums, Variante**). Operiert eine Gruppe G topologisch frei auf einem Raum X, so erhalten wir eine linksexakte Sequenz

$$\pi_1(X, x) \hookrightarrow \pi_1(X/G, \bar{x}) \to G$$

mit dem Faserwirkungsvergleich 16.4.5.8 als zweiter Abbildung. Ist $y \in X$ ein weiterer Punkt derselben Faser und ist $\beta \in \pi_1(X/G, \bar{x})$ ein Weg mit $\langle\beta\rangle(x) = y$, so gilt $c_x = c_y \circ \operatorname{int}(\beta)$ alias $c_x(\gamma) = c_y(\beta\gamma\beta^{-1})$. Ist X wegzusammenhängend, so ist der Faserwirkungsvergleich sogar surjektiv und unsere Sequenz eine kurze exakte Sequenz

$$\pi_1(X, x) \hookrightarrow \pi_1(X/G, \bar{x}) \twoheadrightarrow G$$

Übung 16.4.5.21 (**Funktorialität des Faserwirkungsvergleichs**). Seien X ein Raum mit einer topologisch freien Operation einer Gruppe G und Y ein weiterer

Raum mit einer topologisch freien Operation einer Gruppe H. Sei weiter (f, φ) ein Paar bestehend aus einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ und einem Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ mit $f(gx) = \varphi(g)f(x)$ für alle $x \in X$ und $g \in G$. So kommutiert für jedes $x \in X$ mit Bild $y := f(x)$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X/G, \bar{x}) \arrow[r, "f_\sharp"] \arrow[d, "c_x"'] & \pi_1(Y/H, \bar{y}) \arrow[d, "c_y"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & H \end{tikzcd}$$

für die durch Faserwirkungsvergleich erklärten Gruppenhomomorphismen in den Vertikalen.

Übung 16.4.5.22. Gegeben eine zusammenhängende Überlagerung $(\hat{X}, \hat{x}) \to (X, x)$ eines zusammenhängender lokal wegetrivialen Raums X ist die Gruppe der Deckbewegungen $\mathrm{Top}_X^\times(\hat{X})$ isomorph zu $N/\pi_1(\hat{X}, \hat{x})$ mit $N \subset \pi_1(X, x)$ dem Normalisator von $\pi_1(\hat{X}, \hat{x})$ in $\pi_1(X, x)$. Hinweis: 16.3.2.7.

Weiterführende Übung 16.4.5.23. Seien F und X topologische Räume. Ein **Faserbündel mit Faser** F **auf** X ist ein topologischer Raum $p : E \to X$ über X derart, daß jeder Punkt von X eine Umgebung U besitzt, für die $p : p^{-1}(U) \to U$ als topologischer Raum über U isomorph ist zu $\mathrm{pr}_U : U \times F \to U$. Unser Raum X heißt dann die **Basis** des Faserbündels. Ein derartiger Isomorphismus heißt eine **Bündelkarte auf** U. Ein System von Bündelkarten auf offenen Teilmengen der Basis, die eine Überdeckung unserer Basis bilden, heißt ein **Bündelatlas** unseres Faserbündels. Ein Faserbündel mit diskreter endlicher Faser F der Kardinalität n ist dasselbe wie eine n-blättrige Überlagerung. Seien nun $f : E \to X$ ein Faserbündel und $e \in E$ ein Punkt mit Bild $x := f(e) \in X$. Ist die Faser $F = f^{-1}(x)$ wegzusammenhängend, so folgt aus $\pi_1(E, e) = 1$ bereits $\pi_1(X, x) = 1$. Später werden Sie diese Aussage als Spezialfall der sogenannten „langen exakten Homotopiesequenz“ verstehen lernen.

Übung 16.4.5.24. Je zwei nicht nullhomotope Abbildungen $S^1 \to \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ haben mindestens einen Bildpunkt gemeinsam. Hinweis: Man ziehe sich darauf zurück zu zeigen, daß je zwei schiefsymmetrische Abbildungen $S^1 \to S^2$ einen gemeinsamen Bildpunkt haben.

16.4.6 Erzeuger und Relationen für $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{Z})$*

16.4.6.1. Wir erinnern aus 15.2.3.16 die Operation von $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ auf der offenen oberen komplexen Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ durch

$$g := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto gz := \frac{az + b}{cz + d}$$

Lemma 16.4.6.2 (**Fundamentalbereiche in der oberen Halbebene**).

1. *Unter der Operation von* $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ *auf* $\mathbb{H}$ *trifft jede Bahn die Menge* $D := \{z \in \mathbb{H} \mid -1/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1/2$ *und* $|z| \geq 1\}$*;*

2. *Genau dann gehören zwei verschiedene Punkte von* D *zur selben Bahn, wenn sie „auf dem Rand von* D *liegen“ und durch Spiegelung an der imaginären Achse auseinander hervorgehen;*

3. *Die Gruppe* $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ *wird erzeugt von* $s := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ *und* $t := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$*;*

4. *Die einzigen Elemente von* D *mit nichttrivialer Standgruppe in* $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$ *sind die beiden „unteren Spitzen“* $\exp(2\pi\mathrm{i}/6)$ *und* $\exp(4\pi\mathrm{i}/6)$ *sowie* i*;*

5. *Die Menge* $\mathbb{H}_{\mathrm{sing}}$ *der Punkte mit nichttrivialer Standgruppe von* $\mathbb{H}$ *ist diskret und abgeschlossen;*

6. *Der Quotient* $\mathbb{H}_{\mathrm{reg}}/\mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$ *des Komplements* $\mathbb{H}_{\mathrm{reg}} := \mathbb{H}\backslash H_{\mathrm{sing}}$ *ist homöomorph zum Komplement von zwei Punkten in der Ebene.*

Beweis. 1. Jeder Punkt der oberen Halbebene, der in der Einheitskreisscheibe liegt, wird durch die Transformation $S : z \mapsto -(1/z)$ auf einen Punkt mit echt größerem Imaginärteil abgebildet, und jeder Punkt außerhalb des Streifens $\{z \in \mathbb{C} \mid -1/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1/2\}$ kann durch Addieren einer ganzen Zahl in diesen Streifen verschoben werden. Bezeichnet T die Translation $T : z \mapsto (z+1)$, so kann demnach jeder Punkt sogar durch Anwenden eines Elements der von S und T erzeugten Untergruppe auf ein Element von D abgebildet werden: Andernfalls erhielten wir nämlich in einer Bahn besagter Untergruppe eine Folge von Elementen des besagten Streifens mit Betrag kleiner als Eins und streng monoton wachsendem Imaginärteil und das widerspricht der Formel $\mathrm{Im}(gz) = \mathrm{Im}(z)/|cz+d|^2$, da $|cz+d|^2$ bei festem z nur endlich viele Werte < 1 annehmen kann.

2. Für $z \in D$ folgt aus $gz \in D$ sofort $|c| \leq 1$. Dann muß man die verschiedenen Fälle durchgehen.

3. Für $z \in \mathbb{H}$ gilt $sz = S(z)$ und $tz = T(z)$. Da $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$ treu auf $\mathbb{H}$ operiert, folgt aus dem vorhergehenden bereits $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z}) = \langle \bar{s}, \bar{t} \rangle$. Aus $s^2 = -\mathrm{I}$ folgt dann die Behauptung.

4.– 6. können dem Leser überlassen werden. □

16.4.6.3. Auf $X := \mathbb{H}_{\mathrm{reg}}$ operiert $G := \mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$ nach 16.3.3.8 topologisch frei und der Quotientenraum X/G ist nach 16.4.6.1 homöomorph zum Komplement von zwei Punkten in der Ebene. Wenden wir auf diese Situation die kurze exakte

Sequenz $\pi_1(X,x) \hookrightarrow \pi_1(X/G,\bar{x}) \twoheadrightarrow G$ aus Übung 16.4.5.20 an mit irgendeinem Punkt $x = z \in D^\circ$, so erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$\pi_1(\mathbb{H}_{\mathrm{reg}}, z) \hookrightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$$

Hier vereinbaren wir, daß der Erzeuger 1 des ersten $\mathbb{Z}$ in der Mitte einmal das Bild von i in $\mathbb{H}/\mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$ umläuft und der Erzeuger 1 des zweiten $\mathbb{Z}$ einmal das Bild von $\exp(4\pi\mathrm{i}/6)$ und zwar „im positiven Drehsinn“ für die „offensichtliche“ Orientierung. In $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$ gehen unsere Erzeuger also auf $\bar{s}$ und $\bar{s}\bar{t}$. Das Bild von $\pi_1(\mathbb{H}_{\mathrm{reg}}, z)$ ist nun der vom Quadrat des ersten Erzeugers und der dritten Potenz des zweiten Erzeugers erzeugte Normalteiler und so erhalten wir den behaupteten Gruppenisomorphismus

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$$

16.4.7 Das Yoneda-Lemma*

16.4.7.1. Manchmal ist es wichtig, die verwendeten Universen zu spezifizieren. Wir deuten durch ein vorgestelltes $\mathfrak{U}_\in$ beziehungsweise $\mathfrak{U}_\subset$ um an, daß die Menge der Objekte ein Element beziehungsweise eine Teilmenge eines vorgegebenen Mengensystems $\mathfrak{U}$ ist. Wir deuten ähnlich durch ein vorgestelltes $\vec{\mathfrak{U}}_\in$ beziehungsweise $\vec{\mathfrak{U}}_\subset$ an, daß die Menge der Morphismen zwische zwei beliebig vorgegebenen Objekten ein Element beziehungsweise eine Teilmenge eines vorgegebenen Mengensystems $\mathfrak{U}$ ist. Gegeben Mengensysteme $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ ist etwa eine **$\vec{\mathfrak{V}}_\in$-Kategorie** eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit $\mathcal{C}(X,Y) \in \mathfrak{V}$ für alle $X, Y \in \mathcal{C}$ und von einer **$\mathfrak{U}_\subset$-$\vec{\mathfrak{V}}_\in$-Kategorie** fordern wir zusätzlich $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \subset \mathfrak{U}$.

16.4.7.2. Ich wiederhole 4.7.10.1 folgende. Einen Funktor von einer Kategorie $\mathcal{C}$ in eine Kategorie von Mengen nennen wir kurz einen **Mengenfunktor auf** $\mathcal{C}$. Jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ liefert einen derartigen Mengenfunktor $\check{X} : Y \mapsto \mathcal{C}(X,Y)$. Gegeben ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ und eine Kategorie $\mathcal{C}$ bildet die Menge aller Funktoren $\mathcal{C} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ mit den Transformationen als Morphismen wieder eine Kategorie $\mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})$.

Proposition 16.4.7.3 (Yoneda-Lemma). *Seien $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem, $\mathcal{C}$ eine $\vec{\mathfrak{U}}_\in$-Kategorie, $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $F : \mathcal{C} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ ein Mengenfunktor auf $\mathcal{C}$. So liefert die Abbildungsvorschrift $\tau \mapsto \tau_X(\mathrm{id}_X)$ eine Bijektion*

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})(\check{X}, F) \xrightarrow{\sim} F(X)$$

zwischen der Menge aller Transformationen $\check{X} \Rightarrow F$ und der Menge $F(X)$.

16.4.7.4. Sei $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem. Die zur Kategorie dieser Mengenfunktoren auf einer $\vec{\mathfrak{U}}_\in$-Kategorie $\mathcal{C}$ opponierte Kategorie

$$\mathcal{C}^\vee = \mathcal{C}^\vee_{\mathfrak{U}} := \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})^{\mathrm{opp}}$$

kann man als eine Art „Vervollständigung“ von $\mathcal{C}$ interpretieren. In der Tat liest sich unser Yoneda-Lemma in dieser geschickt abgekürzten Notation als eine Bijektion $\mathcal{C}^\vee(F, \check{X}) \xrightarrow{\sim} F(X)$. Spezialisieren wir zu $F = \check{Y}$, so erhalten wir eine Bijektion $\mathcal{C}^\vee(\check{Y}, \check{X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Y, X)$, von der man leicht zeigt, daß sie die Inverse zur offensichtlichen Abbildung $\mathcal{C}(Y, X) \to \mathcal{C}^\vee(\check{Y}, \check{X})$ ist. So folgt, daß die Vorschrift $X \mapsto \check{X}$ einen volltreuen Funktor $\mathcal{C} \xhookrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\vee$ induziert.

Ergänzung 16.4.7.5. Die hier verwendeten Notationen $\mathcal{C}^\vee$ und das später eingeführte $\mathcal{C}^\wedge$ sind genau umgekehrt wie in [KS90]. Dafür stimmt die Notation $\mathcal{C}^\wedge$ dann mit der in [Gro72] verwendeten Notation überein.

16.4.7.6 (**Das Yoneda-Lema im Fall einer Ein-Objekt-Kategorie**). Im Spezialfall einer Ein-Objekt-Kategorie $\mathcal{C} = [G]$ mit einzigem Objekt X ist diese Aussage besonders leicht einzusehen: Sie besagt dann im Lichte von 16.4.2.11, daß die äquivarianten Abbildungen von einem Monoid G in eine beliebige G-Menge F festgelegt und festlegbar sind durch das Bild des neutralen Elements. Im weiteren lassen wir das Mengensystem $\mathfrak{U}$ wieder in den Hintergrund treten und ignorieren es meist in unserer Notation.

Beweis. Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die andere Richtung. Für beliebiges $a \in F(X)$ betrachten wir dazu die Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} \tau_Y : & \mathcal{C}(X, Y) & \to & F(Y) \\ & f & \mapsto & (Ff)(a) \end{array}$$

Man prüft ohne Schwierigkeiten, daß sie eine Transformation $\tau : \check{X} \Rightarrow F$ bilden, die wir mit $\hat{\tau}(a)$ bezeichnen. Jetzt gilt es nur noch zu zeigen, daß die Abbildung $a \mapsto \hat{\tau}(a)$ invers ist zu unserer Abbildung $\tau \mapsto \hat{a}(\tau) := \tau_X(\mathrm{id}_X)$ aus der Proposition. Dafür müssen wir also prüfen, daß gilt $a = \hat{a}(\hat{\tau}(a))$ für alle $a \in F(X)$ und $\tau = \hat{\tau}(\hat{a}(\tau))$ für alle Transformationen $\tau : \check{X} \Rightarrow F$. Das überlassen wir dem Leser. □

Definition 16.4.7.7. Diejenigen Mengenfunktoren auf $\mathcal{C}$, die isomorph sind zu Mengenfunktoren im Bild von $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^\vee$, heißen **darstellbare Funktoren**. Ist ein Mengenfunktor $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ isomorph zu $\check{X} = \mathcal{C}(X, \ )$ für ein $X \in \mathcal{C}$, so sagen wir, der **Funktor** F **werde dargestellt durch das Objekt** X. Ist noch genauer $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ ein Mengenfunktor und $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $a \in F(X)$ ein Element, das unter der Bijektion aus dem Yoneda-Lemma einer Isotransformation $\mathcal{C}(X, \ ) \overset{\sim}{\Rightarrow} F$ entspricht, so sagen wir, der **Funktor** F **werde strikt dargestellt**

durch das Paar (X, a). Ausgeschrieben bedeutet das, daß die Vorschrift $f \mapsto (Ff)(a)$ für alle $Y \in \mathcal{C}$ eine Bijektion $\mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{\sim} F(Y)$ liefert. Oft lassen wir das „strikt" aber auch weg.

Beispiel 16.4.7.8. Der Vergißfunktor $\mathrm{Mod}_k \to \mathrm{Ens}$ von den k-Vektorräumen in die Mengen wird dargestellt durch das Paar $(k, 1)$ oder auch durch jeden anderen eindimensionalen Vektorraum zusammen mit einem beliebigen von Null verschiedenen Element.

Beispiel 16.4.7.9. Der Vergißfunktor $\mathrm{Grp} \to \mathrm{Ens}$ von den Gruppen in die Mengen wird dargestellt durch das Paar $(\mathbb{Z}, 1)$ oder auch durch jedes andere Paar (Z, e) bestehend aus einer unendlich zyklischen Gruppe und einem Erzeuger.

16.4.7.10. In derselben Weise kann man für jede $\mathfrak{U}$-Kategorie $\mathcal{C}$ auch die Kategorie

$$\mathcal{C}^\wedge = \mathcal{C}^\wedge_{\mathfrak{U}} := \mathrm{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})$$

aller kontravarianten Funktoren $\mathcal{C} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ betrachten und erhält mit $X \mapsto \hat{X} := \mathcal{C}(\ \ , X)$ eine volltreue Einbettung $\mathcal{C} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^\wedge$. Wieder heißen die Funktoren im Bild dieser Einbettung **darstellbare Funktoren**. Die Objekte von $\mathcal{C}^\wedge$ werden Ihnen sehr viel später vielleicht einmal unter der Bezeichnung als „mengenwertige Prägarben auf $\mathcal{C}$" wieder begegnen. Diesmal liefert das Auswerten auf id_X eine Bijektion $\mathcal{C}^\wedge(\hat{X}, F) \xrightarrow{\sim} F(X)$.

Ergänzung 16.4.7.11. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ kann man leicht Isomorphismen von Kategorien $(\mathcal{C}^\vee)^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\mathrm{opp}})^\wedge$ und $(\mathcal{C}^\wedge)^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\mathrm{opp}})^\vee$ angeben. In diesem Sinne sind unsere beiden Konzepte zueinander opponiert.

16.4.8 Mehr zu adjungierten Funktoren*

Satz 16.4.8.1 (Adjunktion durch Einheit und Koeinheit). *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien und $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren und $\alpha : L \dashv R$ eine Adjunktion.*

1. *Die Einheit und Koeinheit unserer Adjunktion 16.4.3.6 erfüllen die* **Dreiecksidentitäten** $\check{\alpha}L \circ L\hat{\alpha} = \mathrm{id}_L$ *sowie* $R\check{\alpha} \circ \hat{\alpha}R = \mathrm{id}_R$ *von Transformationen* $L \Rightarrow LRL \Rightarrow L$ *beziehungsweise* $R \Rightarrow RLR \Rightarrow R$*;*

2. *Gegeben Transformationen $\varepsilon : \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow RL$ und $\eta : LR \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$, die die Dreiecksidentitäten $\eta L \circ L\varepsilon = \mathrm{id}_L$ und $R\eta \circ \varepsilon R = \mathrm{id}_R$ erfüllen, gibt es genau eine Adjunktion $\alpha : L \dashv R$ mit Einheit $\hat{\alpha} = \varepsilon$ und Koeinheit $\check{\alpha} = \eta$.*

Beweis. Wir beginnen mit einem Lemma und führen danach den Beweis. □

Lemma 16.4.8.2. *Gegeben $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien und $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren erhalten wir eine Bijektion*

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{B}, \mathrm{Ens})\big(\mathcal{B}(L\ ,\ ), \mathcal{A}(\ , R\ )\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{A})(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, RL)$$

durch die Vorschrift $\alpha \mapsto \varepsilon^\alpha$ *mit* $\varepsilon^\alpha_A := \alpha(\mathrm{id}_{LA}) : A \to RLA$ *mit Umkehrabbildung* $\varepsilon \mapsto \alpha^\varepsilon$ *gegeben durch* $\alpha^\varepsilon_{A,B}(h) := (Rh) \circ \varepsilon_A : A \to RB$ *für* $h : LA \to B$.

Beweis des Lemmas. Da ist eine ganze Menge zu prüfen. Als erstes zeigen wir, daß für fest vorgegebenes α unser ε^α in der Tat eine Transformation ist, daß also für jeden Morphismus $f : X \to A$ in $\mathcal{A}$ gilt $\varepsilon^\alpha_A \circ f = RL(f) \circ \varepsilon^\alpha_X$. Der Trick ist zu zeigen, daß beide Seiten gleich sind zu $\alpha_{X,LA}(Lf)$, und das kann dem Leser überlassen bleiben. Damit haben wir zumindest gezeigt, daß die Abbildung sinnvoll definiert ist, von der wir behaupten, daß sie eine Bijektion sein soll. Als nächstes zeigen wir, daß für fest vorgegebenes ε unser α^ε in der Tat eine Transformation ist, daß also für jeden Morphismus $f : X \to A$ in $\mathcal{A}$ und beliebige Morphismen $g : B \to Y$ sowie $h : LA \to B$ in $\mathcal{B}$ gilt

$$Rg \circ \alpha^\varepsilon_{A,B}(h) \circ f = \alpha^\varepsilon_{X,Y}(g \circ h \circ Lf)$$

Ausgeschrieben gilt es zu zeigen $Rg \circ Rh \circ \varepsilon_A \circ f = R(g \circ h \circ Lf) \circ \varepsilon_X$ und das folgt sofort aus $\varepsilon_A \circ f = RL(f) \circ \varepsilon_X$. Damit ist auch die behauptete Umkehrabbildung sinnvoll definiert und es bleibt nur zu zeigen $\varepsilon = \varepsilon^{\alpha^\varepsilon}$ und $\alpha = \alpha^{\varepsilon^\alpha}$, was wir dem Leser zur Übung überlassen. □

Beweis des Satzes. Um die erste Dreiecksidentität zu zeigen, also $\check{\alpha}_{LX} \circ L(\hat{\alpha}_X) = \mathrm{id}_{LX}$ für alle $X \in \mathcal{A}$, setzen wir in die Definitionen ein und müssen zeigen $\alpha^{-1}(\mathrm{id}_{RLX}) \circ L(\alpha(\mathrm{id}_{LX})) = \mathrm{id}_{LX}$. Wenden wir darauf α an und verwenden die Natürlichkeit nach 16.4.3.2, so ist gleichbedeutend $\mathrm{id}_{RLX} \circ \alpha(\mathrm{id}_{LX}) = \alpha(\mathrm{id}_{LX})$ und das ist klar. Die andere Dreiecksidentität zeigt man ebenso. Um den dritten Teil zu zeigen, müssen wir nur prüfen, daß unter der Annahme der Dreiecksidentitäten die aus dem Lemma entstehenden Transformationen $\alpha = \alpha^\varepsilon$ und die durch Übergang zu den opponierten Kategorien entstehende Transformation $\beta = \beta^\eta$ in die Gegenrichtung zueinander invers sind. Diese Rechnung sei wieder dem Leser überlassen. □

16.4.8.3 (**Eindeutigkeit der Adjungierten**). Gegeben Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ erhalten wir mit der kategoriellen Fassung des Exponentialgesetzes 4.7.4.13 für die obere Horizontale und den Yondeda-Einbettungen $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \hookrightarrow \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})$ für die Vertikalen ein Diagramm von Kategorien

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathrm{Cat}(\mathcal{B}, \mathrm{Ens})) & \underset{\mathrm{can}_1}{\xrightarrow{\sim}} & \mathrm{Cat}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathrm{Ens}) & \underset{\mathrm{can}_2}{\xleftarrow{\sim}} & \mathrm{Cat}(\mathcal{B}, \mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathrm{Ens})) \\
\uparrow & & & & \uparrow \\
\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}^{\mathrm{opp}}) & & & & \mathrm{Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{A}^{\mathrm{opp}})
\end{array}$$

mit volltreuen Einbettungen als Vertikalen. Eine Adjunktion $\alpha : L \dashv R$ zwischen einem Funktor $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}^{\mathrm{opp}}$ und dem Funktor $R : \mathcal{B}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}$, ist eine Isotransformation $\alpha : \mathrm{can}_1(\mathrm{Y}L) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{can}_2(\mathrm{Y}R^{\mathrm{opp}})$. Das Diagramm zeigt, daß gegeben L

ein Paar (α, R) bestehend aus einem Funktor in die Gegenrichtung und einer Adjunktion $\alpha : L \dashv R$ eindeutig bestimmt ist bis auf eindeutigen Isomorphismus. Man benutzt deshalb meist den bestimmten Artikel und nennt R den **rechtsadjungierten Funktor** zu L, wobei eigentlich nicht nur der Funktor R gemeint ist, sondern das Paar (α, R). Ebenso wird auch das Paar (α, L) durch R im wesentlichen eindeutig festgelegt und man nennt L den **linksadjungierten Funktor** zu R. Spricht man von einem **adjungierten Paar** $L \dashv R$, so ist der Leser gefordert, die vom Autor gemeinte Adjunktion α von L und R aus dem Kontext zu erschließen.

16.4.8.4. Ist $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem und sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ beide $\mathfrak{U}$-Kategorien, so können wir zu jedem Funktor $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ den **maximalen partiellen rechtsadjungierten Funktor** R bilden, der eben nur auf der vollen Unterkategorie $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ derjenigen Objekte $B \in \mathcal{B}$ erklärt ist, für die der Mengenfunktor $\mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$, $X \mapsto \mathcal{B}(LX, B)$ darstellbar ist im Sinne von 16.4.7.10. Wieder ist das Paar (α, R) bestehend aus dem Funktor $R : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{A}$ und der Isotransformation

$$\alpha \in \mathrm{Cat}(\mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{B}_0, \mathrm{Ens})\big(\mathcal{B}(L\ ,\ ), \mathcal{A}(\ , R\ )\big)$$

eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir sagen dann auch, der „rechtsadjungierte Funktor sei bei B definiert“. Wollen wir speziell betonen, daß ein rechtsadjungierter Funktor überall definiert ist, so sprechen wir von einem **globalen Rechtsadjungierten**. Jede Restriktion eines maximalen partiellen Rechtsadjungierten nennen wir einen **partiellen Rechtsadjungierten**. Analoge Begriffsbildungen vereinbaren wir für Linksadjungierte.

16.4.8.5. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien. Unter einem **partiell definierten Funktor** verstehe ich einen Funktor von einer vollen Unterkategorie von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. Ich notiere partiell definierte Funktoren auch $F : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B}$. Zum Beispiel ist der maximale partielle Rechtsadjungierte eines beliebigen Funktors $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein partiell definierter Funktor $\mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{A}$.

Vorschau 16.4.8.6. Betrachten wir wie in 16.4.7.10 die Yoneda-Einbettung $\mathcal{C} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^\wedge := \mathrm{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathrm{Ens})$. Ein Funktor im Bild heißt ein „darstellbarer Funktor“. Auch wenn ein Funktor $F \in \mathcal{C}^\wedge$ nicht darstellbar ist, kann immerhin der Rechtsadjungierte der Einbettung $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\wedge$ bei F definiert sein. Das entsprechende Objekt $R(F) \in \mathcal{C}$ mag man dann als eine „bestmögliche Approximation an ein darstellendes Objekt“ verstehen. Ein Beispiel für solche Konstruktionen sind die sogenannten **groben Modulräume**.

Definition 16.4.8.7. Ist allgemein $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem ausgezeichneten Funktor $v : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ in die Kategorie der Mengen, als da heißt eine Kategorie über Ens, so nennen wir den Wert des möglicherweise partiellen Linksadjungierten auf einer Menge X das **freie Objekt von $\mathcal{C}$ über** X und notieren dies freie Objekt im allgemeinen

$$\mathcal{C}^{\backprime} X$$

und notieren $\varepsilon : X \to v(\mathcal{C}^{\backprime} X)$ die durch Einheit der Adjunktion gegebene Abbildung.

Beispiel 16.4.8.8 (**Freie Gruppen und freie abelsche Gruppen**). Der Vergißfunktor von den Gruppen in die Mengen hat als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge die freie Gruppe über besagter Menge zuordnet, wie sie in 16.2.5.6 eingeführt wird. Der Vergißfunktor von den abelschen Gruppen in die Mengen hat als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge die freie abelsche Gruppe über besagter Menge zuordnet. Für diese Gruppe verwenden wir die Notation $\mathrm{Ab}^{\backprime} X = \mathbb{Z}X$.

Beispiel 16.4.8.9 (**Es gibt keine freien Körper**). Der Vergißfunktor von den Körpern in die Mengen hat keinen Linksadjungierten. Es gibt also salopp gesprochen keine sinnvolle Definition eines „freien Körpers über einer vorgegebenen Menge“.

Beispiel 16.4.8.10. Der Vergißfunktor von den k-Vektorräumen in die Mengen hat als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge X den freien k-Vektorraum über der Menge X zuordnet, also den Vektorraum aller Abbildungen $X \to k$, die nur an endlich vielen Stellen $x \in X$ verschieden sind von Null. Wir verwenden für diesen Vektorraum die abkürzende Notation

$$k\text{-}\mathrm{Mod}^{\backprime} X = k\langle X \rangle$$

Ist allgemeiner k ein Ring, so verwenden wir dieselbe Notation auch für den freien k-Modul über X.

Beispiel 16.4.8.11. Gegeben ein kommutativer Ring k ist der freie k-Kring über einer Menge von Veränderlichen schlicht der Polynomring in diesen Veränderlichen, in Formeln gilt also zum Beispiel

$$(\mathrm{Kring}^k)^{\backprime}\{T_1, \ldots, T_n\} = k[T_1, \ldots, T_n]$$

mit derjenigen Abbildung $\varepsilon : \{T_1, \ldots, T_n\} \to k[T_1, \ldots, T_n]$ als universeller Mengen-k-Kringalgebren-Abbildung, die eben T_i auf T_i abbildet.

Übungen

Ergänzende Übung 16.4.8.12 (**Partielle Dreiecksidentitäten**). Sei $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor. Man zeige: Gegeben ein Objekt $A \in \mathcal{A}$ derart, daß der partielle Rechtsadjungierte R bei LA definiert ist, ist die Verknüpfung $LA \to LRLA \to LA$ der von der Einheit $A \to RLA$ und der Identität $RLA \to RLA$ herrührenden Morphismen die Identität auf LA. Gegeben ein Objekt $B \in \mathcal{B}$ derart, daß der partielle Rechtsadjungierte R bei B und LRB definiert ist, ist weiter die entsprechende Verknüpfung $RB \to RLRB \to RB$ die Identität auf RB.

Übung 16.4.8.13. Seien $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ ein Paar (L, R) adjungierter Funktoren. So gilt für den Isomorpismus $\mathcal{B}(LA, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(A, RB)$ stets $f \mapsto Rf \circ \varepsilon_A$ und für seine Umkehrabbildung gilt $g \mapsto \eta_B \circ Lg$. Des weiteren können wir $\mathcal{B}(LA, LA_1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(A, RLA_1)$ beschreiben durch die Vorschrift $f \mapsto Rf \circ \varepsilon_A$ und $\mathcal{A}(RB_1, RB) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(LRB_1, B)$ durch die Vorschrift $g \mapsto \eta_B \circ Lg$. Für letzere Aussagen mögen die Dreiecksidentitäten helfen.

Übung 16.4.8.14. Sei $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor und R sein Rechtsadjungierter. So ist die Restriktion von R auf die volle Unterkategorie $L(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ der Rechtsadjungierte von $L : \mathcal{A} \to L(\mathcal{A})$. Analoges gilt für Linksadjungierte.

Übung 16.4.8.15 (**Äquivalenz durch Adjunktion**). Gegeben ein Funktor $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ betrachte man seinen partiellen Rechtsadjungierten R und die vollen Unterkategorien

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &:= \{A \in \mathcal{A} \mid RLA \text{ ist definiert und die Einheit ist ein Iso } A \xrightarrow{\sim} RLA\} \\ \mathcal{B}_0 &:= \{B \in \mathcal{B} \mid RB \text{ ist definiert und die Koeinheit ist ein Iso } LRB \xrightarrow{\sim} B\} \end{aligned}$$

Man zeige, daß L eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{A}_0 \xrightarrow{\approx} \mathcal{B}_0$ mit Quasiinversem R induziert. Hinweis: 16.4.8.12.

Ergänzende Übung 16.4.8.16 (**Volltreuheit von Adjungierten**). Besitzt ein Funktor F einen volltreuen Linksadjungierten L, so ist für jedes Objekt Y, auf dem der partielle Rechtsadjungierte von F definiert ist, der Adjunktionsmorphismus ein Isomorphismus $FRY \xrightarrow{\sim} Y$ und der partielle Rechtsadjungierte von F ist ebenfalls volltreu. Hinweis: Für $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ beachte man die kanonischen Isomorphismen

$$\mathcal{B}(X, FRY) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(LX, RY) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(FLX, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(X, Y)$$

In 20.1.3.9 werden wir diese Aussage als Konsequenz einer größeren Theorie verstehen können: Jeder Funktor mit einem volltreuen Linksadjungierten oder volltreuen Rechtsadjungierten ist ein „Lokalisierungsfunktor“ und die beiden partiellen Adjungierten eines Lokalisierungsfunktors sind stets volltreu.

Übung 16.4.8.17 (**Adjungierte zur Restriktion von Gruppenwirkungen**). Ist $\varphi : H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus, so besitzt der offensichtliche Funktor $\mathrm{res}_G^H : G\text{-Ens} \to H\text{-Ens}$ einen Linksadjungierten, den wir prod_H^G notieren und der einer H-Menge X die G-Menge

$$G \times_{/H} X$$

aller H-Bahnen in $G \times X$ unter der Operation $h(g, x) = (gh^{-1}, hx)$ zuordnet. Ebenso besitzt er einen Rechtsadjungierten $\mathrm{ind}_H^G : X \mapsto \mathrm{Ens}_{H\backslash}(G, X)$.

16.4.8.18 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißt $G \times_{/H} X$ meist die „von X induzierte G-Menge". Wir werden jedoch von der **von X koinduzierten G-Menge** reden, um mit anderen Begriffsbildungen kompatibel zu bleiben. Ist etwas allgemeiner H eine Gruppe und X eine H-Menge und Y eine H-Rechtsmenge, so erklärt man analog ihr **balanciertes Produkt**

$$Y \times_{/H} X$$

als die Menge aller H-Bahnen in $Y \times X$ unter der Operation $h(y,x) = (yh^{-1}, hx)$. Die Bahn von (y,x) notieren wir $[y,x]$. Oft werden balancierte Produkte statt $Y \times_{/H} X$ einfacher $Y \times_H X$ notiert. Das kann leider auch ein Faserprodukt bedeuten und der Leser muß aus dem Kontext erschließen, welche Bedeutung jeweils gemeint ist.

Übung 16.4.8.19. Ist G eine Gruppe mit Untergruppen H, K und ist $S = H \cap K$ ihr Schnitt, so induziert die Multiplikation eine Bijektion $H \times_{/S} K \xrightarrow{\sim} HK$.

Ergänzende Übung 16.4.8.20. Ist G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe und $y \in G$ ein Element und $S = H \cap yHy^{-1}$, so erhalten wir einen Isomorphismus $H \times_S H \xrightarrow{\sim} HyH$ von $(H \times H)$-Mengen mit der Rechtsoperation von $s \in S$ auf H durch Rechtsmultiplikation und der Linksoperation von $s \in S$ auf H durch Linksmultiplikation mit $y^{-1}sy$ vermittels der Abbildung $[h,k] \mapsto hyk$. Hinweis: Man wende 16.4.8.19 an mit $K = yHy^{-1}$.

Ergänzende Übung 16.4.8.21. Sei $\varphi : H \to G$ ein Homomorphismus topologischer Gruppen. Bezeichnet Top^G die Kategorie der topologischen Räume mit einer stetigen G-Operation, so besitzt der offensichtliche Funktor $\mathrm{Top}^G \to \mathrm{Top}^H$ einen Linksadjungierten, den wir prod_H^G notieren und der einem H-Raum X den G-Raum $G \times_{/H} X$ mit seiner Quotiententopologie zuordnet. Die Stetigkeit der Operation von G folgt hier zum Beispiel mit 16.3.3.9.

Übung 16.4.8.22 (**Adjungierter einer Verknüpfung**). Der Adjungierte einer Verknüpfung ist die Verknüpfung der Adjungierten, als da heißt: Gegeben Funktoren $R_* : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $S_* : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ mit Linksadjungierten R^* und S^* erhalten wir eine Adjunktion $(R^* \circ S^*) \dashv (S_* \circ R_*)$ in kanonischer Weise.

Übung 16.4.8.23 (**Transformationen zwischen Adjungierten**). Jede Transformation von einem Funktor zu einem weiteren Funktor induziert ein natürlicher Weise eine Transformation in der Gegenrichtung zwischen ihren Links- beziehungsweise ihren Rechtsadjungierten, soweit diese existieren.

Übung 16.4.8.24 (**Transformationen zwischen Adjungierten, Variante**). Gegeben adjungierte Paare (L,R) und (L',R') von Funktoren zwischen Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ beziehungsweise $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ und Funktoren $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ sowie $G : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ konstruiere man eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}')(L'F, GL) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{A}')(FR, R'G)$$

Übung 16.4.8.25 (**Kompatibilitäten**). Sei F ein Funktor mit Linksadjungiertem E und Rechtsadjungiertem G, so daß wir adjungierte Paare (E, F) und (F, G) haben. Die Einheit der Adjunktion $\varepsilon : \mathrm{Id} \Rightarrow FE$ induziert durch Übergang zu den Rechtsadjungierten mit 16.4.8.22 und 16.4.8.23 eine Transformation $FG \Rightarrow \mathrm{Id}$. Man zeige, daß sie mit der Koeinheit der Adjunktion (F, G) zusammenfällt.

Ergänzung 16.4.8.26 (**Adjunktionen einiger Funktoren von G-Mengen**). Gegeben $H \subset G$ eine Untergruppe und X eine H-Menge bezeichne $[g, x] \in G \times_{/H} X$ die Bahn von (g, x). Ist X die Restriktion einer G-Menge, so definiert die Abbildung $[g, x] \mapsto (gH, gx)$ eine G-äquivariante Bijektion

$$G \times_{/H} X \xrightarrow{\sim} (G/H) \times X$$

Hier ist auf der rechten Seite das Produkt des G-Mengen (G/H) und X in der Kategorie der G-Mengen gemeint, also mit der „diagonalen“ G-Operation. Allgemeiner ist für jede G-Menge E der Funktor $(E\times) : G\text{-Ens} \to G\text{-Ens}$ linksadjungiert zum Funktor $\mathrm{Ens}(E, \ ) : G\text{-Ens} \to G\text{-Ens}$ vermittels der kanonischen Bijektionen aus 2.1.6.5, wenn wir die G-Operation auf einem Raum von Abbildungen $\mathrm{Ens}(E, M)$ erklären durch die Konjugation, so daß in Formeln gf erklärt sei durch $(gf)(x) = g(f(g^{-1}x)$. Gegeben $M \in H\text{-Ens}$ und $E \in G\text{-Ens}$ haben wir kanonische Isomorphismen von G-Mengen

$$\begin{aligned}
\mathrm{prod}_H^G(E \times M) &\xrightarrow{\sim} E \times (\mathrm{prod}_H^G M) \\
\mathrm{ind}_H^G \mathrm{Ens}(E, M) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(E, \mathrm{ind}_H^G M) \\
\mathrm{ind}_H^G \mathrm{Ens}(M, E) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(\mathrm{prod}_H^G M, E)
\end{aligned}$$

Ganz allgemein ist nach 16.4.8.22 der Adjungierte einer Verknüpfung von Funktoren die Verknüpfung der Adjungierten, wenn sie existieren. Diese Erkenntnis gilt es nun anzuwenden auf die kommutativen Diagramme von Funktoren

$$\begin{array}{ccc}
G\text{-Ens} & \xrightarrow{E\times} & G\text{-Ens} \\
\downarrow & & \downarrow \\
H\text{-Ens} & \xrightarrow{E\times} & H\text{-Ens}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
G\text{-Ens} & \xrightarrow{\mathrm{Ens}(E,\ )} & G\text{-Ens} \\
\downarrow & & \downarrow \\
H\text{-Ens} & \xrightarrow{\mathrm{Ens}(E,\ )} & H\text{-Ens}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
G\text{-Ens} & \xrightarrow{\mathrm{Ens}(\ ,E)} & G\text{-Ens}^{\mathrm{opp}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
H\text{-Ens} & \xrightarrow{\mathrm{Ens}(\ ,E)} & H\text{-Ens}^{\mathrm{opp}}
\end{array}$$

mit den Restriktionen als Vertikalen und der Adjunktion $(E\times, \mathrm{Ens}(E, \ ))$ beziehungsweise der Tatsache, daß der Rechtsadjungierte der Horizontalen $\mathrm{Ens}(\ , E)$ im Diagramm ganz rechts wieder $\mathrm{Ens}(\ , E)$ ist, nur diesmal aufgefaßt als Funktor in der Gegenrichtung, also präziser der Funktor $\mathrm{Ens}(\ , E)^{\mathrm{opp}}$.

16.5 Weiterführende Resultate

16.5.1 Die Zopfgruppe

Definition 16.5.1.1. Sei X_n die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit genau n Elementen. Wir geben X_n die Finaltopologie für die die Reihenfolge vergessende Abbildung $\mathbb{C}^n \backslash \Delta \twoheadrightarrow X_n$ mit $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ der **großen Diagonale** alias der Menge aller n-Tupel komplexer Zahlen, in denen mindestens eine Zahl doppelt vorkommt. Die Fundamentalgruppe von X_n heißt die **Zopfgruppe in n Strängen**, englisch **braid group**, französisch **groupe de tresses**. Als Basispunkt nehmen wir meist $* = \{1, 2, \ldots, n\}$.

16.5.1.2. Die Elemente der Zopfgruppe kann man durch Bilder darstellen wie etwa das nebenstehende Bild für ein Element $\gamma \in \pi_1(X_3)$. Dies Bild stellt im Raum $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ die Menge $\{(z, t) \mid z \in \gamma(t)\}$ dar, mit t als senkrechter Koordinate und mit der Konvention, daß Punkte mit größerem Imaginärteil weiter hinten liegen mögen. Die Verknüpfung in unserer Zopfgruppe bedeutet in dieser Anschauung das „Aneinanderhängen“ solcher „Zöpfe“.

Notation 16.5.1.3. Bezeichne $s_\nu \in \pi_1(X_n, *)$ für $1 \leq \nu \leq n-1$ die Klasse des Weges, unter dem der Punkt ν durch die untere Halbebene nach $\nu + 1$ wandert und gleichzeitig der Punkt $\nu + 1$ durch die obere Halbebene nach ν. Alle anderen Punkte sollen unter s_ν auf ihren Plätzen bleiben. Ein Repräsentant dieser Klasse wäre etwa der Weg

$$s_\nu(t) = \{1, \ldots, \nu - 1,\ (\nu + 1/2 - \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}\, t}/2),\ (\nu + 1/2 + \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}\, t}/2),\ \nu + 2, \ldots, n\}$$

Satz 16.5.1.4 (Erzeuger und Relationen der Zopfgruppe). *Die Zopfgruppe in n Strängen wird dargestellt durch die Erzeuger $s_1, \ldots, s_{n-1}$ mit den sogenannten* **Zopfrelationen**

$$\begin{aligned} s_i s_j &= s_j s_i && \textit{falls } |i-j| > 1; \\ s_i s_j s_i &= s_j s_i s_j && \textit{falls } |i-j| = 1. \end{aligned}$$

16.5.1.5. In der Anschauung überzeugt man sich leicht, daß die s_i die Zopfgruppe erzeugen und die Zopfrelationen erfüllen. Hier verstellt das formale Argument eher den Blick. Das eigentliche Problem besteht darin, zu zeigen, daß nicht noch weitere Relationen benötigt werden.

Beweis des Satzes. Wir beginnen mit dem Fall $n = 3$ und berechnen zunächst die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C}^3 \backslash \Delta)$ einer Überlagerung von X_3. Wir interpretieren Elemente von $\mathbb{C}^3 \backslash \Delta$ als die Angabe von drei paarweise verschiedenen Punkten in der Ebene $\mathbb{C}$, wobei wir jedoch im Unterschied zu X_3 noch wissen, welcher Punkt hier der Erste beziehungsweise der Zweite beziehungsweise der Dritte ist.

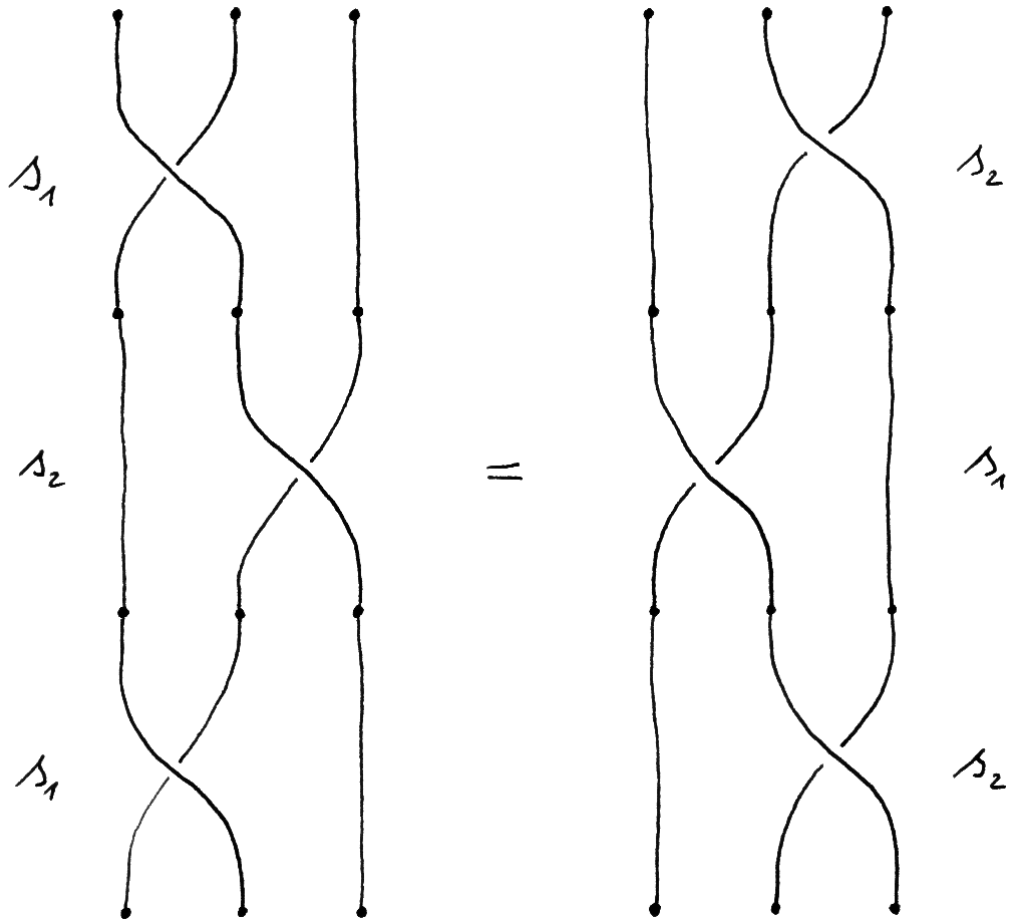


Illustration der Zopfrelation $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$. In der Tat geht bei beiden Bildern der Faden von links oben nach rechts unten „auf der obersten Ebene“, der Faden von rechts oben nach links unten „auf der untersten Ebene“, und der Faden von der Mitte zur Mitte auf einer „mittleren Ebene“.

Wir ändern die Fundamentalgruppe von $\mathbb{C}^3\backslash\Delta$ nicht, wenn wir den zweiten Punkt festhalten, formal ist genauer die Einbettung

$$\begin{array}{rcl} \{(x,y) \in (\mathbb{C}^\times)^2 \mid x \neq y\} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^3\backslash\Delta \\ (x,y) & \mapsto & (x,0,y) \end{array}$$

eine Homotopieäquivalenz. Wir geben der linken Seite den Namen M und betrachten die Überdeckung $M = M_+ \cup M_-$ durch die offenen Teilmengen

$$\begin{array}{rcl} M_+ & := & M\backslash\{(x,\lambda x) \mid 0 < \lambda < 1\} \\ M_- & := & M\backslash\{(\lambda y, y) \mid 0 < \lambda < 1\} \end{array}$$

mit Schnitt $M_+ \cap M_- = \{(x,y) \in M \mid \mathbb{R}_{>0}x \neq \mathbb{R}_{>0}y\}$. Stellen wir uns den festen Punkt als die Sonne vor und x beziehungsweise y als die Erde beziehungsweise den Mond, die sich jedoch in einer Ebene völlig unabhängig voneinander bewegen dürfen, so ist M_+ die Menge aller Konstellationen „ohne Sonnenfinsternis“ und M_- die Menge aller Konstellationen „ohne Mondfinsternis“. Jetzt haben wir Homotopieäquivalenzen

$$\begin{array}{rclrcl} S^1 \times S^1 & \to & M_+, & (z,w) & \mapsto & (z,2w) \\ S^1 \times S^1 & \to & M_-, & (z,w) & \mapsto & (2z,w) \\ S^1 & \to & M_+ \cap M_-, & z & \mapsto & (-z,z) \end{array}$$

Wenn wir Basispunkte $1 \in S^1$, $(1,1) \in S^1 \times S^1$ und $(-1,1) \in M$ wählen, erhalten wir mit etwas komplizierteren Ausdrücken auch basispunkterhaltende Homotopieäquivalenzen, indem „wir Erde un Mond um geeignete Punkte p auf der reellen Achse kreisen lassen“, in Formeln

$$\begin{array}{rclrcl} S^1 \times S^1 & \to & M_+, & (z,w) & \mapsto & (-p - z(1-p), \quad -p + w(1+p)) \\ S^1 \times S^1 & \to & M_-, & (z,w) & \mapsto & (\ \ p - z(1+p), \quad\ \ p + w(1-p)) \end{array}$$

für beliebig fest gewähltes p mit $0 < p < 1/2$. Unsere dritte Homotopieäquivalenz $S^1 \to M_+ \cap M_-$ von oben erhält schon die Basispunkte. Wie man anschaulich schnell einsieht und unschwer formalisiert, kommutieren mit unserer Wahl von Basispunkten nun die beiden nur durch ein Vorzeichen unterschiedenen Diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{diag}"'] & & \pi_1(M_+ \cap M_-) \arrow[d] \\ \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) & \pi_1(S^1 \times S^1) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & \pi_1(M_\pm) \end{tikzcd}$$

und wir erhalten isomorphe pushout-Diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi_1(M_+ \cap M_-) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(M_+) \arrow[d] \\ \pi_1(M_-) \arrow[r] & \pi_1(M) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{diag}"] \arrow[d, "\mathrm{diag}"'] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[d] \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r] & \pi_1(\mathbb{C}^3 \backslash \Delta) \end{tikzcd}$$

Man sieht so, daß $\pi_1(\mathbb{C}^3 \backslash \Delta)$ erzeugt wird von den Klassen g, u_+, u_- der drei Wege

$$\begin{array}{lllllll} \tilde{g}: & t \mapsto & (& -\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} & , 0, & \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} &) \\ \tilde{u}_+: & t \mapsto & (& -1 & , 0, & p + (1-p)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} &) \\ \tilde{u}_-: & t \mapsto & (& -p - (1-p)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} & , 0, & 1 &) \end{array}$$

für beliebiges festes p mit $0 < p < 1/2$, wo wir nur die beiden Kommutationsrelationen $gu_+ = u_+ g$ und $gu_- = u_- g$ fordern müssen. Wir behaupten, daß die Bilder unserer drei Wege in der Zopfgruppe $\pi_1(X_3)$ gegeben werden durch

$$\begin{array}{lll} u_+ & \mapsto & s_1^2 \\ u_- & \mapsto & s_2^2 \\ g & \mapsto & (s_1 s_2)^3 = (s_2 s_1)^3 \end{array}$$

Das scheint mir anschaulich evident. Formal kann man zum Beispiel in $\mathbb{C}^3 \backslash \Delta$ den Weg $\tilde{g}_{1/2}$ von $(-1, 0, 1)$ nach $(1, 0, -1)$ betrachten mit $\tilde{g}_{1/2}(t) = \tilde{g}(2t)$ sowie die Wege $\tilde{s}_1$ und $\tilde{s}_2$ gegeben durch

$$\begin{array}{lllllll} \tilde{s}_1: & t & \mapsto & (& -1/2 - \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}/2 & , \; -1/2 + \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}/2 & , \quad 1 \quad) \\ \tilde{s}_2: & t & \mapsto & (& -1 & , \; 1/2 - \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}/2 & , \; 1/2 + \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}/2 \;) \end{array}$$

und linear interpolieren zwischen den Wegen $\tilde{g}_{1/2}$ und $(\tau \circ \tilde{s}_1) * (\sigma \circ \tilde{s}_2) * \tilde{s}_1$ für Permutationen $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_3$ der drei Koordinaten derart, daß die Wege verknüpfbar sind. Dasselbe gilt symmetrisch, wenn wir die Indizes 1 und 2 vertauschen. Drücken wir diese linearen Homotopien dann herunter auf X_3 und verknüpfen, so ergibt sich die Dritte und komplizierteste der obigen Behauptungen, d.h. $g \mapsto (s_1 s_2)^3 = (s_2 s_1)^3$. Jetzt betrachten wir formal die Gruppe B_3, die erzeugt wird von zwei Elementen s und t mit den Relationen $sts = tst$, und nenne sie für die Dauer dieses Beweises die **abstrakte Zopfgruppe**. Es tut mir leid, den Buchstaben t erst als Parameter eines Weges und nun gleich darauf in dieser völlig anderen Bedeutung zu verwenden. Beide Notationen sind jedoch derart gebräuchlich, daß diese Kollision mir ein kleineres Übel scheint, als es eine gänzlich unübliche Wahl der Bezeichnungen wäre. Mit unseren Erkenntnissen zur Fundamentalgruppe von Bahnenräumen 16.4.5.20 und den Formeln $t^2(st)^3 = (st)^3 t^2$

und $s^2(st)^3 = (st)^3 s^2$ in der abstrakten Zopfgruppe B_3 erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\mathbb{C}^3\backslash\Delta) & \to & B_3 & \twoheadrightarrow & \mathcal{S}_3 \\ \| & & \downarrow & & \| \\ \pi_1(\mathbb{C}^3\backslash\Delta) & \hookrightarrow & \pi_1(X_3) & \twoheadrightarrow & \mathcal{S}_3 \end{array}$$

mit $s \mapsto s_1$ und $t \mapsto s_2$ in der mittleren Vertikale und hoffentlich sonst offensichtlichen Morphismen. Als erstes folgt, daß die Horizontale oben links eine Injektion ist. Weiter ist klar, daß die Verknüpfung in der oberen Horizontale trivial ist. Als nächstes überlegt man sich explizit, daß in der oberen Horizontale das Bild des linken Pfeils genau der Kern von $B_3 \twoheadrightarrow \mathcal{S}_3$ ist. Um zu erkennen, ob die Klasse eines Gruppenworts in $\ker(B_3 \twoheadrightarrow \mathcal{S}_3)$ liegt, müssen wir nur alle Potenzen s^m für $m \in \mathbb{Z}$ reduzieren zu s beziehungsweise e falls $m \in 2\mathbb{Z}$ beziehungsweise $m \notin 2\mathbb{Z}$ und analog für t, bis wir bei einem Wort ankommen, bei dem keine negativen Potenzen auftreten und bei dem die Buchstaben s und t alternieren. Unser ursprüngliches Wort war im Kern genau dann, wenn dieses alternierende Wort eine durch 6 teilbare Länge hat. Nun zeigen wir erst einmal, daß unser Bild normal ist. Dazu reicht es zu zeigen, daß die Konjugierten von Erzeugers des Bildes unter Erzeugern der abstrakten Zopfgruppe wieder im Bild liegen. Das hinwiederum zeigen die Identitäten

$$ts^2t^{-1} = (st)^3 s^{-2} t^{-2} \quad \text{und} \quad t(st)^3 t^{-1} = (ts)^3 = (st)^3$$

und ihre Varianten mit s und t vertauscht. Also ist das Bild normal. Jetzt beachten wir, daß für einen Normalteiler N einer Gruppe G und $a, b \in G$, $x \in N$ gilt

$$axb \in N \Leftrightarrow axa^{-1}ab \in N \Leftrightarrow ab \in N$$

Unsere Beschreibung des Kerns zeigt dann, da eben das Bild normal ist, die schwierige Inklusion $\supset$ und damit die Gleichheit

$$\pi_1(\mathbb{C}^3\backslash\Delta) = \ker(B_3 \to \mathcal{S}_3)$$

So folgt durch Diagrammjagd in der Tat $B_3 \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_3)$ und der Fall $n = 3$ ist erledigt. Jetzt unterbrechen wir den Beweis durch einige allgemeine Überlegungen zu Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten, die im Fall von allgemeinem n benötigt werden. $\square$

Definition 16.5.1.6. Seien $n \leq d$ natürliche Zahlen. Eine Teilmenge N einer d-Mannigfaltigkeit M heißt eine **n-dimensionale Untermannigfaltigkeit** genau dann, wenn es für jeden Punkt $y \in N$ eine offene Umgebung $U \Subset M$ gibt und einen Homöomorphismus $U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d$ mit $U \cap N \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \times 0$. Ein derartige offene Menge U nennen wir eine **plättbare Ball-Umgebung** von $y \in N$. Die Differenz $d - n$ heißt die **Kodimension** der Untermannigfaltigkeit N in M.

Satz 16.5.1.7 (Fundamentalgruppe von Mannigfaltigkeitskomplement). *Seien $M \not\supseteq N \not\supseteq A$ eine Mannigfaltigkeit mit einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit einer Kodimension ≥ 3 und einer abgeschlossenen Teilmenge derselben. So induziert für beliebiges $p \in M \backslash A$ die Einbettung einen Isomorphismus*

$$\pi_1(M \backslash A, p) \xrightarrow{\sim} \pi_1(M, p)$$

Im Fall einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit $N \not\subseteq M$ der Kodimension 2 ist diese Abbildung zumindest noch eine Surjektion $\pi_1(M \backslash A, p) \twoheadrightarrow \pi_1(M, p)$.

Ergänzung 16.5.1.8. Stützt man sich beim Beweis statt auf 16.1.2.28 auf die etwas allgemeinere aber mühsamer zu beweisende Aussage 16.1.7.12, so zeigt der hier gegebene Beweis die Behauptung des Satzes sogar für $A \subset N$ eine beliebige Teilmenge unserer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir unsere Mannigfaltigkeit M zusammenhängend annehmen. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung. Seien $A \not\subseteq N$ eine abgeschlossene Teilmenge, $U \Subset M$ eine plättbare Ball-Umgebung eines Punktes von N und $p \in U \backslash A$. Nach Seifert-van-Kampen 16.2.4.1 haben wir ein kokartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \backslash A, p) & \to & \pi_1(U, p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(M \backslash A, p) & \to & \pi_1((M \backslash A) \cup U, p) \end{array}$$

Da nach 16.1.2.28 die obere Horizontale ein Isomorphismus beziehungsweise im Fall der Kodimension 2 eine Surjektion ist, muß dasselbe nach 16.2.3.4 beziehungsweise 16.2.6.6 auch für die untere Horizontale gelten. Da unsere Räume wegzusammenhängend sind, gilt das dann auch für einen beliebigen Basispunkt p aus $M \backslash A$. Man beachte für das folgende auch, daß gilt $(M \backslash A) \cup U = M \backslash B$ für $B \not\subseteq N$ die Teilmenge $B = N \backslash U$. Jetzt zeigen wir die Surjektivität von $\pi_1(M \backslash A, p) \to \pi_1(M, p)$ im allgemeinen. Ist in der Tat $\gamma \in \Omega(M, p)$ ein Weg, so wird $\gamma[0, 1] \cap N$ überdeckt von endlich vielen plättbaren Ball-Umgebungen $U_1, \ldots, U_r$. Nach unserer Vorüberlegung haben wir dann für $p \in M \backslash A$ eine Surjektion

$$\pi_1(M \backslash A, p) \twoheadrightarrow \pi_1((M \backslash A) \cup U_1 \cup \ldots \cup U_r, p)$$

Unser $[\gamma] \in \pi_1(M, p)$ liegt aber sicher im Bild der rechten Seite unter der von der Inklusion induzierten Abbildung der Fundamentalgruppen. Also liegt $[\gamma]$ auch im Bild von $\pi_1(M \backslash A, p)$. Ähnlich zeigen wir die Injektivität im Fall einer Kodimension ≥ 3. Dann ist ja unsere Surjektion sogar ein Isomorphismus. Ist nun $\gamma \in \Omega(M \backslash A, p)$ nullhomotop in M, sagen wir vermittels $h : [0, 1] \times [0, 1] \to M$, so läßt sich eine Homotopie mit dem konstanten Weg sicher in einem geeigneten $(M \backslash A) \cup U_1 \cup \ldots \cup U_r$ realisieren, mit plättbaren Ball-Umgebungen U_i von

Punkten von N, und dann ist γ nach unserem Isomorphismus sogar nullhomotop in $M \backslash A$. $\square$

Beweis des Satzes über Zopfgruppen 16.5.1.4. Wir halten nun n fest, schreiben kurz $X_n = X$, und betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} k: & X & \to & \mathbb{N} \\ & E & \mapsto & n - |\operatorname{Re}(E)| \end{array}$$

für $|\operatorname{Re}(E)|$ die Kardinalität der Projektion von E auf die reelle Achse. In X betrachten wir die Teilmengen $Z_\nu = k^{-1}(\nu)$ sowie $Z_{\leq\nu} = k^{-1}(\{0, 1, \ldots, \nu\})$. Zum Beispiel besteht Z_0 aus allen n-elementigen Teilmengen von $\mathbb{C}$ derart, daß die Realteile ihrer Elemente paarweise verschieden sind, und Z_1 besteht aus allen n-elementigen Teilmengen, in denen es genau zwei Punkte gibt mit demselben Realteil. Offensichtlich ist Z_0 zusammenziehbar, alle $Z_{\leq\nu}$ sind offen, und Z_ν ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Kodimension ν in $Z_{\leq\nu}$. Proposition 16.5.1.7 liefert uns damit für einen beliebigen Basispunkt in Z_0 eine Surjektion und viele Isomorphismen

$$\pi_1(Z_{\leq 1}) \twoheadrightarrow \pi_1(Z_{\leq 2}) \xrightarrow{\sim} \ldots \xrightarrow{\sim} \pi_1(Z_{\leq n-1}) = \pi_1(X)$$

Wir untersuchen nun zunächst $\pi_1(Z_{\leq 1})$. Sicher zerfällt Z_1 in Zusammenhangskomponenten

$$Z_1 = Z_1^1 \sqcup Z_1^2 \sqcup \ldots \sqcup Z_1^{n-1}$$

mit Z_1^i dem System aller n-elementigen Teilmengen $E \in Z_1$ derart, daß bei einer Aufzählung $x_1, \ldots, x_n$ von E mit wachsenden Realteilen gilt $\operatorname{Re}(x_i) = \operatorname{Re}(x_{i+1})$. Bezeichnen wir ganz allgemein mit $X_n^{[a,b]}$ den Raum aller n-elementigen Teilmengen von $\{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b\}$, so haben wir offensichtlich Homotopieäquivalenzen

$$\begin{array}{ccccc} X_2 & \hookleftarrow & X_2^{[i,i+1]} & \hookrightarrow & Z_0 \cup Z_1^i \\ & & \{x, y\} & \mapsto & \{1, \ldots, i-1, x, y, i+2, \ldots, n\} \end{array}$$

Folglich ist $\pi_1(Z_0 \cup Z_1^i)$ frei erzeugt von s_i. Mit Induktion und dem Satz von Seifert-van-Kampen folgt, daß für jede Teilmenge $T \subset \{1, \ldots, n-1\}$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(Z_0 \cup \bigcup_{i \in T} Z_1^i)$ frei erzeugt ist von den s_i mit $i \in T$. Insbesondere erzeugen die s_i schon mal unsere Zopfgruppe, und wir müssen uns nur noch um die Relationen kümmern. Sicher zerfällt auch Z_2 in Zusammenhangskomponenten

$$Z_2 = \bigsqcup_{1 \leq i < j < n} Z_2^{i,j}$$

mit $Z_2^{i,j}$ dem System aller n-elementigen Teilmengen $E \in Z_2$ derart, daß bei einer Aufzählung $x_1, \ldots, x_n$ von E mit wachsenden Realteilen gilt $\operatorname{Re}(x_i) = \operatorname{Re}(x_{i+1})$

und $\mathrm{Re}(x_j) = \mathrm{Re}(x_{j+1})$. Wir setzen $Z^{i,j}_{\leq 2} = Z_0 \cup Z^i_1 \cup Z^j_1 \cup Z^{i,j}_2$ und bemerken, daß diese Menge offen ist in X_n. Im Fall $i < j-1$ haben wir eine Homotopieäquivalenz

$$\begin{array}{rcl} X_2^{[i,i+1]} \times X_2^{[j,j+1]} & \hookrightarrow & Z^{i,j}_{\leq 2} \\ (\{x,y\},\{z,w\}) & \mapsto & \{1,2,\ldots,i-1,x,y,\ldots,j-1,z,w,\ldots,n\} \end{array}$$

Sie zeigt, daß $\pi_1(Z^{i,j}_{\leq 2})$ erzeugt wird von s_i und s_j mit der einzigen Relation $s_i s_j = s_j s_i$. Im Fall $i = j-1$ haben wir Homotopieäquivalenzen

$$\begin{array}{rcccl} X_3 & \hookleftarrow & X_3^{[i,i+2]} & \hookrightarrow & Z^{i,i+1}_{\leq 2} \\ & & \{x,y,z\} & \mapsto & \{1,\ldots,i-1,x,y,z,i+3,\ldots,n\} \end{array}$$

Mit dem bereits behandelten Fall $n = 3$ zeigen sie, daß $\pi_1(Z^{i,i+1}_{\leq 2})$ erzeugt wird von s_i und s_{i+1} mit der einzigen Relation $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$. Sei nun eine beliebige Teilmenge $R \subset \{(i,j) \mid 1 \leq i < j < n\}$ gegeben. Wir behaupten, daß $\pi_1(Z_{\leq 1} \cup \bigcup_{(i,j)\in R} Z^{i,j}_2)$ erzeugt ist von $s_1,\ldots,s_{n-1}$ mit den Zopfrelationen für alle $(i,j) \in R$. In der Tat folgt das nun mit Seifert-van-Kampen 16.2.4.1 und vollständiger Induktion über $|R|$. Der Satz ergibt sich, wenn wir R maximal möglich wählen. □

Ergänzung 16.5.1.9. Ähnlich überlegt man sich, wie die Fundamentalgruppe des Raums aller n-elementigen Teilmengen von $\mathbb{C}^\times$ durch Erzeuger und Relationen dargestellt werden kann. Hier ist der Trick, zunächst die stetige Abbildung nach $\mathbb{C}^\times$ zu betrachten, die durch Aufmultiplizieren unserer Punkte gegeben wird, und den Kern der von ihr auf der Fundamentalgruppe induzierten Abbildung. Die Fundamentalgruppe selber stellt man dann als semidirektes Produkt dieses Kerns mit $\mathbb{Z}$ dar.

16.5.2 Überlagerungen topologischer Gruppen*

16.5.2.1 (**Produkt universeller Überlagerungen**). Jedes endliche Produkt lokal zusammenhängender überlagerungstrivialer Räume ist nach 16.5.3.2 auch selbst überlagerungstrivial. Gegeben $\tilde{X} \to X$ und $\tilde{Y} \to Y$ universelle Überlagerungen zusammenhängender lokal überlagerungstrivialer Räume X, Y ist mithin auch $\tilde{X} \times \tilde{Y} \to X \times Y$ eine universelle Überlagerung. Besonders leicht sieht man das im Fall lokal wegetrivialer Räume, denn jedes endliche Produkt wegetrivialer Räume ist offensichtlich wieder wegetrivial.

Proposition 16.5.2.2. *Sei $p : \tilde{G} \to G$ die universelle Überlagerung einer zusammenhängenden lokal überlagerungstrivialen Gruppe G. So gilt:*

1. *Es gibt für jeden Punkt $\tilde{e} \in \tilde{G}$ über dem neutralen Element $e \in G$ genau einen Lift der Verknüpfung mit $\tilde{e}$ als neutralem Element und diese Verknüpfung macht $\tilde{G}$ zu einer topologischen Gruppe;*

2. *Für jede Gruppenstruktur auf $\tilde{G}$ nach Teil 1 ist der Kern der Überlagerungsabbildung $K := \ker p$ ein diskreter kommutativer Normalteiler von $\tilde{G}$ und wir erhalten einen Isomorphismus*

$$K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}_G^\times \tilde{G}$$

   zwischen K und der Deckbewegungsgruppe durch dir Vorschrift $k \mapsto (k\cdot)$;

3. *Für jede Gruppenstruktur auf $\tilde{G}$ nach Teil 1 induziert die Überlagerungsabbildung einen Isomorphismus von topologischen Gruppen $\tilde{G}/K \xrightarrow{\sim} G$.*

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort daraus, daß nach 16.5.2.1 auch die Abbildungen $\tilde{G}^{\times n} \to G^{\times n}$ universelle Überlagerungen sind. Für die zweite Aussage bemerken wir, daß für $k \in K$ sowohl $(k\cdot)$ als auch $(\cdot k)$ die eindeutig bestimmte Deckbewegung mit $\tilde{e} \mapsto k$ sein müssen, und damit folgt auch sie sofort. Die dritte Aussage folgt aus der Erkenntnis 16.3.5.10, daß bei jeder universellen Überlagerung die Basis der Quotient des Totalraums nach der Gruppe der Deckbewegungen ist. □

Korollar 16.5.2.3 (Gruppenstruktur auf zusammenhängenden Überlagerungen). *Gegeben eine zusammenhängende lokal überlagerungstriviale topologische Gruppe G besitzt jede zusammenhängende bepunktete Überlagerung $q : (\hat{G}, \hat{e}) \to (G, e)$ genau eine stetige Verknüpfung mit $\hat{e}$ als neutralem Element, für die q ein Gruppenhomomorphismus ist.*

Beweis. Die Eindeutigkeit der Verknüpfung folgt aus unserem Satz über die Eindeutigkeit von Lifts. Die Existenz folgt daraus, daß (G, e) ja nach 16.3.6.1 eine universelle Überlagerung $p : (\tilde{G}, \tilde{e}) \to (G, e)$ besitzt, von der es dann eine Decktransformation $q : (\tilde{G}, \tilde{e}) \to (\hat{G}, \hat{e})$ geben muß. Nun hat $\tilde{G}$ nach 16.5.2.2 genau eine Gruppenstruktur mit neutralem Element $\tilde{e}$, für die p ein Gruppenhomomorphismus ist, deren Kern K ist ein kommutativer Normalteiler und die Linksmultiplikationen mit Elementen von K sind genau die Deckbewegungen. Nach 16.4.4.4 gibt es also eine Untergruppe $H \subset K$ derart, daß q einen Homöomorphismus $\tilde{G}/H \xrightarrow{\sim} \hat{G}$ induziert. Das Korollar folgt. □

Korollar 16.5.2.4 (Überlagerungen topologischer Gruppen, Klassifikation). *Gegeben eine zusammenhängende lokal überlagerungstriviale topologische Gruppe (G, e) und $p : (\tilde{G}, \tilde{e}) \to (G, e)$ ihre universelle Überlagerung und $K := \ker p$*

deren Kern erhalten wir durch die Vorschrift $H \mapsto \tilde{G}/H$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Untergruppen von } K \textit{ mit} \\ \textit{Inklusionen als Morphismen} \end{array} \right\} \xrightarrow{\approx} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Zusammenhängende topologische} \\ \textit{Gruppenüberlagerungen von } G \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}}$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden. □

Korollar 16.5.2.5 (Überlagerungen lokal wegetrivialer Gruppen). *Gegeben eine zusammenhängende lokal wegetriviale topologische Gruppe (G, e) erhalten wir eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Zusammenhängende topologische} \\ \textit{Gruppenüberlagerungen von } G \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\approx} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Untergruppen von } \pi_1(G,e) \textit{ mit} \\ \textit{Inklusionen als Morphismen} \end{array} \right\}$$

durch die Vorschrift $(p : (\hat{G}, \hat{e}) \mapsto (G, e)) \mapsto \mathrm{im}(p_\sharp : \pi_1(\hat{G}, \hat{e}) \mapsto \pi_1(G, e))$.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden zusammen mit der Identifikation von Fundamentalgruppe und Deckbewegungsgruppe der universellen Überlagerung im Fall zusammenhängender lokal wegetrivialer Räume. □

Übungen

Ergänzende Übung 16.5.2.6. Jede topologische Gruppe, die homöomorph ist zur Kreislinie S^1, ist bereits als topologische Gruppe isomorph zur multiplikativen Gruppe S^1 aller komplexen Zahlen vom Betrag Eins. Hinweis: 15.2.1.24.

16.5.3 Überlagerungen und Homotopie*

Satz 16.5.3.1 (Überlagerungen von Produkten). *Seien X, Z topologisch Räume mit Z überlagerungstrivial und lokal zusammenhängend. So ist das Bilden des Produkts mit Z eine Äquivalenz von Kategorien*

$$(\times Z) : \mathrm{Üb}_X \xrightarrow{\approx} \mathrm{Üb}_{X \times Z}$$

zwischen der Kategorie der Überlagerungen von X und der Kategorie der Überlagerungen von $X \times Z$.

Beweis. Sei $p : \tilde{X}_Z \to X \times Z$ eine Überlagerung des Produkts. Für jedes $z \in Z$ setzen wir $\tilde{X}_z = p^{-1}(X \times \{z\})$ und erhalten so eine Überlagerung von $\tilde{X}_z \to X$. Ist Z überlagerungstrivial, so erklären wir für beliebige $z, w \in Z$ Abbildungen $f_{wz} : \tilde{X}_z \to \tilde{X}_w$ durch die Bedingung, daß $\tilde{x}$ und $f_{wz}(\tilde{x})$ im Bild desselben Lifts von $Z \to X \times Z$, $z \mapsto (p(\tilde{x}), z)$ liegen sollen. Natürlich gilt $f_{vw} \circ f_{wz} = f_{vz}$

und $f_{zz} = \mathrm{id}$ für alle $z, w, v \in Z$. Der Satz folgt nun, sobald wir zeigen, daß die Abbildung

$$f : \tilde{X}_z \times Z \to \tilde{X}_Z, \qquad (\tilde{x}, w) \mapsto f_{wz}(\tilde{x})$$

ein Isomorphismus von Überlagerungen ist. Sie ist sicher bijektiv. Zeigen wir auch noch die Stetigkeit von f, so ist f eine bijektive Decktransformation, also ein Isomorphismus von Überlagerungen. Für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}_Z$ finden wir eine trivial überlagerte Umgebung von $(x, w) := p(\tilde{x})$ der Form $U \times W$ mit W zusammenhängend. Die eingeschränkte Überlagerung notieren wir $p : \tilde{U}_W \to U \times W$ und setzen $\tilde{U}_w := p^{-1}(U \times \{w\})$ analog wie zuvor. Dann induziert offensichtlich die Abbildung $(\tilde{x}, v) \mapsto f_{vw}(\tilde{x})$ einen Homöomorphismus

$$\tilde{U}_w \times W \xrightarrow{\sim} \tilde{U}_W$$

Für festes $z \in Z$ und $\tilde{x} \in \tilde{X}_z$ betrachten wir nun in Z die Teilmengen Z_s, Z_u aller $w \in Y$ derart, daß $f_{wz} : \tilde{X}_z \to \tilde{X}_w$ bei $\tilde{x}$ stetig beziehungsweise unstetig ist. Nach dem Vorhergehenden sind sowohl Z_s als auch Z_u offen. Also gilt $Z = Z_s$ und alle f_{wz} sind stetig. Daraus folgt aber unter nochmaliger Verwendung unserer Homöomorphismen von eben, daß f selbst stetig ist. □

Korollar 16.5.3.2. *Sind X und Z überlagerungstrivial und ist Z zusätzlich lokal zusammenhängend, so ist auch $X \times Z$ überlagerungstrivial.*

Beweis. Nach dem Satz ist jede Überlagerung von $X \times Z$ das Produkt einer Überlagerung von X mit Z. □

Korollar 16.5.3.3 (Liften von Homotopien). *Seien $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, Y ein topologischer Raum und $H : Y \times [0, 1] \to X$ stetig. So läßt sich jeder Lift $\tilde{H}_0$ von $H_0 := H|_{Y \times \{0\}}$ auf genau eine Weise zu einem Lift $\tilde{H}$ von H fortsetzen.*

16.5.3.4. Zum besseren Verständnis des Satzes stelle ich die Räume und Abbildungen, die darin vorkommen, nochmal in einem Diagramm dar.

$$\begin{array}{ccc} Y \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{H}_0} & \tilde{X} \\ \downarrow & \overset{\tilde{H}}{\nearrow} & \downarrow \\ Y \times [0,1] & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

Beweis mit 16.5.3.1. Die Eindeutigkeit von $\tilde{H}$ ist klar nach dem Satz über Eindeutigkeit von Lifts: Man wende ihn an auf die zusammenhängenden Teilräume $\{y\} \times [0, 1]$. Wir zeigen die Existenz von $\tilde{H}$. Der pull-back der Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ mit H ist eine Überlagerung $Z \to Y \times [0, 1]$. Wenden wir auf diese

Überlagerung Satz 16.5.3.1 an, so finden wir eine Überlagerung $q : \tilde{Y} \to Y$ und einen Isomorphismus $\tilde{Y} \times [0,1] \simeq Z$ von Überlagerungen von $Y \times [0,1]$. Folglich gibt es eine Abbildung $f : \tilde{Y} \times [0,1] \to \tilde{X}$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} \times [0,1] & \xrightarrow{f} & \tilde{X} \\ q \times \mathrm{id} \downarrow & & \downarrow p \\ Y \times [0,1] & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

kartesisch ist. Dann definiert $\tilde{H}_0$ ein Rechtsinverses $l : Y \to \tilde{Y}$ der Überlagerung q und wir erhalten $\tilde{H}$ als $\tilde{H} = f \circ (l \times \mathrm{id})$. □

Beweis ohne 16.5.3.1. Die Eindeutigkeit von $\tilde{H}$ ist klar nach dem Satz über Eindeutigkeit von Lifts: Man wende ihn an auf die zusammenhängenden Teilräume $\{y\} \times [0,1]$. Wir zeigen die Existenz von $\tilde{H}$ in mehreren Schritten.

1. Der Satz gilt, falls X trivial überlagert ist, also ohne der Beschränkung der Allgemeinheit $\tilde{X} = X \times F$ und $p = \mathrm{pr}_1$. In der Tat ist in diesem Fall $\tilde{H}(y,t) = (H(y,t), \mathrm{pr}_2 \circ \tilde{H}_0(y))$ ein Lift von H mit den gewünschten Eigenschaften.

2. Im allgemeinen reicht es zu zeigen, daß jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung W besitzt derart, daß $\tilde{H}_0|_{W \times \{0\}}$ sich zu einem Lift $\tilde{H}$ von $H|_{W \times [0,1]}$ fortsetzen läßt. Aufgrund der Eindeutigkeit müssen diese Lifts nämlich auf den Schnitten $(W \cap V) \times [0,1]$ zusammenfallen, und wir definieren dann durch Verkleben den gesuchten Lift $\tilde{H} : Y \times [0,1] \to \tilde{X}$.

3. Sei nun $y \in Y$ fest. Für jedes $t \in [0,1]$ besitzt $H(y,t)$ eine trivial überlagerte Umgebung, mithin gibt es offene Umgebungen W_t von y und I_t von t derart, daß $H(W_t \times I_t)$ in einer trivial überlagerten offenen Menge liegt. Hier ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit I_t ein Intervall. Die I_t für endlich viele t bedecken $[0,1]$. Sei $W = W_y$ der Schnitt der zugehörigen W_t. So ist W eine offene Umgebung von y, und es gibt $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$ derart, daß $H(W \times [t_{i-1}, t_i])$ für alle i ganz in einer trivial überlagerten offenen Menge in X liegt. Setzen wir induktiv vorraus, daß ein partieller Lift $\tilde{H} : W \times [0, t_i] \to \tilde{X}$ schon konstruiert ist, so liefert uns Schritt 1 ein $\tilde{H} : W \times [t_i, t_{i+1}] \to \tilde{X}$, das auf $W \times \{t_i\}$ mit dem vorigen partiellen Lift $\tilde{H}$ übereinstimmt und H liftet, also verkleben diese beiden $\tilde{H}$ zu einem Lift $\tilde{H} : W \times [0, t_{i+1}] \to \tilde{X}$ und wir sind fertig per Induktion. □

Satz 16.5.3.5. *Gegeben Z überlagerungstrivial lokal zusammenhängend und X ein beliebiger topologischer Raum ist das Bilden des Produkts mit Z eine Äquivalenz von Kategorien*

$$(\times Z) : \text{étTop}_X \xrightarrow{\approx} \{p \in \text{étTop}_{X \times Z} \mid (p^{-1}(x \times Z) \to Z) \in \text{Üb}_Z \ \forall x \in X\}$$

16.5.3.6. Daß sich unter dieser Äquivalenz die Überlagerungen auf beiden Seiten entsprechen, war die Aussage von 16.5.3.1. Der Beweis verallgemeinert den Beweis dort.

Beweis. Sei $p : \tilde{X}_Z \to X \times Z$ eine étale Abbildung, deren Restriktion auf $x \times Z$ für alle $x \in X$ eine Überlagerung ist. Für $z \in Z$ setzen wir $\tilde{X}_z := p^{-1}(X \times \{z\})$ und erhalten so für jedes $z \in Z$ eine étale Abbildung nach X. Ist Z überlagerungstrivial, so können wir für beliebige $z, w \in Z$ Abbildungen $f_{wz} : \tilde{X}_z \to \tilde{X}_w$ erklären durch die Bedingung, daß $\tilde{x}$ und $f_{wz}(\tilde{x})$ im Bild desselben Lifts von $Z \to X \times Z$, $z \mapsto (p(\tilde{x}), z)$ liegen sollen. Natürlich gilt $f_{vw} \circ f_{wz} = f_{vz}$ und $f_{zz} = \mathrm{id}$ für alle $z, w, v \in Z$. Es reicht nun zu zeigen, daß für jedes $z \in Z$ die offensichtliche Abbildung

$$f : \tilde{X}_z \times Z \to \tilde{X}_Z, \qquad (\tilde{x}, w) \mapsto f_{wz}(\tilde{x})$$

ein Homöomorphismus ist. Diese Abbildung ist sicher bijektiv. Können wir zeigen, daß sie stetig ist, so muß sie aufgrund der Eigenschaften étaler Abbildungen 16.3.1.14 offen und damit ein Homöomorphismus sein. Für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}_Z$ finden wir eine Umgebung Q_W, die homöomorph auf eine Umgebung von $p(\tilde{x}) := (x, w)$ der Form $U \times W$ abgebildet wird mit W zusammenhängend. Wir setzen $Q_w := Q \cap (p^{-1}(U \times w))$. Dann induziert offensichtlich die Abbildung $(\tilde{x}, v) \mapsto f_{vw}(\tilde{x})$ einen Homöomorphismus

$$Q_w \times W \xrightarrow{\sim} Q_W$$

Für festes $z \in Z$ und $\tilde{x} \in \tilde{X}_z$ betrachten wir nun in Z die Teilmengen Z_s, Z_u aller $w \in Z$ derart, daß f_{wz} bei $\tilde{x}$ stetig beziehungsweise unstetig ist. Nach dem Vorhergehenden sind sowohl Z_s als auch Z_u offen. Also gilt $Z = Z_s$ und alle f_{wz} sind stetig. Daraus folgt aber unter nochmaliger Verwendung unserer Homöomorphismen von eben, daß f selbst stetig ist. □

Übungen

Übung 16.5.3.7. Sind zwei Räume homotopieäquivalent, so ist der eine überlagerungstrivial genau dann, wenn der andere überlagerungstrivial ist. Ist allgemeiner $X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, so liefert der pull-back eine Äquivalenz von Kategorien $\mathrm{Üb}_Y \xrightarrow{\approx} \mathrm{Üb}_X$.

16.6 Danksagung

Für Korrekturen zu vorläufigen Versionen danke ich vielen Freiburger Hörern und Mitarbeitern, insbesondere Gregor Fritz, Gerald Höhn, Stephan Wehrheim, Isolde Adler, Olaf Schnürer, Matthias Ansorge, David Stotz, Balthasar Burgenmeister. Giovanni Zaccanelli hat mir mit dem Beispiel der nichtbijektiven Decktransformation geholfen, Leonardo Patimo mit dem Beispiel einer Überlagerung eines zusammenhängenden Raums, deren Zusammenhangskomponenten nicht überlagern.

Kapitel 17

Singuläre Homologietheorie

Inhalt

17.1 Singuläre Homologie 2755

17.1.1 Simpliziale Homologie 2755

17.1.2 Definition der singulären Homologie 2764

17.1.3 Funktorialität der Homologie 2772

17.1.4 Homotopie-Invarianz 2777

17.1.5 Erste Homologie und Fundamentalgruppe 2785

17.1.6 Homologie offener Teilmengen der Ebene 2791

17.2 Relative singuläre Homologie 2800

17.2.1 Definition der relativen Homologie 2800

17.2.2 Lange exakte Homologiesequenz 2803

17.2.3 Ausschneidung und Anwendungen 2810

17.2.4 Beweis des Ausschneidungssatzes 2814

17.3 Homologie verklebter Räume 2823

17.3.1 Singuläre Homologie von Simplizialkomplexen . . . 2823

17.3.2 Fixpunktsätze und simpliziale Approximation . . . 2830

17.3.3 Einbettungen von Sphären in Sphären 2836

17.3.4 Homologie von endlichen Zellkomplexen 2842

17.3.5 Zelluläre Homologie 2847

17.4 Homologie von Mannigfaltigkeiten 2851

17.4.1 Homologie und Orientierung 2851

17.4.2 Orientierung von Mannigfaltigkeiten 2853

17.4.3 Hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten 2858
17.4.4 Endlichkeitsaussagen für Mannigfaltigkeiten* . . . 2872
17.5 Koeffizientenwechsel und Künneth-Formel 2874
17.5.1 Homologie mit Koeffizienten 2874
17.5.2 Tensorprodukt abelscher Gruppen 2878
17.5.3 Torsionsprodukt von abelschen Gruppen 2882
17.5.4 Erste Anwendungen in der Homologietheorie . . . 2886
17.5.5 Universelles Koeffiziententheorem 2887
17.5.6 Singuläre Ketten in Produkträumen 2889
17.5.7 Tensorprodukt und Homologie 2896
17.5.8 Eilenberg-Zilber und Alexander-Whitney* 2902
17.6 Kohomologie 2907
17.6.1 Singuläre Kohomologie 2907
17.6.2 Kriterium für Homotopieäquivalenzen 2914
17.6.3 Relative Kohomologie 2917
17.6.4 Homologie als Kohomologiemodul 2919
17.6.5 Erweiterungen von abelschen Gruppen 2927
17.6.6 Injektive abelsche Gruppen 2929
17.6.7 Koeffizientenwechsel 2934
17.7 Poincaré-Dualität 2937
17.7.1 Limites und Kolimites 2937
17.7.2 Kompakte Kohomologie 2949
17.7.3 Lokalendliche Homologie* 2953
17.7.4 Poincaré-Dualität 2966
17.7.5 Schnittzahlen im Simplizialen* 2973
17.8 Danksagung 2981

17.1 Singuläre Homologie

17.1.1 Simpliziale Homologie

17.1.1.1. Für jede Menge Λ betrachten wir die abelsche Gruppe

$$\mathbb{Z}\Lambda$$

aller der Abbildungen $f : \Lambda \to \mathbb{Z}$, die nur auf endlich vielen Elementen von Λ Werte ungleich Null annehmen. Die Elemente von $\mathbb{Z}\Lambda$ fassen wir auf als endliche formale Linearkombinationen von Elementen von Λ und schreiben sie $f = \sum a_\lambda \lambda$ mit $a_\lambda = f(\lambda) \in \mathbb{Z}$ und $\lambda \in \Lambda$. Die Gruppe $\mathbb{Z}\Lambda$ heißt die **freie abelsche Gruppe über** Λ. In der in 17.1.1.1 eingeführten Notation hieß sie $\mathrm{Ab}^{\setminus} \Lambda$.

17.1.1.2. Wir haben eine offensichtliche Abbildung $\varepsilon : \Lambda \to \mathbb{Z}\Lambda$, die eben jedem Element die charakteristische Funktion der entsprechenden einelementigen Teilmenge zuordnet und die wir in diesem Kontext in Worten und Formeln behandeln, als ob sie die Einbettung einer Teilmenge sei. Gegeben eine weitere abelsche Gruppe G läßt sich jede Abbildung $\varphi : \Lambda \to G$ auf genau eine Weise zu einem Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}\Lambda \to G$ fortsetzen, den wir die **lineare Fortsetzung von** φ nennen und in diesem Kontext auch meist mit demselben Buchstaben φ bezeichnen. In Formeln ausgedrückt induziert für jede abelsche Gruppe G das Vorschalten von ε eine Bijektion

$$(\circ\varepsilon) : \mathrm{Ab}(\mathbb{Z}\Lambda, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(\Lambda, G)$$

17.1.1.3. Ich erinnere an die Definition eines Simplizialkomplexes $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ aus 16.2.7.5 als einer Menge E von „Ecken“ mitsamt einem System $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ von nichtleeren endlichen Teilmengen, genannt „kombinatorische Simplizes“ oder auch kurz „Simplizes“, das unter dem Bilden von nichtleeren Teilmengen stabil ist und alle einelementigen Teilmengen von E enthält. Eine geometrische Anschauung für dieses eher kombinatorische Datum mag seine geometrische Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ nach 16.2.7.8 geben.

17.1.1.4 (**Ketten und Randoperator zu vorgegebener Eckenanordnung**). Gegeben ein Simplizialkomplex $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ bezeichne $\mathcal{K}_q := \{s \in \mathcal{K} \mid |s| = q+1\}$ die Menge seiner q-Simplizes. Gegeben eine Anordnung $\leq$ auf der Menge E seiner Ecken erklären wir für alle $q \geq 1$ einen Homomorphismus $\partial^{\leq} : \mathbb{Z}\mathcal{K}_q \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q-1}$ zwischen den freien abelschen Gruppen über den entsprechenden Mengen von Simplizes als die lineare Fortsetzung der Abbildung

$$\partial^{\leq} : \{s_0, \ldots, s_q\} \mapsto \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \{s_0, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_q\}$$

mit einem Hut alias einer „Tarnkappe“ über der wegzulassenden Ecke und der Konvention, daß $s \in \mathcal{K}_q$ geschrieben werden muß als $s = \{s_0, \ldots, s_q\}$ mit $s_0 < \ldots < s_q$. Diesen Homomorphismus nennen wir den **Randoperator zur vorgegebenen Eckenanordnung**. Es ist leicht zu sehen, daß in der Sequenz

$$\ldots \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_2 \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_1 \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_0 \to 0$$

die Verknüpfung je zweier aufeinanderfolgender Homomorphismen Null ist. Im folgenden machen wir diese Konstruktion unabhängig von der Wahl einer Anordnung der Eckenmenge.

Definition 17.1.1.5. Sei $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex. Gegeben $q \geq 0$ bilden wir die Menge

$$\mathcal{K}_q^< := \{\sigma : \{0, \ldots, q\} \to E \mid \sigma \text{ ist injektiv, } (\operatorname{im} \sigma) \in \mathcal{K}\}$$

aller **angeordneten kombinatorischen q-Simplizes**. Dann bilden wir über dieser Menge die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^<$ und schließlich deren Quotienten

$$\mathrm{S}_q\mathcal{K} := \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^< / \langle \sigma \circ \pi - (\operatorname{sgn} \pi)\sigma \mid \sigma \in \mathcal{K}_q^<,\ \pi \in \mathcal{S}_{q+1} \rangle$$

In diesem Quotienten werden also je zwei angeordnete q-Simplizes, die sich nur in ihrer Anordnung und in dieser um eine Permutation π unterscheiden, bis auf das Signum der fraglichen Permutation $\pi \in \mathcal{S}_{q+1}$ miteinander identifiziert. Wir nennen unseren Quotienten $\mathrm{S}_q\mathcal{K}$ die **Gruppe der q-Simplizialketten von** $\mathcal{K}$. Die Klasse eines angeordneten q-Simplex $\sigma \in \mathcal{K}_q^<$ notiere ich $[\sigma] \in \mathrm{S}_q\mathcal{K}$.

17.1.1.6 (**Veranschaulichung von Null-Simplizialketten**). Eine Null-Simplizialkette ist eine $\mathbb{Z}$-wertige Funktion auf der Menge der Ecken, die höchstens endlich vielen Ecken einen Wert ungleich Null zuordnet.

17.1.1.7 (**Veranschaulichung von Eins-Simplizialketten**). Einen kombinatorischen Eins-Simplex mit Anordnung zeichne ich als eine Kante mit einem Pfeil von der kleineren Ecke zur größeren Ecke. Eine Eins-Simplizialkette ist eine $\mathbb{Z}$-wertige Funktion auf der Menge von derart bepfeilten Kanten, die auf der umgekehrt bepfeilten Kante jeweils den negativen Wert annimmt und auf fast allen bepfeilten Kanten den Wert Null.

17.1.1.8 (**Veranschaulichung von Zwei-Simplizialketten**). Die durch einen angeordneten kombinatorischen Zwei-Simplex gegebene Zwei-Simplizialkette zeichne ich als Dreiecksfläche mit einem Kreispfeil, der andeutet, in welcher Richtung man auf dem Rand herumgehen muß, wenn man von der kleinsten Ecke über die mittlere Ecke zur größten Ecke gehen will. Da alle zyklischen Permutationen in $\mathcal{S}_3$ gerade sind, ist es bei dieser Darstellung egal, welche Ecke man als

kleinste Ecke nimmt. Dieselbe Dreiecksfläche mit einem Kreispfeil in der Gegenrichtung stellt dann das Negative unserer Zwei-Simplizialkette dar. Eine beliebige Zwei-Simplizialkette eines Simplizialkomplexes ist eine $\mathbb{Z}$-wertige Funktion auf der Menge aller derart kreisbepfeilten Dreiecksflächen, die auf der umgekehrt bepfeilten Dreiecksfläche jeweils den negativen Wert annimmt und auf fast allen kreisbepfeilten Dreiecksflächen den Wert Null.

17.1.1.9 (**Simplizialketten und Simplizes**). Sei $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex. Ist $\leq$ eine Anordnung der Eckenmenge E, so erhalten wir für jedes $q \geq 0$ einen Gruppenisomorphismus

$$b^{\leq} = b_q^{\leq} : \mathbb{Z}\mathcal{K}_q \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_q\mathcal{K}$$

als die lineare Fortsetzung der Abbildung $s \mapsto \sigma_s$, die gegeben wird durch die Vorschrift $\sigma_s(i) := s_i$ für $s = \{s_0, \ldots, s_q\}$ mit $s_0 < \ldots < s_q$. Im folgenden konstruieren wir Randoperatoren $\partial = \partial_q : \mathrm{S}_q\mathcal{K} \to \mathrm{S}_{q-1}\mathcal{K}$ derart, daß für jede Anordnung $\leq$ der Eckenmenge E das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \xrightarrow{\partial^{\leq}} & \mathbb{Z}\mathcal{K}_2 & \xrightarrow{\partial^{\leq}} & \mathbb{Z}\mathcal{K}_1 & \xrightarrow{\partial^{\leq}} & \mathbb{Z}\mathcal{K}_0 & \xrightarrow{\partial^{\leq}} & 0 \\
 & & b^{\leq} \downarrow \wr & & b^{\leq} \downarrow \wr & & b^{\leq} \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
\ldots & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{S}_2\mathcal{K} & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{S}_1\mathcal{K} & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{S}_0\mathcal{K} & \xrightarrow{\partial} & 0
\end{array}$$

kommutiert. Sowohl die Homomorphismen der oberen Horizontale $\partial^{\leq}$ aus 17.1.1.4 als auch die vertikalen Isomorphismen hängen dabei von einer Anordnung $\leq$ von E ab. Die Sequenz der unteren Horizontale ist jedoch unabhängig von der Wahl einer Anordnung der Eckenmenge, wie im folgenden diskutiert wird.

Definition 17.1.1.10. Sei $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex. Einen angeordneten q-Simplex σ notieren wir $(v_0, \ldots, v_q)$ mit $v_i = \sigma(i)$. Die Gruppenhomomorphismen $\partial^{<} : \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{<} \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q-1}^{<}$ für $q \geq 1$, die auf angeordneten Simplizes durch die Formel

$$(v_0, \ldots, v_q) \mapsto \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i (v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_q)$$

gegeben werden mit einem Hut alias einer „Tarnkappe“ über der wegzulassenden Komponente, induzieren Gruppenhomomorphismen

$$\partial = \partial_q : \mathrm{S}_q\mathcal{K} \to \mathrm{S}_{q-1}\mathcal{K}$$

auf den Simplizialketten, die **Randoperatoren**. In der Tat, da die symmetrische Gruppe durch Transpositionen benachbarter Elemente erzeugt wird, müssen wir für die Wohldefiniertheit dieser Randoperatoren nur prüfen, daß die beiden Ränder $\partial^{<}(v_0, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_q)$ und $-\partial^{<}(v_0, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_q)$ für alle i dieselbe

Simplizialkette repräsentieren, und das ist leicht einzusehen. Per definitionem kommutieren mit diesem ∂ alle Quadrate in 17.1.1.9 für jede Anordnung $\leq$ der Eckenmenge. Damit folgt aus $(\partial^{\leq})^2 = 0$ sofort $\partial^2 = 0$. Die so entstehende Sequenz von abelschen Gruppen

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \mathrm{S}_2\mathcal{K} \xrightarrow{\partial} \mathrm{S}_1\mathcal{K} \xrightarrow{\partial} \mathrm{S}_0\mathcal{K}$$

nennen wir den **Komplex der Simplizialketten**. Um mit Beschränkungen der Indizes keinen Ärger zu kriegen, setzen wir unsere Sequenz ins Negative fort durch Null und vereinbaren $\mathrm{S}_q\mathcal{K} = 0$ für $q < 0$.

17.1.1.11 (**Anschauung für den Komplex der Simplizialketten**). Anschaulich mag man sich eine 0-Simplizialkette vorstellen als eine endliche formale Linearkombination von Ecken mit ganzzahligen Koeffizienten; eine 1-Simplizialkette als eine endliche formale Linearkombination von bepfeilten Kanten, wobei eine umgekehrt bepfeilte Kante mit dem Negativen der ursprünglichen bepfelten Kante zu identifizieren ist; den Rand einer bepfeilten Kante als Endpunkt minus Anfangspunkt; eine 2-Simplizialkette als eine endliche formale Linearkombination von kreisbepfeilten Dreiecksflächen, wobei die umgekehrt kreisbepfeilte Dreiecksfläche mit dem Negativen der ursprünglichen kreisbepfeilten Dreiecksfläche zu identifizieren ist; und den Rand einer kreisbepfeilten Dreiecksfläche als die Summe ihrer drei Kanten, jeweils versehen mit der Richtung, für die sie einen Rundweg in der durch den Kreispfeil gegebenen Laufrichtung bilden. Die Herkunft der Bezeichnung ∂ für die Randoperatoren wird in 12.8.6.11 diskutiert.

Definition 17.1.1.12. Sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex. Wir setzen:

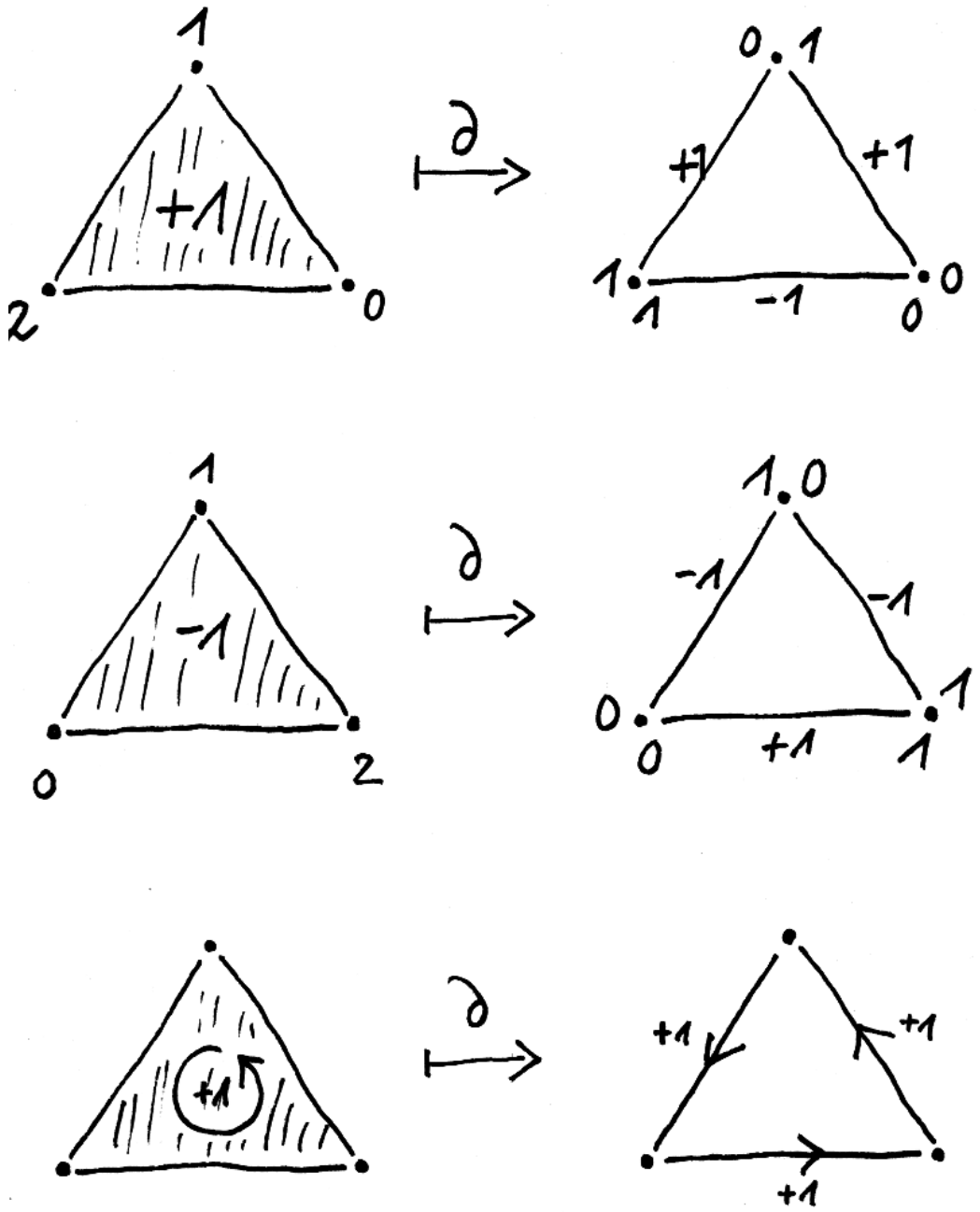
$\mathrm{Z}_q\mathcal{K} := \ker(\partial_q : \mathrm{S}_q\mathcal{K} \to \mathrm{S}_{q-1}\mathcal{K})$ die Gruppe der q**-Simplizialzykel**;

$\mathrm{B}_q\mathcal{K} := \operatorname{im} \partial_{q+1}$ die Gruppe der q**-Simplizialränder** (englisch boundaries);

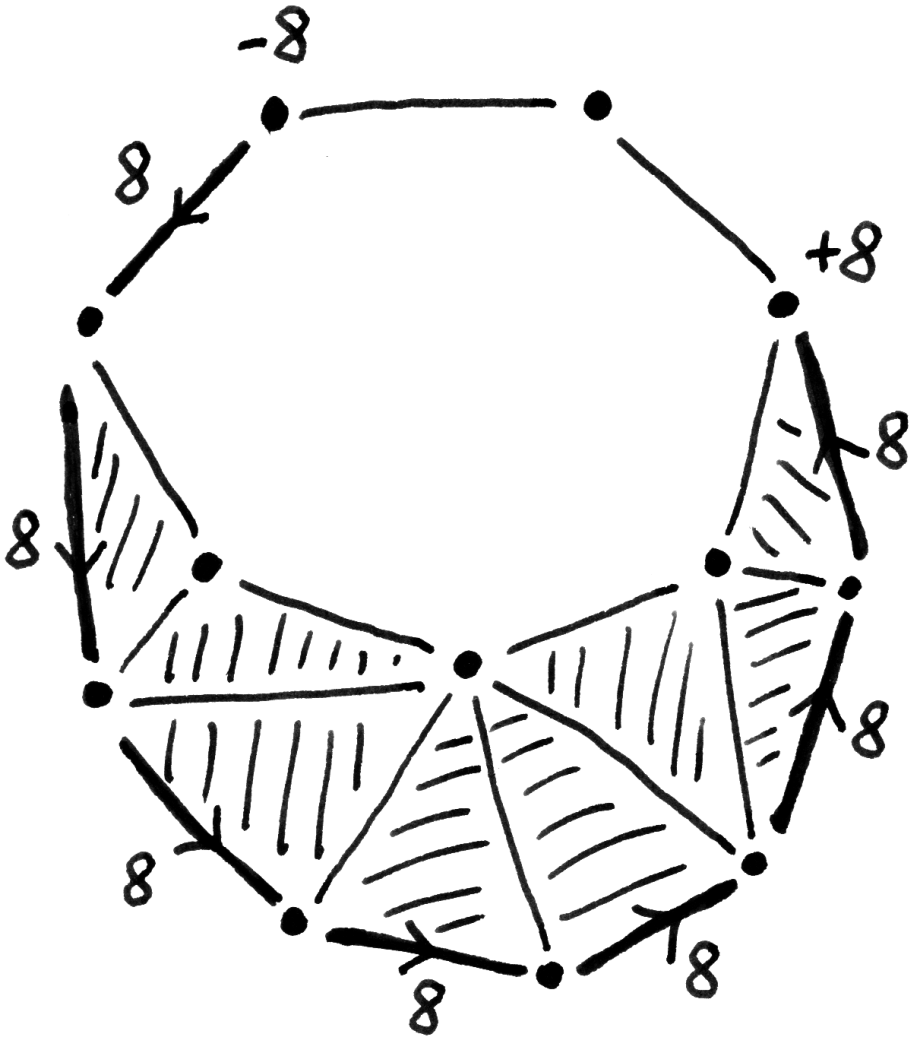
$\mathrm{H}_q\mathcal{K} := \mathrm{Z}_q\mathcal{K}/\mathrm{B}_q\mathcal{K}$ die q**-te simpliziale Homologiegruppe** von $\mathcal{K}$.

In der letzten Zeile ist die Quotientengruppe aus 4.4.2.10 gemeint.

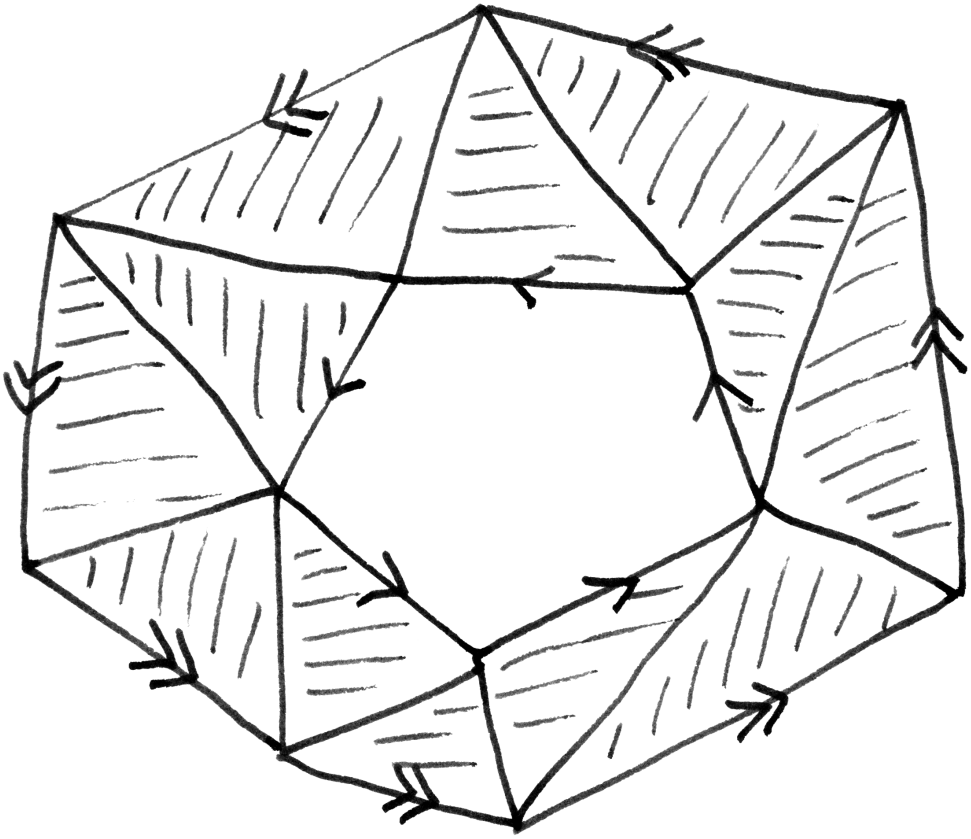
17.1.1.13 (**Anschauung für Homologiegruppen**). Anschaulich beschreiben die verschiedenen Homologiegruppen eines Simplizialkomplexes $\mathcal{K}$ verschiedene Arten von Löchern seiner geometrischen Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$. Zum Beispiel liefert 17.1.2.13 in Verbindung mit 17.3.1.7 einen Isomorphismus zwischen $\mathrm{H}_0\mathcal{K}$ und der freien abelschen Gruppe über der Menge der Zusammenhangskomponenten von $\Delta(\mathcal{K})$, die ja durch eine gewisse Art von Löchern voneinander getrennt werden; der „Hurewicz-Isomorphismus“ 17.1.5.2 in Verbindung mit 17.3.1.7 liefert einen Isomorphismus zwischen $\mathrm{H}_1\mathcal{K}$ und dem maximalen abelschen Quotienten



Anschauung für den Rand einer 2-Simplizialkette. In der linken Spalte habe ich versucht, zwei Elemente der freien abelschen Gruppe über der Menge der angeordneten Simplizes graphisch darzustellen, die dieselbe Simplizialkette repräsentieren, sowie ganz unten besagte Simplizialkette selber. In der rechten Spalte werden die jeweiligen Ränder angedeutet. Die Zahlen an den Ecken stehen für die durch die jeweilige Anordnung gegebene Nummerierung.



Ein Simplizialkomplex mit 12 Ecken, 20 Kanten und 8 Zweisimplizes. Darin eingezeichnet eine 1-Simplizialkette, bestehend aus der formalen Summe der sieben mit einem Pfeil versehenen fetten Kanten, zu verstehen mit der durch diesen Pfeil gegebenen Orientierung und jeweils mit dem Koeffizienten 8. Ebenfalls eingezeichnet der Rand dieser Simplizialkette, bestehend aus der formalen Summe der zwei besonders fetten Punkte mit den darangeschriebenen Koeffizienten ± 8. Dieses Beispiel mag auch die Bezeichnung als „Kette“ erklären. Wenn wir unsere 1-Simplizialkette entsprechend durch die beiden Kanten zwischen diesen beiden Punkten mit geeigneter Orientierung und geeigneten Koeffizienten ergänzen, so erhalten wir einen 1-Simplizialzykel.



Zwei homologe 1-Simplizialzykel in einem zweidimensionalen Simplizialkomplex mit 12 Zwei-Simplizes, 24 Eins-Simplizes und 12 Null-Simplizes. Betrachtet man die Summe aller mit der Orientierung „im Uhrzeigersinn“ versehenen Zwei-Simplizes, so ist der Rand dieser 2-Simplizialkette die Differenz der durch Doppelpfeile beziehungsweise einfache Pfeile angedeuteten 1-Zykel.

der Fundamentalgruppe von $\Delta(\mathcal{K})$, der eine andere Art von Löchern beschreibt; und die „Alexanderdualität“ 19.5.1.22 in Verbindung mit 17.3.1.7 liefert für jede Einbettung der Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ eines endlichen Simplizialkomplexes $\mathcal{K}$ in $\mathbb{R}^3$ einen Isomorphismus zwischen $\mathrm{H}_2\mathcal{K}$ und der freien abelschen Gruppe über der Menge der beschränkten Zusammenhangskomponenten des Komplements von $\Delta(\mathcal{K})$ alias der freien abelschen Gruppe über der Menge der „Kavitäten“ unserer Realisierung, die eine wieder andere Art von Löchern beschreibt. Die höheren Homologiegruppen beschreiben ähnliche Phänomene in höheren Dimensionen, für die ich keine so konkrete räumliche Anschauung mehr anbieten kann.

Beispiel 17.1.1.14. Ist $E \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge und $(E, \mathcal{M}_E)$ der maximale Simplizialkomplex zur Eckenmenge E, so ist der Komplex der Simplizialketten kanonisch isomorph in nichtnegativen Graden zum Komplex aus dem gleich anschließenden Lemma 17.1.1.15, und zwar für jede Anordnung von E. Folglich liefert die Abbildung nach $\mathbb{Z}\mathcal{M}_{E,0} = \mathbb{Z}\mathcal{P}_1 E \to \mathbb{Z}\mathcal{P}_0 E$ aus Lemma 17.1.1.15 einen Isomorphismus $\mathrm{H}_0\mathcal{M}_E \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ und Lemma 17.1.1.15 zeigt weiter, daß alle anderen Homologiegruppen verschwinden. Die geometrische Realisierung $\Delta(\mathcal{M}_E)$ von $\mathcal{M}_E$ ist für endliches E ein voller Simplex mit $|E|$ Ecken, und unsere Erkenntnis bedeutet anschaulich, daß solch ein voller Simplex „keine Löcher hat“.

Lemma 17.1.1.15 (**Azyklizität von Simplizes**). *Für jede nichtleere angeordnete Menge $E \neq \emptyset$ ist der Komplex*

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{P}_0 E \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{P}_1 E \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{P}_2 E \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{P}_3 E \leftarrow \dots$$

exakt, wo $\mathcal{P}_n E$ das System aller n-elementigen Teilmengen von E bezeichnet und der Randoperator $\partial = \partial^< : \mathbb{Z}\mathcal{P}_{n+1}E \to \mathbb{Z}\mathcal{P}_n E$ durch die Formel aus 17.1.1.4 gegeben wird, so daß wir in Formeln für $v_0 < \dots < v_n$ haben

$$\partial : \{v_0, \dots, v_n\} \mapsto \sum_{0 \le i \le n} (-1)^i \{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\}$$

17.1.1.16. Wir verstehen hier Exaktheit im Sinne von 4.4.6.5. Ausgeschrieben behaupten wir also, daß an jeder Stelle der Kern des auslaufenden Pfeils mit dem Bild des einlaufenden Pfeils zusammenfällt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir E endlich annehmen. Ist dann $v \in E$ das kleinste Element und definieren wir Gruppenhomomorphismen $\delta : \mathbb{Z}\mathcal{P}_n E \to \mathbb{Z}\mathcal{P}_{n+1} E$ durch die Vorschrift $\delta\{v_1, \dots, v_n\} = \{v, v_1, \dots, v_n\}$ falls $v \neq v_1$ beziehungsweise $\delta\{v_1, \dots, v_n\} = 0$ sonst, so prüft man leicht an jeder Stelle $\partial\delta + \delta\partial = \mathrm{id}$. Also ist in unserem Komplex jeder Zykel ein Rand. □

17.1.1.17 (**Varianten zur Azyklizität von Simplizes**). Fast derselbe Beweis liefert auch die Exaktheit von zwei weiteren Komplexen, nämlich für jede nichtleere angeordnete Menge E dem Komplex der freien abelschen Gruppen über der

Menge aller monotonen statt streng monotonen Abbildungen $\{1,\ldots,n\} \to E$ alias Symbolen $(v_1,\ldots,v_n)$ mit $v_1 \le \ldots \le v_n$, und für jede nichtleere Menge E dem Komplex der freien abelschen Gruppen über der Menge aller Abbildungen $\{1,\ldots,n\} \to E$, jedesmal mit $\mathbb{Z}$ im Grad Null und dem durch dieselbe Formel gegebenen Randoperator. Im ersten Fall zieht man sich wieder auf den endlichen Fall zurück und nimmt als δ das Davorschreiben der kleinsten Ecke. Im zweiten Fall nimmt man als δ das Davorschreiben einer beliebigen fest gewählten Ecke.

Vorschau 17.1.1.18. In der in 17.1.4.8 eingeführten Terminologie zeigt unser Beweis sogar, daß alle drei in 17.1.1.15 und 17.1.1.17 betrachteten Komplexe nullhomotop sind.

Ergänzung 17.1.1.19 (**Problematik von Definitionsvarianten**). Sei E eine Menge. Ich will noch auf zwei weitere Komplexe eingehen, die man E zuordnen kann und die a priori besonders natürlich wirken mögen, die aber weniger gute Eigenschaften haben. Man mag einerseits von der Untergruppe derjenigen Elemente der freien Gruppe $\mathbb{Z}E^q$ ausgehen wollen, die „schiefsymmetrisch“ sind unter der offensichtlichen Operation der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_q$. Dann wird jedoch der Randoperator durch kompliziertere Formeln gegeben und der Wechsel zu anderen Koeffizienten wird schwieriger. Andererseits mag man vom „maximalen schiefsymmetrischen Quotienten“ der freien Gruppe $\mathbb{Z}E^q$ ausgehen wollen. Das aber geht nur mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ gut, für Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ erhält man eine Surjektion dieses Quotienten auf $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})E^q$.

Beispiel 17.1.1.20. Ist $(E,\mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex mit $3 \le |E| < \infty$ und $\mathcal{K}$ der Menge aller nichtleeren echten Teilmengen von E, so liefert die letzte Abbildung aus obigem Komplex wieder einen Isomorphismus $\mathrm{H}_0\,\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ und die erste einen Isomorphismus $\mathrm{H}_n\,\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ für $n = |E| - 2$ und alle anderen Homologiegruppen verschwinden. Seine Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ ist der „anschauliche Rand“ eines vollen Simplex mit $n+2$ Ecken.

Vorschau 17.1.1.21 (**Persistente Homologie**). Ein Verfahren der Informatik zur Untersuchung von „Datenwolken“ alias großen Teilmengen eines $\mathbb{R}^N$ besteht darin, daraus zunächst in geeigneter Weise eine aufsteigende Folge von Simplizialkomplexen

$$\mathcal{K}^1 \subset \mathcal{K}^2 \subset \ldots \subset \mathcal{K}^n$$

zu bilden und dann für gegebenes q die Sequenz der Homologiegruppen

$$\mathrm{H}_q(\mathcal{K}^1;k) \to \mathrm{H}_q(\mathcal{K}^2;k) \to \ldots \to \mathrm{H}_q(\mathcal{K}^n;k)$$

mit Koeffizienten in einem Körper k. Diese Sequenz können wir als graduierten $k[t]$-Modul auffassen und nach 7.6.7.1 in eine direkte Summe von unzerlegbaren Moduln zerlegen, bei denen jede homogene Komponente höchstens die Dimension Eins hat. Die Multimenge der Isomorphieklassen der Summanden ist nach

Krull-Schmid unabhängig von der Zerlegung, und die „Summanden hoher Dimension“ liefern dann relevante Informationen über unsere Datenwolke. Sie entsprechen Homologieklassen, die erst unter einer vergleichsweise langen Komposition von Morphismen unserer Sequenz sterben, daher die Bezeichnung als „persistente Homologie“.

Übungen

Übung 17.1.1.22 (**Zerlegung der Homologie**). Seien $(\mathcal{K}^w)_{w\in W}$ Simplizialkomplexe und $\mathcal{K} := \bigsqcup \mathcal{K}^w$ ihre disjunkte Vereinigung. Man konstruiere einen Isomorphismus $\bigoplus_{w\in W} \mathrm{H}_q\mathcal{K}^w \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q\mathcal{K}$.

Übung 17.1.1.23. Man berechne die simpliziale Homologie der „Vereinigung der Kanten eines Tetraeders“, also $|E| = 4$ und $\mathcal{K}$ alle Teilmengen mit höchstens zwei Elementen.

Übung 17.1.1.24. Man zeige: Besitzt ein Simplizialkomplex eine Ecke mit der Eigenschaft, daß jeder Simplex bei Dazunehmen dieser Ecke ein Simplex bleibt, so verschwinden seine höheren simplizialen Homologiegruppen und seine nullte Homologiegruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z}$. Hinweis: 17.1.1.15.

Übung 17.1.1.25. Man berechne die simpliziale Homologie des „Randes eines Quadrats“.

Übung 17.1.1.26 (**Nullte Homologie**). Man zeige, daß gegeben ein Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ das Bild der offensichtlichen Abbildung $\mathcal{K}_0 \to \mathrm{H}_0\mathcal{K}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis ist und daß zwei Ecken aus $\mathcal{K}_0$ dasselbe Basiselement liefern genau dann, wenn sie durch einen „Kantenweg“ verbunden werden können.

Übung 17.1.1.27. Man fügt bei einem Simplizialkomplex eine Kante zwischen zwei bereits existierenden Ecken hinzu. Wie können sich die Homologiegruppen unseres Simplizialkomplexes dabei ändern?

Übung 17.1.1.28. Man rechne nach, daß die zweite simpliziale Homologie eines „hohlen Tetraeders“ isomorph ist zu $\mathbb{Z}$. Ich stelle mir hier vor, dass man den Kern der Matrix des Randoperators ∂_2 mithilfe der Methoden aus dem Elementarteilersatz bestimmt, wie er in der Algebra oder linearen Algebra 4.4.4.13 vorgekommen sein sollte.

17.1.2 Definition der singulären Homologie

17.1.2.1. Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, daß die simplizialen Homologiegruppen eines Simplizialkomplexes $\mathcal{K}$ bis auf Isomorphismus nur vom topologischen Raum $\Delta(\mathcal{K})$ abhängen und nicht von der gewählten Triangulierung. Dazu erklären wir ganz allgemein für einen beliebigen topologischen Raum seine „singulären Homologiegruppen“ und konstruieren ganz am Schluß dieses Abschnitts

in 17.3.1.7 Isomorphismen zwischen den simplizialen Homologiegruppen eines Simplizialkomplexes und den singulären Homologiegruppen seiner Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$.

Definition 17.1.2.2. Sei $q \geq 0$. Der topologische Raum

$$\Delta_q := \left\{ (x_0, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \;\middle|\; 0 \leq x_i \leq 1,\ \sum x_i = 1 \right\}$$

heißt der **q-te Standardsimplex**. Es ist also Δ_0 ein Punkt, Δ_1 ein Geradensegment, Δ_2 eine Dreiecksfläche, Δ_3 ein massiver Tetraeder und so weiter.

Definition 17.1.2.3. Eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta_q \to X$ des q-ten Standardsimplex Δ_q in einen topologischen Raum X heißt ein **singulärer q-Simplex von X**.

17.1.2.4 (**Diskussion der Terminologie**). Das Adjektiv singulär ist hier in dem Sinne zu verstehen, daß wir außer der Stetigkeit keine Forderungen an σ stellen. Wir erlauben also auch nicht-injektive, ja sogar konstante Abbildungen σ als singuläre Simplizes, so daß das Adjektiv singulär zumindest einen Teil unserer singulären Simplizes recht gut beschreibt. Der Buchstabe S bei $\mathrm{S}_q X$ steht jedoch für „Simplex“, nicht etwa für „singulär“.

Definition 17.1.2.5. Wir bezeichnen mit

$$\mathrm{S}_q X := \mathbb{Z}\,\mathrm{Top}(\Delta_q, X) = \mathrm{Ab}^{\setminus}\,\mathrm{Top}(\Delta_q, X)$$

die freie abelsche Gruppe über der Menge aller singulären q-Simplizes von X und nennen ihre Elemente **singuläre q-Ketten**. Um mit Beschränkungen der Indizes keinen Ärger zu kriegen, vereinbaren wir zusätzlich $\mathrm{S}_q X = 0$ für $q < 0$.

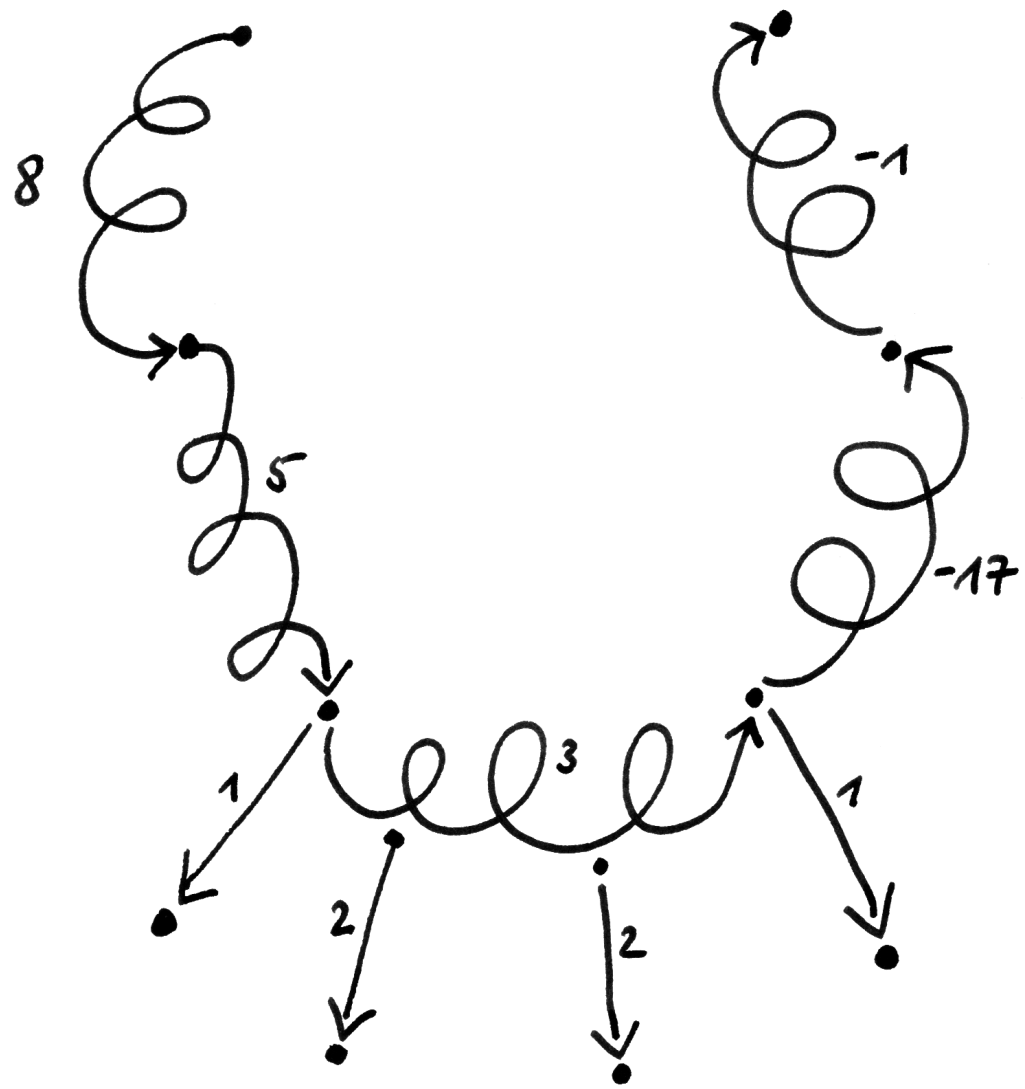
17.1.2.6. Die Gruppen der singulären Ketten sind im allgemeinen riesig. Zum Beispiel liefert die offensichtliche Bijektion $\mathrm{Top}(\Delta_0, X) \xrightarrow{\sim} X$ Gruppenisomorphismen $\mathrm{S}_0 X \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}X$.

Definition 17.1.2.7. Für $q \geq 1$ und $0 \leq i \leq q$ erklären wir die **i-te Kantenabbildung**

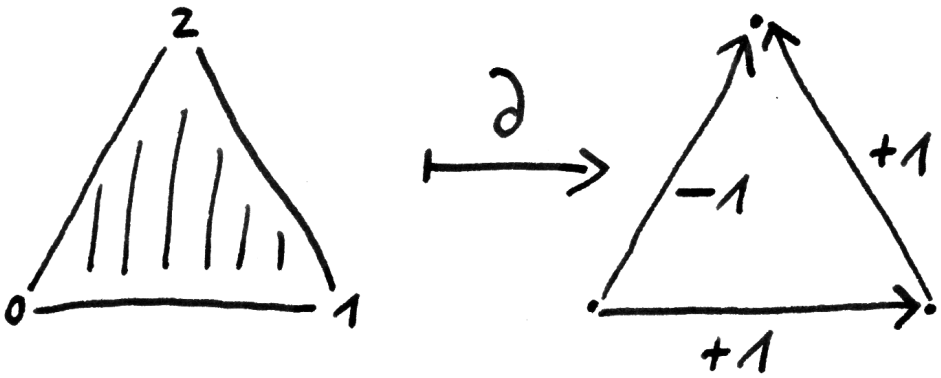
$$k_i = k_i^q : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$$

dadurch, daß sie nach der i-ten Stelle die Koordinate Null einfügen soll. Dann erklären wir für alle q einen Gruppenhomomorphismus $\partial = \partial_q : \mathrm{S}_q X \to \mathrm{S}_{q-1} X$, den sogenannten **Randoperator**: Für $q \leq 0$ setzen wir schlicht $\partial_q = 0$ und für $q \geq 1$ erklären wir ∂_q durch die Vorschrift, daß für jeden singulären q-Simplex σ gelten soll

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma \circ k_i$$



Eine singuläre 1-Kette in der Papierebene. Das Bild von $(0,1) \in \Delta_1$ ist jeweils durch eine Pfeilspitze kenntlich gemacht. Die Parametrisierung dieser ganzen Würmer kann ich nicht darstellen. Es werden im allgemeinen auch welche darunter sein, deren Bild beliebige Kompakta der Papierebene sind, vergleiche **??**. Der Rand ist die formale Summe „Endpunkte minus Anfangspunkte“.



Versuch der Darstellung eines singulären 2-Simplex mit seinem Rand. Die Zahlen an den Ecken der Dreiecksfläche links zeigen, wohin die Vektoren der Standardbasis $\mathrm{e}_0, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$ des $\mathbb{R}^3$, deren konvexe Hülle ja der Standardsimplex Δ_2 ist, abgebildet werden. Es ist in diesem Zusammenhang bequem und üblich, die Nummerierung der Standardbasis um Eins zu verschieben und den ersten Vektor der Standardbasis als e_0 zu bezeichnen.

Natürlich sind die Elemente von $\mathrm{S}_q X$ eigentlich formale $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von q-Simplizes und gemeint ist die lineare Fortsetzung des durch diese Formel auf den Simplizes erklärten Randoperators.

Lemma 17.1.2.8. *Es gilt* $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$.

Beweis. Wir müssen nur für jeden q-Simplex σ mit $q \geq 2$ prüfen, daß gilt $\partial_{q-1} \circ \partial_q(\sigma) = 0$. Nun prüft man sofort, daß gilt $k_i^q \circ k_j^{q-1} = k_j^q \circ k_{i-1}^{q-1}$ falls $i > j$. Es folgt

$$\begin{aligned} \partial_{q-1} \circ \partial_q(\sigma) &= \partial_{q-1} \textstyle\sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ k_i \\ &= \textstyle\sum_{0 \leq i \leq q,\ 0 \leq j \leq q-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ k_i \circ k_j \end{aligned}$$

und wir sehen, daß sich in dieser Doppelsumme die Terme mit $i > j$ und die Terme mit $i \leq j$ gegenseitig aufheben. □

Definition 17.1.2.9. Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren:

$\mathrm{Z}_q X := \ker(\partial_q : \mathrm{S}_q X \to \mathrm{S}_{q-1} X)$, die Gruppe der **singulären q-Zykel**;

$\mathrm{B}_q X := \operatorname{im} \partial_{q+1}$ die Gruppe der **singulären q-Ränder** (englisch boundaries);

$\mathrm{H}_q X := \mathrm{Z}_q X / \mathrm{B}_q X$ die **q-te singuläre Homologiegruppe** von X.

Die Nebenklasse in $\mathrm{H}_q X$ eines Zykels $c \in \mathrm{Z}_q X$ heißt seine **Homologieklasse** und wird mit $[c] \in \mathrm{H}_q X$ bezeichnet.

17.1.2.10. Die Zykel und Ränder sind natürlich Untergruppen in der Gruppe aller Ketten, nach 17.1.2.8 gilt genauer $\mathrm{B}_q X \subset \mathrm{Z}_q X \subset \mathrm{S}_q X$. Deshalb ist es auch überhaupt nur möglich, die Quotientengruppe $\mathrm{H}_q X = \mathrm{Z}_q X / \mathrm{B}_q X$ zu bilden.

17.1.2.11. Später werden wir noch andere Homologietheorien kennenlernen. Die hier vorgestellte Theorie heißt genauer die **singuläre Homologie mit ganzzahligen Koeffizienten**. Wollen wir besonders betonen, daß wir die singuläre Homologie eines topologischen Raums meinen, schreiben wir statt $\mathrm{H}_q X$ genauer $\mathrm{H}_q^{\mathrm{sing}} X$. Statt Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ können wir als Koeffizienten in unseren formalen Linearkombinationen von Simplizes auch Elemente einer beliebigen abelschen Gruppe G zulassen und erhalten dann auf dieselbe Weise weitere abelsche Gruppen, die die **singulären Homologiegruppen von X mit Koeffizienten in** G heißen und $\mathrm{H}_q(X; G)$ notiert werden. So erhalten wir sogar in offensichtlicher Weise Funktoren $\mathrm{Top} \times \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$ und insbesondere wird für jeden k-Vektorraum G auch $\mathrm{H}_q(X; G)$ ein k-Vektorraum in natürlicher Weise.

17.1.2.12. Auf den ersten Blick sehen unsere Homologiegruppen recht unhandlich aus: Es sind Quotienten einer riesigen abelschen Gruppe durch eine fast ebenso riesige Untergruppe. Wir werden aber sehen, daß unsere H_q so schöne Eigenschaften haben, daß man sie dennoch für viele interessante Räume sehr explizit berechnen und verstehen kann.

Beispiel 17.1.2.13 (**Homologie eines Punktes**). Für den einpunktigen Raum $X = \mathrm{top}$ gilt $\mathrm{H}_q(\mathrm{top}) = 0$ für $q \neq 0$. Des weiteren ist der einzige Nullsimplex $\sigma : \Delta_0 \to \mathrm{top}$ ein Zykel und die Vorschrift $1 \mapsto [\sigma]$ liefert einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_0(\mathrm{top})$$

In der Tat gibt es für jedes $q \geq 0$ genau einen q-Simplex in top, also gilt $\mathrm{S}_q(\mathrm{top}) \cong \mathbb{Z}$ für alle $q \geq 0$ und die Randabbildung ∂_q verschwindet für q ungerade und $q \leq 0$, ist aber ein Isomorphismus für $q \geq 2$ gerade. Wir bezeichnen die Homologieklasse des einzigen Nullsimplex mit $\delta := [\sigma] \in \mathrm{H}_0(\mathrm{top})$ und nennen sie den **kanonischen Erzeuger** der nullten Homologie des einpunktigen Raums.

Beispiel 17.1.2.14 (**Homologie und Wegzusammenhangskomponenten**). Ist $X = \bigsqcup X_w$ die Zerlegung eines topologischen Raums X in seine Wegzusammenhangskomponenten, so sind die hoffentlich offensichtlichen Isomorphismen $\bigoplus \mathrm{S}_q X_w \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_q X$ verträglich mit den Randoperatoren und induzieren folglich Isomorphismen

$$\bigoplus \mathrm{H}_q X_w \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q X$$

Lemma 17.1.2.15 (**Nullte Homologie**). *Für jeden topologischen Raum X faktorisiert die Abbildung $X \to \mathrm{H}_0 X$, die jedem Punkt $x \in X$ die Homologieklasse δ_x des konstanten Nullsimplex σ_x mit besagtem Punkt als Wert zuordnet, über die Menge $\pi_0(X)$ der Wegzusammenhangskomponenten von X und induziert einen Isomorphismus*

$$\mathbb{Z}\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_0 X$$

zwischen der freien abelschen Gruppe über der Menge $\pi_0(X)$ der Wegzusammenhangskomponenten von X und der nullten Homologie von X.

17.1.2.16. Für eine Wegzusammenhangskomponente w von X bezeichne $\delta_w \in \mathrm{H}_0 X$ die Klasse eines und jedes Nullsimplex aus unserer Komponente. Die δ_w bilden dann also eine Basis von $\mathrm{H}_0 X$.

Beweis. In der Tat reicht es nach dem vorhergehenden Beispiel 17.1.2.14, das für X wegzusammenhängend zu prüfen. Wir haben jedoch eine natürliche Abbildung, die sogenannte **Augmentation**

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & \mathrm{S}_0 X & \to & \mathbb{Z} \\ & \sum a_x x & \mapsto & \sum a_x \end{array}$$

Es reicht sicher, für wegzusammenhängendes X die Formel $\ker\varepsilon = \operatorname{im}\partial_1$ zu zeigen. Nun wird aber $\operatorname{im}\partial_1$ erzeugt von allen formalen Summen $x-y$ mit $x,y\in X$, denn je zwei Punkte lassen sich durch einen Weg verbinden. Daraus folgt dann sofort $\ker\varepsilon = \operatorname{im}\partial_1$. □

Lemma 17.1.2.17 (Homologie konvexer Mengen). *Gegeben $K\subset\mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge gilt $\mathrm{H}_qK = 0$ für $q>0$.*

Beweis. Ist K leer, so ist eh nichts zu zeigen. Sonst zeichnen wir einen beliebigen Punkt $s\in K$ aus und definieren für $q\geq 0$ den **Prismen-Operator**

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}^s = \mathrm{P}^s_q : \mathrm{S}_qK \to \mathrm{S}_{q+1}K$$

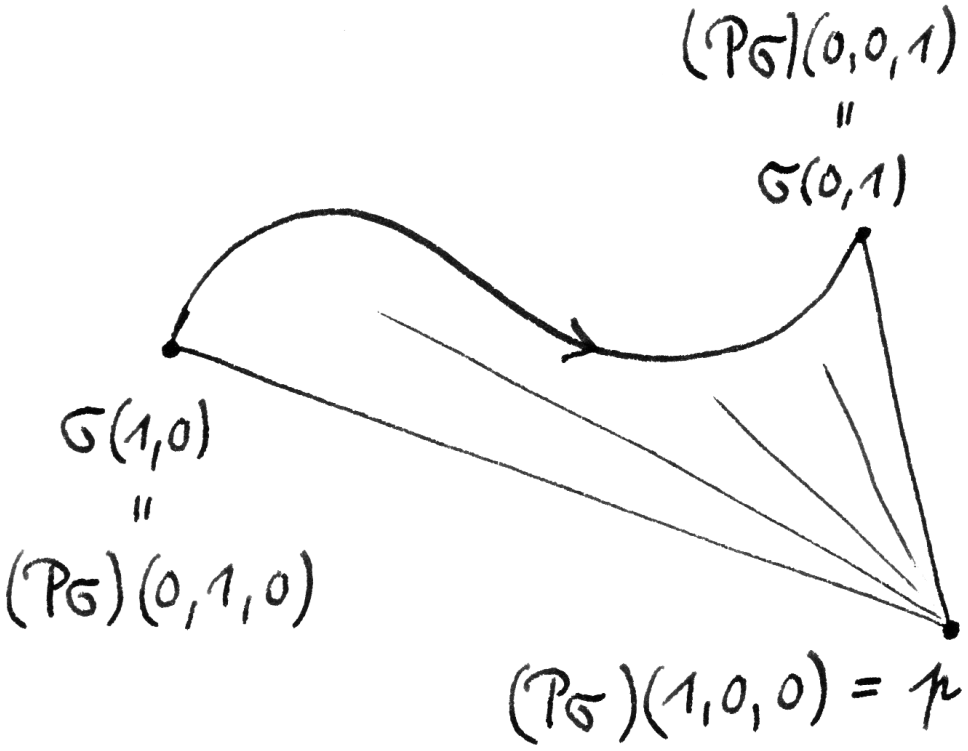
der „jeden q-Simplex durch Verbinden mit dem ausgezeichneten Punkt s zu einem $(q+1)$-Simplex erweitert“, ganz ähnlich wie beim Beweis von 17.1.1.15. Formal definieren wir P auf Simplizes $\sigma:\Delta_q\to K$ dadurch, daß $\mathrm{P}\sigma$ der Simplex $\mathrm{P}\sigma:\Delta_{q+1}\to K$ sein soll mit $(\mathrm{P}\sigma)(1-\tau,\tau x_0,\ldots,\tau x_q) = (1-\tau)s + \tau\sigma(x_0,\ldots,x_q)$ für alle $\tau\in[0,1]$. Hier ist $\mathrm{P}\sigma$ stetig, da $[0,1]\times\Delta_q\to\Delta_{q+1}$, $(\tau,x_0,\ldots,x_q)\mapsto(1-\tau,\tau x_0,\ldots,\tau x_q)$ als stetige Surjektion eines Kompaktums auf einen Hausdorffraum nach 15.1.7.17 final ist. Nun setzen wir P linear auf Ketten fort und prüfen die Relation $\partial\mathrm{P}+\mathrm{P}\partial = \mathrm{id}:\mathrm{S}_qK\to\mathrm{S}_qK$ für $q>0$. In der Tat gilt ja

$$\begin{aligned}\partial(\mathrm{P}\sigma) &= \textstyle\sum_{0\leq j\leq q+1}(-1)^j(\mathrm{P}\sigma)\circ k_j^{q+1}\\ \mathrm{P}(\partial\sigma) &= \textstyle\sum_{0\leq j\leq q}(-1)^j\mathrm{P}(\sigma\circ k_j^q)\end{aligned}$$

und prüft leicht die Formeln $(\mathrm{P}\sigma)\circ k_0^{q+1} = \sigma$ sowie $(\mathrm{P}\sigma)\circ k_j^{q+1} = \mathrm{P}(\sigma\circ k_{j-1}^q)$ für $1\leq j\leq q+1$. Also haben wir in der Tat $\partial\mathrm{P}+\mathrm{P}\partial=\mathrm{id}$ auf q-Ketten mit $q>0$, damit gilt im Fall $q>0$ für jeden Zykel $z\in\mathrm{Z}_qK$ schon $\partial\mathrm{P}z = z$ und z ist ein Rand. □

Ergänzung 17.1.2.18 (**Glatte Variante des Prismenoperators**). Wir können auch allgemeiner für eine beliebige stetige Abbildung $f:[0,1]\to[0,1]$ mit $f(0)=0$ und $f(1)=1$ die Variante $\mathrm{P}^{s,f}$ des Prismenoperators betrachten, die durch die Vorschrift $(\mathrm{P}^{s,f}\sigma)((1-\tau),\tau x_0,\ldots,\tau x_q) = (1-f(\tau))s + f(\tau)\sigma(x_0,\ldots,x_q)$ für alle $\tau\in[0,1]$ gegeben wird. Nehmen wir für f insbesondere eine glatte Abbildung, die in einer Umgebung von $\tau=1$ konstant den Wert Eins annimmt, so macht diese Variante des Prismenoperators glatte Simplizes zu glatten Simplizes. Das wird uns insbesondere im Zusammenhang mit dem Beweis des Satzes von de Rham in 19.5.5 helfen.

Ergänzung 17.1.2.19 (**Wegintegrale über Homologieklassen**). Diese Ergänzung ist für Leser gedacht, die bereits mit den Grundlagen der Funktionentheorie vertraut sind. Gegeben $U\Subset\mathbb{C}$ und $f:U\to\mathbb{C}$ holomorph und $\sigma:\Delta_1\to U$



Ein 1-Simplex σ und der daraus durch Anwenden des Prismenoperators zu einem Punkt p entstehende 2-Simplex $\mathrm{P}\sigma$.

ein 1-Simplex erklären wir das Integral $\int_\sigma f(z)\,\mathrm{d}z$, indem wir σ vermittels des durch die Projektion auf die zweite Koordinate gegebenen Homöomorphismus $c : \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0,1]$ als Weg auffassen und darüber integrieren im Sinne von 14.2.3.8. Lineare Fortsetzung liefert unmittelbar ein Integralbegriff für holomorphe Funktionen über 1-Ketten. Aus der Homotopie-Invarianz des Wegintegrals 14.2.3.9 folgt dann, daß die Integrale über 1-Ränder verschwinden. Wir erhalten auf diese Weise eine wohlbestimmte $\mathbb{Z}$-bilineare Paarung

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{S}_1(U)/\mathrm{B}_1(U)) \times \mathcal{O}^{\mathrm{an}}(U) & \to & \mathbb{C} \\ ([\alpha]\ ,\ f) & \mapsto & \int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z \end{array}$$

und insbesondere eine wohlbestimmte $\mathbb{Z}$-bilineare Paarung zwischen der ersten Homologiegruppe $\mathrm{H}_1(U)$ und der additiven Gruppe $\mathcal{O}^{\mathrm{an}}(U)$ der holomorphen Funktionen auf U. Diese Paarungen schreiben wir für jede Klasse b in der Form $(b, f) \mapsto \int_b f(z)\,\mathrm{d}z$.

17.1.3 Funktorialität der Homologie

17.1.3.1. In diesem Abschnitt erklären wir für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ Gruppenhomomorphismen $\mathrm{H}_q(f) = f_* : \mathrm{H}_q X \to \mathrm{H}_q Y$ derart, daß unsere Homologiegruppen Funktoren $\mathrm{H}_q : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$ von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen werden.

Definition 17.1.3.2. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ erklären wir Gruppenhomomorphismen $\mathrm{S}_q f : \mathrm{S}_q X \to \mathrm{S}_q Y$, indem wir jedem Simplex $\sigma : \Delta_q \to X$ den Simplex $f \circ \sigma : \Delta_q \to Y$ zuordnen und diese Abbildung linear auf $\mathrm{S}_q X$ fortsetzen.

Lemma 17.1.3.3. *Gegeben $f : X \to Y$ stetig gilt $\partial_q \circ \mathrm{S}_q f = \mathrm{S}_{q-1} f \circ \partial_q$, als da heißt, es kommutieren die Diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}_q X & \xrightarrow{\mathrm{S}_q f} & \mathrm{S}_q Y \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ \mathrm{S}_{q-1} X & \xrightarrow{\mathrm{S}_{q-1} f} & \mathrm{S}_{q-1} Y \end{array}$$

Beweis. Wir müssen das nur auf jedem q-Simplex $\sigma : \Delta_q \to X$ prüfen. Es gilt aber in der Tat

$$\begin{array}{rcl} (\partial_q \circ \mathrm{S}_q f)(\sigma) & = & \partial_q(f \circ \sigma) \\ & = & \sum (-1)^i f \circ \sigma \circ k_i^q \\ & = & (\mathrm{S}_{q-1} f \circ \partial_q)(\sigma) \end{array}$$

□

17.1.3.4. Das Lemma zeigt, daß $\mathrm{S}_q f$ Zykel auf Zykel und Ränder auf Ränder abbildet. Für einen q-Zykel z in X hängt also die Homologieklasse seines Bildes $(\mathrm{S}_q f)(z)$ in Y nur von der Homologieklasse von z ab. Wir erhalten somit einen Gruppenhomomorphismus, das **Vorschieben**

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{H}_q f : & \mathrm{H}_q X & \to & \mathrm{H}_q Y \\ & [z] & \mapsto & [(\mathrm{S}_q f)(z)] \end{array}$$

Man sieht leicht, daß gilt $\mathrm{H}_q(f \circ g) = \mathrm{H}_q(f) \circ \mathrm{H}_q(g)$ und $\mathrm{H}_q(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, also erhalten wir für alle $q \in \mathbb{Z}$ einen Funktor $\mathrm{H}_q : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$. Oft verwenden wir auch die Abkürzung $\mathrm{H}_q(f) = f_*$.

17.1.3.5. Für jeden topologischen Raum X bezeichne X^{w} die disjunkte Vereinigung seiner Wegzusammenhangskomponenten mit der kofinalen Topologie. Die Identität ist dann eine stetige Abbildung $X^{\mathrm{w}} \to X$ und der zugehörige Vorschub induziert auf der Homologie offensichtlich einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}X^{\mathrm{w}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}X$$

Ergänzung 17.1.3.6 (**Funktorialität unter simplizialstetigen Abbildungen**). Wir nennen eine Abbildung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen **simplizialstetig**, wenn für jedes q und jede stetige Abbildung $\sigma : \Delta_q \to X$ auch $f \circ \sigma : \Delta_q \to Y$ stetig ist. Offensichtlich ist jede stetige Abbildung auch simplizialstetig. Unsere singulären Ketten ebenso wie die singuläre Homologie sind sogar Funktoren $\mathrm{H}_q : \mathrm{Top}^{\Delta} \to \mathrm{Ab}$ auf der Kategorie Top^{Δ} der topologischen Räume mit simplizialstetigen Abbildungen als Morphismen, und unsere Abbildung aus 17.1.3.5 ist ein Isomorphismus $X^{\mathrm{w}} \xrightarrow{\sim} X$ in Top^{Δ}. Von dieser Kategorie erhält man hinwiederum unschwer einen volltreuen Funktor in die Kategorie der sogenannten „simplizialen Mengen“, der als Definitionsbereich für die simpliziale Homologie besonders natürlich wäre, aber ich möchte Sie nicht zu Beginn durch allzugroße Abstraktion allzusehr verwirren.

17.1.3.7 (**Verträglichkeit der Homologie mit Koprodukten**). Ist $X = \bigsqcup X_w$ eine Zerlegung von X in paarweise disjunkte Teilmengen, die nicht durch Wege verbunden werden können, und bezeichnet $i_w : X_w \hookrightarrow X$ die jeweilige Einbettung, so liefern die $\mathrm{S}i_w : \mathrm{S}X_w \to \mathrm{S}X$ einen Isomorphismus $\bigoplus \mathrm{S}X_w \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}X$ und damit liefern auch die $\mathrm{H}_q(i_w) : \mathrm{H}_q(X_w) \to \mathrm{H}_q(X)$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus \mathrm{H}_q(X_w) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X)$$

Wir hatten fast dasselbe bereits in 17.1.2.14 in etwas weniger präziser Sprache bemerkt. In der in 16.2.1.9 eingeführten Terminologie sind insbesondere die Funktoren $\mathrm{H}_q : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$ verträglich mit beliebigen Koprodukten.

17.1.3.8. Wir wiederholen die vorhergehenden Argumente noch einmal in einer ausgefeilten Sprache und führen dazu die Kategorie der „Kettenkomplexe“ ein.

Definition 17.1.3.9. Ein **Kettenkomplex** oder **Komplex von abelschen Gruppen** ist ein Paar $C = (C, \partial)$ bestehend aus einer Familie $C = (C_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ abelscher Gruppen und einer Familie von Gruppenhomomorphismen $\partial_q = \partial_q^C : C_q \to C_{q-1}$ für $q \in \mathbb{Z}$ derart, daß gilt

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0 \quad \text{für alle } q.$$

Ein Morphismus $s : C \to D$ von Kettenkomplexen, auch **Kettenabbildung** genannt, ist eine Familie von Gruppenhomomorphismen $s_q : C_q \to D_q$ derart, daß gilt $\partial_q^D \circ s_q = s_{q-1} \circ \partial_q^C$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ oder, etwas salopp geschrieben, $\partial \circ s = s \circ \partial$. Wir erhalten so die **Kategorie** $\mathrm{Ket} = \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab})$ **aller Komplexe von abelschen Gruppen**. Darin gibt es ein finales und kofinales Objekt, den **Nullkomplex**, bei dem eben alle Gruppen und Differentiale Null sind. Analog erklärt man für einen beliebigen Ring R die Kategorie $\mathrm{Ket}(R\text{-}\mathrm{Mod})$ aller Komplexe von R-Moduln.

17.1.3.10. Für diese Struktur ist auch noch eine andere Terminologie üblich. Ganz allgemein nennt man eine abelsche Gruppe C mit einer Zerlegung $C = \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} C_q$ als interne direkte Summe in eine Familie von mit $q \in \mathbb{Z}$ indizierten Untergruppen eine **graduierte** oder genauer **$\mathbb{Z}$-graduierte abelsche Gruppe**. Ist zusätzlich ein Gruppenhomomorphismus $\partial : C \to C$ gegeben mit $\partial(C_q) \subset C_{q-1}$ und $\partial^2 = 0$, so nennt man das Paar (C, ∂) eine **differentielle graduierte abelsche Gruppe** oder kurz eine **dg-Gruppe** mit **Differential** ∂. Analog definieren wir die Kategorie der differentiellen graduierten Moduln über einem Ring R und notieren sie dgMod_R, so daß also gilt $\mathrm{Ket}(R\text{-}\mathrm{Mod}) = \mathrm{dgMod}_R$. Manchmal arbeitet man auch allgemeiner mit dem Begriff einer **differentiellen abelschen Gruppe**, womit schlicht ein Paar (A, ∂) gemeint ist bestehend aus einer abelschen Gruppe A und einem Gruppenhomomorphismus $\partial : A \to A$ mit der Eigenschaft $\partial^2 = 0$. Natürlich könnte man auch differentielle graduierte abelsche Gruppen betrachten, bei denen das Differential einen anderen „Grad“ hätte als in unserer Definition, aber die kommen seltener vor und wir blenden sie deshalb vorerst einmal aus.

Beispiel 17.1.3.11. Für jeden topologischen Raum X ist der Komplex der singulären Ketten $(\mathrm{S}X, \partial)$ mit $(\mathrm{S}X)_q := \mathrm{S}_q X$ ein Kettenkomplex. Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ bilden nach Lemma 17.1.2.8 die $\mathrm{S}_q(f)$ eine Kettenabbildung $\mathrm{S}f : \mathrm{S}X \to \mathrm{S}Y$. Da gilt $\mathrm{S}(f \circ g) = \mathrm{S}(f) \circ \mathrm{S}(g)$ sowie $\mathrm{S}(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, erhalten wir so einen Funktor

$$\mathrm{S} : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ket}$$

17.1.3.12. In **??** konstruieren wir für jeden topologischen Raum X die „simpliziale Menge“ $\mathrm{S}X$. Was im Einzelfall mit dem Symbol $\mathrm{S}X$ gemeint ist, muß der

Leser dann aus dem Kontext erschließen. Wenn wir besonders betonen wollen, daß $\mathrm{S}X$ den Kommplex und nicht die simpliziale Menge meint, verwenden wir die Notation S_*X.

Definition 17.1.3.13. Für jedes $q \in \mathbb{Z}$ definieren wir einen Funktor, die q**-te Homologiegruppe eines Kettenkomplexes**

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{H}_q : & \mathrm{Ket} & \to & \mathrm{Ab} \\ & C & \mapsto & \mathcal{H}_q(C) := \ker \partial_q / \operatorname{im} \partial_{q+1} \end{array}$$

als den Quotienten vom Kern des Differentials nach seinem Bild. Auf den Objekten ist das schon mal in Ordnung und wir müssen nur noch erklären, wie ein Morphismus von Kettenkomplexen $s : C \to D$ Morphismen auf der Homologie $\mathcal{H}_q(s) : \mathcal{H}_q(C) \to \mathcal{H}_q(D)$ definiert. Aus $\partial^D \circ s = s \circ \partial^C$ folgt aber $s(\operatorname{im} \partial^C) \subset \operatorname{im} \partial^D$, $s(\ker \partial^C) \subset \ker \partial^D$ und damit induziert s Morphismen $\mathcal{H}_q(s) : \mathcal{H}_q(C) \to \mathcal{H}_q(D)$. Wieder sieht man leicht, daß gilt $\mathcal{H}_q(s \circ t) = \mathcal{H}_q(s) \circ \mathcal{H}_q(t)$ und $\mathcal{H}_q(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, unser $\mathcal{H}_q$ ist also ein Funktor für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Ergänzung 17.1.3.14. Manchmal betrachten wir auch den Funktor

$$\mathcal{H} : \mathrm{Ket} \to \mathrm{Ket}$$

der einem Komplex die Gesamtheit seiner Homologiegruppen zuordnet, aufgefaßt als Komplex mit Differential Null. Gegeben eine differentielle abelsche Gruppe (A, ∂) erklärt man ihre **Homologie** als die abelsche Gruppe $\mathcal{H}A := \ker \partial / \operatorname{im} \partial$, die in diesem Fall keine Graduierung trägt.

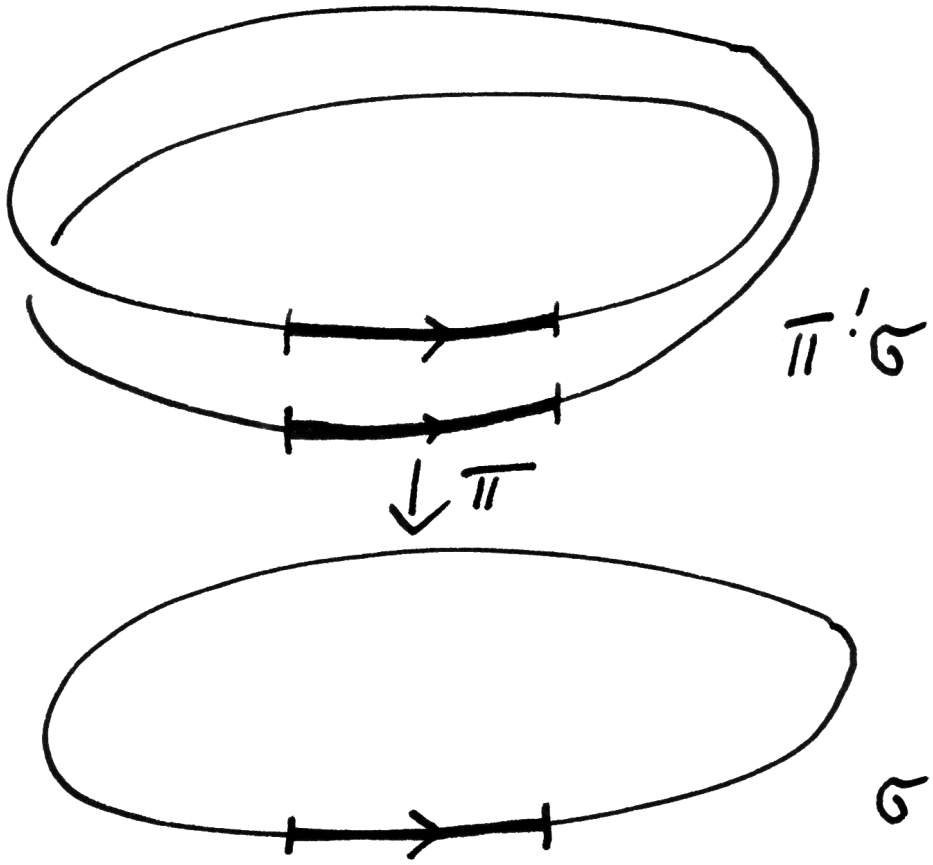
17.1.3.15. Wir erhalten mit diesen Begriffsbildungen und Notationen unsere Funktoren der singulären Homologiegruppen $\mathrm{H}_q : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$ als die Verknüpfungen $\mathrm{H}_q = \mathrm{H}_q^{\mathrm{sing}} = \mathcal{H}_q \circ \mathrm{S}$ von Funktoren

$$\mathrm{Top} \xrightarrow{\mathrm{S}} \mathrm{Ket} \xrightarrow{\mathcal{H}_q} \mathrm{Ab}$$

Wir übertragen die Begriffsbildungen **Zykel**, **Rand**, **Homologieklasse** auf beliebige Kettenkomplexe C und schreibt $\mathcal{Z}_q C := \ker \partial_q$ für die Zykel, $\mathcal{B}_q C := \operatorname{im} \partial_{q+1}$ für die Ränder und $[c] \in \mathcal{H}_q C$ für die Homologieklasse eines Zykels $c \in \mathcal{Z}_q C$.

Übungen

Übung 17.1.3.16. Ist $f : X \to Y$ eine Überlagerung mit endlichen Fasern, so erhält man eine Kettenabbildung $f^* : \mathrm{S}Y \to \mathrm{S}X$, indem man jedem singulären



Der Transfer eines singulären Eins-Simplex unter einer zweiblättrigen Überlagerung der Kreislinie.

Simplex die Summe seiner Lifts zuordnet. Man zeige, daß für die auf der Homologie induzierten **Rückzüge**

$$f^* : \mathrm{H}_q Y \to \mathrm{H}_q X$$

im Fall einer n-blättrigen Überlagerung gilt $(\mathrm{H}_q f) \circ f^* = n \cdot \mathrm{id} : \mathrm{H}_q Y \to \mathrm{H}_q Y$. Ist unsere Überlagerung normal und ist G ihre Gruppe von Decktransformationen, so zeige man weiter $f^* \circ (\mathrm{H}_q f) = \sum_{g \in G} \mathrm{H}_q g : \mathrm{H}_q X \to \mathrm{H}_q X$.

Übung 17.1.3.17. Man erkläre, wie für einen festen topologischen Raum X die Homologiegruppen mit Koeffizienten aus 17.1.2.11 als Funktoren $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$, $A \mapsto \mathrm{H}_q(X; A)$ aufgefaßt werden können, und wieso damit für jeden Ring R die Gruppen $\mathrm{H}_q(X; R)$ in natürlicher Weise zu R-Moduln werden, was wir ja auch bereits in 17.1.2.11 bemerkt hatten.

Übung 17.1.3.18. Man zeige, daß unsere Isomorphismen $\mathbb{Z}\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_0 X$ in ihrer Gesamtheit eine Isotransformation $\mathbb{Z}\pi_0 \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{H}_0$ von Funktoren $\mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$ bilden.

Ergänzende Übung 17.1.3.19. Gegeben eine Familie $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ von Kettenkomplexen derart, daß in jedem Grad nur endlich viele von ihnen nicht verschwinden, ist die offensichtliche Kettenabbildung ein Isomorphismus

$$\coprod_{\alpha \in A} K_\alpha \xrightarrow{\sim} \prod_{\alpha \in A} K_\alpha$$

17.1.4 Homotopie-Invarianz

Satz 17.1.4.1 (Homotopie-Invarianz). *Homotope stetige Abbildungen induzieren dieselbe Abbildung auf der Homologie.*

17.1.4.2. Dieser Satz ist schon ein sehr starkes Hilfsmittel zur Berechnung der singulären Homologiegruppen. Er impliziert zum Beispiel, daß ein zusammenziehbarer Raum dieselbe Homologie hat wie ein Punkt. Wir geben zwei Beweise: Erst einen mehr rechnerischen Beweis, und dann einen mehr konzeptionellen Beweis, der jedoch im Gegensatz zu unserem rechnerischen Beweis auf der Kenntnis der Homologie konvexer Mengen 17.1.2.17 aufbaut.

Vorschau 17.1.4.3. Wir werden das im Folgenden durchgeführte konzeptionelle Beweisverfahren später formalisieren zum Satz über azyklische Modelle 17.5.6.23 und damit auch die sogenannte „Künneth-Formel“ über die Homologie von Produkten zeigen. Aus dieser Formel kann die Homotopie-Invarianz im übrigen leicht direkt hergeleitet werden. Das ist nur insofern nicht ganz fair, als unser Beweis der Künnethformel auf der Homotopieinvarianz aufbaut. Will man die Homotopieinvarianz direkt aus dem Satz über azyklische Modelle herleiten, mag man

bemerken, daß bei den Funktoren $\mathrm{Top} \to \mathrm{Ket}$ gegeben durch $X \mapsto \mathrm{S}(X)$ und $X \mapsto \mathrm{S}(X \times [0,1])$ jeweils alle homogenen Komponenten frei sind mit Modellen in unseren Simplizes, beim zweiten Funktor nach 17.5.6.21. Damit zeigt dieser Satz unmittelbar, daß jede Transformation, die auf der nullten Homologie eine Isotransformation induziert, bereits selbst eine Isotransformation zwischen den entsprechenden Funktoren $\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}$ gewesen sein muß. Diese Erkenntnis gilt es dann nur noch anzuwenden auf die Transformation, die von den Projektionen $X \times [0,1] \to X$ induziert wird.

Erster Beweis. Bezeichnet $f, g : X \to Y$ unsere homotopen stetigen Abbildungen, so behauptet der Satz für alle q die Gleichheit $\mathrm{H}_q(f) = \mathrm{H}_q(g)$ von Abbildungen $\mathrm{H}_q X \to \mathrm{H}_q Y$. Es gilt also zu zeigen, daß für jeden Zykel $z \in \mathrm{Z}_q X$ die Differenz $(\mathrm{S}_q f)(z) - (\mathrm{S}_q g)(z)$ ein Rand in Y ist. Anschaulich ist das recht klar: Unsere Differenz ist eben „der Rand des Gebiets, das von besagtem Zykel während der Homotopie von f nach g überstrichen wird“. Etwas formaler sei $h : X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie von f nach g. Bezeichne $\omega_\nu : \Delta_{q+1} \to \Delta_q \times [0,1]$ diejenige affine Abbildung, die die Ecken $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_{q+1}$ unseres Standardsimplex der Reihe nach abbildet auf $(\mathrm{e}_0, 0), \ldots, (\mathrm{e}_\nu, 0), (\mathrm{e}_\nu, 1), \ldots, (\mathrm{e}_q, 1)$. Bezeichne $\delta_q : \mathrm{S}_q X \to \mathrm{S}_{q+1} Y$ die Abbildung, die auf Simplizes gegeben wird durch

$$\delta_q(\sigma) = \sum_{\nu=0}^{q} (-1)^\nu h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \omega_\nu$$

Nun prüfen wir für die so gegebenen Abbildungen δ_q die Identitäten $\partial\delta + \delta\partial = \mathrm{S}_q g - \mathrm{S}_q f$. Sobald das getan ist, sind wir fertig, denn dann gilt für jeden Zykel $z \in \mathrm{Z}_q X$ die Formel $(\mathrm{S}_q g)(z) - (\mathrm{S}_q f)(z) = \partial\delta z$ und unsere Differenz ist in der Tat ein Rand. Für den Nachweis unserer Identitäten kürzen wir $(\mathrm{e}_\nu, 0) = v_\nu$ und $(\mathrm{e}_\nu, 1) = w_\nu$ ab und vereinbaren für $q+1$ Punkte $a, b, \ldots, c$ einer konvexen Teilmenge eines reellen Raums die Notationen $[a, b, \ldots, c]$ für die Abbildung von Δ_q in unsere konvexe Teilmenge, die die Ecken der Reihe nach auf diese Punkte wirft. Dann haben wir also $\omega_\nu = [v_0, \ldots, v_\nu, w_\nu, \ldots, w_q]$ und

$$\begin{aligned} \partial\delta_q(\sigma) &= \textstyle\sum_{\nu \geq \mu} (-1)^\nu (-1)^\mu h(\sigma \times \mathrm{id})[v_0, \ldots, \hat{v}_\mu, \ldots, v_\nu, w_\nu, \ldots, w_q] \\ &\quad + \textstyle\sum_{\nu \leq \mu} (-1)^\nu (-1)^{\mu+1} h(\sigma \times \mathrm{id})[v_0, \ldots, v_\nu, w_\nu, \ldots, \hat{w}_\mu, \ldots, w_q] \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich $\partial(\sigma) = \sum_\mu (-1)^\mu \sigma[\mathrm{e}_0, \ldots, \hat{\mathrm{e}}_\mu, \ldots, \mathrm{e}_q]$ und damit

$$\begin{aligned} \delta_{q-1}\partial(\sigma) &= \textstyle\sum_{\nu > \mu} (-1)^\nu (-1)^{\mu+1} h(\sigma \times \mathrm{id})[v_0, \ldots, \hat{v}_\mu, \ldots, v_\nu, w_\nu, \ldots, w_q] \\ &\quad + \textstyle\sum_{\nu < \mu} (-1)^\nu (-1)^\mu h(\sigma \times \mathrm{id})[v_0, \ldots, v_\nu, w_\nu, \ldots, \hat{w}_\mu, \ldots, w_q] \end{aligned}$$

Nach dem Aufaddieren bleiben nur noch die Terme mit $\nu = \mu$ des Ausdrucks für $\partial\delta_q(\sigma)$ übrig, und auch diese löschen sich paarweise aus bis auf den Summanden

mit $\nu = \mu = 0$ vorne und den Summanden mit $\nu = \mu = q$ hinten. Da nun aber gilt $h(\sigma \times \mathrm{id})[w_0, \ldots, w_q] = g\sigma$ und $h(\sigma \times \mathrm{id})[v_0, \ldots, v_q] = f\sigma$, folgt die Behauptung. $\square$

17.1.4.4. Es mag der Anschauung helfen, sich klarzumachen, daß die Bilder der ω_ν die vollen Simplizes maximaler Dimension einer Triangulierung von $\Delta_q \times [0,1]$ sind. Für die formale Argumentation ist das jedoch belanglos. Unserem zweiten Beweis schicken wir eine Vorbemerkung voraus.

17.1.4.5 (**Abstrakte Variante des Yoneda-Lemmas**). Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\Delta \in \mathcal{C}$ ein Objekt, so können wir den Funktor $\mathbb{Z}\mathcal{C}(\Delta, \ ) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ betrachten, der jedem Objekt X die freie abelsche Gruppe über $\mathcal{C}(\Delta, X)$ zuordnet. Ist dann $G : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ ein weiterer Funktor, so liefert die Abbildungsvorschrift $\delta \mapsto \delta_\Delta(\mathrm{id}_\Delta)$ eine Bijektion

$$\mathrm{Ab}^{\mathcal{C}}(\mathbb{Z}\mathcal{C}(\Delta, \ ), G) \xrightarrow{\sim} G(\Delta)$$

zwischen der Menge aller Transformationen $\mathbb{Z}\mathcal{C}(\Delta, \ ) \Rightarrow G$ und der Menge $G(\Delta)$. Man erhält eine Umkehrabbildung, indem man einem $g \in G(\Delta)$ diejenige Familie von Gruppenhomomorphismen $\delta_X : \mathbb{Z}\mathcal{C}(\Delta, X) \to G(X)$ zuordnet, bei der δ_X dadurch gegeben ist, daß es jedem Morphismus $\sigma : \Delta \to X$ das Element $(G\sigma)(g) \in G(X)$ zuordnet.Wir überlassen die Details des Beweises dem Leser zur Übung, man orientiere sich am Beweis des Yoneda-Lemmas 4.7.10.2.

Beispiel 17.1.4.6 (**Variante des Yoneda-Lemmas für Ketten**). Für jeden Funktor $G : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$ liefert das Auswerten auf dem tautologischen q-Simplex τ_q eine Bijektion zwischen der Menge der Transformationen von S_q nach G und der Menge $G(\Delta_q)$, in Formeln $\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}}(\mathrm{S}_q, G) \xrightarrow{\sim} G(\Delta_q)$, $\delta \mapsto \delta_{\Delta_q}(\tau_q)$. Der Randoperator $\partial : \mathrm{S}_q \to \mathrm{S}_{q-1}$ entspricht unter dieser Bijektion etwa der Kette $\partial\tau_q \in \mathrm{S}_{q-1}(\Delta_q)$.

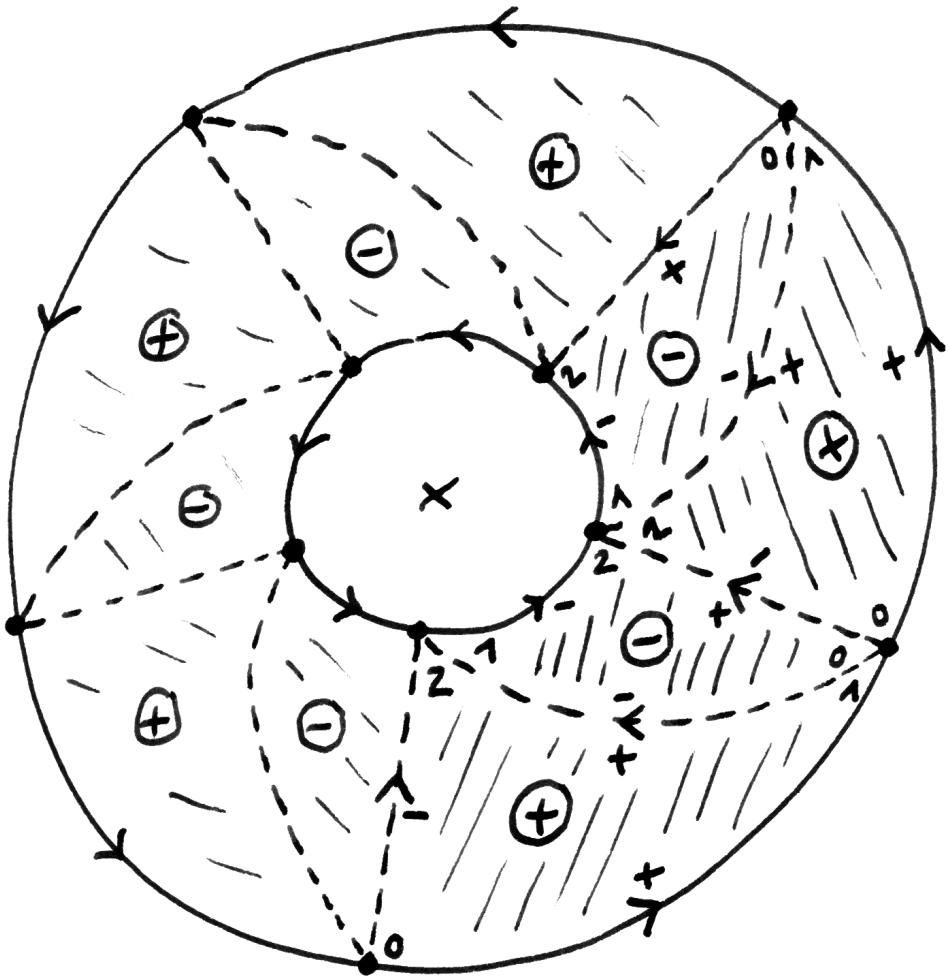
Zweiter Beweis. Sei wieder $h : X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie von f nach g. Bezeichnen wir die Inklusionen $X \to X \times [0,1]$, $x \mapsto (x,t)$ mit i_t, so gilt $f = h \circ i_0$ und $g = h \circ i_1$. Es reicht nun, $\mathrm{H}_q(i_0) = \mathrm{H}_q(i_1)$ zu zeigen, denn daraus folgt mit der Funktorialität der Homologie schon

$$\mathrm{H}_q(f) = \mathrm{H}_q(h) \circ \mathrm{H}_q(i_0) = \mathrm{H}_q(h) \circ \mathrm{H}_q(i_1) = \mathrm{H}_q(g)$$

Die Formel $\mathrm{H}_q(i_0) = \mathrm{H}_q(i_1)$ bedeutet, daß für jeden Zykel $z \in \mathrm{Z}_q X$ die Differenz seiner Bilder $(\mathrm{S}_q i_0)(z) - (\mathrm{S}_q i_1)(z)$ ein Rand ist. Um das nachzuweisen reicht es, eine Familie von Morphismen

$$\delta = \delta_q = \delta_q^X : \mathrm{S}_q X \to \mathrm{S}_{q+1}(X \times [0,1])$$

für $q \in \mathbb{Z}$ zu konstruieren derart, daß gilt $\partial\delta + \delta\partial = \mathrm{S}_q i_1 - \mathrm{S}_q i_0$, denn dann ist $(\mathrm{S}_q i_1)(z) - (\mathrm{S}_q i_0)(z) = \partial\delta z$ ein Rand für jeden Zykel $z \in \mathrm{Z}_q X$. Eine Möglichkeit,



Dies Bild zeigt zwei homotope Abbildungen der Kreislinie in die punktierte Ebene und die Bilder desselben aus der formalen Summe von fünf singulären Eins-Simplizes bestehenden Eins-Zykels unter diesen beiden Abbildungen. Des weiteren ist in der Abbildung eine Zweikette in der punktierten Ebene angedeutet, gegeben durch die formale Summe von insgesamt zehn singulären Zwei-Simplizes, davon die Hälfte mit dem Koeffizienten (-1), deren Rand gerade die Differenz unserer beiden Eins-Zykel ist. So erkennt man, daß unsere beiden Eins-Zykel dieselbe Homologieklasse in der punktierten Ebene repräsentieren.

derartige Morphismen explizit anzugeben, liefert die explizite Formel

$$\delta_q \sigma = \sum_{\nu=0}^{q} (-1)^\nu (\sigma \times \mathrm{id}) \omega_\nu$$

in den Notationen unseres ersten Beweises. Ich will jedoch auch noch einen mehr konzeptionellen Zugang erklären. Es ist bequem, solch eine Familie zu konstruieren als Transformation, wo wir beide Seiten auffassen als Funktoren in X von den topologischen Räumen in die abelschen Gruppen. Dann können wir uns nämlich auf die Variante des Yoneda-Lemmas für Ketten 17.1.4.6 stützen. Bezeichne dazu $\tau_q \in \mathrm{S}_q(\Delta_q)$ den **tautologischen q-Simplex** $\mathrm{id} : \Delta_q \to \Delta_q$. Wir hatten gesehen, daß wir nur für alle topologischen Räume X und alle $q \in \mathbb{Z}$ Morphismen $\delta = \delta_q : \mathrm{S}_q X \to \mathrm{S}_{q+1}(X \times [0,1])$ konstruieren müssen derart, daß gilt

$$\partial \delta_q + \delta_{q-1} \partial = \mathrm{S}_q i_1 - \mathrm{S}_q i_0 \qquad (*)_q$$

Wir konstruieren die δ_q als Transformationen $\delta_q : \mathrm{S}_q \Rightarrow F_{q+1}$ in den Funktor $F_{q+1} : X \mapsto \mathrm{S}_{q+1}(X \times [0,1])$ von oben. Sie werden dann nach unserer Yoneda-Variante 17.1.4.6 schon durch die Angabe jeweils eines Elements $\delta_q(\tau_q) = V_q \in \mathrm{S}_{q+1}(\Delta_q \times [0,1])$ eindeutig festgelegt und wir müssen nur unsere V_q so wählen, daß die obigen Gleichungen $(*)_q$ erfüllt sind. Da $(*)_q$ aber eine Gleichung von Transformationen $\mathrm{S}_q \Rightarrow F_q$ ist, gilt sie wieder nach unserer Yoneda-Variante 17.1.4.6 immer, wenn sie nach Auswerten auf dem tautologischen Simplex $\tau_q \in \mathrm{S}_q(\Delta_q)$ gilt, also genau dann, wenn gilt

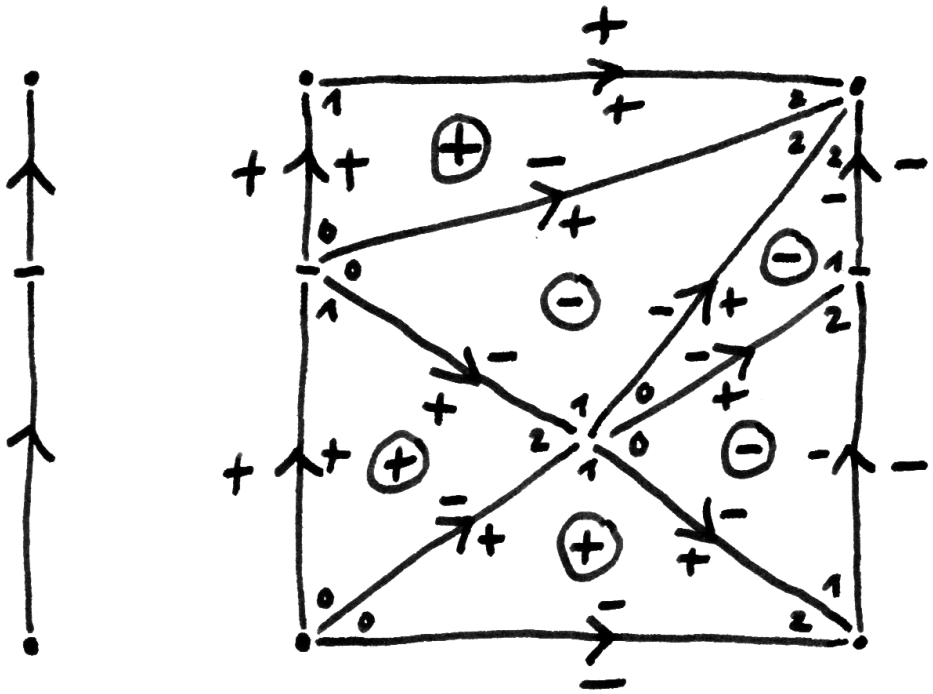
$$(\partial \delta_q + \delta_{q-1} \partial)(\tau_q) = (\mathrm{S}_q i_1 - \mathrm{S}_q i_0)(\tau_q)$$

in $\mathrm{S}_q(\Delta_q \times [0,1])$. Für $V_q = \delta_q(\tau_q)$ bedeutet das genau

$$\partial V_q = (\mathrm{S}_q i_1 - \mathrm{S}_q i_0 - \delta_{q-1} \partial)(\tau_q)$$

Man beachte, daß hier die rechte Seite von δ_{q-1}, also von V_{q-1} abhängt. Wir wählen nun mögliche V_q induktiv und nehmen an, daß die V_π für $\pi \leq q-1$ schon konstruiert sind und die Gleichungen $(*)_\pi$ für $\pi \leq q-1$ gelten. Als Basis der Induktion dürfen wir $V_\pi = 0$ für $\pi < 0$ nehmen und als V_0 irgendeinen singulären Simplex $\Delta_1 \to \Delta_0 \times [0,1]$, der die Endpunkte des Geradensegments Δ_1 „in der richtigen Reihenfolge“ auf die Endpunkte des Geradensegments $\Delta_0 \times [0,1]$ abbildet. Da nun nach Lemma 17.1.2.17 über die Homologie konvexer Mengen für $q > 0$ gilt $\mathrm{H}_q(\Delta_q \times [0,1]) = 0$, können wir eine q-Kette in $\Delta_q \times [0,1]$ für $q > 0$ als Rand schreiben genau dann, wenn sie ein Zykel ist. Wir finden für $q > 0$ also unser V_q wie gewünscht genau dann, wenn gilt

$$\partial(\mathrm{S}_q i_1 - \mathrm{S}_q i_0 - \delta_{q-1} \partial)(\tau_q) = 0$$



Eine mögliche Wahl von V_0, die anders ist als im Beweis vorgeschlagen, und dazu eine mögliche Wahl von V_1

Das zeigen wir induktiv, indem wir unter Verwendung von $(*)_{q-1}$ rechnen

$$\begin{aligned}\partial(\mathrm{S}_q i_1 - \mathrm{S}_q i_0 - \delta_{q-1}\partial) &= (\mathrm{S}_{q-1} i_1 - \mathrm{S}_{q-1} i_0 - \partial\delta_{q-1})\partial \\ &= \delta_{q-2}\partial\partial \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Definition 17.1.4.7. Zwei Kettenabbildungen $f, g : A \to B$ von Kettenkomplexen heißen **kettenhomotop** oder kurz **homotop**, wenn es eine Familie $\delta_q : A_q \to B_{q+1}$ von Gruppenhomomorphismen gibt mit $f_q - g_q = \partial_{q+1}\delta_q + \delta_{q-1}\partial_q$ für alle q. Wir schreiben dafür auch manchmal $\delta : f \sim g$.

17.1.4.8. Eine Kettenabbildung heißt **nullhomotop**, wenn sie homotop ist zur Nullabbildung. Per definitionem sind zwei Kettenabbildungen kettenhomotop, wenn ihre Differenz nullhomotop ist. Ist weiter $g \circ h$ eine Verknüpfung von Kettenabbildungen und ist eine der beiden nullhomotop, so auch die Verknüpfung, wie Sie in 17.1.4.11 selbst prüfen sollen. Wir können deshalb die **Homotopiekategorie der Kettenkomplexe abelscher Gruppen** einführen, mit Kettenkomplexen von abelschen Gruppen als Objekten und Homotopieklassen von Kettenabbildungen als Morphismen. Wir notieren sie $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab})$ oder $\mathrm{Hot}_{\mathrm{Ab}}$ oder auch einfach nur Hot. Morphismen von Komplexen in der Homotopiekategorie notieren wir manchmal $A \to_{\mathrm{Hot}} B$. Analog erklärt man für einen beliebigen Ring R die Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}_R = \mathrm{Hot}(R\text{-Mod})$ aller Komplexe von R-Moduln. Isomorphismen in einer Homotopiekategorie von Komplexen nennen wir auch **Homotopieäquivalenzen** und notieren sie $\xrightarrow{\sim}$ oder $\xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Hot}}$. Ein Komplex heißt **nullhomotop**, wenn er homotopieäquivalent ist zum Nullkomplex.

17.1.4.9. Unsere Argumente von eben zeigen, daß die Homologiegruppen ganz allgemein Funktoren $\mathcal{H}_q : \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}) \to \mathrm{Ab}$ liefern. Weiter haben wir gezeigt, daß homotope Abbildungen f, g kettenhomotope Abbildungen $\mathrm{S}f, \mathrm{S}g$ auf den singulären Ketten liefern. Genauer erhalten wir für jede Homotopie $h : f \sim g$ eine Kettenhomotopie $\mathrm{S}f \sim \mathrm{S}g$ als $\mathrm{S}h \circ \delta$ mit δ wie im Beweis von 17.1.4.1. Bezeichnen wir wie bisher mit Hot die Homotopiekategorie topologischer Räume, so erhalten wir mithin ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Top} & \xrightarrow{\mathrm{S}} & \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}) & \xrightarrow{\mathcal{H}_q} & \mathrm{Ab} \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ \mathrm{hTop} & \xrightarrow{\mathrm{S}} & \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}) & \xrightarrow{\mathcal{H}_q} & \mathrm{Ab}\end{array}$$

Insbesondere induziert eine Homotopieäquivalenz stets Isomorphismen auf der Homologie. Nun ist die konstante Abbildung von einem topologischen Raum auf einen Punkt eine Homotopieäquivalenz genau dann, wenn unser Raum zusammenziehbar ist. Da Funktoren Isomorphismen zu Isomorphismen machen, liefert

also für jeden zusammenziehbaren Raum X die konstante Abbildung Isomorphismen von seiner Homologie mit der Homologie eines Punktes. Wir folgern für X zusammenziehbar $\mathrm{H}_q X = \mathbb{Z}$ für $q = 0$ und Null sonst. Wenn wir den ersten Beweis für die Homotopieinvarianz nehmen, erhalten wir unser Lemma 17.1.2.17 über die Homologie konvexer Mengen als Korollar.

Übungen

Übung 17.1.4.10. Für den einpunktigen Raum $X = \mathrm{top}$ und den konstanten Nullsimplex $\sigma : \Delta_0 \to \mathrm{top}$ liefert die Vorschrift $n \mapsto n\sigma$ eine Homotopieäquivalenz

$$\mathbb{Z}[0] \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(\mathrm{top})$$

mit der Notation $\mathbb{Z}[0]$ für den Komplex, der $\mathbb{Z}$ ist im Grad Null und Null sonst.

Übung 17.1.4.11. Man zeige, daß die Verknüpfung einer nullhomotopen Kettenabbildung mit einer beliebigen Kettenabbildung wieder nullhomotop ist, und zwar sowohl für das Davorschalten wie auch für das Dahinterschalten.

Übung 17.1.4.12 (**Hom-Komplex**). Sind (C, ∂^C) und (D, ∂^D) Kettenkomplexe, so erklären wir einen Kettenkomplex $(C \Rrightarrow D) = \mathrm{Hom}(C, D)$ durch die Vorschrift

$$(C \Rrightarrow D)_i := \prod_q \mathrm{Hom}(C_q, D_{q+i})$$

mit Differential $\partial(f) = \partial^D \circ f - (-1)^{|f|} f \circ \partial^C$ und der Konvention $|f| = i$ für $f \in (C \Rrightarrow D)_i$. Man zeige, daß gilt $\partial(\partial(f)) = 0$, daß die Nullzykel des Hom-Komplexes gerade die Kettenabbildungen von C nach D sind, in Formeln $\mathcal{Z}_0(C \Rrightarrow D) = \mathrm{Ket}(C, D)$, und daß diese Gleichheit eine Gleichheit $\mathcal{H}_0(C \Rrightarrow D) = \mathrm{Hot}(C, D)$ zwischen der nullten Homologie und dem Raum der Morphismen von C nach D in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe induziert. In dieser Weise erhalten wir natürliche Abbildungen

$$\mathcal{H}(C \Rrightarrow D) \to (\mathcal{H}C \Rrightarrow \mathcal{H}D)$$

Vorschau 17.1.4.13 (**Vorzeichen im Hom-Komplex**). Die Wahl der Vorzeichen in unserem Hom-Komplex mag willkürlich wirken. Sie kann jedoch zurückgeführt werden auf unsere Vorzeichenwahl bei der Definition des Tensorkomplexes 17.5.3.1. Genauer bilden nach 17.5.3.18 die Isomorphismen

$$\alpha_{Y,Z} : \mathrm{Ket}(Y \otimes X, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ket}(Y, X \Rrightarrow Z)$$

gegeben durch $f \mapsto \bar{f}$ mit $\bar{f}(y) := (\bar{f}(y)_i)$ und $\bar{f}(y)_i : X_i \to Z_{i+|y|}$ gegeben durch $x \mapsto f_{|y|+|x|}(y \otimes x)$ für homogene y, x eine Adjunktion $(\otimes X, X \Rrightarrow)$ von

Funktoren $\mathrm{Ket} \to \mathrm{Ket}$ und das Paar $(\alpha, X\Rrightarrow)$ ist nach 16.4.8.3 durch $\otimes X$ eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Es gibt auch andere mögliche Paare, von denen das hier betrachtete nur dadurch ausgezeichnet ist, daß ich mir α gut merken kann. Nur in diesem schwachen und sehr menschlichen Sinne werden auch die Vorzeichen im Hom-Komplex durch die Vorzeichen bei der Wahl des Tensorkomplexes bestimmt. Bei der Wahl von α könnte man, wenn man den Teufel am Schwanz ziehen will, durchaus noch igendwelche Vorzeichen einbauen und müßte dann die Definition von $\Rrightarrow$ eben entsprechend anpassen.

Übung 17.1.4.14. Sei C ein Komplex von Moduln über einem Ring, dessen Homologiegruppen freie oder allgemeiner „projektive“ Moduln sind. Man zeige, daß es dann in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe genau einen Homomorphismus $\mathcal{H}C \to C$ gibt, der auf der Homologie die offensichtliche Identifikation $\mathcal{H}(\mathcal{H}C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}C$ induziert, und daß er im Fall von Vektorräumen sogar eine Homotopieäquivalenz ist. In 17.6.2.11 verallgemeinern wir die zweite Aussage auf gegen die Pfeile beschränkte Komplexe projektiver Moduln. Für Moduln über Hauptidealringen zeigen wir eine Variante in 20.2.6.27.

17.1.5 Erste Homologie und Fundamentalgruppe

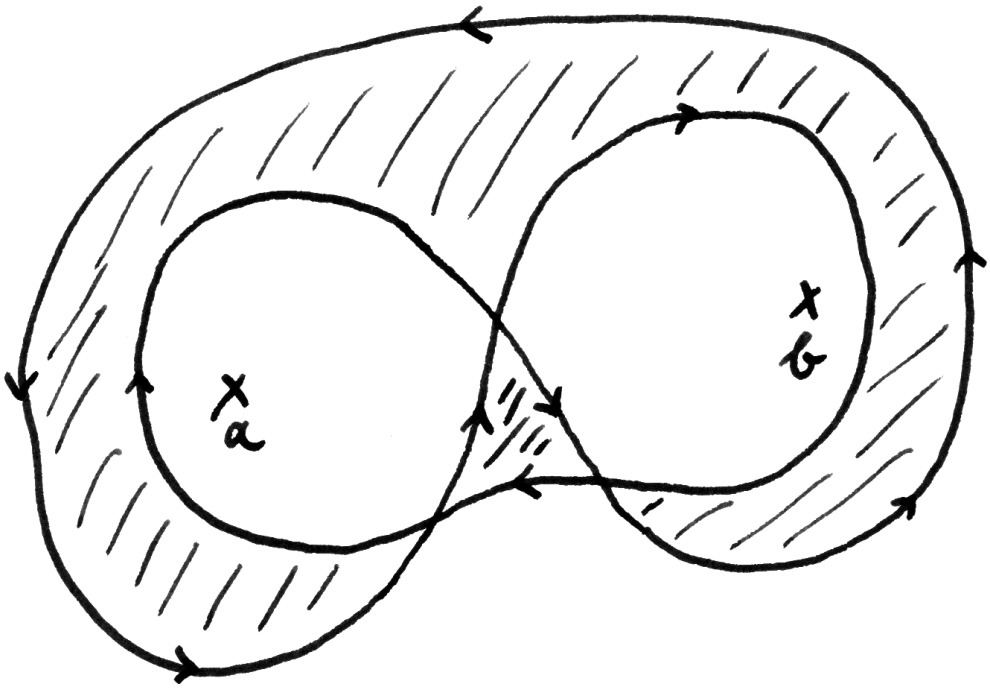
17.1.5.1. Der Klarheit halber schreiben wir in diesem Abschnitt anders als sonst $[\![\gamma]\!]$ für die Homotopieklasse mit festen Endpunkten eines Weges und wie üblich $[z]$ für die Homologieklasse eines Zykels. Bezeichne $c : \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0,1]$ die Restriktion der Projektion zur zweiten Koordinate auf den Standard-1-Simplex $\Delta_1 = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x+y=1\}$.

Satz 17.1.5.2. *1. Für jeden bepunkteten Raum (X,x) gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(X,x) \to \mathrm{H}_1 X$ von seiner Fundamentalgruppe in seine erste singuläre Homologiegruppe mit $[\![\gamma]\!] \mapsto [\gamma \circ c]$ für alle geschlossenen Wege $\gamma \in \Omega(X,x)$;*

2. Für jeden wegzusammenhängenden bepunkteten Raum induziert der Homomorphismus aus dem ersten Teil einen Isomorphismus zwischen der Abelisierung 16.1.8.1 der Fundamentalgruppe und der ersten singulären Homologiegruppe, den sogenannten **Hurewicz-Isomorphismus**

$$\pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_1 X$$

17.1.5.3. Ein geschlossener Weg, der unter der im Satz beschriebenen Abbildung zum Nullelement der ersten Homologiegruppe wird, heißt **nullhomolog**.



Ein geschlossener, nicht zusammenziehbarer, aber dennoch nullhomologer Weg im Komplement einer zweielementigen Teilmenge der komplexen Zahlenebene. Denken wir uns das Mittelkreuz als Basispunkt und bezeichnet α beziehungsweise β in der Fundamentalgruppe das Umrunden gegen den Uhrzeigersinn von a beziehungsweise b, so ist unser Fundamentalgruppe nach 16.2.5.10 frei erzeugt von α und β und unser Weg repräsentiert das Element $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ in der Fundamentalgruppe.

Ergänzung 17.1.5.4. Der Hurewicz-Isomorphismus hängt von der a priori unkanonischen Wahl unserer Bijektion $c : \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0,1]$ ab. Wählen wir hier statt der Projektion auf die zweite Koordinate die Projektion auf die erste Koordinate, so ändert er sein Vorzeichen.

Beweis. 1. Offensichtlich definiert die Vorschrift $\gamma \mapsto [\gamma \circ c]$ eine Abbildung $\mathrm{hur} : \Omega(X,x) \to \mathrm{H}_1 X$ vom Wegeraum in die erste Homologiegruppe. Um zu zeigen, daß sie auf Homotopieklassen von Wegen konstant ist, geben wir eine alternative Beschreibung. Bezeichne $\mathrm{Exp} : [0,1] \to S^1$ unsere übliche Abbildung $t \mapsto \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,t)$. Da Exp nach 15.1.7.17 final ist, gibt es zu jedem geschlossenen Weg $\gamma \in \Omega(X,x)$ eine stetige Abbildung $\tilde{\gamma} : S^1 \to X$ mit $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \mathrm{Exp}$. Betrachten wir nun in der Kreislinie S^1 den 1-Zykel $z = \mathrm{Exp} \circ c \in \mathrm{Z}_1(S^1)$, so können wir unsere Abbildung von $\Omega(X,x)$ nach $\mathrm{H}_1 X$ auch schreiben als

$$\gamma \mapsto [\gamma \circ c] = (\mathrm{H}_1 \tilde{\gamma})[z]$$

Sind nun $\gamma, \beta \in \Omega(X,x)$ homotop mit festen Endpunkten, so sind $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\beta}$ homotope Abbildungen von S^1 nach X, da wieder nach 15.1.7.17 auch $\mathrm{id} \times \mathrm{Exp} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times S^1$ final ist. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} [\![\gamma]\!] = [\![\beta]\!] \quad &\Rightarrow \quad \tilde{\gamma} \simeq \tilde{\beta} \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{H}_1 \tilde{\gamma} = \mathrm{H}_1 \tilde{\beta} \text{ nach Homotopieinvarianz } 17.1.4.1 \\ &\Rightarrow \quad (\mathrm{H}_1 \tilde{\gamma})[z] = (\mathrm{H}_1 \tilde{\beta})[z] \\ &\Rightarrow \quad [\gamma \circ c] = [\beta \circ c] \end{aligned}$$

Folglich definiert die Vorschrift $[\![\gamma]\!] \mapsto [\gamma \circ c]$ in der Tat eine wohlbestimmte Abbildung $\pi_1(X,x) \to \mathrm{H}_1 X$. Wir müssen für den ersten Teil nur noch zeigen, daß sie ein Gruppenhomomorphismus ist. Dazu betrachten wir die affine Abbildung $p : \Delta_2 \to [0,1]$ mit $(1,0,0) \mapsto 0$, $(0,1,0) \mapsto 1/2$ und $(0,0,1) \mapsto 1$. Offensichtlich gilt für beliebige $\gamma, \beta \in \Omega(X,x)$, ja sogar für zwei beliebige verknüpfbare nicht notwendig geschlossene Wege in $\mathrm{S}_1 X$ die Identität

$$\partial((\beta * \gamma) \circ p) = \gamma \circ c - (\beta * \gamma) \circ c + \beta \circ c$$

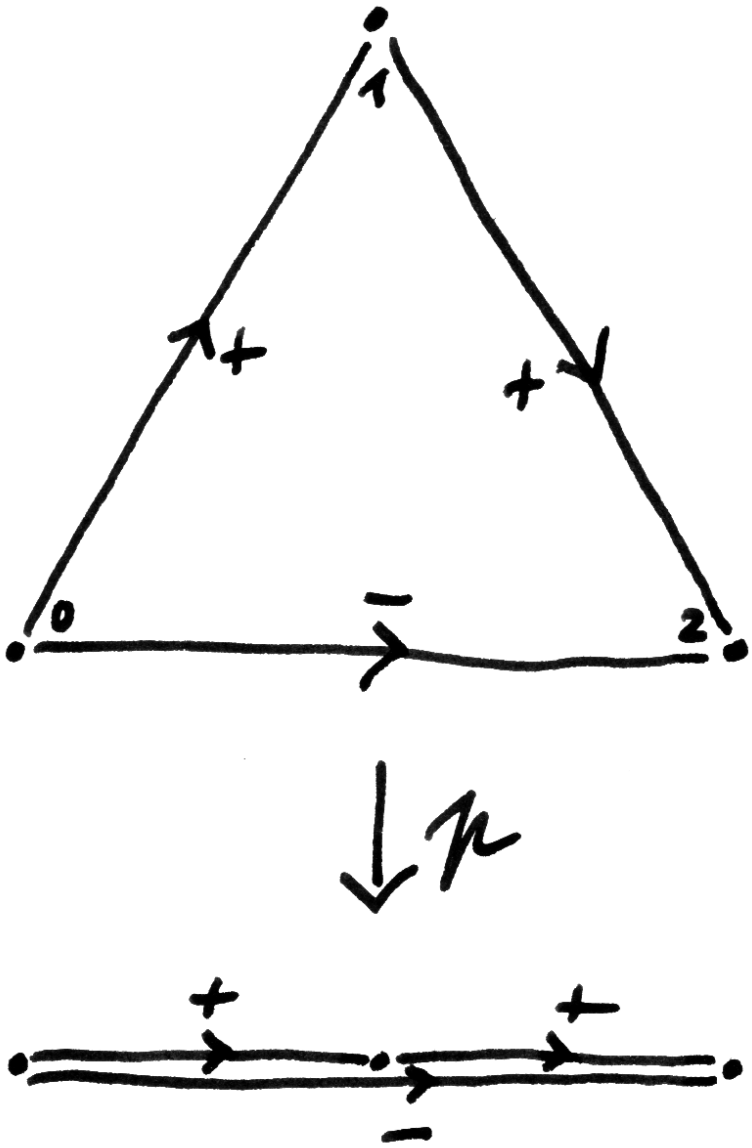
als da heißt $(\beta * \gamma) \circ c$ ist homolog zu $\gamma \circ c + \beta \circ c$, und für $\gamma, \beta \in \Omega(X,x)$ folgt daraus in $\mathrm{H}_1 X$ die Gleichung $[(\beta * \gamma) \circ c] = [\gamma \circ c] + [\beta \circ c]$.

2. Da $\mathrm{H}_1 X$ abelsch ist, definiert die Abbildung aus Teil 1 nach 16.1.8.3 einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{húr} : \pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{H}_1 X$$

Wir nehmen nun X wegzusammenhängend an und wählen für jeden Punkt $y \in X$ einen Weg $\alpha_y \in \Omega(X,y,x)$ von x nach y. Dann definieren wir einen Gruppenhomomorphismus

$$w : \mathrm{S}_1 X \to \pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}}$$



Der tautologische Zwei-Simplex mit seinem Rand sowie der Zwei-Simplex $p : \Delta_2 \to [0,1]$ und sein Rand in $\mathrm{S}_1([0,1])$.

durch die Vorschrift, daß er einen 1-Simplex $\sigma : \Delta_1 \to X$ abbilden möge auf die Klasse des geschlossenen Weges $w(\sigma) = \bar{\alpha}_z * (\sigma \circ c^{-1}) * \alpha_y$ für $z = \sigma(0,1)$ und $y = \sigma(1,0)$ die Enden unseres 1-Simplex. Wir zeigen nun, daß dieser Gruppenhomomorphismus alle Ränder in $\mathrm{B}_1 X$ auf das neutrale Element von $\pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}}$ wirft. In der Tat, der Rand eines 2-Simplex $\tau : \Delta_2 \to X$ wird unter unserem Gruppenhomomorphismus abgebildet auf $[\![\bar{\alpha}_u * (\tau \circ k) * \alpha_u]\!]$, wo $u = \tau(0,0,1)$ das Bild einer Ecke von Δ_2 ist und $k : [0,1] \to \Delta_2$ den Weg mit Anfangs- und Endpunkt in dieser Ecke bezeichnet, der einmal auf dem Rand von Δ_2 umläuft in einer Richtung, die der Leser sich selber überlegen möge. Da aber schon k selbst homotop ist zum konstanten Weg, gilt dasselbe für die obige Verknüpfung. Folglich definiert unsere Vorschrift einen Gruppenhomomorphismus in der umgekehrten Richtung

$$\overline{w} : \mathrm{H}_1 X \to \pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}}$$

Es bleibt zu zeigen, daß er invers ist zu dem in Teil 1 konstruierten Homomorphismus $\mathrm{húr}$. Um $\overline{w} \circ \mathrm{húr} = \mathrm{id}$ nachzuweisen, wählen wir einen geschlossenen Weg $\gamma \in \Omega(X,x)$ und erkennen, daß unter unserer Verknüpfung seine Klasse abgebildet wird auf die Klasse von $\overline{\alpha}_x * \gamma * \alpha_x$ in $\pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}}$. Das zeigt $\overline{w} \circ \mathrm{húr} = \mathrm{id}$. Um $\mathrm{húr} \circ \overline{w} = \mathrm{id}$ nachzuweisen bemerken wir, daß für jeden 1-Simplex σ unser $w(\sigma)$ durch den Weg $\bar{\alpha}_{\sigma(1,0)} * (\sigma \circ c^{-1}) * \alpha_{\sigma(0,1)}$ repräsentiert wird. Nach dem Schluß des vorhergehenden Beweises ist damit $\mathrm{hur}(w(\sigma))$ homolog zur 1-Kette $\sigma + \alpha_{\sigma(1,0)} \circ c - \alpha_{\sigma(0,1)} \circ c$. Definieren wir also $\delta : \mathrm{S}_0 X \to \mathrm{S}_1 X$ durch $y \mapsto \alpha_y \circ c$, so ist $\mathrm{hur}(w(\sigma)) - \sigma$ homolog zu $\delta\partial\sigma$ für jeden 1-Simplex σ und nullhomolog für jeden 1-Zykel $a \in \mathrm{Z}_1 X$, in Formeln $[\mathrm{hur}(w(a))] = [a]\ \forall a \in \mathrm{Z}_1 X$. □

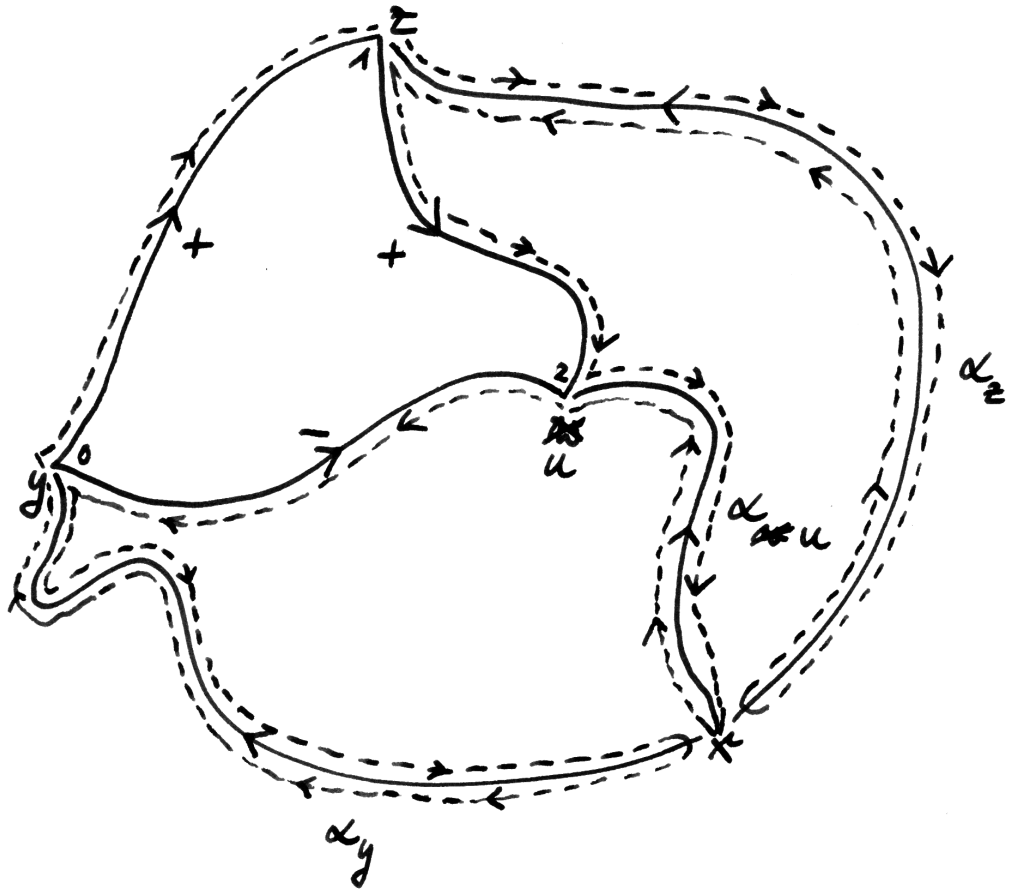
Definition 17.1.5.5. Zwei normierte geschlossene Wege α, β in einem topologischen Raum heißen **frei homotop**, wenn es eine durch $\tau \in [0,1]$ parametrisierte Familie geschlossener normierter Wege γ_τ gibt mit $\gamma_0 = \alpha$, $\gamma_1 = \beta$ und so, daß $(t,\tau) \mapsto \gamma_\tau(t)$ stetig ist auf $[0,1]^2$.

17.1.5.6. Im Gegensatz zur Homotopie mit festen Endpunkten muß unsere Abbildung auf $[0,1]^2$ bei einer freien Homotopie also nicht auf der vorderen und hinteren Kante konstant sein, sondern vielmehr auf der vorderen und hinteren Kante denselben Weg darstellen.

Übungen

Übung 17.1.5.7. Man zeige, daß je zwei frei homotope geschlossene Wege unter den Hurewicz-Homomorphismen zum jeweiligen Basispunkt auf dieselbe Homologieklasse abgebildet werden.

Übung 17.1.5.8. Man zeige, daß die Hurewicz-Isomorphismen für jeden wegzusammenhängenden Raum X einen Isomorphismus $\mathrm{hur}_X : \pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_1(X)$



Dies Bild soll illustrieren, warum für einen Zwei-Simplex $\tau : \Delta_2 \to X$ sein Rand unter unserem Gruppenhomomorphismus abgebildet auf $[\![\bar{\alpha}_u * (\tau \circ k) * \alpha_u]\!]$, wo $u = \tau(0,0,1)$ das Bild einer Ecke von Δ_2 ist und $k : [0,1] \to \Delta_2$ den Weg mit Anfangs- und Endpunkt in dieser Ecke bezeichnet, der einmal auf dem Rand von Δ_2 umläuft.

zwischen seiner basispunktfreien abelisierten Fundamentalgruppe 16.1.8.4 und der ersten Homologiegruppe induzieren und daß wir so sogar eine Isotransformation

$$\mathrm{hur} : \pi_1^{\mathrm{ab}} \tilde{\Rightarrow} \mathrm{H}_1$$

von Funktoren von der Kategorie der wegzusammenhängenden Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen erhalten.

17.1.6 Homologie offener Teilmengen der Ebene

17.1.6.1 (**Umlaufzahlen für Zykel**). Gegeben $w, z \in \mathbb{C}$ zwei verschiedene Punkte der komplexen Zahlenebene spezialisiert der Hurewitz-Isomorphismus 17.1.5.2 zu einem Isomorphismus

$$\pi_1(\mathbb{C}\backslash w, z) \tilde{\to} \mathrm{H}_1(\mathbb{C}\backslash w)$$

Wir notieren den duch die Umlaufzahl $\gamma \mapsto \mathrm{Um}(\gamma, w)$ aus 16.1.7.7 gegebenen Isomorphismus $\mathrm{Um}(\ , w) : \pi_1(\mathbb{C}\backslash w, z) \tilde{\to} \mathbb{Z}$. Man kann leicht zeigen, daß die auf der Homologie induzierte Abbildung nicht von z abhängt und folglich mit

$$\mathrm{Um}(\ , w) : \mathrm{H}_1(\mathbb{C}\backslash w) \tilde{\to} \mathbb{Z}$$

bezeichnet werden kann. Für eine Homologieklasse $\alpha \in \mathrm{H}_1(\mathbb{C}\backslash w)$ notieren wir ihr Bild unter dieser Abbildung mit $\mathrm{Um}(\alpha, w)$ und nennen diese Zahl die **Umlaufzahl unserer Klasse** α um den Punkt w. Für einen 1-Zykel $\sigma \in \mathrm{Z}_1(\mathbb{C}\backslash w)$ notieren wir das Bild seiner Homologieklasse unter dieser Abbildung wieder mit $\mathrm{Um}(\sigma, w) := \mathrm{Um}([\sigma], w)$ und nennen diese Zahl die **Umlaufzahl des Zykels** σ um den Punkt w.

Ergänzung 17.1.6.2. Bei unserer Definition 17.1.2.19 des Integrals holomorpher Funktionen über 1-Zykel haben wir mit Vorbedacht dieselbe durch die Projektion auf die zweite Koordinate gegebene Identifikation $c : \Delta_1 \tilde{\to} [0, 1]$ zugrundegelegt wie bei der Konstruktion des Hurewitz-Isomorphismus. Ist also $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $\gamma \circ c : \Delta_1 \to \mathbb{C}$ der zugehörige 1-Simplex, so gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{[\gamma\circ c]} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Der mit den Grundlagen der Funktionentheorie vertrauten Leser wird nun leicht einsehen können, daß für jeden Punkt $w \in \mathbb{C}$ und jede Homologieklasse $\gamma \in \mathrm{H}_1(\mathbb{C}\backslash w)$ ihre Umlaufzahl um den Punkt w auch durch die Formel

$$\mathrm{Um}(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{z - w}\,\mathrm{d}z$$

beschrieben werden kann, mit dem in 17.1.2.19 erklärten Integralbegriff. Für im Sinne von 17.1.2.19 „geschlossene“ 1-Simplizes folgt das unmittelbar aus dem Residuensatz oder auch direkter aus dem Beweis von 14.4.2.1, und im allgemeinen folgt es dann aus der Erkenntnis, daß jeder 1-Zykel homolog ist zu einer Linearkombination geschlossener 1-Simplizes.

Satz 17.1.6.3 (**Homologie offener Teilmengen der Ebene**). *Ist $U \Subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene, so liefert die durch das Bilden der Umlaufzahlen gegebene Abbildung $\mathrm{H}_1(U) \times (\mathbb{C}\backslash U) \to \mathbb{Z}$, $(\sigma, w) \mapsto \mathrm{Um}(\sigma, w)$ einen Gruppenisomorphismus*

$$\mathrm{H}_1(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_!(\mathbb{C}\backslash U, \mathbb{Z})$$

zwischen der ersten Homologiegruppe von U und der Gruppe der stetigen $\mathbb{Z}$-wertigen Funktionen mit kompaktem Träger auf dem Komplement von U.

17.1.6.4. Die Injektivität unserer Abbildung bedeutet in anderen Worten, daß ein Zykel in einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene in unserer Teilmenge nullhomolog ist genau dann, wenn er keinen Punkt außerhalb besagter Teilmenge umläuft. In 17.4.3.5 wird erklärt, wie sich unser Satz auf offene Teilmengen beliebiger endlichdimensionaler Vektorräume verallgemeinern läßt.

Ergänzung 17.1.6.5. Umläuft ein geschlossener Weg in einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene $U \Subset \mathbb{C}$ keinen Punkt des Komplements $\mathbb{C}\backslash U$, so ist er nach 17.1.6.3 insbesondere nullhomolog, und nach 17.1.2.19 verschwindet folglich das Integral jeder auf unserer Teilmenge holomorphen Funktion über besagten Weg. Diese Aussage ist in der Funktionentheorie bekannt als die **Umlaufzahlversion des Integralsatzes von Cauchy**.

Ergänzung 17.1.6.6 (**Residuensatz, homologische Version**). Seien $U \Subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $P \subset U$ eine endliche Teilmenge und $f : U\backslash P \to \mathbb{C}$ holomorph und γ ein Zykel in $U\backslash P$, der in U nullhomolog ist. So gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{p\in P} \mathrm{Um}(\gamma, p)\,\mathrm{Res}(f, p)$$

Wir könnten das genauso herleiten wie den Residuensatz 14.4.2.11. Stattdessen führen wir hier einen alternativen Beweis vor, der von der Laurententwicklung unabhängig ist und die Nützlichkeit unserer neuen Sprache zeigen soll. Wählen wir um jede der Singularitäten $w \in P$ einen Kreisweg γ_w mit so kleinem Radius, daß die ganze abgeschlossene Kreisscheibe innerhalb dieses Weges in U enthalten ist und keine andere Singularität enthält, so gilt $\mathrm{Um}(\gamma_w, w) = 1$ und $\mathrm{Um}(\gamma_w, v) = 0$ für alle $v \in P\backslash w$ und für alle $v \in \mathbb{C}\backslash U$. Die Zykel γ und $\sum_w \mathrm{Um}(\gamma, w)\gamma_w$

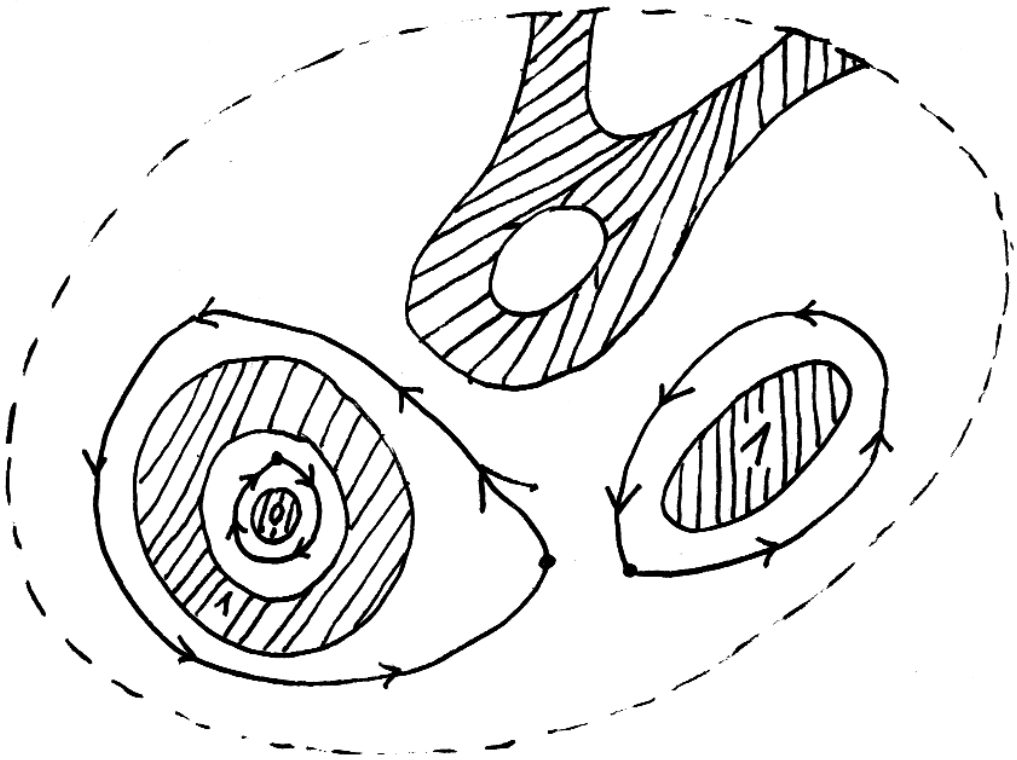


Illustration zum Satz über die Homologie offener Teilmengen der Ebene 17.1.6.3. Die Ebene $\mathbb{C}$ habe ich hier ersetzt durch eine „eiförmige“ konvexe offene nichtleere Teilmenge derselben, die ja homöomorph ist. Das Komplement von U ist schraffiert eingezeichnet und besteht aus vier Zusammenhangskomponenten, von denen eine nicht kompakt ist. In die kompakten Zusammenhangskomponenten habe ich Zahlen geschrieben, die die Werte einer Funktion aus $\mathcal{C}_!(\mathbb{C}\backslash U, \mathbb{Z})$ meinen, und darüber hinaus habe ich einen Eins-Zykel in U angegeben, der unter dem Isomorphismus aus unserem Satz auf besagte Funktion abgebildet wird.

haben also dieselben Umlaufzahlen um alle Punkte des Komplements von $U \backslash P$ in $\mathbb{C}$, als da heißt, ihre Differenz ist in $U \backslash P$ nullhomolog. Daraus folgt wegen der Homologieinvarianz des Wegintegrals 14.2.3.9 aber sofort

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{w \in P} \mathrm{Um}(\gamma, w) \int_{\gamma_w} f(z)\,\mathrm{d}z$$

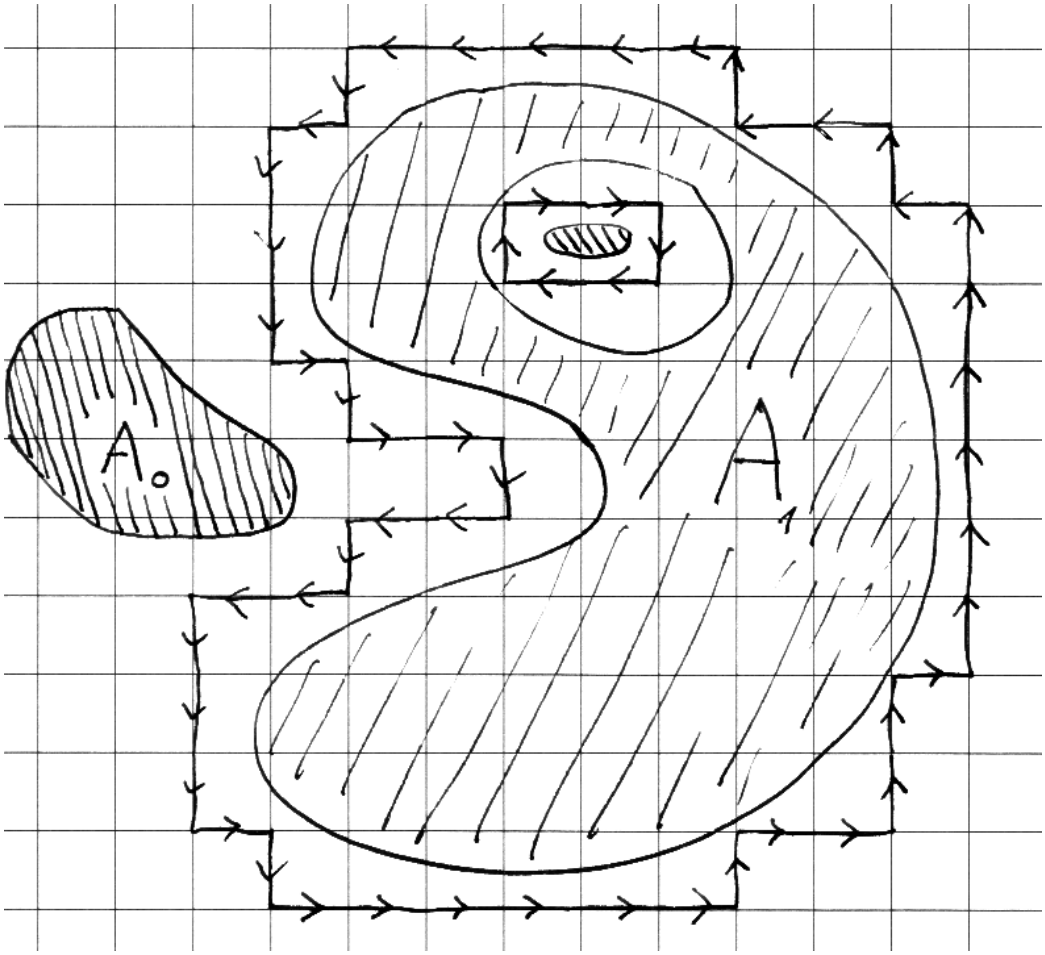
und die Formel aus der Definition des Residuums 14.4.2.8 zeigt dann den Residuensatz.

Beweis von 17.1.6.3. Jeder Zykel $\sigma \in \mathrm{Z}_1(U)$ wird in $\mathrm{S}_1(\mathbb{C})$ ein Rand, $\sigma = \partial\alpha$ für $\alpha \in \mathrm{S}_2(\mathbb{C})$. Liegt w auf keinem Simplex von α, so gilt sicher $\mathrm{Um}(\sigma, w) = 0$. Folglich verschwindet $\mathrm{Um}(\sigma, w)$ bei festem σ für alle w außerhalb eines geeigneten Kompaktums. Daß $w \mapsto \mathrm{Um}(\sigma, w)$ auch stetig von w abhängt, also eine lokal konstante Funktion ist, wird sich der Leser leicht selbst überlegen können. Damit liefert unsere Abbildungsvorschrift schon einmal einen Gruppenhomomorphismus

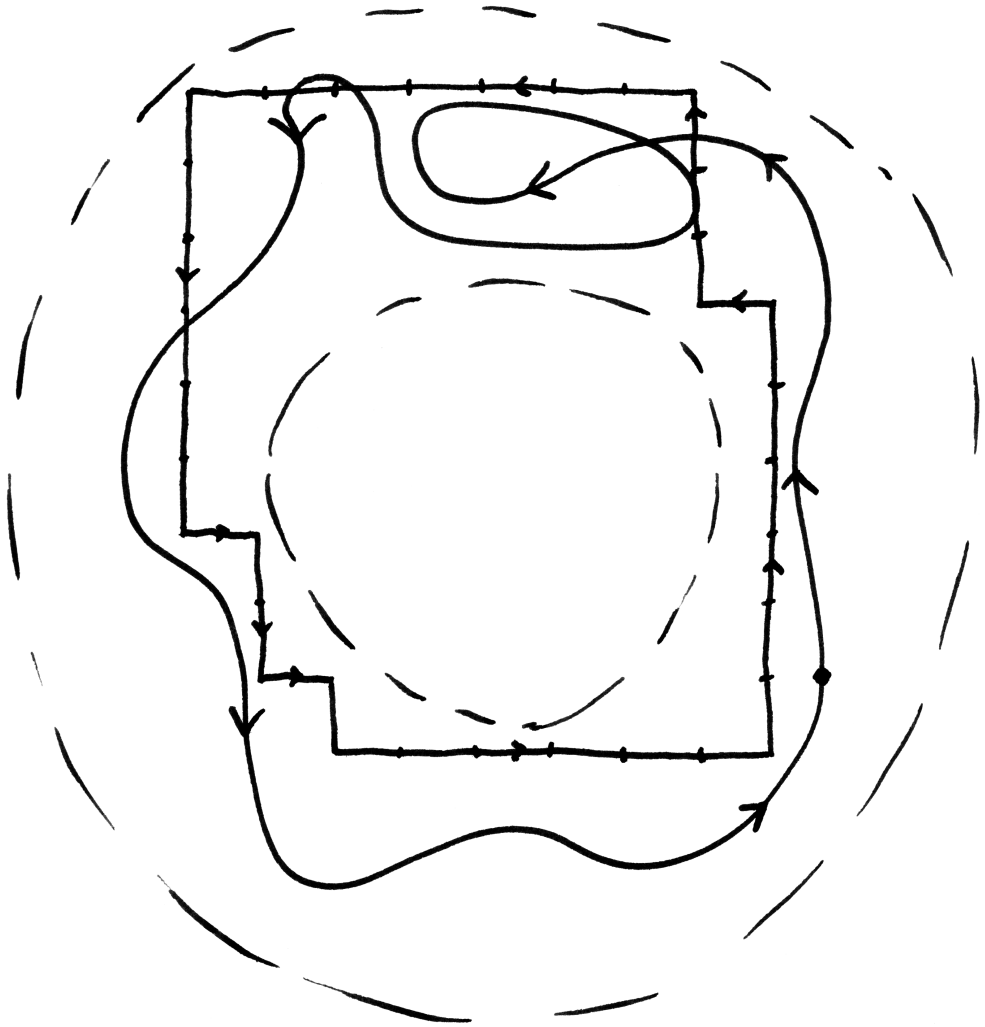
$$\mathrm{H}_1(U) \to \mathcal{C}_!(\mathbb{C} \backslash U, \mathbb{Z})$$

und es bleibt, dessen Injektivität und Surjektivität zu zeigen. Wir beginnen mit der Surjektivität. Es reicht sicher zu zeigen, daß alle Funktionen im Bild liegen, die nur die Werte Null und Eins annehmen. Dann zerfällt aber das Komplement in die disjunkte Vereinigung $\mathbb{C} \backslash U = A_0 \sqcup A_1$ einer kompakten Teilmenge A_1, auf der der Wert Eins ist, und einer in $\mathbb{C} \backslash U$ und $\mathbb{C}$ abgeschlossenen Teilmenge, auf der der Wert Null ist. Nach 11.2.1.20 existiert ein $\delta > 0$ mit $|x_1 - x_0| > \delta \quad \forall x_1 \in A_1, x_0 \in A_0$. Wir können also auf unsere Ebene ein „Rechenpapier-Raster“ legen, das so fein ist, daß keines der Rechenkästchen sowohl A_0 als auch A_1 trifft. Zu jedem Rechenkästchen erklären wir seinen „Kantenzykel“, der anschaulich der Summe seiner vier mit konstanter Geschwindigkeit im Gegenuhrzeigersinn zu durchlaufenden Kanten entspricht, in hoffentlich offensichtlicher Weise. Dann betrachten wir die Summe σ aller „Kantenzykel“ zu Rechenkästchen, die A_1 treffen, und behaupten, daß dieser Zykel σ in U liegt und jeden Punkt von A_1 einmal umläuft, jeden Punkt von A_0 dahingegen keinmal. Letzteres scheint mir offensichtlich. Ersteres scheint mir auch offensichtlich für Punkte, die auf keiner Kante eines Kästchens liegen. Für Punkte auf Kanten und Ecken unseres Rechenpapiers ist es aber auch leicht zu sehen. Damit ist die Surjektivität bewiesen, und es gilt, auch noch die Injektivität zu zeigen. Dazu unterbrechen wir den Beweis und zeigen zunächst einige Hilfsaussagen.

Lemma 17.1.6.7. *Jeder Zykel in einer offenen Teilmenge der Ebene ist in dieser offenen Teilmenge homolog zu einer formalen Summe von Kanten von Kästchen auf einem hinreichend feinen Rechenpapier.*



Anschauliche Darstellung zum Beweis von Satz 17.1.6.3. Unser A_0 soll in diesem Beispiel die Vereinigung der zwei eng schraffierten Stücke sein.



Ein Zykel und eine dazu homologe Summe von Kanten in einer ringförmigen offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene.

Beweis. Nach dem Satz von Hurewicz 17.1.5.2, genauer der leicht zu zeigenden Surjektivität des Hurewicz-Isomorphismus, ist jeder Zykel in einem wegzusammenhängenden Raum homolog zu einem geschlossenen Weg oder präziser zu einem Zykel, der durch einen einzigen singulären Simplex gegeben wird. Jeder Zykel in einem beliebigen Raum ist folglich homolog zu einer endlichen Linearkombination von derartigen „geschlossenen“ Simplizes. Jeder geschlossene Weg in einer offenen Teilmenge der Ebene ist weiter homolog, ja nach 12.7.7.11 sogar homotop zu einem geschlossenen polygonalen Weg und dann sogar frei homotop zu einem geschlossenen polygonalen Weg mit Ecken aus $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\mathrm{i}$. Jedes der Geradensegmente dieser polygonalen Wege ist hinwiederum homotop in unserer offenen Teilmenge zu einem „Treppenweg“ mit Ecken in $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\mathrm{i}$, und der Hauptnenner aller Koordinaten aller Ecken aller dieser Treppenwege gibt uns dann eine mögliche Feinheit für unser Rechenpapier. □

Für den Beweis des Satzes reicht es also zu zeigen, daß jeder solche „Kantenzykel“, der keinen Punkt außerhalb unserer offenen Teilmenge umläuft, bereits in unserer offenen Teilmenge nullhomolog ist. Dazu beachten wir zunächst, daß die Umlaufzahl auf dem Komplement der Spur unseres Kantenzykels in der Ebene lokal konstant ist. Liegt also der Abschluß eines unserer Rechenkästchen nicht ganz in unserer offenen Teilmenge, so verschwindet dort die Umlaufzahl an allen Stellen, die nicht gerade zu Kanten unseres Kantenzykels gehören, und insbesondere im Innern des besagten Kästchens. Die Umlaufzahl unseres Kantenzykels kann nun nur auf dem Innern von endlich vielen Rechenkästchen von Null verschieden sein, und diese gehören nach dem Vorhergehenden mit ihrem Abschluß zu unserer offenen Teilmenge. Wir können also einen weiteren Kantenzykel in unserer offenen Menge konstruieren, der zu unserem ursprünglichen Kantenzykel homolog ist und bei dem die Umlaufzahl um jeden Punkt im Innern jedes Rechenkästchens verschwindet, indem wir bei jedem Rechenkästchen mit von Null verschiedener Umlaufzahl ein geeignetes Vielfaches seines „Randzykels“ zu unserem ursprünglichen Zykel addieren. Auf diese Weise töten wir auf dem entsprechenden Kästchen die Umlaufzahl und auf den anderen Kästchen ändert sich nichts und wir erhalten einen zu unserem ursprünglichen Zykel homologen Kantenzykel, der überhaupt keinen Punkt im Innern irgendeines Rechenkästchens umläuft. Das anschließende Lemma beendet dann den Beweis. □

Lemma 17.1.6.8. *In einem Kantenzykel, der keinen Punkt aus dem Innern irgendeines Kästchens umläuft, kommt jede Kante gleich oft in beiden Richtungen vor.*

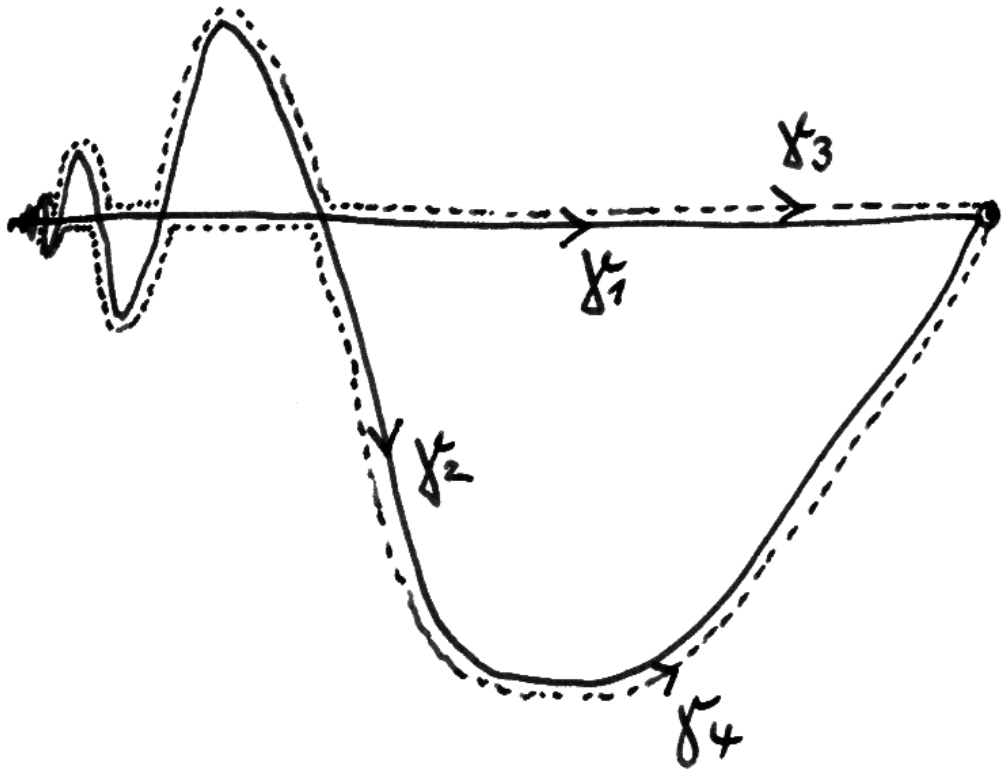
Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit argumentieren wir nur für senkrechte Kanten. Nehmen wir also an, eine senkrechte Kante käme a-mal in der Richtung nach oben und b-mal in die Gegenrichtung vor. Ziehen wir von unserem Kantenzykel den Randzykel des Kästchens links neben unserer Kante ab, und

zwar a-mal im Gegenuhrzeigersinn und b-mal im Uhrzeigersinn, so erhalten wir einen neuen Kantenzykel mit Umlaufzahl $b - a$ auf diesem Kästchen und Umlaufzahl null auf dem Kästchen rechts daneben. Diese Kante selbst gehört aber gar nicht mehr zur Spur unseres Zykels, und weil die Umlaufzahl lokal konstant ist folgt $b - a = 0$. □

Ergänzung 17.1.6.9. Für Zykel in nicht notwendig offenen Teilmengen der komplexen Zahlenebene gilt die Aussage von Satz 17.1.6.3 im allgemeinen nicht mehr, wie nebenstehendes Beispiel illustriert.

Übungen

Übung 17.1.6.10. Man zeige, daß eine zusammenhängende offene Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$ genau dann überlagerungstrivial ist, wenn ihre erste Homologiegruppe verschwindet. Hinweis: Man benötigt die Argumente der vorhergehenden Beweise und 17.1.6.8. Die analoge Aussage gilt in höheren Dimensionen im übrigen nicht mehr, das einfachste mir bekannte Gegenbeispiel wird in 17.3.3.13 diskutiert.



Ist $U \subset \mathbb{C}$ nicht offen, so gilt die Aussage von Satz 17.1.6.3 im allgemeinen nicht mehr, die Umlaufzahlabbildung $\mathrm{H}_1(U) \to \mathcal{C}_c(\mathbb{C}\backslash U, \mathbb{Z})$ ist also in dieser Allgemeinheit nicht mehr notwendig ein Isomorphismus. Betrachten wir etwa die stetige Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

mit $f(x) = x\sin(\pi x^{-1})$ für $x \neq 0$ und $f(x) = 0$ für $x = 0$. Betrachten wir in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ die Wege

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= t \\
\gamma_2(t) &= t + \mathrm{i}f(t) \\
\gamma_3(t) &= t + \mathrm{i}\sup(f(t), 0) \\
\gamma_4(t) &= t + \mathrm{i}\inf(f(t), 0)
\end{aligned}$$

Der Zykel $\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$ hat dann Umlaufzahl Null um jeden Punkt im Komplement seiner Spur. Dennoch ist er in seiner Spur nicht nullhomolog, was ich hier nur heuristisch begründen will: Wie fein ich eine endliche Zerstückelung auch wähle, die Situation in der Nähe des Ursprungs bleibt einfach zu verworren.

17.2 Relative singuläre Homologie

In diesem Abschnitt führen wir eine Verallgemeinerung unserer singulären Homologiegruppen ein, die sogenannten „relativen Homologiegruppen“ eines topologischen Raums relativ zu einer Teilmenge. Man mag sich fragen, ob es nicht sinnvoller wäre, erst einmal die bisher eingeführten gewöhnlichen Homologiegruppen so eingehend zu studieren, daß wir sie für einige elementare Beispiele auch berechnen könnten, anstatt gleich zu verallgemeinern. Es erweist sich jedoch, daß die Verallgemeinerung zur relativen Homologie bei der Berechnung der gewöhnlichen Homologiegruppen entscheidend hilft, sobald wir (1) die lange exakte Homologiesequenz hergeleitet haben, die die relative mit der gewöhnlichen Homologie in Beziehung setzt, und (2) den Satz über die Ausschneidung gezeigt haben, der sich nur für die relative Homologie überhaupt formulieren läßt.

17.2.1 Definition der relativen Homologie

Definition 17.2.1.1. Ist (X, A) ein **Raumpaar**, als da heißt ein topologischer Raum X mit einer Teilmenge A, so liefert die Einbettung $A \hookrightarrow X$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ Inklusionen $\mathrm{S}_q A \hookrightarrow \mathrm{S}_q X$ auf den Gruppen der singulären q-Ketten. Die Quotientengruppe bezeichnen wir mit

$$\mathrm{S}_q(X, A) := \mathrm{S}_q X / \mathrm{S}_q A$$

und nennen ihre Elemente **relative q-Ketten**. Wir geben der Quotientenabbildung $\mathrm{S}_q X \twoheadrightarrow \mathrm{S}_q(X, A)$ keinen Namen.

17.2.1.2. Die Quotientenabbildung liefert einen Isomorphismus zwischen der freien Gruppe über der Menge aller der q-Simplizes $\sigma : \Delta_q \to X$, deren Bild nicht in A enthalten ist, und der Gruppe der relativen q-Ketten $\mathrm{S}_q(X, A)$. Diese Sichtweise zeigt, daß auch die relativen Ketten eine freie abelsche Gruppe bilden.

17.2.1.3. Man überzeugt sich leicht, daß es eindeutig bestimmte Gruppenhomomorphismen $\bar{\partial}_q : \mathrm{S}_q(X, A) \to \mathrm{S}_{q-1}(X, A)$ gibt derart, daß auch das rechte Quadrat im folgenden Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{S}_q A & \hookrightarrow & \mathrm{S}_q X & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}_q(X, A) \\
\partial_q \downarrow & & \partial_q \downarrow & & \bar{\partial}_q \downarrow \\
\mathrm{S}_{q-1} A & \hookrightarrow & \mathrm{S}_{q-1} X & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}_{q-1}(X, A)
\end{array}$$

Es ist klar, daß die $\mathrm{S}_q(X, A)$ mit diesem Differential einen Kettenkomplex bilden, daß in anderen Worten gilt $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$. Wir notieren ihn $\mathrm{S}(X, A)$ und definieren die

relativen Homologiegruppen von unserem Raumpaar als die Homologie dieses Kettenkomplexes, in Formeln

$$\mathrm{H}_q(X,A) := \mathcal{H}_q(\mathrm{S}(X,A)) = \ker \bar{\partial}_q / \operatorname{im} \bar{\partial}_{q+1}$$

Die Elemente von $\ker \bar{\partial}_q$ heißen auch die **relativen q-Zykel**, die Elemente von $\operatorname{im} \bar{\partial}_{q+1}$ die **relativen q-Ränder** und für einen relativen Zykel c bezeichnet wieder $[c]$ seine Homologieklasse.

Vorschau 17.2.1.4. In 17.2.4.15 wird klar werden, daß wir unter geeigneten Annahmen an unser Raumpaar (X,A) die relative Homologie $\mathrm{H}_q(X,A)$ für $q > 0$ identifizieren können mit der Homologie $\mathrm{H}_q(X/A)$ des Raums X/A, der aus X entsteht durch die Identifikation der Teilmenge A zu einem Punkt.

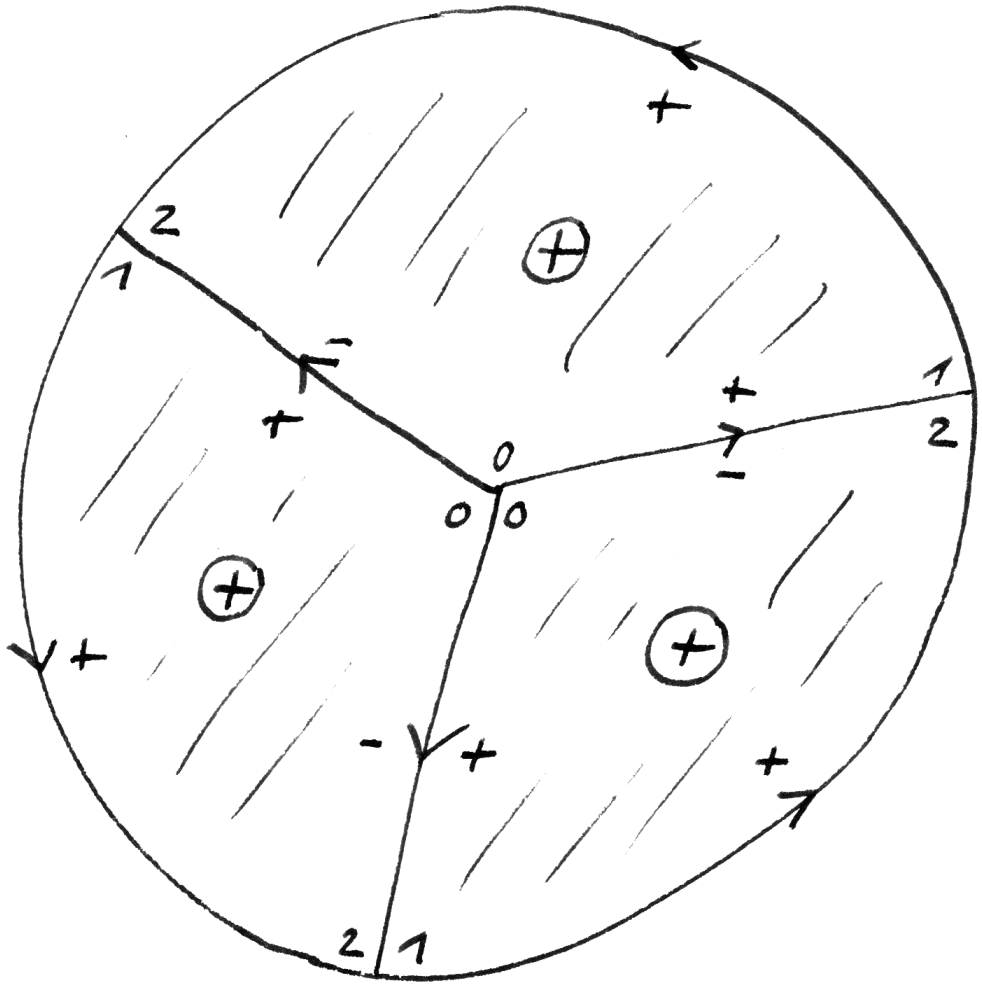
Beispiel 17.2.1.5. Wir haben $\mathrm{H}_1([a,b],\{a,b\}) \cong \mathbb{Z}$, für $a < b$ in $\mathbb{R}$. Diese Aussage können Sie sich als Übung hier schon überlegen, wir erhalten sie später auch als einen Spezialfall von 17.2.3.4. Wir werden in 17.2.3.6 auch für die Homologie der Einheitskreisscheibe reltiv zu ihrem Rand die Identität $\mathrm{H}_2(D^2,S^1) \cong \mathbb{Z}$ zeigen. Hier erkläre ich nur in der schmutzigen Anschauung und ohne Beweis, wie man sich einen Erzeuger dieser relativen Homologie vorstellen mag: Man schneide dazu den Kuchen D^2 wie üblich in Stücke und betrachte jedes der Stücke mit einer geeigneten Orientiering als 2-Simplex. Die formale Summe dieser Simplizes hat dann als Rand nur den Rand des Kuchens selber und bildet folglich einen relativen Zykel, von dem man mithilfe des zweiten Teils von 17.2.3.4 zeigen kann, daß seine Klasse in der Tat die relative Homologie erzeugt. Die erste relative Homologie des Möbiusbands M aus 15.1.7.9 relativ zu seinem Randkreis S^1 hat genau zwei Elemente, $\mathrm{H}_1(M,S^1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und ein nichttriviales Element wird repräsentiert durch den 1-Zykel, der „in der Mitte des Möbiusbands einmal umläuft“. Um das alles präzise zu zeigen, benötigen wir jedoch die lange exakte Homologiesequenz 17.2.2.4.

Definition 17.2.1.6. Ein **Morphismus von Raumpaaren** $f : (X,A) \to (Y,B)$ ist per definitionem schlicht eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(A) \subset B$. So ein f induziert eine Abbildung $\mathrm{H}_q f$ auf der relativen Homologie. Genauer definiert man zunächst $\mathrm{S}_q f : \mathrm{S}_q(X,A) \to \mathrm{S}_q(Y,B)$ durch die Bedingung, daß auch das rechte Quadrat im folgenden Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{S}_q A & \hookrightarrow & \mathrm{S}_q X & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}_q(X,A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{S}_q B & \hookrightarrow & \mathrm{S}_q Y & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}_q(Y,B) \end{array}$$

Dann prüft man, daß diese $\mathrm{S}_q f$ sogar mit den Differentialen kommutieren und so einen Morphismus von Kettenkomplexen

$$\mathrm{S}f : \mathrm{S}(X,A) \to \mathrm{S}(Y,B)$$



Ein Erzeuger der relativen Homologie $\mathrm{H}_2(D^2, S^1) \cong \mathbb{Z}$

definieren. Dieser Morphismus liefert dann schließlich auf der Homologie die gewünschten Morphismen $\mathrm{H}_q f : \mathrm{H}_q(X, A) \to \mathrm{H}_q(Y, B)$.

17.2.1.7. Ich notiere die Kategorie der Raumpaare $\mathrm{Top}^{\subset}$. In diesen Notationen ist also die relative Homologie die Verknüpfung von Funktoren

$$\mathrm{Top}^{\subset} \xrightarrow{\mathrm{S}} \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}) \xrightarrow{\mathcal{H}_q} \mathrm{Ab}$$

Die Definition der relativen Ketten schenkt uns natürliche Morphismen $\mathrm{S}X \to \mathrm{S}(X, A)$ und damit $\mathrm{H}_q X \to \mathrm{H}_q(X, A)$. Es ist klar nach den Definitionen, daß sie im Fall $A = \emptyset$ stets Isomorphismen sind.

Übungen

Übung 17.2.1.8 (**Verträglichkeit der relativen Homologie mit Koprodukten**). Die Funktoren $\mathrm{H}_q : \mathrm{Top}^{\subset} \to \mathrm{Ab}$ der relativen Homologie sind verträglich mit beliebigen Koprodukten.

Übung 17.2.1.9. Man konstruiere eine Isotransformation zwischen den beiden folgenden Funktoren von den Raumpaaren in die abelschen Gruppen:

1. $(X, A) \mapsto \mathrm{H}_0(X, A)$
2. $(X, A) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{Die freie abelsche Gruppe über der Menge aller Wegzu-} \\ \text{-sammenhangskomponenten von } X\text{, die } A \text{ nicht treffen} \end{array} \right\}$

Übung 17.2.1.10. Seien $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ zwei Morphismen zwischen Raumpaaren. Eine **Homotopie von** f **nach** g ist ein Morphismus von Raumpaaren $h : (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \to (Y, B)$ derart, daß gilt $h \circ i_0 = f$ und $h \circ i_1 = g$. Man zeige: Sind zwei Morphismen $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ homotop, so induzieren sie dieselben Abbildungen $\mathrm{H}_q f = \mathrm{H}_q g : \mathrm{H}_q(X, A) \to \mathrm{H}_q(Y, B)$ auf den relativen Homologiegruppen. Hinweis: Man wiederhole den alten Beweis und zeige sogar stärker, daß $(\mathrm{S}f - \mathrm{S}g) : \mathrm{S}(X, A) \to \mathrm{S}(Y, B)$ nullhomotop ist. Man zeige durch ein Beispiel, daß es nicht ausreicht, nur vorauszusetzen, daß f und g als Abbildungen $X \to Y$ sowie als Abbildungen $A \to B$ jeweils zueinander homotop sind.

17.2.2 Lange exakte Homologiesequenz

17.2.2.1. Ich erinnere daran, daß eine Sequenz $A' \to A \to A''$ von Gruppen und Gruppenhomomorphismen **exakt bei** A oder genauer **exakt bei** A heißt, wenn gilt $\mathrm{im}(A' \to A) = \ker(A \to A'')$; daß eine längere Sequenz von Gruppen und Gruppenhomomorphismen **exakt** heißt, wenn sie an jeder Stelle mit Vorgänger und Nachfolger exakt ist; daß eine Sequenz $A' \to A \to A''$ von Gruppen und

Gruppenhomomorphismen eine **kurze exakte Sequenz** heißt, wenn die Sequenz $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ exakt ist; und daß wir kurze exakte Sequenzen gerne notieren als

$$A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$$

Satz 17.2.2.2. *Sei $C' \overset{i}{\hookrightarrow} C \overset{p}{\twoheadrightarrow} C''$ eine* **kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen***, als da heißt, $C'_q \hookrightarrow C_q \twoheadrightarrow C''_q$ soll für alle q eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen sein. So gilt:*

1. *Es gibt für jedes q genau eine Abbildung, den sogenannten* **Randoperator**

$$\hat{\partial} : \mathcal{H}_q C'' \to \mathcal{H}_{q-1} C'$$

derart, daß gilt $\hat{\partial}[c''] = [c']$ für Zykel $c'' \in \mathcal{Z}_q C''$ und $c' \in \mathcal{Z}_{q-1} C'$ genau dann, wenn es ein $c \in C_q$ gibt mit $pc = c''$ und $\partial c = ic'$, und diese Abbildung $\hat{\partial}$ ist ein Gruppenhomomorphismus;

2. *Mit den von der Funktorialität der Homologie herrührenden Homorphismen in der Mitte und den Randoperatoren aus dem esten Teil an den Seiten erhalten wir eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen, die* **abstrakte lange exakte Homologiesequenz**

$$\ldots \to \mathcal{H}_{q+1} C'' \to \mathcal{H}_q C' \to \mathcal{H}_q C \to \mathcal{H}_q C'' \to \mathcal{H}_{q-1} C' \to \ldots$$

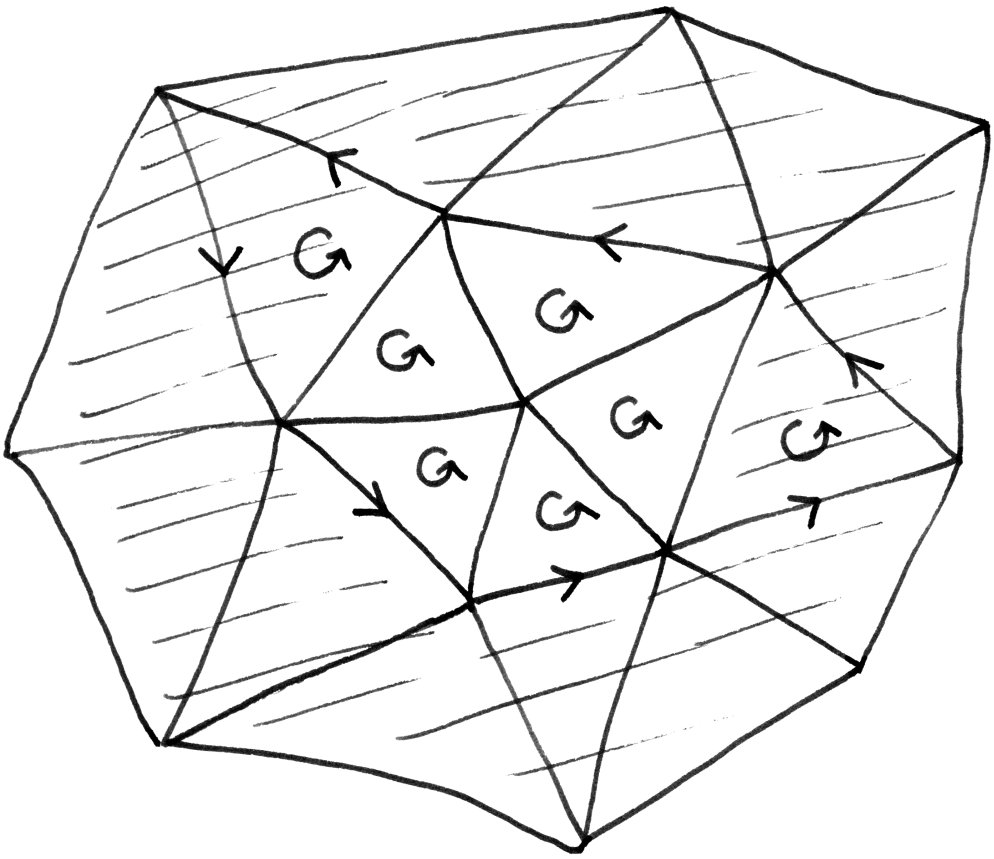
Ergänzung 17.2.2.3. Ist $C' \hookrightarrow C \twoheadrightarrow C''$ eine kurze exkte Sequenz von nicht notwendig graduierten differentiellen abelschen Gruppen, so erhalten wir in derselben Weise eine periodische lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \mathcal{H}C'' \to \mathcal{H}C' \to \mathcal{H}C \to \mathcal{H}C'' \to \mathcal{H}C' \to \ldots$$

17.2.2.4. Die Bezeichnung als Randoperator ist durch die topologische Anwendung motiviert: Wir werden im folgenden zu jedem Raumpaar (X, Z) Homomorphismen $\hat{\partial} = \hat{\partial}_q : \mathrm{H}_q(X, Z) \to \mathrm{H}_{q-1}(Z)$ konstruieren derart, daß die Sequenz

$$\ldots \to \mathrm{H}_{q+1}(X, Z) \to \mathrm{H}_q(Z) \to \mathrm{H}_q(X) \to \mathrm{H}_q(X, Z) \to \mathrm{H}_{q-1}(Z) \to \ldots$$

exakt ist, wenn wir diese $\hat{\partial}$ und die von den Einbettungen $(Z, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, Z)$ induzierten Abbildungen als Morphismen nehmen. Ist genauer eine relative Homologieklasse $[c] \in \mathrm{H}_q(X, Z)$ gegeben, so repräsentieren wir $[c]$ durch einen relativen q-Zykel $c \in \mathrm{S}_q(X, Z)$ und diesen durch eine q-Kette $\tilde{c} \in \mathrm{S}_q X$. Dann ist $\partial \tilde{c} \in \mathrm{S}_{q-1} Z$ ein $(q-1)$-Zykel und wir nehmen als $\hat{\partial}[c]$ seine Homologieklasse, in Formeln $\hat{\partial}[c] := [\partial \tilde{c}]$. Daß wir so eine wohldefinierte Abbildung erhalten und daß mit diesen Abbildungen die oben angegebene Sequenz exakt ist,



Dieses Bild soll den Randoperator der langen exakten Homologiesequenz anschaulich machen. Es stellt einen zweidimensionalen Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ mit 18 Zwei-Simplizes dar und darin schraffiert einen Teilkomplex $\mathcal{Z}$. Die Summe der sieben durch einen Kreispfeil mit einer Orientierung versehenen Zwei-Simplizes ist ein relativer Zwei-Zykel aus $\mathrm{S}\mathcal{K}/\mathrm{S}\mathcal{Z}$ und repräsentiert eine relative simpliziale Homologieklasse in $\mathcal{H}_2(\mathrm{S}\mathcal{K}/\mathrm{S}\mathcal{Z})$. Sein Rand ist die Summe der im Bild durch Pfeile gerichteten Kanten, ein simplizialer Eins-Zykel aus $\mathrm{S}\mathcal{Z}$, dessen Homologieklasse in $\mathcal{H}_1(\mathrm{S}\mathcal{Z})$ das Bild unserer relativen simplizialen Homologieklasse unter dem Randoperator der langen exakten Homologiesequenz repräsentiert.

folgt aus Satz 17.2.2.2, angewandt auf die kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\mathrm{S}Z \hookrightarrow \mathrm{S}X \twoheadrightarrow \mathrm{S}(X,Z)$$

Unsere Sequenz heißt die **lange exakte Homologiesequenz des Raumpaares** (X,Z).

Beweis. Das folgende Diagramm stellt alle im Beweis benötigten Gruppen und Abbildungen dar:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C_{q+1} & \twoheadrightarrow & C''_{q+1} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
C'_q & \hookrightarrow & C_q & \twoheadrightarrow & C''_q \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C'_{q-1} & \hookrightarrow & C_{q-1} & \twoheadrightarrow & C''_{q-1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
C'_{q-2} & \hookrightarrow & C_{q-2} & &
\end{array}$$

Jetzt beginnen wir mit der eigentlichen Argumentation. Ist $c'' \in C''_q$ ein Zykel und $c \in C_q$ ein Urbild, in Formeln $pc = c''$, so folgt $p\partial c = \partial c'' = 0$ und mit Exaktheit bei C_{q-1} gibt es $c' \in C'_{q-1}$ mit $ic' = \partial c$. Dies c' muß sogar ein Zykel sein, denn es gilt $i\partial c' = \partial ic' = \partial^2 c = 0$ und i_{q-2} ist injektiv.

Wir wollen gerne $\hat{\partial}[c''] = [c']$ setzen und müssen zeigen, daß die Homologieklasse $[c']$ weder von der Wahl von c'' noch von der Wahl von c abhängt. Aber sei sonst $b'' \in C''_{q+1}$ gegeben und sei c'' abgeändert zu $c'' + \partial b''$. Wir finden $b \in C_{q+1}$ mit $pb = b''$. Wählen wir $\tilde{c} \in C_q$ mit $p\tilde{c} = c'' + \partial b''$, so folgt $p(\tilde{c} - c - \partial b) = 0$, also $\tilde{c} - c - \partial b = ib'$ für $b' \in C'_q$. Ist nun $\partial\tilde{c} = i\tilde{c}'$ so folgt $i(\tilde{c}' - c') = i\partial b'$ und somit $[\tilde{c}'] = [c']$ wie gewünscht.

Damit ist also $\hat{\partial}$ definiert und wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß dies $\hat{\partial}$ durch die im ersten Teil des Satzes angegebene Eigenschaft charakterisiert wird. Es bleibt nur die Exaktheit unserer Sequenz nachzuweisen. Man folgert mühelos aus den Definitionen daß die Verknüpfung je zweier aufeinanderfolgender Morphismen verschwindet, also $\ker \supset \mathrm{im}$. Wir müssen noch $\ker \subset \mathrm{im}$ an jeder Stelle zeigen.

Bei $\mathcal{H}_q C$ folgt aus $[c] \mapsto 0$ für $c \in \mathcal{Z}_q C$ sofort $pc = \partial b''$ und die Surjektivität von $C_{q+1} \to C''_{q+1}$ liefert uns $b \in C_{q+1}$ mit $pb = b''$, also $p(c - \partial b) = 0$. Dann gibt es aber nach der Exaktheit von $C'_q \hookrightarrow C_q \twoheadrightarrow C''_q$ ein $c' \in C'_q$ mit $ic' = c - \partial b$ und notwendig ist c' ein Zykel und $[c'] \mapsto [c - \partial b] = [c]$. Bei $\mathcal{H}_q C''$ folgt aus $[c''] \mapsto 0$, daß für jedes Urbild $c \in C_q$ mit $c \mapsto c''$ gilt $\partial c = ic'$ für einen Rand $c' = \partial b'$ in C'_{q-1}. Dann ist aber $c - ib' \in C_q$ ein Zykel und $[c'']$ das Bild von $[c - ib'] \in \mathcal{H}_q C$. Bei $\mathcal{H}_{q-1} C'$ folgt aus $[c'] \mapsto 0$ ja $ic' = \partial c$ für $c \in C_q$ und dann muß $pc \in C''_q$ ein Zykel sein mit $[pc] \mapsto [c']$. Der Satz ist bewiesen. $\square$

17.2.2.5. Gegeben ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} C' & \hookrightarrow & C & \twoheadrightarrow & C'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D' & \hookrightarrow & D & \twoheadrightarrow & D'' \end{array}$$

ist auch das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \to & \mathcal{H}_q C' & \to & \mathcal{H}_q C & \to & \mathcal{H}_q C'' & \to & \mathcal{H}_{q-1} C' & \to & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \to & \mathcal{H}_q D' & \to & \mathcal{H}_q D & \to & \mathcal{H}_q D'' & \to & \mathcal{H}_{q-1} D' & \to & \dots \end{array}$$

Das folgt aus der Funktorialität von $\mathcal{H}_q$ für die ersten beiden Quadrate und aus der Konstruktion von $\hat{\partial}$ für das dritte Quadrat.

17.2.2.6. Inbesondere kommutieren für jeden Morphismus $f : (X, A) \to (Y, B)$ von Raumpaaren mit den Randabbildungen der jeweiligen langen exakten Homologiesequenzen die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_q(X, A) & \to & \mathrm{H}_{q-1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}_q(Y, B) & \to & \mathrm{H}_{q-1}(B) \end{array}$$

Korollar 17.2.2.7. *Sei $f : (X, A) \to (Y, B)$ ein Morphismus von Raumpaaren. Induziert f Isomorphismen $\mathrm{H}_q f : \mathrm{H}_q X \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q Y$ und $\mathrm{H}_q f : \mathrm{H}_q A \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q B$ für alle q, so induziert f auch auf der relativen Homologie Isomorphismen*

$$\mathrm{H}_q f : \mathrm{H}_q(X, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(Y, B)$$

Beweis. Das folgt aus der langen exakten Homologiesequenz mit dem anschließenden Fünferlemma. □

17.2.2.8. Induziert in der Situation des Korollars die Abbildung f Homotopieäquivalenzen $X \to Y$ und $A \to B$, so induziert f nach unserem Korollar Isomorphismen auf der relativen Homologie, ohne daß es deshalb eine Homotopieäquivalenz von Raumpaaren im Sinne von 17.2.1.10 sein muß.

Lemma 17.2.2.9 (Fünferlemma). *Wir betrachten ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen der Gestalt*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & D & \to & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \to & B' & \to & C' & \to & D' & \to & E' \end{array}$$

Sind die beiden Horizontalen exakte Sequenzen und sind alle Vertikalen bis auf die mittlere Isomorphismen, so ist auch die mittlere Vertikale ein Isomorphismus.

Beweis. Diese Diagrammjagd überlassen wir dem Leser. Man bemerke, daß wir sogar bei der Vertikale ganz links nur die Surjektivität verwenden und bei der Vertikale ganz rechts nur die Injektivität. □

17.2.2.10. Gegeben $X \supset Y \supset Z$ ein topologischer Raum mit zwei Teilmengen erhalten wir eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \mathrm{H}_{q+1}(X,Y) \to \mathrm{H}_q(Y,Z) \to \mathrm{H}_q(X,Z) \to \mathrm{H}_q(X,Y) \to \mathrm{H}_{q-1}(Y,Z) \ldots$$

abelscher Gruppen, die **lange exakte Homologiesequenz des Tripels** (X,Y,Z), aus der kurzen exakten Sequenz $\mathrm{S}Y/\mathrm{S}Z \hookrightarrow \mathrm{S}X/\mathrm{S}Z \twoheadrightarrow \mathrm{S}X/\mathrm{S}Y$ von Kettenkomplexen, die hinwiederum eine Konsequenz des noetherschen Isomorphiesatzes ist.

Übungen

Übung 17.2.2.11 (**Neunerlemma**). Sei gegeben ein kommutatives Diagramm von Gruppen mit kurzen exakten Zeilen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} A_3 & \hookrightarrow & B_3 & \twoheadrightarrow & C_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_2 & \hookrightarrow & B_2 & \twoheadrightarrow & C_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_1 & \hookrightarrow & B_1 & \twoheadrightarrow & C_1 \end{array}$$

und seien die senkrechten Kompositionen jeweils Null. Sind zwei der Spalten kurze exakte Sequenzen, so auch die Dritte. Hinweis: Im Fall kommutativer Gruppen benutze man die lange exakte Homologiesequenz. Im Fall nichtkommutativer Gruppen bleibt allerdings nur die Diagrammjagd, vergleiche 4.4.7.5.

Übung 17.2.2.12. Eine kurze exakte Sequenz $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ von abelschen Gruppen heißt **spaltend**, wenn es einen Isomorphismus $A \xrightarrow{\sim} A' \oplus A''$ gibt derart, daß das folgende Diagramm kommutiert, mit $a' \mapsto (a',0)$ und $(a',a'') \mapsto a''$ in der unteren Horizontalen:

$$\begin{array}{ccccc} A' & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A'' \\ \| & & \downarrow\wr & & \| \\ A' & \hookrightarrow & A' \oplus A'' & \twoheadrightarrow & A'' \end{array}$$

Man zeige, daß für eine kurze exakte Sequenz $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ von abelschen Gruppen gleichbedeutend sind: (1) Die Sequenz spaltet; (2) Die Surjektion $A \twoheadrightarrow A''$ besitzt ein Rechtsinverses; (3) Die Injektion $A' \hookrightarrow A$ besitzt ein Linksinverses.

17.2.2.13. Man nennt ganz allgemein einen surjektiven Gruppenhomomorphismus, der ein Rechtsinverses besitzt, einen **spaltenden surjektiven Gruppenhomomorphismus** und einen injektiven Gruppenhomomorphismus, der ein Linksinverses besitzt, einen **spaltenden injektiven Gruppenhomomorphismus**. Dieselbe Terminologie verwendet man bei Moduln über Ringen und auch in noch

größerer Allgemeinheit. In welcher Bedeutung das jeweils gemeint ist, ob also die fraglichen Halbinversen Gruppenhomomorphismen, Modulhomomorphismen oder irgendeine andere Art von Morphismen sein sollen, gilt es jeweils aus dem Kontext zu erschließen.

Übung 17.2.2.14. Eine abelsche Gruppe F heißt **frei**, wenn sie isomorph ist zur freien abelschen Gruppe $\mathbb{Z}M$ über einer Menge M. Man zeige, daß jede Surjektion von einer beliebigen abelschen Gruppe auf eine freie abelsche Gruppe spaltet.

Übung 17.2.2.15. Sei gegeben ein kommutatives (3×3)-Diagramm von Kettenkomplexen mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{array}{ccccc} A' & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & B'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C' & \hookrightarrow & C & \twoheadrightarrow & C'' \end{array}$$

So kommutiert das Diagramm der Randoperatoren der zugehörigen langen exakten Homologiesequenzen bis auf ein Vorzeichen, und zwar kommutiert genauer das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_q C'' & \xrightarrow{\hat\partial} & \mathcal{H}_{q-1} C' \\ \hat\partial \downarrow & & \downarrow -\hat\partial \\ \mathcal{H}_{q-1} A'' & \xrightarrow{\hat\partial} & \mathcal{H}_{q-2} A' \end{array}$$

Übung 17.2.2.16 (**Erweiterte Natürlichkeit der Homologiesequenz**). Gegeben ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} & & B' & \hookrightarrow & C' & \twoheadrightarrow & D' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C & & \end{array}$$

gibt es eine wohlbestimmte Abbildung $\mathcal{H}_q D' \to \mathcal{H}_{q-1} A$, für die die Klasse eines Zykels $d' \in \mathcal{Z}_q D'$ genau dann auf die Klasse von $a \in \mathcal{Z}_{q-1} A$ abgebildet wird, wenn es ein Urbild $c' \in C'_q$ von d' gibt und ein Urbild $\beta' \in B'_{q-1}$ von $\partial c'$ und ein Urbild $b \in B_q$ vom Bild $c \in C_q$ von c' mit $a = \partial b - \beta$ für $\beta \in B_{q-1}$ das Bild von β'. Mit dieser Abbildung erhalten wir einen Morphismus der langen exakten Homologiesequenz der oberen Horizontale in die durch Negativmachen aller $\mathcal{H}_q A \to \mathcal{H}_q B$ abgeänderte lange exakte Homologiesequenz der unteren Horizontale

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & \mathcal{H}_{q+1} D' & \to & \mathcal{H}_q B' & \to & \mathcal{H}_q C' & \to & \mathcal{H}_q D' & \to \ldots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \ldots \to & \mathcal{H}_q A & \xrightarrow{-1} & \mathcal{H}_q B & \to & \mathcal{H}_q C & \to & \mathcal{H}_{q-1} A & \xrightarrow{-1} \ldots \end{array}$$

Jedes kommutative Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} A' & \hookrightarrow & B' & \twoheadrightarrow & C' \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & B & \hookrightarrow & C & \twoheadrightarrow & D \end{array}$$

liefert auch einen Morphismus der zugehörigen langen exakten Sequenzen mit der Nullabbildung $\mathcal{H}_{q-1}A' \to \mathcal{H}_q D$. Eigentlich sollte man auch hier Vorzeichen einführen, aber in diesem Fall ist es nicht nötig, weil Minus Null auch Null ist. In 20.2.6.32 werden wir beide Aussagen als eine Konsequenz des „Drehens ausgezeichneter Dreiecke“ zu verstehen lernen.

17.2.3 Ausschneidung und Anwendungen

Satz 17.2.3.1 (Ausschneidung). *Seien (X, Z) ein Raumpaar und $L \subset Z$ eine Teilmenge von Z, deren Abschluß im Inneren von Z liegt, in Formeln $\bar{L} \subset Z^\circ$. So liefert die Einbettung $(X\backslash L, Z\backslash L) \hookrightarrow (X, Z)$ Isomorphismen auf den relativen Homologiegruppen*

$$\mathrm{H}_q(X\backslash L, Z\backslash L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X, Z)$$

17.2.3.2. Im Satz meinen wir mit $\bar{L} \subset Z^\circ$ die Bedingung $\mathrm{Cl}_X(L) \subset \mathrm{Of}_X(Z)$. Der Satz besagt salopp gesprochen, daß sich die relative Homologie nicht ändert, wenn wir die Menge L gleichzeitig sowohl aus X als auch aus Z herausschneiden. Eine alternative Formulierung ist

$$\mathrm{H}_q(U, U\backslash A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X, X\backslash A)$$

für Teilmengen $U, A \subset X$ mit $\bar{A} \subset U^\circ$. Man erhält sie durch den Übergang zu den richtigen Komplementen.

17.2.3.3. Wir stellen den Beweis zurück und geben zunächst einige Anwendungen. Bezeichne $\partial\Delta_n \subset \Delta_n$ den anschaulichen Rand $\partial\Delta_n := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \Delta_n \mid x_i = 0 \text{ für mindestens ein } i\}$ des n-ten Standardsimplex.

Satz 17.2.3.4 (Homologie von Simplizes relativ zu ihrem Rand). *Die Homologiegruppen $\mathrm{H}_q(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ der Standardsimplizes relativ zu ihrem Rand werden gegeben durch*

$$\mathrm{H}_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Des weiteren ist die Klasse $[\tau_n]$ des tautologischen Simplex τ_n ein Erzeuger der relativen Homologiegruppe $\mathrm{H}_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$.

17.2.3.5. Ein meiner Ansicht nach anschaulicherer Zugang zur Berechnung dieser Homologiegruppen vermittels der „Mayer-Vietoris-Sequenz“ wird in 17.2.4.12 erklärt. Er liefert jedoch keine explizite Beschreibung eines Erzeugers, und diese explizite Beschreibung werden wir brauchen, um den Zusammenhang zwischen simplizialer und singulärer Homologie zu klären.

Beweis. Für $n = 0$ ist Δ_n ein Punkt und $\partial\Delta_n$ die leere Menge und der Satz ist unsere Aussage 17.1.2.13 über die Homologie eines Punktes. Den allgemeinen Fall folgern wir durch vollständige Induktion. Dazu betten wir Δ_n ein in Δ_{n+1}, indem wir als letzte Koordinate eine Null anfügen, und betrachten in Δ_{n+1} die Spitze $p = (0, 0, 0, \ldots, 1)$, die der Seitenfläche $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$ gegenüberliegt. Weiter betrachten wir die Vereinigung $\Lambda_{n+1} \subset \Delta_{n+1}$ aller Seitenflächen, die diese Spitze p enthalten, und die Isomorphismen

$$\mathrm{H}_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(\partial\Delta_{n+1}\backslash p, \Lambda_{n+1}\backslash p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$$

wie sie von den Einbettungen aufgrund der Homotopieinvarianz und der Ausschneidung von p induziert. Die Randabbildung zur langen exakten Homologiesequenz des Tripels $(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$ liefert weiter Isomorphismen

$$\mathrm{H}_{q+1}(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$$

und die erste Behauptung folgt durch Induktion. Unter diesen Isomorphismen geht die Klasse $[\tau_{n+1}] \in \mathrm{H}_{n+1}(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1})$ über in $(-1)^{n+1}[\tau_n] \in \mathrm{H}_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$, und so ergibt sich auch die zweite Behauptung mit vollständiger Induktion. □

Korollar 17.2.3.6 (Homologie von Bällen relativ zu ihrem Rand). *Für $n \geq 0$ wird die Homologie des n-Balls relativ zu seinem Rand gegeben durch die Formeln*

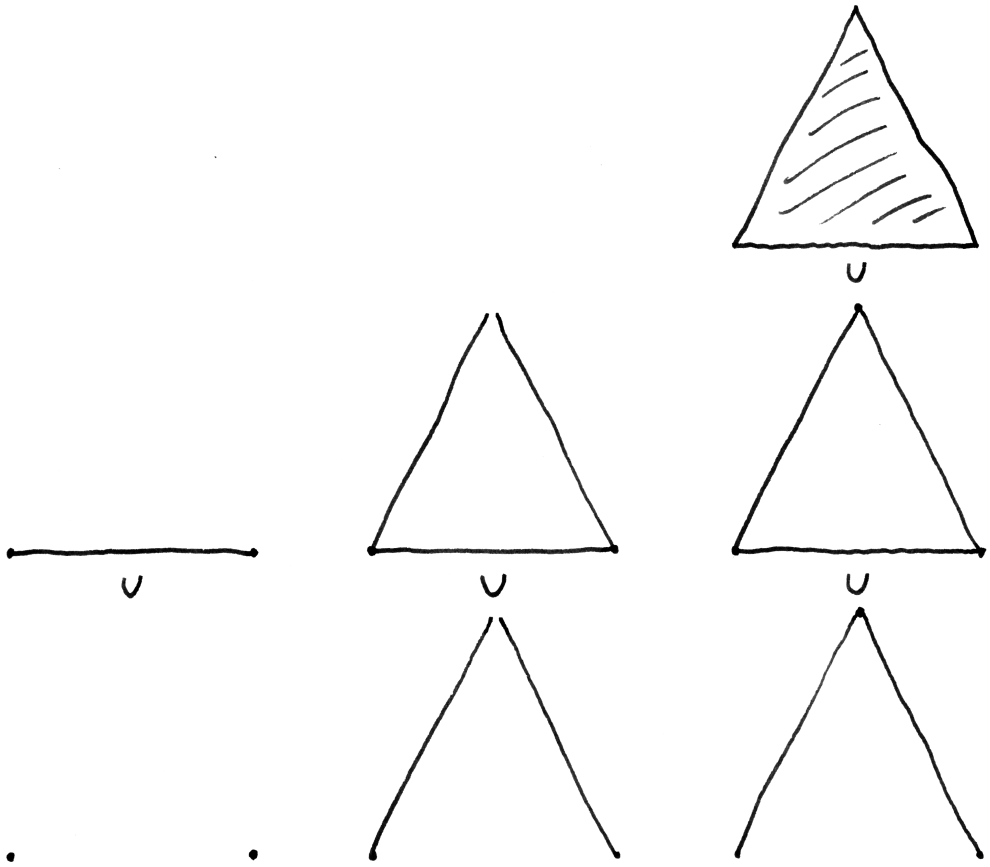
$$\mathrm{H}_q(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Das folgt sofort aus 17.2.3.4, da es etwa nach 15.1.4.12 einen Homöomorphismus $\Delta_n \xrightarrow{\sim} D^n$ gibt, der eine Bijektion $\partial\Delta_n \xrightarrow{\sim} S^{n-1}$ induziert. Alternativ folgt es auch aus dem anschließenden Satz. □

Satz 17.2.3.7 (Homologie der Sphären). *Die Homologiegruppen der Sphären S^n werden für $n \geq 1$ gegeben durch*

$$\mathrm{H}_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \textit{ oder } q = n; \\ 0 & sonst. \end{cases}$$

Die Nullsphäre S^0 besteht schlicht aus zwei Punkten, wir haben in diesem Fall also $\mathrm{H}_0(S^0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sowie $\mathrm{H}_q(S^0) = 0$ für $q > 0$.



Die Raumpaare und das Raumtripel aus dem Beweis von 17.2.3.4 im Fall $n = 1$.

Beweis. Das ergibt sich aus dem vorhergehenden Korollar 17.2.3.6 mit der langen exakten Homologiesequenz des Raumpaars (D^{n+1}, S^n). Einen alternativen und vielleicht anschaulicheren Beweis mithilfe der „Mayer-Vietoris-Sequenz“ geben wir in 17.2.4.12. Er hat allerdings den Nachteil, keinen expliziten Erzeuger der Homologie zu liefern. □

17.2.3.8. Gegeben ein punktierter topologischer Raum (X, x) nennt man seine Homologie $\mathrm{H}_q(X, X\backslash x)$ relativ zum Komplement des ausgezeichneten Punktes auch seine **lokale Homologie**.

Korollar 17.2.3.9 (Lokale Homologie reeller Vektorräume). *Für $n \geq 0$ und jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\mathrm{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash x) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Insbesondere sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ für $n \neq m$ nicht homöomorph.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x = 0$ annehmen. Die Einbettung $(D^n, S^{n-1}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash 0)$ induziert nun aufgrund der Homotopieinvarianz 17.2.2.7 Isomorphismen auf den relativen Homologiegruppen und die Aussage folgt so aus 17.2.3.6. □

17.2.3.10 (**Wahl von Erzeugern**). Bis hierher haben wir die Frage offengelassen, wie man sinnvoll Erzeuger von $\mathrm{H}_n(D^n, S^{n-1})$, $\mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash 0)$ und $\mathrm{H}_n S^n$ auszeichnen kann. In meinen Augen ist es besonders sinnvoll, mit demjenigen Erzeuger $\tau \in \mathrm{H}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash 0)$ zu beginnen, der durch die Klasse des relativen Einszykels $[-1, 1]$ gegeben wird, also durch die affine Abbildung $\Delta_1 \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{e}_0 \mapsto -1$ und $\mathrm{e}_1 \mapsto 1$. Dann liefert das Kreuzprodukt der relativen Homologie 17.5.7.12 einen ausgezeichneten Erzeuger

$$\tau^{\times n} \in \mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash 0)$$

für alle $n \geq 0$. Daraus erhalten wir mit dem durch die Einbettung gegebenen Isomorphismus $\mathrm{H}_n(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash 0)$ ausgezeichnete Erzeuger von $\mathrm{H}_n(D^n, S^{n-1})$ und mit dem Randoperator ausgezeichnete Erzeuger von $\mathrm{H}_n S^n$ für $n \geq 1$ und allgemeiner ausgezeichnete Erzeuger der in 17.3.3.5 eingeführten reduzierten Homologie $\tilde{\mathrm{H}}_n S^n$ für $n \geq -1$. Wie nennen sie unsere **Standarderzeuger**. Damit wir auch hier schon mit diesen Standarderzeugern arbeiten können, geben wir eine explizite Beschreibung und definieren unsere Standarderzeuger

$$\eta_n \in \mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash 0)$$

vorerst dadurch, das sie durch den affinen n-Simplex $[\big(-\sum \mathrm{e}_i\big), \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n]$ repräsentiert werden, eine stetige Abbildung $\Delta_n \to \mathbb{R}^n$. Da diese Abbildung eine

Homotopieäqivalenz von Raumpaaren $(\Delta_n, \partial\Delta_n) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash 0)$ induziert und da η_n das Bild der Klasse des tautologischen n-Simplex, die hinwiederum nach 17.2.3.4 ein Erzeuger von $[\tau_n] \in \mathrm{H}_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ ist, erhalten wir so in der Tat einen Erzeuger η_n der lokalen Homologie des $\mathbb{R}^n$ am Ursprung. Die Kompatibilität mit dem Kreuzprodukt wird in Übung 17.5.8.7 gezeigt.

Korollar 17.2.3.11 (Unmöglichkeit der Retraktion eines Balls auf seinen Rand). *Sei $n \geq -1$. Es gibt keine stetige Abbildung $r : D^{n+1} \to S^n$ des $(n+1)$-Balls auf seine Randsphäre, deren Einschränkung auf die Randsphäre S^n die Identität ist.*

Beweis. Sei $i : S^n \hookrightarrow D^{n+1}$ die Einbettung. Aus $r \circ i = \mathrm{id}$ folgt, daß die Verknüpfung

$$\mathrm{H}_n S^n \to \mathrm{H}_n D^{n+1} \to \mathrm{H}_n S^n$$

von $\mathrm{H}r$ mit $\mathrm{H}i$ die Identität ist. Die Identität auf $\mathbb{Z}$ kann aber nicht über 0 faktorisieren und das erledigt den Fall $n \geq 1$. Im Fall $n = 0$ argumentiert man analog, daß die Identität auf $\mathbb{Z}^2$ nicht über $\mathbb{Z}$ faktorisieren kann. Der Fall $n = -1$ ist eh klar. □

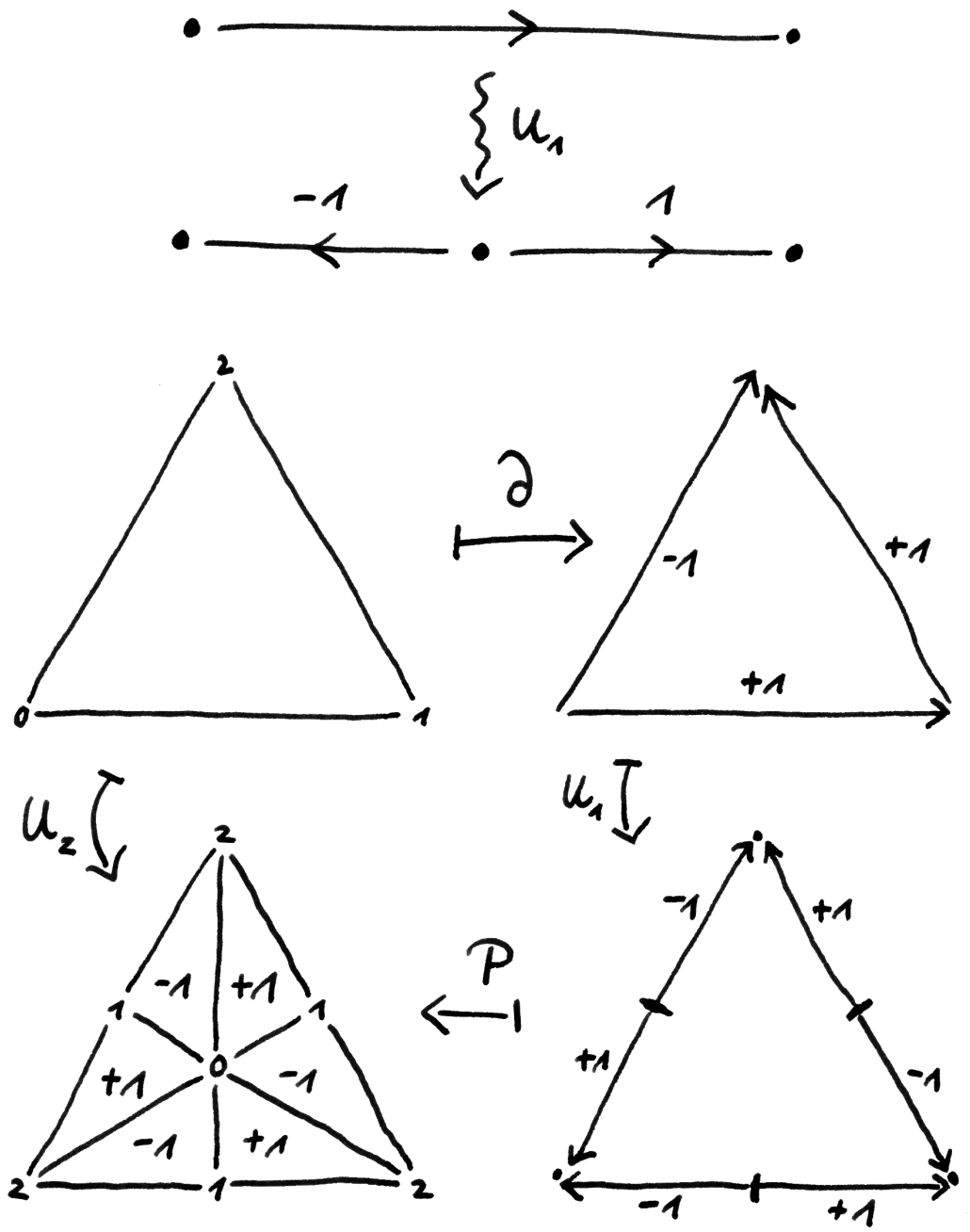
Satz 17.2.3.12 (Fixpunktsatz von Brouwer). *Jede stetige Selbstabbildung des abgeschlossenen n-Balls besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $f : D^n \to D^n$ stetig. Hätte f keinen Fixpunkt, so könnte man eine stetige Abbildung $r : D^n \to S^{n-1}$ konstruieren durch die Vorschrift, daß $r(x)$ der Punkt ist, in dem der Strahl, der von $r(x)$ ausgeht und durch x läuft, die Sphäre S^{n-1} trifft. Das stünde jedoch im Widerspruch zum vorhergehenden Korollar 17.2.3.11. □

17.2.4 Beweis des Ausschneidungssatzes

17.2.4.1. Wir beginnen nun mit den Vorbereitungen zum Beweis des Ausschneidungssatzes. Die zentrale Rolle spielen hier die **Unterteilungsoperatoren** $\mathrm{U}_q : \mathrm{S}_q X \to \mathrm{S}_q X$, die jeden Simplex „baryzentrisch unterteilen“. Wir konstruieren sie als Transformationen $\mathrm{U}_q : \mathrm{S}_q \Rightarrow \mathrm{S}_q$. Um solche Transformationen festzulegen, brauchen wir ja nach Lemma 17.1.4.6 nur das Bild des tautologischen q-Simplex $\mathrm{U}_q(\tau_q) \in \mathrm{S}_q(\Delta_q)$ anzugeben. Für jede konvexe Teilmenge K eines $\mathbb{R}^n$ und jeden Punkt $s \in K$ erinnern wir dazu an den Prismen-Operator $\mathrm{P} = \mathrm{P}^s : \mathrm{S}_q K \to \mathrm{S}_{q+1} K$ aus dem Beweis von 17.1.2.17. Dann setzen wir $\mathrm{U}_q = 0$ für $q < 0$ und definieren U_q für $q \geq 0$ induktiv vermittels der Vorschrift $\mathrm{U}_0(\tau_0) := \tau_0$ und $\mathrm{U}_q(\tau_q) := \mathrm{P}^{s(q)} \mathrm{U}_{q-1}(\partial\tau_q)$ für $q > 0$, wo $\mathrm{P}^{s(q)}$ den Prismenoperator bezüglich des Schwerpunkts $s(q) := \frac{1}{q+1}(1, 1, \ldots, 1)$ von Δ_q bezeichnet.

Lemma 17.2.4.2. *Die Unterteilung $\mathrm{U} : \mathrm{S}X \to \mathrm{S}X$ ist eine Kettenabbildung.*



Der Effekt der Unterteilungsoperatoren U_1 und U_2 auf Simplizes. Die Zahlen an den Ecken der Dreiecksflächen zeigen wieder, wohin die Vektoren der Standardbasis $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$ des $\mathbb{R}^3$, deren konvexe Hülle ja der Standardsimplex Δ_2 ist, abgebildet werden.

Beweis. Es gilt zu zeigen $\partial \mathrm{U}_q = \mathrm{U}_{q-1}\partial$ für alle q. Wir zeigen die Gleichheit durch Induktion über q. Wegen 17.1.4.6 reicht es, die Gleichheit auf τ_q zu zeigen. Die Fälle $q = 0, 1$ überlassen wir dem Leser. Für $q \geq 2$ und $\mathrm{P} = \mathrm{P}^{s(q)}$ haben wir

$$\begin{aligned} \partial \mathrm{U}_q(\tau_q) &= \partial \mathrm{P} \mathrm{U}_{q-1}\partial(\tau_q) \\ &= (-\mathrm{P}\partial + \mathrm{id})\mathrm{U}_{q-1}\partial(\tau_q) \\ &= \mathrm{U}_{q-1}\partial(\tau_q) \end{aligned}$$

Die erste Gleichung nach Definition, die zweite da $\partial \mathrm{P} + \mathrm{P}\partial = \mathrm{id}$ auf $\mathrm{S}_q\Delta_q$ für $q \geq 1$, die dritte da $\partial \mathrm{U}_{q-1} = \mathrm{U}_{q-2}\partial$ nach Induktion. □

Lemma 17.2.4.3. *Die Unterteilung ist in natürlicher Weise kettenhomotop zur Identität, als da heißt, es gibt Transformationen*

$$T_q : \mathrm{S}_q \Rightarrow \mathrm{S}_{q+1}$$

mit $\partial T_q + T_{q-1}\partial = \mathrm{U}_q - \mathrm{id}$ *für alle* q*. Insbesondere induziert* U *die Identität auf der Homologie.*

Vorschau 17.2.4.4. Dies Lemma wird sich später als eine Konsequenz des Satzes über azyklische Modelle 17.5.6.23 erweisen.

Beweis. Wir versuchen induktiv mögliche Transformationen T_q zu finden und müssen nur $T_q(\tau_q) \in \mathrm{S}_{q+1}(\Delta_q)$ angeben. Wir können mit $T_{-1} = T_0 = 0$ beginnen und müssen dann induktiv die Gleichungen

$$\partial T_q(\tau_q) = -T_{q-1}\partial(\tau_q) + \mathrm{U}_q(\tau_q) - \tau_q$$

lösen. Wegen $\mathrm{H}_q(\Delta_q) = 0$ für $q \geq 1$ sind diese Gleichungen lösbar, wenn die rechte Seite ein Zykel ist. Dazu rechnen wir stur mit der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} -\partial T_{q-1}(\partial\tau_q) + \partial \mathrm{U}_q(\tau_q) - \partial\tau_q &= \\ &= (T_{q-2}\partial - \mathrm{U}_{q-1} + \mathrm{id})(\partial\tau_q) + \partial \mathrm{U}_q(\tau_q) - \partial\tau_q = 0 \end{aligned}$$ □

Definition 17.2.4.5. Gegeben ein System $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen eines topologischen Raums X bezeichne $\mathrm{S}_q^{\mathcal{V}}X \subset \mathrm{S}_qX$ die freie Gruppe über allen denjenigen Simplizes, die ganz in einem der $V \in \mathcal{V}$ liegen. Wir nennen $S_q^{\mathcal{V}}X$ die Gruppe der **$\mathcal{V}$-feinen Ketten**.

Satz 17.2.4.6 (über feine Ketten). *Sei $\mathcal{V}$ eine Überdeckung eines Raums X derart, daß selbst die offenen Kerne der Mengen aus $\mathcal{V}$ schon X überdecken, in Formeln $X = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V^\circ$. So induziert die Einbettung $\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X \hookrightarrow \mathrm{S}X$ vom Komplex der $\mathcal{V}$-feinen Ketten in den Komplex aller singulären Ketten Isomorphismen auf allen Homologiegruppen.*

Vorschau 17.2.4.7. Mit 17.6.2.4 wird aus diesem Resultat folgen, daß unsere Einbettung sogar eine Homotopieäquivalenz $\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}X$ ist.

Beweis. Mit der langen exakten Homologiesequenz müssen wir nur zeigen, daß die Homologie von $\mathrm{S}X/\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X$ verschwindet. Nun bilden unsere Abbildungen U und T sicher $\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X$ auf sich selber ab und induzieren also Operatoren $\bar{\mathrm{U}}$, $\bar{T}$ auf dem Quotienten. Offensichtlich ist auch $\bar{\mathrm{U}}$ homotop zur Identität vermittels $\bar{T}$ und liefert also die Identität auf den Homologiegruppen von $\mathrm{S}X/\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X$. Für jedes q und jede Kette $\gamma \in \mathrm{S}_q X$ gibt es aber nach dem anschließenden Lemma 17.2.4.8 ein $n \gg 0$ mit $\mathrm{U}^n\gamma \in \mathrm{S}_q^{\mathcal{V}}X$, also $\bar{\mathrm{U}}^n\bar{\gamma} = 0$ für $\bar{\gamma} \in \mathrm{S}_q X/\mathrm{S}_q^{\mathcal{V}}X$ die Nebenklasse von γ. Wir folgern $\mathcal{H}_q(\mathrm{S}X/\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X) = 0$. □

Lemma 17.2.4.8. *Sei $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung eines Raums X. Für jedes q und jede Kette $\gamma \in \mathrm{S}_q X$ gibt es dann $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{U}^n\gamma \in \mathrm{S}_q^{\mathcal{V}}X$.*

17.2.4.9. Dieselbe Aussage folgt unmittelbar, wenn wir statt eine offenen Überdeckung zu betrachten wie oben schwächer nur annehmen, daß die offenen Kerne der Mengen aus $\mathcal{V}$ bereits X überdecken.

Beweis. Es reicht sicher, das Lemma für jeden Simplex $\gamma : \Delta_q \to X$ zu zeigen. Nun sieht man, daß der maximale Durchmesser eines Simplex, der mit von Null verschiedenem Koeffizienten in $\mathrm{U}^n(\tau_q)$ vorkommt, für $n \to \infty$ beliebig klein wird. Insbesondere ist für $n \gg 0$ nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue jeder solche Simplex ganz in einer der Mengen $\gamma^{-1}(V)$ mit $V \in \mathcal{V}$ enthalten. Das bedeutet aber gerade $\mathrm{U}^n\gamma \in \mathrm{S}_q^{\mathcal{V}}X$. □

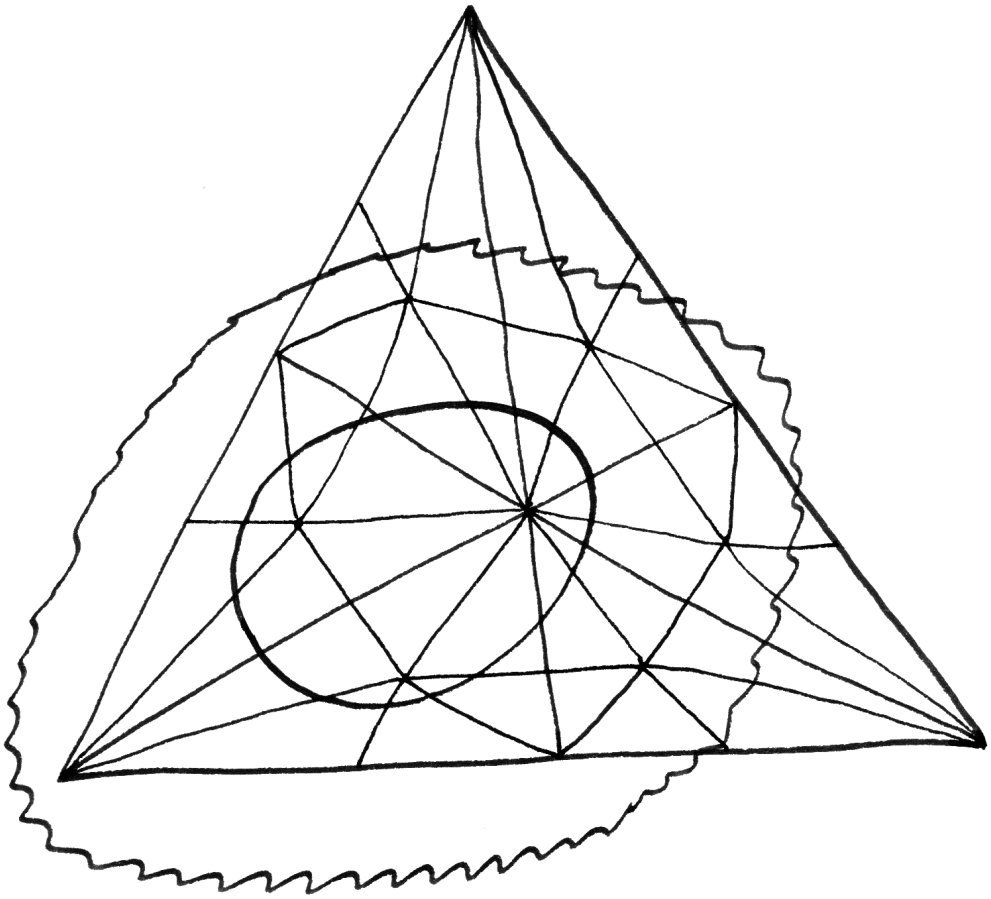
Satz 17.2.4.10 (Ausschneidung). *Sei (X, Z) ein Raumpaar und $L \subset Z$ eine Teilmenge, deren Abschluß im Inneren von Z liegt, in Formeln $\mathrm{Cl}_X(L) \subset \mathrm{Inn}_X(Z)$. So liefert die Einbettung $(X\backslash L, Z\backslash L) \hookrightarrow (X, Z)$ Isomorphismen auf den relativen Homologiegruppen*

$$\mathrm{H}_q(X\backslash L, Z\backslash L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X, Z)$$

Beweis. Wir betrachten die Überdeckung $X = Z \cup (X\backslash L)$, geben ihr den Namen $\mathcal{V}$ und bilden ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{S}(Z\backslash L) & \hookrightarrow & \mathrm{S}Z \oplus \mathrm{S}(X\backslash L) & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}^{\mathcal{V}}X \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{S}(X\backslash L) & \hookrightarrow & \mathrm{S}X \oplus \mathrm{S}(X\backslash L) & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}X \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{S}(X\backslash L, Z\backslash L) & \to & \mathrm{S}(X, Z) & \to & \mathrm{S}X/\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X
\end{array}$$

Hier ist zu verstehen, daß die beiden oberen horizontalen Inklusionen die „diagonalen“ Einbettungen $z \mapsto (z, z)$ sein sollen und die folgenden Surjektionen die



Dieses Bild soll Anschauung für den Ausschneidungsisomorphismus geben. X ist darin die Papierebene, Z alles außerhalb des kleinen Eis und L alles außerhalb der Zackenlinie. Das große Dreieck stellt einen singulären Zweisimplex in X dar, der relativ zu Z ein Zykel ist, da eben sein Rand in Z liegt. Nach zweimaliger baryzentrischer Unterteilung entsteht diese Art Spinnennetz, eine zu unserem Zweisimplex homologe singuläre Zweikette. Lassen wir aus dieser Zweikette alle Simplizes fort, die nicht in $X \backslash L$ liegen, die also aus unserer Zackenlinie herauspieken, so repräsentiert der Rest immer noch dieselbe Homologieklasse in der relativen Homologie $\mathrm{H}_2(X, Z)$, die folglich herkommt von einer Homologieklasse in $\mathrm{H}_2(X \backslash L, Z \backslash L)$. Damit sollte zumindest die Surjektivität der von der Einbettung $(X \backslash L, Z \backslash L) \hookrightarrow (X, Z)$ auf der Homologie induzierten Abbildung anschaulich klar werden.

Differenzen $(x, y) \mapsto x - y$. Nach dem Neunerlemma ist die untere Horizontale dann auch exakt, und da nach dem Satz über feine Ketten 17.2.4.6 die Homologie von $\mathrm{S}X/\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X$ verschwindet, folgt unser Satz aus der langen exakten Homologiesequenz. $\square$

17.2.4.11. Sei $X = X_1 \cup X_2$ ein topologischer Raum mit einer Überdeckung $\mathcal{V}$ durch zwei offene Teilmengen. Wir betrachten die Einbettungen

$$(X_1 \cap X_2) \overset{i_\nu}{\hookrightarrow} X_\nu \overset{j_\nu}{\hookrightarrow} X$$

und erhalten eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\mathrm{S}(X_1 \cap X_2) \hookrightarrow \mathrm{S}X_1 \oplus \mathrm{S}X_2 \twoheadrightarrow \mathrm{S}^{\mathcal{V}}X$$

Hier fassen wir die Elemente der direkten Summe als Spaltenvektoren auf, die erste Abbildung wird gegeben durch die Spaltenmatrix $(\mathrm{S}i_1, \mathrm{S}i_2)^\top$, und die zweite durch die Zeilenmatrix $(\mathrm{S}j_1, -\mathrm{S}j_2)$. Nehmen wir dazu die lange exakte Homologiesequenz und verwenden die von der Einbettung $\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X \hookrightarrow \mathrm{S}X$ induzierten Identifikationen $\mathcal{H}_q(\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q X$, so erhalten wir die sogenannte **Mayer-Vietoris-Sequenz**, eine lange exakte Sequenz der Gestalt

$$\ldots \mathrm{H}_q(X_1 \cap X_2) \to \mathrm{H}_q(X_1) \oplus \mathrm{H}_q(X_2) \to \mathrm{H}_q(X) \to \mathrm{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2) \ldots$$

Die ersten beiden Abbildungen dieser Sequenz werden gegeben durch die Spaltenmatrix $(\mathrm{H}_q i_1, \mathrm{H}_q i_2)^\top$ und die Zeilenmatrix $(\mathrm{H}_q j_1, -\mathrm{H}_q j_2)$. Die dritte Abbildung ist nicht ganz so leicht explizit anzugeben.

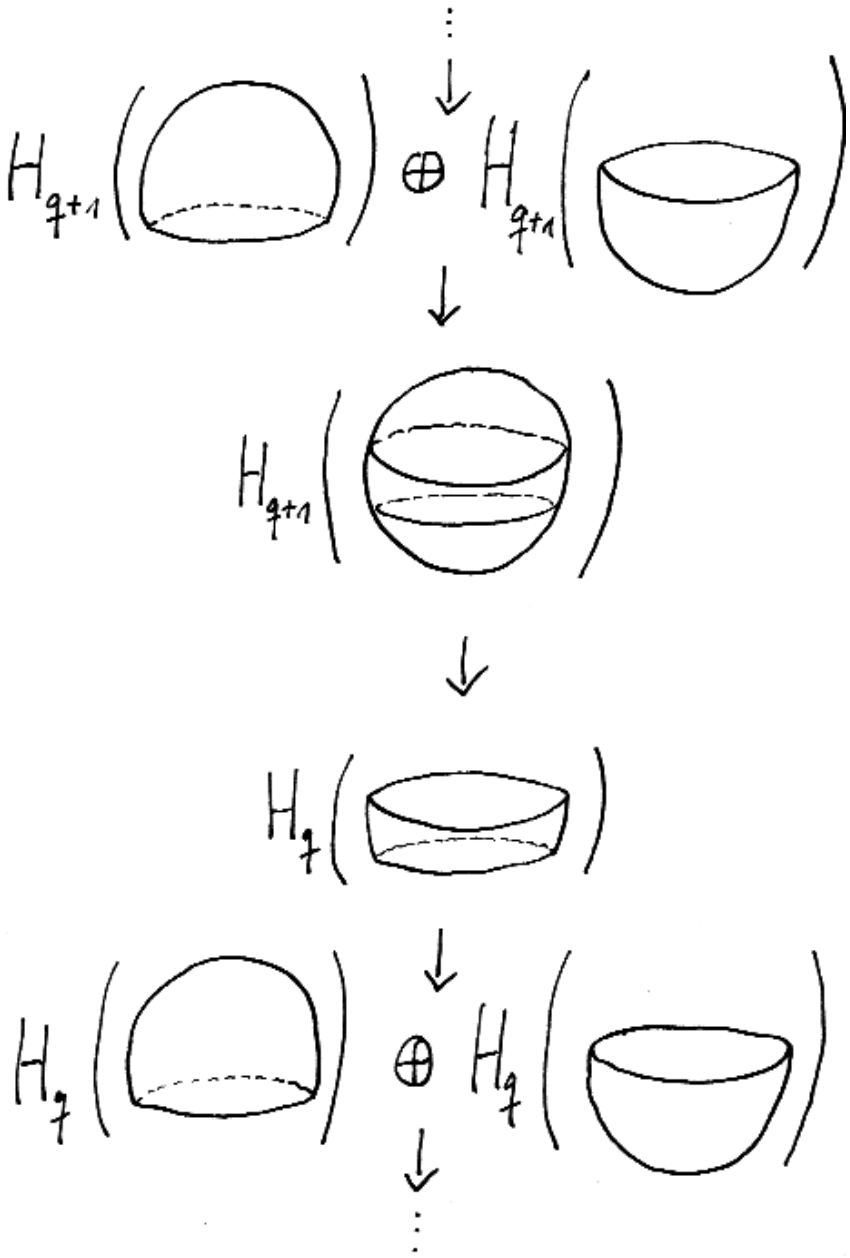
Beispiel 17.2.4.12 (**Homologie der Sphären, Variante**). Mithilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz 17.2.4.11 bestimmen wir ein weiteres Mal die Homologie der Sphären. Man schreibt für diesen Beweis die Kugelschale als die Vereinigung zweier offener etwas über den Äquator hinaus verdickter Hemisphären $S^n = U^+ \cup U^-$ und erhält nach 17.2.4.11 eine lange exakte Sequenz

$$\mathrm{H}_q(U^+) \oplus \mathrm{H}_q(U^-) \to \mathrm{H}_q(S^n) \to \mathrm{H}_{q-1}(U^+ \cap U^-) \to \mathrm{H}_{q-1}(U^+) \oplus \mathrm{H}_{q-1}(U^-)$$

und so weiter. Der Schnitt $U^+ \cap U^-$ ist homotopieäquivalent zum Äquator S^{n-1} und die Hemisphären sind beide zusammenziehbar und haben folglich dieselbe Homologie wie ein Punkt. Man sieht nun explizit leicht ein, daß wir für $n = 0, 1$ das behauptete Ergebnis erhalten, und für $n \geq 2$ folgt durch Betrachten der obigen Sequenz

$$\mathrm{H}_q(S^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_{q-1}(U^+ \cap U^-) \cong \mathrm{H}_{q-1}(S^{n-1})$$

für $q \geq 2$ und $\mathrm{H}_1(S^n) = 0$ und $\mathrm{H}_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Die Homologie der Sphären ergibt sich durch vollständige Induktion. Diese Herleitung gefällt mir eigentlich besser als die Herleitung aus 17.2.3.4, sie liefert jedoch nicht unmittelbar die Beschreibung eines Erzeugers der Homologie.



Berechnung der Homologie der Sphäre mithilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz.

Übungen

Übung 17.2.4.13. Man zeige, daß es nicht möglich ist, die Kreislinie durch zwei zusammenziehbare offene Teilmengen mit zusammenhängendem Schnitt zu überdecken. Man zeige, daß es nicht möglich ist, die Sphäre durch zwei zusammenziehbare offene Teilmengen mit einfach wegzusammenhängendem Schnitt zu überdecken. Hinweis: Mayer-Vietoris-Sequenz.

Übung 17.2.4.14 (**Relative Mayer-Vietoris-Sequenz**). Sei X ein topologischer Raum und seien $U, V \Subset X$ zwei offene Teilmengen. Betrachten wir die offene Überdeckung von $U \cup V$ durch U und V und bilden das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{S}(U \cap V) & \hookrightarrow & \mathrm{S}U \oplus \mathrm{S}V & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}^{\mathcal{V}}(U \cup V) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{S}X & \hookrightarrow & \mathrm{S}X \oplus \mathrm{S}X & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}X \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{S}(X, U \cap V) & \hookrightarrow & \mathrm{S}(X, U) \oplus \mathrm{S}(X, V) & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}(X)/\mathrm{S}^{\mathcal{V}}(U \cup V)
\end{array}$$

mit „diagonalen“ Abbildungen in den linken Horizontalen und „Differenzen von erstem minus zweitem Term“ in den rechten Horizontalen, so entsteht in der unteren Zeile eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Die natürliche Surjektion $\mathrm{S}(X)/\mathrm{S}^{\mathcal{V}}(U \cup V) \twoheadrightarrow \mathrm{S}(X, U \cup V)$ induziert weiter Isomorphismen auf der Homologie, und so erhalten wir eine natürliche lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \mathrm{H}_q(X, U) \oplus \mathrm{H}_q(X, V) \to \mathrm{H}_q(X, U \cup V) \to \mathrm{H}_{q-1}(X, U \cap V) \to \ldots$$

und die Randoperatoren dieser Sequenz bilden mit den Randoperatoren der Mayer-Vietoris-Sequenz und den Randoperatoren der langen exakten Homologiesequenzen nach 17.2.2.15 ein bis auf Vorzeichen kommutierendes Viereck.

Ergänzende Übung 17.2.4.15. Sei (X, Z) ein Raumpaar. Bezeichne X/Z den Raum mit Quotiententopologie, der entsteht, wenn man Z zu einem Punkt identifiziert. Man zeige: Ist Z abgeschlossen und gibt es U mit $Z \subset U^\circ \subset X$ derart, daß die Einbettungen $Z \hookrightarrow U$ und $Z/Z \hookrightarrow U/Z$ Homotopieäquivalenzen sind, so liefert die offensichtliche Abbildung Isomorphismen

$$\mathrm{H}_q(X, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X/Z, Z/Z)$$

Hinweis: Ausschneidung.

Übung 17.2.4.16 (**Ausschneidung und Mayer-Vietoris**). Sei $X = U \cup V$ ein topologischer Raum mit einer Überdeckung durch zwei offene Teilmengen. Man zeige, daß die Verknüpfungen

$$\mathrm{H}_q(X, U) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}_q(V, U \cap V) \to \mathrm{H}_{q-1}(U \cap V)$$

eines umgedrehten Ausschneidungsisomorphismus mit einem Randoperator zusammen mit den offensichtlichen anderen Vertikalen einen Homomorphismus

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \mathrm{H}_q(U \cap V) & \to & \mathrm{H}_q U \oplus \mathrm{H}_q V & \to & \mathrm{H}_q X & \to & \mathrm{H}_{q-1}(U \cap V) & \dots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \uparrow & \\
\dots & \mathrm{H}_{q+1}(X, U) & \to & \mathrm{H}_q U & \to & \mathrm{H}_q X & \stackrel{-1}{\to} & \mathrm{H}_q(X, U) & \dots
\end{array}$$

von der wie angedeutet durch Vorzeichen leicht veränderten langen Homologiesequenz des Raumpaars (X, U) zur Mayer-Vietoris-Sequenz liefern. Hinweis: Man mag das als Spezialfall von 17.2.2.16 verstehen, aber eine direkte Argumentation scheint mir eher einfacher.

17.3 Homologie verklebter Räume

17.3.1 Singuläre Homologie von Simplizialkomplexen

17.3.1.1. Zu jedem Simplizialkomplex $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ haben wir in 16.2.7.8 einen topologischen Raum $\Delta(\mathcal{K})$ konstruiert, seine **geometrische Realisierung**. Sie besteht aus gewissen Abbildungen $t : E \to \mathbb{R}$.

17.3.1.2 (**Standardsimplex als geometrische Realisierung**). Wir betrachten den maximalen Simplizialkomplex $\mathcal{M}_{[q]}$ mit Eckenmenge $[q] := \{0, 1, \ldots, q\}$. Wir erinnern andererseits unseren Standardsimplex $\Delta_q \subset \mathbb{R}^{q+1}$ aus 17.1.2.2 und erhalten einen Homöomorphismus

$$\tau = \tau_q : \Delta_q \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{M}_{[q]})$$

zwischen dem Standard-q-Simplex und dem vollen Simplex zur Eckenmenge $[q]$ durch $(x_0, \ldots, x_q) \mapsto t$ mit $x_i = t(i)$.

Definition 17.3.1.3. Seien $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex und $\Delta(\mathcal{K})$ seine geometrische Realisierung. Ein singulärer Simplex alias eine stetige Abbildung

$$\sigma : \Delta_q \to \Delta(\mathcal{K})$$

heiße **simplizialsingulär**, wenn er durch Vorschalten unseres Homöomorphismus $\tau : \Delta_q \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{M}_{[q]})$ aus der geometrischen Realisierung einer simplizialen Abbildung $\tilde{\sigma} : \mathcal{M}_{[q]} \to \mathcal{K}$ hervorgeht. Im Komplex der singulären Ketten der geometrischen Realisierung erklären wir den Unterkomplex der **simplizialsingulären Ketten**

$$\mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K}) \subset \mathrm{S}\Delta(\mathcal{K})$$

durch die Vorschrift, daß $\mathrm{S}^{\mathrm{s}}_q\Delta(\mathcal{K})$ das Erzeugnis der simplizialsingulären q-Simplizes sein soll.

17.3.1.4. Simpliziale Abbildungen brauchen keineswegs injektiv zu sein.

17.3.1.5 (**Simplizialketten, simplizialsinguläre Ketten und singuläre Ketten**). Für einen Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ haben wir damit drei Kettenkomplexe erklärt, nämlich den besonders kleinen und anschaulichen Komplex der Simplizialketten $\mathrm{S}\mathcal{K}$ aus 17.1.1.5, den unglaublich riesigen Komplex aller singulären Ketten seiner geometrischen Realisierung $\mathrm{S}\Delta(\mathcal{K})$ aus 17.1.2 und darin den Unterkomplex $\mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K}) \subset \mathrm{S}\Delta(\mathcal{K})$ aller simplizialsingulären Ketten aus 17.3.1.3. Im folgenden konstruieren wir Kettenabbildungen zwischen diesen Komplexen und zeigen, daß sie Isomorphismen auf der Homologie induzieren. Diese Brücke ist für mich der Hauptweg zur Anschauung in der singulären Homologietheorie, ja in der Homologietheorie überhaupt.

17.3.1.6 (**Von simplizialsingulären Ketten zu Simplizialketten**). Sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex. Wir erklären Homomorphismen

$$\mathrm{komb} : \mathrm{S}^{\mathrm{s}}_q\Delta(\mathcal{K}) \to \mathrm{S}_q\mathcal{K}$$

von den simplizialsingulären Ketten in die Simplizialketten, indem wir zu jedem simplizialsingulären Simplex $\sigma : \Delta_q \hookrightarrow \Delta(\mathcal{K})$ die simpliziale Abbildung $\tilde{\sigma} : \mathcal{M}_{[q]} \to \mathcal{K}$ betrachen mit $\sigma = \Delta(\tilde{\sigma}) \circ \tau$ und dann setzen $\mathrm{komb}(\sigma) := [(\tilde{\sigma}(0), \ldots, \tilde{\sigma}(q))]$ falls $\tilde{\sigma}$ injektiv ist und $\mathrm{komb}(\sigma) := 0$ sonst. Wir prüfen, daß diese Homomorphismen in ihrer Gesamtheit einen Morphismus von Kettenkomplexen

$$\mathrm{komb} : \mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K}) \to \mathrm{S}\mathcal{K}$$

bilden. Um das zu sehen, muß man nur die Verträglichkeit mit den Randoperatoren nachzuweisen. Das ist nicht schwer und sei dem Leser überlassen. Gegeben ein weiterer Simplizialkomplex $\mathcal{L}$ und eine simpliziale Abbildung $\varphi : (E, \mathcal{K}) \to (F, \mathcal{L})$ im Sinne von 16.2.7.12 erhalten wir mit besagten Abbildungen in den Horizontalen darüberhinaus ein kommutatives Quadrat von Kettenabbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K}) & \to & \mathrm{S}\mathcal{K} \\ {\scriptstyle \mathrm{S}\Delta(\varphi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{S}\varphi} \\ \mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{L}) & \to & \mathrm{S}\mathcal{L} \end{array}$$

mit derjenigen Abbildung $\mathrm{S}\varphi : \mathrm{S}\mathcal{K} \to \mathrm{S}\mathcal{L}$ als rechter Vertikale, die die Klasse eines angeordneten Simplex $\sigma : \{0, 1, \ldots, q\} \hookrightarrow E$ auf die Klasse des angeordneten Simplex $\varphi \circ \sigma : \{0, 1, \ldots, q\} \hookrightarrow F$ wirft, falls $\varphi \circ \sigma$ injektiv ist, und auf Null sonst. Der Leser wird unschwer prüfen können, daß $\mathrm{S}\varphi$ in der Tat eine Kettenabbildung ist und daß damit unser Quadrat kommutiert.

Satz 17.3.1.7 (**Simpliziale als singuläre Homologie**). *Für jeden Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ induzieren die Kettenabbildungen aus 17.3.1.6 von den simplizialsingulären Ketten in die Simplizialketten sowie die Einbettung der simplizialsingulären Ketten in die singulären Ketten $\mathrm{S}\mathcal{K} \leftarrow \mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow \mathrm{S}\Delta(\mathcal{K})$ Isomorphismen auf allen Homologiegruppen*

$$\mathrm{H}_q\mathcal{K} \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}_q(\mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(\Delta(\mathcal{K}))$$

17.3.1.8. Aus 17.3.1.6 folgt mit den Isomorphismen des Satzes für jede simpliziale Abbildung $\varphi : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}_q\mathcal{K} & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{H}_q(\mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K})) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_q(\Delta(\mathcal{K})) \\ {\scriptstyle \mathrm{H}_q\varphi}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_q\Delta(\varphi)} \\ \mathrm{H}_q\mathcal{L} & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{H}_q(\mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{L})) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_q(\Delta(\mathcal{L})) \end{array}$$

mit $\mathrm{H}_q\varphi := \mathcal{H}_q(\mathrm{S}\varphi)$ für die Kettenabbildung $\mathrm{S}\varphi$ aus 17.3.1.6 als linker Vertikale.

Vorschau 17.3.1.9. Aus 17.6.2.4 und 17.3.1.6 wird sogar folgen, daß die fraglichen Kettenabbildungen Homotopieäquivalenzen sind.

Beweis. Ich erinnere daran, daß wir unter einem Simplizialkomplex ein Datum $(E, \mathcal{K})$ verstehen aus einer Menge E von „Ecken“ und einem Mengensystem $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ mit gewissen Eigenschaften und daß wir die Elemente unseres Mengensystems $\mathcal{K}$ die „kombinatorischen Simplizes“ unseres Simplizialkomplexes nennen. Wir wählen nun eine Teilordnung $\leq$ auf der Menge E der Ecken von $\mathcal{K}$, die auf jedem kombinatorischen Simplex eine Anordnung induziert. So eine Teilordnung nennen wir eine **simpliziale Teilordnung**. Nach 3.1.9.23 ist es sogar stets möglich, eine Anordnung der Menge aller Ecken zu finden, und jede solche Anordnung ist a forteriori eine simpliziale Teilordnung. Ein simplizialsingulärer Simplex $\sigma : \Delta_q \to \Delta(\mathcal{K})$ heiße **ordnungsverträglich**, wenn er durch Vorschalten unseres Homöomorphismus $\tau : \Delta_q \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{M}_{[q]})$ aus der geometrischen Realisierung einer simplizialen Abbildung $\tilde{\sigma} : \mathcal{M}_{[q]} \to \mathcal{K}$ hervorgeht, die ihrerseits streng monoton ist auf den Ecken. Die von diesen Simplizes erzeugte Untergruppe notieren wir

$$\mathrm{S}_q^{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K}) \subset \mathrm{S}_q^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K})$$

und nennen sie die Gruppe der **ordnungsverträglichen simplizialsingulären q-Ketten von $\mathcal{K}$**. Offensichtlich bilden die ordnungsverträglichen simplizialsingulären Ketten einen Unterkomplex $\mathrm{S}^{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K}) \subset \mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K})$ im Komplex aller simplizialsingulären Ketten von $\Delta(\mathcal{K})$ und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}\mathcal{K} & \mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K}) \arrow[l] \arrow[r, hook] & \mathrm{S}\Delta(\mathcal{K}) \\
& \mathrm{S}^{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K}) \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Der schräge Pfeil nach links oben ist offensichtlich ein Isomorphismus von Kettenkomplexen. Nun zeigen wir in den anschließenden Propositionen 17.3.1.10 und 17.3.1.12, daß die beiden anderen Pfeile nach oben auch Isomorphismen auf der Homologie induzieren. Daraus folgt dann der Satz. □

Proposition 17.3.1.10. *Für jede simpliziale Teilordnung der Ecken eines Simplizialkomplexes $\mathcal{K}$ liefert die Einbettung $\mathrm{S}^{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow \mathrm{S}\Delta(\mathcal{K})$ der ordnungsverträglichen simplizialsingulären Ketten in die singulären Ketten Isomorphismen auf allen Homologiegruppen.*

Beweis. Wir schreiben kurz $X := \Delta(\mathcal{K})$ und setzen für $k \in \mathbb{Z}$

$$X_k := \bigcup_{s \in \mathcal{K}_q,\, q \leq k} \Delta(s)$$

Dieser Raum heißt das k**-Skelett** von $\mathcal{K}$. Nun betrachten wir für alle k das folgende kommutative Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{S}^{\mathrm{os}} X_k & \hookrightarrow & \mathrm{S}^{\mathrm{os}} X_{k+1} & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}^{\mathrm{os}} X_{k+1}/\mathrm{S}^{\mathrm{os}} X_k \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{S} X_k & \hookrightarrow & \mathrm{S} X_{k+1} & \twoheadrightarrow & \mathrm{S} X_{k+1}/\mathrm{S} X_k \end{array}$$

Das zugehörige Diagramm von langen exakten Homologiesequenzen schreiben wir

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots \mathrm{H}^{\mathrm{os}}_{q+1}(X_{k+1}, X_k) & \to & \mathrm{H}^{\mathrm{os}}_q X_k & \to & \mathrm{H}^{\mathrm{os}}_q X_{k+1} & \to & \mathrm{H}^{\mathrm{os}}_q(X_{k+1}, X_k) \ldots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \ldots \mathrm{H}_{q+1}(X_{k+1}, X_k) & \to & \mathrm{H}_q X_k & \to & \mathrm{H}_q X_{k+1} & \to & \mathrm{H}_q(X_{k+1}, X_k) \ldots \end{array}$$

Wir zeigen nun durch Induktion über k, daß $\mathrm{H}^{\mathrm{os}}_q X_k \to \mathrm{H}_q X_k$ ein Isomorphismus ist für alle k und q. Für $k < 0$ ist das klar. Im anschließenden Lemma 17.3.1.11 werden wir zeigen, daß $\mathrm{H}^{\mathrm{os}}_q(X_{k+1}, X_k) \to \mathrm{H}_q(X_{k+1}, X_k)$ ein Isomorphismus ist für alle q und alle k. Der Induktionsschritt besteht dann im Anwenden des Fünferlemmas. Unter der Zusatzannahme $X = X_k$ für $k \gg 0$ ist unser Satz damit bereits bewiesen. Im allgemeinen bemerken wir zusätzlich, daß nach 16.2.7.17 jede singuläre Kette von X schon in einem X_k liegt, und überlassen den Rest des Beweises dem Leser zur Übung. Später wird er den Beweis auch mithilfe des Satzes über die Exaktheit filtrierender Kolimites 17.7.1.18 direkt beenden können. □

Lemma 17.3.1.11. *Die durch die von den Einbettungen der ordnungsverträglichen simplizialsingulären Ketten in alle singulären Ketten induzierten Abbildungen auf den relativen Ketten liefern Isomorphismen* $\mathrm{H}^{\mathrm{os}}_q(X_{k+1}, X_k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X_{k+1}, X_k)$.

Beweis. Die linke Seite ist hier die Homologie eines Komplexes, der nur im Grad $q = k+1$ lebt. Genauer ist $\mathrm{H}^{\mathrm{os}}_{k+1}(X_{k+1}, X_k)$ frei erzeugt von den Nebenklassen der ordnungsverträglichen simplizialsingulären Simplizes, die durch auf den Ecken streng monoton wachsende simpliziale Abbildungen $\tilde{\sigma} : \mathcal{M}_{[k+1]} \to \mathcal{K}$ gegeben werden. Bei $q \neq k+1$ dahingegen verschwindet unser Komplex mitsamt seiner Homologie. Wir untersuchen nun die rechte Seite $\mathrm{H}_q(X_{k+1}, X_k)$ und betrachten dazu das „verdickte k-Skelett“ $U_k \subset X_{k+1}$, das wir erhalten, indem wir aus X_{k+1} die Schwerpunkte aller $(k+1)$-Simplizes entfernen. Die beiden Einbettungen

$$(X_{k+1}, X_k) \hookrightarrow (X_{k+1}, U_k) \hookleftarrow (X_{k+1} \backslash X_k, U_k \backslash X_k)$$

induzieren Isomorphismen auf der relativen Homologie: Die linke nach 17.2.2.7 und 17.1.4.1, da $X_k \hookrightarrow U_k$ eine Homotopieäquivalenz ist, hier verwendet man auch 15.1.9.15 nach dem das Produkt einer finalen Surjektion mit dem Einheitsintervall auch wieder final ist, und die rechte mit Ausschneidung des k-Skeletts X_k.

Das Raumpaar rechts ist aber schlicht die disjunkte unzusammenhängende Vereinigung über alle $(k+1)$-Simplizes $s \in \mathcal{K}_{k+1}$ der Raumpaare $(\Delta^\circ(s), \Delta^\circ(s)\backslash b(s))$, wo wir $\Delta^\circ(s)$ für den „offenen vollen Simplex" schreiben und mit $b(s)$ den Schwerpunkt von $\Delta(s)$ bezeichnen. Zusammenfassend erhalten wir also mit den offensichtlichen Abbildungen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}_q(X_{k+1}, U_k) & \overset{\sim}{\leftarrow} & \bigoplus_s \mathrm{H}_q(\Delta^\circ(s), \Delta^\circ(s)\backslash b(s)) \\
\| & & \downarrow \wr \\
\mathrm{H}_q(X_{k+1}, U_k) & \leftarrow & \bigoplus_s \mathrm{H}_q(\Delta(s), \Delta(s)\backslash b(s)) \\
\uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
\mathrm{H}_q(X_{k+1}, X_k) & \leftarrow & \bigoplus_s \mathrm{H}_q(\Delta(s), \partial\Delta(s))
\end{array}$$

wo die Summen jeweils über alle $(k+1)$-Simplizes $s \in \mathcal{K}_{k+1}$ laufen und wir mit $\partial\Delta(s)$ ähnlich wie in 17.2.3.4 das k-Skelett von $\Delta(s)$ bezeichnen. Die mit $\sim$ bezeichneten Pfeile darin sind offensichtlich Isomorphismen und für die übrigen Pfeile folgt dasselbe. Nach 17.2.3.4 wissen wir aber, daß $\mathrm{H}_q(\Delta(s), \partial\Delta(s))$ verschwindet für $q \neq k+1$ und daß es für $q = k+1$ frei ist vom Rang 1 und erzeugt wird von der Klasse desjenigen ordnungsverträglichen simplizialsingulären Simplex $\sigma = \Delta(\tilde{\sigma}) \circ \tau$, für den $\tilde{\sigma} : \mathcal{M}_{[k+1]} \to \mathcal{K}$ das Bild s hat. Das zeigt das Lemma. □

Proposition 17.3.1.12. *Für jede simpliziale Teilordnung der Ecken eines Simplizialkomplexes $\mathcal{K}$ liefert die Einbettung $\mathrm{S}^{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow \mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K})$ der ordnungsverträglichen simplizialsingulären Ketten in alle simplizialsingulären Ketten Isomorphismen auf allen Homologiegruppen.*

Beweis. Den Fall, daß unser Simplizialkomplex der maximale Simplizialkomplex $\mathcal{M}_E$ zu einer vorgegebenen Eckenmenge E ist, erledigen 17.1.1.15 und 17.1.1.17. Den Fall, daß unser Simplizialkomplex endlich ist, folgern wir induktiv. Bezeichne in der Tat $\mathrm{H}^{\mathrm{s}}_q\mathcal{K} = \mathcal{H}_q(\mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K}))$ die Homologie des Komplexes der simplizialsingulären Ketten in der Realisierung eines Simplizialkomplexes $\mathcal{K}$. Ist $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \cup \mathcal{K}''$ eine Darstellung unseres Simplizialkomplexes als Vereinigung zweier Unterkomplexe, so liefert der Beweis der Mayer-Vietoris-Sequenz auch in dieser Situation Mayer-Vietoris-Sequenzen für H^{os} und H^{s}. Mit dem Fünferlemma und Induktion über die Zahl der Simplizes unseres Simplizialkomplexes sehen wir so, daß die Proposition für endliche Simplizialkomplexe folgt, sobald wir sie für die maximalen Simplizialkomplexe zu einer vorgegebenen Eckenmenge kennen. Der Fall beliebiger Simplizialkomplexe hinwiederum folgt aus dem Fall endlicher Simplizialkomplexe mit etwas Nachdenken oder formal mit der Exaktheit filtrierender Kolimites 17.7.1.18. □

Korollar 17.3.1.13. *Ist $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex, so benötigt man für die q-te Homologie seiner Realisierung nicht mehr Erzeuger, als es in unserem Simplizial-*

komplex q-Simplizes gibt. In Formeln kann die Gruppe $\mathrm{H}_q(\Delta(\mathcal{K}))$ also stets durch $|\mathcal{K}_q|$ Elemente erzeugt werden.

Ergänzung 17.3.1.14. Ist $\mathcal{K}_q$ unendlich, so gilt sogar feiner, daß die Kardinalität von $\mathrm{H}_q(\Delta(\mathcal{K}))$ kleinergleich der Kardinalität von $\mathcal{K}_q$ ist. Der Beweis bleibt mutatis mutandis derselbe, es werden jedoch Grundkenntnisse zu Kardinalitäten benötigt, wie sie etwa in 6.5.3 ausgeführt werden.

Beweis. Hierzu braucht man außer 17.3.1.7 nur noch erinnern, daß man nach 4.4.4.1 für eine Untergruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe höchstens soviel Erzeuger benötigt wie für die ursprüngliche Gruppe. □

17.3.1.15. Wenn wir Homologie mit Koeffizienten betrachten wie in 17.1.2.11, so bleiben alle bisherigen Resultate und Beweise mit den hoffentlich offensichtlichen Modifikationen gültig, insbesondere auch Satz 17.3.1.7 über die Beziehung zwischen singulärer und simplizialer Homologie.

Definition 17.3.1.16. Für einen beliebigen topologischen Raum X setzt man

$$b_q(X) := \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{H}_q(X;\mathbb{Q}) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

und nennt diese Zahl die **q-te Betti-Zahl** von X. Sind alle Betti-Zahlen endlich und verschwinden sie für $q \gg 0$, so heißt ihre alternierende Summe

$$\chi(X) := \sum (-1)^q b_q(X) \in \mathbb{Z}$$

die **Euler-Charakteristik** von X und wir sagen, unser Raum „habe eine wohldefinierte Eulercharakteristik“.

17.3.1.17. Wir haben $\chi(X) = |X|$ für jeden endlichen diskreten Raum X mit $|X|$ Punkten. Es ist auch für allgemeinere Räume oft sinnvoll, $\chi(X)$ als eine Verallgemeinerung der „Zahl der Punkte von X“ aufzufassen. Eine mögliche Begründung wird in 17.3.1.27 skizziert, eine weitere in 17.5.6.1 in Gestalt der Formel $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$. Wir schreiben bei einem beliebigen Körper

$$\chi(X;k) := \sum (-1)^q \dim_k \mathrm{H}_q(X;k)$$

wann immer dieser Ausdruck sinnvoll ist, als da heißt, wann immer alle Summanden endlich sind und fast alle Summanden verschwinden.

Korollar 17.3.1.18 (Eulercharakteristik von Simplizialkomplexen). *Die Eulercharakteristik der Realisierung eines endlichen Simplizialkomplexes $\mathcal{K}$ wird für jeden Körper k gegeben durch die der Zahl der Simplizes gerader Dimension abzüglich der Zahl der Simplizes ungerader Dimension, in Formeln*

$$\chi(\Delta(\mathcal{K});k) = \sum (-1)^q |\mathcal{K}_q|$$

Beweis. Wir wenden das anschließende Lemma 17.3.1.19 auf den Komplex $\mathrm{S}(\mathcal{K};k)$ der Simplizialketten mit Koeffizienten in k an, dessen Homologie ja nach 17.3.1.7 genau die Homologie von $\Delta(\mathcal{K})$ mit Koeffizienten in k ist. □

Lemma 17.3.1.19. *Ist A ein Komplex endlichdimensionaler k-Vektorräume und verschwinden von den A_i alle bis auf endlich viele, so gilt*

$$\sum(-1)^i \dim_k A_i = \sum(-1)^i \dim_k \mathcal{H}_i A$$

17.3.1.20. Man nennt die linke Seite hier auch die **Eulercharakteristik** des Kettenkomplexes A. Die Gleichung besagt damit in Worten, daß ein Kettenkomplex dieselbe Eulercharakteristik hat wie seine Homologie.

Beweis. Das folgt sofort aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \dim A_i &= \dim(\ker \partial_i) + \dim(\operatorname{im} \partial_i) \\ \dim \mathcal{H}_i A &= \dim(\ker \partial_i) - \dim(\operatorname{im} \partial_{i+1}) \end{aligned}$$ □

Korollar 17.3.1.21 (Euler'scher Polyedersatz). *Ist $\Delta(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} S^2$ eine Triangulierung der Kugelschale, so gilt $|\mathcal{F}_0| - |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| = 2$ oder salopp gesagt*

$$|\textit{Ecken}| - |\textit{Kanten}| + |\textit{Flächen}| = 2$$

17.3.1.22. Daß die Sphäre nicht zu einem Simplizialkomplex mit Simplizes einer Dimension mehr als Zwei homöomorph sein kann, folgt zum Beispiel daraus, daß in unserer Sphäre das Komplement jeder zweielementigen Teilmenge eine nichttriviale Fundamentalgruppe hat.

17.3.1.23. Das vorhergehende Resultat von Euler, ein Vorläufer der Homologietheorie, hat der Euler-Charakteristik ihren Namen gegeben. Man folgert es auch allgemeiner für in geeigneter Weise definierte „polyedrische" Zerlegungen der Kugelschale wie sie etwa die platonischen Körper liefern, indem man derartige polyedrische Zerlegungen zu Triangulierungen verfeinert. Zum Beispiel hat ein Würfel 6 Flächen, 12 Kanten und 8 Ecken, und in der Tat gilt $6 - 12 + 8 = 2$.

Übungen

Übung 17.3.1.24. Gegeben $K \subset U \Subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge in einer offenen Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ zeige man, daß für alle q das Bild der auf der Homologie induzierten Abbildung $\mathrm{H}_q K \to \mathrm{H}_q U$ endlich erzeugt ist. Ebenso zeige man, daß das Bild von $\mathrm{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash U) \to \mathrm{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash K)$ endlich erzeugt ist. Hinweis: Indem man einen vollen Simplex, der K umfaßt, hinreichend oft baryzentrisch unterteilt, erhält man ein Sandwich $K \subset S \subset U$ mit S homöomorph zum Polyeder eines endlichen Simplizialkomplexes. So folgt bereits die erste Aussage. Ein Beweis einer etwas allgemeineren Aussage wird in 17.3.1.25 skizziert.

Ergänzende Übung 17.3.1.25 (**Endlichkeitsaussagen für Simplizialkomplexe**). Sei X die Realisierung eines lokal endlichen Simplizialkomplexes. Gegeben $K \subset U \Subset X$ eine kompakte Teilmenge in einer offenen Teilmenge von X zeige man, daß das Bild der auf der Homologie induzierten Abbildung $\mathrm{H}_q K \to \mathrm{H}_q U$ für alle q endlich erzeugt ist. Ebenso zeige man, daß das Bild von $\mathrm{H}_q(X, X\backslash U) \to \mathrm{H}_q(X, X\backslash K)$ für alle q endlich erzeugt ist. In der Tat ist nach 16.2.7.17 jedes Kompaktum $K \subset X$ enthalten in einer Vereinigung endlich vieler Simplizes und trifft folglich auch nur endlich viele Simplizes. Auf jedem dieser von K getroffenen Simplizes hat der Schnitt mit unserem Kompaktum einen positiven Abstand zum Schnitt mit dem Komplement von U. Indem wir baryzentrisch unterteilen, können wir also annehmen, daß es einen Unterkomplex $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ gibt mit $X\backslash K \subset \Delta(\mathcal{L}) \subset X\backslash U$ und der Eigenschaft, daß nur höchstens endlich viele Simplizes von $\mathcal{L}$ nicht zu $\mathcal{K}$ gehören. Dann aber zeigt 17.3.1.7, daß die relative Homologie $\mathrm{H}_q(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L}))$ endlich erzeugt ist für alle q.

Übung 17.3.1.26. Man bestimme die Eulercharakteristik des Torus $S^1 \times S^1$.

Übung 17.3.1.27. Ein topologischer Raum X werde von zwei offenen Teilmengen überdeckt, $X = U \cup V$, und beide sowie ihr Schnitt mögen im Sinne von 17.3.1.16 eine wohldefinierte Eulercharakteristik besitzen. Man zeige, daß dann auch der ursprüngliche Raum eine wohldefinierte Eulercharakteristik besitzt und daß gilt

$$\chi(X) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$$

Übung 17.3.1.28 (**Eulercharakteristik einer endlichen Überlagerung**). Ist $Y = \Delta(\mathcal{K})$ die geometrische Realisierung eines endlichen Simplizialkomplexes und $X \to Y$ eine endliche Überlagerung mit m Blättern, so gilt

$$\chi(X) = m\chi(Y)$$

17.3.2 Fixpunktsätze und simpliziale Approximation

Lemma 17.3.2.1 (Spur als Spur auf der Homologie). *Seien k ein Körper, A ein Komplex endlichdimensionaler k-Vektorräume und $\varphi : A \to A$ ein Endomorphismus von A. Verschwinden von den A_i alle bis auf endlich viele, so gilt für die Spuren*

$$\sum (-1)^i \operatorname{tr}(\varphi | A_i) = \sum (-1)^i \operatorname{tr}(\varphi | \mathcal{H}_i A)$$

17.3.2.2. Der Übersichtlichkeit halber haben wir die von φ auf den A_i und den $\mathcal{H}_i A$ induzierten Abbildungen auch kurzerhand φ notiert. Ist φ die Identität, so erhalten wir zumindest im Fall eines Körpers k der Charakteristik Null unser Lemma 17.3.1.19 als Spezialfall. Ich nenne die alternierende Summe der Spuren des

Endomorphismus φ eines endlichdimensionalen $\mathbb{Z}$-graduierten Vektorraums seine **Superspur** und notiere sie

$$\operatorname{str}(\varphi|A) := \sum (-1)^i \operatorname{tr}(\varphi|A_i)$$

In 18.3.4.14 erklären wir allgemeiner die Superspur für beliebige, nicht notwendig die Graduierung erhaltende Endomorphismen $\mathbb{Z}$-graduierter Vektorräume.

Vorschau 17.3.2.3. In 18.3.4.14 erklären wir allgemeiner die $\mathbb{Z}$-wertige Spur von Endomorphismen von Komplexen abelscher Gruppen mit endlich erzeugter totaler Homologie und zeigen in 18.3.4.15, daß sie mit „derivierter" Erweiterung der Skalare verträglich ist.

Beweis. Das folgt sofort aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\varphi|A_i) &= \operatorname{tr}(\varphi|\ker\partial_i) + \operatorname{tr}(\varphi|\operatorname{im}\partial_i) \\ \operatorname{tr}(\varphi|\mathcal{H}_i A) &= \operatorname{tr}(\varphi|\ker\partial_i) - \operatorname{tr}(\varphi|\operatorname{im}\partial_{i+1}) \end{aligned}$$

Diese hinwiederum folgert man aus der Additivität der Spur 4.4.6.14. □

Satz 17.3.2.4 (**Simplizialer Fixpunktsatz**). *Sei $\varphi : (E,\mathcal{K}) \to (E,\mathcal{K})$ eine simpliziale Selbstabbildung eines endlichen Simplizialkomplexes mit $\varphi(s) \neq s$ für alle Simplizes $s \in \mathcal{K}$ mit mindesten zwei Ecken. So gilt für die Zahl der Fixpunkte von φ und Homologie mit Koeffizienten in einem beliebigen Körper die Formel*

$$|E^\varphi| = \sum (-1)^i \operatorname{tr}(\mathrm{H}_i\varphi|\mathrm{H}_i\mathcal{K})$$

Beweis. Beide Seiten stimmen aufgrund von Lemma 17.3.2.1 und aufgrund unserer Annahmen überein mit $\sum(-1)^i \operatorname{tr}(\mathrm{S}_i\varphi|\mathrm{S}_i\mathcal{K})$. □

Vorschau 17.3.2.5. Mit der $\mathbb{Z}$-wertigen Spur 18.3.4.14 gilt die Identität aus dem Beweis $|E^\varphi| = \sum(-1)^i \operatorname{tr}(\mathrm{S}_i\varphi|\mathrm{S}_i\mathcal{K})$ sogar in $\mathbb{Z}$.

17.3.2.6. Ich finde an diesem Satz bemerkenswert, daß er ohne „Fixpunktindizes" auskommt. Vielmehr erzwingen die Bedingungen des Satzes, daß diese Fixpunktindizes im Fall einer kompakten orientierten triangulierten Mannigfaltigkeit und für Abbildungen dieser speziellen Natur alle Eins sein müssen. Eine partielle Verallgemeinerung auf den Fall stetiger nicht notwendig simplizialer Abbildungen zeigen wir als 17.3.2.13.

17.3.2.7. Gegeben ein Simplizialkomplex $\mathcal{K} = (E,\mathcal{K})$ erklären wir zu jedem Element seiner Realisierung $z \in \Delta(\mathcal{K})$ dessen **Träger** $\operatorname{supp} z \in \mathcal{K}$ als den Träger von z in seiner Eigenschaft als Abbildung $z : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ oder gleichbedeutend

als das kleinste $\sigma \in \mathcal{K}$ mit $z \in \Delta(\sigma)$. Gegeben ein Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ erklären wir dessen **offenen Stern** $\mathrm{St}(\sigma) \Subset \Delta(\mathcal{K})$ als die Teilmenge

$$\mathrm{St}(\sigma) := \{z \in \Delta(\mathcal{K}) \mid \sigma \subset \operatorname{supp} z\}$$

Der Leser mag zur Übung zeigen, daß sie in der Tat offen ist. Offensichtlich gilt für beliebiges $z \in \Delta(\mathcal{K})$ auch umgekehrt $\operatorname{supp} z = \{q \in \mathcal{K}_0 \mid z \in \mathrm{St}(q)\}$.

17.3.2.8. Gegeben ein Simplizialkomplex $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ erklären wir einen neuen Simplizialkomplex, seine **baryzentrische Unterteilung**

$$\mathrm{B}\mathcal{K} = \check{\mathcal{K}} = (\check{E}, \check{\mathcal{K}})$$

Als Ecken nehmen wir alle Simplizes des ursprünglichen Komplexes, in Formeln $\check{E} := \mathcal{K}$. Als Simplizes nehmen wir alle endlichen Ketten in der Menge $\check{E}$ für die Inklusionsrelation, also alle bezüglich Inklusion total geordneten endlichen Teilmengen. Man erhält einen ausgezeichneten Homöomorphismus zwischen ihren Realisierungen

$$u : \Delta(\check{\mathcal{K}}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K})$$

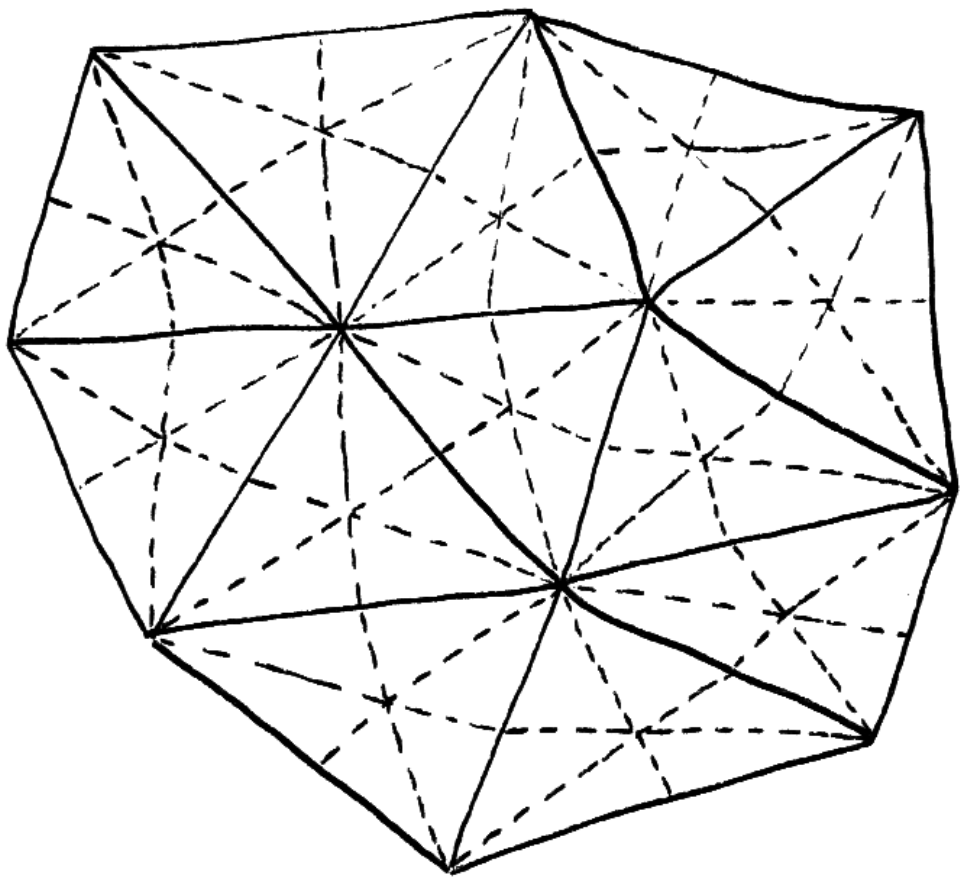
durch die Vorschrift, daß jede Ecke $s \in \check{E} \subset \mathcal{K}$ auf den Schwerpunkt des vollen Simplex $\Delta(s) \subset \Delta(\mathcal{K})$ abgebildet wird und jeder volle Simplex von $\Delta(\check{K})$ affin in denjenigen vollen Simplex von $\Delta(\mathcal{K})$, der seiner größten Ecke entspricht.

17.3.2.9. Auf der baryzentrischen Unterteilung $\check{\mathcal{K}}$ eines Simplizialkomplexes $\mathcal{K}$ liefert die umgekehrte Inklusionsrelation von $\mathcal{K}$ stets eine simpliziale Teilordnung, seine **natürliche simpliziale Teilordnung**. Wir kehren hier die Inklusionsrelation um, damit unsere Unterteilungsoperatoren $\mathrm{U}_q : \mathrm{S}_q\Delta(\mathcal{K}) \to \mathrm{S}_q\Delta(\mathcal{K})$ aus 17.2.4.1 Abbildungen

$$\mathrm{U}_q : \mathrm{S}_q^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K}) \to \mathrm{S}_q u(\mathrm{S}_q^{\mathrm{os}}\Delta(\check{\mathcal{K}}))$$

induzieren für die in Bezug auf die natürliche Teilordnung zu verstehenden ordnungsverträglichen simplizialsingulären Ketten der baryzentrischen Unterteilung. Das hinwiederum zeigen wir dann durch Induktion über q. Gegeben ein festes q folgt es offensichtlich für jeden beliebigen Simplizialkomplex, wenn wir es für einen vollen q-Simplex zeigen. Unsere induktive Definition der Unterteilungsoperatoren $\mathrm{U}_q(\tau_q) = \mathrm{P}^{s(q)}\mathrm{U}_{q-1}(\partial\tau_q)$ mit $\mathrm{P}^{s(q)}$ dem Prismenoperator bezüglich des Schwerpunkts zeigt dann induktiv die Behauptung, da ja unser im Beweis von 17.1.2.17 erklärter Prismenoperator die zusätzliche Ecke als erste Ecke davorschreibt.

Satz 17.3.2.10 (Simpliziale Approximation). *Seien $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ endliche Simplizialkomplexe und $f : \Delta(\mathcal{K}) \to \Delta(\mathcal{L})$ stetig. So gibt es $n \in \mathbb{N}$ derart, daß für das*



Ein Simplizialkomplex und gestrichelt eingezeichnet seine baryzentrische Unterteilung. Die Ecken der baryzentrischen Unterteilung mag man sich denken als die Schwerpunkte der nichtleeren Simplizes des ursprünglichen Simplizialkomplexes, die Simplizes der baryzentrischen Unterteilung entsprechen den endlichen Ketten in der teilgeordneten Menge der ursprünglichen Simplizes.

Vorschalten des Homöomorphismus $u^n : \Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K})$ *aus der* n*-fachen baryzentrischen Unterteilung eine simpliziale Abbildung*

$$\varphi : (\mathrm{B}^n\mathcal{K})_0 \to \mathcal{L}_0$$

existiert mit der Eigenschaft, daß für alle $z \in \Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K})$ *die beiden Punkte* $f(u^n(z))$ *und* $(\Delta\varphi)(z)$ *in einem gemeinsamen vollen Simplex von* $\Delta(\mathcal{L})$ *liegen.*

17.3.2.11. Unser φ heißt eine **simpliziale Approximation** von f. Offensichtlich ist in dieser Sitution $\Delta(\varphi)$ homotop zu fu^n vermittels der Homotopie

$$h(z,t) = t(\Delta\varphi)(z) + (1-t)f(u^n(z))$$

Hierbei sind die Formeln auf der rechten Seite zu verstehen in dem großen Vektorraum, in dem wir unsere geometrische Realisierung von $\mathcal{L}$ als Teilmenge konstruiert hatten.

17.3.2.12 (**Die schmutzige Anschauung**). Die simpliziale Approximation an einen Homöomorphismus wird im allgemeinen keineswegs ein Isomorphismus sein, sondern vielmehr salopp gesprochen in etwa so aussehen, daß einige wenige klitzekleine Simplizes der entsprechenden mehrfachen baryzentrischen Unterteilung bijektiv stark vergrößert auf Simplizes des Zielkomplexes abgebildet werden, wohingegen die meisten dieser klitzekleinen Simplizes zu Simplizes kleinerer Dimension zusammengedrückt werden. Ich bitte darum, diese anschauliche Beschreibung eines typischen Falls nicht als mathematische Aussage mißzuverstehen.

Beweis. Mithilfe des Überdeckungssatzes von Lebesgue, angewandt auf das Kompaktum $\Delta(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}^{\mathcal{K}_0}$, finden wir $n \in \mathbb{N}$ und eine Abbildung auf den Ecken $\varphi : (\mathrm{B}^n\mathcal{K})_0 \to \mathcal{L}_0$ mit $f(\mathrm{St}(q)) \subset \mathrm{St}(\varphi(q))$ für alle $q \in (\mathrm{B}^n\mathcal{K})_0$. Wir zeigen, daß dies φ die gesuchte simpliziale Approximation ist. In der Tat gilt für beliebiges $z \in \Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K})$ ja $\operatorname{supp} z = \{q \in (\mathrm{B}^n\mathcal{K})_0 \mid z \in \mathrm{St}(q)\}$ und folglich $\varphi(\operatorname{supp} z) \subset \operatorname{supp} f(z)$. Da jeder Simplex von $\mathrm{B}^n\mathcal{K}$ ein $\operatorname{supp} z$ ist, muß φ simplizial sein und es folgt weiter, daß für alle z unser $(\Delta\varphi)(z)$ zum vollen Simplex $\Delta(\operatorname{supp} f(z))$ gehört. □

Satz 17.3.2.13 (Erste Annäherung an den Lefschetz'schen Fixpunktsatz). *Gegeben ein endlicher Simplizialkomplex* $\mathcal{K}$ *und eine fixpunktfreie stetige Selbstabbildung* f *seiner Realisierung* $X := \Delta(\mathcal{K})$ *gilt für jeden Koeffizientenkörper* k *die Identität*

$$0 = \sum_q (-1)^q \operatorname{tr}\left(\mathrm{H}_q f | \mathrm{H}_q(X;k)\right)$$

17.3.2.14 (**Fixpunkte von Selbstabbildungen von Sphären**). Nach 17.3.2.13 hat insbesondere jede stetige Selbstabbildung einer Sphäre gerader Dimension,

die homotop ist zur Identität, mindestens einen Fixpunkt. Induziert eine stetige Selbstabbildung einer n-Sphäre S^n positiver Dimension $n > 0$ allgemeiner eine von der Multiplikation mit $(-1)^{n+1}$ verschiedene Abbildung auf der n-ten Homologiegruppe, hat sie also in einer noch einzuführenden Terminologie einen von $(-1)^{n+1}$ verschiedenen „Abbildungsgrad“, so hat sie mindestens einen Fixpunkt.

Beweis. Indem wir auf X die von einer Norm auf $\mathbb{R}^{\mathcal{K}_0}$ induzierte Metrik d wählen und dann hinreichend oft baryzentrisch unterteilen, dürfen wir annehmen, daß das Minimum von $d(x, f(x))$ größer ist als der Durchmesser jedes vollen Simplex. Für jede simpliziale Approximation $\varphi : (\mathrm{B}^n\mathcal{K})_0 \to \mathcal{K}_0$ an f gilt dann, daß φ keinen Simplex der n-fachen baryzentrischen Unterteilung eines Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ auf σ selbst wirft. Wir dürfen dabei auch $n \geq 1$ annehmen. Jetzt betrachten wir im Komplex $\mathrm{S}X$ der singulären Ketten von X den Unterkomplex $\mathrm{S}^{\mathrm{s}}X$ der simplizialsingulären Ketten und das Bild

$$\mathrm{S}^{\mathrm{os},n}X \subset \mathrm{S}X$$

des Komplexes $\mathrm{S}^{\mathrm{os}}\Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K})$ der orientierungsverträglichen simplizialsingulären Ketten der n-fachen baryzentrischen Unterteilung unter dem natürlichen Homöomorphismus $u^n : \Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K})$. So erhalten wir mit unseren Unterteilungsoperatoren U aus 17.2.4.1 nach 17.3.2.9 ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{S}^{\mathrm{os},n}X & \longrightarrow & \mathrm{S}^{\mathrm{s}}X & \xrightarrow{\mathrm{U}^n} & \mathrm{S}^{\mathrm{os},n}X \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \mathrm{S}X & \xrightarrow{\mathrm{S}\varphi} & \mathrm{S}X & \xrightarrow{\mathrm{U}^n} & \mathrm{S}X \end{array}$$

Seine Vertikalen induzieren nach unserem Vergleichssatz 17.3.1.7 zusammen mit 17.3.1.12 Isomorphismen auf der Homologie. Die Verknüpfung in der oberen Horizontale hat nun Spur Null in jedem Grad, denn ihre Matrix in der durch die orientierungsverträglichen simplizialsingulären Simplizes gegebenen Basis hat nur Einträge Null auf der Diagonalen, da unsere simpliziale Approximation keinen Simplex aus der n-fachen baryzentrischen Unterteilung eines Simplex σ auf σ selbst wirft. Nach 17.3.2.1 induziert dann die Verknüpfung in der oberen Horizontale auch auf der Homologie eine Abbildung mit Superspur Null. Dasselbe folgt erst für die Verknüpfung in der unteren Horizontale und dann wegen $\mathrm{HU}^n = \mathrm{id}$ auch für $\mathrm{H}\varphi = \mathrm{H}f$. $\square$

Übungen

Übung 17.3.2.15. Jede stetige Selbstabbildung der reellen projektiven Ebene hat einen Fixpunkt.

Übung 17.3.2.16. Man folgere den Fixpunktsatz von Brouwer aus dem Fixpunktsatz von Lefschetz.

Übung 17.3.2.17 (**Nullstellenfreie glatte Vektorfelder und Eulercharakteristik**). Besitzt eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit ein glattes nirgends verschwindendes Vektorfeld, so ist ihre Euler-Charakteristik Null. Hinweis: Man verwende, daß jede glatte kompakte Mannigfaltigkeit triangulierbar ist und für jedes glatte nirgends verschwindende Vektorfeld darauf sein „Fluß für ein hinreichend kleines positives Zeitintervall“ eine fixpunktfreie stetige Selbstabbildung ist.

Vorschau 17.3.2.18. Das gilt genauso für stetige Vektorfelder, muß dann aber anders bewiesen werden.

17.3.3 Einbettungen von Sphären in Sphären

17.3.3.1. Im folgenden ist die (-1)-Sphäre wie in 16.1.1 als die leere Menge zu verstehen, in Formeln $S^{-1} = \emptyset$.

Satz 17.3.3.2 (Jordan-Brouwer). *Seien $n, r \geq -1$ und sei $s^r \subset S^n$ eine Teilmenge der n-Sphäre, die homöomorph ist zur r-Sphäre S^r. So haben wir:*

$r > n$	*Unmöglich;*
$r = n$	*Impliziert $S^n = s^r$;*
$r = n - 1$	*Dann hat $S^n \backslash s^r$ genau zwei Zusammenhangskomponenten, und der Rand jeder dieser beiden Komponenten ist s^r;*
$r \leq n - 2$	*Dann ist $S^n \backslash s^r$ zusammenhängend.*

Vorschau 17.3.3.3. Im Rahmen der Garbentheorie werden wir in 19.4.10.16 einen alternativen Beweis geben, der mir besonders natürlich scheint. Der elementarere Beweis hier wird uns bis zum Ende dieses Abschnitts beschäftigen. Im Fall $r = n-1$ induziert für eine zweipunktige Teilmenge Z bestehend aus einem Punkt in jeder Komponente des Komplements $S^n \backslash s^{n-1}$ die Einbettung $s^{n-1} \hookrightarrow S^n \backslash Z$ einen Isomorphismus auf der Homologie. Im Fall $n = 2$ folgt das etwa aus unseren Erkenntnissen zu Umlaufzahlen kreuzungsfreier Wege in 16.1.7.10. Im allgemeinen zeigen wir es erst als Übung 19.4.10.26.

17.3.3.4. Als Vorbereitung auf den Beweis beginnen wir mit einer Diskussion der sogenannten „reduzierten Homologie“. Diese Variante der Homologie hilft auch sonst oft, Sonderbetrachtungen im Grad Null zu vermeiden.

Definition 17.3.3.5. Für jeden topologischen Raum X kann man den Komplex $\mathrm{S}X$ der singulären Ketten verlängern zum sogenannten **augmentierten Komplex** $\tilde{\mathrm{S}}X$ mit $\tilde{\mathrm{S}}_q X := \mathrm{S}_q X$ für $q \neq -1$ und $\tilde{\mathrm{S}}_{-1} X := \mathbb{Z}$, wobei der zusätzlich benötigte

Randoperator $\partial_0 : \tilde{\mathrm{S}}_0 X \to \tilde{\mathrm{S}}_{-1} X$ gegeben wird durch die sogenannte **Augmentation** $\partial_0 = \epsilon : \sum n_x x \mapsto \sum n_x$. Offensichtlich erhalten wir so wieder einen Funktor

$$\tilde{\mathrm{S}} : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ket}$$

von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Kettenkomplexe. Wir definieren dann die **reduzierten Homologiegruppen** $\tilde{\mathrm{H}}_q(X)$ **von** X als die Homologiegruppen unseres augmentierten Komplexes und setzen also in Formeln

$$\tilde{\mathrm{H}}_q(X) := \mathcal{H}_q(\tilde{\mathrm{S}} X)$$

17.3.3.6 (**Verschiedene Konventionen zur reduzierten Homologie**). Die vorstehende Definition weicht im Fall $X = \emptyset$ von der in der Literatur gebräuchlichen Konvention ab, bei der, so will es mir scheinen, das Widerstreben gegenüber Homologie in negativen Graden die Oberhand gewonnen hat über das Streben nach Klarheit des Formalismus.

17.3.3.7 (**Beziehung zwischen gewöhnlicher und reduzierter Homologie**). Für $X \neq \emptyset$ gilt $\tilde{\mathrm{H}}_q(X) = 0$ für $q < 0$, für die leere Menge erhalten wir jedoch $\tilde{\mathrm{H}}_{-1}(\emptyset) = \mathbb{Z}$. Gegeben eine abelsche Gruppe G bezeichne ganz allgemein $G[q]$ den Komplex mit G im Grad q und Nullen sonst. Speziell meint also $\mathbb{Z}[-1]$ den Komplex mit $\mathbb{Z}$ im Grad -1 und Nullen sonst. Wir haben eine kurze exakte Sequenz von Komplexen $\mathbb{Z}[-1] \hookrightarrow \tilde{\mathrm{S}} X \twoheadrightarrow \mathrm{S} X$. Mit der zugehörigen langen Homologiesequenz erhalten wir $\mathrm{H}_q X = \tilde{\mathrm{H}}_q X$ für $q > 0$ und im Fall $X \neq \emptyset$ eine kurze exakte Sequenz $\tilde{\mathrm{H}}_0 X \hookrightarrow \mathrm{H}_0 X \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, mithin nach 17.2.2.14 und 17.2.2.12 einen allerdings nicht kanonischen Isomorphismus $\mathrm{H}_0 X \cong \tilde{\mathrm{H}}_0 X \oplus \mathbb{Z}$. Es gilt also $\tilde{\mathrm{H}}_0 X = 0$ genau dann, wenn X leer oder wegzusammenhängend ist, und die reduzierte Homologie von Sphären wird für alle $n \geq -1$ gegeben durch

$$\tilde{\mathrm{H}}_q(S^n) \quad \cong \quad \begin{cases} \mathbb{Z} & n = q; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

17.3.3.8 (**Lange exakte Homologiesequenz für die reduzierte Homologie**). Für ein Raumpaar (X, A) folgt aus der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen $\tilde{\mathrm{S}} A \hookrightarrow \tilde{\mathrm{S}} X \twoheadrightarrow \tilde{\mathrm{S}} X / \tilde{\mathrm{S}} A$ auch eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \tilde{\mathrm{H}}_{q+1}(X, A) \to \tilde{\mathrm{H}}_q(A) \to \tilde{\mathrm{H}}_q(X) \to \tilde{\mathrm{H}}_q(X, A) \to \tilde{\mathrm{H}}_{q-1}(A) \to \ldots$$

für Raumpaare in der reduzierten Homologie, wobei natürlich gilt $\tilde{\mathrm{S}} X / \tilde{\mathrm{S}} A = \mathrm{S} X / \mathrm{S} A$ und folglich $\tilde{\mathrm{H}}_q(X, A) = \mathrm{H}_q(X, A)$. Für jeden Punkt $p \in X$ erhalten wir so insbesondere einen kanonischen Isomorphismus $\tilde{\mathrm{H}}_q(X) \to \mathrm{H}_q(X, p)$. Homotope Abbildungen $f, g : X \to Y$ induzieren auch auf der reduzierten Homologie dieselben Abbildungen: Um das zu sehen reicht es, unsere Kettenhomotopie $\mathrm{S} f \simeq \mathrm{S} g$ durch Null auf $\tilde{\mathrm{S}}_{-1} X = \mathbb{Z}$ fortzusetzen. Die Mayer-Vietoris-Sequenz

und ihr Beweis übertragen sich ebenso ohne Schwierigkeiten in die reduzierte Homologie. Der folgende Beweis ist eine erste Illustration für die Nützlicheit der reduzierten Homologie.

Proposition 17.3.3.9. *Gegeben eine stetige Einbettung eines Hyperkubus in eine Sphäre beliebiger Dimension verschwinden die reduzierten Homologiegruppen des Komplements des Bildes in allen Graden.*

Beweis. Seien also in Formeln $r \geq 0$ und $\varphi : [0,1]^r \to S^n$ eine stetige Injektion mit Bild $\operatorname{im}\varphi = \varphi([0,1]^r)$. Unsere Proposition behauptet $\tilde{\mathrm{H}}_q(S^n \backslash \operatorname{im}\varphi) = 0$ für alle q. Als stetige Injektion von einem Kompaktum in einen Hausdorffraum ist φ nach 15.1.5.13 ein Homöomorphismus auf sein Bild. Da S^n nie zusammenziehbar ist, folgt $S^n \neq \operatorname{im}\varphi$. Wir können uns also auf $q \geq 0$ beschränken. Dafür machen wir eine Induktion über r und geben dazu der Aussage der Proposition den Namen $P(r)$. Nach Konvention ist $[0,1]^0$ ein Punkt und $S^n \backslash x$ ist zusammenziehbar, ja sogar homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ für alle $x \in S^n$. Das liefert unsere Induktionsbasis $P(0)$. Sei nun $P(r-1)$ bekannt, sei $\varphi : [0,1]^r \to S^n$ eine stetige Injektion und sei $z \in \tilde{\mathrm{S}}_q(S^n \backslash \operatorname{im}\varphi)$ ein q-Zykel, $q \geq 0$. Es gilt zu zeigen, daß z ein Rand ist. Für $I \subset [0,1]$ setzen wir

$$U_I := S^n \backslash \varphi(I \times [0,1]^{r-1})$$

und kürzen $U_{\{t\}} = U_t$ ab. Nach unserer Induktionsannahme $P(r-1)$ gibt es für alle $t \in [0,1]$ ein $w_t \in \mathrm{S}_{q+1} U_t$ mit $\partial w_t = z$. Mit Kompaktheitsargumenten folgt, daß sogar gilt $w_t \in \mathrm{S}_{q+1} U_B$ für eine geeignete Umgebung B von t in $[0,1]$. Mit zusätzlichen Kompaktheitsargumenten gibt es dann eine Folge $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ derart, daß für alle i ein $w_i \in \mathrm{S}_{q+1} U_{[t_{i-1},t_i]}$ existiert mit $\partial w_i = z$. Die Aussage $P(r)$ folgt nun mit Induktion über i, wenn wir noch die anschließende Folgerung aus unserer Induktionsannahme $P(r-1)$ bemerken. □

Lemma 17.3.3.10. *Sei $r \geq 1$ und es gelte $P(r-1)$. Sei $\varphi : [0,1]^r \to S^n$ eine stetige Injektion. Seien $0 \leq a < b < c \leq 1$. Gegeben Ketten $u \in \mathrm{S}_{q+1} U_{[a,b]}$ und $v \in \mathrm{S}_{q+1} U_{[b,c]}$ mit $\partial u = \partial v$ gibt es dann auch eine Kette $w \in \mathrm{S}_{q+1} U_{[a,c]}$ mit $\partial w = \partial u = \partial v$.*

Beweis. Sicher gilt

$$U_{[a,b]} \cup U_{[b,c]} = U_b \text{ und } U_{[a,b]} \cap U_{[b,c]} = U_{[a,c]}$$

Die Mayer-Vietoris-Sequenz der reduzierten Homologie liefert uns nun

$$\tilde{\mathrm{H}}_{q+1} U_b \to \tilde{\mathrm{H}}_q U_{[a,c]} \to \tilde{\mathrm{H}}_q U_{[a,b]} \oplus \tilde{\mathrm{H}}_q U_{[b,c]} \to \tilde{\mathrm{H}}_q U_b$$

Da hier das rechte und linke Ende verschwindet nach $P(r-1)$, steht in der Mitte ein Isomorphismus. Schreiben wir also $\partial u = \partial v = z$, so ist z ein Zykel in $\tilde{\mathrm{S}}_q U_{[a,c]}$, der ein Rand wird in $\tilde{\mathrm{S}}_q U_{[a,b]} \oplus \tilde{\mathrm{S}}_q U_{[b,c]}$. Also muß z auch in $\tilde{\mathrm{S}}_q U_{[a,c]}$ bereits ein Rand gewesen sein. □

Satz 17.3.3.11 (Homologie des Komplements einer Sphäre in einer Sphäre). *Seien $r, n \geq -1$ und sei $s^r \subset S^n$ eine Teilmenge der n-Sphäre, die homöomorph ist zur r-Sphäre S^r. So gilt*

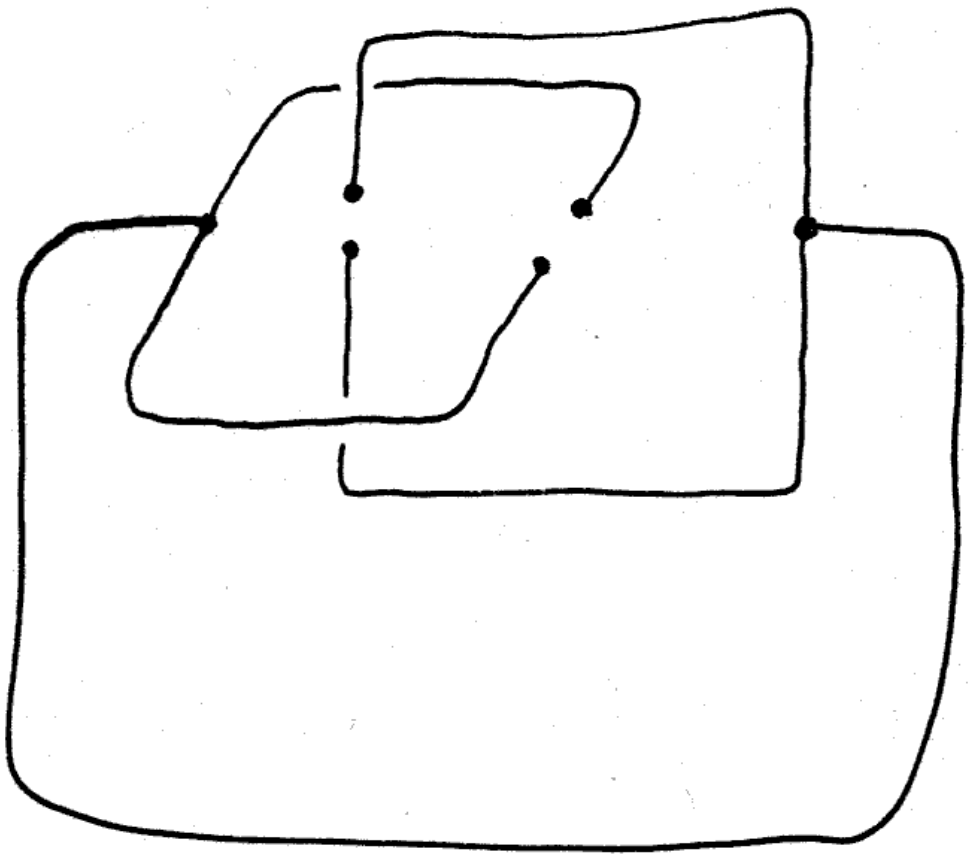
$$\tilde{\mathrm{H}}_q(S^n \backslash s^r) \quad \cong \quad \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n - r - 1; \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Wir machen wieder eine Induktion über r. Für $r = -1$ ist die Aussage schon aus 17.3.3.7 bekannt. Ist nun $r \geq 0$, so schreiben wir $s^r = s_+ \cup s_-$ als Vereinigung von zwei abgeschlossenen Hemisphären mit Schnitt $s_+ \cap s_- = s^{r-1} \cong S^{r-1}$. Wir wenden die reduzierte Mayer-Vietoris-Sequenz an auf $X_\pm = S^n \backslash s_\pm$, es ist also $X_+ \cup X_- = S^n \backslash s^{r-1}$ und $X_+ \cap X_- = S^n \backslash s^r$ und wir erhalten mit 17.3.3.9 Isomorphismen $\tilde{\mathrm{H}}_{q+1}(S^n \backslash s^{r-1}) \cong \tilde{\mathrm{H}}_q(S^n \backslash s^r)$ und von da ausgehend induktiv $\tilde{\mathrm{H}}_q(S^n \backslash s^r) \cong \tilde{\mathrm{H}}_{q+r+1}(S^n \backslash s^{-1}) = \tilde{\mathrm{H}}_{q+r+1}(S^n)$. □

Beweis von Jordan-Brouwer 17.3.3.2. Der Fall $r > n$ ist unmöglich, da $\tilde{\mathrm{H}}_q$ stets verschwindet für $q < -1$. Im Fall $r = n$ haben wir $S^n = s^r$, denn $\tilde{\mathrm{H}}_{-1}(X) \neq 0$ bedeutet $X = \emptyset$. Im Fall $r \leq n - 2$ haben wir $\tilde{\mathrm{H}}_0(S^n \backslash s^r) = 0$ aber $S^n \backslash s^r \neq \emptyset$. Es folgt $\mathrm{H}_0(S^n \backslash s^r) \cong \mathbb{Z}$, und damit hat $S^n \backslash s^r$ nach 17.1.2.15 genau eine Wegzusammenhangskomponente, die auch die einzige Zusammenhangskomponente sein muß. Im Fall $r = n-1$ haben wir $\tilde{\mathrm{H}}_0(S^n \backslash s^r) \cong \mathbb{Z}$, also $\mathrm{H}_0(S^n \backslash s^r) \cong \mathbb{Z}^2$ und damit hat $S^n \backslash s^r$ nach 17.1.2.15 genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. Da bei einer offenen Teilmenge von S^n jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung hat, sind das nach 15.1.3.15 auch die Zusammenhangskomponenten von $S^n \backslash s^r$. Jetzt müssen wir nur noch im Fall $r = n - 1$ zusätzlich zeigen, daß s^{n-1} im Abschluß jeder der beiden Zusammenhangskomponenten von $S^n \backslash s^{n-1}$ liegt. Für jedes $x \in s^{n-1}$ und eine beliebige offene Umgebung U von x in S^n finden wir eine Teilmenge $A \subset s^{n-1}$ mit $x \in A$ derart, daß gilt $\bar{A} \subset U$ und $s^{n-1} \backslash A \cong [0,1]^{n-1}$. Wir setzen $B := s^{n-1} \backslash A$. Nach 17.3.3.9 ist $S^n \backslash B$ wegzusammenhängend. Verbinden wir nun zwei Punkte aus verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $S^n \backslash s^{n-1}$ in $S^n \backslash B$ durch einen Weg σ, so muß σ durch A laufen. Ist $\sigma(t)$ beziehungsweise $\sigma(s)$ der erste beziehungsweise letzte Punkt von σ in $\bar{A}$, so liegen für kleines $\epsilon > 0$ notwendig $\sigma(t - \epsilon)$, $\sigma(s + \epsilon)$ in U, aber in verschiedenen Wegzusammenhangskomponenten von $S^n \backslash s^{n-1}$. Jede offene Umgebung U von x trifft also beide Komponenten von $S^n \backslash s^{n-1}$. □

Korollar 17.3.3.12. *Seien $n \geq 2$ und $s^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, die homöomorph ist zur $(n-1)$-Sphäre S^{n-1}. So zerfällt ihr Komplement $\mathbb{R}^n \backslash s^{n-1}$ in zwei Zusammenhangskomponenten, deren Rand jeweils s^{n-1} ist.*

Beweis. Man fasse $\mathbb{R}^n$ auf als das Komplement eines Punktes in S^n. □



Versuch der Darstellung einer Konstruktionsvorschrift für Alexander's gehörnte Sphäre. Es gilt, sich dieses Bild in fraktaler Weise immer weiter verkleinert ins Unendliche fortgesetzt zu denken, an jedem der beiden Paaare von dich gegenüberliegenden Endkugeln teilt sich unser Gebilde also wieder in jeweils zwei Arme, die sich fast wieder treffen, und so weiter. Die hier gezeichneten Drähte sind massiv gemeint und verdünnen sich entsprechend in die Spitzen hinein, so daß dieses ganze Drahtgebilde homöomorph ist zum Einheitsball im $\mathbb{R}^3$. Sein Komplement ist nicht einfach wegzusammenhängend, was wir aber nicht beweisen werden. Alexander's gehörnte Sphäre ist die Oberfläche dieses Gebildes.

17.3.3.13. Der Spezialfall $n = 2$ des vorhergehenden Korollars heißt der **Jordan'sche Kurvensatz**. Er besagt grob gesprochen, daß jede geschlossene Kurve in der Ebene die Ebene in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegt. In diesem Fall sagt der **Satz von Schönflies** sogar stärker, daß wir einen Homöomorphismus der Ebene mit sich selber finden können, unter dem unsere geschlossene Kurve dem Einheitskreis entspricht. Im Fall $n = 3$ ist **Alexander's gehörnte Sphäre** eine zum kompakten Ball D^3 homöomorphe Teilmenge des Raums $\mathbb{R}^3$, deren Komplement nicht einfach wegzusammenhängend ist, oder vielmehr die Randsphäre dieses Balls. Die abelsch gemachte Fundamentalgruppe diese Komplements muß aber wieder verschwinden nach dem Satz von Hurewicz 17.1.5.2 und unserem Satz 17.3.3.11 über die reduzierte Homologie des Komplements.

Korollar* 17.3.3.14 (Invarianz von Gebieten). *Jede stetige Injektion $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ist offen.*

17.3.3.15 (**Diskussion der Terminologie**). Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ zwei Teilmengen, die homöomorph sind als topologische Räume. Aus Korollar 17.3.3.14 folgt: Ist U offen, so ist auch V offen. In der Funktionentheorie nennt man offene Teilmengen der komplexen Zahlenebene auch „Gebiete", daher die Terminologie.

Beweis. Es reicht, wenn wir für jede Einbettung $f : E \hookrightarrow S^n$ der abgeschlossenen Einheitskugel $E \not\subset \mathbb{R}^n$ in die Sphäre S^n zeigen, daß ihr Inneres E° offenes Bild $f(E^\circ) \Subset S^n$ hat. Das Komplement des Bildes der Randsphäre $f(\partial E)$ besteht nach dem Satz von Jordan-Brouwer 17.3.3.2 aus zwei Zusammenhangskomponenten

$$S^n \backslash f(\partial E) = W_1 \sqcup W_2$$

Da S^n lokal zusammenhängend ist, sind diese Zusammenhangskomponenten offene Teilmengen der Sphäre $W_1, W_2 \Subset S^n$. Das Komplement des Bildes $f(E)$ ist auch zusammenhängend nach 17.3.3.9, somit erhalten wir eine weitere disjunkte Zerlegung in zusammenhängende Teilmengen

$$S^n \backslash f(\partial E) = (S^n \backslash f(E)) \sqcup f(E^\circ)$$

Nach 15.1.3.16 muß aber jede zusammenhängende Teilmenge eines Raums in einer seiner Zusammenhangskomponenten enthalten sein. Da unser Raum genau zwei Zusammenhangskomponenten hat, müssen unsere beiden disjunkten zusammenhängenden Teilmengen also genau diese Zusammenhangskomponenten W_1, W_2 sein. Es folgt $f(E^\circ) = W_i \Subset S^n$ für ein i. □

17.3.3.16. Sind $s, s' \subset S^n$ disjunkte Teilmengen, die homöomorph sind zu S^p beziehungsweise S^q mit $p + q = n - 1$, so kann man ihre **Verschlingungszahl** $v(s, s') \in \mathbb{N}$ definieren als den Betrag des Bildes der Eins unter $\mathbb{Z} \cong \tilde{\mathrm{H}}_p(s) \to \tilde{\mathrm{H}}_p(S^n \backslash s') \cong \mathbb{Z}$. Der Spezialfall $q = 0$ wird in 17.3.3.3 diskutiert. Mehr dazu findet man in [SZ94].

Übungen

Übung 17.3.3.17 (**Einbettungen von Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension**). Eine injektive stetige Abbildung von einer nichtleeren kompakten Mannigfaltigkeit in eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit derselben Dimension ist stets surjektiv. Hinweis: Invarianz von Gebieten 17.3.3.14.

17.3.4 Homologie von endlichen Zellkomplexen

Definition 17.3.4.1. Gegeben eine stetige Abbildung $f : Z \to X$ erklärt man ihren **Abbildungskegel** als den topologischen Raum

$$\mathrm{Keg}(f) = \mathrm{K}(f) := \big((Z \times [0,1]) \sqcup X \sqcup \mathrm{top}\big)/\sim$$

für $\mathrm{top} = \{*\}$ den einpunktigen Raum und die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt durch $f(z) \sim (z,0)$ sowie $(z,1) \sim *$ für alle $z \in Z$. Unsere Definition weicht im Fall $Z = \emptyset$ von der in der Literatur üblichen Definition ab.

Beispiel 17.3.4.2. Ist $n \geq 0$ und $f : S^{n-1} \to X$ eine stetige Abbildung, so sagt man auch, der Abbildungskegel $\mathrm{K}(f)$ entstehe aus X durch **Ankleben einer n-Zelle vermittels** f. Im Fall $n = 0$ alias $Z = \emptyset$ entsteht $\mathrm{K}(f)$ aus X durch die disjunkte Vereinigung mit einem Punkt; im Fall $n = 1$ durch das Ankleben einer Kante, wobei man ihre beiden Endpunkte mit den Punkten $f(-1)$ und $f(1)$ des Ausgangsraums identifiziert; im Fall $n = 2$ durch das Ankleben einer Kreisscheibe längs ihres Randkreises in der durch f vorgegebenen Weise, und so weiter.

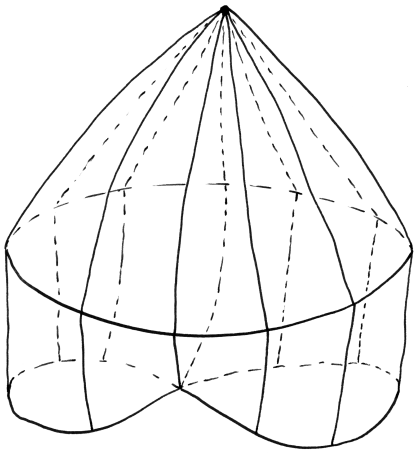
Satz 17.3.4.3 (**Anklebesequenz**). *Für jede stetige Abbildung $f : Z \to X$ gibt es in der reduzierten Homologie eine lange exakte Sequenz*

$$\ldots \to \tilde{\mathrm{H}}_q Z \to \tilde{\mathrm{H}}_q X \to \tilde{\mathrm{H}}_q \mathrm{K}(f) \to \tilde{\mathrm{H}}_{q-1} Z \to \ldots$$

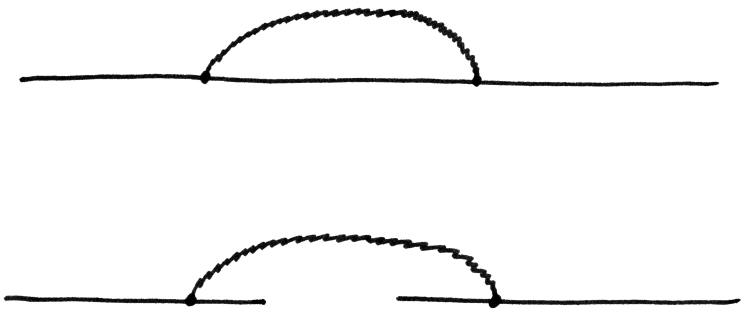
mit der Eigenschaft, daß die erste Abbildung von f induziert wird und die zweite von der Einbettung von X in den Abbildungskegel $\mathrm{K}(f)$.

Vorschau 17.3.4.4. In 17.3.5.7 zeigen wir mit mehr Mühe eine noch feinere Aussage, die sowohl die Beziehung unserer Sequenz zur langen exakten Homologiesequenz des Raumpaars $(\mathrm{K}(f), X)$ klärt als auch den Fall „simultaner Abbildungskegel“ einschließt.

17.3.4.5 (**Änderung der Homologie beim Ankleben einer Zelle**). Es können also anschaulich gesprochen beim Ankleben einer n-Zelle im wesentlichen zwei Dinge passieren: Entweder die angeklebte Zelle „füllt ein $(n-1)$-Loch“, als da heißt $\tilde{\mathrm{H}}_{n-1} S^{n-1} \to \tilde{\mathrm{H}}_{n-1} X$ ist eine Injektion und die $(n-1)$-te Homologie von X wird beim Ankleben entsprechend kleiner; Oder die angeklebte Zelle „schafft



Der Abbildungskegel der Abbildung, die eine Kreislinie Z zu einer Acht X zusammenzwickt. Die hier zu sehende Kreislinie in mittlerer Höhe ist das Bild von $Z \times \{1/2\}$ oder vielleicht auch eher von $Z \times \{1/4\}$ im Abbildungskegel.



Zwei Fälle des Anklebens einer Eins-Zelle, hier gezackt eingezeichnet. Im ersten Fall wird ein Eins-Loch geschaffen, im zweiten Fall ein Null-Loch geschlossen.

ein n-Loch", als da heißt $\tilde{\mathrm{H}}_{n-1}S^{n-1} \to \tilde{\mathrm{H}}_{n-1}X$ ist keine Injektion und die n-te Homologie von X wird beim Ankleben entsprechend größer. In diesem Fall kann sich natürlich die $(n-1)$-te Homologie auch noch etwas verkleinern, es wird eben eine endliche Untergruppe daraus weggeteilt, und das ist dann nicht mehr so leicht anschaulich zu machen. Sie können etwa versuchen, sich das Beispiel vorzustellen, daß an die reell projektive Ebene, die ja durch Ankleben einer Zweizelle längs des Randes eines Möbiusbandes entsteht, noch eine weitere Zweizelle längs der Kreislinie auf der Mitte besagten Möbiusbandes angeklebt wird. In jedem Fall gilt jedoch $\tilde{\mathrm{H}}_q X \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathrm{H}}_q \mathrm{K}(f)$ für $q \neq n, n-1$.

Beweis. Das Bild der ausgezeichneten einpunktigen Menge top im Abbildungskegel bezeichnen wir wieder mit top und das Bild von X wieder mit X. Wir erhalten so zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen des Abbildungskegels $K := \mathrm{K}(f)$, deren Komplemente eine offene Überdeckung $K = U \cup V$ bilden. Von diesen offenen Mengen ist $V := K \backslash X$ zusammenziehbar, und der Schnitt unserer beiden offenen Mengen kann identifiziert werden mit $U \cap V = Z \times (0,1)$. Die durch unsere Erkenntnis $\tilde{\mathrm{H}}_q V = 0$ vereinfachte Mayer-Vietoris-Sequenz der reduzierten Homologie hat dann die Gestalt

$$\ldots \to \tilde{\mathrm{H}}_q(U \cap V) \to \tilde{\mathrm{H}}_q(U) \to \tilde{\mathrm{H}}_q(K) \to \tilde{\mathrm{H}}_{q-1}(U \cap V) \to \ldots$$

Wendet man 17.3.4.7 auf $T := [0,1]$ und die die Topologie des Abbildungskegels definierende finale Abbildung an, so erkennt man leicht, daß die Einbettung $X \hookrightarrow U$ eine Homotopieäquivalenz ist. Wir erhalten sogar ein homotopiekommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z & \hookrightarrow & U \cap V \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \hookrightarrow & U \end{array}$$

durch $z \mapsto (z, 1/2)$ in der oberen Horizontalen mit Homotopieäquivalenzen in den Horizontalen. Der Satz ist bewiesen. $\square$

Vorschau 17.3.4.6 (**Algebraischer und topologischer Abbildungskegel**). Unsere Mayer-Vietoris-Sequenz aus dem vorhergehenden Beweis kommt nach 17.2.4.11 her von einer kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen, die wir im folgenden Diagramm in die oberen Horizontale geschrieben haben. Hierbei bedeutet $\mathcal{W}$ die offene Überdeckung $K = U \cup V$.

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mathrm{S}}(U \cap V) & \hookrightarrow & \tilde{\mathrm{S}}(U) \oplus \tilde{\mathrm{S}}(V) & \twoheadrightarrow & \tilde{\mathrm{S}}^{\mathcal{W}}(K) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr & & \\ \tilde{\mathrm{S}}(Z) & \to & \tilde{\mathrm{S}}(X) & & \end{array}$$

Die untere Horizontale stellt die von $f : Z \to X$ induzierte Abbildung dar und mit den durch unser homotopiekommutatives Diagramm vom Ende des vorhergehenden Beweises induzierten Vertikalen ensteht ein homotopiekommutatives

Diagramm von Komplexen freier abelscher Gruppen. Zusammen mit $\tilde{\mathrm{S}}^{\mathcal{W}}(K) \to \tilde{\mathrm{S}}(K)$ und 20.2.6.4 liefert das einen ausgezeichneten Isomorphismus $\mathrm{Keg}(\tilde{\mathrm{S}}(Z) \to \tilde{\mathrm{S}}(X)) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathrm{S}}(K)$ in der derivierten Kategorie $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ und zusammen mit 20.3.2.20 sogar in der Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab})$. Er rechtfertigt die Bezeichnung als Abbildungskegel für die rein algebraische Konstruktion Keg aus dem Beweis von 17.6.2.5.

Proposition 17.3.4.7. *Ist $p : X \to Y$ final und surjektiv und T lokal kompakt, so ist auch $p \times \mathrm{id} : X \times T \to Y \times T$ final und surjektiv.*

17.3.4.8. Wir geben in 15.1.9.15 einen alternativen Beweis.

Beweis. Sei $W \subset Y \times T$ eine Teilmenge mit offenem Urbild $U \Subset X \times T$. Es gilt zu zeigen, daß W selbst offen ist. Sei dazu $(y, t) \in W$ ein Punkt und (x, t) eines seiner Urbilder. Sicher gibt es eine kompakte Umgebung K von t mit $\{x\} \times K \subset U$. Man überlegt sich leicht, daß dann

$$A := \{a \in X \mid \{a\} \times K \subset U\}$$

offen ist in X und daß gilt $A = p^{-1}(p(A))$. Folglich ist $p(A)$ offen in Y und wir haben $(y, t) \in p(A) \times K \subset W$. Mithin liegt mit jedem Punkt auch eine ganze offene Umgebung des besagten Punktes in W und W ist offen. □

Korollar 17.3.4.9 (Endlichkeit der Homologie von endlichen Zellkomplexen). *Entsteht ein topologischer Raum X aus der leeren Menge durch sukzessives Anheften von endlich vielen Zellen, und heften wir dabei keine Zellen einer Dimension $> d$ an, so gilt $\mathrm{H}_q X = 0$ für $q > d$ und $\mathrm{H}_q X$ ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe für alle $q \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Man benutze für die zweite Aussage, daß bei einer kurzen exakten Sequenz abelscher Gruppen $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ die Mitte endlich erzeugt ist genau dann, wenn die Enden es sind. □

Beispiel 17.3.4.10 (**Homologie der komplex projektiven Räume**). Der $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ ergibt sich aus dem $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$ durch Anheften einer $2n$-Zelle. Betrachten wir genauer die Abbildung $F : D^{2n} \to \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ gegeben durch die Abbildungsvorschrift

$$z = (z_0, \ldots, z_{n-1}) \mapsto \langle z_0, \ldots, z_{n-1}, 1 - \|z\| \rangle$$

und nehmen ihre Restriktion zu $f : S^{2n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$ als Anklebeabbildung, so konstruiert man ohne Schwierigkeiten einen Homöomorphismus $\mathrm{K}(f) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ zwischen dem Abbildungskegel und $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$. Wir erhalten also

$$\mathrm{H}_q(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 2, \ldots, 2n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entsteht allgemeiner X aus der leeren Menge durch sukzessives Anheften von Zellen gerader Dimension, so verschwindet $\mathrm{H}_q X$ für ungerades q und für gerades q ist $\mathrm{H}_q X$ eine freie abelsche Gruppe, deren Rang gerade die Anzahl der angehefteten q-Zellen ist.

Satz 17.3.4.11 (**Eulercharakteristik von Zellkomplexen**). *Der Raum X entstehe aus der leeren Menge durch sukzessives Anheften von endlich vielen Zellen. Sei c_q die Zahl der verwendeten q-Zellen und sei k ein Körper. So wird die Eulercharakteristik von X gegeben durch die Formel*

$$\chi(X;k) = \sum (-1)^q c_q$$

Beweis. Ist $\ldots \to A_i \xrightarrow{\partial_i} A_{i-1} \to \ldots$ eine lange exakte Sequenz von endlichdimensionalen Vektorräumen und verschwinden von den A_i alle bis auf endlich viele, so gilt für die Eulercharakteristik unseres Komplexes

$$\sum (-1)^i \dim A_i = \sum (-1)^i \dim \mathcal{H}_i A = 0$$

nach 17.3.1.19. Schreiben wir unsere Sequenz in der Gestalt

$$\ldots \to D_{q+1} \to B_q \to C_q \to D_q \to B_{q-1} \to \ldots$$

so folgt

$$\sum (-1)^q \dim C_q = \sum (-1)^q \dim B_q + \sum (-1)^q \dim D_q$$

Nun läßt sich die Eulercharakteristik auch mithilfe der reduzierten Homologie darstellen als $\chi(X;k) - 1 = \sum (-1)^q \dim_k \tilde{\mathrm{H}}_q(X;k)$. Mit unserer Anklebesequenz folgt $\chi(X;k) - 1 = \chi(Y;k) - 1 + (-1)^n$, wenn X aus Y durch Ankleben einer n-Zelle entsteht. Der Satz ergibt sich nun mit Induktion. □

Ergänzung 17.3.4.12. Der vorhergehende Beweis könnte alternativ auch auf unserer Formel $\chi(U \cup V) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$ aus 17.3.1.27 aufgebaut werden: Diese Formel liefert sogar allgemeiner unter den offensichtlichen Endlichkeitsannahmen für $f : Z \to X$ stetig mit den im Beweis der Anklebesequenz diskutierten Argumenten die Formel

$$\chi(\mathrm{K}(f)) = \chi(X) + 1 - \chi(Z)$$

Man diese Formel jedoch auch direkt aus der Anklebesequenz folgern.

17.3.4.13. Gegeben ein topologischer Raum X erklärt man seine **Suspension** als den Abbildungskegel der konstanten Abbildung

$$\Sigma X := \mathrm{K}(X \to \mathrm{top})$$

Unsere Anklebesequenz liefert Isomorphismen $\tilde{\mathrm{H}}_{i+1}(\Sigma X) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathrm{H}}_i(X)$ für alle i. Unsere Definition weicht im Fall $X = \emptyset$ von der in der Literatur üblichen Definition ab.

Übungen

Übung 17.3.4.14. Man zeige, daß die Homologie der quaternionalen projektiven Räume gegeben wird durch $\mathrm{H}_q(\mathbb{P}^n\mathbb{H}) \cong \mathbb{Z}$ für $q = 0, 4, \ldots, 4n$ und Null sonst.

Übung 17.3.4.15. Man zeige, daß der Abbildungungskegel von $S^1 \to S^1$ gegeben durch $z \mapsto z^2$ homöomorph zur reell projektiven Ebene ist und berechne deren Homologie.

17.3.5 Zelluläre Homologie

Satz 17.3.5.1 (**Komplex der zellulären Homologie**). *Wir betrachten einen Raum X, der aus der leeren Menge ensteht durch das simultane Ankleben von durch $\alpha \in A_0$ indizierten Nullzellen gefolgt vom simultanen Ankleben von durch $\alpha \in A_1$ indizierten Einszellen und so weiter bis zum simultanen Ankleben von durch $\alpha \in A_n$ indizierten n-Zellen. So gibt es einen Komplex*

$$\mathbb{Z}A_n \to \mathbb{Z}A_{n-1} \to \ldots \to \mathbb{Z}A_1 \to \mathbb{Z}A_0$$

aus freien abelschen Gruppen über den Indexmengen der jeweiligen Zellen, der die Homologie von X berechnet.

17.3.5.2. Bezeichne $\emptyset = X^{\leq -1} \subset X^{\leq 0} \subset X^{\leq 1} \subset \ldots \subset X^{\leq n} = X$ die zugehörige Folge von Teilräumen. Mit „simultanem Ankleben“ ist gemeint, daß die Anklebeabbildungen der q-Zellen jeweils Werte in $X^{\leq q-1}$ annehmen. Wir nennen $X^{\leq q}$ das q**-Skelett**.

17.3.5.3. Wir gehen dabei von der Erkenntnis 17.3.4.2 aus, daß das Ankleben einer Zelle als Abbildungskegel beschrieben werden kann, und untersuchen erst einmal ganz allgemein die Homologie simultaner Abbildungskegel.

17.3.5.4. Die Differentiale in diesem Komplex entstehen aus den Anklebeabbildungen in einer im weiteren genauer spezifizierten Weise. Seien $X_q \supset X_{q-1}$ das q-Skelett und das $(q-1)$-Skelett. Für $\alpha \in A_q$ sei $i_\alpha : (D_q, S_{q-1}) \to (X_q, X_{q-1})$ das Einfügen der n-Zelle mit Index α mit der auf dem Rand induzierten Anklebeabbildung $f_\alpha : S_{q-1} \to X_{q-1}$. Sei $\eta_q \in \mathrm{H}_q(D_q, S_{q-1})$ unser Standarderzeuger aus 17.2.3.10. So haben wir Isomorphismen

$$\mathbb{Z}A_q \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X_q, X_{q-1})$$

gegeben durch $\alpha \mapsto (\mathrm{H}_q i_\alpha)(\eta_q)$ zwischen dem q-Term des Komplexes der zellulären Homologie und der q-ten relativen Homologie der entsprechenden Skelette.

17.3.5.5. Die Abbildung von Raumpaaren $i_\alpha : (D_q, S_{q-1}) \to (X_q, X_{q-1})$ induziert eine Abbildung zwischen den jeweiligen langen exakten Homologiesequenzen und insbesondere das kommutative Quadrat im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}_q(D_q, S_{q-1}) & \tilde{\to} & \tilde{\mathrm{H}}_{q-1}(S_{q-1}) & & \mathbb{Z}A_{q-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \wr \\ \mathrm{H}_q(X_q, X_{q-1}) & \to & \tilde{\mathrm{H}}_{q-1}(X_{q-1}) & \to & \mathrm{H}_{q-1}(X_{q-1}, X_{q-2}) \end{array}$$

Die linke obere Horizontale ist ein Isomorphismus, da D_q zusammenziehbar ist. Ich habe reduzierte Homologie genommen, damit gilt $\tilde{\mathrm{H}}_0(D_q) = 0$ für $q \geq 0$. Das Bild von η_q obenrum nach $\mathbb{Z}A_{q-1}$ ist die Definition des Randoperators im zellulären Komplex. Das Bild untenrum ist eine alternative Definition.

Beweis. Der Beweis wir in 17.3.5.10 gegeben. □

17.3.5.6. Sei $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie stetiger Abbildungen $f_\alpha : Z_\alpha \to X$. Um die Notation zu vereinfachen setzen wir $Z := \bigsqcup Z_\alpha$ und bezeichnen mit $i : Z \to A$ die „Indexabbildung“ mit Faser Z_α über $\alpha \in A$. Unter dem **simultanen Abbildungskegel der** f_α verstehen wir den Raum

$$K := \big(X \sqcup (Z \times [0,1]) \sqcup A\big)/\sim$$

für die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt durch $f(z) \sim (z, 0)$ sowie $(z, 1) \sim i(z)$ für alle $z \in Z$.

Satz 17.3.5.7 (Anklebesequenz, Variante). *Ist $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie stetiger Abbildungen $f_\alpha : Z_\alpha \to X$ und K der simultane Abbildungskegel 17.3.5.6 der f_α, so gibt es Isomorphismen $\bigoplus_{\alpha \in A} \tilde{\mathrm{H}}_q Z_\alpha \tilde{\to} \mathrm{H}_{q+1}(K, X)$, deren Verknüpfung mit dem Randoperator der langen exakten Homologiesequenz des Raumpaars (K, X) die von den f_α induzierte Abbildung $\bigoplus_{\alpha \in A} \tilde{\mathrm{H}}_q Z_\alpha \to \mathrm{H}_q X$ ist. Insbesondere können wir diese Abbildungen einbetten in eine lange exakte Sequenz*

$$\ldots \to \bigoplus_{\alpha \in A} \tilde{\mathrm{H}}_q Z_\alpha \to \mathrm{H}_q X \to \mathrm{H}_q \mathrm{K} \to \bigoplus_{\alpha \in A} \tilde{\mathrm{H}}_{q-1} Z_\alpha \to \ldots$$

17.3.5.8. Für die Isomorphismen, deren Existenz in diesem Satz behauptet wird, geben wir im Beweis sogar eine explizite Konstruktion. Der Satz gilt ebenso und mit fast demselben Beweis, wenn wir darin alle Homologiegruppen zu reduzierten Homologiegruppen machen.

Beweis. Die Bilder von A und X in K sind disjunkte abgeschlossene Teilmengen. Deren Komplemente bilden eine offene Überdeckung $K = U \cup V$, wobei sich $i : K \to A$ zu einer stetigen Abbildung $i : V \to A$ mit zusammenziehbaren Fasern ausdehnen läßt. Gegeben eine stetige Abbildung in einen diskreten Raum $i : Y \to A$ vereinbaren wir die Notation $\tilde{\mathrm{S}}_A Y$ für den durch $i_* : \mathrm{S}_0 Y \to \mathrm{S}_0 A$ bis

in den Grad -1 erweiterten Komplex der singulären Ketten. Insbesondere ist $\tilde{\mathrm{S}}_A V$ exakt. Wir nennen unsere offene Überdeckung $\mathcal{W}$ und betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\tilde{\mathrm{S}}_A(U \cap V) & \hookrightarrow & \mathrm{S}U \oplus \tilde{\mathrm{S}}_A V & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}^{\mathcal{W}} K & & \\
 & & \uparrow & & \| & & \\
 & & \mathrm{S}U & \hookrightarrow & \mathrm{S}^{\mathcal{W}} K & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}^{\mathcal{W}} K/\mathrm{S}U \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathrm{S}U & \hookrightarrow & \mathrm{S}K & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}K/\mathrm{S}U
\end{array}$$

mit kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen in den Horizontalen und hoffentlich offensichtlichen Abbildungen. Es liefert mit der erweiterten Natürlichkeit 17.2.2.16 der langen exakten Homologiesequenz und unter Verwendung der Exaktheit des Komplexes $\tilde{\mathrm{S}}_A V$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \bigoplus_{\alpha \in A} \tilde{\mathrm{H}}_q(U \cap V_\alpha) & \to & \mathrm{H}_q U & \to & \mathrm{H}_q K & \xrightarrow{-1} & \bigoplus_{\alpha \in A} \tilde{\mathrm{H}}_{q-1}(U \cap V_\alpha) & \dots \\
 & \uparrow & & \| & & \| & & \uparrow & \\
\dots & \tilde{\mathrm{H}}_{q+1}(K, U) & \to & \mathrm{H}_q U & \to & \mathrm{H}_q K & \to & \tilde{\mathrm{H}}_q(K, U) & \dots
\end{array}$$

Die -1 meint dabei an der entsprechenden Stelle das Negative der Randabbildung der Mayer-Vietoris-Sequenz gefolgt von der natürlichen Abbildung in die reduzierte Homologie. Nun ist die Einbettung $X \hookrightarrow U$ eine Homotopieäquivalenz und die $U \cap V_\alpha$ sind homöomorph zu $Z_\alpha \times (0,1)$ und wir können den Beweis wie im Fall 17.3.4.3 eines einfachen Abbildungskegels zu Ende bringen. □

17.3.5.9 (**Ankleben mehrerer Zellen auf einmal**). Seien $n \geq 0$ fest gewählt und $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie stetiger Abbildungen $f_\alpha : S^{n-1} \to X$ und K der Raum, der aus X entsteht durch Ankleben von Zellen D^n vermittels der Abbildungen f_α alias der simultane Abbildungskegel der f_α. So haben wir $\mathrm{H}_q(K, X) = 0$ für $q \neq n$ und unsere Konstruktionen liefern einen Isomorphismus $\mathbb{Z}A \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(K, X)$, dessen Verknüpfung

$$\mathbb{Z}A \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(K, X) \to \mathrm{H}_{n-1} X$$

mit dem Randoperator der langen exakten Homologiesequenz des Paars (K, X) von den f_α induziert wird in der Weise, daß darunter ein Element $\alpha \in A$ abgebildet wir auf das Bild unseres Standarderzeugers von $\tilde{\mathrm{H}}_{n-1} S^{n-1}$ aus 17.2.3.10 unter f_α. Nehmen wir zusätzlich $\mathrm{H}_n X = 0$ an, so erhalten wir eine exakte Vier-Term-Sequenz

$$\mathrm{H}_n K \hookrightarrow \mathbb{Z}A \to \mathrm{H}_{n-1} X \twoheadrightarrow \mathrm{H}_{n-1} K$$

und Isomorphismen $\mathrm{H}_q X \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q K$ für $q \notin \{n, n-1\}$.

17.3.5.10 (**Zelluläre Homologie**). Wir betrachten nun einen Raum X, der aus der leeren Menge ensteht durch das Ankleben von durch $\alpha \in A_0$ indizierten Nullzellen gefolgt vom Ankleben von durch $\alpha \in A_1$ indizierten Einszellen und so weiter

bis zum Ankleben von durch $\alpha \in A_n$ indizierten n-Zellen. Bezeichne

$$\emptyset = X^{\leq -1} \subset X^{\leq 0} \subset X^{\leq 1} \subset \ldots \subset X^{\leq n} = X^{\leq n+1} = \ldots = X$$

die zugehörige Folge von Teilräumen. So liefert 17.3.5.9 induktiv erst Isomorphismen

$$0 = \mathrm{H}_q X^{\leq -1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q X^{\leq 0} \xrightarrow{\sim} \ldots \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q X^{\leq q-1} \qquad \mathrm{H}_q X^{\leq q+1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q X^{\leq q+2} \xrightarrow{\sim} \ldots$$

und dann kommutative Diagramme mit einer exakten Vier-Term-Sequenz in der oberen Horizontale

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{H}_q X^{\leq q} & \hookrightarrow & \mathrm{H}_q(X^{\leq q}, X^{\leq q-1}) & \to & \mathrm{H}_{q-1} X^{\leq q-1} & \twoheadrightarrow & \mathrm{H}_{q-1} X^{\leq q} \\
 & & \uparrow\wr & & \| & & \\
 & & \bigoplus_{\alpha \in A_q} \tilde{\mathrm{H}}_{q-1} S^{\leq q-1} & \to & \mathrm{H}_{q-1} X^{\leq q-1} & & \\
 & & \uparrow\wr & & & & \\
 & & \mathbb{Z} A_q & & & &
\end{array}$$

und mit der wie im Diagramm dargestellt durch die Anklebeabbildungen gegebenen mittleren Abbildung. Das führt unmittelbar zu der Erkenntnis, daß die Homologie von X isomorph ist zur Homologie des aus dem Zusammenstückeln dieser Vier-Term-Sequenzen entstehenden Komplexes

$$\ldots \to \mathbb{Z} A_{q+1} \to \mathbb{Z} A_q \to \mathbb{Z} A_{q-1} \to \ldots$$

alias des Komplexes

$$\ldots \to \mathrm{H}_{q+1}(X^{\leq q+1}, X^{\leq q}) \to \mathrm{H}_q(X^{\leq q}, X^{\leq q-1}) \to \mathrm{H}_{q-1}(X^{\leq q-1}, X^{\leq q-2}) \to \ldots$$

Die Randoperatoren kommen hier von den langen exakten Homologiesequenzen der entsprechenden Tripel 17.2.2.10 her. Die Homologie dieses Komplexes nennt man auch die **zelluläre Homologie**. Im übrigen liefert 17.2.4.15 Isomorphismen $\mathrm{H}_q(X^{\leq q}, X^{\leq q-1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X^{\leq q}/X^{\leq q-1}, *)$ und $X^{\leq q}/X^{\leq q-1}$ ist ein Bouquet von q-Sphären, genauer eine durch A_q indizierte Familie von an einem Punkt $*$ zusammengeklebten q-Sphären. Das mag zusätzliche Anschauung für die Randabbildungen des zellulären Komplexes geben.

Vorschau 17.3.5.11 (**Zelluläre Homologie von CW-Komplexen**). Im Fall eines sogenannten CW-Komplexes X mit n-Skeletten $X^{\leq n}$ liefern die Einbettungen nach 17.7.1.28 Isomorphismen $\mathrm{H}_n X^{\leq n+1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n X$. Folglich können wir auch die Homologie eines CW-Komplexes in der in 17.3.5.10 beschriebenen Weise berechnen.

17.4 Homologie von Mannigfaltigkeiten

17.4.1 Homologie und Orientierung

Satz 17.4.1.1 (Homologie und Determinantenvorzeichen). *Gegeben eine invertierbare lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^n \tilde{\to} \mathbb{R}^n$ ist die davon induzierte Selbstabbildung g_* auf der relativen Homologie $\mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash 0)$ die Identität im Fall $\det(g) > 0$ und die Multiplikation mit (-1) im Fall $\det(g) < 0$.*

17.4.1.2. Wir verwenden hier die Konvention, nach der die Identität auf dem Nullvektorraum die Determinante Eins hat.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n > 0$. Nach 12.7.5.19 hat dann $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten, die Matrizen mt positiver Determinante und die Matrizen mit negativer Determinante. Homotopieinvarianz zeigt dann, daß g_* nur vom Vorzeichen von $\det(g)$ abhängen kann. Jetzt bette man den Standardsimplex Δ_n so nach $\mathbb{R}^n$ ein, daß alle seine Ecken bis auf Zwei in ein- und derselben Koordinatenebene zu liegen kommen, daß die restlichen beiden Ecken unter der Spiegelung an dieser Koordinatenebene vertauscht werden, und daß der Ursprung im offenen Kern des Bildes liegt. Diese Einbettung liefert einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}_n(\Delta_n, \partial\Delta_n) \tilde{\to} \mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash 0)$$

Der Effekt der fraglichen Spiegelung kann auf der simplizialen Homologie der linken Seite leicht berechnet werden und ergibt sich dort zu (-1), da die fragliche Permutation der Ecken von Δ_n eine Transposition und damit ungerade ist. □

Korollar 17.4.1.3 (Nullstellenfreie Vektorfelder auf Sphären). *Genau dann gibt es auf der n-Sphäre S^n ein nirgends verschwindendes stetiges Vektorfeld, wenn ihre Dimension n ungerade ist.*

Beweis. Ein Vektorfeld ist für uns eine stetige Abbildung $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ derart, daß $v(x)$ senkrecht steht auf x für alle x, in Formeln $x \perp v(x)\ \forall x \in S^n$. Ist n ungerade, so können wir ein mögliches v angeben durch

$$v(x_0, \ldots, x_n) = (x_1, -x_0, x_2, -x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$$

In jedem Fall können wir ein nirgends verschwindendes Vektorfeld v auf Länge Eins normieren. Es definiert dann eine Familie von Abbildungen $\varphi_t : S^n \to S^n$, bei der $\varphi_t(x)$ der Punkt ist, an dem man landet, wenn man von x in Richtung $v(x)$ für die Zeit t auf dem entsprechenden Großkreis um die Sphäre läuft, in Formeln $\varphi_t(x) = (\cos t)x + (\sin t)v(x)$. So erhalten wir nun offensichtlich eine

Homotopie zwischen der Identität und der Antipodenabbildung $a = \varphi_\pi : S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$ und folgern $\tilde{\mathrm{H}}_n(a) = \mathrm{id}$ auf $\tilde{\mathrm{H}}_n(S^n)$. Da aber die Einbettung $S^n \hookrightarrow (\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0)$ eine Homotopieäquivalenz ist und da folglich gilt $\tilde{\mathrm{H}}_n(a) = (-1)^{n+1}\,\mathrm{id}$ auf $\tilde{\mathrm{H}}_n(\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0)$, kann es eine derartige Homotopie nur für ungerades n geben. $\square$

Übungen

Übung 17.4.1.4 (**Algebraische und topologische Orientierung**). Jedem endlichdimensionalen Vektorraum V über einem angeordneten Körper k hatten wir in der linearen Algebra eine zweielementige Orientierungsmenge oder ausführlicher seine **algebraische Orientierungsmenge** $\mathrm{or}(V) = \mathrm{or}^{\mathrm{alg}}(V)$ zugeordnet und sogar einen Funktor

$$\mathrm{or}^{\mathrm{alg}} : \mathrm{Modf}_k^\times \to \mathrm{Ens}$$

erklärt. Eine algebraische Orientierung von V war dort eine Vorschrift ε, die jeder angeordneten Basis $\mathcal{A}$ von V ein Vorzeichen $\varepsilon(\mathcal{A})$ so zuordnet, daß diese Vorzeichen mit den Vorzeichen der Basiswechselmatrizen verträglich sind. Jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V ordnen wir seine **topologische Orientierungsmenge** $\mathrm{or}^{\mathrm{top}}(V)$ zu als die Menge der beiden Erzeuger von $\mathrm{H}_n(V, V\backslash 0)$ und erhalten so einen weiteren Funktor

$$\mathrm{or}^{\mathrm{top}} : \mathrm{Modf}_{\mathbb{R}}^\times \to \mathrm{Ens}$$

Zu jeder angeordneten Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums V betrachten wir nun denjenigen Erzeuger $\eta_{\mathcal{A}} \in \mathrm{H}_n(V, V\backslash 0)$, der durch den affinen n-Simplex $[\big(-\sum v_i\big), v_1, \ldots, v_n]$ repräsentiert wird, und erklären unsere **Standardtransformation**

$$\mathrm{std} : \mathrm{or}^{\mathrm{alg}} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{or}^{\mathrm{top}}$$

durch die Vorschrift $\mathrm{std}_V : \varepsilon \mapsto \varepsilon(\mathcal{A})\eta_{\mathcal{A}}$. Man zeige, daß das wohldefiniert ist. Wir zeigen in 18.4.1.17, daß diese Standardtransformation eine von zwei möglichen „Transformationen von Schmelzfunktoren“ ist für die natürlichen Erweiterungen von $\mathrm{or}^{\mathrm{alg}}$ und $\mathrm{or}^{\mathrm{top}}$ zu „Schmelzfunktoren“, die wir ebenfalls dort besprechen. Solch eine Schmelztransformation ist dann bereits festgelegt und festlegbar durch die davon induzierte Bijektion $\mathrm{or}^{\mathrm{alg}}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}^{\mathrm{top}}(\mathbb{R})$.

Beispiel 17.4.1.5. Im Fall der angeordneten Standardbasis $\mathcal{S}(n)$ des $\mathbb{R}^n$ ist $\eta_{\mathcal{S}(n)} = \eta_n$ unser Standarderzeuger aus 17.2.3.10.

Übung 17.4.1.6 (**Verträglichkeiten im Zusammenhang mit Orientierungen**).

Man zeige die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} \mathrm{or}^{\mathrm{alg}} \arrow[r, Rightarrow, "\mathrm{std}", "\sim"'] \arrow[d, Rightarrow, "\wr"', "\mathrm{std}"] & \mathrm{or}^{\mathrm{top}} \arrow[d, Rightarrow, "\wr"', "\partial"] \\ \mathrm{dreh} \arrow[r, Rightarrow, "\mathrm{hur}", "\sim"'] & \mathrm{or}^{\mathrm{top}}_{\mathrm{abs}} \end{tikzcd}$$

in $\mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}(2)^{\times}, \mathrm{Ens})$ von Funktoren und Transformationen mit unten rechts dem Funktor $\mathrm{or}^{\mathrm{top}}_{\mathrm{abs}}$, der jedem zweidimensionalen reellen Vektorraum V die Menge der beiden Erzeuger von $\mathrm{H}_1(V\backslash 0)$ zuordnet, mit den Standardisomorphismen aus der oberen linken Ecke nach rechts aus 17.4.1.4 und nach unten zur Menge der beiden Drehsinne aus 16.1.8.5 und dem Randoperator der langen exakten Homologiesequenz $\partial : \mathrm{H}_2(V, V\backslash 0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_1(V\backslash 0)$ in der rechten Vertikale und dem Hurewicz-Isomorphismus 17.1.5.2 in der unteren Horizontale.

Übung 17.4.1.7. Gegeben ein endliches angeordnetes minimales Erzeugendensystem $p_0, p_1, \ldots, p_n$ eines reellen affinen Raums E erinnern wir die zugehörige algebraische Orientierung von $\vec{E}$ aus 3.6.5.21 durch die angeordnete Basis $p_1 - p_0, \ldots, p_n - p_0$. Sei s der Schwerpunkt der p_i. Man zeige, daß die unter unserer Standardidentifikation aus 17.4.1.4 zugehörige topologische Orientierung alias der zugehörige Erzeuger von $\mathrm{H}_n(\vec{E}, \vec{E}\backslash 0)$ durch den Simplex $\Delta_n \to \vec{E}$ mit $\mathrm{e}_i \mapsto p_i - s$ repräsentiert wird.

Übung 17.4.1.8 (**Orientierung und Vorzeichen der Funktionaldeterminante**). Gegeben $A, B \Subset \mathbb{R}^n$ offene Umgebungen des Ursprungs und $g : A \xrightarrow{\sim} B$ ein Diffeomorphismus mit $g(0) = 0$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_n(A, A\backslash 0) & \to & \mathrm{H}_n(B, B\backslash 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash 0) & \to & \mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash 0) \end{array}$$

mit dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante $\det(\mathrm{d}_0 g)$ als unterer Horizontale. Hinweis: Für vom Ursprung verschiedene Punkte p nahe am Ursprung gilt die Abschätzung $\|g(p) - (\mathrm{d}_0 g)(p)\| < \|(\mathrm{d}_0 g)(p)\|$.

17.4.2 Orientierung von Mannigfaltigkeiten

17.4.2.1. Unter einer **topologischen Mannigfaltigkeit der Dimension** n oder kurz n**-Mannigfaltigkeit** verstehen wir wie in 15.1.4.3 einen Hausdorffraum X derart, daß jeder Punkt $p \in X$ eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph ist zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Viele Autoren fordern von einer Mannigfaltigkeit zusätzlich, daß sie „parakompakt“ sein soll oder sogar „abzählbar basiert“. Wir werden solche Bedingungen stets explizit erwähnen. Vorerst sind sie für uns belanglos.

17.4.2.2. Sei M eine n-Mannigfaltigkeit. Für jeden Punkt $x \in M$ ist die relative Homologie $\mathrm{H}_n(M, M\backslash x)$ alias die n-te lokale Homologie des bepunkteten Raums (M, x) frei vom Rang Eins nach Ausschneidung 17.2.4.10 und den Resultaten 17.2.3.9 über die Homologie von Sphären.

Definition 17.4.2.3. Eine **Orientierung**, genauer **topologische Orientierung** einer n-Mannigfaltigkeit ist eine Zuordnung ω, die jedem Punkt $x \in M$ einen Erzeuger ω_x von $\mathrm{H}_n(M, M\backslash x)$ zuordnet und zwar so, daß gilt: Für alle $x \in M$ gibt es eine Umgebung U von x und ein Element $\omega_U \in \mathrm{H}_n(M, M\backslash U)$ derart, daß für alle $y \in U$ gilt $\omega_U \mapsto \omega_y$ unter der natürlichen Abbildung $\mathrm{H}_n(M, M\backslash U) \to \mathrm{H}_n(M, M\backslash y)$. Wir nennen ω_x die **lokale Orientierung** zur „globalen Orientierung“ ω.

17.4.2.4 (**Bezug zur Orientierung aus der linearen Algebra**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V liefert die in 17.4.1.4 ausgezeichnete Standardbijektion std_V zwischen $\mathrm{or}(V)$ und der Menge der Erzeuger von $\mathrm{H}_n(V, V\backslash 0)$ eine Bijektion zwischen der Menge der Orientierungen auf V im Sinne der linearen Algebra und der Menge der topologischen Orientierungen von V als Mannigfaltigkeit.

17.4.2.5. Gegeben Räume $M \supset A \supset B$ notieren wir die natürliche Abbildung $\mathrm{H}_n(M, M\backslash A) \to \mathrm{H}_n(M, M\backslash B)$ im weiteren Verlauf kurz $\eta \mapsto \eta|_B$, so daß wir etwa eben statt $\omega_U \mapsto \omega_y$ auch $\omega_U|_y = \omega_y$ hätten schreiben dürfen.

17.4.2.6 (**Bezug zur Orientierung aus der Analysis**). In 12.8.3.3 hatten wir eine Orientierung einer Mannigfaltigkeit, genauer einer eingebetteten n-dimensionalen $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeit M, erklärt als eine Vorschrift, die an jedem Punkt dem eine algebraische Orientierung des Tangentialraums auszeichnet derart, daß noch gewisse zusätzliche Eigenschaften erfüllt sind. Zu jeder derartigen **analytischen Orientierung von** M konstruieren wir eine topologische Orientierung, indem wir von $\mathbb{R}^n$ mit seiner Standardorientierung 3.6.5.2 ausgehen und mit unserer Standardbijektion 17.4.1.4 eine topologische Orientierung von $\mathbb{R}^n$ konstruieren. Sie wird gegeben durch einen Erzeuger von $\mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash 0)$, den wir den **Standarderzeuger** nennen. Durch Verschieben und Ausschneidung erhalten wir daraus Erzeuger der relativen Homologie $\mathrm{H}_n(W, W\backslash p)$ für beliebige $p \in W \Subset \mathbb{R}^n$. Gegeben eine Karte (W, φ) der Orientierung ε im Sinne von 12.8.3.9 wählen wir dann die Bilder der ε-fachen dieser Erzeuger unter den von φ induzierten Abbildungen $\mathrm{H}_n(W, W\backslash p) \to \mathrm{H}_n(M, M\backslash \varphi(p))$ als Erzeuger auf der rechten Seite. Führen wir das für alle zusammenhängenden Karten durch, so erhalten wir wegen der Beziehung 17.4.1.8 zwischen dem Erhalten der Orientierung und dem Vorzeichen der Funktionaldeterminate eine wohldefinierte topologische Orientierung auf M. Offensichtlich erhalten wir so für jede $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeit M eine Bijektion zwischen der Menge der analytischen Orientierungen von M und der Menge der topologischen Orientierungen von M.

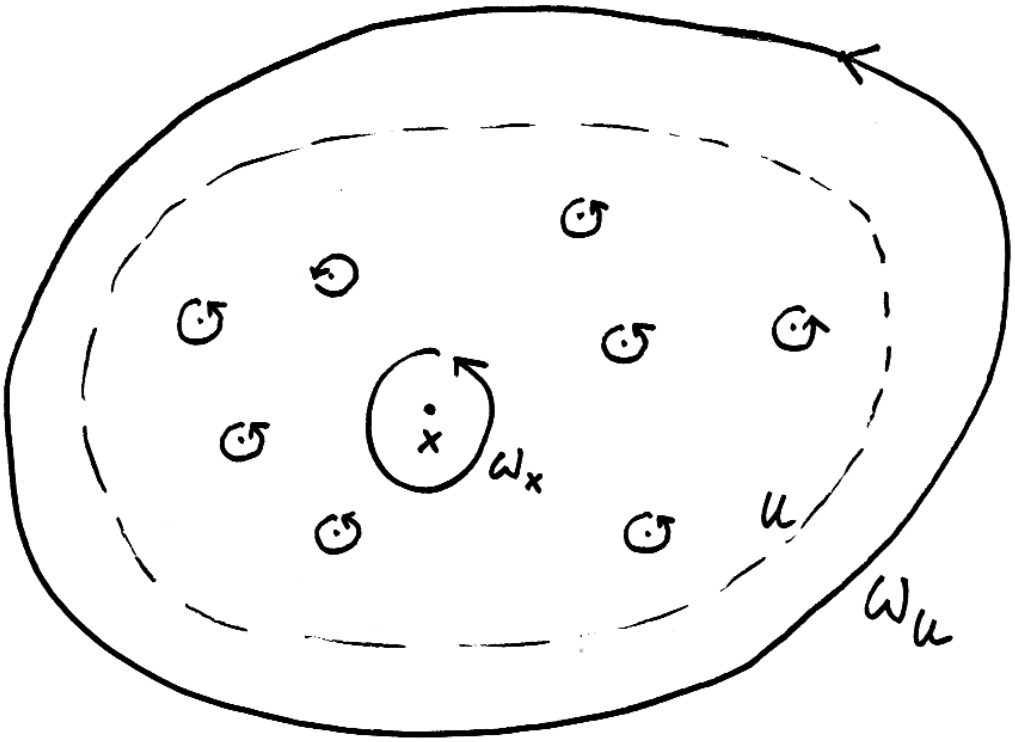


Illustration der Definition einer Orientierung. Die ganzen Punkte $y \in U$ sind nicht beschriftet, erben aber ihre Orientierung von einem gemeinsamen ω_U. Die Homologieklassen habe ich durch Erzeuger angedeutet.

Definition 17.4.2.7. Eine Mannigfaltigkeit, die mindestens eine Orientierung besitzt, heißt **orientierbar**. Unter einer **orientierten Mannigfaltigkeit** verstehen wir eine Mannigfaltigkeit mit einer ausgezeichneten Orientierung. Eine Orientierung auf M induziert in offensichtlicher Weise eine Orientierung auf jeder offenen Teilmenge von M.

Lemma 17.4.2.8 (**Kriterium für die Gleichheit von Orientierungen**). *Stimmen zwei Orientierungen einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit in einem Punkt überein, so sind sie gleich.*

Beweis. Seien M unsere zusammenhängende Mannigfaltigkeit und ω, η unsere beiden Orientierungen. Sei $x \in M$ gegeben mit $\omega_x = \eta_x$. Wir zeigen, daß es eine Umgebung U von x gibt mit $\omega_y = \eta_y \ \forall y \in U$. Sicher dürfen wir dazu annehmen $M = \mathbb{R}^n$. Per definitionem gibt es einen offenen Ball U um x und Elemente $\omega_U, \eta_U \in \mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash U)$ mit $\omega_U \mapsto \omega_y$ und $\eta_U \mapsto \eta_y \ \forall y \in U$. Da aber für so ein U die Einbettung Isomorphismen

$$\mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash y)$$

induziert für alle $y \in U$, folgt aus $\omega_x = \eta_x$ bereits $\omega_U = \eta_U$ und dann $\omega_y = \eta_y \ \forall y \in U$. Die Mengen $M_\pm$ aller $x \in M$ mit $\omega_x = \pm\eta_x$ sind folglich offen. Damit ist $M = M_+ \sqcup M_-$ eine Zerlegung in zwei disjunkte offene Teilmengen. Da nach Annahme M_+ nicht leer ist und M zusammenhängend, folgt $\omega = \eta$. $\square$

Definition 17.4.2.9. Etwas formaler betrachten wir die Menge

$$\mathrm{or} = \mathrm{or}_M := \bigsqcup_{x \in M} \mathrm{H}_n(M, M \backslash x)$$

und versehen sie mit der Topologie, die erzeugt wird von allen Teilmengen der Gestalt $\mathcal{O}(U, \omega) = \{\omega|_x \mid x \in U\}$ für $U \Subset M$ und $\omega \in \mathrm{H}_n(M, M \backslash U)$. Wir nennen or_M die **Orientierungsgarbe** von M. Die offensichtliche Abbildung $p : \mathrm{or}_M \to M$ ist stetig, denn das Urbild von $U \Subset M$ kann beschrieben werden als die Vereinigung aller $\mathcal{O}(V, \omega)$ mit $V \Subset U$.

Vorschau 17.4.2.10. Nach dem anschließenden Lemma 17.4.2.12 ist $\mathrm{or}_M \to M$ eine Überlagerung und damit in einer Terminologie, die wir in 19.2.2 einführen, der „étale Raum einer abelschen Garbe auf M“. In dieser Terminologie bedeutet unsere Konstruktion der Orientierungsgarbe die „Garbifizierung der Prägarbe $U \mapsto \mathrm{H}_n(M, M \backslash U)$“.

Beispiel 17.4.2.11 (**Trivialisierung der Orientierungsgarbe von** $\mathbb{R}^n$). Wir konstruieren einen Homöomorphismus $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_{\mathbb{R}^n}$ oder vielmehr und noch natürlicher einen Homöomorphismus

$$\mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash 0) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_{\mathbb{R}^n}$$

wie folgt: Jedem Paar (ω_0, x) wird dasjenige $\omega_x \in \mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash x)$ zugeordnet mit der Eigenschaft, daß es für einen und jeden Ball $B \Subset \mathbb{R}^n$ mit Zentrum im Ursprung und $x \in B$ ein $\omega_B \in \mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash B)$ gibt mit $\omega_B|_0 = \omega_0$ und $\omega_B|_x = \omega_x$. Wegen der für alle $x \in B$ von der Einbettung induzierten Isomorphismen $\mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash x)$ ist damit ω_x wohldefiniert, und daß unsere Abbildung eine Bijektion ist scheint mir offensichtlich. Sie ist stetig, da das Urbild jedes $\mathcal{O}(U, \omega)$ für einen Ball $U \Subset \mathbb{R}^n$ offen ist, und da diese Mengen auch schon die Topologie der Orientierungsgarbe erzeugen. Sie ist offen, da diese Urbilder sogar die Topologie der linken Seite erzeugen, wie der Leser unschwer einsehen wird.

Lemma 17.4.2.12. *Ist $V \Subset M$ eine offene Teilmenge, so haben wir mit den offensichtlichen Abbildungen ein kartesisches Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{or}_V \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{or}_M \arrow[d] \\ V \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

In anderen Worten liefert in diesem Diagramm also die obere Horizontale einen Homöomorphismus von or_V mit dem Urbild von V in or_M.

Ergänzung 17.4.2.13. Insbesondere ist also nach dem vorhergehenden Beispiel 17.4.2.11 die natürliche Projektion $\mathrm{or}_M \to M$ eine Überlagerungsabbildung.

Beweis. Mit der offensichtlichen Abbildung $\mathrm{or}_V \to \mathrm{or}_M$ meinen wir die durch die natürlichen Abbildungen $\mathrm{H}_n(V, V \backslash x) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(M, M \backslash x)$ erklärte Injektion $\mathrm{can} : \mathrm{or}_V \hookrightarrow \mathrm{or}_M$. Wir zeigen zunächst, daß sie stetig ist. Es gilt also zu zeigen, daß die Urbilder aller $\mathcal{O}(U, \omega_U)$ offen sind. In der Tat können wir das Urbild einer solchen Menge aber schreiben als

$$\mathrm{can}^{-1}(\mathcal{O}(U, \omega_U)) = \bigcup_{W \Subset U \cap V,\ \bar{W} \subset V} \mathcal{O}_V(W, \omega_U|_W)$$

wo wir mit $\omega_U|_W$ das Bild von ω_U unter

$$\mathrm{H}_n(M, M \backslash U) \to \mathrm{H}_n(M, M \backslash W) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}_n(V, V \backslash W)$$

meinen und mit $\mathcal{O}_V(\ ,\ )$ die definitionsgemäßen Erzeuger der Topologie auf or_V bezeichnen. Ähnlich aber einfacher erkennt man, daß unsere Injektion $\mathrm{can} : \mathrm{or}_V \to \mathrm{or}_M$ offen ist. Mithin trägt or_V die von or_M induzierte Topologie, und dann folgt ohne weitere Schwierigkeiten, daß unser Diagramm kartesisch ist. $\square$

17.4.2.14. Die Teilmenge $\mathrm{or}_M^\times \subset \mathrm{or}_M$, die aus allen Erzeugern von $\mathrm{H}_n(M, M\backslash x)$ für die verschiedenen $x \in M$ besteht, ist eine zweiblättrige Überlagerung von M. Wir nennen sie die **Orientierungsüberlagerung**. Eine Orientierung von M ist nichts anderes als ein Lift $M \to \mathrm{or}_M^\times$ der Identität auf M alias ein stetiger Schnitt dieser Überlagerung. Insbesondere ist M orientierbar genau dann, wenn $\mathrm{or}_M^\times \to M$ eine triviale Überlagerung ist. Damit erweist sich das Kriterium 17.4.2.8 für die Gleichheit von Orientierungen als eine Konsequenz aus Satz 16.3.4.10 über die Eindeutigkeit von Lifts. Ist M zusammenhängend und $x \in M$ fest gewählt, so liefert diese Überlagerung eine Operation der Fundamentalgruppe $\pi_1(M, x)$ auf einer zweielementigen Menge alias einen Homomorphismus $\pi_1(M, x) \to \{\pm 1\}$ und M ist orientierbar genau dann, wenn diese **Orientierungsdarstellung** konstant ist.

Übungen

Übung 17.4.2.15. Man zeige, daß $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ nicht orientierbar ist.

Übung 17.4.2.16. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Man zeige: Die faserweise Addition $\mathrm{or}_M \times_M \mathrm{or}_M \to \mathrm{or}_M$ sowie das faserweise Negative $\mathrm{or}_M \to \mathrm{or}_M$ sind stetig, und der **Nullschnitt** $M \to \mathrm{or}_M$ ist auch stetig.

Übung 17.4.2.17. Eine einfach wegzusammenhängende Mannigfaltigkeit ist stets orientierbar. Allgemeiner ist jede Mannigfaltigkeit orientierbar, deren Fundamentalgruppe keinen Normalteiler vom Index Zwei besitzt.

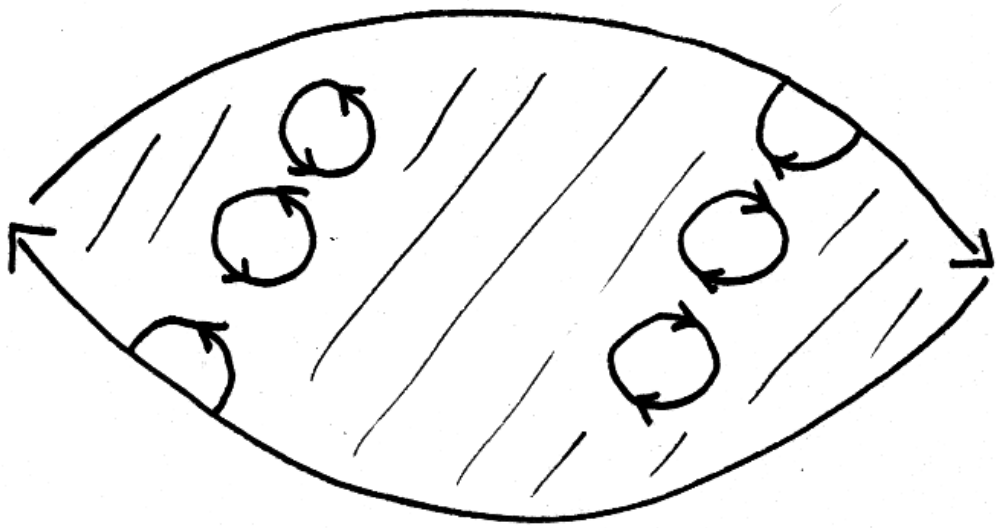
Übung 17.4.2.18. Für jede n-Mannigfaltigkeit M ist ihre Orientierungsüberlagerung $\tilde{M} := \mathrm{or}_M^\times$ auch eine Mannigfaltigkeit. Weiter können wir auf der Orientierungsüberlagerung eine Orientierung definieren, indem wir von der Projektion $\pi : \tilde{M} \twoheadrightarrow M$ ausgehen und für jedes $\tilde{x} \in \tilde{M}$ mit Bild $x := \pi(\tilde{x})$ den durch π vermittelten Isomorphismus $\mathrm{H}_n(\tilde{M}, \tilde{M}\backslash\tilde{x}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(M, M\backslash x)$ betrachten und jeweils das Urbild von $\tilde{x}$ unter diesem Isomorphismus auszeichnen. Wir nennen diese Orientierung die **tautologische Orientierung** der Orientierungsüberlagerung.

Übung 17.4.2.19. Besitzt eine Mannigfaltigkeit eine Überdeckung durch zwei orientierbare offene Teilmengen mit zusammenhängendem Schnitt, so ist sie auch selbst bereits orientierbar.

17.4.3 Hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten

Satz 17.4.3.1 (n**-te Homologie orientierbarer** n**-Mannigfaltigkeiten**). *Gegeben eine kompakte zusammenhängende orientierbare n-Mannigfaltigkeit M ist ihre n-te Homologiegruppe $\mathrm{H}_n M$ frei vom Rang Eins und die offensichtliche Abbildung liefert für alle $x \in M$ Isomorphismen*

$$\mathrm{H}_n M \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(M, M\backslash x)$$



Anschauliche Darstellung der Erkenntnis, daß die reell projektive Ebene nicht orientierbar ist. Die reell projektive Ebene ist hier aufgeschnitten dargestellt, die beiden Kanten müssen so wieder verklebt werden, daß Pfeilspitze auf Pfeilspitze geht.

Beweis. Um beim Beweis dieses Satzes die nötige Flexibilität zu haben, zeigen wir im folgenden gleich die allgemeinere Aussage 17.4.3.5. □

17.4.3.2. Ist (M, ω) eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit, so gibt es nach Satz 17.4.3.1 genau ein Element $\omega_M \in \mathrm{H}_n M$ mit $\omega_M \mapsto \omega_x \ \forall x \in M$. Dies Element ω_M heißt der **Fundamentalzykel** der kompakten orientierten Mannigfaltigkeit M und wird notiert als

$$[M] := \omega_M$$

Manche Autoren nennen $[M]$ die **Fundamentalklasse**, da es sich dabei genau genommen nicht um einen Zykel handelt, sondern vielmehr eine Klasse von Zykeln, eben eine Homologieklasse. Ich halte dafür, daß die Bezeichnung als Fundamentalzykel so viel mehr geometrische Anschauung transportiert, daß es lohnt, dafür diese Inkonsistenz in der Terminologie auszuhalten.

17.4.3.3. Wir erinnern aus 17.4.2.9 die Orientierungsgarbe $\mathrm{or}_M \to M$ einer Mannigfaltigkeit M. Rein topologisch ist das nach 17.4.2.12 eine Überlagerung, aber zusätzlich trägt jede Faser noch die Struktur einer abelschen Gruppe, die frei ist vom Rang Eins, und die faserweise Addition ebenso wie das faserweise Inverse induziere stetige Abbildungen $\mathrm{or}_M \times_M \mathrm{or}_M \to \mathrm{or}_M$ beziehungsweise $\mathrm{or}_M \to \mathrm{or}_M$. In der feineren Sprache aus 9.1.2.1 ist das ein „abelsches Gruppenobjekt in der Kategorie der Überlagerungen von M“.

Definition 17.4.3.4. Gegeben M eine Mannigfaltigkeit und $A \subset M$ eine Teilmenge nennen wir einen Lift $A \to \mathrm{or}_M$ der Einbettung $A \hookrightarrow M$ auch einen **stetigen Schnitt über A der Orientierungsgarbe**. Die Gruppe der stetigen Schnitte über A notieren wir

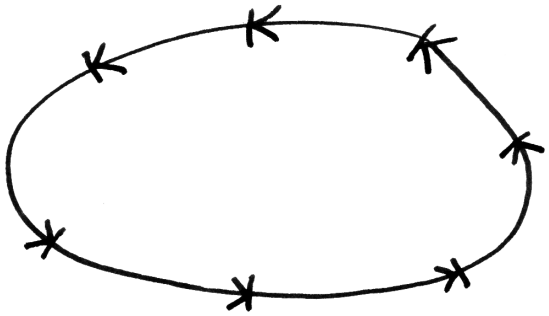
$$\Gamma(A; \mathrm{or}_M) = \Gamma A$$

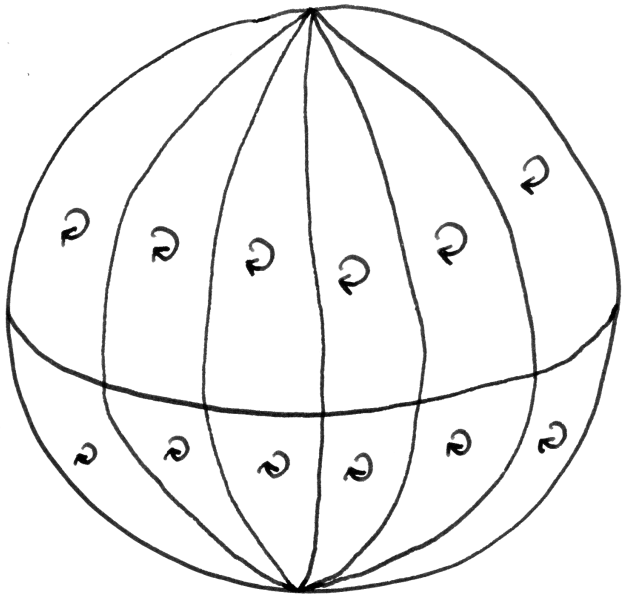
Der **Träger** eines Schnitts $s \in \Gamma A$ ist die Menge $\operatorname{supp} s \subset A$ aller derjenigen Punkte, an denen er von Null verschieden ist. Der Träger eines stetigen Schnitts über A ist stets abgeschlossen in A. Wir notieren die Untergruppe aller stetigen Schnitte mit kompaktem Träger

$$\Gamma_! A \subset \Gamma A$$

Die Gruppe der nicht notwendig stetigen Schnitte $A \to \mathrm{or}_M$ notieren wir $\Gamma' A$.

Satz 17.4.3.5 (Hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten). *Gegeben eine n-Mannigfaltigkeit M und eine abgeschlossene Teilmenge $A \not\subset M$ gilt für $q > n$ stets $\mathrm{H}_q(M, M \backslash A) = 0$. Für $q = n$ dahingegen induziert die offensichtliche Abbildung $j = j_A : \mathrm{H}_n(M, M \backslash A) \to \Gamma' A$ einen Isomorphismus zwischen der n-ten Homologie von M relativ zum Komplement von A und der Gruppe der stetigen Schnitte*





Versuch einer graphischen Darstellung jeweils eines Repräsentanten eines Fundamentalzykels der Kreislinie und der Sphäre.

mit kompaktem Träger von A in die Orientierungsgarbe, in Formeln einen Isomorphismus

$$j : \mathrm{H}_n(M, M\backslash A) \xrightarrow{\sim} \Gamma_! A$$

Beispiel 17.4.3.6. Unser Isomorphismus $\mathrm{H}_1(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_!(\mathbb{C}\backslash U, \mathbb{Z})$ aus 17.1.6.3 für $U \Subset \mathbb{C}$ liefert obigen Isomorphismus im Spezialfall $M = \mathbb{C}$, wenn wir die Randabbildung der langen exakten Homologiesequenz $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}, U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_1(U)$ vorschalten und die Standardorientierung von $\mathbb{C}$ wählen und $A = \mathbb{C}\backslash U$ setzen.

Vorschau 17.4.3.7. Allgemeinere Aussagen in dieser Richtung macht die sogenannte „starke Poincaré-Dualität“ 21.6.5.2.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß j tatsächlich in $\Gamma_! A \subset \Gamma' A$ landet. Sei also $\eta \in \mathrm{H}_n(M, M\backslash A)$ gegeben. Um zu zeigen, daß $j(\eta)$ ein stetiger Schnitt der Orientierungsgarbe ist, müssen wir zeigen $j(\eta)^{-1}(\mathcal{O}(U, \omega)) \Subset A$ für alle $U \Subset M$ und $\omega \in \mathrm{H}_n(M, M\backslash U)$ mit den $\mathcal{O}(U, \omega) := \{\omega|_x \mid x \in U\}$ wie in der Definition der Topologie der Orientierungsgarbe in 17.4.2.9. Nach Einsetzen der Definitionen gilt es zu zeigen, daß die Menge

$$E := \{x \in A \cap U \mid \omega \text{ und } \eta \text{ haben dasselbe Bild in } \mathrm{H}_n(M, M\backslash x)\}$$

offen ist in A. Nehmen wir aber ein $x \in E$ und einen repräsentierenden singulären Zykel $c \in \mathrm{S}_n M$ von η und eine offene Umgebung $W \Subset U$ von x mit $\partial c \in \mathrm{S}_{n-1}(M\backslash W)$, für die gilt $\mathrm{H}_n(M, M\backslash W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(M, M\backslash y)$ $\forall y \in W$, so folgt $W \cap A \subset E$. Also haben wir $E \Subset A$ und $j(\eta)$ ist ein stetiger Schnitt der Orientierungsgarbe. Schließlich gibt es ein Kompaktum $K \subset M$ mit $c \in \mathrm{S}_n K$ und dann verschwindet $j(\eta)$ außerhalb von $K \cap A$. Folglich landet j stets in $\Gamma_! A$. Jetzt machen wir uns an den Beweis der restlichen Aussagen. Um Schreibarbeit zu sparen setzen wir $\mathrm{H}_q(\backslash A) := \mathrm{H}_q(M, M\backslash A)$ und bemerken zunächst:

Lemma 17.4.3.8. *Sind A_1, A_2 abgeschlossen in M und gilt der Satz für A_1, A_2 und $A_1 \cap A_2$, so gilt er auch für $A_1 \cup A_2$.*

Beweis. Das folgt mit dem Fünferlemma aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & \mathrm{H}_n(\backslash A_1 \cup A_2) & \to & \mathrm{H}_n(\backslash A_1) \oplus \mathrm{H}_n(\backslash A_2) & \to & \mathrm{H}_n(\backslash A_1 \cap A_2) \\
 & & \downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
0 & \to & \Gamma_!(A_1 \cup A_2) & \to & \Gamma_! A_1 \oplus \Gamma_! A_2 & \to & \Gamma_!(A_1 \cap A_2)
\end{array}$$

mit exakten Zeilen, wo wir oben die relative Mayer-Vietoris-Sequenz 17.2.4.14 benutzt haben und am Anfang unsere Voraussetzung $\mathrm{H}_{n+1}(\backslash A_1 \cap A_2) = 0$. $\square$

Jetzt gehen wir in mehreren Schritten von Spezialfällen bis zur allgemeinen Situation.

1. Ist $M = \mathbb{R}^n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader, dem wir auch Seiten der Länge Null erlauben, so gilt der Satz ganz offensichtlich, da für jeden Punkt $p \in A$ die Einbettung $\mathbb{R}^n \backslash A \hookrightarrow \mathbb{R}^n \backslash p$ eine Homotopieäquivalenz ist.

2. Ist $M = \mathbb{R}^n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so gilt der Satz. In der Tat, gegeben $z \in \mathrm{S}_q \mathbb{R}^n$ mit $\partial z \in \mathrm{S}_{q-1}(\mathbb{R}^n \backslash A)$ finden wir $\epsilon > 0$ und $E \subset \mathbb{R}^n$ endlich mit

$$A \subset B := \bigcup_{v \in E} v + [-\epsilon, \epsilon]^n$$

und $\partial z \in \mathrm{S}_{q-1}(\mathbb{R}^n \backslash B)$. Es folgt, daß unser $[z] \in \mathrm{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash A)$ das Bild von $[z] \in \mathrm{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash B)$ ist. Nun gilt der Satz für unsere „Würfelmenge“ B nach Schritt 1 und dem Lemma. Das zeigt unsere Behauptung im Fall $q > n$. Im Fall $q = n$ zeigen wir zunächst die Injektivität $j_A[z] = 0 \Rightarrow [z] = 0$. Dazu wählen wir unsere Würfelmenge B zusätzlich so, daß jeder Würfel von B die Menge A trifft, etwa indem wir $E \subset A$ wählen. Dann ist die Restriktion $\Gamma B \to \Gamma A$ injektiv und aus $j_A[z] = 0$ folgt $j_B[z] = 0$ und damit $[z] = 0$ sogar in $\mathrm{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash B)$. Das zeigt die Injektivität von j_A. Um die Surjektivität von j_A zu zeigen, argumentieren wir ähnlich: Jeder stetige Schnitt $s \in \Gamma A$ ist lokal konstant und gleichmäßig stetig, läßt sich also stetig auf eine geeignete kompakte Würfelmenge B ausdehnen und kommt damit sogar von einer Klasse aus $\mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash B)$ her.

3. Ist A kompakt und M beliebig, so können wir A schreiben als eine endliche Vereinigung von Kompakta, die jeweils ganz in einer Karte enthalten sind. Dann sind wir fertig mit Induktion nach Schritt 2 und dem Lemma und Ausschneidung.

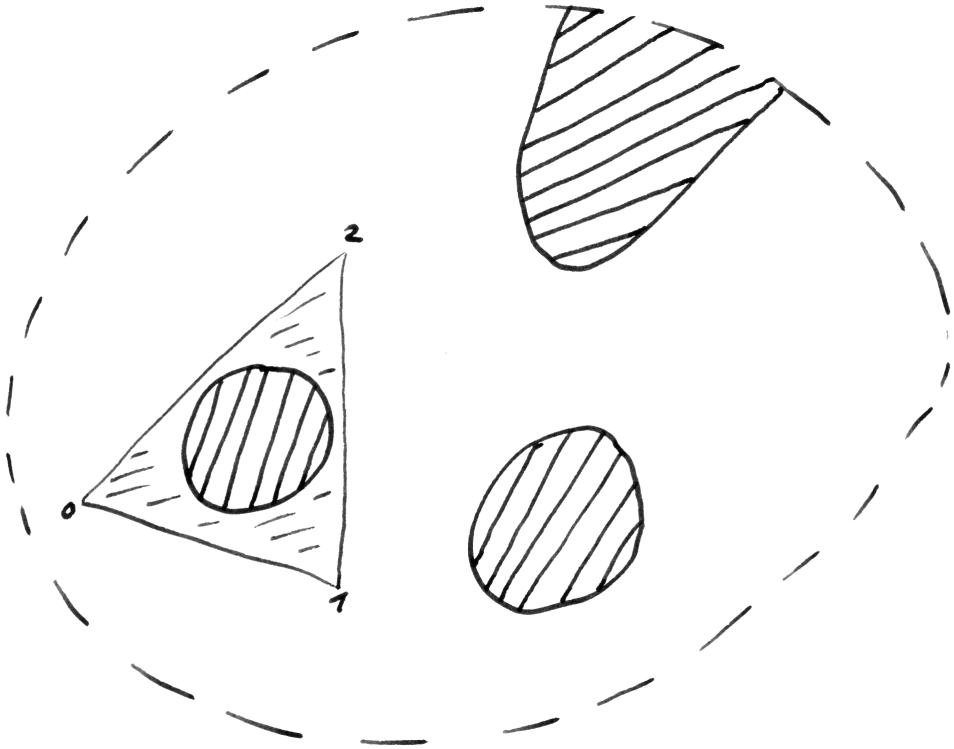
4. Sei nun A abgeschlossen und M lasse sich einbetten als offene Teilmenge mit kompaktem Abschluß in eine größere n-Mannigfaltigkeit X, in Formeln $M \Subset X$ mit $\bar{M}$ kompakt. So bezeichnen wir den Rand von M in X mit $\partial M = \bar{M} \backslash M$, betrachten die lange exakte Sequenz des Tripels

$$(X, X \backslash \partial M, X \backslash (\partial M \cup A))$$

und beachten, daß ∂M und $\partial M \cup A$ kompakt sind. Mit dem bereits Bewiesenen folgt für $q > n$ schon $0 = \mathrm{H}_q(X \backslash \partial M, X \backslash (\partial M \cup A))$ und durch Ausschneiden von $X \backslash \bar{M}$ auch $0 = \mathrm{H}_q(M, M \backslash A)$. Im Fall $q = n$ erhalten wir mit derselben Ausschneidung ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}_n(M, M \backslash A) & \hookrightarrow & \mathrm{H}_n(X, X \backslash (\partial M \cup A)) & \to & \mathrm{H}_n(X, X \backslash \partial M) \\
\downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
\Gamma_! A & \hookrightarrow & \Gamma_!(\partial M \cup A) & \to & \Gamma_!(\partial M)
\end{array}$$

mit exakten Zeilen, wo die zweite horizontale Abbildung der unteren Zeile einen Schnitt mit kompaktem Träger fortsetzt durch Null. Die Behauptung folgt mit dem



Dieses Bild soll den Satz über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten illustrieren. In der großen offenen Ellipse M betrachten wir die abgeschlossene Teilmenge A, die aus den beiden kompakten kleinen schraffierten Eiern und einer ebenfalls eingezeichneten nichtkompakten Zusammenhangskomponente besteht. Die Orientierungsgarbe ist in diesem Fall isomorph zu $M \times \mathbb{Z}$, ihre Schnitte über A müssen auf allen drei Zusammenhangskomponenten von A konstant sein, und die Schnitte mit kompaktem Träger sind genau die Schnitte, die auf der nichtkompakten Komponente verschwinden. Der ebenfalls eingezeichnete singuläre Zweisimplex ist ein Zykel in M relativ zu $M \backslash A$. Seine Homologieklasse entspricht dem Schnitt aus $\Gamma_! A$, der auf der entsprechenden Komponente von A den Wert plus oder Minus Eins annimmt, je nach Wahl der Identifikation unserer Orientierungsgarbe mit $M \times \mathbb{Z}$, und der auf dem Rest von A den Wert Null annimmt.

Fünferlemma.

5. Der allgemeine Fall. Sei zunächst $q > n$ und $z \in \mathrm{S}_q M$ ein Repräsentant von $\omega \in \mathrm{H}_q(M, M\backslash A)$. So finden wir $U \Subset M$ mit $z \in \mathrm{S}_q U$ und $\bar{U}$ kompakt. Nach dem vorhergehenden Punkt verschwindet die Klasse von z schon in $\mathrm{H}_q(U, U\backslash A)$, also erst recht in $\mathrm{H}_q(M, M\backslash A)$ und es folgt $\mathrm{H}_q(M, M\backslash A) = 0$ für $q > n$. Im Fall $q = n$ beachten wir für $U \Subset M$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_n(U, U\backslash A) & \to & \mathrm{H}_n(M, M\backslash A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_!(A \cap U) & \to & \Gamma_! A \end{array}$$

wo die untere Horizontale ausdehnt durch Null. Ist $\bar{U}$ kompakt, so ist die linke Vertikale ein Isomorphismus nach dem vorigen Schritt. Aber jedes $\omega \in \mathrm{H}_n(M, M\backslash A)$ wird repräsentiert von einem $z \in \mathrm{S}_n M$, wir finden dann $U \Subset M$ mit $\bar{U}$ kompakt und $z \in \mathrm{S}_n U$ und so kommt ω schon her von einem $[z] \in \mathrm{H}_n(U, U\backslash A)$. Das zeigt die Injektivität von j_A. Die Surjektivität zeigen wir ähnlich: Für jedes $s \in \Gamma_! A$ gibt es $U \Subset M$ mit $\bar{U}$ kompakt und $s \in \Gamma_!(A \cap U)$ und dann kommt s sogar schon her von $\mathrm{H}_n(U, U\backslash A)$. □

Korollar 17.4.3.9. *Ist M eine zusammenhängende aber nicht kompakte oder nicht orientierbare n-Mannigfaltigkeit, so gilt $\mathrm{H}_n M = 0$.*

Beweis. Wir erhalten einen Homöomorphismus $M \sqcup (\mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathrm{or}_M^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_M$ durch die Vorschrift, die auf M der Nullschnitt der Orientierungsgarbe ist und sonst die Multiplikation mit der entsprechenden natürlichen Zahl in jeder Faser. Ist also M zusammenhängend und hat $\mathrm{or}_M \to M$ einen von Null verschiedenen stetigen Schnitt, so hat der bereits ganz M als Träger und es gibt auch einen stetigen Schnitt von $\mathrm{or}_M^\times$ alias eine Orientierung. □

Korollar 17.4.3.10 (Alexander-Dualität in einem Spezialfall). *Ist $A \not\Subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen mit endlich vielen kompakten und beliebig vielen sonstigen Zusammenhangskomponenten, so gilt für die Zahl k der kompakten Zusammenhangskomponenten*

$$\tilde{\mathrm{H}}_{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash A) \cong \mathbb{Z}^k$$

17.4.3.11. Die Aussage des Korollars ist ein Spezialfall der sogenannten „Alexander-Dualität“ 19.5.1.22.

Beweis. Wir haben $\mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash A) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathrm{H}}_{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash A)$ nach der langen exakten Homologiesequenz und der linke Raum ist isomorph zu $\Gamma_! A \cong \mathbb{Z}^k$ nach unserem Satz 17.4.3.5. Man verwende hierbei, daß der Abschluß von A in der Einpunktkompaktifizierung S^n von $\mathbb{R}^n$ nur endlich viele Zusammenhangskomponenten hat, so daß insbesondere alle kompakten Zusammenhangskomponenten offen sind in A. □

17.4.3.12 (**Umlaufzahl als Spezialfall der Alexanderdualität**). Sind wir im Spezialfall $M = \mathbb{C}$ und benutzen die durch $(1, \mathrm{i})$ gegebene Orientierung von $\mathbb{C}$, um $\Gamma_! A$ zu identifizieren mit stetigen Abbildungen $A \to \mathbb{Z}$ mit kompaktem Träger, so ordnet unser Isomorphismus

$$\mathrm{H}_1(\mathbb{C}\backslash A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \Gamma_! A$$

der Klasse $[\gamma]$ eines Zykels γ diejenige Funktion $A \to \mathbb{Z}$ zu, deren Wert an einer Stelle $z \in A$ die Umlaufzahl im Sinne von 17.1.6.2 des Zykels γ um den Punkt z ist.

Definition 17.4.3.13. Sei $f : M \to N$ eine stetige Abbildung von kompakten orientierten zusammenhängenden n-Mannigfaltigkeiten. Der **Abbildungsgrad** $\operatorname{grad} f$ **von** f ist die ganze Zahl, die angibt, auf welches Vielfache des Fundamentalzykels von N der Fundamentalzykel von M abgebildet wird, in Formeln

$$f_*[M] = (\operatorname{grad} f)[N]$$

17.4.3.14 (**Nichtsurjektionen haben Abbildungsgrad Null**). Insbesondere ist eine Abbildung von zusammenhängenden orientierten kompakten Mannigfaltigkeiten derselben Dimension mit von Null verschiedenem Abbildungsgrad stets surjektiv, da für jeden Punkt $x \in N$ die Mannigfaltigkeit $N\backslash x$ keine kompakte Zusammenhangskomponente hat und da nach 17.4.3.9 folglich gilt $\mathrm{H}_n(N\backslash x) = 0 \ \forall x \in N$. Jede Abbildung, deren Bild einen Punkt x nicht enthält, faktorisiert jedoch als $M \to (N\backslash x) \hookrightarrow N$.

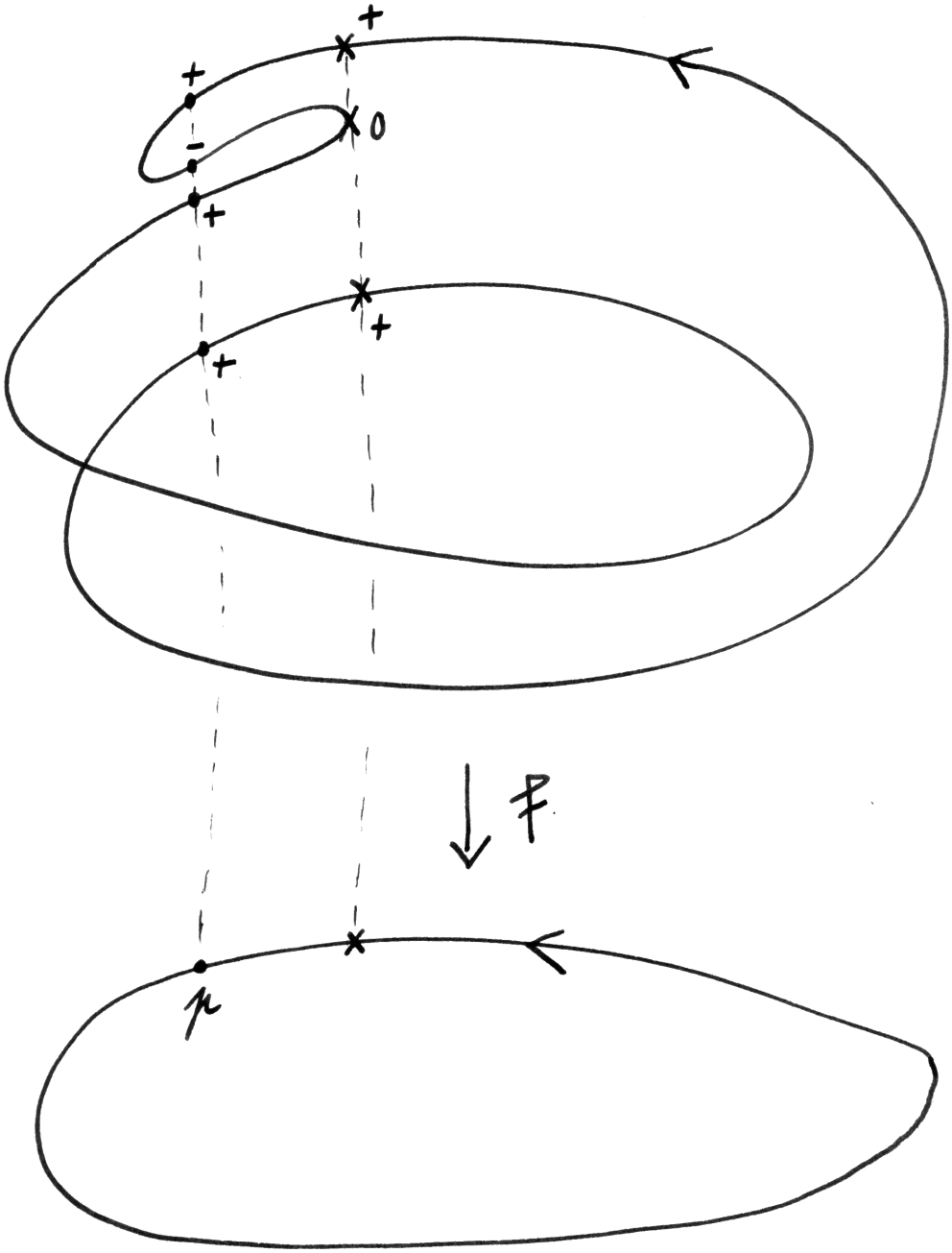
17.4.3.15. Homotope Abbildungen von zusammenhängenden orientierten kompakten Mannigfaltigkeiten derselben Dimension haben nach 17.1.4.1 denselben Abbildungsgrad.

Definition 17.4.3.16. Sei $f : M \to N$ eine stetige Abbildung von orientierten n-Mannigfaltigkeiten (M, ω) und (N, η). Ist $q \in M$ ein isolierter Punkt der Faser über $f(q)$, gibt es in anderen Worten eine offene Umgebung $U \Subset M$ von q mit $U \cap f^{-1}(f(q)) = \{q\}$, so erklären wir den **lokalen Abbildungsgrad von** f **bei** q als die ganze Zahl $\operatorname{grad}_q f \in \mathbb{Z}$, die gegeben wird durch die Gleichung

$$f_*\omega_q = (\operatorname{grad}_q f)\eta_{f(q)}$$

für $f_* : \mathrm{H}_n(U, U\backslash q) \to \mathrm{H}_n(N, N\backslash f(q))$ die auf der Homologie induzierte Abbildung und ω_q beziehungsweise $\eta_{f(q)}$ die entsprechenden lokalen Orientierungen. Diese Abbildung hängt offensichtlich nicht von der Wahl von U ab.

Beispiel 17.4.3.17. In Übung 17.4.1.8 haben Sie gezeigt, daß der lokale Grad im Fall eines lokalen Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ gerade das Vorzeichen der Funktionaldeterminante ist. In Übung 17.4.3.21 werden Sie unter anderem zeigen, daß der lokale Abbildungsgrad am Ursprung der Potenzabbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ genau n ist.



Eine Abbildung einer Kreislinie auf sich selbst vom Abbildungsgrad Zwei. Die Orientierungen sind durch Pfeilspitzen angedeutet. An den Punkten des Urbilds zweier Punkte sind auch die lokalen Abbildungsgrade eingetragen, unter Verwendung der Abkürzungen $\pm$ für ± 1.

Satz 17.4.3.18 (**Abbildungsgrad als Summe lokaler Abbildungsgrade**). *Gegeben eine stetige Abbildung von kompakten orientierten zusammenhängenden n-Mannigfaltigkeiten $f : M \to N$ und ein Punkt $p \in N$ mit endlichem Urbild ist der Abbildungsgrad von f die Summe der lokalen Abbildungsgrade bei den Urbildern unseres Punktes, in Formeln*

$$\operatorname{grad} f = \sum_{q \in f^{-1}(p)} \operatorname{grad}_q f$$

Beweis. Wir nummerieren die Punkte aus der Faser über p als $q_1, \ldots, q_r$ und wählen für sie paarweise disjunkte offene Umgebungen $U_1, \ldots, U_r$. Dann betrachten wir für jedes j das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}_n M & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_n(M, M \backslash q_j) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}_n(U_j, U_j \backslash q_j) \\
\| & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{H}_n M & \to & \mathrm{H}_n(M, M \backslash \{q_1, \ldots, q_r\}) & \xleftarrow{\sim} & \bigoplus_i \mathrm{H}_n(U_i, U_i \backslash q_i) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}_n N & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_n(N, N \backslash p) & = & \mathrm{H}_n(N, N \backslash p)
\end{array}$$

Hier meint der letzte Isomorphismus der mittleren Horizontalen Ausschneidung gefolgt von der relativen Version der Zerlegung der Homologie 17.2.1.8 Wir erinnern die Verträglichkeit der relativen Homologie mit Koprodukten 17.2.1.8, die Zeilenmatrix $(\mathrm{H}_n \operatorname{in}_i)_i$ liefert also einen Isomorphismus

$$\textstyle\bigoplus_i \mathrm{H}_n(U_i, U_i \backslash p_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(\bigcup_i U_i, \bigcup_i U_i \backslash p_i)$$

für die als Spalte verstandenen Einträge der direkten Summe. Gehen wir von der Mitte der linken Vertikalen direkt nach unten, so wird der Fundamentalzykel $[M]$ abgebildet auf $(\operatorname{grad} f)[N]$. Gehen wir dahingegen in der mittleren Horizontale nach rechts, so erhalten wir das Tupel der $\omega_M|_{q_i}$, wie die obere Hälfte des Diagramms zeigt, und gehen wir dann nach unten, so erhalten wir die Summe der lokalen Abbildungsgrade multipliziert mit $\eta_N|_p$. Gehen wir wieder nach links, so folgt die Behauptung. □

Vorschau 17.4.3.19 (**Schnittpaarung und Poincaré-Dualität**). Ich kann nun einige Aussagen zumindest formulieren, deren Beweise uns noch lange beschäftigen werden. Gegeben eine kompakte orientierte n-Mannigfaltigkeit M werden wir in 17.6.4.10 für alle q mit $0 \le q \le n$ eine bilineare Abbildung konstruieren, die sogenannte „Schnittpaarung“

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}_q M \times \mathrm{H}_{n-q} M & \to & \mathbb{Z} \\
(\zeta\ ,\ \xi) & \mapsto & \zeta \odot \xi
\end{array}$$

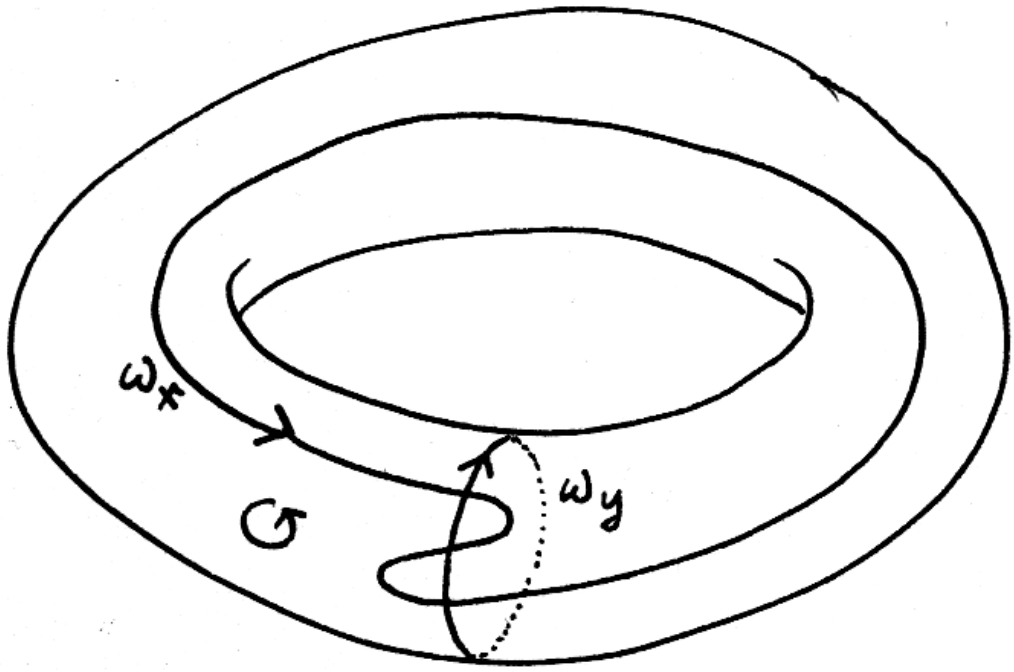


Illustration zur Schnittpaarung. Als orientierte Mannigfaltigkeit M habe ich den Torus gewählt, mit der durch den kleinen Kreispfeil angedeuteten Orientierung. Die orientierten Untermannigfaltigkeiten X und Y sind als bepfeilte Kurven zu sehen. Sie schneiden sich in der Punkten, die gemäß unserer Vorschrift zweimal mit $+1$ und einmal mit -1 zu gewichten sind. Die gesamte Schnittzahl wäre in diesem Fall also $\omega_X \odot \omega_Y = 1$.

Sie ordnet je zwei Homologieklassen komplementären Grades ihre **Schnittzahl** zu und hat eine anschauliche Bedeutung, zu deren genauer Formulierung ich etwas ausholen muß. Gegeben eine orientierte abgeschlossene q-dimensionale Untermannigfaltigkeit $X \not\subset M$, also eine abgeschlossene Teilmenge, die mit der Spurtopologie zu einer q-dimensionalen Mannigfaltigkeit wird und die zusätzlich mit einer Orientierung versehen ist, erhalten wir ja einen Fundamentalzykel $[X] \in \mathrm{H}_q X$. Dessen Bild in der Homologie von M notieren wir kurzerhand $[X] \in \mathrm{H}_q M$. Seien nun $X \not\subset M$ und $Y \not\subset M$ abgeschlossene orientierte Untermannigfaltigkeiten komplementärer Dimensionen q und $n-q$. Wir nehmen zusätzlich an, daß es um jeden Schnittpunkt $s \in X \cap Y$ eine offene Umgebung $U \subset\!\!\circ\, M$ und einen Homöomorphismus $U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ gibt, unter dem die von M auf U induzierte Orientierung der Standardorientierung des $\mathbb{R}^n$ entspricht und die Homöomorphismen $X \cap U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^q \times 0$ sowie $Y \cap U \xrightarrow{\sim} 0 \times \mathbb{R}^{n-q}$ induziert. Erklären wir schließlich Vorzeichen $\epsilon(s), \eta(s)$ dadurch, daß sie angeben, ob unsere letzten beiden Homöomorphismen die vorgegebenen Orientierungen auf X und Y mit den Standardorientierungen auf $\mathbb{R}^q$ und $\mathbb{R}^{n-q}$ identifizieren oder nicht, so gilt für die Schnittzahl der zu X und Y gehörigen Fundamentalzykel die Identität

$$[X] \odot [Y] = \sum_{s \in X \cap Y} \epsilon(s)\eta(s)$$

Wir erklären in 17.6.4.10, wie man die Schnittpaarung aus dem „cup-Produkt der Kohomologie“ zusammen mit dem „Isomorphismus der Poincaré-Dualität“ erhalten kann. Wir zeigen aber erst in 21.6.4.31, daß die auf diesem Wege konstruierte bilineare Abbildung wirklich die hier für unsere Schnittpaarung behauptete anschauliche Eigenschaft hat. Zusätzlich werden wir zeigen, daß unsere Schnittpaarung, wenn alle $\mathrm{H}_q M$ freie abelsche Gruppen sind, Isomorphismen

$$\mathrm{H}_q M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_{n-q} M, \mathbb{Z})$$

induziert, und daß ihr Analogon für „Koeffizienten in einem Körper“ stets nichtausgeartete Paarungen liefert. Diese Aussagen und Verschiedene ihrer Varianten sind bekannt als „Poincaré-Dualität“. Im nächsten Abschnitt beginnen wir unsere Arbeit an diesem Themenkomplex mit der Diskussion von „Homologie mit Koeffizienten“.

Übungen

Übung 17.4.3.20 (**Fundamentalzykel in der simplizialen Homologie**). Ist eine kompakte orientierbare n Manningfaltigkeit M mit einer Triangulierung $M \cong \Delta(\mathcal{K})$ versehen, so können wir jedem n-Simplex dieser Triangulierung ein Vorzeichen und eine Anordnung derart zuordnen, daß die Summe der entsprechenden mit Vorzeichen versehenen simplizialsingulären n-Simplizes ein Zykel ist. Ist

M auch noch zusammenhängend, so gibt es genau zwei derartige Zykel, und ihre Homologieklassen sind genau die beiden Erzeuger von $\mathrm{H}_n M$, also die beiden Fundamentalzykel zu den beiden möglichen Orientierungen. Hinweis: Man gehe von 17.4.3.1 aus.

Übung 17.4.3.21. Man bestimme die lokalen Abbildungsgrade der nichtkonstanten Polynomfunktionen $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Übung 17.4.3.22 (**Rückzug von Orientierungen**). Ist $f : M \to N$ eine étale Abbildung von n-Mannigfaltigkeiten und $x \in M$ ein Punkt, so gibt es genau einen Isomorphismus $\mathrm{H}_n(M, M\backslash x) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(N, N\backslash f(x))$, der für alle Umgebungen U von x, die homöomorph auf ihr Bild abgebildet werden, verträglich ist mit den von f induzierten Isomorphismen $\mathrm{H}_n(U, U\backslash x) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(f(U), f(U)\backslash f(x))$. Wir erhalten so ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{or}_M & \to & \mathrm{or}_N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \to & N \end{array}$$

Insbesondere läßt sich jede Orientierung von N „zurückziehen“ zu einer Orientierung von M.

Übung 17.4.3.23 (**Orientierungsgarbe auf Quotient nach freier Operation**). Jede Operation einer Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit induziert eine Operation auf der Orientierungsgarbe, die verträglich ist mit der faserweisen Addition. Operiert eine Gruppe D topologisch frei auf einer Mannigfaltigkeit M, so ist auch M/D eine Mannigfaltigkeit und die obere Horizontale aus 17.4.3.22 induziert einen Homöomorphismus

$$(\mathrm{or}_M)/D \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_{(M/D)}$$

Übung 17.4.3.24 (**Orientierbarkeit reell projektiver Räume**). Die Kugelschalen S^r sind orientierbar für alle $r \geq 0$. Für $r \geq 1$ sind sie auch zusammenhängend und die Antipodenabbildung $S^r \xrightarrow{\sim} S^r$ bildet einen Fundamentalzykel ab auf sich selber für r ungerade und auf sein Negatives für r gerade. Der reell projektive Raum $\mathbb{P}^r\mathbb{R}$ ist orientierbar für $r = 0$ und $r \geq 1$ ungerade, jedoch nicht für $r \geq 1$ gerade.

Übung 17.4.3.25 (**Fixpunkte von Selbstabbildungen von Sphären**). Eine stetige Selbstabbildung einer Sphäre S^n mit von $-(-1)^n$ verschiedenem Abbildungsgrad hat stets einen Fixpunkt. Hinweis: Lefschetz'scher Fixpunktsatz 17.3.2.13.

Übung 17.4.3.26. Gegeben eine nichtkompakte zusammenhängende Einsmannigfaltigkeit besteht das Komplement jedes Punktes aus zwei Zusammenhangskomponenten. Hinweis: Die Schwierigkeit liegt im nicht abzählbar basierten Fall beziehungsweise darin, die Klassifikation im abzählbar basierten Fall zu vermeiden, in dem danach die reelle Zahlengerade das einzige Beispiel ist.

Übung 17.4.3.27 (**Einbettung kompakter n-Mannigfaltigkeiten in den $\mathbb{R}^n$**). Eine nichtleere kompakte orientierbare n-Mannigfaltigkeit kann nicht in den $\mathbb{R}^n$ eingebettet werden. Hinweis: Man schalte eine Einbettung $\mathbb{R}^n \hookrightarrow S^n$ nach und bemerke, daß der Abbildungsgrad der Komposition Null sein muß. Dasselbe Argument funktioniert für nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten, wenn wir Homologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ betrachten, wie wir sie gleich kennenlernen werden.

17.4.4 Endlichkeitsaussagen für Mannigfaltigkeiten*

17.4.4.1. Nicht alle kompakten Mannigfaltigkeiten sind triangulierbar alias homöomorph zur Realisierung eines endlichen Simplizialkomplexes. Im folgenden zeigen wir, daß ihre Homologiegruppen dennoch stets endlich erzeugt sind.

Satz 17.4.4.2 (Wilder). *Alle Homologiegruppen kompakter Mannigfaltigkeiten sind endlich erzeugt. Ist allgemeiner M eine Mannigfaltigkeit und $K \subset M$ eine kompakte Teilmenge, so ist das Bild von $\mathrm{H}_q K \to \mathrm{H}_q M$ endlich erzeugt für alle $q \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Per Induktion über q mithilfe des anschließenden Lemmas. □

Ergänzung 17.4.4.3. Der Satz gilt mit demselben Beweis auch für Mannigfaltigkeiten mit Rand oder mit Ecken, ja mit 17.3.1.25 für beliebige Hausdorffräume, in denen jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph ist zu einer offenen Teilmenge der Realisierung eines lokal endlichen Simplizialkomplexes. Nach [Hir75] gilt er damit insbesondere für separierte komplexe Varietäten. Weiter gilt er mit demselben Beweis auch für Homologie mit Koeffizienten in einem beliebigen noetherschen Ring. Eine Variante dieses Resultats für relative Homologie wird in 17.7.3.22 gezeigt werden.

Lemma 17.4.4.4. *Seien X ein lokal kompakter Hausdorffraum und $q \geq 0$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß gilt:*

1. *Für jedes Paar $M \subset W$ von Teilmengen von X mit M kompakt und W offen in X ist das Bild von $\mathrm{H}_{q-1} M \to \mathrm{H}_{q-1} W$ endlich erzeugt;*

2. *Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung mit endlich erzeugter q-ter Homologie.*

So ist $\operatorname{im}(\mathrm{H}_q K \to \mathrm{H}_q X)$ endlich erzeugt für jedes Kompaktum $K \subset X$.

Beweis. Wir betrachten in der Potenzmenge von X die Teilmenge

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_q := \left\{ K \subset X \;\middle|\; \begin{array}{l} K \text{ ist kompakt und besitzt eine offene} \\ \text{Umgebung } U \Subset X \text{ derart, daß das Bild} \\ \text{von } \mathrm{H}_q U \to \mathrm{H}_q X \text{ endlich erzeugt ist.} \end{array} \right\}$$

Nach unseren Annahmen besitzt jeder Punkt von X eine Umgebung aus $\mathcal{E}$. Aus $K \in \mathcal{E}$ und $L \Subset K$ folgt ohne Schwierigkeiten $L \in \mathcal{E}$. Können wir zeigen, daß mit zwei Kompakta L und K stets auch ihre Vereinigung zu $\mathcal{E}$ gehört, so gehört offensichtlich jede kompakte Teilmenge von X zu $\mathcal{E}$ und wir sind fertig. Seien also $K, L \in \mathcal{E}$ und $U, V \Subset X$ offen mit $K \subset U$ und $L \subset V$ und $\operatorname{im}(\mathrm{H}_q U \to \mathrm{H}_q X)$ und $\operatorname{im}(\mathrm{H}_q V \to \mathrm{H}_q X)$ endlich erzeugt. Da X nach Voraussetzung lokal kompakt ist, finden wir etwa nach 13.1.10.9 auch $U_1 \Subset U, V_1 \Subset V$ mit $K \subset U_1 \subset \bar{U}_1 \subset U$ und $L \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset V$ und $\bar{U}_1, \bar{V}_1$ kompakt. Dann betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{H}_q(U_1 \cup V_1) & \to & \mathrm{H}_{q-1}(U_1 \cap V_1) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}_q U \oplus \mathrm{H}_q V & \to & \mathrm{H}_q(U \cup V) & \to & \mathrm{H}_{q-1}(U \cap V) \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathrm{H}_q X \oplus \mathrm{H}_q X & \to & \mathrm{H}_q X & &
\end{array}$$

Das Bild der linken Vertikale ist endlich erzeugt nach Wahl von U und V. Das Bild der rechten Vertikalen ist endlich erzeugt nach unserer ersten Annahme, angewandt auf $M = \bar{U}_1 \cap \bar{V}_1$ und $W = U \cap V$. Die mittlere Horizontale ist exakt als Teil einer Mayer-Vietoris-Sequenz. Dann muß aber nach dem anschließenden Lemma 17.4.4.5 auch das Bild der Komposition in der mittleren Vertikalen endlich erzeugt sein und es folgt $L \cup K \in \mathcal{E}$. □

Lemma 17.4.4.5. *Sei gegeben ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen der Gestalt*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & \to & B \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
C & \to & D & \to & E \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
F & \to & G & &
\end{array}$$

Ist das Bild der beiden äußeren Vertikalen CF und BE endlich erzeugt und ist die mittlere Horizontale exakt bei D, so ist auch das Bild der Komposition AG in der mittleren Vertikalen endlich erzeugt.

Beweis. Unter $D \to E$ geht $\operatorname{im}(AD)$ nach $\operatorname{im}(BE)$. Wir finden also endlich viele $d_1, \ldots, d_s \in \operatorname{im}(AD)$ derart, daß sich jedes Element aus $\operatorname{im}(AD)$ schreiben läßt als $c + r_1 d_1 + \ldots + r_s d_s$ mit $r_i \in \mathbb{Z}$ und $c \in \operatorname{im}(CD)$. Der Rest des Arguments bleibe dem Leser überlassen. □

17.5 Koeffizientenwechsel und Künneth-Formel

17.5.1 Homologie mit Koeffizienten

17.5.1.1. Sei G eine abelsche Gruppe. In unseren bisherigen Argumenten können wir stets G statt $\mathbb{Z}$ schreiben und erhalten so allgemeinere Funktoren von topologischen Räumen oder Raumpaaren in die abelschen Gruppen. Sie heißen die **Homologie** beziehungsweise **relative** beziehungsweise **reduzierte Homologie mit Koeffizienten in** G. Genauer definieren wir die q-te Homologie

$$\mathrm{H}_q(X;G)$$

eines Raums X mit Koeffizienten in G, indem wir die Homologie des Komplexes $\mathrm{S}(X;G)$ der singulären Ketten mit Koeffizienten in G nehmen, wobei $\mathrm{S}_q(X;G)$ die Menge aller endlichen formalen Ausdrücke $\sum n_\sigma \sigma$ bezeichnet mit $n_\sigma \in G$ und $n_\sigma = 0$ für alle bis auf endlich viele Simplizes $\sigma : \Delta_q \to X$. Wir schreiben $\tilde{\mathrm{H}}_q(X;G)$ für die reduzierten Homologiegruppen und $\mathrm{H}_q(X,A;G)$ für die relativen Homologiegruppen mit Koeffizienten in G.

17.5.1.2 (**Funktorialität in den Koeffizienten**). Halten wir den Raum X fest, so wird $G \mapsto \mathrm{H}_q(X;G)$ ein Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen in sich selber. Unter einer **additiven Struktur** auf einer Kategorie $\mathcal{C}$ versteht man ganz allgemein die Vorgabe einer Verknüpfung „Addition“ auf jeder Morphismenmenge $\mathcal{C}(X,Y)$ derart, daß die Morphismenmengen darunter abelsche Gruppen sind und die Verknüpfung von Morphismen bilinear. Ein Funktor zwischen Kategorien mit additiver Struktur heißt **additiv**, wenn er Gruppenhomomorphismen auf den Morphismenräumen induziert. In dieser Terminologie trägt die Kategorie der abelschen Gruppen eine additive Struktur in natürlicher Weise und unsere Funktoren $G \mapsto \mathrm{H}_q(X;G)$ sind additiv. Ist insbesondere R ein Ring und G ein R-Modul, so werden die Homologiegruppen mit Koeffizienten in G in natürlicher Weise zu R-Moduln.

17.5.1.3. Die meisten der bisher bewiesenen allgemeinen Aussagen, insbesondere Homotopieinvarianz, lange exakte Homologiesequenz, Ausschneidung, Mayer-Vietoris-Sequenz und Anklebesequenz gelten in der Homologie mit Koeffizienten genauso mit demselben oder fast demselben Beweis. Bei den bisherigen speziellen Resultaten zur Homologie und reduzierten Homologie von Punkten und Sphären kann man direkt prüfen, daß alle Argumente ebenso mit Koeffizienten G funktionieren und wir nur im Endresultat jeweils G statt $\mathbb{Z}$ erhalten. Wir werden in 17.5.5.2 zeigen, daß Ähnliches allgemein gilt, solange die Homologiegruppen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ alle frei sind über $\mathbb{Z}$.

Beispiel 17.5.1.4 (**Mit zwei Farben färbbare Landkarten**). Wir behaupten, daß sich eine Landkarte, bei der an jedem „Mehrländereck“ eine gerade Anzahl von

Grenzen beginnnt, stets so mit zwei Farben färben läßt, daß keine zwei benachbarten Staaten dieselbe Farbe haben, wobei Staaten nicht als benachbart gelten, die nur Grenzsteine gemeinsam haben. Um das zu zeigen, ergänzen wir die Anschauungsebene durch einen Punkt im Unendlichen zu einer Sphäre und unterteilen unsere Staaten durch zusätzliche Grenzen aber ohne zusätzliche Mehrländerecken in Bundesländer, bis wir eine Triangulierung der Sphäre erhalten. Daß das möglich sein soll, verstehen wir als Teil unserer Definition des Begriffs einer „Landkarte". Die Summe der Staatsgrenzen ist dann ein simplizialer Einszykel mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Koeffizienten, der der Rand einer Zweikette sein muß. Diese ist die gesuchte Färbung.

17.5.1.5. Wie in 17.4.2.9 definieren wir für jede n-Mannigfaltigkeit M und jede abelsche Gruppe G die **Orientierungsgarbe** $\mathrm{or}_M(G)$ **mit Koeffizienten in** G. Wie in 17.4.3.5 zeigen wir auch für jede abgeschlossene Teilmenge $A \not\subset M$, daß gilt $\mathrm{H}_q(M, M\backslash A; G) = 0$ für $q > n$ und daß die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$j = j_A : \mathrm{H}_n(M, M\backslash A; G) \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(A; \mathrm{or}_M(G))$$

induziert, wobei rechts die Schnitte mit kompaktem Träger von A in die Orientierungsgarbe mit Koeffizienten in G zu verstehen sind. Man erkennt ohne Schwierigkeiten, daß die fragliche Orientierungsgarbe eine Überlagerung ist, und für zusammenhängendes M gerade die Überlagerung, die von der Operation der Fundamentalgruppe auf G vermittels der Orientierungsdarstellung aus 17.4.2.14 herkommt. Daraus folgt, daß für eine kompakte zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit M und einen beliebigen Punkt $x \in M$ die kanonische Abbildung

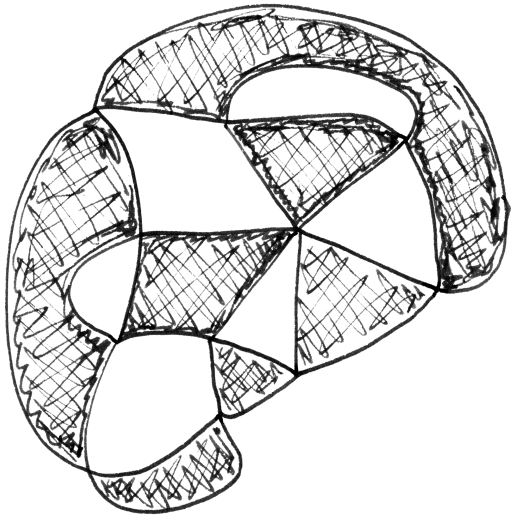
$$\mathrm{H}_n(M; G) \to \mathrm{H}_n(M, M\backslash x; G)$$

ein Isomorphismus ist für M orientierbar und ein Isomorphismus mit der Gruppe der Fixpunkte der Multiplikation mit (-1) für M nicht orientierbar. Gegeben ein Kring k nennen wir eine n-Mannigfaltigkeit k**-orientierbar**, wenn $\mathrm{or}_M(k)$ einen globalen Schnitt besitzt, der an jeder Stelle $x \in M$ ein Erzeuger des freien k-Moduls $\mathrm{H}_n(M, M\backslash x; k)$ vom Rang Eins ist. Unter einer k**-Orientierung** von M verstehen wir die Auswahl eines derartigen globalen Schnitts. Ist M kompakt, so heißt das zugehörige Element

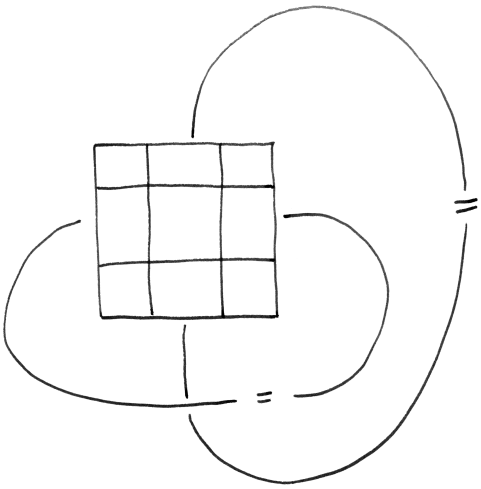
$$[M] = [M]_k = \omega_M = \omega_M(k) \in \mathrm{H}_n(M; k)$$

der **Fundamentalzykel mit Koeffizienten in** k der k-orientierten kompakten n-Mannigfaltigkeit M.

Satz 17.5.1.6. *Gegeben eine abelsche Gruppe G verwenden wir im folgenden die Notation $G_2 := \{a \in G \mid a + a = 0\}$ für die Fixpunkte der Multiplikation mit*



Eine Zweifärbung einer ebenen „geraden“ Karte



Eine nicht zweifärbbare „gerade“ Karte auf dem Torus

(-1). *Die* **Homologie der reell projektiven Räume** $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ *mit Koeffizienten in* G *wird in dieser Notation gegeben durch*

$$\mathrm{H}_q(\mathbb{P}^n\mathbb{R}; G) \quad \cong \quad \begin{cases} G & q = 0; \\ G/2G & 0 < q < n, \quad q \textit{ ungerade}; \\ G_2 & 0 < q < n, \quad q \textit{ gerade}; \\ G & 0 < q = n, \quad n \textit{ ungerade}; \\ G_2 & 0 < q = n, \quad n \textit{ gerade}; \\ 0 & q > n. \end{cases}$$

Beweis. Wir kürzen für diesen Beweis $\mathrm{H}_q(X; G) = \mathrm{H}_q X$ und $\mathbb{P}^n\mathbb{R} = \mathbb{P}^n$ ab. Für $n \geq 0$ geht $\mathbb{P}^{n+1}$ aus $\mathbb{P}^n$ hervor durch Ankleben einer $(n+1)$-Zelle und die verklebende Abbildung ist schlicht die offensichtliche zweifache Überlagerung $\pi : S^n \to \mathbb{P}^n$. Wir haben also $\tilde{\mathrm{H}}_q\mathbb{P}^{n+1} = \tilde{\mathrm{H}}_q\mathbb{P}^n$ für $q \neq n+1, n$ und $\tilde{\mathrm{H}}_q\mathbb{P}^{n+1} = 0$ für $q > n+1$ sowie eine exakte Sequenz

$$0 \to \tilde{\mathrm{H}}_{n+1}\mathbb{P}^{n+1} \to \tilde{\mathrm{H}}_n S^n \to \tilde{\mathrm{H}}_n\mathbb{P}^n \to \tilde{\mathrm{H}}_n\mathbb{P}^{n+1} \to 0$$

Es reicht zu zeigen, daß hier der mittlere Pfeil die Nullabbildung ist für n gerade beziehungsweise das Doppelte eines Isomorphismus für $n > 0$ ungerade. Der Fall $n = 0$ ist eh klar. Für $n > 0$ betrachten wir nun das kommutative Diagramm aus dem Beweis von 17.4.3.18 mit Koeffizienten in G. Genauer betrachten wir um $p \in \mathbb{P}^n$ eine trivial überlagerte offene Umgebung U, die homöomorph ist zu einem offenen Ball. Wir haben dann $\pi^{-1}(p) = \{p_1, p_2\}$ und $\pi^{-1}(U) = U_1 \sqcup U_2$ für offene Umgebungen U_i von p_i in S^n. Wir erinnern die Verträglichkeit der relativen Homologie mit Koprodukten 17.2.1.8, die Zeilenmatrix $(\mathrm{H}_n \operatorname{in}_1, \mathrm{H}_n \operatorname{in}_2)$ liefert also einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}_n(U_1, U_1\backslash p_1) \oplus \mathrm{H}_n(U_2, U_2\backslash p_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(U_1 \cup U_2, U_1\backslash p_1 \cup U_2\backslash p_2)$$

für die als Spalte verstandenen Einträge der direkten Summe. Wir erhalten so ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}_n S^n & \to & \mathrm{H}_n(S^n, S^n\backslash\pi^{-1}(p)) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}_n(U_1, U_1\backslash p_1) \oplus \mathrm{H}_n(U_2, U_2\backslash p_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}_n\mathbb{P}^n & \hookrightarrow & \mathrm{H}_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n\backslash p) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}_n(U, U\backslash p) \end{array}$$

und unten links ist für n ungerade unsere Injektion sogar ein Isomorphismus. Mit $a : S^n \to S^n$ der Antipodenabbildung kommutiert nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{H}_n S^n & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_n(S^n, S^n\backslash p_1) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}_n(U_1, U_1\backslash p_1) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_n(U, U\backslash p) \\ \downarrow a & & \downarrow a & & \downarrow a & & \| \\ \mathrm{H}_n S^n & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_n(S^n, S^n\backslash p_2) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}_n(U_2, U_2\backslash p_2) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_n(U, U\backslash p) \end{array}$$

Da aber nach 17.4.1.1 die Antipodenabbildung auf der n-ten reduzierten Homologie der Sphäre S^n die Multiplikation mit $(-1)^{n+1}$ induziert, unterscheiden sich die Verknüpfung in der oberen und in der unteren Horizontale hier um $(-1)^{n+1}$. Die Abbildung im oberen Diagramm von $\mathrm{H}_n S^n$ nach $\mathrm{H}_n(U, U\backslash p)$ ist nun die Summe der beiden horizontalen Isomorphismen aus dem unteren Diagramm und damit das $(1+(-1)^{n+1})$-fache eines Isomorphismus. So folgt, daß für n ungerade auch $\mathrm{H}_n S^n \to \mathrm{H}_n \mathbb{P}^n$ das Doppelte eines Isomorphismus sein muß wie gewünscht. $\square$

Übungen

Übung 17.5.1.7. Gegeben eine kurze exakte Sequenz $G' \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G''$ von abelschen Gruppen und ein topologischer Raum X zeige man, wie in natürlicher Weise Randoperatoren definiert werden können derart, daß eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \mathrm{H}_q(X; G') \to \mathrm{H}_q(X; G) \to \mathrm{H}_q(X; G'') \to \mathrm{H}_{q-1}(X; G') \to \ldots$$

entsteht. Diese Randoperatoren heißen die **Bockstein-Homomorphismen**.

17.5.2 Tensorprodukt abelscher Gruppen

Vorschau 17.5.2.1. Ich bespreche hier nur Tensorprodukte über $\mathbb{Z}$ und die zugehörige multilineare Algebra. Allgemeinere Tensorprodukte werden in 7.2.6 diskutiert.

17.5.2.2. Seien U, V, W abelsche Gruppen. Eine Abbildung $\varphi : U \times V \to W$ heiße **biadditiv**, wenn gilt $\varphi(u_1 + u_2, v) = \varphi(u_1, v) + \varphi(u_2, v)$ und $\varphi(u, v_1 + v_2) = \varphi(u, v_1) + \varphi(u, v_2)$ für alle $u, u_1, u_2 \in U$ und $v, v_1, v_2 \in V$. Gegeben abelsche Gruppen $V_1, \ldots, V_r, W$ nennen wir allgemeiner eine Abbildung

$$\varphi : V_1 \times \ldots \times V_r \to W$$

multiadditiv, wenn sie in jeder Variablen ein Gruppenhomomorphismus wird, sobald wir die anderen Variablen festhalten. Im Fall $r = 0$ ist eine multiadditive Abbildung des leeren Produkts nach W schlicht eine beliebige Abbildung des leeren Produkts alias der einelementigen Menge nach W. Die Gesamtheit aller derartigen multiadditiven Abbildungen notieren wir

$$\mathrm{Ab}(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r, W)$$

und $\mathrm{Ab}(\curlyvee, W)$ im Fall $r = 0$. In diesem Fall liefert das Auswerten auf dem einzigen Element des leeren Produkts eine Bijektion $\mathrm{Ab}(\curlyvee, W) \xrightarrow{\sim} W$.

17.5.2.3 (**Diskussion der Terminologie**). Die im vorhergehenden eingeführte Terminologie suggeriert, daß die fraglichen abelschen Gruppen additiv notiert sein sollen. In manchen Kontexten ist das unglücklich. Dann rede ich unverfänglicher von „Bimorphismen“ und „Multimorphismen“.

Satz 17.5.2.4. *Seien $r \geq 0$ eine natürliche Zahl und $V_1, \ldots, V_r$ abelsche Gruppen. So gilt:*

1. *Es gibt ein Paar (T, τ) bestehend aus einer abelschen Gruppe T und einer multiadditiven Abbildung $\tau \in \mathrm{Ab}(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r, T)$ derart, daß für jede weitere abelsche Gruppe W das Vorschalten von τ eine Bijektion*

$$(\circ\tau) : \mathrm{Ab}(T, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r, W)$$

   zwischen der Menge aller Gruppenhomomorphismen $T \to W$ und der Menge aller multiadditiven Abbildungen $V_1 \times \ldots \times V_r \to W$ induziert. Wir nennen solch ein τ eine **universelle multiadditive Abbildung***;*

2. *Gegeben ein weiteres derartiges Paar (S, σ) existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $c : T \to S$ mit $c \circ \tau = \sigma$ und genau ein Gruppenhomomorphismus $d : S \to T$ mit $d \circ \sigma = \tau$ und diese Abbildungen sind zueinander inverse Isomorphismen zwischen T und S.*

Beweis der Eindeutigkeit 17.5.2.4.2. Die Existenz und Eindeutigkeit von c folgt sofort aus der universellen Eigenschaft von (T, τ). Die Existenz und Eindeutigkeit von d folgt ebenso aus der universellen Eigenschaft von (S, σ). Schließlich gilt $(d \circ c) \circ \tau = \tau = \mathrm{id}_T \circ \tau$ und damit folgt $d \circ c = \mathrm{id}_T$ wieder nach der universellen Eigenschaft von τ. Die Identität $c \circ d = \mathrm{id}_S$ zeigt man genauso. □

17.5.2.5. Unsere Paare sind nach Teil 2 „eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus“, wenn sie denn existieren. Insbesondere kommt es auf die genaue Konstruktion ebensowenig an wie auf die genaue Konstruktion der natürlichen oder der reellen Zahlen. Solch ein Paar verdient damit eine eigene Notation und den bestimmten Artikel. Man nennt T das **Tensorprodukt der** V_i und notiert es im Fall $r > 0$ als

$$T := V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$$

und notiert die universelle multiadditive Abbildung $(v_1, \ldots, v_r) \mapsto v_1 \otimes \ldots \otimes v_r$. Im Fall $r = 1$ nimmt man meist $T = V_1$ und wählt als universelle multiadditive Abbildung die Identität. Im Fall $r = 0$ nimmt man meist $T = \mathbb{Z}$ und wählt als universelle multiadditive alias beliebige Abbildung $\mathrm{ens} \to \mathbb{Z}$ vom leeren Produkt alias der einelementigen Menge nach $\mathbb{Z}$ die Abbildung $* \mapsto 1$. Wenn spezifiziert werden muß, daß das Tensorprodukt abelscher Gruppen gemeint ist, schreiben wir genauer $\otimes_{\mathrm{Ab}}$ oder auch $\otimes_{\mathbb{Z}}$ im Vorgriff auf die allgemeine Konstruktion $\otimes_k$ des Tensorprodukts über einem Ring k.

Beweis der Existenz 17.5.2.4.1. Der Einfachkeit halber schreibe ich die Details nur für biadditive Abbildungen aus. Wir erinnern aus 17.1.1.1 die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}\Lambda$ über einer Menge Λ und aus 17.1.1.2 die Abbildung $\mathrm{can} : \Lambda \to \mathbb{Z}\Lambda$.

Wir beginnen mit der freien abelschen Gruppe $\mathbb{Z}(U \times V)$ über der Menge $U \times V$. Darin betrachten wir die Untergruppe $R \subset \mathbb{Z}(U \times V)$, der erzeugt wird von allen Ausdrücken

$$\begin{array}{c}(u_1 + u_2, v) - (u_1, v) - (u_2, v)\\ (u, v_1 + v_2) - (u, v_1) - (u, v_2)\end{array}$$

für $u, u_1, u_2 \in U$ und v, v_1, v_2. Schließlich definieren wir T als den Quotienten

$$T := \mathbb{Z}(U \times V)/R$$

und erklären $\tau : U \times V \to T$ als die Abbildung, die jedem Paar (u, v) die Nebenklasse $\tau(u, v) := \mathrm{can}(u, v) + R$ von $\mathrm{can}(u, v)$ zuordnet. Die Bilinearität von τ folgt dann unmittelbar aus der Definition der herausgeteilten Untergruppe R. Um die im Satz behauptete universelle Eigenschaft nachzuweisen, arbeiten wir mit dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{Z}(U \times V) \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[dl] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Für jede Abbildung $b : U \times V \to W$ gibt es nach der universellen Eigenschaft der freien abelschen Gruppe über einer vorgegebenen Menge genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{b} : \mathbb{Z}(U \times V) \to W$ mit $\tilde{b} \circ \mathrm{can} = b$. Ist hier b biadditiv, so gilt offensichtlich $\tilde{b}(R) = 0$, also gibt es nach der universellen Eigenschaft des Quotienten genau einen Gruppenhomomorphismus $\hat{b} : T \to W$ mit $\hat{b}\tau(v, w) = b(v, w)$. Diese Abbildung $\hat{b}$ ist eindeutig bestimmt durch b, da die $\tau(v, w)$ unser T als Gruppe erzeugen. □

17.5.2.6 (**Notation für Gruppenhomomorphismen aus Tensorprodukten**). Seien U, V abelsche Gruppen. Die Elemente der Gestalt $u \otimes v$ erzeugen $U \otimes V$ als Gruppe. Geben wir einen Gruppenhomomorphismus $U \otimes V \to W$ in eine weitere abelsche Gruppe an durch eine Vorschrift der Gestalt $u \otimes v \mapsto b(u, v)$, so ist der Leser implizit gefordert, die Biadditivität der Abbildung $b : U \times V \to W$ zu prüfen, und gemeint ist dann eigentlich der durch die universelle Eigenschaft definierte Gruppenhomomorphismus $\hat{b} : U \otimes V \to W$. Analoge Vereinbarungen treffen wir für Abbildungen aus Tensorprodukten mit einer beliebigen Zahl von Faktoren.

Definition 17.5.2.7. Sind $f : V \to V'$ und $g : W \to W'$ Homomorphismen abelscher Gruppen, so definieren wir einen Gruppenhommorphismus $f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W'$ durch die Vorschrift

$$(f \otimes g)(v \otimes w) := f(v) \otimes g(w)$$

in unserer Konvention 17.5.2.6. Wir nennen $f \otimes g$ das **Tensorprodukt der Gruppenhomomorphismen** f **und** g. Analog erklären wir das Tensorprodukt einer beliebigen endlichen Familie von Gruppenhomomorphismen.

17.5.2.8 (**Universell bedeutet stark universell bei abelschen Gruppen**). Universelle multiadditive Abbildungen $\tau : U_1 \times \ldots \times U_r \to T$ haben sogar die stärkere universelle Eigenschaft, daß das Vorschalten von τ in der entsprechenden Variablen für beliebige abelsche Gruppen $V_1, \ldots, V_s$ und W eine Bijektion

$$\mathrm{Ab}(T \curlyvee V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_s, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}(U_1 \curlyvee \ldots \curlyvee U_r \curlyvee V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_s, W)$$

induziert. In der Tat kann man die entsprechende Abbildung in offensichtlicher Weise in ein kommutatives Dreieck einfügen mit zwei Isomorphismen in eine dritte Ecke $\mathrm{Ab}(U_1 \curlyvee \ldots \curlyvee U_r, \mathrm{Ab}(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_s, W))$ als weiteren Kanten, in dem $\mathrm{Ab}(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_s, W)$ mithilfe der Addition auf W selbst als abelsche Gruppe aufgefaßt wird.

17.5.2.9 (**Multiverknüpfung multiadditiver Abbildungen**). Gegeben eine multiadditive Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_s \to W$ und jeweils multiadditive Abbildungen $U_{i,1} \times \ldots \times U_{i,r(i)} \to V_i$ erklären wir in hoffentlich offensichtlicher Weise ihre **Multiverknüpfung**, eine multiadditive Abbildung der Familie aller $U_{i,j}$ nach W.

17.5.2.10 (**Multiverknüpfung universeller multiadditiver Abbildungen**). Aus der starken Universalität universeller multiadditiver Abbildungen folgt ohne weitere Schwierigkeiten, daß jede Multiverknüpfung universeller multiadditiver Abbildungen wieder universell ist. Diese Erkenntnis bedeutet eine Art „Assoziativität“ unserer Tensorprodukte. In der Tat erhalten wir etwa einen ausgezeichneten Isomorphismus $(U \otimes V) \otimes W \xrightarrow{\sim} U \otimes (V \otimes W)$ aus der Erkenntnis, daß die offensichtlichen multiadditiven Abbildungen von $U \times V \times W$ in beide Gruppen universell sind als Multiverknüpfungen universeller multiadditiver Abildungen. Ebenso erhalten wir einen ausgezeichneten Isomorphismus $U \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} U$ mit der impliziten Interpretation von $\mathbb{Z}$ versehen mit der universellen multiadditiven Abbildung $* \mapsto 1$ als dem leeren Tensorprodukt.

17.5.2.11. Gegeben abelsche Gruppen V, W verwenden wir von nun an die Notation $V \Rrightarrow W$ für die Menge $\mathrm{Ab}(V, W)$ aller Gruppenhomomorphismen mit ihrer offensichtlichen Struktur als abelsche Gruppe.

Proposition 17.5.2.12 (Adjunktion von Tensor und Hom). *Gegeben abelsche Gruppen U, V, W erhalten wir durch die Vorschrift $f \mapsto \tilde{f}$ mit $\tilde{f}(u \otimes v) = (f(u))(v)$ einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Ab}(U, V \Rrightarrow W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}(U \otimes V, W)$$

Beweis. Wir können unseren Isomorphismus is spe zu einem kommutativen Dreieck ergänzen durch die zusätzliche Menge $\mathrm{Ab}(U \curlyvee V, W)$ und die zwei offensichtlichen Abbildungen dorthin. □

Vorschau 17.5.2.13. Die Proposition bedeutet in der Terminologie aus 16.4.3, daß die Funktoren $\otimes V$ und $(V \Rrightarrow\ )$ zueinander adjungiert sind.

17.5.2.14 (**Rechtsexaktheit des Tensorprodukts**). Gegeben eine rechtsexakte Sequenz $U'' \to U \twoheadrightarrow U'$ von abelschen Gruppen und eine weitere abelsche Gruppe V ist auch die Sequenz $U'' \otimes V \to U \otimes V \twoheadrightarrow U' \otimes V$ rechtsexakt. Um das einzusehen, muß man nur prüfen, daß eine biadditive Abbildung $U \times V \to W$ genau dann über $U' \times V$ faktorisiert, wenn sie auf $U \times V$ verschwindet. Das aber scheint mir klar.

17.5.3 Torsionsprodukt von abelschen Gruppen

Definition 17.5.3.1 (Tensorprodukt von Komplexen). Sind X, Y Komplexe von Rechts- beziehungsweise Linksmoduln über einem Ring R, so bildet man einen Komplex von abelschen Gruppen $X \otimes_R Y$, ihr **Tensorprodukt** alias den **Tensorkomplex**, durch die Vorschrift $(X \otimes_R Y)_n := \bigoplus_{p+q=n} X_p \otimes_R Y_q$ mit dem Differential

$$\partial(x \otimes y) := \partial x \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes \partial y$$

17.5.3.2 (**Vertauschung von Tensorfaktoren**). Sind X, Y Komplexe von Rechts- beziehungsweise Linksmoduln über einem Ring R, so liefert die Abbildungsvorschrift $x \otimes y \mapsto (-1)^{|x||y|} y \otimes x$ einen Isomorphismus von Kettenkomplexen $v : X \otimes_R Y \to Y \otimes_{R^{\mathrm{opp}}} X$. Speziell erhalten wir so für $X, Y \in \mathrm{Ket}$ einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$v : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

Um das alles nachzuweisen, prüfen wir die Bedingung $\partial v(x \otimes y) = v\partial(x \otimes y)$ durch die Umformungen

$$\begin{aligned}
\partial v(x \otimes y) &= (-1)^{|x||y|} \partial(y \otimes x) \\
&= (-1)^{|x||y|} \partial y \otimes x + (-1)^{|x||y|+|y|} y \otimes \partial x \\
v\partial(x \otimes y) &= v(\partial x \otimes y) + (-1)^{|x|} v(x \otimes \partial y) \\
&= (-1)^{|y||x|+|y|} y \otimes \partial x + (-1)^{|x|} (-1)^{|x||y|+|x|} \partial y \otimes x
\end{aligned}$$

Vorschau 17.5.3.3. In 18.2.3.2 führen wir die „Schmelzkategorie der Kettenkomplexe“ ein als einen formalen Rahmen, in dem derartige Vorzeichenfragen ein für allemal gelöst werden können.

17.5.3.4. Ob mit dem Symbol $\otimes$ das Tensorprodukt zweier Moduln oder vielmehr das Tensorprodukt zweier Komplexe gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen. Da das Tensorprodukt mit direkten Summen vertauscht, kommt es darauf auch nicht wesentlich an.

17.5.3.5 (**Funktorialitäten des Tensorprodukts von Komplexen**). Offensichtlich ist das Tensorprodukt von Komplexen ein Funktor

$$\mathrm{Ket}(\text{Mod-}\,R) \times \mathrm{Ket}(R\text{-Mod}) \to \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab})$$

Er geht auf die Homotopiekategorien über. Sind genauer $f, g : C \to C'$ Kettenhomomorphismen und ist δ eine Kettenhomotopie zwischen f und g, in Formeln $\delta\partial + \partial\delta = f - g$, so ist $\delta \otimes \mathrm{id}$ eine Kettenhomotopie zwischen $f \otimes \mathrm{id}$ und $g \otimes \mathrm{id}$. Analoges gilt für den zweiten Tensorfaktor. Das Tensorprodukt liefert damit auch einen Funktor

$$\mathrm{Hot}(\text{Mod-}\,R) \times \mathrm{Hot}(R\text{-Mod}) \to \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab})$$

17.5.3.6. Gegeben eine abelsche Gruppe M betrachten wir die kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{K}M \hookrightarrow \mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$$

Mit $\mathbb{Z}M$ meinen wir hier die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}M := \mathbb{Z}\langle{}_!^{\prime} M\rangle$ über der Menge M und mit $\mathrm{K}M$ den Kern der offensichtlichen Surjektion $\mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$. Wir notieren $\mathcal{P}M$ das Anfangsstück dieser kurzen exakten Sequenz, also den Komplex mit $\mathcal{P}_1 M = \mathrm{K}M$ und $\mathcal{P}_0 M = \mathbb{Z}M$ und $\mathcal{P}_q M = 0$ für $q \neq 0, 1$. Wir nennen $\mathcal{P}M$ die **Standardauflösung von** M. Gegeben zwei abelsche Gruppen M, N erklären wir eine dritte abelsche Gruppe $M * N$, ihr **Torsionsprodukt**, als die erste Homologiegruppe des Tensorprodukts ihrer Standardauflösungen, in Formeln

$$M * N := M *_{\mathbb{Z}} N := \mathcal{H}_1(\mathcal{P}M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{P}N)$$

Wir erhalten so in offensichtlicher Weise einen Funktor $* : \mathrm{Ab} \times \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$.

17.5.3.7 (**Das Torsionsprodukt von höheren Standpunkten**). Die Definition des Torsionsprodukts mag auf den ersten Blick bizarr wirken. Erst das gleich folgende Beispiel 17.5.3.12 und die Anwendung im universellen Koeffiziententheorem 17.5.5.2 zeigen ihre Sinnhaftigkeit. Vom höheren Standpunkt aus betrachtet ist das Torsionsprodukt unser erstes Beispiel für einen „derivierten Funktor“. Genauer haben wir hier den „ersten derivierten Funktor des Tensorprodukts“ vor uns, vergleiche 19.3.2.25. Von einem noch höheren Standpunkt aus führen wir in 21.9.9.14 die Schmelzkategorie $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ ein und darin die universelle Verschmelzung $M \curlyvee N \to M \otimes^{\mathrm{L}} N$. In dieser Sprache haben wir $M * N = \mathcal{H}^1(M \otimes^{\mathrm{L}} N)$.

17.5.3.8. Eine abelsche Gruppe heißt **torsionsfrei**, wenn sie außer der Null keine Elemente endlicher Ordnung hat.

17.5.3.9 (**Vereinfachte Berechnung des Torsionsprodukts**). Wir kürzen im folgenden $\otimes_{\mathbb{Z}} = \otimes$ ab. Bezeichne M die Gruppe M, aufgefaßt als Komplex mit einem einzigen Eintrag im Grad Null. Wenn Unklarheiten aufkommen, mag man diesen Komplex feiner $M[0]$ notieren. Wir erhalten eine offensichtliche surjektive Kettenabbildung $\mathcal{P}M \twoheadrightarrow M$. Wir behaupten, daß für jedes weitere N die induzierte Abbildung $\mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N \twoheadrightarrow M \otimes \mathcal{P}N$ Isomorphismen

$$\mathcal{H}_i(\mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_i(M \otimes \mathcal{P}N)$$

auf der Homologie liefert. In der Tat ist der Kern unserer surjektiven Kettenabbildung $\mathcal{P}M \twoheadrightarrow M$ der Komplex K^2M mit $\mathrm{K}M$ in den Graden Null und Eins, der Identität dazwischen als Randoperator, und Nullen an allen anderen Stellen. Dieser Komplex K^2M ist nun offensichtlich nullhomotop. Da $\mathcal{P}N$ aus torsionsfreien Gruppen besteht, erhalten wir mit 7.2.5.16 eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\mathrm{K}^2M \otimes \mathcal{P}N \hookrightarrow \mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N \twoheadrightarrow M \otimes \mathcal{P}N$$

Da darin der erste Komplex nullhomotop ist, muß nach der langen exakten Homologiesequenz die zweite Abbildung Isomorphismen auf der Homologie liefern. Anders gesagt hat die Abbildung $M \otimes \mathrm{K}N \to M \otimes \mathbb{Z}N$ also den Kern $M * N$ und den Kokern $M \otimes N$.

17.5.3.10 (**Das Torsionsprodukt mit einer torsionsfreien Gruppe ist Null**). Ist von zwei abelschen Gruppen M, N eine torsionsfrei, so gilt $M * N = 0$. In der Tat folgt aus unserer vereinfachten Berechnung der Torsionsgruppe nach 17.5.3.9 für M torsionsfrei sofort

$$M * N = \mathcal{H}_1(\mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_1(M \otimes \mathcal{P}N) = 0$$

Hier verwenden wir 7.2.5.16 für die letzte Gleichung. Den Fall von torsionsfreiem N behandelt man analog.

17.5.3.11. Gegeben eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ erhält man nach 7.2.5.16 für alle N eine kurze exakte Sequenz von Komplexen $M' \otimes \mathcal{P}N \hookrightarrow M \otimes \mathcal{P}N \twoheadrightarrow M'' \otimes \mathcal{P}N$ und daraus mit 17.5.3.9 eine exakte Sequenz, die **Torsionssequenz** oder genauer **Torsionssequenz im ersten Eintrag**

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M' * N & \hookrightarrow & M * N & \to & M'' * N & \to & \\ & \to & M' \otimes N & \to & M \otimes N & \twoheadrightarrow & M'' \otimes N & \to & 0 \end{array}$$

die natürlich ist in der kurzen exakten Sequenz $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ und in N. Analog konstruieren wir die **Torsionssequenz im zweiten Eintrag**.

17.5.3.12 (**Torsionsprodukt mit zyklischer Gruppe**). Für jede abelsche Gruppe N und jede natürliche Zahl $m \neq 0$ liefert der Randoperator der Torsionssequenz zur offensichtlichen kurzen exakten Sequenz $\mathbb{Z} \overset{m}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ einen Isomorphismus

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) * N \xrightarrow{\sim} \{a \in N \mid ma = 0\}$$

Die Gruppe auf der rechten Seite würde man in Worten die „Gruppe aller Elemente von N mit m-Torsion“ nennen, daher wohl auch die Bezeichnung der linken Seite als „Torsionsprodukt“.

Übungen

Übung 17.5.3.13. Man zeige, daß das Torsionsprodukt mit beliebigen direkten Summen vertauscht.

Ergänzende Übung 17.5.3.14. Das Torsionsprodukt $M * N$ von zwei abelschen Gruppen besitzt niemals Elemente unendlicher Ordnung. Hinweis: Man zeige dazu $(M * N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

Ergänzende Übung 17.5.3.15. Man zeige, daß unser $v : \mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N \to \mathcal{P}N \otimes \mathcal{P}M$ aus 17.5.3.2 Isomorphismen $v_{M,N} : M * N \xrightarrow{\sim} N * M$ liefert mit $v_{M,N} \circ v_{N,M} = \mathrm{id}$. Man zeige weiter, daß für $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ eine kurze exakte Sequenz sogar das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M'' * N \arrow[r] \arrow[d] & M' \otimes N \arrow[d] \\ N * M'' \arrow[r] & N \otimes M' \end{tikzcd}$$

kommutiert mit den Randabbildungen der entsprechenden Torsionssequenzen in den Horizontalen und unseren Vertauschungen in den Vertikalen.

Übung 17.5.3.16 (**Tensor-Hom-Adjunktion**). Man erinnere unseren Homkomplex 17.1.4.12 und und zeige, daß für je drei Komplexe $X, Y, Z \in \mathrm{Ket}$ die „offensichtliche“ Abbildung eine Bijektion

$$\mathrm{Ket}(X \otimes Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ket}(X, Y \Rrightarrow Z)$$

liefert. Speziell erhalten wir so eine Adjunktion $(\otimes Y, (Y \Rrightarrow \ ))$ von Funktoren $\mathrm{Ket} \to \mathrm{Ket}$ der Kategorie der Komplexe abelscher Gruppen in sich selber. Die Koeinheit dieser Adjunktion $(Y \Rrightarrow Z) \otimes Y \to Z$ heißt das **Auswerten**.

Übung 17.5.3.17. Jeder Morphismus $X \otimes Y \to Z$ von Komplexen induziert einen Morphismus $\mathcal{H}X \otimes \mathcal{H}Y \to \mathcal{H}Z$ ihrer Homologien, hier gedacht als Komplexe mit Differential Null.

Übung 17.5.3.18. Seien A, B Ringe und $M \in \mathrm{Ket}(\text{Mod-}\,A), X \in \mathrm{Ket}(A\text{-Mod-}\,B)$ und $N \in \mathrm{Ket}(\text{Mod-}\,B)$ Komplexe. So erhalten wir mit dem Hom aus 17.1.4.12 einen Isomorphismus von Komplexen

$$\mathrm{Hom}_{-B}(M \otimes_A X, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{-A}(M, \mathrm{Hom}_{-B}(X, N))$$

gegeben durch $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ mit $\tilde{\varphi}(m)(x) = \varphi(m \otimes x)$, und der induzierte Isomorphismus auf den Nullzykeln liefert ein adjungiertes Paar $(\ \otimes_A X, \mathrm{Hom}_{-B}(X,\ ))$ von Funktoren zwischen dgMod_{-A} und dgMod_{-B}.

Ergänzung 17.5.3.19. Arbeiten wir in Übung 17.5.3.18 statt mit Rechts- mit Linksmoduln $M \in \mathrm{Ket}(A\text{-Mod}), X \in \mathrm{Ket}(B\text{-Mod-}\,A)$ und $N \in \mathrm{Ket}(B\text{-Mod})$, so haben wir analog

$$\mathrm{Hom}_B(X \otimes_A M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(X, N))$$

vermittels $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ mit $\tilde{\varphi}(m)(x) = (-1)^{|m||x|}\varphi(x \otimes m)$. Daraus erhalten wir insbesondere ein adjungiertes Paar $(X \otimes_A\ , \mathrm{Hom}_B(X,\ ))$ von Funktoren zwischen dgMod_A und dgMod_B.

17.5.4 Erste Anwendungen in der Homologietheorie

Proposition 17.5.4.1 (Tensorprodukt und Homologie). *Ist $C \in \mathrm{Ket}$ ein Kettenkomplex von abelschen Gruppen und A eine abelsche Gruppe, so liefert die Vorschrift $a \otimes [c] \mapsto [a \otimes c]$ Homomorphismen*

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{H}_q C) \to \mathcal{H}_q(A \otimes_{\mathbb{Z}} C)$$

Ist die abelsche Gruppe A flach alias torsionsfrei, so sind diese Homomorphismen Isomorphismen.

Beweis. Die offensichtlichen vertikalen Abbildungen liefern ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{B}_q C) \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{Z}_q C) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{H}_q C) \arrow[d, dashed] \\
\mathcal{B}_q(A \otimes_{\mathbb{Z}} C) \arrow[r, hook] & \mathcal{Z}_q(A \otimes_{\mathbb{Z}} C) \arrow[r, two heads] & \mathcal{H}_q(A \otimes_{\mathbb{Z}} C)
\end{tikzcd}$$

Darin ist auch die obere Horizontale rechtsexakt nach 7.2.5.8, deshalb induziert es die behauptete gestrichelt eingezeichnete Abbildung auf der Homologie. Ist A torsionsfrei, so ist die obere Horizontale auch exakt und bei Vertikalen sind Isomorphismen und induzieren deshalb einen Isomorphismus auf der Homologie. $\square$

Korollar 17.5.4.2 (Koeffizientenwechsel). *Ist X ein topologischer Raum und A eine abelsche Gruppe, so liefert die Vorschrift $a \otimes [c] \mapsto [a \otimes c]$ natürliche Homomorphismen $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{H}_q(X) \to \mathrm{H}_q(X; A)$. Ist die abelsche Gruppe A flach alias torsionsfrei, so sind diese Homomorphismen sogar Isomorphismen*

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{H}_q(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X; A)$$

Beweis. Die vorhergehende Proposition 17.5.4.1 liefert uns schon einmal Homomorphismen $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{H}_q(X) \to \mathcal{H}_q(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{S}X)$, $a \otimes [c] \mapsto [a \otimes c]$ und für A flach sind sie Isomorphismen. Übung 17.5.4.3 liefert uns weiter die recht offensichtlichen Isomorphismen $\mathcal{H}_q(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{S}X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X; A)$. □

Übungen

Übung 17.5.4.3. Für jede abelsche Gruppe A und jeden topologischen Raum X und jedes $a \in A$ und jede q-Kette $c \in \mathrm{S}_q X$ erklären wir die q-Kette $a \dot{\otimes} c \in \mathrm{S}_q(X; A)$ mit Koeffizienten in A in der hoffentlich offensichtlichen Weise. Dann liefert die Abbildung $a \otimes c \mapsto a \dot{\otimes} c$ Isomorphismen $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{S}_q X \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_q(X; A)$ für alle q und sogar einen Isomorphismus $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{S}X \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(X; A)$ von Komplexen.

17.5.5 Universelles Koeffiziententheorem

17.5.5.1. In diesem Abschnitt kürzen wir systematisch $\otimes_{\mathbb{Z}} = \otimes$ und $*_{\mathbb{Z}} = *$ ab.

Satz 17.5.5.2 (Universelles Koeffiziententheorem der Homologie). *Gegeben ein topologischer Raum X und eine abelsche Gruppe G gibt es Isomorphismen*

$$\mathrm{H}_q(X; G) \cong \big(\mathrm{H}_q(X) \otimes G\big) \oplus \big(\mathrm{H}_{q-1}(X) * G\big)$$

17.5.5.3. Dasselbe gilt für relative Homologie und mit Koeffizienten in einem beliebigen Hauptidealring R, für den wir allerdings erst noch das Torsionsprodukt $*_R$ einführen müßten. Der Satz behauptet nur die Existenz solcher Isomorphismen. Inwieweit sie natürlich sind, wird im Beweis genauer diskutiert werden.

Beispiel 17.5.5.4. Da H_0 stets frei ist, gilt stets $\mathrm{H}_1(X) \otimes G \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_1(X; G)$ für die erste Homologie.

Beispiel 17.5.5.5. Nach 17.5.1.6 ist die Folge der $\mathrm{H}_q(\mathbb{P}^n\mathbb{R}; \mathbb{Z})$ für $n \geq 2$ bis auf Isomorphismus

$$\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ 0,\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ 0,\ \ldots,\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ \begin{cases} 0,\ \mathbb{Z} & n \text{ ungerade;} \\ 0 & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die Beschreibung 17.5.1.6 der Homologie mit Koeffizienten G entsteht daraus nach dem universellen Koeffiziententheorem, indem man $\mathbb{Z}$ durch $G = G \otimes \mathbb{Z}$ ersetzt, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ durch $G/2G = G \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und die Nullen durch $G_2 = G * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Beweis. Tensorieren wir die kurze exakte Sequenz $KG \hookrightarrow \mathbb{Z}G \twoheadrightarrow G$ über $\mathbb{Z}$ mit dem Komplex von freien abelschen Gruppen $\mathrm{S}X$, so erhalten wir mit 17.5.4.3 eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$\mathrm{S}X \otimes KG \hookrightarrow \mathrm{S}X \otimes \mathbb{Z}G \twoheadrightarrow \mathrm{S}(X;G)$$

Bilden wir die lange exakte Homologiesequenz und beachten die Isomorphismen $(\mathcal{H}_q\mathrm{S}X) \otimes \mathbb{Z}G \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_q(\mathrm{S}X \otimes \mathbb{Z}G)$ und $(\mathcal{H}_q\mathrm{S}X) \otimes KG \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_q(\mathrm{S}X \otimes KG)$ nach 17.5.4.1, so ergibt sich mit der Abkürzung $\mathrm{H}_q := \mathcal{H}_q(\mathrm{S}X)$ die lange exakte Sequenz

$$\mathrm{H}_q \otimes KG \to \mathrm{H}_q \otimes \mathbb{Z}G \to \mathrm{H}_q(X;G) \to \mathrm{H}_{q-1} \otimes KG \to \mathrm{H}_{q-1} \otimes \mathbb{Z}G$$

und dann mit der Rechtsexaktheit von $\otimes$ und der Definition von $*$ und 17.5.5.7 eine kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{H}_q(X) \otimes G \hookrightarrow \mathrm{H}_q(X;G) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_{q-1}(X) * G$$

Es bleibt zu zeigen, daß sie spaltet. Aber die kurze exakte Sequenz $\mathrm{Z}_qX \hookrightarrow \mathrm{S}_qX \twoheadrightarrow \mathrm{B}_{q-1}X$ spaltet, da $\mathrm{B}_{q-1}X \subset \mathrm{S}_{q-1}X$ frei ist nach 17.5.5.11.Wir finden nach 17.2.2.12 also ein Linksinverses $\mathrm{S}_qX \twoheadrightarrow \mathrm{Z}_qX$ der Einbettung der Zykel in die Ketten, und das induziert die gesuchte Spaltung $\mathrm{H}_q(X;G) \to \mathrm{H}_q(X) \otimes G$. $\square$

17.5.5.6. Die Spaltung im vorhergehenden Beweis ist für festes X natürlich in G. Sie kann aber nicht bei festem $G \neq 0$ natürlich in X gewählt werden. Dazu hätte ich gerne ein gut zugängliches Beispiel etwa eines Raums X mit einer stetigen Abbildung $f : X \to X$, die die Identität auf $\mathrm{H}_1(X)$ und $\mathrm{H}_2(X)$ induziert, nicht aber auf $\mathrm{H}_2(X;G)$.

17.5.5.7. Ist $A \to B \to C \to D \to E$ eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen, so ist $(\mathrm{cok}(A \to B)) \to C \to (\ker(D \to E))$ eine kurze exakte Sequenz.

Korollar 17.5.5.8 (Freiheit für Homologie von Mannigfaltigkeiten). *Gegeben eine orientierbare n-Mannigfaltigkeit M ist $\mathrm{H}_{n-1}M$ torsionsfrei.*

17.5.5.9. Ist M zusätzlich kompakt, so sind zusätzlich alle Homologiegruppen endlich erzeugt nach dem Satz von Wilder 17.4.4.2 und wir folgern, daß $\mathrm{H}_{n-1}M$ eine freie abelsche Gruppe sein muß. Für M abzählbar basiert zeige ich das in 21.6.4.4. Ich weiß nicht, ob für beliebige nicht notwendig abzählbar basierte orientierbare Mannigfaltigkeiten die Homologie im Grad Eins unter der Dimension eine freie abelsche Gruppe sein muß.

Beweis. Nach der Variante mit Koeffizienten 17.5.1.5 des Satzes über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten ist für jede abelsche Gruppe G die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $\mathrm{H}_n(M) \otimes G \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(M;G)$. Aus dem universellen Koeffiziententheorem 17.5.5.2 folgt damit $\mathrm{H}_{n-1}(M) * G = 0$. □

Beispiel 17.5.5.10. Die Sphäre S^3 kann mit der Struktur einer topologischen Gruppe versehen werden, indem wir ihre Elemente als Quaterionen der Länge 1 auffassen. Die n-ten komplexen Einheitswurzeln bilden darin eine zyklische Untergruppe μ_n und der Quotient S^3/μ_n hat nach Überlagerungstheorie die Fundamentalgruppe $\mu_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und nach dem Satz von Hurewicz 17.1.5.2 auch erste Homologie $\mathrm{H}_1(S^3/\mu_n) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Kompakte orientierbare Mannigfaltigkeiten einer Dimension > 2 können also durchaus Torsion in ihrer Homologie haben.

Satz 17.5.5.11. *Jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist frei.*

17.5.5.12. Der anschließende Beweis zeigt allgemeiner: Jeder Untermodul eines freien Moduls über einem Hauptidealring ist frei. Für endlich erzeugte Gruppen folgt das aus 4.4.4.1 in Verbindung mit 4.4.4.4, für endlich erzeugte Moduln analog aus 7.1.4.9 in Verbindung mit 7.2.4.8. Die Hauptarbeit besteht darin, auch nicht notwendig endlich erzeugte Gruppen beziehungsweise Moduln zu behandeln.

Beweis. Sei I eine Menge und $U \subset \mathbb{Z}I$ eine Untergruppe. Wir betrachten die Menge aller Paare (J, B) wo $J \subset I$ eine Teilmenge ist und B eine $\mathbb{Z}$-Basis des Schnitts $U \cap \mathbb{Z}J$. Diese Menge ist nicht leer und ist induktiv geordnet. Sie besitzt also nach Zorns Lemma 3.1.9.15 ein maximales Element $(J_\mathrm{m}, B_\mathrm{m})$ und es gilt zu zeigen $J_\mathrm{m} = I$. Aber sonst sei $i \in I \backslash J_\mathrm{m}$. Das Bild von $U \cap \mathbb{Z}(J_\mathrm{m} \cup \{i\})$ in $\mathbb{Z}i$ unter der offensichtlichen Projektion ist von der Form $r\mathbb{Z}i$ für ein $r \in \mathbb{Z}$. Ist $r \neq 0$, so wählen wir ein Urbild u von ri in U und $(J_\mathrm{m} \cup \{i\}, B_\mathrm{m} \cup \{u\})$ wäre ein größeres Paar. Ist $r = 0$, so wäre schon $(J_\mathrm{m} \cup \{i\}, B_\mathrm{m})$ ein größeres Paar. In jedem Fall steht $J_\mathrm{m} \neq I$ im Widerspruch zur Maximalität von $(J_\mathrm{m}, B_\mathrm{m})$. □

17.5.6 Singuläre Ketten in Produkträumen

17.5.6.1 (**Anschauung für das Kreuzprodukt der Homologie**). Gegeben topologische Räume X, Y scheint mir anschaulich klar, daß man natürliche Produktabbildungen

$$\mathrm{H}_p(X) \times \mathrm{H}_q(Y) \to \mathrm{H}_{p+q}(X \times Y)$$

erwarten darf. Suchen wir zum Beispiel das Produkt von zwei Homologieklassen vom Grad 1, und werden diese Klassen repräsentiert durch geschlossene Wege in X beziehungsweise Y, so liefern unsere beiden Wege zusammen eine Abbildung

des 2-Torus nach $X \times Y$, und jede Triangulierung dieses 2-Torus liefert einen 2-Zykel im Produkt, der dann das Produkt unserer beiden 1-Klassen repräsentieren soll. Diese Anschauung werden wir im folgenden zur Definition des „Kreuzprodukts der Homologie“ formalisieren und zeigen, wie uns die „Künneth-Formel“ erlaubt, die Homologie eines Produkts aus der Homologie seiner Faktoren zu berechnen. Arbeiten wir zur Vereinfachung mit Koeffizienten in einem Körper k, so liefert nach dieser Formel das Kreuzprodukt sogar Isomorphismen

$$\bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}_p(X;k) \otimes_k \mathrm{H}_q(Y;k) \quad \tilde{\to} \quad \mathrm{H}_n(X \times Y;k)$$

Besitzen insbesondere X und Y eine im Sinne von 17.3.1.16 wohldefinierte Eulercharakteristik, so auch $X \times Y$ und es gilt $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$. Der Fall ganzzahliger Koeffizienten ist nur unwesentlich komplizierter. Nach diesen Vorbemerkungen beginnen wir nun mit der formalen Arbeit. Die formale Definition des Kreuzprodukts werden wir in 17.5.7.2 angeben.

Beispiel 17.5.6.2 (**Das Kreuzprodukt auf der nullten Homologie**). Im Fall $n = 0$ kommen wir noch ohne größere Vorarbeiten zum Ziel. Wir erinnern dazu den Funktor $\pi_0 : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ens}$ der Wegzusammenhangskomponenten und unseren Isomorphismus $\mathbb{Z}\pi_0(X) \tilde{\to} \mathrm{H}_0 X$ aus 17.1.3.18 und erhalten für je zwei topologische Räume X, Y natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{H}_0 X \otimes \mathrm{H}_0 Y \tilde{\leftarrow} \mathbb{Z}\pi_0 X \otimes \mathbb{Z}\pi_0 Y \tilde{\to} \mathbb{Z}\pi_0(X \times Y) \tilde{\to} \mathrm{H}_0(X \times Y)$$

Der dritte Isomorphismus kommt dabei von der Verträglichkeit $\pi_0 X \times \pi_0 Y \tilde{\to} \pi_0(X \times Y)$ von π_0 mit endlichen Produkten her. Analoges gilt für die Homologie mit Koeffizienten in einem beliebig vorgegebenen Ring.

17.5.6.3. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{A}$ mit additiver Struktur erklären wir in der offensichtlichen Weise die Kategorie $\mathrm{Ket}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$ der Komplexe von Objekten von $\mathcal{A}$ und ihre Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}(\mathcal{A}) = \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$. Gegeben Komplexe C, D bilden wir dann wie in 17.1.4.12 den Hom-Komplex $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, D) \in \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab})$ und haben per definitionem

$$\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}(C, D) = \mathcal{H}_0 \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, D)$$

Im Spezialfall $\mathcal{A} = R\text{-}\mathrm{Mod}$ verwenden wir für den Hom-Komplex auch die Notation $\mathrm{Hom}_R(C, D)$. Unsere Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ erbt von $\mathcal{A}$ in offensichtlicher Weise eine additive Struktur und auch eine k-lineare Struktur, wenn $\mathcal{A}$ eine k-lineare Struktur trägt.

17.5.6.4. Wir betrachten nun die Funktoren $\mathrm{S} \otimes \mathrm{S} : (X, Y) \mapsto \mathrm{S}(X \times Y)$ und $\mathrm{S}(\times) : (X, Y) \mapsto \mathrm{S}X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{S}Y$ von der Kategorie $\mathrm{Top} \times \mathrm{Top}$ der Paare topologischer Räume in die Kategorie Ket der Komplexe. Wir können sie als Komplexe

von Funktoren alias Objekte von $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}\times\mathrm{Top}})$ auffassen und wie in 17.5.6.3 die zugehörige Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}\times\mathrm{Top}})$ bilden. Man beachte, daß wir für eine beliebige Kategorie $\mathcal{C}$ einen offensichtlichen Isomorphismus von Kategorien $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab})^{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}^{\mathcal{C}})$ zur Verfügung haben und einen offensichtlichen Funktor

$$\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}^{\mathcal{C}}) \to \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab})^{\mathcal{C}}$$

Letzterer Funktor ist jedoch im allgemeinen kein Isomorphismus von Kategorien, ja noch nicht einmal eine Äquivalenz von Kategorien.

Satz 17.5.6.5 (Eilenberg-Zilber). *In der Homotopiekategorie* $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}\times\mathrm{Top}})$ *gibt es zwischen den beiden Objekten* $\mathrm{S}\otimes\mathrm{S}$ *und* $\mathrm{S}(\times)$ *genau einen Morphismus, der auf der nullten Homologie dieselben Abbildungen induziert wie die offensichtlichen Isomorphismen* $\mathrm{S}_0X\otimes\mathrm{S}_0Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_0(X\times Y)$*, und dieser ist in besagter Homotopiekategorie ein Isomorphismus*

$$\mathrm{S}\otimes\mathrm{S} \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(\times)$$

17.5.6.6. Wir beweisen diesen Satz nach einigen Vorbereitungen im Anschluß an den Satz über azyklische Modelle 17.5.6.23. Unser Satz gilt mit demselben Beweis für jede volle Unterkategorie von $\mathrm{Top}\times\mathrm{Top}$, zu deren Objekten alle Paare (Δ_p,Δ_q) von Standardsimplizes gehören.

17.5.6.7. Einen Repräsentanten in $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}\times\mathrm{Top}})$ für den im Satz beschriebenen Isomorphismus in $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}\times\mathrm{Top}})$ beziehungsweise seinen Inversen nennen wir eine **Eilenberg-Zilber-Transformation** beziehungsweise eine **Alexander-Whitney-Transformation**. Beispiele für derartige Transformationen werden wir in 17.5.8.3 und 17.5.8.5 angeben.

Vorschau 17.5.6.8. Der Satz gilt analog für eine beliebige endliche Zahl von Faktoren und der Beweis bleibt im wesentlichen derselbe. Für diese Allgemeinheit will ich aber die Diskussion von Tensorprodukten mit einer beliebigen endlichen Zahl von Tensorfaktoren abwarten. Mehr dazu in 18.4.1.2.

17.5.6.9. Der vorstehende Satz 17.5.6.5 liefert für je zwei topologische Räume X,Y eine ausgezeichnete Homotopieäquivalenz $\mathrm{S}X\otimes\mathrm{S}Y \xrightarrow{\simeq} \mathrm{S}(X\times Y)$. Wir nennen sie die **Eilenberg-Zilber-Äquivalenz** und ihre Inverse die **Alexander-Whitney-Äquivalenz**. Will man ihre anschauliche Bedeutung verstehen, so mag das in 17.5.8.3 gegebene explizite Beispiel helfen. Wir wollen den Satz von Eilenberg-Zilber mithilfe der Methode der „azyklischen Modelle“ beweisen und müssen dazu die nötige Terminologie einführen. Zum Aufwärmen beweisen wir erst einmal eine einfachere verwandte Aussage, das sogenannte „Hauptlemma der homologischen Algebra“.

Definition 17.5.6.10. Sei R ein Ring. Ein R-Modul P heißt **projektiv**, wenn jeder surjektive Homomorphismus $A \twoheadrightarrow A''$ von R-Moduln auf den Homomorphismenräumen eine Surjektion $\mathrm{Hom}_R(P, A) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, A'')$ induziert.

Beispiel 17.5.6.11. Ist $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ eine kurze exakte Sequenz von Moduln über einem Ring R und ist M ein weiterer R-Modul, so ist die induzierte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_R(M, A') \hookrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, A) \to \mathrm{Hom}_R(M, A'')$$

offensichtlich linksexakt, aber der rechte Pfeil muß keineswegs wieder eine Surjektion sein. Für die kurze exakte Sequenz $2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ etwa kommt die Identität $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht von einem Morphismus $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ her. Insbesondere ist $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht projektiv als $\mathbb{Z}$-Modul.

Beispiele 17.5.6.12. Gegeben ein Ring R ist jeder freie R-Modul projektiv. Insbesondere ist $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ projektiv als $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Modul. Sind P', P'' zwei R-Moduln und ist ihre Summe $P' \oplus P''$ projektiv, so auch die Summanden P' und P''. Über einem Ring der Gestalt $R = R' \times R''$ für zwei Ringe R', R'' ist insbesondere $R' \times 0$ ein projektiver Modul, der jedoch nicht frei ist, falls R' und R'' von Null verschieden sind.

Lemma 17.5.6.13. *Ein Modul über einem Ring ist projektiv genau dann, wenn er direkter Summand eines freien Moduls ist.*

Beweis. Natürlich ist jeder direkte Summand eines freien Moduls projektiv. Ist umgekehrt P ein projektiver R-Modul, so finden wir einen freien Modul F und eine Surjektion $F \twoheadrightarrow P$. Nach Annahme induziert diese Surjektion eine Surjektion $\mathrm{Hom}_R(P, F) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, P)$. Jedes Urbild der Identität auf P ist dann eine Spaltung der Surjektion $F \twoheadrightarrow P$. □

Satz 17.5.6.14 (**Hauptlemma der homologischen Algebra**). *Seien gegeben ein Ring R, ein Komplex projektiver R-Moduln P mit $P_q = 0$ für $q < 0$ und ein Komplex C von R-Moduln mit $\mathcal{H}_q(C) = 0$ für $q > 0$. So induziert das Bilden der nullten Homologie eine Bijektion*

$$\mathrm{Hot}_R(P, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(\mathcal{H}_0 P, \mathcal{H}_0 C)$$

zwischen der Menge aller Homotopieklassen von Kettenabbildungen und der Menge aller R-linearen Abbildungen auf der nullten Homologie.

17.5.6.15. Im folgenden Beweis zeigen wir, daß das sogar unter schwächeren Voraussetzungen gilt. Genauer benötigen wir nur die Exaktheit der Zeilen des großen Diagramms in unserem Beweis und noch genauer sogar nur deren Exaktheit „auf der Diagonale und der ersten oberen Nebendiagonale“ also bei den $\mathrm{Hom}(P_i, C_i)$ und den $\mathrm{Hom}(P_{i+1}, C_i)$. Man mag diese Voraussetzung salopp gesprochen als eine Forderung der Art verstehen, daß die P_q in geeigneter Weise „relativ zu den C_q projektiv sind“.

Beweis. Beide Seiten bleiben unverändert, wenn wir beim Komplex C den Anteil C_0 im Grad Null durch $\mathcal{Z}_0 C$ ersetzen und die C_q für $q < 0$ durch Null. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich annehmen, daß bereits gilt $q < 0 \Rightarrow C_q = 0$. Jetzt betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\mathrm{Hom}(P_2, \mathcal{H}_0 C) & \twoheadleftarrow & \mathrm{Hom}(P_2, C_0) & \leftarrow & \mathrm{Hom}(P_2, C_1) & \leftarrow & \mathrm{Hom}(P_2, C_2) \ldots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{Hom}(P_1, \mathcal{H}_0 C) & \twoheadleftarrow & \mathrm{Hom}(P_1, C_0) & \leftarrow & \mathrm{Hom}(P_1, C_1) & \leftarrow & \mathrm{Hom}(P_1, C_2) \ldots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{Hom}(P_0, \mathcal{H}_0 C) & \twoheadleftarrow & \mathrm{Hom}(P_0, C_0) & \leftarrow & \mathrm{Hom}(P_0, C_1) & \leftarrow & \mathrm{Hom}(P_0, C_2) \ldots \\
\cup & & & & & & \\
\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_0 P, \mathcal{H}_0 C) & & & & & &
\end{array}$$

Seine Zeilen sind alle exakt und die Kompositionen in den Spalten sind alle Null. Eine Kettenabbildung $f \in \mathrm{Ket}_R(P, C)$ besteht aus einem Tupel von Elementen $f_i \in \mathrm{Hom}(P_i, C_i)$ „längs der Diagonale“ derart, daß das Bild von f_i unter dem Pfeil nach oben mit dem Bild von f_{i+1} unter dem Pfeil nach links zusammenfällt, also $\partial \circ f_{i+1} = f_i \circ \partial$. Um die Surjektivität zu zeigen, klettern wir im Diagramm hoch und benutzen dabei nur die Exaktheit der Zeilen an den Stellen $\mathrm{Hom}(P_{i+1}, C_i)$. Um die Injektivität zu zeigen, müssen wir zeigen, daß jede Kettenabbildung $P \to C$ nullhomotop ist, die die Nullabbildung $\mathcal{H}_0 P \to \mathcal{H}_0 C$ induziert. Eine Kettenhomotopie zwischen f und der Nullabbildung besteht aus einem Tupel von Elementen $s_i \in \mathrm{Hom}(P_i, C_{i+1})$ derart, daß gilt $s_0 \mapsto f_0$ und daß f_{i+1} die Summe des Bildes von s_i unter dem Pfeil nach oben mit dem Bild von s_{i+1} unter dem Pfeil nach links ist, also $f_{i+1} = s_i \circ \partial + \partial \circ s_{i+1}$. Um so eine Kettenhomotopie zu finden, klettern wir wieder in unserem Diagramm hoch und benutzen diesmal nur die Exaktheit der Zeilen an den Stellen $\mathrm{Hom}(P_i, C_i)$. $\square$

Definition 17.5.6.16. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Unter dem **freien Funktor in die Kategorie der abelschen Gruppen** $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ über einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Objekten von $\mathcal{C}$ verstehen wir den Funktor

$$F : Y \mapsto \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\mathcal{C}(M_i, Y)$$

Beispiel 17.5.6.17. Der Funktor $\mathrm{S}_q : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$ der singulären q-Ketten ist der freie Funktor zur einelementigen Familie (Δ_q) von topologischen Räumen.

Proposition 17.5.6.18. *Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ der freie Funktor zur Familie $(M_i)_{i \in I}$ und $G : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ ein weiterer Funktor. So haben wir eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ab}^{\mathcal{C}}(F, G) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i \in I} G(M_i) \\
\eta & \mapsto & (\eta_{M_i}(\mathrm{id}_i))_{i \in I}
\end{array}$$

für $\mathrm{id}_i \in F(M_i) = \bigoplus_{j\in I} \mathbb{Z}\mathcal{C}(M_j, M_i)$ *dem Tupel mit einmal der Identität an der* i*-ten Stelle und Nullen an allen Stellen mit Index* $j \neq i$*.*

Beweis. Den Beweis dieser Verallgemeinerung der Variante 17.1.4.6 des Yonedalemmas überlassen wir dem Leser. Wie immer bezeichnet $\mathrm{Ab}^{\mathcal{C}}$ die Kategorie der Funktoren $\mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$. □

17.5.6.19. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Eine **Basis eines Funktors**

$$G : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$$

ist eine Familie $(M_i, m_i)_{i\in I}$ von Paaren bestehend aus jeweils einem Objekt $M_i \in \mathcal{C}$ und einem Element $m_i \in G(M_i)$ seines Bildes unter unserem Funktor derart, daß für jedes $X \in \mathcal{C}$ die $(Gf)(m_i)$ mit $i \in I$ und $f \in \mathcal{C}(M_i, X)$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $G(X)$ bilden. Nach unserer Proposition 17.5.6.18 entsprechen die Basen von G zu einer Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Objekten eineindeutig den Isotransformationen des freien Funktors über besagter Familie nach G.

Beispiel 17.5.6.20. Für alle $n \geq 0$ ist die Familie $((\Delta_q, \Delta_p), \tau_q \otimes \tau_p)_{p+q=n}$ eine Basis des Funktors $\mathrm{Top} \times \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$ mit $(X, Y) \mapsto (\mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}Y)_n$.

Beispiel 17.5.6.21. Für alle $n \geq 0$ ist $(\Delta_n, (\tau_n, \varphi))_{\varphi\in\mathrm{Top}(\Delta_n,[0,1])}$ eine Basis des Funktors $\mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$ gegeben durch $X \mapsto \mathrm{S}_n(X \times [0, 1])$.

Definition 17.5.6.22. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\mathcal{M} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Teilmenge. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ heißt **frei mit Modellen in** $\mathcal{M}$, wenn er eine Basis $(M_i, m_i)_{i\in I}$ besitzt derart, daß alle M_i zu $\mathcal{M}$ gehören.

Satz 17.5.6.23 (über azyklische Modelle). *Seien* $\mathcal{C}$ *eine Kategorie und* $F, G \in \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}^{\mathcal{C}})$ *Komplexe von Funktoren mit* $F_q = 0$ *für* $q < 0$*. Wir nehmen an, daß es eine Menge* $\mathcal{M}$ *von Objekten von* $\mathcal{C}$ *gibt derart, daß die homogenen Komponenten* $F_q : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ *von* F *frei sind mit Modellen in* $\mathcal{M}$ *und daß für alle* $M \in \mathcal{M}$ *die Homologie* $\mathcal{H}_q(GM)$ *verschwindet für* $q > 0$*. So induziert der Übergang zur nullten Homologie eine Bijektion*

$$\mathrm{Hot}\big(\mathrm{Ab}^{\mathcal{C}}\big)\,(F, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0F, \mathcal{H}_0G)$$

17.5.6.24. Mit $\mathcal{H}_0F$ meinen wir den Funktor $X \mapsto \mathcal{H}_0(FX)$ alias den Funktor $\mathcal{H}_0 \circ F$. Wenn Sie bereits mit den sogenannten „abelschen Kategorien“ vertraut sind, mögen Sie erkennen, daß $\mathrm{Ab}^{\mathcal{C}}$ selbst eine abelsche Kategorie ist und daß $\mathcal{H}_0F$ gleichbedeutend in diesem begrifflichen Rahmen verstanden werden kann.

17.5.6.25. Ein topologischer Raum, dessen reduzierte Homologie identisch verschwindet, heißt **azyklisch für die singuläre Homologie**. Übertragen nennt man manchmal auch Komplexe azyklisch, deren Homologie vom Grad Null abgesehen

identisch verschwindet. Die wesentliche Voraussetzung des vorhergehenden Satzes läßt sich dahingehend formulieren, daß „G in echt positiven Graden azyklisch ist auf den Modellen von F“. Spezialisiert man den Satz über azyklische Modelle auf den Fall einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit nur einem Objekt und einem Morphismus, eben der Identität dieses einzigen Objekts, so erhält man dieselbe Aussage wie bei der Spezialisierung des Hauptlemmas der homologischen Algebra 17.5.6.14 auf den Fall freier $\mathbb{Z}$-Moduln anstelle projektiver R-Moduln.

Beweis. Wir wiederholen den Beweis des Hauptlemmas der homologischen Algebra 17.5.6.14 und ersetzen darin überall $R\text{-}\mathrm{Mod}$ durch $\mathrm{Ab}^{\mathcal{C}}$. Die Gruppen von Transformationen $\mathrm{Ab}^{\mathcal{C}}(F_p, G_q)$ können nach 17.5.6.18 identifiziert werden mit Produkten $\prod_{i\in I(p)} G_q(M_i)$ für geeignete Familien $I(p) \to \mathcal{M}$ von Modellen und bilden folglich nach unserer Annahme der „Azyklizität der Modelle“ exakte Zeilen. Damit funktioniert dann unser vorheriger Beweis ohne weitere Änderungen. □

Beweis von Eilenberg-Zilber 17.5.6.5. Der Funktor $(X, Y) \mapsto \mathrm{S}_n(X \times Y)$ hat als Basis die einelementige Familie $((\Delta_n, \Delta_n), \mathrm{diag})$, wobei $\mathrm{diag} : \Delta_n \to \Delta_n \times \Delta_n$ die diagonale Einbettung und dann auch den n-Zykel $\mathrm{diag} \in \mathrm{S}_n(\Delta_n \times \Delta_n)$ bezeichnet. Der Funktor $(X, Y) \mapsto (\mathrm{S}X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{S}Y)_n$ hat als Basis die $(n+1)$-elementige Familie $((\Delta_p, \Delta_q), \tau_p \otimes \tau_q)_{p+q=n}$ mit den Tensorprodukten der tautologischen Simplizes als zweiten Einträgen. Wir prüfen als nächstes, daß beide Funktoren auf ihren eigenen Modellen und den Modellen des jeweils anderen Funktors azyklisch sind, daß also die höheren Homologiegruppen der Komplexe $\mathrm{S}(\Delta_p \times \Delta_q)$ und $\mathrm{S}\Delta_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{S}\Delta_q$ verschwinden. Die erste Aussage folgt daraus, daß $\Delta_p \times \Delta_q$ konvex ist. Um die zweite Aussage einzusehen, betrachten wir den Kettenkomplex $\mathbb{Z}[0]$, der nur im Grad Null lebt und dort $\mathbb{Z}$ ist, und bilden die Folge von Kettenabbildungen $\mathrm{S}(\Delta_p) \to \mathrm{S}(\mathrm{top}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}[0]$. Man erkennt, daß alle diese Abbildungen Homotopieäquivalenzen sind, zum Beispiel mit 17.1.4.9 für die erste Abbildung und expliziter Rechnung für die Zweite, oder alternativ mit 17.6.2.4. Es folgt eine Homotopieäquivalenz $\mathrm{S}\Delta_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{S}\Delta_q \to \mathbb{Z}[0] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[0]$ und so die Azyklizität dieses Komplexes. Nach dem Satz über azyklische Modelle 17.5.6.23 liefert das Bilden der nullten Homologie also eine Bijektion

$$\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}\times\mathrm{Top}})(\mathrm{S}\otimes\mathrm{S}, \mathrm{S}(\times)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}\times\mathrm{Top}}(\mathcal{H}_0(\mathrm{S}\otimes\mathrm{S}), \mathcal{H}_0\mathrm{S}(\times))$$

und ebenso eine Bijektion auf Morphismen in der Gegenrichtung und ebenso Bijektionen in den Fällen, in denen in den Klammern zweimal derselbe Funktor steht. So erhalten wir insgesamt einen Isomorphismus zwischen der vollen Unterkategorie mit zwei Objekten $\{\mathrm{S}\otimes\mathrm{S}, \mathrm{S}(\times)\} \subset \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}\times\mathrm{Top}})$ und der vollen Unterkategorie mit zwei Objekten $\{\mathcal{H}_0(\mathrm{S}\otimes\mathrm{S}), \mathcal{H}_0\mathrm{S}(\times)\} \subset \mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}\times\mathrm{Top}}$. Nun gilt es nur noch zu zeigen, daß die offensichtlichen Isomorphismen $\mathrm{S}_0(X \times Y) \xrightarrow{\sim}$

$\mathrm{S}_0 X \otimes \mathrm{S}_0 Y$ Isomorphismen $\mathrm{H}_0(X \times Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_0(\mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}Y)$ auf der nullten Homologie induzieren. Es scheint mir jedoch offensichtlich, daß unsere Isomorphismen der Grad-Null-Anteile unserer Komplexe Ränder zu Rändern machen und daß die davon auf der nullten Homologie induzierte Abbildung unter der Verknüpfung mit dem Inversen des von der Variation 7.2.6.17 zur Rechtsexaktheit des Tensorprodukts herrührenden Isomorphismus $\mathrm{H}_0 X \otimes \mathrm{H}_0 Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_0(\mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}Y)$ genau unseren Isomorphismus 17.5.6.2 liefert. Der Satz folgt. □

17.5.7 Tensorprodukt und Homologie

17.5.7.1 (**Homologie von Tensorproduktkomplexen**). Sind C, D Komplexe von Rechts- beziehungsweise Linksmoduln über einem Ring R, so haben wir offensichtliche Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_p C \otimes_R \mathcal{H}_q D & \to & \mathcal{H}_{p+q}(C \otimes_R D) \\ [c] \otimes [d] & \mapsto & [c \otimes d] \end{array}$$

Verschwinden unsere beiden Komplexe in allen Graden, die man von Null aus in Richtung der Pfeile erreicht, so liefert die natürliche Abbildung sogar einen Isomorphismus $\mathcal{H}_0 C \otimes_R \mathcal{H}_0 D \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_0(C \otimes_R D)$ als Konsequenz aus der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts 7.2.6.17.

Definition 17.5.7.2. Gegeben topologische Räume X, Y notieren wir die von der Eilenberg-Zilber-Äquivalenz $\mathrm{S}X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{S}Y \xrightarrow{\simeq} \mathrm{S}(X \times Y)$ nach 17.5.7.1 induzierten Abbildungen mit dem Symbol $\times$ als

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_p X \times \mathrm{H}_q Y & \to & \mathrm{H}_{p+q}(X \times Y) \\ (c, d) & \mapsto & c \times d \end{array}$$

und nennen sie das **Kreuzprodukt der Homologie**.

17.5.7.3. Ist R ein Ring, so liefert die Vorschrift $(c \otimes d) \otimes r \mapsto c \otimes rd$ Isomorphismen von R-Bimoduln $(\mathrm{S}X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{S}Y) \otimes_{\mathbb{Z}} R \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(X; R) \otimes_R \mathrm{S}(Y; R)$. In der Tat kann man zum Beispiel argumentieren, daß die so definierte Abbildung eine Basis für die Linksoperation von R in eine ebensolche überführt. Damit liefert die Eilenberg-Zilber-Abbildung wohlbestimmte Homotopieäquivalenzen $\mathrm{S}(X; R) \otimes_R \mathrm{S}(Y; R) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{S}(X \times Y; R)$. Die nach 17.5.7.1 auf der Homologie induzierten Abbildungen schreibt man in der Form

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_p(X; R) \times \mathrm{H}_q(Y; R) & \to & \mathrm{H}_{p+q}(X \times Y; R) \\ (c, d) & \mapsto & c \times d \end{array}$$

und nennt sie das **Kreuzprodukt der Homologie mit Koeffizienten**.

Proposition 17.5.7.4 (Formelsammlung für das Kreuzprodukt). *Das Kreuzprodukt der Homologie hat die folgenden Eigenschaften:*

Natürlichkeit: *Gegeben stetige Abbildungen $f : X \to K$ und $g : Y \to L$ haben wir für beliebige $a \in \mathrm{H}_p X$ und $b \in \mathrm{H}_q Y$ in $\mathrm{H}_{p+q}(K \times L)$ die Gleichheit*

$$(f_* a) \times (g_* b) = (f \times g)_*(a \times b)$$

Eins: *Gegeben ein topologischer Raum X und $a \in \mathrm{H}_p X$ eine Homologieklasse und $\delta \in \mathrm{H}_0(\mathrm{top})$ der kanonische Erzeuger der Homologie eines Punktes gilt*

$$(\mathrm{pr}_X)_*(a \times \delta) = a$$

Assoziativität: *Gegeben X, Y, Z topologische Räume und a, b, c jeweils Homologieklassen und $\mathrm{ass} : (X \times Y) \times Z \xrightarrow{\sim} X \times (Y \times Z)$ die offensichtliche Bijektion gilt*

$$\mathrm{ass}_*((a \times b) \times c) = a \times (b \times c)$$

Graduierte Kommutativität: *Gegeben $\tau : X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X$ die Vertauschungsabbildung für topologische Räume X, Y und Homologieklassen $a \in \mathrm{H}_p X$ sowie $b \in \mathrm{H}_q Y$ gilt in $\mathrm{H}_{p+q}(Y \times X)$ bei kommutativem Koeffizientenring R die Identität*

$$\tau_*(a \times b) = (-1)^{pq} b \times a$$

Vorschau 17.5.7.5. Wir erklären in 18.4.1.9, inwiefern diese Eigenschaften zusammen mit den Funktorialitäten $(\mathrm{id}_X)_*(a) = a$ und $f_*(g_*(a)) = (f \circ g)_*(a)$ bedeuten, daß unsere Homologie als ein „Schmelzfunktor von der kartesischen Schmelzkategorie der topologischen Räume in die Schmelzkategorie der graduierten Paritätsgruppen“ aufgefaßt werden kann. Der kanonische Erzeuger $\delta \in \mathrm{H}_0(\mathrm{top})$ ist in diesem Kontext als das „Kreuzprodukt mit überhaupt keinem Faktor in der Homologie des kartesischen Produkts über die leere Familie topologischer Räume“ zu verstehen.

Beweis. Die Natürlichkeit folgt sofort aus der Natürlichkeit der Eilenberg-Zilber-Äquivalenz 17.5.6.5. Die graduierte Kommutativität folgt daraus, daß mit der Notation η für unsere Eilenberg-Zilber-Äquivalenz die Komposition

$$\mathrm{S} \otimes \mathrm{S} \xrightarrow{v} \mathrm{S} \otimes \mathrm{S} \xrightarrow{\eta} \mathrm{S}(\times) \xrightarrow{\tau_*} \mathrm{S}(\times)$$

von Morphismen in der Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top} \times \mathrm{Top}})$ mit v der Vertauschung der Tensorfaktoren nach 17.5.3.2 auch die charakterisierenden Eigenschaften der Eilenberg-Zilber-Äquivalenz aus 17.5.6.5 hat. Für die Eins-Eigenschaft betrachten wir die Komposition

$$\mathrm{S} \xrightarrow{\otimes 1} \mathrm{S} \otimes \mathrm{S}(\mathrm{top}) \xrightarrow{\eta} \mathrm{S}(\ \times \mathrm{top}) \xrightarrow{\mathrm{pr}_*} \mathrm{S}$$

von Morphismen in der Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}})$ und folgern direkt aus dem Satz über azyklische Modelle 17.5.6.23, daß sie die Identität sein muß. Für die Assoziativität schließlich betrachten wir in $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}^3})$ mit variablen topologischen Räumen X, Y, Z das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}Y) \otimes \mathrm{S}Z \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{S}(X \times Y) \otimes \mathrm{S}Z \arrow[r] & \mathrm{S}((X \times Y) \times Z) \arrow[d] \\
\mathrm{S}X \otimes (\mathrm{S}Y \otimes \mathrm{S}Z) \arrow[r] & \mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}(Y \times Z) \arrow[r] & \mathrm{S}(X \times (Y \times Z))
\end{tikzcd}$$

mit hoffentlich offensichtlichen Morphismen. Es gilt zu zeigen, daß es kommutiert. Wieder wenden wir den Satz über azyklische Modelle 17.5.6.23 an. Der Ausgangsfunktor ist frei mit Modellen $(\Delta_p, \Delta_q, \Delta_r)$ und der Zielfunktor ist auf diesen Modellen azyklisch. Folglich reicht es zu zeigen, daß beide Kompositionen dieselbe Abbildung auf der nullten Homologie induzieren. Das ist jedoch klar. □

Lemma 17.5.7.6. *Sind C, D Komplexe von Vektorräumen über einem Körper k, so liefern die natürlichen Abbildungen Isomorphismen*

$$\bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}_p(C) \otimes_k \mathcal{H}_q(D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_n(C \otimes_k D)$$

Beweis. Nach 17.1.4.14 gibt es in der Homotopiekategorie der Komplexe von k-Vektorräumen eindeutig bestimmte Isomorphismen $\mathcal{H}C \xrightarrow{\wr\sim} C$ und $\mathcal{H}D \xrightarrow{\wr\sim} D$, die auf der Homologie die offensichtlichen Identifikationen induzieren. Mit 17.5.3.5 folgt eine Homotopieäquivalenz $\mathcal{H}C \otimes \mathcal{H}D \xrightarrow{\wr\sim} C \otimes D$, die dann den gewünschten Isomorphismus $\mathcal{H}C \otimes \mathcal{H}D \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(C \otimes D)$ induziert. □

Satz 17.5.7.7 (Künneth-Formel mit Koeffizienten in einem Körper). *Für zwei beliebige topologische Räume X, Y und Homologie mit Koeffizienten in einem Körper k liefert das Kreuzprodukt der Homologie Isomorphismen*

$$\bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}_p(X;k) \otimes_k \mathrm{H}_q(Y;k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(X \times Y;k)$$

Beweis. Für diesen Beweis vereinbaren wir die Abkürzungen $\mathrm{H}X := \mathrm{H}(X;k)$ und $\mathrm{S}X := \mathrm{S}(X;k)$ sowie $\otimes := \otimes_k$. Unser Lemma 17.5.7.6 und die Homotopieäquivalenz $\mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}Y \xrightarrow{\wr\sim} \mathrm{S}(X \times Y)$ liefern dann auf der Homologie Isomorphismen

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}X \otimes \mathrm{H}Y \arrow[d, equal] & & \mathrm{H}(X \times Y) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{H}(\mathrm{S}X) \otimes \mathcal{H}(\mathrm{S}Y) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{H}(\mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}Y) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{H}\,\mathrm{S}(X \times Y)
\end{tikzcd}$$

□

Satz 17.5.7.8 (**Künneth-Formel**). *Gegeben topologische Räume X und Y liefert das Kreuzprodukt der Homologie die erste Abbildung einer natürlichen kurzen exakten Sequenz*

$$\bigoplus_{p+q=n} (\mathrm{H}_p X \otimes \mathrm{H}_q Y) \hookrightarrow \mathrm{H}_n(X \times Y) \twoheadrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} (\mathrm{H}_p X * \mathrm{H}_q Y)$$

Diese Sequenz, deren zweite Abbildung im Beweis explizit angegeben werden wird, spaltet für alle X und Y, aber es gibt keine natürliche Wahl einer Spaltung für alle X und Y.

Ergänzung 17.5.7.9. Die von der Vertauschung $X \times Y \to Y \times X$ auf der Homologie induzierte Abbildung läßt sich zu einem Morphismus der entsprechenden Künneth-Sequenzen ergänzen. Wie die zugehörige Abbildung auf dem Tensorprodukt der Homologien aussieht, erklärt die „graduierte Kommutativität des Kreuzprodukts“ nach 18.4.1.13. Wie die zugehörige Abbildung auf dem Torsionsprodukt der Homologien aussieht, habe ich mir nicht so genau überlegt.

17.5.7.10. Arbeitet man mit Koeffizienten in einem Hauptidealring, so gilt dieselbe Formel mit demselben Beweis.

17.5.7.11 (**Konventionen zum Verschieben von Komplexen**). Ist C ein Komplex, so bezeichnen wir mit

$$C[1]$$

den „um Eins gegen die Richtung der Pfeile verschobenen Komplex“, in Formeln $(C[1])_q = C_{q-1}$ beziehungsweise später einmal bei „Kokettenkomplexen“ $(C[1])^q = C^{q+1}$. Jedes Element $c \in C$ liefert ein Element $c[1] \in C[1]$. Entgegen leider üblichen Konventionen führe ich hier beim Randoperator *kein* Vorzeichen ein. Bezeichnet also $\mathbb{Z}[1]$ den um Eins gegen die Richtung der Pfeile verschobenen Komplex $\mathbb{Z}[0]$ und ist C ein Komplex von abelschen Gruppen, so definiert die Abbildung $c \otimes n[1] \mapsto nc[1]$ einen Isomorphismus von Komplexen $C \otimes \mathbb{Z}[1] \xrightarrow{\sim} C[1]$. Dahingegen bezeichne

$$[1]C$$

den um Eins gegen die Richtung der Pfeile verschobenen Komplex, bei dem zusätzlich der Randoperator ∂ durch $-\partial$ ersetzt wird. Jedes Element $c \in C$ liefert auch ein Element $[1]c \in [1]C$, und in diesen Notationen haben wir dann $\partial([1]c) = -[1](\partial c)$. Diesmal liefert $n[1] \otimes c \mapsto [1]nc$ einen Isomorphismus von Komplexen $\mathbb{Z}[1] \otimes C \xrightarrow{\sim} [1]C$. Die offensichtliche Abbildung induziert dann einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$(C \otimes D)[1] \xrightarrow{\sim} C \otimes (D[1])$$

und die Abbildung $[1]c \mapsto (-1)^{|c|}c[1]$ mit $|c| = q$ für $c \in C_q$ ist ein Isomorphismus $[1]C \xrightarrow{\sim} C[1]$.

Beweis. Sicher haben wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\mathrm{Z}X \hookrightarrow \mathrm{S}X \twoheadrightarrow \mathrm{B}X[1]$$

Vorne und hinten stehen hier Komplexe mit Differential Null. Tensorieren wir über $\mathbb{Z}$ mit dem aus freien abelschen Gruppen bestehenden Komplex $\mathrm{S}Y$, so erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\mathrm{Z}X \otimes \mathrm{S}Y \hookrightarrow \mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}Y \twoheadrightarrow \mathrm{B}X[1] \otimes \mathrm{S}Y$$

Da $\mathrm{Z}X$ und $\mathrm{B}X$ nach 17.5.5.11 auch aus freien abelschen Gruppen bestehen und Differential Null haben, hat die zugehörige lange exakte Homologiesequenz die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \to & (\mathrm{B}X[1] \otimes \mathrm{H}Y)_{n+1} & \to \\ \to & (\mathrm{Z}X \otimes \mathrm{H}Y)_n & \to & \mathcal{H}_n(\mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}Y) & \to & (\mathrm{B}X[1] \otimes \mathrm{H}Y)_n & \to \\ \to & (\mathrm{Z}X \otimes \mathrm{H}Y)_{n-1} & \to & & & & \end{array}$$

Man überzeugt sich mühelos, daß die Randabbildungen hier schlicht von den Einbettungen der Ränder in die Zykel induziert werden, so daß sich aufgrund der kurzen exakten Sequenz $\mathrm{B}X \hookrightarrow \mathrm{Z}X \twoheadrightarrow \mathrm{H}X$ und der exakten Tor-Sequenz eine natürliche kurze exakte Sequenz der Gestalt

$$(\mathrm{H}X \otimes \mathrm{H}Y)_n \hookrightarrow \mathrm{H}_n(X \times Y) \twoheadrightarrow (\mathrm{H}X * \mathrm{H}Y)_{n-1}$$

ergibt. Um eine Spaltung dieser Sequenz anzugeben, wählen wir Linksinverse der Einbettungen $\mathrm{Z}X \hookrightarrow \mathrm{S}X, \mathrm{Z}Y \hookrightarrow \mathrm{S}Y$. Solche Linksinversen existieren, da ja die jeweiligen Kokerne $\mathrm{B}X, \mathrm{B}Y$ nach 17.5.5.11 frei sind als Untergruppen der freien abelschen Gruppen $\mathrm{S}X, \mathrm{S}Y$. □

Übungen

Übung 17.5.7.12. Man zeige: Jede Eilenberg-Zilber-Transformation läßt sich auf genau eine Weise zu einer Transformation

$$\mathrm{S}(X, A) \otimes \mathrm{S}(Y, B) \to \mathrm{S}(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$$

zwischen Funktoren auf Paaren von Raumpaaren fortsetzen, die wohlbestimmt ist als Transformation zwischen Funktoren in die Homotopiekategorie der Kettenkomplexe. Wir erhalten so das **Kreuzprodukt der relativen Homologie**

$$\mathrm{H}_q(X, A) \otimes \mathrm{H}_p(Y, B) \to \mathrm{H}_{q+p}(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$$

Man beachte die Identität $\big((X \times B) \cup (A \times Y)\big)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \times B^{\mathrm{c}}$ von Komplementmengen. Mit der Notation $\mathrm{H}_q^D(X) := \mathrm{H}_q(X, X \backslash D)$ wird unser relatives Kreuzprodukt also zu einer Abbildung

$$\mathrm{H}_q^D(X) \otimes \mathrm{H}_p^E(Y) \to \mathrm{H}_{q+p}^{D \times E}(X \times Y)$$

Der Vorschub gelingt dann für stetige Abbildungen $f : X \to Y$ mit $f(X \backslash D) \subset (Y \backslash E)$ alias $D \supset f^{-1}(E)$.

Übung 17.5.7.13 (**Formelsammlung für das relative Kreuzprodukt**). Das Kreuzprodukt der relativen Homologie hat die folgenden Eigenschaften:

Natürlichkeit: Gegeben Morphismen von Raumpaaren $f : (X, A) \to (K, I)$ und $g : (Y, B) \to (L, J)$ gilt für $a \in \mathrm{H}_p(X, A)$ und $b \in \mathrm{H}_q(Y, B)$ die Gleichheit

$$(f_* a) \times (g_* b) = (f \times g)_*(a \times b)$$

Eins: Gegeben ein Raumpaar (X, A) und $a \in \mathrm{H}_p(X, A)$ eine Homologieklasse und $\delta \in \mathrm{H}_0(\mathrm{top}, \emptyset)$ der kanonische Erzeuger der Homologie eines Punktes gilt

$$(\mathrm{pr}_X)_*(a \times \delta) = a$$

Assoziativität: Gegeben $(X, A), (Y, B), (Z, C)$ Raumpaare und a, b, c jeweils relative Homologieklassen und $\mathrm{ass} : (X \times Y) \times Z \xrightarrow{\sim} X \times (Y \times Z)$ die offensichtliche Bijektion gilt

$$\mathrm{ass}_*((a \times b) \times c) = a \times (b \times c)$$

Graduierte Kommutativität: Gegeben $\tau : (X, A) \times (Y, B) \xrightarrow{\sim} (Y, B) \times (X, A)$ die Vertauschungsabbildung für Raumpaare $(X, A), (Y, B)$ und Homologieklassen $a \in \mathrm{H}_p(X, A)$ sowie $b \in \mathrm{H}_q(Y, B)$ gilt bei kommutativem Koeffizientenring R die Identität

$$\tau_*(a \times b) = (-1)^{pq} b \times a$$

Übung 17.5.7.14 (**Relatives Kreuzprodukt als Isomorphismus**). Gegeben $(X, A), (Y, B)$ Raumpaare mit $A \Subset X$ und $B \Subset Y$ oder A beliebig und $B = \emptyset$ liefert unsere relative Eilenberg-Zilber-Transformation aus 17.5.7.12 Isomorphismen auf der Homologie. Hinweis: Nach dem Satz über feine Ketten 17.2.4.6 liefert unter diesen Annahmen

$$\mathrm{S}((X \times B) + \mathrm{S}(A \times Y)) \to \mathrm{S}((X \times B) \cup (A \times Y))$$

Isomorphismen auf der Homologie. In diesen Fällen ist bei Koeffizienten in einem Körper k das Kreuzprodukt auf der relativen Homologie also ein Isomorphismus

$$\mathrm{H}_q(X, A; k) \otimes_k \mathrm{H}_p(Y, B; k) \to \mathrm{H}_{q+p}(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y); k)$$

Übung 17.5.7.15 (**Nichtexistenz einer Wurzel aus dem** $\mathbb{R}^3$). Für ungerades n kann es keinen topologischen Raum X geben derart, daß $X \times X$ homöomorph ist zu $\mathbb{R}^n$. Hinweis: Kreuzprodukt als Isomorphismus 17.5.7.14.

Übung 17.5.7.16 (**Kreuzprodukt von Fundamentalzykeln**). Gegeben zwei kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten ist das Kreuzprodukt ihrer Fundamentalzykel der Fundamentalzykel ihres Produkts unter einer wohlbestimmten Orientierung, der **Produktorientierung**.

Ergänzende Übung 17.5.7.17. Gegeben ein Ring A und ein A-Modul M bezeichne M^* den A-Rechtsmodul $\operatorname{Hom}_A(M, A)$. Gegeben ein Ring A und ein A-Rechtsmodul N bezeichne weiter ${}^*N$ den A-Modul $\operatorname{Hom}_{-A}(N, A)$. Man zeige, daß das Auswerten Homomorphismen $M \to {}^*(M^*)$ und $N \to ({}^*N)^*$ induziert. Man zeige, daß diese Homomorphismen für endlich erzeugte projektive Moduln Isomorphismen sind. Bezeichnet $A\text{-}\mathrm{pModf}$ die Kategorie der endlich erzeugten projektiven A-Moduln und $\mathrm{pModf}\text{-}A$ die Kategorie der endlich erzeugten projektiven A-Rechtsmoduln, so liefert unser Dualisieren mithin eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{pModf}\text{-}A \xrightarrow{\approx} A\text{-}\mathrm{pModf}^{\mathrm{opp}}$$

Übung 17.5.7.18. Man berechne die Homologie von $\mathbb{P}^2\mathbb{R} \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}$.

Übung 17.5.7.19 (**Verschieben und Hom-Komplexe**). Gegeben Komplexe X, Y liefern die offensichtlichen, ohne alle Vorzeichen erklärten Identifikationen Isomorphismen von Komplexen

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{Hom}(X, Z) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Hom}(X[1], Z[1]) \\ \operatorname{Hom}([1]X, Z) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Hom}(X, Z)[-1] \\ \operatorname{Hom}(X, [1]Z) & \xrightarrow{\sim} & [1]\operatorname{Hom}(X, Z) \end{array}$$

Später werden sich diese Isomorphismen als Spezialfälle von Aussagen über das Tensorieren mit Einheiten 18.3.4.20 und 18.3.4.16 erweisen, angewandt auf die Einheit $\mathbb{Z}[1]$ der Schmelzkategorie Ket.

Übung 17.5.7.20. Seien R ein Ring und C ein exakter Komplex von R-Moduln und P ein Komplex von projektiven R-Moduln, der in Richtung der Differentiale beschränkt ist, als da heißt, irgendwann kommen nur noch Nullen. Man zeige, daß dann der Hom-Komplex $\operatorname{Hom}_R(P, C)$ auch exakt ist. Hinweis: Hauptlemma der homologischen Algebra 17.5.6.14 und Interpretation der Homologie des Hom-Komplexes als Homotopieklassen 17.1.4.12.

17.5.8 Eilenberg-Zilber und Alexander-Whitney*

17.5.8.1. Um zusätzliche Anschauung bereitzustellen, gebe ich eine mögliche Eilenberg-Zilber-Transformation auch noch explizit an. Wir werden diese explizite

Form nicht benötigen, deshalb führe ich den Beweis nicht aus. Wir betrachten für $n = p + q$ alle affinen injektiven Abbildungen

$$\omega : \Delta_n \to \Delta_p \times \Delta_q$$

mit der Eigenschaft, daß sie Ecken auf Paare von Ecken werfen und „in jeder Komponente monoton wachsen auf den Ecken“. So eine Abbildung entspricht eindeutig einer Injektion

$$\omega = (\alpha, \beta) : \{0, \ldots, n\} \hookrightarrow \{0, \ldots, p\} \times \{0, \ldots, q\}$$

mit monoton wachsenden α und β. Man erkennt, daß für solch ein ω notwendig gilt $\omega(0) = (0, 0)$, $\omega(n) = (p, q)$ und daß beim Übergang von i zu $i + 1$ entweder α oder β aber nicht beide um 1 wachsen. Man kann sich so ein ω vorstellen als einen Weg von $(0, 0)$ nach (p, q), der in jedem von n Zeitschritten entweder eins nach oben oder eins nach rechts gehen darf. Die Fläche unterhalb dieses Weges im Quadrat $[0, p] \times [0, q]$ notieren wir $n(\omega)$, in Formeln

$$n(\omega) = \sum_{0 \le i < j < p+q} (\beta(i+1) - \beta(i))(\alpha(j+1) - \alpha(j))$$

Unsere Abbildungen $\omega : \Delta_n \to \Delta_p \times \Delta_q$ sind die n-Simplizes einer Triangulierung von $\Delta_p \times \Delta_q$, aber diese Erkenntnis ist nur für die Anschauung von Belang. Jetzt definieren wir Homomorphismen

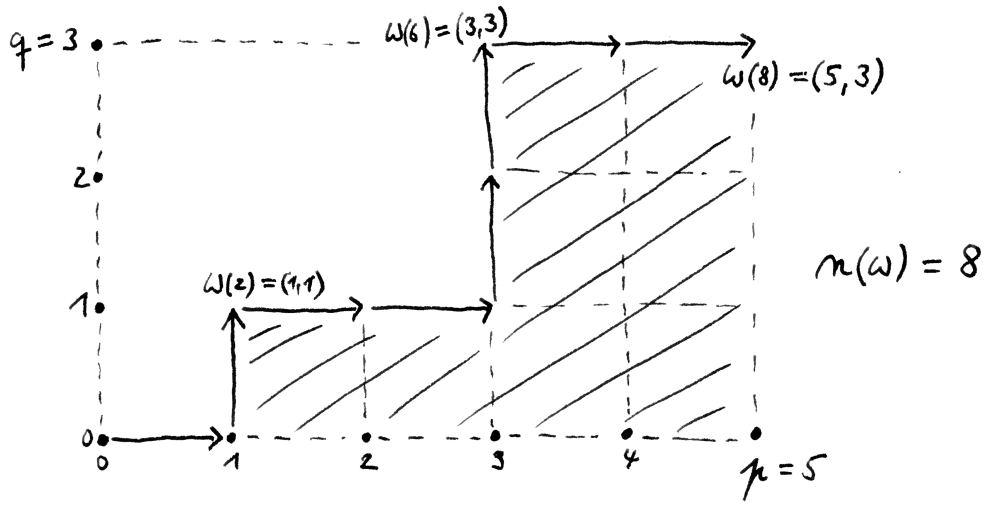
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}_p X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{S}_q Y & \to & \mathrm{S}_{p+q}(X \times Y) \\ \sigma \otimes \tau & \mapsto & \sum_\omega (-1)^{n(\omega)} (\sigma \times \tau) \circ \omega \end{array}$$

und erhalten so eine Transformation von Funktoren von der Kategorie aller Paare topologischer Räume in die Kategorie der Gruppen.

Ergänzung 17.5.8.2. Im übrigen entsprechen unsere Wege eineindeutig den sogenannten (p, q)-Shuffles aus dem Beweis von 12.8.1.9. Des weiteren entsprechen diese Wege auch eineindeutig den Worten, die man durch das Hintereinanderschreiben von p Einsen und q Nullen bilden kann und die wir etwa in 10.1.4.25 betrachtet hatten.

Lemma 17.5.8.3. *Die in 17.5.8.1 angegebenen Homomorphismen bilden eine Eilenberg-Zilber-Transformation* $\mathrm{S} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{S} \to \mathrm{S}(\times)$ *in* $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top} \times \mathrm{Top}})$.

Beweis. Unsere Homomorphismen sind offensichtlich funktoriell und tun in der nullten Homologie das Richtige. Nach dem Satz über azyklische Modelle 17.5.6.23 und dem Beweis des Satzes von Eilenberg-Zilber müssen also nur prüfen, daß sie für alle X, Y eine Kettenabbildung bilden. Das überlassen wir dem Leser. □



Graphische Darstellung einer unserer in beiden Komponenten monotonen Injektionen ω im Fall $p = 5$, $q = 3$.

Definition 17.5.8.4. Die Abbildungen

$$\lambda_p^{p+q} = \lambda_p : \Delta_p \to \Delta_{p+q} \quad \text{und} \quad \rho_q^{p+q} = \rho_q : \Delta_q \to \Delta_{p+q},$$

die hinten q Nullen anhängen beziehungsweise vorne p Nullen davorschieben, heißen die p-**Vorderseite** beziehungsweise die q-**Hinterseite** unseres Standardsimplex. Hier steht λ für „links“ und ρ für „rechts“.

Lemma 17.5.8.5. *Gegeben topologische Räume X, Y schreiben wir einen beliebigen n-Simplex $\Delta_n \to X \times Y$ in der Form (σ, τ) mit $\sigma : \Delta_n \to X$, $\tau : \Delta_n \to Y$. In dieser Notation bilden die Abbildungen*

$$\begin{array}{rccc} A_n : & \mathrm{S}_n(X \times Y) & \to & (\mathrm{S}X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{S}Y)_n \\ & (\sigma, \tau) & \mapsto & \sum_{p+q=n} \sigma\lambda_p \otimes \tau\rho_q \end{array}$$

eine Kettenabbildung $A : \mathrm{S}(X \times Y) \to \mathrm{S}X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{S}Y$, die **Alexander-Whitney-Abbildung***, und diese Abbildungen bilden in ihrer Gesamtheit eine Alexander-Whitney-Transformation.*

Beweis. Die im Lemma definierte Abbildung ist offensichtlich funktoriell und tut das Richtige in der nullten Homologie. Nach dem Satz über azyklische Modelle 17.5.6.23 und dem Beweis des Satzes von Eilenberg-Zilber müssen wir also nur prüfen, daß sie für alle X, Y eine Kettenabbildung ist. Dazu rechnen wir mit der Vereinbarung, die a priori undefinierten Ausdrücke $\sigma\lambda_0 k_0$ und $\tau\rho_0 k_0$ als Null zu verstehen, zunächst

$$\partial A(\sigma, \tau) = \sum_{p+q=n} \left(\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma\lambda_p k_i \otimes \tau\rho_q + (-1)^p \sum_{j=0}^{q} (-1) \sigma\lambda_p \otimes \tau\rho_q k_j \right)$$

Ebenso finden wir auch

$$A\partial(\sigma, \tau) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \sum_{a+b=n-1} \sigma k_\nu \lambda_a \otimes \tau k_\nu \rho_b$$

Für die entsprechenden Abbildungen mit Werten in Δ_n für $n = a + b + 1$ gilt nun

$$\begin{array}{rcl} k_\nu \lambda_a & = & \begin{cases} \lambda_{a+1} k_\nu & \text{falls } 0 \le \nu \le a+1; \\ \lambda_a & \text{falls } a+1 \le \nu \le n; \end{cases} \\ k_\nu \rho_b & = & \begin{cases} \rho_b & \text{falls } 0 \le \nu \le a; \\ \rho_{b+1} k_{\nu-a} & \text{falls } a \le \nu \le n. \end{cases} \end{array}$$

Damit können wir $A\partial(\sigma, \tau)$ umschreiben zu

$$\sum_{a+b+1=n} \left((-1)^\nu \sum_{\nu=0}^{a} \sigma\lambda_{a+1} k_\nu \otimes \tau\rho_b + (-1)^{a+1+\mu} \sum_{\mu=0}^{b} \sigma\lambda_a \otimes \tau\rho_{b+1} k_{\mu+1} \right)$$

und wenn wir in der ersten Summe $p = a + 1$, $q = b$, $i = \nu$ substituieren und in der Zweiten $p = a$, $q = b + 1$, $j = \mu + 1$ ergibt sich

$$A\partial(\sigma, \tau) = \sum_{p+q=n} \left(\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \sigma\lambda_p k_i \otimes \tau\rho_q + (-1)^p \sum_{j=1}^{q} (-1)^j \sigma\lambda_p \otimes \tau\rho_q k_j \right)$$

wobei wir die erste Summe im Fall $p = 0$ und die zweite im Fall $q = 0$ als Null zu verstehen haben. Es folgt $\partial A(\sigma, \tau) = A\partial(\sigma, \tau)$. $\square$

Übungen

Übung 17.5.8.6. Bezeichne $A^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die vom Standardsimplex erzeugte affine Hyperebene aller Punkte mit Koordinatensumme Eins. Wir versehen sie mit der durch das angeordnete minimale affine Erzeugendensystem $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$ gegebenen algebraischen Orientierung 3.6.5.21. Man zeige, daß für $\omega : \Delta_n \to \Delta_p \times \Delta_q$ wie in 17.5.8.1 das Vorzeichen $(-1)^{n(\omega)}$ die Verträglichkeit des induzierten Isomorphismus $\omega : A^n \xrightarrow{\sim} A^p \times A^q$ von affinen Räumen mit der eben gegebenen Orientierung auf A^n und dem Produkt nach 3.6.5.17 der eben gegebenen Orientierungen auf A^p und A^q beschreibt.

Übung 17.5.8.7 (**Kompatibilität der Standarderzeuger mit dem Kreuzprodukt**). Für die Standarderzeuger $\eta_n \in \mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash 0)$ aus 17.2.3.10 zeige man $\eta_n = \tau^{\times n}$ für $\tau = \eta_1$ wie dort. Hinweis: Man berechne das relative Kreuzprodukt $\tau \times \eta_n$ aus 17.5.7.12 mithilfe der Alexander-Whitney-Transformation 17.5.8.1. Es ist eine Summe mit Vorzeichen versehener affiner Simplizes und jeder Summand gehört zu derselben topologischen Orientierung der Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^{n+1}$. Hier mag 17.4.1.7 helfen. Diese wenig erfreuliche Übung dient dem Prüfen der Rückwärtskompatibilitäten.

17.6 Kohomologie

17.6.1 Singuläre Kohomologie

17.6.1.1 (**Obere und untere Indizes**). Komplexe abelscher Gruppen haben wir bislang stets (A_q, ∂_q) notiert mit $\partial_q : A_q \to A_{q-1}$. Im folgenden ist es aber oft auch praktisch, sie (A^q, d^q) zu notieren mit $A^q := A_{-q}$ und $d^q := \partial_{-q} : A^q \to A^{q+1}$. Es ist allgemeine Konvention, daß bei oberer Stellung des Index das Differential in Richtung wachsender Indizes geht und bei unterer Stellung des Index in Richtung fallender Indizes. Im Kontext von Differentialen in Richtung wachsender Indizes bezeichnet man die Ränder, Zykel und Homologiegruppen meist als **Koränder** $\mathcal{B}^q C$, **Kozykel** $\mathcal{Z}^q C$ und **Kohomologiegruppen** $\mathcal{H}^q C$, aber das werden wir im allgemeinen nicht so genau nehmen. Im Kontext der Kohomologiegruppen topologischer Räume, die wir gleich einführen werden, trägt die Stellung des Index jedoch darüber hinaus jedoch noch die zusätzliche Information, daß eben Kohomologie und nicht Homologie gemeint ist, und da müssen wir diese Unterscheidung sehr genau nehmen.

17.6.1.2. Wir erinnern daran, wie wir in 17.1.4.12 für je zwei Komplexe $C, D \in \mathrm{Ket}$ den Hom-Komplex $C \Rrightarrow D$ eingeführt hatten. Gegeben ein topologischer Raum X und eine abelsche Gruppe M erklären wir die **Kohomologiegruppen von** X **mit Koeffizienten in** M als die Gruppen

$$\mathrm{H}^q(X; M) = \mathrm{H}^q_{\mathrm{sing}}(X; M) := \mathcal{H}^q(\mathrm{S}X \Rrightarrow M[0])$$

Sie sind Funktoren $\mathrm{Top}^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$. Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert insbesondere Homomorphismen $f^* : \mathrm{H}^q(Y; M) \to \mathrm{H}^q(X; M)$. Sie heißen die **Rückzüge der Kohomologie**. Im Spezialfall $M = \mathbb{Z}$ kürzen wir unsere Kohomologiegruppen ab zu

$$\mathrm{H}^q X := \mathrm{H}^q(X; \mathbb{Z})$$

17.6.1.3 (**Homotopieinvarianz der Kohomologie**). Homotope Abbildungen $f, g : X \to Y$ induzieren nach 17.1.4.9 kettenhomotope Kettenabbildungen alias dieselben Morphismen $\mathrm{S}X \to \mathrm{S}Y$ in Hot und damit auch dieselben Abbildungen $f^* = g^* : \mathrm{H}^q Y \to \mathrm{H}^q X$. Insbesondere induziert jede Homotopieäquivalenz Isomorphismen auf der Kohomologie.

Beispiel 17.6.1.4 (**Kohomologie eines Punktes**). Für den einpunktigen Raum zeigt unsere Diskussion 17.1.2.13 des Komplexes $\mathrm{S}(\mathrm{top})$ unmittelbar, daß die Kettenabbildung $\mathbb{Z}[0] \to \mathrm{S}(\mathrm{top})$, die $1 \in \mathbb{Z}$ auf den einzigen singulären Nullsimplex abbildet, eine Homotopieäquivalenz ist. Wenden wir darauf $\Rrightarrow M[0]$ an, entsteht wieder eine Homotopieäquivalenz. Diese liefert dann einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{top}; M) \xrightarrow{\sim} M$$

durch Nachschalten des ausgezeichneten Isomorphismus $\mathcal{H}^0(\mathbb{Z}[0]\Rrightarrow M[0]) \xrightarrow{\sim} M$, der seinerseits gegeben wird durch das Auswerten auf $1 \in \mathbb{Z}$. Das Urbild von $1 \in \mathbb{Z}$ heißt der **kanonische Erzeuger von** $\mathrm{H}^0(\mathrm{top})$. Wir notieren ihn $1 = 1_{\mathrm{top}} \in \mathrm{H}^0(\mathrm{top})$.

17.6.1.5. Das Auswerten $(\mathrm{S}X\Rrightarrow M[0]) \curlyvee \mathrm{S}X \to M[0]$ aus 17.5.3.16 induziert auf der Homologie nach 17.5.3.17 bilineare Abbildungen, die **Kronecker-Paarungen**

$$\mathrm{H}^q(X;M) \times \mathrm{H}_q X \to M$$

Wir notieren sie $\langle\ ,\ \rangle$ und finden etwa $\langle 1_{\mathrm{top}}, \delta\rangle = 1$ für $\delta \in \mathrm{H}_0(\mathrm{top})$ unseren kanonischen Erzeuger der Homologie des einpunktigen Raums. Man prüft leicht, daß unsere Kroneckerpaarungen Isomorphismen

$$\mathrm{H}^0(X;M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}_0 X, M)$$

induzieren. Das „universelle Koeffiziententheorem der Kohomologie“ 17.6.7.2 wird zeigen, daß sie auch Isomorphismen $\mathrm{H}^1(X;M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}_1 X, M)$ induzieren, daß aber für $\mathrm{H}^q(X;M)$ mit $q \geq 2$ die analogen Aussagen im allgemeinen nicht mehr gelten und für $M = \mathbb{Q}$ dann doch wieder.

17.6.1.6 (**Kohomologie mit Körperkoeffizienten**). Arbeiten wir mit Koeffizienten in einem Köper k, so liefert 17.1.4.14 eindeutig bestimmte Homotopieäquivalenzen $\mathcal{H}(\mathrm{S}(X;k)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(X;k)$ und damit liefern die entsprechnd zur Homologie mit Koeffizienten verallgemeinerten Kroneckerpaarungen Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X;k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X;k)^*$$

Im Fall von Körperkoeffizienten ist also salopp gesprochen die Kohomologie schlicht der Dualraum der Homologie.

17.6.1.7. Ich buchstabiere die im obigen Formalismus zusammengefaßten Definitionen im folgenden auch noch explizit aus. Wir vereinbaren dazu die Notation $\mathrm{S}^*(X;M) := (\mathrm{S}X\Rrightarrow M[0])$ und haben also per definitionem $\mathrm{H}^q(X;M) = \mathcal{H}^q\mathrm{S}^*(X;M)$. Der Komplex $\mathrm{S}^*(X;M)$ besteht per definitionem aus den Gruppen

$$\mathrm{S}^q(X;M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{S}_q X, M) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ens}(\mathrm{Top}(\Delta_q, X), M)$$

Deren Elemente heißen **singuläre Koketten von** X **mit Koeffizienten in** M. Der Randoperator wird per definitionem gegeben durch $\partial(f) = -(-1)^{|f|} f \circ \partial$. Eine Kokette $c \in \mathrm{S}^q(X;M)$ nennen wir eine **Kokette vom Grad** q und schreiben $|c| = q$. Den Wert einer Kokette $c \in \mathrm{S}^q(X;M)$ auf einer Kette $z \in \mathrm{S}_q X$ notieren wir $\langle c, z\rangle \in M$. Sprechen wir ohne nähere Spezifikation von singulären Koketten, so meinen wir Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Den Randoperator des Komplexes $\mathrm{Hom}(\mathrm{S}X, M) = (\mathrm{S}X\Rrightarrow M[0])$ nennen wir den **Korandoperator**.

17.6.1.8 (**Verträglichkeit der Kohomologie mit Koprodukten**). Ist $X = \bigsqcup X_w$ eine Zerlegung von X in paarweise disjunkte Teilmengen, die nicht durch Wege verbunden werden können, und bezeichnet $i_w : X_w \hookrightarrow X$ die jeweilige Einbettung, so liefern nach 19.3.3.5 die $\mathrm{S}i_w : \mathrm{S}X_w \to \mathrm{S}X$ einen Isomorphismus $\bigoplus \mathrm{S}X_w \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}X$ und dual liefern auch die $\mathrm{S}^*i_w : \mathrm{S}^*X \to \mathrm{S}^*X_w$ einen Isomorphismus $\mathrm{S}^*X \to \prod_w \mathrm{S}^*X_w$ für das gradweise Produkt von Komplexen und schließlich die Rückzüge der Kohomologie Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X) \xrightarrow{\sim} \prod_w \mathrm{H}^q(X_w)$$

In der in 16.2.1.9 eingeführten Terminologie sind insbesondere die Funktoren $\mathrm{H}^q : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ verträglich mit beliebigen Koprodukten. Dasselbe gilt für Kohomologie mit Koeffizienten mit demselben Beweis. Für die nullte Kohomologie erhalten wir so eine Bijektion

$$\mathrm{H}^0(X; M) \xrightarrow{\sim} \{f : X \to M \mid f \text{ ist konstant auf allen Wegen in } X\}$$

17.6.1.9 (**Anschauung für die erste Kohomologie**). Die erste Kohomologiegruppe mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe M kann man sich im Fall eines „lokal zusammenziehbaren“ Raums als die Menge aller Isomorphieklassen von „M-Hauptfaserbündeln“ veranschaulichen, wobei M mit der diskreten Topologie zu verstehen ist, so daß unsere Hauptfaserbündel topologisch betrachtet Überlagerungen sind. Der Wert einer Isomorphieklasse von Hauptfaserbündeln auf einem durch einen geschlossenen Weg dargestellten Zykel wird dann berechnet, indem man „den Weg liftet und ihm das Gruppenelement zuordnet, das den Anfangspunkt auf den Endpunkt schiebt“.

Vorschau 17.6.1.10. Für allgemeine topologische Räume werden wir die Menge aller Isomorphieklassen von M-Hauptfaserbündeln in 19.1.2.6 und 19.5.2.1 mit der „ersten Garbenkohomologie unseres Raums mit Koeffizienten in M“ identifizieren.

17.6.1.11 (**Tensorprodukt und Dualisieren**). Gegeben ein Komplex $A \in \mathrm{Ket}$ erklären wir den **dualen Komplex** als $A^* := (A \Rightarrow \mathbb{Z}[0])$. Gegeben Komplexe $A, B \in \mathrm{Ket}$ erklären wir einen natürlichen Homomorphismus

$$t = t_{A,B} : A^* \otimes B^* \to (A \otimes B)^*$$

Wir können ihn explizit angeben durch $(f \otimes g)(a \otimes b) := (-1)^{|g||a|} f(a)g(b)$ für homogene Elemente. Man prüft dann leicht, daß diese natürlichen Homomorphismen auch eine Transformation der entsprechenden Funktoren in der Homotopiekategorie Hot bilden. Konzeptioneller wird das in 18.1.6.25 erklärt.

Definition 17.6.1.12. Gegeben topologische Räume X, Y betrachten wir in Hot die Verknüpfung $\mathrm{S}^*X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{S}^*Y \to (\mathrm{S}X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{S}Y)^* \to \mathrm{S}^*(X \times Y)$ unserer natürlichen Morphismen aus 17.6.1.11 mit der dualisierten Alexander-Whitney-Äquivalenz aus 17.5.6.9. Die davon nach 17.5.7.1 auf der Kohomologie induzierten Abbildungen notieren wir

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^pX \times \mathrm{H}^qY & \to & \mathrm{H}^{p+q}(X \times Y) \\ (c,d) & \mapsto & c \times d \end{array}$$

und nennen sie das **Kreuzprodukt der Kohomologie**. Analoge Definitionen vereinbaren wir für Kohomologie mit Koeffizienten in einem Kring.

Proposition 17.6.1.13 (**Formelsammlung für das Kreuzprodukt**). *Das Kreuzprodukt der Kohomologie hat die folgenden Eigenschaften:*

Natürlichkeit: *Gegeben stetige Abbildungen $f : X \to K$ und $g : Y \to L$ haben wir für beliebige $a \in \mathrm{H}^pK$ und $b \in \mathrm{H}^qL$ in $\mathrm{H}^{p+q}(X \times Y)$ die Gleichheit*

$$(f^*a) \times (g^*b) = (f \times g)^*(a \times b)$$

Eins: *Gegeben X ein topologischer Raum und $a \in \mathrm{H}^pX$ eine Kohomologieklasse und $1 \in \mathrm{H}_0(\mathrm{top})$ der kanonische Erzeuger der Kohomologie eines Punktes und $\mathrm{pr}_X : X \times \mathrm{top} \to X$ die Projektion gilt*

$$(\mathrm{pr}_X)^*a = (a \times 1)$$

Assoziativität: *Gegeben X, Y, Z topologische Räume und a, b, c jeweils Kohomologieklassen und $\mathrm{ass} : (X \times Y) \times Z \xrightarrow{\sim} X \times (Y \times Z)$ die offensichtliche Bijektion gilt*

$$\mathrm{ass}^*(a \times (b \times c)) = (a \times b) \times c$$

Graduierte Kommutativität: *Gegeben $\tau : X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X$ die Vertauschungsabbildung für topologische Räume X, Y und Kohomologieklassen $a \in \mathrm{H}^pX$ und $b \in \mathrm{H}^qY$ gilt in $\mathrm{H}^{p+q}(Y \times X)$ die Identität*

$$\tau^*(a \times b) = (-1)^{pq} b \times a$$

Beweis. Die Natürlichkeit folgt aus der Natürlichkeit der Alexander-Whitney-Äquivalenz 17.5.6.9. Die graduierte Kommutativität folgt sofort, wenn wir ihren Beweis im Fall des Kreuzprodukts der Homologie noch ergänzen um die Gleichheit $v^* \circ t = t \circ v : A^* \otimes B^* \to (B \otimes A)^*$, die man sowohl schlicht nachrechnen als auch aus der allgemeinen Theorie der Schmelzkategorien in 18.1.1.1 folgende konzeptuell erhalten kann. Die Eins-Eigenschaft folgt ähnlich, indem wir ihren

Beweis im Fall des Kreuzprodukts der Homologie ergänzen um die Erkenntnis, daß für jeden Komplex A die Verknüpfung

$$A^* \to A^* \otimes \mathrm{I} \to A^* \otimes \mathrm{I}^* \to (A \otimes \mathrm{I})^* \to A^*$$

der Morphismen $(\otimes 1)^* \circ t \circ (\mathrm{id} \times \mathrm{can}) \circ (\otimes 1)$ die Identität ist, für $\mathrm{can} : \mathrm{I} \xrightarrow{\sim} \mathrm{I}^*$ der offensichtliche Morphismus. Das kann man sowohl schlicht nachrechnen als auch aus der allgemeinen Theorie der Schmelzkategorien in 18.1.1.1 folgende konzeptuell erhalten. Für die Assoziativität schließlich erinnern wir aus dem Beweis der Assoziativität des Kreuzprodukts der Homologie unsere homotopiekommutativen Diagramme von Homotopieäquivalenzen und erhalten durch Dualisieren und Invertieren aller horizontalen Pfeile die Mitte eines homotopiekommutativen Diagramms der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{S}^*X \otimes \mathrm{S}^*Y) \otimes \mathrm{S}^*Z \arrow[d] & & \\
(\mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}Y)^* \otimes \mathrm{S}^*Z \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{S}(X \times Y)^* \otimes \mathrm{S}^*Z \arrow[d] & \\
((\mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}Y) \otimes \mathrm{S}Z)^* \arrow[r] & (\mathrm{S}(X \times Y) \otimes \mathrm{S}Z)^* \arrow[r] & \mathrm{S}((X \times Y) \times Z))^* \\
(\mathrm{S}X \otimes (\mathrm{S}Y \otimes \mathrm{S}Z))^* \arrow[r] \arrow[u] & (\mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}(Y \times Z))^* \arrow[r] & \mathrm{S}(X \times (Y \times Z)))^* \arrow[u] \\
\mathrm{S}^*X \otimes (\mathrm{S}Y \otimes \mathrm{S}Z)^* \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{S}^*X \otimes \mathrm{S}^*(Y \times Z) \arrow[u] & \\
\mathrm{S}^*X \otimes (\mathrm{S}^*Y \otimes \mathrm{S}^*Z) \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Die Morphismen in den Außenbereichen sind alle irgendwelche t vom Tensorprodukt der Dualen zum Dualen des Tensorprodukts. Die Assoziativität folgt nun, sobald wir zeigen, daß die linke Vertikale zu einem kommutativen Diagramm ergänzt werden kann durch den offensichtlichen Morphismus von ganz unten nach ganz oben. Das kann man sowohl schlicht nachrechnen als auch aus der allgemeinen Theorie der Schmelzkategorien in 18.1.1.1 folgende konzeptuell erhalten. Wenden wir dann $\mathcal{H}$ an, so ergibt sich die behauptete Assoziativität ohne weitere Schwierigkeiten. □

Vorschau 17.6.1.14. Eine geschlossene Darstellung dieser Argumentation und auch der anschließenden Diskussion des Kohomologierings im Rahmen der Schmelzkategorien gebe ich in 18.4.2.2 folgende.

17.6.1.15 (**Kohomologiering**). Gegeben ein topologischer Raum X definieren wir das **cup-Produkt** auf seiner Kohomologie durch

$$a \cup b := \Delta^*(a \times b)$$

Das cup-Produkt ist also für alle p, q eine biadditive Abbildung

$$\mathrm{H}^p X \times \mathrm{H}^q X \to \mathrm{H}^{p+q} X$$

Unsere Formeln für das Kreuzprodukt 17.6.1.13 zeigen unmittelbar, daß $\mathrm{H}^* X$ mit dem cup-Produkt ein Ring wird mit Einselement $1_X := \mathrm{fin}^*(1_{\mathrm{top}}) \in \mathrm{H}^0 X$ für $\mathrm{fin} : X \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung und $1_{\mathrm{top}} \in \mathrm{H}^0(\mathrm{top})$ der kanonische Erzeuger. Dieser Ring

$$\mathrm{H}^* X = \bigoplus_{q \geq 0} \mathrm{H}^q X$$

heißt der **Kohomologiering von** X. Die graduierte Kommutativität des Kreuzprodukts zeigt

$$a \cup b = (-1)^{|a||b|} b \cup a$$

Man sagt deshalb auch, der Kohomologiering sei **graduiert kommutativ**. Schließlich folgt aus unseren Formeln 17.6.1.13 für das Kreuzprodukt, daß der Rückzug der Kohomologie unter stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ durch Ringhomomorphismen $f^* : \mathrm{H}^* Y \to \mathrm{H}^* X$ geschieht.

Beispiel 17.6.1.16. Sind $i_w : X_w \hookrightarrow X$ die Einbettungen der Wegzusammenhangskomponenten von X, so liefern die Rückzüge nach 17.6.1.8 sogar einen Isomorphismus von graduierten Ringen

$$\mathrm{H}^* X \xrightarrow{\sim} \prod \mathrm{H}^* X_w$$

Man beachte hier, daß hier rechts das Produkt von graduierten Ringen verstanden werden muß, das nur aus denjenigen Tupeln des Produktrings besteht, bei denen es eine gemeinsame Schranke für die Grade der von Null verschiedenen homogenen Anteile der Einträge unseres Tupels gibt. Das Urbild des Tupels mit einer Eins an der Stelle w und Nullen sonst notiere ich $1_w \in \mathrm{H}^0 X$. Diese Kohomologieklassen können wir auch charakterisieren durch $\langle 1_w, \delta_v \rangle = \delta_{w,v}$ für $\delta_v \in \mathrm{H}_0 X$ das Bild des zur Wegzusammenhangskomponente X_v gehörigen kanonischen Erzeugers in der Homologie.

Satz 17.6.1.17 (Künnethformel der Kohomologie). *Sind alle Homologiegruppen eines Raums X endlich erzeugt und frei oder, noch allgemeiner, endlich erzeugt und projektiv über dem gewählten Koeffizientenring, so induziert für jeden weiteren Raum Y das Kreuzprodukt der Kohomologie einen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}^* X \otimes \mathrm{H}^* Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(X \times Y)$$

17.6.1.18. Ganz ohne Endlichkeitsbedingung kann man hier nicht auskommen, denn schon wenn X und Y unendliche diskrete Mengen sind, ist das Analogon der Künneth-Formel 17.5.7.7 für die Kohomologie selbst mit Koeffizienten in einem Körper offensichtlich falsch. Ohne Endlichkeitsbedingungen erhält man aber im Beweis immer noch $(\mathrm{H}X \otimes \mathrm{S}Y)^* \xrightarrow{\sim} (\mathrm{S}Y \Rrightarrow \mathrm{H}^*X)$ und so ausgezeichnete Isomorphismen

$$\bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}^q(Y; \mathrm{H}^p(X;k)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(X \times Y; k)$$

Beweis. Nach 17.1.4.14 im Fall von Körperkoeffizienten oder 17.6.2.11 im allgemeinen gibt es genau einen Isomorphismus $\mathrm{S}X \xrightarrow{\wr\sim} \mathrm{H}X$ in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe, der den offensichtlichen Isomorphismus auf der Homologie induziert. Nehmen wir dann zusätzlich für den vorletzten Isomorphismus alle Homologiegruppen von X als endlich erzeugt an, so erhalten wir Homotopieäquivalenzen

$$\mathrm{S}^*(X \times Y) \xrightarrow{\wr\sim} (\mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}Y)^* \xrightarrow{\wr\sim} (\mathrm{H}X \otimes \mathrm{S}Y)^* \xrightarrow{\sim} (\mathrm{H}X)^* \otimes \mathrm{S}^*Y \xleftarrow{\sim} (\mathrm{H}^*X \otimes \mathrm{S}^*Y)$$

Man sieht unschwer ein, daß der auf der Kohomologie in der Gegenrichtung induzierte Isomorphismus gerade das Kreuzprodukt ist. □

Übungen

Übung 17.6.1.19. Gegeben eine kurze exakte Sequenz $L \hookrightarrow M \twoheadrightarrow N$ von abelschen Gruppen und ein topologischer Raum X zeige man, wie analog zu 17.5.1.7 in natürlicher Weise Randoperatoren definiert werden können derart, daß eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \mathrm{H}^q(X;L) \to \mathrm{H}^q(X;M) \to \mathrm{H}^q(X;N) \to \mathrm{H}^{q+1}(X;L) \to \ldots$$

entsteht. Diese Randoperatoren heißen wie **Bockstein-Homomorphismen** wie im Fall der Homologie.

Übung 17.6.1.20 (**Kreuzprodukte und Kroneckerpaarung**). Gegeben topologische Räume X, Y und Kohomologieklassen $c \in \mathrm{H}^pX, d \in \mathrm{H}^qY$ sowie Homologieklassen $\lambda \in \mathrm{H}_pX, \mu \in \mathrm{H}_qY$ zeige man die Verträglichkeit

$$\langle c \times d, \lambda \times \mu \rangle = (-1)^{pq} \langle c, \lambda \rangle \langle d, \mu \rangle$$

der Kreuzprodukte mit der Kroneckerpaarung.

Übung 17.6.1.21 (**Cup-Produkt für Koketten**). Sei X ein topologischer Raum. Mithilfe der Alexander-Whitney-Abbildung 17.5.8.5 zeige man, daß das cup-Produkt induziert wird von der Abbildung $\cup : \mathrm{S}^*X \times \mathrm{S}^*X \to \mathrm{S}^*X$, die Koketten $a \in \mathrm{S}^pX$,

$b \in \mathrm{S}^q X$ auf diejenige Kokette $a \cup b$ abbildet, die in den Notationen 17.5.8.4 auf einem Simplex $\sigma : \Delta_{p+q} \to X$ den Wert

$$\langle a \cup b, \sigma \rangle = (-1)^{pq} \langle a, \sigma \lambda_p \rangle \langle b, \sigma \rho_q \rangle$$

annimmt. Mehr dazu wird in 18.4.3.3 diskutiert.

17.6.2 Kriterium für Homotopieäquivalenzen

17.6.2.1. Viele der für die Homologie bewiesenen Resultate überträgt man mühelos von der Homologie auf die Kohomologie mit Hilfe der in diesem Abschnitt entwickelten Methoden der homologischen Algebra.

Definition 17.6.2.2. Wir nennen einen Komplex **beschränkt in Richtung der Differentiale**, wenn wir in Richtung der Differentiale gehend ab einer Stelle nur noch $C_q = 0$ treffen.

Definition 17.6.2.3. Wir nennen eine Kettenabbildung einen **Quasiisomorphismus**, wenn sie Isomorphismen auf allen Homologiegruppen induziert. Wir notieren Quasiisomorphismen $\overset{\sim}{\to}$.

Satz 17.6.2.4 (**Kriterium für Homotopieäquivalenzen**)**.** *Seien R ein Ring und P, Q in Richtung der Differentiale beschränkte Komplexe von projektiven R-Moduln. So ist jeder Quasiisomorphismus $f : Q \overset{\sim}{\to} P$ bereits eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Das folgt durch zweifaches Anwenden der anschließenden technischen Proposition 17.6.2.5. □

Proposition 17.6.2.5 (**Spalten von Quasiisomorphismen**)**.** *Jeder Quasiisomorpismus $f : C \overset{\sim}{\to} P$ von einem Komplex von Moduln über einem Ring zu einem in Richtung der Differentiale beschränkten Komplex projektiver Moduln besitzt ein Rechtsinverses in der Homotopiekategorie, es gibt also $h : P \to C$ mit $fh \simeq \mathrm{id}_P$.*

Beweis. Wir konstruieren für eine beliebige Kettenabbildung $f : C \to P$ einen Komplex $K = \mathrm{K}(f) = \mathrm{Keg}(f)$, den **Abbildungskegel von** f, wie folgt: Wir setzen $K_n = C_{n-1} \oplus P_n$, fassen die Elemente dieser Summe als Spaltenvektoren auf und definieren den Randoperator $\partial^K : K_n \to K_{n-1}$ durch die Matrix

$$\partial^K = \begin{pmatrix} -\partial^C & 0 \\ f & \partial^P \end{pmatrix}$$

Man prüft mühelos $\partial^K \circ \partial^K = 0$. Bezeichnet $[1]C$ wie in 17.5.7.11 den verschobenen Komplex mit $([1]C)_n = C_{n-1}$ und Randoperator $\partial^{[1]C} = -\partial^C$, so ergibt sich mit den offensichtlichen Abbildungen eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$P \hookrightarrow \mathrm{K}(f) \twoheadrightarrow [1]C$$

Man überzeugt sich, daß der Randoperator der zugehörigen langen exakten Homologiesequenz gerade $\mathcal{H}_n f : \mathcal{H}_n C \to \mathcal{H}_n P$ ist. Ist speziell $\mathcal{H}_n f$ ein Isomorphismus für alle n, so ist der Abbildungskegel $\mathrm{K}(f)$ exakt nach der langen exakten Homologiesequenz. Ist zusätzlich P ein in Richtung der Differentiale beschränkter Komplex von projektiven R-Moduln, so ist nach dem Hauptlemma der homologischen Algebra 17.5.6.14 die Kettenabbildung $P \hookrightarrow \mathrm{K}(f)$ nullhomotop. Setzen wir so eine Homotopie an als Spaltenmatrix $(h, \delta)^\top$, so ergibt sich die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} -\partial^C & 0 \\ f & \partial^P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ \delta \end{pmatrix} \partial^P = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_P \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplizieren bedeutet die erste Zeile, daß $h : P \to C$ eine Kettenabbildung ist, und die Zweite, daß fh homotop ist zur Identität auf P. □

17.6.2.6. Die Beziehung zwischen dem hier eingeführten algebraischen Abbildungskegel und dem topologischen Abbildungskegel aus 17.3.4.1 wird in 17.3.4.6 besprochen. Kurz gesagt konstruieren wir dort für jede stetige Abbildung $f : Z \to X$ eine Homotopieäquivalenz

$$\tilde{\mathrm{S}}(\mathrm{K}(f)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Keg}(\tilde{\mathrm{S}} f)$$

Lemma 17.6.2.7 (**Kohomologie bei freien Homologiegruppen**). *Sind alle Homologiegruppen eines topologischen Raums X mit Koeffizienten in einem Ring R freie Linksmoduln, so induziert die Kroneckerpaarung mit Koeffizienten für jeden R-Modul M Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^q(X; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_R(\mathrm{H}_q(X; R), M)$$

Vorschau 17.6.2.8. Weitere Aussagen in derselben Richtung liefert das „universelle Koeffiziententheorem der Kohomologie“ 17.6.7.2.

Beweis. Nach 17.6.2.11 ist unter unseren Voraussetzungen der Komplex $\mathrm{S}(X; R)$ als Komplex von Linksmoduln homotop zu seiner Homologie $\mathrm{H}(X; R)$. Also ist auch der Komplex $\mathrm{S}^*(X; M) = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{S}(X; R), M)$ homotop zum Komplex $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{H}(X; R), M)$. □

17.6.2.9 (**Kohomologie von Sphären**). Wenden wir Lemma 17.6.2.7 an mit $k = \mathbb{Z}$, so erhalten wir Formeln für die Kohomologie von Sphären, jeweils mit beliebigen Koeffizienten.

Ergänzung 17.6.2.10. Jeder stetigen Abbildung $f : S^{2n-1} \to S^n$ für $n \geq 1$ ordnet man eine ganze Zahl, ihre **Hopf-Invariante**, zu wie folgt: Bezeichnet X den

Raum, der aus S^n entsteht durch Ankleben einer $2n$-Zelle vermittels der Abbildung f, so erhält man aus der analog zu 17.3.4.3 gebildeten „Anklebesequenz der Kohomologie“ zwei Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} \ldots \to \quad \mathrm{H}^n X & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^n S^n \to \ldots \\ \ldots \to \mathrm{H}^{2n-1} S^{2n-1} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^{2n} X \quad \to \ldots \end{array}$$

Nun nimmt man den kanonischen Erzeuger von $\mathrm{H}^n S^n$, holt ihn zurück nach $\mathrm{H}^n X$, quadriert ihn im Kohomologiering des verklebten Raums X, betrachtet das Urbild unter dem Korand in $\mathrm{H}^{2n-1} S^{2n-1}$ und erhält ein Vielfaches des kanonischen Erzeugers. Der Faktor, mit dem hier multipliziert werden muß, heißt dann die **Hopf-Invariante von** f. Ihre Konstruktion ist eine erste Illustration für die Nützlichkeit des cup-Produkts und damit der Kohomologie überhaupt. Man kann zeigen, daß sie nur von der Homotopieklasse von f abhängt, siehe zum Beispiel [Vic94].

Übungen

Übung 17.6.2.11. Gegeben ein Komplex C von Moduln mit projektiver Homologie wissen wir aus 17.1.4.14, daß es in der Homotopiekategorie genau einen Homomorphismus $\mathcal{H}C \to C$ gibt, der auf der Homologie den offensichtlichen Isomorphismus $\mathcal{H}(\mathcal{H}C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}C$ induziert. Man zeige, daß wenn auch unser Komplex selber aus projektiven Moduln besteht und beschränkt ist in Richtung der Differentiale, daß dann dieser Homomorphismus eine Homotopieäquivalenz ist.

Übung 17.6.2.12 (**Homkomplex, Tensorkomplex und Abbildungskegel**). Gegeben eine Kettenabbildung $A \to B$ und ein Komplex C konstruiere man einen Isomorphismus von Kettenkomplexen, der als mittlerer vertikaler Pfeil das Diagramm

$$\begin{tikzcd} ([1]A) \Rrightarrow C \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Keg}(A \to B) \Rrightarrow C \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (B \Rrightarrow C) \arrow[d, equal] \\ {[-1](A \Rrightarrow C)} \arrow[r] & {[-1]\,\mathrm{Keg}\big((B \Rrightarrow C) \to (A \Rrightarrow C)\big)} \arrow[r] & (B \Rrightarrow C) \end{tikzcd}$$

mit der offensichtlichen linken Vertikale nach 17.5.7.19 oder gleichbedeutend nach 18.3.4.20 zum Kommutieren bringt. Ebenso konstruiere man einen Isomorphismus von Kettenkomplexen, der als mittlerer vertikaler Pfeil das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C \Rrightarrow B \arrow[r] \arrow[d, equal] & C \Rrightarrow (\mathrm{Keg}(A \to B)) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & C \Rrightarrow ([1]A) \arrow[d, "\wr"] \\ C \Rrightarrow B \arrow[r] & \mathrm{Keg}((C \Rrightarrow A) \to (C \Rrightarrow B)) \arrow[r] & [1](C \Rrightarrow A) \end{tikzcd}$$

mit der offensichtlichen rechten Vertikale nach 17.5.7.19 oder gleichbedeutend nach 18.3.4.20 zum Kommutieren bringt. Schließlich konstruiere man einen Isomorphismus von Kettenkomplexen, der als mittlerer vertikaler Pfeil das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C \otimes B \arrow[r] \arrow[d, equal] & C \otimes (\operatorname{Keg}(A \to B)) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & C \otimes ([1]A) \arrow[d, "\wr"] \\
C \otimes B \arrow[r] & \operatorname{Keg}((C \otimes A) \to (C \otimes B)) \arrow[r] & [1](C \otimes A)
\end{tikzcd}$$

mit der offensichtlichen rechten Vertikale zum Kommutieren bringt.

17.6.3 Relative Kohomologie

17.6.3.1. Gegeben $X \supset A$ ein topologischer Raum mit einer Teilmenge erinnere ich an den Komplex $\mathrm{S}(X, A)$ der relativen Ketten aus 17.2.1.3. Wir definieren die **relative Kohomologie** mit Koeffizienten in M unseres Paares (X, A) als die Kohomologie des Komplexes $\mathrm{S}^*(X, A; M) := \big(\mathrm{S}(X, A) \Rrightarrow M[0]\big)$ der **relativen Koketten** und erhalten so Funktoren

$$\mathrm{H}^q : (\mathrm{Top}^{\subset})^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$$

Lemma 17.6.2.7 zur Kohomologie bei freien Homologiegruppen gilt mit demselben Beweis analog auch für die relative Kohomologie, vergleiche Übung 17.6.3.5. Gegeben ein Raumpaar (X, A) liefern die spaltenden kurzen exakten Sequenzen $\mathrm{S}_q A \hookrightarrow \mathrm{S}_q X \twoheadrightarrow \mathrm{S}_q(X, A)$ mittels Dualisierung spaltende kurze exakte Sequenzen $\mathrm{S}^q A \twoheadleftarrow \mathrm{S}^q X \hookleftarrow \mathrm{S}^q(X, A)$. Die kurze exakte Sequenz der Komplexe der singulären Koketten liefert wiederum die **lange exakte Kohomologiesequenz**

$$0 \to \mathrm{H}^0(X, A) \to \mathrm{H}^0 X \to \mathrm{H}^0 A \to \mathrm{H}^1(X, A) \to \dots$$

mit einem im Raumpaar (X, A) natürlichen Randoperator. Dasselbe gilt auch mit beliebigen Koeffizienten. Wir übertragen beispielhaft noch einige weitere Aussagen auf die Kohomologie.

Satz 17.6.3.2 (**Ausschneidung für die Kohomologie**). *Ist (X, A) ein Raumpaar und $V \subset A$ eine Teilmenge mit $\overline{V} \subset A^\circ$, so liefert die Einbettung von Raumpaaren $i : (X \backslash V, A \backslash V) \hookrightarrow (X, A)$ Isomorphismen auf den relativen Kohomologiegruppen*

$$\mathrm{H}^q(X, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X \backslash V, A \backslash V)$$

Beweis. Nach dem Ausschneidungssatz 17.2.4.10 induziert die von der Einbettung herkommende Kettenabbildung $\mathrm{S}i : \mathrm{S}(X \backslash V, A \backslash V) \to \mathrm{S}(X, A)$ Isomorphismen auf der Homologie und ist mithin nach 17.6.2.4 eine Homotopieäquivalenz. Dann ist auch die transponierte Abbildung $\mathrm{S}^* i : \mathrm{S}^*(X, A) \to \mathrm{S}^*(X \backslash V, A \backslash V)$ eine Homotopieäquivalenz und induziert Isomorphismen auf der Kohomologie. $\square$

17.6.3.3. Geht man in der Herleitung der Mayer-Vietoris-Sequenz und der relativen Mayer-Vietoris-Sequenz in 17.2.4.11 und 17.2.4.14 aus kurzen exakten Sequenzen von Komplexen freier abelscher Gruppen zuerst zu den dualen Komplexen über und bildet erst dann die lange exakte Homologiesequenz, so erhält man lange exakte Sequenzen von Kohomologiegruppen, genannt die **Mayer-Vietoris-Sequenz** und die **relative Mayer-Vietoris-Sequenz der Kohomologie**. Letzteren Fall führen wir beim Beweis der Poincaré-Dualität in 17.7.4.7 noch genauer aus.

17.6.3.4 (**Simpliziale Kohomologie**). Gegeben ein Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ erinnern wir aus dem Beweis der Gleichheit von simplizialer und singulärer Homologie 17.3.1.7 das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{S}\mathcal{K} & \leftarrow & \mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K}) & \hookrightarrow & \mathrm{S}\Delta(\mathcal{K}) \\ & \nwarrow & \uparrow & \nearrow & \\ & & \mathrm{S}^{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K}) & & \end{array}$$

aus den Komplexen der Simplizialketten, der simplizialsingulären Ketten, der singulären Ketten und der ordnungsverträglichen simplizialsingulären Ketten in Bezug auf eine Anordnung auf den Ecken unseres Simplizialkomplexes. Nach 17.3.1.7 induzieren hier alle Pfeile Isomorphismen auf der Homologie. Da alle unsere Komplexe aus freien abelschen Gruppen bestehen, sind nach 17.6.2.4 sogar alle Pfeile Homotopieäquivalenzen. Folglich erhalten wir durch Anwenden von $\mathrm{Hom}(\ ,\mathbb{Z})$ wieder ein kommutatives Diagramm von Homotopieäquivalenzen, das wir

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{S}^*\mathcal{K} & \rightarrow & \mathrm{S}^*_{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K}) & \leftarrow & \mathrm{S}^*\Delta(\mathcal{K}) \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & \mathrm{S}^*_{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K}) & & \end{array}$$

notieren und das Isomorphismen zwischen den Kohomologiegruppen dieser Komplexe liefert. Die Elemente von $\mathrm{S}^q_{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K})$ kann man auffassen als unendliche formale Linearkombinationen ordnungsverträglicher simplizialsingulärer q-Simplizes, formal haben wir eine kanonische Bijektion $\mathrm{S}^q_{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(\mathcal{K}_q,\mathbb{Z})$. Der Korandoperator ordnet einem q-Simplex die formale Summe mit geeigneten Vorzeichen aller $(q+1)$-Simplizes zu, die unseren q-Simplex enthalten. Ähnlich kann man die Gruppe der **Simplizialkoketten** $\mathrm{S}^q\mathcal{K}$ identifizieren mit der Gruppe aller Abbildungen $f : \mathcal{K}_q^{\leq} \to \mathbb{Z}$ von der Menge aller angeordneten q-Simplizes nach $\mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $f(\sigma \circ \pi) = (\operatorname{sgn} \pi) f(\sigma)$ für alle Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_{q+1}$. Zur Übung empfehle ich, diese **simpliziale Kohomologie** für eine Triangulierung der reellen Zahlengerade explizit zu berechnen.

Übungen

Übung 17.6.3.5 (**Relative Kohomologie bei freien Homologiegruppen**). Man zeige, daß Lemma 17.6.2.7 unverändert auch für die relative Kohomologie gilt:

Sind alle relativen Homologiegruppen eines Raumpaars (X, A) mit Koeffizienten in einem Ring R freie Linksmoduln, so induziert die Kroneckerpaarung mit Koeffizienten für jeden R-Modul M Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X, A; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R\big(\mathrm{H}_q(X, A; R), M\big)$$

Übung 17.6.3.6 (**Lokale Kohomologie endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorräume**). Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ zeige man $\mathrm{H}^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash x; M) \cong M$ für $q = n$ und Null sonst. Weiter zeige man für jede konvexe beschränkte Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in C$, daß die Einbettung einen Isomorphismus $\mathrm{H}^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash x; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash C; M)$ induziert.

Übung 17.6.3.7 (**Relative Kroneckerpaarung und Funktorialität**). Gegeben ein Raumpaar (X, A) erklärt man die **Kroneckerpaarung**

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathrm{H}^p(X, A) \times \mathrm{H}_p(X, A) \to \mathbb{Z}$$

als den Effekt der Auswertungsabbildung $\mathrm{S}^*(X, A) \otimes \mathrm{S}(X, A) \to \mathbb{Z}[0]$ auf der Homologie. Man zeige für $f : (X, A) \to (Y, B)$ ein Morphismus von Raumpaaren und $b \in \mathrm{H}^p(Y, B)$ sowie $c \in \mathrm{H}_p(X, A)$ die Identität

$$\langle f^* b, c\rangle = \langle b, f_* c\rangle$$

17.6.4 Homologie als Kohomologiemodul

Vorschau 17.6.4.1. Die im vorhergehenden und im folgenden gegebene Darstellung von cup und cap hat zum Ziel, ohne große Umwege die zur Formulierung und zum Beweis der Poincaré-Dualität benötigten Hilfsmittel bereitzustellen. Ich finde sie wenig befriedigend und ziemlich verwirrend und will kurz den Zugang skizzieren, der in [TSK] entwickelt wird und der mir transparenter scheint. Jedes Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist nach 18.2.2.10 in banaler Weise ein Koabmonoid der zugehörigen banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathcal{C}$ mit der Koverknüpfung $(\mathrm{id}, \mathrm{id}) : X \to X \curlywedge X$. Nach 18.4.1.4 bilden die simplizialen Ketten einen Trennschmelzfunktor

$$\mathrm{S} : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}$$

von der banalen Trennkategorie der topologischen Räume in Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe abelscher Gruppen oder vielmehr zwischen den zugehörigen Trennschmelzkategorien. Aus dem banalen Koabmonoid eines topologischen Raums X wird so ein Koabmonoid $\mathrm{S}X$ in Hot mit der Komultiplikation, die wir als

$$\eta\Delta_* : \mathrm{S}X \to \mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}X$$

kennengelernt haben. Unter dem Nachschalten des Dualisierens, einem Trennfunktor $\mathrm{Hot}^{\mathrm{t}} \to \mathrm{Hot}^{\mathrm{opp}}$, wird daraus der Trennfunktor der singulären Koketten

$$\mathrm{S}^* : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}^{\mathrm{opp}}$$

und ein Koabmonoid S^*X in $\mathrm{Hot}^{\mathrm{opp}}$ alias Abmonoid S^*X in Hot mit der entsprechend dualisierten Multiplikation

$$\mathrm{S}^*X \otimes \mathrm{S}^*X \to \mathrm{S}^*X$$

als Verknüpfung. Das cap-Produkt ist dann eine Struktur von $\mathrm{S}X$ als S^*X-Modul, die uns in solchen Situationen immer zur Verfügung steht. Arbeiten wir zum Beispiel mit der Trennschmelzkategorie Mod_k der k-Vektorräume, so ist ein Koabmonoid A eine kokommutative kounitäre Koalgebra und wir erhalten eine natürliche Struktur von A als A^*-Modul für die durch Dualisieren entstehende Kringalgebra A^*. Die eigentlich grundlegenden Strukturen sind in meinen Augen der Trennfunktor $\mathrm{S} : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}$ und die davon abgeleitete Komultiplikation $\mathrm{S}X \to \mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}X$ und werden erst sichtbar, sobald die entsprechende Terminologie zur Verfügung steht. Unsere verschiedenen Produkte erweisen sich in diesem Licht als die Schatten, die diese Strukturen in Homologie und Kohomologie werfen.

17.6.4.2. Gegeben ein topologischer Raum X betrachten wir in der Homotopiekategorie der Komplexe die Sequenz

$$\mathrm{S}^*X \otimes \mathrm{S}X \to \mathrm{S}^*X \otimes \mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}X \to \mathbb{Z}[0] \otimes \mathrm{S}X \to \mathrm{S}X$$

mit der Komposition $\eta\Delta_* : \mathrm{S}X \to \mathrm{S}(X \times X) \to \mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}X$ des Vorschubs unter der Diagonale $\Delta : X \to X \times X$ mit der Alexander-Whitney-Äquivalenz η aus 17.5.6.9 tensoriert von links mit S^*X für den ersten Pfeil und dem Auswerten vorne als zweitem Pfeil. Diese Komposition wird meist $\cap$ notiert und heißt **cap-Produkt**. Auf der Kohomologie erhalten wir so bilineare Abbildungen

$$\cap : \mathrm{H}^pX \times \mathrm{H}_qX \to \mathrm{H}_{q-p}X$$

Auch diese heißen **cap-Produkte**. Salopp gesprochen bedeutet das ein „partielles Auswerten einer Kohomologieklasse auf einer Homologieklasse“.

17.6.4.3 (**Cap-Produkt mit Koeffizienten in einem Körper**). Wenn wir mit Koeffizienten in einem Körper arbeiten, können wir bereits in der Homologie selbst $\Delta_*c = \sum c_1^i \times c_2^i$ schreiben und erhalten die Identität $b \cap c = \sum \langle b, c_1^i \rangle c_2^i$. Im allgemeinen liefert jedoch das Kreuzprodukt keinen Isomorphismus auf die Homologie des Produktraums und wir müssen das cap-Produkt zunächst für Ketten erklären, bevor wir auf die Homologie absteigen können.

Proposition 17.6.4.4. *Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ gilt für alle $b \in \mathrm{H}^p Y$ und $z \in \mathrm{H}_q X$ die* **Projektionsformel**

$$f_*(f^* b \cap z) = b \cap (f_* z)$$

17.6.4.5. Anders und etwas unscharf gesagt kommutiert also das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^* X \times \mathrm{H} X \arrow[d] & \mathrm{H}^* Y \times \mathrm{H} X \arrow[l] \arrow[r] & \mathrm{H}^* Y \times \mathrm{H} Y \arrow[d] \\
\mathrm{H} X \arrow[rr] & & \mathrm{H} Y
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir betrachten das offensichtliche kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}^* X \otimes \mathrm{S} X \arrow[d] & \mathrm{S}^* Y \otimes \mathrm{S} X \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{S}^* Y \otimes \mathrm{S} Y \arrow[d] \\
\mathrm{S}^* X \otimes \mathrm{S}(X \times X) \arrow[d] & \mathrm{S}^* Y \otimes \mathrm{S}(X \times X) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{S}^* Y \otimes \mathrm{S}(Y \times Y) \arrow[d] \\
\mathrm{S}^* X \otimes \mathrm{S} X \otimes \mathrm{S} X \arrow[d] & \mathrm{S}^* Y \otimes \mathrm{S} X \otimes \mathrm{S} X \arrow[l] \arrow[r] & \mathrm{S}^* Y \otimes \mathrm{S} Y \otimes \mathrm{S} Y \arrow[d] \\
\mathrm{S} X \arrow[rrr] & & & \mathrm{S} Y
\end{tikzcd}$$

und gehen zur Homologie über. □

Proposition 17.6.4.6. *Gegeben ein topologischer Raum X gilt für alle $a \in \mathrm{H}^p X$, $b \in \mathrm{H}^q X$ und $c \in \mathrm{H}_{p+q} X$ die* **Adjunktionsformel**

$$\langle a \cup b, c \rangle = \langle a, b \cap c \rangle$$

Beweis. Gegeben ein Morphismus von Komplexen $\varphi : A \to B$ und ein Morphismus von Komplexen $\psi : C \to B^*$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & B^* \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & A^* \otimes A \arrow[d] \\
C \otimes B \arrow[r] & B^* \otimes B \arrow[r] & \mathbb{Z}[0]
\end{tikzcd}$$

mit den in hoffentlich offensichtlicher Weise erklärten Pfeilen. Jetzt nehmen wir als $\varphi : A \to B$ die Verknüpfung $\eta \Delta_* : \mathrm{S} X \to \mathrm{S} X \otimes \mathrm{S} X$ des Vorschubs unter der Diagonale mit einer Alexander-Whitney-Transformation und als $\psi : C \to B^*$ die Verknüpfung $tv : \mathrm{S}^* X \otimes \mathrm{S}^* X \to (\mathrm{S} X \otimes \mathrm{S} X)^*$ und erhalten eine Gleichheit von zwei Kettenabbildungen

$$\mathrm{S}^* X \otimes \mathrm{S}^* X \otimes \mathrm{S} X \to \mathbb{Z}[0]$$

Die davon induzierte Gleichheit von Abbildungen auf der Homologie ist unsere Adjunktionsformel. □

Satz 17.6.4.7 (Homologie als Kohomologiemodul). *Das cap-Produkt macht die Homologie jedes Raums zu einem Modul über seinem Kohomologiering. Ist also X ein topologischer Raum, so gelten für alle $a \in \mathrm{H}^p X, b \in \mathrm{H}^q X, c \in \mathrm{H}_r X$ die Identitäten*

$$(a \cup b) \cap c = a \cap (b \cap c) \quad \textit{und} \quad 1 \cap c = c.$$

Beweis. Wir beginnen mit der ersten Identität. Dazu bemerken wir, daß die obere Horizontale im kommutativen Diagramm aus dem vorhergehenden Beweis der Adjunktionsformel 17.6.4.6 durch das Tensorieren mit A aus einer Sequenz $C \to B^* \to A^*$ entsteht. Tensorieren wir unser ganzes Diagramm von rechts mit einem Komplex $\bar{A}$ und bauen mithilfe irgendeines Morphismus $\tilde{A} \to A \otimes \bar{A}$ noch eine Zeile oben an, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc}
C \otimes \tilde{A} & \to & B^* \otimes \tilde{A} & \to & A^* \otimes \tilde{A} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C \otimes A \otimes \bar{A} & \to & B^* \otimes A \otimes \bar{A} & \to & A^* \otimes A \otimes \bar{A} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C \otimes B \otimes \bar{A} & \to & B^* \otimes B \otimes \bar{A} & \to & \bar{A}
\end{array}$$

Spezialisieren wir das nun wie bei Beweis der Adjunktionsformel 17.6.4.6 und setzen außerdem $\bar{A} = \tilde{A} = A = \mathrm{S}X$ und nehmen als Morphismus $\tilde{A} \to A \otimes \bar{A}$ ein weiteres Mal $\eta\Delta_*$, so erhalten wir eine Gleichheit von zwei Kettenabbildungen

$$\mathrm{S}^* X \otimes \mathrm{S}^* X \otimes \mathrm{S}X \to \mathrm{S}X$$

Die davon induzierte Gleichheit von Abbildungen auf der Homologie ist unsere erste Formel. Für die zweite Formel gehen wir aus von einem Spezialfall der rechten Hälfte des ersten kommutativen Diagramms aus dem Beweis der Adjunktionsformel

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{S}^*(\mathrm{top}) \otimes \mathrm{S}X & \to & \mathrm{S}^*(\mathrm{top}) \otimes \mathrm{S}(\mathrm{top}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{S}^* X \otimes \mathrm{S}X & \to & \mathbb{Z}[0]
\end{array}$$

Tensorieren wir von rechts mit $\mathrm{S}X$ und halten noch den Vorschub unter der Diagonale und Alexander-Whitney davor und lassen den einpunktigen Raum top aus der Notation weg, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{S}^* \otimes \mathrm{S}X & \to & \mathrm{S}^* \otimes \mathrm{S}(X \times X) & \to & \mathrm{S}^* \otimes \mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}X & \to & \mathrm{S}^* \otimes \mathrm{S} \otimes \mathrm{S}X \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{S}^* X \otimes \mathrm{S}X & \to & \mathrm{S}^* X \otimes \mathrm{S}(X \times X) & \to & \mathrm{S}^* X \otimes \mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}X & \to & \mathrm{S}X
\end{array}$$

Für den „oberen Weg“ gilt dann $1 \otimes c \mapsto c$, da ja die diagonale Einbettung gefolgt von der Projektion auf den zweiten Eintrag die Identität ist. Dahingegen gilt für den „unteren Weg“ per definitionem $1 \otimes c \mapsto 1 \cap c$. Das zeigt, was wir wollten. $\square$

Beispiel 17.6.4.8 (**Cap-Produkt und Kronecker-Paarung**). Ist X wegzusammenhängend und $\delta \in \mathrm{H}_0 X$ der kanonische Erzeuger, so liefert die Adjunktionsformel angewandt auf $a = 1$ und $b \in \mathrm{H}^p X$ und $c \in \mathrm{H}_p X$ die Beziehung

$$b \cap c = \langle b, c \rangle \delta$$

zwischen Kroneckerpaarung und cap-Produkt. Ist allgemeiner $i : X_w \hookrightarrow X$ die Einbettung einer Wegzusammenhangskomponente und $\delta_w \in \mathrm{H}_0 X_w$ der kanonische Erzeuger und $c = i_* c_w$ mit $c_w \in \mathrm{H}_p X_w$ beliebig, so finden wir mit der Adjunktionsformel

$$b \cap i_* c_w = \langle i^* b, c_w \rangle i_* \delta_w$$

Vorschau 17.6.4.9 (**Poincaré-Dualität für kompakte Mannigfaltigkeiten**). Für jede kompakte orientierte Mannigfaltigkeit liefert das cap-Produkt mit ihrem Fundamentalzykel einen Isomorphismus zwischen ihrer Kohomologie und ihrer Homologie. Ist genauer M eine kompakte orientierte n-Mannigfaltigkeit so liefert das cap-Produkt mit ω für alle p einen Isomorphismus

$$\cap[M] : \mathrm{H}^p M \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_{n-p} M$$

Dieser Satz und sein Beweis gelten mit Koeffizienten in einem beliebigen kommutativen Ring. Gilt in unserem Ring $1 + 1 = 0$, so benötigt man noch nicht einmal die Voraussetzung der Orientierbarkeit. Wir zeigen das alles in 17.7.4.3.

Vorschau 17.6.4.10 (**Schnittpaarung durch Poincaré-Dualität**). Sei M eine kompakte orientierte n-Mannigfaltigkeit. Unter den durch Poincaré-Dualität 17.6.4.9 im Fall einer kompakten orientierten n-Mannigfaltigkeit gegebenen Isomorphismen

$$\mathrm{H}^p M \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_{n-p} M$$

entspricht das cup-Produkt $\mathrm{H}^{n-p} M \times \mathrm{H}^p M \to \mathrm{H}^n M$ einer bilinearen Abbildung auf der Homologie, die unter dem Nachschalten der Augmentation $\mathrm{H}_0 M \to \mathbb{Z}$ unsere in 17.4.3.19 gesuchte Schnittpaarung

$$\mathrm{H}_p M \times \mathrm{H}_{n-p} M \to \mathbb{Z}$$

liefert. Daß diese bilineare Abbildung die in 17.4.3.19 für die Schnittpaarung behauptete anschauliche Eigenschaft hat, wird allerdings erst in 21.6.4.31 klar werden. Eine erste Anschauung im triangulierbaren Fall mag 17.7.5.7 geben.

Vorschau 17.6.4.11. Sei M eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit. Nach der Adjunktionsformel $\langle a \cup b, [M] \rangle = \langle a, b \cap [M] \rangle$ entsprechen sich unter den Identifikationen der Poincaré-Dualität für einen beliebigen kommutativen Koeffizi-

entenring k per definitionem die cup-Produkt-Paarung, die beiden Kronecker-Paarungen und die Schnittpaarung

$$\begin{array}{rcrlcrcl}
\mathrm{H}^{n-p}(M;k) & \times & \mathrm{H}^{p}(M;k) & \to k, & (a,b) & \mapsto & \langle a \cup b, [M]\rangle \\
\mathrm{H}^{n-p}(M;k) & \times & \mathrm{H}_{n-p}(M;k) & \to k, & (a,\beta) & \mapsto & \langle a, \beta\rangle \\
\mathrm{H}_{p}(M;k) & \times & \mathrm{H}^{p}(M;k) & \to k, & (\alpha,b) & \mapsto & \pm\langle b, \alpha\rangle \\
\mathrm{H}_{p}(M;k) & \times & \mathrm{H}_{n-p}(M;k) & \to k, & (\alpha,\beta) & \mapsto & \alpha \odot \beta
\end{array}$$

Falls eine dieser Paarungen eine Bijektion des linken Raums auf den Dualraum des rechten Raumes oder das Umgekehrte induziert, so folgt dasselbe für die beiden anderen Paarungen. Haben wir etwa Koeffizienten in einem Körper oder ist $\mathrm{H}_{n-p-1}(M;\mathbb{Z})$ eine freie abelsche Gruppe, so liefert nach 17.6.7.2 die Paarung in der Mitte eine Bijektion des linken Raums auf den Dualraum des rechten Raumes und dasselbe folgt für die anderen Paarungen. In 17.7.4.9 diskutieren wir Verallgemeinerungen auf den Fall nicht notwendig kompakter Mannigfaltigkeiten.

17.6.4.12 (**Herkunft der Notationen cup und cap**). Für das Schnittprodukt schiene mir die Notation $\cap$ naheliegend und das cup-Produkt ist dazu in gewisser Weise dual. Ich vermute hier die Herkunft der Notation $\cup$ für das cup-Produkt, kann das aber nicht belegen.

17.6.4.13 (**Heuristisches zur Poincaré-Dualität**). Um einen anschaulichen Beweis der Poincaré-Dualität zu geben, verallgemeinert man zunächst unseren Satz 17.3.1.7 über den Zusammenhang von singulärer und simplizialer Homologie von endlichen Simplizialkomplexen auf Räume, die statt aus Simplizes in ähnlicher Art aus komplizierteren kompakten konvexen Polyedern zusammengesetzt sind, wie zum Beispiel die Oberflächen der platonischen Körper. So kann etwa die Homologie der Sphäre mithilfe einer Dodekaeder-Zerlegung berechnet werden durch einen Komplex der Gestalt $\mathbb{Z}^{12} \to \mathbb{Z}^{30} \to \mathbb{Z}^{20}$ für die 12 Flächen, 30 Kanten und 20 Ecken. Gehen wir nun über zur „dualen“ Zerlegung in kompakte konvexe Polyeder, im Beispiel zur Ikosaeder-Zerlegung der Sphäre in 20 Flächen mit 30 Kanten und 12 Ecken, so kann man den Komplex, der ursprünglich die Homologie berechnet, in natürlicher Weise identifizieren mit dem Komplex, der bezüglich dieser dualen Zerlegung die Kohomologie berechnet. Da aber Homologie und Kohomologie von der Zerlegung gänzlich unabhängig sind, ergibt sich $\mathrm{H}_i M \cong \mathrm{H}^{n-i} M$ für jede orientierte kompakte triangulierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Es ist nicht allzu schwer, diese Skizze zu einem richtigen Beweis auszubauen, siehe zum Beispiel [SZ94]. Wir werden jedoch einen anderen Weg gehen, der Triangulierbarkeitsvoraussetzungen vermeidet und auch abgesehen davon zu allgemeineren Resultaten führt. Genauer wollen wir unseren Satz durch eine Art Induktion über alle offenen Teilmengen beweisen und werden dazu eine Version formulieren, die

auch nichtkompakte Mannigfaltigkeiten einbezieht. Das benötigt einige algebraische Vorbereitungen.

Übungen

Übung 17.6.4.14 (**Cap-Produkt für Ketten**). Sei X ein topologischer Raum. Mithilfe der Alexander-Whitney-Abbildung 17.5.8.5 zeige man, daß das cap-Produkt induziert wird von der Abbildung $\cap : \mathrm{S}^*X \times \mathrm{S}X \to \mathrm{S}X$, die ein Paar (b, σ) mit $b \in \mathrm{S}^q X$ und $\sigma : \Delta_{p+q} \to X$ ein Simplex in den Notationen 17.5.8.4 abbildet auf

$$b \cap \sigma = (-1)^{pq} \langle b, \sigma\rho_q \rangle \sigma\lambda_p$$

Mehr dazu wird in 18.4.3.3 diskutiert.

Übung 17.6.4.15 (**Cap-Produkte für Raumpaare**). Für Raumpaare (X, A) induziert jede Alexander-Whitney-Transformation 17.5.6.9 eine Kettenabbildung

$$\mathrm{S}(X \times X, X \times A) \tilde{\to} \mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}(X, A)$$

Man sieht leicht ein, daß sie Isomorphismen auf der Homologie induziert und deshalb nach dem Kriterium für Homotopieäquivalenzen 17.6.2.4 eine Homotopieäquivalenz sein muß. Man sieht auch leicht ein, daß sie wohlbestimmt ist bis auf Homotopie, denn Alexander-Whitney-Transformationen sind wohlbestimmt bis auf Homotopie im Sinne von 17.5.6.5 und jede Homotopie zwischen zwei Alexander-Whitney-Transformationen im Sinne von 17.5.6.5 geht offensichtlich auf die Quotienten über. Die zur Konstruktion in 17.6.4.2 analoge Komposition

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}^*X \otimes \mathrm{S}(X, A) \arrow[d] & & \mathrm{S}(X, A) \\
\mathrm{S}^*X \otimes \mathrm{S}(X \times X, X \times A) \arrow[rr] & & \mathrm{S}^*X \otimes \mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}(X, A) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

liefert eine Verallgemeinerung

$$\cap : \mathrm{H}^p(X) \times \mathrm{H}_q(X, A) \to \mathrm{H}_{q-p}(X, A)$$

des cap-Produkts, unter der auch die relative Homologie $\mathrm{H}(X, A)$ ein Modul über dem Kohomologiering H^*X wird. Man prüft das mit denselben Argumenten wie im bereits behandelten nichtrelativen Fall. Die Variante

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}^*(X, A) \otimes \mathrm{S}(X, A) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Delta_*"] & & \mathrm{S}X \\
\mathrm{S}^*(X, A) \otimes \mathrm{S}(X \times X, A \times X) \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes \eta"] & & \mathrm{S}^*(X, A) \otimes \mathrm{S}(X, A) \otimes \mathrm{S}X \arrow[u, "\mathrm{ev} \otimes \mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

liefert durch Übergang zur Homologie eine weitere Verallgemeinerung des cap-Produkts, diesmal zu einer Abbildung

$$\cap : \mathrm{H}^p(X, A) \times \mathrm{H}_q(X, A) \to \mathrm{H}_{q-p}X$$

Man prüfe auch in diesem Fall für X wegzusammenhängend und $p = q$ die Beziehung

$$b \cap c = \langle b, c \rangle \delta$$

zwischen cap-Produkt und Kroneckerpaarung. Man zeige weiter für jeden Morphismus von Raumpaaren $(X, A) \to (Y, B)$ mit den entsprechenden cap-Produkten in den Vertikalen und den offensichtlichen durch Rückzug auf der Kohomologie und Vorschub auf der Homologie gegebenen Horizontalen die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^*(X, A) \times \mathrm{H}(X, A) \arrow[d] & \mathrm{H}^*(Y, B) \times \mathrm{H}(X, A) \arrow[l] \arrow[r] & \mathrm{H}^*(Y, B) \times \mathrm{H}(Y, B) \arrow[d] \\
\mathrm{H}X \arrow[rr] & & \mathrm{H}Y
\end{tikzcd}$$

Ergänzende Übung 17.6.4.16 (**Tensorprodukt von dg-Moduln**). Gegeben über einem $\mathbb{Z}$-graduierten Ring R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Rechtsmodul M und ein $\mathbb{Z}$-graduierter Linksmodul N ist der Kern der Surjektion $M \otimes_{\mathbb{Z}} N \twoheadrightarrow M \otimes_R N$ stets ein im Sinne von 7.6.6.7 homogener Teilraum und $M \otimes_R N$ ist folglich in natürlicher Weise $\mathbb{Z}$-graduiert. Ist R sogar ein dg-Ring und sind M und N beide dg-Moduln, so induziert das offensichtliche Differential auf $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ ein Differential auf $M \otimes_R N$.

Ergänzende Übung 17.6.4.17. Gegeben dg-Moduln M, N über einem dg-Ring R ist die Menge der mit der Operation von R in hoffentlich offensichtlicher Weise verträglichen Elemente des Hom-Komplexes $(M \Rrightarrow N) = \mathrm{Hom}(M, N)$ aus 17.1.4.12 ein Unterkomplex $(M \Rrightarrow_R N) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Die Nullzykel dieses Komplexes sind genau die Homomorphismen von dg-Moduln, in Verallgemeinerung von 17.1.4.12 gilt also

$$\mathrm{dgMod}_R(M, N) = \mathcal{Z}^0 \, \mathrm{Hom}_R(M, N)$$

Die Nullränder $\mathcal{B}^0 \, \mathrm{Hom}_R(M, N)$ dieses Komplexes nennen wir analog **nullhomotope** Homomorphismen von differentiellen graduierten Moduln über R und führen die Homotopiekategorie

$$R\text{-dgHot} = \mathrm{dgHot}_R$$

ein dadurch, daß ihre Objekte R-dg-Moduln sein sollen, die Morphismen jedoch gegeben sein sollen durch $\mathrm{dgHot}_R(M, N) := \mathcal{H}^0 \, \mathrm{Hom}_R(M, N)$.

Ergänzende Übung 17.6.4.18. Gegeben dg-Rechtsmoduln M, N über einem dg-Ring R ist $\mathrm{Hom}_{-R}(M,N) \subset \mathrm{Hom}(M,N)$ ein Unterkomplex des Hom-Komplexes. Ist S ein weiterer dg-Ring und ist M ein S-R-dg-Bimodul, so ist unser Unterkomplex ein S-dg-Unterrechtsmodul des Hom-Komplexes mit seiner offensichtlichen und in **??** formalisierten S-Operation von rechts. Analoges gilt, wenn man Links und Rechts vertauscht.

Ergänzende Übung 17.6.4.19. Gegeben ein dg-Ring R liefert die Multiplikation des Rings von links auf sich selber analog zum Fall gewöhnlicher Ringe 7.2.3.14 einen Isomorphismus von dg-Ringen $R \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{-R}(R,R)$ zwischen R selbst und dem Endomorphismenkomplex von R als dg-Rechtsmodul.

Ergänzende Übung 17.6.4.20. Hinweis: Diese Übung verfeinert 17.5.3.18. Gegeben dg-Ringe A, B und ein A-B-dg-Bimodul X induziert für M beziehungsweise N beliebige dg-Rechtsmoduln über A beziehungsweise B die offensichtliche Abbildung Isomorphismen von Komplexen abelscher Gruppen

$$\mathrm{Hom}_{-A}(M, \mathrm{Hom}_{-B}(X,N)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{-B}(M \otimes_A X, N)$$

Insbesondere erhalten wir durch Übergang zur nullten Homologie natürliche Bijektionen $\mathrm{dgHot}_{-A}(M, \mathrm{Hom}_{-B}(X,N)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{dgHot}_{-B}(M \otimes_A X, N)$. Unsere Adjunktion 17.5.3.18 liefert als Koeinheit der Adjunktion 16.4.8.1 weiter natürliche Kettenabbildungen von B-Rechtsmoduln $\mathrm{Hom}_{-B}(X,M) \otimes_A X \to M$, die auch explizit als das „Auswerten von Homomorphismen auf Elementen“ beschrieben werden können.

17.6.5 Erweiterungen von abelschen Gruppen

17.6.5.1. Um unsere Kohomologiegruppen aus den Homologiegruppen berechnen zu können, brauchen wir **Erweiterungen**. Unter einer Erweiterung einer abelschen Gruppe M durch eine abelsche Gruppe N versteht man zunächst einmal eine kurze exakte Sequenz $N \hookrightarrow E \twoheadrightarrow M$. Eine zweite solche Erweiterung $N \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow M$ heißt **isomorph** oder genauer **erweiterungsisomorph** zu unserer ersten Erweiterung, wenn es einen Isomorphismus $E \xrightarrow{\sim} E'$ gibt, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} N & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & M \\ \| & & \downarrow & & \| \\ N & \hookrightarrow & E' & \twoheadrightarrow & M \end{array}$$

zum Kommutieren bringt. Wir werden uns im folgenden überlegen, daß die Isomorphieklassen von derartigen Erweiterungen eine Menge, ja sogar in natürlicher Weise eine abelsche Gruppe bilden, und wie wir diese Gruppe zu gegebenen M und N effektiv berechnen können. Die eigentliche Arbeit beginnen wir mit einem

etwas künstlichen aber formal einfacheren Zugang zu besagter Gruppe. Das Ausarbeiten des Zusammenhangs zum hier nur skizzierten namensgebenden Zugang überlasse ich dem Leser als Übung 17.6.5.6.

Definition 17.6.5.2. Gegeben ein Homomorphismus $f : A \to B$ von abelschen Gruppen erklärt man seinen **Kokern** als die abelsche Gruppe

$$\operatorname{cok} f := B/(\operatorname{im} f)$$

Definition 17.6.5.3. Gegeben zwei abelsche Gruppen M und N erklären wir eine dritte abelsche Gruppe $\operatorname{Ext}(M, N)$ durch die Vorschrift

$$\operatorname{Ext}(M, N) := \operatorname{cok}\big(\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}M, N) \to \operatorname{Hom}(KM, N)\big)$$

für $KM \hookrightarrow \mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$ die Standardauflösung von M aus 17.5.3.6. Sie heißt die Gruppe der **Erweiterungen von** M **durch** N. Die Notation rührt her von der englischen und französischen Bezeichnung **extension**.

17.6.5.4 (**Funktorialität von** Ext). Offensichtlich ist Ext ein kovarianter Funktor in der zweiten und ein kontravarianter Funktor in der ersten Variablen. Wir notieren das Anwenden von Morphismen auf Erweiterungen wie eine Verknüpfung von Morphismen, wobei wir eine Erweiterung als einen „Morphismus von höherem Grad“ auffassen. In Ist M frei, so spaltet die Sequenz $KM \hookrightarrow \mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$ und wir folgern $\operatorname{Ext}(M, N) = 0$ für alle N.

17.6.5.5. Wir können unsere Definition auch dahingehend umschreiben, daß wir den Komplex $\mathcal{P}M$ mit $\mathcal{P}_1 M = KM$ und $\mathcal{P}_0 M = \mathbb{Z}M$ und $\mathcal{P}_q M = 0$ für $q \neq 0, 1$ aus 17.5.3.6 betrachten und $N = N[0]$ als im Grad Null konzentrierten Komplex auffassen und im Sinne von 17.1.4.12 den Hom-Komplex $\mathcal{P}M \Rrightarrow N[0]$ bilden. Damit erhalten wir dann die Darstellung

$$\operatorname{Ext}(M, N) = \mathcal{H}_{-1}(\mathcal{P}M \Rrightarrow N[0])$$

Andererseits definiert die Surjektion $\mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$ offensichtlich einen Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_0(\mathcal{P}M \Rrightarrow N[0])$$

Da nun nach 17.5.5.11 der Komplex $\mathcal{P}M$ aus freien abelschen Gruppen besteht, liefert jede kurze exakte Sequenz $N' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N''$ von abelschen Gruppen eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$(\mathcal{P}M \Rrightarrow N'[0]) \hookrightarrow (\mathcal{P}M \Rrightarrow N[0]) \twoheadrightarrow (\mathcal{P}M \Rrightarrow N''[0])$$

und die zugehörige lange exakte Homologiesequenz liefert mit den eben angegebenen Identifikationen eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \operatorname{Hom}(M, N') & \hookrightarrow & \operatorname{Hom}(M, N) & \to & \operatorname{Hom}(M, N'') & \to & \\ & \to & \operatorname{Ext}(M, N') & \to & \operatorname{Ext}(M, N) & \twoheadrightarrow & \operatorname{Ext}(M, N'') & \to & 0 \end{array}$$

Sie heißt die lange exakte **Ext-Sequenz im zweiten Eintrag**.

Übungen

Ergänzende Übung 17.6.5.6. Man zeige, daß wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Erweiterungen von } M \text{ durch } N \text{ im Sinne} \\ \text{von 17.6.5.1, bis auf Erweiterungsisomorphie} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}(M,N)$$

erhalten, indem wir jeder kurzen exakten Sequenz $N \hookrightarrow E \twoheadrightarrow M$ das Bild in $\operatorname{Ext}(M,N)$ der Identität auf M unter dem Randoperator der zugehörigen Ext-Sequenz im zweiten Eintrag zuordnen. Hinweis: Gegeben $e \in \operatorname{Ext}(M,N)$ wähle man einen Repräsentanten $\tilde{e} : KM \to N$ und bilde durch pushout in die Mitte im Sinne von 17.6.6.8 ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} KM & \hookrightarrow & \mathbb{Z}M & \twoheadrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ N & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & M \end{array}$$

Man zeige weiter, daß für $f : M' \to M$ eine kurze exakte Sequenz $N \hookrightarrow F \twoheadrightarrow M'$ genau dann der Erweiterung $e \circ f \in \operatorname{Ext}(M',N)$ entspricht, wenn es einen vertikalen Isomorphismus in der Mitte gibt, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} N & \hookrightarrow & F & \twoheadrightarrow & M' \\ \| & & \downarrow & & f \\ N & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & M \end{array}$$

kommutativ macht. Daß wir für vorgegebenes f ein mögliches F als pull-back konstruieren können. Und daß entsprechendes dual für $g : N \to N'$ gilt.

17.6.6 Injektive abelsche Gruppen

Definition 17.6.6.1. Ein Modul I über einem Ring R heißt **injektiv**, wenn gegeben irgendein weiterer Modul M über unserem Ring und darin ein Untermodul $U \subset M$ sich jeder Modulhomomorphismus $U \to I$ zu einem Modulhomomorphismus $M \to I$ ausdehnen läßt. In Formeln heißt das also: Für jede Injektion $i : U \hookrightarrow M$ von R-Moduln liefert das Vorschalten von i eine Surjektion

$$(\circ i) : \operatorname{Mod}_R(M,I) \twoheadrightarrow \operatorname{Mod}_R(U,I)$$

Beispiele 17.6.6.2. Ist k ein Körper, so ist jeder k-Modul injektiv als k-Modul, aber natürlich nicht notwendig als abelsche Gruppe. Einen injektiven $\mathbb{Z}$-Modul nennen wir eine **injektive abelsche Gruppe**. Die abelsche Gruppe $\mathbb{Q}$ ist injektiv, wie die gleich anschließende Proposition 17.6.6.5 zeigt. Alternativ können wir auch argumentieren, daß für $S = \mathbb{Z}\backslash 0$ gilt $\operatorname{Ab}(M,\mathbb{Q}) = \operatorname{Mod}_{\mathbb{Q}}(S^{-1}M,\mathbb{Q})$ nach

der universellen Eigenschaft der Lokalisierung 7.4.3.3 und daß die rechte Seite ein exakter Funktor in M ist wegen der Exaktheit der Lokalisierung 7.4.3.11. Wieder anders können wir auch argumentieren, daß gilt $\mathrm{Ab}(M, \mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M, \mathbb{Q})$ nach 7.2.8.7 und daß die rechte Seite ein exakter Funktor in M ist nach 7.2.5.16.

Definition 17.6.6.3. Eine abelsche Gruppe heißt **divisibel**, wenn für jede von Null verschiedene ganze Zahl der durch die Multiplikation mit dieser Zahl gegebene Endomorphismus unserer Gruppe surjektiv ist.

Beispiel 17.6.6.4. Sowohl $\mathbb{Q}$ als auch $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sind divisible abelsche Gruppen.

Proposition 17.6.6.5.

1. *Eine abelsche Gruppe I ist injektiv genau dann, wenn gilt $\mathrm{Ext}(M, I) = 0$ für alle M;*
2. *Eine abelsche Gruppe ist injektiv genau dann, wenn sie divisibel ist;*
3. *Jeder Quotient einer injektiven abelschen Gruppe ist injektiv;*
4. *Jede abelsche Gruppe läßt sich in eine Injektive einbetten.*

Ergänzung 17.6.6.6. Der Beweis zeigt genauer, daß jede abelsche Gruppe M in eine injektive abelsche Gruppe der Kardinalität $\leq \max(\mathrm{card}\, M, \mathrm{card}\, \mathbb{N})$ eingebettet werden kann.

17.6.6.7. Analoges gilt mit einem analogen Beweis auch für Moduln über beliebigen Hauptidealringen. So erhalten wir zum Beispiel, daß $\mathbb{C}[t, t^{-1}]/t\mathbb{C}[t]$ ein injektiver $\mathbb{C}[t]$-Modul ist, denn die Multiplikation mit t ist offensichtlich surjektiv und die Multiplikationen mit $(t - \alpha)$ sind sogar bijektiv, ja induzieren Automorphismen der von $t^0, \ldots, t^{-n}$ erzeigten Teilräume für alle n, da sie dort den einzigen Eigenwert α haben. Allgemeiner und mit mehr Kenntnissen aus der kommutativen Algebra erkennt man in derselben Weise, daß gegeben ein Hauptidealring R mit einem Primelement p der R-Modul $R[p^{-1}]/pR$ injektiv ist.

17.6.6.8. Der folgende Beweis verwendet die Konstruktion des „push-out in der Kategorie der abelschen Gruppen“ : Gegeben Homomorphismen abelscher Gruppen $\phi : A \to B$ und $\psi : A \to C$ bildet man die abelsche Gruppe $P := (B \oplus C)/\{(\phi(a), -\psi(a)) \mid a \in A\}$ mit den durch die Einbettungen induzierten Morphismen $B \to P$ und $C \to P$ und erhält so ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \to & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \to & P \end{array}$$

von abelschen Gruppen. Die Gruppe P oder genauer die „Hälfte dieses Diagramms unterhalb der Linie durch B und C“ heißt der **push-out** der Hälfte oberhalb besagter Linie. Im Rahmen der Kategorientheorie in 16.2.3.1 mag man die

universelle Eigenschaft kennenlernen, die push-outs in beliebigen Kategorien charakterisiert. In unserem speziellen Fall erkennt man leicht, daß die Injektivität eines Ausgangspfeils die Injektivität des dazu parallelen Pfeils in den push-out impliziert und daß die Surjektivität eines Ausgangspfeils gleichbedeutend ist zur Surjektivität des dazu parallelen Pfeils in den push-out, in Formeln $(A \hookrightarrow B) \Rightarrow (C \hookrightarrow P)$ und $(A \twoheadrightarrow B) \Leftrightarrow (C \twoheadrightarrow P)$. Man vergleiche hierzu auch Übung 16.2.3.6.

Beweis. 1. Für I injektiv folgt $\mathrm{Ext}(M, I) = 0$ aus der Definition. Sei umgekehrt I eine abelsche Gruppe mit $\mathrm{Ext}(M, I) = 0$ für alle M. Gegeben eine Injektion $B' \hookrightarrow B$ gilt es, jeden Morphismus $B' \to I$ zu einem Morphismus $B \to I$ auszudehnen. Dazu bilden wir den push-out

$$\begin{array}{ccc} B' & \hookrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ I & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

mit einer Injektion in der unteren Horizontalen nach 17.6.6.8. Vervollständigen wir diese untere Horizontale zu einer kurzen exakten Sequenz $I \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow K$ und bilden dazu die Ext-Sequenz im zweiten Eintrag 17.6.5.5 mit $M = K$, so folgt, daß die Surjektion $Y \twoheadrightarrow K$ spaltet alias ein Rechtsinverses besitzt. Mit 17.2.2.12 folgt, daß dann auch die Injektion $I \hookrightarrow Y$ spaltet, und ein Linksinverses $Y \to I$ dazu liefert die gewünschte Ausdehnung.

2. Ist I injektiv, so induziert für alle $n \neq 0$ die Injektion $(n\cdot) : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ eine Surjektion $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, I) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, I)$ alias $(n\cdot) : I \twoheadrightarrow I$. Jede injektive abelsche Gruppe ist also divisibel. Die Umkehrung zeigen wir mit dem Zorn'schen Lemma. Sei I divisibel, $A' \subset A$ eine Untergruppe und $\varphi' : A' \to I$ ein Homomorphismus. Es gilt, φ' auf ganz A auszudehnen. Wir betrachten dazu die Menge aller Paare (A_1, φ_1) mit A_1 einer Untergruppe von A oberhalb von A' und φ_1 einer Fortsetzung von φ' auf A_1. Die Menge aller derartigen Paare ist in offensichtlicher Weise induktiv geordnet, wir finden also eine maximale Fortsetzung $(A_{\max}, \varphi_{\max})$. Wäre hier nicht $A_{\max} = A$, so könnten wir ein a in der Komplementmenge wählen und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} m\mathbb{Z} \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & n\mathbb{Z} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A_{\max} \cap \langle a \rangle \arrow[r] \arrow[d] & A_{\max} \arrow[d] \\ m\mathbb{Z} \arrow[r, hook] & \mathbb{Z} \arrow[r, two heads, "\cdot a"] & \langle a \rangle \arrow[r] & A_{\max} + \langle a \rangle \end{tikzcd}$$

bilden. Hier steht rechts ein Pushout, $m\mathbb{Z}$ sei der Annullator von a, und $n\mathbb{Z}$ das Urbild von $A_{\max} \cap \langle a \rangle$ unter $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \langle a \rangle$, $r \mapsto ra$. Da I divisibel ist, können wir die Einschränkung von $\varphi_{\max}$ längs der oberen Horizontale längs der Einbettung

$n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ fortsetzen, und da auch diese Fortsetzung auf $m\mathbb{Z}$ verschwinden muß, induziert sie $\varphi_a : \langle a \rangle \to I$. Dies $\varphi_{\max}$ und φ_a zusammen liefern dann eine Fortsetzung von $\varphi_{\max}$ auf den pushout. Das aber widerspräche der Maximalität unserer Fortsetzung.

3. Das folgt direkt aus 2, oder auch aus 1 mit der Ext-Sequenz 17.6.5.5.

4. Eine derartige Einbettung liefert nach 3 die rechte Vertikale des kokartesischen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}M & \twoheadrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q}M & \twoheadrightarrow & I \end{array}$$

Daß die untere Horizontale eine Surjektion und die rechte Vertikale eine Injektion ist, folgt aus der expliziten Konstruktion des pushout nach 17.6.6.8. □

Beweisvariante zur Injektivität divisibler abelscher Gruppen. Wir können die Injektivität divisibler abelscher Gruppen alternativ auch aus dem anschließenden Lemma folgern, das in unserer Terminologie zeigt $\mathrm{Ext}(N, I) = 0$ für jede abelsche Gruppe N und jede divisible abelsche Gruppe I. Umgekehrt folgt dieses Lemma auch unmittelbar aus der Injektivität divisibler abelscher Gruppen. □

Lemma 17.6.6.9. *Ist M eine abelsche Gruppe und $I \subset M$ eine divisible Untergruppe, so gibt es eine weitere Untergruppe $D \subset M$ mit $M = I \oplus D$.*

Beweis. Nach dem Zorn'schen Lemma gibt es unter allen Untergruppen von M, die I nur in der Null treffen, eine maximale Untergruppe D. Es reicht zu zeigen, daß gilt $I + D = M$. Zunächst beachten wir, daß

$$D' := \{v \in M \mid \exists n \in \mathbb{Z}\backslash 0 \ \text{ mit } \ nv \in D\}$$

auch eine Untergruppe von M ist. Dann beachten wir, daß aufgrund unserer Annahme an I auch gilt $D' \cap I = 0$. Wegen der Maximalität von D haben wir also $D' = D$. Wäre nun $I + D \neq M$, so könnten wir $c \in M$ mit $c \notin I + D$ finden. Ich behaupte, daß dann $I \cap (D + \mathbb{Z}c) = 0$ gälte im Widerspruch zur Maximalität von D. In der Tat folgt aus $q = d + nc$ mit $q \in I\backslash 0$ und $d \in D$ bereits $n \neq 0$. Es gibt also $p \in I$ mit $np = q$ und dann auch $n(p - c) = d$. Daraus aber folgt erst $p - c \in D' = D$ und dann $c \in I + D$ im Widerspruch zu unserer Annahme. □

17.6.6.10. Ist $N' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen und ist M ein weitere abelsche Gruppe, so ist die induzierte Sequenz

$$\mathrm{Hom}(M, N') \hookrightarrow \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M, N'')$$

offensichtlich linksexakt, aber der rechte Pfeil muß keineswegs wieder eine Surjektion sein. Ist jedoch M frei, so ist auch der rechte Pfeil offensichtlich wieder

eine Surjektion und unsere Sequenz folglich exakt. Ist ähnlich $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen und ist N ein weitere abelsche Gruppe, so ist die induzierte Sequenz

$$\mathrm{Hom}(M'', N) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M', N)$$

offensichtlich linksexakt, aber der rechte Pfeil muß ebensowenig eine Surjektion sein. Unsere Erweiterungsgruppen sind in gewisser Weise Korrekturterme für diese Phänomene. Im ersten Fall ist das die Bedeutung von 17.6.5.5. Wir zeigen es nun als 17.6.6.11 zweiten Fall.

17.6.6.11 (**Ext-Sequenz im ersten Eintrag**). Gegeben eine abelsche Gruppe N betrachten wir die kurze exakte Sequenz $N \hookrightarrow I_N \twoheadrightarrow K_N$ mit der im letzten Schritt des Beweises von 17.6.6.5 als pushout konstruierten Einbettung von N in eine injektive Gruppe $I = I_N$ als erstem Pfeil und dem Kokern dieser Einbettung als zweitem Pfeil. Den Zweischrittkomplex $I_N \twoheadrightarrow K_N$ in Graden Null und (-1) notieren wir $\mathcal{I}N$. Gegeben eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ erhält man nun wegen der Injektivität der Einträge $\mathcal{I}N$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$(M''[0] \Rrightarrow \mathcal{I}N) \hookrightarrow (M[0] \Rrightarrow \mathcal{I}N) \twoheadrightarrow (M'[0] \Rrightarrow \mathcal{I}N)$$

Die zugehörige lange exakte Homologiesequenz liefert mit den durch die Homologiesequenz im zweiten Eintrag gegebenen Identifikationen eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Hom}(M'', N) & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(M, N) & \to & \mathrm{Hom}(M', N) & \to & \\ & \to & \mathrm{Ext}(M'', N) & \to & \mathrm{Ext}(M, N) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Ext}(M', N) & \to & 0 \end{array}$$

Sie heißt die **lange exakte Ext-Sequenz im ersten Eintrag**.

17.6.6.12. Oliver Bräunling hat mir erklärt, warum für eine abelsche Gruppe A aus $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z}) = 0 = \mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$ folgt $A = 0$. Zunächst folgt $A/pA = 0$ für alle Primzahlen p aus der exakten Sequenz zu $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p$. Also ist die Multiplikation mit p eine Surjektion und wir erhalten eine weitere kurze exakte Sequenz $\ker(p\cdot) \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A$ und folgern $\mathrm{Ext}(\ker(p\cdot), \mathbb{Z}) = 0$ und dann $\ker(p\cdot) = 0$. Also ist die Multiplikation mit p eine Bijektion $A \xrightarrow{\sim} A$ für jede Primzahl p, also ist A ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, und dann folgt leicht $A = 0$ wegen $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \neq 0$ nach Übung 17.6.6.19. Zentral ist in dieser Argumentation der Basisexistenzsatz für die $\mathbb{F}_p$-Vektorräume A/pA und $\ker(p\cdot)$ sowie am Schluß für den $\mathbb{Q}$-Vektorraum A.

17.6.6.13. Eine berühmte **Vermutung von Whitehead** dahingehend, daß für abelsche Gruppen A gilt

$$\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \text{ frei}$$

ist von Shelah [She74] in ganz absonderlicher Weise „gelöst“ worden: Ob die Vermutung stimmt oder nicht, ist im üblichen Axiomensystem „Zermelo-Fraenkel mit Auswahlaxiom“ der Mengenlehre nicht entscheidbar!

Übungen

Übung 17.6.6.14. Ähnlich wie im Fall der Torsionsgruppen zeige man, daß gegeben abelsche Gruppen M, N die von $\mathcal{P}M \twoheadrightarrow M[0]$ und $N[0] \hookrightarrow \mathcal{I}N$ induzierten Kettenabbildungen

$$(M[0] \Rrightarrow \mathcal{I}N) \to (\mathcal{P}M \Rrightarrow \mathcal{I}N) \leftarrow (\mathcal{P}M \Rrightarrow N[0])$$

auf der Homologie Isomorphismen induzieren.

Übung 17.6.6.15. Für jede abelsche Gruppe N und jede natürliche Zahl $m \neq 0$ liefert der Randoperator der Ext-Sequenz im ersten Eintrag zur kurzen exakten Sequenz $\mathbb{Z} \overset{m}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ einen Isomorphismus

$$N/mN \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N)$$

Übung 17.6.6.16. Gegeben eine abelsche Gruppe M und eine Familie von abelschen Gruppen (N_i) ist die kanonische Abbildung ein Isomorphismus

$$\operatorname{Ext}\left(M, \prod N_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod \operatorname{Ext}(M, N_i)$$

Übung 17.6.6.17. Gegeben eine Familie von abelschen Gruppen (M_i) und eine abelsche Gruppe N ist die kanonische Abbildung ein Isomorphismus

$$\operatorname{Ext}\left(\bigoplus M_i, N\right) \xrightarrow{\sim} \prod \operatorname{Ext}(M_i, N)$$

Übung 17.6.6.18. Gilt $\operatorname{Ext}(P, N) = 0$ für alle N, so ist P frei. Im allgemeinen kann $\operatorname{Ext}(M, N)$ durchaus Elemente unendlicher Ordnung enthalten. Hinweis: 17.6.6.16.

Ergänzende Übung 17.6.6.19. Man zeige, daß die Gruppe $\operatorname{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ überabzählbar ist. Hinweis: $\operatorname{Ab}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ ist abzählbar, $\operatorname{Ab}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ aber überabzählbar.

17.6.7 Koeffizientenwechsel

Satz 17.6.7.1. *Sei C ein Komplex von freien abelschen Gruppen und G eine weitere abelsche Gruppe. So erhalten wir natürliche unkanonisch spaltende kurze exakte Sequenzen*

$$\operatorname{Ext}(\mathcal{H}_{q-1}C, G) \hookrightarrow \mathcal{H}^q(C \Rrightarrow G[0]) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{H}_q C, G)$$

Korollar 17.6.7.2 (Universelles Koeffiziententheorem der Kohomologie). *Ist X ein topologischer Raum und G eine abelsche Gruppe, so haben wir natürliche kurze exakte Sequenzen*

$$\operatorname{Ext}(\mathrm{H}_{q-1}X, G) \hookrightarrow \mathrm{H}^q(X; G) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(\mathrm{H}_q X, G)$$

Diese Sequenzen spalten sogar für jedes X, aber es gibt keine Transformation, die so eine Spaltung für alle X liefert.

Beispiel 17.6.7.3. Für jeden topologischen Raum X haben wir $\mathrm{H}_{-1}X = 0$ und $\mathrm{H}_0 X$ ist eine freie abelsche Gruppe. Das universelle Koeffiziententheorem liefert folglich stets Isomorphismen

$$\mathrm{H}^0(X;G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_0 X, G) \quad \text{und} \quad \mathrm{H}^1(X;G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_1 X, G)$$

Den ersten kennen wir schon aus 17.6.1.5.

Beispiel 17.6.7.4 (**Universelles Koeffiziententheorem, Anwendung**). Seien X ein topologischer Raum und $q \in \mathbb{Z}$. Sind dann $\mathrm{H}_q X$ und $\mathrm{H}_{q-1} X$ endlich ezeugte abelsche Gruppen, so ist auch $\mathrm{H}^q X$ eine endlich ezeugte abelsche Gruppe, deren Rang mit dem Rang von $\mathrm{H}_q X$ übereinstimmt, wohingegen ihr Torsionsanteil unkanonisch isomorph ist zum Torsionsanteil von $\mathrm{H}_{q-1} X$. In Formeln gilt also unter den gegebenen Endlichkeitsannahmen

$$\operatorname{rang} \mathrm{H}^q X = \operatorname{rang} \mathrm{H}_q X \quad \text{und} \quad (\mathrm{H}^q X)_{\mathrm{tor}} \cong (\mathrm{H}_{q-1} X)_{\mathrm{tor}}.$$

Das alles folgt unmittelbar aus dem universellen Koeffiziententheorem in Verbindung mit der Strukturtheorie endlich erzeugter abelscher Gruppen 4.4.4.5 und der Beschreibung von Ext aus 17.6.6.15.

Ergänzung 17.6.7.5 (**Verallgemeinerung auf erbliche Koeffizienten**). Der Satz gilt allgemeiner nach 17.5.5.11 mit demselben Beweis für k ein Hauptidealring oder ganz allgemein für Komplexe C projektiver Moduln und alle Ringe derart, daß jeder Untermodul eines projektiven Moduls projektiv ist. Derartige Ringe heißen **erbliche Ringe**, da sich bei ihnen „die Eigenschaft der Projektivität auf Untermoduln vererbt“. Kaplansky hat ein Beispiel für einen erblichen Ring gefunden, dessen opponierter Ring nicht erblich ist. Man müßte also eigentlich genauer von **linkserblichen** und **rechtserblichen Ringen** reden.

Vorschau 17.6.7.6 (**Verallgemeinerung auf allgemeinere Koeffizienten**). Will man aus der Homologie eines topologischen Raums X mit Koeffizienten in einem Ring k die Kohomologie von X mit Koeffizienten in einem k-Modul G berechnen, so leistet das eine „Spektralsequenz mit E_2-Term $\mathrm{Ext}_k^i(\mathrm{H}_j(X;k), G)$“. Hier ist stets $\mathrm{Ext}_k^0 = \mathrm{Hom}_k$, in unserem speziellen Fall $k = \mathbb{Z}$ verschwinden darüber hinaus alle $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^i$ für $i \geq 2$, wir notieren $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1 = \mathrm{Ext}$, und besagte Spektralsequenz degeneriert zur Aussage des obigen Korollars.

Beweis. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz $G \hookrightarrow I_G \twoheadrightarrow K_G$ mit injektiven I_G und K_G aus 17.6.6.11. Unsere Sequenz führt zu einer kurzen exakten Sequenz von Komplexen

$$(C \Rightarrow G[0]) \hookrightarrow (C \Rightarrow I_G[0]) \twoheadrightarrow (C \Rightarrow K_G[0])$$

Da I_G und K_G injektiv sind, sind die Funktoren $\mathrm{Hom}(\ ,I_G)$ und $\mathrm{Hom}(\ ,K_G)$ exakt und „kommutieren“ folglich mit dem Bilden der Homologie in derselben Weise, wie wir das in 17.5.4.1 für das Tensorieren mit torsionsfreien Moduln gesehen hatten. Von der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenz ist also ein Ausschnitt

$$\begin{array}{ccccccc} & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{q-1}C, I_G) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{q-1}C, K_G) & \to \\ \to \quad \mathcal{H}^q(C \Rrightarrow G[0]) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_q C, I_G) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_q C, K_G) & \to \end{array}$$

Die Ext-Sequenz im zweiten Eintrag liefert uns damit wie gewünscht kurze exakte Sequenzen

$$\mathrm{Ext}(\mathcal{H}_{q-1}C, G) \hookrightarrow \mathcal{H}^q(C \Rrightarrow G[0]) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_q C, G)$$

Es bleibt zu zeigen, daß unsere Sequenzen spalten. So eine Spaltung folgt aber wie zu Ende des Beweises von 17.5.5.2 aus der Existenz einer Spaltung der Einbettung $\mathcal{Z}_q C \hookrightarrow C_q$: Solch eine Spaltung $C_q \twoheadrightarrow \mathcal{Z}_q C$ induziert nämlich eine Abbildung $\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_q C, G) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{Z}_q C, G) \to (C \Rrightarrow G[0])^q$, die in $\mathcal{Z}^q(C \Rrightarrow G[0])$ landet. $\square$

Ergänzung 17.6.7.7. Bereits für einen unendlichen diskreten Raum X ist der natürliche Homomorphismus $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{H}^0(X) \to \mathrm{H}^0(X;\mathbb{Q})$ kein Isomorphismus. In der Kohomologie ist insbesondere der Übergang von Koeffizienten $\mathbb{Z}$ zu Koeffizienten $\mathbb{Q}$ nicht so einfach wie in der Homologie, ja ich weiß noch nicht einmal, wie man ihn überhaupt bewerkstelligen sollte.

Übungen

Übung 17.6.7.8. Das universelle Koeffiziententheorem der Kohomologie gilt mit demselben Beweis auch in der relativen Kohomologie. Was besagt es im Fall der relativen Kohomologie des Möbiusbands relativ zu seinem Randkreis?

17.7 Poincaré-Dualität

17.7.1 Limites und Kolimites

17.7.1.1. Limites und Kolimites sind weitreichende Verallgemeinerungen von Produkten beziehungsweise Koprodukten, zu denen sie im Spezialfall eines „Köchers ohne Pfeile“ spezialisieren. Im Fall eines Winkeldiagramms als Köcher spezialisiert der Limes zum Faserprodukt alias pullback, im Fall eines Kowinkeldiagramms der Kolimes zum pushout.

Definition 17.7.1.2. Gegeben ein Köcher $\mathcal{I}$ und eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist die Vorschrift, die jedem Objekt die entsprechende **konstante Darstellung** unseres Köchers zuordnet, ein Funktor

$$\mathrm{konst} : \mathcal{C} \to \mathrm{Car}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$$

Wenn der partielle Linksadjungierte dieses Funktors auf einer Köcherdarstellung $D : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ definiert ist, so nennen wir seinen Wert den **Kolimes** unserer Köcherdarstellung. Ist unsere Köcherdarstellung D gegeben durch $D : i \mapsto D_i$ und $D : \mathcal{I}(i,j) \to \mathcal{C}(D_i, D_j)$, so notieren wir den Kolimes

$$\operatorname*{col}_{i \in \mathcal{I}} D_i$$

Er ist in der üblichen Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus wenn er existiert, weshalb wir dafür auch den bestimmten Artikel verwenden. Die Bilder der Pfeile unter einer Köcherdarstellung kürzen wir gerne mit demselben Symbol $D(p) = p$ ab wie die Pfeile selbst. Wenn analog der partielle Rechtsadjungierte unseres Funktors konst auf einer Köcherdarstellung definiert ist, so nennen wir seinen Wert den **Limes** unserer Köcherdarstellung und notieren ihn

$$\lim_{i \in \mathcal{I}} D_i$$

17.7.1.3. Ausgeschrieben besteht unser Kolimes aus einem Objekt $K = \operatorname{col} D_i$ mitsamt Morphismen $\mathrm{in}_i : D_i \to K$ derart, daß gilt $\mathrm{in}_j \circ D(p) = \mathrm{in}_i$ für alle Pfeile $p \in \mathcal{I}(i,j)$ und daß folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt ist: Gegeben ein Objekt $N \in \mathcal{C}$ mitsamt Morphismen $\psi_i : D_i \to N$ derart, daß gilt $\psi_j \circ D(p) = \psi_i$ für alle Pfeile $p \in \mathcal{I}(i,j)$, existiert genau einen Morphismus $\psi : K \to N$ mit $\psi \circ \mathrm{in}_i = \psi_i$ für alle i.

17.7.1.4. Der Kolimes einer Darstellung $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ eines Köchers fällt zusammen mit dem Limes der Darstellung $F^{\mathrm{opp}} : \mathcal{I}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ des opponierten Köchers in der opponierten Kategorie.

$$\begin{tikzcd}
M_j \arrow[loop left] \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & \operatorname*{col}_{i\in I} M_i \arrow[r, dashed, "\exists!"] & N \\
M_i \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[urr, bend right] \arrow[dl] & &
\end{tikzcd}$$

Illustration zum Kolimes

$$\begin{tikzcd}
& & M_i \arrow[loop above] \arrow[d] \\
N \arrow[r, dashed, "\exists!"] \arrow[urr, bend left] \arrow[drr, bend right] & \lim\limits_{i\in I} M_i \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & M_j \arrow[u] \arrow[dl]
\end{tikzcd}$$

Illustration zum Limes

17.7.1.5. Ausgeschrieben besteht unser Limes aus einem Objekt $L = \lim D_i$ mitsamt Morphismen $\mathrm{pr}_i : L \to D_i$ derart, daß gilt $D(p) \circ \mathrm{pr}_i = \mathrm{pr}_j$ für alle Pfeile $p \in \mathcal{I}(i,j)$, und daß folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt ist: Gegeben ein Objekt $M \in \mathcal{C}$ mitsamt Morphismen $\psi_i : M \to D_i$ derart, daß gilt $D(p) \circ \psi_i = \psi_j$ für alle Pfeile $p \in \mathcal{I}(i,j)$, existiert genau ein Morphismus $\psi : M \to L$ mit $\mathrm{pr}_i \circ \psi = \psi_i$ für alle i.

17.7.1.6 (**Diskussion der Terminologie**). Meist geht man spezieller von einer Kategorie $\mathcal{I}$ aus und betrachtet nur Kolimites von Funktoren $F \in \mathrm{Cat}(\mathcal{I},\mathcal{C}) \subset \mathrm{Car}(\mathcal{I},\mathcal{C})$. Die Einschränkung auf diesen Spezialfall schien mir jedoch wenig sinnvoll. Oft geht man auch noch spezieller von einer teilgeordneten Indexmenge $\mathcal{I}$ aus, dann ist die Kategorie mit je einem Morphismus von kleineren zu größeren Elementen gemeint. Im allgemeinen nenne ich eine Darstellung eines Köchers in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ein **Diagramm in** $\mathcal{C}$ und einen Funktor von einer Kategorie in eine Kategorie $\mathcal{C}$ ein **System in** $\mathcal{C}$. Meist findet man für den Kolimes die ausführlichere Notation colim. Oft verwendet man auch statt col und $\lim$ die Notationen $\varinjlim$ und $\varprojlim$. Ich verwende sie nur im Fall von Systemen, die durch eine angeordnete Menge indiziert werden. Für unseren Kolimes findet man in der Literatur auch die Bezeichnungen als **induktiver Limes** und **direkter Limes**. Für unseren Limes findet man in der Literatur auch die Bezeichnungen als **projektiver Limes** und **inverser Limes**. Ich erlaube mir das jedoch nur im Fall filtrierender beziehungsweise kofiltrierender Systeme, wie sie in 17.7.1.12 eingeführt werden.

Beispiele 17.7.1.7 (**Kolimes spezialisiert zu Koprodukt und Pushout**). Im Fall eines Köchers ohne Pfeile spezialisiert unser Kolimes zum Koprodukt. Im Fall eines Kowinkeldiagramms spezialisiert unser Kolimes zum Pushout.

Beispiele 17.7.1.8 (**Limes spezialisiert zu Produkt, Pullback und Egalisator**). Im Fall eines Köchers ohne Pfeile spezialisiert unser Limes zum Produkt. Im Fall eines Winkeldiagramms spezialisiert unser Limes zum Pullback. Bezeichne schließlich $\rightrightarrows$ den Köcher mit zwei Punkten und zwei Pfeilen, von dem ich der Einfachkeit halber nur die Pfeile angedeutet habe. Der Limes einer Darstellung dieses Köchers heißt, wenn er existiert, auch der **Egalisator** der beiden Morphismen, die den Pfeilen unseres Köchers zugordnet werden. Sind zum Beispiel $f, g : X \to Y$ zwei Abbildungen von Mengen, so ist ihr Egalisator die Menge $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ mit ihrer Einbettung nach X.

Beispiel 17.7.1.9 (**Kolimites von Mengen**). In der Kategorie der Mengen existieren alle Kolimites: Unser universelles Problem wird gelöst von der Menge der Äquivalenzklassen in der disjunkten Vereinigung $\bigsqcup_{i\in\mathcal{I}} M_i$ unter der Äquivalenzrelation $\sim$, die erzeugt wird wird durch die Äquivalenzen

$$\mathrm{in}_i(a_i) \sim \mathrm{in}_j(p(a_i)) \text{ für alle } i,j \in \mathcal{I} \text{ und alle } p \in \mathcal{I}(i,j) \text{ und alle } a_i \in M_i.$$

Wählen wir etwas vorsichtiger ein Universum $\mathfrak{U}$ mit $\mathcal{I} \in \mathfrak{U}$ und $M_i \in \mathfrak{U}\ \forall i \in \mathcal{I}$, so existiert unser Kolimes in $\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$. Existiert umgekehrt unser Kolimes in $\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ für ein Mengensystem $\mathfrak{U}$, so erkennt man leicht, daß er auch für jedes größere Mengensystem existieren und derselbe bleiben muß.

Beispiel 17.7.1.10 (**Kolimes als aufsteigende Vereinigung**). Gegeben sei ein Diagramm von Mengen mit Injektionen $M_0 \hookrightarrow M_1 \hookrightarrow M_2 \hookrightarrow \ldots$ Sind alle diese Mengen Teilmengen einer Menge M und sind unsere Injektionen Inklusionen von Teilmengen, so liefert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\operatorname*{col}_{i\in\mathbb{N}} M_i \xrightarrow{\sim} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$$

Beispiel 17.7.1.11. In der Kategorie der abelschen Gruppen existieren Kolimites: Der Quotient der direkten Summe $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_i$ nach der Untergruppe, die erzeugt wird von allen $\mathrm{in}_i(m) - \mathrm{in}_j(p(m))$ für $i, j \in I$, $p \in \mathcal{I}(i,j)$ und $m \in M_i$, löst unser universelles Problem.

Definition 17.7.1.12. Eine Kategorie $\mathcal{I}$ heißt **filtrierend**, wenn (1) ihre Objektmenge nicht leer ist, wenn es (2) für je zwei Objekte $i, j \in \mathcal{I}$ ein Objekt $k \in \mathcal{I}$ mit Morphismen $i \to k$, $j \to k$ gibt und wenn es (3) für je zwei Morphismen $\varphi, \psi : i \to j$ einen Morphismus $\zeta : j \to k$ gibt mit $\zeta \circ \varphi = \zeta \circ \psi$. Eine Kategorie $\mathcal{I}$ heißt **kofiltrierend**, wenn die opponierte Kategorie filtrierend ist.

17.7.1.13 (**Diskussion des Begriffs einer filtrierenden Kategorie**). Man kann die ersten beiden Forderungen vielleicht natürlicher dahingehend zusammenfasen, daß es für jede endliche Menge von Objekten ein Objekt geben soll, zu dem sie alle mindestens einen Morphismus haben. Einen weiteren Grund, Kategorien mit leerer Objektmenge nicht filtrierend zu nennen, lernen wir in 17.7.1.16 kennen.

17.7.1.14. Ein Kolimes eines Funktors von einer filtrierenden Kategorie in eine weitere Kategorie heißt auch ein **filtrierender Kolimes** und wir notieren derartige Kolimites colf. Im Prinzip ist diese Notation unnötig, aber filtrierende Kolimites haben besonders gute Eigenschaften und unsere Notation ist eine effiziente Art, daran zu erinnern, daß wir in dieser Situation sind. Ein Limes über eine kofiltrierende Kategorie heißt dual ein **kofiltrierender Limes** und wir notieren derartige Limites limf. Schreiben wir $\mathrm{colf}_{n\in\mathbb{N}} X_n$, so gehen wir stets implizit von einem System der Gestalt $X_0 \to X_1 \to \ldots$ aus, über das der Kolimes zu bilden ist. Schreiben wir $\mathrm{limf}_{n\in\mathbb{N}} X_n$, so gehen wir stets implizit von einem System der Gestalt $\ldots \to X_1 \to X_0$ aus, über das der Limes zu bilden ist.

17.7.1.15 (**Filtrierende Kolimites von Mengen**). Im Fall eines mengenwertigen Funktors $M \in \mathrm{Cat}(\mathcal{I}, \mathrm{Ens})$ auf einer filtrierenden Kategorie $\mathcal{I}$ kann man die

Äquivalenzrelation $\sim$ auf der disjunkten Vereinigung $\bigsqcup M_i$ aus 17.7.1.9 mit

$$\operatorname{colf} M = \left(\bigsqcup_{i\in\mathcal{I}} M_i\right) \Big/ \sim$$

sehr viel expliziter beschreiben: Genau dann gilt unter dieser Annahme $a_i \sim a_j$, wenn es Morphismen $\varphi : i \to k$ und $\psi : j \to k$ gibt mit $\varphi(a_i) = \psi(a_j)$ in M_k. In der Tat liefert für filtrierendes $\mathcal{I}$ diese Vorschrift eine Äquivalenzrelation, von der man leicht zeigt, daß sie mit der in 17.7.1.9 beschriebenen Äquivalenzrelation übereinstimmen muß.

17.7.1.16. Gegeben ein Köcher $\mathcal{I}$ und darüber ein System $M \in \operatorname{Car}(\mathcal{I}, \operatorname{Ens}^*)$ von bepunkteten Mengen liefern die universellen Eigenschaften eine natürliche Abbildung $\operatorname{col}_{\mathcal{I}\to\operatorname{Ens}} M \to \operatorname{col}_{\mathcal{I}\to\operatorname{Ens}^*} M$ von dem in der Kategorie der Mengen berechneten Kolimes zu dem in der Kategorie der punktierten Mengen berechneten Kolimes. Im Fall eines durch eine filtrierende Kategorie $\mathcal{I}$ indizierten Systems $M \in \operatorname{Cat}(\mathcal{I}, \operatorname{Ens}^*)$ ist diese natürliche Abbildung nach der eben gegebenen Beschreibung filtrierender Kolimites eine Bijektion

$$\operatorname*{colf}_{\mathcal{I}\to\operatorname{Ens}} M \xrightarrow{\sim} \operatorname*{colf}_{\mathcal{I}\to\operatorname{Ens}^*} M$$

Auch dafür ist unsere Bedingung an eine filtrierende Kategorie wesentlich, daß ihre Objektmenge nicht leer sein darf.

Definition 17.7.1.17. Sei $\mathcal{I}$ ein Köcher. Eine Sequenz $F \to G \to H$ in der Kategorie $\operatorname{Car}(\mathcal{I}, \operatorname{Ens}^*)$ der Darstellungen von $\mathcal{I}$ durch bepunktete Mengen heißt **exakt**, wenn für jedes $i \in \mathcal{I}$ die Sequenz $F_i \to G_i \to H_i$ exakt ist.

Lemma 17.7.1.18 (Exaktheit filtrierender Kolimites von Mengen). *Gegeben eine filtrierende Kategorie $\mathcal{I}$ macht das Bilden des Kolimes von Mengen und nach 17.7.1.16 gleichbedeutend von punktierten Mengen* $\operatorname{colf} : \operatorname{Cat}(\mathcal{I}, \operatorname{Ens}^*) \to \operatorname{Ens}^*$ *aus exakten Sequenzen exakte Sequenzen.*

17.7.1.19 (**Exaktheit filtrierender Kolimites von Gruppen**). Für ein filtrierendes System von Gruppen erhalten wir auf dem Mengenkolimes aus 17.7.1.15 in offensichtlicher Weise eine Struktur als Gruppe, und es ist auch klar, daß wir so den Kolimes in der Kategorie der Gruppen konstruieren können. Unser Lemma gilt also analog auch für Gruppen.

Beweis. Sei $F \to G \to H$ unsere Sequenz. Bezeichne $(\varphi_i), (\psi_i)$ die Morphismen unserer Sequenz und φ, ψ ihre Kolimites. Sicher ist die Verknüpfung auch im Kolimes konstant. Ist andererseits $\operatorname{in}_i(g_i) \in \operatorname{colf} G$ ein Element im Kolimes der Mitte, das auf $* \in \operatorname{colf} H$ geht, so folgt $\operatorname{in}_i \psi_i(g_i) = *$, nach 17.7.1.15 also $\zeta\psi_i(g_i) = *$ für geeignetes $\zeta : i \to j$, also $\psi_j\zeta(g_i) = *$ und folglich gilt $\zeta(g_i) = \varphi_j(f_j)$ und $\operatorname{in}_i(g_i) = \varphi \operatorname{in}_j(f_j)$. $\square$

Definition 17.7.1.20. Eine Unterkategorie $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ einer filtrierenden Kategorie heißt **konfinal**, wenn sie voll ist und wenn es für jedes $i \in \mathcal{I}$ einen Morphismus zu einem Objekt $k \in \mathcal{K}$ gibt.

17.7.1.21 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißt diese Eigenschaft meist „kofinal". Da die Vorsilbe „ko" aber in diesem Zusammenhang mit der Bedeutung „dasselbe für die opponierte Kategorie" belastet ist, habe ich die Terminologie variiert.

Lemma 17.7.1.22 (**Übergang zu konfinalem Teilsystem**). *Seien $\mathcal{I}$ eine filtrierende Kategorie, $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ konfinal und $M : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Genau dann existiert der Kolimes von M über $\mathcal{I}$, wenn der Kolimes über $\mathcal{K}$ existiert, und dann ist der offensichtliche Morphismus ist ein Isomorphismus*

$$\operatorname*{colf}_{k\in\mathcal{K}} M_k \xrightarrow{\sim} \operatorname*{colf}_{i\in\mathcal{I}} M_i$$

Beweis. Beide Seiten haben dieselbe universelle Eigenschaft. Man überzeuge sich davon zunächst im Spezialfall, daß $\mathcal{I}$ ein finales Objekt besitzt und daß $\mathcal{K}$ nur aus diesem einen finalen Objekt besteht. □

Beispiel 17.7.1.23 (**Limites von Mengen**). In der Kategorie der Mengen existieren Limites: Die Teilmenge des Produkts $\prod_{i\in\mathcal{I}} M_i$, die besteht aus allen Tupeln $(m_i)_{i\in\mathcal{I}}$ mit $p(m_i) = m_j$ für alle Pfeile $p : i \to j$, löst unser universelles Problem. Wählen wir etwas vorsichtiger ein Universum $\mathfrak{U}$ mit $\mathcal{I} \in \mathfrak{U}$ und $M_i \in \mathfrak{U}\ \forall i \in \mathcal{I}$, so existiert unser Limes in $\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$. Existiert umgekehrt unser Limes in $\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ für ein Mengensystem $\mathfrak{U}$, so erkennt man leicht, daß er auch für jedes größere Mengensystem existieren und derselbe bleiben muß.

Ergänzung 17.7.1.24 (**Leere Limites nichtleerer Mengen**). Der Limes eines kofiltrierenden Systems nichtleerer endlicher Mengen ist nicht leer: Das folgt aus dem Satz von Tychonoff 15.3.2.10 mit Übung 12.4.1.13 zu nichtleeren Schnittmengen von Familien abgeschlossener Teilmengen in Kompakta. Im Fall unendlicher Mengen stimmt das nicht mehr. Die Mengen $\mathbb{Z}_{\le n}$ mit den Inklusionen als Morphismen bilden etwa ein kofiltrierendes System nichtleerer unendlicher Mengen mit leerem Limes. Sogar bei einem kofiltrierenden System nichtleerer Mengen mit surjektiven Morphismen kann es verblüffenderweise vorkommen, daß der Limes leer ist. Mehr dazu findet man in der „Théorie des Ensembles" von Bourbaki.

Beispiel 17.7.1.25 (**Formale Potenzreihen als Limes**). Wir können den Ring $k[\![X]\!]$ der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in einem Ring k beschreiben als Limes des Systems aller „abgeschnittenen Polynomringe". Genauer liefert die universelle Eigenschaft einen Isomorphismus $k[\![X]\!] \xrightarrow{\sim} \operatorname{limf}_n k[X]/\langle X^n\rangle$.

17.7.1.26. Als Konsequenz unseres Resultats für Kolimites in 17.7.1.22 bleiben auch kofiltrierende Limites unverändert bei der Restriktion zu einer Unterkategorie, deren opponierte Kategorie konfinal ist in der Opponierten der Indexkategorie des ursprünglichen Systems.

Übungen

Übung 17.7.1.27 (**Limites und volltreue Funktoren**). Seien $D : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ eine Darstellung eines Köchers in einer Kategorie und $V : \mathcal{C} \xhookrightarrow{\sim} \mathcal{C}'$ ein volltreuer Funktor. Existiert dann der Limes von VD und liegt im essentiellen Bild von V, so existiert auch der Limes von D und der offensichtliche Morphismus ist ein Isomorphismus $V(\lim D) \xrightarrow{\sim} \lim(VD)$. Analoges gilt für Kolimites.

Ergänzende Übung 17.7.1.28. Gegeben ein CW-Komplex X ist seine Homologie der Kolimes der Homologie seiner Skelette, in Formeln

$$\operatorname*{colf}_n \mathrm{H}_q(X^{\leq n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X)$$

für alle q. Hinweis: Man zeige zunächst die analoge Aussage für Ketten mit 15.1.7.36 und verwende dann die Exaktheit filtrierender Kolimites.

Übung 17.7.1.29. Gegeben ein Diagramm von Gruppen (oder abelschen Gruppen, oder Ringen, oder Moduln) trägt sein Limes als Diagramm von Mengen in natürlicher Weise die Struktur einer Gruppe (oder einer abelschen Gruppe, oder eines Rings, oder eines Moduls) und wird mit dieser Struktur ein Limes in der jeweiligen Kategorie.

Übung 17.7.1.30 (**Linksadjungierte vertauschen mit Kolimites**). Seien $L : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ein Funktor und $\mathcal{I}$ ein Köcher und $X : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$ eine Darstellung unseres Köchers. Existiert der Kolimes $\operatorname{col} X_i$ und besitzt L einen Rechtsadjungierten, so machen auch die offensichtlichen Morphismen $L(X_i) \to L(\operatorname{col} X_i)$ die rechte Seite zu einem Kolimes der Darstellung $LX : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$. Opponiert zeigt man, daß Rechtsadjungierte mit Limites vertauschen.

Übung 17.7.1.31 (**Partielle Linksadjungierte vertauschen mit Kolimites**). Seien genauer $R : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ ein Funktor und $\mathcal{I}$ ein Köcher und $X : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$ eine Darstellung unseres Köchers. Existiert der Kolimes $\operatorname{col} X_i$ und ist der partielle Linksadjungierte $L : \mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{C}$ von R bei allen X_i sowie bei $\operatorname{col} X_i$ definiert, so machen auch die offensichtlichen Morphismen $L(X_i) \to L(\operatorname{col} X_i)$ die rechte Seite zu einem Kolimes der Darstellung $LX : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$. Opponiert zeigt man, daß partielle Rechtsadjungierte mit Limites vertauschen.

Übung 17.7.1.32. Ist (X_i) eine Darstellung eines Köchers in der Kategorie der topologischen Räume und Y lokal kompakt, so liefert die offensichtliche Abbildung

einen Homöomorphismus von Kolimites

$$\operatorname{col}(X_i \times Y) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{col} X_i) \times Y$$

Hinweis: 17.7.1.30 und Exponentialgesetz 15.1.9.9.

Übung 17.7.1.33. Die Realisierung des vollen Simplex über einer nichtleeren Menge E ist stets zusammenziehbar. Hinweis: Für die Teilmenge $\Delta(E) \subset \operatorname{Ens}(E, \mathbb{R})$ und ein Element $g \in \Delta(E)$ betrachte man die Abbildung $[0,1] \times \Delta(E) \to \Delta(E)$ mit $(a, f) \mapsto ag + (1-a)f$ und zeige mit 17.7.1.32, daß sie stetig ist. Weiter besitzt jeder Punkt sogar eine Umgebungsbasis aus offenen konvexen und mithin zusammenziehbaren Umgebungen.

Übung 17.7.1.34 (**Transitivität von Limites und Kolimites**). Seien $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ Köcher und sei $\mathcal{B}$ eine Kategorie und $X : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \mathcal{B}$ eine Darstellung. So ist, immer unter der Voraussetzung der Existenz unserer Kolimites, der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus

$$\operatorname*{col}_{\mathcal{I}\times\mathcal{J}} X_{(i,j)} \xrightarrow{\sim} \operatorname*{col}_{\mathcal{I}} \left(\operatorname*{col}_{\mathcal{J}} X_{(i,j)} \right)$$

Analoges gilt für Limites.

Übung 17.7.1.35 (**Transitivität von filtrierenden Limites und Kolimites**). Sei eine Kategorie $\mathcal{I}$ die Vereinigung einer in Bezug auf Inklusionen filtrierenden Familie von Unterkategorien $\mathcal{I} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{I}_\alpha$. So existiert für ein von $\mathcal{I}$ indiziertes System, bei dem die Kolimites auf der linken Seite existieren, auch der Kolimes der rechten Seite und der natürliche Morphismus ist ein Isomorphismus

$$\operatorname{colf}_{\alpha \in A} \left(\operatorname{col}_{i \in \mathcal{I}_\alpha} D_i \right) \xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_{i \in \mathcal{I}} D_i$$

Übung 17.7.1.36 (**Hinreichendes Kriterium für filtrierende Kolimites**). Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein filtrierendes System und $\psi = (\psi_i : X_i \to D)$ ein Morphismus in das konstante System zu einem Objekt $D \in \mathcal{C}$. Man zeige: Gibt es einen Index j und einen Morphismus $\varphi_j : D \to C_j$ mit $\psi_j \circ \varphi_j = \operatorname{id}_D$, so ist unser Morphismus ψ ein Kolimes.

Übung 17.7.1.37 (**Tensorprodukte vertauschen mit Kolimites**). In Formeln liefert also die kanonische Abbildung einen Isomorphismus

$$\operatorname{col}(M_i \otimes_R N) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{col} M_i) \otimes_R N$$

Hinweis: Man beachte, daß $\otimes_R N$ einen Rechtsadjungierten besitzt, und wende 17.7.1.30 an.

Ergänzende Übung 17.7.1.38. Gegeben eine abelsche Gruppe G und $n \in \mathbb{N}$ betrachte man die Kategorie mit $\mathrm{Ab}(\mathbb{Z}^n, G)$ als Objektmenge und Morphismen $\zeta : \varphi \to \psi$ allen Gruppenhomomorphismen $\zeta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ mit $\psi \circ \zeta = \varphi$. Man zeige: Für $n \geq 2$ ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$\mathrm{col}_\varphi \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\sim} G$$

mit dem über die Kategorie $\mathrm{Ab}(\mathbb{Z}^n, G)$ zu verstehenden Kolimes. Man zeige weiter, daß das für $n \leq 1$ nicht mehr stimmt.

Ergänzende Übung 17.7.1.39 (**Kolimes eines Systems aus Surjektionen**). Gegeben ein filtrierendes System (M_i) von Gruppen, dessen sämtliche Morphismen Surjektionen sind, kann man den Kolimes auch beschreiben, indem man ein i festhält und M_i teilt durch die Vereinigung der Kerne aller $p : i \to j$.

Ergänzende Übung 17.7.1.40 (**Tensorprodukt über filtrierendem Kolimes**). Mithilfe von 17.7.1.39 zeige man: Gegeben ein filtrierendes System von Ringen R_i mit Kolimes R und einen R-Rechtsmodul M sowie einen R-Linksmodul N induziert die kanonische Abbildung einen Isomorphismus

$$\operatorname*{colf}_i (M \otimes_{R_i} N) \xrightarrow{\sim} M \otimes_R N$$

Übung 17.7.1.41. Sei der topologische Raum X eine aufsteigende oder allgemeiner eine filtrierende Vereinigung offener Teilmengen. In Formeln gelte also $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und für je zwei Indizes $i, j \in I$ existiere ein Index $k \in I$ mit $U_i \subset U_k$ und $U_j \subset U_k$. So induzieren die offensichtlichen Abbildungen Isomorphismen

$$\mathrm{colf}\, \mathrm{H}_q(U_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X) \quad \text{und} \quad \mathrm{colf}\, \pi_1(U_i, x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x),$$

wobei an zweiter Stelle der Kolimes über alle i mit $x \in U_i$ gemeint ist.

Ergänzende Übung 17.7.1.42. Algebraisch Gebildete mögen zeigen, daß in der Kategorie Kring der Kringe beliebige Kolimites existieren. Hinweis: Man beginne mit der Existenz filtrierender Kolimites in Anlehnung an 17.7.1.19. Man erinnere die Existenz endlicher Koprodukte aus 7.2.6.12. Man folgere die Existenz beliebiger Koprodukte als filtrierende Kolimites über alle endlichen Teilkoprodukte. Schließlich gehe man noch zu geeignet zu Restklassenringen über.

Übung 17.7.1.43 (**Exaktheitseigenschaften von Limites**). Gegeben eine linksexakte Sequenz $M_i' \hookrightarrow M_i \to M_i''$ von Diagrammen abelscher Gruppen ist die Sequenz der Limites auch eine linksexakte Sequenz

$$\lim M_i' \hookrightarrow \lim M_i \to \lim M_i''$$

Sind unsere Diagramme indiziert durch $n \in \mathbb{N}$, aufgefaßt als Köcher mit Pfeilen $(n \to n-1)$, und besteht die Sequenz aus kurzen exakten Sequenzen $M'_n \hookrightarrow M_n \twoheadrightarrow M''_n$ und ist das linke System **surjektiv** in dem Sinne, daß alle seine Morphismen Surjektionen $M'_n \twoheadrightarrow M'_{n-1}$ sind, so bilden die inversen Limites sogar eine kurze exakte Sequenz

$$\operatorname*{limf}_n M'_n \hookrightarrow \operatorname*{limf}_n M_n \twoheadrightarrow \operatorname*{limf}_n M''_n$$

Man kann das auch noch allgemeiner zeigen unter der noch schwächeren sogenannten **Mittag-Leffler-Bedingung**, daß in jedem M'_n die absteigende Folge der Bilder der M'_j mit $j > n$ nach endlich vielen Schritten konstant wird, etwa beim Bild von $M'_{j(n)}$. Hinweis: Wähle $j(n)$ jeweils kleinstmöglich. Gegeben ein Element des inversen Limes (m''_n) wähle man zunächst in der Mitte jeweils Urbilder m_n und davon ausgehend „bessere" Urbilder als die Bilder $\tilde{m}_n \in M_n$ der $m_{j(n)}$, und ändere die $m_{j(n)}$ dann induktiv so ab, daß die $\tilde{m}_n$ ein Element des inversen Limes werden.

Ergänzende Übung 17.7.1.44 (**Exaktheitseigenschaften von Limites, Variante**). Sei ein inverses System von kurzen exakten Sequenzen $M'_\omega \hookrightarrow M_\omega \twoheadrightarrow M''_\omega$ abelscher Gruppen über einer wohlgeordneten Menge Ω gegeben. Ist das linke System **transfinit surjektiv** in dem Sinne, daß für alle $\omega \in \Omega$ die offensichtlichen Abbildungen Surjektionen $M'_\eta \twoheadrightarrow \operatorname{limf}_{\omega<\eta} M'_\omega$ liefern, so bilden die inversen Limites eine kurze exakte Sequenz

$$\operatorname*{limf}_\omega M'_\omega \hookrightarrow \operatorname*{limf}_\omega M_\omega \twoheadrightarrow \operatorname*{limf}_\omega M''_\omega$$

Hinweis: Man orientiere sich am Fall der wohlgeordneten Menge $\mathbb{N}$. Gäbe es für eine verträgliche Familie (m''_ω) kein Urbild, so gäbe es einen kleinsten Index η derart, daß wir zu einem vorgegebenen verträglichen System von Urbildern $(m_\omega)_{\omega<\eta}$ kein mögliches m_η finden könnten. Wieder reicht es auch aus, die **transfinite Mittag-Leffler-Bedingung** anzunehmen, daß es für jedes η ein $\alpha \geq \eta$ gibt derart, daß für $\beta \geq \alpha$ die Bilder von M'_β und M'_α in $\operatorname{limf}_{\omega<\eta} M'_\omega$ übereinstimmen.

Beispiel 17.7.1.45. Die kurzen exakten Sequenzen $p^n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ für $p \neq 0$ liefern im inversen Limes keine kurze exakte Sequenz: Die kanonische Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ von $\mathbb{Z}$ in die p-adischen Zahlen ist nicht surjektiv.

Übung 17.7.1.46 (**Übergang zu den Schnitten der Bilder beim Limes**). Gegeben ein Diagramm M_i abelscher Gruppen über einem Köcher $\mathcal{I}$ betrachten wir das Unterdiagramm der **Schnitte der Bilder** gegeben durch

$$S_i := \bigcap_{j \to i} \operatorname{im}(M_j \to M_i)$$

Man zeige, daß die Einbettung dieses Unterdiagramms auf den Limites einen Isomorphismus $\lim S_i \xrightarrow{\sim} \lim M_i$ induziert.

Übung 17.7.1.47 (**Übergang zum bidualen Diagramm beim Limes**). Gegeben ein Diagramm M_i von Vektorräumen über einem Köcher $\mathcal{I}$ zeige man: Besteht das Unterdiagramm der Schnitte aller Bilder aus endlichdimensionalen Untervektorräumen, gilt also in Formeln $\dim \bigcap_{j\to i} \operatorname{im}(M_j \to M_i) < \infty$ für alle i, so induziert die Einbettung unseres Diagramms in das Diagramm der jeweiligen Bidualräume einen Isomorphismus $\lim M_i \xrightarrow{\sim} \lim M_i^{**}$. Hinweis: 17.7.1.46.

Übung 17.7.1.48 (**Exakte Limites exakter Komplexe abelscher Gruppen**). Sei ein durch die natürlichen Zahlen indiziertes inverses System von exakten Komplexen abelscher Gruppen gegeben. Sind alle Morphismen unseres Systems surjektiv, so ist auch der inverse Limes exakt. Sind genauer alle Komplexe unseres inversen Systems exakt in den Graden Null und Eins, so ist der inverse Limes exakt im Grad Eins. Wir denken hier an obere Indizes, das Differential erhöht also den Grad. Hinweis: Die Bilder fallen einerseits mit den Zykeln zusammen und bilden andererseits auch ein inverses System mit surjektiven Morphismen. Nun wende man das Mittag-Leffler-Kriterium 17.7.1.43 an.

Übung 17.7.1.49. Sei ein durch eine wohlgeordnete Menge indiziertes inverses System von exakten Komplexen abelscher Gruppen gegeben. Ist unser System an jeder Stelle transfinit surjektiv, so ist auch der inverse Limes exakt.

Übung 17.7.1.50. Sei ein durch eine wohlgeordnete Menge Ω indiziertes inverses System X_ω von Komplexen abelscher Gruppen gegeben. Ist unser System an jeder Stelle $\omega \in \Omega$ transfinit surjektiv und ist an jeder Stelle $\omega \in \Omega$ der Komplex der Kerne $\ker(X_\eta \twoheadrightarrow \operatorname{limf}_{\omega<\eta} X_\omega)$ exakt, so ist auch der Limes exakt. Hinweis: Wegen 17.7.1.49 reicht es zu zeigen, daß alle unsere Komplexe X_ω exakt sind. Andernfalls gibt es ein kleinstes η, für das der Komplex X_η nicht exakt ist, und mit 17.7.1.49 und der langen exakten Homologiesequenz landen wir bei einem Widerspruch.

Übung 17.7.1.51. Gegeben ein Morphismus von Systemen von Kettenkomplexen abelscher Gruppen ist der Limes der zugehörigen Abbildungskegel der Abbildungskegel des auf den Limites induzierten Morphismus.

Übung 17.7.1.52 (**Inverser Limes erhält manchmal Quasiisomorphismen**). Sei gegeben ein Morphismus $u : X \to Y$ von durch $\mathbb{N}$ indizierten inversen Systemen von Komplexen abelscher Gruppen. Im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dotted] & X_1^n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & X_1^{n+1} \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, dotted] & X_0^n \arrow[r, "\partial"] & X_0^{n+1} \arrow[r, dotted] & \cdots
\end{tikzcd}$$

deuten die vertikalen Pfeile die Morphismen des inversen Systems X an. Induziert $u_i : X_i \to Y_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ Isomorphismen auf der Kohomologie und sind alle Morphismen unserer inversen Systeme Surjektionen $X_i \twoheadrightarrow X_{i-1}$, $Y_i \twoheadrightarrow Y_{i-1}$, so induziert auch die im inversen Limes erhaltene Kettenabbildung

$$\operatorname{limf} X_i \to \operatorname{limf} Y_i$$

Isomorphismen auf der Kohomologie. Hinweis: Es reicht, die Exaktheit des Abbildungskegels zu zeigen. Das gelingt mit 17.7.1.51 und 17.7.1.48. Nehmen wir feiner nur an, daß u_i für alle i Isomorphismen auf $\mathcal{H}^0, \mathcal{H}^1$ und $\mathcal{H}^2$ induziert, so folgt in derselben Weise, daß die im inversen Limes erhaltene Kettenabbildung einen Isomorphismus auf $\mathcal{H}^1$ induziert. Dasselbe gilt, wenn wir inverse Limites über eine allgemeinere wohlgeordnete Menge bilden und unsere inversen Systeme (X_i) und (Y_i) transfinit surjektiv annehmen.

Übung 17.7.1.53 (**Vertauschen von inversem Limes und Kohomologie**). Seien R ein Ring und X ein durch $\mathbb{N}$ indiziertes inverses System $\ldots \twoheadrightarrow X_1 \twoheadrightarrow X_0$ von Komplexen von R-Moduln mit surjektiven Systemmorphismen. Sei $q \in \mathbb{Z}$ fest gewählt. Sind die $(q-1)$-ten Kohomologiegruppen unserer Komplexe alle artinsch, zum Beispiel endlichdimensionale Vektorräume oder endliche abelsche Gruppen, so liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\mathcal{H}^q(\operatorname{limf} X_i) \xrightarrow{\sim} \operatorname{limf} \mathcal{H}^q(X_i)$$

Allgemeiner reicht es hier sogar zu fordern, daß für jedes feste i die Bilder von $\mathcal{H}^{q-1}(X_{j+i}) \to \mathcal{H}^{q-1}(X_i)$ für große j stagnieren. Hinweis: Unter unserer Annahme erfüllen die inversen Systeme der $(q-1)$-Kozykel die Mittag-Leffler-Bedingung.

Übung 17.7.1.54 (**Quasiisomorphismus zum Limes der bidualen Komplexe**). Seien k ein Körper und X ein durch $\mathbb{N}$ indiziertes inverses System $\ldots \twoheadrightarrow X_1 \twoheadrightarrow X_0$ von Komplexen von k-Vektorräumen mit surjektiven Systemmorphismen. Sind bei festem i die Bilder von $\mathcal{H}^q(X_{j+i}) \to \mathcal{H}^q(X_i)$ endlichdimensional für große j, so induziert die offensichtliche Kettenabbildung

$$\operatorname{limf} X_i \to \operatorname{limf} X_i^{**}$$

Isomorphismen auf der Kohomologie. Hinweis: 17.7.1.53 liefert schon einmal Isomorphismen $\mathcal{H}^q(\operatorname{limf} X_i) \xrightarrow{\sim} \operatorname{limf}(\mathcal{H}^q X_i)$. Dann liefert 17.7.1.47 uns weiter Isomorphismen $\operatorname{limf}(\mathcal{H}^q X_i) \xrightarrow{\sim} \operatorname{limf}((\mathcal{H}^q X_i)^{**})$. Andererseits liefert die Exaktheit des Dualisierens Isomorphismen $(\mathcal{H}^q X_i)^{**} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q(X_i^{**})$.

17.7.2 Kompakte Kohomologie

17.7.2.1. Wir wollen den Dualitätssatz von Poincaré 17.6.4.9 durch eine Art „Induktion über die offenen Teilmengen“ beweisen und müssen dazu eine Version dieses Satzes für nicht notwendig kompakte Mannigfaltigkeiten formulieren. Für jeden topologischen Raum X erklären wir seine **singuläre Kohomologie mit kompaktem Träger** oder kurz **kompakte Kohomologie** als den Kolimes

$$\mathrm{H}^q_! X := \operatorname*{colf}_K \mathrm{H}^q(X, X \backslash K)$$

seiner relativen Kohomologiegruppen in Bezug auf die Komplemente kompakter Teilmengen. Dieser Kolimes ist also zu verstehen über alle Kompakta $K \subset X$.

17.7.2.2. Kompakte Kohomologie hat nur für lokal kompakte Hausdorffräume so gute Eigenschaften, daß sie zu etwas nutze ist. Ich will dennoch versuchen, im folgenden die jeweils benötigten Eigenschaften der beteiligten Räume in jedem Fall explizit dazuzuschreiben.

17.7.2.3 (**Diskussion der Notation**). Üblich ist für kompakte Kohomologie die Notation $\mathrm{H}^q_c X$. Bei ihrer Verallgemeinerung zum „Vorschub mit kompaktem Träger“ hat sich aber schon lange die !-Notation durchgesetzt und beim unteren Index c liegt auch immer die Fehlinterpretation als c-te Homologie nahe, weshalb ich die !-Notation bevorzuge. Natürlich kann kompakte Kohomologie auch mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe G definiert werden. Wir schreiben dann $\mathrm{H}^q_!(X; G)$. Im weiteren Verlauf werden wir auch noch andere Kohomologietheorien wie de-Rham-Kohomologie und Garbenkohomologie einführen. Wenn wir dann besonders betonen wollen, daß singuläre Kohomologie gemeint ist, schreiben wir genauer $\mathrm{H}^q_!(X; G)_{\mathrm{sing}}$.

Beispiel 17.7.2.4. Für die kompakte Kohomologie des $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Tat bilden immer größere Bälle um den Ursprung ein konfinales System im System aller kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, und für dieses System wird der fragliche Kolimes aus 17.7.2.1 nach 17.6.3.6 über ein System aus Isomorphismen gebildet und ist damit leicht zu berechnen. Man beachte, daß die kompakte Kohomologie insbesondere keine Homotopieinvariante ist.

17.7.2.5. Für jede offene Teilmenge $U \Subset X$ eines Hausdorffraums oder allgemeiner jede offene Einbettung $i : U \hookrightarrow X$ von Hausdorffräumen erhalten wir eine Abbildung, die **Ausdehnung durch Null**

$$i_! : \mathrm{H}^q_! U \to \mathrm{H}^q_! X$$

als Kolimes der Abbildungen $\mathrm{H}^q(U, U\backslash K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X, X\backslash K) \to \mathrm{H}^q_! X$, wo die ersten Abbildungen die Inversen zu den Ausschneidungsisomorphismen meinen und der Limes über alle Kompakta aus U zu bilden ist. Die Hausdorff-Eigenschaft wird benötigt, um sicherzustellen, daß unser Kompaktum K abgeschlossen ist in X und wir somit die Ausschneidungsisomorphismen zur Verfügung haben.

17.7.2.6. Für jede eigentliche Abbildung $f : X \to Y$ erhalten wir das **eigentliche Zurückholen**

$$f^! : \mathrm{H}^q_! Y \to \mathrm{H}^q_! X$$

durch $\operatorname{colf}_L \mathrm{H}^q(Y, Y\backslash L) \to \operatorname{colf}_L \mathrm{H}^q(X, X\backslash f^{-1}(L)) \to \operatorname{colf}_K \mathrm{H}^q(X, X\backslash K)$ alias das Zurückholen in der relativen Kohomologie gefolgt von der Abbildung in den längeren Kolimes.

17.7.2.7. Seien X ein lokal kompakter Hausdorffraum und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Gegeben $K \subset X$ kompakt gibt es dann $U_1, \ldots, U_r \in \mathcal{U}$ und Kompakta $K_i \subset U_i$ mit $K = K_1 \cup \ldots \cup K_r$. In der Tat besitzt ja jeder Punkt von K eine Umgebung mit kompaktem und ganz in einem überdeckenden $U \in \mathcal{U}$ enthaltenem Abschluß. Endlich viele dieser Umgebungen überdecken K, und dann wird der Beweis mit etwas Basteln zu Ende gebracht.

17.7.2.8 (**Mayer-Vietoris-Sequenz für** $\mathrm{H}^*_!$). Ist ein Hausdorffraum X Vereinigung von zwei offenen Teilmengen $X = U \cup V$ und sind $K \subset U$ und $L \subset V$ kompakt, so haben wir in 17.6.3.3 eine lange exakte Sequenz

$$\mathrm{H}^q(X, X\backslash(K \cap L)) \to \mathrm{H}^q(X, X\backslash K) \oplus \mathrm{H}^q(X, X\backslash L) \to \mathrm{H}^q(X, X\backslash(K \cup L)) \to$$

konstruiert. Mit Ausschneidung und Übergang zum Kolimes über alle K und L ergibt sich daraus mit 17.7.2.7 für jeden lokal kompakten Hausdorffraum eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \mathrm{H}^q_!(U \cap V) \to \mathrm{H}^q_!(U) \oplus \mathrm{H}^q_!(V) \to \mathrm{H}^q_!(X) \to \mathrm{H}^{q+1}_!(U \cap V) \to \ldots$$

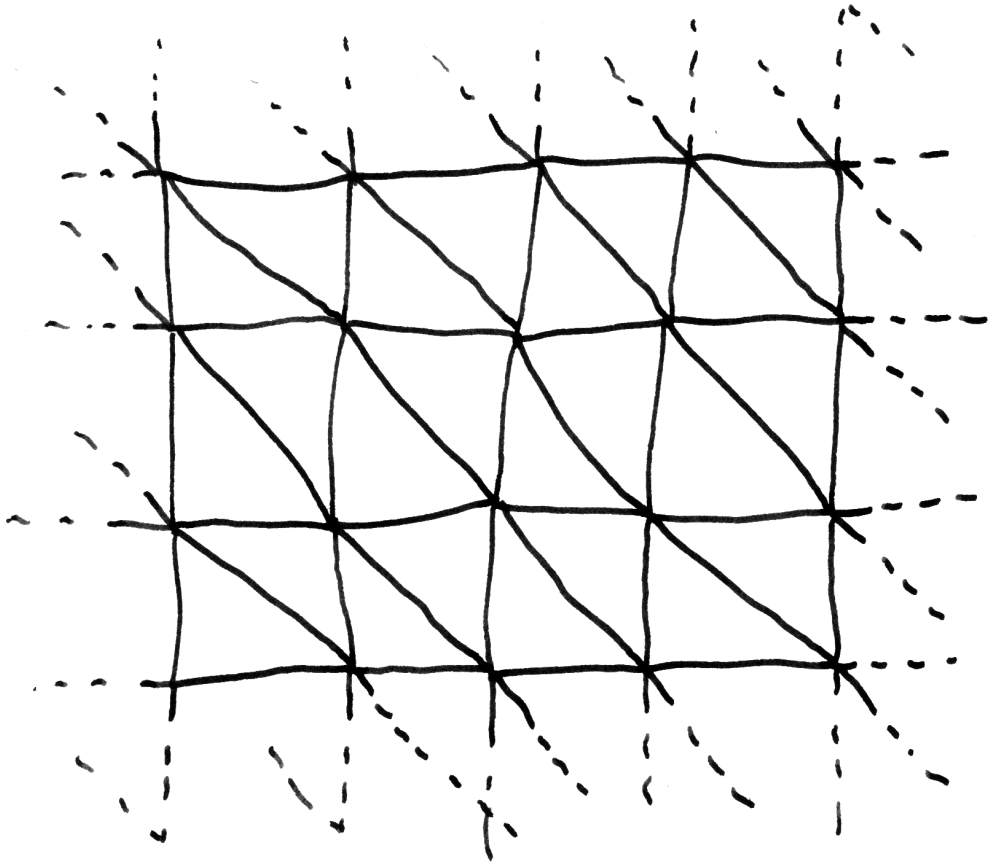
Sie heißt die **Mayer-Vietoris-Sequenz** der kompakten Kohomologie.

17.7.2.9. Gegeben ein topologischer Raum X erklären wir den Komplex der **singulären kompakten Koketten** als den filtrierenden Kolimes über alle Kompakta

$$\mathrm{S}^*_! X := \operatorname*{colf}_K \mathrm{S}^*(X, X\backslash K)$$

der relativen Koketten. Er kann auch beschrieben werden als der Komplex aller Koketten, für die es ein Kompaktum gibt derart, daß sie auf allen Simplizes verschwinden, die besagtes Kompaktum nicht treffen. Wegen der Exaktheit filtrierender Kolimites berechnet dieser Komplex die kompakte Kohomologie im Sinne von 17.7.2.1. Wir erhalten so in Formeln kanonische Isomorphismen

$$\mathcal{H}^q \mathrm{S}^*_! X \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_! X$$



Dieses Bild soll anhand der simplizialen Interpretation veranschaulichen, daß nur die zweite kompakte Kohomologie der Ebene nicht verschwindet und daß sie frei ist vom Rang Eins über dem Koeffizientenring. Der Korand eines Punktes ist die formale Summe aller „orientierten aus ihm herauslaufenden Kanten“. Es ist damit klar, daß es außer der Null keinen Null-Simplizialkozykel gibt. Der Korand eines orientierten Segments ist die Summe aller 2-Simplizes, in deren Rand es liegt, mit einer durch die Orientierung unseres Segments bestimmten Orientierung. Man kann sich etwa mithilfe der dualen Zellenzerlegung klarmachen, daß alle Eins-Simplizialkozykel Ränder sind. Schließlich sind alle 2-Simplizialkoketten auch 2-Kozykel und zwei 2-Koketten sind kohomolog genau dann, wenn die „Zahl der darin vorkommenden orientierten 2-Simplizes gleich ist, wobei 2-Simplizes mit entgegengesetztem Drehsinn negativ zu zählen sind“.

17.7.2.10. Ich erinnere daran, daß ein Simplizialkomplex nach 16.2.7.18 **lokal endlich** heißt, wenn jede seiner Ecken nur zu endlich vielen Simplizes gehört, und daß die geometrische Realisierung jedes lokal endlichen Simplizialkomplexes lokal kompakt ist.

17.7.2.11 (**Kompakte simpliziale Kohomologie**). Um Anschauung für die kompakte Kohomologie bereitzustellen, erkläre ich auch noch die simpliziale Bedeutung dieses Konzepts. Gegeben ein lokal endlicher Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ können wir im Komplex der Simplizialkoketten aus 17.6.3.4 einen Unterkomplex $\mathrm{S}^*_!\mathcal{K} \subset \mathrm{S}^*\mathcal{K}$ bilden, indem wir nur solche Abbildungen $f : \mathcal{K}_q^{\leq} \to \mathbb{Z}$ zulassen, die auf fast allen angeordneten q-Simplizes verschwinden. Wir nennen ihn den Komplex der **kompakten Simplizialkoketten** und behaupten, daß er bereits die kompakte Kohomologie $\mathrm{H}^*_!\Delta(\mathcal{K})$ berechnet. Nach 17.7.1.22 können wir ja bei der Definition der kompakten Kohomologie den Kolimes ebenso gut über alle Teilmengen K mit kompaktem Abschluß laufen lassen. Wieder nach 17.7.1.22 haben wir in unserem speziellen Fall auch

$$\mathrm{H}^*_!\Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \operatorname*{colf}_{\mathcal{L}} \mathrm{H}^*(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L}))$$

mit dem Kolimes über alle Unterkomplexe $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$, für die gilt $|\mathcal{K}\backslash\mathcal{L}| < \infty$. Nach 17.6.3.4 in Verbindung mit dem Fünferlemma wird nun aber die relative Kohomologie $\mathrm{H}^*(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L}))$ berechnet durch den Komplex $\mathrm{S}^*(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ der relativen Simplizialkoketten, den wir erklären als den Kern der offensichtlichen Kettenabbildung $\mathrm{S}^*\mathcal{K} \twoheadrightarrow \mathrm{S}^*\mathcal{L}$. Bilden wir den Kolimes dieser Kerne, so erhalten wir gerade unseren Komplex $\mathrm{S}^*_!\mathcal{K}$. Wegen der Exaktheit filtrierender Kolimites erhalten wir so Isomorphismen

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^q\, \mathrm{S}^*_!\mathcal{K} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q \operatorname{colf}_{\mathcal{L}} \mathrm{S}^*(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \\
&\xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{\mathcal{L}} \mathcal{H}^q\, \mathrm{S}^*(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \\
&\xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{\mathcal{L}} \mathrm{H}^q(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L})) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!\Delta(\mathcal{K})
\end{aligned}$$

17.7.2.12 (**Kompakte Kohomologie als Modul**). Nach 17.6.4.15 ist für jedes Raumpaar seine relative Kohomologie in natürlicher Weise ein Modul über dem Kohomologiering des großen Raums. Durch Übergang zum Kolimes wird damit auch die kompakte Kohomologie jedes Raums ein Modul über seinem Kohomologiering.

Übungen

Übung 17.7.2.13. Ist ein Hausdorffraum X Vereinigung eines Systems offener Teilmengen $\mathcal{U}$ derart, daß es für je zwei Mengen aus $\mathcal{U}$ eine weitere Menge aus

$\mathcal{U}$ gibt, die sie beide umfaßt, so induzieren die eben erklärten Abbildungen einen Isomorphismus $\operatorname{colf}_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{H}^q_!(U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(X)$.

17.7.3 Lokalendliche Homologie*

17.7.3.1. Um zusätzliche Anschauung für die kompakte Kohomologie bereitzustellen, will ich nun erklären, in welcher Weise ihr Dualraum in vielen Fällen als „lokalendliche Homologie“ alias „Borel-Moore-Homologie“ interpretiert werden kann. Ich selbst kann mir Homologie besser vorstellen, deshalb hilft mir das. Man beachte, daß es sich in diesem Fall andersherum verhält als bei gewöhnlicher Homologie und Kohomologie: Die lokalendliche Homologie ist zwar für lokal kompakte Simplizialkomplexe und Körperkoeffizienten der Dualraum der kompakten Kohomologie, die kompakte Kohomologie ist jedoch nur dann auch umgekehrt der Dualraum der lokalendlichen Homologie, wenn sie endlichdimensional ist. In diesem Sinne scheint mir die kompakte Kohomologie ähnlich grundlegend zu sein wie die Homologie.

Definition 17.7.3.2. Gegeben ein topologischer Raum X erklären wir die Gruppe $\mathrm{S}^!_q X$ der **lokalendlichen singulären q-Ketten** als die Gruppe aller Abbildungen $\operatorname{Top}(\Delta_q, X) \to \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt derart, daß nur endlich vielen singulären Simplizes $\sigma : \Delta_q \to X$ mit $\sigma(\Delta_q) \cap U \neq \emptyset$ eine von Null verschiedene Zahl zugeordnet wird. Der Zusatz „lokalendlich“ wirkt in diesem Fall also begriffserweiternd. Man überlegt sich leicht, daß wir wie bei der Definition der Homologie Randoperatoren

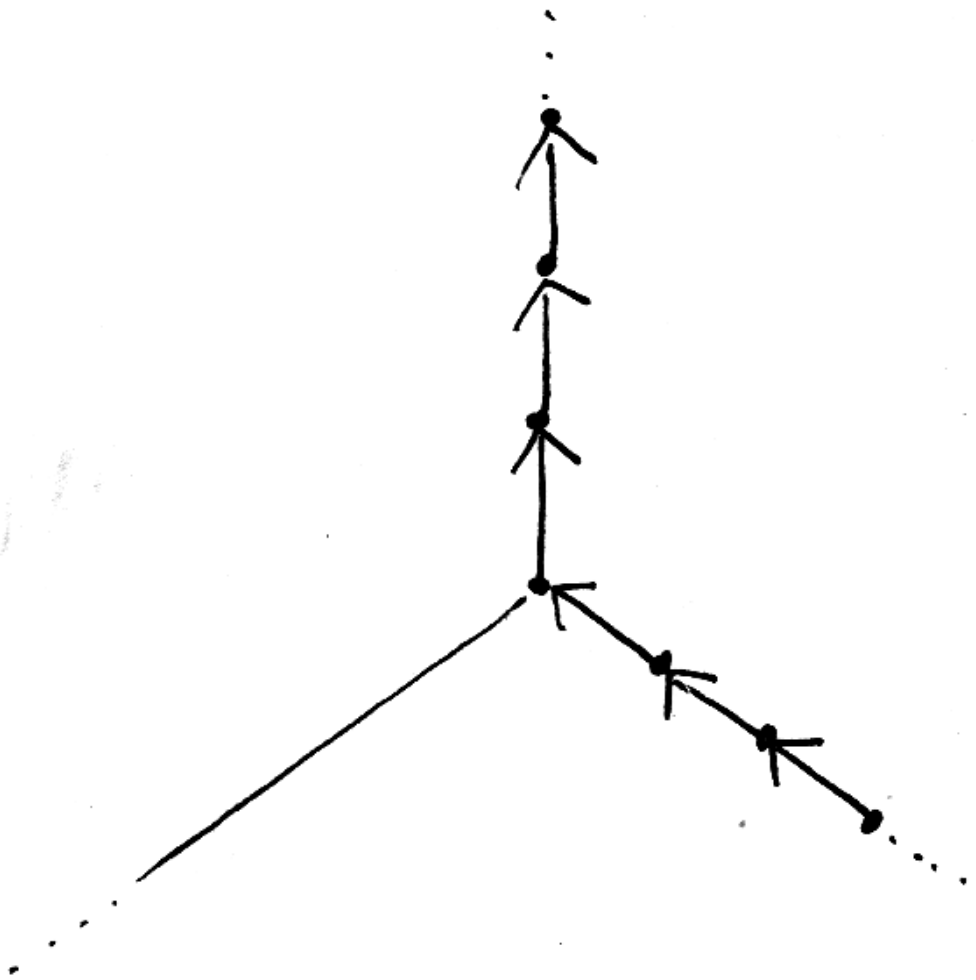
$$\partial : \mathrm{S}^!_q X \to \mathrm{S}^!_{q-1} X$$

erklären können: Die lokale Endlichkeit unserer Ketten sorgt dafür, daß beim Bilden der Ränder keine unendlichen Summen von Koeffizienten auftreten. Die Homologiegruppen des Komplexes $\mathrm{S}^! X$ der lokalendlichen singulären Ketten nennen wir die **lokalendliche Homologie** und genauer die **singuläre lokalendliche Homologie** oder auch die **Borel-Moore-Homologie von** X und notieren sie

$$\mathrm{H}^!_q X = \mathrm{H}^!_q(X)_{\mathrm{sing}} := \mathcal{H}_q \mathrm{S}^! X$$

Natürlich können wir diese Konstruktionen auch analog mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe G durchführen. Wir erhalten so Kettenkomplexe $\mathrm{S}^!(X;G)$, notieren deren Homologie $\mathrm{H}^!_q(X;G) := \mathcal{H}_q \mathrm{S}^!(X;G)$ und nennen sie die **lokalendliche Homologie von X mit Koeffizienten in G**.

17.7.3.3 (**Diskussion der Terminologie und Notation**). In der Literatur findet man meist andere Definitionen, vergleiche etwa [BM60], die zwar nicht immer,



Ein lokalendlicher Eins-Zykel im topologischen Raum, der aus drei ins Unendliche laufenden von demselben Punkt ausgehenden Halbgeraden besteht. Die erste lokalendliche Homologie ist frei vom Rang Zwei und wird erzeugt von dem hier gezeichneten Zykel zusammen mit seinen beiden gedrehten Varianten. Die einzige Relation ist, daß die Summe dieser drei Erzeuger verschwindet.

aber doch in allen mir bekannten Anwendungsfällen dieselben Gruppen liefern. Die Bezeichnung als Borel-Moore-Homologie ist zwar üblich, schien mir aber weniger aussagekräftig, weshalb ich die Terminologie „lokalendliche Homologie“ vorziehe. Die Notation $\mathrm{H}^!_q X$ ist unüblich, sie scheint mir jedoch praktisch und ich kenne auch keine allgemein übliche Notation. Die obige Definition liefert im allgemeinen eine Theorie mit ziemlich schlechten formalen Eigenschaften. Sie ist jedoch zumindest meiner Anschauung gut zugänglich und kann in interessanten Anwendungsfällen mit anderen Theorien identifiziert werden, die vielleicht weniger anschaulich sind, dafür aber bessere formale Eigenschaften haben.

17.7.3.4 (**Simpliziale Interpretation der lokalendlichen Homologie**). Gegeben ein lokal endlicher Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ können wir den **Komplex der lokalendlichen Simplizialketten** $\mathrm{S}^!\mathcal{K}$ ganz analog bilden wie den Komplex der Simplizialketten $\mathrm{S}\mathcal{K}$ aus 17.1.1.5, indem wir eben auch unendliche formale Linearkombinationen von angeordneten Simplizes zulassen. Die Homologie dieses Komplexes nennen wir die **simpliziale lokal endliche Homologie** unseres lokal endlichen Simplizialkomplexes und notieren sie

$$\mathrm{H}^!_q\mathcal{K} := \mathcal{H}_q\mathrm{S}^!\mathcal{K}$$

Analog wie in 17.3.1.3 definieren wir auch den Komplex der lokalendlichen simplizialsingulären Ketten $\mathrm{S}^{!\,\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K}) \subset \mathrm{S}^!\Delta(\mathcal{K})$ und analog wie in 17.3.1.6 die Kettenabbildung $\mathrm{S}^{!\,\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K}) \to \mathrm{S}^!\mathcal{K}$ von den lokalendlichen simplizialsingulären Ketten in die lokalendlichen Simplizialketten.

Satz 17.7.3.5 (**Simpliziale als singuläre lokalendliche Homologie**). *Für jeden lokalendlichen Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ induzieren die in 17.7.3.4 eingeführten Kettenabbildungen $\mathrm{S}^!\mathcal{K} \leftarrow \mathrm{S}^{!\,\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow \mathrm{S}^!\Delta(\mathcal{K})$ Isomorphismen auf der Homologie*

$$\mathrm{H}^!_q\mathcal{K} \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}_q\mathrm{S}^{!\,\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^!_q\Delta(\mathcal{K})$$

Beweis. Alle in diesem Satz auftauchenden Gruppen, Komplexe et cetera zerfallen in ein Produkt über die Zusammenhangskomponenten unseres Simplizialkomplexes, den wir deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusammenhängend und damit abzählbar annehmen dürfen. Wir können unseren Simplizialkomplex dann als Vereinigung einer aufsteigenden Folge $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \ldots$ endlicher Teilkomplexe schreiben derart, daß $\mathcal{K}_{n+1}$ jeweils alle Simplizes umfaßt, die Simplizes aus $\mathcal{K}_n$ treffen. Wir betrachten nun die Unterkomplexe $\mathcal{L}_n$ aller Simplizes von $\mathcal{K}$, die keinen Simplex von $\mathcal{K}_n$ treffen, und bilden das kommutative Diagramm mit

exakten Spalten

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}\mathcal{L}_n \arrow[d, hook] & \mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{L}_n) \arrow[l] \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{S}\Delta(\mathcal{L}_n) \arrow[d, hook] \\
\mathrm{S}\mathcal{K} \arrow[d, two heads] & \mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K}) \arrow[l] \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & \mathrm{S}\Delta(\mathcal{K}) \arrow[d, two heads] \\
\mathrm{S}\mathcal{K}/\mathrm{S}\mathcal{L}_n & \mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K})/\mathrm{S}^{\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{L}_n) \arrow[l] \arrow[r] & \mathrm{S}(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L}_n))
\end{tikzcd}$$

Nach 17.3.1.7 induzieren die Horizontalen oben und in der Mitte Isomorphismen auf der Homologie, nach dem Fünferlemma und der langen exakten Homologiesequenz gilt das also auch für die Horizontalen unten. Gehen wir in der unteren Horizontale zum inversen Limes über, so erhalten wir gerade die Morphismen von Komplexen

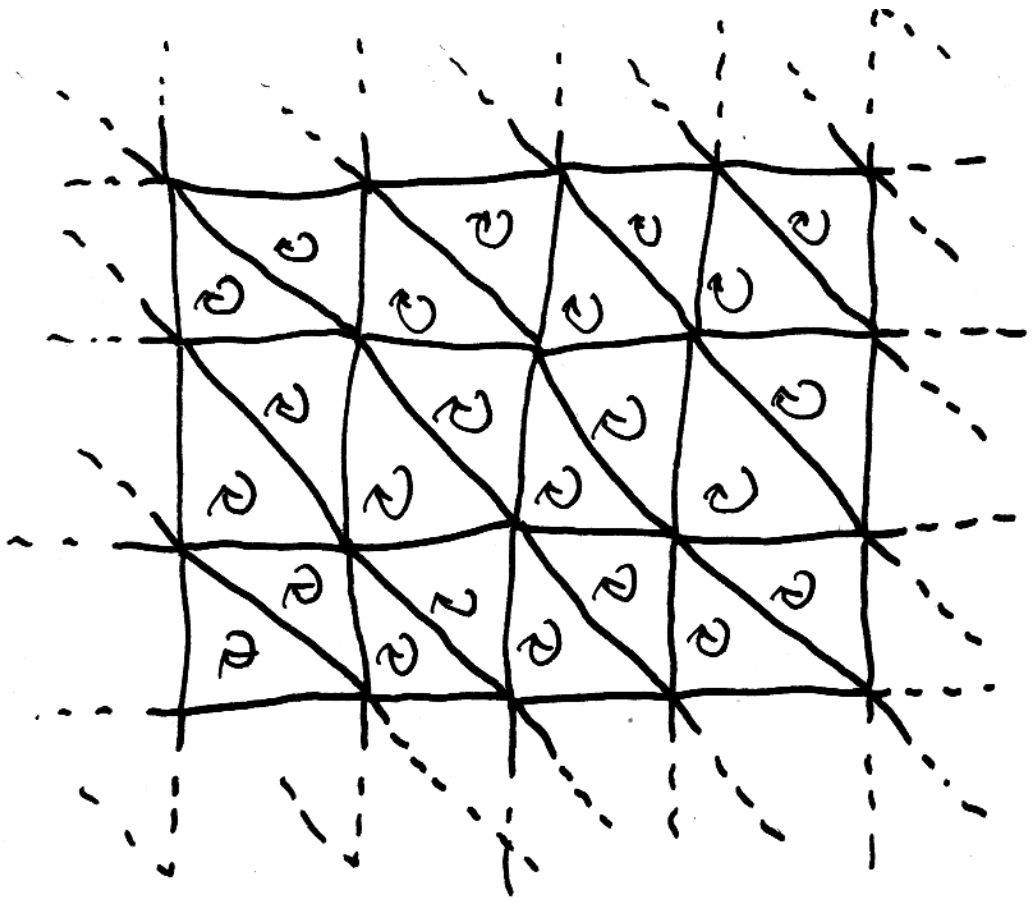
$$\mathrm{S}^!\mathcal{K} \leftarrow \mathrm{S}^{!\,\mathrm{s}}\Delta(\mathcal{K}) \rightarrow \mathrm{S}^!\Delta(\mathcal{K})$$

aus unserem Satz, denn die Komplemente der $\Delta(\mathcal{L}_n)$ sind final im System aller Teilmengen von $\Delta(\mathcal{K})$ mit kompaktem Abschluß. Da alle System-Morphismen der fraglichen inversen Systeme Surjektionen sind, folgt die Behauptung nun aus Übung 17.7.1.52, nach der gewisse inverse Limites von Quasiisomorphismen von Kettenkomplexen wieder Quasiisomorphismen sind. □

Proposition 17.7.3.6 (Verschwinden der nullten lokalendlichen Homologie). *Sei X ein lokal kompakter lokal wegzusammenhängender abzählbar basierter zusammenhängender Hausdorffraum. Ist X nicht kompakt, so gilt $\mathrm{H}_0^!(X;G) = 0$ für jede abelsche Gruppe G.*

Beweis. Salopp gesprochen gilt es, jedem Punkt einen Weg aufzuzeigen, auf dem er ins Unendliche fliehen kann, ja für jede lokalendliche Familie von Punkten einen Fluchtplan aufzustellen, bei dem sie sich nicht gegenseitig zu Tode trampeln. Diese Grundidee wird nun ausgeführt. Ich erinnere daran, daß jede Zusammenhangskomponente eines lokal wegzusammenhängenden Raums offen und wegzusammenhängend ist. Wir gehen in Schritten vor.

1. Gegeben ein Kompaktum $K \subset X$ finden wie eine nichtleere offene Menge $U \Subset X$ mit kompaktem Abschluß $\bar{U}$ und mit $K \subset U$. Alle Komponenten von $X \backslash K$ treffen U, sonst wäre X nicht zusammenhängend, da wir $U \neq \emptyset$ angenommen hatten. Alle Komponenten liegen entweder in U oder treffen ∂U, sonst wären sie selbst nicht zusammenhängend, da auch $X \backslash \bar{U}$ nicht leer ist, da wir ja X nichtkompakt angenommen hatten. Von den Komponenten, die nicht in U liegen, überdecken endlich viele das Kompaktum ∂U. Das müssen dann auch bereits alle Komponenten gewesen sein, die dieses Kompaktum treffen alias die nicht in U



Graphische Darstellung derjenigen Simplizialkette, die für die ebenfalls dargestellte Triangulierung der Ebene den Fundamentalzykel in Bezug auf eine geeignete Orientierung repräsentiert. Man mache sich auch anschaulich klar, daß die lokalendliche Homologie der Ebene in allen von Zwei verschiedenen Graden verschwindet.

enthalten sind. Vereinigen wir $\bar{U}$ mit den Abschlüssen aller nicht in U enthaltenen Komponenten mit kompaktem Abschluß, enthalten wir also wieder ein Kompaktum L und finden eine offene Menge $V \Subset X$ mit $\bar{V}$ kompakt und $V \supset L$. Gegeben ein Kompaktum in einer offenen Menge $K \subset U \Subset X$ mit $\bar{U}$ kompakt haben wir so eine offene Menge $V \Subset X$ gefunden mit $\bar{V}$ kompakt, $V \supset U$ und $V \supset \bar{Z}$ für jede Komponente Z von $X \backslash K$ mit kompaktem Abschluß.

2. Da X abzählbar basiert ist, finden wir mit dem ersten Schritt des Beweises induktiv eine Überdeckung von X durch eine aufsteigende Folge $V_0 \subset V_1 \subset \ldots$ offener Teilmengen mit $\bar{V}_i$ kompakt und $\bar{V}_i \subset V_{i+1}$ und derart, daß für alle Komponenten Z von $X \backslash \bar{V}_i$ mit kompaktem Abschluß gilt $\bar{Z} \subset V_{i+1}$. Um Sonderfälle der Notation zu vermeinden, setzen wir $V_{-1} = V_{-2} = \ldots = \emptyset$.

3. Jeder Punkt $p \in X \backslash \bar{V}_i$ liegt in einer Komponente Z von $X \backslash \bar{V}_{i-1}$ mit $\bar{Z}$ nichtkompakt. Er kann folglich durch einen Weg in $X \backslash \bar{V}_{i-1}$ mit einem Punkt aus $X \backslash \bar{V}_{i+1}$ verbunden werden. Damit ist klar, daß für jede Gruppe von Koeffizienten jede lokalendliche Nullkette der Rand einer lokalendlichen Einskette ist. $\square$

17.7.3.7 (**Simpliziale lokalendliche Homologie als Dualraum**). Gegeben ein lokal endlicher Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ erhalten wir unmittelbar einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$\mathrm{S}^! \mathcal{K} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{S}^*_! \mathcal{K} \Rightarrow \mathbb{Z}[0])$$

des Komplexes der lokalendlichen Simplizialketten aus 17.7.3.4 mit dem Dualen des Komplexes der Simplizialkoketten mit kompaktem Träger, der also in gewisser Weise das fundamentalere Objekt ist. Das zeigt insbesondere, daß im Fall von Körperkoeffizienten die lokalendliche Homologie lokal endlicher Simplizialkomplexe der Dualraum der Kohomologie mit kompaktem Träger ist. In 17.7.3.28 zeigen wir eine analoge Aussage für etwas allgemeinere Räume.

17.7.3.8 (**Beziehung zwischen lokalendlicher und gewöhnlicher Homologie**). Wir haben stets kanonische Kettenabbildungen $\mathrm{S}X \to \mathrm{S}^! X$ und davon induzierte Gruppenhomomorphismen $\mathrm{H}_q X \to \mathrm{H}^!_q X$. Für X kompakt sind diese Abbildungen offensichtlich Isomorphismen. Für jedes Kompaktum $K \subset X$ haben wir weiter eine offensichtliche Kettenabbildung $\mathrm{S}^! X \to \mathrm{S}(X, X \backslash K)$ und damit kanonische Abbildungen

$$\mathrm{H}^!_q X \to \mathrm{H}_q(X, X \backslash K)$$

auf der Homologie. Schalten wir unsere kanonischen Abbildungen $\mathrm{H}_q X \to \mathrm{H}^!_q X$ davor, so ergeben sich die üblichen Abbildungen $\mathrm{H}_q X \to \mathrm{H}_q(X, X \backslash K)$, die demnach für kompaktes K über die lokalendliche Homologie faktorisieren.

17.7.3.9. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X liefern die Abbildungen $\mathrm{S}^! X \to \mathrm{S}(X, X \backslash K)$ aus 17.7.3.8 Isomorphismen

$$\mathrm{S}^!_q X \xrightarrow{\sim} \liminf_K \mathrm{S}_q(X, X \backslash K)$$

Der inverse Limes ist dabei über alle Kompakta $K \subset X$ zu verstehen. In der Tat können in diesem Fall die lokalendlichen Ketten auch beschrieben werden als Abbildungen $\mathrm{Top}(\Delta_q, X) \to \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, daß für jedes Kompaktum $K \subset X$ nur endlich vielen der $\sigma : \Delta_q \to X$ mit $\sigma(\Delta_q) \cap K \neq \emptyset$ eine von Null verschiedene Zahl zugeordnet wird.

17.7.3.10 (**Funktorialitäten der lokalendlichen Homologie**). Die lokalendliche Homologie ist keineswegs homotopieinvariant, ja nicht einmal in dem von der Homologie gewohnten Sinne funktoriell. Vielmehr erhält man nur für eigentliche Abbildungen von lokal kompakten Hausdorffräumen, nach 15.2.4.13 also den stetigen Abbildungen $f : X \to Y$, bei denen das Urbild jedes Kompaktums kompakt ist, auch Abbildungen $f_! : \mathrm{S}^! X \to \mathrm{S}^! Y$ auf den lokalendlichen Ketten und Abbildungen

$$f_! : \mathrm{H}^!_q X \to \mathrm{H}^!_q Y$$

auf der lokalendlichen Homologie, den **eigentlichen Vorschub**. Mit etwas mehr Mühe kann man für die lokalendliche Homologie von abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffräumen auch noch einen offenen Rückzug konstruieren, vergleiche 21.6.7.16. Im Rahmen der Garbenkohomologie konstruieren wir in **??** für die lokalendliche Homologie sogar einen mannigfaltigen Rückzug.

Vorschau 17.7.3.11. Die wesentliche Bedeutung der lokalendlichen Homologie liegt darin, daß in ihr auch für orientierte Mannigfaltigkeiten, die abzählbar basiert aber nicht notwendig kompakt sind, ein „Fundamentalzykel“ erklärt werden kann, vergleiche 17.7.3.13. Noch stärker gelingt das sogar für „Pseudomannigfaltigkeiten, bei denen die Singularitäten erst in Kodimension Zwei beginnen“, und damit insbesondere für mit ihrer analytischen Topologie versehene komplexe algebraische Varietäten. Das besprechen wir aber hier nicht weiter.

Proposition 17.7.3.12 (Lokalendliche Homologie und Orientierungsgarbe). *Gegeben eine abzählbar basierte n-Mannigfaltigkeit M liefern die Abbildungen aus 17.7.3.8 einen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}^!_n M \xrightarrow{\sim} \Gamma M$$

zwischen ihrer n-ten lokalendlichen Homologie und dem Raum der globalen Schnitte ihrer Orientierungsgarbe aus 17.4.3.4.

Definition 17.7.3.13. Ist (M, ω) eine abzählbar basierte orientierte Mannigfaltigkeit, so gibt es nach Proposition 17.7.3.12 genau ein $[M]^! \in \mathrm{H}^!_n M$ mit $[M]^! \mapsto \omega_x$ für alle $x \in M$. Dies Element $[M]^!$ heißt der **Fundamentalzykel** der orientierten Mannigfaltigkeit M, obwohl es genau genommen eigentlich gar kein Zykel ist sondern vielmehr eine Homologieklasse in der lokalendlichen Homologie.

17.7.3.14 (**Diskussion der Notation**). Ist M sogar kompakt, so haben wir $\mathrm{H}_q M = \mathrm{H}_q^! M$ und $[M] = [M]^!$. Ich will begründen, warum wir dennoch die neue Notation $[M]^!$ einführen. Gegeben X ein lokal kompakter Hausdorffraum und $M \not\subset X$ eine Teilmenge, die mit der induzierten Topologie eine kompakte q-Mannigfaltigkeit ist, und ist eine Orientierung auf M gegeben, so wollen wir unterscheiden zwischen $i_![M]^! \in \mathrm{H}_q^! X$ und $i_*[M] \in \mathrm{H}_q X$ und wollen für diese Klassen die abkürzenden Notationen $[M]^! \in \mathrm{H}_q^! X$ und $[M] \in \mathrm{H}_q X$ verwenden. Wir verwenden die Abkürzung

$$[M]^! = i_![M]^! \in \mathrm{H}_q^! X$$

auch allgemeiner, wenn $M \not\subset X$ eine abzählbar basierte nicht notwendig kompakte q-Mannigfaltigkeit ist.

Ergänzung 17.7.3.15 (**Bedeutung der Annahme abzählbar basiert**). Die Annahme der Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie in 17.7.3.12 ist wesentlich. Um das zu sehen, betrachte man die Alexandroff'sche Halbgerade A mit ihrer Anordnung nach 6.5.4.2 und nehme als M das Komplement ihres kleinsten Elements. Ich will kurz skizzieren, wie die Annahme der Existenz eines lokalendlichen Fundamentalzykels in diesem Fall einer nicht abzählbar basierten Mannigfaltigkeit zum Widerspruch führt. In der Tat ist A nach 6.5.4.7 folgenkompakt, als da heißt, jede unendliche Teilmenge hat einen Häufungspunkt. Die Endpunkte aller 1-Simplizes, die mit von Null verschiedenem Koeffizienten in einem lokalendlichen Fundamentalzykel vorkommen, bilden nun sicher eine Teilmenge von M ohne obere Schranke in M. Es gibt also zu einem festen Punkt $x \in M$ unendliche viele solcher Endpunkte, die größer sind. Diese müssen dann einen Häufungspunkt in M haben und das steht im Widerspruch zur lokalen Endlichkeit unseres Zykels.

Beweis von Proposition 17.7.3.12. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X erinnern wir aus 17.7.3.9 die Isomorphismen $\mathrm{S}_q^! X \xrightarrow{\sim} \operatorname{limf}_K \mathrm{S}_q(X, X\backslash K)$. Der Limes ist dabei über alle Kompakta $K \subset X$ zu verstehen. Nehmen wir zusätzlich X abzählbarer basiert an, so existiert sogar eine Überdeckung von X durch eine aufsteigende Folge von offenen Teilmengen mit kompaktem Abschluß $U_0 \subset U_1 \subset \ldots \subset X$, und da die $\bar{U}_i$ final sind im System aller Kompakta von X, haben wir ebenso

$$\mathrm{S}_q^! X \xrightarrow{\sim} \operatorname*{limf}_i \mathrm{S}_q(X, X\backslash \bar{U}_i)$$

Dieses inverse System besteht offensichtlich aus Surjektionen und dasselbe gilt a forteriori für das System von Rändern $\mathrm{B}_{q-1}(X, X\backslash \bar{U}_i)$. Ist nun zusätzlich $X = M$ eine n-Mannigfaltigkeit, so liefert Satz 17.4.3.5 über die hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten $\mathrm{H}_{n+1}(M, M\backslash \bar{U}_i) = 0$, folglich haben wir $\mathrm{B}_{n+1}(M, M\backslash \bar{U}_i) = \mathrm{Z}_{n+1}(M, M\backslash \bar{U}_i)$ und die $(n+1)$-Zykel bilden auch ein inverses System aus Surjektionen. Mit dem Mittag-Leffler-Kriterium 17.7.1.43 für die Exaktheit inverser

Limites folgt sowohl die Surjektivität der offensichtlichen Abbildung

$$\operatorname{limf}_i \mathrm{S}_{n+1}(M, M\backslash\bar{U}_i) \twoheadrightarrow \operatorname{limf}_i \mathrm{B}_n(M, M\backslash\bar{U}_i)$$

als auch die Exaktheit von

$$\operatorname{limf}_i \mathrm{B}_n(M, M\backslash\bar{U}_i) \hookrightarrow \operatorname{limf}_i \mathrm{Z}_n(M, M/\bar{U}_i) \twoheadrightarrow \operatorname{limf}_i \mathrm{H}_n(M, M\backslash\bar{U}_i)$$

Unsere erste Surjektivität erlaubt uns die Identifikation der ersten Gruppe dieser kurzen exakten Sequenz mit $\mathcal{B}_n\mathrm{S}^!M$ und die Linksexaktheit inverser Limites erlaubt die Identifikation der Mitte unserer Sequenz mit $\mathcal{Z}_n\mathrm{S}^!M$, so daß wir schließlich für jede abzählbar basierte n-Mannigfaltigkeit einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^!_n M \xrightarrow{\sim} \operatorname{limf}_i \mathrm{H}_n(M, M\backslash\bar{U}_i)$$

erhalten. Bis hierher war das im wesentlichen die Lösung von Übung 17.7.1.53 in unserem Spezialfall. Beachten wir nun die Isomorphismen $\mathrm{H}_n(M, M\backslash A) \xrightarrow{\sim} \Gamma A$ für $A \subset M$ kompakt aus dem Satz 17.4.3.5 über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten, so erhalten wir den gewünschten Isomorphismus $\mathrm{H}^!_n M \xrightarrow{\sim} \Gamma M$ wegen $\Gamma M \xrightarrow{\sim} \operatorname{limf}_i \Gamma\bar{U}_i$. Diese letzte Identität sieht man zum Beispiel ein, indem man sich überlegt, daß sowohl die $\bar{U}_i$ als auch die U_i final sind im System aller Teilmengen von X mit kompaktem Abschluß. □

17.7.3.16 (**Simpliziale Interpretation des Fundamentalzykels**). Sei ein Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ eine Triangulierung einer nicht notwendig kompakten abzählbar basierten orientierten n-Mannigfaltigkeit. Der Fundamentalzykel von $\Delta(\mathcal{K})$ im Sinne von 17.7.3.13 hat wegen 17.7.3.5 genau einen Repräsentanten in der Gruppe der lokalendlichen n-Simplizialketten. Für $n \geq 1$ kann dieser Repräsentant beschrieben werden als die formale Summe über alle n-Simplizes, jeweils mit einer Anordnung versehen, die mit der gewählten Orientierung in der Weise verträglich ist, daß eben $\omega|_x \in \mathrm{H}_n(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{K})\backslash x)$ an jeder Stelle x die vorgegebene Orientierung liefert. Im Fall $n = 0$ einer nulldimensionalen Mannigfaltigkeit ist dieser Repräsentant dahingegen die formale Summe aller ihrer Punkte mit den durch die Orientierung gegebenen Vorzeichen.

Definition 17.7.3.17. Ein Raum X heiße **kompaktrelativ homologisch q-endlich** für eine natürliche Zahl $q \geq 0$, wenn für jedes Paar $K \subset W \Subset X$ von Teilmengen mit K kompakt und W offen in X die offensichtliche Abbildung

$$\mathrm{H}_q(X, X\backslash W) \to \mathrm{H}_q(X, X\backslash K)$$

endlich erzeugtes Bild hat. Er heiße **kompaktrelativ homologisch endlich**, wenn er homologisch kompaktrelativ q-endlich ist für alle q.

17.7.3.18. Es gibt auch offensichtliche Varianten dieses Begriffs für allgemeinere Koeffizientenringe, die wir in diesem Zusammenhang stets kommutativ und noethersch voraussetzen wollen.

Beispiele 17.7.3.19. Für alle n ist der $\mathbb{R}^n$ nach 17.3.1.24 kompaktrelativ homologisch endlich. Allgemeiner ist nach 17.3.1.25 die geometrische Realisierung eines lokal endlichen Simplizialkomplexes stets kompaktrelativ homologisch endlich. Jede offene Teilmenge eines kompaktrelativ homologisch q-endlichen Raums ist auch selbst wieder kompaktrelativ homologisch q-endlich.

Proposition 17.7.3.20. *Jeder lokal kompakte Hausdorffraum, der eine Überdeckung durch offene kompaktrelativ homologisch endliche Teilmengen besitzt, ist bereits selbst kompaktrelativ homologisch endlich.*

Beweis. Jedes Kompaktum kann durch endlich viele offene Teilmengen überdeckt werden. Die Proposition folgt so aus dem anschließenden Lemma 17.7.3.21. □

Lemma 17.7.3.21. *Sei $q \geq 0$ gegeben. Ist ein lokal kompakter Hausdorffraum überdeckt von zwei offenen kompaktrelativ homologisch q-endlichen Teilmengen mit kompaktrelativ homologisch $(q+1)$-endlichem Schnitt, so ist bereits der ganze Raum kompaktrelativ homologisch q-endlich.*

Beweis. Sei X unser Raum und seien $V_1, V_2 \Subset X$ zwei kompaktrelativ homologisch q-endliche offene Teilmengen mit Vereinigung $V_1 \cup V_2 = X$. Seien $K \subset W \Subset X$ gegeben mit K kompakt. Es gilt zu zeigen, daß das Bild von

$$\mathrm{H}_q(X, X\backslash W) \to \mathrm{H}_q(X, X\backslash K)$$

endlich erzeugt ist. Jeder Punkt von K besitzt eine kompakte Umgebung, die entweder ganz in $V_1 \cap W$ oder ganz in $V_2 \cap W$ liegt. Wir finden also Kompakta $K_i \subset V_i \cap W$ mit $K = K_1 \cup K_2$. Offensichtlich finden wir weiter $U_i \Subset X$ mit

$$K_i \subset U_i \subset \bar{U}_i \subset V_i \cap W$$

und $\bar{U}_i$ kompakt. Mit der Abkürzung $\mathrm{H}_q(\backslash Y) := \mathrm{H}_q(X, X\backslash Y)$ für Teilmengen $Y \subset X$ erhalten wir nun ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{H}_q(\backslash K_1 \cup K_2) & \mathrm{H}_{q+1}(\backslash K_1 \cap K_2) \arrow[l] \\
\mathrm{H}_q(\backslash \bar{U}_1) \oplus \mathrm{H}_q(\backslash \bar{U}_2) & & \mathrm{H}_q(\backslash \bar{U}_1 \cup \bar{U}_2) \arrow[ll] \arrow[u] & \mathrm{H}_{q+1}(\backslash \bar{U}_1 \cap \bar{U}_2) \arrow[l] \arrow[u] \\
\mathrm{H}_q(\backslash W \cap V_1) \oplus \mathrm{H}_q(\backslash W \cap V_2) \arrow[u] & & \mathrm{H}_q(\backslash W) \arrow[ll] \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Da V_1 und V_2 als kompaktrelativ homologisch q-endlich angenommen waren, ist das Bild der linken Vertikale endlich erzeugt. Da $V_1 \cap V_2$ kompaktrelativ homologisch $(q+1)$-endlich angenommen war, ist auch das Bild der rechten Vertikale endlich erzeugt. Als Teil einer Mayer-Vietoris-Sequenz ist die mittlere Horizontale exakt. Mit 17.4.4.5 folgt dann, daß auch die Verknüpfung in der mittleren Vertikale endlich erzeugtes Bild hat. □

Korollar 17.7.3.22 (Variante zum Satz von Wilder). *Jede Mannigfaltigkeit ist kompaktrelativ homologisch endlich. Allgemeiner ist ein Hausdorffraum, in dem jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph ist zu einer offenen Teilmenge der geometrischen Realisierung eines lokal endlichen Simplizialkomplexes, stets kompaktrelativ homologisch endlich.*

Ergänzung 17.7.3.23. Nach [Hir75] sind damit insbesondere separierte komplexe algebraische Varietäten die Mengen der abgeschlossenen Punkte mit ihrer analytische Topologie kompaktrelativ homologisch endlich.

17.7.3.24 (**Kronecker-Paarung für lokalendliche Ketten**). Das Auswerten von Koketten auf Ketten induziert für jeden topologischen Raum X eine Kettenabbildung

$$\mathrm{S}^*_! X \otimes \mathrm{S}^! X \to \mathbb{Z}[0]$$

In der Tat, gegeben eine kompakte Kokette gibt es ein Kompaktum $K \subset X$ derart, daß unsere Kokette nur auf solchen singulären Simplizes von Null verschieden ist, die K treffen. Gegeben eine lokalendliche Kette besitzt aber jeder Punkt von K eine Umgebung derart, daß nur endlich viele singuläre Simplizes, die diese Umgebung treffen, in unserer Kette mit Null verschiedenem Koeffizienten auftauchen. Endlich viele dieser Umgebungen überdecken K, weshalb unser Auswerten oben nur zu endlichen Summen führt. Unsere Paarung führt wie in 17.6.1.5 zu Paarungen

$$\mathrm{H}^q_!(X) \times \mathrm{H}^!_q(X) \to \mathbb{Z}$$

der kompakten Kohomologie mit der lokalendlichen Homologie. Analoges gilt mit Koeffizienten in einem beliebigen Ring.

Satz 17.7.3.25 (Lokalendliche Homologie als Dualraum). *Gegeben k ein Körper und X eine abzählbar basierte Mannigfaltigkeit liefern die in 17.7.3.24 konstruierten Abbildungen Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^!_q(X;k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(X;k)^*$$

zwischen der lokalendlichen Homologie und dem Dualraum der kompakten Kohomologie.

17.7.3.26. Der Satz gilt mit demselben Beweis für jeden abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffraum, der kompaktrelativ homologisch endlich ist im Sinne von 17.7.3.17. Insbesondere gilt er nach 17.7.3.23 für separierte komplexe Varietäten.

17.7.3.27. Der sogenannte Kreisraum aus 16.3.6.4 zeigt, daß der Dualraum der singulären Kohomologie mit kompaktem Träger im allgemeinen nicht durch den Komplex der lokal endlichen singulären Koketten berechnet werden kann.

Beweis. In diesem Beweis meinen wir stets Körperkoeffizienten, ohne das in den Notationen nochmals besonders hervorzuheben. Für jeden lokal kompakten Hausdorffraum X sind nach 17.7.3.9 unsere natürlichen Abbildungen Isomorphismen $\mathrm{S}^! X \xrightarrow{\sim} \operatorname{limf} \mathrm{S}(X, X\backslash K)$, wobei der inverse Limes über alle Kompakta $K \subset X$ zu bilden ist. Wie beim Beweis von 17.7.3.12 finden wir eine Überdeckung von X durch eine aufsteigende Folge von offenen Teilmengen mit kompaktem Abschluß $U_0 \subset U_1 \subset \ldots \subset X$, und da die $\bar{U}_i$ final sind im System aller Kompakta von X, ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$\mathrm{S}^! X \xrightarrow{\sim} \operatorname*{limf}_i \mathrm{S}(X, X\backslash \bar{U}_i)$$

von Komplexen. Nun hat das inverse System von Komplexen rechts surjektive Systemmorphismen. Unsere Variante zum Satz von Wilder 17.7.3.22 zeigt, daß die von $\mathrm{S}_q(X, X\backslash \bar{U}_{i+1}) \twoheadrightarrow \mathrm{S}_q(X, X\backslash \bar{U}_i)$ auf der Homologie induzierten Abbildungen endlich erzeugte Bilder haben. Da wir hier mit Koeffizienten in einem Körper arbeiten, zeigt dann Übung 17.7.1.53 zum Vertauschen von Homologie und inversem Limes, daß die offensichtlichen Abbildungen Isomorphismen

$$\mathrm{H}^!_q X \xrightarrow{\sim} \operatorname*{limf}_i \mathrm{H}_q(X, X\backslash \bar{U}_i)$$

induzieren. Nun sind die Bilder von $\mathrm{H}_q(X, X\backslash \bar{U}_{i+1}) \to \mathrm{H}_q(X, X\backslash \bar{U}_i)$ wie bereits erwähnt endlichdimensional. Wir nennen sie $I_{q,i}$ und haben also in Formeln $\dim I_{q,i} < \infty$ für alle i, q. Es ist klar, daß die offensichtlichen Abbildungen Isomorphismen

$$\operatorname*{limf}_i I_{q,i} \xrightarrow{\sim} \operatorname*{limf}_i \mathrm{H}_q(X, X\backslash \bar{U}_i)$$

liefern. Man identifiziert die Bilder von $\mathrm{H}^q(X, X\backslash \bar{U}_i) \to \mathrm{H}^q(X, X\backslash \bar{U}_{i+1})$ leicht mit den Dualräumen $I^*_{q,i}$ und folgert unschwer, daß die offensichtlichen Abbildungen auch Isomorphismen

$$\operatorname*{colf}_i I^*_{q,i} \xrightarrow{\sim} \operatorname*{colf}_i \mathrm{H}^q(X, X\backslash \bar{U}_i)$$

liefern. Die rechte Seite kann nun in natürlicher Weise mit der kompakten Kohomologie $\mathrm{H}^q_! X$ identifiziert werden. So erhalten wir schließlich natürliche Isomorphismen

$$(\mathrm{H}^q_! X)^* \xrightarrow{\sim} (\operatorname*{colf}_i I^*_{q,i})^* \xrightarrow{\sim} \operatorname*{limf}_i I^{**}_{q,i} \xrightarrow{\sim} \operatorname*{limf}_i I_{q,i} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^!_q X$$

Das etwas unangenehme Prüfen der Tatsache, daß diese Verknüpfung von Isomorphismen genau die Abbildung aus dem Satz ist, bleibe dem Leser überlassen. □

Proposition 17.7.3.28 (**Nullte lokalendliche Homologie als Dualraum**). *Gegeben ein Kring k und ein k-Modul M und ein lokal kompakter lokal wegzusammenhängender abzählbar basierter Hausdorffraum X liefern die in 17.7.3.24 konstruierten Abbildungen Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^!_0(X; M^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0_!(X; M)^*$$

Beweis. Nach Annahme sind alle Zusammenhangskomponenten von X offen. Es reicht also, die Behauptung für X zusammenhängend zu zeigen. Ist X kompakt, so stimmt die lokalendliche Homologie mit der gewöhnlichen Homologie überein und die kompakte Kohomologie mit der gewöhnlichen Kohomologie und beide Seiten lassen sich für X zusammenhängend in verträglicher Weise mit M^* identifizieren. Ist X nichtkompakt und zusammenhängend, so verschwindet die linke Seite nach 17.7.3.6 und die rechte Seite aus offensichtlichen Gründen. Die Proposition folgt. □

Satz 17.7.3.29 (**Kompakte Kohomologie und Orientierung**). *Gegeben eine n-Mannigfaltigkeit X liefert die gleich im Beweis konstruierte Abbildung einen Isomorphismus zwischen dem Dualraum ihrer n-ten kompakten Kohomologie mit rationalen Koeffizienten und dem Raum der globalen Schnitte ihrer rationalen Orientierungsgarbe*

$$\mathrm{H}^n_!(X; \mathbb{Q})^* \xrightarrow{\sim} \Gamma(X; \mathrm{or}_X(\mathbb{Q}))$$

17.7.3.30. Ist unsere Mannigfaltigkeit X sogar abzählbar basiert, so können wir unseren Isomorphismus aus dem Satz mit 17.7.3.28 verlängern zu einem Isomorphismus $\mathrm{H}^!_n(X; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X; \mathrm{or}_X(\mathbb{Q}))$. In dieser Gestalt scheint er mir besonders anschaulich und wir finden ihn sogar mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten in 21.6.4.2 als einen speziellen „dualisierten Poincaré-Isomorphismus“ wieder. Wenn wir unsere lokalendliche Homologie als „garbentheoretische lokalendliche Homologie“ interpretieren, gilt dasselbe auch ohne die Annahme, X sei abzählbar basiert.

Beweis. Per definitionem gilt $\mathrm{H}^n_!(X; \mathbb{Q}) = \mathrm{colf}_K \mathrm{H}^n(X, X\backslash K; \mathbb{Q})$ mit dem über alle Kompakta $K \subset X$ gebildeten Kolimes. Wir folgern Isomorphismen

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^n_!(X; \mathbb{Q})^* &\xrightarrow{\sim} \mathrm{limf}_K \mathrm{H}^n(X, X\backslash K; \mathbb{Q})^* \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{limf}_K \mathrm{H}_n(X, X\backslash K; \mathbb{Q}) \text{ nach 17.7.1.47 und 17.7.3.22} \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{limf}_K \Gamma(K; \mathrm{or}_X(\mathbb{Q})) \text{ nach 17.5.1.5} \\
&\xrightarrow{\sim} \Gamma(X; \mathrm{or}_X(\mathbb{Q}))
\end{aligned}$$

□

17.7.4 Poincaré-Dualität

17.7.4.1 (**Erinnerungen an das relative cap-Produkt**). Wir hatten in 17.6.4.15 die relativen cap-Produkte $\mathrm{H}^p(X,A) \times \mathrm{H}_q(X,A) \to \mathrm{H}_{q-p}X$ eingeführt und kennen aus dieser Übung im Fall $p = q$ und X wegzusammenhängend die Beschreibung $b \cap c = \langle b, c\rangle\delta$ durch die Kroneckerpaarung sowie für jeden Morphismus $(X,A) \to (Y,B)$ von Raumpaaren die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^*(X,A) \times \mathrm{H}(X,A) \arrow[d] & \mathrm{H}^*(Y,B) \times \mathrm{H}(X,A) \arrow[l] \arrow[r] & \mathrm{H}^*(Y,B) \times \mathrm{H}(Y,B) \arrow[d] \\
\mathrm{H}X \arrow[rr] & & \mathrm{H}Y
\end{tikzcd}$$

17.7.4.2. Gegeben M eine n-Mannigfaltigkeit liefert jede Orientierung ω auf M nach Satz 17.4.3.5 über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten für alle kompakten Teilmengen $K \subset M$ ein Element $\omega_K = \omega_{K\subset M} \in \mathrm{H}_n(M, M\backslash K)$. Das cap-Produkt mit ω_K liefert dann nach 17.7.4.1 Abbildungen $\cap\omega_K : \mathrm{H}^q(M, M\backslash K) \to \mathrm{H}_{n-q}M$ und durch Übergang zum Kolimes mithilfe von 17.7.4.1 erhalten wir Abbildungen

$$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^q_{(M,\omega)} : \mathrm{H}^q_! M \to \mathrm{H}_{n-q}M$$

Sie sind wieder nach den Verträglichkeiten 17.7.4.1 verträglich mit dem Ausdehnen von offenen Teilmengen von M.

Satz 17.7.4.3 (**Allgemeine Poincaré-Dualität**). *Gegeben eine orientierte n-Mannigfaltigkeit M ist die Abbildung Q aus 17.7.4.2 für alle q ein Isomorphismus*

$$\mathrm{Q} : \mathrm{H}^q_! M \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_{n-q}M$$

17.7.4.4. Dieser Satz gilt mit demselben Beweis für Koeffizienten in einem beliebigen Kring k. Statt einer Orientierung brauchen wir dafür in dieser Allgemeinheit nur eine k-Orientierung. Betrachten wir den Fall rationaler Koeffizienten und nehmen $q = n$ und gehen auf beiden Seiten zum Dualraum über, so erhalten wir einen Spezialfall unseres Isomorphismus 17.7.3.29 zwischen dem Dualraum der kompakten Kohomologie und dem Raum der globalen Schnitte der Orientierungsgarbe.

17.7.4.5. Die Umkehrabbildung zu Q notiere ich $\mathrm{P} = \mathrm{P}_M = \mathrm{P}_{\vec{M}} : \mathrm{H}_{n-q}M \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_! M$ und nenne sie den **Poincaré-Isomorphismus**. Den Pfeil schreibe ich dazu, wenn ich besonders betonen will, daß wir mit orientierten Manngaltigkeiten arbeiten.

17.7.4.6. Ist M eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit, so ist per definitionem $\mathrm{Q} = \cap[M]$ das cap-Produkt mit dem Fundamentalzykel von M. Allerdings kann ich in diesem Rahmen keinen vernünftigen Beweis dafür geben, daß er die in

17.7.4.3 behaupteten Isomorphismen liefert. Ist M eine abzählbar basierte orientierte Mannigfaltigkeit, so könnte Q auch als das cap-Produkt mit dem Fundamentalzykel $\mathrm{Q} = \cap[M]^!$ eingeführt werden. Dafür müßten wir jedoch das cap-Produkt in der entsprechenden Allgemeinheit entwickeln und das will ich hier vermeiden.

Beweis. Wir beginnen den Beweis mit einem Lemma.

Lemma 17.7.4.7. *Sind $U, V \Subset M$ offene Teilmengen und gilt der Satz für die n-Mannigfaltigkeiten U, V und $U \cap V$, so gilt er auch für $U \cup V$.*

Beweis. Das folgt mit dem Fünferlemma aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{H}^q_!(U \cap V) & \to & \mathrm{H}^q_! U \oplus \mathrm{H}^q_! V & \to & \mathrm{H}^q_!(U \cup V) & \to & \mathrm{H}^{q+1}_!(U \cap V) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}_{n-q}(U \cap V) & \to & \mathrm{H}_{n-q} U \oplus \mathrm{H}_{n-q} V & \to & \mathrm{H}_{n-q}(U \cup V) & \to & \mathrm{H}_{n-q-1}(U \cap V)
\end{array}$$

mit ins Unendliche gedachten Zeilen aus Mayer-Vietoris-Sequenzen 17.7.2.8 und 17.2.4.11, sobald wir zeigen können, daß dies Diagramm kommutativ ist. Das stimmt nun zwar nicht, aber wir zeigen die Kommutativität für das leicht variierte Diagramm, bei dem wir beim vertikalen Pfeil aus den direkten Summen jeweils beim zweiten Summanden das Negative von Q nehmen, und das reicht uns auch für den Beweis. Es reicht uns weiter, für beliebige kompakte $K \subset U$ und $L \subset V$ die Kommutativität des Diagramms zu zeigen, das man erhält, wenn man die obere Zeile durch die entsprechende relative Mayer-Vietoris-Sequenz ersetzt. Dazu diskutieren wir zunächst einmal die Konstruktion dieser Sequenz, die in 17.6.3.3 nur angedeutet worden war. Wir kürzen $U \cup V = X$ ab und bezeichnen die offene Überdeckung $X \backslash (K \cap L) = (X \backslash K) \cup (X \backslash L)$ mit $\mathcal{V}$. Weiter kürzen wir $X \backslash (K \cap L) = X \backslash \cap$ ab und $X \backslash (K \cup L) = X \backslash \cup$. Die kurze exakte Sequenz auf den singulären Ketten

$$\mathrm{S}(X \backslash \cup) \hookrightarrow \mathrm{S}(X \backslash K) \oplus \mathrm{S}(X \backslash L) \twoheadrightarrow \mathrm{S}^{\mathcal{V}}(X \backslash \cap)$$

aus der Konstruktion der Mayer-Vietoris-Sequenz 17.2.4.11 mit der Summe der Vorschübe vorne und dem ersten Vorschub minus dem zweiten Vorschub hinten liefert durch Dualisieren die obere Horizontale eines kommutativen Diagramms mit dem ersten Rückzug minus dem zweiten Rückzug vorne und der Summe der Rückzüge hinten

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{S}^*_{\mathcal{V}}(X \backslash \cap) & \hookrightarrow & \mathrm{S}^*(X \backslash K) \oplus \mathrm{S}^*(X \backslash L) & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}^*(X \backslash \cup) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{S}^*(X) & \hookrightarrow & \mathrm{S}^* X \oplus \mathrm{S}^* X & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}^* X \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{S}^*_{\mathcal{V}}(X, X \backslash \cap) & \hookrightarrow & \mathrm{S}^*(X, X \backslash K) \oplus \mathrm{S}^*(X, X \backslash L) & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}^*(X, X \backslash \cup)
\end{array}$$

Die untere linke Ecke sei darin durch die Exaktheit der linken Vertikale definiert. Dann sind alle Vertikalen kurze exakte Sequenzen und die untere Zeile ist exakt nach dem Neunerlemma. Die lange exakte Kohomologiesequenz dieser untersten Zeile liefert die **Mayer-Vietoris-Sequenz der relativen Kohomologie**, wenn wir darin $\mathcal{H}(\mathrm{S}^*_{\mathcal{V}}(X, X\backslash\cap))$ ersetzen durch $\mathcal{H}(\mathrm{S}^*(X, X\backslash\cap))$ vermittels des Isomorphismus, den die Einschränkung auf feine Ketten auf der Kohomologie der jeweiligen Komplexe induziert. Jetzt gilt es, ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen anzugeben, das bei Übergang zur Homologie unsere Mayer-Vietoris-Sequenzen in den Horizontalen und die fraglichen cap-Produkte in den Vertikalen induziert. Um die cap-Produkte aus der Definition von Q zu beschreiben, wählen wir einen beliebigen Repräsentanten $\dot\omega_{K\cup L} \in \mathrm{Z}_n(X, X\backslash\cup)$ der Homologieklasse $\omega_{K\cup L} \in \mathrm{H}_n(X, X\backslash\cup)$ zu unserer Orientierung ω. Sein Vorschub unter der Diagonale ist ein Zykel $\Delta_*\dot\omega_{K\cup L} \in \mathrm{Z}_n(X \times X, (X\backslash\cup) \times X)$ und wird unter dem Vorschub mit einer Alexander-Whitney-Transformation η ein n-Zykel $\eta\Delta_*\dot\omega_{K\cup L}$ des Tensorkomplexes $\mathrm{S}(X, X\backslash\cup) \otimes \mathrm{S}X$. Das Darantensorieren dieses Zykels von rechts ist die erste Kettenabbildung einer Sequenz

$$\mathrm{S}^*(X, X\backslash\cup) \to \mathrm{S}^*(X, X\backslash\cup) \otimes \mathrm{S}(X, X\backslash\cup) \otimes \mathrm{S}X \to \mathrm{S}X$$

mit dem Auswerten des ersten Faktor auf dem zweiten Faktor als zweiter Abbildung. Die Verknüpfung ist dann eine Kettenabbildung, die auf der Homologie das cap-Produkt mit $\omega_{K\cup L}$ induziert. Wir notieren sie $\cap\dot\omega_{K\cup L}$. Nun wählen wir die relative Kette $\dot\omega_{K\cup L} \in \mathrm{Z}_n(X, X\backslash\cup)$ so, daß sie einen Repräsentanten $\ddot\omega_{K\cup L} \in \mathrm{S}_nX$ hat, der bezüglich der offenen Überdeckung $X = (U\backslash L)\cup(V\backslash K)\cup(U\cap V)$ fein ist, also $\ddot\omega_{K\cup L} = \ddot\omega_1 + \ddot\omega_2 + \ddot\omega_3$ mit den Summanden in den jeweiligen Räumen von n-Ketten. Dann landet zunächst einmal $\cap\dot\omega_{K\cup L}$ in $\mathrm{S}^{\mathcal{W}}X$ für $\mathcal{W}$ die Überdeckung $X = U\cup V$ von X, dafür hätte auch die Feinheit unseres Repräsentanten in Bezug auf diese Überdeckung bereits ausgereicht. Weiter wird $\omega_{K\subset U} \in \mathrm{H}_n(U, U\backslash K)$ repräsentiert durch $\ddot\omega_1 + \ddot\omega_3$, vergleiche den Beweis des Ausschneidungssatzes 17.2.4.10, und $\omega_{L\subset V} \in \mathrm{H}_n(V, V\backslash L)$ ähnlich durch $\ddot\omega_2 + \ddot\omega_3$. Durch Verwendung dieser Repräsentanten in der mittleren Vertikale erhalten wir ein kommutatives rechtes Quadrat im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{S}^*_{\mathcal{V}}(X, X\backslash\cap) & \hookrightarrow & \mathrm{S}^*(X, X\backslash K) \oplus \mathrm{S}^*(X, X\backslash L) & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}^*(X, X\backslash\cup) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{S}(U\cap V) & \hookrightarrow & \mathrm{S}U \oplus \mathrm{S}V & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}^{\mathcal{W}}(U\cup V)
\end{array}$$

Die mitteleren Vertikalen liefern darin auf der Homologie die Komposition von Ausschneidung $\mathrm{H}^*(X, X\backslash K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(U, U\backslash K) \to \mathrm{H}U$ und $\cap\omega_{K\subset U}$ und ebenso für $L \subset V$. Ähnlich erklären wir die linke Vertikale durch Verwendung des Repräsentanten $\ddot\omega_3$ von $\omega_{(K\cap L)\subset(U\cap V)} \in \mathrm{H}_n(U\cap V, (U\cap V)\backslash(K\cap L))$. So erhalten wir das gesuchte kommtative Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen

exakten Sequenzen in den Horizontalen, das beim Übergang zur Homologie das Diagramm liefert, dessen Kommutativität wir zu zeigen hatten. □

Jetzt gehen wir in mehreren Schritten von Spezialfällen bis zur allgemeinen Situation.

1. Der Satz gilt für $M = \mathbb{R}^n$. Dann bilden ja die abgeschlossenen Bälle D_r schon ein konfinales System unter allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und die Abbildung $\cap\omega_{D_r} : \mathrm{H}^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash D_r) \to \mathrm{H}_0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{Z}\delta$ ist nach 17.7.4.1 in diesem Fall das Auswerten einer Kohomologieklasse auf der Homologieklasse $\omega_{D_r} \in \mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash D_r)$ gefolgt von der Multiplikation mit dem kanonischen Erzeuger δ der nullten Homologie, also ein Isomorphismus für $0 < r < \infty$.

2. Der Satz gilt für jede offene konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, denn so eine Teilmenge ist schon homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.

3. Der Satz gilt für jede endliche Vereinigung offener konvexer Mengen in $\mathbb{R}^n$ mit Induktion, Schritt 2 und Lemma 17.7.4.7.

4. Ist M eine aufsteigende Vereinigung von offenen Teilmengen U_i und gilt der Satz für alle U_i, so gilt er auch für M. In der Tat gilt $\mathrm{H}_q(M) = \operatorname{colf} \mathrm{H}_q(U_i)$ und $\mathrm{H}^p_! M = \operatorname{colf} \mathrm{H}^p_!(U_i)$ nach den Übungen 17.7.1.41 und 17.7.2.13.

5. Der Satz gilt für jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. In der Tat läßt sie sich als aufsteigende Vereinigung von endlichen Vereinigungen offener Bälle schreiben.

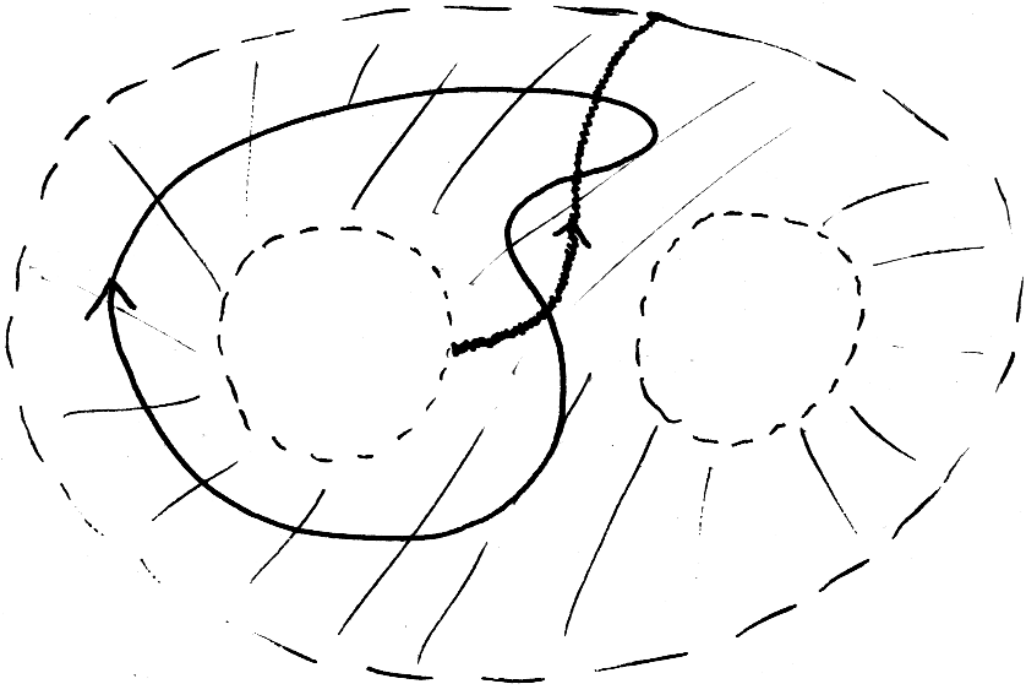
6. Der Satz gilt für jede Mannigfaltigkeit. In der Tat finden wir nach Schritt 4 und dem Zorn'schen Lemma eine maximale offene Teilmenge, für die der Satz gilt. Wäre sie nicht schon die ganze Mannigfaltigkeit, so könnten wir sie nach Lemma 17.7.4.7 und Schritt 5 noch durch eine Karte vergrößern, im Widerspruch zur Maximalität. □

Korollar 17.7.4.8. *Ist t ein Erzeuger der zweiten Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^2\mathbb{P}^n\mathbb{C}$, so liefert der offensichtliche Ringhomomorphismus einen Isomorphismus*

$$\mathbb{Z}[t]/\langle t^{n+1}\rangle \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*\mathbb{P}^n\mathbb{C}$$

Beweis. Es gilt zu zeigen, daß das Produkt eines Erzeugers von H^{2p} mit einem Erzeuger von H^{2q} stets ein Erzeuger von H^{2p+2q} ist. Im Fall $p + q = n$ folgt das aus 17.6.4.11. Im Fall $p + q > n$ ist eh nichts zu zeigen. Im Fall $p + q = m < n$ verwendet man den nach 17.3.4.10 und 17.6.2.7 surjektiven Ringhomomorphismus $\mathrm{H}^*\mathbb{P}^n\mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathrm{H}^*\mathbb{P}^m\mathbb{C}$. □

Vorschau 17.7.4.9 (**Schnittprodukt und Poincaré-Dualität**). Sei im folgenden k ein Hauptidealring oder allgemeiner ein beliebiger noetherscher Kring endlicher homologischer Dimension und sei M eine abzählbar basierte n-Mannigfaltigkeit.



Ein Zykel und ein lokalendlicher Zykel in einer offenen Teilmenge der Ebene. Je nach Wahl der Orientierung der Ebene ist in diesem Fall die Schnittzahl ± 1.

Ich will kurz skizzieren, wie sich der in 17.6.4.10 und 17.6.4.11 erklärte Zusammenhang zwischen Poincaré-Dualität und Schnittpaarung auf diesen Fall verallgemeinert. Sobald uns garbenkohomologische Begriffsbildungen zur Verfügung stehen, gelingt das ohne die Beschränkung auf abzählbar basierte Mannigfaltigkeiten. In jedem Fall konstruieren wir in 21.9.10.10 zusätzlich zu den Poincaré-Isomorphismen

$$\mathrm{P} : \mathrm{H}_{n-p}(M;k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^p_!(M;k)$$

auch noch natürliche Isomorphismen zwischen der Kohomologie und der lokal-endlichen Homologie, die wir die **dualisierten Poincaré-Isomorphismen**

$$\mathrm{P}^! : \mathrm{H}^!_{n-p}(M;k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^p(M;k)$$

nennen. Im Fall eines Koeffizientenkörpers k entstehen sie unter Beachtung von 17.7.3.28 schlicht durch Dualisieren aus den Poincaré-Isomorphismen, daher habe ich sie so genannt. Im Fall einer kompakten orientierten Mannigfaltigkeit fallen die beiden oben diskutierten Isomorphismen zusammen. Im allgemeinen ist die Konstruktion der dualisierten Poincaré-Isomorphismen komplizierter und soll an dieser Stelle nicht ausgeführt werden. Unter den dualisierten Poincaré-Isomorphismen entspricht das cup-Produkt $\cup : \mathrm{H}^p(M;k) \times \mathrm{H}^q(M;k) \to \mathrm{H}^{p+q}(M;k)$ auf der Kohomologie bilinearen Abbildungen

$$\mathrm{H}^!_{n-p}(M;k) \times \mathrm{H}^!_{n-q}(M;k) \to \mathrm{H}^!_{n-p-q}(M;k)$$

Sie heißen **Schnittprodukte** und wir nennen sie genauer **cup-Schnittprodukte**. Um ihre anschauliche Bedeutung präzise zu formulieren, muß ich etwas ausholen. Gegeben eine orientierte abgeschlossene Untermannigfaltigkeit $X \not\subset M$ der Dimension a erinnern wir aus 17.7.3.14 ihren Fundamentalzykel $[X]^! \in \mathrm{H}^!_a(M;k)$. Das geht, da wir M in diesem Unterabschnitt abzählbar basiert angenommen hatten und da folglich auch X abzählbar basiert ist. Seien nun $X \not\subset M$ und $Y \not\subset M$ abgeschlossene orientierte Untermannigfaltigkeiten, die sich „transversal schneiden“. Damit ist gemeint, daß es um jeden Punkt ihres Schnitts $X \cap Y$ eine offene Umgebung $U \Subset M$ und einen Homöomorphismus $U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ gibt, der Homöomorphismen $X \cap U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^a \times 0$ sowie $Y \cap U \xrightarrow{\sim} 0 \times \mathbb{R}^b$ induziert und unter dem die von M auf U induzierte Orientierung der Standardorientierung des $\mathbb{R}^n$ entspricht. Seien dann $\varepsilon_X, \varepsilon_Y$ die Vorzeichen, die angeben, ob unsere letzten beiden Homöomorphismen die vorgegebenen Orientierungen auf X, Y mit den Standardorientierungen auf $\mathbb{R}^a, \mathbb{R}^b$ identifizieren oder nicht. Versehen wir dann $X \cap Y$ mit der **Schnittorientierung**, die unter dem induzierten Homöomorphismus $X \cap Y \cap U \xrightarrow{\sim} 0 \times \mathbb{R}^c \times 0$ mit $c := a + b - n$ dem $\varepsilon_X\varepsilon_Y$-fachen der Standardorientierung auf $\mathbb{R}^c$ entspricht, so gilt für unsere cup-Schnittprodukte

$$[X]^! \cdot [Y]^! = [X \cap Y]^!$$

Des weiteren entspricht unter den dualisierten Poincaré-Isomorphismen die durch das cap-Produkt gegebene Struktur auf der Homologie als Modul über dem Kohomologiering $\cap : \mathrm{H}^p(M;k) \times \mathrm{H}_{p+q}(M;k) \to \mathrm{H}_q(M;k)$ bilinearen Abbildungen

$$\mathrm{H}^!_{n-p}(M;k) \times \mathrm{H}_{p+q}(M;k) \to \mathrm{H}_q(M;k)$$

Auch sie heißen **Schnittprodukte** und wir nennen sie **cap-Schnittprodukte**. Sie haben die analoge Eigenschaft, daß für sich transversal schneidende abgeschlossene orientierte Untermannigfaltigkeiten $X, Y \mathrel{\not\subset} M$ mit Y kompakt und der Notation $[Y] \in \mathrm{H}_b(M;k)$ für den Fundamentalzykel einer kompakten Untermannigfaltigkeit der Dimension b als Element der Homologie von M gilt

$$[X]^! \cdot [Y] = [X \cap Y]$$

Im Fall $q = 0$ erhalten wir durch Nachschalten der Augmentation $\mathrm{H}_0(M;k) \to k$ aus dem cap-Schnittprodukt die **Schnittpaarung**

$$\mathrm{H}^!_{n-p}(M;k) \times \mathrm{H}_p(M;k) \to k$$

Im Fall von kompaktem M hatten wir sie bereits in 17.4.3.19 angekündigt und dafür die Notation $\odot$ vereinbart, die wir auch in diesem allgemeineren Fall verwenden werden. Daß diese bilineare Abbildung für M kompakt in der Tat die in 17.4.3.19 von einer Schnittpaarung geforderten Eigenschaften hat, ist eine offensichtliche Konsequenz unserer feineren Behauptungen für die Schnittprodukte. Daß jedoch unsere Schnittprodukte hinwiederum tatsächlich die oben behaupteten Eigenschaften haben, wird erst in 21.6.4.31 bewiesen werden. Unter unseren Poincaré-Isomorphismen und dualisierten Poincaré-Isomorphismen entsprechen sich dann unsere Schnittpaarung, die vom cup-Produkt induzierte Paarung und die beiden Kroneckerpaarungen wie in folgender Übersicht dargestellt, die unsere in 17.6.4.11 im kompakten Fall gegebenen Formeln verallgemeinert.

$$\begin{array}{rcrlcl}
\mathrm{H}^!_{n-p}(M;k) & \times & \mathrm{H}_p(M;k) & \to k, & (\alpha,\beta) & \mapsto & \alpha \odot \beta \\
\mathrm{H}^p(M;k) & \times & \mathrm{H}^{n-p}_!(M;k) & \to k, & (a,b) & \mapsto & \langle a \cup b, \omega_M \rangle \\
\mathrm{H}^!_{n-p}(M;k) & \times & \mathrm{H}^{n-p}_!(M;k) & \to k, & (a,\beta) & \mapsto & \langle a, \beta \rangle \\
\mathrm{H}^p(M;k) & \times & \mathrm{H}_p(M;k) & \to k, & (\alpha,b) & \mapsto & \pm\langle b, \alpha \rangle
\end{array}$$

Falls eine dieser Paarungen eine Bijektion des linken Raums auf den Dualraum des rechten Raumes oder das Umgekehrte induziert, so folgt insbesondere dasselbe für die drei anderen Paarungen. Im Fall eines Koeffizientenkörpers wissen wir bereits aus 17.6.1.6, daß das stets der Fall ist.

Beispiel 17.7.4.10 (**Erzwungene Schnitte geschlossener Wege in** $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$). Für die Homologie der reell projektiven Ebene $\mathrm{H}_q(\mathbb{P}^2\mathbb{R};\mathbb{F}_2)$ mit Koeffizienten im zweielementigen Körper wissen wir nach 17.5.1.6, daß sie eindimensional ist für $q = 0,1,2$ und Null sonst. Für das nichttriviale Element $z \in \mathrm{H}_1(\mathbb{P}^2\mathbb{R};\mathbb{F}_2)$ gilt also $z \odot z \neq 0$. Wir können so aus der erst in 21.6.4.31 bewiesenen Interpretation von $z \odot z$ als Schnittzahl folgern, daß zwei geschlossene nicht zusammenziehbare Wege in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, die mithin beide unter dem Hurewicz-Isomorphismus diese Homologieklasse darstellen, nie disjunkt sein können. Äquivalent dazu ist die Aussage, daß zwei ungerade stetige Abbildungen $S^1 \to S^2$ nie disjunktes Bild haben können. Das scheint mir auch anschaulich recht klar, so eine ungerade stetig Abbildung muß ja einen Halbkreis auf einen stetigen Weg von einem Punkt zum gegenüberliegenden Punkt der Kugelschale abbilden und den gegenüberliegenden Halbkreis auf den gegenüberliegenden Weg zurück zum Ausgangspunkt.

Übungen

Übung 17.7.4.11. Man definiere für jeden Hausdorffraum ein cup-Produkt auf seiner Kohomologie mit kompaktem Träger. Für eine Mannigfaltigkeit entspricht es nebenbei bemerkt unter dem Poincaré-Isomorphismus dem anschaulichen Schnittprodukt auf der Homologie.

Übung 17.7.4.12 (**Cup mit dem Dual von Fundamentalzykeln**). Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung von orientierten kompakten Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m und n, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^\nu X \arrow[d, "\cap[X]"] & \mathrm{H}^\nu Y \arrow[l, "f^*"'] \arrow[r, "\cup \mathrm{P}_Y f_*[X]"] & \mathrm{H}^{\nu+n-m} Y \arrow[d, "\cap[Y]"] \\
\mathrm{H}_{m-\nu} X \arrow[rr, "f_*"] & & \mathrm{H}_{m-\nu} Y
\end{tikzcd}$$

Hinweis: Projektionsformel 17.6.4.4. Ist speziell $f = i$ eine Einbettung, so finden wir mit unserer abkürzenden Notation $[X] = i_*[X]$ die Beschreibung

$$P_Y \circ i_* \circ P_X^{-1} \circ i^* = (\ \cup P_Y[X])$$

für das cup-Produkt mit dem Poincarédualen des Fundamentalzykels von X.

17.7.5 Schnittzahlen im Simplizialen*

17.7.5.1. Im folgenden zeigen wir nach einigen Vorbereitungen Satz 17.7.5.7 zur simplizialen Interpretation der Schnittzahlen. Er hat das Verdienst, eine erste bewiesene anschauliche Interpretation bereitzustellen, zeigt aber nicht die in

17.4.3.19 behaupteten Eigenschaften. Das gelingt erst im Rahmen der Garbenkohomologie. Allerdings benötigt das einen großen Apparat, so daß die hier gegebene elementarere Argumentation auch ihre Berechtigung haben mag.

17.7.5.2. Sei M eine kompakte orientierte n-Mannigfaltigkeit. Für zwei Homologieklassen komplementärer Dimension $\alpha \in \mathrm{H}_q M$ und $\beta \in \mathrm{H}_{n-q} M$ ist hoffentlich anschaulich in etwa klar, was ihre „Schnittzahl“ sein sollte, die die Schnittpunkte von repräsentierenden Zykeln „in generischer Lage“ mit geeigneten, von der Orientierung abhängigen Vorzeichen zählt. Mit dem Isomorphismus der Poincarédualität 17.7.4.3 können wir unseren Homologieklassen sicher formal korrekt eine Zahl $\alpha \odot \beta \in \mathbb{Z}$ zuordnen wie folgt: Wir suchen $a \in \mathrm{H}^{n-q} M$ und $b \in \mathrm{H}^q M$ mit $\alpha = a \cap \omega_M$ und $\beta = b \cap \omega_M$ und setzen

$$\alpha \odot \beta := \langle a \cup b, \omega_M \rangle$$

Dies sei unsere Definition der **Schnittzahl** der beiden Homologieklassen. Der bald folgende Satz 17.7.5.7 soll plausibel machen, daß die so definierte Zahl die oben beschriebene geometrische Bedeutung hat. Dazu braucht es jedoch einige Vorbereitungen. Daß unsere Zahl tatsächlich die in unserer Vorschau 17.4.3.19 versprochenen Eigenschaften hat, zeigen wir erst in 21.6.4.31.

17.7.5.3. Seien $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex und $\check{\mathcal{K}}$ seine baryzentrische Unterteilung 17.3.2.8 mit ihrer natürlichen simplizialen Teilordnung. Die hoffentlich offensichtlichen Kettenabbildungen liefern wie im Beweis von 17.3.1.7 einen Isomorphismus von Kettenkomplexen und eine Homotopieäquivalenz

$$\mathrm{S}\check{\mathcal{K}} \xleftarrow{\sim} \mathrm{S}^{\mathrm{os}}\Delta(\check{\mathcal{K}}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{S}\Delta(\mathcal{K})$$

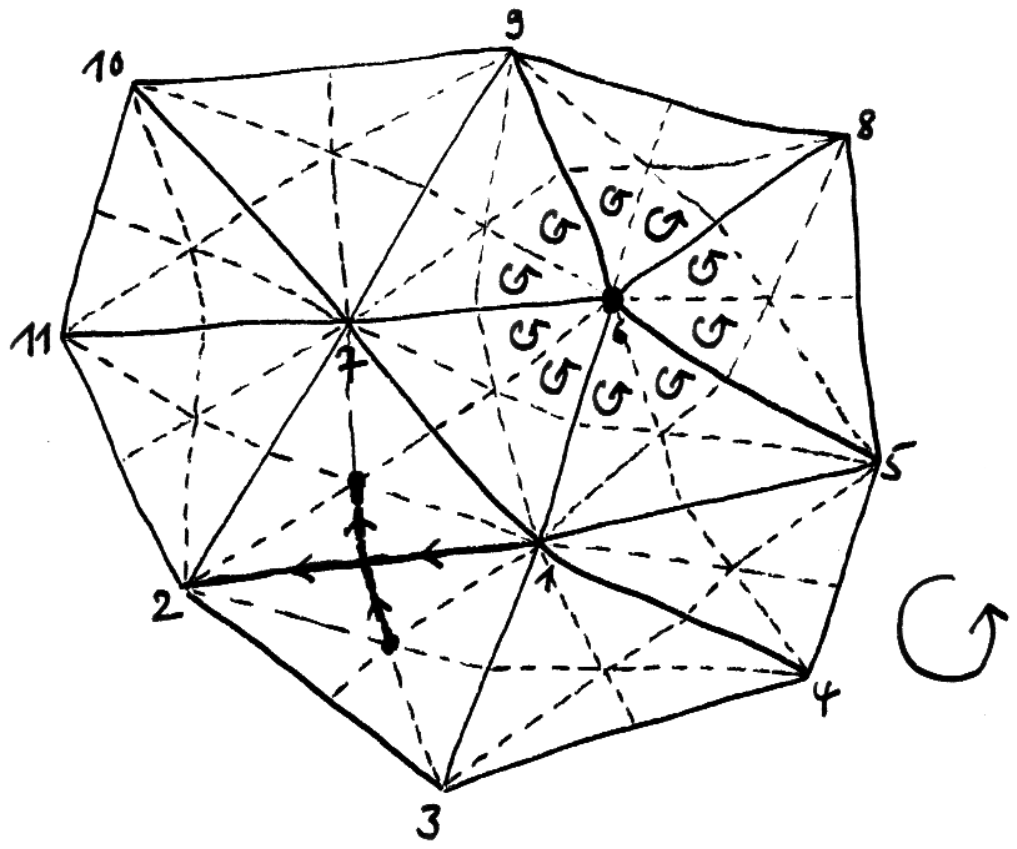
17.7.5.4. Sei nun unser Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ eine Triangulierung einer kompakten orientierten n-Mannigfaltigkeit. Wir wählen eine Anordnung $\leq$ auf der Menge E der Ecken von $\mathcal{K}$. Der Fundamentalzykel von $\Delta(\mathcal{K})$ hat genau einen Repräsentanten in den n-Simplizialketten und damit auch genau einen Repräsentanten $\omega \in \mathrm{S}_n^{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K})$ in der Gruppe der ordnungsverträglichen simplizialsingulären n-Ketten. Nach 17.7.3.16 hat unser Fundamentalzykel die Gestalt

$$\omega = \sum_{s \in \mathcal{K}_n} \varepsilon(s) \langle s \rangle$$

für wohlbestimmtes $\varepsilon : \mathcal{K}_n \to \{\pm 1\}$, wobei $\langle s \rangle$ wie im Beweis von 17.3.1.7 den zum n-Simplex s gehörigen angeordneten simplizialsingulären n-Simplex bezeichnet.

17.7.5.5. Gegeben ein $(n-q)$-Simplex $t \in \mathcal{K}_{n-q}$ erklären wir die zugehörige **duale Zelle** $c(t) \in \mathrm{S}_q^{\mathrm{os}}\Delta(\check{\mathcal{K}})$ als die Summe

$$c(t) = \sum \eta(\check{u}) \langle \check{u} \rangle$$



Ein Ausschnitt einer triangulierten 2-Mannigfaltigkeit. Die Nummerierung der Ecken legt ihre Anordnung fest. Der Kreispfeil daneben deutet die Orientierung an, der Fundamentalzykel hat also die Gestalt

$$\omega = \ldots + \langle\{1,2,3\}\rangle - \langle\{1,2,7\}\rangle + \ldots$$

Die duale Zelle zum 1-Simplex $t = \{1,2\}$ besteht aus den beiden Summanden $\check{u} = \{\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ und $\check{v} = \{\{1,2\},\{1,2,7\}\}$ und deren Vorzeichen sind $\eta(\check{u}) = -1$ und $\eta(\check{v}) = 1$, so daß sich die duale Zelle zu $c(t) = \check{v} - \check{u}$ ergibt. Im Bild habe ich die den ordnungsverträglichen 1-Ketten $\langle t\rangle$ und $c(t)$ entsprechenden Simplizialketten fett eingezeichnet.

Weiter besteht die duale Zelle zum 0-Simplex $\{6\}$ aus 10 Summanden, und ich habe im Bild auch die der dualen Zelle zu dieser Ecke alias der ordnungsverträglichen 2-Kette $c(\{6\})$ entsprechende Simplizialkette durch Kreispfeile eingezeichnet.

über alle q-Simplizes $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$ mit $\check{u}_0 = t$. Einen q-Simplex $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$ schreiben wir dazu als echt aufsteigende Kette $\check{u}_0 \subsetneq \check{u}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \check{u}_q$ von nichtleeren Simplizes von $\mathcal{K}$, und summieren über alle Ketten, die mit dem $(n-q)$-Simplex t beginnen. Die $\eta(\check{u}) = \pm 1$ seien gegeben wie folgt: Man betrachte die Ecken $u_1, \ldots, u_q \in E$ des ursprünglichen Komplexes mit $\check{u}_i = \check{u}_{i-1} \cup \{u_i\}$, so daß also gilt $\check{u}_q = \check{u}_0 \cup \{u_1, \ldots, u_q\}$. Sei $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ die angeordnete Darstellung des n-Simplex $\check{u}_q$ und $(t_0, \ldots, t_{n-q})$ die angeordnete Darstellung des $(n-q)$-Simplex $t = \check{u}_0$ und $\tau \in \mathcal{S}_{n+1}$ die Permutation mit

$$\begin{array}{lcl} s_{\tau(0)} & = & t_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{\tau(n-q)} & = & t_{n-q} \\ s_{\tau(n-q+1)} & = & u_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{\tau(n)} & = & u_q \end{array}$$

So sei das fragliche Vorzeichen gegeben als $\eta(\check{u}) = (-1)^{q(n-q)} \varepsilon(s) \operatorname{sgn}(\tau)$.

17.7.5.6. Diese dualen Zellen mögen mit ihren ganzen Vorzeichen unanschaulich wirken. Der erste Teil des folgenden Satzes mag der Anschauung helfen, zeigt er doch, daß die Vorzeichen stets so zusammenpassen, daß der Rand einer dualen Zelle eine Linearkombination dualer Zellen ist. Das hat im Bild der Simplizialketten unter anderem die anschauliche Bedeutung, daß „die einzelnen Simplizes einer dualen Zelle gerade so orientiert sind, daß sich die internen Ränder gegenseitig wegheben“.

Satz 17.7.5.7 (**Simpliziale Interpretation der Schnittzahlen**). *Sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex, der eine kompakte orientierte n-Mannigfaltigkeit M trianguliert. Sei auf der Menge E der Ecken von $\mathcal{K}$ eine Anordnung gewählt. So gilt:*

1. *Die von den dualen Zellen im Sinne von 17.7.5.5 erzeugten Untergruppen $\mathrm{C}_q \subset \mathrm{S}_q^{\mathrm{os}}\Delta(\check{\mathcal{K}})$ bilden einen Unterkomplex $\mathrm{C} \subset \mathrm{S}^{\mathrm{os}}\Delta(\check{\mathcal{K}})$ im Komplex der ordnungsverträglichen simplizialsingulären Ketten der baryzentrischen Unterteilung $\check{\mathcal{K}}$ von $\mathcal{K}$ und die Einbettung dieses Unterkomplexes induziert auf allen Homologiegruppen Isomorphismen $\mathcal{H}_q\mathrm{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q M$;*

2. *Wird $\alpha \in \mathrm{H}_q M$ repräsentiert durch einen simplizialsingulären Zykel der Gestalt $\sum_{t \in \mathcal{K}_q} \alpha_t \langle t \rangle \in \mathrm{S}^{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K})$ und $\beta \in \mathrm{H}_{n-q} M$ durch einen „zellulären“ Zykel der Gestalt $\sum_{t \in \mathcal{K}_q} \beta_t c(t) \in \mathrm{C}_{n-q}$, so gilt für ihre Schnittzahl*

$$\alpha \odot \beta = \sum_t \alpha_t \beta_t$$

Beweis. Zunächst einmal erinnern wir die Definition der Schnittzahl: Wir hatten dazu ja das $a \in \mathrm{H}^{n-q}M$ beziehungsweise $b \in \mathrm{H}^q M$ genommen mit $a \cap \omega_M = \alpha$ beziehungsweise $b \cap \omega_M = \beta$ und dann unsere Schnittzahl als Kronecker-Paarung des cup-Produkts dieser Kohomologieklassen mit dem Fundamentalzykel definiert, in Formeln $\alpha \odot \beta = \langle a \cup b, \omega_M \rangle$. Mit der Adjunktionsformel 17.6.4.6 erhalten wir daraus auch die alternative Darstellung $\alpha \odot \beta = \langle a, \beta \rangle$. Es reicht also, das Urbild a von α unter dem Poincaré-Isomorphismus hinreichend explizit zu beschreiben. Dazu müssen wir etwas weiter ausholen. Gegeben ein Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ liefert das baryzentrische Unterteilen ganz allgemein eine Homotopieäquivalenz $\mathrm{S}\mathcal{K} \overset{\wr}{\to} \mathrm{S}\check{\mathcal{K}}$ zwischen den entsprechenden Komplexen von Simplizialketten. Genauer erhält man eine Injektion von der Menge $\mathcal{K}_q^{\leq}$ aller angeordneten q-Simplizes von $\mathcal{K}$ in die Menge $\check{\mathcal{K}}_q^{\leq}$ aller angeordneten q-Simplizes von $\check{\mathcal{K}}$, indem man $\sigma : \{0, \ldots, q\} \hookrightarrow E$ abbildet auf $\sigma^\vee : \{0, \ldots, q\} \hookrightarrow \check{E}$ gegeben durch $\sigma^\vee(i) = \{\sigma(0), \ldots, \sigma(i)\}$. Anschaulich gesprochen erhalten wir so „alle q-Simplizes von $\check{\mathcal{K}}$, die in q-Simplizes von $\mathcal{K}$ liegen“, und die Abbildung $\mathcal{K}_q^{\leq} \to \mathrm{S}_q\check{\mathcal{K}}$ gegeben durch

$$\sigma \mapsto \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{q+1}} \operatorname{sgn}(\pi)(\sigma \circ \pi)^\vee$$

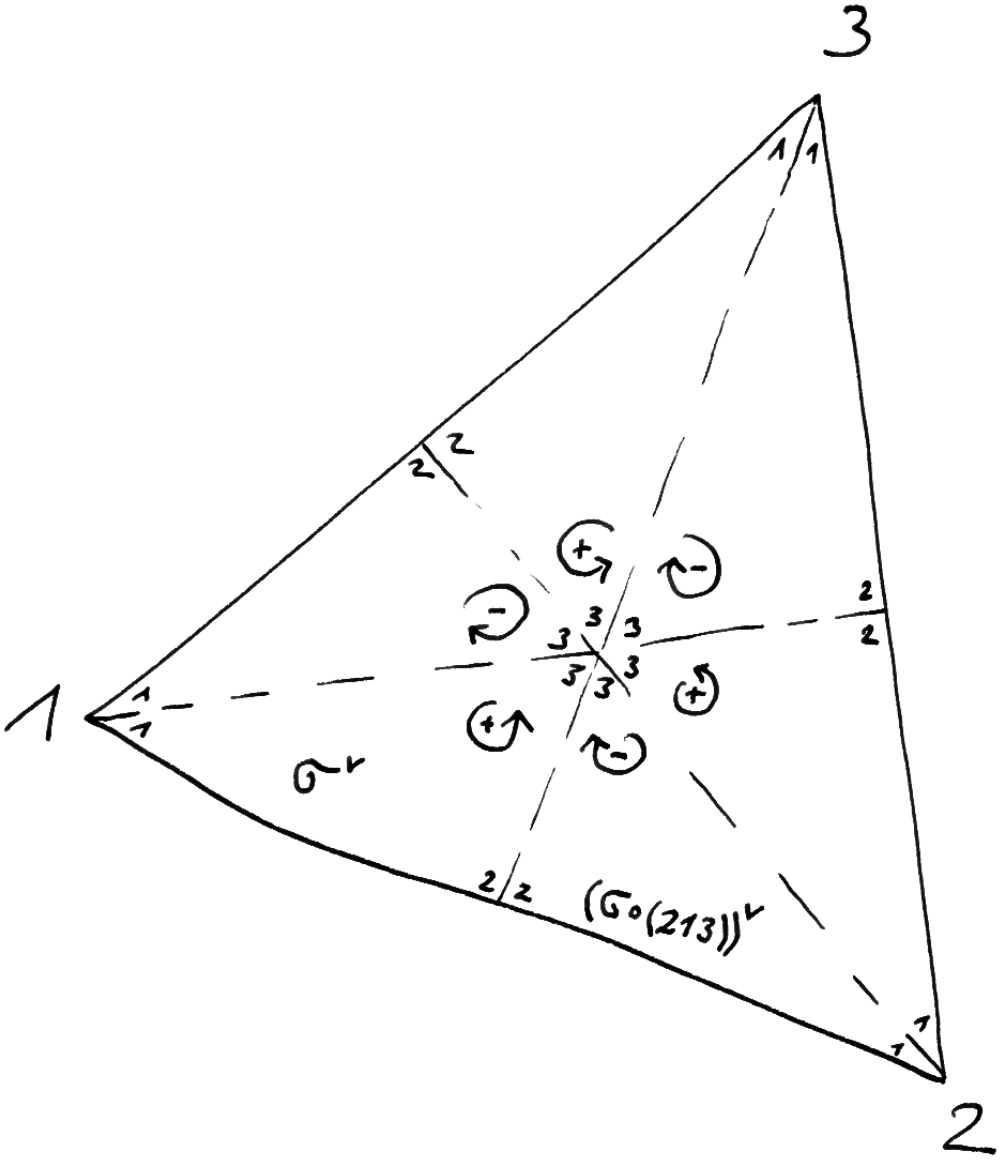
induziert eine Homotopieäquivalenz $b : \mathrm{S}\mathcal{K} \overset{\wr}{\to} \mathrm{S}\check{\mathcal{K}}$, die wir wieder die **baryzentrische Unterteilung** nennen. Wenden wir auf unseren Fundamentalzykel aus 17.7.5.4 die baryzentrische Unterteilung an, so erhalten wir den Repräsentanten

$$\check{\omega} = \sum_{s \in \mathcal{K}_n,\, \pi \in \mathcal{S}_{n+1}} \varepsilon(s) \operatorname{sgn}(\pi)(\langle s \rangle \circ \pi)^\vee$$

des Fundamentalzykels in $\mathrm{S}_n^{\mathrm{os}}\Delta(\check{\mathcal{K}})$. Die weitere Argumentation wird ausgehen von einem Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}^*[n] \arrow[r, dashed] & \mathrm{S}^{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K}) \arrow[d, "b"] \\
\mathrm{S}_{\mathrm{os}}^*\Delta(\check{\mathcal{K}})[n] \arrow[u, dashed] \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\cap\check{\omega}"] & \mathrm{S}^{\mathrm{os}}\Delta(\check{\mathcal{K}})
\end{tikzcd}$$

Der Komplex $\mathrm{S}_{\mathrm{os}}^*\Delta(\check{\mathcal{K}})$ der ordnungsverträgliche simplizialen Koketten mitsamt einem Isomorphismus von Komplexen $\mathrm{S}_{\mathrm{os}}^*\Delta(\check{\mathcal{K}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}^*\check{\mathcal{K}}$ ist in derselben Weise erklärt wie der Komplex der ordnungsverträgliche simplizialen Ketten in 17.3.2.8. Die durchgezogenen Pfeile sind uns bereits bekannt, die rechte Vertikale ist modulo unserer Identifikation von Simplizialketten mit ordnungsverträglichen simplizialen Ketten das baryzentrische Unterteilen, die untere Horizontale die Restriktion auf ordnungsverträgliche simpliziale Ketten unserer Poincaré-Dualität aus



Ein angeordneter 3-Simplex σ und die sechs angeordneten 3-Simplizes $\sigma \circ \pi$ mit Vorzeichen, deren Summe seine baryzentrische Unterteilung $b(\sigma)$ im Sinne des Beweises von 17.7.5.7 repräsentiert. Die Kreispfeile sind eigentlich überflüssig und betonen nur die Reihenfolge der Ecken in den angeordneten 3-Simplizes $\sigma \circ \pi$ und die Beziehung zum Signum der zugehörigen Permutationen π.

17.7.4.3. Unser Ziel ist die Ergänzung durch Kettenabbildungen wie durch die gestrichelten Pfeile angedeutet zu einem kommutativen Diagramm von Homotopieäquivalenzen, dessen obere Horizontale dann die geometrische Bedeutung des Poincaré-Isomorphismus klar macht. Als ersten Schritt in diese Richtung behaupte ich, daß die durch $\cap\check{\omega}$ gegebene Kettenabbildung wie durch den schrägen gestrichelten Pfeil angedeutet über unsere baryzentrische Unterteilung b faktorisiert. Ein q-Simplex $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$ ist ja per definitionem eine echt aufsteigende Kette $\check{u}_0 \subsetneq \check{u}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \check{u}_q$ von Simplizes von $\mathcal{K}$. Die zugehörigen $\langle\check{u}\rangle$ bilden eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathrm{S}^{\mathrm{os}}_q\,\Delta(\check{\mathcal{K}})$ und die zugehörigen Linearformen bilden eine $\mathbb{Z}$-Basis $\langle\check{u}\rangle^*$ von $\mathrm{S}^q_{\mathrm{os}}\,\Delta(\check{\mathcal{K}})$. Für das cap-Produkt $\langle\check{u}\rangle^* \cap \check{\omega}$ mit dem Fundamentalzykel erhalten wir nach 18.4.3.3 die Darstellung

$$\langle\check{u}\rangle^* \cap \check{\omega} = (-1)^{q(n-q)} \sum_{s\in\mathcal{K}_n,\,\pi\in\mathcal{S}_{n+1}} \varepsilon(s)\,\mathrm{sgn}(\pi)\big\langle\langle\check{u}\rangle^*, (\langle s\rangle\circ\pi)^\vee\rho^q\big\rangle\ (\langle s\rangle\circ\pi)^\vee\lambda^{n-q}$$

Insbesondere ist die rechte Seite nur dann nicht Null, wenn $\check{u}$ die Gestalt $\check{u}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \check{u}_q$ hat mit $\check{u}_0 \in \mathcal{K}_{n-q}$ und dann natürlich auch $\check{u}_i \in \mathcal{K}_{n-q+i}$ für alle i. Seien nun $u_1, \ldots, u_q \in E$ die Ecken des ursprünglichen Komplexes mit $\check{u}_i = \check{u}_{i-1} \cup \{u_i\}$, so daß also gilt $\check{u}_q = \check{u}_0 \cup \{u_1, \ldots, u_q\}$. Sei $s = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$ die angeordnete Darstellung des n-Simplex s. Auf der rechten Seite liefert nur $s = \check{u}_q \in \mathcal{K}_n$ von Null verschiedene Beiträge, und zwar nur für $\pi \in \mathcal{S}_{n+1}$ mit $s_{\pi(n-q+1)} = u_1, \ldots, s_{\pi(n)} = u_q$, und für diese ist der Gesamtbeitrag bis auf ein Vorzeichen gerade

$$b(\check{u}_0) = \sum_{\kappa\in\mathcal{S}_{n-q+1}} \mathrm{sgn}(\kappa)(\langle\check{u}_0\rangle\circ\kappa)^\vee$$

Das zeigt schon einmal, dass $\cap\check{\omega}$ wie behauptet über b faktorisiert und liefert den Pfeil schräg nach oben. Um auch das Vorzeichen anzugeben, betrachten wir die angeordnete Darstellung $\check{u}_0 = (v_0, \ldots, v_{n-q})$ und die Permutation $\tau \in \mathcal{S}_{n+1}$ mit $s_{\tau(0)} = v_0, \ldots, s_{\tau(n-q)} = v_{n-q}, s_{\tau(n-q+1)} = u_1, \ldots, s_{\tau(n)} = u_q$, finden für das fragliche Vorzeichen die Darstellung $\eta(\check{u}) = (-1)^{q(n-q)}\varepsilon(s)\,\mathrm{sgn}(\tau)$ und erhalten für $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$ die Formel

$$\langle\check{u}\rangle^* \cap \check{\omega} = \begin{cases} \eta(\check{u})b(\check{u}_0) & \text{falls } \check{u}_0 \in \mathcal{K}_{n-q}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bilden wir den Quotienten C^* von $\mathrm{S}^*_{\mathrm{os}}\Delta(\check{\mathcal{K}})$ nach den $\langle\check{u}\rangle^*$ mit $\check{u}_0 \notin \mathcal{K}_{n-q}$ sowie den $\eta(\check{u})\langle\check{u}\rangle^* - \eta(\check{v})\langle\check{v}\rangle^*$ mit $\check{u}_0 = \check{v}_0$, so faktorisiert unser $\cap\check{\omega}$ weiter und liefert, wie man leicht sieht, einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$\mathrm{C}^*[n] \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}^{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K})$$

Man kann in dieser Weise sogar einen Beweis der Poincaré-Dualität im triangulierbaren Fall geben, wofür dann allerdings noch gezeigt werden muß, daß die linke Vertikale unseres Diagramms Isomorphismen auf der Homologie induziert. Da wir aber vielmehr an der anschaulichen Bedeutung der Poincaré-Dualität interessiert sind, drehen wir den Spieß um und folgern aus der Poincaré-Dualität 17.7.4.3, daß die linke Vertikale unseres Diagramms $\mathrm{S}^*_{\mathrm{os}}\Delta(\check{\mathcal{K}}) \twoheadrightarrow \mathrm{C}^*$ Isomorphismen auf der Kohomologie induziert. Nach 17.6.2.4 ist sie also eine Homotopieäquivalenz und unser ganzes Diagramm besteht aus Homotopieäquivalenzen. Gehen wir nun in dieser linken Vertikale zu den dualen Komplexen über, so erhalten wir offensichtlich genau den Unterkomplex $\mathrm{C} \subset \mathrm{S}^{\mathrm{os}}\Delta(\check{\mathcal{K}})$ aus dem ersten Teil unseres Satzes 17.7.5.7, und damit ist auch dieser erste Teil bereits bewiesen. Des weiteren sehen wir, daß für $t \in \mathcal{K}_{n-q}$ und $\langle t \rangle$ der zugehörige angeordnete Simplex seine baryzentrische Unterteilung $b(\langle t \rangle)$ genau ein Urbild hat unter $\cap\check{\omega}$, und daß dieses Urbild auf der dualen Zelle $c(t)$ den Wert Eins annimmt und auf allen anderen dualen Zellen den Wert Null. Daraus folgt dann auch der zweite Teil des Satzes. $\square$

17.8 Danksagung

Als Quellen für singuläre Homologietheorie habe ich besonders die Darstellungen von Greenberg-Harper [GH81], Ossa [Oss09] und Stöcker-Zieschang [SZ94] genutzt. Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Olaf Schnürer, . . .

Kapitel 18

Kategorielle Produktstrukturen

Inhalt

18.1 Kategorielle Produktstrukturen 2985

18.1.1 Schmelzkategorien 2985

18.1.2 Beispiele für Schmelzkategorien 2992

18.1.3 Stabil universelle Verschmelzungen 2999

18.1.4 Multihom in Schmelzkategorien 3004

18.1.5 Trennschmelzkategorien 3009

18.1.6 Schmelzfunktoren 3012

18.2 Vorzeichenfragen und Homotopiekomplexe 3022

18.2.1 Twist und Superisierung 3022

18.2.2 Monoide, Bimonoide und ihre Moduln 3030

18.2.3 Schmelzkategorie der Komplexe 3036

18.2.4 Angereicherte Schmelzkategorien 3037

18.2.5 Homotopiekategorie der Komplexe 3043

18.3 Mehr zu Schmelzkategorien 3047

18.3.1 Moduln und Komoduln 3047

18.3.2 Cap-Produkt 3053

18.3.3 Bimonoide und Hopfobjekte 3058

18.3.4 Starrheit 3063

18.3.5 Terminologische Experimente* 3068

18.4 Bezug zur Homologietheorie 3072

18.4.1 Homologie als Schmelzfunktor 3072

18.4.2 Kohomologie als Trennfunktor 3079
18.4.3 Cup und cap für singuläre Ketten* 3084
18.5 Danksagung 3087

18.1 Kategorielle Produktstrukturen

18.1.1 Schmelzkategorien

18.1.1.1 (**Motivation**). Gegeben Vektorräume M, N, L über einem Körper k ist es nicht schwer, natürliche Isomorphismen $L \otimes (M \otimes N) \tilde{\to} (L \otimes M) \otimes N$ und $M \otimes N \tilde{\to} N \otimes M$ und $k \otimes M \tilde{\to} M$ und $M \otimes k \tilde{\to} M$ und $\mathrm{Hom}(L \otimes M, N) \tilde{\to} \mathrm{Hom}(L, \mathrm{Hom}(M, N))$ anzugeben. Dasselbe gilt für Moduln über einem beliebigen Kring k. Dasselbe gilt für Kettenkomplexe und für Komplexe von Moduln über einem beliebigen Kring k und für deren Homotopiekategorien und für deren „derivierte Kategorien“, die wir noch gar nicht kennengelernt haben. Um mit diesen ganzen Konstruktionen und vielen weiteren komplizierteren Konstruktionen derselben Bauart rein formal arbeiten zu können, müssen wir auch die Verträglichkeiten zwischen obigen natürlichen Isomorphismen formalisieren, etwa die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
 & (M \otimes N) \otimes L \arrow[dr] & \\
L \otimes (M \otimes N) \arrow[ur] \arrow[d] & & M \otimes (N \otimes L) \arrow[d] \\
(L \otimes M) \otimes N \arrow[dr] & & (N \otimes L) \otimes M \\
 & N \otimes (L \otimes M) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

In diesem Diagramm sind alle Pfeile abwechselnd als Spezialfälle unserer natürlichen Isomorphismen von eben zu verstehen. Es ist durchaus möglich, eine vollständige Liste der benötigten Verträglichkeiten anzugeben. Das führt, wenn man das Hom erst einmal außen vor läßt, zur Definition der „symmetrischen monoidalen Kategorien“. Die „Vollständigkeit“ der fraglichen Liste von Verträglichkeiten wird dabei formalisiert im „Kohärenzsatz von MacLane“. Wir wählen im folgenden einen anderen Zugang zu diesem Themenkomplex über „Schmelzkategorien“ alias „Multikategorien“ alias „gefärbte Operaden“, der mir flexibler und besser zugänglich scheint. Das folgende ist ein Versuch, diesem Formalismus zu helfen, insoweit erwachsen zu werden, daß sich die Formeln um sich selber kümmern und man ihnen nicht in jedem Einzelfall und für jedes Vorzeichen hinterherrennen muß.

18.1.1.2 (**Multilineare Abbildungen als Beispiel**). Gegeben $r \geq 0$ und Vektorräume $V_1, \ldots, V_r, W$ über ein- und demselben Körper betrachten wir die Menge

aller multilinearen Abbildungen $V_1 \times \ldots \times V_r \to W$. Wenn man r spezifizieren will, nennt man sie r-lineare Abbildungen. Üblicherweise heißen 1-lineare Abbildungen linear und 2-lineare Abbildungen bilinear. Im Fall $r = 0$ verstehen wir unter einer 0-linearen Abbildung einen Vektor aus W und sprechen in diesem Kontext auch von einer **leerlinearen Abbildung**. Gegeben weitere multilineare Abbildungen $U_{i,1} \times \ldots \times U_{i,r(i)} \to V_i$, wieder mit $r(i) \geq 0$, können wir in offensichtlicher Weise eine multilineare Abbildung vom Produkt der $U_{i,j}$ nach W erklären, die wir die „Multiverknüpfung" unserer multilinearen Abbildungen nennen. In der folgenden Definition des Begriffs einer „Schmelzkategorie" wird diese Struktur formalisiert. Sie ist in der Mathematik allgegenwärtig. Moduln über Kringen, Komplexe von abelschen Gruppen, Vektorbündel auf topologischen Räumen, glatte Vektorbündel auf Mannigfaltigkeiten, Darstellungen von Gruppen oder Liealgebren und abelsche Garben auf topologischen Räumen sind nur eine kleine Auswahl relevanter Schmelzkategorien. Das fundamentale Beispiel ist für uns erst einmal die Schmelzkategorie der Mengen mit Funktionen von mehreren Variablen alias „Multiabbildungen" als Verschmelzungen. Im weiteren Verflauf wird sich jedoch erweisen, daß es so fundamental gar nicht ist, sondern seinerseits aus der „banalen Trennkategorie" zur Kategorie der Mengen durch Dualisieren hervorgeht, aber alles zu seiner Zeit.

18.1.1.3. Unter einer **Familie** von Elementen einer Menge $\mathcal{M}$ verstehen wir eine Abbildung von einer Menge nach $\mathcal{M}$. Vielfach verwendet man für eine Familie die Notation $(A_i)_{i \in I}$. Formal meint man damit eine Abbildung $A : I \to \mathcal{M}$, $i \mapsto A_i$. Gegeben eine Familie $A : I \to \mathcal{M}$ bezeichnen wir im folgenden mit $\bar{A}$ ihren Definitionsbereich alias ihre Indexmenge, also die Menge I. Die auf eine Teilmenge $K \subset I$ eingeschränkte Familie notieren wir $A|_K$ und unterscheiden für $i \in I$ zwischen der einelementigen Familie $A|_{\{i\}}$ und Element Objekt A_i. Eine Familie mit einelementiger Indexmenge heiße eine **Einsfamilie**. Eine Familie mit endlicher Indexmenge heiße eine **Kleinfamilie**.

Definition 18.1.1.4. Eine **Schmelzkategorie** ist ein Datum bestehend aus:

a. Einer Menge $\mathcal{M}$ von **Objekten**. Endliche Familien von Objekten nennen wir gemäß der in 18.1.1.3 eingeführten Terminologie **Objektkleinfamilien**;

b. Für jede Objektkleinfamilie A und jedes Objekt Y einer Menge $\mathcal{M}(A, Y)$ von **Verschmelzungen**;

c. Für je zwei Objektkleinfamilien A, B und jedes Objekt Z und jede Abbildung $\varphi : \bar{A} \to \bar{B}$ zwischen den Indexmengen unserer Objektkleinfamilien einer Abbildung, der **Multiverknüpfung von Verschmelzungen längs** φ

$$\left(\prod_{j \in \bar{B}} \mathcal{M}(A|_{\varphi^{-1}(j)}, B_j) \right) \times \mathcal{M}(B, Z) \to \mathcal{M}(A, Z)$$

derart, daß unsere Multiverknüpfungen **multiunitärassoziativ** sind in einem Sinne, für dessen Erklärung ich etwas weiter ausholen muß. Wir bilden dafür einen Köcher mit Verknüpfung

$$\mathcal{M}^{\curlyvee}$$

mit Objektkleinfamilien aus $\mathcal{M}$ als Ecken und Pfeilen $A \to B$ gegeben durch beliebige Paare $(\varphi, (f_j)_{j \in \bar{B}})$ bestehend aus einer Abbildung $\varphi : \bar{A} \to \bar{B}$ zwischen den Indexmengen und einem Tupel $(f_j)_{j \in \bar{B}}$ von Verschmelzungen $f_j \in \mathcal{M}(A|_{\varphi^{-1}(j)}, B_j)$ und der offensichtlichen durch unsere Multiverknüpfung von Verschmelzungen erklärten Verknüpfung von Pfeilen. Wir fordern dann als letztes Axiom, daß dieser Köcher mit Verknüpfung $\mathcal{M}^{\curlyvee}$ eine Kategorie sein soll. Es ist diese Eigenschaft unserer Multiverknüpfungen, die ich **multiunitärassoziativ** nennen will.

18.1.1.5. Verschmelzungen, die von einer Objektfamilie mit r-elementiger Indexmenge ausgehen, nennen wir **r-Verschmelzungen** und insbesondere **Einsverschmelzungen** im Fall $r = 1$ sowie **Zweiverschmelzungen** im Fall $r = 2$. Die von der leeren Objektfamilie ausgehenden Verschmelzungen, also die 0-Verschmelzungen, nennen wir **Leerverschmelzungen**, um den Begriff einer „Nullverschmelzung“ zu vermeiden, der im Fall einer zusätzlichen „additiven Struktur“ leicht mißverstanden werden könnte.

Beispiel 18.1.1.6. Wie bereits erwähnt ist das fundamentale Beispiel für uns vorerst die **kartesische Schmelzkategorie der Mengen**

$$\mathrm{kEns}$$

mit Funktionen von mehreren Variablen alias „Multiabbildungen“ als Verschmelzungen. Eine Leerverschmelzung in eine Menge Z ist insbesondere eine Abbildung des leeren Produkts nach Z und kann identifiziert werden mit einem Element von Z. Wenn wir es genau nehmen wollen, müssen wir erst ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ wählen und dürfen erst dann die Schmelzkategorie $\mathfrak{U}\mathrm{kEns}$ aller Mengen $X \in \mathfrak{U}$ betrachten, weil nur dann die Gesamtheit der Objekte selbst wieder eine Menge ist. Diese Feinheiten will ich im folgenden in der Notation nicht sichtbar machen und denke mir vorerst ein festes Universum $\mathfrak{U}$, aus dem die Grundmengen der Objekte unserer konkreten Beispiele jeweils kommen sollen. Unsere nächsten Beispiele leiten sich davon ab, indem wir statt Mengen „Mengen mit Zusatzstrukturen“ betrachten und „mit diesen Zusatzstrukturen in geeigneter Weise verträgliche Multiabbildungen“. So erklären wir etwa die **Schmelzkategorie der Vektorräume**, indem wir als Objekte alle Vektorräume über einem vorgegebenen Körper k nehmen und als Verschmelzungen alle multilinearen Abbildungen und insbesondere eine Leerverschmelzung in einen Vektorraum W als ein Element von W verstehen oder ganz pedantisch eine Abbildung der einpunktigen Menge

nach W. Die Multiverknüpfungen sind die von der kartesischen Schmelzkategorie der Mengen induzierten. Die so entstehende Schmelzkategorie notieren wir

$$\mathrm{Mod}_k$$

Vorschau 18.1.1.7. Bei der weiteren Entwicklung der Theorie 22.2.1.16 werden wir sehen, daß unsere kartesische Schmelzkategorie der Mengen so fundamental gar nicht ist, sondern ihrerseits durch „Invertieren“ aus der noch fundamentaleren „banalen Trennkategorie der Mengen“ hervorgeht, aber alles zu seiner Zeit.

Ergänzung 18.1.1.8. Die Definition bliebe sinnvoll, wenn wir darin unendliche Objektfamilien zuließen. Diese Allgemeinheit will ich jedoch vermeiden, solange ich keine überzeugenden Anwendungen kenne. Um mengentheoretischen Bedenken vorzubeugen, mag man als Indexmengen nur gewisse endliche Mengen zulassen wollen, etwa nur Elemente des kleinsten Universums, das die leere Menge als Element enthält. So genau werden wir es aber in diesem Text nicht nehmen.

18.1.1.9. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ nennen wir die in der Definition beschriebene Kategorie $\mathcal{M}^\Upsilon$ die **Familienkategorie** unserer Schmelzkategorie. Im Fall einer Einsfamilie B bestehend aus einem einzigen Objekt B_* werden wir die offensichtlichen Bijektionen

$$\mathcal{M}^\Upsilon(A,B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(A,B_*)$$

in Notation und Sprache im weiteren als Gleichheiten betrachten. Wir erklären den **Indexfunktor** $\mathcal{M}^\Upsilon \to \mathrm{Ens}$ durch die Vorschrift, daß er jeder Objektkleinfamilie A ihre Indexmenge $\bar{A}$ zuordnet und jedem Morphismus $f : A \to B$ die zugehörige Abbildung $\bar{f} := \varphi : \bar{A} \to \bar{B}$ der Indexmengen. Die Menge der Morphismen über einer festen Abbildung $\varphi : \bar{A} \to \bar{B}$ notieren wir $\mathcal{M}^\Upsilon_\varphi(A,B)$.

18.1.1.10. Es gibt in unserer Familienkategorie genau einen Morphismus in die leere Objektfamilie, nämlich die Identität auf der leeren Objektfamilie, gegeben durch das einzige 0-Tupel von Leerverschmelzungen.

18.1.1.11. Gegeben Objektkleinfamilien $A = (A_i)_{i\in I}$ und $B = (B_j)_{j\in J}$ sowie eine Abbildung $\varphi : I \to J$ und Verschmelzungen $f_j \in \mathcal{M}(A|_{\varphi^{-1}(j)}, B_j)$ notieren wir den zugehörigen Morphismus $(\varphi, (f_j)_{j\in\bar{B}})$ der Familienkategorie von nun an

$$(\varphi, \Upsilon(f_j))$$

und sagen, er entstehe durch **Vertupeln** oder ausführlicher **Υ-Vertupeln** aus den Verschmelzungen f_j.

18.1.1.12. Eine durch eine einelementige Indexmenge indizierte Objektfamilie nennen wir eine **Einsfamilie**. Die Identität id_A in der Familienkategorie auf einer Einsfamilie entspricht einer Einsverschmelzung $\mathrm{id}_A \in \mathcal{M}(A, A_*)$, die wir die

Identitätsverschmelzung nennen. Ich will kurz begründen, warum die Identität in der Familienkategorie auf einer beliebigen Objektkleinfamilie B durch das Vertupeln der Identitätsverschmelzungen ihrer Objekte gegeben sein muß, in Formeln

$$\mathrm{id}_B = (\mathrm{id}_{\bar{B}}, \Upsilon(\mathrm{id}_{B_j})_{j\in\bar{B}})$$

In der Tat können wir in der Familienkategorie diejenige Unterkategorie betrachten, bei der wir nur solche Morphismen zulassen, die unter dem Indexfunktor zu Bijektionen werden. In dieser Unterkategorie ist es klar, daß unser Tupel von Identitätsverschmelzungen die Identität sein muß. Damit muß unser Tupel aber auch in der ursprünglichen Kategorie die Identität gewesen sein.

18.1.1.13. Gegeben eine Objektkleinfamilie $B : J \to \mathcal{M}$ und eine Bijektion $\varphi : I \xrightarrow{\sim} J$ erhalten wir durch das Vertupeln von Identitätsverschmelzungen in der Familienkategorie $\mathcal{M}^\Upsilon$ einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\hat{\varphi} : (B \circ \varphi) \xrightarrow{\sim} B$$

Wir nennen ihn die **Umindizierung mit** φ. Für Umindizierungen gelten die Formeln $\hat{\varphi}\circ\hat{\psi} = (\varphi\circ\psi)^\wedge$ und $\mathrm{id}^\wedge = \mathrm{id}_B$ und weitere offensichtliche Verträglichkeiten zwischen dem Verknüpfen und dem Vertupeln, die ich hier nicht ausschreibe.

18.1.1.14. Im Spezialfall identischer Indexmengen $J = I$ und unter der Annahme $B = B \circ \varphi$ muß unsere Umindizierung $\hat{\varphi} : B \xrightarrow{\sim} B$, wenn $\varphi : I \xrightarrow{\sim} I$ nicht die Identität ist, keineswegs die Identität sein. Zum Beispiel muß ja eine bilineare Abbildung $b : V \times V \to W$ keineswegs symmetrisch sein und im allgemeinen gilt $b \neq b \circ \hat{\tau}$ für τ die nichttriviale Permutation einer hier nicht explizit notierten zweielementigen Indexmenge.

18.1.1.15. Im Fall einer Einsfamilie A von Objekten einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ hängt die Menge $\mathcal{M}(A, Y)$ bis auf eindeutige durch das Vorschalten der einzig möglichen Umindizierungen gegebene Bijektionen nur vom einzigen Element A_* unserer Einsfamilie ab. Gegeben zwei Objekte $X, Y \in \mathcal{M}$ notieren wir

$$\mathcal{M}(X, Y)$$

die bis auf eindeutige Bijektion wohlbestimmte Menge aller Verschmelzungen $\mathcal{M}(A, Y)$ einer und jeder Einsfamilie A mit einzigem Objekt X nach Y. Zusammen mit der offensichtlichen Verknüpfung erhalten wir so eine Kategorie mit Objektmenge $\mathcal{M}$. Wir nennen sie die **einfache Kategorie** zu unserer Schmelzkategorie und notieren sie $\mathcal{M}$ oder auch

$$\mathrm{E}(\mathcal{M})$$

und nennen ihre Morphismen die **Morphismen unserer Schmelzkategorie**.

18.1.1.16 (**Notationsfragen**). Im Kontext von Schmelzkategorien verwende ich das Symbol $\curlyvee$ als „Tupeltrenner“ für Objektkleinfamilien und zur Beschreibung von Morphismen der Familienkategorie. Das hat den didaktischen Vorteil, uns daran zu erinnern, daß wir uns im Kontext einer Schmelzkategorie bewegen. Wir verwenden im Kontext von Schmelzkategorien insbesondere die Notation

$$X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r$$

für die durch $\{1, \ldots, r\}$ indizierte Objektfamilie, die durch $i \mapsto X_i$ gegeben wird. Auch ohne die Indizes steht $X \curlyvee Y \curlyvee X$ etwa für die durch $\{1, 2, 3\}$ indizierte Objektfamilie mit $1 \mapsto X, 2 \mapsto Y$ und $3 \mapsto X$ und selbst für $X_2 \curlyvee X_1$ sei hiermit vereinbart, daß es als die durch die Menge $\{1, 2\}$ indizierte Objektfamilie mit $1 \mapsto X_2, 2 \mapsto X_1$ zu interpretieren ist. Die leere Objektfamilie einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ notieren wir $\curlyvee = \curlyvee_{\mathcal{M}}$ und die Menge der Leerverschmelzungen in ein Objekt Y dementsprechend

$$\mathcal{M}(\curlyvee, Y)$$

Gegeben eine Objektfamilie $B = B_1 \curlyvee \ldots \curlyvee B_r$ und ein Objekt $Y \in \mathcal{M}$ schreiben wir statt $f \in \mathcal{M}(B, Y)$ auch $f : B_1 \curlyvee \ldots \curlyvee B_r \to_{\mathcal{M}} Y$ oder $f : B_1 \curlyvee \ldots \curlyvee B_r \to Y$.

18.1.1.17. Für Leerverschmelzungen werden wir oft statt $y : \curlyvee \to_{\mathcal{M}} Y$ auch $y \in_{\mathcal{M}} Y$ schreiben oder, wenn wir die Schmelzkategorie nicht ausschreiben wolen, $y \in_{\curlyvee} Y$. Gegeben $b_i \in_{\curlyvee} B_i$ und f wie oben kann man dann schreiben

$$f \circ (b_1 \curlyvee \ldots \curlyvee b_r) = f(b_1, \ldots, b_r) \in_{\mathcal{M}} Y$$

18.1.1.18 (**Notationsfragen**). Manchmal verwenden wir die Notation $B \curlyvee T$ für die „um ein Objekt T erweiterte“ Objektkleinfamilie B. Haben wir etwa $B = (B_j)_{j \in J}$, so vereinbaren wir für

$$B \curlyvee T$$

die Indexmenge $(\{1\} \times J) \sqcup \{2\}$ mit $(1, j) \mapsto B_j$ und $2 \mapsto T$ als präzise Beschreibung der Familie $B \curlyvee T$. Manchmal verwenden wir die Notation $A \curlyvee B$ auch für die „disjunkte Vereinigung“ zweier Objektkleinfamilien. Haben wir etwa $A = (A_i)_{i \in I}$ und $B = (B_j)_{j \in J}$, so vereinbaren wir für

$$A \curlyvee B$$

die Indexmenge $(\{1\} \times I) \sqcup (\{2\} \times J)$ mit $(1, i) \mapsto A_i$ und $(2, j) \mapsto B_j$ als präzise Beschreibung der Familie $A \curlyvee B$. Der Leser muß nicht selten aus dem Kontext erschließen, welches Symbol eine Objektfamilie meint und welches ein Objekt. Vielfach sind die einzelnen Objekte dann die Symbole mit Indizes oder mit Buchstaben aus dem hinteren Teil des Alphabets und Familien werden mit den Buchstaben A, B, C, D bezeichnet.

18.1.1.19. Seien $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie und $(\varphi, \curlyvee(f_j)) : A \to B$ ein Morphismus der Familienkategorie $\mathcal{M}^{\curlyvee}$. Steht uns eine ausgezeichnete Anordnung der Indexmenge $\bar{B}$ zur Verfügung, haben wir etwa $\bar{B} = \{1, \ldots, r\}$, so notieren wir den zugehörigen Morphismus der Familienkategorie auch

$$(\varphi, \curlyvee(f_j)) = (\varphi, f_1 \curlyvee \ldots \curlyvee f_r)$$

oder ähnlich. Steht uns zusätzlich auch noch eine ausgezeichnete Anordnung der Indexmenge $\bar{A}$ zur Verfügung, so verwenden wir im Fall einer monoton wachsenden Indexabbildung φ weiter die abkürzende Notation

$$(\varphi, g_1 \curlyvee \ldots \curlyvee g_r) = g_1 \curlyvee \ldots \curlyvee g_r$$

Von einer 2-Verschmelzung $m : X \curlyvee X \to X$ können wir zum Beispiel die **Assoziativität** fordern als die Identität $m \circ (m \curlyvee \mathrm{id}) = m \circ (\mathrm{id} \curlyvee m)$ von 3-Verschmelzungen $X \curlyvee X \curlyvee X \to X$. Die zugrundeliegenden Indexabbildungen können dabei leicht erraten werden.

18.1.1.20 (**Diskussion der Notation**). Gegeben $r \in \mathbb{N}$ verwenden wir die Notation $[\![r]\!] := \{1, 2, \ldots, r\}$. Bei der Diskussion simplizialer Strukturen verwendet man meist $[r] := \{0, 1, 2, \ldots, r\}$. Im Zusammenhang mit Schmelzkategorien spielt jedoch auch die leere Familie eine wichtige Rolle. Ich führe die Notation $[\![r]\!]$ ein, um nicht mit $\emptyset = [-1]$ arbeiten zu müssen.

18.1.1.21. Unter einer **monotonen Schmelzkategorie** verstehen wir ein analoges Datum, bei dem wir in den Axiomen die Vorgabe von Verschmelzungen nur für Objektkleinfamilien mit ausgezeichneter Anordnung ihrer Indexmenge fordern und Multiverknüpfungen nur längs monotonen Indexabbildungen erklärt sind. Wir konstruieren zu jeder Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ in offensichtlicher Weise eine monotone Schmelzkategorie

$$\mathcal{M}^{\mathrm{mon}}$$

und nennen sie die **Monotonisierung von** $\mathcal{M}$.

18.1.1.22 (**Diskussion der Terminologie**). Eine Schmelzkategorie mit einem einzigen Objekt nennen wir eine **Operade** oder ausführlicher **Mengenoperade**. Eine monotone Schmelzkategorie mit einem einzigen Objekt nennen wir eine **monotone Mengenoperade**. In vielen Quellen erklärt man eine Operade „über einem Körper k“ als das, was wir eine „k-lineare Schmelzkategorie mit einem einzigen Objekt“ nennen werden. Der Begriff der Mengenoperade betont, daß keine derartigen Zusatzstrukturen implizit mit angenommen werden. Relevante Beispiele für Schmelzkategorien mit nur einem Objekt diskutieren wir in **??** folgende. Andere Quellen nennen unsere Operaden „symmetrische Operaden“ und unsere monotonen Operaden schlicht „Operaden“. Wieder andere Quellen wie etwa [Lur17] bezeichnen Schmelzkategorien als „gefärbte Operaden“ oder „Multikategorien“ und

unsere Verschmelzungen als „Multimorphismen“. Vielfach erklärt man zuerst den Begriff eines Operads als „monotones Operad“ und erklärt dann ein symmetrisches Operad als ein Operad zusammen mit Operationen symmetrischer Gruppen. Sie entsprechen bei uns dem Vorschalten der Umindizierungsisomorphismen. Das hat den Vorteil, daß die Verträglichkeiten, die man beim anderen Zugang von den Operationen der symmetrischen Gruppen zu fordern hat, in unserer Darstelllung bereits implizit durch die Multiunitärassoziativität der Verknüpfung gesichert ist.

Übungen

Übung 18.1.1.23. Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie. Man zeige, daß ein Morphismus $(\varphi, f_1 \curlyvee \ldots \curlyvee f_r)$ der Familienkategorie $\mathcal{M}^{\curlyvee}$ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn φ eine Bijektion ist und alle f_i Einsverschmelzungen, die Isomorphismen der zugehörigen einfachen Kategorie sind.

18.1.2 Beispiele für Schmelzkategorien

Beispiele 18.1.2.1. Hier eine kleine Auswahl relevanter Schmelzkategorien.

1. Die **kartesische Schmelzkategorie der Mengen** kEns mit Mengen als Objekten und **Multiabbildungen** alias Funktionen von mehreren Variablen als Verschmelzungen, wobei wir eine „Funktion in null Variablen“ als ein Element des Wertebereichs verstehen und so in Formeln eine ausgezeichnete Bijektion $\mathrm{kEns}(\curlyvee, X) \xrightarrow{\sim} X$ erhalten. Allgemeiner und präziser erklären wir in 18.1.2.12 die „kartesische Schmelzkategorie“ zu jeder Kategorie mit endlichen Produkten;

2. Abelsche Gruppen Ab mit multiadditiven Abbildungen;

3. Darstellungen von Gruppen oder Liealgebren;

4. Teilgeordnete Mengen mit ordnungsverträglichen Multiabbildungen φ, in Formeln $x_1 \leq y_1, \ldots, x_r \leq y_r \;\Rightarrow\; \varphi(x_1, \ldots, x_r) \leq \varphi(y_1, \ldots, y_r)$;

5. $\mathbb{Z}$-filtrierte abelsche Gruppen mit solchen multiadditiven Abbildungen, die ein Tupel von Elementen der Filtrierungsstufen $\leq p, \ldots, \leq q$ auf ein Element der Filtrierungsstufe $\leq (p + \ldots + q)$ abbilden;

6. $\mathbb{Z}$-graduierte abelsche Gruppen mit solchen multiadditiven Abbildungen, die ein Tupel von homogenen Elementen der Grade $p, \ldots, q$ auf ein homogenes Element vom Grad $p + \ldots + q$ abbilden;

7. Durch ein kommutatives Monoid $(\Gamma, +)$ indizierte Familien von Objekten $(M^\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ bilden ihrerseits einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}^\Gamma$ in natürlicher Weise, wie wir im folgenden genauer ausführen. Als Verschmelzungen $\varphi \in \mathcal{M}^\Gamma(A, Y)$ nehmen wir durch $\alpha \in \mathrm{Ens}(\bar{A}, \Gamma)$ indizierte Tupel von Verschmelzungen

$$\varphi_\alpha \in \mathcal{M}((A_i^{\alpha(i)})_{i\in\bar{A}}, Y^{\mathrm{sum}(\alpha)})$$

mit der Notation $\mathrm{sum}(\alpha) = \sum_{i\in\bar{A}} \alpha(i)$. Die $\mathcal{M}$-Verschmelzung φ_α nennen wir den α-**Anteil** unserer $\mathcal{M}^\Gamma$-Verschmelzung φ. Für die Leerverschmelzungen erhalten wir insbesondere $\mathcal{M}^\Gamma(\Upsilon, (M^\gamma)) := \mathcal{M}(\Upsilon, M^0)$. Die Multiverknüpfung ist die offensichtliche. Unsere Schmelzkategorie der $\mathbb{Z}$-graduierten abelschen Gruppen erhalten wir zurück als $\mathrm{Ab}^\mathbb{Z}$;

8. Abelsche Garben auf topologischen Räumen;

9. Vektorbündel auf einem vorgegebenen topologischen Raum mit „multilinearen Morphismen von einer Kleinfamilie von Bündeln in ein weiteres Bündel“ als Verschmelzungen;

10. Glatte Vektorbündel auf einer vorgegebenen Mannigfaltigkeit mit „multilinearen glatten Morphismen von einer Kleinfamilie von Bündeln in ein weiteres Bündel“ als Verschmelzungen.

Vorschau 18.1.2.2 (**Superisierte abelsche Gruppen**). Für uns relevant sind insbesondere die Schmelzkategorie sAb der „superisierten abelschen Gruppen“ und ihre Varianten sgAb sowie deren Verwandte Ket und Hot, die wir in 18.2.1.18 folgende noch ausführlich besprechen werden. Objekte von sAb sind $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierte abelsche Gruppen

$$M = M^{\bar{0}} \oplus M^{\bar{1}}$$

Eine Verschmelzung $\varphi \in \mathrm{sAb}\big((M_i)_{i\in I}, N\big)$ ist eine Vorschrift, die jeder Anordnung ω von I eine multiadditive Abbildung $\varphi_\omega \in \mathrm{Ab}^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\big((M_i)_{i\in I}, N\big)$ zuordnet, die homogen ist vom Grad $\bar{0}$, so daß für je zwei Anordnungen ω, η von I und jedes Tupel $(v_i)_{i\in I}$ von homogenen Elementen $v_i \in M_i$ gilt

$$\varphi_\omega\big((v_i)_{i\in I}\big) = \pm\varphi_\eta\big((v_i)_{i\in I}\big)$$

mit dem Signum derjenigen Permutation als Vorzeichen, die die vom Übergang von ω zu η auf den ungeraden Elementen $v_i \in M_i^{\bar{1}}$ induzierte Umordnung beschreibt. Als Multiverknüpfung nehmen wir die normale Multiverknüpfung multiadditiver Abbildungen bei „passender Wahl“ der Anordnungen und verweisen auf 18.2.1.18 für eine genauere Beschreibung und die Diskussion von Fragen der

Wohldefiniertheit und Multiunitärassoziativität. Das ist die Stelle, an der die Vorzeichenfragen der homologischen Algebra ein- für allemal erledigt werden. Salopp gesprochen ist eine Verschmelzung von superisierten abelschen Gruppen also ein etwas, das bei jeder Wahl einer Anordnung der Ausgangsobjekte die Gestalt einer vom Grad Null homogenen multiadditiven Abbildung annimmt.

Beispiel 18.1.2.3 (**Beliebige Kategorie als Schmelzkategorie**). Jede Kategorie $\mathcal{C}$ können wir als Schmelzkategorie auffassen, indem wir als Verschmelzungen Tupel von Morphismen nehmen, in Formeln

$$\mathcal{C}(B_1 \curlyvee \ldots \curlyvee B_r, X) := \prod_{i=1}^{r} \mathcal{C}(B_i, X)$$

Die Multiverknüpfung von Verschmelzungen ist dabei die Offensichtliche. Ich nenne diese Struktur die **banale Struktur einer Schmelzkategorie auf** $\mathcal{C}$ und notiere diese Schmelzkategorie statt $\mathcal{C}$ auch ausführlicher $\curlyvee\mathcal{C}$ oder $\mathrm{ban}^{\curlyvee}(\mathcal{C})$. Die Familienkategorie der banalen Schmelzkategorie zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ notiere ich vereinfachend $\mathcal{C}^{\curlyvee}$. Umgekehrt nenne ich eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ **banal**, wenn es in jedes Objekt nur genau eine Leerverschmelzung gibt und wir jeweils Bijektionen

$$\mathcal{M}(B, X) \xrightarrow{\sim} \prod_{j \in \bar{B}} \mathcal{M}(B_j, X)$$

erhalten durch geeignetes Vorschalten von Leerverschmelzungen in alle B_j außer in B_i an der i-ten Stelle.

18.1.2.4. Man beachte, daß die Morphismen einer banalen Schmelzkategorie zwar Tupel sind, aber nicht als $\curlyvee$-Tupel mißverstanden oder notiert werden dürfen.

18.1.2.5. Jede Kategorie $\mathcal{C}$ können wir als „Schmelzkategorie mit nur Einsverschmelzungen“ auffassen. Diese Struktur nennen wir die **triviale Schmelzkategorie zu** $\mathcal{C}$.

18.1.2.6. Unter einer **Schmelzunterkategorie** einer Schmelzkategorie verstehen wir die Vorgabe einer Teilmenge der Menge der Objektmenge und von Teilmengen der Mengen von Verschmelzungen zwischen diesen Objekten, die stabil sind unter Multiverknüpfung und alle Identitätsverschmelzungen zu Objekten aus unserer Teilmenge der Menge der Objekte enthalten. Enthält eine Schmelzunterkategorie alle Verschmelzungen der ursprünglichen Schmelzkategorie zwischen den Objekten der Schmelzunterkategorie, so nennen wir sie eine **volle Schmelzunterkategorie**.

Beispiel 18.1.2.7. Jede Schmelzkategorie hat die Unterschmelzkategorie, bei der wir dieselben Einsverschmelzungen nehmen aber sonst nur leere Verschmelzungsmengen. Jede Schmelzkategorie enthält des weiteren als Unterschmelzkategorie

auch die Schmelzkategorie, bei der wir dieselben Leerverschmelzungen nehmen aber sonst nur leere Verschmelzungsmengen, oder dieselben Einsverschmelzungen und Leerverschmelzungen aber sonst nur leere Verschmelzungsmengen. Alle diese Unterschmelzkategorien scheinen mir nicht von großem Nutzen zu sein.

18.1.2.8 (**Quotienten von Schmelzkategorien**). Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie und sei auf allen ihren Mengen von Verschmelzungen eine Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben derart, daß jede Multiverknüpfung äquivalenter Verschmelzungen äquivalente Verschmelzungen liefert, in Formeln

$$(f \sim f', g_1 \sim g_1', \ldots, g_r \sim g_r') \Rightarrow f \circ (\psi, g_1 \curlyvee \ldots \curlyvee g_r) \sim f' \circ (\psi, g_1' \curlyvee \ldots \curlyvee g_r')$$

So erhalten wir eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}/\sim$ mit denselben Objekten und Äquivalenzklassen von Verschmelzungen als neuen Verschmelzungen und der koinduzierten Multiverknüpfung in offensichtlicher Weise. Wir nennen solch eine Äquivalenzrelation eine **schmelzverträgliche Äquivalenzrelation**. Offensichtlich ist jeder Schnitt schmelzverträglicher Äquivalenzrelationen auf einer Schmelzkategorie auch selbst wieder eine schmelzverträgliche Äquivalenzrelation. Insbesondere können wir, wenn auf jeder Verschmelzungsmenge einer Schmelzkategorie eine Relation gegeben ist, die kleinste schmelzverträgliche Äquivalenzrelation betrachten, die alle diese Relationen erhält.

18.1.2.9. Um den Kopf zu entlasten, führe ich zusätzlich die zu Schmelzkategorien opponierten **Trennkategorien** ein. Sie unterscheiden sich nur dadurch, daß wir Verschmelzungen in der entgegengesetzten Reihenfolge notieren und sie „Trennungen“ nennen. Für eine Trennkategorie $\mathcal{T}$ und ein Objekt $T \in \mathcal{T}$ und eine Objektkleinfamilie B aus $\mathcal{T}$ fordern wir in diesem Fall also die Vorgabe einer Menge von **Trennungen**

$$\mathcal{T}(T, B)$$

und für diese Multiverknüpfungen. Bei Trennkategorien verwenden wir das Symbol $\curlywedge$ als Trenner. Gegeben $T, B_1, \ldots, B_r \in \mathcal{T}$ verwenden wir auch die Notation

$$f : T \to B_1 \curlywedge \ldots \curlywedge B_r$$

für so eine Trennung. Das leere Wort notieren wir in diesem Kontext $\curlywedge$ und schreiben $\mathcal{T}(T, \curlywedge)$ für die Menge der von einem Objekt T ausgehenden Leertrennungen. Die zugehörige **Familienkategorie** notieren wir $\mathcal{T}^{\curlywedge}$. Sie wird angeliefert mit einem ausgezeichneten Funktor $\mathcal{T}^{\curlywedge} \to \mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}}$, den wir wieder den **Indexfunktor** nennen. Analog erklären wir **monotone Trennkategorien**.

Beispiel 18.1.2.10 (**Beliebige Kategorie als Trennkategorie**). Jede Kategorie $\mathcal{C}$ können wir als Trennkategorie auffassen, indem wir als Trennungen schlicht Tupel von Morphismen betrachten, in Formeln

$$\mathcal{C}(X, B_1 \curlywedge \ldots \curlywedge B_r) := \prod_{i=1}^{r} \mathcal{C}(X, B_i)$$

Die Multiverknüpfung von Trennungen ist dabei die Offensichtliche. Ich nenne diese Struktur die **banale Struktur einer Trennkategorie auf** $\mathcal{C}$ und notiere diese Trennkategorie statt $\mathcal{C}$ auch ausführlicher $\curlywedge\mathcal{C}$ oder $\mathrm{ban}^{\curlywedge}(\mathcal{C})$. Die Familienkategorie der banalen Trennkategorie zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ notiere ich vereinfachend $\mathcal{C}^{\curlywedge}$. Analog wie bei Schmelzkategorien definieren wir auch **banale Trennkategorien**.

Beispiel 18.1.2.11 (**Opposition von Schmelzkategorien und Trennkategorien**). Zu jeder Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ erhalten wir in offensichtlicher Weise eine Trennkategorie $\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ mit „opponierten Verschmelzungen" als Trennungen. Zu jeder Trennkategorie $\mathcal{T}$ erhalten wir in offensichtlicher Weise eine Schmelzkategorie $\mathcal{T}^{\mathrm{opp}}$ mit „opponierten Trennungen" als Verschelzungen. Diese Konstruktionen sind zueinander invers und wir haben für eine beliebige Kategorie $\mathcal{C}$ offensichtlich $(\curlywedge\mathcal{C})^{\mathrm{opp}} = \curlyvee(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}})$.

Beispiel 18.1.2.12. Jede Kategorie $\mathcal{C}$ mit endlichen Produkten können wir mit der Struktur einer Schmelzkategorie versehen, indem wir Verschmelzungen als Morphismen aus Produkten erklären, in Formeln

$$\mathcal{C}(B_1 \curlyvee \ldots \curlyvee B_r, X) := \mathcal{C}(B_1 \times \ldots \times B_r, X)$$

Die Multiverknüpfung ist die Offensichtliche. Ich nenne diese Struktur die **kartesische Schmelzkategorie auf** $\mathcal{C}$ und verwende dafür die Notationen $\mathrm{k}\mathcal{C} = \mathrm{kart}(\mathcal{C})$. Die kartesische Schmelzkategorie der Mengen kEns hatten wir bereits in 18.1.2.1 als Beispiel angeführt.

Vorschau 18.1.2.13 (**Kartesische Schmelzkategorien durch Invertieren**). Wir werden zu jeder Trennkategorie mit „stabil universellen Trennungen" in 18.1.5.5 ihre „inverse Schmelzkategorie" einführen. Es erweist sich in dieser Terminologie, daß wir die kartesische Schmelzkategorie $\mathrm{kart}(\mathcal{C})$ durch Invertieren aus der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathcal{C}$ erhalten können, vergleiche 18.1.5.10.

Beispiel 18.1.2.14 (**Produkt von Schmelzkategorien**). Gegeben Schmelzkategorien $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ erklären wir ihr **Produkt**

$$\mathcal{M} \times \mathcal{N}$$

mit Paaren (M, N) als Objekten und Paaren von Verschmelzungen als Verschmelzungen und den offensichtlichen weiteren Daten.

Beispiel 18.1.2.15 (**Multiäquivariante Schmelzkategorie der Ω-Mengen**). Gegeben eine Menge Ω erhalten wir auf der Gesamtheit aller Ω-Mengen eine Struktur als Schmelzkategorie durch die Vorschrift, daß wir unter einer Verschmelzung $X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \to Y$ eine Abbildung $f : X_1 \times \ldots \times X_r \to Y$ verstehen mit

$$f(ax_1, \ldots, x_r) = \ldots = f(x_1, \ldots, ax_r) = af(x_1, \ldots, x_r)$$

für alle $a \in \Omega$ und $x_i \in X_i$ und alle i mit $1 \leq i \leq r$, die also in Worten „äquivariant ist in jeder Variable“. Wir nennen sie die **multiäquivariante Schmelzkategorie der Ω-Mengen** und notieren sie

$$\mathrm{Ens}_{\Omega\Upsilon'}$$

Ihre Verschmelzungen nennen wir **multiäquivariante Multiabbildungen**. Für ihre Leerverschmelzungen gilt $\mathrm{Ens}_{\Omega\Upsilon'}(\Upsilon, Y) \xrightarrow{\sim} Y$ vermittels $f \mapsto f(*)$. Das kleine Strichlein bei Υ' ist ein „Freiheitsstrichlein“. Wenn wir es weglassen, wird meist Ω ein Monoid sein und wir betrachten nur solche Ω-Mengen X, für die die Abbildung $\Omega \times X \to X$ eine Operation des Monoids Ω ist.

18.1.2.16. Dasselbe geht auch allgemeiner. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ und ein Objekt $\Omega \in \mathcal{M}$ erklären wir einen **Ω-Objektmodul** oder abkürzend **Ω-Modul** als ein Paar (X, μ) aus einem Objekt $X \in \mathcal{M}$ mit einer Verschmelzung $\mu = \mu_X : \Omega \,\Upsilon\, X \to X$ und bilden wie zuvor die **multiäquivariante Schmelzkategorie der Ω-Moduln**

$$\mathcal{M}_{\Omega\Upsilon'}$$

Zweiverschmelzungen $\varphi : X \,\Upsilon\, Y \to Z$ von derartigen Ω-Moduln etwa erklären wir als Zweiverschmelzungen in $\mathcal{M}$ derart, daß die drei offensichtlichen Zweiverschmelzungen $\Omega \,\Upsilon\, X \,\Upsilon\, Y \to Z$ übereinstimmen, in Formeln

$$\varphi \circ (\mu_x \,\Upsilon\, \mathrm{id}_Y) = \varphi \circ (\mathrm{id}_X \,\Upsilon \mu_Y) = \mu_Z \circ (\mathrm{id}_\Omega \,\Upsilon \varphi)$$

Hier habe ich darauf verzichtet, die zugrundeliegenden Abbildungen der Indexmengen näher zu spezifizieren, weil sie auch so schon offensichtlich sind, da wir in diesem Fall die beteiligten Objekte mit paarweise verschiedenen Buchstaben notieren konnten.

Vorschau 18.1.2.17. In 18.3.1.24 führen wir Ω-Moduln in angereicherten Schmelzkategorien $\mathcal{M}/\mathcal{S}$ für Objekte $\Omega \in \mathcal{S}$ der anreichernden Schmelzkategorie ein und diskutieren in 18.3.1.27, inwiefern sie im Fall einer Selbstanreicherung $\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}/\mathcal{M}$ mit den eben in 18.1.2.16 erklärten Ω-Moduln zusammenfallen.

Beispiel 18.1.2.18. Gegeben eine abelsche Gruppe Ω identifiziert man $\mathrm{Ab}_{\Omega\Upsilon'}$ leicht mit der Schmelzkategorie aller Moduln über der Tensoralgebra $\mathrm{T}\Omega$. Multiäquivariante Schmelzkategorien von Moduln über „Abmonoiden“ diskutieren wir in 18.2.2.5 und über „Monoiden“ in 18.3.1.16 und notieren sie dann ohne das „Freiheitsstrichlein“ in unserer Notation für Objektmoduln.

Beispiel 18.1.2.19. Gegeben ein Kring k und ein k-Modul Ω ist ein Ω-Modul in unserem Sinne ein Paar (X, μ) bestehend aus einem k-Modul X und einer k-bilinearen Abbildung $\Omega \times X \to X$.

Vorschau 18.1.2.20. In 18.2.2.13 führen wir die „äquivariante Schmelzkategorie $\mathcal{M}_{C\curlyvee'}$ der C-Objektmoduln“ eines „Koabmonoids C einer Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$“ ein. Sie hat dieselben Objekte wie aber andere Verschmelzungen als unsere multiäquivariante Schmelzkategorie $\mathcal{M}_{C\curlyvee'}$.

18.1.2.21. Gegeben eine Trennkategorie $\mathcal{T}$ und ein Objekt $\Omega \in \mathcal{T}$ erklären wir opponiert einen **Ω-Objektkomodul von $\mathcal{T}$** als ein Paar (X, Δ) aus einem Objekt $X \in \mathcal{T}$ und einer Trennung $\Delta : X \to \Omega \curlywedge X$ und betrachten die **multiäquivariante Trennkategorie der Ω-Objektkomoduln**

$$\mathcal{M}_{\Omega\curlywedge'}$$

Übungen

Übung 18.1.2.22. In der Familienkategorie einer banalen Trennkategorie kann jeder Morphismus durch $\curlywedge$-Vertupeln und Verknüpfen erhalten werden aus Leertrennungen, Einstrennungen und Zweitrennungen der Gestalt $(\mathrm{id}, \mathrm{id}) : X \to X \curlywedge X$. Letztere nennen wir **Diagonalzweitrennungen**.

Übung 18.1.2.23. In der Familienkategorie einer banalen Trennkategorie zu einer Kategorie mit endlichen Produkten kann jeder Morphismus durch $\curlywedge$-Vertupeln und Verknüpfen erhalten werden aus Leertrennungen, Einstrennungen und Zweitrennungen der Gestalt $(\mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y) : X \times Y \to X \curlywedge Y$. Letztere nennen wir **Projektionszweitrennungen**. Diese Übung wird sich als ein Spezialfall von 18.1.3.24 erweisen.

Ergänzende Übung 18.1.2.24 (**Monotone Schmelzkategorie der Ω-Bimengen**). Gegeben eine Menge Ω verstehen wir unter einer **Ω-Bimenge** eine Menge X mit Abbildungen $\Omega \times X \to X$ und $X \times \Omega \to X$, die wir durch Hintereinanderschreiben notieren, so daß gilt $(\omega x)\eta = \omega(x\eta)$ für alle $\omega, \eta \in \Omega$ und $x \in X$. Die Ω-Bimengen werden zu einer monotonen Schmelzkategorie, wenn wir Verschmelzungen erklären als Abbildungen

$$\varphi : X_1 \times \ldots \times X_r \to Y$$

mit $\varphi(x_1, \ldots, x_i\eta, x_{i+1}, \ldots, x_r) = \varphi(x_1, \ldots, x_i, \eta x_{i+1}, \ldots, x_r)$ für alle i sowie $\varphi(\omega x_1, \ldots, x_r) = \omega\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ und $\varphi(x_1, \ldots, x_r\eta) = \varphi(x_1, \ldots, x_r)\eta$ für alle $x_i \in X_i$ und $\omega, \eta \in \Omega$. Leerverschmelzungen sind Abbildungen aus dem leeren Produkt $\{*\}$ alias Elemente $y = \varphi(*) \in Y$ mit $\omega y = y\omega$ für alle $\omega \in \Omega$.

Ergänzende Übung 18.1.2.25 (**Monotone Schmelzkategorie der Bimoduln**). Gegeben ein Ring R bilden die R-Bimoduln eine monotone Schmelzkategorie mit den $\mathbb{Z}$-multilinearen Verschmelzungen von R-Bimengen wie in 18.1.2.24 als Verschmelzungen.

18.1.3 Stabil universelle Verschmelzungen

Definition 18.1.3.1. Eine Verschmelzung $\kappa \in \mathcal{M}(A, T)$ in einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ heiße **universell**, wenn für jedes weitere Objekt $Y \in \mathcal{M}$ das Vorschalten von κ eine Bijektion

$$(\circ\kappa) : \mathcal{M}(T, Y) \tilde{\to} \mathcal{M}(A, Y)$$

induziert. Eine universelle Verschmelzung (κ, T) ist, wenn sie existiert, durch ihre Ausgangsfamilie A bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt. Wir sagen, eine Schmelzkategorie **habe universelle Verschmelzungen**, wenn es darin zu jeder Objektkleinfamilie eine universelle Verschmelzung gibt.

Definition 18.1.3.2. Eine Verschmelzung $\kappa \in \mathcal{M}(A, T)$ in einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ heiße **stabil universell**, wenn für jede Objektkleinfamilie $B \in \mathcal{M}^{\curlyvee}$ und jedes Objekt $Y \in \mathcal{M}$ das Vorschalten des Morphismus $\kappa \curlyvee \mathrm{id}$ der Familienkategorie eine Bijektion

$$(\circ(\kappa \curlyvee \mathrm{id})) : \mathcal{M}(T \curlyvee B, Y) \tilde{\to} \mathcal{M}(A \curlyvee B, Y)$$

zwischen den jeweiligen Mengen von Verschmelzungen induziert. Wir sagen, eine Schmelzkategorie **habe stabil universelle Verschmelzungen**, wenn es darin zu jeder Objektkleinfamilie eine stabil universelle Verschmelzung gibt.

18.1.3.3. Das Konzept einer stabil universellen Verschmelzung wird sich im folgenden als der wichtigere Begriff erweisen. Das Konzept einer universellen Verschmelzung sehe ich nur als didaktischen Zwischenschritt.

Ergänzung 18.1.3.4. Im Fall einer monotonen Schmelzkategorie muß die Eigenschaft „stabil universell“ sorgfältiger formuliert werden in der Weise, daß eine Verschmelzung $B \to T$ stabil universell ist, wenn für beliebige Objektworte $A, C \in$ und jedes Objekt $Y \in \mathcal{M}$ das Vorschalten des Morphismus $\mathrm{id} \curlyvee \kappa \curlyvee \mathrm{id}$ eine Bijektion $\mathcal{M}(A \curlyvee T \curlyvee C, Y) \tilde{\to} \mathcal{M}(A \curlyvee B \curlyvee C, Y)$ zwischen den jeweiligen Mengen von Verschmelzungen induziert.

Beispiel 18.1.3.5 (**Eine universelle aber nicht stabil universelle Verschmelzung**). Ändern wir die Schelzkategorie Mod_k der multilinearen Abbildungen von Vektorräumen über einem Körper k dahingehend ab, daß wir als Leerverschmelzungen nur die Nullvektoren zulassen, so ist eine universelle Leerverschmelzung in der so entstehenden Schmelzkategorie der Nullvektor im Nullvektorraum, aber diese ist nicht stabil universell.

18.1.3.6 (**Eigenschaften stabil universeller Verschmelzungen**). Offensichtlich ist jede stabil universelle Verschmelzung universell. Offensichtlich ist jede Multiverknüpfung stabil universeller Verschmelzungen wieder stabil universell. Eine Einsverschmelzung ist genau dann stabil universell, wenn sie in der zugehörigen einfachen Kategorie zu einem Isomorphismus wird.

Vorschau 18.1.3.7. In 18.1.4.9 lernen wir, daß in einer Schmelzkategorie mit „Multihom“ jede universelle Verschmelzung stabil universell ist. In 18.1.3.21 dürfen Sie zeigen, daß in einer Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen genau dann alle Verschmelzungen stabil universell sind, wenn jede Multiverknüpfung universeller Verschmelzungen wieder universell ist.

18.1.3.8 (**Notationen für stabil universelle Verschmelzungen**). Stabil universelle Verschmelzungen einer Objektkleinfamilie B in einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ notieren wir meist $(\kappa, \otimes B)$ und schreiben manchmal $\otimes_{\mathcal{M}}$ und für eine explizite Familie $B = (B_i)_{i \in I}$ auch $\bigotimes_{i \in I} B_i$ oder ausführlicher

$$\kappa = \kappa_B \in \mathcal{M}(B, \otimes B) = \mathcal{M}(B_1 \curlyvee \ldots \curlyvee B_r, B_1 \otimes \ldots \otimes B_r)$$

und nennen sie häufig **Tensorprodukte**. Jeder Morphismus $\phi \in \mathcal{M}^{\curlyvee}(C, B)$ der Familienkategorie von $\mathcal{M}$ induziert, wenn die entsprechenden stabil universellen Verschmelzungen von B und C existieren, in offensichtlicher Weise einen Morphismus $\otimes\phi : \otimes C \to \otimes B$ in der zugrundeliegenden einfachen Kategorie $\mathrm{E}(\mathcal{M})$. Hat unsere Schmelzkategorie stabil universelle Verschmelzungen, so liefert diese Konstruktion einen Funktor $\mathcal{M}^{\curlyvee} \to \mathrm{E}(\mathcal{M})$. Schließlich liefert jede stabil universelle Verschmelzung in der Wortkategorie durch das Vorschalten von Leerverschmelzungen eine Abbildung

$$\mathcal{M}(\curlyvee, B_1) \times \ldots \times \mathcal{M}(\curlyvee, B_r) \to \mathcal{M}(\curlyvee, B_1 \otimes \ldots \otimes B_r)$$

Auch diese Abbildung notieren wir meist mit demselben Symbol wir unsere Verschmelzung, im vorliegenden Fall also $(b_1, \ldots, b_r) \mapsto b_1 \otimes \ldots \otimes b_r$.

Beispiel 18.1.3.9. Im Fall der Schmelzkategorie der k-Vektorräume ist die kanonische multilineare Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_r \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$ in das Tensorprodukt aus der linearen Algebra stabil universell und die auf den Leerverschmelzungsmengen induzierte Abbildung ist schlicht ebendieselbe Abbildung aufgefaßt als Abbildung von Mengen, deren Effekt auf Elementen wir bereits in der linearen Algebra $(v_1, \ldots, v_r) \mapsto v_1 \otimes \ldots \otimes v_r$ notiert hatten. Eine universelle Leerverschmelzung ist speziell die Abbildung $\{*\} \to k$ mit $* \mapsto 1$. Analoges gilt für Moduln über einem beliebigen Kring k bis auf das Detail, daß wir in diesem Fall Tensorprodukte mit mehr als einem Faktor noch nicht eingeführt haben. Das soll in 18.1.3.17 nachgeholt werden.

18.1.3.10. Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie. Gegeben $M \in \mathcal{M}$ und $r \in \mathbb{N}$ notieren wir

$$M^{\curlyvee r} := M \curlyvee M \curlyvee \ldots \curlyvee M$$

die konstante Familie $\{1, \ldots, r\} \to \mathcal{M}$. Existiert eine stabil universelle Verschmelzung für diese Familie, so notieren wir sie $M^{\otimes r} := \otimes(M^{\curlyvee r})$ und nennen

sie die r**-te Tensorpotenz von** M und erhalten darauf mit Umindizierung nach 18.1.1.13 eine Rechtsoperation der Gruppe $\mathcal{S}_r$ aller Permutationen von $\{1, \ldots, r\}$. Gegeben eine endliche Menge I und eine konstante Familie $B : I \to \mathcal{M}$ erhalten wir allgemeiner durch Umindizierung 18.1.1.13 eine Rechtsoperation von $\mathrm{Ens}^\times(I)$ auf $\otimes B$.

18.1.3.11. Da nach 18.1.3.6 Multiverknüpfungen stabil universeller Verschmelzungen wieder stabil universell sind, ist für beliebige Objekte X, Y, Z einer Schmelzkategorie, für die die entsprechenden stabil universellen Verschmelzungen existieren, auch $\kappa \circ (\kappa \curlyvee \mathrm{id}) : X \curlyvee Y \curlyvee Z \to (X \otimes Y) \otimes Z$ eine stabil universelle Verschmelzung. Dasselbe gilt für $\kappa \circ (\mathrm{id} \curlyvee \kappa)$ und wir erhalten so Isomorphismen

$$(X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\sim} X \otimes Y \otimes Z \xrightarrow{\sim} X \otimes (Y \otimes Z)$$

Deren Verknüpfung heißt der **Assoziator**. Er wird in manchen Kontexten $\mathrm{ass} = \mathrm{ass}_{X,Y,Z}$ notiert.

18.1.3.12. Das Zielobjekt einer stabil universellen Leerverschmelzung, wenn es sie denn gibt, nennen wir das **Einsobjekt** oder kurz die **Eins** unserer Schmelzkategorie. Wir notieren es $\mathbb{I} = \mathbb{I}_{\mathcal{M}}$ und notieren die stabil universelle Leerverschmelzung

$$1 = 1_{\mathcal{M}} : \curlyvee \to \mathbb{I}$$

18.1.3.13. Für jedes Objekt X einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Eins gibt es genau eine Verschmelzung $\kappa : \mathbb{I} \curlyvee X \to X$ mit $\mathrm{id}_X = \kappa \circ (1 \curlyvee \mathrm{id}_X) : X \to \mathbb{I} \curlyvee X \to X$. Diese Verschmelzung ist stabil universell und wir erhalten so einen natürlichen Isomorphismus $\mathbb{I} \otimes X \xrightarrow{\sim} X$. Er heißt die **Einsbedingung**.

18.1.3.14. Die Assoziativität der Multiverknüpfung liefert in Schmelzkategorien viele weitere Verträglichkeiten zwischen stabil universellen Verschmelzungen. Ich werde sie vorerst nicht thematisieren. Der Vorteil der Sprache der Schmelzkategorien liegt gerade darin, daß diese Verträglichkeiten bereits in die Axiomatik fest mit eingebaut sind und bei Bedarf abgeleitet werden können, a priori aber nicht thematisiert werden müssen.

Beispiele 18.1.3.15. In Fall einer banalen Schmelzkategorie ist jedes endliche Koprodukt eine stabil universelle Verschmelzung. Im Fall der kartesischen Schmelzkategorie einer Kategorie mit endlichen Produkten ist die „Identität auf dem Produkt“ eine stabil universelle Verschmelzung.

18.1.3.16. Natürlich kann man einen zu unseren universellen beziehungsweise stabil universellen Verschmelzungen opponierten Formalismus auch in der opponierten Situation der Trennkategorien entwickeln. Ich nenne diesen Begriff eine **universelle** beziehungsweise **stabil universelle Trennung**.

18.1.3.17 (**Längere Tensorprodukte über Kringen**). Gegeben ein Kring k und k-Moduln $V_1, \ldots, V_n$ konstruieren wir nun eine universelle k-multilineare Abbildung

$$\kappa : V_1 \times \ldots \times V_n \to T$$

Wir betrachten dazu den Quotienten $T := k\langle V_1 \times \ldots \times V_n\rangle/U$ des freien k-Moduls F über der Menge $V_1 \times \ldots \times V_n$ nach dem kleinsten Untermodul U, für den die Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_n \to F/U$ multilinear ist. Daß es einen kleinsten Untermodul U mit dieser Eigenschaft gibt, folgt aus der Tatsache, daß der Schnitt über eine beliebige Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Untermoduln mit dieser Eigenschaft stets auch wieder diese Eigenschaft hat. Das hinwiederum folgt aus der Existenz einer k-linearen Einbettung $F/(\bigcap U_i) \hookrightarrow \prod(F/U_i)$, über das Produkt der multilinearen Abbildungen $V_1 \times \ldots \times V_n \to F/U_i$ ja faktorisieren muß. Wir verwenden für unseren universellen Quotienten die Notation

$$V_1 \otimes_k \ldots \otimes_k V_n := F/U$$

Alternativ hätten wir den herauszuteilenden Untermodul U auch ähnlich wie im Fall bilinearer Abbildungen explizit durch Erzeuger beschreiben können, aber wie schon im alten Rom, variatio delectat. Man prüft leicht, daß auch im Fall der Moduln über einem Kring alle universellen Verschmelzungen vereits stabil universell sind.

Beispiel 18.1.3.18 (**Schmelzkategorie der abelschen Gruppen**). Wir buchstabieren die in 18.1.3.17 besprochenen allgemeinen Aussagen nocheinmal im Spezialfall des Krings $\mathbb{Z}$ aus, dessen Modulkategorie ja schlicht die Kategorie der abelschen Gruppen ist. Die abelschen Gruppen bilden mithin eine Schmelzkategorie Ab mit den multilinearen Abbildungen als Verschmelzungen. Hierbei verstehen wir multilineare Abbildungen von der leeren Objektfamilie in eine abelsche Gruppe wie zuvor als Elemente von besagter Gruppe oder genauer und ganz pedantisch als Abbildungen der einpunktigen Menge $\{*\}$ dorthin. Die natürlichen multilinearen Abbildungen $\kappa : V_1 \times \ldots \times V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ in die Tensorprodukte über $\mathbb{Z}$ sind dann stabil universell. Eine stabil universelle Leerverschmelzung ist die Abbildung $\{*\} \to \mathbb{Z}$ mit $* \mapsto 1$. Eine alternative universelle Leerverschmelzung wäre die Abbildung $\{*\} \to \mathbb{Z}$ mit $* \mapsto -1$, aber wozu den Teufel am Schwanz ziehen.

Ergänzung 18.1.3.19. Die Bimoduln über einem beliebigen Ring sind ein Beispiel für eine monotone Schmelzkategorie. Wir führen das hier nicht weiter aus.

18.1.3.20 (**Symmetrische Potenzen**). Gegeben ein Objekt V einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ und $r \geq 0$ nennt man $\mathcal{S}_r$-invariante Verschmelzungen $V^{\curlyvee r} \to X$ **symmetrisch**. Eine symmetrische Verschmelzung $V^{\curlyvee r} \to S$ heißt **universell-symmetrisch**, wenn für jedes Objekt X das Vorschalten eine Bijektion

$$\mathcal{M}(S, X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(V^{\curlyvee r}, X)^{\mathcal{S}_r}$$

induziert. Eine universellsymmetrische Verschmelzung ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus, wenn sie existiert. Sie heißt **stabil universellsymmetrisch**, wenn sogar für jede weitere Objektkleinfamilie C und jedes Objekt U das Vorschalten eine Bijektion

$$\mathcal{M}(S \curlyvee C, U) \tilde{\to} \mathcal{M}(V^{\curlyvee r} \curlyvee C, U)^{\mathcal{S}_r}$$

induziert. Für Schmelzkategorien mit Multihom sind offensichtlich alle universellsymmetrischen Verschmelzungen auch stabil universellsymmetrisch. Wir verwenden

$$\alpha_r : V^{\curlyvee r} \to \mathrm{S}^r V$$

als Notation für die bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte stabil universellsymmetrische Verschmelzung, wenn es sie denn gibt, und nennen $\mathrm{S}^r V$ die **r-te symmetrische Potenz von** V. Natürlich ist $\alpha_1 = \mathrm{id} : V \to V$ stets stabil universell 1-symmetrisch und wenn es ein Einsobjkt gibt, ist auch die universelle Leerverschmelzung $\alpha_0 = 1 : \curlyvee \to \mathbb{I}$ stabil universell 0-symmetrisch. Gibt es alle drei beteiligten stabil universellsymmetrischen Verschmelzungen, so liefern die universellen Eigenschaften, daß α_{r+t} eindeutig faktorisiert in

$$V^{\curlyvee(r+t)} \to \mathrm{S}^r V \curlyvee V^{\curlyvee t} \to \mathrm{S}^r V \curlyvee \mathrm{S}^t V \to \mathrm{S}^{r+t} V$$

mit $\alpha_r \curlyvee \mathrm{id}^{\curlyvee t}$ und $\mathrm{id} \curlyvee \alpha_t$ als ersten beiden Morphismen und einer so erklärten Zweiverschmelzung

$$\beta = \beta_{r,t} : \mathrm{S}^r V \curlyvee \mathrm{S}^t V \to \mathrm{S}^{r+t} V$$

Klar sind auch die „Kommutativität“ $\beta_{t,r} = \beta_{r,t} \circ \tau$ für τ die Vertauschung, die „Unitarität“ $\beta_{0,r} \circ (1 \curlyvee \mathrm{id}) = \mathrm{id}$ sowie die „Assoziativität“ $\beta_{r,s+t}(\mathrm{id} \curlyvee \beta_{s,t}) = \beta_{r+s,t}(\beta_{r,s} \curlyvee \mathrm{id})$. In einer später eingeführten Terminologie kann das dahingehend zusammengefaßt werden, daß $(\mathrm{S}^r V)_{r \in \mathbb{N}}$ mit den β ein Abmonoid der Schmelzkategorie $\mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{N}$-graduierten Objekte von $\mathcal{M}$ aus 18.1.2.1 wird. In der Schmelzkategorie der Moduln über einem Kring k sind die $\mathrm{S}^r V$ unsere symmetrischen Potenzen aus der kommutativen Algebra. In der kartesischen Schmelzkategorie der Mengen sind es die Bahnenräume $X^r / \mathcal{S}_r$ unter der Operation der symmetrischen Gruppe. Für eine Diskussion der „äußeren Potenzen“ verweise ich auf **??**.

Übungen

Übung 18.1.3.21. Man zeige, daß in einer Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen genau dann alle universellen Verschmelzungen stabil sind, wenn jede Multiverknüpfung von universellen Verschmelzungen wieder universell ist.

Übung 18.1.3.22. Man zeige, daß eine Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen für alle Familien aus zwei Objekten und für die leere Objektfamilie auch stabil universelle Verschmelzungen für beliebige Objektkleinfamilien hat.

Übung 18.1.3.23 (**Schmelzkategorien von graduierten abelschen Gruppen**). Gegeben ein abelsches Monoid Γ bilden die Γ-graduierten abelschen Gruppen eine Schmelzkategorie Ab^Γ mit den vom Grad Null homogenen multiadditiven Abbildungen als Verschmelzungen. Universelle, ja stabil universelle Verschmelzungen sind die Tensorprodukte mit ihrer natürlichen Γ-Graduierung. Analog erklärt man die Schmelzkategorie Mod_k^Γ der Γ-graduierten Moduln über einem Kring k. Noch allgemeinere Aussagen dieser Art besprechen wir in 18.1.4.15.

Übung 18.1.3.24. Bei einer Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen entsteht jeder Morphismus ihrer Familienkategorie durch $\curlyvee$-Vertupeln und Verknüpfen aus universellen Leerverschmelzungen, universellen Zweiverschmelzungen und beliebigen Einsverschmelzungen. Die Identität auf der leeren Objektfamilie erhalten wir dabei als das leere Tupel von Einsverschmelzungen. Wir erhalten 18.1.2.23 als Spezialfall.

Ergänzende Übung 18.1.3.25. Gegeben Ringe R, S sowie Moduln $C \in \mathrm{Mod}\text{-}R$, $D \in R\text{-}\mathrm{Mod}\text{-}S$ und $E \in S\text{-}\mathrm{Mod}$ gibt es genau einen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$C \otimes_R (D \otimes_S E) \mapsto (C \otimes_R D) \otimes_S E$$

mit der Eigenschaft, daß mit den offensichtlichen Surjektionen des für die zugrundeliegenden abelschen Gruppen über $\mathbb{Z}$ gebildeten Tensorprodukts $C \otimes D \otimes E$ auf beide Seiten ein kommutatives Dreieck entsteht.

Ergänzende Übung 18.1.3.26. Gegeben eine Menge Ω erhalten wir stabil universelle Verschmelzungen in der multiäquivarianten Schmelzkategorie der Ω-Mengen durch $X \curlyvee Y \to (X \times Y)/\!\sim$ mit $\sim$ der durch $(\omega x, y) \sim (x, \omega y)$ erzeugten Äquivalenzrelation.

18.1.4 Multihom in Schmelzkategorien

Definition 18.1.4.1. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$, eine Objektkleinfamilie $B \in \mathcal{M}^\curlyvee$ und ein Objekt $Z \in \mathcal{M}$ verstehen wir unter einem **Multi-Hom-Objekt**

$$(B \Rrightarrow Z) = (B \Rrightarrow_{\mathcal{M}} Z) \in \mathcal{M}$$

ein Objekt, das den durch $A \mapsto \mathcal{M}(A \curlyvee B, Z)$ gegebenen Funktor $\mathcal{M}^\curlyvee \to \mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}}$ darstellt. Ein Multihomobjekt kommt also zusammen mit natürlichen Bijektionen $\mathcal{M}(A \curlyvee B, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(A, B \Rrightarrow Z)$ und ist als derartiges Datum eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus, wenn es existiert.

18.1.4.2. Multihomobjekte in einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ werden insbesondere angeliefert mit einer natürlichen Bijektion $\mathcal{M}(B, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\curlyvee, B \Rrightarrow Z)$ zwischen der Menge aller Verschmelzungen von einer Objektkleinfamilie zu einem Objekt und der Menge aller Leerverschmelzungen in das entsprechende Multihomobjekt.

18.1.4.3. Wir sagen, eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ **habe Multihom**, wenn zu jeder Objektkleinfamilie B und jedem Objekt Z das Multihomobjekt $B \Rrightarrow Z$ existiert. Im Fall einer Objektfamilie $B = X$ aus einem einzigen Buchstaben nennen wir das Multihomobjekt $X \Rrightarrow Z$ das **interne Homobjekt** oder kurz **Homobjekt**. Existieren alle Homobjekte, so existieren auch alle Multihom und können induktiv konstruiert werden. Zum Beispiel wird der Funktor $A \mapsto \mathcal{M}(A \curlyvee X \curlyvee Y, Z)$ für feste Objekte X, Y, Z offensichtlich dargestellt durch $X \Rrightarrow (Y \Rrightarrow Z)$, wenn denn die fraglichen Hom-Objekte beide existieren. Andererseits wird er auch dargestellt durch $(X \otimes Y) \Rrightarrow Z$, wenn denn die fraglichen universellen Verschmelzungen und internen Hom beide existieren. So erhalten wir unter den entsprechenden Voraussetzungen einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$(X \otimes Y) \Rrightarrow Z \xrightarrow{\sim} X \Rrightarrow (Y \Rrightarrow Z)$$

18.1.4.4. Existiert für eine Objektkleinfamilie B einer Schmelzkategorie eine stabil universelle Verschmelzung $B \to \otimes B$, so ist für jedes weitere Objekt die Existenz von $B \Rrightarrow Z$ gleichbedeutend zur Existenz von $(\otimes B) \Rrightarrow Z$ und diese beiden Objekte sind kanonisch isomorph.

Beispiel 18.1.4.5 (**Multihom im Fall von Vektorräumen**). Die Vektorräume über einem vorgegebenen Körper k bilden, wie bereits in 18.1.1.6 besprochen, eine Schmelzkategorie Mod_k mit multilinearen Abbildungen als Verschmelzungen, also

$$\mathrm{Mod}_k(W_1 \curlyvee \ldots \curlyvee W_r, V) := \mathrm{Hom}_k^{(r)}(W_1 \times \ldots \times W_r, V)$$

Versehen wir diese Mengen von multilinearen Abbildungen ihrerseits mit ihrer offensichtlichen Struktur als k-Vektorraum, so erhalten wir ein Multihom unserer Schmelzkategorie. In der Tat entsprechen s-lineare Abbildungen

$$U_1 \times \ldots \times U_s \to \mathrm{Hom}_k^{(r)}(W_1 \times \ldots \times W_r, V)$$

eineindeutig $(s + r)$-linearen Abbildungen $U_1 \times \ldots \times U_s \times W_1 \times \ldots \times W_r \to V$. In der Schmelzkategorie Ab der abelschen Gruppen erhalten wir ähnlich ein Multihom, indem wir von der abelschen Gruppe

$$\big((V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r) \Rrightarrow W\big) := \mathrm{Hom}^{(r)}(V_1 \times \ldots \times V_r, W)$$

aller fraglichen multiadditiven Abbildungen ausgehen und sie um die offensichtlichen zusätzlichen Daten ergänzen. Analog erhalten wir Multihom in der Schmelzkategorie der Moduln über einem beliebigen Kring.

Ergänzung 18.1.4.6. Im Fall einer monotonen Schmelzkategorie muß man unterscheiden zwischen einer „Rechtsversion“ und einer „Linksversion“ von Multihom. Wir verfolgen das hier nicht weiter.

18.1.4.7. Die Konstruktion interner Homobjekte ist offensichtlich ein Funktor von der vollen Unterkategorie aller Paare in $\mathrm{E}(\mathcal{M})^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{E}(\mathcal{M})$, für die eben solch ein Objekt existiert, in die Kategorie $\mathrm{E}(\mathcal{M})$. Er heißt der **interne Hom-Funktor**.

Beispiel 18.1.4.8. In der kartesischen Schmelzkategorie $\mathrm{kart}(\mathrm{Ens})$ der Mengen ist das Multihomobjekt $B \Rrightarrow Z$ die Menge $\mathrm{Ens}(B_1 \times \ldots \times B_r, Z)$ mit den entsprechenden Zusatzdaten.

18.1.4.9. In einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom sind offensichtlich alle universellen Verschmelzungen bereits stabil universell.

18.1.4.10 (**Multihom aus der leeren Objektfamilie**). Für das Multihom aus der leeren Objektfamilie liefert die Definition sowohl die Existenz des fraglichen Multihom als auch einen ausgezeichneten Isomorphismus $(\Upsilon \Rrightarrow Z) \xrightarrow{\sim} Z$. Besitzt unsere Schmelzkategorie eine Eins $\mathbb{I} = \otimes\Upsilon$, so erhalten wir mit 18.1.4.4 weiter einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$(\mathbb{I} \Rrightarrow Z) \xrightarrow{\sim} Z$$

Ergänzung 18.1.4.11. Natürlich kann man einen zu Multihom opponierten Formalismus auch in der opponierten Situation der Trennkategorien aufbauen. Darauf verzichte ich, weil es dieses „opponierte Multihom“ in den im folgenden zu betrachtenden Standardsituationen meist entweder gar nicht gibt oder wir uns bereits in der Situation einer „Trennschmelzkategorie“ bewegen, in der es vermittels des internen Homs des Schmelzanteils durch die Formel $A \Rrightarrow (B_1 \otimes \ldots \otimes B_r)$ dargestellt werden kann.

Übungen

Übung 18.1.4.12 (**Tensor-Hom-Adjunktion**). Man zeige, daß eine Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen genau dann Multihom hat, wenn für jedes Objekt X der Funktor $X \otimes$ auf den zugehörigen einfachen Kategorien einen Rechtsadjungierten besitzt. Er wird dann notwendig durch das Bilden des internen Homobjekts $(X \Rrightarrow\ )$ gegeben.

Übung 18.1.4.13 (**Hom-Hom-Adjunktion**). Gibt es für $Z \in \mathcal{M}$ ein Objekt einer Schmelzkategorie alle internen Homobjekte $X \Rrightarrow Z$, so ist auf den zugehörigen einfachen Kategorien der Funktor $(\Rrightarrow Z) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ linksadjungiert zu $(\Rrightarrow Z)^{\mathrm{opp}} : \mathcal{M}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{M}$.

Übung 18.1.4.14 (**Multihom von graduierten abelschen Gruppen**). Ist Γ ein abelsches Monoid, so erhält man internes Hom in der Schmelzkategorie Ab^{Γ} aus 18.1.3.23 durch $(M \Rrightarrow N)^{\gamma} = \prod_{\mu \in \Gamma} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M^{\mu}, N^{\mu+\gamma})$.

Übung 18.1.4.15 (**Schmelzkategorien von graduierten Objekten**). Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ und ein abelsches Monoid Γ bilden wir wie in 18.1.2.1 die Schmelzkategorie $\mathcal{M}^\Gamma$ der Γ-graduierten Objekte von $\mathcal{M}$. Besitzt $\mathcal{M}$ stabil universelle Verschmelzungen und Koprodukte zu über alle Objektfamilien, die durch Fasern der Verknüpfung $\Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ indiziert werden, so besitzt auch $\mathcal{M}^\Gamma$ stabil universelle Verschmelzungen. Besitzt $\mathcal{M}$ zusätzlich internes Hom und Produkte über alle Objektfamilien, die durch Γ indiziert werden, so besitzt auch $\mathcal{M}^\Gamma$ internes Hom.

Übung 18.1.4.16 (**Multihom in multiäquivarianten Schmelzkategorien**). Gegeben eine Menge Ω gibt es in der multiäquivarianten Schmelzkategorie der Ω-Mengen im allgemeinen kein Multihom. Ist jedoch $\Omega = G$ ein abelsches Monoid und betrachten wir nur Mengen mit Monoidoperation, so liefert die Menge der multiäquivarianten Abbildungen mit der durch Nachschalten gegebenen Operation ein Multihom.

Übung 18.1.4.17 (**Auswerten von internem Hom**). Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie. Existiert für $X, Y \in \mathcal{M}$ das interne Homobjekt, so erhalten wir eine ausgezeichnete Zweiverschmelzung

$$\mathrm{ev} : X \curlyvee (X \Rrightarrow Y) \;\to\; Y$$

per Adjunktion aus der Identität auf $(X \Rrightarrow Y)$. Im Spezialfall der Moduln ist obiger Morphismus das Auswerten von linearen Abbildungen. Wir nennen ihn analog auch im allgemeinen das **Auswerten** oder gleichbedeutend **Evaluieren**. Durch nochmaliges Anwenden der Adjunktion erhalten wir, wenn auch das zweite fragliche interne Homobjekt existiert, einen Morphismus $X \to (X \Rrightarrow Y) \Rrightarrow Y$, der auch das **Auswerten** heißt und im Fall der Vektorräume mit Y dem Grundkörper zur natürlichen Abbildung eines Vektorraums in seinen Bidualraum spezialisiert.

Ergänzung 18.1.4.18. Gegeben eine Zweiverschmelzung $S \curlyvee X \to Y$ und ein weiteres Objekt Z derart, daß die internen Hom $X \Rrightarrow Z$ und $Y \Rrightarrow Z$ existieren, erhalten wir eine Zweiverschmelzung

$$S \curlyvee (Y \Rrightarrow Z) \to (X \Rrightarrow Z)$$

aus der Dreiverschmelzung $S \curlyvee X \curlyvee (Y \Rrightarrow Z) \to Z$, die durch Vorschalten von $S \curlyvee X \to Y$ aus dem Auswerten 18.1.4.17 entsteht. Weiter erhalten wir, wenn die entsprechenden internen Hom $Z \Rrightarrow X$ und $Z \Rrightarrow Y$ existieren, auch eine Zweiverschmelzung

$$S \curlyvee (Z \Rrightarrow X) \to (Z \Rrightarrow Y)$$

aus der Dreiverschmelzung $S \curlyvee Z \curlyvee (Z \Rrightarrow X) \to Y$, die durch Vorschalten des Auswertens 18.1.4.17 entsteht.

Übung 18.1.4.19. Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie. Gegeben Objekte X, Y, Z derart, daß $X \Rrightarrow Y$ und $Y \Rrightarrow Z$ existieren, liefert das Auswerten 18.1.4.17 natürliche Verschmelzungen

$$X \curlyvee (X \Rrightarrow Y) \curlyvee (Y \Rrightarrow Z) \quad \to \quad Y \curlyvee (Y \Rrightarrow Z) \quad \to \quad Z$$

Existiert auch $X \Rrightarrow Z$, so erhalten wir aus deren Komposition eine natürliche Zweiverschmelzung, das **Verknüpfen von internem Hom**

$$(X \Rrightarrow Y) \curlyvee (Y \Rrightarrow Z) \to (X \Rrightarrow Z)$$

Wenn die entsprechenden Hom-Objekte existieren, erhalten wir daraus hinwiedeum natürliche Morphismen $(X \Rrightarrow Y) \to (Y \Rrightarrow Z) \Rrightarrow (X \Rrightarrow Z)$ und $(Y \Rrightarrow Z) \to (X \Rrightarrow Y) \Rrightarrow (X \Rrightarrow Z)$, die man das **Vorschalten** beziehungsweise **Nachschalten von internem Hom** nennen mag. Gegeben eine Schmelzkatgorie mit Einsobjekt $\mathbb{I}$ und Objekte X, Y liefert das Verknüpfen von internem Hom, wenn die fraglichen Homobjekte existieren, einen natürlichen Morphismus

$$X^\vee \curlyvee Y = (X \Rrightarrow \mathbb{I}) \curlyvee (\mathbb{I} \Rrightarrow Y) \to (X \Rrightarrow Y)$$

Übung 18.1.4.20 (**Tensorieren von internem Hom**). Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie. Wenn die fraglichen Multihom und stabil universellen Verschmelzungen existieren, erhalten wir eine ausgezeichnete Zweiverschmelzung

$$(W \Rrightarrow X) \curlyvee (Y \Rrightarrow Z) \;\to\; (W \otimes Y) \Rrightarrow (X \otimes Z)$$

aus der Multiverknüpfung $W \curlyvee Y \curlyvee (W \Rrightarrow X) \curlyvee (Y \Rrightarrow Z) \to X \curlyvee Z \to X \otimes Z$ mit Auswertungen vorne durch Faktorisierung über eine Dreiverschmelzung mit $W \otimes Y$ ganz links und Anwenden der Adjunktion. Im Spezialfall der Vektorräume ist der obige kanonische Morphismus das Tensorieren von linearen Abbildungen. Wir nennen ihn auch im allgemeinen das **Tensorieren**.

Übung 18.1.4.21 (**Dualisieren**). Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie mit Eins $\mathbb{I}$. Wir nennen ein Objekt $X \in \mathcal{M}$ **dualisierbar**, wenn das Homobjekt von $X \Rrightarrow \mathbb{I}$ zur Eins existiert. Wir setzen dann

$$X^\vee := (X \Rrightarrow \mathbb{I})$$

Im Fall der Vektorräume ist das der Dualraum und wir nennen es auch im allgemeinen das **duale Objekt zu** X. Jeder Morphismus $f : X \to Y$ von dualisierbaren Objekten induziert durch Funktorialität einen Morphismus $f^\vee : Y^\vee \to X^\vee$. Die Eins selbst ist immer dualisierbar und in 18.1.4.10 konstruieren wir einen ausgezeichneten Isomorphismus $c : \mathbb{I}^\vee \xrightarrow{\sim} \mathbb{I}$. Sind X und $X^\vee$ dualisierbar, so liefert 18.1.4.17 einen ausgezeichneten Morphismus $\mathrm{ev} = \mathrm{ev}_X : X \to X^{\vee\vee}$ und

sind zusätzlich Y und $Y^\vee$ auch dualisierbar, so gilt $\mathrm{ev}_Y \circ f = f^{\vee\vee} \circ \mathrm{ev}_X$ für alle $f : X \to Y$. Im Fall des Einsobjekts finden wir $\mathrm{ev}_{\mathbb{I}} = c^\vee \circ c^{-1}$. Gegeben eine stabil universelle Verschmelzung $X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \to X_1 \otimes \ldots \otimes X_r$ dualisierbarer Objekte zu einem dualisierbaren Objekt liefert das Tensorieren von internem Hom 18.1.4.20 eine ausgezeichnete Verschmelzung

$$X_1^\vee \curlyvee \ldots \curlyvee X_r^\vee \to (X_1 \otimes \ldots \otimes X_r)^\vee$$

Übung 18.1.4.22 (**Differentielle abelsche Gruppen**). Wir führen die Schmelzkategorie dAb der differentiellen abelschen Gruppen ein. Objekte sind Paare (A, ∂) bestehend aus einer abelschen Gruppe mit einem Endomorphismus, den wir das **Differential** nennen. Verschmelzungen $\varphi : A_1 \curlyvee \ldots \curlyvee A_r \to A$ sind multiadditive Abbildungen $\varphi : A_1 \times \ldots \times A_r \to A$ mit

$$\partial\varphi(a_1, \ldots, a_r) = \varphi(\partial a_1, \ldots, a_r) + \ldots + \varphi(a_1, \ldots, \partial a_r) \quad \forall a_i \in A_i, 1 \le i \le r$$

Leerverschmelzungen nach (A, ∂) sind insbesondere Elemente des Kerns von ∂. Man zeige, daß diese Schmelzkategorie universelle Veschmelzungen und Multihom hat und daß das Vergessen des Differentials $\mathrm{dAb} \to \mathrm{Ab}$ mit universellen Verschmelzungen und Multihom verträglich ist. In der in 18.3.3.14 eingeführten Terminologie ist das die äquivariante Schmelzkategorie der Moduln über dem Ab-Biabmonoid $\mathbb{Z}[\partial]$ der dualen Zahlen.

18.1.5 Trennschmelzkategorien

18.1.5.1. Eine Schmelzkategorie heiße ein **Schmelzgruppoid**, wenn alle ihre Verschmelzungen stabil universell sind. Zu jeder Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ erhalten wir ein Schmelzgruppoid $\mathcal{M}^\times$, indem wir nur die stabil universellen Verschmelzungen von $\mathcal{M}$ als Verschmelzungen zulassen. Analoges gilt für Trennkategorien.

Definition 18.1.5.2. Eine **Trennschmelzkategorie** ist ein Datum bestehend aus einer Kategorie $\mathcal{M}$ mit Erweiterungen der Kategorienstruktur sowohl zu einer Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen als auch zu einer Trennkategorie mit stabil universellen Trennungen und zusätzlich ausgezeichneten Bijektionen

$$i : \mathcal{M}^\times(Y, X_1 \curlywedge \ldots \curlywedge X_r) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^\times(X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r, Y)$$

zwischen stabil universellen Trennungen und stabil universellen Verschmelzungen in die Gegenrichtung, die verträglich sind mit Multiverknüpfungen und die auf stabil universellen Einsverschmelzungen zum Invertieren von Isomorphismen spezialisieren. Wenn wir uns auf die zugrundeliegende Trenn- oder Schmelzkategorie konzentrieren wollen, schreiben wir $\mathcal{M}^{\mathrm{t}}$ beziehungsweise $\mathcal{M}^{\mathrm{s}}$.

Ergänzung 18.1.5.3. Das Konzept einer Trennschmelzkategorie ist der Versuch einer „ganzheitlichen“ Beschreibung der Struktur, die man in der Literatur meist durch Erzeuger und Relationen beschreibt und eine „symmetrische monoidale Kategorie“ nennt.

Beispiel 18.1.5.4. Gegeben eine additive Kategorie ist der natürliche Morphismus 19.2.3.8 von endlichen Koprodukten zu endlichen Produkten stets ein Isomorphismus. Wir erklären die **banale Trennschmelzkategorie** einer additiven Kategorie, indem wir ihre banalen Strukturen einer Schmelzkategorie und Trennkategorie ergänzen um die durch diese Isomorphismen gegebenen ausgezeichneten Bijektionen i.

18.1.5.5 (**Ergänzung zu Trennschmelzkategorie**). Jede Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit stabil universellen Verschmelzungen läßt sich zu einer Trennschmelzkategorie ergänzen, indem wir die zugehörigen Trennungen $Y \to X_1 \curlywedge \ldots \curlywedge X_r$ erklären als Morphismen $Y \to X_1 \otimes \ldots \otimes X_r$. Stabile Trennungen sind dann Isomorphismen $t : Y \xrightarrow{\sim} X_1 \otimes \ldots \otimes X_r$. Als $i(t) := t^{-1} \circ \kappa$ nehmen wir die universelle Verschmelzung gefolgt vom Inversen

$$X_1 \curlywedge \ldots \curlywedge X_r \to X_1 \otimes \ldots \otimes X_r \to Y$$

Das ist offensichtlich bis auf eindeutigen Isomorphismus die einzige derartige Ergänzung, genauer haben wir für je zwei Trennschmelzkategorien mit derselben zugrundeliegenden Schmelzkategorie eindeutig bestimmte Bijektionen zwischen ihren Trennungsmengen von einem vorgegebenen Ausgangsobjekt in eine vorgegebene Objektkleinfamilie mit den offensichtlichen Eigenschaften. Es ist deshalb erlaubt, diese bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte Struktur mit einem bestimmten Artikel anzusprechen und ihr eine Notation zuzugestehen. Wir notieren diese Trennschmelzkategorie weiter $\mathcal{M}$ und schreiben $\mathcal{M}^{\mathrm{t}}$, wenn wir uns auf ihren Trennanteil konzentrieren wollen. Wir sagen, diese Trennkategorie entstehe durch **Invertieren** unserer Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen.

18.1.5.6. In derselben Weise besitzt jede Trennkategorie $\mathcal{T}$ mit stabil universellen Trennungen bis auf eindeutigen Isomorphismus genau eine Ergänzung zu einer Trennschmelzkategorie, die wir auch wieder $\mathcal{T}$ notieren. Wenn wir uns auf ihren Schmelzanteil konzentrieren wollen, schreiben wir $\mathcal{T}^{\mathrm{s}}$ und sagen, diese Schmelzkategorie entstehe durch **Invertieren** unserer Trennkategorie mit stabil universellen Trennungen.

18.1.5.7. Gegeben eine Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ erklären wir in der offensichtlichen Weise die **opponierte Trennschmelzkategorie** $\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ und vereinbaren die Abkürzungen

$$\mathcal{M}^{\mathrm{os}} := (\mathcal{M}^{\mathrm{opp}})^{\mathrm{s}} \quad \text{sowie} \quad \mathcal{M}^{\mathrm{ot}} := (\mathcal{M}^{\mathrm{opp}})^{\mathrm{t}}$$

Wenn wir von einer Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen ausgehen, nennen wir $\mathcal{M}^{\mathrm{os}}$ die **oppinvertierte Schmelzkategorie**. Ebenso nennen wir für $\mathcal{T}$ eine Trennkategorie mit stabil universellen Trennungen $\mathcal{T}^{\mathrm{ot}}$ die **oppinvertierte Trennkategorie**.

18.1.5.8. Gegeben eine Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ hat man quasi per definitionem ausgezeichnete Isomorphismen $(\mathcal{M}^{\mathrm{s}})^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\mathrm{ot}}$ und $(\mathcal{M}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\mathrm{os}}$ von Trenn- beziehungsweise Schmelzkategorien, die die Objekte festhalten.

Vorschau 18.1.5.9 (**Multihom und Opponieren**). Sehr oft arbeiten wir im folgenden in einer Trennschmelzkategorie mit Multihom. Diese Situation ist nicht „stabil unter Opponieren“, denn man fordert zwar Rechtsadjungierte für $X\otimes$, aber keine Linksadjungierten. Die Symmetrie wird erst wieder hergestellt, wenn wir die „Starrheit“ aller Objekte fordern.

Beispiel 18.1.5.10 (**Trennschmelzkatgorie zu endlichen Produkten**). Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit endlichen Produkten hat die zugehörige banale Trennkategorie stabil universelle Trennungen und kann mithin als Trennschmelzkategorie aufgefaßt werden. Die zugehörige Schmelzkategorie hat dann die Verschmelzungen

$$(\curlywedge\mathcal{C})(X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r, Y) = \mathcal{C}(X_1 \times \ldots \times X_r, Y)$$

und erweist sich so als die kartesische Schmelzkategorie $(\curlywedge\mathcal{C})^{\mathrm{s}} = \mathrm{kart}(\mathcal{C})$ von $\mathcal{C}$. Die Trennschmelzkategorie einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit endlichen Produkten notieren wir statt $\curlywedge\mathcal{C}$ oft vereinfachend $\mathcal{C}$.

Beispiel 18.1.5.11 (**Trennschmelzkatgorie zu endlichen Koprodukten**). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit endlichen Koprodukten hat die zugehörige banale Schmelzkategorie stabil universelle Verschmelzungen und kann mithin als Trennschmelzkategorie aufgefaßt werden. Die zugehörige Trennkategorie hat dann die Trennungen

$$(\curlyvee\mathcal{C})(X, Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r) = \mathcal{C}(X, Y_1 \sqcup \ldots \sqcup Y_r)$$

Dieses Beispiel scheint mir eine besonders gute Motivation für die Bezeichnung derartiger Strukturen als Trennkategorie.

Übungen

Übung 18.1.5.12 (**Funktorkategorie als internes Hom**). Gegeben ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ betrachten wir die Kategorie $\mathfrak{U}\mathrm{Cat}$ nach 20.1.1.6 aller Kategorien, deren Morphismenmengen und Objektmenge Elemente von $\mathfrak{U}$ sind, mit Funktoren als Morphismen. Ist unser Mengensystem $\mathfrak{U}$ ein Universum, so hat $\mathfrak{U}\mathrm{Cat}$ endliche Produkte alias die zugehörige banale Trennkategorie

$$\curlywedge\mathfrak{U}\mathrm{Cat}$$

stabil universelle Trennungen und kann folglich in im wesentlichen eindeutiger Weise zu einer Trennschmelzkategorie erweitert werden. Sind $\mathfrak{U} \in \mathfrak{V}$ Universen, so gibt es für Objekte $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{U}\mathrm{Cat}$ das interne Hom $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ in $\mathfrak{V}\mathrm{Cat}$ und dies interne Hom ist die Funktorkategorie, mit Funktoren als Objekten und Transformationen als Morphismen. Im wesentlichen ist das das Exponentialgesetz für Kategorien aus 4.7.4.13.

18.1.6 Schmelzfunktoren

Definition 18.1.6.1. Ein **Schmelzfunktor** $p : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ von einer Schmelzkategorie in eine weitere Schmelzkategorie ist ein Datum bestehend aus einer Abbildung p der Objektmengen nebst Abbildungen

$$p : \mathcal{M}(A, Y) \to \mathcal{N}(pA, pY)$$

für jede Objektkleinfamlie $A : I \to \mathcal{M}$ und jedes Objekt $Y \in \mathcal{M}$ zwischen den entsprechenden Mengen von Verschmelzungen, die verträglich sind mit Multiverknüpfungen und die Identitäten auf Identitäten werfen. Ein Schmelzfunktor induziert in offensichtlicher Weise einen Funktor $p^{\curlyvee} : \mathcal{M}^{\curlyvee} \to \mathcal{N}^{\curlyvee}$ auf den Familienkategorien der jeweiligen Schmelzkategorien. Die Menge der Schmelzfunktoren von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ notieren wir $\mathrm{SCat}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Wir nennen einen Schmelzfunktor **treu**, **volltreu** beziehungsweise eine **Äquivalenz** oder genauer **Schmelzäquivalenz** oder sogar einen **Isomorphismus von Schmelzkategorien**, wenn der zugehörige Funktor auf den Familienkategorien die entsprechende Eigenschaft hat. Analog erklären wir **Trennfunktoren** zwischen Trennkategorien und vereinbaren dafür eine analoge Terminologie.

18.1.6.2 (**Kriterium für Schmelzfunktoren**). Um zu prüfen, daß eine gegebene Abbildung p auf den Objektmengen zusammen mit Abbildungen p auf den Verschmelzungsmengen wie eben ein Schmelzfunktor ist, reicht es zu prüfen, daß sie (1) Identitäten auf Identitäten wirft, daß sie (2) mit Umindizierungen $\hat{\tau}$ zu Vertauschungen benachbarter Einträge τ verträglich ist und daß sie (3) mit Vorschalten eines Morphismus der Familienkategorie der Gestalt

$$g \curlyvee \mathrm{id} \curlyvee \ldots \curlyvee \mathrm{id} : Z_1 \curlyvee \ldots \curlyvee Z_s \curlyvee X_2 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \to X_1 \curlyvee X_2 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r$$

verträglich ist. Das wird der Leser leicht selbst einsehen können.

Beispiel 18.1.6.3. Jeder Funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ induziert einen Trennfunktor $\curlywedge\mathcal{C} \to \curlywedge\mathcal{B}$ zwischen den zugehörigen banalen Trennkategorien und einen Schmelzfunktor $\curlyvee\mathcal{C} \to \curlyvee\mathcal{B}$ zwischen den zugehörigen banalen Schmelzkategorien.

18.1.6.4 (**Opponieren von Schmelz- und Trennfunktoren**). Jeder Schmelzfunktor $p : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ induziert einen Trennfunktor

$$p^{\mathrm{opp}} : \mathcal{M}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{N}^{\mathrm{opp}}$$

zwischen den opponierten Trennkategorien. Analoges gilt für Trennfunktoren.

18.1.6.5. Gegeben $p, q : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ Schmelzfunktoren verstehen wir unter einer **Transformation von Schmelzfunktoren** $\tau : p \Rightarrow q$ eine Vorgabe von Einsverschmelzungen $\tau_M : p(M) \to q(M)$ in $\mathcal{N}$ für alle $M \in \mathcal{M}$, deren $\curlyvee$-Vertupeln eine Transformation $p^{\curlyvee} \Rightarrow q^{\curlyvee}$ zwischen den auf den Familienkategorien induzierten Funktoren liefert. Die Gesamtheit aller Schmelzfunktoren $\mathrm{SCat}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ ist mit den Transformationen als Morphismen in natürlicher Weise eine Kategorie. Um zu prüfen, daß eine Vorgabe von Einsverschmelzungen $\tau_M : p(M) \to q(M)$ eine Transformation ist, reicht es für jede durch $[\![n]\!]$ mit $n \in \mathbb{N}$ indizierte Kleinfamilie A und jede $\mathcal{M}$-Verschmelzung $f : A(1) \curlyvee \ldots \curlyvee A(r) \to Y$ zu prüfen, daß gilt $q(f) \circ \big(\tau_{A(1)} \curlyvee \ldots \curlyvee \tau_{A(r)}\big) = \tau_Y \circ p(f) : p(A(1)) \curlyvee \ldots \curlyvee p(A(r)) \to q(Y)$.

18.1.6.6. Die Gesamtheit aller Schmelzkategorien bildet mit Schmelzfunktoren als Morphismen selbst eine Kategorie

$$\mathrm{SCat}$$

mit der terminalen Schmelzkategorie als finalem Objekt.

Beispiel 18.1.6.7. Sei K ein Körper oder allgemeiner ein Kring. Wir bilden die **Matrix-Schmelzkategorie** Mat_K wie folgt: Objekte sind alle natürlichen Zahlen. Als Mengen von Verschmelzungen nehmen wir die Mengen von **Multimatrizen**

$$\mathrm{Mat}_K(m_1 \curlyvee \ldots \curlyvee m_r, n) := \{T : [\![m_1]\!] \times \ldots \times [\![m_r]\!] \times [\![n]\!] \to K\}$$

Die Multiverknüpfungen werden durch Summation über gleiche Indizes in der hoffentlich offensichtlichen Weise definiert. Wir erhalten dann einen Schmelzfunktor $\mathrm{Mat}_K \to \mathrm{Mod}_K$, der auf Objekten durch $[\![n]\!] \mapsto K^n$ gegeben wird und auf Morphismen leicht vom Leser erraten werden kann. Im Spezialfall $r = 1$ hätten wir $\mathrm{Mat}_K(m, n) = \mathrm{Mat}(n \times n; K)$ in unserer früheren Notation.

Beispiel 18.1.6.8 (**Matrix-Schmelzkategorie eines Mengensystems**). Seien K ein Körper oder allgemeiner ein Kring und $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem. Wir bilden die **Matrixschmelzkategorie** $\mathfrak{U}\mathrm{Mat}_K$ wie folgt: Objekte sind alle Mengen aus $\mathfrak{U}$, in Formeln $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{U}\mathrm{Mat} := \mathfrak{U}$. Wir setzen

$$\mathfrak{U}\mathrm{Mat}_K(X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r, Y) := \left\{ \begin{array}{c} \text{Alle Abbildungen} \\ T : X_1 \times \ldots \times X_r \times Y \to K \\ \text{derart, daß es für beliebige } x_1, \ldots, x_r \\ \text{höchstens endlich viele } y \text{ gibt mit} \\ \text{mit } T(x_1, \ldots, x_r, y) \neq 0 \end{array} \right\}$$

Wieder sind die Multiverknüpfungen in der hoffentlich offensichtlichen Weise durch Summation über gleiche Indizes erklärt. Wir erhalten dann einen Schmelzfunktor $\mathfrak{U}\mathrm{Mat}_K \to \mathrm{Mod}_K$, der auf Objekten durch die Konstruktion freier Moduln $X \mapsto \mathrm{Mod}_K^{\setminus} X$ über den entsprechenden Mengen gegeben wird und auf Morphismen vom Leser erraten werden mag.

Beispiel 18.1.6.9 (**Differential der Analysis als Schmelzfunktor**). In der Sprache der Kategorientheorie mag man die Kategorie $\mathcal{D}$ der bepunkteten halboffenen Teilmengen (A, p) normierter reeller Räume X betrachten mit solchen Abbildungen $f : (A, p) \to (B, q)$ als Morphismen, die bei p differenzierbar sind und p auf q abbilden. Dann erhalten wir einen Funktor in die Kategorie der reellen Vektorräume, indem wir jeder bepunkteten halboffenen Teilmenge den Richtungsraum des umgebenden reellen Raums zuordnen und jedem Morphismus sein Differential am ausgezeichneten Punkt. Man mag weiter $\mathcal{D}$ zu einer Schmelzkategorie machen mit Zweiverschmelzungen $(A, p) \curlyvee (B, q) \to (C, r)$ Morphismen $(A \times B, (p, q)) \to (C, r)$ und analog erklärten beliebigen Verschmelzungen. Dann wird unser Differential ein Schmelzfunktor $\mathcal{D} \to \curlyvee\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}$ in die banale Schmelzkategorie der reellen Vektorräume.

18.1.6.10. Analog zu Schmelzfunktoren erklären wir **monotone Schmelzfunktoren** zwischen monotonen Schmelzkategorien und eine **Transformation zwischen monotonen Schmelzfunktoren**. Jeder Schmelzfunktor $p : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ induziert einen monotonen Schmelzfunktor $p = p^{\mathrm{mon}} : \mathcal{M}^{\mathrm{mon}} \to \mathcal{N}^{\mathrm{mon}}$ zwischen den zugehörigen Monotonisierungen 18.1.1.21, den wir die **Monotonisierung** unseres Schmelzfunktors nennen, und jede Transformation induziert eine Transformation zwischen den jeweiligen monotonisierten Schmelzfunktoren.

18.1.6.11. Gegeben ein Schmelzfunktor p induzieren die universellen Eigenschaften für jede Objektkleinfamilie B, wenn denn die fraglichen stabil universellen Verschmelzungen existieren, einen natürlichen Morphismus $\otimes(pB) \to p(\otimes B)$. Dasselbe gilt für nicht notwendig stabile universelle Verschmelzungen. Unser Morphismus muß kein Isomorphismus sein, wie etwa der Schmelzfunktor der Restriktion $\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}$ zeigt. Ist er doch für alle universellen Verschmelzungen ein Isomorphismus, so sagen wir, unser Schmelzfunktor sei **verträglich mit universellen Verschmelzungen**.

18.1.6.12. Ganz allgemein verstehen wir unter einem **Trennschmelzfunktor** zwischen Trennschmelzkategorien ein Datum bestehend aus einem mit universellen Trennungen verträglichen Trennfunktor und einem mit universellen Verschmelzungen verträglichen Schmelzfunktor, die auf den zugrundeliegenden einfachen Kategorien übereinstimmen. Jeder mit universellen Verschmelzungen verträgliche Schmelzfunktor zwischen Trennschmelzkategorien und jeder mit universellen Trennungen verträgliche Trennfunktor zwischen Trennschmelzkategorien lassen

sich offensichtlich auf genau eine Weise zu einem Trennschmelzfunktor fortsetzen. Jeder Schmelzfunktor $p : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ zwischen Schmelzkategorien mit stabil universellen Verschmelzungen, der mit universellen Verschmelzungen verträglich ist, induziert insbesondere einen Trennfunktor

$$p^{\mathrm{t}} : \mathcal{M}^{\mathrm{t}} \to \mathcal{N}^{\mathrm{t}}$$

zwischen den zugehörigen Trennkategorien, der seinerseits mit universellen Trennungen verträglich ist. Analoges gilt für Trennfunktoren.

Beispiel 18.1.6.13. Jeder mit endlichen Produkten verträgliche Funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ induziert einen mit universellen Trennungen verträglichen alias einen Trennschmelzfunktor $\curlywedge\mathcal{C} \to \curlywedge\mathcal{B}$. Insbesondere induziert der Funktor $\mathrm{iso} : \mathfrak{U}\mathrm{Cat} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$, der jeder $\mathfrak{U}$-Kategorie die Menge ihrer Isomorphieklassen zuordnet, einen Trennschmelzfunktor $\mathrm{iso} : \curlywedge\mathfrak{U}\mathrm{Cat} \to \curlywedge\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$.

Beispiel 18.1.6.14 (**Leerverschmelzungsfunktor**). Gegeben $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie erhalten wir stets einen Schmelzfunktor

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathrm{kEns}$$

in die kartesische Schmelzkategorie der Mengen, indem wir jedem Objekt $X \in \mathcal{M}$ die Menge $\mathcal{M}(\curlyvee, X)$ der Leerverschmelzungen nach X zuordnen. Dieser Schmelzfunktor ist nur selten verträglich mit universellen Verschmelzungen. Gegeben ein Schmelzfunktor $p : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ bilden die durch p gegebenen Abbildungen $p : \mathcal{M}(\curlyvee, X) \to \mathcal{N}(\curlyvee, pX)$ stets eine Transformation von Schmelzfunktoren

$$\hat{p} : \mathrm{L}_{\mathcal{M}} \Rightarrow \mathrm{L}_{\mathcal{N}} \circ p$$

18.1.6.15. Gegeben eine Trennkategorie $\mathcal{T}$ erklären wir opponiert den **Leertrennungsfunktor** $\mathrm{L}_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \to \mathrm{kEns}^{\mathrm{opp}}$. Er hat die entsprechend opponierten Eigenschaften.

18.1.6.16. Wir sagen, ein Schmelzfunktor $p : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ sei **volltreu auf Leerverschmelzungen**, wenn er für alle Objekte $X \in \mathcal{M}$ eine Bijektion

$$\mathcal{M}(\curlyvee, X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(\curlyvee, pX)$$

induziert. Der Vergißfunktor $\mathrm{Ab} \to \mathrm{kEns}$ hat zum Beispiel diese Eigenschaft. Er ist in diesem Fall sogar isomorph zum Leerverschmelzungsfunktor. Allgemeiner ist für jede Schmelzkategorie der Leerverschmelzungsfunktor offensichtlich volltreu auf Leerverschmelzungen.

Beispiel 18.1.6.17. Es gibt eine **terminale Schmelzkategorie**

$$\mathrm{scat}$$

mit genau einem Objekt $*$ und einelementigen Mengen von Verschmelzungen. Von jeder Schmelzkategorie gibt es genau einen Schmelzfunktor in diese terminale Schmelzkategorie. Der Indexfunktor der terminalen Schmelzkategorie liefert einen Isomorphismus zwischen ihrer Familienkategorie und der Kategorie der endlichen Mengen beziehungsweise derjenigen endlichen Mengen, die wir für die Indizierung erlaubt haben, etwa die Elemente des kleinsten Universums, das die leere Menge als Element enthält. Opponiertes gilt für die **terminale Trennkategorie** tcat.

18.1.6.18. Ich erinnere „Strukturen“ auf Objekten einer Kategorie, wie sie in 4.7.3.6 diskutiert wurden, und erkläre deren Verallgemeinerung auf den Fall von Schmelzkategorien. Gegeben ein treuer Schmelzfunktor $w : \mathcal{S} \to \mathcal{M}$ erklären wir eine $(\mathcal{S}, w)$**-Struktur auf einem Objekt** $M \in \mathcal{M}$ als eine Äquivalenzklasse von Paaren (S, φ) bestehend aus einem Objekt $S \in \mathcal{S}$ und einem Isomorphismus $\varphi : w(S) \xrightarrow{\sim} M$ mit der Maßgabe, daß (S, φ) äquivalent ist zu (T, ψ), wenn es einen Isomorphismus $i : S \xrightarrow{\sim} T$ gibt mit $\varphi \circ w(i) = \psi$. Gegeben eine Verschmelzung $g : M_1 \curlyvee \ldots \curlyvee M_r \to M$ von Objekten von $\mathcal{M}$ mit $(\mathcal{S}, w)$-Strukturen sagen wir, unsere Verschmelzung sei eine $(\mathcal{S}, w)$**-Verschmelzung** oder **verträglich mit den** $(\mathcal{S}, w)$**-Strukturen**, wenn sie für beliebige Wahlen von Repräsentanten (S_i, φ_i) und (S, φ) der jeweiligen $(\mathcal{S}, w)$-Strukturen das Bild unter w einer Verschmelzung $\tilde{g} : S_1 \curlyvee \ldots \curlyvee S_r \to S$ ist, wenn also für diese Daten gilt

$$g \circ (\varphi_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \varphi_r) = \varphi \circ w(\tilde{g})$$

Die so erklärte **Schmelzkategorie der Objekte von** $\mathcal{M}$ **mit** $(\mathcal{S}, w)$**-Struktur** notieren wir $\mathcal{M}_{(\mathcal{S},w)}$ und erhalten eine Schmelzäquivalenz

$$[w] : \mathcal{S} \xrightarrow{\approx} \mathcal{M}_{(\mathcal{S},w)}$$

in Gestalt eines Schmelzfunktors, der jedem Objekt $S \in \mathcal{S}$ die Äquivalenzklasse des Paars $(S, \mathrm{id}_{w(S)})$ zuordnet.

Beispiel 18.1.6.19. Im Fall des Vergißfunktors $v : \mathrm{Ab} \to \mathrm{kEns}$ ist diese Schmelzäquivalenz in Verallgemeinerung von 4.7.3.7 mit der entsprechenden Sorgfalt in Fragen der Mengenlehre sogar ein Isomorphismus von Schmelzkategorien

$$[v] : \mathfrak{U}\mathrm{Ab} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U}\mathrm{kEns}_{(\mathrm{Ab},v)}$$

für jedes vorgegebene Mengensystem $\mathfrak{U}$. Analoges gilt in den meisten konkreten Fällen, die mir in den Sinn kommen.

Übungen

Übung 18.1.6.20. Gegeben ein Schmelzfunktor F liefern die universellen Eigenschaften für je zwei Objekte X, Y unter der Annahme, daß die fraglichen internen

Hom-Objekte existieren, einen natürlichen Morphismus

$$F(X \Rrightarrow Y) \to (FX \Rrightarrow FY)$$

Er muß kein Isomorphismus sein, wie unser Schmelzfunktor $\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}$ zeigt. Ist er stets ein Isomorphismus, so sagen wir, unser Schmelzfunktor sei **verträglich mit internem Hom**.

Ergänzende Übung 18.1.6.21. Seien $L : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ und $R : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ Schmelzfunktoren. Unter einer **Adjunktion von Schmelzfunktoren** $\alpha : L \dashv R$ verstehen wir eine Familie von Bijektionen

$$\alpha_{M_1,\ldots,M_r,N} : \mathcal{M}(M_1 \curlyvee \ldots \curlyvee M_r, RN) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(LM_1 \curlyvee \ldots \curlyvee LM_r, N)$$

derart, daß sie in ihrer Gesamtheit eine Adjunktion $(L^\curlyvee, R^\curlyvee)$ der auf den Familienkategorien induzierten Funktoren liefern. Man zeige, daß für jeden Kringhomomorphismus $k \to K$ die Restriktion res_K^k und die Induktion $\mathrm{ind}_k^K = K \otimes_k$ in natürlicher Weise ein adjungiertes Paar $(\mathrm{ind}, \mathrm{res})$ von Schmelzfunktoren zwischen den Schmelzkategorien der K-Moduln beziehungsweise k-Moduln bilden.

Übung 18.1.6.22. Gegeben Schmelzkategorien $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ mit stabil universellen Verschmelzungen und ein Schmelzfunktor $L : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, der mit stabil universellen Verschmelzungen verträglich ist und dessen Einschränkung auf die zugehörigen einfachen Kategorien einen Rechtsadjungierten R hat, wird dieser Rechtsadjungierte seinerseits ein Schmelzfunktor mit den Abbildungen

$$\mathcal{N}(N_1 \curlyvee \ldots \curlyvee N_r, N) \to \mathcal{M}(RN_1 \curlyvee \ldots \curlyvee RN_r, RN)$$

gegeben durch abbilden erst nach $\mathcal{N}(LRN_1 \curlyvee \ldots \curlyvee LRN_r, N)$ durch Vorschalten der Koeinheit der Adjunktion, dann bijektiv nach $\mathcal{N}(LRN_1 \otimes \ldots \otimes LRN_r, N)$ und weiter bijektiv nach $\mathcal{N}(L(RN_1 \otimes \ldots \otimes RN_r), N)$ und schließlich bijektiv nach $\mathcal{M}(RN_1 \otimes \ldots \otimes RN_r, RN)$ mit der gewöhnlichen Adjunktion und nach $\mathcal{N}(RN_1 \curlyvee \ldots \curlyvee RN_r, RN)$ in der offensichtlichen Weise.

Übung 18.1.6.23 (**Schmelzfunktoren und symmetrische Potenzen**). Gegeben ein Schmelzfunktor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ und $V \in \mathcal{M}$ haben wir, wenn die symmetrischen Potenzen $\mathrm{S}^r V$ und $\mathrm{S}^r(FV)$ nach 18.1.3.20 existieren, einen kanonischen Morphismus $\mathrm{S}^r(FV) \to F(\mathrm{S}^r V)$. Auch wenn F mit universellen Verschmelzungen verträglich ist, muß F nicht mit symmetrischen Potenzen verträglich sein, wie das Beispiel des vergeßlichen Funktors von der kartesischen Schmelzkategorie der abelschen Gruppen in die kartesische Schmelzkategorie der Mengen zeigt.

Beispiel 18.1.6.24. In der kartesischen Schmelzkategorie mit Multihom der Mengen ist das duale Objekt jeder Menge die einelementige Menge.

Übung 18.1.6.25 (**Dualisieren als Trennfunktor**). Sei $\mathcal{M}$ eine Trennschmelzkategorie, in der jedes Objekt dualisierbar ist. Man zeige, daß das Dualisieren einen Trennfunktor

$$\mathcal{M}^{\mathrm{t}} \to \mathcal{M}^{\mathrm{ot}}$$

vom Trennanteil von $\mathcal{M}$ zum Trennanteil von $\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ liefert, wenn wir den Effekt auf Trennungen erklären als die Komposition

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^{\mathrm{t}}(Y, X_1 \curlywedge \ldots \curlywedge X_r) \arrow[d, equal] & \mathcal{M}^{\mathrm{ot}}(Y^\vee, X_1^\vee \curlywedge \ldots \curlywedge X_r^\vee) \arrow[dd, equal] \\
\mathcal{M}(Y, X_1 \otimes \ldots \otimes X_r) \arrow[d] & \\
\mathcal{M}((X_1 \otimes \ldots \otimes X_r)^\vee, Y^\vee) \arrow[r] & \mathcal{M}(X_1^\vee \curlyvee \ldots \curlyvee X_r^\vee, Y^\vee)
\end{tikzcd}$$

mit dem Vorschalten der in 18.1.4.21 erklärten Verschmelzung als unterer Horizontale. Unser Dualisieren macht eine universelle Trennung nach $X_1 \curlywedge \ldots \curlywedge X_r$ genau dann zu einer universellen Trennung, wenn unsere Verschmelzung aus 18.1.4.21 universell ist alias einen Isomorphismus $X_1^\vee \otimes \ldots \otimes X_r^\vee \xrightarrow{\sim} (X_1 \otimes \ldots \otimes X_r)^\vee$ induziert. In 18.3.4.20 werden wir sehen, daß das etwa dann der Fall ist, wenn alle X_i mit höchstens einer Ausnahme „starr“ sind. Natürlich induziert unser Dualisieren $\mathcal{M}^{\mathrm{t}} \to \mathcal{M}^{\mathrm{ot}}$ opponiert einen Schmelzfunktor $\mathcal{M}^{\mathrm{os}} \to \mathcal{M}^{\mathrm{s}}$. Im allgemeinen ist unser Dualisieren $\mathcal{M}^{\mathrm{t}} \to \mathcal{M}^{\mathrm{ot}}$ aber nicht mit universellen Trennungen verträglich und $\mathcal{M}^{\mathrm{os}} \to \mathcal{M}^{\mathrm{s}}$ gleichbedeutend nicht mit universellen Verschmelzungen.

Übung 18.1.6.26. Gegeben ein Morphismus $f : M \to N$ in einer Trennschmelzkategorie mit Multihom $\mathcal{M}$ kommutiert mit dem Auswerten $\mathrm{ev} : X \curlyvee X^\vee \to \mathbb{I}$ aus 18.1.4.17 für $X = M, N$ und den hoffentlich offensichtlichen weiteren Morphismen das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M \curlyvee N^\vee \arrow[r] \arrow[d] & M \curlyvee M^\vee \arrow[d] \\
N \curlyvee N^\vee \arrow[r] & \mathbb{I}
\end{tikzcd}$$

Übung 18.1.6.27 (**Funktionenraum als Trennfunktor**). Wir erhalten einen Trennfunktor

$$\mathrm{Fun} : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$$

von der banalen Trennkategorie der Mengen in die Opponierte der Schmelzkategorie der abelschen Gruppen durch die Vorschrift, daß wir jeder Menge X die Gruppe $\mathrm{Fun}(X) := \mathrm{Ens}(X, \mathbb{Z})$ der $\mathbb{Z}$-wertigen Funktionen auf X zuordnen und jeder Trennung $X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ gegeben durch ein Tupel von Abbildungen

$f_i : X \to Y_i$ die multilineare Abbildung $(h_1, \ldots, h_r) \mapsto (h_1 \circ f_1) \ldots (h_r \circ f_r)$, die einem Tupel von Funktionen das Produkt der auf X zurückgeholten Funktionen zuordnet. Der Leertrennung $X \to \curlywedge$ wird dabei die durch die konstante Funktion Eins gegebene Leertrennung $\mathrm{Fun}(X) \to \curlywedge$ in der Trennkategorie $\mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ zugeordnet. In derselben Weise oder auch durch Skalarerweiterung erhalten wir für jeden Kring k einen Trennfunktor

$$\mathrm{Fun} : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Mod}_k^{\mathrm{opp}}$$

Wenn wir k spezifizieren wollen, schreiben wir auch $\mathrm{Fun}(X) = \mathrm{Fun}(X; k) = \mathrm{Ens}(X, k)$.

Übung 18.1.6.28 (**Funktionenraum als Trennfunktor, topologische Variante**). Wir erhalten einen Trennfunktor $\curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{opp}}$ mit $X \mapsto \mathrm{Top}(X, \mathbb{R})$, ja sogar einen Trennfunktor in die Opponierte der Schmelzkategorie der topologischen reellen Vektorräume mit stetigen multilinearen Abbildungen als Verschmelzungen, indem wir unsere Räume von stetigen Funktionen mit ihrer kompakt-offenen Topologie versehen.

Übung 18.1.6.29 (**Raum von Maßen als Trennschmelzfunktor**). Wir erhalten einen Trennschmelzfunktor

$$\mathrm{Maß}_! : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}$$

von der banalen Trennkategorie der Mengen in die Schmelzkategorie der abelschen Gruppen und genauer zwischen deren Erweiterungen zu Trennschmelzkategorien durch die Vorschrift, daß wir jeder Menge X die abelsche Gruppe $\mathrm{Maß}_!(X) := \mathbb{Z}X$ der $\mathbb{Z}$-wertigen Funktionen auf X mit endlichem Träger alias „kompakt getragenen ganzzahligen Maße“ zuordnen und jeder Verschmelzung $X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \to Y$ alias Abbildung $v : X_1 \times \ldots \times X_r \to Y$ die multilineare Abbildung

$$(\mu_1, \ldots, \mu_r) \mapsto v_*(\mu_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \mu_r)$$

mit v_* der „Summation über die Fasern von v“ alias dem „direkten Bild von Maßen“. Der universellen Leerverschmelzung, die in der einpunktigen Menge ens landet, wird insbesondere eine universelle Leerverschmelzung alias ein Isomorphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Maß}_!(\mathrm{ens})$ aus dem leeren Tensorprodukt abelscher Gruppen zugeordnet. Das Bild des ausgezeichneten Erzeugers $1 \in \mathbb{Z}$ im leeren Tensorprodukt unter diesem Isomorphismus notieren wir $\delta_* \in \mathrm{Maß}_!(\mathrm{ens})$ und nennen es das **Dirac-Maß** auf dem einpunktigen Raum $\mathrm{ens} = \{*\}$. Einer Leerverschmelzung $\curlyvee \to Y$ alias einem Punkt $y \in Y$ wird folglich diejenige Leerverschmelzung $\curlyvee \to \mathrm{Maß}_!(Y)$ zugeordnet, die durch die charakteristische Funktion des fraglichen Punktes alias sein Diracmaß $\delta_y \in \mathrm{Maß}_!(Y)$ gegeben ist. In derselben Weise

oder auch durch Skalarerweiterung erhalten wir für jeden Kring k einen Trennschmelzfunktor

$$\text{Maß}_! : \curlywedge\text{Ens} \to \text{Mod}_k$$

Wenn wir an die Koeffizienten erinnern wollen, schreiben wir in diesem Zusammenhang ausführlicher $\text{Maß}_!(X) = \text{Maß}_!(X; k)$.

18.1.6.30 (**Raum von Maßen als Schmelzfunktor**). Bezeichne Meß die Kategorie der Meßräume. Wir erhalten dann einen Schmelzfunktor

$$\text{kart}(\text{Meß}) \to \text{Mod}_{\mathbb{R}}$$

durch die Vorschrift, daß wir jedem Meßraum X den Vektorraum $X \mapsto \text{M}(X; \mathbb{R})$ seiner reellen Maße zuordnen und jeder Verschmelzung $X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \to Y$ alias meßbaren Abbildung $v : X_1 \times \ldots \times X_r \to Y$ die multilineare Abbildung $(\mu_1, \ldots, \mu_r) \mapsto v_*(\mu_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \mu_r)$, die einem Tupel von Maßen das Bildmaß des Produktmaßes zuordnet. Er ist jedoch in dieser Allgemeinheit nicht mehr verträglich mit universellen Verschmelzungen und kann insbesondere nicht mehr zu einem Trennschmelzfunktor erweitert werden. Nach allgemeinen Resultaten der Maßtheorie wird weiter das Bilden der Borel'schen σ-Algebra $\text{Top} \to \text{Meß}$ verträglich mit endlichen kartesischen Produkten, wenn wir es auf die volle unter endlichen Produkten stabile Unterkategorie $\text{Topaz} \subset \text{Topaz}$ der abzählbar basierten topologischen Räume einschränken. So erhalten wir einen Schmelzfunktor $\text{kart}(\text{Topaz}) \to \text{Mod}_{\mathbb{R}}$, $X \mapsto \text{M}(X; \mathbb{R})$.

18.1.6.31 (**Raum von Maßen als Schmelzfunktor, Variante**). Bezeichne Meß die Kategorie der Meßräume. Wir erhalten dann einen Schmelzfunktor $\text{kart}(\text{Meß}) \to \text{kart}(\text{Ens})$ durch $X \mapsto \text{M}(X; [0, \infty])$.

18.1.6.32 (**Raum von Maßen als Schmelzfunktor, topologische Variante**). Die topologischen Räume, in denen alle Kompakta abzählbar basiert sind, bilden eine volle unter endlichen Produkten abgeschlossene Unterkategorie $\text{Topkaz} \subset \text{Top}$ und wir erhalten einen Schmelzfunktor

$$\text{Maß}_! : \text{kart}(\text{Topkaz}) \to \text{Mod}_{\mathbb{R}}$$

mit der Eigenschaft, daß $\text{Maß}_!$ jedem Raum den Raum der kompakt getragenen reellen Maße zuordnet, also aller Maße, die sich als Bildmaße von reellen Maßen auf Kompakta darstellen lassen. Daraus erhalten wir unsere kompakt getragenen Maße auf diskreten Mengen als Spezialfall zurück. Alternativ können wir auch beliebige lokal kompakte Hausdorffräume und kompakt getragene Radonmaße betrachten. Auch diese bilden einen Schmelzfunktor, der kompakt getragene Maße auf diskreten Mengen verallgemeinert.

Übung 18.1.6.33 (**Funktionen als duale Maße**). Unser Trennfunktor der Funktionenräume aus 18.1.6.27 ist isomorph zur Verkettung von Trennfunktoren

$$\curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{t}} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{ot}}$$

mit $\mathrm{Maß}_!$ als erstem Pfeil und dem Dualisieren 18.1.6.25 als zweitem Pfeil. Genauer erhalten wir eine Isotransformation zwischen besagten Trennfunktoren durch diejenigen natürlichen Isomorphismen $\mathrm{Fun}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Maß}_!(X)^*$, die von den Paarungen

$$\mathrm{Fun}(X) \times \mathrm{Maß}_!(X) \to \mathbb{Z}$$

vermittels der Vorschrift „multipliziere und summiere die Funktionswerte“ alias „integriere die Funktion nach dem Maß“ herkommen. Analoges gilt mit Koeffizienten in einem beliebigen Kring. Wir erklären in 18.3.2.10, wie in diesem begrifflichen Rahmen die Struktur auf dem Raum der Maße als Modul über dem Ring der Funktionen zu einem Spezialfall des „abstrakten cap-Produkts“ wird.

18.2 Vorzeichenfragen und Homotopiekomplexe

18.2.1 Twist und Superisierung

18.2.1.1 (**Motivation**). Ich will alle Vorzeichen der homologischen Algebra unter den Teppich kehren, indem ich eine neue Schmelzkategorie einführe, die Schmelzkategorie

$$\mathrm{sgAb}$$

der „supergraduierten abelschen Gruppen“. Die Verschmelzungen hängen auch hier von der Reihenfolge der verschmolzenen Faktoren nicht ab, sonst wären die Axiome einer Schmelzkategorie nicht erfüllt. Stattdessen erklären wir die Verschmelzungen in sgAb ihrerseits als Zuordnungen, die jeder Anordnung der Faktoren homogene multiadditive Abbildungen zuordnen derart, daß sich unsere multiadditiven Abbildungen bei einem Wechsel der Anordnung um gewisse wohlbestimmte Vorzeichen ändern. So eine Verschmelzung wird meist angegeben, indem man eine Reihenfolge der Ausgangsobjekte wählt, üblicherweise stehen sie bereits der Reihe nach auf dem Papier und man denkt sich die „von links nach rechts wachsende Anordnung“ als die gewählte Anordnung, und zusätzlich die multiadditive Abbildung angibt, die unsere Verschmelzung in Bezug auf diese Anordnung realisiert. Die ganzen Verträglichkeiten von Vorzeichen, die man üblicherweise zu prüfen hat, werden so in der Aussage kodiert und ein für allemal bewiesen, daß diese Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen tatsächlich eine Schmelzkategorie ist. Komplexe abelscher Gruppen sind in diesem Formalismus „Moduln $K \in \mathrm{sgAb}$ über dem Biabmonoid $D \in \mathrm{sgAb}$ der Differentiale“, wie im anschließenden Abschnitt besprochen werden soll.

18.2.1.2. Gegeben eine endliche Menge I mit einer Abbildung $\pi : I \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, die jedem Element eine „Parität“ zuordnet, erklären wir für je zwei Anordnungen ω, η von I ein Vorzeichen

$$\mathrm{sgnu}(\omega, \eta) = \mathrm{sgnu}_\pi(\omega, \eta) \in \{1, -1\}$$

als das Signum der von der entsprechenden Umordnung auf den ungeraden Elementen von I alias der auf $\pi^{-1}(\bar{1})$ induzierten Permutation. Wir nennen sgnu das **Paritätssignum**.

Beispiel 18.2.1.3. Gegeben die zwei Anordnungen $\omega : 3 < 4 < 6 < 7 < 9$ und $\eta : 9 < 4 < 3 < 6 < 7$ auf der fünfelementigen Menge $\{3, 4, 6, 7, 9\}$ mit ihrer offensichtlichen Paritätsabbildung sind $3 < 7 < 9$ und $9 < 3 < 7$ die auf den ungeraden Elementen induzierten Anordnungen. Diese unterscheiden sich um eine gerade Permutation, also haben wir $\mathrm{sgnu}(\omega, \eta) = 1$.

18.2.1.4. Sei eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ versehen mit einer Operation der Vorzeichengruppe $\{+, -\}$ auf jeder Verschmelzungsmenge, die wir als das „Ändern des

Vorzeichens“ ansprechen und notieren. Hat diese Operation die Eigenschaft, daß „jede Multiverknüpfung ihr Vorzeichen ändert, wenn wir bei genau einer der beteiligten Verschmelzungen das Vorzeichen ändern“, so nennen wir $\mathcal{M}$ mit diesen Operationen eine **Schmelzkategorie mit Vorzeichen**.

Vorschau 18.2.1.5. In der in 18.2.4.14 eingeführten Terminologie ist eine Schmelzkategorie mit Vorzeichen dasselbe wie eine geeignet angereicherte Schmelzkategorie, genauer eine in der multiäquivarianten Schmelzkategorie $\mathrm{Ens}_{\Upsilon\pm}$ nach 18.1.2.15 der Mengen mit einer Operation der Gruppe $\{+,-\}$ angereicherte Schmelzkategorie.

Beispiel 18.2.1.6 (**Abelsche Gruppen als Schmelzkategorie mit Vorzeichen**). Wir können die Schmelzkategorie Ab der abelschen Gruppen zu einer Schmelzkategorie mit Vorzeichen machen, indem wir die Operation der Gruppe $\{+,-\}$ auf jeder Verschmelzungsmenge dadurch erklären, daß das nichttriviale Element durch das Nachschalten der Multiplikation mit (-1) operiert.

18.2.1.7 (**Twist einer Schmelzkategorie mit Vorzeichen**). Gegeben eine Schmelzkategorie mit Vorzeichen $\mathcal{M}$ erklären wir eine weitere Schmelzkategorie, ihre **getwistete Verdopplung** oder kurz ihren **Twist**

$$\mathrm{t}\mathcal{M}$$

Als Objektmenge von $\mathrm{t}\mathcal{M}$ nehmen wir die Menge $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathcal{M}$ aller Paare bestehend aus einer Parität und einem Objekt von $\mathcal{M}$. Die Projektion auf die erste Komponente notieren wir $\mathrm{par} : \mathrm{Ob}(\mathrm{t}\mathcal{M}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und nennen sie **Parität**. Die Projektion auf die zweite Komponente $\mathrm{Ob}(\mathrm{t}\mathcal{M}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ alias das „Vergessen der Parität“ notieren wir gar nicht. Die Elemente von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ notieren wir $\bar{0}, \bar{1}$ und unterscheiden sie so von den Elementen unserer Vorzeichengruppe. Gegeben eine Objektkleinfamilie $A := (A_i)_{i\in\bar{A}}$ von $\mathrm{t}\mathcal{M}$ und ein Objekt $Q \in \mathrm{t}\mathcal{M}$ erklären wir die Menge der Verschmelzungen $\mathrm{t}\mathcal{M}(A,Q)$ im Twist durch die Vorschrift

$$\mathrm{t}\mathcal{M}(A,Q) = \emptyset \quad \text{falls} \quad \sum_{i\in\bar{A}} \mathrm{par} A_i \neq \mathrm{par}\, Q$$

und andernfalls als die Menge aller Abbildungen

$$\varphi : \mathrm{Ens}^{\times}([\![r]\!], \bar{A}) \to \mathcal{M}(A,Q) \quad \text{notiert } \omega \mapsto \varphi_\omega$$

von der Menge aller Anordnungen auf $\bar{A}$ in die Menge der $\mathcal{M}$-Verschmelzungen unserer Objekte mit $\varphi_\omega = \mathrm{sgnu}_{\mathrm{par}\circ A}(\omega,\eta)\varphi_\eta \ \forall \omega,\eta$. Der folgende Satz liefert eine Multiverknüpfung für diese Verschmelzungen, die offensichtlich multiunitärassoziativ ist und unsere Konstruktion der Schmelzkategorie $\mathrm{t}\mathcal{M}$ zu Ende bringt.

Satz 18.2.1.8 (**Multiverknüpfung von vertwisteten Verschmelzungen**). *Seien $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie mit Vorzeichen und $(A_i)_{i\in\bar{A}}$ sowie $(B_j)_{j\in\bar{B}}$ Objektkleinfamilien in $\mathrm{t}\mathcal{M}$. Seien $Q \in \mathrm{t}\mathcal{M}$ ein Objekt und $f : \bar{A} \to \bar{B}$ eine Abbildung der Indexmengen. Gegeben Verschmelzungen $\psi_j \in \mathrm{t}\mathcal{M}(A|_{f^{-1}(j)}, B_j)$ und $\varphi \in \mathrm{t}\mathcal{M}(B, Q)$ gibt es genau eine Verschmelzung $\vartheta \in \mathrm{t}\mathcal{M}(A, Q)$ mit*

$$\vartheta_\kappa = \varphi_\omega \circ \prod_{j\in\bar{B}} (\psi_j)_{\eta(j)}$$

für jede Wahl einer Anordnung ω von $\bar{B}$, je einer Anordnung $\eta(j)$ der Faser $f^{-1}(j)$ und die induzierte Anordnung κ von $\bar{A}$.

Beweis. Es gilt zu zeigen, daß die durch ϑ_κ gegebene Verschmelzung weder von der Wahl der Anordnung ω auf $\bar{B}$ noch von der Wahl der Anordnungen $\eta(j)$ auf den Fasern $f^{-1}(j)$ von f abhängt. Im Fall der Wahl der Anordnung auf einer der Fasern ist das eh klar, das Signum einer Permutation einer angeordneten Menge, die nur in einem Intervall etwas bewegt, ist dasselbe wie das Signum ihrer Restriktion auf besagtes Intervall. Ändern wir dahingegen die Anordnung auf $\bar{B}$, so gilt es zu beachten, daß das Signum einer Permutation, die aus einer Permutation von Intervallen entsteht, die ihre interne Anordnung behalten, zusammenfällt mit dem Signum der Permutation, die die Umordnung der Intervalle ungerader Länge unter unseren Intervallen beschreibt. □

18.2.1.9 (**Notationsfragen**). Wir werden noch weitere Schmelzkategorien kennenlernen, bei denen eine Verschmelzung $(A_i)_{i\in\bar{A}} \to Y$ erklärt wird als ein Datum, das jeder Anordnung der Indexmenge $\omega : [\![r]\!] \xrightarrow{\sim} \bar{A}$ etwas zuordnet. In diesen Fällen denken wir uns für gewöhnlich implizit eine als Aufzählung hingeschriebene Familie versehen mit der „Leseanordnung, in der der erste Buchstabe das kleinste Element symbolisiert und der letzte Buchstabe das größte“. Mit dieser Konvention auf der linken Seite erhalten wir Bijektionen

$$\mathrm{t}\mathcal{M}(P_1 \curlyvee \ldots \curlyvee P_r, Q) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(P_1 \curlyvee \ldots \curlyvee P_r, Q)$$

durch die Vorschrift $\varphi \mapsto \varphi_{\mathrm{id}}$ mit $\mathrm{id} : [\![r]\!] \xrightarrow{\sim} [\![r]\!]$ der offensichtlichen Anordnung. Wir sagen dann, die „$\mathcal{M}$-Verschmelzung stelle die $\mathrm{t}\mathcal{M}$-Verschmelzung in der vorgegebenen Anordnung dar“ und ähnlich in vergleichbaren Kontexten.

Beispiel 18.2.1.10 (**Schmelzkategorie der erweiterten Paritäten**). Wir betrachten zur kartesischen Schmelzkategorie der Mengen kEns die multiäquivariante Schmelzkategorie $\mathrm{kEns}_{\curlyvee\{+,-\}}$ der Mengen mit einer Operation der Vorzeichengruppe und darin die volle Unterkategorie

$$\mathrm{ZEns} \subset \mathrm{kEns}_{\curlyvee\{+,-\}}$$

aller zweielementigen Mengen mit transitiver Operation. Eine Verschmelzung in dieser Schmelzkategorie ist eine Abbildung $f : Y_1 \times \ldots \times Y_r \to X$ mit der Eigenschaft, daß sich bei jeder Änderung an genau einem Eintrag in der Definitionsmenge notwendig auch das Ergebnis ändert. Wir nennen so eine Multiabbildung **antikonstant**. Alle Mengen von Verschmelzungen in ZEns haben damit genau zwei Elemente und das Vertauschen dieser beiden Elemente macht ZEns zu einer Schmelzkategorie mit Vorzeichen, die sich in 18.2.4.23 als die „automatische Selbstanreicherung von ZEns“ erweisen wird. Den Twist dieser Schmelzkategorie mit Vorzeichen notieren wir

$$\mathrm{Par} := \mathrm{t}(\mathrm{ZEns})$$

und nennen ihn die **Schmelzkategorie der erweiterten Paritäten**. Objekte dieser Schmelzkategorie sind Paare bestehend aus einer Parität und einer zweielementigen Menge, die wir als ein „unsere Parität erweiterndes Zusatzdatum“ verstehen.

Beispiel 18.2.1.11 (**Orientierungsmenge als Schmelzfunktor**). Gegeben ein angeordneter Körper k erinnern wir den Funktor $\mathrm{or}^{\mathrm{alg}} : \mathrm{Modf}_k^\times \to \mathrm{Ens}$ der Orientierungsmenge, der jedem endlichdimensionalen k-Vektorraum die zweielementige Menge seiner beiden Orientierungen zuordnet. Unter einer Orientierung verstehen wir dabei wie üblich eine Abbildung, die jeder angeordneten Basis ein Vorzeichen in einer Weise zuordnet, die mit dem Vorzeichen der Determinante der Basiswechselmatrizen verträglich ist. Wir erweitern ihn nun zu einem Schmelzfunktor

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{or} = \mathrm{or}^{\mathrm{alg}} : & (\curlyvee\mathrm{Modf}_k)^\times & \to & \mathrm{Par} \\ & E & \mapsto & (\dim E + 2\mathbb{Z}, \mathrm{or}E) \end{array}$$

vom Schmelzgruppoid der banalen Schmelzkategorie der endlichdimensionalen k-Vektorräume in unsere Schmelzkategorie der erweiterten Paritäten. Um so einen Schmelzfunktor anzugeben, müssen wir jeder universellen Verschmelzung $f : V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r \to W$ alias jedem Tupel linearer Abbildungen $f_i : V_i \to W$, die in ihrer Gesamtheit einen Isomorphismus $V_1 \oplus \ldots \oplus V_r \xrightarrow{\sim} W$ liefern, eine antikonstante Multiabbildung

$$\mathrm{or}(f) : \mathrm{or}V_1 \times \ldots \times \mathrm{or}V_r \to \mathrm{or}W$$

so zuordnen, daß verschiedene Verträglichkeiten erfüllt sind. Wir wählen $\mathrm{or}(f)$ als die eindeutige antikonstante Multiabbildung mit $\mathrm{or}(f) : (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \mapsto \varepsilon$ falls es angeordnete Basen B_i von V_i der Orientierung ε_i gibt und ε die Orientierung der in der offensichtlichen Weise angeordneten Basis $f_1(B_1) \sqcup \ldots \sqcup f_r(B_r)$ von W ist. Jetzt gilt es, mithilfe des Kriteriums 18.1.6.2 die Verträglichkeit mit Multiverknüpfungen zu prüfen, was wir dem Leser überlassen.

18.2.1.12 (**Funktorialität der Twists**). Ein Schmelzfunktor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ von Schmelzkategorien mit Vorzeichen heiße **vorzeichenverträglich**, wenn die davon auf den Verschmelzungsmengen induzierten Abbildungen äquivariant sind für die jeweiligen Operationen der Vorzeichengruppe. Unter diesen Voraussetzungen induziert er in offensichtlicher Weise einen Schmelzfunktor der Twists

$$\mathrm{t}F : \mathrm{t}\mathcal{M} \to \mathrm{t}\mathcal{N}$$

18.2.1.13 (**Motivation für das Supergraduieren**). Die Schmelzkategorie der abelschen Gruppen Ab können wir zu einer Schmelzkategorie mit Vorzeichen machen, indem wir das Nachschalten der Multiplikation mit (-1) als Involution auf den Verschmelzungsmengen auszeichnen. Um die „Schmelzkategorie der Komplexe“ zu konstruieren, mit der wir in der Homologietheorie bereits ausgiebig gearbeitet haben, gehen wir von einer Variante unserer Twist-Konstruktion aus, die wir das „Supergraduieren“ nennen.

18.2.1.14 (**Supergraduieren**). Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Vorzeichen und ein kommutatives Monoid $(\Gamma, +)$ mit einem ausgezeichneten Homomorphismus $\pi : \Gamma \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ bilden wir eine weitere Schmelzkategorie, die (Γ, π)-**supergraduierte Version**

$$\mathrm{s}\mathcal{M}^{(\Gamma,\pi)}$$

von $\mathcal{M}$. Als Objektmenge nehmen wir $\mathrm{Ob}(\mathrm{s}\mathcal{M}^{(\Gamma,\pi)}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{M}^\Gamma)$. Unsere neuen Objekte sind also Familien $(M^\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ von Objekten von $\mathcal{M}$ indiziert durch $\gamma \in \Gamma$. Als Verschmelzungen $\varphi \in \mathrm{s}\mathcal{M}^{(\Gamma,\pi)}(A, Y)$ nehmen wir Abbildungen

$$\varphi : \mathrm{Ens}^\times([\![r]\!], \bar{A}) \to \mathcal{M}^\Gamma(A, Y) \quad \text{notiert } \omega \mapsto \varphi_\omega$$

von Anordnungen der Indexmenge der Objektkleinfamilie A, für die wir hier $|\bar{A}| = r$ angenommen haben, in die Menge der Verschmelzungen der Schmelzkategorie der Γ-graduierten Objekte von $\mathcal{M}$ aus 18.1.2.1 derart, daß für je zwei Anordnungen ω, η und jedes $\alpha : \bar{A} \to \Gamma$ gilt

$$\varphi_{\omega,\alpha} = \mathrm{sgnu}_{\pi\circ\alpha}(\omega, \eta)\varphi_{\eta,\alpha}$$

mit $\varphi_{\omega,\alpha} \in \mathcal{M}((A_i^{\alpha(i)})_{i\in\bar{A}}, Y^{\mathrm{sum}(\alpha)})$ wie in 18.1.2.1 dem α-Anteil der $\mathcal{M}^\Gamma$-Verschmelzung φ_ω. Die Multiverknüpfungen erklären wir analog zum Fall der vertwisteten Schmelzkategorien 18.2.1.8 dadurch, daß sie bei der Darstellung bezüglich verträglicher Anordnungen mit den Multiverknüpfungen in $\mathcal{M}^\Gamma$ zusammenfallen. Die Wohldefiniertheit und Multiunitärassoziativität folgen aus den entsprechenden Eigenschaften im Fall von vertwisteten Schmelzkategorien 18.2.1.8, angewandt auf die $\varphi_{\omega,\alpha}$. Hat $\mathcal{M}^\Gamma$ stabil universelle Verschmelzungen beziehungsweise Multihom, so auch $\mathrm{s}\mathcal{M}^{(\Gamma,\pi)}$.

18.2.1.15 (**Funktorialität des Supergraduierens**). Gegeben ein vorzeichenverträglicher Schmelzfunktor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ von Schmelzkategorien mit Vorzeichen und $\pi : \Gamma \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wie oben erhalten wir in offensichtlicher Weise Schmelzfunktoren zwischen den (Γ, π)-supergraduierten Versionen

$$\mathrm{s}F^{(\Gamma,\pi)} : \mathrm{s}\mathcal{M}^{(\Gamma,\pi)} \to \mathrm{s}\mathcal{N}^{(\Gamma,\pi)}$$

Beispiel 18.2.1.16. Im Fall $\pi = 0$ erhalten wir die Schmelzkategorie der Γ-graduierten Objekte zurück, in Formeln $\mathrm{s}\mathcal{M}^{(\Gamma,0)} = \mathcal{M}^{\Gamma}$.

18.2.1.17. Im Fall $\Gamma = \mathbb{Z}$ mit $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Projektion verwenden wir die abkürzende Schreibweise

$$\mathrm{sg}\mathcal{M} := \mathrm{s}\mathcal{M}^{(\mathbb{Z},\pi)}$$

und nennen das die Schmelzkategorie der **supergraduierten Objekte von** $\mathcal{M}$. Leerverschmelzungen werden per definitionem gegeben durch $\mathrm{sg}\mathcal{M}(\curlywedge, X) = \mathcal{M}(\curlywedge, X^0)$. Besonders wichtig ist für uns die Schmelzkategorie sgAb, die wir im folgenden noch ausführlicher diskutieren. Den Effekt des Supergraduierens auf Funktoren notieren wir analog $\mathrm{sg}F$.

18.2.1.18. Im Fall $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit $\pi = \mathrm{id}$ der Identität verwenden wir die abkürzende Schreibweise

$$\mathrm{s}\mathcal{M} := \mathrm{s}\mathcal{M}^{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathrm{id})}$$

und nennen $\mathrm{s}\mathcal{M}$ die Schmelzkategorie der **Superobjekte von** $\mathcal{M}$. Im Fall eines Körpers k heißt sMod_k die **Schmelzkategorie der Supervektorräume** über k. Objekte sind $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierte k-Vektorräume $W = (W^{\bar{0}}, W^{\bar{1}})$. Vielfach bezeichnet man in diesem Zusammenhang die direkte Summe $W^{\bar{0}} \oplus W^{\bar{1}}$ auch mit W. Die Schmelzkategorie

$$\mathrm{sAb}$$

nennen wir die **Schmelzkategorie der superisierten abelschen Gruppen** oder „Super-$\mathbb{Z}$-Moduln“, weil der Begriff der „Supergruppen“ schon anderweitig vergeben ist, vergleiche 18.3.5.4. Wir erhalten eine Transformation vom Identitätsfunktor auf sAb zu sich selbst, indem wir jedem Objekt $W = W^{\bar{0}} \oplus W^{\bar{1}}$ seine **Vorzeicheninvolution** $\mathrm{diag}(\mathrm{id}, -\mathrm{id})$ zuordnen. Die Notation $\mathbb{Z}^{n|m}$ steht für das Objekt $(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^m) \in \mathrm{sAb}$. Die Notation $k^{n|m}$ steht allgemeiner für das Objekt $(k^n, k^m) \in \mathrm{sMod}_k$.

Vorschau 18.2.1.19. In Übung 18.2.1.24 lernen Sie eine Schmelzäquivalenz zwischen dem Einheitengruppoid der superisierten abelschen Gruppen und der Schmelzkategorie der erweiterten Paritäten $\mathrm{U}^{\times}(\mathrm{sAb}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Par}$ kennen, in der sich die enge Verwandtschaft zwischen Twist und Superisierung konkretisiert.

Beispiel 18.2.1.20 (**Supergraduierte abelsche Gruppen**). Wir diskutieren nun die Schmelzkategorie sgAb der supergraduierten abelschen Gruppen. Ihre Objekte sind Familien $(X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von abelschen Gruppen. Einsverschmelzungen $f : X \to Y$ sind Tupel $f = (f^n)$ von Gruppenhomomorphismen $f^n : X^n \to Y^n$. Leerverschmelzungen $f : \Upsilon \to X$ sind Elemente $x \in X^0$. Eine universelle Leerverschmelzung ist die Leerverschmelzung in das Objekt $\mathbb{Z}[0]$ mit $\mathbb{Z}[0]^0 = \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}[0]^n = 0$ für $n \neq 0$, die gegeben wird durch $1 \in \mathbb{Z}$. Um Zweiverschmelzungen zu erklären, betrachten wir eine Objektkleinfamilie $B = (B_i, B_\iota)$ indiziert durch eine Indexmenge $\bar{B} = \{i, \iota\} = \{\iota, i\}$, die extra so gewählt und angegeben ist, um der Versuchung entgegenzuwirken, sie als mit einer Anordnung versehen betrachen zu wollen. Eine Verschmelzung $f \in \mathrm{sgAb}(B, Y)$ ist dann eine Familie von biadditiven Abbildungen

$$f^{p,q}_\omega : B^p_i \times B^q_\iota \to Y^{p+q}$$

für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ und alle Anordnungen ω unserer Indexmenge $\bar{B}$ derart, daß für η, ρ die beiden möglichen Anordnungen gilt $f^{p,q}_\eta = (-1)^{pq} f^{p,q}_\rho$. Vielfach geben wir so eine Verschmelzung schlicht als ein Tupel von biadditiven Abbildungen

$$f^{p,q} : B^p_i \times B^q_\iota \to Y^{p+q}$$

an und meinen damit $f^{p,q} = f^{p,q}_\omega$ für ω die „Schreibanordnung“, hier also die Anordnung $i < \iota$. Eine universelle, ja eine stabil universelle Zweiverschmelzung von zwei Objekten X, Y landet mit diesen Konventionen im Objekt Z mit den homogenenen Komponenten $Z^n := \bigoplus_{p+q=n} X^p \otimes Y^q$ und wird in den eben besprochenen Konventionen gegeben durch die biadditiven Abbildungen $u : X^p \times Y^q \to Z^{p+q}$ mit $u : (x, y) \mapsto x \otimes y$. Ich schlage vor, das Ziel universeller Verschmelzungen in sgAb und anderen superisierten Schmelzkategorien in Zweifelsfällen

$$\bar{\otimes} = \otimes_{\mathrm{s}}$$

zu notieren und als **Supertensorprodukt** anzusprechen, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \otimes Y & \tilde{\to} & X \bar{\otimes} Y \\ \| & & \| \\ Y \otimes X & \tilde{\to} & Y \bar{\otimes} X \end{array}$$

keineswegs kommutiert mit denjenigen Gleichheiten in den Vertikalen, die die Eindeutigkeit universeller Verschmelzungen zum Ausdruck bringen, und den durch die Schreibreihenfolge ausgezeichneten Isomorphismen in den Horizontalen. Vielmehr müssen wir in der linken Vertikale die Abbildung $x \otimes y \mapsto (-1)^{|x||y|} y \otimes x$ nehmen, damit unser Diagramm kommutiert. Die Schmelzkategorie sgAb der supergraduierten abelschen Gruppen hat auch Multihom. Um das zu zeigen, brauchen wir nach 18.1.4.12 nur für jedes Objekt X einen Rechtsadjungierten $(X \Rightarrow\ )$

von $(\ \bar{\otimes} X)$ anzugeben. Dazu erklären wir unseren Funktor durch

$$(X \Rrightarrow Y)^n := \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^i, Y^{i+n})$$

und die Adjunktion durch die Bijektionen

$$\mathrm{sgAb}(Z \bar{\otimes} X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sgAb}(Z, X \Rrightarrow Y)$$

gegeben durch $f = (f^{p,q}) \mapsto \bar{f}$ mit $\bar{f}^n : Z^n \to (X \Rrightarrow Y)^n$ gegeben durch $(\bar{f}^n(z))^i := f^{n,i}(z,\ ) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^i, Y^{i+n})$. Das Prüfen sei dem Leser überlassen. Analoges gilt für die Schmelzkategorie sgMod_k der supergraduierten Moduln über einem Kring k.

Beispiel 18.2.1.21 (**Maximale äußere Potenz als Schmelzfunktor**). Gegeben ein Körper k liefert die maximale äußere Potenz als homogene Komponente im durch die Dimension gegebenen Grad $V \mapsto (\bigwedge^{\max} V)[-\dim V]$ einen Schmelzfunktor

$$\bigwedge^{\max} : (\Upsilon \mathrm{Modf}_k)^\times \to \mathrm{sgMod}_k$$

vom Schmelzgruppoid der banalen Schmelzkategorie der endlich erzeugten k-Vektorräume in das Schmelzgruppoid der eindimensionalen supergraduierten k-Vektorräume. Ist k ein angeordneter Körper, so konstruieren wir unschwer von diesem Schmelzgruppoid einen weiteren Schmelzfunktor in die Schmelzkategorie Par der erweiterten Paritäten derart, daß die Verknüpfung unser Schmelzfunktor der Orientierungsmenge aus 18.2.1.10 ist.

18.2.1.22 (**Allgemeines zu verträglichen Orientierungen**). In der Schmelzkategorie der erweiterten Paritäten ist das Quadrat jeder Einsverschmelzung von einem Objekt zu sich selber die Identität. Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null ist andererseits jeder unipotente Endomorphismus ein Quadrat. Gegeben ein Körper k der Charakteristik Null und ein Schmelzfunktor $\omega : (\Upsilon \mathrm{Modf}_k)^\times \to \mathrm{Par}$ und eine kurze exakte Sequenz $U \hookrightarrow V \twoheadrightarrow W$ von endlichdimensionalen k-Vektorräumen liefert folglich für jede Spaltung die Komposition

$$\omega(U) \Upsilon \omega(W) \to \omega(U \oplus W) \xrightarrow{\sim} \omega(V)$$

dieselbe antikonstante Abbildung $\omega(U) \times \omega(W) \to \omega(V)$. Ist k ein angeordneter Körper und $\omega := \mathrm{or}$ der durch unsere algebraische Orientierungsmenge gegebene Schmelzfunktor, so ist das eine ausgezeichnete Abbildung, die in einer kurzen exakten Sequenz aus einer Orientierung von Untervektorraum und Quotient eine Orientierung der Mitte macht und die man die „zusammengesetzte Orientierung“ nennen mag. Auch im allgemeinen nennen wir Elemente $\varepsilon \in \omega(U), \eta \in \omega(W), \theta \in \omega(V)$ **verträglich**, wenn unter unserer Zweiverschmelzung gilt $(\varepsilon, \eta) \mapsto \vartheta$. Nebenbei bemerkt überlegt man sich auch leicht, daß ω die universelle Leerverschmelzung auf die universelle Leerverschmelzung abbilden muß.

Übungen

Übung 18.2.1.23. Man zeige, daß die Operation 18.1.3.10 der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_r$ auf der r-ten Tensorpotenz eines eindimensionalen Vektorraums trivial ist. Man zeige, daß die Operation 18.1.3.10 der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_r$ auf der r-ten Tensorpotenz des eindimensionalen Supervektorraums $\mathbb{C}^{0|1}$ durch Multiplikation mit dem Signum geschieht.

Übung 18.2.1.24 (**Einheitengruppoid der superisierten abelschen Gruppen**). Wir betrachten in der Schmelzkategorie der superisierten abelschen Gruppen aus 18.2.1.18 die volle Schmelzunterkategorie $\mathrm{U}(\mathrm{sAb})$ der Objekte, die als abelsche Gruppen frei sind vom Rang Eins. All diese Objekte sind also isomorph zu $\mathbb{Z}^{1|0}$ oder $\mathbb{Z}^{0|1}$. Sie werden sich in der in 18.3.4.16 eingeführten Terminologie als die „Einheiten“ unserer Schmelzkategorie sAb erweisen, deshalb die Notation U für „unité“. Betrachten wir zu dieser Schmelzkategorie der Einheiten das zugehörige Schmelzgruppoid $\mathrm{U}^\times(\mathrm{sAb})$, in dem wir also nur noch die universellen Verschmelzungen von $\mathrm{U}(\mathrm{sAb})$ als Verschmelzungen zulassen, so erhalten wir eine Schmelzäquivalenz

$$\mathrm{U}^\times(\mathrm{sAb}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Par}$$

mit der Schmelzkategorie der erweiterten Paritäten, indem wir jeder unserer freien abelschen Gruppen vom Rang Eins ihre Parität zusammen mit der zweielementigen Menge ihrer Erzeuger zuordnen.

Übung 18.2.1.25 (**Formeln für supergraduierte abelsche Gruppen**). Wie bereits in 18.2.1.20 erwähnt erhalten wir ein internes Hom in sgAb durch $(X \Rrightarrow Y)^n := \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^i, Y^{i+n})$ mit $\alpha : \mathrm{sgAb}(Z \curlyvee X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sgAb}(Z, X \Rrightarrow Y)$ gegeben durch $(\alpha f) : z \mapsto (x \mapsto f(z,x))$ für beliebige homogene f, z, x. Man zeige, daß die Evaluation $\mathrm{ev} : X \curlyvee (X \Rrightarrow Y) \to Y$ nach 18.1.4.17 unter diesen Identifikationen derjenigen biadditiven Abbildung entspricht, die auf homogenen Elementen gegeben wird durch $(x, f) \mapsto (-1)^{|x||f|} f(x)$. Man zeige weiter, daß das Tensorieren von internem Hom $(W \Rrightarrow X) \otimes (Y \Rrightarrow Z) \to (W \otimes Y) \Rrightarrow (X \otimes Z)$ nach 18.1.4.20 unter diesen Identifikationen derjenigen biadditiven Abbildung entspricht, die auf homogenen Elementen gegeben wird durch $f \otimes g \mapsto (w \otimes y \mapsto (-1)^{|g||w|} f(w) \otimes g(y))$.

18.2.2 Monoide, Bimonoide und ihre Moduln

Definition 18.2.2.1. Einen Schmelzfunktor der terminalen Schmelzkategorie in eine beliebige Schmelzkategorie $A : \mathrm{scat} \to \mathcal{M}$ nennen wir ein **Abmonoid in $\mathcal{M}$** oder **$\mathcal{M}$-Abmonoid**. Unter einem **Homomorphismus von Abmonoiden** $A \to B$ verstehen wir eine Transformation der entsprechenden Funktoren.

18.2.2.2. Diese Terminologie hat die Schwäche, daß ein Abmonoid im hier eingeführten Sinne nicht dasselbe ist wie ein Ab-Monoid in später eingeführter Terminologie. Da sich aber erweisen wird, daß man ein Ab-Monoid auch schlicht einen Ring nennen kann, habe ich mich dafür entschieden, diesen terminologischen Konflikt auszuhalten.

18.2.2.3 (**Abmonoide als Objekte mit Verknüpfung**). Ein Abmonoid $A : \mathrm{scat} \to \mathcal{M}$ wird festgelegt durch das Bild $A = A(*)$ des einzigen Objekts von scat und das Bild

$$m = m_A : A \curlyvee A \to A$$

der einzigen Zweiverschmelzung von scat. So ein Datum (A, m) kommt seinerseits genau dann von einem Abmonoid her, wenn die **Assoziativität** $m \circ (m \curlyvee \mathrm{id}) = m \circ (\mathrm{id} \curlyvee m)$, die Existenz einer **neutralen Leerverschmelzung** $1 = 1_A : \curlyvee \to A$ mit $m \circ (1 \curlyvee \mathrm{id}) = m \circ (\mathrm{id} \curlyvee 1) = \mathrm{id}$ alias $1 \in_{\mathcal{M}} A$ und die **Kommutativität** $m \circ \hat{\tau} = m$ erfüllt sind. Lassen wir die Forderung der Kommutativität fallen, so nennen wir unsere Struktur ein **Monoidobjekt** oder kurz **Monoid**. Ich nenne 1_A die **Eins von** A. Sie ist auch für Monoide eindeutig bestimmt, wenn sie existiert, wie Sie allgemeiner in 18.3.1.29 zeigen sollen. Die Zweiverschmelzung m heißt die **Verknüpfung** unseres Abmonoids. Ein Morphismus $\varphi : A \to B$ in $\mathcal{M}$ ist genau dann ein Morphismus von Abmonoiden, wenn gilt $\varphi \circ m_A = m_B \circ (\varphi \curlyvee \varphi)$ und $\varphi \circ 1_A = 1_B$. Im nichtkommutativen Fall nennen wir das einen **Monoidhomomorphismus**. Lassen wir auch die Forderung nach der Existenz einer Eins fallen, so nennen wir unser Datum (A, m) ein **Assoziativobjekt** und nennen die mit den jeweiligen Verknüpfungen verträglichen Morphismen **Homomorphismen von Assoziativobjekten**. Mehr dazu wird in 18.3.1.2 folgende diskutiert.

Beispiel 18.2.2.4 (**Banale Monoidobjekte**). Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ können wir jedes Objekt $A \in \mathcal{C}$ auf genau eine Weise als ein $\curlyvee\mathcal{C}$-Monoid der zugehörigen banalen Schmelzkategorie auffassen, indem wir nämlich die Zweiverschmelzung $(\mathrm{id}, \mathrm{id}) : A \curlyvee A \to A$ als Verknüpfung nehmen. Das folgt daraus, daß für die Eins nur die einzige Leerverschmelzung $\curlyvee \to A$ in Betracht kommt. Für diese Strukturen auf zwei Objekten A, B ist jeder Morphismus $f : A \to B$ ein Monoidhomomorphismus.

18.2.2.5 (**Moduln über Monoiden**). Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ und darin ein Monoid (A, m) verstehen wir unter einem A**-Modul** oder ausführlicher A-**Monoidmodul** ein Objekt $M \in \mathcal{M}$ mitsamt einer Zweiverschmelzung

$$m_M : A \curlyvee M \to M$$

derart, daß gilt $m_M \circ (m \curlyvee \mathrm{id}) = m_M \circ (\mathrm{id} \curlyvee m_M)$ im Raum der Verschmelzungen $A \curlyvee A \curlyvee M \to M$ und $m_M \circ (1 \curlyvee \mathrm{id}) = \mathrm{id}$ im Raum der Verschmelzungen $M \to M$.

Unter einer **Verschmelzung von A-Moduln** verstehen wir eine Verschmelzung von A-Objektmoduln wie sie bereits in 18.1.2.16 erklärt wurde. Wir notieren

$$\mathcal{M}_{A\curlyvee}$$

die Schmelzkategorie der A-Monoidmoduln. Per definitionem ist unsere Schmelzkategorie aller A-Moduln über einem Monoid A eine volle Schmelzunterkategorie $\mathcal{M}_{A\curlyvee} \subset \mathcal{M}_{A\curlyvee'}$ der multiäquivarianten Schmelzkategorie aller A-Objektmoduln im Sinne von 18.1.2.16.

Beispiel 18.2.2.6. Ein Ab-Abmonoid ist ein Kring und die Schmelzkategorie der Moduln $\mathrm{Ab}_{k\curlyvee}$ über einem Kring k ist unsere Schmelzkategorie Mod_k der k-Moduln aus 18.1.1.6, in Formeln

$$\mathrm{Ab}_{k\curlyvee} = \mathrm{Mod}_k$$

18.2.2.7. Jetzt wird alles in der opponierten Situation mit der Vorsilbe Ko wiederholt.

Definition 18.2.2.8. Einen Trennfunktor $\mathrm{tcat} \to \mathcal{T}$ der terminalen Trennkategorie in eine beliebige Trennkategorie $\mathcal{T}$ nennen wir ein **Koabmonoid in $\mathcal{T}$** oder auch **$\mathcal{T}$-Koabmonoid**. Unter einem **Homomorphismus von Koabmonoiden** verstehen wir eine Transformation der entsprechenden Funktoren.

18.2.2.9 (**Koabmonoide als Objekte mit Koverknüpfung**). Ein Koabmonoid $C : \mathrm{tcat} \to \mathcal{T}$ wird festgelegt durch das Bild $C = C(*)$ des einzigen Objekts von tcat und das Bild

$$\Delta = \Delta_C : C \to C \curlywedge C$$

der einzigen Zweitrennung von tcat. So ein Datum (C, Δ) kommt seinerseits genau dann von einem Koabmonoid her, wenn die **Koassoziativität** $(\Delta \curlywedge \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \curlywedge \Delta) \circ \Delta$, die Existenz einer **koneutralen Leertrennung** $\varepsilon = \varepsilon_C : C \to \curlywedge$ mit $(\varepsilon \curlywedge \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \curlywedge \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id}$ und die **Kokommutativität** $\hat{\tau} \circ \Delta = \Delta$ erfüllt sind. Lassen wir die Forderung der Kokommutativität fallen, so nennen wir unsere Struktur ein **Komonoidobjekt** oder kurz **Komonoid**. Ich nenne ε_C die **Koeins von** C. Sie ist auch für Komonoide eindeutig bestimmt, wenn sie existiert, wie Sie allgemeiner in 18.3.1.29 zeigen sollen. Die Zweitrennung Δ_C heißt die **Koverknüpfung von** C. Ein Morphismus $\varphi : C \to D$ in $\mathcal{M}$ ist genau dann ein Morphismus von Koabmonoiden, wenn gilt $\Delta_D \circ \varphi = (\varphi \curlyvee \varphi) \circ \Delta_C$ und $\varepsilon_C = \varepsilon_D \circ \varphi$. Im nichtkommutativen Fall nennen wir das einen **Komonoidhomomorphismus**.

Beispiel 18.2.2.10 (**Banale Komonoidobjekte**). Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ können wir jedes Objekt $A \in \mathcal{C}$ auf genau eine Weise als ein Komonoidobjekt der zugehörigen banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathcal{C}$ auffassen, indem wir als Koverknüpfung

die **Diagonaltrennung** $\Delta := (\mathrm{id}, \mathrm{id}) : C \to C \curlywedge C$ nehmen. Das folgt daraus, daß nur die einzige Leertrennung $C \to \curlywedge$ als Koeins in Betracht kommt. Für diese Strukturen auf Objekten C, D ist jeder Morphismus $f : C \to D$ ein Komonoidhomomorphismus.

18.2.2.11 (**Komoduln über Komonoiden**). Opponiert zu Moduln über Monoiden führen wir **Komoduln über Komonoiden** alias **Komonoidmoduln** ein und bezeichnen mit $\mathcal{T}_{C\curlywedge}$ die Trennkategorie der Komoduln über einen Komonoid C einer Trennkategorie $\mathcal{T}$. Sie ist eine volle Untertrennkategorie $\mathcal{T}_{C\curlywedge} \subset \mathcal{T}_{C\curlywedge'}$ der multiäquivarianten Trennkategorie aller C-Objektkomoduln aus 18.1.2.21.

18.2.2.12. Damit ist die Wiederholung in der opponierten Situation beendet.

18.2.2.13 (**Äquivariante Verschmelzungen unter Koabmonoid**). Gegeben $\mathcal{M}$ eine Trennschmelzkategorie und C ein Koabmonoid in $\mathcal{M}$ erklären wir nun neu die **äquivariante Schmelzkategorie der C-Objektmoduln**

$$\mathcal{M}_{C\curlyvee'}$$

mit C-Objektmoduln von $\mathcal{M}$ als Objekten, also denselben Objekten wie bei der multiäquivarianten Schmelzkategorie der C-Objektmoduln $\mathcal{M}_{C\curlyvee'}$ aus 18.1.2.16. Verschmelzungen $X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \to Y$ dahingegen werden in $\mathcal{M}_{C\curlyvee'}$ erklärt als Verschmelzungen in $\mathcal{M}$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C \otimes X_1 \otimes \ldots \otimes X_r \arrow[r] \arrow[d] & C \otimes Y \arrow[dd] \\
C^{\otimes r} \otimes X_1 \otimes \ldots \otimes X_r \arrow[d] & \\
X_1 \otimes \ldots \otimes X_r \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

mit den in hoffentlich offensichtlicher Weise gegebenen Pfeilen kommutiert. Der Morphismus $C \to C^{\otimes r}$ ist dabei die iterierte Koverknüpfung in unserer Trennschmelzkategorie. Dann hat auch $\mathcal{M}_{C\curlyvee'}$ stabil universelle Verschmelzungen und das Vergessen der Operation ist ein mit universellen Verschmelzungen verträglicher Schmelzfunktor

$$\mathcal{M}_{C\curlyvee'} \to \mathcal{M}$$

Beispiel 18.2.2.14 (**Äquivariante Schmelzkategorie der C-Mengen**). Jede Menge C trägt nach 18.2.2.10 genau eine Struktur als Koabmonoid der banalen Trennschmelzkategorie $\curlywedge\mathrm{Ens}$. Die Komultiplikation ist dabei notwendig die Diagonale $\Delta : C \to C \times C$. Die Verschmelzungen der äquivarianten Schmelzkategorie $\mathrm{kEns}_{C\curlyvee'}$ der C-Objektmoduln sind alle Abbildungen $f : X_1 \times \ldots \times X_r \to Y$ mit

$$f(cx_1, \ldots, cx_r) = cf(x_1, \ldots, x_r) \quad \forall c \in C, r \in \mathbb{N}, x_i \in X_i$$

Wie nennen sie C**-äquivariante Multiabbildungen**. Die Leerverschmelzungen in $\mathrm{kEns}_{C\searrow}$ entsprechen den C-Fixpunkten, genauer induziert für alle $Y \in \mathrm{kEns}_{C\searrow}$ die aus 18.1.2.1 bekannte Bijektion $\mathrm{kEns}(\curlyvee, Y) \tilde{\to} Y$ eine Bijektion

$$\mathrm{kEns}_{C\searrow}(\curlyvee, Y) \tilde{\to} Y^C$$

Die Schmelzkategorie $\mathrm{kEns}_{C\searrow}$ besitzt im übrigen stabil universelle Verschmelzungen und die zugehörige Trennschmelzkategorie ist als Trennkategorie die banale Trennkategorie zur Kategorie der C-Mengen.

18.2.2.15 (**Äquivariante Verschmelzungen**). Seien $\mathcal{M}$ eine Trennschmelzkategorie und $C \in \mathcal{M}$ sowohl mit der Struktur eines Koabmonoids als auch mit der Struktur eines Abmonoids versehen. Wir betrachten in der äquivarianten Schmelzkategorie der C-Objekte aus 18.2.2.13 die volle Unterschmelzkategorie

$$\mathcal{M}_{C\searrow} \subset \mathcal{M}_{C\searrow}$$

aller der C-Objekte, die sogar C-Moduln sind. Nehmen wir zusätzlich an, daß unsere beiden Strukturen auf C in der Weise miteinander verträglich sind, daß für alle endlichen Mengen I, J die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} C^{\otimes I} & \to & C^{\otimes(I\times J)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \to & C^{\otimes J} \end{array}$$

mit den in hoffentlich offensichtlicher Weise durch die Koabmonoidstruktur gegebenen Horizonalen und durch die Abmonoidstruktur gegebenen Vertikalen kommutieren, so nennen wir C ein **Biabmonoid**. Wenn wir die Kommutativität unseres Diagramms für $|I|, |J| \leq 2$ zeigen, so folgt sie im übrigen bereits im allgemeinen. Für Moduln über einem Biabmonoid C sind die Ziele ihrer stabil universellen Verschmelzungen in $\mathcal{M}_{C\searrow}$ bereits selbst Moduln über C, gehören also in Formeln bereits zu $\mathcal{M}_{C\searrow}$, und sind dort a forteriori auch universelle, ja stabil universelle Verschmelzungen.

18.2.2.16 (**Objekte mit Operation eines Biabmonoids**). Zusammenfassend erhalten wir so für jedes Biabmonoid C einer Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ eine weitere Trennschmelzkategorie

$$\mathcal{M}_{C\searrow}$$

der „Objekte mit C-Operation“ und das Vergessen der Operation ist verträglich mit stabil universellen Verschmelzungen.

18.2.2.17 (**Multiäquivariant versus äquivariant**). Es gilt sorgfältig zu unterscheiden zwischen der multiäquivarianten Schmelzkategorie der Moduln über einem Abmonoid und der äquivarianten Schmelzkategorie der Moduln über einem

Biabmonoid. Im Fall eines gewöhnlichen Monoids in der kartesischen Schmelzkategorie der Mengen sind die Verschmelzungen im multiäquivarianten Fall Multiabbildungen, die „äquivariant sind in jeder Variable“, in Formeln

$$\varphi(x_1, \ldots, gx_i, \ldots, x_r) = g\varphi(x_1, \ldots, x_r) \; \forall i, g$$

Im äquivarianten Fall jedoch sind sie, wenn man als Koverknüpfung einmal die diagonale Einbettung annimmt, Multiabbildungen die „äquivariant sind für die diagonale Operation“, in Formeln

$$\varphi(gx_1, \ldots, gx_r) = g\varphi(x_1, \ldots, x_r) \; \forall g$$

18.2.2.18. In vielen Kontexten spricht man von **Moduln**, wenn man die multiäquivariante Schmelzkategorie meint, und von **Darstellungen**, wenn man die äquivariante Schmelzkategorie meint.

Beispiel 18.2.2.19 (**Äquivariante Schmelzkategorie der C-Mengen**). Jedes Abmonoid $C \in \mathrm{kEns}$ wird mit der banalen Struktur als Koabmonoid der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathrm{Ens}$ nach 18.2.2.10 zu einem Biabmonoid. Die zugehörige Schmelzkategorie $\mathrm{kEns}_{C\searrow}$ hat als Objekte C-Moduln alias Mengen mit einer Operation des Monoids C und die universelle Verschmelzung von X und Y ist $X \times Y$ mit der „diagonalen“ Operation von C, gegeben durch $c(x, y) = (cx, cy)$. Daß das wieder eine Operation des Abmonoids C ist, ist einerseits offensichtlich und andererseits eine formale Konsequenz der Biabmonoidstruktur.

Übungen

Übung 18.2.2.20 (**Tensorprodukt von Biabmonoiden**). Gegeben Biabmonoide A, B einer Trennschmelzkategorie ist auch $A \otimes B$ mit der offensichtlichen Verknüpfung und Koverknüpfung ein Biabmonoid.

Übung 18.2.2.21 (**Äußere Algebra als Biabmonoid**). Gegeben ein k-Vektorraum V zeige man, daß die äußere Algebra $\bigwedge V$ mit ihrer offensichtlichen Graduierung ein Biabmonoid der Trennschmelzkategorie sgMod_k ist mit dem durch die Shuffle-Koprodukte $\Delta_n^{p,q}$ gegebenen Koprodukt. Dasselbe gilt allgemeiner für jeden Kring k. Im Fall $V = \mathbb{Z} \in \mathrm{sgMod}_{\mathbb{Z}} = \mathrm{sgAb}$ erhalten wir so das Biabmonoid der Differentiale $D = \bigwedge \mathbb{Z}$ aus 18.2.3.1. Im allgemeinen mag man einen Isomorphismus von Biabmonoiden $\bigwedge(V \oplus W) \xrightarrow{\sim} (\bigwedge V) \otimes (\bigwedge W)$ angeben. Insbesondere liefert im endlichdimensionalen Fall jede Wahl einer angeordnetem Basis $v_1, \ldots v_n$ von V einen Isomorphismus von Biabmonoiden $D^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} \bigwedge V$ für D das Biabmonoid der Differentiale aus 18.2.3.1 mit Koeffizienten in k.

18.2.3 Schmelzkategorie der Komplexe

18.2.3.1 (**Biabmonoid der Differentiale**). In der Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen sgAb aus 18.2.1.20 betrachten wir das Objekt D mit $D^0 = D^1 = \mathbb{Z}$ und $D^q = 0$ sonst. Wir versehen D mit der einzig möglichen Struktur als Abmonoid, für die $1 \in \mathbb{Z} = D^0$ alias die dadurch gegebene Leerverschmelzung das neutrale Element ist, sowie mit der einzig möglichen Struktur als Koabmonoid, für dessen Koverknüpfung mit der Notation $d := 1 \in D^1$ gilt $1 \mapsto 1 \otimes 1$ und $d \mapsto d \otimes 1 + 1 \otimes d$. Man prüft unschwer, daß wir so ein Biabmonoid erhalten. Die einzige substantielle Rechnung dazu ist der Fall $|I| = |J| = 2$ und dabei, daß $d \otimes d$ auch beim Weg über $D^{\otimes(I \times J)}$ in 18.2.2.15 zu Null gemacht wird. Unter der oberen Horizonale finden wir aber

$$d \otimes d \mapsto 1 \otimes d \otimes 1 \otimes d + 1 \otimes d \otimes d \otimes 1 + d \otimes 1 \otimes 1 \otimes d + d \otimes 1 \otimes d \otimes 1$$

Darauf die Vertikale anwenden bedeutet, die mittleren Einträge zu vertauschen mit Vorzeichen und dann die ersten beiden und die letzten beiden Einträge zu multiplizieren. Das liefert eine Null bei ersten und letzten Term und bei den mittleren Termen ebenso $-d \otimes d + d \otimes d = 0$ wie gewünscht.

18.2.3.2. Wir erklären die Schmelzkategorie der **differentiellen graduierten abelschen Gruppen** in der Notation aus 18.2.2.15 als die äquivariante Schmelzkategorie

$$\mathrm{dgAb} := \mathrm{sgAb}_{D\searrow}$$

der supergraduierten abelschen Gruppen mit einer Operation des Biabmonoids D der Differentiale aus 18.2.3.1.

18.2.3.3 (**Bezug zwischen unseren beiden Definitionen von Kettenkomplexen**). Einen Komplex (X^q, d^q) im üblichen Sinne verstehen wir als ein Objekt $X = (X^q) \in \mathrm{sgAb}$ mit derjenigen Operation $\mu_X : D \curlyvee X \to X$, die für $x \in X^q$ durch $(d, x) \mapsto d^q(x)$ und $(1, x) \mapsto x$ gegeben wird. So erhalten wir einen Isomorphismus von Kategorien

$$\mathrm{Ket} \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}(\mathrm{dgAb})$$

zwischen der üblichen Kategorie der Kettenkomplexe und der einfachen Kategorie zur in 18.2.3.2 neu erklärten Schmelzkategorie dgAb. Man sieht leicht ein, daß eine Zweiverschmelzung $\varphi : X \curlyvee Y \to Z$ in dgAb in Bezug auf die Schreibanordnung repräsentiert wird durch eine vom Grad Null homogene bilineare Abbildung

$$\varphi : X \times Y \to Z$$

mit $d\varphi(x, y) = \varphi(dx, y) + (-1)^{|x|}\varphi(x, dy)$ für x homogen vom Grad $|x|$. Insbesondere ist die in der Schreibanordnung durch $(x, y) \mapsto x \otimes y$ gegebene Zweiverschmelzung $X \curlyvee Y \to X \otimes Y$ in den üblichen Tensorkomplex universell. Ebenso

sieht man leicht ein, daß Leerverschmelzungen $\Upsilon \to Z$ in dgAb genau diejenigen Leerverschmelzungen von sgAb sind, die durch Zykel aus $\mathcal{Z}^0 X = \ker d^0 \subset X^0$ gegeben werden, wir haben also in Formeln

$$\mathrm{dgAb}(\Upsilon, X) = \mathcal{Z}^0 X$$

Insbesondere ist der Nullzykel $1 \in \mathbb{Z}[0]$ im Komplex $\mathbb{I} := \mathbb{Z}[0]$ mit $\mathbb{I}^0 = \mathbb{Z}$ und $\mathbb{I}^q = 0$ für $q \neq 0$ eine universelle Leerverschmelzung in dgAb. Um zu sehen, daß unsere universellen Verschmelzungen auch stabil universell sind, mag man etwa prüfen, daß jede Multiverknüpfung universeller Verschmelzungen universell ist, und das ist nicht schwer, weil man dabei das Differential ignorieren darf. Um zu zeigen, daß unsere Schmelzkategorie dgAb internes Hom hat, mag man entweder prüfen, daß unser üblicher Hom-Komplex so ein internes Hom ist, oder die allgemeine Theorie bemühen, die wir in 18.2.3.4 skizzieren und in 18.3.3.19 entwickeln.

Vorschau 18.2.3.4 (**Internes Hom von Komplexen vom höheren Standpunkt**). In 18.3.3.19 werden wir lernen, daß gegeben ein Biabmonoid D „mit Antipode“ in einer Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom auch $\mathcal{M}_{D\searrow}$ eine Trennschmelzkategorie mit Multihom ist. Wenn wir das einmal wissen, müssen wir nur noch prüfen, daß unser Biabmonoid der Differentiale eine Antipode besitzt, um zu folgern, daß dgAb eine Trennschmelzkategorie mit Multihom ist. Genauer wird sich erweisen, daß für unser Biabmonoid der Differentiale der durch $1 \mapsto 1$ und $d \mapsto -d$ gegebene Morphismus eine Antipode ist und daß Antipoden eindeutig bestimmt sind, wenn sie existieren.

Übungen

Übung 18.2.3.5. Gegeben ein Kringhomomorphismus $A \to B$ ist die Erweiterung der Skalare ein mit universellen Verschmelzungen verträglicher Schmelzfunktor

$$B \otimes_A : \mathrm{dgMod}_A \to \mathrm{dgMod}_B$$

18.2.4 Angereicherte Schmelzkategorien

18.2.4.1. Wir besprechen zunächst „additive Strukturen“ und „$(\mathcal{S}, v)$-Strukturen in Bezug auf eine Schmelzkategorie $\mathcal{S}$ mit einem ausgezeichneten treuen Schmelzfunktor $v : \mathcal{S} \to \mathrm{kEns}$“, bevor wir das allgemeine Konzept einer $\mathcal{S}$-Schmelzkategorie einführen.

18.2.4.2. Unter einer **additiven Struktur** auf einer Schmelzkategorie verstehen wir die Vorgabe einer Verknüpfung „Addition“ auf allen Verschmelzungsmengen derart, daß alle Multiverknüpfungen multiadditive Abbildungen werden.

Beispiel 18.2.4.3 (**Erste Konstruktion einer additiven Struktur auf** Ab). Wir erhalten eine additive Struktur auf der Schmelzkategorie Ab der abelschen Gruppen, indem wir alle Mengen $\mathrm{Ab}(B, Y)$ von multiadditiven Abbildungen mit ihrer von der Addition auf Y induzierten Addition versehen.

18.2.4.4. Gegeben ein Kring k erklären wir eine k**-Struktur** auf einer Schmelzkategorie die Vorgabe einer Struktur als k-Modul auf allen Verschmelzungsmengen derart, daß alle Multiverknüpfungen k-multilineare Abbildungen werden.

Beispiel 18.2.4.5 (**Offensichtliche** k**-Struktur auf** Ab_k). Gegeben ein Kring k erhalten wir eine k-Struktur auf der Schmelzkategorie Ab_k der k-Moduln, indem wir alle Mengen $\mathrm{Ab}(B, Y)$ von multiadditiven Abbildungen mit ihrer von der k-Modulstruktur auf Y induzierten k-Modulstruktur versehen.

18.2.4.6. Gegeben eine Schmelzkatgorie $\mathcal{M}$ mit additiver Struktur faktorisiert ihr Leerverschmelzungsfunktor in offensichtlicher Weise als $\mathrm{L} = v \circ \mathrm{L}^{\mathrm{Ab}}$ über den Vergißfunktor $v : \mathrm{Ab} \to \mathrm{kEns}$. Wir machen in diesem Fall meist keinen Unterschied in der Notation zwischen dem Leerverschmelzungsfunktor und dem **additiv angereicherten Leerverschmelzungsfunktor** $\mathrm{L}^{\mathrm{Ab}} : \mathcal{M} \to \mathrm{Ab}$ und schreiben meist abkürzend $\mathrm{L} = \mathrm{L}^{\mathrm{Ab}}$. Analoges gilt für Schmelzkategorien mit k-Struktur für einen Kring k.

Beispiel 18.2.4.7 (**Additive Struktur durch Leerverschmelzfaktorisierung**). Gegeben eine Schmelzkategorie mit Multihom $\mathcal{M}$ und eine Faktorisierung $\mathrm{L} = v \circ \mathrm{A}$ ihres Leerverschmelzungsfunktors über den Vergißfunktor $v : \mathrm{Ab} \to \mathrm{kEns}$ erhalten wir eine additive Struktur auf $\mathcal{M}$, indem wir Additionen auf den Verschmelzungsmengen dadurch festlegen, daß die Verknüpfung der von unserer Faktorisierung herrührenden Bijektionen mit den in 18.1.4.2 erklärten Bijektionen

$$v\mathrm{A}(B \Rrightarrow Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}(B \Rrightarrow Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(B, Y)$$

Isomorphismen von abelschen Gruppen sein sollen.

Beispiel 18.2.4.8 (**Zweite Konstruktion der additiven Struktur auf** Ab). Der Leerverschmelzungsfunktor von Ab ordnet jeder abelschen Gruppe X die Menge der Abbildungen der einpunktigen Menge in unsere Gruppe zu und faktorisiert in offensichtlicher Weise über den Vergißfunktor $v : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ens}$. Die sich darüber mit 18.2.4.7 ergebende additive Struktur auf der Schmelzkategorie Ab fällt mit der offensichtlichen additiven Struktur aus 18.2.4.3 zusammen.

Vorschau 18.2.4.9 (**Eindeutigkeit additiver Strukturen**). Wir zeigen in 21.2.8.8, daß Schmelzkategorien mit universellen Verschmelzungen und Multihom, deren zugrundeliegende einfache Kategorien eine additive Struktur und endliche Produkte oder gleicbedeutend endliche Koprodukte haben, eine eindeutig bestimmte additive Struktur besitzen.

18.2.4.10. Gegeben ein treuer Schmelzfunktor $w : \mathcal{S} \to \mathrm{kEns}$ erklären wir eine $(\mathcal{S}, w)$**-Struktur auf einer Schmelzkategorie** $\mathcal{M}$ als die Vorgabe einer $(\mathcal{S}, w)$-Struktur im Sinne von 18.1.6.18 auf jeder Verschmelzungsmenge derart, daß alle Multiverknüpfungen mit den jeweiligen $(\mathcal{S}, w)$-Strukturen verträglich sind. Der Leerverschmelzungsfunktor einer Schmelzkategorie mit $(\mathcal{S}, w)$-Struktur faktorisiert in offensichtlicher Weise als $\mathrm{L} = v \circ \mathrm{L}^{(\mathcal{S},w)}$ mit $\mathrm{L}^{(\mathcal{S},w)}$ einem Schmelzfunktor in die Schmelzkategorie $\mathrm{kEns}_{(\mathcal{S},w)}$ der Mengen mit $(\mathcal{S}, w)$-Struktur aus 18.1.6.18 und $v : \mathrm{kEns}_{(\mathcal{S},w)} \to \mathrm{kEns}$ dem Vergißfunktor. Wir machen in diesem Fall meist keinen Unterschied in der Notation zwischen dem Leerverschmelzungsfunktor und dem **angereicherten Leerverschmelzungsfunktor** $\mathrm{L}^{(\mathcal{S},w)} : \mathcal{M} \to \mathrm{kEns}_{(\mathcal{S},w)}$ und schreiben meist abkürzend $\mathrm{L} = \mathrm{L}^{(\mathcal{S},w)}$.

Beispiel 18.2.4.11. Die additiven Strukturen auf einer Schmelzkategorie sind in offensichtlicher Bijektion zu den (Ab, v)-Strukturen auf besagter Schmelzkategorie in derselben Weise, wie additive Strukturen auf einer Menge in Bijektion sind zu (Ab, v)-Strukturen auf besagter Menge.

18.2.4.12. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom und treuem Leerverschmelzungsfunktor $\mathrm{L} : \mathcal{M} \to \mathrm{kEns}$ liefern unsere in 18.1.4.2 eingeführten Bijektionen $\mathrm{L}(B \Rrightarrow X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(B, X)$ eine $(\mathcal{M}, \mathrm{L})$-Struktur auf $\mathcal{M}$.

Beispiel 18.2.4.13 (**Dritte Konstruktion der additiven Struktur auf** Ab). Die durch 18.2.4.12 gegebene (Ab, v)-Struktur auf Ab entspricht unter unserer Bijektion aus 18.2.4.11 der in 18.2.4.8 erklärten additiven Struktur auf Ab.

18.2.4.14 (**Angereicherte Schmelzkategorien**). Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{S}$ erklären wir eine $\mathcal{S}$**-Schmelzkategorie** $\mathcal{M}$ als ein Datum bestehend aus einer Menge $\mathcal{M}$ von Objekten und für jede Objektkleinfamilie $B = (B_j)_{j \in J}$ in $\mathcal{M}$ und jedes $Y \in \mathcal{M}$ einem **Verschmelzungsobjekt**

$$\mathcal{M}(B, Y) \in \mathcal{S}$$

und für jede weitere Objektkleinfamilie $A = (A_i)_{i \in I}$ und jede Abbildung $\varphi : I \to J$ einer ausgezeichneten $\mathcal{S}$-Verschmelzung mit dem Namen **Multiverknüpfung**

$$\big(\mathcal{M}(A|_{\varphi^{-1}(j)}, B_j)\big)_{j \in J} \curlyvee \mathcal{M}(B, Y) \to \mathcal{M}(A, Y)$$

der mit $J \sqcup \{J\}$ indizierten Objektkleinfamilie $J \sqcup \{J\} \to \mathcal{S}$ gegeben durch $j \mapsto \mathcal{M}(A|_{\varphi^{-1}(j)}, B_j)$ und $J \mapsto \mathcal{M}(B, Y)$ in das $\mathcal{S}$-Objekt $\mathcal{M}(A, Y)$. Von diesen Daten fordern wir, daß das Analogon der Assoziativitätsbedingung aus unserer Definition 18.1.1.4 einer Schmelzkategorie erfüllt ist und daß es für jede Einsfamilie A in $\mathcal{M}$ eine Leerverschmelzung $\mathrm{id}_A \in \mathcal{S}(\curlyvee, \mathcal{M}(A, A_*))$ gibt derart, daß die Verknüpfung

$$\mathcal{M}(B, A_*) \to \mathcal{M}(B, A_*) \curlyvee \mathcal{M}(A, A_*) \to \mathcal{M}(B, A_*)$$

mit dem ersten Pfeil gegeben durch id_A und dem zweiten Pfeil durch die Multiverknüpfung in $\mathcal{M}$ stets die Identität auf $\mathcal{M}(B, A_*)$ ist und daß umgekehrt auch das entsprechende Vorschalten der id_{B_j} die Identität auf $\mathcal{M}(B, A_*)$ induziert. Wenn wir $\mathcal{S}$ nicht spezifizieren wollen, reden wir von einer **angereicherten Schmelzkategorie**. Wenn wir $\mathcal{S}$ in der Notation verdeutlichen wollen, schreiben wir

$$\mathcal{M}/\mathcal{S}$$

Beispiel 18.2.4.15. Eine kEns-Schmelzkategorie ist dasselbe wie eine gewöhnliche Schmelzkategorie. Eine Ab-Schmelzkategorie ist dasselbe wie eine Schmelzkategorie mit additiver Struktur.

Beispiel 18.2.4.16. Sei $v : \mathcal{S} \to \mathrm{kEns}$ ein treuer Schmelzfunktor. Wir erinnern aus 18.1.6.18 die Schmelzkategorie $\mathrm{kEns}_{(\mathcal{S},v)}$ der Mengen mit $(\mathcal{S}, v)$-Struktur. Eine Schmelzkategorie mit $(\mathcal{S}, v)$-Struktur ist dasselbe wie eine in $\mathrm{kEns}_{(\mathcal{S},v)}$ angereicherte Schmelzkategorie. Es ist auch im wesentlichen dasselbe wie eine in $\mathcal{S}$ angereicherte Schmelzkategorie, wie wir in 18.2.4.22 ausführen werden.

18.2.4.17. Ich vermeide die Diskussion, was das Analogon der Familienkategorie einer angereicherten Schmelzkategorie $\mathcal{M}/\mathcal{S}$ sein sollte. Ich verwende im weiteren für A, B Objektkleinfamilien in $\mathcal{M}$ und $\varphi : \bar{A} \to \bar{B}$ eine Abbildung auf den Indexmengen die Notation

$$\mathcal{M}^{\curlyvee}_{\varphi}(A, B) := \big(\mathcal{M}(A|_{\varphi^{-1}(j)}, B_j)\big)_{j \in \bar{B}}$$

für die entsprechende Kleinfamilie von Objekten von $\mathcal{S}$, so daß unsere Multiverknüpfungen auch notiert werden können als $\mathcal{S}$-Verschmelzungen

$$\mathcal{M}^{\curlyvee}_{\varphi}(A, B) \curlyvee \mathcal{M}(B, Y) \to \mathcal{M}(A, Y)$$

18.2.4.18 (**Angereicherte Schmelzfunktoren**). Unter einem Schmelzfunktor F von einer $\mathcal{S}$-Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ in eine $\mathcal{T}$-Schmelzkategorie $\mathcal{N}$ über einem Schmelzfunktor der anreichernden Schmelzkategorien $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ verstehen wir ein Datum bestehend aus einer Abbildung $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ auf den Objektmengen und $\mathcal{T}$-Morphismen $F : \varphi(\mathcal{M}(B, Y)) \to \mathcal{N}(FB, FY)$, die mit Multiverknüpfungen verträglich sind in der offensichtlichen Weise. Wir notieren so einen Schmelzfunktor

$$F/\varphi : \mathcal{M}/\mathcal{S} \to \mathcal{N}/\mathcal{T}$$

Es ist klar, wie angereicherte Schmelzfunktoren zu verknüpfen sind. Einigen Spezialfällen geben wir eigene Namen und Bezeichnungen.

1. Angereicherte Schmelzfunktoren, die die Identität auf den Objektmengen sind, nennen wir **objektfest**;

2. Angereicherte Schmelzfunktoren, bei denen die induzierten $\mathcal{T}$-Morphismen sämtlich Isomorphismen $F : \varphi(\mathcal{M}(B,Y)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(FB,FY)$ sind, nennen wir **φ-volltreu**;

3. Schmelzfunktoren von $\mathcal{S}$-Schmelzkategorien über $\varphi = \mathrm{id} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ nennen wir **$\mathcal{S}$-Schmelzfunktoren**.

18.2.4.19. Gegeben $\mathcal{M}/\mathcal{S}$ eine angereicherte Schmelzkategorie erklären wir **Anreicherungsfunktoren** $F : \mathcal{M}/\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ als Abbildungen $F : \mathcal{M} \to \mathcal{S}$ auf Objekten zusammen mit $\mathcal{S}$-Verschmelzungen $\kappa_F(A,Y) : F(A) \curlyvee \mathcal{M}(A,Y) \to F(Y)$ für jede Objektkleinfamilie A und jedes Objekt Y von $\mathcal{M}$ mit den offensichtlichen Verträglichkeiten. Jeder Anreicherungsfunktor induziert in offensichtlicher Weise einen angereicherten Schmelzfunktor

$$F/\mathrm{L}_{\mathcal{S}} : \mathcal{M}/\mathcal{S} \to \mathcal{S}/\mathrm{kEns}$$

Beispiel 18.2.4.20. Gegeben eine $\mathcal{S}$-Schmelzkategorie $\mathcal{M}/\mathcal{S}$ erklären wir ihren **angereicherten Leerverschmelzungsfunktor** als den Anreicherungsfunktor $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ gegeben durch $\mathrm{L}(X) := \mathcal{M}(\curlyvee, X)$. Dieser Anreicherungsfunktor induziert dann wie in 18.2.4.19 besprochen einen angereicherten Schmelzfunktor

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathcal{M}}/\mathrm{L}_{\mathcal{S}} : \mathcal{M}/\mathcal{S} \to \mathcal{S}/\mathrm{kEns}$$

Besitzt $\mathcal{S}$ Multihom, so induziert er, wie in 18.2.4.24 besprochen wird, sogar einen angereicherten Schmelzfunktor

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathcal{M}}/\mathcal{S} : \mathcal{M}/\mathcal{S} \to \mathcal{S}^{\mathrm{sa}}/\mathcal{S}$$

18.2.4.21 (**Umstrukturieren**). Gegeben ein Schmelzfunktor $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ wird aus jeder $\mathcal{S}$-Schmelzkategorie $\mathcal{M}/\mathcal{S}$ in offensichtlicher Weise eine $\mathcal{T}$-Schmelzkategorie $\varphi(\mathcal{M}/\mathcal{S})$ mit derselben Menge von Objekten. Wir verwenden dafür je nach Kontext auch die abkürzenden Notationen $\varphi(\mathcal{M}/\mathcal{S}) = \varphi(\mathcal{M}) = \mathcal{M}/\mathcal{T}$ und nennen diese Konstruktion das **Umstrukturieren von $\mathcal{M}$ mit** φ. In dieser Situation ist die Identität auf der Menge der Objekte zusammen mit der Identität auf $\varphi(S)$ für alle Verschmelzungsobjekte S ein objektfester φ-volltreuer angereicherter Schmelzfunktor

$$U/\varphi : \mathcal{M}/\mathcal{S} \to \mathcal{M}/\mathcal{T}$$

18.2.4.22. Gegeben $(\mathcal{S}, v)$ eine Schmelzkategorie mit einem treuen Schmelzfunktor $v : \mathcal{S} \to \mathrm{kEns}$ liefert jede $\mathcal{S}$-Schmelzkategorie eine Schmelzkategorie mit $(\mathcal{S}, v)$-Struktur durch Umstrukturieren mit der Schmelzäquivalenz $\mathcal{S} \xrightarrow{\approx} \mathrm{kEns}_{(\mathcal{S},v)}$. Ist unsere Schmelzäquivalenz ein Isomorphismus $\mathcal{S} \xrightarrow{\sim} \mathrm{kEns}_{(\mathcal{S},v)}$ von Schmelzkategorien, so können wir diese Umstrukturierung auch rückgängig machen. Zum

Beispiel liefern im Fall der abelschen Gruppen unsere Konstruktionen einen Isomorphismus $\mathrm{Ab} \xrightarrow{\sim} \mathrm{kEns}_{(\mathrm{Ab},v)}$ und in diesem Sinne ist eine in Ab angereicherte Schmelzkategorie dasselbe wie eine Schmelzkategorie mit additiver Struktur.

18.2.4.23. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom erhalten wir eine $\mathcal{M}$-Schmelzkategorie $\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}/\mathcal{M}$ mit derselben Objektmenge, mit den fraglichen Multihomobjekten als Verschmelzungsobjekten

$$\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}(B,Y) := (B \Rrightarrow Y)$$

und mit analog zu 18.1.4.19 erklärten Multiverknüpfungen. Wir nennen diese $\mathcal{M}$-Schmelzkategorie die **Selbstanreicherung von** $\mathcal{M}$. Unsere Bijektionen zwischen der Menge der Leerverschmelzungen in das Multihom und der Verschmelzungsmenge der entsprechenden Objekte $\mathcal{M}(\gamma, B \Rrightarrow X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(B,X)$ aus 18.1.4.2 liefern in ihrer Gesamtheit zusammen mit der Identität auf der Objektmenge einen objektfesten Isomorphismus

$$\mathrm{L}(\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$$

zwischen der Umstrukturierung der Selbstanreicherung mit dem Leerverschmelzungsfunktor und der ursprünglichen Schmelzkategorie.

Beispiel 18.2.4.24. Besitzt die anreichernde Schmelzkategorie $\mathcal{S}$ Multihom, so sind Anreicherungsfunktoren $F : \mathcal{M}/\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ dasselbe wie angereicherte Schmelzfunktoren $F/\mathcal{S} : \mathcal{M}/\mathcal{S} \to \mathcal{S}^{\mathrm{sa}}/\mathcal{S}$ in die Selbstanreicherung von $\mathcal{S}$ nach 18.2.4.23.

18.2.4.25 (**Selbstanreicherung bei treuem Leerverschmelzungsfunktor**). Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom und treuem Leerverschmelzungsfunktor notieren wir $\mathcal{M}/\mathrm{kEns}_{(\mathcal{M},\mathrm{L})}$ die Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit der in 18.2.4.12 beschriebenen $(\mathcal{M},\mathrm{L})$-Struktur. Wir erhalten in diesem Fall einen objektfesten $[\mathrm{L}]$-volltreuen angereicherten Schmelzfunktor

$$\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}/\mathcal{M} \to \mathcal{M}/\mathrm{kEns}_{(\mathcal{M},\mathrm{L})}$$

über der Schmelzäquivalenz $[\mathrm{L}] : \mathcal{M} \xrightarrow{\approx} \mathrm{kEns}_{(\mathcal{M},\mathrm{L})}$ nach 18.1.6.18. Unsere beiden angereicherten Schmelzkategorien sind also salopp gesprochen dieselben bis auf die Schmelzäquivalenz $[\mathrm{L}]$ zwischen den anreichernden Schmelzkategorien.

18.2.4.26. Gegeben $F/\varphi, G/\varphi : \mathcal{M}/\mathcal{S} \to \mathcal{N}/\mathcal{T}$ angereicherte Schmelzfunktoren im Sinne von 18.2.4.18 erklären wir eine **Transformation** $\tau : F \Rightarrow G$ **von angereicherten Schmelzfunktoren** als eine Vorschrift, die jedem Objekt $X \in \mathcal{M}$ eine Leerverschmelzung $\tau_X \in_{\mathcal{T}} \mathcal{N}(FX, GX)$ so zuordnet, daß für jede Kleinfamilie B in $\mathcal{M}$ und jedes Objekt $Y \in \mathcal{M}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \varphi\mathcal{M}(B,Y) & \to & \mathcal{N}(FB,FY) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{N}(GB,GY) & \to & \mathcal{N}(FB,GY) \end{array}$$

kommutiert mit den durch Nachschalten von τ_Y beziehungsweise Vorschalten des Tupels τ_B gegebenen Morphismen nach rechts unten. Die Menge aller derartigen Schmelzfunktoren wird mit den Transformationen als Morphismen selbst eine Kategorie. Wir notieren sie

$$\mathrm{SCat}_\varphi(\mathcal{M},\mathcal{N})$$

und im Fall $\varphi = \mathrm{id} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ aussagekräftiger $\mathrm{SCat}_{\mathcal{S}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ und im besonders relevanten Unterfall $\mathcal{S} = \mathrm{Mod}_k$ abkürzend $\mathrm{SCat}_k(\mathcal{M},\mathcal{N})$.

Vorschau 18.2.4.27. Im allgemeinen besitzt eine Kategorie angereicherter Schmelzfunktoren selbst keine natürliche Anreicherung. Zum Beispiel ist in der in **??** eingeführten Notation $\mathrm{SCat}(\mathrm{scat},\mathrm{Ab}) = \mathrm{SCat}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Ab}^{\setminus}\,\mathrm{scat},\mathrm{Ab}^{\mathrm{as}})$ die Kategorie Kring der kommutativen Ringe und es gibt keine natürliche Addition von Kringhomomorphismen. Im Fall angereicherter Funktoren gewöhnlicher angereicherter Kategorien sieht es aber besser aus und wird in **??** folgende diskutiert.

18.2.4.28. Wir erklären analog in einer Schmelzkategorie angereicherte Trennkategorien und die zugehörigen angereicherten Trennfunktoren und dergleichen.

18.2.5 Homotopiekategorie der Komplexe

18.2.5.1 (**Additive Struktur der Schmelzkategorie der Komplexe**). Wir erinnern aus 18.2.3.2, 18.2.3.3 die Schmelzkategorie mit Multihom dgAb. Ihr Leerverschmelzungsfunktor faktorisiert als $\mathrm{L} = v \circ \mathcal{Z}^0$ mit $\mathcal{Z}^0 : \mathrm{dgAb} \to \mathrm{Ab}$ dem Schmelzfunktor der Nullzykel und $v : \mathrm{Ab} \to \mathrm{kEns}$ dem Schmelzfunktor des Vergessens der Addition. Diese Faktorisierung macht dgAb nach 18.2.4.7 zu einer Ab-Schmelzkategorie. Die zugehörige additive Struktur ist die offensichtliche.

18.2.5.2 (**Schmelzfunktor der nullten Homologie**). Für $X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \to Y$ eine Verschmelzung in dgAb liefert die auf den Nullzykeln induzierte Verschmelzung $\mathcal{Z}^0 X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{Z}^0 X_r \to \mathcal{Z}^0 Y$ von abelschen Gruppen ihrerseits auf der Homologie eine weitere Verschmelzung $\mathcal{H}^0 X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{H}^0 X_r \to \mathcal{H}^0 Y$ von abelschen Gruppen. Damit wird die nullte Homologie zu einem Schmelzfunktor $\mathcal{H}^0 : \mathrm{dgAb} \to \mathrm{Ab}$.

18.2.5.3. Wir erklären die Ab-Schmelzkategorie Hot der **Homotopiekomplexe** als die Umstrukturierung

$$\mathrm{Hot} = \mathrm{Hot}/\mathrm{Ab} := \mathcal{H}^0(\mathrm{dgAb}^{\mathrm{sa}})$$

der Selbstanreicherung von dgAb mit dem Schmelzfunktor der nullten Homologie. In Formeln hat Hot also dieselben Objekte wie dgAb und Verschmelzungen in Hot werden erklärt durch $\mathrm{Hot}(B,Y) := \mathcal{H}^0(B \Rightarrow_{\mathrm{dgAb}} Y)$. Der Leerverschmelzungsfunktor von Hot ist der Funktor der nullten Homologie, wir haben genauer offensichtliche Isomorphismen

$$\mathrm{Hot}(\curlyvee, Y) = \mathcal{H}^0(\curlyvee \Rightarrow_{\mathrm{dgAb}} Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 Y$$

18.2.5.4. Gegeben eine angereicherte Schmelzkategorie $\mathcal{M}/\mathcal{S}$ erklären wir eine **angereicherte universelle Verschmelzung** oder kurz **universelle Verschmelzung** als eine $\mathcal{S}$-Leerverschmelzung in ein Verschmelzungsobjekt

$$u \in \mathcal{S}(\curlyvee, \mathcal{M}(X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r, T))$$

derart, daß für jedes Objekt Y das Vorschalten von u einen Isomorphismus

$$\mathcal{M}(T, Y) \tilde{\to} \mathcal{M}(X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r, Y)$$

induziert. Weiter erklären wir eine **angereicherte stabil universelle Verschmelzung** oder kurz **stabil universelle Verschmelzung** als eine $\mathcal{S}$-Leerverschmelzung u wie zuvor derart, daß wir für jedes Objekt Y und jede Objektkleinfamilie B einen Isomorphismus

$$\mathcal{M}(T \curlyvee B, Y) \tilde{\to} \mathcal{M}(X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \curlyvee B, Y)$$

erhalten durch das Vorschalten von $u \curlyvee \mathrm{id}_B$.

Beispiel 18.2.5.5 (**Universelle Verschmelzungen für Selbstanreicherungen**). Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit stabil universellen Verschmelzungen und Multihom besitzt ihre Selbstanreicherung $\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}/\mathcal{M}$ angereicherte stabil universelle Verschmelzungen. Genauer ist das durch eine stabil universelle Verschmelzung $u : X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \to X_1 \otimes \ldots \otimes X_r$ gegebene Element

$$u \in \mathcal{M}(\curlyvee, (X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \Rrightarrow X_1 \otimes \ldots \otimes X_r))$$

eine angereicherte stabil universelle Verschmelzung. Ich skizziere hier nur eine Argumentation dafür, daß $u : \curlyvee \to (X \curlyvee Y \Rrightarrow X \otimes Y)$ eine angereichert universelle Verschmelzung ist. Es gilt ja zu zeigen, daß das Vorschalten von u für jedes Z einen Isomorphismus

$$(X \curlyvee Y \Rrightarrow Z) \tilde{\to} (X \otimes Y \Rrightarrow Z)$$

induziert. Nach dem Yonedalemma reicht es zu zeigen, daß für jedes W unser Isomorphismus in spe eine Bijektion

$$\mathcal{M}(W, (X \curlyvee Y \Rrightarrow Z)) \tilde{\to} \mathcal{M}(W, (X \otimes Y \Rrightarrow Z))$$

liefert. Das hinwiederum können wir einsehen, indem wir beide Seiten mit der Menge von 3-Verschmelzungen $\mathcal{M}(W \curlyvee X \curlyvee Y, Z)$ identifizieren.

Beispiel 18.2.5.6 (**Umstrukturieren stabil universeller Verschmelzungen**). Gegeben eine angereicherte Schmelzkategorie $\mathcal{M}/\mathcal{S}$ und ein Schmelzfunktor $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ werden unter dem Umstrukturieren offensichtlich stabil universelle Verschmelzungen zu stabil universellen Verschmelzungen.

Beispiel 18.2.5.7 (**Stabil universelle Verschmelzungen für Homotopiekomplexe**). Die stabil universellen Verschmelzungen in dgAb liefern nach 18.2.5.5 stabil universelle Verschmelzungen in der Selbstanreicherung $\mathrm{dgAb}^{\mathrm{sa}}$ und dann nach 18.2.5.6 auch stabil universelle Verschmelzungen in der Homotopiekategorie Hot.

18.2.5.8. Gegeben eine angereicherte Schmelzkategorie $\mathcal{M}/\mathcal{S}$ erklären wir für eine Objektkleinfamilie B und ein Objekt Z ein **angereichertes Multihom** oder kurz **Multihom** als ein Objekt $B \Rrightarrow Z$ zusammen mit Isomorphismen

$$i_A : \mathcal{M}(A \curlyvee B, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(A, B \Rrightarrow Z)$$

für alle $A \in \mathcal{M}^{\curlyvee}$ derart, daß für jede weitere Objektkleinfamilie C und jede Abbildung der Indexmengen $\bar{A} \to \bar{C}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^{\curlyvee}_{\varphi}(A, C) \curlyvee \mathcal{M}(C \curlyvee B, Z) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}^{\curlyvee}_{\varphi}(A, C) \curlyvee \mathcal{M}(C, B \Rrightarrow Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}(A \curlyvee B, Z) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}(A, B \Rrightarrow Z) \end{array}$$

kommutiert mit den von i_C beziehungsweise i_A induzierten Horizontalen und den von den angereicherten Multiverknüpfungen induzierten Vertikalen.

Beispiel 18.2.5.9 (**Multihom für Selbstanreicherungen**). Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom wird dieses Multihom auch ein angereichertes Multihom für ihre Selbstanreicherung $\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}/\mathcal{M}$, wenn wir denjenigen Isomorphismen

$$i_A : \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}(A \curlyvee B, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}(A, B \Rrightarrow Z)$$

alias $i_A : ((A \curlyvee B) \Rrightarrow Z) \xrightarrow{\sim} (A \Rrightarrow (B \Rrightarrow Z))$ auszeichnen, die für jedes Objekt W dieselbe Verschmelzung $\mathcal{M}(W \curlyvee A \curlyvee B, Z)$ liefern. Ich arbeite das vorerst nicht weiter aus.

Beispiel 18.2.5.10 (**Umstrukturieren von Multihom**). Gegeben eine angereicherte Schmelzkategorie $\mathcal{M}/\mathcal{S}$ und ein Schmelzfunktor $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ wird unter dem Umstrukturieren offensichtlich angereichertes Multihom zu angereichertem Multihom.

Beispiel 18.2.5.11 (**Multihom für Homotopiekomplexe**). Unser Multihom in dgAb wird mit 18.2.5.9 ein Multihom in der Selbstanreicherung $\mathrm{dgAb}^{\mathrm{sa}}$ und liefert dann nach 18.2.5.10 auch Multihom in der Homotopiekategorie Hot.

18.2.5.12. In derselben Weise erklären wir für jeden Kring k die Mod_k-Schmelzkategorien der supergraduierten k-Moduln sgMod_k, der differentiellen graduierten k-Moduln $\mathrm{dgMod}_k = \mathrm{Ket}_k$ und der Homotopiekomplexe von k-Moduln Hot_k und konstruieren darin angereicherte stabil universelle Verschmelzungen und angereichertes Multihom.

Übungen

Übung 18.2.5.13. Die sogenannte **totale Homologie** $\mathcal{H} := \bigoplus \mathcal{H}^q$ ist ein Schmelzfunktor $\mathcal{H} : \mathrm{Hot} \to \mathrm{sgAb}$ von der Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe in die Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen. Er macht universelle Leerverschmelzungen zu universellen Leerverschmelzungen, ist aber im allgemeinen nicht verträglich mit universellen Verschmelzungen. Ein allgemeinerer Zugang zu diesem Schmelzfunktor wird in 18.3.4.18 erklärt.

Übung 18.2.5.14. Gegeben ein Körper k ist das Bilden der totalen Homologie eine Äquivalenz von Schmelzkategorien

$$\mathcal{H} : \mathrm{Hot}_k \xrightarrow{\approx} \mathrm{sgMod}_k$$

und induziert mithin einen mit universellen Verschmelzungen und internem Hom verträglichen Funktor $\mathcal{H} : \mathrm{dgMog}_k \to \mathrm{sgMod}_k$.

Übung 18.2.5.15. Gegeben eine Ab-Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ erhalten wir eine $\mathrm{Ab}^{\mathbb{Z}}$-Schmelzkategorie $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}$, indem wir Verschmelzungsobjekte erklären durch

$$\mathcal{M}(X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r, Y)^n := \prod_{i_1+\ldots+i_r+n=j} \mathcal{M}(X_1^{i_1} \curlyvee \ldots \curlyvee X_r^{i_r}, Y^j)$$

und die Multiverknüpfungen erklären in der hoffentlich offensichtlichen Weise.

18.3 Mehr zu Schmelzkategorien

18.3.1 Moduln und Komoduln

18.3.1.1. Wir erinnern aus 18.1.1.16, daß $X \curlyvee Y$ die durch $\{1, 2\}$ indizierte Familie $1 \mapsto X, 2 \mapsto Y$ bezeichnet.

18.3.1.2. Unter einer **Verknüpfung** auf einem Objekt A einer Schmelzkategorie verstehen wir eine Zweiverschmelzung $m = m_A : A \curlyvee A \to A$. Ein Objekt mit Verknüpfung nennen wir ein **Magmaobjekt** oder kurz **Magma** unserer Schmelzkategorie.

18.3.1.3. Eine Verknüpfung $m : A \curlyvee A \to A$ auf einem Objekt einer Schmelzkategorie heißt **assoziativ**, wenn gilt $m \circ (m \curlyvee \mathrm{id}) = m \circ (\mathrm{id} \curlyvee m)$. Ein Objekt einer Schmelzkategorie mit assoziativer Verknüpfung heiße ein **Assoziativobjekt**.

18.3.1.4. Unter einer **Eins** eines Magmas A verstehen wir eine Leerverschmelzung $1 = 1_A : \curlyvee \to A$ mit $m \circ (1 \curlyvee \mathrm{id}) = \mathrm{id} = m \circ (\mathrm{id} \curlyvee 1)$. Ein Assoziativobjekt mit einer Eins nennen wir ein **Monoidobjekt** oder auch kurz ein **Monoid** unserer Schmelzkategorie. Die Eins ist dann nach Übung 18.3.1.29 eindeutig betimmt.

18.3.1.5. Wir müssen in Zukunft sorgfältig unterscheiden zwischen der Eins eines Magmaobjekts A und dem Einsobjekt einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$.

18.3.1.6. Gegeben zwei Monoide A, B in ein- und derselben Schmelzkategorie verstehen wir unter einem **Homomorphismus von Monoidobjekten** oder auch **Monoidhomomorphismus** eine Einsverschmelzung $f : A \to B$ mit den Eigenschaften $f \circ m_A = m_B \circ (f \curlyvee f)$ und $f \circ 1_A = 1_B$. Unsere Monoide werden so selbst zu einer Kategorie. Jeder Schmelzfunktor induziert einen Funktor zwischen den jeweiligen Kategorien von Monoiden.

Ergänzung 18.3.1.7. All diese Begriffe verallgemeinern sich in offensichtlicher Weise auf den Fall monotoner Schmelzkategorien.

18.3.1.8. Eine Verknüpfung $m : A \curlyvee A \to A$ in einer Schmelzkategorie heißt **kommutativ**, wenn gilt $m = m \circ \hat{\tau}$ für τ die nichttriviale Permutation. Ein Monoid mit kommutativer Verknüpfung nennen wir wie in 18.2.2.1 ein **Abmonoid**. Unsere Abmonoide bilden eine volle Unterkategorie der Kategorie der Monoide. Jeder Schmelzfunktor induziert einen Funktor zwischen den jeweiligen Kategorien von Abmonoiden.

18.3.1.9. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit endlichen Produkten sind die Magmas, Monoide und Abmonoide der Schmelzkategorie $\mathrm{kart}(\mathcal{C})$ im hier erklärten Sinne genau unsere Magmas, Monoide und Abmonoide von $\mathcal{C}$ im üblichen Sinne.

Beispiele 18.3.1.10. Die folgende Tabelle faßt einige besonders wichtige Beispiele für Magmas, Monoide und Abmonoide in Schmelzkategorien zusammen.

Schmelzkategorie	Magma	Monoid	Abmonoid
kEns	Magma	Monoid	Abmonoid
$\mathrm{k}\mathcal{C}$	Magma in $\mathcal{C}$	Monoid in $\mathcal{C}$	Abmonoid in $\mathcal{C}$
Ab	$\mathbb{Z}$-Algebra	Ring	Kring
Mod_K	K-Algebra	K-Ringalgebra	K-Kringalgebra
Ab^Γ		Γ-graduierter Ring	Γ-graduierter Kring
sMod_K		Superringalgebra	Superkringalgebra
filAb		filtrierter Ring	filtrierter Kring

Ein Monoidobjekt in der Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen sgAb ist immer noch schlicht ein graduierter Ring, aber so ein Monoidobjekt ist kommutativ genau dann, wenn unser graduierter Ring **superkommutativ** ist in dem Sinne, daß gilt $ab = (-1)^{|a||b|}ba$ für beliebige homogene Elemente a, b.

Beispiel 18.3.1.11 (**Monaden als Monoide**). Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ erhalten wir eine monotone Schmelzkategorie $\mathrm{Cat}(\mathcal{C}) := \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ mit Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ als Objekten und der Maßgabe, daß eine Verschmelzung von Endofunktoren in einen weiteren Endofunktor dasselbe sein soll wie eine Transformation der Komposition unserer Endofunktoren in den weiteren Endofunktor, in Formeln

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{C})(F_1 \curlyvee \ldots \curlyvee F_r, G) := \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C})(F_1 \circ \ldots \circ F_r, G)$$

und insbesondere $\mathrm{Cat}(\mathcal{C})(\curlyvee, G) := \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C})(\mathrm{Id}, G)$ für Id der Identitätsfunktor auf $\mathcal{C}$. Die Multiverknüpfung wird der Leser leicht selbst erraten. Die Monoidobjekte dieser monotonen Schmelzkategorie heißen **Monaden auf** $\mathcal{C}$. Gegeben ein Funktor $L : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ mit Rechtsadjungiertem R wird $F := RL : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ eine Monade mit $\varepsilon : \mathrm{Id} \Rightarrow RL$ der Eins und $RL \circ RL = R(LR)L \Rightarrow RL$ gegeben durch $R\eta L$ der Verknüpfung, wie der Leser zur Übung nachprüfen mag.

Beispiel 18.3.1.12 (**Einsobjekte als Abmonoide**). In jeder Schmelzkategorie mit Eins $\mathbb{I}$ macht die offensichtliche Zweiverschmelzung $\mathbb{I} \curlyvee \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ unser Einsobjekt zu einem Abmonoid.

18.3.1.13. Unter Koverknüpfungen, Komagmas, Koassoziativobjekten, Komonoidobjekten, Koabmonoidobjekten und dergleichen in einer Trennkategorie verstehen wir die entsprechenden Begriffe in der dazu opponierten Schmelzkategorie.

18.3.1.14. Ausgeschrieben ist ein Komonoid einer Trennkategorie $\mathcal{T}$ ein Paar (A, μ) bestehend aus einem Objekt $A \in \mathcal{T}$ und einer Zweitrennung

$$\mu : A \to A \curlywedge A$$

mit dem Namen **Komultiplikation** derart, daß gilt $(\mu \curlywedge \mathrm{id}) \circ \mu = (\mathrm{id} \curlywedge \mu) \circ \mu : A \to A \curlywedge A \curlywedge A$ und daß es eine Leertrennung $\epsilon : A \to \curlywedge$ gibt mit $(\epsilon \curlywedge \mathrm{id}) \circ \mu = \mathrm{id} = (\mathrm{id} \curlywedge \epsilon) \circ \mu$. Diese Leertrennung ist dann eindeutig bestimmt und heißt die **Koeinheit**. Gilt zusätzlich $\hat{\tau} \circ \mu = \mu$ für $\tau \in \mathcal{S}_2$ das nichtneutrale Element, so ist unser Komonoid ein Koabmonoid.

Beispiel 18.3.1.15. Unter unserem Trennfunktor $\mathrm{Fun} : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ der Funktionenräume 18.1.6.27 liefert die banale Struktur auf einer Menge $X \in \curlywedge\mathrm{Ens}$ als Koabmonoid eine Struktur als Koabmonoid der Trennkategorie $\mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ auf ihrem Funktionenraum $\mathrm{Fun}(X)$, mithin eine Struktur als Abmonoid der Schmelzkategorie Ab alias eine Struktur als Kring. So erhalten wir ein weiteres Mal die durch punktweise Multiplikation gegebene Ringstruktur auf $\mathrm{Fun}(X) = \mathrm{Ens}(X, \mathbb{Z})$.

18.3.1.16. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ und darin ein Monoid (R, m) verstehen wir unter einem **R-$\mathcal{M}$-Monoidmodul** oder kurz **R-Modul** ein Objekt $M \in \mathcal{M}$ mitsamt einer Zweiverschmelzung

$$m_M : R \curlyvee M \to M$$

mit der Eigenschaft, daß gilt $m_M \circ (m \curlyvee \mathrm{id}) = m_M \circ (\mathrm{id} \curlyvee m_M)$ im Raum der Verschmelzungen $R \curlyvee R \curlyvee M \to M$ und $m_M \circ (e \curlyvee \mathrm{id}) = \mathrm{id}$ im Raum der Verschmelzungen $M \to M$ für $e : (\curlyvee) \to R$ die Eins von R. Unsere Zweiverschmelzung m_M heißt die **Operation von R auf M**. Jeder Schmelzfunktor F macht R-Objekte zu $F(R)$-Objekten. Ausfühlicher nennen wir unsere R-Moduln auch **R-Linksmoduln** und erklären analog **R-Rechtsmoduln** und **R-S-Bimoduln** für zwei Monoide R und S, bei denen wir eben die übliche Verträglichkeit von Rechts- und Linksoperation fordern.

Ergänzung 18.3.1.17 (**Diskussion der Terminologie**). Wie in 18.3.1.35 ausgeführt kann man R-Rechtsmoduln mit R^{opp}-Linksmoduln identifizieren. Bei konkreten Rechnungen erlaubt jedoch die Arbeit mit Rechtsmoduln oft eine übersichtlichere Darstellung. Allgemeiner kann man Bimoduln als einen Spezialfall von **Multimoduln** M über einer Familie von Monoiden R_i sehen, bei denen eben Modulstrukturen $m_i : R_i \curlyvee M \to M$ vorgegeben sind und für $i \neq j$ die Veträglichkeit $m_i \circ (\mathrm{id} \curlyvee m_j) = m_j \circ (\mathrm{id} \curlyvee m_i) \circ (\tau \curlyvee \mathrm{id}) : R_i \curlyvee R_j \curlyvee M \to M$ gefordert wird. Bei konkreten Rechnungen erlaubt aber die Arbeit mit Bimoduln oft eine übersichtlichere Darstellung. Außerdem bleiben Bimoduln ein sinnvolles Konzept in monotonen Schmelzkategorien, in denen Multimoduln oder opponierte Monoide nicht mehr sinnvoll erklärt werden können.

18.3.1.18. Seltener betrachten wir **Assoziativmoduln** über Assoziativobjekten, bei denen wir im Unterschied zu Monoidmoduln keine Forderung an die Operation der Eins stellen, die es ja bei Assoziativobjekten gar nicht geben muß. Seltener betrachten wir auch die in 18.1.2.16 eingeführten Objektmoduln über Objekten ohne Verknüpfung.

18.3.1.19 (**Schmelzkategorien von Moduln**). Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ und darin ein Monoid R bilden wir die Schmelzkategorien $\mathcal{M}_{R\curlyvee}$ und $\mathcal{M}_{\curlyvee R}$ der R-Linksmoduln beziehungsweise R-Rechtsmoduln als volle Schmelzunterkategorien der multiäquivarianten Schmelzkategorie aller R-Objektmoduln $\mathcal{M}_{R\curlyvee'}$ nach 18.1.2.16.

Beispiele 18.3.1.20. Die folgende Tabelle faßt einige besonders wichtige Beispiele für Monoidmoduln in Schmelzkategorien zusammen.

Schmelzkategorie	Monoid	Objekt mit Operation
kEns	Monoid G	G-Menge
$\mathrm{k}\mathcal{C}$	Monoid G in $\mathcal{C}$	Objekt mit G-Operation
Ab	Ring	Modul
Mod_K	K-Ringalgebra	Modul
Ab_Γ	Γ-graduierter Ring	Γ-graduierter Modul
sMod_K	Superringalgebra	Supermodul
filAb	filtrierter Ring	filtrierter Modul

Beispiel 18.3.1.21 (**Operation durch das Einsobjekt**). In einer Schmelzkategorie mit Einsobjekt $\mathbb{I}$ ist für jedes Objekt X die offensichtliche Zweiverschmelzung $\mathbb{I} \curlyvee \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ eine Operation des Abmonoidobjekts $\mathbb{I}$ aus 18.3.1.12. Zum Beispiel trägt jede abelsche Gruppe eine natürliche Struktur als $\mathbb{Z}$-Modul.

18.3.1.22. Unter einer **Kooperation** eines Komonoids auf einem Objekt einer Trennkategorie verstehen wir eine Operation in der opponierten Schmelzkategorie. Die so erklärten Objekte nenn wir **Komonoidkomoduln** oder kurz **Komoduln**. Zum Beispiel heißt ein Objekt der Trennschmelzkategorie Mod_K mit der Kooperation einer Koringalgebra ein Komodul im üblichen Sinne.

Beispiel 18.3.1.23. Gegeben ein Morpismus $f : Z \to X$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ wird Z ein Komodul des banalen Koabmonoids $X \in \curlywedge\mathcal{C}$ vermittels der Kooperation $(f, \mathrm{id}) : Z \to X \curlywedge Z$. Wir nennen ihn den **banalen Komodul** zu $Z \in \mathcal{C}_X$.

18.3.1.24 (**Varianten des Modulbegriffs in angereicherten Kategorien**). Gegeben eine angereicherte gewöhnliche Kategorie $\mathcal{M}/\mathcal{S}$ und ein Monoid Ω in $\mathcal{S}$ erklären wir einen Ω**-Monoidmodul** als ein Paar

$$(X, \mu)$$

aus einem Objekt $X \in \mathcal{M}/\mathcal{S}$ und einem Morphismus von $\mathcal{S}$-Monoiden $\mu : \Omega \to \mathcal{M}(X) := \mathcal{M}(X, X)$. Ist Ω ein Assoziativobjekt und μ nur ein mit der Verknüpfung verträglicher $\mathcal{S}$-Morphismus, so sprechen wir von einem Ω**-Assoziativmodul**. Ist Ω nur ein Objekt und μ nur ein $\mathcal{S}$-Morphismus, so sprechen wir

von einem Ω**-Objektmodul**. Meist sagen wir kurz Ω**-Modul** und hoffen, daß aus dem Kontext hervorgeht, was genau gemeint ist. Einen **Homomorphismus von** Ω**-Moduln** $X \to Y$ erklären wir als eine Leerverschmelzung $\varphi \in_{\mathcal{S}} \mathcal{M}(X,Y)$ derart, daß die beiden Morphismen $\Omega \to \mathcal{M}(X,Y)$ übereinstimmen, die wir aus den Verknüpfungen $\mathcal{M}(X,Y) \curlyvee \mathcal{M}(Y,Y) \to \mathcal{M}(X,Y)$ beziehungsweise $\mathcal{M}(X,X) \curlyvee \mathcal{M}(X,Y) \to \mathcal{M}(X,Y)$ erhalten durch Vorschalten von $\varphi \curlyvee \mu_Y$ beziehungsweise $\mu_X \curlyvee \varphi$.

Beispiel 18.3.1.25. Gegeben eine Menge Ω ist ein Ω-Modul im Sinne von 8.2.1.1 in der hier eingeführten Terminologie ein Ω-Objektmodul der trivial angereicherten Kategorie $\mathrm{Ab}/\mathrm{kEns}$.

Beispiel 18.3.1.26. Gegeben ein Monoid G und ein Ring k ist eine Darstellung von G über k im Sinne von 8.1.1.2 in der hier eingeführten Terminologie ein G-Monoidmodul der trivial angereicherten Schmelzkategorie $\mathrm{Mod}_k/\mathrm{kEns}$.

Beispiel 18.3.1.27. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom und $\Omega \in \mathcal{M}$ sind die Strukturen auf $X \in \mathcal{M}$ als Ω-Modul im Sinne von 18.1.2.16 von $\mathcal{M}$ in Bijektion zu den Strukturen auf X als Ω-Modul im Sinne von 18.3.1.24 in der Selbstanreicherung $\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}/\mathcal{M}$ vermittels der durch die Definition von internem Hom gegebenen Bijektion

$$\mathcal{M}(\Omega \curlyvee X, X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\Omega, X \Rrightarrow X)$$

Vorschau 18.3.1.28. Ich diskutiere in **??** Annahmen, unter denen unsere Moduln aus 18.3.1.24 selbst eine Schmelzkategorie bilden.

Übungen

Übung 18.3.1.29. Eine Eins eines Magmas in einer Schmelzkategorie ist eindeutig bestimmt, wenn sie denn existiert.

Übung 18.3.1.30. Die Gesamtheit aller monotonen Schmelzkategorien bildet selbst eine Kategorie

$$\mathrm{MSCat}$$

Deren finales Objekt mscat ist die monotone Schmelzkategorie mit nur einem Objekt und je einer Verschmelzung von jedem Grad $r \in \mathbb{N}$. Gegeben eine monotone Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ konstruiere man eine Bijektion zwischen Schmelzfunktoren $R : \mathrm{mscat} \to \mathcal{M}$ und Monoiden von $\mathcal{M}$.

Übung 18.3.1.31 (**Produkt von Monoidobjekten**). Existiert für zwei Monoidobjekte A, B einer Schmelzkategorie eine stabil universelle Verschmelzung $A \curlyvee B \to A \otimes B$, so erhalten wir eine Struktur als Monoidobjekt auf $A \otimes B$ in der hoffentlich offensichtlichen Weise. Sind A und B kommutativ, so auch $A \otimes B$. Zusammen

mit $\kappa \circ (\mathrm{id} \curlyvee 1_B) : A \to A \otimes B$ und $\kappa \circ (1_A \curlyvee \mathrm{id}) : B \to A \otimes B$ wird dann $A \otimes B$ ein Koprodukt in der Kategorie der Abmonoidobjekte unserer Schmelzkategorie. Analoges gilt für Komonoidobjekte beziehungsweise Koabmonoidobjekte einer Trennkategorie.

Beispiel 18.3.1.32. Das Tensorprodukt zweier Ringalgebren über einem Körper ist wieder eine Ringalgebra über besagtem Körper. Andererseits ist auch das Supertensorprodukt zweier $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierten Ringalgebren über einem Körper k wieder eine Ringalgebra. Sie hat denselben Vektorraum $A \otimes_k B$ als Grundraum, aber ihr Produkt ist $(a \otimes b)(c \otimes d) = (-1)^{|b||c|} ac \otimes bd$. Wir verwenden dafür die Notation $A \bar{\otimes}_k B$.

Übung 18.3.1.33 (**Endomorphismenobjekte**). Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie. Gegeben ein Objekt X, für das das Homobjekt $X \Rrightarrow X$ existiert, wird es mit der ausgezeichneten Zweiverschmelzung

$$(X \Rrightarrow X) \curlyvee (X \Rrightarrow X) \to (X \Rrightarrow X)$$

aus 18.1.4.19 ein Monoidobjekt von $\mathcal{M}$. Wir nennen dies Monoid das **Endomorphismenobjekt von** X und notieren es $\mathrm{End}(X) = \mathrm{End}_{\mathcal{M}}(X)$. Gegeben eine Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen und Multihom liefert das Tensorieren von internem Hom 18.1.4.20 für beliebige Objekt X, Y einen Homomorphismus von Monoidobjekten $\mathrm{End}(X) \otimes \mathrm{End}(Y) \to \mathrm{End}(X \otimes Y)$. Ist X oder Y starr im Sinne von 18.3.4.3, so ist er ein Isomorphismus

$$\mathrm{End}(X) \otimes \mathrm{End}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(X \otimes Y)$$

Übung 18.3.1.34. Gegeben eine Verknüpfung $m : A \curlyvee A \to A$ auf einem Objekt A einer Schmelzkategorie erklären wir die **opponierte Verknüpfung** $m^{\mathrm{opp}} := m \circ \tau$ für τ die nichttriviale Permutation von zwei Objekten. Unser Objekt A mit dieser Verknüpfung notieren wir A^{opp}. Ist A ein Monoid, so auch A^{opp}. Genau dann ist A in dieser Situation ein Abmonoid, wenn die Identität auf A ein Monoidhomomorphismus $A \to A^{\mathrm{opp}}$ ist.

Übung 18.3.1.35 (**Rechts- und Linksmoduln**). Gegeben eine Schmelzkategorie mit einem Monoid R erhalten wir einen Isomorphismus von Kategorien zwischen der Kategorie der R-Linksmoduln und der R^{opp}-Rechtsmoduln, indem wir jedem M mit Operation $m : R \curlyvee M \to M$ dasselbe Objekt mit der Rechtsoperation $m \circ \tau : M \curlyvee R \to M$ zuordnen.

Übung 18.3.1.36 (**Duale Moduln**). Gegeben eine Schmelzkategorie mit Multihom und darin ein Monoid R und ein R-Modul M wird $M^\vee := (M \Rrightarrow \mathbb{I})$ ein R-Rechtsmodul, indem man die Operation $R \curlyvee M \to M$ umschreibt zu einem Morphismus $R \to (M \Rrightarrow M)$ und dann von der durch Verknüpfen gegebenen Verschmelzung $(M \Rrightarrow M) \curlyvee (M \Rrightarrow \mathbb{I}) \to (M \Rrightarrow \mathbb{I})$ ausgeht und sie mit den Definitionen umschreibt zu einem Morphismus $(M \Rrightarrow M) \to (M^\vee \Rrightarrow M^\vee)$ und so bei einer Verschmelzung $R \to (M^\vee \Rrightarrow M^\vee)$ landet.

18.3.2 Cap-Produkt

18.3.2.1 (**Abstrakte cap-Produkte**). Gegeben eine Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom sowie ein Komonoid $A \in \mathcal{M}$ erhalten wir durch das Anwenden des Trennfunktors $\mathcal{M}^{\mathrm{t}} \to \mathcal{M}^{\mathrm{ot}}$ des Dualisierens nach 18.1.6.25 stets ein Komonoid $A^\vee$ in $\mathcal{M}^{\mathrm{ot}}$ alias ein Monoid

$$A^\vee \in \mathcal{M}$$

Zusätzlich erhalten wir auf A die Struktur eines $A^\vee$-Bimoduls von $\mathcal{M}$. Die Operation $A^\vee \curlyvee A \to A$ erklären wir dazu als die Komposition

$$A^\vee \curlyvee A \to A^\vee \otimes A \to A^\vee \otimes A \otimes A \to \mathbb{I} \otimes A \to A$$

mit den offensichtlichen äußeren Morphismen und $\mathrm{id} \otimes \tau_{23}\Delta$ als zweitem Morphismus, für $\Delta : A \to A \otimes A$ die Komultiplikation des Komonoidobjekts $A \in \mathcal{M}$, sowie $(\mathrm{ev}\,\tau_{12}) \otimes \mathrm{id}$ als drittem Morphismus, für ev die Evaluation aus 18.1.4.17 und und τ jeweils die Vertauschung der entsprechenden Tensorfaktoren. Die Operation $A \curlyvee A^\vee \to A$ erklären wir ähnlich als die Komposition

$$A \curlyvee A^\vee \to A \otimes A^\vee \to A \otimes A \otimes A^\vee \to A \otimes \mathbb{I} \to A$$

mit den offensichtlichen äußeren Morphismen und $\tau_{12}\Delta \otimes \mathrm{id}$ als zweitem Morphismus sowie $\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}$ als drittem Morphismus. Um das einzusehen mag man von 18.1.6.26 ausgehen. Für diese Operationen von $A^\vee$ auf A schlage ich die Bezeichnung **abstraktes cap-Produkt** von links beziehungsweise rechts und die Notation $\cap$ vor. Ist A kokommutativ, so ist auch $A^\vee$ kokommutativ und die Operationen von links und rechts stimmen im Sinne der Gleichheit $\cap \circ \tau = \cap : A^\vee \curlyvee A \to A$ überein. Man prüft für das cap-Produkt von links leicht die Übereinstimmung der beiden Verschmelzungen

$$A^\vee \curlyvee A^\vee \curlyvee A \to \mathbb{I}$$

durch „Produkt der vorderen Einträge gefolgt vom Auswerten $\mathrm{ev} \circ \tau$“ und „Produkt der hinteren Einträge gefolgt vom Auswerten $\mathrm{ev} \circ \tau$“. Diese Erkenntnis mag man die **abstrakte Adjunktionsformel** nennen. Gegeben ein Komonoidmorphismus $f : A \to B$ erhalten wir weiter einen Monoidmorphismus $f^\vee : B^\vee \to A^\vee$ und die **abstrakte Projektionsformel** in Gestalt eines kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
A^\vee \curlyvee A \arrow[d] & B^\vee \curlyvee A \arrow[l] \arrow[r] & B^\vee \curlyvee B \arrow[d] \\
A \arrow[rr] & & B
\end{tikzcd}$$

18.3.2.2 (**Terminologisches zum dualisierten Komonoid**). Mir ist schmerzlich bewußt, daß es gute Gründe gibt, statt der hier getroffenen Wahl für die Definition

des zu einem Komonoid A gebildeten dualen Monoids $A^\vee$ eine andere Wahl zu bevorzugen, bei der $A^\vee$ opponiert wäre zum $A^\vee$ in den hier vereinbarten Konventionen.

Ergänzung 18.3.2.3. Man kann denselben Formalismus auch in der opponierten Situation entwickeln. In dieser Situation muß dann aber auch das „Opponierte zu Multihom“ zur Verfügung stehen, und das ist in den von uns betrachteten Beispielen eher die Ausnahme als die Regel.

Beispiel 18.3.2.4 (**Koringalgebra als Modul der dualen Ringalgebra**). Gegeben ein Kring k betrachten wir die Trennschmelzkategorie mit Multihom Mod_k. Ein Komonoid (A, Δ) ist ein k-Modul A zusammen mit einer k-linearen Abbildung $\Delta : A \to A \otimes A$, der **Komultiplikation**, die die **Koassoziativitätsbedingung** $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ erfüllt und für die es eine **Koeins** gibt, also einen Kovektor $\varepsilon : A \to k$ derart, daß aus $\Delta(a) = \sum b_i \otimes c_i$ folgt $a = \sum \varepsilon(b_i)c_i = \sum \varepsilon(c_i)b_i$. Gegeben eine Koringalgebra wird nun A^* eine Ringalgebra, wenn wir sie mit der Multiplikation $A^* \otimes A^* \to A^*$ versehen, die aus der Komultiplikation Δ durch Dualisieren und Vorschalten des offensichtlichen Homomorphismus $A^* \otimes B^* \to (A \otimes B)^*$ im Fall $A = B$ entsteht. Das Einselement ist dann $\varepsilon \in A^*$. In dieser Situation wird A ein A^*-Bimodul

$$A \in A^*\text{-Mod-}A^*$$

mit der Linksoperation $fa := \sum f(c_i)b_i$ für $\Delta(a) = \sum b_i \otimes c_i$ und der Rechtsoperation $af := \sum f(b_i)c_i$. Diese Bimodulstruktur ist ein Beispiel für unser abstraktes cap-Produkt. Um auch noch die Bedeutung der Adjunktionsformel herauszuarbeiten bemerken wir, daß für jede k-Ringalgebra B ihr Dualraum B^* ein B-Bimodul

$$B^* \in B\text{-Mod-}B$$

wird vermittels der Operationen $b\beta := \beta \circ (\cdot b)$ sowie $\beta b := \beta \circ (b\cdot)$ für $b \in B$ und $\beta \in B^*$. Insbesondere wird so auch A^{**} ein A^*-Bimodul. Die Adjunktionsformel kann verstanden werden als die Aussage, daß das Auswerten $\mathrm{ev}_A : A \to A^{**}$ in unserer speziellen Situation ein Homomorphismus von A^*-Moduln ist. Sie ist sogar, wie man ebensoleicht erkennt, ein Homomorphismus von A^*-Bimoduln

$$\mathrm{ev}_A \in \mathrm{Mod}_{A^*-A^*}(A, A^{**})$$

Beispiel 18.3.2.5 (**Cap-Produkte bei äußeren Algebren**). Wir erinnern für jeden Kring k und jeden k-Modul V das Biabmonoid $\bigwedge V$ in sgMod_k aus 18.2.2.21. In dieser Situation erhalten wir einen Isomorphismus $\mathrm{Alt}(V) = \bigoplus \mathrm{Alt}^n V \xrightarrow{\sim} (\bigwedge V)^\vee$ von der Ringalgebra der alternierenden Formen mit dem Shuffledachprodukt und der Graduierung mit $\mathrm{Alt}^n(V)$ homogen vom Grad $-n$ nach $(\bigwedge V)^\vee$ durch die Vorschrift, daß $(\omega, v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) \mapsto \omega(v_1, \ldots, v_n)$ der vertauschten

Auswertung $\mathrm{ev} \circ \tau : (\bigwedge V)^\vee \curlyvee \bigwedge V \to \mathbb{I} = k$ entsprechen soll mit τ der Vertauschung der beiden Faktoren. Unser cap-Produkt von links entspricht dann derjenigen Struktur von $\bigwedge V$ als $\mathrm{Alt}(V)$-Modul, unter der die Operation durch **geshuffeltes partielles Einsetzen**

$$\omega \cap (v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p,q}} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})\, v_{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(n)}$$

geschieht. Die Rechtsmodulstruktur kann in diesem Fall durch die Linksmodulstruktur ausgedrückt werden vermittels

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) \cap \omega = (-1)^{pn} \omega \cap (v_1 \wedge \ldots \wedge v_n)$$

Diese Formel spezialisiert unsere allgemeine Erkenntnis, daß im Fall eines kommutativen Komonoids die „cap-Produkte von links und rechts übereinstimmen“.

18.3.2.6. Gegeben ein Bimonoid A einer Trennschmelzkategorie ist A selbst stets ein A-Bimodul. Haben wir Multihom, so ist nach 18.3.1.36 damit auch $A^\vee$ ein A-Bimodul. Andererseits induziert die Komonoidstruktur auf A eine Monoidstruktur auf $A^\vee$ und mit unseren Cap-Produkten ist auch umgekehrt A ein $A^\vee$-Bimodul. Ich habe mir nicht so genau überlegt, welche Verträglichkeiten hier im allgemeinen zu erwarten sein sollten.

Beispiel 18.3.2.7 (**Äußere Bialgebra und alternierende Algebra**). Wir erinnern für jeden Kring k und jeden k-Modul V das Biabmonoid $A := \bigwedge V$ in sgMod_k aus 18.2.2.21. Das duale Abmonoid ist $A^\vee = \mathrm{Alt}\, V$. Dann ist sowohl $\mathrm{Alt}\, V$ ein $\bigwedge V$-Modul durch partielles Einsetzen als auch $\bigwedge V$ ein $\mathrm{Alt}\, V$-Modul durch das bereits in 18.3.2.5 besprochene geshuffelte partielle Einsetzen.

Beispiel 18.3.2.8 (**Symmetrische Bialgebra**). Wir erinnern für jeden Kring k und jeden k-Modul V das Biabmonoid $A := \mathrm{S}V$ in gMod_k. Die Komultiplikation $\Delta : \mathrm{S}V \to \mathrm{S}V \otimes_k \mathrm{S}V$ ist dabei der Homomorphismus von k-Kringalgebren, der die durch $v \mapsto v \otimes 1 + 1 \otimes v$ gegebene k-lineare Abbildung $V \to \mathrm{S}V \otimes_k \mathrm{S}V$ fortsetzt. Das duale Monoid notieren wir $A^\vee = \mathrm{Symu}\, V$. Seine homogenen Komponenten sind die Moduln $\mathrm{Symu}^{-r} V = (\mathrm{S}^r V)^*$ aller multilinearen Abbildungen $V^{\times r} \to k$, die ihren Wert nicht ändern, wenn man die Einträge permutiert. Der offensichtliche Isomorphismus $V^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Symu}^{-1} V$ induziert einen natürlichen Kringalgebrenhomomorphismus $\mathrm{S}(V^*) \to \mathrm{Symu}\, V$, aber hier ist die Situation komplizierter als im Fall der äußeren Algebren und er ist auch im Fall eines endlichdimensionalen Vektorraums V nur ein Isomorphismus im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null und sonst noch nicht einmal injektiv. Das ist gut zu sehen im Fall eines freien k-Moduls V vom Rang Eins mit Basisvektor v. Dann haben wir $k[T] \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}V$ vermittels $T \mapsto v$. Andererseits finden wir

$$\Delta(T^n) = (T \otimes 1 + 1 \otimes T)^n = \sum \binom{n}{i} T^i \otimes T^{n-i}$$

Für die zur Basis der T^r dualen Basisvektoren $(T^r)^* \in \mathrm{Symu}^{-r} V$ ergeben sich so die Multiplikationsregeln $(T^r)^*(T^s)^* = \binom{r+s}{s}(T^{r+s})^*$ und $(T^*)^r = r!(T^r)^*$ mit $T^* = (T^1)^*$. Es ist in diesem Kontext üblich, für unsere Basisvektoren die Notation $X^{(r)} = (T^r)^*$ zu verwenden mit einer virtuellen Variablen X und diese als **dividierte Potenzen** anzusprechen, da über $\mathbb{Q}$ ja gilt $(T^r)^* = (T^*)^r/r!$.

18.3.2.9 (**Diskussion der Terminologie**). Bourbaki betrachtet in seiner Algèbre, was wir in unserer Terminologie die „cap-Produkte eines Komonoids der Trennschmelzkategorien mit Multihom gAb und sgAb“ nennen würden, und verwendet dafür die Terminologie „produits internes d'une cogèbre“.

Beispiel 18.3.2.10 (**Raum der Maße als Modul über dem Funktionenring**). Der Trennschmelzfunktor $\mathrm{Maß}_! : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}$ aus 18.1.6.29 macht jede Menge X mit ihrer banalen Struktur als Koabmonoid von $\curlywedge\mathrm{Ens}$ zu einem Koabmonoid $A := \mathrm{Maß}_!(X) \in \mathrm{Ab}$. Durch Dualisieren entsteht daraus wie bereits besprochen das Abmonoid $A^\vee = \mathrm{Fun}(X) \in \mathrm{Ab}$ der Funktionen auf X. Unser abstraktes cap-Produkt aus 18.3.2.1 liefert eine Operation

$$\mathrm{Fun}(X) \curlyvee \mathrm{Maß}_!(X) \to \mathrm{Maß}_!(X)$$

In diesem Fall ist das, wie man unschwer einsieht, schlicht die natürliche Struktur der Gruppe der Maße als Modul über dem Ring der Funktionen. Die abstrakte Adjunktionsformel spezialisiert zur einigermaßen banalen Identität

$$\int (fg)\mu = \int f(g\mu)$$

Beispiel 18.3.2.11 (**Ein langweiliges cap-Produkt**). In der Trennschmelzkategorie $\curlywedge\mathrm{Ens}$ können wir zu jedem Objekt X das banale Koabmonoid betrachten und es zu einem Abmonoid dualisieren. Unter dieser Konstruktion liefert jede Menge das immergleiche Einheitsmonoid.

18.3.2.12 (**Variante zum abstrakten cap-Produkt**). Seien eine Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom gegeben und ein Komonoid A in $\mathcal{M}$ sowie ein A-Rechtskomodul $M \in \mathcal{M}_{\curlywedge A}$. Dann wird M ein $A^\vee$-Modul in $\mathcal{M}$, indem wir die Operation $A^\vee \curlyvee M \to M$ erklären als die Komposition

$$A^\vee \curlyvee M \to A^\vee \otimes M \to A^\vee \otimes A \otimes M \to \mathbb{I} \otimes M \to M$$

mit den offensichtlichen äußeren Morphismen und $\mathrm{ev} \otimes \mathrm{id}$ in der rechten Mitte und $\mathrm{id} \otimes \tau \Delta_M$ in der linken Mitte für $\Delta_M : M \to M \otimes A$ die Kooperation auf M und τ die Vertauschung der beiden Tensorfaktoren. Im Fall $M = A$ spezialisiert das zu unserem abstrakten cap-Produkt aus 18.3.2.1. Wir nennen auch sie ein abstraktes cap-Produkt.

18.3.2.13 (**Weitere Variante zum abstrakten cap-Produkt**). Seien gegeben eine Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom und ein Komonoid A in $\mathcal{M}$ sowie ein A-Linkskomodul $M \in \mathcal{M}_{A\curlywedge}$. So erhalten wir eine natürliche Zweiverschmelzung $M^\vee \curlyvee M \to A$ als die Komposition

$$M^\vee \curlyvee M \to M^\vee \otimes M \to M^\vee \otimes M \otimes A \to \mathbb{I} \otimes A \to A$$

mit $\mathrm{id} \otimes \tau \Delta_M$ in der linken Mitte. Im Fall $M = A$ spezialisiert das zu unserem abstrakten cap-Produkt aus 18.3.2.1. Wir nennen auch sie ein abstraktes cap-Produkt.

Beispiel 18.3.2.14 (**Varianten zum cap-Produkt im Maße-Funktionen-Fall**). Ist $f : Z \to X$ eine Abbildung und Z der zugehörige banale Komodul nach 18.3.1.23 über dem banalen Koabmonoid zu $X \in \curlywedge\mathrm{Ens}$, so wird unter dem Trennschmelzfunktor $\mathrm{Maß}_! : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}$ aus 18.1.6.29 der Raum von Maßen $\mathrm{Maß}_!(Z)$ ein Komodul zu $\mathrm{Maß}_!(X)$. Vermittels des cap-Produkts wird dann $\mathrm{Maß}_!(Z)$ ein Modul über dem Funktionenring $\mathrm{Fun}(X)$ und man prüft unschwer, daß diese Modulstruktur schlicht die Multiplikation mit der zurückgeholten Funktion ist, $\varphi \cap \mu = (\varphi \circ f)\mu$. Unsere zweite Verschmelzung erweist sich als das Bildmaß in X des Produkts einer Funktion auf Z mit einem Maß auf Z, in Formeln $\psi \cap \mu = f_*(\psi\mu)$.

Beispiel 18.3.2.15 (**Varianten zum cap-Produkt im topologischen Fall**). Für jedes Raumpaar ist $(\mathrm{id}, \mathrm{id}) : (X, \emptyset) \to (X, A) \curlywedge (X, \emptyset)$ eine Rechtskooperation des banalen Koabmonoids $(X, \emptyset)$ auf (X, A). Für $A \Subset X$ erhalten wir daraus vermittels unseres Trennfunktors der singulären Ketten $\mathrm{S} : \mathrm{Top}^{\Subset} \to \mathrm{Hot}$ aus 18.4.1.16 eine Rechtskooperation von $\mathrm{S}X$ auf $\mathrm{S}(X, A)$. Für beliebiges $A \subset X$ kann man so eine Rechtskooperation immer noch explizit konstruieren als die Komposition

$$\mathrm{S}X \to \mathrm{S}(X \times X, A \times X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(X, A) \otimes \mathrm{S}(X)$$

des Vorschubs unter der diagonalen Einbettung gefolgt von der von einer und jeder Alexander-Whitney-Transformation induzierten Kettenabbildung. Ebenso erhält man auch eine Linkskooperation. Unser abstrakter Formalismus 18.3.2.13 macht daraus in Hot eine Operation von S^*X auf $\mathrm{S}(X, A)$ sowie eine ausgezeichnete Verschmelzung $\mathrm{S}^*(X, A) \curlyvee \mathrm{S}(X, A) \to \mathrm{S}X$. Daraus erhalten wir mit dem Schmelzfunktor $\mathcal{H}$ unmittelbar das relative cap-Produkt $\mathrm{H}^*(X) \otimes \mathrm{H}(X, A) \to \mathrm{H}(X, A)$ aus der singulären Homologietheorie, das $\mathrm{H}(X, A)$ zu einem Modul über dem Kohomologiering macht, sowie ein weiteres cap-Produkt

$$\mathrm{H}^*(X, A) \otimes \mathrm{H}(X, A) \to \mathrm{H}X$$

Übungen

Übung 18.3.2.16. Seien $\mathcal{M}$ eine Trennschmelzkategorie mit Multihom und darin $f : R \to S$ Komonoidmorphismus und $M \to N$ ein Homomorphismus über f von einem Komodul über R zu einem Komodul über S der hoffentlich offensichtlichen Weise. So kommutiert mit dem in 18.3.2.13 konstruierten cap-Produkt das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M^\vee \curlyvee M \arrow[d] & N^\vee \curlyvee M \arrow[l] \arrow[r] & N^\vee \curlyvee N \arrow[d] \\ R \arrow[rr] & & S \end{tikzcd}$$

Speziell erhalten wir so im topologischen Fall die Verträglichkeit für das Cap-Produkt.

Übung 18.3.2.17. Gegeben ein Komonoid A einer Trennschmelzkategorie faktorisiert die Multiplikation auf $A^\vee$ als

$$A^\vee \curlyvee A^\vee \to (A \Rrightarrow A^\vee) = (A \Rrightarrow (A \Rrightarrow \mathbb{I})) \xrightarrow{\sim} ((A \otimes A) \Rrightarrow \mathbb{I}) \to (A \Rrightarrow \mathbb{I}) = A^\vee$$

mit den Morphismen aus 18.1.4.19 und 18.1.4.3 und dem Vorschalten der Komultiplikation.

18.3.3 Bimonoide und Hopfobjekte

18.3.3.1. Sei $\mathcal{M}$ eine Trennschmelzkategorie. Ein **Bimonoid in** $\mathcal{M}$ ist ein Tripel (B, m, Δ) bestehend aus einem Objekt B, einer Verknüpfung $m : B \curlyvee B \to B$ und einer Koverknüpfung $\Delta : B \to B \curlywedge B$ derart, daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. (B, m) ist ein Monoid;
2. (B, Δ) ist ein Komonoid;
3. Der induzierte Morphismus $\Delta : B \to B \otimes B$ ist ein Monoidhomomorphismus für die Monoidstruktur auf $B \otimes B$ aus 18.3.1.31.

Man zeigt dann unschwer , daß zusätzlich gilt:

4. Der von m induzierte Morphismus $m : B \otimes B \to B$ ist ein Komonoidhomomorphismus für die Komonoidstruktur auf $B \otimes B$ aus 18.3.1.31;
5. Der vom neutralen Element $e : \curlyvee \to B$ induzierte Morphismus $\mathbb{I} \to B$ ist ein Komonoidmorphismus für die Komonoidstruktur auf $\mathbb{I}$ aus 18.3.1.12;

6. Die Koeins $\eta : B \to \mathbb{I}$ von (B, Δ) ist ein Monoidmorphismus für die Monoidstruktur auf $\mathbb{I}$ aus 18.3.1.12.

Ein Bimonoid heißt kommutativ, wenn das zugrundeliegende Monoid kommutativ ist. Ein Bimonoid heißt kokommutativ, wenn das zugrundeliegende Komonoid kokommutativ ist. Ein Bimonoid, dessen Verknüpfung und Koverknüpfung beide kommutativ sind, ist dasselbe wie ein Biabmonoid im Sinne von 18.2.2.15.

18.3.3.2. Gegeben ein Bimonoid (B, m, Δ) einer Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ ist die opponierte Struktur $(B, \Delta^\circ, m^\circ)$ ein Bimonoid der opponierten Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$.

Beispiel 18.3.3.3. Jedes Monoid (G, m) der kartesischen Schmelzkategorie der Mengen wird mit der Diagonaltrennung $\Delta := (\mathrm{id}, \mathrm{id}) : G \to G \curlywedge G$ als Koverknüpfung zu einem Bimonoid (G, m, Δ) der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathrm{Ens}$. Dasselbe gilt für jedes Monoid der kartesischen Schmelzkategorie einer beliebigen Kategorie mit endlichen Produkten.

Beispiel 18.3.3.4. Ein Bimonoid der Trennschmelzkategorie Mod_k der Moduln über einem Kring k nennen wir eine k**-Biringalgebra**. Ausgeschrieben ist das ein k-Modul A mit einer Multiplikation, die ihn zu einer Ringalgebra macht, sowie einer Komultiplikation, die ihn zu einer Koringalgebra macht derart, daß die Komultiplikation ein Homomorphismus von Ringalgebren ist für die Multiplikation

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$$

auf $A \otimes A$ und die Koeins ein Homomorphismus von Ringalgebren $A \to k$. In der Literatur heißt diese Struktur meist kürzer eine „Bialgebra“, aber das paßt nicht zu unserem sehr allgemeinen Verständnis des Begriffs einer Algebra als „Magma einer Modulschmelzkategorie“. Gegeben eine endlichdimensionale Biringalgebra über einem Körper ist ihr Dualraum in natürlicher Weise wieder eine Biringalgebra.

18.3.3.5. Jeder Trennschmelzfunktor macht Bimonoide zu Bimonoiden. Insbesondere macht unser Trennschmelzfunktor $\mathrm{Maß}_! : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}$ aus 18.1.6.29 jedes Monoid G zu einer $\mathbb{Z}$-Biringalgebra. Die zugehörige Ringalgebra ist unser Monoidring $\mathbb{Z}G$. Die Komultiplikation macht $\sum a_g \delta_g$ zu $\sum a_g \delta_g \otimes \delta_g$.

Definition 18.3.3.6. Gegeben eine Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ verstehen wir unter einem **Hopf-Objekt von** $\mathcal{M}$ ein Bimonoid (H, m, Δ), für das ein Morphismus

$S : H \to H$ existiert derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[r, "S\otimes\mathrm{id}"] & H \otimes H \arrow[dr, "m"] & & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & \mathbb{I} \arrow[r, equal] & \mathbb{I} \arrow[r, "1"] & H \\
 & H \otimes H \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{S}"'] & H \otimes H \arrow[ur, "m"'] & &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Solch ein S ist dann eindeutig bestimmt, vergleiche Übung 18.3.3.23, und heißt auch in dieser Allgemeinheit **Antipode**. Ein Biabmonoid mit Antipode nennen wir ein **Hopfbiabmonoid**.

18.3.3.7 (**Involutivität von Antipoden**). Für Antipoden gilt im allgemeinen $S^2 \neq \mathrm{id}$, ja eine Antipode muß noch nicht einmal ein Isomorphismus sein. Ist jedoch die Komultiplikation kokommutativ, so gilt das doch und folgt durch Verallgemeinern des Beweises der Involutivität des Invertierens im Fall von Monoidobjekten 9.1.2.15. Ist die Multiplikation unseres Hopfobjekts kommutativ, so funktioniert das opponierte Argument und unsere Antipode muß auch involutiv sein.

Beispiel 18.3.3.8. Jede Gruppe (G, m) wird zu einem Hopfobjekt (G, m, Δ) der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathrm{Ens}$, indem wir als Koverknüpfung die Diagonaltrennung $\Delta := (\mathrm{id}, \mathrm{id}) : G \to G \curlywedge G$ ergänzen. Die Antipode ist in diesem Fall das Invertieren $S = \mathrm{inv} : G \to G$. Dasselbe gilt für jedes Gruppenobjekt einer beliebigen Kategorie mit endlichen Produkten.

Beispiel 18.3.3.9 (**Differentiale als Hopfbiabmonoid**). Das Biabmonoid D der Differentiale 18.2.3.1 ist ein Hopfobjekt der Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen sgAb mit Antipode $S : 1 \mapsto 1, d \mapsto -d$ alias ein Hopfbiabmonoid dieser Trennschmelzkategorie.

Beispiel 18.3.3.10 (**Äußere Algebra als Hopfbiabmonoid**). Für jeden Kring k und jeden k-Modul V ist das Biabmonoid $\bigwedge V$ aus 18.2.2.21 ein Hopfbiabmonoid von sgMod_k mit Antipode S gegeben durch $(-1)^n : \bigwedge^n V \to \bigwedge^n V$. Für $k = \mathbb{Z}$ und $V = \mathbb{Z}d$ frei vom Rang eins erhalten wir als Spezialfall das Hopfobjekt der Differentiale 18.3.3.9.

Beispiel 18.3.3.11. Gegeben ein Kring k heißt ein Hopfobjekt der Trennschmelzkategorie Mod_k eine **Hopf-Algebra**. Gegeben eine endlichdimensionale Hopfalgebra über einem Körper ist ihr Dualraum in natürlicher Weise wieder eine Hopfalgebra.

18.3.3.12. Jeder Trennschmelzfunktor macht Hopfobjekte zu Hopfobjekten. Insbesondere macht unser Trennschmelzfunktor $\mathrm{Maß}_! : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}$ aus 18.1.6.29

jede Gruppe G zu einer $\mathbb{Z}$-Hopfalgebra. Die zugeörige Ringalgebra ist unser Gruppenring $\mathbb{Z}G$, die Komultiplikation macht $\sum a_g\delta_g$ zu $\sum a_g\delta_g \otimes \delta_g$ und die Antipode macht $\sum a_g\delta_g$ zu $\sum a_g\delta_{g^{-1}}$.

Beispiel 18.3.3.13 (**Symmetrische Algebra als Hopfalgebra**). Gegeben ein Vektorraum V wird die symmetrische Algebra $\mathrm{S}V$ eine Hopfalgebra mit der Komultiplikation $\Delta : \mathrm{S}V \to \mathrm{S}V \otimes \mathrm{S}V$ gegeben durch $v \mapsto v \otimes 1 + 1 \otimes v$ für $v \in V$. Allgemeiner wird für einen beliebigen Modul V über einem beliebigen Kring k so die symmetrische Algebra $\mathrm{S}V$ eine k-Hopfalgebra.

Beispiel 18.3.3.14 (**Differentielle abelsche Gruppen als Darstellungen**). Wir erhalten ein Ab-Hopfbiabmonoid, indem wir den Polynomring $\mathbb{Z}[\partial]$ in einer Variablen mit der Komultiplikation mit $\partial \mapsto \partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial$ versehen. Die Antipode wird dann beschrieben durch $\partial \mapsto -\partial$. Das ist ein Spezialfall von 18.3.3.13. Die Schmelzkategorie der Darstellungen dieses Hopfbiabmonoids ist unsere Schmelzkategorie der differentiellen abelschen Gruppen 18.1.4.22.

Beispiel 18.3.3.15 (**Symmetrische Algebra als Hopfobjekt**). Gegeben ein Vektorraum V wird die symmetrische Algebra $\mathrm{S}V$ ein Hopfobjekt der Trennschmelzkategorie gAb, wenn wir $\mathrm{S}V$ mit der natürlichen Graduierung versehen, bei der wir V in den Grad Eins setzen, und mit derselben Komultiplikation wie im ungraduierten Fall .

Beispiel 18.3.3.16. Typische Beispiele für Hopfalgebren sind universelle Einhüllende von Liealgebren. Mehr zu Hopfalgebren findet man etwa in [Kas95].

Vorschau 18.3.3.17. Jetzt muß man sich mal überlegen, daß für jeden Kring k und jedes Objekt $V \in \mathrm{sgMod}_k$ die Summe der symmetrischen Potenzen $\mathrm{S}V$ ein Hopfobjekt ist in natürlicher Weise. Das verallgemeinert 18.3.3.10 und 18.3.3.13 und muß seinerseits auf Einhüllende von Liealgebrenobjekten und noch allgemeinere Schmelzkategorien verallgemeinert werden. Das will ich aber jetzt nicht ausführen.

18.3.3.18 (**Kohomologie topologischer Gruppen**). Jede topologische Gruppe G kann nach 18.3.3.8 als Hopfobjekt der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathrm{Top}$ aufgefaßt werden. Ist k ein Körper und $\mathrm{H}^*G := \mathrm{H}^*(G;k)$ endlichdimensional, so ist nach der Künnethformel der Kohomologie der Trennfunktor

$$\mathrm{H}^* : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{sgMod}_k^{\mathrm{opp}}$$

verträglich mit universellen Trennungen in endlich viele Kopien von G. Insbesondere macht er G zu einem Hopfobjekt H^*G der Trennkategorie $\mathrm{sgMod}_k^{\mathrm{opp}}$ alias der Schmelzkategorie sgMod_k.

18.3.3.19 (**Äquivariante Verschmelzung unter kokommutativem Bimonoid**). Seien $\mathcal{M}$ eine Trennschmelzkategorie und $C \in \mathcal{M}$ ein kokommutatives Bimonoid. Wir betrachten in der äquivarianten Schmelzkategorie der C-Objekte aus

18.2.2.13 die volle Unterschmelzkategorie

$$\mathcal{M}_{C\searrow} \subset \mathcal{M}_{C\bigvee}$$

aller der C-Objekte, die sogar C-Moduln sind. So sind in Verallgemeinerung von 18.2.2.15 die Ziele der stabil universellen Verschmelzungen in $\mathcal{M}_{C\bigvee}$ bereits selbst Moduln über C, gehören also in Formeln bereits zu $\mathcal{M}_{C\searrow}$, und sind dort a forteriori universelle, ja stabil universelle Verschmelzungen.

18.3.3.20 (**Internes Hom für Moduln über kokommutativem Hopfobjekt**). Seien $\mathcal{M}$ eine Trennschmelzkategorie und $C \in \mathcal{M}$ ein kokommutatives Hopfobjekt. Besitzt $\mathcal{M}$ internes Hom, so besitzt auch $\mathcal{M}_{C\searrow}$ internes Hom. Genauer erhalten wir ein internes Hom $X \Rrightarrow Y$ für $X, Y \in \mathcal{M}_{C\searrow}$, indem wir das interne Hom in $\mathcal{M}$ mit einer Modulstruktur $C \curlyvee (X \Rrightarrow Y) \to (X \Rrightarrow Y)$ versehen. So eine Verschmelzung entspricht unter Adjunktion einem Morphismus $C \otimes (X \Rrightarrow Y) \otimes X \to Y$. Wir erhalten ihn als die Verknüpfung

$$\begin{array}{rcll} C \otimes X \otimes (X \Rrightarrow Y) & \to & C \otimes C \otimes X \otimes (X \Rrightarrow Y) & \text{mit } (\mathrm{id} \otimes S)\Delta \text{ vorne,} \\ & \to & C \otimes X \otimes (X \Rrightarrow Y) & \text{mit der Operation auf } X, \\ & \to & C \otimes Y & \text{mit dem Auswerten,} \\ & \to & Y & \text{mit der Operation auf } Y. \end{array}$$

Der Leser mag ausschreiben, daß das in der Tat auf $X \Rrightarrow Y$ eine Struktur als C-Modul ist und daß sich unter der Adjunktion $(\otimes X, X \Rrightarrow)$ Modulmorphismen entsprechen. Als Spezialfall erhalten wir das interne Hom von Komplexen.

18.3.3.21 (**Objekte mit Operation eines Hopfbiabmonoids**). Zusammenfassend hat für jedes Hopfbiabmonoid C einer Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom auch unsere Trennschmelzkategorie

$$\mathcal{M}_{C\searrow}$$

der „Objekte mit C-Operation“ Multihom und das Vergessen der Operation ist verträglich mit stabil universellen Verschmelzungen und Multihom. Das ergänzt, was wir bereits aus 18.2.2.16 über Objekte mit der Operation eines Biabmonoids wissen.

Ergänzung 18.3.3.22. Alles hier Gesagte gilt opponiert genauso für Komoduln über einem kommutativen Bimonoid. Allerdings gilt es zu beachten, daß gegeben eine Trennschmelzkategorie mit internem Hom die opponierte Trennschmelzkategorie keineswegs wieder internes Hom haben muß. So braucht etwa die Existenz von internem Hom in der Trennschmelzkategorie der algebraischen Darstellungen einer algebraischen Gruppe zusätzliche Argumente und folgt nicht wie im Fall von Darstellungen von Liealgebren aus dem allgemeinen Formalismus.

Übungen

Übung 18.3.3.23 (**Eindeutigkeit von Antipoden**). Man zeige die in 18.3.3.6 behauptete Eindeutigkeit der Antipode, wenn sie denn existiert. Hinweis: Man orientiere sich am Fall von Gruppenobjekten und untersuche für zwei Antipoden S_1, S_2 die Verknüpfung $H \to H \otimes H \otimes H \to H \otimes H \otimes H \to H$ von dreifacher Komultiplikation gefolgt von $S_1 \otimes \mathrm{id} \otimes S_2$ gefolgt von dreifacher Multiplikation.

18.3.4 Starrheit

Definition 18.3.4.1. Ein Objekt X einer Schmelzkategorie heiße **universell tensorierbar**, wenn es mit jedem weiteren Objekt Y eine stabil universelle Zweiverschmelzung $X \curlyvee Y \to X \otimes Y$ besitzt.

18.3.4.2. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Eins und die volle Unterkategorie $\mathcal{M}^{\mathrm{ut}}$ der universell tensorierbaren Objekte erhalten wir durch $X \mapsto (X\otimes)$ einen volltreuen Funktor $\mathcal{M}^{\mathrm{ut}} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathrm{Cat}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ zwischen den zugrundeliegenden gewöhnlichen Kategorien. Ich erinnere an unsere Konvention, „bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte Objekte“ als gleich zu behandeln. In dieser Konvention ist dann auch erst $(X\otimes)$ ein wohldefinierter Funktor.

Definition 18.3.4.3. Ein Objekt X einer Schmelzkategorie mit Eins heißt **starr**, wenn es universell tensorierbar ist und wenn es dazu ein **Adjunktionsdatum** (X^*, γ) gibt bestehend aus einem weiteren universell tensorierbaren Objekt X^* und einer Adjunktion

$$\gamma : (X^*\otimes) \dashv (X\otimes)$$

Ein Adjunktionsdatum zu X ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus aufgrund der Eindeutigkeit von Adjungierten und unserer volltreuen Einbettung $X \mapsto (X\otimes)$ nach 18.3.4.2.

18.3.4.4. Die Eins einer Schmelzkategorie mit Eins ist offensichtlich stets starr.

18.3.4.5. Ein **Starrheitsdatum** in einer Schmelzkategorie mit Eins ist ein Quadrupel (X, X^*, α, β) bestehend aus universell tensorierbaren Objekten X, X^* und Morphismen $\alpha : \mathbb{I} \to X^* \otimes X$ sowie $\beta : X \otimes X^* \to \mathbb{I}$ derart, daß die Kompositionen

$$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes \alpha} X \otimes X^* \otimes X \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}_X} X$$

$$X^* \xrightarrow{\alpha \otimes \mathrm{id}_{X^*}} X^* \otimes X \otimes X^* \xrightarrow{\mathrm{id}_{X^*} \otimes \beta} X^*$$

die Identität auf X beziehungsweise X^* sind. Gegeben ein Adjunktionsdatum (X^*, γ) für X in einer Schmelzkategorie mit Eins erhalten wir ein Starrheitsdatum für X, indem wir als α die Einheit der Adjunktion ausgewertet auf $\mathbb{I}$ nehmen gefolgt von der Einsbedingung und als β die Koeinheit der Adjunktion mit

der invertierten Einsbedingung vorgeschaltet, das alles aufgrund der allgemeinen Beschreibung einer Adjunktion durch ihre Einheit und Koeinheit. Gegeben ein Starrheitsdatum für X erhalten wir umgekehrt ein Adjunktionsdatum für X wieder nach der allgemeinen Beschreibung einer Adjunktion durch ihre Einheit und Koeinheit und diese beiden Konstruktionen sind zueinander invers. Ein Objekt X einer Schmelzkategorie mit Eins ist also genau dann starr, wenn es sich zu einem Starrheitsdatum ergänzen läßt, und auch dieses Starrheitsdatum wird durch X eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus.

18.3.4.6 (**Erhaltung von Starrheit unter Schmelzfunktoren**). Ein mit stabil universellen Verschmelzungen verträglicher Schmelzfunktor zwischen Schmelzkategorien mit Eins macht offensichtlich jedes Starrheitsdatum zu einem Starrheitsdatum und damit starre Objekte zu starren Objekten.

18.3.4.7. Es wird sich gleich herausstellen, daß jedes Starrheitsdatum (X, X^*, α, β) die Existenz des internen Homobjekts $(X \Rrightarrow \mathbb{I})$ impliziert und einen ausgezeichneten Isomorphismus $X^* \xrightarrow{\sim} X^\vee = (X \Rrightarrow \mathbb{I})$ liefert. Sobald das gezeigt ist, geben wir die Notation X^* wieder auf.

18.3.4.8. In einer Schmelzkategorie mit Eins ist mit X ist auch X^* starr. Genauer entsteht aus jedem Starrheitsdatum (X, X^*, α, β) durch das Nachschalten der Vertauschungen τ ein Starrheitsdatum $(X^*, X, \beta\tau, \tau\alpha)$, wie nebenstehende Graphik veranschaulichen mag. Wir erhalten so einen ausgezeichneten Isomorphismus

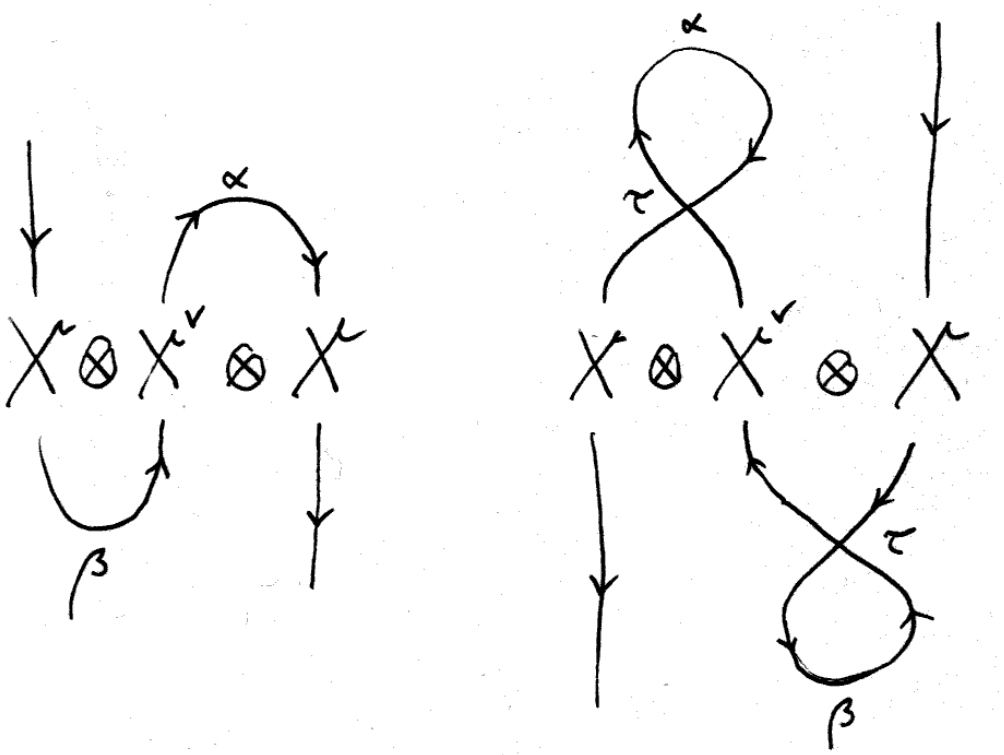
$$X^{**} \xrightarrow{\sim} X$$

Beispiele 18.3.4.9. In der Schmelzkategorie der Vektorräume über einem vorgegebenen Körper sind die starren Objekte genau die endlichdimensionalen Vektorräume und die durch X bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmten Daten (X^*, α, β) sind der Dualraum $X^\top$, die Expansion der Identität und die Evaluation. Sie entsprechen unter der Identifikation von $X \otimes X^*$ mit dem Raum der Endomorphismen von X der durch id_X gegebenen Einbettung des Grundkörpers und der Spur. In der kartesischen Schmelzkategorie der Mengen ist „die“ einelementige Menge das einzige starre Objekt. Beides folgt leicht aus dem anschließenden Satz.

Satz 18.3.4.10 (**Starrheit und Homobjekte**). *Ein Objekt X einer Schmelzkategorie mit Eins ist genau dann starr, wenn für alle Y das Homobjekt $X \Rrightarrow Y$ und stabil universelle Zweiverschmelzungen $X \otimes Y$ sowie $(X \Rrightarrow \mathbb{I}) \otimes Y$ existieren und wir für jedes Y einen Isomorphismus*

$$(X \Rrightarrow \mathbb{I}) \otimes Y \xrightarrow{\sim} (X \Rrightarrow Y)$$

erhalten durch Anwenden auf $X \otimes (X \Rrightarrow \mathbb{I}) \otimes Y \to \mathbb{I} \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y$ der Tensor-Hom-Adjunktion, wobei der erste Pfeil vom Auswerten $X \otimes (X \Rrightarrow \mathbb{I}) \to \mathbb{I}$ herkommt.



Versuch einer graphischen Darstellung des Rechenwegs beim Nachweis, daß aus $(\beta \otimes \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_X \otimes \alpha) = \mathrm{id}_X$ folgt $(\mathrm{id}_X \otimes \beta\tau)(\tau\alpha \otimes \mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X$.

Beweis. Gegeben (X, X^*, α, β) ein Starrheitsdatum und A eine Objektkleinfamilie und Y ein Objekt betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}(A \curlyvee (X \otimes X^*), Y \otimes X^*) & \to & \mathcal{M}(A \curlyvee \mathbb{I}, Y \otimes X^*) \\
\uparrow & & \downarrow \wr \\
\mathcal{M}(A \curlyvee X \curlyvee X^*, Y \otimes X^*) & & \mathcal{M}(A, Y \otimes X^*) \\
\uparrow & & \downarrow \\
\mathcal{M}(A \curlyvee X, Y) & \leftarrow & \mathcal{M}(A \curlyvee X, Y \otimes X^* \otimes X)
\end{array}$$

aus hoffentlich offensichtlichen Abbildungen. Man prüft leicht, daß es zueinander inverse Bijektionen zwischen $\mathcal{M}(A \curlyvee X, Y)$ und $\mathcal{M}(A, Y \otimes X^*)$ induziert und daß $Y \otimes X^*$ zusammen mit diesen Bijektionen ein internes Homobjekt $(X \Rrightarrow Y)$ ist. Setzen wir hier $Y = \mathbb{I}$ ein, so erhalten wir einen ausgezeichneten Isomorpismus $X^* \xrightarrow{\sim} X^\vee$ und die restlichen in der Proposition für starre Objekte behaupteten Aussagen. Gelten umgekehrt diese Aussagen, so liefern sie uns die universelle Tensorierbarkeit des Objekts $X^\vee$ und eine Adjunktion $(X \otimes, X^\vee \otimes)$ und damit ist X starr. $\square$

Übungen

Übung 18.3.4.11. Man zeige in einer Schmelzkategorie mit Eins und additiver Struktur, daß jeder Summand und jede endliche direkte Summe starrer Objekte auch selbst wieder starr ist.

Übung 18.3.4.12. Man zeige für eine beliebige Schmelzkategorie mit Eins, daß das Zielobjekt jeder stabil universellen Verschmelzung starrer Objekte auch selbst wieder starr ist.

Übung 18.3.4.13 (**Ein selbstbiduales aber nicht starres Objekt**). In der Schmelzkategorie gMod_k der $\mathbb{Z}$-graduierten Vektorräume über einem Körper k ist das Objekt X bestehend aus einer Kopie von k in jedem Grad nicht starr, aber dennoch ist der natürliche Morphismus in das Bidual ein Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} X^{\vee\vee}$.

Übung 18.3.4.14. Gegeben ein starres Objekt X einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Eins erklären wir die **Spur**

$$\mathrm{tr} = \mathrm{tr}_X : (X \Rrightarrow X) \to \mathbb{I}$$

als den Morphismus, der unter unserem Isomorphismus $(X \Rrightarrow \mathbb{I}) \otimes X \xrightarrow{\sim} (X \Rrightarrow X)$ aus 18.3.4.10 dem Auswerten $X \otimes (X \Rrightarrow \mathbb{I}) \to \mathbb{I}$ entspricht. Dieser Morphismus liefert unter dem Leerverschmelzungsfunktor nach 18.1.4.2 zusammen mit weiteren natürlichen Isomorphismen eine ausgezeichnete Abbildung

$$\mathrm{tr} : \mathcal{M}(X, X) \to \mathcal{M}(\curlyvee, \mathbb{I})$$

und auch diese nennen wir eine **Spur**. Man zeige, daß das im Fall der Schmelzkategorie der k-Vektorräume die Spur aus der linearen Algebra $\mathrm{tr} : \mathrm{End}(V) \to k$ ist und im Fall der Schmelzkategorie der Supervektorräume die sogenannte **Superspur** $\mathrm{str} : \mathrm{End}(V) \to k$ gegeben durch $\mathrm{str}(A) := \mathrm{tr}(A_{\bar{0}}^{\bar{0}}) - \mathrm{tr}(A_{\bar{1}}^{\bar{1}})$ in hoffentlich selbsterklärender Notation.

Übung 18.3.4.15 (**Spur und Schmelzfunktoren**). Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Schmelzfunktor von Schmelzkategorien mit Eins, der verträglich ist mit stabil universellen Verschmelzungen. Nach 18.3.4.6 macht F Starrheitsdaten zu Starrheitsdaten. Nach 18.3.4.10 existieren unter diesen Annahmen für starres X und beliebiges Y die internen Homobjekte $X \Rrightarrow Y$ und $FX \Rrightarrow FY$. Man zeige, daß dann auch der natürliche Morphismus ein Isomorphismus $F(X \Rrightarrow Y) \xrightarrow{\sim} FX \Rrightarrow FY$ ist und zeige die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} F(X \Rrightarrow X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "F(\mathrm{tr}_X)"'] & FX \Rrightarrow FX \arrow[d, "\mathrm{tr}_{FX}"] \\ F(\mathbb{I}_{\mathcal{M}}) \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{I}_{\mathcal{N}} \end{tikzcd}$$

Übung 18.3.4.16 (**Negative Tensorpotenzen von Einheiten**). Sei eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Eins gegeben. Ein Objekt E heißt eine **Einheit**, wenn es universell tensorierbar ist und es ein universell tensorierbares Objekt F gibt mitsamt einem Isomorphismus $E \otimes F \xrightarrow{\sim} \mathbb{I}$. Man zeige, daß jede Einheit starr und so nach 18.3.4.10 „universell hombar“ ist und daß der offensichtliche Morphismus $\mathbb{I} \to (E \Rrightarrow E)$ für jede Einheit E ein Isomorphismus $\mathbb{I} \xrightarrow{\sim} (E \Rrightarrow E)$ ist. Gegeben eine Einheit E erkläre man für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Tensorpotenz $E^{\otimes n}$, indem man für negatives n die Vereinbarung $E^{\otimes n} := (E^\vee)^{\otimes(-n)}$ trifft. Man zeige, daß es dann genau ein Datum von Isomorphismen $\alpha_{n,m} : E^{\otimes n} \otimes E^{\otimes m} \xrightarrow{\sim} E^{\otimes(n+m)}$ gibt, das für $n, m \geq 0$ aus den offensichtlichen Isomorphismen besteht und die Assoziativitäten $\alpha_{n,m+l} \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha_{m,l}) = \alpha_{n+m,l} \circ (\alpha_{n,m} \otimes \mathrm{id})$ für alle $n, m, l \in \mathbb{Z}$ gelten. Das kann dahingehend zusammengefaßt werden, daß $(E^{\otimes n})_{n \in \mathbb{Z}}$ mit den α ein Abmonoid der Schmelzkategorie $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}$ der $\mathbb{Z}$-graduierten Objekte von $\mathcal{M}$ aus 18.1.2.1 wird.

Übung 18.3.4.17. Eine Einheit E einer Schmelzkategorie mit Vorzeichen und Eins heiße eine **Signumseinheit**, wenn auf $E \otimes E$ die Vertauschung das Negative der Identität ist. Ein typisches Beispiel ist das Objekt $\mathbb{Z}[1] \in \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab})$ der Schmelzkategorie der Komplexe abelscher Gruppen. Gegeben eine Signumseinheit zeige man für Morphismen $f : E^{\otimes n} \to \mathbb{I}$ und $g : E^{\otimes m} \to \mathbb{I}$ die Identität

$$g \circ (\mathrm{id} \otimes f) = (-1)^{nm} f \circ (\mathrm{id} \otimes g)$$

von in hoffentlich offensichtlicher Weise notierten Morphismen $E^{\otimes(n+m)} \to \mathbb{I}$.

Übung 18.3.4.18 (**Schmelzfunktor der graduierten Leerverschmelzungen**). Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit additiver Struktur und Eins und eine Signumseinheit $E \in \mathcal{M}$ erhalten wir einen Schmelzfunktor $\mathcal{M} \to \mathrm{sgAb}$ mit der Notation $[q]X := E^{\otimes q} \otimes X$ durch die Vorschrift

$$X \mapsto \mathcal{M}(\Upsilon, [q]X)_{q\in\mathbb{Z}}$$

Unser Schmelzfunktor $\mathcal{H} : \mathrm{Hot} \to \mathrm{sgAb}$ der totalen Homologie aus 18.2.5.13 kann als ein Spezialfall dieser allgemeinen Konstruktion verstanden werden.

Übung 18.3.4.19 (**Verträglichkeiten für das Tensorieren von internem Hom**). Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen und Multihom. Man zeige die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} W^\vee \otimes X \otimes Y^\vee \otimes Z & \to & (W \otimes Y)^\vee \otimes (X \otimes Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (W \Rrightarrow X) \otimes (Y \Rrightarrow Z) & \to & (W \otimes Y) \Rrightarrow (X \otimes Z) \end{array}$$

mit dem Tensorieren 18.1.4.20 von internem Hom in der unteren Horizontale und für $W^\vee \otimes Y^\vee \to (W \otimes Y)^\vee$ und den in 18.3.4.10 beschriebenen Morphismen $W^\vee \otimes X \to (W \Rrightarrow X)$.

Übung 18.3.4.20 (**Starrheit und Tensorieren von internem Hom**). Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie mit Eins. Gegeben Objekte $A, B, X, Y \in \mathcal{M}$ mit X, Y starr derart, daß $A \Rrightarrow B$ existiert, existiert auch $(X \otimes A) \Rrightarrow (Y \otimes B)$ und der in 18.1.4.20 erklärte Morphismus ist ein Isomorphismus

$$(X \Rrightarrow Y) \otimes (A \Rrightarrow B) \xrightarrow{\sim} (X \otimes A) \Rrightarrow (Y \otimes B)$$

Speziell erhalten wir für jede Einheit E natürliche Isomorphismen $E \otimes (A \Rrightarrow B) \xrightarrow{\sim} A \Rrightarrow (E \otimes B)$ und $E^\vee \otimes (A \Rrightarrow B) \xrightarrow{\sim} (E \otimes A) \Rrightarrow B$. Hinweis: Man gehe von 18.1.4.3 aus. Auch 18.3.4.19 mag helfen.

Übung 18.3.4.21 (**Starrheit von Homotopiekomplexen**). Man zeige, daß gegeben ein Morphismus $A \to B$ von starren Objekten der Schmelzkategorie Hot auch der Abbildungskegel starr ist. Man zeige, daß ein Objekt der Schmelzkategorie Hot genau dann starr ist, wenn seine totale Kohomologie eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist.

18.3.5 Terminologische Experimente*

18.3.5.1 (**Versuch einer Terminologie**). Hier lege ich noch den Versuch einer kohärenten Terminologie für verschiedene von einer Schmelzkategorie, Trennkategorie oder Trennschmelzkategorie abgeleitete Kategorien nieder.

- Man beschreibe mit einem der Vokale e, i oder o das Verhältnis von Multiplikation und Komultiplikation, so beide vorhanden sein sollten, und zwar

  e für den Fall keiner Verträglichkeitsforderung und auch wenn eine der beiden Strukturen gar nicht gefordert wird;

  i für die übliche Verträglichkeit;

  o für die übliche Verträglichkeit und die zusätzliche Forderung nach der Existenz einer Antipode;

- Man setze davor beziehungsweise danach beziehungsweise sowohl als auch einen der Konsonanten k oder b zur Beschreibung der Komultiplikation beziehungsweise Multiplikation, und zwar

  k für den Fall einer kommutativen Verknüpfung oder Koverknüpfung;

  b für den Fall einer beliebigen Verknüpfung oder Koverknüpfung.

- Man setze davor beziehungsweise danach beziehungsweise sowohl als auch ein u, wenn die Komultiplikation beziehungsweise Multiplikation, unitär sein soll?

- Soll die Assoziativität extra gefordert und durch ein s davor oder dahinter notiert werden? Dann wären eksu Abmonoide und ebsu Monoide und eb Magmas und ebs Assoziativobjekte.

- Man verwende a priori die stärkstmögliche Bezeichnung.

Beispiel 18.3.5.2. Im Fall einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ finden wir die folgende Übersetzungstabelle.

neue Notation	Bezeichnung in Worten
$\mathrm{eb}(\mathcal{M})$	Monoidobjekte von $\mathcal{M}$
$\mathrm{ek}(\mathcal{M})$	Abmonoide von $\mathcal{M}$

Beispiel 18.3.5.3. Im Fall der Trennschmelzkategorie $\curlywedge\mathrm{Ens}$ finden wir die folgende Übersetzungstabelle.

neue Terminologie	übliche Terminologie
$\mathrm{kok}(\curlywedge\mathrm{Ens})$	abelsche Gruppen
$\mathrm{kob}(\curlywedge\mathrm{Ens})$	beliebige Gruppen
$\mathrm{kik}(\curlywedge\mathrm{Ens})$	abelsche Monoide
$\mathrm{kib}(\curlywedge\mathrm{Ens})$	beliebige Monoide

Man erinnere dabei, daß für $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit endlichen Produkten in $\curlywedge\mathcal{C}$ jedes Objekt genau eine Struktur als Komonoid hat und daß diese kommutativ und funktoriell ist. Abelsche Monoide hätten wir demnach statt mit $\mathrm{kik}(\curlywedge\mathrm{Ens})$ auch mit $\mathrm{ek}(\curlywedge\mathrm{Ens})$ oder $\mathrm{bik}(\curlywedge\mathrm{Ens})$ notieren können, aber wir wollen ja a priori die stärkstmögliche Bezeichnung verwenden.

Beispiel 18.3.5.4. Im Fall der Trennschmelzkategorie Ab finden wir die folgende Übersetzungstabelle.

neue Terminologie	übliche Terminologie
$\mathrm{eb}(\mathrm{Ab})$	Ringe
$\mathrm{ek}(\mathrm{Ab})$	Kringe
$\mathrm{beb}(\mathrm{Ab})$	Hopfalgebren über $\mathbb{Z}$
$\mathrm{bok}(\mathrm{Ab})$	affine Gruppenschemata
$\mathrm{kok}(\mathrm{Ab})$	abelsche affine Gruppenschemata
$\mathrm{bik}(\mathrm{Ab})$	affine Monoidschemata

Affine Supergruppenschemata oder kurz Supergruppen über einem Körper k sind in dieser Terminologie Objekte von $\mathrm{bok}(\mathrm{sMod}_k)$.

18.3.5.5 (**Iteration von** kok). Gegeben eine Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ machen wir $\mathrm{kok}(\mathcal{M})$ zu einer Schmelzkategorie, indem wir nur solche $\mathcal{M}$-Verschmelzungen

$$A_1 \curlyvee \ldots \curlyvee A_r \to Y$$

erlauben, für die für alle i kommutiert

$$\begin{array}{ccc} A_1 \otimes \ldots \otimes A_i \otimes A_i \otimes \ldots \otimes A_r \to & & A_1 \otimes \ldots \otimes A_i \otimes \ldots \otimes A_r \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_1 \otimes A_1 \otimes \ldots \otimes A_i \otimes A_i \otimes \ldots \otimes A_r \otimes A_r & \to Y \otimes Y \to & Y \end{array}$$

Hier wird die linke Vertikale gegeben durch die Koverknüpfungen aller Objekte außer A_i und die obere Horizontale durch die Verknüpfung von A_i und die anderen Pfeile sind die offensichtlichen. Es müßte aber einmal geprüft werden, daß auch in dieser Allgemeinheit die Multiverknüpfung von Verschmelzungen wieder eine Verschmelzung ist. Das könnte vielleicht ein Student ausschreiben. Delikater ist die Frage, ob man vernünftige Annahmen an eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ finden kann, unter denen $\mathrm{kok}(\mathcal{M})$ wieder eine Trennschmelzkategorie ist und eventuell sogar dieselben vernünftigen Annahmen erfüllt, so daß man iterativ

$$\mathrm{kok}^n(\mathcal{M})$$

bilden könnte. Bisher beobachte ich nur amüsiert, daß $\mathrm{kok}(\curlywedge\mathrm{Ens}) = \mathrm{Ab}$ die Schmelzkategorie der abelschen Gruppen ist und $\mathrm{kok}^2(\curlywedge\mathrm{Ens}) = \mathrm{kok}(\mathrm{Ab})$ etwas Absonderliches: Objekte sind wohl affine abelsche Gruppenschemata, Leerverschmelzungen Elemente des zugrundeliegenden Krings, Einsverschmelzungen Homomorphismen des zugrundeliegenden Krings, Zweiverschmelzungen biadditive Abbildungen $A \times B \to C$ alias Gruppenhomomorpismen $A \otimes B \to C$, wir notieren sie etwa $(a, b) \mapsto a * b$, mit $a * (b_1 b_2) = (a_{(1)} * b_1)(a_{(2)} * b_2)$ und $(a_1 a_2) * b = (a_1 * b_{(1)})(a_2 * b_{(2)})$ mit $a \mapsto \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ die übliche Notation für eine Koverknüpfung. Ich frage mich, ob da mehr dahinter steckt und ob und wenn ja wie man diese Beobachtung ausnutzen kann.

Übungen

Übung 18.3.5.6 (**Additive Struktur auf** $\mathrm{kok}(\mathcal{M})$). Man zeige, daß für jede Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ die Schmelzkategorie $\mathrm{kok}(\mathcal{M})$ eine additive Struktur erhält, indem wir für Verschmelzungen $\phi, \psi : X \curlyvee Y \to Z$ ihre Summe $\phi + \psi$ erklären als die Vernüpfung

$$X \curlyvee Y \to X \curlyvee X \curlyvee Y \curlyvee Y \to X \curlyvee Y \curlyvee X \curlyvee Y \to Z \curlyvee Z \to Z$$

von Koverknüpfung auf X und Y, Umordnen, $(\phi \curlyvee \psi)$ und Verknüpfung auf Z und analog für Verschmelzungen von beliebigen Objektkleinfamilien. Der durch das Vergessen der zusätzlichen Daten gegebene Schmelzfunktor $v : \mathrm{kok}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ ist volltreu auf Leerverschmelzungen.

18.4 Bezug zur Homologietheorie

18.4.1 Homologie als Schmelzfunktor

18.4.1.1. Wir betrachten die Kategorie Top^r aller r-Tupel topologischer Räume, bilden dazu die Funktorkategorie $\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}^r} = \mathrm{Cat}(\mathrm{Top}^r, \mathrm{Ab})$ aller von dort ausgehenden Funktoren in die Kategorie der abelschen Gruppen und bilden schließlich zu dieser Kategorie mit additiver Struktur die Homotopiekategorie

$$\mathrm{Hot}\left(\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}^r}\right)$$

mit ihrer induzierten additiven Struktur.

Satz 18.4.1.2 (Eilenberg-Zilber, Variante). *Für $r \geq 0$ gibt es in der Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}\left(\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}^r}\right)$ zwischen den beiden Objekten $(\otimes\mathrm{S}) : (X_1, \ldots, X_r) \mapsto \mathrm{S}X_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{S}X_r$ und $(\mathrm{S}\times) : (X_1, \ldots, X_r) \mapsto \mathrm{S}(X_1 \times \ldots \times X_r)$ genau einen Morphismus, der auf der nullten Homologie dieselben Abbildungen induziert wie die offensichtlichen Isomorphismen $\mathrm{S}_0X_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{S}_0X_r \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_0(X_1 \times \ldots \times X_r)$, und dieser Morphismus ist in besagter Homotopiekategorie ein Isomorphismus*

$$(\otimes\mathrm{S}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{S}\times)$$

18.4.1.3. Die Umkehrabbildung $(\mathrm{S}\times) \xrightarrow{\sim} (\otimes\mathrm{S})$ zu diesem Isomorphismus nennen wir die **Alexander-Whitney-Transformation**, ihre Effekte im Fall spezieller Räume **Alexander-Whitney-Abbildungen**.

Beweis. Man zeigt das genau wie im Fall $r = 2$. Man beachte, wie die Aussage im Fall $r = 0$ zu allgemeinen Erkenntnissen über die Homologie eines Punktes spezialisiert. □

Korollar 18.4.1.4 (Singuläre Ketten als Trennschmelzfunktor). *Wir erhalten einen Trennschmelzfunktor*

$$\mathrm{S} : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}$$

von der banalen Trennkategorie der Kategorie der topologischen Räume in die Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe abelscher Gruppen, genauer zwischen den zugehörigen Trennschmelzkategorien, indem wir jedem Tupel $v = (v_1, \ldots, v_r)$ stetiger Abbildungen $v_i : X \to Y_i$ die Komposition

$$\mathrm{S}X \to \mathrm{S}(Y_1 \times \ldots \times Y_r) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}Y_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{S}Y_r$$

von Vorschub und Alexander-Whitney-Abbildung 18.4.1.3 zuordnen.

Beweis. Die Gesamtheit der r-Trennungen $\mathrm{S}v$ aus unserem Korollar für festes r kann nach 18.4.1.2 eindeutig dadurch charakterisiert werden, daß sie einerseits natürlich ist, also für jede Sammlung kommutativer Diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{v_i} & Y_i \\ \downarrow f & & \downarrow g_i \\ X' & \xrightarrow{v_i'} & Y_i' \end{array}$$

von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen ein homotopiekommutatives Diagramm liefert, und daß andererseits die davon induzierten Abbildungen $\mathrm{H}_0X \to \mathrm{H}_0Y_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{H}_0Y_r$ von den offensichtlichen Abbildungen $\mathrm{S}_0X \to \mathrm{S}_0(Y_1 \times \ldots \times Y_r) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_0Y_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{S}_0Y_r$ herkommen. Auf die Gesamtheit der Verknüpfungen für festes s und eine feste Indexabbildung $\bar{u} : [\![r]\!] \to [\![s]\!]$ einer s-Trennung gefolgt von einer Trennung über $\bar{u}$ trifft aber diese Charakterisierung auch zu, weil wir in der Mitte ja auch geeignete Produkte der Räume am Ende einfügen können. Daß unser Trennfunktor dann verträglich ist mit universellen Trennungen, ist eh klar. □

18.4.1.5. Man beachte, daß in der Situation des Korollars die Bilder der Trennungen zwar auf der nullten Homologie durch die einfache Vorschrift $[x] \mapsto [v_1(x)] \otimes \ldots \otimes [v_r(x)]$ gegeben werden, daß sie aber aber auf höheren Homologien nur im Fall von Körperkoeffizienten sinnvoll definiert sind und dann eine kompliziertere Beschreibung benötigen als „Vorschub längs $(v_1, \ldots, v_r); X \to Y_1 \times \ldots \times Y_r$ gefolgt von der Umkehrung der durch das Kreuzprodukt der Homologie gegebenen Isomorphismen“.

18.4.1.6 (**Singuläre Ketten für diskrete Räume**). Schränken wir unseren Trennschmelzfunktor aus 18.4.1.4 auf diskrete Räume ein, so fällt er zusammen mit unserem Trennschmelzfunktor $\mathrm{Maß}_! : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}$ aus 18.1.6.29 gefolgt vom offensichtlichen volltreuen Trennschmelzfunktor $\mathrm{Ab} \hookrightarrow \mathrm{Hot}$.

18.4.1.7 (**Singuläre Ketten des einpunktigen Raums**). Der universellen Leertrennung $\mathrm{top} \to \curlywedge$ in der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathrm{Top}$ wird nach 18.4.1.4 unter dem Trennfunktor der singulären Ketten eine universelle Leertrennung der Trennschmelzkategorie Hot zugeordnet, also ein Isomorphismus $\mathrm{S}(\mathrm{top}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[0]$ zur Eins der Homotopiekategorie. Man sieht leicht ein, daß dieser Isomorphismus durch die Augmentation repräsentiert wird.

18.4.1.8 (**Homologie als Schmelzfunktor**). Wir erhalten einen Schmelzfunktor

$$\mathrm{H} := \mathcal{H} \circ \mathrm{S} : \mathrm{kart}(\mathrm{Top}) \to \mathrm{sgAb}$$

von der kartesischen Schmelzkategorie der topologischen Räume in die Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen, indem wir unseren Trennschmelzfunktor $\curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}$ in die Homotopiekomplexe aus 18.4.1.4 mit dem

Schmelzfunktor $\mathcal{H} : \mathrm{Hot} \to \mathrm{sgAb}$ der totalen Homologie aus 18.2.5.13 verknüpfen. Da diese Schmelzfunktoren beide universelle Leerverschmelzungen zu universellen Leerverschmelzungen machen, gilt dasselbe für H und wir erhalten einen ausgezeichneten Isomorphismus $\mathrm{H}(\mathrm{top}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[0]$ in sgAb. Das durch die universelle Leerverschmelzung gegebene Element alias das Urbild von $1 \in \mathbb{Z}$ unter diesem Isomorphismus ist unser kanonischer Erzeuger der nullten Homologie des einpunktigen Raums $\delta \in \mathrm{H}_0(\mathrm{top})$, wie der Leser leicht prüfen wird.

18.4.1.9 (**Das Kreuzprodukt und seine Eigenschaften**). Per definitionem ordnet unser Schmelzfunktor der Homologie der universellen Zweiverschmelzung $X \curlyvee Y \to X \times Y$, die durch die Identität auf $X \times Y$ gegeben ist, diejenige Zweiverschmelzung $\mathrm{H}X \curlyvee \mathrm{H}Y \to \mathrm{H}(X \times Y)$ in sgAb zu, die der durch die Schreibreihenfolge gegebenen Anordnung das Kreuzprodukt der Homologie

$$\mathrm{H}X \times \mathrm{H}Y \to \mathrm{H}(X \times Y)$$

zuordnet. Eine Einsverschmelzung $f : X \to Y$ wird darunter zur auf der Homologie induzierten Abbildung $f_* : \mathrm{H}X \to \mathrm{H}Y$ und die universelle Leerverschmelzung $\curlyvee \to \mathrm{top}$ zum kanonischen Erzeuger $\delta \in \mathrm{H}_0(\mathrm{top})$. Unser Schmelzfunktor liefert mithin, um nicht zu sagen beinhaltet, was wir in unserer Formelsammlung für das Kreuzprodukt der Homologie die Assoziativität, Eins, Antikommutativität und Natürlichkeit genannt hatten. Das wird im folgenden ausgeführt.

18.4.1.10 (**Natürlichkeit des Kreuzprodukts**). Gegeben zwei stetige Abbildungen $f : X \to X'$ und $g : Y \to Y'$ haben wir für beliebige $c \in \mathrm{H}_p X$ und $d \in \mathrm{H}_q Y$ in $\mathrm{H}_{p+q}(X' \times Y')$ die Gleichheit

$$(f_* c) \times (g_* d) = (f \times g)_*(c \times d)$$

Das folgt auch ohne alle Verschmelzung aus der Natürlichkeit der Eilenberg-Zilber-Abbildung. In der Sprache der Verschmelzungen entsteht diese Identität durch das Anwenden des Schmelzfunktors der Homologie auf das kommutative Diagramm der Familienkategorie

$$\begin{array}{ccc} X \curlyvee Y & \xrightarrow{\mathrm{u}} & X \times Y \\ \downarrow f \curlyvee g & & \downarrow f \times g \\ X' \curlyvee Y' & \xrightarrow{\mathrm{u}} & X' \times Y' \end{array}$$

mit den universellen Zweiverschmelzungen in den Horizontalen, genauer durch das Einsetzen von Elementen oben links und das Verfolgen ihrer Bilder unter beiden Verknüpfungen nach unten rechts.

18.4.1.11 (**Einheit des Kreuzprodukts**). Für $\delta \in \mathrm{H}_0(\mathrm{top})$ den kanonischen Erzeuger der Homologie eines Punktes und X ein beliebiger Raum und $q \in \mathbb{N}$ und

$c \in \mathrm{H}_q(X)$ gelten unter Unterdrückung der Notation für die von den offensichtlichen Homöomorphismen $\mathrm{pr}_1 : X \times \mathrm{top} \xrightarrow{\sim} X$ und $\mathrm{pr}_2 : \mathrm{top} \times X \xrightarrow{\sim} X$ auf der Homologie induzierten Isomorphismen die Gleichheiten

$$\delta \times c = c = c \times \delta$$

Sie entstehen durch das Anwenden des Schmelzfunktors der Homologie auf das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}\,\Upsilon\,\mathrm{n}"] \arrow[d, "\mathrm{n}\,\Upsilon\,\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & X\,\Upsilon\,\mathrm{top} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ \mathrm{top}\,\Upsilon\,X \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] & X \end{tikzcd}$$

der Familienkategorie mit $\mathrm{n} : \Upsilon \to \mathrm{top}$ der universellen Leerverschmelzung, genauer durch das Einsetzen von Elementen oben links und Verfolgen ihrer Bilder unter den Verknüpfungen nach unten rechts.

18.4.1.12 (**Assoziativität des Kreuzprodukts**). Gegeben topologische Räume X, Y, Z und zugehörige Homologieklassen a, b, c gilt in der Homologie von $X \times Y \times Z$ unter Unterdrückung der Notation für die von den natürlichen Identifikationen $(X \times Y) \times Z \xrightarrow{\sim} X \times Y \times Z \xrightarrow{\sim} X \times (Y \times Z)$ auf der Homologie induzierten Isomorphismen die Identität

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Sie entsteht durch das Anwenden des Schmelzfunktors der Homologie auf das kommutative Diagramm der Familienkategorie

$$\begin{tikzcd} X\,\Upsilon\,Y\,\Upsilon\,Z \arrow[r] \arrow[d] & X\,\Upsilon\,(Y \times Z) \arrow[d] \\ (X \times Y)\,\Upsilon\,Z \arrow[r] & X \times Y \times Z \end{tikzcd}$$

und das Einsetzen von Elementen oben links und das Verfolgen ihrer Bilder unter den Verknüpfungen nach unten rechts.

18.4.1.13 (**Graduierte Kommutativität des Kreuzprodukts**). Gegeben topologische Räume X, Y bezeichne $\tau : X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X$ die Vertauschung $(x, y) \mapsto (y, x)$. Für beliebige homogene Homologieklassen $c \in \mathrm{H}X$ und $d \in \mathrm{H}Y$ gilt in $\mathrm{H}(Y \times X)$ bei kommutativem Koeffizientenring R die Identität

$$\tau_*(c \times d) = (-1)^{|c||d|} d \times c$$

Sie bringt zum Ausdruck, daß eine Zweiverschmelzung in sgAb eben eine Vorschrift ist, die jeder Anordnung der Faktoren eine bilineare Abbildung zuordnet derart, daß gewisse Vorzeichenregeln erfüllt sind, und daß wir das Kreuzprodukt mit Bezug auf die Schreibreihenfolge im kartesischen Produkt erklärt hatten.

18.4.1.14 (**Künnethformel mit Körperkoeffizienten**). Die Homologie von X mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe M kann in unserer neuen Sprache durch die Formel $\mathrm{H}(X;M) = \mathcal{H}(\mathrm{S}X \otimes_{\mathbb{Z}} M)$ ausgedrückt werden. Für Koeffizienten in einem Körper k ist der Schmelzfunktor der Homologie sogar verträglich mit universellen Verschmelzungen als die Komposition

$$\mathrm{kart}(\mathrm{Top}) \to \mathrm{Hot} \to \mathrm{Hot}_k \xrightarrow{\approx} \mathrm{sgMod}_k$$

von Schmelzfunktoren, die jeweils verträglich sind mit universellen Verschmelzungen nach 18.4.1.4, 18.2.3.5 und 18.2.5.14. Diese Aussage beinhaltet unsere Künnethformel mit Körperkoeffizienten $\mathrm{H}(X;k) \otimes_k \mathrm{H}(Y;k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}(X \times Y;k)$.

Vorschau 18.4.1.15. Wir konstruieren in 18.4.3.6 sogar einen monotonen Schmelzfunktor von monotonen Schmelzkategorien

$$\mathrm{S} : \mathrm{kart}(\mathrm{Top})^{\mathrm{mon}} \to \mathrm{Ket}^{\mathrm{mon}}$$

vermittels der offensichtlichen Verallgemeinerung der üblichen expliziten Eilenberg-Zilber-Abbildung auf endlich viele Faktoren mit der Eigenschaft, daß er den von unserem Schmelzfunktor $\mathrm{S} : \mathrm{kart}(\mathrm{Top}) \to \mathrm{Hot}$ aus 18.4.1.4 induzierten monotonen Schmelzfunktor liftet. Es ist jedoch nicht möglich, unseren ursprünglichen Schmelzfunktor $\mathrm{S} : \mathrm{kart}(\mathrm{Top}) \to \mathrm{Hot}$ aus 18.4.1.4 zu einem Schmelzfunktor $\mathrm{S} : \mathrm{kart}(\mathrm{Top}) \to \mathrm{Ket}$ zu liften. Dem steht die Existenz nichttrivialer sogenannter „Massey-Produkte“ entgegen, was hier nicht weiter ausgeführt werden soll.

Übungen

Übung 18.4.1.16. Wir erklären die **Trennkategorie der Raumpaare** $\mathrm{Top}^{\subset}$ durch die Vorschrift, daß eine Trennung $(X,U) \to (Y_1,V_1) \curlywedge \ldots \curlywedge (Y_r,V_r)$ ein Tupel von stetigen Abbildungen $f_i : X \to Y_i$ ist mit $U \subset f_1^{-1}(V_1) \cup \cdots \cup f_r^{-1}(V_r)$. Von (X,U) geht mithin genau eine Leertrennung aus im Fall $U = \emptyset$ und keine Leertrennung sonst, denn die Vereinigung über eine leere Mengenfamilie ist die leere Menge. Universell sind die Trennungen

$$(Y_1 \times \ldots \times Y_r, U) \to (Y_1,V_1) \curlywedge \ldots \curlywedge (Y_r,V_r)$$

mit $U := \mathrm{pr}_1^{-1} V_1 \cup \ldots \cup \mathrm{pr}_r^{-1} V_r$ der Menge aller Punkte des Produkts, bei denen mindestens eine Koordinate zum entsprechenden V_i gehört. Speziell ist die einzige Leertrennung $(\mathrm{top},\emptyset) \to \curlywedge$ universell und im Fall $(Y_1,V_1) = (Y_2,V_2) = ([0,1],\{0,1\})$ geht die universelle Zweitrennung aus von $([0,1]^2,U)$ mit U der Vereinigung der Randkanten des Einheitsquadrats. Unsere universellen Trennungen sind offensichtlich sogar stabil universell, unsere Trennkategorie $\mathrm{Top}^{\subset}$ ist also

eine Trennschmelzkategorie mit Verschmelzungen $(X_1, U_1) \curlyvee \ldots \curlyvee (X_r, U_r) \to (Y, V)$ allen stetigen Abbildungen $X_1 \times \ldots \times X_r \to Y$ mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt $(x_1, \ldots, x_r)$ in V landet, bei dem mindestens eine der Koordinaten x_i zur entsprechenden Teilmenge U_i gehört. Wir nennen sie die **Trennschmelzkategorie der Raumpaare**

$$\mathrm{Top}^{\subset}$$

Ein Leerverschmelzung $\curlyvee \to (Y, V)$ in $\mathrm{Top}^{\subset}$ ist per definitionem ein Morphismus $(\mathrm{top}, \emptyset) \to (Y, V)$ alias ein Punkt von Y. Man zeige, daß der Schmelzfunktor der singulären Ketten einen Schmelzfunktor

$$\mathrm{S} : \mathrm{Top}^{\subset} \to \mathrm{Hot}$$

induziert mit $(X, U) \mapsto \mathrm{S}(X, U)$. Durch Nachschalten von $\mathcal{H}$ erhalten wir einen Schmelzfunktor

$$\mathrm{H} : \mathrm{Top}^{\subset} \to \mathrm{sgAb}$$

mit $(X, U) \mapsto \mathrm{H}(X, U)$, der viele Eigenschaften des Kreuzprodukts der relativen Homologie zusammenfaßt. Unser Schmelzfunktor S ist sogar verträglich mit universellen Verschmelzungen, wenn wir ihn auf die Schmelzkategorie $\mathrm{Top}^{\Subset}$ der Raumpaare (X, U) mit offener Teilmenge $U \Subset X$ einschränken. Insbesondere erhalten wir so einen Trennschmelzfunktor

$$\mathrm{S} : \mathrm{Top}^{\Subset} \to \mathrm{Hot}$$

In einer anderen Richtung zeigen unsere Argumente auch, daß jede stabil universelle Verschmelzung von Raumpaaren unter S stabil universell in Hot bleibt, wenn bei nur einem der Ausgangs-Raumpaare die ausgezeichnete Teilmenge nicht leer ist.

Übung 18.4.1.17 (**Topologische Orientierungsmenge als Schmelzfunktor**). Wir erhalten einen Schmelzfunktor

$$\mathrm{or}^{\mathrm{top}} : (\curlyvee \mathrm{Modf}_{\mathbb{R}})^{\times} \to \mathrm{Par}$$

vom banalen Schmelzgruppoid der endlichdimensionalen reellen Vektorräume in unsere erweiterten Paritäten aus 18.2.1.10 durch die Vorschrift, daß wir jedem reellen Vektorraum V endlicher Dimension d die Parität seiner Dimension zusammen mit der Menge der beiden Erzeuger von $\mathrm{H}_d(V, V \backslash 0)$ zuordnen und jeder Verschmelzung $V_1 \oplus \ldots \oplus V_r \xrightarrow{\sim} W$ diejenige Verschmelzung von erweiterten Zahlen, die durch die vom Kreuzprodukt auf der relativen Homologie induzierte Abbildung gegeben wird. Zwischen diesem Schmelzfunktor und dem Schmelzfunktor

$$\mathrm{or} = \mathrm{or}^{\mathrm{alg}} : (\curlyvee \mathrm{Modf}_{\mathbb{R}})^{\times} \to \mathrm{Par}$$

der algebraischen Orientierungsmenge aus 18.2.1.11 gibt es genau zwei Isotransformationen. Wir zeichnen eine von ihnen als unsere **Standardtransformation**

$$\mathrm{std} : \mathrm{or}^{\mathrm{alg}} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{or}^{\mathrm{top}}$$

dadurch aus, daß darunter die Standardorientierung von $\mathbb{R}$ demjenigen Erzeuger $\tau \in \mathrm{H}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash 0)$ entspricht, der durch die Klasse des relativen Einszykels $[-1, 1]$ gegeben wird, also durch die affine Abbildung $\Delta_1 \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{e}_0 \mapsto -1$ und $\mathrm{e}_1 \mapsto 1$. Das bedeutet, daß die algebraische Standardorientierung auf $\mathbb{R}^n$ für alle n unter unserer ausgezeichneten Isotransformation dem Erzeuger $\tau^{\times n}$ von $\mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash 0)$ entspricht.

Übung 18.4.1.18. Gegeben orientierte reelle Vektorräume $U \subset V$ endlicher Dimension liefert 18.2.1.22 eine ausgezeichnete Orientierung auf dem Quotienten V/U und vermittels des von der Projektion induzierten Isomorphismus

$$\mathrm{H}_d(V, V\backslash U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_d(V/U, (V/U)\backslash 0)$$

einen ausgezeichneten Erzeuger der linken Seite für $d = \dim_{\mathbb{R}}(V/U)$. Er stimmt im Fall $\mathbb{R}^m \times 0^d \subset \mathbb{R}^n$ mit den jeweiligen Standardorientierungen überein mit $1^{\times m} \times \tau^{\times d}$ für $1 \in \mathrm{H}_0(\mathbb{R}, \emptyset)$ der natürliche Erzeuger und $\tau \in \mathrm{H}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash 0)$ wie in 18.4.1.17.

Übung 18.4.1.19 (**Formeln für mengenwertige Schmelzfunktoren**). Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit je einem ausgezeichneten Produkt $X \times Y$ für jedes Paar (X, Y) von Objekten und ausgezeichnetem finalen Objekt fin. Jeder Schmelzfunktor

$$S : \mathrm{kart}(\mathcal{C}) \to \mathrm{kart}(\mathrm{Ens})$$

liefert einen gewöhnlichen Funktor $M : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$, den wir auf Morphismen $M(f) = f_*$ notieren werden, sowie Abbildungen $M(X) \times M(Y) \to M(X \times Y)$, $(a, b) \mapsto a \boxtimes b$ und ein ausgezeichnetes Element $\delta \in M(\mathrm{fin})$ derart, daß für dieses Datum $(M, \boxtimes, \delta)$ die folgenden Verträglichkeiten gelten:

Natürlichkeit: Gegeben Morphismen $f : X \to Z$ und $g : Y \to W$ in $\mathcal{C}$ haben wir für beliebige $a \in M(X)$ und $b \in M(Y)$ in $M(Z \times W)$ die Gleichheit

$$(f_* a) \boxtimes (g_* b) = (f \times g)_*(a \boxtimes b)$$

Eins: Gegeben $X \in \mathcal{C}$ und $a \in M(X)$ und gilt

$$(\mathrm{pr}_X)_*(a \boxtimes \delta) = a$$

Assoziativität: Gegeben Objekte $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ und dazu jeweils Elemente a, b, c von $M(X), M(Y), M(Z)$ sowie $\mathrm{ass} : (X \times Y) \times Z \xrightarrow{\sim} X \times (Y \times Z)$ der offensichtliche Isomorphismus gilt

$$\mathrm{ass}_*((a \boxtimes b) \boxtimes c) = a \boxtimes (b \boxtimes c)$$

Kommutativität: Gegeben $\tau : X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X$ der Vertauschungsmorphismus und $a \in M(X)$ sowie $b \in M(Y)$ gilt

$$\tau_*(a \boxtimes b) = b \boxtimes a$$

Sei nun $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit je einem ausgezeichneten Produkt $X \times Y$ für jedes Paar (X, Y) von Objekten und einem ausgezeichneten finalen Objekt fin. Man zeige, daß umgekehrt jedes Datum $(M, \boxtimes, \delta)$ wie oben von einem wohlbestimmten Schmelzfunktor $S : \mathrm{kart}(\mathcal{C}) \to \mathrm{kart}(\mathrm{Ens})$ herkommt. In der Praxis verwenden wir für S und M für gewöhnlich dieselbe Bezeichnung. Analoges gilt für Schmelzfunktoren $\mathrm{kart}(\mathcal{C}) \to \mathrm{sgAb}$ und ist die Bedeutung unserer Formelsammlung für das Kreuzprodukt der Homologie 18.4.1.9 folgende.

Übung 18.4.1.20 (**Formeln für allgemeinere Schmelzfunktoren**). Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit je einem ausgezeichneten Produkt $X \times Y$ für jedes Paar (X, Y) von Objekten und ausgezeichnetem finalen Objekt fin. Analoges zu 18.4.1.19 gilt für Schmelzfunktoren $\mathrm{kart}(\mathcal{C}) \to \mathcal{S}$ in allgemeine Schmelzkategorien $\mathcal{S}$ mit einem ausgezeichneten treuen Schmelzfunktor $v : \mathcal{S} \to \mathrm{kEns}$. Sie entsprechen Tupeln $(M, \boxtimes, \delta)$ mit $M : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ einem Funktor der zugrundeliegenden einfachen Kategorien, Zweiverschmelzungen $M(X) \curlyvee M(Y) \to M(X \times Y)$ und einer Leerverschmelzung $\delta : \curlyvee \to M(\mathrm{fin})$ derart, daß die obigen Verträglichkeiten für vM gelten. Für einen Schmelzfunktor $\mathrm{kart}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ab}$ etwa muß man nur zusätzlich fordern, daß M ein Funktor $M : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ ist und $\boxtimes$ für alle X, Y eine bilineare Abbildung $M(X) \times M(Y) \to M(X \times Y)$. Das ist die Bedeutung der Formeln für verschiedene Arten von Maßen.

18.4.2 Kohomologie als Trennfunktor

18.4.2.1. Man erinnere aus 18.1.6.27 den Trennfunktor $\mathrm{Fun} : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{ot}}$ der Funktionenräume. Im folgenden erweitern wir ihn zu einem Trennfunktor $\curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{sgAb}^{\mathrm{ot}}$ von der banalen Trennkategorie der topologischen Räume in die Opponierte der Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen. Im diskreten Fall haben wir bereits in 18.1.6.33 diskutiert, wie man den Trennfunktor der Funktionenräume durch Dualisieren aus dem Trennschmelzfunktor der Räume von kompakt getragenen Maßen erhalten kann. Dort war das eher ein

Umweg zum Ausprobieren der Konzepte. Hier wird es ein Zugang zur Kohomologie, der es mir besonders gut erlaubt, meine Anschauung für Homologie auf die Kohomologie zu übertragen.

18.4.2.2 (**Trennfunktor der singulären Koketten**). Verknüpfen wir den Trennschmelzfunktor der singulären Ketten $\mathrm{S} : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}$ aus 18.4.1.4 mit dem Dualisieren $\mathrm{Hot}^{\mathrm{t}} \to \mathrm{Hot}^{\mathrm{ot}}$, so erhalten wir einen Trennfunktor

$$\mathrm{S}^* : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}^{\mathrm{ot}}$$

von der banalen Trennkategorie der topologischen Räume in die Opponierte der Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe abelscher Gruppen. Wir nennen diesen Trennfunktor den **Trennfunktor der singulären Koketten** und verwenden im folgenden die abkürzende Notation $\mathrm{S}^*X = \mathrm{S}^\vee X := (\mathrm{S}X)^\vee$. Per definitionem ordnet unser Trennfunktor einer Trennung $X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ in $\curlywedge\mathrm{Top}$ alias einem Tupel stetiger Abbildungen $f_i : X \to Y_i$ als Trennung in $\mathrm{Hot}^{\mathrm{opp}}$ alias Verschmelzung in Hot die Komposition

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{S}^\vee Y_1 \times \ldots \times \mathrm{S}^\vee Y_r & & & & \mathrm{S}^\vee X \\
\downarrow & & & & \uparrow \\
\mathrm{S}^\vee Y_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{S}^\vee Y_r & \to & (\mathrm{S}Y_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{S}Y_r)^\vee & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{S}(Y_1 \times \ldots \times Y_r)^\vee
\end{array}$$

zu mit einem dualisierten Eilenberg-Zilber-Isomorphismus als drittem Morphismus. Nach 18.1.6.25 macht unser Trennfunktor darüber hinaus eine universelle Trennung in eine Kleinfamilie $Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ topologischer Räume zu einer universellen Trennung in $\mathrm{Hot}^{\mathrm{ot}}$, wenn die $\mathrm{S}Y_i \in \mathrm{Hot}$ mit höchstens einer Ausnahme freie Homologiegruppen von endlichem Rang haben, denn dann liefern die üblichen Argumente Homotopieäquivalenzen dieser Komplexe mit ihrer Homologie und folglich ist in unserem Diagramm auch der erste Morphismus der unteren Horizontale eine Homotopieäquivalenz. Insbesondere macht unser Trennfunktor die universelle Leertrennung $\mathrm{top} \to \curlywedge$ zu einer universellen Leertrennung $\mathrm{S}^*(\mathrm{top}) \to \curlywedge$ und induziert mithin einen Isomorphismus $\mathrm{S}^*(\mathrm{top}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[0]$. Dasselbe gilt mit Koeffizienten in einem beliebigen Kring k und wir erhalten auch in dieser Allgemeinheit einen Trennfunktor

$$\mathrm{S}^*_k : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}^{\mathrm{ot}}_k$$

Auch er macht eine universelle Trennung in eine Kleinfamilie $Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ topologischer Räume zu einer universellen Trennung, wenn die $\mathrm{H}_n(Y_i; k)$ für alle i mit höchstens einer Ausnahme endlich erzeugt und frei oder allgemeiner endlich erzeugt und projektiv sind. Die universelle Leertrennung induziert insbesondere einen Isomorphismus $\mathrm{S}^*_k(\mathrm{top}) \xrightarrow{\sim} k[0]$ von Homotopiekomplexen.

18.4.2.3 (**Singuläre Kohomologie als Trennfunktor**). Schalten wir hinter unseren Trennfunktor der singulären Koketten $\mathrm{S}^* : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}^{\mathrm{ot}}$ aus 18.4.2.2 noch den Opponierten des Schmelzfunktors der totalen Homologie $\mathcal{H} : \mathrm{Hot} \to \mathrm{sgAb}$ alias den Trennfunktor $\mathcal{H}^{\mathrm{opp}}$ dahinter, so erhalten wir einen Trennfunktor

$$\mathrm{H}^* = \mathrm{H}^*_{\mathrm{sing}} : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{sgAb}^{\mathrm{ot}}$$

Wir nennen ihn die **Kohomologie** oder ausführlicher **singuläre Kohomologie**. Noch genauer setzen wir $\mathrm{H}^q X := \mathcal{H}^q(\mathrm{S}^* X)$ und nennen diese abelsche Gruppe die **q-te Kohomologiegruppe von** X. Die von der universellen Zweitrennung $X \times Y \to X \curlywedge Y$ induzierte Zweiverschmelzung ist das Kreuzprodukt der Kohomologie. Auch der Trennfunktor der Kohomologie macht universelle Trennungen zu universellen Trennungen, wenn die $\mathrm{H}_n(Y_i; k)$ für alle i mit höchstens einer Ausnahme endlich erzeugt und frei oder allgemeiner endlich erzeugt und projektiv sind, macht insbesondere die universelle Leertrennung $\mathrm{top} \to \curlywedge$ zu einer universellen Leertrennung und induziert so einen Isomorphismus $\mathrm{H}^*(\mathrm{top}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[0]$. Das Urbild von $1 \in \mathbb{Z}$ nennen wir den **kanonischen Erzeuger** $1 \in \mathrm{H}^0(\mathrm{top})$. Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ bezeichnen wir mit $f^* : \mathrm{H}^q Y \to \mathrm{H}^q X$ die induzierte Abbildung auf der Kohomologie. Sie heißt das **Zurückholen**. Analoges gilt für Kohomologie $\mathrm{H}^q(X; k) := \mathcal{H}^q\, \mathrm{S}^*(X; k)$ mit Koeffizienten in einem beliebigen Kring k.

18.4.2.4 (**Singuläre Kohomologie mit Körperkoeffizienten**). Ich erinnere daran, daß nach 18.2.5.14 im Fall eines Körpers k die totale Kohomologie eine Äquivalenz von Schmelzkategorien $\mathcal{H} : \mathrm{Hot}_k \xrightarrow{\approx} \mathrm{sgMod}_k$ liefert. Wir erhalten so für jeden Komplex $S \in \mathrm{Ket}_k$ von k-Vektorräumen einen natürlichen Isomorphismus $\mathcal{H}^q(S^\vee) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{H}^{-q} S)^\vee$ zwischen der Kohomologie des dualen Komplexes und dem Dualen der Kohomologie. Das bedeutet insbesondere natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X; k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X; k)^*$$

zwischen der Kohomologie und dem Dualraum der Homologie. Ich kann mir die höheren Kohomologiegruppen ab $q \geq 2$ nur vorstellen als den Dualraum in diesem Sinne der für mich vergleichsweise anschaulichen Homologiegruppen.

18.4.2.5 (**Künnethformel**). Für Körperkoeffizienten finden wir, daß der Trennfunktor der Kohomologie $\mathrm{H}^*(\ ; k) : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{sgMod}_k^{\mathrm{ot}}$ universelle Trennungen zu universellen Trennungen macht, wann immer die Komplexe der singulären Ketten mit Koeffizienten in k aller Zielräume bis auf höchstens eine Ausnahme nur endlichdimensionale Homologievektorräume haben. Insbesondere erhalten wir so, wann immer alle $\mathrm{H}^m(X; k)$ oder alle $\mathrm{H}^n(Y; k)$ endlichdimensionale k-Vektorräume sind, einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathrm{H}^*(X; k) \otimes_k \mathrm{H}^*(Y; k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(X \times Y; k)$$

18.4.2.6. Die banale Struktur auf einem topologischen Raum $X \in \mathrm{Top}$ als Koabmonoid von $\curlywedge\mathrm{Top}$ im Sinne von 18.2.2.10 induziert durch Anwenden des Trennfunktors der Kohomologie 18.4.2.3 auf seiner Kohomologie H^*X eine Struktur als Koabmonoid von $\mathrm{sgAb}^{\mathrm{ot}}$ alias eine Struktur als Abmonoid von sgAb alias eine Struktur als superkommutativer graduierter Ring. Dieser Ring H^*X heißt der **Kohomologiering von** X. Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert einen Homomorphismus von graduierten Ringen $f^* : \mathrm{H}^*Y \to \mathrm{H}^*X$ in die Gegenrichtung, den **Rückzug**. Die Multiplikation des Kohomologierings wird oft

$$\cup$$

notiert und das **cup-Produkt** genannt. Wir werden den Kohomologiering im folgenden noch genauer studieren und auch explizitere Beschreibungen dafür herleiten. Zur Übung dürfen Sie zeigen, daß im Fall des einpunktigen Raums der kanonische Erzeuger die Eins des Kohomologierings ist.

18.4.2.7 (**Trennfunktor der Kohomologie und cup-Produkt**). Aus den Definitionen folgt unmittelbar, daß eine Trennung $(f_1, \ldots, f_r) : X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ in der banalen Trennkategorie der topologischen Räume unter dem Trennfunktor der Kohomologie auf diejenige Trennung von $\mathrm{sgAb}^{\mathrm{ot}}$ abgebildet wird, die derjenigen Verschmelzung ihrer Kohomologien $\mathrm{H}^*Y_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathrm{H}^*Y_r \to \mathrm{H}^*X$ entspricht, die ein Tupel $(c_1, \ldots, c_r)$ von Kohomologieklassen auf das cup-Produkt $f_1^*c_1 \cup \ldots \cup f_r^*c_r$ ihrer jeweiligen Rückzüge in H^*X wirft.

18.4.2.8 (**Kronecker-Paarung**). Wir erinnern aus 18.1.4.17 im Kontext einer allgemeinen Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen und Multihom das Auswerten $D^\vee \curlyvee D \to \mathbb{I}$. Wenden wir es in der Schmelzkategorie Hot auf den Komplex $\mathrm{S}X$ der singulären Ketten eines topologischen Raums X an, so erhalten wir eine Zweiverschmelzung $\mathrm{S}^*X \curlyvee \mathrm{S}X \to \mathbb{Z}[0]$ in Hot. Diese hinwiederum liefert unter dem Schmelzfunktor $\mathcal{H}$ der Homologie bilineare Paarungen, die **Kronecker-Paarungen**

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathrm{H}^qX \times \mathrm{H}_qX \to \mathbb{Z}$$

Beispiel 18.4.2.9 (**Homologie als Modul über dem Kohomologiering**). Jeder topologische Raum X ist in banaler Weise ein Koabmonoid in $\curlywedge\mathrm{Top}$ und liefert unter dem Trennschmelzfunktor $\mathrm{S} : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}$ der singulären Ketten ein Koabmonoid $R := \mathrm{S}X \in \mathrm{Hot}$. Durch Dualisieren entsteht daraus wie besprochen ein Abmonoid $\mathrm{S}^*X \in \mathrm{Hot}$ und unser abstraktes cap-Produkt aus 18.3.2.1 spezialisiert zu einer Operation

$$\mathrm{S}^*X \curlyvee \mathrm{S}X \to \mathrm{S}X$$

in Hot. Diese Operation in Hot liefert unter dem Schmelzfunktor $\mathcal{H}$ eine Operation des Kohomologierings auf der Homologie und das ist das cap-Produkt. Die

Adjunktionsformel für das topologische cap-Produkt entsteht ebenso aus unserer abstrakten Adjunktionsformel 18.3.2.1 durch Anwenden von $\mathcal{H}$. Die Projektionsformel für das topologische cap-Produkt schließlich entsteht aus der abstrakten Projektionsformel 18.3.2.1, indem wir eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ als Morphismus der zugehörigen banalen Koabmonoide in $\curlywedge\mathrm{Top}$ auffassen, darauf den Trennschmelzfunktor S der singulären Ketten anwenden, die abstrakte Projektionsformel zu diesem Koabmonoidmorphismus in Hot hinschreiben und mit dem Schmelzfunktor $\mathcal{H}$ zur Homologie übergehen.

Übungen

Übung 18.4.2.10 (**Relative Kohomologie als Trennfunktor**). Der Trennschmelzfunktor $\mathrm{S} : \mathrm{Top}^{\Subset} \to \mathrm{Hot}$ der relativen singulären Ketten in Bezug auf eine offene Teilmenge aus 18.4.1.16 ist insbesondere verträglich mit universellen Trennungen. Halten wir den Trennfunktor des Dualisierens dahinter, so erhalten wir einen weiteren Trennfunktor, den Trennfunktor

$$\mathrm{S}^* : \mathrm{Top}^{\Subset} \to \mathrm{Hot}^{\mathrm{ot}}$$

der relativen singulären Koketten in Bezug auf eine offene Teilmenge. Halten wir zusätzlich die Homologie $\mathcal{H}^{\mathrm{opp}}$ dahinter, so erhalten wir wieder einen Trennfunktor, den Trennfunktor

$$\mathrm{H}^* : \mathrm{Top}^{\Subset} \to \mathrm{sgAb}^{\mathrm{ot}}$$

der Kohomologie relativ zu einer offenen Teilmenge. Per definitionem ist eine Trennung $(Z, W) \to (X, U) \curlywedge (Y, V)$ in $\mathrm{Top}^{\Subset}$ ein Paar von stetigen Abbildungen $f : Z \to X$ und $g : Z \to Y$ mit $(f, g)(W) \subset (X \times V) \cup (U \times Y)$. Unser Trennfunktor beinhaltet für $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ offene Teilmengen topologischer Räume eine ausgezeichnete Abbildung

$$\mathrm{H}^*(X, U) \otimes \mathrm{H}^*(Y, V) \to \mathrm{H}^*(X \times Y, (X \times V) \cup (U \times Y))$$

und für $U, V \Subset X$ offene Teilmengen ein- und desselben Raums durch Nachschalten des Rückzugs längs der Diagonale eine natürliche Abbildung $\mathrm{H}^*(X, U) \otimes \mathrm{H}^*(X, V) \to \mathrm{H}^*(X, U \cup V)$. Noch spezieller beinhaltet er für $U \Subset X$ eine Struktur auf $\mathrm{H}^*(X, U)$ als $\mathrm{H}^*(X)$-Modul. Auf jedem Paar $(X, U) \in \mathrm{Top}^{\Subset}$ haben wir zwar eine banale Komultiplikation und diese ist auch assoziativ und kommutativ, aber eine Koeins besitzt dieses Magma nur im Fall $U = \emptyset$.

Ergänzende Übung 18.4.2.11. In 18.4.1.16 hatten wir gesehen, daß sogar für ein beliebiges Raumpaar (X, A) die Verschmelzung auf den singulären Ketten Homotopieäquivalenzen $\mathrm{S}X^{\otimes r} \otimes \mathrm{S}(X, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(X^{\times(r+1)}, X^{\times r} \times A)$ induziert. Man zeige, daß die durch Dualisieren und Rückzug längs der Diagonale gegebene Abbildung $\mathrm{S}^*X \otimes \mathrm{S}^*(X, A) \to \mathrm{S}^*(X, A)$ unter Übergang zur Kohomologie für ein

beliebiges Raumpaar die relative Kohomologie $\mathrm{H}^*(X, A)$ zu einem Modul über dem Kohomologiering H^*X macht.

18.4.3 Cup und cap für singuläre Ketten*

18.4.3.1. Im folgenden geben wir noch explizite Konstruktionen für monotone Varianten unserer Alexander-Whitney-Abbildungen als Trennfunktoren und unserer Eilenberg-Zilber-Abbildungen als Schmelzfunktoren, und zwar jeweils auf Kettenniveau. Der Vorteil dieser Konstruktionen liegt darin, daß sie expliziten Rechnungen besser zugänglich sind.

18.4.3.2 (**Alexander-Whitney als monotoner Trennfunktor**). Wir können den Funktor der singulären Ketten zu einem monotonen Trennfunktor von monotonen Trennkategorien

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}_{\mathrm{AW}} : \curlywedge\mathrm{Top}^{\mathrm{mon}} \to (\mathrm{Ket}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{mon}}$$

erweitern, indem wir jedem Tupel von stetigen Abbildungen $X \to Y_i$ alias jeder Trennung $\phi : X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ diejenige Trennung

$$\mathrm{S}\phi : \mathrm{S}X \to \mathrm{S}Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathrm{S}Y_r$$

alias denjenigen Morphismus $\mathrm{S}X \to \mathrm{S}Y_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{S}Y_r$ von Komplexen abelscher Gruppen zuordnen, der einen singulären Simplex $\sigma : \Delta_n \to X$ auf den Tensor

$$\sum_{p_1+\ldots+p_r=n} f_1\sigma\kappa_1 \otimes \ldots \otimes f_r\sigma\kappa_r$$

wirft mit $\kappa_i = \kappa(i; p_1, \ldots, p_r) : \Delta_{p_i} \hookrightarrow \Delta_n$ anschaulich dem entsprechenden Mittelteil des Standardsimplex und formal der affinen Abbildung, die die Ecken mit den Indizes $0, 1, \ldots, p_i$ der Reihe nach auf die Ecken mit den Indizes $(p_1 + \ldots + p_{i-1} + 0), \ldots, (p_1 + \ldots + p_{i-1} + p_i)$ abbildet. Im Fall $r = 2$ kann man diese Trennung auch schreiben als $\sigma \mapsto \sum_{p+q=n} f_1\sigma\lambda_p \otimes f_2\sigma\rho_q$ mit λ_p der p-Vorderseite und ρ_q der q-Hinterseite des Standard-n-Simplex aus 17.5.8.4. Im Fall $X = Y_1 \times Y_2$ mit f_1, f_2 den Projektionen schließlich erhalten wir genau unsere Alexander-Whitney-Abbildung aus 17.5.8.5. Um zu prüfen, daß S_{AW} wie behauptet ein Trennfunktor ist, mag man mit dem Nachweis beginnen, daß unsere Vorschrift einen Trennfunktor in die monotonen Trennschmelzkategorie der $\mathbb{Z}$-graduierten abelschen Gruppen liefert. Danach kann man sich beim Prüfen der Verträglichkeit mit den Differentialen auf den Fall von Zweitrennungen zurückziehen, den wir bereits in 17.5.8.5 behandelt hatten. Natürlich ist $\mathrm{S}\phi$ im Fall einer Einstrennung schlicht das übliche Vordrücken von singulären Ketten und nach 17.5.8.5 wissen wir auch, daß es im Fall einer Zweitrennung der Gestalt $(\mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y) : X \times Y \to X \curlywedge Y$ das Homotopieinverse der Eilenberg-Zilber-Abbildung repräsentiert.

18.4.3.3 (**Cup und cap für singuläre Ketten**). Unter dem in 18.4.3.2 konstruierten monotonen Trennfunktor $\mathrm{S} : \curlywedge\mathrm{Top}^{\mathrm{mon}} \to (\mathrm{Ket}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{mon}}$ wird das banale Komonoid eines topologischen Raums X ein Komonoid $\mathrm{S}X$ in $(\mathrm{Ket}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{mon}}$ mit der Komultiplikation $\mathrm{S}X \to \mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}X$ gegeben auf Simplizes durch

$$\sigma \mapsto \sum_{p+q=|\sigma|} \sigma\lambda_p \otimes \sigma\rho_q$$

Dieses Komonoidobjekt in $(\mathrm{Ket}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{mon}}$ liefert unter dem Dualisieren aus 18.1.6.25 ein Monoidobjekt S^*X in $\mathrm{Ket}^{\mathrm{mon}}$ und mit dem abstrakten cap-Produkt 18.3.2.1 wird $\mathrm{S}X$ ein Linksobjekt über S^*X. Unter dem Übergang $\mathcal{H}$ zur Homologie liefern diese nach Konstruktion das cup- und das cap-Produkt, wie wir sie bereits konstruiert hatten. Explizit wird für Koketten $a \in \mathrm{S}^pX$, $b \in \mathrm{S}^qX$ der Wert von $a \cup b$ auf einem Simplex $\sigma : \Delta_{p+q} \to X$ gegeben durch die Formel

$$\langle a \cup b, \sigma\rangle = (-1)^{pq}\langle a, \sigma\lambda_p\rangle\langle b, \sigma\rho_q\rangle$$

und das cap-Produkt einer Kokette $b \in \mathrm{S}^qX$ mit einem Simplex $z = \sigma : \Delta_{p+q} \to X$ in den Notationen 17.5.8.4 durch

$$b \cap \sigma = (-1)^{pq}\langle b, \sigma\rho_q\rangle\sigma\lambda_p$$

und unsere abstrakte Adjunktionsformel spezialisiert zur für beliebige Koketten $a \in \mathrm{S}^pX$, $b \in \mathrm{S}^qX$ und Ketten $c \in \mathrm{S}_{p+q}X$ gültigen **Adjunktionsformel**

$$\langle a \cup b, c\rangle = \langle a, b \cap c\rangle$$

Beispiel 18.4.3.4. Für jeden topologischen Raum X macht das cup-Produkt 18.4.3.3 den Komplex der singulären Koketten mithin zu einem dg-Ring S^*X und unter dem cap-Produkt aus 18.4.3.3 wird der Komplex der singulären Ketten $\mathrm{S}X$ ein dg-Modul über diesem dg-Ring.

18.4.3.5 (**Varianten zum cap-Produkt**). Ist X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge, so induziert der zur Komultiplikation μ des Komonoidobjekts $\mathrm{S}X \in (\mathrm{Ket}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{mon}}$ gehörige Morphismus $\mu : \mathrm{S}X \to \mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}X$ offensichtlich einen Morphismus $\mathrm{S}A \to \mathrm{S}A \otimes \mathrm{S}X$ und so auf den Kokernen einen Morphismus

$$\mathrm{S}(X, A) \to \mathrm{S}(X, A) \otimes \mathrm{S}X$$

Damit wird $\mathrm{S}(X, A)$ ein $\mathrm{S}X$-Rechtskoobjekt in Ket und unsere allgemeinen Konstruktionen aus 18.3.2.12 liefern in Ket auf $\mathrm{S}(X, A)$ eine Struktur als $\mathrm{S}X$-Linksobjekt sowie eine ausgezeichnete Kettenabbildung

$$\mathrm{S}^*(X, A) \otimes \mathrm{S}(X, A) \to \mathrm{S}^*X$$

Explizit ist der Komplex der relativen Koketten $\mathrm{S}^*(X, A)$ als Kern des Ringhomomorphismus $\mathrm{S}^*X \to \mathrm{S}^*A$ ein unter dem Korandoperator stabiles graduiertes Ideal von S^*X und insbesondere ist $\mathrm{S}^*(X, A)$ selbst ein assoziatives Magma in dgAb mit Operationen von S^*X von beiden Seiten, die dazu noch kommutieren in einem hoffentlich offensichtlichen Sinn. Mithin ist $\mathrm{H}^*(X, A)$ eine graduierte assoziative $\mathbb{Z}$-Algebra und ein H^*X-Bimodul. Des weiteren ist $\mathrm{S}A \subset \mathrm{S}X$ ein dg-Untermodul für die Operation von S^*X und unter dem cap-Produkt wird folglich auch der Kokern $\mathrm{S}(X, A)$ ein S^*X-Modul. Schließlich annulliert das dg-Ideal $\mathrm{S}^*(X, A) \subset \mathrm{S}^*X$ den dg-Untermodul $\mathrm{S}A \subset \mathrm{S}X$ und induziert so die gesuchte Kettenabbildung.

18.4.3.6 (**Eilenberg-Zilber als monotoner Schmelzfunktor***). Wir können auch den Funktor der singulären Ketten zu einem monotonen Schmelzfunktor von monotonen Schmelzkategorien

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}_{\mathrm{EZ}} : \mathrm{kart}(\mathrm{Top})^{\mathrm{mon}} \to \mathrm{Ket}^{\mathrm{mon}}$$

erweitern, indem wir jeder stetigen Abbildung $f : X_1 \times \ldots \times X_r \to Y$ alias Verschmelzung $f : X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \to Y$ diejenige Verschmelzung

$$\mathrm{S}f : \mathrm{S}X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathrm{S}X_r \to \mathrm{S}Y$$

von Komplexen abelscher Gruppen zuordnen, die ein Tupel $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ singulärer Simplizes $\sigma_i : \Delta_{p(i)} \to X_i$ abbildet auf

$$\sum_{\omega} \mathrm{sgn}(\omega) f \circ (\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_r) \circ \omega$$

mit der Summe über alle injektiven und in jeder Komponente monoton wachsenden Abbildungen $\omega : \{0, \ldots, n\} \hookrightarrow \{0, \ldots, p(1)\} \times \ldots \times \{0, \ldots, p(r)\}$ für $n = p(1) + \ldots + p(r)$ beziehungsweise die davon induzierten affinen Abbildungen $\omega : \Delta_n \to \Delta_{p(1)} \times \ldots \times \Delta_{p(r)}$ und mit $\mathrm{sgn}(\omega)$ dem Vorzeichen, das die Verträglichkeit dieser letzteren Abbildung mit den natürlichen Orientierungen auf beiden Seiten ähnlich beschreibt, wie das in 17.5.8.6 im Fall von zwei Faktoren ausgeführt wurde. Um das zu prüfen, mag man damit beginnen nachzuweisen, daß unsere Vorschrift einen Schmelzfunktor in die monotone Schmelzkategorie der $\mathbb{Z}$-gradierten abelschen Gruppen liefert, und man sich so zum Prüfen der Verträglichkeit mit den Differentialen auf den Fall von Zweiverschmelzungen zurückziehen, den wir bereits behandelt haben. Wie wir bereits aus 17.5.8.1 wissen, induziert $\mathrm{S}f$ auf der Homologie die Abbildung, die durch das Kreuzprodukt gefolgt vom Vorschub mit f gegeben wird.

18.5 Danksagung

Die Bedeutung der Schmelzkategorien habe ich von Fritz Hörmann gelernt. Für Schmelzkategorien war auch Leinster [Lei04] hilfreich, bei der Diskussion von Starrheit Deligne [Del90]. Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich . . .

Kapitel 19

Garbenkohomologie

Inhalt

19.1 Čech-Kohomologie 3092

19.1.1 Erste Čech-Kohomologie und Überlagerungen . . . 3092

19.1.2 Erste Čech-Kohomologie und Torsoren 3097

19.1.3 Prägarben und höhere Čech-Kohomologie 3101

19.1.4 Varianten der Čech-Kohomologie 3104

19.1.5 Čech-Kohomologie der Grade Null und Eins 3108

19.2 Abelsche Kategorien und Garben 3111

19.2.1 Wozu Garbenkohomologie? 3111

19.2.2 Garben und ihre étalen Räume 3112

19.2.3 Kerne und Kokerne in Kategorien 3126

19.2.4 Präabelsche Kategorien 3128

19.2.5 Additive und abelsche Kategorien 3130

19.2.6 Abelsche Garben als abelsche Kategorie 3136

19.3 Abstrakte homologische Algebra und Garben 3139

19.3.1 Die lange exakte Kohomologiesequenz 3139

19.3.2 Derivierte Funktoren 3142

19.3.3 Hochschild-Kohomologie* 3152

19.3.4 Beispiele für injektive Moduln* 3155

19.3.5 Definition der Garbenkohomologie 3155

19.3.6 Derivieren mit azyklischen Objekten 3158

19.3.7 Gruppenkohomologie* 3164

19.3.8 Nichtabelsche Kohomologie* 3170
19.4 Berechnung von Garbenkohomologie 3175
19.4.1 Welke Garben sind globale-Schnitte-azyklisch . . . 3175
19.4.2 Garbenkohomologie der Zahlengeraden 3177
19.4.3 Zurückholen in der Garbenkohomologie 3180
19.4.4 Lokale Kohomologie und Ausschneidung 3187
19.4.5 Homotopieinvarianz der Garbenkohomologie 3191
19.4.6 Ein Spektralsequenzargument 3196
19.4.7 Garbenkohomologie durch offene Überdeckungen . 3200
19.4.8 Kompakte Kohomologie 3204
19.4.9 Funktorialitäten der kompakten Kohomologie . . . 3211
19.4.10 Kompakte Kohomologie von Mannigfaltigkeiten . . 3219
19.5 Vergleichssätze 3228
19.5.1 Singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie . . 3228
19.5.2 Erste Čech-Kohomologie als Garbenkohomologie . 3238
19.5.3 Parakompakte Räume 3241
19.5.4 Garben auf parakompakten Räumen 3243
19.5.5 Isomorphismus von de Rham 3249
19.5.6 Čech-Kohomologie auf parakompakten Räumen* . 3253
19.6 Faserungen und Basiswechsel 3257
19.6.1 Fasern eines Funktors 3257
19.6.2 Kartesische Morphismen und Faserfunktoren . . . 3258
19.6.3 Rückzug, Vorschub, Basiswechsel 3263
19.6.4 Garbenschreikofaserung 3271
19.6.5 Adjungierte für Schreivorschübe* 3280
19.6.6 Höhere Derivierte der Vorschübe 3283
19.7 Äquivariante Theorie 3290
19.7.1 Äquivariante Garben, VERSCHIEBEN? 3290
19.7.2 Äquivariante Kohomologie 3296
19.7.3 Milnor-Konstruktion 3301
19.7.4 Äquivariante de-Rham-Kohomologie (in Arbeit)* . 3305
19.8 Ergänzungen zu Faserungen und Basiswechsel* 3312
19.8.1 Gefaserter Basiswechsel 3312

19.8.2 Derivierter gefaserter Basiswechsel 3313
19.8.3 Gruppenkohomologie als Garbenkohomologie . . . 3317
19.8.4 Fakofaserungen 3319
19.8.5 Das sucht noch seinen Platz 3323
19.8.6 Kategorienfaserungen und -kofaserungen* 3324
19.9 Spektralsequenzen 3328
19.9.1 Allgemeiner Formalismus der Spektralsequenzen . 3328
19.9.2 Spektralsequenzen eines filtrierten Raums 3340
19.9.3 Grothendieck's Spektralsequenz 3341
19.10 Danksagung 3351

19.1 Čech-Kohomologie

19.1.1 Erste Čech-Kohomologie und Überlagerungen

19.1.1.1. Ich beginne mit einer Erinnerung an einige Begriffe aus der Überlagerungstheorie 16.3.1.1. Seien X ein topologischer Raum und $n \geq 1$ eine positive natürliche Zahl. Eine stetige Abbildung $p : \tilde{X} \to X$ heißt eine **n-blättrige Überlagerung**, wenn eine offene Überdeckung $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von X existiert derart, daß es für alle $U \in \mathcal{U}$ Homöomorphismen

$$i_U : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \{1, \ldots, n\}$$

gibt, die verträglich sind mit den offensichtlichen Projektionen beider Seiten auf die offene Menge U. Solch eine Familie von Homöomorphismen $(i_U)_{U \in \mathcal{U}}$ nennen wir eine **Trivialisierung** unserer Überlagerung über der offenen Überdeckung $\mathcal{U}$. Zwei Überlagerungen nennt man **isomorph**, wenn sie isomorph sind in der Kategorie der topologischen Räume über X, wenn es also in anderen Worten einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt, der mit den jeweiligen Projektionen auf X verträglich ist. So ein Homöomorphismus ist dasselbe wie eine bijektive Decktransformation im Sinne von 16.3.4.3.

19.1.1.2. Wir setzen $F := \{1, \ldots, n\}$ und bezeichnen mit $\mathcal{S}_n$ die Gruppe der Permutationen von F, versehen mit der diskreten Topologie. Jede Trivialisierung $(i_U)_{U \in \mathcal{U}}$ einer n-blättrigen Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ über einer offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X liefert für beliebige $U, V \in \mathcal{U}$ Abbildungen

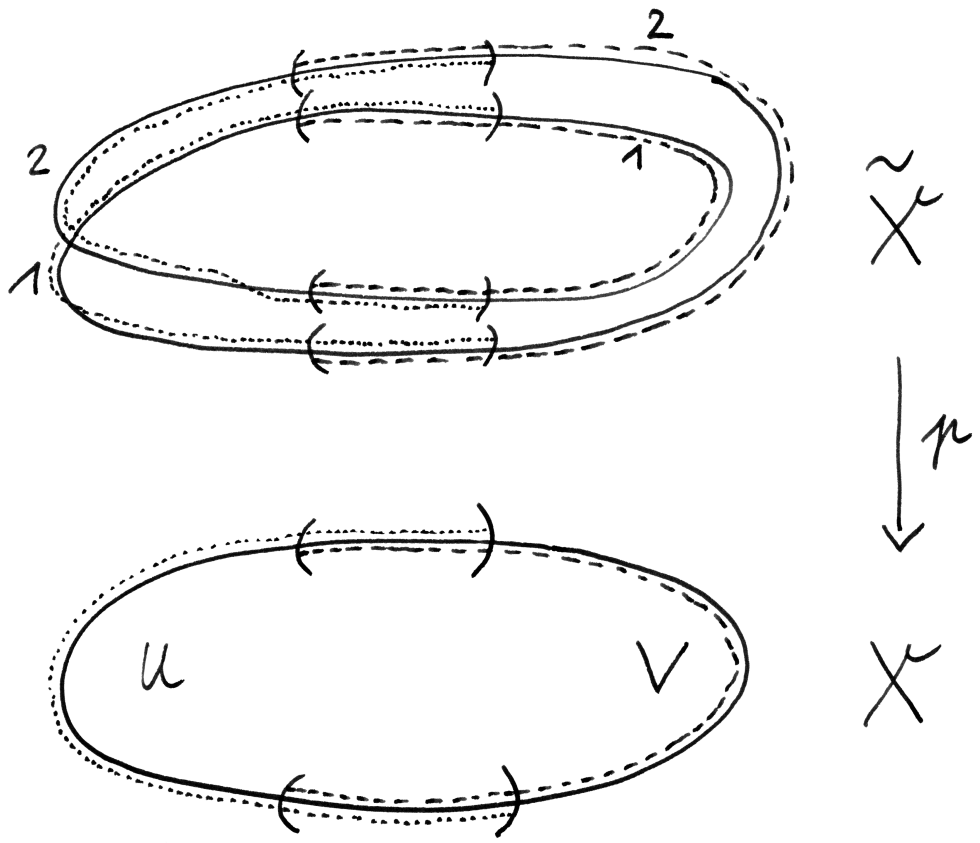
$$\begin{array}{rccc} \varphi_{UV} : & U \cap V & \to & \mathcal{S}_n \\ & x & \mapsto & \varphi^x_{UV} \end{array}$$

durch die Vorschrift $(i_U \circ i_V^{-1})(x, f) = (x, \varphi^x_{UV}(f))\ \forall x \in U \cap V, f \in F$. Wir nennen diese Abbildungen die **Verklebungsfunktionen** unserer Trivialisierung $(i_U)_{U \in \mathcal{U}}$. Nach 15.1.9.9 oder auch elementareren Überlegungen sind sie stetig. Gegeben $U, V, W \in \mathcal{U}$ haben wir offensichtlich

$$\varphi^x_{UV} \circ \varphi^x_{VW} = \varphi^x_{UW} \quad \forall x \in U \cap V \cap W$$

Definition 19.1.1.3. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eine offene Überdeckung von X und G eine topologische Gruppe, deren Verknüpfung wir mit $\top$ notieren. Die Menge $\check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ der **Čech-1-Kozykel** bezüglich $\mathcal{U}$ und G ist definiert als die Menge aller möglichen Wahlen von stetigen Abbildungen $\varphi_{UV} : U \cap V \to G$ für $(U, V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ derart, daß für beliebige $U, V, W \in \mathcal{U}$ auf dem Schnitt $U \cap V \cap W$ gilt

$$\varphi_{UV} \top \varphi_{VW} = \varphi_{UW}$$



Eine zweiblättrige Überlagerung der Kreislinie mit Trivialisierung in Bezug auf eine Überdeckung durch zwei offene Teilmengen. Der Schnitt dieser beiden Teilmengen hat zwei Zusammenhangskomponenten, und die Verklebungsfunktion ist konstant das neutrale Element aus $\mathcal{S}_2$ auf der im Bild „hinteren“ Komponente und konstant die Transposition aus $\mathcal{S}_2$ auf der „vorderen“ Komponente.

Das $\mathcal{C}$ steht dabei für „stetig“ alias „continu“. Trägt G die diskrete Topologie, so schreibt man meist kürzer $\check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U}; G)$ und redet von **G-wertigen Einskozykeln**.

Beispiel 19.1.1.4. Die Verklebungsfunktionen einer n-blättrigen Überlagerung bezügliche einer Trivialisierung über einer vorgegebenen offenen Überdeckung bilden einen $\mathcal{S}_n$-wertigen Einskozykel.

19.1.1.5. Sind $p : \tilde{X} \to X$ und $q : \hat{X} \to X$ zwei n-blättrige Überlagerungen eines topologischen Raums X mit je einer Trivialisierung über derselben Überdeckung $\mathcal{U}$ durch gewisse $i_U : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$ und $j_U : q^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$, so verstehen wir unter einem **trivialisierungsverträglichen Isomorphismus** zwischen unseren beiden Überlagerungen eine bijektive Decktransformation $d : \tilde{X} \xrightarrow{\sim} \hat{X}$ derart, daß gilt $j_U \circ d = i_U$ für alle $U \in \mathcal{U}$.

Lemma 19.1.1.6. *Gegeben ein topologischer Raum X und eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X liefert das Bilden der Verklebungsfunktionen eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} n\text{-blättrige Überlagerungen von } X \text{ mit} \\ \text{einer Trivialisierung } (i_U)_{U\in\mathcal{U}} \text{ über } \mathcal{U}\text{, bis auf} \\ \text{trivialisierungsverträglichen Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{S}_n)$$

Beweis. Um die Bijektivität zu zeigen, konstruieren wir eine Umkehrabbildung. Gegeben ein Čech-Einskozykel $(\varphi_{UV})_{U,V\in\mathcal{U}}$ bilden wir für jedes $U \in \mathcal{U}$ die einpunktige Menge $\{U\}$ und betrachten auf dem Raum

$$\bigsqcup_{U\in\mathcal{U}} \{U\} \times U \times F$$

die Äquivalenzrelation $\sim$, die erzeugt wird von

$$(V, x, f) \sim (U, x, \varphi^x_{UV}(f)) \quad \forall\, U, V \in \mathcal{U},\ x \in U \cap V,\ f \in F.$$

Dann bilden wir den Raum $\tilde{X}$ der Äquivalenzklassen mit der Quotiententopologie, der Projektion auf die mittlere Koordinate $\tilde{X} \to X$ und der offensichtlichen Trivialisierung über $\mathcal{U}$. Es bleibe dem Leser überlassen zu zeigen, daß diese Konstruktion eine Umkehrabbildung zur durch das Bilden der Verklebungsfunktionen gegebenen Abbildung aus unserem Lemma liefert. □

19.1.1.7. Nun nehmen wir an, wir hätten für ein- und dieselbe Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ zwei Trivialisierungen über derselben offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ gegeben durch gewisse $i_U, \tilde{\imath}_U : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$. Dann erklären wir Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} \psi_U : & U & \to & \mathcal{S}_n \\ & x & \mapsto & \psi^x_U \end{array}$$

durch die Gleichungen $(\tilde{\imath}_U \circ i_U^{-1})(x,f) = (x, \psi_U^x(f))\ \forall x \in U, f \in F$ und nennen diese ψ_U die **Übergangsfunktionen** zwischen unseren beiden Trivialisierungen (i_U) und $(\tilde{\imath}_U)$. Auch unsere Übergangsfunktionen sind offensichtlich stetig. Die Verklebungsfunktionen $\tilde{\varphi}_{UV}$ zu unserer zweiten Trivialisierung $(\tilde{\imath}_U)$ lassen sich durch die Verklebungsfunktionen φ_{UV} zu unserer ersten Trivialisierung (i_U) und die Übergangsfunktionen zwischen den beiden Trivialisierungen ausdrücken vermittels der Formel

$$\tilde{\varphi}_{UV}^x = \psi_U^x \circ \varphi_{UV}^x \circ (\psi_V^x)^{-1} \quad \forall x \in U \cap V$$

Definition 19.1.1.8. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X und G eine topologische Gruppe. Zwei Čech-Einskozykel $\varphi, \tilde{\varphi} \in \check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ heißen **kohomolog** und wir schreiben $\varphi \sim \tilde{\varphi}$, wenn es eine Familie $\psi = (\psi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ von stetigen Funktionen $\psi_U : U \to G$ gibt derart, daß für beliebige $U, V \in \mathcal{U}$ auf dem Schnitt $U \cap V$ gilt

$$\tilde{\varphi}_{UV} = \psi_U \top \varphi_{UV} \top \psi_V^{-1}$$

Diese Relation „kohomolog“ ist eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen notieren wir

$$\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G) := \check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)/\sim$$

und nennen sie die **erste Čech-Kohomologie für die Überdeckung $\mathcal{U}$ zu** G. Trägt G die diskrete Topologie, so schreibt man meist kürzer $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}; G)$.

19.1.1.9. Unser $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ ist im allgemeinen keine Gruppe, sondern nur eine Menge mit einem ausgezeichneten Punkt, nämlich der Klasse des trivialen Einskozykels. Ist jedoch die Gruppe G kommutativ, so sind $\check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ und $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ auch kommutative Gruppen in natürlicher Weise.

Lemma 19.1.1.10. *Gegeben ein topologischer Raum X und eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X liefert das Bilden der Verklebungsfunktionen eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} n\text{-blättrige über } \mathcal{U} \text{ trivialisierbare} \\ \text{Überlagerungen von } X, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{S}_n)$$

Beweis. Dem Leser überlassen. □

19.1.1.11 (**Übergang zu kleinerer Überdeckung**). Ist $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X und $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ eine weitere Überdeckung durch weniger offene Mengen, so haben wir eine offensichtliche Abbildung $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G) \to \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{V}; \mathcal{C}_G)$, die den ausgezeichneten Punkt in den ausgezeichneten Punkt überführt.

Ergänzung 19.1.1.12. Ist $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X und $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ eine weitere Überdeckung durch weniger offene Mengen und ist zusätzlich jede Menge aus $\mathcal{U}$ bereits in einer Menge aus $\mathcal{V}$ enthalten, so ist unsere Abbildung eine Bijektion

$$\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};\mathcal{C}_G) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{V};\mathcal{C}_G)$$

Das ist anschaulich klar in unserem Spezialfall $G = \mathcal{S}_n$. Formal kann man eine Umkehrabbildung konstruieren, indem man man eine Abbildung $\tau : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ wählt mit $W \subset \tau(W)\ \forall W$ und jedem Kozykel (φ_{UV}) rechts den Kozykel (ϕ_{UV}) links mit $\phi_{UV} := \varphi_{\tau(U)\tau(V)}|_{U\cap V}$ zuordnet. Das Argument vereinfacht sich zusätzlich, wenn man annimmt, daß τ ein Schnitt der Einbettung ist alias auf $\mathcal{V}$ die Identität induziert. Wir beweisen in 19.1.4.1 eine Variante.

Definition 19.1.1.13. Wir nennen eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ eines topologischen Raums X **gesättigt** oder auch ein **überdeckendes Sieb**, wenn sie mit einer Menge auch alle ihre offenen Teilmengen enthält, wenn also aus $U \in \mathcal{U}$ und $V \Subset U$ folgt $V \in \mathcal{U}$.

Definition 19.1.1.14. Seien X ein topologischer Raum und G eine topologische Gruppe. Die **erste Čech-Kohomologie von X zu G** ist die bepunktete Menge

$$\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}_G) := \operatorname{colf} \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};\mathcal{C}_G)$$

Der Begriff eines Kolimes wird in 17.7.1.2 besprochen. Er ist hier zu verstehen als Kolimes über alle gesättigten offenen Überdeckungen unseres Raums und in der Kategorie der bepunkteten Mengen. Im Fall einer diskreten Gruppe G verwendet man meist die Notation $\check{\mathrm{H}}^1(X;G)$.

Satz 19.1.1.15 (Erste Čech-Kohomologie und Überlagerungen). *Für jeden topologischen Raum X liefert das Bilden von Verklebungsfunktionen für Trivialisierungen bezüglich offener Überdeckungen eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} n\text{-blättrige Überlagerungen von } X, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{S}_n)$$

Beweis. Das ergibt sich aus den vorhergehenden Definitionen und Lemmata. Die Details bleiben dem Leser überlassen. □

Übungen

Übung 19.1.1.16. Man leite aus der in diesem Abschnitt entwickelten Theorie eine Klassifikation der n-blättrigen Überlagerungen der Kreislinie her. Man verwende die Erkenntnis, daß jede Überlagerung eines Intervalls trivial ist, und gehe von 19.1.1.10 aus.

19.1.2 Erste Čech-Kohomologie und Torsoren

Definition 19.1.2.1. Sei G eine topologische Gruppe. Ein G-Raum Y heißt **topologisch frei**, wenn jeder Punkt $y \in Y$ eine offene G-stabile Umgebung U besitzt, die isomorph ist zu einem G-Raum der Gestalt $W \times G$ für einen weiteren topologischen Raum W.

Beispiel 19.1.2.2. Die Operation von $\mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie auf $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie ist stetig und frei, aber nicht topologisch frei.

Definition 19.1.2.3. Seien G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Ein G-**Torsor** auf X, auch genannt ein G-**Hauptfaserbündel**, englisch **principal bundle**, französisch **fibré principal**, ist ein Paar

$$(E, p)$$

bestehend aus einem topologisch freien G-Rechtsraum E mitsamt einer stetigen Abbildung $p : E \to X$, die einen Homöomorphismus $E/G \xrightarrow{\sim} X$ induziert. Wir nennen E den **Totalraum** und p die **Projektion** unseres Torsors. Ein **Morphismus von** G**-Torsoren auf** X ist eine stetige G-äquivariante Abbildung über X.

Beispiel 19.1.2.4. Ist G diskret, so ist ein G-Torsor auf einem topologischen Raum dasselbe wie eine Überlagerung unseres Raums mitsamt einer Rechtsoperation von G durch Decktransformationen derart, daß die Operation auf jeder Faser frei und transitiv ist.

Vorschau 19.1.2.5. Ist G eine Lie-Gruppe und X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und ersetzt man in der obigen Definition das Wort „stetig“ durch „glatt“ und den Begriff „topologischer Raum“ durch „differenzierbare Mannigfaltigkeit“, so erhält man die Definition eines **glatten** G**-Hauptfaserbündels auf** X.

19.1.2.6 (**Erste Čech-Kohomologie und Torsoren**). Sei X ein topologischer Raum, G eine topologische Gruppe und $p : E \to X$ ein G-Torsor auf X. Wählen wir für unseren Torsor eine trivialisierende gesättigte offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X und über $\mathcal{U}$ eine Trivialisierung $(i_U)_{U \in \mathcal{U}}$ von E durch die Wahl gewisser $i_U \in \mathrm{Top}^G_U(p^{-1}(U), U \times G)$ und erklären für $U, V \in \mathcal{U}$ die Verklebungsfunktionen $\varphi_{UV} \in \mathrm{Top}(U \cap V, G)$ durch die Vorschrift $(i_U \circ i_V^{-1})(x, g) = (x, \varphi_{UV}(x)g)$, so bilden die φ_{UV} einen Čech-Kozykel, dessen Kohomologieklasse nur von E abhängt, und wir erhalten so eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} G\text{-Torsoren auf } X, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{C}_G)$$

Der Beweis läuft vollständig analog zum Beweis von 19.1.1.15 und bleibt dem Leser überlassen. Gegeben ein Homomorphismus topologischer Gruppen $H \to G$

kann man weiter jedem H-Hauptfaserbündel $E \to X$ das G-Hauptfaserbündel $E \times_{/H} G \to X$ zuordnen. Diese Zuordnung ist dann unter den eben erklärten Bijektionen mit der offensichtlichen Abbildung $\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}_H) \to \check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}_G)$ verträglich.

19.1.2.7 (**Erste Čech-Kohomologie als singuläre Kohomologie**). Gegeben ein zusammenhängender lokal zusammenziehbarer topologischer Raum X und eine diskrete abelsche Gruppe M können wir bereits hier einen Isomorphismus zwischen der ersten singulären Kohomologie und der ersten Čech-Kohomologie erhalten als die Komposition der Isomorphismen beziehungsweise Inversen der Isomorphismen des folgenden Diagramms, dessen Pfeile wir im Anschluß diskutieren:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^1(X;M)_{\mathrm{sing}} & & \check{\mathrm{H}}^1(X;M) \\
\uparrow\wr & & \uparrow\wr \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{H}_1(X),M) & & \{M\text{-Torsoren auf } X\}/\cong \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
\mathrm{Grp}(\pi_1(X,x),M) & \xrightarrow{\sim} & \left\{\begin{array}{c}\pi_1(X,x)\text{-Mengen mit einer freien} \\ \text{transitiven Rechtsoperation von } M\end{array}\right\}/\cong
\end{array}$$

Hier kommt der vertikale Pfeil oben links vom universellen Koeffiziententheorem 17.6.7.2 her, der vertikale Pfeil unten links vom Satz von Hurwitz 17.1.5.2 und der vertikale Pfeil oben rechts von der vorhergehenden Bemerkung 19.1.2.6. Für den vertikalen Pfeil unten rechts erinnern wir, daß nach 16.4.5.14 unter unseren Annahmen der Faserfunktor zu einem beliebigen Punkt $x \in X$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$\{\text{Überlagerungen von } X\} \xrightarrow{\approx} \{\pi_1(X,x)\text{-Mengen}\}$$

liefert. Sie induziert auch eine Äquivalenz zwischen den Kategorien aller „Objekte mit Rechtsoperation einer Gruppe M“ in unseren beiden Kategorien, und diese hinwiederum schränkt ein zu einer Äquivalenz von Kategorien

$$\{M\text{-Torsoren auf } X\} \xrightarrow{\approx} \left\{\begin{array}{c}\pi_1(X,x)\text{-Mengen mit einer freien} \\ \text{transitiven Rechtsoperation von } M\end{array}\right\}$$

Das liefert die Bijektion auf Isomorphieklassen in der unteren rechten Vertikale. Um schließlich die untere Horizontale zu erklären, beachten wir die Bijektion $M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{-M}(M)$ vermittels $m \mapsto (m\cdot)$, die Endomorphismen der M-Rechtsmenge M sind also genau die Multiplikationen mit Elementen von M von links. Das gilt sogar für jedes Monoid M, die Umkehrabbildung zu $m \mapsto (m\cdot)$

ist $\varphi \mapsto \varphi(e)$. Die Operationen einer Gruppe P auf der M-Rechtsmenge M entsprechen also eineindeutig den Monoidhomomorphismen $\phi : P \to M$ und zwei solche Monoidhomomorphismen ϕ, ψ liefern isomorphe M-Rechtsmengen mit P-Operation genau dann, wenn es eine Einheit $m \in M^\times$ gibt mit $\phi = (\operatorname{int} m) \circ \psi$. Ist M kommutativ, so bedeutet das bereits $\phi = \psi$ und diese Erkenntnis liefert die Bijektion in der unteren Horizontale unseres Diagramms. Wir werden später noch sehr viel stärkere Resultate über den Zusammenhang von singulärer Kohomologie und Garbenkohomologie kennenlernen.

Definition 19.1.2.8. Sei $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ oder der Schiefkörper der Quaternionen $\mathbb{H}$ und sei X ein topologischer Raum.

1. Ein „Möchtegern-Bündel von $\mathbb{K}$-Vektorräumen“ oder kurz ein „Möchtegern-$\mathbb{K}$-Bündel“ $E = (E, p) = (p : E \to X)$ auf X besteht aus einem topologischen Raum $p : E \to X$ über X, dem **Totalraum** E mit der **Projektion** p, sowie einer $\mathbb{K}$-Vektorraumstruktur auf jeder Faser $E_x = p^{-1}(x)$.

2. Ein **Morphismus** von einem Möchtegern-$\mathbb{K}$-Bündel E in ein Möchtegern-$\mathbb{K}$-Bündel F ist eine stetige Abbildung $h : E \to F$ über X derart, daß für alle $x \in X$ die auf den Fasern induzierte Abbildung $h : E_x \to F_x$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung ist.

3. Der Raum $X \times \mathbb{K}^n$ mit seiner offensichtlichen Struktur als Möchtegern-$\mathbb{K}$-Bündel heißt das **konstante n-dimensionale $\mathbb{K}$-Bündel auf** X.

4. Ein **n-dimensionales topologisches $\mathbb{K}$-Bündel auf** X ist ein n-dimensionales Möchtegern-$\mathbb{K}$-Bündel (E, p), bei dem jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt derart, daß das auf der Umgebung U induzierte Möchtegern-$\mathbb{K}$-Bündel $(p : p^{-1}(U) \to U)$ auf U isomorph ist zum konstanten n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Bündel $U \times \mathbb{K}^n$ auf U.

19.1.2.9. Die Automorphismengruppe des konstanten $\mathbb{K}$-Bündels $X \times \mathbb{K}^n$ ist kanonisch isomorph zur Gruppe der stetigen Abbildungen von X nach $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$. Genauer erhalten wir eine Bijektion $\mathrm{Top}(X, \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X \times \mathbb{K}^n)$ vermittels $f \mapsto \tilde{f}$ mit $\tilde{f}(x, v) = (x, f(x)v)$. Hier fassen wir $v \in \mathbb{K}^n$ als Spaltenvektor auf und verstehen im Fall der Quaternionen unter einem $\mathbb{H}$-Vektorraum einen $\mathbb{H}$-Rechtsmodul.

19.1.2.10. Ganz genauso wie in 19.1.1.15 erhalten wir auch Bijektionen

$$\{n\text{-dimensionale } \mathbb{K}\text{-Bündel auf } X\} /_{\cong} \quad \xrightarrow{\sim} \quad \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{C}_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})})$$

Genauer betrachten wir lokale Trivialisierungen unseres $\mathbb{K}$-Bündels und die Klasse des durch die zugehörigen Übergangsfunktionen gegebenen Čech-1-Kozykels.

Wir können auch direkt jedem $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$-Torsor E das n-dimensionale $\mathbb{K}$-Bündel $E \times_{/\,\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})} \mathbb{K}^n$ zuordnen und erhalten dann ein kommutatives Dreieck von Bijektionen, an dessen drei Ecken Isomorphieklassen von Vektorraumbündeln, Isomorphieklassen von Torsoren und $\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})})$ stehen.

Vorschau 19.1.2.11. Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und ersetzt man in der obigen Definition überall das Wort „stetig“ durch „glatt“ und den Begriff „topologischer Raum“ durch „differenzierbare Mannigfaltigkeit“, so erhält man die Definition eines **n-dimensionalen differenzierbaren $\mathbb{K}$-Bündels auf** X, wie sie in 22.3.4.3 bereits im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gegeben wurde. Das Tangentialbündel an eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n ist etwa ein n-dimensionales differenzierbares und damit erst recht ein n-dimensionales topologisches $\mathbb{R}$-Bündel. Unter anderem um die Klassifikation differenzierbarer oder auch „analytischer“ Bündel in derselben Weise behandeln zu können wie die Klassifikation topologischer Bündel, führen wir im folgenden Abschnitt allgemeiner Prägarben und ihre Čech-Kohomologie ein.

Übungen

Übung 19.1.2.12. Sei X ein topologischer Raum. Wir erhalten eine Bijektion

$$\{\mathcal{S}_n\text{-Torsoren auf } X\}/_{\cong} \quad \tilde{\to} \quad \{n\text{-blättrige Überlagerungen von } X\}/_{\cong}$$

durch $E \mapsto E \times_{/\mathcal{S}_n} \{1,\ldots,n\}$ beziehungsweise in der umgekehrten Richtung, indem wir einer n-blättrigen Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ die Menge $E := \bigsqcup_x E_x$ zuordnen, für $E_x := \mathrm{Ens}^{\times}(\{1,\ldots,n\}, p^{-1}(x))$ die Menge aller Bijektionen zwischen $\{1,\ldots,n\}$ und der Faser unserer Überlagerung bei x, mit der offensichtlichen $\mathcal{S}_n$-Operation und Projektion auf X und einer geeigneten Topologie. Hierbei ist $\times_{/\mathcal{S}_n}$ das balancierte Produkt im Sinne von 16.4.8.18.

Übung 19.1.2.13. Jeder Morphismus von Torsoren ist ein Isomorphismus. Die Automorphismen des G-Torsors $X \times G$ über X können identifiziert werden mit den stetigen Abbildungen $X \to G$. Genauer erhalten wir eine Bijektion

$$\mathrm{Top}(X,G) \tilde{\to} \mathrm{Top}_X^G(X \times G)$$

durch die Vorschrift $f \mapsto \tilde{f}$ mit $\tilde{f}$ gegeben durch $\tilde{f}(x,g) = (x, f(x)g)$.

Übung 19.1.2.14. Man zeige, daß der in 19.1.2.7 konstruierte Isomorphismus zwischen der ersten singulären Kohomologie und der ersten Čech-Kohomologie nicht von der Wahl des Basispunkts $x \in X$ abhängt.

Übung 19.1.2.15. Ist der topologische Raum X einfach zusammenhängend, so besteht $\check{\mathrm{H}}^1(X;G)$ für jede diskrete Gruppe G nur aus einem Punkt.

Übung 19.1.2.16. G eine topologische Gruppe und E ein topologisch freier G-Raum und X ein beliebiger G-Raum, so ist $X \times E$ mit der diagonalen G-Operation als G-Raum isomorph zu $X \times E$ mit der G-Operation nur auf dem zweiten Faktor und ist damit auch topologisch frei.

Übung 19.1.2.17. Ist F ein topologischer Raum, auf dem eine topologische Gruppe G wirkt, und ist E ein G-Torsor auf einem Raum X, so ist $E \times_{/G} F$ ein Faserbündel über X mit Faser F.

19.1.2.18. In manchen Fällen liefert die Konstruktion aus 19.1.2.17 sogar eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen von G-Torsoren und Isomorphieklassen von Faserbündeln mit Faser F, so zum Beispiel etwa im Fall $F = \{1, \ldots, n\}$ und $G = \mathcal{S}_n$, den wir bereits in 19.1.2.12 diskutiert hatten.

Übung 19.1.2.19. Sei G eine topologische Gruppe. Ordnen wir jedem Element $g \in G$ den G-Torsor auf S^1 zu, der entsteht aus $[0,1] \times G$ durch die Identifikation $(0,h) \sim (1,gh)$, so erhalten wir eine Bijektion

$$\{\text{Konjugationsklassen in } \pi_0(G)\} \xrightarrow{\sim} \{G\text{-Torsoren auf } S^1\}/_{\cong}$$

zwischen der Menge der Konjugationsklassen in der Gruppe der Wegzusammenhangskomponenten von G und der Menge der Isomorphieklassen von G-Torsoren auf der Kreislinie.

19.1.3 Prägarben und höhere Čech-Kohomologie

19.1.3.1. Für einen topologischen Raum bilden wir die Kategorie seiner offenen Teilmengen mit allen offenen Teilmengen als Objekten und den Inklusionen als Morphismen. Insbesondere ist in dieser Kategorie also jede Morphismenmenge entweder einelementig oder leer.

Definition 19.1.3.2. Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{W}$ eine Kategorie. Eine **Prägarbe**, englisch **presheaf**, französisch **prefaisceau**, auf X mit Werten in $\mathcal{W}$ ist ein Funktor

$$\{\text{offene Teilmengen von } X\}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{W}$$

Ein **Morphismus von Prägarben** ist eine natürliche Transformation von Funktoren. Eine Prägarbe mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen heißt eine **abelsche Prägarbe**. Die Kategorie der abelschen Prägarben auf einem Raum X notieren wir $\mathrm{pAb}_{/X}$. Vereinbaren wir die Notation $\mathrm{Off}(X)$ für die Kategorie der offenen Teilmengen von X, so ist die Kategorie der $\mathcal{W}$-wertigen Prägarben auf X die Funktorkategorie

$$\mathrm{Cat}(\mathrm{Off}(X)^{\mathrm{opp}}, \mathcal{W})$$

19.1.3.3 (**Diskussion der Terminologie**). Manche Autoren betrachten nur Prägarben von Gruppen oder sogar nur von abelschen Gruppen und fordern dann von jeder Prägarbe zusätzlich, daß der entsprechende Funktor der leeren Menge eine einelementige Gruppe zuordnen soll. Derartige Zusatzannahmen scheinen mir im Lichte der obigen allgemeinen Definition unnatürlich.

19.1.3.4. Ausgeschrieben ist eine Prägarbe $\mathcal{F}$ von Gruppen auf einem Raum X also eine Zuordnung, die jeder offenen Menge $U \Subset X$ eine Gruppe $\mathcal{F}(U)$ zuordnet und jeder Inklusion $V \subset U$ von offenen Teilmengen von X einen Homomorphismus von Gruppen $\rho_U^V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, die sogenannte **Einschränkungsabbildung**, in Formeln

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} U & \mapsto & \mathcal{F}(U) \\ \cup & \mapsto & \downarrow \rho_U^V \\ V & \mapsto & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

Von diesen Daten muß man dann noch fordern, daß gilt $\rho_U^U = \mathrm{id}$ und $\rho_V^W \circ \rho_U^V = \rho_U^W$ falls $W \subset V \subset U$. Ein Element $s \in \mathcal{F}(U)$ heißt ein **Schnitt von $\mathcal{F}$ über U**. Statt $\rho_U^V(s)$ schreiben wir meist $s|_V$ oder auch $s|V$. Ein Morphismus von Prägarben $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist ausgeschrieben eine Familie von Gruppenhomomorphismen $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ derart, daß gilt $\rho_U^V \circ f_U = f_V \circ \rho_U^V$ für alle $V \subset U$, wo wir mit ρ_U^V links die Restriktionsabbildungen der Prägarbe $\mathcal{G}$ und rechts die Restriktionsabbildungen der Prägarbe $\mathcal{F}$ meinen. Als Diagramm geschrieben soll also kommutieren

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \to & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Beispiel 19.1.3.5. Sei X ein topologischer Raum. Die Zuordnung, die jeder offenen Menge $U \Subset X$ den komplexen Vektorraum $\mathcal{C}(U)$ aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf U zuordnet und jeder Inklusion $V \Subset U$ die Restriktion $\mathcal{C}(U) \to \mathcal{C}(V)$, ist eine Prägarbe $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathbb{C}} = \mathcal{C}_{\mathbb{C},X}$ von $\mathbb{C}$-Vektorräumen auf X, die **Prägarbe der stetigen komplexwertigen Funktionen**.

Beispiel 19.1.3.6. Ist allgemeiner X ein topologischer Raum und G eine topologische Gruppe, so bilden die stetigen Abbildungen von offenen Teilmengen von X nach G eine Prägarbe $\mathcal{C}_G = \mathcal{C}_{G,X}$ von Gruppen auf X, die **Prägarbe der stetigen G-wertigen Funktionen**. Wählt man auf G die diskrete Topologie, so notiert man diese Prägarbe oft G_X und spricht von der **Prägarbe der lokal konstanten G-wertigen Funktionen**. Für jeden topologischen Raum X haben wir zum Beispiel Homomorphismen von abelschen Prägarben $\mathbb{Z}_X \to \mathbb{R}_X \to \mathcal{C}_{\mathbb{R},X}$.

Beispiel 19.1.3.7. Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so bilden die komplexwertigen $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen eine Prägarbe $\mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}} = \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C},X}$ von komplexen Vektorräumen auf X. Wir haben dann einen natürlichen Homomorphismus $\mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}$ von Prägarben von $\mathbb{C}$-Vektorräumen auf X.

Beispiel 19.1.3.8. Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und G eine Lie-Gruppe, so bilden die differenzierbaren Abbildungen von offenen Teilmengen von X nach G eine Prägarbe $\mathcal{C}_G^\infty = \mathcal{C}_{G,X}^\infty$ von Gruppen auf X, die **Prägarbe der differenzierbaren G-wertigen Funktionen**.

Beispiel 19.1.3.9. Ist $p : E \to X$ eine stetige Abbildung, so erhalten wir eine Prägarbe von Mengen auf X, in dem wir jedem $U \Subset X$ die Menge aller stetigen Abbildungen $s : U \to E$ zuordnen mit $p(s(x)) = x \ \forall x \in U$. Sie heißt die **Prägarbe der Schnitte von** p.

Beispiel 19.1.3.10. Gegeben ein topologischer Raum X, ein Punkt $x \in X$ und eine Menge A definieren wir eine Prägarbe von Mengen $A_{(x)}$ auf X durch die Vorschrift $A_{(x)}(U) = A$ falls $x \in U$ und $A_{(x)}(U)$ einpunktig sonst. Diese Prägarbe heißt der **Wolkenkratzer bei x mit Faser** A. Für eine abelsche Gruppe A ist unser Wolkenkratzer in natürlicher Weise eine abelsche Prägarbe.

Definition 19.1.3.11 (Čech-Kohomologie einer abelschen Prägarbe). Sei $\mathcal{F}$ eine abelsche Prägarbe auf einem topologischen Raum X. Gegeben ein System offener Teilmengen $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von X definieren wir den Komplex

$$\ldots \to \check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \xrightarrow{d} \check{\mathrm{C}}^{q+1}(\mathcal{U};\mathcal{F}) \to \ldots$$

der **Čech-Koketten für $\mathcal{U}$ mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$** als den Komplex von abelschen Gruppen

$$\check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) := \prod_{(U_0,\ldots,U_q)\in\mathcal{U}^{q+1}} \mathcal{F}(U_0 \cap \ldots \cap U_q)$$

Hier setzen wir $\check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) = 0$ für $q < 0$ und erklären die Randoperatoren d wie folgt: Eine Čech-Kokette $\psi \in \check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F})$ ist ja ein Tupel bestehend aus Elementen $\psi(U_0,\ldots,U_q) \in \mathcal{F}(U_0 \cap \ldots \cap U_q)$. Wir setzen dann

$$(d\psi)(U_0,\ldots,U_{q+1}) := \sum_{0\le i\le q+1} (-1)^i \psi(U_0,\ldots,\widehat{U_i},\ldots,U_{q+1})|(U_0 \cap \ldots \cap U_{q+1})$$

Die „Tarnkappe“ über U_i soll dabei wie üblich bedeuten, daß U_i aus dem Schnitt wegzulassen ist. Man prüft leicht die Formel $dd = 0$, unsere Konstruktion liefert also wirklich einen Komplex. Seine Kohomologie notieren wir

$$\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) := \mathcal{H}^q\check{\mathrm{C}}^*(\mathcal{U};\mathcal{F})$$

Ist $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X, so nennen wir sie die **Čech-Kohomologie von X bezüglich $\mathcal{U}$ mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$**. Die **q-te Čech-Kohomologie** $\check{\mathrm{H}}^q(X;\mathcal{F})$ **von X mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$** schließlich ist definiert als der Kolimes über alle

gesättigten offenen Überdeckungen $\mathcal{U}$ von X der Čech-Kohomologien für diese Überdeckungen, in Formeln

$$\check{\mathrm{H}}^q(X;\mathcal{F}) := \operatorname{colf} \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F})$$

Um den Kolimes zu bilden beachten wir wie im Fall der ersten Čech-Kohomologie, daß für $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ die Einschränkung natürliche Abbildungen von Komplexen und damit natürliche Abbildungen $\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \to \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{V};\mathcal{F})$ induziert.

Lemma 19.1.3.12 (Čech-Kohomologie von Wolkenkratzern). *Gegeben ein topologischer Raum X und eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X gilt für den Wolkenkratzer $A_{(x)}$ an einem Punkt $x \in X$ mit einer abelschen Gruppe A als Faser*

$$\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U};A_{(x)}) = 0 \quad \textit{für } q > 0.$$

Beweis. Wir können den fraglichen Čech-Komplex, indem wir zur Menge $E = \{U \in \mathcal{U} \mid x \in U\}$ den in 17.1.1.17 betrachteten Komplex mit $\mathbb{Z}E^{q+1}$ im Grad q bilden, zum Komplex der $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}E^{q+1}, A)$ übergehen und schließlich den Anteil mit $q = -1$ abschneiden. Da unser Komplex $\mathbb{Z}E^{q+1}$ nach dem dortigen Beweis sogar nullhomotop ist, muß auch der Komplex $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}E^{q+1}, A)$ nullhomotop und insbesondere exakt sein und durch das Abschneiden kriegt er A als nullte Kohomologie und bleibt sonst exakt. Wir können aber auch den Beweis von 17.1.1.17 wiederholen: Wir wählen dann $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$ und definieren für $q \geq 0$ die Abbildung $\delta = \delta_U : \check{\mathrm{C}}^{q+1}(\mathcal{U};A_{(x)}) \to \check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U};A_{(x)})$ durch die Vorschrift

$$(\delta\psi)(U_0,\ldots,U_q) = \psi(U,U_0,\ldots,U_q)$$

Eine kurze Rechnung zeigt $d\delta + \delta d = \mathrm{id}$ auf $\check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U};A_{(x)})$ für $q > 0$, folglich ist für $q > 0$ jeder q-Zykel ein Rand. □

19.1.4 Varianten der Čech-Kohomologie

Proposition 19.1.4.1. *Seien $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ offene Überdeckungen eines topologischen Raums und sei $\mathcal{F}$ eine abelsche Prägarbe auf besagtem Raum. Liegt jede Menge aus $\mathcal{U}$ in einer Menge aus $\mathcal{V}$, so sind unsere natürlichen Abbildungen Isomorphismen*

$$\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{V};\mathcal{F})$$

19.1.4.2. Mich verwirrt hier immer die Notation. Die Überdeckung $\mathcal{V}$ besteht aus weniger offenen Mengen als die Überdeckung $\mathcal{U}$, aber keineswegs aus „kleineren“ offenen Mengen, sondern ganz im Gegenteil entsteht salopp und unpräzise gesprochen unsere Überdeckung $\mathcal{V}$ aus $\mathcal{U}$, indem man aus $\mathcal{U}$ einige offene Mengen wegläßt, die eh schon in anderen offenen Mengen aus $\mathcal{U}$ enthalten sind. Im Fall

der ersten Kohomlogie bedeutet die Aussage salopp gesprochen, daß jede „über einer offenen Menge trivialisierbare Struktur auch über jeder darin enthaltenen offenen Menge trivialisierbar ist“.

Beweis. Man wähle $\tau : \mathcal{U} \to \mathcal{V}, U \mapsto U^\tau$ mit $U \subset U^\tau \ \forall U \in \mathcal{U}$ und konstruiere eine Kettenabbildung $\alpha : \check{\mathrm{C}}^*(\mathcal{V};\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{C}}^*(\mathcal{U};\mathcal{F})$ durch $\phi \mapsto \alpha\phi$ mit

$$\alpha\phi(U_0,\ldots,U_q) := \phi(U_0^\tau,\ldots,U_q^\tau)|(U_0 \cap \ldots \cap U_q)$$

Wir behaupten, daß sie homotopieinvers ist zur in ähnlicher Weise durch die Inklusion $\iota : \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{U}$ gegebenen Kettenabbildung $\beta : \check{\mathrm{C}}^*(\mathcal{U};\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{C}}^*(\mathcal{V};\mathcal{F})$, die ihrerseits die natürliche Abbildung auf der Čech-Kohomologie induziert. Es reicht, wenn wir im Fall $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ für jedes τ wie oben zeigen, daß die fragliche Kettenabbildung homotop ist zur Identität, und diese Erkenntnis dann anwenden auf $(\mathcal{U}, \iota\tau)$ und $(\mathcal{V}, \tau\iota)$. Seien also $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X und $\tau : \mathcal{U} \to \mathcal{U}, U \mapsto U^\tau$ eine Abbildung mit $U \subset U^\tau \ \forall U \in \mathcal{U}$ und α wie oben. Als Kettenhomotopie versuchen wir es mit

$$(\delta\phi)(U_1,\ldots,U_q) := \sum_i (-1)^i \phi(U_1,\ldots,U_i,U_i^\tau,\ldots,U_q^\tau)$$

und lassen dabei rechts die Restriktion auf $U_1 \cap \ldots \cap U_q$ aus der Notation weg. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(d\delta\phi)(U_0,\ldots,U_q) &= \textstyle\sum_i (-1)^i (\delta\phi)(U_0,\ldots,\widehat{U_i},\ldots,U_q) \\
&= -\textstyle\sum_{j<i} (-1)^{i+j} \phi(U_0,\ldots,U_j,U_j^\tau,\ldots,\widehat{U_i^\tau},\ldots,U_q^\tau) \\
&\quad + \textstyle\sum_{j>i} (-1)^{i+j} \phi(U_0,\ldots,\widehat{U_i},\ldots,U_j,U_j^\tau,\ldots,U_q^\tau) \\
(\delta d\phi)(U_0,\ldots,U_q) &= -\textstyle\sum_j (-1)^j (d\phi)(U_0,\ldots,U_j,U_j^\tau,\ldots,U_q^\tau) \\
&= -\textstyle\sum_{j\geq i} (-1)^{i+j} \phi(U_0,\ldots,\widehat{U_i},\ldots,U_j,U_j^\tau,\ldots,U_q^\tau) \\
&\quad + \textstyle\sum_{j\leq i} (-1)^{i+j} \phi(U_0,\ldots,U_j,U_j^\tau,\ldots,\widehat{U_i^\tau},\ldots,U_q^\tau)
\end{aligned}$$

In $(d\delta + \delta d)\phi$ werden alle Summanden der oberen Summe weggehoben und nur die Terme mit $i = j$ in den unteren Summen bleiben stehen. Von denen heben sich aber auch die mittleren weg und nur $\phi(U_0,\ldots,U_q) - \phi(U_0^\tau,\ldots,U_q^\tau)$ bleibt stehen. Also gilt $(d\delta + \delta d)\phi = \phi - \alpha\phi$ wie gewünscht. □

19.1.4.3 (**Varianten abstrakter Kokettenkomplexe**). Gegeben eine Menge E bezeichne $\mathcal{K}E$ das System ihrer endlichen Teilmengen, angeordnet durch Inklusion. Gegeben (M, φ) ein durch $(\mathcal{K}E, \subset)$ indiziertes gerichtetes System von abelschen Gruppen bilden wir drei Komplexe wie folgt:

1. Für $e_0, \ldots, e_q \in E$ setzen wir $M(e_0, \ldots, e_q) := M(\{e_0, \ldots, e_q\})$ und bilden das Produkt

$$C^q = C^q M := \prod_{(e_0,\ldots,e_q)\in E^{q+1}} M(e_0, \ldots, e_q)$$

Gegeben $s \in C^q$ notieren wir $s(e_0, \ldots, e_q) \in M(e_0, \ldots, e_q)$ seine Projektion auf die entsprechende Komponente des Produkts. Schließlich erklären wir Randoperatoren $d : C^{q-1} \to C^q$ durch die Vorschrift

$$(ds)(e_0, \ldots, e_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \varphi s(e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_q)$$

mit $\varphi : M(e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_q) \to M(e_0, \ldots, e_q)$ den entsprechenden Morphismen unseres direkten Systems. Man prüft leicht $d^2 = 0$. Wir haben also einen Komplex $C^* M$ konstruiert, der im Grad $q = -1$ mit $C^{-1}M = M(\emptyset)$ beginnt.

2. In unserem Komplex betrachten wir weiter die Untergruppen der **alternierenden Koketten**

$$C^q_{\text{alt}} \subset C^q$$

aller Ketten $s \in C^q$ mit $s(\ldots, e_i, e_{i+1}, \ldots) = -s(\ldots, e_{i+1}, e_i, \ldots)$ für alle i und alle Tupel $(e_0, \ldots, e_q) \in E^{q+1}$ sowie $s(\ldots, e_i, e_{i+1}, \ldots) = 0$ für alle Tupel mit zwei gleichen benachbarten Einträgen $e_i = e_{i+1}$. Man prüft unschwer, daß sie einen Unterkomplex bilden. Per definitionem stimmt er in den beiden tiefsten Graden sogar mit unserem ursprünglichen Komplex überein, genauer und in Formeln gilt $C^{-1}_{\text{alt}} = C^{-1}$ und $C^0_{\text{alt}} = C^0$.

3. Ist zusätzlich eine Anordnung auf E gegeben, so bilden die $s \in C^q$ mit $s(e_0, \ldots, e_q) = 0$ falls $e_0 < \ldots < e_q$ zusammen mit $C^{-1}_\times := 0$ einen Unterkomplex $C^q_\times \subset C^q$. Ich nenne ihn den Komplex der **ungeordneten Koketten**. Bilden wir andererseits die Gruppen

$$C^q_< = C^q_< M := \prod_{e_0<\ldots<e_q} M(e_0, \ldots, e_q)$$

der **angeordneten q-Koketten**, so liefern die Projektionen auf einen Teil der Faktoren kurze exakte Sequenzen

$$C^q_\times \hookrightarrow C^q \twoheadrightarrow C^q_<$$

und der induzierte Randoperator auf $C^q_<$ wird beschrieben durch dieselbe Formel $(ds)(e_0, \ldots, e_q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \varphi s(e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_q)$ wie oben mit

dem einzigen Unterschied, daß in diesem Fall nur streng monoton wachsende Tupel zu betrachten sind. Wieder stimmt per definitionem unser neuer Komplex in den beiden tiefsten Graden mit unserem ursprünglichen Komplex überein, genauer und in Formeln gilt $C^{-1} \xrightarrow{\sim} C^{-1}_{<}$ und $C^0 \xrightarrow{\sim} C^0_{<}$.

Lemma 19.1.4.4 (Vergleich abstrakter Kokettenkomplexe). *Seien E eine Menge und (M, φ) ein vom System ihrer endlichen Teilmengen indiziertes direktes System abelscher Gruppen. So gilt in den Notationen aus 19.1.4.3:*

1. *Die Komposition $C^*_{\text{alt}}M \hookrightarrow C^*M \twoheadrightarrow C^*_{<}M$ ist ein Isomorphismus von Komplexen;*
2. *Beide fraglichen Abbildungen induzieren bereits für sich genommen Isomorphismen auf der Kohomologie;*
3. *Gibt es $e \in E$ mit $\varphi : M(A) \xrightarrow{\sim} M(A \cup \{e\})$ für alle endlichen Teilmengen $A \subset E$, so sind unsere Komplexe alle drei exakt.*

19.1.4.5. Die Aussage des Lemmas gilt analog und mit demselben Beweis für direkte Systeme in abelschen Kategorien, in denen über Systeme endlicher Teilmengen von E indizierte Produkte existieren und kurze exakte Sequenzen zu kurzen exakten Sequenzen machen. Insbesondere gelten sie für direkte Systeme in $\mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ und wir erhalten so als Spezialfälle unsere Aussagen 17.1.1.17 über die Azyklizität von Simplizes.

Beweis. Teil 1 ist offensichtlich. Teil 3 zeigen wir für C^*M, indem wir Abbildungen $\delta : C^{q+1}M \to C^qM$ erklären durch die Vorschrift

$$(\delta s)(e_0, \ldots, e_q) := \varphi^{-1}s(e, e_0, \ldots, e_q)$$

Damit prüft man unschwer für jede Kokette s die Formel $\delta ds + d\delta s = s$. Der Beweis von Teil 3 für $C^*_{<}M$ geht genauso, wir müssen nur zuvor bemerken, daß es nach Teil 1 auf die Anordnung dabei gar nicht ankommt und wir mithin annehmen dürfen, e sei das kleinste Element von E. Um schließlich Teil 2 zu zeigen, müssen wir nur nachweisen, daß $C^*_{\times}M$ stets exakt ist. Im Spezialfall, daß unser System M konstant eine abelsche Gruppe G ist, folgt das aus Teil 3 für $E \neq \emptyset$ und ist eh klar für $E = \emptyset$. Gegeben eine Teilmenge $F \subset E$ und eine abelsche Gruppe G können wir etwas allgemeiner das direkte System G_F betrachten mit $G_F(B) = G$ für $B \subset F$ und $G_F(B) = 0$ sonst. Für direkte Systeme der Form $M = G_F$ folgt unsere Behauptung wie im Fall konstanter Systeme. Im allgemeinen läßt sich jedes System M in eine kurze exakte Sequenz

$$M \hookrightarrow \prod_{A \in \mathcal{K}E} M(A)_A \twoheadrightarrow \mathrm{cok}$$

von direkten Systemen einbetten, wo A wie angedeutet alle endlichen Teilmengen von E durchläuft. Da $C^*_\times$ für die Mitte exakt ist nach dem, was wir bereits bewiesen haben, ergibt sich $\mathcal{H}^q C^*_\times \operatorname{cok} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{q+1} C^*_\times M$. So folgt dann induktiv $\mathcal{H}^q C^*_\times N = 0$ für alle direkten Systeme N und alle q. □

19.1.4.6. Will man Čech-Kohomologie in Bezug auf eine offene Überdeckung explizit berechnen, so ist der **angeordnete Čech-Komplex** ein sehr nützliches Hilfsmittel. Um ihn zu konstruieren, wählt man für den zu untersuchenden Raum X eine offene Überdeckung $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ und eine totale Ordnung $\leq$ auf $\mathcal{U}$ und bildet zu jeder abelschen Prägarbe $\mathcal{F}$ den Komplex der **angeordneten Čech-Koketten**

$$\check{\mathrm{C}}^q_<(\mathcal{U};\mathcal{F}) := \prod_{U_0<\ldots<U_q} \mathcal{F}(U_0 \cap \ldots \cap U_q)$$

Das Produkt läuft wie angedeutet über alle streng monoton wachsenden Folgen der Länge $q+1$ in $\mathcal{U}$. Das Differential wird definiert durch dieselben Formeln wie beim Čech-Komplex aus 19.1.3.11.

Korollar 19.1.4.7. *Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ darauf eine abelsche Prägarbe, $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X und $\leq$ eine totale Ordnung auf $\mathcal{U}$. So induziert die Projektion $\check{\mathrm{C}}^*(\mathcal{U};\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \check{\mathrm{C}}^*_<(\mathcal{U};\mathcal{F})$ auf die entsprechenden Teile der jeweiligen Produkte Isomorphismen auf der Kohomologie.*

Beweis. Das folgt aus unserem allgemeinen Lemma 19.1.4.4 über den Vergleich abstrakter Kokettenkomplexe. □

19.1.5 Čech-Kohomologie der Grade Null und Eins

19.1.5.1 (**Nullte Čech-Kohomologie für Prägarben von Mengen**). Im Fall einer Prägarbe $\mathcal{F}$ von Mengen kann man immer noch die Menge

$$\check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\mathcal{F}) := \left\{ (s_U) \in \prod_{U\in\mathcal{U}} \mathcal{F}(U) \,\middle|\, s_U|_{U\cap V} = s_V|_{U\cap V} \;\; \forall U,V \in \mathcal{U} \right\}$$

bilden. Man setzt dann wieder in derselben Weise

$$\check{\mathrm{H}}^0(X;\mathcal{F}) := \operatorname{colf} \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\mathcal{F})$$

und nennt das die **nullte Čech-Kohomologie mit Koeffizienten in der Prägarbe von Mengen** $\mathcal{F}$. Die Restriktionen liefern eine natürliche Abbildung

$$\mathcal{F}(X) \to \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\mathcal{F})$$

Sie ist im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv.

19.1.5.2 (**Erste Čech-Kohomologie für nichtabelsche Gruppen-Prägarben**). Im Fall einer Prägarbe von nicht notwendig kommutativen Gruppen erben die $\check{\mathrm{H}}^0$ aus der vorhergehenden Bemerkung noch die Struktur einer Gruppe und wir können zusätzlich analog zu den Definitionen des ersten Abschnitts und in multiplikativer Notation geschrieben die Menge der **Čech-1-Kozykel** erklären als

$$\check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U};\mathcal{F}) := \left\{ (s_{UV}) \in \prod_{(U,V)\in\mathcal{U}^2} \mathcal{F}(U\cap V) \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Für alle } U,V,W \in \mathcal{U} \text{ gilt mit} \\ \text{der Notation } D := U\cap V\cap W \\ \text{die Identität} \\ s_{UV}|_D\, s_{VW}|_D = s_{UW}|_D \end{array} \right\}$$

Zwei derartige 1-Kozykel (s_{UV}) und (t_{UV}) heißen **kohomolog**, wenn es eine Familie $(i_U) \in \prod_{U\in\mathcal{U}} \mathcal{F}(U)$ gibt mit

$$s_{UV} = (i_U|_{U\cap V})t_{UV}(i_V|_{U\cap V})^{-1} \quad \forall U,V \in \mathcal{U}$$

Die Relation, kohomolog zu sein, ist dann eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U};\mathcal{F})$ der Čech-1-Kozykel. Die Menge der Äquivalenzklassen notieren wir

$$\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};G) := \check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U};G)/\sim$$

Sie heißt die **erste Čech-Kohomologie für die Überdeckung $\mathcal{U}$ mit Koeffizienten in der Prägarbe von Gruppen $\mathcal{F}$**. Unser $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};G)$ ist im allgemeinen keine Gruppe, sondern nur eine Menge mit einem ausgezeichneten Punkt, nämlich der Klasse des trivialen 1-Kozykels. Der Kolimes über alle gesättigten offenen Überdeckungen liefert dann eine weitere bepunktete Menge

$$\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{F}) := \operatorname{colf} \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};\mathcal{F})$$

Sie heißt die **erste Čech-Kohomologie von X mit Koeffizienten in der Prägarbe von Gruppen $\mathcal{F}$**. Im Fall einer abelschen Prägarbe fallen diese Definitionen von $\check{\mathrm{H}}^0$ und $\check{\mathrm{H}}^1$ mit den in 19.1.3.11 gegebenen Definitionen zusammen.

Ergänzung 19.1.5.3 (**Klassifikation von Bündeln durch Čech-Kohomologie**). Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so erhalten wir ganz analog wie in 19.1.2.10 Bijektionen

$$\begin{aligned} \{\text{differenzierbare reelle Geradenbündel auf } X\}/_{\cong} &\xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^\times}) \\ \{\text{differenzierbare komplexe Geradenbündel auf } X\}/_{\cong} &\xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}^\times}) \end{aligned}$$

Ist X eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{O}_X$ die Prägarbe der komplexwertigen analytischen Funktionen auf X und $\mathcal{O}_X^\times$ die Prägarbe der der komplexwertigen analytischen Funktionen ohne Nullstellen mit der Multiplikation als Verknüpfung, so erhalten wir in derselben Weise eine Bijektion

$$\{\text{analytische komplexe Geradenbündel auf } X\}/_{\cong} \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{O}_X^\times)$$

Allgemeiner erhalten wir Bijektionen

$$\{\text{differenzierbare } n\text{-dimensionale } \mathbb{K}\text{-Bündel auf } X\}\,/_{\cong} \quad \xrightarrow{\sim} \quad \check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})})$$

Das triviale Bündel entspricht hier stets der Null beziehungsweise im letzten Fall dem ausgezeichneten Punkt der bepunkteten Menge $\check{\mathrm{H}}^1$.

19.1.5.4 (**Bezug zu vorhergehenden Versionen von** $\check{\mathrm{H}}^1$). Im Fall einer diskreten abelschen Gruppe G fallen die in 19.1.1 definierten Gruppen $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};G)$ und $\check{\mathrm{H}}^1(X;G)$ mit den hier definierten Gruppen $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};G_X)$ und $\check{\mathrm{H}}^1(X;G_X)$ zusammen. Im Fall einer allgemeinen topologischen abelschen Gruppe G fallen allgemeiner die in 19.1.1 definierten Gruppen $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};G)$ und $\check{\mathrm{H}}^1(X;G)$ mit den hier definierten Gruppen $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};\mathcal{C}_G)$ und $\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}_G)$ zusammen.

19.1.5.5 (**Nullte Čech-Kohomologie**). Sei G eine abelsche topologische Gruppe. Nach Proposition **??** über die lokale Natur der Stetigkeit liefert die Restriktion für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X Isomorphismen $\mathrm{Top}(X,G) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\mathcal{C}_G)$. Folglich haben wir auch im Kolimes einen Isomorphismus

$$\mathrm{Top}(X,G) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^0(X;\mathcal{C}_G)$$

Das steht im Gegensatz zur singulären Kohomologie, bei der wir für diskretes abelsches G vielmehr einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Ens}(\pi_0(X),G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0_{\mathrm{sing}}(X;G)$$

mit dem Raum den G-wertigen Funktionen auf der Menge $\pi_0(X)$ der Wegzusammenhangskomponenten von X haben. Für lokal wegzusammenhängende Räume X und diskretes abelsches G haben wir jedoch wieder einen kanonischen Isomorphismus

$$\check{\mathrm{H}}^0(X;G_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0_{\mathrm{sing}}(X;G)$$

zwischen der nullten Čech-Kohomologie mit Koeffizienten in der Prägarbe G_X und der nullten singulären Kohomologie mit Koeffizienten in G.

Übungen

Übung 19.1.5.6. Das Bilden der Čech-Kohomologie bezüglich einer Überdeckung $\mathcal{U}$ kommutiert mit beliebigen Produkten von abelschen Prägarben. Für die Čech-Kohomologie selbst ist das im allgemeinen vermutlich falsch.

Übung 19.1.5.7. In der Kategorie der abelschen Prägarben auf einem topologischen Raum gibt es beliebige Produkte und Koprodukte.

19.2 Abelsche Kategorien und Garben

19.2.1 Wozu Garbenkohomologie?

19.2.1.1. In diesem Abschnitt führen wir die abstrakte Sprache der abelschen Kategorien ein und besprechen parallel dazu als motivierendes Beispiel die Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum. Ich habe versucht, diese beiden Handlungsstränge insoweit zu entflechten, daß die Abschnitte ohne das Wort „Garbe“ in der Überschrift auch unabhängig gelesen und verstanden werden können.

19.2.1.2. Sowohl die Garbenkohomologie als auch die damit verbundenen Methoden der homologischen Algebra sind aus der algebraischen und arithmetischen Geometrie und darüber hinaus aus weiten Teilen der Mathematik nicht mehr wegzudenken. Für manch Einen mag das schon Anlaß genug sein, sich damit zu beschäftigen. Ich will im folgenden ausführen, welchen Gewinn man auch in der „ganz normalen Topologie“ aus diesen Methoden ziehen kann.

19.2.1.3. Als ersten Punkt führe ich eine Variante der langen exakten Kohomologiesequenz an, die Lokalisierungssequenz 19.4.9.18, in der nur absolute Kohomologien auftreten. Das erlaubt eine sehr elegante Diskussion von Einbettbarkeitsproblemen, etwa im Zusammenhang mit dem Satz von Jordan-Brouwer 19.4.10.16 oder mit Alexanderdualität 19.4.10.19 folgende.

19.2.1.4. Als zweiten Punkt beachte man das sehr gute Verhalten in Faserungen. Zum Beispiel zeigen wir in 19.6.6.14 für ein beliebiges Faserbündel mit zusammenziehbarer Faser, daß der Rückzug einen Isomorphismus auf der Kohomologie liefert. Ich wüßte nicht, wie ich das für die singuläre Kohomologie zeigen sollte, und ob es da überhaupt stimmt. Diesessehr gute Verhalten in Faserungen hinwiederum erlaubt die Konstruktion von äquivarianter Kohomologie und charakteristischen Klassen für beliebige Hauptfaserbündel mit beliebigen topologischen Gruppen als Faser auf beliebigen topologischen Räumen, vergleiche 19.7.2.5 folgende. Es erlaubt auch für rationale Koeffizienten eine Identifikation der Kohomologie des Quotienten eines topologischen Raums nach einer endlichen Gruppe mit den Invarianten in der Kohomologie 19.6.6.24, wann immer die Quotientenabbildung separiert ist, also wirklich in sehr befriedigender Allgemeinheit.

19.2.1.5. Als dritten Punkt führe ich ein besseres Verständnis der Poincaré-Dualität an, genauer den Nachweis ihrer Interpretation über Schnittpaarung und Schnittprodukte, wie sie in 17.4.3.19 und 17.7.4.9 angekündigt wird. Das gelingt jedoch erst im Vollausbau der Theorie als Konsequenz der Verdier-Dualität und wird in 21.9.10.13 folgende erklärt. Wieder wüßte ich nicht, wie das in der singulären Theorie in der Allgemeinheit zu machen sein sollte, da man dort zunächst einmal,

soweit ich sehen kann, tubulare Umgebungen bereitstellen muß. Das mag aber meiner eigenen Unkenntnis geschuldet sein.

19.2.2 Garben und ihre étalen Räume

19.2.2.1. Alle Prägarben, die bisher von Belang waren, besitzen noch eine zusätzliche Eigenschaft, die es erlaubt, dafür eine geometrische Anschauung zu entwickeln. Diese zusätzliche Eigenschaft, die die „Garben“ unter den Prägarben auszeichnet, ist im Folgenden von entscheidender Bedeutung.

Definition 19.2.2.2. Eine **Garbe** $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X ist eine Prägarbe von Mengen derart, daß die folgende **Verklebungsbedingung** erfüllt ist: Gegeben ein System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von offenen Teilmengen von X und gegeben für alle $U \in \mathcal{U}$ Schnitte $s_U \in \mathcal{F}(U)$ mit

$$s_U|_{U\cap V} = s_V|_{U\cap V} \quad \forall\, U, V \in \mathcal{U}$$

gibt es genau einen Schnitt auf der Vereinigung $s \in \mathcal{F}\left(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U\right)$ mit

$$s|_U = s_U \quad \forall\, U \in \mathcal{U}$$

Ein **Homomorphismus von Garben** ist ein Homomorphismus der zugrundeliegenden Prägarben.

19.2.2.3. Analog definiert man Garben von Gruppen und Ringen und dergleichen sowie ihre Morphismen. Wir nennen sie auch **Gruppengarben** beziehungsweise **Ringgarben** und reden von **Mengengarben**, wenn wir betonen wollen, daß wir Garben von Mengen meinen.

19.2.2.4 (**Diskussion der Terminologie**). Eine Garbe heißt auf Englisch **sheaf** und auf Französisch **faisceau**. Der Begriff ist in der französischen Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts entstanden und geht wohl auf eine ältere Verwendung von „faisceau“ für „vernünftige Familien geometrischer Objekte“ zurück. Zum Beispiel kann man in einer euklidischen Ebene die „Schar aller Kreise“ betrachten, die an zwei gegebene Geraden tangential sind, und hätte diese als einen „faisceau de cercles“ bezeichnet. Bei der Übertragung ins Deutsche und Englische hat man dann sprachlich verwandte aber mathematisch noch nicht belegte Begriffe gewählt.

19.2.2.5 (**Schnitte einer Garbe über der leeren Menge**). Unsere Verklebungsbedingung mit $\mathcal{U} = \emptyset$ dem leeren Mengensystem impliziert, daß eine Garbe von Mengen $\mathcal{F}$ stets genau einen Schnitt über der leeren Menge haben muß, in Formeln $|\mathcal{F}(\emptyset)| = 1$.

Ergänzung 19.2.2.6 (**Garben mit Werten in einer beliebigen Kategorie**). Wir definieren allgemeiner Garben mit Werten in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$ als $\mathcal{C}$-wertige Prägarben $\mathcal{F}$, die zusätzlich die **Verklebungsbedingung** erfüllen, daß für jedes gesättigte System $\mathcal{U}$ von offenen Teilmengen von X mit Vereinigung V der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus $\mathcal{F}(V) \xrightarrow{\sim} \lim_{U\in\mathcal{U}} \mathcal{F}(U)$ ist. Für eine Garbe $\mathcal{F}$ mit Werten in $\mathcal{C}$ ist insbesondere $\mathcal{F}(\emptyset)$ stets final in $\mathcal{C}$.

19.2.2.7 (**Notationen für Kategorien von Garben**). Die Kategorie der Garben auf einem Raum X mit Werten in einer Kategorie $\mathcal{C}$ notieren wir $\mathcal{C}_{/X}$. Die Kategorie der Mengengarben auf einem topologischen Raum X notieren wir insbesondere $\mathrm{Ens}_{/X}$. Eine Garbe mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen heißt eine **abelsche Garbe**. Die Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum X notieren wir entsprechend $\mathrm{Ab}_{/X}$.

19.2.2.8. Gegeben eine Garbe von Mengen $\mathcal{F}$ auf einem Raum X und eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X liefern die für jede Prägarbe von Mengen definierten Abbildungen Isomorphismen $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^0(X;\mathcal{F})$. Das folgt unmittelbar aus den Definitionen.

Beispiel 19.2.2.9. Ist $p : E \to X$ eine stetige Abbildung, so erhalten wir eine Garbe von Mengen $\mathcal{S} = \mathcal{S}E = \mathcal{S}_X E$ auf X durch die Vorschrift

$$\mathcal{S}(U) := \mathrm{Top}_X(U, E) = \{s : U \to E \mid s \text{ ist stetig und } p(s(x)) = x \ \forall x \in U\}$$

mit den offensichtlichen Restriktionsabbildungen. Wir nennen sie die **Garbe der Schnitte von** p und erhalten so einen Funktor von der Kategorie der Räume über unserem Raum in die Kategorie der Garben von Mengen auf unserem Raum

$$\mathcal{S} : \mathrm{Top}_X \to \mathrm{Ens}_{/X}$$

Beispiel 19.2.2.10. Gegeben eine Menge M und ein topologischer Raum X erklären wir die **konstante Garbe** M_X als die Garbe der Schnitte von $M \times X$, wo M mit der diskreten Topologie zu versehen ist.

Beispiel 19.2.2.11. Die Prägarben G_X für eine diskrete Gruppe G oder allgemeiner $\mathcal{C}_{G,X}$ für eine topologische Gruppe G aus 19.1.3.6 sind Garben von Gruppen.

Beispiel 19.2.2.12. Unsere Prägarben von differenzierbaren oder besser glatten Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit sind Garben von $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Unsere Wolkenkratzer aus 19.1.3.10 sind Garben.

Beispiel 19.2.2.13. Sei A eine nichttriviale Gruppe und X ein topologischer Raum. Die Prägarbe, die jeder offenen Teilmenge von X einfach die feste Gruppe A zuordnet, mit der Identität als Restriktion, ist keine Garbe: Der leeren Menge wird nämlich nicht die triviale Gruppe zugeordnet. Wenn wir unser Beispiel dahingehend abändern, daß wir der leeren Menge ausnahmsweise die triviale Gruppe

zuordnen, ist unsere Prägarbe immer noch keine Garbe, wenn es in unserem Raum nichtleere unzusammenhängende offene Teilmengen gibt: Denn dann zerlegen wir diese in zwei echte disjunkte offene Teilmengen, wählen dort als Schnitte verschiedene Elemente von A und können diese Vorgabe nicht „zu einem Schnitt auf der ganzen offenen Menge zusammenkleben“.

19.2.2.14. Wir erinnern aus 16.3.1.10, daß eine stetige Abbildung $p : E \to X$ **étale** heißt, wenn jeder Punkt $e \in E$ eine offene Umgebung $U \Subset E$ besitzt, die von p homöomorph auf eine offene Teilmenge $p(U) \Subset X$ abgebildet wird.

Definition 19.2.2.15. Sei X ein topologischer Raum. Ein **étaler Raum** $E = (E, p)$ **über** X ist ein topologischer Raum E mitsamt einer étalen Abbildung $p : E \to X$. Ein **Morphismus von étalen Räumen über** X ist eine stetige Abbildung, die verträglich ist mit den Projektionen auf X.

19.2.2.16. Jede étale Abbildung ist offen und nach 16.3.1.14 kann eine Verknüpfung gf stetiger Abbildungen mit g étale nur étale sein, wenn auch f étale ist. Insbesondere ist jeder Morphismus von étalen Räumen offen, speziell also jeder Schnitt einer étalen Abbildung auf einer offenen Menge.

Satz 19.2.2.17 (Garben und ihre étalen Räume). *Für jeden topologischen Raum X liefert der Funktor $\mathcal{S}$, der jedem Raum über X die Garbe seiner Schnitte zuordnet, eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathcal{S} \;:\; \left\{ \begin{array}{c} \textit{étale Räume} \\ \textit{über } X \end{array} \right\} \xrightarrow{\approx} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Garben von Mengen} \\ \textit{auf } X \end{array} \right\}$$

Beispiele 19.2.2.18. Der étale Raum der Garbe M_X ist $M \times X$. Der étale Raum des Wolkenkratzers $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{(0)}$ mit Faser $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ am Nullpunkt auf der reellen Gerade $X = \mathbb{R}$ ist die reelle Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt aus 15.1.4.8.

19.2.2.19. Die linke Seite unserer Äquivalenz 19.2.2.17 ist, zumindest nach meinem Geschmack, der Anschauung besser zugänglich und liefert eine sehr transparente Konstruktion für den „Rückzug“ von Garben, wie wir ihn in 19.7.1.9 kennenlernen werden. Die rechte Seite ist dahingegen technisch besonders gut zugänglich und leicht zu verallgemeinern. Mir scheint die in diesem Satz formulierte Äquivalenz von Kategorien eine wichtige Brücke in die Anschauung.

Beweis. Der Beweis des vorhergehenden Satzes strukturiert den Rest dieses Abschnitts. Genauer konstruieren wir in 19.2.2.23 einen Funktor ét von Prägarben auf X zu topologischen Räumen über X und konstruieren in 19.2.2.25 eine Adjunktion $(\text{ét}, \mathcal{S})$ zwischen $\text{ét} : \mathrm{pEns}_{/X} \to \mathrm{Top}_X$ und $\mathcal{S} : \mathrm{Top}_X \to \mathrm{pEns}_{/X}$. Im Anschluß daran wird der Beweis dann zu Ende geführt. $\square$

Definition 19.2.2.20. Gegeben eine Prägarbe $\mathcal{F}$ von Mengen auf einem topologischen Raum X definieren wir ihren **Halm** $\mathcal{F}_x$ an einer Stelle $x \in X$ als den Kolimes

$$\mathcal{F}_x := \operatorname{col}_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

Unser Kolimes soll wie angedeutet über alle offenen Umgebungen $U \Subset X$ von x laufen. Gegeben $x \in U \Subset X$ und $s \in \mathcal{F}(U)$ einen Schnitt bezeichnen wir mit $s_x \in \mathcal{F}_x$ sein Bild im Halm.

Beispiel 19.2.2.21. Unsere Keime regulärer Funktionen aus 22.3.3.11 sind genau die Halme der Garbe der regulären Funktionen aus 22.3.1.1.

Ergänzung 19.2.2.22. Gegeben Punkte x, y eines topologischen Raums, von denen einer im Abschluß des anderen liegt, in Formeln $x \in \bar{y}$, erhalten wir für jede Prägarbe von Mengen $\mathcal{F}$ eine Abbildung $\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_y$ aus der Beobachtung heraus, daß jede offene Menge um x auch y enthalten muß. Wir nennen sie das **Generisieren**.

Definition 19.2.2.23. Gegeben ein Prägarbe $\mathcal{F}$ von Mengen auf einem topologischen Raum X definieren wir ihren **étalen Raum**, notiert $\text{ét}(\mathcal{F})$ oder kürzer $\bar{\mathcal{F}}$, als die disjunkte Vereinigung ihrer Halme

$$\bar{\mathcal{F}} := \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

mitsamt der natürlichen Projektion $p : \bar{\mathcal{F}} \to X$. Gegeben $U \Subset X$ und $s \in \mathcal{F}(U)$ definieren wir einen Schnitt $\bar{s} : U \to \bar{\mathcal{F}}$ durch $\bar{s}(x) = s_x$. Wir versehen $\bar{\mathcal{F}}$ mit der Finaltopologie in Bezug auf die Familie aller dieser Abbildungen $\bar{s}$. Bezeichnet $\mathrm{pEns}_{/X}$ die Kategorie der Prägarben von Mengen auf X, so erhalten wir auf diese Weise einen Funktor

$$\text{ét} : \mathrm{pEns}_{/X} \to \mathrm{Top}_X$$

19.2.2.24 (**Anschauung für étale Räume**). Der étale Raum einer Prägarbe von Mengen ist meiner Anschauung nur schlecht zugänglich. Er wird im allgemeinen in keinster Weise Hausdorff sein. Ich denke dabei eher an eine Art Blätterteig, der auf das Backblech projiziert wird.

19.2.2.25 (**Der étale Raum als Linksadjungierter des Schnittefunktors**). Wir erhalten eine Adjunktion $(\text{ét}, \mathcal{S})$ von Funktoren zwischen $\mathrm{pEns}_{/X}$ und Top_X vermittels der Abbildungen

$$\mathrm{pEns}_{/X}(\mathcal{F}, \mathcal{S}E) \to \mathrm{Top}_X(\text{ét}\,\mathcal{F}, E)$$

gegeben durch $\varphi \mapsto (\bar{\varphi} : (s_x \mapsto \varphi(s)(x)))$ für $x \in X$ und einen und jeden Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$ für $x \in U \Subset X$. Die Stetigkeit von $\bar{\varphi}$ folgt daraus, daß für alle Schnitte

$s \in \mathcal{F}(V)$ mit $V \Subset X$ auch $\bar{\varphi} \circ \bar{s} = \varphi(s) : U \to E$ stetig ist. Die Injektivität unserer Abbildung $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ ist offensichtlich. Die Surjektivität folgt, indem wir eine Abbildung in die Gegenrichtung konstruieren, und zwar durch Anwenden des Funktors $\mathcal{S}$ und Vorschalten des Morphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{S}(\text{ét}\,\mathcal{F})$, der durch $s \mapsto \bar{s}$ gegeben wird. Man erkennt unschwer, daß diese Abbildung ein Schnitt und wegen der Injektivität dann sogar eine Umkehrabbildung ist.

Satz 19.2.2.17 über Garben und ihre étalen Räume, Ende des Beweises. Man erinnere aus 16.4.8.15, daß gegeben Funktoren $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ und eine Adjunktion $\alpha : L \dashv R$ und die vollen Unterkategorien

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &:= \{A \in \mathcal{A} \mid \text{Die Einheit ist ein Iso } A \xrightarrow{\sim} RLA\} \\ \mathcal{B}_0 &:= \{B \in \mathcal{B} \mid \text{Die Koeinheit ist ein Iso } LRB \xrightarrow{\sim} B\} \end{aligned}$$

unser Funktor L eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{A}_0 \xrightarrow{\approx} \mathcal{B}_0$ mit Quasiinversem R induziert. Nun zeigen wir in 19.2.2.27, daß genau die Räume $E \in \mathrm{Top}_X$ étale sind, für die unsere Adjunktion einen Isomorphismus $\text{ét}(\mathcal{S}E) \xrightarrow{\sim} E$ induziert, und in 19.2.2.29, daß genau die Prägarben $\mathcal{F} \in \mathrm{pEns}_{/X}$ Garben sind, für die unsere Adjunktion einen Isomorphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\text{ét}\,\mathcal{F})$ induziert. Damit ist dann unser Satz 19.2.2.17 über Garben und ihre étalen Räume bewiesen. □

Lemma 19.2.2.26 (Eigenschaften des étalen Raums einer Prägarbe). *Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von Mengen auf einem Raum X.*

1. *Die $\bar{s}(U)$ mit $U \Subset X$ und $s \in \mathcal{F}(U)$ bilden eine Basis für die Topologie des étalen Raums von $\mathcal{F}$. Insbesondere sind alle derartigen Schnitte $\bar{s}$ offene Einbettungen;*

2. *Die Projektion $p : \bar{\mathcal{F}} \to X$ ist étale;*

3. *Ein Schnitt über $V \Subset X$ in $\bar{\mathcal{F}}$ ist stetig genau dann, wenn jedes $x \in V$ eine offene Umgebung $U \Subset V$ besitzt derart, daß unser Schnitt auf dieser Umgebung U übereinstimmt mit einem $\bar{s}$ für geeignetes $s \in \mathcal{F}(U)$.*

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst, daß alle $\bar{s}(U)$ offen sind in $\bar{\mathcal{F}}$. Dazu gilt es nachzuweisen, daß $W = \bar{t}^{-1}(\bar{s}(U))$ offen ist in V, für alle $V \Subset X$ und $t \in \mathcal{F}(V)$. Aber wir haben ja

$$\bar{t}^{-1}(\bar{s}(U)) = \{x \in U \cap V \mid s_x = t_x\},$$

und da mit der Beschreibung 17.7.1.15 eines filtrierenden direkten Limes aus $s_x = t_x$ folgt $s|_W = t|_W$ für eine hinreichend kleine offene Umgebung W von x, ist $\bar{t}^{-1}(\bar{s}(U))$ in der Tat stets offen in V und damit $\bar{s}(U)$ offen in $\bar{\mathcal{F}}$. Damit gilt insbesondere $\bar{t}(W) = \bar{s}(U) \cap \bar{t}(V)$ für $W = \bar{t}^{-1}(\bar{s}(U)) \Subset X$, folglich bilden unsere $\bar{s}(U)$ ein System von offenen Mengen, das stabil ist unter endlichen Schnitten. Für

die von diesem Mengensystem erzeugte Topologie sind aber bereits alle $\bar{s}$ stetig, folglich muß es sich dabei um die Finaltopologie handeln.

2. Der zweite Teil des Lemmas folgt sofort aus dem ersten.

3. Für den dritten Teil bemerken wir, daß offensichtlich jeder Schnitt mit besagter Eigenschaft stetig ist. Ist umgekehrt $t : V \to \bar{\mathcal{F}}$ ein Schnitt und ist $x \in V$ gegeben, so hat $t(x) \in \mathcal{F}_x$ die Gestalt $t(x) = s_x$ für geeignetes $s \in \mathcal{F}(W)$ und $W \Subset V$ eine Umgebung von x. Ist t stetig, so folgt $U = t^{-1}(\bar{s}(W)) \Subset V$, und das ist die gesuchte offene Umgebung von x mit $t|_U = \bar{s}$ für $s = s|_U$. □

Lemma 19.2.2.27. *Genau dann ist eine stetige Abbildung $p : E \to X$ étale, wenn die Adjunktion einen Isomorphismus $\text{ét}(\mathcal{S}E) \xrightarrow{\sim} E$ liefert.*

Beweis. Nach 19.2.2.26 ist die linke Seite auch étale über X. Liefert die Adjunktion einen Isomorphismus, so ist folglich auch E selbst étale, und ist umgekehrt E selbst étale, so reicht es nach 19.2.2.16 zu zeigen, daß unsere Adjunktionsabbildung bijektiv ist alias daß sie Bijektionen auf allen Halmen induziert. Da p étale ist, gibt es für jedes $e \in E$ eine offene Umgebung U von $x = p(e)$ und einen Schnitt $s : U \to E$ mit $s(x) = e$. Also ist unsere Abbildung auf den Halmen surjektiv. Ist $V \Subset X$ eine weitere offene Umgebung von $p(e)$ und $t \in \mathcal{F}(V)$ ein weiterer Schnitt mit $t(x) = e$, so stimmen s und t notwendig überein auf der nach 19.2.2.16 offenen Umgebung $W = p(s(U) \cap t(V))$ von x in X. Also ist unsere Abbildung auf den Halmen auch injektiv. □

Lemma 19.2.2.28. *1. Stimmen zwei Schnitte einer Garbe auf allen Halmen überein, so sind sie gleich;*

2. Induziert ein Morphismus von Garben Bijektionen auf allen Halmen, so ist er ein Isomorphismus.

Beweis. Die Herleitung der ersten Aussage bleibt dem Leser überlassen. Für den Nachweis der zweiten Aussage sei $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ unser Morphismus. Aus 1 folgt, daß für alle $U \Subset X$ die induzierte Abbildung $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ injektiv ist. Wir müssen zeigen, daß diese Abbildungen auch surjektiv sind. Gegeben $s \in \mathcal{G}(U)$ gibt es jedoch für alle $x \in U$ ein $t_x \in \mathcal{F}_x$ mit $t_x \mapsto s_x$. Dies t_x ist der Halm eines Schnitts $t_{(x)} \in \mathcal{F}(U(x))$ für eine geeignete offene Umgebung $U(x) \Subset U$ von x, und wenn wir $U(x)$ hinreichend klein wählen, dürfen wir annehmen $t_{(x)}|_{U(x)} \mapsto s|_{U(x)}$. Dann aber erfüllen die $t_{(x)}$ aber die Verklebungsbedingung und verkleben zu einem Schnitt $t \in \mathcal{F}(U)$ mit $t \mapsto s$. □

Lemma 19.2.2.29. *Genau dann ist eine Prägarbe $\mathcal{F}$ eine Garbe, wenn die Adjunktion einen Isomorphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\text{ét}\,\mathcal{F})$ liefert.*

Beweis. Die rechte Seite ist stets eine Garbe, ja sogar $\mathcal{S}(E)$ ist eine Garbe für jedes $E \in \mathrm{Top}_X$. Liefert die Adjunktion einen Isomorphismus, so ist demnach auch $\mathcal{F}$ eine Garbe, und ist umgekehrt $\mathcal{F}$ eine Garbe, so müssen wir nach 19.2.2.28 nur zeigen, daß unser Morphismus auf allen Halmen Bijektionen induziert oder gleichbedeutend, daß er unter ét eine Bijektion liefert. Nach der Dreiecksidentität für adjungierte Funktoren 16.4.8.1 faktorisiert jedoch die Identität auf $\text{ét}\,\mathcal{F}$ in kanonischer Weise als $\text{ét}\,\mathcal{F} \to \text{ét}(\mathcal{S}(\text{ét}\,\mathcal{F})) \to \text{ét}\,\mathcal{F}$, und nach 19.2.2.27 angewandt auf $E = \text{ét}\,\mathcal{F}$ ist hier die zweite Abbildung ein Isomorphimus. Dasselbe gilt dann auch für die erste Abbildung und das Lemma folgt. □

19.2.2.30. Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe von Funktionen auf X, zum Beispiel die Garbe der differenzierbaren Funktionen auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ oder allgemeiner einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, so nennt man die Elemente der Halme $\mathcal{F}_x$ meist **Funktionskeime**, in unserem Beispielfall also „Keime differenzierbarer Funktionen an der Stelle x“.

19.2.2.31. Der étale Raum der Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ ist nicht Hausdorff: Die Nullfunktion und die Funktion $x \mapsto \max\{x, 0\}$ haben verschiedene Keime an der Stelle Null, aber dieselben Keime an allen echt negativen Stellen. Die beiden Keime an der Stelle Null lassen sich also nicht durch offene Umgebungen im étalen Raum trennen.

Ergänzung 19.2.2.32. Der étale Raum $\text{ét}(\mathcal{O}^{\mathrm{an}})$ der Garbe $\mathcal{O}^{\mathrm{an}}$ der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ ist Hausdorff aufgrund der Eindeutigkeit der lokalen analytischen Fortsetzung. Die Zusammenhangskomponente eines Funktionskeims $f \in \text{ét}(\mathcal{O}^{\mathrm{an}})$ wird dann eine Riemann'sche Fläche im Sinne von 22.3.2.4 vermittels der finalen Struktur im Sinne von 22.3.1.11 zur Familie der Schnitte auf offenen Teilmengen der komplexen Zahlenebene. Diese Riemann'sche Fläche heißt die **Riemann'sche Fläche des Funktionskeims** f. Zum Beispiel erhalten wir als Riemannsche Fläche der durch die Eigenschaft $\sqrt[n]{1} = 1$ ausgezeichneten stetigen n-ten Wurzel in einer Umgebung der Eins eine zusammenhängende n-blättrige Überlagerung von $\mathbb{C}^\times$. Es ist auch klar, daß zu jedem Funktionskeim an einer vorgegebenen Stelle die Riemannsche Fläche jedes Stammfunktionskeims an besagter Stelle eine Überlagerung der Riemannschen Fläche unseres Funktionskeims selber ist.

Definition 19.2.2.33. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Mengen auf einem Raum X und $p : \bar{\mathcal{F}} \to X$ ihr étaler Raum. Gegeben eine beliebige Teilmenge $A \subset X$ setzen wir

$$\mathcal{F}(A) = \Gamma(A; \mathcal{F}) := \{s : A \to \bar{\mathcal{F}} \mid s \text{ ist stetig und } p(s(x)) = x \ \forall x \in A\}$$

und nennen die Elemente dieser Menge die **Schnitte von $\mathcal{F}$ über** A. Per definitionem haben wir zum Beispiel $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}(\{x\})$ für alle $x \in X$.

19.2.2.34. Im Gegensatz zu Prägarben können wir also bei Garben Schnitte über beliebigen, nicht notwendig offenen Mengen betrachten. Die Schnitte einer Garbe $\mathcal{F}$ über dem ganzen Raum nennen wir auch die **globalen Schnitte** unserer Garbe und notieren sie

$$\mathcal{F}(X) = \Gamma(X; \mathcal{F}) = \Gamma\mathcal{F}$$

19.2.2.35 (**Einschränkung einer Garbe**). Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Mengen auf einem Raum X und $p : \bar{\mathcal{F}} \to X$ ihr étaler Raum. Gegeben eine Teilmenge $Z \subset X$ definieren wir die Garbe $\mathcal{F}|_Z$ auf dem Raum Z als die Garbe der Schnitte im nach 16.3.1.24 étalen Raum $p^{-1}(Z) \to Z$ und nennen sie die **Einschränkung von $\mathcal{F}$ auf** Z. Die offensichtliche Abbildung liefert dann eine Bijektion

$$\Gamma(Z; \mathcal{F}|_Z) \xrightarrow{\sim} \Gamma(Z; \mathcal{F})$$

zwischen dem Raum der globalen Schnitte der Einschränkung und dem Raum der Schnitte über Z der ursprünglichen Garbe.

Lemma 19.2.2.36. *Gegeben ein topologischer Raum X besitzt der offensichtliche Einbettungsfunktor* $\mathrm{Ens}_{/X} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathrm{pEns}_{/X}$ *von den Garben in die Prägarben einen Linksadjungierten, die* **Garbifizierung** $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^+$.

19.2.2.37. Der Formalismus der adjungierten Funktoren 16.4.8.1 liefert uns dann für jede Prägarbe $\mathcal{G}$ einen kanonischen Morphismus $\mathcal{G} \to \mathcal{G}^+$ derart, daß jeder Morphismus $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ in eine Garbe $\mathcal{F}$ in eindeutiger Weise über $\mathcal{G} \to \mathcal{G}^+$ faktorisiert. Des weiteren folgt aus der Volltreuheit des Einbettungsfunktors mit 16.4.3.9, daß für jede Garbe $\mathcal{F}$ der kanonische Morphismus einen Isomorphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^+$ liefert. Explizit ist das genau der Isomorphismus 19.2.2.29.

19.2.2.38. In der folgenden Darstellung finde ich es ziemlich verwirrend, wenn bei Garben der Zusatz „Prä“ begriffserweiternd wirkt und bei topologischen Räumen über einem weiteren Raum der Zusatz „étale“ begriffsverengend. Ich benutze deshalb auch noch die alternative Notation

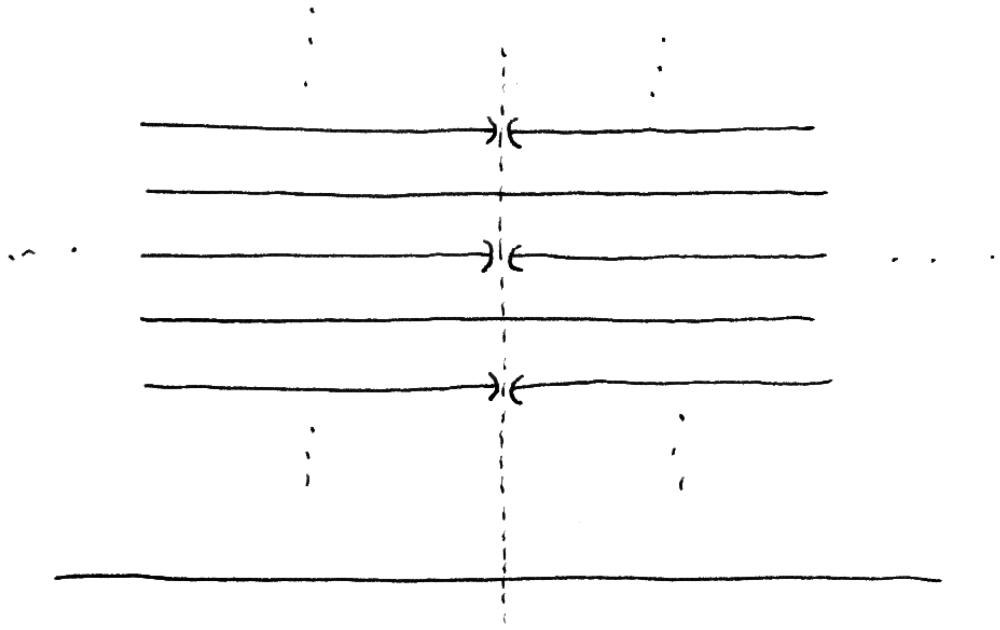
$$\mathrm{gpEns}_{/X} = \mathrm{Ens}_{/X}$$

für „Garbenprägarben“ auf einem topologischen Raum X.

Beweis. Wir notieren $\text{ét}\mathrm{Top}_X \subset \mathrm{Top}_X$ die volle Unterkategorie aller étalen Räume über X und betrachten das Diagramm von Funktoren

$$\begin{tikzcd} \mathrm{pEns}_{/X} \arrow[r, shift left, "\text{ét}"] & \text{ét}\mathrm{Top}_X \arrow[l, shift left, "\mathcal{S}"] \arrow[r, shift left, "\mathcal{S}"] \arrow[r, phantom, "\approx"] & \mathrm{gpEns}_{/X} \arrow[l, shift left, "\text{ét}"] \end{tikzcd}$$

Oben steht dabei immer der Linksadjungierte, auf der linken Seite wegen unserer allgemeinen Adjunktion 19.2.2.25, und auf der rechten Seite, weil die Funktoren



Eine abelsche Garbe auf der Zahlengerade, deren Halme alle freie abelsche Gruppen vom Rang Eins sind, braucht noch lange nicht konstant zu sein.

zueinander quasiinverse Äquivalenzen von Kategorien sind. Die Verknüpfung in der unteren Horizontale ist nun isomorph zum Einbettungsfunktor und die Verknüpfung in der oberen Horizontale wird so ein Linksadjungierter des Einbettungsfunktors, eben unsere Garbifizierung. □

Ergänzung 19.2.2.39 (**Étalisierung**). Wir notieren weiter $\text{ét}\mathrm{Top}_X \subset \mathrm{Top}_X$ die volle Unterkategorie aller étalen Räume über X und $\mathrm{Ens}_{/X} = \mathrm{gpEns}_{/X} \subset \mathrm{pEns}_{/X}$ die volle Unterkategorie aller Garben alias Garbenprägarben und betrachten das Diagramm von Funktoren

$$\begin{tikzcd} \text{ét}\mathrm{Top}_X \arrow[r, shift left, "\mathcal{S}"] \arrow[r, phantom, "\approx"] & \mathrm{gpEns}_{/X} \arrow[l, shift left, "\text{ét}"] \arrow[r, shift left, "\text{ét}"] & \mathrm{Top}_X \arrow[l, shift left, "\mathcal{S}"] \end{tikzcd}$$

Oben steht dabei immer der Linksadjungierte, auf der rechten Seite wegen unserer allgemeinen Adjunktion 19.2.2.25, und auf der linken Seite, weil die Funktoren zueinander quasiinverse Äquivalenzen von Kategorien sind. Die Verknüpfung in der oberen Horizontale ist nun isomorph zum Einbettungsfunktor. Die Verknüpfung in der unteren Horizontale wird so ein Rechtsadjungierter des Einbettungsfunktors, den wir die **Étalisierung** nennen und $\text{éts} := \text{ét} \circ \mathcal{S}$ notieren. Zu jeder stetigen Abbildung $Y \to X$ alias $Y \in \mathrm{Top}_X$ können wir so die étale Abbildung $\text{éts}(Y) \in \text{ét}\mathrm{Top}_X$ bilden, die über $Y \to X$ in natürlicher Weise faktorisiert, und gegeben $E \in \text{ét}\mathrm{Top}_X$ faktorisiert jeder Morphismus in $\mathrm{Top}_X(E, Y)$ auf genau eine Weise über $\text{éts}(Y)$. Für Y étale über X ist der natürliche Morphismus ein Isomorphismus $\text{éts}(Y) \xrightarrow{\sim} Y$.

Beispiel 19.2.2.40 (**Konstante Garben**). Der Funktor $\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ens}_{/X}$ der konstanten Garbe aus 19.2.2.10 gegeben durch $M \mapsto M_X$ ist linksadjungiert zum Funktor Γ der globalen Schnitte vermittels der durch die offensichtlichen Abbildungen $M \to \Gamma M_X$ induzierten Bijektionen

$$\mathrm{Ens}_{/X}(M_X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(M, \Gamma\mathcal{F})$$

Das folgt sofort aus unserem Satz 19.2.2.17 über Garben und ihre étalen Räume. Das Exponentialgesetz für Mengen induziert sogar für jeden Raum E über X und jede diskrete Menge M eine Bijektion $\mathrm{Top}_X(M \times X, E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(M, \mathrm{Top}_X(X, E))$. Für $X \neq \emptyset$ ist unser Funktor $(M \mapsto M_X)$ treu und für X zusammenhängend sogar volltreu. Eine Garbe von Mengen heißt **konstant**, wenn sie zu einer Garbe der Gestalt M_X isomorph ist. Bezeichne $\mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/X} \subset \mathrm{Ens}_{/X}$ die volle Unterkategorie der konstanten Garben. Ist X zusammenhängend, so liefert unser Funktor $M \mapsto M_X$ mithin eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Ens} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/X}$$

Die Garbe M_X für die einpunktige Menge M ist das finale Objekt von $\mathrm{Ens}_{/X}$. Wir notieren es auch $\mathrm{ens}_{/X}$. Analoges gilt für Garben von Gruppen und Ringen. Insbesondere ist der Funktor $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ gegeben durch $(A \mapsto A_X)$ linksadjungiert zum Funktor der globalen Schnitte und treu für $X \neq \emptyset$ und volltreu für X zusammenhängend. Die Objekte seines wesentlichen Bildes heißen **konstante abelsche Garben**. Notieren wir $\mathrm{Ab}^{\mathrm{k}}_{/X} \subset \mathrm{Ab}_{/X}$ Kategorie der konstanten abelschen Garben aus X, so liefert unser Funktor für zusammenhängendes X eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Ab} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ab}^{\mathrm{k}}_{/X}$$

Übungen

Übung 19.2.2.41. Sei X ein Raum und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ eine Mengengarbe. Gibt es eine Teilmenge $M \subset \mathcal{F}(X)$ mit $M \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_x \ \forall x \in X$, so ist $\mathcal{F}$ eine konstante Garbe.

Übung 19.2.2.42 (**Verallgemeinerte Garbifizierung**). Gegeben ein topologischer Raum X mit einer Basis $\mathcal{B}$ der Topologie zeige man, daß das Vorschalten von $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathrm{Off}(X)$ einen volltreuen Funktor

$$\mathrm{Ens}_{/X} \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(\mathcal{B}^{\mathrm{opp}}, \mathrm{Ens})$$

liefert und daß auch dieser Funktor einen Linksadjungierten besitzt. Hinweis: Man konstruiert den Linksadjungierten analog vor wie im Fall $\mathcal{B} = \mathrm{Off}(X)$. Man mag einen Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{B}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ens}$ eine **Prägarbe auf** $\mathcal{B}$ nennen und unseren Linksadjungierten die **Garbifizierung**.

Übung 19.2.2.43. Gegeben ein Schnitt einer étalen Abbildung ist die Menge aller Punkte, an denen er stetig ist, stets offen.

Übung 19.2.2.44 (**Produkte und Koprodukte von Garben**). In der Kategorie der Garben auf einem topologischen Raum gibt es beliebige Produkte. Diese stimmen überein mit den Produkten in der Kategorie der Prägarben, aber der étale Raum eines Produkts ist im Fall unendlicher Produkte nicht notwendig das Faserprodukt der étalen Räume. In der Kategorie der Garben auf einem topologischen Raum gibt es beliebige Koprodukte. Diese stimmen überein mit den Koprodukten in der Kategorie der Räume über der Basis, aber nicht mit Koprodukten in der Kategorie der Prägarben.

Weiterführende Übung 19.2.2.45 (**Gruppengarben als Gruppenobjekte**). Sei ein fester topologischer Raum X gegeben. Wir erinnern aus 9.1.2.1 die Konzepte der Monoidobjekte, Abmonoidobjekte, Gruppenobjekte und abelschen Gruppenobjekte in einer Kategorie mit endlichen Produkten. Man konstruiere Isomorphismen von Kategorien

$$\mathrm{Mon}(\mathrm{Ens}_{/X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mon}_{/X} \quad \mathrm{Grp}(\mathrm{Ens}_{/X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Grp}_{/X} \quad \mathrm{Ab}(\mathrm{Ens}_{/X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/X}$$

zwischen der Kategorie der Monoidobjekte der Kategorie der Mengengarben und der Kategorie der Garben von Monoiden und dergleichen.

Übung 19.2.2.46 (**Morphismen aus dem leeren Produkt**). Das leere Produkt alias finale Objekt in der Kategorie $\mathrm{Ens}_{/X}$ der Garben auf einem topologischen Raum X ist die konstante Garbe $\mathrm{ens}_{/X}$ mit $\mathrm{id} : X \to X$ als étalem Raum. Das Auswerten auf dem einzigen Schnitt der konstanten Garbe liefert für jede weitere Garbe $\mathcal{F}$ eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/X}(\mathrm{ens}_{/X}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X; \mathcal{F})$$

Übung 19.2.2.47 (**Multihom der kartesischen Schmelzkategorie der Garben**). In der kartesischen Schmelzkategorie $\mathrm{kart}(\mathrm{Ens}_{/X})$ der Garben auf einem topologischen Raum X erhält man ein Multihom durch die Vorschrift

$$(\mathcal{G} \Rrightarrow \mathcal{F})(U) := \mathrm{Ens}_{/U}(\mathcal{G}_1|_U \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{G}_r|_U, \mathcal{F}|_U)$$

für $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{G}_r$ und $U \Subset X$. In dieser Terminologie können wir die Beschreibung der globalen Schnitte aus der vorhergehenden Übung auch umschreiben zu einer ausgezeichneten Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/X}(\curlyvee, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X; \mathcal{F})$$

zwischen den Leerverschmelzungen nach $\mathcal{F}$ und den globalen Schnitten von $\mathcal{F}$.

Übung 19.2.2.48. In der Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum gibt es beliebige Produkte, und diese stimmen überein mit den Produkten in der Kategorie der Prägarben. Die Konstruktion direkter Summen diskutieren wir in 19.2.6.6.

Übung 19.2.2.49 (**Halm von Produkt und Produkt der Halme**). Der Halm eines Produkts von Garben ist nicht notwendig das Produkt der Halme: Zum Beispiel betrachte man auf $\mathbb{R}$ das Produkt der Wolkenkratzer mit Halm K an den Stellen $1/n$ mit $n \geq 1$ und zeige, daß sein Halm im Ursprung der Quotient $\left(\prod_{n\geq 1} K\right)/\left(\bigoplus_{n\geq 1} K\right)$ ist. Oder man betrachte auf $\mathbb{R}$ das Produkt der Garben $\mathcal{F}_n$ mit étalen Räumen den disjunkten Vereinigungen $\mathbb{R} \sqcup (-1/n, 1/n)$ für natürliche Zahlen $n \geq 1$ und den offensichtlichen Abbildungen nach $\mathbb{R}$. Im Fall endlicher Produkte ist aber der étale Raum des Produkts in der Tat das Faserprodukt der étalen Räume der Faktoren.

Ergänzende Übung 19.2.2.50. Sei $f : Y \to X$ stetig und $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eine offene Überdeckung. Man zeige: Genau dann ist f étale, wenn $f : f^{-1}(U) \to U$ étale ist für alle $U \in \mathcal{U}$.

Ergänzende Übung 19.2.2.51. Man zeige, daß die Halme der Wolkenkratzergarbe $A_{(x)}$ gerade die Menge A selbst sind an allen Stellen, die im Abschluß des Punktes x liegen, und daß sie sonst einelementig sind.

Ergänzende Übung 19.2.2.52. Gegeben ein topologischer Raum X mit einer offenen Teilmenge $U \Subset X$ ist die Einbettung étale und mithin der étale Raum einer Garbe von Mengen. Deren Halme sind einelementig an allen Punkten $x \in U$ und leer an allen Punkten $x \notin U$. Im Fall eines offenen aber nicht abgeschlossenen Punktes ist diese Garbe damit „stärker lokalisiert“ als die Wolkenkratzergarbe an besagtem Punkt.

Übung 19.2.2.53. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$ ein Punkt. Der Halmfunktor $\mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x$ hat als Rechtsadjungierten den Wolkenkratzerfunktor $A \mapsto A_{(x)}$. Sehr viel allgemeinere Resultate in dieser Richtung werden wir in 19.4.3.13 kennenlernen.

Ergänzende Übung 19.2.2.54 (**Garben auf teilgeordneten Mengen**). Sei eine teilgeordnete Menge $(A, \leq)$ gegeben. Wir versehen sie mit ihrer Ordnungstopologie nach 15.1.1.24, in der also genau die Teilmengen offen sind, die mit einem Element auch jedes kleinere enthalten. Wir versehen sie auch mit der durch die Teilordnung gegebenen Kategorienstruktur im Sinne von 4.7.1.8, Morphismen gehen hier von größeren zu kleineren Objekten. Man zeige, daß wir eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Ens}_{/A} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Cat}(A, \mathrm{Ens})$$

erhalten zwischen der Kategorie der Garben auf der Menge A mit ihrer Ordnungstopologie und der Kategorie der Funktoren von A in die Kategorie der Mengen, indem wir zu jeder Garbe $\mathcal{F}$ den Funktor bilden, der jedem Punkt $x \in A$ seinen Halm $\mathcal{F}_x$ und jedem Morphismus $x \geq y$ die von $x \in \bar{y}$ nach 19.2.2.22 induzierte Generisierungsabbildung $\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_y$ zwischen den Halmen zuordnet.

Übung 19.2.2.55. Auf einem zusammenhängenden Raum X ist das Bilden des Halms an einem beliebigen aber festen Punkt eine Äquivalenz zwischen der vollen Unterkategorie in $\mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/X} \subset \mathrm{Ens}_{/X}$ der konstanten Garben auf X und der Kategorie der Mengen. Auf einem einfach zusammenhängenden Raum ist jede lokal konstante Garbe konstant. Hinweis: Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Hochhebungen aus der Überlagerungstheorie 16.3.4.10 und 16.3.4.13. Ich ergänze, daß nach 16.5.3.7 jeder zusammenziehbare Raum einfach zusammenhängend ist.

Übung 19.2.2.56. Ist $\mathcal{F}$ eine abelsche Prägarbe, so ist die Garbifizierung $\mathcal{F}^+$ in natürlicher Weise eine abelsche Garbe und wir erhalten so einen Linksadjungierten des Einbettungsfunktors $\mathrm{Ab}_{/X} \hookrightarrow \mathrm{pAb}_{/X}$.

Übung 19.2.2.57. Sei $\mathcal{F}$ eine abelsche Prägarbe. Genau dann wird ein Schnitt $s \in \mathcal{F}(V)$ in der Garbifizierung zu Null, wenn es eine offene Überdeckung $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ von V gibt mit $s|U = 0$ für alle $U \in \mathcal{U}$.

Übung 19.2.2.58. Für jede Mengengarbe $\mathcal{F}$ induziert der kanonische Morphismus in die Garbifizierung $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ Bijektionen auf allen Halmen.

Übung 19.2.2.59. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Mengen auf einem topologischen Raum X und sei $K \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Stimmen die Restriktionen zweier globaler Schnitte $s, t \in \mathcal{F}(X)$ auf K überein, so stimmen bereits ihre Restriktionen auf eine offene Umgebung U von K in X überein.

Übung 19.2.2.60. Gegeben ein topologischer Raum X hat das Vergessen der Addition $\mathrm{pAb}_{/X} \to \mathrm{pEns}_{/X}$ als Linksadjungierten den Funktor der **freien abelschen Prägarbe**, der einer Prägarbe von Mengen $\mathcal{F} \in \mathrm{pEns}_{/X}$ mit $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ die Prägarbe $\mathrm{p}\mathbb{Z}\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen zuordnet, die gegeben wird durch $U \mapsto \mathbb{Z}(\mathcal{F}(U))$ mit $\mathbb{Z}M$ der freien abelschen Gruppe über einer Menge M. Der Vergißfunktor $\mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{pEns}_{/X}$ hat folglich als Linksadjungierten den Funktor der **freien abelschen Garbe** $\mathcal{F} \mapsto \mathbb{Z}\mathcal{F} := (\mathrm{p}\mathbb{Z}\mathcal{F})^+$, die wir erhalten als die Garbifizierung der freien abelschen Prägarbe. Der Vergißfunktor $\mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ens}_{/X}$ hat denselben Linksadjungierten.

Übung 19.2.2.61. Gegeben X ein lokal kompakter Hausdorffraum betrachte man die Kategorie Komp_X der kompakten Teilmengen von X mit den Inklusionen als Morphismen. Wir erhalten dann einen volltreuen Funktor

$$\mathcal{S}^{\mathrm{c}} : \mathrm{Ens}_{/X} \hookrightarrow \mathrm{Cat}(\mathrm{Komp}_X^{\mathrm{opp}}, \mathrm{Ens})$$

durch die Vorschrift $\mathcal{S}^{\mathrm{c}} : \mathcal{F} \mapsto (K \mapsto \Gamma(K; \mathcal{F}))$. Hinweis: Man konstruiere zu einem Morphismus rechts eine Abbildung auf den étalen Räumen links und zeige deren Stetigkeit.

Übung 19.2.2.62. Gegeben $X \supset Z$ ein topologischer Raum mit einer dichten Teilmenge läßt sich jeder stetige Schnitt von Z in eine konstante Garbe auf X stetig auf eine offene Teilmenge von X fortsetzen. Das habe ich von Olaf Schnürer gelernt.

Ergänzende Übung 19.2.2.63 (**Nichtfortsetzbarkeit in Hausdorffräumen**). Hier kommt ein Beispiel für einen Schnitt einer Garbe auf einer Teilmenge eines Hausdorffraums, der sich nicht stetig auf eine offene Umgebung unserer Teilmenge fortsetzen läßt. Man sucht einen Raum X mit einer diskreten abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ derart, daß es keine paarweise disjunkten offenen Umgebungen $U_a \Subset X$ der Punkte von A gibt. Dann ist $\bigsqcup_{a \in A} X \backslash (A \backslash a) \to X$ eine étale Abbildung und $a \mapsto a \in X \backslash (A \backslash a)$ ein stetiger Schnitt auf A, der nicht stetig auf eine offene Umgebung von A fortgesetzt werden kann. Man erhält ein mögliches Paar $A \subset X$, indem man $X := \mathbb{R}$ setzt und $A := \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \{0\}$ und die kleinste Topologie auf $\mathbb{R}$ betrachtet, die die natürliche Topologie umfaßt und bei der zusätzlich $\mathbb{R} \backslash \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ offen ist. Das alles habe ich von Martin Ziegler gelernt.

19.2.3 Kerne und Kokerne in Kategorien

19.2.3.1. Im folgenden wird es sich als nützlich erweisen, in der Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum homologische Algebra zu treiben. In diesem Abschnitt beginnen wir damit, für dieses Vorhaben einen begrifflichen Rahmen zu zimmern. Bei vielen konkreten Beispielen wie etwa der Kategorie aller abelschen Gruppen muß man sich, wenn man es ganz genau nimmt, ein Universum hinzudenken und erst die Gesamtheit aller Strukturen der fraglichen Art, deren Grundmengen zu besagtem Universum gehören, bilden dann eine Kategorie im Sinne unserer Definitionen.

Definition 19.2.3.2. Ein Objekt einer Kategorie heißt ein **Nullobjekt**, wenn es final und initial ist. Existiert ein Nullobjekt, so ist es eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphimus. Wir sprechen deshalb meist von **dem** Nullobjekt und notieren es 0. Gegeben zwei Objekte A, B in einer Kategorie mit Nullobjekt nennen wir den Morphismus $A \to B$, der über das Nullobjekt faktorisiert, den **Nullmorphismus** und notieren ihn $0 : A \to B$.

Beispiel 19.2.3.3. In der Kategorie Grp der Gruppen ist jede einelementige Gruppe ein Nullobjekt. In der Kategorie Mon der Monoide ist jedes einelementige Monoid ein Nullobjekt. In der Kategorie Ens^* der bepunkteten Mengen ist jede einpunktige Menge final und initial, als da heißt, ein Nullobjekt. Dasselbe gilt in der Kategorie Top^* der bepunkteten topologischen Räume. Noch allgemeiner ist für jede Kategorie $\mathcal{C}$ mit finalem Objekt pt in der Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{pt}}$ aller Objekte unter pt die Identität $\mathrm{pt} \to \mathrm{pt}$ ein Nullobjekt.

Definition 19.2.3.4. Sei $f : B \to C$ ein Morphismus in einer Kategorie mit Nullobjekt.

1. Ein **Kern** von f ist ein Morphismus $i : (\ker f) \to B$ mit $fi = 0$ derart, daß jeder Morphismus $g : A \to B$ mit $fg = 0$ eindeutig faktorisiert über i, als da heißt, es gibt genau einen Morphismus $\tilde{g} : A \to (\ker f)$ mit $g = i\tilde{g}$;

2. Ein **Kokern** von f ist dual ein Morphismus $p : C \to (\operatorname{cok} f)$ mit $pf = 0$ derart, daß jeder Morphismus $g : C \to D$ mit $gf = 0$ eindeutig faktorisiert über $p : C \to (\operatorname{cok} f)$;

3. Einen Kokern eines Kerns von f nennen wir auch ein **Bild** von f und notieren es $B \to (\operatorname{im} f)$;

4. Einen Kern eines Kokerns von f nennen wir dual ein **Kobild** von f und notieren es $(\operatorname{coim} f) \to C$.

19.2.3.5. Per definitionem sind Kerne und Kokerne und ebenso Bilder und Kobilder eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus, falls sie existieren. Wir sprechen deshalb meist von *dem* Kern, *dem* Kokern etc.

Definition 19.2.3.6. Ein Morphismus $g : B \to C$ in einer Kategorie heißt ein **Monomorphismus** oder **Mono** und als Adjektiv **mono**, wenn für zwei beliebige Morphismen $f, f' : A \to B$ aus $gf = gf'$ schon folgt $f = f'$. Wir notieren Monomorphismen oft $\hookrightarrow$.

Definition 19.2.3.7. Ein Morphismus $g : B \to C$ in einer Kategorie heißt ein **Epimorphismus** oder **Epi** und als Adjektiv **epi**, wenn für zwei beliebige Morphismen $h, h' : C \to D$ aus $hg = h'g$ schon folgt $h = h'$. Wir notieren Epimorphismen oft $\twoheadrightarrow$.

19.2.3.8. Gegeben eine Kategorie mit Nullobjekt und eine Objektfamilie $(X_i)_{i \in I}$, für die Koprodukt und Produkt existieren, können wir einen Morphismus

$$\varphi : \bigsqcup X_i \to \prod X_i$$

angeben durch die Bedingung $\mathrm{pr}_i \circ \varphi \circ \mathrm{in}_i = \mathrm{id}\ \forall i$ und $\mathrm{pr}_i \circ \varphi \circ \mathrm{in}_j = 0$ für $i \neq j$. Wir nennen ihn den **natürlichen Morphismus**.

Übungen

Übung 19.2.3.9. Gegeben eine Kategorie mit Nullobjekt ist die Verknüpfung von rechts oder links eines Nullmorphismus mit einem anderen Morphismus stets wieder ein Nullmorphismus.

Übung 19.2.3.10. Die Verknüpfung von zwei Monos ist mono. Ist eine Verknüpfung hg mono, so auch g. Die Verknüpfung von zwei Epis ist epi. Ist eine Verknüpfung gf epi, so auch g.

Übung 19.2.3.11. Ein Funktor L mit Rechtsadjungiertem R ist genau dann treu, wenn die Einheiten der Adjunktion $M \to RLM$ alle Monomorphismen sind. Ein Funktor R mit Linksadjungiertem L ist genau dann treu, wenn die Koeinheiten der Adjunktion $LRM \to M$ alle Epimorphismen sind.

Übung 19.2.3.12. Ist in einem kartesischen Diagramm ein Ausgangsmorphismus mono, so auch der induzierte gegenüberliegende Morphismus aus dem Faserprodukt. Man formuliere auch die duale Aussage.

Übung 19.2.3.13. In einer Kategorie mit Nullobjekt zeige man die folgenden Aussagen und formuliere ihre Dualen: (1) Der Kern eines Nullmorphismus ist die Identität auf dem Ausgangsobjekt. Ein Morphismus mit Kern 0 induziert einen Isomorphismus auf sein Bild. (2) Besitzt $f : A \to B$ einen Kern und ist g :

$B \to C$ ein Mono, so haben wir $\ker f = \ker gf$. (3) Gegeben ein kartesisches Diagramm ist jeder Kern eines Morphismus im Diagramm auch ein Kern des gegenüberliegenden Morphismus.

Übung 19.2.3.14. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt. Die volle Unterkategorie von $\mathcal{C}_X$ aller Monomorphismen nach X notieren wir $\mathcal{C}_{\subset X}$ und nennen sie die **Kategorie der Monos nach** X. Man zeige: In der Kategorie der Monos nach X gibt es zwischen je zwei Objekten höchstens einen Morphismus. Gibt es insbesondere Morphismen in beide Richtungen $Y \to Z$ und $Z \to Y$, so sind diese zueinander inverse Isomorphismen. Eine Isomorphieklasse in $\mathcal{C}_{\subset X}$ nennen wir ein **Unterobjekt von** X oder ausführlicher ein **kategorisches Unterobjekt von** X. Auf der Menge $\mathrm{Unt}(X)$ der Unterobjekte von X erhalten wir eine Teilordnung durch die Vorschrift, daß $[Y] \leq [Z]$ gilt genau dann, wenn es einen Morphismus $Y \to Z$ in $\mathcal{C}_X$ gibt. Vielfach lassen wir die eckigen Klammern in der Notation von Unterobjekten aber auch weg.

19.2.3.15 (**Unter-was-auch-immer**). Die Terminologie ist hier nicht vollständig kohärent. Untergruppen, Untervektorräume und Unterkörper sind im Wesentlichen dasselbe wie kategorische Unterobjekte in der entsprechenden Kategorie. Untermannigfaltigkeiten oder Untervarietäten dahingegen sind es nicht.

19.2.4 Präabelsche Kategorien

19.2.4.1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekt. Wir erinnern die Definition 19.2.3.4 von Kern, Bild, Kokern und Kobild. Per definitionem sind Kerne stets Monos und Kokerne stets Epis. Für jeden Morphismus $f : A \to B$ mit Kern, Bild, Kokern und Kobild gibt es genau einen Morphismus $\mathrm{im}\, f \to \mathrm{coim}\, f$, mit dem das folgende Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{array}{ccccc} \ker f & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & \mathrm{im}\, f \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{cok}\, f & \twoheadleftarrow & B & \hookleftarrow & \mathrm{coim}\, f \end{array}$$

Definition 19.2.4.2. Eine Kategorie heißt **präabelsch** genau dann, wenn sie (1) ein Nullobjekt besitzt, wenn (2) jeder Morphismus einen Kern und einen Kokern hat und wenn zusätzlich (3) für jeden Morphismus f der induzierte Morphismus nach 19.2.4.1 ein Isomorphismus $\mathrm{im}\, f \xrightarrow{\sim} \mathrm{coim}\, f$ ist.

Ergänzung 19.2.4.3 (**Diskussion der Terminologie**). Iversen [Ive87] nennt unsere präabelschen Kategorien exakt und übernimmt damit in etwa die Terminologie von Buchsbaum [Buc55], der allerdings von seinen exakten Kategorien etwas mehr fordert als Iversen. In der Literatur versteht man unter einer exakten Kategorie inzwischen fast immer abweichend davon eine exakte Kategorie im Sinne von

Quillen [Qui73]. Die Terminologie „präabelsch“ führe ich ein, um diese Inkonsistenzen aufzulösen. Wir werden in 19.3.1 in beliebigen präabelschen Kategorien zu jeder kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen die lange exakte Homologiesequenz herleiten.

Beispiele 19.2.4.4. Die Kategorie aller abelschen Gruppen ist präabelsch. Die Kategorie aller Gruppen besitzt zwar ein Nullobjekt und zu jedem Morphismus Kern und Kokern, ist jedoch nicht präabelsch. Die Kategorie aller Moduln über einem festen Grundring ist präabelsch.

Beispiel 19.2.4.5. Die opponierte Kategorie einer präabelschen Kategorie ist auch eine präabelsche Kategorie.

Definition 19.2.4.6. Eine Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ in einer präabelschen Kategorie heißt **exakt**, wenn gilt $gf = 0$ und wenn zusätzlich die induzierte Abbildung $\operatorname{im} f \to \ker g$ ein Isomorphismus ist. Sie heißt eine **kurze exakte Sequenz**, wenn zusätzlich f mono ist und g epi. Eine längere Sequenz heißt exakt, wenn sie exakt ist an jeder Stelle.

Beispiel 19.2.4.7. Eine exakte Sequenz ist offensichtlich auch exakt in der opponierten Kategorie.

Definition 19.2.4.8. Ein Funktor zwischen präabelschen Kategorien heißt **linksexakt**, wenn er Kerne zu Kernen macht; **rechtsexakt**, wenn er Kokerne zu Kokernen macht; und **exakt**, wenn er linksexakt und rechtsexakt ist.

Übungen

Übung 19.2.4.9. In einer präabelschen Kategorie zeige man die folgenden Aussagen. (1) Für einen Morphismus $f : A \to B$ sind gleichbedeutend: (a) f ist epi, (b) $\operatorname{cok} f = 0$ und (c) $\operatorname{coim} f \xrightarrow{\sim} B$. Man formuliere auch die duale Aussage. (2) Genau dann ist ein Morphismus ein Isomorphismus, wenn er mono und epi ist. (3) Ist $A \twoheadrightarrow B \hookrightarrow C$ eine Komposition eines Epi mit einem Mono, so ist B das Bild dieser Verknüpfung.

Übung 19.2.4.10. Ein Funktor F zwischen präabelschen Kategorien ist genau dann rechtsexakt, wenn für jede exakte Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ die Sequenz $FA \to FB \to FC \to 0$ exakt ist.

Übung 19.2.4.11. Sowohl rechtsexakte als auch linksexakte Funktoren bilden das Nullobjekt stets auf das Nullobjekt ab.

Übung 19.2.4.12. Besitzt ein Funktor zwischen präabelschen Kategorien einen linksadjungierten Funktor, so ist er linksexakt. Besitzt ein Funktor zwischen präabelschen Kategorien einen rechtsadjungierten Funktor, so ist er rechtsexakt.

Übung 19.2.4.13. Eine Sequenz $\ldots \to A^{q-1} \to A^q \to A^{q+1} \to \ldots$ in einer präabelschen Kategorie ist exakt genau dann, wenn für die jeweiligen Faktorisierungen $A^{n-1} \twoheadrightarrow K^q \hookrightarrow A^q$ in einen Epi gefolgt von einem Mono die offensichtlichen Sequenzen $K^q \hookrightarrow A^q \twoheadrightarrow K^{q+1}$ kurz exakt sind für alle q.

Ergänzende Übung 19.2.4.14. Eine **Filtrierung** F auf einem Vektorraum V ist eine Folge von Teilräumen

$$\ldots \supset F^{\geq n}V \supset F^{\geq n+1}V \supset \ldots$$

mit $n \in \mathbb{Z}$. Wir machen die filtrierten Vektorräume zu einer Kategorie, indem wir die filtrierungserhaltenden linearen Abbildungen als Morphismen nehmen. Man zeige, daß es in dieser Kategorie Kerne und Kokerne gibt, daß aber die kanonische Abbildung $\operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ kein Isomorphismus sein muß. Ist diese Abbildung doch ein Isomorphismus, so heißt f **strikt verträglich mit den Filtrierungen**.

19.2.5 Additive und abelsche Kategorien

Definition 19.2.5.1. Eine **additive Struktur** auf einer Kategorie ist die Vorgabe einer Verknüpfung „Addition“ auf allen Morphismenräumen derart, daß sie alle abelsche Gruppen werden und die Kompositionen von Morphismen bilineare Abbildungen. Eine Kategorie mit additiver Struktur nennen wir eine Ab**-Kategorie**. Ein Funktor zwischen Ab-Kategorien heißt ein Ab**-Funktor**, wenn er Gruppenhomomorphismen auf den Morphismenräumen induziert.

19.2.5.2 (**Diskussion der Terminologie**). In **??** führen wir den Begriff einer „in einer Schmelzkategorie angereicherten Kategorie“ ein. Eine Ab-Kategorie erweist sich in dieser Terminologie als eine in der Schmelzkategorie der abelschen Gruppen angereicherte Kategorie. In wieder anderen Quellen wird eine Ab-Kategorie als eine „prä-additive Kategorie“ bezeichnet. Ich bezeichne eine Ab-Kategorie in manchen Kontexten auch als ein **Ringoid**.

Beispiel 19.2.5.3 (**Ein-Objekt-Kategorien mit additiver Struktur**). Zu jedem Ring R können wir die Ein-Objekt-Kategorie $[R]$ mit einem einzigen Objekt $*$ bilden, deren Morphismen eben genau die Elemente von besagtem Ring sind, mit der Multiplikation als Verknüpfung von Morphismen. Die Addition von Ringelementen definiert dann auf der Ein-Objekt-Kategorie $[R]$ eine additive Struktur. Umgekehrt ist für jedes Objekt X einer Ab-Kategorie $\mathcal{C}$ die Menge $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, X)$ mit der von der Kategorienstruktur herkommenden Verknüpfung als Multiplikation und der von der additiven Struktur herkommenden Verknüpfung als Addition ein Ring. In diesem Sinne ist also eine Ab-Kategorie mit einem einzigen Objekt nichts anderes als ein Ring.

Definition 19.2.5.4. Eine Kategorie heißt **additiv**, wenn sie endliche Produkte hat und mit einer additiven Struktur versehen werden kann. Eine Kategorie heißt **abelsch**, wenn sie additiv und präabelsch ist.

19.2.5.5. Einen Ab-Funktor zwischen additiven Kategorien nennt man manchmal auch einen **additiven Funktor**.

19.2.5.6. Wir werden in 19.2.5.11 zeigen, daß es auf Kategorien mit endlichen Produkten höchstens eine additive Struktur geben kann. Bei unserer Forderung nach endlichen Produkten mitgemeint ist die Forderung nach einem finalen Objekt als dem Produkt über die leere Familie. Andere äquivalente Definitionen und viele weitere Resultate findet man in [Fre66, Bor94, Gab62, HS71]. Insbesondere findet man in [Fre66] einen Beweis der Tatsache, daß jede präabelsche Kategorie mit endlichen Produkten und Koprodukten bereits abelsch ist.

Beispiel 19.2.5.7. Die Kategorie der abelschen topologischen Gruppen ist additiv, aber nicht abelsch. So ist etwa für die Abbildung $\mathbb{R}^{\mathrm{disc}} \to \mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie nach $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie der natürliche Morphismus vom Bild zum Kobild kein Isomorphismus von topologischen Gruppen.

Lemma 19.2.5.8 (**Koprodukte und Produkte in** Ab**-Kategorien**). *In einer* Ab-*Kategorie seien Objekte* $Z, X_1, \ldots X_n$ *gegeben.*

1. *Finden wir Morphismen* $i_\nu : X_\nu \to Z$, $p_\nu : Z \to X_\nu$ *mit* $p_\nu i_\nu = \mathrm{id}$ *und* $p_\nu i_\mu = 0$ *falls* $\nu \neq \mu$ *und* $\sum i_\nu p_\nu = \mathrm{id}_Z$, *so ist* (Z, p_ν) *ein Produkt der* X_ν *und* (Z, i_ν) *ein Koprodukt der* X_ν*;*

2. *Ist für Morphismen* $p_\nu : Z \to X_\nu$ *das Datum* (Z, p_ν) *ein Produkt der* X_ν *und erklären wir* $i_\nu : X_\nu \to Z$ *durch* $p_\nu i_\nu = \mathrm{id}$ *und* $p_\nu i_\mu = 0$ *falls* $\nu \neq \mu$, *so gilt* $\sum i_\nu p_\nu = \mathrm{id}_Z$*;*

3. *Ist für Morphismen* $i_\nu : X_\nu \to Z$ *das Datum* (Z, i_ν) *ein Koprodukt der* X_ν *und erklären wir* $p_\nu : Z \to X_\nu$ *durch* $p_\nu i_\nu = \mathrm{id}$ *und* $p_\nu i_\mu = 0$ *falls* $\nu \neq \mu$, *so gilt* $\sum i_\nu p_\nu = \mathrm{id}_Z$.

19.2.5.9. Salopp gesprochen stimmen bei einer Ab-Kategorie also endliche Produkte und endliche Koprodukte überein. Insbesondere sind in einer Ab-Kategorie die finalen Objekte dieselben wie die initialen Objekte und können dadurch charakterisiert werden, daß bei ihnen die Identität mit dem Nullendomorphismus zusammenfällt. Weiter folgt unmittelbar, daß jeder Ab-Funktor von Ab-Kategorien mit endlichen Produkten und endlichen Koprodukten verträglich ist.

Ergänzung 19.2.5.10. Man kann ähnlich zeigen, daß jede Kategorie mit endlichen Produkten und Koprodukten, bei der die offensichtlichen Morphismen vom Koprodukt zum Produkt stets Isomorphismen sind, in eindeutiger Weise angereichert ist in kommutativen Monoiden.

Beweis. Wir zeigen in Teil 1, daß Z ein Produkt ist. Gegeben Morphismen $f, g : T \to Z$ folgt aus $p_\nu f = p_\nu g$ bereits $f = \sum i_\nu p_\nu f = \sum i_\nu p_\nu g = g$. Gegeben Morphismen $f_\nu : T \to X_\nu$ gilt für $f := \sum i_\nu f_\nu$ umgekehrt $p_\nu f = f_\nu$ Das zeigt, daß Z ein Produkt ist. Die Koprodukteigenschaft zeigt man genauso. Umgekehrt hat in Teil 2 der Morphismus $f := \sum i_\nu p_\nu : Z \to Z$ die Eigenschaft $p_\nu f = p_\nu$ und damit folgt $f = \mathrm{id}_Z$. Teil 3 zeigt man genauso. □

Lemma 19.2.5.11 (Eindeutigkeit der additiven Struktur). *Auf einer Kategorie mit endlichen Produkten gibt es höchstens eine additive Struktur. Dasselbe gilt opponiert für jede Kategorie mit endlichen Koprodukten.*

Beweis. Zunächst kann, wenn es ein finales Objekt gibt, der Nullmorphismus in jedem Morphismenraum in Bezug auf jede additive Struktur charakterisiert werden als der einzige Morphismus, der über das finale Objekt faktorisiert. Gegeben ein Objekt A und sein Produkt mit sich selber $(A \times A, p_1, p_2)$ hängen also die nach 19.2.5.8 zugehörigen $i_1, i_2 : A \to A \times A$ mit $p_1 i_1 = p_2 i_2 = \mathrm{id}$ und $p_1 i_2 = p_2 i_1 = 0$ nicht von der gewählten additiven Struktur ab und erfüllen für jede additive Struktur $i_1 p_1 + i_2 p_2 = \mathrm{id}_{A \times A}$. Es gibt auch genau ein $s : A \times A \to A$ mit $s i_1 = s i_2 = \mathrm{id}_A$, ja für jede additive Struktur haben wir

$$s = s \circ \mathrm{id}_{A \times A} = s \circ (i_1 p_1 + i_2 p_2) = p_1 + p_2$$

Gegeben $f_1, f_2 : B \to A$ gilt für den Produktmorphismus $f_1 \times f_2 : B \times B \to A \times A$ per definitionem $p_\nu(f_1 \times f_2) = f_\nu q_\nu$ für $q_1, q_2 : B \times B \to B$ die Projektionen und

$$s \circ (f_1 \times f_2) \circ \Delta = (f_1 q_1 + f_2 q_2) \circ \Delta = f_1 + f_2$$

für jede additive Struktur. Das zeigt die behauptete Eindeutigkeit. □

19.2.5.12. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen additiven Kategorien ist genau dann ein Ab-Funktor, wenn er mit endlichen Produkten verträglich ist. In der Tat ist nach 19.2.5.9 bereits jeder Ab-Funktor von Ab-Kategorien mit endlichen Produkten verträglich. Ist umgekehrt ein Funktor von additiven Kategorien mit endlichen Produkten verträglich, so muß er aufgrund der Beschreibung $f_1 + f_2 = s \circ (f_1 \times f_2) \circ \Delta$ der additiven Struktur aus dem Beweis von 19.2.5.11 auch Gruppenhomomorphismen auf den Morphismenräumen induzieren. Insbesondere ist jeder Funktor zwischen additiven Kategorien, der einen Linksadjungierten besitzt, bereits additiv.

19.2.5.13. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen additiven Kategorien ist opponiert auch genau dann ein Ab-Funktor, wenn er mit endlichen Koprodukten verträglich ist. Insbesondere ist jeder Funktor zwischen additiven Kategorien, der einen Rechtsadjungierten besitzt, bereits additiv.

19.2.5.14 (**Matrixnotation für Morphismen zwischen Produkten**). In einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$ sind Morphismen von einem Koprodukt zu einem Produkt $f : \bigsqcup_{i\in I} X_i \to \prod_{j\in J} Y_j$ in Bijektion zu Tupeln $(f_{j,i}) \in \prod_{i,j} \mathcal{C}(X_i, Y_j)$ vermittels $f \mapsto (\mathrm{pr}_j\, f\, \mathrm{in}_i)$. In Ab-Kategorien ist es besonders sinnhaft, Morphismen zwischen endlichen Produkten alias Koprodukten mit angeordneter Indexmenge als Matrizen von Morphismen zwischen den einzelnen Objekten zu schreiben, weil in diesem Fall die Verknüpfung von Morphismen nach 19.2.5.8 durch ein Analogon der Matrixmultiplikation beschrieben werden kann. Wir denken uns dabei unsere Objekttupel als Spalten, ein Morphismus von einem endlichen Koprodukt in ein Objekt wird also durch eine Zeilenmatrix beschrieben und ein Morphismus von einem Objekt in ein endliches Produkt durch eine Spaltenmatrix.

Beispiele 19.2.5.15. Sei R ein Ring. Die Kategorie aller freien R-Moduln von endlichem Rang ist additiv. Die Kategorie aller R-Moduln ist sogar abelsch, ebenso wie die Kategorie der abelschen Prägarben und die Kategorie der abelschen Garben auf einem gegebenen topologischen Raum. Die opponierte Kategorie einer additiven beziehungsweise abelschen Kategorie ist stets auch additiv beziehungsweise abelsch.

Beispiel 19.2.5.16. Ganz allgemeinen ist für jede Kategorie I die Kategorie aller Funktoren von I in eine additive beziehungsweise abelsche Kategorie mit den Transformationen als Morphismen wieder eine additive beziehungsweise abelsche Kategorie. Zum Beispiel ist die Kategorie aller gerichteten Systeme von abelschen Gruppen über einer vorgegebenen teilgeordneten Indexmenge eine abelsche Kategorie. Aus demselben allgemeinen Grund bilden auch die abelschen Prägarben auf einem topologischen Raum eine abelsche Kategorie: Nullobjekt ist Prägarbe, die jeder offenen Menge die triviale Gruppe zuordnet, und der Kern beziehungsweise Kokern eines Morphismus $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ werden gegeben durch

$$\begin{array}{rcll} (\ker f)(U) & = & \ker(\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)) & \forall\ U \Subset X \\ (\operatorname{cok} f)(U) & = & \operatorname{cok}(\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)) & \forall\ U \Subset X \end{array}$$

mit hoffentlich offensichtlichen Restriktionen.

Beispiel 19.2.5.17. Die Kategorie aller Komplexe in einer additiven beziehungsweise abelschen Kategorie $\mathcal{A}$, also aller Sequenzen $\ldots \to A_n \to A_{n+1} \to \ldots$ mit der Eigenschaft, daß die Komposition von je zwei aufeinanderfolgenden Morphismen Null ist, ist mit den „Kettenabbildungen“ als Morphismen eine additive beziehungsweise abelsche Kategorie $\mathrm{Ket}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$. Unsere kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen aus 17.2.2.2 sind genau die kurzen exakten Sequenzen in der abelschen Kategorie $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab})$.

Übungen

Übung 19.2.5.18. Eine volle Unterkategorie einer additiven Kategorie ist additiv genau dann, wenn sie mit jeder endlichen Familie von Objekten auch ein Produkt dieser Familie enthält.

Übung 19.2.5.19. Jeder rechtsexakte und jeder linksexakte Funktor zwischen abelschen Kategorien ist additiv. Jeder Funktor zwischen additiven Kategorien, der einen Rechts- oder Linksadjungierten besitzt, ist additiv.

Übung 19.2.5.20. Gegeben $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie und $T \in \mathcal{A}$ ein Objekt bezeichne $\langle {}_!T \rangle = \langle {}_!T \rangle_\oplus \subset \mathcal{A}$ die kleinste volle Unterkategorie von $\mathcal{A}$, die T enthält und stabil ist unter endlichen Produkten. Wie immer bezeichne $\mathcal{A}(T)$ den Endomorphismenring von T. Man zeige, daß der Funktor $\mathcal{A}(T, \ )$ eine Äquivalenz zwischen $\langle {}_!T \rangle_\oplus$ und $\langle {}_!\mathcal{A}(T) \rangle_\oplus \subset \mathrm{Mod}\text{-}\,\mathcal{A}(T)$ induziert. Im übrigen sind beide Kategorien auch äquivalent zur Matrixkategorie $\mathrm{Mat}(\mathcal{A}(T))$, wie wir sie in 4.7.1.7 für einen beliebigen Ring definiert hatten.

Ergänzende Übung 19.2.5.21. Seien $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie und $E \in \mathcal{A}$ ein Objekt mit der Eigenschaft, daß jedes Objekt von $\mathcal{A}$ isomorph ist zu einem Summanden einer direkten Summe von endlich vielen Kopien von E. So ist der Funktor der Homomorphismen

$$\mathcal{A}(E, \ ) : \mathcal{A} \to \mathrm{Mod}\text{-}\,\mathcal{A}(E)$$

von $\mathcal{A}$ in die Rechtsmoduln über dem Endomorphismenring von E volltreu und alle $\mathcal{A}(E, M)$ sind projektive $\mathcal{A}(E)$-Rechtsmoduln. Hat unsere additive Kategorie $\mathcal{A}$ darüber hinaus **spaltende Idempotente** oder gleichbedeutend die **Karoubi-Eigenschaft**, ist also jeder idempotente Endomorphismus eines Objekts der Projektor einer Zerlegung in eine direkte Summe, so induziert $\mathcal{A}(E, \ )$ eine Äquivalenz von $\mathcal{A}$ mit der Kategorie der endlich erzeugten projektiven $\mathcal{A}(E)$-Rechtsmoduln.

Übung 19.2.5.22 (**Additive Funktoren und idempotente Endomorphismen**). Gegeben ein additiver Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen abelschen Kategorien und ein Objekt $A \in \mathcal{A}$ mit idempotenten Endomorphismus e ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $F(\ker e) \xrightarrow{\sim} \ker(F(e))$ und ebenso ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $F(\operatorname{im} e) \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}(F(e))$.

Übung 19.2.5.23 (**Pullback und pushout in abelschen Kategorien**). In einer abelschen Kategorie erhält man einen pullback eines Winkels gegeben durch $f : X \to Y$ und $p : Z \to Y$ als den Kern von $(f, -p) : X \oplus Z \to Y$. Man beschreibe dual auch den pushout eines Kowinkels. Wichtige Eigenschaften werden in 20.1.5.9 gezeigt.

Übung 19.2.5.24. Seien $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $X \in \mathcal{A}$ ein Objekt. Man zeige, daß in der angeordneten Menge $\mathrm{Unt}(X)$ der Unterobjekte von X jede zweielementige Teilmenge $\{U, V\}$ ein Supremum und ein Infimum besitzt, das wir beschreiben können durch $U + V = \mathrm{im}(i, j) : U \oplus V \to X$ für $i : U \hookrightarrow X$ und $j : V \hookrightarrow X$ sowie $U \cap V = \ker(X \to (X/U \oplus X/V))$.

Übung 19.2.5.25 (**Modularität von Unterobjektverbänden**). Seien $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $X \in \mathcal{A}$ ein Objekt und $U, V \subset X$ Unterobjekte.

1. Man zeige $U \cap V = \ker(V \to X/U)$;

2. Man zeige, daß V und $V + U$ dasselbe Bild in X/U haben. Hinweis: Man zeige, daß das Urbild vom Bild von V in jedem Unterobjekt liegt, das U und V umfaßt;

3. Man zeige, daß für je zwei Unterobjekte $U, V \subset X$ die Komposition $V \hookrightarrow (V + U) \twoheadrightarrow (V + U)/U$ einen Isomorphismus $V/(V \cap U) \xrightarrow{\sim} (V + U)/U$ induziert;

4. Man zeige, daß wir für je zwei Unterobjekte $U, V \subset X$ zueinander inverse Ordnungsisomorphismen

   $$\{A \in \mathrm{Unt}(X) \mid (V \cap U) \subset A \subset V\} \xrightarrow{\sim} \{B \in \mathrm{Unt}(X) \mid U \subset B \subset (V + U)\}$$

   erhalten durch $A \mapsto A + U$ und $B \mapsto B \cap V$.

Nach 3.2.2.15 bilden unsere Unterobjekte also einen modularen Verband und mit den dortigen Argumenten folgt unter der Annahme $U \subset V \subset X$ für beliebige Unterobjekte $A \subset X$ die „modulare Identität“ $(V \cap A) + U = (A + U) \cap V$. Mehr dazu diskutieren wir in 19.6.3.30.

Ergänzende Übung 19.2.5.26. Man verallgemeinere den Satz von Jordan-Hölder aus 7.4.7.12 auf den Fall einer beliebigen abelschen Kategorie.

Übung 19.2.5.27 (**Gruppenobjekte in additiven Kategorien**). In einer additiven Kategorie $\mathcal{B}$ können wir jedes Objekt M auf genau eine Weise zu einem Monoidobjekt 9.1.2.1 machen. Die zugehörige Verknüpfung wird durch die Zeilenmatrix $(\mathrm{id}, \mathrm{id}) : M \oplus M \to M$ gegeben und ist kommutativ. Bis hierher gilt das in großer Allgemeinheit, genauer in jeder „banalen Schmelzkategorie“, vergleiche 18.2.2.4. In unserer Situation wird M sogar ein Gruppenobjekt. A forteriori können wir jedes Objekt M auch auf genau eine Weise zu einem Komonoidobjekt machen. In unserer Situation erhalten wir sogar insgesamt ein Hopfbiabmonoid 18.3.3.6 in der banalen Trennschmelzkategorie 18.1.5.4 unserer additiven Kategorie.

Übung 19.2.5.28 (**Mengenfunktoren auf additiven Kategorien**). Für jeden Funktor $F : \mathcal{B} \to \mathrm{Ens}$ von einer additiven Kategorie in die Kategorie der Mengen, der mit endlichen Produkten verträglich ist, macht die durch Komposition der Sequenz

$$FM \times FM \xrightarrow{\sim} F(M \oplus M) \to FM$$

mit $F((\mathrm{id}, \mathrm{id}))$ als zweiter Abbildung gegebene Verknüpfung die Menge FM zu einer abelschen Gruppe und F wird so zu einem additiven Funktor $F : \mathcal{B} \to \mathrm{Ab}$. Hinweis: 19.2.5.27.

19.2.6 Abelsche Garben als abelsche Kategorie

Satz 19.2.6.1. *1. Die Kategorie der abelschen Garben auf einem festen topologischen Raum ist eine abelsche Kategorie;*

2. Eine Sequenz von abelschen Garben ist exakt genau dann, wenn sie auf allen Halmen exakte Sequenzen von abelschen Gruppen induziert.

19.2.6.2. Der étale Raum der Bildgarbe ist mithin genau das mengentheoretische Bild der auf den étalen Räumen induzierten Abbildung. Nach 16.3.1.14 ist darüberhinaus die Abbildung auf die Bildgarbe étale, also offen und surjektiv und insbesondere auch final.

Beweis. Sicher besitzt unsere Kategorie ein Nullobjekt. Offensichtlich ist der Prägarbenkern eines Morphismus $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von abelschen Garben schon selbst eine Garbe und sogar ein Kern von f in der Kategorie der abelschen Garben. Mit der Exaktheit des filtrierenden Kolimes folgern wir aus dieser Beschreibung, daß für alle $x \in X$ die Sequenz von Halmen

$$0 \to (\ker f)_x \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$$

exakt ist. Der Kokern in der Kategorie der abelschen Prägarben eines Morphismus von abelschen Garben $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist zwar im allgemeinen keine Garbe, aber seine Garbifizierung

$$\mathrm{cok}\, f = (\text{Prägarbenkokern von } f)^+$$

ist ein Kokern von f in der Kategorie der abelschen Garben aufgrund der universellen Eigenschaft der Garbifizierung 19.2.2.56. Da die Garbifizierung die Halme nicht ändert, folgt aus der Exaktheit filtrierender Kolimites wieder, daß für alle $x \in X$ die Sequenz von Halmen

$$\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to (\mathrm{cok}\, f)_x \to 0$$

exakt ist. Wir folgern insbesondere, daß die kanonische Abbildung $\mathrm{im}\, f \to \mathrm{coim}\, f$ auf allen Halmen Isomorphismen induziert. Dann ist sie aber nach 19.2.2.28 schon

ein Isomorphismus und der erste Teil des Satzes folgt. Für einen Garbenhomomorphismus wissen wir bereits, daß der Halm des Kerns der Kern der auf den Halmen induzierten Abbildung ist, und desgleichen für den Kokern. Damit folgt, daß eine exakte Sequenz von abelschen Garben auch exakte Sequenzen auf allen Halmen liefert. Ist umgekehrt $\mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ exakt auf allen Halmen, so ist die Verknüpfung Null nach 19.2.2.28 und die damit definierte kanonische Abbildung vom Bild des ersten Morphismus in den Kern des Zweiten ist ein Isomorphismus wieder nach 19.2.2.28. □

Übungen

Übung 19.2.6.3. Das Bilden der globalen Schnitte ist ein linksexakter Funktor von der Kategorie der abelschen Garben auf einem gegebenen Raum in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Übung 19.2.6.4. Das Bilden des Halms an einem Punkt ist ein exakter Funktor von der Kategorie der abelschen Garben auf einem gegebenen Raum in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Übung 19.2.6.5. Die Garbifizierung ist ein exakter Funktor von der Kategorie der abelschen Prägarben in die Kategorie der abelschen Garben.

Übung 19.2.6.6 (**Der Halm eines Koprodukts ist das Koprodukt der Halme**). In der Kategorie der abelschen Garben auf einem gegebenen Raum existieren direkte Limites alias filtrierende Kolimites, und der Halm eines direkten Limes ist der direkte Limes der Halme. Insbesondere ist jedes Koprodukt, ja jeder filtrierende Kolimes von exakten Sequenzen abelscher Garben wieder eine exakte Sequenz von abelschen Garben. Hinweis: Man garbifiziere das Prägarben-Koprodukt.

Übung 19.2.6.7. Auf einem Raum, in dem alle Punkte abgeschlossen sind, mag man in der Kategorie der abelschen Garben das Koprodukt 19.2.6.6 der Wolkenkratzergarben $\mathbb{Z}$ zu allen Punkten betrachten. Diese Garbe hat an jeder Stelle den Halm $\mathbb{Z}$, ist aber dennoch nicht isomorph zur konstanten Garbe $\mathbb{Z}$.

Übung 19.2.6.8. Ist G eine topologische Gruppe und X ein G-Raum, so ist die Kategorie $\mathrm{Ab}_{/G\backslash X}$ abelsch und das Vergessen der G-Operation ist ein exakter Funktor $\mathrm{Ab}_{/G\backslash X} \to \mathrm{Ab}_{/X}$. Hinweis: 19.2.6.2 mag helfen, um die Stetigkeit der G-Operation auf der Bildgarbe nachzuweisen.

19.2.6.9 (**Nicht-Verträglichkeit des Koprodukts mit globalen Schnitten**). Ist X ein unendlicher diskreter Raum, so ist der Raum der globalen Schnitte der Summe aller Wolkenkratzergarben $\mathbb{Z}_{(x)}$ für $x \in X$ sehr viel größer als das Koprodukt der Räume der globalen Schnitte der Summanden. Das Bilden der globalen Schnitte vertauscht jedoch mit filtrierenden Kolomites auf kompakten Hausdorffräumen und auf noetherschen topologischen Räumen, vergleiche 21.4.2.1 und 19.4.8.21.

Ergänzung 19.2.6.10 (**Nicht-Exaktheit von Produkten von Garben**). In der Kategorie der abelschen Garben auf einem gegebenen Raum existieren Produkte, aber der Halm eines Produkts ist nicht notwendig das Produkt der Halme, wie wir bereits in 19.2.2.49 gesehen haben. Das fürt zu der unangenehmen Erkenntnis, daß ein unendliches Produkt von kurzen exakten Sequenzen von abelschen Garben im allgemeinen keineswegs wieder eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben sein muß.

19.3 Abstrakte homologische Algebra und Garben

In diesem Abschnitt führen wir die abstrakte Sprache der höheren derivierten Funktoren ein und besprechen parallel dazu als motivierendes Beispiel Garbenkohomologie. Ich habe versucht, diese beiden Handlungsstränge insoweit zu entflechten, daß die Abschnitte ohne das Wort „Garbe“ in der Überschrift auch unabhängig gelesen und verstanden werden können.

19.3.1 Die lange exakte Kohomologiesequenz

Definition 19.3.1.1. Gegeben ein Komplex $\ldots \to A^{q-1} \xrightarrow{d^{q-1}} A^q \xrightarrow{d^q} A^{q+1} \to \ldots$ in einer präabelschen Kategorie erklären wir seine q**-te Kohomologie** als

$$\mathcal{H}^q A := \operatorname{cok}(A^{q-1} \to \ker d^q)$$

Satz 19.3.1.2 (Lange exakte Kohomologiesequenz). *Sei $A \overset{f}{\hookrightarrow} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen in einer präabelschen Kategorie. So gilt:*

1. *Es gibt für jedes q genau einen Morphismus $\mathcal{H}^q C \to \mathcal{H}^{q+1} A$, der mit den kanonischen Morphismen von $\ker(d_C \circ g) = \ker(g \circ d_B)$ nach $\mathcal{H}^q C$ beziehungsweise $\mathcal{H}^{q+1} A$ verträglich ist;*

2. *Mit diesen Morphismen erhalten wir eine lange exakte Sequenz*

$$\ldots \to \mathcal{H}^{q-1} C \to \mathcal{H}^q A \to \mathcal{H}^q B \to \mathcal{H}^q C \to \mathcal{H}^{q+1} A \to \ldots$$

Ergänzung 19.3.1.3. Ich kenne den hier gegebenen Beweis aus [Ive87]. Er braucht einige Vorbereitungen und wird erst am Ende dieses Abschnitts gegeben. Alle Anwendungen, die mir in den Sinn kommen, betreffen Kategorien von Moduln über Ringen oder von abelschen Garben. In diesen Fällen kann man Teile des Arguments vereinfachen, indem man sich auf den bereits in 17.2.2.2 behandelten Fall der Kategorie aller abelschen Gruppen stützt, im Fall von Garben durch Betrachtung der Halme.

Lemma 19.3.1.4. *Sei in einer präabelschen Kategorie ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c \\ 0 & \to & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

gegeben. So gilt:

1. *Die induzierte Kernsequenz* $0 \to \ker a \to \ker b \to \ker c$ *ist exakt;*

2. *Ist* c *ein Monomorphismus, so ist auch* $0 \to \operatorname{cok} a \to \operatorname{cok} b$ *exakt.*

Beweis. Teil 1 bleibe dem Leser überlassen, wir zeigen nur Teil 2. Ist c ein Monomorphismus, so folgt aus Teil 1 die Exaktheit der oberen Zeile im kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \ker a & \to & \ker b & \to & 0 & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A & \to & B & \to & \operatorname{cok} f & \to & 0 \end{array}$$

Die duale Aussage zu Teil 1 liefert dann die Exaktheit in der Mitte der oberen Zeile im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \operatorname{im} a & \to & \operatorname{im} b & \to & \operatorname{cok} f & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & & \end{array}$$

Die Exaktheit vorne der oberen Zeile erkennt man aus dem Diagramm. Die rechte Vertikale ist ein Monomorphismus nach unserer Annahme und wir haben uns so auf den Fall zurückgezogen, daß a, b und c alle drei Monomorphismen sind. Unter dieser Voraussetzung sieht man jedoch explizit, daß a ein Kern ist für $A' \to \operatorname{cok} b$ und daraus folgt, daß $A' \twoheadrightarrow \operatorname{cok} a \hookrightarrow \operatorname{cok} b$ die kanonische Faktorisierung in einen Epimorphismus und einen Monomorphismus sein muß. $\square$

Lemma 19.3.1.5 (Schlangenlemma). *Sei in einer präabelschen Kategorie ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \\ 0 & \to & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & & \end{array}$$

gegeben. Wir kürzen $\ker(B \to C') = K$ *und* $\operatorname{cok}(A \to B') = K'$ *ab und behaupten: Es gibt genau einen Morphismus* $\ker c \to \operatorname{cok} a$ *derart, daß*

$$\begin{array}{ccccc} \ker c & \leftarrow & K & \to & B \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \operatorname{cok} a & \to & K' & \leftarrow & B' \end{array}$$

kommutiert, und mit diesem Morphismus erhalten wir eine exakte Sequenz

$$\ker a \to \ker b \to \ker c \to \operatorname{cok} a \to \operatorname{cok} b \to \operatorname{cok} c$$

Beweis. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \ker g & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & 0 & \to & C' & = & C' & \to & 0 \end{array}$$

liefert mit dem vorhergehenden Lemma und seinem Dualen die Exaktheit der obersten Zeile in der nun folgenden Erweiterung unseres Diagramms. Die Exaktheit der untersten Zeile erhält man dual, wir haben also ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} & & A & \to & K & \to & \ker c & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \operatorname{cok} a & \to & K' & \to & C' & & \end{array}$$

Diesem Diagramm sieht man die Existenz und Eindeutigkeit unseres Morphismus $\ker c \to \operatorname{cok} a$ nun unschwer an. Die Exaktheit unserer Sequenz bei $\ker b$ erhält man durch Anwenden von Lemma 19.3.1.4 auf die Diagramme mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \ker f & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & \operatorname{im} f & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \ker f' & \hookrightarrow & A' & \twoheadrightarrow & \operatorname{im} f' & \to & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \operatorname{im} f & \hookrightarrow & B & \to & C \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & \operatorname{im} f' & \hookrightarrow & B' & \to & C \end{array}$$

Um die Exaktheit bei $\ker c$ zu zeigen reicht es, die Exaktheit von

$$\ker b \to \ker c \to K'$$

nachzuweisen. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} A & \to & K & \to & \ker c & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A & \to & B' & \to & K' & \to & 0 \end{array}$$

und wenden ein letztes Mal Lemma 19.3.1.4 an. Da gilt $\ker(K \to B') = \ker b$ folgt $\ker b \twoheadrightarrow \ker(\ker c \to K')$ und wir haben die Exaktheit bei $\ker c$ nachgewiesen. Der Rest des Lemmas folgt mit Dualität. □

Herleitung der langen exakten Homologiesequenz. Wir verwenden das Ergebnis der anschließenden Übung 19.3.1.6 und wenden das Schlangenlemma an auf das Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} & & \operatorname{cok} d_A^{q-1} & \to & \operatorname{cok} d_B^{d-1} & \to & \operatorname{cok} d_C^{q-1} \to 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & \ker d_A^{q+1} & \to & \ker d_B^{q+1} & \to & \ker d_C^{q+1} \end{array}$$

□

Übungen

Übung 19.3.1.6. Gegeben ein Komplex $\ldots \to A^{q-1} \overset{d^{q-1}}{\to} A^q \overset{d^q}{\to} A^{q+1} \to \ldots$ in einer präabelschen Kategorie setzen wir $\bar{\mathcal{H}}^q A = \ker(\operatorname{cok} d^{q-1} \to A^{q+1})$. Man zeige, daß sich das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^q A & & & & \bar{\mathcal{H}}^q A \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ \ker d^q & \hookrightarrow & A^q & \twoheadrightarrow & \operatorname{cok} d^{q-1} \end{array}$$

auf genau eine Weise durch einen Morphismus in der oberen Horizontalen kommutativ ergänzen läßt, und daß dieser notwendig ein Isomorphismus ist.

Übung 19.3.1.7. Man zeige in einer beliebigen präabelschen Kategorie das Fünferlemma.

Übung 19.3.1.8. Gegeben eine präabelsche Kategorie ist jeder Limes und jeder Kolimes von Kopien des Nullobjekts Null. Des weiteren können Limites und Kolimites von Komplexen gradweise berechnet werden. Dasselbe gilt im Fall einer abelschen Kategorie für ihre Homotopiekategorie.

19.3.2 Derivierte Funktoren

Definition 19.3.2.1.

1. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Ein Objekt $I \in \mathcal{A}$ heißt **injektiv**, wenn der Funktor $\mathcal{A}(\ ,I) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ der Homomorphismen in unser Objekt exakt ist;

2. Eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ **hat genug Injektive**, wenn es für jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ einen Monomorphismus $A \hookrightarrow I$ in ein injektives Objekt $I \in \mathcal{A}$ gibt;

3. Eine **Auflösung** oder genauer **Rechtsauflösung** eines Objekts A einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist eine exakte Sequenz $A \hookrightarrow C^0 \to C^1 \to \ldots$ in $\mathcal{A}$;

4. Eine **Auflösung durch Injektive** oder **injektive Auflösung** eines Objekts A einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist eine Auflösung durch injektive Objekte, als da heißt eine Auflösung $A \hookrightarrow I^0 \to I^1 \to \ldots$ mit $I^0, I^1, \ldots$ injektiv.

19.3.2.2. Wir kürzen eine Auflösung mit $A \hookrightarrow C^{\lhd}$ ab. Die additive Kategorie aller injektiven Objekte einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ notieren wir im folgenden $i\mathcal{A}$. Gibt es in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ genügend Injektive, so besitzt jedes Objekt von $\mathcal{A}$ eine injektive Auflösung.

19.3.2.3. Ein Objekt einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist injektiv genau dann, wenn jeder von besagtem Objekt ausgehende Monomorphismus spaltet. In der Tat, ist

$I \hookrightarrow M$ ein Monomorphismus und I injektiv, so ist das Vorschalten eine Surjektion $\mathcal{A}(M, I) \twoheadrightarrow \mathcal{A}(I, I)$, unter der die Identität auf I eben ein Urbild hat. Der Nachweis der anderen Implikation bleibe dem Leser überlassen.

Beispiel 19.3.2.4. Die Kategorie der abelschen Gruppen besitzt genug Injektive nach 17.6.6.5.

19.3.2.5. Gegeben eine Kategorie mit additiver Struktur $\mathcal{A}$ erklären wir die zugehörige Kategorie $\mathrm{Ket}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$ der Komplexe von Objekten von $\mathcal{A}$ analog zur Kategorie der Komplexe von abelschen Gruppen in der hoffentlich offensichtlichen Weise. Weiter erklären wir die zugehörige **Homotopiekategorie**

$$\mathrm{Hot}(\mathcal{A}) = \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$$

analog zur Homotopiekategorie der abelschen Gruppen aus 17.1.4.8 in der hoffentlich offensichtlichen Weise.

Satz 19.3.2.6 (**Hauptlemma der homologischen Algebra**). *Seien in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ein Komplex C mit $\mathcal{H}^q C = 0$ für $q > 0$ und ein Komplex I injektiver Objekte mit $I^q = 0$ für $q < 0$ gegeben. So induziert das Bilden der nullten Kohomologie eine Bijektion*

$$\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}(C, I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(\mathcal{H}^0 C, \mathcal{H}^0 I)$$

Beweis. In der opponierten Kategorie zur Kategorie Mod_R der Moduln über einem Ring R hatten wir das bereits in 17.5.6.14 gezeigt. Der Beweis im Allgemeinen ist mutatis mutandis derselbe. □

19.3.2.7 (**Existenz und Eindeutigkeit von Homotopielifts**). Gegeben ein Morphismus $f : A \to B$ in einer abelschen Kategorie sowie Auflösungen $A \hookrightarrow C^{\triangleleft}$ und $B \hookrightarrow D^{\triangleleft}$ verstehen wir unter einem **Lift von** f einen Morphismus von Komplexen $\tilde{f} : C^{\triangleleft} \to D^{\triangleleft}$, der in der offensichtlichen Weise mit f verträglich ist. Mit $\tilde{f}$ ist sicher auch jeder dazu homotope Morphismus ein Lift von f. Eine Homotopieklasse von Lifts nennen wir einen **Homotopielift**. Das Hauptlemma der homologischen Algebra 19.3.2.6 sagt insbesondere, daß für eine beliebige Auflösung $A \hookrightarrow C^{\triangleleft}$ und eine injektive Auflösung $B \hookrightarrow I^{\triangleleft}$ jeder Morphismus $f : A \to B$ genau einen Homotopielift $[\tilde{f}] : C^{\triangleleft} \to I^{\triangleleft}$ besitzt.

Definition 19.3.2.8. Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ mit genug Injektiven und ein additiver Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ in eine weitere abelsche Kategorie definiert man für jedes $q \in \mathbb{Z}$ einen **q-ten rechtsderivierten Funktor von** F als ein Paar $(\mathrm{R}^q F, \tau)$ bestehend aus einem Funktor

$$\mathrm{R}^q F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

und Morphismen $\tau = \tau_{A\hookrightarrow C^\lhd} = \tau_{F,A\hookrightarrow C^\lhd} : \mathcal{H}^q(FC^\lhd) \to (\mathrm{R}^qF)(A)$ für jede Auflösung $A \hookrightarrow C^\lhd$ eines beliebigen Objekts $A \in \mathcal{A}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Der Morphismus τ ist für jede injektive Auflösung $A \hookrightarrow I^\lhd$ ein Isomorphismus $\tau_{A\hookrightarrow I^\lhd} : \mathcal{H}^q(FI^\lhd) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}^qF)(A)$;

2. Für jeden Morphismus $f : A \to B$ und je zwei Auflösungen $A \hookrightarrow C^\lhd$ und $B \hookrightarrow D^\lhd$ und jeden Lift $\tilde{f} : C^\lhd \to D^\lhd$ von f kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q(FC^\lhd) & \to & (\mathrm{R}^qF)(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}^q(FD^\lhd) & \to & (\mathrm{R}^qF)(B) \end{array}$$

   mit $\tau_{A\hookrightarrow C^\lhd}$ und $\tau_{B\hookrightarrow D^\lhd}$ in den Horizontalen.

Aus der Eindeutigkeit der Homotopielifts nach 19.3.2.7 folgt, daß derartige Paare (R^qF, τ) existieren. Daß sie eindeutig sind bis auf eindeutigen Isomorphismus, ist dann eh klar. Damit dürfen und werden wir von nun an mit einem bestimmten Artikel von **dem q-ten rechtsderivierten Funktor von** F reden. Das Datum τ unterschlagen wir meist in der Notation und nennen es, wenn wir darauf Bezug nehmen wollen, den **kanonischen Morphismus**.

Vorschau 19.3.2.9. In 20.3.2 werden wir unsere Definition derivierter Funktoren noch wesentlich verallgemeinern. Der Bezug zur hier gegebenen Definition wird dann in **??** hergestellt.

19.3.2.10 (**Erste Eigenschaften der Rechtsderivierten**). Offensichtlich sind unsere derivierten Funktoren auch selbst wieder additiv. Für $q < 0$ haben wir per definitionem $\mathrm{R}^qF = 0$. Ist $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von abelschen Kategorien und besitzt $\mathcal{A}$ genug Injektive, so gibt es genau eine in der offensichtlichen Weise mit τ verträgliche Transformation $F \Rightarrow \mathrm{R}^0F$. Ist F linksexakt, so ist sie eine Isotransformation

$$F \xRightarrow{\sim} \mathrm{R}^0F$$

Wir behandeln sie in Notation und Sprache meist als eine Gleichheit $F = \mathrm{R}^0F$. Ist F sogar exakt, so gilt $\mathrm{R}^qF = 0$ für $q > 0$.

Beispiel 19.3.2.11 (**Erweiterungen abelscher Gruppen als Rechtsderivierte**). Die Kategorie der abelschen Gruppen hat genügend Injektive nach 17.6.6.5. Gegeben eine feste abelsche Gruppe M betrachten wir den linksexakten Funktor $F := \mathrm{Hom}(M, \ ) : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$. Sei N eine weitere abelsche Gruppe. Um $\mathrm{R}^qF(N)$ zu bestimmen, können wir nach 17.6.6.5 eine injektive Auflösung der Gestalt

$N \hookrightarrow I^0 \twoheadrightarrow I^1$ wählen. Dann hat die lange exakte Ext-Sequenz im zweiten Eintrag 17.6.5.5 die Gestalt

$$\mathrm{Hom}(M,N) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(M,I^0) \to \mathrm{Hom}(M,I^1) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}(M,N)$$

und wir folgern kanonische Isomorphismen

$$\mathrm{R}^q F(N) \quad \xrightarrow{\sim} \quad \begin{cases} \mathrm{Hom}(M,N) & q=0; \\ \mathrm{Ext}(M,N) & q=1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 19.3.2.12 (Injektive Moduln, Existenz). *Die Kategorie aller Moduln über einem gegebenen Ring besitzt genug injektive Objekte.*

Ergänzung 19.3.2.13. Der Beweis zeigt mit 17.6.6.6 genauer, daß jeder A-Modul M in einen injektiven A-Moduln der Kardinalität $\leq \operatorname{card} \mathrm{Ens}(A, M \sqcup \mathbb{N})$ eingebettet werden kann.

Beweis. Sei A unser Ring. Der Vergißfunktor $\mathrm{res}_A^{\mathbb{Z}} : A\text{-Mod} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$ besitzt zum Beispiel nach 7.2.6.18 einen Rechtsadjungierten, unseren Induktionsfunktor $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}}^A : N \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,N)$. Wollen wir nun einen A-Modul M in einen injektiven A-Modul einbetten, so beginnen wir mit einer Einbettung $\mathrm{res}_A^{\mathbb{Z}} M \hookrightarrow I$ von M in eine injektive abelsche Gruppe, die es nach 17.6.6.5 geben muß, und bilden dann die Verknüpfung

$$M \to \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}}^A \mathrm{res}_A^{\mathbb{Z}} M \to \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}}^A I$$

Hier ist das rechte Ende offensichtlich ein injektiver A-Modul und der rechte Pfeil eine Injektion. Der linke Pfeil ist aber auch eine Injektion, entweder nach 19.2.3.11 oder explizit als die Einbettung $\mathrm{Hom}_A(A,M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,M)$. □

Beispiel 19.3.2.14 (**Erweiterungen von Moduln als Rechtsderivierte**). Die Kategorie der Moduln über einem vorgegebenen Ring A hat genügend Injektive nach 19.3.2.12. Gegeben ein fester A-Modul M betrachte man den linksexakten Funktor $F := \mathrm{Hom}_A(M,\ ) : A\text{-Mod} \to \mathrm{Ab}$. Ist N ein weiterer A-Modul, so erklärt man die abelschen Gruppen $\mathrm{Ext}_A^q(M,N)$ als die Werte der zugehörigen derivierten Funktoren, in Formeln

$$\mathrm{Ext}_A^q(M,N) := (\mathrm{R}^q F)(N)$$

Diese Gruppen heißen auch die **höheren Erweiterungen** unserer beiden Moduln.

19.3.2.15 (**Derivieren von Transformationen**). Seien $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ additive Funktoren von abelschen Kategorien und es besitze $\mathcal{A}$ genug Injektive. Jede

Transformation $\eta : F \Rightarrow G$ induziert offensichtlich für jedes q genau eine Transformation $\mathrm{R}^q\eta : \mathrm{R}^qF \Rightarrow \mathrm{R}^qG$ derart, daß für jede Auflösung $A \hookrightarrow C^\lhd$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q(FC^\lhd) & \to & (\mathrm{R}^qF)(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}^q(GC^\lhd) & \to & (\mathrm{R}^qG)(A) \end{array}$$

kommutiert mit $\tau_{F,A\hookrightarrow C^\lhd}$ und $\tau_{G,A\hookrightarrow C^\lhd}$ in den Horizontalen, und wir haben die Funktorialität $\mathrm{R}^q(\eta\circ\kappa) = (\mathrm{R}^q\eta)\circ(\mathrm{R}^q\kappa)$ und $\mathrm{R}^q(\mathrm{id}_F) = \mathrm{id}_{\mathrm{R}^qF}$.

Beispiel 19.3.2.16 (**Erweiterungen als Bifunktor**). Gegeben ein Ring R liefert jeder Homomorphismus von R-Moduln $f : L \to M$ eine Transformation $(\circ f)$ oder ausführlicher $(\circ f)^\tau : \mathrm{Hom}_R(M,\ ) \to \mathrm{Hom}_R(L,\ )$ und so eine Transformation der derivierten Funktoren $\mathrm{R}^q(\circ f)^\tau : \mathrm{Ext}^q_R(M,\ ) \to \mathrm{Ext}^q_R(L,\ )$ und so Abbildungen

$$\mathrm{R}^q(\circ f)^\tau_N = (\circ f)^\tau : \mathrm{Ext}^q_R(M,N) \to \mathrm{Ext}^q_R(L,N)$$

Andererseits induziert jeder R-Modulhomomorphismus $g : N \to K$ vermittels der Funktorialität einen Homomorphismus

$$(g\circ) : \mathrm{Ext}^q_R(M,N) \to \mathrm{Ext}^q_R(M,K)$$

und weil das mit Transformationen immer so ist, vertauschen hier $(\circ f)^\tau$ und $(g\circ)$. So werden unsere Erweiterungen zu Funktoren

$$\mathrm{Ext}^q : \mathrm{Mod}_R^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Ab}$$

Vorschau 19.3.2.17. In 20.2.6.10 besprechen wir das Yoneda-Produkt von Erweiterungen

$$\mathrm{Ext}^p_R(L,M) \times \mathrm{Ext}^q_R(M,N) \to \mathrm{Ext}^{p+q}_R(L,N)$$

und es wird klar sein, daß es im Fall $p = 0$ beziehungsweise $q = 0$ zum Vorschalten beziehungsweise Nachschalten eines Homomorphismus aus 19.3.2.16 spezialisiert.

Beispiel 19.3.2.18 (**Erweiterungen und Zentrum**). Gegeben ein Ring R und ein Element $z \in \mathrm{Z}(R)$ des Zentrums von R und R-Moduln M, N behaupten wir

$$(\circ(z\cdot)) = ((z\cdot)\circ) : \mathrm{Ext}^q_R(M,N) \to \mathrm{Ext}^q_R(M,N)$$

Man erkennt das leicht an der Beschreibung durch injektive Auflösungen. Etwas formaler induziert die Selbsttransformation $(z\cdot) : \mathrm{Id} \Rightarrow \mathrm{Id}$ des Identitätsfunktors auf der Modulkategorie für $F := \mathrm{Hom}_R(M,\ )$ wegen $F = F \circ \mathrm{Id}$ eine Transformation $F \Rightarrow F$, die quasi per definitionem $((z\cdot)\circ)$ liefert. Andererseits stimmt sie überein mit der Transformation $(\circ(z\cdot)) : F \Rightarrow F$, die per definitionem $(\circ(z\cdot))$ liefert. Das zeigt die behauptete Identität. Vom höheren Standpunkt besprechen wir sie in 20.2.6.11.

19.3.2.19. Wir erhalten weitere Beispiele durch Übergang zu den opponierten abelschen Kategorien. In diesem Zusammenhang sind eigenständige Sprechweisen üblich, die wir im folgenden erläutern.

Definition 19.3.2.20.

1. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Ein Objekt $P \in \mathcal{A}$ heißt **projektiv**, wenn der Funktor der Homomorphismen von unserem Objekt $\mathcal{A}(P, \ ) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$ exakt ist;
2. Eine abelsche Kategorie **hat genug Projektive**, wenn es für jedes Objekt A einen Epimorphismus $P \twoheadrightarrow A$ gibt mit P projektiv;
3. Eine **Linksauflösung** eines Objekts $A \in \mathcal{A}$ ist ein exakter Komplex $\ldots \to C^{-1} \to C^0 \twoheadrightarrow A$ in $\mathcal{A}$;
4. Eine **Auflösung durch Projektive** oder **projektive Auflösung** eines Objekts $A \in \mathcal{A}$ ist eine Linksauflösung $P^{\triangleright} \twoheadrightarrow A$ mit $P^0, P^{-1}, \ldots$ projektiv.

19.3.2.21. Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ mit genug Projektiven und ein additiver Funktor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ in eine weitere abelsche Kategorie erklären wir analog zu 19.3.2.8 einen **Linksderivierten**

$$\mathrm{L}_q G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

als ein Paar $(\mathrm{L}_q G, \tau)$ bestehend aus einem Funktor $\mathrm{L}_q G$ wie oben und kanonischen Morphismen $\tau : (\mathrm{L}_q G)(A) \to \mathcal{H}^{-q}(GC^{\triangleright})$ für jede Linksauflösung $C^{\triangleright} \twoheadrightarrow A$, die mit Morphismen von Auflösungen verträglich und für jede projektive Linksauflösung $P^{\triangleright} \twoheadrightarrow A$ Isomorphismen $\tau : (\mathrm{L}_q G)(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q}(GP^{\triangleright})$ sind. Per definitionem gilt $\mathrm{L}_q G = 0$ für $q < 0$ und es gibt genau eine mit τ verträgliche Transformation $\mathrm{L}_0 G \Rightarrow G$, die im Fall eines rechtsexakten Funktors G eine Isotransformation ist. Diese Isotransformation behandeln wir sprachlich und in der Notation meist als eine Gleichheit $\mathrm{L}_0 G = G$.

Beispiel 19.3.2.22 (**Erweiterungen abelscher Gruppen als Linksderivierte**). Gegeben eine feste abelsche Gruppe N betrachten wir insbesondere den rechtsexakten Funktor $G := \mathrm{Hom}(\ , N) : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$. Um $(\mathrm{L}_q G)(M)$ zu bestimmen, können wir nach 17.5.5.11 eine projektive Auflösung von M der Gestalt $0 \to P^{-1} \to P^0 \twoheadrightarrow M$ wählen. Dann hat die lange exakte Ext-Sequenz im ersten Eintrag die Gestalt

$$\mathrm{Hom}(M, N) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(P^0, N) \to \mathrm{Hom}(P^{-1}, N) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}(M, N)$$

und wir erhalten kanonische Isomorphismen

$$(\mathrm{L}_q G)(M) \xrightarrow{\sim} \begin{cases} \mathrm{Hom}(M, N) & q = 0; \\ \mathrm{Ext}(M, N) & q = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein Vergleich mit 19.3.2.11 zeigt insbesondere, daß wir unsere Ext sogar auf zweierlei Weise als derivierte Funktoren erhalten können.

Beispiel 19.3.2.23 (**Erweiterungen von Moduln als Linksderivierte**). Die Kategorie der Moduln über einem vorgegebenen Ring A besitzt genügend Projektive. Gegeben ein fester A-Modul N betrachte man den rechtsexakten Funktor $G := \mathrm{Hom}_A(\ ,N) : A\text{-Mod} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$. Ist M ein weiterer A-Modul, so erklären wir die abelschen Gruppen $\mathrm{lExt}_q^A(M,N)$ als die Werte der zugehörigen derivierten Funktoren, in Formeln

$$\mathrm{lExt}_q^A(M,N) := (\mathrm{L}_q G)(M)$$

Wir machen sie ebenso wie in 19.3.2.16 zu Bifunktoren. In 20.2.3.10 werden wir Isotransformationen $\mathrm{lExt}_q \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Ext}^q$ zwischen den besagten Bifunktoren konstruieren und dann die Notation lExt wieder aufgeben.

Beispiel 19.3.2.24 (**Erweiterungen in abelschen Kategorien**). Dieselbe Definition wie bei Moduln vereinbaren wir für eine beliebige abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ mit genug Injektiven und setzen

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^q(M,N) := (\mathrm{R}^q F)(N)$$

für Objekte $M,N \in \mathcal{A}$ und $F := \mathcal{A}(M,\ ) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$. Dieselbe Definition wie bei Moduln vereinbaren wir auch für eine beliebige abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ mit genug Projektiven und setzen

$$\mathrm{lExt}_q^{\mathcal{A}}(M,N) := (\mathrm{L}_q G)(M)$$

für Objekte $M,N \in \mathcal{A}$ und $G := \mathcal{A}(\ ,N) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$. In 20.2.6.10 erklären wir eine gemeinsame Verallgemeinerung dieser beiden Konstruktionen im Fall beliebiger abelscher Kategorien und geben die Notation lExt wieder auf.

Beispiel 19.3.2.25 (**Tor von abelschen Gruppen als Linksderivierter**). Für eine feste abelsche Gruppe M betrachten wir den rechtsexakten Funktor $G := M \otimes_{\mathbb{Z}} : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$. Aus der Definition des Torsionsprodukts erhalten wir sofort kanonische Isomorphismen

$$(\mathrm{L}_q G)(N) \overset{\sim}{\to} \begin{cases} M \otimes_{\mathbb{Z}} N & q = 0; \\ M * N & q = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 19.3.2.26 (**Tor von Moduln als Linksderivierter**). Die Kategorie der Moduln über einem vorgegebenen Ring A hat genügend Projektive. Gegeben ein fester A-Rechtsmodul M betrachten wir den rechtsexakten Funktor $F := M \otimes_A :$

A-Mod $\to$ Ab. Ist N ein weiterer A-Modul, so erklärt man die abelschen Gruppen $\mathrm{Tor}_q^A(M,N)$ als Werte der zugehörigen linksderivierten Funktoren, in Formeln

$$\mathrm{Tor}_q^A(M,N) := (\mathrm{L}_q F)(N)$$

Diese Gruppen heißen die **höheren Torsionsgruppen** unserer beiden Moduln. In 19.4.6.13 zeigen wir, daß es nicht darauf ankommt, welchen Faktor wir hier auflösen, konstruieren also in Formeln ausgedrückt kanonische Isomorphismen

$$(\mathrm{L}_q(M\otimes_A))(N) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{L}_q(\otimes_A N))(M)$$

Übungen

Übung 19.3.2.27. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von abelschen Kategorien und es besitze $\mathcal{A}$ genug Injektive. Man zeige, daß für injektives $I \in \mathcal{A}$ gilt $(\mathrm{R}^q F)(I) = 0$ falls $q > 0$.

Übung 19.3.2.28 (**Injektivitätskriterium über Ideale**). Ein Linksmodul I über einem Ring A ist genau dann injektiv, wenn sich für jedes Linksideal $\mathfrak{a} \subset A$ jeder Modulhomomorphismus $\mathfrak{a} \to I$ zu einem Modulhomomorphismus $A \to I$ ausdehnen läßt. Hinweis: Man kopiere den Beweis von 17.6.6.5, wo das im Fall $A = \mathbb{Z}$ gezeigt wird.

Ergänzende Übung 19.3.2.29. Ist ein Modul I über einem Ring A die Vereinigung über eine Menge von injektiven Untermoduln, auf der die Inklusion eine Anordnung ist und deren Kardinalität echt größer ist als die Kardinalität des Rings A, so ist auch der ganze Modul I injektiv.

Übung 19.3.2.30. Ein beliebiges Produkt injektiver Objekte in einer abelschen Kategorie ist wieder injektiv. Ein beliebiges Koprodukt projektiver Objekte in einer abelschen Kategorie ist wieder projektiv.

Übung 19.3.2.31. Gegeben ein Körper K betrachte man den Polynomring $K[X]$ und die kurze exakte Sequenz von $K[X]$-Moduln

$$K[X] \hookrightarrow K[X] \twoheadrightarrow K$$

mit der Multiplikation mit X als erster Abbildung und dem Auswerten bei $X = 0$ als zweiter Abbildung. Man mag sie als Homotopieäquivalenz von Komplexen von K-Vektorräumen des Zwei-Term-Komplexes $K[X] \hookrightarrow K[X]$ mit dem Ein-Term-Komplex $K[0]$ lesen. Nimmt man nun Variablen $X_1, \ldots, X_n$ und tensoriert die entsprechenden Zweitermkomplexe über K, so ergibt sich eine freie Auflösung des $K[X_1, \ldots, X_n]$-Moduls K mit der durch das Auswerten aller Variablen bei Null gegebenen Modulstruktur. Das ist ein besonders einfacher Fall des

sogenannten **Koszul-Komplexes**. Man folgere

$$\begin{array}{lcll} \dim_K \operatorname{Ext}^i_{K[X_1,\ldots,X_n]}(K,K) & = & \binom{n}{i} & \\ \dim_K \operatorname{Ext}^i_{K[X_1,\ldots,X_n]}(K,K[X_1,\ldots,X_n]) & = & 1 & \text{falls } i=n \text{ und } 0 \text{ sonst.} \end{array}$$

Analoges zeigt man analog für einen beliebigen Kring K, nur daß man statt der Dimension d der fraglichen Erweiterungsräume die Existenz eines Isomorphismus mit dem freien K-Modul K^d erhält.

Übung 19.3.2.32 (**Koszulkomplex koordinatenfrei**). Eine koordinatenfreie Version des Koszulkomplexes erhält man, indem man für einen K-Vektorraum V den Komplex

$$\ldots \to \mathrm{S}V \otimes \bigwedge^2 V \to \mathrm{S}V \otimes V \to \mathrm{S}V \twoheadrightarrow K$$

betrachtet mit dem Differential

$$u \otimes (v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) \;\mapsto\; \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u v_i \otimes (v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_n)$$

und an der letzten Stelle die Augmentation $\mathrm{S}V \twoheadrightarrow K$ mit $v \mapsto 0$ für alle $v \in V$. Das funktioniert sogar für unendlichdimensionale Vektorräume. Man mag die Exaktheit zeigen, indem man den Komplex mit dem Kolimes der Komplexe zu endlichdimensionalen Teilräumen identifiziert und sich so auf die vorhergehende Übung 19.3.2.31 zurückzieht. Unser Komplex liefert uns Isomorphismen

$$\operatorname{Ext}^i_{\mathrm{S}V}(K,K) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Alt}^i V$$

Daß unter diesen Isomorphismen das „Yoneda-Produkt“ von Erweiterungen dem „Shuffle-Dachprodukt“ von alternierenden Formen entspricht, dürfen Sie später einmal als Übung 20.2.6.30 nachvollziehen.

Übung 19.3.2.33 (**Augmentierte derivierte Funktoren**). Sei $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von abelschen Kategorien und es habe $\mathcal{A}$ genug Projektive. Unter einer **G-Augmentation** eines Objekts $A \in \mathcal{A}$ verstehen wir ein Paar (B, ε) mit $B \in \mathcal{B}$ und $\varepsilon : GA \to B$. Die G-augmentierten Objekte von $\mathcal{A}$ bilden in offensichtlicher Weise eine Kategorie $\mathcal{A}^G$. Wir erklären einen **augmentierten Linksderivierten**

$$\mathrm{L}_q G : \mathcal{A}^G \to \mathcal{B}$$

als ein Paar $(\mathrm{L}_q G, \tau)$ bestehend aus einem Funktor $\mathrm{L}_q G$ wie oben und kanonischen Morphismen $\tau : (\mathrm{L}_q G)(A, \varepsilon, B) \to \mathcal{H}^{-q}(GC^{\triangleright} \to B)$ für jede Linksauflösung $C^{\triangleright} \twoheadrightarrow A$, die mit Morphismen von Auflösungen verträglich und für jede projektive Linksauflösung $P^{\triangleright} \twoheadrightarrow A$ Isomorphismen liefert. Man zeige, daß es so einen augmentierten Linksderivierten stets gibt und daß er eindeutig bestimmt

ist bis auf eindeutigen Isomorphismus. Die Konstruktion liefert eine kurze exakte Sequenz $B[1] \hookrightarrow (GC^{\triangleright} \to B) \twoheadrightarrow GC^{\triangleright}$ von Komplexen und als Ausschnitte von deren langer exakter Homologiesequenz eine exakte Sequenz

$$(\mathrm{L}_0 G)(A, \varepsilon, B) \hookrightarrow (\mathrm{L}_0 G)(A) \to B \twoheadrightarrow (\mathrm{L}_{-1} G)(A, \varepsilon, B)$$

und Isomorphismen $(\mathrm{L}_q G)(A, \varepsilon, B) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{L}_q G)(A)$ für $q > 0$. Dual erklären wir **Koaugmentationen** und koaugmentierte Rechtsderivierte.

Übung 19.3.2.34 (**Injektive Moduln über Ringalgebren**). Ist k ein Körper und A eine k-Ringalgebra, so ist $A^* = \mathrm{Hom}_k(A, k)$ mit der von der Rechtsoperation auf A herrührenden Struktur als A-Linksmodul ein injektiver A-Linksmodul und jeder A-Modul läßt sich einbetten in ein Produkt von Kopien von A^*. Hinweis: 7.2.8.5.

Übung 19.3.2.35 (**Limites und Kolimites von Komplexen**). Seien $\mathcal{A}$ eine Kategorie mit additiver Struktur und $(C_i)_{i \in I}$ ein System von Komplexen (C_i^q, d) aus $\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$. Existiert für jedes q der Limes $\lim_{i \in I} C_i^q$ in $\mathcal{A}$, so ist der aus diesen Limites gebildete Komplex der Limies der C_i. Analoges gilt für Kolimites, entweder mit einem analogen Beweis oder formal durch Übergang zur opponierten Kategorie.

Übung 19.3.2.36 (**Produkte und Koprodukte in Homotopiekategorien**). Seien $\mathcal{A}$ eine Kategorie mit additiver Struktur und $(C_i)_{i \in I}$ eine Familie von Komplexen (C_i^q, d) aus $\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$. Existiert für jedes q das Produkt $\prod_{i \in I} C_i^q$ in $\mathcal{A}$, so ist der aus diesen Produkten gebildete Komplex nicht nur in $\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$, sondern auch in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ das Produkt der C_i. Analoges gilt für Koprodukte, entweder mit einem analogen Beweis oder formal durch Übergang zur opponierten Kategorie. Für Limites und Kolimites sind mir die analogen Aussagen nicht klar. Das Problem liegt darin, daß zwar das Bilden von Produkten abelscher Gruppen exakt ist, das Bilden von Limites abelscher Gruppen jedoch im allgemeinen nicht mehr.

Übung 19.3.2.37. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor von abelschen Kategorien. Man konstruiere für jeden Komplex A^* in $\mathcal{A}$ natürliche Morphismen $\mathcal{H}^n F A^* \to F \mathcal{H}^n A^*$.

Übung 19.3.2.38. Gegeben Ringe A, B, C und ein A-B-Bimodul M sowie ein A-C-Bimoduln N liefert die Funktorialität von Erweiterungen auf $\mathrm{Ext}_A^i(M, N)$ eine natürliche Struktur als B-C-Bimodul.

Übung 19.3.2.39. Gegeben $A \supset J$ ein Ring mit einem zweiseitigen Ideal liefert für jeden A-Modul M das Vorschalten von $M \twoheadrightarrow M/\langle JM \rangle$ einen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_A(M/\langle JM \rangle, A/J) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, A/J)$. Weiter liefert die kurze exakte Sequenz $J \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/J$ von A-Linksmoduln eine exakte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_A(A/J, A/J) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(A, A/J) \to \mathrm{Hom}_A(J, A/J) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(A/J, A/J)$$

mit einem Isomorphismus an erster Stelle und wir erhalten so einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_A(J/\langle J^2\rangle, A/J) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_A(A/J, A/J)$$

19.3.3 Hochschild-Kohomologie*

Definition 19.3.3.1. Gegeben eine Ringalgebra A über einem Körper k erklärt man ihre **Hochschild-Kohomologie** als

$$\mathrm{HH}^q(A) = \mathrm{HH}^q_k(A) := \mathrm{Ext}^q_{A\otimes_k A^{\mathrm{opp}}}(A, A)$$

Allgemeiner erklärt man für einen A-Bimodul M mit gleicher k-Operation von rechts und links die **Hochschildkohomologie von A mit Koeffizienten in M** als

$$\mathrm{HH}^q(A; M) = \mathrm{HH}^q_k(A; M) := \mathrm{Ext}^q_{A\otimes_k A^{\mathrm{opp}}}(A, M)$$

19.3.3.2 (**Nullte Hochschildkohomologie**). Sei A eine Ringalgebra über einem Körper k. Offensichtlich liefert das Multiplizieren mit Elementen des Zentrums $z \in \mathrm{Z}(A)$ einen Isomorphismus

$$\mathrm{Z}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A\otimes_k A^{\mathrm{opp}}}(A, A) = \mathrm{HH}^0(A)$$

19.3.3.3 (**Berechnung der Hochschildkohomologie mit dem Barkomplex**). Sei A eine Ringalgebra über einem Körper k. Die höhere Hochschild-Kohomologie von A kann mit der Bar-Auflösung

$$\ldots \to A \otimes_k A \otimes_k A \to A \otimes_k A \twoheadrightarrow A$$

aus 19.3.3.10 berechnet werden, denn diese ist in unserem Fall offensichtlich eine Auflösung durch freie $(A \otimes_k A^{\mathrm{opp}})$-Moduln. Wir erhalten Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_{A\otimes_k A}(A^{\otimes(q+2)}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes q}, M)$$

durch Vorschalten von $a_1 \otimes \ldots \otimes a_q \mapsto 1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_q \otimes 1$. Der vom Barkomplex vermittels dieses Isomorphismus induzierte Randoperator bildet $\psi : A^{\otimes q} \to M$ ab auf $d\psi$ mit

$$\begin{aligned}(d\psi)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{q+1}) \quad = \quad & a_1\psi(a_2 \otimes \ldots \otimes a_{q+1}) \\ & -\psi(a_1a_2 \otimes \ldots \otimes a_{q+1}) \\ & +\psi(a_1 \otimes a_2a_3 \otimes \ldots \otimes a_{q+1}) \\ & \ldots \\ & \pm\psi(a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_q)a_{q+1}\end{aligned}$$

So erhalten wir insbesondere eine Identifikation

$$\mathrm{HH}^0(A) \xrightarrow{\sim} \{\psi \in \mathrm{Hom}_k(k, A) \mid a_1\psi(1) - \psi(1)a_1 = 0 \ \forall a_1 \in A\}$$

und Auswerten eines Homomorphismus bei $1 \in k$ liefert ein weiteres Mal unseren Isomorphismus $\mathrm{HH}^0(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Z}(A)$ der nullten Hochschildkohomologie mit dem Zentrum unserer Ringalgebra.

19.3.3.4 (**Erste Hochschildkohomologie**). Seien k ein Körper und A eine Ringalgebra über k. Um $\mathrm{HH}^1(A)$ zu berechnen, bilden wir zuerst die Einskozykel unseres Komplexes

$$\mathcal{Z}^1 = \{\psi \in \mathrm{Hom}_k(A, A) \mid a_1\psi(a_2) - \psi(a_1a_2) + \psi(a_1)a_2 = 0\}$$

und finden den Raum der Derivationen $\mathcal{Z}^1 = \mathrm{Der}_k(A)$ im Sinne von 9.3.2.4. Für jedes $a \in A$ ist unter anderem der Kommutator mit a eine solche Derivation $(\mathrm{ad}\, a) : A \to A$, $b \mapsto [a, b]$. Derivationen dieses Typs heißen **innere Derivationen** unserer Ringalgebra. Wir sehen leicht, daß die Einsränder unseres Komplexes genau die inneren Derivationen sind. So ergibt sich dann schließlich ein Isomorphismus

$$\mathrm{Der}_k(A)/\,\mathrm{ad}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HH}^1(A)$$

zwischen dem Quotienten des Raums der Derivationen nach dem Teilraum der inneren Derivationen und der ersten Hochschild-Kohomologie.

19.3.3.5 (**Zweite Hochschildkohomologie**). Seien k ein Körper und A eine Ringalgebra über k und M ein A-Bimodul mit gleicher k-Operation von beiden Seiten, also ein Modul über $A \otimes_k A^{\mathrm{opp}}$. Wir konstruieren eine Bijektion zwischen $\mathcal{Z}^2(A; M)$ und der Menge aller Strukturen μ einer assoziativen k-Algebra auf dem k-Vektorraum $M \oplus A$ derart, daß die Projektion auf A ein Algebrenhomomorphismus ist und ihr Kern aus Elementen mit Quadrat Null besteht und die Struktur auf M als Bimodul unter $(M \oplus A, \mu)$ die vorgegebene Struktur auf M als A-Bimodul induziert. So eine Multiplikation μ muß ja gegeben werden durch $(m, a)(n, b) = (an + mb + \psi(a, b), ab)$ für eine k-bilineare Abbildung $\psi : A \times A \to M$ und die Assoziativität ist gleichbedeutend zur Identität

$$a\psi(bc) + \psi(a, bc) = \psi(a, b)c + \psi(ab, c)$$

und in der Tat gleichbedeutend zu $\psi \in \mathcal{Z}^2(A; M) \subset \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, M)$. Nebenbei bemerkt besitzt $(M \oplus A, \mu)$ dann automatisch eine Eins, nämlich das Element $(-\psi(1, 1), 1)$. Wir notieren diese Algebra nun $(M \oplus A, \psi)$ und rechnen mühelos nach, daß gegeben $\varphi : A \to M$ weiter $(m, a) \mapsto (m + \varphi(a), a)$ ein Algebrenisomorphismus $(M \oplus A, \psi) \xrightarrow{\sim} (M \oplus A, \psi - d\varphi)$ ist. Zusammengefaßt klassifiziert also $\mathrm{HH}^2(A; M)$ kurze exakte Sequenzen von k-Moduln

$$M \hookrightarrow E \twoheadrightarrow A$$

mit Ringalgebrenstruktur auf E, für die die Surjektion ein Ringalgebrenhomomorphismus ist und der Kern M die Eigenschaft $M^2 = 0$ hat und die dadurch gegebene Struktur auf M als A-Bimodul die vorgegebene ist, bis auf Isomorphismen von kurzen exakten Sequenzen, die vorne und hinten die Identität sind und in der Mitte Isomorphismen von Ringalgebren.

Definition 19.3.3.6. Eine endlichdimensionale Ringalgebra S über einem Körper k heißt **separabel**, wenn $S \otimes_k S^{\mathrm{opp}}$ halbeinfach ist.

19.3.3.7. Jede separable Ringalgebra ist halbeinfach, denn ist das Jacobsonradikal von S nicht Null, so kann S als Bimodul über sich selber nicht halbeinfach sein. In Charakteristik Null ist jede endlichdimensionale halbeinfache Ringalgebra separabel, vergleiche 8.3.6.13.

19.3.3.8. Offensichtlich verschwinden für separable endlichdimensionale Ringalgebren über einem Körper k alle höheren Hochschildkohomologien $\mathrm{HH}_k^q(S; M) = 0$ für $q > 0$ und jeden S-Bimodul M. Gegeben ein endlichdimensionaler k-Vektorraum V ist $\mathrm{End}_k V$ offensichtlich stets separabel. Nach der Beschreibung 19.3.3.4 der ersten Hochschildkohomologie ist folglich jede Derivation von $\mathrm{End}_k V$ eine innere Derivation.

Satz 19.3.3.9 (**Spaltungssatz von Wedderburn**). *Gegeben eine endlichdimensionale Ringalgebra A über einem Körper k derart, daß ihr Quotient $\bar{A} := A/\mathrm{J}(A)$ nach dem Jacobson-Radikal separabel ist, gibt es eine k-Unterringalgebra $S \subset A$ derart, daß die Projektion einen Isomorphismus $S \xrightarrow{\sim} A/\mathrm{J}(A)$ induziert.*

Beweis. Vollständige Induktion über das kleinste $n \geq 1$ mit $\mathrm{J}(A)^n = 0$. Im Fall $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Im Fall $n = 2$ gilt wegen $\bar{A}$ separabel über k offensichtlich $\mathrm{HH}_k^2(\bar{A}, \mathrm{J}(A)) = 0$ und dann zeigt unsere Interpretation 19.3.3.5 der zweiten Hochschildkohomologie die Behauptung. Für den Induktionsschritt sei $\mathrm{J}(A)^{n+1} = 0$. Per Induktionsannahme finden wir $S \subset A/\mathrm{J}(A)^n$ wie gewünscht. Das Urbild $\tilde{S} \subset A$ von S unter der Projektion besitzt nun nach dem bereits behandelten Fall $n = 2$ eine Unterringalgebra S', die isomorph auf S geht unter der Projektion. Das liefert den Induktionsschritt und beendet den Beweis. $\square$

Übungen

Übung 19.3.3.10 (**Barkomplex**). Gegeben ein Ringhomomorphismus $k \to A$ und ein A-Linksmodul M ist der Komplex

$$\ldots \to A \otimes_k A \otimes_k M \to A \otimes_k M \twoheadrightarrow M$$

mit dem Randoperator

$$\begin{aligned} a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_q \otimes m \quad \mapsto \quad & a_0 a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_q \otimes m \\ & -a_0 \otimes a_1 a_2 \otimes \ldots \otimes a_q \otimes m \\ & \ldots \\ & \pm a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_q m \end{aligned}$$

exakt, ja sogar nullhomotop. Er heißt der **Bar-Komplex** oder präziser der **nicht normalisierte Bar-Komplex**. Hinweis: Das Davorschreiben von $1\otimes$ ist eine Homotopie der Identität mit der Nullabbildung.

19.3.4 Beispiele für injektive Moduln*

Lemma 19.3.4.1. *Seien A ein noetherscher Kring und $\mathfrak{b} \subset A$ ein Ideal. Ist I ein injektiver A-Modul, so ist auch $\Gamma_{\mathfrak{b}} I := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in I \mid \mathfrak{b}^n x = 0\}$ ein injektiver A-Modul.*

Beweis. Wir prüfen das Injektivitätskriterium über Ideale 19.3.2.28. Gegeben ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ landet ein beliebiger fest vorgegebener Homomorphismus $\mathfrak{a} \to \Gamma_{\mathfrak{b}} I$ bereits in sagen wir dem n-ten Untermodul in unserer Vereinigung und faktorisiert mithin über $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}^n\mathfrak{a}$. Nach 7.7.3.9 können wir ein $l \geq n$ wählen mit $\mathfrak{b}^n\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}^l \cap \mathfrak{a}$ und dann faktorisiert unser Homomorphismus auch über $\mathfrak{a}/(\mathfrak{b}^l \cap \mathfrak{a})$. Nun ist aber $\{x \in I \mid \mathfrak{b}^l x = 0\} \cong \operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{b}^l, I)$ injektiv als Modul über $A/\mathfrak{b}^l$ und damit läßt sich unser eben betrachteter Homomorphismus $\mathfrak{a}/(\mathfrak{b}^l \cap \mathfrak{a}) \to \operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{b}^l, I)$ auf ganz $A/\mathfrak{b}^l$ fortsetzen. Das schließlich liefert unmittelbar die gesuchte Fortsetzung des ursprünglichen Homomorphismus $\mathfrak{a} \to \Gamma_{\mathfrak{b}} I$ auf ganz A. □

Beispiel 19.3.4.2. Gegeben ein Körper K ist $K[T_1^{-1}, \ldots, T_r^{-1}]$ ein injektiver Modul über dem Polynomring $K[T_1, \ldots, T_r]$. Um die Modulstruktur zu präzisieren, mag man unseren Modul auch beschreiben als den Quotient von $K[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_r^{\pm 1}]$ nach dem Untermodul, der von allen Monomen aufgespannt wird, in denen mindestens eines der T_i mit positivem Exponenten auftritt. Wir folgern die Injektivität, indem wir Lemma 19.3.4.1 auf den nach 19.3.2.34 injektiven K-Dualraum unseres Polynomrings anwenden.

19.3.5 Definition der Garbenkohomologie

Lemma 19.3.5.1. *Die Kategorie $\mathrm{Ab}_{/X}$ der abelschen Garben auf einem gegebenen topologischen Raum X besitzt genug Injektive.*

Vorschau 19.3.5.2. Man kann zeigen, daß in der Kategorie der Garben von Vektorräumen auf einem gegebenen topologischen Raum die injektiven Objekte genau

die welken Garben nach 19.4.1.1 sind, vergleiche [Bor84], V.1.13, wo man sogar noch allgemeiner eine explizite Charakterisierung injektiver Garben von Moduln über noetherschen Ringen findet. Wir werden diese Resultate nicht benötigen.

Beweis. Alle Wolkenkratzer mit einer injektiven abelschen Gruppe als Halm sind injektive abelsche Garben nach 19.2.2.53. Gegeben eine Garbe $\mathcal{F}$ und eine Einbettung $\mathcal{F}_x \hookrightarrow I_x$ von jedem Halm in eine injektive abelsche Gruppe konstruieren wir eine injektive abelsche Garbe $\mathcal{I} = \prod (I_x)_{(x)}$ als Produkt der zu den Gruppen I_x gehörigen Wolkenkratzer bei x. Explizit haben wir also

$$\mathcal{I}(U) = \prod_{x \in U} I_x \quad \forall\, U \Subset X$$

Der offensichtliche Monomorphismus $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$ zeigt dann das Lemma. □

Definition 19.3.5.3. Sei X ein topologischer Raum. Die Werte der Rechtsderivierten des linksexakten Funktors $\Gamma : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}$ der globalen Schnitte auf einer abelschen Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ nennt man die **Kohomologie von X mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$** und notiert sie

$$\mathrm{H}^q(X; \mathcal{F}) := (\mathrm{R}^q\Gamma)(\mathcal{F})$$

19.3.5.4. Ist X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X und $Z \subset X$ eine Teilmenge, so verwenden wir die Abkürzung $\mathrm{H}^q(Z; \mathcal{F}) := \mathrm{H}^q(Z; \mathcal{F}|_Z)$. Ist X ein topologischer Raum und M eine abelsche Gruppe und $\mathcal{F} = M_X$ die konstante Garbe auf X, so verwenden wir die Abkürzungen $\mathrm{H}^q_{\mathrm{garb}}(X; M) = \mathrm{H}^q(X; M) := \mathrm{H}^q(X; M_X)$. Ist noch spezieller $M = \mathbb{Z}$, so bezeichnen wir diese Gruppe auch mit

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{garb}}\, X = \mathrm{H}^q\, X = \mathrm{H}^q(X; \mathbb{Z}_X) = \mathrm{H}^q_{\mathrm{garb}}(X; \mathbb{Z}) = \mathrm{H}^q(X; \mathbb{Z})$$

Beispiel 19.3.5.5. Für den einpunktigen Raum liefern die ersten Eigenschaften von Rechtsderivierten 19.3.2.10 ausgezeichnete Isomorphismen $\Gamma\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathrm{top}; \mathcal{F})$ sowie das Verschwinden $\mathrm{H}^q(\mathrm{top}; \mathcal{F}) = 0$ für $q > 0$. Im Fall der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_{\mathrm{top}}$ nennen wir das Bild der Eins unter dem ausgezeichneten Isomorphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathrm{top}; \mathbb{Z})$ den **kanonischen Erzeuger** und notieren ihn $1 \in \mathrm{H}^0(\mathrm{top})$.

19.3.5.6. Ich fürchte, daß diese Definitionen dem nicht vorgebildeten Leser ziemlich sinnlos erscheinenen müssen. Mein Ziel ist im folgenden, parallel die relevante abstrakte homologische Algebra und ihre Anwendung auf den Fall der Garbenkohomologie zu entwickeln in der Hoffnung, daß sich dadurch beide Theorien gegenseitig motivieren und ihre Sinnhaftigkeit zeigen.

19.3.5.7 (**Garbenkohomologie als Erweiterungsgruppe**). Wir erinnern unsere Erweiterungen aus 19.3.2.24. Im Fall der Kategorie $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}_{/X}$ der abelschen

Garben auf einem topologischen Raum X liefern die durch das Auswerten auf dem konstanten Schnitt Eins für alle abelschen Garben $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ gegebenen Isomorphismen $\mathrm{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma\mathcal{F}$ Isomorphismen

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Ab}_{/X}}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X; \mathcal{F})$$

Vorschau 19.3.5.8. In 20.2.8 erklären wir die Ringstruktur auf der Garbenkohomologie mit Hilfe der sogenannten „Yoneda-Produkte“.

Übungen

Übung 19.3.5.9. Eine abelsche Garbe $\mathcal{I}$ auf einem topologischen Raum X ist genau dann injektiv, wenn sich jeder Morphismus $\mathcal{A} \to \mathcal{I}$ von einer Untergarbe $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}_X$ nach $\mathcal{I}$ auf ganz $\mathbb{Z}_X$ fortsetzen läßt. Hinweis: Man kopiere den Beweis vom Fall 17.6.6.5 eines einpunktigen Raums.

Übung 19.3.5.10. Für einen diskreten Raum verschwindet alle Garbenkohomologie in Graden ≥ 1.

Übung 19.3.5.11 (**Exakte Funktoren**). Seien $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein exakter Funktor von abelschen Kategorien mit genug Injektiven und $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ein additiver Funktor in eine weitere abelsche Kategorie. Man zeige, daß es eindeutig bestimmte Transformationen $\mathrm{R}^q(G \circ F) \Rightarrow \mathrm{R}^q G \circ F$ gibt derart, daß für jede Auflösung $A \hookrightarrow M^\triangleleft$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q GFM^\triangleleft & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathrm{R}^q(G \circ F)A & \to & \mathrm{R}^q G(FA) \end{array}$$

mit den τ-Morphismen aus der Definition der derivierten Funktoren in den Morphismen nach unten kommutiert.

Übung 19.3.5.12 (**Erweiterungen und exakte Funktoren**). Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein exakter Funktor von abelschen Kategorien mit genug Injektiven. Man konstruiere natürliche Abbildungen

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{A}}(M, N) \to \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{B}}(FM, FN)$$

Später werden wir derartige Abbildungen auch ohne die Forderung nach der Existenz von genug Injektiven als unmittelbare Konsequenz der Konstruktion des „von F induzierten Funktors auf den derivierten Kategorien“ erhalten.

Übung 19.3.5.13 (**Erste Kohomologie überlagerungstrivialer Räume**). Man zeige für jeden überlagerungstrivialen Raum X das Verschwinden der ersten Garbenkohomologie $\mathrm{H}^1(X; \mathbb{Z})_{\mathrm{garb}} = 0$. Hinweis: Bei jeder Erweiterung $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_X$ von abelschen Garben ist $\bar{\mathcal{F}} \to X$ eine Überlagerung, also eine triviale Überlagerung, also spaltet unsere Erweiterung.

19.3.6 Derivieren mit azyklischen Objekten

19.3.6.1 (**Lange exakte Sequenz der derivierten Funktoren**). Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie. Wir geben eine Konstruktion an, die jeder kurzen exakten Sequenz $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ in $\mathcal{A}$ für alle q Morphismen $\mathrm{R}^{q-1}F(C) \to \mathrm{R}^q FA$ zuordnet derart, daß unsere Morphismen zusammen mit den von der Funktorialität der derivierten Funktoren herrührenden Morphismen eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \mathrm{R}^{q-1}F(C) \to \mathrm{R}^q FA \to \mathrm{R}^q FB \to \mathrm{R}^q FC \to \mathrm{R}^{q+1}F(A) \to \ldots$$

in $\mathcal{B}$ bilden und daß jeder Morphismus von kurzen exakten Sequenzen einen Morphismus der so entstehenden langen exakten Sequenzen liefert. Unsere Konstruktion geht aus von der Bemerkung, daß in der abelschen Kategorie $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ aller in negativen Graden verschwindenden Komplexe für $I, J \in i\mathcal{A}$ injektive Objekte von $\mathcal{A}$ sowohl $I[0]$ als auch der bei Null beginnende Zwei-Term-Komplex $J \xrightarrow{\sim} J$ injektive Objekte von $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ sind und daß sich jeder bei Null beginnende Zweitermkomplex aus einer Surjektion $B \twoheadrightarrow C$ in ein injektives Objekt von $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ der Gestalt $(\mathrm{pr}_2 : I \oplus J \xrightarrow{\sim} J)$ einbetten läßt. Wir finden induktiv für $B \twoheadrightarrow C$ eine injektive Auflösung in $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ durch Zweitermkomplexe dieser speziellen Gestalt. Die Beschreibung aller Injektiven von $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ mögen Sie als Übung 19.3.6.12 ausarbeiten, sie wird hier nicht benötigt. Ergänzen wir die Kerne, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc}
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
I^2 & \hookrightarrow & J^2 & \twoheadrightarrow & K^2 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
I^1 & \hookrightarrow & J^1 & \twoheadrightarrow & K^1 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
I^0 & \hookrightarrow & J^0 & \twoheadrightarrow & K^0 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
A & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C
\end{array}$$

Die linke Spalte ist exakt nach der langen exakten Homologiesequenz und die höheren Horizontalen sind spaltende kurze exakte Sequenzen nach Konstruktion. Anwenden von F liefert also eine kurze exakte Sequenz von Komplexen $FI^\triangleleft \hookrightarrow FJ^\triangleleft \twoheadrightarrow FK^\triangleleft$ und deren lange exakte Kohomologiesequenz ist eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \mathrm{R}^{q-1}F(C) \to \mathrm{R}^q FA \to \mathrm{R}^q FB \to \mathrm{R}^q FC \to \mathrm{R}^{q+1}F(A) \to \ldots$$

Die Unabhängigkeit von der gewählten injektiven Auflösung durch unsere speziellen injektiven Zweitermkomplexe und die Verträglichkeit mit Morphismen von

kurzen exakten Sequenzen zeigen wir zusammen. Gegeben ein Morphismus von kurzen exakten Sequenzen alias ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ A' \arrow[r, hook] & B' \arrow[r, two heads] & C' \end{tikzcd}$$

und erhalten erst einen Homotopielift des durch das rechte Quadrat gegebenen vertikal zu sehenden Morphismus in $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ und dann durch das Ergänzen der jeweiligen Kerne ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} I^{\triangleleft} \arrow[r, hook] \arrow[d] & J^{\triangleleft} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & K^{\triangleleft} \arrow[d] \\ I'^{\triangleleft} \arrow[r, hook] & J'^{\triangleleft} \arrow[r, two heads] & K'^{\triangleleft} \end{tikzcd}$$

von langen exakten Sequenzen. Wenden wir darauf F an, so erhalten wir die Unabhängigkeit unserer Konstruktion von den dabei getroffenen Wahlen ebenso wie die Verträglichkeit mit Morphismen von kurzen exakten Sequenzen.

19.3.6.2. Als Spezialfälle erhalten wir in unseren Beispielen: Die lange exakte Ext-Sequenz im ersten 17.6.6.11 beziehungsweise zweiten 17.6.5.5 Eintrag und die lange exakte Tor-Sequenz im ersten beziehungsweise zweiten Eintrag 17.5.3.11.

Beispiel 19.3.6.3 (**Lange exakte Sequenz der Garbenkohomologie**). Gegeben eine kurze exakte Sequenz $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ von abelschen Garben auf einem topologischen Raum X spezialisiert die lange exakte Sequenz der derivierten Funktoren zu langen exakten Sequenzen der zugehörigen Kohomologiegruppen

$$\mathrm{H}^0(X;\mathcal{F}') \hookrightarrow \mathrm{H}^0(X;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^0(X;\mathcal{F}'') \to \mathrm{H}^1(X;\mathcal{F}') \to \mathrm{H}^1(X;\mathcal{F}) \to \dots$$

Definition 19.3.6.4. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie. Ein Objekt $J \in \mathcal{A}$ heißt **F-rechtsazyklisch**, wenn gilt $(\mathrm{R}^q F)(J) = 0$ für alle $q > 0$. Gilt nur $(\mathrm{R}^q F)(J) = 0$ für $0 < q \leq n$, so nennen wir J ein **F-n-rechtsazyklisches Objekt**.

Beispiele 19.3.6.5. Injektive Objekte sind F-rechtsazyklisch für jeden linksexakten Funktor F. Alle Objekte sind rechtsazyklisch für jeden exakten Funktor. Analoge Definitionen trifft man für rechtsexakte Funktoren von einer abelschen Kategorie mit genug Projektiven in eine weitere abelsche Kategorie. Projektive Objekte sind dann F-linksazyklisch für jeden rechtsexakten Funktor F. Torsionsfreie abelsche Gruppen sind linksazyklisch für alle Funktoren der Gestalt $\otimes_{\mathbb{Z}} M$ mit $M \in \mathrm{Ab}$.

19.3.6.6. Vielfach sagt man einfach nur F**-azyklisch** und der Leser muß erraten, was genau gemeint ist. Im Fall eines linksexakten Funktors meint „F-azyklisch“ für gewöhnlich „F-rechtsazyklisch“ und im Fall eines rechtsexakten Funktors „F-linksazyklisch“.

Proposition 19.3.6.7 (**Derivieren mit azyklischen Objekten**). *Gegeben ein linksexakter Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie sind für jede Auflösung $A \hookrightarrow J^\lhd$ durch F-rechtsazyklische Objekte eines Objekts $A \in \mathcal{A}$ unsere kanonischen Morphismen Isomorphismen*

$$\tau : \mathcal{H}^q F J^\lhd \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}^q F)(A)$$

19.3.6.8. Injektive Auflösungen sind für konkrete Rechnungen selten von Nutzen und eher für theoretische Überlegungen von Interesse. Für praktische Anwendungen ist es von zentraler Bedeutung, daß man die Derivierten eines gegebenen linksexakten beziehungsweise rechtsexakten Funktors bereits über Auflösungen durh azyklische Objekte berechnen kann. In 20.3.4.13 diskutieren wir, wie man den Begriff derivierter Funktoren ebenso wie obige Proposition auf Situationen verallgemeinern kann, in denen es nicht genug Injektive gibt. Von unserem derzeitigen Stand aus ist allerdings noch nicht einmal klar, wie in dieser Allgemeinheit „azyklisch“ überhaupt zu definieren sein sollte.

19.3.6.9 (**Partielles Derivieren mit Auflösungen durch partiell Azyklische**). Gegeben ein linksexakter Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie und ein festes $N \in \mathbb{N}$ sind sogar für jede Auflösung $A \hookrightarrow J^\lhd$ eines Objekts $A \in \mathcal{A}$ mit $(\mathrm{R}^q F)(J^p) = 0$ für alle (q, p) mit $q > 0$ und $q + p \leq N$ unsere kanonischen Morphismen Isomorphismen

$$\tau : \mathcal{H}^q F J^\lhd \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}^q F)(A) \quad \text{für } n < N.$$

Der Beweis bleibt im wesentlichen derselbe, die Details mag der Leser zur Übung ausarbeiten. Insbesondere können wir $\mathrm{R}^q F$ auch bereits mit Auflösungen durch $(q+1)$-azyklische Objekte berechnen.

Beweis. Seien $A \hookrightarrow I^\lhd$ eine injektive Auflösung von A und $f^\lhd : J^\lhd \to I^\lhd$ die bis auf Homotopie wohldefinierte Fortsetzung der Identität auf A nach 19.3.2.6. Es gilt zu zeigen, daß die Kettenabbildung

$$F f^\lhd : F J^\lhd \to F I^\lhd$$

Isomorphismen auf der Homologie induziert. Da aber $f^\lhd : J^\lhd \to I^\lhd$ Isomorphismen auf der Homologie induziert, muß die Homologie des Abbildungskegels

$K := \mathrm{K}(f^{\lhd})$ identisch verschwinden. Dieser Abbildungskegel beginnt im Grad -1 und wir können ihn aufspalten in kurze exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} K^{-1} & \hookrightarrow & K^0 & \twoheadrightarrow & C^0 & & & & \\ & & C^0 & \hookrightarrow & K^1 & \twoheadrightarrow & C^1 & & \\ & & & & C^1 & \hookrightarrow & K^2 & \twoheadrightarrow & C^2 \\ & & & & & & \cdots & & \cdots & & \cdots \end{array}$$

Aus der langen exakten Sequenz der derivierten Funktoren 19.3.6.1 folgt induktiv, daß alle in diesen kurzen exakten Sequenzen auftauchenden Objekte F-azyklisch sein müssen. Damit sehen wir dann sofort, daß $\mathrm{K}(f^{\lhd})$ exakt bleibt unter F. Da also nun $F\,\mathrm{K}(f^{\lhd}) = \mathrm{K}(Ff^{\lhd})$ exakt ist, muß $Ff^{\lhd}$ Isomorphismen auf der Homologie induzieren. □

19.3.6.10. Wir sagen, ein additiver Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie habe **endliche homologische Rechtsdimension**, wenn es ein d gibt mit $\mathrm{R}^q F = 0$ für $q > d$. Das kleinstmögliche derartige d oder genauer das Infimum aller derartigen d heißt dann die **homologische Rechtsdimension** unseres Funktors. Insbesondere hat der Nullfunktor die homologische Rechtsdimension $-\infty$. Analoges vereinbaren wir für Links statt Rechts. Eine Verallgemeinerung unserer Definitionen geben wir in 20.3.6.1.

Übungen

Übung 19.3.6.11 (**Ein Spektralsequenzargument**). Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie und A^* ein Komplex von F-azyklischen Objekten mit $A^n = 0$ für $n < 0$. Wir nehmen weiter an, es gelte $(\mathrm{R}^q F)\mathcal{H}^p A^* = 0$ für alle (q, p) mit $q > 0$ und $q + p \leq N$. Man zeige, daß dann die natürlichen Morphismen aus 19.3.2.37 für $n < N$ Isomorphismen

$$\mathcal{H}^n F A^* \xrightarrow{\sim} F\mathcal{H}^n A^*$$

sind. Hinweis: Man verfeinere den Beweis von 19.3.6.7. Im Rahmen der allgemeinen Theorie der Spektralsequenzen folgt die Aussage unmittelbar aus 19.9.3.12.

Übung 19.3.6.12 (**Injektive Objekte in Kategorien nichtnegativer Komplexe**). Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ betrachten wir die abelsche Kategorie

$$\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$$

aller für negative Indizes verschwindenden Komplexe in $\mathcal{A}$. Die injektiven Objekte dieser Kategorie sind genau alle entsprechenden Komplexe aus injektiven Objekten von $\mathcal{A}$, bei denen die Kohomologie in von Null verschiedenen Graden verschwindet und bei denen die Zykel $\ker \partial : I^n \to I^{n+1}$ in jedem Grad oder gleichbedeutend im Grad $n = 0$ direkte Summanden von I^n sind. In der Tat sieht man leicht, daß jeder Komplex dieser Art ein injektives Objekt von $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ ist, da es ein Produkt von Komplexen der Typen $I[0]$ und $(I \xrightarrow{\sim} I)$ ist für $I \in i\mathcal{A}$. Andererseits ist leicht zu sehen, daß bei einem injektiven Objekt von $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ die Zykel an jeder Stelle zu $i\mathcal{A}$ gehören müssen, man teste mit Homomorphismen nach $A[n] \hookrightarrow B[n]$, und die Objekte an jeder Stelle zu $i\mathcal{A}$ gehören müssen, man teste mit Injektionen von Zwei-Term-Komplexen $(A \xrightarrow{\sim} A) \hookrightarrow (B \xrightarrow{\sim} B)$. Schließlich ist jeder unserer Komplexe X Unterkomplex eines weiteren Komplexes Y mit $\mathcal{H}^q Y = 0$ für $q > 0$, und ist X injektiv, so muß diese Einbettung spalten und wir folgern $\mathcal{H}^q X = 0$ für $q > 0$. Hat $\mathcal{A}$ genügend Injektive, so auch $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$, wie man leicht einsieht. Für die Rechtsderivierten von $\mathcal{H}^0 : \mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ erhalten wir dann natürliche Isomorphismen

$$(\mathrm{R}^q \mathcal{H}^0)(K^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q K^*$$

vermittels der Interpretation einer injektiven Auflösung in $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ als Doppelkomplex im ersten Quadranten, dessen Zeilen und Spalten in positiven Graden exakt sind. Die Kohomologie des senkrechten Kernkomplexes berechnet nun die linke Seite Seite und die Kohomologie des waagerechten Kernkomplexes die rechte Seite und der waagerechte Kernkomplex ist schlicht K^* selber und beide Kohomologien gehen nach 19.4.6.8 isomorph auf die Kohomologie des Totalkomplexes.

Ergänzung 19.3.6.13. Ein Student könnte einmal ausarbeiten, inwiefern das Vorhergehende gültig bleibt, wenn $\mathcal{A}$ nicht genug Injektive hat und man derivierte Funktoren im in 20.3.4.2 erklärten verallgemeinerten Sinne versteht.

Übung 19.3.6.14. In der Kategorie aller graduierten Moduln über einem graduierten Ring gibt es genügend injektive Objekte.

Übung 19.3.6.15. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie. Sei

$$\ldots \to J^{-1} \to J^0 \to J^1 \to \ldots$$

eine exakte Sequenz mit F-rechtsazyklischen J^q. Man zeige: Bleibt unsere Sequenz nicht exakt unter F, so kann keiner der derivierten Funktoren $\mathrm{R}^q F$ für $q \geq 0$ der Nullfunktor sein.

Übung 19.3.6.16. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie. Sei weiter

$$J^{-d} \hookrightarrow \ldots \to J^{-2} \to J^{-1} \to J^0 \twoheadrightarrow A$$

eine exakte Sequenz mit F-rechtsazyklischen J^q, die „in die andere Richtung geht als eine Auflösung“. Man zeige: Alle Kokerne $\operatorname{cok}(J^{q-1} \to J^q)$ sind F-rechtsazyklisch und A ist F-rechtsazyklisch und unsere Sequenz bleibt exakt beim Anwenden von F. Dasselbe folgt im Übrigen auch ohne die Annahme der Existenz von genug Injektiven, wenn wir die Eigenschaft „F-rechtsazyklisch“ wie in 20.3.4.2 verstehen und 20.3.4.15 zu Hilfe nehmen.

Übung 19.3.6.17. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie. Sei

$$A \hookrightarrow J^0 \to J^1 \to \ldots \to J^{d-1} \twoheadrightarrow C$$

eine exakte Sequenz mit F-rechtsazyklischen J^ν. Ist die homologische Rechtsdimension von F höchstens d, so ist auch C ein F-rechtsazyklisches Objekt.

Übung 19.3.6.18. Sei $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von abelschen Kategorien und es habe $\mathcal{A}$ genug Projektive. Man erinnere aus 19.3.2.33 die augmentierten Linksderivierten $\mathrm{L}_q G : \mathcal{A}^G \to \mathcal{B}$ und leite die lange exakte Sequenz der augmentierten derivierten Funktoren zu einer kurzen exakten Sequenz in $\mathcal{A}^G$ her.

Übung 19.3.6.19 (**Nullhomotope Komplexe**). Man zeige, daß ein Komplex (X^n, ∂) von abelschen Gruppen genau dann nullhomotop ist, wenn es Gruppen A^n und Isomorphismen $X^n \xrightarrow{\sim} A^n \oplus A^{n+1}$ gibt, unter denen der Randoperator der Komposition

$$A^n \oplus A^{n+1} \twoheadrightarrow A^{n+1} \hookrightarrow A^{n+1} \oplus A^{n+2}$$

von Projektion und Injektion entspricht. Mutige zeigen dasselbe in beliebigen abelschen Kategorien und sogar noch allgemeiner beliebigen additiven Kategorien mit spaltenden Idempotenten.

Übung 19.3.6.20 (**Zu Komplexen mit Differential Null homotope Komplexe**). Man zeige, daß ein Komplex (Y^n, ∂) von abelschen Gruppen genau dann homotopieäquivalent ist zu einem Komplex mit verschwindenden Differentialen, wenn es Gruppen A^n, H^n und Isomorphismen $X^n \xrightarrow{\sim} A^n \oplus H^n \oplus A^{n+1}$ gibt, unter denen der Randoperator der Komposition

$$A^n \oplus H^n \oplus A^{n+1} \twoheadrightarrow A^{n+1} \hookrightarrow A^{n+1} \oplus H^{n+1} \oplus A^{n+2}$$

von Projektion und Injektion entspricht. Wir nennen Komplexe mit dieser Eigenschaft **maximal spaltend**. Mutige zeigen dasselbe in beliebigen abelschen Kategorien und sogar noch allgemeiner in beliebigen additiven Kategorien mit spaltenden Idempotenten.

19.3.7 Gruppenkohomologie*

19.3.7.1. An dieser Stelle geht es nur um die Definition der Gruppenkohomologie als Anwendung unserer Konstruktionen aus der abstrakten homologischen Algebra und um die Beziehung der Gruppenkohomologie mit konstanten Koeffizienten zur singulären Kohomologie. In 19.8.3 besprechen wir dann feiner die Beziehung der Gruppenkohomologie mit beliebigen Koeffizienten zur Garbenkohomologie. In 19.3.8.2 besprechen wir nichtabelsche Gruppenkohomologie.

Definition 19.3.7.2. Sei G eine Gruppe. Unter einem G**-Modul** verstehen wir eine abelsche Gruppe A mit einer Operation $G \to \mathrm{Grp}^\times(A)$ von G auf A durch Gruppenhomomorphismen, als da heißt ein Objekt A von $G\text{-}\mathrm{Ab}$.

19.3.7.3. Gegeben ein G-Modul A bilden wir zwei abelsche Gruppen A^G und A_G, genannt die **Invarianten** und die **Ko-Invarianten** von A, vermittels der Vorschrift

$$\begin{aligned} A^G &:= \{a \in A \mid ga = a \ \forall g \in G\} \\ A_G &:= A/\langle a - ga \mid a \in A, g \in G\rangle \end{aligned}$$

Hier besteht A^G genau aus allen unter G invarianten Elementen von A und ist damit die größte unter G invariante Untergruppe von A. Dual ist A_G der „größte Quotient von A, auf dem G trivial operiert“. Etwas formaler können wir jede abelsche Gruppe mit der trivialen G-Operation versehen und so einen Funktor $\mathrm{Ab} \to G\text{-}\mathrm{Ab}$ definieren. Das Bilden der Invarianten beziehungsweise der Koinvarianten ist dann der Rechts- beziehungsweise Linksadjungierte zu diesem Funktor.

19.3.7.4 (**Invarianten und Koinvarianten in Modulsprache**). Bilden wir wie in 8.1.2.1 den Gruppenring $\mathbb{Z}G$, so ist ein G-Modul nichts anderes als ein Modul über dem Ring $\mathbb{Z}G$. Der Funktor, der jede abelsche Gruppe mit der trivialen G-Operation versieht, entspricht dann dem Zurückholen

$$\mathrm{res}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}G} : \mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{Z}G\text{-}\mathrm{Mod}$$

vermittels des Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$, der jedes Gruppenelement auf die Eins wirft. Im Rahmen des allgemeinen Formalismus aus 8.6.3.2 haben wir demnach natürliche Isomorphismen $A^G \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}G}^{\mathbb{Z}} A = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$ und $A_G \xrightarrow{\sim} \mathrm{prod}_{\mathbb{Z}G}^{\mathbb{Z}} A = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A$.

Definition 19.3.7.5 (**Gruppenhomologie und Gruppenkohomologie**)**.** Sicher ist $A \mapsto A^G$ ein linksexakter und $A \mapsto A_G$ ein rechtsexakter Funktor $G\text{-}\mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$. Die Rechtsderivierten von $A \mapsto A^G$ nennt man die **Kohomologie der Gruppe** G **mit Koeffizienten in** A und notiert sie

$$\mathrm{H}^q(G; A)$$

Die Linksderivierten von $A \mapsto A_G$ nennt man die **Homologie der Gruppe** G **mit Koeffizienten in** A und notiert sie

$$\mathrm{H}_q(G; A)$$

Speziell gilt also $\mathrm{H}^0(G; A) = A^G$ und $\mathrm{H}_0(G; A) = A_G$. Redet man von Gruppenhomologie oder Gruppenkohomologie ohne Koeffizienten zu spezifizieren, so sind meist Koeffizienten in der Einsdarstellung $\mathbb{Z}$ gemeint.

19.3.7.6 (**Gruppenhomologie und -kohomologie in Modulsprache**). Seien G eine Gruppe und A ein G-Modul. Verstehen wir $\mathbb{Z}$ als G-Modul mit der trivialen Operation von links beziehungsweise von rechts, so liefern unsere offensichtlichen kanonischen Isomorphismen $A^G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$ und $A_G \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A$ auch kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_q(G; A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_q^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A) \\ \mathrm{H}^q(G; A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}G}^q(\mathbb{Z}, A) \end{aligned}$$

mit Ext und Tor wie in 19.3.2.14 und 19.3.2.26.

19.3.7.7 (**Ursprung der Terminologie**). Es mag verwirren, daß *Ko*homologie die Invarianten und Homologie die *Ko*invarianten verallgemeinert. Der Grund ist die Entstehung dieser Begriffe aus topologischen Überlegungen, genauer aus der Erkenntnis 19.3.7.12, daß die Kohomologie beziehungsweise Homologie eines Quotienten $G\backslash X$ für einen zusammenziehbaren topologischen Raum X mit topologisch freier Operation einer Gruppe G nur von der Gruppe G selbst und nicht von X abhängt und folglich die Bezeichnung $\mathrm{H}^q(G\backslash X; \mathbb{Z}) = \mathrm{H}^q(G; \mathbb{Z})$ beziehungsweise $\mathrm{H}_q(G\backslash X; \mathbb{Z}) = \mathrm{H}_q(G; \mathbb{Z})$ verdient.

Beispiel 19.3.7.8 (**Homologie und Kohomologie von** $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Wir betrachten die zweielementige Gruppe $G = \{e, g\}$. Sie ist kommutativ und dasselbe gilt für ihren Gruppenring. Eine freie Auflösung des $\mathbb{Z}G$-Moduls $\mathbb{Z}$ wird gegeben durch den Komplex

$$\ldots \xrightarrow{(1-g)} \mathbb{Z}G \xrightarrow{(1+g)} \mathbb{Z}G \xrightarrow{(1-g)} \mathbb{Z}G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

Schneiden wir das $\mathbb{Z}$ am Ende ab und wenden auf den Rest den Funktor der Koinvarianten an, so ergibt sich der Komplex

$$\ldots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$$

Damit erhalten wir schließlich $\mathrm{H}_0(G; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $\mathrm{H}_q(G; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für $q \geq 2$ gerade und $\mathrm{H}_q(G; \mathbb{Z}) = 0$ für q ungerade. Ist allgemeiner A ein G-Modul, so können wir unseren Isomorphismus $\mathrm{H}_q(G; A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_q^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$ anwenden und dürfen das nach 19.4.6.13 mithilfe des obigen Komplexes als freie Auflösung des

trivialen G-Rechtsmoduls $\mathbb{Z}$ berechnen. So erhalten wir dann eine Beschreibung der Gruppenhomologie $\mathrm{H}_q(G;A)$ als Homologie des Komplexes

$$\ldots \stackrel{1-g}{\to} A \stackrel{1+g}{\to} A \stackrel{1-g}{\to} A$$

Die Gruppenkohomologie berechnen wir ähnlich, indem wir vom Isomorphismus $\mathrm{H}^q(G;A) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Ext}^q_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A)$ ausgehen und das nach 20.2.3.10 mithilfe des obigen Komplexes als freie Auflösung des trivialen G-Linksmoduls $\mathbb{Z}$ berechnen. So ergibt sich die Gruppenkohomologie mit Koeffizienten in A als Kohomologie des Komplexes

$$\ldots \stackrel{1-g}{\leftarrow} A \stackrel{1+g}{\leftarrow} A \stackrel{1-g}{\leftarrow} A$$

19.3.7.9 (**Gruppenkohomologie über die Standardauflösung**). Sei G eine Gruppe. Um die Bedeutung der Gruppenkohomologie für kleine q zu verstehen, erinnern wir uns daran, daß wir nach 17.1.1.17 für jede Menge G einen exakten Komplex

$$\mathbb{Z} \stackrel{\partial}{\leftarrow} \mathbb{Z}G \stackrel{\partial}{\leftarrow} \mathbb{Z}G^2 \stackrel{\partial}{\leftarrow} \ldots$$

erhalten mit Randoperatoren $\partial(g_0,\ldots,g_q) = \sum(-1)^i(g_0,\ldots,\hat{g}_i,\ldots,g_q)$ auf den offensichtlichen Basiselementen. Ist G eine Gruppe und lassen wir G auf $G^{\times(q+1)}$ operieren durch die Vorschrift $g(g_0,\ldots,g_q) = (gg_0,\ldots,gg_q)$, so wird unser Komplex eine freie Auflösung des trivialen $\mathbb{Z}G$-Moduls $\mathbb{Z}$. Unter den Isomorphismen von abelschen Gruppen

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}G)G^q & \stackrel{\sim}{\to} & \mathbb{Z}G^{q+1} \\ g_0(g_1,\ldots,g_q) & \mapsto & (g_0, g_0g_1, g_0g_1g_2, \ \ldots, g_0g_1\ldots g_q) \end{array}$$

stellt sich zwar die $\mathbb{Z}G$-Operation in einfacherer Form dar, der Randoperator wird jedoch komplizierter und wird die $\mathbb{Z}G$-lineare Abbildung $(\mathbb{Z}G)G^q \to (\mathbb{Z}G)G^{q-1}$ vom freien $\mathbb{Z}G$-Modul über G^q in den freien $\mathbb{Z}G$-Modul über G^{q-1}, die auf den freien Erzeugern gegeben wird durch

$$\begin{aligned} \partial(g_1,\ldots,g_q) &= g_1(g_2,\ldots,g_q) + (-1)^q(g_1,\ldots,g_{q-1}) \\ &\quad + \textstyle\sum_{i=1}^{q-1}(-1)^i(g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_q) \end{aligned}$$

Wir nennen diesen Komplex der $(\mathbb{Z}G)G^q$ die **Standardauflösung**.

Lemma 19.3.7.10 (**Erste Gruppenkohomologie bei trivialer Operation**). *Operiert eine Gruppe G trivial auf einer abelschen Gruppe A, so liefert die Konstruktion im folgenden Beweis einen natürlichen Isomorphismus zwischen der ersten Kohomologie von G mit Koeffizienten in A und der Menge der Gruppenhomomorphismen von G nach A, in Formeln*

$$\mathrm{H}^1(G;A) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Grp}(G,A)$$

Beweis. Die Einskozykel in der Standardauflösung 19.3.7.9 sind die $\mathbb{Z}G$-Homomorphismen $f : (\mathbb{Z}G)G \to A$ mit $f \circ \partial = 0$. Schränken wir sie ein auf die offensichtliche $\mathbb{Z}G$-Basis G von $(\mathbb{Z}G)G$, so werden Einskozykeln identifiziert mit Abbildungen $f : G \to A$ derart, daß gilt $xf(y) - f(xy) + f(x) = 0$ für alle $x, y \in G$, wo wir der Übersichtlichkeit halber statt g_1, g_2 die Symbole x, y verwenden. Derartige Abbildungen nennt man im allgemeinen **gekreuzte Homomorphismen**. Operiert G trivial auf A, so vereinfacht sich das zu $f(y) + f(x) = f(xy)$ und wir haben den Raum der Einskozykeln identifiziert mit dem Raum aller Gruppenhomomorphismen $\mathrm{Grp}(G, A)$. Die Koränder ihrerseits sind die $\mathbb{Z}G$-Homomorphismen $(\mathbb{Z}G)G \to A$ der Gestalt $f = h \circ \partial$, also der Gestalt $f(x) = xa - a$ für ein $a \in A$, das das Bild des freien Erzeugers $()$ von $(\mathbb{Z}G)G^0$ unter h bedeutet. Operiert G trivial auf A, so sind mithin alle Einskoränder null. $\square$

19.3.7.11 (**Zweite Gruppenkohomologie und Gruppenerweiterungen**). Seien G eine Gruppe und A ein G-Modul. Die Zweikozykel in der Standardauflösung 19.3.7.9 sind per definitionem genau die $\mathbb{Z}G$-Homomorphismen $f : (\mathbb{Z}G)G^2 \to A$ mit $f \circ \partial = 0$. Unter Restriktion auf die freien Erzeuger entsprechen sie eineindeutig den Abbildungen $h : G \times G \to A$ derart, daß für alle $x, y, z \in G$ gilt $xh(y, z) - h(x, y) - h(xy, z) + h(x, yz) = 0$. Solche Abbildungen heißen auch selbst **Zweikozykel** und gegeben solch ein Zweikozykel können wir $A \times G$ zu einer Gruppe E machen vermittels der Verknüpfung

$$(a, x)(b, y) = (a + xb + h(x, y), xy)$$

So erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Gruppen $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$. Man zeigt ohne Schwierigkeiten, daß $\mathrm{H}^2(G; A)$ die Isomorphieklassen von derartigen Erweiterungen bei vorgegebener Operation von G auf A durch Konjugation klassifiziert. Eine zweite kurze exakte Sequenz $A \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow G$ heißt hier isomorph zu $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$, wenn es einen Gruppenisomorphismus $E \xrightarrow{\sim} E'$ gibt derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} A & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & G \\ \| & & \downarrow & & \| \\ A & \hookrightarrow & E' & \twoheadrightarrow & G \end{array}$$

kommutiert. Die Null in $\mathrm{H}^2(G; A)$ entspricht hierbei dem Fall, daß E das semidirekte Produkt ist. Mehr dazu findet man in [Mac63].

Satz 19.3.7.12 (Gruppen(ko)homologie und singuläre (Ko)homologie). *Seien X ein zusammenziehbarer topologischer Raum und G eine diskrete Gruppe, die topologisch frei von rechts auf X operiert. Sei weiter A eine abelsche Gruppe mit trivialer G-Operation. So konstruieren wir im folgenden Beweis in A und (X, G)*

natürliche Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_q(G;A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X/G;A)_{\mathrm{sing}} \\ \mathrm{H}^q(G;A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X/G;A)_{\mathrm{sing}} \end{aligned}$$

19.3.7.13. Die Homologie beziehungsweise Kohomologie der Gruppe G mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe A mit der trivialen G-Operation ist demnach kanonisch isomorph zur singulären Homologie beziehungsweise Kohomologie des Bahnenraums X/G mit Koeffizienten in A. Morphismen $(X,G) \to (Y,H)$ für die Natürlichkeit in (X,G) sind zu verstehen als Paare (f,φ) aus einer stetigen Abbildung und einem Gruppenhomomorphismus mit $f(xg) = f(x)\varphi(g)$ für alle $x \in X, g \in G$.

Beweis. Man sieht leicht ein, daß der Komplex der singulären Ketten $\mathrm{S}X \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ eine Auflösung von $\mathbb{Z}$ durch freie $\mathbb{Z}G$-Moduln ist. Genauer operiert G nach dem Satz über die Existenz und Eindeutigkeit von Lifts 16.3.4.13 frei auf der Menge der singulären Simplizes und jedes Repräsentantensystem für die Bahnen ist eine $\mathbb{Z}G$-Basis. Fassen wir unsere Räume von Ketten als $\mathbb{Z}G$-Rechtsmoduln auf, so liefert die Projektion einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$(\mathrm{S}X) \otimes_{\mathbb{Z}G} A \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(X/G;A)$$

In der Tat ist das Bild unserer $\mathbb{Z}G$-Basis von $\mathrm{S}X$ ist offensichtlich eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathrm{S}(X/G)$. Gehen wir auf beiden Seiten zur Homologie über, so ergibt sich die erste Behauptung. Fassen wir unsere Räume von Ketten als $\mathbb{Z}G$-Linksmoduln auf, so erkennen wir ähnlich, daß die Projektion einen Isomorphismus von Kettenkomplexen der Gestalt

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{S}(X/G),A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathrm{S}X,A)$$

liefert. Gehen wir auf beiden Seiten zur Kohomologie über, so ergibt sich die zweite Behauptung. □

Satz 19.3.7.14 (Gruppenkohomologie und singuläre Kohomologie, Variante). *Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und G eine diskrete Gruppe, die topologisch frei von rechts auf X operiert. Seien weiter A eine abelsche Gruppe mit trivialer G-Operation und $q \geq 0$.*

1. *Gilt $\mathrm{H}_1(X;A)_{\mathrm{sing}} = \ldots = \mathrm{H}_q(X;A)_{\mathrm{sing}} = 0$, so haben wir einen kanonischen Isomorphismus $\mathrm{H}_q(G;A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X/G;A)_{\mathrm{sing}}$.*

2. *Gilt $\mathrm{H}^1(X;A)_{\mathrm{sing}} = \ldots = \mathrm{H}^q(X;A)_{\mathrm{sing}} = 0$, so haben wir einen kanonischen Isomorphismus $\mathrm{H}^q(G;A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X/G;A)_{\mathrm{sing}}$.*

Beweis. Mutatis mutandis identisch zum Beweis von 19.3.7.12. □

Beispiel 19.3.7.15. Betrachten wir auf der Sphäre S^n die Operation der zweielementigen Gruppe $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, die jeden Punkt auf den gegenüberliegenden Punkt wirft, so folgt für $q < n$ unmittelbar $\mathrm{H}_q(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; A) \cong \mathrm{H}_q(\mathbb{P}^n\mathbb{R}; A)$ in Übereinstimmung mit unserer Berechnung der Homologie 17.5.1.6 der reell-projektiven Räume und unserer Berechnung 19.3.7.8 der Gruppenhomologie der zweielementigen Gruppe. Ebenso erhalten wir wieder unter der Voraussetzung $q < n$ für die Kohomologie $\mathrm{H}^q(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; A) \cong \mathrm{H}^q(\mathbb{P}^n\mathbb{R}; A)$.

Übungen

Übung 19.3.7.16. Man finde für jeden Gruppenhomomorphismus $G \to A$ eine kurze exakte Sequenz von G-Moduln $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, die sein Bild unter den kanonischen Isomorphismen $\mathrm{Grp}(G, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(G; A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$ im Sinne von 20.2.7.7 repräsentiert.

Übung 19.3.7.17. Gegeben eine abelsche Gruppe A mit einer Operation der Gruppe $G = \mathbb{Z}$, bei der die Eins durch den Automorphismus $T : A \xrightarrow{\sim} A$ operiert, zeige man:

$$\mathrm{H}^q(\mathbb{Z}; A) \cong \begin{cases} \{a \in A \mid T(a) = a\} & q = 0; \\ A/\operatorname{im}(T - \mathrm{id}) & q = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Die durch Multiplikation mit $(T-1)$ gegebene Einbettung $\mathbb{Z}[T, T^{-1}] \hookrightarrow \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ hat den Kokern $\mathbb{Z}$.

Übung 19.3.7.18 (**Zurückholen in der Gruppenkohomologie**). Gegeben $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und $A \in G\text{-Ab}$ sowie $B \in H\text{-Ab}$ Moduln verstehen wir unter einem **Komorphismus von abelschen Gruppen über** f einen Homomorphismus von abelschen Gruppen $\phi : B \to A$ mit $\phi(f(g)b) = g\varphi(b)$ für alle $g \in G, b \in B$. Man zeige: Für jeden Komorphismus und jedes q gibt es genau eine Abbildung

$$\mathrm{H}^q\phi : \mathrm{H}^q(H; B) \to \mathrm{H}^q(G; A)$$

derart, daß für je zwei Auflösungen $A \hookrightarrow I^\lhd$ und $B \hookrightarrow J^\lhd$ und jeden Lift von ϕ zu einem Komorphismus $\phi^\lhd : J^\lhd \to I^\lhd$ von Auflösungen über f das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q((J^\lhd)^H) & \xrightarrow{\phi^\lhd} & \mathcal{H}^q((I^\lhd)^G) \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \mathrm{H}^q(H; B) & \xrightarrow{\mathrm{H}^q\phi} & \mathrm{H}^q(G; A) \end{array}$$

kommutiert mit den natürlichen Abbildungen τ aus 19.3.2.8 in den Vertikalen und der von unserem Lift $\phi^\lhd$ induzierten oberen Horizontalen. Des weiteren gelten die

Formeln $\mathrm{H}^q(\phi \circ \psi) = \mathrm{H}^q\psi \circ \mathrm{H}^q\phi$ und $\mathrm{H}^q\,\mathrm{id} = \mathrm{id}$. Eine gewisse Anschauung im Fall $q = 1$ mag 19.3.8.5 geben. In 19.4.3.7 werden wir eine ähnliche Konstruktion kennenlernen, das „Zurückholen in der Garbenkohomologie“.

19.3.8 Nichtabelsche Kohomologie*

19.3.8.1. Im folgenden erkläre ich die Bedeutung der ersten Gruppenkohomologie. Operiert eine Gruppe G auf einer abelschen Gruppe A, so hatten wir ja bereits in 19.3.7.5 die abelschen Gruppen $\mathrm{H}^q(G; A)$ erklärt und im Fall einer trivialen Operation in 19.3.7.10 einen ausgezeichneten Isomorphismus $\mathrm{H}^1(G; A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Grp}(G, A)$ konstruiert. Ist A nicht notwendig kommutativ, so erklären wir im folgenden eine punktierte Menge

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{na}}(G; A) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{nichtabelsch}}(G; A)$$

und konstruieren im weiteren im Fall einer abelschen Gruppe eine ausgezeichnete Bijektion zwischen dieser punktierten Menge und der ersten Kohomologie aus 19.3.7.5 mit der Null als ausgezeichnetem Punkt. Damit können wir dann die Notation auch wieder zu $\mathrm{H}^1(G; A) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{na}}(G; A)$ vereinfachen.

Definition 19.3.8.2 (**Nichtabelsche Gruppenkohomologie**)**.** Seien G eine Gruppe und $A \in G\text{-}\mathrm{Grp}$ eine Gruppe, auf der G durch Gruppenautomorphismen operiert. Ein **G-äquivarianter A-Torsor** ist ein A-Torsor X mit einer G-Operation derart, daß die Operation $A \times X \to X$ äquivariant ist für G, in Formeln $g(ax) = (ga)(gx)\ \forall g \in G, a \in A, x \in X$. Die Menge aller Isomorphieklassen von G-äquivarianten A-Torsoren mit dem durch die Klasse des trivialen G-äquivarianten A-Torsors $X = A$ gegebenen ausgezeichneten Punkt notieren wir

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{na}}(G; A) \in \mathrm{Ens}^*$$

und nennen sie die **erste Gruppenkohomologie von G mit Koeffizienten in A**.

Beispiel 19.3.8.3 (**Erste Gruppenkohomologie bei trivialer Operation**). Gegeben Gruppen G, A mit der Maßgabe, daß G trivial auf A operiert, erhalten wir eine Bijektion

$$\mathrm{Grp}(G, A)/(\mathrm{int}\, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\mathrm{na}}(G; A)$$

durch die Vorschrift, daß wir einem Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to A$ die A-Menge A mit der G-Operation gegeben durch $gx := x\varphi(g^{-1})$ zuordnen. Der Gruppenhomomorphismus $(\mathrm{int}\, a) \circ \varphi$ führt zu einem isomorphen G-äquivarianten A-Torsor, ein Isomorphismus ist die Multiplikation mit a von rechts.

19.3.8.4 (**Nichtabelsche Gruppenkohomologie durch kohomologe Zykel**). Um unsere Menge $\mathrm{H}^1_{\mathrm{na}}(G;A)$ von Isomorphieklassen explizit zu beschreiben und dabei mit den Notationen nicht durcheinander zu kommen, benutzen wir die exponentielle Schreibweise für die Operation von G und gehen gleichzeitig zu Rechtsoperationen von G über. Weiter unterscheiden wir die Operation von G auf unserem Torsor X durch Klammern von der Operation von G auf der Gruppe A und schreiben also $x^{(g)} := g^{-1}x$ für $x \in X$ sowie $a^g := g^{-1}a$ für $a \in A$. Unsere Äquivarianzbedingung erhält damit die Gestalt

$$(ax)^{(g)} = a^g x^{(g)}$$

Eine äquivariante G-Operation auf dem A-Torsor $X = A$ ist nun festgelegt durch die Abbildung $z : G \to A, g \mapsto 1^{(g)}$, denn es gilt stets $a^{(g)} = (a1)^{(g)} = a^g z(g)$. Für eine beliebige Abbildung $z : G \to A$ liefert umgekehrt diese Formel für jedes g eine Bijektion $A \xrightarrow{\sim} A$, $a \mapsto a^{(g)}$ mit $(ba)^{(g)} = b^g a^{(g)}$ für alle $a, b \in G$. Diese Bijektionen hinwiederum bilden eine Operation von G auf A genau dann, wenn für alle $a \in A$ und $g, h \in G$ gilt $a^{(gh)} = (a^{(g)})^{(h)}$, also $a^{gh} z(gh) = (a^g z(g))^{(h)} = (a^{gh} z(g)^h) z(h)$, was äquivalent ist zur Bedingung

$$z(gh) = z(g)^h z(h) \;\; \forall g, h \in G$$

Eine Abbildung $z : G \to A$, die diese Bedingung erfüllt, heißt ein **Einskozykel** von G mit Koeffizienten in A. Die Einskozykel parametrisieren mithin diejenigen G-Operationen auf der A-Menge $X = A$, die in der oben beschriebenen Weise verträglich sind mit der vorgegebenen Operation von G auf A durch Gruppenhomomorphismen. Man erkennt sofort, daß für abelsches A diese Einskozykel nichts anderes sind als unsere Einskozykel der Standardauflösung alias gekreuzten Homomorphismen aus dem Beweis von 19.3.7.10. Wir brauchen also bereits hier die Spezifikation „nichtabelsch“ nicht mehr und bezeichnen die Menge der Einskozykel mit

$$\mathrm{Z}^1(G;A)$$

Die Automorphismen der A-Menge A sind nun genau die Rechtsmultiplikationen $(\cdot b)$ mit Elementen $b \in A$ und unter der Identifikation $(\cdot b) : A \xrightarrow{\sim} A$ entspricht die äquivariante G-Operation $a \mapsto a^{(g)}$ einer neuen G-Operation gegeben durch $a \mapsto a^{[g]}$ mit $a^{[g]} b = (ab)^{(g)}$ für unser fest gewähltes b. Der Kozykel $w(g) = 1^{[g]}$ zu unserer neuen Operation berechnet sich demnach aus dem Kozykel $z(g) = 1^{(g)}$ der alten Operation vermittels der Formel

$$w(g) = 1^{[g]} = b^{(g)} b^{-1} = b^g z(g) b^{-1}$$

Wir erhalten so eine Beschreibung unserer Kohomologiemenge Bahnenraum in Gestalt einer kanonischen Bijektion

$$\mathrm{Z}^1(G;A)/A \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(G;A)$$

Die Standgruppe des ausgezeichneten Zykels $*$ ist dabei die Gruppe der G-Invarianten A^G. Kozykel in derselben Bahn heißen **kohomolog**, unsere Kohomologiemenge ist in dieser Terminologie also die Menge aller Kohomologieklassen von Kozykeln. Für abelsches und additiv notiertes A sind wieder zwei Kozykel kohomolog genau dann, wenn ihre Differenz ein Rand ist im Sinne vom Schluß des Beweises von 19.3.7.10, folglich erhalten wir für abelsches A in der Tat unser altes H^1 zurück.

19.3.8.5 (**Nichtabelsche Gruppenkohomologie als Funktor**). Die erste Kohomologie wird ein Funktor in A, indem wir jedem G-äquivarianten Gruppenhomomorphismus alias jedem Morphismus $B \to A$ in $G\text{-}\mathrm{Grp}$ den Morphismus von bepunkteten Mengen $\mathrm{H}^1(G;B) \to \mathrm{H}^1(G;A)$ zuordnen, der von $X \mapsto A \times_{/B} X$ induziert wird. Sie ist andererseits bei festem A auch ein kontravarianter Funktor in G in offensichtlicher Weise. Wir können diese beiden Funktorialitäten auch zusammenfassen und so jedem Komorphismus $B \to A$ von Gruppen mit Operation über einem Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ einen Morphismus von bepunkteten Mengen

$$\mathrm{H}^1(H;B) \to \mathrm{H}^1(G;A)$$

Der Leser mag zur Übung zeigen, daß er im abelschen Fall unter unseren Bijektionen dem Rückzug aus 19.3.7.18 entspricht.

Beispiel 19.3.8.6. Für jeden Einskozykel $z : G \to A$ gilt sicher $z(1) = 1$. Im Fall einer zweielementigen Gruppe $G = \{1, \gamma\}$ erhalten wir damit eine Bijekion

$$\mathrm{Z}^1(G;A) \xrightarrow{\sim} \{a \in A \mid 1 = a^\gamma a\}$$

und eine Bijektion zwischen $\mathrm{H}^1(G;A)$ und der Menge der A-Bahnen auf besagter Teilmenge von A unter der A-Operation, die gegeben wird durch die Vorschrift $b \cdot a := b^\gamma a b^{-1}$ für $b \in A$.

19.3.8.7 (**Diskussion der Terminologie**). Wenn ich von **nichtabelscher Gruppenkohomologie** rede, meine ich $\mathrm{H}^1(G;A)$. Die $\mathrm{H}^q(G;A)$ mit $q > 1$ sind bei uns nur für A abelsch definiert. $\mathrm{H}^0(G;A) = A^G$ nenne ich die **G-Invarianten von A**.

Ergänzung 19.3.8.8 (**Exakte Sequenzen der nichtabelschen Kohomologie**). Sei G eine Gruppe. Unter einer **punktierten G-Menge** verstehen wir eine Menge A mit einem ausgezeichneten Punkt und einer Operation von G, die diesen Punkt festhält. Wir setzen dann $\mathrm{H}^0(G;A) := A^G$ und betrachten das als eine Menge mit demselben ausgezeichneten Punkt. Die folgenden unter immer stärkeren Voraussetzungen immer längeren exakten Sequenzen von punktierten Mengen sind kein so starkes Hilfsmittel wie exakte Sequenzen von Gruppen, können aber in speziellen Situationen schon weiterhelfen.

1. Ist $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ eine kurze exakte Sequenz von punktierten G-Mengen im Sinne von 4.4.6.3, so erhalten wir eine linksexakte Sequenz $A^G \hookrightarrow B^G \to C^G$ alias
$$\mathrm{H}^0(G;A) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(G;B) \to \mathrm{H}^0(G;C)$$
von punktierten Mengen.

2. Ist A eine Gruppe und B eine punktierte Menge mit freier G-äquivarianter A-Operation von links und sind die Fasern von $B \twoheadrightarrow C$ gerade die A-Bahnen, so erklären wir $\partial : \mathrm{H}^0(G;C) \to \mathrm{H}^1(G;A)$ wie folgt: Gegeben $c \in C^G$ wählen wir $b \in B$ mit $b \mapsto c$ und definieren $z = z_b : G \to A$ durch $z(g)b = b^g$. Dann gilt $z(g)^\beta z(\beta)b = z(g)^\beta b^\beta = b^{g\beta}$, folglich ist z_b ein Element von $\mathrm{Z}^1(G;A)$. Eine andere Wahl ab führt zu $z_{ab}(g)(ab) = (ab)^g$ und damit gilt $(a^g)^{-1}z_{ab}(g)a = z_b(g)$ und wir erhalten einen homologen 1-Kozykel. Auf diese Weise liefert jedes $c \in C^G$ eine wohlbestimmte Klasse $\partial c \in \mathrm{H}^1(G;A)$. Damit erhalten wir eine exakte Sequenz
$$\mathrm{H}^0(G;A) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(G;B) \to \mathrm{H}^0(G;C) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^1(G;A)$$
In der Tat, hat $c \in C^G$ ein Urbild $b \in B^G$, so ist ∂c die Klasse des konstanten 1-Kozykels z_b. Ist umgekehrt $b \in B$ ein Urbild von $c \in C^G$ und ist z_b homolog zum konstanten 1-Kozykel, gibt es also $a \in A$ mit $z_b(g) = a^g a^{-1}$ für alle $g \in G$, gilt also $a^g a^{-1} b = b^g \quad \forall g \in G$, so gilt $a^{-1}b \in B^G$ und das ist ein G-invariantes Urbild von c.

3. Ist $A \hookrightarrow B$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus und $C = \{Ab \mid b \in B\} \subset \mathcal{P}(B)$ der Raum der Linksnebenklassen, so erhalten wir sogar eine exakte Sequenz
$$\mathrm{H}^0(G;A) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(G;B) \to \mathrm{H}^0(G;C) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^1(G;A) \to \mathrm{H}^1(G;B)$$
In der Tat, wird ein 1-Kozykel $z : G \to A$ nullhomolog in $\mathrm{H}^1(G;B)$, so gibt es $b \in B$ mit $z(g) = b^g b^{-1} \quad \forall g$ und dann ist $z = z_b = \partial c$ für $c \in C^G$ das Bild von b. Umgekehrt ist auch klar, daß jedes ∂c in $\mathrm{H}^1(G;B)$ triviales Bild hat.

4. Ist $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ eine kurze exakte Sequenz von Gruppen, so haben wir sogar eine exakte Sechs-Term-Sequenz
$$A^G \hookrightarrow B^G \twoheadrightarrow C^G \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^1(G;A) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^1(G;B) \to \mathrm{H}^1(G;C)$$
und haben H^0 umgeschrieben, damit sie in eine Zeile paßt. In der Tat geht jeder 1-Kozykel aus A natürlich auf den trivialen 1-Kozykel in C. Ist andererseits $z : G \to B$ ein 1-Kozykel, der trivial wird in $\mathrm{H}^1(G;C)$, so gibt

es $c \in C$ mit $\overline{z(g)} = c^g c^{-1} \quad \forall g \in G$. Für jedes Urbild $b \in B$ von c folgt $w(g) := (b^g)^{-1} z(g) b \in A$ und so ist z homolog zu $w \in \mathrm{Z}^1(G; A)$.

5. Liegt zusätzlich das Bild von A im Zentrum von B, so können wir unsere Sequenz um noch einen weiteren Schritt zu einer exakten Sieben-Term-Sequenz

$$A^G \hookrightarrow B^G \twoheadrightarrow C^G \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^1(G; A) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^1(G; B) \to \mathrm{H}^1(G; C) \to \mathrm{H}^2(G; A)$$

verlängern. Das sei dem Leser zur Übung überlassen.

Vorschau 19.3.8.9 (**Gruppenkohomologie und Garbenkohomologie**). Gegeben eine Gruppe G und eine G-Gruppe A klassifiziert unsere nichtabelsche Gruppenkohomologie $\mathrm{H}^1(G; A)$ diejenigen G-Mengen mit G-äquivaranter A-Operation, die unter Vergessen der G-Wirkung isomorph werden zu A selber. Gegeben ein topologischer Raum X und eine Gruppengarbe $\mathcal{A} \in \mathrm{Grp}_{/X}$ klassifiziert unsere nichtabelsche Čech-Kohomologie $\check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{A})$ diejenigen Mengengarben auf X mit $\mathcal{A}$-Operation, die unter dem Rückzug auf alle Mengen mindestens einer offenen Überdeckung von X isomorph werden zu $\mathcal{A}$ selber. Als gemeinsame Verallgemeinerung mag man „G-äquivariante Gruppengarben $\mathcal{A}$ auf einem topologischen Raum X“ betrachten, und warum nicht gleich für eine topologische Gruppe G, und warum nicht gleich statt Gruppengarben beliebige nichtnotwendig étale Gruppenobjekte $\mathcal{A} \in \mathrm{Top}_X$. Die Menge der Isomorphieklassen mag man dann

$$\mathrm{H}^1(G \backslash X; \mathcal{A})$$

notieren und unsere bisherigen Konstruktionen als Spezialfälle betrachten.

19.3.8.10 (**Topologische nichtabelsche Gruppenkohomologie**). Die Definition der nichtabelschen ersten Gruppenkohomologie 19.3.8.2 bleibt sinnvoll, wenn wir statt mit Mengen vielmehr mit topologischen Räumen arbeiten. Dann sind also G und A topologische Gruppen, die Operationen $G \times A \to A$ und $G \times X \to X$ sollen stetig sein, und X soll die Topologie als homogener Raum von A tragen. Wollen wir besonders betonen, daß unsere Kohomologie in dieser Weise verstanden werden soll, so schreiben wir $\mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(G; A)$. Eine Anwendung diskutieren wir in 6.6.4.12.

19.3.8.11. Im topologischen Fall erhalten wir genauso eine kanonische Bijektion

$$(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{st}}(G; A)/\sim) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(G; A)$$

zwischen den Klassen stetiger 1-Zykel $z : G \to A$ und der entsprechenden Kohomologiemenge.

19.4 Berechnung von Garbenkohomologie

19.4.1 Welke Garben sind globale-Schnitte-azyklisch

Definition 19.4.1.1. Eine Garbe heißt **welk**, englisch **flabby** und französisch **flasque**, wenn sich jeder Schnitt auf einer offenen Teilmenge zu einem globalen Schnitt fortsetzen läßt.

Lemma 19.4.1.2. *Sei $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem topologischen Raum X.*

1. *Ist $\mathcal{F}'$ welk, so induziert der Epimorphismus $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine Surjektion $\Gamma\mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma\mathcal{F}''$ auf den globalen Schnitten;*

2. *Sind $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}$ welk, so ist auch $\mathcal{F}''$ welk.*

Beweis. 1. Sei $s'' \in \Gamma\mathcal{F}''$ ein globaler Schnitt. Wir betrachten die Menge aller Paare (U, s_U) mit $U \Subset X$ und $s_U \in \mathcal{F}(U)$ einem Urbild von $s''|_U$. Diese Menge ist in natürlicher Weise induktiv teilgeordnet und besitzt nach Zorn ein maximales Element. Ist nun (U, s_U) so ein maximales Element und wäre $U \neq X$, so fänden wir $x \in X \backslash U$ und aufgrund der Surjektivität $\mathcal{F}_x \twoheadrightarrow \mathcal{F}''_x$ eine offene Umgebung V von x sowie $s_V \in \mathcal{F}(V)$ mit $s_V \mapsto s''|_V$. Es folgt

$$s_V|_{U\cap V} - s_U|_{U\cap V} \in \mathcal{F}'(U \cap V)$$

Setzen wir diese Differenz fort zu einem Schnitt $t_V \in \mathcal{F}'(V)$ über V der welken Garbe $\mathcal{F}'$, so stimmen $(s_V - t_V)$ und s_U überein auf $U \cap V$ und verkleben folglich zu einem Urbild von s'' auf $U \cup V$, das s_U fortsetzt. Das steht jedoch im Widerspruch zur Maximalität von (U, s_U) und wir hatten doch $U = X$. Teil 2 folgt aus Teil 1, da die Restriktionen welker Garben auf offene Teilmengen wieder welk sind. □

Satz 19.4.1.3. *Welke abelsche Garben auf einem topologischen Raum sind azyklisch für den Funktor der globalen Schnitte.*

Beweis. Wir werden in 19.4.1.5 zeigen, daß jede injektive abelsche Garbe welk ist. Auch hier aber zeigt unser Beweis 19.3.5.1 für die Existenz von genug injektiven Objekten in der Kategorie der abelschen Garben schon, daß jede abelsche Garbe in eine welke injektive abelsche Garbe eingebettet werden kann. Jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ besitzt also eine Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \dots$ durch welke injektive Garben. Wir zerlegen sie in kurze exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{F} & \hookrightarrow & \mathcal{I}^0 & \twoheadrightarrow & \mathcal{K}^1 & & & & & & \\
 & & & & \mathcal{K}^1 & \hookrightarrow & \mathcal{I}^1 & \twoheadrightarrow & \mathcal{K}^2 & & \\
 & & & & & & & & \mathcal{K}^2 & \hookrightarrow & \mathcal{I}^2 & \twoheadrightarrow & \mathcal{K}^3 \\
 & & & & & & & & & & & & \dots \quad \dots \quad \dots
\end{array}$$

Mit dem vorhergehenden Lemma 19.4.1.2 erkennen wir, daß für welkes $\mathcal{F}$ alle Garben in diesen kurzen exakten Sequenzen welk sind. Mit demselben Lemma erkennen wir weiter, daß alle unsere Sequenzen kurz exakt bleiben unter Γ. Das zeigt aber, daß der Komplex $0 \to \Gamma\mathcal{F} \to \Gamma\mathcal{I}^0 \to \Gamma\mathcal{I}^1 \to \dots$ exakt ist. $\square$

19.4.1.4. Sei $X = U \cup V$ eine Überdeckung eines topologischen Raums durch zwei offene Teilmengen und $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X und $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{W}^{\lhd}$ eine welke Auflösung. So erhalten wir mit $s \mapsto (s|_U, s|_V)$ und $(s,t) \mapsto s|_{U\cap V} - t|_{U\cap V}$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\Gamma(X;\mathcal{W}^{\lhd}) \hookrightarrow \Gamma(U;\mathcal{W}^{\lhd}) \oplus \Gamma(V;\mathcal{W}^{\lhd}) \twoheadrightarrow \Gamma(U\cap V;\mathcal{W}^{\lhd})$$

Offensichtlich sind Restriktionen welker Garben auf offene Teilmengen wieder welk. Die zugehörige lange exakte Sequenz, die **Mayer-Vietoris-Sequenz der Garbenkohomologie**, hat demnach die Gestalt

$$\dots \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q(U;\mathcal{F}) \oplus \mathrm{H}^q(V;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q(U\cap V;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^{q+1}(X;\mathcal{F}) \dots$$

Die Existenz welker injektiver Auflösungen zeigt, daß auch die Randabbildungen dieser Sequenz nicht von der gewählten welken Auflösung abhängen.

Übungen

Übung 19.4.1.5 (**Injektive Garben sind welk**). Gegeben $U \Subset X$ eine offene Teilmenge eines topologischen Raums erklären wir eine Untergarbe

$$\mathbb{Z}_{U\subset X} \subset \mathbb{Z}_X$$

dadurch, daß wir ihren étalen Raum erklären als die Teilmenge vom étalen Raum $X \times \mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}_X$ aller Paare (x,n) mit $n \neq 0 \Rightarrow x \in U$. Gegeben eine weitere abelsche Garbe $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ erhalten wir mit den natürlichen Identifikationen in den Vertikalen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\wr"'] \\
\mathrm{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{G}) \arrow[r] & \mathrm{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_{U\subset X}, \mathcal{G})
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist jede injektive Garbe welk. In 19.4.9.9 werden wir unsere Konstruktion der Garbe $\mathbb{Z}_{U\subset X}$ als eine spezielle „Ausdehnung durch Null“ verstehen lernen und in 19.4.9.13 unser Argument nocheinmal in einer neuen Notation wiederholen.

Übung 19.4.1.6 (**Kriterium für Azyklizität**). Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und sei $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor. Sei $\mathcal{W} \subset \mathcal{A}$ eine Menge von Objekten, die die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1. Jede kurze exakte Sequenz $F' \hookrightarrow F \twoheadrightarrow F''$ in $\mathcal{A}$ mit $F' \in \mathcal{W}$ bleibt unter Γ eine kurze exakte Sequenz;

2. Gegeben kurze exakte Sequenz $F' \hookrightarrow F \twoheadrightarrow F''$ in $\mathcal{A}$ mit $F', F \in \mathcal{W}$ folgt $F'' \in \mathcal{W}$;

3. Jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ läßt sich einbetten in ein injektives Objekt von $\mathcal{A}$, das zusätzlich in $\mathcal{W}$ liegt.

So besteht $\mathcal{W}$ aus Γ-azyklischen Objekten. Hinweis: Man wiederhole die Argumentation aus dem vorhergehenden Abschnitt.

19.4.2 Garbenkohomologie der Zahlengeraden

Definition 19.4.2.1. Wir nennen eine Garbe **punktweich**, wenn ihre globalen Schnitte surjektiv auf alle Halme gehen.

Lemma 19.4.2.2. *Seien $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ und $\mathcal{F}'$ punktweich. So gilt:*

1. *Der Epimorphismus $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ induziert eine Surjektion auf den globalen Schnitten;*

2. *Ist zusätzlich $\mathcal{F}$ welk, so ist auch $\mathcal{F}''$ welk.*

Beweis. Gegeben ein Schnitt $s'' \in \mathcal{F}''(D)$ finden wir eine Überdeckung von D durch ein System $\mathcal{V}$ offener Teilmengen $V \Subset \mathbb{R}$ und Schnitte $s_V \in \mathcal{F}(V \cap D)$ mit $s_V \mapsto s''|_{V \cap D}$ für alle $V \in \mathcal{V}$. Die Vereinigung aller $V \in \mathcal{V}$ ist sicher eine disjunkte Vereinigung nichtleerer offener reeller Intervalle. Wir dürfen beim Beweis von Teil 1 ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß sie bereits selbst solch ein Intervall und dann, daß sie sogar bereits selbst ganz $\mathbb{R}$ ist. Jede offene Überdeckung $\mathcal{V}$ von $\mathbb{R}$ besitzt nun eine Verfeinerung zu einer Überdeckung durch ein System von offenen Intervallen

$$U_i := (a_i, b_i)_{i \in \mathbb{Z}}$$

mit $a_i < b_{i-1} < a_{i+1} < b_i$ für alle i. In der Tat finden wir für jedes $r \in \mathbb{Z}$ nach dem Lebesgue'schen Überdeckungssatz ein $c(r) \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ derart, daß für alle $x \in [r, r+1]$ das Intervall $(x - 1/c(r), x + 1/c(r))$ ganz in einer Menge aus $\mathcal{V}$ enthalten ist. Wählen wir nun $\alpha \in (1/2, 1)$ beliebig, so bilden die Intervalle

$(r - \alpha/c(r-1), r + \alpha/c(r))$ und $(r + \nu/c(r) - \alpha/c(r), r + \nu/c(r) + \alpha/c(r))$ für $1 \leq \nu < c(r)$ bei geeigneter Nummerierung ein System von Intervallen der beschriebenen Art. Nach Konstruktion finden wir stets ein Urbild $s_i \in \mathcal{F}(U_i \cap D)$ der Restriktion $s_i'' \in \mathcal{F}''(U_i \cap D)$ von s'' auf $U_i \cap D$. Jetzt wählen wir, wann immer diese Menge nicht leer ist, einen Punkt

$$x_i \in U_i \cap U_{i+1} \cap D$$

und wählen dann zusätzlich ein $t_i \in \mathcal{F}'(D)$, das im Halm von $\mathcal{F}$ bei x_i dasselbe Bild hat wie $s_i - s_{i+1}$, und eine offene Umgebung $W_i \subset U_i \cap U_{i+1}$ von x_i in $\mathbb{R}$ derart, daß t_i sogar auf ganz $W_i \cap D$ mit $s_i - s_{i+1}$ übereinstimmt. Ist $U_i \cap U_{i+1} \cap D$ leer, setzen wir dahingegen $W_i := U_i \cap U_{i+1}$ und nehmen $t_i \in \mathcal{F}'(D)$ beliebig. Dann verkleinern wir unsere U_i zu offenen Intervallen U_i' derart, daß ihre Vereinigung immer noch ganz $\mathbb{R}$ ist und daß gilt $U_i' \cap U_{i+1}' \subset W_i$ für alle i. Schließlich verkleben die Schnitte auf den $U_i' \cap D$, die gegeben werden durch $s_i + t_{i-1} + \ldots + t_0$ für $i \geq 1$ und s_0 für $i = 0$ und $s_i - t_i - t_{i+1} - \ldots - t_{-1}$ für $i \leq -1$, zu dem gesuchten globalen Schnitt $s \in \mathcal{F}(D)$ mit $s \mapsto s''$. Die zweite Behauptung in unserem Lemma folgt offensichtlich aus der Ersten. □

Satz 19.4.2.3 (Garbenkohomologie von Teilmengen $D \subset \mathbb{R}$). *Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{H}^q(D; \mathcal{F}) = 0$ für $q > 1$ und bei punktweichem $\mathcal{F}$ sogar für $q > 0$.*

Beispiele 19.4.2.4. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres reelles Intervall und M eine abelsche Gruppe und M_I die zugehörige konstante Garbe auf I, so liefert das Bilden der konstanten Schnitte einen Isomorphismus $M \xrightarrow{\sim} \Gamma(I; M_I)$ und die höhere Garbenkohomologie von M_I verschwindet, in Formeln $\mathrm{H}^q(I; M_I) = 0$ für $q > 0$, denn jede konstante Garbe ist punktweich. Ebenso folgt $\mathrm{H}^q(\mathbb{Q}; \mathcal{F}) = 0$ für jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf dem topologischen Raum $\mathbb{Q}$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie und alle $q > 0$, denn offensichtlich ist jede abelsche Garbe auf $\mathbb{Q}$ punktweich.

Beweis. Ist $\mathcal{F}$ punktweich, so finden wir nach 19.4.2.2 eine kurze exakte Sequenz $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}^0 \twoheadrightarrow \mathcal{G}^1$ mit $\mathcal{G}^0$ und $\mathcal{G}^1$ welk. Da welke Garben globale-Schnitte-azyklisch sind und da nach 19.3.6.7 zur Berechnung der Kohomologie jede azyklische Auflösung herangezogen werden kann, folgt $\mathrm{H}^q(D; \mathcal{F}) = 0$ für $q > 1$ und $\mathrm{H}^1(D; \mathcal{F}) = \mathrm{coker}(\Gamma\mathcal{G}^0 \to \Gamma\mathcal{G}^1) = 0$, die letzte Gleichheit wieder nach 19.4.2.2. Für allgemeines $\mathcal{F}$ finden wir eine kurze exakte Sequenz $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}^0 \twoheadrightarrow \mathcal{G}^1$ mit $\mathcal{G}^0$ welk. Als Quotient einer punktweichen Garbe ist dann $\mathcal{G}^1$ punktweich und damit azyklisch nach dem bereits behandelten Fall. Der Satz folgt dann wieder mit unserer Erkenntnis 19.3.6.7, daß zur Berechnung der Kohomologie jede Auflösung durch Γ-azyklische abelsche Garben herangezogen werden kann. □

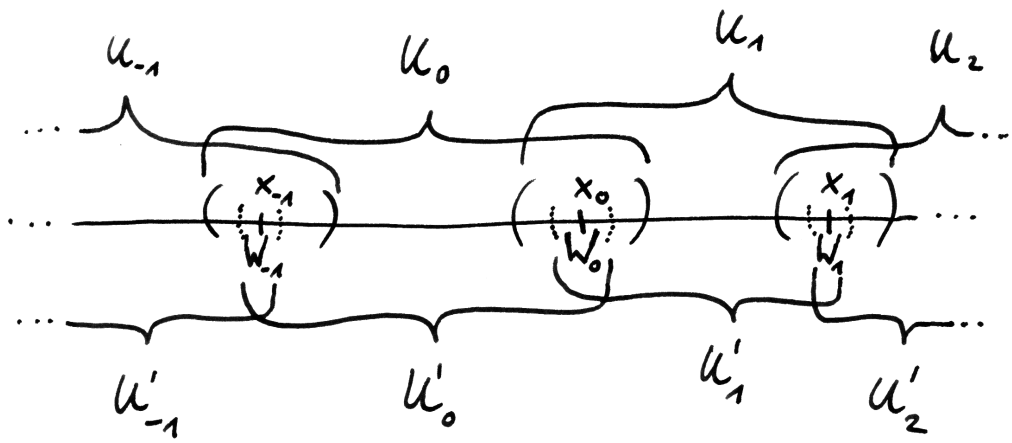


Illustration zum Beweis von 19.4.2.2.

19.4.3 Zurückholen in der Garbenkohomologie

Definition 19.4.3.1. Seien $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F} \in \mathrm{p}\mathcal{C}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathrm{p}\mathcal{C}_{/Y}$ Prägarben mit Werten in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein **Komorphismus** $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ **über** f ist eine Vorschrift ϕ, die beliebigen $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ mit $f(U) \subset V$ einen Morphismus $\phi_{UV} : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(U)$ in der Gegenrichtung so zuordnet, daß diese Morphismen mit Restriktionen auf offene Teilmengen $U_1 \Subset U$ und $V_1 \Subset V$ mit $f(U_1) \subset V_1$ verträglich sind. Wir notieren

$$\mathrm{p}\mathcal{C}_{/f^\circ}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

die Menge dieser Komorphismen. Komorphismen über der Identität sind Homomorphismen von Prägarben.

Beispiel 19.4.3.2. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ und eine Gruppe G erhalten wir einen Komorphismus $\tau_f = \tau_{f,G} : G_Y \to G_X$ über f zwischen den jeweiligen konstanten Garben durch das „Vorschalten von f“, das für alle $V \Subset Y$ einen Gruppenhomomorphismus $G_Y(V) \to G_X(f^{-1}(V))$ liefert.

19.4.3.3 (**Komposition von Komorphismen von Prägarben**). Gegeben stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ sowie Prägarben $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ über X, Y, Z sowie ein Komorphismus $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ über f und ein Komorphismus $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ über g bildet man in offensichtlicher Weise einen Komorphismus $\phi \circ \psi : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ über $g \circ f$. Für unsere Komorphismen aus 19.4.3.2 finden wir $\tau_{g \circ f} = \tau_g \circ \tau_f$ und $\tau_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$.

19.4.3.4 (**Vorschub von Garben und Prägarben**). Gegeben $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\mathcal{F} \in \mathrm{p}\mathcal{C}_{/X}$ eine Prägarbe erklären wir ihren **Vorschub** oder auch ihr **direktes Bild** $f_*\mathcal{F}$ als die Prägarbe auf Y gegeben durch

$$(f_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

Wir erhalten so einen Funktor $f_* : \mathrm{p}\mathcal{C}_{/X} \to \mathrm{p}\mathcal{C}_{/Y}$. Offensichtlich ist der Vorschub einer Garbe wieder eine Garbe. Für den étalen Raum des Vorschubs einer Mengengarbe habe ich nur im Fall einer abgeschlossenen Einbettung eine gewisse Anschauung, die sich auf das anschließende Beispiel und die Beschreibung 19.2.2.18 des étalen Raums eines Wolkenkratzers stützt. Das Nachschalten des offensichtlichen Komorphismus $\kappa : f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ liefert für jede Prägarbe $\mathcal{G} \in \mathcal{C}_{/Y}$ eine Bijektion

$$\mathrm{p}\mathcal{C}_{/Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{p}\mathcal{C}_{/f^\circ}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

Insbesondere faktorisiert unser Komorphismus, wenn er von einer Garbe $\mathcal{F}$ ausgeht, stets in eindeutiger Weise über den natürlichen Morphismus $\mathcal{G} \to \mathcal{G}^+$ über Y in die Garbifizierung. Gegeben ein globaler Schnitt $s \in \Gamma(\mathcal{F})$ notiere ich $f_*(s) \in \Gamma(f_*\mathcal{F})$ sein Bild.

19.4.3.5 (**Wolkenkratzer als Vorschub**). Sei (X, x) ein bepunkteter topologischer Raum. Bezeichne $\mathrm{em}_x : \mathrm{top} \hookrightarrow X$ die zugehörige Einbettung oder englisch „embedding“ des einpunktigen Raums. So erhalten wir für jede Menge G einen Isomorphismus

$$G_{(x)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{em}_{x*} G_{\mathrm{top}}$$

durch die Abbildungen $G_{(x)}(U) \xrightarrow{\sim} G_{\mathrm{top}}(\mathrm{em}_x^{-1}(U))$, die im Fall $x \in U$ jedem $g \in G = G_{(x)}(U)$ die entsprechende einwertige Abbildung $g \in G_{\mathrm{top}}(\mathrm{top})$ zuordnen und im Fall $x \notin U$ dem einzigen Element von $G_{(x)}(U)$ das einzige Element von $G_{\mathrm{top}}(\emptyset)$. Der Vorschub unter unserer Einbettung macht also aus einer Menge G, aufgefaßt vermittels 19.1.3.6 als Mengengarbe auf dem einpunktigen topologischen Raum top, den Wolkenkratzer $G_{(x)}$ mit Faser G bei x.

19.4.3.6 (**Inkompatibilität von Vorschub und Garbifizierung**). Der Vorschub von Prägarben vertauscht nicht mit Garbifizierung. Bezeichnet genauer und in Formeln f_*^{p} den Vorschub von Prägarben, so ist die kanonische Abbildung $(f_*^{\mathrm{p}}\mathcal{F})^+ \to f_*(\mathcal{F}^+)$ im allgemeinen kein Isomorphismus. Man sieht das schon im Beispiel der Projektion f auf einen Punkt.

Satz 19.4.3.7 (**Zurückholen in der Garbenkohomologie**). *Gegeben $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ ein Komorphismus von abelschen Garben über f gibt es für jedes q genau eine Abbildung*

$$\mathrm{H}^q\phi : \mathrm{H}^q(Y; \mathcal{G}) \to \mathrm{H}^q(X; \mathcal{F})$$

derart, daß für je zwei Auflösungen $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^\lhd$ und $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{B}^\lhd$ und jeden Lift von ϕ zu einem Komorphismus $\phi^\lhd : \mathcal{B}^\lhd \to \mathcal{A}^\lhd$ von Auflösungen über f das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q\Gamma\mathcal{B}^\lhd & \xrightarrow{\phi^\lhd} & \mathcal{H}^q\Gamma\mathcal{A}^\lhd \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \mathrm{H}^q(Y; \mathcal{G}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^q\phi} & \mathrm{H}^q(X; \mathcal{F}) \end{array}$$

kommutiert mit den natürlichen Abbildungen τ aus 19.3.2.8 in den Vertikalen und der von unserem Lift $\phi^\lhd$ induzierten oberen Horizontalen. Unsere Abbildungen $\mathrm{H}^q\phi$ sind Gruppenhomomorphismen und es gilt $\mathrm{H}^q(\phi \circ \psi) = \mathrm{H}^q\psi \circ \mathrm{H}^q\phi$ sowie $\mathrm{H}^q\,\mathrm{id} = \mathrm{id}$.

19.4.3.8 (**Zurückholen im Fall von konstanten Koeffizienten**). Insbesondere erhalten wir für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ einen Gruppenhomomorphismus

$$f^* := \mathrm{H}^q\tau : \mathrm{H}^q(Y; \mathbb{Z})_{\mathrm{garb}} \to \mathrm{H}^q(X; \mathbb{Z})_{\mathrm{garb}}$$

aus dem Komorphismus $\tau_f : \mathbb{Z}_Y \to \mathbb{Z}_X$ über f nach 19.4.3.2, das **Zurückholen**. Mithilfe unserer Identitäten $\tau_{g \circ f} = \tau_g \circ \tau_f$ und $\tau_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$ aus 19.4.3.3 wird die Garbenkohomologie dann eine Folge von Funktoren $\mathrm{H}^q_{\mathrm{garb}} : \mathrm{Top}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ab}$.

Vorschau 19.4.3.9. Daß das Zurückholen auf der Garbenkohomologie mit konstanten Koeffizienten ein Ringhomomorphismus ist, zeigen wir in 20.2.6.18 im Rahmen der derivierten Kategorien. In 19.5.4.10 zeigen wir, daß sich das Zurückholen unter glatten Abbildungen in der de-Rham-Kohomologie durch das Zurückholen glatter Differentialformen berechnen läßt, und in 19.5.1.3, daß es in der singulären Kohomologie dem gewöhnlichen Zurückholen 17.6.1.1 entspricht. In 21.2.4.10 erklären wir, wie das Zurückholen im Formalismus der sechs Funktoren verstanden werden kann.

Satz 19.4.3.10 (Rückzug von Garben). *Gegeben $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung besitzt der Vorschub $f_* : \mathrm{Ens}_{/X} \to \mathrm{Ens}_{/Y}$ von Mengengarben einen Linksadjungierten, den* **Rückzug** $f^* : \mathrm{Ens}_{/Y} \to \mathrm{Ens}_{/X}$.

Beweis. Man erklärt zu $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ zunächst eine Prägarbe $f_{\mathrm{p}}^*\mathcal{G} \in \mathrm{pEns}_{/X}$ durch die Vorschrift

$$(f_{\mathrm{p}}^*\mathcal{G})(U) := \mathrm{colf}_{V \supset f(U)}\, \mathcal{G}(V)$$

für $U \Subset X$, wo der Kolimes über alle $V \Subset Y$ mit $f(U) \subset V$ zu bilden ist und wir als Restriktionsabbildungen die natürlichen Abbildungen „vom kleineren zum größeren Kolimes“ nehmen. Dann erklärt man $f^*\mathcal{G} := (f_{\mathrm{p}}^*\mathcal{G})^+$ als die Garbifizierung dieser Prägarbe. Die Adjunktionsisomorphismen schließlich werden in der Sprache der Komorphismen konstruiert als die Kompositionen

$$\mathrm{Ens}_{/X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{pEns}_{/X}(f_{\mathrm{p}}^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{pEns}_{/f^\circ}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

Hierbei wird die erste horizontale Bijektion durch die universelle Eigenschaft der Garbifizierung erklärt, die mittlere Bijektion folgt aus der universellen Eigenschaft von Kolimites und die letzte ist das Nachschalten des kanonischen Komorphismus $\kappa : f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ über f. □

19.4.3.11 (**Étaler Raum der zurückgezogenen Garbe**). Seien $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ Garben. Sei eine stetige Abbildung $\varphi : \bar{\mathcal{F}} \to \bar{\mathcal{G}}$ von étalen Räumen gegeben derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{F}} & \to & \bar{\mathcal{G}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y \end{array}$$

kartesisch ist. So gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft kartesischer Diagramme genau einen Komorphismus $\gamma : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ über f mit $\varphi \circ (\overline{\gamma(s)}) = \bar{s} \circ f$ für alle Schnitte s von $\mathcal{G}$. Hierbei gehen wir von $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ mit $f(U) \subset V$ aus und fassen Schnitte $s \in \mathcal{G}(V)$ und $\gamma(s) \in \mathcal{F}(U)$ als stetige Abbildungen $\bar{s} : V \to \bar{\mathcal{G}}$ und $\overline{\gamma(s)} : U \to \bar{\mathcal{F}}$ auf. Wir behaupten nun, daß dieser Komorphismus einen Isomorphismus $f^*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ induziert. In der Tat reicht es ja, das auf

den Halmen zu zeigen, und da ist die Behauptung klar. Insbesondere liefern diese Überlegungen für den étalen Raum der zurückgezogenen Garbe einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\alpha_{\mathcal{G}} : \overline{f^*\mathcal{G}} \xrightarrow{\sim} X \times_Y \bar{\mathcal{G}}$$

19.4.3.12 (**Anschauliche Bedeutung von Komorphismen**). Seien $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ Garben. Jeder Komorphismus $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ über f induziert in offensichtlicher Weise Abbildungen $\phi_x : \mathcal{G}_{f(x)} \to \mathcal{F}_x$ auf den Halmen und so eine Abbildung $X \times_Y \bar{\mathcal{G}} \to \bar{\mathcal{F}}$. Diese Konstruktion liefert nach den im vorhergehenden gezeigten Aussagen eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/f^\circ}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}_X(X \times_Y \bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{F}})$$

Wir diskutieren in 19.8.4.8, inwiefern diese Bijektionen einen Isomorphismus zwischen der „Mengengarbenkofaserung“ und der „invertierten Mengengarbenfaserung“ liefern.

19.4.3.13 (**Rückzug abelscher Garben**). Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ besitzt auch für abelsche Garben der Vorschub $f_* : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/Y}$ einen Linksadjungierten $f^* : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/X}$, der wie im Fall von Garben von Mengen konstruiert werden kann. Diese Konstruktion zeigt insbesondere, daß der Rückzug von abelschen Garben ein exakter Funktor ist.

19.4.3.14 (**Additivität von Rückzug und Vorschub abelscher Garben**). Wir erinnern aus 19.2.5.19, daß jeder links- oder rechtsexakte Funktor zwischen abelschen Kategorien additiv ist. Insbesondere ist also der Rückzug abelscher Garben ein additiver Funktor. Weiter erinnern wir aus 19.2.5.19, daß jeder Funktor zwischen additiven Kategorien, der einen Rechts- oder Linksadjungierten besitzt, additiv ist. Insbesondere ist also auch der Vorschub abelscher Garben ein additiver Funktor. Beide Aussagen lassen sich aber auch ohne alle Theorie leicht direkt prüfen.

Beispiel 19.4.3.15. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert der Komorphismus $\tau_f : \mathbb{Z}_Y \to \mathbb{Z}_X$ über f aus 19.4.3.2 einen Isomorphismus $f^*\mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$.

19.4.3.16. Der Rückzug abelscher Garben vertauscht als linksadjungierter Funktor nach 17.7.1.30 mit direkten Summen und allgemeiner mit Kolimites. Es vertauscht jedoch nicht mit Limites, ja noch nicht einmal mit beliebigen Produkten, und das noch nicht einmal bei der Restriktion auf einzelne Punkte, vergleiche 19.2.2.49.

19.4.3.17. Beitzt ein Funktor von präabelschen Kategorien einen Linksadjungierten, so ist er nach 19.2.4.12 linksexakt. Insbesondere ist der Vorschub von abelschen Garben ein linksexakter Funktor. Besitzt ein Funktor zwischen abelschen

Kategorien sogar einen exakten Linksadjungierten, so macht er offensichtlich injektive Objekte zu injektiven Objekten. Insbesondere ist der Vorschub einer injektiven abelschen Garbe stets wieder eine injektive abelsche Garbe.

Beweis zum Zurückholen von Garbenkohomologie. Ein Komorphismus $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ über f entspricht nach 19.4.3.4 einem Morphismus $\hat{\phi} : \mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$ von abelschen Garben auf Y. Gegeben eine injektive Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\lhd$ erhalten wir aus der Linksexaktheit von f_* einen Isomorphismus $f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 f_*\mathcal{I}^\lhd$. Nach 19.4.3.17 ist $f_*\mathcal{I}^\lhd$ ein Komplex von injektiven Garben. Gegeben eine Auflösung $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{B}^\lhd$ zeigt dann das Hauptlemma der homologischen Algebra 19.3.2.6, daß $\hat{\phi}$ genau einen Homotopielift $\mathcal{B}^\lhd \to f_*\mathcal{I}^\lhd$ besitzt. In anderen Worten besitzt unser Komorphismus ϕ genau einen Homotopielift zu einem Komorphismus $\mathcal{B}^\lhd \to \mathcal{I}^\lhd$ über f. Ist $\mathcal{B}^\lhd$ auch eine injektive Auflösung, so hat die von diesem Komorphismus auf der Kohomologie der globalen Schnitte induzierte Abbildung $\mathcal{H}^q\Gamma\mathcal{B}^\lhd \to \mathcal{H}^q\Gamma\mathcal{I}^\lhd$ offensichtlich alle im Satz von einem Zurückholen auf der Kohomologie geforderten Eigenschaften. Daß es keine andere Abbildung mit den geforderten Eigenschaften geben kann, ist eh klar. □

Übungen

Übung 19.4.3.18. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ betrachte man den exakten Funktor $f^* : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/X}$. Die davon nach 19.3.5.12 induzierte Abbildung

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Ab}_{/Y}}(\mathbb{Z}_Y, \mathcal{F}) \to \mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Ab}_{/X}}(f^*\mathbb{Z}_Y, f^*\mathcal{F})$$

entspricht dem Zurückholen $\mathrm{H}^q(Y; \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q(X; f^*\mathcal{F})$ auf der Garbenkohomologie unter dem Vorschalten des Isomorphismus $\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} f^*\mathbb{Z}_Y$ aus 19.4.3.15 und der Isomorphismen 19.3.5.7 .

Übung 19.4.3.19 (**Halme der Garbenkohomologieprägarben**). Gegeben ein bepunkteter topologischer Raum (X, x) haben wir für $q > 0$ stets

$$\mathrm{colf}_{U \ni x} \mathrm{H}^q(U; \mathbb{Z})_{\mathrm{garb}} = 0$$

mit dem Kolimes über alle offenen Umgebungen $U \Subset X$ von x. Allgemeiner haben wir für $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und $q > 0$ stets $\mathrm{colf}_{U \ni x} \mathrm{H}^q(U; \mathcal{F}) = 0$. Diese Aussage wird sich später als Spezialfall der Beschreibung der höheren Vorschübe 19.6.6.2 erweisen.

Übung 19.4.3.20 (**Vorschub unter topologischer Einbettung**). Ist $f : X \hookrightarrow Y$ eine topologische Einbettung, so ist für jede Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus $f^* f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$.

Übung 19.4.3.21. Ist $f : X \hookrightarrow Y$ eine abgeschlossene topologische Einbettung, so induziert das adjungierte Paar (f^*, f_*) eine Äquivalenz zwischen der Kategorie aller Garben auf X und der Kategorie aller derjenigen Garben auf Y, die an allen Punkten außerhalb von $f(X)$ einen einelementigen Halm haben.

Übung 19.4.3.22 (**Vorschub unter abgeschlossenen Einbettungen**). Seien $A \subset\!\!\!

Übung 19.4.3.26. Wir betrachten die Operation der Galoisgruppe alias der komplexen Konjugation auf $\mathbb{C}^\times$ und betrachten die konstante abelsche Garbe $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{C}^\times$ als äquivariante Garbe. Dann betrachten wir deren direktes Bild unter dem Quadrieren $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$. So operiert die Galoisgruppe trivial auf den Halmen in Punkten aus $\mathbb{R}_{>0}$ und nichttrivial auf den Halmen in Punkten aus $\mathbb{R}_{<0}$.

Übung 19.4.3.27. Für einen topologischen Raum X bezeichne X^δ die Menge X versehen mit der diskreten Topologie und $d : X^\delta \to X$ die Identität. Man zeige, daß für eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ die Einheit der Adjunktion $\mathcal{F} \to d_* d^* \mathcal{F}$ mit der Einbettung in die Garbe der unstetigen Schnitte in den étalen Raum unserer Garbe identifiziert werden kann.

Übung 19.4.3.28 (**Reduzierte Garbenkohomologie**). Gegeben X ein topologischer Raum erkläre man die reduzierte Kohomologie $\tilde{\mathrm{H}}^q(X;\mathbb{Z})$ als den Wert des koaugmentierten q-ten Rechtsderivierten im Sinne von 19.3.2.33 auf der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X \in \mathrm{Ab}_{/X}$ mit der offensichtlichen Γ-Koaugmentierung $\eta : \mathbb{Z} \to \Gamma(\mathbb{Z}_X)$, in Formeln

$$\tilde{\mathrm{H}}^q(X;\mathbb{Z}) := \mathrm{R}^q\Gamma(\mathbb{Z}_X, \eta, \mathbb{Z})$$

Man erkläre das Zurückholen für die reduzierte Garbenkohomologie und leite eine natürliche exakte Sequenz $\tilde{\mathrm{H}}^{-1}(X;\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathbb{Z} \to \mathrm{H}^0(X;\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \tilde{\mathrm{H}}^0(X;\mathbb{Z})$ sowie Isomorphismen $\mathrm{H}^q(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathrm{H}}^q(X;\mathbb{Z})$ für $q > 0$ her und zeige, daß unsere exakte Sequenz mit $\tilde{\mathrm{H}}^{-1}(\emptyset;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ beginnt für $X = \emptyset$ und mit $\tilde{\mathrm{H}}^{-1}(X;\mathbb{Z}) = 0$ für $X \neq \emptyset$ und folglich für $X \neq \emptyset$ schrumpft zu einer kurzen exakten Sequenz

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{H}^0(X;\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \tilde{\mathrm{H}}^0(X;\mathbb{Z})$$

Übung 19.4.3.29. Sei ein Raum X die Vereinigung von zwei offenen Teilmengen U, V. Man konstruiere die **Mayer-Vietoris-Sequenz der reduzierten Garbenkohomologie**

$$\ldots \tilde{\mathrm{H}}^q(X) \to \tilde{\mathrm{H}}^q(U) \oplus \tilde{\mathrm{H}}^q(V) \to \tilde{\mathrm{H}}^q(U \cap V) \to \tilde{\mathrm{H}}^{q+1}(X) \ldots$$

und zeige ihre Natürlichkeit in dem Sinne, daß wir für eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ und eine offene Überdeckung $Y = A \cup B$ mit $f(U) \subset A$ und $f(V) \subset B$) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \tilde{\mathrm{H}}^q(Y) & \to & \tilde{\mathrm{H}}^q(A) \oplus \tilde{\mathrm{H}}^q(B) & \to & \tilde{\mathrm{H}}^q(A \cap B) & \to & \tilde{\mathrm{H}}^{q+1}(Y) & \ldots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\ldots & \tilde{\mathrm{H}}^q(X) & \to & \tilde{\mathrm{H}}^q(U) \oplus \tilde{\mathrm{H}}^q(V) & \to & \tilde{\mathrm{H}}^q(U \cap V) & \to & \tilde{\mathrm{H}}^{q+1}(X) & \ldots
\end{array}$$

erhalten mit Rückzügen in den Vertikalen. Weiter diskutiere man, warum der Randoperator sein Vorzeichen ändert, wenn man die beiden offenen Mengen vertauscht. Das wird benötigt werden bei der Diskussion des Begriffs einer Orientierung.

Übung 19.4.3.30 (**Garbenkohomologie von Koprodukten**). Ist ein Raum X eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ und ist $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X, so induzieren die Rückzüge längs der in_i einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^q(X;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{H}^q(X_i;\mathcal{F})$$

Eine Verallgemeinerung auf den Fall der „Hyperkohomologie“ wird in 21.2.3.17 diskutiert.

Übung 19.4.3.31 (**Garben auf Koprodukten**). Ist ein Raum X eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ und ist $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, so induzieren die Einheiten der Adjunktion einen Isomorphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{in}_{i*}\,\mathrm{in}_i^*\,\mathcal{F}$$

In 19.4.9.21 werden wir auch noch eine analoge Aussage für das Koprodukt kennenlernen und sehen, daß Koprodukte und Produkte von abelschen Garben in dieser speziellen Situation zusammenfallen.

Übung 19.4.3.32 (**Produktgarben als Bildgarben**). Ist X ein topologischer Raum und $(\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Garben auf X und sind $\mathrm{em}_i : X \to X \times I$ die Einbettungen und ist eine Garbe $\mathcal{G}$ auf $X \times I$ gegeben zusammen mit Isomorphismen $\mathrm{em}_i^*\,\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_i$, so liefern diese Isomorphismen zusammen nach 19.4.3.31 einen Isomorphismus $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{em}_{i*}\,\mathcal{G}_i$ und Vorschub unter der Projektion auf X liefert einen Isomorphismus

$$\mathrm{pr}_{X*}\,\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathcal{G}_i$$

19.4.4 Lokale Kohomologie und Ausschneidung

Definition 19.4.4.1. Gegeben ein globaler Schnitt $s \in \mathcal{F}(X)$ einer abelschen Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X erklärt man den **Träger von** s, englisch und französisch **support**, als die Menge

$$\operatorname{supp} s := \{x \in X \mid s_x \neq 0\}$$

Zur Übung mag der Leser zeigen, daß der Träger eines globalen Schnitts stets abgeschlossen ist.

19.4.4.2. Ein Schnitt $s \in \mathcal{F}(A)$ einer abelschen Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ über einer Teilmenge $A \subset X$ ist dasselbe wie ein globaler Schnitt der Restriktion $\mathcal{F}|_A$ unserer Garbe auf A. In diesem Fall definieren wir den **Träger von** s als den Träger dieses globalen Schnitts von $\mathcal{F}|_A$, in Formeln

$$\operatorname{supp} s := \{x \in A \mid s_x \neq 0\}$$

19.4.4.3 (**Schnitte mit Träger versus Schnitte auf Teilmengen**). Man beachte, daß für eine abelsche Garbe ein globaler Schnitt mit Träger in einer Teilmenge A etwas völlig anderes ist als ein Schnitt über A alias ein globaler Schnitt der Einschränkung unserer Garbe auf die Teilmenge A. Sicher liefert die Restriktion eine Einbettung

$$\{s \in \mathcal{F}(X) \mid \operatorname{supp} s \subset A\} \hookrightarrow \mathcal{F}(A)$$

Diese Einbettung ist aber im Allgemeinen kein Isomorphismus. Die konstante Garbe $\mathcal{F} = \mathbb{Z}_X$ auf $X = \mathbb{R}$ etwa besitzt keinen von Null verschiedenen Schnitt mit Träger im Ursprung, aber ihre Einschränkung auf den Ursprung besitzt durchaus von Null verschiedene Schnitte.

19.4.4.4. Sei $C \subsetneq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ setzen wir

$$\Gamma_C\mathcal{F} := \{s \in \Gamma\mathcal{F} \mid \operatorname{supp} s \subset C\}$$

Die Werte des Rechtsderivierten des linksexakten Funktors Γ_C auf einer abelschen Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ heißen die **lokalen Kohomologiegruppen von $\mathcal{F}$ mit Träger in** C und werden notiert als

$$\mathrm{H}^q_C(X;\mathcal{F}) := (\mathrm{R}^q\Gamma_C)(\mathcal{F})$$

19.4.4.5 (**Lokale Kohomologie als Erweiterungsgruppe**). Für $C = X$ haben wir $\Gamma_X\mathcal{F} = \Gamma\mathcal{F}$ und $\mathrm{H}^q_X(X;\mathcal{F}) = \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})$. Unsere lokale Kohomologie ist also eine Verallgemeinerung der normalen Garbenkohomologie. Es ist auch leicht zu sehen, daß wir für $i : C \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge und $\mathbb{Z}_{C\subset X} := i_*\mathbb{Z}_C$ einen Isomorphismus $\mathrm{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_{C\subset X}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma_C\mathcal{F}$ erhalten durch die Zuordnung $\varphi \mapsto \varphi(i_*1_C)$. Diese Isomorphismen liefern dann auch Isomorphismen der derivierten Funktoren

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Ab}_{/X}}(\mathbb{Z}_{C\subset X}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_C(X;\mathcal{F})$$

Vorschau 19.4.4.6. Gegeben ein „lokal singulär-azyklischer“ Raum X und $C \subsetneq X$ konstruieren wir in 19.5.1.20 einen Isomorphismus $\mathrm{H}^q(X, X\backslash C)_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_C(X)_{\mathrm{garb}}$ und zeigen, wie die lange exakte Kohomologiesequenz der singulären Kohomologie darunter unserer langen exakten Sequenz der lokalen Kohomologie 19.4.4.9 entspricht.

Satz 19.4.4.7 (**Zurückholen auf der lokalen Kohomologie**). *Seien $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $C \subsetneq X$ und $D \subsetneq Y$ mit $C \supset f^{-1}(D)$ und $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ ein Komorphismus von abelschen Garben über f. So gibt es für jedes q genau eine Abbildung*

$$\mathrm{H}^q\phi : \mathrm{H}^q_D(Y;\mathcal{G}) \to \mathrm{H}^q_C(X;\mathcal{F})$$

derart, daß für je zwei Auflösungen $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^\lhd$ und $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{B}^\lhd$ und jeden Lift von ϕ zu einem Komorphismus $\phi^\lhd : \mathcal{B}^\lhd \to \mathcal{A}^\lhd$ von Auflösungen über f das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q\Gamma_D\mathcal{B}^\lhd & \overset{\phi^\lhd}{\to} & \mathcal{H}^q\Gamma_C\mathcal{A}^\lhd \\ \tau\downarrow & & \downarrow\tau \\ \mathrm{H}^q_D(Y;\mathcal{G}) & \overset{\mathrm{H}^q\phi}{\to} & \mathrm{H}^q_C(X;\mathcal{F}) \end{array}$$

kommutiert mit den natürlichen Abbildungen τ aus 19.3.2.8 in den Vertikalen und der von unserem Lift $\phi^\lhd$ induzierten oberen Horizontalen. Des weiteren gelten die Formeln $\mathrm{H}^q(\phi\circ\psi) = \mathrm{H}^q\psi \circ \mathrm{H}^q\phi$ und $\mathrm{H}^q\,\mathrm{id} = \mathrm{id}$.

Beweis. Genau wie im Fall des Zurückholens der Kohomologie 19.4.3.7. □

Vorschau 19.4.4.8 (**Vergarbung der Schnitte mit Träger**). Eine Vergarbung unserer Konstruktion der Schnitte mit Träger lernen wir in 19.6.4.14 folgende kennen. Genauer konstruieren wir dort für jede abgeschlossene Einbettung $i : C \hookrightarrow X$ einen linksexakten Funktor $i^! : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/C}$ als Rechtsadjungierten zu $i_* : \mathrm{Ab}_{/C} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ und natürliche Isomorphismen $\Gamma i^!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \Gamma_C\mathcal{F}$.

19.4.4.9. Gegeben ein topologischer Raum X mit einer abgeschlossenen Teilmenge $C \subset\!\!\!

jede abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ liefert dann die Restriktion von Schnitten einen Isomorphismus

$$\Gamma_C \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \Gamma_C(v^* \mathcal{F})$$

mit dem Ausdehnen durch Null als Umkehrabbildung. Da der offene Rückzug v^* exakt ist und injektive Garben zu injektiven Garben macht, induzieren diese Isomorphismen ihrerseits Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q_C(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_C(V; v^* \mathcal{F})$$

und insbesondere Isomorphismen $\mathrm{H}^q_C(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_C(V)$. Sie sind das Analogon in der Garbenkohomologie unserer Ausschneidungsisomorphismen aus der singulären Kohomologie.

Übungen

Übung 19.4.4.12. Gegeben $C \mathrel{\not\subset} X$ eine abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raums ist jede welke Garbe auf X azyklisch für Γ_C. Hinweis: Lange exakte Sequenz 19.4.4.9.

Übung 19.4.4.13. Man prüfe, daß die Abbildungen der langen exakten Sequenz der lokalen Kohomologie 19.4.4.9 nicht von der Wahl der injektiven Auflösung abhängen und daß zwei dieser Abbildungen Rückzüge auf der Kohomologie beziehungsweise lokalen Kohomologie im Sinne von 19.4.4.7 sind.

Übung 19.4.4.14 (**Träger von Schnitten in Bildgarben**). Seien $f : X \to Y$ stetig, $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X und $\mathcal{G}$ eine abelsche Garbe auf Y und $\varphi \in \mathrm{Ab}_{/f^\circ}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ ein Komorphismus. Man zeige $f(\operatorname{supp} \varphi(t)) \subset \operatorname{supp} t$ für jeden globalen Schnitt $t \in \Gamma\mathcal{G}$ und und im Fall des kanonischen Komorphismus $\kappa : f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ haben wir für alle $s \in \Gamma\mathcal{F}$ sogar

$$\operatorname{supp}(f_* s) = \overline{f(\operatorname{supp} s)}$$

Übung 19.4.4.15 (**Zurückholen der lokalen Kohomologie und Erweiterungen**). Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ betrachte man den exakten Funktor $f^* : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/X}$. Sei $D \mathrel{\not\subset} Y$ eine abgeschlossene Teilmenge und $C \mathrel{\not\subset} X$ ihr Urbild. Die davon nach 19.3.5.12 induzierte Abbildung

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Ab}_{/Y}}(\mathbb{Z}_{D \subset Y}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Ab}_{/X}}(f^* \mathbb{Z}_{D \subset Y}, f^* \mathcal{F})$$

entspricht unter dem offensichtlichen Isomorphismus $f^* \mathbb{Z}_{D \subset Y} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{C \subset X}$ und verschiedenen kanonischen Identifikationen dem Zurückholen auf der lokalen Garbenkohomologie $\mathrm{H}^q_D(Y; \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_C(X; f^* \mathcal{F})$.

Übung 19.4.4.16 (**Trägerzerlegung der lokalen Kohomologie**). Gegeben $C \not\subset X$ ein topologischer Raum mit einer abgeschlossenen Teilmenge und $C = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ eine disjunkte Zerlegung mit $C_\lambda \Subset C$ und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine abelsche Garbe liefern die Rückzüge in ihrer Gesamtheit Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q_C(X;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{H}^q_{C_\lambda}(X;\mathcal{F})$$

19.4.5 Homotopieinvarianz der Garbenkohomologie

19.4.5.1. Ich erinnere daran, daß nach 15.2.4.14 eine Teilmenge eines topologischen Raums „relativ Hausdorff“ heißt, wenn je zwei verschiedene Punkte unserer Teilmenge disjunkte Umgebungen im ursprünglichen Raum besitzen.

Proposition 19.4.5.2 (**Fortsetzen von Schnitten über Kompakta**). *Gegeben eine Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ auf einem topologischen Raum X läßt sich jeder Schnitt von $\mathcal{F}$ über einem relativ Hausdorff'schen Kompaktum $K \subset X$ stetig auf eine offene Umgebung von K fortsetzen.*

19.4.5.3. Zusammen mit 19.2.2.59 folgt unter den Annahmen der Proposition, daß die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $\mathrm{colf}_{U\supset K}\, \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(K)$ liefert. Der Kolimes ist hierbei über alle offenen Umgebungen $U \Subset X$ von K zu verstehen.

Beispiel 19.4.5.4. Für den dreielementigen Raum X mit zwei abgeschlossenen Punkten, die eine kompakte Teilmenge K bilden und beide im Abschluß des dritten Punktes liegen, läßt sich nicht jeder Schnitt über K der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ auf eine offene Umgebung von K fortsetzen. Die Bedingung „relativ Hausdorff“ ist also notwendig für die Gültigkeit der Proposition.

Beweis. Sei $s \in \mathcal{F}(K)$ unser Schnitt. Da K als kompakter Hausdorffraum nach 15.1.5.20 lokal kompakt ist, finden wir eine Überdeckung von K durch Kompakta $K_1, \ldots, K_n$ und für diese Kompakta offene Umgebungen $U_1, \ldots, U_n \Subset X$ und Schnitte $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $s_i|K_i = s|K_i$. Nach 19.2.2.59 gibt es eine offene Umgebung W von $K_1 \cap K_2$ in $U_1 \cap U_2$ mit $s_1|W = s_2|W$. Weiter finden wir ähnlich wie in 15.1.5.19 für $i = 1, 2$ disjunkte offene Umgebungen $U_i' \Subset U_i$ von $K_i \backslash W$. Dann verkleben die beiden $s_i|U_i'$ und $s_1|W = s_2|W$ zu einem Schnitt auf $U_1' \cup U_2' \cup W$, der unseren Schnitt auf $K_1 \cup K_2$ fortsetzt. Eine offensichtliche Induktion beendet den Beweis. □

19.4.5.5 (**Diskussion allgemeiner Fortsetzungsresultate für Schnitte**). Im Fall parakompakter Räume lernen wir in 19.5.4.1, daß sich jeder Schnitt über einer abgeschlossenen Teilmenge auf eine offene Umgebung derselben fortsetzen läßt.

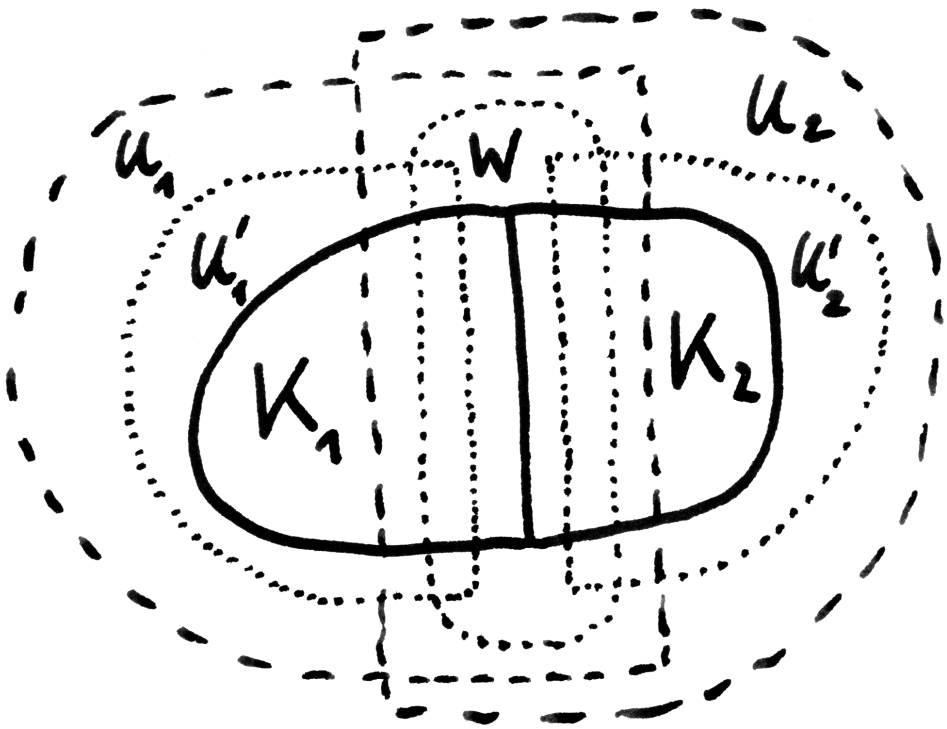


Illustration zum Beweis des Fortsetzens von Schnitten über Kompakta 19.4.5.2

Diese Aussage und die vorhergehende Proposition 19.4.5.2 sind die beiden einzigen allgemeinen Fortsetzungsresultate dieser Art, die ich kenne. Man beachte, daß jede einpunktige Teilmenge eines topologischen Raums ein relativ Hausdorff'sches Kompaktum ist.

Proposition 19.4.5.6. *Seien X ein topologischer Raum und K ein kompakter Hausdorffraum und $\pi : X \times K \to X$ die Projektion. So liefert für jede Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X\times K}$ und jeden Punkt $x \in X$ die offensichtliche Abbildung eine Bijektion*

$$(\pi_*\mathcal{F})_x \xrightarrow{\sim} \Gamma(\pi^{-1}(x); \mathcal{F})$$

Vorschau 19.4.5.7. Diese Aussage wird sich im weiteren Verlauf als ein Spezialfall des „fasereigentlichen Basiswechsels“ 19.6.3.24 erweisen.

Beweis. Nach 19.4.5.3 haben wir $\operatorname{colf}_W \Gamma(W; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\pi^{-1}(x); \mathcal{F})$ für den Kolimes über alle offenen Umgebungen W von $\pi^{-1}(x)$. Nach Übung 15.1.6.39 umfaßt jede offene Umgebung von $\pi^{-1}(x)$ eine Menge der Gestalt $\pi^{-1}(U)$ für $U \Subset X$ eine offene Umgebung von x. Das zeigt die Proposition. □

Proposition 19.4.5.8. *Gegeben X ein topologischer Raum und $\pi : X \times [0,1] \to X$ die Projektion auf den ersten Faktor gilt:*

1. *Für jede abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ ist die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \pi_*\pi^*\mathcal{F}$;*

2. *Ist eine abelsche Garbe $\mathcal{A} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ azyklisch für den Funktor der globalen Schnitte, so gilt dasselbe für die zurückgeholte Garbe $\pi^*\mathcal{A}$;*

3. *Für jede abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ induziert das Zurückholen auf der Kohomologie Isomorphismen $\mathrm{H}^q(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X \times [0,1]; \pi^*\mathcal{F})$.*

Vorschau 19.4.5.9. Im Rahmen der sechs Funktoren erweist sich das als eine direkte Konsequenz aus fasereigentlichem Basiswechsel und unseren Erkenntnissen zur Garbenkohomologie reeller Intervalle, vergleiche den zweiten Beweis von 21.3.1.1.

Beweis. Teil 1 gilt für jede finale Surjektion mit zusammenhängenden Fasern und sogar für Garben von Mengen nach Übung 19.4.3.23. Um Teil 2 zu zeigen, wählen wir eine welke Auflösung $\pi^*\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}^{\triangleleft}$ und betrachten für alle $x \in X$ das kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "j_x"] \arrow[d, "\mathrm{fin}"'] & X \times [0,1] \arrow[d, "\pi"] \\
\mathrm{top} \arrow[r, "i_x"'] & X
\end{tikzcd}$$

Unter der Restriktion mit der Einbettung j_x wird unsere welke Auflösung zu einer punktweichen Auflösung $j_x^*\pi^*\mathcal{A} \hookrightarrow j_x^*\mathcal{B}^\lhd$ einer punktweichen Garbe. Da nach 19.4.2.3 punktweiche Garben auf Intervallen Γ-azyklisch sind, liefert unser Komplex einen exakten Komplex $\Gamma(j_x^*\pi^*\mathcal{A}) \hookrightarrow \Gamma(j_x^*\mathcal{B}^\lhd)$. Das ist aber nach 19.4.5.6 genau der Komplex der Halme bei x des Garbenkomplexes $\pi_*\pi^*\mathcal{A} \hookrightarrow \pi_*\mathcal{B}^\lhd$, der folglich auch exakt ist und mit unserem Isomorphismus $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \pi_*\pi^*\mathcal{A}$ als welke Auflösung von $\mathcal{A}$ verstanden werden kann. Ist nun $\mathcal{A}$ globale-Schnitte-azyklisch, so ist der Komplex $\Gamma(\pi_*\mathcal{B}^\lhd) = \Gamma(\mathcal{B}^\lhd)$ exakt in höheren Graden und damit ist auch $\pi^*\mathcal{A}$ globale-Schnitte-azyklisch. Teil 3 folgt ohne weitere Schwierigkeiten. □

Korollar 19.4.5.10 (**Homotopieinvarianz der Garbenkohomologie**). *Homotope Abbildungen von topologischen Räumen induzieren dieselbe Abbildung auf der Garbenkohomologie.*

Beweis. Seien X, Y topologische Räume und $f, g : X \to Y$ homotope Abbildungen und $h : X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie von f nach g. Bezeichnen wir die Inklusionen $X \to X \times [0,1]$, $x \mapsto (x,t)$ mit i_t, so gilt $f = h \circ i_0$ und $g = h \circ i_1$. Es reicht nun, $\mathrm{H}^q(i_0) = \mathrm{H}^q(i_1)$ zu zeigen, denn daraus folgt mit der Funktorialität der Homologie bereits

$$\mathrm{H}^q(f) = \mathrm{H}^q(i_0) \circ \mathrm{H}^q(h) = \mathrm{H}^q(i_1) \circ \mathrm{H}^q(h) = \mathrm{H}^q(g)$$

Andererseits gilt für $\pi : X \times [0,1] \to X$ die Projektion aber $\mathrm{id}_X = \pi \circ i_t$ und damit $\mathrm{id} = \mathrm{H}^q(i_t) \circ \mathrm{H}^q(\pi)$ für alle t. Nun ist $\mathrm{H}^q(\pi)$ nach 19.4.5.8 für jede abelsche Gruppe M von Koeffizienten ein Isomorphismus

$$\mathrm{H}^q(\pi) : \mathrm{H}^q(X; M)_{\mathrm{garb}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X \times [0,1]; M)_{\mathrm{garb}}$$

Folglich müssen alle $\mathrm{H}^q(i_t)$ dieselbe Abbildung in die Gegenrichtung induzieren, nämlich die Umkehrabbildung zu unserem Isomorphismus. □

Beispiel 19.4.5.11 (**Garbenkohomologie zusammenziehbarer Räume**). Die Garbenkohomologie jedes zusammenziehbaren Raums X besteht aus den konstanten Schnitten der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ im Grad Null und verschwindet in allen anderen Graden.

Beispiel 19.4.5.12 (**Garbenkohomologie von Sphären**). Um die Kohomologie von Sphären im Rahmen der Garbenkohomologie zu berechnen, mag man besagte Sphären in zwei etwas über den Äquator hinaus verdickte offene Hemisphären zerlegen und die Mayer-Vietoris-Sequenz der Garbenkohomologie 19.4.1.4 oder noch besser der reduzierten Garbenkohomologie 19.4.3.29 anwenden. Unsere beiden Hemisphären sind zusammenziehbar und ihr Schnitt ist homotopieäquivalent zu einer Sphäre einer um Eins kleineren Dimension. So finden wir $\tilde{\mathrm{H}}^q(S^n) \cong \mathbb{Z}$

für $q = n \geq -1$ und Null sonst und finden zusätzlich, daß die Spiegelung an einer Koordinatenebene auf unserer Kohomologie als die Multiplikation mit (-1) wirkt.

Beispiel 19.4.5.13 (**Lokale Kohomologie des** $\mathbb{R}^n$). Für einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ liefert die reduzierte Version der langen exakten Sequenz der lokalen Kohomologie 19.4.4.9 insbesondere Isomorphismen $\tilde{\mathrm{H}}^{q-1}(\mathbb{R}^n \backslash x) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_{\{x\}}(\mathbb{R}^n)$ und mit 19.4.5.12 dann

$$\mathrm{H}^q_{\{x\}}(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter sehen wir so, daß die Spiegelung an einer Koordinatenebene auf unserer lokalen Kohomologie als die Multiplikation mit (-1) wirkt. Zusätzlich zeigt die Funktorialität unserer Konstruktion, daß für jeden abgeschlossenen Ball $K \subset\!\!\!

mit den Ausschneidungsisomorphismen 19.4.4.11 in den Vertikalen und dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante $\det(\mathrm{d}_0 g)$ als unterer Horizontale. Hinweis: Für vom Ursprung verschiedene Punkte p nahe am Ursprung gilt die Abschätzung $\|g(p) - (\mathrm{d}_0 g)(p)\| < \|(\mathrm{d}_0 g)(p)\|$, und man beachte 19.4.5.16.

19.4.6 Ein Spektralsequenzargument

Definition 19.4.6.1. Ein **Doppelkomplex** $A = (A^{p,q}, \partial, \delta)$ ist eine durch $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ parametrisierte Familie $A^{p,q}$ von abelschen Gruppen mitsamt Gruppenhomomorphismen $\partial = \partial^p : A^{p,q} \to A^{p+1,q}$ und $\delta = \delta^q : A^{p,q} \to A^{p,q+1}$ derart, daß gilt $\partial^2 = 0$, $\delta^2 = 0$ und $\partial\delta = \delta\partial$.

Ergänzung 19.4.6.2. Allgemeiner und formaler erklären wir für jede endliche Menge I einen I**-Multikomplex** als eine $\mathbb{Z}^I$-graduierte abelsche Gruppe mit Gruppenhomomorphismen $\partial_i : A^\alpha \to A^{\alpha+\mathrm{e}_i}$ für $i \in I$, $\alpha \in \mathbb{Z}^I$ derart, daß gilt $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i \ \forall i,j$ und $\partial_i^2 = 0 \ \forall i$. Oft arbeiten wir mit $I = \{1, 2, \ldots, l\}$ und schreiben α als Zeilenvektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ und lassen die Klammern beim oberen Index auch noch weg, also $A^\alpha = A^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l}$. Die Menge $I = \{1, 2, \ldots, l\}$ hat im Gegensatz zu einer beliebigen endlichen Menge I eine ausgezeichnete Anordnung und es gilt im folgenden, deren implizite Verwendung zu vermeiden. Unseren Doppelkomplex verstehen wir als einen $\{1, 2\}$-Multikomplex.

Definition 19.4.6.3. Gegeben ein Doppelkomplex A bilden wir seinen **Totalkomplex** $\mathrm{tot}(A) = T = (T, d)$ durch die Vorschrift

$$T^n := \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}$$

mit dem Differential $da := \partial a + (-1)^p \delta a$ für $a \in A^{p,q}$.

Ergänzung 19.4.6.4. Gegeben ein I-Multikomplex A erklären wir allgemeiner für jede Anordnung ω von I den zugehörigen Totalkomplex $T = \mathrm{Tot}_\omega(A)$ mit

$$T^n = \bigoplus_{p+q+\ldots+r+s=n} A^{p,q,\ldots,r,s}$$

und Differential $\partial_p + (-1)^p \partial_q + \ldots + (-1)^{p+q+\ldots+r} \partial_s$ in hoffentlich selbsterklärender Notation. Ist η eine andere Anordnung auf I, so liefert die Multiplikation mit dem „Signum der auf den ungeraden Einträgen induzierten Umordnung“ auf den Komponenten einen Isomorphismus $\mathrm{Tot}_\omega(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tot}_\eta(A)$.

19.4.6.5. In der Literatur wird auch eine andere Konvention verwendet, bei der man $\partial\delta + \delta\partial = 0$ statt $\partial\delta = \delta\partial$ fordert. Wir sprechen dann von einem **Doppelkomplex mit antikommutierenden Differentialen**. Zwischen beiden Konzepten kann man hin- und hergehen, indem man $\delta : A^{p,q} \to A^{p,q+1}$ ersetzt durch

$(-1)^p\delta : A^{p,q} \to A^{p,q+1}$. Ich finde es natürlicher, mit kommutierenden Differentialen zu arbeiten. So ergibt sich etwa der Tensorkomplex als Totalkomplex eines Doppelkomplexes in Bezug auf eine Anordnung der Tensorfaktoren.

19.4.6.6. Wir denken uns p nach rechts und q nach oben aufgetragen und betrachten in unserem Doppelkomplex die **Spaltenkomplexe** $A^{p,*}$ sowie die **Zeilenkomplexe** $A^{*,q}$. Verschwinden alle $A^{p,q}$ mit $p < 0$, so sprechen wir von einem **Doppelkomplex in der rechten Halbebene**. Verschwinden alle $A^{p,q}$ oder $q < 0$, so sprechen wir von einem **Doppelkomplex in der oberen Halbebene**. Verschwinden alle $A^{p,q}$ mit $p < 0$ oder $q < 0$, so sprechen wir von einem **Doppelkomplex im ersten Quadranten**. Zu einem Doppelkomplex in der rechten Halbebene erklären wir den **senkrechten Kernkomplex** $K_\uparrow$ als den Komplex der Kerne „längs der q-Achse“, in Formeln

$$K_\uparrow^* = \ker(\partial : A^{0,*} \to A^{1,*})$$

mit dem von δ induzierten Differential. Gegeben ein Doppelkomplex in der rechten Halbebene haben wir eine offensichtliche injektive Kettenabbildung $K_\uparrow \hookrightarrow T$ vom senkrechten Kernkomplex in den Totalkomplex.

19.4.6.7. Gegeben ein I-Multikomplex A betrachten wir allgemeiner für jede Teilmenge $J \subset I$ und jedes $\beta \in \mathbb{Z}^{I\setminus J}$ den J**-Teilmultikomplex** $A^{J,\beta} = A^\beta$ mit Differentialen ∂_i für $i \in J$. Beispiele sind unsere Zeilen- und Spaltenkomplexe. Andererseits bilden für festes $i \in I$ die Kerne und Bilder von ∂_i Untermultikomplexe und die Kokerne und Bilder von ∂_i Quotientenmultikomplexe unseres ursprünglichen I-Multikomplexes und wir erhalten so I-Multikomplexe mit verschwindendem ∂_i. Der senkrechte Kernkomplex ist in dieser Terminologie einer der $\{2\}$-Teilkomplexe des Doppelkomplexes $\ker \partial_1$.

Satz 19.4.6.8 (Eine ausgeartete Spektralsequenz). *Sei $A = (A^{p,q}, \partial, \delta)$ ein Doppelkomplex im ersten Quadranten. Sind alle seine Zeilen exakt an allen Stellen $A^{p,q}$ mit $p \neq 0$, so induziert die Einbettung des senkrechten Kernkomplexes in den Totalkomplex $K_\uparrow \hookrightarrow T$ auf der Kohomologie Isomorphismen*

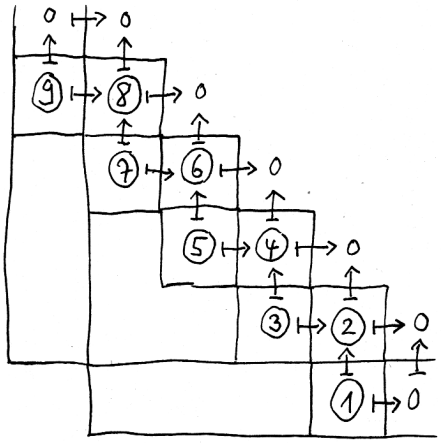
$$\mathcal{H}^n K_\uparrow \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n T$$

19.4.6.9. Der Satz gilt allgemeiner für jeden Doppelkomplex in der rechten Halbebene, bei dem es für jedes feste n höchstens endlich viele von Null verschiedene Einträge zu Indizes (p, q) mit $p + q = n$ gibt. Der Beweis bleibt derselbe. Wir beginnen mit einem Spezialfall.

Lemma 19.4.6.10. *Sind bei einem Doppelkomplex im ersten Quadranten alle Zeilen exakt, so ist auch sein Totalkomplex exakt.*

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \\
\cdots \arrow[r] & A^{0,2} \arrow[r] \arrow[u] & A^{1,2} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots & \\
 & A^{0,1} \arrow[u, "\delta^1"] \arrow[r] & A^{1,1} \arrow[u, "\delta^1"] \arrow[r] & A^{2,1} \arrow[u, "\delta^1"] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A^{0,0} \arrow[u, "\delta^0"] \arrow[r, "\partial^0"] & A^{1,0} \arrow[u, "\delta^0"] \arrow[r, "\partial^1"] & A^{2,0} \arrow[u, "\delta^0"] \arrow[r] & \cdots \\
 & & & &
\end{tikzcd}
$$

Ein Doppelkomplex



Eine explizite Beschreibung der Komposition $\mathcal{H}K_{\rightarrow} \rightarrow \mathcal{H}T \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}K_{\uparrow}$ im Fall eines Doppelkomplexes im ersten Quadranten mit exakten Zeilen bei A^{pq} mit $p \neq 0$. Der Zykel 1 im waagerechten Kernkomplex ist als Element 2 der tiefsten Zeile der ∂-Rand von 3. Der δ-Rand von 3 ist dann ein ∂-Zykel 4, der sich wegen der Exaktheit der Zeile als ∂-Rand eines Elements 5 schreiben läßt. Und so klettert man die Treppe hoch um schließlich bei einem Zykel 9 des senkrechten Kernkomplexes zu landen.

Vorschau 19.4.6.11. Das Lemma gilt mit demselben Beweis für jeden Doppelkomplex, bei dem es für jedes feste n höchstens endlich viele von Null verschiedene Einträge zu Indizes (p, q) mit $p + q = n$ gibt. Die Einträge können dabei sogar Objekte einer beliebigen abelschen Kategorie sein. Eine Verallgemeinerung dieser Aussage, die für beliebige Doppelkomplexe von abelschen Gruppen richtig bleibt, wird in 20.3.7.3 formuliert und bewiesen. Daraus ergeben sich dann auch Verallgemeinerungen von 19.4.6.8. Allgemeine Spektralsequenzen besprechen wir in 19.9.1.

Beweis. Sind nur endlich viele Zeilen unseres Doppelkomplexes von Null verschieden, so können wir das mit vollständiger Induktion zeigen: Dazu betten wir die oberste von Null verschiedene Zeile ein in den Totalkomplex. Der Kokern dieser Einbettung ist der Totalkomplex eines Doppelkomplexes mit exakten Zeilen und einer Zeile weniger. Zu der so konstruierten kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen bilden wir dann die lange exakte Homologiesequenz und unsere Induktion läuft. Haben wir einen beliebigen Doppelkomplex im ersten Quadranten vor uns, so stimmt sein Totalkomplex bis zum Grad n überein mit dem Totalkomplex zum Doppelkomplex der untersten n Zeilen, also können wir uns auf den bereits behandelten Fall zurückziehen. □

Beweis von Satz 19.4.6.8. Der Kokern der Einbettung $K_{\uparrow} \hookrightarrow T$ ist der Totalkomplex eines Doppelkomplexes im ersten Quadranten mit exakten Zeilen. Nach Lemma 19.4.6.10 ist er damit exakt und die Behauptung folgt aus der langen exakten Homologiesequenz. □

Übungen

Übung 19.4.6.12. Man zeige, daß unser Satz über ausgeartete Spektralsequenzen 19.4.6.8 ähnlich für Spektralsequenzen im dritten Quadranten und den senkrechten Kokernkomplex gilt. Betrachtet man die analogen Aussagen in allgemeinen abelschen Kategorien, so gelten sie weiter mit demselben Beweis und fallen zusammen, wenn man zur opponierten abelschen Kategorie übergeht.

Übung 19.4.6.13. Gegeben ein Ring R und ein R-Rechtsmodul M und ein R-Linksmodul N und $\ldots \to P_1 \to P_0 \twoheadrightarrow M$ eine projektive Auflösung von M und $\ldots \to Q_1 \to Q_0 \twoheadrightarrow N$ eine projektive Auflösung von N liefern die offensichtlichen Kettenabbildungen Quasiisomorphismen

$$P \otimes_R N \overset{\smile}{\leftarrow} P \otimes_R Q \overset{\smile}{\to} M \otimes_R Q$$

Insbesondere erhalten wir so die bei der Definition der Torsionsgruppen in 19.3.2.26 versprochenen kanonischen Isomorphismen

$$(\mathrm{L}_q(M \otimes_R))(N) \overset{\sim}{\to} (\mathrm{L}_q(\otimes_R N))(M)$$

Übung 19.4.6.14. Sind bei einem Doppelkomplex im ersten Quadranten die Zeilenkomplexe exakt an allen Stellen (p,q) mit $p+q \leq n$, so ist der Totalkomplex exakt an allen Stellen $\leq n$. Sind bei einem Doppelkomplex im ersten Quadranten die Zeilenkomplexe exakt an allen Stellen (p,q) mit $p+q \leq n$ und $p > 0$, so induziert die Einbettung des senkrechten Kernkomplexes in den Totalkomplex Isomorphismen auf allen $\mathcal{H}^q$ mit $q \leq n$.

Übung 19.4.6.15. Sind bei einem Doppelkomplex nur endlich viele Zeilenkomplexe verschieden von Null und sind alle Spalten exakt, so ist der Totalkomplex exakt. Hinweis: Im Fall von nur zwei von Null verschiedenen Zeilen ist das leicht einzusehen. Im allgemeinen argumentiere man mit vollständiger Induktion und geschickten kurzen exakten Sequenzen von Doppelkomplexen und der langen exakten Kohomologiesquenz.

19.4.7 Garbenkohomologie durch offene Überdeckungen

19.4.7.1. Man erinnere sich daran, daß ein unendliches Produkt exakter Sequenzen von abelschen Garben nicht wieder exakt zu sein braucht, daß aber ein beliebiges Produkt exakter Sequenzen von abelschen Gruppen stets wieder exakt ist.

19.4.7.2 (**Čech-Kohomologie zu Überdeckung und Garbenkohomologie**). Gegeben eine Überdeckung $\mathcal{U}$ eines topologischen Raums X und eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf X erklären wir einen Komplex von Garben $\mathcal{C}^q = \mathcal{C}^q(\mathcal{U};\mathcal{F})$, indem wir für jede offene Teilmenge $V \Subset X$ setzen

$$\mathcal{C}^q(V) := \prod_{(U_0,\ldots,U_q)\in\mathcal{U}^{q+1}} \mathcal{F}(V \cap U_0 \cap \ldots \cap U_q)$$

Das Differential wird definiert durch dieselben Formeln wie beim Čech-Komplex aus 19.1.3.11. Nimmt man noch den Morphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{C}^0$ hinzu, der durch die Einschränkungen $\mathcal{F}(V) \to \prod_{U_0\in\mathcal{U}} \mathcal{F}(V \cap U_0)$ gegebenen wird, und nimmt von unserer Überdeckung an, daß auch die offenen Kerne der Mengen aus $\mathcal{U}$ bereits X überdecken, so entsteht eine exakte Sequenz von Garben

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^1 \to \ldots$$

In der Tat erhalten wir für jede offene Teilmenge $V \Subset X$, die ganz in einer Teilmenge U aus unserem überdeckenden Mengensystem enthalten ist, sogar bereits ein exakte Sequenz $\mathcal{F}(V) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(V) \to \mathcal{C}^1(V) \to \ldots$ nach Teil 3 von Lemma 19.1.4.4. Wir nennen unsere exakte Sequenz von Garben den **vergarbten Čech-Komplex**. Per definitionem gilt $\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) = \mathcal{H}^q\Gamma\mathcal{C}^{\lhd}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ und aus der Definition derivierter Funktoren 19.3.2.8 erhalten wir natürliche Abbildungen

$$\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})$$

von der Čech-Kohomologie zu einer gegebenen offenen Überdeckung in die Garbenkohomologie. Wir erhalten sogar derartige natürliche Abbildungen für jede beliebige Überdeckung derart, daß die offenen Kerne der überdeckenden Mengen bereits X überdecken, mit der entsprechenden offensichtlichen Erweiterung der linken Seite auf diesen Fall. Wir hatten diesen Fall bisher nur deshalb vermieden, da wir mit Prägarben gearbeitet hatten und da für Prägarben Schnitte über beliebigen Teilmengen nicht definiert sind.

Vorschau 19.4.7.3 (**Čech-Kohomologie und Garbenkohomologie**). Es ist klar, daß unsere Abbildungen von eben im Kolimes natürliche Abbildungen

$$\check{\mathrm{H}}^q(X;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})$$

von der Čech-Kohomologie in die Garbenkohomologie induzieren. In 19.5.2.1 zeigen wir, daß diese für $q = 1$ stets Isomorphismen sind. In 19.5.6.1 zeigen wir, daß sie auf „parakompakten“ Räumen sogar für alle q Isomorphismen sind.

Definition 19.4.7.4. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine abelsche Garbe auf X und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Gilt

$$\mathrm{H}^q(U_0 \cap \ldots \cap U_\nu;\mathcal{F}) = 0$$

für alle endlichen Schnitte von einer oder mehr Mengen aus $\mathcal{U}$ und für alle $q > 0$, so sagen wir, die Garbe $\mathcal{F}$ sei **azyklisch für die Überdeckung** $\mathcal{U}$, oder die Überdeckung sei **azyklisch für die Garbe**.

Satz 19.4.7.5 (**Kohomologie durch azyklische Überdeckungen**). *Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Ist die Überdeckung $\mathcal{U}$ azyklisch für die Garbe $\mathcal{F}$, so berechnet der Komplex der Čech-Koketten ihre Kohomologie, als da heißt, die in 19.4.7.2 konstruierten Abbildungen sind Isomorphismen*

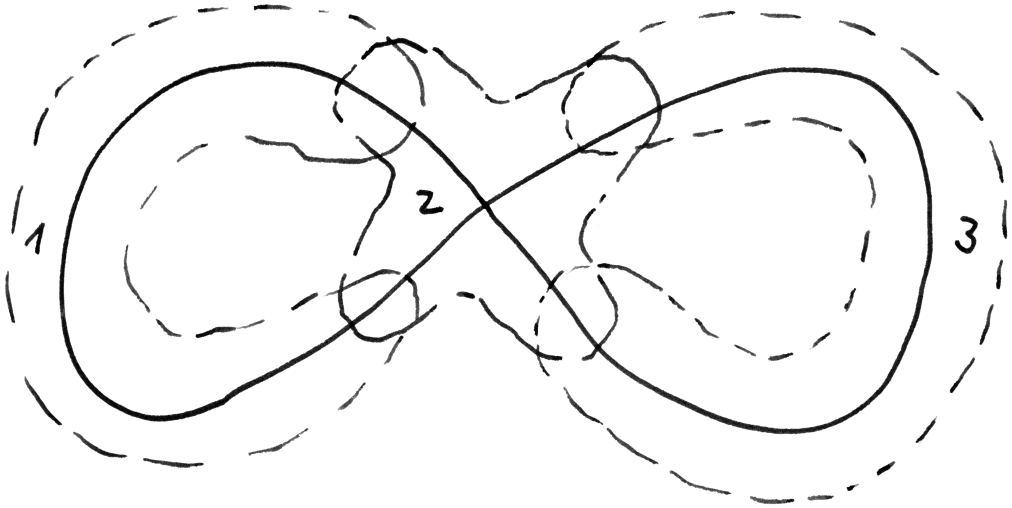
$$\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})$$

Vorschau 19.4.7.6. Insbesondere ist jede welke abelsche Garbe Čech-azyklisch in dem in 19.5.1.12 eingeführten Sinne. Allgemeiner folgt dasselbe für jede abelsche Garbe, deren Restriktion auf jede offene Teilmenge global-Schnitte-azyklisch ist.

Beweis. Wir wählen eine „waagerecht gedachte“ welke Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{W}^\triangleleft$ von $\mathcal{F}$ und bilden den Doppelkomplex

$$\mathcal{C}^q(\mathcal{U};\mathcal{W}^p)$$

von abelschen Garben, indem wir von dieser Auflösung an jeder Stelle „in senkrechter Richtung“ den vergarbten Čech-Komplex nehmen. Offensichtlich besteht



$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[d, shift right=6, "+"'] \arrow[d, shift left=6, "+"] \arrow[d, shift right=3, "-"'] \arrow[d, shift left=3, "-"] \arrow[d, shift right=9, "+"'] \arrow[d, shift left=9, "-"] \\
\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Eine für die konstante Garbe auf der Acht azyklische offene Überdeckung durch drei offene Teilmengen mit ihrem angeordneten Čech-Komplex

dieser Doppelkomplex aus welken Garben, die Spaltenkomplexe sind exakt in höheren Graden, und der waagerechte Kernkomplex ist unsere ursprüngliche welke Auflösung $\mathcal{W}^{\lhd}$. Der Totalkomplex ist also nach 19.4.6.8, angewandt auf die Halme, auch eine welke Auflösung von $\mathcal{F}$ und unsere Konstruktion liefert, auch ohne daß wir über die Exaktheit des senkrechten Kernkomplexes etwas wissen, einen Homomorphismus von Auflösungen

$$\mathcal{C}^n(\mathcal{U};\mathcal{F}) \to \operatorname{tot}\mathcal{C}^q(\mathcal{U};\mathcal{W}^p)$$

Aus der Azyklizität von $\mathcal{F}$ in Bezug auf $\mathcal{U}$ folgt nun, da $\mathcal{F}|_U \hookrightarrow \mathcal{W}^{\lhd}|_U$ für alle $U \Subset X$ eine welke Auflösung ist, die Exaktheit der Sequenzen

$$\mathcal{F}(U_0 \cap \ldots \cap U_q) \hookrightarrow \mathcal{W}^0(U_0 \cap \ldots \cap U_q) \to \mathcal{W}^1(U_0 \cap \ldots \cap U_q) \to \ldots$$

Die von unserem Homomorphismus von Auflösungen auf den globalen Schnitten induzierte Abbildung

$$\prod_{\mathcal{U}^{n+1}} \mathcal{F}(U_0 \cap \ldots \cap U_n) \to \bigoplus_{p+q=n} \prod_{\mathcal{U}^{q+1}} \mathcal{W}^p(U_0 \cap \ldots \cap U_q)$$

kann mithin als die Einbettung des senkrechten Kernkomplexes in einen Doppelkomplex mit exakten Zeilen aufgefaßt werden. Also ist sie ein Quasiisomorphismus, und da die rechte Seite von einer welken Auflösung herkam, folgt der Satz. □

19.4.7.7 (**Garbenkohomologie von Simplizialkomplexen**). Gegeben ein Simplizialkomplex $(E,\mathcal{K})$ mit Ecken E und Simplizes $\mathcal{K}$ wie in 16.2.7.5 und seine Realisierung $\Delta(\mathcal{K}) \subset \operatorname{Ens}(E,\mathbb{R}_{\geq 0})$ wie in 16.2.7.8 erinnern wir aus 17.3.2.7 den **offenen Stern um eine Ecke** e

$$\operatorname{St}(e) := \{f \in \Delta(\mathcal{K}) \mid e \in \operatorname{supp} f\}$$

Diese Sterne sind offen und zusammenziehbar und überdecken unsere Realisierung. Auch die Schnitte endlich vieler Sterne sind jeweils zusammenziehbar oder leer. Nach der Homotopieinvarianz der Garbenkohomologie 19.4.5.10 bilden folglich die Sterne für jede konstante oder mit 19.2.2.55 auch für jede lokal konstante Garbe auf unserer Realisierung eine azyklische Überdeckung und nach 19.4.7.5 berechnet der Čech-Komplex für derartige Garben die Garbenkohomologie. Nach 19.1.4.6 können wir die Garbenkohomologie für derartige Garben dann auch mit dem angeordneten Čech-Komplex berechnen. Von hier ausgehend konstruiert man im Fall konstanter Koeffizienten leicht einen Isomorphismus der Garbenkohomologie mit der simplizialen Kohomologie unseres Simplizialkomplexes.

Übungen

Übung 19.4.7.8. Man zeige, daß die Kohomologie der Kreislinie mit Koeffizienten in der nichttrivialen lokal konstanten abelschen Garbe $\mathcal{F}$ mit Fasern frei vom Rang Eins gegeben wird durch $\mathrm{H}^1(S^1;\mathcal{F}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und durch Null in allen anderen Graden. Man zeige dasselbe auch für $\mathbb{C}^\times$ statt S^1.

Übung 19.4.7.9. Sei $\mathcal{F}$ eine lokal konstante abelsche Garbe auf $\mathbb{C}^\times$ und $(\mathcal{F}_1, T)$ ihr Halm bei 1 mit seinem Monodromieautomorphismus 19.7.1.19. Man zeige

$$\mathrm{H}^q(\mathbb{C}^\times;\mathcal{F}) \cong \begin{cases} \{a \in \mathcal{F}_1 \mid T(a) = a\} & q = 0; \\ \mathcal{F}_1/\operatorname{im}(T - \mathrm{id}) & q = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man zeige dasselbe für S^1 statt $\mathbb{C}^\times$.

Übung 19.4.7.10. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine abelsche Garbe auf X und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Gilt

$$\mathrm{H}^q(U_0 \cap \ldots \cap U_\nu;\mathcal{F}) = 0$$

für alle endlichen Schnitte von einer oder mehr Mengen aus $\mathcal{U}$ und für alle q mit $0 < q \leq n$, so ist die natürliche Abbildung für alle $q \leq n$ ein Isomorphismus

$$\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})$$

Hinweis: Man verwende Übung 19.4.6.14. Man benötigt sogar nur das Verschwinden der fraglichen höheren Kohomologie der Schnitte für $q > 0$ und $q + \nu \leq n$.

19.4.8 Kompakte Kohomologie

Definition 19.4.8.1. Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X erklären wir die Gruppe der **Schnitte von $\mathcal{F}$ mit kompaktem Träger** oder kurz der **kompakten Schnitte von $\mathcal{F}$** durch die Vorschrift

$$\Gamma_!\mathcal{F} := \Gamma_!(X;\mathcal{F}) := \{s \in \Gamma\mathcal{F} \mid (\operatorname{supp} s) \text{ ist kompakt}\}$$

Definition 19.4.8.2. Die **q-te Kohomologie mit kompaktem Träger** oder kurz **kompakte Kohomologie** eines topologischen Raums X mit Koeffizienten in einer abelschen Garbe $\mathcal{F}$ ist der Wert bei $\mathcal{F}$ des q-ten rechtsderivierten Funktors $\mathrm{R}^q\Gamma_!$ des Funktors der kompakten Schnitte, in Formeln

$$\mathrm{H}^q_!\mathcal{F} = \mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F}) := \mathrm{R}^q\Gamma_!\mathcal{F}$$

19.4.8.3 (**Annahmen an die zugrundeliegenden Räume**). Kompakte Kohomologie hat nur für lokal kompakte Hausdorffräume so gute Eigenschaften, daß sie zu etwas nütze ist. Ich werde dennoch versuchen, die jeweils benötigten Bedingungen stets explizit dazuzuschreiben. Ähnlich werde ich es später mit dem „Schreivorschub“ halten.

19.4.8.4 (**Diskussion von Notation und Terminologie**). In der Literatur sind die alternativen Notationen Γ_c und H^q_c statt unserem $\Gamma_!$ und $\mathrm{H}^q_!$ üblich. Ist $A \subset X$ eine Teilmenge, so verwenden wir die Abkürzungen $\Gamma_!(A;\mathcal{F}) := \Gamma_!(A;\mathcal{F}|_A)$. und $\mathrm{H}^q_!(A;\mathcal{F}) := \mathrm{H}^q_!(A;\mathcal{F}|_A)$. Die abkürzenden Bezeichnungen „kompakte Schnitte“ und „kompakte Kohomologie“ sind unüblich.

19.4.8.5 (**Kompakte Kohomologie der konstanten Garbe**). Ist M eine abelsche Gruppe, so heißt die kompakte Kohomologie der konstanten Garbe M_X die **garbentheoretische kompakte Kohomologie** unseres Raums X mit Koeffizienten in M und wir notieren sie

$$\mathrm{H}^q_!(X;M) = \mathrm{H}^q_!(X;M)_{\mathrm{garb}} := \mathrm{H}^q_!(X;M_X)$$

Wenn wir betonen wollen, daß die kompakte singuläre Kohomologie 17.7.2.1 gemeint ist, schreiben wir $\mathrm{H}^q_!(X;M)_{\mathrm{sing}}$. Im Spezialfall $M = \mathbb{Z}$ kürzen wir das weiter ab zu $\mathrm{H}^q_!(X) := \mathrm{H}^q_!(X;\mathbb{Z})$.

19.4.8.6. Gegeben eine kurze exakte Sequenz von Garben $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ spezialisiert die lange exakte Sequenz der derivierten Funktoren zur **langen exakten Sequenz der kompakten Kohomologie**

$$\mathrm{H}^0_!(X;\mathcal{F}') \hookrightarrow \mathrm{H}^0_!(X;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^0_!(X;\mathcal{F}'') \to \mathrm{H}^1_!(X;\mathcal{F}') \to \mathrm{H}^1_!(X;\mathcal{F}) \to \dots$$

19.4.8.7. Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einem Raum X liefert die Transformation $\Gamma_! \Rightarrow \Gamma$ Transformationen $\mathrm{R}^q\Gamma_! \Rightarrow \mathrm{R}^q\Gamma$ und so kanonische Abbildungen

$$\mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})$$

Für kompaktes X sind sie offensichtlich Isomorphismen.

Lemma 19.4.8.8. *Sei $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem topologischen Raum X. Ist $\mathcal{F}'$ welk, so induziert die Surjektion $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine Surjektion $\Gamma_!\mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma_!\mathcal{F}''$. Stärker ist sogar jeder Schnitt von $\mathcal{F}''$ das Bild eines Schnitts von $\mathcal{F}$ mit demselben Träger.*

Beweis. Sei s'' ein kompakter Schnitt von $\mathcal{F}''$. Nach 19.4.1.2 gibt es einen Schnitt $s \in \Gamma\mathcal{F}$ mit $s \mapsto s''$. Ist U das Komplement des Trägers von s'', so kommt $s|U$ per definitionem von einem Schnitt $s' \in \mathcal{F}'(U)$ her. Dieser läßt sich jedoch, wenn $\mathcal{F}'$ welk ist, zu einem globalen Schnitt $s' \in \Gamma\mathcal{F}'$ ausdehnen, und $s - s'$ ist dann der gesuchte kompakte Schnitt von $\mathcal{F}$, der auf s'' abgebildet wird. $\square$

Satz 19.4.8.9. *Alle welken abelschen Garben auf einem topologischen Raum sind azyklisch für den Funktor der kompakten Schnitte.*

Beweis. Jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ besitzt wie im Beweis von 19.4.1.3 eine Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \ldots$ durch welke injektive Garben. Wir zerlegen sie in kurze exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{F} & \hookrightarrow & \mathcal{I}^0 & \twoheadrightarrow & \mathcal{K}^1 & & & & & & \\
 & & & & \mathcal{K}^1 & \hookrightarrow & \mathcal{I}^1 & \twoheadrightarrow & \mathcal{K}^2 & & \\
 & & & & & & & & \mathcal{K}^2 & \hookrightarrow & \mathcal{I}^2 & \twoheadrightarrow & \mathcal{K}^3 \\
 & & & & & & & & & & & & \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}$$

Wie im Beweis von 19.4.1.3 zeigt 19.4.1.2, daß für welkes $\mathcal{F}$ alle Garben in diesen kurzen exakten Sequenzen welk sind. Mit Lemma 19.4.8.8 erkennen wir weiter, daß alle unsere Sequenzen kurz exakt bleiben unter $\Gamma_!$. Das zeigt aber, daß der Komplex $0 \to \Gamma_!\mathcal{F} \to \Gamma_!\mathcal{I}^0 \to \Gamma_!\mathcal{I}^1 \to \ldots$ exakt ist. □

Definition 19.4.8.10. Eine Garbe heißt **kompaktweich**, englisch **c-soft**, französisch **c-mou**, wenn sich jeder Schnitt über einem relativ Hausdorff'schen Kompaktum zu einem globalen Schnitt fortsetzen läßt.

Beispiele 19.4.8.11. Jede welke Garbe ist kompaktweich, da wir nach 19.4.5.2 einen Schnitt über einem relativ Hausdorff'schen Kompaktum stets auf eine offene Umgebung unseres Kompaktums fortsetzen können. Jede injektive abelsche Garbe ist nach 19.4.1.5 welk und mithin kompaktweich. Die Einschränkung einer kompaktweichen Garbe auf einen relativ Hausdorff'schen Teilraum ist stets auch wieder kompaktweich.

Proposition 19.4.8.12 (Kompaktweiche Garben sind $\Gamma_!$-azyklisch). *Für jede kompaktweiche abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einem lokal kompakten Hausdorffraum X verschwindet die höhere kompakte Kohomologie, in Formeln*

$$\mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F}) = 0 \quad \forall q > 0$$

Beweis. Analog wie in 19.4.1.3 oder mit Übung 19.4.1.6 folgt das aus dem anschließenden Lemma 19.4.8.13. □

Lemma 19.4.8.13. *Gegeben $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem lokal kompakten Hausdorffraum X gilt:*

1. *Ist $\mathcal{F}'$ kompaktweich, so induziert die Surjektion $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine Surjektion $\Gamma_!\mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma_!\mathcal{F}''$ auf den globalen Schnitten mit kompaktem Träger;*

2. *Sind $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}$ kompaktweich, so ist auch $\mathcal{F}''$ kompaktweich.*

Beweis. 0. Wir zeigen Teil 1 zunächst unter der zusätzlichen Annahme X kompakt. Das kann später auch aus 19.5.4.6 gefolgert werden, aber das direkte Argument ist einfacher. Gegeben ein Schnitt $s'' \in \mathcal{F}''(X)$ finden wir eine endliche Überdeckung $X = K_1 \cup \ldots \cup K_r$ durch Kompakta und Schnitte $s_i \in \mathcal{F}(K_i)$ mit $s_i \mapsto s''|K_i$. Wir dürfen r kleinstmöglich annehmen. Wäre dann $r > 1$, so gälte $(s_1 - s_2)|(K_1 \cap K_2) \in \mathcal{F}'(K_1 \cap K_2)$, und wenn wir diesen Schnitt zu einem Schnitt $t \in \mathcal{F}'(K_1)$ fortsetzen, verkleben $s_1 - t$ und s_2 zu einem Schnitt in $\mathcal{F}(K_1 \cup K_2)$ im Widerspruch zur Minimalität von r.

1. Sei s'' ein Schnitt von $\mathcal{F}''$ mit Träger im Kompaktum K. Wir wählen eine offene Umgebung $U \Subset X$ von K mit kompaktem Abschluß $\bar{U}$. Nach Teil 0 des Beweises finden wir also ein Urbild $s \in \mathcal{F}(\bar{U})$ von $s''|_{\bar{U}}$. Wählen wir noch eine Ausdehnung $s' \in \mathcal{F}'(\bar{U})$ von der Einschränkung $s|_{\partial U}$ von s auf den Rand von U im Sinne der mengentheoretischen Topologie und ersetzen s durch $s - s'$, so dürfen wir $s|_{\partial U} = 0$ annehmen und können s durch Null zu einem globalen Schnitt ausdehnen.

2. Für $K \subset X$ kompakt betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \to & \mathcal{F}''(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(K) & \twoheadrightarrow & \mathcal{F}''(K) \end{array}$$

Die linke Vertikale ist surjektiv, da $\mathcal{F}$ kompaktweich ist. Die untere Horizontale ist surjektiv nach Teil 1, da mit $\mathcal{F}'$ auch $\mathcal{F}'|_K$ kompaktweich ist. Also ist die rechte Vertikale surjektiv. □

Lemma 19.4.8.14. *Gegeben eine kompaktweiche abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einem lokal kompakten Hausdorffraum X und $A \Subset X$ abgeschlossen induziert das Einschränken von Schnitten eine Surjektion*

$$\Gamma_!(X; \mathcal{F}) \twoheadrightarrow \Gamma_!(A; \mathcal{F})$$

Beweis. Sei $s \in \Gamma(A; \mathcal{F})$ ein Schnitt mit kompaktem Träger K. Sei U eine offene Umgebung von K in X mit kompaktem Abschluß. Man kann einen Schnitt

$$\tilde{s} \in \Gamma(\partial U \cup (A \cap \bar{U}); \mathcal{F})$$

erklären durch $\tilde{s}|A \cap \bar{U} = s|A \cap \bar{U}$ und $\tilde{s}|\partial U = 0$. Da $\mathcal{F}$ kompaktweich ist, kann $\tilde{s}$ zu einem globalen Schnitt $t \in \Gamma(X; \mathcal{F})$ fortgesetzt werden. Dieser Schnitt verschwindet jedoch auf ∂U und wir können folglich einen neuen Schnitt $\hat{s} \in \Gamma(X; \mathcal{F})$ bilden, der auf $\bar{U}$ mit $\tilde{s}$ übereinstimmt und der auf $X \backslash U$ verschwindet. Dieser Schnitt $\hat{s}$ ist dann der gesuchte Schnitt $\hat{s} \in \Gamma_!(X; \mathcal{F})$ mit $\hat{s} \mapsto s$. □

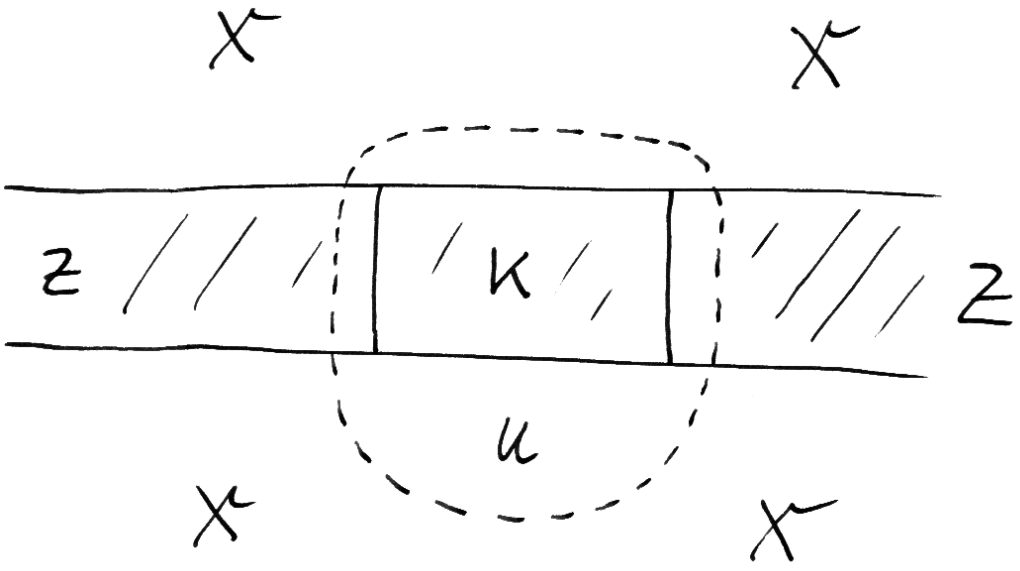


Illustration zum Beweis von 19.4.8.14

19.4.8.15. Die Einschränkung einer kompaktweichen Garbe auf einen relativ Hausdorff'schen Teilraum ist, wie bereits in 19.4.8.11 erwähnt, wieder kompaktweich. Seien nun X ein lokal kompakter Hausdorffraum und $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung einer offenen Teilmenge und $i : A \hookrightarrow X$ die Einbettung ihres Komplements. Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und eine kompaktweiche Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^{\lhd}$ erhalten wir nach Lemma 19.4.8.14 eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\Gamma_!(U;\mathcal{I}^{\lhd}) \hookrightarrow \Gamma_!(X;\mathcal{I}^{\lhd}) \twoheadrightarrow \Gamma_!(A;\mathcal{I}^{\lhd})$$

Die zugehörige lange exakte Homologiesequenz liefert zusammen mit unseren natürlichen Isomorphismen eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \mathrm{H}^q_!(U;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_!(A;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^{q+1}_!(U;\mathcal{F}) \to \ldots$$

Durch Betrachtung injektiver Auflösungen von $\mathcal{F}$ erkennt man, daß diese lange exakte Sequenz nicht von der Wahl der kompaktweichen Auflösung abhängt. Sie heißt die **Lokalisierungssequenz der kompakten Kohomologie**.

19.4.8.16 (**Lokale Kohomologie und kompakte Kohomologie**). Gegeben eine abgeschlossene kompakte Teilmenge K eines topologischen Raums X haben wir für jede abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ offensichtliche Einbettungen $\Gamma_K\mathcal{F} \hookrightarrow \Gamma_!\mathcal{F}$ und im filtrierenden Kolimes über alle abgeschlossenen Kompakta

$$\operatorname{colf}_K \Gamma_K\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \Gamma_!\mathcal{F}$$

Sie induzieren natürliche Homomorphismen $\mathrm{H}^q_K(X;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F})$ und in ihrer Gesamtheit aufgrund der Exaktheit filtrierender Kolimites Isomorphismen

$$\operatorname{colf}_K \mathrm{H}^q_K(X;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F})$$

Beispiel 19.4.8.17 (**Kompakte Kohomologie des** $\mathbb{R}^n$). Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und jede abelsche Gruppe M sind die in 19.4.8.16 konstruierten Abbildungen nach 19.4.5.13 als Kolimites über Systeme mit konstantem konfinalen Teilsystem Isomorphismen $\mathrm{H}^q_{\{x\}}(\mathbb{R}^n;M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n;M)$. Wir erhalten mit 19.4.5.13 Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n;M) \cong \begin{cases} M & q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter sehen wir so, daß die Spiegelung an einer Koordinatenebene auf unserer kompakten Kohomologie als die Multiplikation mit (-1) wirkt. Insbesondere ist die Kohomologie mit kompaktem Träger nicht homotopieinvariant, denn sonst müßte sie für jeden zusammenziehbaren Raum dasselbe sein wie für einen Punkt. Hier kommt noch ein zweiter Weg zur kompakten Kohomologie des $\mathbb{R}^n$.

Vermittels stereographischer Projektion erhalten wir ja einen Homöomorphismus $S^n \backslash x \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ des Komplements eines Punktes x der n-Sphäre mit dem $\mathbb{R}^n$. Die zugehörige Lokalisierungssequenz 19.4.8.15 hat die Gestalt

$$\ldots \to \mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{H}^q_!(S^n) \to \mathrm{H}^q_!(x) \to \mathrm{H}^{q+1}_!(\mathbb{R}^n) \to \ldots$$

Die kompakte Kohomologie von Punkt und Sphäre ist nun aber dieselbe wie deren normale Kohomologie und wir kennen sie bereits aus 19.4.5.12. Es folgt wieder $\mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{Z}$ für $q = n$ und Null sonst und analog mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe M.

Beispiel 19.4.8.18 (**Kompakte Kohomologie der Zahlengerade nach de Rham**). Wir kennen diese Kohomologie bereits aus 19.4.8.17 und prüfen nun, daß im Fall von reellen Koeffizienten die Berechnung als de-Rham-Kohomologie zu demselben Resultat führt. Es ist leicht zu sehen, daß die Garbe $\mathcal{C}^\infty_{Z,\mathbb{R}}$ der reellen $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen auf der Zahlengerade $Z := \mathbb{R}$ kompaktweich ist. Man kann folglich die kompakte Kohomologie der Zahlengeraden mit reellen Koeffizienten $\mathrm{H}^q_!(Z;\mathbb{R})$ berechnen vermittels der kompaktweichen Auflösung $\mathbb{R}_Z \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty_{Z,\mathbb{R}} \to \mathcal{C}^\infty_{Z,\mathbb{R}}$ der konstanten Garbe mit dem Ableiten als zweiter Abbildung. Den Komplex der Schnitte mit kompaktem Träger dieser Auflösung können wir nach rechts mit dem Integral ergänzen zu einer kurzen exakten Sequenz $\mathcal{C}^\infty_!(Z;\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty_!(Z;\mathbb{R}) \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ und erhalten so einen Isomorphismus $\mathrm{H}^q_!(Z;\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ für $q = 1$ und das Verschwinden dieser Kohomologiegruppen für $q \neq 1$.

Beispiel 19.4.8.19 (**Kohomologie der komplex projektiven Räume**). Aus dem Beweis von 15.2.3.7 wissen wir um eine Zerlegung

$$\mathbb{P}^{n+1}\mathbb{C} = \mathbb{P}^n\mathbb{C} \sqcup \mathbb{C}^{n+1}$$

in eine abgeschlossene Teilmenge und ihr offenes Komplement. Unsere Lokalisierungssequenz 19.4.8.15 liefert dann mit unserer Berechnung 19.4.8.17 der kompakten Kohomologie von $\mathbb{C}^{n+1}$ induktiv $\mathrm{H}^q(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ für $q = 0, 2, 4, \ldots, 2n$ und Null sonst.

Übungen

Übung 19.4.8.20. Gegeben ein filtrierendes System abelscher Garben auf einem topologischen Raum ist die offensichtliche Abbildung eine Injektion $\operatorname{colf} \Gamma_! \mathcal{F}_i \hookrightarrow \Gamma_! \operatorname{colf} \mathcal{F}_i$. Wir zeigen in 21.4.2.1, daß das auf lokal kompakten Hausdorffräumen ein Isomorphismus ist.

Ergänzende Übung 19.4.8.21. Gegeben ein filtrierendes System abelscher Garben auf einem kompakten topologischen Raum mit einer Basis der Topologie aus kompakten offenen Teilmengen ist die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\operatorname{colf} \Gamma \mathcal{F}_i \xrightarrow{\sim} \Gamma \operatorname{colf} \mathcal{F}_i$$

Hinweis: Man verwende 19.4.8.20 zum Verkleben lokaler Schnitte. Diese Übung ist insbesondere bei der Diskussion von Schemata von Nutzen. Wir zeigen ein Analogon für kompakte Schnitte in 21.4.2.1.

Übung 19.4.8.22. Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum. Ist $X = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$ eine Zerlegung in endlich viele paarweise disjunkte Teilmengen derart, daß für jeden Index i gilt $A_i \Subset A_i \sqcup \ldots \sqcup A_n$ und daß jedes A_i homöomorph ist zu $\mathbb{R}^{d(i)}$ für ein $d(i) \geq 0$, so gilt

$$\sum_i (-1)^{d(i)} = \sum (-1)^d \dim \mathrm{H}^d_!(X; \mathbb{Q})$$

Übung 19.4.8.23. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X ist der Funktor

$$\mathcal{S}^{\mathrm{o}}_! : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Cat}(\mathrm{Off}_X, \mathrm{Ab})$$

gegeben durch $\mathcal{S}^{\mathrm{o}}_! : \mathcal{F} \mapsto (U \mapsto \Gamma_!(U; \mathcal{F}))$ volltreu für von kompaktweichen abelschen Garben ausgehende Morphismen. Hinweis: Man betrachte zusätzlich die Kategorie Abg_X der abgeschlossenen Teilmengen von X und den Funktor

$$\mathcal{S}^{\mathrm{a}}_! : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Cat}(\mathrm{Abg}_X^{\mathrm{opp}}, \mathrm{Ab})$$

gegeben durch $\mathcal{S}^{\mathrm{a}}_! : \mathcal{F} \mapsto (A \mapsto \Gamma_!(A; \mathcal{F}))$. Jede Transformation $\mathcal{S}^{\mathrm{o}}_! \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{S}^{\mathrm{o}}_! \mathcal{G}$ induziert mit 19.4.8.14 eine Transformation $\mathcal{S}^{\mathrm{a}}_! \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{S}^{\mathrm{a}}_! \mathcal{G}$ und durch Einschränken auf Kompakta eine Transformation $\mathcal{S}^{\mathrm{c}} \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{S}^{\mathrm{c}} \mathcal{G}$ in $\mathrm{Cat}(\mathrm{Komp}_X^{\mathrm{opp}}, \mathrm{Ab})$. Diese gehört jedoch nach 19.2.2.61 zu einem eindeutig bestimmten Garbenmorphismus.

19.4.9 Funktorialitäten der kompakten Kohomologie

19.4.9.1. Ich erinnere daran, daß nach 15.2.4.13 eine stetige Abbildung zwischen lokal kompakten Hausdorffräumen genau dann eigentlich ist, wenn das Urbild jedes Kompaktums wieder kompakt ist. Das ist alles, was wir an dieser Stelle über eigentliche Abbildungen wissen müssen. Wo ich die Bedingung „lokal kompakt Hausdorff“ oder Teile derselben nicht gefordert habe, dürfen Sie sie ohne Schaden hinzufügen, denn außerhalb dieses Rahmens ist kompakte Kohomologie nutzlos.

19.4.9.2. Kompakte Kohomologie hat andere Funktorialitätseigenschaften als die gewöhnliche Kohomologie. So ist es zum Beispiel nicht möglich, für beliebige stetige Abbildungen einen Rückzug auf der kompakten Kohomologie zu erklären, das gelingt nur für eigentliche Abbildungen. Stattdessen kann man jedoch für die kompakte Kohomologie einen „Vorschub“ unter étalen Abbildungen und sogar unter sogenannten „orientierten mannigfaltigen Abbildungen“ erklären. Ich erkläre das vorerst nur für offene Einbettungen in 19.4.9.7. In diesem Fall heißt der Vorschub das „Ausdehnen durch Null“. Im Allgemeinen heißt er die „Integration über die Fasern“.

Satz 19.4.9.3 (Eigentliches Zurückholen). *Seien $f : X \to Y$ eigentlich und $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ ein Komorphismus von abelschen Garben über f. So gibt es für jedes q genau eine Abbildung $\phi^{\circledast} : \mathrm{H}^q_!(Y;\mathcal{G}) \to \mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F})$ derart, daß für je zwei Auflösungen $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^\triangleleft$ und $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{B}^\triangleleft$ und jeden Lift von ϕ zu einem Komorphismus $\phi^\triangleleft : \mathcal{B}^\triangleleft \to \mathcal{A}^\triangleleft$ von Auflösungen über f das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q\Gamma_!\mathcal{B}^\triangleleft & \stackrel{\phi^\triangleleft}{\to} & \mathcal{H}^q\Gamma_!\mathcal{A}^\triangleleft \\ \tau\downarrow & & \downarrow\tau \\ \mathrm{H}^q_!(Y;\mathcal{G}) & \stackrel{\phi^{\circledast}}{\to} & \mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F}) \end{array}$$

kommutiert mit den natürlichen Abbildungen τ aus 19.3.2.8 in den Vertikalen und der von $\phi^\triangleleft$ induzierten oberen Horizontalen. Des weiteren gilt $(\phi\circ\psi)^{\circledast} = \psi^{\circledast}\circ\phi^{\circledast}$ und $\mathrm{id}^{\circledast} = \mathrm{id}$.

Beispiel 19.4.9.4. Insbesondere liefert für jede eigentliche Abbildung $f : X \to Y$ der offensichtliche Komorphismus $\mathbb{Z}_Y \to \mathbb{Z}_X$ über f eine natürliche Abbildung $\mathrm{H}^q_!(Y) \to \mathrm{H}^q_!(X)$, die wir das **eigentliche Zurückholen auf der kompakten Garbenkohomologie** nennen.

Vorschau 19.4.9.5. Sie werden zu gegebener Zeit als Übung zeigen, daß sich das eigentliche Zurückholen in der de-Rham-Kohomologie durch das Zurückholen kompakt getragener Differentialformen berechnen läßt und daß es in der singulären Kohomologie dem eigentlichen Zurückholen 17.7.2.6 entspricht. In 21.5.2.23 erklären wir, wie das eigentliche Zurückholen im Formalismus der sechs Funktoren verstanden werden kann.

Beweis. Ein Komorphismus $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ über f entspricht nach 19.4.3.4 einem Morphismus $\hat{\phi} : \mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$ von abelschen Garben auf Y. Gegeben eine injektive Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\triangleleft$ erhalten wir aus der Linksexaktheit von f_* einen Isomorphismus $f_*\mathcal{F} \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{H}^0 f_*\mathcal{I}^\triangleleft$. Weiter wissen wir aus 19.4.3.17, daß $f_*\mathcal{I}^\triangleleft$ ein Komplex von injektiven Garben ist. Gegeben eine Auflösung $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{B}^\triangleleft$ zeigt dann das Hauptlemma der homologischen Algebra 19.3.2.6, daß $\hat{\phi}$ bis auf Homotopie genau einen Lift $\mathcal{B}^\triangleleft \to f_*\mathcal{I}^\triangleleft$ besitzt. In anderen Worten besitzt unser Komorphismus ϕ bis auf Homotopie genau einen Lift zu einem Komorphismus $\mathcal{B}^\triangleleft \to \mathcal{I}^\triangleleft$ über f. Ist $\mathcal{B}^\triangleleft$ auch eine injektive Auflösung, so hat die von diesem Komorphismus auf der Kohomologie der kompakten globalen Schnitte induzierte Abbildung $\mathcal{H}^q\Gamma_!\mathcal{B}^\triangleleft \to \mathcal{H}^q\Gamma_!\mathcal{I}^\triangleleft$ offensichtlich alle im Satz von einem eigentlichen Zurückholen auf der kompakten Kohomologie geforderten Eigenschaften. Daß es keine andere Abbildung mit den geforderten Eigenschaften geben kann, ist eh klar. □

Definition 19.4.9.6. Gegeben $j : X \hookrightarrow Y$ eine offene Einbettung von Hausdorffräumen und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ abelsche Garben und $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$

ein Morphismus über j erklären wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi_{\circledast} : \Gamma_! \mathcal{F} \to \Gamma_! \mathcal{G}$$

dadurch, daß wir einen Schnitt von $\mathcal{F}$ als stetige Abbildung $s : X \to \bar{\mathcal{F}}$ auffassen und $\bar{\varphi} \circ s$ durch Null auf Y ausdehnen. Die Hausdorff-Eigenschaft stellt dabei sicher, daß das Bild $j(\operatorname{supp} s)$ des Trägers von s in Y abgeschlossen ist, so daß es mit dem Träger des Bildes zusammenfällt, der folglich als Bild eines Kompaktums auch wieder kompakt ist.

Satz 19.4.9.7 (**Ausdehnen durch Null in der kompakten Garbenkohomologie**). *Seien $j : X \hookrightarrow Y$ eine offene Einbettung von Hausdorffräumen und $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von abelschen Garben über j. So gibt es für jedes q genau eine Abbildung $\varphi_{\circledast} : \mathrm{H}^q_!(X; \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_!(Y; \mathcal{G})$ derart, daß für je zwei Auflösungen $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^\triangleleft$ und $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{B}^\triangleleft$ und jeden Lift von φ zu einem Morphismus $\varphi^\triangleleft : \mathcal{A}^\triangleleft \to \mathcal{B}^\triangleleft$ von Auflösungen über j das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{A}^\triangleleft & \xrightarrow{\varphi^\triangleleft} & \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{B}^\triangleleft \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \mathrm{H}^q_!(X; \mathcal{F}) & \xrightarrow{\varphi_{\circledast}} & \mathrm{H}^q_!(Y; \mathcal{G}) \end{array}$$

kommutiert mit den natürlichen Abbildungen τ aus 19.3.2.8 in den Vertikalen und der von $\varphi^\triangleleft$ induzierten oberen Horizontalen. Des weiteren gilt $(\varphi \circ \psi)_{\circledast} = \varphi_{\circledast} \circ \psi_{\circledast}$ und $\mathrm{id}_{\circledast} = \mathrm{id}$.

19.4.9.8. Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Erkenntnis, daß für eine offene Einbettung j die Restrikion j^* ein linksexakter Funktor ist und injektive abelsche Garben zu injektiven abelschen Garben macht. Wir wissen bereits, daß j^* für jede stetige Abbildung j exakt ist. Um auch die zweite Aussage zu zeigen, überlegen wir uns, daß j^* im Fall einer offenen Einbettung j einen exakten Linksadjungierten besitzt, die „Ausdehnung durch Null“ abelscher Garben.

Satz 19.4.9.9 (**Ausdehnung durch Null von abelschen Garben**). *Gegeben eine offene Einbettung $j : X \hookrightarrow Y$ von topologischen Räumen besitzt der Rückzug $j^* : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ einen Linksadjungierten $j_! : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/Y}$ und dieser ist ein exakter Funktor.*

Beispiel 19.4.9.10. Der Beweis wird zeigen, daß im Fall der Einbettung $j : X \hookrightarrow Y$ einer offenen Teilmenge $X \Subset Y$ unsere Garbe $j_! \mathbb{Z}_X$ hier isomorph ist zu unserer Garbe $\mathbb{Z}_{X \subset Y}$ aus 19.4.1.5. Wir vereinbaren für jede abelsche Garbe $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ die Notation

$$\mathcal{G}_{X \subset Y} := j_! j^* \mathcal{G}$$

und fassen diese Garbe meist vermittels der Koeinheit der Adjunktion als Untergarbe von $\mathcal{G}$ auf, schreiben im Fall einer abelschen Gruppe M aber $M_{X\subset Y}$ statt $(M_Y)_{X\subset Y}$. Die Konstruktionen beider Beweise unseres Satzes 19.4.9.9 zeigen in der Tat, daß für jede offene Einbettung $j : Y \hookrightarrow X$ die Adjunktionsabbildung für jede abelsche Garbe $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ ein Monomorphismus $j_!j^*\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{G}$ ist.

Algebraischer Beweis. Es reicht, den Fall zu betrachten, daß j die Einbettung einer offenen Teilmenge ist. In dem Fall konstruieren wir $j_!\mathcal{F}$ als die Garbifizierung der abelschen Prägarbe mit $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ für $U \Subset X$ und $U \mapsto 0$ sonst. Die universelle Eigenschaft der Garbifizierung liefert dann unmittelbar die universelle Eigenschaft der Adjunktion. Die Exaktheit ist offensichtlich. □

Geometrischer Beweis. Wir konstruieren den étalen Raum von $j_!\mathcal{F}$ als Verklebung im kokartesischen Diagramm topologischer Räume

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d] \\ \bar{\mathcal{F}} \arrow[r] & \overline{j_!\mathcal{F}} \end{tikzcd}$$

mit dem Nullschnitt als linker Vertikale. Der Rest des Arguments kann dem Leser überlassen bleiben. □

19.4.9.11. Gegeben eine offene Einbettung $j : U \hookrightarrow X$ ist nach 19.4.3.20 für jede Mengengarbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus $j^*j_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$. Der inverse Isomorphismus induziert vermittels der Adjunktion einen natürlichen Morphismus

$$j_!\mathcal{F} \to j_*\mathcal{F}$$

Man sieht leicht ein, daß er im Fall einer gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Einbettung ein Isomorphismus ist.

Vorschau 19.4.9.12. In 19.6.4.5 erklären wir Funktoren $f_!$ für beliebige stetige Abbildungen f sowie natürliche Morphismen $f_!\mathcal{F} \to f_*\mathcal{F}$, die für f eigentlich Isomorphismen sind. In 19.6.5.1 verallgemeinern wir unseren Satz 19.4.9.9 auf den Fall beliebiger étaler separierter Abbildungen. Sie stimmen zwar für offene Einbettungen j mit den hier erklärten Funktoren $j_!$ überein, aber nicht in unmittelbar kanonischer Weise. Bei der Diskussion solcher Feinheiten verwende ich für den Linksadjungierten von j^* die Notation $j_{!!}$ statt $j_!$.

19.4.9.13 (**Injektive Garben sind welk**). Wir wiederholen unser Argument für unsere Erkenntnis 19.4.1.5, daß jede injektive Garbe welk ist. Ist $\mathcal{I}$ eine injektive Garbe auf einem topologischen Raum X und $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung

einer offenen Teilmenge, so liefert die Einbettung $j_!\mathbb{Z}_U \hookrightarrow \mathbb{Z}_X$ eine Surjektion $\mathrm{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{I}) \twoheadrightarrow \mathrm{Ab}_{/X}(j_!\mathbb{Z}_U, \mathcal{I})$, die wir wegen unserer Adjunktion $(j_!, j^*)$ umschreiben können zu einer Surjektion $\Gamma(X; \mathcal{I}) \twoheadrightarrow \Gamma(U; \mathcal{I})$.

19.4.9.14 (**Offene Restriktionen injektiver Garben sind injektiv**). Da das Ausdehnen durch Null $j_!$ unter einer offenen Einbettung j ein exakter Funktor ist, muß die Restriktion einer injektiven abelschen Garbe auf eine offene Teilmenge stets wieder injektiv sein.

Beweis zum Ausdehnen von kompakter Kohomologie. Ein Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ über j entspricht nach 19.7.1.9 einem Morphismus $\hat{\varphi} : \mathcal{F} \to j^*\mathcal{G}$ von abelschen Garben auf X. Gegeben eine injektive Auflösung $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{J}^\triangleleft$ erhalten wir aus der Exaktheit von j^* und 19.4.9.14 eine injektive Auflösung $j^*\mathcal{G} \hookrightarrow j^*\mathcal{J}^\triangleleft$. Gegeben eine Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^\triangleleft$ zeigt dann das Hauptlemma der homologischen Algebra 19.3.2.6, daß $\hat{\varphi}$ bis auf Homotopie genau einen Lift $\mathcal{A}^\triangleleft \to j^*\mathcal{J}^\triangleleft$ besitzt. In anderen Worten besitzt unser Morphismus φ bis auf Homotopie genau einen Lift zu einem Komorphismus $\mathcal{A}^\triangleleft \to \mathcal{J}^\triangleleft$ über j. Ist $\mathcal{A}^\triangleleft$ auch eine injektive Auflösung, so hat die von diesem Komorphismus auf der Kohomologie der globalen kompakten Schnitte induzierte Abbildung $\mathcal{H}^q\Gamma_!\mathcal{A}^\triangleleft \to \mathcal{H}^q\Gamma_!\mathcal{J}^\triangleleft$ offensichtlich alle im Satz von einer Ausdehnung durch Null auf der kompakten Kohomologie geforderten Eigenschaften. Daß es keine andere Abbildung mit den geforderten Eigenschaften geben kann, ist eh klar. □

19.4.9.15. Gegeben ein Raum X und $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung einer offenen Teilmenge und $i : Z \hookrightarrow X$ die Einbettung ihres abgeschlossenen Komplements und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ erhalten wir mit der Koeinheit der Adjunktion $(j_!, j^*)$ und der Einheit der Adjunktion (i^*, i_*) eine kurze exakte Sequenz

$$j_!j^*\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow i_*i^*\mathcal{F}$$

Die Lokalisierungssequenz 19.4.8.15 für einen lokal kompakten Hausdorffraum X kann in natürlicher Weise identifiziert werden mit der zugehörigen langen exakten Sequenz der Rechtsderivierten von $\Gamma_!$.

19.4.9.16 (**Funktorialität der Lokalisierungssequenz**). Wir erinnern aus 19.4.8.15 für X ein lokal kompakter Hausdorffraum und $A \mathrel{\not\subset\!\!\!

Definitionen folgt auch, daß für abgeschlossene Teilmengen $B \subset\!\!\!

19.4.9.19 (**Ausgezeichnete Erzeuger der kompakten Kohomologie des $\mathbb{R}^n$**). Wir erklären induktiv ausgezeichnete Erzeuger $\tau^n \in \mathrm{H}^n_!(\mathbb{R}^n)$, indem wir die durch das Davorschreiben einer Null gegebene abgeschlossene Einbettung $\mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ betrachten und die Zerlegung $U^+ \sqcup U^-$ des Komplements ihres Bildes mit $U^\pm := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \pm x_1 > 0\}$ und dann das Stück

$$\mathrm{H}^{n-1}_!(\mathbb{R}^{n-1}) \hookrightarrow \mathrm{H}^n_!(U^+) \oplus \mathrm{H}^n_!(U^-) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^n_!(\mathbb{R}^n)$$

der Lokalisierungssequenz der kompakten Kohomologie. Sie induziert Isomorphismen $\mathrm{H}^{n-1}_!(\mathbb{R}^{n-1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_!(U^+) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_!(\mathbb{R}^n)$. Vermittels dieser Isomorphismen erklären wir ausgehend vom kanonischen Erzeuger $1 \in \mathrm{H}^0_!(\mathbb{R}^0) = \mathrm{H}^0(\mathrm{top})$ nach 19.3.5.5 induktiv unsere ausgezeichneten Erzeuger.

Vorschau 19.4.9.20 (**Ausgezeichnete Erzeuger als Kreuzprodukte**). Für die „richtige“ Definition der kanonischen Erzeuger sollten wir von dem in 21.5.6.13 für beliebige lokal kompakte Hausdorffräume X, Y erklärten Kreuzprodukt der kompakten Kohomologie $\mathrm{H}^p_! X \otimes \mathrm{H}^q_! Y \to \mathrm{H}^{p+q}_!(X \times Y)$ und dessen „Assoziativität“ ausgehen und $\tau^n := \tau^{\times n}$ erklären für $\tau \in \mathrm{H}^1_!(\mathbb{R})$ das in 19.4.9.19 als τ^1 beschriebene Element. Der Nachweis der Verträglichkeit beider Definitionen ist dann eine Übung.

Übungen

Übung 19.4.9.21 (**Abelsche Garben auf Koprodukten**). Ist ein Raum X eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ und ist $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X, so induzieren zusätzlich zu 19.4.3.31 die Koeinheiten der Adjunktion einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} \mathrm{in}_{i!}\, \mathrm{in}_i^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$$

Nebenbei bemerkt haben wir in der Situation dieser Übung $\mathrm{in}_{i!} = \mathrm{in}_{i*}$, folglich ist für beliebige abelsche Garben $\mathcal{F}_i \in \mathrm{Ab}_{/X_i}$ der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} \mathrm{in}_{i*} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathrm{in}_{i*} \mathcal{F}_i$$

Analoge Aussagen für derivierte Kateorien zeigen wir in 21.2.3.16.

Übung 19.4.9.22 (**Garbenkohomologie des Zweitorus**). Man berechne ein weiteres Mal die Garbenkohomologie der Figur 8. Man berechne die Garbenkohomologie des Zweitorus und zeige unter anderem, daß das Zurückholen unter den beiden Projektionen einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^1 S^1 \oplus \mathrm{H}^1 S^1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(S^1 \times S^1)$$

liefert. Hinweis: Der Zweitorus enthält eine offene zu $\mathbb{R}^2$ homöomorphe Teilmenge, deren Komplement homöomorph ist zur Figur 8.

Übung 19.4.9.23. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X und eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf X sind gleichbedeutend:

1. $\mathcal{F}$ ist kompaktweich;
2. $\mathrm{H}^1_!(U;\mathcal{F}) = 0$ für alle $U \Subset X$;
3. $\mathrm{H}^q_!(U;\mathcal{F}) = 0$ für alle $U \Subset X$ und $q > 0$;
4. $\mathcal{F}_{U\subset X}$ ist für alle $U \Subset X$ eine $\Gamma_!$-azyklische Garbe.

Hinweis: Lokalisierungssequenz 19.4.8.15. Man kann in 21.5.7.14 spickeln.

Übung 19.4.9.24. Betten wir einen offenen Ball im $\mathbb{R}^n$ in einen größeren offenen Ball ein, so ist die Ausdehnung durch Null ein Isomorphismus auf der kompakten Kohomologie. Hinweis: Bezug zur lokalen Kohomologie 19.4.8.16 und Ausschneidung 19.4.4.11.

Übung 19.4.9.25. Seien $j : X \hookrightarrow Y$ eine offene Einbettung von lokal kompakten Hausdorffräumen und $\varphi : \mathcal{F} \to j_!\mathcal{F}$ der offensichtliche Morphismus von abelschen Garben über j. So sind die zugehörigen Abbildungen Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(Y;j_!\mathcal{F})$$

Später werden Sie das verstehen lernen als einen Spezialfall der Aussage, daß der derivierte Schreivorschub einer Verknüpfung die Verknüpfung der derivierten Schreivorschübe ist.

Übung 19.4.9.26 (**Mayer-Vietoris-Squenz der kompakten Kohomologie**). Gegeben offene Teilmengen U, V eines lokal kompakten Hausdorffraums X und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ konstruiere man eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \mathrm{H}^q_!(U\cap V;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_!(U;\mathcal{F}) \oplus \mathrm{H}^q_!(V;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_!(U\cup V;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^{q+1}_! \ \ldots$$

Hinweis: Sie gehört zu einer kurzen exakten Garbensequenz.

Übung 19.4.9.27. Man zeige für jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{R}^n$ das Verschwinden $\mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n;\mathcal{F}) = 0$ für $q > n$. Hinweis: Nach 19.4.5.14 wissen wir für den Kubus bereits $\mathrm{H}^q([0,1]^n;\mathcal{G}) = 0$ für $q > n$ und jede abelsche Garbe $\mathcal{G}$ auf dem Kubus. Mit einm stärkren Formalismus an der Hand zeigen wir es auch noch in 21.5.5.15.

Übung 19.4.9.28. Ist $A \subsetneq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene echte Teilmenge $A \neq \mathbb{R}^n$, so gilt $\mathrm{H}^n_! A = 0$. Hinweis: 19.4.9.24 und 19.4.9.27.

Übung 19.4.9.29 (**Verträglichkeiten des eigentlichen Zurückholens**). Für $X \to Y$ eine eigentliche Abbildung lokal kompakter Hausdorffräume und Kompakta $K \subset X$ sowie $L \subset Y$ mit $K \supset f^{-1}(L)$ und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ zeige man, daß unser eigentliches Zurückholen 19.4.9.3 verträglich ist mit dem Zurückholen aus 19.4.3.7 und 19.4.4.7 in dem Sinne, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^q_L(Y;\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^q_!(Y;\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^q(Y;\mathcal{F}) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^q_K(X;\mathcal{F}) \arrow[r] & \mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F}) \arrow[r] & \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

mit dem Zurückholen in den Vertikalen und den kanonischen Abbildungen 19.4.8.7 in den Horizontalen kommutiert. Insbesondere entspricht unter unserem Isomorphismus $\mathrm{colf}_K \mathrm{H}^q_K(X;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F})$ aus 19.4.8.16 das eigentliche Zurückholen auf der kompakten Kohomologie dem Kolimes des Zurückholens auf der Kohomologie mit Trägern.

Übung 19.4.9.30. Wir betrachten die Abbildung $S^1 \to S^1$ gegeben durch $z \mapsto z^n$. Man zeige, daß das Zurückholen mit dieser Abbildung die Multiplikation

$$(n\cdot) : \mathrm{H}^1 S^1 \to \mathrm{H}^1 S^1$$

ist. Hinweis: Man mag damit beginnen zu zeigen, daß die natürliche Abbildung einen Isomorphismus $\mathrm{H}^1_{\{x\}}(S^1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1 S^1$ induziert, und verwende 19.4.9.29. Diese Übung wird sich als ein Spezialfall von 22.5.10.17 erweisen.

Übung 19.4.9.31. Gegeben ein endlichdimensionaler reller Vektorraum V der Dimension n und ein Automorphismus $g \in \mathrm{GL}(V)$ ist die von g induzierte Selbstabbildung von $\mathrm{H}^n_!(V;\mathbb{Z})$ die Identität im Fall $\det(g) > 0$ und die Multiplikation mit (-1) andernfalls.

Übung 19.4.9.32. Gegeben $U \Subset X$ eine offene Teilmenge eines topologischen Raums und j die Einbettungsabbildung induzieren die durch die Adjunktion $(j_!, j^*)$ gegebenen Isomorphismen $\mathrm{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_{U\subset X}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U;\mathcal{F})$ für alle $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und alle q Isomorphismen

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Ab}_{/X}}(\mathbb{Z}_{U\subset X}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(U;\mathcal{F})$$

Im weiteren werden wir diese Aussage als eine unmittelbare Konsequenz der Adjunktion $(j_!, j^!)$ derivierter Funktoren verstehen lernen.

19.4.10 Kompakte Kohomologie von Mannigfaltigkeiten

19.4.10.1. Im folgenden sind Mannigfaltigkeiten, wenn nichts anderes explizit gesagt wird, stets als topologische Mannigfaltigkeiten zu verstehen.

Proposition 19.4.10.2 (**Kompakte Kohomologie oberhalb der Dimension**). *Gegeben eine n-Mannigfaltigkeit M und eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/M}$ gilt*

$$q > n \quad \Rightarrow \quad \mathrm{H}^q_!(M;\mathcal{F}) = 0$$

19.4.10.3. Für jede n-Mannigfaltigkeit M hat also $\Gamma_! : \mathrm{Ab}_{/M} \to \mathrm{Ab}$ eine homologische Dimension $\leq n$. Aus dem anschließenden Satz folgt, daß diese homologische Dimension für $M \neq \emptyset$ sogar genau n ist. Für die gewöhnliche Garbenkohomologie zeigen wir die entsprechnde Aussage erst in 21.6.1.4 unter der zusätzlichen Annahme, daß M abzählbar basiert ist.

Beweis. Sei zunächst q beliebig. Für $j : U \hookrightarrow M$ die Einbettung einer offenen Teilmenge haben wir $\mathrm{H}^q_!(U;\mathcal{F}) \cong \mathrm{H}^q_!(M; j_! j^* \mathcal{F})$ nach 19.4.9.25. Da die kompakte Kohomologie nach 19.4.8.20 mit filtrierenden Kolimites vertauscht, gibt es nach dem Zorn'schen Lemma eine maximale offene Teilmenge $U \Subset M$ mit $\mathrm{H}^q_!(U;\mathcal{F}) = 0$. Wäre sie nicht ganz M, so fänden wir $V \Subset M$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ mit $V \not\subset U$. Nach 19.4.9.27 wissen wir $q > n \Rightarrow \mathrm{H}^q_!(V;\mathcal{F}) = \mathrm{H}^q_!(V \cap U;\mathcal{F}) = 0$. Die Mayer-Vietoris-Sequenz 19.4.9.26 zeigt dann $\mathrm{H}^q_!(V \cup U;\mathcal{F}) = 0$ und dieser Widerspruch zur Maximalität von U beendet den Beweis. □

19.4.10.4. Eine Garbe mit Werten in $\mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ heißt eine **abelsche Kogarbe**. Wir werden die Arbeit mit abelschen Kogarben meiden. Sie sind mühsam zu handhaben, da sie keine abelsche Kategorie bilden.

Satz 19.4.10.5 (**Maximale kompakte Kohomologie als Kogarbe**). *Gegeben eine n-Mannigfaltigkeit M erhalten wir eine abelsche Kogarbe auf M vermittels der Vorschrift*

$$U \mapsto \mathrm{H}^n_!(U)$$

Beweis. Gegeben eine Familie (U_ν) von offenen Teilmengen von M mit Vereinigung V haben wir, wie man unschwer auf den Halmen prüft, eine rechtsexakte Garbensequenz

$$\mathbb{Z}_{V \subset M} \twoheadleftarrow \bigoplus \mathbb{Z}_{U_\nu \subset M} \leftarrow \bigoplus \mathbb{Z}_{(U_\nu \cap U_\mu) \subset M}$$

Unter dem nach 19.4.10.2 rechtsexakten und nach 19.4.8.20 mit filtrierenden Kolimites verträglichen Funktor $\mathrm{H}^n_!$ wird sie zu einer rechtsexakten Sequenz

$$\mathrm{H}^n_!(V) \twoheadleftarrow \bigoplus \mathrm{H}^n_!(U_\nu) \leftarrow \bigoplus \mathrm{H}^n_!(U_\nu \cap U_\mu) \qquad \square$$

19.4.10.6. Ist insbesondere eine n-Mannigfaltigkeit M eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen $(M_i)_{i \in I}$, so induzieren die Ausdehnungen durch Null einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} \mathrm{H}^n_! M_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_! M$$

Das folgt sowohl aus der Kogarbeneigenschaft als auch direkt aus der Verträglichkeit der kompakten Kohomologie mit filtrierenden Kolimites.

Korollar 19.4.10.7 (Orientierungsgarbe). *Gegeben eine n-Mannigfaltigkeit M und eine abelsche Gruppe G erhalten wir eine abelsche Garbe $\mathrm{or}_{M,G}$ auf M, die* **Orientierungsgarbe von M mit Koeffizienten in** *G, vermittels der Vorschrift*

$$\mathrm{or}_{M,G} : U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}^n_!(U), G)$$

Beweis. Wenden wir auf unsere Kogarbe 19.4.10.5 den kontravarianten durch G gegebenen Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\ , G)$ an, so erhalten wir eine linksexakte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}^n_!(V), G) \hookrightarrow \prod \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}^n_!(U_\nu), G) \to \prod \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}^n_!(U_\nu \cap U_\mu), G)$$

Sie beinhaltet die Garbeneigenschaft. □

19.4.10.8. Gegeben eine n-Mannigfaltigkeit M vereinbaren wir für die Spezialisierung unserer Garbe $\mathrm{or}_{M,G}$ aus 19.4.10.7 zu $G = \mathbb{Z}$ die Notation

$$\mathrm{or}_M := \mathrm{or}_{M,\mathbb{Z}}$$

und nennen diese Garbe die **Orientierungsgarbe von** M. Die Orientierungsgarbe ist stets lokal isomorph zur konstanten Garbe $\mathbb{Z}_M$ nach 19.4.9.24 und ihre Halme sind wieder nach 19.4.8.16 kanonisch isomorph zu den Dualen der lokalen Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^n_{\{x\}}(M)$. Ist die Orientierungsgarbe global isomorph zur konstanten Garbe $\mathbb{Z}_M$, so heißt M **orientierbar**. Unter einer **Orientierung** oder ausführlicher **topologischen Orientierung** unserer Mannigfaltigkeit verstehen wir die Wahl eines ausgezeichneten Isomorphismus $\mathbb{Z}_M \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_M$. Die Definitionen liefern einen natürlichen Isomorphismus zwischen der Restriktion der Orientierungsgarbe auf eine offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit und der Orientierungsgarbe der fraglichen offenen Teilmenge als Mannigfaltigkeit $\mathrm{or}_M|_U \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_U$.

Vorschau 19.4.10.9 (**Bezug zur singulären Homologie**). Unsere Vergleichssätze liefern auch einen Isomorphismus unserer Orientierungsgarbe hier mit der Orientierungsgarbe der singulären Homologie aus 17.4.2.9. In der Tat sind deren Halme $\mathrm{H}_n(M, M\backslash x)_{\mathrm{sing}}$ die Dualräume von $\mathrm{H}^n(M, M\backslash x)_{\mathrm{sing}}$ und letztere Räume sind nach unserem Vergleichssatz 19.5.1.20 kanonisch isomorph zu $\mathrm{H}^n_{\{x\}}(M)$.

Satz 19.4.10.10 (Hohe kompakte Kohomologie von Mannigfaltigkeiten). *Gegeben eine zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit M haben wir:*

1. $\mathrm{H}^q_! M = 0$ *für* $q > n$*;*
2. *Für jeden Punkt $x \in M$ ist die offensichtliche Abbildung eine Surjektion $\mathrm{H}^n_{\{x\}}(M) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^n_!(M)$;*

3. *Ist M nicht orientierbar, so ist $\mathrm{H}^n_! M \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ eine zweielementige Gruppe;*

4. *Ist M orientierbar, so gilt $\mathrm{H}^n_! M \cong \mathbb{Z}$ und für jede Orientierung $\mathbb{Z}_M \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_M$ gibt genau einen Isomorphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_! M$, der unter dem Dualisieren $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\ ,\mathbb{Z})$ die Komposition natürlicher Abbildungen $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_M(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_M(M)$ liefert.*

Beweis. Das Verschwinden für $q > n$ ist ein Spezialfall unserer allgemeineren Proposition 19.4.10.2. Aus $\mathrm{H}^n_!(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{Z}$ nach 19.4.8.17 und 19.4.9.24 folgt, daß $\mathrm{or}_{M,G}$ für jede abelsche Gruppe G lokal isomorph ist zur konstanten Garbe G_M. Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ und eine abelsche Gruppe G bezeichne $\mathcal{F} \otimes G$ die Garbifizierung der Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes G$. Man erkennt unschwer, daß der mithilfe der universellen Eigenschaften konstruierte Homomorphismus stets ein Isomorphismus

$$\mathrm{or}_M \otimes G \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_{M,G}$$

ist. Ist M zusammenhängend und gibt es keinen Isomorphismus $\mathbb{Z}_M \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_M$ der konstanten Garbe mit der Orientierungsgarbe, so haben wir nach Lemma 19.4.10.11 Isomorphismen $G_2 \xrightarrow{\sim} \Gamma(M; \mathrm{or}_M \otimes G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}^n_! M, G)$, die funktoriell sind in G und die nach dem Yoneda-Lemma folglich von einem Isomorphismus $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_! M$ herkommen müssen, mit der Notation

$$G_2 := \{g \in G \mid g^2 = 1\}$$

Das zeigt den dritten Teil. Ist M zusammenhängend und gibt es einen Isomorphismus $\mathbb{Z}_M \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_M$ der konstanten Garbe mit der Orientierungsgarbe, so liefert jeder derartige Isomorphismus Isomorphismen $G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}^n_! M, G)$, die funktoriell sind in G und folglich von einem Isomorphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_! M$ herkommen müssen, wieder nach dem Yoneda-Lemma. Das zeigt den vierten Teil. Der Beweis des zweiten Teils bleibe dem Leser zur Übung überlassen. □

Lemma 19.4.10.11. *Gegeben ein zusammenhängender Raum X und darauf eine lokal aber nicht global zur konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ isomorphe abelsche Garbe $\mathcal{F}$ erhalten wir einen in $G \in \mathrm{Ab}$ funktoriellen Isomorphismus*

$$G_2 \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{F} \otimes G)$$

durch die Vorschrift, die $g \in G_2$ den durch $x \mapsto s_x \otimes g$ mit $s_x \in \mathcal{F}_x$ einem Erzeuger des Halms gegebenen globalen Schnitt zuordnet.

Beweis. Wir betrachten den Teilraum

$$\tilde{X} := \{s \in \bar{\mathcal{F}} \mid s \text{ erzeugt seinen Halm}\}$$

Dann ist die offensichtliche Abbildung $\pi : \tilde{X} \to X$ eine zweiblättrige Überlagerung. Wäre $\tilde{X}$ nicht zusammenhängend, so könnte man es als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen schreiben, die nach 16.3.1.30 auch bereits X überlagern, die mithin einblättrige Überlagerungen wären und folglich Homöomorphismen, so daß $\pi : \tilde{X} \to X$ einen stetigen Schnitt hätte im Widerspruch zu unserer Annahme $\mathcal{F} \ncong \mathbb{Z}_X$. Also ist $\tilde{X}$ zusammenhängend. Nun kann die Projektion $\pi : \tilde{X} \to X$ auch als die Quotientenabbildung nach einer Operation der zweielementigen Gruppe $\mathbb{F}_2$ verstanden werden. Die zurückgezogene Garbe $\pi^*\mathcal{F}$ hat den étalen Raum $\text{ét}(\pi^*\mathcal{F}) = \tilde{X} \times_X \bar{\mathcal{F}}$ und den globalen erzeugenden Schnitt $\tilde{x} \mapsto (\tilde{x}, \tilde{x})$, der einen Isomorphismus $\mathbb{Z}_{\tilde{X}} \xrightarrow{\sim} \pi^*\mathcal{F}$ liefert. Die $\mathbb{F}_2$-Operation auf $\pi^*\mathcal{F}$ nach 19.7.1.10 entspricht unter unserem Isomorphismus $\pi^*\mathcal{F} \cong \mathbb{Z}_{\tilde{X}}$ der Operation $(\tilde{x}, n) \mapsto (-\tilde{x}, -n)$. Dann haben wir natürliche Isomorphismen

$$\pi^*(\mathcal{F} \otimes G) \xrightarrow{\sim} (\pi^*\mathcal{F}) \otimes G \xrightarrow{\sim} G_{\tilde{X}}$$

Die $\mathbb{F}_2$-Operation links entspricht darunter der $\mathbb{F}_2$-Operation $(\tilde{x}, g) \mapsto (-\tilde{x}, -g)$. Das liefert Isomorphismen $G_2 \xrightarrow{\sim} \Gamma(\pi^*(\mathcal{F} \otimes G))^{\mathbb{F}_2} \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{F} \otimes G)$ mit 19.7.1.10 für den zweiten Pfeil und mehr war nicht zu zeigen. □

19.4.10.12 (**Jede Einsmannigfaltigkeit ist orientierbar**). Für abzählbar basierte Einsmannigfaltigkeiten folgt das bereits aus der Klassifikation 15.1.8.5, aber hier wollen wir ohne diese Bedingung auskommen. Gegeben eine zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit M haben wir

$$\mathrm{H}^n_!(M; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & M \text{ orientierbar;} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man kann das genauso zeigen wie wir es für die kompakte Kohomologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten in 19.4.10.10 ausgeführt haben. Man kann es auch als Konsequenz der sogenannten Projektionsformel 21.4.7.6 zeigen, die unter anderem für beliebige n-Mannigfaltigkeiten M und beliebige abelsche Gruppen G Isomorphismen $\mathrm{H}^n_!(M; G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_!(M) \otimes_{\mathbb{Z}} G$ liefert. Gegeben eine zusammenhängende Einsmannigfaltigkeit M liefert die Surjektion $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nun sicher eine Surjektion $\mathrm{H}^0_!(M; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^0_!(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ und wir folgern mit dem Verschwinden der höheren kompakten Kohomologie 19.4.10.2 eine kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{H}^1_!(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{H}^1_!(M; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^1_!(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

Zusammen zeigt das, daß jede zusammenhängende Einsmannigfaltigkeit und dann auch überhaupt jede Einsmannigfaltigkeit orientierbar ist.

19.4.10.13. Gegeben eine Mannigfaltigkeit M und ihre Orientierungsgarbe or_M nennen wir die im vorhergehenden Beweis konstruierte zweiblättrige Überlagerung $\pi : \tilde{M} \to M$ ihre **Orientierungsüberlagerung**

$$\tilde{M} := \{s \in \text{ét}(\mathrm{or}_M) \mid s \text{ erzeugt seinen Halm}\}$$

Wir haben dann einen natürlichen Isomorphismus $\pi^* \operatorname{or}_M \xrightarrow{\sim} \operatorname{or}_{\tilde{M}}$ und die kanonische Trivialisierung dieser Garbe nennen wir die **tautologische Orientierung** der Orientierungsüberlagerung $\tilde{M}$.

19.4.10.14 (**Endlichkeit der kompakten Kohomologie**). Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Besitzt ein topologischer Raum X eine Überdeckung durch offene Teilmengen $U \Subset X$ mit $\mathrm{H}^q_!(U;\mathcal{F}) = 0$ für $q > n$ und alle $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/U}$, so folgt $\mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F}) = 0$ für $q > n$ und alle $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$. Das zeigt der Beweis von 19.4.10.2. Weiter zeigt der Beweis von 19.4.10.7, daß dann für alle $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und $G \in \mathrm{Ab}$ der Funktor $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}^n_!(U;\mathcal{F}), G)$ eine abelsche Garbe auf X ist.

19.4.10.15 (**Hohe kompakte Kohomologie von Randfaltigkeiten**). Man mag unsere Erkenntnisse 19.4.10.14 zur Endlichkeit der kompakten Kohomologie insbesondere auf Randfaltigkeiten anwenden und aus der in 19.4.10.8 gegebenen Argumentation folgern, daß für eine n-dimensionale Randfaltigkeit X die zuvor besprochenen Garben $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}^n_!(U;A_X), G)$ im Fall einer konstanten Garbe $\mathcal{F} = A_X$ lokal konstant sind auf dem Komplement des Randes und aus dieser lokal konstanten Garbe entstehen vermittels der Ausdehnung durch Null. Eine Argumentation wie beim Beweis von 19.4.10.10 zeigt dann $\mathrm{H}^n_!(X;k) = 0$ für jede zusammenhängende Randfaltigkeit, die keine Mannigfaltigkeit ist, und jede abelsche Gruppe k von Koeffizienten.

Korollar 19.4.10.16 (Jordan-Brouwer). *Seien $n, r \geq -1$ und sei $s^r \subset S^n$ eine Teilmenge der n-Sphäre, die homöomorph ist zur r-Sphäre S^r. So haben wir:*

$r > n$	*Unmöglich;*
$r = n$	*Impliziert $S^n = s^r$;*
$r = n-1$	*Dann hat $S^n \backslash s^r$ genau zwei Zusammenhangskomponenten, und der Rand jeder dieser beiden Komponenten ist s^r;*
$r \leq n-2$	*Dann ist $S^n \backslash s^r$ zusammenhängend.*

19.4.10.17. Hier ist die (-1)-Sphäre wie in 16.1.1 als die leere Menge zu verstehen. Obiger Satz wurde bereits in 17.3.3.2 bewiesen. Mir scheint jedoch der hier entwickelte Zugang natürlicher.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $n \geq 2$ und $r \geq 0$ annehmen. Im Fall $r > n$ wäre $0 \to \mathrm{H}^r_!(s^r) \to 0$ ein Ausschnitt der langen exakten Lokalisierungssequenz im Widerspruch zu $\mathrm{H}^r_!(s^r) \cong \mathbb{Z}$. Im Fall $r \leq n$ betrachten wir den Ausschnitt

$$0 \to \mathrm{H}^{n-1}_! s^r \to \mathrm{H}^n_!(S^n \backslash s^r) \to \mathrm{H}^n_! S^n \to \mathrm{H}^n_! s^r \to 0$$

der Lokalisierungssequenz. Im Fall $r = n$ muß in unserer Sequenz eine Surjektion und damit ein Isomorphismus $\mathrm{H}^n_! S^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_! s^n$ stehen und es folgt erst

$\mathrm{H}^n_!(S^n \backslash s^n) = 0$ und mit unseren Erkenntnissen 19.4.10.10 und 19.4.10.6 zur hohen kompakten Kohomologie von Mannigfaltigkeiten dann $S^n \backslash s^n = \emptyset$. Im Fall $r = n-1$ erhalten wir ähnlich $\mathrm{H}^n_!(S^n \backslash s^{n-1}) \cong \mathbb{Z}^2$ und nach denselben Argumenten hat $S^n \backslash s^{n-1}$ zwei Zusammenhangskomponenten. Daß s^{n-1} im Abschluß beider Komponenten liegt, folgert man wie in 17.3.3.2. Ist schließlich $r \leq n-2$, so erhalten wir $\mathrm{H}^n_!(S^n \backslash s^r) \cong \mathbb{Z}$ und nach denselben Argumenten besteht $S^n \backslash s^r$ aus genau einer Zusammenhangskomponente. □

19.4.10.18. Für jede zusammenhängende topologische n-Mannigfaltigkeit M gilt mit denselben Argumenten wie zuvor $\mathrm{H}^n_!(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Korollar 19.4.10.19 (Komplemente von Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$). *Gegeben eine abgeschlossene $(n-1)$-Untermannigfaltigkeit $M \not\subset \mathbb{R}^n$ mit k Zusammenhangskomponenten besteht ihr Komplement $\mathbb{R}^n \backslash M$ aus $(k+1)$ Zusammenhangskomponenten. Hat M unendlich viele Zusammenhangskomponenten, so auch $\mathbb{R}^n \backslash M$.*

Beweis. Die Lokalisierungssequenz liefert mit dem Verschwinden 19.4.10.2 unmittelbar $\mathrm{H}^{n-1}_!(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{H}^n_!(\mathbb{R}^n \backslash M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^n_!(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Die Behauptung folgt damit aus 19.4.10.18. □

Korollar 19.4.10.20 (Nichteinbettbarkeit von Mannigfaltigkeiten). *Für $n \geq 1$ kann eine zusammenhängende nicht orientierbare $(n-1)$-Mannigfaltigkeit nicht als abgeschlossene Teilmenge in den $\mathbb{R}^n$ eingebettet werden.*

Beweis. Für M unsere Mannigfaltigkeit erhielten wir $\mathrm{H}^{n-1}_!(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und mit der Lokalisierungssequenz $\mathrm{H}^n_!(\mathbb{R}^n \backslash M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_!(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, diesmal mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten, und $\mathbb{R}^n \backslash M$ wäre zusammenhängend im Widerspruch zum vorhergehenden Korollar 19.4.10.19. □

Korollar 19.4.10.21 (Injektive geschlossene Wege in einem Zweitorus). *Gegeben eine Einbettung $i : S^1 \hookrightarrow S^1 \times S^1$ sind die Umlaufzahlen von $\mathrm{pr}_1 \circ i$ und $\mathrm{pr}_2 \circ i$ entweder teilerfremd oder beide Null.*

Beweis. Nach 19.4.9.22 ist die Kohomologie des Zweitorus isomorph zu $\mathbb{Z}$ in den Graden Null und Zwei und isomorph zu $\mathbb{Z}^2$ im Grad Eins. Insbesondere ist der Zweitorus orientierbar. Wir wenden nun die Lokalisierungssequenz 19.4.8.15 an auf den Fall $X = S^1 \times S^1$ und das Bild $A := i(S^1) \not\subset X$ und folgern eine exakte Sequenz

$$\mathrm{H}^1_! X \to \mathrm{H}^1_! A \to \mathrm{H}^2_!(X \backslash A)$$

Da $\mathrm{H}^2_!(X \backslash A)$ frei ist über $\mathbb{Z}$, muß $\mathrm{H}^1_! X \to \mathrm{H}^1_! A$ surjektiv oder Null sein. Diese Abbildung wird jedoch nach 19.4.9.22 unter geeigneten Identifikationen $\mathrm{H}^1_! X \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\mathrm{H}^1_! A \cong \mathbb{Z}$ gegeben durch die Zeilenmatrix (a, b). □

Übungen

Übung 19.4.10.22. Gegeben eine eigentliche Abbildung $f : M \twoheadrightarrow N$ von zusammenhängenden orientierten n-Mannigfaltigkeiten erklären wir ihren **Abbildungsgrad** als das Bild der Eins unter der Komposition $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_!^n N \to \mathrm{H}_!^n M \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ mit den durch die jeweiligen Orientierungen gegebenen äußeren Isomorphismen und dem eigentlichen Zurückholen unter f in der Mitte. Sei $V \Subset N$ offen zusammenhängend und sei $f^{-1}(V) = U_1 \sqcup \ldots \sqcup U_r$ die Zerlegung des Urbilds von V in seine Zusammenhangskomponenten. So ist der Abbildungsgrad von f die Summe der Abbildungsgrade der eingeschränkten Abbildungen $f : U_i \to V$. Hat insbesondere f einen von Null verschiedenen Abbildungsgrad, so muß f surjektiv sein. Hinweis: 19.4.9.29 und 19.4.10.10.

Übung 19.4.10.23. Wir denken uns eine Einbettung der Figur 8 in einen Zweitorus. Welche Werte können die insgesamt vier Umlaufzahlen, je zwei für jeden Kreis der 8, annehmen? Ich hab mir das selber gar nicht so genau überlegt.

Übung 19.4.10.24. Ist $N \hookrightarrow M$ die Einbettung einer offenen nichtleeren Teilmenge in eine zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit, so ist die Ausdehnung durch Null eine Surjektion $\mathrm{H}_!^n N \twoheadrightarrow \mathrm{H}_!^n M$.

Übung 19.4.10.25 (**Kompakte Kohomologie komplexer Varietäten**). Ein lokal kompakter Hausdorffraum X besitze eine Filtrierung

$$X = X^{\le n} \supset X^{\le n-1} \supset \ldots \supset X^{\le 0} \supset \emptyset = X^{\le -1} = X^{\le -2} = \ldots$$

durch abgeschlossene Teilmengen derart, daß $X^{\le q} \backslash X^{\le q-1}$ jeweils eine q-Mannigfaltigkeit ist. Man zeige $\mathrm{H}_!^q(X) = 0$ für $q > n$ und zeige unter der zusätzlichen Annahme $X^{\le n-1} = X^{\le n-2}$, daß die Ausdehnung durch Null einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}_!^n(X \backslash X^{\le n-2}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_!^n(X)$$

induziert. Ein typisches Beispiel für eine derartige Situation erhalten wir im Fall einer komplexen algebraischen Varietät V einer Dimension $\mathrm{kdim}_{\mathbb{C}} V \le d$, wenn wir den zugehörigen topologischen Raum $X = V(\mathbb{C})$ mit seiner analytischen Topologie versehen und die Filtrierung durch die Untervarietäten der jeweils singulären Punkte betrachten, vergleiche 7.7.4.28 und 7.7.5.5. Hier hat man dann $n = 2d$. Sobald wir wissen, daß für jede irreduzible glatte komplexe Varietät V unser Raum $V(\mathbb{C})$ zusammenhängend und orientierbar ist, folgt sogar, daß $\mathrm{H}_!^{2d}(V(\mathbb{C}))$ eine freie abelsche Gruppe ist mit je einem Erzeuger pro irreduzibler Komponente der Krulldimension d von V, und durch die Wahl einer Orientierung des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ werden diese Erzeuger sogar eindeutig festgelegt. Hinweis: Lokalisierungssequenz 19.4.9.18.

Übung 19.4.10.26. Man zeige, daß gegeben $s^{n-1} \subset S^n$ zwei ineinander enthaltene Sphären benachbarter Dimensionen und eine beliebige zweipunktige Teilmenge $Z \subset S^n$ bestehend aus je einem Punkt in jeder Komponente des Komplements $S^n \backslash s^{n-1}$ die Einbettung $s^{n-1} \hookrightarrow S^n \backslash Z$ einen Isomorphismus auf der Kohomologie induziert. Hinweis: Man vergrößere Z zu einer offenen Menge $\tilde{Z}$ bestehend aus je einem offenen Ball um jeden der beiden Punkte, der seinerseits s^{n-1} nicht trifft. Mithilfe der Natürlichkeit der Sequenz zu einer offenen Teilmenge zeige man dann, daß das abgeschlossene Zurückholen Isomorphismen $\mathrm{H}^q_!(S^n \backslash \tilde{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(s^{n-1})$ induziert. Das liefert auch einen alternativen Zugang zu unseren Erkenntnissen über Umlaufzahlen kreuzungsfreier Wege 16.1.7.10.

Übung 19.4.10.27. Gegeben eine abgeschlossene Teilmenge $A \not\subset \mathbb{R}^n$, die homöomorph ist zu $\mathbb{R}^{n-1}$, sind beide Komponenten des Komplements von A unbeschränkt und A ist der Rand einer jeden von ihnen. Hinweis: Man lasse sich vom Beweis des Jordan'schen Kurvensatzes 17.3.3.2 inspirieren.

Übung 19.4.10.28. Sind $A, B \not\subset \mathbb{R}^2$ zwei nichtkompakte zusammenhängende Einsmannigfaltigkeiten und besteht ihr Schnitt aus einem einzigen Punkt, so hat das Komplement $\mathbb{R}^2 \backslash (A \cup B)$ genau vier Komponenten. Hinweis: Man berechne mit 17.4.3.26 zunächst einmal die kompakte Kohomologie von $A \cup B$.

Übung 19.4.10.29. Ist $A \not\subset \mathbb{R}^2$ kompakt und überlagerungstrivial, so ist $\mathbb{R}^2 \backslash A$ zusammenhängend. Ist $A \not\subset \mathbb{R}^2$ kompakt und einfach wegzusammenhängend, so ist $\mathbb{R}^2 \backslash A$ nicht notwendig zusammenhängend. Hinweis: Verschwinden der ersten Garbenkohomologie überlagerungstrivialer Räume 19.3.5.13 und Lokalisierungssequenz der kompakten Kohomologie.

19.5 Vergleichssätze

19.5.1 Singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie

19.5.1.1. Gegeben ein topologischer Raum X und $q \geq 0$ betrachten wir die abelsche **Prägarbe der singulären q-Koketten**, die jeder offenen Menge $U \Subset X$ die Gruppe $\mathrm{S}^q U$ der singulären q-Koketten auf U zuordnet. Die Garbifizierung dieser Prägarbe notieren wir $\mathcal{S}_X^q$ und nennen sie die **Garbe der lokalen singulären q-Koketten**. Die üblichen Korandabbildungen auf den Koketten induzieren Korandabbildungen $\mathcal{S}_X^q \to \mathcal{S}_X^{q+1}$. Auf diese Weise wird $\mathcal{S}_X^*$ ein Komplex von abelschen Garben und die offensichtliche Kettenabbildung $\mathrm{S}^* X \to \Gamma \mathcal{S}_X^*$ liefert eine Abbildung

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{sing}} X \to \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{S}_X^*$$

Weiter liefert für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ der Rückzug von Koketten einen Komorphismus über f zwischen den Prägarben der singulären Koketten und dann mit 19.4.3.4 auch einen Komorphismus $\mathcal{S}_Y^* \to \mathcal{S}_X^*$ über f zwischen ihren Garbifizierungen. Mit den davon induzierten Abbildungen $\Gamma \mathcal{S}_Y^* \to \Gamma \mathcal{S}_X^*$ wird $X \mapsto \Gamma \mathcal{S}_X^*$ ein Funktor $\Gamma \mathcal{S}^* : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ket}^{\mathrm{opp}}$ und unsere offensichtlichen Kettenabbildungen bilden eine Transformation von Funktoren $\mathrm{S}^* \Rightarrow \Gamma \mathcal{S}^*$ und induzieren nach Anwenden der Kohomologiefunktoren $\mathcal{H}^q$ Transformationen

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{sing}} \Rightarrow \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{S}^*$$

19.5.1.2. Ein topologischer Raum heiße **singulär-azyklisch**, wenn seine singuläre Homologie isomorph ist zu $\mathbb{Z}$ im Grad Null und zu Null in höheren Graden. Nach dem universellen Koeffiziententheorem gilt dann dasselbe auch für die Kohomologie. Nach unseren allgemeinen Konventionen 15.1.9.5 heißt ein Raum **lokal singulär-azyklisch**, wenn sich jede Umgebung jedes Punktes zu einer singulär-azyklischen Umgebung desselben Punktes verkleinern läßt.

19.5.1.3. Ist X lokal singulär-azyklisch, so wird der Komplex der Garben der lokalen singulären Koketten nach der Augmentierung zu $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}_X^*$ exakt, denn das muß man ja nur auf dem Halm an jeder Stelle $x \in X$ zeigen und der Komplex der Halme an einer Stelle x ist isomorph zu $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{colf}_{U \ni x} \mathrm{S}^* U$ mit dem filtrierenden Kolimes über alle offenen Umgebungen von x. Nach 17.7.1.22 kommt es nun nicht darauf an, ob wir den Kolimes über alle offenen Umgebungen von x, über alle Umgebungen von x, oder über alle singulär-azyklischen Umgebungen von x bilden. Damit folgt die behauptete Exaktheit aus der Exaktheit filtrierender Kolimites 17.7.1.18. Wir erhalten so mithilfe unserer Definition rechtsderivierter Funktoren 19.3.2.8 für jeden lokal singulär-azyklischen Raum Abbildungen

$$\mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{S}_X^* \to \mathrm{H}^q(X; \mathbb{Z}_X)$$

in die Garbenkohomologie der konstanten Garbe. Ist zusätzlich $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung in einen weiteren lokal singulär-azyklischen Raum, so ist unser Komorphismus $\mathcal{S}_Y^* \to \mathcal{S}_X^*$ über f aus 19.5.1.1 eine Fortsetzung des offensichtlichen Komorphismus $\mathbb{Z}_Y \to \mathbb{Z}_X$ und die charakterisierende Eigenschaft des Zurückholens 19.4.3.7 in der Garbenkohomologie liefert, daß auch obige Abbildungen natürlich sind in X.

Satz 19.5.1.4 (**Singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie**). *Für jeden lokal singulär-azyklischen Raum X ist die Komposition $\mathrm{H}^q_{\mathrm{sing}} X \to \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{S}_X^* \to \mathrm{H}^q(X; \mathbb{Z}_X)$ der beiden in 19.5.1.1 und 19.5.1.3 erklärten natürlichen Abbildungen ein natürlicher Isomorphismus, der* **Vergleichsisomorphismus** *zwischen der singulären Kohomologie und der Garbenkohomologie*

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{sing}} X \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X; \mathbb{Z}_X)$$

19.5.1.5. Der Beweis wird erst zu Ende dieses Abschnitts gegeben. Einen alternativen Beweis für „parakompakte“ Räume geben wir in 19.5.6.6. Der Satz erlaubt uns insbesondere, Anschauung aus der singulären Kohomologie in die Garbenkohomologie zu übertragen. Daß unser Vergleichsisomorphismus ein Ringisomorphismus ist für das in 20.2.6.14 erklärte cup-Produkt auf der Garbenkohomologie beweisen wir in 20.2.8.2. Die Interpretation der singulären Homologie im Rahmen der Garbenkohomologie wird erst in 21.6.7 besprochen.

19.5.1.6. Der Satz gilt mit demselben Beweis weiter, wenn wir schwächer nur fordern, daß die durch die singulären Koketten gegebene Sequenz von Prägarben zu einer Auflösung der konstanten Garbe garbifiziert. Dasselbe gilt mit fast demselben Beweis auch für beliebige Koeffizienten, wir müssen dann nur im anschließenden Beweis $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ durch eine endliche injektive Auflösung der jeweiligen Koeffizientengruppe ersetzen und statt mit $\mathbb{D}$ mit dem Homomorphismenkomplex dorthin arbeiten.

19.5.1.7. Zum Beweis des obigen Vergleichssatzes mag man versucht sein zu zeigen, daß die beiden Abbildungen aus 19.5.1.1 und 19.5.1.3 bereits jeweils für sich genommen Isomorphismen sind. Das gelingt mir jedoch nur unter stärkeren Annahmen, genauer für „parakompakte“ Räume, vergleiche 19.5.6.5. Stattdessen gebe ich im folgenden eine alternative Konstruktion derselben Abbildung, der man auch im allgemeinen ansieht, daß sie ein Isomorphismus sein muß.

19.5.1.8. Für jeden topologischen Raum X erklären wir den **Komplex der Grenzketten** als den Kolimes

$$\mathrm{G}X := \mathrm{colf}(\mathrm{S}X \xrightarrow{\mathrm{U}} \mathrm{S}X \xrightarrow{\mathrm{U}} \ldots)$$

des Komplexes der singulären Ketten in Bezug auf die Unterteilungsoperatoren U aus 17.2.4.1. Alle kanonischen Abbildungen $\mathrm{S}X \to \mathrm{G}X$ in diesen Kolimes

induzieren nach 17.2.4.3 dieselbe Abbildung auf der Homologie. Wir arbeiten im folgenden mit der ersten dieser kanonischen Abbildungen. Sie kommt, wie auch alle anderen, sogar von einer Transformation $\mathrm{S} \Rightarrow \mathrm{G}$ von Funktoren $\mathrm{Top} \to \mathrm{Ket}$ her und induziert aufgrund der Exaktheit filtrierender Kolimites Isomorphismen auf der Homologie

$$\mathrm{H}_q X = \mathcal{H}_q \mathrm{S} X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_q \mathrm{G} X$$

Ergänzung 19.5.1.9. Ich wüßte gerne, ob der Komplex der Grenzketten aus freien abelschen Gruppen besteht. Das würde uns die Arbeit sehr erleichtern, aber ich erwarte eher ein Gegenbeispiel als einen Beweis. Klar ist jedoch, daß der Komplex der Grenzketten aus flachen abelschen Gruppen besteht, da ja jeder filtrierende Kolimes von torsionsfreien abelschen Gruppen aufgrund der Exaktheit filtrierender Kolimites wieder torsionsfrei ist.

19.5.1.10. Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{V}$ eine Überdeckung derart, daß selbst die offenen Kerne der Mengen aus $\mathcal{V}$ bereits X überdecken, in Formeln $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V^\circ$. So verschwindet der Kolimes über das System

$$\mathrm{S}X/\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X \xrightarrow{\mathrm{U}} \mathrm{S}X/\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X \xrightarrow{\mathrm{U}} \mathrm{S}X/\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X \xrightarrow{\mathrm{U}} \ldots$$

mit den von den Unterteilungsoperatoren induzierten Morphismen. In der Tat wird nach 17.2.4.8 jedes Element dieses Quotienten von einer hinreichend hohen Potenz des Unterteilungsoperators annulliert.

Satz 19.5.1.11 (Grenzketten als welke Čech-azyklische Kogarbe). *Ist X ein topologischer Raum und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X, so erhalten wir eine exakte Sequenz von Grenzkettenkomplexen*

$$\mathrm{G}X \twoheadleftarrow \bigoplus_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{G}U \leftarrow \bigoplus_{(U,U') \in \mathcal{U}^2} \mathrm{G}(U \cap U') \leftarrow \ldots$$

Des weiteren induziert jede stetige injektive Abbildung $A \hookrightarrow X$ eine injektive Abbildung $\mathrm{G}A \hookrightarrow \mathrm{G}X$ auf den Grenzketten.

19.5.1.12 (**Čech-azyklische Kogarben**). Eine Prägarbe mit Werten in einer abelschen Kategorie nennen wir **Čech-azyklisch**, wenn in Bezug auf jedes System von offenen Teilmengen der zugehörige Čech-Komplex eine Auflösung der Schnitte auf der Vereinigung bildet, wobei wir implizit voraussetzen, daß alle beim Bilden der jeweiligen Čech-Komplexe benötigten Produkte existieren. Insbesondere ist jede Čech-azyklische Prägarbe bereits eine Garbe. Eine Garbe mit Werten in einer abelschen Kategorie heißt **welk**, wenn die globalen Schnitte epimorph auf die Schnitte über jeder offenen Teilmenge gehen.

Beweis. Wenn wir statt Grenzketten gewöhnliche Ketten betrachten und ganz links den Komplex der $\mathcal{U}$-feinen Ketten $\mathrm{S}^{\mathcal{U}}X$, so folgt die Exaktheit aus der Azyklizität von Simplizes 17.1.1.17 mit Eckenmenge die Menge aller $U \in \mathcal{U}$, die einen vorgegebenen singulären Simplex enthalten. Wenn wir nun den Kolimes anwenden und die vorbereitende Bemerkung 19.5.1.10 beachten, folgt die erste Aussage. Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus der Injektivität $\mathrm{S}A \hookrightarrow \mathrm{S}X$ durch Übergang zum Kolimes. □

19.5.1.13 (**Explizite derivierte Dualität**). Gegeben ein Komplex von abelschen Gruppen A erklären wir den **dualen Komplex** als den Hom-Komplex

$$\mathbb{D}_{\mathrm{Ket}}A = \mathbb{D}A := \big(A \Rrightarrow (\mathbb{Q}[0] \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\big)$$

in den Komplex $\mathbb{Q}[0] \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit nur zwei von Null verschiedenen Termen, deren Erster, wie das Symbol $[0]$ andeutet, im Grad Null sitzen soll. Die offensichtliche Kettenabbildung $\mathbb{Z}[0] \to (\mathbb{Q}[0] \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ liefert natürliche Homomorphismen

$$\nu : \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z}[0]) \to \mathbb{D}A$$

Jede exakte Sequenz von Kettenkomplexen $A \to B \to C$ wird unter unserer Dualität zu einer exakten Sequenz $\mathbb{D}C \to \mathbb{D}B \to \mathbb{D}A$ in die Gegenrichtung.

Vorschau 19.5.1.14. Anstelle des Komplexes $\mathbb{Q}[0] \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ könnten wir hier allgemeiner eine beliebige injektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ verwenden. In 21.9.9.14 werden wir $\mathbb{D}A$ als das „Homobjekt von A zum Einsobjekt in der derivierten Kategorie der Kategorie der abelschen Gruppen“ verstehen lernen und werden lernen, daß diese derivierte Kategorie eine Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen und Multihom ist. In diesem Rahmen erweist sich unser dualer Komplex dann als das duale Objekt in dieser Schmelzkategorie im Sinne von 18.1.4.21.

Definition 19.5.1.15. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Ein Morphismus in der Kategorie der Komplexe $\mathrm{Ket}(\mathcal{A})$ oder in der Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ heißt ein **Quasiisomorphismus**, wenn er Isomorphismen auf der Homologie induziert. Ich will Quasiisomorphismen $\overset{\smile}{\to}$ notieren, denn sie sind noch etwas ferner von üblichen Isomorphismen als unsere Isomorphismen $\overset{\cong}{\to}$ in Homotopiekategorien.

19.5.1.16. Wie wir im Fall von Komplexen abelscher Gruppen bereits beim Beweis von 17.6.2.5 diskutiert haben, ist eine Kettenabbildung genau dann ein Quasiisomorphismus, wenn ihr Abbildungskegel exakt ist.

Proposition 19.5.1.17 (**Eigenschaften der derivierten Dualität**). *1. Für jeden Komplex S von freien abelschen Gruppen ist unser natürlicher Homomorphismus ein Quasiisomorphismus $\nu : (S \Rrightarrow \mathbb{Z}[0]) \overset{\smile}{\to} \mathbb{D}S$;*

2. *Jeder Quasiisomorphismus $A \overset{\smile}{\to} B$ von Komplexen abelscher Gruppen induziert einen Quasiisomorphismus $\mathbb{D}B \overset{\smile}{\to} \mathbb{D}A$.*

Beweis. Gegeben ein in Richtung der Pfeile beschränkter Komplex S von freien abelschen Gruppen S zeigt das Hauptlemma der homologischen Algebra 17.5.6.14, daß der Homomorphismenkomplex $S \Rightarrow X$ in jeden exakten Komplex X exakt ist. Ist X beschränkt, so folgt das sogar für einen beliebigen Komplex S von freien abelschen Gruppen, indem man entsprechend weiter und weiter im Negativen abschneidet. Wenden wir diese Erkenntnis auf den Abbildungskegel

$$X := \operatorname{Keg}\big(\mathbb{Z}[0] \to (\mathbb{Q}[0] \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\big)$$

an und beachten, daß nach 17.6.2.12 die Konstruktionen Abbildungskegel und Hom-Komplex vertauschen, so folgt Teil 1. Für Teil 2 reicht es nach Übergang zum Abbildungskegel und dem Vertauschen 17.6.2.12 der Konstruktionen Abbildungskegel und Hom-Komplex in der anderen Variablen zu zeigen, daß für jeden exakten Komplex C auch der Komplex $C \Rightarrow (\mathbb{Q}[0] \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ exakt ist. Das aber ist allgemein klar nach dem Hauptlemma der homologischen Algebra, wenn rechts ein beschränkter Komplex von Injektiven steht. □

Ergänzung 19.5.1.18 (**Bidualität**). Unsere Überlegungen aus 18.1.4.17 liefern natürliche Kettenabbildungen $A \to \mathbb{D}\mathbb{D}A$. Aus dem Vorhergehenden folgt leicht, daß sie für jeden Komplex von endlich erzeugten freien abelschen Gruppen S einen Quasiisomorphismus $S \overset{\smile}{\to} \mathbb{D}\mathbb{D}S$ liefern. Mit etwas mehr homologischer Algebra folgt, daß sie sogar für jeden beliebigen Komplex von endlich erzeugten abelschen Gruppen E einen Quasiisomorphismus $E \overset{\smile}{\to} \mathbb{D}\mathbb{D}E$ liefern.

19.5.1.19. Gegeben ein topologischer Raum X erklären wir den **Komplex der Kogrenzkettengarben** oder kurz den **Kogrenzkomplex** $\mathcal{G}_X^*$ durch die Vorschrift, daß der Komplex seiner Schnitte auf $U \Subset X$ mit unserer derivierten Dualität $\mathbb{D}$ aus 19.5.1.13 gegeben wird durch die Vorschrift

$$\mathcal{G}_X^*(U) := \mathbb{D}(\mathrm{G}U)$$

Man beachte, daß $\mathcal{G}_X^i(U)$ keineswegs nur von $\mathrm{G}_i U$ abhängt. Da nach 19.5.1.11 die Grenzketten eine welke Kogarbe bilden, erhalten wir so einen Komplex von welken abelschen Garben. Das Dualisieren unseres exakten Komplexes von abelschen Gruppen aus 19.5.1.11 liefert genauer wegen der Exaktheit von $\mathbb{D}$ einen exakten Komplex

$$\mathcal{G}_X^*(X) \hookrightarrow \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{G}_X^*(U) \to \prod_{(U,V) \in \mathcal{U}^2} \mathcal{G}_X^*(U \cap V) \to \dots$$

Ähnlich prüft man die Verklebungseigenschaft auch für Systeme offener Teilmengen mit einer von ganz X verschiedenen Vereinigung. Daß $\mathcal{G}_X^*$ welk ist, folgt aus

der Injektivität von $\mathrm{G}A \hookrightarrow \mathrm{G}X$ für $A \subset X$, immer noch nach 19.5.1.11, und der Exaktheit von $\mathbb{D}$.

Beweis von Satz 21.6.7.2 über den Vergleichsisomorphismus. Gegeben ein topologischer Raum X führt unser Quasiisomorphismus $\mathrm{S}X \overset{\smile}{\to} \mathrm{G}X$ aus 19.5.1.8 zusammen mit unseren Erkenntnissen über die derivierte Dualität bei abelschen Gruppen 19.5.1.17 zu Quasiisomorphismen

$$\mathrm{S}^*X \overset{\smile}{\to} \mathbb{D}(\mathrm{S}X) \overset{\smile}{\leftarrow} \mathbb{D}(\mathrm{G}X)$$

Ist X lokal singulär-azyklisch, so folgern wir, indem wir unsere Sequenz von Quasiisomorphismen für alle singulär-azyklischen Umgebungen $V \subset X$ gegebener Punkte betrachten, daß unser Kogrenzkomplex aus 19.5.1.19 eine Auflösung $\mathbb{Z}_X \to \mathcal{G}_X^*$ der konstanten Garbe ist. Unsere Sequenz von Quasiisomorphismen betrachten wir dann weiter für alle $U \Subset X$ und erhalten so eine Sequenz von Quasiisomorphismen von Komplexen von Prägarben, die wir zu einer Sequenz

$$\mathcal{S}_X^* \overset{\smile}{\to} \tilde{\mathcal{S}}_X^{\lhd} \overset{\smile}{\leftarrow} \mathcal{G}_X^*$$

von Morphismen von Auflösungen der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ garbifizieren. Wählen wir noch eine injektive Auflösung $\mathcal{I}^{\lhd}$ der konstanten Garbe und einen Morphismus von Auflösungen $\tilde{\mathcal{S}}_X^{\lhd} \overset{\smile}{\to} \mathcal{I}^{\lhd}$, so erhalten wir auf den globalen Schnitten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{S}^*X & \overset{\smile}{\to} & \mathbb{D}(\mathrm{S}X) & \overset{\smile}{\leftarrow} & \mathbb{D}(\mathrm{G}X) \\
\downarrow & & \downarrow & & \wr\downarrow \\
\Gamma\mathcal{S}_X^* & \to & \Gamma\tilde{\mathcal{S}}_X^{\lhd} & \leftarrow & \Gamma\mathcal{G}_X^* \\
 & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\
 & & \Gamma\mathcal{I}^{\lhd} & &
\end{array}$$

Wichtig ist hierbei, daß $\mathcal{G}_X^* : U \mapsto \mathbb{D}(\mathrm{G}U)$ bereits ein Komplex von Garben ist und wir an dieser Stelle nicht zu garbifizieren brauchen, denn das liefert den vertikalen Isomorphismus ganz rechts. Nun besteht $\mathcal{G}_X^*$ nach 19.5.1.19 sogar aus welken Garben. Nach unseren Erkenntnissen 19.3.6.7 zum Derivieren mit azyklischen Auflösungen und der Γ-Azyklizität welker Garben aus 19.4.1.3 ist mithin in unserem Diagramm die Kettenabbildung $\swarrow$ ein Quasiisomorphismus. Daraus aber folgt, daß die Komposition in der mittleren Vertikale und dann auch die Komposition nach unten auf der linken Seite Quasiisomorphismen sind. Der Satz folgt. $\square$

19.5.1.20 (**Lokale Garbenkohomologie als relative singuläre Kohomologie**). Gegeben $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung einer offenen Teilmenge in einen topologischen Raum induziert der zugehörige Komorphismus $\mathcal{S}_X^* \to \mathcal{S}_U^*$ über j offensichtlich einen Isomorphismus von Komplexen $\mathcal{S}_U^* \overset{\sim}{\to} j^*\mathcal{S}_X^*$ von Garben auf

unserer offenen Teilmenge U. Nehmen wir nun X lokal singulär-azyklisch an und wählen eine injektive Auflösung $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{I}^\triangleleft$ und einen Lift $\mathcal{S}_X^* \to \mathcal{I}^\triangleleft$ der Identität auf $\mathbb{Z}_X$, so erhalten wir mit den hoffentlich offensichtlichen Abbildungen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}^*X \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma\mathcal{S}_X^* \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Gamma\mathcal{S}_X^* \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma\mathcal{I}^\triangleleft \arrow[d] \\
\mathrm{S}^*U \arrow[r] & \Gamma\mathcal{S}_U^* \arrow[r] & \Gamma j^*\mathcal{S}_X^* \arrow[r] & \Gamma j^*\mathcal{I}^\triangleleft
\end{tikzcd}$$

Nach 19.4.9.14 ist jede offene Restriktion einer injektiven Garbe injektiv, und wenden wir im äußeren Rechteck $\mathcal{H}^q$ an, so werden die Horizontalen per definitionem unsere Vergleichsisomorphismen zwischen singulärer Kohomologie und Garbenkohomologie, wohingegen die Vertikalen den jeweiligen Rückzug auf die offene Teilmenge U liefern. Nun ist nach 19.4.9.13 ist jede injektive Garbe welk, also ist die rechte Vertikale surjektiv. Die linke Vertikale ist eh surjektiv. Indem wir unser Diagramm zum Platzsparen diagonal spiegeln und die Kerne ergänzen, erhalten wir mit 19.4.4.9 für $Z := X \backslash U$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}^*(X,U) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{S}^*X \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathrm{S}^*U \arrow[d] \\
\Gamma_Z I^\triangleleft \arrow[r, hook] & \Gamma\mathcal{I}^\triangleleft \arrow[r, two heads] & \Gamma j^*\mathcal{I}^\triangleleft
\end{tikzcd}$$

von kurzen exakten Sequenzen abelscher Gruppen. Man überzeugt sich leicht, daß der von der linken Vertikale induzierte Isomorphismus

$$\mathrm{H}^q(X,U)_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_Z(X)_{\mathrm{garb}}$$

nicht von der Wahl der injektiven Auflösung $\mathcal{I}^\triangleleft$ und der Wahl des Lifts $\mathcal{S}_X^* \to \mathcal{I}^\triangleleft$ abhängt. Wir nennen ihn den **Vergleichsisomorphismus der relativen Kohomologie**. Die Funktorialität der langen exakten Kohomologiesequenz zeigt, daß unsere Vergleichsisomorphismen für jeden lokal singulär-azyklischen Raum X mit einer offenen Teilmenge $U \Subset X$ und deren abgeschlossenem Komplement $Z \Subset X$ einen Morphismus von langen exakten Sequenzen liefern in Gestalt eines kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \mathrm{H}^q(X,U) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{H}^qX \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{H}^qU \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{H}^{q+1}(X,U) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \mathrm{H}^q_Z(X) \arrow[r] & \mathrm{H}^qX \arrow[r] & \mathrm{H}^qU \arrow[r] & \mathrm{H}^{q+1}_Z(X) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

mit singulärer Kohomologie oben, Garbenkohomologie unten und unseren Vergleichsisomorphismen in den Vertikalen. Die Konstruktion zeigt weiter, daß unsere Vergleichsisomorphismen der relativen Kohomologie auch Transformationen von Funktoren sind.

19.5.1.21. Gegeben ein lokal singulär-azyklischer Raum X und eine injektive Auflösung $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{I}^\triangleleft$ der konstanten Garbe und ein Lift $\mathcal{S}_X^* \hookrightarrow \mathcal{I}^\triangleleft$ dieser Auflösung hatten wir für jede abgeschlossene Teilmenge $Z \not\subset X$ ausgezeichnete Quasiisomorphismen $\mathrm{S}^*(X, X\backslash Z) \xrightarrow{\smile} \Gamma_Z \mathcal{I}^\triangleleft$ konstruiert. Ist X zusätzlich Hausdorff, so können wir zum filtrierenden Kolimes über alle Kompakta $Z = K \subset X$ übergehen und erhalten einen ausgezeichneten Quasiisomorphismus

$$\operatorname{colf}_K \mathrm{S}^*(X, X\backslash K) \xrightarrow{\smile} \Gamma_! \mathcal{I}^\triangleleft$$

Er induziert Isomorphismen

$$\mathrm{H}_!^q(X)_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_!^q(X)_{\mathrm{garb}}$$

Es ist leicht zu sehen, daß sie von den zu ihrer Konstruktion getroffenen Wahlen nicht abhängen. Wir nennen sie die **Vergleichsisomorphismen der kompakten Kohomologie**. Offensichtlich sind sie verträglich mit dem Ausdehnen durch Null nach 17.7.2.5 beziehungsweise 19.4.9.7 auf der singulären beziehungsweise garbigen kompakten Kohomologie. Nach 19.4.9.29 sind sie auch verträglich mit dem eigentlichen Zurückholen.

Satz 19.5.1.22. *Ist $A \not\subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge und G eine abelsche Gruppe, so induzieren der Randoperator der Lokalisierungssequenz 19.4.8.15 zusammen mit dem Vergleichssatz 19.5.1.21 und der Poincaré-Dualität 17.7.4.3 Isomorphismen, die Isomorphismen der* **Alexander-Dualität**

$$\mathrm{H}_!^q(A; G_A) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathrm{H}}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n\backslash A; G)$$

Beispiele 19.5.1.23. Schneiden wir etwa aus der Ebene $\mathbb{R}^2$ zwei disjunkte kompakte abgeschlossene zusammenhängende Teilmengen heraus, so ist die erste Homologie des Komplements frei vom Rang zwei. Anschaulich wird eine Basis eben gegeben durch die Klassen zweier Zykel, die jeweils um eines der beiden beim Herausschneiden entstandenen Löcher laufen. Man kann sich auch den Fall denken, daß eine der besagten kompakten abgeschlossenen zusammenhängenden Teilmengen als Ring um die andere liegt: Unser Satz wird dann auch für $q = 1$ gehaltvoll. Schneiden wir dahingegen eine nichtkompakte zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge heraus, so verschwindet die erste Homologie des Komplements, da anschaulich gesprochen „unsere nichtkompakte Teilmenge in irgendeiner Richtung nach Unendlich läuft und nicht von einem Zykel umrundet werden kann“. Im Fall $q = 0$ liefert der Isomorphismus der Alexanderdualität nocheinmal Korollar 17.4.3.10, nach dem $\tilde{\mathrm{H}}_{n-1}(\mathbb{R}^n\backslash A; \mathbb{Z})$ für $A \not\subset \mathbb{R}^n$ mit nur genau $k \in \mathbb{N}$ kompakten Zusammenhangskomponenten frei ist über $\mathbb{Z}$ vom Rang k, und im Fall $q = 0$, $n = 2$ ist er im wesentlichen der in 17.1.6.3 durch Umlaufzahlen beschriebene Isomorphismus $\mathrm{H}_1(U; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_!(\mathbb{C}\backslash U, \mathbb{Z})$ für $U \Subset \mathbb{C}$.

Beispiel 19.5.1.24. Ersetzen wir im Satz auf der linken Seite Garbenkohomologie durch singuläre Kohomologie, so gilt er im allgemeinen nicht mehr, zum Beispiel im Fall $n = 2$, $q = 1$, $G = \mathbb{Z}$ und A dem Schmitt der Sinuskurve des Topologen 15.1.3.23 mit dem Kompaktum $[-2, 2]^2$.

Beweis. Wir gehen aus vom nach 19.5.1.21 und Bemerkung 17.7.4.2 kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n; G)_{\mathrm{garb}} & \tilde{\to} & \mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n; G)_{\mathrm{sing}} & \tilde{\to} & \mathrm{H}_{n-q}(\mathbb{R}^n; G) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n \backslash A; G)_{\mathrm{garb}} & \tilde{\to} & \mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n \backslash A; G)_{\mathrm{sing}} & \tilde{\to} & \mathrm{H}_{n-q}(\mathbb{R}^n \backslash A; G) \end{array}$$

Als Isomorphismus zwischen den Kernen für $q < n$ und zwischen den Kokernen für $q \geq n$ der Vertikalen erhalten wir daraus nach 19.4.9.16 für alle q den ersten Isomorphismus der Sequenz

$$\mathrm{H}^q_!(A; G)_{\mathrm{garb}} \tilde{\to} \mathrm{H}_{n-q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash A; G) \tilde{\to} \tilde{\mathrm{H}}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n \backslash A; G)$$

Der zweite Isomorphismus kommt von der langen exakten Sequenz der reduzierten Kohomologie her zusammen mit der Erkenntnis, daß für die relativen Homologiegruppen zwischen reduzierter und nichtreduzierter Homologie kein Unterschied besteht. □

Proposition 19.5.1.25 (Verallgemeinerte Poincaré-Dualität). *Gegeben eine Mannigfaltigkeit X der Dimension n und eine abelsche Gruppe G liefert die Konstruktion des folgenden Beweises Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^q_!(X; \mathrm{or}_X(G)) \tilde{\to} \mathrm{H}_{n-q}(X; G)$$

zwischen der kompakten Kohomologie der Orientierungsgarbe und der singulären Homologie im gegenüberliegenden Grad.

Vorschau 19.5.1.26. Die Bedeutung dieses Satzes im Rahmen der „sechs Funktoren“ diskutieren wir in 21.9.10.7.

Beweis. Wir schreiben das Argument nur für Koeffizienten $G = \mathbb{Z}$ aus, der allgemeine Fall geht genauso. Sei $\pi : \tilde{X} \to X$ die Orientierungsüberlagerung mit ihrer tautologischen Orientierung $\tilde{\omega}$ und sei $\tau : \tilde{X} \to X$ das Vertauschen der Blätter. Nach dem Beweis von 19.3.7.12 haben wir mit den offensichtlichen Abbildungen eine kurze exakte Sequenz

$$(\mathrm{S}_* \tilde{X})^{-\tau} \hookrightarrow \mathrm{S}_* \tilde{X} \twoheadrightarrow \mathrm{S}_* X$$

Gegeben $K \subset X$ kompakt und $\tilde{K} = \pi^{-1}(K)$ sein Urbild erhalten wir in derselben Weise eine kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{S}_*(\tilde{X}, \tilde{X}\backslash\tilde{K})^{-\tau} \hookrightarrow \mathrm{S}_*(\tilde{X}, \tilde{X}\backslash\tilde{K}) \twoheadrightarrow \mathrm{S}_*(X, X\backslash K)$$

Nach Konstruktion geht der Fundamentalzykel $\tilde{\omega}_{\tilde{K}} \in \mathrm{H}_n(\tilde{X}, \tilde{X}\backslash\tilde{K})$ nach Null in $\mathrm{H}_n(X, X\backslash K)$, kann also durch eine Kette $\tilde{\omega}_{\tilde{K}} \in \mathrm{S}_n(\tilde{X}, \tilde{X}\backslash\tilde{K})^{-\tau}$ repräsentiert werden. Wir erhalten so die obere Hälfte eines kommutativen Diagramms von Kettenkomplexen

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{S}_{n-q}\tilde{X})^{-\tau} \arrow[r, hook] & \mathrm{S}_{n-q}\tilde{X} \arrow[r, two heads] & \mathrm{S}_{n-q}X \\
\mathrm{S}^q(X, X\backslash K) \arrow[u, "\cap\tilde{\omega}_{\tilde{K}}"] \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{S}^q(\tilde{X}, \tilde{X}\backslash\tilde{K}) \arrow[u, "\cap\tilde{\omega}_{\tilde{K}}"] \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathrm{cok}^q(X, K) \arrow[u, dashed] \arrow[d, dashed] \\
\Gamma_!(X; \mathcal{S}^q_X) \arrow[r, hook] & \Gamma_!(\tilde{X}; \mathcal{S}^q_{\tilde{X}}) \arrow[r, two heads] & \Gamma_!(X; \mathcal{S}^q_X \otimes \mathrm{or}_X)
\end{tikzcd}$$

Die untere Zeile kommt dabei von der kurzen exakten Sequenz kompaktweicher Garben $\mathcal{S}^q_X \hookrightarrow \pi_*\mathcal{S}^q_{\tilde{X}} \twoheadrightarrow \mathcal{S}^q_X \otimes \mathrm{or}_X$ her und $\mathrm{cok}^q(X, K)$ ist nur eine Notation für den Kokern in der mittleren Horizontale. Gehen wir nun zur Kohomologie dieser Komplexe über und in der mittleren Horizontale zusätzlich zum direkten Limes über alle Kompakta $K \subset X$, so werden die beiden linken vertikalen Morphismen nach unten Isomorphismen nach 19.5.1.21. Mit dem Fünferlemma folgt dasselbe für den rechten vertikalen Morphismus nach unten. Insbesondere erhalten wir, da auch $\mathcal{S}^q_X \otimes \mathrm{or}_X$ als Kokern einer Inklusion kompaktweicher Garben kompaktweich ist, natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{colf}_K\, \mathcal{H}^q\, \mathrm{cok}^*(X, K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q\Gamma_!(X; \mathcal{S}^*_X \otimes \mathrm{or}_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(X; \mathrm{or}_X)$$

Für letzteren Isomorphismus verwenden wir, daß $\mathcal{S}^*_X \otimes \mathrm{or}_X$ eine kompaktweiche Auflösung von or_X ist. So erhalten wir schon mal kanonische Homomorphismen $\kappa_X : \mathrm{H}^q_!(X; \mathrm{or}_X) \to \mathrm{H}_{n-q}X$. Aus der Konstruktion folgt unmittelbar, daß wir für jede offene Einbettung $U \hookrightarrow X$ kommutative Quadrate

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^q_!(U; \mathrm{or}_U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}_{n-q}U \arrow[d] \\
\mathrm{H}^q_!(X; \mathrm{or}_X) \arrow[r] & \mathrm{H}_{n-q}X
\end{tikzcd}$$

erhalten. Mit einer etwas feineren Argumentation zeigt man ähnlich wie beim Beweis von 17.7.4.7, daß wir für je zwei offene Teilmengen $U, V \Subset X$ sogar ein kommutatives Diagramm von Mayer-Vietoris-Sequenzen erhalten. Mit dieser Erkenntnis können wir dann den Beweis der Poincaré-Dualität aus 17.6.4.9 wiederholen. $\square$

Übungen

Übung 19.5.1.27. Gegeben abgeschlossene Teilmengen $B \subsetneq A \subsetneq \mathbb{R}^n$ kommutieren die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^q_!(A;G_A) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{\mathrm{H}}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n\backslash A;G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^q_!(B;G_B) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{\mathrm{H}}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n\backslash B;G) \end{array}$$

mit den Isomorphismen der Alexanderdualität 19.5.1.22 in den Horizontalen und dem abgeschlossenen Zurückholen der kompakten Kohomologie sowie dem Bild in der reduzierten Homologie in den Vertikalen.

Übung 19.5.1.28. Man zeige, daß unter der Verknüpfung von ausgezeichneten Isomorphismen $\mathrm{H}^n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\backslash 0)_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_{\{0\}}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_!(\mathbb{R}^n)$ der Duale unseres ausgezeichneten Erzeugers von $\mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\backslash 0)$ aus 17.4.1.4 alias 18.4.1.17 unserem ausgezeichneten Erzeuger aus 19.4.9.19 entspricht.

19.5.2 Erste Čech-Kohomologie als Garbenkohomologie

Satz 19.5.2.1 (Erste Čech-Kohomologie als Garbenkohomologie). *Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X liefert die durch das Kommutieren des Diagramms im folgenden Beweis definierte Abbildung einen natürlichen Isomorphismus zwischen ihrer ersten Čech-Kohomologie und ihrer ersten Garbenkohomologie*

$$\mathrm{can} : \check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(X;\mathcal{F})$$

19.5.2.2. Dieser Satz soll unter anderem dazu beitragen, unsere Anschauung von der durch 19.1.2.6 bereits mit Anschauung gefüllten ersten Čech-Kohomologie auf die von ihrer Definition her für mich völlig unanschauliche Garbenkohomologie zu übertragen. In 19.5.6.1 zeigen wir, daß die Čech-Kohomologie und die Garbenkohomologie auf „parakompakten“ Räumen sogar in allen Graden übereinstimmen.

Beweis. Wir wählen eine Einbettung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}$ von $\mathcal{F}$ in ein Produkt von Wolkenkratzergarben. Bezeichne $\mathcal{C}$ den Prägarbenkokern dieser Einbettung und bezeichne $\mathcal{C}^+$ seine Garbifizierung. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm von Prägarben

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \mathcal{G} \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & \mathcal{C} \arrow[d] \\ \mathcal{F} \arrow[r, hook] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{C}^+ \end{tikzcd}$$

mit kurzer exakter oberer Zeile und linksexakter unterer Zeile, das insbesondere zeigt, daß die kanonische Abbildung $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^+$ ein Monomorphismus von Prägarben ist. Behandeln wir dies Diagramm mit $\check{\mathrm{H}}$ und mit 19.2.2.8, so erhalten wir die linke Hälfte eines kommutativen Diagramms, bei dem wir der Einfachheit halber den Grundraum X aus der Notation weggelassen haben:

$$\begin{tikzcd}
\check{\mathrm{H}}^0\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \check{\mathrm{H}}^0\mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \check{\mathrm{H}}^0\mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & \check{\mathrm{H}}^1\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
\check{\mathrm{H}}^0\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \check{\mathrm{H}}^0\mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \check{\mathrm{H}}^0\mathcal{C}^+ \arrow[d, "\wr"] & & \\
\mathrm{H}^0\mathcal{F} \arrow[r] & \mathrm{H}^0\mathcal{G} \arrow[r] & \mathrm{H}^0\mathcal{C}^+ \arrow[r] & \mathrm{H}^1\mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Die Zeilen sind exakt, wie im folgenden begründet werden soll. In der oberen Zeile, da eine kurze exakte Sequenz von Prägarben uns eine lange exakte Sequenz in der Čech-Kohomologie liefert, zunächst bezüglich jeder offenen Überdeckung und dann auch im Limes. Wir haben weiter $\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{G}) = 0$, nach 19.1.3.12 und 19.1.5.6 verschwinden ja für ein Produkt von Wolkenkratzergarben sogar alle höheren Čech-Kohomologiegruppen bezüglich jeder offenen Überdeckung. Das liefert Exaktheit der oberen Zeile. Die untere Zeile ist exakt als Teil einer langen exakten Garbenkohomologie-Sequenz, es gilt nämlich $\mathrm{H}^1(X;\mathcal{G}) = 0$ nach 19.4.1.3, da $\mathcal{G}$ stets welk ist. Folglich können wir den gestrichelten Pfeil durch die Kommutativität des Diagramms definieren. Um zu zeigen, daß er ein Isomorphismus ist, brauchen wir nur zu prüfen, daß der Monomorphismus von Prägarben $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^+$ Isomorphismen auf $\check{\mathrm{H}}^0$ induziert. Nun hat jedoch sein Prägarbenkokern $\mathcal{K}$ aufgrund der Exaktheit der Garbifizierung die Eigenschaft $\mathcal{K}^+ = 0$, als da heißt, alle Halme von $\mathcal{K}$ sind Null, woraus wir leicht $\check{\mathrm{H}}^0\mathcal{K} = 0$ folgern. Dann ergibt sich $\check{\mathrm{H}}^0\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^0\mathcal{C}^+$ aus der bereits diskutierten langen exakten Sequenz der Čech-Kohomologie zu einer kurzen exakten Sequenz in der Kategorie der abelschen Prägarben. □

Ergänzung 19.5.2.3. Im allgemeinen liefert eine kurze exakte Sequenz in der Kategorie der abelschen Garben keineswegs eine lange exakte Sequenz der zugehörigen Čech-Kohomologiegruppen. Ich bin jedoch außerstande, ein konkretes Gegenbeispiel anzugeben.

Beispiel 19.5.2.4. Sei X ein topologischer Raum. Die lange exakte Sequenz zur kurzen exakten Garbensequenz $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \twoheadrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times}$, die von der Exponentialab-

bildung induziert wird, liefert die obere Horizontale in einem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(X;\mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{H}^2(X;2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}_X) \arrow[dd, "\wr"] \\
\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times}) \arrow[d, "\wr"] & \\
\left\{ \begin{array}{c} \text{komplexe Geradenbündel auf } X, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} & \mathrm{H}^2(X;\mathbb{Z}_X)
\end{tikzcd}$$

wo wir links die Identifikationen aus 19.5.2.1 und 19.1.2.9 benutzen und rechts durch $2\pi\mathrm{i}$ teilen. Das Bild eines komplexen Geradenbündels $\mathcal{L}$ unter dieser Verknüpfung heißt die **erste Chern'sche Klasse von** $\mathcal{L}$ und wird bezeichnet mit

$$c_1(\mathcal{L}) \in \mathrm{H}^2(X;\mathbb{Z}_X)$$

Wir werden in 19.5.4.18 und 19.5.4.5 sehen, daß auf „parakompakten" Räumen die Gruppen $\mathrm{H}^q(X;\mathcal{C}_{\mathbb{C}})$ verschwinden für $q > 0$, so daß unser ganzes Diagramm aus Bijektionen besteht. Auf parakompakten Räumen werden demnach komplexe Geradenbündel „klassifiziert durch ihre erste Chern'sche Klasse".

Satz* 19.5.2.5 (Geradenbündel mit konstanten Übergangsfunktionen). *Ein komplexes Geradenbündel auf einem parakompakten Raum besitzt genau dann eine Bündelkarte mit konstanten Übergangsfunktionen, wenn das Bild seiner ersten Chern'schen Klasse unter der natürlichen Abbildung* $\mathrm{H}^2(X;\mathbb{Z}_X) \to \mathrm{H}^2(X;\mathbb{C}_X)$ *nach Null geht.*

Ergänzung 19.5.2.6. Dasselbe gilt mit demselben Beweis für glatte komplexe Geradenbündel auf parakompakten glatten Mannigfaltigkeiten. Es gilt jedoch für holomorphe Bündel auf einer komplexanalytischen Mannigfaltigkeit nur unter der zusätzlichen Annahme der Surjektivität von $\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathbb{C}_X) \to \check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{O}^{\mathrm{an}})$, die im Diagramm ganz unten horizontal anzubauen wäre. Diese Surjektivität hinwiederum ergibt sich bei kompakten Kählermannigfaltigkeiten aus der Hodgetheorie, unsere Abbildung identifiziert sich dann nämlich mit der Projektion von $\mathrm{H}^1(X;\mathbb{C}_X) = \mathrm{H}^{(1,0)}(X;\mathbb{C}_X) \oplus \mathrm{H}^{(0,1)}(X;\mathbb{C}_X)$ auf $\mathrm{H}^1(X;\mathcal{O}^{\mathrm{an}}) \cong \mathrm{H}^{(1,0)}(X;\mathbb{C}_X)$.

Beweis. Wir erhalten für jeden beliebigen topologischen Raum X Monomorphismen $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathbb{C}_X \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ und ein kommutatives Diagramm mit kurzen exakten

Garbensequenzen in den Zeilen und Spalten

$$\begin{tikzcd}
2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}_X \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \mathbb{C}_X \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \mathbb{C}_X^\times \arrow[d, hook] \\
2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}_X \arrow[r, hook] & \mathcal{C}_\mathbb{C} \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times} \arrow[d, two heads] \\
 & \mathrm{cok} \arrow[r, equal] & \mathrm{cok}
\end{tikzcd}$$

Ein komplexes Geradenbündel kann durch lokal konstante oder gleichbedeutend konstante Übergangsfunktionen realisiert werden genau dann, wenn seine Klasse im Bild von $\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathbb{C}_X^\times) \to \check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times})$ liegt. Das impliziert sofort, daß das Bild seiner ersten Chern'schen Klasse in $\mathrm{H}^2(X;\mathbb{C}_X)$ verschwinden muß. Umgekehrt kann man sich überlegen und der Beweis des Oktaederaxioms wird auch formal zeigen, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{H}^1(X;\mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times}) & \to & \mathrm{H}^2(X;2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}_X) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}^1(X;\mathcal{C}_\mathbb{C}) & \to & \mathrm{H}^1(X;\mathrm{cok}) & \to & \mathrm{H}^2(X;\mathbb{C}_X)
\end{array}$$

mit den von obigen Sequenzen und Morphismen induzierten Morphismen kommutiert. Für parakompaktes X folgt aus $\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}_\mathbb{C}) = 0$ dann umgekehrt auch, daß jedes komplexe Geradenbündel mit in $\mathrm{H}^2(X;\mathbb{C}_X)$ verschwindender erster Chern'scher Klasse bereits durch konstante Übergangsfunktionen realisiert werden kann. □

19.5.3 Parakompakte Räume

Definition 19.5.3.1.

1. Seien X eine Menge und $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Überdeckung von X. Eine Überdeckung $\mathcal{V}$ von X heißt eine **Verfeinerung von** $\mathcal{U}$, wenn jedes $V \in \mathcal{V}$ in mindestens einem $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist;

2. Ein System von Teilmengen $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eines topologischen Raums X heißt **lokal endlich**, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung besitzt, die höchstens endlich viele $U \in \mathcal{U}$ trifft;

3. Ein topologischer Raum heißt **parakompakt**, wenn er Hausdorff ist und sich jede offene Überdeckung unseres Raums zu einer lokal endlichen offenen Überdeckung verfeinern läßt.

19.5.3.2. Jede abgeschlossene Teilmenge eines parakompakten Raums ist offensichtlich wieder parakompakt. Für offene Teilmengen gilt das jedoch im allgemeinen nicht. Topologische Räume, in denen jede offene Teilmenge parakompakt ist, heißen **erblich parakompakt**.

Proposition 19.5.3.3 (Kriterium für Parakompaktheit). *Besitzt ein Hausdorffraum topologischer Raum eine abzählbare Überdeckung durch offene Teilmengen mit kompaktem Abschluß, so ist er parakompakt.*

Beweis. Indem wir zu geeigneten Vereinigungen übergehen dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit sogar annehmen, unser Raum sei überdeckt durch eine aufsteigende Folge $X_0 \subset X_1 \subset \ldots$ von offenen Teilmengen mit kompaktem Abschluß. Indem wir zu einer geeigneten Teilfolge übergehen, dürfen wir zusätzlich annehmen, daß für alle n gilt $\bar{X}_n \subset X_{n+1}$. Um Sonderbetrachtungen zu vermeiden setzen wir $X_n = \emptyset$ für $n < 0$. Gegeben eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ unseres Raums werden die Kompakta $\bar{X}_{n+1} \backslash X_n$ jeweils schon überdeckt von den U aus einem endlichen Teilsystem $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$. Die Schnitte $U \cap (X_{n+2} \backslash \bar{X}_{n-1})$ für $U \in \mathcal{U}_n$ und $n \in \mathbb{Z}$ bilden dann die gesuchte lokal endliche Verfeinerung der Überdeckung $\mathcal{U}$. □

Proposition 19.5.3.4. *Jeder parakompakte Raum ist normal.*

Beweis. Das folgt mit zweimaligem Anwenden des anschließenden technischen Lemmas, erst im Fall einer einpunktigen Menge B, dann im Allgemeinen. □

Lemma 19.5.3.5. *Seien A, B disjunkte abgeschlossene Mengen in einem parakompakten Raum X. Zu jedem Punkt $x \in A$ gebe es disjunkte offene Teilmengen $U_x, V_x \Subset X$ mit $x \in U_x$ und $B \subset V_x$. So gibt es auch disjunkte offene $U, V \Subset X$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$.*

Beweis. Die U_x mitsamt $X \backslash A$ bilden eine offene Überdeckung von X. Sei $\mathcal{W}$ eine offene lokal endliche Verfeinerung dieser offenen Überdeckung. Setzen wir $\mathcal{W}_A := \{W \in \mathcal{W} \mid W \cap A \neq \emptyset\}$, so ist jedes $W \in \mathcal{W}_A$ in einem U_x enthalten, die Vereinigung $U := \bigcup_{W \in \mathcal{W}_A} W$ ist offen, und wir haben $A \subset U$. Andererseits besitzt jedes $y \in B$ eine offene Umgebung C_y, die nur endlich viele Mengen $W_1, \ldots, W_n$ aus $\mathcal{W}_A$ trifft. Wählen wir nun $x(i) \in A$ mit $W_i \subset U_{x(i)}$, so ist $D_y = C_y \cap V_{x(1)} \cap \ldots \cap V_{x(n)}$ offen und trifft überhaupt keine Menge aus $\mathcal{W}_A$. Damit ist $V = \bigcup_{y \in B} D_y$ offen mit $V \cap U = \emptyset$ und $B \subset V$. □

Proposition 19.5.3.6 (Schrumpfen offener Überdeckungen). *Ist X ein parakompakter Hausdorffraum und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, so finden wir eine offene Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ von X mit $\bar{V}_i \subset U_i \quad \forall i \in I$.*

Beweis. Aufgrund der Normalität von X besitzt jedes $x \in X$ eine offene Umgebung C_x, deren Abschluß in einem U_i enthalten ist, sagen wir $\bar{C}_x \subset U_{i(x)}$. Sei $\mathcal{W}$ eine lokal endliche offene Verfeinerung der offenen Überdeckung von X durch die C_x. So finden wir auch für jedes $W \in \mathcal{W}$ ein $i := i(W)$ mit $\bar{W} \subset U_{i(W)}$. Dann setzen wir $V_j := \bigcup_{i(W)=j} W$ und erhalten $\bar{V}_j \subset U_j$, da mit 19.5.3.9 die Vereinigung einer lokal endlichen Familie abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist. □

Lemma 19.5.3.7 (Teilung der Eins). *Ist X eine glatte parakompakte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eine offene Überdeckung von X, so gibt es eine durch $U \in \mathcal{U}$ indizierte Familie von glatten Funktionen $\alpha_U : X \to [0,1]$ derart, daß α_U jeweils Träger in U hat, daß jede Stelle $x \in X$ eine Umgebung besitzt, auf der nur endlich viele unserer Funktionen nicht verschwinden, und daß an jeder Stelle $x \in X$ gilt*

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} \alpha_U(x) = 1$$

19.5.3.8. Sind etwa $A, B \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ X$ disjunkt und abgeschlossen, so gibt es eine glatte Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f = 1$ auf einer offenen Umgebung von A und $f = 0$ auf einer offenen Umgebung von B. In der Tat folgt das sofort, wenn man das Lemma auf die Überdeckung von X durch die Komplemente unserer beiden abgeschlossenen Mengen anwendet.

Beweis. Können wir unseren Satz für eine lokal endliche Verfeinerung unserer Überdeckung $\mathcal{U}$ zeigen, so folgt er mühelos für $\mathcal{U}$ selber. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unsere Überdeckung lokal endlich ist und daß die überdeckenden Mengen U_i jeweils kompakten Abschluß haben, der darüber hinaus noch ganz im Bild einer Karte liegt. Wählen wir dann eine Schrumpfung (V_i) unserer Überdeckung, so finden wir etwa nach 12.4.2.14 angewandt auf den Fall der Überdeckung von $\bar{V}_i$ durch U_i glatte Funktionen $\beta_i : U_i \to [0,1]$ mit kompaktem Träger, die auf $\bar{V}_i$ konstant Eins sind. Dehnen wir diese durch Null auf ganz X aus und bilden ihre Summe, so erhalten wir eine glatte überall positive Funktion β, und die Quotienten $\alpha_i = \beta_i/\beta$ bilden die gesuchte Teilung der Eins. □

Übungen

Übung 19.5.3.9. Die Vereinigung über ein lokal endliches System abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Ist eine Abbildung stetig auf jeder der Teilmengen einer lokal endlichen Überdeckung eines Raums durch abgeschlossene Teilmengen, so ist sie schon selbst stetig.

19.5.4 Garben auf parakompakten Räumen

Proposition 19.5.4.1 (Fortsetzbarkeit von Schnitten). *Gegeben eine Garbe von Mengen auf einem parakompakten Raum läßt sich jeder Schnitt über einer abgeschlossenen Teilmenge auf eine offene Umgebung unserer abgeschlossenen Teilmenge fortsetzen.*

19.5.4.2. In 19.4.5.2 haben wir eine ähnliche Fortsetzbarkeitaussage auch noch für kompakte „relativ Hausdorff'sche“ Teilmengen beliebiger topologischer Räume gezeigt. Der Beweis der Proposition zeigt, daß sich auf erblich parakompakten Räumen jeder Schnitt auf einer beliebigen Teilmenge zu einem Schnitt auf eine sie umfassende offene Teilenge fortsetzen läßt.

Beweis. Seien X unser Raum, $A \mathrel{\complement\!\!\!\!\mathbb{A}} X$ unsere abgeschlossene Teilmenge und $\mathcal{F}$ unsere Garbe. Gegeben $s \in \mathcal{F}(A)$ finden wir eine Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A durch offene Teilmengen $U_i \mathrel{\circledcirc} X$ und Schnitte $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $s|U_i \cap A = s_i|U_i \cap A \ \forall i$. Wir können zum Beispiel für jeden Punkt innerhalb von A einen hinreichend kleinen Repräsentanten des Halms von s nehmen. Wir ergänzen durch $X\backslash A$ zu einer offenen Überdeckung von X. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir diese zu einer lokal endlichen Überdeckung von X verfeinern. Nach Proposition 19.5.3.6 zum Schrumpfen offener Überdeckungen von parakompakten Räumen finden wir auch $V_i \mathrel{\circledcirc} X$ mit $\bar{V}_i \subset U_i \ \forall i$ und $A \subset \bigcup_{i\in I} V_i$. Jetzt setzen wir

$$W := \{x \in X \mid \text{Alle } s_i \text{ zu Indizes } i \text{ mit } x \in \bar{V}_i \text{ haben denselben Halm bei } x\}$$

Per definitionem gilt $A \subset W$ und W ist eine offene Teilmenge von X. Zusätzlich gilt jedoch $s_i|W \cap V_i \cap V_j = s_j|W \cap V_i \cap V_j \ \forall i, j$. Folglich verkleben die Schnitte $s_i|W \cap V_i$ zu einem Schnitt $\tilde{s}$ auf W, der s fortsetzt. □

Definition 19.5.4.3. Eine Garbe heißt **weich**, englisch **soft**, französisch **mou**, wenn sich jeder Schnitt über einer abgeschlossenen Teilmenge zu einem globalen Schnitt fortsetzen läßt.

Beispiele 19.5.4.4. Jede welke Garbe auf einem parakompakten Raum ist weich nach 19.5.4.1. Die Garbe der glatten Funktionen auf einer parakompakten Mannigfaltigkeit ist weich: Um das zu sehen, dehnt man einen Schnitt über einer abgeschlossenen Teilmenge zunächst mithilfe von 19.5.4.1 auf eine offene Menge aus und biegt ihn dann in dieser offenen Menge mithilfe einer glatten Partition der Eins 19.5.3.8 herunter nach Null, so daß man ihn weiter durch Null ausdehnen kann zu einem globalen Schnitt. Man beachte hierbei, daß ein Schnitt der Garbe der glatten Funktionen auf einer abgeschlossenen Teilmenge einer glatten Mannigfaltigkeit keineswegs eine Funktion auf dieser abgeschlossenen Teilmenge ist: An den Randpunkten zeichnet ein Schnitt dieser Garbe einen ganzen Funktionskeim auf einer offenen Umgebung des besagten Punktes in der ursprünglichen Mannigfaltigkeit aus und keineswegs nur einen Funktionswert. Analog sind auch die Garben der glatten p-Formen und allgemeiner der glatten Schnitte in irgendeinem glatten Vektorraumbündel weich.

Satz 19.5.4.5. *Auf parakompakten Räumen sind weiche abelsche Garben azyklisch für den Funktor der globalen Schnitte.*

Beweis. Das folgt genau wie bei den welken Garben 19.4.1.3 oder mit dem abstrakten Kriterium 19.4.1.6 aus dem anschließenden Lemma 19.5.4.6. □

Lemma 19.5.4.6. *Sei $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem parakompakten topologischen Raum X.*

1. *Ist $\mathcal{F}'$ weich, so induziert der Epimorphismus $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine Surjektion $\Gamma\mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma\mathcal{F}''$ auf den globalen Schnitten;*

2. *Sind $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}$ weich, so ist auch $\mathcal{F}''$ weich.*

Beweis. 1. Sei $s'' \in \Gamma\mathcal{F}''$ gegeben. Nach 19.5.3.6 gibt es eine lokal endliche abgeschlossene Überdeckung $(A_i)_{i\in I}$ unseres Raums und $s_i \in \mathcal{F}(A_i)$ mit $s_i \mapsto s''|A_i \ \forall i$. Für $J \subset I$ setzen wir $A_J = \bigcup_{i\in J} A_i$. Nun betrachten wir die Menge aller Paare (s_J, J) mit $J \subset I$ und s_J einem Schnitt von $\mathcal{F}$ über A_J, der auf $s''|A_J$ geht. Auf dieser Menge erklären wir ein Teilordnung durch die Vorschrift $(s_K, K) \leq (s_J, J) \Leftrightarrow (K \subset J$ und $s_K = s_J|A_K)$. Nach 19.5.3.9 ist unsere Menge induktiv teilgeordnet und besitzt folglich ein maximales Element. Sei (s_J, J) solch ein maximales Element. Wäre $J \neq I$, so gäbe es $i \in I\backslash J$. Hier unterscheiden sich s_i und s_J auf $A_i \cap A_J$ nur um einen Schnitt s_i' in $\mathcal{F}'$, der sich nach Annahme auf ganz A_i ausdehnen läßt. Also verkleben $s_i - s_i'$ und s_J auf $A_i \cup A_J$ zu einem Urbild von s'' im Widerspruch zur Maximalität von (s_J, J). Damit ist in der Tat $\Gamma\mathcal{F} \to \Gamma\mathcal{F}''$ eine Surjektion.

2. Das folgt sofort aus Teil 1, da jede abgeschlossene Teilmenge eines parakompakten Raums parakompakt ist und da die Einschränkung einer weichen Garbe auf eine abgeschlossene Teilmenge stets eine weiche Garbe bleibt. □

19.5.4.7. Diejenigen Leser, die noch nicht mit der Differentialformen auf abstrakten Mannigfaltigkeiten 22.5.9.10 folgende vertraut sind, mögen sich im folgenden auf den Fall 12.8.2 beschränken, daß die Mannigfaltigkeit eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums ist. Nicht zulässig ist es jedoch, mit eingebetteten Mannigfaltigkeiten positiver Kodimension und unseren relativen Differentialformen zu arbeiten, wie wir sie in 12.8.2 betrachtet hatten.

Definition 19.5.4.8. Der **de-Rham-Komplex** einer glatten Mannigfaltigkeit X ist der Komplex $(\Omega^{\lhd}(X), d)$ der glatten Differentialformen auf X mit der äußeren Ableitung als Differential, wie wir ihn in 22.5.9.19 eingeführt haben. Die **de-Rham-Kohomologie** von X ist per definitionem seine Kohomologie

$$\mathrm{H}^q(X)_{\mathrm{dR}} := \mathcal{H}^q\Omega^{\lhd}(X)$$

Korollar 19.5.4.9 (de-Rham-Kohomologie als Garbenkohomologie). *Für jede parakompakte glatte Mannigfaltigkeit X stimmt die Garbenkohomologie der konstanten Garbe $\mathbb{R}_X$ überein mit der de-Rham-Kohomologie.*

Beweis. Wir konstruieren im folgenden sogar einen ausgezeichneten **Vergleichsisomorphismus** zwischen den fraglichen Kohomologiegruppen. Sicher können wir p-Formen auch auffassen als globale Schnitte der Garbe der p-Formen, in Formeln $\Omega^p(X) = \Gamma\Omega^p_X$, und diese Garben bilden mit der äußeren Ableitung als Differential nach dem Poincaré-Lemma 19.5.4.12 eine Auflösung der konstanten Garbe

$$\mathbb{R}_X \hookrightarrow \Omega^{\lhd}_X$$

Die Garben der Differentialformen sind nun aber weich nach 19.5.4.4 und damit globale-Schnitte-azyklisch nach 19.5.4.5. Also berechnet unser Komplex nach 19.3.6.7 die Garbenkohomologie der konstanten Garbe $\mathbb{R}_X$, als da heißt, die natürlichen Abbildungen aus 19.3.2.8 sind Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X)_{\mathrm{dR}} = \mathcal{H}^q\Gamma\Omega^{\lhd}_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R}_X)_{\mathrm{garb}} \qquad \square$$

Beispiel 19.5.4.10 (**Zurückholen und de-Rham-Kohomologie**). Ist $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung von glatten Mannigfaltigkeiten, so liefert das Zurückholen von Differentialformen eine Kettenabbildung $f^* : \Omega^{\lhd}Y \to \Omega^{\lhd}X$, und diese ist der Effekt auf den globalen Schnitten eines Komorphismus über f von Auflösungen der konstanten Garben $\mathbb{R}_X$ und $\mathbb{R}_Y$, der den offensichtlichen Komorphismus über f zwischen besagten konstanten Garben liftet. Folglich entsprechen die von dieser Kettenabbildung auf der Kohomologie induzierten Abbildungen $\mathrm{H}^i(Y)_{\mathrm{dR}} \to \mathrm{H}^i(X)_{\mathrm{dR}}$ unter unseren kanonischen Homomorphismen und im Fall parakompakter Mannigfaltigkeiten sogar Isomorphismen aus dem Beweis von 19.5.4.9 dem Zurückholen auf der Garbenkohomologie.

19.5.4.11 (**Vor- und Nachteile der de-Rham-Kohomologie**). Die de-Rham-Kohomologie ist Berechnungen besonders gut zugänglich. Zum Beispiel sieht man in dieser Realisierung der Garbenkohomologie unmittelbar, daß die Kohomologie mit reellen Koeffizienten einer parakompakten Mannigfaltigkeit X oberhalb der Dimension unserer Mannigfaltigkeit verschwinden muß, in Formeln

$$\mathrm{H}^q(X;\mathbb{R}_X) = 0 \quad \text{für } q > \dim X.$$

Der wesentlichen Nachteile dieser Kohomologietheorie sind, daß sie nur für glatte Mannigfaltigkeiten sinnvoll definiert ist, daß sie nur reelle Koeffizienten zuläßt und daß man mit ihr nur Rückzüge unter glatten Abbildungen berechnen kann. Ich habe einmal gelesen, daß die de-Rham-Kohomologie ursprünglich von Elie Cartan erfunden wurde, um die Kohomologie kompakter Liegruppen zu bestimmen.

Lemma 19.5.4.12 (von Poincaré). *Ist $U \Subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kreisscheibe, so erhalten wir einen exakten Komplex*

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \ldots\ldots \overset{d}{\twoheadrightarrow} \Omega^n(U)$$

mit der Identifikation von Zahlen und konstanten Funktionen $\mathbb{R} \hookrightarrow \Omega^0(U)$ *als erster Abbildung und der äußeren Ableitung als anderen Abbildungen.*

Ergänzung 19.5.4.13 (**Das Poincaré-Lemma mit polynomialen Koeffizienten**). Ist $U = \mathbb{R}^n$ und betrachten wir nur polynomiale Koeffizienten, so ist die entsprechende Aussage schnell gezeigt: In einer Veränderlichen liefert die Einbettung der Konstanten ja offensichtlich eine Homotopieäquivalenz

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
0 & & 0 \\
\uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{R}[x]\,\mathrm{d}x \\
\uparrow & & \uparrow d \\
\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\
\uparrow & & \uparrow \\
0 & & 0 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Tensorieren wir n Kopien dieser Homotopieäquivalenz miteinander, so ergibt sich das Poincaré-Lemma auf ganz $\mathbb{R}^n$ für den Fall polynomialer Koeffizienten. Explizit ist die Komposition von Kettenabbildungen zwischen vertikal geschriebenen Komplexen mit jeweils höchstens zwei von Null verschiedenen Einträgen

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}[x]\,\mathrm{d}x & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}[x]\,\mathrm{d}x \\
d\uparrow & & \uparrow & & \uparrow d \\
\mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}[x]
\end{array}$$

mit dem Auswerten bei Null in der Horizontale unten rechts homotop zur Identität vermittels der Homotopie, die gegeben wird durch die Vorschrift $\delta\colon \mathbb{R}[x]\,\mathrm{d}x \to \mathbb{R}[x]$, $f(x)\,\mathrm{d}x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. In der Tat gilt ja $d\delta = \mathrm{id}$ und $f - f(0) = \delta\,\mathrm{d}f$. Unser gleich folgender Beweis des Poincaré-Lemmas im glatten Fall verläuft analog.

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Ursprung das Zentrum unserer Kreisscheibe. Sei $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ das Vergessen der ersten Koordinate. So ist $V := \pi(U) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ wieder eine offene Kreisscheibe und wir sind fertig mit Induktion, sobald wir zeigen können, daß das Zurückholen von Differentialformen

$$\pi^*\colon \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$$

Isomorphismen auf der Kohomologie induziert. Bezeichnet $i\colon \mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ das Davorschreiben einer Koordinate Null, so gilt sicher $\pi \circ i = \mathrm{id}$ und folglich $i^* \circ$

$\pi^* = \mathrm{id}$. Wir sind also fertig, wenn wir zusätzlich noch zeigen können, daß die Komposition $\pi^* \circ i^* \colon \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$ homotopieäquivalent ist zur Identität. Dazu betrachten wir $\delta \colon \Omega^*(U) \to \Omega^{*-1}(U)$ gegeben durch

$$\delta \colon \sum a_I \,\mathrm{d}x_I \mapsto \sum_{I \ni 1} (\textstyle\int a_I) \,\mathrm{d}x_{I \setminus 1}$$

Hierbei ist $(\int a)$ zu verstehen als die Funktion

$$(\textstyle\int a)(x_1, \ldots, x_n) = \displaystyle\int_0^{x_1} a(t, x_2, \ldots, x_n) \,\mathrm{d}t$$

So gilt $\mathrm{id} - \pi^* i^* = d\delta + \delta d$, wie man separat für Formen der Gestalten $a_I \,\mathrm{d}x_I$ und $b_I \,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_I$, jeweils mit $1 \notin I$, ohne größere Schwierigkeiten prüft. $\square$

19.5.4.14. Jede weiche Garbe auf einem Hausdorffraum ist kompaktweich. Die Garbe der glatten Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit ist kompaktweich: Um das zu sehen, dehnt man einen Schnitt über einer kompakten Teilmenge zunächst mithilfe von 19.4.5.2 auf eine parakompakte offene Menge aus und biegt ihn dann in dieser offenen Menge mithilfe einer glatten Partition der Eins 19.5.3.8 herunter nach Null, so daß man ihn weiter durch Null ausdehnen kann zu einem globalen Schnitt. Analog sind auch die Garben der glatten p-Formen und allgemeiner der glatten Schnitte in irgendeinem glatten Vektorraumbündel kompaktweich.

19.5.4.15. Die **kompakte de-Rham-Kohomologie** einer glatten Mannigfaltigkeit X ist definiert als die Kohomologie des Komplexes der Differentialformen mit kompaktem Träger, in Formeln

$$\mathrm{H}^q_!(X)_{\mathrm{dR}} := \mathcal{H}^q \Gamma_! \Omega_X$$

Da $\mathbb{R}_X \hookrightarrow \Omega_X$ eine Auflösung der konstanten Garbe durch kompaktweiche Garben ist und da diese $\Gamma_!$-azyklisch sind, sind unsere natürlichen Morphismen aus 19.3.2.8 Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q_!(X)_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(X; \mathbb{R}_X) = \mathrm{H}^q_!(X; \mathbb{R})_{\mathrm{garb}}$$

19.5.4.16. Die de-Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger ist Berechnungen besonders gut zugänglich. Zum Beispiel sieht man in diesem Bild unmittelbar, daß die Kohomologie mit kompaktem Träger und reellen Koeffizienten einer Mannigfaltigkeit X oberhalb der Dimension unserer Mannigfaltigkeit verschwinden muß, in Formeln

$$\mathrm{H}^q_!(X; \mathbb{R}_X) = 0 \quad \text{für } q > \dim X.$$

Beispiel 19.5.4.17. Für die Kohomologie der Zahlengerade mit kompaktem Träger und reellen Koeffizienten gilt

$$\mathrm{H}^q_!(\mathbb{R};\mathbb{R}_{\mathbb{R}}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & q=1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Tat erhalten wir mit dem Integrieren über die Zahlengerade als zweitem Pfeil eine kurze exakte Sequenz $\Gamma_!\Omega^0_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \Gamma_!\Omega^1_{\mathbb{R}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$. Man beachte, daß wir die kompakte Kohomologie der Zahlengerade mit anderen Argumenten und sogar mit beliebigen Koeffizienten bereits aus 19.4.8.17 kennen.

Übungen

Übung 19.5.4.18. Die Garbe der stetigen Funktionen auf einem parakompakten Raum mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum ist weich. Hinweis: Tietzes Erweiterungslemma 15.3.1.5 und Normalität parakompakter Räume 19.5.3.4. Dasselbe gilt für die Garbe der stetigen Schnitte in einem beliebigen Vektorraumbündel mit endlichdimensionalen Fasern.

Übung 19.5.4.19. Sei X eine parakompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathcal{H}^*(\Omega^*(X))$ der Kohomologiering der differentiellen graduierten Algebra $\Omega^*(X)$ der Differentialformen auf X. Man zeige, daß der Vergleichsisomorphismus von der de-Rham-Kohomologie zur Garbenkohomologie ein Ringhomomorphismus ist für die durch das Dachprodukt gegebene Ringstruktur auf der de-Rham-Kohomologie. Hinweis: Man orientiere sich am Beweis der entsprechenden Aussage 20.2.8.2 für die singuläre Kohomologie.

Übung 19.5.4.20 (**Funktorialität der kompakten Kohomologie und de-Rham**). Das Ausdehnen durch Null in der kompakten Kohomologie von glatten Mannigfaltigkeiten kann über das Ausdehnen durch Null von Differentialformen mit kompaktem Träger berechnet werden. Das eigentliche Zurückholen auf eine weitere Mannigfaltigkeit unter einer eigentlichen glatten Abbildung kann durch Zurückholen von Differentialformen mit kompaktem Träger berechnet werden.

Übung 19.5.4.21. Man zeige, daß unser ausgezeichneter Erzeuger von $\mathrm{H}^n_!(\mathbb{R}^n;\mathbb{Z})$ aus 19.4.9.19 in der de-Rham-Kohomologie durch eine und jede Differentialform der Gestalt $f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$ repräsentiert wird, die kompakten Träger hat und Integral Eins in Bezug auf die Standardorientierung.

19.5.5 Isomorphismus von de Rham

19.5.5.1. Der q-te Standardsimplex Δ_q ist eine halboffene Teilmenge der durch die Gleichung $\sum x_i = 1$ definierten affinen Hyperebene von $\mathbb{R}^{q+1}$ und eine glatte Eckfaltigkeit im Sinne von 12.8.7.12. Gegeben eine glatte Untermannigfaltigkeit

eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums oder allgemeiner auch eine glatte abstrakte Mannigfaltigkeit X nennen wir glatte Abbildungen $\Delta_q \to X$ auch **glatte q-Simplizes**. Wir bilden dann die Gruppe der **glatten q-Ketten** $\mathcal{C}^\infty \mathrm{S}_q X$ als die freie abelsche Gruppe über der Menge aller glatten q-Simplizes und erhalten auf diese Weise einen Unterkomplex $\mathcal{C}^\infty \mathrm{S}X \subset \mathrm{S}X$ im Komplex der singulären Ketten von X. Offensichtlich spaltet diese Einbettung in jedem Grad. Die Homologie des Komplexes der glatten Ketten notieren wir

$$\mathrm{H}_q(X)_{\text{sing-}\infty} := \mathcal{H}_q \mathcal{C}^\infty \mathrm{S}X$$

Proposition 19.5.5.2 (**Homologie mit glatten Ketten**). *Gegeben eine glatte Mannigfaltigkeit X ist die Einbettung $\mathcal{C}^\infty \mathrm{S}X \subset \mathrm{S}X$ des Komplexes der glatten Ketten in den Komplex aller singulären Ketten eine Homotopieäquivalenz und induziert insbesondere Isomorphismen*

$$\mathrm{H}_q(X)_{\text{sing-}\infty} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X)_{\text{sing}}$$

19.5.5.3. Wir verwenden analoge Notationen für relative Homologie oder Kohomologie mit glatten Ketten, auch mit Koeffizienten. Aus unserer Proposition folgen leicht analoge Aussagen in all diesen Situationen. Zum Beispiel liefern die offensichtlichen Abbildungen für jede abelsche Gruppe M Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X; M)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X; M)_{\text{sing-}\infty}$$

19.5.5.4. Man könnte ähnlich wie beim Beweis von 17.7.4.3 für diese Proposition auch einen elementaren Beweis zusammenstückeln. Das wäre aber kontraproduktiv, denn ich will ja gerade zeigen, wie die Garbentheorie derartige Konstruktionen in angenehmer Verpackung gebrauchsfertig bereitstellt.

Beweis. Da wir in Richtung der Pfeile beschränkte Komplexe freier abelscher Gruppen vor uns haben, reicht es zu zeigen, daß unsere Einbettung ein Quasiisomorphismus ist. Nun macht der Unterteilungsoperator glatte Ketten zu glatten Ketten. Wir konstruieren genau wie in 19.5.1.8 den Komplex der glatten Grenzketten $\mathcal{C}^\infty \mathrm{G}X$ und erhalten ein kommutatives Diagramm mit Quasiisomorphismen in den Vertikalen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty \mathrm{S}X & \hookrightarrow & \mathrm{S}X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}^\infty \mathrm{G}X & \hookrightarrow & \mathrm{G}X \end{array}$$

Für jede injektive abelsche Gruppe I bilden wir nun stetige und glatte Varianten mit Koeffizienten in I unserer Komplexe von Kogrenzkettengarben aus 19.5.1.19, indem wir jeder offenen Menge $U \Subset X$ als Schnitte $\mathcal{G}_{X,I}(U) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{G}U, I)$ beziehungsweise $\mathcal{C}^\infty \mathcal{G}_{X,I}(U) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}^\infty \mathrm{G}U, I)$ zuordnen. Beide Komplexe

bilden welke Auflösungen der konstanten Garbe I_X auf X, im glatten Fall nach dem im Anschluß bewiesenen Lemma 19.5.5.5. Folglich ist die auf den globalen Schnitten induzierte Abbildung ein Quasiisomorphismus. Da das für alle I gilt, muß auch die obere Horizontale unseres Diagramms ein Quasiisomorphismus sein, und dann gilt dasselbe für die untere Horizontale. □

Lemma 19.5.5.5. *Für jede glatte Mannigfaltigkeit X und jede injektive abelsche Gruppe I ist der augmentierte Komplex $I_X \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty\mathcal{G}^*_{X,I}$ der glatten Kogrenzkettengarben mit Koeffizienten in I eine exakte Sequenz von Garben.*

Beweis. Das muß nur auf dem Halm an jeder Stelle $x \in X$ gezeigt werden. Für $U \Subset \mathbb{R}^n$ nicht leer und konvex ist die Sequenz $\mathcal{C}^\infty \mathrm{S}U \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ exakt: Das folgert man wie für die singuläre Homologie in 17.1.2.17 durch die Konstruktion eines Prismenoperators, und wir haben bereits in 17.1.2.18 erklärt, wie man einen Prismenoperator konstruiert, der glatte Ketten zu glatten Ketten macht. Durch Übergang zum Kolimes erkennen wir aus der Exaktheit filtrierender Kolimites 17.7.1.18, daß auch $\mathcal{C}^\infty \mathrm{G}U \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ exakt ist. Durch Anwenden von $\mathrm{Hom}(\ \ , I)$ folgt, daß $I \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty\mathcal{G}^*_{X,I}(U)$ exakt ist. Da es nach 17.7.1.22 nicht darauf ankommt, ob wir den direkten Limes über alle offenen Umgebungen von x oder nur über alle diejenigen Umgebungen von x bilden, die diffeomorph sind zu konvexen offenen Teilmengen eines $\mathbb{R}^n$, folgt die behauptete Exaktheit aus der Exaktheit filtrierender Kolimites 17.7.1.18. □

19.5.5.6. Der q-te Standardsimplex Δ_q ist in der affinen Hyperebene von $\mathbb{R}^{q+1}$, die durch die Gleichung $\sum x_i = 1$ definiert wird, eine kompakte Eckfaltigkeit 12.8.7.12. Wir versehen unsere Hyperebene mit der Orientierung, die sie als Rand der berandeten Untermannigfaltigkeit, die durch die Gleichung $\sum x_i \leq 1$ definiert wird, von der Standardorientierung des $\mathbb{R}^{q+1}$ erbt, und bezeichnen die induzierte Orientierung auf dem regulären Teil von Δ_q als die **Standardorientierung des Standardsimplex**. Ist dann X eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums oder allgemeiner eine glatte abstrakte Mannigfaltigkeit und ω eine stetige q-Form auf X und $\sigma : \Delta_q \to X$ ein glatter q-Simplex, so setzen wir

$$\int_\sigma \omega \quad = \quad \int_{\vec{\Delta}_q} \sigma^*\omega$$

Diese Abbildung setzt sich linear fort und liefert einen Homomorphismus von abelschen Gruppen

$$\mathrm{int} : \Omega^q X \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}^\infty \mathrm{S}_q X, \mathbb{R})$$

Der Satz von Stokes mit Ecken 12.8.7.19 oder, vielleicht einfacher, eine explizite an unseren Spezialfall angepaßte Rechnung zeigt dann, daß die Familie dieser Homomorphismen für $q \in \mathbb{Z}$ eine Kettenabbildung ist.

Satz 19.5.5.7 (Isomorphismus von de Rham). *Gegeben eine parakompakte glatte Mannigfaltigkeit X liefert das Integrieren von glatten Formen über glatte Ketten* $\mathrm{int} : \Omega^* X \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}^\infty \mathrm{S}X, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty \mathrm{S}^*(X;\mathbb{R})$ *auf der Kohomologie Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^q(X)_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\text{sing-}\infty}$$

19.5.5.8. Aus dem Beweis folgt zusätzlich, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^q(X)_{\mathrm{dR}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\text{sing-}\infty} \\
\mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\mathrm{garb}} & \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\mathrm{sing}} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

mit dem Isomorphismus aus dem Satz in der oberen Horizontale und den bereits konstruierten anderen Isomorphismen an den anderen drei Seiten isomorphiekommutiert in dem Sinne, daß einmal im Kreis herumgehen mit besagten Isomorphismen oder ihren Inversen an jeder Stelle die Identität liefert.

Beweis. Das Integral einer Form über eine glatte Kette ist offensichtlich dasselbe wie das Integral unserer Form über jede Unterteilung unserer Kette. Folglich faktorisiert unsere Kettenabbildung über die globalen Schnitte der Kogrenzkomplexe mit reellen Koeffizienten als

$$\Omega^* X \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}^\infty \mathrm{G}X, \mathbb{R}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}^\infty \mathrm{S}X, \mathbb{R})$$

Die erste Abbildung ist der Effekt auf den globalen Schnitten von einem Morphismus zwischen den beiden Auflösungen der konstanten Garbe $\mathbb{R}_X$ durch den de-Rham-Komplex $\mathbb{R}_X \hookrightarrow \Omega_X^{\lhd}$ aus 19.5.4.9 und den glatten Kogrenzkomplex $\mathbb{R}_X \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty \mathcal{G}_{X,\mathbb{R}}$ aus 19.5.5.5, die beide aus Γ-azyklischen Garben bestehen, und induziert folglich Isomorphismen auf der Kohomologie. Andererseits induziert die zusätzlich angehängte Abbildung aufgrund der Exaktheit filtrierender Kolimites und der Exaktheit von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\ ,\mathbb{R})$ ebenfalls Isomorphismen auf der Kohomologie. Der Satz folgt. □

Satz 19.5.5.9 (de Rham für kompakte Kohomologie). *Gegeben eine glatte Mannigfaltigkeit X induziert die Integration von kompakt getragenen Formen über glatte Ketten Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^q_!(X)_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(X;\mathbb{R})_{\text{sing-}\infty}$$

19.5.5.10. Der Beweis zeigt zusätzlich, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^q_!(X)_{\mathrm{dR}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{H}^q_!(X;\mathbb{R})_{\text{sing-}\infty} \\
\mathrm{H}^q_!(X;\mathbb{R})_{\mathrm{garb}} & \mathrm{H}^q_!(X;\mathbb{R})_{\mathrm{sing}} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

mit dem Homomorphismus aus dem Satz in der oberen Horizontale und den bereits konstruierten Isomorphismen an den anderen drei Seiten isomorphie-kommutiert in dem Sinne, daß einmal-im-Kreis-herumgehen mit unseren Isomorphismen und ihren Inversen an jeder Stelle die Identität liefert.

Beweis. Wir gehen wir aus vom Morphismus von Auflösungen durch $\Gamma_!$-azyklische Objekte

$$\Omega_X \to \mathcal{C}^\infty \mathcal{G}_{X,\mathbb{R}}$$

der konstanten Garbe $\mathbb{R}_X$ vermittels der Integration von Formen über Ketten aus dem Beweis des Satzes von de Rham 19.5.5.7. Er muß einen Quasiisomorphismus

$$\Gamma_! \Omega_X^{\lhd} \xrightarrow{\sim} \Gamma_! \mathcal{C}^\infty \mathcal{G}_{X,\mathbb{R}}$$

induzieren. Andererseits erhalten wir wie im Beweis von 19.5.1.21 einen Quasiisomorphismus

$$\operatorname{colf}_K \operatorname{Hom}(\mathcal{C}^\infty \mathrm{S}(X, X \backslash K), \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \Gamma_! \mathcal{C}^\infty \mathcal{G}_{X,\mathbb{R}}$$

Unser erster Quasiisomorphismus faktorisiert nun über den Zweiten vermittels einer ebenfalls durch Integration von Formen über glatte Ketten gegebenen Kettenabbildung, die folglich auch ein Quasiisomorphismus

$$\Gamma_! \Omega_X^{\lhd} \xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_K \operatorname{Hom}(\mathcal{C}^\infty \mathrm{S}(X, X \backslash K), \mathbb{R})$$

sein muß. Der Satz folgt durch Übergang zur Kohmologie. □

19.5.6 Čech-Kohomologie auf parakompakten Räumen*

Satz 19.5.6.1. *Auf parakompakten Räumen ist unser Homomorphismus 19.4.7.3 von der Čech-Kohomologie zur Garbenkohomologie stets ein Isomorphismus.*

Beweis. Für welke Garben $\mathcal{F}$ auf einem beliebigen Raum X ist dieser Homomorphismus stets ein Isomorphismus, denn der vergarbte Čech-Komplex 19.4.7.2 besteht dann für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ auch aus welken Garben, seine globalen Schnitte bilden also eine Auflösung unserer ursprünglichen Garbe und wir erhalten $\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X; \mathcal{F})$ für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ und dann auch im Limes. Es reicht also, wenn wir auf parakompakten Räumen zu jeder kurzen exakten Sequenz von Garben eine lange exakte Sequenz für die Čech-Kohomologie konstruieren derart, daß die natürlichen Morphismen aus 19.4.7.3 einen Morphismus dieser langen exakten Sequenz in die langen exakten Sequenz der Garbenkohomologie bilden. Zunächst beachten wir dazu, daß der Čech-Komplex einer abelschen Garbe auch für jede nicht notwendig offene Überdeckung $\mathcal{U}$ sinnvoll

definiert ist, und daß für zwei Überdeckungen $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ derart, daß jede Menge aus $\mathcal{U}$ in einer Menge aus $\mathcal{V}$ enthalten ist, unser Argument aus 19.1.4.1 immer noch Isomorphismen

$$\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{V};\mathcal{F})$$

liefert. Nach dem Satz zum Schrumpfen offener Überdeckungen 19.5.3.6 sind lokal endliche abgeschlossene Überdeckungen $\mathcal{A}$ von X, deren offene Kerne auch überdecken, konfinal. Jede kurze exakte Sequenz abelscher Garben $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ induziert nun, wie wir uns gleich überlegen, kurze exakte Sequenzen der wie in 19.4.7.2 erklärten vergarbten Čech-Koketten

$$\mathcal{C}^q(\mathcal{A};\mathcal{F}') \hookrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{A};\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{A};\mathcal{F}'')$$

Die Exaktheit ist ja nur auf den Halmen zu prüfen, und diese Halme können leicht explizit angegeben werden, da $\mathcal{A}$ eine lokal endliche abgeschlossene Überdeckung ist. Nehmen wir globale Schnitte und gehen zum Kolimes über alle $\mathcal{A}$ über, so erhalten wir, wie wir uns gleich überlegen, eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\check{\mathrm{C}}^q(X;\mathcal{F}') \hookrightarrow \check{\mathrm{C}}^q(X;\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \check{\mathrm{C}}^q(X;\mathcal{F}'')$$

Der Punkt ist hierbei, sich zu überlegen, daß jeder globale Schnitt ganz rechts nach geeigneter Verfeinerung der lokal abgeschlossenen Überdeckung von der Mitte herkommt. Indem wir die zugehörige lange exakte Homologiesequenz bilden, haben wir jeder kurzen exakten Sequenz von abelschen Garben eine lange exakte Sequenz ihrer Čech-Kohomologiegruppen zugeordnet, und die Konstruktion zeigt, daß unsere natürlichen Morphismen 19.4.7.2 in die gewöhnlichen Garbenkohomologiegruppen Morphismen von langen exakte Kohomologiesequenzen liefern. □

Definition 19.5.6.2. Wir sagen, eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem Raum X **erlaubt das Verkleben von Schnitten**, wenn gegeben ein System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von offenen Teilmengen von X mit Vereinigung $V = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$ und gegeben für alle $U \in \mathcal{U}$ Schnitte $s_U \in \mathcal{F}(U)$ mit

$$s_U|_{U\cap W} = s_W|_{U\cap W} \quad \forall\, U, W \in \mathcal{U}$$

es stets einen Schnitt auf der Vereinigung $s \in \mathcal{F}(V)$ gibt mit $s|_U = s_U$ für alle $U \in \mathcal{U}$. Der Unterschied zu einer Garbe besteht nur darin, daß der Schnitt s auf der Vereinigung durch die s_U nicht eindeutig bestimmt sein muß.

Proposition 19.5.6.3. *Erlaubt eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem parakompakten Raum das Verkleben von Schnitten und gilt $|\mathcal{F}(\emptyset)| = 1$, so gehen die globalen Schnitte unserer Prägarbe surjektiv auf die globalen Schnitte ihrer Garbifizierung, in Formeln*

$$\Gamma\mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma\mathcal{F}^+$$

Beweis. Sei $s \in \Gamma\mathcal{F}^+$ ein globaler Schnitt der Garbifizierung. Sicher finden wir eine lokal endliche Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ und $\tilde{s}_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\tilde{s}_i \mapsto s|U_i$ für alle $i \in I$. Für jedes $x \in X$ finden wir nun eine offene Umgebung $W(x)$ mit $x \in U_i \Rightarrow W(x) \subset U_i$ so, daß für alle i mit $x \in U_i$ die $\tilde{s}_i$ zu demselben Schnitt $\tilde{s}_{(x)} \in \mathcal{F}(W(x))$ einschränken. Mit einem solchen $W(x)$ tut es natürlich auch jedes kleinere. Wir wollen die $W(x)$ nun zusätzlich so klein wählen, daß $W(x) \cap W(y) \neq \emptyset$ nur möglich ist, wenn es einen Index i gibt mit $W(x), W(y) \subset U_i$. Für die so verkleinerten $W(x)$ stimmen dann nämlich $\tilde{s}_{(x)}$ und $\tilde{s}_{(y)}$ jeweils auf $W(x) \cap W(y)$ überein, da sie je von demselben Schnitt über einem U_i herkommen, und verkleben folglich zum gesuchten globalen Schnitt $\tilde{s} \in \Gamma\mathcal{F}$ mit $\tilde{s} \mapsto s$. Um unsere $W(x)$ hinreichend zu verkleinern, wählen wir zunächst eine Schrumpfung V_i unserer Überdeckung nach 19.5.3.6. Für jedes $x \in X$ verkleinern wir als nächstes unser $W(x)$ so weit, daß zusätzlich gilt $x \notin \bar{V}_i \Rightarrow W(x) \cap V_i = \emptyset$. Das impliziert insbesondere, daß für Punkte $x \notin U_i$ gilt $W(x) \cap V_i = \emptyset$, für Punkte $x \notin U_i$ trifft also $W(x)$ das entsprechende U_i salopp gesprochen höchstens im „Randbereich“ $U_i \backslash V_i$. Und dann folgt aus $W(x) \cap W(y) \neq \emptyset$ in der Tat bereits, daß es einen Index i gibt mit $W(x), W(y) \subset U_i$, denn zum Beispiel tut es jeder Index i mit $W(x) \cap W(y) \cap V_i \neq \emptyset$, weil für solch einen Index notwendig gilt $x, y \in \bar{V}_i \subset U_i$. □

Korollar 19.5.6.4. *Für jeden parakompakten Raum X liefern die kanonischen Abbildungen Surjektionen* $\mathrm{S}^q X \twoheadrightarrow \Gamma\mathcal{S}^q_X$.

Beweis. Offensichtlich erlaubt für jedes $q \geq 0$ die Prägarbe $U \mapsto \mathrm{S}^q(U)$ das Verkleben von Schnitten. Das Korollar folgt damit aus 19.5.6.3. □

Lemma 19.5.6.5. *Für jeden parakompakten Raum X liefern die kanonischen Abbildungen Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{sing}} X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{S}^*_X$$

19.5.6.6. Aus 19.5.6.4 folgt, daß $\mathcal{S}^*_X$ für X parakompakt ein Komplex aus welken Garben ist. Nehmen wir zusätzlich X lokal singulär-azyklisch an, so ist leicht zu sehen, daß $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}^*_X$ eine welke und somit Auflösung der konstanten Garbe durch Γ-azyklische Garben ist. Unseren Erkenntnisse 19.3.6.7 zur Berechnung derivierten Funktoren durch Auflösungen aus azyklischen Objekten liefert dann natürliche Isomorphismen $\mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{S}^*_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X; \mathbb{Z}_X)$ und so zusammen mit 19.5.6.5 einen alternativen Beweis des Vergleichssatzes 21.6.7.2 für parakompakte Räume.

Beweis. Wir vervollständigen unsere Surjektionen aus 19.5.6.3 zu einer kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen

$$K^* \hookrightarrow \mathrm{S}^* X \twoheadrightarrow \Gamma\mathcal{S}^*_X$$

Mit der langen exakten Homologiesequenz reicht es zu zeigen, daß K^* exakt ist. Aber liegt ein Kozykel $s \in \mathrm{S}^* X$ im Kern der Surjektion, so gibt es eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X derart, daß s verschwindet auf den $\mathcal{U}$-feinen Ketten, so daß s schon im Kern $K^*_{\mathcal{U}}$ der Surjektion $\mathrm{S}^* X \twoheadrightarrow \mathrm{S}^*_{\mathcal{U}} X$ liegt. Diese Surjektion induziert aber Isomorphismen auf der Kohomologie nach dem Satz über feine Ketten 17.2.4.7, folglich ist ihr Kernkomplex exakt, folglich gibt es sogar $r \in K^*_{\mathcal{U}}$ mit $\partial r = s$, und folglich ist unser Kozykel s ein Korand. $\square$

19.6 Faserungen und Basiswechsel

19.6.1 Fasern eines Funktors

Definition 19.6.1.1. Seien $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ Garben von Mengen. Ein **Garbenmorphismus über** f ist eine stetige Abbildung $\varphi : \bar{\mathcal{F}} \to \bar{\mathcal{G}}$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{F}} & \to & \bar{\mathcal{G}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y \end{array}$$

kommutiert. Die Menge der Garbenmorphismen über einer vorgegebenen stetigen Abbildung f notieren wir $\mathrm{Ens}_{/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Definition 19.6.1.2 (**Mengengarbenfaserung**)**.** Wir erklären die Kategorie $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}}$ aller Paare $(X, \mathcal{F})$ bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe von Mengen $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ auf X. Gegeben Objekte $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ erklären wir einen Morphismus als ein Paar (f, φ) bestehend aus einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ und einem Garbenmorphismus $\varphi : \bar{\mathcal{F}} \to \bar{\mathcal{G}}$ über f. Die Verknüpfung von Morphismen ist die offensichtliche. Das Vergessen der Garbe ist ein Funktor

$$\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$$

Definition 19.6.1.3. Sei $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Funktor. Gegeben ein Objekt $X \in \mathscr{B}$ erklärt man die **Faser von** p **über** X als die Unterkategorie $\mathscr{C}_X \subset \mathscr{C}$ mit Objekten $\mathscr{C}_X := \{\mathcal{E} \in \mathscr{C} \mid p\mathcal{E} = X\}$ und Morphismen denjenigen Morphismen von $\mathscr{C}$, die über der Identität von X liegen, in Formeln

$$\mathscr{C}_X(\mathcal{E}, \mathcal{F}) := \{\alpha \in \mathscr{C}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \mid p(\alpha) = \mathrm{id}_X\}$$

Vorschau 19.6.1.4 (**Die Faser vom höheren Standpunkt**)**.** Gegeben die terminale Kategorie cat mit einem Objekt und einem Morphismus ist die Faser ein Faserprodukt $\mathrm{cat} \times_{\mathscr{B}} \mathscr{C}$ in der Kategorie Cat der Kategorien, zu verstehen in Bezug auf den durch das Objekt X gegebenen Funktor $\mathrm{cat} \to \mathscr{B}$.

Beispiel 19.6.1.5. Für jeden Monoidhomomorphismus $\varphi : G \to H$ ist die Faser des Funktors $[\varphi] : [G] \to [H]$ der zugehörigen Ein-Objekt-Kategorien die Ein-Objekt-Kategorie $[\ker \varphi]$.

Beispiel 19.6.1.6. Sei $\mathscr{B}$ irgendeine Kategorie und $\mathscr{C} := \mathscr{C}^{\downarrow} = \mathrm{Car}(\downarrow, \mathscr{B})$ die Kategorie aller Darstellungen im Sinne von 4.7.6.4 des Köchers $\downarrow$ mit zwei Punkten und einem Pfeil vom einen zum anderen in $\mathscr{B}$ und $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ der Funktor, der jedem Morphismus sein Ziel zuordnet. So ist die Faser $\mathscr{C}_X$ über $X \in \mathscr{B}$ gerade unsere Kategorie $\mathscr{B}_X$ aller Objekte von $\mathscr{B}$ über X aus 16.2.2.2.

Beispiel 19.6.1.7. Sei $\mathscr{B} = \mathrm{Top}$ die Kategorie der topologischen Räume und $\mathscr{C} = \text{Ét}$ die Kategorie mit étale Abbildungen $(p : \tilde{X} \to X)$ als Objekten und Morphismen Paaren $\alpha = (\tilde{f}, f)$ stetiger Abbildungen derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & \tilde{Y} \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert. In anderen Worten ist $\text{Ét} \subset \mathrm{Top}^{\downarrow}$ die volle Unterkategorie aller étalen Morphismen. Betrachten wir in dieser Situation den Funktor $P : \text{Ét} \to \mathrm{Top}$ gegeben durch $(p : \tilde{X} \to X) \mapsto X$, so besteht die Faser über X aus allen étalen Morphismen nach X, mit Decktransformationen im Sinne von 16.3.4.9 als Morphismen.

Beispiel 19.6.1.8. Die Faser $(\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}})_X$ unserer Garbenfaserung $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ aus 19.6.1.2 über einem topologischen Raum X ist isomorph zur Kategorie $\mathrm{Ens}_{/X}$ der Garben über X vermittels des Funktors, der jedem Garbenhomomorphismus die davon induzierte Decktransformation zwischen den étalen Räumen unserer Garben zuordnet.

19.6.1.9. In derselben Weise definieren wir Morphismen von abelschen Garben über einer vorgegebenen stetigen Abbildung und die zugehörige Kategorie $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Top}}$ von abelschen Garben auf topologischen Räumen mit dem natürlichen Funktor

$$\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$$

19.6.2 Kartesische Morphismen und Faserfunktoren

19.6.2.1. Gegeben ein Funktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ und Objekte $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathscr{C}$ und ein Morphismus $f \in \mathscr{B}(p\mathcal{F}, p\mathcal{G})$ setzen wir

$$\mathscr{C}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \{\xi \in \mathscr{C}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \mid p(\xi) = f\}$$

und nennen die Elemente dieser Menge **Morphismen über** f. Die Morphismen über der Identität $f = \mathrm{id}_X$ eines Objekts $X \in \mathscr{B}$ sind also genau die Morphismen in der Faser über X unseres Funktors, in Formeln $\mathscr{C}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathscr{C}_{\mathrm{id}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Definition 19.6.2.2. Gegeben ein Funktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ heißt ein Morphismus $\kappa : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in $\mathscr{C}$ **kartesisch** oder genauer p**-kartesisch**, wenn mit der Notation $f : X \to Y$ für sein Bild unter p für jedes Objekt $\mathcal{E} \in \mathscr{C}_X$ das Nachschalten von κ eine Bijektion $(\kappa\circ) : \mathscr{C}_X(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_f(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ induziert.

Beispiel 19.6.2.3. Ein Morphismus (f, φ) in $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}}$ ist kartesisch für unseren Funktor des Vergessens der Garbe $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ genau dann, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{E}} & \to & \bar{\mathcal{G}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y \end{array}$$

kartesisch ist in der Kategorie der topologischen Räume.

Beispiel 19.6.2.4 (**Herkunft der Terminologie**). Sei $\mathscr{B}$ irgendeine Kategorie und $\mathscr{C} := \mathscr{B}^{\downarrow}$ die Kategorie aller Darstellungen des Köchers $\downarrow$ mit zwei Punkten und einem Pfeil vom einen zum anderen in $\mathscr{B}$ im Sinne von 4.7.6.4. Denken wir uns den einzigen Pfeil unseres Köchers wie angedeutet „vertikal“, so sind Objekte von $\mathscr{C}$ „vertikale“ Morphismen in $\mathscr{B}$ und Morphismen in $\mathscr{C}$ Paare von „horizontalen“ Morphismen in $\mathscr{B}$ derart, daß mit den gegebenen vertikalen Morphismen kommutative Quadrate entstehen. Ist schließlich $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ der Funktor, der jedem Morphismus sein Ziel zuordnet, so sind die p-kartesischen Morphismen in $\mathscr{C}$ genau diejenigen Morphismen, die kartesischen Quadraten entsprechen.

Definition 19.6.2.5. Ein Funktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ heißt ein **Faserfunktor** oder gleichbedeutend eine **Faserung**, wenn gilt:

1. Zu jedem Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathscr{B}$ und jedem $\mathcal{G} \in \mathscr{C}_Y$ existiert ein kartesischer Lift $\kappa : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von f, der wie angedeutet in $\mathcal{G}$ landet;

2. Die Verknüpfung von je zwei kartesischen Morphismen ist kartesisch.

Beispiel 19.6.2.6. Sei $\mathscr{B}$ eine Kategorie. Unser Funktor $p : \mathscr{B}^{\downarrow} \to \mathscr{B}$ aus 19.6.2.4 ist genau dann ein Faserfunktor, wenn sich in $\mathscr{B}$ jeder Winkel zu einem kartesischen Diagramm ergänzen läßt.

Beispiel 19.6.2.7. Unsere Mengengarbenfaserung $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ aus 19.6.1.2 ist ein Faserfunktor. Dasselbe gilt für den Funktor $\mathrm{Ab}_{/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$. aus 19.6.1.9. Analoges gilt weiter für Garben von Moduln über einem festen Ring und für Garben von Ringen.

Beispiel 19.6.2.8. Eine Trennkategorie hat genau dann stabil universelle Trennungen, wenn ihr Trennfunktor zur terminalen Trennkategorie eine Faserung auf den Familienkategorien induziert.

Beispiel 19.6.2.9. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ bezeichne $\mathrm{p}\mathcal{C}_{/\mathrm{Top}^{\mathrm{opp}}}$ die Kategorie aller Paare $(X, \mathcal{F})$ aus einem topologischen Raum X und einer $\mathcal{C}$-Prägarbe $\mathcal{F} \in \mathrm{p}\mathcal{C}_{/X}$ darauf, mit Komorphismen als Morphismen. Das Vergessen der Garbe ist dann eine Faserung

$$\mathrm{p}\mathcal{C}_{/\mathrm{Top}^{\mathrm{opp}}} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{opp}}$$

Gegeben $f : X \to Y$ ist weiter der kanonische Komorphismus $f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ kartesisch über f° für unseren Funktor.

19.6.2.10. Gegeben ein Funktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ heißt ein Morphismus κ in $\mathscr{C}$ **kokartesisch**, wenn κ° kartesisch ist für den Funktor $p^{\mathrm{opp}} : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$. Ausgeschrieben ist also $\kappa : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ kokartesisch, wenn mit der Notation $f : X \to Y$ für sein Bild unter p gilt, daß für jedes Objekt $\mathcal{H} \in \mathscr{C}_Y$ das Vorschalten von κ eine Bijektion

$$(\circ\kappa) : \mathscr{C}_Y(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_f(\mathcal{F}, \mathcal{H})$$

induziert. Ein Funktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ heißt ein **Kofaserfunktor** oder gleichbedeutend eine **Kofaserung**, wenn der induzierte Funktor $p^{\mathrm{opp}} : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$ ein Faserfunktor ist.

19.6.2.11. Einen Komorphismus $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ nennen wir auch einen **Opkomorphismus von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$** und notieren diesen Opkomorphismus $\phi^\circ : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Wir erhalten so Kategorien

$$\mathrm{p}\mathcal{C}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \supset \mathcal{C}_{/\!/\,\mathrm{Top}}$$

mit Objekten Paaren $(X, \mathcal{F})$ aus einem topologischen Raum X und einer $\mathcal{C}$-wertigen Prägarbe beziehungsweise Garbe $\mathcal{F}$ auf unserem Raum X und Morphismen Paaren $(f, \eta) : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ aus einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ und einem Opkomorphismus $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ darüber. Das Vergessen der Prägarbe ist dann ein Funktor

$$\mathrm{p}\mathcal{C}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$$

Die Menge aller Opkomorphismen über f von einer Prägarbe $\mathcal{F}$ in eine Prägarbe $\mathcal{G}$ notieren wir $\mathrm{p}\mathcal{C}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ und im Fall von Garben $\mathcal{C}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Wir notieren $\mathcal{C}_{/\!/X} := \mathcal{C}_{/X}^{\mathrm{opp}}$ die zur Kategorie der Garben auf X opponierte Kategorie und haben damit insbesondere $\mathcal{C}_{/\!/X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathcal{C}_{/\!/\,\mathrm{id}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Beispiel 19.6.2.12. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ sind unsere Funktoren $\mathrm{p}\mathcal{C}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ und $\mathcal{C}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ aus 19.6.2.11 Kofaserfunktoren. Sie entstehen durch Opponieren aus den Faserfunktoren 19.6.2.9 nach $\mathrm{Top}^{\mathrm{opp}}$. Ein Morphismus alias Opkomorphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ über einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ ist dabei genau dann kokartesisch, wenn er Isomorphismen von abelschen Gruppen $\mathcal{G}(V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ alias einen Isomorphismus von Garben $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_*\mathcal{F}$ induziert. Ich nenne diese Kofaserfunktoren die **Opkofaserung der $\mathcal{C}$-Prägarben** beziehungsweise die **Opkofaserung der $\mathcal{C}$-Garben**. Die Fasern dieser Funktoren sind opponierte Kategorien von $\mathcal{C}$-Prägarben beziehungsweise $\mathcal{C}$-Garben.

19.6.2.13 (**Der Fall diskreter Räume**). Jede Menge X ist auch ein diskreter topologischer Raum und eine diskrete Kategorie. In diesem Fall haben wir einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Ens}_{/X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(X, \mathrm{Ens})$ und gegeben $f : X \to Y$ mit Y ebenfalls diskret haben wir

$$\mathrm{Ens}_{/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(X, \mathrm{Ens})(\mathcal{F}, \mathcal{G} \circ f)$$

Ein Morphismus über von Mengengarben über f entspricht also einer Transformation der zugehörigen Funktoren $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \circ f$. Ebenso haben wir eine natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Ens}_{/\!/X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(X, \mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}})$ und eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(X, \mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}})(\mathcal{F}, \mathcal{G} \circ f)$$

Beispiel 19.6.2.14. Eine Schmelzkategorie hat genau dann stabil universelle Verschmelzungen im Sinne von 18.1.3.2, wenn ihr Schmelzfunktor zur terminalen Schmelzkategorie eine Kofaserung auf den Familienkategorien induziert.

19.6.2.15. Ein Funktor heißt ein **Bifaserfunktor** oder gleichbedeutend eine **Bifaserung**, wenn er sowohl ein Faserfunktor als auch ein Kofaserfunktor ist.

Beispiel 19.6.2.16 (**Modulbifaserung**). Bezeichne $\mathrm{Mod}_{\mathrm{Ring}}$ die Kategorie, deren Objekte Paare (A, M) aus einem Ring A und einem A-Modul M sind. Morphismen $(A, M) \to (B, N)$ erklären wir als Paare (φ, ψ) bestehend aus einem Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ und einem Homomorphismus $\psi : M \to N$ der unseren Moduln zugrundeliegenden additiven Gruppen derart, daß gilt $\psi(am) = \varphi(a)\psi(m)\ \forall a \in A, m \in M$. Der Funktor

$$\mathrm{Mod}_{\mathrm{Ring}} \to \mathrm{Ring}$$

des Vergessens des Moduls ist dann eine Bifaserung. Kokartesisch über einem Ringhomomorphismus $A \to B$ ist jeder Morphismus der Gestalt $M \to B \otimes_A M$ gegeben durch $m \mapsto 1 \otimes m$, kartesisch die Identität $\mathrm{res}^A_B(N) \to N$ auf der zugrundeliegenden abelschen Gruppe für jeden B-Modul N.

Beispiel 19.6.2.17. In 19.6.2.12 hatten wir für eine beliebige Kategorie $\mathcal{C}$ die Opkofaserung $\mathcal{C}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ der $\mathcal{C}$-Garben eingeführt. Für Garben von Mengen oder abelschen Gruppen sind unsere Opkofaserungen $\mathrm{Ens}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ und $\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ aus 19.6.2.12 sogar Bifaserungen und ein Opkomorphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ über f ist genau dann kartesisch, wenn er einen Isomorphismus $f^*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ induziert. Ich nenne diese Funktoren die **Garbenopfaserung** von Mengengarben beziehungsweise abelschen Garben. Die Fasern dieser Garbenopfaserungen sind opponiert zu unseren üblichen Kategorien von Garben.

Vorschau 19.6.2.18. In meinen Augen ist die Garbenfaserung $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ besonders anschaulich und die Garbenopfaserung $\mathrm{Ens}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ algebraisch besonders übersichtlich. Diese beiden Faserfunktoren bestimmen sich gegenseitig, genauer gehen sie durch „Oppinvertieren“ auseinander hervor, wie wir in 19.8.4.8 und 19.8.4.11 ausführen werden. Allerdings ist nur der zweite eine Bifaserung.

Übungen

Übung 19.6.2.19. Sei $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Funktor. Ein Morphismus $\kappa : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in $\mathscr{C}$ heißt **stark kartesisch**, wenn für alle Objekte $\mathcal{E} \in \mathscr{C}$ und alle Morphismen

$g : p\mathcal{E} \to p\mathcal{F}$ in $\mathscr{B}$ das Nachschalten von κ eine Bijektion

$$(\kappa\circ) : \mathscr{C}_g(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_{p(\kappa)\circ g}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$$

induziert. Man zeige, daß jede Verknüpfung stark kartesischer Morphismen wieder stark kartesisch ist. Man zeige weiter, daß ein Funktor genau dann ein Faserfunktor ist, wenn jeder Morphismus in der Bildkategorie einen stark kartesischen Lift besitzt, und daß dann alle kartesischen Morphismen sogar stark kartesisch sind. Man zeige auch: Ist $\beta\alpha$ kartesisch und β stark kartesisch, so ist α kartesisch.

Übung 19.6.2.20 (**Verknüpfung von Faserfunktoren**). Gegeben seien Funktoren $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ und $q : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$. Gegeben ein Morphismus κ in $\mathscr{C}$ mit $p(\kappa)$ stark q-kartesisch ist κ genau dann stark qp-kartesisch, wenn es stark p-kartesisch ist. Die Verknüpfung von Faserfunktoren ist auch selbst ein Faserfunktor.

Übung 19.6.2.21. Seien $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Funktor und κ ein Morphismus in $\mathscr{C}$. Ist $p(\kappa)$ ein Isomorphismus, so ist κ genau dann kartesisch, wenn es selbst ein Isomorphismus ist.

Übung 19.6.2.22. Gegeben ein Faserfunktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ zeige man, daß auch der auf den Morphismenkategorien induzierte Funktor $p^{\downarrow} : \mathscr{C}^{\downarrow} \to \mathscr{B}^{\downarrow}$ ein Faserfunktor ist und daß ein Morphismus genau dann kartesisch ist, wenn er objektweise kartesisch ist.

Ergänzende Übung 19.6.2.23. Gegeben ein Funktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ und eine Unterkategorie $\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$ erklären wir das **Urbild von** $\mathscr{U}$ als die Kategorie $p^{-1}(\mathscr{U}) = \mathscr{C}_{\mathscr{U}} = \mathscr{C}|\mathscr{U}$ aller Objekte von $\mathscr{C}$, die unter p zu Objekten aus $\mathscr{U}$ werden, mit den Morphismen, die unter p zu Morphismen aus $\mathscr{U}$ werden. Man zeige, daß mit p auch der induzierte Funktor $p_{\mathscr{U}} : \mathscr{C}_{\mathscr{U}} \to \mathscr{U}$ ein Faserfunktor beziehungsweise Kofaserfunktor ist. Diesen Funktor nennen wir die **Rückzug von** p **auf** $\mathscr{U}$.

Übung 19.6.2.24 (**Familienfaserung**). Jede Menge X können wir als eine diskrete Kategorie auffassen. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ bezeichnen wir dann mit

$$\mathcal{C}_{/X} := \mathrm{Cat}(X, \mathcal{C})$$

die Funktorkategorie. Ihre Objekte sind durch $x \in X$ indizierte Familien $(\mathcal{F}_x)_{x\in X}$ von Objekten von $\mathcal{C}$. Gegeben eine Abbildung in eine weitere Menge $f : X \to Y$ und $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathcal{C}_{/Y}$ erklären wir einen **Morphismus über** f **von** $\mathcal{F}$ **nach** $\mathcal{G}$ als eine Transformation $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \circ f$ alias eine Familie von Morphismen $(\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_{f(x)})_{x\in X}$ und setzen also in Formeln

$$\mathcal{C}_{/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \mathrm{Cat}(X, \mathcal{C})(\mathcal{F}, \mathcal{G} \circ f)$$

Man zeige, daß wir so einen Faserfunktor $\mathcal{C}_{/\mathrm{Ens}} \to \mathrm{Ens}$ erhalten. Wir nennen ihn die **Familienfaserung zu** $\mathcal{C}$.

19.6.3 Rückzug, Vorschub, Basiswechsel

Definition 19.6.3.1 (Rückzug von Objekten und Morphismen). Seien $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Funktor, $f : X \to Y$ ein Morphismus in der Basis $\mathscr{B}$ und $\mathcal{G} \in \mathscr{C}_Y$ ein Objekt über Y.

1. Sind $\kappa : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ und $\kappa' : \mathcal{E}' \to \mathcal{G}$ kartesische Morphismen über f mit demselben Ziel, so gibt es genau einen Morphismus $\iota \in \mathscr{C}_X(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ mit $\kappa' \circ \iota = \kappa$, und dieser Morphismus ist ein Isomorphismus. Das Paar $(\mathcal{E}, \kappa)$ ist also durch $\mathcal{G}$ eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Es verdient deshalb den bestimmten Artikel und eine Notation. Wir bezeichnen unser Paar $(\mathcal{E}, \kappa)$, wenn es denn existiert, mit $(f^\dagger\mathcal{G}, \kappa_\mathcal{G})$, und nennen $f^\dagger\mathcal{G}$ das **mit f zurückgezogene Objekt** und $\kappa = \kappa_\mathcal{G}$ seinen **Transportmorphismus**.

2. Ist $\mathcal{G}' \in \mathscr{C}_Y$ ein weiteres Objekt über Y, das sich vermittels f zurückziehen läßt, so gibt es für jeden Morphismus $\alpha \in \mathscr{C}_Y(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ genau einen Morphismus $\beta \in \mathscr{C}_X(f^\dagger\mathcal{G}, f^\dagger\mathcal{G}')$ mit $\kappa_{\mathcal{G}'}\beta = \alpha\kappa_\mathcal{G}$. Wir notieren ihn $\beta := f^\dagger(\alpha)$ und nennen ihn den **mit f zurückgezogenen Morphismus**.

3. Nehmen wir zusätzlich an, daß sich jedes Objekt über Y zurückziehen läßt, so erhalten wir einen Funktor $f^\dagger : \mathscr{C}_Y \to \mathscr{C}_X$, der zusammen mit unseren Transportmorphismen eindeutig bestimmt ist bis auf eindeutige Isotransformation. Er heißt der **Rückzug**. Sollte sich nicht jedes Objekt zurückziehen lassen, so ist er zumindest ein wohldefinierter Funktor auf der vollen Unterkategorie der zurückziehbbaren Objekte von $\mathscr{C}_Y$ und damit ein partiell definierter Funktor $f^\dagger : \mathscr{C}_Y \dashrightarrow \mathscr{C}_X$.

4. Gegeben $X \in \mathscr{B}$ ist der Identitätsfunktor $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}_X}$ auf der Faser $\mathscr{C}_X$ mit den Identitäten als Transportmorphismen ein Rückzug zu id_X. Zwischen dem Rückzug $\mathrm{id}_X^\dagger$ und $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}_X}$ erhalten wir damit eine wohlbestimmte Isotransformation
$$c_X : \mathrm{id_X}^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_X}$$

5. Sind alle Objekte unter allen Morphismen zurückziehbar, so erhalten wir eine Transformation $c(f, g) : f^\dagger \circ g^\dagger \Rightarrow (g \circ f)^\dagger$ durch die Bedingung, daß ihr Vorschalten vor den Transportmorphismus des simultanen Zurückziehens die Verknüpfung der Transportmorphismen des separaten Zurückziehens liefert. Im allgemeinen erhalten wir so eine Transformation der entsprechenden partiell definierten Funktoren.

6. Wir nennen ein Objekt **stark zurückziehbar**, wenn es zurückziehbar ist mit einem stark kartesischen Transportmorphismus, und reden dann von **star-**

kem Rückzug. Unsere Transformation von eben liefert eine Isotransformation $c(f,g) : f^\dagger \circ g^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (g \circ f)^\dagger$ zwischen den Restriktionen unserer partiellen Rückzüge auf die unter g und $(g \circ f)$ stark zurückziehbaren Objekte.

7. Ist insbesondere unser Funktor ein Faserfunktor, so sind unsere Transformationen stets Isotransformationen

$$c(f,g) : f^\dagger \circ g^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (g \circ f)^\dagger$$

Wir nennen diese Isotransformationen $c(f,g)$ sowie die Isotransformationen $c_X : \mathrm{id_X}^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_X}$ von oben die **Identifikationen** unseres Faserfunktors und notieren sie manchmal ausführlicher idf oder $\mathrm{idf}(f,g)$ und idf_X.

Beispiel 19.6.3.2. Für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ betrachten wir den Funktor $[G] \to [H]$ der zugehörigen Ein-Objekt-Kategorien. Für einen Morphismus $f \in H$ ist nach 19.6.2.21 jeder Lift kartesisch. Unser Funktor ist demnach ein Faserfunktor genau dann, wenn unser Gruppenhomomorphismus surjektiv ist. Der durch die Wahl eines Urbilds g von f festgelegte Rückzug ist dann die Konjugation $f^\dagger = \mathrm{int}(g^{-1}) : [\ker \varphi] \to [\ker \varphi]$. Gegeben ein Faserfunktor ist es insbesondere im allgemeinen nicht möglich, Rückzüge so zu wählen, daß alle Identifikationen Gleichheiten werden.

19.6.3.3. Gegeben ein Funktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ und ein Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathscr{B}$ konstruiert man analog partiell definierte Funktoren $f_\dagger : \mathscr{C}_X \dashrightarrow \mathscr{C}_Y$, den **Vorschub** und den **starken Vorschub**, und zeigt dafür analoge Eigenschaften. Formal ließen sie sich auch erhalten, indem man auf den Funktor $p^{\mathrm{opp}} : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$ die obigen Konstruktionen anwendet und zu dem so erhaltenen partiell definierten Funktor $(f^\circ)^\dagger : \mathscr{C}_X^{\mathrm{opp}} \dashrightarrow \mathscr{C}_Y^{\mathrm{opp}}$ den partiell definierten Funktor $f_\dagger := ((f^\circ)^\dagger)^{\mathrm{opp}}$ bildet.

19.6.3.4 (**Adjunktion von Vorschub und Rückzug**). Gegeben ein Funktor $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ sind Vorschub und Rückzug stets partiell adjungierte partiell definierte Funktoren vermittels der durch die Definitionen gegebenen Bijektionen

$$\mathscr{C}_X(\mathcal{F}, f^\dagger \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_Y(f_\dagger \mathcal{F}, \mathcal{G})$$

Im Fall einer Bifaserung sind darüber hinaus beide Funktoren für jeden Morphismus der Basis global definiert.

Beispiel 19.6.3.5. Sei $f : X \to Y$ stetig. Die Rückzugfunktoren unserer Garbenfaserung machen aus einer Garbe $\mathcal{G}$ auf Y mit étalem Raum $\bar{\mathcal{G}}$ die Garbe auf X mit étalem Raum $X \times_Y \bar{\mathcal{G}}$ und dem offensichtlichen Transportmorphismus. Wir notieren sie $f^*\mathcal{G}$ mit dem Transportmorphismus $\tau \in \mathrm{Ens}_{/f}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{G})$.

Beispiel 19.6.3.6. Gegeben $Z \subset X$ eine Teilmenge eines topologischen Raums und eine Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ auf X liefert unsere Definition 19.2.2.35 der auf Z eingeschränkten Garbe $\mathcal{F}|_Z$ einen kartesischen Morphismus $\mathcal{F}|_Z \to \mathcal{F}$ über der Einbettung $i : Z \hookrightarrow X$ alias einen Isomorphismus

$$\mathcal{F}|_Z \xrightarrow{\sim} i^*\mathcal{F}$$

Beispiel 19.6.3.7. Gegeben $c : X \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung eines topologischen Raums auf den einpunktigen Raum top sowie eine Menge M liefert unsere Definition 19.2.2.10 der konstanten Garbe M_X einen kartesischen Morphismus $M_X \to M_{\mathrm{top}}$ über der c alias einen Isomorphismus

$$M_X \xrightarrow{\sim} c^* M_{\mathrm{top}}$$

Beispiel 19.6.3.8. Sei $f : X \to Y$ stetig. Die Rückzugfunktoren unserer Garbenopfaserung $\mathrm{Ens}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ aus 19.6.2.17 sind die opponierten inversen Bilder

$$f^\dagger := (f^*)^{\mathrm{opp}} : \mathrm{Ens}_{/\!/Y} \to \mathrm{Ens}_{/\!/X}$$

mit den hoffentlich offensichtlichen Opkomorphismen $f^\dagger\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ über f als Transportmorphismen. Die Vorschübe der Garbenopfaserung sind entsprechend die opponierten Vorschübe

$$f_\dagger := (f_*)^{\mathrm{opp}} : \mathrm{Ens}_{/\!/X} \to \mathrm{Ens}_{/\!/Y}$$

mit den hoffentlich offensichtlichen Opkomorphismen $\mathcal{F} \to f_\dagger\mathcal{F}$ über f als Transportmorphismen.

19.6.3.9. In 19.4.3.11 haben wir einen ausgezeichneten Isomorphismus zwischen dem Rückzug einer Mengengarbe in Bezug auf die Garbenopfaserung und dem Rückzug in Bezug auf die Garbenfaserung 19.6.3.5 angegeben. In 19.8.4.11 werden wir erklären, inwiefern diese Beobachtung sich zu der Aussage präzisieren läßt, daß unsere beiden Faserungen durch „Oppinvertieren“ auseinander hervorgehen.

19.6.3.10 (**Notationsvarianten**). Gegeben ein Bifaserfunktor $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ und ein Objekt $X \in \mathscr{B}$ der Basis notieren wir die Opponierten der Faserkategorien gerne $\mathscr{C}_{/X} := \mathscr{C}_X^{\mathrm{opp}}$. Gegeben ein Morphismus $f : X \to Y$ in der Basis schreiben wir weiter $f^* := (f^\dagger)^{\mathrm{opp}} : \mathscr{C}_{/Y} \to \mathscr{C}_{/X}$ und $f_* := (f_\dagger)^{\mathrm{opp}} : \mathscr{C}_{/X} \to \mathscr{C}_{/Y}$. Dann bilden diese Funktoren ein adjungiertes Paar (f^*, f_*) so, wie man es gewohnt ist.

19.6.3.11 (**Allgemeiner Basiswechsel**). Sei $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Funktor und sei in der Basis $\mathscr{B}$ ein kommutatives Quadrat

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

gegeben. Wir nehmen an, daß sich für ein Objekt $\mathcal{F} \in \mathscr{C}_X$ unser Diagramm hochheben läßt zu einem Diagramm in $\mathscr{C}$ ohne den gestrichelten Pfeil der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
q^\dagger\mathcal{F} \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathcal{F} \arrow[dd] \\
g_\dagger q^\dagger\mathcal{F} \arrow[dr, dashed] & & \\
& p^\dagger f_\dagger\mathcal{F} \arrow[r] & f_\dagger\mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

Sind hier die Pfeile nach rechts sogar stark kartesische Lifts und die Pfeile nach unten stark kokartesische Lifts, so gibt es offensichtlich genau einen Morphismus

$$\mathrm{bw} : g_\dagger q^\dagger\mathcal{F} \to p^\dagger f_\dagger\mathcal{F}$$

in $\mathscr{C}_Z$, der das obige Diagramm kommutieren läßt, wenn wir ihn als gestrichelten Pfeil einsetzen. Er heißt der **Basiswechselmorphismus** und wir notieren ihn oft bw wie oben. Ist unser Funktor etwa eine Bifaserung, so ist der Basiswechselmorphismus nach 19.6.2.19 für alle Objekte $\mathcal{F} \in \mathscr{C}_X$ definiert.

Beispiel 19.6.3.12. Im Fall zweier Morphismen π, i in der Basis mit $\pi \circ i = \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ \mathrm{id}$ spezialisiert der Basiswechsel zu einem natürlichen Morphismus

$$i^\dagger\mathcal{F} \to \pi_\dagger\mathcal{F}$$

unter der Annahme, daß $i^\dagger\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ stark kartesisch ist und $\mathcal{F} \to \pi_\dagger\mathcal{F}$ stark kokartesisch.

Übungen

Übung 19.6.3.13 (**Vorschub durch Adjunktion**). Gegeben sei ein Faserfunktor $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ mit Rückzugfunktoren $f^\dagger : \mathscr{C}_Y \to \mathscr{C}_X$ für $f : X \to Y$. Man zeige: Existiert der partielle Linksadjungierte $f_\dagger$ bei $\mathcal{F} \in \mathscr{C}_X$ und ist $\mathcal{F} \to f^\dagger f_\dagger\mathcal{F}$ die Einheit der Adjunktion, so ist der zugehörige Morphismus $\mathcal{F} \to f_\dagger\mathcal{F}$ über f stark kokartesich für $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$. Haben also bei einem Faserfunktor alle Rückholfunktoren einen Linksadjungierten, so ist er ein Bifaserfunktor. Umgekehrt erhalten wir auch für jeden Bifaserfunktor Adjunktionen $(f_\dagger, f^\dagger)$ als die Verknüpfungen

$$\mathscr{C}_Y(f_\dagger\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xleftarrow{\sim} \mathscr{C}_X(\mathcal{F}, f^\dagger\mathcal{G})$$

Übung 19.6.3.14 (**Basiswechsel und Adjunktionen**). Man zeige, daß sich der Basiswechsel unter einem Bifaserfunktor für ein kommutatives Quadrat $fq = pg$

in der Basis beschreiben läßt vermittels der Adjunktionen zwischen Vorschub und Rückzug $(f_\dagger, f^\dagger)$ und $(g_\dagger, g^\dagger)$ als

$$g_\dagger q^\dagger \mathcal{F} \to g_\dagger q^\dagger f^\dagger f_\dagger \mathcal{F} \to g_\dagger g^\dagger p^\dagger f_\dagger \mathcal{F} \to p^\dagger f_\dagger \mathcal{F}$$

Alternativ mag man ihn auch vermittels der Adjunktionen $(p_\dagger, p^\dagger)$ und $(q_\dagger, q^\dagger)$ konstruieren in ähnlicher Weise. Sind insbesondere $f^\dagger$ und $g^\dagger$ volltreu, so liefert das Basiswechsel einen Isomorphismus für alle Objekte $\mathcal{F}$ der Gestalt $\mathcal{F} = f^\dagger \mathcal{G}$.

Übung 19.6.3.15 (**Einheit und Koeinheit einer Adjunktion als Basiswechsel**). Man zeige, daß der Basiswechselmorphismus unter einem Bifaserfunktor für ein kommutatives Quadrat $fq = pg$ in der Basis mit $p = f$ und $q = g$ zusammenfällt mit der Komposition $\mathrm{g}_\dagger\, \mathrm{g}^\dagger\, \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \to f^\dagger f_\dagger \mathcal{F}$ der Koeinheit und Einheit der jeweiligen Adjunktionen.

Übung 19.6.3.16 (**Transitivität von Basiswechseln**). Sei $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Bifaserfunktor und sei in der Basis $\mathscr{B}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"'] & W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "r"] & Z \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

gegeben. So stimmt der Basiswechsel im einhüllenden Rechteck überein mit der in der hoffentlich offensichtlichen Weise aus den Basiswechseln in den einzelnen Quadraten und Identifikationen gebildeten Transformation $h_\dagger(qs)^\dagger \Rightarrow h_\dagger s^\dagger q^\dagger \Rightarrow r^\dagger g_\dagger q^\dagger \Rightarrow r^\dagger p^\dagger f_\dagger \Rightarrow (pr)^\dagger f_\dagger$.

Übung 19.6.3.17 (**Rückzug von Basiswechseln**). Sei $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Bifaserfunktor und sei in der Basis $\mathscr{B}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

gegeben. Sei weiter $s : V \to W$ gegeben. So ist die Verknüpfung

$$(gs)_\dagger (qs)^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} g_\dagger s_\dagger s^\dagger q^\dagger \Rightarrow g_\dagger q^\dagger \Rightarrow p^\dagger f_\dagger$$

von durch Identifikationen, der Koeinheit der Adjunktion und dem Basiswechsel gegebenen Transformationen der Basiswechsel im Diagramm $f(qs) = p(gs)$.

Übung 19.6.3.18 (**Verträglichkeit von Adjunktion und Basiswechsel**). Man zeige, daß gegeben ein Bifaserfunktor und ein kommutatives Quadrat $fq = pg$ in der

Basis das Diagramm von Transformationen

$$\begin{tikzcd} p^\dagger f_\dagger f^\dagger \arrow[r, Rightarrow, "p^\dagger\eta"] & p^\dagger \\ g_\dagger q^\dagger f^\dagger \arrow[u, "\mathrm{bw}\, f^\dagger"] \arrow[r, "g_\dagger\,\mathrm{idt}"] & g_\dagger g^\dagger p^\dagger \arrow[u, "\eta p^\dagger"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert. Hinweis: Man mag von der Transitivität der Basiswechsel 19.6.3.16 in den Diagrammen

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\ Z \arrow[r, "p"] & Y \arrow[r, "\mathrm{id}"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & Y \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\ Z \arrow[r, "\mathrm{id}"] & Z \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

ausgehen, deren einhüllende Rechtecke übereinstimmen.

Übung 19.6.3.19 (**Verträglichkeit von Adjunktionen und Identifikationen**). Gegeben eine Bifaserung und eine Verknüpfung fg von Morphismen der Basis zeige man, daß die durch Koeinheiten von Adjunktionen induzierte Transformation $g_\dagger f_\dagger f^\dagger g^\dagger \Rightarrow g_\dagger g^\dagger \Rightarrow \mathrm{Id}$ zusammenfällt mit der durch Identifikationen und eine Koeinheit der Adjunktion induzierten Transformation $g_\dagger f_\dagger f^\dagger g^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (fg)_\dagger (fg)^\dagger \Rightarrow \mathrm{Id}$.

Übung 19.6.3.20. Gegeben eine Bifaserung und eine Verknüpfung $f \circ g$ von Morphismen in der Basis zeige man, daß die durch Einheit und Koeinheit der Adjunktion induzierte Transformation $g^\dagger \Rightarrow (fg)^\dagger (fg)_\dagger g^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} g^\dagger f^\dagger f_\dagger g_\dagger g^\dagger \Rightarrow g^\dagger f^\dagger f_\dagger$ zusammenfällt mit der durch die Einheit der Adjunktion induzierte Transformation $g^\dagger \Rightarrow g^\dagger f^\dagger f_\dagger$. Hinweis: Verträglichkeit von Adjunktionen und Identifikationen 19.6.3.19 sowie Dreiecksidentität 16.4.8.1.

Übung 19.6.3.21 (**Linksadjungierter von étalem Rückzug**). Gegeben eine étale Abbildung $f : X \to Y$ hat der Rückzug $f^* : \mathrm{Ens}_{/Y} \to \mathrm{Ens}_{/X}$ stets einen Linksadjungierten

$$f_{[!]} : \mathrm{Ens}_{/X} \to \mathrm{Ens}_{/Y}$$

Um das zu einzusehen, bemerkt man zunächst, daß $(f\circ) : \mathrm{Top}_X \to \mathrm{Top}_Y$ linksadjungiert ist zu $X\times_Y : \mathrm{Top}_Y \to \mathrm{Top}_X$. Daraus folgt dann, daß für f étale $(f\circ)$ linksadjungiert ist zu $X\times_Y : \text{ét}\mathrm{Top}_Y \to \text{ét}\mathrm{Top}_X$.

Übung 19.6.3.22 (**Schnitte als Morphismen**). Gegeben ein topologischer Raum X und $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung einer offenen Teilmenge und eine Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ konstruiere man für $\mathrm{ens}_{/U}$ die finale Mengengarbe auf U eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/X}(j_{[!]}\,\mathrm{ens}_{/U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(U)$$

Übung 19.6.3.23 (**Étaler Basiswechsel**). Sind in einem kartesischen Diagramm $fq = pg$ von topologischen Räumen die Vertikalen f, g étale, so ist der Basiswechsel für Mengengarben in $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}}$ eine Isotransformation

$$g_{[!]}q^* \tilde{\Rightarrow} p^* f_{[!]}$$

Sind in einem kartesischen Diagramm $fq = pg$ von topologischen Räumen die Horizontalen p, q étale, so ist der Basiswechsel für Mengengarben in $\mathrm{Ens}_{/\!/\mathrm{Top}}$ eine Isotransformation

$$g_\dagger q^\dagger \tilde{\Rightarrow} p^\dagger f_\dagger$$

Man mag sich zusätzlich überlegen, daß diese Basiswechsel in unseren oppinversen Faserungen bis auf Wechsel der Buchstaben durch den Übergang zu den opponierten Adjungierten auseinander hervorgehen.

Übung 19.6.3.24 (**Eigentlicher Basiswechsel**). Sind in einem kartesischen Diagramm $fq = pg$ von topologischen Räumen die Vertikalen f, g eigentlich und separiert, so ist der Basiswechsel für Mengengarben in $\mathrm{Ens}_{/\!/\mathrm{Top}}$ eine Isotransformation

$$g_\dagger q^\dagger \tilde{\Rightarrow} p^\dagger f_\dagger$$

Hinweis: Hat g einpunktigen Wertebereich, so ist das im wesentlichen die Folgerung 19.4.5.3 aus unserer Proposition 19.4.5.2 zur Fortsetzbarkeit von Schnitten über relativ Hausdorff'schen Kompakta. Der allgemeine Fall folgt ohne weitere Schwierigkeiten. Einen Spezialfall haben wir bereits in 19.4.5.6 kennengelernt. Spezialisiert auf den Fall abelscher Garben ist das ein erstes Beispiel für den allgemeinen „les-Basiswechsel“ nach **??**.

Übung 19.6.3.25 (**Faserkonstante Garben**). Seien X ein topologischer Raum und I ein zusammenhängendes hausdorffsches Kompaktum und $\pi : X \times I \to X$ die Projektion und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X\times I}$ eine Garbe. Ist die Restriktion von $\mathcal{F}$ auf jede Faser von π konstant, so ist die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus $\pi^*\pi_*\mathcal{F} \tilde{\to} \mathcal{F}$. Hinweis: Eigentlicher Basiswechsel 19.6.3.24. Allgemeiner zeige man dasselbe für $\pi : X \times I \to X$ im Fall eines beliebigen nichtleeren reellen Intervalls I. Hinweis: Man schreibe I als aufsteigende Vereinigung kompakter Intervalle und folgere, daß für jeden Punkt $t \in I$ und jede offene Teilmenge $U \Subset X$ die Restriktion von Schnitten eine Bijektion $\Gamma(U \times I; \mathcal{F}) \tilde{\to} \Gamma(U \times \{t\}; \mathcal{F})$ induziert. Ich erinnere daran, daß die Einheit der Adjunktion für finale Abbildungen mit zusammenhängenden Fasern stets ein Isomorphismus ist nach 19.4.3.23.

Übung 19.6.3.26 (**Basiswechsel sind nicht immer Isomorphismen**). Gegeben eine Familie $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ von Garben auf einem Raum X kann man ihr Produkt konstruieren, indem man sie zu einer Garbe auf $X \times I^{\mathrm{dis}}$ zusammenfügt und deren Vorschub unter der Projektion auf X nimmt. So liefert 19.2.2.49 auch ein Beispiel für ein kartesisches Diagramm topologischer Räume und eine Garbe, für die der Basiswechselmorphismus aus 19.6.3.11 kein Isomorphismus ist.

Übung 19.6.3.27 (**Vorschub unter horizontaler Einbettung**). Seien X, Z topologische Räume und $z_0 \in Z$ ein Punkt. Man zeige, daß für $f : x \mapsto (x, z_0)$ der Vorschub $f_* : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/X \times Z}$ ein exakter Funktor ist. Hinweis: Mit eigentlichem Basiswechsel im Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{top} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "p"] & X \times Z \end{tikzcd}$$

für q die Einbettung eines Punktes $x_0 \in X$ und $p : z \mapsto (x_0, z)$ das Davorschreiben dieses Punktes zieht man sich darauf zurück zu zeigen, daß das Bilden von Wolkenkratzergarben ein exakter Funktor ist. Dafür vergleiche 19.2.2.51.

Übung 19.6.3.28 (**Partielle Auflösung durch offene Überdeckung**). Gegeben eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ eines topologischen Raums X und eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf X ist die Sequenz

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \prod_{i \in I} f_{i*} f_i^* \mathcal{F} \to \prod_{(i,j) \in I^2} f_{ij*} f_{ij}^* \mathcal{F}$$

eine linksexakte Sequenz von Garben, ja sogar von Prägarben auf X. Hier bezeichnen $f_i : U_i \hookrightarrow X$ und $f_{ij} : U_i \cap U_j \hookrightarrow X$ die Einbettungen. Die Morphismen kommen her von den Adjunktionen und Identifikationen in der hoffentlich offensichtlichen Weise. Etwas allgemeiner ist sogar für $(U_{ij,k})_{k \in K(i,j)}$ jeweils eine offene Überdeckung von $U_i \cap U_j$ die Sequenz

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \prod_{i \in I} f_{i*} f_i^* \mathcal{F} \to \prod_{(i,j) \in I^2,\, k \in K(i,j)} f_{ij,k*} f_{ij,k}^* \mathcal{F}$$

für jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ eine linksexakte Sequenz von Prägarben.

Ergänzende Übung 19.6.3.29 (**Unterobjektfaserung**). Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ betrachten wir in der Kategorie $\mathcal{C}^{\downarrow}$ aller Morphismen die volle Unterkategorie $\mathcal{C}^{\subset} \subset \mathcal{C}^{\downarrow}$ aller Monomorphismen und den Funktor $p : \mathcal{C}^{\subset} \to \mathcal{C}$, der jedem Monomorphismus sein Zielobjekt zuordnet. Besitzt in $\mathcal{C}$ jeder Winkel einen Pullback, so ist dieser Funktor eine Faserung mit dem Urbild eines Unterobjekts als Rückzug. Ist unsere Kategorie $\mathcal{C}$ abelsch, so ist er sogar eine Bifaserung mit dem Bild eines Unterobjekts als Vorschub.

Ergänzende Übung 19.6.3.30 (**Basiswechsel in der Unterobjektbifaserung**). Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ und die Unterobjektbifaserung $p : \mathcal{A}^{\subset} \to \mathcal{A}$ nach 19.6.3.29 ist der Basiswechsel über einem kommutativen Quadrat $fq = pg$ der Basis ein Isomorphismus, wenn $(f, p) \circ (q, -g)^\top$ eine exakte Sequenz ist, insbesondere also für jedes kartesische und jedes kokartesische Quadrat. Hinweis:

Man zieht sich unschwer auf den Fall eines kartesischen Quadrats zurück. Indem man beide Kanten des Ausgangswinkels in einen Epimorphismus gefolgt von einem Monomorphismus faktorisiert und 20.1.5.9 anwendet, zieht man sich weiter zurück auf den Fall kartesischer Quadrate mit nur Epimorphismen, mit nur Monomorphismen, oder mit parallelen Monomorphismen und parallelen Epimorphismen. Nur im letzten dieser Fälle ist die Behauptung nicht offensichtlich. Hier kann man aber die modulare Identität 19.2.5.25 anwenden.

19.6.4 Garbenschreikofaserung

Definition 19.6.4.1. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ und abelsche Garben $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ heiße ein Komorphismus $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ über f **eigentlich**, wenn für $V \Subset Y$ und $s \in \mathcal{G}(V)$ die Abbildung $f : (\operatorname{supp} \varphi(s)) \to V$ eigentlich ist, die vom Träger $(\operatorname{supp} \varphi(s)) \subset f^{-1}(V)$ von $\varphi(s) \in \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ nach V geht. Die Menge der eigentlichen Komorphismen über f notieren wir

$$\mathrm{Ab}^{!}_{/f^\circ}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

19.6.4.2. Nach allgemeinen Eigenschaften eigentlicher Abbildungen 15.2.4.18 ist die Menge aller eigentlichen Komorphismen eine Untergruppe der Gruppe aller Komorphismen. Nach allgemeinen Eigenschaften eigentlicher Abbildungen ist über einer eigentlichen Abbildung f jeder Komorphismus eigentlich.

19.6.4.3 (**Verknüpfung eigentlicher Komorphismen**). Die Verknüpfung eigentlicher Komorphismen ist eigentlich. Seien genauer $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ sowie abelsche Garben $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ und $\mathcal{H} \in \mathrm{Ab}_{/Z}$ sowie eigentliche Komorphismen $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ und $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ gegeben. Dann wird für $W \Subset Z$ ein Schnitt $t \in \mathcal{H}(W)$ unter ψ abgebildet auf $s \in \mathcal{G}(g^{-1}(W))$ mit $g : \operatorname{supp}(s) \to W$ eigentlich und der Schnitt s wird unter φ weiter abgebildet auf $r \in \mathcal{F}(f^{-1}(g^{-1}(W)))$ mit $f : \operatorname{supp}(r) \to g^{-1}(W)$ eigentlich. Diese Abbildung faktorisiert nach 19.4.4.14 über eine Abbildung $f : \operatorname{supp}(r) \to \operatorname{supp}(s)$, die ihrerseits eigentlich ist nach 15.2.4.11. Da die Verknüpfung eigentlicher Abbildungen stets wieder eigentlich ist nach 15.2.4.16, folgt die Behauptung.

19.6.4.4. Opkomorphismen über f, die durch eigentliche Komorphismen 19.6.4.1 gegeben werden, nennen wir **eigentliche Opkomorphismen** oder kürzer **Schreimorphismen** über f. Die Menge der Schreimorphismen über f von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$ notieren wir

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \mathrm{Ab}^{!}_{/f^\circ}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

und das motiviert auch die hier vorgeschlagene Terminologie. Wir erhalten so eine Unterkategorie $\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \subset \mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}}$. Ist f selbst eigentlich, so ist jeder Opkomorphismus über f eigentlich und wir haben $\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/f} = \mathrm{Ab}_{/\!/f}$.

19.6.4.5 (**Schreivorschub**). Einen Schreimorphismus $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ über einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$, der kokartesisch ist für den Funktor

$$\mathrm{Ab}^{\mathsf{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$$

des Vergessens der Garbe, nennen wir **schreikokartesisch**. Gegeben $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine abelsche Garbe auf X gibt es stets einen von $\mathcal{F}$ ausgehenden schreikokartesischen Schreimorphismus über f. In der Tat können wir eine abelsche Garbe $f_!\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ erklären, indem wir für alle $V \Subset Y$ setzen

$$(f_!\mathcal{F})(V) := \{s \in \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \mid f : (\operatorname{supp} s) \to V \text{ ist eigentlich}\}$$

Wegen der Lokalität der Eigentlichkeit in der Basis 15.2.4.15 ist $f_!\mathcal{F} \subset f_*\mathcal{F}$ eine Untergarbe von Mengen und nach 15.2.4.18 sogar eine Untergarbe von abelschen Gruppen. Der durch die Komposition der Einbettung $f_!\mathcal{F} \subset f_*\mathcal{F}$ mit dem natürlichen Komorphismus $f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ gegebene Komorphismus $\kappa : f_!\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ über f ist offensichtlich eigentlich und für jede abelsche Garbe $\mathcal{G}$ auf Y liefert das Nachschalten von κ eine Bijektion $(\kappa\circ) : \mathrm{Ab}_{/Y}(\mathcal{G}, f_!\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}^{!}_{/f^\circ}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$. Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ setzen wir nun

$$f_{¡} := f_!^{\mathrm{opp}} : \mathrm{Ab}_{/\!/X} \to \mathrm{Ab}_{/\!/Y}$$

Für jede abelsche Garbe $\mathcal{G}$ auf Y liefert dann opponiert das Vorschalten des Schreimorphismus $\tau := \kappa^\circ : \mathcal{F} \to f_{¡}\mathcal{F}$ über f eine Bijektion

$$(\circ\tau) : \mathrm{Ab}_{/\!/Y}(f_{¡}\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}^{\mathsf{i}}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

In anderen Worten ist $\tau : \mathcal{F} \to f_{¡}\mathcal{F}$ ein von $\mathcal{F}$ ausgehender schreikokartesischer Schreimorphismus über f und $f_{¡}$ ist der Vorschub längs f in Bezug auf den Funktor $\mathrm{Ab}^{\mathsf{i}}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$. Wir nennen $f_!$ und $f_{¡}$ den **Schreivorschub**. Für eigentliches f sind alle Opkomorphismen über f eigentlich. Wir erhalten so für eigentliches f einen ausgezeichneten Isomorphismus von Funktoren $f_{¡} \overset{\sim}{\Rightarrow} f_\dagger$, der unter unseren verschiedenen Identifikationen der Gleichheit $f_!\mathcal{F} = f_*\mathcal{F}$ für eigentliches f entspricht.

19.6.4.6. Der Schreivorschub längs f ist kategorisch der Vorschub in Bezug auf den Funktor $\mathrm{Ab}^{\mathsf{i}}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$. Der Funktor $f_!$ ist dahingegen kategorisch ein Rückzug längs f°.

Vorschau 19.6.4.7. Später werden wir mit $f_!$ beziehungsweise $f_{¡}$ meist die Derivierten der hier eingeführten Funktoren bezeichnen und und für die hier eingeführten Funktoren die alternative Notation $f_{(!)}$ beziehungsweise $f_{(¡)}$ verwenden, aber alles zu seiner Zeit.

Lemma 19.6.4.8. *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine abelsche Garbe. Ist g separiert, so ist der von den universellen Eigenschaften herrührende Morphismus ein Isomorphismus*

$$g_!(f_!\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} (gf)_!\mathcal{F}$$

Beweis. Daß der fragliche Morphismus injektiv ist, ist eh klar. Es bleibt, die Surjektivität zu zeigen. Sei dazu $t \in \mathcal{F}(f^{-1}(g^{-1}(W)))$ ein Schnitt mit $gf : (\operatorname{supp} t) \to W$ eigentlich. Ist g separiert, so ist auch $f : (\operatorname{supp} t) \to g^{-1}(W)$ eigentlich nach 15.2.4.11 und dann folgt mit 19.4.4.14 bereits $\operatorname{supp}(f_*t) = f(\operatorname{supp} t)$ und das geht mit einer eigentlichen Abbildung weiter nach W wegen 15.2.4.16. Folglich liegt t auch in $(g_!(f_!\mathcal{F}))(W)$. □

19.6.4.9. Bezeichne $\mathrm{Top}^{\mathrm{s}}$ die Kategorie der topologischen Räume mit nur separierten Abbildungen als Morphismen. Nach Lemma 19.6.4.8 restringiert unser Funktor $\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ zu einer Kofaserung

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{s}}} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{s}}$$

Wir nennen sie die **Garbenschreikofaserung**. Ihre Vorschübe sind unsere Schreivorschübe $f_{¡} = (f_!)^{\mathrm{opp}}$ aus 19.6.4.5. Ihre Fasern sind opponierte Kategorien abelscher Garben, in Formeln $\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/X} = \mathrm{Ab}_{/\!/X} = \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}_{/X}$.

19.6.4.10 (**Ausdehnung durch Null als Schreivorschub**). Ist $j : X \to Y$ die Einbettung einer offenen Teilmenge, so finden wir $(j_!\mathcal{F})(V) = \{s \in \mathcal{F}(X \cap V) \mid \operatorname{supp} s \not\subset V\}$. Das liefert einen Isomorphismus zwischen unserem Schreivorschub und der Ausdehnung durch Null aus 19.4.9.9, die wir dort bereits $j_!$ notiert hatten.

19.6.4.11 (**Abgeschlossener Vorschub als Schreivorschub**). Ist $f : X \to Y$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge, so ist f eigentlich und wir finden $f_!\mathcal{F} = f_*\mathcal{F}$.

19.6.4.12 (**Kompakte Schnitte als Schreivorschub**). Ist $c : X \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung zum einpunktigen Raum top, so gilt $(c_!\mathcal{F})(\mathrm{top}) = \Gamma_!\mathcal{F}$.

19.6.4.13 (**Schreivorschub für lokal abgeschlossene Einbettungen**). Ist $b : Z \hookrightarrow X$ die Einbettung einer lokal abgeschlossenen Teilmenge und $\mathcal{E} \in \mathrm{Ab}_{/Z}$ eine abelsche Garbe auf Z, so hat $b_!\mathcal{E}$ auf Z dieselben Halme wie $b_*\mathcal{E}$ und nach 19.4.3.20 damit auch dieselben Halme wie $\mathcal{E}$, in Formeln

$$(b_!\mathcal{E})_z \xrightarrow{\sim} (b_*\mathcal{E})_z \xrightarrow{\sim} (b^*b_*\mathcal{E})_z \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_z \quad \forall z \in Z$$

Außerhalb von Z jedoch verschwinden alle Halme der Garbe $b_!\mathcal{E}$, die deshalb auch in dieser Allgemeinheit die **Ausdehnung von $\mathcal{E}$ durch Null** heißt. Bredon [Bre97] notiert sie $\mathcal{E}^X$.

Satz 19.6.4.14 (Schreirückzug unter abgeschlossener Einbettung). *Gegeben eine abgeschlossene Einbettung von topologischen Räumen* $i : C \hookrightarrow X$ *besitzt der Vorschub* $i_* : \mathrm{Ab}_{/C} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ *einen Rechtsadjungierten* $i^! : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/C}$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei i die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge. Wir können dann $i^!\mathcal{F}$ beschreiben durch

$$(i^!\mathcal{F})(W) := \{s \in \mathcal{F}(V) \mid \operatorname{supp} s \subset V \cap X\}$$

für eine und jede offene Teilmenge $V \Subset X$ mit $V \cap C = W$ oder, formal korrekter, als den Kolimes über alle derartigen V. Es ist klar, daß die so definierte Prägarbe eine Garbe ist und daß für $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/C}$ das Anwenden von i_* gefolgt vom Nachschalten des offensichtlichen Homomorphismus $i_*i^!\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ eine Bijektion $\mathrm{Ab}_{/C}(\mathcal{G}, i^!\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/X}(i_*\mathcal{G}, \mathcal{F})$ induziert. □

Beispiel 19.6.4.15. Für $i : C \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge liefern die Definitionen einen natürlichen Isomorphismus $\Gamma i^!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \Gamma_C\mathcal{F}$.

19.6.4.16 (**Schreirückzug unter lokal abgeschlossener Einbettung**). Aus unserer Adjunktion $(i_*, i^!) = (i_!, i^!)$ für abgeschlossene Einbettungen nach 19.6.4.14 zusammen mit der Adjunktion $(j_!, j^*)$ für offene Einbettungen nach 19.4.9.9 und dem Isomorphismus der Ausdehnung durch Null mit dem Schreivorschub $j_!$ nach 19.6.4.10 folgt unmittelbar, daß auch für jede Einbettung $b : Z \hookrightarrow X$ mit einer lokal abgeschlossenen Teilmenge $b(Z) \subset X$ als Bild der Schreivorschub $b_! : \mathrm{Ab}_{/Z} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ einen Rechtsadjungierten

$$b^! : \mathrm{Ab}_{/Z} \to \mathrm{Ab}_{/X}$$

hat. Wir nennen $b^!$ den **Schreirückzug**. Den zugehörigen Funktor auf opponierten Kategorien von Garben nennen wir den **Schreirückzug** und notieren ihn b^{i}. Dieser Funktor ist dann auch kategorisch ein Rückzug für $\mathrm{Ab}^{\mathsf{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$.

Vorschau 19.6.4.17. Später werden wir für eine lokal abgeschlossene Einbettung mit $b^!, b^{\mathsf{i}}$ meist die entsprechenden derivierten Funktoren meinen und für die hier erklärten underivierten Funktoren die neuen Notationen $b^{(!)}, b^{(\mathsf{i})}$ einführen, aber alles zu seiner Zeit.

19.6.4.18 (**Schreirückzug unter offener Einbettung**). Die Adjunktion $(j_!, j^*)$ aus 19.4.9.9 liefert für jede offene Einbettung j eine Isotransformation

$$j^! \overset{\sim}{\Rightarrow} j^*$$

zwischen Schreirückzug und gewöhnlichem Rückzug und in unserer Notation für opponierte Kategorien von Garben eine Isotransformation $j^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} j^{\mathsf{i}}$.

19.6.4.19. Sei $b : Z \hookrightarrow X$ die Einbettung einer lokal abgeschlossenen Teilmenge. Die Werte der rechtsderivierten Funktoren $(\mathrm{R}^q b^!)\mathcal{F}$ des linksexakten Funktors $b^!$ auf einer abelschen Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ heißen die **lokalen Kohomologiegarben von $\mathcal{F}$ mit Träger in Z**.

Vorschau 19.6.4.20 (**Lokale Kohomologiegruppen und -garben**). Sei $i : C \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine abelsche Garbe. Die Beziehung der lokalen Kohomologiegarben zu den lokalen Kohomologiegruppen werden wir in 19.9.3.18 beschreiben durch eine E_2-Spektralsequenz $\mathrm{H}^q(C; \mathrm{R}^p i^! \mathcal{F}) \Rightarrow \mathrm{H}^n_C(X; \mathcal{F})$.

Vorschau 19.6.4.21 (**Lokale Kohomologiegruppen und die sechs Funktoren**). Seien $i : C \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine abelsche Garbe. Im Rahmen der „sechs Funktoren“ in 21.5.3.8 konstruieren wir noch genauer natürliche Isomorphismen $\mathcal{H}^n c_* i^! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_C(X; \mathcal{F})$ mit $c : C \to \mathrm{top}$ der konstanten Abbildung auf einen Punkt. Das benötigt jedoch den Formalismus der derivierten Kategorien und c_* und $i^!$ bedeuten dabei die totalen Linksderivierten derjenigen Funktoren, die wir bisher noch c_* und $i^!$ notieren und für die wir später die Bezeichnungen $c_{(*)}$ und $i^{(!)}$ vereinbaren werden.

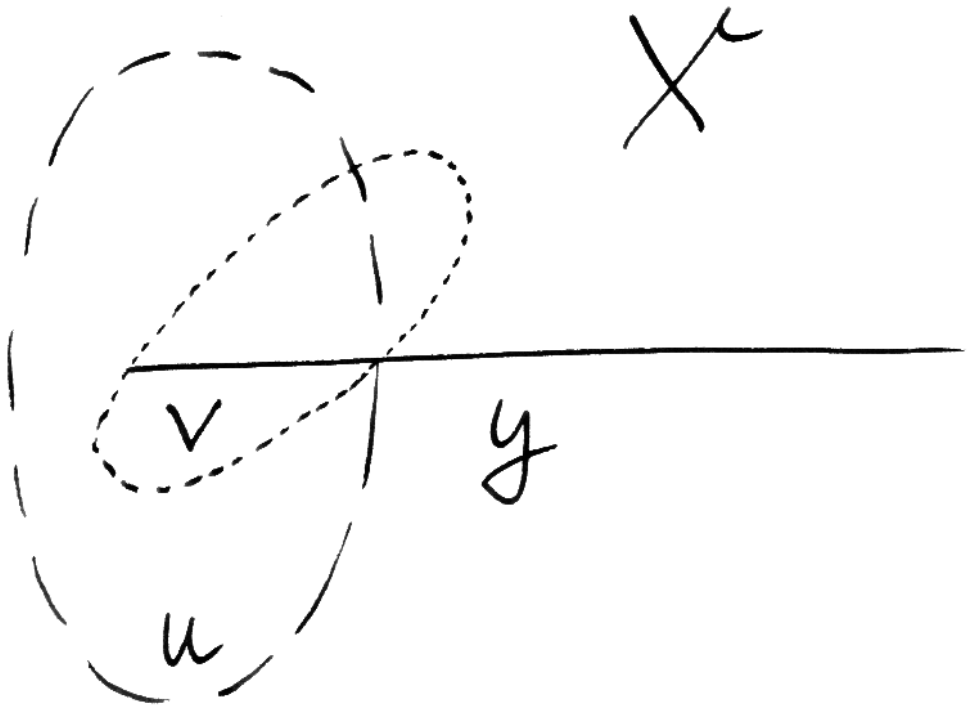
19.6.4.22 (**Ausdehnungen von Einschränkungen**). Für $Z \subset X$ eine lokal abgeschlossene Teilmenge erhalten wir aus dem vorhergehenden vier Funktoren von $\mathrm{Ab}_{/X}$ zu sich selber, die wir im folgenden der Reihe nach diskutieren. Sei $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X und bezeichne $b : Z \hookrightarrow X$ die Einbettung.

$b_* b^* \mathcal{F}$ hat meines Wissens keinen besonderen Namen. Sogar für $Z \subset X$ nicht notwendig lokal abgeschlossen lassen sich die Schnitte dieser Garbe über $U \Subset X$ offen beschreiben als $(b_* b^* \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(U \cap Z)$ mit der Notation von 19.2.2.33 für Schnitte einer Garbe über beliebigen, nicht notwendig offenen Teilmengen rechts.

$b_! b^! \mathcal{F}$ hat keinen Namen, ist jedoch, was man a priori die „Garbe der Schnitte von $\mathcal{F}$ mit Träger in Z“ würde nennen wollen. Für jede offene Teilmenge $U \Subset X$ haben wir nämlich $(b_! b^! \mathcal{F})(U) = \{s \in \mathcal{F}(U) \mid \operatorname{supp} s \subset Z\}$.

$b_* b^! \mathcal{F}$ heißt in der Literatur die „Garbe der Schnitte von $\mathcal{F}$ mit Träger in Z“ und wird $\Gamma_Z \mathcal{F} := b_* b^! \mathcal{F}$ notiert. Mir gefällt diese Terminologie nicht, da wie eben diskutiert $b_! b^! \mathcal{F}$ viel eher diese Bezeichnung verdient. Ich werde auch die Notation Γ_Z nicht in diesem Sinne verwenden, da sie bereits für die Gruppe der globalen Schnitte mit Träger in Z vergeben ist.

$b_! b^* \mathcal{F}$ wird meist $\mathcal{F}_Z$ notiert, etwa bei [Bre97] oder [KS90]. Ich weiß nicht, wie diese Garbe in Worten genannt wird. Spaltenstein benutzt stattdessen die Notation $\mathcal{F}_{Z \subset X}$, die mir besser gefällt. Für $Z \Subset X$ abgeschlossen fällt diese Garbe mit $b_* b^* \mathcal{F}$ zusammen, für $Z \Subset X$ offen mit $b_! b^! \mathcal{F}$.



Graphische Darstellung von X, Y, U, V aus der Definition der Garbe der lokalen Schnitte $\Gamma_Y \mathcal{F}$ für Y ein offenes Geradensegment und $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf der Ebene X.

19.6.4.23 (**Einschränkungen von Ausdehnungen**). Bei einer Komposition in der anderen Richtung unserer Funktoren für eine lokal abgeschlossene Einbettung erhält man stets die ursprüngliche Garbe zurück. Genauer ist nach 19.4.3.20 für eine beliebige Einbettung b von topologischen Räumen die Koeinheit der Adjunktion eine Isotransformation $b^* b_* \xRightarrow{\sim} \mathrm{id}$. Für die Einbettung einer lokal abgeschlossenen Teilmenge induziert sie offensichtlich eine Isotransformation $b^* b_! \xRightarrow{\sim} \mathrm{id}$, die wir im Lichte von 19.6.4.32 als einen Spezialfall von les-Basiswechsel verstehen können. Durch Übergang zu den Rechtsadjungierten erhalten wir daraus auch eine ausgezeichnete Isotransformation $b^! b_* \xRightarrow{\sim} \mathrm{id}$. Schließlich ist für jede lokal abgeschlossene Einbettung b offensichtlich $b_!$ exakt und volltreu und $b^!$ linksexakt und die Einheit der Adjunktion folglich eine Isotransformation $\mathrm{id} \xRightarrow{\sim} b^! b_!$.

Übungen

Übung 19.6.4.24. Gegeben ein kartesisches Diagramm von topologischen Räumen

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

mit abgeschlossenen Einbettungen in den Vertikalen liefert die Isotransformation $g_* q^* \xRightarrow{\sim} p^* f_*$ des eigentlichen Basiswechsels für Mengengarben 19.6.3.24 eine Isotransformation auf den entsprechenden Funktoren für abelsche Garben und durch Übergang zu den Rechtsadjungierten eine Isotransformation $q_* g^! \xRightarrow{\sim} f^! p_*$.

Übung 19.6.4.25. Gegeben ein topologischer Raum X mit einer abgeschlossenen Teilmenge $C \not\subset X$ bezeichne $i : C \hookrightarrow X$ und $u : X \backslash C \hookrightarrow X$ die Einbettungen. Man zeige, daß für jede abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ die Adjunktionsmorphismen eine linksexakte Sequenz

$$i_* i^! \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F} \to u_* u^* \mathcal{F}$$

liefern, die für welkes und insbesondere für injektives $\mathcal{F}$ exakt ist, ja stärker exakte Sequenzen von Schnitten über jeder offenen Teilmenge induziert.

Übung 19.6.4.26. Man zeige für die Einbettung b einer lokal abgeschlossenen Teilmenge, daß $b^!$ welke abelsche Garben zu welken abelschen Garben macht und daß welke abelsche Garben $b^!$-azyklisch sind. Hinweis: 19.4.1.6.

Übung 19.6.4.27. Für W, Z lokal abgeschlossene Teilmengen eines topologischen Raums X und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ konstruiere man einen Isomorphismus

$$(\mathcal{F}_W)_Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{(W \cap Z)}$$

Einen natürlichen derartigen Isomorphismus wird uns der étale separierte Basiswechsel 19.6.4.32 liefern. Die Chancen stehen gut, daß Sie bei der Bearbeitung der Übung genau diesen Isomorphismus angeben werden.

Übung 19.6.4.28 (**Unverträglichkeit von $i^!$ mit $K\otimes_k$**). Wir betrachten in $\mathbb{R}^2$ die unendliche Vereinigung von vom Ursprung ausgehenden Strahlen

$$X := \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{R}_{\geq 0}(n,1)^\top$$

der Steigungen $1/n$ und die Einbettung $i : \{0\} \hookrightarrow X$ der einelementigen Teilmenge, die nur aus dem Nullvektor besteht. Die lokale Kohomologie $\mathrm{H}^q_{\{0\}}(X;k)$ am Ursprung ist ein abzählbares Produkt von Kopien des Koeffizientenrings k für $q = 1$ und Null sonst. Unser Raum ist lokal singulär-azyklisch, also haben wir auch

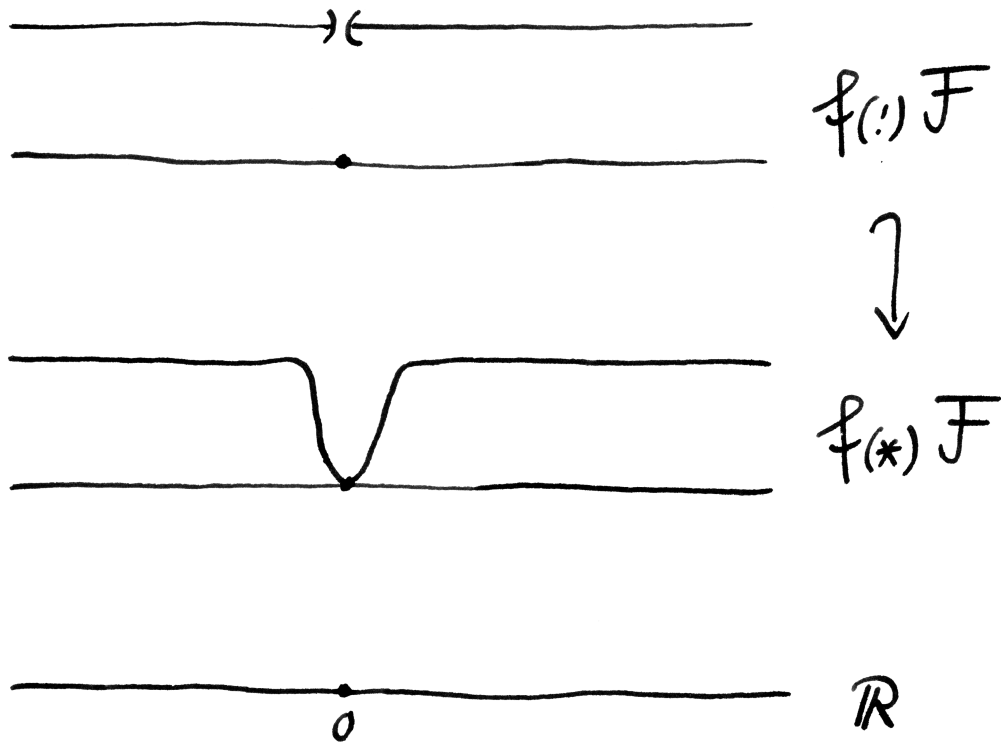
$$\mathrm{R}^q i^! k_X \cong \mathrm{H}^q_{\{0\}}(X;k)$$

für i die Einbettung des Ursprungs in X. Insbesondere ist $i^!$ im allgemeinen nicht verträglich mit der Erweiterung von Skalaren durch den Linksadjungierten zur Restriktion. Wir werden später zeigen, daß es verträglich mit der Erweiterung von Skalaren durch den Rechtsadjungierten zur Restriktion.

Übung 19.6.4.29 (**Étaler Raum der Ausdehnung durch Null**). Ist $b : Z \hookrightarrow X$ eine lokal abgeschlossene Einbettung und $\mathcal{E}$ eine abelsche Garbe auf Z, so ist im étalen Raum $\text{ét}(b_*\mathcal{E})$ der Bildgarbe die Vereinigung aller Halme über Punkten von $b(Z)$ mit dem Bild des Nullschnitts der étale Raum der Untergarbe $b_!\mathcal{E} \subset b_*\mathcal{E}$. Man kann umgekehrt zeigen, daß für $b : Z \hookrightarrow X$ eine beliebige Einbettung und $\mathcal{E}$ eine konstante nichttriviale Garbe auf Z der eben betrachtete Teilraum von $\text{ét}(b_*\mathcal{E})$ genau dann étale ist über X, wenn b lokal abgeschlossen ist. Für mehr dazu vergleiche [God64].

Übung 19.6.4.30 (**Transformation $b^! \Rightarrow b^*$ in einem Spezialfall**). Für jede lokal abgeschlossene Einbettung b erhalten wir eine Transformation $b^! \Rightarrow b^*$, indem wir auf die durch die Adjunktionen gegebene Transformation $b_!b^! \Rightarrow \mathrm{id} \Rightarrow b_*b^*$ den Funktor b^* anwenden und unsere Isotransformationen $b^*b_! \tilde{\Rightarrow} b^*b_* \tilde{\Rightarrow} \mathrm{id}$ aus 19.6.4.23 benützen. Für jede offene Einbettung b ist diese Transformation unsere Isotransformation $b^! \tilde{\Rightarrow} b^*$ aus 19.6.4.16.

Übung 19.6.4.31 (**Rückzug eigentlicher Opkomorphismen**). Gegeben sei über einem kartesischen Diagramm $fq = pg$ von topologischen Räumen ein Diagramm von abelschen Garben und Opkomorphismen $\bar{f}\bar{q} = \bar{p}\bar{g}$. Man zeige: Sind die Horizontalen $\bar{p}, \bar{q}$ kartesisch und ist $\bar{f}$ eigentlich, so ist auch $\bar{g}$ eigentlich. Hinweis: Man gehe aus von einem eigentlichen Komorphismus $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ über f. Es gilt zu zeigen, daß der induzierte Komorphismus $p^*\mathcal{G} \to q^*\mathcal{F}$ über g alias der davon induzierte



Die Ausdehnung durch Null und das direkte Bild der konstanten Garbe $\mathcal{F}$ mit Halm $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ unter der offenen Einbettung $u : \mathbb{R}^\times \hookrightarrow \mathbb{R}$. Dargestellt sind zwei Räume, bei denen die Garbe der stetigen Schnitte der offensichtlichen vertikalen Projektion auf die waagerechte Gerade gerade $u_!\mathcal{F}$ beziehungsweise $u_*\mathcal{F}$ sind. Im ersten Fall ist diese vertikale Projektion étale und wir sehen den étalen Raum der Ausdehnung durch Null. Im zweiten Fall ist die vertikale Projektion jedoch nicht étale, der étale Raum des direkten Bildes ist eben nicht Hausdorff und deshalb schwer graphisch darzustellen. Man erkennt jedoch gut, daß der Halm am Ursprung der Garbe $u_*\mathcal{F}$ aus genau vier Elementen besteht: Kommt von unten bleibt unten, kommt von oben bleibt unten, kommt von unten geht nach oben, kommt von oben geht wieder nach oben.

Garbenhomomorphismus $p^*\mathcal{G} \to g_*q^*\mathcal{F}$ faktorisiert über $g_!q^*\mathcal{F}$. Dazu reicht es zu zeigen, daß $p^*\mathcal{G}$ als abelsche Garbe erzeugt wird von Schnitten, die in $g_!q^*\mathcal{F}$ landen. Schließlich überlegt man sich, daß die von Schnitten von $\mathcal{G}$ zurückgeholten Schnitte von $p^*\mathcal{G}$ die abelsche Garbe $p^*\mathcal{G}$ erzeugen und in $g_!q^*\mathcal{F}$ landen.

Übung 19.6.4.32 (**Étaler separierter Basiswechsel**). Hier lernen Sie einen Spezialfall des allgemeinen „les-Basiswechsels“ kennen. Gegeben ein kartesisches Diagramm $fq = pg$ von topologischen Räumen mit f étale und separiert induziert für jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf dem Definitionsbereich von f der allgemeine Basiswechsel $p^*f_*\mathcal{F} \to g_*q^*\mathcal{F}$ einen Isomorphismus

$$p^*f_!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} g_!q^*\mathcal{F}$$

und $f_!$ ist exakt. Hinweis: Man ziehe sich zunächst auf den Fall zurück, daß p die Einbettung eines Punktes ist. In 21.4.1.16 zeigen wir unseren Isomorphismus allgemeiner für f „lokal eigentlich separiert“. Die Exaktheit von $f_!$ verallgemeinert sich jedoch nicht auf diesen Fall.

19.6.5 Adjungierte für Schreivorschübe*

Satz 19.6.5.1 (**Verdierdualität für separierte étale Abbildungen**). *Für jede separierte étale Abbildung $f : X \to Y$ ist der Schreivorschub ein exakter Funktor $f_! : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/Y}$ und es gibt genau eine Adjunktion $(f_!, f^*)$, deren Koeinheit $f_!f^*\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ unter Restriktion auf eine beliebige Faser und étalem separierten Basiswechsel 19.6.4.32 der Summation $\bigoplus_{x\in f^{-1}(y)} \mathcal{G}_y \to \mathcal{G}_y$ entspricht.*

19.6.5.2. Diese Adjunktion verallgemeinert unsere Adjunktion $(j_!, j^*)$ für offene Einbettungen j aus 19.4.9.9. Eine Verallgemeinerung, die auch den Fall lokal abgeschlossener Einbettungen mit einschließt, diskutieren wir in 21.5.7.11. Im übrigen hat nach 19.6.5.6 der Funktor $f^* : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ sogar für eine beliebige étale nicht notwendig separierte Abbildung f einen Linksadjungierten.

Beweis. Étaler separierter Basiswechsel 19.6.4.32 liefert für alle $y \in Y$ einen Isomorphismus $\bigoplus_{f(x)=y} \mathcal{F}_x \xrightarrow{\sim} (f_!\mathcal{F})_y$. Das zeigt, daß $f_!$ exakt ist und mit beliebigen direkten Summen vertauscht. Gegeben eine separierte étale Abbildung $f : X \to Y$ und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ konstruieren wir nun eine Bijektion

$$\mathrm{Ab}_{/Y}(f_!\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

Jeder Morphismus $\varphi : f_!\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ liefert ja mit étalem separierten Basiswechsel Gruppenhomomorphismen $\mathcal{F}_x \to (f_!\mathcal{F})_{f(x)} \to \mathcal{G}_{f(x)}$. Wir zeigen nun, daß diese in ihrer Gesamtheit eine stetige Abbildung $\bar{\mathcal{F}} \to \bar{\mathcal{G}}$ alias einen Morphismus in $\mathrm{Ab}_{/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ liefern und daß wir so die gewünschte Bijektion erhalten. Die Menge

der abelschen Garben $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$, für die das stimmt, ist stabil unter beliebigen direkten Summen und unter Kokernen, da unser Schreivorschub $f_!$ mit beliebigen direkten Summen vertauscht und exakt ist. Ist $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung einer offenen Teilmenge derart, daß $fj : U \to Y$ immer noch eine offene Einbettung ist, so gehört $\mathcal{F} = j_!\mathbb{Z}_U$ offensichtlich zu unserer Menge. Damit ist aber klar, daß unsere Menge ganz $\mathrm{Ab}_{/X}$ sein muß. $\square$

Ergänzung 19.6.5.3. Die Adjunktionen aus dem Beweis des Lemmas erfüllen ihrerseits weitere Verträglichkeiten. Genauer erinnern wir aus 19.6.4.9 unsere Schreikofaserung

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{s}}} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{s}}$$

mit ihren Vorschüben $f_{¡}$ aus 19.6.4.5. Wir erinnern weiter unsere Garbenfaserung $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$. Nach 19.6.5.6 besitzen deren Rückzüge zu étalen Abbildungen $f : X \to Y$ Linksadjungierte. Schränken wir unsere Garbenfaserung auf die Unterkategorie $\mathrm{Top}^{\text{ét}}$ der topologischen Räume mit étalen Abbildungen als Morphismen ein, so wird unsere Garbenfaserung mithin eine Bifaserung und wir erhalten auf den opponierten Kategorien eine Faserung

$$\big(\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Top}^{\text{ét}}}\big)^{\mathrm{opp}} \to \big(\mathrm{Top}^{\text{ét}}\big)^{\mathrm{opp}}$$

Für separierte étale Abbildungen haben wir in 19.6.5.1 sogar ausgezeichnete Isomorphismen zwischen diesen Linksadjungierten und unseren Funktoren $f_!$ angegeben. Schränken wir uns also weiter ein auf die Kategorie $\mathrm{Top}^{\text{éts}}$ mit nur separierten étalen Abbildungen in der Basis beziehungsweise deren opponierte Kategorie, so entsprechen in unserer Faserung Morphismen über $f^\circ : Y \to X$ zu einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ Elementen von $\mathrm{Ab}_{/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ und kartesisch sind diejenigen Elemente von $\mathrm{Ab}_{/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, die Isomorphismen $f_!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ induzieren. Umgekehrt entsprechen Morphismen der Schreikofaserung über f eineindeutig Elementen von $\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/Y}(f_{¡}\mathcal{F}, \mathcal{G})$ alias Garbenhomomorphismen $\mathcal{G} \to f_!\mathcal{F}$ und kokartesisch sind genau die Morphismen, die hier Isomorphismen $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_!\mathcal{F}$ von Garben entsprechen. Man prüft nun unschwer, daß die oben herausgestellte Faserung über $(\mathrm{Top}^{\text{éts}})^{\mathrm{opp}}$ zusammen mit der Schreikofaserung und den durch Invertieren eines Isomorphismus $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_!\mathcal{F}$ zu einem Isomorphismus $f_!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ gegebenen Bijektionen zwischen kartesischen und kokartesischen Morphismen der Faserung beziehungsweise Kofaserung die Axiome einer Fakofaserung aus 19.8.4.4 erfüllen. Salopp gesprochen sind also die Identifikationen für die Funktoren $f_!$ „in Bezug auf die Schreikofaserung“ und „in Bezug auf ihre Bedeutung als Linksadjungierte zur Garbenfaserung“ dieselben.

19.6.5.4 (**Schreivorschub konstanter Garben**). Gegeben eine separierte étale Abbildung $f : X \to Y$ liefern unsere beiden Beschreibungen 19.6.5.1 und 19.6.5.6

des Linksadjungierten zum Rückzug $f^* : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ einen natürlichen Isomorphismus

$$f_! \mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\mathcal{S}_Y X$$

zwischen dem Schreivorschub der konstanten Garbe und der freien abelschen Garbe über der Garbe von Mengen auf Y mit étalem Raum X. Analoges gilt für beliebige konstante Garben auf X und wird sich auch in **??** formal als Konsequenz aus unserer Formel im Fall der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ ergeben. Einfacher mag man den allgemeinen Fall als Konsequenz aus unserer Formel im Fall der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ erhalten, indem man bei torsionsfreiem Halm die „underivierte Projektionsformel“ 21.4.3.9 anwendet und im allgemeinen zusätzlich die Exaktheit von $f_!$ beachtet.

Übungen

Übung 19.6.5.5 (**Spur gewisser Schreivorschübe**). Ist $f : X \to Y$ stetig und $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ eine abelsche Garbe, so liefert die Einheit der Adjunktion (f^*, f_*) einen Garbenhomomorphismus $\mathcal{G} \to f_* f^* \mathcal{G}$. Ist f zusätzlich étale und separiert, so liefert die Koeinheit der Adjunktion $(f_!, f^*)$ aus 19.6.5.1 einen Garbenhomomorphismus $f_! f^* \mathcal{G} \to \mathcal{G}$. Ist f zusätzlich auch noch eigentlich, so ist die natürliche Einbettung aus 19.6.4.5 eine Isotransformation $f_! \overset{\sim}{\Rightarrow} f_*$ und ihre Inverse liefert zusammen mit den obigen Konstruktionen natürliche Garbenhomomorphismen

$$\mathcal{G} \to f_* f^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_! f^* \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

Man zeige, daß dieser Garbenhomomorphismus das Produkt mit der Kardinalität der Faser von f ist, in Formeln also das Produkt mit der lokal konstanten Funktion $y \mapsto |f^{-1}(y)|$ von Y nach $\mathbb{Z}$. Hinweis: Man ziehe sich mit Basiswechseln auf den Fall zurück, daß Y nur aus einem einzigen Punkt besteht. Allgemein nennt man im Fall eines Paars von Funktoren, für das sowohl eine Adjunktion (F, G) als auch eine Adjunktion (G, F) gegeben sind, die Verknüpfungen $\mathrm{Id} \Rightarrow FG \Rightarrow \mathrm{Id}$ und $\mathrm{Id} \Rightarrow GF \Rightarrow \mathrm{Id}$ der Einheit der einen Adjunktion mit der Koeinheit der anderen **Spurmorphismen**. In unserem Fall ist der zweite Spurmorphismus die Identität $\mathcal{F} \to f^* f_! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f^* f_* \mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

Übung 19.6.5.6 (**Linksadjungierter zu abelschem étalen Rückzug**). Gegeben eine étale nicht notwendig separierte Abbildung $f : X \to Y$ ist für alle $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ der partielle Linksadjungierte des Rückzugs $f^* : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ auf der freien abelschen Garbe $\mathbb{Z}\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ definiert und nimmt dort den Wert

$$\mathbb{Z} f_{[!]} \mathcal{F}$$

an für unser $f_{[!]} : \mathrm{Ens}_{/X} \to \mathrm{Ens}_{/Y}$ aus 19.6.3.21 und der Notation $\mathbb{Z}\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ für die freie abelsche Garbe über $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ aus 19.2.2.60. Jede abelsche Garbe

$\mathcal{A} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ ist nun der Kokern $\mathbb{Z}\mathcal{G} \to \mathbb{Z}\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{A}$ eines Morphismus von freien abelschen Garben und man folgere so für étales f die Existenz eines globalen Linksadjungierten des Rückzugs $f^* : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/X}$. Für separierte étale Abbildungen muß er mit dem Schreivorschub übereinstimmen, den wir je nach Kontext $f_!$ oder $f_{(!)}$ notieren und für den wir in diesem Fall in 19.6.5.1 eine Adjunktion $(f_!, f^*)$ konstruiert haben.

19.6.6 Höhere Derivierte der Vorschübe

Beispiel 19.6.6.1. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist der Vorschub offensichtlich und formal nach 19.2.4.12 als Rechtsadjungierter ein linksexakter Funktor $f_* : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/Y}$. Die zugehörigen rechtsderivierten Funktoren $\mathrm{R}^q f_*$ beschreibt der folgende Satz.

Satz 19.6.6.2 (Beschreibung der höheren Vorschübe). *Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ und eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ ist ihr q-ter derivierter Vorschub $\mathrm{R}^q f_* \mathcal{F}$ isomorph zu der zur Prägarbe $V \mapsto \mathrm{H}^q(f^{-1}(V); \mathcal{F})$ assoziierten Garbe vermittels der im anschließenden Beweis konstruierten natürlichen Isomorphismen.*

Beispiel 19.6.6.3. Ist $c : X \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung, so liefern die Definitionen einen Isomorphismus $\mathrm{R}^q c_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X; \mathcal{F})_{\mathrm{top}}$ von abelschen Garben auf top, der in diesem Fall mit dem im anschließenden Beweis konstruierten natürlichen Isomorphismus zusammenfällt.

Beispiel 19.6.6.4. Den Fall, daß f die Identität auf X ist, haben Sie möglicherweise bereits als Übung 19.4.3.19 behandelt.

Beweis. Gegeben ein Komplex $\mathcal{A}^*$ von abelschen Garben auf einem topologischen Raum Y bezeichne $\underline{\mathcal{H}}^q \mathcal{A}^*$ seine q-te Kohomologie als Komplex von abelschen Prägarben, also die Prägarbe

$$\underline{\mathcal{H}}^q \mathcal{A}^* : V \mapsto \mathrm{cok}\left(\mathcal{A}^{q-1}(V) \to \ker(\mathcal{A}^q(V) \to \mathcal{A}^{q+1}(V))\right)$$

Das Zusammenfallen von Prägarbenkern und Garbenkern sowie unsere Beschreibung des Garbenkokerns als Garbifizierung des Prägarbenkokerns liefern einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$(\underline{\mathcal{H}}^q \mathcal{A}^*)^+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q \mathcal{A}^*$$

der Garbifizierung der Prägarbenkohomologie mit der Garbenkohomologie. Ist nun $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\lhd$ eine injektive Auflösung, so erhalten wir insbesondere Isomorphismen zwischen den Kohomologiegarben des Komplexes $f_* \mathcal{I}^\lhd$ und den Garbifizierungen der Prägarben

$$V \mapsto \mathcal{H}^q((f_* \mathcal{I}^\lhd)(V)) = \mathcal{H}^q(\mathcal{I}^\lhd(f^{-1}(V))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(f^{-1}(V); \mathcal{F})$$

Der letzte Isomorphismus ganz rechts rührt daher, daß die Restriktionen auf die offenen Teilmengen $f^{-1}(V)$ der welken Garben des Komplexes $\mathcal{I}^\lhd$ wieder welk sind. Daß diese letzten Isomorphismen mit Restriktionen auf kleinere V verträglich sind, folgt aus der Definition des Zurückholens in der Garbenkohomologie. □

19.6.6.5. Aus dem Satz folgt unmittelbar, daß welke abelsche Garben azyklisch sind für den Vorschub unter jeder stetigen Abbildung. Verallgemeinerungen auf Komplexe diskutieren wir in 21.2.3.22.

19.6.6.6. Gegeben eine stetige Abbildung $p : Z \to Y$ und eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/Z}$ und ein Punkt $y \in Y$ erhalten wir kanonische Abbildungen

$$(\mathrm{R}^i p_* \mathcal{F})_y \to \mathrm{H}^i(p^{-1}(y); \mathcal{F})$$

von den Halmen der höheren Vorschübe in die Kohomologie der Fasern durch Übergang zum Kolimes der Restriktionen $\mathrm{H}^i(p^{-1}(V); \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^i(p^{-1}(y); \mathcal{F})$ über alle $V \Subset Y$ mit $y \in V$. Wir nennen auch diese Abbildungen Basiswechsel, da sie ein Spezialfall der folgenden allgemeineren Konstruktion sind, die offensichtlich die Bezeichnung als Basiswechsel verdient.

19.6.6.7. Ist $pg = fq$ ein kommutatives Diagramm von topologischen Räumen und $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf dem Definitionsbereich von f, so erklären wir die **Basiswechselhomomorphismen**

$$p^*(\mathrm{R}^i f_*)\mathcal{F} \to (\mathrm{R}^i g_*) q^* \mathcal{F}$$

wie folgt: Wir gehen aus von einer injektiven Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\lhd$ und betrachten die Basiswechsel $p^* f_* \mathcal{I}^\lhd \to g_* q^* \mathcal{I}^\lhd$. Da der Rückzug von Garben exakt ist, muß $q^*\mathcal{I}^\lhd$ eine Auflösung von $q^*\mathcal{F}$ sein und wir erhalten unsere Basiswechselmorphismen als die Komposition

$$p^*(\mathrm{R}^i f_*)\mathcal{F} = p^* \mathcal{H}^i(f_* \mathcal{I}^\lhd) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^i(p^* f_* \mathcal{I}^\lhd) \to \mathcal{H}^i(g_* q^* \mathcal{I}^\lhd) \to (\mathrm{R}^i g_*) q^* \mathcal{F}$$

Deren Unabhängigkeit von der gewählten injektiven Auflösung ist offensichtlich.

Satz 19.6.6.8 (**Derivierter offener und eigentlicher Basiswechsel**). *Sei ein kartesisches Diagramm von topologischen Räumen $pg = fq$ gegeben. Sind p, q offene Einbettungen oder f, g eigentlich und separiert, so ist unser Basiswechsel für alle i ein Isomorphismus*

$$p^*(\mathrm{R}^i f_*) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}^i g_*) q^*$$

19.6.6.9. Speziell ist für $f : X \to Y$ eigentlich und separiert sowie $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und einen beliebigen Punkt $y \in Y$ der Basiswechsel ein Isomorphismus

$$(\mathrm{R}^i f_* \mathcal{F})_y \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(f^{-1}(y); \mathcal{F})$$

Das folgt durch Anwenden des Satzes auf die Einbettung $p : \{y\} \hookrightarrow Y$ des Punktes $y \in Y$.

Beweis. Wir betrachten die Sequenz von Morphismen, durch die wir unseren derivierten Basiswechsel in 19.6.6.7 definiert haben. Sind p, q offene Einbettungen, so ist der gewöhnliche Basiswechsel ein Isomorphismus nach offenen Basiswechsel 19.6.3.23, also ist der vorletzte Pfeil unserer Sequenz ein Isomorphismus, und die Restriktion einer injektiven Garbe unter einer offenen Einbettung bleibt injektiv, also ist der letzte Pfeil ein Isomorphismus. Sind f, g separiert und eigentlich, so reicht es, wenn wir unsere Aussage für p die Einbettung eines Punktes zeigen, da ein Garbenhomomorphismus, der Isomorphismen auf allen Halmen induziert, bereits ein Isomorphismus sein muß. In diesem Fall ist die vorletzte Abbildung obiger Sequenz ein Isomorphismus nach eigentlichen Basiswechsel 19.6.3.24 und die letzte Abbildung ist ein Isomorphismus, da die Restriktion einer welken Garbe auf ein relativ Hausdorff'sches Kompaktum nach 19.4.5.2 kompaktweich ist. □

19.6.6.10. Wir nennen einen topologischen Raum Z **schwach basisfest garbenazyklisch** oder kurz **schwach bagazyklisch**, wenn für jeden topologischen Raum Y und jede abelsche Gruppe M und alle q der Rückzug unter der Projektion auf der Garbenkohomologie Isomorphismen $\mathrm{H}^q(Y; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(Y \times Z; M)$ liefert. Insbesondere ist nach der Homotopieinvarianz der Garbenkohomologie 19.4.5.10 jeder zusammenziehbare Raum schwach bagazyklisch. Gilt die fragliche Eigenschaft nur für $q \leq n$, so nenne ich den Raum Z **schwach bag-n-azyklisch**. Ein vernüftiges Kriterium zum Nachweis dieser Eigenschaft zeigen wir in 19.8.2.6.

Vorschau 19.6.6.11. Starke Varianten dieser Begriffe werden in 21.3.1.2 eingeführt. Der wesentliche Punkt ist, daß wir dafür vergleichbare Eigenschaften für beliebige Komplexe abelscher Garben fordern, die wir im schwachen Fall nur für beliegige konstante Garben fordern. Wir werden dort zeigen, daß zusammenziehbare Räume auch diese stärkere Eigenschaft haben.

Satz 19.6.6.12 (Verschwinden höherer Vorschübe bei Faserbündeln). *Gegeben ein Faserbündel $f : X \to Y$ mit schwach bagazyklischer Faser und eine abelsche Gruppe M verschwinden die höheren derivierten Vorschübe der konstanten Garbe M_X, in Formeln $\mathrm{R}^q f_* M_X = 0$ für $q > 0$. Weiter ist die Einheit der Adjunktion dann ein Isomorphismus $M_Y \xrightarrow{\sim} f_* f^* M_Y$ und liefert zusammen mit dem natürlichen Isomorphismus $f^* M_Y \xrightarrow{\sim} M_X$ einen Isomorphismus*

$$M_Y \xrightarrow{\sim} f_* M_X$$

19.6.6.13. Ist die Faser nur schwach bag-n-azyklisch, so folgt in derselben Weise $M_Y \xrightarrow{\sim} f_* M_X$ und $\mathrm{R}^q f_* M_X = 0$ für $0 < q < n$.

Beweis. Mit offenem Basiswechsel können wir uns auf den Fall zurückziehen, daß unsere Abbildung die Projektion $f : Y \times Z \twoheadrightarrow Y$ ist mit Z schwach bagazyklisch. Nach Annahme induziert nun für alle $U \Subset Y$ der Rückzug Isomorphismen $\mathrm{H}^q(U; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(U \times Z; M)$ für alle q. Nach 19.4.3.19 alias 19.6.6.2 angewandt auf die Identität verschwinden für $q > 0$ alle Halme der Prägarbe $U \mapsto \mathrm{H}^q(U; M)$ auf X. So folgt $\mathrm{R}^q f_* M_X$ für $q > 0$ aus unserer Beschreibung 19.6.6.2 der höheren Vorschübe. Im Fall $q = 0$ folgt die Aussage direkt aus den Definitionen. □

Korollar 19.6.6.14 (Zurückholen auf Bündel mit zusammenziehbarer Faser). *Gegeben ein Faserbündel $f : X \to Y$ mit schwach bagazyklischer Faser liefert das Zurückholen auf der Garbenkohomologie für jede abelsche Gruppe M Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^p(Y; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^p(X; M)$$

Ist die Faser nur schwach bag-n-azyklisch, so erhalten wir mit demselben Beweis dieselben Isomorphismen für $p < n$.

Ergänzung 19.6.6.15. Ich habe nur deshalb eine schwächere Aussage als Motto gesetzt, weil sie mir griffiger schien. Der Satz von Leray-Hirsch über die Kohomologie von Faserbündeln, vergleiche etwa [Hat02], Theorem 4D.1, liefert eine vergleichbare Aussage für die singuläre Kohomologie.

19.6.6.16 (**Ein Faserbündel mit zusammenziehbarer Faser ohne Schnitt**). Ein Faserbündel mit zusammenziehbarer Faser muß im allgemeinen keine Homotopieäquivalenz sein, ja es muß noch nicht einmal einen globalen Schnitt besitzen. Ein Beispiel erhält man, indem man als Basis die Zahlengerade mit verdoppeltem Ursprung aus 15.1.4.8 betrachtet und sie überdeckt durch zwei Kopien U, V der Zahlengerade mit Schnitt $U \cap V \cong \mathbb{R}^\times$. Darauf betrachtet man das Faserbündel mit Faser $\mathbb{R}$, das auf den beiden offenen Teilmengen U, V trivial ist, und zusammengeklebt mit der Verklebungsfunktion $(x, t) \mapsto (x, f(x) + t)$ für eine stetige Abbildung $f : (U \cap V) \to \mathbb{R}$, die sich nicht stetig von $U \cap V \cong \mathbb{R}^\times$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen läßt.

Beweis. Aus 19.6.6.12 folgt $\mathrm{R}^q f_* M_X = 0$ für $q > 0$ und die Adjunktion liefert den Ersten von zwei Isomorphismen $M_Y \xrightarrow{\sim} f_* f^* M_Y \xrightarrow{\sim} f_* M_X$. Ist also $M_X \hookrightarrow \mathcal{I}^\triangleleft$ eine welke Auflösung, so ist auch $f_* M_X \hookrightarrow f_* \mathcal{I}^\triangleleft$ eine welke Auflösung. So erhalten wir Isomorphismen

$$\mathrm{H}^p(Y; M_Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^p(Y; f_* M_X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^p \Gamma f_* \mathcal{I}^\triangleleft \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^p \Gamma \mathcal{I}^\triangleleft \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^p(X; M_X)$$

Daß diese Komposition genau das Zurückholen auf der Kohomologie ist, folgt aus den Definitionen. □

19.6.6.17 (**Ein Spezialfall der Leray'schen Spektralsequenz**). Gegeben stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ sowie $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ mit $\mathrm{R}^q f_* \mathcal{F} = 0$ für $0 < q \leq n$ konstruieren wir nun ganz allgemein natürliche Isomorphismen

$$(\mathrm{R}^p g_*) f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^p (gf)_* \mathcal{F} \quad \text{für } p < n.$$

Wir wählen dazu eine injektive und damit welke Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\triangleleft$. Nach Annahme ist dann auch $f_*\mathcal{F} \hookrightarrow f_*\mathcal{I}^\triangleleft$ ein bis zum Grad n exakter Komplex aus welken, nach 19.6.6.5 also g_*-azyklischen Garben. Indem wir in diesen Komplex die Garbe im Grad $n+1$ durch das Bild des Randoperators ersetzen und die Garben in höheren Graden durch Null und ihn dann zur Berechnung von $\mathrm{R}^p g_*(f_*\mathcal{F})$ verwenden, erhalten wir für $p < n$ Isomorphismen

$$\mathrm{R}^p g_*(f_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^p g_*(f_*\mathcal{I}^\triangleleft) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^p (gf)_* \mathcal{I}^\triangleleft \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^p (gf)_* \mathcal{F}$$

Daß diese Isomorphismen nicht von der Wahl der ursprünglichen injektiven Auflösung abhängen, folgt aus der Eindeutigkeit von Homotopielifts. Im Fall einer konstanten Abbildung g erhalten wir, daß das Zurückholen auf der Kohomologie zum kanonischen Komorphismus $f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ für $p \leq n$ Isomorphismen $\mathrm{H}^p(Y; f_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^p(X; \mathcal{F})$ induziert. Unser Korollar 19.6.6.14 über das Zurückholen auf Faserbündel mit zusammenziehbarer Faser hinwiederum mag man nun aus dieser Aussage folgern, indem man sie auf die konstante Garbe $\mathcal{F} := M_X$ und anwendet und als g die konstante Abbildung auf den einpunktigen Raum nimmt.

Übungen

Übung 19.6.6.18. Man zeige, daß ein Raum Z genau dann schwach bag-n-azyklisch ist für ein $n \geq 0$, wenn Z zusammenhängend ist und wenn gilt $\mathrm{R}^q \operatorname{pr}_{1*} M_{X \times Z} = 0$ für $0 < q \leq n$ und beliebiges X. Hinweis: Man orientiere sich am Beweis von 19.6.6.12.

Übung 19.6.6.19. Man zeige, daß die Sphäre S^{n+1} schwach bag-n-azyklisch ist. Hinweis: Eigentlicher Basiswechsel.

Übung 19.6.6.20. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ und eine Zerlegung $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ in paarweise disjunkte offene Teilmengen und eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf X zeige man, daß die Basiswechsel natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{R}^q f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathrm{R}^q f_{i*} \operatorname{in}_i^* \mathcal{F}$$

liefern, für $\operatorname{in}_i : X_i \hookrightarrow X$ die jeweilige Einbettung und $f_i : X_i \to Y$ die jeweilige Einschränkung.

Übung 19.6.6.21. Für eine Überlagerung $f : X \to Y$ verschwinden die höheren derivierten Vorschübe. Für eine endliche Überlagerung ist der Vorschub einer lokal konstanten Garbe lokal konstant.

Übung 19.6.6.22 (**Invarianten und Reynoldsoperator**). Gegeben eine endliche Gruppe G und eine abelsche Gruppe M mit G-Operation, auf der die Multiplikation mit der Gruppenordnung auf M einen Isomorphismus $(|G|\cdot) : M \xrightarrow{\sim} M$ induziert, ist der **Reynolds-Operator** $R := |G|^{-1} \sum_{g \in G} g$ ein idempotenter Endomorphismus $R \in \mathrm{Ab}(M, M)$ mit der Untergruppe der G-Invarianten als Bild, in Formeln

$$\mathrm{im}(R) = M^G$$

Übung 19.6.6.23 (**Invarianten und Reynoldsoperator, Variante**). Gegeben eine endliche Gruppe G und eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ und ein Objekt $M \in \mathcal{A}$ mit G-Operation, auf dem die Multiplikation mit der Gruppenordnung auf M einen Isomorphismus $(|G|\cdot) : M \xrightarrow{\sim} M$ induziert, ist der **Reynolds-Operator** $R := |G|^{-1} \sum_{g \in G} g$ ein idempotenter Endomorphismus $R \in \mathcal{A}(M, M)$ mit dem Unterobjekt der G**-Invarianten** als Bild, in Formeln

$$\mathrm{im}(R) = M^G$$

für M^G den Kern des Morphismus $(g - \mathrm{id})_{g \in G} : M \to \prod_{g \in G} M$.

Übung 19.6.6.24 (**Garbenkohomologie von Quotienten**). Es operiere eine endliche diskrete Gruppe G auf einem topologischen Raum X und die Quotientenabbildung $f : X \to X/G$ sei separiert. Sei weiter M eine abelsche Gruppe. Ist die Multiplikation mit $|G|$ ein Isomorphismus $(|G|\cdot) : M \xrightarrow{\sim} M$, so induziert das Zurückholen Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X/G; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X; M)^G$$

zwischen der Kohomologie des Quotienten und den G-Invarianten in der Kohomologie des ursprünglichen Raums. Hinweis: Nach 15.2.4.22 ist unsere Quotientenabbildung eigentlich. Für jede abelsche Gruppe M trägt der Vorschub $f_* M_X$ eine natürliche G-Operation und die Komposition $M_{X/G} \to f_* f^* M_{X/G} \xrightarrow{\sim} f_* M_X$ induziert einen Isomorphismus $M_{X/G} \xrightarrow{\sim} (f_* M_X)^G$ auf die Untergarbe der G-Invarianten, etwa nach eigentlichem Basiswechsel. Nun verwende man unseren Spezialfall der Leray'schen Spektralsequenz 19.6.6.17 sowie den Reynolds-Operator 19.6.6.23 und allgemeine Erkenntnisse 19.2.5.22 über additive Funktoren und idempotente Endomorphismen. Ich weiß nicht, ob für die singuläre Kohomologie die entsprechende Abbildung $\mathrm{H}^q(X/G; M)_{\mathrm{sing}} \to \mathrm{H}^q(X; M)^G_{\mathrm{sing}}$ in derselben Allgemeinheit ein Isomorphismus ist.

Beispiel 19.6.6.25 (**Kohomologie von Quotienten, Gegenbeispiel**). Die Spiegelung an einer Ursprungsgerade erzeugt eine Gruppe G von Automorphismen der

Kreislinie S^1, für die das Zurückholen $\mathrm{H}^q(S^1/G; M) \to \mathrm{H}^q(S^1; M)^G$ im Fall $M := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ kein Isomorphismus ist. In diesem Fall ist die Multiplikation mit $|G|$ aber auch kein Isomorphismus, sondern die Nullabbildung $(|G|\cdot) = 0 : M \to M$.

Beispiel 19.6.6.26 (**Kohomologie von Quotienten, Gegenbeispiel**). Wir betrachten als unseren Raum X die „Zahlengerade mit verdoppeltem Ursprung“ und lassen darauf die zweielementige Gruppe G so operieren, daß alle Punkte in ihr Negatives übergehen und die beiden Punkte unseres verdoppelten Ursprungs vertauscht werden. So ist $\mathrm{H}^1(X/G; \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}^1(X; \mathbb{Q})^G$ kein Isomorphismus. Genauer verschwindet die erste Kohomologie des Quotienten und mit einer azyklischen Überdeckung erhalten wir rechts als erste Kohomologie den Körper $\mathbb{Q}$ mit trivialer G-Operation. In diesem Fall ist $X \to X/G$ aber auch nicht separiert.

19.7 Äquivariante Theorie

In meinen Augen ist die Erweiterung der Theorie zu äquivarianten Situationen von zentraler Wichtigkeit, weil wir hier auf eine große Vielfalt von nichttrivialen explizit berechenbaren Beispielen treffen.

19.7.1 Äquivariante Garben, VERSCHIEBEN?

19.7.1.1. Gegeben ein topologischer Raum mit der Operation eines topologischen Monoids $G\backslash\!\!\searrow X$ verstehen wir unter einer **G-äquivarianten Mengengarbe auf** X eine Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ mit einer stetigen Operation $G \times \bar{\mathcal{F}} \to \bar{\mathcal{F}}$ unseres Monoids auf ihrem étalen Raum derart, daß Projektion $\bar{\mathcal{F}} \to X$ äquivariant ist. Die Kategorie der G-äquivarianten Mengengarben auf X notieren wir

$$\mathrm{Ens}_{/G\backslash\!\!\searrow X}$$

Beispiel 19.7.1.2 (**Äquivariante Garben auf dem einpunktigen Raum**). Im Fall des einpunktigen Raums und eines diskreten Monoids ist das Bilden der globalen Schnitte ein Isomorphismus von Kategorien

$$\mathrm{Ens}_{/G\backslash\!\!\searrow \mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} G\text{-}\mathrm{Ens}$$

Im Fall eines topologischen Monoids G gilt dasselbe, wenn wir $G\text{-}\mathrm{Ens}$ verstehen als die Kategorie aller Mengen F mit einer G-Operation, die als Abbildung $G \times F \to F$ stetig ist für die diskrete Topologie auf F. Ist G eine topologische Gruppe und gibt es in G eine zusammenhängende Umgebung des neutralen Elements, so liefert der Rückzug vom Quotienten nach der Einskomponente einen Isomorphismus von Kategorien

$$(G/G^\circ)\text{-}\mathrm{Ens} \xrightarrow{\sim} G\text{-}\mathrm{Ens}$$

Beispiel 19.7.1.3 (**Äquivariante Garben bei trivialer Operation**). Ist G ein diskretes Monoid, das auf einem Raum X trivial operiert, so ist eine G-äquivariante Mengengarbe auf X dasselbe wie eine Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ mit einem Monoidhomomorphismus $G \to \mathrm{Ens}_{/X}(\mathcal{F})$ von G in das Monoid ihrer Endomorphismen. Etwas formaler erhalten wir so einen Isomorphismus von Kategorien

$$\mathrm{Ens}_{/G\backslash\!\!\searrow X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}([G], \mathrm{Ens}_{/X})$$

Im Fall des einpunktigen Raums erhalten wir auf diese Weise die Beschreibung aus 19.7.1.2 ein weiteres Mal.

19.7.1.4 (**Äquivariante Gruppengarben**). Sei $G\backslash\!\!\searrow X$ ein topologischer Raum mit der Operation eines topologischen Monoids. Unter einer **G-äquivarianten Gruppengarbe auf** X verstehen wir eine Gruppengarbe $\mathcal{F}$ mit einer G-äquivarianten Struktur auf der zugrundeliegenden Mengengarbe derart, daß für alle $g \in G$ und $x \in X$ die auf den Halmen induzierte Abbildung $g : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_{gx}$ ein Morphismus von Gruppen ist. Die Kategorie der G-äquivarianten abelschen Garben auf X notieren wir

$$\mathrm{Ab}_{/G\backslash\!\!\searrow X}$$

Beispiel 19.7.1.5 (**Äquivariante abelsche Garben auf dem einpunktigen Raum**). Im Fall des einpunktigen Raums und eines diskreten Monoids G ist das Bilden der globalen Schnitte ein Isomorphismus von Kategorien

$$\mathrm{Ab}_{/G\backslash\!\!\searrow \mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} G\text{-}\mathrm{Ab}$$

Im Fall eines topologischen Monoids G gilt dasselbe, wenn wir $G\text{-}\mathrm{Ab}$ verstehen als die Kategorie aller abelschen Gruppen F mit einer G-Operation, die als Abbildung $G \times F \to F$ stetig ist für die diskrete Topologie auf F. Ist G eine topologische Gruppe und gibt es in G eine zusammenhängende Umgebung des neutralen Elements, so liefert der Rückzug einen Isomorphismus von Kategorien

$$(G/G^\circ)\text{-}\mathrm{Ab} \xrightarrow{\sim} G\text{-}\mathrm{Ab}$$

Beispiel 19.7.1.6 (**Äquivariante abelsche Garben bei trivialer Operation**). Ist G ein diskretes Monoid, das auf einem Raum X trivial operiert, so ist eine G-äquivariante abelsche Garbe auf X dasselbe wie eine Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ mit einem Monoidhomomorphismus $G \to \mathrm{Ab}_{/X}(\mathcal{F})$ von G in das Monoid ihrer Endomorphismen. Etwas formaler erhalten wir dann einen Isomorphismus von Kategorien

$$\mathrm{Ab}_{/G\backslash\!\!\searrow X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}([G], \mathrm{Ab}_{/X})$$

Im Fall des einpunktigen Raums erhalten wir so die Beschreibung aus 19.7.1.5 ein weiteres Mal.

19.7.1.7. Unter einem **Morphismus** $(G\backslash\!\!\searrow X) \to (H\backslash\!\!\searrow Y)$ **von Räumen mit Operation** verstehen wir ein Paar (ϕ, f) bestehend aus einem stetigen Monoidhomomorphismus $\phi : G \to H$ und einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ derart, daß die Kompatibilitätsbedingung $f(gx) = \phi(g)f(x)$ erfüllt ist. Wir notieren solche Paare $\phi\backslash\!\!\searrow f$. Die Räume mit Operation werden auf diese Weise zu einer Kategorie

$$\mathrm{Mon}\backslash\!\!\searrow\mathrm{Top}$$

Vorschau 19.7.1.8. Grothendieck untersucht noch allgemeiner Garben auf sogenannten „Topoi“. Diese Allgemeinheit will ich vorerst vermeiden.

19.7.1.9. Gegeben ein Morphismus $(\phi\backslash f) : (G\backslash X) \to (H\backslash Y)$ von Räumen mit Operation sowie äquivariante Garben $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/G\backslash X}$ und $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/H\backslash Y}$ verstehen wir unter einem **Garbenmorphismus über** $\phi\backslash f$ einen Morphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ über f, der für den vorgegebenen Monoidmorphismus ϕ auf den étalen Räumen ein Morphismus $G\backslash\bar{\mathcal{F}} \to H\backslash\bar{\mathcal{G}}$ von Räumen mit Operation ist. Die Menge der Morphismen über einem vorgegebenen $\phi\backslash f$ notieren wir $\mathrm{Ens}_{/\phi\backslash f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Wir erhalten so eine Kategorie $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Mon}\backslash\mathrm{Top}}$ und einen Funktor

$$\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Mon}\backslash\mathrm{Top}} \to \mathrm{Mon}\backslash\mathrm{Top}$$

Wir nennen wieder einen Morphismus $\tau \in \mathrm{Ens}_{/\phi\backslash f}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ von Garben mit Operation über einem Morphismus $\phi\backslash f$ von Räumen mit Operation **kartesisch**, wenn für jede Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/G\backslash X}$ das Nachschalten von τ eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/G\backslash X}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/\phi\backslash f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

induziert. Wie im nichtäquivarianten Fall ist dann das Paar $(\mathcal{E}, \tau)$ bereits durch das Paar $(\mathcal{G}, (\phi\backslash f))$ eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus, wenn es denn existiert. Die Existenz ist aber auch klar, man muß nur den gewöhnlichen Rückzug mit der offensichtlichen G-Operation versehen. Wir nennen $\mathcal{E}$ die **äquivariant zurückgezogene Garbe** und notieren sie

$$\mathcal{E} = f^*\mathcal{G} = (\phi\backslash f)^*\mathcal{G}$$

Genauso erklären wir für abelsche Garben die Kategorie $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Mon}\backslash\mathrm{Top}}$, den Funktor $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Mon}\backslash\mathrm{Top}} \to \mathrm{Mon}\backslash\mathrm{Top}$ und den äquivarianten Rückzug.

19.7.1.10 (**Garben und Quotienten**). Im Fall einer topologisch freien Operation einer diskreten Gruppe G auf einem topologischen Raum X ist der äquivariante Rückzug unter $\phi\backslash f$ für $f : X \twoheadrightarrow G\backslash X$ und $\phi : G \twoheadrightarrow 1$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Ens}_{/(G\backslash X)} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/G\backslash X}$$

zwischen der Kategorie der Garben auf dem Bahnenraum und der Kategorie der äquivarianten Garben auf dem ursprünglichen Raum. Einen Quasiinversen erhalten wir vermittels der Zuordnung $(\bar{\mathcal{F}} \to X) \mapsto (G\backslash\bar{\mathcal{F}} \to G\backslash X)$. All das ist leicht zu sehen. Aus 16.3.3.14 mögen Sie auch, immer noch im Fall einer topologisch freien Operation einer diskreten Gruppe, die Äquivalenz $\mathrm{Top}_{G\backslash X} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Top}_{G\backslash X}$ zwischen topologischen Räumen über dem Quotienten und äquivarianten topologischen Räumen über X erinnern, die sich zu obiger Äquivalenz spezialisieren läßt. Der Rückzug der finalen Mengengarbe auf $G\backslash X$ ist offensichtlich die finale Mengengarbe auf X mit der offensichtlichen G-Operation. So sieht man, daß das Zurückholen globaler Schnitte eine Bijektion $\Gamma(G\backslash X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X; f^*\mathcal{F})^G$

zwischen Schnitten auf dem Quotienten und G-invarianten Schnitten der zurückgeholten Garbe liefert. Ebenso liefert im Fall einer topologisch freien Operation einer diskreten Gruppe G auf einem topologischen Raum X der äquivariante Rückzug abelscher Garben eine Äquivalenz

$$\mathrm{Ab}_{/G\backslash X} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ab}_{/G\searrow X}$$

In 21.7.2.19 zeigen wir analoge Aussagen für beliebige nicht notwendig diskrete topologische Gruppen.

19.7.1.11 (**Lokal konstante Garben**). Eine Garbe von Mengen beziehungsweise von Gruppen heißt **lokal konstant**, wenn unser Raum eine offene Überdeckung besitzt derart, daß die Einschränkung unserer Garbe auf jede der überdeckenden Mengen konstant ist. Eine Garbe von Mengen ist offensichtlich genau dann lokal konstant, wenn ihr étaler Raum eine Überlagerung im Sinne von 16.3.1.2 ist. Gegeben ein Raum X bezeichne $\mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/X} \subset \mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/X} \subset \mathrm{Ens}_{/X}$ die vollen Unterkategorien der konstanten beziehungsweise lokal konstanten Garben in der Kategorie aller Mengengarben auf unserem Raum. Weiter bezeichne $\mathrm{Ab}^{\mathrm{k}}_{/X} \subset \mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/X} \subset \mathrm{Ab}_{/X}$ die vollen Unterkategorien der konstanten beziehungsweise lokal konstanten abelschen Garben in der Kategorie aller abelschen Garben auf unserem Raum.

19.7.1.12 (**Äquivariante konstante und lokal konstante Garben**). Gegeben ein Raum mit Operation $G\searrow X$ bezeichne

$$\mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/G\searrow X} \subset \mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/G\searrow X} \subset \mathrm{Ens}_{/G\searrow X}$$

die vollen Unterkategorien derjenigen äquivarianten Garben, die unter dem Vergessen der G-Operation konstant beziehungsweise lokal konstant werden. Im Fall abelscher Garben verwenden wir die analogen Begriffe und vereinbaren dafür die Notationen

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{k}}_{/G\searrow X} \subset \mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/G\searrow X} \subset \mathrm{Ab}_{/G\searrow X}$$

19.7.1.13 (**Lokal konstante Garben und Quotienten**). Im Fall einer topologisch freien Operation einer diskreten Gruppe G induziert unsere durch äquivarianten Rückzug gegebene Äquivalenz aus 19.7.1.10 eine Äquivalenz

$$\mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/(G\backslash X)} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/G\searrow X}$$

zwischen den vollen Unterkategorien der jeweils lokal konstanten Garben. In der Tat sieht man leicht ein, daß beide in 19.7.1.10 betrachteten quasiinversen Funktoren lokal konstante Garben zu lokal konstanten Garben machen. Analoges gilt für abelsche Garben, der äquivariante Rückzug liefert auch für diese eine Äquivalenz

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/(G\backslash X)} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/G\searrow X}$$

19.7.1.14 (**Globale Schnitte äquivarianter Garben**). Gegeben ein Raum mit Operation $G\backslash\!\!\searrow X$ betrachten wir den Funktor

$$G\text{-Ens} \to \mathrm{Ens}_{/G\backslash\!\!\searrow X}$$

der konstanten Garbe $(M \mapsto M_X)$. Er ist sinnvoll definiert, denn operiert G stetig auf M und X, so auch auf $M \times X$. Der Funktor der globalen Schnitte macht im allgemeinen aus einer äquivarianten Garbe eine Menge mit unstetiger G-Operation. Beschränken wir uns jedoch auf diskrete Monoide G, so ist der Funktor der konstanten Garbe wieder linksadjungiert zum Funktor der globalen Schnitte $\Gamma : \mathrm{Ens}_{/G\backslash\!\!\searrow X} \to G\text{-Ens}$. Genauer liefert das Exponentialgesetz für Mengen für jeden Raum E über X und jede diskrete Menge M eine Bijektion

$$\mathrm{Top}_X(M \times X, E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(M, \mathrm{Top}_X(X, E))$$

Operiert daselbe Monoid G auf M und E, so entsprechen sich unter dieser Bijektion die G-äquivarianten Abbildungen und wir erhalten so im Fall diskreter Monoide eine ausgezeichnete Adjunktion $(\Gamma, (M \mapsto M_X))$.

Lemma 19.7.1.15 (**Operationen auf konstanten Garben**). *Gegeben $G\backslash\!\!\searrow X$ ein zusammenhängender Raum mit Operation ist der Funktor der konstanten Garbe $(M \mapsto M_X)$ volltreu und liefert eine Äquivalenz*

$$G\text{-Ens} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/G\backslash\!\!\searrow X}$$

Beweis. Wir nehmen zunächst G diskret an und bemerken, daß unsere Adjunktion für jede G-äquivariante Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/G\backslash\!\!\searrow X}$ einen G-äquivarianten Morphismus

$$X \times \Gamma\mathcal{F} \to \bar{\mathcal{F}}$$

von étalen Räumen über X liefert. Ist $\mathcal{F}$ eine konstante Garbe und X zusammenhängend, so ist er nach 19.2.2.40 ein Isomorphismus. Daraus folgt hinwiederum, daß wenn G eine Topologie trägt und stetig auf $\bar{\mathcal{F}}$ operiert, daß dann auch die induzierte Operation auf $X \times \Gamma\mathcal{F}$ stetig ist. Aufgrund der Finalität von Projektionen und speziell der Projektion $G \times X \times \Gamma\mathcal{F} \to G \times \Gamma\mathcal{F}$ muß dann auch die Operation von G auf $\Gamma\mathcal{F}$ stetig sein. □

Proposition 19.7.1.16 (**Monodromie lokal konstanter Garben**). *Ist X überlagerungstrivial und mit einer topologisch freien Operation einer diskreten Gruppe G versehen, so liefert der Rückzug auf X gefolgt vom Funktor der globalen Schnitte Äquivalenzen*

$$\mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/G\backslash X} \xrightarrow{\approx} G\text{-Ens} \qquad\qquad \mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/G\backslash X} \xrightarrow{\approx} G\text{-Ab}$$

19.7.1.17. Im Fall von Mengengarben ist unsere Aussage nurmehr eine Umformulierung von Satz 16.4.4.2 über den abstrakten Faserfunktor. Ist insbesondere X lokal zusammenziehbar, so können wir unsere Äquivalenz auch konstruieren, indem wir einen Punkt $x \in X$ festhalten und durch Faserwirkungsvergleich einen Isomorphismus $c_x : \pi_1(X/G, \bar{x}) \xrightarrow{\sim} G$ konstruieren und die zusammengesetzte Bijektion $i_x : \mathcal{F}_{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} (\pi^*\mathcal{F})_x \xleftarrow{\sim} \Gamma\pi^*\mathcal{F}$ betrachten. Darunter entspricht dann die Operation der Fundamentalgruppe auf der Faser durch Wegeliften unserer Operation von G auf den globalen Schnitten.

19.7.1.18. Im Beweis konstruieren wir einen Linksadjungierten und der Beweis zeigt, daß er im Fall von zusammenhängendem X volltreu ist und im Fall von nichtleerem X treu.

Beweis. Wir konzentrieren uns diesmal auf den Fall abelscher Garben. Unser Funktor ist für einen beliebigen Raum X mit der Operation einer diskreten topologischen Gruppe sinnvoll erklärt als die Komposition

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/G\backslash X} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/G\backslash X} \to G\text{-}\mathrm{Ab}$$

Der erste Funktor ist eine Äquivalenz für jede topologisch freie Operation einer diskreten Gruppe nach 19.7.1.13. Der zweite Funktor ist der Linksadjungierte zum Bilden der konstanten Garbe und induziert eine Äquivalenz $\mathrm{Ab}^{\mathrm{k}}_{/G\backslash X} \xrightarrow{\approx} G\text{-}\mathrm{Ab}$ nach 19.7.1.15. Auf einem überlagerungstrivialen Raum schließlich ist jede lokal konstante Garbe konstant und wir haben folglich $\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/G\backslash X} = \mathrm{Ab}^{\mathrm{k}}_{/G\backslash X}$. Das zeigt die Behauptung. □

Beispiel 19.7.1.19 (**Lokal konstante Garben auf der punktierten Ebene**). Wir erhalten aus unseren Erkenntnissen 19.7.1.16 zu lokal konstanten Garben und Monodromie eine Äquivalenz

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/\mathbb{C}^\times} \xrightarrow{\approx} \mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Ab}$$

zwischen der Kategorie $\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/\mathbb{C}^\times}$ der lokal konstanten abelschen Garben auf $\mathbb{C}^\times$ und der Kategorie $\mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Ab}$ der abelschen Gruppen mit einem ausgezeichneten Automorphismus, indem wir bemerken, daß $\mathbb{C}$ überlagerungstrivial ist und daß die Exponentialfunktion einen Homöomorphismus $\mathbb{C}/2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times$ induziert. Wie wir sehen, ist es noch natürlicher und erlaubt sogar das Arbeiten mit vergeßlichen komplexen Zahlen, wenn wir unsere Äquivalenz schreiben als eine Äquivalenz

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/\mathbb{C}^\times} \xrightarrow{\approx} 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Ab}$$

Übungen

Übung 19.7.1.20. Gegeben ein Morphismus $(\phi\backslash f) : G\backslash X \to H\backslash Y$ von Räumen mit topologisch freien Operationen diskreter Gruppen konstruiere man eine

Isotransformation für das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H\text{-Ab} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\sim"] & \mathrm{Ab}_{/H\backslash Y} \arrow[d] \arrow[dl, Rightarrow] \\ G\text{-Ab} \arrow[r] & \mathrm{Ab}_{/G\backslash X} \end{tikzcd}$$

mit den Funktoren aus 19.7.1.18 in den Horizontalen und den Rückzügen in den Vertikalen.

Weiterführende Übung 19.7.1.21 (**Gruppengarben als Gruppenobjekte**). Sei ein topologischer Raum mit einer stetigen Operation eines topologischen Monoids $G\backslash\!\!\searrow X$ gegeben. Wir erinnern aus 9.1.2.1 das Konzept abelscher Gruppenobjekte in Kategorien mit endlichen Produkten. Man konstruiere einen Isomorphismus von Kategorien

$$\mathrm{Ab}(\mathrm{Ens}_{/G\backslash\!\!\searrow X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/G\backslash\!\!\searrow X}$$

zwischen der Kategorie der abelschen Gruppenobjekte der Kategorie der äquivarianten Mengengarben und der Kategorie der äquivarianten abelschen Garben.

19.7.2 Äquivariante Kohomologie

19.7.2.1. Das entscheidende Resultat, das die Entwicklung der äquivarianten Kohomologie hier möglich macht, ist Korollar 19.6.6.14 in Verbindung mit 19.6.6.10, wonach für jedes Faserbündel $f : X \to Y$ mit zusammenziehbarer Faser das Zurückholen auf der Garbenkohomologie für jede abelsche Gruppe M Isomorphismen

$$\mathrm{H}^p(Y; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^p(X; M)$$

liefert. Die zweite wesentliche Zutat ist die Erkenntnis, daß es für jede topologische Gruppe G einen topologisch freien zusammenziehbaren G-Raum gibt. Den Beweis dieser Aussage holen wir in 19.7.3.5 nach. Wie dieser G-Raum aussieht oder welchen wir unter den vielen Möglichkeiten aussuchen, ist unerheblich.

19.7.2.2. Sei G eine Gruppe. Gegeben ein G-Raum X und ein G-Rechtsraum Y bezeichnen wir mit $Y \times_{/G} X$ den Bahnenraum von $Y \times X$ unter der G-Operation gegeben durch $g(y, x) := (yg^{-1}, gx)$ alias die Menge der Äquivalenzklassen unter der Äquivalenzrelation $(yg, x) \sim (y, gx)$ mit ihrer Quotiententopologie. Man nennt diesen Raum das **balancierte Produkt** von X und Y. Die Äquivalenzklasse von (y, x) notieren wir $[y, x]$.

19.7.2.3. Gegeben eine topologische Gruppe G und ein G-Raum X und ein G-Rechtsraum A setzen wir

$$\mathrm{H}^q_G(X)_A := \mathrm{H}^q(A \times_{/G} X)$$

Ist weiter $\varphi\backslash f : G\backslash X \to H\backslash Y$ ein Morphismus von Räumen mit Operation 19.7.1.7 und ist zusätzlich A ein topologisch freier G-Rechtsraum sowie B ein zusammenziehbarer H-Rechtsraum, so erklären wir das **Zurückholen** $r_{A,B,f,\varphi} = r_{AB} : \mathrm{H}^q_H(Y)_B \to \mathrm{H}^q_G(X)_A$ durch die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{H}^q((B \times A) \times_{/G} X) & \\
\mathrm{H}^q(B \times_{/H} Y) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathrm{H}^q(A \times_{/G} X) \arrow[ul, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

Nach oben bedeuten die Pfeile hier das gewöhnlichem Zurückholen und oben ist die diagonale G-Operation auf $B \times A$ gemeint, wobei der Isomorphismus daher rührt, daß das Zurückholen längs eines Faserbündels mit der zusammenziehbaren Faser B geschieht und wir somit 19.7.2.1 anwenden dürfen. Natürlich gilt stets $r_{AA} = \mathrm{id}$ für die Identität auf einem Raum mit Gruppenwirkung $G\backslash X$. Ist nun $H\backslash Y \to K\backslash Z$ ein weiterer Morphismus von Räumen mit Gruppenoperation und ist auch die Operation von H auf B topologisch frei und C ein zusammenziehbarer K-Raum, so behaupten wir die Gleichheit $r_{AC} = r_{AB} \circ r_{BC}$ von Abbildungen $\mathrm{H}^q_K(Z)_C \to \mathrm{H}^q_G(X)_A$. Um das einzusehen betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & (C \times A) \times_{/G} X \arrow[dddl, bend right] \arrow[dddr, bend left] & \\
 & (C \times B \times A) \times_{/G} X \arrow[u] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & (C \times B) \times_{/H} X \arrow[dl] \arrow[dr] & (B \times A) \times_{/G} X \arrow[dl] \arrow[dr] \\
C \times_{/K} Z & & B \times_{/H} Y & & A \times_{/G} X
\end{tikzcd}$$

Alle Pfeile, die nach rechts oder nach oben gehen, sind Faserbündel mit zusammenziehbarer Faser, und alles zusammen zeigt die behauptete Identität

$$r_{AC} = r_{AB} \circ r_{BC}$$

Definition 19.7.2.4. Gegeben ein Raum mit Gruppenwirkung $G\backslash X$ erklären wir seine q**-te äquivariante Kohomologie** als die Gruppe

$$\mathrm{H}^q_G(X) := \mathrm{H}^q_G(X)_{\mathrm{E}G} = \mathrm{H}^q(\mathrm{E}G \times_{/G} X)$$

für den topologisch freien zusammenziehbaren G-Raum $\mathrm{E}G$ aus 19.7.3.5. Gegeben ein Morphismus $\phi\backslash f : G\backslash X \to H\backslash Y$ von Räumen mit Gruppenwirkung

erklären wir das **Zurückholen auf der äquivarianten Kohomologie** als die Abbildung

$$(\phi\backslash f)^* := r_{\mathrm{E}G,\mathrm{E}H} : \mathrm{H}^q_H(Y) \to \mathrm{H}^q_G(X)$$

So erhalten wir für jedes $q \geq 0$ einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der Räume mit Gruppenoperation in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Satz 19.7.2.5 (**Eigenschaften der äquivarianten Kohomologie**). *1. Für die triviale Gruppe* 1 *erhalten wir durch das Zurückholen einen natürlichen Isomorphismus* $\mathrm{H}^q(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\mathrm{E}1 \times_{/1} X) = \mathrm{H}^q_1(X)$. *Er ist so natürlich, daß wir ihn in der Notation für gewöhnlich als eine Gleichheit behandeln;*

2. *Ist* $G\backslash X$ *ein Raum mit topologisch freier Gruppenoperation, so liefert das Zurückholen unter der Quotientenabbildung nach* X/G *einen Isomorphismus, den* **Quotientenisomorphismus**

$$\mathrm{H}^q(X/G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_G(X)$$

Hier verwenden wir die Notation X/G *für den Quotienten, obwohl wir genau genommen von einer Linksoperation ausgehen;*

3. *Ist* $G\backslash X$ *ein Raum mit Gruppenwirkung und* $K \subset G$ *eine Untergruppe, die topologisch frei auf* G *operiert mit zusammenziehbarem Quotienten* G/K, *so ist das Zurückholen ein Isomorphismus*

$$\mathrm{H}^q_G(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_K(X)$$

4. *Ist* G *eine topologische Gruppe und* $f : X \to Y$ *eine stetige* G*-äquivariante Abbildung, die bei Vergessen der* G*-Operation ein Faserbündel mit zusammenziehbarer Faser ist, so induziert das Zurückholen auf der äquivarianten Kohomologie Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^q_G(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_G(X)$$

Beweis. Das folgt alles unmittelbar aus den Definitionen und unserer Erkenntnis 19.6.6.14, daß das Zurückholen auf Faserbündel mit zusammenziehbarer Faser Isomorphismen auf der Garbenkohomologie induziert. □

Vorschau 19.7.2.6. Sehr viel allgemeinere Aussagen als 4 zeigen wir in **??** im Rahmen unserer Diskussion äquivarianter derivierter Kategorien. Wenn etwa G eine Liegruppe ist, so reicht es anzunehmen, daß der Rückzug Isomorphismen auf der gewöhnlichen Kohomologie induziert.

Beispiel 19.7.2.7. Die Gruppe $G := \mathbb{Z}$ operiert topologisch frei auf $E := \mathbb{R}$. Wir haben folglich $\mathrm{H}^q_{\mathbb{Z}}(\mathrm{top}) = \mathrm{H}^q(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ und das ist isomorph zu $\mathbb{Z}$ für $q = 0, 1$ und Null sonst.

19.7.2.8. Seien G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Ein G-Rechtstorsor auf X ist ein topologisch freier G-Rechtsraum E mitsamt einer stetigen Abbildung $\pi : E \to X$, die einen Homöomorphismus $E/G \xrightarrow{\sim} X$ induziert. Gegeben solch ein G-Rechtstorsor betrachten wir die Komposition

$$\mathrm{H}^q_G(\mathrm{top}) \to \mathrm{H}^q_G(E) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X)$$

des äquivarianten Zurückholens längs der konstanten Abbildung mit dem Inversen des Quotientenisomorphismus. Wir nennen diese Komposition

$$C_E : \mathrm{H}^*_G(\mathrm{top}) \to \mathrm{H}^*(X)$$

den **charakteristischen Homomorphismus von** E.

Vorschau 19.7.2.9. Sobald wir einmal den garbentheoretischen Kohomologiering eingeführt haben, wird sich C_E als ein Ringhomomorphismus erweisen. Weiter kann man für manche G den Ring $\mathrm{H}^*_G(\mathrm{top})$ explizit berechnen oder zumindest Kohomologieklassen $c \in \mathrm{H}^q_G(\mathrm{top})$ explizit angeben, vergleiche 21.3.3.10 folgende. Deren Bilder $C_E(c) \in \mathrm{H}^*(X)$ unter dem charakteristischen Homomorphismus heißen dann „charakteristische Klassen des G-Torsors E“. Insbesondere behandeln wir in 21.3.3.12 die unitären Gruppen $\mathrm{U}(n)$. In 21.3.4.3 diskutieren wir den Zusammenhang zwischen charakteristischen Klassen von Produkten von Torsoren und den charakteristischen Klassen der Faktoren und davon ausgehend die sogenannten „Chern'schen Klassen“.

19.7.2.10 (**Charakteristische Klassen und Gruppenwechsel**). Ist X ein topologischer Raum und $\phi : G \to H$ ein stetiger Homomorphismus von topologischen Gruppen und E ein G-Torsor auf X und $\phi_* E := E \times_{/G} H$ der daraus durch Gruppenwechsel entstehende H-Torsor, so kommutiert mit den Rückzügen auf der äquivarianten Kohomologie das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^q_G(\mathrm{top}) & \to & \mathrm{H}^q_G(E) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}^q(X) \\ \uparrow & & \uparrow & & \| \\ \mathrm{H}^q_H(\mathrm{top}) & \to & \mathrm{H}^q_H(\phi_* E) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}^q(X) \end{array}$$

In Formeln gilt also $C_{\phi_* E} = C_E \circ \phi^*$. Wir sehen so auch, daß unser charakteristischer Homomorphismus C_E nur von der Isomorphieklasse des Torsors E abhängt.

19.7.2.11 (**Charakteristische Klassen und Raumwechsel**). Sind G eine topologische Gruppe und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und F ein G-Torsor auf

Y und $f^*F := X \times_Y F$ der zurückgeholte Torsor auf X, so kommutiert mit den Rückzügen auf der äquivarianten Kohomologie das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^q_G(\mathrm{top}) & \to & \mathrm{H}^q_G(f^*F) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}^q(X) \\ \| & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{H}^q_G(\mathrm{top}) & \to & \mathrm{H}^q_G(F) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}^q(Y) \end{array}$$

In Formeln gilt also $C_{f^*F} = f^* \circ C_F$.

19.7.2.12 (**Äquivariante Kohomologie mit Koeffizienten**). Alles zuvor Gesagte gilt analog für Kohomologie mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe M. Wir notieren die äquivariante Kohomologie von $G\backslash\!\!\searrow X$ mit Koeffizienten in M dann $\mathrm{H}^q_G(X; M)$.

19.7.2.13 (**Äquivariante Kohomologie für Operationen endlicher Gruppen**). Gegeben ein Raum X mit einer Operation einer Gruppe G und eine abelsche Gruppe M ist das Zurückholen ein Isomorphismus $\mathrm{H}^q(X; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\mathrm{E}G \times X; M)$. Er ist G-äquivariant und induziert folglich einen Isomorphismus $\mathrm{H}^q(X; M)^G \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\mathrm{E}G \times X; M)^G$. Ist zusätzlich unsere Gruppe G endlich und diskret und liefert die Multiplikation mit $|G|$ einen Isomorphismus $(|G|\cdot) : M \xrightarrow{\sim} M$, so können wir obigen Isomorphismus mit unseren Erkenntnissen zur Kohomologie von Quotienten 19.6.6.24 verlängern zu einer Kette von Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X; M)^G \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\mathrm{E}G \times X; M)^G \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\mathrm{E}G \times_{/G} X; M) = \mathrm{H}^q_G(X; M)$$

In der Tat ist $\mathrm{E}G \times X \twoheadrightarrow \mathrm{E}G \times_{/G} X$ stets separiert. Ist darüber hinaus die Quotientenabbildung $X \to X/G$ separiert, so liefern unsere Erkenntnisse aus 19.6.6.24 sogar einen Isomorphismus $\mathrm{H}^q(X/G; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X; M)^G$ dieser Gruppen mit der Kohomologie des Quotienten.

19.7.2.14 (**Äquivariante Kohomologie mit äquivarianten Koeffizienten**). Gegeben $G\backslash\!\!\searrow X$ ein Raum mit Gruppenoperation und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/G\backslash\!\!\searrow X}$ eine G-äquivariante abelsche Garbe können wir analog wie zuvor auch die äquivarianten Kohomologiegruppen mit Koeffizienten einführen durch die Vorschrift

$$\mathrm{H}^q_G(X; \mathcal{F}) := \mathrm{H}^q(\mathrm{E}G \times_{/G} X; \mathrm{E}G \times_{/G} \mathcal{F})$$

Hier meinen wir mit $\mathrm{E}G \times_{/G} \mathcal{F}$ die abelsche Garbe mit étalem Raum $\mathrm{E}G \times_{/G} \bar{\mathcal{F}}$ und es ist einiges an Arbeit zu tun, um unserer Definition Sinn zu geben und daraus ein nützliches Werkzeug zu machen. Wir diskutieren das im Zusammenhang mit äquivarianten derivierten Kategorien in 21.7. Ist speziell $X = \mathrm{top}$ ein Punkt und G diskret, erhalten wir unsere Gruppenkohomologie 19.3.7.5, in Formeln

$$\mathrm{H}^q_G(\mathrm{top}; \mathcal{F}) = \mathrm{H}^q(G; \mathcal{F})$$

Hier ist rechts die Gruppenkohomologie von G im Sinne von 19.3.7.5 gemeint und nicht die Kohomologie des diskreten Raums G mit was für Koeffizienten auch immer.

19.7.2.15 (**Charakteristische Klassen von Darstellungen**). Jeder Homomorphismus von topologischen Gruppen $\phi : G \to H$ induziert einen Ringhomomorphismus $\mathrm{H}^*_H(\mathrm{top}) \to \mathrm{H}^*_G(\mathrm{top})$. Im Fall $H = \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ oder $H = \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ kennen wir $\mathrm{H}^*_H(\mathrm{top};\mathbb{F}_2)$ beziehungsweise $\mathrm{H}^*_H(\mathrm{top};\mathbb{Z})$ recht gut nach 21.3.4.8 beziehungsweise 21.3.4.5 als Polynomringe in Stiefel-Whitney-Klassen beziehungsweise Chern'schen Klassen. Deren Bilder in der Gruppenkohomologie von G heißen dann die **Stiefel-Whitney-Klassen** der reellen beziehungsweise die **Chern'schen Klassen** der komplexen Darstellung ϕ.

Übungen

Übung 19.7.2.16 (**Berechnung der äquivarianten Kohomologie**). Seien G eine topologische Gruppe und X ein G-Raum. Ist A ein topologisch freier schwach bag-n-azyklischer G-Rechtsraum, so liefern unsere Rückzüge $r_{\mathrm{E}G,A}$ für jede abelsche Gruppe M und $0 \le q < n$ Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(A \times_{/G} X; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_G(X; M)$$

Hinweis: Man verwende 19.6.6.14.

Übung 19.7.2.17 (**Operation innerer Automorphismen**). Gegeben eine topologische Gruppe G und ein Element $g \in G$ operiert $\mathrm{int}(g)$ als die Identität auf der äquivarianten Kohomologie $\mathrm{H}^*_G(\mathrm{top})$ des einpunktigen Raums. Dasselbe gilt für äquivariante Kohomologie mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe.

19.7.3 Milnor-Konstruktion

Definition 19.7.3.1. Gegeben eine Familie von Mengen $(Y_i)_{i\in I}$ erklärt man ihren **Join**

$$J = *_{i\in I} Y_i$$

als die Realisierung des Simplizialkomplexes mit Eckenmenge der disjunkten Vereinigung $\bigsqcup_{i\in I} Y_i$ und Simplizes allen endlichen Teilmengen mit je höchstens einer Ecke aus jedem der Y_i.

19.7.3.2 (**Milnor-Topologie auf dem Join**). Ich erinnere aus 16.2.7.8, daß unsere Realisierung J aus allen Abbildungen $p : \bigsqcup_{i\in I} Y_i \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ besteht, die Träger in einem Simplex haben und bei denen sich die Funktionswerte zu Eins aufaddieren. Ich notiere Punkte eines solchen Joins

$$p = \sum t_i y_i = (t_i y_i)$$

Dabei meint y_i die charakteristische Funktion $[y_i]$ des Punktes y_i. Damit solch eine Funktion zu unserem Join gehört, muß gelten $t_i = 0$ für fast alle i und $\sum t_i = 1$.

Zu jedem Index $k \in I$ erklären wir nun eine Abbildung $c_k : J \to [0,1]$ als „die Summe der Koeffizienten an Ecken aus Y_k“, von denen nach Annahme jeweils höchstens einer von Null verschieden ist. Weiter erklären wir $\mathrm{pr}_k : c_k^{-1}(0,1] \to Y_k$ dadurch, daß jedem Punkt aus dem Join, der als Funktion aufgefaßt an einer Ecke aus Y_k nicht verschwindet, eben diese Ecke zugeordnet wird. Sind nun alle unsere Faktoren Y_i topologische Räume, so erklärt man die **Milnor-Topologie auf dem Join** als diejenige Topologie, die von allen Urbildern offener Mengen unter den c_k und den pr_k erzeugt wird.

19.7.3.3 (**Umgebungsbasen in der Milnor-Topologie**). Wir betrachten einen Join

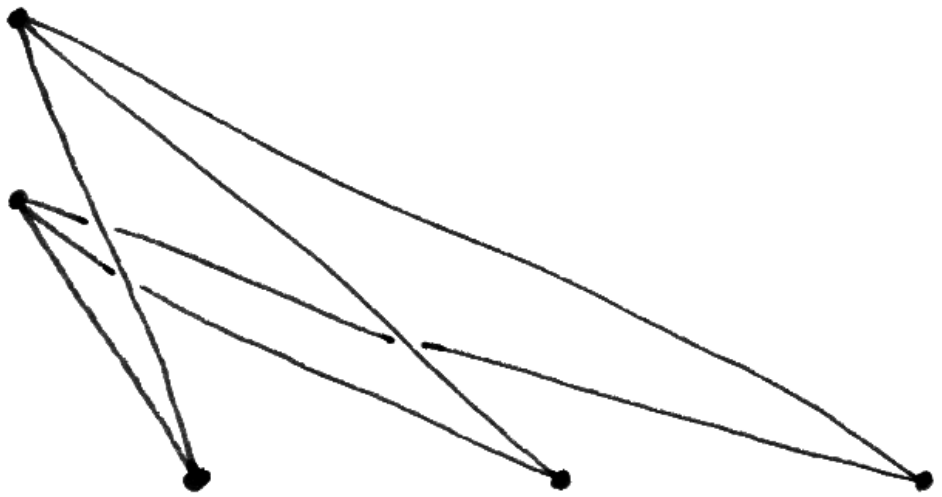
$$J = *_{i \in I} Y_i$$

Eine Umgebungsbasis eines Punktes $p = \sum t_i y_i \in J$ kann man erhalten wie folgt: Sei $N = N_p \subset I$ die Menge der Indizes n mit $t_n \neq 0$. Sei $\varepsilon > 0$ kleiner als das Minimum dieser positiven t_n. Seien $U_n \subset Y_n$ Umgebungen der y_n für $n \in N$. Sei $K \subset I$ endlich und disjunkt zu N. Nun betrachte man die Mengen $V = V((U_n), \varepsilon, K)$ aller Punkte $\sum s_i x_i$ aus dem Join J mit $|s_n - t_n| < \varepsilon$ für $n \in N \sqcup K$ und $x_n \in U_n$ für $n \in N$. Das System all dieser Mengen für alle erlaubten ε, U_n und K ist dann eine Umgebungsbasis des Punktes p im Join J. Salopp gesprochen: „An den endlich vielen Indizes n mit Parameter ungleich Null sei das Wackeln an der Stelle y_n und am Parameter t_n klein, an endlich vielen vorgegebenen weiteren Indizes sei das Wackeln am Parameter klein, und an den restlichen Indizes darf passieren, was will“.

19.7.3.4 (**Vergleich von Milnor-Topologie und Realisierungs-Topologie**). Für die Realisierung eines Simplizialkomplexes hatten wir in 17.3.1.7 gesehen, daß die Finaltopologie aus 16.2.7.8 zur Einbettung der Realisierungen aller endlichen Unterkomplexe für die Bedürfnisse der singulären Homologietheorie gut geeignet ist. Der Join einer durch eine Menge E indizierten Familie von einpunktigen Mengen ist nun als Menge in offensichtlicher Bijektion zum vollen Simplex mit der Eckenmenge E im Sinne von 16.2.7.8, aber die dort erklärte Topologie ist feiner als die Milnor-Topologie auf dem Join. Zum Beispiel konvergiert im Fall $E = \mathbb{N}$ die Folge der Tupel

$$(1 - 1/n, 1/n^2, \ldots, 1/n^2, 0, 0, \ldots)$$

mit n Einträgen $1/n^2$ in der Milnor-Topologie gegen $(1, 0, \ldots)$. In der Finaltopologie würde jedoch für jede Folge von positiven reellen Zahlen $f_1, f_2, \ldots$ die Menge aller Tupel $(t_0, t_1, \ldots)$ mit endlich vielen von Null verschiedenen Einträgen, Summe Eins, t_0 beliebig und $t_i < f_i$ für alle $i \geq 1$ eine Umgebung von $(1, 0, \ldots)$ bilden. Setzen wir dabei zum Beispiel $f_i = 1/2i^2$, so liegt kein Glied unserer Folge in dieser Umgebung.



Der Join eines zweielementigen diskreten Raums mit einem dreielementigen diskreten Raum besteht aus der Vereinigung aller sechs „disjunkt gedachten“ Verbindungsstrecken.

Proposition 19.7.3.5 (**Milnor-Konstruktion**). *1. Für jede topologische Gruppe G ist der abzählbar unendliche Join $\mathrm{E}G := *_{n\in\mathbb{N}}G$ mit seiner Milnor-Topologie und der diagonalen G-Operation ein topologisch freier zusammenziehbarer G-Raum;*

2. Ist G offenlokal zusammenziehbar, so gilt dasselbe für $\mathrm{E}G$ und $\mathrm{E}G/G$.

19.7.3.6. Mir scheint, die ganze Argumentation würde mit der alternativen Topologisierung des Joins als „Kolimes der endlichen Teil-Joins“ ganz genauso funktionieren. Beim Beweis des ersten Teils folge ich [tD91, IV.4].

Beweis. Unser Raum ist zusammenziehbar nach Lemma 19.7.3.7. Weiter zeigt man anhand unserer Beschreibung von Umgebungsbasen ohne Schwierigkeiten, daß die diagonale Operation einen Homöomorphismus

$$\left\{\sum t_n g_n \middle| t_0 \neq 0,\ g_0 = e_G\right\} \times G \ \tilde{\to}\ \left\{\sum t_n g_n \middle| t_0 \neq 0\right\}$$

induziert, denn die inverse Abbildung ist auch punktweise stetig. Das zeigt Teil 1. Für Teil 2 reicht es zu zeigen, daß der erste Faktor von eben offenlokal zusammenziehbar ist. Er ist aber eine offene Teilmenge des abzählbar unendlichen Joins von Kopien unserer Gruppe und einer Kopie des einpunktigen Raums und damit offenlokal zusammenziehbar nach 19.7.3.8. □

Lemma 19.7.3.7 (**Zusammenziehbarkeit abzählbarer Joins**). *Für jeden nicht leeren topologischen Raum Y ist der Join $*_{n\in\mathbb{N}}Y$ von abzählbar unendlich vielen Kopien von Y zusammenziehbar.*

Beweis. Wir verwenden die Notation $\sum t_n y_n = (t_0y_0, t_1y_1, t_2y_2, \ldots)$. An Stellen, an denen das t_i Null ist, brauchen wir dabei das y_i nicht zu spezifizieren und schreiben dort manchmal auch einfach nur 0. Wir zeigen nun, daß die Identität homotop ist zur Nulleneinfügeabbildung

$$(t_0y_0, t_1y_1, t_2y_2, \ldots) \mapsto (t_0y_0, 0, t_1y_1, 0, t_2y_2, 0, \ldots)$$

Für diese Abbildung eine Homotopie zu einer konstanten Abbildung anzugeben ist dann unproblematisch. Auch jede Abbildung, die an nur einer Stelle eine Null eingefügt, ist in offensichtlicher Weise homotop zu einer konstanten Abbildung, nur ist die Konstruktion einer Homotopie von der Identität zu einer derartigen Abbildung verblüffenderweise mühsamer. Um nun zu zeigen, daß die Identität homotop ist zu unserer Nulleneinfügeabbildung, überlegen wir uns erst einmal, daß wir eine Homotopie unserer Abbildung zu der Abbildung „füge eine Null weniger ein“ erhalten durch die Vorschrift

$$(t, (t_0y_0, t_1y_1, t_2y_2, \ldots)) \mapsto (t_0y_0, tt_1y_1, (1-t)t_1y_1, tt_2y_2, (1-t)t_2y_2, \ldots)$$

mit t als Parameter der Homotopie. Die Stetigkeit prüft man punktweise mit der Beschreibung 19.7.3.3 von Umgebungsbasen in der Milnor-Topologie. Jetzt setzt man abzählbar viele Homotopien dieser Art nebeneinander, für den Homotopieparameter t in $[0,1], [1,1+\frac{1}{2}], [1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}], \ldots$ und ergänzt durch die Identität bei $t = 2$. Die Stetigkeit für $t < 2$ ist dann unproblematisch, denn eine Abbildung ist stetig, wenn ihre Restriktionen auf die Mengen einer endlichen abgeschlossenen Überdeckung jeweils stetig sind. Die Stetigkeit für $t = 2$ muß wieder in jedem Punkt geprüft werden und folgt aus unserer Beschreibung von Umgebungsbasen für die Milnor-Topologie. □

Lemma 19.7.3.8 (Zusammenziehbare Umgebungen in der Milnor-Topologie). *Ein Join $J = *_{i\in\mathbb{N}} Y_i$ offenlokal zusammenziehbarer Räume ist auch selbst offenlokal zusammenziehbar.*

Beweis. Seien in der Tat $p = (t_i y_i) \in J$ und $N = N_p$ wie oben in 19.7.3.3. Wählen wir offene Umgebungen U_n von y_n für $n \in N$, so ist auch für alle ε und K die zugehörige Umgebung $V = V((U_n), \varepsilon, K)$ von p nach 19.7.3.3 offen. Sind weiter alle U_n zusammenziehbar, so auch die Umgebungen $V = V((U_n), \varepsilon, K)$ von p. In der Tat sieht man mit der Beschreibung der Umgebungsbasen, daß die Abbildung $[0,1] \times V \to V$ gegeben durch $(t, (s_i x_i)) \mapsto (tt_i + (1-t)s_i)x_i)$ wohldefiniert und stetig ist und eine Homotopie zwischen der Identität auf V und der Abbildung $(s_i x_i) \mapsto (t_i x_i)$. Eine Homotopie zwischen dieser Abbildung und der konstanten Abbildung $V \to V$ mit Wert $(t_i y_i)$ ist dann leicht anzugeben. □

19.7.4 Äquivariante de-Rham-Kohomologie (in Arbeit)*

19.7.4.1. Gegeben eine glatte Mannigfaltigkeit mit der glatten Operation einer Liegruppe $G\backslash X$ erklärt man den **äquivarianten de-Rham-Komplex** als die graduierte $\mathbb{R}$-Ringalgebra

$$\Omega^*(G\backslash X) := \big(\Omega^*(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(\mathfrak{g})\big)^G$$

in Bezug auf die „verdoppelte Graduierung“ auf dem Ring $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ der regulären Funktionen auf der Liealgebra $\mathfrak{g}$, für die die Linearformen homogen sind vom Grad Zwei, und mit einem gleich noch zu erklärenden Differential. Unter dem Ring der regulären Funktionen $\mathcal{O}(V) \subset \mathrm{Ens}(V, \mathbb{R})$ auf einem reellen Vektorraum V verstehen wir dabei den Teilring im Ring aller reellwertigen Funktionen, der von den Konstanten und den Linearformen erzeugt wird. Als Differential auf $\Omega^*(G\backslash X)$ nehmen wir

$$\mathrm{d}_G(\omega \otimes f) := (\mathrm{d}\omega) \otimes f - \sum_\rho i_{\xi_\rho}\omega \otimes \xi_\rho^\top f$$

für $\xi_1, \ldots, \xi_r$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ und $\xi_\rho^\top$ den jeweiligen Vektor der dualen Basis alias die entsprechende Koordinatenfunktion auf $\mathfrak{g}$, die dann mit f multipliziert wird. Weiter bezeichne $\xi = \xi^X$ auch das Vektorfeld der infinitesimalen Operation von ξ nach **??** und $i_\xi\omega$ das partielle Auswerten nach **??**. Insgesamt wird bei den hinteren Termen der Grad von ω um Eins erniedrigt aber der Grad der Funktion wegen der verdoppelten Graduierung um Zwei erhöht, so daß unser Differential in der Tat den Grad um Eins erhöht. Man prüft leicht auf ganz $\Omega^*(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(\mathfrak{g})$ die graduierte Leibnizregel

$$\mathrm{d}_G\big((\omega \otimes f)(\eta \otimes g)\big) = \big(\mathrm{d}_G(\omega \otimes f)\big)(\eta \otimes g) + (-1)^{|\omega|}(\omega \otimes f)\big(\mathrm{d}_G(\eta \otimes g)\big)$$

Wir haben auch eine offensichtliche Einbettung

$$\Omega^*(X) \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathrm{Ens}(\mathfrak{g}, \Omega^*(X))$$

Die G-invarianten Tensoren sind genau die, die darunter G-äquivarianten Abbildungen entsprechen. Bezeichnet $a_\zeta : \Omega^*(X) \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g}) \to \Omega^*(X)$ das Auswerten bei $\zeta \in \mathfrak{g}$, so finden wir $a_\zeta \mathrm{d}_G = \mathrm{d}a_\zeta - i_\zeta a_\zeta$. Daraus folgern wir, daß unser Differential invariante Tensoren zu invarianten Tensoren macht, da mit $\zeta \mapsto a_\zeta\omega$ auch $\zeta \mapsto a_\zeta(\mathrm{d}_G\omega)$ äquivariant ist. Weiter finden wir

$$\begin{aligned} a_\zeta \mathrm{d}_G^2 &= \mathrm{d}a_\zeta \mathrm{d}_G - i_\zeta a_\zeta \mathrm{d}_G \\ &= \mathrm{d}^2 a_\zeta - \mathrm{d}i_\zeta a_\zeta - i_\zeta \mathrm{d}a_\zeta + i_\zeta^2 a_\zeta \\ &= -\mathcal{L}_\zeta a_\zeta \end{aligned}$$

mit der Cartan-Formel **??** im letzten Schritt. Gehen wir nun zusätzlich von einer invarianten Form $\omega \in (\Omega^*(X) \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g}))^G$ aus, so ist $\zeta \mapsto a_\zeta(\omega)$ eine G-äquivariante Abbildung $\mathfrak{g} \to \Omega(M)$ und ist folglich auch verträglich mit der Operation der Liealgebra, als da heißt

$$a_{[\xi,\zeta]}(\omega) = \mathcal{L}_\xi(a_\zeta(\omega))$$

für alle $\xi \in \mathfrak{g}$ und insbesondere $\mathcal{L}_\zeta(a_\zeta(\omega)) = 0$. Es folgt $a_\zeta \mathrm{d}_G^2\omega = 0$ für alle ζ und so $\mathrm{d}_G^2\omega = 0$.

19.7.4.2. Gegeben eine glatte Mannigfaltigkeit X mit der Operation einer kompakten Liegruppe G setzen wir

$$\mathrm{H}_G^*(X)_{\mathrm{dR}} := \mathcal{H}^*\Omega^*(G\backslash X)$$

und nennen diese graduierte $\mathbb{R}$-Ringalgebra die **q-te G-äquivariante de-Rham-Kohomologie von** X. Gegeben eine G-äquivariante glatte Abbildung $\varphi : X \to Y$ induziert der Rückzug von Differentialformen offensichtliche Homomorphismen

$$\varphi^* : \mathrm{H}_G^q(Y)_{\mathrm{dR}} \to \mathrm{H}_G^q(X)_{\mathrm{dR}}$$

Unsere äquivariante de-Rham-Kohomologie wird dadurch ein Funktor von der Kategorie der glatten G-Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der graduierten $\mathbb{R}$-Ringalgebren.

Lemma 19.7.4.3. *Seien G eine kompakte Liegruppe und $\varphi : X \to Y$ eine glatte äquivariante Abbildung von glatten G-Mannigfaltigkeiten. Induziert der Rückzug Isomorphismen $\mathrm{H}^n(Y)_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(X)_{\mathrm{dR}}$ auf der gewöhnlichen de-Rham-Kohomologie für $n \leq N$, so induziert er auch auf der äquivarianten de-Rham-Kohomologie Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^n_G(Y)_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_G(X)_{\mathrm{dR}} \quad \textit{für } n \leq N.$$

Vorschau 19.7.4.4. Eine entsprechende Aussage in der Allgemeinheit topologischer Räume und Gruppen zeigen wir erst in **??**.

Beweis. Bei unserem äquivarianten de-Rham-Komplex T^n_X steht im homologischen Grad n der Eintrag

$$T^n_X = \bigoplus_{p+2q=n} \left(\Omega^p(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(\mathfrak{g})^q\right)^G$$

Er hat eine Filtrierung durch die Unterkomplexe $T^{n,q\geq a}_X$ und die E_0-Terme der zugehörigen Spektralsequenz im Sinne von 19.9.1.15 sind die

$$E_0^{(n,a)} = E_0^{(n,a)}(X) = \left(\Omega^{n-2a}(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(\mathfrak{g})^a\right)^G$$

mit $\partial_0 : E_0^{(n,a)} \to E_0^{(n+1,a)}$ der von der Cartan'schen äußeren Ableitung induzierten Abbildung und es gilt $E_0^{(n,a)} = 0$ für $n < 2a$. Nun sind alle $\Omega^n(X)$ mit der Topologie der „gleichmäßigen Konvergenz aller Ableitungen auf Kompakta" von-Neumann-Darstellungen von G im Sinne von **??** ist und der Randoperator ebenso wie der Rückzug von Differentialformen sind stetige Homomorphismen von Darstellungen. Die Integration über die Gruppe liefert einen idempotenten Endomorphismus aller unserer Räume, dessen Bild die G-Invarianten sind und der mit allen Abbildungen vertauscht. Der Rückzug unter φ liefert einen Homomorphismus von Spektralsequenzen und unsere Annahmen zeigen, daß dieser Homomorphismus Isomorphismen $E_1^{(n,a)}(Y) \xrightarrow{\sim} E_1^{(n,a)}(X)$ induziert für $n \leq N + 2a$. Damit muß er auch für alle $r \geq 1$ Isomorphismen $E_r^{(n,a)}(Y) \xrightarrow{\sim} E_r^{(n,a)}(X)$ induzieren für $n \leq N+2q$ und so immer nach 19.9.1.15 Isomorphismen $\mathrm{gr}^a\, \mathcal{H}^n T_Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^a\, \mathcal{H}^n T_X$ für $n \leq N + 2a$ und damit schließlich wie gewünscht Isomorphismen $\mathcal{H}^n T_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n T_X$ für $n \leq N$. □

Lemma 19.7.4.5 (**Äquivariante de-Rham-Kohomologie einer Liegruppe**). *Gegeben eine Liegruppe G gilt $\mathrm{H}^n_G(G)_{\mathrm{dR}} = 0$ für $n > 0$ und der strukturelle Ringalgebrenhomomorphismus $\mathbb{R} \to \Omega^*(G\backslash G)$ induziert einen Isomorphismus*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0_G(G)_{\mathrm{dR}}$$

Beweis. Nachdem wir $\bigwedge^p \mathfrak{g}^*$ mit linksinvarianten Differentialformen auf G identifizieren, liefert die Multiplikation Isomorphismen $\mathcal{C}^\infty(G) \otimes \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\sim} \Omega^p(G)$ und daraus ergeben sich Isomorpismen

$$\mathcal{C}^\infty(G, \textstyle\bigwedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g})^q) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty(G) \otimes \textstyle\bigwedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g})^q \xrightarrow{\sim} \Omega^p(G) \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g})^q$$

Bilden wir die G-Invarianten, so liefert das Auswerten am neutralen Element den ersten Isomorphismus eines Diagramms

$$\textstyle\bigwedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g})^q \xleftarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty(G, \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g})^q)^G \xrightarrow{\sim} \left(\Omega^p(G) \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g})^q\right)^G$$

Den so entstehenden Isomorphismus von links nach rechts notieren wir ä wie **Äquivariantisierung**. Nun betrachten wir die Filtrierung unseres äquivarianten de-Rham-Komplexes Komplexes T_G^n durch die Unterkomplexe $T_G^{n,p+q\geq t}$. Die E_0-Terme der zugehörigen Spektralsequenz im Sinne von 19.9.1.15 sind die

$$E_0^{(n,t)} = \left(\Omega^{2t-n}(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(\mathfrak{g})^{n-t}\right)^G$$

und wir zeigen, daß das Differential $\partial_0 : E_0^{(n,t)} \to E_0^{(n+1,t)}$ unter unseren Isomorphismen von eben auf der linken Seite dem Differential des Koszulkomplexes 19.3.2.32 entspricht. Es folgt $E_1^{(n,t)} = 0$ für $n > 0$ und damit die Behauptung. Es gilt also, ∂_0 mit dem Koszuldifferential $\mathrm{d}_{\mathrm{Kos}}$ zu vergleichen. Unsere obigen Isomorphismen sind aber Isomorphismen von bigraduierten $\mathbb{R}$-Ringalgebren, das Koszuldifferential ändert sich nicht beim Übergang zum assoziierten Graduierten unter unserer Filtrierung und d_G wird zu

$$\partial_0 = \bar{\mathrm{d}}_G : \omega \otimes f \mapsto \sum_\rho -i_{\xi_\rho}\omega \otimes \xi_\rho^\top f$$

Auch $\bar{\mathrm{d}}_G$ erfüllt jedoch die graduierte Leibnizregel, so daß wir die Verträglichkeit der beiden Differentiale nur auf Erzeugern der Ringalgebra zu prüfen bxrauchen. Wegen $\mathrm{d}_{\mathrm{Kos}}(\lambda \otimes 1) = -1 \otimes \lambda$ können wir uns sogar darauf zurückziehen,

$$\ddot{\mathrm{a}}(\mathrm{d}_{\mathrm{Kos}}(\lambda \otimes 1)) = \bar{\mathrm{d}}_G(\ddot{\mathrm{a}}(\lambda \otimes 1))$$

zu zeigen, und wir können uns dabei auf $\lambda = \xi_\rho^\top$ beschränken. Um die linke Seite alias $\ddot{\mathrm{a}}(-1 \otimes \xi_\rho^\top)$ zu beschreiben, beachten wir zunächst, daß das ja in der Mitte auf die Abbildung $g \mapsto (\mathrm{Ad}^*(g))(\xi_\rho^\top)$ gehen muß und erklären wir Funktionen $f_\rho^\sigma \in \mathcal{C}^\infty(G)$ durch $(\mathrm{Ad}^*(g))(\xi_\rho^\top) = \sum_\sigma f_\rho^\sigma(g)\xi_\sigma^\top$, so finden wir schließlich

$$\ddot{\mathrm{a}}(\mathrm{d}_{\mathrm{Kos}}(\xi_\rho^\top \otimes 1) = \ddot{\mathrm{a}}(-1 \otimes \xi_\rho^\top) = \sum_\sigma -f_\rho^\sigma \otimes \xi_\sigma^\top$$

Umgekehrt haben wir $\ddot{a}(\xi_\rho^\top \otimes 1) = \grave{\xi}_\rho^\top \otimes 1$ mit $\grave{\lambda}$ der Fortsetzung von λ zu einem linksinvarianten Kovektorfeld auf G und weil in der Definition von d_G das i_ξ das partielle Einsetzen des durch die infinitesimale Operation von ξ gegebenen Vektorfelds meint, in unserem Fall also das partielle Einsetzen der rechtsinvarianten Fortsetzung $\acute{\xi}$ von ξ, schreiben wir das erst zu einer Linearkombination linksinvarianter Felder um. Haben wir aber $(\mathrm{Ad}(g^{-1}))(\xi_\rho) = \sum h_\rho^\sigma(g)\xi_\sigma$, so zeigt eine kurzen Rechnung die Beziehung

$$\acute{\xi}_\rho = \sum h_\rho^\sigma(g)\grave{\xi}_\sigma$$

zwischen rechtsinvarianten und linksinvarianten Fortsetzungen und eine ebensokurze Rechnung liefert $h_\rho^\sigma = f_\sigma^\rho$ und wir finden wie gewünscht

$$\bar{\mathrm{d}}_G(\ddot{a}(\xi_\rho^\top \otimes 1)) = \bar{\mathrm{d}}_G(\grave{\xi}_\rho^\top \otimes 1) = \sum_\sigma -\grave{\xi}_\rho^\top(\acute{\xi}_\sigma) \otimes \xi_\sigma^\top = \sum_\sigma -f_\rho^\sigma \otimes \xi_\sigma^\top \qquad \square$$

Lemma 19.7.4.6 (Äquivariante de-Rham-Kohomologie trivialer Torsoren). *Gegeben eine Liegruppe G und eine Mannigfaltigkeit B ist der offensichtliche Homomorphismus von dg-Ringalgebren ein Quasiisomorphismus*

$$\Omega^* B \xrightarrow{\smile} \Omega^*(G\backslash(G \times B))$$

Beweis. Wir modifizieren den Beweis im Fall eines einpunktigen Raums B aus 19.7.4.5. Zunächst ist klar, wie wir Differentialformen auf einem Produkt zerlegen können in der Form $\Omega^n(G \times B) = \bigoplus_{p+c=n} \Omega^{p,c}(G \times B)$. Nachdem wir $\bigwedge^p \mathfrak{g}^*$ mit linksinvarianten Differentialformen auf G identifizieren und auf $G \times B$ zurückziehen, liefert die Multiplikation $\Omega^{0,c}(G \times B) \otimes \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\sim} \Omega^{p,c}(G \times B)$ und

$$\Omega^{0,c}(G \times B) \otimes \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g})^q \xrightarrow{\sim} \Omega^{p,c}(G \times B) \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g})^q$$

Bilden wir die G-Invarianten, so liefert der Rückzug unter $B \to G \times B$ mit $b \mapsto (1, b)$ einen Isomorphismus und die Umkehrabbildung nennen wir die **Äquivariantisierung**

$$\ddot{a} : \Omega^c(B) \otimes \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g})^q \xrightarrow{\sim} \left(\Omega^{p,c}(G \times B) \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g})^q\right)^G$$

Nun betrachten wir die Filtrierung unseres äquivarianten de-Rham-Komplexes Komplexes $T^n = T^n_{G\times B}$ durch die Unterkomplexe $T^{n,p+q\geq t}$. Die E_0-Terme der zugehörigen Spektralsequenz im Sinne von 19.9.1.15 sind die

$$E_0^{(n,t)} = \bigoplus_c \left(\Omega^{2t-n+c,c}(G \times B) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(\mathfrak{g})^{n-c-t}\right)^G$$

und wir zeigen, daß das Differential $\partial_0 : E_0^{(n,t)} \to E_0^{(n+1,t)}$ unter unseren Isomorphismen von eben auf der linken Seite $\bigoplus_c \Omega^c(B) \otimes \bigwedge^{2t-n+c} \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g})^{n-c-t}$ dem Differential des Tensorprodukts vom de-Rham-Komplex von B mit dem Koszulkomplex 19.3.2.32 entspricht. Das ist dieselbe Rechnung wie im Fall 19.7.4.5, daß B nur aus einem Punkt besteht. So sehen wir, daß unser Quasiisomorphismus in spe einen Quasiisomorphismus auf den E_0-Termen der Spektralsequenz induziert und aus der Theorie der Spektralsequenzen folgt dann, daß er bereits selber ein Quasiisomorphismus gewesen sein muß. □

Proposition 19.7.4.7 (Äquivariante de-Rham-Kohomologie von Torsoren). *Gegeben eine kompakte Liegruppe G und ein glatter G-Linkstorsor $\pi : E \to B$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit B induziert der Rückzug von Differentialformen gefolgt vom Tensorieren mit der konstanten Funktion $1 \in \mathcal{O}(\mathfrak{g})$ einen Isomorphismus, den* **Quotientenisomorphismus**

$$\mathrm{H}^*(B)_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_G(E)_{\mathrm{dR}}$$

Beweis. Wir betrachten auf B den Garbenkomplex ${}^E\Omega^*_B : U \mapsto \Omega^*(G\backslash\pi^{-1}(U))$ und erhalten einen Homomorphismus $\Omega^*_B \to {}^E\Omega^*_B$ durch Rückzug auf E und Tensorieren mit der konstanten Funktion $1 \in \mathcal{O}(\mathfrak{g})$. Dieser Hommorphismus ist verträglich mit dem Differential, weil das partielle Einsetzen i_ξ jede Differentialform auf E annulliert, die durch Rückzug von einer Differentialform auf B herkommt. Ich behaupte nun, daß wir so einen Quasiisomorphismus von Garbenkomplexen

$$\Omega^*_B \xrightarrow{\smile} {}^E\Omega^*_B$$

erhalten. Um das zu zeigen, dürfen wir annehmen, daß unser Torsor trivial ist, also $E = G \times B$, und müssen nur zeigen, daß wir in dieser Situation stets einen Quasiisomorphismus auf den globalen Schnitten erhalten. Das aber war gerade die Aussage von Lemma 19.7.4.6. Nun erkennt man wie in 19.5.4.4, daß ${}^E\Omega^*_B$ eine weiche Garbe ist, also nach 19.5.4.5 azyklisch für den Funktor der globalen Schnitte. Die Proposition folgt. □

Satz 19.7.4.8 (Äquivariante de-Rham-Vergleichsisomorphismen). *Seien $G\backslash X$ eine parakompakte glatte Mannigfaltigkeit mit der Operation einer kompakten Liegruppe und $q \in \mathbb{N}$. So gibt es genau einen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}^q_G(X)_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_G(X;\mathbb{R})_{\mathrm{garb}}$$

derart, daß unser Isomorphismus für jeden glatten G-Rechtstorsor A, der zusammenhängend ist mit $\mathrm{H}^1(A;\mathbb{R}) = \ldots = \mathrm{H}^{q+2}(A;\mathbb{R}) = 0$, übereinstimmt mit der in entsprechend vereinfachter Notation geschriebenen Verknüpfung

$$\mathrm{H}^q_G(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_G(A \times X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(A \times_{/G} X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(A \times_{/G} X;\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_G(X;\mathbb{R})$$

der Isomorphismen nach 19.7.4.3, 19.7.4.7, 19.5.4.9 und 19.7.2.16.

Beweis. □

19.7.4.9. Gegeben eine kompakte Liegruppe G liefert unsere Konstruktion direkt einen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \xrightarrow{\sim} \Omega^*(G\backslash\mathrm{mgf})$ und, da rechts das Differential verschindet, auch einen Ringisomorphismus

$$\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_G(\mathrm{mgf})_{\mathrm{dR}}$$

wobei $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$ wie immer in diesem Kontext mit der „verdoppelten Graduierung“ zu versehen ist und mgf die einpunktige finale Mannigfaltigkeit bezeichnet. Der Rückzug liefert dann für jede G-Mannigfaltigkeit X einen Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \to \mathrm{H}^*_G(X)_{\mathrm{dR}}$$

Im Spezialfall eines G-Linkstorsors E über einer Basismannigfaltigkeit B entspricht die Verknüpfung

$$\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \to \mathrm{H}^*_G(E)_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(B)_{\mathrm{dR}}$$

des Rückzugs mit dem Inversen des Quotientenisomorphismus 19.7.4.7 unter unseren Vergleichsisomorphismen dem charakteristischen Homomorphismus 19.7.2.8.

19.8 Ergänzungen zu Faserungen und Basiswechsel*

19.8.1 Gefaserter Basiswechsel

Definition 19.8.1.1. Sei (E) eine Eigenschaft topologischer Räume. Sagen wir, ein topologischer Raum X sei **offenlokal** (E), so meinen wir, daß sich jede Umgebung eines beliebigen Punkts von X verkleinern läßt zu einer offenen Umgebung desselben Punktes, die als topologischer Raum mit der induzierten Topologie die Eigenschaft (E) hat.

Satz 19.8.1.2 (Gefaserter Basiswechsel). *Sind in einem kartesischen Diagramm von topologischen Räumen $fq = pg$ die Horizontalen p, q Faserbündel mit offenlokal zusammenhängender Faser, so ist der Basiswechsel von Mengengarben eine Isotransformation*

$$p^* f_* \overset{\sim}{\Rightarrow} g_* q^*$$

19.8.1.3. Insbesondere vertauscht das Zurückziehen auf ein Faserbündel mit offenlokal zusammenhängender Faser mit beliebigen Produkten von Garben: In der Tat kann man ein Produkt $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$ von Garben auf Y als Vorschub unter der Projektion einer geeigneten Garbe auf $Y \times I^{\mathrm{dis}}$ verstehen. Ich erinnere daran, daß das Bilden von Produkten von Garben im allgemeinen keineswegs mit Rückzug vertauscht, ja nach 19.2.2.49 noch nicht einmal mit dem Bilden von Halmen.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unser Diagramm die Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X \times Z & \to & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y \times Z & \to & Y \end{array}$$

hat für offenlokal zusammenhängendes Z. Es reicht zu zeigen, daß für jede Garbe von Mengen $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ und jeden Punkt $(y, z) \in Y \times Z$ unsere natürliche Transformation auf dem Halm eine Bijektion

$$(p^* f_* \mathcal{F})_{(y,z)} \overset{\sim}{\to} (g_* q^* \mathcal{F})_{(y,z)}$$

induziert. Dazu hinwiederum reicht es, für ein Fundamentalsystem von Umgebungen von (y, z) zu zeigen, daß Bijektionen auf den Schnitten über diesen Umgebungen induziert werden. Jetzt verwenden wir offenen Basiswechsel 19.6.3.23 und sehen so, daß es reicht, für Z zusammenhängend nachzuweisen, daß sich auf den globalen Schnitten eine Bijektion

$$\Gamma p^* f_* \mathcal{F} \overset{\sim}{\to} \Gamma g_* q^* \mathcal{F}$$

ergibt. Nun haben wir für jede stetige Abbildung f per definitionem $\Gamma f_* = \Gamma$ und nach Übung 19.4.3.23 über finales Zurückholen bei zusammenhängenden Fasern liefern in unserem speziellen Fall die kanonischen Abbildungen auch Bijektionen $\Gamma \xrightarrow{\sim} \Gamma q^*$ und $\Gamma \xrightarrow{\sim} \Gamma p^*$. Damit identifizieren wir beide Seiten des behaupteten Isomorphismus mit $\Gamma\mathcal{F}$ und der Satz ist bewiesen. □

Beispiel 19.8.1.4 (**Basiswechsel braucht Faserbündelbedingung**). In 19.8.1.3 hatten wir bereits gesehen, daß Basiswechsel ohne Faserbündelbedingung nicht gilt. Hier kommt noch ein Beispiel, das zeigt, daß auch in „ganz gewöhnlichen Situationen“ die Faserbündelbedingung gebraucht wird. Im kartesischen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\backslash 0 \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{R}^2\backslash 0 \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{pt} \arrow[r, "p"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

mit $q : y \mapsto (0, y)$ und $f : (x, y) \mapsto x$ ist für die konstante Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{R}^2\backslash 0$ mit Faser $\mathbb{Z}$ der von der Basiswechseltransformation induzierte Morphismus $p^* f_* \mathcal{F} \to g_* q^* \mathcal{F}$ kein Isomorphismus. Das zeigt, daß bei kartesischen Diagrammen ohne Faserbündel in den Horizontalen im allgemeinen der Basiswechsel kein Isomorphismus ist.

Beispiel 19.8.1.5 (**Gefaserter Basiswechsel braucht spezielle Fasern**). Sei $\mathbb{Q}$ versehen mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie und $D = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ die Menge der irrationalen Zahlen, versehen mit der diskreten Topologie. Man zeige, daß für $f : D \to \mathrm{pt}$ und Basiswechsel mit $p : \mathbb{Q} \to \mathrm{pt}$ der von der kanonischen Transformation induzierte Morphismus $p^* f_* \mathbb{Z}_D \to g_* q^* \mathbb{Z}_D$ kein Isomorphismus ist. Genauer überlege man sich, daß der globale Schnitt der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_{D\times\mathbb{Q}}$ auf $D \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$, der konstant Eins ist oberhalb der Diagonalen und konstant Null unterhalb, einem globalen Schnitt von $g_* q^* \mathbb{Z}_D$ entspricht, der nicht von einem globalen Schnitt von $p^* f_* \mathbb{Z}_D$ herkommen kann. Dieses Beispiel zeigt, daß in 19.8.1.2 auf die Voraussetzung offenlokal zusammenhängender Fasern im allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

19.8.2 Derivierter gefaserter Basiswechsel

19.8.2.1. Ein topologischer Raum X heiße **schwach garbenazyklisch**, wenn für jede abelsche Gruppe M von Koeffizienten seine höhere Garbenkohomologie verschwindet und die natürliche Abbildung einen Isomorphismus $M \xrightarrow{\sim} \Gamma(M_X)$ induziert. Offensichtlich ist jeder zusammenziehbare Raum schwach garbenazyklisch. Jeder zusammenziehbare Raum ist nach 19.6.6.10 sogar schwach basisfest garbenazyklisch.

Satz 19.8.2.2 (Derivierter gefaserter Basiswechsel). *Sind in einem kartesischen Diagramm von topologischen Räumen $fq = pg$ die Horizontalen p, q Faserbündel mit offenlokal schwach garbenazyklischer Faser, so sind die Basiswechsel für abelsche Garben Isotransformationen*

$$p^*(\mathrm{R}^i f_*) \overset{\sim}{\Rightarrow} (\mathrm{R}^i g_*) q^*$$

Vorschau 19.8.2.3. In 21.3.2.2 zeigen wir eine Variante in derivierten Kategorien.

Beweis. Für $i = 0$ folgt das aus unserem underivierten gefaserten Basiswechsel 19.8.1.2, denn jeder schwach garbenazyklische Raum ist zusammenhängend und damit jeder offenlokal schwach garbenazyklische Raum auch offenlokal zusammenhängend. Im allgemeinen können wir uns mit offenem Basiswechsel auf den Fall eines kartesischen Diagramms der Gestalt

$$\begin{tikzcd} X \times Z \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \times Z \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

für offenlokal schwach garbenazyklisches Z zurückziehen. Trägt zusätzlich X die diskrete Topologie, so verschwinden die höheren derivierten Vorschübe $\mathrm{R}^i f_*$ für $i > 0$ und die Behauptung folgt, wenn wir für $i > 0$ und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ auch $(\mathrm{R}^i g_*) q^* \mathcal{F} = 0$ zeigen. Gegeben $B \Subset Y$ und $U \Subset Z$ mit U schwach garbenazyklisch finden wir mit 19.4.3.30 aber

$$\mathrm{H}^i(g^{-1}(B \times U); q^*\mathcal{F}) = \prod_{x \in f^{-1}(B)} \mathrm{H}^i(U; \mathcal{F}_x) = 0$$

für $i > 0$ und durch Übergang zum Kolimes erkennt man, daß für $i > 0$ alle Halme von $(\mathrm{R}^i g_*) q^* \mathcal{F}$ verschwinden. Damit haben wir unseren Satz für diskretes X bewiesen. Um unseren Satz für allgemeines X zu zeigen, müssen wir nur für jede abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine Einbettung in eine f_*-azyklische abelsche Garbe finden, die unter q^* zu einer g_*-azyklischen Garbe wird: Dann können wir für jede abelsche Garbe induktiv eine Auflösung durch Garben dieser Art konstruieren und der Satz folgt wieder aus seiner underivierten Variante 19.8.1.2. Um unsere Einbettung zu konstruieren, bilden wir einen diskreten Raum X^δ, indem wir die Menge X mit der diskreten Topologie versehen, geben der Identität den Namen

$h : X^\delta \to X$ und erhalten ein Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
X^\delta \times Z \arrow[r, "r"] \arrow[d, "k"'] & X^\delta \arrow[d, "h"] \\
X \times Z \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \times Z \arrow[r, "p"] & Y
\end{tikzcd}$$

Die kanonische Abbildung $\mathcal{F} \to h_* h^* \mathcal{F}$ alias Godementauflösung ist dann eine Einbettung in eine f_*-azyklische Garbe, und es reicht zu zeigen, daß auch $q^* h_* h^* \mathcal{F}$ azyklisch ist für g_*. Nach dem bereits behandelten Fall verschwinden aber die höheren derivierten Vorschübe von $r^* h^* \mathcal{F}$ sowohl unter k als auch unter gk. Gegeben eine injektive Auflösung $r^* h^* \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\triangleleft$ ist also $k_* r^* h^* \mathcal{F} \hookrightarrow k_* \mathcal{I}^\triangleleft$ eine welke Auflösung von $k_* r^* h^* \mathcal{F}$ und $g_* k_* r^* h^* \mathcal{F} \hookrightarrow g_* k_* \mathcal{I}^\triangleleft$ ist immer noch exakt. So folgt, daß $k_* r^* h^* \mathcal{F} \cong q^* h_* h^* \mathcal{F}$ azyklisch ist für g_*. □

Korollar 19.8.2.4 (Höhere Vorschübe längs Faserbündeln mit spezieller Basis). *Gegeben ein Faserbündel $g : E \to Z$ über einem offenlokal schwach garbenazyklischen Raum Z und eine abelsche Gruppe M sind die höheren Vorschübe $\mathrm{R}^i g_* M_E$ der konstanten Garben lokal konstant und Basiswechsel liefert Isomorphismen zwischen ihren Halmen und den Kohomologiegruppen der Faser*

$$(\mathrm{R}^i g_* M_E)_z \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(g^{-1}(z); M)$$

Beweis. Mit offenem Basiswechsel dürfen wir annehmen, daß unsere Abbildung eine Projektion $g : X \times Z \to Z$ ist für einen weiteren topologischen Raum X. Jetzt wenden wir derivierten gefaserten Basiswechsel 19.8.2.2 an auf die konstante Garbe $M_X \in \mathrm{Ab}_{/X}$ im kartesischen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \times Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
Z \arrow[r] & \mathrm{top}
\end{tikzcd}$$

und finden, daß in diesem Fall die $\mathrm{R}^i g_* M_E$ sogar konstante Garben sind. □

Korollar 19.8.2.5 (Kriterium für schwache basisfeste Azyklizität). *Gegeben Z zusammenhängend und offenlokal schwach garbenazyklisch sowie eine Schranke $n \geq 1$ mit $\mathrm{H}^1(Z; M) = \ldots = \mathrm{H}^{n+2}(Z; M) = 0$ für jede beliebige abelsche Gruppe M und X ein beliebiger topologischer Raum induziert der Rückzug für alle $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und $0 \leq q \leq n$ Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^q(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X \times Z; \mathrm{pr}^* \mathcal{F})$$

19.8.2.6. Insbesondere ist ein Raum Z mit den im Korollar geforderten Eigenschaften schwach bag-n-azyklisch im Sinne von 19.6.6.10. Noch spezieller hat jede zusammenhängende Mannigfaltigkeit, deren Kohomologie mit beliebigen abelschen Gruppen als Koeffizienten in den Graden $1, \ldots, n+2$ verschwindet, diese Eigenschaft. In der Tat ist jede Mannigfaltigkeit offenlokal zusammenziehbar und damit offenlokal schwach garbenazyklisch.

Beweis. Wir arbeiten mit dem kartesischen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times Z \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "p"] & \mathrm{top} \end{tikzcd}$$

Derivierter gefaserter Basiswechsel 19.8.2.2 liefert uns zunächst einmal Isomorphismen $p^*(\mathrm{R}^i f_*)\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}^i g_*)q^*\mathcal{F}$ und zeigt insbesondere, daß auch die linke Seite eine konstante Garbe ist. Nach Annahme verschwinden darauf die $\mathrm{R}^j p_*$ für $1 \le j \le n+2$ und wir erhalten Isomorphismen

$$(\mathrm{R}^i f_*)\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} p_* p^*(\mathrm{R}^i f_*)\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}^0 p_*)(\mathrm{R}^i g_*)q^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}^i (p \circ g)_*)q^*\mathcal{F}$$

für $1 \le i \le n+1$ mit ganz rechts der Leray'schen Spektralsequenz 19.9.3.15 oder elementarer 19.3.6.11 angewandt auf den Komplex $g_*\mathcal{I}^\lhd$ für $q^*\mathcal{F} \to \mathcal{I}^\lhd$ eine injektive Auflösung, der dann konstante Kohomologiegarben haben muß, und den Funktor p_*. Ist $\mathcal{F}$ injektiv, so ist $q^*\mathcal{F}$ mithin $(n+1)$-Γ-azyklisch. Jede injektive Auflösung von $\mathcal{F}$ wird also unter q^* zu einer Auflösung von $q^*\mathcal{F}$ durch $(n+1)$-Γ-azyklische Garben. Da so eine Auflösung nach 19.3.6.9 aber bereits die Kohomologie in jedem Grad $\le n$ berechnet, folgt die Behauptung. $\square$

Übungen

Übung 19.8.2.7. Ist $j : \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}$ die Einbettung und $\mathcal{F}$ eine lokal konstante abelsche Garbe mit Monodromie $T : \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_1$ wie in 19.7.1.19, so gilt für den Halm bei Null ihrer derivierten Vorschübe

$$(\mathrm{R}^q j_*\mathcal{F})_0 \cong \begin{cases} \{a \in \mathcal{F}_1 \mid T(a) = a\} & q = 0; \\ \mathcal{F}_1 / \operatorname{im}(T - \mathrm{id}) & q = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Es reicht, einen Isomorphismus $(\mathrm{R}^q j_*\mathcal{F})_0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\mathbb{C}^\times; \mathcal{F})$ zu konstruieren. Den Rest erledigt dann 19.4.7.9.

Vorschau 19.8.2.8. Ist $j : \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}$ die Einbettung und $\mathcal{F}$ eine lokal konstante abelsche Garbe auf $\mathbb{C}^\times$, so gilt $\mathrm{H}^q(\mathbb{C}; j_!\mathcal{F}) = 0$ für alle q. Eine mögliche Argumentation, die hier aber für uns noch nicht zugänglich ist, besteht darin, vom ausgezeichneten Dreieck

$$j_!\mathcal{F} \to j_*\mathcal{F} \to i_*i^*j_*\mathcal{F} \to$$

auszugehen, mit i der Einbettung des Ursprungs, in dem alle Funktoren als derivierte Funktoren zu verstehen sind. Dann folgt die Behauptung aus dem letzten Isomorphismus von Übung 19.8.2.7. Betrachten wir dann das ausgezeichnete Dreieck

$$i_!i^!(j_!\mathcal{F}) \to j_!\mathcal{F} \to j_*j^*j_!\mathcal{F} \to$$

und bilden die Kohomologie, so finden wir $\mathrm{H}^q(\mathbb{C}^\times; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{q+1}i^!j_!\mathcal{F}$. Nach 19.4.7.9 sagt das also

$$\mathcal{H}^q i^! j_! \mathcal{F} \cong \begin{cases} \{a \in \mathcal{F}_1 \mid T(a) = a\} & q = 1; \\ \mathcal{F}_1 / \operatorname{im}(T - \mathrm{id}) & q = 2; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das ist bereits in neuer Notation zu verstehen, in alter Notation hätten wir $\mathrm{R}^q i^!$ statt $\mathcal{H}^q i^!$ zu schreiben und $i^!$ hätte eine andere Bedeutung. Eigentlich sollte man hier zeigen, daß $i^!j_!\mathcal{F}$ in der derivierten Kategorie $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ isomorph ist zum Komplex mit dem Differential $(T - \mathrm{id}) : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ vom Grad 1 zum Grad 2 und nur Nullen außerhalb dieser beiden Grade.

19.8.3 Gruppenkohomologie als Garbenkohomologie

19.8.3.1. Wir erinnern aus 19.3.7.5 die Definition der Kohomologie einer diskreten Gruppe mit Koeffizienten in einer Darstellung.

19.8.3.2. Ist $G \looparrowright A$ eine abelsche Gruppe A mit einer Operation einer diskreten Gruppe G und $X \looparrowleft G$ ein topologischer Raum mit einer topologisch freien Rechtsoperation von G, so bilden wir wie in 16.4.4 erklärt die Überlagerung

$$X \times_{/G} A \to X/G$$

und bezeichnen mit $\tilde{A}$ die Garbe ihrer Schnitte. Auf diese Weise erhalten wir einen exakten Funktor $A \mapsto \tilde{A}$ von der Kategorie $G\text{-}\mathrm{Ab}$ der G-Moduln in die Kategorie $\mathrm{Ab}_{/(X/G)}$ der abelschen Garben auf dem Bahnenraum X/G. Wir nennen $\tilde{A}$ die **zu** A **assoziierte Garbe** und erhalten natürliche Homomorphismen $A^G \to \Gamma\tilde{A}$ durch die Vorschrift $a \mapsto (xG \mapsto [x, a])$.

Satz 19.8.3.3 (Gruppenkohomologie als Garbenkohomologie). *Sei X ein global und offenlokal schwach garbenazyklischer topologischer Raum, auf dem eine*

diskrete Gruppe G topologisch frei operiert. So induzieren unsere natürlichen Homomorphismen $A^G \to \Gamma\tilde{A}$ aus 19.8.3.2 natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(G; A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X/G; \tilde{A})$$

zwischen der Gruppenkohomologie von G mit Koeffizienten in einem G-Modul A und der Garbenkohomologie des Quotienten X/G mit Koeffizienten in der zu A assoziierten Garbe $\tilde{A}$.

19.8.3.4 (**Gruppenkohomologie von diskreter Gruppe**). Da die Milnorkonstruktion einen zusammenziehbaren und offenlokal zusammenziehbaren topologisch freien G-Rechtsraum liefert, erhalten wir insbesondere für jede diskrete topologische Gruppe G und jede abelsche Gruppe M einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^q(G; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_G(\mathrm{top}; M)$$

zwischen der Kohomologie von M als G-Modul mit der trivialen Operation und der G-äquivarianten Kohomologie des einpunktigen Raums mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe M.

Beweis. Ist X zusammenhängend und verschwindet seine erste Kohomologie mit konstanten Koeffizienten für jede abelsche Koeffizientengruppe, so ist jede lokal konstante abelsche Garbe auf X konstant nach 19.1.2.6 und 19.5.2.1. Operiert nun eine diskrete Gruppe G topologisch frei von rechts auf X und bezeichnen wir Kategorien lokal konstanter Garben mit einem oberen Index lk, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Kategorien der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ab}_{/X} & \mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/X} \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\approx"] \arrow[dr, Rightarrow, "\sim"] & \mathrm{Ab} \\
\mathrm{Ab}_{/(X/G)} \arrow[u] & \mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/(X/G)} \arrow[l, hook'] \arrow[u] \arrow[r, "\approx"] \arrow[dr, Rightarrow, "\sim"] & G\text{-}\mathrm{Ab} \arrow[u] \\
\mathrm{Ab}_{/\mathrm{top}} \arrow[u] \arrow[r, equal] & \mathrm{Ab}_{/\mathrm{top}} \arrow[u] \arrow[r, equal] & \mathrm{Ab} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Die Vertikalen meinen das Zurückholen von Garben beziehungsweise das Zurückholen der G-Operation vermittels $1 \to G \to 1$. Die obere rechte Horizontale ist der Funktor der globalen Schnitte und die mittlere rechte Horizontale der Faserfunktor $\mathrm{Top}_{X/G}(X, \ )$ aus 16.4.4.2, der ja quasiinvers ist zu $A \mapsto \tilde{A}$. Gehen wir im Quadrat unten rechts zu den Rechtsadjungierten der Vertikalen über, so ergeben sich kanonische Isomorphismen

$$\Gamma\tilde{A} \xrightarrow{\sim} A^G$$

Um zu zeigen, daß sie sogar Isomorphismen $\mathrm{H}^q(X/G;\tilde{A}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(G;A)$ induzieren, müssen wir nur wissen, daß injektive Objekte A von G-Ab unter der Zuordnung $A \mapsto \tilde{A}$ zu Γ-azyklischen Garben $\tilde{A}$ auf X/G werden. Nun ist aber jedes injektive Objekt $A \in G$-Ab Summand eines $\mathrm{ind}_1^G I$ für eine injektive abelsche Gruppe I und $\mathrm{ind}_1^G I$ entspricht nach Übergang zu den Rechtsadjungierten der Vertikalen im oberen rechten Quadrat der lokal konstanten Garbe $\pi_* I_X$ auf X/G für $\pi : X \to X/G$ die Projektion. Da X und damit auch X/G offenlokal schwach garbenazyklisch ist , muß hier π_* nach 19.8.2.4 auch wirklich lokal konstante Garben zu lokal konstanten Garben machen. Zusätzlich zeigt diese Bedingung, daß die höheren Derivierten $\mathrm{R}^q\pi_*$ auf lokal konstanten abelschen Garben verschwinden. Unsere Garbe $\pi_* I_X$ ist damit offensichtlich Γ-azyklisch, wenn X wie angenommen schwach garbenazyklisch ist. $\square$

Übungen

Übung 19.8.3.5. Man berechne nocheinmal die Kohomologiegruppen der Kreislinie mit lokal konstanten Koeffizienten 19.4.7.9 und verwende statt offener Überdeckungen unsere Gruppenkohomologie aus 19.3.7.17.

19.8.4 Fakofaserungen

19.8.4.1. Wir haben bereits bemerkt, daß die Garbenopfaserung $\mathrm{Ens}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ und die Garbenfaserung $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ zueinander opponierte Fasern haben, in Formeln $\mathrm{Ens}_{/\!/X} = (\mathrm{Ens}_{/X})^{\mathrm{opp}}$, und haben in 19.4.3.11 einen ausgezeichneten Isomorphismus $f^* \overset{\sim}{\Rightarrow} (f^*)^{\mathrm{opp}}$ zwischen dem Rückzug in $\mathrm{Ens}_{/\!/\,\mathrm{Top}}$ und dem vom Rückzug in $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}}$ auf den opponierten Kategorien induzierten Funktor angegeben. Hier will ich besprechen, welche Verträglichkeiten diese Isomorphismen ihrerseits erfüllen, ja inwiefern die Garbenopfaserung und die Garbenfaserung sich gegenseitig vollständig beschreiben. Ich skizziere erst einen Zugang über „Pseudofunktoren“ und führe dann einen Zugang über „Fakofaserungen“ aus, der dem in diesem Text verfolgten Ziel der Vermeidung höherer Strukturen näher kommt.

19.8.4.2. Ein Ansatz, die Beziehung zwischen Garbenfaserung und Garbenopfaserung zu verstehen, ist die Sprache der Pseudofunktoren, vergleiche 19.8.6.7. Ich will ihn hier nur kurz skizzieren. Einen Kofaserfunktor $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ anzugeben „läuft auf dasselbe hinaus“ wie einen Köchermorphismus $\mathscr{B} \to \mathrm{Cat}$ anzugeben, der jedem Objekt $X \in \mathscr{B}$ eine Kategorie $\mathscr{C}_X$ zuordnet und jedem $f : X \to Y$ einen Funktor $f_\dagger : \mathscr{C}_X \to \mathscr{C}_Y$, und zusätzlich Isotransformationen $c(f,g) : g_\dagger f_\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (gf)_\dagger$ sowie $c_X : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_X} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{id}_{X\dagger}$ anzugeben, die wir die „Identifikationen“ genannt hatten und ihrerseits weitere Verträglichkeiten erfüllen, die ich hier nicht ausschreibe. Halten wir hinter unseren Köchermorphismus den Köchermorphismus des Opponierens $\mathrm{opp} : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}$ dahinter und nehmen die Inver-

sen der von den Identifikationen induzierten Isotransformationen, so erhalten wir ein Datum derselben Art. Gehen wir dann unser „läuft auf dasselbe hinaus“ wieder zurück, so erhalten wir einen weiteren Kofaserfunktor mit opponierten Fasern aber denselben Vorschüben. Die Beziehung zwischen Garbenfaserung und Garbenopfaserung kann als die analoge Konstruktion im Fall von Faserungen statt Kofaserungen verstanden werden.

19.8.4.3. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ erklären wir ihre **Diskretisierung** $\mathcal{C}^\delta$ als die Unterkategorie mit denselben Objekten aber nur Identitäten als Morphismen.

Definition 19.8.4.4. Eine **Fakofaserung** über einer Kategorie $\mathscr{B}$ ist ein Datum aus einem Faserfunktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ und einem Kofaserfunktor $\bar{p} : \bar{\mathscr{C}} \to \mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$, die nach Zurückholen auf die diskretisierte Basis $\mathscr{B}^\delta$ übereinstimmen, sowie ausgezeichneten Bijektionen

$$i : \mathscr{C}_f^\times(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathscr{C}}_{f^\circ}^\times(\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

zwischen den Mengen der jeweiligen kartesischen beziehungsweise kokartesischen Morphismen, die verträglich sind mit Verknüpfung und die im Fall $f = \mathrm{id}_X$ zum Invertieren von Isomorphismen der Faser spezialisieren.

19.8.4.5 (**Fakofaserung und Identifikationen**). Anders und etwas vage gesagt besteht eine Fakofaserung aus zwei Faserfunktoren $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ und $q := \bar{p}^{\mathrm{opp}} : \bar{\mathscr{C}}^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{B}$ mit zueinander opponierten Fasern und Isomorphismen zwischen den Rückzügen der ersten und den opponierten Rückzügen der zweiten Faserung $f^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (f^\ddagger)^{\mathrm{opp}}$ derart, daß die Identifikationen $f^\dagger g^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (gf)^\dagger, \mathrm{id}^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}$ der ersten Faserung darunter den Inversen der Opponierten der Identifikationen $f^\ddagger g^\ddagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (gf)^\ddagger, \mathrm{id}^\ddagger \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}$ entsprechen.

Beispiel 19.8.4.6. Die Familienkategorien einer Trennschmelzkategorie bilden eine Fakofaserung über der Familienkategorie der terminalen Trennkategorie. In 21.1.6.1 führen wir den Begriff einer „Trennschmelzfakofaserung“ ein, einer gemeinsamen Verallgemeinerung von Trennschmelzkategorien und Fakofaserungen.

Beispiel 19.8.4.7 (**Fakofaserung der Mengengarben**). Die Mengengarbenfaserung $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ und die zur Garbenopfaserung opponierte Kofaserung $(\mathrm{Ens}_{/\!/\mathrm{Top}})^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{opp}}$ bilden zusammen mit unseren ausgezeichneten Bijektionen aus 19.4.3.11 eine Fakofaserung. In der Tat haben wir in 19.4.3.12 für Morphismen über f der Garbenopfaserung eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}_X(X \times_Y \bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{F}})$$

konstruiert. Für Morphismen über f der Garbenfaserung erhalten wir dahingegen unmittelbar eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}_X(\bar{\mathcal{F}}, X \times_Y \bar{\mathcal{G}})$$

Kartesische Morphismen sind jeweils die Morphismen links, die rechts Isomorphismen in Top_X entsprechen, und das Invertieren dieser Isomorphismen liefert in diesem Fall die Bijektionen unserer Fakofaserung. Wie in 19.8.4.5 ausgeführt bedeutet das, daß die Isomorphismen, die wir so zwischen den Rückzügen von $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ und den opponierten Rückzügen von $\mathrm{Ens}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ erhalten, mit den jeweiligen Identifikationen verträglich sind.

Beispiel 19.8.4.8 (**Fakofaserung der Mengengarben**). Die Mengengarbenfaserung $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ und die zur Garbenopfaserung der Mengengarben opponierte Kofaserung $(\mathrm{Ens}_{/\!/\mathrm{Top}})^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{opp}}$ bilden zusammen mit unseren ausgezeichneten Bijektionen aus 19.4.3.11 eine Fakofaserung. In der Tat haben wir in 19.4.3.12 für Morphismen über f der Garbenopfaserung eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/\!/f}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}_X(X \times_Y \bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{F}})$$

konstruiert. Für Morphismen über f der Garbenfaserung erhalten wir dahingegen unmittelbar eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/f}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}_X(\bar{\mathcal{F}}, X \times_Y \bar{\mathcal{G}})$$

Kartesische Morphismen sind jeweils die Morphismen links, die rechts Isomorphismen in Top_X entsprechen, und das Invertieren dieser Isomorphismen liefert in diesem Fall die Bijektionen unserer Fakofaserung. Wie in 19.8.4.5 ausgeführt bedeutet das, daß die Isomorphismen, die wir so zwischen den Rückzügen von $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ und den opponierten Rückzügen von $\mathrm{Ens}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ erhalten, mit den jeweiligen Identifikationen verträglich sind.

Beispiel 19.8.4.9 (**Fakofaserung zu étale eingeschränkter Schreikofaserung**). Ein Faserfunktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ derart, daß alle Rückzüge einen Linksadjungierten haben, ist eine Bifaserung. Ein Beispiel ist unsere auf étale separierte Abbildungen eingeschränkte Garbenfaserung

$$\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Top}^{\text{éts}}} \to \mathrm{Top}^{\text{éts}}$$

Wir haben in 19.6.5.1 für alle Morphismen f der Basis Isomorphismen zwischen den Funktoren $f_!$ und den Linksadjungierten der Rückzüge f^* angegeben. Andererseits sind die Funktoren $f_¡ = f_!^{\mathrm{opp}}$ die Vorschübe der Garbenschreikofaserung, die wir einschränken können zu einer Kofaserung $\mathrm{Ab}^!_{/\!/\mathrm{Top}^{\text{éts}}} \to \mathrm{Top}^{\text{éts}}$ und die durch Opponieren zu einer Faserung

$$(\mathrm{Ab}^!_{/\!/\mathrm{Top}^{\text{éts}}})^{\mathrm{opp}} \to (\mathrm{Top}^{\text{éts}})^{\mathrm{opp}}$$

wird. Diese opponierte Garbenschreikofaserung hat dieselben Fasern wie unsere Kofaserung $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Top}^{\text{éts}}} \to \mathrm{Top}^{\text{éts}}$ und man prüft, daß sie zusammen eine Fakofaserung über $(\mathrm{Top}^{\text{éts}})^{\mathrm{opp}}$ bilden mit den Bijektionen $i : \mathscr{C}_f^{\times}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathscr{C}}_{f^\circ}^{\times}(\mathcal{G},\mathcal{F})$

gegeben durch die Bijektionen

$$i : (\mathrm{Ab}^{!}_{/\!/f})^{\times}(\mathcal{G},\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}^{\times}_{/f}(\mathcal{G},\mathcal{F})$$

für $f : X \to Y$ étale separiert, die mit den offensichtlichen Bijektionen vom Invertieren $(\mathrm{Ab}^{!}_{/\!/Y})^{\times}(f_{¡}\mathcal{G},\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}^{\times}_{/Y}(f_{!}\mathcal{G},\mathcal{F})$ herkommen. Wie in 19.8.4.5 ausgeführt kann man das auch so formulieren, daß die zwischen den Vorschüben von $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Top}^{\text{éts}}} \to \mathrm{Top}^{\text{éts}}$ und den opponierten Vorschüben von $\mathrm{Ab}^{!}_{/\!/\mathrm{Top}^{\text{éts}}} \to \mathrm{Top}^{\text{éts}}$ in 19.6.5.1 angegebenen Isomorphismen mit den jeweiligen Identifikationen verträglich sind. In 21.6.7.20 beschreiben wir noch in weiteren Fällen die im Sinne von 19.8.4.11 oppinverse Kofaserung zur Garbenschreikofaserung.

19.8.4.10 (**Ergänzen zu Fakofaserung**). Jeder Faserfunktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ läßt sich eindeutig bis auf eindeutigen objektfesten Isomorphismus zu einer Fakofaserung ergänzen, indem wir

$$\bar{\mathscr{C}}_{f^\circ}(\mathcal{G},\mathcal{F}) := \mathscr{C}_X(f^\dagger\mathcal{G},\mathcal{F})$$

setzen für $f : X \to Y$ und die übrigen Daten in der offensichtlichen Weise konstruieren. Unter einem **objektfesten Funktor** verstehen wir dabei einen Funktor, der auf Objekten die Identität ist. Ebenso läßt sich jeder Kofaserfunktor $\bar{p} : \bar{\mathscr{C}} \to \mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$ eindeutig bis auf eindeutigen objektfesten Isomorphismus zu einer Fakofaserung ergänzen, indem wir

$$\mathscr{C}_f(\mathcal{F},\mathcal{G}) := \bar{\mathscr{C}}_X(\mathcal{F}, f^\circ_\dagger\mathcal{G})$$

setzen für $f : X \to Y$ alias $f^\circ : Y \to X$ und die übrigen Daten in der offensichtlichen Weise konstruieren. Diese Ergänzungen verdienen also einen bestimmten Artikel und eine eigene Notation. Gegeben eine Faserung $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ notieren wir den Kofaseranteil der zugehörigen Fakofaserung statt $\bar{\mathscr{C}}$ auch $\mathscr{C}^{\mathrm{k}}$ und erhalten so eine Kofaserung

$$\mathscr{C}^{\mathrm{k}} \to \mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$$

Gegeben eine Kofaserung $\mathscr{D} \to \mathscr{A}$ notieren wir den Faseranteil der zugehörigen Fakofaserung auch $\mathscr{D}^{\mathrm{f}}$ und erhalten so eine Faserung

$$\mathscr{D}^{\mathrm{f}} \to \mathscr{A}^{\mathrm{opp}}$$

Diesen Übergang nennen wir das **Invertieren** einer Faserung zu einer Kofaserung über der opponierten Basis und umgekehrt.

19.8.4.11. Zu jeder Fakofaserung bilden wir die **opponierte Fakofaserung** über derselben Basis $\mathscr{B}$, indem wir die Kofaserung $p^{\mathrm{opp}} : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$ und die Faserung $\bar{p}^{\mathrm{opp}} : \bar{\mathscr{C}}^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{B}$ betrachten und die Bijektionen i durch ihre Inversen ersetzen. Zusammen können wir so für jeden Faserfunktor $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ den **opponiert-invertierten** oder kurz **oppinvertierten Faserfunktor**

$$\mathscr{C}^{\mathrm{of}} := (\mathscr{C}^{\mathrm{opp}})^{\mathrm{f}} \to \mathscr{B}$$

über derselben Basis mit opponierten Fasern aber, bis auf das Opponieren, denselben Rückzügen bilden. Ebenso können wir so für jeden Kofaserfunktor $\mathscr{D} \to \mathscr{A}$ den **oppinvertierten Kofaserfunktor**

$$\mathscr{D}^{\mathrm{ok}} := (\mathscr{D}^{\mathrm{opp}})^{\mathrm{k}} \to \mathscr{A}$$

über derselben Basis mit opponierten Fasern aber, bis auf das Opponieren, denselben Vorschüben bilden. In so einer Situation sagen wir, die beiden Faserfunktoren beziehungsweise Kofaserfunktoren seien zueinander **oppinvers**.

19.8.4.12. Man kann weiter zeigen, daß Invertieren und Opponieren „vertauscht" und daß zweimaliges Invertieren ebenso wie zweimaliges Opponieren mit der Identität „übereinstimmt". Ich verzichte darauf, das ganz präzise auszuschreiben, weil es für uns im folgenden in größerer Präzision nicht relevant ist.

Beispiel 19.8.4.13 (**Oppinverse Familienfaserungen**). Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ erinnern wir ihre Familienfaserung 19.6.2.24 über Ens. Die Familienfaserungen zu $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ sind zueinander oppinvers.

19.8.5 Das sucht noch seinen Platz

19.8.5.1. Zu jeder Faserung $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ erklären wir die **faserduale Kofaserung**

$$\mathscr{C}^{\mathrm{fdual}} \to \mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$$

durch die Vorschrift, daß wir als Objekte die Objekte von $\mathscr{C}$ nehmen und als Abbildung auf den Objekten dieselbe Abbildung wie zuvor und die Morphismen erklären durch

$$\mathscr{C}^{\mathrm{fdual}}_{f^\circ}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) := \mathscr{C}_X(f^\dagger \mathcal{G}, \mathcal{F})$$

für einen und jeden kartesischen Lift $f^\dagger \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ von $f : X \to Y$. Gegeben so ein Morphismus φ und ein weiterer Morphismus $g : Y \to Z$ in der Basis und $\psi \in \mathscr{C}^{\mathrm{fdual}}_{g^\circ}(\mathcal{E}, \mathcal{G}) = \mathscr{C}_Y(g^\dagger \mathcal{E}, \mathcal{G})$ erklären wir die Verknüpfung $\varphi \mathbin{\hat{\circ}} \psi$ in unserer faserdualen Kategorie als $\varphi \mathbin{\hat{\circ}} \psi := \varphi \circ f^\dagger \psi$ für die in $\mathscr{C}_X$ zu verstehende Verknüpfung rechts. Wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß diese Verknüpfung auf unseren bis auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmten Morphismenmengen wohldefiniert ist und daß der so entstehende Köcher mit Verknüpfung auch wirklich eine Kategorie ist, und wir in der Tat eine Kofaserung erhalten. Die Konstruktion liefert ausgezeichnete Isomorphismen zwischen den Fasern und der Vorschub unter der faserdualen Kofaserung entspricht darunter dem Rückzug in unserer urprünglichen Faserung. Analog erklärt man zu jeder Kofaserung die faserduale Faserung und erhält einen ausgezeichneten Isomorphismus zwischen dem Faserdualen des Faserdualen und der ursprünglichen Faserung beziehungsweise Kofaserung.

19.8.5.2. Das Dualisieren vertauscht mit dem Übergang zu den opponierten Kategorien. Aus jeder Faserung $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ erhalten wir so die **faserdualopponierte Faserung**

$$\mathscr{C}^{\mathrm{fdo}} := (\mathscr{C}^{\mathrm{fdual}})^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{B}$$

Analoges gilt für Kofaserungen und wir verwenden dafür dieselbe Notation. Bezeichnen wir zu jeder Faserung $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ mit Faserung $\mathscr{C}^{\mathrm{kart}} \to \mathscr{B}$ die Faserung mit nur den kartesischen Morphismen in der Ausgangskategorie, so liefern die Konstruktionen einen Isomorphismus von Faserungen $\mathscr{C}^{\mathrm{kart}} \xrightarrow{\sim} (\mathscr{C}^{\mathrm{fdo}})^{\mathrm{kart}}$, der in den Fasern das Invertieren von Morphismen ist.

19.8.6 Kategorienfaserungen und -kofaserungen*

19.8.6.1. Unter einer **Zerfällung eines Kofaserfunktors** $F : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$, französisch **clivage**, versteht man eine Vorschrift $(f, \mathcal{F}) \mapsto (f_\dagger \mathcal{F}, \kappa_{f,\mathcal{F}})$, die zu jedem Morphismus in der Basis $f : X \to Y$ und jedem Objekt $\mathcal{F} \in \mathscr{C}_X$ einen kokartesischen Lift $\kappa_{f,\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to f_\dagger \mathcal{F}$ auszeichnet. Wie bereits besprochen sind diese Wahlen eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

19.8.6.2. Unter einer **Spaltung eines Kofaserfunktors**, französisch **scindage**, versteht man eine Zerfällung, bei der die Verknüpfung von je zwei ausgezeichneten Transportmorphismen wieder ein Transportmorphismus ist, in Formeln $g_\dagger(f_\dagger \mathcal{F}) = (gf)_\dagger \mathcal{F}$ und $\kappa_{g,f_\dagger \mathcal{F}} \circ \kappa_{f,\mathcal{F}} = \kappa_{gf,\mathcal{F}}$ für alle verknüpfbaren f, g. Es ist im allgemeinen nicht möglich, solch eine Spaltung zu finden: Zum Beispiel ist für jeden surjektiven Gruppenhomomorphismus $G \twoheadrightarrow H$ der Funktor $[G] \to [H]$ der zugehörigen Ein-Objekt-Kategorien ein Kofaserfunktor, eine Zerfällung dieses Kofaserfunktors bedeutet die Auswahl eines Repräsentantensystems für die Fasern, und eine Spaltung eine Zerfällung durch einen Gruppenhomomorphismus, die es im allgemeinen eben nicht gibt.

19.8.6.3. Gegeben ein zerfällter Kofaserfunktor kommutieren alle Diagramme

$$\begin{array}{ccc} h_\dagger \circ g_\dagger \circ f_\dagger & \Rightarrow & (h \circ g)_\dagger \circ f_\dagger \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ h_\dagger \circ (g \circ f)_\dagger & \Rightarrow & (h \circ g \circ f)_\dagger \end{array}$$

mit den in hoffentlich offensichtlicher Weise aus unseren Identifikationen gebildeten Transformationen. Weiter stimmt $c(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) : \mathrm{id}_{X\dagger} \circ \mathrm{id}_{X\dagger} \xRightarrow{\sim} \mathrm{id}_{X\dagger}$ überein mit der aus $c_X : \mathrm{id}_{X\dagger} \xRightarrow{\sim} \mathrm{Id}$ durch Vorschalten und ebenso mit der daraus durch Nachschalten von $\mathrm{id}_{X\dagger}$ entstehenden Isotransformation, in Formeln $c(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{X\dagger}\, c_X = c_X\, \mathrm{id}_{X\dagger}$.

19.8.6.4. Sei $\mathscr{B}$ eine Kategorie. Unter einer **Kategorienkofaserung** $\mathrm{C} = (\mathrm{C}, \dagger, c)$ über $\mathscr{B}$ verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Objekt $X \in \mathscr{B}$ eine Kategorie

$\mathrm{C}_{/X}$ zuordnet, jedem Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathscr{B}$ einen Funktor $f_\dagger : \mathrm{C}_{/X} \to \mathrm{C}_{/Y}$, und jedem Paar $g \circ f$ von verknüpfbaren Morphismen in $\mathscr{B}$ eine Isotransformation $c = c(g, f) : g_\dagger \circ f_\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (g \circ f)_\dagger$ derart, daß $\mathrm{id}_{X\dagger}$ für alle X eine Äquivalenz von Kategorien ist und daß alle Diagramme

$$\begin{array}{ccc} h_\dagger \circ g_\dagger \circ f_\dagger & \Rightarrow & (h \circ g)_\dagger \circ f_\dagger \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ h_\dagger \circ (g \circ f)_\dagger & \Rightarrow & (h \circ g \circ f)_\dagger \end{array}$$

mit den in hoffentlich offensichtlicher Weise aus den Transformationen c gebildeten Transformationen kommutieren. Wir nennen die Kategorie $\mathrm{C}_{/X}$ die **Faser über** X unserer Kategorienkofaserung, die Funktoren $f_\dagger$ ihre **Vorschübe**, die Transformationen $c(g, f)$ ihre **Identifikationen** und die Kategorie $\mathscr{B}$ ihre **Basis**.

Vorschau 19.8.6.5. In einer Terminologie, die wir hier nicht einführen, ist eine Kategorienkofaserung über einer Kategorie $\mathscr{B}$ dasselbe wie ein **laxer** 2**-Funktor** alias **Pseudofunktor** von der Kategorie $\mathscr{B}$ in die Zweikategorie der Kategorien.

19.8.6.6 (**Kofaserfunktoren und Kategorienkofaserungen**). Nach 19.8.6.3 bilden für jeden zerfällten Kofaserfunktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ seine Fasern zusammen mit den für jeden Morphismus der Basis gewählten Vorschüben und deren Identifikationen eine Kategorienkofaserung. Umgekehrt können wir zu jeder Kategorienkofaserung $\mathrm{C} = (\mathrm{C}, \dagger, c)$ über einer Basiskategorie $\mathscr{B}$ einen zerfällten Kofaserfunktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ konstruieren, indem wir als Objektmenge $\mathscr{C} := \bigsqcup_{X \in \mathscr{B}} \mathrm{C}_{/X}$ nehmen und für jeden Morphismus $f : X \to Y$ in der Basis $\mathscr{C}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \mathrm{C}_{/Y}(f_\dagger \mathcal{F}, \mathcal{G})$ setzen und für $g : Y \to Z$ die Verknüpfung von f mit einem Element von $\mathscr{C}_g(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \mathrm{C}_{/Z}(g_\dagger \mathcal{G}, \mathcal{H})$ erklären durch das Vorschalten in $\mathrm{C}_{/Z}$ des Bildes unseres ursprünglichen Elements unter der Komposition

$$\mathrm{C}_{/Y}(f_\dagger \mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{C}_{/Z}(g_\dagger f_\dagger \mathcal{F}, g_\dagger \mathcal{G}) \overset{\sim}{\to} \mathrm{C}_{/Z}((g \circ f)_\dagger \mathcal{F}, g_\dagger \mathcal{G})$$

von Vorschub und dem Vorschalten einer Identifikation. Wir notieren die Ausgangskategorie dieses Kofaserfunktors $\mathscr{C} = \mathrm{Kof}(\mathrm{C})$. Unsere beiden Konstruktionen sind salopp gesprochen zueinander invers, aber das soll hier nicht genauer ausformuliert werden.

19.8.6.7. Analog ist ein zerfällter Faserfunktor über einer Kategorie $\mathscr{B}$ „dasselbe“ wie ein Pseudofunktor $\mathscr{B}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Cat}$ und damit auch „dasselbe“ wie ein zerfällter Kofaserfunktor über $\mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$. Diese zwei Seiten derselben Medaille sind, was das Konzept einer Fakofaserung aus 19.8.4.4 in anderer Weise einfängt. Zusätzlich können wir auch noch den durch das Opponieren gegebenen opp-Zweifunktor

$$\mathrm{opp} : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}$$

nachschalten, der jeder Kategorie $\mathcal{C}$ die opponierte Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ zuordnet, jedem Funktor F den auf der opponierten Kategorien induzierten Funktor F^{opp} und jeder Transformation $\tau : F \Rightarrow G$ die opponierte Transformation $\tau^\circ : G^{\mathrm{opp}} \Rightarrow F^{\mathrm{opp}}$. Diese Vorschrift ist nicht eigentlich ein Zweifunktor, weil sie kontravariante Funktoren auf den Morphismenkategorien induziert, sondern vielmehr ein angereicherter Funktor längs des Schmelzfunktors $\mathrm{opp} : \curlywedge\mathrm{Cat} \to \curlywedge\mathrm{Cat}$ im Sinne von **??**. Da aber alle Identifikationen Isotransformationen sind, können wir sie invertieren und erhalten so eine weitere Kategorienfaserung über $\mathscr{B}$ und eine weitere Kategorienkofaserung über $\mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$, deren Fasern opponiert sind zu den ursprünglichen Fasern.

19.8.6.8. Zu jeder Kategorienkofaserung $\mathrm{C} = (\mathrm{C}, {}_\dagger, c)$ über einer Basiskategorie $\mathscr{B}$ können wir die **opponierte Kategorienkofaserung** $\mathrm{C}^{\mathrm{opp}}$ über derselben Basiskategorie $\mathscr{B}$ bilden, indem wir in jeder Faser zur opponierten Kategorie übergehen und aus den ursprünglichen Vorschüben und Identifikationen in offensichtlicher Weise Vorschübe und Identifikationen für diese opponierten Fasern machen. Jeder Kategorienkofaserung können wir mithin zwei Kofaserfunktoren in natürlicher Weise zuordnen: Den Ersten durch die in 19.8.6.6 beschriebene Konstruktion, und den Zweiten, indem wir dieser Konstruktion noch den Übergang zur opponierten Kategorienkofaserung vorschalten. Diese Kofaserungen sind dann zueinander dualopponiert im Sinne von 19.8.5.2.

Vorschau 19.8.6.9. In noch unerklärter Terminologie ist eine Kategorienkofaserung über $\mathscr{B}$ ein „laxer 2-Funktor $\mathscr{B} \to \mathrm{Cat}$“ und das Bilden der opponierten Kategorie ein „laxer 2-Funktor $\mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}$“ und der Übergang zur opponierten Kategorienkofaserung besteht im „Nachschalten dieses 2-Funktors“. Gegeben eine Kategorie $\mathscr{B}$ verstehen wir weiter unter einer „Kategorienfaserung“ über $\mathscr{B}$ einen „laxen 2-Funktor $\mathscr{B} \to \mathrm{Cat}^{\mathrm{opp}}$“. Im folgenden schreiben wir eine Definition dieses Begriffs in der bereits vorhandenen Terminologie aus.

19.8.6.10. Unter einer **Kategorienfaserung** $\mathrm{C} = (\mathrm{C}, {}^\dagger, c)$ über einer Kategorie $\mathscr{B}$ verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Objekt $X \in \mathscr{B}$ eine Kategorie C_X zuordnet, jedem Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathscr{B}$ einen Funktor $f^\dagger : \mathrm{C}_Y \to \mathrm{C}_X$ in die Gegenrichtung und jedem Paar $f \circ g$ von verknüpfbaren Morphismen in $\mathscr{B}$ eine Isotransformation $c = c(g, f) : g^\dagger \circ f^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (f \circ g)^\dagger$ derart, daß $\mathrm{id}_X^\dagger$ für alle X eine Äquivalenz von Kategorien ist und daß alle Diagramme

$$\begin{array}{ccc} h^\dagger \circ g^\dagger \circ f^\dagger & \Rightarrow & (g \circ h)^\dagger \circ f^\dagger \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ h^\dagger \circ (f \circ g)^\dagger & \Rightarrow & (f \circ g \circ h)^\dagger \end{array}$$

mit den in hoffentlich offensichtlicher Weise aus den Transformationen c gebildeten Transformationen kommutieren. Wir nennen die Kategorie C_X die **Faser über** X unserer Kategorienfaserung, die Funktoren $f^\dagger$ ihre **Rückholfunktoren**,

die Transformationen $c(g, f)$ ihre **Identifikationen** und die Kategorie $\mathscr{B}$ ihre **Basis**. Auch bei Kategorienfaserungen können wir analog wie in 19.8.6.8 zur **opponierten Kategorienfaserung** übergehen.

Beispiel 19.8.6.11. Die Kategorienfaserungen zur Garbenfaserung $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ und zur Garbenopfaserung $\mathrm{Ens}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ sind zueinander opponiert, wie wir das bereits in 19.8.5.2 sozusagen „zu Fuß“ ausgeführt haben. Entspricht in anderen Worten die Garbenfaserung dem laxen 2-Funktor $\Phi : \mathrm{Top}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Cat}$, so entspricht die Garbenopfaserung dem laxen 2-Funktor $\mathrm{opp} \circ \Phi : \mathrm{Top}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Cat}$, der durch Nachschalten des 2-Funktors des Opponierens $\mathrm{opp} : \mathrm{Cat} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}$ daraus entsteht.

19.8.6.12. Besitzt bei einer Kategorienfaserung $\mathrm{C} = (\mathrm{C}, {}^{\dagger}, c)$ über einer Basiskategorie $\mathscr{B}$ jeder Rückholfunktor $f^{\dagger}$ einen Linksadjungierten $f_{\dagger}$, so bilden diese Linksadjungierten zusammen mit den induzierten Identifikationen eine Kategorienkofaserung über $\mathscr{B}$ und der zu unserer Kategorienfaserung gehörige Faserfunktor ist eine Bifaserung.

19.8.6.13. Besitzt bei einer Kategorienkofaserung $\mathrm{C} = (\mathrm{C}, {}_{\dagger}, c)$ über einer Basiskategorie $\mathscr{B}$ jeder Vorschub $f_{\dagger}$ einen Rechtsadjungierten $f^{\dagger}$, so bilden diese Rechtsadjungierten zusammen mit den induzierten Identifikationen eine Kategorienfaserung über $\mathscr{B}$ und der zu unserer Kategorienkofaserung gehörige Kofaserfunktor ist eine Bifaserung.

19.9 Spektralsequenzen

19.9.1 Allgemeiner Formalismus der Spektralsequenzen

19.9.1.1. Eine **differentielle abelsche Gruppe** ist wie in 17.1.3.10 ein Paar (T, ∂) bestehend aus einer abelschen Gruppe T und einem Gruppenhomomorphismus $\partial : T \to T$ mit $\partial^2 = 0$.

19.9.1.2 (**Erinnerungen zu Filtrierungen**). Wie in 7.7.1 verstehen wir unter einer **filtrierten abelschen Gruppe** eine abelsche Gruppe V mit einer Folge von Untergruppen $(V^{\geq q})_{q\in\mathbb{Z}}$ derart, daß gilt $V^{\geq q} \supset V^{\geq q+1}$. Wir setzen dann

$$\mathrm{gr}^q(V) := V^{\geq q}/V^{\geq q+1}$$

und bezeichnen $\mathrm{gr}(V) := \bigoplus \mathrm{gr}^q(V)$ als die **assoziierte graduierte Gruppe**. Jede Untergruppe $U \subset V$ und jeder Quotient V/U einer filtrierten abelschen Gruppe V erben durch $U^{\geq r} := V^{\geq r} \cap U$ sowie $(V/U)^{\geq r} := \mathrm{im}(V^{\geq r} \to V/U)$ eine Filtrierung von V, die wir die **Untergruppenfiltrierung** und die **Quotientenfiltrierung** nennen. Gegeben Untergruppen $U \subset V \subset W$ einer filtrierten abelschen Gruppe W stimmen dann, wie bereits in 7.7.1.10 erwähnt, auf dem Subquotienten V/U die beiden Filtrierungen überein, die wir von der vorgegebenen Filtrierung auf W auf den beiden Wegen $W \rightsquigarrow W/U \rightsquigarrow V/U$ und $W \rightsquigarrow V \rightsquigarrow V/U$ als Untergruppenfiltrierung zur Quotientenfiltrierung auf W/U beziehungsweise als Quotientenfiltrierung zur Untergruppenfiltrierung auf V erhalten. Wir nennen die so erhaltene Filtrierung die **Subquotientenfiltrierung**.

19.9.1.3 (**Was Spektralsequenzen leisten**). Man betrachte eine filtrierte differentielle abelsche Gruppe, also eine differentielle abelsche Gruppe (T, ∂) mit einer Filtrierung $\ldots \supset T^{\geq q} \supset T^{\geq q+1} \supset \ldots$ durch unter ∂ stabile Untergruppen. Die sogenannten „Spektralsequenzen“ sind ein Begriffsapparat, der es erlaubt, die assoziierte graduierte Gruppe $\mathrm{gr}\mathcal{H}T$ zur Subquotientenfiltrierung auf der Homologie mit der Homologie $\mathcal{H}\mathrm{gr}T$ der assoziierten graduierten differentiellen abelschen Gruppe zu vergleichen. Die auf der Homologie $\mathcal{H}T := \ker\partial/\,\mathrm{im}\,\partial$ induzierte Filtrierung ist hierbei im Sinne von 19.9.1.2 zu verstehen. Die Grundfrage, zu deren Aufklärung Spektralsequenzen beitragen, lautet damit:

Was ist die Beziehung zwischen $\mathrm{gr}\mathcal{H}T$ und $\mathcal{H}\mathrm{gr}T$?

Die allgemeine Theorie der Spektralsequenzen liefert eine ziemlich komplizierte Beschreibung für diese Beziehung über eine Vielzahl von Zwischenschritten 19.9.1.11. Sie erweist sich erst in konkreten Anwendungen als nützlich, in der sie oft zu einer sehr viel einfacheren Beschreibung spezialisiert. Weiteres zu Spektralsequenzen findet man etwa in [CE56, Gro57].

19.9.1.4. Man beachte, daß die assoziierte graduierte differentielle abelsche Gruppe $\mathrm{gr}T$ einer filtrierten differentiellen abelschen Gruppe T keineswegs eine dg-Gruppe im Sinne unserer Definition 17.1.3.10 ist. Vielmehr hat im vorliegenden Fall das Differential Grad Null, so daß wir in anderen Worten vielmehr eine durch $q \in \mathbb{Z}$ indizierte direkte Summe von differentiellen abelschen Gruppen vor uns haben.

19.9.1.5 (**Spektralsequenzen im graduierten Fall**). In den meisten Anwendungen trägt unsere differentielle abelsche Gruppe zusätzlich noch eine Graduierung, bezüglich derer das Differential Grad Eins hat und bezüglich derer die Untergruppen unserer Filtrierung homogen sind. In anderen Worten geht man dann also aus von einem Komplex

$$\ldots \to T^n \xrightarrow{\partial} T^{n+1} \to \ldots$$

von filtrierten abelschen Gruppen $\ldots \supset T^{n,\geq q} \supset T^{n,\geq q+1} \supset \ldots$ Ich denke mir den Komplex gerne „horizontal mit Differentialen von links nach rechts“ und die Filtrierung „vertikal und nach oben absteigend“, aber das mag jeder halten, wie er will. Da ich nun obere Indizes schreibe und das Differential Grad Eins hat, sollte und werde ich in Übereinstimmung mit unseren allgemeinen Konventionen statt „Homologie“ im weiteren „Kohomologie“ sagen. Ich gebe gleich ein Beispiel in diesem graduierten Fall. Dann bespreche ich die Theorie zunächst einmal im ungraduierten Fall, um Sie zu überzeugen, daß „an Spektralsequenzen nichts schwierig ist außer den Indizes“.

Beispiel 19.9.1.6 (**Lange exakte Homologiesequenz als Spektralsequenz**). Im Spezialfall einer zwei-Schritt-Filtrierung, wenn wir also etwa haben

$$T^n = T^{n,\geq -1} \supset T^{n,\geq 0} \supset T^{n,\geq 1} = 0$$

für alle n oder nach unseren Konventionen eigentlich das Ganze noch vertikal geschrieben mit der Null ganz oben, wird der gewünschte Vergleich geleistet von der langen exakten Kohomologiesequenz zur eigentlich auch senkrecht nach oben zu schreibenden kurzen exakten Sequenz $\mathrm{gr}^0 T^* \hookrightarrow T^* \twoheadrightarrow \mathrm{gr}^{-1} T^*$ von horizontal gedachten Komplexen. Diese Kohomologiesequenz kann man in der Tat auch lesen als eine Sammlung von exakten Sequenzen

$$\mathrm{gr}^{-1}\mathcal{H}^{n-1}T^* \hookrightarrow \mathcal{H}^{n-1}\mathrm{gr}^{-1}T^* \to \mathcal{H}^n\mathrm{gr}^0 T^* \twoheadrightarrow \mathrm{gr}^0\mathcal{H}^n T^*$$

und damit als eine Beschreibung der Beziehung zwischen $\mathrm{gr}\mathcal{H}T$ und $\mathcal{H}\mathrm{gr}T$.

Definition 19.9.1.7. Unter einer **ungraduierten Spektralsequenz** oder auch kürzer **Spektralsequenz** versteht man ein Datum $(E_r^q, \partial, \mathrm{can})$ bestehend aus (1) abelschen Gruppen E_r^q für alle $r \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{Z}$ sowie (2) Homomorphismen

$\partial = \partial_r^q : E_r^q \to E_r^{q+r}$ mit $\partial^2 = 0$ und (3) Identifikationen alias Isomorphismen $\mathrm{can} = \mathrm{can}_r^q : E_{r+1}^q \xrightarrow{\sim} \ker \partial_r^q / \operatorname{im} \partial_r^{q-r}$ oder salopp geschrieben

$$\mathrm{can} : E_{r+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H} E_r$$

Gegeben $(F_r^q, \partial, \mathrm{can})$ eine weitere Spektralsequenz verstehen wir unter einem **Homomorphismus von Spektralsequenzen** eine Familie von Homomorphismen $f_r^q : E_r^q \to F_r^q$ derart, daß die offensichtlichen Verträglichkeiten gelten, die ich hier nur durch die Formeln $f\partial = \partial f$ sowie $f\,\mathrm{can} = \mathrm{can}\, f$ andeute und die der Leser selbst durch die entsprechenden Indizes noch weiter präzisieren mag.

19.9.1.8 (**Spektralsequenz filtrierter differentieller abelscher Gruppen**). Gegeben eine filtrierte differentielle abelsche Gruppe (T, ∂) setzen wir für $r \in \mathbb{Z}$ ganz allgemein $T_r^{\geq q} := \{a \in T^{\geq q} \mid \partial a \in T^{\geq q+r}\}$. In Worten ist das der Raum aller Elemente der Filtrierungsstufe $\geq q$, die unter dem Differential in der um r höheren Filtrierungsstufe landen. Für $r \leq 0$ haben wir insbesondere schlicht $T_r^{\geq q} = T^{\geq q}$. Dann betrachten wir die Quotienten

$$E_r^q := T_r^{\geq q} / (\partial T_{r-1}^{\geq q-(r-1)} + T_{r-1}^{\geq q+1})$$

Diagrammatisch sind das die Quotienten der unteren Mitte der Diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & T^{\geq q+r} \\
 & T_{r-1}^{\geq q+1} \arrow[ur, "\partial"] \arrow[d, hook] & \\
 & T_r^{\geq q} \arrow[uur, "\partial"] & \\
T_{r-1}^{\geq q-(r-1)} \arrow[ur, "\partial"] & &
\end{tikzcd}$$

nach den Bildern der beiden dort einlaufenden Pfeile. Der Eine kommt in unserer Darstellung von oben, der andere von links unten. Die graphische Anordnung in unserem Diagramm ist so zu lesen, daß kleinere Teile der Filtrierung weiter oben stehen und steilere Pfeile nach rechts oben eine stärkere Erhöhung des Filtrierungsgrades bedeuten. Weiter betrachten wir die von ∂ induzierten Gruppenhomomorphismen

$$\partial_r = \partial_r^q \colon E_r^q \to E_r^{q+r}$$

Man erkennt, daß die Surjektionen $T_r^{\geq q} \twoheadrightarrow E_r^q$ in diesem Zusammenhang Surjektionen $s \colon T_{r+1}^{\geq q} \twoheadrightarrow \ker \partial_r^q$ induzieren, denn aus $\partial_r^q \bar{a} = 0$ für $a \in T_r^{\geq q}$ folgt

$\partial a = \partial b + c$ mit $b \in T_{r-1}^{\geq q+1}$ und $c \in T_{r-1}^{\geq q+r+1} \subset T^{\geq q+r+1}$ und dann ist $a - b$ ein Repräsentant von $\bar{a}$ aus $T_{r+1}^{\geq q}$. Wir zeigen im Anschluß in 19.9.1.9, daß diese Surjektionen s Isomorphismen

$$\mathrm{can}_r^q \colon E_{r+1}^q \xrightarrow{\sim} \ker \partial_r^q / \operatorname{im} \partial_r^{q-r}$$

oder grob gesagt Isomorphismen $\mathrm{can} \colon E_{r+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}E_r$ liefern. Damit steht die Spektralsequenz einer filtrierten differentiellen abelschen Gruppe auch schon da. Für $r \leq 0$ haben wir $E_r^q = T^{\geq q}/T^{\geq q+1}$ und für $r < 0$ gilt $\partial_r = 0$, wohingegen wir für $r = 0$ als ∂_r das induzierte Differential auf der assoziierten graduierten Gruppe erhalten und für $r = 1$ als Differential den Randoperator $\mathcal{H}(T^{\geq q-1}/T^{\geq q}) \to \mathcal{H}(T^{\geq q}/T^{\geq q+1})$ der kurzen exakten Sequenz differentieller abelscher Gruppen

$$T^{\geq q}/T^{\geq q+1} \hookrightarrow T^{\geq q-1}/T^{\geq q+1} \twoheadrightarrow T^{\geq q-1}/T^{\geq q}$$

19.9.1.9 (**Herleitung der eben behaupteten Isomorphismen**). Es reicht in 19.9.1.8, wenn wir zeigen $s^{-1}(\operatorname{im} \partial_r^{q-r}) = \partial T_r^{\geq q-r} + T_r^{\geq q+1}$. Links steht die Menge aller $a \in T_{r+1}^{\geq q}$ mit $a \in \partial T_r^{\geq q-r} + \partial T_{r-1}^{\geq q-(r-1)} + T_{r-1}^{\geq q+1}$. Der mittlere Summand ist hier eh im ersten Summanden enthalten, so daß es reicht, die Identität

$$T_{r+1}^{\geq q} \cap (\partial T_r^{\geq q-r} + T_{r-1}^{\geq q+1}) = \partial T_r^{\geq q-r} + T_r^{\geq q+1}$$

zu zeigen. Die Inklusion $\supset$ ist dabei offensichtlich. Um die andere Inklusion einzusehen bemerken wir, daß aus $a = b + c$ mit $a \in T_{r+1}^{\geq q}$, $b \in \partial T_r^{\geq q-r}$ und $c \in T_{r-1}^{\geq q+1}$ bereits folgt $\partial a = \partial c \in T^{\geq q+(r-1)}$ und somit $c \in T_r^{\geq q+1}$.

19.9.1.10 (E_∞**-Term einer Spektralsequenz**). Jede Spektralsequenz beinhaltet Isomorphismen zwischen E_{r+1}^q und einem Subquotienten von E_r^q und damit induktiv Folgen von Untergruppen

$$E_r^q = \mathcal{Z}^0 E_r^q \supset \mathcal{Z}^1 E_r^q \supset \mathcal{Z}^2 E_r^q \supset \ldots \supset \mathcal{B}^2 E_r^q \supset \mathcal{B}^1 E_r^q \supset \mathcal{B}^0 E_r^q = 0$$

von E_r^q mit ausgezeichneten Isomorphismen $\mathcal{Z}^i E_r^q / \mathcal{B}^i E_r^q \xrightarrow{\sim} E_{r+i}^q$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{Z}^\infty E_r^q$ den Schnitt der $\mathcal{Z}^i E_r^q$ und mit $\mathcal{B}^\infty E_r^q$ die Vereinigung der $\mathcal{B}^i E_r^q$ und vereinbaren die Notation

$$E_\infty^q := \mathcal{Z}^\infty E_r^q / \mathcal{B}^\infty E_r^q$$

Das ist sinnvoll, da diese Gruppe nach Konstruktion bis auf eindeutigen Isomorphismus gar nicht von r abhängt. Falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt derart, daß für alle $r \geq k$ das nach E_r^q einlaufende Differential und das von E_r^q auslaufende Differential verschwinden, so erhalten wir ausgezeichnete Isomorphismen

$$E_k^q \xrightarrow{\sim} E_{k+1}^q \ldots \xrightarrow{\sim} E_\infty^q$$

19.9.1.11 (E_∞**-Term für filtrierte differentielle abelsche Gruppen**). Im Fall einer filtrierten differentiellen abelschen Gruppe (T, ∂) finden wir $E_0^q = T^{\geq q}/T^{\geq q+1}$, $\mathcal{Z}^r E_0^q = \operatorname{im}(T_r^{\geq q} \to T^{\geq q}/T^{\geq q+1})$ und $\mathcal{B}^{r+1} E_0^q = \operatorname{im}(\partial : T_r^{\geq q-r} \to T^{\geq q}/T^{\geq q+1})$. Wir erhalten natürliche Injektionen

$$\mathcal{Z}(T^{\geq q})/\mathcal{Z}(T^{\geq q+1}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}((\ker \partial \cap T^{\geq q}) \to T^{\geq q}/T^{\geq q+1}) \hookrightarrow \mathcal{Z}^\infty E_0^q$$

und diese sind Isomorphismen unter anderem dann, wenn unsere Filtrierung bei Null endet, in Formeln $T^{\geq j} = 0$ für hinreichend großes j. Andererseits erhalten wir natürliche Injektionen

$$\mathcal{B}^\infty E_0^q \hookrightarrow \operatorname{im}((\operatorname{im} \partial \cap T^{\geq q}) \to T^{\geq q}/T^{\geq q+1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(T^{\geq q})/\mathcal{B}(T^{\geq q+1})$$

und ist unsere Filtrierung ausschöpfend alias $\bigcup_r T^{\geq r} = T$, so sind sie Isomorphismen. Zusammen liefern sie im Fall einer ausschöpfenden Filtrierung natürliche Injektionen $\operatorname{gr}^q \mathcal{H}T \hookrightarrow E_\infty^q$ und im Fall einer ausschöpfenden und bei Null endenden Filtrierung sind diese sogar Isomorphismen

$$\operatorname{gr}^q \mathcal{H}T \xrightarrow{\sim} E_\infty^q$$

Andererseits haben wir nach unserer Definition 19.9.1.8 für jede filtrierte differentielle abelsche Gruppe (T, ∂) stets $\operatorname{gr}^q T = E_0^q$ und das Differential ∂_0 fällt zusammen mit $\operatorname{gr} \partial$, so daß wir kanonische Isomorphismen

$$\mathcal{H}\operatorname{gr}^q T \xrightarrow{\sim} E_1^q$$

erhalten. In dieser Weise macht also die Spektralsequenz Aussagen über die Beziehung zwischen $\operatorname{gr}\mathcal{H}T$ und $\mathcal{H}\operatorname{gr}T$. Sie ist im allgemeinen recht unübersichtlich. In vielen konkreten Anwendungsfällen ist die hier gegebene Beschreibung aber dennoch nützlich, und zwar insbesondere dann, wenn es ein i gibt derart, daß alle Differentiale ∂_r für $r \geq i$ verschwinden, so daß gilt $E_i^q = E_\infty^q$. Dann spricht man von einer **bei** E_i **ausgearteten Spektralsequenz**. Besonders häufig trifft man in der Praxis die Fälle $i = 1$ und $i = 2$.

19.9.1.12 (**Funktorialität der Spektralsequenz**). Die eben vorgestellte Konstruktion der Spektralsequenz ist in offensichtlicher Weise funktoriell. Jeder Morphismus $(T, \partial) \to (S, \partial)$ von filtrierten differentiellen abelschen Gruppen induziert genauer Gruppenhomomorphismen $E_r^q(T) \to E_r^q(S)$, die verträglich sind mit den Differentialen ∂_r und den Identifikationen $\operatorname{can} : E_{r+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}E_r$ und, im Fall ausschöpfender Filtrierungen, mit den Einbettungen $E_\infty^q(T) \hookrightarrow \operatorname{gr}^q \mathcal{H}T$ aus 19.9.1.11.

19.9.1.13. Gegeben ein ungraduierte Spektralsequenz (E_r^q, ∂_r) verstehen wir unter einem **Konvergenzdatum gegen eine abelsche Gruppe** H ein Datum bestehend aus einer Filtrierung $(H^{\geq q})_{q \in \mathbb{Z}}$ auf H und ausgezeichneten Injektionen

$$\operatorname{gr}^q(H) \hookrightarrow E_\infty^q$$

Sind sie sogar Isomorphismen, so sagen wir, das **Konvergenzdatum konvergiert**. Im vorhergehenden haben wir insbesondere jeder filtrierten differentiellen abelschen Gruppe mit ausschöpfender Filtrierung in funktorieller Weise eine Spektralsequenz zusammen mit einem Konvergenzdatum dieser Spektralsequenz gegen die Kohomologie mit ihrer induzierten Filtrierung zugeordnet, das im Fall einer bei Null beginnenden Filtrierung unserer differentiellen abelschen Gruppe konvergiert. Wenn es solch ein gegen H konvergierende Konvergenzdatum gibt, so sagt man auch, die **Spektralsequenz** (E_r^q, ∂_r) **konvergiere gegen** H. Besonders oft gibt man nur den E_2-Term an und schreibt

$$F^q \Rightarrow H$$

als Abkürzung für die Aussage, daß eine Spektralsequenz mit dem E_2-Term $E_2^q = F^q$ gegen H konvergiert.

19.9.1.14 (**Homotopie und Spektralsequenz**). Gibt es für zwei Morphismen $f, g : (T, \partial) \to (S, \partial)$ von filtrierten differentiellen abelschen Gruppen einen Gruppenhomomorphismus $h : T \to S$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $f - g = \partial h + h\partial$ und $h(T^{\geq q}) \subset S^{\geq q-k}$ $\forall q$, so induzieren f und g dieselben Abbildungen

$$f = g : E_r^q(T) \to E_r^q(S) \quad \text{für } r > k.$$

In der Tat schickt ∂h dann $T^{\geq q}$ nach $\partial S^{\geq q-k}$ und $h\partial$ schickt $T_r^{\geq q}$ nach $S^{\geq q+r-k}$. Also schickt $(f - g)$ unser $T_r^{\geq q}$ nach $S_r^{\geq q} \cap (\partial S^{\geq q-(r-1)} + S^{\geq q+1})$. Für jedes Element $a = \partial b + c$ dieses Schnitts gilt jedoch $b \in S_{r-1}^{\geq q-(r-1)}$, selbst wenn wir nur $a \in S^{\geq q}$ haben, und dann $\partial a = \partial c \in S^{\geq q+r}$ alias $c \in S_{r-1}^{\geq q+1}$.

19.9.1.15 (**Spektralsequenz im graduierten Fall**). Jetzt betrachten wir den graduierten Fall, bei dem man wie bereits erwähnt von einem Komplex

$$\ldots \to T^n \xrightarrow{\partial} T^{n+1} \to \ldots$$

von filtrierten abelschen Gruppen $\ldots \supset T^{n,\geq q} \supset T^{n,\geq q+1} \supset \ldots$ ausgeht und wir letztere Sequenz von Inklusionen vertikal denken mit immer kleineren Stücken immer weiter oben. Offensichtlich ist unsere Konstruktion der Spektralsequenz einer filtrierten differentiellen Gruppe nach 19.9.1.8 mit dieser zusätzlichen Graduierung verträglich in dem Sinne, daß gilt $T_r^{\geq q} = \bigoplus T_r^{n,\geq q}$ und $E_r^q = \bigoplus E_r^{(n,q)}$ und daß ∂ Gruppenhomomorphismen

$$\partial_r \colon E_r^{(n,q)} \to E_r^{(n+1,q+r)}$$

induziert und daß unsere Isomorphismen $\mathrm{can} \colon E_{r+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}E_r$ Isomorphismen $E_{r+1}^{(n,q)} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{H}E_r)^{(n,q)}$ induzieren. Im Fall einer ausschöpfenden Filtrierung erhalten wir dann natürliche Einbettungen $\mathrm{gr}^q(\mathcal{H}^n T) \hookrightarrow E_\infty^{(n,q)}$ und ein kurzer Blick

auf deren Herleitung zeigt, daß sie sogar unter der schwächeren Zusatzbedingung Isomorphismen

$$\mathrm{gr}^q(\mathcal{H}^n T) \xrightarrow{\sim} E_\infty^{(n,q)}$$

liefern, daß gilt $T^{n+1,\geq q+r} = 0$ für hinreichend großes r.

19.9.1.16. Gegeben ein graduierte Spektralsequenz $(E_r^{(n,q)}, \partial_r)$ und eine graduierte abelsche Gruppe mit homogenen Komponenten H^n verstehen wir unter einem **Konvergenzdatum** ein Datum bestehend aus Filtrierungen $(H^{(n,\geq q)})_{q\in\mathbb{Z}}$ auf den H^n und ausgezeichneten Injektionen

$$\mathrm{gr}^q(H^n) \hookrightarrow E_\infty^{(n,q)}$$

Sind sie Isomorphismen, so sprechen wir von einem **konvergierenden Konvergenzdatum**. Im vorhergehenden haben wir insbesondere jeder filtrierten differentiellen graduierten abelschen Gruppe mit ausschöpfender Filtrierung in funktorieller Weise eine Spektralsequenz zusammen mit einem Konvergenzdatum dieser Spektralsequenz gegen die Kohomologie mit ihrer induzierten Filtrierung zugeordnet. Weiter haben wir gezeigt, daß es konvergiert, wenn die Filtrierung in jedem Grad bei Null beginnt. Wenn es ein konvergierendes Konvergenzdatum gibt, so sagt man auch, die **Spektralsequenz** $(E_r^{(n,q)}, \partial_r)$ **konvergiere gegen** H. Besonders oft gibt man nur den E_2-Term an und schreibt

$$F^{(n,q)} \Rightarrow H^n$$

für die Aussage, daß eine Spektralsequenz mit dem E_2-Term $E_2^{(n,q)} = F^{(n,q)}$ gegen H konvergiert.

19.9.1.17 (**Produktstruktur der Spektralsequenz**). Gegeben filtrierte dg-Gruppen T, S versehen wir ihr Tensorprodukt $T \otimes S$ mit seiner dg-Struktur aus 17.5.3.1 und erklären darauf wie in 7.7.1.12 eine Filtrierung durch die Vorschrift

$$(T \otimes S)^{\geq q} := \sum_{k+l=q} \mathrm{ten}(T^{\geq k} \otimes S^{\geq l})$$

für ten das Tensorprodukt der jeweiligen Einbettungsabbildungen. Man prüft unschwer, daß das Tensorprodukt der jeweiligen Einbettungsabbildungen Abbildungen $T_r^{\geq k} \otimes S_r^{\geq l} \to (T \otimes S)_r^{\geq k+l}$ induziert und dann auch Abbildungen

$$E_r^k(T) \otimes E_r^l(S) \to E_r^{k+l}(T \otimes S)$$

Diese Abbildungen ihrerseits werden Morphismen von dg-Gruppen für die von den Differentialen ∂_r induzierten Differentiale, wenn wir unsere E_r^k mit der induzierten Graduierung $E_r^k = \bigoplus E_r^{(n,k)}$ versehen.

19.9.1.18 (**Doppelkomplexe und alternative Graduierungskonventionen**). Üblicherweise wird die Indizierung bei der Spektralsequenz einer filtrierten differentiellen graduierten abelschen Gruppe dem besonders häufig auftretenden Fall eines Doppelkomplexes $(A^{p,q}, \partial, \delta)$ im Sinne von 19.4.6.1 angepaßt. Wir denken uns dabei p nach rechts und q nach oben aufgetragen. In diesem Fall betrachtet man auf dem Totalkomplex (T^n, d) aus 19.4.6.1 üblicherweise die Filtrierung

$$T^{n,\geq q} := \bigoplus_{p+j=n,\, j\geq q} A^{p,j}$$

So ergibt sich mit unseren Notationen von oben gerade $E_0^{(n,q)} = A^{n-q,q}$ und als Differential ∂_0 erhalten wir schlicht das horizontale Differential ∂ unseres Doppelkomplexes. Es ist nun sinnvoll und üblich, die Indizierung umzustellen durch $E_r^{p,q} := E_r^{(p+q,q)}$ alias $E_r^{(n,q)} = E_r^{n-q,q}$ derart, daß wir in unserem Spezialfall eines Doppelkomplexes die Formel

$$E_0^{p,q} = A^{p,q}$$

und für $\partial_0 = \partial$ das horizontale Differential unseres Doppelkomplexes erhalten. Weiter prüft man, daß in diesem Fall eines Doppelkomplexes die E_1-Terme $E_1^{p,q} = \mathcal{H}^p(A^{*,q}, \partial)$ die Kohomologie der waagerechten Komplexe sind und ∂_1 vom mit geeigneten Vorzeichen versehenen senkrechten Differential δ unseres Doppelkomplexes induziert wird. Im Fall eines Doppelkomplexes ist die fragliche Filtrierung stets ausschöpfend und die hinreichende Bedingung aus 19.9.1.15 übersetzt sich in

$$\mathrm{gr}^q(\mathcal{H}^{p+q}(\mathrm{tot}\, A)) \xrightarrow{\sim} E_\infty^{p,q}$$

falls gilt $A^{p+1-r,q+r} = 0$ für hinreichend großes r. Dieses Umindizieren hat auch den Effekt, daß die Differentiale Abbildungen $\partial_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+1-r,q+r}$ werden. Wir erhalten so ganz allgemein zu jeder filtrierten abelschen dg-Gruppe eine graduierte Spektralsequenz im Sinne der folgenden Definition.

Definition 19.9.1.19. Unter einer **graduierten Spektralsequenz** oder auch kurz **Spektralsequenz** versteht man ein Datum $(E_r^{p,q}, \partial, \mathrm{can})$ bestehend aus

1. Einer Familie von abelschen Gruppen $(E_r^{p,q})$ für $p, q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{N}$ mitsamt Gruppenhomomorphismen $\partial = \partial_r = \partial_r^{p,q} \colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+1-r,q+r}$ mit der Eigenschaft $\partial^2 = 0$; die ∂_r haben also „Bigrad“ $(1-r, r)$;

2. Einer Familie von Isomorphismen $\mathrm{can} : E_{r+1}^{p,q} \xrightarrow{\sim} (\ker \partial_r / \operatorname{im} \partial_r)$ für ∂_r das von $E_r^{p,q}$ auslaufende beziehungsweise das nach $E_r^{p,q}$ einlaufende Differential, die also die $E_{r+1}^{p,q}$ mit der Kohomologie von $(E_r^{p,q}, \partial_r)$ identifizieren.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & E_0^{0,1} \arrow[r, "\partial"] & E_0^{1,1} \arrow[r, "\partial"] & E_0^{2,1} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E_0^{0,0} \arrow[r, "\partial"] & E_0^{1,0} \arrow[r, "\partial"] & E_0^{2,0} \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Die E_0-Terme einer Spektralsequenz mit den zugehörigen Differentialen

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & E_1^{0,1} & E_1^{1,1} & E_1^{2,1} & \cdots \\
\cdots & E_1^{0,0} \arrow[u, "\partial"] & E_1^{1,0} \arrow[u, "\partial"] & E_1^{2,0} \arrow[u, "\partial"] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Die E_1-Terme einer Spektralsequenz mit den zugehörigen Differentialen

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & E_2^{0,2} & E_2^{1,2} & E_2^{2,2} & \cdots \\
\cdots & E_2^{0,1} & E_2^{1,1} & E_2^{2,1} & \cdots \\
\cdots & E_2^{0,0} & E_2^{1,0} & E_2^{2,0} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Die E_2-Terme einer Spektralsequenz mit den zugehörigen Differentialen

Die bigraduierte differentielle abelsche Gruppe $E_r^{p,q}$ heißt der E_r-**Term** unserer Spektralsequenz. Wie zuvor hängen die Gruppen $E_{r+1}^{p,q}$ hierbei zwar bis auf Isomorphismus nur von den Daten $(E_r^{p,q}, \partial_r)$ ab, das Differential ∂_{r+1} wird jedoch durch diese Daten nicht bestimmt.

19.9.1.20 (**Konvergenz in der neuen Notation**). Gegeben ein graduierte Spektralsequenz $(E_r^{p,q}, \partial_r)$ und eine graduierte abelsche Gruppe H mit homogenen Komponenten H^n wird unter einem **Konvergenzdatum** in der neuen Notation ein Datum bestehend aus Filtrierungen $(H^{n,\geq q})_{q\in\mathbb{Z}}$ auf den H^n und ausgezeichneten Injektionen

$$\mathrm{gr}^q(H^{p+q}) \hookrightarrow E_\infty^{p,q}$$

Wir sagen, unser Konvergenzdatum **konvergiert**, wenn diese Injektionen Isomorphismen sind. Wenn es solch ein konvergentes Konvergenzdatum gibt, so sagt man auch, die **Spektralsequenz** $(E_r^{p,q}, \partial_r)$ **konvergiere gegen** H^n. Besonders oft gibt man nur den E_2-Term an und schreibt

$$F^{p,q} \Rightarrow H^n$$

als Abkürzung für die Aussage, daß eine Spektralsequenz mit $E_2^{p,q} = F^{p,q}$ als E_2-Term gegen H konvergiert.

Beispiel 19.9.1.21 (**Spektralsequenzen für Doppelkomplexe**). Unsere Konstruktionen ordnen jedem Doppelkomplex $A = (A^{p,q}, \partial, \delta)$ in funktorieller Weise eine graduierte Spektralsequenz nebst einem Konvergenzdatum gegen die Kohomologie des Totalkomplexes zu, mit der durch horizontal unten abgeschnittene Doppelkomplexe $A^{*,\geq q}$ gegebenen $(\geq q)$-Filtrierung, das konvergiert unter der Voraussetzung, daß gegeben p, q stets gilt $A^{p-r,q+r} = 0$ für alle hinreichend großen $r \gg 0$. Der E_2-Term dieser Spektralsequenz ist die Kohomologie der vertikalen Komplexe, die aus der Kohomologie der Zeilenkomplexe enstehen, so daß wir unter unserer Konvergenzbedingung haben

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{H}^p(A;\partial);\delta) \Rightarrow \mathcal{H}^n(\mathrm{tot}(A))$$

Die Filtrierung des Konvergenzdatums eines Doppelkomplexes kann man alternativ auch erhalten, indem man die Filtrierung von A durch die Unterdoppelkomplexe $\tau^{\leq p}A$ betrachtet, bei denen die p-te Spalte durch die Spalte aus den Kernen des horizontalen Differentials ersetzt wird und die Spalten mit höheren Indizes zu Null gesetzt werden. Wir haben genauer für $p + q = n$ in Formeln

$$\mathcal{Z}^n(\mathrm{tot}\,\tau^{\leq p}A) = \mathcal{Z}^n(\mathrm{tot}\,A^{*,\geq q})$$

und damit stimmen natürlich auch die Bilder beider Seiten in der Kohomologie des Totalkomplexes überein.

19.9.1.22. Im Fall von Doppelkomplexen kann man auch noch eine zweite Spektralsequenz erhalten, indem man die Rollen von p und q vertauscht. Wollen wir betonen, daß die bisher betrachtete Sequenz mit Differentialen $\partial_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p-r+1,q+r}$ gemeint ist, schreiben wir $\overset{p}{\Rightarrow}$, weil dann das nullte Differential in Richtung wachsender p geht.

19.9.1.23 (**Beispiel für eine ausgeartete Spektralsequenz**). Betrachten wir speziell einen Doppelkomplex im ersten Quadranten und sind wie in 19.4.6.8 alle Zeilen unseres Doppelkomplexes exakt an allen Stellen $A^{p,q}$ mit $p \neq 0$, so liefert unser Formalismus hier mit den Notationen 19.4.6.8 unmittelbar $E_1^{0,q} = K_\uparrow^q$ und $E_1^{p,q} = 0$ für $p \neq 0$ sowie $E_2^{0,q} = E_\infty^{0,q} = \mathcal{H}^q(K_\uparrow^*)$ und natürlich auch $E_\infty^{p,q} = 0$ für $p \neq 0$. Jede Kohomologiegruppe des Totalkomplexes besteht mithin aus einer einzigen Filtrierungsstufe und wir erhalten so unsere Isomorphismen $\mathcal{H}^n(K_\uparrow^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n T$ aus 19.4.6.8 zwischen der Kohomologie des senkrechten Kernkomplexes und der Kohomologie des Totalkomplexes nocheinmal neu als Konsequenzen der allgemeinen Theorie.

19.9.1.24 (**Homotopie für Morphismen von Doppelkomplexen**). Jeder Doppelkomplex in einer additiven Kategorie $\mathcal{A}$ kann als ein Objekt von $\operatorname{Ket}(\operatorname{Ket}\mathcal{A})$ aufgefaßt werden, indem ihn als den Komplex seiner Spaltenkomplexe versteht. Zwei Morphismen von Doppelkomplexen nennen wir **horizontal homotop**, wenn sie in diesem Sinne homotop sind. Gegeben Morphismen $f, g : A \to B$ von Doppelkomplexen mit Differentialen $\partial : A^{p,q} \to A^{p+1,q}$ und $\delta : A^{p,q} \to A^{p,q+1}$ verstehen wir genauer und in Formeln unter einer **horizontalen Homotopie zwischen** f **und** g eine Familie von Kettenabbildungen $h_p : A^{p,*} \to A^{p-1,*}$ mit

$$\partial h + h\partial = f - g$$

Analog erklären wir **vertikale Homotopie** als eine Familie von Kettenabbildungen $k_q : A^{*,q} \to A^{*,q-1}$ mit $\delta k + k\delta = f - g$. Jede horizontale Homotopie induziert unmittelbar eine Homotopie zwischen den auf den Totalkomplexen induzierten Abbildungen. Jede vertikale Homotopie k induziert eine Homotopie zwischen den auf den Totalkomplexen induzierten Abbildungen vermittels der $\bar{k} := (-1)^p k_q : A^{p,q} \to A^{p,q-1}$. Wir nennen zwei Morphismen f, g von Doppelkomplexen **homotop**, wenn es eine horizontale Homotopie h eine vertikale Homotopie k gibt mit

$$\partial h + h\partial + \bar{\delta}\bar{k} + \bar{k}\bar{\delta} = f - g$$

Dann ist also $(h + \bar{k})$ eine Homotopie zwischen den von f und g auf den Totalkomplexen induzierte Kettenabbildung. Sowohl für horizontale wie für vertikale Homotopien gilt nun $h, \bar{k} : T^{n,\geq q} \to S^{n,\geq q-1}$ in den Notationen von 19.9.1.18 mit T, S den filtrierten graduierten Komplexen zu unseren Doppelkomplexen A, B.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{gr}^0 A^0 \arrow[r] & \mathrm{gr}^0 A^1 \arrow[r] & \mathrm{gr}^0 A^2 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{gr}^1 A^{-1} \arrow[r] & \mathrm{gr}^1 A^0 \arrow[r] & \mathrm{gr}^1 A^1 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Die E_0-Terme der Spektralsequenz zu einem Komplex mit Zwei-Schritt-Filtrierung

$$\begin{tikzcd}
\cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & \mathcal{H}^0 \mathrm{gr}^0 A^* \arrow[u] & \mathcal{H}^1 \mathrm{gr}^0 A^* \arrow[u] & \mathcal{H}^2 \mathrm{gr}^0 A^* \arrow[u] & \cdots \\
\cdots & \mathcal{H}^{-1} \mathrm{gr}^1 A^* \arrow[u] & \mathcal{H}^0 \mathrm{gr}^1 A^* \arrow[u] & \mathcal{H}^1 \mathrm{gr}^1 A^* \arrow[u] & \cdots \\
\cdots & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Die E_1-Terme der Spektralsequenz zu einem Komplex mit Zwei-Schritt-Filtrierung. Die Differentiale ∂_n für $n \geq 2$ laufen alle nach Null oder kommen von Null, folglich haben wir $E_2 = E_\infty$.

Nach 19.9.1.14 induzieren also homotope Morphismen f und g von Doppelkomplexen jeweils dieselben Abbildungen auf allen Termen E_r mit $r \geq 2$ der zugehörigen Spektralsequenzen.

Übungen

Übung 19.9.1.25. Gegeben eine Spektralsequenz mit $E_2^{p,q} = 0$ für $p \neq 0, 1$ konstruiere man eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to E_2^{1,q} \to E_2^{0,q+2} \to E_\infty^{0,q+2} \to E_2^{1,q+1} \to \ldots$$

19.9.2 Spektralsequenzen eines filtrierten Raums

19.9.2.1 (**Filtrierungssequenz der singulären Homologie**). Sei X ein topologischer Raum mit einer Filtrierung $\ldots \supset X^{\geq q} \supset X^{\geq q+1} \supset \ldots$ durch Teilmengen. Unsere Filtrierung sei endlich, es gebe also k, g mit $X = X^{\geq k}$ und $X^{\geq g} = \emptyset$. Auf dem Komplex $\mathrm{S}_n X$ der singulären Ketten betrachten wir die Filtrierung durch die $\mathrm{S}_n X^{\geq q}$. Untere Indizes mit fallenden Differentialen übersetzen wir nun im Kopf zu den entsprechenden negativ gemachten oberen Indizes mit wachsenden Differentialen. Nach 19.9.1.20 liefert unser filtrierter Komplex dann eine Spektralsequenz mit Grenzwert $\mathrm{H}_n X$. Für die ersten Terme dieser Spektralsequenz erhalten wir nach 19.9.1.15 natürliche Isomorphismen

$$E_0^{-n-q,q} = E_0^{(-n,q)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_n(X^{\geq q}, X^{\geq q+1})$$

$$E_1^{-n-q,q} = E_1^{(-n,q)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(X^{\geq q}, X^{\geq q+1})$$

Guckt man sich die Konstruktion der Spektralsequenz genauer an, so erkennt man zusätzlich, daß die Differentiale $\partial_1 : E_1^{(-n,q)} \to E_1^{(-n+1,q+1)}$ mit den Rändern $\mathrm{H}_n(X^{\geq q}, X^{\geq q+1}) \to \mathrm{H}_{n-1}(X^{\geq q+1}, X^{\geq q+2})$ der langen exakten Homologiesequenz des Tripels $X^{\geq q} \supset X^{\geq q+1} \supset X^{\geq q+2}$ zusammenfallen.

19.9.2.2 (**Filtrierungssequenz der Garbenkohomologie**). Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum mit einer Filtrierung $\ldots \supset X^{\geq q} \supset X^{\geq q+1} \supset \ldots$ durch offene Teilmengen. Unsere Filtrierung sei wieder endlich, es gebe also k, g mit $X = X^{\geq k}$ und $X^{\geq g} = \emptyset$. Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und eine injektive Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\triangleleft$ betrachten wir nun auf dem Komplex $\Gamma_!(X; \mathcal{I}^\triangleleft)$ der Schnitte mit kompaktem Träger die Filtrierung durch die $\Gamma_!(X^{\geq q}; \mathcal{I}^\triangleleft)$. Nach 19.9.1.20 liefert dieser filtrierte Komplex eine Spektralsequenz mit Grenzwert $\mathrm{H}_!^n(X; \mathcal{F}) = \mathcal{H}^n \Gamma_!(X; \mathcal{I}^\triangleleft)$. Für die ersten Terme dieser Spektralsequenz erhalten wir nach 19.9.1.15 und 19.4.8.14 mit $X^q := X^{\leq q} \backslash X^{\leq q-1}$ natürliche Isomorphismen

$$E_0^{n-q,q} = E_0^{(n,q)} = \Gamma_!(X^{\geq q}; \mathcal{I}^n)/\Gamma_!(X^{\geq q+1}; \mathcal{I}^n) \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(X^q; \mathcal{I}^n)$$

und

$$E_1^{n-q,q} = E_1^{(n,q)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n \Gamma_!(X^q; \mathcal{I}^{\triangleleft}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_!^n(X^q; \mathcal{F})$$

Guckt man sich die Konstruktion der Spektralsequenz noch genauer an, so erkennt man zusätzlich, daß die Differentiale $\partial_1 : E_1^{(n,q)} \to E_1^{(n+1,q+1)}$ mit den Rändern $\mathrm{H}_!^n(X^q; \mathcal{F}) \to \mathrm{H}_!^{n+1}(X^{q+1}; \mathcal{F})$ der Lokalisierungssequenz 19.4.8.15 zur Zerlegung von $X^q \sqcup X^{q+1}$ in die offene Teilmenge X^{q+1} und ihr abgeschlossenes Komplement X^q zusammenfallen.

19.9.3 Grothendieck's Spektralsequenz

Definition 19.9.3.1. Gegeben ein Komplex $(A^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ in einer abelschen Kategorie verstehen wir unter einer **Cartan-Eilenberg-Obenauflösung** einen Doppelkomplex $(I^{p,q})_{q\geq 0}$ in der oberen Halbebene mit im Sinne von 19.3.6.20 maximal spaltenden Zeilen und einem Isomorphismus von unserem Ausgangskomplex zum waagerechten Kernkomplex dieses Doppelkomplexes derart, daß die Spalten Auflösungen der Objekte unseres Ausgangskomplexes sind und die Spalten aus den Kernen der p-Differentiale unseres Doppelkomplexes Auflösungen der Kerne der Differentiale unseres Ausgangskomplexes. Sind alle $I^{p,q}$ injektiv, so sprechen wir von einer **Cartan-Eilenberg-Auflösung durch Injektive** und es versteht sich von selbst, daß damit a priori eine Obenauflösung gemeint ist. Analog, ja opponiert bis auf die Indizierung erklären wir eine **Cartan-Eilenberg-Untenauflösung**.

Lemma 19.9.3.2. *Gegeben eine kurze exakte Sequenz $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ von Kettenkomplexen in einer abelschen Kategorie sind gleichbedeutend:*

1. *Die auf den Zyklen induzierten Seqenzen sind ihrerseits kurze exakte Sequenzen $\mathcal{Z}^p A \hookrightarrow \mathcal{Z}^p B \twoheadrightarrow \mathcal{Z}^p C$;*

2. *Die auf den Bildern induzierten Seqenzen sind ihrerseits kurze exakte Sequenzen $\mathcal{B}^p A \hookrightarrow \mathcal{B}^p B \twoheadrightarrow \mathcal{B}^p C$;*

3. *Die auf den Kozykeln induzierten Seqenzen sind ihrerseits kurze exakte Sequenzen* $\operatorname{cok}(A^p \to A^{p+1}) \hookrightarrow \operatorname{cok}(B^p \to B^{p+1}) \twoheadrightarrow \operatorname{cok}(C^p \to C^{p+1})$.

Wir nennen eine derartige kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen **zykelexakt**. *Jede zykelexakte Sequenz von Kettenkomplexen induziert kurze exakte Sequenzen $\mathcal{H}^p A \hookrightarrow \mathcal{H}^p B \twoheadrightarrow \mathcal{H}^p C$ auf der Homologie.*

Beweis. Das folgt leicht mit wiederholter Anwendung des Neunerlemmas. Die Details seien dem Leser überlassen. □

19.9.3.3. Jeder Doppelkomplex $(I^{p,q})$ liefert für jedes q eine kurze exakte Sequenz von Zeilenkomplexen $\ker \delta^{p,q} \hookrightarrow I^{p,q} \twoheadrightarrow \operatorname{im} \delta^{p,q}$. Sind alle seine Spalten exakt, so haben wir zusätzlich $\operatorname{im} \delta^{p,q} = \ker \delta^{p,q+1}$. Sind zusätzlich die Spalten $\ker \partial^{p,q}$ aus den Kernen der horizontalen Differentiale exakt und liegt unser Doppelkomplex in einer oberen Halbebene, so erkennt man induktiv, daß alle eben betrachteten kurzen exakten Sequenzen von Zeilenkomplexen zykelexakt sein müssen. Das bedeutet hinwiederum nach 19.9.3.2, daß auch die Spalten $\operatorname{im} \partial^{p,q}$ aus den Bildern der horizontalen Differentiale und die Spalten $\operatorname{cok} \partial^{p,q}$ aus den Kokernen der horizontalen Differentiale und die Spalten aus der Kohomologie der horizontalen Differentiale exakt sind.

19.9.3.4. Gegeben eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung $(I^{p,q})$ eines horizontal gedachten Komplexes (A^p) sind nach 19.9.3.3 insbesondere auch die Spalten aus den Bildern in den Zeilenkomplexen Auflösungen der Bilder von A, die Spalten aus den Kokernen in den Zeilenkomplexen Auflösungen der Kokerne von A und die Spalten aus den Homologien in den Zeilenkomplexen Auflösungen der Homologie von A. Hierzu wird die Bedingung an eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung, daß ihre Zeilen maximal spalten sollen, noch nicht einmal benötigt.

Proposition 19.9.3.5 (Existenz von Cartan-Eilenberg-Auflösungen). *Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ mit einer vollen unter endlichen Koprodukten abgeschlossenen Unterkategorie $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ derart, daß jedes Objekt von $\mathcal{A}$ Unterobjekt eines Objekts von $\mathcal{L}$ ist, besitzt jeder Komplex in $\mathcal{A}$ eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung durch Objekte von $\mathcal{L}$.*

19.9.3.6. Der Beweis wird zeigen, daß wir unter der Zusatzannahme $A^p = 0$ für $p > 0$ eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung in $\mathcal{L}$ mit $L^{p,q} = 0$ für $p > 0$ finden können. Eine kleine Variation des Beweises zeigt auch, daß wir unter der Zusatzannahme $A^p = 0$ für $p < 0$ eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung in $\mathcal{L}$ mit $L^{p,q} = 0$ für $p < 0$ finden können.

Beweis. Sei (A^p) unser Komplex. Es reicht, wenn wir ihn als Unterkomplex eines maximal spaltenden Komplexes (L^p) von Objekten von $\mathcal{L}$ realisieren derart, daß für alle p der induzierte Morphismus ein Monomorphismus

$$\operatorname{cok}(\mathcal{Z}^p A \hookrightarrow \mathcal{Z}^p L) \hookrightarrow \operatorname{cok}(A^p \hookrightarrow L^p)$$

ist. Dann können wir den Kokernkomplex nehmen und immer so weitermachen, wobei letztere Eigenschaft sicherstellt, daß auch die Kerne jeweils Auflösungen der Kerne liefern. Um unseren Komplex (A^p) so als Unterkomplex zu schreiben, wählen wir Monomorphismen $A^p \hookrightarrow M^p$ und $\operatorname{cok}(A^{p-1} \to A^p) \hookrightarrow N^p$ mit $M^p, N^p \in \mathcal{L}$ und betrachten die offensichtlichen Monomorphismen

$$A^p \hookrightarrow L^p := M^p \oplus N^p \oplus M^{p+1}$$

und nehmen als Randoperatoren $L^p \to L^{p+1}$ die Projektion auf M^{p+1} gefolgt von der Einbettung von M^{p+1}. Um die zusätzliche igenschaft zu prüfen, wenden wir das Neunerlemma an auf das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Z}^p L & \hookrightarrow & L^p & \twoheadrightarrow & \mathcal{B}^{p+1} L \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{Z}^p A & \hookrightarrow & A^p & \twoheadrightarrow & \mathcal{B}^{p+1} A \end{array}$$

und folgern aus der Injektivität der drei Vertikalen, daß die Kokerne auch eine kurze exakte Sequenz bilden. □

19.9.3.7 (**Spezielle Cartan-Eilenberg-Auflösungen durch Injektive**). Besitzt eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ genügend Injektive, so können wir für jeden Komplex (A^p) in $\mathcal{A}$ sogar eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung durch Injektive finden, die für verschwindende Objekte, Zykel, Bilder oder Homologien des aufzulösenden Komplexes jeweils die Nullauflösung induziert. Dazu wählen wir injektive Auflösungen $\mathcal{B}^p A \hookrightarrow J^{p,0} \to J^{p,1} \to \ldots$ der Bilder und $\mathcal{H}^p A \hookrightarrow K^{p,0} \to K^{p,1} \to \ldots$ der Kohomologie. Dann betrachten wir die kurze exakte Sequenz $\mathcal{B}^p A \hookrightarrow \mathcal{Z}^p A \twoheadrightarrow \mathcal{H}^p A$ und finden eine Einbettung $\mathcal{Z}^p A \hookrightarrow J^{p,0} \oplus K^{p,0}$ und induktiv eine Kettenabbildung $u : [-1]K \to J$ derart, daß der Abbildungskegel $\mathrm{K}(u)$ eine Auflösung der Zykel $\mathcal{Z}^p A$ wird. Diese Auflösung von $\mathcal{Z}^p A$ hat also die Gestalt $J^{p,*} \oplus K^{p,*}$ mit Randoperator

$$\begin{pmatrix} \partial & u \\ 0 & \partial \end{pmatrix}$$

Anschließend betrachten wir die kurze exakte Sequenz $\mathcal{Z}^p A \hookrightarrow A^p \twoheadrightarrow \mathcal{B}^{p+1} A$ und finden ebenso eine Auflösung von A^p der Gestalt $J^{p,*} \oplus K^{p,*} \oplus J^{p+1,*}$ mit Randoperator der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \partial & u & v \\ 0 & \partial & w \\ 0 & 0 & \partial \end{pmatrix}$$

Wir setzen nun $I^{p,q} = J^{p,q} \oplus K^{p,q} \oplus J^{p+1,q}$ und machen dieses bigraduierte Objekt zu einem Doppelkomplex, indem wir als Differential in Richtung wachsender q das Differential von eben nehmen, als Differential in Richtung wachsender p dahingegen die Verknüpfung der offensichtlichen Morphismen $I^{p,q} \twoheadrightarrow J^{p+1,q} \hookrightarrow I^{p+1,q}$. Der so konstruierte Doppelkomplex ist dann eine Cartan-Eilenberg-Auflösung durch Injektive. Wenn man bei der Konstruktion als injektive Auflösung von Null stets den Nullkomplex wählt, so hat diese auch die zusätzlich versprochene Verschwindungseigenschaft. Schließlich prüft man unschwer, daß jede Cartan-Eilenberg-Auflösung durch Injektive von dieser Gestalt sein muß.

19.9.3.8 (**Zeilenbeschränkte Cartan-Eilenberg-Auflösung durch Injektive**). Besitzt eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ endlicher homologischer Dimension genügend Injektive, so können wir für jeden Komplex (A^p) in $\mathcal{A}$ sogar eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung durch Injektive finden, bei der nur höchstens endlich viele Zeilen von Null verschieden sind. Das folgt diret aus der eben in 19.9.3.7 gegebenen Konstruktion.

19.9.3.9. Für jeden gegen die Differentiale beschränkten Komplex A erhalten wir aus einer Cartan-Eilenberg-Obenauflösung durch Injektive beim Übergang zum Totalkomplex mit 19.4.6.11 einen Quasiisomorphismus zu einem Komplex von injektiven Objekten. Nehmen wir zusätzlich an, die homologische Dimension unserer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ sei beschränkt durch m, so liefert die vorhergehende Konstruktion mit 20.2.6.34 sogar eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung durch Injektive $(I^{p,q})$ mit $I^{p,q} = 0$ für alle $q > m$. Der Übergang zum Totalkomplex zeigt dann wieder mit 19.4.6.11, daß unter dieser Zusatzannahme sogar überhaupt jeder Komplex in $\mathcal{A}$ quasiisomorph ist zu einem Komplex von injektiven Objekten.

Proposition 19.9.3.10 (Lift zu Cartan-Eilenberg-Auflösung). *Sei $f : A \to B$ eine Kettenabbildung von Komplexen in einer abelschen Kategorie und seien $A \to I$ sowie $B \to J$ Cartan-Eilenberg-Obenauflösungen. Besteht J aus injektiven Objekten, so besitzt f einen Lift zu einem Doppelkomplexmorphismus $I \to J$ und dieser Lift ist eindeutig bis auf vertikale Homotopie. Darüber hinaus sind Lifts homotoper Kettenabbildungen $f, g : A \to B$ homotop im Sinne von Doppelkomplexen.*

Beweis. Alles bis auf die letzte Aussage folgt mit einer Argumentation, die wir bereits beim Beweis des Hauptlemmas der homologischen Algebra 17.5.6.14 verwendet hatten. Wir müssen dazu nur prüfen, daß gegeben eine zykelexakte kurze exakte Sequenz von Komplexen $M \hookrightarrow N \twoheadrightarrow L$ und ein maximal spaltender Komplex aus Injektiven I die Räume von Kettenabbildungen eine kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{Ket}(L, I) \hookrightarrow \mathrm{Ket}(N, I) \twoheadrightarrow \mathrm{Ket}(M, I)$$

induzieren. Nun ist jedoch I ein Produkt von Komplexen der Gestalt „ein injektives Objekt an einer Stelle, Null sonst“ und „dasselbe injektive Objekt an zwei benachbarten Stellen mit der Identität als Differential, Null sonst“. Für diese beiden Typen von Komplexen I ist die Exaktheit unserer Sequenz klar und sie folgt sofort im allgemeinen. Um nun noch zu zeigen, daß Lifts homotoper Kettenabbildungen doppelkomplexhomotop sind, reicht es zu zeigen, daß jeder Lift $\tilde{f} : (I^{p,q}) \to (J^{p,q})$ einer nullhomotopen Kettenabbildung $f : (A^p) \to (B^p)$ auch selbst nullhomotop ist. Seien also $s^p : A^p \to B^{p-1}$ gegeben mit $\partial s^p + s^{p+1}\partial = f^p$. Nach dem Hauptlemma der homologischen Algebra liften sie zu Kettenabbildungen von Spaltenkomplexen $\tilde{s}^p : I^{p,*} \to J^{p-1,*}$. A forteriori sind dann $\partial\tilde{s}^p + \tilde{s}^{p+1}\partial :$

$I^{p,*} \to J^{p,*}$ Kettenabbildungen von Spaltenkomplexen, die $f^p : A^p \to B^p$ liften. Andererseits kommutieren die $\partial\tilde{s} + \tilde{s}\partial$ aber auch mit den horizontalen Differentialen ∂ und bilden folglich einen Morphismus von Doppelkomplexen. Damit ist $\partial\tilde{s} + \tilde{s}\partial - \tilde{f}$ ein Lift der Nullabbildung $A \to B$ zu einem Homomorphismus von Doppelkomplexen und ist nach der Eindeutigkeit von Lifts bis auf vertikale Homotopie folglich homotop zu Null vermittels einer vertikalen Homotopie. □

Ergänzung 19.9.3.11. Noch feiner zeigen wir im Beweis der letzten Aussage sogar, daß jede Homotopie von Kettenabbildungen $A \to B$ zu einer Homotopie zwischen beliebig vorgegebenen Lifts unserer Abbildungen liftet. Diese Aussagen sollten eigentlich zusammen mit dem Hauptlemma der homologischen Algebra zu einer ganzen Theorie für „Cartan-Eilenberg-Auflösungen von Multikomplexen“ gehören. Deren Entwicklung mag einmal ein Student angehen. Ich hoffe, daß dadurch die hier gegebene Darstellung transparenter gemacht werden kann.

19.9.3.12 (**Derivierte Funktoren und Spektralsequenzen**). Gegeben ein linksexakter Funktor $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie konstruieren wir für jeden gegen die Pfeile beschränkten Komplex $B^* \in \mathrm{Ket}^+\mathcal{B}$ aus G-azyklischen Objekten eine konvergierende E_2-Spektralsequenz

$$(\mathrm{R}^q G)(\mathcal{H}^p B^*) \Rightarrow \mathcal{H}^n(GB^*)$$

Zunächst finden wir nach 19.9.3.10 eine Cartan-Eilenberg-Auflösung $(I^{p,q})$ von B^* im ersten Quadranten durch Injektive. Dann ist $(GI^{p,q})$ ein Doppelkomplex im ersten Quadranten mit exakten Spalten und die Einbettung des waagerechten Kernkomplexes liefert nach 19.4.6.8 Isomorphismen $\mathcal{H}^n(GB^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n \operatorname{tot}(GI^{p,q})$. Berechnen wir die Homologie des Totalkomplexes dieses letzten Doppelkomplexes mithilfe der Spektralsequenz 19.9.1.21 oder vielmehr ihrem offensichtlichen Analogon für allgemeine abelsche Kategorien, so ergibt sich als E_1-Term $E_1^{p,q} = G\mathcal{H}^p(I^{*,q}, \partial)$. Da die $\mathcal{H}^p(I^{*,q}, \partial)$ nach Annahme injektive Auflösungen der Kohomologieobjekte $\mathcal{H}^p B^*$ sind, erhalten wir E_2-Terme $E_2^{p,q} = (\mathrm{R}^q G)(\mathcal{H}^p B^*)$. Nach 19.9.3.10 und 19.9.1.24 ist unsere Spektralsequenz ab dem E_2-Term im übrigen bis auf eindeutigen Isomorphismus unabhängig von der gewählten Auflösung $(I^{p,q})$ und sogar funktoriell auf der Homotopiekategorie von gegen die Differentiale beschränkten Komplexen B^* aus G-azyklischen Objekten von $\mathcal{B}$.

Vorschau 19.9.3.13. In der Sprache der „derivierten Kategorien und derivierten Funktoren“ bedeutet das nach 20.3.5.1 für jede abelsche Kategorie $\mathcal{B}$ mit genug Injektiven und alle $X \in \mathrm{Der}^+\mathcal{B}$ und jeden linksexakten Funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ eine in X funktorielle konvergierende E_2-Spektralsequenz

$$(\mathrm{R}^q G)(\mathcal{H}^p X) \Rightarrow \mathcal{H}^n((\mathrm{R}G)(X))$$

19.9.3.14 (**Grothendieck's Spektralsequenz**). Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsche Kategorien mit genug Injektiven und $\mathcal{C}$ eine weitere abelsche Kategorie. Seien $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor und $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ein linksexakter Funktor. Macht F injektive Objekte zu G-azyklischen Objekten, so erhalten wir für jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$, indem wir eine injektive Auflösung $A \to J^{\lhd}$ wählen und 19.9.3.12 auf $B^* := FJ^{\lhd}$ anwenden, eine konvergierende E_2-Spektralsequenz

$$(\mathrm{R}^q G \circ \mathrm{R}^p F)A \;\Rightarrow\; \mathrm{R}^n(G \circ F)A$$

durch Wahl einer injektiven Auflösung $A \hookrightarrow I^{\lhd}$ und das Anwenden von 19.9.3.12 auf den Komplex $FI^{\lhd}$. Auch diese Spektralsequenz hängt bis auf eindeutigen Isomorphismus nicht von den getroffenen Wahlen ab und ist funktoriell in A.

Beispiel 19.9.3.15 (**Leray'sche Spektralsequenz**). Gegeben stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ und eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf X erhalten wir eine konvergierende E_2-Spektralsequenz

$$(\mathrm{R}^q g_* \circ \mathrm{R}^p f_*)\mathcal{F} \;\Rightarrow\; \mathrm{R}^n(g \circ f)_*\mathcal{F}$$

Das folgt aus Grothendieck's Spektralsequenz 19.9.3.14 mit der Erkenntnis, daß der Vorschub jeder welken und damit jeder injektiven abelschen Garbe welk ist und damit nach 19.6.6.5 azyklisch für Vorschübe.

Beispiel 19.9.3.16 (**Kohomologie von Faserbündeln**). Ist $f : X \to Y$ ein Faserbündel mit Faser F über einem überlagerungstrivialen offenlokal zusammenziehbaren Raum und M eine abelsche Gruppe, so erhalten wir für die Kohomologie des Totalraums eine konvergierende E_2-Spektralsequenz

$$\mathrm{H}^q(Y; \mathrm{H}^p(F; M_F)_Y) \;\Rightarrow\; \mathrm{H}^n(X; M_X)$$

Der E_2-Term ist dabei die Kohomologie der Basis mit Koeffizienten in der Kohomologie der Faser. In der Tat sind die höheren Vorschübe $\mathrm{R}^p f_* M_X$ in diesem Fall lokal konstant nach 19.8.2.4 mit der Kohomologie der Faser als Halm und damit konstant nach 16.3.1.15, da wir die Basis überlagerungstrivial angenommen hatten.

Beispiel 19.9.3.17 (**Kohomologie von Faserbündeln, Variante**). Ist $f : X \to Y$ ein Faserbündel mit zusammenhängender offenlokal zusammenziehbarer Faser F und gilt $\mathrm{H}^q(F) = 0$ für $0 < q \le n$, so induziert der Rückzug auf der Kohomologie Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X) \quad \text{für } q \le n.$$

Unsere Beschreibung 19.6.6.2 der höheren Vorschübe liefert für ihre Halme bei $y \in Y$ ausgezeichnete Isomorphismen

$$\mathrm{col}_{y \in V \Subset Y}\, \mathrm{H}^q(V \times F) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}^q f_* \mathbb{Z}_X)_y$$

Beispiel 19.9.3.18 (**Spektralsequenz der lokalen Kohomologie**). Sei $i : C \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge. Als Rechtsadjungierter der exakten Ausdehnung durch Null macht $i^! : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/C}$ injektive Garben zu injektiven Garben und per definitionem gilt $\Gamma_C = \Gamma \circ i^!$. Grothendieck's Spektralsequenz spezialisiert damit für $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ zu einer E_2-Spektralsequenz

$$\mathrm{H}^q(C; \mathrm{R}^p i^! \mathcal{F}) \Rightarrow \mathrm{H}^n_C(X; \mathcal{F})$$

Die zugehörige Surjektion $\mathrm{H}^n_C(X; \mathcal{F}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^0(C; \mathrm{R}^n i^! \mathcal{F})$ hat einen Kern mit einer Filtrierung mit den $\mathrm{H}^q(C; \mathrm{R}^p i^! \mathcal{F})$ für $0 < q \leq n$ als Subquotienten. Wählen wir einen Punkt $x \in X$ und bilden den Kolimes über alle seine Umgebungen U, so verschwinden im Kolimes alle anderen Subquotienten nach 19.4.3.19 und wir erhalten einen Isomorpismus auf den Halm der lokalen Kohomologiegarbe

$$\mathrm{colf}_{U \ni x} \mathrm{H}^n_{C \cap U}(U; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}^n i^! \mathcal{F})_x$$

19.9.3.19 (**Hyperfunktionen**). Wir betrachten auf $\mathbb{R}$ die Garbe

$$\mathcal{B} := \mathrm{R}^1 i^!_{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}} \mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}$$

der derivierten Schnitte mit Träger in der reellen Gerade $\mathbb{R} \subset\!\!\!\!\!\!\mathrm{A}\ \mathbb{C}$ der Garbe der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$. Wegen $\mathrm{R}^0 i^!_{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}} \mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}} = 0$ liefert die Spektralsequenz 19.9.3.18 der lokalen Kohomologie für alle $U \Subset \mathbb{C}$ Isomorphismen

$$\Gamma(U \cap \mathbb{R}; \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{U \cap \mathbb{R}}(U; \mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}})$$

Weiter gilt $\mathrm{H}^q(V; \mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}) = 0$ für $V \Subset \mathbb{C}$ und $q \geq 1$, was hier nicht bewiesen wird. Das liefert eine kurze exakte Sequenz $\Gamma(U; \mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}) \hookrightarrow \Gamma(U \backslash \mathbb{R}; \mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^1_{U \cap \mathbb{R}}(U; \mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}})$ alias

$$\Gamma(U \backslash \mathbb{R}; \mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}) / \Gamma(U; \mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(U \cap \mathbb{R})$$

Die Garbe $\mathcal{B}$ heißt die Garbe der **Hyperfunktionen** auf der reellen Zahlengerade.

19.9.3.20 (**Analytische Funktionen als Hyperfunktionen**). Für jede analytische Abbildung $f : \mathbb{R} \Subset A \to \mathbb{C}$ finden wir $U \Subset \mathbb{C}$ mit $U \cap \mathbb{R} = A$ derart, daß jede Komponente von U unser A trifft und daß sich unsere Funktion zu einer holomorphen Funktion $\hat{f} : U \to \mathbb{C}$ fortsetzen läßt. Das folgt unmittelbar, indem wir in die Potenzreihenentwicklungen von f komplexe Zahlen einsetzen. Jeder analytischen Funktion $f : \mathbb{R} \Subset A \to \mathbb{C}$ ordnen wir dann den Schnitt in $\Gamma(U \backslash \mathbb{R}; \mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}})$ zu, der auf den Punkten mit positivem Imaginärteil durch $\hat{f}$ gegeben wird und auf den Punkten mit negativem Imaginärteil durch Null. So erhalten wir für $A \Subset \mathbb{R}$ eine Injektion $\mathcal{C}^\omega(A) \hookrightarrow \mathcal{B}(A)$ und insgesamt einen Garbenmonomorphismus

$$\mathcal{C}^\omega \hookrightarrow \mathcal{B}$$

von der Garbe der komplexwertigen analytischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ in die Garbe der Hyperfunktionen auf der reellen Zahlengeraden.

19.9.3.21. Wir wollen nun diskutieren, wie man zu einer Hyperfunktion ihre komplex Konjugierte bildet. Dazu arbeiten wir mit einer Körpererweiterung $\mathbb{R} \subset K$ vom Grad zwei alias einem Körper K von vergeßlichen komplexen Zahlen und erklären die **relative Orientierungsgarbe** $\mathrm{or}_{\mathbb{R}\subset K}$ auf $\mathbb{R}$, indem wir $A \Subset \mathbb{R}$ die Teilmenge $\hat{A} := A + \mathrm{i}\mathbb{R} \Subset K$ zuordnen, eine Art „Streifengebilde", und setzen

$$\Gamma(A; \mathrm{or}_{\mathbb{R}\subset K}) := \Gamma(\hat{A}\backslash\mathbb{R}; \mathbb{Z}_K)/\Gamma(\hat{A}; \mathbb{Z}_K)$$

für $\mathbb{Z}_K$ die konstante Garbe $\mathbb{Z}$ auf K. Die lange exakte Sequenz der lokalen Kohomologie 19.4.4.9 liefert Isomorphismen $\Gamma(A; \mathrm{or}_{\mathbb{R}\subset K}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_A(\hat{A}; \mathbb{Z}_K)$ und mit 19.9.3.18 erhalten wir daraus Isomorphismus $\mathrm{or}_{\mathbb{R}\subset K} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^1 i^!_{\mathbb{R}\subset K}\mathbb{Z}_K$. Dann betrachten wir die Garbe der K-wertigen analytischen Funktionen $\mathcal{O}^{\mathrm{an}}_K$ auf K. Gegeben $A \Subset \mathbb{R}$ induziert für alle $U \Subset K$ mit $U \cap \mathbb{R} = A$ die Multiplikation $\Gamma(\hat{A}\backslash\mathbb{R}; \mathbb{Z}_K) \times \Gamma(U; \mathcal{O}^{\mathrm{an}}_K) \to \Gamma((U \cap \hat{A})\backslash\mathbb{R}; \mathcal{O}^{\mathrm{an}}_K)$ unter unseren Identifikationen eine wohlbestimmte biadditive Abbildung

$$\Gamma(A; \mathrm{or}_{\mathbb{R}\subset K}) \times \mathcal{C}^\omega(A; K) \to \Gamma(A; \mathrm{R}^1 i^!_{\mathbb{R}\subset K}\mathcal{O}^{\mathrm{an}}_K)$$

und zusammen einen Garbenhomomorphismus $\mathrm{or}_{\mathbb{R}\subset K} \otimes \mathcal{C}^\omega_{\mathbb{R}\subset K} \to \mathrm{R}^1 i^!_{\mathbb{R}\subset K}\mathcal{O}^{\mathrm{an}}_K$. Nun erklären wir die **Garbe der K-wertigen Hyperfunktionen auf** $\mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{C}^{-\omega}_{\mathbb{R}\subset K} := \mathrm{or}_{\mathbb{R}\subset K} \otimes \mathrm{R}^1 i^!_{\mathbb{R}\subset K}\mathcal{O}^{\mathrm{an}}_K$$

und erhalten mithilfe der Quadrattrivialisierung 21.1.1.14 einen Garbenmonomorphismus $\mathcal{C}^\omega_{\mathbb{R}\subset K} \hookrightarrow \mathcal{C}^{-\omega}_{\mathbb{R}\subset K}$ von der Garbe der analytischen K-wertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ in die Garbe der K-wertigen Hyperfunktionen auf $\mathbb{R}$.

19.9.3.22. Wir betrachten in $\mathrm{or}_{\mathbb{R}\subset\mathbb{C}}$ den globalen Schnitt s^+, der repräsentiert wird durch die Funktion $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, die konstant Eins ist auf den Punkten mit positivem Imaginärteil und Null sonst. Der Isomorphismus $(s^+)\otimes : \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{-\omega}_{\mathbb{R}\subset\mathbb{C}}$ bildet dann zusammen mit der Einbettung $\mathcal{C}^\omega_{\mathbb{R}\subset\mathbb{C}} = \mathcal{C}^\omega \hookrightarrow \mathcal{B}$ aus 19.9.3.20 und der Einbettung $\mathcal{C}^\omega_{\mathbb{R}\subset\mathbb{C}} \hookrightarrow C^{-\omega}_{\mathbb{R}\subset\mathbb{C}}$ aus 19.9.3.21 ein kommutatives Dreieck.

19.9.3.23. Es ist klar, wie ein Isomorphismus $\gamma : K \xrightarrow{\sim} L$ zwischen Körpererweiterungen vom Grad zwei von $\mathbb{R}$ einen Isomorphismus $\mathcal{C}^{-\omega}_{\mathbb{R}\subset K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{-\omega}_{\mathbb{R}\subset L}$ induziert. Genauer liefert er ein kartesisches Diagramm $\gamma \circ i_{\mathbb{R}\subset K} = i_{\mathbb{R}\subset L} \circ \mathrm{id}$ und mit 19.6.4.24 eine Isotransformation $i^!_{\mathbb{R}\subset K} \overset{\sim}{\Rightarrow} i^!_{\mathbb{R}\subset L} \circ \gamma_*$ und andererseits einen kartesischen Opkomorphismus $\mathcal{O}^{\mathrm{an}}_K \to \mathcal{O}^{\mathrm{an}}_L$ über γ gegeben durch $f \mapsto \gamma \circ f \circ \gamma^{-1}$ alias einen Isomorphismus $\gamma_*\mathcal{O}^{\mathrm{an}}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{\mathrm{an}}_L$ und zusammen einen Isomorphismus $\hat{\gamma} : \mathrm{R}^1 i^!_{\mathbb{R}\subset K}\mathcal{O}^{\mathrm{an}}_K \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^1 i^!_{\mathbb{R}\subset L}\mathcal{O}^{\mathrm{an}}_L$. Andererseits induziert 19.4.3.15 einen Isomorphismus $\gamma_*\mathbb{Z}_K \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_L$ und wir erhalten so einen Isomorphismus $\mathrm{R}^1 i^!_{\mathbb{R}\subset K}\mathbb{Z}_K \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^1 i^!_{\mathbb{R}\subset L}\mathbb{Z}_L$ alias $\mathrm{or}_\gamma : \mathrm{or}_{\mathbb{R}\subset K} \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_{\mathbb{R}\subset L}$. Zusammen mit unseren Einbettungen aus 19.9.3.21 ergibt sich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\omega_{\mathbb{R}\subset K} & \hookrightarrow & \mathcal{C}^{-\omega}_{\mathbb{R}\subset K} \\ \downarrow \gamma\circ & & \downarrow \mathrm{or}_\gamma \otimes \hat{\gamma} \\ \mathcal{C}^\omega_{\mathbb{R}\subset L} & \hookrightarrow & \mathcal{C}^{-\omega}_{\mathbb{R}\subset L} \end{array}$$

Nehmen wir hier speziell $\gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation, so macht die linke Vertikale aus einer komplexwertigen Funktion ihre komplex Konjugierte und das Diagramm läßt sich erweitern zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}^{\omega}_{\mathbb{R}\subset\mathbb{C}} & \hookrightarrow & \mathcal{C}^{-\omega}_{\mathbb{R}\subset\mathbb{C}} & \tilde{\leftarrow} & \mathcal{B} \\ \downarrow \gamma\circ & & \downarrow \mathrm{or}_\gamma \otimes \hat{\gamma} & & \downarrow -\hat{\gamma} \\ \mathcal{C}^{\omega}_{\mathbb{R}\subset\mathbb{C}} & \hookrightarrow & \mathcal{C}^{-\omega}_{\mathbb{R}\subset\mathbb{C}} & \tilde{\leftarrow} & \mathcal{B} \end{array}$$

mit unseren Isomorphismen $(s^+)\otimes$ in den rechten Horizontalen. Dieses Diagramm zeigt, wie wir die komplexe Konjugation komplexwertiger analytischer Funktionen in verträglicher Weise auf Hyperfunktionen fortsetzen können.

19.9.3.24. Sei eine analytische Abbildung $\phi : \mathbb{R} \Subset A \to \mathbb{R}$ gegeben. Wir erinnern, daß wir eine holomorphe Fortsetzung unserer Abbildung zu $\phi : \mathbb{C} \Subset U \to \mathbb{C}$ finden können mit $U \cap \mathbb{R} = A$. Hat ϕ' auf A keine Nullstelle, so können wir U so verkleinern, daß gilt $\hat{\phi}(U\backslash A) \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Haben wir zusätzlich $B \Subset \mathbb{R}$ mit $\phi(A) \subset B$ und $V \Subset \mathbb{C}$ mit $V \cap \mathbb{R} = B$, so gilt $A \subset \hat{\phi}^{-1}(V) \Subset U$ und es ergibt sich, daß wir ein Zurückholen

$$\phi^* : \mathcal{B}(B) \to \mathcal{B}(A)$$

erklären können in der offensichtlichen Weise. Es gelten die üblichen Regeln $\phi^*\psi^* = (\psi\phi)^*$ und $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$. Allerdings gilt für $A = B = \mathbb{R}$ und $\phi : x \mapsto -x$ auch, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\omega}(\mathbb{R}) & \hookrightarrow & \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ \phi^* \downarrow & & \downarrow \phi^* \\ \mathcal{C}^{\omega}(\mathbb{R}) & \hookrightarrow & \mathcal{B}(\mathbb{R}) \end{array}$$

nur kommutiert bis auf das Vorzeichen (-1).

19.9.3.25. Gegeben $N \Subset M$ eine reellanalytische 2-Mannigfaltigkeit mit einer abgeschlossenen reellanalytischen 1-Untermannigfaltigkeit bezeichne

$$\mathrm{or}_{N\subset M} := \mathrm{R}^1 i^!_{N\subset M}\mathbb{Z}_M$$

die **relative Orientierungsgarbe von** N **in** M. Wegen $\mathrm{R}^0 i^!_{N\subset M}\mathbb{Z}_M = 0$ liefert die Spektralsequenz 19.9.3.18 der lokalen Kohomologie für alle $U \Subset M$ Isomorphismen

$$\Gamma(U \cap N; \mathrm{or}_{N\subset M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{U\cap N}(U; \mathbb{Z}_M)$$

Andererseits haben wir eine exakte Sequenz $\Gamma(U; \mathbb{Z}_M) \hookrightarrow \Gamma(U\backslash N; \mathbb{Z}_M) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^1_{U\cap N}(U; \mathbb{Z}_M) \to \mathrm{H}^1(U; \mathbb{Z}_M)$ und damit ein Monomorphismus

$$\Gamma(U\backslash N; \mathbb{Z}_M)/\Gamma(U; \mathbb{Z}_M) \hookrightarrow \Gamma(U \cap N; \mathrm{or}_{N\subset M})$$

Ist außerdem $U \Subset M$ zusammenziehbar, so folgt $\mathrm{H}^1(U; \mathbb{Z}_M) = 0$ und unser Monomorphismus ist sogar ein Isomorphismus. Wir sehen so, daß die relative

Orientierungsgarbe lokal frei ist vom Rang Eins. Insbesondere gibt es genau einen Isomorphismus $q : \mathrm{or}_{N\subset M} \otimes \mathrm{or}_{N\subset M} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_N$ mit $q(s \otimes s) = 1$ für jeden lokalen Erzeuger s von $\mathrm{or}_{N\subset M}$, unsere Quadrattrivialisierung 21.1.1.14.

19.9.3.26. Jetzt wählen wir einen Körper K von vergeßlichen komplexen Zahlen und betrachten darauf die Garbe der K-wertigen analytischen Funktionen $\mathcal{O}_K^{\mathrm{an}}$. Gegeben $A \Subset \mathbb{R}$ induziert für alle $U \Subset K$ mit $U \cap \mathbb{R} = A$ die Multiplikation $\Gamma(U\backslash\mathbb{R}; \mathbb{Z}_K) \times \Gamma(U; \mathcal{O}_K^{\mathrm{an}}) \to \Gamma(U\backslash\mathbb{R}; \mathcal{O}_K^{\mathrm{an}})$ unter unseren Identifikationen eine wohlbestimmte biadditive Abbildung

$$\Gamma(A; \mathrm{or}_{\mathbb{R}\subset K}) \times \mathcal{C}^\omega(A; K) \to \Gamma(A; \mathrm{R}^1 i^!_{\mathbb{R}\subset K} \mathcal{O}_K^{\mathrm{an}})$$

Diese biadditiven Abbildungen können wir zusammenfassen zu einem Garbenhomomorphismus $\mathrm{or}_{\mathbb{R}\subset K} \otimes \mathcal{C}^\omega_{\mathbb{R}\subset K} \to \mathrm{R}^1 i^!_{\mathbb{R}\subset K} \mathcal{O}_K^{\mathrm{an}}$ und mithilfe der Quadrattrivialisierung einem Garbenhomomorphismus $\mathcal{C}^\omega_{\mathbb{R}\subset K} \to \mathrm{or}_{\mathbb{R}\subset K} \otimes \mathrm{R}^1 i^!_{\mathbb{R}\subset K} \mathcal{O}_K^{\mathrm{an}}$. Wir notieren die rechte Seite

$$\mathcal{C}^{-\omega}_{\mathbb{R}\subset K} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}\subset K} := \mathrm{or}_{\mathbb{R}\subset K} \otimes \mathrm{R}^1 i^!_{\mathbb{R}\subset K} \mathcal{O}_K^{\mathrm{an}}$$

und nennen sie die **Garbe der K-wertigen Hyperfunktionen auf** $\mathbb{R}$ und haben im Vorlauf bereits einen K-linearen Garbenhomomorphismus $\mathcal{C}^\omega_{\mathbb{R}\subset K} \to \mathcal{B}_{\mathbb{R}\subset K}$ von der Garbe der K-wertigen analytischen Funktionen in die Garbe der K-wertigen Hyperfunktionen angegeben. Jeder Isomorphismus $K \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ von Körpern vergeßlicher komplexer Zahlen induziert Isomorphismen $\mathcal{C}^\omega_{\mathbb{R}\subset K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\omega_{\mathbb{R}\subset \mathbb{C}}$ und $\mathcal{B}_{\mathbb{R}\subset K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{\mathbb{R}\subset \mathbb{C}}$ und diese sind verträglich mit den jeweiligen Einbettungen von eben. Insbesondere setzt sich so die komplexe Konjugation auf $\mathcal{C}^\omega_{\mathbb{R}\subset \mathbb{C}}$ fort zu einer komplexen Konjugation auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}\subset \mathbb{C}}$.

19.9.3.27. Gegeben eine eindimensionale reellanalytische Mannigfaltigkeit M und erklären wir eine Hyperfunktion auf M als eine Vorschrift, die jeder Karte $\varphi : \mathbb{R} \Supset A \to M$ eine Hyperfunktion auf A so zuordnet, daß wir gerne ihre Noch $\otimes\, \mathrm{or}_{M/X}$ im allgemeinen bei Kashiwara-Schapira!

19.9.3.28 (**Hyperfunktionen auf dem Einheitskreis**). Wir finden

$$\Gamma(U; \mathcal{O}_{\mathbb{C}})/\Gamma(U\backslash S^1; \mathcal{O}_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(U \cap S^1)$$

19.9.3.29. Das eben Gesagte gilt unverändert, wenn wir statt $\mathbb{R}$ eine beliebige echte abgeschlossene Teilmenge $R \Subset \mathbb{C}$ betrachten. Allerdings nennen wir die Schnitte der Garbe $\mathrm{R}^1 i^!_{R\subset \mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ in dieser Allgemeinheit nicht mehr Hyperfunktionen.

19.10 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich vielen, insbesondere Olaf Schnürer und Bernhard Link. Der Inhalt geht im wesentlichen zurück auf Grothendieck, Deligne und Verdier [Gro72] und zum Teil auch bereits auf Cartan-Eilenberg [CE56]. Sehr nützlich waren mir die Darstellungen von Godement [God64] und Kashiwara-Schapira [KS90] und Skripten von und Hörmann zu derivierten Kategorien. Die Homotopieinvarianz der Garbenkohomologie wird auch in [KKK86] bewiesen.

Kapitel 20

Derivierte Kategorien und Funktoren

Inhalt

20.1 Lokalisierung von Kategorien 3355

20.1.1 Pfadkategorie eines Köchers 3355

20.1.2 Lokalisierung von Kategorien 3356

20.1.3 Lokalisierung und Entfaltung 3361

20.1.4 Lokalisierung unter Orebedingungen 3366

20.1.5 Quotienten abelscher Kategorien* 3374

20.2 Triangulierte und derivierte Kategorien 3381

20.2.1 Abbildungskegel in Homotopiekategorien 3381

20.2.2 Triangulierte Kategorien 3384

20.2.3 Triangulierung von Homotopiekategorien 3391

20.2.4 Triangulierte Funktoren 3396

20.2.5 Quotienten triangulierter Kategorien 3399

20.2.6 Derivierte Kategorien 3403

20.2.7 Beschränkte derivierte Kategorien 3412

20.2.8 Vergleich verschiedener Kohomologieringe* 3418

20.3 Faktorierte und derivierte Funktoren 3420

20.3.1 Limites in Funktorkategorien 3420

20.3.2 Faktorierte Funktoren auf Ore-Lokalisierungen . . 3426

20.3.3 Faktorieren über triangulierte Quotienten 3435

20.3.4 Derivierte Funktoren 3438

20.3.5 Derivierte Funktoren und Kohomologie 3446
20.3.6 Derivieren homologisch endlicher Funktoren 3448
20.3.7 Exaktheit von Totalkomplexen abelscher Gruppen 3451
20.3.8 Derivieren von Tensor und Hom 3454
20.3.9 Derivierte Produkte und Koprodukte 3462
20.3.10 Universelle derivierte Funktoren* 3463
20.4 Derivierte Kategorien und dg-Ringoide* 3471
20.4.1 Ringoide und ihre Moduln 3471
20.4.2 Differentielle graduierte Ringoide und Moduln . . 3473
20.4.3 Kippen, Realisierung, Gewichtskomplex 3479
20.5 Danksagung 3487

20.1 Lokalisierung von Kategorien

20.1.1 Pfadkategorie eines Köchers

Vorschau 20.1.1.1. Jede Kategorie kann als ein Köcher aufgefaßt werden, indem man die Komposition von Morphismen vergißt. Dieser Funktor hat als Linksadjungierten den Funktor, der jedem Köcher die Kategorie zuordnet, deren Morphismen Pfade in unserem Köcher sind. Diese Konstruktion soll in diesem Abschnitt ausgeführt werden.

20.1.1.2. Ich erinnere an die Begriffswelt der Köcher. Ein **Köcher** ist ein Datum $\mathcal{K} = (P, E, a, e)$ bestehend aus zwei Mengen P, E und zwei Abbildungen $a, e : P \to E$. Wir nennen die Elemente von E die **Ecken** des Köchers und die Elemente von P seine **Pfeile**. Für einen Pfeil $p \in P$ nennen wir $a(p)$ seinen **Anfangspunkt** und $e(p)$ seinen **Endpunkt**. Die Köcher bilden in offensichtlicher Weise eine Kategorie, die wir nach französisch „carquois“ als Car notieren.

Definition 20.1.1.3. Gegeben ein Köcher $\mathcal{K} = (P, E, a, e)$ bilden wir seine **Pfadkategorie** $\tilde{\mathcal{K}}$ wie folgt: Als Objekte nehmen wir die Ecken $\mathrm{Ob}\,\tilde{\mathcal{K}} := E$ des Köchers, als Menge von Morphismen von einer Ecke x in eine weitere Ecke y die Menge aller Folgen von Pfeilen $p_1, \ldots, p_n$ mit $a(p_1) = x$, $e(p_n) = y$ und $e(p_i) = a(p_{i+1})$ für $1 \le i < n$, disjunkt vereinigt mit einem weiteren Element Id_x im Fall $y = x$. Die Verknüpfung ist das „Aneinanderhängen“, unsere Folge wäre also die Verknüpfung $p_n \circ \ldots \circ p_1 \in \tilde{\mathcal{K}}(x, y)$. Wir nennen die Morphismen in der Pfadkategorie $\tilde{\mathcal{K}}$ die **Pfade** in unserem Köcher.

Beispiel 20.1.1.4. Gegeben ein Köcher $\mathcal{K}$ mit nur einer Ecke ist seine Pfadkategorie die Ein-Objekt-Kategorie zum freien Monoid über der Menge P seiner Pfeile.

20.1.1.5. Der offensichtliche Köchermorphismus von einem Köcher in seine Pfadkategorie $\mathrm{can} : \mathcal{K} \to \tilde{\mathcal{K}}$ hat die folgende **universelle Eigenschaft**: Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\varphi : \mathcal{K} \to \mathcal{C}$ ein Morphismus von Köchern, so gibt es genau einen Funktor $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{K}} \to \mathcal{C}$ mit $\tilde{\varphi} \circ \mathrm{can} = \varphi$. Ist $\mathcal{K}$ ein Köcher und $\mathcal{C}$ eine Kategorie, so liefert die Restriktion sogar einen Isomorphismus von Kategorien

$$\mathrm{Cat}(\tilde{\mathcal{K}}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Car}(\mathcal{K}, \mathcal{C})$$

Hier machen wir beide Seiten dadurch zu Kategorien, daß wir als Morphismen die Transformationen nehmen. In anderen Worten ist das Bilden der Pfadkategorie $\mathrm{Car} \to \mathrm{Cat}$ der Linksadjungierte zum Vergessen der Verknüpfung $\mathrm{Cat} \to \mathrm{Car}$.

20.1.1.6 (**Notationen für Köcher und Kategorien**). Manchmal ist es wichtig, die verwendeten Universen zu spezifizieren. Wir deuten bei Köchern wie bei Kategorien durch ein vorgestelltes $\mathfrak{U}_\in$ beziehungsweise $\mathfrak{U}_\subset$ an, daß die Menge der

Punkte ein Element beziehungsweise eine Teilmenge eines vorgegebenen Mengensystems $\mathfrak{U}$ ist, und durch ein vorgestelltes $\mathfrak{U}_{\in}^{\to}$ beziehungsweise $\mathfrak{U}_{\subset}^{\to}$, daß die Menge der Pfeile zwischen zwei beliebig vorgegebenen Punkten ein Element beziehungsweise eine Teilmenge eines vorgegebenen Mengensystems $\mathfrak{U}$ ist.

Ergänzung 20.1.1.7. Gegeben ein Universum $\mathfrak{U}$ mit $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$ und ein $\mathfrak{U}_{\in}$-$\mathfrak{U}_{\in}^{\to}$-Köcher ist seine Pfadkategorie eine $\mathfrak{U}_{\in}$-$\mathfrak{U}_{\in}^{\to}$-Kategorie.

20.1.2 Lokalisierung von Kategorien

20.1.2.1. Die Morphismen aus einer ausgezeichneten Menge S von Morphismen einer Kategorie nennen wir im folgenden **S-Morphismen**.

Satz 20.1.2.2 (**Lokalisierung von Kategorien**). *Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S eine Menge von Morphismen in $\mathcal{C}$. So gibt es ein Paar $(\mathcal{C}_S, Q)$ bestehend aus einer Kategorie $\mathcal{C}_S$ mitsamt einem Funktor $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ derart, daß gilt:*

1. *Jeder S-Morphismus wird unter Q ein Isomorphismus in $\mathcal{C}_S$;*
2. *Ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor, der alle S-Morphismen zu Isomorphismen macht, so gibt es genau einen Funktor $\tilde{F} : \mathcal{C}_S \to \mathcal{D}$ mit $F = \tilde{F} \circ Q$.*

20.1.2.3. Natürlich ist ein derartiges Paar $(\mathcal{C}_S, Q)$ in der üblichen Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir konstruieren im Beweis sogar explizit ein derartiges Paar und nennen es die **Lokalisierung von $\mathcal{C}$ an** S. Manchmal verwenden wir auch die ausführlicheren Notationen $\mathcal{C}_S = S^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{C}|S^{-1}\rangle$. Gegeben Objekte $A, B \in \mathcal{C}$ schreiben wir manchmal $A \to_S B$ für einen Morphismus aus $\mathcal{C}_S(A, B)$.

Ergänzung 20.1.2.4. Gegeben ein Universum $\mathfrak{U}$ mit $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$ und ein $\mathfrak{U}_{\in}$-$\vec{\mathfrak{U}}_{\in}$-Köcher ist seine Pfadkategorie eine $\mathfrak{U}_{\in}$-$\vec{\mathfrak{U}}_{\in}$-Kategorie.

20.1.2.5 (**Herkunft der Terminologie**). Der Begriff der Lokalisierung kommt aus der Ringtheorie, in der man das formale Einführen von Inversen aus geometrischen Gründen als Lokalisierung bezeichnet, vergleiche 7.4.4. Mehr zur Kategorientheorie findet man in [Bor94].

20.1.2.6 (**Lokalisierung von Monoiden als Spezialfall**). Man kann insbesondere zu jedem Paar $G \supset S$ bestehend aus einem Monoid mit einer Teilmenge ein weiteres Monoid $S^{-1}G$ mit einem Monoidhomomorphismus $G \to S^{-1}G$ konstruieren derart, daß alle Elemente von S unter diesem Morphismus invertierbar werden und daß jeder Monoidhomomorphismus $G \to H$, unter dem alle Elemente von S invertierbar werden, auf genau eine Weise über $G \to S^{-1}G$ faktorisiert. Die Ein-Objekt-Kategorie $[S^{-1}G]$ ist in diesem Fall genau die Lokalisierung $[G]_S$ der Ein-Objekt-Kategorie zu G.

Beweis. Wir vergrößern den unserer Kategorie $\mathcal{C}$ zugrundeliegenden Köcher zu einem neuen Köcher $\mathcal{C} \sqcup S^{-1}$, indem wir für jeden Morphismus $s : X \to Y$ aus S einen Pfeil $\bar{s} : Y \to X$ neu hinzunehmen. Zu dem so vergrößerten Köcher bilden wir dann die Pfadkategorie 20.1.1.3. Wir notieren $[p]$ den Morphismus in der Pfadkategorie zu einem Pfeil p aus dem Köcher $\mathcal{C} \sqcup S^{-1}$ und Id_X beziehungsweise id_X die Identität auf einem Objekt X in unserer Pfadkategorie beziehungsweise in unserer ursprünglichen Kategorie $\mathcal{C}$. Nun betrachten wir auf der Menge der Morphismen unserer Pfadkategorie die kleinste Äquivalenzrelation $\sim$ derart, daß gilt:

1. $[s] \circ [\bar{s}] \sim \mathrm{Id}_Y$ und $[\bar{s}] \circ [s] \sim \mathrm{Id}_X$ für alle $s : X \to Y$ aus S;
2. $\mathrm{Id}_X \sim [\mathrm{id}_X]$ und $[f] \circ [g] \sim [f \circ g]$ für alle verknüpfbaren Morphismen f und g aus $\mathcal{C}$;
3. $v \sim w \Rightarrow u \circ v \sim u \circ w$ und $v \circ x \sim w \circ x$ für beliebige entsprechend verknüpfbare Morphismen u, v, w, x unserer Pfadkategorie.

Schließlich erklären wir die Kategorie $\mathcal{C}_S$, indem wir als Objekte die Objekte von $\mathcal{C}$ nehmen, als Morphismen jedoch Äquivalenzklassen von Wegen in der Pfadkategorie des Köchers $\mathcal{C} \sqcup S^{-1}$ unter unserer Äquivalenzrelation $\sim$. Die letzte Bedingung an unsere Äquivalenzrelation stellt dabei sicher, daß die Verknüpfung solcher Äquivalenzklassen wohldefiniert ist. Man folgert leicht, daß $\mathcal{C}_S$ mit dieser Verknüpfung von Morphismen eine Kategorie ist. Bezeichne nun wie zuvor $\tilde{\mathcal{K}}$ die Pfadkategorie eines Köchers $\mathcal{K}$. Die vorletzte Bedingung in unserer Definition der Äquivalenzrelation erzwingt, daß die Verknüpfung

$$\mathcal{C} \to \mathcal{C} \sqcup S^{-1} \to \widetilde{\mathcal{C} \sqcup S^{-1}} \to \mathcal{C}_S$$

von Morphismen von Köchern sogar ein Funktor ist, und die erste Bedingung erzwingt, daß jeder Morphismus aus S unter diesem Funktor ein Isomorphismus der Kategorie $\mathcal{C}_S$ wird. Wir bezeichnen unseren Funktor mit $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ und überlassen den Nachweis der universellen Eigenschaft dem Leser. $\square$

Definition 20.1.2.7. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt ein **Lokalisierungsfunktor**, wenn für die Menge S aller Morphismen von $\mathcal{C}$, die er zu Isomorphismen macht, der induzierte Funktor eine Äquivalenz von Kategorien $\tilde{F} : \mathcal{C}_S \xrightarrow{\approx} \mathcal{D}$ ist.

Beispiel 20.1.2.8 (**Erweiterung der Skalare als Lokalisierungsfunktor**). Das Erweitern der Skalare ist ein Lokalisierungsfunktor

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} : \mathrm{Modf}_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Modf}_{\mathbb{Q}}$$

von der Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen zur Kategorie der endlichdimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorräume. Um das zu sehen, bilden wir zunächst eine

Hilfskategorie $\mathrm{Modf}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}}$, indem wir dieselben Objekte nehmen wie bei $\mathrm{Modf}_{\mathbb{Z}}$ aber als Morphismenräume die Lokalisierungen

$$\mathrm{Modf}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}}(M,N) := P^{-1}\,\mathrm{Modf}_{\mathbb{Z}}(M,N)$$

nach der Menge $P := \mathbb{Z}_{>0}$ im Sinne der kommutativen Algebra. Es ist dann leicht zu sehen, daß der offensichtliche Funktor

$$\mathrm{Modf}_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Modf}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}}$$

die universelle Eigenschaft hat, die die Lokalisierung von $\mathrm{Modf}_{\mathbb{Z}}$ nach der Menge S aller Morphismen $n\mathrm{id}_M$ für $n > 0$ und $M \in \mathrm{Modf}_{\mathbb{Z}}$ charakterisiert. Andererseits ist leicht zu sehen, daß die Erweiterung der Skalare eine Äquivalenz $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} : \mathrm{Modf}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Modf}_{\mathbb{Q}}$ induziert. Daraus folgt die Behauptung.

Satz 20.1.2.9. *Besitzt ein Funktor einen volltreuen globalen Rechts- oder Linksadjungierten, so ist er ein Lokalisierungsfunktor.*

Beispiel 20.1.2.10 (**Erweiterung der Skalare als Lokalisierungsfunktor**). Die Erweiterung der Skalare $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} : \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Q}}$ ist ein Lokalisierungsfunktor, denn sie hat einen volltreuen Rechtsadjungierten, das Vergessen der Operation der nicht ganzen Skalare. Man beachte, daß auch der analog zu 20.1.2.8 konstruierte Funktor $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}}$ mit der dort gegebenen Argumentation ein Lokalisierungsfunktor ist, daß aber der von der Erweiterung der Skalare induzierte Funktor $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} : \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Q}}$ keine Äquivalenz ist.

Beweis. Wir behandeln nur einen der beiden Fälle, der andere folgt durch Übergang zu den opponierten Kategorien. Sei $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ volltreu und rechtsadjungiert zu L. Sei S die Klasse aller Morphismen in $\mathcal{C}$, die unter L Isomorphismen werden. Erklären wir eine Kategorie $\mathcal{C}_{(S)}$, indem wir als Objekte dieselben nehmen wie die Objekte von $\mathcal{C}$, als Morphismen jedoch setzen $\mathcal{C}_{(S)}(X,Y) := \mathcal{D}(LX,LY)$ mit der offensichtlichen Verknüpfung von Morphismen, so ist der offensichtliche Funktor eine Äquivalenz $\mathcal{C}_{(S)} \xrightarrow{\approx} \mathcal{D}$, da die Koeinheit der Adjunktion für alle $D \in \mathcal{D}$ ein Isomorphismus $LRD \xrightarrow{\sim} D$ ist nach 16.4.3.9, da wir R volltreu angenommen hatten. Wenden wir diesen Isomorphismus an auf LX für $X \in \mathcal{C}$, so folgt mit der Dreiecksidentität 16.4.8.1, daß die Sequenz von kanonischen Morphismen $LX \to LRLX \to LX$, die man mithilfe der Adjunktion erhält, aus Isomorphismen besteht. Ist nun $G : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ein Funktor, der S-Morphismen zu Isomorphismen macht, so faktorisiert er über $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{(S)}$ vermittels eines Funktors $\tilde{G} : \mathcal{C}_{(S)} \to \mathcal{E}$, wobei wir auf den Morphismen $\tilde{G} : \mathcal{C}_{(S)}(X,Y) \to \mathcal{E}(GX,GY)$ für $f \in \mathcal{C}_{(S)}(X,Y) = \mathcal{D}(LX,LY)$ erklären

durch die Kommutativität des Diagramms mit Isomorphismen in den Vertikalen

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}X & \xrightarrow{\tilde{G}f} & \tilde{G}Y \\ \downarrow\wr & & \wr\downarrow \\ GRLX & \xrightarrow{GRf} & GRLY \end{array}$$

Diese Faktorisierung ist, wie man leicht sieht, auch die einzig mögliche. □

Beispiel 20.1.2.11 (**Garbifizierung als Lokalisierung**). Gegeben ein topologischer Raum X ist die Garbifizierung $\mathrm{pEns}_{/X} \to \mathrm{Ens}_{/X}$ ein Lokalisierungsfunktor, denn sie ist linksadjungiert zum volltreuen Einbettungsfunktor. Dasselbe gilt für die Garbifizierung $\mathrm{pAb}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ von Prägarben abelscher Gruppen und analog für Prägarben von Ringen und dergleichen mehr. Dasselbe gilt auch für die von der Garbifizierung induzierten Funktoren $\mathrm{Ket}(\mathrm{pAb}_{/X}) \to \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{/X})$ und $\mathrm{Hot}(\mathrm{pAb}_{/X}) \to \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X})$.

Beispiel 20.1.2.12 (**Funktoren mit einem volltreuen Adjungierten**). Funktoren mit einem volltreuen Rechtsadjungierten, die nach Satz 20.1.2.9 folglich Lokalisierungsfunktoren sind, sind jede Lokalisierung von Moduln über einem Kring nach einer Teilmenge des Krings oder auch die Abelisierung $\mathrm{Grp} \to \mathrm{Ab}$. Ein Funktor mit einem volltreuen Linksadjungierten, der nach Satz 20.1.2.9 folglich auch ein Lokalisierungsfunktor ist, wäre etwa die zweite Erweiterung der Skalare $\mathrm{Ab} \to \mathbb{Q}\text{-}\mathrm{Mod}$ gegeben durch $M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, M)$. Diese zweite Erweiterung der Skalare ist durchaus verschieden von der gewöhnlichen Erweiterung der Skalare, wie etwa das Anwenden auf $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zeigt.

Beispiel 20.1.2.13 (**Vervollständigung metrischer Räume als Lokalisierung**). Wir betrachten den Funktor der Vervollständigung $Q : \mathrm{Met} \to \mathrm{Metv}$ von der Kategorie der metrischen Räumen in die Kategorie der vollständigen metrischen Räume. Morphismen sind jeweils alle Abbildungen, die die Abstände erhalten. Unser Funktor Q der Vervollständigung hat als Rechtsadjungierten den volltreuen Einbettungsfunktor $R : \mathrm{Metv} \to \mathrm{Met}$. Das Vervollständigen metrischer Räume ist also ein Lokalisierungsfunktor.

Beispiel 20.1.2.14. Gegeben ein Köcher mit zwei Ecken und nur einem Pfeil, der seinerseits von einer Ecke zur anderen Ecke geht, erhalten wir zwei Lokalisierungsfunktoren von der Kategorie der Darstellungen unseres Köchers in die Kategorie der abelschen Gruppen, indem wir jeder Darstellung den Wert an einer festen unserer beiden Ecken zuordnen. Auch das folgt aus Satz 20.1.2.9 folgen, denn diese Funktoren haben einen volltreuen Links- beziehungsweise Rechtsadjungierten.

Lemma 20.1.2.15. *Seien $\mathcal{C} \supset \mathcal{C}' \supset \mathcal{C}''$ eine Kategorie mit zwei vollen Unterkategorien und sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Lokalisierungsfunktor derart, daß auch seine*

Einschränkung $F : \mathcal{C}'' \to \mathcal{D}$ ein Lokalisierungsfunktor ist und daß es zu jedem $X' \in \mathcal{C}'$ einen Morphismus $X'' \to X'$ aus $X'' \in \mathcal{C}''$ gibt, der unter F ein Isomorphismus $FX'' \xrightarrow{\sim} FX'$ wird. So ist auch die Einschränkung $F : \mathcal{C}' \to \mathcal{D}$ ein Lokalisierungsfunktor.

20.1.2.16. Dies Lemma zeigen wir, um noch reichhaltigere Beispiele für Lokalisierungsfunktoren zur Verfügung stellen zu können.

Beweis. Bezeichne S, S', S'' die Menge aller Morphismen in $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$, die jeweils unter F zu Isomorphismen werden. Gegeben $X'', Y'' \in \mathcal{C}''$ ist in den Notationen des Beweises von 20.1.2.2 offensichtlich jeder Pfad im Köcher $\mathcal{C}' \sqcup S'^{-1}$ von X'' nach Y'' äquivalent zu einem Pfad im Köcher $\mathcal{C}'' \sqcup S''^{-1}$. Mithin induziert der offensichtliche Funktor $\mathcal{C}''_{S''} \to \mathcal{C}'_{S'}$ Surjektionen auf den Morphismenräumen, ist also voll. Andererseits ist nach unseren Annahmen die Verknüpfung $\mathcal{C}''_{S''} \to \mathcal{C}'_{S'} \to \mathcal{C}_S$ eine Äquivalenz von Kategorien, folglich ist $\mathcal{C}''_{S''} \to \mathcal{C}'_{S'}$ sogar volltreu. Daß dieser Funktor essentiell surjektiv ist, ist eh klar. Das Lemma folgt. □

Beispiel 20.1.2.17 (**Allgemeinere Lokalisierungsfunktoren**). Wir betrachten die Kategorie $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{loke}}$ aller abelschen Gruppen M mit $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \in \mathrm{Modf}_{\mathbb{Q}}$. Für jede volle Unterkategorie $\mathcal{A} \subset \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{loke}}$ mit $\mathrm{Modf}_{\mathbb{Z}} \subset \mathcal{A}$ ist die Erweiterung der Skalare ein Lokalisierungsfunktor

$$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} : \mathcal{A} \to \mathrm{Modf}_{\mathbb{Q}}$$

Das folgt aus Lemma 20.1.2.15, da die Skalarerweiterung $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}$ auf $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{loke}}$ und auf $\mathrm{Modf}_{\mathbb{Z}}$ jeweils ein Lokalisierungsfunktor ist nach 20.1.2.9 und 20.1.2.8.

20.1.2.18. Ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Lokalisierungsfunktor, so ist F surjektiv auf Isomorphieklassen von Objekten und jeder Morphismus in $\mathcal{D}(FA, FB)$ läßt sich schreiben als eine Verknüpfung

$$F(g_1) \circ F(s_1)^{-1} \circ F(g_2) \circ F(s_2)^{-1} \circ \ldots \circ F(g_n) \circ F(s_n)^{-1}$$

mit Morphismen g_i in $\mathcal{C}$ und $s_i \in S$. Das folgt unmittelbar aus unseren Konstruktionen und Definitionen.

20.1.2.19. Wir nennen einen Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ **volldicht**, wenn für jede weitere Kategorie $\mathcal{C}$ das Vorschalten von F auf den Funktorkategorien einen volltreuen Funktor $\mathcal{C}^{\mathcal{B}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ liefert.

Beispiele 20.1.2.20. Jede Äquivalenz von Kategorien ist volldicht. Ist ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ bijektiv auf Objekten und läßt sich jeder Morphismus in $\mathcal{B}$ darstellen als Verknüpfung von Bildern von Morphismen aus $\mathcal{A}$ und Inversen derartiger Bilder, so ist F volldicht. Das folgt ohne größere Schwierigkeiten daraus, daß ein quadratisches Diagramm mit Isomorphismen in den Horizontalen kommutiert genau dann, wenn es kommutiert nach Ersetzen der Horizontalen durch ihre Inversen. Insbesondere ist nach 20.1.2.18 **jeder Lokalisierungsfunktor volldicht**.

Beispiel 20.1.2.21 (**Fall der Ein-Objekt-Kategorien**). Ein Morphismus von Monoiden $G \to H$ liefert einen volldichten Funtor auf den zugehörigen Ein-Objekt-Kategorien $[G] \to [H]$, wenn H erzeugt wird von den Bildern der Elemente von G und den Inversen der Bilder der Elemente von G mit invertierbarem Bild. Nun haben wir einen natürlichen Isomorphismus von Kategorien $G\text{-Ens} \xrightarrow{\sim} \text{Ens}^{[G]}$. Spezialisieren wir $\mathcal{C}$ aus 20.1.2.20 zu Ens, so besagt das insbesondere, daß unter den gegebenen Annahmen die Restriktion ein volltreuer Funktor $H\text{-Ens} \xhookrightarrow{\sim} G\text{-Ens}$ ist. Das scheint mir auch ohne die vorhergehenden Überlegungen unmittelbar einsichtig.

Übungen

Übung 20.1.2.22. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ und darin ein System von Morphismen S ist der von $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ induzierte Funktor $\mathcal{C}^{\text{opp}} \to (\mathcal{C}_S)^{\text{opp}}$ eine Lokalisierung von $\mathcal{C}^{\text{opp}}$ an S^{opp}. Gegeben zwei Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ und darin Systeme von Morphismen S, T ist das Produkt der Lokalisierungsfunktoren $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}_S \times \mathcal{D}_T$ eine Lokalisierung der Produktkategorie an $S \times T$. Die Verknüpfung von zwei Lokalisierungen ist auch selbst wieder eine Lokalisierung.

Übung 20.1.2.23. Jeder Lokalisierungsfunktor ist auch als Funktor zwischen den zugehörigen opponierten Kategorien ein Lokalisierungsfunktor. Gegeben zwei Lokalisierungsfunktoren $F : \mathcal{A} \to \bar{\mathcal{A}}$ und $G : \mathcal{B} \to \bar{\mathcal{B}}$ ist auch ihr Produkt $(F \times G) : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{B}}$ ein Lokalisierungsfunktor. Die Verknüpfung von zwei Lokalisierungsfunktoren ist auch selbst wieder ein Lokalisierungsfunktor.

20.1.3 Lokalisierung und Entfaltung

20.1.3.1 (**Entfaltete Objekte**). Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor. Ein Objekt $I \in \mathcal{A}$ nennen wir **rechtsentfaltet für** F oder F**-rechtsentfaltet**, wenn der Funktor F für alle $X \in \mathcal{A}$ eine Bijektion

$$\mathcal{A}(X, I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(FX, FI)$$

induziert. Das ist gleichbedeutend zu der Forderung, daß der partielle Rechtsadjungierte R von F bei FI existiert und id_{FI} unter der Adjunktion einem Isomorphismus $I \xrightarrow{\sim} RFI$ entspricht. Opponiert werden **linksentfaltete Objekte** erklärt.

Beispiel 20.1.3.2 (**Vervollständigung metrischer Räume**). Wir betrachten den Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ der Vervollständigung 20.1.2.13 von der Kategorie der metrischen Räume in die Kategorie der vollständigen metrischen Räume, jeweils mit Isometrien als Morphismen. In diesem Fall sind genau die vollständigen Räume rechtsentfaltet.

Beispiel 20.1.3.3 (**Vervollständigung abzählbarer metrischer Räume**). Wir betrachten den Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ der Vervollständigung 20.1.2.13 von der Kategorie der abzählbaren metrischen Räume in die Kategorie der vollständigen metrischen Räume, jeweils mit Isometrien als Morphismen. In diesem Fall sind genau die vollständigen abzählbaren metrischen Räume rechtsentfaltet.

Beispiel 20.1.3.4 (**Erweiterung der Skalare**). Für den Funktor $F : \mathrm{Ab} \to \mathbb{Q}\text{-}\mathrm{Mod}$ der Erweiterung der Skalare gegeben durch $M \mapsto \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ sind alle abelschen Gruppen, die bereits $\mathbb{Q}$-Vektorräume sind, rechtsentfaltet.

20.1.3.5 (**Entfaltungen**). Gegeben ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ verstehen wir unter einer **F-Rechtsentfaltung** eines Objekts $Y \in \mathcal{A}$ einen Morphismus $Y \to I$ von Y zu einem rechtsentfalteten Objekt I, der unter F ein Isomorphismus wird. Gegeben Rechtsentfaltungen $Y \to I$ und $Z \to J$ und ein Morphismus $Y \to Z$ gibt es genau einen Morphismus $I \to J$, der ein kommtatives Quadrat entstehen läßt. In der Tat ist ja der induzierte Morphismus $FI \to FJ$ offensichtlich eindeutig bestimmt. Insbesondere ist eine F-Rechtsentfaltung von Y, wenn sie denn existiert, als Objekt von $\mathcal{A}^Y$ eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Opponiert gilt Analoges für **Linksentfaltungen**.

Beispiele 20.1.3.6. Für den Funktor der Vervollständigung metrischer Räume ist eine Entfaltung eine isometrische Einbettung mit dichtem Bild in einen vollständigen metrischen Raum. Für den Funktor der Vervollständigung abzählbarer metrischer Räume 20.1.3.3 besitzen nur diejenigen abzählbaren metrischen Räume eine Rechtsentfaltung, deren Vervollständigung auch abzählbar ist. Für den Funktor der Erweiterung der Skalare von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$ ist eine Entfaltung ein Gruppenhomomorphismus zu einem $\mathbb{Q}$-Vektorraum, dessen Kern aus allen Torsionselementen besteht und dessen Bild unseren $\mathbb{Q}$-Vektorraum erzeugt.

20.1.3.7. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit einer ausgezeichneten Menge S von Morphismen nennen wir ein Objekt $B \in \mathcal{C}$ **rechtsentfaltet für** S oder **S-rechtsentfaltet**, wenn für alle $X \in \mathcal{C}$ die natürliche Abbildung eine Bijektion

$$\mathcal{C}(X, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QX, QB)$$

ist, wenn B also Q-rechtsentfaltet ist in Bezug auf den Lokalisierungsfunktor $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ im Sinne von 20.1.3.1. Wie bereits in 20.1.3.1 erwähnt ist das gleichbedeutend dazu, daß der Rechtsadjungierte R zu Q bei QB definiert ist und die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus $B \xrightarrow{\sim} RQB$. Weiter nennen wir einen Morphismus $Y \to B$ eine **S-Rechtsentfaltung**, wenn er unter Q ein Isomorphismus $QY \xrightarrow{\sim} QB$ wird und B rechtsentfaltet ist. Nach 20.1.3.5 ist eine S-Rechtsentfaltung von Y eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus als Objekt von $\mathcal{C}^Y$, wenn sie existiert. Opponiert verwenden wir analog **linksentfaltet** und **Linksentfaltung**.

Beispiel 20.1.3.8. Für den Funktor $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} : \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Q}}$ sind genau diejenigen abelschen Gruppen rechtsentfaltet, die bereits $\mathbb{Q}$-Vektorräume sind. Ebenso sind für den Funktor

$$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} : \mathcal{A} \to \mathrm{Modf}_{\mathbb{Q}}$$

von einer Kategorie $\mathcal{A}$ von abelschen Gruppen mit $\mathrm{Modf}_{\mathbb{Z}} \subset \mathcal{A} \subset \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{loke}}$ wie in 20.1.2.17 genau diejenigen abelschen Gruppen aus $\mathcal{A}$ rechtsentfaltet, die bereits $\mathbb{Q}$-Vektorräume sind. Das sind mithin auch genau die S-rechtsentfalteten Objekte für S die Menge aller Morphismen, die unter $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}$ zu Isomorphismen werden.

Satz 20.1.3.9 (**Entfaltung und Adjunktion bei Lokalisierungen**). *Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie, S eine Menge von Morphismen in $\mathcal{C}$ und $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ die Lokalisierung.*

1. *Ein Objekt $B \in \mathcal{C}$ ist S-rechtsentfaltet genau dann, wenn der zugehörige Funktor $\hat{B} = \mathcal{C}(\ ,B) : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ens}$ alle S-Morphismen zu Bijektionen macht;*

2. *Besitzt für $D \in \mathcal{C}_S$ der Lokalisierungsfunktor Q einen partiellen Rechtsadjungierten R bei D, so ist RD rechtsentfaltet und die Koeinheit der Ajunktion ein Isomorphismus $QRD \xrightarrow{\sim} D$;*

3. *Besitzt für $Y \in \mathcal{C}$ der Lokalisierungsfunktor Q einen partiellen Rechtsadjungierten R bei QY, so ist die Einheit der Adjunktion eine Rechtsentfaltung $Y \to RQY$;*

4. *Genau dann besitzt Q einen globalen Rechtsadjungierten, wenn jedes Objekt $Y \in \mathcal{C}$ eine S-Rechtsentfaltung besitzt;*

5. *Jeder partielle Rechtsadjungierte eines Lokalisierungsfunktors volltreu.*

20.1.3.10. Die in unserem Satz speziell für $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ formulierten Aussagen folgen unmittelbar für jeden Lokalisierungsfunktor. Alles geht opponiert genauso. Das Beispiel 20.1.2.17 mag instruktiv sein.

20.1.3.11. Ich deute an, wie die Umkehrabbildung $\mathcal{C}_S(QX, QB) \to \mathcal{C}(X, B)$ so ungefähr konstruiert werden kann. Ein Morphismus links wird repräsentiert durch ein Zick-Zack-Diagramm wie etwa

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr] & & X_3 \arrow[dl, "s"] \arrow[dr] & \\
X & & X_2 & & B
\end{tikzcd}$$

mit S-Morphismen als Pfeilen nach links. Anwenden von $\mathcal{C}(\ ,B)$ macht daraus ein ein Zick-Zack-Diagramm wie etwa

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(X_1,B) & & \mathcal{C}(X_3,B) & \\
\mathcal{C}(X,B) \arrow[ur, "\sim"] & & \mathcal{C}(X_2,B) \arrow[ul] \arrow[ur, "\sim"] & & \mathcal{C}(B,B) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

mit Bijektionen als Pfeilen nach rechts. Das Bild der Identität auf B unter der Komposition von rechts nach links ist der gesuchte Morphismus in $\mathcal{C}(X,B)$. Nun muß gezeigt werden, daß er von der Darstellung des Ausgangsmorphismus als Zick-Zack-Diagramm unabhängig ist. Das kann man direkt angehen, wir nehmen aber im folgenden Beweis einen anderen Weg.

Beweis. 1. Daß rechtsentfaltete Objekte die behauptete Eigenschaft haben, ist klar. Umgekehrt gilt es zu zeigen, daß für B mit der besagten Eigenschaft die Transformation

$$\eta : \hat{B} \Rightarrow (QB)^\wedge \circ Q$$

von Funktoren $(\mathcal{C}_S)^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ens}$ gegeben nach dem Yonedalemma durch $\eta_B(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{QB}$ eine Isotransformation ist. Nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung gibt es genau einen Funktor $\tilde{B} : (\mathcal{C}_S)^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ens}$ mit $\tilde{B} \circ Q = \hat{B}$ und wir erhalten eine eindeutig bestimmte Transformation

$$\eta : \tilde{B} \circ Q \Rightarrow (QB)^\wedge \circ Q$$

mit $\eta_B(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{QB}$. Da Q als Lokalisierungsfunktor volldicht ist nach 20.1.2.20, gibt es mithin genau eine Transformation

$$\hat{\eta} : \tilde{B} \Rightarrow (QB)^\wedge$$

mit $\hat{\eta}Q = \eta$ alias $\hat{\eta}_{QB}(\mathrm{id}_B) = (\hat{\eta}Q)_B(\mathrm{id}_B) = \eta_B(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{QB}$. Umgekehrt gibt es nach dem Yonedalemma auch genau eine Transformation

$$\tau : (QB)^\wedge \Rightarrow \tilde{B}$$

mit $\tau_{QB}(\mathrm{id}_{QB}) = \mathrm{id}_B$. Wegen $(\hat{\eta} \circ \tau)_{QB}(\mathrm{id}_{QB}) = \mathrm{id}_{QB}$ folgt mit dem Yonedalemma $\hat{\eta} \circ \tau = \mathrm{id}$ und a forteriori $\eta \circ \tau Q = \hat{\eta}Q \circ \tau Q = \mathrm{id}$. Umgekehrt finden wir aber auch $(\tau Q \circ \eta)_B(\mathrm{id}_B) = (\tau Q)_B(\mathrm{id}_{QB}) = \tau_{QB}(\mathrm{id}_{QB}) = \mathrm{id}_B$ und so wieder nach dem Yonedalemma $\tau Q \circ \eta = \mathrm{id}$. Damit sind τQ und η zueinander inverse Isotransformationen.

2. Sicher liefert jeder S-Morphimus $X \to Y$ einen Isomorphismus $QX \xrightarrow{\sim} QY$ und dann auch eine Bijektion $\mathcal{C}_S(QY,D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QX,D)$ und schließlich eine Bijektion $\mathcal{C}(Y,RD) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X,RD)$. Damit zeigt Teil 1, daß RD rechtsentfaltet sein

muß. Insbesondere induziert der Lokalisierungsfunktor Q für unser $D \in \mathcal{C}_S$ und alle $X \in \mathcal{C}$ Isomorphismen $\mathcal{C}(X, RD) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QX, QRD)$. Da jedes Objekt in $\mathcal{C}_S$ von einem Objekt $X \in \mathcal{C}$ herkommt, ist damit die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus $QRD \xrightarrow{\sim} D$ in $\mathcal{C}_S$.

3. Nach der partiellen Dreiecksidentität 16.4.8.12 ist die Verknüpfung der natürlichen Morphismen $QY \to QRQY \to QY$ die Identität. Nach Teil 2 steht hinten ein Isomorphismus. Also muß auch hinten ein Isomorphismus stehen und nach Teil 2 ist RQY rechtsentfaltet.

4. Besitzt Q einen globalen Rechtsadjungierten R, so besitzt nach Teil 3 jedes Objekt Y eine Rechtsentfaltung $Y \to RQY$. Besitzt umgekehrt jedes Objekt Y eine Rechtsentfaltung $Y \to B$, so gilt $QY \xrightarrow{\sim} QB$ und nach 20.1.3.7 ist der partielle Rechtsadjungierte R zu Q bei QB definiert. Da zusätzlich Q essentiell surjektiv, ja sogar surjektiv ist auf Objekten, ist damit der partielle Rechtsadjungierte R zu Q global definiert;

5. Das folgt mit einer Variante von 16.4.3.9 für partielle Adjungierte aus den Erkenntnissen in Teil 2. □

Vorschau 20.1.3.12. Gegeben Kategorien $\mathcal{I}, \mathcal{C}$ und eine Menge von Morphismen S von $\mathcal{C}$ können wir eine Menge $S(\mathcal{I})$ von Morphismen in der Funktorkategorie $\mathrm{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ erklären als diejenigen Transformationen τ mit $\tau_i \in S$ für alle $i \in \mathcal{I}$. Der Funktor des konstanten Systems $\mathrm{const} : \mathcal{C} \to \mathrm{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ induziert dann einen Funktor auf den Lokalisierungen

$$\mathrm{konst} : \mathcal{C}_S \to \mathrm{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})_{S(\mathcal{I})}$$

Der linksadjungierte Funktor dazu hinwiederum heißt der **Homotopiekolimes** und wird hocol notiert. In diesem Fall ist, anders als bei normalen Kolimites, auch die Struktur von $\mathcal{I}$ als Kategorie und nicht nur der zugrundeliegende Köcher relevant.

Übungen

Übung 20.1.3.13 (**Entfaltung und Spaltung**). Gegeben $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor und I ein F-rechtsentfaltetes Objekt und $f : I \to C$ ein Morphismus, der unter F ein Isomorphismus wird, gibt es stets einen Morphismus $g : C \to I$ mit $gf = \mathrm{id}_I$.

Übung 20.1.3.14 (**Kolimites und Lokalisierung**). Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S eine Menge von Morphismen von $\mathcal{C}$ und $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ der Lokalisierungsfunktor. Ist jedes Objekt von $\mathcal{C}$ rechtsentfaltbar für S, so besitzt Q nach 20.1.3.9 einen globalen Rechtsadjungierten und vertauscht nach 17.7.1.30 mit Kolimites. Opponiertes gilt für Limites.

Übung 20.1.3.15 (**Limites rechtsentfalteter Objekte**). Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein essentiell surjektiver Funktor. Landet eine Köcherdarstellung $D : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ in den F-rechtsentfalteten Objekten von $\mathcal{A}$ und existiert ihr Limes und ist selbst wieder F-rechtsenfaltet, so besitzt auch $FD : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$ einen Limes und der offensichtliche Morphismus ist ein Isomorphismus

$$F\left(\lim_{i\in\mathcal{I}} D_i\right) \xrightarrow{\sim} \lim_{i\in\mathcal{I}}(FD_i)$$

Übung 20.1.3.16 (**Limites rechtsentfalteter Objekte in Lokalisierungen**). Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S eine Menge von Morphismen. Landet eine Köcherdarstellung $D : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ in den S-rechtsentfalteten Objekten von $\mathcal{C}$ und existiert ihr Limes und ist selbst wieder S-rechtsenfaltet, so besitzt auch $QD : \mathcal{I} \to \mathcal{C}_S$ einen Limes und der offensichtliche Morphismus ist ein Isomorphismus

$$Q\left(\lim_{i\in\mathcal{I}} D_i\right) \xrightarrow{\sim} \lim_{i\in\mathcal{I}}(QD_i)$$

Das ist nur eine offensichtliche Spezialisierung von 20.1.3.15.

20.1.4 Lokalisierung unter Orebedingungen

20.1.4.1. Mit zusätzlichen Bedingungen an das System der zu invertierenden Morphismen erhält man feinere Aussagen über die Lokalisierung, wie wir im folgenden ausführen.

Definition 20.1.4.2. Eine Menge von Morphismen einer Kategorie heißt **multiplikativ** oder ein **multiplikatives System**, wenn sie stabil ist unter Verknüpfung und alle Identitäten enthält.

Definition 20.1.4.3. Eine Menge S von Morphismen einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt ein **Rechts-Ore-System**, wenn sie multiplikativ ist und zusätzlich die beiden folgenden Eigenschaften hat:

1. Gegeben $X \xleftarrow{s} C \xrightarrow{g} Y$ mit $s \in S$ gibt es $X \xrightarrow{h} D \xleftarrow{t} Y$ mit $t \in S$ und $hs = tg$;

2. Gegeben $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ und $s \in S$ mit $fs = gs$ gibt es $t \in S$ mit $tf = tg$.

Ein Diagramm der Gestalt $X \xrightarrow{h} D \xleftarrow{t} Y$ mit $t \in S$ interpretieren wir als Morphismus $t^{-1}h : X \to Y$ und nennen es einen **Rechtsbruch**, weil der Zähler eben rechts steht.

20.1.4.4. Eine Menge S von Morphismen einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt ein **Links-Ore-System**, wenn sie ein Rechts-Ore-System in der opponierten Kategorie ist. Ein **Ore-System** in einer Kategorie ist ein Menge von Morphismen, die Rechts-Ore und Links-Ore ist.

Ergänzung 20.1.4.5. Ist unsere Kategorie eine Ein-Objekt-Kategorie mit additiver Struktur, so sind diese Bedingungen die bei der Lokalisierung nichtkommutativer Ringe üblichen **Ore-Bedingungen**.

Lemma 20.1.4.6. *Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit einem Rechtsoresystem S und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ bilden die von X ausgehenden S-Morphismen mit ihrer Struktur als volle Unterkategorie von $\mathcal{C}^X$ eine filtrierende Kategorie S^X.*

Beweis. Gegeben Objekte $i, j \in S^X$ gilt es zunächst, ein weiteres Objekt k zu finden mit Morphismen $\alpha : i \to k$ und $\beta : j \to k$. Gegeben S-Morphismen $i : X \to D_i$ und $j : X \to D_j$ gilt es also, einen S-Morphismus $k : X \to D_k$ zu finden und $\mathcal{C}$-Morphismen $\alpha : D_i \to D_k$ mit $\alpha \circ i = k$ sowie $\beta : D_j \to D_k$ mit $\beta \circ j = k$. Das gelingt mühelos mit der ersten Orebedingung. Gegeben Objekte $i, j \in S^X$ und Morphismen $\phi, \psi : i \to j$ gilt es weiter, ein Objekt k und einen Morphismus $\zeta : j \to k$ zu finden mit $\zeta\phi = \zeta\psi$. Gegeben $\mathcal{C}$-Morphismen $\phi, \psi : D_i \to D_j$ mit $\phi \circ i = j = \psi \circ i$ gilt es also, einen S-Morphismus $k : X \to D_k$ und einen $\mathcal{C}$-Morphismus $\zeta : D_j \to D_k$ zu finden mit $\zeta \circ j = k$ und $\zeta \circ \phi = \zeta \circ \psi$. Das gelingt mühelos mit der zweiten Orebedingung. Daß schließlich S^X nicht leer ist, folgt aus $\mathrm{id}_X \in S$. □

20.1.4.7. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S ein Rechtsoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$. Wir betrachten für $X, Y \in \mathcal{C}$ die Menge $\mathcal{B}(X, Y)$ aller Diagramme $D = (f, D, s)$ der Gestalt

$$X \xrightarrow{f} D \xleftarrow{s} Y$$

mit $s \in S$ und nennen derartige Diagramme **Brüche** oder genauer **Rechtsbrüche von X nach Y**. Wir sagen, ein Bruch (f, D, s) gehe hervor aus einem weiteren Bruch $(f', D', s') \in \mathcal{B}(X, Y)$ durch **Kürzen**, wenn es einen Morphismus $h : D \to D'$ gibt mit $s' = hs$ und $f' = hf$. Wir fordern dabei nicht $h \in S$ und notieren diese Aussage

$$D \dashrightarrow D'$$

Bezeichne $\bar{\mathcal{B}}(X, Y)$ die Menge aller Äquivalenzklassen von Brüchen von X nach Y unter der Äquivalenzrelation, die gegeben wird durch die Vorschrift, daß gilt $(f, D, s) \sim (f', D', s')$ genau dann, wenn es einen weiteren Bruch (f'', D'', s'') gibt mit $D' \dashrightarrow D'' \dashleftarrow D$. Bezeichne $[f, D, s]$ die Äquivalenzklasse des Bruches (f, D, s). Per definitionem haben wir dann

$$\bar{\mathcal{B}}(X, Y) = \mathrm{colf}_{Y \xrightarrow{s} D} \mathcal{C}(X, D)$$

mit dem Kolimes über die Kategorie S^Y aller von Y ausghenden S-Morphismen, aufgefaßt als volle Unterkategorie von $\mathcal{C}^Y$, oder genauer mit dem Kolimes des Funktors $S^Y \to \mathrm{Ens}$, $(Y \to D) \mapsto \mathcal{C}(X, D)$.

20.1.4.8. Ich komme mit Rechts und Links in diesem Zusammenhang leicht durcheinander. Als Eselsbrücke mag man sich einen Rechtsbruch als eine Komposition der Form $s^{-1} \circ f$ denken, bei der der Zähler eben rechts steht. Der erste Teil der Rechtsorebedingung sagt dann, salopp gesprochen, daß man jeden Linksbruch zu einem Rechtsbruch umschreiben kann. Der zweite Teil der Rechtsorebedingung besagt, ebenso salopp gesprochen, daß zwei Brüche mit einer Eins im Nenner, die durch Erweiterung zu einem Linksbruch gleich gemacht werden können, auch durch Erweiterung zu einem Rechtsbruch gleich gemacht werden können.

20.1.4.9 (**Bezug zur Lokalisierung von Kringen**). Bei der Lokalisierung eines kommutativen Rings R nach einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge S definiert man die Äquivalenzrelation auf Brüchen meist durch die Bedingung, daß unsere Brüche gleich gemacht werden können, wenn wir sie beide mit jeweils einem Element von S erweitern. Unsere Äquivalenzrelation hier würde vielmehr bedeuten, daß sie gleich gemacht werden können, wenn wir sie beide mit jeweils einem Element von R erweitern unter der Maßgabe, daß dabei die Nenner in S bleiben müssen. Man überlegt sich jedoch unschwer, daß diese beiden Äquivalenzrelationen im Fall kommutativer Ringe übereinstimmen.

Proposition 20.1.4.10 (Kategorien von Brüchen als Lokalisierung). *Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Rechtsoresystem S von Morphismen von $\mathcal{C}$ liefert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion*

$$\bar{\mathcal{B}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(X, Y)$$

zwischen der Menge der Äquivalenzklassen von Rechtsbrüchen und der Menge der Morphismen in der lokalisierten Kategorie.

Vorschau 20.1.4.11. Für Leser, die bereits die Kategorie der „Ind-Objekte“ einer vorgegebenen Kategorie 20.3.1.12 kennen, sei bemerkt, daß die ersten Zeilen des folgenden Beweises eine Bijektion zwischen $\bar{\mathcal{B}}(X, Y)$ und der Menge der Morphismen vom Ind-Objekt der von X ausgehenden S-Morphismen zum Ind-Objekt der von Y ausgehenden S-Morphismen liefert. In diesem Rahmen ist es dann offensichtlich, wie wir Äquivalenzklassen von Brüchen zu verknüpfen haben und daß wir so eine Kategorie erhalten, genauer eine volle Unterkategorie der Kategorie der Ind-Objekte.

Beweis. Zunächst überlegen wir uns, daß das Vorschalten eines S-Morphismus $Y \to D$ eine Bijektion $\bar{\mathcal{B}}(D, Z) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{B}}(Y, Z)$ induzieren muß. Die Surjektivität

dieser Abbildung folgt leicht aus der ersten Orebedingung, die es salopp gesprochen erlaubt, jeden Linksbruch zu einem Rechtsbruch umzuschreiben. Die Injektivität folgt ebenso leicht aus der zweiten Orebedingung. Dann erklären wir eine Verknüpfung $\bar{\mathcal{B}}(X,Y) \times \mathcal{B}(Y,Z) \to \bar{\mathcal{B}}(X,Z)$ dadurch, daß $([f,D,s],(g,E,t))$ abgebildet wird auf die Äquivalenzklasse eines Bruches der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \arrow[dr] & & Z \arrow[dl] \\
& D \arrow[dr] & & E \arrow[dl] & \\
& & F & &
\end{tikzcd}$$

mit $E \to F$ aus S und kommutierendem schiefen Quadrat. Die so gebildete Äquivalenzklasse ist unabhängig von der Wahl von F und E, denn wir können sie auch dadurch beschreiben, daß wir unserem $[g,E,t]$ erst sein Urbild in $\bar{\mathcal{B}}(D,Z)$ zuordnen und dann dessen Bild unter dem Vorschalten von $X \to D$ nehmen. Des weiteren erhalten wir dieselbe Äquivalenzklasse, wenn wir (f,D,s) durch einen gekürzten Bruch (f',D',s') ersetzen, denn das Vorschalten von $X \to D'$ liefert auch eine Bijektion $\bar{\mathcal{B}}(D',Z) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{B}}(Y,Z)$ und damit liefert das Vorschalten von $D' \to D$ eine Bijektion $\bar{\mathcal{B}}(D,Z) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{B}}(D',Z)$. Unsere Verknüpfung induziert mithin eine Verknüpfung $\bar{\mathcal{B}}(X,Y) \times \bar{\mathcal{B}}(Y,Z) \to \bar{\mathcal{B}}(X,Z)$. Nun zeigen wir, daß die Objekte von $\mathcal{C}$ mit den Morphismenmengen $\bar{\mathcal{B}}(X,Y)$ und der eben eingeführten Verknüpfung eine Kategorie bilden. Die Identitätsmorphismen sind hier unproblematisch, und die Assoziativität der Verknüpfung scheint mir auch recht offensichtlich durch Rechnen mit Repräsentanten. Aus der Konstruktion wird jedoch zusätzlich klar, daß für die eben konstruierte Kategorie $\bar{\mathcal{B}}$ der Funktor $\mathcal{C} \to \bar{\mathcal{B}}$, der die Identität ist auf Objekten und jeden Morphismus $f : X \to Y$ auf die Äquivalenzklasse $[f,X,\mathrm{id}_X]$ abbildet, dieselbe universelle Eigenschaft hat wie unsere Lokalisierung $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathcal{S}}$. □

20.1.4.12 (**Morphismen in einer Orelokalisierung**). Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S ein Linksoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$. In der Terminologie aus 17.7.1.14 liefert nach 20.1.4.10 die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\operatorname{colf} \mathcal{C}(D,Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QX,QY)$$

mit dem filtrierenden Kolimes über das System S_X aller S-Morphismen $s : D \to X$ nach X oder genauer über die filtrierende Kategorie S_X^{opp}.

20.1.4.13 (**Morphismen in einer Orelokalisierung**). Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S ein Linksoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$. In der Terminologie aus 17.7.1.14

liefert nach 20.1.4.12 die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\operatorname{colf} \mathcal{C}(D,Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QX,QY)$$

mit dem filtrierenden Kolimes über das System S_X^{opp} aller S-Morphismen $s : D \to X$ in das Objekt X. Ist hier S ein Oresystem, so erhalten wir sogar ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}_S(QX,QY) & \\
\operatorname{colf} \mathcal{C}(D,Y) \arrow[ur, "\sim"'] & & \operatorname{colf} \mathcal{C}(X,C) \arrow[ul, "\sim"] \\
 & \operatorname{colf} \mathcal{C}(D,C) \arrow[ul, "\sim"] \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

mit den filtrierenden Kolimites über das System aller S-Morphismen $s : D \to X$ in das Objekt X, das System aller S-Morphismen $s : Y \to C$ aus dem Objekt Y und das System aller Paare derartiger Morphismen. Um das zu sehen, verwendet man die Transitivität von Kolimites 17.7.1.34 zusammen mit der Erkenntnis, daß der zweite Kolimes auf dem Weg nach unten jeweils über ein konstantes System gebildet wird.

Satz 20.1.4.14. *Gegeben ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ mit einem volltreuen Rechtsadjungierten ist das System S der Morphismen in $\mathcal{C}$, die unter F zu Isomorphismen werden, ein Rechtsoresystem.*

20.1.4.15. Man mag sich als F den Funktor der Vervollständigung von der Kategorie der metrischen Räume in die Kategorie der vollständigen metrischen Räume denken. In diesem Fall ist S die Menge aller Isometrien mit dichtem Bild.

Beweis. Nach 20.1.3.9 hat jedes Objekt von $\mathcal{C}$ eine F-Rechtsentfaltung. In unserem Beispielfall wäre so eine Rechtsentfaltung eine Isometrie mit dichtem Bild in einen vollständigen metrischen Raum. Gegeben die durchgezogenen Pfeile im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, dashed, "t"] \\
X \arrow[r, dashed, "g"] & D
\end{tikzcd}$$

mit $s \in S$ finden wir D und die gestrichelten Pfeile mit $t \in S$, indem wir für $t : Y \to D$ eine Rechtsentfaltung von Y nehmen. Morphismen nach D sind dann dieselben in $\mathcal{C}$ und in $\mathcal{C}_S$ und in $\mathcal{C}_S$ finden wir offensichtlich ein g, daß unser Diagramm zum Kommutieren bringt. Das zeigt die erste Orebedingung, jeder Linksbruch läßt sich zu einem Rechtsbruch umschreiben. Gegeben $f, g \in \mathcal{C}(X,Y)$ und

$s \in S$ mit $fs = gs$ gilt weiter für jede Rechtsentfaltung $t : Y \to D$ bereits $tf = tg$. In der Tat gilt offensichtlich

$$fs = gs \Rightarrow Q(fs) = Q(gs) \Rightarrow Q(f) = Q(g) \Rightarrow Q(tf) = Q(tg) \Rightarrow tf = tg$$

mit dem letzten Schritt, da Morphismen nach D dieselben sind in $\mathcal{C}$ und in $\mathcal{C}_S$. Das zeigt die zweite Orebedingung. □

Definition 20.1.4.16. Ein multiplikatives System S von Morphismen einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **gesättigt**, wenn für einen beliebigen Morphismus f gilt: Gibt es Morphismen g, h mit $fg \in S$ und $hf \in S$, so folgt $f \in S$.

20.1.4.17. Der Begriff eines gesättigten Oresystems scheint mir für die Diskussion triangulierter Kategorien praktisch. Für einzelne der im folgenden diskutierten Konsequenzen dieser Eigenschaft sind jedoch auch schwächere Bedingungen ausreichend.

Beispiel 20.1.4.18. Das System aller Isomorphismen einer Kategorie ist gesättigt. Das Urbild eines gesättigten multiplikativen Systems unter einem Funktor ist stets wieder ein gesättigtes multiplikatives System.

Lemma 20.1.4.19. *Gegeben ein gesättigtes Oresystem S von Morphismen einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist S genau die Menge aller Morphismen von $\mathcal{C}$, die unter dem Lokalisierungsfunktor $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ Isomorphismen werden.*

Beweis. Gibt es für den Rechtsbruch $\mathrm{id}^{-1} f$ einen Rechtsbruch $s^{-1}a$ mit der Eigenschaft $s^{-1}a\,\mathrm{id}^{-1} f = \mathrm{id}$ in der Kategorie der Rechtsbrüche $\bar{\mathcal{B}}$, so gibt es b mit $baf = bs$ und $bs \in S$, also $(ba)f \in S$. Argumentiert man analog mit Linksbrüchen, so erkennt man, daß für jedes f, das in der Lokalisierung ein Isomorphismus wird, mit unserer Sättigungsbedingung 20.1.4.16 bereits $f \in S$ folgt. □

20.1.4.20. Lemma 20.1.4.19 impliziert insbesondere, daß jedes gesättigte Oresystem S die **Zwei-aus-Drei-Eigenschaft** hat: Sind Morphismen f, g, h gegeben mit $fg = h$ und gehören zwei der drei Morphismen f, g, h zu S, so auch der Dritte.

Satz 20.1.4.21 (**Orelokalisierung und volltreue Einbettungen**). *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem Rechtsoresystem S. Ist $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ eine volle Unterkategorie und $S' \subset S$ ein Rechtsoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}'$ mit der Eigenschaft, daß es für alle $s \in S$, die von einem Objekt von $\mathcal{C}'$ ausgehen, einen Morphismus h in $\mathcal{C}$ gibt mit $h \circ s \in S'$, so ist der offensichtliche Funktor ein volltreuer Funktor*

$$\mathcal{C}'_{S'} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathcal{C}_S$$

Beweis. Das erkennt man sofort an der Realisierung 20.1.4.10 der lokalisierten Kategorie als Kategorie von Brüchen. Formal kommt es von unserer Erkenntnis her, daß filtrierende Kolimites sich nicht ändern, wenn wir zu einem konfinalen Teilsystem übergehen. □

20.1.4.22. Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem Rechtsoresystem von Morphismen S, so lassen sich zwei Brüche $(f, E, r) \in \mathcal{B}(X, Y)$ und $(g, F, t) \in \mathcal{B}(W, Y)$ stets **auf einen Hauptnenner bringen**. Das folgt aus der Filtrierungseigenschaft 20.1.4.6 von S^Y, nach der wir Morphismen von Objekten $a : E \to D$, $b : F \to D$ so finden, daß gilt $ar = bt \in S$. Nennen wir diesen Morphismus $s : Y \to D$, so entstehen unsere beiden Brüche durch Kürzen aus Brüchen der Gestalt (f', D, s) und (g', D, s).

20.1.4.23 (**Übertragung additiver Strukturen auf Orelokalisierungen**). Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S ein Rechtsoresystem. Gegeben eine additive Struktur auf $\mathcal{C}$ im Sinne von 19.2.5.1 gibt es genau eine additive Struktur auf $\mathcal{C}_S$, für die der Lokalisierungsfunktor mit der additiven Struktur verträglich ist. Man addiert dazu eben Brüche, indem man sie auf einen Hauptnenner bringt, anders geht es auch nicht, und prüft, daß die Verknüpfung biadditiv bleibt. Dasselbe gilt für die Lokalisierung nach Linksoresystemen. Besitzt $\mathcal{C}$ nur ein Objekt, so ist diese Konstruktion die sogenannte **Orelokalisierung** von nicht notwendig kommutativen Ringen.

Proposition 20.1.4.24 (**Koprodukte in Orelokalisierungen**). *Gegeben $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S ein Rechtsoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$ vertauscht der Funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ mit dem Bilden von Kolimites über beliebige endliche Diagramme alias Darstellungen endlicher Köcher.*

20.1.4.25. Insbesondere vertauscht der Übergang zur Lokalisierung unter diesen Annahmen mit endlichen Koprodukten.

Beweis. Seien $\mathcal{I}$ ein endlicher Köcher und $C \in \operatorname{Car}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ ein Diagramm dieser Gestalt in $\mathcal{C}$. Gegeben $X \in \mathcal{C}$ bezeichne $\operatorname{konst}(X) \in \operatorname{Car}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ das zugehörige konstante Diagramm. Ich behaupte, daß die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\operatorname{colf}_{Y \xrightarrow{S} D} \operatorname{Car}(\mathcal{I}, \mathcal{C})(C, \operatorname{konst}(D)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Car}(\mathcal{I}, \mathcal{C}_S)(C, \operatorname{konst}(Y))$$

induziert. Die Surjektivität zeigt man, indem man Brüche von den C_i nach Y auf einen Hauptnenner bringt und den noch für alle Pfeile in $\mathcal{I}$ hinreichend vergrößert. Die Injektivität ist eh klar und die Proposition folgt unmittelbar. □

Proposition 20.1.4.26 (**Orelokalisierung additiver Kategorien**). *Ist $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie und S ein Rechtsoresystem von Morphismen, so ist auch $\mathcal{C}_S$ eine additive Kategorie und $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ ist additiv.*

Beweis. Das folgt sofort aus der Existenz einer additiven Struktur 20.1.4.23 in der Lokalisierung, die mit dem Lokalisierungsfunktor verträglich ist, und der Existenz endlicher Koprodukte in der Lokalisierung sowie der Verträglichkeit des Lokalisierungsfunktors mit endlichen Koprodukten 20.1.4.24. □

Übungen

Übung 20.1.4.27 (**Entfaltung und Spaltung, Variante**). Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S ein Rechtsoresystem. Genau dann ist $I \in \mathcal{C}$ ein S-rechtsentfaltetes Objekt im Sinne von 20.1.3.7, wenn es für jeden S-Morphismus $s : I \to C$ einen Morphismus $g : C \to I$ gibt mit $gf = \mathrm{id}_I$. Hinweis: Daß Rechtsentfaltung Spaltungen liefert, wissen wir bereits aus 20.1.3.13. Unter der Annahme der Spaltungen ist umgekehrt id_I konfinal in S^I und die Beschreibung 20.1.4.12 von Morphismen in $\mathcal{C}_S$ als Kolimes zeigt die andere Richtung.

Übung 20.1.4.28. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S ein Rechtsoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$. Genau dann liefern Morphismen $f, g : X \to Y$ aus $\mathcal{C}$ denselben Morphismus in $\mathcal{C}_S$, wenn es $s \in S$ gibt mit $sf = sg$.

Übung 20.1.4.29 (**Liften kommutativer Quadrate**). Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S ein Rechtsoresystem von Morphismen. Gegeben ein kommutatives Quadrat $fq = pg$ in $\mathcal{C}_S$ mit den horizontalen Morphismen p, q in $\mathcal{C}$ und eine Darstellung von g als Rechtsbruch $g = t^{-1}b$ finden wir stets eine Darstellung von f als Rechtsbruch $f = s^{-1}a$ und einen Morphismus r wie im Diagramm angedeutet mit $rb = aq$ und $rt = sp$, so daß also im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "q"] \arrow[d, dashed, "b"'] \arrow[dd, bend right=60, "g"'] & X \arrow[d, dashed, "a"] \arrow[dd, bend left=60, "f"] \\
E \arrow[r, dashed, "r"] & D \\
Z \arrow[r, "p"] \arrow[u, dotted, "t"] & Y \arrow[u, dotted, "s"']
\end{tikzcd}$$

die beiden Quadrate kommutieren. Das wird gebraucht für das Bilden von Quotienten triangulierter Kategorien.

Übung 20.1.4.30 (**Oresysteme in Produktkategorien**). Gegeben Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ mit multiplikativen Systemen S, T ist auch $S \times T$ ein multiplikatives System in $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$. Sind S und T rechtsore beziehungsweise linksore, so auch $S \times T$. Sind S und T gesättigt, so auch $S \times T$.

Übung 20.1.4.31. Wir betrachten in der Kategorie Ab der abelschen Gruppen die Menge $S := \{n\,\mathrm{id}_A \mid A \in \mathrm{Ab}, n \in \mathbb{Z}\backslash 0\}$ aller Vielfachen von Identitätsmorphismen mit von Null verschiedenen ganzen Zahlen. Man betrachte andererseits die Kategorie $\mathrm{Ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ mit abelschen Gruppen als Objekten und Morphismen $(\mathrm{Ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})(A, B) := \mathrm{Ab}(A, B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ und der hoffentlich offensichtlichen Verknüpfung von Morphismen. Man zeige, daß der offensichtliche Funktor ein Isomorphimus von Kategorien $\mathrm{Ab}_S \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ist.

20.1.5 Quotienten abelscher Kategorien*

Definition 20.1.5.1. Seien $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $\mathcal{K}$ eine Menge von Objekten von $\mathcal{A}$. Ein **Quotient von $\mathcal{A}$ nach** $\mathcal{K}$ ist ein Paar $(\mathcal{A}/\mathcal{K}, \mathrm{can})$ bestehend aus einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ und einem Funktor $\mathrm{can} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{K}$ derart, daß gilt:

1. Jedes Objekt aus $\mathcal{K}$ wird unter can ein Nullobjekt in $\mathcal{A}/\mathcal{K}$;

2. Ist $F : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ ein exakter Funktor in eine weitere abelsche Kategorie, der alle Objekte aus $\mathcal{K}$ zu Null macht, so gibt es genau einen Funktor $\tilde{F} : \mathcal{A}/\mathcal{K} \to \mathcal{D}$ mit $F = \tilde{F} \circ \mathrm{can}$.

20.1.5.2. Wir zeigen gleich in 20.1.5.4, daß solch ein Quotient stets existiert. Wenn er existiert, ist er offensichtlich in der üblichen Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Ist $F : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ ein exakter Funktor in eine weitere abelsche Kategorie, der Objekte aus $\mathcal{K}$ zu Null macht und für den der induzierte Funktor eine Äquivalenz von Kategorien $\tilde{F} : \mathcal{A}/\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$ ist, so nennen wir den Funktor F einen **Quotientenfunktor** oder genauer, wenn Verwechslungen mit Quotientenfunktoren im Kontext triangulierter Kategorien zu befürchten sind, einen **exakten Quotientenfunktor**.

20.1.5.3. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Eine Menge von Objekten $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ heißt eine **Serre'sche Unterkategorie**, wenn sie alle Nullobjekte enthält und für jede kurze exakte Sequenz von $\mathcal{A}$ die Mitte zu $\mathcal{K}$ gehört genau dann, wenn beide Enden zu $\mathcal{K}$ gehören. Die kleinste Serre'sche Unterkategorie, die eine gegebene Menge von Objekten enthält, heißt die **von diesen Objekten erzeugte Serre'sche Unterkategorie**. Sie kann explizit beschrieben werden als die Menge aller Objekte, die eine endliche Filtrierung besitzen derart, daß alle Subquotienten dieser Filtrierung isomorph sind zu Subquotienten der erzeugenden Objekte.

Satz 20.1.5.4 (Quotienten abelscher Kategorien). *1. Gegeben eine Menge von Objekten einer abelschen Kategorie existiert stets ein Quotient von besagter Kategorie nach besagter Menge von Objekten;*

2. Genau dann wird ein Objekt vom zugehörigen Quotientenfunktor annulliert, wenn es in der von unserer Menge von Objekten erzeugten Serre'schen Unterkategorie liegt;

3. Jede kurze exakte Sequenz in der Quotientenkategorie kommt her von einer kurzen exakten Sequenz in der ursprünglichen Kategorie;

4. Jeder Quotientenfunktor ist ein Lokalisierungsfunktor.

Ergänzung 20.1.5.5. Gegeben ein Universum $\mathfrak{U}$ mit $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$ und eine abelsche $\mathfrak{U}_\in$-$\vec{\mathfrak{U}}_\in$-Kategorie ist auch jeder Quotient eine $\mathfrak{U}_\in$-$\vec{\mathfrak{U}}_\in$-Kategorie.

20.1.5.6. Wir werden den ersten und den letzten Teil zusammen durch eine explizite Konstruktion eines Quotienten als Lokalisierung zeigen und führen dazu zunächst noch weitere Begriffe ein.

Proposition 20.1.5.7. *Jede Lokalisierung einer abelschen Kategorie an einem Oresystem von Morphismen ist wieder eine abelsche Kategorie.*

Beweis. Unsere Lokalisierung ist additiv nach 20.1.4.26 und es bleibt nur, die Exaktheit der Lokalisierung zu zeigen. Der Kern eines Morphismus in unserer ursprünglichen Kategorie ist gerade sein Egalisator mit dem Nullmorphismus und bleibt deshalb nach 20.1.4.24 der Kern in der Lokalisierung. Der Kern eines Bruches ist offensichtlich schlicht der Kern seines Zählers. Damit ist die Existenz von Kernen und dual von Kokernen in der Lokalisierung gezeigt. Die Gleichheit von Bild und Kobild muß nur für den Zähler eines jeden Bruches gezeigt werden und ist damit auch klar. □

Proposition 20.1.5.8. *Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ eine Serre'sche Unterkategorie, so ist das System aller Morphismen mit Kern und Kokern in $\mathcal{K}$ ein Oresystem in $\mathcal{A}$.*

Beweis. Die Identitäten gehören natürlich zu unserem System. Um die Stabilität unter Verknüpfung zu zeigen wende man auf das kartesische Quadrat im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \ker gf & \to & \ker g & & \end{array}$$

das Lemma 19.2.3.13 über die Gleichheit der Kerne paralleler Pfeile auf die horizontalen Pfeile an und verwende das duale Argument für cok. Die Orebedingung folgt durch kartesische beziehungsweise kokartesische Ergänzung mit 20.1.5.9 und die letzte Bedingung erkennt man, da $t \circ f = t \circ g$ gleichbedeutend ist zu $t \circ (f - g) = 0$ und das zu $\operatorname{im}(f - g) \in \mathcal{K}$, einer selbstdualen Bedingung. □

Beweis von 20.1.5.4. Wir zeigen zunächst den ersten und den letzten Teil. Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ eine Serre'sche Unterkategorie, so notieren wir

$$\mathcal{A}/\mathcal{K}$$

die Lokalisierung von $\mathcal{A}$ am Oresystem aller Morphismen mit Kern und Kokern in $\mathcal{K}$ und nennen sie die **Quotientenkategorie**. Ist allgemeiner $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ eine beliebige Menge von Objekten, so betrachten wir die davon erzeugte Serre'sche Unterkategorie $\langle \mathcal{K} \rangle \subset \mathcal{A}$ und setzen $\mathcal{A}/\mathcal{K} = \mathcal{A}/\langle \mathcal{K} \rangle$. Der Funktor $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{K}$ hat

dann offensichtlich die von einem Quotientenfunktor geforderte universelle Eigenschaft und Teil 1 sowie Teil 4 des Satzes sind bewiesen.

2. Es gilt, für jede Serre'sche Unterkategorie $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ die Identität $\mathcal{K} = \ker(\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K})$ zu zeigen. Nur die Inklusion $\supset$ ist problematisch. Haben wir jedoch ein Objekt $A \in \mathcal{A}$, das verschwindet in $\mathcal{A}/\mathcal{K}$, so ist die Identität auf A die Nullabbildung in $\mathcal{A}/\mathcal{K}$, der Bruch $(\mathrm{id}, A, \mathrm{id})$ läßt sich also erweitern zu $(s, D, 0)$ als da heißt, es gibt ein D derart, daß die Nullabbildung $D \to A$ zu S gehört. Daraus folgt sofort $A \in \mathcal{K}$.

3. Sei $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ unsere kurze exakte Sequenz in $\mathcal{A}/\mathcal{K}$. Wir schreiben den ersten Morphismus als Bruch, betrachten dessen Zähler f und nehmen in $\mathcal{A}$ die kurze exakte Sequenz $\operatorname{im} f \hookrightarrow A \twoheadrightarrow \operatorname{cok} f$. □

Proposition 20.1.5.9. *Jedes kartesische Diagramm in einer abelschen Kategorie induziert Isomorphismen zwischen den Kernen paralleler Pfeile und Monomorphismen zwischen den Kokernen paralleler Pfeile.*

20.1.5.10. Die erste Aussage ist ein Spezialfall von Übung 19.2.3.13. Wir beweisen die zweite Aussage zu Ende dieses Abschnitts im Anschluß an die Behandlung von zwei Spezialfällen. Im Fall von abelschen Gruppen prüft man die zweite Aussage auch leicht explizit.

Lemma 20.1.5.11. *Ist in einem kartesischen Diagramm in einer abelschen Kategorie ein Ursprungspfeil epi, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem Faserprodukt.*

20.1.5.12. Ist ein Ursprungspfeil mono, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem Faserprodukt. Das gilt sogar in beliebigen Kategorien, vergleiche 19.2.3.12.

Beweis. Wir notieren unser kartesisches Diagramm

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & M \arrow[d, "f"] \\ N \arrow[r, two heads, "g"] & Q \end{tikzcd}$$

Ersetzen wir M durch $M_0 := \operatorname{im}(P \to M)$, so bleibt unser Diagramm kartesisch. Jetzt betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} M_0 \times N \arrow[r, hook] \arrow[d] & M \times N \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \operatorname{cok} \times N \arrow[d] \\ Q \arrow[r, equal] & Q \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Die nichttrivialen Vertikalen darin seien durch die Zeilenmatrix $(f, -g)$ erklärt. Die Kerne der beiden linken Vertikalen sind dann gerade die beiden Faserprodukte $M_0 \times_Q N$ beziehungsweise $M \times_Q N$ und wir folgern aus der langen exakten Homologiesequenz $\operatorname{cok} \times N = 0$, also $\operatorname{cok} = 0$ und $M = M_0$. □

Lemma 20.1.5.13. *Ein kartesisches Diagramm in einer präabelschen Kategorie, in dem zwei gegenüberliegende Pfeile Monomorphismen sind, induziert einen Monomorphismus zwischen den Kokernen dieser Pfeile.*

Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} M & \hookrightarrow & P & \twoheadrightarrow & \operatorname{cok} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N & \hookrightarrow & Q & \twoheadrightarrow & \operatorname{cok} \end{array}$$

In diesem Diagramm sieht man leicht, daß $M \hookrightarrow P$ der Kern der Verknüpfung $P \hookrightarrow Q \twoheadrightarrow \operatorname{cok}$ ist. Damit ist aber $P \twoheadrightarrow \operatorname{cok}$ in der oberen Horizontalen das Bild dieser Verknüpfung und damit ist die rechte Vertikale ein Monomorphismus. □

Beweis von 20.1.5.9. Nun zeigen wir die Proposition. Faktorisieren wir einen Ursprungspfeil in mono ∘ epi, so ist die induzierte Faktorisierung des gegenüberliegenden Pfeils auch eine Faktorisierung in mono ∘ epi wegen der ersten Aussage der Proposition und 20.1.5.11. Wir dürfen also annehmen, daß wir die Kokerne von zwei gegenüberliegenden Monomorphismen zu vergleichen haben, und das erledigt 20.1.5.13. □

Beispiel 20.1.5.14 (**Restriktion abelscher Garben als Quotientenfunktor**). Der Rückzug abelscher Garben unter einer topologischen Einbettung ist stets ein Quotientenfunktor. In der Tat hat er nach 19.4.3.20 einen volltreuen Rechtsadjungierten und ist damit nach 20.1.3.9 schon einmal ein Lokalisierungsfunktor. Die zu lokalisierenden Morphismen sind dann offensichtlich genau die, deren Kern und Kokern unter dem Rückzug zu Null werden.

Beispiel 20.1.5.15. Der Rückzug von $\mathcal{O}_X$-Moduln unter einer offenen Einbettung von Schemata ist stets ein Quotientenfunktor. Dasselbe gilt für den Rückzug von quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln. Das Argument ist dasselbe wie in 20.1.5.14.

Beispiel 20.1.5.16. Der Rückzug von kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln unter einer offenen Einbettung von noetherschen Schemata ist stets ein Quotientenfunktor. Das kann man etwa aus dem in 20.1.5.15 behandelten Fall quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Moduln folgern, indem man Proposition 20.1.4.21 über die Lokalisierung voller Unterkategorien anwendet. Man beachte, daß der Rückzug in diesem Fall im allgemeinen keinen Adjungierten mehr besitzt: Der Vorschub eines kohärenten $\mathcal{O}_U$-Moduls unter einer offenen Einbettung $U \Subset X$ ist meist nicht mehr kohärent, sondern nur noch quasikohärent.

Beispiel 20.1.5.17. Gegeben ein Ring R mit einem Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ bilden in der Kategorie aller R-Moduln die von einer Potenz von $\mathfrak{m}$ annullierten Moduln eine Serre'sche Unterkategorie. Gegeben ein R-Modul M gilt für die Multiplikation $\mu : \mathfrak{m} \otimes_R M \to M$ offensichtlich $\mathfrak{m} \operatorname{cok} \mu = 0 = \mathfrak{m} \ker \mu$, folglich ist μ ein Isomorphismus in besagter Quotientenkategorie.

Beispiel 20.1.5.18. Gegeben ein Ring R mit einem Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ bilden von $\mathfrak{m}$ anullierten Moduln eine Serre'sche Unterkategorie. Die Quotientenkategorie heißt dann die Kategorie der **Fast-Moduln** von $(R, \mathfrak{m})$. Man kann in diesem Fall leicht zeigen, daß der Funktor $M \mapsto \mathfrak{m} \otimes_R \mathfrak{m} \otimes_R M$ über den Quotienten faktorisiert. Mit mehr Mühe scheint man sogar zeigen zu können, daß er einen volltreuen Funktor von der Quotientenkategorie in die ursprüngliche Kategorie von Moduln induziert.

20.1.5.19. Ist $R \supset \mathfrak{m}$ ein Ring mit einem Ideal und gilt $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$, so erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathfrak{m} \otimes_R \mathfrak{m} \otimes_R M \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathfrak{m} \otimes_R \mathfrak{m}$$

durch die Vorschrift $a \otimes b \otimes c \mapsto ab \otimes c = a \otimes bc$. Um das zu zeigen, gehen wir aus von der Multiplikation $\mu : \mathfrak{m} \otimes_R m \twoheadrightarrow \mathfrak{m}$. Sie führt zu einer rechtsexakten Sequenz $\mathfrak{m} \otimes_R \ker \mu \to \mathfrak{m} \otimes_R \mathfrak{m} \otimes_R M \twoheadrightarrow \mathfrak{m} \otimes_R \mathfrak{m}$ und es reicht zu zeigen, daß die erste Abbildung Null ist. Aber gegeben $\sum a_i \otimes b_i \in \ker \mu$ und $c \in \mathfrak{m}$ finden wir in der Tat eine Identität der Form $c = \sum \alpha_\nu \beta_\nu$ mit $\alpha_\nu, \beta_\nu \in \mathfrak{m}$ und erhalten

$$c \otimes \sum a_i \otimes b_i = \sum \alpha_\nu \beta_\nu \otimes a_i \otimes b_i = \sum \alpha_\nu \otimes \beta_\nu \otimes a_i b_i = 0$$

Lemma 20.1.5.20. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ eine Serre'sche Unterkategorie. Gegeben $M, N \in \mathcal{A}$ liefert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion*

$$\operatorname{colf} \mathcal{A}(U, Q) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{A}/\mathcal{K})(M, N)$$

Der Kolimes ist dabei zu bilden über alle Unterobjekte U von M mit $M/U \in \mathcal{K}$ und über alle Quotienten Q von N mit $\ker(N \twoheadrightarrow Q) \in \mathcal{K}$.

Beweis. Ich gebe nur die inverse Abbildung an und überlasse dem Leser den Rest des Beweises. Für einen Bruch $M \leftarrow D \to N$ bilden wir dazu den pushout

$$\begin{array}{ccc} D & \to & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \to & P \end{array}$$

und betrachten die induzierte Abbildung auf den Bildern U und Q der vertikalen Morphismen. $\square$

Lemma 20.1.5.21. *Ggeben $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ eine Serre'sche Unterkategorie liefert der Quotientenfunktor auf den Isomorphieklassen einfacher Objekte eine Injektion*

$$(\operatorname{Irr}\mathcal{A})\backslash(\operatorname{Irr}\mathcal{K}) \hookrightarrow \operatorname{Irr}(\mathcal{A}/\mathcal{K})$$

Ist $\mathcal{A}$ längenendlich, so ist auch $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ längenendlich und der Quotientenfunktor liefert sogar eine Bijektion

$$(\operatorname{Irr}\mathcal{A})\backslash(\operatorname{Irr}\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Irr}(\mathcal{A}/\mathcal{K})$$

Beweis. Einfache Objekte können dadurch charakterisiert werden, daß jeder Morphismus in besagtes Objekt surjektiv oder Null ist. Nach 20.1.5.20 werden damit einfache Objekte unter einem Quotientenfunktor stets einfach oder Null, und nichtisomorphe Objekte, die nicht zu Null werden, bleiben nichtisomorph. Mit 20.1.5.4.2 erkennen wir dann schon einmal, daß ein Quotientenfunktor stets eine Injektion $(\operatorname{Irr}\mathcal{A})\backslash(\operatorname{Irr}\mathcal{K}) \hookrightarrow \operatorname{Irr}(\mathcal{A}/\mathcal{K})$ liefert. Ist aber $A \in \mathcal{A}$ gegeben mit einfachem Bild in $\mathcal{A}/\mathcal{K}$, und ist die Länge von A endlich, so muß schon ein einfacher Subquotient von A dasselbe Bild haben in $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ wie A selbst. Das zeigt die Surjektivität im längenendlichen Fall. □

Ergänzung 20.1.5.22. Besitzt ein Injektiver von $\mathcal{A}$ kein von Null verschiedenes Unterobjekt aus $\mathcal{K}$, so bleibt er injektiv in $\mathcal{A}/\mathcal{K}$. Besitzt ein Objekt aus $\mathcal{A}$ kein von Null verschiedenes Unterobjekt aus $\mathcal{K}$, so gilt dasselbe für jede injektive Hülle dieses Objekts.

Ergänzung 20.1.5.23. Bei [Gab62] wird die Quotientenkategorie sogar definiert dadurch, daß ihre Objekte dieselben sein sollen wie die Objekte der ursprünglichen Kategorie, ihre Morphismen jedoch gegeben werden durch die direkten Limites aus Lemma 20.1.5.20. Man muß dann allerdings einige Arbeit investieren, um die Verknüpfung von Morphismen zu erklären und die Axiome einer abelschen Kategorie zu prüfen.

Ergänzung 20.1.5.24. Die Links- beziehungsweise Rechtsadjungierten eines Quotientenfunktors nennen wir, wenn sie existieren, **Approximationen**. Aus 20.1.3.9 folgt, daß Approximationen stets volltreu sind. Insbesondere ist nach 16.4.3.9 also die Verknüpfung eines Approximationsfunktors mit dem Quotientenfunktor äquivalent zum Identitätsfunktor unter der Adjunktionstransformation. Bezeichnet Q den Quotientenfunktor und L beziehungsweise R seine Adjungierten, so liefern die kanonischen Abbildungen Surjektionen $M \twoheadrightarrow RQM$ und Injektionen $LQM \hookrightarrow M$. Falls L existiert, kann genauer LQM beschrieben werden als das größte Unterobjekt von M ohne echten Quotienten aus $\mathcal{K}$ und RQM als der Quotient von M nach dem größten Unterobjekt aus $\mathcal{K}$. Man erkennt das aus der Beschreibung der Quotientenkategorie in 20.1.5.20. Es steht in krassem Gegensatz zu 19.2.3.11, aber Q ist ja auch alles andere als treu.

Satz 20.1.5.25 (**Verallgemeinerte Morita-Äquivalenz**). *Ist $\mathcal{A}$ eine längenendliche Kategorie und $P \in \mathcal{A}$ ein projektives Objekt, so ist der Funktor $\mathcal{A}(P,\ )$ ein Quotientenfunktor*

$$\mathcal{A}(P,\ ) : \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathrm{Modf}\text{-}\,\mathcal{A}(P)$$

Beweis. Sicher ist $\mathcal{K} := \{M \in \mathcal{A} \mid \mathcal{A}(P, M) = 0\}$ eine Serre'sche Unterkategorie und nach 20.1.5.20 liefert der Quotientenfunktor $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K}$ für alle $M \in \mathcal{A}$ Bijektionen $\mathcal{A}(P, M) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{A}/\mathcal{K})(P, M)$. Nun müssen wir nur noch unsere abstrakte Morita-Äquivalenz 8.7.5.3 auf die Quotientenkategorie anwenden. □

Beispiel 20.1.5.26. Gegeben ein Ring A und ein Idempotentes $e \in A$ liefert die Multiplikation mit e nach in etwa demselben Argument wie beim Beweis von 20.1.5.25 einen Quotientenfunktor

$$\begin{array}{rccc} Q: & A\text{-Mod} & \to & eAe\text{-Mod} \\ & M & \mapsto & eM \end{array}$$

Die Multiplikation und das Auswerten bei e liefern jeweils Isomorphismen $eA \otimes_A M \xrightarrow{\sim} eM$ und $\mathrm{Hom}_A(Ae, M) \xrightarrow{\sim} eM$. Mit 7.2.8.1 erhalten wir demnach einen Linksadjungierten sowie einen Rechtsadjungierten von Q vermittels der Bildungen

$$LN = Ae \otimes_{eAe} N \quad \text{sowie} \quad RN = \mathrm{Hom}_{eAe}(eA, N)$$

Ergänzung 20.1.5.27. Selbst bei der fünfdimensionalen Köcheralgebra gilt nicht, daß die Multiplikation einen Isomorphismus $Ae \otimes_{eAe} eA \xrightarrow{\sim} AeA$ induziert. Der durch den Bimodul AeA gegebene Hom-Funktor wird für einen artinschen Ring A bei [KM03] kategorientheoretisch beschrieben als „Nimm die größtmögliche Erweiterung durch von e annullierte Einfache und teile danach soviel wie möglich von Einfachen dieser Sorte weg“. Dort heißt diese Konstruktion eine **partielle Approximation**.

20.2 Triangulierte und derivierte Kategorien

20.2.1 Abbildungskegel in Homotopiekategorien

20.2.1.1. Ich erinnere an 17.5.7.11, wo wir für einen Komplex $X = (X^n, d_X^n)$ mit $d_X^n : X^n \to X^{n+1}$ den Komplex $[1]X$ definiert hatten, indem wir den Komplex um Eins gegen die Richtung der Pfeile verschieben, in Formeln $([1]X)^n := X^{n+1}$, und die Randoperatoren mit Minuszeichen versehen, in Formeln

$$d_{[1]X}^n := -d_X^{n+1}$$

Jede Kettenabbildung $u : X \to Y$ liefert in offensichtlicher Weise eine Kettenabbildung $u : [1]X \to [1]Y$, hier fügen wir keine Vorzeichen ein. Im Fall eines Komplexes X von abelschen Gruppen haben wir schlicht $[1]X = \mathbb{Z}[1] \otimes X$.

Definition 20.2.1.2. Seien $\mathcal{I}$ eine additive Kategorie und $\mathrm{Hot}_{\mathcal{I}}$ die Homotopiekategorie der Komplexe in $\mathcal{I}$.

1. Ein **Dreieck in** $\mathrm{Hot}_{\mathcal{I}}$ ist die Vorgabe von Objekten und Morphismen der Gestalt
$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} [1]X$$

2. Ein **Morphismus von einem Dreieck in ein weiteres Dreieck** ist ein Tripel von Morphismen (f, g, h) derart, daß das folgende Diagramm mit unseren beiden Dreiecken in den Zeilen kommutiert:
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & {[1]X} \arrow[d, "{[1]f}"'] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & {[1]X'} \end{tikzcd}$$

3. Ein Dreieck in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{I}}$ heißt ein **ausgezeichnetes Dreieck**, englisch **distinguished triangle**, französisch **triangle distingué**, wenn es isomorph ist zu einem Dreieck der Gestalt
$$X \xrightarrow{u} Y \to \mathrm{K}(u) \to [1]X$$
mit u einer Kettenabbildung, $\mathrm{K}(u)$ dem Abbildungskegel von u, gegeben durch $\mathrm{K}(u)^n := X^{n+1} \oplus Y^n$ mit $\partial_{\mathrm{K}} : (x, y) \mapsto (-\partial_X(x), u(x) + \partial_Y(y))$ und als weiteren Morphismen der offensichtlichen Injektion und Projektion $Y \to \mathrm{K}(u) \to [1]X$.

20.2.1.3. Die Beziehung zwischen dem hier eingeführten algebraischen Abbildungskegel und dem topologischen Abbildungskegel aus 17.3.4.1 diskutieren wir in 17.3.4.6. Kurz gesagt konstruieren wir dort für jede stetige Abbildung $f : Z \to X$ eine ausgezeichnete funktorielle Homotopieäquivalenz

$$\tilde{\mathrm{S}}(\mathrm{K}(f)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Keg}(\tilde{\mathrm{S}}f)$$

20.2.1.4. Sei $\mathcal{I}$ eine additive Kategorie. Unsere Konstruktion des Abbildungskegels liefert einen Funktor von der Kategorie $\mathrm{Ket}^{\downarrow}_{\mathcal{I}}$ der Morphismen von Komplexen in die Kategorie der Dreiecke in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{I}}$, ja sogar in die analog definierte Kategorie der Dreiecke in $\mathrm{Ket}_{\mathcal{I}}$.

20.2.1.5. Ein Dreieck, das zu einem ausgezeichneten Dreieck wird, wenn wir alle drei Morphismen durch ihre Negativen ersetzen, heißt **antiausgezeichnet**.

Proposition 20.2.1.6 (**Drehen von ausgezeichneten Dreiecken**). *Sei $\mathcal{I}$ eine additive Kategorie. Ist $X \xrightarrow{u} Y \to Z \to [1]X$ ein ausgezeichnetes Dreieck in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{I}}$, so ist auch $Y \to Z \to [1]X \xrightarrow{-u} [1]Y$ ein ausgezeichnetes Dreieck in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{I}}$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit hat unser erstes Dreieck die Gestalt

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\alpha} \mathrm{K}(u) \xrightarrow{\beta} [1]X$$

mit α, β den kanonischen Abbildungen. Es gilt also, eine Homotopieäquivalenz $\psi : K(\alpha) \xrightarrow{\sim} [1]X$ anzugeben derart, daß kommutiert

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{K}(u) & \to & \mathrm{K}(\alpha) & \to & [1]Y \\ \| & & \| & & \psi\downarrow & & \| \\ Y & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{K}(u) & \to & [1]X & \xrightarrow{-u} & [1]Y \end{array}$$

Per definitionem haben wir $\mathrm{K}(\alpha)^n = Y^{n+1} \oplus \mathrm{K}(u)^n = Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n$ und der Randoperator wird gegeben durch die Matrix

$$\partial_{\mathrm{K}(\alpha)} = \begin{pmatrix} -\partial_Y & 0 \\ \alpha & \partial_{\mathrm{K}(u)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_Y & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_X & 0 \\ \mathrm{id} & u & \partial_Y \end{pmatrix}$$

Wir nehmen nun $\psi = (0, \mathrm{id}, 0)$ und erhalten offensichtlich eine Kettenabbildung derart, daß das mittlere Quadrat kommutiert. In die andere Richtung nehmen wir $\phi = (-u, \mathrm{id}, 0)^\top : [1]X \to \mathrm{K}(\alpha)$ und erkennen, daß ϕ eine Kettenabbildung ist und daß mit ϕ nach oben statt ψ nach unten das rechte Quadrat kommutiert. Offensichtlich gilt $\psi\phi = \mathrm{id}$ auf $[1]X$. Wir haben gewonnen, wenn wir die Homotopie $\phi\psi \simeq \mathrm{id}$ zeigen. Dazu muß man nur prüfen, daß für

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathrm{K}(\alpha)^{n+1} \to \mathrm{K}(\alpha)^n$$

die Gleichung $\partial s + s\partial = \mathrm{id} - \phi\psi$ erfüllt ist. $\square$

Proposition 20.2.1.7 (Morphismen von Dreiecken). *Sei $\mathcal{I}$ eine additive Kategorie. Gegeben ein kommutatives Diagramm in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{I}}$ der Gestalt*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r] & {[1]X} \arrow[d, "f"'] \\ \hat{X} \arrow[r] & \hat{Y} \arrow[r] & \hat{Z} \arrow[r] & {[1]\hat{X}} \end{tikzcd}$$

mit ausgezeichneten Dreiecken als Zeilen gibt es ein $h : Z \to \hat{Z}$ derart, daß (f, g, h) ein Morphismus von Dreiecken wird.

20.2.1.8. Dieses h ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Unter geeigneten Zusatzannahmen gilt das aber doch, vergleiche 20.2.3.8. In Übung 20.2.2.12 dürfen Sie zeigen, daß mit f und g auch h ein Isomorphismus sein muß.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß beide Dreiecke die Standarddreiecke für u beziehungsweise $\hat{u}$ sind mit $Z = \mathrm{K}(u)$ und $\hat{Z} = \mathrm{K}(\hat{u})$. Sei $s^n : X^n \to \hat{Y}^{n-1}$ eine Homotopie, die die Kommutativität des ersten Quadrats liefert, also $sd + ds = gu - \hat{u}f$. Wir behaupten, daß

$$h = \begin{pmatrix} f & 0 \\ s & g \end{pmatrix} : \mathrm{K}(u) \to \mathrm{K}(\hat{u})$$

eine Kettenabbildung ist und daß mit diesem h die beiden anderen Quadrate sogar kommutieren, ohne daß man zu Homotopieklassen übergehen muß. Diese Rechnung überlassen wir dem Leser. $\square$

20.2.1.9. Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ liefert das Bilden der Kohomologie eines Komplexes Funktoren $\mathcal{H}^i : \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$ und wir haben $\mathcal{H}^0([i]X) = \mathcal{H}^i X$ für beliebiges $X \in \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$.

Lemma 20.2.1.10 (Kohomologiesequenz eines ausgezeichneten Dreiecks). *Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $X \to Y \to Z \to [1]X$ ein ausgezeichnetes Dreieck in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$, so erhalten wir mit den natürlichen Abbildungen eine lange exakte Sequenz auf der Kohomologie*

$$\ldots \to \mathcal{H}^{q-1}Z \to \mathcal{H}^q X \to \mathcal{H}^q Y \to \mathcal{H}^q Z \to \mathcal{H}^{q+1}X \to \ldots$$

Beweis. Da wir nach 20.2.1.6 Dreiecke drehen können, reicht es, die Exaktheit von $\mathcal{H}^0 Y \to \mathcal{H}^0 Z \to \mathcal{H}^0[1]X$ zu zeigen. Dazu dürfen wir ausgehen von einem Dreieck der Gestalt $X \xrightarrow{u} Y \to \mathrm{K}(u) \to [1]X$, und dann haben wir schlicht einen Ausschnitt der langen exakten Kohomologiesequenz zur kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen $Y \hookrightarrow \mathrm{K}(u) \twoheadrightarrow [1]X$ vor uns. $\square$

20.2.2 Triangulierte Kategorien

Definition 20.2.2.1. Eine **$\mathbb{Z}$-Kategorie** ist eine Kategorie $\mathcal{A}$ mitsamt einem Automorphismus $[1] : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$. Mit Automorphismus meine ich einen Isomorphismus der Kategorie zu sich selbst, nicht etwa bloß eine Äquivalenz von Kategorien.

Vorschau 20.2.2.2. Es gibt durchaus relevante Situationen, in denen man die hier entwickelten Begriffsbildungen auf den Fall erweitern muß, daß unsere Verschiebung $[1] : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ nur eine Äquivalenz von Kategorien ist. Allgemeiner wir man auch Kategorien mit einer Operation allgemeinerere Gruppen erklären wollen. Das alles weckt jedoch Elefanten der Notation, die ich lieber schlafen lasse.

Definition 20.2.2.3. Unter einem **Dreieck** in einer $\mathbb{Z}$-Kategorie versteht man ein Diagramm der Gestalt $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} [1]X$, das suggestiver aber weniger präzise auch in der Gestalt

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] & & Y \arrow[dl] \\ & Z \arrow[ul, "{[1]}"] & \end{tikzcd}$$

geschrieben werden mag. Wir notieren Dreiecke auch abkürzend $X \to Y \to Z \to [1]$. Ein **Morphismus von Dreiecken** wird definiert wie im Fall der Homotopiekategorie einer additiven Kategorie in 20.2.1.2.

Definition 20.2.2.4. Eine **triangulierte Kategorie** ist eine additive $\mathbb{Z}$-Kategorie mitsamt einer Vorschrift, die unter allen Dreiecken unserer $\mathbb{Z}$-Kategorie gewisse Dreiecke auszeichnet derart, daß die folgenden merkwürdigen durch den Fall 20.2.1 der Homotopiekategorien motivierten Axiome erfüllt sind:

1. Jedes Dreieck, das isomorph ist zu einem ausgezeichneten Dreieck, ist auch selbst ein ausgezeichnetes Dreieck;

2. Für jedes Objekt X ist das Dreieck $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X \to 0 \to [1]X$ ausgezeichnet;

3. Jeder Morphismus $X \to Y$ unserer Kategorie kann in ein ausgezeichnetes Dreieck $X \to Y \to Z \to [1]X$ eingebettet werden. Es wird sich später herausstellen, daß hier Z eindeutig ist bis auf nicht-eindeutigen Isomorphismus, vergleiche das anschließende Axiom 5. Wir gönnen ihm dennoch einen bestimmten Artikel und nennen Z in Erinnerung an 20.2.1.2 auch im allgemeinen den **Abbildungskegel** über dem Morphismus $X \to Y$;

4. Ein Dreieck $X \xrightarrow{u} Y \to Z \to [1]X$ ist ausgezeichnet genau dann, wenn das „gedrehte“ Dreieck $Y \to Z \to [1]X \xrightarrow{-u} [1]Y$ ausgezeichnet ist;

5. Gegeben ein Diagramm mit ausgezeichneten Dreiecken in den Horizontalen und einem kommutativen Quadrat links

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r] & {[1]X} \arrow[d, "{[1]f}"'] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & {[1]X'} \end{tikzcd}$$

gibt es einen Morphismus $h : Z \to Z'$ derart, daß die beiden dadurch in der Mitte und rechts entstehenden Quadrate kommutieren. Von diesem Morphismus h wird nur die Existenz und nicht die Eindeutigkeit gefordert;

6. (**Oktaederaxiom**) Gegeben ausgezeichnete Dreiecke

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow [1]X$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X' \longrightarrow [1]Y$$

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow [1]X$$

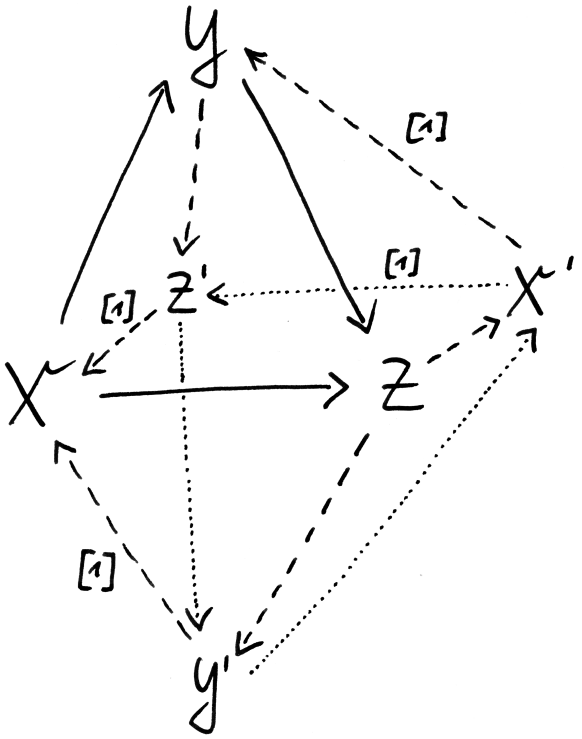
gibt es ein ausgezeichnetes Dreieck $Z' \to Y' \to X' \to [1]Z'$ derart, daß im nebenstehenden Oktaeder die beiden Quadrate im Schnitt mit senkrechten Ebenen kommutieren, die vier „zyklischen“ Dreiecke ausgezeichnete Dreiecke sind, und die vier anderen Dreiecke kommutieren.

Die ausgezeichneten Dreiecke einer triangulierten Kategorie heißen, nun, eben **ausgezeichnete Dreiecke**. Eingeführt wurden sie ursprünglich auf Französisch als **triangles distingués**. Auf Englisch nennt man sie **distinguished triangles**.

Vorschau 20.2.2.5. Der Definition einer triangulierten Kategorie haftet etwas Künstliches an und sie ist es auch. Ich hoffe aber, Sie im folgenden davon zu überzeugen, daß diese Begriffsbildung für viele Argumentationen dennoch ein geschickter Rahmen ist.

Vorschau 20.2.2.6 (**Motivation für das Oktaederaxiom**). In 20.2.6.1 werden wir jeder abelschen Kategorie eine triangulierte Kategorie $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ zuordnen sowie einen Funktor $\mathrm{Ket}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Der}(\mathcal{A})$. In 20.2.6.4 werden wir weiter einen Funktor von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in $\mathrm{Ket}(\mathcal{A})$ zur Kategorie der ausgezeichneten Dreiecke in $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ konstruieren. Gegeben $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$ injektive Kettenabbildungen erhalten wir nun offensichtlich eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$Y/X \hookrightarrow Z/X \twoheadrightarrow Z/Y$$



Die Struktur der Pfeile soll den Aufbau eines solchen Oktaeders verdeutlichen: Man beginnt mit zwei verknüpfbaren Morphismen und ihrer Komposition, dargestellt durch durchgehende Pfeile zwischen X, Y und Z. Jeden dieser Morphismen ergänzt man zu einem ausgezeichneten Dreieck, angedeutet durch die gestrichelten Pfeile. Und dann fordert man die Existenz von gepunkteten Pfeilen, die die drei eben konstruierten Objekte zu einem vierten ausgezeichneten Dreieck verbinden, die drei anderen so entstehenden Dreiecke zum Kommutieren bringen (was den horizontalen gepunkteten Pfeil im übrigen bereits eindeutig festlegt), und die beiden in Schnitten unseres Oktaeders mit geeigneten senkrechten Ebenen entstehenden Quadrate zum Kommutieren bringen. Von zwei gegenüberliegenden Flächen ist also stets eine ein kommutatives Diagramm und die andere ein ausgezeichnetes Dreieck. Unser Oktaederdiagramm hat weitaus weniger Symmetrien als ein echter Oktaeder, genauer ist die Symmetriegruppe eine zyklische Gruppe der Ordnung vier, erzeugt vom Drehen um die senkrechte Achse um einen rechten Winkel gefolgt vom Vertauschen der oberen und der unteren Ecke.

oder diagrammatisch

$$\begin{tikzcd}
 & & Y/X \arrow[dr, hook] & & \\
 & Y \arrow[ur] \arrow[dr, hook] & & Z/X \arrow[dr] & \\
 & & Z \arrow[ur] \arrow[rr] & & Z/Y \\
X \arrow[uur, hook] \arrow[urr] & & & &
\end{tikzcd}$$

Es entspricht einem Oktaeder in $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ und mag die Axiomatik motivieren.

20.2.2.7. Jede triangulierte Kategorie liefert eine weitere triangulierte Kategorie, wenn man statt der ausgezeichneten Dreiecken die sogenannten **antiausgezeichneten Dreiecke** auszeichnet, die aus ausgezeichneten Dreiecken durch das Ändern des Vorzeichens aller drei Morphismen entstehen.

20.2.2.8. Wir notieren Oktaeder oft vereinfacht in der Form

$$\begin{tikzcd}
 & & Z' \arrow[dr] & & \\
 & Y \arrow[ur] \arrow[dr] & & Y' \arrow[dr] & \\
 & & Z \arrow[ur] \arrow[rr] & & X' \\
X \arrow[uur] \arrow[urr] & & & &
\end{tikzcd}$$

In dieser Gestalt sind alle vier ausgezeichneten Dreiecke als leidlich gerade Pfeilsequenzen erkennbar, einige kommutative Dreiecke und ein kommutatives Quadrat sind jedoch nicht sichtbar. Eine andere Darstellung ist

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & {[1]X} \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & {[1]X} \arrow[d] \\
Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, equal] & {[1]Y} \arrow[d] \\
Z' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & X' \arrow[r] & {[1]Z'}
\end{tikzcd}$$

mit einigen Identitäten in den Vertikalen, kommutativen Quadraten und ausgezeichneten Dreiecken als Zeilen. In dieser Darstellung sehen wir alle Information unseres Oktaeders: Alle vier ausgezeichneten Dreiecke als Zeilen, alle vier kommutativen Dreiecke als Quadrate mit einer ist-gleich-Seite, davon eines sogar doppelt, und beide kommutativen Quadrate, davon eines sogar doppelt. Als letzte Variante gebe ich

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr] \arrow[rr, bend left] & & Z \arrow[dr] \arrow[rr, bend left] & & X' \arrow[dr] \arrow[rr, bend left] & & {[1]Z'} \\
& Y \arrow[ur] \arrow[dr] & & Y' \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[1]Y} \arrow[ur] \arrow[dr, dashed] & \\
& & Z' \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & {[1]X} \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, bend right] & & {[1]Z} \arrow[ul, dashed, bend left]
\end{tikzcd}$$

Dies Diagramm soll man sich periodisch nach rechts und links fortgesetzt denken. Alle vier ausgezeichneten Dreiecke sind hier gut als eckenlose Wege erkennbar, und die vier kommutativen Dreiecke ebenso wie die beiden kommutativen Vierecke sind gleichfalls gut zu sehen.

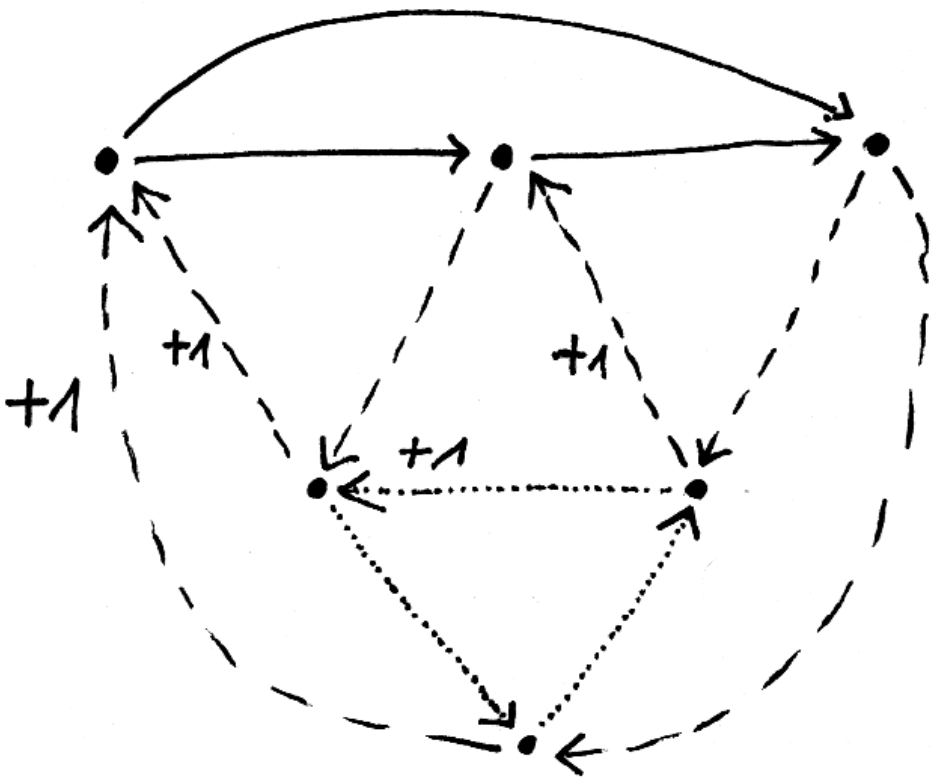
20.2.2.9. Aus 19.2.5.11 folgt, daß jeder Isomorphismus von additiven Kategorien additiv ist. Insbesondere brauchen wir die Additivität des Funktors $[1]$ einer triangulierten Kategorie nicht extra zu fordern.

20.2.2.10 (**Komposition von Morphismen in einem Dreieck**). In einem ausgezeichneten Dreieck ist die Komposition von je zwei aufeinanderfolgenden Morphismen Null. In der Tat gibt es für jedes ausgezeichnete Dreieck $X \to Y \to Z \to$ notwendig einen Morphismus von Dreiecken nach $0 \to Z \to Z \to$ der Gestalt $(?, v, \mathrm{id})$ mit $v : Y \to Z$ dem zweiten Morphismus unseres Ausgangsdreiecks. Folglich ist $(0, v, \mathrm{id})$ ein Morphismus von Dreiecken, und damit gilt $v \circ u = 0$ für $u : X \to Y$ den ersten Morphismus unseres Ausgangsdreiecks.

Lemma 20.2.2.11. *Ist $\mathcal{T}$ eine triangulierte Kategorie und $X \to Y \to Z \to [1]X$ darin ein ausgezeichnetes Dreieck, so bilden für jedes Objekt $W \in \mathcal{T}$ die Morphismen nach W eine lange exakte Sequenz von abelschen Gruppen*

$$\ldots \leftarrow \mathcal{T}(X, W) \leftarrow \mathcal{T}(Y, W) \leftarrow \mathcal{T}(Z, W) \leftarrow \mathcal{T}([1]X, W) \leftarrow \ldots$$

Dasselbe gilt dual auch für die Morphismen von W in die Objekte unseres ausgezeichneten Dreiecks.



Noch eine andere Darstellung eines Oktaeders

Beweis. In einem ausgezeichneten Dreieck ist die Komposition zweier aufeinanderfolgender Morphismen stets null, also ist unsere lange Sequenz schon einmal ein Komplex. Andererseits ist $0 \to W \xrightarrow{\sim} W \to [1]0$ stets ein ausgezeichnetes Dreieck. Wir können also nach 20.2.1.7 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X & \to & Y & \to & Z & \to & [1]X \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & W & \xrightarrow{\sim} & W & \to & 0 \end{array}$$

stets kommutativ ergänzen, und das zeigt die Exaktheit unseres Komplexes bei $\mathcal{T}(Y, W)$. Drehen von Dreiecken nach 20.2.1.6 liefert den Rest. □

Übungen

Übung 20.2.2.12. Sind bei einem Tripel von Morphismen, die zusammen einen Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken bilden, zwei der Morphismen Isomorphismen, so auch der Dritte. Hinweis: Lange exakte Sequenzen 20.2.2.11 und Fünferlemma und Yoneda-Lemma. Man beachte, daß wir dazu das Oktaederaxiom nicht benötigen.

Übung 20.2.2.13 (**Morphismen von ausgezeichneten Dreiecken, Eindeutigkeit**). Sei $\mathcal{T}$ eine triangulierte Kategorie. Gegeben ein kommutatives Diagramm mit ausgezeichneten Dreiecken in den Horizontalen

$$\begin{array}{ccccccc} X & \to & Y & \to & Z & \to & [1]X \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ X' & \to & Y' & \to & Z' & \to & [1]X' \end{array}$$

gibt es nach Annahme einen Morphismus $Z \to Z'$, der es kommutativ vervollständigt. Man zeige, daß sowohl unter der Annahme $\mathcal{T}([1]X, Z') = 0$ als auch unter der Annahme $\mathcal{T}(Z, Y') = 0$ dieser Morphismus $Z \to Z'$ sogar eindeutig bestimmt ist. Im Spezialfall von Homotopiekategorien war das 20.2.3.8. Hinweis: Dieser Morphismus $Z \to Z'$ ist sogar bereits dadurch eindeutig bestimmt, daß er das linke beziehungsweise das rechte durch ihn neu entstehende Quadrat zum Kommutieren bringt.

Übung 20.2.2.14 (**Morphismen in ausgezeichneten Dreiecken, Eindeutigkeit**). Sei $\mathcal{T}$ eine triangulierte Kategorie. Gibt es zu einem Morphismus aus einem ausgezeichneten Dreieck keinen von Null verschiedenen Morphismus in die Gegenrichtung, so wird der fragliche Morphismus bereits durch die beiden anderen eindeutig festgelegt. Sind also in Formeln $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{r,s} [1]X$ ausgezeichnete Dreiecke für zwei Morphismen $r, s : Z \to [1]X$ und gilt $\mathcal{T}([1]X, Z) = 0$, so folgt $r = s$. Im Spezialfall von Homotopiekategorien war das 20.2.3.9.

Übung 20.2.2.15. Wenn man in einem ausgezeichneten Dreieck bei zwei Morphismen das Vorzeichen ändert, entsteht wieder ein ausgezeichnetes Dreieck.

Übung 20.2.2.16. Die opponierte Kategorie einer triangulierten Kategorie $\mathcal{T}$ ist mit der entgegengesetzten homologischen Verschiebung $[1]_{\mathcal{T}^{\mathrm{opp}}} := [-1]_{\mathcal{T}}^{\mathrm{opp}}$ und „denselben" ausgezeichneten Dreiecken versehen auch eine triangulierte Kategorie. Sie heißt die **opponierte triangulierte Kategorie**.

Übung 20.2.2.17 (**Summen und Produkte von Dreiecken**). Man zeige, daß die direkte Summe von zwei ausgezeichneten Dreiecken (X, Y, Z) und (X', Y', Z') wieder ein ausgezeichnetes Dreieck ist. Hinweis: Man betrachte den Abbildungskegel K über $X \oplus X' \to Y \oplus Y'$ und konstruiere Morphismen $Z \to K$ und $Z' \to K$ und zeige mit Yonedalemma, Fünferlemma und 20.2.2.11, daß sie einen Isomorphismus $Z \oplus Z' \xrightarrow{\sim} K$ liefern. Analoges gilt mit demselben Argument für beliebige Summen und Produkte. Man beachte aber, daß der Funktor von der Kategorie der Komplexe einer abelschen Kategorie in ihre Homotopiekategorie keineswegs mit beliebigen Summen oder Produkten verträglich sein muß.

20.2.3 Triangulierung von Homotopiekategorien

Satz 20.2.3.1 (Homotopiekategorien als triangulierte Kategorien). *Für jede additive Kategorie $\mathcal{I}$ ist ihre Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}(\mathcal{I})$ mit ihrer durch Verschiebung und Negativieren der Differentiale 20.2.1.1 erklärten $\mathbb{Z}$-Operation und den in 20.2.1.2 durch Abbildungskegel erklärten ausgezeichneten Dreiecken eine triangulierte Kategorie.*

Beweis. Alle Axiome mit Ausnahme des Oktaederaxioms sind entweder offensichtlich erfüllt oder werden in 20.2.1 bewiesen. Um auch noch das Oktaederaxiom zu prüfen, reicht es zu zeigen, daß für Morphismen von Komplexen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ die Sequenz

$$\mathrm{Keg}(f) \xrightarrow{u} \mathrm{Keg}(g \circ f) \xrightarrow{v} \mathrm{Keg}(g) \xrightarrow{w} [1]\,\mathrm{Keg}(f)$$

ein ausgezeichnetes Dreieck ist, wenn diese Komplexe und Morphismen gegeben werden durch

$$\begin{tikzcd}
X^{n+1} \oplus Y^n \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&g\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}-\partial&0\\f&\partial\end{smallmatrix}\right)"] & X^{n+1} \oplus Z^n \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}f&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}-\partial&0\\g\circ f&\partial\end{smallmatrix}\right)"] & Y^{n+1} \oplus Z \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}-\partial&0\\g&\partial\end{smallmatrix}\right)"] & X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}\partial&0\\-f&-\partial\end{smallmatrix}\right)"] \\
X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&g\end{smallmatrix}\right)"'] & X^{n+2} \oplus Z^{n+1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}f&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)"'] & Y^{n+2} \oplus Z^{n+1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)"'] & X^{n+3} \oplus y^{n+2}
\end{tikzcd}$$

Hier und im Folgenden verwenden wir unsere Konvention 7.2.1.17, nach der Elemente von direkten Summen als Spaltenmatrizen aufgefaßt werden, mit den vorne stehenden Komponenten oben, und Morphismen zwischen direkten Summen

durch Matrizen von Homomorphismen zwischen den Summanden, die durch Matrixmultiplikation von links operieren. Um zu zeigen, daß dies Dreieck ausgezeichnet ist, gilt es, eine Homotopieäquivalenz $h : \operatorname{Keg}(g) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Keg}(u)$ anzugeben derart, daß

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Keg}(g \circ f) \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & \operatorname{Keg}(g) \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & {[1]}\operatorname{Keg}(f) \arrow[d, equal] \\
\operatorname{Keg}(g \circ f) \arrow[r] & \operatorname{Keg}(u) \arrow[r] & {[1]}\operatorname{Keg}(f)
\end{tikzcd}$$

in der Homotopiekategorie kommutiert. Nun haben wir ja

$$\operatorname{Keg}(u)^n = X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n$$

mit Randoperator

$$\begin{pmatrix} \partial & 0 & 0 & 0 \\ f & -\partial & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\partial & 0 \\ 0 & g & g \circ f & \partial \end{pmatrix}$$

und es reicht zu zeigen, daß die Marix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : Y^{n+1} \oplus Z^n \to X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n$$

eine Homotopieäquivalenz h mit den gewünschten Eigenschaften liefert. Explizite Rechnung zeigt, daß sie eine Kettenabbildung definiert und das rechte Quadrat unseres Diagramms der sechs Komplexe von eben zum Kommutieren bringt. Definieren wir eine Abbildung in die Gegenrichtung $k : \operatorname{Keg}(u) \to \operatorname{Keg}(g)$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n \to Y^{n+1} \oplus Z^n$$

so erhalten wir auch eine Kettenabbildung, von der klar ist, daß sie das linke Quadrat mit umgekehrtem Mittelpfeil zum Kommutieren bringt. Weiter gilt offensichtlich $k \circ h = \mathrm{id}$, so daß nur zu zeigen bleibt, daß $h \circ k$ homotop ist zur Identität auf $\operatorname{Keg}(u)$. Solch eine Homotopie wird jedoch gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

Ergänzung 20.2.3.2. Wir haben hier genau genommen nicht nur das Oktaederaxiom im Fall der Homotopiekategorie einer additiven Kategorie nachgewiesen, sondern sogar darin einen Funktor von der Kategorie aller Paare von verknüpfbaren Morphismen in die Kategorie aller Oktaeder konstruiert, der darüberhinaus verträglich ist mit unseren funktoriellen Abbildungskegeln aus 20.2.1.4 in einer Weise, die hier nicht ausbuchstabiert werden soll.

20.2.3.3. Unter einem **internen Automorphismus** einer Schmelzkategorie $\mathscr{M}$ mit Einsobjekt $\mathbb{I}$ verstehen wir einen Automorphismus $\alpha : \mathscr{M} \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}$ der zugrundeliegenden einfachen Kategorie, der in $\mathrm{Cat}(\mathscr{M}, \mathscr{M})$ isomorph ist zu einem Funktor der Gestalt $E\otimes$ für eine Einheit E. Ein Datum (E, ι) bestehend aus einer Einheit E und einer Isotransformation $\iota : \alpha \xRightarrow{\sim} (E\otimes)$ nennen wir dann eine **Realisierung** unseres internen Automorphismus. Solch eine Realisierung entspricht eineindeutig einem Paar (E, τ) bestehend aus einer Einheit und einem Isomorphismus $\tau : \alpha(\mathbb{I}) \xrightarrow{\sim} E$, indem wir (E, α) das Paar (E, τ) zuordnen mit τ der Komposition $\alpha(\mathbb{I}) \xrightarrow{\sim} E \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{\sim} E$. Insbesondere ist so eine Realisierung eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus und jede Realisierung liefert für stabil universell verschmelzbare Objekte M, N dieselben Isomorphismen

$$\alpha(M \otimes N) \xrightarrow{\sim} \alpha(M) \otimes N \xrightarrow{\sim} M \otimes \alpha(N)$$

Unter einem **Signumsautomorphismus** einer Schmelzkategorie mit Vorzeichen verstehen wir einen internen Automorphismus derart, daß die zugehörige Einheit E eine Signumseinheit ist, daß also auf $E \otimes E$ die Vertauschung das Negative der Identität ist.

20.2.3.4 (**Interne triangulierte Struktur einer Schmelzkategorie**). Eine Struktur von triangulierter Kategorie auf der einfachen Kategorie einer Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen und internem Hom heiße eine **interne triangulierte Struktur**, wenn der zugehörige Automorphismus $[1]$ ein Signumsautomorphismus ist und wenn außerdem für jedes ausgezeichnete Dreieck $L \to M \to N \to [1]L$ und jedes Objekt K auch die drei Dreiecke

$$\begin{array}{ccccccc} L \otimes K & \to & M \otimes K & \to & N \otimes K & \to & [1](L \otimes K) \\ K \Rrightarrow L & \to & K \Rrightarrow M & \to & K \Rrightarrow N & \to & [1](K \Rrightarrow L) \\ L \Rrightarrow K & \leftarrow & M \Rrightarrow K & \leftarrow & N \Rrightarrow K & \leftarrow & [-1](L \Rrightarrow K) \end{array}$$

ausgezeichnete Dreiecke sind. Bei der Konstruktion des jeweiligen letzen Morphismus haben wir hier stillschweigend Isomorphismen $([1]L) \otimes K \xrightarrow{\sim} [1](L \otimes K)$ und dergleichen verwendet, die daher rühren, daß unser Automorphismus $[1]$ intern ist.

Beispiel 20.2.3.5. Die in 20.2.3.1 eingeführte Struktur als triangulierte Kategorie auf der Kategorie der Homotopiekomplexe $\mathrm{Hot} = \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab})$ ist offensichtlich intern für die in 18.2.5.3 erklärte Struktur als Schmelzkategorie.

Satz 20.2.3.6 (Kurze exakte Sequenzen als ausgezeichnete Dreiecke). *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und $i\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ die Kategorie aller injektiven Objekte von $\mathcal{A}$. Man betrachte die Kategorie $\mathrm{Hot}^{0+}(i\mathcal{A}) := \{X \in \mathrm{Hot}(i\mathcal{A}) \mid X^q = 0$ falls $q < 0$ und $\mathcal{H}^q X = 0$ falls $q \neq 0\}$. So gilt:*

1. *Das Bilden der nullten Kohomologie induziert eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{H}^0 : \mathrm{Hot}^{0+}(i\mathcal{A}) \xrightarrow{\approx} \mathcal{A}$;*

2. *Das Bilden der nullten Kohomologie induziert eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{ausgezeichnete Dreiecke} \\ X \to Y \to Z \to [1]X \\ \textit{in } \mathrm{Hot}(i\mathcal{A}) \textit{ mit } X, Y, Z \in \mathrm{Hot}^{0+}(i\mathcal{A}) \end{array} \right\} \xrightarrow{\approx} \left\{ \begin{array}{c} \textit{kurze exakte} \\ \textit{Sequenzen in } \mathcal{A} \end{array} \right\}$$

Vorschau 20.2.3.7. Wir werden wir dieses Resultat in einer besseren Terminologie in 20.2.7.14 wiederfinden.

Beweis. Der erste Teil folgt sofort aus dem Hauptlemma der homologischen Algebra 19.3.2.6. Für den Rest des Beweises führen wir eine bequeme Terminologie ein und nennen die im Satz beschriebenen ausgezeichneten Dreiecke von $\mathrm{Hot}(i\mathcal{A})$ „speziell“. Die Homologiesequenz 20.2.1.10 zeigt, daß $\mathcal{H}^0$ aus jedem unserer speziellen ausgezeichneten Dreiecke eine kurze exakte Sequenz macht. Nach Teil 1 liefert also $\mathcal{H}^0$ schon mal einen treuen Funktor von unserer Kategorie von speziellen ausgezeichneten Dreiecken in die Kategorie der kurzen exakten Sequenzen aus $\mathcal{A}$. Als nächstes zeigen wir, daß unser Funktor surjektiv ist auf Isomorphieklassen von Objekten. Hierzu müssen wir uns daran erinnern, daß wir in 19.3.6.1 gezeigt hatten, daß in einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven jede kurze exakte Sequenz $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ isomorph ist zum Kernkomplex eines Doppelkomplexes aus injektiven Objekten mit in positiven Graden exakten Spalten und kurzen exakten Zeilen. Da diese notwendig spalten, hat unser Doppelkomplex die Gestalt

$$\begin{array}{ccccc}
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
I^2 & \hookrightarrow & I^2 \oplus J^2 & \twoheadrightarrow & J^2 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
I^1 & \hookrightarrow & I^1 \oplus J^1 & \twoheadrightarrow & J^1 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
I^0 & \hookrightarrow & I^0 \oplus J^0 & \twoheadrightarrow & J^0 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
A & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C
\end{array}$$

Die mittlere Vertikale ist folglich der Abbildungskegel $\mathrm{K}(u)$ einer Kettenabbildung $u : [-1]J \to I$ und das ausgezeichnete Dreieck $[-1]J \to I \to \mathrm{K}(u) \to J$

liefert mit Drehen ein ausgezeichnetes Dreieck $I \to \mathrm{K}(u) \to J \to [1]I$. Jetzt müssen wir noch zeigen, daß unser Funktor $\mathcal{H}^0$ volltreu ist. Seien dazu zwei spezielle ausgezeichnete Dreiecke (X, Y, Z) und (X', Y', Z') gegeben. Jeder Morphismus der zugehörigen kurzen exakten Sequenzen liefert ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X & \to & Y & \to & Z & \to & [1]X \\ f\downarrow & & g\downarrow & & h\downarrow & & f\downarrow \\ X' & \to & Y' & \to & Z' & \to & [1]X' \end{array}$$

mit der Eigenschaft, daß darin die beiden linken Quadrate kommutieren. Nun beachten wir

$$\mathrm{Hot}([1]X, Z') = 0$$

nach dem Lemma 19.3.2.6 über injektive Auflösungen und folgern aus 20.2.2.11 die Injektivität von $\mathrm{Hot}(Z, Z') \to \mathrm{Hot}(Y, Z')$. In anderen Worten ist unser Morphismus $h : Z \to Z'$ der einzige Morphismus von Z nach Z', der das mittlere Quadrat zum Kommutieren bringt. Andererseits gibt es aber nach 20.2.1.7 einen Morphismus von Z nach Z', der alle drei Quadrate zum Kommutieren bringt. Damit ist klar, daß (f, g, h) schon ein Morphismus von Dreiecken sein muß. □

Übungen

Übung 20.2.3.8. Gegeben ein kommutatives Diagramm mit ausgezeichneten Dreiecken in den Horizontalen

$$\begin{array}{ccccccc} X & \to & Y & \to & Z & \to & [1]X \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ X' & \to & Y' & \to & Z' & \to & [1]X' \end{array}$$

gibt es nach 20.2.1.7 einen Morphismus $Z \to Z'$, der es kommutativ vervollständigt. Man zeige, daß unter der Annahme $\mathrm{Hot}_{\mathcal{I}}([1]X, Z') = 0$ dieser Morphismus $Z \to Z'$ sogar eindeutig bestimmt ist.

Übung 20.2.3.9. Gibt es zu einem Morphismus aus einem ausgezeichneten Dreieck keinen von Null verschiedenen Morphismus in die Gegenrichtung, so wird der fragliche Morphismus bereits durch die beiden anderen eindeutig festgelegt. Sind also in Formeln $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{r,s} [1]X$ ausgezeichnete Dreiecke für zwei Morphismen $r, s : Z \to [1]X$ und gilt $\mathrm{Hot}_{\mathcal{I}}([1]X, Z) = 0$, so folgt $r = s$.

Übung 20.2.3.10. Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $M \xrightarrow{\smile} N$ ein Quasiisomorphismus von Komplexen in $\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$ und P ein Komplex projektiver Objekte von $\mathcal{A}$, der in Richtung der Differentiale beschränkt ist, so ist auch die auf den Hom-Komplexen induzierte Abbildung ein Quasiisomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M) \xrightarrow{\smile} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, N)$$

Man folgere für eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ mit genug Projektiven und genug Injektiven kanonische Isomorphismen $\mathrm{lExt}_q^{\mathcal{A}}(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^q(M,N)$. Hinweis: Man ergänze unseren Quasiisomorphismus zu einem ausgezeichneten Dreieck $M \xrightarrow{\sim} N \to K \to$ in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ und beachte, daß dann K exakt ist. Mit dem Hauptlemma der homologischen Algebra 17.5.6.14 folgt $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}([q]P,K) = 0$ für alle q und mit der langen exakten Sequenz 20.2.2.11 folgt die Behauptung. Noch stärkere Aussagen in dieser Richtung enthält die Interpretation 20.2.6.10 von Ext und dem a priori anders definierten lExt als dieselben Morphismenräume in der derivierten Kategorie.

Übung 20.2.3.11. In einer Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen und interner triangulierter Struktur bilden die starren Objekte stets eine volle triangulierte Unterkategorie. Hinweis: 18.3.4.10. Insbesondere besteht die vom Einsobjekt erzeugte volle triangulierte Unterkategorie $\langle \mathbb{I} \rangle_{\triangle}$ stets aus starren Objekten.

Übung 20.2.3.12. Gegeben ein Kring R endlicher Torsionsdimension ist $\mathrm{Der}(R\text{-}\mathrm{Mod})$ nach 21.9.9.17 eine Schmelzkategorie und $\langle R \rangle_{\triangle}$ besteht nach 20.2.3.11 aus starren Objekten.

20.2.4 Triangulierte Funktoren

20.2.4.1. Ein $\mathbb{Z}$**-Funktor** $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von $\mathbb{Z}$-Kategorien ist definiert als ein Paar (F,u) bestehend aus einem Funktor F nebst einer Isotransformation $u : [1] \circ F \xRightarrow{\sim} F \circ [1]$, die die $\mathbb{Z}$**-Struktur** unseres $\mathbb{Z}$-Funktors heißen möge. Die Verknüpfung von $\mathbb{Z}$-Funktoren sei definiert durch $(F,u) \circ (G,v) = (F \circ G, uG \circ Fv)$. Sie ist assoziativ.

20.2.4.2. Gegeben eine $\mathbb{Z}$-Struktur u eines Funktors wie eben ist natürlich auch ihr Negatives $(-u)$ eine $\mathbb{Z}$-Struktur für denselben Funktor.

20.2.4.3. Die Menge aller $\mathbb{Z}$-Funktoren von einer $\mathbb{Z}$-Kategorie $\mathcal{A}$ in eine $\mathbb{Z}$-Kategorie $\mathcal{B}$ notieren wir $\mathrm{Cat}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Gegeben ein Universum $\mathfrak{U}$ wie in **??** bezeichne $\mathfrak{U}\mathrm{Cat}^{\mathbb{Z}}$ die Kategorie aller $\mathbb{Z}$-Kategorien, deren zugrundeliegende Kategorie eine $\mathfrak{U}$-Kategorie ist. Als Morphismen von $\mathfrak{U}\mathrm{Cat}^{\mathbb{Z}}$ nehmen wir unsere $\mathbb{Z}$-Funktoren.

Definition 20.2.4.4. Eine $\mathbb{Z}$**-verträgliche** oder kurz **verträgliche Transformation** $(F,u) \Rightarrow (G,v)$ zwischen $\mathbb{Z}$-Funktoren ist eine Transformation $\tau : F \Rightarrow G$, die mit den jeweiligen $\mathbb{Z}$-Strukturen verträglich ist in dem Sinne, daß das Diagramm von Transformationen

$$\begin{tikzcd}
{[1] \circ F} \arrow[r, Rightarrow, "u"] \arrow[d, Rightarrow, "{[1]\tau}"'] & F \circ [1] \arrow[d, Rightarrow, "\tau[1]"] \\
{[1] \circ G} \arrow[r, Rightarrow, "v"] & G \circ [1]
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Jede Verknüpfung verträglicher Transformationen ist wieder verträglich und die Menge $\mathrm{Cat}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ wird mit diesen Transformationen als Morphismen eine Kategorie. Wir notieren die Menge der verträglichen Transformationen

$$\mathrm{Cat}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A},\mathcal{B})(F,G)$$

oder abkürzend $\mathrm{Trans}^{\mathbb{Z}}(F,G)$. Eine Adjunktion (L,R) von $\mathbb{Z}$-Funktoren nennen wir eine **verträgliche Adjunktion**, wenn die zugehörigen Transformationen $\mathrm{Id} \Rightarrow RL$ und $LR \Rightarrow \mathrm{Id}$ verträglich sind. Gegeben eine Adjunktion zwischen Funktoren zwischen zwei $\mathbb{Z}$-Kategorien existiert für jede $\mathbb{Z}$-Struktur auf einem der beiden genau eine $\mathbb{Z}$-Struktur auf dem anderen derart, daß die Adjunktion mit diesen $\mathbb{Z}$-Strukturen verträglich ist.

Vorschau 20.2.4.5. Man kann auch allgemeiner für eine beliebige Gruppe Γ den Begriff einer Γ-Kategorie und eines Γ-Funktors und einer verträglichen Transformation und einer verträglichen Adjunktion von Γ-Funktoren einführen. Das will ich hier nicht weiter verfolgen.

Definition 20.2.4.6. Ein **triangulierter Funktor** von einer triangulierten Kategorie in eine weitere ist ein additiver $\mathbb{Z}$-Funktor, der ausgezeichnete Dreiecke zu ausgezeichneten Dreiecken macht.

Definition 20.2.4.7. Eine Menge von Objekten einer triangulierten Kategorie heißt ein **trianguliertes System**, wenn gilt:

1. Das Nullobjekt gehört zu unserer Menge;
2. Mit je zwei Objekten eines ausgezeichneten Dreiecks gehört auch das Dritte zu unserer Menge.

Ein trianguliertes System, das mit jedem Objekt auch alle seine direkten Summanden enthält, nennen wir ein **Verdiersystem**.

20.2.4.8. Nach der Definition einer triangulierten Kategorie 20.2.2.4 haben wir für jedes Objekt X ein ausgezeichnetes Dreieck $(X,0,[1]X)$ und jeder Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} Y$ paßt in ein ausgezeichnetes Dreieck $(X,Y,0)$. Folglich gehören zu einem gegebenen triangulierten System mit einem Objekt X auch alle $[n]X$ und alle zu X isomorphen Objekte.

20.2.4.9 (**Diskussion der Terminologie**). Kashiwara und Schapira verwenden in [KS90] die Bezeichnung **Nullsystem** für das, was ich ein trianguliertes System nenne. Der Terminologie von Kashiwara und Schapira folge ich nicht, da ich derartige Systeme keineswegs nur betrachten will, um sie wegzuteilen. Die Bezeichnung als „Verdiersystem“ ist nicht üblich. Verdier selbst benutzt die Bezeichnung **souscatégorie épaisse**.

20.2.4.10. Verstehen wir ein trianguliertes System als volle Unterkategorie, so erbt es in natürlicher Weise die Struktur einer triangulierten Kategorie. Diejenigen Objekte, die von einem triangulierten Funktor zu Null gemacht werden, bilden offensichtlich sogar ein Verdiersystem. Das kleinste triangulierte System beziehungsweise Verdiersystem, das eine vorgegebene Menge von Objekten umfaßt, bezeichnen wir als das **von dieser Menge erzeugte triangulierte System** beziehungsweise **Verdiersystem**. Das von einer Menge von Objekten $\mathcal{N}$ erzeugte triangulierte System notieren wir $\langle \mathcal{N} \rangle = \langle {}_!\mathcal{N} \rangle_\Delta$. Hier verwenden wir einen unteren Index Δ, wenn wir betonen wollen, daß das triangulierte Erzeugnis gemeint ist, und in Anlehnung an unsere Vereinbarung aus 6.3.5.1 das untere Ausrufezeichen, wenn wir betonen wollen, daß das Symbol in der Klammer nicht einen einzelnen Erzeuger meint, sondern ein ganzes System von Erzeugern. Besteht $\mathcal{N}$ aus einem einzigen Objekt N, so schreiben wir auch kürzer $\langle N \rangle$ oder $\langle N \rangle_\Delta$. Für das von was auch immer erzeugte Verdiersystem verwenden wir analog die Notation $\langle\ \rangle_{\Delta\ominus}$.

Beispiel 20.2.4.11. In der Homotopiekategorie der Kategorie der Vektorräume über einem Körper k besteht das von k^2 erzeugte Verdiersystem aus allen in beide Richtungen beschränkten Komplexen mit endlichdimensionalen Einträgen. Das von k^2 erzeugte triangulierte System enthält jedoch nur beschränkte Komplexe mit endlichdimensionalen Einträgen und gerader Eulercharakteristik, wir haben also $\langle k^2 \rangle_\Delta \neq \langle k^2 \rangle_{\Delta\ominus}$.

20.2.4.12. Ist ein triangulierter Funktor von triangulierten Kategorien volltreu auf einer vollen unter allen Verschiebungen $[n]$ stabilen Unterkategorie, so ist er auch volltreu auf dem von dieser Unterkategorie erzeugten triangulierten System, ja sogar Verdiersystem. Das folgt sofort aus 20.2.2.11 und dem Fünferlemma. Das Anwenden dieser Erkenntnis bezeichnet man oft als **dévissage**, französisch für „Aufschrauben“.

Übungen

Übung 20.2.4.13. Ist ein triangulierter Funktor eine Äquivalenz von Kategorien, so ist auch jeder dazu quasiinverse Funktor trianguliert. In anderen Worten kann man unter keinen Umständen in einer triangulierten Kategorie noch zusätzliche Dreiecke auszeichnen derart, daß man wieder eine triangulierte Kategorie erhält.

Übung 20.2.4.14. Man betrachte den Funktor $\mathbb{D}$, der jedem Komplex C von abelschen Gruppen seinen dualen Komplex $\mathbb{D}C := C^*$ im Sinne von 19.5.1.13 zuordnet, und versehe ihn mit der $\mathbb{Z}$-Struktur, die durch diejenigen Morphismen $[1]\mathbb{D}C \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}[1]C$ erklärt wird, die auf der Komponente vom Grad n beider Komplexe das $(-1)^n$-fache der offensichtlichen Identifikation sind. Mit dieser $\mathbb{Z}$-Struktur ist $\mathbb{D}$ ein triangulierter Funktor

$$\mathbb{D} : \mathrm{Hot}_{\mathrm{Ab}} \to \mathrm{Hot}_{\mathrm{Ab}}^{\mathrm{opp}}$$

Übung 20.2.4.15. Gegeben ein triangulierter Funktor $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ und $Y \in \mathcal{T}$ bilden die Objekte $X \in \mathcal{T}$ mit $\mathcal{T}(X, [q]Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}'(FX, F[q]Y)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ ein Verdiersystem in $\mathcal{T}$.

20.2.5 Quotienten triangulierter Kategorien

20.2.5.1. Seien $\mathcal{T}$ eine triangulierte Kategorie und $\mathcal{N}$ eine Menge von Objekten von $\mathcal{T}$. Im folgenden konstruieren wir ein Paar $(\mathcal{T}/\mathcal{N}, \mathrm{can})$ bestehend aus einer triangulierten Kategorie $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ und einem triangulierten Funktor $\mathrm{can} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{N}$ derart, daß gilt:

1. Jedes Objekt aus $\mathcal{N}$ wird unter can zu Null in $\mathcal{T}/\mathcal{N}$;

2. Ist $\mathcal{D}$ eine weitere triangulierte Kategorie und $F : \mathcal{T} \to \mathcal{D}$ ein triangulierter Funktor, der alle Objekte aus $\mathcal{N}$ zu Null macht, so gibt es genau einen triangulierten Funktor $\tilde{F} : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{D}$ mit $F = \tilde{F} \circ \mathrm{can}$.

Ein derartiges Paar ist in der üblichen Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir nennen es den **trianguierten Quotienten von $\mathcal{T}$ nach $\mathcal{N}$**.

20.2.5.2. Ist $F : \mathcal{T} \to \mathcal{D}$ ein triangulierter Funktor in eine weitere triangulierte Kategorie, der die Objekte aus $\mathcal{N}$ zu Null macht und für den der induzierte Funktor eine Äquivalenz von Kategorien $\tilde{F} : \mathcal{T}/\mathcal{N} \xrightarrow{\approx} \mathcal{D}$ ist, so nenne ich F einen **Quotientenfunktor** oder genauer, wenn ich Verwechslungen mit Quotientenfunktoren im Kontext abelscher Kategorien vermeiden will, einen **triangulierten Quotientenfunktor**. Man erinnere, daß nach 20.2.4.13 in diesem Fall jeder Quasiinverse zu unserer Äquivalenz auch trianguliert ist.

Satz 20.2.5.3 (Triangulierte Quotienten durch Lokalisierung). *Seien $\mathcal{T}$ eine triangulierte Kategorie und $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ ein trianguliertes System. So gilt:*

1. *Die Menge $S(\mathcal{K})$ aller Morphismen mit Kegel in $\mathcal{K}$ ist ein Oresystem;*

2. *Die an $S(\mathcal{K})$ lokalisierte Kategorie $\mathcal{T}_{S(\mathcal{K})}$ wird eine triangulierte Kategorie, wenn wir sie mit der von $\mathcal{T}$ induzierten $\mathbb{Z}$-Operation $[1]$ versehen und als ausgezeichnete Dreiecke alle Dreiecke nehmen, die isomorph sind zu Bildern ausgezeichneter Dreiecke von $\mathcal{T}$;*

3. *Der kanonische Funktor $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{S(\mathcal{K})}$ ist ein triangulierter Quotient von $\mathcal{T}$ nach $\mathcal{K}$. Die davon annullierten Objekte sind genau alle direkten Summanden von Objekten von $\mathcal{K}$ und die davon zu Isomorphismen gemachten Morphismen genau alle Morphismen mit Abbildungskegel in derartigen Summanden, die mithin sogar ein gesättigtes Oresystem bilden.*

20.2.5.4. Mit diesem Satz ist auch klar, daß für jede Menge von Objekten $\mathcal{N}$ einer triangulierten Kategorie $\mathcal{T}$ der triangulierte Quotient $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ existiert: Man wendet eben die Konstruktion aus dem Satz an auf das von dieser Menge erzeugte triangulierte System $\langle\mathcal{N}\rangle_\Delta$ und setzt also in Formeln

$$\mathcal{T}/\mathcal{N} := \mathcal{T}_{S(\langle\mathcal{N}\rangle_\Delta)}$$

Zusätzlich zeigt unser Satz dann, daß die von $\mathrm{can} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{N}$ zu Null gemachten Objekte genau die Objekte des von $\mathcal{N}$ erzeugten Verdiersystems sind und daß dieses Verdiersystem aus allen direkten Summanden des von $\mathcal{N}$ erzeugten triangulierten Systems besteht.

Beweis. 1. Daß unser System $S := S(\mathcal{K})$ stabil ist unter Verknüpfung, folgt sofort aus dem Oktaederaxiom. Daß sich jeder Winkel

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "s"] \\ Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

mit $s \in S$ ergänzen läßt zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & X \arrow[d, "s"] \\ Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

mit $t \in S$ folgt auch aus dem Oktaederaxiom, indem man nämlich erst das Dreieck $X \to Z \to N \to$ über s bildet und damit den Oktaeder zur Komposition $Y \to Z \to N$. Dessen untere Ecke, also die dritte Ecke des Dreiecks über der Komposition, ist dann das gesuchte W. Sind schließlich $f, g : X \to Y$ gegeben und $s \in S$ und $sf = sg$, also $s \circ (f - g) = 0$, so betrachten wir das ausgezeichnete Dreieck über s und folgern mit 20.2.2.11 die Existenz von $h : X \to W$ mit $(f - g) = r \circ h$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dotted, "t"] & X \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f-g"] & & \\ W \arrow[u, dotted, "{[1]}"] \arrow[r, "r"] & Y \arrow[r, "s"] & Z \arrow[r, "{[1]}"] & \end{tikzcd}$$

Bilden wir nun, wie durch die gepunkteten Pfeile angedeutet, das ausgezeichnete Dreieck über h, so haben wir $t \in S$ und $(f - g) \circ t = 0$. Damit haben wir gezeigt, daß unser System linksore ist im Sinne von 20.1.4.3. Daß es auch rechtsore sein muß, folgt durch Übergang zur opponierten Kategorie.

2. Nach 20.1.4.26 ist unsere lokalisierte Kategorie $\mathcal{T}_S$ additiv und der kanonische

Funktor $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_S$ desgleichen. Die $\mathbb{Z}$-Operation geht ohne Schwierigkeiten auf die Lokalisierung über. Es bleibt, die Axiome für ausgezeichnete Dreiecke zu prüfen. Das Gültigkeit des ersten Axioms $(X, X, 0)$ ist offensichtlich. Da jeder Morphismus von $\mathcal{T}_S$ isomorph ist zum Bild eines Morphismus von $\mathcal{T}$, läßt sich auch jeder Morphismus von $\mathcal{T}_S$ in ein ausgezeichnetes Dreieck einbetten. Auch das Drehen von Dreiecken ist unproblematisch. Wir zeigen nun das Axiom zur Existenz einer Ergänzung zu einem Morphismus ausgezeichneter Dreiecke. Wir dürfen dazu nach 20.1.4.29 ausgehen von einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & {[1]X} \\
A \arrow[r] \arrow[u, dotted] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[u, dotted] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[u, dashed] \arrow[d, dashed] & {[1]A} \arrow[u, dotted] \arrow[d] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & {[1]X'}
\end{tikzcd}$$

in $\mathcal{T}$ mit ausgezeichneten Dreiecken aus $\mathcal{T}$ in den Horizontalen, in denen die gepunktelten Pfeile Morphismen aus S sind und wir die gestrichelten Pfeile nach dem entsprechenden Axiom in $\mathcal{T}$ dazu finden können. Nach 20.2.5.5 gehört dann der gestrichelte Pfeil nach oben auch zu S und das Ergänzungsaxiom folgt für die lokalisierte Kategorie. Das Oktaederaxiom folgt wieder ohne weitere Schwierigkeiten daraus, daß jedes kommutative Dreieck in $\mathcal{T}_S$ isomorph ist zum Bild eines kommutativen Dreiecks in $\mathcal{T}$.

3. Die universelle Eigenschaft scheint mir evident. Geht ein Objekt unter dem Quotientenfunktor nach Null, so muß die Identität darauf zur Nullabbildung werden. Schreiben wir diese Bedingung in der Kategorie der Brüche, so impliziert sie leicht, daß unser Objekt direkter Summand eines Objekts von $\mathcal{K}$ sein muß. $\square$

Lemma 20.2.5.5. *Sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ ein trianguliertes System in einer triangulierten Kategorie. Haben bei einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken zwei der Objektmorphismen Kegel in $\mathcal{K}$, so auch der Dritte.*

Beweis. Wir argumentieren anhand des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[rr, "{[1]}"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr] & & \\
X' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr] & & Z' \arrow[r, "{[1]}"] \arrow[dl, dotted] & \\
\mathcal{K} \arrow[rr, dotted, "{[1]}"'] & & W \arrow[dr, "{[1]}"] \arrow[dl, dashed] & & \\
& \mathcal{K} \arrow[ll, dashed, "{[1]}"] \arrow[d, "{[1]}"] & & & \\
& & & &
\end{tikzcd}$$

Hierin haben wir durch zweimaliges Anwenden des Oktaederaxioms auf die beiden Kompositionen im Rechteck oben links die beiden gestrichelt beziehungsweise gepunktelt gezeichneten ausgezeichneten Dreiecke erhalten und sehen so, daß sowohl $Z \to W$ als auch $Z' \to W$ Kegel in $\mathcal{K}$ haben. Mit nochmaligem Anwenden des Oktaederaxioms auf die Komposition $Z \to Z' \to W$ folgt dann, daß auch $Z \to Z'$ Kegel in $\mathcal{K}$ hat. $\square$

20.2.5.6. Gegeben eine triangulierte Kategorie $\mathcal{T}$ und darin eine Menge von Objekten $\mathcal{N}$ setzen wir

$$\mathcal{N}^\perp := \{I \in \mathcal{T} \mid \mathcal{T}(N, I) = 0 \ \forall N \in \mathcal{N}\}$$

und bezeichnen die Objekte von $\mathcal{N}^\perp$ als **$\mathcal{N}$-rechtsentfaltet**. Offensichtlich ist $\mathcal{N}^\perp$ stets ein Verdiersystem und nach 20.1.3.9 besteht es genau aus den $S(\langle\mathcal{N}\rangle_\Delta)$-rechtsentfalteten Objekten im Sinne von 20.1.3.7. Insbesondere induziert der Quotientenfunktor nach 20.1.3.7 einen volltreuen Funktor $\mathcal{N}^\perp \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathcal{T}/\mathcal{N}$ und dessen essentielles Bild besteht aus denjenigen Objekten des Quotienten, auf denen der partielle Rechtsadjungierte des Quotientenfunktors existiert. Opponiert setzen wir ${}^\perp\mathcal{N} := \{P \in \mathcal{T} \mid \mathcal{T}(P, N) = 0 \ \forall N \in \mathcal{N}\}$ und bezeichnen die Objekte von ${}^\perp\mathcal{N}$ als **$\mathcal{N}$-linksentfaltet** und erhalten die opponierten Aussagen.

20.2.5.7. Gegeben eine triangulierte Kategorie $\mathcal{T}$ und darin eine Menge von Objekten $\mathcal{N}$ ist offensichtlich das Produkt einer Familie $\mathcal{N}$-rechtsentfalteter Objekte, wenn es existiert, wieder $\mathcal{N}$-rechtsentfaltet. Dasselbe gilt allgemeiner für Limites $\mathcal{N}$-rechtsentfalteter Objekte. Opponiert sind Kolimites $\mathcal{N}$-linksentfalteter Objekte wieder $\mathcal{N}$-linksentfaltet.

20.2.6 Derivierte Kategorien

Definition 20.2.6.1. Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ bezeichnen wir den Verdierquotienten im Sinne von 20.2.5.3 der zugehörigen Homotopiekategorie nach dem Verdiersystem aller exakten Komplexe mit

$$\mathrm{Der}_{\mathcal{A}} = \mathrm{Der}(\mathcal{A}) := \mathrm{Hot}(\mathcal{A})/(\text{exakte Komplexe})$$

und nennen diese triangulierte Kategorie die **derivierte Kategorie von** $\mathcal{A}$.

20.2.6.2. Nach der in 20.2.5.3 gegebenen Konstruktion ist die derivierte Kategorie die Lokalisierung der Homotopiekategorie nach allen Quasiisomorphismen im Sinne von 19.5.1.15. Die universelle Eigenschaft der Lokalisierung liefert uns folglich Funktoren

$$\mathcal{H}^i : \mathrm{Der}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$$

mit der Eigenschaft, daß jedes ausgezeichnete Dreieck eine lange exakte Sequenz liefert und daß ein Morphismus ein Isomorphismus ist genau dann, wenn er Isomorphismen auf allen $\mathcal{H}^i$ induziert. Morphismen in der derivierten Kategorie notiere ich manchmal $\to_{\mathrm{Der}}$ und Isomorphismen $\xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Der}}$.

20.2.6.3. Gegeben ein Ring A verwenden wir auch die abkürzenden Notationen $\mathrm{Der}_A := \mathrm{Der}(A\text{-Mod})$ und $\mathrm{Der}_{-A} := \mathrm{Der}(\text{Mod-}A)$ für die derivierten Kategorien der entsprechenden Kategorien von A-Moduln.

20.2.6.4 (**Ausgezeichnetes Dreieck einer kurzen exakten Sequenz**). Gegeben eine kurze exakte Sequenz

$$X \overset{f}{\hookrightarrow} Y \overset{g}{\twoheadrightarrow} Z$$

von Komplexen in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \to & Y & \to & \mathrm{Keg}(f) & \to & [1]X \\
\| & & \| & & \downarrow & & \| \\
X & \to & Y & \to & Z & \to^{?} & [1]X \\
\downarrow & & \| & & \| & & \downarrow \\
[-1]\,\mathrm{Keg}(g) & \to & Y & \to & Z & \to & \mathrm{Keg}(g)
\end{array}$$

mit dritter oberer Vertikale $(0, g)$ und unterer erster Vertikale $(f, 0)^\top$. Man erkennt, daß diese Vertikalen Quasiisomorphismen sind. Zum Beispiel betrachten wir für die dritte Vertikale die lange exakte Homologiesequenz der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen $\mathrm{Keg}(\mathrm{id}_X) \hookrightarrow \mathrm{Keg}(f) \twoheadrightarrow Z$ und prüfen, daß die Homologie von $\mathrm{Keg}(\mathrm{id}_X)$ verschwindet. Man erkennt weiter, daß die linken und mittleren Quadrate kommutieren, wohingegen das rechte Rechteck in der Homotopiekategorie kommutiert vermittels der Homotopie $\mathrm{Keg}(f)^n = Y^n \oplus X^{n+1} \twoheadrightarrow Y^n \hookrightarrow Z^{n-1} \oplus Y^n = \mathrm{Keg}(g)^{n-1}$. Es gibt also in der derivierten Kategorie genau

einen Morphismus $Z \to [1]X$, der das obere und gleichbedeutend das untere Quadrat rechts zum Kommutieren bringt. Das so entstehende ausgezeichnete Dreieck

$$X \overset{f}{\hookrightarrow} Y \overset{g}{\twoheadrightarrow} Z \to [1]X$$

nennen wir das **ausgezeichnete Dreieck unserer kurzen exakten Sequenz**. Diese Konstruktion liefert sogar einen Funktor von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen von Komplexen in die Kategorie der ausgezeichneten Dreiecke der derivierten Kategorie.

20.2.6.5. Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ nennen wir die in Bezug auf das Oresystem der Quasiisomorphismen in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ im Sinne von 20.1.3.7 rechtsentfalteten Komplexe **quisrechtsentfaltet**. Per definitionem ist ein Komplex $I \in \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ quisrechtsentfaltet genau dann, wenn für jeden weiteren Komplex X die Morphismen nach I dieselben sind in der Homotopiekategorie und der derivierten Kategorie, in Formeln

$$Q : \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}(X, I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(QX, QI)$$

Analog erklären wir **quislinksentfaltete Komplexe**.

Proposition 20.2.6.6 (Quisrechtsentfaltete Komplexe aus Injektiven). *Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ ist jeder gegen die Pfeile beschränkte Komplex aus injektiven Objekten quisrechtsentfaltet. Des weiteren ist jeder Komplex aus injektiven Objekten mit verschwindendem Differential quisrechtsentfaltet.*

Beweis. Quasiisomorphismen sind ja genau die Morphismen der Homotopiekategorie mit exaktem Abbildungskegel. Nach 20.2.5.6 ist also I quisrechtsentfaltet genau dann, wenn für jeden exakten Komplex N gilt $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}(N, I) = 0$. Das folgt jedoch für jeden gegen die Pfeile beschränkten Komplex injektiver Objekte aus dem Hauptlemma der homologischen Algebra 19.3.2.6. Einen beliebigen Komplex mit verschwindendem Differential können wir nach 19.3.2.36 als Produkt in der Homotopiekategorie auffassen und Produkte von quisrechtsentfalteten Komplexen sind nach 20.2.5.7 wieder quisrechtsentfaltet. Alternativ sieht man auch leicht ein, daß sich jeder Quasiisomorphismus $I \xrightarrow{\sim} Y$ von einem Komplex injektiver Objekte mit verschwindendem Differential zu einem weiteren Komplex so durch $Y \to I$ verlängern läßt, daß die Verknüpfung die Identität auf I ist. Daraus folgt die Behauptung dann auch direkt. □

20.2.6.7. Gegeben eine additive Kategorie $\mathcal{I}$ betrachten wir in der triangulierten Kategorie $\mathrm{Hot}(\mathcal{I})$ das Verdiersystem $\mathrm{Hot}^+(\mathcal{I})$ aller gegen die Pfeile beschränkten Komplexe.

Korollar 20.2.6.8 (**Derivierte Kategorie und Komplexe von Injektiven**). *Seien $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $i\mathcal{A}$ die volle additive Unterkategorie ihrer injektiven Objekte. So restringiert der Quotientenfunktor $Q : \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ zu einem volltreuen Funktor*

$$\mathrm{Hot}^+(i\mathcal{A}) \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{Der}(\mathcal{A})$$

Beweis. Das gilt sogar allgemeiner für die volle Unterkategorie aller quisrechtsentfalteten Komplexe der Homotopiekategorie. □

Vorschau 20.2.6.9. Wir zeigen in 20.2.6.25, daß gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ endlicher homologischer Dimension mit genug Injektiven jeder Komplex aus injektiven Objekten quisrechtsentfaltet ist und daß die Lokalisierung eine Äquivalenz $\mathrm{Hot}(\mathrm{i}\mathcal{A}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ induziert.

20.2.6.10 (**Erweiterungen als Morphismen**). Sind A, B Objekte einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ mit genug Injektiven, so erhalten wir eine Bijektion

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{A}}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(A, [q]B)$$

durch die Wahl einer injektiven Auflösung $B \hookrightarrow I^{\lhd}$ und die natürlichen Isomorphismen $\mathcal{H}^q\mathcal{A}(A, I^{\lhd}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}(A, [q]I^{\lhd}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(A, [q]I^{\lhd}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(A, [q]B)$ mit dem mittleren Isomorphismus nach 20.2.6.8. Man prüft auch leicht, daß unsere Bijektion oben unabhängig ist von der Wahl der injektiven Auflösung von B. Hat opponiert $\mathcal{A}$ genug Projektive, so erhalten wir in derselben Weise Bijektionen $\mathrm{lExt}^{\mathcal{A}}_q(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(A, [q]B)$ mit unseren lExt aus 19.3.2.23. Für allgemeines $\mathcal{A}$ vereinbaren wir den entsprechenden Morphismenraum in der derivierten Kategorie als Definition von $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{A}}(A, B)$. Die Verknüpfung von Morphismen heißt in diesem Fall das **Yoneda-Produkt**

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{A}}(A, B) \times \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{A}}(B, C) \to \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathcal{A}}(A, C)$$

20.2.6.11 (**Erweiterungen und Zentrum**). Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ und eine Selbsttransformation des Identitätfunktors $z : \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ und $A, B \in \mathcal{A}$ gilt für die zugehörigen Endomorphismen z_A, z_B und jede Erweiterung $f \in \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{A}}(A, B)$ die Identität $z_B \circ f = f \circ z_A$ für das Yonedaprodukt. In der Tat gilt unsere Identität offensichtlich in der Homotopiekategorie, ja sogar in der Kategorie der Komplexe, und sie folgt direkt für die derivierte Kategorie. Das verallgemeinert unsere Erkenntnisse im Fall von Modulkategorien aus 19.3.2.18.

Vorschau 20.2.6.12. Aus 20.2.7.6 wird folgen, daß auch für eine allgemeine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ und beliebige $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(A, [q]B) = 0$ für $q < 0$. In 20.2.7.3 zeigen wir, daß auch in dieser Allgemeinheit der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus $\mathcal{A}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(A, B)$ ist.

20.2.6.13 (**Selbsterweiterungen**). Gegeben ein Objekt $M \in \mathcal{A}$ einer abelschen Kategorie bilden seine Selbsterweiterungen mit der Komposition von Morpismen der derivierten Kategorie als Multiplikation einen graduierten Ring

$$\operatorname{Ext}^*_{\mathcal{A}}(M) := \bigoplus \operatorname{Ext}^q_{\mathcal{A}}(M, M) = \bigoplus \operatorname{Der}_{\mathcal{A}}(M, [q]M)$$

Wir nennen ihn den **Ring der Selbsterweiterungen von** M.

Beispiel 20.2.6.14 (**Der Kohomologiering**). Ist speziell X ein topologischer Raum und bezeichnet $\operatorname{Ab}_{/X}$ wie in 19.2.2.7 die Kategorie der abelschen Garben auf X, so liefert für alle $\mathcal{F} \in \operatorname{Ab}_{/X}$ das Auswerten auf dem konstanten Schnitt $1 \in \Gamma(\mathbb{Z}_X)$ einen Isomorphismus $\operatorname{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma\mathcal{F}$. Wir folgern Isomorphismen $\operatorname{H}^q(X; \mathcal{F}) = \operatorname{R}^q\Gamma(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{R}^q(\operatorname{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_X, \ ))(\mathcal{F}) = \operatorname{Ext}^q_{\operatorname{Ab}_{/X}}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_{\operatorname{Ab}_{/X}}(\mathbb{Z}_X, [q]\mathcal{F})$ nach der Definition 19.3.5.1 der Garbenkohomologie als derivierter Funktor, der Definition der Ext-Gruppen in abelschen Kategorien mit genug Injektiven 19.3.2.24 und der Interpretation dieser Ext-Gruppen als Morphismen in der derivierten Kategorie 20.2.6.10. Insbesondere erhalten wir so Isomorphismen von abelschen Gruppen

$$\operatorname{H}^*(X; \mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^*_{\operatorname{Ab}_{/X}}(\mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \bigoplus \operatorname{Der}_{\operatorname{Ab}_{/X}}(\mathbb{Z}_X, [q]\mathbb{Z}_X)$$

Auf diese Weise erhält die Garbenkohomologie eines topologischen Raums die Struktur eines graduierten Rings. Wir nennen ihn den **garbentheoretischen Kohomologiering**, um ihn vom singulären Kohomologiering aus 17.6.1.15 zu unterscheiden. Seine Multiplikation heißt weiter das **cup-Produkt**. Vermittels der Verknüpfung in der derivierten Kategorie von $\operatorname{Ab}_{/X}$ erhält die Kohomologie jeder abelschen Garbe die Struktur eines graduierten Rechtsmoduls über dem garbentheoretischen Kohomologiering.

Vorschau 20.2.6.15 (**Graduierte Kommutativität des Kohomologierings**). Die graduierte Kommutativität des garbentheoretischen Kohomologierings eines topologischen Raums X zeigen wir erst in 17.6.1.12. Wir leiten sie aus der Existenz eines derivierten Tensorprodukts abelscher Garben oder genauer der Struktur einer Schmelzkategorie auf $\operatorname{Der}(\operatorname{Ab}_{/X})$ ab. Dazu müssen wir jedoch noch tiefer in die homologische Algebra einsteigen und sowohl das Derivieren von Funktoren in mehreren Variablen erklären als auch das Linksderivieren auf Situationen verallgemeinern, in denen es nicht genug projektive Objekte gibt.

20.2.6.16 (**Triangulierte Funktoren zu exakten Funktoren**). Jeder additive Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ induziert einen triangulierten Funktor $\operatorname{Hot}_F : \operatorname{Hot}_{\mathcal{A}} \to \operatorname{Hot}_{\mathcal{B}}$ in natürlicher Weise. Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsch und ist F exakt, so macht Hot_F exakte Komplexe zu exakten Komplexen und induziert folglich einen triangulierten Funktor

$$\operatorname{Der}_F : \operatorname{Der}_{\mathcal{A}} \to \operatorname{Der}_{\mathcal{B}}$$

auf den derivierten Kategorien. Dieser Funktor hinwiederum induziert für jedes Objekt $M \in \mathcal{A}$ einen Homomorphismus von graduierten Ringen

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{A}}(M) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{B}}(FM)$$

Vorschau 20.2.6.17 (**Triangulierte Funktoren zu additiven Funktoren**). Gegeben ein additiver Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen abelschen Kategorien kann man auch dann, wenn er nicht exakt ist, in vielen Fällen immer noch sinnvoll triangulierte Funktoren $\mathrm{R}F, \mathrm{L}F : \mathrm{Der}_{\mathcal{A}} \to \mathrm{Der}_{\mathcal{B}}$ auf den derivierten Kategorien erklären, seinen „Rechtsderivierten“ und seinen „Linksderivierten“. Im allgemeinen sind das aber nur noch partiell definierte triangulierte Funktoren. Mehr dazu wird in 20.3.4.2 diskutiert.

20.2.6.18 (**Funktorialität des Kohomologierings**). Speziell erhalten wir für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ nach 20.2.6.16 mit dem exakten Rückzug $f^* : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ und dem offensichtlichen Isomorphismus $f^*\mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$ einen Ringhomomorphismus

$$\mathrm{H}^*(Y; \mathbb{Z}_Y) \to \mathrm{H}^*(X; f^*\mathbb{Z}_Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(X; \mathbb{Z}_X)$$

Der Leser mag zur Übung zeigen, daß dieser Ringhomomorphismus mit unserem Zurückholen auf der Kohomologie aus 19.4.3.7 übereinstimmt.

20.2.6.19 (**Kohomologie eines Komplexes als Morphismenraum**). Gegeben ein Ring R und ein Komplex $L \in \mathrm{Hot}(R\text{-Mod})$ erhalten wir speziell mit 17.1.4.12 und der opponierten Aussage zu 20.2.6.8 kanonische Isomorphismen von R-Moduln

$$\mathcal{H}^q L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hot}_R([-q]R, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_R([-q]R, L)$$

20.2.6.20 (**Totale Homologie**). Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ betrachten wir die Funktoren $\mathcal{Z}, \mathcal{B}, \mathcal{H} : \mathrm{Ket}_{\mathcal{A}} \to \mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$, die jedem Komplex (X^q) den Komplex seiner Zykel, Bilder, oder Homologieobjekte $(\mathcal{H}^q X)$ mit verschwindenden Differentialen zuordnen. Wir haben kurze exakte Sequenzen von Komplexen $\mathcal{Z}X \hookrightarrow X \twoheadrightarrow [1]\mathcal{B}X$ und $\mathcal{B}X \hookrightarrow \mathcal{Z}X \twoheadrightarrow \mathcal{H}X$. Hat bereits X selbst verschwindende Differentiale, so liefern sie Isomorphismen $X \xleftarrow{\sim} \mathcal{Z}X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}X$.

Proposition 20.2.6.21 (Komplexe mit projektiver Homologie). *Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ ist der offensichtliche Funktor von der Kategorie aller Komplexe mit projektiven Einträgen und verschwindendem Differential in die derivierte Kategorie ein volltreuer Funktor*

$$\mathrm{Ket}^{d=0}(\mathrm{p}\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}(\mathcal{A})$$

und induziert eine Äquivalenz mit der vollen Unterkategorie aller Komplexe X der derivierten Kategorie mit $\mathcal{H}^q X$ projektiv für alle q.

20.2.6.22. Analoges gilt für Injektive. Ich habe hier die Projektiven vorgezogen, weil mir das Arbeiten mit Zykeln alias den Kernen der Differentiale leichter fällt als das Arbeiten mit den Kokernen der Differentiale.

Beweis. Unser Funktor ist volltreu, da der offensichtliche Funktor ein Isomorphismus $\mathrm{Ket}^{d=0}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Hot}^{d=0}(\mathcal{A})$ ist und da nach 20.2.6.6 angewandt auf die opponierte Kategorie Komplexe aus projektiven Objekten mit verschwindendem Differential stets quislinksentfaltet sind. Gegeben ein Komplex $X \in \mathrm{Ket}(\mathcal{A})$ mit $\mathcal{H}^q X$ projektiv für alle q gibt einen Morphismus $s : \mathcal{H}X \to X$ in $\mathrm{Ket}(\mathcal{A})$ derart, daß $\mathcal{H}s : \mathcal{H}\mathcal{H}X \to \mathcal{H}X$ invers ist zum offensichtlichen Isomorphismus $\mathcal{H}X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}\mathcal{H}X$ aus 20.2.6.20. In der Tat können wir in diesem Fall die Surjektion $\mathcal{Z}^q X \twoheadrightarrow \mathcal{H}^q X$ der Zykel auf die Homologie spalten. Darüberhinaus ist s in der Homotopiekategorie eindeutig bestimmt. Sind in der Tat s_1, s_2 zwei Spaltungen, so landet $s_1 - s_2$ in den Bildern und faktorisiert mithin als $s_1 - s_2 : \mathcal{H}^q X \to \mathcal{B}^q X$ und dieser Morphismus besitzt einen Lift $\delta : \mathcal{H}^q X \to X^{q-1}$ mit $s_1 - s_2 = d\delta$. Schließlich ist s ein Quasiisomorphismus, induziert also einen Isomorphismus in der derivierten Kategorie. □

20.2.6.23. Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ heißt das Supremum

$$\mathrm{hdim}(\mathcal{A}) := \sup\{i \mid \exists M, N \in \mathcal{A} \text{ mit } \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, N) \neq 0\}$$

die **homologische Dimension von** $\mathcal{A}$. Im Fall $\mathrm{hdim}(\mathcal{A}) < \infty$ sagen wir auch, unsere abelsche Kategorie habe **endliche homologische Dimension**. Homologische Dimension $-\infty$ haben genau die **Nullkategorien**, als da heißt, diejenigen abelschen Kategorien, bei denen alle Objekte Nullobjekte sind. Homologische Dimension ≤ 0 haben genau diejenigen abelschen Kategorien, bei denen alle kurzen exakten Sequenzen spalten. Derartige Kategorien heißen **halbeinfach**. Abelsche Kategorien einer homologischen Dimension ≤ 1 bezeichnet man auch als **erbliche Kategorien**, da sich bei ihnen die Eigenschaft der Projektivität auf Untermoduln vererbt. Diese Terminologie ist allerdings gefährlich, denn es gibt durchaus abelsche Kategorien, die nicht von homologischer Dimension ≤ 1 sind, bei denen sich aber dennoch die Eigenschaft der Projektivität auf Untermoduln vererbt, etwa weil sie außer der Null gar keine projektiven Objekte besitzen.

20.2.6.24 (**Derivierte Kategorien halbeinfacher Kategorien**). Gegeben eine halbeinfache Kategorie $\mathcal{A}$ ist jedes Objekt projektiv und nach 20.2.6.21 ist der offensichtliche Funktor eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Ket}^{d=0}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}(\mathcal{A})$$

Insbesondere gilt das für die Kategorie der Vektorräume über einem Körper.

Proposition 20.2.6.25 (Derivierte Kategorien und homologische Dimension). *Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ endlicher homologischer Dimension mit genug Projektiven sind alle Komplexe aus Projektiven quislinksentfaltet und die Lokalisierung liefert eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{Hot}(\mathrm{p}\mathcal{A}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}(\mathcal{A})$$

20.2.6.26. Insbesondere gilt das für die Kategorie der abelschen Gruppen $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}$ und allgemeiner für die Kategorie der Moduln über einem Hauptidealring.

Beweis. Nach 19.9.3.9 gibt es unter unseren Annahmen zu jedem Komplex einen Quasiisomorphismus von einem Komplex projektiver Objekte. Nach der Entfaltung durch Spaltung aus Übung 20.1.4.27 müssen wir damit nur noch zeigen, daß jeder Quasiisomorphismus in $\mathrm{Hot}(\mathrm{p}\mathcal{A})$ ein Isomorphismus ist. Jeder Quasiisomorphismus in $\mathrm{Hot}(\mathrm{p}\mathcal{A})$ hat aber als Abbildungskegel einen exakten Komplex aus projektiven Objekten. Die Zykel solch eines Komplexes müssen selbst projektiv sein, da sie der Beginn eines exakten Komplexes aus projektiven Objekten sind und wir endliche homologische Dimension angenommen hatten. Damit folgt leicht, daß unser Abbildungskegel nullhomotop sein muß, so daß jeder Quasiisomorphismus in $\mathrm{Hot}(\mathrm{p}\mathcal{A})$ bereits ein Isomorphismus ist. □

Proposition 20.2.6.27 (Derivierte Kategorien erblicher Kategorien). *Gegeben eine erbliche Kategorie $\mathcal{A}$ mit genug Projektiven induziert der offensichtliche Funktor*

$$\mathrm{Ket}^{d=0}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Der}(\mathcal{A})$$

eine Bijektion auf Isomorphieklassen von Objekten.

20.2.6.28. Insbesondere gilt das für die Kategorie der abelschen Gruppen $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}$ und allgemeiner für die Kategorie der Moduln über einem Hauptidealring.

Beweis. Jedes Objekt der derivierten Kategorie ist unter unseren Annahmen nach 20.2.6.25 isomorph zu einem Komplex P aus projektiven Objekten. Da wir unsere Kategorie erblich angenommen hatten, sind dann auch alle Bilder projektiv und wir finden Spaltungen der kurzen exakten Sequenzen $\ker\partial \hookrightarrow P^k \twoheadrightarrow \operatorname{im}\partial$. Die zugehörigen Kompositionen $P^k \twoheadrightarrow \ker\partial \to \mathcal{H}^k P$ induzieren einen Quasiisomorphismus $s : P \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}P$. Er hat sogar die Eigenschaft, daß $\mathcal{H}s$ invers ist zum offensichtlichen Isomorphismus $\mathcal{H}\mathcal{H}P \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}P$. □

Vorschau 20.2.6.29. Produkte von Objektfamilien in derivierten Kategorien diskutieren wir in 20.3.9.2.

Übungen

Übung 20.2.6.30. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper K oder allgemeiner ein freier Modul über einem Kring K zeige man, daß unsere Isomorphismen $\operatorname{Ext}^i_{\mathrm{S}V}(K,K) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Alt}^i V$ aus 19.3.2.32 in ihrer Gesamtheit einen Ringisomorphismus

$$\operatorname{Ext}^*_{\mathrm{S}V}(K,K) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Alt} V$$

bilden zwischen der Algebra der alternierenden Formen mit ihrem Shuffle-Dachprodukt **??** und dem Ring der Selbsterweiterungen mit seinem Yoneda-Produkt. Hinweis: Das cap-Produkt von rechts auf dem hinteren Faktor 18.3.2.5 induziert stets eine $\mathrm{S}V$-lineare Kettenabbildung des Koszulkomplexes aus 19.3.2.32 zu sich selber. Hinweis: Ich empfehle, das nur für das cap-Produkt von rechts mit Linearformen zu prüfen; dann zu zeigen, daß das den endlichdimensionalen Fall erledigt; und dann den unendlichdimensionalen Fall argumentativ zu folgern.

Übung 20.2.6.31. Seien $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $z \in \operatorname{Cat}(\mathcal{A},\mathcal{A})(\mathrm{id},\mathrm{id})$ eine Transformation des Identitätsfunktors zu sich selbst. So gilt für alle $M,N \in \mathcal{A}$ und jede Erweiterung $f \in \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M,N)$ in $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M,N)$ die Identität $z_N \circ f = f \circ z_M$. Speziell gilt für die Kategorie $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$ der Moduln über einem Ring und $z \in \mathrm{Z}(R)$ ein Element des Zentrums stets $(z\cdot) \circ f = f \circ (z\cdot)$.

Übung 20.2.6.32. Gegeben ein kommutatives Diagramm von kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccc} & & B' & \hookrightarrow & C' & \twoheadrightarrow & D' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C & & \end{array}$$

in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ erhalten wir in der Homotopiekategorie einen ausgezeichneten Homomorphismus von dem nach 20.2.6.4 der ersten Sequenz zugeordneten ausgezeichneten Dreieck in das einmal verdrehte der zweiten Sequenz zugeordnete ausgezeichnete Dreieck, indem wir vom offensichtlichen Homomorphismus von Dreiecken

$$\begin{array}{ccccccc} [-1]\operatorname{Keg}' & \to & B' & \to & C' & \to & \operatorname{Keg}' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [-1]\operatorname{Keg} & \to & B & \to & C & \to & \operatorname{Keg} \end{array}$$

ausgehen und vom oberen und unteren dieser Dreiecke jeweils den in 20.2.6.4 gegebenen Isomorphismus zu dem unseren jeweiligen Sequenzen zugeordneten Dreieck verwenden. Gegeben ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} A' & \hookrightarrow & B' & \twoheadrightarrow & C' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & B & \hookrightarrow & C & \twoheadrightarrow & D \end{array}$$

in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ erhalten wir in der Homotopiekategorie ebenso einen ausgezeichneten Homomorphismus von dem nach 20.2.6.4 der ersten Sequenz zugeordneten ausgezeichneten Dreieck in das einmal andersrum verdrehte der zweiten Sequenz zugeordnete ausgezeichnete Dreieck. Bezeichnet B'' das Bild von $B' \to B$ und C'' das Bild von $C' \to C$, so ist der induzierte Morphismus ein iso $B'' \xrightarrow{\sim} C''$ und unser Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken faktorisiert über das ausgezeichnete Dreieck mit dem Abbildungskegel über diesem Isomorphismus als dritter Ecke. In diesem Fall ist also der zusätzlich konstruierte Morphismus null in der Homotopiekategorie. Das mag zu einem besseren Verständnis der erweiterten Natürlichkeit der langen exakten Kohomologiesequenz 17.2.2.16 beitragen.

Übung 20.2.6.33 (**Derivieren durch Lokalisieren der Komplexkategorie**). Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Man prüfe, daß Kettenabbildungen $f, g \in \operatorname{Ket}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ genau dann homotop sind, wenn es eine Kettenabbildung $h : \mathrm{S}\Delta_1 \otimes_{\mathbb{Z}} X \to Y$ gibt mit $f = h \circ \delta_0$ und $g = h \circ \delta_1$. Hier meint $\mathrm{S}\Delta_1$ den Komplex der Simplizialketten des eindimensionalen Standardsimplex. Andererseits sind im Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "\delta_0"] \arrow[r, bend right, "\delta_1"'] & \mathrm{S}\Delta_1 \otimes_{\mathbb{Z}} X \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

beide Kompositionen die Identität und p ist eine Homotopieäquivalenz. Jeder Funktor, der Homotopieäquivalenzen zu Isomorphismen macht, muß also über $\operatorname{Ket}_{\mathcal{A}} \to \operatorname{Hot}_{\mathcal{A}}$ faktorisieren. Andererseits werden unter diesem Funktor auch alle Homotopieäquivalenzen Isomorphismen. Bezeichnet also H die Menge der Homotopieäquivalenzen, so liefert der offensichtliche Funktor einen Isomorphismus von Kategorien

$$H^{-1} \operatorname{Ket}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hot}_{\mathcal{A}}$$

Bezeichnet weiter Q die Menge aller Quasiisomorphismen in $\operatorname{Ket}_{\mathcal{A}}$ und $\bar{Q}$ die Menge aller Quasiisomorphismen in $\operatorname{Hot}_{\mathcal{A}}$, so liefert demnach der offensichtliche Funktor einen Isomorphismus von Kategorien

$$Q^{-1} \operatorname{Ket}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} \bar{Q}^{-1} \operatorname{Hot}_{\mathcal{A}}$$

Damit erhalten wir eine alternative Konstruktion der derivierten Kategorie $\operatorname{Der}_{\mathcal{A}}$ als Lokalisierung der Kategorie $\operatorname{Ket}_{\mathcal{A}}$ der Komplexe nach Quasiisomorphismen.

Übung 20.2.6.34. Gegeben eine abelsche Kategorie von endlicher homologischer Dimension $d \in \mathbb{N}$ und $M \hookrightarrow I^0 \to I^1 \to \ldots \to I^{d-1} \twoheadrightarrow N$ exakt mit injektiven I^ν zeige man, daß auch N injektiv ist.

Übung 20.2.6.35. Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ und $X \in \operatorname{Hot}_{\mathcal{A}}$ zeige man, daß es $A \in \mathcal{A}$ gibt und $s \in \operatorname{Hot}_{\mathcal{A}}(A[0], X)$ mit $s : A \to \mathcal{H}^0 X$ surjektiv.

Übung 20.2.6.36. Gegeben ein Ring R nennen wir die homologische Dimension seiner Kategorie von Linksmoduln auch die **homologische Dimension von** R. Gegeben ein Ring R endlicher homologischer Dimension d hat der Polynomring $R[X]$ die homologische Dimension $d+1$.

20.2.7 Beschränkte derivierte Kategorien

Definition 20.2.7.1. Gegeben eine additive Kategorie $\mathcal{I}$ betrachten wir in der triangulierten Kategorie $\mathrm{Hot}(\mathcal{I})$ die Verdiersysteme

$\mathrm{Hot}^+_{\mathcal{I}} = \mathrm{Hot}^+(\mathcal{I})$	aller den Differentialen entgegen beschränkten Komplexe;
$\mathrm{Hot}^-_{\mathcal{I}} = \mathrm{Hot}^-(\mathcal{I})$	aller in Richtung der Differentiale beschränkten Komplexe;
$\mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{I}} = \mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\mathcal{I})$	aller beidseitig beschränkten Komplexe.

Wir nennen diese und analoge Kategorien auch **beschränkt gegen die Pfeile** beziehungsweise **beschränkt mit den Pfeilen**.

20.2.7.2. Im Fall einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ schreiben wir im folgenden $\mathrm{Der}^{(\sharp)}_{\mathcal{A}} = \mathrm{Der}^{(\sharp)}(\mathcal{A})$ mit $\sharp \in \{+,-,\mathrm{b}\}$ für die triangulierten Quotienten dieser triangulierten Kategorien nach dem Verdiersystem aller exakten Komplexe in der jeweiligen Kategorie von Komplexen. Wir werden demnächst zeigen, daß die offensichtlichen Funktoren volltreue Einbettungen $\mathrm{Der}^{(\sharp)}_{\mathcal{A}} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}$ sind. Für ihr essentielles Bild verwenden wir die Notation

$$\mathrm{Der}^{\sharp}_{\mathcal{A}} \subset \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}$$

Lemma 20.2.7.3. *Für jede abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ liefern die offensichtlichen Funktoren volltreue Einbettungen*

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Der}^{(+)}(\mathcal{A}) \arrow[dr, hook, "\sim"] & \\
\mathcal{A} \arrow[r, hook, "\sim"] & \mathrm{Der}^{(\mathrm{b})}(\mathcal{A}) \arrow[ur, hook, "\sim"] \arrow[dr, hook, "\sim"'] & & \mathrm{Der}(\mathcal{A}) \\
 & & \mathrm{Der}^{(-)}(\mathcal{A}) \arrow[ur, hook, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

Des weiteren ist ein Komplex im $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ isomorph zum Bild eines Objekts unter einer unserer Einbettungen genau dann, wenn seine Kohomologie nach oben beschränkt beziehungsweise nach unten beschränkt beziehungsweise beschränkt beziehungsweise nur im Grad Null konzentriert ist.

Beweis. Wir verwenden die Abschneidefunktoren, wie sie in 20.2.7.4 eingeführt werden. Um zu zeigen, daß $\mathrm{Der}^{(-)}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ volltreu ist, wenden wir unser allgemeines Resultat 20.1.4.21 zu volltreuen Funktoren zwischen Lokalisierungen an. Ist $s : X \to Y$ ein Quasiisomorphismus mit $Y \in \mathrm{Hot}^-(\mathcal{A})$, so ist für hinreichend großes n der Morphismus $h : \tau^{\le n} X \to X$ ein Quasiisomorphismus und leistet das Gewünschte. Die anderen Fälle mit Ausnahme der Einbettung von $\mathcal{A}$ behandelt man ähnlich. Im Fall der Einbettung von $\mathcal{A}$ zeigt der Funktor $\mathcal{H}^0$, daß sie treu ist. Ist andererseits X ein Komplex, dessen Kohomologie nur im Grad Null lebt, so liefern die Quasiisomorphismen $X \xrightarrow{\sim} \tau^{\ge 0} X \xleftarrow{\sim} \tau^{\le 0}\tau^{\ge 0} X$ einen Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Der}} \mathcal{H}^0 X$ in der derivierten Kategorie, wo wir $\mathcal{H}^0 X$ als im Grad Null konzentrierten Komplex auffassen. Also ist jeder Komplex mit trivialer Kohomologie außerhalb von Null in der derivierten Kategorie isomorph zu seiner Kohomologie. Damit gilt es nur noch zu zeigen, daß die Einbettung $\mathcal{A} \to \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ surjektiv ist auf Morphismen. Dazu stellen wir für $A, B \in \mathcal{A}$ einen Morphismus als Bruch $A \xleftarrow{\sim} X \to B$ in der Homotopiekategorie dar mit $A \xleftarrow{\sim} X$ einem Quasiisomorphismus. Wenden wir nun die Abschneidefunktoren in der Homotopiekategorie auf unseren Bruch an, so erhalten wir einen Bruch $A \xleftarrow{\sim} \tau^{\le 0}\tau^{\ge 0} X \to B$, der offensichtlich denselben Morphismus darstellt. Nun steht jedoch links ein echter Isomorphismus und wir sind fertig. $\square$

20.2.7.4 (**Abschneidefunktoren**). Gegeben ein Komplex $X = (X^n, d^n)$ in einer abelschen Kategorie erklären wir für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Komplexe

$$\begin{array}{lccccccccc}
\tau^{\le n} X & \ldots \to & X^{n-1} & \to & \ker d^n & \to & 0 & \to & 0 & \to \ldots \\
\tau^{<n+1} X & \ldots \to & X^{n-1} & \to & X^n & \to & \operatorname{im} d^n & \to & 0 & \to \ldots \\
\tau^{>n} X & \ldots \to & 0 & \to & \operatorname{im} d^n & \to & X^{n+1} & \to & X^{n+2} & \to \ldots \\
\tau^{\ge n+1} X & \ldots \to & 0 & \to & 0 & \to & \operatorname{cok} d^n & \to & X^{n+2} & \to \ldots
\end{array}$$

Der Buchstabe τ steht für englisch „truncated“ oder französisch „tronqué“. Wir haben ein offensichtliches kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen und Quasiisomorphismen in den Vertikalen

$$\begin{tikzcd}
\tau^{<n+1} X \arrow[r, hook] & X \arrow[r, two heads] & \tau^{\ge n+1} X \\
\tau^{\le n} X \arrow[u] \arrow[r, hook] & X \arrow[u, equal] \arrow[r, two heads] & \tau^{>n} X \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Sicher gilt $\mathcal{H}^i(\tau^{\le n} X) = \mathcal{H}^i(\tau^{<n+1} X) = 0$ für $i > n$ und die offensichtlichen Morphismen $\tau^{\le n} X \to \tau^{<n+1} X \to X$ induzieren für $i \le n$ Isomorphismen auf den i-ten Kohomologiegruppen. Der offensichtliche Morphismus ist also stets ein Quasiisomorphismus $\tau^{\le n} X \xrightarrow{\sim} \tau^{<n+1} X$, und verschwinden alle $\mathcal{H}^i X$ für $i > n$, so sind die offensichtlichen Morphismen Quasiisomorphismen $\tau^{\le n} X \xrightarrow{\sim}$

$\tau^{<n+1}X \overset{\sim}{\to} X$. Analoges gilt für das andere Abschneiden. Offensichtlich machen alle diese Abschneidefunktoren homotope Abbildungen zu homotopen Abbildungen und Quasiisomorphismen zu Quasiisomorphismen und induzieren folglich Abschneidefunktoren sowohl auf der Homotopiekategorie als auch auf der derivierten Kategorie. Wir verwenden für diese induzierten Funktoren dieselbe Notation und erhalten ein funktorielles Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\leq n}\tau^{\geq n}X \arrow[r] & \tau^{\geq n}X & \\
{[-n]}\mathcal{H}^n X \arrow[u, "\wr"'] \arrow[d, "\wr"] & & X \arrow[ul] \\
\tau^{\geq n}\tau^{\leq n}X & \tau^{\leq n}X \arrow[l] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

20.2.7.5. Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ setzen wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n} &:= \{X \in \mathrm{Der}_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{H}^i X = 0 \text{ für } i > n\} \\
\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n} &:= \{X \in \mathrm{Der}_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{H}^i X = 0 \text{ für } i < n\}
\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n} \subset \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n+1}$ und $\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n} \supset \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n+1}$.

Proposition 20.2.7.6 (über Abschneidefunktoren). *Gegeben $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $n \in \mathbb{Z}$ haben wir:*

1. *Für alle $X \in \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$ und $Y \in \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n+1}$ gilt $\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$;*
2. *Die Einbettung $i^{\leq n} : \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n} \to \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}$ besitzt stets einen Rechtsadjungierten $\tau^{\leq n} : \mathrm{Der}_{\mathcal{A}} \to \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$;*
3. *Die Einbettung $i^{\geq n} : \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n} \to \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}$ besitzt stets einen Linksadjungierten $\tau^{\geq n} : \mathrm{Der}_{\mathcal{A}} \to \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n}$;*
4. *Die Einheit beziehungsweise Koeinheit zu diesen Adjunktionen lassen sich für jedes $X \in \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}$ auf genau eine Weise ergänzen zu einem ausgezeichneten Dreieck*
$$\tau^{\leq n}X \to X \to \tau^{\geq n+1}X \to [1]\tau^{\leq n}X$$
und dieses Dreieck ist funktoriell in X.

Beweis. Jeder Morphismus aus $\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ läßt sich natürlich darstellen als ein Bruch $X \overset{\sim}{\leftarrow} Z \to Y$ von Morphismen in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ mit einem Quasiisomorphismus $Z \overset{\sim}{\to} X$. Unter der Annahme $X \in \mathrm{Der}^{\leq n}(\mathcal{A})$ können wir diesen Bruch erweitern durch den Quasiisomorphismus $\tau^{\leq n}Z \overset{\sim}{\to} Z$. Unter der Annahme $Y \in$

$\mathrm{Der}^{\geq n+1}(\mathcal{A})$ dürfen wir weiter aufgrund des Quasiisomorphismus $Y \overset{\smile}{\to} \tau^{\leq n+1}Y$ annehmen, daß Y durch einen Komplex dargestellt wird, der Null ist in Graden $\leq n$. Die erste Aussage folgt nun wegen $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}(\tau^{\leq n}Z, Y) = 0$, es gibt ja noch nicht einmal von Null verschiedene Kettenabbildungen zwischen diesen beiden Komplexen. Wir erhalten mit den Abschneidefunktoren aus 20.2.7.4 nun offensichtlich eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen $\tau^{\leq n}X \hookrightarrow X \twoheadrightarrow X/\tau^{\leq n}X$ nebst einem offensichtlichen Quasiisomorphismus $X/\tau^{\leq n}X \overset{\smile}{\to} \tau^{\geq n+1}X$ und so mit 20.2.6.4 ein ausgezeichnetes Dreieck

$$\tau^{\leq n}X \to X \to \tau^{\geq n+1}X \to [1]\tau^{\leq n}X$$

in der derivierten Kategorie $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$. Die Eindeutigkeit des dritten Morphismus folgt mit 20.2.2.14 aus Teil 1. Um nun die erste Adjunktion zu zeigen, müssen wir für $X \in \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}$ und $Y \in \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$ zeigen $\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(Y, \tau^{\leq n}X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(Y, X)$. Das folgt jedoch sofort aus den bereits bewiesenen Teilen. Die andere Adjunktion zeigt man genauso. □

20.2.7.7 (**Erweiterungen vom Grad Eins**). Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Wie im Fall abelscher Gruppen 17.6.5.6 konstruiert man auch im allgemeinen eine Bijektion zwischen $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M, N)$ und der Menge aller Isomorphieklassen von kurzen exakten Sequenzen $N \hookrightarrow E \twoheadrightarrow M$ in $\mathcal{A}$.

Satz 20.2.7.8 (**Derivierte Kategorien über injektive Auflösungen**). *Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ mit genug Injektiven und $i\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ die Unterkategorie ihrer injektiven Objekte schränkt der Quotientenfunktor ein zu einer Äquivalenz von triangulierten Kategorien*

$$Q : \mathrm{Hot}^+(i\mathcal{A}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}^+(\mathcal{A})$$

Beweis. Nach 20.2.6.8 ist unser Funktor volltreu. Nach 19.9.3.9 für Freunde von Spektralsequenzargumenten oder alternativ nach 20.2.7.9 für Freunde indexärmerer Argumente ist jeder gegen die Pfeile beschränkte Komplex quasiisomorph zu einem gegen die Pfeile beschränkten Komplex von injektiven Objekten. Der Satz folgt. □

Proposition 20.2.7.9 (**Rechtsentfaltung durch Komplexe injektiver Objekte**). *Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven, so existiert für jeden Komplex $A^* \in \mathrm{Hot}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ ein Quasiisomorphismus $A^* \overset{\smile}{\to} I^*$ zu einem Komplex von Injektiven $I^* \in \mathrm{Hot}^{\geq 0}(i\mathcal{A})$.*

Beweis. Wir konstruieren I^* induktiv mit der Zusatzeigenschaft, daß jeweils Monomorphismen zwischen den Kokernen der Randoperatoren induziert werden.

Sind wir schon bei

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d} & A^p & \to & A^{p+1} & \to & \dots \\ & & \downarrow & & & & \\ \dots & \xrightarrow{d} & I^p & & & & \end{array}$$

angekommen in einer Weise, daß Isomorphismen $\mathcal{H}^q A \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q I$ induziert werden für $q < p$ und ein Monomorphismus zwischen den Kokernen der in obigem Diagramm explizit mit d notierten Ränder, so bilden wir den Pushout von

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{cok} d & \to & A^{p+1} \\ \downarrow & & \\ \operatorname{cok} d & & \end{array}$$

und wählen eine Einbettung dieses Pushouts in ein injektives Objekt I^{p+1}. Mit 20.1.5.9 dualisiert folgt, daß wir so im Grad p einen Epimorphismus auf der Homologie erhalten. Da unser vertikaler Morphismus zwischen den Kokernen nach Induktionsannahme ein Monomorphismus ist, erhalten wir hier sogar einen Isomorphismus. Um unsere Induktion am Laufen zu halten müssen wir nur noch zeigen, daß nun wieder ein Monomorphismus auf den Kokernen der Ränder im Grad eins höher induziert wird. Das folgt jedoch aus

$$\operatorname{cok}(A^p \to A^{p+1}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{cok}(I^p \to \text{Pushout}) \hookrightarrow \operatorname{cok}(I^p \to I^{p+1}) \qquad \square$$

Übungen

Übung 20.2.7.10 (**Mehr zu Morphismen in der derivierten Kategorie**). Seien $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven, $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt und $Y \in \operatorname{Hot}^+(\mathcal{A})$ ein Komplex. Haben alle Objekte Y^i unseres Komplexes die Eigenschaft $\operatorname{Ext}^q_{\mathcal{A}}(A, Y^i) = 0 \ \forall q > 0$, so ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$\operatorname{Hot}_{\mathcal{A}}(A, Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_{\mathcal{A}}(A, Y)$$

Wir können also in gewisser Weise auch „Morphismen in der derivierten Kategorie mit Auflösungen aus entfalteten Objekten berechnen“, nur daß wir im Fall von Komplexen statt von Auflösungen lieber von Entfaltungen reden. Hinweis: Indem wir einen Quasiisomorphismus $Y \xrightarrow{\sim} I$ in einen Komplex $I \in \operatorname{Hot}^+(i\mathcal{A})$ wählen und den Abbildungskegel als neues Y betrachten, dürfen wir Y exakt annehmen und müssen unter dieser zusätzlichen Annahme $\operatorname{Hot}_{\mathcal{A}}(A, Y) = 0$ zeigen.

Vorschau 20.2.7.11. Demnächst werden wir diese Übung auch aus allgemeiner Theorie herleiten können: Nach 20.3.4.13 ist Y rechtsentfaltet für $\operatorname{Hot}_{\mathcal{A}}(A, \ )$ und damit haben wir $\big(\operatorname{Hot}_{\mathcal{A}}(A, \ )\big)(Y) \xrightarrow{\sim} \big(\operatorname{R}\operatorname{Hot}_{\mathcal{A}}(A, \ )\big)(Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_{\mathcal{A}}(A, Y)$ mit dem zweiten Isomorphismus nach 20.3.2.20.

Übung 20.2.7.12. Seien $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $Y \in \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Man zeige: Genau dann gilt $Y \in \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n}$, wenn gilt $\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$ für alle $X \in \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n-1}$. Man formuliere und zeige auch die duale Aussage.

Ergänzende Übung 20.2.7.13. Man zeige: Gegeben eine additive Kategorie $\mathcal{I}$ mit spaltenden Idempotenten liefert die Einbettung der mit Grad Null endenden Komplexe $\mathrm{Hot}^{\leq 0}(\mathcal{I}) \subset \mathrm{Hot}^{+}(\mathcal{I})$ eine Äquivalenz mit der Kategorie aller mit den Pfeilen beschränkten Komplexe T mit $\mathrm{Hot}(I[0], T[n]) = 0$ für alle $n > 0$ und alle $I \in \mathcal{I}$. Ebenso liefert die Einbettung der mit Grad Null beginnenden Komplexe $\mathrm{Hot}^{\geq 0}(\mathcal{I}) \subset \mathrm{Hot}^{-}(\mathcal{I})$ eine Äquivalenz mit der Kategorie aller gegen die Pfeile beschränkten Komplexe T mit $\mathrm{Hot}(T[n], I[0]) = 0$ für alle $n < 0$ und alle $I \in \mathcal{I}$.

Übung 20.2.7.14 (**Ausgezeichnete Dreiecke als kurze exakte Sequenzen**). Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ liefert der Funktor $\mathcal{H}^0$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der ausgezeichneten Dreiecke $X \to Y \to Z \to [1]$ in $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$, bei denen die Objekte zum Bild von $\mathcal{A}$ gehören, und der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in $\mathcal{A}$. Ein quasiinverser Funktor kann wie in 20.2.6.4 konstruiert werden.

Übung 20.2.7.15. Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ und ein ausgezeichnetes Dreieck $X \to Y \to Z \to [1]$ in $\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}$ mit $\tau^{\leq 0}Y \xrightarrow{\sim} Y$ erhalten wir mit den offensichtlichen Morphismen ein ausgezeichnetes Dreieck $\tau^{\leq 1}X \to Y \to \tau^{\leq 0}Z \to [1]$. Ebenso erhalten wir unter der Annahme $Y \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq 0}Y$ mit den offensichtlichen Morphismen ein ausgezeichnetes Dreieck $\tau^{\geq 0}X \to Y \to \tau^{\geq -1}Z \to [1]$. Hinweis: Fünferlemma.

Übung 20.2.7.16. Gegeben ein linksnoetherscher Ring A liefert die Einbettung einen volltreuen Funktor $\mathrm{Der}^{-}(A\text{-modf}) \hookrightarrow \mathrm{Der}^{-}(A\text{-mod})$.

Übung 20.2.7.17. Gegeben ein $\mathbb{N}$-graduierter Ring A mit halbeinfacher Nullkomponente A^0 und allen A^n von endlicher Länge als A^0-Linksmoduln liefert die Einbettung Kategorie der graduierten Moduln endlicher Länge einen volltreuen Funktor $\mathrm{Der}^{\mathrm{b}}(A\text{-modfl}^{\mathbb{Z}}) \hookrightarrow \mathrm{Der}^{\mathrm{b}}(A\text{-modf}^{\mathbb{Z}})$. Hinweis: Man verwende das Kriterium 20.1.4.21 für die volltreue Einbettung von Ore-Lokalisierungen und das „Abschneiden oberhalb eines geeigneten Grades“.

Übung 20.2.7.18 (**Vergleich von Morphismen in** Hot **und** Der). Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ und darin zwei beschränkte Komplexe X, Y, zwischen deren Objekten es keine höheren Erweiterungen gibt, in Formeln $\mathrm{Ext}^q(X^n, Y^m) = 0$ falls $q > 0$ für alle n, m, induziert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$$

Hinweis: Man verwende 20.2.4.15 und unsere volltreue Einbettung von $\mathcal{A}$ in seine derivierte Kategorie.

Übung 20.2.7.19. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie derart, daß gilt $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A,B)=0$ für beliebige $A,B\in\mathcal{A}$ bei ungeradem $i\geq 3$. Ist $X\in\mathrm{Der}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$ ein Komplex mit $\mathcal{H}^q X=0$ für ungerades q, so können wir Isomorphismen

$$X \xrightarrow{\sim} \bigoplus_q [-q]\mathcal{H}^q X$$

finden, die auf $\mathcal{H}^q$ die offensichtlichen Isomorphismen induzieren. Sie sind allerdings nicht eindeutig bestimmt.

20.2.8 Vergleich verschiedener Kohomologieringe*

20.2.8.1. Gegeben $\mathcal{I}$ eine additive Kategorie und $I^*,J^*\in\mathrm{Ket}_{\mathcal{I}}$ Komplexe in $\mathcal{I}$ bilden wir analog wie in 17.1.4.12 den Komplex von abelschen Gruppen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(I^*,J^*)$. Speziell wird $\mathrm{End}_{\mathcal{I}}(I^*)$ unter der Verknüpfung von Morphismen ein dg-Ring.

Satz 20.2.8.2 (**Abstrakte Interpretation des cup-Produkts**). *Ist X ein lokal singulär-azyklischer Raum, so ist unser Vergleichsisomorphismus aus 21.6.7.2 ein Ringisomorphismus*

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{sing}}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{garb}}(X)$$

zwischen dem singulären Kohomologiering und dem in 20.2.6.14 eingeführten garbentheoretischen Kohomologiering.

20.2.8.3. Wir führen zunächst eine geeignete Terminologie ein. Unter einem **Quasiisomorphismus** von einem dg-Ring A in einen dg-Ring B verstehen wir einen Homomorphismus von dg-Ringen, der einen Isomorphismus auf der Kohomologie induziert. Unter einem **Morphismenbimodul** von einem dg-Ring A in einen dg-Ring B verstehen wir ein Paar (M,c) bestehend aus einem A-B-dg-Bimodul M nebst einer Klasse $c\in\mathcal{H}^0M$, die eine Basis von $\mathcal{H}M$ als $\mathcal{H}B$-Rechtsmodul bildet. Wir sagen dann auch, c sei eine **Quasibasis** des B-dg-Moduls M. Ist zusätzlich c auch eine Basis von $\mathcal{H}M$ als $\mathcal{H}A$-Linksmodul, so nennen wir unseren Morphismenbimodul (M,c) einen **Isobimodul**. Jeder Morphismenbimodul zwischen dg-Ringen liefert einen Homomorphismus zwischen ihren Kohomologieringen, der dadurch charakterisiert werden kann, daß $a\mapsto b$ gleichbedeutend ist zu $ac=cb$. Ist unser Morphismenbimodul ein Isobimodul, so ist besagter Homomorphismus sogar ein Isomorphismus. Jeder Quasiisomorphismus liefert einen Isobimodul in offensichtlicher Weise. Was an dieser Stelle noch fehlt, ist eine wie auch immer geartete Verknüpfung von Morphismenbimoduln, und diese ist im allgemeinen auch nicht unproblematisch.

Beweis von 20.2.8.2. Wir wählen eine injektive Auflösung $\mathbb{Z}_X\hookrightarrow\mathcal{I}^*$ der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ und faktorisieren sie mithilfe der Existenz und Eindeutigkeit

von Homotopielifts 19.3.2.7 über die Auflösung durch lokale singuläre Koketten $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}_X^*$ als $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}_X^* \to \mathcal{I}^*$. Nach 20.2.8.3 reicht es zu zeigen, daß unsere Faktorisierung $\mathcal{S}_X^* \to \mathcal{I}^*$ eine Quasibasis des Komplexes

$$\mathcal{S}_X^* \Rrightarrow \mathcal{I}^*$$

ist, und zwar sowohl für die Linksoperation von $\operatorname{End}\mathcal{I}^*$ als auch für die Rechtsoperation von S^*X, die vom dg-Ring-Homomorphismus $\mathrm{S}^*X \to \operatorname{End}\mathcal{S}_X^*$, $c \mapsto c\cup$ mit dem cup-Produkt auf Ketten aus 18.4.3.3 induziert wird. Der erste Teil dieser Behauptung folgt mit der Existenz und Eindeutigkeit von Homotopielifts 19.3.2.7 aus dem Quasiisomorphismus $\mathcal{S}_X^* \xrightarrow{\smile} \mathcal{I}^*$. Für den zweiten Teil betrachten wir das kommutative Diagramm von Komplexen

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{S}^*X & = & \mathrm{S}^*X \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{S}_X^* \Rrightarrow \mathcal{S}_X^* & & \mathbb{Z}_X \Rrightarrow \mathcal{S}_X^* \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{S}_X^* \Rrightarrow \mathcal{I}^* & \to & \mathbb{Z}_X \Rrightarrow \mathcal{I}^*
\end{array}$$

Hier ist die obere linke Vertikale durch $c \mapsto c\cup$ gegeben und die anderen Pfeile sind hoffentlich selbsterklärend. Nach unserem Vergleichssatz 21.6.7.2 ist die Komposition in der rechten Vertikale ein Quasiisomorphismus. Nach der Existenz und Eindeutigkeit von Homotopielifts 19.3.2.7 ist auch die unterste Horizontale ein Quasiisomorphismus. Folglich ist auch die Verknüfung in der linken Vertikalen ein Quasiisomorphismus. Des weiteren haben alle Komplexe der linken Vertikale natürliche Strukturen als dg-Rechtsmoduln über S^*X und die Morphismen sind mit diesen Strukturen verträglich. Das zeigt den zweiten Teil der Behauptung. Auf diese Weise vermittelt also unser dg-Bimodul in der Tat einen Isomorphismus zwischen den beiden fraglichen Kohomologieringen. Es ist dann nicht schwer zu sehen, daß dieser Isomorphismus übereinstimmt mit dem in 21.6.7.2 konstruierten Vergleichsisomorphismus. □

20.3 Faktorierte und derivierte Funktoren

Derivierte Funktoren wurden in einer Dissertation von Verdier eingeführt, die er bei Grothendieck schrieb. Verdier erklärt sie als eine Art von Kan-Erweiterungen. Ich ziehe den Zugang vor, den Deligne in SGA verfolgt. Beide Zugänge führen in typischen Situationen zu denselben derivierten Funktoren, sind jedoch grundsätzlich verschieden. Bei der Definition von Verdier gilt es zu beachten, daß man etwa im Fall eines linksexakten Funktors von abelschen Kategorien $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zu unterscheiden hat zwischen derivierten Funktoren $\mathrm{R}F : \mathrm{Der}^+_{\mathcal{A}} \to \mathrm{Der}^+_{\mathcal{B}}$ und $\mathrm{R}F : \mathrm{Der}_{\mathcal{A}} \to \mathrm{Der}_{\mathcal{B}}$ und daß diese, selbst wenn sie beide existieren sollten, keineswegs auf $\mathrm{Der}^+_{\mathcal{A}}$ übereinstimmen müssen. Bei Deligne dahingegen haben wir es nur mit einem einzigen partiell definierten Funktor $\mathrm{R}F : \mathrm{Der}_{\mathcal{A}} \dashrightarrow \mathrm{Der}_{\mathcal{B}}$ zu tun, den es immer gibt, der aber nur partiell definiert ist.

20.3.1 Limites in Funktorkategorien

20.3.1.1. Man erinnere sich an Limites und Kolimites in Kategorien, wie sie in 17.7.1 eingeführt wurden.

20.3.1.2 (**Limites und Kolimites in Funktorkategorien**). Gegeben seien ein Köcher $\mathcal{I}$ und Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{D}$ und eine Darstellung $\mathcal{I} \to \mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$, $i \mapsto F_i$. Existiert für alle $A \in \mathcal{A}$ der Kolimes $\mathrm{col}\, F_i(A)$ in $\mathcal{D}$, so erhalten wir offensichtlich einen Kolimes der F_i in $\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ durch die Vorschrift

$$(\mathrm{col}\, F_i)(A) := \mathrm{col}(F_i(A))$$

Dasselbe gilt, wenn wir col durch $\lim$ ersetzen, was direkt durch Übergang zu den opponierten Strukturen gefolgert werden kann.

20.3.1.3 (**Limites und Kolimites in Kategorien von Mengenfunktoren**). Nach 20.3.1.2 existiert für jede Kategorie $\mathcal{A}$ und jedes Mengensystem $\mathfrak{U}$ der Limes beziehungsweise der Kolimes in der Kategorie $\mathfrak{U}\mathrm{Ens}^{\mathcal{A}} = \mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})$ für jede Darstellung in $\mathfrak{U}\mathrm{Ens}^{\mathcal{A}}$ eines Köchers $\mathcal{I}$, wenn der Limes beziehungsweise der Kolimes für alle Darstellungen unseres Köchers in $\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ existieren. Nach 17.7.1.23 beziehungsweise 17.7.1.9 existieren sie dann auch für jedes größere Mengensystem $\mathfrak{V} \supset \mathfrak{U}$ in $\mathfrak{V}\mathrm{Ens}^{\mathcal{A}}$ und bleiben dieselben. Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz ist, immer noch nach 17.7.1.23 beziehungsweise 17.7.1.9, daß $\mathfrak{U}$ ein Universum ist und daß die Punktmenge unseres Köchers $\mathcal{I}$ zu $\mathfrak{U}$ gehört, daß also $\mathcal{I}$ im Sinne von 20.1.1.6 ein $\mathfrak{U}_{\in}$-Köcher ist.

20.3.1.4 (**Verträglichkeit von Limites mit Ko-Yoneda-Einbettungen**). Seien $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem und $\mathcal{C}$ eine $\mathfrak{U}$-Kategorie und $\mathcal{C} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^{\wedge}_{\mathfrak{U}} := \mathrm{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})$ die Ko-Yoneda-Einbettung $C \mapsto (\hat{C} : X \mapsto \mathcal{C}(X, C))$. Existiert der Limes eines

Systems $(C_i)_{i\in\mathcal{I}}$ in $\mathcal{C}$, so liefert er auch einen Limes des Bildsystems in $\mathcal{C}^\wedge$, in Formeln

$$(\lim C_i)^\wedge \xrightarrow{\sim} \lim \hat{C}_i$$

Beide Funktoren nehmen ja auf allen $Z \in \mathcal{C}$ denselben Wert $\lim \mathcal{C}(Z, C_i)$ an.

20.3.1.5 (**Verträglichkeit von Kolimites mit Yoneda-Einbettungen**). Seien $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem und $\mathcal{C}$ eine $\mathfrak{U}$-Kategorie und $\mathcal{C} \xhookrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\vee_{\mathfrak{U}} := \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})^{\mathrm{opp}}$ die Yoneda-Einbettung $C \mapsto (\check{C} : X \mapsto \mathcal{C}(C, X))$. Existiert der Kolimes eines Systems $(C_i)_{i\in\mathcal{I}}$ in $\mathcal{C}$, so liefert er auch einen Kolimes des Bildsystems in $\mathcal{C}^\vee$, in Formeln

$$\mathrm{col}\, \check{C}_i \xrightarrow{\sim} (\mathrm{col}\, C_i)^\vee$$

Beide Funktoren nehmen ja auf allen $Z \in \mathcal{C}$ denselben Wert $\mathrm{col}\, \mathcal{C}(C_i, Z)$ an.

20.3.1.6 (**Unverträglichkeit von Kolimites mit Ko-Yoneda-Einbettungen**). Im Gegensatz zu den im vorigen Punkt behandelten Fällen muß, wenn der Kolimes $\mathrm{col}\, C_i$ existiert, der natürliche Morphismus $\mathrm{col}\, \hat{C}_i \to (\mathrm{col}\, C_i)^\wedge$ in $\mathcal{C}^\wedge$ dennoch kein Isomorphismus sein, als da heißt, die natürliche Abbildung $\mathrm{col}\, \mathcal{C}(Z, C_i) \to \mathcal{C}(Z, \mathrm{col}\, C_i)$ muß keineswegs für alle Objekte Z eine Bijektion sein. Ein typisches Gegenbeispiel ist der Fall der Kategorie der Vektorräume, in der wir jeden Raum V als Kolimes des Systems aller endlichdimensionalen Teilräume $C_i \subset V$ schreiben können: Der Kolimes der Homomorphismenräume geht dann isomorph auf den Raum der Homomorphismen endlichen Rangs und keineswegs isomorph auf den Raum aller Homomorphismen. Ein vielleicht noch typischeres Gegenbeispiel ist der Fall direkter Summen von Vektorräumen: Die Identität auf einer direkten Summe mit unendlich vielen von Null verschiedenen Summanden landet nicht in einer endlichen Teilsumme. Analoges gilt für Limites.

20.3.1.7 (**Verträglicheit in der Unverträglichkeit**). Man beachte, daß wenn der Kolimes $\mathrm{col}\, \hat{C}_i$ in $\mathcal{C}^\wedge$ existiert und zusätzlich im essentiellen Bild der Ko-Yoneda-Einbettung $\mathcal{C} \xhookrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\wedge$ liegt, daß dann auch der Kolimes $\mathrm{col}\, C_i$ in $\mathcal{C}$ existiert und der natürliche Morphismus doch ein Isomorphismus $\mathrm{col}\, \hat{C}_i \xrightarrow{\sim} (\mathrm{col}\, C_i)^\wedge$ in $\mathcal{C}^\wedge$ ist. Das folgt aus den in 17.7.1.27 besprochenen Aussagen zur Verträglichkeit von Kolimites mit volltreuen Funktoren. Analoges gilt für Limites.

Beispiel 20.3.1.8 (**Unverträglichkeit verschiedener Limites bei Mengen**). Wir betrachten in der Kategorie Ens der Mengen das System

$$\ldots \to M^3 \to M^2 \to M$$

für irgendeine feste Menge M mit den Abbildungen, die jeweils den letzten Eintrag eines Tupels weglassen. Sein Limes in Ens ist die Menge $\mathrm{Ens}(\mathbb{N}, M)$ aller Folgen in M. Der Limes des Systems $\ldots \to (M^3)^\vee \to (M^2)^\vee \to M^\vee$ von Mengenfunktoren in $\mathrm{Ens}^\vee = \mathrm{Cat}(\mathrm{Ens}, \mathrm{Ens})^{\mathrm{opp}}$ dahingegen ordnet jeder Menge

Y den Kolimes des Systems $\mathrm{Ens}(M,Y) \to \mathrm{Ens}(M^2,Y) \to \mathrm{Ens}(M^3,Y) \to \dots$ zu alias die Menge aller Abbildungen $\mathrm{Ens}(\mathbb{N},M) \to Y$, die über eines der M^n faktorisieren. In $\mathrm{Ens}^\vee$ ist also der natürliche Morphismus

$$(\lim M^n)^\vee \to \lim((M^n)^\vee)$$

kein Isomorphismus, wenn M mindestens zwei Elemente hat. Mit 20.3.1.7 zeigt das, daß die Yoneda-Einbettung $\mathrm{Ens} \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}^\vee$ nicht essentiell surjektiv ist.

Beispiel 20.3.1.9 (**Unverträglichkeit verschiedener Kolimites bei Mengen**). Wir betrachten in der Kategorie Ens der Mengen das System

$$\{0\} \to \{0,1\} \to \{0,1,2\} \to \dots$$

mit dem Kolimes $\mathbb{N}$ und prüfen, daß der Kolimes in $\mathrm{Ens}^\wedge$ beschrieben werden kann als der Funktor, der jeder Menge X die Menge aller Abbildungen $X \to \mathbb{N}$ mit endlichem Bild zuordnet. Der natürliche Morphismus

$$\mathrm{col}(\{0,\dots,n\}^\wedge) \to (\mathrm{col}\{0,\dots,n\})^\wedge$$

ist mithin kein Isomorphismus. Mit 20.3.1.7 zeigt das, daß die Ko-Yoneda-Einbettung $\mathrm{Ens} \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}^\wedge$ nicht essentiell surjektiv ist.

20.3.1.10 (**Notation für Kolimites und Limites in Funktorkategorien**). Ich verwende für in der Kategorie $\mathcal{C}^\wedge$ zu verstehende Kolimites einer Köcherdarstellung $(C_i)_{i\in\mathcal{I}}$ in $\mathcal{C}$ die Notation

$$\hat{\mathrm{col}}\, C_i := \mathrm{col}\, \hat{C}_i$$

und im filtrierenden Fall die Notation $\hat{\mathrm{col}}\mathrm{f}$ und spreche im filtrierenden Fall von einem **Indkolimes**. Dual verwende ich die Notation $\check{\lim}$ und im kofiltrierenden Fall die Notation $\check{\lim}\mathrm{f}$ für in der Kategorie $\mathcal{C}^\vee$ zu verstehende Limites. Im kofiltrierenden Fall spreche ich auch von einem **Prolimes**.

20.3.1.11 (**Alternative Notationen**). In der Literatur findet man vielfach statt $\hat{\mathrm{col}}$ die Notation "$\varinjlim$" mit Anführungsstrichlein für in der Kategorie $\mathcal{C}^\wedge$ zu verstehende Kolimites und statt $\check{\lim}$ die Notation "$\varprojlim$" für in der Kategorie $\mathcal{C}^\vee$ zu verstehende Limites.

20.3.1.12 (**Morphismen von Limites von Mengenfunktoren**). Sei (D_j) ein Diagramm von Objekten einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein Morphismus eines Objekts $F \in \mathcal{C}^\vee$ in den Limes $\check{\lim}\, D_j$ ist per definitionem eine verträgliche Familie von Morphismen aus $\mathcal{C}^\vee(F, \check{D}_j)$ alias ein Element von $\lim_j \mathcal{C}^\vee(F, \check{D}_j)$. Das Yoneda-Lemma 4.7.10.2 liefert eine natürliche Bijektion zwischen dieser Menge und $\lim_j F(D_j)$. Ist speziell $F = \check{\lim}\, C_i$ auch der Limes eines Systems (C_i), so erhalten wir eine natürliche Bijektion

$$\mathcal{C}^\vee(\check{\lim}\, C_i, \check{\lim}\, D_j) \xrightarrow{\sim} \lim_j \mathrm{col}_i\, \mathcal{C}(C_i, D_j)$$

Im übrigen dürfen Sie in Übung 20.3.1.22 zeigen, daß jedes Objekt von $\mathcal{C}^\vee$ zu einem Objekt der Gestalt $\check{\lim}\, C_i$ isomorph ist.

20.3.1.13. Unter einem **Pro-Objekt** einer Kategorie $\mathcal{C}$ versteht man ein kofiltrierendes System von Objekten von $\mathcal{C}$ im Sinne von 17.7.1.12. Gegeben Pro-Objekte (C_i) und (D_j) erklärt man einen **Morphismus von Pro-Objekten** als ein Element der Menge

$$\lim_j \operatorname{colf}_i \mathcal{C}(C_i, D_j)$$

Um die Komposition von Morphismen von Pro-Objekten zu erklären, bemerken wir, daß ein Morphismus repräsentiert werden kann durch eine mit j indizierte Familie von Morphismen $C_{i(j)} \to D_j$, die in der Weise verträglich sind, daß für jeden Systemmorphismus $D_k \to D_j$ und den zu k gehörigen Morphismus $C_{i(k)} \to D_k$ einen Index $i = i(j,k)$ mit Morphismen $i \to i(j)$ und $i \to i(k)$ gibt, für den $C_i \to C_{i(j)} \to D_j$ und $C_i \to C_{i(k)} \to D_k \to D_j$ übereinstimmen. Weiter repräsentiert eine zweite verträgliche Familie von Morphismen $C_{\tilde{\imath}(j)} \to D_j$ genau dann denselben Morphismus von Pro-Objekten, wenn wir für jedes j einen Index $\hat{\imath}(j)$ und Morphismen $\hat{\imath}(j) \to i(j)$ und $\hat{\imath}(j) \to \tilde{\imath}(j)$ so finden, daß die Kompositionen $C_{\hat{\imath}(j)} \to C_{i(j)} \to D_j$ und $C_{\hat{\imath}(j)} \to C_{\tilde{\imath}(j)} \to D_j$ übereinstimmen. Mit dieser Beschreibung von Morphismen scheint mir nun offensichtlich, wie Morphismen von Pro-Objekten zu komponieren sind. Gegeben ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ verstehen wir unter einer **$\mathfrak{U}$-objektkleinen Kategorie** eine Kategorie, deren Objektmenge ein Element von $\mathfrak{U}$ ist. Wählen wir ein Universum $\mathfrak{U}$ und ist $\mathcal{C}$ eine $\mathfrak{U}$-Kategorie, so bilden die durch kofiltrierende $\mathfrak{U}$-objektkleine Kategorien indizierten Pro-Objekte eine Kategorie

$$\operatorname{pro}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{C})$$

und nach dem vorhergehenden liefert die Vorschrift $(C_i) \mapsto \check{\lim}_i\, C_i$ einen volltreuen Funktor

$$\operatorname{pro}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{C}) \xhookrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\vee_{\mathfrak{U}}$$

20.3.1.14 (**Bedeutung der Pro- und Ind-Objekte**). Die Pro-Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$ bilden salopp gesprochen einen noch vergleichsweise gut zugänglichen Teil der Kategorie $\mathcal{C}^\vee$ aller Mengenfunktoren. In ganz $\mathcal{C}^\vee$ haben zwar die Objekte und Morphismenmengen im wesentlichen dieselbe Beschreibung, aber ich kenne in dieser Allgemeineit keine vergleichbar übersichtliche Beschreibung für die Verknüpfung von Morphismen. Analoges gilt dual für Ind-Objekte, wie wir sie gleich einführen werden.

20.3.1.15 (**Ind-Objekte und ihre Morphismen**). Ein **Ind-Objekt** einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein filtrierendes System (C_i) in $\mathcal{C}$. Die Morphismen in ein weiteres Ind-Objekt (D_j) erklären wir als Elemente der Menge

$$\lim_i \operatorname{colf}_j \mathcal{C}(C_i, D_j)$$

Gegeben ein Universum $\mathfrak{U}$ und eine $\mathfrak{U}$-Kategorie $\mathcal{C}$ bilden dann die durch $\mathfrak{U}$-objektkleine filtrierende Kategorien indizierten Indobjekte eine Kategorie $\operatorname{ind}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{C})$ und die Konstruktion $(C_i) \mapsto \operatorname{côlf}_i C_i$ liefert einen volltreuen Funktor

$$\operatorname{ind}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{C}) \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^{\wedge}_{\mathfrak{U}}$$

Jedes Element von $\operatorname{colf}_j \mathcal{C}(C_i, D_j)$ wird repräsentiert durch einen Morphismus $\varphi_i : C_i \to D_b$ für ein b, das vom jeweiligen Element des Kolimes abhängen wird. Dessen Bild im Kolimes notieren wir $\bar{\varphi}_i$. Ein Morphismus von Ind-Objekten ist dann eine verträgliche Familie derartiger $\bar{\varphi}_i$.

Definition 20.3.1.16. Ein filtrierendes System (C_i) in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **essentiell konstant**, wenn $\operatorname{côlf} C_i$ isomorph ist zu einem Objekt im Bild der volltreuen Einbettung $\mathcal{C} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^{\wedge}$ alias zu einem Funktor der Gestalt $\hat{D}$ für ein Objekt $D \in \mathcal{C}$. Dual heißt ein kofiltrierendes System (C_i) **essentiell konstant**, wenn $\operatorname{lim\!\!\!\!\breve{}f} C_i$ isomorph ist zu einem Objekt im Bild der volltreuen Einbettung $\mathcal{C} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^{\vee}$.

20.3.1.17. Im Fall eines essentiell konstanten filtrierenden Systems (C_i) in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist nach 20.3.1.7 der natürliche Morphismus ein Isomorphismus

$$\operatorname{côlf} C_i \overset{\sim}{\to} \operatorname{colf} C_i$$

Es gilt aber noch mehr. Schreiben wir die Bedingung „essentiell konstant“ für $\operatorname{côlf}$ aus, so entspricht zunächst einmal ein Morphismus $\psi \in \mathcal{C}^{\wedge}(\operatorname{côlf} C_i, \hat{D})$ einem verträglichen System von Morphismen $\psi_i \in \mathcal{C}(C_i, D)$ und ein Morphismus $\varphi \in \mathcal{C}^{\wedge}(\hat{D}, \operatorname{côlf} C_i)$ hat die Gestalt $\varphi = \bar{\varphi}_j$ für ein $\varphi_j \in \mathcal{C}(D, C_j)$ und einen Index j. Die Bedingung $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ bedeutet dann schlicht $\psi_j \circ \varphi_j = \mathrm{id}_D$ für diesen einen Index j und 17.7.1.36 zeigt nocheinmal, daß für das verträgliche System von Morphismen $\psi_i \in \mathcal{C}(C_i, D)$ unser D der Kolimes des Systems der C_i gewesen sein muß. Die Bedingung $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ bedeutet aber zusätzlich die Forderung, daß es für jedes a Systemmorphismen $s_{kj} : j \to k$ und $s_{ka} : a \to k$ gibt derart, daß die Verknüpfung

$$C_a \overset{\psi_a}{\to} D \overset{\varphi_j}{\to} C_j \overset{s_{kj}}{\to} C_k$$

zusammenfällt mit dem von s_{ka} induzierten Morphismus $C_a \to C_k$.

Beispiel 20.3.1.18. Das filtrierende System von $\mathbb{R}$-Vektorräumen, indiziert durch $\mathbb{Z}$ und mit irgendwelchen Vektorräumen an jeder Stelle und Nullmorphismen für alle Morphismen ist essentiell konstant und isomorph zum durch das Nullobjekt dargestellten Funktor.

Beispiel 20.3.1.19. Gegeben ein Vektorraum W ist der Funktor, der jedem weiteren Vektorraum Z die Menge aller linearen Abbildungen endlichen Ranges von Z nach W zuordnet, ein Ind-Vektorraum, er kann nämlich als der Kolimes der endlichdimensionalen Teilräume von W in der Kategorie der kontravarianten Mengenfunktoren beschrieben werden.

Beispiel 20.3.1.20. Gegeben ein Vektorraum V ist der Funktor, der jedem weiteren Vektorraum Z die Menge aller linearen Abbildungen endlichen Ranges von V nach Z zuordnet, ein Pro-Vektorraum, er kann nämlich als der Limes der endlichdimensionalen Quotienten von V in der Opponierten zur Kategorie der Mengenfunktoren beschrieben werden.

Übungen

Übung 20.3.1.21 (**Hinreichendes Kriterium für essentiell konstante Systeme**). Sei $X : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein filtrierendes System in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Es gebe einen Index $i \in \mathcal{I}$ derart, daß jeder von i ausgehende Systemmorphismus $s : i \to a$ in der Weise durch einen weiteren Systemmorphismus $t : a \to j$ verlängert werden kann, daß die Verknüpfung einen Isomorphismus $X(ts) : X_i \xrightarrow{\sim} X_j$ induziert. So ist der offensichtliche Morphismus ist ein Isomorphismus

$$X_i \xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_j X_j$$

und nach 20.3.1.7 ist a forteriori der offensichtliche Morphismus ist ein Isomorphismus $\hat{X}_i \xrightarrow{\sim} \operatorname{\hat{c}olf}_j X_j$. Daß es auch andere essentiell konstante Systeme gibt, zeigt eine leichte Variation von Beispiel 20.3.1.18.

Übung 20.3.1.22 (**Mengenfunktoren als Kolimites**). Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\mathcal{C}^\wedge := \operatorname{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \operatorname{Ens})$ und $C \mapsto \hat{C}$ die volltreue Ko-Yoneda-Einbettung $\mathcal{C} \xhookrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\wedge$. Gegeben $X \in \mathcal{C}^\wedge$ betrachten wir die volle Unterkategorie $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{C}_X^\wedge$ aller Morphismen $\hat{C} \to X$ mit $C \in \mathcal{C}$ und den Funktor $V : \mathcal{C}_X \to \mathcal{C}^\wedge$, der den Morphismus nach X vergißt. So ist der natürliche Morphismus ein Isomorphismus $\operatorname{\hat{c}ol}_{\mathcal{C}_X} V \xrightarrow{\sim} X$ oder anders notiert

$$\operatorname*{\hat{c}ol}_{\hat{C} \to X} \hat{C} \xrightarrow{\sim} X$$

Genauer liefert jeder Morphismus $\varphi : \operatorname{\hat{c}ol}_{\hat{C} \to X} \hat{C} \to Y$ mit $Y \in \mathcal{C}^\wedge$ für beliebige $A, C \in \mathcal{C}$ und $\psi : \hat{C} \to X$ eine Abbildung $\varphi(\psi, A) : \hat{C}(A) \to Y(A)$. Jedes $u \in X(A)$ entspricht nun einem $\hat{u} : \hat{A} \to X$ und liefert so $\varphi(\hat{u}, A) : \hat{A}(A) \to Y(A)$. Die Abbildung $X(A) \to Y(A)$ wird nun gegeben durch $u \mapsto \varphi(\hat{u}, A)(\mathrm{id}_A)$. Den Rest mag der Leser selber machen.

Übung 20.3.1.23 (**Proendliche Mengen als topologische Räume**). Man betrachte die Kategorie Ensf der endlichen Mengen und zeige, daß unter der Interpretation endlicher Mengen als diskrete topologische Räume das Bilden des Limes in der Kategorie der topologischen Räume einen volltreuen Funktor

$$\text{pro-}\operatorname{Ensf} \xhookrightarrow{\sim} \operatorname{Top}$$

von der Kategorie der Pro-Objekte zu endlichen Mengen in die Kategorie der topologischen Räume liefert. Allgemeiner zeige man, daß wir in derselben Weise einen volltreuen Funktor

$$\text{pro-}\,\mathrm{Ens} \tilde{\hookrightarrow} \mathrm{Unif}$$

von der Kategorie der Pro-Objekte von Mengen in die Kategorie der uniformen Räume mit gleichmäßig stetigen Abbildungen als Morphismen erhalten.

Übung 20.3.1.24. Man betrachte die Kategorie Grpf der endlichen Gruppen und zeige, daß nach dem Auffassen endlicher Gruppen als diskrete topologische Gruppen das Bilden des Limes in der Kategorie der topologischen Gruppen einen volltreuen Funktor

$$\text{pro-}\,\mathrm{Grpf} \tilde{\hookrightarrow} \mathrm{GrpTop}$$

von der Kategorie der Pro-Objekte in endlichen Gruppen in die Kategorie der topologischen Gruppen liefert. Die topologischen Gruppen im essentiellen Bild dieses Funktors heißen **proendliche Gruppen**. Sie können dadurch charakterisiert werden, daß sie kompakt und Hausdorff sind und daß das neutrale Element eine Umgebungsbasis aus offenen Normalteilern besitzt.

Übung 20.3.1.25 (**Erweiterung einer Kategorie um alle endlichen Produkte**). Seien $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem und $\mathcal{C}$ eine $\mathfrak{U}$-Kategorie. So erhält die Ko-Yoneda-Einbettung $\mathcal{C} \tilde{\hookrightarrow} \mathcal{C}^\wedge_{\mathfrak{U}}$ Produkte, wann immer diese existieren, und auch für jedes größere Mengensystem $\mathfrak{V} \supset \mathfrak{U}$ erhält die offensichtliche Einbettung $C^\wedge_{\mathfrak{U}} \tilde{\hookrightarrow} C^\wedge_{\mathfrak{V}}$ Produkte, wann immer diese existieren. Gibt es in $\mathfrak{U}$ alle endlichen Produkte, so auch in $\mathcal{C}^\wedge_{\mathfrak{U}}$.

20.3.2 Faktorierte Funktoren auf Ore-Lokalisierungen

20.3.2.1. Die Elemente einer ausgezeichneten Menge S von Morphismen einer Kategorie nennen wir im folgenden S**-Morphismen**.

20.3.2.2 (**Ore-Lokalisierung durch Ind-Objekte**). Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S ein Rechtsoresystem von $\mathcal{C}$. Nach 20.1.4.13 haben wir eine natürliche Bijektion

$$\operatorname*{colf}_{Y \xrightarrow{S} B} \mathcal{C}(X, B) \tilde{\to} \mathcal{C}_S(X, Y)$$

zwischen dem Morphismenraum $\mathcal{C}_S(X, Y)$ in der Lokalisierung und dem filtrierenden Kolimes über das System aller S-Morphismen $Y \to B$ aus Y der Morphismenräume $\mathcal{C}(X, B)$. In der Terminologie von 20.3.1.12 ist diese Menge weiter in natürlicher Bijektion zu $\mathcal{C}^\wedge(X, Y^+)$ für

$$Y^+ := \operatorname*{côlf}_{Y \xrightarrow{S} B} B$$

mit dem filtrierenden Kolimes in der Funktorkategorie über das System S^Y aller S-Morphismen $Y \to B$ aus Y. Damit aber induziert jeder S-Morphismus $t : X \to A$, da wir die analoge Aussage in $\mathcal{C}_S$ ja bereits kennen, eine Bijektion $\mathcal{C}^\wedge(A, Y^+) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\wedge(X, Y^+)$. Die Vorschrift $Y \mapsto Y^+$ induziert mithin, wieder nach 20.3.1.12, einen volltreuen Funktor

$$\mathcal{C}_S \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{ind}(\mathcal{C})$$

20.3.2.3 (**Ore-Lokalisierung durch Pro-Objekte**). Analog konstruiert man im Fall eines Linksoresystems S einen volltreuen Funktor $\mathcal{C}_S \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{pro}(\mathcal{C})$, $X \mapsto X^-$.

Definition 20.3.2.4. Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Rechtsoresystem von $\mathcal{C}$. Der **rechtsfaktorierte** oder ausführlicher der **volle rechtsfaktorierte Funktor** $\mathrm{R}F$ **von** F ist die Komposition

$$\mathcal{C}_S \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{ind}(\mathcal{C}) \to \mathrm{ind}(\mathcal{D})$$

der volltreuen Einbettung aus 20.3.2.2 mit dem von F auf Ind-Objekten induzierten Funktor.

20.3.2.5 (**Rechtsfaktorierter auf Objekten**). Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Rechtsoresystem von $\mathcal{C}$. Auf Objekten wird unser Rechtsfaktorierter gegeben durch die Vorschrift

$$(\mathrm{R}F)(QY) := \operatorname*{\hat{colf}}_{Y \xrightarrow{S} B} FB$$

Der Indkolimes ist hier gemeint über die filtrierende Kategorie aller S-Morphismen $Y \to B$ in $\mathcal{C}$. Für $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ die Lokalisierung und $V : \mathcal{D} \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{ind}(\mathcal{D})$ der offensichtliche volltreue Funktor erhält man aus der Konstruktion zusätzlich eine ausgezeichnete Transformation

$$\rho : V \circ F \Rightarrow \mathrm{R}F \circ Q$$

Definition 20.3.2.6. Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Rechtsoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$. Ein Objekt $I \in \mathcal{C}$ heißt F**-**S**-rechtsentfaltet**, wenn sich jeder S-Morphismus $I \to B$ so durch einen weiteren Morphismus $B \to J$ verlängern läßt, daß die Komposition ein S-Morphismus ist und unter F einen Isomorphismus $FI \xrightarrow{\sim} FJ$ induziert.

20.3.2.7 (**Rückwärtskompatibilität der Terminologie**). Sei S ein Rechtsoresystem von Morphismen einer Kategorie $\mathcal{C}$. Nach 20.1.4.27 ist ein Objekt S-rechtsentfaltet im Sinne von 20.1.3.7 genau dann, wenn es Id-S-rechtsentfaltet ist für den Identitätsfunktor auf $\mathcal{C}$, und dann ist es auch F-S-rechtsentfaltet für jeden Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ in eine weitere Kategorie $\mathcal{D}$. Unsere S-rechtsentfalteten

Objekte sind weiter genau die Q-rechtsentfalteten Objekte im Sinne von 20.1.3.1 für den Quotientenfunktor $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$. Unsere F-S-rechtsentfalteten Objekte hier stehen zu den F-rechtsentfalteten Objekten aus 20.1.3.1 in keiner direkten Beziehung, sie verallgemeinern vielmehr die Q-rechtsentfalteten Objekte.

20.3.2.8. Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Rechtsoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$. Ein Objekt I ist F-S-rechtsentfaltet, wenn in der filtrierenden Kategorie der von I ausgehenden S-Morphismen diejenigen S-Morphismen $I \to J$, die unter F zu Isomorphismen werden, eine konfinale Unterkategorie bilden. Das ist nur eine Umformulierung der Definition.

20.3.2.9. Ein Objekt $I \in \mathcal{C}$ heißt **F-S-déployé à droite**, wenn unsere Transformation aus 20.3.2.5 einen Isomorphismus $\rho_I : V(FI) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}F(QI)$ induziert. Diese Bedingung ist mühsamer in der Handhabung und für unsere Zwecke reichen rechtsentfaltete Objekte aus. Nach 20.3.1.21 ist jedes rechtsentfaltete Objekt auch déployé à droite.

Definition 20.3.2.10. Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Rechtsoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$. Ein Objekt $Y \in \mathcal{C}$ heiße **F-S-rechtsentfaltbar**, wenn es ein F-S-rechtsentfaltetes Objekt $I \in \mathcal{C}$ gibt mitsamt einem Morphismus $Y \to I$, der in $\mathcal{C}_S$ ein Isomorphismus wird. So einen Morphismus nennen wir dann eine **F-S-Rechtsentfaltung** von Y. Die vollen Unterkategorien der F-S-rechtsentfalteten beziehungsweise F-S-rechtsentfaltbaren Objekte notieren wir $\mathcal{C}_{[F]} \subset \mathcal{C}_F \subset \mathcal{C}$ und die vollen Unterkategorien ihrer Bilder in der Lokalisierung entsprechend $\mathcal{C}_{S,[F]} \subset \mathcal{C}_{S,F} \subset \mathcal{C}_S$.

20.3.2.11. Die Frage, inwieweit $\mathcal{C}_{[F]} \to \mathcal{C}_{S,[F]}$ und $\mathcal{C}_F \to \mathcal{C}_{S,F}$ wieder Lokalisierungsfunktoren sind, lassen wir unberührt.

20.3.2.12. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit Rechtsoresystem S. Wir hatten in 20.3.2.7 gesehen, daß die Id-S-rechtsentfalteten Objekte genau unsere S-rechtsentfalteten Objekte sind. Analog vereinbaren wir hier, daß wir die Id-S-rechtsentfaltbaren Objekte kurz **S-rechtsentfaltbar** nennen.

Satz 20.3.2.13 (Rechtsfaktorierter). *Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Rechtsoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$. So gibt es bis auf eindeutigen Isomorphismus genau ein Paar (R, τ) bestehend aus einem Funktor*

$$R : \mathcal{C}_{S,F} \to \mathcal{D}$$

und einer Transformation $\tau = \tau_F : F \Rightarrow RQ$ von Funktoren $\mathcal{C}_F \to \mathcal{D}$ derart, daß für jedes F-S-rechtsentfaltete Objekt $I \in \mathcal{C}_{[F]}$ unsere Transformation einen Isomorphismus $\tau_I = \tau_{F,I} : FI \xrightarrow{\sim} RQI$ liefert.

20.3.2.14. Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Rechtsoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$. Das Paar (R, τ) aus unserem Satz nennen wir den **zahmen Rechtsfaktorierten von** F. Es wird sich beim Beweis des Satzes erweisen, daß der zahme Rechtsfaktorierte im wesentlichen eine Einschränkung des vollen Rechtsfaktorierten ist. Im weiteren verstehen wir unter dem **Rechtsfaktorierten von** F meist unseren zahmen Rechtsfaktorierten und verwenden auch dafür die Notation $\mathrm{R}F$.

20.3.2.15. Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Rechtsoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$. Ist $Y \to I$ eine F-S-Rechtsentfaltung, so erhalten wir mit τ in den Horizontalen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} FY & \to & \mathrm{R}F(QY) \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ FI & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{R}F(QI) \end{array}$$

einen und daraus einen ausgezeichneten Isomorphismus $\mathrm{R}F(QY) \xrightarrow{\sim} FI$. Das zeigt, wie wir unsere rechtsfaktorierten Funktoren berechnen können.

20.3.2.16 (**Charakterisierung von eingeschränkten Rechtsfaktorierten**). Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Rechtsoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$. Ist in der Situation des Satzes 20.3.2.13 über den Rechtsfaktorierten allgemeiner eine volle Unterkategorie $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}_F$ gegeben, in der jedes Objekt eine F-S-Rechtsentfaltung besitzt, so gibt es auch bis auf eindeutigen Isomorphismus genau ein Paar (R, τ) mit $R : Q(\mathcal{U}) \to \mathcal{D}$ und $\tau : F \Rightarrow RQ$ derart, daß τ_I für alle F-S-rechtsentfalteten Objekte I von $\mathcal{U}$ ein Isomorphismus ist. Das folgt aus unserem Beweis des Satzes gleich mit.

Beweis. Per definitionem macht der volle rechtsfaktorierte Funktor F-S-rechtsentfaltbare Objekte zu essentiell konstanten induktiven Systemen. Bezeichnen wir mit $\mathrm{ind}_{\mathrm{ek}}(\mathcal{D})$ die Kategorie der essentiell konstanten Systeme, so schränkt $(\mathrm{R}F, \rho)$ demnach ein zu einem Paar derselben Art in der unteren Horizontale des Diagramms

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "Q"] & \mathcal{C}_S \arrow[r, "\mathrm{R}F"] & \mathrm{ind}(\mathcal{D}) & \\ \mathcal{C}_F \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{C}_{S,F} \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{R}F"] & \mathrm{ind}_{\mathrm{ek}}(\mathcal{D}) \arrow[u] & \mathcal{D} \arrow[l, "\approx", "V"'] \end{tikzcd}$$

Wir erhalten also einen Rechtsfaktorierten (R, τ), indem wir für die Äquivalenz von Kategorien V unten rechts ein Quasiinverses wählen und es dem auf $\mathcal{C}_{S,F}$ eingeschränkten vollen Rechtsfaktorierten $(\mathrm{R}F, \rho)$ nachschalten. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, nun (R', τ') sei ein weiteres mögliches Paar. Indem wir die Äquivalenz $V : \mathcal{D} \xrightarrow{\approx} \mathrm{ind}_{\mathrm{ek}}(\mathcal{D})$ nachschalten, müssen wir nur zeigen, daß es genau eine Transformation $\kappa : VR' \Rightarrow \mathrm{R}F$ gibt mit $\rho = \kappa Q \circ V\tau' : VF \Rightarrow$

$\mathrm{R}FQ$ und daß diese Transformation κ eine Isotransformation ist. Das alles folgt aber unmittelbar aus unseren Annahmen und der Tatsache, daß die Einbettung eine Äquivalenz $\mathcal{C}_{S,[F]} \overset{\approx}{\to} \mathcal{C}_{S,F}$ ist. $\square$

Beispiel 20.3.2.17 (**Blick hinter die Kulissen**). Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Rechtsoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$. Aus unserem Satz 20.3.2.13 zum Rechtsfaktorierten folgt, daß jeder S-Morphismus $s : I \to J$ zwischen F-S-rechtsentfalteten Objekten unter F ein Isomorphismus wird. Ich will nun zeigen, wie unsere Argumente in diesem speziellen Fall funktionieren, indem ich mit den entsprechenden Vereinfachungen nocheinmal eine unabhängige Argumentation ausschreibe. Weil wir I als F-S-rechtsentfaltet annehmen, gibt es $w : J \to I_1$ mit $ws \in S$ und $F(ws)$ iso. Es folgt $F(w)F(s)$ iso. Wegen S rechtsore und $ws \in S$ und ohne daß wir $s \in S$ verwenden gibt es weiter $t : J \to J_1$ und $v : I_1 \to J_1$ mit $t \in S$ und $v(ws) = ts$. Wegen rechtsore gibt es dann auch $u \in S$ mit $u(vw) = ut$. Aufgrund unserer Annahme, daß J ein F-S-rechtsentfaltetes Objekt ist, gibt es einen Morphismus x mit $xut \in S$ und $F(xut)$ iso, also $F(xuvw) = F(xuv)F(w)$ iso. Da nun $F(w)$ sowohl durch Nachschalten wie durch Vorschalten geeigneter Morphismen zu einem Isomorphismus gemacht werden kann, ist $F(w)$ selber iso. Aus $F(w)F(s)$ iso und $F(w)$ iso folgt dann schließlich $F(s)$ iso wie gewünscht.

Beispiel 20.3.2.18 (**Überflüssiges Faktorieren**). Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Rechtsoresystem von $\mathcal{C}$. Sind in $\mathcal{C}$ alle Objekte F-S-rechtsentfaltet, so werden nach unserem Satz 20.3.2.13 zum Rechtsfaktorieren oder auch nach 20.3.2.17 alle Morphismen aus S unter F zu Isomorphismen und unser Funktor F faktorisiert in eindeutiger Weise über $\mathcal{C}_S$ als $F = \tilde{F} \circ Q$. Für den rechtsfaktorierten Funktor $(\mathrm{R}F, \tau)$ ist dann τ eine Isotransformation $\tau : \tilde{F} \circ Q = F \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{R}F \circ Q$ und induziert nach der Volldichtigkeit von Lokalisierungsfunktoren 20.1.2.20 eine Isotransformation $\tilde{F} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{R}F$.

20.3.2.19 (**Diskussion der Literatur**). Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Rechtsoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$. Deligne nennt ein Objekt $Y \in \mathcal{C}$ **dérivable**, wann immer das Indobjekt $(\mathrm{R}F)(Y)$ zum essentiellen Bild der volltreuen Einbettung $V : \mathcal{D} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathrm{ind}(\mathcal{D})$ gehört. Ich will vermeiden, in dieser Allgemeinheit zu arbeiten.

20.3.2.20 (**Rechtsfaktorierte von Morphismenfunktoren**). Sei $(\mathcal{C}, S)$ eine Kategorie mit einem ausgezeichneten Rechtsoresystem. Gegeben ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ ordnet der Rechtsfaktorierte des Yonedafunktors $\check{X} := \mathcal{C}(X, \ ) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ einem Objekt QY die Ind-Menge

$$(\mathrm{R}\check{X})(QY) = \operatorname*{côlf}_{Y \overset{S}{\to} B} \mathcal{C}(X, B)$$

zu. Ist der Yonedafunktor $\check{X} := \mathcal{C}(X, \ ) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ auf $Y \in \mathcal{C}$ rechtsentfaltbar für S, ist also Y ein $\check{X}$-S-rechtsentfaltbares Objekt, so ist diese Ind-Menge essen-

tiell konstant und wir erhalten zusammen mit 20.3.1.17 und 20.3.2.2 natürliche Bijektionen

$$(\mathrm{R}\check{X})(QY) = \operatorname*{côlf}_{Y \xrightarrow{S} B} \mathcal{C}(X,B) \xrightarrow{\sim} \operatorname*{colf}_{Y \xrightarrow{S} B} \mathcal{C}(X,B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QX,QY)$$

Der Rechtsfaktorierte des Yonedafunktors ist mithin, wo immer er definiert ist, der Yonedafunktor in der lokalisierten Kategorie. Ist S ein Linksoresystem, so erhalten wir opponiert für den Rechtsfaktorierten des Yonedafunktors $\hat{Y} := \mathcal{C}(\ ,Y) : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ens}$, sofern er auf einem Objekt $X \in \mathcal{C}$ definiert ist, eine natürliche Bijektion $(\mathrm{R}\hat{Y})(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(X,Y)$. Ist S sogar ein Oresystem, so ordnet der volle Rechtsfaktorierte des Morphismenfunktors

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}} := \mathcal{C}(\ ,\ ) : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$$

einem Paar (QX,QY) die Ind-Menge $\operatorname{côlf}_{A \xrightarrow{S} X,\, Y \xrightarrow{S} B} \mathcal{C}(A,B)$ zu. Existiert der Rechtsfaktorierte bei (QX,QY) oder ist diese Ind-Menge auch nur essentiell konstant, so erhalten wir zusammen mit 20.3.1.17 und 20.3.2.2 natürliche Bijektionen

$$(\mathrm{R}\,\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}})(QX,QY) = \operatorname*{côlf}_{A \xrightarrow{S} X,\, Y \xrightarrow{S} B} \mathcal{C}(A,B) \xrightarrow{\sim} \operatorname*{colf}_{A \xrightarrow{S} X,\, Y \xrightarrow{S} B} \mathcal{C}(A,B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QX,QY)$$

Im Fall eines Oresystem beschreibt der Rechtsfaktorierte des Morphismenfunktors mithin, wo immer er definiert ist, die Morphismen in der lokalisierten Kategorie. Wie in 20.3.10 ausgeführt wird, verhalten sich die sogenannten „universellen Approximationen“ in diesem Kontext noch besser als unsere faktorierten Funktoren.

20.3.2.21 (**Faktorieren einer Verknüpfung**). Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Rechtsoresystem von $\mathcal{C}$. Gegeben ein weiterer Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ ist offensichtlich jedes F-S-rechtsentfaltete Objekt auch GF-S-rechtsentfaltet. Es gibt mithin nach 20.3.2.16 genau eine Transformation von Funktoren $\alpha : \mathrm{R}(GF)|_{\mathcal{C}_{S,F}} \Rightarrow G \circ \mathrm{R}F$ mit $(\alpha Q) \circ \tau_{GF} = (G\tau_F)$ und diese ist eine Isotransformation

$$\mathrm{R}(GF)|_{\mathcal{C}_{S,F}} \xRightarrow{\sim} G \circ \mathrm{R}F$$

Feinere Aussagen in dieser Richtung besprechen wir im Zusammenhang mit Grothendieck's Spektralsequenz in 20.3.4.22.

Proposition 20.3.2.22 (**Rechtsfaktorierter des Identitätsfunktors**). *Gegeben eine Kategorie mit Rechtsoresystem $(\mathcal{C},S)$ ist der Rechtsfaktorierte $\mathrm{RId} : \mathcal{C}_{S,\mathrm{Id}} \to \mathcal{C}$ des Identitätsfunktors ein maximaler partieller Rechtsadjungierter R des Lokalisierungsfunktors $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ mit τ der Einheit der Adjunktion.*

Beweis. Nach 20.3.2.7 besteht $\mathcal{C}_{[\mathrm{Id}]}$ genau aus allen S-rechtsentfalteten Objekten von $\mathcal{C}$ im Sinne von 20.1.3.7 und nach 20.1.3.7 sind das genau alle Objekte $I \in \mathcal{C}$ derart, daß der partielle Rechtsadjungierte R von Q bei QI definiert ist und die Adjunktion einen Isomorphismus $I \xrightarrow{\sim} RQI$ liefert. Auf allen Objekten von $\mathcal{C}_{S,[\mathrm{Id}]}$ und damit auch auf allen Objekten von $\mathcal{C}_{S,\mathrm{Id}}$ ist also der partielle Rechtsadjungierte definiert. Ist umgekehrt der partielle Rechtsadjungierte R zu Q bei QY definiert, so ist RQY nach 20.1.3.9 rechtsentfaltet und id_{QY} entspricht unter der Adjunktion einem Morphismus $Y \to RQY$, der unter Q zu einem Isomorphismus wird. Mithin ist Y ein S-Id-rechtsentfaltbares Objekt im Sinne von 20.3.2.10. So sehen wir, daß auch umgekehrt alle Objekte, auf denen der Rechtsderivierte zu Q definiert ist, zu $\mathcal{C}_{S,\mathrm{Id}}$ gehören müssen. Also ist unser partieller Rechtsadjungierter ein Funktor $R : \mathcal{C}_{S,\mathrm{Id}} \to \mathcal{C}$ und die Einheit der Adjunktion ist eine Transformation $\varepsilon : \mathrm{Id} \Rightarrow RQ$ mit $\varepsilon_I : I \xrightarrow{\sim} RQI$ für alle rechtsentfalteten Objekte I. Damit aber hat das Paar (R, ε) die charakterisierende Eigenschaft, die den Rechtsfaktorierten der Identität (RId, τ) festlegt bis auf eindeutigen Isomorphismus. □

Ergänzung 20.3.2.23. In den Notationen des vorhergehenden Beweises ist nach 20.1.3.9 weiter $Q\tau_Y$ ein Isomorphismus. Nach 20.1.4.19 folgt daraus, wenn S ein gesättigtes Oresystem ist, sogar $\tau_Y \in S$.

20.3.2.24 (**S-Rechtsentfaltet impliziert G-S-Rechtsentfaltet**). Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit einem Rechtsoresystem S sind die S-rechtsentfalteten Objekte nach 20.3.2.21 notwendig G-S-rechtsentfaltet für jeden Funktor $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und 20.3.2.21 liefert stets eine Isotransformation

$$\alpha : \mathrm{R}G|_{\mathcal{C}_{S,\mathrm{Id}}} = \mathrm{R}(G \circ \mathrm{Id})|_{\mathcal{C}_{S,\mathrm{Id}}} \xRightarrow{\sim} G \circ \mathrm{RId} \text{ mit } \alpha Q \circ \tau_G = G\tau_{\mathrm{Id}}.$$

Nun wissen wir aus 20.3.2.22, daß der Rechtsfaktorierte RId des Identitätsfunktors gerade der maximale partielle Rechtsadjungierte R des Lokalisierungsfunktors ist. Salopp gesprochen haben wir also $\mathrm{R}G = G \circ R$ wo immer der partielle Rechtsadjungierte R des Lokalisierungsfunktors definiert ist.

Vorschau 20.3.2.25 (**Faktorieren mit injektiven Auflösungen**). Gegeben $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und S das Rechtsoresystem der Quasiisomorphismen in $\mathcal{C} := \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ hatten wir bereits in 20.2.6.5 vereinbart, die S-rechtsentfalteten Komplexe quisrechtsentfaltet zu nennen. Ebenso vereinbaren wir hier, die S-rechtsentfaltbaren Komplexe **quisrechtsentfaltbar** zu nennen. Zum Beispiel ist jeder gegen die Pfeile beschränkte Komplex I von injektiven Objekten von $\mathcal{A}$ nach 20.2.6.6 quisrechtsentfaltet. Wenn $\mathcal{A}$ genug Injektive besitzt, ist demnach für jedes $A \in \mathcal{A}$ der Komplex $A[0]$ quisrechtsentfaltbar. Betrachten wir nun eine weitere abelsche Kategorie $\mathcal{B}$ und einen additiven Funktor $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und die Verknüpfung $F := Q \circ \mathrm{Hot}(T)$ von Funktoren

$$F : \mathcal{C} = \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}} \to \mathrm{Hot}_{\mathcal{B}} \to \mathrm{Der}_{\mathcal{B}} = \mathcal{D}$$

und hat $\mathcal{A}$ weiter genug Injektive, so finden wir natürliche Isomorphismen

$$(\mathrm{R}^i T)(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^i\big((\mathrm{R}F)(A[0])\big)$$

Sie zeigen die Beziehung unserer höheren derivierten Funktoren aus 19.3.2.8 mit den hier erklärten faktorierten Funktoren. Im übrigen gibt es, wenn $\mathcal{A}$ genug Injektive besitzt, nach 19.9.3.9 oder alternativ 20.2.7.9 sogar von jedem Komplex in $\mathrm{Hot}^+(\mathcal{A})$ einen Quasiisomorphismus zu einem Komplex in $\mathrm{Hot}^+(i\mathcal{A})$ aus injektiven Objekten. Jeder Komplex in $\mathrm{Hot}^+(\mathcal{A})$ ist mithin quisrechtsentfaltbar für jeden Funktor $F : \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}$ in eine beliebige weitere Kategorie. Ein Vorteil der Begrifflichkeit der F-S-rechtsentfaltbaren Objekte oder spezieller der F-quisrechtsentfaltbaren Komplexe liegt darin, daß wir damit, auch ohne die Existenz von genug injektiven Objekten vorauszusetzen, derivierte Funktoren erklären und untersuchen können. Das verwenden wir in der opponierten Situation im weiteren zum Beispiel, um auf der derivierten Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum ein Tensorprodukt zu erklären.

20.3.2.26. Seien opponiert $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Linksoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$. Der **volle linksfaktorierte Funktor von** F ist der Funktor $\mathrm{L}F : \mathcal{C}_S \to \mathrm{pro}(\mathcal{D})$ von der Lokalisierung von $\mathcal{C}$ in die Kategorie der pro-Objekte von $\mathcal{D}$ gegeben durch

$$(\mathrm{L}F)(X) := \varprojlim_{A \xrightarrow{S} X} FA$$

Der Limes ist dabei zu verstehen über die kofiltrierende Kategorie aller S-Morphismen $A \to X$ in $\mathcal{C}$. Wir haben $(\mathrm{L}F)^{\mathrm{opp}} = \mathrm{R}(F^{\mathrm{opp}}) : \mathcal{C}_S^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{ind}(\mathcal{D}^{\mathrm{opp}}) = (\mathrm{pro}(\mathcal{D}))^{\mathrm{opp}}$. Alle für rechtsfaktorierte Funktoren bewiesenen Aussagen übertragen sich unmittelbar auf linksfaktorierte Funktoren. Insbesondere erklären wir die vollen Unterkategorien $\mathcal{C}_{[F]} \subset \mathcal{C}_F \subset \mathcal{C}$ der **F-S-linksentfalteten** beziehungsweise **F-S-linksentfaltbaren Objekte** und die vollen Unterkategorien

$$\mathcal{C}_{S,[F]} \subset \mathcal{C}_{S,F} \subset \mathcal{C}_S$$

in der Lokalisierung mit deren Bildern als Objekten und verzichten darauf, eine Notation einzuführen, die in diesem Kontext den Unterschied zwischen rechts und links zum Ausdruck bringt. Weiter erklären wir den **Linksfaktorierten** als das bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte Paar $(\mathrm{L}F, \sigma)$ bestehend aus einem Funktor $\mathrm{L}F : \mathcal{C}_{S,F} \to \mathcal{D}$ und einer Transformation

$$\sigma : \mathrm{L}F \circ Q \Rightarrow F$$

in $\mathrm{Cat}(\mathcal{C}_F, \mathcal{D})$, die für F-S-linksentfaltetes P alias $P \in \mathcal{C}_{[F]}$ einen Isomorphismus $\sigma_P : (\mathrm{L}F)(P) \xrightarrow{\sim} FP$ liefert.

20.3.2.27 (**Rechtsfaktorierter und Linksfaktorierter**). Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Oresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$. Für die Objekte X, die sowohl linksentfaltbar als auch rechtsentfaltbar sind, liefern unsere Definitionen natürliche Morphismen $(\mathrm{L}F)QX \to FX \to (\mathrm{R}F)QX$ in $\mathcal{D}$. Für Objekte X, die sowohl F-S-linksentfaltet als auch F-S-rechtsentfaltet sind, sind diese Morphismen sogar Isomorphismen. Sind alle Objekte von $\mathcal{C}$ sowohl F-S-rechtsentfaltet als auch F-S-linksentfaltet, so erhalten wir auf diese Weise Isotransformationen $\mathrm{L}F \circ Q \overset{\sim}{\Rightarrow} F \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{R}F \circ Q$. Insbesondere macht dann F Morphismen aus S zu Isomorphismen und faktorisiert folglich als $F = \tilde{F} \circ Q$. Da jeder Lokalisierungsfunktor nach 20.1.2.20 volldicht ist, kommen unsere Isotransformationen also her von wohlbestimmten Isotransformationen

$$\mathrm{L}F \overset{\sim}{\Rightarrow} \tilde{F} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{R}F$$

Die rechte dieser Isotransformation wurde bereits in 20.3.2.18 diskutiert.

20.3.2.28 (**Adjunktion von faktorierten Funktoren**). Seien adjungierte Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ gegeben und seien S ein Linksoresystem in $\mathcal{C}$ und T ein Rechtsoresystem in $\mathcal{D}$. So erhalten wir natürliche Bijektionen

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}_S)^\wedge(X, \mathrm{R}(QG)Y) & & (\mathcal{D}_T)^\vee(\mathrm{L}(QF)X, Y) \\
\operatorname{colf}_{Y \overset{T}{\to} I} \mathcal{C}_S(X, QGI) \arrow[u, "\wr"'] & & \operatorname{colf}_{P \overset{S}{\to} X} \mathcal{D}_T(QFP, Y) \arrow[u, "\wr"'] \\
\operatorname{colf}_{Y \overset{T}{\to} I,\, P \overset{S}{\to} X} \mathcal{C}(P, GI) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[rr, "\sim"] & & \operatorname{colf}_{P \overset{S}{\to} X,\, Y \overset{T}{\to} I} \mathcal{D}(FP, I) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Hier bezeichnet $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ und $Q : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_T$ die jeweilige Lokalisierung. Sind speziell das ind-Objekt $\mathrm{R}(QG)Y$ und das pro-Objekt $\mathrm{L}(QF)X$ essentiell konstant, so erhalten wir eine natürliche Bijektion

$$\mathcal{C}_S(X, \mathrm{R}(QG)Y) \overset{\sim}{\to} \mathcal{D}_T(\mathrm{L}(QF)X, Y)$$

Sind etwa alle Objekte von $\mathcal{C}$ bereits QF-S-linksentfaltbar, so ist $\mathrm{R}(QG)$ der partielle Rechtsadjungierte zu $\mathrm{L}(QF)$ auf allen QG-T-rechtsentfaltbaren Objekten von $\mathcal{D}$.

Vorschau 20.3.2.29. Die obigen Aussagen zur Adjunktion von vollen faktorierten Funktoren sind für die „Kan-Erweiterungen“, die auch oft betrachtet werden und die wir in 20.3.10 behandeln, in dieser Allgemeinheit nicht mehr richtig.

20.3.2.30. Ich erinnere daran, daß wir in 16.4.8.5 einen partiell definierten Funktor als einen auf einer vollen Unterkategorie definierten Funktor erklärt hatten.

Gegeben Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und partiell definierte Funktoren $L : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{A}$ verstehe ich unter einer **partiellen Adjunktion** (L, R) eine Isotransformation

$$\alpha_{A,B} : \mathcal{B}(LA, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(A, RB)$$

von Funktoren $\mathcal{A}_L \times \mathcal{B}_R \to \mathrm{Ens}$ vom Produkt der Definitionsbereiche unserer jeweiligen Funktoren. In dieser Terminologie induziert also mit den Notationen der vorherigen Bemerkung 20.3.2.28 jede Adjunktion (F, G) von Funktoren zwischen Kategorien mit ausgezeichneten Links- beziehungsweise Rechts-Oresystemen eine partielle Adjunktion der faktorierten Funktoren $(\mathrm{L}(QF), \mathrm{R}(QG))$.

Übungen

Übung 20.3.2.31. Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Rechtsoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$. Induziert eine F-S-Rechtsentfaltung $Y \to I$ von $Y \in \mathcal{C}$ einen Isomorphismus $FY \xrightarrow{\sim} FI$, so ist Y bereits F-S-rechtsentfaltet.

Übung 20.3.2.32. Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Rechtsoresystem von Morphismen von $\mathcal{C}$. Gegeben sei eine Menge $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ von Objekten derart, daß (1) jedes Objekt $Y \in \mathcal{C}$ einen S-Morphismus zu einem Objekt $I \in \mathcal{I}$ besitzt und daß (2) jeder S-Morphismus zwischen Objekten aus $\mathcal{I}$ unter F ein Isomorphismus wird. So besteht $\mathcal{I}$ aus F-S-rechtsentfalteten Objekten.

Übung 20.3.2.33. Seien $(\mathcal{C}, S)$ und $(\mathcal{D}, T)$ Kategorien mit Morphismenmengen. Ist $I \in \mathcal{C}$ rechtsentfaltet für S und $J \in \mathcal{D}$ rechtsentfaltet für T, so ist $(I, J) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ rechtsentfaltet für $S \times T$.

Übung 20.3.2.34. Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Rechtsoresystem in $\mathcal{C}$. Besitzt $Y \in \mathcal{C}$ eine F-S-Rechtsentfaltung, so auch jedes weitere Objekt $Z \in \mathcal{C}$ mit $QY \cong QZ$ in $\mathcal{C}_S$. Hinweis: Ich erinnere die Definition: Eine F-S-Rechtsentfaltung 20.3.2.10 ist ein Morphismus zu einem entfalteten Objekt, der in der Lokalisierung ein Isomorphismus wird.

Übung 20.3.2.35. Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Rechtsoresystem in $\mathcal{C}$. Gegeben ein F-S-rechtsentfaltbares Objekt $X \in \mathcal{C}$ bilden die entsprechenden Entfaltungen $X \to I$ ein Ind-Objekt. Hinweis: Jeder Morphismus der lokalisierten Kategorie kann als Rechtsbruch geschrieben werden. Zwei Morphismen f, g in $\mathcal{C}$ werden nach 20.1.4.28 gleich in der Lokalisierung genau dann, wenn es $s \in S$ gibt mit $sf = sg$. Diese Übung wird gebraucht bei der Diskussion der Lokalisierung von Kofaserfunktoren durch lokale Linksanpassung 21.2.5.12.

20.3.3 Faktorieren über triangulierte Quotienten

20.3.3.1. Gegeben eine triangulierte Kategorie $\mathcal{T}$ und ein trianguliertes System $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$ ist nach 20.2.5.3 das System $S = S_{\mathcal{V}}$ aller Morphismen mit Kegel in $\mathcal{V}$

ein Oresystem und wir haben per definitionem $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}/\mathcal{V}$. Statt S-rechtsentfaltet beziehungsweise S-rechtsentfaltbar sagen wir in diesem Kontext auch **$\mathcal{V}$-rechtsentfaltet** beziehungsweise **$\mathcal{V}$-rechtsentfaltbar**. Ebenso sagen wir für einen Funktor $F : \mathcal{T} \to \mathcal{D}$ statt F-S-rechtsentfaltet beziehungsweise F-S-rechtsentfaltbar in diesem Kontext **F-$\mathcal{V}$-rechtsentfaltet** beziehungsweise **F-$\mathcal{V}$-rechtsentfaltbar**.

20.3.3.2. Die $\mathcal{V}$-rechtsentfalteten Objekte von $\mathcal{T}$ sind per definitionem genau unsere $\mathcal{V}$-rechtsentfalteten Objekte aus 20.2.5.6, also genau die Objekte unseres Verdiersystems $\mathcal{V}^\perp$ aller Objekte $I \in \mathcal{T}$ mit $\mathcal{T}(V, I) = 0$ für alle $V \in \mathcal{V}$.

Satz 20.3.3.3 (**Rechtsfaktorierter eines triangulierten Funktors**). *Gegeben ein triangulierter Funktor $F : \mathcal{T} \to \mathcal{D}$ und ein trianguliertes System $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$ gilt:*

1. *Die F-$\mathcal{V}$-rechtsentfalteten Objekte von $\mathcal{T}$ bilden eine volle triangulierte Unterkategorie $\mathcal{T}_{[F]} \subset \mathcal{T}$;*

2. *Die F-$\mathcal{V}$-rechtsentfaltbaren Objekte von $\mathcal{T}$ und ihre Bilder bilden jeweils volle triangulierte Unterkategorien $\mathcal{T}_F \subset \mathcal{T}$ und $(\mathcal{T}/\mathcal{V})_F \subset \mathcal{T}/\mathcal{V}$;*

3. *Der rechtsfaktorierte Funktor $\mathrm{R}F$ von F besitzt genau eine $\mathbb{Z}$-Struktur, für die $\tau : F \Rightarrow (\mathrm{R}F)Q$ eine verträgliche Transformation von $\mathbb{Z}$-Funktoren ist, und mit dieser $\mathbb{Z}$-Struktur ist er ein triangulierter Funktor*

$$\mathrm{R}F : (\mathcal{T}/\mathcal{V})_F \to \mathcal{D}$$

Beweis. Einen Morphismus mit Abbildungskegel in $\mathcal{V}$ nennen wir im folgenden kurz einen **$\mathcal{V}$-Morphismus**. Zunächst zeigen wir, daß die F-$\mathcal{V}$-rechtsentfalteten oder kurz entfalteten Objekte eine volle triangulierte Unterkategorie $\mathcal{T}_{[F]} \subset \mathcal{T}$ bilden. Dazu argumentieren wir anhand des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{V}"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{V}"', "1"] & C \arrow[r, "{[1]}"] \arrow[d, "\mathcal{V}"', "2"] & {} \\
X \arrow[r, "1"'] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "2"'] \arrow[d, "\mathcal{V}"', "3"] & Z \arrow[r, "{[1]}", "2"'] \arrow[d, "\mathcal{V}"', "4"] & {} \\
X \arrow[r, "3"'] \arrow[d, "\mathcal{V}"', "6"] & Y' \arrow[r, "4"'] \arrow[d, equal] & Z' \arrow[r, "{[1]}", "4"'] \arrow[d, "\mathcal{V}"', "5"] & {} \\
X'' \arrow[r, "6"'] & Y' \arrow[r, "5"'] & Z'' \arrow[r, "{[1]}", "6"'] & {}
\end{tikzcd}$$

Wir gehen aus von einem ausgezeichneten Dreieck in der obersten Horizontale, in dem wir B und C als entfaltet annehmen, und von einem beliebigen $\mathcal{V}$-Morphismus $A \to X$. Da nach 20.2.5.3 die $\mathcal{V}$-Morphismen ein Oresystem bilden,

können wir in einem ersten Schritt (1) den Kowinkel oben links so kommutativ ergänzen, daß wie angedeutet auch $B \to Y$ ein $\mathcal{V}$-Morphismus ist. Dann vervollständigen wir in Schritt (2) die zweite Horizontale zu einem ausgezeichneten Dreieck und ergänzen die beiden linken Vertikalen zu einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken durch einen Morphismus $C \to Z$, dessen Kegel nach 20.2.5.5 wie angedeutet in $\mathcal{V}$ liegen muß. In Schritt (3) wählen wir $Y \to Y'$ mit Kegel in $\mathcal{V}$ so, daß die Komposition $FB \to FY \to FY'$ ein Isomorphismus ist. In Schritt (4) ergänzen wir wieder zu einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken. In Schritt (5) wählen wir $Z' \to Z''$ mit Kegel in $\mathcal{V}$ so, daß die Komposition $FC \to FZ \to FZ' \to FZ''$ ein Isomorphismus ist. In Schritt (6) ergänzen wir ein letztes Mal zu einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken. Lassen wir nun F auf das ganze Diagramm los, so werden beide Kompositionen der mittleren und rechten Vertikalen Isomorphismen, also auch die Komposition in der linken Vertikale. Das zeigt Teil 1. Nun zeigen wir, daß auch die F-$\mathcal{V}$-rechtsentfaltbaren oder kurz entfaltbaren Objekte eine volle triangulierte Unterkategorie $\mathcal{T}_F \subset \mathcal{T}$ bilden. Wir gehen aus von einem ausgezeichneten Dreieck, in dem wir B und C als entfaltbar annehmen, und argumentieren anhand des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{V}"', "1"] & C \arrow[r, "{[1]}"] \arrow[d, "\mathcal{V}"', "2"] & {} \\
A \arrow[r, "1"'] \arrow[d, "\mathcal{V}"', "4"] & X \arrow[r, "2"'] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "{[1]}", "2"'] \arrow[d, "\mathcal{V}"', "3"] & {} \\
Z \arrow[r, "4"'] & X \arrow[r, "3"'] & Y' \arrow[r, "{[1]}", "4"'] & {}
\end{tikzcd}$$

Hier wählen wir im Schritt (1) eine Entfaltung von B, bilden im Schritt (2) das ausgezeichnete Dreieck, wählen in Schritt (3) mithilfe von 20.3.2.34 eine Entfaltung von Y und bilden in Schritt (4) wieder das Dreieck. Nach dem bereits Bewiesenen besteht dann das unterste Dreieck aus entfalteten Objekten und wir sehen, daß $\mathcal{T}_F \subset \mathcal{T}$ eine volle triangulierte Unterkategorie ist. Für $\mathcal{V}_{[F]} := \mathcal{T}_{[F]} \cap \mathcal{V}$ ist nun der offensichtliche triangulierte Funktor $\mathcal{T}_{[F]}/\mathcal{V}_{[F]} \to \mathcal{T}/\mathcal{V}$ volltreu nach dem allgemeinen Resultat 20.1.4.21 über Orelokalisierung und volltreue Einbettungen. Unser Funktor liefert folglich eine Äquivalenz

$$E : \mathcal{T}_{[F]}/\mathcal{V}_{[F]} \xrightarrow{\approx} (\mathcal{T}/\mathcal{V})_F$$

mit der vollen Unterkategorie aller derjenigen Objekte von $\mathcal{T}/\mathcal{V}$, die in $\mathcal{T}$ entfaltbar sind, und insbesondere ist diese volle Unterkategorie von $\mathcal{T}/\mathcal{V}$ auch trianguliert und Teil 2 ist bewiesen. Nun zeigen zeigen wir $F(X) = 0$ für alle $X \in \mathcal{V}_{[F]}$. Per definitionem ist für $X \in \mathcal{V}$ ja der Nullmorphismus $X \to 0$ ein $\mathcal{V}$-Morphismus, und ist X zusätzlich entfaltet, so muß er sich verlängern lassen durch einen Morphismus $0 \to Y$ derart, daß die Komposition einen Isomorphismus $FX \xrightarrow{\sim} FY$

liefert. Das ist aber offensichtlich nur möglich, wenn bereits gilt $FX = 0$. So folgt in der Tat $F(X) = 0$ für alle $X \in \mathcal{V}_{[F]}$. Die Einschränkung von F auf $\mathcal{T}_{[F]} \subset \mathcal{T}$ faktorisiert mithin über einen triangulierten Funktor $\bar{F} : \mathcal{T}_{[F]}/\mathcal{V}_{[F]} \to \mathcal{D}$. Jede Wahl eines Quasiinversen U der Äquivalenz E liefert so einen triangulierten Funktor

$$R := \bar{F}U : (\mathcal{T}/\mathcal{V})_F \to \mathcal{D}$$

nebst einer verträglichen Transformation $\tau : F \Rightarrow RQ$ von Funktoren $\mathcal{T}_F \to \mathcal{D}$, die zusammen die charakterisierende Eigenschaft eines Rechtsfaktorierten aus 20.3.2.13 haben. Die Eindeutigkeit des Paares (R, τ) bis auf eindeutigen Isomorphismus zeigt auch, daß die $\mathbb{Z}$-Struktur auf R durch die Bedingungen im Satz bereits eindeutig festgelegt wird. □

20.3.3.4 (**Überflüssiges Faktorieren**). Seien $F : \mathcal{T} \to \mathcal{D}$ ein triangulierter Funktor und $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$ ein trianguliertes System. Ist jedes Objekt von $\mathcal{T}$ rechtsentfaltet für $(F, \mathcal{V})$, so faktorisiert F über $\tilde{F} : \mathcal{T}/\mathcal{V} \to \mathcal{D}$ und unser τ ist eine Isotransformation $\tau : \tilde{F}Q = F \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{R}FQ$ und induziert eine Isotransformation $\tilde{F} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{R}F$. Diese Erkenntnis ist ein Spezialfall von 20.3.2.18.

20.3.3.5 (**Rechtsfaktorierte und Linksfaktorierte**). Seien $F : \mathcal{T} \to \mathcal{D}$ ein triangulierter Funktor und $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$ ein trianguliertes System. Ist jedes Objekt von $\mathcal{T}$ sowohl F-$\mathcal{V}$-rechtsentfaltet wie F-$\mathcal{V}$-linksentfaltet, so induzieren die natürlichen Transformationen aus der Definition Isotransformationen $\mathrm{L}F \circ Q \overset{\sim}{\Rightarrow} F \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{R}F \circ Q$. Damit annulliert F alle Objekte aus $\mathcal{V}$ und faktorisiert über $\mathcal{T}/\mathcal{V}$ als $F = \tilde{F}Q$ und unsere Isotransformationen kommen her von eindeutig bestimmten Isotransformationen

$$\mathrm{L}F \overset{\sim}{\Rightarrow} \tilde{F} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{R}F$$

Das alles spezialisiert 20.3.2.27 und folgt auch unmittelbar aus unserem Satz 20.3.3.3 zum Rechtsfaktorierten eines triangulierten Funktors.

20.3.4 Derivierte Funktoren

20.3.4.1. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien. Den rechtsfaktorierten Funktor zur Verknüpfung

$$Q \circ \mathrm{Hot}(F) : \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{B}) \to \mathrm{Der}(\mathcal{B})$$

in Bezug auf das gesättigte Oresystem S der Quasiisomorphismen alias das Verdiersystem der exakten Komplexe von $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ nennen wir den **rechtsderivierten Funktor zu** F und notieren ihn vereinfachend $\mathrm{R}F := \mathrm{R}(Q \circ \mathrm{Hot}(F))$. Unser rechtsderivierter Funktor zu F ist also ein triangulierter Funktor

$$\mathrm{R}F : \mathrm{Der}(\mathcal{A})_F \to \mathrm{Der}(\mathcal{B})$$

mit der vereinfachten Notation $\mathrm{Der}(\mathcal{A})_F := \mathrm{Der}(\mathcal{A})_{Q\circ\mathrm{Hot}(F)}$ für die nach 20.3.3.3 volle triangulierte Unterkategorie der $(Q\circ\mathrm{Hot}(F))$-S-rechtsentfaltbaren Objekte, die wir in diesem Kontext abkürzend F**-quisrechtsentfaltbar** nennen. Wir sagen in diesem Kontext auch einfacher F**-quisrechtsentfaltet** statt „$(Q\circ\mathrm{Hot}(F))$-S-rechtsentfaltet“ und notieren die Kategorie aller F-quisrechtsentfalteten Komplexe $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})_{[F]}$ beziehungsweise $\mathrm{Der}(\mathcal{A})_{[F]}$ je nachdem, ob wir sie als Objekte der Homotopiekategorie oder der derivierten Kategorie betrachten. Ganz genau ist dann unser Rechtsderivierter nach 20.3.2.13 das bis auf eindeutige Isotransformation eindeutig bestimmte Paar $(\mathrm{R}F, \tau)$ aus besagtem triangulierten Funktor und einer Transformation $\tau : Q\circ(\mathrm{Hot}\,F) \Rightarrow \mathrm{R}F\circ Q$, die für alle F-quisrechtsentfalteten Komplexe Y einen Isomorphismus $\tau_Y : FY \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}F)Y$ in $\mathrm{Der}(\mathcal{B})$ liefert.

20.3.4.2. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien. Die volle Unterkategorie aller Objekte $A \in \mathcal{A}$ derart, daß $A[0]$ ein F-quisrechtsentfaltbarer Komplex ist, notieren wir $\mathcal{A}_F$ und nennen diese Objekte die F**-quisrechtsentfaltbaren Objekte von** $\mathcal{A}$. Die **höheren derivierten Funktoren von** F erklären wir dann als die Funktoren

$$\mathrm{R}^qF : \mathcal{A}_F \to \mathcal{B}$$

gegeben durch $(\mathrm{R}^qF) : A \mapsto \mathcal{H}^q(\mathrm{R}F(A[0]))$. Schließlich nennen wir $A \in \mathcal{A}$ ein F**-rechtsazyklisches Objekt**, wenn $A[0]$ ein F-quisrechtsentfalteter Komplex ist.

Proposition 20.3.4.3 (**Rechtsderivieren erhält Positivität).** *Gegeben $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien und $X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})_F$ ein F-quisrechtsentfaltbarer Komplex gilt*

$$X \in \mathrm{Der}^{\geq n}(\mathcal{A}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R}F(X) \in \mathrm{Der}^{\geq n}(\mathcal{B})$$

20.3.4.4. Insbesondere induziert die Adjunktion $(\tau^{\geq n}, i^{\geq n})$, wenn $\tau^{\geq n}X$ auch F-quisrechtsentfaltbar ist, einen Morphismus $\tau^{\geq n}\mathrm{R}F(X) \to \mathrm{R}F(\tau^{\geq n}X)$. Des weiteren verschwinden unsere R^qF für $q < 0$ auch in der Allgemeinheit unserer Definition 20.3.4.2.

Beweis. Nach Annahme gibt es einen Quasiisomorphismus $X \xrightarrow{\sim} Y$ zu einem F-quisrechtsentfalteten Komplex $Y \in \mathrm{Hot}(\mathcal{A})$. Dann ist für Y der natürliche Morphismus ein Quasiisomorphismus $Y \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq n}Y$ und muß sich so durch einen Morphismus $\tau^{\geq n}Y \to Z$ fortsetzen lassen, daß die Komposition ein Quasiisomorphismus ist und einen Quasiisomorphismus $FY \xrightarrow{\sim} FZ$ induziert. Es folgt $\mathcal{H}^i\mathrm{R}F(X) = \mathcal{H}^iFY = 0$ für $i < n$. □

20.3.4.5 (**Rückwärtskompatibilitäten**). Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Nach 20.2.6.6 sind gegen die Pfeile beschränkte Komplexe von injektiven Objekten

in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ stets quisrechtsentfaltet. Folglich verallgemeinern die hier definierten höheren derivierten Funktoren unsere durch injektive Auflösungen definierten höheren derivierten Funktoren aus 19.3.2.8. Man sieht so auch leicht ein, daß die obige Definition eines F-rechtsazyklischen Objekts im Fall eines linksexakten Funktors $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie mit der unter diesen Voraussetzungen in 19.3.6.4 gegebenen Definition äquivalent ist.

20.3.4.6. Analoge Sprechweisen vereinbaren wir für linksderivierte Funktoren und setzen zur Vermeidung von Vorzeichen $\mathrm{L}_i F X := \mathcal{H}^{-i}(\mathrm{L}F(X[0]))$.

20.3.4.7 (**Derivierte Morphismen als Morphismen der derivierten Kategorie**). Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ konstruieren wir in diesem Abschnitt für alle Objekte $X, Y \in \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$, für die der Rechtsfaktorierte in Bezug auf Quasiisomorphismen $\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}}$ des Funktors

$$(Q \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}) : \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}} \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$$

bei (X, Y) definiert ist, einen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$\mathcal{H}^0 \,\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$$

Nach unseren Erkenntnissen 20.3.2.21 über das Faktorieren einer Verknüpfung ist ja für so ein Paar (X, Y) und jeden Funktor $G : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}) \to \mathcal{D}$ der Rechtsfaktorierte von $G \circ (Q \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}})$ bei (X, Y) definiert und wir haben einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathrm{R}(G \circ (Q \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}))(X, Y) \xrightarrow{\sim} G(\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}}(X, Y))$$

Für $G = \mathcal{H}^0$ finden wir speziell $\mathcal{H}^0 \circ (Q \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Hot}}$ und damit ist auch der Rechtsfaktorierte von $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Hot}}$ bei (X, Y) definiert. Für den Rechtsfaktorierten von $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Hot}}$ hatten wir jedoch bereits in 20.3.2.20 eine ausgezeichnete Bijektion $(\mathrm{R}\,\mathrm{Mor}_{\mathrm{Hot}})(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ konstruiert.

20.3.4.8 (**Derivierte Morphismen in einer Variablen**). Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ und $X \in \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ erhalten wir für alle Objekte $Y \in \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$, für die der Rechtsderivierte $\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}}(X, \ )$ des Funktors $(Q \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \ )) : \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}} \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ definiert ist, einen natürlichen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$\mathcal{H}^0\big(\,\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}}(X, \ )(Y)\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$$

In der Tat haben wir in diesem Fall $\check{X} = \mathcal{H}^0 \circ (Q \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \ ))$ und nach unseren Erkenntnissen 20.3.2.21 ist dann auf Y auch der Rechtsfaktorierte von $\check{X}$ definiert und dessen Wert bei Y stimmt nach 20.3.2.20 mit der Morphismenmenge in der lokalisierten Kategorie $\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ überein. Analoges gilt für den anderen Eintrag.

Beispiel 20.3.4.9 (**Derivieren exakter Funktoren**). Gegeben ein exakter Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen abelschen Kategorien ist jeder Komplex sowohl quisrechtsentfaltet als auch quislinksentfaltet für F und wie in 20.3.3.5 besprochen erhalten wir in diesem Fall Isotransformationen

$$\mathrm{L}F \overset{\sim}{\Rightarrow} (Q \circ \mathrm{Hot}(F))^{\sim} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{R}F$$

zwischen dem linksderivierten Funktor, dem von $Q \circ \mathrm{Hot}(F)$ vermittels der universellen Eigenschaft der Lokalisierung auf den derivierten Kategorien induzierten Funktor und dem rechtsderivierten Funktor. Wir notieren $(Q \circ \mathrm{Hot}(F))^{\sim}$ in diesem Fall schlicht

$$F : \mathrm{Der}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Der}(\mathcal{B})$$

Für diesen Funktor gilt $F(\mathrm{Der}^{\geq n}(\mathcal{A})) \subset \mathrm{Der}^{\geq n}(\mathcal{B}), F(\mathrm{Der}^{\leq n}(\mathcal{A})) \subset \mathrm{Der}^{\leq n}(\mathcal{B})$ und die Adjunktionen geben Isomorphismen $\tau^{\geq n}F \overset{\sim}{\Rightarrow} F\tau^{\geq n}, F\tau^{\leq n} \overset{\sim}{\Rightarrow} \tau^{\leq n}F$, die zusammen Isomorpismen $F\mathcal{H}^n \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathcal{H}^n F$ liefern.

Scholium 20.3.4.10. Das Derivieren exakter Funktoren ist ein Extremfall der hier vorgestellten Theorie, in dem der derivierte Funktor global existiert, ohne daß man irgendwelche Annahmen über die Existenz von Entfaltungen machen muß. Ein anderer Extremfall ist das Derivieren durch gegen die Differentiale beschränkte injektive Auflösungen, das für jeden beliebigen additiven Funktor gelingt, aber eben nur als partiell definierter Funktor. Ein wichtiger weniger extremer Fall ist das derivierte Tensorieren von Garben, auf das wir noch zurückkommen werden.

Korollar 20.3.4.11 (**Rechtsderivieren und Abschneiden**). *Gegeben $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien und $X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})_F$ ein F-quisrechtsentfaltbarer Komplex mit $\tau^{\leq n}X$ auch F-quisrechtsentfaltbar induziert $\tau^{\leq n}X \to X$ einen Isomorphismus*

$$\tau^{\leq n}\mathrm{R}F(\tau^{\leq n}X) \overset{\sim}{\to} \tau^{\leq n}\mathrm{R}F(X)$$

Beweis. Wir betrachten das ausgezeichnete Dreieck $\tau^{\leq n}X \to X \to \tau^{>n}X \to [1]$. Seine lange exakte Kohomologiesequenz zeigt, daß wir nur $\mathcal{H}^i\mathrm{R}F\tau^{>n}X = 0$ für $i \leq n$ zu zeigen brauchen. Das folgt jedoch daraus, daß nach 20.3.4.3 Rechtsderivieren Positivität erhält. □

Proposition 20.3.4.12 (**Nullter Rechtsderivierter eines linksexakten Funktors**). *Gegeben ein linksexakter Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen abelschen Kategorien liefert die kanonische Transformation $F \Rightarrow (\mathrm{R}F)Q$ für jedes F-quisrechtsentfaltbare Objekt $A \in \mathcal{A}_F$ einen Isomorphismus*

$$FA \overset{\sim}{\to} \mathrm{R}^0F(A)$$

Beweis. Ist $A[0] \xrightarrow{\sim} Y$ eine F-Quisrechtsentfaltung, so ist $Y \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq 0}Y$ ein Quasiisomorphismus und $\tau^{\geq 0}Y$ besitzt nach 20.3.2.34 seinerseits eine F-Quisrechtsentfaltung $\tau^{\geq 0}Y \to Z$. Nun betrachten wir die Sequenz

$$FA \to \mathcal{H}^0 FY \to \mathcal{H}^0 F\tau^{\geq 0}Y \to \mathcal{H}^0 FZ$$

Die linksexakte Sequenz $A \hookrightarrow Y^0/(\operatorname{im} d) \to Y^1$ zeigt nach Anwenden von F, daß die Komposition der beiden linken Morphismen dieser Sequenz ein Isomorphismus ist. Die Komposition der beiden rechten Morphismen ist ein Isomorphismus nach Konstruktion. Damit müssen dann alle drei Morphismen Isomorphismen sein. Der erste Isomorphismus ist aber gerade der Isomorphismus, den wir in der Proposition behauptet hatten. □

Proposition 20.3.4.13 (**Entfaltung durch Komplexe aus azyklischen Objekten**). *Gegeben ein additiver Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen abelschen Kategorien ist ein F-quisrechtsentfaltbarer Komplex $X \in \operatorname{Hot}^+_{\mathcal{A}}$ aus F-rechtsazyklischen Objekten bereits F-quisrechtsentfaltet.*

20.3.4.14. Besitzt $\mathcal{A}$ genug Injektive, so ist nach 20.3.2.25 jeder Komplex $X \in \operatorname{Hot}^+_{\mathcal{A}}$ für jeden additiven Funktor F quisrechtsentfaltbar.

Beweis. Jeder Komplex aus F-rechtsazyklischen Objekten von $\mathcal{A}$ mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Einträgen ist F-quisrechtsentfaltet, da die F-quisrechtsentfalteten Komplexe nach 20.3.3.3 eine volle triangulierte Unterkategorie bilden. Für $n \geq 0$ ist also der ab der $(n+1)$-ten Stelle durch Null fortgesetzte Komplex $X^{\leq n}$ quisrechtsentfaltet für F. Das ausgezeichnete Dreieck $X \to X^{\leq n} \to Z \to [1]$ besteht mithin aus F-quisrechtsentfaltbaren Komplexen und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} QF(X) & \to & QF(X^{\leq n}) & \to & QF(Z) & \to & [1] \\ \downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow & & \\ \mathrm{R}F(X) & \to & \mathrm{R}F(X^{\leq n}) & \to & \mathrm{R}F(Z) & \to & [1] \end{array}$$

Nach 20.3.4.3 folgt aus $Z \in \operatorname{Der}^{\geq n}(\mathcal{A})$ bereits $\mathrm{R}F(Z) \in \operatorname{Der}^{\geq n}(\mathcal{B})$. Im linken Quadrat werden also nach Anwenden von $\mathcal{H}^q$ für $q < n$ die beiden Horizontalen Isomorphismen. Für die mittlere Vertikale gilt das eh wie bereits eingezeichnet und für die linke Vertikale folgt es. Wenden wir diese Erkenntnis auf alle n an, so folgt $\mathcal{H}^q(QF(X)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q(\mathrm{R}F(X))$ für alle q und damit $QF(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}F(X)$ wie behauptet. □

20.3.4.15 (**Lange exakte Sequenz der höheren Derivierten**). Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien. Nach 20.3.4.3 verschwinden auf jedem F-quisrechtsentfaltbaren Objekt von $\mathcal{A}$ alle negativen Rechtsderivierten. Nach 20.2.6.4 gehört jede kurze exakte Sequenz $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ zu einem

wohlbestimmten ausgezeichneten Dreieck und führt folglich, wenn alle drei Objekte F-quisrechtsentfaltbar sind, auch in dieser Allgemeinheit zu einer langen exakten Sequenz

$$\mathrm{R}^0F(A') \hookrightarrow \mathrm{R}^0F(A) \to \mathrm{R}^0F(A'') \to \mathrm{R}^1F(A') \to \mathrm{R}^1F(A) \to \mathrm{R}^1F(A'') \to \dots$$

Es reicht im übrigen auch schon zu fordern, daß zwei Objekte unserer kurzen exakten Sequenz F-quisrechtsentfaltbar sind, denn dann ist das dritte nach 20.3.3.3 notwendig auch F-quisrechtsentfaltbar. Ist F linksexakt, so zeigt 20.3.4.12, daß wir in unserer langen exakten Sequenz sogar R^0F durch F ersetzen dürfen.

20.3.4.16 (**Adjunktion derivierter Funktoren auf derivierten Kategorien**). Gegeben $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsche Kategorien und (F, G) ein Paar von adjungierten additiven Funktoren

$$\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$$

sind $\mathrm{L}F$ und $\mathrm{R}G$ partiell adjungiert im Sinne von 20.3.2.30, wir haben also eine explizite Isotransformation

$$\eta_{A,B} : \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(A, \mathrm{R}GB) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{B}}(\mathrm{L}FA, B)$$

von Funktoren $\mathrm{Der}(\mathcal{A})_F \times \mathrm{Der}(\mathcal{B})_G \to \mathrm{Ens}$. In der Tat, gegeben Komplexe $A \in \mathrm{Hot}\,\mathcal{A}$ und $B \in \mathrm{Hot}_{\mathcal{B}}$ liefert unsere Adjunktion (F, G) natürliche Isomorphismen $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}(A, GB) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hot}_{\mathcal{B}}(FA, B)$ alias eine Adjunktion $(\mathrm{Hot}\,F, \mathrm{Hot}\,G)$ und unsere Isotransformation ergibt sich damit aus der allgemeinen Diskussion zur Adjunktion faktorierter Funktoren in 20.3.2.28.

Beispiel 20.3.4.17 (**Spezialfall der Garbenkohomologie**). Gegeben ein topologischer Raum X betrachten wir den linksexakten Funktor $\Gamma : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}$ der globalen Schnitte. Unsere Theorie liefert dazu einen rechtsderivierten Funktor $\mathrm{R}\Gamma : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})_\Gamma \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ auf der vollen Unterkategorie der Γ-entfaltbaren Objekte. Da $\mathrm{Ab}_{/X}$ genug Injektive hat, sind alle gegen die Richtung der Differentiale beschränkten Komplexe schon einmal quisrechtsentfaltbar, in Formeln $\mathrm{Der}^+(\mathrm{Ab}_{/X}) \subset \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})_\Gamma$. In 21.2.3.2 zeigen wir, daß sogar alle Garbenkomplexe quisrechtsentfaltbar sind, so daß sogar gilt $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})_\Gamma = \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$. Gegeben ein Komplex $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})_\Gamma$ von abelschen Garben setzt man

$$\mathbb{H}^q(X; \mathcal{F}) := \mathcal{H}^q(\mathrm{R}\Gamma)(\mathcal{F})$$

und nennt diese Gruppe die **q-te Hyperkohomologie von X mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$**. Besteht der Komplex $\mathcal{F} = \mathcal{G}[0]$ aus einer Garbe $\mathcal{G}$ im Grad Null und Nullen in allen anderen Graden, so erhalten wir unsere Garbenkohomologie zurück. In Formeln gilt also $\mathbb{H}^q(X; \mathcal{G}[0]) = \mathrm{H}^q(X; \mathcal{G})$. Analog verfahren wir auch im Fall

des Funktors der Schnitte mit Träger in einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subset\!\!\!

Funktoren sind dann Isomorphismen von Kategorien $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{/\!/X}$ in die Fasern und unsere f^* entsprechen unter diesen Isomorphismen den Rückholfunktoren des Faserfunktors $\mathrm{Der}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$. Wir besprechen das genauer in 21.2.4.

20.3.4.21 (**Grothendieck's Spektralsequenz im Fall derivierter Kategorien**). Seien abelsche Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ gegeben sowie additive Funktoren $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Haben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ genug Injektive, so sind auf den gegen die Pfeile beschränkten derivierten Kategorien jeweils die rechtsderivierten Funktoren definiert. Die zugehörigen Daten fassen wir zusammen im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hot}^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "F"] \arrow[d] & \mathrm{Hot}^+(\mathcal{B}) \arrow[r, "G"] \arrow[d] \arrow[dl, Rightarrow] & \mathrm{Hot}^+(\mathcal{C}) \arrow[d] \arrow[dl, Rightarrow] \\
\mathrm{Der}^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathrm{R}F"'] & \mathrm{Der}^+(\mathcal{B}) \arrow[r, "\mathrm{R}G"'] & \mathrm{Der}^+(\mathcal{C})
\end{tikzcd}$$

Es liefert eine Transformation $\eta : Q \circ G \circ F \Rightarrow \mathrm{R}G \circ \mathrm{R}F \circ Q$ mit der Notation Q für alle Lokalisierungsfunktoren in den Vertikalen. Macht unser Funktor F injektive Objekte zu G-rechtsazyklischen Objekten, so ist nach unseren Erkenntnissen 20.3.4.13 zum Derivieren mit Auflösungen durch azyklische Objekte η_I für jeden Komplex $I \in \mathrm{Hot}^+(i\mathcal{A})$ ein Isomorphismus. Also hat das Paar $(\mathrm{R}G \circ \mathrm{R}F, \eta)$ die charakterisierende Eigenschaft für einen eingeschränkten Rechtsderivierten von QGF nach 20.3.2.16 und wir erhalten für die entsprechenden Funktoren $\mathrm{Der}^+(\mathcal{A}) \to \mathrm{Der}^+(\mathcal{C})$ eine wohlbestimmte Isotransformation

$$\mathrm{R}(G \circ F) \xRightarrow{\sim} \mathrm{R}G \circ \mathrm{R}F$$

20.3.4.22 (**Verknüpfung faktorierter Funktoren**). Die oben gegebene Argumentation funktioniert auch in der Allgemeinheit von Ore-Lokalisierungen. Seien genauer $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sowie $H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ Funktoren. Seien S ein Rechtsoresystem von $\mathcal{C}$ und T ein Rechtsoresystem von $\mathcal{D}$. Die durch die faktorierten Funktoren von QF und H gegebenen Daten fassen wir zusammen in den Diagrammen

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{QF} \arrow[r, "F"] \arrow[d] & \mathcal{D} \arrow[d] \arrow[dl, Rightarrow] \\
\mathcal{C}_{S,QF} \arrow[r, "\mathrm{R}(QF)"'] & \mathcal{D}_T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_H \arrow[r, "H"] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[d, equal] \arrow[dl, Rightarrow] \\
\mathcal{D}_{T,H} \arrow[r, "\mathrm{R}H"'] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

Gegeben eine volle Unterkategorie $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}_{QF}$ mit $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{D}_H$, die mit jedem Objekt auch eine QF-Entfaltung des besagten Objekts enthält, können wir das entsprechend eingeschränkte erste Diagramm mit dem zweiten zusammenfügen

zu einem Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[r, "F"] \arrow[d] & \mathcal{D}_H \arrow[r, "H"] \arrow[d] \arrow[dl, Rightarrow] & \mathcal{E} \arrow[d, equal] \arrow[dl, Rightarrow] \\
Q(\mathcal{U}) \arrow[r, "\mathrm{R}(QF)"'] & \mathcal{D}_{T,H} \arrow[r, "\mathrm{R}H"'] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

und erhalten so insbesondere eine Transformation

$$\eta : HF \Rightarrow \mathrm{R}H \circ \mathrm{R}(QF) \circ Q$$

Gibt es nun für jedes Objekt $A \in \mathcal{U}$ einen S-Morphismus $A \to X$ in ein Objekt $X \in \mathcal{U}$, der sowohl eine HF-S-Rechtsentfaltung als auch eine F-S-Rechtsentfaltung ist und für den $F(X)$ seinerseits H-T-rechtsentfaltet ist, so hat das Paar $(\mathrm{R}H \circ \mathrm{R}(QF), \eta)$ die in 20.3.2.16 beschriebene charakterisierende Eigenschaft für den auf $Q(\mathcal{U})$ eingeschränkten faktorierten Funktor $(\mathrm{R}(HF), \tau)$ und wir erhalten so in $\mathrm{Cat}(Q(\mathcal{U}), \mathcal{E})$ eine ausgezeichnete Isotransformation

$$\mathrm{R}(HF) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{R}H \circ \mathrm{R}(QF)$$

Um Grothendieck's Spektralsequenz in der zuvor gegebenen Form abzuleiten gilt es, für F den Funktor $\mathrm{Hot}(F)$ und für H den Funktor $Q \circ \mathrm{Hot}(G)$ zu nehmen.

Übungen

Übung 20.3.4.23. Man prüfe, daß die lange exakte Sequenz der höheren derivierten Funktoren aus 19.3.6.1 übereinstimmt mit der langen exakten Sequenz aus 20.3.4.15.

20.3.5 Derivierte Funktoren und Kohomologie

20.3.5.1 (**Derivierte Funktoren und Spektralsequenzen**). Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{B}$ mit genug Injektiven und ein additiver Funktor $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ und ein gegen die Differentiale beschränkter Komplex $B \in \mathrm{Der}^+(\mathcal{B})$ konstruieren wir wie in 19.9.3.12 eine konvergierende E_2-Spektralsequenz

$$(\mathrm{R}^q F)(\mathcal{H}^p B) \Rightarrow \mathcal{H}^n(\mathrm{R}F)(B)$$

Genauer liefern unsere Konstruktionen ein Konvergenzdatum, dessen Filtrierung auf $\mathcal{H}^n(\mathrm{R}F)(B)$ beschrieben werden als die Filtrierung durch die Bilder der Kohomologien $\mathcal{H}^n(\mathrm{R}F)(\tau^{\leq p} B)$ der abgeschnittenen Komplexe. Wenn wir die Rollen von p und q vertauschen, erhalten wir in derselben Weise für einen beliebigen

gegen die Differentiale beschränkten Komplex $B \in \mathrm{Ket}^+(\mathcal{B})$ eine konvergierende E_1-Spektralsequenz

$$(\mathrm{R}^p F)(B^q) \Rightarrow \mathcal{H}^n(\mathrm{R}F)(B)$$

Genauer liefern unsere Konstruktionen ein Konvergenzdatum, dessen Filtrierung auf $\mathcal{H}^n(\mathrm{R}F)(B)$ beschrieben werden als die Filtrierung durch die Bilder der Kohomologie der Teilkomplexe $\mathcal{H}^n(\mathrm{R}F)(B^{\geq q})$, bei denen wir alle B^i mit $i < q$ durch Nullen ersetzen. Das alles folgt aus den in 19.9.1.21 ausgeschriebenen Konstruktionen.

Beispiel 20.3.5.2. Gegeben ein topologischer Raum X und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ket}^+(\mathrm{Ab}_{/X})$ kann die Hyperkohomologie $\mathbb{H}^n(X;\mathcal{F})$ mit ihrer Filtrierung durch die Bilder der $\mathbb{H}^n(X;\mathcal{F}^{\geq q})$ nach 20.3.5.1 beschrieben werden durch eine Spektralsequenz mit E_1-Term $\mathrm{H}^p(X;\mathcal{F}^q)$.

Vorschau 20.3.5.3. Seien X eine kompakte komplex-analytische Kähler-Varietät und $\mathcal{F} = \mathrm{hol}\Omega_X^*$ der holomorphe garbige de-Rham-Komplex

$$\mathcal{O}_X = \mathrm{hol}\Omega_X^0 \to \mathrm{hol}\Omega_X^1 \to \mathrm{hol}\Omega_X^2 \to \dots$$

So ist die Spektralsequenz aus 20.3.5.2 bereits bei E_1 ausgeartet und liefert mithilfe des offensichtlichen Isomorphismus $\mathrm{H}^n(X;\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^n(X;\mathrm{hol}\Omega_X^*)$ eine Filtrierung von $\mathrm{H}^n(X;\mathbb{C})$ durch komplexe Untervektorräume $F^{\geq q} \subset \mathrm{H}^n(X;\mathbb{C})$ und Isomorphismen der Subquotienten mit $\mathrm{H}^p(X;\mathrm{hol}\Omega_X^q)$ für $p+q=n$. Man erkennt das, indem man vom offensichtlichen Isomorphismus $\mathrm{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}}(\mathrm{T}X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}X$ des holomorphen Tangentialbündels mit dem glatten Tangentialbündel $\mathbb{T}X$ der reellen Mannigfaltigkeit X ausgeht, der für $X \Subset \mathbb{C}^n$ nicht weiter erklärt werden muß und funktoriell ist für offene Einbettungen. Nun erhalten wir für komplexe Vektorräume V in hoffentlich offensichtlicher Weise natürliche komplexlineare Abbildungen

$$V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V,\mathbb{C}) \xleftarrow{\sim} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (\mathrm{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^*$$

Die $\mathbb{C}$-Operation wird dabei im Zweifelsfall stets durch das Nachschalten einer Multiplikation erklärt und ist auf den restringierten Räumen ein für allemal vergessen. Erklären wir für einen reellen Vektorraum W die schieflineare Involution $\bar{c} \otimes \mathrm{id}$ auf $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W$ mit $\bar{c} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der komplexen Konjugation und vereinbaren die Notation $\bar{w} := (\bar{c} \otimes \mathrm{id})(w)$ für $w \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W$, so führt unsere Einbettung von V^* zu einer Zerlegung als interne direkte Summe

$$V^* \oplus \overline{V^*} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (\mathrm{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^*$$

mit $\overline{V^*} := (\bar{c} \otimes \mathrm{id})(V^*)$. Der zweite Summand entspricht dabei in der Mitte unserer Morphismenkette von oben dem Raum aller schieflinearen Abbildungen $V \to \mathbb{C}$.

Dieser funktorielle Isomorphismus liefert zusammen mit unserem Isomorphismus $\mathrm{res}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{C}}(\mathrm{T}X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}X$ einen Isomorphismus komplexer Vektorbündel

$$\mathrm{T}^*X \oplus \overline{\mathrm{T}^*X} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{T}^*X$$

Wenn wir für glatte komplexwertige Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ ihr Differential $\mathrm{d}f$ in der offensichtlichen Weise als Schnitt von $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{T}^*X$ erklären, so haben wir unter unserem Isomorphismus $(\mathrm{d}z, 0) \mapsto \mathrm{d}z$ und $(0, \overline{\mathrm{d}z}) \mapsto \mathrm{d}\bar{z}$. Unsere Zerlegung des komplexifizierten reellen Kotangentialbündels induziert nun mit 4.7.4.24 Zerlegungen seiner äußeren Potenzen. So können wir den komplexifizierten garbigen de-Rham-Komplex $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^k_X$ der X zugrundeliegenden glatten reellen Mannigfaltigkeit realisieren als den Totalkomplex eines garbigen Doppelkomplexes weicher Garben von komplexen Vektorräumen

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^k_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{tot}(\Omega^{p,q}_X, \partial, \bar{\partial})$$

Die Spaltenkomplexe dieses Doppelkomplexes sind nun Auflösungen der Garben $\mathrm{hol}\,\Omega^p_X$ holomorpher Formen und der horizontale Kernkomplex ist genau der holomorphe de-Rham-Komplex. Nimmt man globale Schnitte, so findet man mit den sogenannten „harmonischen Formen“ repräsentierende Untervektorräume für die Kohomologie der Spaltenkomplexe, auf denen das horizontale Differential bereits im ursprünglichen Doppelkomplex verschwindet, weshalb in unserer Spektralsequenz alle höheren Differentiale verschwinden. Also ist unsere Spektralsequenz bereits bei E_1 ausgeartet. Wir erhalten so wie bereits erwähnt die **Hodge-Filtrierung** auf der Kohomologie $\mathrm{H}^n(X; \mathbb{C})$. Unsere Argumente zeigen, daß sie unabhängig ist von der Wahl einer Kähler-Metrik, obwohl die harmonischen Formen durchaus von dieser Wahl abhängen.

20.3.6 Derivieren homologisch endlicher Funktoren

Definition 20.3.6.1. Ein additiver Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen abelschen Kategorien heißt **homologisch rechtsendlich**, wenn alle $A \in \mathcal{A}$ unter F quisrechtsentfaltbar sind und es eine Schranke N gibt mit $\mathrm{R}^q F(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und alle $q > N$. Das Infimum über alle möglichen derartigen Schranken N heißt dann die **homologische Rechtsdimension** unseres Funktors.

20.3.6.2. Analog definieren wir über den linksderivierten Funktor **homologisch linksendlich** und **homologische Linksdimension**. Meist spricht man kürzer von **homologisch endlichen** Funktoren und ihrer **homologischen Dimension** der Leser muß aus dem Kontext erschließen, ob das nun von links oder von rechts gemeint sein soll.

Beispiele 20.3.6.3. Der Nullfunktor hat die homologische Rechtsdimension $-\infty$. Ein linksexakter Funktor ist homologisch rechtsendlich von der homologischen Dimension Null genau dann, wenn er exakt aber nicht der Nullfunktor ist. Gegeben ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist der Funktor der globalen Schnitte $\Gamma : \mathrm{Ab}_{/I} \to \mathrm{Ab}$ nach 19.4.2.3 homologisch rechtsendlich von der homologischen Dimension $-\infty$ für $I = \emptyset$, von der homologischen Dimension Null für I einpunktig und von der homologischen Dimension Eins für I mehrpunktig.

Satz 20.3.6.4 (Unbeschränktes Derivieren homologisch endlicher Funktoren). *Gegeben ein additiver Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ einer endlichen homologischen Rechtsdimension $\leq d$ zwischen abelschen Kategorien derart, daß sich jedes Objekt in ein F-rechtsazyklisches Objekt einbetten läßt, gilt:*

1. *Es gibt von jedem Komplex einen Quasiisomorphismus zu einem Komplex von F-rechtsazyklischen Objekten;*

2. *Für einen Komplex aus $\mathrm{Ket}^{\leq n}_{\mathcal{A}}$ finden wir sogar einen Quasiisomorphismus zu einem Komplex von F-rechtsazyklischen Objekten aus $\mathrm{Ket}^{\leq n+d}_{\mathcal{A}}$;*

3. *Jeder Komplex von F-rechtsazyklischen Objekten ist F-quisrechtsentfaltet;*

4. *Der derivierte Funktor $\mathrm{R}F$ ist auf jedem Komplex definiert und wir erhalten so einen triangulierten Funktor $\mathrm{R}F : \mathrm{Der}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Der}(\mathcal{B})$;*

5. *Der derivierte Funktor $\mathrm{R}F$ bildet die Unterkategorie $\mathrm{Der}^{\leq n}(\mathcal{A})$ in die Unterkategorie $\mathrm{Der}^{\leq n+d}(\mathcal{B})$ ab.*

20.3.6.5. Ich erinnere daran, daß wir bei der Definition eines additiven Funktors F endlicher homologischer Rechtsdimension zwischen abelschen Kategorien 20.3.6.1 stets mit gefordert hatten, daß jedes Objekt der Ausgangskategorie eine F-Quisrechtsentfaltung besitzen soll. Da ist insbesondere eine implizite Voraussetzung für den vorhergehenden Satz. Das ist zum Beispiel erfüllt, wenn $\mathcal{A}$ genug Injektive hat, und zusammen mit der Bedingung $\mathrm{R}^q F(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und $q > d$ reicht das dann schon aus, um $\mathrm{R}F$ auf nach beiden Seiten unbeschränkten Komplexen aus $\mathcal{A}$ erklären zu können.

20.3.6.6. Daß Rechtsderivieren Positivität erhält, daß also $\mathrm{R}F$ die Unterkategorie $\mathrm{Der}^{\geq n}(\mathcal{A})$ in die Unterkategorie $\mathrm{Der}^{\geq n}(\mathcal{B})$ abbildet, wissen wir bereits in größerer Allgemeinheit aus 20.3.4.3.

20.3.6.7. Der Satz gilt analog und mit demselben Beweis für Familien $F = (F_i)_{i \in I}$ linksexakter Funktoren, die sogar in verschiedenen abelschen Kategorien landen dürfen, also $F_i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}_i$. Wir müssen dazu nur vereinbaren, daß „F-rechtsazyklisch“ zu verstehen ist als „F_i-rechtsazyklisch für alle i“ und müssen die

homologische Endlichkeitsbedingung dahingehend verstehen, daß es eine Schranke N gibt, die die homologische Rechtsdimension aller unserer Funktoren F_i beschränkt. Formal mag man das auch folgern, indem man die Aussage des Satzes auf den Funktor $F = (F_i) : \mathcal{A} \to \prod \mathcal{B}_i$ anwendet.

20.3.6.8. Besitzt eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ endliche homologische Dimension $\leq d$ und genug Injektive, so besitzt jeder Komplex in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ eine Quisrechtsentfaltung und jeder Komplex in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$ eine Quisrechtsentfaltung in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}^{\leq n+d}$ und jeder Komplex von Injektiven ist quisrechtsentfaltet. Das zeigt man, indem man die Argumente des folgenden Beweises wiederholt oder 20.3.6.7 auf die Familie aller $\mathcal{A}(A, \ )$ anwendet. Alternativ mag man in der offensichtlichen Weise eine Cartan-Eilenberg-Auflösung durch Injektive der Gestalt $(I^{p,q})_{0 \leq q \leq d}$ bilden und zum Totalkomplex übergehen und die Argumente der folgenden Abschnitte entsprechend anpassen.

Beweis. Nach 19.9.3.5 finden wir stets eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung $(I^{p,q})$ von (X^p) durch F-rechtsazyklische Objekte. Ist d mindestens die homologische Rechtsdimension von F, so ist $\ker \delta^d : I^{p,d} \to I^{p,d+1}$ schon selbst F-rechtsazyklisch. Indem wir $I^{p,d}$ jeweils durch diesen Kern ersetzen, finden wir einen Doppelkomplex $J^{p,d}$ aus F-rechtsazyklischen Objekten in der oberen Halbebene mit Nullzeilen für $q > d$, dessen Spalten bei $q \neq 0$ exakt sind, sowie einen Isomorphismus von X zu seinem horizontalen Kernkomplex bei $q = 0$. Nach 19.4.6.15 induziert dann die Einbettung des horizontalen Kernkomplexes einen Quasiisomorphismus $X \xrightarrow{\sim} \mathrm{tot}\, J^{p,q}$. Das zeigt die Teile 1&2. Um Teil 3 zu zeigen, sei Z ein Komplex von F-rechtsazyklischen Objekten und $Z \xrightarrow{\sim} X$ ein Quasiisomorphismus. Nach Teil 1 können wir ihn verlängern durch einen Quasiisomorphismus $X \xrightarrow{\sim} Y$ in einen weiteren Komplex von F-rechtsazyklischen Objekten. Es gilt zu zeigen, daß die Komposition einen Quasiisomorphismus $FZ \xrightarrow{\sim} FY$ induziert. Es gilt durch Übergang zum Abbildungskegel in der Homotopiekategorie $K := \mathrm{Keg}(Z \to Y)$ gleichbedeutend zu zeigen, daß für jeden exakten Komplex K aus F-rechtsazyklischen Objekten auch FK exakt ist. Nun ist $\ker d^n \hookrightarrow K^n \to K^{n+1} \to \ldots$ für jedes n ein Quasiisomorphismus des nach Annahme F-quisrechtsentfaltbaren Objekts $\ker d^n$ zu einem Komplex in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}^{+}$ aus F-rechtsazyklischen Objekten, der nach 20.3.2.34 dann auch F-quisrechtsentfaltbar sein muß. Mit dem Derivieren durch azyklische Auflösungen 20.3.4.13 folgt für $q > 0$ sofort $\mathcal{H}^{n+q} FK = \mathrm{R}^q F(\ker(d^n))$. Diese Objekte verschwinden jedoch für q oberhalb der homologischen Dimension von F, und da das für alle n gilt, muß FK ein exakter Komplex sein. Teil 4 folgt sofort aus 1 und 3. Teil 5 folgt sofort aus 2 und 3. $\square$

Beispiel 20.3.6.9. Der Komplex von freien $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-Moduln

$$\ldots \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \ldots$$

ist exakt und damit isomorph zum Nullkomplex in $\mathrm{Der}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Mod})$. Er ist aber im Gegensatz zum Nullkomplex nicht entfaltet für den Funktor $\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, obwohl er aus projektiven Moduln besteht. Das widerspricht unserem Satz nicht, denn der Funktor $\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist auf der Kategorie aller $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-Moduln nicht von endlicher homologischer Dimension.

Übungen

Übung 20.3.6.10. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und endlicher homologischer Dimension $\mathrm{hdim}\,\mathcal{A} < d$. Man zeige $\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(X,Y) = 0$ für $X \in \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq d}$ und $Y \in \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq 0}$. Man folgere mit 20.2.6.35, daß es für $Y \in \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}$ genau dann ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt mit $\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(X,Y) = 0$ für alle $X \in \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n}$, wenn gilt $Y \in \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{-}$.

20.3.7 Exaktheit von Totalkomplexen abelscher Gruppen

Definition 20.3.7.1. Gegeben ein Doppelkomplex $A = (A^{p,q})$ von abelschen Gruppen mit Differentialen $\partial : A^{p,q} \to A^{p+1,q}$ und $\delta : A^{p,q} \to A^{p,q+1}$ derart, daß an jeder Stelle gilt $\delta\partial = \partial\delta$, bilden wir vier Komplexe, deren homogene Komponenten gegeben werden durch

$$\begin{array}{lll}
(\mathrm{tot}^{\oplus}A)^n & = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q} & \text{für das } \textbf{Summentotal}, \\
(\mathrm{tot}^{\pi}A)^n & = \prod_{p+q=n} A^{p,q} & \text{für das } \textbf{Produkttotal} \text{ sowie} \\
(\mathrm{tot}^{\oplus\pi}A)^n & = \bigoplus_{\substack{p+q=n\\ p<0}} A^{p,q} \oplus \prod_{\substack{p+q=n\\ p\geq 0}} A^{p,q} & \text{für das } \textbf{Summenprodukttotal}, \\
(\mathrm{tot}^{\pi\oplus}A)^n & = \prod_{\substack{p+q=n\\ p<0}} A^{p,q} \oplus \bigoplus_{\substack{p+q=n\\ p\geq 0}} A^{p,q} & \text{für das } \textbf{Produktsummentotal}.
\end{array}$$

Das Symbol $\mathrm{tot}^{\pi\oplus}$ soll zum Beispiel andeuten, daß auf den Diagonalen $p+q=n$ „in Richtung fallender erster Indizes das Produkt zu nehmen ist, in Richtung wachsender erster Indizes alias fallender zweiter Indizes jedoch die direkte Summe“. Weil es dabei darauf ankommt, welcher Index nun als der erste zu sehen ist, schreibe ich auch ausführlicher $\mathrm{tot}_{p,q}^{\pi\oplus}$ um klarzumachen, daß in Richtung fallender p das Produkt zu nehmen ist und in Richtung fallender q die direkte Summe. Eigentlich denke ich mir p nach rechts und q nach oben aufgetragen und die Punkte mit $p+q=n$ bilden für festes n eine Gerade von links oben nach rechts unten, auf der ich nach rechts gehend die direkte Summe nehme und nach links gehend das Produkt. Die Differentiale werden alle gegeben durch $da = \partial a + (-1)^p \delta a$ für $a \in A^{p,q}$ und die offensichtlichen Erweiterungen dieser Regel.

20.3.7.2. In der Literatur wird meist nur das Summentotal betrachtet und heißt der **Totalkomplex**. Wir denken uns im folgenden den ersten Index p nach rechts und

den zweiten Index q nach oben aufgetragen, wenn wir von „Zeilen“ und „Spalten“ reden, mit Differentialen nach oben und rechts. Alternativ reden wir auch von den p**-Komplexen** oder p**-Zeilen** unseres Doppelkomplexes und meinen damit die Komplexe in Richtung wachsender p bei festem q. In der präziseren Terminologie aus 19.4.6.7 hießen die Zeilen die $\{1\}$-Multiteilkomplexe.

Lemma 20.3.7.3 (Exaktheitskriterien für Totalkomplexe). *Gegeben ein Doppelkomplex $A^{p,q}$ von abelschen Gruppen mit exakten p-Zeilen ist sein Produktsummentotal $\operatorname{tot}^{\pi\oplus}_{p,q}$ exakt. Sind zusätzlich auch noch die Kerne oder gleichbedeutend die Bilder oder auch gleichbedeutend die Kokerne der Morphismen zwischen den Zeilenkomplexen alle exakt, so sind alle vier Totalkomplexe exakt.*

20.3.7.4. In der präziseren Terminologie aus 19.4.6.7 fordern wir also für die erste Aussage die Exaktheit aller $\{1\}$-Teilkomplexe und für die zweite Aussage zusätzlich die Exaktheit aller $\{1\}$-Teilkomplexe von $\ker \partial_2$. Unpräziser und in Worten gesagt gilt es für den Index, für den exakte Komplexe entstehen wenn wir nur ihn variieren, die Summe beim Wachsen dieses Index und das Produkt beim Fallen dieses Index zu nehmen.

20.3.7.5. Dies Lemma verallgemeinert unser Lemma 19.4.6.10, bei dem wir uns auf Doppelkomplexe im ersten Quadranten beschränkt hatten. Eine etwas schwächere hinreichende Bedingung für die Exaktheit des Summenprodukttotals ergänzen wir als Lemma 20.3.7.7.

20.3.7.6. Dieses Lemma gilt im allgemeinen nicht mehr für Doppelkomplexe von Objekten aus beliebigen abelschen Kategorien anstelle von abelschen Gruppen. Ich wüßte gerne genauer, inwieweit seine Aussagen aus allgemeinen Sätzen über Spektralsequenzen folgen.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß jeder Nullzykel ein Rand ist. So ein Nullzykel ist eine Folge von Elementen $\ldots, a_{-1}, a_0, a_1 \ldots$ mit $a_i \in A^{i,-i}$ und $\partial a_i + (-1)^{i+1}\delta a_{i+1} = 0$ für alle i mit $a_i = 0$ für $i \gg 0$. Gesucht ist eine Folge $\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots$ von Elementen $b_i \in A^{i,-i-1}$ mit $b_i = 0$ für $i \gg 0$ und mit $a_i = \partial b_{i-1} + (-1)^i \delta b_i$ für alle i. Zunächst einmal säubern wir dies Problem von Vorzeichen und ändern unsere Folge ab zu

$$\ldots, a_0, a_1, -a_2, -a_3, a_4, a_5, -a_6, -a_7, \ldots$$

So lautet die Bedingung an unsere neue Folge $\ldots, c_0, c_1, c_2, \ldots$ einfacher $\partial c_i = \delta c_{i+1}$ und gesucht ist eine Folge $\ldots, d_0, d_1, d_2, \ldots$ mit

$$c_i = \partial d_{i-1} + \delta d_i$$

für alle i, aus der wir dann die ursprünglich gesuchte Folge der b_i durch geeignete Vorzeichenänderungen erhalten als $\ldots, d_0, -d_1, -d_2, d_3, d_4, -d_5, -d_6, \ldots$ Der

Einfachkeit halber nehmen wir für die weitere Argumentation an, es gälte bereits $c_i = 0$ für $i > 0$. Dann folgt $\partial c_0 = 0$ und nach Annahme finden wir $d_0 \in A^{-1,0}$ mit $\partial d_0 = c_0$. Es folgt

$$\partial c_{-1} = \delta c_0 = \delta \partial d_0 = \partial \delta d_0,$$

also $\partial(\delta d_0 - c_{-1}) = 0$. Also gibt es $d_{-1} \in A^{-2,1}$ mit $\partial d_{-1} = \delta d_0 - c_{-1}$ alias $c_{-1} = \delta d_0 - \partial d_{-1}$. Indem wir so „die Treppe heraufgehen“ finden wir eine Folge $(\ldots, d_{-1}, d_0, 0, 0, \ldots)$ wie gewünscht und der Fall des Produktsummentotals ist erledigt. Jetzt diskutieren wir den Fall des Summentotals. Sind die Kerne der Morphismen zwischen den Zeilenkomplexen exakt, so können wir das bereits Bewiesene anwenden auf die Teilkomplexe $T^{*,\leq q}$ unseres Doppelkomplexes, die entstehen durch Ersetzen einer Zeile durch den Kernkomplex zum Morphismus in die darüberliegende Zeile und Ersetzen der höheren Zeilen durch Null. Das Summentotal ist dann exakt als der filtrierende Kolimes der Summentotale dieser Teilkomplexe, die in dem von uns bereits behandelten Rahmen liegen. Jetzt behandeln wir den Fall des Produkttotals. Sind die Bilder der Morphismen zwischen den Zeilenkomplexen exakt, so können wir die bereits gewonnene Erkenntnis anwenden auf die Quotienten $Q^{*,\geq q}$ unseres Doppelkomplexes, die entstehen durch Ersetzen einer Zeile durch den Bildkomplex des Morphismus in die nächsthöhere Zeile und Ersetzen aller Zeilen darunter durch Null. Das Produkttotal ist dann exakt nach 17.7.1.48 als der Limes über das surjektive inverse System der Produkttotale dieser Quotientenkomplexe. Wenden wir diese letzte Erkenntnis wiederum auf das Produkttotal unserer Teilkomplexe $T^{*,\leq q}$ an und gehen zum Kolimes über, so ergibt sich auch die Behauptung für das Summenprodukttotal. □

Lemma* 20.3.7.7. *Sei ein Doppelkomplex von abelschen Gruppen gegeben. Sind seine Zeilen und zusätzlich auch noch die Zeilen aus der Kohomologie der Spaltenkomplexe alle exakt, so ist auch das Summenprodukttotal exakt.*

20.3.7.8. Der Punkt bei diesem Lemma ist, daß die hier gegebene Bedingung für die Exaktheit des Summenprodukttotals etwas schwächer ist als die in 20.3.7.3 angegebene Bedingung. Mir ist aber keine konkrete Situation bewußt, in der dies Lemma gebraucht würde.

Beweis. Wir beginnen wie beim Beweis von 20.3.7.3. Wie oben erklärt, können wir auch hier wieder ausgehen von einer Familie $\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots$ mit $c_i \in A^{i,-i}$ und $c_i = 0$ für $i \ll 0$ sowie $\partial c_i = \delta c_{i+1}$ für alle i. Der Einfachkeit halber nehmen wir für die weitere Argumentation an, es gälte bereits $c_i = 0$ für $i < 0$. Wir beginnen unsere Argumentation mit der Erkenntnis $\delta c_0 = 0$. Wegen $\partial c_0 = \delta c_1$ geht der δ-Zykel c_0 unter ∂ auf die Null der δ-Kohomologie, also gibt es einen δ-Zykel $z_{-1} \in A^{-1,0}$ und $e_0 \in A^{0,-1}$ mit $\partial z_{-1} + \delta e_0 = c_0$. Dann haben wir

$\delta(c_1 - \partial e_0) = 0$ und $\partial(c_1 - \partial e_0) = \delta c_2$, also ist $c_1 - \partial e_0$ ein δ-Zykel, dessen δ-Kohomologieklasse unter ∂ nach Null geht, also ist er bis auf einen δ-Rand das ∂-Bild eines δ-Zykels. Mithin gilt

$$c_1 - \partial e_0 = \partial z_0 + \delta e_1$$

für einen δ-Zykel $z_0 \in A^{0,-1}$ und $e_1 \in A^{1,-2}$. Wir haben also

$$\begin{array}{rrcl} & \delta(z_{-1}+0) & = & 0 \\ \partial(z_{-1}+0)+ & \delta(z_0+e_0) & = & c_0 \\ \partial(z_0+e_0) & & = & c_1 - \delta e_1 \end{array}$$

Nun folgt $\delta(c_2 - \partial e_1) = \partial(c_1 - \delta e_1) = \partial^2(z_0 + e_0) = 0$, womit $c_2 - \partial e_1$ ein δ-Zykel ist, der wegen $\partial(c_2 - \partial e_1) = \delta c_3$ bis auf δ-Rand von einem δ-Zykel $z_1 \in A^{1,-2}$ herkommt, also $c_2 - \partial e_1 = \partial z_1 + \delta e_2$. Wir haben also

$$\begin{array}{rcl} \partial(z_0+e_0) + \delta(z_1+e_1) & = & c_1 \\ \partial(z_1+e_1) & = & c_2 - \delta e_2 \end{array}$$

Indem wir so „die Treppe heruntergehen“ finden wir auch hier wieder eine Folge $(\ldots, 0, z_{-1}, z_0 + e_0, z_1 + e_1, \ldots)$ wie gewünscht. □

20.3.8 Derivieren von Tensor und Hom

20.3.8.1. Ein **Tripelkomplex** A ist eine $\mathbb{Z}^3$-graduierte abelsche Gruppe $A^{p,q,r}$ mit paarweise kommutierenden Differentialen $\partial_p, \partial_q, \partial_r$, die jeweils „ihren Grad“ um Eins erhöhen.

20.3.8.2. Das **Summentotal eines Tripelkomplexes** A ist der Komplex $\operatorname{tot}^{\oplus}(A)$ mit homogenen Komponenten

$$\operatorname{tot}^{\oplus}(A)^n := \bigoplus_{p+q+r=n} A^{p,q,r}$$

und Differential $d(a) := \partial_p a + (-1)^p \partial_q a + (-1)^{p+q} \partial_r a$ für $a \in A^{p,q,r}$. Analog erklären wir das **Produkttotal**. Beide Konstruktionen hängen von der Reihenfolge der Indizes ab in ähnlicher Weise, wie wir es bei Doppelkomplexen in 19.4.6.4 diskutiert hatten.

20.3.8.3 (**Iterative Berechnung von Totalkomplexen**). Summentotal und Produkttotal eines Tripelkomplexes A können iterativ berechnet werden, genauer sind in hoffentlich selbsterklärender Notation die offensichtlichen Morphismen Isomorphismen

$$\operatorname{tot}^{\oplus}(\operatorname{tot}^{\oplus}_{q,r}(A)) \xleftarrow{\sim} \operatorname{tot}^{\oplus}(A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{tot}^{\oplus}(\operatorname{tot}^{\oplus}_{p,q}(A))$$

$$\operatorname{tot}^{\pi}(\operatorname{tot}^{\pi}_{q,r}(A)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{tot}^{\pi}(A) \xleftarrow{\sim} \operatorname{tot}^{\pi}(\operatorname{tot}^{\pi}_{p,q}(A))$$

Proposition 20.3.8.4. *Gegeben $I = (I^{p,q})_{q\geq 0}$ ein Doppelkomplex in der oberen Halbebene mit maximal spaltenden Zeilen aus Injektiven einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist sein Produkttotal, wenn es existiert, quisrechtsentfaltet.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß für jeden exakten Komplex $N \in \mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$ gilt $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}(N, \mathrm{tot}^{\pi}(I)) = 0$. Wir zeigen gleichbedeutend, daß alle Homologiegruppen aller Hom-Komplexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, \mathrm{tot}^{\pi}(I))$ verschwinden, daß diese Komplexe also exakt sind. Dazu beschreiben wir so einen Hom-Komplex als das Produkttotal des Tripelkomplexes der abelschen Gruppen $\mathcal{A}(N^r, I^{p,q})$ mit drittem Differential $\partial_r f := (-f \circ d_N)$ und den offensichtlichen ersten Differentialen und erhalten so

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, \mathrm{tot}^{\pi}(I)) \cong \mathrm{tot}^{\pi}(\mathcal{A}(N^r, I^{p,q})) \cong \mathrm{tot}^{\pi}\left(\mathrm{tot}^{\pi}_{p,r}(\mathcal{A}(N^r, I^{p,q}))\right)$$

Nun hat der Tripelkomplex $\mathcal{A}(N^r, I^{p,q})$ exakte r-Zeilen, da N ein exakter Komplex ist und die $I^{p,q}$ injektiv. Weiter sind die r-Kernkomplexe der p-Differentiale zwischen den r-Zeilen exakt, da $I^{p,q}$ maximal spaltende p-Zeilen hat. Nach 20.3.7.3 ist also das partielle Produkttotal $\mathrm{tot}^{\pi}_{p,r}(\mathcal{A}(N^r, I^{p,q})$ exakt für alle q. Dann ist aber wieder nach 20.3.7.3 auch $\mathrm{tot}^{\pi}\left(\mathrm{tot}^{\pi}_{p,r}(\mathcal{A}(N^r, I^{p,q}))\right)$ exakt als Produktsummentotal eines Doppelkomplexes mit exakten Zeilen, mit dem das Produkttotal wegen unserer Einschränkung $q \geq 0$ übereinstimmt. □

20.3.8.5. Gegeben $P = (P^{p,q})_{q\geq 0}$ ein Doppelkomplex in der unteren Halbebene mit maximal spaltenden Zeilen aus Projektiven einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist sein Summentotal, wenn es denn existiert, quislinksentfaltet. Das folgt unmittelbar, indem wir 20.3.8.4 auf die opponierte Kategorie anwenden.

Proposition 20.3.8.6. *Gegeben ein Ring k besitzt jeder Komplex von k-Moduln eine Quisrechtsentfaltung.*

20.3.8.7. Dasselbe gilt mit demselben Beweis für jede abelsche Kategorie mit genug Injektiven und einem konservativen exakten Funktor in die Kategorie der abelschen Gruppen, der mit abzählbaren Produkten vertauscht.

Beweis. Sei $A = (A^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ uner Komplex. Nach 19.9.3.10 besitzt A eine Cartan-Eilenberg-Auflösung durch Injektive $(I^{p,q})_{q\geq 0}$. Insbesondere ist A der horizontale Kernkomplex unseres Doppelkomplexes, dessen Spalten durch die Ergänzung dieses Kernkomplexes exakt werden. Zusätzlich sind bei dem so ergänzten Doppelkomplex auch die Kerne der Morphismen zwischen den Spaltenkomplexen exakt. Nach 20.3.7.3 ist dann auch das Produkttotal des ergänzten Doppelkomplexes exakt. Daraus folgt sofort, daß die Einbettung des horizontalen Kernkomplexes ein Quasiisomorphismus $A \xrightarrow{\sim} \mathrm{tot}^{\pi}(I^{p,q})$ ist. Dieser Totalkomplex ist damit nach 20.3.8.4 die gesuchte Quisrechtsentfaltung. □

Proposition 20.3.8.8. *Für jeden Komplex von Moduln über einem Ring ist das Summentotal einer Cartan-Eilenberg-Untenauflösung durch Projektive eine Quislinksentfaltung. Insbesondere besitzt jeder Komplex von Moduln eine Quislinksentfaltung.*

20.3.8.9. Dasselbe gilt mit demselben Beweis für jede abelsche Kategorie mit genug Projektiven und einem konservativen exakten Funktor in die Kategorie der abelschen Gruppen, der mit abzählbaren Koprodukten vertauscht.

Beweis. Sei $A = (A^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ unser Komplex. Nach 19.9.3.7 besitzt er eine Cartan-Eilenberg-Untenauflösung durch Projektive $(P^{p,q})_{q\leq 0}$. Insbesondere ist A der horizontale Kokernkomplex unseres Doppelkomplexes und die Spalten unseres Doppelkomplexes werden durch die Ergänzung dieses Kokernkomplexes exakt. Zusätzlich sind bei dem so ergänzten Doppelkomplex auch die Kerne der Morphismen zwischen den Spaltenkomplexen exakt. Nach 20.3.7.3 ist dann auch das Summentotal des ergänzten Doppelkomplexes exakt. Daraus folgt, daß die Surjektion auf den horizontalen Kokernkomplexes ein Quasiisomorphismus $\mathrm{tot}^{\oplus}(P^{p,q}) \overset{\sim}{\to} A$ ist. Dieser Totalkomplex ist nach 20.3.8.5 die gesuchte Quislinksentfaltung. □

Proposition 20.3.8.10. *Gegeben eine abelsche Kategorie endlicher homologischer Dimension mit genug Injektiven besitzt jeder Komplex eine Quisrechtsentfaltung.*

Beweis. Jeder Komplex besitzt nach 19.9.3.8 eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung durch Injektive mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Zeilen. Die Spalten dieses Doppelkomplexes werden exakt, wenn wir unseren Ausgangskomplex als unterste Zeile ergänzen. Nach 19.4.6.11 ist der Totalkomplex dann exakt, also geht unser ursprünglicher Komplex quasiisomorph zum Totalkomplex solch einer Cartan-Eilenberg-Obenauflösung. Andererseits ist der Totalkomplex solch einer Cartan-Eilenberg-Obenauflösung quisrechtsentfaltet nach 20.3.8.4. □

Definition 20.3.8.11. Ein Komplex von Moduln heißt **quisflach**, wenn das Darantensorieren eines exakten Komplexes von Rechtsmoduln über demselben Ring stets einen exakten Komplex liefert.

20.3.8.12. Gleichbedeutend ist durch Übergang zum Abbildungskegel die Bedingung, daß das Darantensorieren unseres Komplexes Quasiisomorphismen zu Quasiisomorphismen macht.

20.3.8.13. Die **Torsionsdimension** eines Rings k erklären wir als das Supremum aller $q \in \mathbb{N}$ derart, daß es einen k-Rechtsmodul M und einen k-Linksmodul N gibt mit $\mathrm{Tor}_q^k(M,N) \neq 0$. Wir sagen, ein Ring k habe **endliche Torsionsdimension**, wenn seine Torsionsdimension nicht ∞ ist. Der Nullring hat Torsionsdimension $-\infty$ und hat in unseren Konventionen insbesondere endliche Torsionsdimension.

Proposition 20.3.8.14 (Beispiele quisflacher Komplexe). *1. Gegeben eine Cartan-Eilenberg-Linksauflösung eines Komplexes durch flache Moduln ist ihr Summentotal quisflach;*

2. Jeder in Richtung der Differentiale beschränkte Komplex von flachen Moduln ist quisflach;

3. Über einem Ring endlicher Torsionsdimension ist jeder Komplex flacher Moduln quisflach.

20.3.8.15. Insbesondere ist jeder quislinksentfaltete Komplex von Moduln quisflach, da er ja nach der vorherigen Proposition 20.3.8.8 homotopieäquivalent ist zum Summentotal einer Cartan-Eilenberg-Linksauflösung durch projektive Moduln und da projektive Moduln flach sind. Weiter ist jeder Komplex von torsionsfreien abelschen Gruppen quisflach, da ja abelsche Gruppen flach sind genau dann, wenn sie torsionsfrei sind, und da folglich $\mathbb{Z}$ die Torsionsdimension Eins hat.

Beispiel 20.3.8.16. Der Komplex X von freien $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-Moduln

$$\ldots \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \ldots$$

aus 20.3.6.9 ist nicht quisflach in $\mathrm{Hot}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Mod})$. Das wird aus Proposition 20.3.8.17 folgen, denn $0 \to X$ ist ein Quasiisomorphisms, bleibt aber kein Quasiisomorphismus unter $\otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[0])$.

Beweis. 1. Sei k unser Ring und sei $F = \mathrm{tot}^{\oplus}(F^{p,q})$ das Summentotal einer Cartan-Eilenberg-Linksauflösung durch flache Moduln eines vorgegebenen Komplexes und sei N ein exakter Komplex von Rechtsmoduln. Es gilt zu zeigen, daß $\mathrm{tot}^{\oplus}(N^r \otimes_k F^{p,q})$ exakt ist. Da alle $F^{p,q}$ flach sind, sind hier alle r-Komplexe exakt. Da die p-Komplexe von $F^{p,q}$ maximal spalten, sind auch die Bilder der p-Morphismen zwischen r-Komplexen exakt und damit nach 20.3.7.3 das Summentotal $\mathrm{tot}^{\oplus}_{p,r}(N^r \otimes_k F^{p,q})$ für alle q. Das partielle Summentotal $\mathrm{tot}^{\oplus}_{p,r}(N^r \otimes_k F^{p,q})$ ist also ein Doppelkomplex mit exakten Zeilen, dessen Spalten alias q-Zeilen verschwinden für $q > 0$. Damit ist sein Produktsummentotal exakt nach 20.3.7.3 und fällt zusammen mit dem Summentotal. Dieses ist also auch exakt und ist ja gerade der Tensorkomplex.

2. Gegeben ein in Richtung der Differentiale beschränkter Komplex F von flachen Moduln und ein exakter Komplex N von Rechtsmoduln hat der Doppelkomplex $N^p \otimes_k F^q$ exakte p-Zeilen und sein Produktsummentotal ist exakt nach 20.3.7.3 und fällt wegen der Beschränkungen der Indizes mit dem Summentotal zusammen, ist also der Tensorkomplex.

3. Gegeben ein Komplex F von flachen Moduln finden wir nach 20.3.8.8 einen

Quasiisomorphismus $P \overset{\smile}{\to} F$ mit P einem quislinksentfalteten und damit nach 20.3.8.15 quisflachen Komplex, von dem wir außerdem annehmen können, daß er aus projektiven und insbesondere flachen Moduln besteht. Dann ist $\mathrm{Keg}(P \to F)$ ein Komplex von flachen Moduln und ist nach 20.3.6.4 für jeden k-Rechtsmodul M entfaltet in Bezug auf den Funktor $M \otimes_k$. Da der Kegel aber auch exakt ist, muß $M \otimes_k \mathrm{Keg}(P \to F)$ exakt sein für alle M. Für jeden Komplex X von Rechtsmoduln hat also $X^q \otimes_k \mathrm{Keg}(P \to F)^p$ exakte p-Zeilenkomplexe und auch die Kerne der Morphismen zwischen den Zeilenkomplexen sind exakt. Damit ist nach 20.3.7.3 das Summentotal alias der Tensorkomplex exakt und unser ursprünglicher Quasiisomorphismus induziert einen Quasiisomorphismus $X \otimes_k P \overset{\smile}{\to} X \otimes_k F$. Insbesondere ist mit P auch F quisflach. □

Proposition 20.3.8.17 (**Deriviertes Tensorprodukt**). *Gegeben ein Ring k gilt:*

1. *Der Funktor $(Q \circ \otimes_k) : \mathrm{Hot}(\text{Mod-}\,k) \times \mathrm{Hot}(k\text{-Mod}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ besitzt einen Linksfaktorierten, das* **derivierte Tensorprodukt**

$$\otimes_k^{\mathrm{L}} : \mathrm{Der}(\text{Mod-}\,k) \times \mathrm{Der}(k\text{-Mod}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$$

2. *Alle Paare von Komplexen (X, Y) mit mindestens einem quisflachen Eintrag sind linksentfaltet für $(Q \circ \otimes_k)$ und das Oresystem $S \times S$ aller Paare von Quasiisomorphismen, sind also* **quislinksentfaltet für** $(Q \circ \otimes_k)$*;*

3. *Gegeben $X \in \mathrm{Hot}(\text{Mod-}\,k)$ ist jeder quisflache Komplex $Y \in \mathrm{Hot}(k\text{-Mod})$ quislinksentfaltet für den Funktor $Q \circ (X \otimes_k) : \mathrm{Hot}(k\text{-Mod}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$. Analoges gilt für den anderen Tensorfaktor;*

4. *Der Funktor $Q \circ (X \otimes_k)$ aus Teil 3 besitzt ebenfalls einen Linksfaktorierten $\mathrm{L}(X \otimes_k) : \mathrm{Der}(k\text{-Mod}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ und der natürliche Morphismus vom größeren Limes zum kleineren Limes ist ein Isomorphismus*

$$X \otimes_k^{\mathrm{L}} Y \overset{\sim}{\to} (\mathrm{L}(X \otimes_k))(Y)$$

Analoges gilt für den anderen Tensorfaktor.

20.3.8.18 (**Terminologie für derivierte Funktoren in mehreren Variablen**). Gegeben abelsche Kategorien $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_r, \mathcal{B}$ und ein **multiadditiver Funktor**

$$T : \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_r \to \mathcal{B}$$

alias ein Funktor auf der Produktkategorie, der additiv ist in jeder Variablen, konstruieren wir in der offensichtlichen Weise einen Funktor

$$\mathrm{Hot}(T) : \mathrm{Hot}(\mathcal{A}_1) \times \ldots \times \mathrm{Hot}(\mathcal{A}_r) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{B})$$

Auf der linken Seite bilden alle Tupel von Quasiisomorphismen ein Oresystem S. Den S-Rechtsfaktorierten von $(Q \circ \mathrm{Hot}(T))$ nennen wir in dieser Situation wieder den **Rechtsderivierten von** T und notieren ihn

$$\mathrm{R}T : \big(\mathrm{Der}(\mathcal{A}_1) \times \ldots \times \mathrm{Der}(\mathcal{A}_r)\big)_T \to \mathrm{Der}(\mathcal{B})$$

Der untere Index T kürzt hier $(Q \circ \mathrm{Hot}(T))$ ab und steht für die volle Unterkategorie aller $(Q \circ \mathrm{Hot}(T))$-$S$-rechtsentfaltbaren Tupel von Objekten, die wir in diesem Kontext auch kürzer T**-quisrechtsentfaltet** nennen. In derselben Weise erklären wir den **Linksderivierten von** T.

Beweis. 1. Jeder Komplex von Moduln besitzt nach 20.3.8.8 eine Quislinksentfaltung und das zeigt bereits die erste Aussage.

2. Ist $(P, M) \to (X, Y)$ ein Paar von Quasiisomorphismen mit P, M quislinksentfaltet und X quisflach gilt es zu zeigen, daß sie einen Quasiisomorphismus $P \otimes_k M \xrightarrow{\sim} X \otimes_k Y$ induzieren. Wir zeigen sogar, daß beide Kettenabbildungen der Sequenz $P \otimes_k M \to X \otimes_k M \to X \otimes_k Y$ Quasiisomorphismen sind. In der Tat ist der Kegel über der ersten Kettenabbildung $\mathrm{Keg}(P \to X) \otimes_k M$ exakt, da wir bereits aus 20.3.8.15 wissen, daß M als quislinksentfalteter Komplex quisflach ist. Andererseits ist der Kegel über der zweiten Kettenabbildung $X \otimes_k \mathrm{Keg}(M \to Y)$ auch exakt, da X nach Annahme quisflach ist.

3. Ich zeige die Aussage in unserem Kontext bequemer für Rechtsmoduln. Gegeben ein Quasiisomorphismus $P \xrightarrow{\sim} X$ mit P quislinksentfaltet und X quisflach gilt es für alle Y zu zeigen, daß er einen Quasiisomorphismus

$$P \otimes_k Y \xrightarrow{\sim} X \otimes_k Y$$

induziert. Wählen wir wie oben einen Quasiisomorphismus $M \xrightarrow{\sim} Y$ mit M quislinksentfaltet, so wissen wir aus dem Beweis des vorherigen Teils bereits, daß die Komposition $P \otimes_k M \to P \otimes_k Y \to X \otimes_k Y$ ein Quasiisomorphismus ist. Andererseits ist P quisflach und folglich $P \otimes_k \mathrm{Keg}(M \to Y)$ exakt alias $\mathrm{Keg}(P \otimes_k M \to P \otimes_k Y)$ exakt alias der erste Morphismus ein Quasiisomorphismus $P \otimes_k M \xrightarrow{\sim} P \otimes_k Y$. Dann muß aber wie gewünscht auch der zweite Morphismus unserer Komposition ein Quasiisomorphismus $P \otimes_k Y \xrightarrow{\sim} X \otimes_k Y$ sein.

4. Die vierte Aussage folgt unmittelbar, sobald wir zeigen, daß jedes Paar $(X, Y) \in \mathrm{Hot}(\mathrm{Mod}\text{-}k) \times \mathrm{Hot}(k\text{-}\mathrm{Mod})$ mit Y quislinksentfaltet bereits quislinksentfaltet ist für $(Q \circ \otimes_k)$. Das folgt aber aus Teil 2, da jeder quislinksentfaltete Komplex nach 20.3.8.15 bereits quisflach ist. □

Vorschau 20.3.8.19. Wir erinnern den Schmelzfunktor $\mathcal{H} : \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}) \to \mathrm{sgAb}$ aus 18.2.5.13. In 21.9.9.14 versehen wir $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ mit der Struktur einer Schmelzka-

tegorie und zeigen in 21.2.8.19, daß der Schmelzfunktor der Homologie eindeutig über einen Schmelzfunktor $\mathcal{H} : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}) \to \mathrm{sgAb}$ faktorisiert.

Proposition 20.3.8.20. *Gegeben ein Ring k gilt:*

1. *Der Funktor $Q \circ \mathrm{Hom}_k : \mathrm{Hot}(k\text{-Mod})^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{Hot}(k\text{-Mod}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ besitzt einen Rechtsfaktorierten, den* **derivierten Homomorphismenkomplex**
$$\mathrm{RHom}_k : \mathrm{Der}(k\text{-Mod})^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{Der}(k\text{-Mod}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$$

2. *Gegeben ein Komplex von k-Moduln $X \in \mathrm{Hot}(k\text{-Mod})$ besitzt der Funktor $Q \circ \mathrm{Hom}_k(X, \ ) : \mathrm{Hot}(k\text{-Mod}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ ebenfalls einen Rechtsfaktorierten $\mathrm{R}(\mathrm{Hom}_k(X, \ )) : \mathrm{Der}(k\text{-Mod}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ und der natürliche Morphismus vom kleineren Kolimes zum größeren Kolimes ist ein Isomorphismus*
$$\mathrm{R}(\mathrm{Hom}_k(X, \ ))(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}_k(X, Y)$$

3. *Gegeben ein Komplex von k-Moduln $Y \in \mathrm{Hot}(k\text{-Mod})$ besitzt der Funktor $Q \circ \mathrm{Hom}_k(\ , Y) : \mathrm{Hot}(k\text{-Mod})^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ ebenfalls einen Rechtsfaktorierten $\mathrm{R}(\mathrm{Hom}_k(\ , Y)) : \mathrm{Der}(k\text{-Mod})^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ und der natürliche Morphismus vom kleineren Kolimes zum größeren Kolimes ist ein Isomorphismus*
$$\mathrm{R}(\mathrm{Hom}_k(\ , Y))(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}_k(X, Y)$$

20.3.8.21. Ich erinnere daran, daß für jeden Ring alle in der Richtung gegen die Differentiale beschränkten Komplexe aus injektiven Moduln quisrechtsentfaltet sind und alle in Richtung der Differentiale beschränkten Komplexe aus projektiven Moduln quislinksentfaltet. Ich erinnere daran, daß für einen Ring endlicher homologischer Dimension nach 20.3.6.8 alle Komplexe aus injektiven Moduln quisrechtsentfaltet sind und alle Komplexe aus projektiven Moduln quislinksentfaltet. Ich erinnere auch noch an die in 20.3.4.7 und 20.3.4.8 für jede abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ hergeleiteten Isomorphismen $\mathcal{H}^0 \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$.

Beweis. Jeder Komplex von Moduln besitzt nach 20.3.8.8 eine Quislinksentfaltung und nach 20.3.8.6 eine Quisrechtsentfaltung und das zeigt bereits die erste Aussage. Für Teil 2 gilt es zu zeigen, daß (X, Y) bereits quisquisrechtsentfaltet ist für $(Q \circ \mathrm{Hom}_k)$, wenn Y quisrechtsentfaltet ist. Mit denselben Argumenten wie beim Tensorprodukt reicht es zu zeigen, daß $\mathrm{Hom}_k(E, Y)$ exakt ist für Y quisrechtsentfaltet und E exakt. Das haben wir aber bereits beim Beweis von 20.3.8.4 in größerer Allgemeinheit gesehen für Y das Produkttotal einer Cartan-Eilenberg-Auflösung durch Injektive und nach 20.3.8.6 ist jeder quisrechtsentfaltete Komplex von k-Moduln homotopieäquivalent zu so einem Produkttotal. Für Teil 3 gilt es zu zeigen, daß (X, Y) bereits quisquisrechtsentfaltet ist für $(Q \circ \mathrm{Hom}_k)$,

wenn X quislinksentfaltet ist. Mit denselben Argumenten wie beim Tensorprodukt reicht es zu zeigen, daß $\operatorname{Hom}_k(X, E)$ exakt ist für X quislinksentfaltet und E exakt. Das geht genau wie in Teil 2, aber diesmal schreiben wir es genauer aus. Nach 20.3.8.8 und seinem Beweis dürfen wir annehmen, daß $X = \operatorname{tot}^{\oplus}(P^{p,q})$ das Summentotal der Cartan-Eilenberg-Auflösung durch Projektive $(P^{p,q})_{q\le 0}$ eines beliebig vorgegebenen Komplexes ist. Mithin ist $\operatorname{Hom}_k(X, E)$ das Produkttotal des Tripelkomplexes $\operatorname{tot}^{\pi} \operatorname{Hom}_k(P^{p,q}, E^r)$. Da die $P^{p,q}$ projektive Moduln sind, hat unser Tripelkomplex exakte r-Komplexe. Da die p-Komplexe $P^{p,q}$ sogar maximal spaltende Komplexe projektiver Moduln sind, sind auch die Kerne der p-Differentiale zwischen den r-Komplexen exakt. Nach 20.3.7.3 ist also das partielle Produkttotal $\operatorname{tot}^{\pi}_{p,r}(\operatorname{Hom}_k(P^{p,q}, E^r))$ exakt für alle q. Dann ist aber wieder nach 20.3.7.3 auch $\operatorname{tot}^{\pi}\big(\operatorname{tot}^{\pi}_{p,r}(\operatorname{Hom}_k(P^{p,q}, E^r))\big)$ exakt als Produktsummentotal eines Doppelkomplexes mit exakten Zeilen, mit dem das Produkttotal wegen unserer Einschränkung $q \le 0$ übereinstimmt. $\square$

20.3.8.22. Für jeden Ring k und $X \in \operatorname{Der}(k\text{-Mod})$ ist $\mathrm{L}(\otimes_k X) : \operatorname{Der}(k\text{-Mod}) \to \operatorname{Der}(\mathrm{Ab})$ linksadjungiert zu $\operatorname{RHom}_{\mathbb{Z}}(X, \ )$. Das folgt aus unseren allgemeinen Erkentnissen 20.3.2.28 zu Adjunktionen faktorierter Funktoren. Für jeden Kring k und $X \in \operatorname{Der}(k\text{-Mod})$ ist analog $\mathrm{L}(\otimes_k X) : \operatorname{Der}(k\text{-Mod}) \to \operatorname{Der}(k\text{-Mod})$ linksadjungiert zu $\operatorname{RHom}_k(X, \ )$.

Übungen

Übung 20.3.8.23 (**Abstrakte Künnethformel**). Gegeben Komplexe von abelschen Gruppen $C, D \in \operatorname{Der}(\mathrm{Ab})$ konstruiere man natürliche unnatürlich spaltende kurze exakte Sequenzen

$$\bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}^p C \otimes \mathcal{H}^q D \ \hookrightarrow\ \mathcal{H}^n(C \otimes^{\mathrm{L}} D) \ \twoheadrightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \mathcal{H}^p C * \mathcal{H}^q D$$

Hinweis: Man wiederhole die Definitionen und erinnere den Beweis den Künnethformel 17.5.7.8.

Übung 20.3.8.24 (**Abstraktes universelles Koeffiziententheorem**). Gegeben $X \in \operatorname{Der}(\mathrm{Ab})$ und eine abelsche Gruppe G konstruiere man natürliche und unnatürlich spaltende kurze exakte Sequenzen

$$\operatorname{Ext}(\mathcal{H}^1(X), G) \hookrightarrow \mathcal{H}^0(X \Rrightarrow G[0]) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{H}^0(X), G)$$

Hinweis: Man wähle eine injektive zwei-Schritt-Auflösung von G, betrachte diese kurze exakte Sequenz als ausgezeichnetes Dreieck, wende $X \Rrightarrow$ an, und bilde die lange exakte Homologiesequenz. Nach 20.2.6.27 wissen wir zusätzlich, daß jedes Objekt $X \in \operatorname{Der}(\mathrm{Ab})$ unkanonisch isomorph ist zu seiner totalen Kohomologie.

20.3.9 Derivierte Produkte und Koprodukte

20.3.9.1 (**Produkte und Koprodukte in Homotopiekategorien**). Ich erinnere an Übung 19.3.2.36. Seien $\mathcal{A}$ eine Kategorie mit additiver Struktur und $(C_i)_{i\in I}$ eine Familie von Komplexen (C_i^q, d) aus $\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$. Existiert für jedes q das Produkt $\prod_{i\in I} C_i^q$ in $\mathcal{A}$, so ist der aus diesen Produkten gebildete Komplex nicht nur in $\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$, sondern auch in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ das Produkt der C_i. Analoges gilt für Koprodukte, entweder mit einem analogen Beweis oder formal durch Übergang zur opponierten Kategorie. Für Limites und Kolimites sind mir die analogen Aussagen nicht klar. Das Problem liegt darin, daß zwar das Bilden von Produkten abelscher Gruppen exakt ist, das Bilden von Limites abelscher Gruppen jedoch im allgemeinen nicht mehr.

Proposition 20.3.9.2 (**Produkte und Koprodukte in derivierten Kategorien**). *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.*

1. *Ist $(C_i)_{i\in I}$ eine Familie quisrechtsentfalteter Komplexe aus $\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$ und existiert jeweils das Produkt der C_i^q in $\mathcal{A}$, so liefert der Komplex der gliedweisen Produkte ein Produkt der C_i in $\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}, \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ und $\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}$;*

2. *Besitzt jedes Objekt von $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ eine Quisrechtsentfaltung und ist $(D_i)_{i\in I}$ eine Familie von Komplexen aus $\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$ und existiert jeweils das Koprodukt der D_i^q in $\mathcal{A}$, so liefert der Komplex der gliedweisen Koprodukte ein Koprodukt der D_i in $\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}, \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ und $\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}$.*

20.3.9.3. Die Frage allgemeinerer Limites und Kolimites in derivierten Kategorien behandeln wir hier nicht weiter. Die im gleich folgenden Beweis gegebene Argumentation direkt zu verallgemeinern scheitert daran, daß 20.3.9.1 nicht in der nötigen Allgemeinheit gezeigt wurde.

Beweis. 1. Wir wissen bereits aus 20.3.9.1, daß der Komplex der gliedweisen Produkte ein Produkt in der Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ ist. Nach 20.2.5.7 ist weiter jeder Limes in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ von quisrechtsentfalteten Komplexen wieder quisrechtsentfaltet. Damit folgt die Behauptung aus unseren allgemeinen Erkenntnissen 20.1.3.16 über Limites rechtsentfalteter Objekte in Lokalisierungen.

2. Wir wissen bereits aus 20.3.9.1, daß der Komplex der gliedweisen Koprodukte ein Koprodukt in der Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ ist. Unter unseren Annahmen besitzt weiter der Lokalisierungsfunktor $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}} \to \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}$ einen Rechtsadjungierten und vertauscht folglich mit Kolimites und insbesondere mit Koprodukten. □

20.3.9.4. Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und besitzt jedes Objekt von $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ eine Quisrechtsentfaltung und hat $\mathcal{A}$ alle I-Produkte und alle I-Koprodukte, so gilt dasselbe für $\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}$. Das alles folgt leicht aus unserer Proposition 20.3.9.2.

20.3.9.5 (**Spezielle Produkte in derivierten Kategorien**). Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und sind $\mathcal{F}_n \in \mathrm{Hot}^{\geq n}(\mathcal{A})$ gegeben für $n \geq 0$, so ist das gliedweise Produkt der $\mathcal{F}_n$ auch das Produkt in der derivierten Kategorie. In der Tat finden wir Quasiisomorphismen $\mathcal{F}_n \overset{\sim}{\to} \mathcal{I}_n$ mit $\mathcal{I}_n \in \mathrm{Hot}^{\geq n}(\mathrm{i}\mathcal{A})$ und diese sind Quisrechtsentfaltungen und diese Quasiisomorphismen induzieren einen Quasiisomorphismus vom gliedweisen Produkt der $\mathcal{F}_n$ in das gliedweise Produkt der $\mathcal{I}_n$, das seinerseits nach 20.3.9.2 ein Produkt in $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ ist. Die Besonderheit dieser Situation liegt darin, daß in diesem speziellen Fall „bei der Konstruktion der gliedweisen Produkte nur endliche Produkte in $\mathcal{A}$ zu betrachten sind“. So kann man in dieser speziellen Situation Fragen der Exaktheit unendlicher Produkte aus dem Weg gehen.

20.3.9.6 (**Produkte und Koprodukte derivierter Moduln**). Gegeben sei ein Ring A und ein Universum $\mathfrak{U}$. Existieren für eine Menge I alle I-Koprodukte in der Kategorie der A-Moduln $\mathfrak{U}\mathrm{Mod}_A$, so existieren auch alle I-Koprodukte in den Kategorien $\mathfrak{U}\mathrm{Ket}(\mathrm{Mod}_A)$, $\mathfrak{U}\mathrm{Hot}(\mathrm{Mod}_A)$, $\mathfrak{U}\mathrm{Der}(\mathrm{Mod}_A)$ und stimmen überein mit den offensichtlichen gliedweisen Koprodukten. Dasselbe gilt für Produkte und folgt mit dem zweiten Teil unserer Proposition 20.3.9.2 aus der Existenz von Quisrechtsentfaltungen 20.3.8.6 und Quislinksentfaltungen 20.3.8.8 beliebiger Homotopiekomplexe in unserer abelschen Kategorie.

20.3.10 Universelle derivierte Funktoren*

Definition 20.3.10.1. Seien $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Unter einer **Rechtsapproximation an F durch Q** verstehen wir ein Paar (G, σ) bestehend aus einem Funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ nebst einer Transformation $\sigma : F \Rightarrow GQ$, im Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "Q"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Downarrow}"] & \mathcal{C} \\ & \mathcal{B} \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

Unter einer **initialen Rechtsapproximation** verstehen wir eine Rechtsapproximation $(\bar{F}, \tau)$ derart, daß für alle Funktoren $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ die Abbildung $\alpha \mapsto (\alpha Q) \circ \tau$ eine Bijektion

$$\mathcal{C}^{\mathcal{B}}(\bar{F}, G) \overset{\sim}{\to} \mathcal{C}^{\mathcal{A}}(F, GQ)$$

zwischen den entsprechenden Räumen von Transformationen induziert. Eine initiale Rechtsapproximation heißt auch eine **Rechts-Kan-Erweiterung** nach dem Mathematiker Daniel Kan.

Beispiel 20.3.10.2. Ist Q volldicht, so ist jedes $(\bar{F}, \tau)$ mit τ einer Isotransformation $\tau : F \overset{\sim}{\Rightarrow} \bar{F}Q$ eine initiale Rechtsapproximation.

20.3.10.3 (**Eindeutigkeit initialer Rechtsapproximationen**). Verstehen wir die Gesamtheit aller Rechtsapproximationen an F durch Q in geeigneter Weise als eine Kategorie, so ist eine initiale Rechtsapproximation ein initiales Objekt dieser Kategorie. So weit will ich jedoch nicht gehen, da es mir auch so schon klar scheint, daß eine initiale Rechtsapproximation eindeutig ist bis auf eindeutigen Isomorphismus, falls sie denn existiert.

Beispiel 20.3.10.4 (**Initiale Rechtsapproximation durch Rechtsadjungierte**). Gegeben Funktoren $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ mag man die Definition einer Rechtsapproximation an F durch Q umformulieren als die Aussage, daß ein partieller Linksadjungierter des durch Vorschalten von Q erklärten Funktors

$$(\circ Q) : \mathcal{C}^{\mathcal{B}} \to \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$$

bei F existiert und dort den Wert $\bar{F}$ annimmt. Besitzt nun Q selber einen Rechtsadjungierten R, so bilden nach 16.4.3.13 auch die auf den Funktorkategorien induzierten Funktoren ein adjungiertes Paar $((\circ R), (\circ Q))$ und überhaupt jeder Funktor F besitzt eine initiale Rechtsapproximation durch Q, nämlich den Funktor FR.

20.3.10.5. Die entsprechenden Konzepte nach Übergang zu den opponierten Kategorien heißen **Linksapproximation** und **finale Linksapproximation** alias **Links-Kan-Erweiterung**.

20.3.10.6 (**Rechtsapproximation bei Lokalisierungen**). Seien $\mathcal{A}$ eine Kategorie, S eine Menge von Morphismen von $\mathcal{A}$ und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Eine initiale Rechtsapproximation $(\bar{F}, \tau)$ an den Funktor F durch den Lokalisierungsfunktor $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_S$ heißt auch ein **universeller Rechtsderivierter** oder kurz **Rechtsderivierter von** F. Ich notiere ihn $\bar{F} = \mathrm{R}F$ oder auch $\bar{F} = {}_{\mathrm{u}}\mathrm{R}F$, wenn besonders betont werden soll, daß der universelle Rechtsderivierte gemeint ist. Analog erklärt man den **universellen Linksderivierten** $\mathrm{L}F = {}_{\mathrm{u}}\mathrm{L}F$.

Beispiel 20.3.10.7. Fakorisiert F bereits selbst durch die Lokalisierung, gibt es also ein Paar $(\bar{F}, \tau)$ mit τ einer Isotransformation, so ist nach 20.3.10.2 sowohl dies Paar ein universeller Rechtsderivierter als auch das Paar $(\bar{F}, \tau^{-1})$ ein universeller Linksderivierter.

20.3.10.8. Seien $\mathcal{A}$ eine Kategorie, S ein Rechtsoresystem von Morphismen von $\mathcal{A}$ und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Landet der volle Rechtsderivierte von F nach 20.3.2.18 in der vollen Unterkategorie der essentiell konstanten Indobjekte, so liefert er unter Nachschalten eines Quasiinversen der Äquivalenz von $\mathcal{C}$ und der Kategorie seiner essentiell konstanten Indobjekte auch einen universellen Rechtsderivierten von F. Analoges gilt für Linksderivierte.

Lemma 20.3.10.9 (**Universeller Rechtsderivierter eines Yoneda-Funktors**). *Seien $\mathcal{A}$ eine Kategorie, S eine Menge von Morphismen in $\mathcal{A}$ und $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_S$ der*

Lokalisierungsfunktor. Sei $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem derart, daß $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_S$ beide $\mathfrak{U}$-Kategorien sind. Für $X \in \mathcal{A}$ ist dann der Yoneda-Funktor $\check{X}_S := \mathcal{A}_S(X, \ )$ mit der offensichtlichen Transformation $\tau : \mathcal{A}(X, \ ) \Rightarrow \mathcal{A}_S(X, \ )$ der universelle Rechtsderivierte des Yoneda-Funktors $\check{X} := \mathcal{A}(X, \ ) : \mathcal{A} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$, im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, "\check{X}"] \arrow[dr, "Q"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\tau"] & \mathfrak{U}\mathrm{Ens} \\
& \mathcal{A}_S \arrow[ur, "\check{X}_S"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Gegeben ein Funktor $G : \mathcal{A}_S \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ und eine Transformation $\alpha : \check{X} \Rightarrow GQ$ konstruieren eine Transformation $\alpha_S : \check{X}_S \Rightarrow G$ wie folgt: Morphismen in $\mathcal{A}_S$ sind ja nach 20.1.2 Äquivalenzklassen von Wegen in der Wegekategorie des Köchers. So ein Weg ist eine Folge

$$X = Z_0 \leftrightarrow Z_1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow Z_n = Y$$

mit jedem Doppelpfeil entweder einem Morphismus $Z_{i-1} \to Z_i$ oder einem Morphismus $Z_i \to Z_{i-1}$ aus S. Unserer Transformation α führt dann zu kommutativen Diagrammen

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(X, Z_0) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \mathcal{A}(X, Z_1) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \ldots \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{A}(X, Z_n) \arrow[d] \\
G(Z_0) \arrow[r, leftrightarrow] & G(Z_1) \arrow[r, leftrightarrow] & \ldots \arrow[r, leftrightarrow] & G(Z_n)
\end{tikzcd}$$

Da GQ Morphismen aus S zu Isomorphismen macht, sind in der unteren Horizontale alle Morphismen von rechts nach links Bijektionen. Jeder Weg liefert so eine Abbildung $G(X) \to G(Y)$. Man prüft leicht, daß äquivalente Wege dieselbe Abbildung liefern, so daß unser α uns wohlbestimmte Abbildungen

$$\mathcal{A}_S(X, Y) \to \mathrm{Ens}(G(X), G(Y))$$

liefert, die bei festem X sogar eine Transformation der entsprechenden Funktoren $\mathcal{A}_S \to \mathrm{Ens}$ bilden. Betrachten wir schließlich in $G(X)$ das Element $\alpha(\mathrm{id}_X)$, so liefert das Anwenden auf dies Element für unser festes X natürliche Abbildungen $\mathrm{Ens}(G(X), G(Y)) \to G(Y)$ und wir erhalten insgesamt eine Transformation $\alpha_S : \check{X}_S \Rightarrow G$. Man prüft leicht, daß die Abbildung $\alpha \mapsto \alpha_S$ invers ist zur Abbildung

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A}_S, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})(\check{X}_S, G) \to \mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})(\check{X}, GQ)$$

gegeben durch die Abbildungsvorschrift $\beta \mapsto (\beta Q) \circ \tau$. $\square$

20.3.10.10. Sei $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem. Für jede $\mathfrak{U}$-Kategorie $\mathcal{A}$ betrachten wir den **Morphismenfunktor** gegeben durch $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}} : (X, Y) \mapsto \mathcal{A}(X, Y)$. Das ist also ein Funktor

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{A} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$$

Lemma 20.3.10.11 (**Universeller Rechtsderivierter des Morphismenfunktors**). *Seien $\mathcal{A}$ eine Kategorie und S eine Menge von Morphismen in $\mathcal{A}$. Sei $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem derart, daß $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_S$ beide $\mathfrak{U}$-Kategorien sind. So besitzt der Morphismenfunktor $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}} : (X, Y) \mapsto \mathcal{A}(X, Y)$ als universellen Rechtsderivierten den Morphismenfunktor $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}_S} : (X, Y) \mapsto \mathcal{A}_S(X, Y)$ mit der offensichtlichen Transformation, im Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{A} \arrow[rr, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr, "Q"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Downarrow}"] & \mathfrak{U}\mathrm{Ens} \\
& \mathcal{A}_S^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{A}_S \arrow[ur, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}_S}"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Gegeben ein Funktor $G : \mathcal{A}_S^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{A}_S \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ und eine Transformation $\alpha : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}} \Rightarrow GQ$ konstruieren wir wie beim Beweis von 20.3.10.9 eine Transformation $\alpha_S : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}_S} \Rightarrow G$ und zeigen, daß sie invers ist zur zur Abbildung

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A}_S^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{A}_S, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}_S}, G) \to \mathrm{Cat}(\mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{A}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}, GQ)$$

gegeben durch die Abbildungsvorschrift $\beta \mapsto (\beta Q) \circ \tau$. □

Beispiel 20.3.10.12. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Wir wenden die vorhergehenden Überlegungen an auf den Morphismenfunktor der Homotopiekategorie

$$\begin{array}{rccc}
\mathrm{Mor}_{\mathrm{Hot}} : & \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}} & \to & \mathrm{Ab} \\
& (A, D) & \mapsto & \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}(A, D)
\end{array}$$

und die Lokalisierung nach Quasiisomorphismen in unseren Homotopiekategorien. Der universelle Rechtsderivierte unseres Morphismenfunktors ist mithin nach 20.3.10.11, genauer einer offensichtlichen Variante für Kategorien mit additiver Struktur, der Morphismenfunktor der derivierten Kategorie $\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}$, in Formeln

$${}_{\mathrm{u}}\mathrm{R}\,\mathrm{Mor}_{\mathrm{Hot}} = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Der}} : \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{Der}_{\mathcal{A}} \to \mathrm{Ab}$$

20.3.10.13 (**Komposition von universellen Rechtsderivierten**). Seien $(\mathcal{A}, S)$ und $(\mathcal{B}, T)$ Kategorien mit Mengen von Morphismen und bezeichne $Q : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_T$ die Lokalisierung. Seien $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Wir nehmen an, daß GF einen universellen Rechtsderivierten $\mathrm{R}(GF) : \mathcal{A}_S \to \mathcal{D}$ besitzt, daß QF einen universellen Rechtsderivierten $\mathrm{R}(QF) : \mathcal{A}_S \to \mathcal{B}_T$ besitzt, und daß G einen

universellen Rechtsderivierten $\mathrm{R}G : \mathcal{B}_T \to \mathcal{D}$ besitzt. Die universelle Eigenschaft zeigt dann, daß es für diese Rechtsderivierten genau eine Transformation

$$\mathrm{R}(G \circ F) \Rightarrow \mathrm{R}G \circ \mathrm{R}(QF)$$

gibt derart, daß unter dem Vorschalten der Lokalisierung $P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_S$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \circ F \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, equal] & \mathrm{R}(G \circ F) \circ P \arrow[d, Rightarrow] \\
G \circ F \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{R}G \circ \mathrm{R}(QF) \circ P
\end{tikzcd}$$

entsteht mit einer unteren Horizontale, deren Definition der Leser aus dem folgenden Diagramm ablesen mag.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "P"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{A}_S \arrow[d, "\mathrm{R}(QF)"] \arrow[dd, bend left=60, "\mathrm{R}(G\circ F)"] \\
\mathcal{B} \arrow[r, "Q"] \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[d, "G"'] & \mathcal{B}_T \arrow[d, "\mathrm{R}G"] \\
\mathcal{D} \arrow[r, equal] \arrow[ur, Rightarrow] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

Der gekrümmte Pfeil in diesem Diagramm ist formal betrachtet irrelevant.

20.3.10.14 (**Konstruktion von universellen Rechtsderivierten**). Seien $\mathcal{A}$ eine Kategorie, S eine Menge von Morphismen von $\mathcal{A}$ und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Manchmal erhält man einen universellen Rechtsderivierten wie folgt: Man sucht ein Paar (E, τ) bestehend aus einem Funktor $E : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ nebst einer Transformation $\tau : \mathrm{Id} \Rightarrow E$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $X \in \mathcal{A}$ ist $Q\tau_X$ ein Isomorphismus $Q\tau_X : QX \xrightarrow{\sim} QEX$;
2. Jeder Morphismus $s : X \to Y$ in S liefert unter FE einen Isomorphismus $FEs : FEX \xrightarrow{\sim} FEY$.

So ein Paar (E, τ) heißt eine **an F angepaßte Ersetzung**. Es gibt dafür nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung genau einen Funktor $\bar{F} : \mathcal{A}_S \to \mathcal{C}$ mit $\bar{F}Q = FE$. Ich behaupte, daß dieser Funktor $\bar{F}$ zusammen mit der durch τ induzierten Transformation $F \Rightarrow FE = \bar{F}Q$ eine initiale Rechtsapproximation an F durch Q ist. Wir verwenden im folgenden die exponentielle Schreibweise $\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) = \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ für Funktorkategorien. Nun erhalten wir für jeden Funktor $G : \mathcal{A}_S \to \mathcal{C}$ Abbildungen

$$\mathcal{C}^{\mathcal{A}_S}(\bar{F}, G) \to \mathcal{C}^{\mathcal{A}}(\bar{F}Q, GQ) = \mathcal{C}^{\mathcal{A}}(FE, GQ) \to \mathcal{C}^{\mathcal{A}}(F, GQ)$$

Die Erste ist eine Bijektion nach unserer Erkenntnis 20.1.2.20, daß jeder Lokalisierungsfunktor volldicht ist. Wir müssen also nur noch zeigen, daß auch die Letzte eine Bijektion ist. Das aber folgt daraus, daß jede Transformation $\eta : F \Rightarrow GQ$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "F\tau_X"] \arrow[d, "\eta_X"'] & FEX \arrow[d, "\eta_{EX}"] \\ GQX \arrow[r, "GQ\tau_X", "\sim"'] & GQEX \end{tikzcd}$$

liefert, in dem die untere Horizontale nach unseren Annahmen, wie im Diagramm bereits angedeutet, ein Isomorphismus ist.

Beispiel 20.3.10.15 (**Universeller Linksderivierter des Kokern-Funktors**). Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Bezeichne $\mathcal{A}^{\to}$ die Kategorie aller Darstellungen des Köchers $\to$ mit zwei Ecken und einem sie verbindenden Pfeil in $\mathcal{A}$. Wir bestimmen die finale Linksapproximation des Funktors $\operatorname{cok} : \mathcal{A}^{\to} \to \mathcal{A}$ oder genauer des induzierten Funktors $\operatorname{cok} : \operatorname{Ket}(\mathcal{A}^{\to}) \to \operatorname{Der}(\mathcal{A})$. Hier ist implizit zu verstehen, daß wir an Quasiisomorphismen lokalisieren wollen, der Derivierte wird also die Gestalt

$$\mathrm{L}\operatorname{cok} : \operatorname{Der}(\mathcal{A}^{\to}) \to \operatorname{Der}(\mathcal{A})$$

haben. Nun finden wir von jedem Objekt $\alpha : X \to Y$ aus $\operatorname{Ket}(\mathcal{A}^{\to})$ einen Quasiisomorphismus zu einem Objekt $\alpha' : X' \to Y'$ mit α' injektiv. Betrachten wir in der Tat den Simplex Δ_1 mit zwei Ecken und die Einbettungen $k_0, k_1 : \Delta_0 \to \Delta_1$ der beiden Ecken alias die Kantenabbildungen aus 17.1.2.7, indiziert durch die jeweils nicht erwischte Ecke, so erhalten wir auf den zugehörigen Simplizialketten Homotopieäquivalenzen

$$\mathrm{S}\Delta_0 \overset{k_0}{\to} \mathrm{S}\Delta_1 \overset{k_1}{\leftarrow} \mathrm{S}\Delta_0$$

Ausgeschrieben sind diese Homotopieäquivalenzen die Morphismen

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\binom{0}{1}"] & \mathbb{Z}^2 & \mathbb{Z} \arrow[l, "\binom{1}{0}"'] \\ 0 \arrow[u] \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[u, "\binom{1}{-1}"'] & 0 \arrow[u] \arrow[l] \end{tikzcd}$$

von senkrecht zu lesenden Komplexen, bei denen alle nicht ausgeschriebenen Gruppen verschwinden und die obere Horizontale in Grad Null sitzt und wir mit oberen Indizes indizieren, so daß die untere Horizontale im Grad (-1) sitzt. Andererseits betrachten wir den von der konstanten Abbildung auf den Simplizialketten

induzierten Morphismus $\mathrm{S}\Delta_1 \xrightarrow{a_0} \mathrm{S}\Delta_0$. Nun bilden wir durch sukzessive Pushouts in $\mathrm{Ket}(\mathcal{A})$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "k_1"'] & Y \arrow[d, "\iota"] \\
X \arrow[r, "k_0"] & \mathrm{S}\Delta_1 \otimes_{\mathbb{Z}} X \arrow[r, "c"] \arrow[d, "a_0"'] & \mathrm{Zyl}(\alpha) \arrow[d, "p"] \\
 & X \arrow[r, "\alpha"] & Y
\end{tikzcd}$$

Sicher gilt $p\iota = \mathrm{id}_Y$. Der erste Pushout heißt der **Zylinder** von α, da er in der analogen topologischen Situation tatsächlich durch Aufkleben des Zylinders $\Delta_1 \times X$ auf die Bodenplatte Y vermittels der Abbildung α entstünde. In der topologischen Situation ist auch anschaulich klar, daß p und ι zueinander homotopieinvers sind. In der algebraischen Situation prüfen wir das explizit. Wir schreiben dazu den Zylinder aus als $\mathrm{Zyl}(\alpha) = Y \oplus X \oplus [1]X$ mit Differential

$$d \;=\; \begin{pmatrix} d_Y & 0 & \alpha \\ 0 & d_X & -\mathrm{id} \\ 0 & 0 & -d_X \end{pmatrix}$$

Dann ist ι schlicht die Einbettung von Y als erster Summand, also die Spaltenmatrix $\iota = (\mathrm{id}, 0, 0)^\top$. Dahingegen ist p die Zeilenmatrix $p = (\mathrm{id}_Y, \alpha, 0)$. Es gilt nun, die Differenz

$$\iota p - \mathrm{id} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -\mathrm{id}_X & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{id}_{[1]X} \end{pmatrix}$$

in der Form $d\delta + \delta d$ zu schreiben. Um das zu leisten, betrachten wir zunächst die Komposition $\mathrm{S}\Delta_1 \xrightarrow{a_0} \mathrm{S}\Delta_0 \xrightarrow{k_1} \mathrm{S}\Delta_1$ alias

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbb{Z}^2 \\
\mathbb{Z} \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)"']
\end{tikzcd}$$

Hier notieren wir wieder senkrecht gedachte und nur zum Teil ausgeschriebene Komplexe. In diesem Fall sollten wir ja eine Homotopie zur Identität erhalten durch den Prismenoperator $\delta : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ gegeben durch die Zeilenmatrix $(0, 1)$. In der Tat prüft man mühelos die Identitäten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } (0,1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) = (0) - (1).$$

Das Tensorieren dieser Homotopie mit der Identität auf X liefert eine Lösung unseres Problems im Fall $\alpha = \mathrm{id}_X$ der Form

$$\delta \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_X & 0 \end{pmatrix}$$

Wir prüfen nun leicht, daß dieselbe Formel auch für allgemeines α die gesuchte Homotopie liefert. Also ist $p : \mathrm{Zyl}(\alpha) \to Y$ in der Tat eine Homotopieäquivalenz. So erhalten wir ein kommutatives Quadrat

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \mathrm{Zyl}(\alpha) \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

in $\mathrm{Ket}(\mathcal{A})$ mit Homotopieäquivalenzen in den Vertikalen. Das ist in $\mathrm{Ket}(\mathcal{A}^{\to})$ ein Morphismus der oberen Horizontale zur unteren Horizontale und ist sogar ein Quasiisomorphismus, wenn auch keine Homotopieäquivalenz. Jedoch ist diese Konstruktion funktoriell und liefert uns einen an cok angepaßten Ersetzungsfunktor im Sinne von 20.3.10.6, denn in der Tat induziert jeder Quasiisomorphismus in $\mathrm{Ket}(\mathcal{A}^{\to})$ zwischen durch injektive Kettenabbildungen beschriebenen Objekten einen Quasiisomorphismus zwischen ihren Kokernkomplexen nach der langen exakten Homologiesequenz und dem Fünferlemma. So folgt

$$\mathrm{L}\,\mathrm{cok}(X \xrightarrow{\alpha} Y) = \mathrm{cok}(X \to \mathrm{Zyl}(\alpha)) = \left(Y \oplus [1]X, \begin{pmatrix} d_Y & \alpha \\ 0 & -d_X \end{pmatrix} \right)$$

Salopp gesprochen ist also der Linksderivierte des Kokernfunktors der Abbildungskegelfunktor.

20.4 Derivierte Kategorien und dg-Ringoide*

20.4.1 Ringoide und ihre Moduln

Definition 20.4.1.1. Ein **Ringoid** ist ein Paar (R, I) bestehend aus einer assoziativen $\mathbb{Z}$-Algebra R und einer ausgezeichneten Menge $I \subset R$ von Idempotenten derart, daß für $i, j \in I$ gilt $i \neq j \Rightarrow ij = 0$ und daß gilt $R = \sum_{i,j \in I} iRj$.

20.4.1.2 (**Ringoide und** Ab**-Kategorien**). Gegeben ein Ringoid (R, I) erklären wir seine **Ringoidkategorie** $[R, I]$, eine Kategorie mit additiver Struktur alias Ab-Kategorie, indem wir I als Menge der Objekte nehmen und iRj als die abelsche Gruppe der Morphismen von j nach i. Wir erhalten so eine Ab-Kategorie mit höchstens einem Nullobjekt. Gegeben eine Ab-Kategorie $\mathcal{T}$ erhalten wir andererseits ein Ringoid $(\mathrm{R}(\mathcal{T}), \mathrm{I}(\mathcal{T}))$, indem wir

$$\mathrm{R}(\mathcal{T}) := \bigoplus_{X,Y \in \mathcal{T}} \mathcal{T}(X, Y)$$

setzen sowie $\mathrm{I}(\mathcal{T}) := \{i_X \mid X \in \mathcal{T}\}$ für i_X das Tupel mit id_X an der Stelle mit Index (X, X) und Null an allen anderen Stellen. Der offensichtliche Ab-Funktor $\mathcal{T} \to [\mathrm{R}(\mathcal{T}), \mathrm{I}(\mathcal{T})]$ induziert stets einen Isomorphismus $\mathcal{T}_{/0} \xrightarrow{\sim} [\mathrm{R}(\mathcal{T}), \mathrm{I}(\mathcal{T})]$ für $\mathcal{T}_{/0}$ die Ab-Kategorie ist, die aus $\mathcal{T}$ entsteht, wenn wir alle Nullobjekte, soweit es solche überhaupt gibt, zu einem einzigen Objekt identifizieren. Umgekehrt erhalten wir stets einen offensichtlichen Isomorphismus $(\mathrm{R}[R, I], \mathrm{I}[R, I]) \xrightarrow{\sim} (R, I)$ von Ringoiden.

Definition 20.4.1.3. Ein **Ringoidmodul** über einem Ringoid (R, I) ist ein R-Assoziativmodul M derart, daß gilt $M = \sum_{i \in I} iM$. Analog erklären wir **Ringoidrechtsmoduln**. Diese bilden abelsche Kategorien RMod_R und RMod_{-R}.

20.4.1.4. In der Terminologie dieses Textes sind alle Ringe unitär und auf allen Moduln operiert die Eins als Identität. Ein „nichtunitärer Ring“ heißt bei uns eine „assoziative $\mathbb{Z}$-Algebra“ oder ein „Assoziativobjekt der Schmelzkategorie Ab“ und die „nichtunitären Moduln“ über einem Assoziativobjekt heißen „Assoziativmoduln“.

20.4.1.5 (**Ringoidkategorie als Teil der Ringoidmodulkategorie**). Gegeben ein Ringoid (R, I) erhalten wir einen volltreuen Ab-Funktor

$$[R, I] \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{RMod}_{-R}$$

von der Ringoidkategorie in die Kategorie der Rechtsmoduln unseres Ringoids durch $i \mapsto iR$ auf Objekten und $jRi \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{-R}(iR, jR)$ durch Multiplikation von links auf Morphismen. Diese volltreue Einbettung ist der Grund, aus dem

wir im folgenden Rechtsmoduln bevorzugen. Im Fall $|I| = 1$ spezialisiert das zur wohlbekannten Bijektion $R \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{-R}(R, R)$ durch Linksmultiplikation mit Umkehrabbildung $\varphi \mapsto \varphi(1)$.

20.4.1.6 (**Ringoidmoduln als Funktoren auf der Ringoidkategorie**). Gegeben ein Ringoid (R, I) erhalten wir zu jedem Ringoidmodul M einen Ab-Funktor $[M] : [R, I] \to \mathrm{Ab}$ durch $i \mapsto iM$. Gegeben eine Ab-Kategorie $\mathcal{T}$ und ein Ab-Funktor $F : \mathcal{T} \to \mathrm{Ab}$ erhalten wir einen Ringoidmodul

$$\mathrm{M}(F) := \bigoplus_{X \in \mathcal{T}} F(X)$$

über dem Ringoid $\mathrm{R}(\mathcal{T})$. Diese beiden Konstruktionen sind zueinander quasiinverse Isomorphismen von Kategorien zwischen RMod_R und $\mathrm{Cat}^{\mathrm{Ab}}([M, I], \mathrm{Ab})$, in Worten der Kategorie der mit den jeweiligen additiven Strukturen verträglichen Funktoren $[M, I] \to \mathrm{Ab}$.

20.4.1.7 (**Ubiquität der freien endlich erzeugten Ringoidmoduln**). Gegeben $\mathcal{C} \supset \mathcal{T}$ eine Ab-Kategorie mit einer vollen Unterkategorie betrachten wir das Ringoid $R := \mathrm{R}(\mathcal{T})$ nach 20.4.1.2 und erhalten einen Ab-Funktor

$$\mathcal{C} \to \mathrm{RMod}_{-R}$$

durch die Vorschrift $X \mapsto \bigoplus_{T \in \mathcal{T}} \mathcal{C}(T, X)$. Jedes Objekt $T \in \mathcal{T}$ wird dabei auf auf $i_T R$ abgebildet mit $i_T \in R$ dem zu T gehörigen Idempotenten. Nach 20.4.1.5 ist unser Funktor volltreu auf $\mathcal{T}$, wir haben also in Formeln $\mathcal{T} \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{RMod}_{-R}$. Ist $\mathcal{C}$ additiv, so folgern wir eine Äquivalenz

$$\langle \mathcal{T} \rangle_{\oplus} \xrightarrow{\approx} \mathrm{RFrei}_{-R}$$

für $\mathrm{RFrei}_{-R} := \langle iR \mid i \in I \rangle_{\oplus} \subset \mathrm{RMod}_{-R}$ die volle Unterkategorie aller endlichen direkten Summen von Objekten iR mit $i \in I$. Wir nennen sie **freie Ringoidmoduln** oder ausführlicher **freie endlich erzeugte Ringoidmoduln**.

Definition 20.4.1.8. Gegeben Ringoide (A, I) und (B, J) ist ein **Ringoidbimodul** eine abelsche Gruppe X mit einer Struktur als A-Ringoidmodul und einer Struktur als B-Ringoidrechtsmodul derart, daß gilt $(ax)b = a(xb)$ $\forall a \in A, b \in B, x \in X$.

20.4.1.9 (**Funktoren zu Ringoidbimoduln**). Gegeben ein A-B-Ringoidbimodul X konstruieren wir ein adjungiertes Paar von Funktoren

$$(X \otimes_B, X \Rightarrow_A)$$

zwischen RMod_B und RMod_A. Dazu gehen wir von der Tensor-Hom-Adjunktion in der Gestalt 7.2.6.5 aus, also vom Fall $A = \mathbb{Z}$. Wir hatten sie erhalten als die Komposition

$$\mathrm{Ab}(X \otimes_B M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bal}_B(X \times M, N) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, N))$$

von Ab-Isomorphismen, wobei die Wirkung von $b \in B$ auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, N)$ durch Vorschalten von $(\cdot b) : X \to X$ zu verstehen ist. Sie schränkt ein zu einer Bijektion

$$\mathrm{Hom}_A(X \otimes_B M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(M, \mathrm{Hom}_A(X, N))$$

Daß in unserer Situation $X \otimes_B M$ ein A-Ringoidmodul ist, erkennt man unschwer sogar für einen beliebigen B-Assoziativmodul M, vergleiche 7.2.6.7. Dahingegen muß $\mathrm{Hom}_A(X, N)$ im allgemeinen kein B-Ringoidmodul sein. Alles paßt aber mit

$$(X \Rightarrow_A N) := \sum_{j \in J} j \, \mathrm{Hom}_A(X, N)$$

20.4.1.10 (**Skalarerweiterung bei Ringoidmoduln**). Seien (A, I) und (B, J) Ringoide und $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}$-Algebren, der eine Surjektion $\varphi : I \sqcup \{0\} \twoheadrightarrow J \sqcup \{0\}$ induziert. So wird B ein B-A-Ringoidbimodul für Operation durch Linksmultiplikation von B und die Rechtsoperation von A gegeben durch Multiplikation von rechts mit dem Bild unter φ und wir erhalten einen Funktor, die **Skalarerweiterung**

$$B \otimes_A : \mathrm{RMod}_A \to \mathrm{RMod}_B$$

Weiter erhalten wir in dieser Situation einen Isomorphismus $B \otimes_A Ai \xrightarrow{\sim} B\varphi(i)$ durch die Abbildung $b \otimes a \mapsto b\varphi(a)$. Das folgt aus allgemeinen Resultaten zum Tensorieren über nichtunitären Ringen bei vielen Idempotenten, vergleiche 7.2.6.9. Insbesondere induziert unsere Skalarerweiterung einen Funktor

$$B \otimes_A : \mathrm{RFrei}_A \to \mathrm{RFrei}_B$$

20.4.2 Differentielle graduierte Ringoide und Moduln

20.4.2.1. Die Schmelzkategorie der differentiellen graduierten abelschen Gruppen mit den entsprechenden multilinearen Abbildungen als Verschmelzungen notieren wir dgAb. Eine dgAb-Kategorie nennen wir kurz eine dg-Kategorie. Das interne Hom der Schmelzkategorie dgAb alias den Homomorphismenkomplex notieren wir im folgenden $\Rightarrow_{\mathrm{dgAb}}$ oder kurz $\Rightarrow$.

Definition 20.4.2.2. Ein **differentielles graduiertes Ringoid** oder **dg-Ringoid** ist ein Paar (A, I) bestehend aus einem Assoziativobjekt $A \in \mathrm{dgAb}$ zusammen mit einer ausgezeichneten Menge von Idempotenten $I \subset \mathcal{Z}^0 R$ derart, daß für $i, j \in I$ gilt $i \neq j \Rightarrow ij = 0$ und daß gilt $A = \sum_{i,j \in I} iAj$.

20.4.2.3 (**dg-Ringoide und dg-Kategorien**). Gegeben ein dg-Ringoid (R, I) erhalten wir eine dg-Kategorie $[R, I]^{\mathrm{dg}}$ mit höchstens einem Nullobjekt, seine **dg-Ringoidkategorie**, indem wir I als Menge der Objekte nehmen und iRj als die

differentielle abelsche Gruppe der Morphismen von j nach i. Gegeben eine dg-Kategorie $\mathcal{T}$ erhalten wir ein dg-Ringoid $(\mathrm{R}(\mathcal{T}), \mathrm{I}(\mathcal{T}))$, indem wir

$$\mathrm{R}(\mathcal{T}) := \bigoplus_{X,Y \in \mathcal{T}} \mathcal{T}(X,Y)$$

setzen und $\mathrm{I}(\mathcal{T}) := \{i_X \mid X \in \mathcal{T}\}$ für i_X das Tupel mit id_X an der Stelle mit Index (X,X) und Null an allen anderen Stellen. Diese beiden Konstruktionen sind salopp gesprochen invers zueinander, aber wir führen das nicht in voller Präzision aus.

20.4.2.4. Einen **dg-Ringoidmodul** über einem dg-Ringoid (R,I) erklären wir als einen R-dgAb-Assoziativmodul M mit $M = \sum_{i \in I} iM$. Analog erklären wir einen **dg-Ringoidrechtsmodul**. Diese bilden, wie im folgenden ausgeführt werden soll, dg-Kategorien $\mathrm{RMod}_R^{\mathrm{dg}}$ beziehungsweise $\mathrm{RMod}_{-R}^{\mathrm{dg}}$. Wir beginnen unsere Diskussion mit Rechtsmoduln. Gegeben dg-Rechtsmoduln M, N nehmen wir als Morphismenobjekte die Unterkomplexe

$$\mathrm{RMod}_{-R}^{\mathrm{dg}}(M,N) \subset (M \Rrightarrow N)$$

aus allen $f \in (M \Rrightarrow N)^n$ mit $f \circ (\cdot r) = (\cdot r) \circ f$ für alle homogenen $r \in R$. Um zu prüfen, daß wir so wirklich einen Unterkomplex erhalten, beschreiben wir ihn alternativ als den Egalisator der beiden Morphismen $(M \Rrightarrow N) \to ((M \otimes R) \Rrightarrow N)$ gegeben durch das Vorschalten der Operation $M \otimes R \to M$ und das Darantensorieren der Identität auf R gefolgt vom Nachschalten der Operation $N \otimes R \to N$. Im Fall von Linksmoduln nehmen wir als Morphismenobjekte die Unterkomplexe

$$\mathrm{RMod}_{R}^{\mathrm{dg}}(M,N) \subset (M \Rrightarrow N)$$

aus allen $f \in (M \Rrightarrow N)^n$ mit $f \circ (r\cdot) = (-1)^{|f||r|}(r\cdot) \circ f$ für alle homogenen $r \in R$ mit der üblichen Konvention $|f| = n$. Um zu prüfen, daß wir so wirklich einen Unterkomplex erhalten, beschreiben wir ihn analog als den Egalisator der beiden Morphismen $(M \Rrightarrow N) \to ((R \otimes M) \Rrightarrow N)$ gegeben durch das Vorschalten der Operation $R \otimes M \to M$ und das Darantensorieren der Identität auf R gefolgt vom Nachschalten der Operation $R \otimes N \to N$ und erinnern die Vorzeichenregel 18.2.1.25 für das Tensorieren von internem Hom.

20.4.2.5 (**dg-Ringoidkategorie als Teil der dg-Ringoidmodulkategorie**). Gegeben ein dg-Ringoid (R,I) erhalten wir einen volltreuen dgAb-Funktor

$$[R,I]^{\mathrm{dg}} \hookrightarrow \mathrm{RMod}_{-R}^{\mathrm{dg}}$$

von der einer dg-Ringoidkategorie 20.4.2.3 in die Kategorie seiner dg-Rechtsmoduln durch $i \mapsto iR$ auf Objekten und $jRi \xrightarrow{\sim} \mathrm{RMod}_{-R}^{\mathrm{dg}}(iR, jR)$ durch Multiplikation von links auf Morphismen.

20.4.2.6 (**dg-Ringoidmoduln als dg-Funktoren auf der dg-Ringoidkategorie**). Gegeben ein dg-Ringoid (R, I) erhalten wir zu jedem dg-Ringoidmodul M einen dgAb-Funktor $[M] : [R, I]^{\mathrm{dg}} \to \mathrm{dgAb}$ durch $i \mapsto iM$. Gegeben eine dgAb-Kategorie $\mathcal{T}$ und ein dgAb-Funktor $F : \mathcal{T} \to \mathrm{dgAb}$ erhalten wir einen dg-Ringoidmodul

$$\mathrm{M}(F) := \bigoplus_{X \in \mathcal{T}} F(X)$$

Diese beiden Konstruktionen sind zueinander quasiinverse Äquivalenzen von dg-Kategorien zwischen $\mathrm{RMod}_R^{\mathrm{dg}}$ und $\mathrm{Cat}^{\mathrm{dgAb}}([M, I]^{\mathrm{dg}}, \mathrm{dgAb})$.

20.4.2.7 (**Homotopiekategorie der dg-Moduln**). Die Umstrukturierung der dg-Kategorie der dg-Ringoidmoduln über einem dg-Ringoid (A, I) mit dem Schmelzfunktor $\mathcal{H}^0 : \mathrm{dgAb} \to \mathrm{Ab}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{RHot}_A := \mathcal{H}^0(\mathrm{RMod}_A^{\mathrm{dg}})$ und setzen also

$$\mathrm{RHot}_A(M, N) := \mathcal{H}^0(\mathrm{RMod}_A^{\mathrm{dg}}(M, N))$$

für dg-Ringoidmoduln M, N über A. Ebenso erklären wir über einem dg-Ringoid A auch die Homotopiekategorie der dg-Ringoidrechtsmoduln RHot_{-A}. Darauf ebenso wie bei Linksmoduln ist das Verschieben von Komplexen mit dem Negativmachen der Differentiale $M \mapsto [1]M$ aus 17.5.7.11 eine $\mathbb{Z}$-Operation. Die Homotopiekategorie RHot_{-A} aller dg-Rechtsringoidmoduln über einem dg-Ringoid A wird eine triangulierte Kategorie, wenn wir sie mit der von RMod_{-A} induzierten $\mathbb{Z}$-Operation versehen und diejenigen Dreiecke auszeichnen, die isomorph sind zu Dreiecken der Gestalt

$$M \xrightarrow{f} N \to \mathrm{Keg}(f) \to [1]M$$

mit $\mathrm{Keg}(f)$ dem Abbildungskegel, den wir mit seiner offensichtlichen Struktur als dg-Rechtsringoidmodul versehen. Um die Axiome einer triangulierten Kategorie zu prüfen, müssen wir „nur“ den Beweis von Satz 20.2.3.1 durchgehen und prüfen, daß alle Kettenabbildungen und Homotopien daraus unter unseren zusätzlichen Voraussetzungen mit der Rechtsoperation von A verträglich sind. Für Linksmoduln gilt Entsprechendes. Hier erklären wir die $\mathbb{Z}$-Operation, indem wir von unserer $\mathbb{Z}$-Operation $M \mapsto [1]M$ auf Komplexen aus 17.5.7.11 ausgehen und die A-Operation erklären durch die Vorschrift

$$a([1]m) := (-1)^{|a|}[1](am)$$

für homogene $a \in A$. Das Vorzeichen ist nötig, damit unser $[1]M$ aus 17.5.7.11 mit seinem negativ gemachten Differential wieder ein dg-Modul ist. Weiter müssen wir auf dem Abbildungskegel die nicht ganz so offensichtliche A-Operation betrachten, bei der ein homogenes $a \in A$ in den Notationen von 17.6.2.5 durch die Diagonalmatrix $\mathrm{diag}((-1)^{|a|}a, a)$ operiert.

Ergänzung 20.4.2.8. Ich habe davon Abstand genommen, die zuvor erklärten Konstruktionen in einen noch größeren Rahmen zu stellen, weil ich erstens nicht so genau weiß, wie das zu machen wäre, und zweitens fürchte, daß ein noch größerer Rahmen das in dieser Darstellung entwickelte Bild erdrücken könnte.

20.4.2.9. Fassen wir ein Ringoid (A, I) als dg-Ringoid auf, indem wir es mit der trivialen Graduierung $A = A^0$ und dem Differential $d = 0$ versehen, so erhalten wir $\mathrm{RHot}_A = \mathrm{Hot}(\mathrm{RMod}_A)$.

Beispiel 20.4.2.10 (**Kategorie von Komplexen als dg-Kategorie**). Gegeben eine Ab-Kategorie $\mathcal{P}$ bilden die Komplexe $\mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}$ eine dg-Kategorie in offensichtlicher Weise. Wir notieren diese dg-Kategorie $\mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{dg}}$. Die ursprüngliche Ab-Kategorie der Komplexe erhalten wir daraus zurück durch Umstrukturieren 18.2.4.21 mit dem Schmelzfunktor $\mathcal{Z}^0 : \mathrm{dgAb} \to \mathrm{Ab}$ der Nullzykel, in Formeln $\mathrm{Ket}_{\mathcal{P}} = \mathcal{Z}^0(\mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{dg}})$. Die Homotopiekategorie mit ihrer additiven Struktur erhalten wir ähnlich durch Umstrukturieren 18.2.4.21 mit dem Schmelzfunktor $\mathcal{H}^0 : \mathrm{dgAb} \to \mathrm{Ab}$ der nullten Homologie, in Formeln $\mathrm{Hot}_{\mathcal{P}} = \mathcal{H}^0(\mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{dg}})$.

20.4.2.11. Gegeben eine Ab-Kategorie $\mathcal{P}$ und eine volle Unterkategorie $\mathcal{T} \subset \mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}^{\mathrm{dg}} \subset \mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{dg}}$ die volle dg-Unterkategorie mit denselben Objekten und betrachten das zugehörige dg-Ringoid $R := \mathrm{R}(\mathcal{T}^{\mathrm{dg}})$ nach 20.4.2.3 und erhalten einen dg-Funktor $\mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{dg}} \to \mathrm{Rmod}_{-R}^{\mathrm{dg}}$ durch die Vorschrift

$$X \mapsto \bigoplus_{T \in \mathcal{T}} \mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{dg}}(T, X)$$

Jedes Objekt $X \in \mathcal{T}$ wird dabei auf auf $i_X R$ abgebildet mit $i_X \in R$ dem zu X gehörigen Idempotenten. Nach 20.4.2.5 ist unser dg-Funktor volltreu auf $\mathcal{T}^{\mathrm{dg}}$, wir haben also in Formeln

$$\mathcal{T}^{\mathrm{dg}} \hookrightarrow \mathrm{RMod}_{-R}^{\mathrm{dg}}$$

Umstrukturieren unseres dg-Funktors $\mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{dg}} \to \mathrm{Rmod}_{-R}^{\mathrm{dg}}$ mit $\mathcal{H}^0$ liefert einen Ab-Funktor

$$\mathrm{Hot}_{\mathcal{P}} \to \mathrm{RHot}_{-R}$$

Ist $\mathcal{P}$ additiv, so ist er sogar trianguliert, denn nach einer Variante von 17.6.2.12 wissen wir, daß das „Bilden des Hom-Komplexes“ für alle $Z \in \mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}$ ein triangulierter Funktor $\mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{dg}}(Z, \ ) : \mathrm{Hot}_{\mathcal{P}} \to \mathrm{Hot}$ ist. Daraus folgt unsere Behauptung dann ohne große Mühe. Weiter ist unser Funktor auch volltreu auf der vollen Unterkategorie $\mathcal{T}^{\mathrm{hot}} := \mathcal{H}^0(\mathcal{T}^{\mathrm{dg}}) \subset \mathrm{Hot}_{\mathcal{P}}$ der Homotopiekategorie mit Objekten $\mathcal{T}$, in Formeln $\mathcal{T}^{\mathrm{hot}} \hookrightarrow \mathrm{RHot}_{-R}$ mit $X \mapsto i_X R$.

20.4.2.12. Gegeben ein dg-Ringoid (R, I) betrachten wir in der zugehörigen Homotopiekategorie RHot_R die von allen Ri mit $i \in I$ erzeugte triangulierte Unterkategorie und notieren sie

$$\mathrm{RFrot}_R := \langle Ri \mid i \in I \rangle_\Delta \subset \mathrm{RHot}_R$$

Ihre Objekte nennen wir **homotopiefreie endlich erzeugte dg-Ringoidmoduln**. In derselben Weise erklären wir die triangulierte Kategorie der **homotopiefreien dg-Ringoidrechtsmoduln**

$$\mathrm{RFrot}_{-R} := \langle iR \mid i \in I \rangle_\Delta \subset \mathrm{RHot}_{-R}$$

20.4.2.13. Fassen wir ein Ringoid (A, I) als dg-Ringoid auf, indem wir es mit der trivialen Graduierung $A = A^0$ und dem Differential $d = 0$ versehen, so erhalten wir $\mathrm{RFrot}_A = \mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\mathrm{RFrei}_A)$.

20.4.2.14 (**Ubiquität der homotopiefreien dg-Ringoidmoduln**). Gegeben eine additive Kategorie $\mathcal{P}$ und eine volle Unterkategorie $\mathcal{T} \subset \mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}$ und die volle dg-Unterkategorie $\mathcal{T}^{\mathrm{dg}} \subset \mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{dg}}$ mit denselben Objekten und das zugehörige dg-Ringoid $R := \mathrm{R}(\mathcal{T}^{\mathrm{dg}})$ nach 20.4.2.3 induziert unser Funktor $\mathrm{Hot}_{\mathcal{P}} \to \mathrm{RHot}_{-R}$ aus 20.4.2.11, der ja wie oben erwähnt volltreu ist auf der Unterkategorie $\mathcal{T}^{\mathrm{hot}}$ mit Objektmenge $\mathcal{T}$, vermittels dévissage 20.2.4.12 eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien

$$\langle !\mathcal{T} \rangle_\Delta^{\mathrm{Hot}} \xrightarrow{\approx} \mathrm{RFrot}_{-R}$$

Die linke Seite meint hier die von den Objekten von $\mathcal{T}$ in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{P}}$ erzeugte triangulierte Unterkategorie. Ein Objekt $T \in \mathcal{T}$ wird dabei auf den dg-R-Rechtsmodul $i_T R$ abgebildet.

20.4.2.15 (**Beschreibung triangulierter Erzeugnisse in Homotopiekategorien**). Sei $\mathcal{P}$ eine additive Kategorie. Gegeben Komplexe $X_\alpha = (X_\alpha^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in $\mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}$ indiziert durch $1 \leq \alpha \leq a$ finden wir, daß die iterierten Abbildungskegel gegeben durch $K_{a+1} = 0$ und $K_\alpha := \mathrm{K}(f_\alpha : [-1]X_\alpha \to K_{\alpha+1})$ für beliebige Kettenabbildungen f_α beschrieben werden können als die Komplexe mit homogenen Anteilen

$$K_\alpha^n = X_\alpha^n \oplus X_{\alpha+1}^n \oplus \ldots \oplus X_a^n$$

und mit Differentialen $d^n : K_\alpha^n \to K_\alpha^{n+1}$ in Bezug auf die Darstellung unserer direkten Summen als Spaltenvektoren gegeben durch untere Dreiecksmatrizen wie etwa

$$d^n = \begin{pmatrix} \partial^n & 0 & 0 \\ * & \partial^n & 0 \\ * & * & \partial^n \end{pmatrix}$$

im Fall von drei Summanden mit den Differentialen der X_β für $\alpha \leq \beta \leq a$ auf der Diagonalen und beliebige $X_\beta^n \to X_\gamma^{n+1}$ für $\alpha \leq \beta < \gamma \leq a$ unterhalb der Diagonalen mit der einzigen Maßgabe, daß stets gilt $d^{n+1} \circ d^n = 0$. Gegeben zwei derartige iterierte Abbildungskegel K, L und eine Kettenabbildung $f : [-1]K \to L$ ist auch $\mathrm{Keg}([-1]K \to L)$ wieder von derselben Gestalt. Damit haben wir eine Beschreibung aller Objekte in der von einer Menge von Komplexen erzeugten triangulierten Unterkategorie von $\mathrm{Hot}_{\mathcal{P}}$ gewonnen. Die Verschiebungen $[-1]$ sind

hierbei unerheblich und dienten nur dem Zweck, die Diagonale von Vorzeichen zu befreien.

20.4.2.16 (**Beschreibung homotopiefreier dg-Ringoidmoduln**). Sei (R, I) ein dg-Ringoid. Alle homotopiefreien dg-Ringoidrechtsmoduln sind isomorph zu R-Rechtsmoduln $M = [\nu_1]i_1R \oplus [\nu_2]i_2R \oplus \ldots \oplus [\nu_a]i_aR$ für beliebig vorgegebene $\nu_\alpha \in \mathbb{Z}$ und $i_\alpha \in I$ und $1 \leq \alpha \leq a$ mit homogenen Anteilen

$$M^n = i_1R^{n+\nu_1} \oplus i_2R^{n+\nu_2} \oplus \ldots \oplus i_aR^{n+\nu_a}$$

und mit einem Differential $d : M^n \to M^{n+1}$ in Gestalt des Davormultiplizierens einer unteren Dreiecksmatrix wie etwa

$$d = \begin{pmatrix} (-1)^{\nu_1}\partial & 0 & 0 \\ * & (-1)^{\nu_2}\partial & 0 \\ * & * & (-1)^{\nu_3}\partial \end{pmatrix}$$

im Fall von drei Summanden, mit Einträgen $(-1)^{\nu_\alpha}\partial_R$ an der α-Stelle auf der Diagonalen und Einträgen aus $(i_\beta R i_\gamma)^{\nu_\beta - \nu_\gamma + 1}$ homogen vom Grad $\nu_\beta - \nu_\gamma + 1$ für $\beta < \gamma$ als Matrixeintrag $d_{\gamma\beta}$ an den entsprechenden Stellen unterhalb der Diagonalen. Wieder ist die einzige zusätzliche Einschränkung an die Einträge unserer Matrix $d^2 = 0$. Das sieht man genauso wie bei der in 20.4.2.15 ausgeführten Variante.

20.4.2.17 (**Von dg-Ringoidmoduln zu Komplexen**). Gegeben eine additive Kategorie $\mathcal{P}$ und eine volle Unterkategorie $\mathcal{T} \subset \mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}$ und das zugehörige dg-Ringoid $R := \mathrm{R}(\mathcal{T}^{\mathrm{dg}})$ können wir nun auch ein Quasiinverses der Äquivalenz von triangulierten Kategorien $\langle_!\mathcal{T}\rangle_\Delta^{\mathrm{Hot}} \xrightarrow{\approx} \mathrm{RFrot}_{-R}$ nach unserer dg-Ubiquität 20.4.2.14 explizit angeben. Gehören etwa die ausgezeichneten Idempotenten i_1, i_2, i_3 zu den Komplexen $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{T}$, so würde unserem Beispielobjekt aus 20.4.2.16 der Komplex K mit homogenen Anteilen $K^n = T_1^{n+\nu_1} \oplus T_2^{n+\nu_2} \oplus T_3^{n+\nu_3}$ zugeordnet und mit dem durch die Matrix

$$d = \begin{pmatrix} (-1)^{\nu_1}\partial_1 & 0 & 0 \\ * & (-1)^{\nu_2}\partial_2 & 0 \\ * & * & (-1)^{\nu_3}\partial_3 \end{pmatrix}$$

beschriebenen Differential, wobei nun ∂_i das Differential von T_i meint und wir erinnern, daß jedes Element $* \in (i_\beta R i_\gamma)^{\nu_\beta - \nu_\gamma + 1}$ für eine ganze Familie von $\mathcal{P}$-Morphismen $T_\gamma^{n+\nu_\gamma} \to T_\beta^{n+\nu_\beta+1}$ steht.

20.4.2.18 (**Homotopiefreie dg-Ringoidmoduln spezieller dg-Ringoide**). Sei nun speziell (H, I) ein dg-Ringoid, das konzentriert ist im Grad Null, so daß insbesondere auch sein Differential verschwindet. Ist dann in 20.4.2.16 sagen wir ν_γ

kleinstmöglich unter allen ν_α, so muß die γ-Zeile der das Differential beschreibenden Matrix verschwinden und wir erhalten wieder eine obere Dreiecksmatrix, wenn wir erst die γ-Zeile nach ganz oben schieben und dann die γ-Spalte nach ganz vorn. So sehen wir, daß wir jeden homotopiefreien H-dg-Ringoidrechtsmodul auch darstellen können nach dem in 20.4.2.16 beschriebenen Schema mit der zusätzlichen Eigenschaft $\nu_1 \leq \ldots \leq \nu_a$ und daß dabei das Differential durch eine Block-untere Dreiecksmatrix gegeben wird mit der durch die Gleichheiten zwischen unseren ν_α gegebenen Blockstruktur und von Null verschiedenen Einträgen nur auf der ersten unteren Block-Nebendiagonalen, wie etwa die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

im Fall $\nu_1 < \nu_2 = \nu_3 < \nu_4$, wobei die Sternchen nur dann alle von Null verschieden sein können, wenn $<$ jedes mal ein Wachsen um Eins bedeutet. Das alles illustriert nocheinmal unsere Identität $\mathrm{RFrot}_{-H} = \mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\mathrm{RFrei}_{-H})$ aus 20.4.2.12, die Nebendiagonalblöcke links entspechen den Differentialen des Komplexes rechts. Ist etwas allgemeiner (Z, I) ein dg-Ringoid, das konzentriert ist in nichtpositiven Graden, so können wir immer noch zu $\nu_1 \leq \ldots \leq \nu_a$ umsortieren, aber die Differentiale sind nun Block-untere Dreiecksmatrizen mit Diagonalmatrizen mit von Null verschiedenen Einträgen $\pm\partial$ auf der Blockdiagonalen und Einträgen von immer negativeren Graden in den tieferen Block-Nebendiagonalen, also etwa

$$\begin{pmatrix} \partial & 0 & 0 & 0 \\ *^0 & -\partial & 0 & 0 \\ *^0 & 0 & -\partial & 0 \\ *^{-1} & *^0 & *^0 & \partial \end{pmatrix}$$

im Fall $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) = (2, 3, 3, 4)$ mit oberen Indizes an den Sternchen, um die Grade der entsprechenden Elemente von Z anzudeuten.

20.4.3 Kippen, Realisierung, Gewichtskomplex

Definition 20.4.3.1. Gegeben dg-Ringoide (A, I) und (B, J) erklären wir einen **dg-Ringoidbimodul** als eine dg-Gruppe X mit einer Struktur als A-dg-Ringoidmodul und einer Struktur als B-dg-Ringoidrechtsmodul derart, daß gilt $(ax)b = a(xb)\ \forall a \in A, b \in B, x \in X$.

20.4.3.2. Gegeben ein A-B-dg-Ringoidbimodul X erhalten wir einen dg-Funktor

$$\otimes_A X : \mathrm{RMod}^{\mathrm{dg}}_{-A} \to \mathrm{RMod}^{\mathrm{dg}}_{-B}$$

in recht offensichtlicher Weise durch Ergänzung des in 20.4.1.9 diskutierten Funktors um Graduierung und Differential. Auf die Diskussion des Rechtsadjungierten verzichten wir vorerst, das mag einmal ein Student ausarbeiten. Unser Funktor induziert auf den Homotopiekategorien einen triangulierten Funktor

$$\otimes_A X : \mathrm{RHot}_{-A} \to \mathrm{RHot}_{-B}$$

20.4.3.3 (**Skalarerweiterung bei dg-Ringoidmoduln**). Seien (A, I) und (B, J) dg-Ringoide und $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus von dgAb-Magmas, der eine Surjektion $\varphi : I \sqcup \{0\} \twoheadrightarrow J \sqcup \{0\}$ induziert. So wird B ein A-B-dg-Ringoidbimodul für die offensichtliche Rechtsoperation von B und die Linksoperation von A gegeben durch Multiplikation mit dem Bild unter φ und wir erhalten mit 20.4.3.2 einen triangulierten Funktor, die **Skalarerweiterung**

$$\otimes_A B : \mathrm{RHot}_{-A} \to \mathrm{RHot}_{-B}$$

Weiter erhalten wir in dieser Situation einen Isomorphismus $iA \otimes_A B \xrightarrow{\sim} \varphi(i)B$ durch die Abbildung $a \otimes b \mapsto \varphi(a)b$. Das folgt aus der bereits in 20.4.1.10 besprochenen analogen Aussage in der „nicht-dg-Situation“, die wir dort für Linksmoduln ausformuliert hatten. Insbesondere induziert unsere Skalarerweiterung einen triangulierten Funktor

$$\otimes_A B : \mathrm{RFrot}_{-A} \to \mathrm{RFrot}_{-B}$$

In der in 20.4.2.16 besprochenen Beschreibung der homotopiefreien Rechtsmoduln bedeutet die Skalarerweiterung das Anwenden von φ auf alle Matrixeinträge unterhalb der Diagonalen und das Ersetzen der Differentiale von A durch die Differentiale von B. Ist zusätzlich φ ein Quasiisomorphismus, so ist unsere Erweiterung der Skalare volltreu auf der vollen Unterkategorie aller iA mit $i \in I$ und mit dévissage auch auf ihrem triangulierten Erzeugnis und induziert mithin eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien

$$\otimes_A B : \mathrm{RFrot}_{-A} \xrightarrow{\approx} \mathrm{RFrot}_{-B}$$

20.4.3.4 (**Realisierung, Gewichtskomplex und Kippen im Abstrakten**). Gegeben ein dg-Ringoid (R, I) haben wir stets Morphismen dgAb-Magmas

$$\mathcal{H}^0 R \leftarrow (\mathcal{Z}^0 R \oplus R^{<0}) \to R$$

Zeichnen wir in der Mitte dieselbe Menge I von Idempotenten aus wie in R und in $\mathcal{H}^0 R$ deren Bilder, so sind alle drei dgAb-Magmas Ringoide und unsere Skalarerweiterungen aus 20.4.3.3 liefern triangulierte Funktoren

$$\mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\mathrm{RFrei}_{-\mathcal{H}^0 R}) = \mathrm{RFrot}_{-\mathcal{H}^0 R} \leftarrow \mathrm{RFrot}_{-\mathcal{Z}^0 R \oplus R^{<0}} \to \mathrm{RFrot}_{-R}$$

Jetzt unterscheiden wir drei Fälle.

(1) Gilt $n < 0 \Rightarrow \mathcal{H}^n R = 0$, so ist der erste unserer Morphismen ein Quasiisomorphismus und die Skalarerweiterung liefert nach 20.4.3.3 eine Äquivalenz $\mathrm{RFrot}_{-\mathcal{H}^0 R} \xleftarrow{\approx} \mathrm{RFrot}_{-\mathcal{Z}^0 R \oplus R^{<0}}$. Durch Invertieren dieser Äquivalenz erhalten wir einen triangulierten Funktor, den **abstrakten Realisierungsfunktor**

$$\mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\mathrm{RFrei}_{-\mathcal{H}^0 R}) \to \mathrm{RFrot}_{-R}$$

(2) Gilt $n > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^n R = 0$, so ist der zweite unserer Morphismen ein Quasiisomorphismus und die Skalarerweiterung liefert nach 20.4.3.3 eine Äquivalenz $\mathrm{RFrot}_{-\mathcal{Z}^0 R \oplus R^{<0}} \xrightarrow{\approx} \mathrm{RFrot}_{-R}$. Durch Invertieren dieser Äquivalenz erhalten wir einen triangulierten Funktor, den **abstrakten Gewichtskomplexfunktor**

$$\mathrm{RFrot}_{-R} \to \mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\mathrm{RFrei}_{-\mathcal{H}^0 R})$$

(3) Gilt $n \neq 0 \Rightarrow \mathcal{H}^n R = 0$, so werden die beiden zuvor besprochenen Funktoren zueinander quasiinverse Äquivalenzen von triangulierten Kategorien und wir erhalten die **abstrakte Kippäquivalenz**

$$\mathrm{RFrot}_{-R} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\mathrm{RFrei}_{-\mathcal{H}^0 R})$$

20.4.3.5 (**Realisierung, Gewichtskomplex und Kippen für Komplexe**). Seien $\mathcal{P}$ eine additive Kategorie und $\mathcal{T} \subset \mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}$ eine Menge von Komplexen und $R := \mathrm{R}(\mathcal{T}^{\mathrm{dg}})$ das zugehörige dg-Ringoid. In diesem Fall liefert unsere Ubiquität 20.4.1.7 eine Äquivalenz $\langle_! \mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\mathrm{Hot}} \xrightarrow{\approx} \mathrm{RFrei}_{-\mathcal{H}^0 R}$ für $\langle_! \mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\mathrm{Hot}} \subset \mathrm{Hot}_{\mathcal{P}}$ die von $\mathcal{T}$ in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{P}}$ erzeugte additive Unterkategorie und zusammen mit der dg-Ubiquität 20.4.2.14 als rechter Vertikale erhalten wir ein Diagramm triangulierter Funktoren

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\mathrm{RFrei}_{-\mathcal{H}^0 R}) & \leftarrow & \mathrm{RFrot}_{-\mathcal{Z}^0 R \oplus R^{<0}} & \to & \mathrm{RFrot}_{-R} \\ \uparrow \wr & & & & \uparrow \wr \\ \mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\langle_! \mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\mathrm{Hot}}) & & & & \langle_! \mathcal{T} \rangle_{\Delta}^{\mathrm{Hot}} \end{array}$$

Auch hier unterscheiden wir drei Fälle.

(1) Gilt $n < 0 \Rightarrow \mathrm{Hot}_{\mathcal{P}}(X, [n]Y) = 0$ für beliebige $X, Y \in \mathcal{T}$, so erhalten wir $n < 0 \Rightarrow \mathcal{H}^n R = 0$ und damit einen triangulierten **Realisierungsfunktor**

$$\mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\langle_! \mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\mathrm{Hot}}) \to \langle_! \mathcal{T} \rangle_{\Delta}^{\mathrm{Hot}}$$

(2) Gilt $n > 0 \Rightarrow \mathrm{Hot}_{\mathcal{P}}(X, [n]Y) = 0$ für beliebige $X, Y \in \mathcal{T}$, so erhalten wir $n > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^n R = 0$ und damit einen triangulierten **Gewichtskomplexfunktor**

$$\langle_! \mathcal{T} \rangle_{\Delta}^{\mathrm{Hot}} \to \mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\langle_! \mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\mathrm{Hot}})$$

(3) Gilt $n \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Hot}_{\mathcal{P}}(X, [n]Y) = 0$ für beliebige $X, Y \in \mathcal{T}$, so erhalten wir $n \neq 0 \Rightarrow \mathcal{H}^n R = 0$ und unsere beiden triangulierten Funktoren werden zu quasiinversen Äquivalenzen, den **Kippäquivalenzen**

$$\langle_! \mathcal{T} \rangle_\Delta^{\mathrm{Hot}} \overset{\approx}{\leftrightarrow} \mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\langle_! \mathcal{T} \rangle_\oplus^{\mathrm{Hot}}) \overset{\approx}{\leftrightarrow} \mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\mathrm{RFrei}_{-\mathcal{H}^0 R})$$

Definition 20.4.3.6. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Eine Menge von Komplexen $\mathcal{T} \subset \mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$ heiße **quisendentfaltet**, wenn für alle $T, T' \in \mathcal{T}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}(T, [n]T') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(T, [n]T')$$

zwischen Morphismen in der Homotopiekategorie und Morphismen in der derivierten Kategorie liefert.

Beispiele 20.4.3.7. Das von einer quisendentfalteten Menge von Komplexen erzeugte Verdiersystem ist offensichtlich auch selbst wieder quisendentfaltet. Die Mengen aller gegen die Pfeile beschränkten Komplexe injektiver Objekte und aller mit den Pfeilen beschränkten Komplexe projektiver Objekte sind quisendentfaltet. Allgemeiner sind die Mengen aller quisrechtsentfalteten Komplexe nach 20.3.4.5 und aller analog definierten quislinksentfalteten Komplexe beide quisendentfaltet.

20.4.3.8 (**Triangulierte Erzeugnisse quisendentfalteter Komplexmengen**). Seien $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $\mathcal{T} \subset \mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$ eine quisendentfaltete Menge von Komplexen. So induziert nach dévissage der Lokalisierungsfunktor eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien

$$\langle_! \mathcal{T} \rangle_\Delta^{\mathrm{Hot}} \xrightarrow{\approx} \langle_! \mathcal{T} \rangle_\Delta^{\mathrm{Der}}$$

zwischen ihren jeweiligen triangulierten Erzegnissen in der Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ und in der derivierten Kategorie $\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}$.

20.4.3.9 (**Realisierung als verallgemeinerter Totalkomplex**). Seien $\mathcal{P}$ eine additive Kategorie und $\mathcal{T} \subset \mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}$ eine Menge von Komplexen mit $n < 0 \Rightarrow \mathrm{Hot}_{\mathcal{P}}(X, [n]Y) = 0$ für beliebige $X, Y \in \mathcal{T}$. Wir wollen den Realisierungsfunktor $\mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\langle_! \mathcal{T} \rangle_\oplus^{\mathrm{Hot}}) \to \langle_! \mathcal{T} \rangle_\Delta^{\mathrm{Hot}}$ expliziter beschreiben. Sei also $R := \mathrm{R}(\mathcal{T}^{\mathrm{dg}})$ das zuhehörige dg-Ringoid, für das folglich gilt $n < 0 \Rightarrow \mathcal{H}^n R = 0$. Wir hatten unseren Realisierungsfunktor definiert als die Komposition

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\mathrm{RFrei}_{-\mathcal{H}^0 R}) & \overset{\approx}{\leftarrow} & \mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\mathrm{RFrei}_{-\mathcal{Z}^0 R \oplus R^{<0}}) & \to & \mathrm{RFrot}_{-R} \\ \uparrow \wr & & & & \downarrow \wr \\ \mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\langle_! \mathcal{T} \rangle_\oplus^{\mathrm{Hot}}) & & & & \langle_! \mathcal{T} \rangle_\Delta^{\mathrm{Hot}} \end{array}$$

Mithilfe unserer expliziten Formeln 20.4.2.17 wollen wir die Komposition unserer Funktoren nun expliziter beschreiben. Das Ausgangsobjekt $T \in \mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\langle_! \mathcal{T} \rangle_\oplus^{\mathrm{Hot}})$ ist

ein beschränkter Komplex $h_p : T^p \to T^{p+1}$ aus Objekten der Homotopiekategorie $T^p \in \langle_! \mathcal{T} \rangle_\oplus^{\mathrm{Hot}} \subset \mathrm{Hot}_\mathcal{P}$. Diese sind ihrerseits Komplexe $\partial : T^{p,q} \to T^{p,q+1}$ aus Objekten von $\mathcal{P}$. Wir denken uns das ganze Datum notiert in der Form eines Doppelkomplexes mit dem Komplex T^p in der Vertikalen bei p. Im Gegensatz zu einem richtigen Doppelkomplex haben wir aber in den Horizontalen keine richtigen Morphismen $T^{p,q} \to T^{p+1,q}$, sondern nur Homotopieklassen von Kettenabbildungen $T^{p,*} \to T^{p+1,*}$ derart, daß die Verknüpfung $h^{p+1} \circ h^p$ stets nullhomotop ist. Unsere Theorie sagt nun, daß wir Repräsentanten u_1^p unserer Homotopieklassen h^p bestehend aus Morphismen $u_1^{p,q} : T^{p,q} \to T^{p+1,q}$, ja aus Kettenabbildungen $u_1^{p,*} : T^{p,*} \to T^{p+1,*}$ sowie weitere Morphismen $u_r^{p,q} : T^{p,q} \to T^{p+r,q-r+1}$ für $r \geq 2$ so finden können, daß der „verallgemeinerte Totalkomplex“ mit homogenen Anteilen

$$K^n := \bigoplus_{p+q=n} T^{p,q}$$

und Randoperatoren $K^n \to K^{n+1}$ gegeben durch $(-1)^p \partial + \sum_{r \geq 1} u_r^{p,q}$ in der Tat ein Komplex ist. Unsere Theorie sagt außerdem, daß der so entstehende Komplex in der Homotopiekategorie $K \in \langle_! \mathcal{T} \rangle_\Delta^{\mathrm{Hot}}$ von den getroffenen Wahlen unabhängig ist bis auf eindeutigen Isomorphismus und das Bild unseres Ausgangsobjekts beschreibt. Ich will nun nicht bis ins Letzte ausschreiben, wie unter unserer neuen Interpretation des Realisierungsfunktors allgemeine Morphismen abgebildet werden, aber in manchen Fällen ist das auch direkt klar, nämlich etwa dann, wenn wir beide Objekte durch echte Doppelkomplexe repräsentieren können und den fraglichen Morphismus durch einen Morphismus von Doppelkomplexen, dann nämlich ist sein Bild schlicht der induzierte Morphismus auf dem Totalkomplex. In Formeln ist also zumindest die Komposition

$$\mathrm{Ket}^{\mathrm{b}}(\langle_! \mathcal{T} \rangle_\oplus^{\mathrm{Ket}}) \;\to\; \mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\langle_! \mathcal{T} \rangle_\oplus^{\mathrm{Hot}}) \;\to\; \langle_! \mathcal{T} \rangle_\Delta^{\mathrm{Hot}}$$

der Totalkomplexfunktor, wo $\langle_! \mathcal{T} \rangle_\oplus^{\mathrm{Ket}} \subset \mathrm{Ket}_\mathcal{P}$ die von $\mathcal{T}$ in $\mathrm{Ket}_\mathcal{P}$ erzeugte additive Unterkategorie bezeichnet.

Beispiel 20.4.3.10 (**Realisierungsfunktor für perverse Garben**). Hier will ich erklären, wie man den Realisierungsfunktor aus [BBD82] als Anwendung unseres abstrakten Realisierungsfunktors verstehen kann. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und sei auf $\mathrm{Der}_\mathcal{A}^+$ alias $\mathrm{Hot}_{i\mathcal{A}}^+$ eine Abschneidestruktur gegeben. Das Herz der Abschneidestruktur notiere ich $\mathcal{C} \subset \mathrm{Hot}_{i\mathcal{A}}^+$ und unser Realisierungsfunktor 20.4.3.5 spezialisiert zu einem triangulierten Funktor

$$\mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Hot}_{i\mathcal{A}}^+$$

Gegeben ein beschränkter exakter Komplex (T^*, ∂) in einer abelschen Kategorie $\mathcal{C}$ haben wir nun kurze exakte Sequenzen $\mathcal{Z}^p(T) \hookrightarrow T^p \twoheadrightarrow \mathcal{Z}^{p+1}(T)$ und die

Ränder $T^p \to T^{p+1}$ sind die Verknüpfungen

$$T^p \twoheadrightarrow \mathcal{Z}^{p+1}(T) \hookrightarrow T^{p+1}$$

Kurze exakte Sequenzen von perversen Garben sind jedoch dasselbe wie ausgezeichnete Dreiecke ohne den Morphismus vom Grad Eins und sind folglich für in $\mathrm{Hot}^+_{i\mathcal{A}}$ vorgegebenes Anfangs- und Endobjekt isomorph mit der Identität vorne und hinten zu einer kurzen exakten Sequenz in $\mathrm{Ket}^+_{\mathcal{A}}$ bestehend aus Objekten von $\mathcal{C} \subset \mathrm{Hot}^+_{i\mathcal{A}}$. So finden wir von jedem exakten Komplex in $\mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C})$ einen Isomorphismus zu einem weiteren Objekt von $\mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C})$, das durch einen Komplex in $\mathrm{Ket}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Ket}^+_{i\mathcal{A}})$ alias einen echten Doppelkomplex repräsentiert wird, der darüber hinaus exakte Zeilen hat, also ein exakter Komplex von Komplexen ist. Dann ist aber auch sein Totalkomplex exakt und wir finden mit 20.4.3.9, daß unser Funktor über einen triangulierten Funktor

$$\mathrm{Der}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Hot}^+_{i\mathcal{A}}$$

faktorisiert. Dieser Funktor ist offensichtlich auf $\mathcal{C}$ eingeschränkt die Einbettung $\mathcal{C} \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{Hot}^+_{i\mathcal{A}}$. Das ist im Grunde dieselbe Konstruktion wie in [BBD82], ich habe sie nur in einem anderen Dialekt ausformuliert.

Beispiel 20.4.3.11. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genug Projektiven und sei $\mathcal{S} \subset \mathrm{Der}^-_{\mathcal{A}}$ eine Menge von Objekten mit

$$n \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y[n]) = 0 \; \forall X, Y \in \mathcal{S}$$

Wir sagen dann auch, $\mathcal{S}$ sei eine Menge von **paarweise nicht erweiternden** Objekten. Sei $H := \mathrm{R}(\mathcal{S})$ das Ringoid der vollen Unterkategorie $\mathcal{S} \subset \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}$ im Sinne von 20.4.1.2. So liefert die Kippäquivalenz 20.4.3.5 zusammen mit der Wahl einer projektiven Auflösung $\tilde{X} \in \mathrm{Hot}^-_{\mathrm{p}\mathcal{A}}$ für jeder $X \in \mathcal{S}$ eine Kette von Äquivalenzen von triangulierten Kategorien

$$\langle !\mathcal{S}\rangle^{\mathrm{Der}}_{\Delta} \overset{\approx}{\leftarrow} \langle \tilde{X} \mid X \in \mathcal{S}\rangle^{\mathrm{Hot}}_{\Delta} \overset{\approx}{\to} \mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\mathrm{RFrei}_{-H})$$

Beispiel 20.4.3.12. Wir betrachten einen K-Vektorraum V und dessen symmetrische Algebra $S := \mathrm{S}V$ mit ihrer offensichtlichen $\mathbb{Z}$-Graduierung sowie die abelsche Kategorie $\mathcal{A} := \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_S$ der $\mathbb{Z}$-graduierten S-Moduln und deren derivierte Kategorie $\mathrm{Der}(\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_S)$. Darin bilden die Ein-Objekt-Komplexe $K(i)[i]$, die sowohl in der homologischen Graduierung als auch in der internen Graduierung im Grad i konzentriert sind, eine Menge von paarweise nichterweiternden Objekten. Man erkennt das zum Beispiel am Beweis der Formel 20.2.6.30 für die Erweiterungen, die auch zeigt, wie man Erweiterungen in $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_S$ bestimmen kann. Wir erhalten so Isomorphismen $\mathrm{Alt}^{j-i}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}(\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_S)(K(i)[i], K(j)[j]) = 1_j H 1_i$

für unser Erweiterungsringoid H aus 20.4.3.11 mit der neuen Notation $1_j = i_X$ für den Idempotenten in H zum Objekt $K(j)[j] = X$. In diesem Fall erhält man zusätzlich einen Isomorphismus

$$\mathrm{RMod}_{-H} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{Alt}(V)}$$

dadurch, daß man jedem Ringoidmodul M den graduierten Modul mit $M1_i$ als homogenen Anteil im Grad i zuordnet, und folgert insbesondere eine Äquivalenz von RFrei_{-H} mit der Kategorie der graduiert freien endlich erzeugten graduierten $\mathrm{Alt}(V)$-Moduln.

Beispiel 20.4.3.13 (**Die Mutter aller Koszul-Dualitäten**). Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Der Koszulkomplex aus 19.3.2.32 ist ein bigraduierter K-Vektorraum mit homogenen Anteilen $\mathrm{S}^i V \otimes \bigwedge^j V$ und einem Differential d vom Bigrad $(1, -1)$, das die (i, j)-Komponente in die $(i + 1, j - 1)$-Komponente schiebt. Darüberhinaus kommutiert unser Differential mit der Linksoperation von $\mathrm{S}V$ und der Rechtsoperation von $\mathrm{Alt}(V)$ durch das cap-Produkt von rechts, wie wir bereits in 20.2.6.30 diskutiert hatten. Bisher hatten wir j als den „homologischen Grad“ betrachtet und diese Struktur als eine Linksauflösung des im internen Grad Null graduierten $\mathrm{S}V$-Moduls K durch den Komplex der graduiert freien $\mathrm{S}V$-Moduln $\mathrm{S}^i V \otimes \bigwedge^j V$ aufgefaßt, wo eigentlich der homologische Index j nach unten gehörte, da das Differential ihn erniedrigt. Wir können aber auch i als den „homologischen Grad“ betrachten und erhalten dann eine Rechtsauflösung des graduierten $\mathrm{Alt}(V)$-Rechtsmoduls K konzentriert im internen Grad Null durch den Komplex der graduiert freien $\mathrm{Alt}(V)$-Rechtsmoduln $\mathrm{S}^i V \otimes \bigwedge V$. Unter der Annahme $\dim V < \infty$ sind diese Rechtsmoduln injektiv und unsere Auflösung liefert einen Isomorphismus

$$\mathrm{S}V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^*_{-\,\mathrm{Alt}(V)}(K, K)$$

und für die Kategorie $\mathcal{B} := \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{-\,\mathrm{Alt}\,V}$ der $\mathbb{Z}$-graduierten $(\mathrm{Alt}\,V)$-Rechtsmoduln folgern wir wieder, daß die Ein-Objekt-Komplexe $K(i)[i] \in \mathrm{Der}_{\mathcal{B}}$, die sowohl in der homologischen Graduierung wie in der internen Graduierung im Grad i konzentriert sind, eine Menge von paarweise nichterweiternden Objekten bilden. In diesem Fall erhält man analog wie zuvor einen Isomorphismus

$$\mathrm{RMod}_{-H} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{-\mathrm{S}V}$$

und folgert insbesondere eine Äquivalenz von RFrei_{-H} mit der Kategorie der graduiert freien endlich erzeugten graduierten $\mathrm{S}V$-Rechtsmoduln und so eine triangulierte Äquivalenz $\mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}(\mathrm{RFrei}_{-H}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Modf}^{\mathbb{Z}}_{-\mathrm{S}V})$. Andererseits ist das triangulierte Erzeugnis unserer Menge von paarweise nichterweiternden Objekten

gerade $\mathrm{Der}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Modf}^{\mathbb{Z}}_{-\mathrm{Alt}V})$. Zusammenfassend spezialisiert 20.4.3.11 in unserem Fall also zu einer Äquivalenz von triangulierten Kategorien

$$\mathrm{Der}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Modf}^{\mathbb{Z}}_{-\mathrm{Alt}V}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Modf}^{\mathbb{Z}}_{-\mathrm{S}V})$$

20.5 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich vielen, insbesondere Olaf Schnürer, Bernhard Link und Xinrui You. Der Inhalt geht im wesentlichen zurück auf Grothendieck, Deligne und Verdier [Gro72]. Sehr nützlich waren mir die Darstellungen von Godement [God64] und Kashiwara-Schapira [KS90] und Skripten von Milicic und Hörmann zu derivierten Kategorien. Die Argumente zu unbeschränkten Auflösungen kommen aus [Spa88, Bek00]. Bei der Diskussion der Funktorialität von Spektralsequenzen war mir Cartan-Eilenberg [CE56] sehr hilfreich. Diesen Aspekt, der eigentlich erst erklärt, warum man meist mit dem E_2-Term beginnt, habe ich in der jüngeren Literatur vermißt.

Kapitel 21

Grothendieck's sechs Funktoren

Inhalt

21.1 Trennrückzug 3492

21.1.1 Garben als Schmelzkategorie 3492

21.1.2 Trennfaserungen 3496

21.1.3 Multilineare Algebra für Modulgarben 3500

21.1.4 Trennfaserungen bei eindeutigen Leertrennungen . 3504

21.1.5 Formelsammlung für Trennfaserungen 3506

21.1.6 Trennschmelzfakofaserungen 3514

21.2 Derivierter Trennrückzug 3518

21.2.1 Motivation 3518

21.2.2 Lokalisierung von Kofaserungen 3518

21.2.3 Quisrechtsentfaltung von Garbenkomplexen 3521

21.2.4 Derivierte Garbenopfaserung 3527

21.2.5 Lokalisierung durch Anpassung 3531

21.2.6 Lokalisierung von Schmelzkategorien 3539

21.2.7 Homotopie für bequeme Schmelzkategorien 3540

21.2.8 Derivieren abelscher Schmelzkategorien 3543

21.2.9 Derivierte Garbenoptrennfaserung 3550

21.3 Verschwindungssätze mit Anwendungen 3553

21.3.1 Garbenazyklische Morphismen 3553

21.3.2 Künnethformeln der Garbenkohomologie 3555

21.3.3 Gysinsequenz für Sphärenbündel 3562

21.3.4 Charakteristische Klassen und Produkte 3568
21.4 Trennrückzug und Schreivorschub 3573
21.4.1 Lokal eigentlicher Basiswechsel 3573
21.4.2 Kompakte Schnitte und Kolimites 3577
21.4.3 Underivierte Projektionsformel 3580
21.4.4 Trennrückzug von Schreimorphismen 3583
21.4.5 Rückzug-Schreivorschub-Formalismus 3588
21.4.6 Trennrückzug-Schreivorschub-Formalismus 3594
21.4.7 Formelsammlung für verflochtenen Trennaustausch 3597
21.5 Derivierter Trennrückzug und Schreivorschub 3603
21.5.1 Motivation 3603
21.5.2 Derivierter Schreivorschub 3603
21.5.3 Ausgezeichnete Dreiecke zu offenen Teilmengen . . 3611
21.5.4 Lokalisierung präverflochtener Winkelfaserungen . 3616
21.5.5 Rückzug-Schreivorschub derivierter Modulgarben . 3625
21.5.6 Trennrückzug-Schreivorschub derivierter Modulgarben 3633
21.5.7 Schreirückzug für derivierte Modulgarben 3638
21.6 Anwendungen und Vergleichssätze 3650
21.6.1 Anwendung auf Mannigfaltigkeiten 3650
21.6.2 Mannigfaltiger Eigrückzug 3654
21.6.3 Homologien und ihre Funktorialitäten 3657
21.6.4 Schnittpaarung und Poincarédualität 3666
21.6.5 Schnittpaarung und Poincarédualität, ERWEITERT3681
21.6.6 Wohin damit? 3682
21.6.7 Vergleich mit der singulären Theorie 3687
21.7 Äquivariante derivierte Kategorie 3700
21.7.1 Ergänzungen zu äquivarianten Garben 3700
21.7.2 Äquivariante Objekte (VERLEGEN!) 3700
21.7.3 Äquivariante derivierte Kategorie 3711
21.7.4 Äquivariante Varianten der Adjungierten 3719
21.7.5 Äquivalenzen mit Gruppenwechsel 3722
21.7.6 Vernachlässigen zusammenziehbarer Anteile 3724

21.7.7 Danksagung 3725
21.8 Schrotthalde 3726
21.9 Wohin? Hier unnötig. 3727
21.9.1 Relativ angereicherte Schmelz- und Trennkategorien 3727
21.9.2 Homotopie für unbequeme Schmelzkategorien* . . 3731
21.9.3 Versuch 3733
21.9.4 Abstract in English 3737
21.9.5 Trennrückzug-Schreivorschub für Modulgarben, ALT 3741
21.9.6 Das muß hinter die Diskussion des Formalismus! . 3746
21.9.7 Trennrückzug eigentlicher Opkomorphismen, ALT 3748
21.9.8 Weiterer underivierter Schrott 3752
21.9.9 Schrott zu derivierten Schmelzkategorien 3752
21.9.10 Reste Schnittpaarung 3761
21.10 Danksagung 3767

21.1 Trennrückzug

21.1.1 Garben als Schmelzkategorie

21.1.1.1. Ich erinnere an Schmelzkategorien 18.1.1.4, universelle Verschmelzungen 18.1.3.1, stabil universelle Verschmelzungen 18.1.3.2 und Multihom 18.1.4.3.

21.1.1.2 (**Kartesische Schmelzkategorie der Mengenprägarben**). Gegeben ein topologischer Raum X erinnern wir die Kategorie $\mathrm{pEns}_{/X}$ der Mengenprägarben auf X. Diese Kategorie hat endliche Produkte und die zugehörige banale Trennkategorie $\curlywedge\mathrm{pEns}_{/X}$ kann damit nach 18.1.5.10 als Trennschmelzkategorie aufgefaßt werden, die wir auch abkürzend $\mathrm{pEns}_{/X} = \curlywedge\mathrm{pEns}_{/X}$ notieren. Die Schmelzkategorie ist dabei die kartesische Schmelzkategorie der Mengenprägarben. Explizit können wir für $r \geq 0$ eine Verschmelzung

$$\phi \in \curlywedge\mathrm{pEns}_{/X}(\mathcal{F}_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{F}_r, \mathcal{G})$$

beschreiben als eine Vorschrift ϕ, die jeder offenen Teilmenge $U \circledcirc X$ eine Abbildung $\phi_U : \mathcal{F}_1(U) \times \ldots \times \mathcal{F}_r(U) \to \mathcal{G}(U)$ so zuordnet, daß für jede weitere offene Teilmenge $V \circledcirc U$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1(U) \times \ldots \times \mathcal{F}_r(U) & \to & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_1(V) \times \ldots \times \mathcal{F}_r(V) & \to & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

mit den Restriktionen in den Vertikalen und ϕ_U und ϕ_V in den Horizontalen kommutiert. Die Multiverknüpfungen zwischen diesen Verschmelzungen sind die offensichtlichen. Die Vorschrift $\phi \mapsto \phi_X(*)$ liefert eine Bijektion

$$\beta_{\mathcal{G}} : \curlywedge\mathrm{pEns}_{/X}(\curlyvee, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \Gamma\mathcal{G}$$

zwischen der Menge der Leerverschmelzungen nach $\mathcal{G}$ und der Menge der globalen Schnitte von $\mathcal{G}$. In ihrer Gesamtheit bilden diese Bijektionen eine Isotransformation $\beta : \mathrm{L} \overset{\sim}{\Rightarrow} \Gamma$ zwischen dem Leerverschmelzungsfunktor unserer Schmelzkategorie und dem Funktor der globalen Schnitte. Ein Multihom

$$(\mathcal{F}_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{F}_r) \Rrightarrow_{\curlywedge\mathrm{pEns}_{/X}} \mathcal{G}$$

in der Schmelzkategorie $\curlywedge\mathrm{pEns}_{/X}$ erhält man, indem man $U \circledcirc X$ die Menge $\curlywedge\mathrm{pEns}_{/U}(\mathcal{F}_1|_U \times \ldots \times \mathcal{F}_r|_U, \mathcal{G}|_U)$ aller entsprechenden Verschmelzungen der auf U eingeschränkten Prägarben zuordnet. All diese Behauptungen sind leicht einzusehen.

21.1.1.3 (**Kartesische Schmelzkategorie der Mengengarben**). Gegeben ein topologischer Raum X besitzt auch die Kategorie $\mathrm{Ens}_{/X}$ der Mengengarben auf X Produkte und der Einbettungsfunktor $\mathrm{Ens}_{/X} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathrm{pEns}_{/X}$ der Garben in die Prägarben ist verträglich mit Produkten. Er induziert folglich eine volltreue Einbettung von Trennschmelzkategorien

$$\curlywedge\mathrm{Ens}_{/X} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \curlywedge\mathrm{pEns}_{/X}$$

Insbesondere schränkt unser β aus 21.1.1.2 ein zu einer Isotransformation $\beta : \mathrm{L} \overset{\sim}{\Rightarrow} \Gamma$ vom Leerverschmelzungsfunktor von $\curlywedge\mathrm{Ens}_{/X}$ zum Funktor der globalen Schnitte. Wir kürzen im folgenden oft $\curlywedge\mathrm{Ens}_{/X}$ zu $\mathrm{Ens}_{/X}$ ab. Auch $\curlywedge\mathrm{Ens}_{/X}$ besitzt Multihom und der Einbettungsfunktor der Mengengarben in die Mengenprägarben ist verträglich mit Multihom, wie Sie bereits in 19.2.2.47 prüfen sollten. Darüber hinaus ist offensichtlich jedes Multihom von Prägarben in eine Garbe bereits selbst eine Garbe. Im Fall einer Garbe $\mathcal{G}$ liefert speziell das Vorschalten des universellen Morphismus zur Garbifizierung $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1^+$ eine Bijektion

$$\curlywedge\mathrm{pEns}_{/X}(\mathcal{F}_1^+ \curlyvee \mathcal{F}_2 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{F}_r, \mathcal{G}) \overset{\sim}{\to} \curlywedge\mathrm{pEns}_{/X}(\mathcal{F}_1 \curlyvee \mathcal{F}_2 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{F}_r, \mathcal{G})$$

21.1.1.4 (**Schmelzkategorie der abelschen Prägarben**). Im allgemeinen Rahmen unserer terminologischen Versuche 18.3.5.5 können wir die Schmelzkategorie der abelschen Prägarben auf einem Raum X einführen als die Schmelzkategorie

$$\mathrm{pAb}_{/X} := \mathrm{kok}(\curlywedge\mathrm{pEns}_{/X})$$

der kommutativen und kokommutativen Hopfobjekte der Trennschmelzkategorie $\curlywedge\mathrm{pEns}_{/X}$. Nach 18.3.5.6 trägt $\mathrm{pAb}_{/X}$ als kok-Konstruktion eine ausgezeichnete additive Struktur und wird angeliefert mit einem auf Leerverschmelzungen volltreuen Schmelzfunktor $\mathrm{pAb}_{/X} \to \curlywedge\mathrm{pEns}_{/X}$. Weil das so schnell ging und wir die kok-Konstruktion auch nicht so ausführlich besprochen hatten, schreibe ich es nun noch explizit aus.

21.1.1.5 (**Schmelzkategorie der abelschen Prägarben, Variante**). Gegeben ein topologischer Raum X machen wir die Kategorie $\mathrm{pAb}_{/X}$ der abelschen Prägarben auf X zu einer Schmelzkategorie, indem wir für $r \geq 0$ eine Verschmelzung

$$\phi \in \mathrm{pAb}_{/X}(\mathcal{F}_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{F}_r, \mathcal{G})$$

erklären als eine Vorschrift ϕ, die jeder offenen Teilmenge $U \Subset X$ eine multiadditive Abbildung $\phi_U : \mathcal{F}_1(U) \times \ldots \times \mathcal{F}_r(U) \to \mathcal{G}(U)$ so zuordnet, daß für $V \Subset U$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1(U) \times \ldots \times \mathcal{F}_r(U) & \to & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_1(V) \times \ldots \times \mathcal{F}_r(V) & \to & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

mit den Restriktionen in den Vertikalen und ϕ in den Horizontalen kommutiert. Insbesondere schränkt unser β aus 21.1.1.2 ein zu einer Isotransformation $\beta : \mathrm{L} \overset{\sim}{\Rightarrow} \Gamma$ vom Leerverschmelzungsfunktor von $\mathrm{pAb}_{/X}$ zum Funktor der globalen Schnitte. Die Multiverknüpfungen sind die offensichtlichen und das Vergessen der Addition liefert einen treuen und auf Leerverschmelzungen volltreuen Schmelzfunktor $\mathrm{pAb}_{/X} \to \curlywedge\mathrm{pEns}_{/X}$ in die kartesische Schmelzkategorie der Mengenprägarben. Die Schmelzkategorie $\mathrm{pAb}_{/X}$ der abelschen Prägarben auf einem topologischen Raum X können wir mit einer additiven Struktur versehen, indem wir die Summe von zwei Verschmelzungen $\phi+\psi$ erklären durch $(\phi+\psi)_U := \phi_U+\psi_U$.

Proposition 21.1.1.6. *Die Schmelzkategorie* $\mathrm{pAb}_{/X}$ *der abelschen Prägarben auf einem topologischen Raum* X *hat universelle Verschmelzungen und Multihom.*

Beweis. Eine offensichtliche universelle Verschmelzung von abelschen Prägarben $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_r$ erhalten wir in die Tensorproduktprägarbe $U \mapsto \mathcal{F}_1(U) \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_r(U)$. Wir notieren sie

$$\mathcal{F}_1 \otimes^{\mathrm{p}} \ldots \otimes^{\mathrm{p}} \mathcal{F}_r$$

Eine universelle Leerverschmelzung entspricht, da salopp gesprochen das leere Tensorprodukt abelscher Gruppen in unseren Konventionen eben $\mathbb{Z}$ mit dem ausgezeichneten Element $1 \in \mathbb{Z}$ ist, unter $\beta : \mathrm{L} \overset{\sim}{\Rightarrow} \Gamma$ dem globalen Schnitt $1 = 1_X$ der konstanten Prägarbe auf X mit Schnitten $\mathbb{Z}$. Ein Multihom

$$(\mathcal{F}_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{F}_r) \Rrightarrow \mathcal{G}$$

erhalten wir als diejenige abelsche Prägarbe, die jedem $U \Subset X$ die abelsche Gruppe $\mathrm{pAb}_{/U}(\mathcal{F}_1|_U \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{F}_r|_U, \mathcal{G}|_U)$ aller entsprechenden Verschmelzungen der auf U eingeschränkten Prägarben zuordnet. $\square$

21.1.1.7. Gegeben ein topologischer Raum X erklären wir die **Schmelzkategorie der abelschen Garben** als die volle Unterschmelzkategorie $\mathrm{Ab}_{/X} \subset \mathrm{pAb}_{/X}$ mit nur abelschen Garben als Objekten und versehen sie mit der induzierten additiven Struktur. Insbesondere schränkt unser β aus 21.1.1.5 ein zu einer Isotransformation $\beta : \mathrm{L} \overset{\sim}{\Rightarrow} \Gamma$ vom Leerverschmelzungsfunktor von $\mathrm{Ab}_{/X}$ zum Funktor der globalen Schnitte. In $\mathrm{Ab}_{/X}$ gibt es Multihom und der Einbettungsfunktor $\mathrm{Ab}_{/X} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathrm{pAb}_{/X}$ ist verträglich mit Multihom. In $\mathrm{Ab}_{/X}$ gibt es auch universelle Verschmelzungen, aber der Einbettungsfunktor $\mathrm{Ab}_{/X} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathrm{pAb}_{/X}$ ist nicht mit ihnen verträglich. Genauer ist das Prägarbentensorpodukt von abelschen Garben im allgemeinen keine Garbe und man erhält universelle Verschmelzungen von abelschen Garben durch Garbifizierung des Prägarbentensorprodukts. Diese Garbifizierung heißt die **Tensorproduktgarbe**. Wir notieren sie

$$\mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_r := (\mathcal{F}_1 \otimes^{\mathrm{p}} \ldots \otimes^{\mathrm{p}} \mathcal{F}_r)^+$$

Speziell entspricht der konstante Schnitt $1 = 1_X$ der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ unter β einer universellen Leerverschmelzung in $\mathrm{Ab}_{/X}$. Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{G}$ und abelsche Prägarben $\mathcal{F}_i$ liefert das Vorschalten von $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1^+$, wie leicht aus der entsprechenden Aussage 21.1.1.3 für Mengenprägarben folgt, eine Bijektion

$$\mathrm{pAb}_{/X}(\mathcal{F}_1^+ \curlyvee \mathcal{F}_2 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{F}_r, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{pAb}_{/X}(\mathcal{F}_1 \curlyvee \mathcal{F}_2 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{F}_r, \mathcal{G})$$

21.1.1.8. Im Fall $r = 1$ heißt unser Multihom die **Hom-Garbe**. Man findet dafür in der Literatur statt $\mathcal{F} \Rrightarrow \mathcal{G}$ meist die Notationen $\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ oder $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

21.1.1.9 (**Halme von Tensorproduktgarben**). Gegeben abelsche Garben $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum X liefert die Verträglichkeit des Tensorprodukts abelscher Gruppen mit Kolimites für jeden Punkt $x \in X$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{G}_x \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})_x$$

zwischen dem Tensorprodukt der Halme und den Halmen des Tensorprodukts. Dasselbe gilt für das Prägarbentensorprodukt von abelschen Prägarben.

Übungen

Übung 21.1.1.10 (**Notwendigkeit der Garbifizierung beim Tensorprodukt**). Wir betrachten auf dem Kreisring S^1 die nichtkonstante aber lokal konstante Garbe $\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen vom Rang Eins. Ihr Tensorprodukt $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ mit sich selbst ist isomorph zur konstanten Garbe mit Faser $\mathbb{Z}$ und hat von Null verschiedene globale Schnitte, obwohl die Faktoren $\mathcal{F}$ selbst keine von Null verschiedenen globalen Schnitte haben.

Übung 21.1.1.11. Sind $\mathcal{F}, \mathcal{I} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ abelsche Garben auf einem topologischen Raum und ist $\mathcal{I}$ injektiv, so ist die Homgarbe $\mathcal{F} \Rrightarrow \mathcal{I}$ welk.

Übung 21.1.1.12. Eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ heißt **flach**, wenn das Tensorieren mit unserer Garbe ein exakter Funktor ist. Man zeige, daß eine abelsche Garbe genau dann flach ist, wenn sie flache Halme hat. Man zeige, daß jede abelsche Garbe ein Quotient einer flachen Garbe ist. Hinweis: Man verwende Summen von Garben der Gestalt $\mathbb{Z}_{U \subset X}$ für $U \Subset X$. Man zeige, daß jede Untergarbe einer flachen abelschen Garbe wieder flach ist.

Übung 21.1.1.13. Die Wolkenkratzergarbe mit Halm $\mathbb{Z}$ am Ursprung der reellen Zahlengerade ist nicht starr in der Schmelzkategorie $\mathrm{Ab}_{/\mathbb{R}}$ der abelschen Garben auf der reellen Zahlengeraden.

Übung 21.1.1.14. Eine abelsche Garbe $\mathcal{L}$ auf einem Raum X heißt **lokal frei vom Rang Eins**, wenn unser Raum eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ besitzt derart, daß für alle $U \in \mathcal{U}$ die abelsche Garbe $\mathcal{L}|U$ isomorph ist zu $\mathbb{Z}_U$. Man zeige, daß es für jede abelsche Garbe $\mathcal{L}$ auf einem Raum X, die lokal frei ist vom Rang Eins, genau einen Isomorphismus $q = q_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$ gibt mit $q(s \otimes s) = 1$ für jeden Erzeuger s von $\mathcal{L}|U$ für $U \Subset X$. Wir nennen ihn die **Quadrattrivialisierung**.

21.1.2 Trennfaserungen

Definition 21.1.2.1. Ein Trennfunktor $p : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ heißt eine **Trennfaserung**, wenn der auf den Familienkategorien induzierte Funktor $\mathscr{M}^{\curlywedge} \to \mathscr{N}^{\curlywedge}$ eine Faserung ist und bei diesem Funktor das Vertupeln aus kartesischen Morphismen kartesische Morphismen macht.

Definition 21.1.2.2. Gegeben ein Trennfunktor $p : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ heißt eine Trennung in der Ausgangstrennkategorie **p-kartesisch**, **stark p-kartesisch**, **p-kokartesisch** beziehungsweise **stark p-kokartesisch**, wenn der zugehörige Morphismus in der Familienkategorie für den induzierten Funktor $\mathscr{M}^{\curlywedge} \to \mathscr{N}^{\curlywedge}$ die entsprechende Eigenschaft hat. Die zu einem Trennfunktor gehörigen Rückzugsfunktoren auf der Familienkategorie bezeichnen wir auch als **Trennrückzug**.

21.1.2.3. Analoge Sprechweisen vereinbaren wir für Schmelzfunktoren und erhalten so insbesondere die Begriffe einer **Schmelzkofaserung** und des zugehörigen **Schmelzvorschubs**.

Beispiel 21.1.2.4 (**Trennfaserungen zur terminalen Trennkategorie**). Es gibt nach 18.1.6.17 eine terminale Trennkategorie, bestehend aus einem einzigen Objekt mit einelementigen Mengen von Trennungen. Unsere universellen Trennungen aus 18.1.3.16 sind genau die Trennungen, die in Bezug auf den einzigen Trennfunktor in die terminale Trennkategorie stark kartesische Morphismen der Familienkategorie liefern. Unsere stabil universellen Trennungen aus 18.1.3.16 sind genau die Trennungen, die auch beim Vertupeln mit endlich vielen Identitätstrennungen in Bezug auf den einzigen Trennfunktor in die terminale Trennkategorie stark kartesische Morphismen der Familienkategorie liefern. Eine Trennkategorie hat stabil universelle Trennungen 18.1.3.16 genau dann, wenn der einzige von ihr ausgehende Trennfunktor in die terminale Trennkategorie im Sinne der vorhergehenden Definition eine Trennfaserung ist. Opponiertes gilt für Schmelzkofaserungen über der terminalen Schmelzkategorie.

21.1.2.5 (**Stark kartesische Lifts stabil universeller Trennungen**). Bei einer Verknüpfung qp von Funktoren ist nach 19.6.2.20 ein Morphismus über einem stark q-kartesischen Morphismus stark p-kartesisch genau dann, wenn er stark qp-kartesisch ist. Insbesondere ist die Verknüpfung von Faserungen wieder eine Faserung und damit auch die Verknüpfung von Trennfaserungen wieder eine Trennfaserung. Nach 21.1.2.4 ist weiter bei einem Trennfunktor ein Lift einer universellen Trennung genau dann universell, wenn er stark kartesisch ist. Ebenso ist bei einem Trennfunktor ein Lift einer stabil universellen Trennung genau dann stabil universell, wenn er stark kartesisch ist. Opponiertes gilt für Schmelzkofaserungen.

Beispiel 21.1.2.6. Wir erinnern die Mengengarbenfaserung $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ aus 19.6.2.7. Sie induziert wie jeder Funktor einen Trennfunktor $\curlywedge\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top}$

zwischen den zugehörigen banalen Trennkategorien. Im Fall der Mengengarbenfaserung ist dieser Funktor sogar eine Trennfaserung, die **Mengengarbentrennfaserung**. Genauer geht die kartesische Trennung über $(f_1, \ldots, f_r) : X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ nach $(Y_1, \mathcal{G}_1) \curlywedge \ldots \curlywedge (Y_r, \mathcal{G}_r)$ in dieser Trennfaserung vom Produkt der auf X zurückgezogenen Mengengarben $f_i^* \mathcal{G}_i$ aus.

Beispiel 21.1.2.7. Wir erweitern die Mengengarbenopfaserung $\mathrm{Ens}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ aus 19.6.2.12 zu einem Trennfunktor in die banale Trennkategorie $\curlywedge\mathrm{Top}$, indem wir einen **Multiopkomorphismus** $(X, \mathcal{F}) \to (Y_1, \mathcal{G}_1) \curlywedge \ldots \curlywedge (Y_r, \mathcal{G}_r)$ über einer Trennung $(f_1, \ldots, f_r) : X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ erklären als eine Vorschrift ϕ, die jeder Familie von offenen Teilmengen $V_i \Subset Y_i$ und jeder offenen Teilmenge $U \Subset X$ mit $f_i(U) \subset V_i \ \forall i$ eine Abbildung

$$\mathcal{G}_1(V_1) \times \ldots \times \mathcal{G}_n(V_n) \to \mathcal{F}(U)$$

so zuordnet, daß für alle $V_i' \Subset V_i \Subset Y_i$ und $U' \Subset U$ mit $f_i(U') \subset V_i' \ \forall i$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1(V_1) \times \ldots \times \mathcal{G}_n(V_n) & \to & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_1(V_1') \times \ldots \times \mathcal{G}_n(V_n') & \to & \mathcal{F}(U') \end{array}$$

mit den Restriktionen in den Vertikalen und ϕ in den Horizontalen kommutiert. Auch dieser Trennfunktor ist eine Trennfaserung. Wir nennen ihn die **Mengengarbenoptrennfaserung**. Die Faser $\mathrm{Ens}_{/\!/X}$ mit den Trennungen über den Identitätstupeln $(\mathrm{id}, \ldots, \mathrm{id})$ als Trennungen ist opponiert zur kartesischen Schmelzkategorie $\mathrm{Ens}_{/X}$ der Mengengarben aus 21.1.1.3. Wir erhalten insbesondere für jede Garbe $\mathcal{G}$ eine Bijektion

$$\beta = \beta_{\mathcal{G}} : \mathrm{Ens}_{/\!/\mathrm{Top}}(\mathcal{G}, \curlywedge) \xrightarrow{\sim} \Gamma\mathcal{G}$$

zwischen der Menge der von $\mathcal{G}$ ausgehenden Leertrennungen und der Menge $\Gamma\mathcal{G}$ der globalen Schnitte von $\mathcal{G}$ und diese Bijektionen bilden in ihrer Gesamtheit eine Isotransformation $\beta : \mathrm{L} \overset{\sim}{\Rightarrow} \Gamma$ von Trennfunktoren nach $\mathrm{kEns}^{\mathrm{opp}}$.

Vorschau 21.1.2.8. Man konstruiert unschwer eine eineindeutige Entsprechung zwischen kartesischen Trennungen der Mengengarbentrennfaserung und kartesischen Trennungen der Mengengarbenoptrennfaserung. Wir diskutieren in 21.1.6.7, inwiefern diese beiden Trennfaserungen durch „Oppinvertieren“ auseinander hervorgehen. Im folgenden wird es hauptsächlich um die Mengengarbenoptrennfaserung und insbesondere ihr Analogon für abelsche Garben gehen, das wir nun einführen.

Beispiel 21.1.2.9. Wir erweitern die Garbenopfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ der abelschen Garben aus 19.6.2.17 zu einem Trennfunktor in die banale Trennkategorie $\curlywedge\mathrm{Top}$, indem wir einen **Multiopkomorphismus** $(X, \mathcal{F}) \to (Y_1, \mathcal{G}_1) \curlywedge \ldots \curlywedge$

$(Y_r, \mathcal{G}_r)$ über einer Trennung $(f_1, \ldots, f_r) : X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ erklären als eine Vorschrift ϕ, die jeder Familie von offenen Teilmengen $V_i \Subset Y_i$ und jeder offenen Teilmenge $U \Subset X$ mit $f_i(U) \subset V_i \ \forall i$ eine multiadditive Abbildung

$$\mathcal{G}_1(V_1) \times \ldots \times \mathcal{G}_n(V_n) \to \mathcal{F}(U)$$

so zuordnet, daß für alle $V_i' \Subset V_i \Subset Y_i$ und $U' \Subset U$ mit $f_i(U') \subset V_i' \ \forall i$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1(V_1) \times \ldots \times \mathcal{G}_n(V_n) & \to & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_1(V_1') \times \ldots \times \mathcal{G}_n(V_n') & \to & \mathcal{F}(U') \end{array}$$

mit den Restriktionen in den Vertikalen und ϕ in den Horizontalen kommutiert. Der offensichtliche „vergeßliche" Trennfunktor $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Ens}_{/\!/\mathrm{Top}}$ ist volltreu auf Leertrennungen und mit 21.1.2.7 erhalten wir Bijektionen

$$\beta = \beta_{\mathcal{G}} : \mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}}(\mathcal{G}, \curlywedge) \xrightarrow{\sim} \Gamma\mathcal{G}$$

Die Faser $\mathrm{Ab}_{/\!/X}$ mit den Trennungen über den Identitätstupeln $(\mathrm{id}, \ldots, \mathrm{id})$ als Trennungen ist dabei opponiert zur Schmelzkategorie $\mathrm{Ab}_{/X}$ der abelschen Garben aus 21.1.1.7.

Satz 21.1.2.10 (Optrennfaserung der abelschen Garben). *Der Trennfunktor des Vergessens der Garbe $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top}$ ist eine Trennfaserung. Ein kartesischer Lift der Leertrennung $X \to \curlywedge$ für $X \in \mathrm{Top}$ ist die Leertrennung $\mathbb{Z}_X \to \curlywedge$, die unter unserer Bijektion β aus 21.1.2.9 auf den globalen Schnitt $1_X \in \Gamma\mathbb{Z}_X$ geht.*

Beweis. Für stetige Abbildungen $f_i : X \to Y_i$ und $\mathcal{G}_i \in \mathrm{Ab}_{/\!/Y_i}$ ist per definitionem die Trennung über $(f_1, \ldots, f_n)$ aus derjenigen Garbe $\mathcal{F}$ kartesisch, die durch Garbifizierung aus der Prägarbe

$$U \mapsto \mathrm{colf}_{f_i(U) \subset V_i \Subset X_i} \mathcal{G}_1(V_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{G}_r(V_r)$$

für $U \Subset X$ entsteht. Da das Tensorprodukt mit Kolimites vertauscht und der offensichtliche Morphismus von der Garbifizierung eines Prägarbentensorprodukts von Prägarben zum Garbentensorprodukt der Garbifizierungen unserer Prägarben stets ein Isomorphismus ist, erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f_1^*\mathcal{G}_1 \otimes \ldots \otimes f_n^*\mathcal{G}_n$$

Jetzt gilt es noch zu zeigen, daß die Verknüpfung kartesischer Trennungen kartesisch ist, daß also für $g_{ij} : Y_i \to Z_{ij}$ und $\mathcal{H}_{ij} \in \mathrm{Ab}_{/\!/Z_{ij}}$ für $1 \le j \le n_i$ die von der kartesischen Eigenschaft herrührenden Morphismen Isomorphismen

$$\bigotimes_{i,j} (f_i g_{ij})^* \mathcal{H}_{ij} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i=1}^{n} f_i^* \left(\bigotimes_{i=1}^{n_i} g_{ij}^* \mathcal{H}_{ij} \right)$$

sind. Das prüft man leicht auf den Halmen. Genauer folgt es aus der Erkenntnis, daß der Halm eines Tensorprodukts nach 21.1.1.9 das Tensorprodukt der Halme ist und der Halm der zurückgeholten Garbe an einem Punkt der Halm der ursprünglichen Garbe an seinem Bildpunkt. □

Übungen

Übung 21.1.2.11 (**Modulschmelzkofaserung**). Bezeichne $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Kring}}$ die Schmelzkategorie, deren Objekte Paare (A, M) aus einem Kring A und einem A-Modul M sind. Verschmelzungen $(A_1, M_1) \curlyvee \ldots \curlyvee (A_r, M_r) \to (B, N)$ erklären wir als Tupel $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi)$ bestehend aus Ringhomomorphismen $\varphi_i : A_i \to B$ und einer multiadditiven Abbildung $\psi : M_1 \times \ldots \times M_r \to N$ derart, daß gilt

$$\psi(m_1, \ldots, a_i m_i, \ldots, m_r) = \varphi_i(a_i)\psi(m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_r)$$

für alle $i, a_i \in A_i$ und $m_j \in M_j$. Man zeige, daß der Schmelzfunktor des Vergessens des Moduls in die banale Schmelzkategorie der Kringe $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Kring}} \to \curlyvee\mathrm{Kring}$ eine Schmelzkofaserung ist. Man beschreibe kokartesische Verschmelzungen.

Übung 21.1.2.12 (**Modulschmelzkofaserung, nichtkommutative Variante**). Bezeichne kkRing die Schmelzkategorie mit beliebigen Ringen als Objekten und als Verschmelzungen $R_1 \curlyvee \ldots \curlyvee R_n \to R$ allen Tupeln von Ringhomomorphismen $\varphi_i : R_i \to R$ mit $\varphi_i(a)\varphi_j(b) = \varphi_j(b)\varphi_i(a)$ für alle $i \neq j$ und $a \in R_i$, $b \in R_j$. Man zeige, daß das Tensorprodukt von Ringen über $\mathbb{Z}$ in dieser Schmelzkategorie universelle Verschmelzungen liefert. Bezeichne $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{kkRing}}$ die Schmelzkategorie, deren Objekte Paare (A, M) aus einem Ring A und einem A-Modul M sind. Verschmelzungen $(A_1, M_1) \curlyvee \ldots \curlyvee (A_r, M_r) \to (B, N)$ erklären wir als Tupel $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi)$ bestehend aus Ringhomomorphismen $\varphi_i : A_i \to B$, die zusammen eine Verschmelzung in kkRing bilden, und einer multiadditiven Abbildung $\psi : M_1 \times \ldots \times M_r \to N$ derart, daß gilt

$$\psi(m_1, \ldots, a_i m_i, \ldots, m_r) = \varphi_i(a_i)\psi(m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_r)$$

für alle $i, a_i \in A_i$ und $m_j \in M_j$. Man zeige, daß der Schmelzfunktor des Vergessens des Moduls $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{kkRing}} \to \mathrm{kkRing}$ eine Schmelzkofaserung ist. Man beschreibe kokartesische Verschmelzungen.

Übung 21.1.2.13 (**Trennfaserung der Opdarstellungen von Monoiden**). Wir betrachten die Kategorie Mon der Monoide und konstruieren eine Trennfaserung

$$\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Mon}} \to \curlywedge\mathrm{Mon}$$

über der banalen Trennkategorie der Monoide mit opponierten Kategorien von Darstellungen als Fasern. Gegeben $X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ eine Trennung in $\curlywedge\mathrm{Mon}$

alias ein Tupel von Monoidhomomorphismen $f_i : X \to Y_i$ sowie Darstellungen $D, E_1, \ldots, E_r$ unserer Monoide erklären wir dazu eine Trennung

$$\varphi : D \to E_1 \curlywedge \ldots \curlywedge E_r$$

über einer vorgegebenen Trennung von Monoiden als eine multiadditive Abbildung $\varphi^\circ : E_1 \times \ldots \times E_r \to D$ in die Gegenrichtung mit

$$x\varphi^\circ(e_1, \ldots, e_r) = \varphi^\circ(f_1(x)e_1, \ldots, f_r(x)e_r)$$

für alle $x \in X$ und $e_i \in E_i$. Der Trennrückzug ist in diesem Fall das Tensorprodukt der zurückgezogenen Darstellungen.

21.1.3 Multilineare Algebra für Modulgarben

21.1.3.1. Oft ist Kohomologie mit $\mathbb{R}$-Koeffizienten oder $\mathbb{Q}$-Koeffizienten einfacher als Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. In der algebraischen Geometrie sind auch allgemeiner Garben von Moduln über Garben von Kringen fundamental. Differentialmoduln sind noch allgemeiner Garben von Moduln über Garben von nichtkommutativen Ringen. Da es wenig zusätzlichen Aufwand bedeutet, entwickele ich die Theorie gleich in dieser Allgemeinheit.

Definition 21.1.3.2. Ein **geringter Raum** ist ein Paar

$$(X, \mathcal{A})$$

bestehend aus einem topologischen Raum X mit einer Garbe von Ringen $\mathcal{A}$, seiner **Strukturgarbe**. Die Schnitte der Strukturgarbe über $U \Subset X$ nennen wir oft **reguläre Funktionen**, obwohl sie keineswegs Funktionen auf U zu sein brauchen. Ein **Morphismus** von einem geringten Raum $(X, \mathcal{A})$ in einen weiteren geringten Raum $(Y, \mathcal{B})$ ist ein Paar $\varphi = (\varphi, \varphi^\sharp)$ bestehend aus einer stetigen Abbildung $\varphi : X \to Y$ und darüber einem Komorphismus von Ringgarben im Sinne von 19.4.3.1 alias einer Vorschrift, die für beliebige $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ mit $\varphi(U) \subset V$ einen Ringhomomorphismus $\varphi^\sharp_{UV} : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{A}(U)$ so auszeichnet, daß diese Ringhomomorphismen verträglich sind mit den Restriktionen auf kleinere offene Teilmengen. Es ist klar, wie man Morphismen von geringten Räumen zu verknüpfen hat und daß wir auf diese Weise eine Kategorie erhalten, die **Kategorie der geringten Räume**

$$\mathrm{Ger}$$

Besteht die Strukturgarbe aus kommutativen Ringen, so sprechen wir von einem **gekringten Raum**. Die Kategorie der gekringten Räume notieren wir

$$\mathrm{Gek}$$

Definition 21.1.3.3. Gegeben ein geringter Raum $(X, \mathcal{A})$ verstehen wir unter einer **Garbe von $\mathcal{A}$-Moduln** oder einem **$\mathcal{A}$-Modul** oder einer **Modulgarbe** eine abelsche Garbe $\mathcal{M}$ auf X mitsamt der Vorgabe für alle $U \Subset X$ von einer $\mathcal{A}(U)$-Modulstruktur auf $\mathcal{M}(U)$ derart, daß für alle $V \Subset U \Subset X$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}(U) & \times & \mathcal{M}(U) & \to & \mathcal{M}(U) \\ & \downarrow & & & \downarrow \\ \mathcal{A}(V) & \times & \mathcal{M}(V) & \to & \mathcal{M}(V) \end{array}$$

mit den Restriktionsabbildungen in den Vertikalen kommutiert. Homomorphismen von $\mathcal{A}$-Moduln sind die offensichtlichen. Die Kategorie aller $\mathcal{A}$-Moduln notieren wir $\mathcal{A}\text{-}\mathrm{Mod}$ oder $\mathrm{Mod}_{\mathcal{A}}$ oder in unserem Kontext $\mathrm{Ab}_{/(X,\mathcal{A})}$ oder noch einfacher $\mathrm{Ab}_{/X}$ mit der Interpretation $X = (X, \mathcal{A})$.

Ergänzung 21.1.3.4. In der in 18.3.1.2 eingeführten Terminologie ist eine Ringgarbe auf einem topologischen Raum X ein Monoidobjekt der Schmelzkategorie 21.1.1.5 der abelschen Garben auf X und eine Kringgarbe ein Abmonoidobjekt. In dieser Terminologie ist eine Modulgarbe im Sinne der anschließenden Definition ein Objekt mit Operation im Sinne von 18.3.1.16.

21.1.3.5 (**Modulgarben auf gekringtem Raum als Schmelzkategorie**). Gegeben $(X, \mathcal{A})$ ein gekringter Raum machen wir in Verallgemeinerung von 21.1.1.7 die Kategorie $\mathcal{A}\text{-}\mathrm{Mod}$ aller Modulgarben auf X zu einer Schmelzkategorie, indem wir für $r \geq 0$ eine Verschmelzung

$$\phi : \mathcal{G}_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{G}_r \to \mathcal{F}$$

erklären als eine Vorschrift ϕ, die jeder offenen Teilmenge $U \Subset X$ eine in jedem Eintrag $\mathcal{A}(U)$-lineare Abbildung $\mathcal{G}_1(U) \times \ldots \times \mathcal{G}_r(U) \to \mathcal{F}(U)$ so zuordnet, daß für alle $U' \Subset U$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1(U) \times \ldots \times \mathcal{G}_r(U) & \to & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_1(U') \times \ldots \times \mathcal{G}_r(U') & \to & \mathcal{F}(U') \end{array}$$

mit den Restriktionen in den Vertikalen und ϕ in den Horizontalen kommutiert. Inbesondere liefert das Auswerten auf dem einzigen Element des leeren Produkts eine Isotransformation $\beta : \mathrm{L} \stackrel{\sim}{\Rightarrow} \Gamma$ von Leerverschmelzungsfunktor unserer Schmelzkategorie zum Funktor der globalen Schnitte. Die Multiverknüpfungen sind die Offensichtlichen.

Ergänzung 21.1.3.6. In der in 18.3.1.19 eingeführten Terminologie ist das genau die Schmelzkatgorie der $\mathcal{A}$-Moduln in der Schmelzkategorie $\mathrm{Ab}_{/X}$ der abelschen Garben auf dem topologischen Raum X für das Monoidobjekt $\mathcal{A}$ von $\mathrm{Ab}_{/X}$.

21.1.3.7 (**Tensorprodukt und internes Hom von Modulgarben**). Die Schmelzkategorie $\mathrm{Ab}_{/(X,\mathcal{A})}$ der $\mathcal{A}$-Modulgarben auf einem gekringten Raum $(X,\mathcal{A})$ besitzt stabil universelle Verschmelzungen und internes Hom im Sinne von 18.1.3.2 und 18.1.4.3. Um das zu sehen, reicht es nach 18.1.4.9, die Existenz von universellen Verschmelzungen und Multihom zu zeigen. Eine universelle Verschmelzung der Familie $\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{F}_r$ erhalten wir, indem wir die Prägarbe

$$U \mapsto \mathcal{F}_1(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \ldots \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{F}_r(U)$$

garbifizieren. Eine universelle Leerverschmelzung ist der globale Schnitt 1 der Kringgarbe $\mathcal{A}$. Ein Multihom $\mathcal{F} \Rrightarrow \mathcal{G}$ von unserer Familie zu einer weiteren Modulgarbe $\mathcal{G}$ erhalten wir als die Garbe

$$(\mathcal{F} \Rrightarrow \mathcal{G}) : U \mapsto \mathrm{Ab}_{/(U,\mathcal{A}|_U)}(\mathcal{F}_1|_U \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{F}_r|_U, \mathcal{G}|_U)$$

zusammen mit Bijektionen $\mathrm{Ab}_{/(X,\mathcal{A})}(\mathcal{K} \curlyvee \mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/(X,\mathcal{A})}(\mathcal{K}, (\mathcal{F} \Rrightarrow \mathcal{G}))$, die hoffentlich auch für den Leser offensichtlich sind.

21.1.3.8. Die Modulgarben auf einem geringten Raum $(X,\mathcal{A})$ bilden eine abelsche Kategorie und der Funktor $\mathcal{A}\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ des Vergessens der $\mathcal{A}$-Modulstruktur ist exakt. Weiter gibt es in unserer Kategorie beliebige Produkte und Koprodukte, ja beliebige Limites und Kolimites, und auch diese kommutieren mit dem Vergessen der $\mathcal{A}$-Modulstruktur.

21.1.3.9 (**Modulgarbenopfaserung**). Wir erklären einen Funktor

$$\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Ger}} \to \mathrm{Ger}$$

in die Kategorie der geringten Räume. Objekte links sind Paare $\mathcal{F} = (X,\mathcal{F})$ bestehend auf einem geringten Raum $X = (X,\mathcal{A})$ und einer $\mathcal{A}$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf X. Ein Morphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ über einem Morphismus $f : X \to Y$ der Basis mit $Y = (Y,\mathcal{B})$ ist ein Opkomorphismus ψ von abelschen Garben derart, daß für alle $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ mit $f(U) \subset V$ für $\psi : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(U)$ und alle $b \in \mathcal{B}(V)$ und $g \in \mathcal{G}(V)$ gilt $\psi(bg) = f^\sharp(b)\psi(g)$. Die Fasern unseres Funktors sind opponierte Kategorien von Modulgarben, in Formeln

$$\mathrm{Ab}_{/\!/(X,\mathcal{A})} = (\mathcal{A}\text{-}\mathrm{Mod})^{\mathrm{opp}}$$

Unser Funktor ist sogar eine Faserung. Einen kartesischen Morphismus über einem Morphismus $f : (X,\mathcal{A}) \to (Y,\mathcal{B})$ der Basis mit Ziel $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/\!/(Y,\mathcal{B})}$ können wir erhalten, indem wir die $\mathcal{A}$-Modulgarbe

$$f^*\mathcal{G} = f^{*\mathrm{Ger}}\mathcal{G} := \mathcal{A} \otimes_{f^{*\mathrm{Ab}}\mathcal{B}} f^{*\mathrm{Ab}}\mathcal{G}$$

betrachten, mit der Notation $f^{*\mathrm{Ab}}$ für den Rückzug in $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}}$, und den offensichtlichen Transportmorphismus nehmen. Hier ist $f^{*\mathrm{Ab}}\mathcal{B}$ eine Garbe von nicht

notwendig kommutativen Ringen und das Tensorprodukt einer Rechtsmodulgarbe mit einer Linksmodulgarbe über der Ringgarbe $f^{*\mathrm{Ab}}\mathcal{B}$ wird analog gebildet wie im Fall einer Kringgarbe. Wir notieren in diesem Kontext unsere Rückzüge $f^\dagger = (f^*)^{\mathrm{opp}}$.

21.1.3.10 (**Vorschub von Modulgarben**). Die Modulgarbenopfaserung aus 21.1.3.9 besitzt Vorschübe. Gegeben ein Morphismus $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ und ein $\mathcal{A}$-Modul $\mathcal{F}$ erhalten wir $f_*\mathcal{F}$, indem wir den Vorschub als abelsche Garbe $f_*\mathcal{F} = f_{*\mathrm{Ab}}\mathcal{F}$ nehmen und für $V \Subset Y$ ein $b \in \mathcal{B}(V)$ auf $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ operieren lassen durch Multiplikation mit $f^\sharp(b) \in \mathcal{A}(f^{-1}(V))$. Die weiteren Details mögen dem Leser überlassen bleiben. Wir notieren in diesem Kontext unsere Vorschübe $f_\dagger = f_*^{\mathrm{opp}}$.

21.1.3.11 (**Modulgarbenoptrennfaserung**). Wir erklären einen Trennfunktor

$$\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Gek}} \to \curlywedge\mathrm{Gek}$$

in die banale Trennkategorie der gekringten Räume. Objekte links sind Paare $\mathcal{F} = (X, \mathcal{F})$ bestehend auf einem gekringten Raum $X = (X, \mathcal{A})$ und einer $\mathcal{A}$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf X. Eine Trennung $\mathcal{F} \to \mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_r$ über einer Trennung $(f_1, \ldots, f_r) : X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ der Basis mit $Y_i = (Y_i, \mathcal{B}_i)$ ist ein Multiopkomorphismus ψ von abelschen Garben im Sinne von 21.1.2.9 derart, daß für alle $U \Subset X$ und $V_i \Subset Y_i$ mit $f_i(U) \subset V_i$ für die zugehörige multiadditive Abbildung

$$\psi : \mathcal{G}_1(V_1) \times \ldots \times \mathcal{G}_n(V_n) \to \mathcal{F}(U)$$

und alle i und alle $b_i \in \mathcal{B}_i(V_i)$ und beliebige $g_j \in \mathcal{G}_j(V_j)$ für $1 \leq j \leq r$ gilt

$$\psi(g_1, \ldots, b_i g_i, \ldots, g_r) = f_i^\sharp(b_i)\psi(g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_r)$$

Insbesondere bleibt der Leertrennungsfunktor derselbe wie bei $\mathrm{Ab}_{/\!/\curlywedge\mathrm{Top}}$ und wir erben die Isotransformation $\beta : \mathrm{L} \overset{\sim}{\Rightarrow} \Gamma$ des Leertrennungsfunktors zum Funktor der globalen Schnitte, aufgefaßt als Trennfunktor $\Gamma : \mathrm{Ab}_{/\!/\curlywedge\mathrm{Gek}} \to \mathrm{kEns}^{\mathrm{opp}}$. Die Fasern unseres Trennfunktors sind opponierte Kategorien von Modulgarben $\mathrm{Ab}_{/\!/(X,\mathcal{A})} = (\mathcal{A}\text{-Mod})^{\mathrm{opp}}$. Unser Trennfunktor ist sogar eine Trennfaserung. Eine kartesische Trennung über einer einfachen Trennung erhält man wie im nichtkommutativen Fall, der in 21.1.3.9 ausgeführt wird. Eine kartesische Trennung über einer allgemeinen Trennung der Basis wie oben geht aus von

$$f_1^*\mathcal{G}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \ldots \otimes_{\mathcal{A}} f_r^*\mathcal{G}_r$$

mit dem offensichtlichen Multiopkomorphismus und $f_i^*\mathcal{G}_i := \mathcal{A} \otimes_{f_i^{*\,\mathrm{Ab}}\mathcal{B}_i} f_i^{*\,\mathrm{Ab}}\mathcal{G}_i$. Insbesondere liefert der globale Schnitt $1 \in \Gamma(\mathcal{A})$ des $\mathcal{A}$-Moduls $\mathcal{A}$ unter unter unserer Identifikation von globalen Schnitten mit Leertrennungen eine kartesische Leertrennung über der eindeutigen Leertrennung $(X, \mathcal{A}) \to \curlywedge$ der Basis.

Übungen

Übung 21.1.3.12. Gegeben ein Winkel $(Z, \mathcal{C}) \to (Y, \mathcal{B}) \leftarrow (X, \mathcal{A})$ von gekringten Räumen erhalten wir einen Pullback, indem wir den topologischen Raum $Z \times_Y X$ mit der Kringgarbe $g^{*\mathrm{Ab}}\mathcal{C} \otimes_{v^{*\mathrm{Ab}}\mathcal{B}} q^{*\mathrm{Ab}}\mathcal{A}$ versehen für $v : Z \times_Y X \to Y$.

Übung 21.1.3.13. Ein Morphismus in $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Ger}}$ alias ein Opkomorphismus von Modulgarben heiße **eigentlich**, wenn der zugrundeliegende Opkomorphismus von abelschen Garben eigentlich ist im Sinne von 19.6.4.1. Das multiplikative System der eigentlichen Opkomorphismen von Modulgarben notieren wir $\mathrm{Ab}^!_{/\!/\mathrm{Ger}}$. Man verallgemeinere Übung 19.6.4.31 zu Modulgarben auf geringten Räumen. Gegeben sei also über einem kartesischen Diagramm $fq = pg$ von geringten Räumen ein Diagramm von Modulgarben und Opkomorphismen $\bar{f}\bar{q} = \bar{p}\bar{g}$. Man zeige: Sind die Horizontalen $\bar{p}, \bar{q}$ kartesisch und ist $\bar{f}$ eigentlich, so ist auch $\bar{g}$ eigentlich.

Übung 21.1.3.14 (**Injektive Modulgarben**). Die Kategorie der Modulgarben auf einem geringten Raum ist abelsch und hat genug injektive Objekte. Des weiteren sind alle injektiven Modulgarben welk. Hinweis: Wie bei abelschen Garben, nur bettet man zunächst alle Halme in injektive Moduln über dem Halm der Ringgarbe ein und bildet dann das Produkt der Wolkenkratzer dieser injektiven Moduln.

21.1.4 Trennfaserungen bei eindeutigen Leertrennungen

21.1.4.1. Ein besonders übersichtlicher Fall, in dem sich viele der folgenden Aussagen gut einsehen lassen, ist die zur Schmelzkofaserung $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Kring}} \to \Upsilon\mathrm{Kring}$ der Moduln über Kringen aus 21.1.2.11 opponierte Trennfaserung. Das ist auch die Einschränkung unserer Moduloptrennfaserung auf den Fall einpunktiger Räume. Weil dies Beispiel oft vorkommen wird, vereinbaren wir die Abkürzung $\mathrm{Kringo} := \mathrm{Kring}^{\mathrm{opp}}$ und notieren unsere Trennfaserung

$$\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Kringo}} \to \curlywedge\mathrm{Kringo}$$

Diese Trennfaserung ist eine Bifaserung. Genauer sind die Linksadjungierten der Rückzüge längs opponierter Ringhomomorphismen, also die Linksadjungierten der Skalarerweiterungen nach Opponieren, die Restriktionen der Skalare auf den Opponierten der Modulkategorien.

21.1.4.2. Gegeben ein Trennfunktor $p : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ verstehen wir unter einem **Trennschnitt** einen Trennfunktor $s : \mathscr{N} \to \mathscr{M}$ mit $ps = \mathrm{id}$. Weiter verstehen wir unter einem **kartesischen Trennschnitt** einen Trennschnitt, der beliebige Trennungen zu kartesischen Trennungen macht. Jeder kartesische Trennschnitt einer Trennfaserung macht nach 21.1.2.5 stabil universelle Trennungen zu stabil universellen Trennungen.

21.1.4.3. Wir sagen, eine Trennkategorie **habe eindeutige Leertrennungen**, wenn von jedem Objekt genau eine Leertrennung ausgeht. Zum Beispiel hat jede banale Trennkategorie diese Eigenschaft.

21.1.4.4. Eine Trennfaserung $p : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ über einer Trennkategorie mit eindeutigen Leertrennungen besitzt einen bis auf eindeutige Isotransformation eindeutig bestimmten kartesischen Trennschnitt, nämlich den Trennfunktor $u : \mathscr{N} \to \mathscr{M}$, der jedem Objekt X der Basis dasjenige Objekt

$$\underline{X} := l_X^\dagger(\curlywedge)$$

der Faser zuordnen, von dem der kartesische Lift der eindeutigen Leertrennung $l_X : X \to \curlywedge$ ausgeht, und jeder Trennung in der Basis ihren kartesischen Lift. Wir nennen ihn den **eindeutigen kartesischen Trennschnitt** und notieren ihn

$$u : X \mapsto \underline{X}$$

Wir nennen $\underline{X} \in \mathscr{M}_X$ das **konstante Objekt auf** X und notieren $1_X : \underline{X} \to \curlywedge$ die zugehörige kartesische Leertrennung. Gegeben $\mathcal{F} \in \mathscr{M}_X$ liefert das Nachschalten von $1_X : \underline{X} \to \curlywedge$ per definitionem eine Bijektion $\mathscr{M}_X(\mathcal{F}, \underline{X}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}(\mathcal{F}, \curlywedge)$. Nach 21.1.4.2 macht der eindeutige kartesische Trennschnitt stabil universelle Trennungen zu stabil universellen Trennungen.

Beispiel 21.1.4.5. Der eindeutige kartesische Trennschnitt der Garbentrennfaserung $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ ordnet jedem Raum X als konstantes Objekt $\underline{X}$ die finale Mengengarbe auf X zu, also die Mengengarbe mit der Identität als zugehöriger étaler Abbildung. Die zugehörige Leertrennung 1_X ist die eindeutige von $\underline{X}$ ausgehende Leertrennung in $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}}$.

Beispiel 21.1.4.6. Der eindeutige kartesische Trennschnitt der Garbenoptrennfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top}$ ordnet jedem Raum X als konstantes Objekt $\underline{X}$ die konstante abelsche Garbe $\underline{X} = \mathbb{Z}_X$ zu mit derjenigen Leertrennung, die unter unserer Bijektion aus 21.1.2.9 zwischen Leertrennungen und globalen Schnitten ihrem globalen Schnitt 1_X entspricht.

Beispiel 21.1.4.7. Der eindeutige kartesische Trennschnitt der Moduloptrennfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Kringo}} \to \curlywedge\mathrm{Kringo}$ ordnet jedem Kring R als konstantes Objekt $\underline{R}$ den R-Modul R zu mit derjenigen Leertrennung, die durch das Einselement $1 \in R$ gegeben wird.

21.1.4.8 (**Leertrennungen und finale Objekte**). Sei $p : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ eine Trennfaserung über einer Trennkategorie mit eindeutigen Leertrennungen. Besitzt zusätzlich die Basis $\mathscr{N}$ eine universelle Leertrennung $\mathrm{pt} \to \curlywedge$, so ist deren kartesischer Lift nach dem Vorhergehenden eine universelle Leertrennung $\underline{\mathrm{pt}} \to \curlywedge$ in $\mathscr{M}$. Deren Nachschalten liefert folglich eine Bijektion

$$\mathscr{M}(\mathcal{F}, \underline{\mathrm{pt}}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}(\mathcal{F}, \curlywedge)$$

Beispiel 21.1.4.9. Im Fall der Optrennfaserung der abelschen Garben erhalten wir so ausgezeichnete Bijektionen $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}_{\mathrm{pt}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}}(\mathcal{F}, \curlywedge)$ und im Fall der Moduloptrennfaserung Bijektionen $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Kringo}}(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Kringo}}(M, \curlywedge)$.

21.1.4.10 (**Leertrennungen und Vorschub**). Sei $p : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ eine Trennfaserung über einer Trennkategorie mit eindeutigen Leertrennungen. Besitzt für einen Morphismus der Basis $f : X \to Y$ der Rückzug $f^\dagger : \mathscr{M}_Y \to \mathscr{M}_X$ einen Linksadjungierten $f_\dagger$, so liefert das Nachschalten der Identifikation $\mathrm{idf} : \underline{X} \xrightarrow{\sim} f^\dagger \underline{Y}$ für beliebiges $\mathcal{F} \in \mathscr{M}_X$ den dritten Morphismus einer Folge von natürlichen Isomorphismen

$$\mathscr{M}(\mathcal{F}, \curlywedge) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_X(\mathcal{F}, \underline{X}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_X(\mathcal{F}, f^\dagger \underline{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_Y(f_\dagger \mathcal{F}, \underline{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}(f_\dagger \mathcal{F}, \curlywedge)$$

21.1.4.11. Alles in diesem Abschnitt Gesagte gilt opponiert analog für Schmelzkofaserungen.

21.1.5 Formelsammlung für Trennfaserungen

21.1.5.1. Banale Trennkategorien haben stets eindeutige Leertrennungen. Für jede Trennfaserung über einer banalen Trennkategorie sind also die im vorhergehenden Abschnitt diskutierten konstanten Objekte sinnvoll definiert und erfüllen die dort angegebenen Beziehungen. Gegeben eine Trennfaserung über einer banalen Trennkategorie erhalten wir sogar noch stärkere Aussagen, wie im folgenden ausgeführt werden soll.

21.1.5.2. Gegeben ein Trennfunktor $\mathscr{G} \to \curlywedge \mathscr{T}$ zu einer banalen Trennkategorie erklären wir seine **Faser** über einem Objekt X als die Trennkategorie $\mathscr{G}_X$ aller Objekte über X mit nur solchen Trennungen, die über Tupeln aus Identitäten auf X liegen.

Beispiele 21.1.5.3. Im Fall der Garbenoptrennfaserung ist die Faser $\mathrm{Ab}_{/\!/X}$ über einem topologischen Raum X die opponierte Trennkategorie zur Schmelzkategorie der abelschen Garben auf X. Im Fall der Moduloptrennfaserung ist die Faser $\mathrm{Ab}_{/\!/R}$ über einem Kring R die opponierte Trennkategorie zur Schmelzkategorie der R-Moduln.

21.1.5.4 (**Faserweises Tensorprodukt**). Gegeben eine Trennfaserung $\mathscr{G} \to \curlywedge \mathscr{T}$ über einer banalen Trennkategorie hat jede Faser $\mathscr{G}_X$ stabil universelle Trennungen, nämlich die kartesischen Lifts derjenigen Trennungen in der Basis, die Tupel von Kopien der Identität auf X sind. Wir notieren

$$\mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_r \to \mathcal{F}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{F}_r$$

den kartesischen Lift von $(\mathrm{id}, \ldots, \mathrm{id}) : X \to X \curlywedge \ldots \curlywedge X$, der in $\mathcal{F}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{F}_r$ landet. Die opponierte Schmelzkategorie notieren wir in diesem Kontext

$$\mathscr{G}_{/X} := \mathscr{G}_X^{\mathrm{opp}}$$

Statt $\otimes$ schreiben wir manchmal ausführlicher $\otimes_X$. Das Einsobjekt einer derartigen Schmelzkategorie ist das konstante Objekt $\underline{X} \in \mathscr{G}_{/X}$, das wir in 21.1.4.4 durch Rückzug $\underline{X} := l_X^\dagger(\curlywedge)$ unter der von X ausgehenden Leertrennung erklärt hatten. Den vom einfachem Rückzug $f^\dagger : \mathscr{G}_Y \to \mathscr{G}_X$ unter $f : X \to Y$ auf den opponierten Kategorien induzierten Funktor notieren wir

$$f^* := (f^\dagger)^{\mathrm{opp}} : \mathscr{G}_{/Y} \to \mathscr{G}_{/X}$$

Offensichtlich hat $f^\dagger$ genau dann einen Linksadjungierten $f_\dagger$, wenn der Rückzug f^* auf den opponierten Fasern einen Rechtsadjungierten f_* hat. Wir nennen ihn den **Vorschub unter** f und sprechen von einer **Trennfaserung mit Vorschub**, wenn für jede Einstrennung der Basis so ein Rechtsadjungierter f_* existiert.

21.1.5.5 (**Diskussion der Notation**). Die Notationen $\mathscr{G}_{/X}$ und (f^*, f_*) führe ich ein, damit wir uns in den üblichen Anwendungsfällen in der üblichen Notation wiederfinden. Typisch ist für uns die Situation einer **Trennfaserung mit Adjungierten über einer banalen Trennkategorie**, bei der wir sowohl für alle Morphismen der Basis die Existenz von Adjungierten der Rückzüge fordern, die wir notieren als $f_\dagger$ auf den Fasern beziehungsweise f_* auf den opponierten Fasern, als auch internes Hom in allen opponierten Fasern, das wir dann $\Rrightarrow$ oder ausführlicher $\Rrightarrow_X$ notieren. In konkreten Beispielen notieren wir die Ausgangskategorie unserer Trennfaserung meist in der Form $\mathscr{G} = \mathrm{Was}_{/\!/\,\mathrm{banal}}$ und die Faser über einem Objekt $X \in \mathrm{banal}$ dann $\mathscr{G}_X = \mathrm{Was}_{/\!/X}$ und die opponierte Faser $\mathscr{G}_{/X} = \mathrm{Was}_{/X}$.

21.1.5.6. Zunächst einmal liefert jede Trennfaserung mit Adjungierten eine gewöhnliche Faserung zwischen den jeweiligen einfachen Katgorien. Damit gelten alle in 19.6.3.11 fogende besprochenen Aussagen zum Basiswechsel.

21.1.5.7 (**Tensorprodukt und Rückzug**). Gegeben ein Morphismus $f : X \to Y$ in einer Kategorie $\mathscr{T}$ gilt in der zugehörigen banalen Trennkategorie die Identität

$$(\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_Y) \circ f = (f, f) = (f \curlywedge f) \circ (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)$$

von Zweitrennungen $X \to Y \curlywedge Y$. Graphisch mag man sie darstellen wie im folgenden Diagramm mit der durchgezogenen linken Seite und der gestrichelten Mitte und der gepunktelten linken Seite

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rr, dotted, "\Rrightarrow"] & & Y \\
X \arrow[ur, dotted] \arrow[rr, dashed] \arrow[rr, bend right, "\longrightarrow"'] \arrow[dr, dotted] & & Y \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & X \arrow[rr, dotted, "\Rrightarrow"] & & Y
\end{tikzcd}$$

Ist nun $\mathscr{G} \to \curlywedge\mathscr{T}$ eine Trennfaserung und schreiben wir für $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathscr{G}_Y$ den kartesischen Lift von (f, f) nach $\mathcal{F} \curlywedge \mathcal{G}$ auf die beiden entsprechenden Weisen als Verknüpfung kartesischer Lifts, so finden wir in $\mathscr{G}_X$ einen Isomorphismus $f^\dagger(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} (f^\dagger\mathcal{F}) \otimes (f^\dagger\mathcal{G})$ und in unseren neuen Notationen in $\mathscr{G}_{/X}$ einen Isomorphismus

$$\mathrm{idf} : (f^*\mathcal{F}) \otimes (f^*\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$$

Die Notation idf ist dadurch motiviert, daß diese Isomorphismen aus Identifikationen 19.6.3.1 einer Faserung oder genauer Trennfaserung zusammengesetzt sind. Etwas feiner liefert unser Formalismus, daß der Rückzug $f^* : \mathscr{G}_{/Y} \to \mathscr{G}_{/X}$ verträglich ist mit universellen Verschmelzungen und wir erhalten so im Fall universeller Leerverschmelzungen insbesondere unsere Isomorphismen $\underline{X} \xrightarrow{\sim} f^*\underline{Y}$ zurück. Ich erinnere daran, daß wir bereits aus 21.1.5.4 wissen, daß unter unseren Annahmen die opponierten Fasern $\mathscr{G}_{/X}$ sogar stabil universelle Verschmelzungen haben.

Beispiel 21.1.5.8. Im Spezialfall unserer Garbenoptrennfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top}$ aus 21.1.2.9 spezialisiert die Konstruktion 21.1.5.7 zu einem natürlichen Isomorphismus zwischen einem zurückgeholten Tensorprodukt und dem Tensorprodukt der zurückgeholten Garben. Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Kringo}} \to \curlywedge\mathrm{Kringo}$ ist f^* die Skalarerweiterung und unsere Konstruktion spezialisiert für $f \in \mathrm{Kringo}(A, B)$ alias einen Kringhomomorphismus $f^\circ : B \to A$ zum kanonischen Modulisomorphismus

$$(A \otimes_B F) \otimes_A (A \otimes_B G) \xrightarrow{\sim} A \otimes_B (F \otimes_B G)$$

21.1.5.9 (**Internes Hom und Vorschub**). Gegeben seien eine Trennfaserung $\mathscr{G} \to \curlywedge\mathscr{T}$ zu einer banalen Trennkategorie und ein Morphismus $f : X \to Y$ in der Basis. Für jedes feste Objekt $\mathcal{E} \in \mathscr{G}_Y$ betrachten wir die Funktoren $\mathscr{G}_Y \to \mathscr{G}_X$ gegeben durch $\mathcal{G} \mapsto f^\dagger\mathcal{G} \mapsto f^\dagger\mathcal{E} \otimes_X f^\dagger\mathcal{G}$ sowie $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{E} \otimes_Y \mathcal{G} \mapsto f^\dagger(\mathcal{E} \otimes_Y \mathcal{G})$. Unsere Vorgaben beinhalten eine ausgezeichnete Isotransformation zwischen diesen Funktoren. Diese Isotransformation hinwiederum induziert eine Isotransformation zwischen ihren Linksadjungierten, wenn diese existieren, und in jedem Fall zwischen ihren partiellen Linksadjungierten. Haben insbesondere die Opponierten $\mathscr{G}_{/X}$ der Fasern internes Hom $\Rrightarrow$ und hat $f^\dagger$ einen Linksadjungierten $f_\dagger$ alias f^* einen Rechtsadjungierten f_*, so erhalten wir für $\mathcal{E} \in \mathscr{G}_{/Y}$ und $\mathcal{F} \in \mathscr{G}_{/X}$ Isomorphismen

$$\mathrm{idf} : f_*(f^*\mathcal{E} \Rrightarrow \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E} \Rrightarrow f_*\mathcal{F})$$

Auch sie notieren wir idf, weil sie aus den Identifikationen einer Trennfaserung entstehen. Gegeben $\mathcal{G} \in \mathscr{G}_{/X}$ erhalten wir daraus, indem wir die Koeinheit der Adjunktion $f^*f_*\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ vorschalten, einen ausgezeichneten Morphismus

$$\mathrm{adf} : f_*(\mathcal{G} \Rrightarrow \mathcal{F}) \to (f_*\mathcal{G} \Rrightarrow f_*\mathcal{F})$$

Ich notiere hier und auch sonst mit adf im Kontext einer Faserung oder Kofaserung alle Morphismen, die in der einen oder anderen Weise aus Identifikationen und Adjunktionen entstehen.

Beispiel 21.1.5.10. Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung spezialisiert diese Konstruktion für $f \in \mathrm{Kringo}(A, B)$ alias einen Kringhomomorphismus $f^\circ : B \to A$ zum kanonischen Modulisomorphismus

$$\mathrm{res}_A^B \mathrm{Hom}_A(A \otimes_B E, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(E, \mathrm{res}_A^B F)$$

21.1.5.11 (**Internes Hom und Rückzug**). Gegeben seien eine Trennfaserung $\mathscr{G} \to \curlywedge \mathscr{T}$ zu einer banalen Trennkategorie und ein Morphismus $f : X \to Y$ in der Basis. Übung 18.1.6.20 liefert für je zwei Objekte $\mathcal{E}, \mathcal{G} \in \mathscr{G}_{/Y}$, für die die fraglichen internen Hom-Objekte existieren, einen ausgezeichneten Morphismus

$$f^*(\mathcal{E} \Rrightarrow \mathcal{G}) \to (f^*\mathcal{E} \Rrightarrow f^*\mathcal{G})$$

Beispiel 21.1.5.12. Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung spezialisiert diese Konstruktion für $f \in \mathrm{Kringo}(A, B)$ alias einen Kringhomomorphismus $f^\circ : B \to A$ zu einem kanonischen Modulhomomorphismus

$$A \otimes_B \mathrm{Hom}_B(E, G) \to \mathrm{Hom}_A(A \otimes_B E, A \otimes_B G)$$

21.1.5.13 (**Dualisieren und Rückzug**). Gegeben seien eine Trennfaserung $\mathscr{G} \to \curlywedge \mathscr{T}$ zu einer banalen Trennkategorie und ein Morphismus der Basis $f : X \to Y$. Gegeben $\mathcal{E} \in \mathscr{G}_{/Y}$ derart, daß $\mathcal{E}$ und $f^*\mathcal{E}$ dualisierbar sind, liefern unsere ausgezeichneten Morphismen 21.1.5.11 vom Rückzug eines internen Hom in das interne Hom der Rückzüge zusammen mit dem ausgezeichneten Isomorphismus 21.1.5.7 zwischen der Eins von $\mathscr{G}_{/X}$ und dem Rückzug der Eins von $\mathscr{G}_{/Y}$ einen ausgezeichneten Morphismus

$$f^*(\mathcal{E}^\vee) \to (f^*\mathcal{E})^\vee$$

Beispiel 21.1.5.14. Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung spezialisiert diese Konstruktion für $f \in \mathrm{Kringo}(A, B)$ alias einen Kringhomomorphismus $f^\circ : B \to A$ zu einem kanonischen Modulhomomorphismus

$$A \otimes_B \mathrm{Hom}_B(E, B) \to \mathrm{Hom}_A(A \otimes_B E, A)$$

21.1.5.15 (**Internes Hom und Rückzug im starren Fall**). Gegeben seien eine Trennfaserung $\mathscr{G} \to \curlywedge \mathscr{T}$ zu einer banalen Trennkategorie und ein Morphismus $f : X \to Y$ in der Basis. Da der Rückzug f^* nach 21.1.5.7 mit universellen Verschmelzungen vertauscht, macht f^* nach 18.3.4.6 starre Objekte von $\mathscr{G}_{/Y}$ zu

starren Objekten von $\mathscr{G}_{/X}$ und der Morphismus aus 21.1.5.11 spezialisiert für starres $\mathcal{E}$ und $\mathcal{G} = \mathbb{I}_Y = \underline{Y}$ zu einem Isomorphismus $f^*(\mathcal{E}^\vee) \xrightarrow{\sim} (f^*\mathcal{E})^\vee$. Im Fall eines starren Objekts $\mathcal{E}$ ist unser Morphismus in 21.1.5.11 sogar für beliebiges $\mathcal{G}$ ein Isomorphismus

$$f^*(\mathcal{E} \Rrightarrow \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} (f^*\mathcal{E} \Rrightarrow f^*\mathcal{G})$$

In der Tat können wir nämlich besagten Morphismus schreiben als die Verknüpfung von Isomorphismen

$$f^*(\mathcal{E} \Rrightarrow \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{E}^\vee) \otimes f^*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (f^*\mathcal{E})^\vee \otimes f^*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (f^*\mathcal{E} \Rrightarrow f^*\mathcal{G})$$

Hier sollte ausgeschrieben werden, daß diese Verknüpfung wirklich besagten Morphismus liefert. Das mag einmal ein Student ausführen.

Beispiel 21.1.5.16. Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung sind etwa freie endlich erzeugte Moduln starr und für E frei und endlich erzeugt liefert unsere Konstruktion oben in der Tat einen Isomorphismus

$$A \otimes_B \operatorname{Hom}_B(E, G) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(A \otimes_B E, A \otimes_B G)$$

21.1.5.17 (**Tensorprodukt und Vorschub**). Seien $\mathscr{G} \to \curlywedge \mathscr{T}$ eine Trennfaserung zu einer banalen Trennkategorie und $f : X \to Y$ ein Morphismus in der Basis. Besitzt das Zurückholen $f^* : \mathscr{G}_{/Y} \to \mathscr{G}_{/X}$ auf den opponierten Fasern einen Rechtsadjungierten f_*, so erhalten wir für $\mathcal{F} \in \mathscr{G}_{/X}$ und $\mathcal{G} \in \mathscr{G}_{/Y}$ durch Adjunktion einen Morphismus

$$f_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \to f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G})$$

aus der Komposition $f^*(f_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f^*f_*\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G} \to \mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G}$ des Inversen zur Verträglichkeit 21.1.1.9 von Rückzug und Tensorprodukt mit der Koeinheit der Adjunktion tensoriert mit der Identität. Für $\mathcal{G} := f_*\mathcal{E}$ erhalten wir speziell einen Morphismus

$$f_*\mathcal{F} \otimes f_*\mathcal{E} \to f_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{E})$$

durch Adjunktion aus $f^*(f_*\mathcal{F} \otimes f_*\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} f^*f_*\mathcal{F} \otimes f^*f_*\mathcal{E} \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{E}$. Nach Übung 18.1.6.22 wird hier f_* sogar ein Schmelzfunktor in natürlicher Weise.

Vorschau 21.1.5.18. Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung wäre Ersteres der natürliche Homomorphismus

$$(\operatorname{res}_A^B F) \otimes_B G \to \operatorname{res}_A^B(F \otimes_A (A \otimes_B G))$$

und ist sogar immer ein Isomorphismus. Das wird sich mit 21.4.7.13 als Spezialfall der Projektionsformel erweisen, angewandt auf die Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten 21.4.6.5 der Modulgarben auf diskreten gekringten Räumen, in der speziell alle Morphismen zwischen einpunktigen Räumen e-Morphismen sind.

Beispiel 21.1.5.19. Im Fall der Garbenoptrennfaserung mit $f : X \to Y$ der konstanten Abbildung eines unendlichen diskreten Raums auf den einpunktigen Raum ist unsere Garbe $\mathcal{F}$ eine durch $x \in X$ indizierte Familie von abelschen Gruppen F_x und $\mathcal{G}$ eine weitere abelsche Gruppe G und unser Morphismus der natürliche Morphismus

$$\left(\prod_{x\in X} F_x\right) \otimes_{\mathbb{Z}} G \to \left(\prod_{x\in X} F_x \otimes_{\mathbb{Z}} G\right)$$

und im allgemeinen kein Isomorphismus, etwa für $G = \mathbb{Q}$. Für G frei und endlich erzeugt ist er aber doch wieder ein Isomorphismus. Daß das allgemein für starres $\mathcal{G}$ gilt, diskutieren wir als nächstes.

21.1.5.20 (**Tensorprodukt und Vorschub im starren Fall**). Gegeben seien eine über einer banalen Trennkategorie trenngefaserte Trennkategorie $\mathscr{G}$ und ein Morphismus $f : X \to Y$ in der Basis. Hat der Rückzug f^* auf den opponierten Fasern einen Rechtsadjungierten f_*, so sind die Morphismen aus 21.1.5.17 für starres $\mathcal{G}$ Isomorphismen

$$f_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G})$$

Das erkennen wir, indem wir unsere Isomorphismen aus 21.1.5.9 zu $\mathcal{E} := \mathcal{G}^\vee$ spezialisieren. Ein Student mag die Details ausschreiben.

Beispiel 21.1.5.21. Im Fall einer abelschen Garbe $\mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum, die lokal frei ist von endlichem Rang, spezialisieren die in 21.1.5.20 besprochenen Isomorphismen zu Isomorphismen von abelschen Garben

$$f_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G})$$

21.1.5.22 (**Externes Tensorieren alias Boxprodukt**). Gegeben eine über einer banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathscr{T}$ trenngefaserte Trennkategorie $\mathscr{G}$ und in der Basis $\mathscr{T}$ zwei Objekte X, Y mit Produkt $X \times Y$ betrachten wir die Projektionszweitrennung

$$(\mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y) : X \times Y \to X \curlywedge Y$$

Gegeben $\mathcal{F} \in \mathscr{G}_X$ und $\mathcal{G} \in \mathscr{G}_Y$ erklären wir dann $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} \in \mathscr{G}_{X\times Y}$ als den Rückzug

$$\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} := (\mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y)^\dagger(\mathcal{F} \curlywedge \mathcal{G})$$

und nennen dies Objekt ein **Boxprodukt**. Die entsprechende Zweitrennung $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} \to \mathcal{F} \curlywedge \mathcal{G}$ von $\mathscr{G}$ ist als stark kartesischer Lift einer stabil universellen Trennung nach 21.1.2.5 auch stabil universell und für $f : P \to X$ sowie $g : Q \to Y$ derart, daß auch ein Produkt $P \times Q$ existiert, liefert die universelle Eigenschaft einen Isomorphismus

$$\mathrm{idf} : f^\dagger\mathcal{F} \boxtimes g^\dagger\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (f \times g)^\dagger(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})$$

Wir notieren ihn idf, weil er aus den Identifikationen 19.6.3.1 einer Faserung zusammengesetzt ist. Noch genauer könnten wir $\mathrm{idf} = \mathrm{idf}(f \times g, (\mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y))^{-1} \circ \mathrm{idf}((\mathrm{pr}_P, \mathrm{pr}_Q), f \curlywedge g)$ schreiben, aber übertriebene Genauigkeit macht die Darstellung auch wieder unübersichtlich. Schreiben wir die Projektion $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ als Projektionszweitrennung gefolgt von $l_X \curlywedge \mathrm{id}_Y$ für $l_X : X \to \curlywedge$ die Leertrennung, in Formeln $\mathrm{pr}_Y = (l_X \curlywedge \mathrm{id}_Y) \circ (\mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y)$, so erhalten wir für jedes $\mathcal{G} \in \mathscr{G}_Y$ einen Isomorphismus

$$\underline{X} \boxtimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_Y^\dagger \mathcal{G}$$

Schreiben wir die Leertrennung $X \times Y \to \curlywedge$ als Projektionstrennung gefolgt vom Zweitupel $l_X \curlywedge l_Y$ aus Leertrennungen $X \times Y \to X \curlywedge Y \to (\curlywedge) \curlywedge (\curlywedge) = \curlywedge$, so ist die zugehörige Identifikation ein Isomorphismus

$$\underline{X \times Y} \xrightarrow{\sim} \underline{X} \boxtimes \underline{Y}$$

In unserer opponierten Notation erhalten wir dieselben Isomorphismen in der Gegenrichtung mit $*$ statt $\dagger$ für dieselben Objekte als Objekte der opponierten Fasern, also $(f \times g)^*(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f^*\mathcal{F} \boxtimes g^*\mathcal{G}$ und $\mathrm{pr}_Y^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \underline{X} \boxtimes \mathcal{G}$ und $\underline{X} \boxtimes \underline{Y} \xrightarrow{\sim} \underline{X \times Y}$ für $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} := (\mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y)^*(\mathcal{F} \curlywedge \mathcal{G})$. Wenn wir eine Notation für diese Isomorphismen benötigen, notieren wir sie idf, weil sie aus Identifikationen 19.6.3.1 einer Faserung zusammengesetzt sind.

21.1.5.23. Jede Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen ist stets schmelzkogefasert über der finalen Schmelzkategorie und diese ist hinwiederum eine banale Schmelzkategorie. Opponiert gilt Analoges, so daß wir formal immer $\boxtimes$ statt $\otimes$ schreiben dürften. Die Unterscheidung ist als formal nicht zwingend. Dennoch kann die Boxprodukt-Notation bei sinnvollem Einsatz in meinen Augen die Lesbarkeit wesentlich verbessern.

Beispiel 21.1.5.24. Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung ist $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ das Koprodukt in Kring alias das Produkt in Kringo und gegeben Moduln M über A und N über B ist $M \boxtimes N$ der offensichtliche Modul $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ über $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$.

Ergänzung 21.1.5.25 (**Bezug zum Boxprodukt von Funktionen**). In den Notationen der vorhergehenden Diskussion zu Boxprodukten entspricht es unserer allgemeinen Konvention 18.1.3.8, auch die auf den Leertrennungen induzierten Abbildungen

$$\mathscr{G}(\mathcal{F}, \curlywedge) \times \mathscr{G}(\mathcal{G}, \curlywedge) \to \mathscr{G}(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, \curlywedge)$$

als $(f, g) \mapsto f \boxtimes g$ zu notieren. Im Spezialfall der Garben von k-Vektorräumen auf diskreten Mengen und der konstanten Garben $\mathcal{F} = \underline{X}$ sowie $\mathcal{G} = \underline{Y}$ spezialisiert diese Konstruktion unter verschiedenen weiteren hoffentlich offensichtlichen Identifikationen zu der Abbildung $\mathrm{Ens}(X, k) \times \mathrm{Ens}(Y, k) \to \mathrm{Ens}(X \times Y, k)$, die wir schon bisher immer $(f, g) \mapsto f \boxtimes g$ notiert hatten.

Beispiel 21.1.5.26 (**Bezug zum Produkt von σ-Algebren**). Das Vergessen der σ-Algebra ist eine Trennfaserung $\mathrm{Meß} \to \mathrm{Ens}$ von der banalen Trennkategorie der Meßräume in die banale Trennkategorie der Mengen. Es ist in diesem Sinne passend, wenn auch nicht zwingend, das Produkt von Meßräumen zu notieren in der Form

$$(X, \mathcal{M}) \times (Y, \mathcal{N}) = (X \times Y, \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N})$$

Beispiel 21.1.5.27 (**Bezug zum Produkt von Maßen**). Wir können auch Schmelzkategorie $\mathrm{Maß}_{\mathbb{R}}$ der reellen Maßräume betrachten. Objekte sind Tripel $(X, \mathcal{M}, \mu)$ aus einer Menge, einer zugehörigen σ-Algebra und einem reellen Maß $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Verschmelzungen sind meßbare Abbildungen $f : X_1 \times \ldots \times X_r \to Y$ mit $f_*(\mu_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \mu_r) = \nu$ für ν das Maß auf Y. Dann ist quasi per definitionem $(X_1 \times X_2, \mu_1 \boxtimes \mu_2)$ das Zielobjekt der universellen Verschmelzung von (X_1, μ_1) mit (X_2, μ_2). In diesem Sinne ist auch unsere Notation für das Produktmaß passend, aber nicht zwingend.

Übungen

Übung 21.1.5.28 (**Externes Tensorieren und gewöhnliches Tensorieren**). Gegeben eine über einer banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathscr{T}$ trenngefaserte Trennkategorie $\mathscr{G}$ und in $\mathscr{T}$ zu zwei Objekten X, Y ein Produkt $X \times Y$ sowie $\mathcal{F} \in \mathscr{G}_{/X}$ und $\mathcal{G} \in \mathscr{G}_{/Y}$ konstruiere man einen Isomorphismus $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{pr}_X^* \mathcal{F}) \otimes_{X \times Y} (\mathrm{pr}_Y^* \mathcal{G})$ sowie im Fall $X = Y$ einen Isomorphismus $\mathcal{F} \otimes_X \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \Delta^*(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})$ für die diagonale Einbettung $\Delta : X \to X \times X$.

Übung 21.1.5.29 (**Vorschub auf finales Objekt als Trennfunktor**). Sei $\mathscr{G} \to \curlywedge\mathscr{T}$ eine Trennfaserung mit Vorschüben über einer banalen Trennkategorie mit finalem Objekt pt. So erhalten wir einen Trennfunktor

$$c_\dagger : \mathscr{G} \to \mathscr{G}_{\mathrm{pt}}$$

durch die Vorschrift, daß jedes Objekt $\mathcal{F} \in \mathscr{G}_X$ auf $c_\dagger \mathcal{F}$ abgebildet wird für $c = \mathrm{fin} : X \to \mathrm{pt}$ und jede Trennung $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_r$ über einer Trennung $(f_1, \ldots, f_r) : X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ auf die durch die stark kokartesische Eigenschaft 19.6.3.13 von $\mathcal{F} \to c_\dagger \mathcal{F}$ in Bezug auf den Funktor auf den Familienkategorien $\mathscr{G}^\curlywedge \to (\curlywedge\mathscr{T})^\curlywedge$ bestimmte Trennung $c_\dagger \mathcal{F} \to c_{1\dagger}\mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge c_{r\dagger}\mathcal{G}_r$ über der Trennung $(\mathrm{id}, \ldots, \mathrm{id}) : \mathrm{pt} \to \mathrm{pt} \curlywedge \ldots \curlywedge \mathrm{pt}$ mit der Notation $c_i : Y_i \to \mathrm{pt}$ für den jeweils einzigen Morphismus. Auf den opponierten Schmelzkategorien erhalten wir so einen Schmelzfunktor

$$c_* : \mathscr{G}^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{G}_{/\mathrm{pt}}$$

Nach 21.1.4.10 ist er volltreu auf Leerverschmelzungen in dem Sinne, daß er Bijektionen $\mathscr{G}^{\mathrm{opp}}(\curlyvee, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}_{/\mathrm{pt}}(\curlyvee, c_*\mathcal{F})$ induziert für alle $\mathcal{F} \in \mathscr{G}$. Der Schmelzfunktor der Leerverschmelzungen von $\mathscr{G}^{\mathrm{opp}}$ in die kartesische Schmelzkategorie

der Mengen 18.1.6.14 faktorisiert mithin als c_* gefolgt vom Schmelzfunktor der Leerverschmelzungen von $\mathscr{G}_{/\mathrm{pt}}$ in die kartesische Schmelzkategorie der Mengen. Im Fall der Garbenoptrennfaserung 21.1.2.9 mag man $\mathscr{G}_{/\mathrm{pt}}$ mit der Schmelzkategorie der abelschen Gruppen identifizieren und c_* mit dem Funktor der globalen Schnitte. So folgt im Rahmen unseres Formalismus, daß jede Verschmelzung von abelschen Garben über topologischen Räumen eine multilineare Abbildung zwischen den jeweiligen Räumen von globalen Schnitten induziert.

Übung 21.1.5.30. Sei $\mathscr{G} \to \curlywedge\mathscr{T}$ eine Trennfaserung mit Vorschüben über einer banalen Trennkategorie mit finalem Objekt pt. Schalten wir unserem Schmelzfunktor $\mathrm{fin}_* : \mathscr{G}^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{G}_{/\mathrm{pt}}$ aus 21.1.5.29 den Opponierten $(\curlywedge\mathscr{T})^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{G}^{\mathrm{opp}}$ des kartesischen Trennschnitts nach 21.1.4.4 vor, so erhalten wir einen Schmelzfunktor

$$\curlyvee\mathscr{T}^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{G}_{/\mathrm{pt}}$$

Im Fall der Garbenoptrennfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ erhalten wir so den Schmelzfunktor $\curlyvee\,\mathrm{Top}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ab}$, der jedem Raum X die Gruppe $\Gamma(\underline{X})$ der lokal konstanten $\mathbb{Z}$-wertigen Funktionen auf X zuordnet und jedem Tupel von von X ausgehenden stetigen Abbildungen die multiadditive Abbildung „nimm das Produkt der zurückgezogenen Funktionen".

Übung 21.1.5.31. Ich erinnere an die Trennfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Mon}} \to \curlywedge\mathrm{Mon}$ der Darstellungen von Monoiden aus 21.1.2.13. Man zeige, daß wir in den Fasern über Gruppen sogar Multihom haben.

Übung 21.1.5.32 (**Boxprodukt von Moduln, Variante**). Sei k ein fester Kring. Im Fall der in 21.1.2.11 betrachteten Schmelzkofaserung $\mathrm{Ab}_{\mathrm{Kring}^k} \to \curlyvee\mathrm{Kring}^k$ oder vielmehr der zugehörigen Trennfaserung auf den opponierten Kategorien ist $\underline{R}$ der k-Kring R selbst als R-Modul und gegeben $M \in \mathrm{Ab}_R$ sowie $N \in \mathrm{Ab}_S$ kann $M \boxtimes N$ beschrieben werden als $M \otimes_k N$ mit der durch $(r \otimes s)(m \otimes n) = rm \otimes sn$ gegebenen Struktur als Modul über $R \otimes_k S$.

21.1.6 Trennschmelzfakofaserungen

Definition 21.1.6.1. Eine **Trennschmelzfakofaserung** über einer Trennkategorie $\mathscr{T}$ ist ein Datum aus einer Trennfaserung $p : \mathscr{M} \to \mathscr{T}$ und einer Schmelzkofaserung $\bar{p} : \bar{\mathscr{M}} \to \mathscr{T}^{\mathrm{opp}}$, die nach Zurückholen auf die diskretisierte Basis $\mathscr{T}^\delta$ übereinstimmen $\mathscr{M}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \bar{\mathscr{M}}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})\ \forall X \in \mathscr{T}$, sowie ausgezeichneten Bijektionen

$$i : \mathscr{M}_f^\times(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_r) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathscr{M}}_{f^\circ}^\times(\mathcal{G}_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{G}_r, \mathcal{F})$$

zwischen den Mengen der jeweiligen kartesischen Trennungen beziehungsweise kokartesischen Verschmelzungen, die verträglich sind mit Multiverknüpfung und die im Fall $f = \mathrm{id}_X$ zum Invertieren von Isomorphismen der Faser spezialisieren.

Beispiele 21.1.6.2. Im Fall einer gewöhnlichen Kategorie in der Basis spezialisiert das zu einer Fakofaserung im Sinne von 19.8.4.4. Im Fall der terminalen Trennkategorie in der Basis spezialisiert es zum Begriff einer Trennschmelzkategorie im Sinne von 18.1.5.2.

21.1.6.3 (**Ergänzung zu Trennschmelzfakofaserung**). Wie in den Spezialfällen der eben beschriebenen Beispiele besitzt auch im allgemeinen jede Trennfaserung und jede Schmelzkofaserung eine bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte Ergänzung zu einer Trennschmelzfakofaserung. Gegeben eine Trennfaserung $\mathscr{M} \to \mathscr{T}$ notieren wir den Schmelzkofaserungsanteil dieser Ergänzung

$$\mathscr{M}^{\mathrm{sk}} \to \mathscr{T}^{\mathrm{opp}}$$

Für eine Trennung $\psi : X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ in $\mathscr{T}$ werden dann Verschmelzungen in der Schmelzkofaserung $\mathscr{M}^{\mathrm{sk}}$ über der opponierten Verschmelzung $\psi^\circ : Y_1 \curlyvee \ldots \curlyvee Y_r \to X$ in $\mathscr{T}^{\mathrm{opp}}$ gegeben durch die Vorschrift

$$\mathscr{M}^{\mathrm{sk}}_{\psi^\circ}(\mathcal{G}_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{G}_r, \mathcal{F}) := \mathscr{M}_X(\psi^\dagger(\mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_r), \mathcal{F})$$

mit $\psi^\dagger$ dem Rückzug in unserer Trennfaserung. Die Definition der Multiverknüpfungen geht analog zu 19.8.4.10. Gegeben eine Schmelzkofaserung $\mathscr{N} \to \mathscr{S}$ notieren wir umgekehrt den Trennfaserungsanteil der Ergänzung zu einer Trennschmelzfakofaserung als

$$\mathscr{N}^{\mathrm{tf}} \to \mathscr{S}^{\mathrm{opp}}$$

Wir nennen wie in den bereits betrachteten Spezialfällen 19.8.4.10 und 18.1.5.5 diese Konstruktionen das **Invertieren** einer Trennfaserung beziehungsweise Schmelzkofaserung zu einer Schmelzkofaserung beziehungsweise Trennfaserung über der opponierten Basis.

21.1.6.4. Gegeben eine Trennschmelzfakofaserung $\mathscr{M} \to \mathscr{T}$ ist in offensichtlicher Weise auch $\mathscr{M}^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{T}^{\mathrm{opp}}$ eine Trennschmelzfakofaserung. Gegeben eine Trennfaserung $\mathscr{M} \to \mathscr{T}$ betrachten wir ihre Erweiterung zu einer Trennschmelzfakofaserung und erhalten eine weitere Trennfaserung

$$\mathscr{M}^{\mathrm{otf}} := (\mathscr{M}^{\mathrm{opp}})^{\mathrm{tf}} \to \mathscr{T}$$

durch das Opponieren gefolgt vom Invertieren. Wir nennen diese Trennfaserung die **oppinvertierte Trennfaserung**. Sie verallgemeinert sowohl die Oppinverse einer Trennkategorie mit stabil universellen Trennungen als auch die Oppinverse eines Faserfunktors. Explizit werden ihre Trennungen über einer Trennung der Basis $\psi : X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ in $\mathscr{T}$ gegeben durch

$$\mathscr{M}^{\mathrm{otf}}_{\psi}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_r) := \mathscr{M}_X(\psi^\dagger(\mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_r), \mathcal{F})$$

Gegeben eine Schmelzkofaserung $\mathscr{N} \to \mathscr{S}$ konstruieren wir analog die **oppinvertierte Schmelzkofaserung**

$$\mathscr{N}^{\mathrm{osk}} := (\mathscr{N}^{\mathrm{opp}})^{\mathrm{sk}} \to \mathscr{S}$$

Quasi per definitionem haben wir ausgezeichnete Isomorphismen $(\mathscr{M}^{\mathrm{sk}})^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}^{\mathrm{otf}}$ und $(\mathscr{N}^{\mathrm{tf}})^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{N}^{\mathrm{osk}}$, die die Objekte festhalten.

Beispiel 21.1.6.5. Eine Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen ist nach 21.1.2.4 schmelzkogefasert über der terminalen Schmelzkategorie. Unsere invertierte Trennfaserung spezialisiert in diesem Fall zur invertierten Trennkategorie aus 18.1.5.5.

Beispiel 21.1.6.6. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ erinnern wir aus 19.6.2.24 unsere Familienfaserung $\mathcal{C}_{/\mathrm{Ens}} \to \mathrm{Ens}$. Ist $\mathcal{C}$ eine Trennkategorie, so können wir $\mathcal{C}_{/\mathrm{Ens}}$ zu einer Trennkategorie $\mathcal{C}_{/\curlywedge\mathrm{Ens}}$ machen und unseren Funktor zu einem Trennfunktor in die banale Trennkategorie $\curlywedge\mathrm{Ens}$ der Mengen, indem wir eine Trennung $\phi : \mathcal{F} \to G_1 \curlywedge \ldots \curlywedge G_r$ über einer Trennung $(f_1, \ldots, f_r) : X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ von Mengen als eine Familie $(\phi_x)_{x \in X}$ von Trennungen $\phi_x : \mathcal{F}_x \to G_{1,f_1(x)} \curlywedge \ldots \curlywedge G_{r,f_r(x)}$ erklären. Wir erhalten so einen Trennfunktor, den **Familientrennfunktor**

$$\mathcal{C}_{/\curlywedge\mathrm{Ens}} \to \curlywedge\mathrm{Ens}$$

Manchnmal vereinfachen wir hier auch die Notation zu $\mathcal{C}_{/\mathrm{Ens}} \to \curlywedge\mathrm{Ens}$ oder zu $\mathcal{C}_{/\mathrm{Ens}} \to \mathrm{Ens}$. Besitzt $\mathcal{C}$ stabil universelle Trennungen, so ist das sogar eine Trennfaserung, die **Familientrennfaserung**. Kartesisch sind dabei genau alle Familien (ϕ_x) aus universellen Trennungen. In diesem Fall haben wir einen natürlichen Isomorphismus

$$(\mathcal{C}_{/\curlywedge\mathrm{Ens}})^{\mathrm{otf}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\mathrm{otf}})_{/\curlywedge\mathrm{Ens}}$$

von Trennfaserungen über $\curlywedge\mathrm{Ens}$ zwischen der oppinvertierten Familientrennfaserung und der Familientrennfaserung der oppinvertierten Trennkategorie.

Beispiel 21.1.6.7. Die Mengengarbentrennfaserung 21.1.2.6 und die Mengengarbenoptrennfaserung 21.1.2.7 sind zueinander oppinvers, in Formeln und unter etwas sorgloser Verwendung des Gleichheitszeichens haben wir also

$$\mathrm{Ens}_{/\!/\mathrm{Top}} = (\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}})^{\mathrm{otf}}$$

Ich finde die Mengengarbentrennfaserung anschaulicher, aber die Mengengarbenoptrennfaserung ist algebraisch einfacher und läßt sich leichter verallgemeinern. Im Fall der Optrennfaserung der abelschen Garben kann ich für die oppinvertierte Trennfaserung keine Anschauung mehr anbieten, die mir weiterhelfen würde.

Beispiel 21.1.6.8 (**Verschiedene Trennungen im diskreten Fall**). Wir spezialisieren das Vorhergehende auf den Fall diskreter Räume. Eine Mengengarbe $\mathcal{A}$ auf einem diskreten Raum X ist eine durch X indizierte Mengenfamilie $(\mathcal{A}_x)_{x\in X}$. Gegeben Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : X \to Z$ sowie Mengengarben $\mathcal{B}$ auf Y und $\mathcal{C}$ auf Z ist eine Garbenoptrennung $\phi \in \mathrm{Ens}_{/\!/(f,g)}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \curlywedge \mathcal{C})$ über der Zweitrennung $(f, g) : X \to Y \curlywedge Z$ ein Datum $(\phi_x)_{x\in X}$ bestehend aus Abbildungen $\phi_x : \mathcal{B}_{f(x)} \times \mathcal{C}_{g(x)} \to \mathcal{A}_x$ für alle $x \in X$. Dahingegen ist eine Garbentrennung $\psi \in \mathrm{Ens}_{/(f,g)}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \curlywedge \mathcal{C})$ ein Datum $(\psi_x)_{x\in X}$ bestehend aus Abbildungen $\psi_x : \mathcal{A}_x \to \mathcal{B}_{f(x)} \times \mathcal{C}_{g(x)}$ für alle $x \in X$. Das kann auch als ein Spezialfall unserer Erkenntnisse in 21.1.6.6 verstanden werden.

21.1.6.9 (**Faserweises Dualisieren als Trennfunktor**). Gegeben sei eine Trennfaserung zu einer banalen Trennkategorie $\mathscr{M} \to \curlywedge\mathscr{T}$ derart, daß alle Objekte der opponierten Fasern dualisierbar sind. Wir behaupten, daß dann das faserweise Dualisieren einen Trennfunktor

$$\mathscr{M}^{\mathrm{otf}} \to \mathscr{M}^{\mathrm{f}}$$

induziert wie folgt. Ein Trennung $\mathcal{F} \to \mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_r$ über einer Trennung $(f_1, \ldots, f_r) : X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ der Basis in $\mathscr{M}^{\mathrm{otf}}$ ist wie in 21.1.6.4 ausgeführt ein Element von

$$\mathscr{M}^{\mathrm{otf}}_{\psi}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_r) := \mathscr{M}_X(\psi^{\dagger}(\mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_r), \mathcal{F})$$

In unserem speziellen Fall haben wir also Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{M}^{\mathrm{otf}}_{\psi}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_r) \arrow[d, equal] & \mathscr{M}^{\mathrm{tf}}_{\psi}(\mathcal{F}^{\vee}, \mathcal{G}_1^{\vee} \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_r^{\vee}) \arrow[d, equal] \\
\mathscr{M}_X(f_1^*\mathcal{G}_1 \otimes \ldots \otimes f_r^*\mathcal{G}_r, \mathcal{F}) \arrow[d, equal] & \mathscr{M}_{/X}(f_1^*(\mathcal{G}_1^{\vee}) \otimes \ldots \otimes f_r^*(\mathcal{G}_r^{\vee}), \mathcal{F}^{\vee}) \\
\mathscr{M}_{/X}(\mathcal{F}, f_1^*\mathcal{G}_1 \otimes \ldots \otimes f_r^*\mathcal{G}_r) \arrow[r] & \mathscr{M}_{/X}((f_1^*\mathcal{G}_1 \otimes \ldots \otimes f_r^*\mathcal{G}_r)^{\vee}, \mathcal{F}^{\vee}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

mit dem Dualisieren in der unteren Horizontale und Vorschalten der natürlichen Morphismen 18.1.4.21 vom Tensorprodukt der Dualen zum Dualen des Tensorprodukts und der natürlichen Morphismen 21.1.5.13 vom Rückzug des Dualen zum Dualen des Rückzugs in der rechten Vertikale. Man kann nun zeigen, daß diese Vorschrift auf Trennungen in der Tat einen Trennfunktor induziert wie behauptet. Im Spezialfall, daß $\mathscr{T}$ die finale Trennkategorie ist, haben wir das bereits in 18.1.6.25 in Gestalt eines Dualisierungsfunktors $\mathcal{M}^{\mathrm{t}} \to \mathcal{M}^{\mathrm{ot}}$ für eine Trennschmelzkategorie mit Multihom $\mathcal{M}$ kennengelernt. In der dort gegebene Fassung geschieht das Dualisieren in $\mathcal{M}^{\mathrm{s}}$ und in der hier gegebene Fassung in den Fasern der Schmelzkofaserung $\mathscr{M}^{\mathrm{osk}}$.

21.2 Derivierter Trennrückzug

21.2.1 Motivation

21.2.1.1. Gegeben Morphismen $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ und $\mathcal{E} \to \mathcal{H}$ von abelschen Garben auf einem topologischen Raum X mag man sie in der derivierten Kategorie $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ zusammentensorieren wollen zu einem Morphismus in der derivierten Kategorie

$$(\mathcal{F} \otimes^{\mathrm{L}} \mathcal{E}) \to (\mathcal{G} \otimes^{\mathrm{L}} \mathcal{H})$$

ihrer derivierten Tensorprodukte. Das scheint mir nicht vollständig trivial, wenn wie das derivierte Tensorprodukt wie üblich mit flachen Linksauflösungen beschrieben wird und die Morphismen in der derivierten Kategorie mit Rechtsauflösungen durch injektive Rechtsauflösungen.

21.2.1.2. Etwas allgemeiner könnten wir bereits mit Morphismen in der derivierten Kategorie beginnen, etwa mit Klassen der Garbenkohomologie $a \in \mathrm{H}^p X$ und $b \in \mathrm{H}^q X$ interpretiert als Morphismen $a : \mathbb{Z}_X \to \mathbb{Z}_X[p]$ und $b : \mathbb{Z}_X \to \mathbb{Z}_X[q]$, und verstehen wollen, inwiefern $a \otimes b : \mathbb{Z}_X \otimes^{\mathrm{L}} \mathbb{Z}_X \to \mathbb{Z}_X[p] \otimes^{\mathrm{L}} \mathbb{Z}_X[q]$ unter den „offensichtlichen Identifikationen“ der Verknüpfung $b[p] \circ a : \mathbb{Z}_X \to \mathbb{Z}_X[p+q]$ entspricht.

21.2.2 Lokalisierung von Kofaserungen

21.2.2.1. Ich erinnere daran, daß sich nach 20.1.4.10 bei der Lokalisierung einer Kategorie nach einem Rechtsoresystem S die Morphismen der Lokalisierung als Äquivalenzklassen von Rechtsbrüchen $s^{-1} \circ f$ mit $s \in S$ beschreiben lassen, bei denen also der Zähler rechts steht.

Definition 21.2.2.2. Sei $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Funktor. Unter einem **faserweisen Rechtsoresystem in** $\mathscr{C}$ verstehen wir ein multiplikatives System S in $\mathscr{C}$, das über den Identitäten der Basis liegt und die Eigenschaft hat, daß für alle $X \in \mathscr{B}$ die Menge S_X der S-Morphismen über id_X ein Rechtsoresystem der Faser $\mathscr{C}_X$ ist.

21.2.2.3 (**Diskussion der Terminologie**). Man beachte, daß in diesem Zusammenhang der Zusatz „faserweise“ die Bedingung „Rechtsoresystem“ sowohl verschärft als auch abschwächt. Will ich betonen, daß der Begriff „Rechtsoresystem“ nicht faserweise gemeint ist, so spreche ich von einem **globalen Rechtsoresystem**.

21.2.2.4. Analog erklären wir die Begriffe eines **faserweisen Linksoresystems**, eines **faserweisen Oresystems** und eines **faserweisen gesättigten Oresystems**.

21.2.2.5 (**Lokalisierung einer Faser als Faser der Lokalisierung**). Sei ein Funktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ gegeben und sei S ein globales Rechtsoresystem in $\mathscr{C}$ über den Identitäten von $\mathscr{B}$. Gegeben $X \in \mathscr{B}$ ist die Menge S_X der S-Morphismen über id_X dann offensichtlich ein Rechtsoresystem in der Faser $\mathscr{C}_X$ und für den auf der Lokalisierung induzierten Funktor $p_S : S^{-1}\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ sind die offensichtlichen Funktoren Isomorphismen von Kategorien

$$S_X^{-1}\mathscr{C}_X \xrightarrow{\sim} (S^{-1}\mathscr{C})_X$$

zwischen der Lokalisierung der Faser und der Faser der Lokalisierung. Das folgt direkt aus der Interpretation der Morphismen der Lokalisierung als Äquivalenzklassen von Brüchen. Es gilt genauso für Linksoresysteme.

21.2.2.6 (**Rückzug von Funktoren**). Gegeben Funktoren $F : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ und $G : \mathscr{U} \to \mathscr{B}$ zu derselben Zielkategorie bezeichne

$$\mathscr{C} \times_{\mathscr{B}} \mathscr{U}$$

das **Faserprodukt in der Kategorie** Cat **der Kategorien**. Explizit können wir das Faserprodukt $\mathscr{C} \times_{\mathscr{B}} \mathscr{U}$ als Unterkategorie der Produktkategorie konstruieren wie folgt: Als Objekte nehmen wir alle Paare $(C, D) \in \mathscr{C} \times \mathscr{U}$ mit $F(C) = G(D)$ und als Morphismen $(C, D) \to (C', D')$ alle Paare (u, v) von Morphismen mit $F(u) = G(v)$. Je nach Kontext verwenden wir für dies Faserprodukt auch die Notation $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ und nennen $\mathscr{C}_{\mathscr{U}} \to \mathscr{U}$ den **zurückgezogenen Funktor**. Im Fall der durch ein Objekt $X \in \mathscr{B}$ gegebenen Einbettung $\mathrm{cat} \xhookrightarrow{\sim} \mathscr{B}$ der terminalen Kategorie spezialisiert $\mathscr{C}_{\mathrm{cat}}$ zu unserer Faser $\mathscr{C}_X$.

21.2.2.7 (**Rückzug erhält Faserungen und Kofaserungen**). Seien Funktoren $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ und $\mathscr{U} \to \mathscr{B}$ gegeben. Ist ein Morphismus u in $\mathscr{C}$ kartesisch beziehungsweise kokartesisch für $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$, so ist auch jeder Morphismus der Gestalt (u, v) im Faserprodukt kartesisch beziehungsweise kokartesisch für $\mathscr{C}_{\mathscr{U}} \to \mathscr{U}$. Ist $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ eine Faserung beziehungweise Kofaserung und $\mathscr{U} \to \mathscr{B}$ ein beliebiger Funktor, so ist auch $\mathscr{C}_{\mathscr{U}} \to \mathscr{U}$ eine Faserung beziehungweise Kofaserung.

21.2.2.8 (**Lokalisierung und Rückzug auf neue Basiskategorie**). Sei ein Funktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ gegeben und sei S ein globales Rechtsoresystem in $\mathscr{C}$ über den Identitäten von $\mathscr{B}$. Gegeben ein Funktor $\mathscr{U} \to \mathscr{B}$ sind die offensichtlichen Funktoren Isomorphismen

$$S_{\mathscr{U}}^{-1}\mathscr{C}_{\mathscr{U}} \xrightarrow{\sim} (S^{-1}\mathscr{C})_{\mathscr{U}}$$

zwischen der Lokalisierung des Rückzugs und dem Rückzug der Lokalisierung mit der Notation $S_{\mathscr{U}}$ für das Urbild von S unter $\mathscr{C}_{\mathscr{U}} \to \mathscr{C}$. Das folgt direkt aus der Interpretation der Morphismen der Lokalisierung als Äquivalenzklassen von Brüchen und gilt ganz genauso auch für globale Linkssoresysteme.

Satz 21.2.2.9 (Lokalisieren einer Kofaserung nach globalem Rechtsoresystem). *Seien $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Kofaserfunktor und S ein globales Rechtsoresystem in $\mathscr{C}$ über den Identitäten der Basis. So ist auch der auf der Lokalisierung induzierte Funktor ein Kofaserfunktor*

$$p_S : S^{-1}\mathscr{C} \to \mathscr{B}$$

und jeder kokartesische Morphismus in $\mathscr{C}$ bleibt kokartesisch in $S^{-1}\mathscr{C}$.

Beweis. Um das zu zeigen beachten wir für jeden Morphismus $f : X \to Y$ in der Basis sowie Objekte $\mathcal{F}$ über X und $\mathcal{G}$ über Y die natürlichen Isomorphismen

$$\begin{tikzcd}
(S^{-1}\mathscr{C})_f(\mathcal{F},\mathcal{G}) \arrow[d, "\wr"] & (S^{-1}\mathscr{C})_Y(f_\dagger\mathcal{F},\mathcal{G}) \\
\operatorname{colf}_{\mathcal{G}\xrightarrow{S}\mathcal{G}'} \mathscr{C}_f(\mathcal{F},\mathcal{G}') \arrow[r, "\sim"] & \operatorname{colf}_{\mathcal{G}\xrightarrow{S}\mathcal{G}'} \mathscr{C}_Y(f_\dagger\mathcal{F},\mathcal{G}') \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Der Satz folgt. □

Lemma 21.2.2.10 (Faserweise Rechtsoresysteme als globale Rechtsoresysteme). *Seien $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ eine Kofaserung und S ein faserweises Rechtsoresystem in $\mathscr{C}$. Können wir für jeden Morphismus der Basis einen Vorschub wählen, der S stabilisiert, so ist S sogar ein globales Rechtsoresystem in $\mathscr{C}$.*

21.2.2.11. In der Situation von Lemma 21.2.2.10 können wir insbesondere unsere Proposition 21.2.2.9 anwenden und erhalten durch Lokalisieren eine Kofaserung $p_S : S^{-1}\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ mit der Eigenschaft, daß kokartesische Morphismen in $\mathscr{C}$ kokartesisch bleiben in $S^{-1}\mathscr{C}$.

Beweis. Jeder Linksbruch läßt sich zu einem Rechtsbruch umschreiben, das zeigt das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r] & f_\dagger\mathcal{F} \arrow[r, dashed] & \mathcal{G}' \\
\mathcal{F}' \arrow[u, "S"] \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & f_\dagger\mathcal{F}' \arrow[u, "S"] \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[u, dashed, "S"']
\end{tikzcd}$$

zeigt. Je zwei Morphismen, die durch Vorschalten eines S-Morphismus egalisiert werden, können auch durch Nachschalten eines S-Morphismus egalisiert werden, das zeigt das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[rr, bend left=60] & f_\dagger\mathcal{F} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathcal{G} \arrow[d, dashed, "S"'] \\
\mathcal{F}' \arrow[u, "S"] \arrow[r] & f_\dagger\mathcal{F}' \arrow[u, "S"] & \mathcal{G}'
\end{tikzcd}$$

Das Lemma ist bewiesen. □

21.2.2.12 (**Opponierte Aussagen zur Lokalisierung von Faserungen**). Ist $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ eine Faserung und S ein globales Linksoresystem in $\mathscr{C}$, so erhalten wir dual zu 21.2.2.9 durch Lokalisieren wieder eine Faserung $p_S : S^{-1}\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ mit der Eigenschaft, daß kartesische Morphismen in $\mathscr{C}$ kartesisch bleiben in $S^{-1}\mathscr{C}$. Ist $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ eine Faserung und S ein faserweises Linksoresystem in $\mathscr{C}$ und können wir für jeden Morphismus der Basis einen Rückholfunktor wählen, der unser faserweises Linksoresystem S stabilisiert, so ist S opponiert zu 21.2.2.10 ein globales Linksoresystem in $\mathscr{C}$ und wir erhalten durch Lokalisieren wieder eine Faserung $p_S : S^{-1}\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ mit der Eigenschaft, daß kartesische Morphismen in $\mathscr{C}$ kartesisch bleiben in $S^{-1}\mathscr{C}$.

Vorschau 21.2.2.13. Die Lokalisierung von Kofaserungen nach faserweisen Linksoresystemen beziehungsweise von Faserungen nach faserweisen Rechtsoresystemen ist delikater. In 21.2.5.11, 21.2.5.12 und 21.2.5.13 diskutieren wir Annahmen, unter denen in diesen Fällen die Lokalisierung wieder eine Kofaserung ist und die Linksderivierten der Vorschübe die Vorschübe der lokalisierten Kofaserung sind.

21.2.3 Quisrechtsentfaltung von Garbenkomplexen

21.2.3.1. Gegeben ein Universum $\mathfrak{U}$ im Sinne von 4.7.11.3 mit $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$ und $X \in \mathfrak{U}$ ein topologischer Raum bezeichne $\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X}$ die Kategorie der abelschen Garben $\mathcal{F}$ auf X mit $\mathcal{F}(V) \in \mathfrak{U}\ \forall V \Subset X$. Das ist eine abelsche Kategorie, die Kolimiten und Limiten über alle $\mathfrak{U}_\in$-$\mathfrak{U}_\in^{\to}$-Köcher besitzt, also alle Köcher, deren Punktmenge und Morphismenmenge Elemente von $\mathfrak{U}$ sind.

Satz 21.2.3.2 (**Existenz von Quisrechtsentfaltungen**). *Sei $\mathfrak{U}$ ein Universum mit $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$ und sei $X \in \mathfrak{U}$ ein topologischer Raum. So besitzt jeder Komplex $A \in \mathrm{Hot}(\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X})$ eine Quisrechtsentfaltung in $\mathrm{Hot}(\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X})$ durch einen Komplex aus injektiven Garben.*

21.2.3.3. Der Beweis braucht einige Vorbereitungen und wird im Anschluß an 21.2.3.14 gegeben.

21.2.3.4. Der Satz zeigt, daß gegeben ein Universum $\mathfrak{U}$ mit $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$ und $X \in \mathfrak{U}$ ein topologischer Raum $\mathrm{Der}(\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X})$ eine $\mathfrak{U}_\in$-$\mathfrak{U}_\in^{\to}$-Kategorie ist. Er zeigt auch, daß der Übergang zu einem größeren Universum einen volltreuen Funktor zwischen den jeweiligen derivierten Kategorien von abelschen Garben liefert.

21.2.3.5. Eine Quisrechtsentfaltung muß keineswegs in einem Komplex aus injektiven Garben landen. In der Homotopiekategorie kann ja ein Komplex aus injektiven Garben durchaus isomorph sein zu Komplexen, die nicht aus injektiven Garben bestehen.

Ergänzung 21.2.3.6. Ist zusätzlich $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X}$ eine Garbe von Ringen, so gilt dasselbe für die Kategorie $\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/(X,\mathcal{A})}$ der Garben von $\mathcal{A}$-Moduln aus $\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X}$, genauer ihre Homotopiekateorie $\mathrm{Hot}(\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/(X,\mathcal{A})})$. Der Beweis bleibt mutatis mutandis derselbe.

Definition 21.2.3.7. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Unter einer **angeordneten Filtrierung** eines Objekts $A \in \mathcal{C}$ verstehen wir einen Ordnungshomomorphismus $(A_\omega)_{\omega\in\Omega}$ einer angeordneten Menge Ω in die teilgeordnete Menge der Unterobjekte von A.

21.2.3.8. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $(A_\omega)_{\omega\in\Omega}$ eine angeordnete Filtrierung von A. Existieren die filtrierenden Kolimites in $\mathcal{C}$ für angeordnete Systeme von Unterobjekten von A und sind diese wieder Unterobjekte von A, so setzen wir allgemein für $\Gamma \subset \Omega$ eine Teilmenge

$$A_\Gamma := \operatorname*{colf}_{\eta\in\Gamma} A_\eta \qquad \text{und speziell} \qquad A_{<\omega} := \operatorname*{colf}_{\eta<\omega} A_\eta.$$

21.2.3.9. Gegeben eine Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X erklären wir ihre **Kardinalität** $\mathrm{card}(\mathcal{F}) := \mathrm{card}(\bar{\mathcal{F}})$ als die Kardinalität ihres étalen Raums. Gegeben ein Komplex von Garben $\mathcal{F}$ setzen wir $\mathrm{card}(\mathcal{F}) := \max(\mathrm{card}(\mathcal{F}^i))$.

Proposition 21.2.3.10 (Enge Filtrierungen exakter Garbenkomplexe). *Seien X ein topologischer Raum und $\alpha := \max(\mathrm{card}(X), \mathrm{card}(\mathbb{N}))$.*

1. *Für jeden surjektiven Morphismus $f : A \twoheadrightarrow B$ in $\mathrm{Ab}_{/X}$ gibt es $A_0 \subset A$ mit $\mathrm{card}(A_0) \le \alpha\,\mathrm{card}(B)$ und $f : A_0 \twoheadrightarrow B$;*

2. *Jeder von Null verschiedene exakte Komplex $T \neq 0$ in $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{/X})$ besitzt einen von Null verschiedenen exakten Unterkomplex $0 \neq S \subset T$ mit $\mathrm{card}(S) \le \alpha$;*

3. *Jeder exakte Komplex T in $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{/X})$ besitzt eine wohlgeordnete Filtrierung durch Unterkomplexe T_ω, bei der alle Subquotienten $T_\omega/T_{<\omega}$ exakt sind von einer Kardinalität $\mathrm{card}(T_\omega/T_{<\omega}) \le \alpha$ und es ω gibt mit $T_\omega = T$.*

Beweis. 1. Wir wählen für jedes Element eines jeden Halms $b_x \in B_x$ eine offene Umgebung $U \Subset X$ von x und $t \in A(U)$ mit $t_x \mapsto b_x$. Das liefert einen Morphismus $\bigoplus_{(U,t)} \mathbb{Z}_{U\subset X} \to A$ mit der Eigenschaft, daß sein Bild A_0 surjektiv auf B geht. Unsere direkte Summe ist eine Untergarbe der direkten Summe $\bigoplus_{(U,t)} \mathbb{Z}_X$ von konstanten Garben, deshalb kann man ihre Kardinalität abschätzen durch $\alpha\,\mathrm{card}(B)$.

2. Sicher finden wir einen Index j mit $\ker(T^j \to T^{j+1}) \neq 0$ und eine von Null

verschiedene Untergarbe S^j dieses Kerns mit $\operatorname{card}(S^j) \leq \alpha$. Dann bilden wir den Pullback

$$\begin{tikzcd} S^j \arrow[r] & T^j \\ M^{j-1} \arrow[u] \arrow[r] & T^{j-1} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Er ist auch auf den Halmen ein Pullback, also gilt $M^{j-1} \twoheadrightarrow S^j$. Nach Teil 1 finden wir eine Untergarbe $M_0^{j-1} \subset M^{j-1}$ mit $\operatorname{card}(M_0^{j-1}) \leq \alpha$ und $M_0^{j-1} \twoheadrightarrow S^j$. Dann nehmen wir $S^{j-1} := M^{j-1}$ und machen induktiv weiter.

3. Wir finden nach dem Zorn'schen Lemma eine maximale wohlgeordnete Familie von Unterkomplexen $(T_\omega)_{\omega\in\Omega}$ mit allen fraglichen Eigenschaften mit Ausnahme der letzten. Sie sind alle exakt, denn sonst gäbe es einen kleinsten Index ω, für den T_ω nicht exakt wäre, und dann wäre $T_{<\omega}$ exakt und $T_\omega/T_{<\omega}$ exakt und damit T_ω doch exakt nach der langen exakten Homologiesequenz. Also ist auch ihr Kolimes T_Ω exakt. Ist dieser Komplex bereits ganz T, so sind wir fertig. In jedem Fall ist T/T_Ω exakt, und ist es nicht Null, so finden wir darin einen von Null verschiedenen exakten Unterkomplex einer Kardinalität $\leq \alpha$. Durch sein Urbild in T könnten wir dann unsere wohlgeordnete Familie vergrößern im Widerspruch zur Maximalität. □

Korollar 21.2.3.11 (Testen auf Quisrechtsentfaltetheit mit kleinen Komplexen). *Seien X ein topologischer Raum und $\alpha := \max(\operatorname{card}(X), \operatorname{card}(\mathbb{N}))$. Ist J ein Komplex aus injektiven Garben und gilt $\operatorname{Hot}_{\operatorname{Ab}/X}(T, J) = 0$ für jeden exakten Komplex T mit $\operatorname{card}(T) \leq \alpha$, so folgt $\operatorname{Hot}_{\operatorname{Ab}/X}(T, J) = 0$ für jeden exakten Komplex.*

Beweis. Sei T ein beliebiger exakter Komplex. Nach 21.2.3.10 besitzt T eine wohlgeordnete Filtrierung durch Unterkomplexe T_ω mit $\operatorname{card}(T_\omega/T_{<\omega}) \leq \alpha\ \forall\omega$ und $T_\omega = T$ für mindestens ein ω. Die Komplexe $\operatorname{Ab}_{/X}(T_\omega, J)$ von abelschen Gruppen bilden dann ein transfinit surjektives System von Komplexen, dessen Kernkomplexe

$$\ker\left(\operatorname{Ab}_{/X}(T_\omega, J) \to \liminf_{\eta<\omega} \operatorname{Ab}_{/X}(T_\eta, J)\right) = \operatorname{Ab}_{/X}(T_\omega/T_{<\omega}, J)$$

nach unseren Annahmen an jeder Stelle exakt sind. Mit 17.7.1.50 folgt, daß auch $\operatorname{Ab}_{/X}(T, J)$ exakt ist. □

Lemma 21.2.3.12 (Nullhomotopmachen von Morphismen). *Sei $\mathfrak{U}$ ein Universum mit $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$. Seien $X \in \mathfrak{U}$ ein topologischer Raum, $E \in \mathfrak{U}$ eine Menge und $A, T_e \in \operatorname{Ket}(\mathfrak{U}\operatorname{Ab}_{/X})$ für $e \in E$ Komplexe von abelschen Garben auf X mit T_e exakt. Sei $(f_e : T_e \to A)_{e\in E}$ eine Familie von Morphismen nach A. So gibt es einen*

injektiven Quasiisomorphismus $g : A \hookrightarrow B$ in einen Komplex $B \in \mathrm{Ket}(\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X})$ derart, daß alle $g \circ f_e$ nullhomotop sind.

Beweis. Wir wählen auf E eine Wohlordnung und nennen diese wohlgeordnete Menge Ω. Dann konstruieren wir mit transfiniter Induktion ein direktes System $(B_\omega)_{\omega\in\Omega}$ von Komplexen mit injektiven Quasiisomorphismen $g_\omega : A \hookrightarrow B_\omega$ und $g_\omega \circ f_\omega$ nullhomotop durch

$$T_\omega \to A \hookrightarrow \operatorname*{colf}_{\eta<\omega} B_\eta \to B_\omega$$

mit B_ω dem Abbildungskegel der Komposition der beiden vorderen Morphismen. Ist $\omega \in \Omega$ das kleinste Element, so ist der „leere Kolimes" als A selber zu verstehen, also als das „initiale Objekt in der Kategorie der Komplexe mit einem ausgezeichneten Morphismus von A dorthin". Schließlich löst dann $g : A \hookrightarrow B := \mathrm{colf}_{\omega\in\Omega} B_\omega$ unser Problem. □

Lemma 21.2.3.13. *Sei $\mathfrak{U}$ ein Universum mit $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$. Seien $X \in \mathfrak{U}$ ein topologischer Raum und $A \in \mathrm{Ket}(\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X})$ ein Komplex von abelschen Garben auf X. So existieren ein Komplex $B \in \mathrm{Ket}(\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X})$ und ein injektiver Quasiisomorphismus $h : A \hookrightarrow B$ mit der Eigenschaft, daß $h(A^i)$ in einer injektiven Untergarbe von B^i liegt für alle $i \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Wir wählen für alle i eine Einbettung $f^i : A^i \hookrightarrow J^i$ in eine injektive Garbe aus $\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X}$. Wir bilden den Komplex $K^i = J^i \oplus J^{i+1}$ mit dem Differential $d(x, y) = (y, 0)$. Die Einbettung $(f^i, f^{i+1}d)^\top : A^i \hookrightarrow K^i$ ist dann eine Kettenabbildung. Wir bilden nun erst den Kokernkomplex (C^i) dieser Kettenabbildung und dann den Komplex $[-1]\,\mathrm{Keg}(K \to C)$. Die natürliche Kettenabbildung von A in diesen letzten Komplex hat schließlich die gesuchten Eigenschaften. □

Proposition 21.2.3.14. *Sei $\mathfrak{U}$ ein Universum mit $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$. Seien $X \in \mathfrak{U}$ ein topologischer Raum, $E \in \mathfrak{U}$ eine Menge und $T_e \in \mathrm{Ket}(\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X})$ exakte Komplexe von abelschen Garben auf X. So gibt es für jeden Komplex $A \in \mathrm{Ket}(\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X})$ einen Quasiisomorphismus $A \overset{\smile}{\to} I$ zu einem Komplex $I \in \mathrm{Ket}(\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X})$ aus injektiven Garben mit*

$$\mathrm{Hot}_{\mathrm{Ab}_{/X}}(T_e, I) = 0 \qquad \forall e \in E$$

Beweis. Sei α eine Kardinalität einer Menge aus $\mathfrak{U}$ mit $\alpha \geq \mathrm{card}(T_e)$ für alle $e \in E$ und $\alpha \geq \max(\mathrm{card}(X), \mathrm{card}(\mathbb{N}))$. Sei Γ die kleinste wohlgeordnete Menge unseres Universums mit $\mathrm{card}(\Gamma) > \alpha$. Wir konstruieren ein direktes System $(J_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ von Komplexen abelscher Garben und beginnen mit $J_0 := A$. Dann wählen wir mit 21.2.3.12 injektive Quasiisomorphismen

$$\operatorname*{colf}_{\eta<\gamma} J_\eta \hookrightarrow J_\gamma$$

induktiv so, daß alle Morphismen von irgendwelchen T_e in den Kolimes nullhomotop werden unter dem Nachschalten des Morphismus nach J_γ. Nach 21.2.3.13 dürfen wir zusätzlich annehmen, daß die Bilder unserer Injektionen in jedem Grad jeweils in injektiven Untergarben enthalten sind. Ich behaupte, daß dann der Kolimes

$$\operatorname*{colf}_{\gamma\in\Gamma} J_\gamma$$

die gesuchte Eigenschaft hat. In der Tat muß jeder Morphismus von einem T_e dorthin aus Kardinalitätsgründen bereits in einem der J_γ landen, vergleiche etwa 6.5.4.8, und damit nullhomotop werden. Weiter muß unser Kolimes aus injektiven Garben bestehen, da er das Injektivitätskriterium über Ideale 19.3.5.9 erfüllt. □

Beweis für die Existenz von Quisrechtsentfaltungen 21.2.3.2. Sei $(T_e)_{e\in E}$ ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen exakter Komplexe in $\mathrm{Ket}(\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X})$ einer Kardinalität $\leq \max(\mathrm{card}(X), \mathrm{card}(\mathbb{N}))$. Konstruieren wir zu dieser Familie einen Quasiisomorphismus $A \overset{\sim}{\to} I$ zu einem Komplex aus injektiven Garben mit $\mathrm{Hot}_{\mathrm{Ab}_{/X}}(T_e, I) = 0\ \forall e \in E$ wie in 21.2.3.14 ausgeführt, so folgt mit unserem Korollar 21.2.3.11, daß I in $\mathrm{Hot}(\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X})$ bereits quisrechtsentfaltet sein muß. □

21.2.3.15 (**Produkte und Koprodukte derivierter Modulgarben**). Gegeben sei ein geringter Raum $X = (X, \mathcal{A})$. Existieren für eine Menge I alle I-Koprodukte in der Kategorie der Modulgarben $\mathrm{Ab}_{/X}$, so existieren auch alle I-Koprodukte in den Kategorien $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{/X})$, $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X})$, $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ und stimmen überein mit den offensichtlichen „gliedweisen Koprodukten“. Das folgt mit dem zweiten Teil unserer Proposition 20.3.9.2 aus der Existenz 21.2.3.6 von Quisrechtsentfaltungen für beliebige Homotopiekomplexe unserer abelschen Kategorie. Existieren weiter für eine Menge I alle I-Produkte in der Kategorie der Modulgarben $\mathrm{Ab}_{/X}$, so existieren auch alle I-Produkte in den Kategorien $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{/X})$, $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X})$, $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ und können als gliedweise Produkte von Quisrechtsentfaltungen berechnet werden. Das folgt aus dem ersten Teil unserer Proposition 20.3.9.2.

Übungen

Übung 21.2.3.16 (**Derivierte Kategorie der Garben auf einem Koprodukt**). Ist ein Raum X eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ und ist $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ ein Komplex von Garben auf X, so induzieren die Einheiten beziehungsweise Koeinheiten der jeweiligen Adjunktionen Isomorphismen

$$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{in}_{i!}\,\mathrm{in}_i^*\,\mathcal{F} \overset{\sim}{\to} \mathcal{F} \overset{\sim}{\to} \prod_{i\in I} \mathrm{in}_{i*}\,\mathrm{in}_i^*\,\mathcal{F}$$

Zusätzlich erinnern wir daran, daß hier nach 19.4.9.11 die natürlichen Transformationen Isotransformationen $\mathrm{in}_{i!} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{in}_{i*}$ sind. Hinweis: Für abelsche Garben war der erste Isomorphismus 19.4.9.21. Für die Homotopiekategorien folgt es unmittelbar. Für die derivierten Kategorien folgt es dann aus der Exaktheit der beteiligten Funktoren. Für den zweiten Isomorphismus verwende man die Beschreibung von Produkten in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ aus 21.2.3.15.

Übung 21.2.3.17 (**Hyperkohomologie auf einem Koprodukt**). Sei ein Raum X eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ und $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ ein Komplex von Garben auf X. Daß derivierte direkte Bilder als Rechtsadjungierte mit Produkten vertauschen liefert einen Isomorphismus $\mathrm{fin}_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{fin}_* \mathrm{in}_i^* \mathcal{F}$ in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$. Da auch die Funktoren $\mathcal{H}^q = \mathrm{Der}_{\mathrm{Ab}}(\mathbb{Z}[-q],\ )$ mit Produkten vertauschen erhalten wir, daß die Rückzüge Isomorphismen

$$\mathbb{H}^q(X;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathbb{H}^q(X_i;\mathcal{F})$$

liefern. Das verallgemeinert unsere Erkenntnisse aus 19.4.3.30 auf die Hyperkohomologie.

Übung 21.2.3.18 (**Produkte als Vorschub**). Ist X ein topologischer Raum und $(\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten von $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ und sind $\mathrm{em}_i : X \to X \times I$ die Einbettungen und ist ein Objekt $\mathcal{G} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X\times I})$ gegeben zusammen mit Isomorphismen $\mathrm{em}_i^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_i$, so liefern diese Isomorphismen zusammen nach 21.2.3.17 einen Isomorphismus $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{em}_{i*} \mathcal{G}_i$ und das Anwenden des Vorschubs unter der Projektion auf X liefert einen Isomorphismus

$$\mathrm{pr}_{X*} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathcal{G}_i$$

Hinweis: Der derivierte Vorschub vertauscht als Rechtsadjungierter stets mit Produkten.

Übung 21.2.3.19 (**Koprodukte als Schreivorschub**). Seien X ein topologischer Raum, $(\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten von $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ und $\mathrm{em}_i : X \to X \times I$ die Einbettungen. Gegeben ein Objekt $\mathcal{G} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X\times I})$ zusammen mit Isomorphismen $\mathrm{em}_i^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_i$ liefern diese Isomorphismen zusammen nach 21.2.3.17 einen Isomorphismus $\bigoplus_{i\in I} \mathrm{em}_{i!} \mathcal{G}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ und der Schreivorschub unter der Projektion auf X ist exakt und das Anwenden des zugehörigen derivierten Funktors liefert einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} \mathcal{G}_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_{X!} \mathcal{G}$$

Hinweis: Étaler separierter Basiswechsel 19.6.4.32.

Übung 21.2.3.20 (**Verschwindungskriterium für derivierte Garben**). Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ ein Komplex von abelschen Garben. Besitzt jeder Punkt $x \in X$ ein konfinales System von offenen Umgebungen $U \Subset X$ mit $\mathrm{fin}_* j^*\mathcal{F} = 0$ für $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung, so gilt bereits $\mathcal{F} = 0$. Hinweis: Da nach 19.4.9.14 das Ausdehnen durch Null unter einer offenen Einbettung ein exakter Funktor ist, macht der Rückzug unter einer offenen Einbettung quisrechtsentfaltete Komplexe zu quisrechtsentfalteten Komplexen. Man mag die Aussage alternativ auch aus 21.2.3.22 folgern.

Ergänzung 21.2.3.21. Man kann also lokal prüfen, ob ein vorgegebener Garbenkomplex in der derivierten Kategorie das Nullobjekt ist. Daß das halmweise geprüft werden kann, ist ja eh klar. Ein Komplex abelscher Garben ist eben exakt genau dann, wenn er auf allen Halmen exakte Komplexe induziert. Man kann jedoch nicht auf den Halmen prüfen, ob zwei Morphismen in der derivierten Kategorie der Garben übereinstimmen. Das geht nur bei echten Garben.

Übung 21.2.3.22 (**Beschreibung der höheren Vorschübe**). Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ und ein Komplex $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ auf X ist die q-te Kohomologiegarbe seines derivierten Vorschubs $\mathcal{H}^q(f_*\mathcal{F})$ natürlich isomorph zu der zur Prägarbe $V \mapsto \mathbb{H}^q(f^{-1}(V); \mathcal{F})$ assoziierten Garbe. Das verallgemeinert sowohl den in 19.6.6.2 besprochenen Fall einer abelschen Garbe $\mathcal{F}$ als auch das Verschwindungskriterium 21.2.3.20, das sich aus dem Spezialfall $f = \mathrm{id}$ ergibt. Für den Beweis kopiere man den Beweis von 19.6.6.2 und nutze die in 21.2.3.20 gegebenen Hinweise. Im Fall unbeschränkter Komplexe benötigt man auch hier die Quisrechtsentfaltungen aus 21.2.3.

Übung 21.2.3.23 (**Verschwindungskriterium für derivierte Garben, Variante**). Seien X, Y topologische Räume und $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X\times Y})$ ein Komplex von abelschen Garben. Besitzt jeder Punkt $x \in X$ ein konfinales System von offenen Umgebungen $U \Subset X$ mit $\mathrm{pr}_{Y*}(j \times \mathrm{id})^*\mathcal{F} = 0$ für $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung, so gilt bereits $\mathcal{F} = 0$. Hinweis: Folgt aus dem vorhergehenden.

21.2.4 Derivierte Garbenopfaserung

21.2.4.1. Wir erinnern aus 19.6.2.17 die Bifaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$, die wir die Garbenopfaserung genannt hatten und deren Fasern $\mathrm{Ab}_{/\!/X}$ opponiert sind zu den üblichen Kategorien $\mathrm{Ab}_{/X}$ von abelschen Garben auf X. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ sind Rückzug und Vorschub adjungierte Funktoren zwischen den additiven Kategorien $\mathrm{Ab}_{/\!/X}, \mathrm{Ab}_{/\!/Y}$ und somit nach 19.2.5.13 additive Funktoren. Gegeben $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/\!/X}$ und $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/\!/Y}$ liefert mithin die Adjunktion einen Gruppenisomorphismus $\mathrm{Ab}_{/\!/Y}(f_\dagger\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/\!/X}(\mathcal{F}, f^\dagger\mathcal{G})$ und wir können eine Addition auf

$$\mathrm{Ab}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

dadurch erklären, daß sie mit diesen Gruppenstrukturen verträglich ist. Es ist leicht zu sehen, daß für eine weitere stetige Abbildung $g : Y \to Z$ und $\mathcal{H} \in \mathrm{Ab}_{/\!/Z}$ die Verknüpfung $\mathrm{Ab}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \times \mathrm{Ab}_{/\!/g}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \to \mathrm{Ab}_{/\!/gf}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ biadditiv ist. In später eingeführter Terminologie haben wir so für unseren Funktor eine „relative additive Struktur" erhalten.

21.2.4.2. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ und Komplexe abelscher Garben $\mathcal{F} \in \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{/\!/X})$ und $\mathcal{G} \in \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{/\!/Y})$ erhalten wir analog zum Homkomplex einen Komplex abelscher Gruppen $\mathrm{Ab}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab})$ und Isomorphismen von Komplexen

$$\mathrm{Ab}_{/\!/Y}(f_\dagger \mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/\!/X}(\mathcal{F}, f^\dagger \mathcal{G})$$

Nehmen wir $\mathcal{Z}^0$ beziehungsweise $\mathcal{H}^0$ des Komplexes $\mathrm{Ab}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ als Morphismen von Garbenkomplexen über f, so erhalten wir weitere Bifaserungen, die wir

$$\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}}) \to \mathrm{Top} \quad \text{und} \quad \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}}) \to \mathrm{Top}$$

notieren, mit komponentenweisem $f^\dagger$ als Rückzug und komponentenweisem $f_\dagger$ als Vorschub. In später eingeführter Terminologie haben wir zu unserem Funktor $\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ mit „relativer additiver Struktur" den „relativ in dgAb angereicherten Funktor" der Komplexe gebildet und diesen „umstrukturiert" vermittels der Schmelzfunktoren $\mathcal{Z}^0$ beziehungsweise $\mathcal{H}^0$ von dgAb nach Ab.

21.2.4.3. In Bezug auf den Faserfunktor $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}}) \to \mathrm{Top}$ bilden die Quasiisomorphismen über den Identitäten der Basis ein faserweises Oresystem, das unter allen Rückzugfunktoren stabil ist. Nach 21.2.2.10 ist es damit sogar ein globales Linksoresystem in $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}})$. Wenn wir danach lokalisieren, erhalten wir nach 21.2.2.9 opponiert einen Faserfunktor $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}}) \to \mathrm{Top}$. Wir nennen unseren Funktor

$$\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}}) \to \mathrm{Top}$$

die **derivierte Garbenopfaserung**.

21.2.4.4 (**Fasern und Rückzüge der derivierten Garbenopfaserung**). Nach 21.2.2.8 opponiert sind die offensichtlichen Funktoren Isomorphismen

$$e_X : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}})_X$$

von der Lokalisierung der Faser zur Faser der Lokalisierung, die mit dem zugehörigen Strukturtransport eine triangulierte Kategorie wird. Nach 21.2.2.9 hat jeder kartesische Morphismus der Faserung $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}}) \to \mathrm{Top}$ kartesisches Bild in der derivierten Garbenopfaserung. Andererseits ist der Derivierte des opponierten Rückzugs $f^{(\dagger)}$ unter einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ nach 20.3.4.1 ein Paar $(f^\dagger, \tau)$ aus einem triangulierten Funktor $f^\dagger = \mathrm{R}f^{(\dagger)} : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/Y}) \to$

$\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/X})$ und einer Transformation, ja wegen der Exaktheit des Rückzugs Isotransformation $\tau : Q \circ (\mathrm{Hot}\, f^{(\dagger)}) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{R}f^{(\dagger)} \circ Q$. Zusammen mit dem Transportmorphismus $(\mathrm{Hot}\, f^{(\dagger)})(\mathcal{G}) \to \mathcal{G}$ für Komplexe $\mathcal{G} \in \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/Y})$ liefert τ also kartesische Morphismen

$$\mathrm{e}_X \left(\mathrm{R}f^{(\dagger)}(Q\mathcal{G})\right) \to (Q\mathcal{G})$$

der derivierten Garbenopfaserung. Wir sehen so, daß die Rückzüge der derivierten Garbenopfaserung triangulierte Funktoren sind. Genauer entsprechen sie den von unseren derivierten Rückzügen $f^* = \mathrm{L}f^{(*)} : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ aus 20.3.4.18 auf den opponierten Kategorien induzierten Funktoren $f^{*\mathrm{opp}}$.

Vorschau 21.2.4.5. Für nicht notwendig exakte Funktoren wird das in 21.2.5.12 und 21.2.5.13 diskutiert.

21.2.4.6 (**Derivierte Garbenopfaserung als Bifaserung**). Nach 20.3.4.18 hat f^* den Rechtsadjungierten $f_* = \mathrm{R}f_{(*)}$ und nach 19.6.3.13 ist damit unsere Faserung auch eine Kofaserung mit Vorschubfunktor f_*^{opp}. Formal besteht unsere Struktur aus einem Bifaserfunktor $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}}) \to \mathrm{Top}$ und einer Struktur von triangulierter Kategorie auf jeder Faser und einer $\mathbb{Z}$-Struktur auf jedem Rückzugsfunktor derart, daß alle Rückzüge triangulierte Funktoren werden und alle Identifikationen unserer Faserung mit den $\mathbb{Z}$-Strukturen verträglich sind. Damit haben wir die ersten zwei der sechs Funktoren des Sechs-Funktor-Formalismus konstruiert in Gestalt adjungierter Paare triangulierter Funktorn (f^*, f_*) und haben deren Beziehungen untereinander beschrieben. Die Verallgemeinerung zu Modulgarben diskutieren wir in **??**.

21.2.4.7. Ist speziell $f = \mathrm{fin}_X : X \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung und $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/X})$ ein Komplex abelscher Garben auf X, so haben wir

$$\mathbb{H}^q(X; \mathcal{F}) = \mathcal{H}^q\, \mathrm{fin}_{X*}\, \mathcal{F}$$

Diese Gruppe ist unsere q-te Hyperkohomologie von X mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$ aus 20.3.4.17. Ist $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe und kein Komplex, so notieren wir diese Gruppe wie bisher $\mathrm{H}^q(X; \mathcal{F})$ und nennen sie die Kohomologie von X mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$.

Satz 21.2.4.8 (**Halbbeschränkter derivierter eigentlicher Basiswechsel**). *Gegeben ein kartesisches Quadrat $fq = pg$ topologischer Räume mit f, g eigentlich und separiert ist der Basiswechsel der derivierten Garbenopfaserung für $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}^+(\mathrm{Ab}_{/X})$ ein Isomorphismus*

$$p^* f_* \mathcal{F} \overset{\sim}{\to} g_* q^* \mathcal{F}$$

Beweis. Im Fall von Mengengarben und a forteriori von abelschen Garben kennen wir diese Aussage bereits aus 19.6.3.24. Sie folgt unmittelbar für Komplexe

von abelschen Garben und desgleichen für Homotopiekomplexe. Ein Morphismus in der derivierten Kategorie der Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum ist nun ein Isomorphismus genau dann, wenn er unter dem Rückzug auf jeden Punkt einen Isomorphismus liefert. Aufgrund der Transitivität von Basiswechseln 19.6.3.16 dürfen wir uns beim Beweis mithin auf den Fall beschränken, daß p von einem einpunktigen Raum ausgeht. Nun wissen wir, daß jeder Komplex $\mathcal{F} \in \mathrm{Hot}^+(\mathrm{Ab}_{/X})$ aus welken abelschen Garben quisrechtsentfaltet ist für $f_{(*)}$. Nach Annahme ist, wenn p von einem einpunktigen Raum ausgeht, unser $q : W \to X$ die Einbettung eines relativ hausdorffschen Kompaktums. Nach 19.4.8.11 ist damit $q^{(*)}\mathcal{F}$ ein gegen die Differentiale beschränkter Komplex von kompaktweichen und nach 19.4.8.12 für den Funktor der globalen Schnitte $g_{(*)}$ rechtsazyklischen abelschen Garben und ist damit nach 20.3.4.13 quisrechtsentfaltet für $g_{(*)}$. Der Satz folgt. □

Satz 21.2.4.9 (Unbeschränkter derivierter eigentlicher Basiswechsel). *Sei ein kartesisches Quadrat $fq = pg$ topologischer Räume mit f, g eigentlich und separiert gegeben. Hat $g_{(*)}$ beschränkte homologische Dimension, so ist der Basiswechsel der derivierten Garbenopfaserung für beliebiges $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ ein Isomorphismus*

$$p^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} g_* q^* \mathcal{F}$$

Beweis. Nach 21.2.3.2 besitzt jeder Komplex abelscher Garben eine Quisrechtsentfaltung durch einen Komplex injektiver Garben. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathcal{F}$ bereits selbst solch ein Komplex ist. Aus dem halbbeschränkten Fall 21.2.4.8 folgt, daß dann $q^{(*)}\mathcal{F}$ ein Komplex aus $g_{(*)}$-rechtsazyklischen Garben ist. Damit ist $q^{(*)}\mathcal{F}$ quisrechtsentfaltet für $g_{(*)}$ nach unseren Erkenntnissen 20.3.6.4 über das Derivieren homologisch endlicher Funktoren. Der Satz folgt. □

Übungen

Übung 21.2.4.10. Seien $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\phi \in \mathrm{Der}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ein Morphismus derivierter abelscher Garben darüber alias ein Element des Morphismenraums $\mathrm{Der}_{/X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F})$. Sind $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ abelsche Garben, so ist das schlicht ein Komorphismus $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ über f. Die Einheit der Adjunktion $\mathcal{G} \to f_* f^* \mathcal{G}$ induziert nun einen Morphismus

$$\mathrm{fin}_{Y*}\, \mathcal{G} \to \mathrm{fin}_{Y*}\, f_* f^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{fin}_{X*}\, f^* \mathcal{G} \to \mathrm{fin}_{X*}\, \mathcal{F}$$

und so einen Morphismus $\mathrm{H}^q(Y; \mathcal{G}) \to \mathrm{H}^q(X; \mathcal{F})$. Man zeige, daß er unser Rückzug auf der Garbenkohomologie aus 19.4.3.7 ist.

21.2.5 Lokalisierung durch Anpassung

21.2.5.1. Unter einem starken Vorschub verstehen wir im folgenden wie in 19.6.3.3 einen Vorschub mit stark kokartesischem Transportmorphismus.

Definition 21.2.5.2. Unter einer **vollen Unterkofaserung** eines Funktors $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ verstehen wir eine volle Unterkategorie $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ derart, daß die Objekte von $\mathscr{D}$ für jeden Morphismus der Basis $\mathscr{B}$ einen in Bezug auf $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ starken Vorschub besitzen, der selbst wieder zu $\mathscr{D}$ gehört.

Definition 21.2.5.3. Seien $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Funktor und S ein faserweises Linksoresystem in $\mathscr{C}$. Eine volle Unterkofaserung $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ heiße eine **Linksanpassung für** S, wenn (1) die Menge T aller S-Morphismen aus $\mathscr{D}$ ein faserweises Oresystem in $\mathscr{D}$ bildet, wenn (2) Vorschubfunktoren $f_\dagger$ für Objekte von $\mathscr{D}$ so gewählt werden können, daß sie unsere Menge T stabilisieren, und wenn es (3) für jedes $C \in \mathscr{C}$ einen S-Morphismus $D \to C$ gibt mit $D \in \mathscr{D}$.

21.2.5.4. Opponiert zu 21.2.5.2 erklären wir für $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ einen Funktor und S ein faserweises Rechtsoresystem in $\mathscr{C}$ eine **Rechtsanpassung** als eine volle Unterfaserung unseres Funktors mit entsprechenden Eigenschaften.

Beispiel 21.2.5.5. Ganz $\mathscr{C}$ ist eine Linksanpassung für eine Kofaserung $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ mit faserweisem Linksoresystem S genau dann, wenn S ein faserweises Oresystem ist und die Bedingung 21.2.2.10 erfüllt, die sicherstellt, daß S sogar zusätzlich ein globales Rechtsoresystem ist.

Beispiel 21.2.5.6 (**Homotopiekomplexe der Modulbifaserung**). Wir erinnern aus 19.6.2.16 die Modulbifaserung $\mathrm{Mod}_{\mathrm{Ring}} \to \mathrm{Ring}$. Die Faser über einem Ring ist seine Modulkategorie, kokartesisch über einem Ringhomomorphismus $A \to B$ ist $M \to B \otimes_A M$. Wie bei der Konstruktion der derivierten Garbenopfaserung bilden wir die zugehörige Kofaserung der Homotopiekomplexe, erst einmal aus Bequemlicheit ihr halbseitig beschränkte Version

$$\mathrm{Hot}^-(\mathrm{Mod}_{\mathrm{Ring}}) \to \mathrm{Ring}$$

Das faserweise Oresystem der Quasiisomorphismen ist kein globales Rechtsoresystem, wie der Leser sich selbst überlegen mag, und erfüllt zumindest nicht unsere hinreichende Bedingung 21.2.2.10, da der Vorschub $M \mapsto B \otimes_A M$ im allgemeinen Quasiisomorphismen nicht erhält. Eine Linksanpassung wäre etwa die volle Unterkategorie aller entsprechend beschränkten Komplexe aus freien Moduln. Allgemeiner bilden die quisflachen Komplexe aus 20.3.8.11 eine Linksanpassung für $\mathrm{Hot}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{Ring}}) \to \mathrm{Ring}$, da es nach 20.3.8.8 zu jedem Komplex einen Quasiisomorphismus aus einem quisflachen Komplex, ja sogar aus einem quisentfalteten Komplex gibt, da quisflache Komplexe unter Skalarerweiterung quisflach bleiben und da Quasiisomorphismen quisflacher Komplexe unter Skalarerweiterung Quasiisomorphismen bleiben nach 20.3.8.17.

Beispiel 21.2.5.7. Dies Beispiel bereitet das Derivieren abelscher Schmelzkategorien 21.2.8.1 vor. Wir betrachten als Basis $\mathscr{B}$ die Kategorie aller Mengen der Gestalt $\{1,\ldots,n\}$ mit $n \geq 0$ und monoton wachsenden Abbildungen als Morphismen. Wir halten einen topologischen Raum X fest und nehmen als Objekte von $\mathscr{C}$ über $\{1,\ldots,n\}$ Tupel $(\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_n)$ von Komplexen abelscher Garben auf X und als Morphismen über einer monoton wachsenden Abbildung entsprechende Tupel von Verschmelzungen von Komplexen abelscher Garben, wie sie in **??** genauer diskutiert werden. Für den Vorschub unter der konstanten Abbildung $c : \{1,2\} \to \{1\}$ etwa haben wir dann natürliche Isomorphismen

$$c_\dagger(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$$

Zu dieser Kofaserung $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ betrachten wir das faserweise Linksoresystem S aller Tupel von Quasiisomorphismen in den Fasern. Es ist sogar ein faserweises Oresystem, ist jedoch nicht stabil unter Vorschub und wir können deshalb 21.2.2.10 und 21.2.2.9 nicht anwenden, um die Lokalisierung zu beschreiben. Wir finden jedoch eine Linksanpassung in Gestalt aller Tupel von Komplexen flacher Garben. Die Bedingung (2) an eine Linksanpassung läuft dabei auf die Erkenntnis 20.3.8.13 hinaus, daß das Tensorieren mit einem Komplex flacher Garben Quasiisomorphismen zu Quasiisomorphismen macht.

21.2.5.8 (**Eigenschaften von Linksanpassungen**). Gegeben $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Funktor und S ein faserweises Linksoresystem in $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ eine Linksanpassung für S ist die Menge T der S-Morphismen in $\mathscr{D}$ nach 21.2.2.10 ein globales Rechtsoresystem in $\mathscr{D}$, denn T ist nach Annahme ein faserweises Rechtsoresystem in $\mathscr{D}$. Weiter bemerken wir, daß nach 21.2.2.11 der induzierte Funktor $T^{-1}\mathscr{D} \to \mathscr{B}$ ein Kofaserfunktor ist und daß kokartesische Morphismen aus $\mathscr{D}$ kokartesisch bleiben in der Lokalisierung $T^{-1}\mathscr{D}$. Schließlich induziert nach 21.2.2.5 die Einbettung für alle $X \in \mathscr{B}$ einen Isomorphismus $T_X^{-1}\mathscr{D}_X \xrightarrow{\sim} (T^{-1}\mathscr{D})_X$ und nach 20.1.4.21 sind die auf den Lokalisierungen der Fasern induzierten Funktoren Äquivalenzen

$$T_X^{-1}\mathscr{D}_X \xrightarrow{\approx} S_X^{-1}\mathscr{C}_X$$

Satz 21.2.5.9 (**Lokalisierung durch Linksanpassung**). *Gegeben $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Funktor und S ein faserweises Linksoresystem in $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ eine Linksanpassung für S und T die Menge aller S-Morphismen aus $\mathscr{D}$ ist der offensichtliche Funktor eine Äquivalenz*

$$T^{-1}\mathscr{D} \xrightarrow{\approx} S^{-1}\mathscr{C}$$

Ergänzung 21.2.5.10. Ich wüßte gerne, ob dieser Satz aus allgemeinen Aussagen über Modellkategorien gefolgert werden kann.

Beweis. Wir konstruieren einen quasiinversen Funktor. In einem ersten Schritt wählen wir für jedes $X \in \mathscr{B}$ und jedes $C \in \mathscr{C}_X$ ein Objekt $D = D(C) \in \mathscr{D}_X$

zusammen mit einem S-Morphismus $D \to C$. Gegeben $f : X \to X'$ und darüber ein Morphismus $\varphi : C \to C'$ in $\mathscr{C}$ erklären wir weiter einen Morphismus $\tilde{\varphi} : D \to D'$ über f in $T^{-1}\mathscr{D}$ durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & f_\dagger D \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr] & \\
D \arrow[ur] \arrow[d, "s"] & & D' \arrow[d, "s"] \\
C \arrow[rr, "\varphi"] & & C'
\end{tikzcd}$$

Die durchgezogenen Pfeile bedeuten Morphismen in $\mathscr{C}$, der gestrichelte Pfeil dahingegen einen Morphismus in $T^{-1}_{X'}\mathscr{D}_{X'}$, der durch das Kommutieren des rechten Dreiecks in $S^{-1}_{X'}\mathscr{C}_{X'}$ festgelegt wird. Jetzt prüfen wir, daß die Vorschrift $C \mapsto D(C), \varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ ein Funktor $\mathscr{C} \to T^{-1}\mathscr{D}$ ist. Dazu betrachten wir einen weiteren Morphismus $g : X' \to X''$ und darüber $\psi : C' \to C''$ und bilden das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & g_\dagger f_\dagger D \arrow[dr, dashed] \arrow[ddddr, bend right] & & \\
 & f_\dagger D \arrow[ur] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr, bend right] & & g_\dagger D' \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr] & \\
D \arrow[ur] \arrow[d, "s"] & & D' \arrow[ur] \arrow[d, "s"] & & D'' \arrow[d, "s"] \\
C \arrow[rr, "\varphi"] & & C' \arrow[rr, "\psi"] & & C''
\end{tikzcd}$$

Dessen obere Raute entstehe durch Anwenden des Funktors $g_\dagger : T^{-1}_{X'}\mathscr{D}_{X'} \to T^{-1}_{X''}\mathscr{D}_{X''}$ auf $f_\dagger D \dashrightarrow D'$ und verwendet unsere Erkenntnis vom Beginn des Beweises, daß $T^{-1}\mathscr{D} \to \mathscr{B}$ eine Kofaserung ist mit den Lokalisierungen der ursprünglichen Fasern als neuen Fasern, wobei der Funktor in die Lokalisierung kokartesische Morphismen zu kokartesischen Morphismen macht. Man muß nun zeigen, daß der lange gekrümmte Pfeil, wenn er durch die universelle Eigenschaft von Vorschüben erklärt wird, auch das Dreieck rechts von ihm mit $g_\dagger D'$ als dritter Ecke in $S^{-1}_{X''}\mathscr{C}_{X''}$ zum Kommutieren bringt. Dazu erinnern wir, daß wir nach 20.1.4.10 unseren Morphismus $f_\dagger D \dashrightarrow D'$ aus $S^{-1}_{X'}\mathscr{C}_{X'}$ durch einen Linksbruch

$[t, A, a]$ repräsentieren können, und zwar so, daß im linken Teil des Diagramms

$$\begin{tikzcd} f_\dagger D \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr, bend right] & A \arrow[l, "t"'] \arrow[d, "a"] \\ & D' \arrow[d, "s"] \\ & C' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g_\dagger f_\dagger D \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr, bend right] & g_\dagger A \arrow[l, "g_\dagger t"'] \arrow[d, "g_\dagger a"] \\ & g_\dagger D' \arrow[d] \\ & C'' \end{tikzcd}$$

erstens das Teildiagramm mit den durchgezogenen Linien sogar in $\mathscr{C}_{X'}$ kommutiert und daß zweitens sogar gilt $A \in \mathscr{D}_{X'}$ und a forteriori $t \in T$. Daraus folgt aber, daß auch das rechte Diagramm in seinen durchgezogenen Pfeilen in $\mathscr{C}_{X''}$ kommutiert, wenn wir die Morphismen nach C'' vermittels der universellen Eigenschaft des starken Vorschubs $g_\dagger$ erklären. Das hinwiederum zeigt, daß das Dreieck im rechten Diagramm mit dem langen gekrümmten Pfeil in $S_{X''}^{-1}\mathscr{C}_{X''}$ kommutiert. Das zeigt hinwiederum, daß unsere Vorschrift in der Tat ein Funktor $\mathscr{C} \to T^{-1}\mathscr{D}$ ist. Offensichtlich induziert er einen Funktor $S^{-1}\mathscr{C} \to T^{-1}\mathscr{D}$ und man sieht ohne weitere Schwierigkeiten, daß dieser Funktor der gesuchte Quasiinverse ist. Besonders bequem geht das unter Verwendung unserer Erkenntnis 20.1.2.20, daß jeder Lokalisierungsfunktor volldicht ist. □

Korollar 21.2.5.11 (Lokalisierung bei Existenz einer Linksanpassung). *Seien $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Funktor und S ein faserweises Linksoresystem in $\mathscr{C}$. Gibt es eine Linksanpassung für S, so gilt:*

1. *Der von p induzierte Funktor $S^{-1}\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ist eine Kofaserung;*
2. *Die Einbettungen liefern Isomorphismen $S_{\mathscr{U}}^{-1}\mathscr{C}_{\mathscr{U}} \xrightarrow{\sim} (S^{-1}\mathscr{C})_{\mathscr{U}}$ für jeden Funktor $\mathscr{U} \to \mathscr{B}$ in die Basis;*

Beweis. Sei $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ eine Linksanpassung und T die Menge der S-Morphismen in $\mathscr{D}$. Wir wissen aus 21.2.5.9, daß der von der Einbettung induzierte Funktor eine Äquivalenz

$$T^{-1}\mathscr{D} \xrightarrow{\approx} S^{-1}\mathscr{C}$$

ist, und wir wissen aus 21.2.5.8, daß $T^{-1}\mathscr{D} \to \mathscr{B}$ eine Kofaserung ist. Folglich muß auch $S^{-1}\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ eine Kofaserung sein. Um die zweite Aussage zu zeigen, betrachten wir das kommutative Funktordiagramm

$$\begin{tikzcd} T_{\mathscr{U}}^{-1}\mathscr{D}_{\mathscr{U}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & (T^{-1}\mathscr{D})_{\mathscr{U}} \arrow[d, "\wr"] \\ S_{\mathscr{U}}^{-1}\mathscr{C}_{\mathscr{U}} \arrow[r] & (S^{-1}\mathscr{C})_{\mathscr{U}} \end{tikzcd}$$

Der obere Isomorphismus kommt von 21.2.2.8 her, die rechte Äquivalenz von der Äquivalenz $T^{-1}\mathscr{D} \xrightarrow{\approx} S^{-1}\mathscr{C}$ und die linke Äquivalenz von derselben Äquivalenz im Fall der Linksanpassung $\mathscr{D}_{\mathscr{U}} \subset \mathscr{C}_{\mathscr{U}}$. □

Korollar 21.2.5.12 (Lokalisierung einer Kofaserung durch Linksanpassung). *Seien $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ eine Kofaserung und S ein faserweises Linksoresystem in $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ eine Linksanpassung für S. So gilt:*

1. *Für jeden Morphismus $f : X \to Y$ der Basis ist jedes Objekt von $\mathscr{D}_X$ als Objekt von $\mathscr{C}_X$ linksentfaltet in Bezug auf S_X für den Vorschubfunktor gefolgt von der Lokalisierung $Qf_\dagger : \mathscr{C}_X \to S_Y^{-1}\mathscr{C}_Y$;*

2. *Genau dann ist $E \in \mathscr{C}_X$ ein $Qf_\dagger$-S_X-linksentfaltetes Objekt, wenn der Transportmorphismus $E \to f_\dagger E$ in der Lokalisierung $S^{-1}\mathscr{C}$ kokartesisch bleibt.*

21.2.5.13 (**Vorschübe als derivierte Funktoren**). Betrachten wir in der Situation des Korollars einen Morphismus $f : X \to Y$ in der Basis und eine $Qf_\dagger$-Entfaltung $E \to C$ von $C \in \mathscr{C}_X$, kürzen den Linksderivierten mit ${}^{\mathrm{L}}f_\dagger := \mathrm{L}(Qf_\dagger)$ ab, bilden das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d, "s"] & f_\dagger E & {}^{\mathrm{L}}f_\dagger E \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\wr"] \\ C \arrow[r] & f_\dagger C & {}^{\mathrm{L}}f_\dagger C \arrow[l] \end{tikzcd}$$

und lassen darin $f_\dagger C$ weg, so ist die Komposition in $S^{-1}\mathscr{C}$ der restlichen Morphismen nach unserem Satz ein kokartesischer Morphismus

$$C \to {}^{\mathrm{L}}f_\dagger C$$

in Bezug auf die Kofaserung $S^{-1}\mathscr{C} \to \mathscr{B}$. In der Tat ist sie eine Komposition von Isomorphismen über Identitäten mit dem nach Teil 2 unseres Korollars kokartesischen Morphismus dazwischen.

Beispiel 21.2.5.14. In der Situation von Beispiel 21.2.5.7 liefert uns dieses Korollar eine Kofaserung über derselben Basis mit Tupeln $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n)$ von Objekten der derivierten Kategorie der abelschen Garben auf unserem festen Raum als Fasern und natürlichen Isomorphismen $c_\dagger(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ im Fall von Komplexen flacher Garben.

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus der Definition einer Linksanpassung. Um die zweite Aussage zu zeigen, wählen wir einen S-Morphismus $D \to E$ mit

$D \in \mathscr{D}_X$ und betrachen mit einer T und insbesondere $\mathscr{D}$ stabilisierenden Wahl von $f_\dagger$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r] \arrow[d, "s"] & f_\dagger D \arrow[d] \\ E \arrow[r] & f_\dagger E \end{tikzcd}$$

Da nach 21.2.5.8 der Transportmorphismus $D \to f_\dagger D$ kokartesisch ist für $T^{-1}\mathscr{D} \to \mathscr{B}$, ist die untere Horizontale kokartesisch für $S^{-1}\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ genau dann, wenn die rechte Vertikale einen Isomorphismus in $(S^{-1}\mathscr{C})_Y$ und nach 21.2.5.11 gleichbedeutend einen Isomorphismus in $S_Y^{-1}\mathscr{C}_Y$ induziert. Da wir D bereits als S_X-$Qf_\dagger$-linksentfaltet erkannt haben für $Qf_\dagger : \mathscr{C}_X \to S_Y^{-1}\mathscr{C}_Y$, ist das gleichbedeutend dazu, daß auch E linksentfaltet ist für S_X und $Qf_\dagger$. So folgt die zweite Aussage. □

Beispiel 21.2.5.15 (**Derivierte Modulbifaserung als Kofaserung**). Wir erinnern aus 21.2.5.6 die Kofaserung $\mathrm{Hot}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{Ring}}) \to \mathrm{Ring}$ mit dem faserweisen Oresystem der Quasiisomorphismen und der Linksanpassung durch quisflache Komplexe. Da eine Linksanpassung existiert, ist nach 21.2.5.11 auch der induzierte Funktor auf der Lokalisierung nach Quasiisomorphismen eine Kofaserung. Wir notieren sie

$$\mathrm{Der}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{Ring}}) \to \mathrm{Ring}$$

Weiter ist nach 21.2.5.11 für jeden Ring A der offensichtliche Funktor ein Isomorphismus von Kategorien $\mathrm{Der}(\mathrm{Mod}_A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{Ring}})_A$ und nach 21.2.5.12 liefert für jeden Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ und quisflachen Komplex M von A-Moduln der Morphismus $M \to B \otimes_A M$ über φ einen kokartesischen Morphismus in der derivierten Modulbifaserung. Salopp gesprochen sind also die Vorschübe die Linksderivierten der Erweiterungen der Skalare.

Beispiel 21.2.5.16 (**Derivierte Modulbifaserung als Faserung**). Wir erinnern aus 21.2.5.6 die Bifaserung $\mathrm{Hot}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{Ring}}) \to \mathrm{Ring}$ mit dem faserweisen Oresystem der Quasiisomorphismen. Es ist zwar kein globales Rechtsoresystem, aber durchaus ein globales Linksoresystem, denn seine Rückzugsfunktoren sind durchaus exakt. Damit ist bereits aus 21.2.2.9 opponiert klar, daß die Lokalisierung eine Faserung $\mathrm{Der}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{Ring}}) \to \mathrm{Ring}$ ist.

Beispiel 21.2.5.17 (**Derivierte Modulgarbenopfaserung**). Wir erinnern aus 21.1.3.9 die Modulgarbenopfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Ger}} \to \mathrm{Ger}$ über der Kategorie der geringten Räume. Spezialisieren wir zu einpunktigen Räumen, so erhalten wir den von der Modulbifaserung auf den opponierten Kategorien induzierten Funktor. Durch Übergang zu Homotopiekategorien erhalten wir die Faserung $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Ger}}) \to$

Ger und darin bilden die Quasiisomorphismen ein faserweises Oresystem. Eine Rechtsanpassung bilden die sogenannten quisflachen Komplexe von Modulgarben, wie im folgenden diskutiert werden soll. Mit 21.2.5.11 folgt, daß wir durch Lokalisieren eine Faserung

$$\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Ger}}) \to \mathrm{Ger}$$

erhalten, daß die offensichtlichen Funtoren von der Lokalisierung der Faser zur Faser der Lokalisierung Isomorphismen $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/(X,\mathcal{A})}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Ger}})_{(X,\mathcal{A})}$ sind und daß salopp gesprochen die Rückzüge unserer Faserung mit den Opponierten der Derivierten der Rückzüge von Modulgarben übereinstimmen. Da jeder Komplex von Modulgarben nach 21.2.3.6 eine Quisrechtsentfaltung hat, existieren auch die Vorschübe in unserer Faserung und stimmen salopp gesprochen überein mit den Opponierten der Derivierten der Vorschübe von Modulgarben.

Definition 21.2.5.18. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein geringter Raum. Ein $\mathcal{A}$-Modul $\mathcal{F}$ heißt **flach**, wenn der Funktor $\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{F}$ von der Kategorie der $\mathcal{A}$-Rechtsmoduln in die Kategorie der abelschen Garben exakt ist. Gleichbedeutend ist, daß alle Halme $\mathcal{F}_x$ flach sind als $\mathcal{A}_x$-Moduln.

Definition 21.2.5.19. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein geringter Raum. Ein Komplex von $\mathcal{A}$-Moduln $\mathcal{F}$ heißt **quisflach**, wenn der Funktor $\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{F}$ jeden Quasiisoorphismus von Komplexen von $\mathcal{A}$-Rechtsmoduln zu einem Quasiisomorphismus macht. Gleichbedeutend ist, daß alle Halmkomplexe $\mathcal{F}_x$ quisflach sind als Komplexe von $\mathcal{A}_x$-Moduln.

Proposition 21.2.5.20 (Quisflache Linksauflösung bei Modulgarben). *Geben ein geringter Raum $(X, \mathcal{A})$ hat jeder Komplex von $\mathcal{A}$-Moduln eine quisflache Linksauflösung durch einen Komplex flacher $\mathcal{A}$-Moduln.*

Beweis. Jeder $\mathcal{A}$-Modul $\mathcal{F}$ ist Quotient einer direkten Summe von Garben der Gestalt $\mathcal{A}_{U\subset X}$ für $U \Subset X$ in der Notation aus 19.4.9.10 und diese $\mathcal{A}$-Moduln sind flach. Jeder Komplex $(\mathcal{F}^p)$ von $\mathcal{A}$-Moduln besitzt damit nach 19.9.3.5 eine Cartan-Eilenberg-Untenauflösung $(\mathcal{P}^{p,q})_{q\leq 0}$ durch flache $\mathcal{A}$-Moduln. Wie beim Beweis von 20.3.8.8 zeigt man, daß der Epimorphismus auf den horizontalen Kokernkomplex auch in diesem Fall ein Quasiisomorphismus $\mathrm{tot}^{\oplus}(\mathcal{P}^{p,q}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}^p)$ ist. Dafür brauchen die $\mathcal{A}$-Moduln $\mathcal{P}^{p,q}$ noch nicht einmal spezielle Eigenschaften zu haben, wichtig ist allein die Vertauschbarkeit von Koprodukten mit dem Bilden der Halme. Nun zeigen wir, daß im Fall eines Doppelkomplexes $(P^{p,q})_{q\leq 0}$ von flachen $\mathcal{A}$-Moduln mit maximal spaltenden Zeilen und einem exakten Komplex $\mathcal{E}$ von $\mathcal{A}$-Rechtsmoduln auch der Garbenkomplex

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathrm{tot}^{\oplus}(\mathcal{P}^{p,q})$$

exakt ist. In der Tat ist er das Summentotal des Tripelkomplexes $\mathcal{E}^r \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}^{p,q}$ und dieser Tripelkomplex hat exakte r-Komplexe, da $\mathcal{E}$ exakt ist und die $\mathcal{P}^{p,q}$ flach. Zusätzlich sind die r-Kernkomplexe der p-Differentiale exakt, da $\mathcal{P}^{p,q}$ maximal spaltende Zeilen hat. Nach 20.3.7.3 ist also $\mathrm{tot}^{\oplus}_{p,r}(\mathcal{E}^r \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}^{p,q})$ exakt. Dann ist aber wieder nach 20.3.7.3 auch $\mathrm{tot}^{\oplus}\left(\mathrm{tot}^{\oplus}_{p,r}(\mathcal{E}^r \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}^{p,q})\right)$ halmweise exakt als Produktsummentotal eines Doppelkomplexes mit exakten Zeilen, mit dem das Summentotal wegen unserer Einschränkung $q \leq 0$ übereinstimmt. □

21.2.5.21. Jeder in Richtung der Differentiale beschränkte Komplex von flachen Modulgarben über einem geringten Raum ist quisflach. Hat unsere Ringgarbe endliche Torsionsdimension, so ist jeder Komplex von flachen Modulgarben bereits quisflach. Der Beweis dieser Tatsachen sei dem Leser zur Übung überlassen.

21.2.5.22 (**Derivierter Vorschub und Vergessen der Skalare**). Jeder Morphismus $(X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ von geringten Räumen paßt in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (X,\mathcal{A}) & \to & (Y,\mathcal{B}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X,\mathbb{Z}_X) & \to & (Y,\mathbb{Z}_Y) \end{array}$$

Die durch die Identifikationen unserer derivierten Modulgarbenopfaserung gegebenen Isomorphismen zwischen den Vorschüben von oben links nach unten rechts auf beiden möglichen Wegen präzisieren die Erkenntnis, daß salopp gesprochen der derivierte Vorschub von Modulgarben „derselbe“ ist wie der derivierte Vorschub der zugrundeliegenden abelschen Garben.

21.2.5.23. Das folgende hat nur deshalb an dieser Stelle seinen Platz gefunden, weil wir gerade die benötigten quisflachen Auflösungen bereitgestellt haben.

Proposition 21.2.5.24 (Deriviertes Tensorieren von Modulgarben). *Gegeben ein geringter Raum $(X, \mathcal{A})$ ist der Linksfaktorierte*

$$\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{A}} : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/(X,\mathcal{A}^{\mathrm{opp}})}) \times \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/(X,\mathcal{A})}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$$

im Sinne von 20.3.8.18 auf jedem Paar von Garbenkomplexen definiert und alle Paare mit mindestens einem quisflachen Eintrag sind $\otimes_{\mathcal{A}}$-quislinksentfaltet.

Beweis. Wie der Beweis von 21.2.8.4 oder von 20.3.8.17, wo es im Fall eines einpunktigen Raums in größerer Ausführlichkeit diskutiert wird. □

21.2.5.25. Die zweite Aussage der Proposition zeigt auch, daß für jeden Komplex $\mathcal{F}$ von $\mathcal{A}$-Rechtsmoduln der Funktor $Q \circ (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}}) : \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/(X,\mathcal{A})}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ einen globalen Linksfaktorierten besitzt und daß der offensichtliche Morphismus stets ein Isomorphismus

$$\mathcal{F} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{L}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}}))(\mathcal{G})$$

ist. Aus der Existenz von Quisrechtsentfaltungen für Modulgarben folgern wir dann, daß $(\mathrm{L}(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}}))$ den Rechtsadjungierten $\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{F},\ )$ hat, den Rechtsderivierten des Bildens der Homomorphismengarbe in $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X})$ mit ihrer von der $\mathcal{A}$-Rechtsoperation auf $\mathcal{F}$ herrührenden Struktur als $\mathcal{A}$-Modulgarbe. Analoges gilt für den anderen Tensorfaktor.

21.2.5.26 (**Eine flache Modulgarbe mit nicht flachem Schnittemodul**). Gegeben eine flache Modulgarbe auf einem Kompaktum muß der Modul ihrer globalen Schnitte keineswegs flach sein. So gibt es etwa auf S^1 bis auf Isomorphismus genau eine lokal, aber nicht global triviale Garbe von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-Moduln und deren globale Schnitte sind als Modul isomorph zum Ideal $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

21.2.6 Lokalisierung von Schmelzkategorien

21.2.6.1 (**Schmelzlokalisierung**). Seien $\mathscr{M}$ eine Schmelzkategorie und S eine Menge von Einsverschmelzungen in $\mathscr{M}$. In 21.2.6.3 konstruieren wir ein Paar $(\mathscr{M}_{\shortparallel S}, \mathrm{can})$ bestehend aus einer Schmelzkategorie $\mathscr{M}_{\shortparallel S}$ mitsamt einem Schmelzfunktor $\mathrm{can} : \mathscr{M} \to \mathscr{M}_{\shortparallel S}$ derart, daß gilt:

1. Alle Einsverschmelzung aus S werden unter can invertierbar in $\mathscr{M}_{\shortparallel S}$;
2. Ist $F : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ ein Schmelzfunktor, unter dem alle Einsverschmelzungen aus S invertierbar werden, so gibt es genau einen Schmelzfunktor $\tilde{F} : \mathscr{M}_{\shortparallel S} \to \mathscr{N}$ mit $F = \tilde{F} \circ \mathrm{can}$.

Wir nennen $(\mathscr{M}_{\shortparallel S}, \mathrm{can})$ die **Schmelzlokalisierung von $\mathscr{M}$ an** S. Natürlich ist ein derartiges Paar in der üblichen Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

21.2.6.2. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathscr{M}$ mit einer Menge S von Einsverschmelzungen weiß ich nicht, ob der offensichtliche Funktor $(\mathrm{E}\mathscr{M})_S \to \mathrm{E}(\mathscr{M}_{\shortparallel S})$ von der Lokalisierung der zugehörigen einfachen Kategorie in die einfache Kategorie der Schmelzlokalisierung im allgemeinen ein Isomorphismus von Kategorien sein muß. Das ist meine Motivation für die Notation der Schmelzlokalisierung mit einem vorgestellten $\shortparallel$.

21.2.6.3 (**Lokalisierung von Schmelzkategorien, Existenz**). Um die Lokalisierung einer Schmelzkategorie $\mathscr{M}$ an einer Menge S von Einsverschmelzungen zu konstruieren, betrachten wir in der zugehörigen Familienkategorie $\mathscr{M}^{\curlyvee}$ die Menge $S^{\shortparallel}$ aller Morphismen, die Tupel von Einsverschmelzungen aus S sind und die insbesondere unter dem Indexfunktor auf eine Bijektion geworfen werden, und bilden im Sinne von 20.1.2 die Lokalisierung $\mathscr{M}^{\curlyvee}_{S^{\shortparallel}}$ der Familienkategorie mit dem vom Indexfunktor induzierten Funktor nach Ensf. Es ist klar, daß das Vertupeln

für je zwei Objektkleinfamilien A, B und jede Abbildung $\varphi : \bar{A} \to \bar{B}$ ihrer Indexmengen eine Bijektion

$$\prod_{j \in \bar{B}} \mathcal{M}^{\curlyvee}_{S^{\amalg}}(A|_{\varphi^{-1}(j)}, B_j) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}^{\curlyvee}_{S^{\amalg}})_{\varphi}(A, B)$$

induziert. Wir können also die Morphismen zu Einobjektfamilien als die Verschmelzungen unserer lokalisierten Schmelzkategorie nehmen und vermittels obiger Bijektionen unsere Multiverknüpfungen erklären und erhalten so wieder eine Schmelzkategorie. Der Schmelzfunktor $\mathscr{M} \to \mathscr{M}_{\amalg S}$ mit der geforderten universellen Eigenschaft ist der offensichtliche.

21.2.6.4 (**Leerverschmelzungsfunktor der Lokalisierung**). Sei $\mathscr{M}$ eine Schmelzkategorie und sei S eine Menge von Einsverschmelzungen. Macht der Leerverschmelzungsfunktor L alle Morphismen $s \in S$ zu Bijektionen, so induziert er einen Schmelzfunktor $\mathscr{M}_{\amalg S} \to \mathrm{kEns}$ und wir erhalten einen ausgezeichneten Isomorphismus zwischen diesem Schmelzfunktor und dem Leerverschmelzungsfunktor der Lokalisierung $\mathscr{M}_{\amalg S}$.

21.2.6.5. In derselben Weise und formal durch Übergang zur opponierten Kategorie erklären wir auch die Lokalisierung einer Trennkategorie an einer Menge S von Einstrennungen.

21.2.6.6 (**Additive Strukturen auf Schmelzlokalisierungen**). In 20.1.4.23 hatten wir diskutiert, wie sich eine additive Struktur auf einer Kategorie auf die Lokalisierung nach einem halbseitigen Oresystem vererbt. Im Fall von Schmelz- oder Trennkategorien kenne ich keine vergleichbare Aussage.

21.2.6.7 (**Eindeutigkeit additiver Strukturen**). Sei eine Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen gegeben. Besitzt die zugrundeliegende einfache Kategorie endliche Koprodukte, so besitzt in Verallgemeinerung von 19.2.5.11 unsere Schmelzkatgorie höchstens eine additive Struktur, denn die Summe von Verschmelzungen in $\mathcal{M}(A, Y)$ muß der Summe einfacher Morphismen in $\mathcal{M}(\otimes A, Y)$ vom Ziel einer universellen Verschmelzung entsprechen. Analoges gilt für Trennkategorien.

21.2.7 Homotopie für bequeme Schmelzkategorien

Definition 21.2.7.1. Eine **bequeme Schmelzkategorie** ist eine Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen und Multihom, deren zugrundeliegende einfache Kategorie abzählbare Produkte und abzählbare Koprodukte hat und die mit einer additiven Struktur versehen werden kann.

21.2.7.2. Die additive Struktur einer bequemen Schmelzkategorie ist nach 21.2.6.7 eindeutig bestimmt. Wir werden im folgenden sehen, daß sich viele Konstruktionen im Zusammenhang mit Komplexen für bequeme Schmelzkategorien besonders bequem durchführen lassen. Diese Situation deckt die meisten Anwendungen ab, die in diesem Text angestrebt werden. Was auch in größerer Allgemeinheit noch zu machen wäre, wird in 21.9.2.1 angedeutet.

21.2.7.3 (**Supergraduieren bequemer Schmelzkategorien**). Gegeben eine bequeme Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ hat auch ihre Supergraduierung $\mathrm{sg}\mathcal{M}$ stabil universelle Verschmelzungen und Multihom, ja ist selbst wieder eine bequeme Schmelzkategorie. Zum Beispiel ist für $X, Y \in \mathrm{sg}\mathcal{M}$ die offensichtliche vom Grad Null homogene Verschmelzung $X \curlyvee Y \to T$ mit

$$T^n := \bigoplus_{i+j=n} X^i \otimes_{\mathcal{M}} Y^j$$

eine stabil universelle 2-Verschmelzung in $\mathrm{sg}\mathcal{M}$. Weiter ist $\curlyvee \to T$ mit $T^0 = \mathbb{I}_{\mathcal{M}}$ und $T^n = 0$ das leere Koprodukt für $n \neq 0$ eine stabil universelle Leerverschmelzung in $\mathrm{sg}\mathcal{M}$. Ähnlich erhalten wir in $\mathrm{sg}\mathcal{M}$ internes Hom das das Objekt mit homogenen Komponenten

$$(X \Rrightarrow Y)^n := \prod_i (X^i \Rrightarrow_{\mathcal{M}} Y^{i+n})$$

und mit den offensichtlichen Zusatzdaten.

21.2.7.4 (**Komplexe in bequemen Schmelzkategorien**). Gegeben eine bequeme Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ erklären wir genau wie im Fall abelscher Gruppen 18.2.3.1 das Hopfbiabmonoid der Differentiale $D = D_{\mathcal{M}} \in \mathrm{sg}\mathcal{M}$ und erklären die Schmelzkategorie der Komplexe in $\mathcal{M}$ als die äquivariante Schmelzkategorie

$$\mathrm{dg}\mathcal{M} = \mathrm{Ket}_{\mathcal{M}} := \mathrm{sg}\mathcal{M}_{D\searrow}$$

der Objekte von $\mathrm{sg}\mathcal{M}$ mit einer Operation von D. Wir können die Objekte von $\mathrm{Ket}_{\mathcal{M}}$ identifizieren mit Komplexen im üblichen Sinne alias einer Familie $(X^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ von Objekten $X^i \in \mathcal{M}$ mit Morphismen $d : X^i \to X^{i+1}$ derart, daß gilt $d^2 = 0 : X^i \to X^{i+2}$ für alle i. Auch die Schmelzkategorie $\mathrm{dg}\mathcal{M}$ der Komplexe hat stabil universelle Verschmelzungen und Multihom nach 18.3.3.19 und 18.3.3.20, ja ist selbst wieder eine bequeme Schmelzkategorie. Genauer erhalten wir stabil universelle Verschmelzungen und Multihom in $\mathrm{dg}\mathcal{M}$, indem wir die entsprechenden Konstruktionen in der Supergraduierung $\mathrm{sg}\mathcal{M}$ mit der offensichtlichen Operation des Hopfbiabmonoids D der Differentiale versehen. Für die Menge der Leerverschmelzungen in einen Komplex $X = (X^i, d)$ finden wir

$$\mathrm{dg}\mathcal{M}(\curlyvee, X) = \ker\big(\mathcal{M}(\curlyvee, X^0) \to \mathcal{M}(\curlyvee, X^1)\big)$$

Eine universelle Leerverschmelzung in $\mathrm{Ket}_{\mathcal{M}}$ erhalten wir, indem wir von einer universellen Leerverschmelzung in $\mathcal{M}$ ausgehen und sie in den homologischen Grad Null platzieren und durch Nullobjekte in den anderen homologischen Graden zu einem Komplex ergänzen.

21.2.7.5 (**Homotopiekomplexe in bequemen Schmelzkategorien**). Gegeben eine Schmelzkategorie mit additiver Struktur $\mathcal{M}$ faktorisiert ihr Leerverschmelzungsfunktor stets eindeutig als $\mathrm{L} = v \circ \mathrm{A}$ mit einem wohldefinierten Schmelzfunktor $\mathrm{A} : \mathcal{M} \to \mathrm{Ab}$. Dieser Schmelzfunktor induziert auf den Supergraduierungen einen Schmelzfunktor $\mathrm{sgA} : \mathrm{sg}\mathcal{M} \to \mathrm{sgAb}$. Ist $\mathcal{M}$ eine bequeme Schmelzkategorie, so induziert weiter die universelle Leerverschmelzung $\Upsilon \to \mathbb{I}_{\mathcal{M}}$ eine Leerverschmelzung $\Upsilon \to \mathrm{A}\mathbb{I}_{\mathcal{M}}$ alias einen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathrm{A}\mathbb{I}_{\mathcal{M}}$. Man überzeugt sich, daß man so einen Monoidhomomorphismus $D \to \mathrm{sgA}D_{\mathcal{M}}$ in sgAb erhält und daß mit den Komultiplikationen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathrm{sgA}D_{\mathcal{M}} \arrow[d] \\
D \otimes D \arrow[r] & \mathrm{sgA}D_{\mathcal{M}} \otimes \mathrm{sgA}D_{\mathcal{M}} \arrow[r] & \mathrm{sgA}(D_{\mathcal{M}} \otimes D_{\mathcal{M}})
\end{tikzcd}$$

entsteht. Mithin induziert unser Funktor seinerseits einen Schmelzfunktor

$$\mathrm{dgA} : \mathrm{dg}\mathcal{M} \to \mathrm{dgAb}$$

Die Umstrukturierung der automatischen Selbstanreicherung der Komplexkategorie $\mathrm{dg}\mathcal{M}$ mit dem Schmelzfunktor $\mathcal{H}^0 \circ \mathrm{dgA} : \mathrm{dg}\mathcal{M} \to \mathrm{Ab}$ notieren wir

$$\mathrm{Hot}(\mathcal{M}) = \mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}$$

und nennen sie die **Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe in** $\mathcal{M}$. Die stabil universellen Verschmelzungen in $\mathrm{dg}\mathcal{M}$ liefern nach 18.2.5.5 stabil universelle Verschmelzungen in seiner Selbstanreicherung und dann nach 18.2.5.6 stabil universelle Verschmelzungen in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}$. Ebenso wird unser Multihom in $\mathrm{dg}\mathcal{M}$ mit 18.2.5.9 ein Multihom in seiner Selbstanreicherung und liefert nach 18.2.5.10 ein Multihom in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}$. Auch die Homotopiekomplexe einer bequemen Schmelzkategorie bilden wieder eine bequeme Schmelzkategorie. Für die Menge der Leerverschmelzungen in einen Komplex $X = (X^i, d)$ finden wir

$$\mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}(\Upsilon, X) = \mathcal{H}^0(\mathcal{M}(\Upsilon, X))$$

21.2.7.6 (**Vererben von Zusatzstrukturen**). Ist k ein Kring und ist unsere bequeme Schmelzkategorie mit einer k-Struktur versehen, so vererbt sich diese zu einer k-Struktur auf $\mathrm{Ket}_{\mathcal{M}}$ und $\mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}$ in offensichtlicher Weise.

21.2.7.7 (**Von Komplexen zu Homotopiekomplexen**). Gegeben $\mathcal{M}$ eine bequeme Schmelzkategorie liefert unsere Beschreibung der Leerverschmelzungen von $\mathrm{dg}\mathcal{M}$ aus 21.2.7.4 einen Isomorphismus des Leerverschmelzungsfunktors mit der Verknüpfung $\mathcal{Z}^0 \circ \mathrm{dgA} : \mathrm{dg}\mathcal{M} \to \mathrm{Ab}$. Wir erhalten mithin einen objektfesten Isomorphismus zwischen $\mathrm{dg}\mathcal{M}$ und der Umstrukturierung seiner Selbstanreicherung mit dem Schmelzfunktor $\mathcal{Z}^0 \circ \mathrm{dgA}$. Diese Beschreibung hinwiederum liefert unmittelbar einen objektfesten mit universellen Verschmelzungen und Multihom verträglichen Schmelzfunktor

$$\mathrm{Ket}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{M})$$

Dieser Schmelzfunktor ist surjektiv auf allen Verschmelzungsmengen.

21.2.7.8 (**Interne Triangulierung von Homotopiekategorien**). Gegeben eine bequeme Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ ist die übliche triangulierte Struktur auf ihrer Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}$ intern im Sinne von 20.2.3.4. Der Beweis sei dem Leser überlassen.

21.2.8 Derivieren abelscher Schmelzkategorien

Definition 21.2.8.1. Eine **abelsche Schmelzkategorie** ist eine Schmelzkategorie mit additiver Struktur, deren zugrundeliegende einfache Kategorie abelsch ist und für die gilt:

1. Jeder Kern ist ein **Schmelzkern**, genauer: Gegeben ein einfacher Morphismus $f : X \to Y$ und eine Objektkleinfamilie B induziert das Nachschalten von $(\ker f) \to X$ eine Bijektion

   $$\mathcal{M}(B, (\ker f)) \xrightarrow{\sim} \{g \in \mathcal{M}(B, X) \mid f \circ g = 0\}$$

   Diese Eigenschaft impliziert, daß der Leerverschmelzungsfunktor linksexakt ist. Sie ist automatisch erfüllt, wenn es zu jeder Objektkleinfamilie eine universelle Verschmelzung gibt.

2. Jeder Kokern ist ein **stabiler Kokern**, genauer: Gegeben ein einfacher Morphismus $f : X \to Y$ und eine Objektkleinfamilie B und ein Objekt Z induziert das Vorschalten von $Y \to (\mathrm{cok}\, f)$ eine Bijektion

   $$\mathcal{M}(B \curlyvee (\mathrm{cok}\, f), Z) \xrightarrow{\sim} \{h \in \mathcal{M}(B \curlyvee Y, Z) \mid h \circ (\mathrm{id}_B \curlyvee f) = 0\}$$

   Das ist automatisch erfüllt, wenn es alle Multihom gibt.

Insbesondere ist jede bequeme Schmelzkategorie, deren zugrundeliegende einfache Kategorie abelsch ist, automatisch eine abelsche Schmelzkategorie.

21.2.8.2 (**Homologie für bequeme abelsche Schmelzkategorien**). In 21.2.7.4 und 21.2.7.5 hatten wir zu jeder bequemen Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ die Schmelzkategorien mit additiver Struktur $\mathrm{Ket}_{\mathcal{M}}$ und $\mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}$ der Komplexe und der Homotopiekomplexe von Objekten aus $\mathcal{M}$ konstruiert. In 21.2.7.8 hatten wir gesehen, daß unter diesen Voraussetzungen die übliche triangulierte Struktur auf $\mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}$ intern ist. Ist $\mathcal{M}$ sogar eine abelsche bequeme Schmelzkategorie, so liefern die Nullzykel und die nullte Homologie in offensichtlicher Weise Ab-Schmelzfunktoren

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^0 : &\ \mathrm{Ket}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{M} \\ \mathcal{H}^0 : &\ \mathrm{Ket}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{M} \\ \mathcal{H}^0 : &\ \mathrm{Hot}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{M} \end{aligned}$$

Stärker ist auch $\mathcal{Z} : \mathrm{Ket}_{\mathcal{M}} \to \mathrm{sg}\mathcal{M}$ ein Ab-Schmelzfunktor und induziert einen Ab-Schmelzfunktor $\mathcal{H} : \mathrm{Ket}_{\mathcal{M}} \to \mathrm{sg}\mathcal{M}$ und schließlich einen Ab-Schmelzfunktor

$$\mathcal{H} : \mathrm{Hot}_{\mathcal{M}} \to \mathrm{sg}\mathcal{M}$$

Wir nennen ihn den **Schmelzfunktor der totalen Homologie**.

Definition 21.2.8.3. Ein Komplex F in einer bequemen abelschen Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ heiße **quisflach**, wenn für jeden Quasiisomorphismus $X \overset{\sim}{\to} Y$ in $\mathrm{Ket}_{\mathcal{M}}$ auch $F \otimes X \to F \otimes Y$ ein Quasiisomorphismus ist. Eine **quisflache Linksauflösung** eines Komplexes Z ist ein Quasiisomorphismus $F \overset{\sim}{\to} Z$ mit F quisflach.

Lemma 21.2.8.4. *Sei $\mathcal{M}$ eine bequeme abelsche Schmelzkategorie $\mathcal{M}$, bei der jeder Komplex in $\mathrm{Ket}_{\mathcal{M}}$ eine quisflache Linksauflösung besitzt. So ist jedes Tupel von Komplexen, in dem alle Einträge mit höchstens einer Ausnahme quisflach sind, quislinksentfaltet für den Funktor des Zusammentensorierens.*

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall von zwei Komplexen. Sei also (X, P) ein Paar von Komplexen mit P quisflach. Gegeben $(X', Y) \overset{\sim}{\to} (X, P)$ ein Paar von Quasiisomorphismen beliebiger Komplexe dorthin finden wir nach Annahme ein Paar (Q', P') von quisflachen Komplexen und ein Paar von Quasiisomorphismen $(Q', P') \overset{\sim}{\to} (X', Y)$. Es gilt zu zeigen, daß die Komposition $(Q', P') \to (X, P)$ einen Quasiisomorphismus $Q' \otimes P' \overset{\sim}{\to} X \otimes P$ induziert. Diese Komposition faktorisiert aber als $Q' \otimes P' \to Q' \otimes P \to X \otimes P$ und hier sind beide Morphismen Quasiisomorphismen, da wir Q' und P quisflach angenommen hatten. $\square$

Definition 21.2.8.5. Eine bequeme abelsche Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ heiße **entfaltbar**, wenn jeder Komplex in $\mathrm{Ket}_{\mathcal{M}}$ eine Quisrechtsentfaltung und eine quisflache Linksauflösung besitzt.

Beispiele 21.2.8.6. Die abelschen Gruppen, die Moduln über einem Kring, ja die abelschen Garben auf einem topologischen Raum und sogar die Modulgarben auf einem gekringten topologischen Raum bilden nach 21.2.5.20 und 21.2.3.6 entfaltbare bequeme abelsche Schmelzkategorien.

Satz 21.2.8.7 (Derivieren entfaltbarer abelscher Schmelzkategorien). *Sei $\mathcal{M}$ eine entfaltbare bequeme abelsche Schmelzkategorie. So gilt für die Schmelzlokalisierung $\mathrm{Der}_{\mathcal{M}} := (\mathrm{Hot}_{\mathcal{M}})_{\shortparallel\mathrm{qis}}$ ihrer Homotopiekategorie an Quasiisomorphismen:*

1. *Der offensichtliche Funktor ist ein Isomorphismus*

$$(\mathrm{E}\,\mathrm{Hot}_{\mathcal{M}})_{\mathrm{qis}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}((\mathrm{Hot}_{\mathcal{M}})_{\shortparallel\mathrm{qis}}) = \mathrm{E}(\mathrm{Der}_{\mathcal{M}})$$

2. *Die Schmelzkategorie $\mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$ besitzt stabil universelle Verschmelzungen und jede universelle Verschmelzung in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}$, die von einer Kleinfamilie von mit höchstens einer Ausnahme quisflachen Komplexen ausgeht, bleibt darin universell;*

3. *Die Schmelzkategorie $\mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$ besitzt internes Hom und ist Y ein quisrechtsentfalteter Komplex, so ist der vom Lokalisierungsfunktor Q nach 18.1.6.20 induzierte Morphismus in $\mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$ ein Isomorphismus*

$$Q(X \Rrightarrow_{\mathrm{Hot}} Y) \xrightarrow{\sim} (QX \Rrightarrow_{\mathrm{Der}} QY)$$

4. *Die vom Isomorphismus des ersten Teils auf $\mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$ induzierte Struktur einer triangulierten Kategorie ist intern.*

Beweis. Der Indexfunktor

$$p : \mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}^{\gamma} \to \mathrm{Ensf}$$

ist ein Kofaserfunktor, da die fraglichen Homotopiekomplexe nach 21.2.7.8 stabil universelle Verschmelzungen haben. Die Tupel quisflacher Komplexe bilden eine Linksanpassung in Bezug auf das faserweise Oresystem der Tupel von Quasiisomorphismen für unseren Kofaserfunktor. Damit folgen die ersten beiden Behauptungen aus 21.2.8.4 und den Korollaren 21.2.5.11 und 21.2.5.12 zur Lokalisierung durch Linksanpassung. Gegeben ein Komplex $A \in \mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}$ besitzt schließlich der Funktor $(A\otimes) : \mathrm{Hot}_{\mathcal{M}} \to \mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}$ den Rechtsadjungierten $A\Rrightarrow$. Diese Adjunktion induziert dann nach 20.3.2.30 für jedes feste A eine partielle Adjunktion des Linksderivierten von $A\otimes$ mit dem Rechtsderivierten von $A\Rrightarrow$, wo immer diese Derivierten definiert sind. Unsere Derivierten sind jedoch global definiert, da es nach Annahme zu jedem Komplex einen Quasiisomorphismus von einem quisflachen Komplex gibt und auch jeder Komplex eine Quisrechtsentfaltung besitzt. Die

daraus folgende Beschreibung von Tensorprodukt und internem Hom in $\mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$ zeigt schließlich, daß die triangulierte Struktur auf unserer Schmelzkategorie intern ist. $\square$

21.2.8.8 (**Erweiterung additiver Strukturen auf Schmelzkategorien**). Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen und Multihom. Ist die zugrundeliegende einfache Kategorie additiv, so besitzt unsere Schmelzkategorie genau eine additive Struktur. In der Tat hat nach 19.2.5.11 schon mal die zugrundeliegende einfache Kategorie nur genau eine additive Struktur und die Bijektionen $\mathcal{M}(X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X_1 \otimes \ldots \otimes X_r, Y)$ induzieren dann die Struktur einer abelschen Gruppe auf jeder Verschmelzungsmenge. Die Adjunktionen $(X\otimes, X\Rrightarrow)$ zeigen weiter mit 19.2.5.12, daß für $X \in \mathcal{M}$ sowohl $X\otimes$ als auch $X\Rrightarrow$ additive Funktoren $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ sind. So folgt dann, daß Multiverknüpfungen von Verschmelzungen multiadditiv sein müssen für die zuvor konstruierten Strukturen als abelsche Gruppe. Insbesondere besitzt jede Schmelzkategorie mit interner triangulierter Struktur genau eine additive Struktur.

21.2.8.9 (**Leerverschmelzungen in derivierten Schmelzkategorien**). Gegeben eine entfaltbare bequeme abelsche Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ wird insbesondere jede universelle Leerverschmelzung $\curlyvee \to \mathbb{I}$ in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}$ unter dem Lokalisierungsfunktor eine universelle Leerverschmelzung $\curlyvee \to Q\mathbb{I}$ in $\mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$. Gegeben ein Komplex $Y \in \mathrm{Ket}_{\mathcal{M}}$ liefert unser Satz nun für jede Quisrechtsentfaltung $Y \xrightarrow{\sim} J$ Isomorphismen von abelschen Gruppen

$$\mathrm{Der}_{\mathcal{M}}(\curlyvee, Y) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{M}}(\mathbb{I}, Y) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}(\mathbb{I}, J) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}(\curlyvee, J) = \mathcal{H}^0(\mathcal{M}(\curlyvee, J))$$

mit der letzten Gleichheit aus 21.2.7.5. Wir erhalten so eine Isotransformation zwischen dem additiv angereicherten Leerverschmelzungsfunktor der derivierten Kategorie $\mathrm{L}_{\mathrm{Der}} : \mathrm{Der}_{\mathcal{M}} \to \mathrm{Ab}$ und der Komposition

$$\mathrm{L}_{\mathrm{Der}} = \mathcal{H}^0 \circ \mathrm{R}(\mathrm{L}_{\mathcal{M}}) : \mathrm{Der}_{\mathcal{M}} \to \mathrm{Der}_{\mathrm{Ab}} \to \mathrm{Ab}$$

des Rechtsderivierten 20.3.4.1 des additiv angereicherten Leerverschmelzungsfunktors von $\mathcal{M}$ mit der nullten Homologie.

21.2.8.10 (**Vererben von Zusatzstrukturen**). Ist k ein Kring und ist unsere entfaltbare bequeme abelsche Schmelzkategorie mit einer k-Struktur versehen, so vererbt sich diese zu einer k-Struktur auf $\mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$ in offensichtlicher Weise. Zum Beispiel erklären wir $\lambda\,\mathrm{id}_X$ für $X \in \mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$ als das Bild des aus allen $\lambda\,\mathrm{id}_{X^i}$ bestehenden Endomorphismus unseres Komplexes X in $\mathrm{Ket}_{\mathcal{M}}$.

21.2.8.11 (**Notationsfragen**). Sei $\mathcal{M}$ eine entfaltbare bequeme abelsche Schmelzkategorie. Der durch die Struktur einer Schmelzkategorie auf $\mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$ gegebene Tensorfunktor wird oft $\otimes^{\mathrm{L}} := \otimes_{\mathrm{Der}}$ notiert und fällt in den üblichen Anwendungen mit dem üblichen derivierten Tensorprodukt zusammen. Das interne Hom

unserer Schmelzkategorie $\mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$ wird in der Literatur meist $\mathrm{R}\mathcal{H}\mathrm{om}(A, D) := (A \Rrightarrow_{\mathrm{Der}} D)$ oder ähnlich notiert. Wir lassen den unteren Index Der meist weg in der Hoffnung, daß er sich aus dem Kontext ergibt, und schreiben $\otimes$ und $\Rrightarrow$.

21.2.8.12 (**Totale Homologie auf derivierten Kategorien**). Sei $\mathcal{M}$ eine entfaltbare bequeme Schmelzkategorie. Nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung von Schmelzkategorien 21.2.6.1 induziert der Ab-Schmelzfunktor $\mathcal{H} : \mathrm{Hot}_{\mathcal{M}} \to \mathrm{sg}\mathcal{M}$ der totalen Homologie einen Schmelzfunktor

$$\mathcal{H} : \mathrm{Der}_{\mathcal{M}} \to \mathrm{sg}\mathcal{M}$$

Aus der Beschreibung der Verschmelzungen in der derivierten Kategorie mithilfe quisflacher Komplexe folgt, daß der Schmelzfunktor der totalen Homologie ein Ab-Schmelzfunktor ist.

Beispiel 21.2.8.13 (**Schmelzkategorie der derivierten abelschen Gruppen**). Die Schmelzkategorie der abelschen Gruppen ist offensichtlich eine bequeme abelsche Schmelzkategorie. Sie ist entfaltbar. In der Tat ist sie von endlicher homologischer Dimension, also besitzt jeder Komplex nach 19.9.3.9 einen Quasiisomorphismus zu einem Komplex injektiver abelscher Gruppen und dieser ist nach 20.2.6.25 quisrechtsentfaltet. Ebenso bilden die Komplexe gibt es nach 20.3.8.8 zu jedem Komplex einen Quasiisomorphismus von einem Komplex freier abelscher Gruppen und nach 20.3.8.14 ist jeder Komplex freier abelscher Gruppen quisflach. Mit 21.2.8.7 erhalten wir so eine Erweiterung der üblichen derivierten Kategorie der Kategorie der abelschen Gruppen zur Schmelzkategorie

$$\mathrm{Der}_{\mathrm{Ab}} = \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$$

der derivierten abelschen Gruppen mit stabil universellen Verschmelzungen, internem Hom und interner triangulierter Struktur. Stärker als in der Allgemeinheit von Satz 21.2.8.7 ist in diesem Fall nach 20.3.8.20 auch für X ein quislinkssentfalteter Komplex und Y beliebig der vom Lokalisierungsfunktor Q nach 18.1.6.20 induzierte Morphismus in $\mathrm{Der}_{\mathrm{Ab}}$ ein Isomorphismus

$$Q(X \Rrightarrow_{\mathrm{Hot}} Y) \xrightarrow{\sim} (QX \Rrightarrow_{\mathrm{Der}} QY)$$

21.2.8.14 (**Dualität in derivierten abelschen Gruppen**). Die universelle Leerverschmelzung der Schmelzkategorie $\mathrm{Der}_{\mathrm{Ab}}$ ist die Leerverschmelzung $\Upsilon \to \mathbb{Z}[0]$, die aus dem Element $1 \in \mathbb{Z}$ entsteht. Gegeben $C \in \mathrm{Ket}_{\mathrm{Ab}}$ wird das derivierte Duale alias das Duale in der derivierten Kategorie $C^\vee \in \mathrm{Der}_{\mathrm{Ab}}$ mithin repräsentiert durch den bereits in 19.5.1.13 verwendeten Komplex

$$\mathbb{D}C := \big(C \Rrightarrow_{\mathrm{Ket}} (\mathbb{Q}[0] \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\big)$$

In der Tat liefert die Einbettung $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ einen Quasiisomorphismus $\mathbb{Z}[0] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}[0] \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ und der zweite Komplex besteht aus injektiven abelschen Gruppen, ist also quisrechtsentfaltet in $\mathrm{Hot}_{\mathrm{Ab}}$.

Beispiel 21.2.8.15 (**Schmelzkategorie derivierter Kringmoduln**). Die Schmelzkategorie der Moduln über einem Kring k ist offensichtlich eine bequeme abelsche Schmelzkategorie. Sie ist entfaltbar. In der Tat besitzt jeder Komplex von Moduln nach 20.3.8.6 eine Quisrechtsentfaltung und nach 20.3.8.14 und 20.3.8.8 gibt es zu jedem Komplex einen Quasiisomorphismus von einem quisflachen Komplex. Mit 21.2.8.7 erhalten wir so eine Erweiterung der üblichen derivierten Kategorie der Kategorie der k-Moduln zur Schmelzkategorie

$$\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_k)$$

der derivierten k-Moduln mit stabil universellen Verschmelzungen, internem Hom und interner triangulierter Struktur. Stärker als in der Allgemeinheit von Satz 21.2.8.7 ist in diesem Fall nach 20.3.8.20 auch für C ein quislinkssentfalteter Komplex und D beliebig der vom Lokalisierungsfunktor Q nach 18.1.6.20 induzierte Morphismus in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_k)$ ein Isomorphismus

$$Q(C \Rrightarrow_{\mathrm{Hot}} D) \xrightarrow{\sim} (QC \Rrightarrow_{\mathrm{Der}} QD)$$

Nach 21.2.8.10 vererbt sich die offensichtliche k-Struktur auf Ab_k zu einer k-Struktur auf $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_k)$.

Beispiel 21.2.8.16 (**Schmelzkategorie derivierter Modulgarben**). Gegeben ein gekringter Raum $X = (X, \mathcal{A})$ bilden die $\mathcal{A}$-Moduln aus 21.1.3.5 nach 21.1.3.8 eine bequeme abelsche Schmelzkategorie. Sie ist entfaltbar im Sinne von 21.2.8.5. In der Tat besitzt jeder Komplex von $\mathcal{A}$-Moduln eine Quisrechtsentfaltung nach 21.2.3.6 und ein quisflache Linksauflösung nach 21.2.5.20. Mit 21.2.8.7 erhalten wir so eine Erweiterung der üblichen derivierten Kategorie der Kategorie der $\mathcal{A}$-Moduln zur Schmelzkategorie

$$\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/(X,\mathcal{A})})$$

der derivierten $\mathcal{A}$-Moduln mit stabil universellen Verschmelzungen, internem Hom und interner triangulierter Struktur. Unsere Isotransformation $\mathrm{L} \overset{\sim}{\Rightarrow} \Gamma$ vom Leerverschmelzungsfunktor von $\mathrm{Ab}_{/(X,\mathcal{A})}$ zum Funktor der globalen Schnitte liefert mit 21.2.8.9 Isomorphismen

$$\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/(X,\mathcal{A})})(\curlyvee, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^0(X; \mathcal{F})$$

zwischen der abelschen Gruppe der Leerverschmelzungen in einen Garbenkomplex und seiner Hyperkohomologie im Grad Null.

21.2.8.17 (**Cup-Produkt**). Gegeben eine entfaltbare bequeme abelsche Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ ist $[1]\mathbb{I}$ eine Signumseinheit von $\mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$. Wir erhalten also nach 18.3.4.18 einen Schmelzfunktor $\mathrm{Der}_{\mathcal{M}} \to \mathrm{sgAb}$ durch die Vorschrift

$$\mathcal{F} \mapsto \mathrm{Der}_{\mathcal{M}}(\curlyvee, [q]\mathcal{F})_{q \in \mathbb{Z}}$$

Er macht jedes Monoid zu einem Monoid und macht insbesondere das Abmonoid $\mathbb{I} \in \mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$ nach 18.3.1.12 zu einem Abmonoid von sgAb alias einem superkommutativen $\mathbb{Z}$-graduierten Ring. Im Spezialfall $\mathcal{M} = \mathrm{Ab}_{/X}$ der abelschen Garben auf einem topologischen Raum X erhalten wir so unter der Identifikation 21.2.8.16 von Leerverschmelzungen mit Hyperkohomologie den garbentheoretischen Kohomologiering

$$\bigoplus_q \mathrm{H}^q(X;\mathbb{Z}_X)$$

So sehen wir insbesondere, daß dieser graduierte Ring superkommutativ ist. Im Spezialfall $\mathcal{M} = \mathrm{Ab}_{/(X,\mathcal{A})}$ der abelschen Garben auf einem gekringten Raum $(X,\mathcal{A})$ erhalten wir allgemeiner einen superkommutativen graduierten Ring

$$\bigoplus_q \mathrm{H}^q(X;\mathcal{A})$$

21.2.8.18 (**Erweiterungen und internes Hom**). Sei $\mathcal{M}$ eine entfaltbare bequeme abelsche Schmelzkategorie. Gegeben $\mathcal{F},\mathcal{G} \in \mathcal{M}$ haben wir nach 20.2.6.10 und 18.1.4.2 Isomorphismen von abelschen Gruppen

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{M}}(\mathcal{F},[q]\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{M}}(\curlyvee,\mathcal{F}\Rrightarrow[q]\mathcal{G})$$

Im Fall $\mathcal{M} = \mathrm{Ab}_{/X}$ für einen gekringten Raum X können wir das nach 21.2.8.16 weiter identifizieren mit der Hyperkohomologie der derivierten Homomorphismengarbe $\mathbb{H}^q(X;\mathcal{F}\Rrightarrow\mathcal{G})$.

21.2.8.19 (**Totale Homologie als Schmelzfunktor**). Nach 21.2.8.6 können wir auch für Modulgarben auf einem gekringten Raum $X = (X,\mathcal{A})$ den Schmelzfunktor der totalen Homologie $\mathcal{H} : \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X}) \to \mathrm{sg}(\mathrm{Ab}_{/X})$ bilden. Er faktorisiert offensichtlich über die Lokalisierung nach Quasiisomorphismen und induziert so einen Schmelzfunktor

$$\mathcal{H} : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X}) \to \mathrm{sg}(\mathrm{Ab}_{/X})$$

Insbesondere induziert für beliebige Komplexe von Modulgarben $\mathcal{F},\mathcal{G}$ die stabil universelle Verschmelzung $\mathcal{F} \curlyvee \mathcal{G} \to \mathcal{F} \otimes^{\mathrm{L}} \mathcal{G}$ in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ eine Verschmelzung

$$\mathcal{H}\mathcal{F} \curlyvee \mathcal{H}\mathcal{G} \to \mathcal{H}(\mathcal{F} \otimes^{\mathrm{L}} \mathcal{G})$$

und insbesondere Morphismen $\mathcal{H}^p\mathcal{F} \otimes \mathcal{H}^q\mathcal{G} \to \mathcal{H}^{p+q}(\mathcal{F} \otimes^{\mathrm{L}} \mathcal{G})$ von Modulgarben.

Übungen

Übung 21.2.8.20. Alle Objekte in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ mit endlich erzeugter totaler Kohomologie sind starr. Hinweis: 20.2.3.11. Ist allgemeiner k ein noetherscher Kring von endlicher homologischer Dimension, so sind alle Objekte von $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_k)$ mit endlich erzeugter totaler Kohomologie starr.

Übung 21.2.8.21. Gegeben ein Kring k ist in $\mathrm{Der}(k[T_1,\ldots,T_r]\text{-Mod})$ das Duale $k^\vee$ des Moduls $k = k[T_1,\ldots,T_r]/\langle T_1,\ldots,T_r\rangle$ isomorph zu $k[-r]$. Hinweis: Koszul-Komplex 19.3.2.31.

Übung 21.2.8.22. Gegeben ein topologischer Raum X und abelsche Gruppen K, L konstruiere man ein cup-Produkt $\mathrm{H}^p(X;K)\times\mathrm{H}^q(X;L) \to \mathrm{H}^{p+q}(X;K\otimes L)$.

21.2.9 Derivierte Garbenoptrennfaserung

21.2.9.1. Wir erinnern aus 21.1.3.11 die Trennfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Gek}} \to \curlywedge\mathrm{Gek}$ der opponierten Modulgarben über der banalen Trennkategorie der gekringten Räume, die „Modulgarbenoptrennfaserung" oder kurz **Garbenoptrennfaserung**. Wir erinnern weiter unsere allgemeinen Erkenntnisse über Trennfunktoren zu banalen Trennkategorien 21.1.5.2 und insbesondere, wie in diesem Fall auf den Fasern die Struktur einer Trennkategorie induziert wird, die im Fall einer Trennfaserung nach 21.1.5.4 ihrerseits stabil universelle Trennungen besitzt. Indem wir erst zu Komplexen und dann zu Homotopiekomplexen übergehen, erhalten wir in offensichtlicher Weise Trennfaserungen $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Gek}}) \to \curlywedge\mathrm{Gek}$ und $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Gek}}) \to \curlywedge\mathrm{Gek}$. Die Lokalisierung der Trennkategorie $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Gek}})$ im Sinne von 21.2.6.3 nach allen denjenigen Einstrennungen über Identitäten, die Quasiisomorphismen sind, notiere ich $\mathrm{Der}_{/\!/\mathrm{Gek}} := \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Gek}})_{\shortparallel\mathrm{qis}}$. Wir erhalten so einen Trennfunktor, den **Trennfunktor der derivierten Modulgarben**

$$\mathrm{Der}_{/\!/\mathrm{Gek}} \to \curlywedge\mathrm{Gek}$$

Die in 21.1.5.2 für beliebige Trennfunktoren zu banalen Trennkategorien erklärte Konstruktion macht für jeden gekringten Raum $X = (X,\mathcal{A})$ die Faser $\mathrm{Der}_{/\!/X}$ zu einer Trennkategorie. Die dazu opponierte Schmelzkategorie notieren wir

$$\mathrm{Der}_{/X} := (\mathrm{Der}_{/\!/X})^{\mathrm{opp}}$$

21.2.9.2. Sei $X = (X,\mathcal{A})$ ein gekringter Raum. Die Einbettung von Familienkategorien $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/X})^\curlyvee \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Gek}})^\curlyvee$ induziert einen Funktor zwischen ihren Lokalisierungen nach Tupeln von Quasiisomorphismen über Identitäten und so einen Schmelzfunktor

$$e_X : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X}) \to \mathrm{Der}_{/X}$$

Satz 21.2.9.3 (**Rückzug und Tensorprodukt**). *1. Der Trennfunktor der derivierten Modulgarben* $\mathrm{Der}_{/\!/\mathrm{Gek}} \to \curlywedge\mathrm{Gek}$ *ist eine Trennfaserung mit Adjungierten im Sinne von 21.1.5.5, die* **derivierte Garbenoptrennfaserung***;*

2. Für jeden gekringten Raum $X = (X,\mathcal{A})$ ist der Schmelzfunktor e_X aus 21.2.9.2 ein Isomorphismus von Schmelzkategorien

$$e_X : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{/X}$$

3. *Gegeben ein Morphismus $f : X \to Y$ gekringter Räume existiert eine Isotransformation zwischen den beiden Kompositionen des Diagramms*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X}) \arrow[d, "e_Y", "\wr"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\sim"] & \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y}) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "e_X"', "\wr"] \\
\mathrm{Der}_{/X} & \mathrm{Der}_{/Y} \arrow[l, "f^{\dagger\mathrm{opp}}"]
\end{tikzcd}$$

mit dem Linksderivierten des Rückzugs beziehungsweise dem Opponierten des Rückzugs in der derivierten Garbenopfaserung in den Horizontalen.

21.2.9.4. Vermittels der Isomorphismen aus Teil 2 übertragen wir die Struktur einer Schmelzkategorie mit stabil universellen Veschmelzungen, internem Hom und interner triangulierter Struktur auf $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ aus 21.2.8.16 auf die opponierten Fasern der derivierten Garbenoptrennfaserung. Nach Teil 3 sind die einfachen Rückzüge unserer derivierten Garbenoptrennfaserung für diese Strukturen triangulierte Funktoren.

Beweis. Wir wenden die Korollare 21.2.5.11 und 21.2.5.12 zur Lokalisierung von Kofaserfunktoren durch Linksanpassung oder genauer die daraus durch Übergang zu den opponierten Kategorien entstehenden Aussagen zur Lokalisierung von Faserfunktoren durch Rechtsanpassung an auf den auf den Familienkategorien induzierten Funktor

$$\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Gek}})^{\curlywedge} \to \mathrm{Gek}^{\curlywedge}$$

Er ist ein Faserfunktor. Genauer ist für Morphismen $f_i : X \to Y_i$ gekringter Räume und $\mathcal{G}_i \in \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/Y_i})$ die tautologische Trennung

$$f_1^*\mathcal{G}_1 \otimes \ldots \otimes f_n^*\mathcal{G}_n \to \mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_n$$

über $(f_1, \ldots, f_n)$ kartesisch. Wie beim Beweis des Spezialfalls 21.9.9.19, nur jetzt in opponierter Weise notiert, bilden die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten nach 20.2.5.3 ein faserweises Rechtsoresystem, ja sogar ein faserweises Oresystem. Für dieses faserweise Rechtsoresystem der Quasiisomorphismen ist die Unterkategorie $(\mathrm{Hfl}_{/\!/\,\mathrm{Gek}})^{\curlywedge} \subset \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Gek}})^{\curlywedge}$ aller Tupel von quisflachen Komplexen von Modulgarben eine Rechtsanpassung, denn Tensorprodukt wie Rückzug machen aus quisflachen Komplexen quisflache Komplexe, Tensorprodukt wie Rückzug von Quasiisomorphismen zwischen quisflachen Komplexen von Modulgarben sind wieder Quasiisomorphismen, und nach 21.2.5.20 finden wir für jeden Komplex von Modulgarben eine quisflache Linksauflösung, die in der opponierten Kategorie den benötigten Morphismus liefert. Nach 21.2.5.11.1 ist unser Trennfunktor $\mathrm{Der}_{/\!/\,\mathrm{Gek}} \to \curlywedge\mathrm{Gek}$ also eine Trennfaserung und nach

21.2.5.11.2 ist e_X ein Isomorphismus von Schmelzkategorien. Da quisflache Komplexe auch quislinksentfaltet sind für $f^{(*)}$ folgt die dritte Aussage. Daß unsere Trennfaserung $\mathrm{Der}_{/\!/\,\mathrm{Gek}} \to \curlywedge\mathrm{Gek}$ eine Trennfaserung mit Adjungierten ist, folgt aus den bereits bewiesenen Teilaussagen 2 und 3. In der Tat haben die Schmelzkategorien der derivierten Modulgarben internes Hom nach 21.2.8.16 und der Linksderivierte $\mathrm{L}f^{(*)}$ hat nach 20.3.4.16 als Rechtsadjungierten den Rechtsderivierten $\mathrm{R}f_{(*)}$ des Vorschubs 21.1.3.10, der seinerseits global definiert ist, da jeder Komplex von Modulgarben nach 21.2.3.6 eine Quisrechtsentfaltung besitzt. □

21.2.9.5 (**Garbenkohomologie als Trennfunktor**). Unser Schmelzfunktor 21.1.5.29 des Vorschubs auf das finale Objekt spezialisiert in dieser Situation zu einem Schmelzfunktor

$$\mathrm{fin}_* : \mathrm{Der}_{/\mathrm{Gek}} \to \mathrm{Der}_{/\mathrm{pt}}$$

für pt den einpunktigen mit $\mathbb{Z}$ gekringten Raum. Zusammen mit den offensichtlichen Isomorphismen $\mathrm{Der}_{/\mathrm{pt}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\mathrm{pt}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ von Schmelzkategorien erhalten wir einen Schmelzfunktor

$$\mathrm{fin}_* : \mathrm{Der}_{/\mathrm{Gek}} \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$$

Halten wir noch den Schmelzfunktor $\mathcal{H} : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}) \to \mathrm{sgAb}$ der Homologie aus 21.2.8.19 dahinter, so erhalten wir den **Schmelzfunktor** $(X, \mathcal{F}) \mapsto \mathbb{H}^*(X; \mathcal{F})$ **der totalen Hyperkohomologie**. Halten wir zusätzlich den Opponierten des eindeutigen kartesischen Trennschnitts davor, so erhalten wir einen Schmelzfunktor

$$\curlyvee\mathrm{Gek}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{sgAb}$$

Er ordnet jedem gekringten Raum $(X, \mathcal{A})$ die supergraduierte abelsche Gruppe $\mathrm{H}^*(X; \mathcal{A})_{\mathrm{garb}}$ zu und jedem Tupel von von $(X, \mathcal{A})$ ausgehenden Morphismen von gekringten Räumen die multiadditive Abbildung „cup-Produkt des Rückzugs der Kohomologieklassen".

Ergänzung 21.2.9.6. Der Schmelzfunktor aus 21.2.9.5 ist eine garbenkohomologische Variante des entsprechenden Schmelzfunktors $\curlyvee\mathrm{Top}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{sgAb}$ der singulären Kohomologie, den wir in 18.4.2.3 als Trennfunktor $\curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{sgAb}^{\mathrm{opp}}$ besprochen hatten. Es sollte einmal diskutiert werden, inwiefern unser Vergleichsisomorphismus zur singulären Kohomologie eine Transformation von Trennfunktoren ist. Das würde ich gerne einem Studenten überlassen. Er sollte es gleich für „topologische Räume mit einem vorgegebenen Kring von Koeffizienten" machen, als Teil der derivierten Modulgarbenoptrennfaserung.

21.3 Verschwindungssätze mit Anwendungen

21.3.1 Garbenazyklische Morphismen

Proposition 21.3.1.1. *Gegeben ein topologischer Raum Y und ein Komplex von abelschen Garben $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ ist für die Projektion $\pi : Y \times [0,1] \twoheadrightarrow Y$ die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \pi_* \pi^* \mathcal{F}$$

Beweis. Nach 19.4.3.23 ist für jede Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \pi_{(*)}\pi^{(*)}\mathcal{F}$, denn π ist eine finale Surjektion mit zusammenhängenden Fasern. Also ist auch für alle Komplexe $\mathcal{F} \in \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \pi_{(*)}\pi^{(*)}\mathcal{F}$. Nun hat nach eigentlichem Basiswechsel 19.6.6.8 und unseren Erkenntnissen 19.4.2.3 zur Garbenkohomologie von Teilmengen der Zahlengeraden der Vorschub $\pi_{(*)} : \mathrm{Ab}_{/Y\times[0,1]} \to \mathrm{Ab}_{/Y}$ eine homologische Dimension kleinergleich Eins und insbesondere endliche homologische Dimension. Unsere Erkenntnisse 20.3.6.4 zum Derivieren homologisch endlicher Funktoren zeigen dann, daß jeder Komplex $\mathcal{A}$ von $\pi_{(*)}$-rechtsazyklischen abelschen Garben bereits $\pi_{(*)}$-quisrechtsentfaltet ist, daß also der natürliche Morphismus in der derivierten Kategorie ein Isomorphismus $Q\pi_{(*)}\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \pi_*\mathcal{A}$ ist. Nach 19.6.6.9 und 19.4.2.3 wissen wir weiter, daß das Zurückholen $\pi^{(*)} : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/Y\times[0,1]}$ jede Garbe zu einer $\pi_{(*)}$-rechtsazyklischen Garbe macht und wieder nach 20.3.6.4 damit jeden Komplex von abelschen Garben zu einem $\pi_{(*)}$-quisrechtsentfalteten Komplex. Das schließlich zeigt die Behauptung. □

Zweiter Beweis. Es reicht zu zeigen, daß die Einheit der Adjunktion für alle $y \in Y$ einen Isomorphismus $\mathrm{em}_y^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{em}_y^* \pi_* \pi^* \mathcal{F}$ induziert. Mit eigentlichem Basiswechsel 21.2.4.9 und der Verträglichkeit 19.6.3.18 von Adjunktion und Basiswechsel reicht es also, die Proposition in dem Fall zu zeigen, daß Y der einpunktige Raum ist. Nach 19.4.2.3 verschwindet auf reellen Intervallen die Garbenkohomologie jeder abelschen Garbe im Grad > 1 und die Garbenkohomologie jeder konstanten abelschen Garbe im Grad ≥ 1. Die Behauptung folgt so mit unseren Erkenntnissen 20.3.6.4 zum Derivieren homologisch endlicher Funktoren. □

Definition 21.3.1.2. Eine stetige Abbildung topologischer Räume $f : X \to Y$ heiße **garbenazyklisch**, wenn für jeden Komplex $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ die Einheit der Adjunktion einen Isomorphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f_* f^* \mathcal{F}$$

liefert. Sie heiße **basisfest garbenazyklisch** oder kurz **bagazyklisch**, wenn sie unter jedem Basiswechsel eine garbenazyklische Abbildung liefert, wenn also in

Formeln für jede stetige Abbildung $S \to Y$ die induzierte Abbildung $X \times_Y S \to S$ garbenazyklisch ist. Ein topologischer Raum X heiße **garbenazyklisch** beziehungsweise **basisfest garbenazyklisch** oder kurz **bagazyklisch**, wenn die konstante Abbildung $X \to \mathrm{top}$ die entsprechende Eigenschaft hat.

21.3.1.3. Jede garbenazyklische Abbildung ist offensichtlich schwach garbenazyklisch im Sinne unserer Definition 19.6.6.10, der Rückzug induziert also Isomorphismen auf der Kohomologie mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe.

Satz 21.3.1.4. *Jeder zusammenziehbare Raum ist bagazyklisch.*

Beweis. Gegeben eine abelsche Gruppe G erhalten wir einen Funktor

$$\mathrm{H}(\ ;G) : \mathrm{Top} \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})^{\mathrm{opp}}$$

durch die Vorschrift $X \mapsto \mathrm{fin}_{X*}\,\mathrm{fin}_X^*\,G$ auf Objekten und die Vorschrift, daß jedem Morphismus $f : X \to Y$ die Komposition

$$f^\sharp : \mathrm{fin}_{Y*}\,\mathrm{fin}_Y^*\,G \to \mathrm{fin}_{Y*}\,f_*f^*\,\mathrm{fin}_Y^*\,G \xrightarrow{\sim} \mathrm{fin}_{X*}\,\mathrm{fin}_X^*\,G$$

zugeordnet wird. Ich notiere ihn $X \mapsto \mathrm{H}(X;G)$. Das Nachschalten von $\mathcal{H}^q$ macht daraus den üblichen Funktor $X \mapsto \mathrm{H}^q(X;G)$ der Garbenkohomologie mit Koeffizienten in G. Diese Konstruktion funktioniert genauso, wenn wir für G ein beliebiges Objekt von $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ zulassen. Sie funktioniert noch allgemeiner für eine beliebige Bifaserung $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ über einer Kategorie mit finalem Objekt pt, für jedes Objekt $\mathcal{G} \in \mathscr{C}_{\mathrm{pt}}$ erhalten wir dann einen Funktor $\mathscr{B} \to \mathscr{C}_{\mathrm{pt}}$ durch die Vorschrift $X \mapsto \mathrm{fin}_{X\dagger}\,\mathrm{fin}_X^\dagger\,\mathcal{G}$ auf Objekten und die Vorschrift, daß jedem Morphismus $f : X \to Y$ in der Basis die Komposition

$$f^\sharp = \mathrm{idt} \circ \varepsilon : \mathrm{fin}_{X\dagger}\,\mathrm{fin}_X^\dagger\,\mathcal{G} \to \mathrm{fin}_{Y\dagger}\,f_\dagger f^\dagger\,\mathrm{fin}_Y^\dagger\,\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{fin}_{Y\dagger}\,\mathrm{fin}_Y^\dagger\,\mathcal{G}$$

zugeordnet wird. Gegeben ein topologischer Raum S und $\mathcal{G} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/S})$ erhalten wir so insbesondere einen Funktor auf der Kategorie der topologischen Räume über S, den wir

$$\mathrm{H}_S(\ ;\mathcal{G}) : \mathrm{Top}_S \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/S})^{\mathrm{opp}}$$

notieren. Unsere Erkenntnisse 21.3.1.1 zeigen, daß für einen Raum $X \in \mathrm{Top}_S$ über S und die Projektion $\pi : X \times [0,1] \twoheadrightarrow X$ der „relative Rückzug" stets ein Isomorphismus

$$\pi^\sharp : \mathrm{H}_S(X;\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_S(X \times [0,1];\mathcal{G})$$

ist. Für $i_t : X \hookrightarrow X \times [0,1]$ die durch das Dahinterschreiben von $t \in [0,1]$ gegebene Abbildung folgt daraus wegen $i_t^\sharp \circ \pi^\sharp = \mathrm{id}$, daß sie gar nicht von t abhängt. Sind speziell $f, g : X \to Y$ homotop, so folgt

$$(f \times \mathrm{id})^\sharp = (g \times \mathrm{id})^\sharp : \mathrm{H}_S(Y \times S;\mathcal{G}) \to \mathrm{H}_S(X \times S;\mathcal{G})$$

Jede Homotopieäquivalenz $f : Y \to Z$ induziert folglich einen Isomorphismus $(f \times \mathrm{id})^\sharp : \mathrm{H}_S(Z \times S; \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_S(Y \times S; \mathcal{G})$. Ist insbesondere Z ein zusammenziehbarer Raum, so ist der relative Rückzug zur Projektion $c : Z \times S \to S$ ein Isomorphismus $c^\sharp : \mathrm{H}_S(S; \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_S(Z \times S; \mathcal{G})$ alias die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_* c^* \mathcal{G}$. □

21.3.1.5 (**Permanenzeigenschaften garbenazyklischer Abbildungen**). Jede Verknüpfung garbenazyklischer Abbildungen ist garbenazyklisch. Ist $g \circ f$ garbenazyklisch und f garbenazyklisch, so ist auch g garbenazyklisch. Ist $f : X \to Y$ stetig und besitzt Y eine Überdeckung durch offene Teilmengen $U \Subset Y$ derart, daß $f : f^{-1}(U) \to U$ jeweils garbenazyklisch ist, so ist schon $f : X \to Y$ selbst garbenazyklisch. Insbesondere ist jedes Faserbündel mit bagazyklischer Faser bagazyklisch.

Definition 21.3.1.6. Sei $f : X \to Y$ stetig. Wir sagen, ein Komplex von abelschen Garben $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ **kommt her von** Y, wenn es $\mathcal{G} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ gibt mit $\mathcal{F} \cong f^* \mathcal{G}$.

Lemma 21.3.1.7. *Seien $f : X \to Y$ garbenazyklisch und $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$. So sind gleichbedeutend:*

1. *Das Objekt $\mathcal{F}$ kommt her von Y;*
2. *Die Koeinheit der Adjunktion liefert einen Isomorphismus $f^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$;*
3. *Es gibt eine offene Überdeckung $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(Y)$ von Y derart, daß für alle $U \in \mathcal{U}$ die Einschränkung $\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)}$ von U herkommt.*

Beweis. Die Definition garbenazyklischer Abbildungen und formale Eigenschaften adjungierter Funktoren nach 16.4.8.1 liefern 1 ⇔ 2. Formulieren wir 3 um vermittels dieser Erkenntnis, so erhalten wir auch 2 ⇔ 3. □

21.3.2 Künnethformeln der Garbenkohomologie

21.3.2.1. In der Garbenkohomologie gilt eine besonders einfache und allgemeine Künnethformel für die kompakte Kohomologie. Wir lernen sie in 21.5.6.13 kennen. Im folgenden diskutieren wir Künnethformeln für die gewöhnliche Kohomologie. Wir benötigen sie für die Arbeit mit Kohomologieringen.

Satz 21.3.2.2 (**Derivierter gefaserter Basiswechsel**). *Sind in einem kartesischen Diagramm von topologischen Räumen $fq = pg$ die Horizontalen p, q Faserbündel mit offenlokal zusammenziehbarer Faser, so ist der Basiswechsel auf den derivierten Kategorien von abelschen Garben eine Isotransformation*

$$p^* f_* \overset{\sim}{\Rightarrow} g_* q^*$$

21.3.2.3. Wir zeigen den Satz sogar etwas allgemeiner für Faserbündel mit offenlokal bagazyklischer Faser. In 19.8.2.2 hatten wir eine Variante diskutiert, die ohne derivierte Kategorien auskommt und stattdessen eine Aussage über die Folge der höheren derivierten Funktoren macht.

Beispiel 21.3.2.4. Die geometrische Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ eines Simplizialkomplexes $(E, \mathcal{K})$ ist stets offenlokal zusammenziehbar: Jede Umgebung eines jeden Punktes kann in anderen Worten einer offenen zusammenziehbaren Umgebung desselben Punktes verkleinert werden. Insbesondere ist jede komplexe algebraische Varietät mit ihrer analytischen Topologie offenlokal zusammenziehbar, denn nach [Hir75] ist jede algebraische Teilmenge eines $\mathbb{C}^n$ homöomorph zur geometrischen Realisierung eines Simplizialkomplexes.

Beweis. Gegeben $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ reicht es nach unserem Verschwindungskriterium 21.2.3.20 zu zeigen, daß jeder Punkt aus dem Definitionsbereich von p ein Fundamentalsystem von offenen Umgebungen hat derart, daß der von der Einbettung j der fraglichen Umgebung herrührende Morphismus ein Isomorphismus

$$\mathrm{fin}_* \, j^* p^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{fin}_* \, j^* g_* q^* \mathcal{F}$$

ist, für fin die konstante Abbildung auf den einpunktigen Raum. Mit dieser Erkenntnis können wir uns darauf zurückziehen, im Fall kartesischen Diagramms der Gestalt

$$\begin{tikzcd} X \times Z \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \times Z \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

mit zusammenziehbarem oder allgemeiner bagazyklischem Z zu zeigen, daß Basiswechsel Isomorphismen

$$p_* p^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} p_* g_* q^* \mathcal{F}$$

induziert. Das ist aber klar, da ja gilt $p_* g_* = f_* q_*$ und da nach Annahme die Einheiten der Adjunktion Isomorphismen $\mathrm{id} \xrightarrow{\sim} p_* p^*$ und $\mathrm{id} \xrightarrow{\sim} q_* q^*$ sind. $\square$

21.3.2.5. Für beliebige topologische Räume X, Y liefert der Rückzug auf der Kohomologie einen Ringhomomorphismus

$$\mathrm{H}^*(X) \bar{\otimes} \mathrm{H}^*(Y) \to \mathrm{H}^*(X \times Y)$$

mit $(u, v) \mapsto u \times v := \mathrm{pr}_X^*(u) \cup \mathrm{pr}_Y^*(v)$. Hier meint $\bar{\otimes}$ das für Monoidobjekte der Schmelzkatgorie der supergraduierten abelschen Gruppen zu verstehende Tensorprodukt 18.3.1.31, also das übliche Tensorprodukt von graduierten abelschen Gruppen mit einer Vorzeichenregel für der Multiplikation von zwei Tensoren. Dieser Ringhomomorphismus heißt das **Kreuzprodukt der Garbenkohomologie**.

Satz 21.3.2.6 (Künnethformel der Garbenkohomologie). *Seien X, Y topologische Räume und k ein Kring. Ist X offenlokal zusammenziehbar oder allgemeiner offenlokal bagazyklisch und sind alle $\mathrm{H}^q(Y)$ projektive k-Moduln, so konstruieren wir im folgenden Beweis einen ausgezeichneten Isomorphismus*

$$\bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}^p(X; \mathrm{H}^q(Y; k)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(X \times Y; k)$$

Sind zuätzlich alle $\mathrm{H}^q(Y)$ endlich erzeugt, so induziert das Kreuzprodukt der Kohomologie Isomorphismen

$$\bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}^p(X; k) \otimes_k \mathrm{H}^q(Y; k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(X \times Y; k)$$

21.3.2.7. Fordern wir keine speziellen Eigenschaften von X, fordern aber weiter die Projektivität aller $\mathrm{H}^q(Y; k)$, so liefern die Konstruktionen unseres Beweises ausgezeichnete Morphismen $\bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}^p(X; \mathrm{H}^q(Y; k)) \to \mathrm{H}^n(X \times Y; k)$, die aber im allgemeinen keine Isomorphismen mehr zu sein brauchen. Fordern wir andererseits X offenlokal bagazyklisch und fordern keine speziellen Eigenschaften von Y, fordern aber, daß unser Koeffizientenkring k erblich sein soll, so liefern die Konstruktionen unseres Beweises zusammen mit 20.2.6.27 zwar die Existenz von Isomorphismen $\bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}^p(X; \mathrm{H}^q(Y; k)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(X \times Y; k)$, aber nicht deren Eindeutigkeit.

21.3.2.8. In 21.5.6.14 werden wir eine Künnethformel für die kompakte Kohomologie kennenlernen.

Beispiel 21.3.2.9. Im Fall $n = 0$ liefert unser Satz unter Zusatzannahmen, die sich in diesem Fall als überflüssig erweisen, die vom Exponentialgesetz induzierten Morphismen

$$\mathrm{Top}(X, \mathrm{Top}(Y, k)) \to \mathrm{Top}(X \times Y, k)$$

Es ist leicht zu sehen, daß diese sogar für lokal zusammenhängendes X Isomorphismen sind.

Beweis. Derivierter gefaserter Basiswechsel 21.3.2.2 im kartesischen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\mathrm{pr}_Y"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_X"'] & Y \arrow[d, "b"] \\ X \arrow[r, "a"] & \mathrm{top} \end{tikzcd}$$

liefert einen Isomorphismus $a^* b_* \underline{Y} \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_{X*} \mathrm{pr}_Y^* \underline{Y}$ und so einen Isomorphismus $a_* a^* b_* \underline{Y} \xrightarrow{\sim} \mathrm{fin}_* \underline{X \times Y}$. Sind alle $\mathrm{H}^q(Y; k)$ projektive k-Moduln, so gibt es nach

20.2.6.21 genau einen Morphismus $s : \mathcal{H}b_*\underline{Y} \to b_*\underline{Y}$ in der derivierten Kategorie derart, daß $\mathcal{H}s : \mathcal{H}\mathcal{H}b_*\underline{Y} \to \mathcal{H}b_*\underline{Y}$ der offensichtliche Isomorphismus ist, und dieser Morphismus ist offensichtlich selber ein Isomorphismus

$$s : \mathcal{H}b_*\underline{Y} \to b_*\underline{Y}$$

Nach 20.3.9.5 ist $a^*b_*\underline{Y}$ das Produkt der $[-q]a^*\mathrm{H}^q(Y;k)$. Als Rechtsadjungierter macht a_* Produkte zu Produkten. Da Produkte in derivierten Modulkategorien nach 20.3.9.6 gliedweise berechnet werden können und mit dem Bilden der Homologie vertauschen, folgen die Isomorphismen des Satzes. Eine Kohomologieklasse $\beta \in \mathrm{H}^r(Y;k)$ entspricht einem Morphismus $\beta : \underline{Y} \to [r]\underline{Y}$. Indem wir seinen Effekt unter unseren Konstruktionen verfolgen, erhalten wir auch ohne irgendwelche Annahmen an X die rechte Hälfte eines kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}^p(X;k) \otimes_k \mathrm{H}^q(Y;k) & \to & \mathrm{H}^p(X;\mathrm{H}^q(Y;k)) & \to & \mathrm{H}^{p+q}(X \times Y;k) \\
\downarrow \mathrm{id} \otimes (\cup\beta) & & \downarrow \cup\beta & & \downarrow \cup\, \mathrm{pr}_Y^*\, \beta \\
\mathrm{H}^p(X;k) \otimes_k \mathrm{H}^{q+r}(Y;k) & \to & \mathrm{H}^p(X;\mathrm{H}^{q+r}(Y;k)) & \to & \mathrm{H}^{p+q+r}(X \times Y;k)
\end{array}$$

Das linke Quadrat entsteht aus dem ausgezeichneten Morphismus

$$a_*\underline{X} \otimes \mathcal{F} \to a_*(\underline{X} \otimes a^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} a_*a^*\mathcal{F}$$

nach 21.1.5.17, indem wir zu $\mathcal{F}$ zu $[0]\mathrm{H}^q(Y;k)$ spezialisieren und $\mathcal{H}^p$ anwenden und den Morphismus 21.2.8.19 vom Tensorprodukt der Homologien zur Homologie des Tensorprodukts vorschalten. Indem wir die Bilder von $\alpha \otimes 1$ verfolgen, erkennen wir, daß die Kompositionen in den Horizontalen das Kreuzprodukt der Kohomologie sein müssen. Ist $\mathrm{H}^q(Y;k)$ endlich erzeugt projektiv, so ist es starr und flach und die eben konstruierten Morphismen erweisen sich als Isomorphismen nach der starren Projektionsformel 21.1.5.20 oder 21.3.2.10 und der $\otimes$-Entfaltetheit flacher Objekte und der zweite Teil des Satzes folgt. □

21.3.2.10 (**Starre Projektionsformel, Variante**). Gegeben $f : X \to Y$ stetig und k ein Kring erhalten wir aus den Adjunktionen für $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/(X,k)})$ und $\mathcal{G} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/(Y,k)})$ einen kanonischen Morphismus $(f_*\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \to f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G})$. Halten wir $\mathcal{F}$ fest, so bilden die Objekte $\mathcal{G}$, für die unsere Morphismen Isomorphismen

$$(f_*\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G})$$

sind, eine volle triangulierte Unterkategorie von $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/(Y,k)})$, die zumindest die konstante Garbe $\underline{Y}$ enthält. In 21.1.5.20 haben wir diskutiert, warum für beliebiges $\mathcal{F}$ unsere starre Projektionsformel insbesondere für alle „starren“ Objekte $\mathcal{G}$ gilt.

21.3.2.11 (**Relative Künnethformel mit Koeffizienten**). Wir betrachten ein Diagramm von topologischen Räumen der Gestalt

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r, "\mathrm{pr}_Y"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[dr, "c"] & Y \arrow[d, "b"] \\ X \arrow[r, "a"] & Z \end{tikzcd}$$

und nehmen an, a sei ein Faserbündel mit offenlokal zusammenziehbarer oder allgemeiner offenlokal bagazyklischer Faser und k ein Kring. Für $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ starr und $\mathcal{G} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ mit $b_*\mathcal{G}$ starr zeigen wir, daß der natürliche Morphismus ein Isomorphismus

$$c_*(\mathcal{F} \boxtimes_Z \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} a_*\mathcal{F} \otimes b_*\mathcal{G}$$

ist. Dazu beachten wir die Isomorphismen

$$a_* \,\mathrm{pr}_{X*}(\mathrm{pr}_X^* \mathcal{F} \otimes \mathrm{pr}_Y^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} a_*(\mathcal{F} \otimes (\mathrm{pr}_{X*} \,\mathrm{pr}_Y^* \mathcal{G})) \xrightarrow{\sim} a_*(\mathcal{F} \otimes a^* b_* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} a_*\mathcal{F} \otimes b_*\mathcal{G}$$

aus der starren Projektionsformel 21.3.2.10 außen mit dem gefaserten derivierten Basiswechsel 21.3.2.2 in der Mitte und beachten $a \,\mathrm{pr}_X = c$ und unsere Definition $\mathcal{F} \boxtimes_Z \mathcal{G} := \mathrm{pr}_X^* \mathcal{F} \otimes \mathrm{pr}_Y^* \mathcal{G}$ für das Boxprodukt. Wenn wir gar keine Starrheitsannahmen machen, erhalten wir nur noch mit 21.1.5.9 und gefasertem Basiswechsel kanonische Isomorphismen

$$c_*(\mathrm{pr}_X^* \mathcal{F} \Rrightarrow \mathrm{pr}_Y^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} a_*(\mathcal{F} \Rrightarrow \mathrm{pr}_{X*} \,\mathrm{pr}_Y^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} a_*(\mathcal{F} \Rrightarrow a^* b_* \mathcal{G})$$

Satz* 21.3.2.12 (Leray-Hirsch). *Gegeben $X \to Y$ ein Faserbündel über einem offenlokal zusammenziehbaren Raum und $c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{H}^*(X)$ homogene Klassen, deren Rückzüge für alle $y \in Y$ eine Basis der Kohomologie $\mathrm{H}^*(X_y)$ der Faser bilden, bilden $c_1, \ldots, c_n$ auch eine Basis von $\mathrm{H}^*(X)$ als $\mathrm{H}^*(Y)$-Modul.*

Beweis. Bezeichne $p : X \to Y$ die Projektion. Eine Klasse $c \in \mathrm{H}^q(X)$ können wir nach 20.2.6.14 auffassen als einen Morphismus $c : p^*\mathbb{Z}_Y \to \mathbb{Z}_X[q]$ in der derivierten Kategorie der abelschen Garben auf X. Die Zeilenmatrix $(c_1, \ldots, c_n)$ liefert so einen Homomorphismus

$$\textstyle\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_Y[-q(i)] \to p_*\mathbb{Z}_X$$

Unser Satz folgt, wenn wir nachweisen, daß er ein Quasiisomorphismus ist. Dazu dürfen wir aber unser Faserbündel als trivial annehmen und dann folgt die Behauptung aus deriviertem gefaserten Basiswechsel 21.3.2.2. □

Satz* 21.3.2.13 (Leray-Hirsch, Variante). *Gegeben $X \to Y$ ein Faserbündel über einem offenlokal zusammenziehbaren Raum und homogene Kohomologieklassen $c_i \in \mathrm{H}^{q(i)}(X)$ für $i = 1, \ldots, n$, deren Rückzüge für alle $y \in Y$ eine Basis*

der abgeschnittenen Kohomologie $\mathrm{H}^{\leq s}(X_y)$ *der Faser bilden, induziert die durch Multiplikation mit* $c_1, \ldots, c_n$ *gegebene Abbildung in allen Graden* $\leq s$ *einen Isomorphismus*

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{H}^*(Y)[-q(i)] \to \mathrm{H}^*(X)$$

Beweis. Bezeichne $p : X \to Y$ die Projektion. Eine Klasse $c \in \mathrm{H}^q(X)$ können wir nach 20.2.6.14 auffassen als einen Morphismus $c : p^*\mathbb{Z}_Y \to \mathbb{Z}_X[q]$ in der derivierten Kategorie der abelschen Garben auf X. Die Zeilenmatrix $(c_1, \ldots, c_n)$ liefert so einen Homomorphismus

$$\textstyle\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_Y[-q(i)] \to \tau^{\leq s} p_* \mathbb{Z}_X$$

Unser Satz folgt, wenn wir nachweisen, daß er ein Quasiisomorphismus ist. Dazu dürfen wir aber unser Faserbündel als trivial annehmen und dann folgt die Behauptung aus deriviertem gefaserten Basiswechsel 21.3.2.2. □

21.3.2.14. Wir nennen einen Morphismus $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ von gekringten Räumen **flach**, wenn für alle $x \in X$ der Halm $\mathcal{A}_x$ ein flacher $\mathcal{B}_{f(x)}$-Modul ist. Wir nennen ihn **starr**, wenn $\mathcal{A}$ starr ist in der Schmelzkategorie $\mathrm{Der}_{(X, f^*\mathcal{B})}$.

Satz 21.3.2.15 (Derivierter gefaserter Basiswechsel in gekringten Räumen). *Sind in einem kartesischen Diagramm von gekringten Räumen* $fq = pg$ *die Horizontalen* p, q *starr und Faserbündel mit offenlokal zusammenziehbarer Faser und sind die Vertikalen flach , so ist der Basiswechsel auf den derivierten Kategorien von Modulgarben eine Isotransformation*

$$p^* f_* \overset{\sim}{\Rightarrow} g_* q^*$$

21.3.2.16. Wir zeigen den Satz sogar etwas allgemeiner für Faserbündel mit offenlokal bagazyklischer Faser. Der Beweis soll funktionieren wie in 21.9.5.7, aber mit der starren Projektionsformel 21.1.5.20 im Quadrat unten links. Beispiele für starre Morphismen wären etwa endliche Körpererweiterungen. Ist das halmweise detektierbar? Ist es stabil unter Rückzug?

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß jeder Morphismus $(X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ von gekringten Räumen faktorisiert als $(X, \mathcal{A}) \to (X, f^*\mathcal{B}) \to (Y, \mathcal{B})$. Jedes kartesische Quadrat von gekringten Räumen läßt sich mithin erhalten als Verklebung der

vier kartesischen Quadrate

$$\begin{tikzcd}
(W, g^*\mathcal{C} \otimes_{v^*\mathcal{B}} q^*\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & (W, q^*\mathcal{A}) \arrow[r, "q"] \arrow[d] & (X, \mathcal{A}) \arrow[d] \\
(W, g^*\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & (W, v^*\mathcal{B}) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"] & (X, f^*\mathcal{B}) \arrow[d, "f"'] \\
(Z, \mathcal{C}) \arrow[r] & (Z, p^*\mathcal{B}) \arrow[r, "p"] & (Y, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

Hier schreiben wir $v = pg = fq$ und die Sternchen meinen Rückzüge von Kringgarben. Es reicht also, für jedes dieser vier kartesischen Quadrate zu prüfen, daß der Basiswechsel für Modulgarben ein Isomorphismus ist. Im Quadrat oben links geht es nur um Beziehungen zwischen Restriktion und Erweiterung von Skalaren, da folgt die Behauptung aus der Voraussetzung der Flachheit der $\mathcal{A}_x$ über $\mathcal{B}_{f(x)}$, die dazu führt, daß jeder quisflache Komplex von $\mathcal{A}$-Modulgarben zu einem quisflachen Komplex von $\mathcal{B}$-Modulgarben restringiert. Im Quadrat oben rechts werden nur Kringoperationen zurückgezogen und die Behauptung ist klar. Im Quadrat unten rechts steht unser gewöhnlicher gefaserter Basiswechsel für abelsche $\square$

Übungen

Übung 21.3.2.17. Gegeben topologische Räume X, Y erinnern wir die unkanonischen Homomorphismen

$$\bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}^p(X; \mathrm{H}^q(Y)) \to \mathrm{H}^n(X \times Y)$$

aus dem Beweis von 21.3.2.6. Will man eine kanonischere Aussage erhalten, mag man zum Komplex von abelschen Gruppen $B := b_*\mathbb{Z}_Y$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & {[-q]\mathcal{H}^q B} \arrow[dl, "0", "{[1]}"'] & & {[-(q+1)]\mathcal{H}^{q+1} B} \arrow[dl, "0", "{[1]}"'] & \\
\ldots \tau^{\leq q-1} B \arrow[rr] & & \tau^{\leq q} B \arrow[ul] \arrow[rr] & & \tau^{\leq q+1} B \ldots \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

betrachten. Die Morphismen vom Grad Eins der ausgezeichneten Dreicke verschwinden wie angedeutet, da gilt $\mathrm{Der}_{\mathrm{Ab}}(A, B) = 0$ für $A \in \mathrm{Der}^{\geq 2}(\mathrm{Ab})$ und $B \in \mathrm{Der}^{\leq 0}(\mathrm{Ab})$ oder expliziter nach 20.2.6.27. Alle Morphismen der unteren Horizontalen sind also spaltende Einbettungen in der additiven Kategorie $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$.

Wenden wir auf dieses Diagramm $\mathcal{H}^n a_* a^*$ an, so erhalten wir eine gradweise unkanonisch spaltende Filtrierung von $\mathrm{H}^n(X \times Y)$ und einen kanonischen Homomorphismus

$$\operatorname{gr} \mathrm{H}^n(X \times Y) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}^p(X; \mathrm{H}^q(Y))$$

Es ist eine gute Übung zu zeigen, daß unsere Filtrierung den Kohomologiering des Produkts zu einem filtrierten Ring macht und daß unser kanonischer Homomorphismus ein Ringhomomorphismus wird, wenn wir die Multiplikation rechts erklären, indem wir das Produkt

$$\mathrm{H}^p(X; K) \times \mathrm{H}^q(X; L) \to \mathrm{H}^{p+q}(X; K \otimes L)$$

aus 21.2.8.22 mit $K = \mathrm{H}^k(Y)$ und $L = \mathrm{H}^l(Y)$ anwenden und den Effekt des Cup-Produkts $\mathrm{H}^k(Y) \otimes \mathrm{H}^l(Y) \to \mathrm{H}^{k+l}(Y)$ nachschalten.

21.3.3 Gysinsequenz für Sphärenbündel

21.3.3.1. Gegeben $n \geq 1$ und $U \Subset \mathbb{R}^{n+1}$ der offene Einheitsball liefern die Lokalisierungssequenz der kompakten Kohomologie 19.4.8.15 und die Beschreibung 19.4.8.17 der kompakten Kohomologie von $\mathbb{R}^{n+1}$ und U als lokale Kohomologie in Bezug auf einen beliebigen Punkt eine Folge von Isomorphismen

$$\mathrm{H}^n_!(S^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{n+1}_!(U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{n+1}_!(\mathbb{R}^{n+1})$$

Das Urbild unseres ausgezeichneten Erzeugers aus 19.4.9.19 ganz rechts nehmen wir als unseren ausgezeichneten Erzeuger von $\mathrm{H}^n_!(S^n)$. Die natürlichen Isomorphismen $\mathrm{H}^n_{\{x\}}(S^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_!(S^n)$ liefern dann eine Orientierung auf S^n, die wir unsere **ausgezeichnete Orientierung** nennen.

21.3.3.2. Unter einem **Sphärenbündel** auf einem topologischen Raum X versteht man ein Faserbündel $\pi : E \to X$ mit einer Sphäre S^n als Faser. Unter einer **Orientierung** eines Sphärenbündels einer Faserdimension ≥ 1 versteht man die Vorgabe einer Orientierung im Sinne von 19.4.10.8 auf jeder Faser derart, daß es einen Bündelatlas gibt, unter dessen Bündelkarten $U \times S^n \to E$ diese Orientierung stets unserer ausgezeichneten Orientierung auf S^n entspricht. Ein Sphärenbündel, das mindestens eine Orientierung besitzt, heißt **orientierbar**.

Satz 21.3.3.3 (Gysin-Sequenz). *Gegeben $\pi : E \to X$ ein orientierbares Sphärenbündel einer Faserdimension $n \geq 1$ gibt es eine Klasse $c \in \mathrm{H}^{n+1}(X)$ und eine lange exakte Sequenz der Gestalt*

$$\ldots \to \mathrm{H}^q(X) \to \mathrm{H}^q(E) \to \mathrm{H}^{q-n}(X) \to \mathrm{H}^{q+1}(X) \to \ldots$$

mit dem Zurückholen als erstem Morphismus und dem cup-Produkt $c \cup$ als drittem Morphismus.

Vorschau 21.3.3.4. Wenn der folgende Beweis noch etwas unbeholfen wirkt, so ist das durchaus in meinem Sinne. Er soll nämlich unter anderem die Sprache der „derivierten Funktoren $\mathrm{R}\pi_* : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/E}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$“ motivieren, die wir im kommenden Abschnitt 20.3 einführen und in der er einfacher zu formulieren sein wird, vergleiche 21.3.3.5. Im folgenden Beweis werden wir sogar zu jeder Orientierung unseres Sphärenbündels eine Klasse c wie im Satz konstruieren und sie die „Eulerklasse“ unseres orientierten Sphärenbündels nennen.

Beweis. Sei $\mathbb{Z}_E \hookrightarrow \mathcal{I}^\lhd$ eine injektive Auflösung. Wir haben also natürliche Isomorphismen $\mathrm{R}^q\pi_*\mathbb{Z}_E \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q\pi_*\mathcal{I}^\lhd$. Da unsere Sphären zusammenhängend sind, liefert die Einheit Adjunktion (π^*, π_*) den ersten Isomorphismus einer Sequenz von natürlichen Isomorphismen

$$\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \pi_*\pi^*\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \pi_*\mathbb{Z}_E$$

Derivierter eigentlicher Basiswechsel 19.6.6.8 im kartesischen Diagramm bestehend aus $U \times S^n$ mit den Projektionen auf die Faktoren und den einpunktigen Raum zeigt weiter, daß $\mathrm{R}^n\pi_*\mathbb{Z}_E$ lokal isomorph ist zu $\mathbb{Z}_X$ und daß gilt $\mathrm{R}^q\pi_*\mathbb{Z}_E = 0$ für $q \neq 0, n$. Der Kokern des Monomorphismus $[0]\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \pi_*\mathcal{I}^\lhd$ von Garbenkomplexen hat also eine einzige von Null verschiedene Kohomologie und ist nach 20.2.7.3 folglich isomorph in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ zum Objekt $[-n](\mathrm{R}^n\pi_*\mathbb{Z}_E)$. Unsere Erkenntnisse 20.2.7.6 zu Abschneidefunktoren liefern so ein ausgezeichnetes Dreieck

$$\mathbb{Z}_X \;\to\; \pi_*\mathcal{I}^\lhd \;\to\; [-n](\mathrm{R}^n\pi_*\mathbb{Z}_E) \;\to\; [1]\mathbb{Z}_X$$

in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$. Es liefert nach 20.2.2.11 eine lange exakte Sequenz für die Morphismen von $\mathbb{Z}_X$ und seinen Verschiebungen in die Objekte unseres ausgezeichneten Dreiecks. Um diese Morphismen nach $\pi_*\mathcal{I}^\lhd$ zu berechnen, bemerken wir, daß dieser Komplex aus injektiven Garben besteht. Nach 20.2.6.8 oder noch expliziter nach dem Ende seines Beweises und der Adjunktion (π^*, π_*) liefern die offensichtlichen Abbildungen also Bijektionen

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Der}_{\mathrm{Ab}_{/X}}([q]\mathbb{Z}_X, \pi_*\mathcal{I}^\lhd) & \mathrm{Der}_{\mathrm{Ab}_{/E}}([q]\mathbb{Z}_E, \mathbb{Z}_E) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{H}^q(E) \\
\mathrm{Hot}_{\mathrm{Ab}_{/X}}([q]\mathbb{Z}_X, \pi_*\mathcal{I}^\lhd) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "\wr"] & \mathrm{Hot}_{\mathrm{Ab}_{/E}}([q]\pi^*\mathbb{Z}_X, \mathcal{I}^\lhd) \arrow[u, "\wr"] &
\end{tikzcd}$$

So erhalten wir eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \mathrm{H}^q(X) \to \mathrm{H}^q(E) \to \mathrm{H}^{q-n}(X; \mathrm{R}^n\pi_*\mathbb{Z}_E) \to \mathrm{H}^{q+1}(X) \to \ldots$$

mit dem Zurückholen auf der Kohmologie als erster Abbildung. Ist unser Bündel orientierbar und wählen wir eine Orientierung, so liefert diese Wahl einen Isomorphismus $\mathrm{R}^n\pi_*\mathbb{Z}_E \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$ mit der konstanten Garbe auf X und wir erhalten

unsere Gysin-Sequenz. Die Konstruktion zeigt, daß die dritte Abbildung darin das cup-Produkt $c\cup$ mit derjenigen Klasse in $c \in \mathrm{H}^{n+1}(X)$ ist, die durch den entsprechenden Morphismus $[-n]\mathbb{Z}_X \to [1]\mathbb{Z}_X$ in der derivierten Kategorie $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ aus dem ersten ausgezeichneten Dreieck bestimmt wird. Sie heißt die **Eulerklasse** unseres orientierten Sphärenbündels. □

Beispiel 21.3.3.5 (**Nocheinmal die Gysin-Sequenz**). Gegeben $\pi : E \to X$ ein orientiertes Sphärenbündel einer Faserdimension $n \geq 1$ zeigen wir wie zu Beginn des Beweises in 21.3.3.3, daß das ausgezeichnete Dreieck über der Einheit der derivierten Adjunktion (π^*, π_*) die Gestalt

$$\mathbb{Z}_X \to \pi_*\pi^*\mathbb{Z}_X \to \mathbb{Z}_X[-n] \xrightarrow{[1]}$$

hat. Drücken wir es deriviert herunter unter der konstanten Abbildung $c_X : X \to \mathrm{top}$ und verwenden unsere Isotransformation $c_{X*}\pi_* \xrightarrow{\sim} c_{E*}$ aus 20.3.4.19, so liefert es ein ausgezeichnetes Dreieck

$$c_{X*}\mathbb{Z}_X \to c_{E*}\mathbb{Z}_E \to c_{X*}\mathbb{Z}_X[-n] \xrightarrow{[1]}$$

in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$. Wenn wir dazu die lange exakte Kohomologiesequenz bilden, steht unsere Gysinsequenz auch schon da.

Satz 21.3.3.6. *Der Rückzug unter der Einbettung der komplexen Diagonalmatrizen in die unitäre Gruppe* $\mathrm{T}(n) \hookrightarrow \mathrm{U}(n)$ *induziert einen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{U}(n)}(\mathrm{top}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{T}(n)}(\mathrm{top})^{\mathcal{S}_n}$$

Beweis. Den fraglichen Ringhomomorphismus hatten wir bereits in 21.3.3.14 hergeleitet und diskutiert. Um zu zeigen, daß er ein Isomorphismus ist, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}(n) \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathrm{U}(n) \arrow[d] \\
\mathrm{T}(n;\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{B}(n;\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

mit $\mathrm{T}(n;\mathbb{C})$ der Gruppe aller komplexen invertierbaren Diagonalmatrizen und $\mathrm{B}(n;\mathbb{C})$ der Gruppe aller komplexen invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen und erhalten so ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^*_{\mathrm{T}(n)}(\mathrm{top}) & & \mathrm{H}^*_{\mathrm{U}(n)}(\mathrm{top}) \arrow[ll] \\
\mathrm{H}^*_{\mathrm{T}(n;\mathbb{C})}(\mathrm{top}) \arrow[u, "\wr"] & \mathrm{H}^*_{\mathrm{B}(n;\mathbb{C})}(\mathrm{top}) \arrow[l, "\sim"'] & \mathrm{H}^*_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})}(\mathrm{top}) \arrow[l] \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

mit den Isomorphismen nach 19.7.2.5 für alle Einbettungen, bei denen der Quotient zusammenziehbar ist, was für $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ etwa aus der Polarzerlegung folgt. Nun setzen wir $B := \mathrm{B}(n;\mathbb{C})$ und $G := \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$. Nach dem im Anschluß bewiesenen Lemma 21.3.3.8 reicht es zu zeigen, daß $\mathrm{H}^*_B(\mathrm{top})$ ein freier Modul vom Rang $n!$ über $\mathrm{H}^*_G(\mathrm{top})$ ist. Für die Milnor-Konstruktion $E := \mathrm{E}G$ ist nun

$$\pi : E/B \twoheadrightarrow E/G$$

ein Faserbündel mit der Fahnenmannigfaltigkeit G/B als Faser. Aus 4.5.6.1 erinnern wir die Bruhat-Zerlegung

$$G/B = \bigsqcup_{w \in \mathcal{S}_n} BwB/B$$

in die B-Bahnen. Aus 15.2.4.25 folgt, daß jede B-Bahn offen ist in ihrem Abschluß. Da die Bahnen selbst nach 15.2.2.25 homöomorph sind zu $\mathbb{C}^{l(w)}$ und da die Fahnenmannigfaltigkeit nach 15.2.3.10 kompakt ist, folgt mit der Lokalisierungssequenz der kompakten Kohomologie 19.4.8.15 unmittelbar

$$\mathrm{H}^{2q}(G/B) \cong \bigoplus_{l(w)=q} \mathbb{Z}$$

und $\mathrm{H}^{2q+1}(G/B) = 0$ für alle q. Insbesondere ist $\mathrm{H}^*(G/B)$ in den geraden Graden konzentriert und seine totale Kohomologie ist frei über $\mathbb{Z}$ vom Rang $n!$. Derivierter eigentlicher Basiswechsel 19.6.6.8 zeigt $\mathrm{R}^{2q+1}\pi_*\mathbb{Z}_{E/B} = 0$ für alle q und daß $\mathrm{R}^{2q}\pi_*\mathbb{Z}_{E/B}$ lokal isomorph ist zu $\bigoplus_{l(w)=q} \mathbb{Z}_{E/G}$. Da G zusammenhängend ist, hat E/G nach dem Spezialfall 16.4.5.23 der langen exakten Homotopiesequenz triviale Fundamentalgruppe. Da E/G nach 19.7.3.5 auch lokal zusammenziehbar ist, ist E/G nach 16.3.1.19 überlagerungstrivial und jede lokal konstante Garbe darauf ist konstant. Das zeigt, daß $\mathrm{R}^{2q}\pi_*\mathbb{Z}_{E/B}$ sogar global isomorph ist zu $\bigoplus_{l(w)=q} \mathbb{Z}_{E/G}$. Da wir nach 21.3.3.12 bereits wissen, daß die ungerade Kohomologie von E/G verschwindet, liefert 20.2.7.19 einen unkanonischen Isomorphismus

$$\pi_*\mathbb{Z}_{E/B} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{w \in \mathcal{S}_n} [-2l(w)]\mathbb{Z}_{E/G}$$

in der derivierten Kategorie $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{E/G})$. So folgt unmittelbar, daß $\mathrm{H}^*(E/B)$ über $\mathrm{H}^*(E/G)$ ein freier Modul vom Rang $n!$ ist. □

21.3.3.7. Ich hätte gerne, daß mir mal ein Student in einer Bachelorarbeit durchsortiert, bis auf welche Torsion das bei anderen Gruppen genauso geht. Es geht dabei in etwa darum, die Arbeit „Invariants des groupes de Weyl et torsion“ von Michel Demazure in die hier verwendete Sprache zu übersetzen.

Lemma 21.3.3.8. *Seien C ein kommutativer Integritätsbereich und W eine endliche Gruppe von Automorphismen von C und $A \subset C^W$ ein Teilring des Invariantenrings derart, daß C als A-Modul von $\leq |W|$ Elementen erzeugt wird. So gilt $A = C^W$ und C ist frei über C^W vom Rang $|W|$.*

Beweis. Da wir jeden Bruch so erweitern können, daß sein Nenner W-invariant ist, ist jedes Erzeugendensystem des C^W-Moduls C auch ein Erzeugendensystem des $\operatorname{Quot}(C^W)$-Vektorraums $\operatorname{Quot}(C)$ und wir haben $\operatorname{Quot}(C^W) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{Quot} C)^W$, vergleiche 6.4.1.23. Nach unserem Satz 6.4.1.9 über Galoiserweiterungen durch Gruppenoperationen ist andererseits $\operatorname{Quot}(C)$ ein $(\operatorname{Quot} C)^W$-Vektorraum der Dimension $|W|$. Hätten wir nun $A \neq C^W$, so wäre unser Erzeugendensystem von C über A ein linear abhängiges Erzeugendensystem von C als C^W-Modul und damit ein linear abhängiges Erzeugendensystem von $\operatorname{Quot}(C)$ als $(\operatorname{Quot} C)^W$-Vektorraum. Das steht jedoch im Widerspruch zu unserer Erkenntnis, daß dieser Vektorraum die Dimension $|W|$ haben muß. So folgt $A = C^W$. In derselben Weise folgt, daß unser Erzeugendensystem frei gewesen sein muß und genau $|W|$ Elemente hatte. □

21.3.3.9 (**Kohomologieringe der komplex projektiven Räume**). Die Kohomologiegruppen der komplex projektiven Räume kennen wir bereits aus 19.4.8.19. Hier berechnen wir nun ihren Kohomologiering. Wir betrachten dazu die Sphäre $E = S^{2a+1} \subset \mathbb{C}^{a+1}$ und das S^1-Bündel $\pi : S^{2a+1} \to \mathbb{P}^a\mathbb{C}$. Es ist offensichtlich orientierbar und beide möglichen Wahlen einer Orientierung liefern uns eine Klasse $c \in \mathrm{H}^2(\mathbb{P}^a\mathbb{C})$ derart, daß die Multiplikation mit dieser Klasse Isomorphismen

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^a\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(\mathbb{P}^a\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \ldots \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{2a}(\mathbb{P}^a\mathbb{C})$$

induziert und ebenso Isomorphismen

$$0 = \mathrm{H}^{-1}(\mathbb{P}^a\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^a\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \ldots \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{2a-1}(\mathbb{P}^a\mathbb{C})$$

Insgesamt erhalten wir so einen Isomorphismus $\mathbb{Z}[c]/\langle c^{a+1}\rangle \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(\mathbb{P}^a\mathbb{C})$ mit c homogen vom Grad Zwei. Die beiden möglichen Wahlen der Orientierung führen dabei zu zwei Erzeugern, von denen der eine das Negative des anderen ist.

Beispiel 21.3.3.10 (**Kohomologie klassifizierender Räume: Kreisgruppe**). Sei E ein zusammenziehbarer oder auch nur schwach garbenazyklischer Raum mit einer topologisch freien Operation der Kreisgruppe S^1. So ist die Projektion $E \to E/S^1$ ein orientierbares Sphärenbündel und jede Wahl einer Orientierung der Kreislinie S^1 liefert eine damit verträgliche Orientierung unseres Sphärenbündels. Für die zugehörige Eulerklasse $c \in \mathrm{H}^2(E/S^1)$ liefert die Multiplikation mit c Isomorphismen

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(E/S^1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(E/S^1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^4(E/S^1) \xrightarrow{\sim} \ldots$$

und ebenso Isomorphismen

$$0 = \mathrm{H}^{-1}(E/S^1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(E/S^1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^3(E/S^1) \xrightarrow{\sim} \dots$$

Insgesamt erhalten wir so einen Isomorphismus $\mathbb{Z}['c] \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{S^1}(\mathrm{top})$ von graduierten Ringen mit c homogen vom Grad Zwei.

Beispiel 21.3.3.11 (**Kohomologie klassifizierender Räume: Spingruppe**). Sei E ein zusammenziehbarer oder auch nur schwach garbenazyklischer Raum mit einer topologisch freien Operation der Spingruppe $\mathrm{SU}(2)$. Wir wissen aus 4.1.11.25, daß diese Gruppe homöomorph ist zur Sphäre S^3. Dieselbe Argumentation wie für die Kreisgruppe liefert dann einen Isomorphismus $\mathbb{Z}['d] \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{SU}(2)}(\mathrm{top})$ von graduierten Ringen mit d homogen vom Grad Vier und eindeutig bestimmt als eine Eulerklasse durch die Wahl einer Orientierung der Spingruppe.

Satz 21.3.3.12 (**Kohomologie klassifizierender Räume: unitäre Gruppen**). *Die Kohomologie* $\mathrm{H}^*_{\mathrm{U}(n)}(\mathrm{top})$ *des klassifizierenden Raums der unitären Gruppe* $\mathrm{U}(n)$ *ist ein Polynomring in Erzeugern* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *mit* $\mathrm{grad}(a_i) = 2i$.

21.3.3.13. Wir stehen hier vor der Schwierigkeit, daß wir die graduierte Kommutativität des garbentheoretischen Kohomologierings erst in 21.9.9.21 zeigen. Für den Kohomologiering des mit Hilfe der Milnor-Konstruktion konstruierten klassifizierenden Raums $\mathrm{B}G$ einer offenlokal zusammenziehbaren Gruppe G können wir diese graduierte Kommutativität aber bereits aus unseren Vergleichssätzen mit der singulären Kohomologie 20.2.8.2 unter Verwendung von 19.7.3.5 ableiten.

Beweis. Der Fall $n = 0$ ist unproblematisch und wir nehmen $n \geq 1$ an und behandeln den Fall $n = 1$ der Kreisgruppe gleich nocheinmal mit. Wir bemerken zunächst, daß $\mathrm{U}(n-1)$ topologisch frei auf $\mathrm{U}(n)$ operiert, wenn wir es etwa durch $A \mapsto \mathrm{diag}(1, A)$ einbetten. Das ist leicht explizit zu sehen und gilt auch sehr viel allgemeiner für abgeschlossene Untergruppen von Liegruppen, wie etwa in 22.4.4.3 ausgeführt wird. Bezeichne nun $E := \mathrm{EU}(n)$ die Milnorkonstruktion. Dann ist $E/\mathrm{U}(n-1) \twoheadrightarrow E/\mathrm{U}(n)$ eine Faserung mit Faser $\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-1) \cong S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$. Man sieht leicht, daß sie orientierbar ist. Da die Basis dieser Faserung mit einer Induktion über n keine ungerade Kohomologie hat, folgern wir aus der Gysinsequenz, daß die Multiplikation mit der zugehörigen Eulerklasse $a_n \in \mathrm{H}^{2n}(E/\mathrm{U}(n))$ und das Zurückholen für alle q kurze exakte Sequenzen

$$\mathrm{H}^q(E/\mathrm{U}(n)) \hookrightarrow \mathrm{H}^{q+2n}(E/\mathrm{U}(n)) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^{q+2n}(E/\mathrm{U}(n-1))$$

liefern. Das zeigt die Behauptung. □

Vorschau 21.3.3.14. Auch die Künnethformeln sind in der Garbenkohomologie nicht so einfach zu haben und wir zeigen die hier benötigten Formeln rein garbenkohomologisch erst in 21.3.2.6. Mit unseren Vergleichssätzen zur singulären

Kohomologie liefern aber auch nach der Künnethformel 17.6.1.17 der singulären Kohomologie die Rückzüge 19.7.2.4 unter den Projektionen zusammen mit dem cup-Produkt für je zwei Liegruppen G, H derart, daß alle Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^q(\mathrm{B}G)$ der ersten freie endlich erzeugte abelsche Gruppen sind, einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^*_G(\mathrm{top})\bar{\otimes}\mathrm{H}^*_H(\mathrm{top}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{G\times H}(\mathrm{top})$$

Gegeben ein Torus $\mathrm{T}(n) := (S^1)^n$ folgt aus dem Fall $n = 1$ nach 21.3.3.10 und unserer Vorbemerkung 21.3.3.13, daß für jede Wahl eines Erzeugers $z \in \mathrm{H}^2_{S^1}(\mathrm{top})$ dessen Rückzüge unter den Projektionen unseres Produkts auf seine Faktoren Klassen $z_1, \ldots, z_n \in \mathrm{H}^2_{\mathrm{T}(n)}(\mathrm{top})$ liefern mit

$$\mathbb{Z}['z_1, \ldots, z_n] \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{T}(n)}(\mathrm{top})$$

Aus 19.7.2.17 folgt, daß das Zurückholen $\mathrm{H}^*_{\mathrm{U}(n)}(\mathrm{top}) \to \mathrm{H}^*_{\mathrm{T}(n)}(\mathrm{top})$ unter der Einbettung $\mathrm{T}(n) \hookrightarrow \mathrm{U}(n)$ als Diagonalmatrizen in den Invarianten unter der symmetrischen Gruppe landet. In 21.3.3.6 zeigen wir, daß diese Abbildung einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{U}(n)}(\mathrm{top}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}['z_1, \ldots, z_n]^{\mathcal{S}_n}$$

mit dem Ring der symmetrischen Polynome liefert.

21.3.4 Charakteristische Klassen und Produkte

21.3.4.1 (**Äquivariante Kohomologie als Trennfunktor**). Bezeichne Topog die Kategorie der topologischen Räume mit Operation einer topologischen Gruppe. Aus dem nicht-äquivarianten Fall 21.2.9.5 folgt unmittelbar, daß auch die äquivariante Kohomologie $(G\backslash X) \mapsto \mathrm{H}^*_G(X)$ aus 19.7.2.4 einen Trennfunktor

$$\mathrm{H}^* : \curlywedge\mathrm{Topog} \to \mathrm{sgAb}^{\mathrm{opp}}$$

liefert, dessen Effekt auf Trennungen durch das „Produkt der Rückzüge“ gegeben wird.

21.3.4.2 (**Charakteristischer Homomorphismus**). Gegeben G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum und E ein G-Torsor auf X erinnere ich daran, wie wir in 19.7.2.8 den charakteristischen Homomorphismus

$$\mathrm{C}_E : \mathrm{H}^*_G(\mathrm{top}) \to \mathrm{H}^*(X)$$

erklärt hatten als die Komposition $\mathrm{H}^*_G(\mathrm{top}) \to \mathrm{H}^*_G(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(X)$ des äquivarianten Zurückholens längs der konstanten Abbildung mit dem Inversen des Quotientenisomorphismus $\mathrm{H}^*(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_G(E)$.

21.3.4.3 (**Charakteristische Klassen und Produkt**). Gegeben ein topologischer Raum X und topologische Gruppen G, H und auf X ein G-Torsor E sowie ein H-Torsor F ist $E \times_X F$ ein $(G \times H)$-Torsor in offensichtlicher Weise und wir erhalten in $\mathrm{Topo}g$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
G\backslash\mathrm{top} & \leftarrow & G\backslash E & \rightarrow & 1\backslash X \\
\uparrow & & \uparrow & & \| \\
(G\times H)\backslash\mathrm{top} & \leftarrow & (G\times H)\backslash(E\times_X F) & \rightarrow & 1\backslash X \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
H\backslash\mathrm{top} & \leftarrow & H\backslash F & \rightarrow & 1\backslash X
\end{array}$$

Wenden wir darauf äquivariante Kohomologie an, so folgt die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^*_G(\mathrm{top})\bar{\otimes}\mathrm{H}^*_H(\mathrm{top}) & \rightarrow & \mathrm{H}^*(X)\bar{\otimes}\mathrm{H}^*(X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}^*_{G\times H}(\mathrm{top}) & \rightarrow & \mathrm{H}^*(X)
\end{array}$$

mit den durch Rückzug und Produkt gegebenen Vertikalen und den durch unsere charakteristischen Homomorphismen gegebenen Horizontalen. In Formeln ausgedrückt gilt also $\mathrm{C}_E(a)\mathrm{C}_F(b) = \mathrm{C}_{E\times F}(a \times b)$ mit der Notation $a \times b := \mathrm{pr}_1^*(a)\,\mathrm{pr}_2^*(b)$ für den Effekt der linken Vertikale.

21.3.4.4 (**Kohomologieringe klassifizierender Räume und Produkte**). Jede Liegruppe G ist offenlokal zusammenziehbar und dasselbe folgt mit 19.7.3.5 für die Milnorkonstruktion $\mathrm{E}G$ und den klassifizierenden Raum $\mathrm{B}G$. Gegeben Liegruppen G, H derart, daß alle Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^q(\mathrm{B}G)$ der ersten freie endlich erzeugte abelsche Gruppen sind, liefert das Kreuzprodukt der Kohomologie nach der Künnethformel 21.3.2.6 also einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^*_G(\mathrm{top})\bar{\otimes}\mathrm{H}^*_H(\mathrm{top}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{G\times H}(\mathrm{top})$$

21.3.4.5 (**Chern'sche Klassen**). Gegeben ein Torus $\mathrm{T}(n) := (S^1)^n$ liefern nach 21.3.4.4 für jede Wahl eines Erzeugers $z \in \mathrm{H}^2_{S^1}(\mathrm{top})$ dessen Rückzüge unter den Projektionen unseres Torus auf seine Faktoren Klassen $z_1, \ldots, z_n \in \mathrm{H}^2_{\mathrm{T}(n)}(\mathrm{top})$ mit

$$\mathbb{Z}['z_1, \ldots, z_n] \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{T}(n)}(\mathrm{top})$$

Nach 21.3.3.6 liefert weiter der Rückzug unter der Einbettung $\mathrm{T}(n) \hookrightarrow \mathrm{U}(n)$ der Diagonalmatrizen in die unitären Matrizen einen Isomorphismus $\mathrm{H}^*_{\mathrm{U}(n)}(\mathrm{top}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{T}(n)}(\mathrm{top})^{\mathcal{S}_n}$. Insgesamt erhalten wir so einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}['z_1, \ldots, z_n]^{\mathcal{S}_n} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{U}(n)}(\mathrm{top})$$

Ebenso erhalten wir auch für die entsprechenden komplexen Gruppen Isomorphismen $\mathbb{Z}['z_1, \ldots, z_n] \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{T}(n;\mathbb{C})}(\mathrm{top})$ und

$$\mathbb{Z}['z_1, \ldots, z_n]^{\mathcal{S}_n} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})}(\mathrm{top})$$

Nach 6.2.9.6 haben wir nun $\mathbb{Z}['z_1, \ldots, z_n]^{\mathcal{S}_n} = \mathbb{Z}['s_1, s_2, \ldots, s_n]$ für s_q das q-te elementarsymmetrische Polynom in den z_i. Dies Polynom s_q ist homogen vom Grad q in den z_i und bereits sein Bild $c_q \in \mathrm{H}^*_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})}(\mathrm{top})$ unter dem obigen Isomorphismus heißt manchmal die **q-te Chern'sche Klasse**. Gegeben ein $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$-Hauptfaserbündel E auf einem Raum X erklärt man dann seine **q-te Chern'sche Klasse** durch die Vorschrift

$$c_q(E) := \mathrm{C}_E(c_q) \in \mathrm{H}^{2q}(X)$$

für $\mathrm{C}_E : \mathrm{H}^*_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})}(\mathrm{top}) \to \mathrm{H}^*(X)$ den charakteristischen Homomorphismus. Die Chern'schen Klassen eines komplexen Vektorbündels V werden schließlich erklärt als $c_q(V) := c_q(E)$ mit $E = E_V$ dem zugehörigen $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$-Torsor alias dem Rahmenbündel von V aus **??**.

21.3.4.6. Gegeben ein n-dimensionales komplexes Vektorbündel V auf einem Raum X vereinbaren wir $c_0(V) := 1$ und erklären die **totale Chern'sche Klasse** $c_*(V) \in \mathrm{H}^*(X)$ von V durch die Vorschrift

$$c_*(V) := c_0(V) + c_1(V) + c_2(V) + \ldots + c_n(V) \in \mathrm{H}^*(X)$$

Lemma 21.3.4.7. *Für die totale Chern'schen Klasse der direkten Summe von zwei komplexen Vektorbündeln gilt im Kohomologiering der Basis die* **Whitney'sche Summenformel**

$$c_*(V \oplus W) = c_*(V)c_*(W)$$

Beweis. Die elementarsymmetrischen Polynome $s_q \in \mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_n]^{\mathcal{S}_n}$ können charakterisiert werden durch die Identität

$$(1 + z_1)(1 + z_2) \ldots (1 + z_n) = 1 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n$$

zusammen mit der Eigenschaft, daß s_q homogen ist vom Grad q. Erklären wir unseren Ausdruck als das „totale symmetrische Polynom" $s_*(z_1, \ldots, z_n)$, so gilt für $l + m = n$ mithin $s_*(z_1, \ldots, z_n) = s_*(z_1, \ldots, z_l)s_*(z_{l+1}, \ldots, z_n)$. Sei nun X die Basis unserer Bündel. Bezeichnet D das Rahmenbündel von $V \oplus W$, so haben wir per definitionem $s_*(z_1, \ldots, z_n) \mapsto c_*(V \oplus W)$ unter der Komposition

$$\mathbb{Z}['z_1, \ldots, z_n]^{\mathcal{S}_n} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})}(\mathrm{top}) \xrightarrow{\mathrm{C}_D} \mathrm{H}^*(X)$$

Jetzt betrachten wir für $l + m = n$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}(l;\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{GL}(l;\mathbb{C}) \\
\mathrm{T}(l;\mathbb{C}) \times \mathrm{T}(m;\mathbb{C}) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{GL}(l;\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(m;\mathbb{C}) \arrow[u] \arrow[d, "\phi"] \\
\mathrm{T}(n;\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

mit den jeweiligen Projektionen als Pfeile nach oben und dem „Zusammenblocken“ $\phi : (A, B) \mapsto \operatorname{diag}(A, B)$ als Pfeile nach unten. Zusätzlich betrachten nocheinmal dasselbe Diagramm mit m statt l in der oberen Horizontale. Gehen wir zu den Kohomologieringen der jeweiligen klassifizierenden Räume über, so ergibt sich ein weiteres kommutatives Diagramm, das mit unseren ausgezeichneten Isomorphismen isomorph wird zum Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_l] \arrow[d] & \mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_l]^{\mathcal{S}_l} \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_l] \otimes \mathbb{Z}[w_1, \ldots, w_m] & \mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_l]^{\mathcal{S}_l} \otimes \mathbb{Z}[w_1, \ldots, w_m]^{\mathcal{S}_m} \arrow[l] \\
\mathbb{Z}[z_1, \ldots z_n] \arrow[u] & \mathbb{Z}[z_1, \ldots z_n]^{\mathcal{S}_n} \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

mit der Umbenennung von $z_{l+1}, \ldots, z_n$ zu $w_1, \ldots, w_m$ bei beiden Pfeilen nach oben. Im analogen Fall mit m statt l gilt Analoges. Sind nun E, F die Rahmenbündel von V, W, so haben wir offensichtlich $D \cong \phi_*(E \times F)$ und damit

$$\begin{aligned}
c_*(V \oplus W) &= \mathrm{C}_D(s_*(z_1, \ldots, z_n)) && \text{per definitionem} \\
&= \mathrm{C}_{\phi_*(E\times F)}(s_*(z_1, \ldots, z_l)s_*(z_{l+1}, \ldots, z_n)) && \text{nach vorigem} \\
&= \mathrm{C}_{E\times F}(s_*(z_1, \ldots, z_l) \times s_*(w_1, \ldots, w_m)) && \text{nach 19.7.2.10} \\
&= \mathrm{C}_E(s_*(z_1, \ldots, z_l))\mathrm{C}_F(s_*(w_1, \ldots, w_m)) && \text{nach 21.3.4.3} \\
&= c_*(V)c_*(W) && \text{per definitionem.}
\end{aligned}$$

□

Vorschau 21.3.4.8 (**Stiefel-Whitney-Klassen**). Nun arbeiten wir mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und mit reellen Gruppen. Dann liefert explizite Rechnung einen Isomorphimus $\mathbb{F}_2['x_1, \ldots, x_n] \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{T}(n;\mathbb{R})}(\mathrm{top}; \mathbb{F}_2)$ mit Variablen vom Grad Eins und Rückzug liefert wieder $\mathbb{F}_2['x_1, \ldots, x_n]^{\mathcal{S}_n} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})}(\mathrm{top}; \mathbb{F}_2)$, da dieselbe Argumentation wie zuvor zeigt, daß sich zwischendrin homologisch nichts wegkürzen kann, sonst bräuchte $\mathrm{H}^*_{\mathrm{T}(n;\mathbb{R})}(\mathrm{top}; \mathbb{F}_2)$ als Modul über $\mathrm{H}^*_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})}(\mathrm{top}; \mathbb{F}_2)$ zu

viele Erzeuger. Dann wiederholt man alle Argumente. Das Bild des q-ten elementarysmmetrischen Polynoms s_q in $\mathrm{H}^q_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})}(\mathrm{top};\mathbb{F}_2)$ heißt in diesem Fall die q**-te Stiefel-Whitney-Klasse**. Ebenso kann man im Fall $\mathrm{GL}(n;\mathbb{H})$ vorgehen, in dem wir die sogenannten **Pontrjagin-Klassen** mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten in allen durch Vier teilbaren Graden erhalten.

21.4 Trennrückzug und Schreivorschub

21.4.1 Lokal eigentlicher Basiswechsel

21.4.1.1. Ich erinnere an die Schreikofaserung aus 19.6.4.9. Wir hatten sie eingeführt als eine Kofaserung

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{s}}} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{s}}$$

über der Kategorie $\mathrm{Top}^{\mathrm{s}}$ der topologischen Räume mit nur separierten Abbildungen als Morphismen. Ihre Fasern waren die Opponierten der Kategorien abelscher Garben auf den jeweiligen Räumen und Morphismen in $\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{s}}}$ waren unsere eigentlichen Opkomorphismen alias Schreimorphismen aus 19.6.4.4. Im folgenden führen wir „lokal eigentliche separierte Abbildungen“ oder kurz „les-Abbildungen“ zwischen topologischen Räumen ein und zeigen dann in 21.4.4.13, daß der „Trennrückzug“ unter einer beliebigen Trennung topologischer Räume Tupel schreikokartesischer Schreimorphismen von flachen Garben über les-Abbildungen zu einem schreikokartesischen Schreimorphismus von flachen Garben über einer les-Abbildung macht. Der Beweis dieser Aussage bildet den Schlußpunkt unserer Diskussion des underivierten Drei-Funktoren-Kalküls. Die Allgemeinheit geht in Richtung von Grothendieck's Desiderata nach [Gro86, 1.5.2, Note 81_2]. In [RV04] wird das Konzept einer lokal eigentlichen Abbildung unter einer anderen Bezeichnung eingeführt.

Definition 21.4.1.2. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ topologischer Räume heiße **lokal eigentlich**, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ und jede Umgebung U von x Umgebungen $A \subset U$ von x und $V \subset Y$ von $f(x)$ gibt derart, daß gilt $f(A) \subset V$ und daß $f : A \to V$ eigentlich ist.

Vorschau 21.4.1.3. Sie dürfen als Übung 21.4.1.20 zeigen, daß jede Verknüpfung von lokal eigentlichen Abbildungen lokal eigentlich ist.

Beispiele 21.4.1.4. Eine Einbettung $i : X \hookrightarrow Y$ von topologischen Räumen ist lokal eigentlich genau dann, wenn ihr Bild lokal abgeschlossen ist. Jede étale Abbildung ist lokal eigentlich. Die konstante Abbildung von einem Raum auf einen Punkt ist lokal eigentlich genau dann, wenn der fragliche Raum lokal kompakt ist.

Lemma 21.4.1.5. *Jede eigentliche und separierte Abbildung ist lokal eigentlich.*

21.4.1.6. Das ist das relative Analogon der Tatsache, daß jeder kompakte Hausdorffraum lokal kompakt ist. Eine beliebige eigentliche Abbildung muß keineswegs lokal eigentlich sein, selbst wenn sie konstant ist.

21.4.1.7. Wir schicken dem Beweis eine Vorbemerkung voraus. Sei $f : X \to Y$ stetig. Gegeben $Z \subset X$ mit $f : Z \to Y$ eigentlich und $U \Subset X$ ist $\{y \in Y \mid (f^{-1}(y) \cap Z) \subset U\}$ offen in Y, denn für $K \Subset X$ das Komplement von U ist das Komplement unserer Menge genau $f(Z \cap K)$.

Beweis. Sei $f : X \to Y$ unsere eigentliche und separierte Abbildung. Gegeben $x \in X$ mit einer offenen Umgebung $U \Subset X$ betrachten wir $Z := X \backslash U$. Wir setzen $y := f(x)$. Für jeden Punkt $z \in f^{-1}(y) \cap Z$ gibt es eine offene Umgebung $W_z \Subset X$ von z und eine offene Umgebung $B_z \Subset U$ von x mit $W_z \cap B_z = \emptyset$. Endlich viele solche W_z überdecken das Kompaktum $f^{-1}(y) \cap Z$. Ist W ihre Vereinigung und B der Schnitt der zugehörigen B_z, so gilt $x \in B \Subset U \Subset X$, $(f^{-1}(y) \cap Z) \subset W \Subset X$ und $B \cap W = \emptyset$. Nach 21.4.1.7 finden wir eine offene Umgebung $V \Subset Y$ von y mit $(f^{-1}(V) \cap Z) \subset W$. Der Abschluß A von $B \cap f^{-1}(V)$ in $f^{-1}(V)$ trifft also $f^{-1}(V) \cap Z$ nicht und ist folglich eine in U enthaltene Umgebung von x derart, daß $f : A \to V$ eigentlich ist. □

Lemma 21.4.1.8. *Seien $g\colon Z \to X$ und $f\colon X \to Y$ stetig. Ist $f \circ g$ lokal eigentlich und f separiert, so ist bereits g lokal eigentlich.*

Beweis. Sei $W \subset Z$ eine Umgebung von $z \in Z$. Ist $f \circ g$ lokal eigentlich, so gibt es Umgebungen $A \subset W$ von z und V von $f(g(z))$ derart, daß $f \circ g$ eine eigentliche Abbildung $A \to V$ induziert. Diese Abbildung faktorisiert als

$$A \xrightarrow{\breve{g}} f^{-1}(V) \xrightarrow{\breve{f}} V$$

mit $\breve{g}$ und $\breve{f}$ jeweils den von g und f induzierten Abbildungen. Da $\breve{f}$ nach 15.2.4.10 separiert ist, zeigt 15.2.4.11, daß $\breve{g}\colon A \to f^{-1}(V)$ eigentlich ist. Das zeigt, daß g lokal eigentlich ist. □

21.4.1.9. Im folgenden werden lokal eigentliche separierte Abbildungen oft vorkommen. Wir nennen sie abkürzend **les-Abbildungen** oder als Eigenschaft **les**.

Korollar 21.4.1.10. *Jede stetige Abbildung $g\colon Z \to X$ von einem lokal kompakten Hausdorffraum Z in einen Hausdorffraum X ist eine les-Abbildung.*

Beweis. Da Z lokal kompakt ist und X Hausdorff, muß g lokal eigentlich sein nach 21.4.1.8. Da Z Hausdorff ist, ist g separiert. □

Lemma 21.4.1.11 (Lokale Eigentlichkeit ist stabil unter Basiswechsel). *Ist in einem kartesischen Diagramm einer der ursprünglichen Pfeile lokal eigentlich, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem Faserprodukt.*

Beweis. Wir schreiben unser kartesisches Diagramm aus als

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

Wir nehmen f lokal eigentlich an und wollen dasselbe für g zeigen. Sei also $t \in T$ gegeben mit einer Umgebung $S \subset T$. Wir können, indem wir S notfalls verkleinern, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es eine Umgebung $V \subset X$ von $q(t)$ und eine Umgebung $W \subset Z$ von $g(t)$ gibt derart, daß gilt $g(S) \subset W$ und $q(S) \subset V$ und daß auch das Diagramm von Teilräumen

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & V \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

kartesisch ist. Dann finden wir eine Umgebung $A \subset V$ von $q(t)$ und eine Umgebung $U \subset Y$ von $f(q(t))$ derart, daß $f : A \to U$ eigentlich ist. Dasselbe folgt für den durch Basiswechsel entstehenden Morphismus $g : q^{-1}(A) \to p^{-1}(U)$. $\square$

Satz 21.4.1.12 (Vereigentlichung). *Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ gilt:*

1. *Die Mengen $U \sqcup V$ mit $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ und $f : f^{-1}(V)\backslash U \to V$ eigentlich bilden eine Topologie auf der disjunkten Vereinigung $X \sqcup Y$;*
2. *Die Abbildung $\bar{f} := (f, \mathrm{id}_Y) : X \sqcup Y \to Y$ ist eigentlich in Bezug auf diese Topologie.*

21.4.1.13. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ notieren wir $X \sqcup Y$ mit seiner Topologie aus dem Satz $X \vec{\sqcup}_f Y$ oder abkürzend $X \vec{\sqcup} Y$ und nennen $\bar{f} : X \vec{\sqcup} Y \to Y$ die **Vereigentlichung von** f. Ist Y ein Punkt, so spezialisiert unsere Vereigentlichung zur Ein-Punkt-Kompaktifizierung. Ist f eine abgeschlossene Einbettung, so spezialisiert unsere Vereigentlichung zum Koprodukt $X \sqcup Y$ der beteiligten Räume. Offensichtlich ist die Einbettung von X nach $X \vec{\sqcup} Y$ eine offene Einbettung und die Einbettung von Y nach $X \vec{\sqcup} Y$ eine abgeschlossene Einbettung.

Beweis. 1. Sei eine Familie $(U_i \sqcup V_i)_{i \in I}$ solcher Mengen gegeben. So ist $U := \bigcup U_i$ offen in X und $f : f^{-1}(V_i)\backslash U \to V_i$ ist eigentlich als Verknüpfung der abgeschlossenen Einbettung $f^{-1}(V_i)\backslash U \to f^{-1}(V_i)\backslash U_i$ mit der eigentlichen Abbildung $f : f^{-1}(V_i)\backslash U_i \to V_i$. Da Eigentlichkeit lokal ist in der Basis, ist dann für $V := \bigcup V_i$ auch $f : f^{-1}(V)\backslash U \to V$ eigentlich. Seien andererseits $(U_1 \sqcup V_1)$ und $(U_2 \sqcup V_2)$ gegeben. Mit $f^{-1}(V_1)\backslash U_1 \to V_1$ ist auch $f : f^{-1}(V_1 \cap V_2)\backslash U_1 \to V_1 \cap V_2$ eigentlich als Basiswechsel einer eigentlichen Abbildung. Dasselbe gilt für $f : f^{-1}(V_1 \cap V_2)\backslash U_2 \to V_1 \cap V_2$ und mit 15.2.4.18 folgt die Eigentlichkeit von $f : f^{-1}(V_1 \cap V_2)\backslash(U_1 \cap U_2) \to V_1 \cap V_2$.

2. Offensichtlich ist $\bar{f} := (f, \mathrm{id}_Y) : X \vec{\sqcup}_f Y \to Y$ stetig. Diese Abbildung ist sogar abgeschlossen, denn wir haben

$$\bar{f}(X \vec{\sqcup} Y\backslash U \vec{\sqcup} V) = Y\backslash V \cup f(X\backslash U) = Y\backslash V \cup f(f^{-1}(V)\backslash U)$$

Gegeben ein weiterer topologischer Raum Z zeigen wir nun, daß die offensichtliche Bijektion eine stetige Abbildung

$$(X \times Z) \vec{\sqcup} (Y \times Z) \to (X \vec{\sqcup} Y) \times Z$$

ist. In der Tat, gegeben $U \sqcup V \Subset X \vec{\sqcup} Y$ und $W \Subset Z$ gilt es zu zeigen $(f \times \mathrm{id}_Z) : f^{-1}(V \times W) \backslash (U \times W) \to V \times W$ eigentlich. Das aber folgt aus der Eigentlichkeit von $f : f^{-1}(V) \backslash U \to V$ durch Basiswechsel. Um nun zu zeigen, daß $\bar{f}$ eigentlich ist, betrachten wir für einen weiteren Raum Z die Komposition

$$(X \vec{\sqcup} Y) \times Z \to (X \times Z) \vec{\sqcup} (Y \times Z) \to Y \times Z$$

und müssen nur bemerken, daß die erste dieser Abbildungen abgeschlossen ist als Inverse unserer stetigen Bijektion, die wir gerade hergeleitet hatten, und daß die zweite abgeschlossen ist nach unserer Vorüberlegung vom Beginn des Beweises des zweiten Teils. □

Satz 21.4.1.14. *Die Vereigentlichung einer les-Abbildung ist stets separiert.*

21.4.1.15. Das ist ein relatives Analogon der Tatsache, daß die Einpunktkompaktifizierung eines lokal kompakten Hausdorffraums stets Hausdorff ist.

Beweis. Sei $f : X \to Y$ unsere les-Abbildung. Es gilt zu zeigen, daß $\bar{f} : X \vec{\sqcup} Y \to Y$ separiert ist, daß also je zwei verschiedene Punkte aus ein- und derselben Faser disjunkte Umgebungen haben. Der einzig nichttriviale Fall betrifft Punkte $\mathrm{in}_X(x), \mathrm{in}_Y(y)$ mit $f(x) = y$. Nach Annahme gibt es eine offene Umgebung $V \Subset Y$ von y und eine Umgebung $A \subset X$ von x mit $f(A) \subset V$ und $f : A \to V$ eigentlich. Dann ist die Verknüpfung $A \to f^{-1}(V) \to V$ eigentlich. Da $f^{-1}(V) \to V$ separiert ist, muß auch $A \to f^{-1}(V)$ eigentlich sein und wir finden $A \Subset f^{-1}(V)$. Bilden wir also $U := f^{-1}(V) \backslash A$, so ist $U \sqcup V$ eine Umgebung von $\mathrm{in}_Y(y)$ in $X \vec{\sqcup} Y$ und disjunkt zur Umgebung $\mathrm{in}_X(A)$ von $\mathrm{in}_X(x)$. □

Satz 21.4.1.16 (Les-Basiswechsel). *Seien $pg = fq$ ein kartesisches Quadrat von topologischen Räumen mit les-Vertikalen f, g und $\tilde{p}\tilde{g} = \tilde{f}\tilde{q}$ darüber ein kommutatives Diagramm von Opkomorphismen abelscher Garben mit $\tilde{p}, \tilde{q}$ kartesisch. Ist dann $\tilde{f}$ schreikokartesisch, so auch $\tilde{g}$.*

21.4.1.17. In anderen Worten besagt unser Satz, daß die vom Basiswechsel 19.6.3.11 der Garbenopfaserung für Funktoren zwischen nichtopponierten Kategorien von Garben induzierte Transformation $p^* f_* \Rightarrow g_* q^*$ unter den genannten Voraussetzungen Isomorphismen $p^* f_! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} g_! q^* \mathcal{F}$ auf den jeweiligen Unterobjekten induziert, also eine Isotransformation

$$p^* f_! \overset{\sim}{\Rightarrow} g_! q^*$$

Beweis. Nach 21.4.1.14 und 21.4.1.20 ist eine stetige Abbildung genau dann les, wenn sie sich als Verknüpfung einer offenen Einbettung gefolgt von einer separierten eigentlichen Abbildung schreiben läßt. Nach der Kofaserungseigenschaft eigentlicher Vorschübe im Fall separierter Abbildungen 19.6.4.9 reicht es also, unsere Aussage für f separiert eigentlich und für f eine offene Einbettung zu zeigen. Im ersten Fall ist das eigentlicher Basiswechsel 19.6.3.24. Im zweiten Fall der Ausdehnung durch Null ist die Behauptung auch schnell geprüft. □

21.4.1.18 (**Schreivorschub von Modulgarben**). Gegeben ein Morphismus von geringten Räumen $(X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ nennen wir einen Komorphismus von Modulgarben **eigentlich**, wenn der zugrundeliegende Komorphismus von abelschen Garben eigentlich ist im Sinne von 19.6.4.1. Nach 19.6.4.2 ist über einem topologisch eigentlichen Morphismus jeder Komorphismus von Modulgarben eigentlich. Nach 19.6.4.3 ist die Verknüpfung eigentlicher Komorphismen von Modulgarben stets wieder eigentlich. Wir notieren die Menge aller eigentlichen Opkomorphismen alias Schreimorphismen von Modulgarben über einem Morphismus f von geringten Räumen wie im Fall abelscher Garben $\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/ f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Die Konstruktion schreikokartesischer Schreimorphismen 19.6.4.5 liefert offensichtlich auch einen Schreivorschub für Modulgarben und in Verallgemeinerung von 19.6.4.9 restringiert unser Funktor $\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/ \mathrm{Ger}} \to \mathrm{Ger}$ zu einer Kofaserung

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/ \mathrm{Ger}^{\mathrm{s}}} \to \mathrm{Ger}^{\mathrm{s}}$$

über der Kategorie $\mathrm{Ger}^{\mathrm{s}} \subset \mathrm{Ger}$ der geringten Räume mit topologisch separierten Morphismen. Wir nennen sie die **Schreikofaserung der Modulgarben**. Ihre Vorschübe sind unsere Schreivorschübe $f_{¡} = (f_!)^{\mathrm{opp}}$ aus 19.6.4.5. Im Fall einer offenen Einbettung j ist $j_!$ die Ausdehnung durch Null von Modulgarben.

Übungen

Übung 21.4.1.19. Sei $f : X \to Y$ stetig. Besitzt X eine Überdeckung durch offene Teilmengen U derart, daß die Restriktionen $f : U \to Y$ jeweils lokal eigentlich sind, so ist auch f selbst bereits lokal eigentlich.

Übung 21.4.1.20. Jede Verknüpfung von lokal eigentlichen Abbildungen ist lokal eigentlich. Eine stetige Abbildung ist genau dann les, wenn sie sich als Verknüpfung einer offenen Einbettung gefolgt von einer separierten eigentlichen Abbildung darstellen läßt.

21.4.2 Kompakte Schnitte und Kolimites

Lemma 21.4.2.1 (**Filtrierende Kolimites und kompakte Schnitte**). *Das Bilden der Schnitte mit kompaktem Träger für abelsche Garben auf einem lokal kompak-*

ten Hausdorffraum vertauscht mit filtrierenden Kolimites von abelschen Garben, in Formeln

$$\operatorname{colf}(\Gamma_! \mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} \Gamma_! (\operatorname{colf} \mathcal{F}_i)$$

Beispiel 21.4.2.2. Gegeben $K \subset X$ kompakt notieren wir $\Gamma_K(X; \mathcal{F})$ die Menge der globalen Schnitte $s \in \Gamma(X; \mathcal{F})$ mit Träger $\operatorname{supp}(s) \subset K$. Der Funktor Γ_K vertauscht auch auf lokal kompakten Hausdorffräumen keineswegs mit filtrierenden Kolimites. Als Gegenbeispiel mag man den direkten Limes der $a_{i*}\mathbb{Z}_{[0,1/i]}$ betrachten für $a_i : [0, 1/i] \hookrightarrow \mathbb{R}$ die Einbettungen und die offensichtlichen Epimorphismen von abelschen Garben als Systemmorphismen dieses mit $i \in \mathbb{N}_{>0}$ indizierten Systems.

Beispiel 21.4.2.3. Ist X ein unendlicher diskreter Raum, so ist der Raum der globalen Schnitte des Koprodukts aller Wolkenkratzergarben $\mathbb{Z}_{(x)}$ für $x \in X$ größer als das Koprodukt der Räume der globalen Schnitte der Summanden und ist vielmehr ihr Produkt. Der Funktor der globalen Schnitte vertauscht mithin auch auf lokal kompakten Hausdorffräumen keineswegs mit filtrierenden Kolimites.

Beweis. Die Injektivität benötigt keinerlei Annahmen und war auch bereits Übung 19.4.8.20. Wir führen das Argument nocheinmal aus. Sicher ist der Kolimes eines Systems von abelschen Garben die Garbifizierung des Kolimes in der Kategorie der abelschen Prägarben. Um im Lemma die Injektivität zu zeigen, beginnen wir mit einem Schnitt $s \in \Gamma_!(X; \mathcal{F}_i)$ für ein vorgegebenes $i \in I$. Geht er rechts nach Null, so gibt es für jeden Punkt $x \in X$ nach der Transitivität von Kolimites 17.7.1.34 eine offene Umgebung $U(x)$ und einen Index $i(x)$ mit $s \mapsto 0 \in \mathcal{F}_{i(x)}(U(x))$. Endlich viele $U(x)$ überdecken $\operatorname{supp}(s)$, ein i wird erreicht von allen beteiligten $i(x)$, und dann gilt offensichtlich $s \mapsto 0 \in \mathcal{F}_i(X)$. Das zeigt die Injektivität. Um die Surjektivität zu zeigen, ziehen wir uns zunächst auf den Fall X kompakt zurück. Sei dazu ein Schnitt $s \in \Gamma_!(X; \operatorname{colf} \mathcal{F}_i)$ gegeben. Wir finden $U \subset X$ offen mit kompaktem Abschluß und $\operatorname{supp}(s) \subset U$. Finden wir ein j und ein $\tilde{s} \in \Gamma(\bar{U}; \mathcal{F}_j)$ mit $\tilde{s} \mapsto s|\bar{U}$, so folgt unmittelbar $\tilde{s}|\partial\bar{U} \mapsto 0 \in \Gamma(\partial\bar{U}; \operatorname{colf} \mathcal{F}_i)$ und nach dem bereits bewiesenen $\tilde{s}|\partial\bar{U} \mapsto 0 \in \Gamma(\partial\bar{U}; \mathcal{F}_l)$ für geeignetes $l \geq j$. Also läßt sich das Bild $\hat{s} \in \Gamma(\bar{U}; \mathcal{F}_l)$ von $\tilde{s}$ durch Null fortsetzen zu einem Schnitt $\hat{s} \in \Gamma_!(X; \mathcal{F}_l)$ mit $\hat{s} \mapsto s$, und das war gerade zu zeigen. Wir dürfen also X kompakt annehmen. Gegeben ein Schnitt $s \in \Gamma(X; \operatorname{colf} \mathcal{F}_i)$ gibt es für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U(x)$ und einen Index $i(x)$ und einen Schnitt $\tilde{s}(x) \in \mathcal{F}_{i(x)}(U(x))$ mit $s(x) \mapsto s|U(x)$. Wir dürfen unsere $U(x)$ kompakt annehmen. Weiter gibt es $E \subset X$ endlich derart, daß die $U(x)$ mit $x \in E$ bereits X überdecken. Wählen wir j hinreichend groß, so können wir nach der bereits bewiesenen Injektivität annehmen, daß für alle $x, y \in E$ die Bilder von $\tilde{s}(x)$ und $\tilde{s}(y)$ in $\mathcal{F}_j(U(x) \cap U(y))$ übereinstimmen. Dann aber verkleben sie zu einem globalen Schnitt und der repräsentiert das gesuchte Urbild unseres Schnittes s. $\square$

Lemma 21.4.2.4. *Der Schreivorschub von abelschen Garben unter les-Abbildungen und allgemeiner von Modulgarben unter les-Morphismen vertauscht mit filtrierenden Kolimites.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ les. Wir behaupten, daß für jedes gerichtete System von abelschen Garben auf Y die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\operatorname{colf}(f_!\mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} f_!(\operatorname{colf}\mathcal{F}_i)$$

liefert. Da das Zurückholen mit Kolimites vertauscht, können wir uns mit Basiswechsel 21.4.1.16 auf den Fall eines einpunktigen Raums Y zurückziehen und müssen also nur für jeden lokal kompakten Hausdorffraum zeigen, daß das Bilden der Schnitte mit kompaktem Träger mit filtrierenden Kolimites vertauscht. Das aber wissen wir aus 21.4.2.1. Der Fall der Modulgarben folgt, da das Vergessen der Modulstrukturen mit Kolimites und Schreivorschub vertauscht. □

21.4.2.5 (**Koprodukt als Schreivorschub**). Ist X ein topologischer Raum und $(\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten von $\mathrm{Ab}_{/X}$ und versehen wir die Indexmenge I mit der diskreten Topologie und sind $\mathrm{em}_i : X \to X \times I$ die Einbettungen und ist ein Objekt $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/X\times I}$ gegeben zusammen mit Isomorphismen $\mathrm{em}_i^*\,\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_i$, so liefern diese Isomorphismen zusammen nach 19.4.9.21 einen Isomorphismus $\bigoplus_{i\in I} \mathrm{em}_{i!}\,\mathcal{G}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ und der Schreivorschub unter der Projektion auf X liefert nach 21.4.2.4 einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} \mathcal{G}_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_{X!}\,\mathcal{G}$$

Dasselbe gilt für Modulgarben auf einem geringten Raum $X = (X, \mathcal{A})$.

Lemma 21.4.2.6 (**Filtrierende Kolimites kompaktweicher Garben**). *Auf einem lokal kompakten Hausdorffraum X ist jeder filtrierende Kolimes kompaktweicher Garben wieder kompaktweich.*

Beweis. Sei $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ ein filtrierendes System kompaktweicher Garben auf X. Kolimites vertauschen nach 17.7.1.30 mit dem Rückzug von Garben, da dieser Rückzug einen Rechtsadjungierten hat. Ist $u : K \hookrightarrow X$ die Einbettung einer kompakten Teilmenge, so ist mithin der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus $\operatorname{colf} u^{(*)}\mathcal{F}_i \xrightarrow{\sim} u^{(*)} \operatorname{colf}\mathcal{F}_i$ und 21.4.2.1 liefert uns einen Isomorphismus

$$\operatorname{colf}\Gamma(K;\mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} \Gamma(K;\operatorname{colf}\mathcal{F}_i)$$

Jeder Schnitt t rechts ist also das Bild eines Schnitts $s \in \Gamma(K;\mathcal{F}_i)$ für ein $i \in I$. Da $\mathcal{F}_i$ kompaktweich ist, muß er von einem globalen Schnitt $\tilde{s} \in \Gamma(X;\mathcal{F}_i)$ herkommen, und dieser globale Schnitt $\tilde{s}$ hinwiederum liefert einen globalen Schnitt $\tilde{t} \in \Gamma(X;\operatorname{colf}\mathcal{F}_i)$, der unser t fortsetzt. □

21.4.3 Underivierte Projektionsformel

Proposition 21.4.3.1 (Tensorprodukt und Schnitte mit kompaktem Träger). *Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X und eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf X und eine flache abelsche Gruppe G ist die natürliche Abbildung ein Isomorphismus*

$$\Gamma_!\mathcal{F} \otimes G \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(\mathcal{F} \otimes G)$$

Ist zusätzlich $\mathcal{F}$ kompaktweich, so auch $\mathcal{F} \otimes G$.

21.4.3.2. Analoges gilt mit demselben Beweis für jeden Ring k, jede Garbe von k-Rechtsmoduln $\mathcal{F}$ und jeden flachen k-Modul G mit $\otimes_k$ statt $\otimes$.

Beispiel 21.4.3.3. Ich gebe ein Gegenbeispiel im Fall, daß G nicht flach ist. Ist etwa $\pi : S^1 \to \mathrm{pt}$ die Projektion und $\mathcal{F}$ das nichtkonstante lokale System auf S^1, das halmweise frei ist über $\mathbb{Z}$ von Rang Eins, so ist $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ konstant mit $\Gamma_!(\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, aber wir haben $\Gamma_!\mathcal{F} = 0$.

Beispiel 21.4.3.4. Ist in der Situation der Proposition $K \subset X$ ein Kompaktum und bezeichnet Γ_K Schnitte mit Träger in K, so muß unser Isomorphismus keineswegs Isomorphismen $\Gamma_K\mathcal{F} \otimes G \xrightarrow{\sim} \Gamma_K(\mathcal{F} \otimes G)$ induzieren. Ein Gegenbeispiel liefert der flache $\mathbb{Z}$-Modul $G = \mathbb{Q}$ und die abelsche Garbe

$$\mathcal{F} = \prod_{n=1}^{\infty} i_{n*}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{[0,1/n]}$$

für $i_n : [0, 1/n] \hookrightarrow \mathbb{R}$ die Einbettungen. Die Garbe $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ hat nur im Ursprung einen von Null verschiedenen Halm, aber die Garbe $\mathcal{F}$ hat keine von Null verschiedenen Schnitte mit dem Ursprung als Träger.

Beweis. Wir beginnen mit der Injektivität. Gegeben ein Element $s \in \Gamma_!\mathcal{F} \otimes G$ mit $s \mapsto 0$ besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U(x)$ mit $s \mapsto 0 \in \mathcal{F}(U(x)) \otimes G$. Schreiben wir $s = \sum s_\nu \otimes g_\nu$, so überdecken endlich viele $U_1, \ldots, U_r$ dieser $U(x)$ die Träger aller s_ν. Nehmen wir als U_0 das Komplement der Vereinigung dieser Träger, so liefert das Einschränken eine Injektion

$$\Gamma_!\mathcal{F} \hookrightarrow \prod_{i=0}^{r} \mathcal{F}(U_i)$$

Sie bleibt eine Injektion nach dem Tensorieren mit unserem flachen G, und das zeigt die Injektivität. Um die Surjektivität zu zeigen, ziehen wir uns zunächst auf den Fall von kompaktem X zurück. Gegeben $s \in \Gamma(\mathcal{F} \otimes G)$ mit Träger in einem Kompaktum K finden wir stets $U \Subset X$ offen mit $K \subset U$ und $\bar{U}$ kompakt. Ist der Fall von kompaktem X bekannt, so finden wir schon mal ein Urbild $\tilde{s} \in$

$\Gamma(\bar{U};\mathcal{F})\otimes G$ von $s|\bar{U}$ und wegen der bereits bewiesenen Injektivität gilt $\tilde{s}\mapsto 0\in\Gamma(\partial\bar{U};\mathcal{F})\otimes G$. Da G flach ist, kommt damit $\tilde{s}$ von

$$\ker\big(\Gamma(\bar{U};\mathcal{F})\to\Gamma(\partial\bar{U};\mathcal{F})\big)\otimes G$$

her und wir finden durch Ausdehnen durch Null auf dem ersten Tensorfaktor das gesuchte Urbild von s in $\Gamma_!(X;\mathcal{F})\otimes G$. Wir dürfen also in der Tat ohne Beschränkung der Allgemeinheit X kompakt annehmen. Sei nun also X kompakt und $s\in\Gamma(\mathcal{F}\otimes G)$. So gibt es eine endliche Überdeckung $X=U_1\cup\ldots\cup U_r$ durch Kompakta und $\tilde{s}_i\in\mathcal{F}(U_i)\otimes G$ mit $\tilde{s}_i\mapsto s|U_i$. Wegen der bereits bewiesenen Injektivität haben $\tilde{s}_i$ und $\tilde{s}_j$ dasselbe Bild in $\mathcal{F}(U_i\cap U_j)\otimes G$. Die exakte Sequenz

$$0\to\mathcal{F}(X)\to\prod\mathcal{F}(U_i)\to\prod\mathcal{F}(U_i\cap U_j)$$

bleibt aber exakt unter dem Tensorieren mit G und erlaubt das Verkleben der $\tilde{s}_i$ zum gesuchten Urbild $\tilde{s}\in\mathcal{F}(X)\otimes G$ von s. Um die letzte Aussage zu zeigen, erinnern wir für $K\subset X$ kompakt aus 19.4.8.14, daß für kompaktweiches $\mathcal{F}$ die Restriktion sogar eine Surjektion $\Gamma_!\mathcal{F}\twoheadrightarrow\Gamma(K;\mathcal{F})$ liefert. Tensorieren mit G und Anwenden unseres Resultats mit K statt X liefert

$$\Gamma_!\mathcal{F}\otimes G\twoheadrightarrow\Gamma(K;\mathcal{F})\otimes G\xrightarrow{\sim}\Gamma(K;\mathcal{F}\otimes G)$$

Da diese Verknüpfung über $\Gamma_!(\mathcal{F}\otimes G)$ faktorisiert, muß auch diese Gruppe surjektiv auf $\Gamma(K;\mathcal{F}\otimes G)$ abgebildet werden. □

21.4.3.5. Gegeben eine stetige Abbildung $\pi:X\to Y$ und eine abelsche Garbe $\mathcal{G}$ auf Y und eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf X liefern unsere allgemeinen Konstruktionen 21.1.5.17 einen natürlichen Garbenhomomorphismus $\pi_*\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}\to\pi_*(\mathcal{F}\otimes\pi^*\mathcal{G})$. Daß dieser Homomorphismus im allgemeinen kein Isomorphismus sein kann, zeigt bereits das Beispiel der konstanten Abbildung von einer unendlichen Menge auf einen Punkt. Unser natürlicher Homomorphismus induziert weiter offensichtlich einen natürlichen Homomorphismus

$$(\pi_!\mathcal{F})\otimes\mathcal{G}\to\pi_!(\mathcal{F}\otimes\pi^*\mathcal{G})$$

für die Schreivorschübe im Sinne von 19.6.4.5. Analoges gilt für π einen Morphismus von geringten Räumen und $\mathcal{F}$ eine Rechtsmodulgarbe und $\mathcal{G}$ eine Modulgarbe.

Definition 21.4.3.6. Gegeben eine stetige Abbildung nennen wir eine abelsche Garbe auf ihrem Definitionsbereich **faserweise kompaktweich**, wenn ihre Einschränkung auf jede Faser unserer Abbildung kompaktweich ist. Heißt unsere Abbildung f, so sprechen wir auch präziser von einer **f-kompaktweichen** Garbe. Gegeben eine Modulgarbe beziehen wir diese Begriffe auf die zugrundeliegende abelsche Garbe.

21.4.3.7. Der Begriff einer faserweise kompaktweichen Garbe scheint nur im Fall von les-Abbildungen f nützlich zu sein. In diesem Fall zeigen wir in 21.5.2.7, daß jede f-kompaktweiche Garbe $f_!$-rechtsazyklisch ist. Die im folgenden gezeigten Zusatzaussagen über die Erhaltung der Eigenschaft „faserweise kompaktweich" unter verschiedenen Rückzügen werden sich bei der Konstruktion des vollen derivierten Formalismus als hilfreich erweisen.

Lemma 21.4.3.8. *Gegeben eine les-Abbildung ist jeder filtrierende Kolimes von faserweise kompaktweichen Garben wieder faserweise kompaktweich.*

Beweis. Kolimites vertauschen mit dem Rückzug abelscher Garben, ja von Modulgarben, da dieser Funktor einen Rechtsadjungierten hat. Insbesondere vertauschen Kolimites mit der Einschränkung auf die Fasern unserer Abbildung und diese sind nach Annahme lokal kompakte Hausdorffräume. Daß filtrierende Kolimites kompaktweicher Garben auf lokal kompakten Hausdorffräumen wieder kompaktweich sind, wissen wir aus 21.4.2.6. □

Korollar 21.4.3.9 (Flache Projektionsformel). *Gegeben $\pi : X \to Y$ eine les-Abbildung, $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ eine flache abelsche Garbe und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine weitere abelsche Garbe ist die natürliche Abbildung aus 21.4.3.5 ein Isomorphismus*

$$(\pi_!\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \pi_!(\mathcal{F} \otimes \pi^*\mathcal{G})$$

Ist zusätzlich $\mathcal{F}$ faserweise kompaktweich, so ist auch $\mathcal{F} \otimes \pi^*\mathcal{G}$ faserweise kompaktweich.

Beweis. Wir dürfen uns mit les-Basiswechsel 21.4.1.16 auf den Fall zurückziehen, daß Y ein Punkt ist. In diesem Fall haben wir die Aussagen bereits als 21.4.3.1 bewiesen. □

Korollar 21.4.3.10 (Flache Projektionsformel für Modulgarben). *Gegeben $\pi : X \to Y$ eine les-Abbildung, $\mathcal{G}$ ein flacher Modul über einer Ringgarbe $\mathcal{B}$ auf Y und $\mathcal{F}$ ein $\pi^*\mathcal{B}$-Rechtsmodul induziert die natürliche Abbildung aus 21.4.3.5 einen Isomorphismus*

$$(\pi_!\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \pi_!(\mathcal{F} \otimes_{\pi^*\mathcal{B}} \pi^*\mathcal{G})$$

Ist zusätzlich $\mathcal{F}$ faserweise kompaktweich, so ist auch $\mathcal{F} \otimes_{\pi^*\mathcal{B}} \pi^*\mathcal{G}$ faserweise kompaktweich.

Beweis. Wir dürfen uns mit les-Basiswechsel 21.4.1.16 auf den Fall zurückziehen, daß Y ein Punkt ist. In diesem Fall haben wir die Aussagen bereits als 21.4.3.2 bewiesen. □

21.4.4 Trennrückzug von Schreimorphismen

21.4.4.1. Sei $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ eine Faserung und sei in der Basis $\mathscr{B}$ ein multiplikatives System $\mathscr{B}^{\mathsf{i}}$ ausgezeichnet. Unter einem **faserrückzugstabilen multiplikativen System $\mathscr{C}^{\mathsf{i}}$ über $\mathscr{B}^{\mathsf{i}}$** verstehen wir ein multiplikatives System $\mathscr{C}^{\mathsf{i}}$ in $\mathscr{C}$ mit $p(\mathscr{C}^{\mathsf{i}}) \subset \mathscr{B}^{\mathsf{i}}$ und mit der Eigenschaft, daß für jede Hochhebung nach $\mathscr{C}$ eines kartesischen Quadrats in $\mathscr{B}$ mit vertikalen $\mathscr{B}^{\mathsf{i}}$-Pfeilen, im Diagramm links, kommutativen Quadrat

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d, dashed] \\ Z \arrow[r, dotted] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed, "?"'] & \mathcal{F} \arrow[d, dashed] \\ \mathcal{H} \arrow[r, dotted] & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

in $\mathscr{C}$, im Diagramm rechts, mit den Pfeilen nach rechts kartesisch und dem rechten vertikalen Pfeil nach unten in $\mathscr{C}^{\mathsf{i}}$ auch der induzierte linke vertikale mit einem ? markierte Pfeil zu $\mathscr{C}^{\mathsf{i}}$ gehört.

21.4.4.2. Ich notiere in diesem Kontext Morphismen aus $\mathscr{C}$ und $\mathscr{B}$ als gepunktelte Pfeile und Morphismen aus $\mathscr{C}^{\mathsf{i}}$ und $\mathscr{B}^{\mathsf{i}}$ als gestrichelte Pfeile. Die durchgezogenen Pfeile hebe ich mir für „Eigmorphismen“ auf, die hier noch nicht vorkommen.

Beispiel 21.4.4.3 (**Rückzug von Schreimorphismen**). In unserer Garbenopfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ aus 19.6.2.17 bilden die Schreimorphismen über stetigen Abbildungen nach Übung 19.6.4.31 ein faserrückzugstabiles multiplikatives System. In diesem Fall ist $\mathscr{C} = \mathscr{C}^{\mathsf{i}} = \mathrm{Top}$.

Beispiel 21.4.4.4 (**Rückzug von Schreimorphismen, Variante**). In der Faserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Gek}} \to \mathrm{Gek}$, die aus 21.1.3.9 entsteht durch Einschränkung auf gekringte Räume in der Basis, bilden die Schreimorphismen über beliebigen Morphismen nach Übung 21.1.3.13 ein faserrückzugstabiles multiplikatives System. In diesem Fall ist $\mathscr{C} = \mathscr{C}^{\mathsf{i}} = \mathrm{Gek}$.

Beispiel 21.4.4.5 (**Rückzug schreikokartesischer Schreimorphismen**). In der Garbenopfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ aus 19.6.2.12 bilden die schreikokartesischen Schreimorphismen nach les-Basiswechsel 21.4.1.16 ein faserrückzugstabiles multiplikatives System über dem multiplikativen System des les-Morphismen. In diesem Fall ist $\mathscr{C} = \mathrm{Top}$ und $\mathscr{C}^{\mathsf{i}} = \mathrm{Top}^{\mathrm{les}}$.

21.4.4.6. Seien $\mathscr{T}$ eine Kategorie und $\mathscr{T}^{\mathsf{i}}$ darin ein multiplikatives System. Gegeben eine Trennfaserung $\mathscr{G} \to \curlywedge\mathscr{T}$ über der banalen Trennkategorie zu $\mathscr{T}$ nennen wir ein multiplikatives System $\mathscr{G}^{\mathsf{i}}$ über $\mathscr{T}^{\mathsf{i}}$ **fasertrennrückzugstabil**, wenn das System $\mathscr{G}^{\mathsf{i}\shortparallel}$ aller Tupel von $\mathscr{G}^{\mathsf{i}}$-Morphismen faserrückzugstabil ist über $\mathscr{T}^{\mathsf{i}\shortparallel}$ in der Faserung $\mathscr{G}^{\curlywedge} \to \mathscr{T}^{\curlywedge}$ der Familienkategorien.

21.4.4.7. Gegeben eine Kategorie $\mathscr{T}$ verstehen wir unter einem **Trennquadrat in** $\mathscr{T}$ eine endliche Familie von kommutativen Quadraten in $\mathscr{T}$ mit derselben linken

Vertikale. Wir werden so ein Datum auffassen und notieren als ein kommutatives Diagramm der Familienkategorie $\mathscr{T}^{\curlywedge}$ der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathscr{T}$ der Gestalt

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "(q_1,\ldots,q_r)"] \arrow[d, "g"'] & X_1 \curlywedge \ldots \curlywedge X_r \arrow[d, "f_1 \curlywedge \ldots \curlywedge f_r"] \\ Z \arrow[r, "(p_1,\ldots,p_r)"] & Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r \end{tikzcd}$$

Gleichbedeutend ist es ein Datum bestehend aus Objekten $X_i, Y_i, W, Z \in \mathscr{T}$ sowie Morphismen $q_i : W \to X_i$ und $p_i : Z \to Y_i$ und $f_i : X_i \to Y_i$ und $g : W \to Z$ mit $f_i q_i = p_i g \ \forall i$.

21.4.4.8. Diagrammatisch bedeutet fasertrennrückzugstabil also, daß gegeben ein als linkes Quadrat dargestelltes kartesisches Trennquadrat der banalen Trennkategorie $\mathscr{T}$ mit Vertikalen aus $\mathscr{T}^{\mathsf{i}}$ und darüber das als rechtes Quadrat dargestellte Trennquadrat in $\mathscr{G}$ mit kartesischen Horizontalen und rechten Vertikalen in $\mathscr{G}^{\mathsf{i}}$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X_1 \curlywedge \ldots \curlywedge X_r \arrow[d, dashed] \\ Z \arrow[r, dotted] & Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed, "?"'] & \mathcal{F}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{F}_r \arrow[d, dashed] \\ \mathcal{H} \arrow[r, dotted] & \mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_r \end{tikzcd}$$

auch die mit einem Fragezeichen markierte linke Vertikale zu $\mathscr{G}^{\mathsf{i}}$ gehört.

Proposition 21.4.4.9 (**Trennrückzug von Schreimorphismen**). *In der Garbenoptrennfaserung* $\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top}$ *bilden die Schreimorphismen ein fasertrennrückzugstabiles multiplikatives System über dem multiplikativen System aller stetigen Abbildungen.*

21.4.4.10. Das fasertrennrückzugstabile multiplikative System der Schreimorphismen aus dem Lemma notieren wir $\mathrm{Ab}^{\mathsf{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}}$ wie in 19.6.4.4.

Beweis. Nach der Bereitstellung der Methodik 21.4.4.12. □

21.4.4.11. Ein multiplikatives System $\mathscr{T}^{\mathsf{i}}$ von Morphismen einer Kategorie $\mathscr{T}$ heiße **rückzugstabil**, wenn das Faserprodukt für alle Winkel mit einem $\mathscr{T}^{\mathsf{i}}$-Morphismus existiert und in jedem kartesischen Quadrat mit einem $\mathscr{T}^{\mathsf{i}}$-Morphismus im Ausgangswinkel der gegenüberliegende Morphismus aus dem Faserprodukt auch wieder ein $\mathscr{T}^{\mathsf{i}}$-Morphismus ist.

21.4.4.12 (**Erzeuger für kartesische Trennquadrate**). Sei $\mathscr{T} \supset \mathscr{T}^{\mathsf{i}}$ eine Kategorie mit einem rückzugstabilen multiplikativen System von Morphismen. In der Familienkategorie $\mathscr{T}^{\curlywedge} := (\curlywedge\mathscr{T})^{\curlywedge}$ ihrer banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathscr{T}$ sei eine Menge K von kartesischen Trennquadraten mit Vertikalen in $\mathscr{T}^{\mathsf{i}\shortparallel}$ gegeben. Unsere Menge K sei stabil unter dem Vertupeln sowie unter dem Verkleben längs

gleicher vertikaler oder horizontaler Kanten und enthalte die **elementaren kartesischen Trennquadrate mit Vertikalen aus** $\mathscr{T}^{\mathsf{i}}$, ein hier neu benötigter Begriff, unter dem wir zusammenfassen:

1. Alle kartesischen Quadrate mit Einstrennungen oder Leertrennungen in den Horizontalen und Vertikalen aus $\mathscr{T}^{\mathsf{i}}$;

2. Alle **Projektionsformel-Quadrate** mit Vertialen aus $\mathscr{T}^{\mathsf{i}}$ alias Quadrate der Gestalt

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dotted, "(\mathrm{id}_X, f)"] \arrow[d, dashed, "f"'] & X \curlywedge Y \arrow[d, dashed, "f \curlywedge \mathrm{id}_Y"] \\ Y \arrow[r, dotted, "(\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_Y)"] & Y \curlywedge Y \end{tikzcd}$$

So enthält unsere Menge K alle kartesischen Trennquadrate der Familienkategorie mit $\mathscr{T}^{\mathsf{i}}$-Vertikalen. Um das einzusehen, betrachten wir für beliebige $\mathscr{T}^{\mathsf{i}}$-Morphismen $f : X \to Y$ und $g : Z \to Y$ das aus kartesischen Quadraten mit den offensichtlichen Tupeln einfacher Morphismen in den Vertikalen bestehende Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed] & X \curlywedge (X \times_Y Z) \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed] & X \curlywedge Z \arrow[d, dashed] \\ X \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed] & X \curlywedge X \arrow[r, dotted] & X \curlywedge Y \arrow[d, dashed] \\ Y \arrow[rr, dotted] & & Y \curlywedge Y \end{tikzcd}$$

Es zeigt, daß jedes kartesische Trennquadrat mit einer diagonalen Zweitrennung in der unteren Horizontalen zu unserer Menge K gehören muß. Jeder Morphismus der Familienkategorie einer banalen Trennkategorie entsteht jedoch nach 18.1.2.22 durch Vertupeln und Verknüpfen aus Leertrennungen, Einstrennungen und Diagonalzweitrennungen. So folgt dann die Behauptung.

Beweis für 21.4.4.9. Die Kategorie Top hat endliche Faserprodukte. Nach 21.4.4.12 müssen wir also nur für elementare kartesische Trennquadrate in Top zeigen, daß der Rückzug eines Tupels von Schreimorphismen wieder ein Schreimorphismus ist. Im Fall eines kartesischen Trennquadrats mit Leertrennungen in den Horizontalen ist das die einigermaßen banale Erkenntnis, daß für jeden topologischen Raum X der identische Opkomorphismus $\mathbb{Z}_X \to \mathbb{Z}_X$ über $\mathrm{id} : X \to X$ eigentlich ist alias daß die natürliche Einbettung eine Gleichheit $\mathrm{id}_! \, \mathbb{Z}_X = \mathrm{id}_* \, \mathbb{Z}_X$ ist. Im Fall eines gewöhnlichen kartesischen Quadrats ist das unsere Übung 19.6.4.31. Im Fall des Projektionsformelquadrats zu einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ schließlich läuft es auf den Nachweis hinaus, daß für jeden eigentlichen Komorphismus $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ über f und jede abelsche Garbe $\mathcal{C}$ auf Y der Garbenhomomorphismus

$\mathcal{G} \otimes \mathcal{C} \to f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{C})$, der für $V \Subset Y$ und $g \in \mathcal{G}(V)$ und $c \in \mathcal{C}(V)$ gegeben wird durch $g \otimes c \mapsto \varphi(g) \otimes \kappa(c)$ für $\kappa : \mathcal{C}(V) \to (f^*\mathcal{C})(f^{-1}V)$ aus dem Transportmorphismus, über $f_!(\mathcal{G} \otimes f^*\mathcal{C})$ faktorisiert. Da nun der Vorschub von den $\varphi(g) \otimes \kappa(c)$ erzeugt wird, reicht es zu zeigen, daß diese Tensoren zu $f_!(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{C})$ gehören. Es ist aber klar, daß der Träger in $f^{-1}(V)$ unseres Tensors $\varphi(g) \otimes \kappa(c)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{supp}(\varphi(g))$ ist und folglich, wenn φ eigentlich ist, auch eigentlich nach V abgebildet wird. □

Proposition 21.4.4.13 (**Trennrückzug schreikokartesischer Schreimorphismen**). *Sei k ein Körper. Schränken wir die Garbenoptrennfaserung ein auf die volle Unterkategorie $(\mathrm{Top}, k) \subset \mathrm{Gek}$ der konstant mit k gekringten Räume alias in der die Trennfaserung*

$$k\text{-}\mathrm{Mod}_{/\!/ \curlywedge \mathrm{Top}} \to \curlywedge \mathrm{Top}$$

der Garben von k-Vektorräumen bilden die schreikokartesischen Schreimorphismen über les-Abbildungen ein fasertrennrückzugstabiles multiplikatives System.

Beweis. Wir wissen, daß das multiplikative System der les-Abbildungen rückzugstabil ist. Wie beim Beweis von 21.4.4.9 ziehen wir uns mit 21.4.4.12 auf den Fall elementarer kartesischer Trennquadrate in Top mit les-Vertikalen zurück. Im Fall horizontaler Leertrennungen folgt die Behauptung daraus, daß für jeden topologischen Raum X der identische Opkomorphismus $k_X \to k_X$ über der Identität $\mathrm{id} : X \to X$ schreikokartesisch ist. Im Fall eines gewöhnlichen kartesischen Diagramms folgt die Behauptung aus les-Basiswechsel 21.4.1.16. Im Fall eines Projektionsformelquadrats zu einer les-Abbildung $f : X \to Y$ schließlich gilt es zu zeigen, daß der aus 21.4.4.9 entstehende Garbenhomomorphismus ein Isomorphismus $f_!\mathcal{F} \otimes \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} f_!(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{C})$ ist. Das leistet in unserem Fall die flache Projektionsformel für Modulgarben 21.4.3.10. □

Proposition 21.4.4.14 (**Trennrückzug kokartesischer Modulmorphismen**). *In der Garbenoptrennfaserung eingeschränkt auf die volle Unterkategorie der einpunktigen gekringten Räume $\mathrm{Kringo} \subset \mathrm{Gek}$ alias in der Trennfaserung*

$$\mathrm{Ab}_{/\!/ \curlywedge \mathrm{Kringo}} \to \curlywedge \mathrm{Kringo}$$

der Moduln über Kringen bilden die kokartesischen Morphismen über opponierten Kringhomomorphismen ein fasertrennrückzugstabiles multiplikatives System.

21.4.4.15. In diesem Fall haben wir in der abstrakten Notation aus 21.4.4.6 geschrieben $\mathscr{T}^{\mathsf{i}} = \mathscr{T} = \mathrm{Kringo}$ und $\mathscr{G}^{\mathsf{i}} = \mathscr{G} = \mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Kringo}}$.

Beweis. Wie beim Beweis von 21.4.4.9 ziehen wir uns mit 21.4.4.12 auf den Fall elementarer kartesischer Trennquadrate in Kringo zurück. Im Fall horizontaler Leertrennungen folgt die Behauptung daraus, daß für jeden Kring C der identische

Opkomorphismus $C \to C$ über der Identität $\mathrm{id}^\circ : C \to C$ kokartesisch ist. Im Fall eines gewöhnlichen kartesischen Diagramms ist es die Ausssage, daß gegeben Kringhomomorphismen $B \to A$ und $B \to C$ und ein C-Modul M der natürliche Morphismus

$$A \otimes_B \mathrm{res}^B_C M \xrightarrow{\sim} \mathrm{res}^A_{A \otimes_B C}((A \otimes_B C) \otimes_C M)$$

ein Isomorphismus ist. Im Fall des Projektionsformelquadrats zu einem Kringhomomorphismus $B \to A$ läuft die Behauptung darauf hinaus, für jeden B-Modul M und jeden A-Modul N zu zeigen, daß die natürliche Abbildung einen Isomorphismus

$$M \otimes_B \mathrm{res}^B_A N \xrightarrow{\sim} \mathrm{res}^B_A((M \otimes_B A) \otimes_A N)$$

liefert. Auch das ist klar. □

Proposition 21.4.4.16 (Trennrückzug schreikokartesischer Modulmorphismen). *In der Garbenoptrennfaserung eingeschränkt auf die volle Unterkategorie der diskreten gekringten Räume* $\mathrm{Gekd} \subset \mathrm{Gek}$ *alias in der Trennfaserung*

$$\mathrm{Ab}_{/\!/ \curlywedge \mathrm{Gekd}} \to \curlywedge \mathrm{Gekd}$$

bilden die schreikokartesischen Morphismen ein fasertrennrückzugstabiles multiplikatives System.

21.4.4.17. In diesem Fall haben wir in der abstrakten Notation aus 21.4.4.6 geschrieben $\mathscr{T}^{¡} = \mathscr{T} = \mathrm{Gekd}$ aber abweichend vom einpunktigen Fall $\mathscr{G}^{¡} \subsetneq \mathscr{G}$.

Beweis. Wie beim Beweis von 21.4.4.9 ziehen wir uns mit 21.4.4.12 auf den Fall elementarer kartesischer Trennquadrate in Gekd zurück. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß in der Basis unten links ein einpunkiger Raum mit Ring C steht. Im Fall horizontaler Leertrennungen folgt die Behauptung daraus, daß für jeden Kring C der identische Opkomorphismus $C \to C$ über der Identität $\mathrm{id}^\circ : C \to C$ schreikokartesisch ist. Im Fall eines gewöhnlichen kartesischen Diagramms dürfen wir annehmen, daß auch in der Basis unten rechts ein einpunkiger Raum mit Ring B steht. Den gekringten diskreten Raum oben links in der Basis schreiben wir als die Familie von Kringen $(A_i)_{i \in I}$. Der Morphismus in der linken Vertikale der Basis entspricht einem Tupel von Ringhomomorphismen $B \to A_i$. Eine Modulgarbe oben links ist eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ mit $M_i \in A_i\text{-}\mathrm{Mod}$. Der Schreivorschub macht daraus den B-Modul $\bigoplus \mathrm{res}^B_{A_i} M_i$. Das Faserprodukt in der Basis ist $(C \otimes_B A_i)_{i \in I}$. Der Trennrückzug längs der oberen Horizontale ist $\big((C \otimes_B A_i) \otimes_{A_i} M_i\big)_{i \in I}$. Die Behauptung schließlich läuft auf die Aussage hinaus, daß der offensichtliche Homomorphismus von C-Moduln

$$C \otimes_B \bigoplus \mathrm{res}^B_{A_i} M_i \to \bigoplus \big((C \otimes_B A_i) \otimes_{A_i} M_i\big)_{i \in I}$$

ein Isomorphismus ist und das ist klar. Im Fall des Projektionsformelquadrats läuft die Behauptung darauf hinaus, für jeden Kring B und jede Familie von Kringen $(A_i)_{i\in I}$ und jede Familie von Kringhomomorphismen $B \to A_i$ und jeden B-Modul M und jede Familie $(N_i)_{i\in I}$ mit $N_i \in A_i\text{-}\mathrm{Mod}$ zu zeigen, daß der natürliche Homomorphismus von B-Moduln

$$M \otimes_B \bigoplus \mathrm{res}^B_{A_i} N_i \to \prod \mathrm{res}^B_{A_i}((M \otimes_B A_i) \otimes_{A_i} N_i)$$

über einen Isomorphismus

$$M \otimes_B \bigoplus \mathrm{res}^B_{A_i} N_i \xrightarrow{\sim} \bigoplus \mathrm{res}^B_{A_i}((M \otimes_B A_i) \otimes_{A_i} N_i)$$

faktorisiert. Auch das ist klar. □

Vorschau 21.4.4.18. Die in den vorhergehenden Propositionen diskutierten Fälle, in denen die schreikokartesischen Morphismen jeweils ein trennfaserrückzustabiles multiplikatives System bilden, sind bereits nah am vollständigen Sechs-Funktor-Formalismus. In der topologischen Variante 21.4.4.9 gilt es „nur" noch, zu den derivierten Kategorien überzugehen. Im Fall von Körperkoeffizienten ist das relativ unproblematisch. Wollen wir dahingegen allgemeinere kommutative Koeffizientenringe zulassen, wird die Sache schwieriger, da der Rückzug das Derivieren von Tensorprodukten und flache Linksauflösungen benötigt, der Schreivorschub dahingegen injektive Rechtsauflösungen.

Übungen

Übung 21.4.4.19. Die Schreimorphismen von Modulgarben über gekringten Räumen aus 21.1.3.13 bilden ein fasertrennrückzustabiles multiplikatives System über dem System aller Morphismen gekringter Räume. Hinweis: Man mag sich auf den Fall abelscher Garben 21.4.4.9 stützen sowie den Fall des einfachen Rückzugs aus Übung 21.1.3.13.

21.4.5 Rückzug-Schreivorschub-Formalismus

Definition 21.4.5.1. Ein **Kategorienwinkel** ist eine Menge von **Objekten** $\mathscr{B}$ mit drei Strukturen als Kategorie, deren Morphismenmengen wir $\mathscr{B}^\dagger(X,Y)$, $\mathscr{B}^\imath(X,Y)$ und $\mathscr{B}^\mathrm{e}(X,Y)$ notieren, sowie einer Erweiterung der Identität auf den Objekten zu treuen Funktoren

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{B}^\mathrm{e} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathscr{B}^\dagger & & \mathscr{B}^\imath \end{tikzcd}$$

Die Elemente dieser Morphismenmengen nennen wir **†-Morphismen** oder kurz **Morphismen**, **¡-Morphismen** oder **Schreimorphismen** und **e-Morphismen** oder **Eigmorphismen**.

Definition 21.4.5.2. Ein **Quadrat** in einem Kategorienwinkel ist ein Datum aus Objekten und Morphismen (X, Y, Z, W, f, g, p, q) mit Objekten und Morphismen wie im Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dotted, "q"] \arrow[d, dotted, "g"'] & X \arrow[d, dotted, "f"] \\ Z \arrow[r, dotted, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

angegeben mit Vertikalen $f, g \in \mathscr{B}^{¡}$ und Horizontalen $p, q \in \mathscr{B}^{\dagger}$. Wir notieren auch im weiteren vielfach †-Morphismen durch gepunktelte Pfeile und ¡-Morphismen durch gestrichelte Pfeile. Die Eigmorphismen notieren wir in diesem Kontext als durchgezogene Pfeile. Wir verwenden die durch das Diagramm erzeugte Anschauung im weiteren in unserer Terminologie, indem wir etwa von der „rechten vertikalen Kante eines Quadrats“ und dergleichen reden.

Definition 21.4.5.3. Eine **Regulierung** eines Kategorienwinkels ist die Vorgabe einer Menge von Quadraten, die stabil ist unter dem Verkleben längs gleicher horizontaler oder vertikaler Kanten und die alle kommutativen Quadrate enthält, bei denen beide horizontalen oder beide vertikalen Morphismen Identitäten sind.

Beispiel 21.4.5.4. Gegeben $\mathscr{B} \supset \mathscr{B}^{¡} \supset \mathscr{B}^{e}$ eine Kategorie mit Unterkategorien, die jeweils alle Objekte enthalten, erhalten wir mit $\mathscr{B}^{\dagger} := \mathscr{B}$ einen Kategorienwinkel. Darin bilden alle kartesischen und auch alle kommutativen Quadrate von $\mathscr{B}$, die Vertikalen aus $\mathscr{B}^{¡}$ haben, jeweils eine Regulierung, die **kartesische** beziehungsweise **kommutative Regulierung**.

Definition 21.4.5.5. Ein **Winkelfunktor** von Kategorienwinkeln ist eine Abbildung auf den Objekten $F : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ zusammen mit Abbildungen auf den Morphismen $\mathscr{C}^{\dagger}(X, Y) \to \mathscr{B}^{\dagger}(FX, FY)$ und $\mathscr{C}^{¡}(X, Y) \to \mathscr{B}^{¡}(FX, FY)$, die jeweils Funktoren sind und die zu demselben Funktor $\mathscr{C}^{e}(X, Y) \to \mathscr{B}^{e}(FX, FY)$ einschränken. Wir nennen den ersten Funktor den **†-Funktor**, den zweiten den **¡-Funktor** und den dritten den **e-Funktor** unseres Winkelfunktors.

21.4.5.6 (**Kategorie der Quadrate über einem Basisquadrat**). Gegeben ein Winkelfunktor $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ machen wir die Quadrate von $\mathscr{C}$ über einem vorgegebenen Quadrat der Basis $\mathscr{B}$ zu einer Kategorie, indem wir solche Viertupeln von Eigmorphismen über den Identitäten in den Ecken als Morphismen nehmen, die kommutative Quadrate längs jeder Kante liefern.

Definition 21.4.5.7. Eine **Winkelfaserung** ist ein Winkelfunktor F derart, daß der †-Funktor von F eine Faserung ist, der ¡-Funktor von F eine Kofaserung und daß über einem Eigmorphismus der Basis jeder †-Morphismus und jeder ¡-Morphismus wieder ein Eigmorphismus auf den Fasern ist. Den Rückzug längs eines †-Morphismus p notieren wir $p^\dagger$. Den Vorschub längs eines ¡-Morphismus f notieren wir $f_¡$.

Beispiel 21.4.5.8. Jede Bifaserung $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ liefert eine Winkelfaserung in offensichtlicher Weise, bei der in der Basis wie in der Faser Morphismen, Schreimorphismen und Eigmorphismen zusammenfallen.

Beispiel 21.4.5.9. Über dem Kategorienwinkel zu $\mathrm{Top} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{s}} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{es}}$ ist der Kategorienwinkel zu $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}} \supset \mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Top}^{\mathrm{s}}} \supset \mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Top}^{\mathrm{es}}}$ mit der Notation $\mathrm{Top}^{\mathrm{es}}$ für die eigentlichen separierten Abbildungen von topologischen Räumen eine Winkelfaserung. In der Tat ist $\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Top}^{\mathrm{s}}} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{s}}$ eine Kofaserung nach 19.6.4.9 und über eigentlichen separierten Abbildungen sind alle Opkomorphismen eigentlich. In diesem Fall sind die Fasern opponierte Kategorien abelscher Garben und wir haben $p^\dagger = (p^{(*)})^{\mathrm{opp}}$ und $f_¡ = (f_{(!)})^{\mathrm{opp}}$.

Definition 21.4.5.10. Gegeben eine Winkelfaserung $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ über einer regulierten Basis $\mathscr{B}$ nennen wir die Quadrate der Regulierung **erlaubte Basisquadrate** und die Quadrate mit kartesischen Horizontalen in der Faser $\mathscr{C}$, die über erlaubten Basisquadraten liegen, **Rückholquadrate**. Unter einer **Präverflechtung** verstehen wir eine Regulierung des Kategorienwinkels $\mathscr{C}$ durch ausgewählte Rückholquadrate, die **Verflechtungsquadrate**, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Über einem erlaubten Basisquadrat mit Eigmorphismen auf zwei gegenüberliegenden Kanten sind alle in $\mathscr{C}^\dagger$ beziehungsweise $\mathscr{C}^¡$ kommutativen Rückholquadrate von $\mathscr{C}$ Verflechtungsquadrate;

2. Über jedem erlaubten Basisquadrat kann jedes partielle Quadrat von $\mathscr{C}$ mit †-kartesischen Horizontalen, dem nur die linke Vertikale fehlt, auf genau eine Weise zu einem Verflechtungsquadrat ergänzt werden. Wir sagen dann, die so ergänzte linke Vertikale entstehe durch **Zurückholen** der rechten Vertikale über dem vorgegebenen erlaubten Basisquadrat.

21.4.5.11. Eine **präverflochtene Winkelfaserung** ist eine Winkelfaserung über einer regulierten Basis mit einer ausgezeichneten Präverflechtung.

21.4.5.12. Ein Rückholquadrat nennen wir **voll kokartesisch**, wenn seine beiden Vertikalen kokartesisch sind. Eine Präverflechtung einer Winkelfaserung über einer regulierten Basis nennen wir eine **Verflechtung**, wenn jedes Verflechtungsquadrat mit kokartesischer rechter Vertikale voll kokartesisch ist, wenn also in

anderen Worten das Zurückholen kokartesische Vertikalen zu kokartesischen Vertikalen macht.

Beispiel 21.4.5.13 (**Verflechtung zu faserrückzugstabilem System**). Sei $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ eine Faserung und sei $\mathscr{B}^{¡} \subset \mathscr{B}$ ein multiplikatives System. Wir ergänzen als $\mathscr{B}^{\mathrm{e}}$ das kleinste multiplikative System, das nur aus den Identitäten besteht, und bilden zu $\mathscr{B} \supset \mathscr{B}^{¡} \supset \mathscr{B}^{\mathrm{e}}$ den nach 21.4.5.4 zugehörigen Kategorienwinkel mit seiner kartesischen Regulierung. Gegeben ein faserrückzugstabiles multiplikatives System $\mathscr{C}^{¡}$ über $\mathscr{B}^{¡}$ nach 21.4.4.1, das sogar eine Kofaserung ist, erhalten wir eine präverflochtene Winkelfaserung über der kartesisch regulierten Basis, indem wir alle kommutativen Rückholquadrate über erlaubten Basisquadraten als unsere Verflechtungsquadrate nehmen. Bilden zusätzlch die kokartesischen Morphismen unserer Kofaserung auch ein faserrückzugstabiles multiplikatives System, so ist diese Präverflechtung sogar eine Verflechtung. Dasselbe gilt, wenn wir für $\mathscr{B}^{\mathrm{e}} \subset \mathscr{B}^{¡}$ irgendein multiplikatives System nehmen, über dem alle $\mathscr{C}$-Morphismen bereits zu $\mathscr{C}^{¡}$ gehören.

21.4.5.14. Gegeben eine präverflochtene Winkelfaserung gibt es für jedes erlaubte Basisquadrat und jedes Objekt $\mathcal{F}$ in der Faser über der oberen rechten Ecke wie im Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dotted, "q"] \arrow[d, dashed, "g"'] & X \arrow[d, dashed, "f"] \\ Z \arrow[r, dotted, "p"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} q^\dagger\mathcal{F} \arrow[rr, dotted] \arrow[d, dashed] & & \mathcal{F} \arrow[d, dashed] \\ g_{¡}q^\dagger\mathcal{F} \arrow[dr] & & \\ & p^\dagger f_{¡}\mathcal{F} \arrow[r, dotted] & f_{¡}\mathcal{F} \end{tikzcd}$$

genau einen Morphismus $g_{¡}q^\dagger\mathcal{F} \to p^\dagger f_{¡}\mathcal{F}$ in der Faser über Z derart, daß das rechte Quadrat mit Transportmorphismen von Rückzug und Schreivorschub als allen anderen Morphismen ein Verflechtungsquadrat wird. Diese Morphismen bilden sogar in ihrer Gesamtheit eine Transformation

$$\mathrm{vf} : g_{¡}q^\dagger \Rightarrow p^\dagger f_{¡}$$

Wir nennen sie den **Flechtbasiswechsel** unserer präverflochtenen Winkelfaserung und notieren sie vf wie „Verflechtung“. Sind f, g beide Eigmorphismen, so stimmt der Flechtbasiswechsel nach der Charakterisierung von Verflechtungsquadraten durch Kommutativität mit dem Basiswechsel 19.6.3.11 der Faserung $\mathscr{C}^\dagger \to \mathscr{B}^\dagger$ überein. Sind p, q beide Eigmorphismen, so stimmt er aus demselben Grund mit dem Basiswechsel der Kofaserung $\mathscr{C}^! \to \mathscr{B}^!$ überein. In einer verflochtenen und nicht nur präverflochtenen Winkelfaserung sind per definitionem alle Flechtbasiswechsel Isomorphismen $\mathrm{vf} : g_{¡}q^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} p^\dagger f_{¡}$.

Beispiel 21.4.5.15 (**Abstrakter Basiswechsel als Präverflechtung**). In der Winkelfaserung zu einer Bifaserung $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ bilden die kommutativen Rückholquadrate von $\mathscr{C}$ eine Präverflechtung über der durch die kommutativen Quadrate regulierten Basis. Der Flechtbasiswechsel fällt hier mit dem abstrakten Basiswechsel zusammen.

Beispiel 21.4.5.16 (**Verflechtung für diskrete gekringte Räume**). Über dem Kategorienwinkel zu $\mathrm{Gekd} \supset \mathrm{Gekd} \supset \mathrm{Gekd}^{\mathrm{e}}$ der diskreten gekringten Räume mit topologisch eigentlichen Morphismen alias Abbildungen mit endlichen Fasern als das System $\mathrm{Gekd}^{\mathrm{e}}$ der Eigmorphismen und mit der kartesischen Regulierung bilden die kommutativen Rückholquadrate in der Winkelfaserung zu $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Gekd}} \supset \mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Gekd}} \supset \mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Gekd}^{\mathrm{e}}}$ nach 21.4.4.16 eine Verflechtung. Wir notieren diese verflochtene Winkelfaserung

$$\left(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Gekd}} \to \mathrm{Gekd} \supset \mathrm{Gekd} \leftarrow \mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Gekd}}, \mathrm{Gekd}^{\mathrm{e}}\right)$$

Beispiel 21.4.5.17 (**Verflechtung für topologische Räume**). Über dem Kategorienwinkel zu $\mathrm{Top} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{les}} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{es}}$ mit seiner kartesischen Regulierung bilden die kommutativen Rückholquadrate in der Winkelfaserung durch $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}} \supset \mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Top}^{\mathrm{les}}} \supset \mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Top}^{\mathrm{es}}}$ nach Übung 19.6.4.31 und les-Basiswechsel 21.4.1.16 eine Verflechtung. Wir notieren diese verflochtene Winkelfaserung

$$\left(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{les}} \leftarrow \mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}, \mathrm{Top}^{\mathrm{es}}\right)$$

21.4.5.18 (**Kommutativität durch Präverflechtung**). Gegeben eine präverflochtene Winkelfaserung sind die Verflechtungsquadrate über einem erlaubten Basisquadrat mit Eigmorphismen auf gegenüberliegenden horizontalen beziehungsweise vertikalen Kanten genau die kommutativen Rückholquadrate. In der Tat sind diese Quadrate nach Annahme Verflechtungsquadrate und die Forderung der eindeutigen Ergänzbarkeit zeigt dann, daß es über besagten erlaubten Basisquadraten nicht noch mehr Verflechtungsquadrate geben kann.

21.4.5.19 (**Funktorialität von Verflechtungsquadraten**). Gegeben eine präverflochtene Winkelfaserung läßt sich jeder Morphismus zwischen den rechten Vertikalen zweier Verflechtungsquadrate über einem vorgegebenen erlaubten Basisquadrat auf genau eine Weise zu einem Morphismus zwischen den beiden Ver-

flechtungsquadraten fortsetzen. Um das einzusehen, betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}' \arrow[rrr, dotted] \arrow[ddd, dashed] & & & \mathcal{F}' \arrow[ddd, dashed] \\
& \mathcal{E} \arrow[ul] \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed] & \mathcal{F} \arrow[ur] \arrow[d, dashed] & \\
& \mathcal{H} \arrow[r, dotted] \arrow[dl] & \mathcal{G} \arrow[dr] & \\
\mathcal{H}' \arrow[rrr, dotted] & & & \mathcal{G}'
\end{tikzcd}$$

Beide Quadrate sind Verflechtungsquadrate nach Annahme. Die durchgezogenen Pfeile stellen Morphismen über Identitäten der Basis dar. Das rechte $\mathcal{FG}$-Trapez ist kommutativ nach Annahme und stellt unseren Morphismus zwischen den rechten Vertikalen dar. Das obere $\mathcal{EF}$-Trapez wird durch genau einen Morphismus $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ kommutativ gemacht, da nach Annahme $\mathcal{E}' \to \mathcal{F}'$ kartesisch ist. Das untere $\mathcal{HG}$-Trapez wird durch genau einen Morphismus $\mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ kommutativ gemacht, da nach Annahme $\mathcal{H}' \to \mathcal{G}'$ kartesisch ist. Es bleibt zu zeigen, daß dann auch das rechte $\mathcal{EH}$-Trapez kommutiert. Nach der Charakterisierung von Verflechtungsquadraten durch Kommutativität 21.4.5.18 sind aber das obere $\mathcal{EF}$-Trapez und das untere $\mathcal{HG}$-Trapez beide Verflechtungsquadrate. Aufgrund der Verklebbarkeit von Verflechtungsquadraten sind dann auch das Teildiagramm mit den vertikalen Kanten $((\mathcal{EHH}'), (\mathcal{FGG}'))$ sowie das Teildiagramm mit den vertikalen Kanten $((\mathcal{EE}'\mathcal{H}'), (\mathcal{FF}'\mathcal{G}'))$ Verflechtungsquadrate. Aus der Gleichheit der rechten Vertikalen folgt dann mit der Eindeutigkeit der Ergänzung die Gleichheit der zurückgeholten Vertikalen und so die Kommutativität im rechten $\mathcal{EH}$-Trapez.

21.4.5.20 (**Transformation vom Vorschub zum Schreivorschub**). Gegeben sei eine präverflochtene Winkelfaserung $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ über dem Kategorienwinkel zu einem Tripel $\mathscr{B} \supset \mathscr{B}^{\mathsf{i}} \supset \mathscr{B}^{\mathsf{e}}$ wie in 21.4.5.4 mit seiner kartesischen Regulierung. Sei $f : X \to Y$ ein Schreimorphismus der Basis derart, daß das Faserprodukt $X \times_Y X$ existiert und die Diagonale $\Delta = \Delta_f : X \to X \times_Y X$ ein Eigmorphismus ist und die Projektionen $X \times_Y X \to X$ ihrerseits wieder Schreimorphismen. Dann erhalten wir mit

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y X \arrow[r, dotted, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, dashed, "\mathrm{pr}_2"'] & X \arrow[d, dashed, "f"] \\
X \arrow[r, dotted, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

als erlaubtem Basisquadrat und mit der Notation Id für den Identitätsfunktor eine Transformation $\mathrm{Id} \Rightarrow f^\dagger f_{\mathsf{i}}$ als die Komposition

$$\mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ \mathrm{Id} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{id}_{\mathsf{i}}\, \mathrm{id}^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{pr}_{2_{\mathsf{i}}}\, \Delta_{\mathsf{i}} \Delta^\dagger\, \mathrm{pr}_1^\dagger \Rightarrow \mathrm{pr}_{2_{\mathsf{i}}}\, \mathrm{pr}_1^\dagger \Rightarrow f^\dagger f_{\mathsf{i}}$$

mit der Adjunktion $(\Delta_{¡}, \Delta^{\dagger})$ für den Eigmorphismus Δ und Flechtbasiswechsel 21.4.5.14. Besitzt $f^{\dagger}$ einen Linksadjungierten $f_{\dagger}$, so erhalten wir auf diese Weise sogar eine Transformation $f_{\dagger} \Rightarrow f_{¡}$. Sie entspricht einer Transformation

$$f_! \Rightarrow f_*$$

von Funktoren der opponierten Fasern, mit denen wir es in den Anwendungen meist zu tun haben.

Übungen

Übung 21.4.5.21. Ist in 21.4.5.20 der Morphismus f bereits selbst ein Eigmorphismus, so ist unsere Komposition die Einheit der Adjunktion $(f_{¡}, f^{\dagger})$ und der induzierte Morphismus ist die Identität $f_{\dagger} = f_{¡}$ aus den Definitionen. Ich habe diese Übung noch nicht gemacht.

21.4.6 Trennrückzug-Schreivorschub-Formalismus

Definition 21.4.6.1. Unter einer **Trennaustauschsituation** verstehen wir eine Vorgabe von Daten

$$(\mathscr{G} \to \curlywedge\mathscr{T} \supset \mathscr{T}^{¡} \leftarrow \mathscr{G}^{¡}, \mathscr{T}^{\mathrm{e}}, i)$$

bestehend aus einer Kategorie $\mathscr{T}$, der **Basiskategorie** oder **Basis**; darin zwei ausgezeichneten multiplikativen Systemen $\mathscr{T}^{\mathrm{e}} \subset \mathscr{T}^{¡} \subset \mathscr{T}$, die beide alle Isomorphismen enthalten; einer Trennkategorie $\mathscr{G}$ und einer Trennfaserung $\mathscr{G} \to \curlywedge\mathscr{T}$ über der banalen Trennkategorie zu $\mathscr{T}$; einer Kofaserung $\mathscr{G}^{¡} \to \mathscr{T}^{¡}$; sowie einem Isomorphismus $i : \mathscr{G}^{¡}|\mathscr{T}^{\mathrm{e}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}|\mathscr{T}^{\mathrm{e}}$ von Kategorien über $\mathscr{T}^{\mathrm{e}}$.

21.4.6.2 (**Sprechweisen und Notationen**).

1. Unseren Isomorphismus i behandeln wir in der Notation meist als eine Gleichheit und reden dann vereinfachend von einer Trennaustauschsituation $(\mathscr{G} \to \curlywedge\mathscr{T} \supset \mathscr{T}^{¡} \leftarrow \mathscr{G}^{¡}, \mathscr{T}^{\mathrm{e}})$. Da alle Identitäten zu $\mathscr{T}^{\mathrm{e}}$ gehören, bedeutet das insbesondere, daß $\mathscr{G}$ und $\mathscr{G}^{¡}$ dieselben Objekte haben und sogar dieselben Fasern $\mathscr{G}_X = \mathscr{G}^{¡}_X$ über allen Objekten X der Basis.
2. Die Morphismen in $\mathscr{T}^{¡}$ und $\mathscr{G}^{¡}$ nennen wir **Schreimorphismen**.
3. Die Morphismen in $\mathscr{T}^{\mathrm{e}}$ nennen wir **Eigmorphismen**.
4. Den Trennrückzug längs einer Trennung p der Basis notieren wir $p^{\dagger}$.
5. Den Vorschub in Bezug auf die Kofaserung längs eines Schreimorphismus f notieren wir $f_{¡}$ und nennen ihn den **Schreivorschub**. Einen in Bezug auf die Kofaserung $\mathscr{G}^{¡} \to \mathscr{T}^{¡}$ kokartesischen Schreimorphismus nennen wir **schreikokartesisch**.

6. Gegeben ein Objekt $X \in \mathscr{T}$ der Basis vereinbaren wir für die zur Faser opponierte Schmelzkategorie, wie sie in 21.1.5.4 eingeführt wurde, die Notation $\mathscr{G}_{/X} := \mathscr{G}_X^{\mathrm{opp}}$. In typischen Anwendungen sind das Kategorien von Garben auf X. Die universellen Verschmelzungen in diesen Schmelzkategorien notieren wir $\otimes = \otimes_X$ wie in 21.1.5.4. Ihr Einsobjekt notieren wir $\underline{X}$.

7. Den Opponierten des Rückzugs in unserer Faserung $\mathscr{G} \to \mathscr{T}$ für einen Morphismus $f : X \to Y$ der Basis $\mathscr{T}$ notieren wir $f^* := (f^\dagger)^{\mathrm{opp}} : \mathscr{G}_{/Y} \to \mathscr{G}_{/X}$ und nennen auch ihn einen **Rückzug**.

8. Den Opponierten des Schreivorschubs längs eines Schreimorphismus $f : X \to Y$ der Basis notieren wir $f_! := (f_¡)^{\mathrm{opp}} : \mathscr{G}_{/X} \to \mathscr{G}_{/Y}$ und nennen ihn oft einen **Schreivorschub**.

9. Unsere Daten beinhalten für jeden Eigmorphismus $f \in \mathscr{T}^{\mathrm{e}}$ eine Adjunktion $(f_¡, f^\dagger)$ alias $(f^*, f_!)$.

21.4.6.3 (**Verflechtung von Trennaustauschsituationen**). Gegeben eine Trennaustauschsituation $(\mathscr{G} \to \curlywedge\mathscr{T} \supset \mathscr{T}^{¡} \leftarrow \mathscr{G}^{¡}, \mathscr{T}^{\mathrm{e}})$ betrachten wir in der Familienkategorie $\mathscr{T}^{\curlywedge} := (\curlywedge\mathscr{T})^{\curlywedge}$ der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathscr{T}$ die multiplikativen Systeme $\mathscr{T}^{\curlywedge} \supset \mathscr{T}^{\shortparallel\mathrm{e}} \subset \mathscr{T}^{\shortparallel¡}$ der Tupel von Einsmorphismen aus $\mathscr{T}^{¡}$ beziehungsweise $\mathscr{T}^{\mathrm{e}}$. In den Fasern nehmen wir die multiplikativen Systeme $\mathscr{G}^{\curlywedge} \supset \mathscr{G}^{\shortparallel¡}|\mathscr{T}^{\shortparallel\mathrm{e}} \subset \mathscr{G}^{\shortparallel¡}$. Die Winkelfaserung der zugehörigen Kategorienwinkel notieren wir

$$(\mathscr{G}^{\curlywedge} \to \mathscr{T}^{\curlywedge} \supset \mathscr{T}^{\shortparallel¡} \leftarrow \mathscr{G}^{\shortparallel¡}, \mathscr{T}^{\shortparallel\mathrm{e}})$$

und nennen sie die **Familienwinkelfaserung** unserer Trennaustauschsituation. Eine **Präverflechtung** beziehungsweise **Verflechtung** einer Trennaustauschsituation erklären wir als eine Präverflechtung beziehungsweise Verflechtung ihrer Familienwinkelfaserung in Bezug auf eine mit vorgegebene Regulierung der Basis derart, daß das Vertupeln Verflechtungsquadrate zu Verflechtungsquadraten macht. Ein Verflechtungsquadrat mit einer r-Trennung als zurückholendem Morphismus nennen wir in diesem Kontext ein r**-Verflechtungsquadrat**. Wenn nichts anderes gesagt wird, gehen wir in der Basis von der kartesischen Regulierung aus.

21.4.6.4 (**Verflechtung zu fasertrennrückzugstabilem System**). Seien $\mathscr{T}$ eine Kategorie und $\mathscr{T}^{¡}$ darin ein rückzugstabiles multiplikatives System. Gegeben eine Trennfaserung $\mathscr{G} \to \curlywedge\mathscr{T}$ über der banalen Trennkategorie zu $\mathscr{T}$ und ein fasertrennrückzustabiles multiplikatives System $\mathscr{G}^{¡}$ über $\mathscr{T}^{¡}$ nach 21.4.4.6 derart, daß $\mathscr{G}^{¡} \to \mathscr{T}^{¡}$ eine Kofaserung ist, konstruieren wir eine Trennaustauschsituation

$$(\mathscr{G} \to \curlywedge\mathscr{T} \supset \mathscr{T}^{¡} \leftarrow \mathscr{G}^{¡}, \mathscr{T}^{\mathrm{e}})$$

mit Präverflechtung durch alle kommutativen Rückholquadrate. Als $\mathscr{T}^{\mathrm{e}}$ können wir dabei jedes multiplikative Teilsystem von $\mathscr{T}^{\mathrm{i}}$ nehmen, über dem alle $\mathscr{G}^{\mathrm{i}}$-Morphismen bereits $\mathscr{G}$-Morphismen sind. Unsere Präverflechtung ist genau dann eine Verflechtung, wenn auch die schreikokartesischen Morphismen aus $\mathscr{G}^{\mathrm{i}}$ ein fasertrennrückzugstabiles multiplikatives System bilden.

Beispiel 21.4.6.5 (**Trennverflechtung für diskrete gekringte Räume**). Wir betrachten die Trennaustauschsituation

$$\left(\mathrm{Ab}_{/\!/\curlywedge\mathrm{Gekd}} \to \curlywedge\mathrm{Gekd} \supset \mathrm{Gekd} \leftarrow \mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Gekd}}, \mathrm{Gekd}^{\mathrm{e}}\right)$$

der Modulgarben auf gekringten diskreten Räumen. Die kommutativen Rückholquadrate bilden nach 21.4.4.16 und 21.4.6.4 eine Verflechtung in Bezug auf die kartesische Regulierung in der Basis.

Beispiel 21.4.6.6 (**Trennverflechtung für Vektorraumgarben**). Sei k ein Körper. Wir betrachten die Trennaustauschsituation

$$\left(k\text{-}\mathrm{Mod}_{/\!/\curlywedge\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{les}} \leftarrow k\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}, \mathrm{Top}^{\mathrm{es}}\right)$$

der Garben von k-Vektorräumen auf topologischen Räumen. Die kommutativen Rückholquadrate bilden nach 21.4.4.13 und 21.4.6.4 eine Verflechtung in Bezug auf die kartesische Regulierung in der Basis.

21.4.6.7. Wir sagen, eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung **habe Adjungierte**, wenn sowohl der Rückzug $f^\dagger$ längs jedes Morphismus $f : X \to Y$ der Basis als auch der Schreivorschub f_{i} längs jedes Schreimorphismus jeweils einen Rechtsadjungierten hat und wenn zusätzlich alle opponierten Fasern internes Hom $\Rrightarrow$ haben. Wir notieren die fraglichen Adjungierten $f_\dagger$ sowie f^{i} und haben die adjungierten Paare $(f_\dagger, f^\dagger)$ sowie $(f^{\mathrm{i}}, f_{\mathrm{i}})$. Wir notieren die von unseren Adjungierten auf den opponierten Fasern induzierten Funktoren f_* und $f^!$, nennen sie den **Vorschub** und den **Schreirückzug** und haben mithin die adjungierten Paare (f^*, f_*) und $(f_!, f^!)$. Eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten mag man einen „Sechs-Funktor-Formalismus" nennen. Die sechs Funktoren sind in diesem Kontext

$$f^*, f_*, f_!, f^!, \otimes, \Rrightarrow$$

Beispiel 21.4.6.8 (**Adjungierte für Modulgarben auf diskreten Räumen**). Die Modulgarben auf diskreten gekringten Räumen 21.4.6.5 sind eine verflochtene Trennaustauschsituation mit Adjungierten. Das interne Hom kennen wir bereits, es berechnet sich punktweise als $(M \Rrightarrow N) = (\mathrm{Hom}_{A_x}(M_x, N_x))_{x\in X}$. Der Vorschub f_* macht aus $M = (M_x)_{x\in X}$ das Produkt über die Fasern

$$(f_*M)_y = (\textstyle\prod_{f(x)=y} \mathrm{res}^{B_y}_{A_x} M_x)_{y\in Y}$$

im Unterschied zum Schreivorschub, bei dem hier das Koprodukt über die Fasern zu nehmen ist. Der Schreirückzug $f^!$ von N schließlich ist die Familie

$$f^! N = (\mathrm{ind}_{B_{f(x)}}^{A_x} N_{f(x)})_{x \in X}$$

Mit $\mathrm{ind}_B^A = \mathrm{Hom}_B(A, \ )$ notieren wir dabei den Rechtsadjungierten des Restriktionsfunktors auf Moduln, die **Induktion**. Der Linksadjungierte der Restriktion ist in unserer Notation die übliche Erweiterung der Skalare $\mathrm{prod}_B^A = A \otimes_B$, die wir auch die **Produktion** nennen und die wir beim gewöhnlichen Rückzug verwenden müssen.

21.4.7 Formelsammlung für verflochtenen Trennaustausch

21.4.7.1. Im folgenden will ich einige Transformationen und Isomorphismen diskutieren, die direkt aus den Axiomen einer Trennaustauschsituation 21.4.6.1 mit Verflechtung 21.4.6.3 abgeleitet werden können. Die Argumente übertragen sich auf den Fall allgemeinerer Regulierungen, aber dabei wird es schwerfälliger in der Formulierung. Wir notieren unsere Trennaustauschsituation

$$(\mathscr{G} \to \curlywedge \mathscr{T} \supset \mathscr{T}^{\mathrm{i}} \leftarrow \mathscr{G}^{\mathrm{i}}, \mathscr{T}^{\mathrm{e}})$$

21.4.7.2 (**Vertauschen von externem Produkt und Schreivorschub**). Gegeben eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Schreimorphismen $f : W \to X$ sowie $g : Z \to Y$ in der Basis und Objekte $\mathcal{F} \in \mathscr{G}_W$ sowie $\mathcal{G} \in \mathscr{G}_Z$ der Fasern liefert Flechtbasiswechsel 21.4.5.14 im kartesischen Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \times Z \arrow[r] \arrow[d, "f \times g"'] & W \curlywedge Z \arrow[d, "f \curlywedge g"] \\ X \times Y \arrow[r] & X \curlywedge Y \end{tikzcd}$$

der Familienkategorie $\mathscr{T}^{\curlywedge}$, wenn die Produkte in der linken Vertikale existieren, einen Isomorphismus $(f \times g)_{\mathrm{i}}(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f_{\mathrm{i}}\mathcal{F} \boxtimes g_{\mathrm{i}}\mathcal{G}$ alias

$$\mathrm{vf} : f_!\mathcal{F} \boxtimes g_!\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (f \times g)_!(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})$$

Hier deutet die Notation an, daß unser Morphismus von einer Verflechtung herkommt. Daß unser Quadrat in $\mathscr{T}^{\curlywedge}$ kartesisch ist, überlegen wir uns eben auch noch. Ein Morphismus in der Familienkategorie in eine Einsfamilie wie etwa $X \times Y$ muß von einer Einsfamilie ausgehen. Haben wir nun ein Objekt T und Morphismen $w : T \to W$, $z : T \to Z$ und $u : T \to X \times Y$ mit $fw = \mathrm{pr}_X u$ und $gz = \mathrm{pr}_Y u$, so gibt es genau einen Morphismus $v : T \to A \times B$ mit $w = \mathrm{pr}_W v$ und $z = \mathrm{pr}_Z v$ und $u = (f \times g)v$, nämlich den Morphismus $v = (w, z)$.

Beispiel 21.4.7.3. Gegeben eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Schreimorphismen $f : A \to X$ sowie $g : B \to Y$ und $h : C \to Z$ in der Basis und Objekte $\mathcal{F} \in \mathscr{G}_A$ sowie $\mathcal{G} \in \mathscr{G}_B$ und $\mathcal{H} \in \mathscr{G}_C$ der Fasern liefern die Morphismen von eben zusammen mit einigen Assoziatoren die Kanten des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
 & (f \times g)_!(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \boxtimes h_!\mathcal{H} \arrow[dr, "\sim"] & \\
((f \times g) \times h)_!((\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \boxtimes \mathcal{H}) \arrow[ur, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & & (f_!\mathcal{F} \boxtimes g_!\mathcal{G}) \boxtimes h_!\mathcal{H} \arrow[d, "\wr"] \\
(f \times (g \times h))_!(\mathcal{F} \boxtimes (\mathcal{G} \boxtimes \mathcal{H})) \arrow[dr, "\sim"] & & f_!\mathcal{F} \boxtimes (g_!\mathcal{G} \boxtimes h_!\mathcal{H}) \\
 & f_!\mathcal{F} \boxtimes (g \times h)_!(\mathcal{G} \boxtimes \mathcal{H}) \arrow[ur, "\sim"] &
\end{tikzcd}$$

Ich will erklären, wie aus dem Formalismus einer Trennaustauschsituation mit Verflechtung folgt, daß es kommutiert. Dazu gehen wir aus von einem kommutativen Diagramm in der Familienkategorie der Basis der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
A \times B \times C \arrow[r, "\sim", "d"'] \arrow[d] & (A \times B) \times C \arrow[r] \arrow[d] & (A \times B) \curlywedge C \arrow[r] \arrow[d] & A \curlywedge B \curlywedge C \arrow[d] \\
X \times Y \times Z \arrow[r, "\sim", "d"'] & (X \times Y) \times Z \arrow[r] & (X \times Y) \curlywedge Z \arrow[r] & X \curlywedge Y \curlywedge Z
\end{tikzcd}$$

Es besteht nach Annahme aus drei kartesischen Basisquadraten der Familienkategorie. Da Verflechtungsquadrate per definitionem verkleben, paßt die obere Horizontale in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
d^\dagger((f \times g) \times h)_!((\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \boxtimes \mathcal{H}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & d^\dagger((f \times g)_!(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \boxtimes h_!\mathcal{H}) \arrow[r, "\sim"] & d^\dagger((f_!\mathcal{F} \boxtimes g_!\mathcal{G}) \boxtimes h_!\mathcal{H}) \arrow[d, "\wr"] \\
(f \times g \times h)_!(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} \boxtimes \mathcal{H}) \arrow[rr, "\sim"] & & f_!\mathcal{F} \boxtimes g_!\mathcal{G} \boxtimes h_!\mathcal{H}
\end{tikzcd}$$

Hier bedeutet die untere Horizontale den Basiswechsel des einhüllenden Rechtecks und die oberen Horizontalen die beiden Flechtbasiswechsel der beiden Teilquadrate. Die rechte Vertikale ist eine Identifikation für Trennrückzüge, die linke Vertikale ein Verflechtungsisomorphismus $d^\dagger((f \times g) \times h)_! \overset{\sim}{\Rightarrow} (f \times g \times h)_! d^\dagger$ zusammen mit der Identifikation $d^\dagger((\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \boxtimes \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} \boxtimes \mathcal{H}$. Dies Diagramm gilt es noch um eine entsprechende untere Hälfte zu ergänzen und so folgt dann die Behauptung.

21.4.7.4 (**Schreivorschub unter Schreimonomorphismus**). Einen Schreimorphismus der Basis, der außerdem ein Monomorphismus ist, nennen wir einen

Schreimonomorphismus. Gegeben eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung und ein Schreimonomorphismus $i : A \to X$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & A \arrow[d, "i"] \\ A \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

der Familienkategorie $\mathscr{T}^{\curlywedge}$ kartesisch und Flechtbasiswechsel liefert für alle $\mathcal{F} \in \mathscr{G}_X$ einen Isomorphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} i^\dagger i_¡ \mathcal{F}$ alias

$$i^* i_! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$$

Gegeben Trennaustauschsituation mit Verflechtung und ein Schreimonomorphismus $i : A \to X$ ist auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "(\mathrm{id},\mathrm{id})"] \arrow[d, "i"'] & A \curlywedge A \arrow[d, "i \curlywedge i"] \\ X \arrow[r, "(\mathrm{id},\mathrm{id})"] & X \curlywedge X \end{tikzcd}$$

der Familienkategorie $\mathscr{T}^{\curlywedge}$ kartesisch und für Objekte $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathscr{G}_A$ liefert Flechtbasiswechsel in diesem kartesischen Diagramm einen ausgezeichneten Isomorphismus $i_¡(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} i_¡\mathcal{E} \otimes i_¡\mathcal{F}$ alias

$$i_!\mathcal{E} \otimes i_!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} i_!(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$$

Beispiel 21.4.7.5. Gegeben einpunktige gekringte Mengen ist jeder Morphismus ein Monomorphismus, der zu einem surjektiven Kringhomomorphismus $B \twoheadrightarrow A$ gehört oder zu einem Kringhomomorphismus $B \to A$, der eine Lokalisierung ist. In beiden Fällen finden wir Isomorphismen $A \otimes_B (\mathrm{res}^B_A M) \xrightarrow{\sim} M$ und $(\mathrm{res}^B_A M) \otimes_B (\mathrm{res}^B_A N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{res}^B_A(M \otimes_A N)$.

21.4.7.6. Gegeben eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung, ein Schreimorphismus $f : X \to Y$ der Basis und Objekte $\mathcal{F} \in \mathscr{G}_X, \mathcal{G} \in \mathscr{G}_Y$ der Fasern liefert Flechtbasiswechsel im kartesischen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(\mathrm{id},f)"] \arrow[d, "f"'] & X \curlywedge Y \arrow[d, "f \curlywedge \mathrm{id}"] \\ Y \arrow[r, "(\mathrm{id},\mathrm{id})"] & Y \curlywedge Y \end{tikzcd}$$

der Familienkategorie $\mathscr{T}^{\curlywedge}$ einen Isomorphismus $f_¡(\mathcal{F} \otimes f^\dagger \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} (f_¡\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G}$ alias den Isomorphismus der **Projektionsformel**

$$\mathrm{vf} : (f_!\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_!(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G})$$

21.4.7.7. Nun gehen wir aus von einer Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten. Sei $f : X \to Y$ ein Schreimorphismus der Basis. Wenden wir den Isomorphismus $\mathrm{vf} : (f_!\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_!(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G})$ der Projektionsformel 21.4.7.6 auf $\mathcal{G} := f_*\mathcal{E}$ an und verwenden zusätzlich die Koeinheit der Adjunktion $f^*f_*\mathcal{E} \to \mathcal{E}$, so erhalten wir in $\mathscr{G}_{/Y}$ einen ausgezeichneten Morphismus

$$\mathrm{avf} : f_!\mathcal{F} \otimes f_*\mathcal{E} \to f_!(\mathcal{F} \otimes \mathcal{E})$$

Mit avf bezeichnen wir hier und im folgenden Morphismen, die aus Adjunktionen, Verflechtungen und Identifikationen entstehen, also aus dem vollen Fundus einer Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten.

21.4.7.8 (**Restriktion von Hom-Garben und relative Verdierdualität**). Sei bei einer Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten ein Schreimorphismus der Basis $f : X \to Y$ gegeben. Die Projektionsformel 21.4.7.6 liefert uns für $\mathcal{G} \in \mathscr{G}_{/Y}$ und $\mathcal{F} \in \mathscr{G}_{/X}$ einen Isomorphismus $f_!(f^*\mathcal{G} \otimes \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} \otimes f_!\mathcal{F}$. Für festes $\mathcal{G}$ ist das eine Isotransformation von Funktoren in $\mathcal{F}$, genauer von Funktoren $\mathscr{G}_{/X} \to \mathscr{G}_{/Y}$. Diese Funktoren sind ihrerseits Kompositionen weiterer Funktoren. Alle diese Funktoren haben unter unseren Annahmen Rechtsadjungierte und wir erhalten durch Übergang zu den Rechtsadjungierten in $\mathscr{G}_{/X}$ Isomorphismen

$$(f^*\mathcal{G} \Rightarrow f^!\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} f^!(\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{E})$$

Ebenso kann die Projektionsformel für festes $\mathcal{F}$ als eine Isotransformation von Kompositionen von Funktoren $\mathscr{G}_{/Y} \to \mathscr{G}_{/Y}$ in $\mathcal{G}$ gelesen werden. Aud dann erhalten wir durch Übergang zu den Rechtsadjungierten natürliche Isomorphismen, die Isomorphismen der **relativen Verdierdualität**

$$f_*(\mathcal{F} \Rightarrow f^!\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} f_!\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{E}$$

21.4.7.9. Zum Vergleich wiederhole ich auch noch aus 21.1.5.9 die natürlichen Isomorphismen

$$(\mathcal{F} \Rightarrow f_*\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} f_*(f^*\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{F})$$

21.4.7.10. Gegeben eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten, ein Schreimorphismus $f : X \to Y$ und Objekte $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathscr{G}_{/Y}$ erhalten wir einen natürlichen Morphismus

$$f^!\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G} \to f^!(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$$

aus der Komposition $f_!(f^!\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f_!f^!\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ des von der Projektionsformel herrührenden Morphismus mit der Koeinheit der Adjunktion.

21.4.7.11 (**Verdierdualität**). Wir nehmen nun an, daß wir eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten haben über einer Basis $\mathscr{T}$ mit einem finalen Objekt pt. Ein Objekt $X \in \mathscr{T}$ derart, daß der einzige Morphismus $\mathrm{fin}_X : X \to \mathrm{pt}$ ein Schreimorphismus ist, nennen wir dann ein **Schreiobjekt** von $\mathscr{T}$. Gegeben ein Schreiobjekt X setzen wir

$$\omega_X := \mathrm{fin}_X^! \, \underline{\mathrm{pt}}$$

und nennen ω_X das **dualisierende Objekt** von $\mathscr{G}_{/X}$ und erklären die **Verdier-Dualität** durch

$$\mathbb{D}_X \mathcal{F} := (\mathcal{F} \Rrightarrow \omega_X)$$

Für jeden Schreimorphismus $f : X \to Y$ von Schreiobjekten erhalten wir natürliche Isomorphismen

$$f^! \omega_Y \xrightarrow{\sim} f^! \, \mathrm{fin}_Y^! \, \underline{\mathrm{pt}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{fin}_X^! \, \underline{\mathrm{pt}} \xrightarrow{\sim} \omega_X$$

Die Isomorphismen aus 21.4.7.8 spezialisieren, wenn wir $\mathcal{E} = \omega_Y$ einsetzen, zu natürlichen Isomorphismen

$$f_* \mathbb{D}_X \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_Y f_! \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \mathbb{D}_X f^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f^! \mathbb{D}_Y \mathcal{G}.$$

Die Koeinheit der Adjunktion $f^* f_* \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ liefert weiter unter Dualisieren den ersten Morphismus von $\mathbb{D}_X \mathcal{F} \to \mathbb{D}_X f^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f^! \mathbb{D}_Y f_* \mathcal{F}$ und dann mit Adjunktion einen natürlichen Morphismus

$$f_! \mathbb{D}_X \mathcal{F} \to \mathbb{D}_Y f_* \mathcal{F}$$

Die Koeinheit der Adjunktion $f_! f^! \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ liefert ähnlich $\mathbb{D}_Y \mathcal{G} \to \mathbb{D}_Y f_! f^! \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_* \mathbb{D}_X f^! \mathcal{G}$ und dann mit Adjunktion einen natürlichen Morphismus

$$f^* \mathbb{D}_Y \mathcal{G} \to \mathbb{D}_X f^! \mathcal{G}$$

21.4.7.12. Gegeben eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten und ein kartesisches Diagramm $fp = qg$ der Basis mit f, g Schreimorphismen liefert der Basiswechsel $q^* f_! \overset{\sim}{\Rrightarrow} g_! p^*$ durch Übergang zu den Linksadjungierten eine Isotransformation

$$f^! q_* \overset{\sim}{\Rrightarrow} p_* g^!$$

Schreiben wir p^* davor und q^* dahinter, so erhalten wir mit der Einheit $\mathrm{id} \Rrightarrow q_* q^*$ der Adjunktion und der Koeinheit $p^* p_* \Rrightarrow \mathrm{id}$ der Adjunktion eine Transformation

$$p^* f^! \Rrightarrow g^! q^*$$

Übungen

Übung 21.4.7.13. Ich habe diese Übung noch nicht gemacht. Man zeige: Die in 21.4.5.20 beschriebene Transformation $f_! \Rightarrow f_*$ bildet zusammen mit dem Isomorphismus der Projektionsformel 21.4.7.6 und 21.1.5.17 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (f_!\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} & \tilde{\to} & f_!(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (f_*\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} & \to & f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G}) \end{array}$$

Übung 21.4.7.14. Gegeben Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten und ein Schreimorphismus $f : X \to Y$ zu einem Schreiobjekt Y der Basis sowie ein Objekt $\mathcal{G} \in \mathscr{G}_{/Y}$ in der Faser über Y ist die Verknüpfung

$$f_!f^!\mathbb{D}\mathcal{G} \tilde{\to} f_!\mathbb{D}f^*\mathcal{G} \to \mathbb{D}f_*f^*\mathcal{G} \to \mathbb{D}\mathcal{G}$$

von natürlichen Morphismen aus 21.4.7.8 und der dualisierten Einheit der Adjunktion (f^*, f_*) auf $\mathcal{G}$ die Koeinheit der Adjunktion $(f_!, f^!)$ auf $\mathbb{D}\mathcal{G}$.

Übung 21.4.7.15. Gegeben eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten und ein Schreimorphismus $f : X \to Y$ der Basis macht die vom Morphismus $\mathrm{avf} : f_!\mathcal{F} \otimes f_*\underline{X} \to f_!(\mathcal{F} \otimes \underline{X})$ aus 21.4.7.7 induzierte Zweiverschmelzung $f_!\mathcal{F} \curlyvee f_*\underline{X} \to f_!\mathcal{F}$ unser Objekt $f_!\mathcal{F}$ zu einem Modul über dem Monoid $f_*\underline{X}$ für die nach 21.1.5.17 von der Monoidstruktur auf $\underline{X}$ herkommenden Monoidstruktur. Erfüllt f die Bedingungen aus 21.4.5.20, so ist der Morphismus $f_!\mathcal{F} \to f_*\mathcal{F}$ zusätzlich ein Homomorphismus von $f_*\underline{X}$-Moduln. Ich habe diese Übung noch nicht gemacht.

Beispiel 21.4.7.16. Ist $f : (X, A) \to (\mathrm{pt}, A)$ der offensichtliche Morphismus von einer endlichen konstant gekringten Menge (X, A) auf die einpunktige gekringte Menge (pt, A), so fallen $f_!$ und f_* zusammen und unser Morphismus spezialisiert zur „Projektion auf die Diagonale“

$$(\textstyle\bigoplus_{x\in X} M_x) \otimes_A (\bigoplus_{y\in X} N_y) \tilde{\to} \bigoplus_{x,y\in X}(M_x \otimes_A N_y) \twoheadrightarrow \bigoplus_{x\in X}(M_x \otimes_A N_x)$$

21.4.7.17. Ist speziell Y lesb und $f : X \to Y$ lesb, so gilt dasselbe für X und wir erhalten Isomorphismen

$$f^!\omega_Y \tilde{\to} f^! \operatorname{fin}^!_Y \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \tilde{\to} \operatorname{fin}^!_X \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \tilde{\to} \omega_X$$

und mit $\mathcal{E} = \omega_Y$ schließlich Isomorphismen

$$f_*\mathbb{D}_X\mathcal{F} \tilde{\to} \mathbb{D}_Y f_!\mathcal{F} \quad \text{und} \quad \mathbb{D}_X f^*\mathcal{G} \tilde{\to} f^!\mathbb{D}_Y\mathcal{G}.$$

21.5 Derivierter Trennrückzug und Schreivorschub

21.5.1 Motivation

Im folgenden konstruieren wir Trennaustauschsituationen mit Verflechtung und Adjungierten von Modulgarben auf nicht notwendig diskreten Räumen, indem wir von der präverflochtenen Trennaustauschsituation der Modulgarben auf gekringten Räumen

$$(\mathrm{Ab}_{/\!/\curlywedge\mathrm{Gek}} \to \curlywedge\mathrm{Gek} \supset \mathrm{Gek} \leftarrow \mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Gek}}, \mathrm{Gek}^{\mathrm{e}})$$

ausgehen, die aus Übung 21.4.4.19 mit 21.4.6.4 entsteht, sie geeignet einschränken und zu derivierten Kategorien übergehen. In dieser Situation liefert die flache Projektionsformel eine allgemeingültige Projektionsformel, da wir Trennrückzug mit flachen Auflösungen berechnen, und der Schreivorschub besitzt einen Adjungierten, dessen Beschreibung im Fall der konstanten Abbildung einer Mannigfaltigkeit auf den einpunktigen Raum einen Zugang zur Poincarédualität eröffnet.

21.5.2 Derivierter Schreivorschub

21.5.2.1. Ich erinnere an unsere Notation $\mathrm{Ab}_{/\!/X} := \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}_{/X}$. Wir beginnen mit der Konstruktion eines Funktors

$$\mathrm{Hot}\left(\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}}\right) \to \mathrm{Top}$$

Als Objekte der Ausgangskategorie nehmen wir alle Komplexe von abelschen Garben auf unseren topologischen Räumen. Als Morphismen der Ausgangskategorie über einer Abbildung f nehmen wir Homotopieklassen von Kettenabbildungen aus Schreimorphismen über f.

21.5.2.2. Beschränken wir uns in der Basis auf die Kategorie $\mathrm{Top}^{\mathrm{s}}$ aller topologischen Räume mit nur separierten Abbildungen als Morphismen, so erhalten wir einen Kofaserfunktor

$$\mathrm{Hot}\left(\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{s}}}\right) \to \mathrm{Top}^{\mathrm{s}}$$

mit dem komponentenweisen Schreivorschub $f_{¡}$ eines Komplexes als Vorschub, wie man unschwer aus der analogen Aussage 19.6.4.9 für abelsche Garben folgert. Wir nennen diesen Kofaserfunktor die **Schreikofaserung der Homotopiekomplexe**.

21.5.2.3. Wir erinnern feiner die Kategorie $\mathrm{Top}^{\mathrm{les}}$ der topologischen Räume mit lokal eigentlichen separierten alias les-Abbildungen als Morphismen.

Satz 21.5.2.4 (Halbseitig derivierte Schreikofaserung). *1. Durch Lokalisierung nach Quasiisomorphismen über Identitäten erhalten wir aus unserer entsprechend eingeschränkten Schreikofaserung der Homotopiekomplexe eine Kofaserung*

$$\mathrm{Der}^{-\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{les}}} := \mathrm{Hot}^{-}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{les}}})_{\mathrm{qis}} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{les}}$$

2. *Für jeden topologischen Raum X ist der natürliche Funktor ein Isomorphismus $e_X : \mathrm{Der}^{-}(\mathrm{Ab}_{/\!/X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}^{-\mathrm{i}}_{/\!/X}$ von der Lokalisierung der Faser zur Faser der Lokalisierung;*

3. *Jeder für $\mathrm{Hot}^{-}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}) \to \mathrm{Top}^{\mathrm{les}}$ kokartesische Morphismus, der von einem Komplex faserweise kompaktweicher abelscher Garben ausgeht, bleibt kokartesisch in der Lokalisierung;*

4. *Gegeben eine les-Abbildung $f : X \to Y$ existiert eine Isotransformation zwischen den beiden Kompositionen des Diagramms*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Der}^{-}(\mathrm{Ab}_{/\!/X}) \arrow[r, "(\mathrm{R}f_!)^{\mathrm{opp}}"] \arrow[d, "e_Y"', "\wr"] & \mathrm{Der}^{-}(\mathrm{Ab}_{/\!/Y}) \arrow[d, "e_X"', "\wr"] \arrow[dl, Rightarrow, "\sim"'] \\
\mathrm{Der}^{-\mathrm{i}}_{/\!/X} \arrow[r, "f_\ddagger"] & \mathrm{Der}^{-\mathrm{i}}_{/\!/Y}
\end{tikzcd}$$

mit dem Opponierten Derivierten des gewöhnlichen Schreivorschubs und dem Vorschub $f_\ddagger$ in der derivierten Schreikofaserung in den Horizontalen.

21.5.2.5. Insbesondere sind die Vorschübe $f_\ddagger$ der derivierten Schreikofaserung triangulierte Funktoren für die durch die Isomorphismen e_X auf den Fasern gegebenen Strukturen als triangulierte Kategorie. Wir werden bald die Notation ändern und f_{i} statt $f_\ddagger$ schreiben, aber bisher bezeichnet f_{i} noch den underivierten Schreivorschub.

21.5.2.6. Die Beschränkung auf halbseitig beschränkte derivierte Kategorien brauchen wir für den Nachweis, daß wir einen Kofaserfunktor vor uns haben. Man kann zwar $f_!$ durchaus ohne weitere Annahmen und unbeschränkt mit Quisrechtsentfaltungen derivieren, aber dann ist nicht klar, warum die Verknüpfung der Derivierten der Derivierte der Verknüpfung sein sollte. Ich erwarte insgeheim, daß das gar nicht stimmt. Im Anschluß zeigen wir, wie man mit unbeschränkten derivierten Kategorien arbeiten kann, wenn man sich auf „lesb-Abbildungen“ beschränkt.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen folgen direkt aus Korollar 21.2.5.11, sobald wir die Existenz einer Linksanpassung nachweisen. Dazu führen wir in 21.5.2.9

„schwach kompaktweiche Garben“ ein und zeigen in 21.5.2.12, daß die entsprechend halbseitig beschränkten Komplexe aus schwach kompaktweichen Garben eine solche Linksanpassung bilden. Die dritte Aussage folgt en passant mit Korollar 21.2.5.12 aus Lemma 21.5.2.7, nach dem gegeben eine les-Abbildung $f : X \to Y$ jede f-kompaktweiche abelsche Garbe $f_!$-rechtsazyklisch ist, so daß nach 20.3.4.13 jeder gegen die Pfeile beschränkte Komplex von f-kompaktweichen abelschen Garben bereits $f_!$-quisrechtsentfaltet alias nach Übergang zu den opponierten Kategorien $f_¡$-quislinksentfaltet ist. Die vierte Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz. □

Lemma 21.5.2.7. *Gegeben eine les-Abbildung f ist jede f-kompaktweiche abelsche Garbe $f_!$-rechtsazyklisch.*

Beweis. Seien $f : X \to Y$ unsere les-Abbildung und $\mathcal{F}$ unsere faserweise kompaktweiche Garbe und $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\lhd$ eine injektive Auflösung. Es gilt zu zeigen, daß $f_!\mathcal{F} \hookrightarrow f_!\mathcal{I}^\lhd$ ein exakter Komplex von Garben auf Y ist. Dafür müssen wir nur die Exaktheit auf den Halmen an allen Punkten $y \in Y$ prüfen. Mit les-Basiswechsel 21.4.1.16 reicht es dazu hinwiederum, für $i = i_y$ die Inklusion der Faser $f^{-1}(y)$ die Exaktheit von $\Gamma_!(i^*\mathcal{F}) \hookrightarrow \Gamma_!(i^*\mathcal{I}^\lhd)$ zu prüfen. Das folgt jedoch formal mit 19.4.8.12 oder auch explizit mit 19.4.8.13, da $i^*\mathcal{F} \hookrightarrow i^*\mathcal{I}^\lhd$ nach 21.5.2.10 eine exakte Sequenz kompaktweicher Garben auf $f^{-1}(y)$ ist. □

Lemma 21.5.2.8. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung von lokal kompakten Hausdorffräumen. Ist $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ kompaktweich, so ist auch $f_!\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ kompaktweich.*

Beweis. Für $K \subset Y$ kompakt ist $f^{-1}(K) \subset X$ abgeschlossen. Nach 19.4.8.14 induziert also das Einschränken eine Surjektion auf den Schnitten mit kompaktem Träger $\Gamma_!(X;\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \Gamma_!(f^{-1}(K);\mathcal{F})$. Die linke Seite können wir nach 19.6.4.9 identifizieren mit $\Gamma_!(Y; f_!\mathcal{F})$. Die rechte Seite können wir ebenfalls mit 19.6.4.9 und Basiswechsel 21.4.1.16 im Diagramm

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(K) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d, "f"] \\ K \arrow[r, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

umschreiben zu

$$\Gamma_!(f^{-1}(K);\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma_! g_! j^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \Gamma_! i^* f_!\mathcal{F} = \Gamma_!(K; f_!\mathcal{F})$$

Die von unserer Surjektion $\Gamma_!(X;\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \Gamma_!(f^{-1}(K);\mathcal{F})$ unter diesen Identifikationen induzierte Abbildung $\Gamma_!(Y; f_!\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \Gamma_!(K; f_!\mathcal{F})$ ist nun genau die Restriktion von Schnitten. Folglich ist auch diese surjektiv. □

Definition 21.5.2.9. Eine abelsche Garbe auf einem topologischen Raum, deren Einschränkung auf jeden relativ Hausdorff'schen lokal kompakten Teilraum kompaktweich ist, nennen wir **schwach kompaktweich**.

21.5.2.10. Jede injektive Garbe ist welk, jede welke Garbe kompaktweich nach 19.4.8.11, jede kompaktweiche Garbe schwach kompaktweich und jede schwach kompaktweiche Garbe faserweise kompaktweich in Bezug auf eine beliebige les-Abbildung. Jeder filtrierende Kolimes von schwach kompaktweichen Garben ist wieder schwach kompaktweich, da das nach 21.4.2.6 auf lokal kompakten Hausdorffräumen gilt und da die Einschränkung von Garben mit Kolimites vertauscht.

Lemma 21.5.2.11. *Der Schreivorschub einer schwach kompaktweichen abelschen Garbe unter einer beliebigen les-Abbildung ist wieder schwach kompaktweich.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ unsere Abbildung und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ unsere schwach kompaktweiche abelsche Garbe. Gegeben ein relativ Hausdorff'scher lokal kompakter Teilraum $L \subset Y$ bilden wir das kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(L) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d, "f"] \\ L \arrow[r, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

Es gilt zu zeigen, daß $i^* f_! \mathcal{F}$ kompaktweich ist. Nach les-Basiswechsel 21.4.1.16 können wir gleichbedeutend zeigen, daß $g_! j^* \mathcal{F}$ kompaktweich ist. Nach Übung 15.2.4.26 ist j auch die Einbettung eines relativ Hausdorff'schen Teilraums. Nach 21.4.1.11 ist auch g eine les-Abbildung und nach 21.4.1.20 auch die Verknüpfung von g mit der konstanten Abbildung auf den einpunktigen Raum. Nach 21.4.1.4 ist dann auch $f^{-1}(L)$ lokal kompakt. Da wir $\mathcal{F}$ schwach kompaktweich vorausgesetzt hatten, ist also $j^* \mathcal{F}$ kompaktweich, und dann muß nach 21.5.2.8 auch $g_! j^* \mathcal{F}$ kompaktweich sein. □

Lemma 21.5.2.12. *Die entsprechend beschränkten Komplexe von schwach kompaktweichen Garben bilden eine Linksanpassung in Bezug auf das faserweise Linksoresystem der Quasiisomorphismen für unsere auf les-Abbildungen in der Basis eingeschränkte Schreikofaserung der Homotopiekomplexe*

$$\mathrm{Hot}^-(\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}) \to \mathrm{Top}^{\mathrm{les}}$$

Beweis. Die Gesamtheit aller Komplexe schwach kompaktweicher Garben ist stabil unter Schreivorschub längs les-Abbildungen nach 21.5.2.11 und ebenso opponiert stabil unter Schreivorschub längs les-Abbildungen. Die Gesamtheit aller entsprechend beschränkten Komplexe schwach kompaktweicher Garben bildet folglich eine Unterkofaserung. Weiter sind alle injektiven Garben schwach

kompaktweich nach 21.5.2.10, so daß jeder gegen die Differentiale beschränkte Komplex von abelschen Garben einen Quasiisomorphismus zu einem gegen die Differentiale beschränkten Komplex von schwach kompaktweichen Garben besitzt. Entsprechendes folgt in den opponierten Kategorien. Schließlich ist jede schwach kompaktweiche abelsche Garbe auf einem Raum X auch f-kompaktweich für jede les-Abbildung $f : X \to Y$ und damit $f_!$-rechtsazyklisch nach 21.5.2.7. Nach 20.3.4.13 sind die entsprechend beschränkten Komplexe schwach kompaktweicher abelscher Garben folglich auch $f_!$-quisrechtsentfaltet und opponiert $f_¡$-quislinksentfaltet und bilden damit in der Tat eine Linksanpassung wie behauptet. □

21.5.2.13. Wir nennen eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ eine **lesb-Abbildung** oder kurz **lesb**, wenn sie eine les-Abbildung ist und der Schreivorschub $f_! : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/Y}$ endliche homologische Dimension hat. Nach 21.5.2.4 gilt für entsprechend halbseitig beschränkte Komplexe $\mathcal{F}$ und verknüpfbare les-Abbildungen stets

$$\mathrm{R}g_!(\mathrm{R}f_!\mathcal{F}) \cong \mathrm{R}(g \circ f)_!\mathcal{F}$$

Mit den Erkenntnissen zum Derivieren homologisch beschränkter Funktoren 20.3.6.4 sehen wir so, daß jede Verknüpfung von lesb-Abbildungen wieder lesb ist. Die Kategorie der topologischen Räume mit lesb-Abbildungen als Morphismen notieren wir $\mathrm{Top}^{\mathrm{lesb}}$.

Satz 21.5.2.14 (**Unbeschränkt derivierte Schreikofaserung**). *1. Durch Lokalisierung nach Quasiisomorphismen über Identitäten erhalten wir aus unserer entsprechend eingeschränkten Schreikofaserung der Homotopiekomplexe eine Kofaserung*

$$\mathrm{Der}^{\mathsf{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{lesb}}} := \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}^{\mathsf{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{lesb}}})_{\mathrm{qis}} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{lesb}}$$

2. *Für jeden topologischen Raum X ist der natürliche Funktor ein Isomorphismus $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}^{\mathsf{i}}_{/\!/X}$ von der Lokalisierung der Faser zur Faser der Lokalisierung;*

3. *Jeder für $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}^{\mathsf{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{lesb}}}) \to \mathrm{Top}^{\mathrm{lesb}}$ kokartesische Morphismus, der von einem Komplex von faserweise kompaktweichen abelschen Garben ausgeht, bleibt kokartesisch in der Lokalisierung;*

4. *Gegeben eine les-Abbildung $f : X \to Y$ existiert eine Isotransformation zwischen den beiden Kompositionen des Diagramms*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/X}) \arrow[r, "(\mathrm{R}f_!)^{\mathrm{opp}}"] \arrow[d, "e_Y"', "\wr"] & \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/Y}) \arrow[d, "e_X"', "\wr"] \arrow[dl, Rightarrow, "\sim"'] \\
\mathrm{Der}^{\mathsf{i}}_{/\!/X} \arrow[r, "f_\ddagger"] & \mathrm{Der}^{\mathsf{i}}_{/\!/Y}
\end{tikzcd}$$

mit dem Opponierten Derivierten des gewöhnlichen Schreivorschubs und dem Vorschub $f_\ddagger$ in der derivierten Schreikofaserung in den Horizontalen.

21.5.2.15. Insbesondere sind die Vorschübe $f_\ddagger$ der derivierten Schreikofaserung triangulierte Funktoren für die durch die Isomorphismen e_X auf den Fasern gegebenen Strukturen als triangulierte Kategorie. Wir werden bald die Notation ändern und $f_¡$ statt $f_\ddagger$ schreiben, aber bisher bezeichnet $f_¡$ noch den underivierten Schreivorschub.

Beweis. Die erste und die dritte Aussage folgen direkt aus Korollar 21.2.5.11, sobald wir die Existenz einer Linksanpassung nachweisen. Dazu zeigen wir in 21.5.2.16, daß die Komplexe aus schwach kompaktweichen Garben eine solche Linksanpassung bilden. Die zweite Aussage folgt en passant mit Korollar 21.2.5.12 aus Lemma 21.5.2.7, nach dem gegeben eine les-Abbildung $f : X \to Y$ jede f-kompaktweiche abelsche Garbe $f_!$-rechtsazyklisch ist, so daß nach unseren Erkenntnissen 20.3.6.4 zum unbeschränkten Derivieren homologisch endlicher Funktoren für lesb-Abbildungen f jeder Komplex von f-kompaktweichen abelschen Garben bereits $f_!$-quisrechtsentfaltet alias nach Übergang zu den opponierten Kategorien $f_¡$-quislinksentfaltet ist. □

Lemma 21.5.2.16. *Die Komplexe von schwach kompaktweichen Garben bilden eine Linksanpassung in Bezug auf das faserweise Linksoresystem der Quasiisomorphismen für unsere auf lesb-Abbildungen in der Basis eingeschränkte Schreikofaserung der Homotopiekomplexe*

$$\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{lesb}}}) \to \mathrm{Top}^{\mathrm{lesb}}$$

Beweis. Nach 19.9.3.5 besitzt jeder Garbenkomplex eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung durch schwach kompaktweiche Garben. Wir spiegeln sie an der Hauptdiagonalen, so daß sie ein Doppelkomplex in der rechten Halbebene wird und unser Ausgangskomplex der vertikale Kernkomplex. Wenn wir diesen Kernkomplex ergänzen ergibt sich ein Doppelkomplex mit exakten Zeilen. Nach den Exaktheitskriterien 20.3.7.3 für Totalkomplexe ist dann auch sein Summentotal exakt, denn die Exaktheit von Garbenkomplexen kann man auf den Halmen prüfen und die Halme der Summen sind die Summen der Halme und im Fall abelscher Gruppen ist das Summentotal eines Doppelkomplexes in der rechten Halbebene mit exakten Zeilen auch seinerseits exakt. Das bedeutet, daß unser Ausgangskomplex quasiisomorph in das Summentotal unserer gespiegelten Cartan-Eilenberg-Auflösung abgebildet wird. Nach 21.5.2.10 ist jede direkte Summe schwach kompaktweicher Garben schwach kompaktweich. Folglich gibt es von jedem Komplex abelscher Garben einen Quasiisomorphismus zu einem Komplex schwach kompaktweicher abelscher Garben. Nach unseren Erkenntnissen 20.3.6.4 zum unbeschränkten Derivieren homologisch endlicher Funktoren ist weiter jeder Komplex schwach kompaktweicher abelscher Garben $f_!$-quisrechtsentfaltet für jede

lesb-Abbildung f. Daß schließlich Komplexe schwach kompaktweicher abelscher Garben unter Schreivorschub auf Komplexe schwach kompaktweicher abelscher Garben abgebildet werden, wissen wir bereits aus 21.5.2.11 und das sogar für beliebige les-Abbildungen. Durch Übergang zu den opponierten Kategorien ergibt sich das Lemma. □

21.5.2.17. Einen topologischen Raum nennen wir **lesb**, wenn die konstante Abbildung auf den einpunktigen Raum lesb ist. Nach 19.4.10.14 ist ein lokal kompakter Hausdorffraum lesb, wenn er eine Überdeckung durch offene Teilmengen besitzt, für die die homologische Dimension von $\Gamma_!$ eine gemeinsame endliche Schranke besitzt. Nach der Lokalisierungssequenz ist ein lokal kompakter Hausdorffraum lesb, wenn er eine Zerlegung in eine offene Teilmenge und ihr abgeschlossenes Komplement besitzt derart, daß beide Stücke dieser Zerlegung lesb sind. Jede lokal abgeschlossene Teilmenge eines lesb-Raums ist lesb.

21.5.2.18 (**Notation für derivierten Schreivorschub**). Wir notieren von nun an den underivierten Schreivorschub neu $f_{(!)} : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/Y}$ beziehungsweise auf den opponierten Kategorien $f_{(¡)} : \mathrm{Ab}_{/\!/X} \to \mathrm{Ab}_{/\!/Y}$ und reservieren $f_!$ beziehungsweise $f_¡$ als Notation für die zugehörigen derivierten Funktoren alias Vorschübe der derivierten Schreikofaserung. Gegeben eine lesb- oder les-Abbildung $f : X \to Y$ bezeichnen also

$$f_¡ : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/X}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/Y}) \quad \text{und} \quad f_¡ : \mathrm{Der}^-(\mathrm{Ab}_{/\!/X}) \to \mathrm{Der}^-(\mathrm{Ab}_{/\!/Y})$$

den Vorschub in Bezug auf die Kofaserungen

$$\mathrm{Der}^¡_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{lesb}}} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{lesb}} \quad \text{und} \quad \mathrm{Der}^{-¡}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{les}}} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{les}}$$

und wir setzen jeweils $f_! := (f_¡)^{\mathrm{opp}}$. Da nach unseren Sätzen die Einschränkung unserer ersten Kofaserung auf die Basis der zweiten eine volle Unterkofaserung ist, müssen wir dabei keine Mehrdeutigkeiten fürchten. Als Vorschübe einer Kofaserung werden unsere $f_¡$ unter anderem mit ausgezeichneten Isotransformationen $(gf)_¡ \tilde{\Rightarrow} g_¡ f_¡$ alias $g_! f_! \tilde{\Rightarrow} (gf)_!$ für entsprechend verknüpfbare Morphismen f, g geliefert, den Identifikationen unserer Kofaserung. Für die globalen Schnitte mit kompaktem Träger behalten wir in diesem Kontext jedoch die Notationen $\Gamma_!$ und $\mathrm{R}\Gamma_!$ bei und verzichten darauf, diese Funktoren in $\Gamma_{(!)}$ und $\Gamma_!$ umzubenennen.

21.5.2.19 (**Derivierter Schreivorschub für Modulgarben**). Einen Morphismus geringter Räume nennen wir einen **les-Morphismus**, wenn die zugrundeliegende stetige Abbildung eine les-Abbildung ist. Die Kategorie der geringten Räume mit les-Morphismen als Morphismen notieren wir

$$\mathrm{Ger}^{\mathrm{les}}$$

Einen Opkomorphismus von Modulgarben nennen wir **eigentlich**, wenn der zugrundeliegende Opkomorphismus von abelschen Garben eigentlich ist. So erhalten wir eine Kofaserung

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Ger}^{\mathrm{les}}} \to \mathrm{Ger}^{\mathrm{les}}$$

und durch Übergang zu Homotopiekategorien eine Kofaserung

$$\mathrm{Hot}^{-}\left(\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Ger}^{\mathrm{les}}}\right) \to \mathrm{Ger}^{\mathrm{les}}$$

Die Komplexe aus schwach kompaktweichen Modulgarben bilden eine Linksanpassung in Bezug auf Quasiisomorphismen, denn die abelsche Kategorie der Modulgarben besitzt nach 21.1.3.14 genug Injektive und diese sind nach 21.1.3.14 auch welk und damit nach 21.5.2.10 schwach kompaktweich. Beim Lokalisieren unserer Kofaserung nach Quasiisomorphismen erhalten wir also wieder eine Kofaserung. Wir notieren sie

$$\mathrm{Der}^{-\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Ger}^{\mathrm{les}}} := \mathrm{Hot}^{-}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Ger}^{\mathrm{les}}})_{\mathrm{qis}} \to \mathrm{Ger}^{\mathrm{les}}$$

Die Aussagen von Satz 21.5.2.4 gelten genauso in diesem Fall, wir müssen darin nur Top durch Ger ersetzen.

21.5.2.20 (**Derivierter Schreivorschub und Vergessen der Skalare**). Jeder Morphismus $(X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ von geringten Räumen paßt in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (X,\mathcal{A}) & \to & (Y,\mathcal{B}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X,\mathbb{Z}_X) & \to & (Y,\mathbb{Z}_Y) \end{array}$$

Ist die Abbildung $X \to Y$ der zugrundeliegenden topologischen Räume eine les-Abbildung, so präzisieren die durch die Identifikationen unserer derivierten Modulgarbenschreikofaserung gegebenen Isomorphismen zwischen den Schreivorschüben von oben links nach unten rechts auf beiden möglichen Wegen die Erkenntnis, daß salopp gesprochen der derivierte Schreivorschub von Modulgarben „derselbe“ ist wie der derivierte Schreivorschub der zugrundeliegenden abelschen Garben.

21.5.2.21. Ein Morphismus geringter Räume heiße ein **lesb-Morphismus**, wenn er ein les-Morphismus ist und wenn zusätzlich der Schreivorschub von Modulgarben homologisch endlich ist. Nach dem vorhergehenden bilden die lesb-Morphismen ein multiplikatives System. Ein Morphismus geringter Räume heiße eine **lesb-Abbildung**, wenn er ein les-Morphismus ist und wenn zusätzlich der Schreivorschub von abelschen Garben darunter homologisch endlich ist. Nach dem vorhergehenden bilden die lesb-Abbildungen ein noch kleineres multiplikatives System. Unsere verschiedenen multiplikativen Systeme notieren wir

$$\mathrm{Ger}^{\mathrm{lesba}} \subset \mathrm{Ger}^{\mathrm{lesb}} \subset \mathrm{Ger}^{\mathrm{les}} \subset \mathrm{Ger}$$

und erhalten so eine offensichtliche Verallgemeinerung von 21.5.2.14 für den Funktor

$$\mathrm{Der}^{\mathrm{i}}{}_{/\!/\,\mathrm{Ger}^{\mathrm{lesb}}} := \mathrm{Hot}\left(\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}{}_{/\!/\,\mathrm{Ger}^{\mathrm{lesb}}}\right)_{\mathrm{qis}} \to \mathrm{Ger}^{\mathrm{lesb}}$$

Übungen

Übung 21.5.2.22. Gegeben ein les-Abbildung $f : X \to Y$ und eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ ist unsere Garbe $f_{(!)}$-rechtsazyklisch genau dann, wenn ihre Restriktion auf jede Faser $\Gamma_!$-rechtsazyklisch ist.

Übung 21.5.2.23. Seien $f : X \to Y$ eine eigentliche Abbildung lokal kompakter Hausdorffräume und $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ ein Komorphismus abelscher Garben darüber alias ein Morphismus $f^*\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ und $a : X \to \mathrm{top}$ sowie $b : Y \to \mathrm{top}$ die konstanten Abbildungen. Die Einheit der Adjunktion $\mathcal{G} \to f_*f^*\mathcal{G}$ induziert dann einen Morphismus

$$b_!\mathcal{G} \to b_!f_*f^*\mathcal{G} = b_!f_!f^*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} a_!f^*\mathcal{G} \to a_!\mathcal{F}$$

und unter $\mathcal{H}^q$ einen Morphismus $\mathrm{H}^q_!(Y;\mathcal{G}) \to \mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F})$. Man zeige, daß er genau unser eigentlicher Rückzug auf der kompakten Garbenkohomologie aus 19.4.9.3 ist.

Übung 21.5.2.24. Gegeben $j : X \hookrightarrow Y$ eine offene Einbettung induziert unsere Adjunktion $(j_{(!)}, j^{(*)})$ exakter Funktoren nach 20.3.4.16 eine Adjunktion $(j_!, j^*)$ der zugehörigen derivierten Funktoren. Sind hier X, Y lokal kompakte Hausdorffräume und bezeichnet $c : Y \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung, so liefert für $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ die Einheit der Adjunktion $j_!j^*\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ unter $\mathcal{H}^q c_!$ Morphismen $\mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{G}) \to \mathrm{H}^q_!(Y;\mathcal{G})$. Man zeige, daß sie genau unsere Ausdehnung durch Null auf der kompakten Garbenkohomologie aus 19.4.9.7 sind.

Übung 21.5.2.25. Gegeben ein $U \Subset X$ ein offene Teilmenge eines lokal kompakten Hausdorffraums und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ kompaktweich ist auch $\mathcal{F}_{U\subset X} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ kompaktweich. Hinweis: Man überzeuge sich explizit, daß $\mathcal{F}|_U$ kompaktweich ist, und verwende 21.5.2.8.

21.5.3 Ausgezeichnete Dreiecke zu offenen Teilmengen

21.5.3.1. Ich verwende im folgenden wie eben vereinbart runde Klammern um Indizes $*$ und ! als Notation für die underivierten Versionen unserer üblichen Funktoren. Gegeben eine offene Einbettung $j : U \hookrightarrow X$ erinnern wir aus 19.4.9.9, 19.4.3.13 die adjungierten Funktoren $(j_{(!)}, j^{(*)}, j_{(*)})$ zu $j^{(*)} : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/U}$. Hier sind die Ausdehnung $j_{(!)}$ durch Null und der Rückzug $j^{(*)}$ exakt und der Vorschub $j_{(*)}$ ist zumindest linksexakt. Gegeben eine abgeschlossene Einbettung

$i : Z \hookrightarrow X$ erinnern wir aus 19.4.3.13, 19.6.4.14 weiter die adjungierten Funktoren $(i^{(*)}, i_{(*)}, i^{(!)})$ zu $i_{(*)} : \mathrm{Ab}_{/Z} \to \mathrm{Ab}_{/X}$. Hier sind der Vorschub $i_{(*)}$ und der Rückzug $i^{(*)}$ exakt und der Funktor $i^{(!)}$ ist zumindest linksexakt.

21.5.3.2. Gegeben eine abgeschlossene Einbettung $i : Z \hookrightarrow X$ liefert das adjungierte Paar $(i_{(*)}, i^{(!)})$ von Funktoren auf abelschen Garben nach 20.3.4.16 ein adjungiertes Paar von triangulierten Funktoren $(\mathrm{L}i_{(*)}, \mathrm{R}i^{(!)})$. Genauer ist $i_{(*)}$ exakt und nach 20.3.4.9 ist folglich sein Linksderivierter auf allen Komplexen definiert und stimmt mit dem Rechtsderivierten überein, für den wir bereits die Notation i_* vereinbart hatten. Andererseits besitzt jeder Garbenkomplex eine Quisrechtsentfaltung nach 21.2.3.2 und folglich ist auch der Rechtsderivierte eines additiven Funktors auf jedem Komplex definiert. Wir vereinbaren die Notation $i^! := \mathrm{R}i^{(!)}$ und erhalten nach 20.3.2.28 Tripel adjungierter triangulierter Funktoren

$$(j_!, j^! = j^*, j_*) \quad \text{und} \quad (i^*, i_* = i_!, i^!)$$

zwischen den entsprechenden derivierten Kategorien $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/U})$, $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ und $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Z})$.

Proposition 21.5.3.3 (Gysin-Sequenzen). *Seien $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ ein Komplex abelscher Garben auf einem Raum X und $i : Z \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge sowie $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung ihres offenen Komplements. So lassen sich die Einheit und Koeinheit der jeweiligen Adjunktionen auf genau eine Weise durch Morphismen vom Grad Eins ergänzen zu ausgezeichneten Dreiecken*

$$\begin{array}{ccccccc} j_!j^!\mathcal{F} & \to & \mathcal{F} & \to & i_*i^*\mathcal{F} & \to [1] \\ i_!i^!\mathcal{F} & \to & \mathcal{F} & \to & j_*j^*\mathcal{F} & \to [1] \end{array}$$

Beweis. Offensichtlich liefern für jede abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ die Koeinheit und Einheit der entsprechenden Adjunktionen eine kurze exakte Sequenz

$$j_{(!)}j^{(!)}\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow i_{(*)}i^{(*)}\mathcal{F}$$

Betrachten wir diese kurzen exakten Sequenzen für Komplexe von Garben und beachten, daß unsere Funktoren soweit alle exakt sind, so erhalten wir mit 20.2.6.4 für alle $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ ein ausgezeichnetes Dreieck

$$j_!j^!\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to i_*i^*\mathcal{F} \xrightarrow{[1]}$$

in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$. Der dritte Pfeil $i_*i^*\mathcal{F} \to j_!j^!\mathcal{F}[1]$ wird hier nach 20.2.2.14 bereits durch die beiden anderen festgelegt, da Basiswechsel $i^*j_! = 0$ zeigt und mit einer Adjunktion $\mathrm{Der}_{/X}(j_!j^!\mathcal{F}[1], i_*i^*\mathcal{F}) = 0$ folgt. Damit ist das erste Dreieck hergeleitet. Offensichtlich liefern für jede abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ die Koeinheit und Einheit der entsprechenden Adjunktionen auch eine linksexakte Sequenz

$$i_{(!)}i^{(!)}\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F} \to j_{(*)}j^{(*)}\mathcal{F}$$

Man erkennt leicht, daß sie für welkes und insbesondere für injektives $\mathcal{F}$ sogar exakt ist und folgert dann genau wie zuvor die Existenz und Eindeutigkeit des zweiten Dreiecks aus der Existenz von Quisrechtsentfaltungen durch Komplexe aus injektiven Garben nach 21.2.3.2. $\square$

21.5.3.4 (**Nocheinmal lokale Kohomologie des** $\mathbb{R}^n$). Seien A, B verschiedene einpunktige Teilmengen der n-Sphäre für $n \geq 1$ und U, V ihre Komplemente und G eine abelsche Gruppe. Bezeichne a, b, u, v die jeweiligen Einbettungen und bezeichne $c : S^n \twoheadrightarrow \mathrm{top}$ die Projektion der Sphäre auf den einpunktigen Raum. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} c_* a_! a^! c^* G & \to & c_* c^* G & \to & c_* u_* u^* c^* G \\ \downarrow & & \| & & \downarrow \\ c_* v_! v^! c^* G & \to & c_* c^* G & \to & c_* b_* b^* c^* G \end{array}$$

durch die Faktorisierungen $a = v \circ \alpha$ und $b = u \circ \beta$. Das rechte Quadrat induziert ein Quadrat aus Isomorphismen unter $\mathcal{H}^0$, da S^n, U und B alle zusammenhängend sind. Seine rechte Vertikale hat $\mathcal{H}^q = 0$ für $q \neq 0$, da U und B zusammenziehbar sind. Auch ohne zu wissen, ob wir einen Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken vor uns haben, folgt aus diesen beiden Aussagen und den langen exakten Kohomologiesequenzen, daß das linke Quadrat ein Quadrat aus Isomorphismen unter allen $\mathcal{H}^q$ mit $q \neq 0$ induziert. Aus unseren Erkenntnissen zur Kohomologie der Sphären in 19.4.5.12 folgern wir genauer, daß in der linken Vertikale gilt $\mathcal{H}^q = 0$ für $q \neq 1$, und finden einen bis auf Vorzeichen wohlbestimmten Isomorphismus $\mathcal{H}^1 \cong G$. Da die Sphäre kompakt ist, gilt $c_* = c_!$. Für $d : V \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung finden wir damit, daß die Koeinheit der Adjunktion einen Isomorphismus

$$d_! \alpha_! \alpha^! d^* G \xrightarrow{\sim} d_! d^* G$$

in der derivierten Kategorie induziert. In klassischer Notation sind das unsere Isomorphismen $\mathrm{H}^q_A(V; G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(V; G)$ aus 19.4.8.17. Daß wir aber unter den entsprechenden Identifikationen wirklich dieselben Abbildungen erhalten, soll weder benutzt noch bewiesen werden.

21.5.3.5 (**Einschränkungen von Ausdehnungen**). Jede Einschränkung einer Ausdehnung liefert auch auf den derivierten Kategorien das ursprüngliche Objekt. Genauer ist nach 19.4.3.20 für eine beliebige Einbettung b von topologischen Räumen die Koeinheit der Adjunktion eine Isotransformation $b^{(*)} b_{(*)} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{id}$. Da $b^{(*)}$ exakt ist, erhalten wir durch Anwenden auf quisrechtsentfaltete Komplexe abelscher Garben unmittelbar, daß auch auf den derivierten Kategorien abelscher Garben die Koeinheit der Adjunktion eine Isotransformation

$$b^* b_* \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{id}$$

sein muß. Insbesondere ist b_* volltreu für jede Einbettung b. Als nächstes zeigen wir, daß für jede lokal abgeschlossene Einbettung b auch auf den derivierten Kategorien abelscher Garben die Einheit der Adjunktion eine Isotransformation

$$\mathrm{id} \tilde{\Rightarrow} b^! b_!$$

sein muß. Das folgt im allgemeinen, sobald wir es für offene und abgeschlossene Einbettungen zeigen. Im Fall einer offenen Einbettung sind beide Funktoren exakt und die Behauptung folgt unmittelbar aus der Aussage für gewöhnliche ablsche Garben in 19.6.4.23. Im Fall einer abgeschlossenen Einbettung $i : Z \hookrightarrow X$ wenden wir die zweite Gysinsequenz aus 21.5.3.3 auf $i_!\mathcal{G}$ an und folgern aus $j^* i_! = 0$, daß die Koeinheit der Adjunktion einen Isomorphismus $i_! i^! i_! \mathcal{G} \tilde{\to} i_! \mathcal{G}$ liefert. Nach den Dreiecksidentitäten 16.4.8.1 liefert dann auch die Einheit der Adjunktion einen Isomorphismus $i_! \mathcal{G} \tilde{\to} i_! i^! i_! \mathcal{G}$ und wegen $i_! = i_*$ und i_* volltreu nach dem bereits bewiesenen Fall muß dann auch die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus $\mathcal{G} \tilde{\to} i^! i_! \mathcal{G}$ gewesen sein. Aus der entsprechenden Isotransformation im underivierten Fall 19.6.4.23 folgt weiter unmittelbar, daß für jede lokal abgeschlossene Einbettung b die offensichtliche Transformation $b_! \Rightarrow b_*$ eine Isotransformationen $b^* b_! \tilde{\Rightarrow} b^* b_*$ induziert. Mit dem vorhergehenden erhalten wir so insgesamt eine Isotransformation

$$b^* b_! \tilde{\Rightarrow} \mathrm{Id}$$

und durch Übergang zu den Adjungierten schließlich auch eine Isotransformation

$$b^! b_* \tilde{\Rightarrow} \mathrm{Id}$$

Vorschau 21.5.3.6. Sei b die Einbettung einer lokal abgeschlossenen Teilmenge. Im weiteren erhalten wir auch durch Basiswechsel eine Isotransformation $b^* b_! \tilde{\Rightarrow} \mathrm{Id}$ und werden prüfen wollen, daß sie dieselbe ist. Des weiteren kann man zeigen, daß die offensichtliche Transformation $b_! \Rightarrow b_*$ auch eine Isotransformation $b^! b_! \tilde{\Rightarrow} b^! b_*$ induziert, und mag prüfen, daß sie dieselbe Isotransformation $b^! b_* \tilde{\Rightarrow} \mathrm{Id}$ induziert wie oben. Das soll mir einmal ein Student ausarbeiten.

21.5.3.7 (**Trägerzerlegung**). Seien X ein topologischer Raum und $U \Subset X$ eine offene Teilmenge mit Einbettungsabbildung $j : U \hookrightarrow X$ und $i : Z \hookrightarrow X$ die Einbettung des Komplements. Gegeben ein Garbenkomplex $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ mit

$$j^* \mathcal{F} = 0$$

oder gleichbedeutend $j^! \mathcal{F} = 0$ liefern die Koeinheit beziehungsweise Einheit der Adjunktion nach den Gysinsequenzen Isomorphismen $i_! i^! \mathcal{F} \tilde{\to} \mathcal{F} \tilde{\to} i_* i^* \mathcal{F}$. Da $i_! = i_*$ volltreu ist, induziert das einen Isomorphismus $i^! \mathcal{F} \tilde{\to} i^* \mathcal{F}$. Ist nun $Z =$

$\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda$ eine Zerlegung von Z in paarweise disjunkte offene Teilmengen $Z_\lambda \Subset Z$, so erhalten wir mit 21.2.3.16 Isomorphismen

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{in}_{\lambda!}\,\mathrm{in}_\lambda^!\, i^!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} i^!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} i^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{in}_{\lambda*}\,\mathrm{in}_\lambda^*\, i^*\mathcal{F}$$

Da $i_! = i_*$ mit Koprodukten und Produkten vertauscht, erhalten wir schließlich mit der Notation $a_\lambda : Z_\lambda \hookrightarrow X$ für die Einbettungen, daß die Koeinheiten beziehungsweise Einheiten der Adjunktionen für alle $\mathcal{F}$ mit $j^*\mathcal{F} = 0$ Isomorphismen

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} a_{\lambda!}a_\lambda^!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} a_{\lambda*}a_\lambda^*\mathcal{F}$$

induzieren. Die Faktoren sind auf beiden Seiten dieselben, der natürliche Morphismus vom Koprodukt zum Produkt ist in diesen Fällen eben ein Isomorphismus. Wir nennen jede derartige Zerlegung eine **Trägerzerlegung von** $\mathcal{F}$. Nach 21.2.3.17 liefert sie Isomorphismen

$$\mathbb{H}^q(X;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{H}^q(Z_\lambda;\mathcal{F})$$

und für X lesb oder X nur les aber der Zusatzannahme $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}^+(\mathrm{Ab}_{/X})$ Isomorphismen

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{H}_!^q(Z_\lambda;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_!^q(X;\mathcal{F})$$

Übungen

Übung 21.5.3.8. Seien $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine abelsche Garbe auf einem Raum X und $i : Z \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge und $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung ihres offenen Komplements. Bezeichne c die jeweiligen konstanten Abbildungen auf den einpunktigen Raum. Wir identifizieren abelsche Garben auf dem einpunktigen Raum mit abelschen Gruppen. Die offensichtliche Isotransformation $c_{(*)}i^{(!)} \xRightarrow{\sim} \Gamma_Z$ induziert vermittels 19.6.4.26 und 19.4.4.12 durch welke Auflösung einen Isomorphismus

$$\mathcal{H}^q c_* i^!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_Z^q(X;\mathcal{F})$$

Man zeige, wie darunter zusammen mit einigen weiteren Identifikationen die lange exakte Kohomologiesequenz des ausgezeichneten Dreiecks $c_*i_!i^!\mathcal{F} \to c_*\mathcal{F} \to c_*j_*j^*\mathcal{F} \to [1]$ der langen exakten Sequenz der lokalen Kohomologie 19.4.4.9 entspricht.

21.5.4 Lokalisierung präverflochtener Winkelfaserungen

21.5.4.1 (**Motivation**). Dieser eher technische Abschnitt stellt die Hilfsmittel bereit, die uns erlauben, gleichzeitig mit den Rechtsderivierten der Schreivorschübe und den Linksderivierten der Trennrückzüge zu arbeiten. Im Fall von Garben von Vektorräumen sind beliebige Garbenkomplexe flach und können den derivierten Trennrückzug berechnen und die Schwierigkeit läßt sich unschwer umgehen, indem man mit faserweise kompaktweichen Garben arbeitet. Im Fall diskreter Räume sind beliebige Garbenkomplexe kompaktweich und können den derivierten Schreivorschub berechnen und die Schwierigkeit läßt sich unschwer umgehen, indem man mit hinreichend flachen Garben arbeitet und bemerkt, daß Koprodukte flacher Moduln wieder flach sind. Im allgemeinen ist der Schreivorschub einer flachen kompaktweichen Garbe keineswegs flach und ich kenne keinen so einfachen Ausweg. Der allgemeine Fall beinhaltet aber insbesondere den Fall abelscher Garben, den wir brauchen, wenn wir ganzzahlige Schnittmultiplizitäten erhalten wollen. Im hier dargestellten Zugang stützen wir uns auf den Begriff einer „Rechts-Links-Anpassung", um die hier angesprochenen Schwierigkeiten zu überwinden.

21.5.4.2. Seien $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ eine Winkelfaserung und S ein faserweises Oresystem in $\mathscr{C}$. Besitzt die Faserung $\mathscr{C}^\dagger \to \mathscr{B}^\dagger$ eine S-Rechtsanpassung und die Kofaserung $\mathscr{C}^\natural \to \mathscr{B}^\natural$ eine S-Linksanpassung, so führt Lokalisieren zu einer weiteren Winkelfaserung $S^{-1}\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ mithilfe der durch 21.2.5.11 gegebenen Isomorphismen $(S^{-1}\mathscr{C}^\natural)_{\mathscr{B}^\mathrm{e}} \xleftarrow{\sim} S^{-1}_{\mathscr{B}^\mathrm{e}}\mathscr{C}^\mathrm{e} \xrightarrow{\sim} (S^{-1}\mathscr{C}^\dagger)_{\mathscr{B}^\mathrm{e}}$ zwischen Lokalisierung der Einschränkung und Einschränkung der Lokalisierung. Bezeichne Q im folgenden alle Lokalisierungsfunktoren. Ist unser $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ zusätzlich mit einer Regulierung der Basis und einer Präverflechtung versehen, so nennen wir ein Verflechtungsquadrat

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dotted, "q"] \arrow[d, dashed, "g"'] & X \arrow[d, dashed, "f"] \\ Z \arrow[r, dotted, "p"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed] & \mathcal{F} \arrow[d, dashed] \\ \mathcal{H} \arrow[r, dotted] & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

in $\mathscr{C}$ **lokalisierbar für** S, wenn $Q\mathcal{F} \to Q\mathcal{G}$ schreikokartesisch ist über f und $\mathcal{F}$ rechtsentfaltet für $Qq^\dagger$ und $\mathcal{G}$ rechtsentfaltet für $Qp^\dagger$. Die Darstellung zeigt rechts das fragliche Verflechtungsquadrat und links sein Bild in der Basis, ein erlaubtes Basisquadrat. Die zu Bildern lokalisierbarer Verflechtungsquadrate isomorphen Rückholquadrate von $S^{-1}\mathscr{C}$ nennen wir die **naiven Verflechtungsquadrate** der lokalisierten Winkelfaserung.

21.5.4.3. Gegeben eine Winkelfaserung $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ und ein faserweises Oresystem S in $\mathscr{C}$ verstehen wir unter einer **Rechts-Links-Anpassung** ein Paar $(\mathscr{R}, \mathscr{L})$ aus einer S-Rechtsanpassung $\mathscr{R}$ der Faserung $\mathscr{C}^\dagger \to \mathscr{B}^\dagger$ und einer S-Linksanpassung $\mathscr{L}$ der Kofaserung $\mathscr{C}^\natural \to \mathscr{B}^\natural$ derart, daß gilt:

1. Zu jedem Objekt in $\mathscr{R}$ gibt es einen S-Morphismus von einem Objekt in $\mathscr{R} \cap \mathscr{L}$;

2. Zu jedem Morphismus $q : W \to X$ der Basis und jedem Objekt $\mathcal{F} \in \mathscr{C}_X$ gibt es S-Morphismen $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F}_{¡} \to \mathcal{F}_{\dagger ¡}$ mit $\mathcal{F}_{¡} \in \mathscr{L}_X$ und $q^\dagger \mathcal{F} \leftarrow q^\dagger \mathcal{F}_{¡}$ in S und $\mathcal{F}_{\dagger ¡} \in \mathscr{R}_X \cap \mathscr{L}_X$.

Vorschau 21.5.4.4 (**Rechtslinksanpassung für abelsche Garben**). Im Kontext von derivierten Kategorien abelscher Garben können wir als $\mathscr{R}$ alle Garbenkomplexe nehmen und als $\mathscr{L}$ alle Komplexe von schwach kompaktweichen Garben. Mögliche Morphismen $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F}_{¡}$ kann man dann mithilfe der Godement-Auflösung erhalten, genauer mit den dadurch in den opponierten Kategorien erhaltenen Morphismen.

Vorschau 21.5.4.5 (**Rechtslinksanpassung für Modulgarben**). Im Kontext von derivierten Kategorien von Modulgarben können wir als $\mathscr{R}$ alle quisflachen Garbenkomplexe nehmen und als $\mathscr{L}$ alle Komplexe von schwach kompaktweichen Garben. Mögliche $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F}_{¡} \to \mathcal{F}_{\dagger ¡}$ kann man mithilfe der Godement-Auflösung erhalten, genauer mit den dadurch in den opponierten Kategorien erhaltenen Morphismen, wie in 21.5.5.7 ausgeführt wird.

Satz 21.5.4.6 (**Lokalisieren einer präverflochtenen Winkelfaserung**). *Gibt es für eine präverflochtene Winkelfaserung mit faserweisem gesättigten Oresystem eine Rechtslinksanpassung und sind alle naiven Verflechtungsquadrate der Lokalisierung voll kokartesisch, so existiert genau eine Verflechtung der lokalisierten Winkelfaserung, die alle naiven Verflechtungsquadrate enthält.*

21.5.4.7. Der Beweis zeigt darüberhinaus, daß die Aussage des Satzes bereits folgt, wenn wir nur von einer Teilmenge der erlaubten Basisquadrate, aus deren Quadraten wir alle erlaubten Basisquadrate unserer Regulierung durch Verkleben erhalten können, voraussetzen, daß alle naiven Verflechtungsquadrate der Lokalisierung über Basisquadraten dieser Teilmenge voll kokartesisch sind.

Beweis. Der Beweis füllt den Rest dieses Abschnitts, aber ich fasse hier schon zusammen, wie sich die verschiedenen Teile des Beweises zusammenfügen. Nach 21.5.4.9 reicht es zu zeigen, daß die naiven Verflechtungsquadrate eine kokartesische Teilverflechtung im Sinne von 21.5.4.8 bilden. Die von einer kokartesischen Teilverflechtung geforderte Fortsetzbarkeit partieller Quadrate zeigen wir in 21.5.4.10. Die von einer kokartesischen Teilverflechtung, ja einer Regulierung geforderten Verklebbarkeiten zeigen wir in 21.5.4.14 und 21.5.4.16. Daß die bei einer kokartesischen Teilverflechtung geforderten kommutativen Quadrate tatsächlich naive Verflechtungsquadrate sind, bemerken wir in 21.5.4.13. Die von einer kokartesischen Teilverflechtung geforderte Funktorialitätseigenschaft schließlich zeigen wir in 21.5.4.12. □

21.5.4.8. Gegeben eine Winkelfaserung $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ über einer regulierten Basis verstehen wir unter einer **kokartesischen Teilverflechtung** eine Regulierung K von $\mathscr{C}$ durch voll kokartesische Rückholquadrate mit den folgenden Eigenschaften:

1. Über jedem erlaubten Basisquadrat kann jedes partielle Quadrat von $\mathscr{C}$ mit †-kartesischen Horizontalen und ¡-kokartesischer rechter Vertikale, dem nur die linke Vertikale fehlt, in K ergänzt werden;

2. Über jedem erlaubten Basisquadrat kann jeder Morphismus in der Faser über der oberen rechten Ecke zu einem Morphismus von Quadraten aus K fortgesetzt werden;

3. K enthält alle kommutativen Quadrate mit kartesischen Horizontalen und kokartesischen Vertikalen über erlaubten Basisquadraten mit Eigmorphismen in zwei parallelen Kanten.

Lemma 21.5.4.9 (**Verflechtung zu kokartesischer Teilverflechtung**). *Gegeben eine Winkelfaserung über einer regulierten Basis gibt es zu jeder kokartesischen Teilverflechtung genau eine Verflechtung, die sie umfaßt.*

Beweis. Bezeichne K unsere kokartesische Teilverflechtung. Zu jeder Erweiterung von K zu einer Verflechtung müssen alle Rückholquadrate gehören, die wir erhalten, indem wir an ein Rückholquadrat unserer Teilverflechtung ein kommutatives Quadrat mit kartesischen Horizontalen und Vertikalen über Identitäten in der Basis unten ankleben. In der Menge V von Quadraten, die wir auf diese Weise erhalten, läßt sich aber bereits jedes partielle Quadrat mit kartesischen Horizontalen über einem vorgegebenen erlaubten Basisquadrat vervollständigen. Also gibt es höchstens eine Erweiterung von K zu einer Verflechtung, nämlich die hier beschriebene Menge V von Quadraten. Um zu zeigen, daß V auch tatsächlich eine Verflechtung ist, müssen wir unsere Bedingungen prüfen. Daß V die Bedingungen der „eindeutigen Ergänzbarkeit“ und der „eigentlichen Kommutativität“ erfüllt, scheint mir offensichtlich. Daß V stabil ist unter dem Verkleben längs vertikaler Kanten scheint mir ebenso offensichtlich. Daß V auch stabil ist unter dem Verkleben längs horizontaler Kanten folgt schließlich aus der Funktorialitätsannahme in unseren Forderungen an eine kokartesische Teilverflechtung. □

21.5.4.10 (**Existenz ausreichend vieler naiver Verflechtungsquadrate**). Gegeben sei eine präverflochtene Winkelfaserung mit einem faserweisen Oresystem S. Gibt es dazu eine Rechtslinksanpassung, so besitzt über jedem erlaubten Basisquadrat jedes partielle Quadrat mit kartesischen Horizontalen der lokalisierten Winkelfaserung mit kokartesischer rechter Vertikale eine Erweiterung zu einem naiven Verflechtungsquadrat. Das folgt, indem wir zu einer vorgegebenen oberen rechten Ecke ein Objekt $\mathcal{F} \in \mathscr{R}_X \cap \mathscr{L}_X$ wählen, dessen Bild $Q\mathcal{F}$ isomorph ist

zu unserer Ausgangsecke, und dazu ein lokalisierbares Verflechtungsquadrat der Gestalt

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dotted, "q"] \arrow[d, dashed, "g"'] & X \arrow[d, dashed, "f"] \\ Z \arrow[r, dotted, "p"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed] & \mathcal{F} \arrow[d, dashed] \\ \mathcal{H} \arrow[r, dotted] & f_{¡}\mathcal{F} \arrow[d, "\wr Q"] \\ & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

bilden mit $f_{¡}\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ einem beliebigen S-Morphismus in ein Objekt $\mathcal{G} \in \mathscr{R}_Y$.

Lemma 21.5.4.11. *Gegeben seien eine präverflochtene Winkelfaserung mit einem faserweisen Oresystem S. Gibt es dazu eine Rechtslinksanpassung $(\mathscr{R}, \mathscr{L})$, so ist jedes naive Verflechtungsquadrat der Lokalisierung isomorph zum Bild eines lokalisierbaren Verflechtungsquadrats mit oberer rechter Ecke $\mathcal{F} \in \mathscr{L}$.*

Beweis. Wir argumentieren im Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dotted, "q"] \arrow[d, dashed, "g"'] & X \arrow[d, dashed, "f"] \\ Z \arrow[r, dotted, "p"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} q^\dagger\mathcal{F}_{¡} \arrow[rr, dotted] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & & \mathcal{F}_{¡} \arrow[dl] \arrow[dd, dashed] \\ & \mathcal{E} \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed] & \mathcal{F} \arrow[d, dashed] \\ & \mathcal{H} \arrow[r, dotted] & \mathcal{G} \\ \mathcal{H} \arrow[rr, dotted] \arrow[ur] & & \mathcal{G} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Hier ist die Mitte ein lokalisierbares Verflechtungsquadrat und $\mathcal{F}_{¡} \to \mathcal{F}$ ein S-Morphismus von einem Objekt von $\mathscr{L}_X$, der unter $q^\dagger$ ein S-Morphismus bleibt. Daß es so einen Morphismus gibt, war Teil unserer Annahmen. Damit ist auch der durch die Kommutativität des oberen Trapezes erklärte Morphismus $q^\dagger\mathcal{F}_{¡} \to \mathcal{E}$ ein S-Morphismus. Die durch unsere Präverflechtung gegebene linke Vertikale stimmt nun überein mit der durch die Kommutativität des linken Trapezes gegebenen linken Vertikale. Die schrägen Pfeile liefern dann einen Morphismus von lokalisierbaren Verflechtungsquadraten und in der Lokalisierung den gewünschten Isomorphismus von naiven Verflechtungsquadraten. □

Lemma 21.5.4.12 (**Funktorialität naiver Verflechtungsquadrate**). *Gegeben seien eine präverflochtene Winkelfaserung mit einem faserweisen gesättigten Oresystem S. Gibt es eine Rechtslinksanpassung $(\mathscr{R}, \mathscr{L})$, so läßt sich jeder Morphismus in der lokalisierten Faserkategorie zwischen den oberen rechten Ecken naiver Verflechtungsquadrate auf genau eine Weise zu einem Morphismus der ganzen Verflechtungsquadrate fortsetzen.*

Beweis. Es ist klar, daß sich unser Morphismus auf höchstens eine Weise fortsetzen läßt. Nach 21.5.4.11 dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unsere naiven Verflechtungsquadrate die Bilder lokalisierbarer Verflechtungsquadrate mit oberer rechter Ecke in $\mathscr{L}$ sind. Wir argumentieren im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E}_\alpha \arrow[rr, dotted] \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, dashed] & & \mathcal{F}_\alpha \arrow[dl] \arrow[dd, dashed] \\
W \arrow[r, dotted, "q"] \arrow[dd, dashed, "g"'] & & \mathcal{E} \arrow[r, dotted] \arrow[dd, dashed] & \mathcal{F} \arrow[d, dashed] \\
 & & & f_!\mathcal{F} \arrow[d, "1"', "\wr Q"] \\
 & & \mathcal{H} \arrow[r, dotted] \arrow[d, "3"', "\wr Q"] & \mathcal{G} \arrow[d, "2"', "\wr Q"] & f_!\mathcal{F}_\alpha \arrow[ul, "1"'] \arrow[dd, "1"', "\wr Q"] \\
Z \arrow[r, dotted, "p"] & Y & p^\dagger\mathcal{A} \arrow[r, dotted] & \mathcal{A} & \\
 & & \mathcal{H}_\alpha \arrow[rr, dotted] \arrow[ur, "3"] & & \mathcal{G}_\alpha \arrow[ul, "2"']
\end{tikzcd}$$

Gegeben sind als innerstes und äußertes Rechteck jeweils ein lokalisierbares Verflechtungsquadrat mit oberer rechter Ecke $\mathcal{F}, \mathcal{F}_\alpha \in \mathscr{L}_X$ sowie, damit fangen wir erst einmal an, ein Morphismus $\mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{F}$ in $\mathscr{C}_X$. Nun bauen wir in mehreren Schritten den Rest des Diagramms auf. Im ersten Schritt faktorisieren wir die rechten Vertikalen unserer lokalisierbaren Verflechtungsquadrate in den Transportmorphismus zum Schreivorschub und einen weiteren Morphismus. Da wir die oberen rechten Ecken in $\mathscr{L}_X$ angenommen hatten, werden diese weiteren Morphismen unter Q Isomorphismen, was wir durch $\wr Q$ andeuten. Da wir S faserweise gesättigt angenommen hatten, gehören diese Morphismen nach 20.1.4.19 bereits zu S. Außerdem finden wir einen eindeutigen Morphismus $\mathcal{E}_\alpha \to \mathcal{E}$ in $\mathscr{C}_W$, der das obere Trapez zum Kommutieren bringt. Im zweiten Schritt finden wir $\mathcal{A} \in \mathscr{C}_Y$ zusammen mit einem S-Morphismus $\mathcal{G} \to \mathcal{A}$ und einem $\mathscr{C}_Y$-Morphismus $\mathcal{G}_\alpha \to \mathcal{A}$ derart, daß das Parallelogramm unten rechts kommutiert, und können ohne Beschränkung der Allgemeinheit sogar $\mathcal{A} \in \mathscr{R}_Y$ annehmen. Im dritten Schritt ergänzen wir zwei Pfeile links unten wie angedeutet so, daß das untere Rechteck und Trapez kommutieren. Der vertikale S-Morphismus kommt von unserer Annahme $\mathcal{A} \in \mathscr{R}_Y$ her. Da das große innere Rechteck als Verklebung auch ein Verflechtungsquadrat ist, muß das linke Trapez kommutieren. Damit aber haben wir den gesuchten Morphismus von naiven Verflechtungsquadraten gefunden. Beginnen wir hier mit einem S-Morphismus $\mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{F}$, so werden alle durch durchge-

zogene Linien dargestellten Pfeile im obigen Diagramm S-Morphismen und wir erhalten einen Isomorphismus von naiven Verflechtungsquadraten in der Lokalisierung. Betrachten wir schließlich zu einem $Qq^\dagger$-entfalteten Objekt $\mathcal{F} \in \mathscr{L}_X$ wie in 21.5.4.3 zwei S-Morphismen $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F}_{¡} \rightarrow \mathcal{F}_{\dagger ¡}$, so können wir aus den bis hier bereits gezeigten Funktorialitätseigenschaften folgern, daß jedes naive Verflechtungsquadrat isomorph ist zum Bild in der Lokalisierung eines lokalisierbaren Verflechtungsquadrats mit Ausgangsecke $\mathcal{F} \in \mathscr{R}_X \cap \mathscr{L}_X$. Ein beliebiger Morphismus $\mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{F}$ in $S_X^{-1}\mathscr{C}_X$ von derartigen Objekten läßt sich aber als Bruch $\mathcal{F}_\alpha \leftarrow \mathcal{F}_\beta \rightarrow \mathcal{F}$ schreiben mit $\mathcal{F}_\beta \in \mathscr{R}_X$ und dann auch als Bruch $\mathcal{F}_\alpha \leftarrow \mathcal{F}_{\beta ¡} \rightarrow \mathcal{F}$ mit $\mathcal{F}_{\beta ¡} \in \mathscr{R}_X \cap \mathscr{L}_X$ und so folgt die Behauptung aus den bereits bewiesenen Aussagen. □

21.5.4.13. Gegeben seien eine präverflochtene Winkelfaserung mit einem faserweisen gesättigten Oresystem. Gibt es eine Rechtslinksanpassung, so ist über einem erlaubten Basisquadrat mit Eigmorphismen auf zwei gegenüberliegenden Kanten jedes kommutative Quadrat kartesischen Horizontalen und kokartesischer rechter Vertikale isomorph zu einem naiven Verflechtungsquadrat. In der Tat liefert 21.5.4.10 ein kommutierendes naives Verflechtungsquadrat mit isomorpher Ausgangsecke, zu dem es aufgrund der Funktorialität 21.5.4.12 isomorph sein muß.

Lemma 21.5.4.14 (Nebeneinanderkleben naiver Verflechtungsquadrate). *Gegeben seien eine präverflochtene Winkelfaserung mit einem faserweisen gesättigten Oresystem. Gibt es eine Rechtslinksanpassung $(\mathscr{R}, \mathscr{L})$, so liefert das Verkleben zweier naiver Verflechtungsquadrate der Lokalisierung längs einer gemeinsamen vertikalen Kante stets wieder ein naives Verflechtungsquadrat.*

21.5.4.15. Man bemerke, daß wir hier nur eine Aussage machen für den Fall, daß von den beteiligten naiven Verflechtungsquadraten das rechte voll kokartesisch ist.

Beweis. Unser Argument für die Existenz ausreichend vieler naiver Verflechtungsquadrate 21.5.4.10 zeigt, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, unser rechtes naives Verflechtungsquadrat sei Bild eines lokalisierbaren Verflechtungsquadrats, das aus Objekten von $\mathscr{R}$ besteht. Damit folgt die Behauptung aus der Funktorialität naiver Verflechtungsquadrate 21.5.4.12. □

Lemma 21.5.4.16 (Untereinanderkleben naiver Verflechtungsquadrate). *Gegeben seien eine präverflochtene Winkelfaserung mit einem faserweisen gesättigten Oresystem S. Gibt es eine Rechtslinksanpassung $(\mathscr{R}, \mathscr{L})$, so liefert das Verkleben zweier voll kokartesischer naiver Verflechtungsquadrate der Lokalisierung längs einer gemeinsamen horizontalen Kante wieder ein naives Verflechtungsquadrat.*

Beweis. Um das zu zeigen, leiten wir eine alternative Beschreibung für voll kokartesische naive Verflechtungsquadrate her. Sei dazu über der oberen Kante $W \to X$ eines vorgegebenen erlaubten Basisquadrats ein Morphismus $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ von Objekten von $\mathscr{L}$ gegeben und sei $Q\mathcal{E} \to Q\mathcal{F}$ kartesisch. Ist das nach der Funktorialität naiver Verflechtungsquadrate 21.5.4.12 zugehörige naive Verflechtungsquadrat voll kokartesisch, so ist es isomorph zum Bild in der Lokalisierung vom Rand des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & q^\dagger \mathcal{F} \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed] & \mathcal{F} \arrow[d, dashed] \\
g_¡\mathcal{E} \arrow[r] & p^\dagger f_¡\mathcal{F} \arrow[r, dotted] & f_¡\mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

mit dem rechten Quadrat aus unserer ursprünglichen Präverflechtung und dem linken Quadrat aus der universellen Eigenschaft des Schreivorschubs. Aus dieser Bescheibung und der Funktorialität naiver Verflechtungsquadrate 21.5.4.12 folgt das Lemma sofort. Im Rest des Beweises leiten wir sie her. Gegeben in $\mathscr{C}$ ein Morphismus $\mathcal{E}_\alpha \to \mathcal{F}_\alpha$ über $W \to X$ mit denselben Eigenschaften, wie wir sie von $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ und $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ gefordert hatten, sowie ein kommutatives Quadrat in $\mathscr{C}$ mit S-Morphismen in den Vertikalen

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "S"] & \mathcal{F}_\alpha \arrow[d, "S"] \\
\mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

bilden wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_\alpha \arrow[rr] \arrow[dr, "S"] \arrow[ddd, dashed] & & q^\dagger \mathcal{F}_\alpha \arrow[rr, dotted] \arrow[d] & & \mathcal{F}_\alpha \arrow[dl, "S"'] \arrow[ddd, dashed] \\
& \mathcal{E} \arrow[rr] \arrow[d, dashed] & q^\dagger \mathcal{F} \arrow[rr, dotted] \arrow[d, dashed] & \mathcal{F} \arrow[d, dashed] & \\
& g_¡\mathcal{E} \arrow[rr] & p^\dagger f_¡\mathcal{F} \arrow[rr, dotted] & f_¡\mathcal{F} & \\
g_¡\mathcal{E}_\alpha \arrow[rr] \arrow[ur, "S"] \arrow[uur, dashed] & & p^\dagger f_¡\mathcal{F}_\alpha \arrow[rr, dotted] \arrow[u] & & f_¡\mathcal{F}_\alpha \arrow[ul, "S"] \arrow[uur, dashed]
\end{tikzcd}$$

und erkennen, daß es einen Isomorphismus der entsprechenden Quadrate in der Lokalisierung induziert. Jetzt finden wir von der Definition einer Rechtslinksanpassung ausgehend eine Ergänzung der oberen Horizontale von eben zu einem

kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_\alpha \arrow[r, "S", "3"'] \arrow[d, equal, "3"'] & q^\dagger \mathcal{F}_{\dagger\mathsf{i}} \arrow[r, dotted] & \mathcal{F}_{\dagger\mathsf{i}} \\
\mathcal{E}_\alpha \arrow[r, "S", "2"'] & \mathcal{G} \arrow[r, "1"'] \arrow[d, "1"', "S"] & q^\dagger \mathcal{F}_{\mathsf{i}} \arrow[r, dotted] \arrow[u] \arrow[d, "S"] & \mathcal{F}_{\mathsf{i}} \arrow[u, "S"'] \arrow[d, "S"] \\
& \mathcal{E} \arrow[r] & q^\dagger \mathcal{F} \arrow[r, dotted] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

mit den angedeuteten S-Morphismen, mit $\mathcal{F}_{\mathsf{i}}, \mathcal{E}, \mathcal{E}_\alpha \in \mathscr{L}$ und mit $\mathcal{F}_{\dagger\mathsf{i}} \in \mathscr{R} \cap \mathscr{L}$. Hier verwenden wir im ersten Schritt, daß S ein faserweises Oresystem ist, um $\mathcal{G}$ und die beiden davon ausgehenden Morphismen zu finden, und ganz wesentlich die Eigenschaft einer Rechtslinksanpassung, daß $q^\dagger$ aus $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F}_{\mathsf{i}}$ auch dann einen S-Morphismus macht, wenn diese Objekte nicht $Qq^\dagger$-rechtsentfaltet sind. Im zweiten Schritt finden wir einen S-Morphismus von einem Objekt $\mathcal{E}_\alpha \in \mathscr{L}_W$ nach $\mathcal{G}$ aufgrund der Definition einer Linksanpassung. Im dritten Schritt erkennen wir, daß $Q\mathcal{E}_\alpha \to Q\mathcal{F}_{\dagger\mathsf{i}}$ kartesisch sein muß, also $Q\mathcal{E}_\alpha \to Qq^\dagger\mathcal{F}_{\dagger\mathsf{i}}$ ein Isomorphismus wegen $\mathcal{F}_{\dagger\mathsf{i}} \in \mathscr{R}$, also $\mathcal{E}_\alpha \to q^\dagger\mathcal{F}_{\dagger\mathsf{i}}$ ein S-Morphismus wegen S faserweise gesättigt. So können wir uns darauf zurückziehen, die ursprüngliche Behauptung für $\mathcal{F} \in \mathscr{R}_X \cap \mathscr{L}_X$ zu zeigen. Gilt nun aber $\mathcal{F} \in \mathscr{R}_X \cap \mathscr{L}_X$, so muß der erste horizontale Pfeil oben links unter Q ein Isomorphismus werden und wir können unser Diagramm ergänzen zu einem Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, "Q", "\sim", "1"'] \arrow[d, dashed] & q^\dagger \mathcal{F} \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed] & \mathcal{F} \arrow[d, dashed] \\
g_{\mathsf{i}}\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, equal] & p^\dagger f_{\mathsf{i}}\mathcal{F} \arrow[r, dotted] \arrow[d] & f_{\mathsf{i}}\mathcal{F} \arrow[d, "2"', "\wr Q"] \\
g_{\mathsf{i}}\mathcal{E} \arrow[r, "Q", "\sim", "3"'] & p^\dagger \mathcal{G} \arrow[r, dotted] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

mit $\mathcal{G} \in \mathscr{R}_Y$. Dann muß, wenn das naive Verflechtungsquadrat zur oberen rechten Ecke $Q\mathcal{F}$ voll kokartesisch ist, die mittlere Vertikale kokartesisch werden in der Lokalisierung. Das hinwiederum zeigt, daß auch der horizontale Morphismus unten links in der Lokalisierung ein Isomorphismus werden muß. So sehen wir, daß das obere lange horizontale Rechteck, das einhüllende Quadrat und das rechte lange vertikale Rechteck alle drei isomorphe Quadrate in der Lokalisierung liefern. Das rechte lange vertikale Rechteck liefert per definitionem ein naives Verflechtungsquadrat und so folgt dasselbe für das obere lange horizontale Rechteck. $\square$

Beispiel 21.5.4.17 (**Halbseitig beschränkte derivierte Verflechtung**). Unsere verflochtene Winkelfaserung

$$\left(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{les}} \leftarrow \mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}, \mathrm{Top}^{\mathrm{es}} \right)$$

aus 21.4.5.17 mit der kartesischen Regulierung und der durch Kommutativität konstruierten Verflechtung, immer noch nach 21.4.5.17, liefert in offensichtlicher Weise verflochtene Winkelfaserungen

$$\left(\mathrm{Hot}^{\sharp}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}}) \to \mathrm{Top} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{les}} \leftarrow \mathrm{Hot}^{\sharp}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}), \mathrm{Top}^{\mathrm{es}} \right)$$

für $\sharp$ eine jede unserer vier üblichen Beschränkungsbedingungen. Im Fall von Hot^- können wir diese Winkelfaserung nach Quasiisomorphismen lokalisieren, denn der Rückzug ist exakt und alle Garbenkomplexe bilden folglich eine Rechtsanpassung $\mathscr{R}$ für den opponierten Rückzug, wohingegen wir für den Schreivorschub die Linksanpassung $\mathscr{L} := \mathrm{Hot}^-(\mathrm{skwAb}_{/\!/\,\mathrm{Top}})$ durch entsprechend beschränkte Komplexe schwach kompaktweicher Garben nach 21.5.2.12 zur Verfügung haben. Um eine Verflechtung der lokalisierten Winkelfaserung zu konstruieren, prüfen wir die Bedingungen von Satz 21.5.4.6. Sicher existiert eine Rechtslinksanpassung, nämlich $(\mathscr{R}, \mathscr{L})$. Wir müssen also nur noch zeigen, daß in unserer Situation alle naiven Verflechtungsquadrate voll kokartesisch sind. Nach 21.5.4.11 reicht es zu zeigen, daß alle naiven Verflechtunsquadrate mit Ausgangsecke in $\mathscr{L}$ voll kokartesisch sind. Es reicht also zu zeigen, daß gegeben

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dotted, "q"] \arrow[d, dashed, "g"'] & X \arrow[d, dashed, "f"] \\ Z \arrow[r, dotted, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

ein kartesisches Diagramm topologischer Räume mit les-Abbildungen f, g in den Vertikalen und ein Komplex $\mathcal{F} \in \mathrm{Hot}^-(\mathrm{skwAb}_{/\!/X})$ alias $\mathcal{F} \in \mathrm{Hot}^+(\mathrm{skwAb}_{/X})$ der Rückzug $q^*\mathcal{F}$ ein $g_{(!)}$-quisrechtsentfalteter Garbenkomplex ist, so daß das entsprechende voll kokartesische Verflechtungsquadrat in $\mathrm{Hot}^-(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}})$ aus der oben beschriebenen Verflechtung voll kokartesisch bleibt in der Lokalisierung. Nach 21.5.2.7 ist aber jede faserweise kompaktweiche abelsche Garbe bereits $g_{(!)}$-quisrechtsentfaltet für jede les-Abbildung g und für eine schwach kompaktweiche abelsche Garbe $\mathcal{F}$ hat offensichtlich ihr Rückzug $q^*\mathcal{F}$ diese Eigenschaft. Mithin erhalten wir durch Lokalisieren mit 21.5.4.6 eine verflochtene Winkelfaserung

$$(\mathrm{Der}^-_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{les}} \leftarrow \mathrm{Der}^{-\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}, \mathrm{Top}^{\mathrm{es}})$$

in Bezug auf die kartesische Regulierung der Basis. Offensichtlich macht in diesem Fall die Verschiebung $[1]$ Verflechtungsquadrate zu Verflechtungsquadraten, so daß unser Flechtbasiswechsel eine im Sinne von 20.2.4.4 verträgliche Transformation von triangulierten Funktoren ist.

Beispiel 21.5.4.18 (**Unbeschränkte derivierte Verflechtung**). Wir erhalten wie in 21.5.4.17 eine verflochtene Winkelfaserung

$$\Big(\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}}) \to \mathrm{Top} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{lesb}} \leftarrow \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{lesb}}}), \mathrm{Top}^{\mathrm{esb}}\Big)$$

und können sie wie zuvor nach Quasiisomorphismen lokalisieren, indem wir wie zuvor die Rechtslinksanpassung $(\mathscr{R}, \mathscr{L})$ beachten mit $\mathscr{R}$ allen Komplexen und $\mathscr{L} := \mathrm{Hot}(\mathrm{skwAb}_{/\!/\,\mathrm{Top}})$ der Linksanpassung durch Komplexe schwach kompaktweicher Garben nach 21.5.2.16. Der Übergang zur Lokalisierung liefert dann wie zuvor eine verflochtene Winkelfaserung

$$(\mathrm{Der}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{lesb}} \leftarrow \mathrm{Der}^{\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{lesb}}}, \mathrm{Top}^{\mathrm{esb}})$$

in Bezug auf die kartesische Regulierung der Basis und wieder macht die Verschiebung $[1]$ Verflechtungsquadrate zu Verflechtungsquadraten, so daß Flechtbasiswechsel eine im Sinne von 20.2.4.4 verträgliche Transformation von triangulierten Funktoren ist.

21.5.5 Rückzug-Schreivorschub derivierter Modulgarben

21.5.5.1. In der hier gegebenen Darstellung baut die Konstruktion von Verflechtungen für derivierte Modulgarben auf der Erkenntnis auf, daß Godementauflösungen halmweise spalten und folglich stets exakt bleiben unter dem Darantensorieren weiterer Modulgarben. Diese Verträglichkeit geigneter kompaktweicher Auflösungen mit Flachheitseigenschaften liefert uns die Rechtslinksanpassungen, die wir zum Lokalisieren der mehr oder weniger offensichtlichen präverflochtenen Winkelfaserungen auf den Homotopiekategorien benötigen. Das wird im folgenden ausgeführt.

21.5.5.2. Sei $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf einem Raum X. Die **Garbe der unstetigen Schnitte von** $\mathcal{F}$ ist die Garbe $\mathrm{G}\mathcal{F}$, die jeder offenen Teilmenge $U \Subset X$ das Produkt der Halme von $\mathcal{F}$ an allen Punkten $x \in U$ zuordnet, in Formeln

$$(\mathrm{G}\mathcal{F})(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

Die Restriktionsabbildungen sind die offensichtlichen. Den durch $s \mapsto (s_x)_{x \in U}$ für $s \in \mathcal{F}(U)$ gegeben Monomorphismus $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathrm{G}\mathcal{F}$ nennen wir den **Godement-Monomorphismus**. Gleichbedeutend können wir die Identität als stetige Abbildung $\delta : X^\delta \to X$ von der mit der diskreten Topologie versehenen Menge X in den topologischen Raum X betrachten. Der Godementmonomorphismus faktorisiert dann in die Einheit der Adjunktion und einen Isomorphismus als $\mathcal{F} \to$

$\delta_{(*)}\delta^{(*)}\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}\mathcal{F}$. Terminologisch wäre es richtiger, von der „Garbe der nicht notwendig stetigen Schnitte“ zu reden, aber so pedantisch will ich hier nicht sein. Analoges gilt für Garben von Moduln über Garben von Ringen.

21.5.5.3. Die Schnitte unserer Garbe der unstetigen Schnitte $\mathrm{G}\mathcal{F}$ sind nur über offenen Teilmengen unstetige Schnitte in den étalen Raum der ursprünglichen Garbe. Die Halme der Garbe der unstetigen Schnitte einer Garbe sind im allgemeinen sehr viel größer als die Halme der ursprünglichen Garbe.

21.5.5.4 (**Halmweises Spalten des Godementmonomorphismus**). Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ oder allgemeiner eine Modulgarbe auf einem Raum X induziert der Godementmonomorphismus $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathrm{G}\mathcal{F}$ spaltende Injektionen auf allen Halmen. In der Tat liefert die entsprechende Projektion für $x \in U \Subset X$ eine Faktorisierung $\mathcal{F}(U) \to (\mathrm{G}\mathcal{F})(U) \to \mathcal{F}_x$ der Abbildung, die jedem Schnitt von $\mathcal{F}$ über U seinen Halm bei x zuordnet. Diese Faktorisierungen sind verträglich mit dem Übergang zu kleineren offenen Umgebungen von x und liefern im Kolimes die gewünschte Spaltung.

21.5.5.5. Sei $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf einem topologischen Raum X oder allgemeiner eine Modularbe auf einem geringten Raum. Die **Godement-Auflösung von** $\mathcal{F}$ ist der exakte Komplex von abelschen Garben $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathrm{G}^0\mathcal{F} \to \mathrm{G}^1\mathcal{F} \to \ldots$, den wir erhalten durch die Vorschrift

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}^0\mathcal{F} &:= \mathrm{G}\mathcal{F} \\
\mathrm{G}^1\mathcal{F} &:= \mathrm{G}(\mathrm{cok}(\mathcal{F} \to \mathrm{G}\mathcal{F})) \text{ und dann induktiv} \\
\mathrm{G}^i\mathcal{F} &:= \mathrm{G}(\mathrm{cok}(\mathrm{G}^{i-2}\mathcal{F} \to \mathrm{G}^{i-1}\mathcal{F})) \text{ für } i \geq 2;
\end{aligned}$$

Jeder Morphismus von abelschen Garben $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ liefert in offensichtlicher Weise einen Morphismus $\mathrm{G}\mathcal{F} \to \mathrm{G}\mathcal{F}'$ zwischen den zugehörigen Garben unstetiger Schnitte und dann induktiv einen Morphismus von Komplexen von Garben $\mathrm{G}^{\lhd}\mathcal{F} \to \mathrm{G}^{\lhd}\mathcal{F}'$. Auf diese Weise wird das Bilden der Godementauflösung $\mathrm{G}^{\lhd}$ ein Funktor.

Lemma 21.5.5.6. *Gegeben X ein geringter Raum und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{/X})$ ein Komplex von Modulgarben ist der offensichtliche Morphismus ein Quasiisomorphismus*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}^{\lhd}\mathcal{F} := \mathrm{tot}\,\mathrm{G}^p(\mathcal{F}^q)$$

in das Summentotal der Godementauflösungen der Einträge unseres Garbenkomplexes und der Abbildungskegel dieses Quasiisomorphismus ist quisflach.

Beweis. Ergänzen wir den Doppelkomplex $\mathrm{G}^p(\mathcal{F}^q)$ durch $\tilde{\mathrm{G}}^{-1}(\mathcal{F}^q) := \mathcal{F}^q$, so erhalten wir einen Doppelkomplex $\tilde{\mathrm{G}}^{\lhd}(\mathcal{F})$ mit exakten p-Teilkomplexen alias Zeilen, die für $p < -1$ verschwindende Einträge haben. Nach dem Exaktheitskriterium 20.3.7.3 und der Vertauschbarkeit der Halmbildung mit Koprodukten ist dann

auch das Summentotal unseres Doppelkomplexes exakt und die erste Behauptung folgt. Die zweite Behauptung folgt ebenso, wenn wir für jeden exakten Komplex $\mathcal{E}$ von Rechtsmodulgarben die Exaktheit des Summentotals des Tripelkomplexes der $\mathcal{E}^r \otimes \tilde{\mathrm{G}}^p(\mathcal{F}^q)$ zeigen können. Wir zeigen das sogar für einen beliebigen Komplex $\mathcal{E}$ von Rechtsmodulgarben. Die p-Teilkomplexe von $\tilde{\mathrm{G}}^p(\mathcal{F}^q)$ sind ja nicht nur exakt, sondern nach 23.2.2.16 sogar halmweise maximal spaltend. Folglich sind auch in unserem Tripelkomplex die p-Teilkomplexe exakt. Sie bleiben exakt beim Übergang zum Summentotal in Bezug auf (r, q), da Koprodukte exakter Garbenkomplexe exakt sind. Der so entstehende Doppelkomplex hat dann wieder exaktes Summentotal mit demselben Argument wie zuvor. □

21.5.5.7 (**Vorarbeiten zur Rechtslinksanpassung bei Garbenkomplexen**). Für jeden quisflachen Komplex $\mathcal{L}$ von Modulgarben auf einem geringten Raum X landet der Quasiisomorphismus $\mathcal{L} \overset{\smile}{\to} \mathrm{G}^{\lhd}\mathcal{L}$ aus 21.5.5.6, dessen Abbildungskegel ja nach 21.5.5.6 stets quisflach ist, selbst in einem quisflachen Komplex $\mathrm{G}^{\lhd}\mathcal{L}$. Dieser Komplex besteht noch dazu aus schwach kompaktweichen Modulgarben, da ja diese Eigenschaft nach 21.5.2.10 erhalten bleibt unter filtrierenden Kolimites. Für einen beliebigen Komplex $\mathcal{F}$ von Modulgarben schließlich finden wir nach 21.2.5.20 einen Quasiisomorphismus $\mathcal{L} \overset{\smile}{\to} \mathcal{F}$ von einem quisflachen Komplex $\mathcal{L}$ nach $\mathcal{F}$. Mit der Funktorialität der Godementauflösung erhalten wir so ein kommutatives Diagramm aus Quasiisomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \to & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{G}^{\lhd}\mathcal{L} & \to & \mathrm{G}^{\lhd}\mathcal{F} \end{array}$$

Hier stehen Komplexe schwach kompaktweicher Garben in der unteren Horizontale und die Vertikalen haben quisflachen Abbildungskegel. Insbesondere ist mit $\mathcal{L}$ auch $\mathrm{G}^{\lhd}\mathcal{L}$ quisflach und für jeden Morphismus $q : W \to X$ von geringten Räumen ist $q^{(*)}\mathcal{F} \to q^{(*)}\mathrm{G}^{\lhd}\mathcal{F}$ ein Quasiisomorphismus, denn der Abbildungskegel von $\mathcal{F} \to \mathrm{G}^{\lhd}\mathcal{F}$ ist exakt und quisflach und bleibt folglich exakt unter $q^{(*)}$.

21.5.5.8 (**Rechtslinksanpassung bei halbseitig beschränkten Komplexen**). Für jeden in Richtung gegen die Differentiale beschränkten Komplex $\mathcal{F} \in \mathrm{Ket}^+$ von Modulgarben auf einem geringten Raum endlicher Torsionsdimension finden wir nach 20.3.6.4 oder genauer 20.3.6.7 einen Quasiisomorphismus $\mathcal{L} \overset{\smile}{\to} \mathcal{F}$ von einem Komplex $\mathcal{L} \in \mathrm{Ket}^+$ von flachen Modulgarben nach $\mathcal{F}$, der dann nach 20.3.6.4 auch quisflach ist. Die Funktorialität der Godementauflösung liefert so dasselbe Diagramm wie in 21.5.5.7 mit Komplexen aus Ket^+.

21.5.5.9 (**Präverflochtene Winkelfaserung der Modulgarbenkomplexe**). Aus der Faserung der Modulgarben auf geringten Räumen $\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Ger}} \to \mathrm{Ger}$ nach 21.1.3.9

erhalten wir wie im Fall abelscher Garben aus 21.4.5.17 eine präverflochtene Winkelfaserung

$$\left(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Ger}} \to \mathrm{Ger} \supset \mathrm{Ger}^{\mathrm{les}} \leftarrow \mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Ger}^{\mathrm{les}}}, \mathrm{Ger}^{\mathrm{es}} \right)$$

mit der durch Kommutativität konstruierten Präverflechtung. Sie liefert in offensichtlicher Weise präverflochtene Winkelfaserungen

$$\left(\mathrm{Hot}^{\sharp}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Ger}}) \to \mathrm{Ger} \supset \mathrm{Ger}^{\mathrm{les}} \leftarrow \mathrm{Hot}^{\sharp}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\,\mathrm{Ger}^{\mathrm{les}}}), \mathrm{Ger}^{\mathrm{es}} \right)$$

für $\sharp$ eine jede unserer vier üblichen Beschränkungsbedingungen. Als Regulierung der Basis nehmen wir an dieser Stelle alle Quadrate, bei denen die zugrundeliegenden Quadrate von topologischen Räumen kartesisch sind.

21.5.5.10 (**Verflochtene halbseitig beschränkt derivierte Modulgarben**). Die in 21.5.5.9 diskutierte präverflochtene Winkelfaserung von halbseitig beschränkten Homotopiekomplexen opponierter Modulgarben aus Hot^{-} läßt sich mit 21.5.4.6 nach Quasiisomorphismen lokalisieren, wenn wir uns weiter einschränken. In der hier diskutierten Variante erlauben wir nur geringte Räume endlicher Torsionsdimension und notieren diese volle Unterkategorie $\mathrm{Gerte} \subset \mathrm{Ger}$. Weiter erlauben wir als ¡-Morphismen in der Basis nur solche Morphismen von geringten Räumen $(X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$, bei denen $f : X \to Y$ eine les-Abbildung ist und $\mathcal{A}_x$ flach als Linksmodul über $\mathcal{B}_{f(x)}$ für alle $x \in X$. Wir notieren $\mathrm{Gerte}^{\mathrm{lesf}} \supset \mathrm{Gerte}^{\mathrm{esf}}$ das multiplikative System dieser Morphismen beziehungsweise besagter Morphismen, die zusätzlich eigentlich sind. So erhalten wir eine präverflochtene Winkelfaserung

$$\left(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Gerte}} \to \mathrm{Gerte} \supset \mathrm{Gerte}^{\mathrm{lesf}} \leftarrow \mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Gerte}^{\mathrm{lesf}}}, \mathrm{Gerte}^{\mathrm{esf}} \right)$$

und eine entsprechend präverflochtene Winkelfaserung auf den Homotopiekategorien. Als Regulierung der Basis wählen wir für das weitere alle Basisquadrate

$$\begin{tikzcd}
(W, \mathcal{D}) \arrow[r, dotted, "q"] \arrow[d, dashed, "g"'] & (X, \mathcal{A}) \arrow[d, dashed, "f"] \\
(Z, \mathcal{C}) \arrow[r, dotted, "p"] & (Y, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

mit der Eigenschaft, daß die zugrundeliegenden topologischen Räume ein kartesisches Quadrat bilden und daß die Multiplikation für alle $w \in W$ mit der Notation $v := fq = pg$ einen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$\mathcal{C}_{g(w)} \otimes_{\mathcal{B}_{v(w)}} \mathcal{A}_{q(w)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_w$$

induziert. Diese Bedingung bedeutet im Fall gekringter Räume, daß unser Quadrat auch in Gek kartesisch ist, aber im Fall nichtkommutativer Koeffizienten bedeutet

sie etwas anderes. Wir nennen unsere Regulierung die **kartesisch-tensorielle Regulierung**. Man beachte, daß diese Regulierung nicht erhalten bleibt unter dem Übergang zu den opponierten Ringgarben. Wir behaupten nun, daß wir daraus mit Satz 21.5.4.6 durch Lokalisierung nach Quasiisomorphismen eine verflochtene Winkelfaserung

$$\left(\mathrm{Der}^{-}_{/\!/\mathrm{Gerte}} \to \mathrm{Gerte} \supset \mathrm{Gerte}^{\mathrm{lesf}} \leftarrow \mathrm{Der}^{-!}_{/\!/\mathrm{Gerte}^{\mathrm{lesf}}}, \mathrm{Gerte}^{\mathrm{esf}} \right)$$

erhalten. Zunächst folgt aus unseren Vorarbeiten in 21.5.5.8, daß die entsprechend beschränkten quisflachen Komplexe zusammen mit den entsprechend beschränkten Komplexen schwach kompaktweicher Modulgarben eine Rechtslinksanpassung bilden. Es bleibt damit nur noch zu zeigen, daß alle naiven Verflechtungsquadrate voll kokartesisch sind. Nun faktorisiert jeder Morphismus $(X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ von geringten Räumen als $(X, \mathcal{A}) \to (X, f^*\mathcal{B}) \to (Y, \mathcal{B})$ und mit $\mathcal{B}$ hat auch $f^*\mathcal{B}$ endliche Torsionsdimension. Jedes erlaubte Basisquadrat läßt sich mithin erhalten als Verklebung der vier erlaubten Basisquadrate

$$\begin{tikzcd}
(W, \mathcal{D}) \arrow[r] \arrow[d] & (W, q^*\mathcal{A}) \arrow[r, "q"] \arrow[d] & (X, \mathcal{A}) \arrow[d] \\
(W, g^*\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & (W, v^*\mathcal{B}) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"] & (X, f^*\mathcal{B}) \arrow[d, "f"'] \\
(Z, \mathcal{C}) \arrow[r] & (Z, p^*\mathcal{B}) \arrow[r, "p"] & (Y, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

Hier schreiben wir $v = pg = fq$ und die Sternchen meinen Rückzüge von Ringgarben. Unter unseren Annahmen ist nun nach 21.5.4.14 und 21.5.4.16 die Menge der voll kokartesischen naiven Verflechtungsquadrate stabil unter Verkleben. Es reicht also für jedes dieser vier Basisquadrate zu zeigen, daß jedes naive Verflechtungsquadrat darüber voll kokartesisch ist. Dabei können wir uns nach 21.5.4.12 zusätzlich auf den Fall beschränken, daß die Ausgangsecke in $\mathscr{R} \cap \mathscr{L}$ liegt, daß sie also ein quisflacher Komplex aus schwach kompaktweichen Modulgarben ist. Gehen wir also unsere vier Fälle der Reihe nach durch. Im Basisquadrat oben rechts sind alle Rückzüge und Schreivorschübe exakt und die offensichtliche Verträglichkeit von Rückzug ohne Ringwechsel und Einschränken der operierenden Ringgarbe in der Kategorie der Modulgarben impliziert direkt, daß jedes naive Verflechtungsquadrat voll kokartesisch ist. Im Basisquadrat unten rechts ist offensichtlich jedes naive Verflechtungsquadrat mit Ausgangsecke in $\mathscr{L}$ voll kokartesisch, denn dann ist die Ausgangsecke ein Komplex schwach kompaktweicher Modulgarben und die Behauptung folgt aus dem bereits behandelten Fall abelscher Garben. Im Basisquadrat oben links folgt die Behauptung

aus der Flachheit von $q^*\mathcal{A}$ über $v^*\mathcal{B}$, die dazu führt, daß quisflache Modulgarbenkomplexe zu quisflachen Modulgarbenkomplexen einschränken, und aus unserer Wahl der Regulierung. Im Basisquadrat unten links schließlich vereinfachen wir zunächst einmal die Notation mit den mittlerweile frei gewordenen Buchstaben zu

$$\begin{tikzcd}
(X, f^*\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & (X, f^*\mathcal{B}) \arrow[d, "f"] \\
(Y, \mathcal{C}) \arrow[r] & (Y, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

für einen Morphismus $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ von Ringgarben auf Y. Es reicht nach 21.5.4.12 zu zeigen, daß für jeden quisflachen Komplex $\mathcal{F}$ in Hot^- von schwach kompaktweichen opponierten Modulgarben auf X das zugehörige naive Verflechtungsquadrat voll kokartesisch ist. Les-Basiswechsel zeigt, daß es ausreicht, das im Fall eines einpunktigen Raums $Y = \mathrm{top}$ zu zeigen. Unsere Ringgarben darauf sind nun schlicht Ringe B, C mit einem Ringhomomorphismus $B \to C$ und X ist ein lokal kompakter Hausdorffraum und $\mathcal{F}$ ein quisflacher Komplex in Hot^- von kompaktweichen opponierten Modulgarben. Es reicht zu zeigen, wir gehen dabei zur nichtopponierten Situation über, daß im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C \otimes_B \mathcal{F} \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed] & \mathcal{F} \arrow[d, dashed] \\
 & f_{(!)}\mathcal{F} \arrow[d, "S"] \\
C \otimes_B \mathcal{G} \arrow[r, dotted] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

mit $\mathcal{G}$ quisflach und einem Quasiisomorphismus als dem mit S markierten Pfeil die linke Vertikale schreikokartesisch wird in der Lokalisierung. Nach 21.5.2.20 reicht es zu zeigen, daß die linke Vertikale nach Vergessen der Operation der Skalare C schreikokartesisch wird in der Lokalisierung. Sei dazu $M^* \xrightarrow{\sim} C$ ein Quasiisomorphismus von einem beschränkten Komplex flacher B-Rechtsmoduln nach C. Wir betrachten das Diagramm von Komplexen abelscher Garben

$$\begin{tikzcd}
M^* \otimes_B \mathcal{F} \arrow[rr] \arrow[d, dashed] & & C \otimes_B \mathcal{F} \arrow[dd, dashed] \\
f_{(!)}(M^* \otimes_B \mathcal{F}) \arrow[r] & M^* \otimes_B f_{(!)}\mathcal{F} \arrow[d] & \\
 & M^* \otimes_B \mathcal{G} \arrow[r] & C \otimes_B \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

Ich behaupte, daß alle durchgezogenen Pfeile Quasiisomorphimen sind. In der obersten und untersten Horizontale folgt das, da $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ quisflach sind. Die mittlere Horizontale ist sogar ein echter Isomorphismus nach der Projektionsformel 21.4.3.2, da M^* ein beschränkter Komplex aus flachen B-Rechtsmoduln ist. Die mittlere Vertikale schließlich ist ein Quasiisomorphismus, da sie aus dem Quasiisomorphismus $f_{(!)}\mathcal{F} \overset{\smile}{\to} \mathcal{G}$ entsteht durch Tensorieren mit einem beschränkten Komplex flacher B-Rechtsmoduln. Wieder nach der Projektionsformel 21.4.3.2 besteht nun der Komplex links oben aus kompaktweichen abelschen Garben, folglich bleibt die linke Vertikale schreikokartesisch in der Lokalisierung. Alles zusammen zeigt, daß auch die rechte Vertikale schreikokartesisch werden muß in der Lokalisierung.

21.5.5.11 (**Verflochtene unbeschränkt derivierte Modulgarben**). Die in 21.5.5.9 diskutierte präverflochtene Winkelfaserung von unbeschränkten Homotopiekomplexen opponierter Modulgarben läßt sich ebenfalls mit 21.5.4.6 nach Quasiisomorphismen lokalisieren, wenn wir uns entsprechend einschränken. In der hier diskutierten Variante erlauben wir beliebige geringte Räume und fordern insbesondere nicht die Endlichkeit der Torsionsdimension, lassen aber als ¡-Morphismen nur solche Morphismen $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ zu, für die $\mathcal{A}_x$ stets ein flacher $\mathcal{B}_{f(x)}$-Modul ist und $f : X \to Y$ eine lesb-Abbildung von topologischen Räumen. Wir notieren diese Morphismen $\mathrm{Ger}^{\mathrm{lesbaf}}$ beziehungsweise $\mathrm{Ger}^{\mathrm{esbaf}}$, wenn sie zusätzlich eigentlich sind. Wir erhalten mit diesen Notationen eine präverflochtene Winkelfaserung

$$\big(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Ger}} \to \mathrm{Ger} \supset \mathrm{Ger}^{\mathrm{lesbaf}} \leftarrow \mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Ger}^{\mathrm{lesbaf}}}, \mathrm{Ger}^{\mathrm{esbaf}}\big)$$

Wir versehen sie mit derselben kartesisch-tensoriellen Regulierung wie im halbseitig beschränkten Fall und behaupten nun für die zugehörige unbeschränkte Homotopiekategorie, daß daraus mit Satz 21.5.4.6 durch Lokalisierung nach Quasiisomorphismen eine verflochtene Winkelfaserung

$$\big(\mathrm{Der}_{/\!/\mathrm{Ger}} \to \mathrm{Ger} \supset \mathrm{Ger}^{\mathrm{lesbaf}} \leftarrow \mathrm{Der}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Ger}^{\mathrm{lesbaf}}}, \mathrm{Ger}^{\mathrm{esbaf}}\big)$$

entsteht. Zunächst folgt aus unseren Vorarbeiten in 21.5.5.7, daß die quisflachen Komplexe zusammen mit den Komplexen schwach kompaktweicher Modulgarben eine Rechtslinksanpassung bilden. Es bleibt damit nur noch zu zeigen, daß alle naiven Verflechtungsquadrate voll kokartesisch sind. Dazu können wir genauso argumentieren wie im halbseitig beschränkten Fall, nur daß wir für M^* eine unbeschränkte flache Auflösung von C zulassen müssen und dürfen, die auch wieder quisflach ist nach 20.3.8.8 und so den benötigten Quasiisomorphismus $M^* \otimes_B f_{(!)}\mathcal{F} \overset{\sim}{\to} M^* \otimes_B \mathcal{G}$ liefert. Daß der Komplex $M^* \otimes_B \mathcal{F}$ aus kompaktweichen Garben besteht, folgt dabei, indem man daß Argument aus dem Beweis

im halbseitig beschränkten Fall um die Bemerkung ergänzt, daß auch filtrierende Kolimites kompaktweicher Garben auf lokal kompakten Hausdorffräumen nach 21.4.2.6 wieder kompaktweich sind. Daß $M^* \otimes_B \mathcal{F}$ dann auch $f_{(!)}$-rechtsentfaltet ist, folgt daraus, daß wir $f : X \to Y$ als eine lesb-Abbildung von topologischen Räumen angenommen hatten.

21.5.5.12 (**Verflochtene unbeschränkt derivierte Kringmodulgarben**). In einer weiteren Variante erlauben wir nur gekringte Räume und lassen als ¡-Morphismen nur solche Morphismen $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ zu, für die $\mathcal{A}_x$ stets ein flacher $\mathcal{B}_{f(x)}$-Modul ist und $f : X \to Y$ ein lesb-Morphismus. Das reicht für die im vorhergehenden gegebene Argumentation, da in diesem Fall $M^* \otimes_B \mathcal{F}$ sogar ein Komplex von B-Moduln ist. Wir notieren diese Morphismen $\mathrm{Gek}^{\mathrm{lesbf}}$ beziehungsweise $\mathrm{Gek}^{\mathrm{esbf}}$, wenn sie zusätzlich eigentlich sind. Dann erhalten wir mit Satz 21.5.4.6 durch Lokalisierung nach Quasiisomorphismen eine verflochtene Winkelfaserung

$$\big(\mathrm{Der}_{/\!/\mathrm{Gek}} \to \mathrm{Gek} \supset \mathrm{Gek}^{\mathrm{lesbf}} \leftarrow \mathrm{Der}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Gek}^{\mathrm{lesbf}}}, \mathrm{Gek}^{\mathrm{esbf}} \big)$$

21.5.5.13. Die drei Varianten für Verflechtungen derivierter Modulgarben aus 21.5.5.10, 21.5.5.11 und 21.5.5.12 haben alle offensichtlich die Zusatzeigenschaft, daß alle Shifts $[1]$ von Verflechtungsquadraten wieder Verflechtungsquadrate sind, so daß die Transformationen der Flechtbasiswechsel verträgliche Transformationen zwischen triangulierten Funktoren sind im Sinne von 20.2.4.4.

Beispiel 21.5.5.14 (**Garbenkohomologie auf kompakten Quadern**). Für jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf $[0,1]^n$ gilt

$$\mathrm{H}^q([0,1]^n; \mathcal{F}) = 0 \quad \text{für } q > n.$$

Im Fall $n = 1$ hatten wir das bereits in 19.4.2.3 gezeigt. Gegeben ein beliebiger Raum X zeigt Basiswechsel für die halbseitig beschränkten derivierten Kategorien damit, daß für die Projektion $\pi : X \times [0,1] \to X$ der Vorschub $\pi_{(!)} = \pi_{(*)}$ auf abelschen Garben endliche homologische Dimension ≤ 1 hat. Mit unserer Abschätzung 20.3.6.4 folgt induktiv, daß $\Gamma : \mathrm{Ab}_{/[0,1]^n} \to \mathrm{Ab}$ homologische Dimension $\leq n$ hat.

Beispiel 21.5.5.15 (**Kompakte Garbenkohomologie auf offenen Quadern**). Für jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf $(0,1)^n$ gilt

$$\mathrm{H}^q_!((0,1)^n; \mathcal{F}) = 0 \quad \text{für } q > n.$$

Ist in der Tat j die Einbettung in den kompakten Quader $[0,1]^n$, so ist $j_{(!)}$ exakt und hat damit endliche homologische Rechtsdimension ≤ 0. Wegen $\Gamma_! = \Gamma \circ j_{(!)}$ folgt die Behauptung mit der Abschätzung 20.3.6.4 aus der Abschätzung 21.5.5.14 im Fall eines kompakten Quaders.

21.5.6 Trennrückzug-Schreivorschub derivierter Modulgarben

Beispiel 21.5.6.1. Die kommutativen Rückholquadrate über kartesischen Quadraten der Basis der Familienwinkelfaserung bilden eine Präverflechtung der Trennaustauschsituation

$$\left(\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Gek}} \to \curlywedge\mathrm{Gek} \supset \mathrm{Gek}^{\mathrm{les}} \leftarrow \mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Gek}^{\mathrm{les}}}, \mathrm{Gek}^{\mathrm{es}} \right)$$

für die kartesische Regulierung der Basis. Durch Übergang zu den Homotopiekomplexen erhalten wir daraus die präverflochtene Trennaustauschsituation der **Homotopiekomplexe von Modulgarben auf gekringten Räumen**

$$\left(\mathrm{Hot}_{/\!/\mathrm{Gek}} \to \curlywedge\mathrm{Gek} \supset \mathrm{Gek}^{\mathrm{les}} \leftarrow \mathrm{Hot}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Gek}^{\mathrm{les}}}, \mathrm{Gek}^{\mathrm{es}} \right)$$

Im folgenden diskutieren wir zwei Fälle, in denen sich Einschränkungen dieser präverflochtenen Trennaustauschsituation nach Quasiisomorphismen lokalisieren lassen.

21.5.6.2 (**Beliebige Komplexe, homologisch endliche Schreimorphismen**). Wir erlauben nur halmweise flache Morphismen f mit $f_{(!)}$ homologisch endlich als Schreimorphismen beziehungsweise Eigmorphismen der Basis. Wir erinnern dafür aus 21.5.5.12 die Notationen $\mathrm{Gek}^{\mathrm{lesbf}}$ beziehungsweise $\mathrm{Gek}^{\mathrm{esbf}}$ und notieren diese präverflochtene Trennaustauschsituation

$$\left(\mathrm{Hot}_{/\!/\mathrm{Gek}} \to \curlywedge\mathrm{Gek} \supset \mathrm{Gek}^{\mathrm{lesbf}} \leftarrow \mathrm{Hot}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Gek}^{\mathrm{lesbf}}}, \mathrm{Gek}^{\mathrm{esbf}} \right)$$

Als Regulierung nehmen wir die kartesische Regulierung der Basis, also alle kartesischen Quadrate der Familienkategorie $\mathscr{T}^{\curlywedge}$ mit lesbf-Morphismen in allen Vertikalen. Wir zeigen gleich, daß in der zugrundeliegenden einfachen Kategorie Gek alle kartesischen Quadrate mit einem lesbf-Morphismus in einer Kante des Ausgangswinkels auch einen lesbf-Morphismus in der zurückgezogenen Kante aus dem Faserprodukt haben.

Lemma 21.5.6.3. *In der Kategorie* Gek *aller gekringten Räume bilden die lesbf-Morphismen ein rückzugstabiles multiplikatives System.*

Beweis. Daß sie ein multiplikatives System bilden, ist klar. Gegeben ein kartesisches Diagramm $pg = fq$ von gekringten Räumen mit les-Abildungen f, g gilt es noch zu zeigen, daß mit $f_{(!)} : \mathrm{Ab}_{(X,\mathcal{A})} \to \mathrm{Ab}_{(Y,\mathcal{B})}$ auch $g_{(!)} : \mathrm{Ab}_{(W,\mathcal{D})} \to \mathrm{Ab}_{(Z,\mathcal{C})}$ endliche homologische Dimension hat. Mit Basiswechsel reicht es im Fall einpunktiger Räume Y, Z und $W = X$ zu zeigen, daß die homologische Dimension von $g_{(!)}$ beschränkt ist durch die homologische Dimension von $f_{(!)}$. In 21.5.2.20 hatten wir diskutiert, inwiefern der derivierte Schreivorschub unter

les-Morphismen mit dem Vergessen etwaiger Modulstrukturen vertauscht. Gibt es also N derart, daß für jedes $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/(X,\mathcal{A})}$ gilt $\mathrm{R}^n f_{(!)}\mathcal{F} = 0$ für $n \geq N$, so gilt dasselbe a forteriori für jedes $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/(X,\mathcal{D})}$, da wir es ja mit $\mathcal{A} \to \mathcal{D}$ zu einer $\mathcal{A}$-Modulgarbe einschränken können. □

21.5.6.4 (**Halbseitig beschränkte Komplexe, beschränkte Torsion**). Wir gehen in 21.5.6.1 über zur Regulierung, die von allen kartesischen Quadraten in Gek aus Objekten von Gekte mit lesf-Morphismen als Vertikalen sowie allen Projektionsformelquadraten zu einem lesf-Morphismus in Gekte erzeugt wird. Weiter betrachten wir nur Komplexe aus Hot^-, lassen aber beliebige lesf-Morphismen f als Schreimorphismen und beliebige esf-Morphisen als Eigmorphismen der Basis zu. Wir verwenden für diese präverflochtene Trennaustauschsituation die Notation

$$\left(\mathrm{Hot}^-_{/\!/\mathrm{Gekte}} \to \curlywedge\mathrm{Gekte} \supset \mathrm{Gekte}^{\mathrm{lesf}} \leftarrow \mathrm{Hot}^{-\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Gekte}^{\mathrm{lesf}}}, \mathrm{Gekte}^{\mathrm{esf}} \right)$$

Diese technische Variante wird insbesondere zum Prüfen die Bedingungen der ersten Variante benötigt. Ich weiß nicht, ob Faserprodukte in der Kategorie Gekte der gekringten Räume endlicher Torsionsdimension existieren und inwieweit sie mit den Faserprodukten in Gek übereinstimmen. Die Regulierung erlaubt uns, diese Schwierigkeiten zu umgehen.

Satz 21.5.6.5 (Trennaustausch für unbeschränkt derivierte Modulgarben). *Die Familienwinkelfaserung der präverflochtenen Trennaustauschsituation aus 21.5.6.2 für unbeschränkte Homotopiekomplexe von Modulgarben auf gekringten Räumen besitzt eine Rechtslinksanpassung in Bezug auf Quasiisomorphismen und liefert durch Lokalisieren mit Satz 21.5.4.6 eine verflochtene Trennaustauschsituation*

$$\left(\mathrm{Der}_{/\!/\mathrm{Gek}} \to \curlywedge\mathrm{Gek} \supset \mathrm{Gek}^{\mathrm{lesbf}} \leftarrow \mathrm{Der}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Gek}^{\mathrm{lesbf}}}, \mathrm{Gek}^{\mathrm{esbf}} \right)$$

für die kartesische Regulierung der Basis.

21.5.6.6. Per definitionem ist in dieser Trennaustauschsituation die Trennfaserung $\mathrm{Der}_{/\!/\mathrm{Gek}} \to \curlywedge\mathrm{Gek}$ unsere derivierte Garbenoptrennfaserung aus 21.2.9.3 und

21.5.6.7. Einen anderen Zugang zu noch allgemeineren Aussagen in dieser Richtung kann man in der Dissertation von Recktenwald [**?**] finden, die ihrerseits auf dem Formalismus von Hörmann [**?**] aufbaut.

Beweis. Aus unseren Vorarbeiten in 21.5.5.7 folgt, daß die Tupel quisflacher Komplexe zusammen mit den Tupeln aus Komplexen schwach kompaktweicher Modulgarben eine Rechtslinksanpassung der Familienwinkelfaserung bilden. Damit bleibt nur noch zu zeigen, daß alle naiven Verflechtungsquadrate voll kokartesisch sind. Nach 21.5.4.7 reicht es aus, das für naive Verflechtungsquadrate über

allen elementaren kartesischen Trennquadraten mit lesbf-Vertikalen im Sinne von 21.4.4.12 zu zeigen, denn aus ihnen können wir nach 21.4.4.12 durch Vertupeln und Verkleben alle erlaubten Basisquadrate unserer Regulierung erhalten, da sie nach 21.5.6.3 ein rückzugstabiles multiplikatives System bilden. Im Fall kartesischer Quadrate mit Einstrennungen in den Horizontalen haben wir bereits in 21.5.5.12 geprüft, daß alle naiven Verflechtungsquadrate darüber voll kokartesisch sind. Im Fall kartesischer Quadrate mit Leertrennungen in den Horizontalen ist eh klar, daß alle naiven Verflechtungsquadrate darüber voll kokartesisch sind. Damit bleibt uns nur noch der Fall der Projektionsformelquadrate alias aller erlaubten Basisquadrate der Gestalt

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(\mathrm{id}_X, f)"] \arrow[d, "f"'] & X \curlywedge Y \arrow[d, "f \curlywedge \mathrm{id}_Y"] \\ Y \arrow[r, "(\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_Y)"] & Y \curlywedge Y \end{tikzcd}$$

Wir können f faktorisieren in $(X, \mathcal{A}) \to (X, f^*\mathcal{B}) \to (Y, \mathcal{B})$ und dürfen die beiden Faktoren getrennt betrachten. Im Fall $(X, \mathcal{A}) \to (X, f^*\mathcal{B})$ reicht es zu zeigen, daß für jeden quisflachen Komplex $\mathcal{G}$ von $f^*\mathcal{B}$-Moduln und jeden Komplex $\mathcal{F}$ von $\mathcal{A}$-Moduln der offensichtliche Morphismus ein Quasiisomorphismus

$$(\mathrm{res}_{\mathcal{A}}^{f^*\mathcal{B}} \mathcal{F}) \otimes_{f^*\mathcal{B}} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{res}_{\mathcal{A}}^{f^*\mathcal{B}}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A} \otimes_{f^*\mathcal{B}} \mathcal{G}))$$

ist. Das ist sogar ohne alle Annahmen an $\mathcal{G}$ offensichtlich. Im Fall $(X, f^*\mathcal{B}) \to (Y, \mathcal{B})$ reicht es zu zeigen, daß für $\mathcal{F} \in \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/X})$ ein Komplex schwach kompaktweicher Garben und $\mathcal{G} \in \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/Y})$ ein quisflacher Komplex von flachen Modulgarben das naive Verflechtungsquadrat voll kokartesisch ist. In diesem Fall ist $\mathcal{F} \curlywedge \mathcal{G}$ quisrechtsentfaltet für die obere Horizontale und quislinksentfaltet für die rechte Vertikale und $\mathcal{F} \otimes_{f^*\mathcal{B}} f^*\mathcal{G}$ besteht nach 21.4.3.10 aus faserweise kompaktweichen Garben, ist also quislinksentfaltet für die linke Vertikale, und $f_{(!)}\mathcal{F} \curlywedge \mathcal{G}$ ist quisrechtsentfaltet für die untere Horizontale und der von der Präverflechtung der Homotopiekategorien herrührende Morphismus ist nach 21.4.3.10 ein Isomorphismus

$$f_{(!)}(\mathcal{F} \otimes_{f^*\mathcal{B}} f^*\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} (f_{(!)}\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{G}$$

von Komplexen in der opponierten Garbenkategorie. Das zeigt, daß auch in diesem Fall unser naives Verflechtunsquadrat voll kokartesisch ist. □

Satz 21.5.6.8 (Trennaustausch für halbseitig derivierte Modulgarben). *Die Familienwinkelfaserung der präverflochtenen Trennaustauschsituation für halbseitig beschränkte Homotopiekomplexe von Modulgarben auf gekringten Räumen aus 21.5.6.4 besitzt eine Rechtslinksanpassung in Bezug auf Quasiisomorphismen*

und liefert durch Lokalisieren mit Satz 21.5.4.6 eine verflochtene Trennaustauschsituation

$$\left(\mathrm{Der}^{-}_{/\!/\mathrm{Gekte}} \to \curlywedge\mathrm{Gekte} \supset \mathrm{Gekte}^{\mathrm{lesf}} \leftarrow \mathrm{Der}^{-\mathsf{i}}_{/\!/\mathrm{Gekte}^{\mathrm{lesf}}}, \mathrm{Gekte}^{\mathrm{esf}}\right)$$

21.5.6.9. Die Regulierung wird hier erzeugt von allen kartesischen Quadraten in Gek aus Objekten von Gekte mit lesf-Morphismen als Vertikalen sowie allen Projektionsformelquadrate zu einem lesf-Morphismus in Gekte. Mit 21.4.4.12 folgt, daß zur Regulierung insbesondere alle kartesischen Quadrate der Familienkategorie gehören, die aus konstant mit einem festen Kring endlicher Torsionsdimension gekringten Räumen bestehen. Halten wir so einen Kring fest, so erhalten wir also eine verflochtene Trennaustauschsituation über der kartesischen Regulierung der Basis, und ist dieser Kring $\mathbb{Z}$, so ist das eine verflochtene Trennaustauschsituation

$$\left(\mathrm{Der}^{-}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{les}} \leftarrow \mathrm{Der}^{-\mathsf{i}}_{/\!/\mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}, \mathrm{Top}^{\mathrm{es}}\right)$$

Die Notwendigkeit einer feineren Regulierung im Satz rührt daher, daß mir nicht klar ist, ob Pushouts von Kringen endlicher Torsionsdimension stets wieder endliche Torsionsdimension haben, wenn einer der Morphismen flach ist.

Beweis. Mutatis mutandis bleibt der Beweis derselbe, wir müssen nur 21.5.5.8 und 21.5.5.10 zitieren. □

Ergänzung 21.5.6.10. Will man allgemeiner Schreivorschub unter nicht notwendig flachen Kringgarbenkomorphismen zulassen, so wird man mit differentiellen graduierten Kringgarben arbeiten müssen.

Beispiel 21.5.6.11. Gegeben ein Kringhomomorphismus $k \to K$ und eine lesb-Abbildung $f : X \to Y$ betrachten wir das kartesische Diagramm konstant gekringter Räume

$$\begin{tikzcd}
(X,K) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"] & (X,k) \arrow[d, "f"] \\
(Y,K) \arrow[r, "p"] & (Y,k)
\end{tikzcd}$$

Der zugehörige Verflechtungsisomorphismus in der unbeschränkten Situation aus 21.5.6.5 präzisiert die Verträglichkeit von $f_!$ mit der Erweiterung der Skalare $K \otimes^{\mathrm{L}}_k$. Im Fall eines einpunktigen Raums Y mag man sie das **universelle Koeffiziententheorem der kompakten Kohomologie** nennen. Mit 21.5.6.5 folgt es allgemeiner, wenn $f_{(!)}$ nur auf der Kategorie der Garben von k-Moduln und a fortiori von K-Moduln endliche homologische Dimension hat. Mit 21.5.6.8 folgt es dahingegen für beliebige les-Abbildungen, wenn wir k und K von endlicher Torsionsdimension annehmen und nur halbseitig beschränkte Komplexe betrachten.

Beispiel 21.5.6.12 (**Das universelle Koeffiziententheorem in einem Spezialfall**). Im Fall $X = S^1$ und $Y = \mathrm{top}$ und dem Kringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und der nichtkonstanten aber lokal zur konstanten Garbe $\mathbb{Z}$ isomorphen abelschen Garbe $\mathcal{M}$ auf S^1 ist $q^*\mathcal{M} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}$ die konstante Garbe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und wir erhalten $g_! q^* \mathcal{M} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus [-1]\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Um andererseits $f_!\mathcal{M}$ zu bestimmen, erinnern wir die Mayer-Vietoris-Sequenz der lokalen Kohomologie 19.4.9.26 und finden, daß nur $\mathrm{H}^1_!(S^1; \mathcal{M})$ von Null verschieden ist und isomorph ist zum Kokern der Abbildung $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ gegeben durch $(a, b) \mapsto (a + b, a - b)$ alias $\mathrm{H}^1_!(S^1; \mathcal{M}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $f_!\mathcal{M} \cong [-1]\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Damit ergibt sich $p^* f_! \mathcal{M} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus [-1]\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und wie behauptet $g_! q^* \mathcal{M} \cong p^* f_! \mathcal{M}$.

Beispiel 21.5.6.13 (**Die Künnethformel der kompakten Kohomologie**). Gegeben lokal kompakte Hausdorffräume X, Y betrachten wir in der Familienkategorie der banalen Trennkategorie topologischer Räume das kartesische Diagramm mit les-Vertikalen

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r] \arrow[d, "c := c_{X \times Y}"'] & X \curlywedge Y \arrow[d, "c_X \curlywedge c_Y"] \\ \mathrm{top} \arrow[r] & \mathrm{top} \curlywedge \mathrm{top} \end{tikzcd}$$

Die Verflechtung in der verflochtenen Trennaustauschsituation der halbseitig derivierten abelschen Garben 21.5.6.9 in unserem kartesischen Diagramm mit der Diagonale als unterer Horizontale liefert einen Isomorphismus $c_{X!}\mathbb{Z}_X \otimes c_{Y!}\mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} c_!(\mathbb{Z}_X \boxtimes \mathbb{Z}_Y)$. Aus 21.1.5.22 erhalten wir weiter einen Isomorphismus $\underline{X \times Y} \xrightarrow{\sim} \underline{X} \boxtimes \underline{Y}$ oder in anderer Notation $\mathbb{Z}_{X \times Y} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X \boxtimes \mathbb{Z}_Y$. Alles in allem erhalten wir so einen Isomorphismus

$$c_{X!}\mathbb{Z}_X \otimes c_{Y!}\mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} c_!\mathbb{Z}_{X \times Y}$$

in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\mathrm{top}}) = \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$. Das Tensorprodukt ist bis hierher stets deriviert als $\otimes = \otimes^{\mathrm{L}}$ zu verstehen. Mit der abstrakten Künnethformel 20.3.8.23 erhalten wir daraus, jetzt aber mit $\otimes$ als underiviertem Tensorprodukt, natürliche unnatürlich spaltende kurze exakte Sequenzen von abelschen Gruppen

$$\bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}^p_! X \otimes \mathrm{H}^q_! Y \;\hookrightarrow\; \mathrm{H}^n_!(X \times Y) \;\twoheadrightarrow\; \bigoplus_{p+q=n+1} \mathrm{H}^p_! X * \mathrm{H}^q_! Y$$

Beispiel 21.5.6.14 (**Künnethformel mit Koeffizienten**). Gegeben ein Kring k endlicher Torsionsdimension und lokal kompakte Hausdorffräume X, Y liefert unsere Trennverflechtung für halbseitig derivierte Modulgarben 21.5.6.9 in derselben Weise in $\mathrm{Der}(\mathrm{Mod}_k)$ einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$c_{X!}k_X \otimes c_{Y!}k_Y \xrightarrow{\sim} c_!k_{X \times Y}$$

Dasselbe folgt für einen beliebigen Kring k und lesb-Räume X, Y aus unserer Trennverflechtung für beidseitig derivierte Modulgarben 21.5.6.5.

21.5.7 Schreirückzug für derivierte Modulgarben

Satz 21.5.7.1. *Für jeden lesb-Morphismus gekringter Räume $f : X \to Y$ besitzt der Schreivorschub $f_! : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ einen Rechtsadjungierten, den* **Schreirückzug**

$$f^! : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$$

21.5.7.2 (**Notationsfragen**). Für die Funktoren auf abelschen Garben, die wir bisher $f^!$ notiert hatten, vereinbaren wir die neue Notation $f^{(!)}$.

21.5.7.3. Der Beweis des Satzes benötigt größere Vorbereitungen und wird für abelsche Garben in 21.5.7.21 und für Modulgarben in 21.5.7.26 gegeben. Zunächst diskutieren wir einige Spezialfälle, die leichter zu haben sind, und erste Eigenschaften. Dann beginnen wir mit Vorbereitungen zum Beweis.

21.5.7.4 (**Schreirückzug unter separierten étalen Abbildungen**). Im Fall offener Einbettungen f und allgemeiner im Fall separierter étaler Abbildungen f liefern 19.4.9.9 beziehungsweise 19.6.5.1 sogar eine Adjunktion $(f_{(!)}, f^*)$ exakter Funktoren auf den entsprechenden Kategorien abelscher Garben. Sie führt ohne weitere Schwierigkeiten zu einer Adjunktion $(f_!, f^*)$ der zugehörigen derivierten Funktoren und liefert damit sowohl die Existenz des Rechtsadjungierten $f^!$ als auch eine Isotransformation $f^* \overset{\sim}{\Rightarrow} f^!$ im Fall derivierter abelscher Garben. Dasselbe gilt im Fall von Modulgarben für einen separierten étalen Morphismus f von gekringten Räumen „ohne Ringwechsel", also mit $\mathcal{A} = f^*\mathcal{B}$.

21.5.7.5 (**Schreirückzug unter lokal abgeschlossenen Einbettungen**). Im Fall lokal abgeschlossener Einbettungen f ist $f_{(!)} = f_*$ ein exakter Funktor auf den zugrundeliegenden Kategorien abelscher Garben und besitzt dort nach 19.6.4.16 einen Rechtsadjungierten, den wir von nun an neu $f^{(!)} : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/Y}$ notieren und der jeder Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ auf Y die Garbe $f^{(!)}\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ der Schnitte von $\mathcal{F}$ mit Träger in X zuordnet. Da jeder Garbenkomplex nach 21.2.3.2 eine Quisrechtsentfaltung besitzt, existiert in diesem Fall der Rechtsderivierte auf der ganzen derivierten Kategorie und ist dann nach 20.3.2.28 der gesuchte Rechtsadjungierte $f^! = \mathrm{R}f^{(!)}$. Die $\mathcal{H}^q f^!\mathcal{F} = \mathrm{R}^q f^{(!)}\mathcal{F}$ für $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ sind in diesem Fall unsere lokalen Kohomologiegarben von $\mathcal{F}$ mit Träger in X aus 19.6.4.19. Dasselbe gilt im Fall von Modulgarben für einen separierten étalen Morphismus f von gekringten Räumen „ohne Ringwechsel", also mit $\mathcal{A} = f^*\mathcal{B}$.

Beispiel 21.5.7.6 (**Problematik einer naiven Konstruktion des Schreirückzugs**). Für die konstante Abbildung $c : \mathbb{R} \to \mathrm{pt}$ der Zahlengerade auf einen Punkt besitzt $c_{(!)} : \mathrm{Ab}_{/\mathbb{R}} \to \mathrm{Ab}_{/\mathrm{pt}}$ keinen Rechtsadjungierten, da der Funktor $c_{(!)}$ sonst nach 19.2.4.12 rechtsexakt sein müßte. Das ist er jedoch nicht, denn der Epimorphismus der konstanten Garbe auf den Wolkenkratzer am Ursprung $\mathbb{Z}_{\mathbb{R}} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_{(0)}$ wird unter $c_{(!)}$ die Einbettung $0_{\mathrm{pt}} \hookrightarrow \mathbb{Z}_{\mathrm{pt}}$ und diese ist kein Epimorphismus.

21.5.7.7 (**Homologische Breite des Schreirückzugs**). Ist $f : X \to Y$ eine les-Abbildung in Top mit $f_{(!)}$ von einer homologischen Dimension $\leq d$, so gilt

$$\mathcal{G} \in \mathrm{Der}^{\geq 0}(\mathrm{Ab}_{/Y}) \Rightarrow f^!\mathcal{G} \in \mathrm{Der}^{\geq -d}(\mathrm{Ab}_{/X})$$

In der Tat reicht es dafür nach 20.2.7.12 zu zeigen, daß gilt $\mathrm{Der}_{/X}(\mathcal{F}, f^!\mathcal{G}) = 0$ für alle $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}^{\leq -d-1}(\mathrm{Ab}_{/X})$. Das folgt mit unserer Adjunktion aus der Erkenntnis $f_!\mathcal{F} \in \mathrm{Der}^{\leq -1}(\mathrm{Ab}_{/X})$, die hinwiederum von unseren Erkenntnissen 20.3.6.4 zum Derivieren homologisch endlicher Funktoren herkommt, da wir ja aus 21.2.3.2 wissen, daß jeder Komplex abelscher Garben eine Quisrechtsentfaltung besitzt. Ist zusätzlich $\mathrm{Ab}_{/Y}$ von endlicher homologischer Dimension $\leq r$, so zeigen wir zusätzlich

$$\mathcal{G} \in \mathrm{Der}^{\leq 0}(\mathrm{Ab}_{/Y}) \Rightarrow f^!\mathcal{G} \in \mathrm{Der}^{\leq r}(\mathrm{Ab}_{/X})$$

Nach 20.2.6.35 reicht es in der Tat, für $q > r$ und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ das Verschwinden $\mathrm{Der}_{/X}(\mathcal{F}[-q], f^!\mathcal{G}) = 0$ zu zeigen alias $\mathrm{Der}_{/Y}(f_!\mathcal{F}, \mathcal{G}[q]) = 0$. Nach Annahme und 20.3.6.8 ist aber $\mathcal{G}[q]$ für $q > r$ quasiisomorph zu einem quisrechtsentfalteten Komplex in $\mathrm{Hot}^{<0}(\mathrm{Ab}_{/Y})$. Für Modulgarben gilt mutatis mutandis dasselbe.

Satz 21.5.7.8 (**Darstellbarkeit von Funktoren auf Garben**). *Seien $\mathfrak{U}$ ein Universum und X ein topologischer Raum aus $\mathfrak{U}$. Ein Funktor $\mu : \mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ ist genau dann darstellbar alias isomorph zu einem Funktor der Gestalt $\mathcal{F} \mapsto \mathrm{Ab}_{/X}(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ mit $\mathcal{C} \in \mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X}$, wenn er mit Kolimites über $\mathfrak{U}$-punktkleine Köcher vertauscht.*

Beweis. Daß ein darstellbarer Funktor mit Kolimites vertauschen muß, ist eh klar. Sind weiter eine abelsche Garbe $\mathcal{C} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und natürliche Bijektionen

$$\mu(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/X}(\mathcal{F}, \mathcal{C})$$

gegeben, so erhalten wir mit $\mathcal{F} = \mathbb{Z}_{U \subset X} := i_{(!)}\mathbb{Z}_U$ für $i : U \hookrightarrow X$ die Einbettung einer offenen Teilmenge Bijektionen $\mu(\mathbb{Z}_{U \subset X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(U)$. Für $V \Subset U$ muß darüber hinaus der offensichtliche Morphismus $\mathbb{Z}_{V \subset X} \to \mathbb{Z}_{U \subset X}$ zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mu(\mathbb{Z}_{U \subset X}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathcal{C}(U) \arrow[d, "\mathrm{res}_U^V"] \\
\mu(\mathbb{Z}_{V \subset X}) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{C}(V)
\end{tikzcd}$$

mit besagten Bijektionen in den Horizontalen führen. Damit ist der weitere Gang des Beweises klar: Wir konstruieren zu unserem Funktor μ eine abelsche Prägarbe $\mathcal{C}_\mu$ durch die Vorschrift

$$\mathcal{C}_\mu(U) := \mu(\mathbb{Z}_{U \subset X})$$

und zeigen, daß sie unter unseren zusätzlichen Annahmen eine Garbe ist, die den Funktor μ darstellt. Um zu zeigen, daß $\mathcal{C}_\mu$ eine Garbe ist, betrachten wir ein System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von offenen Teilmengen mit Vereinigung $V \Subset X$ und das Diagramm

$$\bigoplus_{(U,U')\in\mathcal{U}^2} \mathbb{Z}_{(U\cap U')\subset X} \rightrightarrows \bigoplus_{U\in\mathcal{U}} \mathbb{Z}_{U\subset X} \to \mathbb{Z}_{V\subset X}$$

mit den beiden ersten Pfeilen gegeben einerseits durch $\mathbb{Z}_{(U\cap U')\subset X} \to \mathbb{Z}_{U\subset X}$ und andererseits durch $\mathbb{Z}_{(U\cap U')\subset X} \to \mathbb{Z}_{U'\subset X}$. An den Halmen erkennt man, daß hier $\mathbb{Z}_{V\subset X}$ der Kolimes der linken Hälfte unseres Diagramms alias der Koegalisator der beiden linken Pfeile ist. Kommutiert μ mit Kolimites, so muß mithin $\mathcal{C}_\mu$ eine abelsche Garbe sein. Es bleibt noch zu zeigen, daß diese abelsche Garbe auch in der Tat den Funktor μ darstellt. Bezeichne dazu Off_X die Kategorie der offenen Teilmengen von X mit Inklusionen als Morphismen und $J : \mathrm{Off}_X \to \mathrm{Ab}_{/X}$ den Funktor $U \mapsto \mathbb{Z}_{U\subset X}$. Nun betrachten wir für alle $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ die Verknüpfungen

$$\begin{tikzcd}
\mu(\mathcal{F}) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Cat}(\mathrm{Ab}_{/X}, \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}})(\mu, \mathrm{Ab}_{/X}(\ \ ,\mathcal{F})) \arrow[d, "\circ J"] \\
\mathrm{Ab}_{/X}(\mathcal{F}, \mathcal{C}_\mu) & \mathrm{Cat}(\mathrm{Off}_X, \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}})(\mu\circ J, \mathrm{Ab}_{/X}(\ \ ,\mathcal{F})\circ J) \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

der Identifikation des Yoneda-Lemmas mit einigen weiteren offensichtlichen Abbildungen unter Verwendung von $\mathrm{Ab}_{/X}(\ \ ,\mathcal{F}) \circ J \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathcal{F} : \mathrm{Off}_X \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$. Sie bilden eine Transformation $\tau : \mu \Rightarrow \mathrm{Ab}_{/X}(\ \ ,\mathcal{C}_\mu)$ von Funktoren $\mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$, die auf allen Objekten der Gestalt $\mathbb{Z}_{U\subset X}$ Isomorphismen $\tau : \mu(\mathbb{Z}_{U\subset X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_{U\subset X}, \mathcal{C}_\mu)$ induziert. Es gilt zu zeigen, daß sie auf überhaupt allen Objekten $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ Isomorphismen $\tau : \mu(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/X}(\mathcal{F}, \mathcal{C}_\mu)$ induziert. Da beide Seiten mit Kolimites vertauschen, folgt das zunächst für beliebige direkte Summen von Kopien unserer $\mathbb{Z}_{U\subset X}$. Jede abelsche Garbe ist aber Quotient einer derartigen direkten Summe und dann auch Kokern eines Morphismus zwischen zwei derartigen direkten Summen, und so folgt es dann für $\mathcal{F}$ beliebig. □

Satz* 21.5.7.9 (Darstellbarkeit von Funktoren auf Modulgarben). *Seien $\mathfrak{U}$ ein Universum und $X = (X, \mathcal{A})$ ein geringter Raum aus $\mathfrak{U}$. Ein Funktor $\mu : \mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ ist genau dann darstellbar alias isomorph zu einem Funktor der Gestalt $\mathcal{F} \mapsto \mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X}(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ mit $\mathcal{C} \in \mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X}$, wenn er mit Kolimites über $\mathfrak{U}$-punktkleine Köcher vertauscht.*

Beweis. Indem wir auf $\hat{\mu} : \mathcal{G} \mapsto \mu(\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G})$ unseren vorherigen Satz anwenden, erkennen wir, daß dieser Funktor dargestellt wird durch die abelsche Garbe $\mathcal{C}$ mit Schnitten $\mathcal{C}(U) := \mu(\mathcal{A}_{U\subset X})$. Versehen wir nun $\mathcal{C}$ mit seiner offensichtlichen Struktur als $\mathcal{A}$-Modulgarbe, so erhalten wir Abbildungen

$$\mu(\mathcal{F}) \to \mathrm{Ab}_{/X}(\mathcal{F}, \mathcal{C})$$

durch die Vorschrift, daß wir $\alpha \in \mu(\mathcal{F})$ abbilden auf die $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{C}(U)$ für $U \Subset X$ gegeben dadurch, daß wir zu $s \in \mathcal{F}(U)$ den Morphismus $\tilde{s} : \mathcal{A}_{U \subset X} \to \mathcal{F}$ mit $1 \mapsto s$ betrachten und dazu $\mu(\tilde{s}) : \mu(\mathcal{F}) \to \mu(\mathcal{A}_{U \subset X})$ bilden und dann $\alpha_U(s) := (\mu(\tilde{s}))(\alpha)$ setzen. Gehen wir die Definitionen durch, so ergibt sich, daß unsere Abbildungen zu Isomorphismen $\mu(\mathcal{A}_{U \subset X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/X}(\mathcal{A}_{U \subset X}, \mathcal{C})$ spezialisieren. Da aber jede $\mathcal{A}$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ Kokern eines Morphismus zwischen direkten Summen von Kopien gewisser $\mathcal{A}_{U \subset X}$ ist und da beide Seiten mit Kolimites vertauschen, muß unsere Abbildung für alle $\mathcal{A}$-Modulgarben $\mathcal{F}$ ein Isomorphismus sein. □

Korollar 21.5.7.10. *Seien $\mathfrak{U}$ ein Universum und X ein topologischer Raum oder allgemeiner ein geringter Raum und $\mathcal{D}$ eine abelsche $\mathfrak{U}$-Kategorie. Ein Funktor $\Lambda : \mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X} \to \mathcal{D}$ besitzt genau dann einen Rechtsadjungierten, wenn er mit Kolimites über $\mathfrak{U}$-punktkleine Köcher vertauscht.*

Beweis. Jeder Funktor, der einen Rechtsadjungierten besitzt, vertauscht mit Kolimites. Andererseits vertauscht auch für alle $D \in \mathcal{D}$ der Funktor $\mathcal{D} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}, A \mapsto \mathcal{D}(A, D)$ mit Kolimites. Vertauscht weiter Λ mit Kolimites, so auch die Verknüpfung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ab}_{/X} & \to & \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}} \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{D}(\Lambda\mathcal{F}, D) \end{array}$$

Nach dem Darstellbarkeitskriterium 21.5.7.8 beziehungsweise 21.5.7.9 ist unsere Verknüpfung also darstellbar durch eine abelsche Garbe $RD \in \mathrm{Ab}_{/X}$. Man sieht nun ohne Mühe, daß wir damit schon den gesuchten Rechtsadjungierten R zu Λ konstruiert haben. □

Beispiel 21.5.7.11 (**Spezialfälle des Schreirückzugs**). Gegeben eine les-Abbildung $f : X \to Y$ vertauscht der Schreivorschub $f_{(!)} : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/Y}$ nach 21.4.2.4 mit filtrierenden Kolimites. Ist $f_{(!)}$ zusätzlich exakt, etwa für f eine lokal abgeschlossene Einbettung oder eine separierte étale Abbildung, so vertauscht es mithin mit beliebigen Kolimites und besitzt nach 21.5.7.10 einen Rechtsadjungierten

$$f^{(!)} : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/X}$$

Gegeben eine Garbe $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ finden wir für ihren Schreirückzug immer im Fall, daß der Schreivorschub exakt ist, sogar die explizite Beschreibung

$$(f^{(!)}\mathcal{G})(U) = \mathrm{Ab}_{/Y}(f_{(!)}(\mathbb{Z}_{U \subset X}), \mathcal{G})$$

In diesem Fall erhalten wir nach 20.3.2.28 auch auf den derivierten Funktoren ein adjungiertes Paar $(f_!, \mathrm{R}f^{(!)})$ und so eine vergleichsweise explizite Beschreibung des Schreirückzugs auf den derivierten Kategorien. Im Fall étaler separierter Abbildungen f erhalten wir so ein weiteres Mal unseren ausgezeichneten Isomorphismus $f^{(!)} \overset{\sim}{\Rightarrow} f^{(*)}$ aus 19.6.5.1.

21.5.7.12. Gegeben ein topologischer Raum X mit einer offenen Teilmenge $U \Subset X$ und eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ erklären wir ganz allgemein die abelsche Garbe $\mathcal{F}_{U \subset X} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ durch die Vorschrift

$$\mathcal{F}_{U \subset X} := j_{(!)} j^{(*)} \mathcal{F}$$

für $j : U \to X$ die Einbettung. Da beide fraglichen Funktoren exakt sind, fällt diese Garbe auch zusammen mit dem Objekt $j_! j^* \mathcal{F}$ der derivierten Kategorie.

Lemma 21.5.7.13 (**Kriterium für die Eigenschaft relativ kompaktweich**). *Gegeben eine les-Abbildung $f : X \to Y$ ist eine Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ genau dann f-kompaktweich, wenn für alle $U \Subset X$ die Garbe $\mathcal{F}_{U \subset X}$ eine $f_{(!)}$-rechtsazyklische Garbe ist. Insbesondere ist mit $\mathcal{F}$ auch $\mathcal{F}_{U \subset X}$ eine f-kompaktweiche Garbe.*

Beweis. Bezeichnet $i := i_y : \{y\} \hookrightarrow Y$ die Einbettung des Punktes $y \in Y$, so ist $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ genau dann eine $f_{(!)}$-rechtsazyklische Garbe, wenn für alle $y \in Y$ aus $\mathcal{H}^\nu i^* f_! \mathcal{G} \neq 0$ bereits folgt $\nu = 0$. Mit mehrfachem derivierten Basiswechsel, also Basiswechsel 21.4.5.14 in der verflochtenen Winkelfaserung 21.5.4.18 der derivierten abelschen Garben, über dem doppelt kartesischen Diagramm der Basis

$$\begin{tikzcd}
U \cap f^{-1}(y) \arrow[r, "l"] \arrow[d, "u"'] & U \arrow[d, "j"] \\
f^{-1}(y) \arrow[r, hook, "k"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\{y\} \arrow[r, hook, "i"] & Y
\end{tikzcd}$$

für alle $y \in Y$ erkennen wir, daß die $f_{(!)}$-Rechtsazyklizität von $\mathcal{F}_{U \subset X}$ gleichbedeutend ist dazu, daß für

$$i^* f_! \mathcal{F}_{U \subset X} \cong g_! k^* \mathcal{F}_{U \subset X} = g_! k^* j_! j^* \mathcal{F} \cong g_! u_! l^* j^* \mathcal{F} \cong g_! u_! u^* k^* \mathcal{F}$$

und alle $y \in Y$ wieder $\mathcal{H}^\nu$ für $\nu \neq 0$ verschwindet, daß also für alle $y \in Y$ mit der Notation $Z := f^{-1}(y)$ für die Faser die Garbe $(k^* \mathcal{F})_{(U \cap Z) \subset Z}$ eine $\Gamma_!$-rechtsazyklische Garbe ist. Damit ziehen wir uns auf den Fall eines einpunktigen Raumes zurück, den wir im anschließenden Lemma 21.5.7.14 behandeln. $\square$

Lemma 21.5.7.14 (**Kompaktweichheitskriterium**). *Eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einem lokal kompakten Hausdorffraum Z ist kompaktweich genau dann, wenn für alle $W \Subset Z$ die Garbe $\mathcal{F}_{W \subset Z}$ eine $\Gamma_!$-rechtsazyklische Garbe ist.*

Beweis. Bezeichne $j : W \hookrightarrow Z$ die Einbettung. Ist $\mathcal{F}$ kompaktweich, so ist auch $j^*\mathcal{F}$ kompaktweich nach 19.4.8.11 und für die konstante Abbildung $c : Z \to \mathrm{pt}$ hat folglich

$$(c \circ j)_! j^*\mathcal{F} \cong c_! j_! j^*\mathcal{F} \cong c_! \mathcal{F}_{W \subset Z}$$

die Eigenschaft $\mathcal{H}^\nu = 0$ für $\nu \neq 0$, als da heißt, $\mathcal{F}_{W \subset Z}$ ist $\Gamma_!$-rechtsazyklisch. Sei umgekehrt $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf Z derart, daß $\mathcal{F}_{W \subset Z}$ für alle $W \Subset Z$ eine $\Gamma_!$-rechtsazyklische Garbe ist. Gegeben ein Kompaktum $K \subset Z$ betrachten wir dann sein Komplement $W \Subset Z$ und folgern aus 19.4.8.14 sogar die Surjektivität der Restriktion $\Gamma_!(Z; \mathcal{F}) \to \Gamma(K; \mathcal{F})$. □

Lemma 21.5.7.15. *Sei $f : X \to Y$ eine les-Abbildung derart, daß der Schreivorschub $f_{(!)} : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/Y}$ homologische Dimension $r < \infty$ hat. Gibt es in $\mathrm{Ab}_{/X}$ eine exakte Sequenz $\mathcal{I}^{-r} \to \ldots \to \mathcal{I}^{-1} \to \mathcal{I}^0 \twoheadrightarrow \mathcal{K}$ mit f-kompaktweichen $\mathcal{I}^\nu$, so ist auch $\mathcal{K}$ eine f-kompaktweiche Garbe.*

Beweis. Nach dem Kriterium 21.5.7.13 reicht es zu zeigen, daß für alle $U \Subset X$ die Garbe $\mathcal{K}_{U \subset X}$ eine $f_{(!)}$-rechtsazyklische Garbe ist. Sicher paßt diese Garbe in eine exakte Sequenz

$$\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{I}^{-r}_{U \subset X} \to \ldots \to \mathcal{I}^{-1}_{U \subset X} \to \mathcal{I}^0_{U \subset X} \twoheadrightarrow \mathcal{K}_{U \subset X}$$

Mit $\mathcal{I}^\nu$ ist auch $\mathcal{I}^\nu_{U \subset X}$ eine f-kompaktweiche Garbe nach 21.5.7.13. Spalten wir unsere exakte Sequenz in kurze exakte Sequenzen auf, so liefern die zugehörigen langen exakten Sequenzen der $\mathrm{R}^q f_{(!)}$ für $q \geq 1$ Isomorphismen

$$\mathrm{R}^q f_{(!)}\, \mathcal{K}_{U \subset X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^{q+r} f_{(!)}\, \mathcal{G}$$

Die rechte Seite aber verschwindet nach Annahme. □

Lemma 21.5.7.16.

1. *Gegeben $f : X \to Y$ eine les-Abbildung vertauscht der derivierte Schreivorschub $f_! : \mathrm{Der}^+(\mathrm{Ab}_{/X}) \to \mathrm{Der}^+(\mathrm{Ab}_{/Y})$ mit filtrierenden Kolimites;*

2. *Gegeben eine lesb-Abbildung $f : X \to Y$ vertauscht sogar der unbeschränkt derivierte Schreivorschub $f_! : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ mit filtrierenden Kolimites.*

Beweis. Gegeben eine les-Abbildung ist nach 21.4.3.8 jeder filtrierende Kolimes von faserweise kompaktweichen Garben wieder faserweise kompaktweich. Das Lemma ergibt sich, da wir die entsprechenden derivierten Funktoren durch faserweise kompaktweiche Auflösungen berechnen können. □

Lemma 21.5.7.17. *Seien $f : X \to Y$ eine lesb-Abbildung und $\mathcal{K}, \mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ abelsche Garben. Ist $\mathcal{K}$ zusätzlich f-kompaktweich und $\mathcal{F}$ flach, so ist auch $\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}$ eine f-kompaktweiche Garbe.*

21.5.7.18. Das gilt ebenso, wenn wir statt der Flachheit von $\mathcal{F}$ die Flachheit von $\mathcal{K}$ annehmen. Für diese Variante habe ich jedoch im folgenden keine Verwendung.

Beweis. Jede Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ besitzt eine Auflösung $\ldots \to \mathcal{F}^{-1} \to \mathcal{F}^0 \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ mit $\mathcal{F}^\nu$ jeweils einer direkten Summe von Kopien von Garben der Gestalt $\mathbb{Z}_{U\subset X}$ für $U \Subset X$. Diese liefert eine exakte Sequenz

$$\ldots \to \mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{F}^0 \otimes \mathcal{K} \twoheadrightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{K}$$

Nach 21.5.7.15 reicht es zu zeigen, daß $\mathcal{F}^\nu \otimes \mathcal{K}$ eine f-kompaktweiche Garbe ist für alle ν. Aber $\mathcal{F}^\nu \otimes \mathcal{K}$ ist eine direkte Summe von Garben der Gestalt $\mathbb{Z}_{U\subset X} \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{K}_{U\subset X}$ und ist f-kompaktweich, da nach 21.4.3.8 filtrierende Kolomites f-kompaktweicher Garben f-kompaktweich sind und da nach 21.5.7.13 mit $\mathcal{K}$ auch $\mathcal{K}_{U\subset X}$ faserweise kompaktweich ist für $U \Subset X$. □

Lemma 21.5.7.19. *Gegeben $f : X \to Y$ eine lesb-Abbildung und $\mathcal{K} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine f-kompaktweiche abelsche Garbe auf X besitzt der durch die Vorschrift*

$$f^{\mathcal{K}}_{(!)} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{H}^0 f_!(\mathcal{F} \otimes^{\mathrm{L}} \mathcal{K})$$

gegebene Funktor $f^{\mathcal{K}}_{(!)} : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/Y}$ einen Rechtsadjungierten $f^{(!)}_{\mathcal{K}}$.

Beweis. Nach 21.5.7.10 reicht es zu zeigen, daß $f^{\mathcal{K}}_{(!)}$ mit beliebigen Kolimites vertauscht. Dazu reicht es zu zeigen, daß unser Funktor rechtsexakt ist und mit filtrierenden Kolimites, ja mit beliebigen Koprodukten vertauscht. Wir können nun aber $\otimes^{\mathrm{L}}$ mit einer Linksauflösung von $\mathcal{F}$ durch flache Garben berechnen. Aus Lemma 21.5.7.17 folgt dann, daß $\mathcal{F} \otimes^{\mathrm{L}} \mathcal{K}$ durch einen Komplex f-kompaktweicher Garben in nichtpositiven Graden dargestellt werden kann und mit 20.3.6.4 folgt $\mathcal{H}^1 f_!(\mathcal{F} \otimes^{\mathrm{L}} \mathcal{K}) = 0$ und damit ist unser Funktor schon mal rechtsexakt. Unser Funktor vertauscht aber auch mit beliebigen Koprodukten. Genauer wissen wir das für $\otimes^{\mathrm{L}}\mathcal{K}$, weil er ein Linksadjungierter ist, für $f_!$ nach 21.5.7.16 und für $\mathcal{H}^0$ folgt es aus der Beschreibung 20.3.9.2 von Koprodukten in derivierten Kategorien unter der Annahme der Existenz von Quisrechtsentfaltungen, die es ja nach 21.2.3.2 im Fall abelscher Garben gibt, zusammen mit der Exaktheit von Koprodukten in der Kategorie der abelschen Garben. □

21.5.7.20. Geht man die Konstruktion des Rechtsadjungierten in 21.5.7.19 durch, so erhält man für die Schnitte von $f^{(!)}_{\mathcal{K}}\mathcal{G}$ die Beschreibung

$$(f^{(!)}_{\mathcal{K}}\mathcal{G})(U) = \mathrm{Ab}_{/Y}(f_{(!)}\mathcal{K}_{U\subset X}, \mathcal{G})$$

Der Isomorphismus $\mathrm{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_{U\subset X}, f^{(!)}_{\mathcal{K}}\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/Y}(f^{\mathcal{K}}_{(!)}(\mathbb{Z}_{U\subset X}), \mathcal{G})$, der davon induziert wird, ist dann die Adjunktion für das Paar $(\mathbb{Z}_{U\subset X}, \mathcal{G})$.

21.5.7.21 (**Existenz des Schreirückzugs für abelsche Garben**). Sei $f : X \to Y$ eine lesb-Abbildung. Gegeben ein Komplex $\mathcal{K}\mathcal{K}$ alias $\ldots \to \mathcal{K}^q \to \mathcal{K}^{q+1} \to \ldots$ von faserweise kompaktweichen Garben auf X erklären wir den Funktor

$$f_{(!)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}} : \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X}) \to \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/Y})$$

dadurch, daß er jedem Komplex $\mathcal{F} \in \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X})$ das Summentotal des Doppelkomplexes der $f_{(!)}^{\mathcal{K}^q}\mathcal{F}^p$ zuordnet. Man prüft leicht, daß er einen Rechtsadjungierten

$$f_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{(!)} : \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/Y}) \to \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X})$$

besitzt, der jedem Komplex $\mathcal{G} \in \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ das Produkttotal des Doppelkomplexes der $f_{\mathcal{K}^{-q}}^{(!)}\mathcal{G}^p$ zuordnet. Um die q-Differentiale zu erklären beachten wir, daß jede Transformation von Funktoren eine Transformation in die Gegenrichtung auf den Adjungierten induziert. Jeder Morphismus $\mathcal{L} \to \mathcal{M}$ von f-kompaktweichen Garben liefert mithin eine Transformation $f_{\mathcal{M}}^{(!)} \Rightarrow f_{\mathcal{L}}^{(!)}$. Wir zeigen nun, daß alle Komplexe aus flachen abelschen Garben quislinksentfaltet sind für $Qf_{(!)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}}$. Ist genauer $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ ein Quasiisomorphismus von Komplexen aus flachen abelschen Garben, so liefert das Darantensorieren von $\mathcal{K}$ einen Quasiisomorphismus $\mathcal{E} \otimes \mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \otimes \mathcal{K}$ und nach 21.5.7.23 bestehen beide Komplexe aus f-kompaktweichen Garben. Nach 20.3.6.4 erhalten wir also weiter einen Quasiisomorphismus $f_{(!)}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} f_{(!)}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K})$, da wir auch f lesb angenommen hatten. Schließlich erinnern wir noch aus 21.2.5.20, daß es zu jedem Komplex von abelschen Garben einen Quasiisomorphismus von einem Komplex flacher abelscher Garben gibt, und daraus folgt dann mit 20.3.2.32, daß alle Komplexe aus flachen abelschen Garben quislinksentfaltet sind für $Qf_{(!)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}}$. Folglich existiert der Linksfaktorierte von $Qf_{(!)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}}$ auf allen Objekten und mit Lemma 21.5.7.17 erhalten wir für

$$\mathrm{L}Qf_{(!)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}} : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y})$$

sogar eine ausgezeichnete Isotransformation $\mathrm{L}Qf_{(!)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}} \xRightarrow{\sim} f_! \circ (\ \otimes^{\mathrm{L}}\mathcal{K}\mathcal{K})$. Da andererseits in $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ nach 21.2.3.2 jeder Komplex eine Quisrechtsentfaltung besitzt, existiert auch der Rechtsfaktorierte $\mathrm{R}Qf_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{(!)}$ von $Qf_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{(!)}$ auf allen Objekten und 20.3.2.28 liefert für diese faktorierten Funktoren eine Adjunktion

$$(\mathrm{L}Qf_{(!)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}}, \mathrm{R}Qf_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{(!)})$$

Für jede f-kompaktweiche Auflösung $\mathcal{K}\mathcal{K}$ der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ ist also der Rechtsfaktorierte $\mathrm{R}Qf_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{(!)}$ ein Rechtsadjungierter $f^!$ von $f_!$.

21.5.7.22 (**Berechnung des Verdierdualen**). Seien $f : X \to Y$ eine lesb-Abbildung und $\mathcal{K}$ ein Komplex von f-kompaktweichen abelschen Garben auf X. Die

Isotransformation $\mathrm{L}f_{(!)}^{\mathcal{K}} \overset{\sim}{\Rightarrow} f_! \circ (\ \otimes\mathcal{K})$ von Funktoren $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ aus 21.5.7.21 liefert eine ausgezeichnete Isotransformation

$$\mathrm{R}f_{\mathcal{K}}^{(!)} \ \overset{\sim}{\Rightarrow}\ (\mathcal{K}\Rightarrow\ ) \circ f^!$$

zwischen den adjungierten Funktoren. Ist insbesondere $f = \mathrm{fin}$ die konstante Abbildung auf den einpunktigen Raum, so erhalten wir für jeden Komplex $\mathcal{K}$ von kompaktweichen Garben auf einem lokal kompakten homologisch kompaktendlichen Hausdorffraum X einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathrm{fin}_{\mathcal{K}}^{(!)}\left(\mathbb{Q}_{\mathrm{top}}[0] \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{\mathrm{top}}\right) \ \overset{\sim}{\to}\ \left(\mathcal{K}\Rightarrow \mathrm{fin}^!\,\mathbb{Z}_{\mathrm{top}}\right)$$

und so mit 21.5.7.20 einen ausgezeichneten Isomorphismus zwischen dem Verdierdualen $\mathbb{D}_X\mathcal{K}$ von $\mathcal{K}$ und dem Garbenkomplex mit $\mathbb{D}_{\mathrm{Ket}}\Gamma_!(U;\mathcal{K})$ als Komplex der Schnitte auf einer offenen Teilmenge $U \Subset X$.

Lemma 21.5.7.23. *Seien $f : (X,\mathcal{A}) \to (Y,\mathcal{B})$ ein lesb-Morphismus von gekringten Räumen und $\mathcal{K},\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/(X,\mathcal{A})}$ Modulgarben. Ist $\mathcal{K}$ faserweise kompaktweich und $\mathcal{F}$ flach, so ist auch $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}$ eine faserweise kompaktweiche Garbe.*

21.5.7.24. Das gilt ebenso, wenn wir statt der Flachheit von $\mathcal{F}$ die Flachheit von $\mathcal{K}$ annehmen. Für diese Variante habe ich jedoch im folgenden keine Verwendung. Die Kringgarbe $\mathcal{B}$ spielt im folgenden keine Rolle.

Beweis. Jede Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/(X,\mathcal{A})}$ besitzt eine Auflösung $\ldots \to \mathcal{F}^{-1} \to \mathcal{F}^0 \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ mit $\mathcal{F}^\nu$ jeweils einer direkten Summe von Kopien von Garben der Gestalt $\mathcal{A}_{U\subset X}$ für $U \Subset X$. Diese liefert eine exakte Sequenz von Modulgarben

$$\ldots \to \mathcal{F}^{-1} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K} \to \mathcal{F}^0 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K} \twoheadrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}$$

Nach dem Kriterium 21.5.7.15 reicht es zu zeigen, daß $\mathcal{F}^\nu \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}$ faserweise kompaktweich ist für alle ν. Nun ist aber $\mathcal{F}^\nu \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}$ ist eine direkte Summe von Garben der Gestalt $\mathcal{A}_{U\subset X} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K} \cong \mathcal{K}_{U\subset X}$ und die Summanden sind faserweise kompaktweich nach 21.5.7.13. Also ist auch $\mathcal{F}^\nu \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}$ faserweise kompaktweich nach 21.4.3.8 als filtrierender Kolimes faserweise kompaktweicher abelscher Garben. □

Lemma 21.5.7.25. *Gegeben $f : (X,\mathcal{A}) \to (Y,\mathcal{B})$ ein lesb-Morphismus gekringter Räume und $\mathcal{K} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine faserweise kompaktweiche Modulgarbe auf X besitzt der durch die Vorschrift*

$$f_{(!)}^{\mathcal{K}} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{H}^0 f_!(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}}^{\mathrm{L}} \mathcal{K})$$

gegebene Funktor $f_{(!)}^{\mathcal{K}} : \mathrm{Ab}_{(X,\mathcal{A})} \to \mathrm{Ab}_{/(Y,\mathcal{B})}$ einen Rechtsadjungierten $f_{\mathcal{K}}^{(!)}$.

Beweis. Nach 21.5.7.10 reicht es zu zeigen, daß $f_{(!)}^{\mathcal{K}}$ mit Kolimites vertauscht. Dazu reicht es zu zeigen, daß unser Funktor rechtsexakt ist und mit filtrierenden Kolimites, ja mit Koprodukten vertauscht. Wir können $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}}^{\mathrm{L}} \mathcal{K}$ mit einer Linksauflösung von $\mathcal{F}$ durch flache Modulgarben berechen, wie wir sie etwa beim Beweis von 21.5.7.23 beschrieben haben. So folgt aus 21.5.7.23, daß $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}}^{\mathrm{L}} \mathcal{K}$ durch einen Komplex aus faserweise kompaktweichen Garben in nichtpositiven Graden beschrieben werden kann, und mit 20.3.6.4 folgt $\mathcal{H}^1 f_!(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}}^{\mathrm{L}} \mathcal{K}) = 0$. Damit ist unser Funktor schon mal rechtsexakt. Unser Funktor vertauscht aber auch mit beliebigen Koprodukten. Genauer wissen wir das für $\otimes_{\mathcal{A}}^{\mathrm{L}}\mathcal{K}$, weil er ein Linksadjungierter ist, für $f_!$ nach 21.5.7.16 und für $\mathcal{H}^0$ folgt es aus der Beschreibung 20.3.9.2 von Koprodukten in derivierten Kategorien unter der Annahme der Existenz von Quisrechtsentfaltungen, die es nach 21.2.3.6 auch im Fall von Modulgarben gibt, zusammen mit der Exaktheit von Koprodukten in der Kategorie der Modulgarben. □

21.5.7.26 (**Existenz des Schreirückzugs**). Sei $f : X \to Y$ ein lesb-Morphismus von gekringten Räumen. Gegeben ein Komplex $\mathcal{KK}$ alias $\ldots \to \mathcal{K}^q \to \mathcal{K}^{q+1} \to \ldots$ von faserweise kompaktweichen Modulgarben auf X erklären wir den Funktor

$$f_{(!)}^{\mathcal{KK}} : \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X}) \to \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/Y})$$

dadurch, daß er jedem Komplex $\mathcal{F} \in \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X})$ das Summentotal des Doppelkomplexes der $f_{(!)}^{\mathcal{K}^q}\mathcal{F}^p$ zuordnet. Man prüft leicht, daß $f_{(!)}^{\mathcal{KK}}$ einen Rechtsadjungierten

$$f_{\mathcal{KK}}^{(!)} : \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/Y}) \to \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X})$$

besitzt, der jedem Komplex $\mathcal{G} \in \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ das Produkttotal des Doppelkomplexes der $f_{\mathcal{K}^{-q}}^{(!)}\mathcal{G}^p$ nach 21.5.7.25 zuordnet. Um die q-Differentiale zu erklären beachten wir, daß jede Transformation von Funktoren eine Transformation in die Gegenrichtung auf den Adjungierten induziert. Jeder Morphismus $\mathcal{L} \to \mathcal{M}$ von faserweise kompaktweichen Modulgarben liefert mithin eine Transformation $f_{\mathcal{M}}^{(!)} \Rightarrow f_{\mathcal{L}}^{(!)}$. Wir zeigen nun, daß alle quisflachen Komplexe aus flachen Modulgarben quislinksentfaltet sind für $Qf_{(!)}^{\mathcal{KK}}$. Ist nämlich $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ ein Quasiisomorphismus quisflacher Komplexe aus flachen Modulgarben, so liefert das Darantensorieren von $\mathcal{KK}$ einen Quasiisomorphismus $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{KK} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{KK}$, da wir $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ quisflach angenommen hatten. Nach 21.5.7.23 bestehen weiter beide Komplexe aus faserweise kompaktweichen Garben, da wir auch angenommen hatten, daß $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ aus flachen Modulgarben bestehen. Nach 20.3.6.4 und da wir f lesb angenommen hatten, macht $f_{(!)}$ daraus einen Quasiisomorphismus $f_{(!)}^{\mathcal{KK}}\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} f_{(!)}^{\mathcal{KK}}\mathcal{F}$. Schließlich erinnern wir noch aus 21.2.5.20, daß es zu jedem Komplex von Modulgarben einen Quasiisomorphismus von einem quisflachen Komplex flacher Modulgarben gibt, und daraus folgt dann mit 20.3.2.32, daß in der Tat alle quisflachen Komplexe

aus flachen Modulgarben quislinksentfaltet sind für $Qf_{(!)}^{\mathcal{KK}}$. Folglich existiert der Linksfaktorierte von $Qf_{(!)}^{\mathcal{KK}}$ auf allen Objekten und mit Lemma 21.5.7.23 erhalten wir für

$$\mathrm{L}Qf_{(!)}^{\mathcal{KK}} : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y})$$

sogar eine ausgezeichnete Isotransformation $\mathrm{L}Qf_{(!)}^{\mathcal{KK}} \overset{\sim}{\Rightarrow} f_! \circ (\ \otimes^{\mathrm{L}}\mathcal{KK})$. Da andererseits in $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ nach 21.2.3.2 jeder Komplex eine Quisrechtsentfaltung besitzt, existiert auch der Rechtsfaktorierte $\mathrm{R}Qf_{\mathcal{KK}}^{(!)}$ von $Qf_{\mathcal{KK}}^{(!)}$ auf allen Objekten und 20.3.2.28 liefert für diese faktorierten Funktoren eine Adjunktion

$$(\mathrm{L}Qf_{(!)}^{\mathcal{KK}}, \mathrm{R}Qf_{\mathcal{KK}}^{(!)})$$

Für jede faserweise kompaktweiche Auflösung $\mathcal{KK}$ der Strukturgarbe $\mathcal{A}$ ist also der Rechtsfaktorierte $\mathrm{R}Qf_{\mathcal{KK}}^{(!)}$ ein Rechtsadjungierter $f^!$ von $f_! \cong f_! \circ (\otimes^{\mathrm{L}}\mathcal{KK})$.

Übungen

Übung 21.5.7.27. Man zeige, daß gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ von lesb-Räumen und ein Komplex $\mathcal{K}$ von kompaktweichen abelschen Garben auf X der natürliche Isomorphismus $\mathbb{D}_Y f_!\mathcal{K} \xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Der}} f_*\mathbb{D}_X\mathcal{K}$ aus 21.4.7.8 unter der in 21.5.7.22 gegebenen Beschreibung des Verdierdualen und dem natürlichen Morphismus $f_{(*)} \Rightarrow f_*$ von dem Isomorphismus von Komplexen von abelschen Garben herkommt, der auf den Schnitten über $V \Subset Y$ gegeben wird durch die offensichtlichen Isomorphismen

$$\mathbb{D}_{\mathrm{Ket}}\Gamma_!(V; f_{(!)}\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Ket}} \mathbb{D}_{\mathrm{Ket}}\Gamma_!(f^{-1}(V); \mathcal{K})$$

Hinweis: Ich habe diese Übung noch nicht gemacht und stelle mir vor, daß das einmal ein Student zusammen mit dem Umfeld ausarbeiten könnte.

Übung 21.5.7.28. Ist ein lokal kompakter Hausdorffraum X die disjunkte Vereinigung offener Teilmengen $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$, so liefern für $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}^+(\mathrm{Ab}_{/X})$ die Ausdehnungen durch Null Isomorphismen

$$\bigoplus_{i\in I} \mathbb{H}_!^q(X_i; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_!^q(X; \mathcal{F})$$

Ist X sogar lesb, so gilt dasselbe sogar für jedes Objekt $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ der derivierten Kategorie. Hinweis: Man gehe von der Zerlegung 21.2.3.16 von $\mathcal{F}$ als Summe der Restriktionen auf die Komponenten aus und verwende die Verträglichkeit von $\mathrm{fin}_!$ mit direkten Summen aus 21.5.7.16.

Ergänzende Übung 21.5.7.29 (**Lokalität der Eigenschaft kompaktweich**). Eine abelsche Garbe auf einem lokal kompakten Hausdorffraum ist kompaktweich genau dann, wenn jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt derart, daß die Einschränkung unserer Garbe darauf kompaktweich ist. Hinweis: Man zeige mit 21.5.7.14, daß das System der offenen Teilmengen, auf denen eine abelsche Garbe kompaktweich ist, stabil ist unter endlichen Vereinigungen. Dann zeige man mit 21.4.2.6, daß es auch stabil ist unter beliebigen Vereinigungen.

21.6 Anwendungen und Vergleichssätze

21.6.1 Anwendung auf Mannigfaltigkeiten

21.6.1.1. Ich erinnere daran, daß wir eine n-Mannigfaltigkeit erklärt hatten als einen Hausdorffraum, der lokal homöomorph ist zu $\mathbb{R}^n$. Zusätzliche Voraussetzungen wie abzählbar basiert oder parakompakt fordern wir explizit, wenn sie gebraucht werden.

Lemma 21.6.1.2 (Mannigfaltigkeiten sind lesb). *Gegeben eine n-Mannigfaltigkeit M besitzt jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf M eine Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}_0 \to \ldots \to \mathcal{G}_{n-1} \twoheadrightarrow \mathcal{K}_n$ der Länge n durch kompaktweiche Garben $G_0, \ldots, \mathcal{G}_{n-1}, \mathcal{K}_n$. Insbesondere ist jede Mannigfaltigkeit lesb.*

Beweis. Bezeichne $\mathcal{K}_i \subset \mathcal{G}_i$ die Kerne in einer beliebigen Auflösung durch kompaktweiche Garben und insbesondere $\mathcal{K}_0 = \mathcal{F}$. Die Randoperatoren der entsprechenden langen exakten Sequenzen liefern für alle $U \Subset M$ Isomorphismen

$$\mathrm{H}^1_!(U; \mathcal{K}_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2_!(U; \mathcal{K}_{n-1}) \xrightarrow{\sim} \ldots \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{n+1}_!(U; \mathcal{F})$$

Nach 19.4.10.2 ist die Gruppe ganz rechts Null. Wir folgern $\mathrm{H}^1_!(U; \mathcal{K}_n) = 0$ für alle $U \Subset M$ und nach Übung 19.4.9.23 ist damit $\mathcal{K}_n$ kompaktweich. □

Lemma 21.6.1.3. *Auf einem abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffraum sind alle kompaktweichen abelschen Garben weich.*

Beweis. Sei X unser Raum. Wir finden eine Überdeckung von X durch eine aufsteigende Folge $K_0 \subset K_1 \subset \ldots$ von Kompakta derart, daß sogar gilt $K_i \subset K_{i+1}^\circ$ für alle i. Seien nun $\mathcal{F}$ unsere kompaktweiche Garbe und $Z \Subset X$ abgeschlossen und $s \in \Gamma(Z; \mathcal{F})$ ein Schnitt über Z. Sicher können wir $s|(K_0 \cap Z)$ zu einem globalen Schnitt mit kompaktem Träger $g_0 \in \Gamma_!(X; \mathcal{F})$ ausdehnen. Dann können wir den Nullschnitt auf K_0 mit dem Schnitt $(s - g_0)$ auf $K_1 \cap Z$ verkleben zu einem Schnitt s_1 auf $K_0 \cup (K_1 \cap Z)$ und können diesen ausdehnen zu einem globalen Schnitt mit kompaktem Träger $g_1 \in \Gamma_!(X; \mathcal{F})$. Dann gilt $s = g_0 + g_1$ auf $K_1 \cap Z$ und $g_1 = 0$ auf K_0. Dann können wir den Nullschnitt auf K_1 mit dem Schnitt $s - g_0 - g_1$ auf $K_2 \cap Z$ verkleben zu einem Schnitt s_2 auf $K_1 \cup (K_2 \cap Z)$ und können diesen ausdehnen zu einem globalen Schnitt mit kompaktem Träger $g_2 \in \Gamma_!(X; \mathcal{F})$. Dann gilt $s = g_0 + g_1 + g_2$ auf $K_2 \cap Z$ und $g_2 = 0$ auf K_1. So machen wir immer weiter. Da alle g_{i+1} jeweils auf K_i verschwinden und kompakten Träger haben, ist die Summe $\tilde{s} := \sum_{i=0}^\infty g_i$ ein sinnvoll definierter globaler Schnitt $\tilde{s} \in \Gamma(X; \mathcal{F})$. Nach Konstruktion setzt er unseren Schnitt s fort. □

Proposition 21.6.1.4 (Kohomologie oberhalb der Dimension). *Gegeben eine abzählbar basierte n-Mannigfaltigkeit M und eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf M gilt*

$$q > n \quad \Rightarrow \quad \mathrm{H}^q(M; \mathcal{F}) = 0$$

Beweis. Nach 21.6.1.2 besitzt $\mathcal{F}$ eine kompaktweiche Auflösung der Länge n. Nach 21.6.1.3 besteht sie aus weichen Garben. Nach 19.5.4.5 sind weiche Garben Γ-azyklisch auf parakompakten Räumen. Nach 19.5.3.3 schließlich ist M parakompakt. □

21.6.1.5 (**Lokale Kohomologie oberhalb der Dimension plus Eins**). Gegeben eine abzählbar basierte n-Mannigfaltigkeit und $C \mathrel{\not\Subset} M$ folgt aus dem Verschwinden der Kohomologie oberhalb der Dimension 21.6.1.4 mit der langen exakten Sequenz der lokalen Kohomologie 19.4.4.9 sofort $q > n+1 \;\Rightarrow\; \mathrm{H}^q_C(M;\mathcal{F}) = 0$.

Lemma 21.6.1.6. *Gegeben eine abzählbar basierte n-Mannigfaltigkeit M besitzt jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf M eine Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}_0 \to \ldots \to \mathcal{G}_n \twoheadrightarrow \mathcal{K}_{n+1}$ der Länge $n+1$ durch welke Garben $\mathcal{G}_0, \ldots, \mathcal{G}_n, \mathcal{K}_{n+1}$.*

Beweis. Bezeichne $\mathcal{K}_i \subset \mathcal{G}_i$ die Kerne in einer beliebigen Auflösung durch welke Garben. Die Randoperatoren der entsprechenden langen exakten Sequenzen liefern für alle $C \mathrel{\not\Subset} M$ Isomorphismen

$$\mathrm{H}^1_C(M;\mathcal{K}_{n+1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2_C(M;\mathcal{K}_n) \xrightarrow{\sim} \ldots \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{n+2}_C(M;\mathcal{F})$$

Nach 21.6.1.5 ist die Gruppe ganz rechts Null. Wir folgern $\mathrm{H}^1_C(M;\mathcal{K}_{n+1}) = 0$ für alle $C \mathrel{\not\Subset} M$ und nach der langen exakten Sequenz der lokalen Kohomologie 19.4.4.9 ist damit $\mathcal{K}_{n+1}$ welk. □

Proposition 21.6.1.7. *Gegeben eine n-Mannigfaltigkeit M und $i : C \hookrightarrow M$ die Einbettung einer lokal abgeschlossenen Teilmenge hat $i^{(!)}$ endliche homologische Rechtsdimension $\leq n+1$.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß für jede abzählbar basierte offene Teilmenge $U \Subset M$ mit $C \cap U \mathrel{\not\Subset} U$ der Funktor $i^{(!)}$ für $i : (C \cap U) \hookrightarrow U$ endliche homologische Rechtsdimension $\leq n+1$ hat. Nach 19.6.4.26 können seine Rechtsderivierten jedoch mit welken Auflösungen berechnet werden. So folgt die Proposition aus Lemma 21.6.1.6. □

Lemma 21.6.1.8. *Für die konstante Abbildung $c : E \to \mathrm{top}$ eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums auf einen Punkt und alle $G \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ induziert die Einheit der Adjunktion $(c_!, c^!)$ einen Isomorphismus*

$$c_* c^* G \xrightarrow{\sim} c_* c^! c_! c^* G$$

Vorschau 21.6.1.9. In 21.6.1.12 zeigen wir stärker, daß die Einheit der Adjunktion $(c_!, c^!)$ sogar einen Isomorphismus $c^*G \xrightarrow{\sim} c^! c_! c^* G$ induziert.

Beweis. Wir wissen aus 19.4.8.17, daß $c_!\mathbb{Z}_E$ in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ eine Einheit im Sinne von 18.3.4.16 ist. Wir wissen aus 21.6.1.2, daß E lesb ist, so daß uns für c die Projektionsformel auf der vollen derivierten Kategorie zur Verfügung steht. Die Isomorphismen $c_!c^*G \xrightarrow{\sim} c_!(\mathbb{Z}_E \otimes c^*G) \xrightarrow{\sim} (c_!\mathbb{Z}_E) \otimes G$ zum Tensorprodukt mit dem Einsobjekt gefolgt vom Isomorphismus der Projektionsformel 21.4.7.6 zeigen damit, daß $c_!c^*$ eine Äquivalenz von Kategorien ist. Dasselbe gilt für den adjungierten Funktor $c_*c^!$. Also ist die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} c_*c^!c_!c^*G$. Dieser Isomorphismus faktorisiert als $G \to c_*c^*G \to c_*c^!c_!c^*G$ mit den von den Einheiten der Adjunktionen (c^*, c_*) und $(c_!, c^!)$ herrührenden Morphismen. Der erste dieser Morphismen ist ein Isomorphismus nach 21.3.1.4. Also ist auch der zweite dieser Morphismen ein Isomorphismus. □

Lemma 21.6.1.10. *Für $i : \mathrm{top} \hookrightarrow E$ die Einbettung eines beliebigen Punktes in einen endlichdimensionalen reellen affinen Raum und $c : E \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung und $G \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ beliebig induziert die Koeinheit der Adjunktion einen Isomorphismus*

$$c_!i_!i^!c^*G \xrightarrow{\sim} c_!c^*G$$

Beweis. Ist G ein in einem homologischen Grad konzentrierter Komplex, so hatten wir das bereits in 21.5.3.4 in anderen Notationen und unter der Annahme $\dim E \geq 1$ bewiesen. Im Fall $\dim E = 0$ ist die Behauptung eh trivial. Damit ist die Proposition bewiesen für den Fall, daß G in einem Grad konzentriert ist. Mit dévissage folgt sie sofort für $G \in \mathrm{Der}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Ab})$. Nun bilden beide Seiten $\mathrm{Der}^{\geq r}(\mathrm{Ab})$ in sich selber ab und $\mathrm{Der}^{\leq r}(\mathrm{Ab})$ in $\mathrm{Der}^{\leq r+n+1}(\mathrm{Ab})$ beziehungsweise stärker $\mathrm{Der}^{\leq r+n}(\mathrm{Ab})$ wegen 21.6.1.7 beziehungsweise 19.4.10.2 und unseren Erkenntnissen 20.3.6.4 zum Derivieren homologisch rechtsendlicher Funktoren. Die zu festem q von unserem Morphismus auf $\mathcal{H}^q$ induzierte Abbildung ändert sich also nicht, wenn wir erst zu $\tau^{\leq q}G$ und dann zu $\tau^{\geq q-n-1}\tau^{\leq q}G$ übergehen. Mithin ist sie für alle q und alle G ein Isomorphismus. □

Lemma 21.6.1.11. *Gegeben $j : D \hookrightarrow E$ die Einbettung einer offenen konvexen nichtleeren Teilmenge in einen endlichdimensionalen reellen affinen Raum und $c : E \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung und $G \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ induziert die Koeinheit der Adjunktion einen Isomorphismus*

$$c_!j_!j^!c^*G \xrightarrow{\sim} c_!c^*G$$

Beweis. Sei $i : \mathrm{top} \to D$ die Einbettung eines Punktes. Wir betrachten die Komposition $c_!j_!i_!i^!j^!c^*G \to c_!j_!j^!c^*G \to c_!c^*G$. Wegen $j^! = j^*$ und 21.6.1.10 ist hier der erste Morphismus ein Isomorphismus. Mit einer zweiten Anwendung von 21.6.1.10 ist auch die Verknüpfung ein Isomorphismus. Das Lemma folgt. □

Proposition 21.6.1.12. *Für die konstante Abbildung $c : E \to \mathrm{top}$ eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums auf einen Punkt und alle $G \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ induziert die Einheit der Adjunktion $(c_!, c^!)$ einen Isomorphismus*

$$c^*G \xrightarrow{\sim} c^! c_! c^* G$$

Vorschau 21.6.1.13. Eine relative Version dieser Aussage zeigen wir in 21.6.2.2.

21.6.1.14. Für $G = \mathbb{Z}$ und $\dim E = n$ liefert uns das insbesondere einen Isomorphismus $\underline{E} \xrightarrow{\sim} c^! \mathrm{H}^n_!(E)[-n]$ und damit $\underline{E} \otimes \mathrm{H}^n_!(E)^*[n] \xrightarrow{\sim} \omega_E$.

Beweis. Nach dem Verschwindungskriterium 21.2.3.20 reicht es zu zeigen, daß für jede Einbettung $j : D \hookrightarrow E$ einer nichtleeren konvexen offenen Teilmenge unser Morphismus einen Isomorphismus $c_* j_* j^! c^* G \xrightarrow{\sim} c_* j_* j^! c^! c_! c^* G$ liefert. Nach 19.6.3.20 fällt nun aber der von der Einheit der Adjunktion induzierte Morphismus $j^! \Rightarrow j^! c^! c_!$ zusammen mit der aus Einheiten und Koeinheiten von Adjunktionen gebildeten Komposition

$$j^! \Rightarrow (cj)^!(cj)_! j^! \xRightarrow{\sim} j^! c^! c_! j_! j^! \Rightarrow j^! c^! c_!$$

Wir wissen aus 21.6.1.11, daß hier die Koeinheit der Adjunktion einen Isomorphismus $c_! j_! j^! c^* G \xrightarrow{\sim} c_! c^* G$ liefert. Das bedeutet, daß der dritte dieser Pfeile einen Isomorphismus liefert, wenn wir ihn auf c^*G anwenden. Die ganze Komposition liefert also einen Isomorphismus auf c^*G bei Nachschalten von $c_* j_*$ genau dann, wenn ihr erster Pfeil das tut. Das aber ist gerade die Aussage von Lemma 21.6.1.8 angewandt auf cj. □

Beispiel 21.6.1.15 (**Dualisierende Garbe einer Mannigfaltigkeit**). Gegeben eine n-Mannigfaltigkeit M konstruieren wir einen Isomorphismus, den **Dualisierungsisomorphismus**

$$\mathrm{p}_M : \omega_M \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_M[n]$$

ihrer dualisierenden Garbe mit der Orientierungsgarbe aus 19.4.10.8, verschoben in das Negative der Dimension. Dazu gehen wir von der Erkenntnis aus, daß $\omega_M[-n]$ nach 21.6.1.14 eine gewöhnliche Garbe ist, und betrachten weiter für $U \Subset M$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ den Isomorphismus $(\omega_M[-n])(U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_!(U;\mathbb{Z})^*$ aus 21.6.1.14. So erhalten wir einen Isomorphismus der Restriktionen beider Garben auf die durch die fraglichen Mengen U gegebene Basis der Topologie. Unsere verallgemeinerte Garbifizierung aus 19.2.2.42 zeigt dann, daß er von genau einem Isomorphismus der ursprünglichen Garben herkommen muß.

Beispiel 21.6.1.16 (**Dualisierende Garbe einer Randfaltigkeit**). Gegeben eine n-Randfaltigkeit M und $i : \partial M \hookrightarrow M$ die abgeschlossene Einbettung ihres Randes und $j : M^\circ \hookrightarrow M$ die offene Einbettung seines Komplements betrachten wir

das ausgezeichnete Dreieck $i_! i^! \omega_M \to \omega_M \to j_* j^* \omega_M \to [1]$. Wir können es umschreiben zu einem ausgezeichneten Dreieck $i_* \omega_{\partial M} \to \omega_M \to j_* \omega_{M^\circ} \to [1]$ und folgern die Beschreibung $\omega_M = \mathrm{Keg}(j_* \mathrm{or}_{M^\circ} \to i_* \mathbb{Z}_{\partial M})[n-1]$ der dualisierenden Garbe unserer Randfaltigkeit M als verschobener Kegel eines Morphismus von Garben $j_* \mathrm{or}_{M^\circ} \to i_* \mathbb{Z}_{\partial M}$. Nun wird der Leser etwa durch Einschränkung auf den Fall eines Halbraums unschwer zeigen können, daß der fragliche Morphismus unter i^* ein Isomorphismus wird. So folgt $i^* \omega_M = 0$ und das ausgezeichnete Dreieck $j_! j^! \omega_M \to \omega_M \to i_* i^* \omega_M \to [1]$ liefert damit einen Isomorphismus

$$j_! \mathrm{or}_{M^\circ}[n] \xrightarrow{\sim} \omega_M$$

Dasselbe gilt auch für Eckfaltigkeiten, die sich ja topologisch nicht von Randfaltigkeiten unterscheiden.

Übungen

Übung 21.6.1.17. Gegeben eine lokal konstante abelsche Garbe $\mathcal{F}$ mit endlich erzeugten Halmen auf einer Mannigfaltigkeit X ist der kanonische Morphismus ein Isomorphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_X \mathbb{D}_X \mathcal{F}$$

21.6.2 Mannigfaltiger Eigrückzug

21.6.2.1. Gegeben ein topologischer Raum Y und ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum E der Dimension $d := \dim E$ und die Projektion $c : E \times Y \to Y$ haben wir mit Basiswechsel und 19.4.8.17 Isomorphismen

$$c_! \mathbb{Z}_{E \times Y} \xrightarrow{\sim} c_! \operatorname{pr}_E^* \mathbb{Z}_E \xrightarrow{\sim} \operatorname{pr}_Y^* \operatorname{fin}_! \mathbb{Z}_E \xrightarrow{\sim} \operatorname{pr}_Y^* (\mathrm{H}_!^d(E))[-d] \cong \mathbb{Z}_Y[-d]$$

Der letzte dieser Isomorphismen ist unkanonisch. Es geht im weiteren aber nur darum, daß alle unsere Objekte Einheiten von $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ sind.

Lemma 21.6.2.2. *Gegeben ein topologischer Raum Y und ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum E ist für die Projektion $c : E \times Y \to Y$ und beliebiges $\mathcal{G} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ die Einheit der Adjunktion stets ein Isomorphismus*

$$c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c^! c_! c^* \mathcal{G}$$

21.6.2.3. Wir wissen aus der Projektionsformel, daß $c_! c^*$ isomorph ist zum Funktor $(c_! \mathbb{Z}_{E \times Y}) \otimes$ und mit 21.6.2.1 weiter zum Funktor $\mathbb{Z}_Y[-d] \otimes$. Das Lemma liefert uns damit die Existenz eines Isomorphismus $c^! \mathbb{Z}_Y \cong \mathbb{Z}_{E \times Y}[d]$ für $d = \dim E$ und sogar einen ausgezeichneten Isomorphismus $c^! \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{E \times Y}[d] \otimes \mathrm{H}_!^d(E)^*$.

Beweis. Nach dem Verschwindungskriterium 21.2.3.20 reicht es zu zeigen, daß unsere Einheit der Adjunktion für jede nichtleere konvexe offene Teilmenge $D \Subset E$ und die zugehörige Einbettung $j : D \times Y \hookrightarrow E \times Y$ Isomorphismen $c_* j_* j^* c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_* j_* j^* c^! c_! c^* \mathcal{G}$ liefert. Hierfür können wir die im Fall eines einpunktigen Raums Y in 21.6.1.12 gegebene Argumentation kopieren, sobald wir zeigen können, daß auch in dieser Situation die Koeinheit der Adjunktion einen Isomorphismus

$$c_! j_! j^! c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_! c^* \mathcal{G}$$

liefert. Das aber dürfen wir halmweise an jedem Punkt $y \in Y$ prüfen und mit Basiswechsel folgt es so aus der bereits beim Beweis von 21.6.1.12 gezeigten Aussage im Fall eines einpunktigen Raums Y. Jetzt kann die Argumentation wie in 21.6.1.12 weiterlaufen. Da D homöomorph ist zu E, reicht es zu zeigen, daß unsere Abbildung für alle Y einen Isomorphismus $c_* c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_* c^! c_! c^* \mathcal{G}$ induziert. Wir wissen aber aus der Projektionsformel, daß $c_! c^*$ isomorph ist zum Funktor $(c_! \mathbb{Z}_{E \times Y}) \otimes$ und damit nach 21.6.2.1 eine Äquivalenz von Kategorien. Also ist auch der adjungierte Funktor $c_* c^!$ eine Äquivalenz von Kategorien und die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_* c^! c_! c^* \mathcal{G}$. Daß andererseits auch die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_* c^* \mathcal{G}$ ist, wissen wir bereits aus 21.3.1.4. Das Lemma folgt. □

Lemma 21.6.2.4. *Gegeben ein topologischer Raum Y und ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum E ist für die Projektion $c : E \times Y \to Y$ und beliebiges $\mathcal{G} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ die Koeinheit der Adjunktion stets ein Isomorphismus*

$$c_! c^! \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$$

Beweis. Aus dem vorherigen Lemma wissen wir, daß die Einheit der Adjunkton einen Isomorphismus $c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c^! c_! c^* \mathcal{G}$ liefert. Aus der Dreiecksidentität wissen wir, daß die Komposition $c_! c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_! c^! c_! c^* \mathcal{G} \to c_! c^* \mathcal{G}$ mit dem von der Koeinheit der Adjunktion induzierten zweiten Morphismus die Identität ist. Also induziert die Koeinheit der Adjunktion stets einen Isomorphismus $c_! c^! c_! c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_! c^* \mathcal{G}$. Wie beim vorigen Beweis bemerkt wissen aber aus der Projektionsformel, daß $c_! c^*$ isomorph ist zum Funktor $(c_! \mathbb{Z}_{E \times Y}) \otimes$ und damit nach 21.6.2.1 eine Äquivalenz von Kategorien. □

Definition 21.6.2.5. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt **mannigfaltig von der relativen Dimension** d oder kurz d**-mannigfaltig**, wenn sie separiert ist und es für jeden Punkt $x \in X$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times \mathbb{R}^d \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd}$$

gibt mit offenen Einbettungen in den Horizontalen und x im Bild der oberen Horizontalen.

Beispiel 21.6.2.6. Eine 0-mannigfaltige Abbildung ist dasselbe wie eine separierte étale Abbildung.

21.6.2.7. Offensichtlich ist jede mannigfaltige Abbildung lokal eigentlich und für d die relative Dimension unserer Abbildung ist jede ihrer Fasern eine d-Mannigfaltigkeit. Nach dem Verschwinden hoher kompakter Kohomologie bei Mannigfaltigkeiten 19.4.10.2 und les-Basiswechsel ist also jede mannigfaltige Abbildung lesb. Nach 21.6.2.3 ist für $f : X \to Y$ mannigfaltig von der relativen Dimension d der Komplex $f^!\mathbb{Z}_Y[-d]$ eine abelsche Garbe auf X, die lokal frei ist vom Rang Eins. Wir nennen sie die **relative Orientierungsgarbe** und notieren sie

$$\mathrm{or}_f = \mathrm{or}_{X/Y} := f^!\mathbb{Z}_Y[-d]$$

Ist die relative Orientierungsgarbe isomorph zur konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$, so nennen wir unsere mannigfaltige Abbildung **orientierbar** und die Wahl eines Isomorphismus $\mathrm{or}_f \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$ eine **Orientierung von** f. Für jede 0-mannigfaltige alias separierte étale Abbildung haben wir in 21.5.7.4 bereits eine ausgezeichnete Orientierung konstruiert.

Satz 21.6.2.8 (**Eigrückzug unter mannigfaltigen Abbildungen**). *Im Fall einer mannigfaltigen Abbildung $f : X \to Y$ induziert unser natürlicher Morphismus 21.4.7.10 Isomorphismen*

$$f^!\mathbb{Z}_Y \otimes f^*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f^!\mathcal{G}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß unsere mannigfaltige Abbildung f die Projektion $c : E \times Y \to Y$ ist für einen endlichdimensionalen reellen affinen Raum E. In diesem Fall ist schon mal die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus $c_!c^!\mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_Y$ nach 21.6.2.4. Wir können also von einem Isomorphismus

$$c_!(c^!\mathbb{Z}_Y \otimes c^*\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} c_!c^!\mathbb{Z}_Y \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_Y \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$$

ausgehen und müssen zeigen, daß er unter der Adjunktion einem Isomorphismus $c^!\mathbb{Z}_Y \otimes c^*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c^!\mathcal{G}$ entspricht. Nach 21.6.2.3 ist $c^!\mathbb{Z}_Y \cong \mathbb{Z}_{E\times y}[d]$ und nach 21.6.2.2 gibt es folglich $\mathcal{E}$ mit $c^!\mathcal{E} \cong (c^!\mathbb{Z}_Y \otimes c^*\mathcal{G})$, denn die rechte Seite liegt damit im wesentlichen Bild von c^*. Jeder Isomorphismus $c_!(c^!\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ entspricht aber in der Tat unter der Adjunktion einem Isomorphismus $c^!\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} c^!\mathcal{G}$, denn wir können die von der Ajunktion induzierte Abbildung verstehen als die Komposition

$$(c^!\mathcal{E}) \to c^!c_!(c^!\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} c^!\mathcal{G}$$

mit dem von der Einheit der Adjunktion induzierten Morphismus links und dieser linke Morphismus ist ein Isomorphismus, da die Komposition $c^!\mathcal{E} \to c^!c_!c^!\mathcal{E} \to c^!\mathcal{E}$ die Identität ist nach den Dreiecksidentitäten und die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus $c_!c^!\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ nach 21.6.2.4. $\square$

Übungen

Übung 21.6.2.9. Die Verknüpfung von zwei mannigfaltigen Abbildungen ist wieder eine mannigfaltige Abbildung. Orientierungen unserer beiden Abbildungen induzieren in natürlicher Weise eine Orientierung ihrer Verknüpfung. Wir nennen sie die **Verknüpfungsorientierung**.

Übung 21.6.2.10. Ist in einem kartesischen Diagramm von topologischen Räumen eine Ausgangskante d-mannigfaltig, so auch die gegenüberliegende Kante aus dem Faserprodukt. Ist $fp = qg$ kartesisch mit f mannigfaltig, so ist die ausgezeichnete Transformation aus 21.4.7.12 eine Isotransformation

$$p^*f^! \overset{\sim}{\Rightarrow} g^!q^*$$

Insbesondere induziert jede Orientierung von f eine Orientierung von g. Wir nennen sie die **zurückgezogene Orientierung**. Ich habe diese Übung noch nicht gemacht.

21.6.3 Homologien und ihre Funktorialitäten

21.6.3.1. Seien X lesb und $c := \mathrm{fin}_X : X \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung. Unsere Vergleichsisomorphismen zur singulären Homologie und Kohomologie, die wir im Anschluß in 21.6.3.4 besprechen, motivieren uns zu den Definitionen

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_q(X)_{\mathrm{garb}} &:= \mathcal{H}^{-q}c_!c^!\mathbb{Z}_{\mathrm{top}} & \mathrm{H}^q(X)_{\mathrm{garb}} &:= \mathcal{H}^q c_*c^*\mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \\ \mathrm{H}^!_q(X)_{\mathrm{garb}} &:= \mathcal{H}^{-q}c_*c^!\mathbb{Z}_{\mathrm{top}} & \mathrm{H}^q_!(X)_{\mathrm{garb}} &:= \mathcal{H}^q c_!c^*\mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \end{aligned}$$

Wir nennen diese Gruppen die **garbentheoretische Homologie**, **Kohomologie**, **lokalendliche Homologie** und **kompakte Kohomologie**. Analoge Definitionen $\mathrm{H}_q(X;G)_{\mathrm{garb}} := \mathcal{H}^{-q}c_!c^!G_{\mathrm{top}}$ und dergleichen vereinbaren wir für den Fall einer abelschen Gruppe G. Wenn wir den Zusatz garb weglassen, gilt es aus dem Kontext zu erschließen, was genau gemeint ist. Sei weiter eine offene Teilmenge $U \Subset X$ gegeben, sei $i : A \hookrightarrow X$ die Einbettung ihres Komplements und bezeichne $a = \mathrm{fin}_A : A \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung. In dieser Situation motivieren die Vergleichsisomorphismen zur singulären Homologie und Kohomologie, die wir im Anschluß in 21.6.3.4 besprechen, uns zu den Definitionen

$$\mathrm{H}_q(X,U)_{\mathrm{garb}} := \mathcal{H}^{-q}a_!i^*c^!\mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \qquad \mathrm{H}^q(X,U)_{\mathrm{garb}} = \mathrm{H}^q_A(X) := \mathcal{H}^q a_*i^!c^*\mathbb{Z}_{\mathrm{top}}$$

Wir nennen sie die **relative garbentheoretische Homologie** und die **relative garbentheoretische Kohomologie** alias **lokale Kohomologie**.

21.6.3.2. Die wesentlichen Funktorialitäten dieser vier Theorien faßt die folgende Tabelle zusammen. Mehr dazu wird im Anschluß diskutiert.

	Vorschub	Rückzug
H_q	beliebig	eigentlich orientiert mannigfaltig
$\mathrm{H}^!_q$	eigentlich	orientiert mannigfaltig
$\mathrm{H}^q_!$	orientiert mannigfaltig	eigentlich
H^q	eigentlich orientiert mannigfaltig	beliebig

21.6.3.3 (**Diskussion weiterer Verallgemeinerungen**). Die beiden Kohomologien aus 21.6.3.1 sind sogar für beliebige topologische Räume sinnvoll definiert, aber die kompakte Kohomologie hat nur im Fall lokal kompakter Hausdorffräume gute Eigenschaften. Unsere Isomorphismen aus 21.4.7.8 induzieren für jeden lesb-Raum X und $c : X \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung einen Isomorphismus $\mathbb{D}c_!c^*\mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} c_*c^!\mathbb{Z}_{\mathrm{top}}$ und dann mit dem abstrakten universellen Koeffiziententheorem 20.3.8.24 für jede abelsche Gruppe G kurze exakte und unnatürlich spaltende Sequenzen

$$\mathrm{Ext}(\mathrm{H}^{q+1}_! X, G) \hookrightarrow \mathrm{H}^!_q(X; G) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{H}^q_! X, G)$$

Die lokalendliche Homologie kann man sogar für beliebige topologische Räume sinnvoll definieren als

$$\mathrm{H}^!_q(X)_{\mathrm{garb}} := \mathcal{H}^{-q}\mathbb{D}c_!c^*\mathbb{Z}_{\mathrm{top}}$$

Auch sie hat jedoch nur im Fall lokal kompakter Hausdorffräume gute Eigenschaften. Für die garbentheoretische Homologie kenne ich keine sinnvolle Verallgemeinerung über den Fall von lesb-Räumen hinaus.

21.6.3.4 (**Vergleichsisomorphismen zur singulären Theorie**). Um die obigen Definitionen zu motivieren und mit Anschauung zu füllen, diskutiere ich Vergleichsisomorphismen zur singulären Theorie.

Kohomologie: Einen Vergleichsisomorphismus $\mathrm{H}^q(X)_{\mathrm{garb}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X)_{\mathrm{sing}}$ haben wir bereits in 21.6.7.2 für jeden lokal singulärazyklischen Raum konstruiert;

Kompakte Kohomologie: Einen Isomorphismus $\mathrm{H}^q_!(X)_{\mathrm{garb}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(X)_{\mathrm{sing}}$ haben wir bereits in 19.5.1.21 für jeden lokal singulärazyklischen lokal kompakten Hausdorffraum konstruiert;

Relative Kohomologie: Gegeben seien ein lokal singulärazyklischer Raum X mit $i : A \hookrightarrow X$ der Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge und a der konstanten Abbildungen von A auf den einpunktigen Raum. Aus 19.5.1.20 kennen wir den zweiten Isomorphismus der Sequenz

$$\mathcal{H}^q a_* i^! c^* \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_A(X)_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X, X\backslash A)_{\text{sing}}$$

Den ersten dieser Isomorphismen kennen wir aus 21.5.3.8 für eine beliebige abgeschlossene Teilmenge eines beliebigen topologischen Raums.

Wir vereinbaren, daß ein topologischer Raum X **polyederähnlich** heißt, wenn er lokal kompakt ist und es es darin eine konfinale Folge von Kompakta $K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset X$ gibt derart, daß die relative singuläre Homologie $\mathrm{H}_q(X, X\backslash K_n)_{\text{sing}}$ für alle q und n endlich erzeugt ist.

Homologie: Einen Isomorphismus $\mathrm{H}_q(X)_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X)_{\text{sing}}$ konstruieren wir in 21.6.7.27 für jeden lokal singulärazyklischen lokal polyederähnlichen lesb-Raum;

Lokalendliche Homologie: Einen Isomorphismus $\mathrm{H}^!_q(X)_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^!_q(X)_{\text{sing}}$ konstruieren wir ebenfalls in 21.6.7.27 für jeden lokal singulärazyklischen lokal polyederähnlichen und abzählbar basierten lesb-Raum mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß der Funktor der globalen Schnitte $\Gamma : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}$ endliche homologische Dimension hat.

Relative Homologie: Gegeben X ein lokal singulärazyklischer lokal polyederähnlicher lesb-Raum und $i : A \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge und $c : X \to \mathrm{top}$ sowie $a : A \to \mathrm{top}$ die jeweils einzige Abbildung konstruieren wir in 21.6.7.28 einen Isomorphismus

$$\mathcal{H}^{-q} a_! i^* c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} = \mathbb{H}^{-q}_!(A; \omega_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X, X\backslash A; \mathbb{Z})_{\text{sing}}$$

Für die reduzierten Theorien liefern unsere ausgezeichneten Isomorphismen der nichtreduzierten Theorien unmittelbar ausgezeichnete Isomorphismen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{H}}_q(X)_{\text{sing}} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q}(\mathrm{Keg}(c_! c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \to \mathbb{Z}_{\text{top}})[-1]) \\ \tilde{\mathrm{H}}^q(X)_{\text{sing}} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q(\mathrm{Keg}(\mathbb{Z}_{\text{top}} \to c_* c^* \mathbb{Z}_{\text{top}})) \end{aligned}$$

Die Abbildungskegel darin sind über der Koeinheit beziehungsweise Einheit der jeweiligen Adjunktion zu verstehen.

Ergänzung 21.6.3.5. Mit 21.9.10.2 ist klar, daß jede abzählbar basierte Mannigfaltigkeit alle für unsere Vergleichssätze geforderten Eigenschaften hat. Es ist auch

klar, daß die Realisierung $X = \Delta(\mathcal{K})$ eines abzählbaren lokal endlichen endlichdimensionalen Simplizialkomplexes $\mathcal{K}$ alle für unsere Vergleichssätze geforderten Eigenschaften hat. Man sollte noch einen Beweis dafür ausschreiben, daß die Menge der komplexen Punkte einer separierten komplexen Varietät mit ihrer analytischen Topologie alle für unsere Vergleichssätze geforderten Eigenschaften hat.

21.6.3.6. Gegeben ein lesb-Raum X liefert die Koeinheit der Adjunktion einen ausgezeichneten Homomorphismus, die **Augmentation**

$$\varepsilon : \mathrm{H}_0(X) \to \mathbb{Z}$$

beziehungsweise $\varepsilon : \mathrm{H}_0(X;G) \to G$. In der singulären Theorie ist der entsprechende Homomorphismus die von der Augmentation 17.3.3.5 induzierte Abbildung, daher die Terminologie.

21.6.3.7 (**Universelle Koeffiziententheoreme der Garbenkohomologie**). Universelle Koeffiziententheoreme gelten in der Garbenhomologie im allgemeinen nur unter starken Voraussetzungen und sind nicht ganz leicht zu zeigen. Für jede Mannigfaltigkeit X liefert jedoch Satz 21.6.2.8 angewandt auf die konstante Abbildung $c : X \to \mathrm{top}$ für jede abelsche Gruppe G einen ausgezeichneten Isomorphismus $c^!\mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \otimes c^*G_{\mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} c^!G_{\mathrm{top}}$. Mit der Projektionsformel erhalten wir daraus einen ausgezeichneten Isomorphismus $c_!c^!\mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \otimes G_{\mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} c_!c^!G_{\mathrm{top}}$. Mit 20.3.8.23 erhalten wir so für jede Mannigfaltigkeit natürliche und unnatürlich spaltende kurze exakte Sequenzen

$$\mathrm{H}_q(X) \otimes G \hookrightarrow \mathrm{H}_q(X;G) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_{q-1}(X) * G$$

in der Garbenhomologie. Weiter ist für Mannigfaltigkeiten $c^!\mathbb{Z}_{\mathrm{top}}$ starr und wir erhalten mit relativer Verdierdualität und 18.3.4.10 und der vorhergehenden Beschreibung von $c^!G_{\mathrm{top}}$ in vereinfachter Notation ausgezeichnete Isomorphismen

$$(c_!c^!\mathbb{Z} \Rightarrow G) \xrightarrow{\sim} c_*(c^!\mathbb{Z} \Rightarrow c^!G) \xrightarrow{\sim} c_*\big((c^!\mathbb{Z})^* \otimes (c^!\mathbb{Z}) \otimes c^*G\big) \xrightarrow{\sim} c_*c^*G$$

Mit dem abstrakten universellen Koeffiziententheorem 20.3.8.24 erhalten wir so wie in 17.6.7.2 für jede abelsche Gruppe G und jede Mannigfaltigkeit X auch für die Garbenhomologie und -kohomologie natürliche und unnatürlich spaltende kurze exakte Sequenzen

$$\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_{q-1}X, G) \hookrightarrow \mathrm{H}^q(X;G) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_qX, G)$$

21.6.3.8. Im folgenden besprechen wir einige Funktorialitäten, die aus der Verdierdualität abgeleitet werden können, ohne daß sie darin explizit vorkommt. Das Prinzip ist immer dasselbe. Gegeben eine d-mannigfaltige Abbildung $f : X \to Y$

erinnern wir aus 21.6.2.7 die lokal zur konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ isomorphe relative Orientierungsgarbe $\mathrm{or}_f := f^!\mathbb{Z}_Y[-d]$. Für sie liefert Satz 21.6.2.8 Isomorphismen

$$f^!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_f[d] \otimes f^*\mathcal{F}$$

Im Spezialfall einer 0-mannigfaltigen alias étalen separierten Abbildung liefert 21.5.7.3 sogar eine Isotransformation $f^! \overset{\sim}{\Rightarrow} f^*$ alias einen Isomorphismus $\mathrm{or}_f \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$. Im allgemeinen heißt eine mannigfaltige Abbildung f **orientierbar**, wenn es einen derartigen Isomorphismus gibt. Die Wahl eines derartigen Isomorphismus heißt dann eine **Orientierung** unserer Abbildung f.

21.6.3.9 (**Funktorialitäten der Kohomologie**). Gegeben ein topologischer Raum X und die konstante Abbildung $a : X \to \mathrm{top}$ haben wir

$$\mathrm{H}^q(X) = \mathcal{H}^q a_* a^* \mathbb{Z}_{\mathrm{top}}$$

Das **Zurückholen** unter einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ auf der Garbenkohomologie können wir beschreiben als eine Konsequenz der Einheit der Adjunktion $\mathrm{id} \Rightarrow f_* f^*$ mit der Notation $b : Y \to \mathrm{top}$ für die konstante Abbildung vermittels des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^q b_* b^* \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{H}^q b_* f_* f^* b^* \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{H}^q a_* a^* \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{H}^q(Y) \arrow[rr] & & \mathrm{H}^q(X)
\end{tikzcd}$$

In der de-Rham-Theorie kann es nach 19.5.4.10 durch das Zurückholen glatter Differentialformen beschrieben werden. Im Spezialfall einer eigentlichen separierten étalen Abbildung alias endlichen Überlagerung f können wir auch ein **Vorschieben** alias eine **Summation über die Fasern** auf der Kohomologie erklären, indem wir $f_! = f_*$ beachten und unsere Isotransformation $f^! \overset{\sim}{\Rightarrow} f^*$ aus 21.5.7.3 erinnern und mit der Koeinheit der Adjunktion $f_! f^! \Rightarrow \mathrm{id}$ unser Vorschieben erklären vermittels des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^q a_* a^* \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \mathcal{H}^q b_* f_! f^! b^* \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[r] & \mathcal{H}^q b_* b^* \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{H}^q(X) \arrow[rr] & & \mathrm{H}^q(Y)
\end{tikzcd}$$

Gegeben allgemeiner eine eigentliche d-mannigfaltige und orientierte Abbildung $f : X \to Y$ liefert dieselbe Konstruktion mit 21.6.3.8 analog einen ausgezeichneten Morphismus

$$\mathrm{H}^q(X) \to \mathrm{H}^{q-d}(Y)$$

Er heißt die **Integration über die Fasern**, da er in der de-Rham-Theorie durch Integration über die Fasern im Sinne von **??** berechnet werden kann. Noch allgemeiner haben wir für eine beliebige stetige Abbildung das Zurückholen $\mathrm{H}^q(Y;\mathcal{G}) \to \mathrm{H}^q(X;f^*\mathcal{G})$ und für eine beliebige eigentliche d-mannigfaltige Abbildung eine Integration über die Fasern $\mathrm{H}^q(X;f^*\mathcal{G}\otimes \mathrm{or}_f) \to \mathrm{H}^{q-d}(Y;\mathcal{G})$.

21.6.3.10 (**Funktorialitäten der kompakten Kohomologie**). Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum. Die kompakte Kohomologie von X ist

$$\mathrm{H}^q_!(X) = \mathcal{H}^q a_! a^* \mathbb{Z}_{\mathrm{top}}$$

Gegeben $f : X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung oder allgemeiner eine eigentliche Abbildung von lokal kompakten Hausdorffräumen erhalten wir wegen $f_! = f_*$ aus der Einheit der Adjunktion $\mathrm{id} \Rightarrow f_* f^*$ das **abgeschlossene** oder allgemeiner **eigentliche Zurückholen**

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^q b_! b^* \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{H}^q b_! f_! f^* b^* \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{H}^q a_! a^* \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{H}^q_!(Y) \arrow[rr] & & \mathrm{H}^q_!(X)
\end{tikzcd}$$

In der de-Rham-Theorie kann es nach 19.5.4.20 durch das Zurückholen glatter kompakt getragener Differentialformen beschrieben werden. Gegeben $f : X \to Y$ eine offene Einbettung oder allgemeiner eine étale Abbildung von lokal kompakten Hausdorffräumen liefert dahingegen unsere ausgezeichnete Isotransformation $f^! \tilde{\Rightarrow} f^*$ aus 21.5.7.3 zusammen mit der Koeinheit der Adjunktion $f_! f^! \Rightarrow \mathrm{id}$ die **Ausdehnung durch Null** und allgemeiner **Summation über die Fasern**

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^q a_! a^* \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \mathcal{H}^q b_! f_! f^* b^* \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[r] & \mathcal{H}^q b_! b^* \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{H}^q_!(X) \arrow[rr] & & \mathrm{H}^q_!(Y)
\end{tikzcd}$$

Gegeben allgemeiner eine d-mannigfaltige und orientierte Abbildung $f : X \to Y$ liefert dieselbe Konstruktion mit 21.6.3.8 analog einen ausgezeichneten Morphismus

$$\mathrm{H}^q_!(X) \to \mathrm{H}^{q-d}_!(Y)$$

Er heißt die **Integration über die Fasern**, da er in der de-Rham-Theorie durch Integration über die Fasern im Sinne von **??** berechnet werden kann. Noch allgemeiner haben wir für eine eigentliche stetige Abbildung von lokal kompakten Hausdorffräumen das Zurückholen $\mathrm{H}^q_!(Y;\mathcal{G}) \to \mathrm{H}^q_!(X;f^*\mathcal{G})$ und für jede d-mannigfaltige Abbildung eine Integration über die Fasern $\mathrm{H}^q_!(X;f^*\mathcal{G}\otimes \mathrm{or}_f) \to \mathrm{H}^{q-d}_!(Y;\mathcal{G})$.

21.6.3.11 (**Funktorialitäten der lokalendlichen Homologie**). Sei X ein lesb-Raum. Die lokalendliche Homologie von X erhalten wir als

$$\mathrm{H}^!_q(X) = \mathcal{H}^{-q} a_* a^! \mathbb{Z}_{\mathrm{top}}$$

Gegeben eine abgeschlossene Einbettung oder allgemeiner eine eigentliche lesb-Abbildung $f : X \to Y$ in einen weiteren derartigen Raum erhalten wir das **eigentliche Vorschieben** für die lokalendliche Homologie aus der Koeinheit der Adjunktion $f_! f^! \Rightarrow \mathrm{id}$ mit $f_! = f_*$ als die Komposition

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^{-q} a_* a^! \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \mathcal{H}^{-q} b_* f_* f^! b^! \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[r] & \mathcal{H}^{-q} b_* b^! \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{H}^!_q(X) \arrow[rr] & & \mathrm{H}^!_q(Y)
\end{tikzcd}$$

Gegeben eine offene Einbettung oder allgemeiner eine étale Abbildung f liefert dahingegen unsere ausgezeichnete Isotransformation $f^! \overset{\sim}{\Rightarrow} f^*$ aus 21.5.7.3 zusammen mit der Einheit der Adjunktion $\mathrm{id} \Rightarrow f_* f^*$ das **étale Zurückholen** auf der lokalendlichen Homologie als die Komposition

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^{-q} b_* b^! \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{H}^{-q} b_* f_* f^! b^! \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{H}^{-q} a_* a^! \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{H}^!_q(Y) \arrow[rr] & & \mathrm{H}^!_q(X)
\end{tikzcd}$$

Ist allgemeiner f eine d-mannigfaltige orientierte Abbildung, so daß wir einen ausgezeichneten Isomorphismus $f^! \overset{\sim}{\Rightarrow} f^*[d]$ zur Verfügung haben, so ergibt sich in derselben Weise für die lokalendliche Homologie das **mannigfaltige Zurückholen**

$$\mathrm{H}^!_q(Y) \to \mathrm{H}^!_{q+d}(X)$$

Ist $A \mathrel{\not\subset} Y$ eine orientierte Mannigfaltigkeit, so bildet es etwa das Bild $z_A \in \mathrm{H}^!_q(Y)$ des Fundamentalzykels von A auf das Bild $z_{f^{-1}(A)} \in \mathrm{H}^!_{q+d}(X)$ des Fundamentalzykels von $f^{-1}(A)$ ab, das wir dazu mit der durch die Orientierungen von f und A bestimmten Verknüpfungsorientierung 21.6.2.9 zu versehen haben, vergleiche 21.6.3.13.

21.6.3.12 (**Funktorialitäten der Homologie**). Sei X ein lesb-Raum und $a : X \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung. Die Homologie von X wird in der Garbenkohomologie erklärt als

$$\mathrm{H}_q(X) = \mathcal{H}^{-q} a_! a^! \mathbb{Z}_{\mathrm{top}}$$

Gegeben eine abgeschlossene Einbettung oder allgemeiner eine eigentliche lesb-Abbildung $f : X \to Y$ in einen weiteren derartigen Raum erklären wir das **Vorschieben unter** f mit Hilfe der Koeinheit der Adjunktion $f_! f^! \Rightarrow \mathrm{id}$ als die Komposition

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^{-q} a_! a^! \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \mathcal{H}^{-q} b_! f_! f^! b^! \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[r] & \mathcal{H}^{-q} b_! b^! \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{H}_q(X) \arrow[rr] & & \mathrm{H}_q(Y)
\end{tikzcd}$$

Im Spezialfall einer eigentlichen separierten étalen Abbildung alias endlichen Überlagerung f können wir auch ein **eigentliches étales Zurückholen** auf der Homologie erklären, indem wir $f_! = f_*$ beachten und von unserer ausgezeichneten Isotransformation $f^! \overset{\sim}{\Rightarrow} f^*$ nach 21.5.7.3 ausgehen und mit der Einheit der Adjunktion $\mathrm{id} \Rightarrow f_* f^*$ unser Zurückholen erklären vermittels des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^{-q} b_! b^! \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{H}^{-q} b_! f_! f^! b^! \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{H}^{-q} a_! a^! \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{H}_q(Y) \arrow[rr] & & \mathrm{H}_q(X)
\end{tikzcd}$$

Wir kennen diese Abbildungen in der singulären Theorie bereits aus 17.1.3.16 und hatten sie dort „Transferabbildungen“ genannt. Ist allgemeiner f eine eigentliche d-mannigfaltige orientierte Abbildung, so daß wir einen ausgezeichneten Isomorphismus $f^! \overset{\sim}{\Rightarrow} f^*[d]$ zur Verfügung haben, so erhalten wir ebenso für die Homologie das **eigentliche mannigfaltige Zurückholen**

$$\mathrm{H}_q(Y) \to \mathrm{H}_{q+d}(X)$$

Gegeben eine kompakte orientierte q-Mannigfaltigkeit $A \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\; Y$ bildet es etwa das Bild ihres Fundamentalzykels $\omega_A \in \mathrm{H}_q(Y)$ ab auf das Bild des Fundamentalzykels $\omega_{f^{-1}(A)} \in \mathrm{H}_{q+d}(X)$ ihres Urbilds $f^{-1}(A) \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\; X$, das wir dazu mit der durch die Orientierungen von f und A bestimmten Verknüpfungsorientierung 21.6.2.9 zu versehen haben, vergleiche 21.6.3.14.

Übungen

Übung 21.6.3.13. (Ich habe sie noch nicht gemacht.) Gegeben ein kartesisches Quadrat

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "q"] & Y
\end{tikzcd}$$

alias $fp = qg$ von lesb-Räumen mit d-mannigfaltigem orientiertem f und der zurückgezogenen Orientierung 21.6.2.10 auf g und p, q eigentliche lesb-Abbildungen kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^!_{n+d} W \arrow[r] & \mathrm{H}^!_{n+d} X \\ \mathrm{H}^!_n Z \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{H}^!_n Y \arrow[u] \end{tikzcd}$$

mit dem mannigfaltigen Zurückholen in den Vertikalen und dem eigentlichen Vorschieben in den Horizontalen. Ebenso kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^n_! W \arrow[d] & \mathrm{H}^n_! X \arrow[l] \arrow[d] \\ \mathrm{H}^{n-d}_! Z & \mathrm{H}^{n-d}_! Y \arrow[l] \end{tikzcd}$$

mit dem eigentlichen Zurückholen in den Horizontalen und der Integration über die Fasern in den Vertikalen.

Übung 21.6.3.14. (Ich habe sie noch nicht gemacht.) Gegeben ein kartesisches Quadrat

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "q"] & Y \end{tikzcd}$$

alias $fp = qg$ von lesb-Räumen mit eigentlichem d-mannigfaltigen orientierten f und der zurückgezogenen Orientierung 21.6.2.10 auf g und p, q kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}_{n+d} W \arrow[r] & \mathrm{H}_{n+d} X \\ \mathrm{H}_n Z \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{H}_n Y \arrow[u] \end{tikzcd}$$

mit dem eigentlichen mannigfaltigen Zurückholen in den Vertikalen und dem Vorschieben in den Horizontalen. Ebenso kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^n W \arrow[d] & \mathrm{H}^n X \arrow[l] \arrow[d] \\ \mathrm{H}^{n-d} Z & \mathrm{H}^{n-d} Y \arrow[l] \end{tikzcd}$$

mit dem Zurückholen in den Horizontalen und der Integration über die Fasern in den Vertikalen.

Übung 21.6.3.15. Gegeben $X = U \cup Z$ ein lokal kompakter Hausdorffraum mit einer Zerlegung in eine offene und eine abgeschlossene Teilmenge konstruiere man die lange exakte Sequenz der lokalendlichen Homologie

$$\ldots \to \mathrm{H}^!_q(Z) \to \mathrm{H}^!_q(X) \to \mathrm{H}^!_q(U) \to \mathrm{H}^!_{q-1}(Z) \to \ldots$$

21.6.4 Schnittpaarung und Poincarédualität

21.6.4.1 (**Poincarédualität als Verdierdualität**). Gegeben eine orientierte m-Mannigfaltigkeit X erinnere ich an den **Poincaré-Isomorphismus**

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_X = \mathrm{P}_{\vec{X}} : \mathrm{H}_q X \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{m-q}_! X$$

für die singuläre Homologie aus 17.7.4.3. Im Rahmen der sechs Funktoren erhalten wir ihn, diesmal für die Garbenhomologie und kompakte Garbenkohomologie, indem wir vom Dualisierungsisomorphismus $\mathrm{p}_X : c^!\mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_X[m]$ nach 21.6.1.15 ausgehen und durch Nachschalten der Orientierung $\mathrm{or}_X \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$ den **orientierten Dualisierungsisomorphismus** $\mathrm{p}_{\vec{X}} : c^!\mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X[m]$ bilden, den wir im folgenden auch kurz als **Dualisierungsisomorphismus** ansprechen und p_X notieren. Er induziert dann den gewünschten Isomorphismus

$$\mathrm{H}_q X = \mathcal{H}^{-q} c_! c^! \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q} c_! \mathbb{Z}_X[m] = \mathrm{H}^{m-q}_! X$$

von der Homologie zur kompakten Kohomologie. Ein Student mag mir einmal ausschreiben, warum er unter den Vergleichsisomorphismen 21.6.7.27 und 21.6.7.6 unserem Poincaré-Isomorphismus aus der singulären Homologietheorie 17.7.4.5 entspricht.

21.6.4.2 (**Dualisierte Poincaré-Isomorphismen**). Gegeben eine orientierte Mannigfaltigkeit X der Dimension m erhalten wir in derselben Weise mit c_* statt $c_!$ Isomorphismen

$$\mathrm{P}^! = \mathrm{P}^!_X : \mathrm{H}^!_q X \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{m-q} X$$

Wir nennen sie die **dualisierten Poincaré-Isomorphismen**, da sie im Fall von Körperkoeffizienten durch Übergang zur transponierten Abbildung auf den Dualräumen und Vertauschen von q mit $m - q$ aus den gewöhnlichen Poincaré-Isomorphismen entstehen. Wir verstehen dabei die lokalendliche Homologie links im garbentheoretischen Sinne. Die meiner Anschauung besser zugängliche lokalendliche singuläre Homologie stimmt nicht für allgemeine Mannigfaltigkeiten, aber nach 21.6.7.27 und 21.6.1.4 doch zumindest für abzählbar basierte Mannigfaltigkeiten mit der lokalendlichen garbentheoretischen Homologie überein. Die singuläre Kohomologie stimmt nach 21.6.7.2 für beliebige Mannigfaltigkeiten mit der Garbenkohomologie überein. Ich habe die Konstruktion der dualisierten Poincaré-Isomorphismen in der singulären Homologietheorie nicht ausgeführt, deshalb bleibt es uns in diesem Fall erspart, etwaige Rückwärtskompatibilitäten zu prüfen.

21.6.4.3. Für kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten X gilt $\mathrm{P}_X = \mathrm{P}^!_X$.

Proposition 21.6.4.4 (**Freiheit der Homologie bei Mannigfaltigkeiten**). *Gegeben eine abzählbar basierte orientierbare m-Mannigfaltigkeit X is $\mathrm{H}_{m-1}X$ eine freie abelsche Gruppe.*

Beweis. Es reicht, das für X zusammenhängend zu zeigen. Für X kompakt wissen wir es bereits aus 17.5.5.9. Es reicht also, es für X zusammenhängend nichtkompakt zu zeigen. In dem Fall haben wir $\mathrm{H}^!_0(X;G) = 0$ für jede abelsche Gruppe G nach 17.7.3.6 und damit $\mathrm{H}^m(X;G) = 0$ nach den dualisierten Poincaré-Isomorphismen 21.6.4.2 mit Koeffizienten G und damit $\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_{m-1}X, G) = 0$ für jede abelsche Gruppe G nach dem universellen Koeffiziententheorem der Kohomologie 17.6.7.2. Die Proposition folgt. □

21.6.4.5. Gegeben eine orientierte m-Mannigfaltigkeit X definieren wir wie in 17.7.4.9 angekündigt das **Schnittprodukt** oder genauer **cup-Schnittprodukt** als die vom cup-Produkt $\cup : \mathrm{H}^pX \times \mathrm{H}^qX \to \mathrm{H}^{p+q}X$ unter den dualisierten Poincaré-Isomorphismen induzierte bilineare Abbildung

$$\mathrm{H}^!_{m-p}X \times \mathrm{H}^!_{m-q}X \to \mathrm{H}^!_{m-p-q}X$$

Wir notieren es $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$. Im folgenden zeigen wir, daß es in der Tat die in 17.7.4.9 angekündigten Eigenschaften hat, die dann auch eigentlich erst die Bezeichnung als Schnittprodukt rechtfertigen.

21.6.4.6 (**Funktorialität der dualisierten Poincaré-Isomorphismen**). Gegeben eine eigentliche Abbildung $f : X \to Y$ von orientierten Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m, n erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^!_qX \arrow[r, "\mathrm{P}^!_X", "\sim"'] \arrow[d, "f_!"'] & \mathrm{H}^{m-q}X \arrow[d] \\
\mathrm{H}^!_qY \arrow[r, "\mathrm{P}^!_Y", "\sim"'] & \mathrm{H}^{n-q}Y
\end{tikzcd}$$

mit der rechten Vertikale, die für $c : X \to \mathrm{top}$ und $d : Y \to \mathrm{top}$ mit $fd = c$ entsteht aus der Verknüpfung

$$f_*\mathbb{Z}_X[m] \xrightarrow{\sim} f_!\mathbb{Z}_X[m] \xrightarrow{\sim} f_!c^!\mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} f_!f^!d^!\mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \to d^!\mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_Y[n]$$

von Morphismen gegeben durch die Isotransformation $f_! \overset{\sim}{\Rightarrow} f_*$, den Dualisierungsisomorphismus $\mathrm{p}_{\vec{X}}$, die Identifikation $c^! \overset{\sim}{\Rightarrow} f^!d^!$, die Koeinheit der Adjunktion $(f_!, f^!)$ und den Dualisierungsisomorphismus $\mathrm{p}_{\vec{Y}}$.

21.6.4.7. Für den Fall, daß unsere eigentliche Abbildung aus 21.6.4.6 die Einbettung einer orientierten Untermannigfaltigkeit $X \subset\!\!\!

Faktorisierung von $1 \in \mathrm{H}^0 X$ den **lokalen Fundamentalkozykel** und notieren ihn wie den ursprünglichen Fundamentalkozykel

$$\tau_X \in \mathrm{H}^p_X(Y)$$

Beispiel 21.6.4.11. Gegeben (Y, ω) eine orientierte n-Mannigfaltigkeit und $y \in Y$ ein Punkt ist der lokale Fundamentalkozykel $\tau_{\{y\}} \in \mathrm{H}^n_{\{y\}}(Y) = \mathrm{H}^n(Y, Y \backslash y)$ dasjenige Element, das unter der Kroneckerpaarung mit der lokalen Orientierung $\omega_y \in \mathrm{H}_n(Y, Y \backslash y)$ zu 1 paart.

21.6.4.12 (**Cup-Produkt der lokalen Kohomologie**). Gegeben ein topologischer Raum X und Einbettungen abgeschlossener Teilmengen $i : A \hookrightarrow X$ sowie $j : B \hookrightarrow X$ und $k : A \cap B \hookrightarrow X$ haben wir einen offensichtlichen Isomorphismus

$$k_! \mathbb{Z}_{A \cap B} \xrightarrow{\sim} i_! \mathbb{Z}_A \otimes j_! \mathbb{Z}_B$$

Wir diskutieren im Anschluß in 21.6.4.13, wie er im Rahmen der sechs Funktoren erhalten werden kann. Er induziert eine bilineare Abbildung

$$\mathrm{H}^p_A(X) \times \mathrm{H}^q_B(X) \to \mathrm{H}^{p+q}_{A \cap B}(X)$$

durch die Vorschrift $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \otimes \beta$ in der Interpretation der lokalen Kohomologieklassen als Morphismen $\alpha : i_! \mathbb{Z}_A \to \mathbb{Z}_X[p]$ und $\beta : j_! \mathbb{Z}_B \to \mathbb{Z}_X[q]$ der derivierten Kategorie $\mathrm{Der}_{/X}$.

21.6.4.13 (**Ausdehnung durch Null und Tensorieren**). Gegeben ein topologischer Raum X und Einbettungen lokal abgeschlossener Teilmengen $i : A \hookrightarrow X$ sowie $j : B \hookrightarrow X$ und Objekte $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/A})$ sowie $\mathcal{G} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/B})$ liefert Basiswechsel im kartesischen Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r] \arrow[d, "k"'] & A \curlywedge B \arrow[d, "i \curlywedge j"] \\ X \arrow[r] & X \curlywedge X \end{tikzcd}$$

der Trennkategorie mit den Notationen $k : A \cap B \hookrightarrow X$ und $a : A \cap B \hookrightarrow A$ und $b : A \cap B \hookrightarrow B$ für die jeweiligen Einbettungen Isomorphismen

$$k_!(a^* \mathcal{F} \otimes b^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} i_! \mathcal{F} \otimes j_! \mathcal{G}$$

Für $\mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathbb{Z}_X$ erhalten wir so den in 21.6.4.12 als offensichtlich deklarierten Isomorphismus $k_! \mathbb{Z}_{A \cap B} \xrightarrow{\sim} i_! \mathbb{Z}_A \otimes j_! \mathbb{Z}_B$ sogar im Fall lokal abgeschlossener Einbettungen.

21.6.4.14 (**Verschwinden von cup-Produkten**). Gegeben seien ein topologischer Raum X und abgeschlossene Teilmengen $A \not\subset X$ sowie $B \not\subset X$. In Übung 21.6.4.35 werden Sie die Funktorialität der lokalen Kohomologie diskutieren und werden insbesondere sehen, daß unser cup-Produkt der lokalen Kohomologie das gewöhnliche cup-Produkt verallgemeinert. Wir erhalten also mit den bekannten Vertikalen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^p_A(X) \times \mathrm{H}^q_B(X) & \to & \mathrm{H}^{p+q}_{A\cap B}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^p(X) \times \mathrm{H}^q(X) & \to & \mathrm{H}^{p+q}(X) \end{array}$$

Das Analogon dieser Abbildung in der singulären Kohomologie kennen wir bereits aus 18.4.2.10, allerdings heißt unsere lokale Kohomologie dort die relative Kohomologie $\mathrm{H}^p(X, X\backslash A)$. In jedem Fall gilt $\mathrm{H}^n_\emptyset(X) = 0$ für alle n. Das bedeutet insbesondere für Elemente α, β des Kohomologierings, die von Elementen der lokalen Kohomologie in Bezug auf abgeschlossene Teilmengen A, B mit leerem Schnitt $A \cap B = \emptyset$ herkommen, im vollen Kohomologiering von X das Verschwinden des cup-Produkts

$$\alpha \cup \beta = 0$$

Beispiel 21.6.4.15 (**Verschwindende Schnittprodukte und erzwungene Schnitte**). Gegeben eine orientierte Mannigfaltigkeit X und orientierte abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten $A, B \not\subset X$ gilt

$$A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; [A]^! \cdot [B]^! = 0$$

In der Tat ist das Verschwinden des Schnittprodukts per definitionem gleichbedeutend zu $\tau_A \cup \tau_B = 0$ und das folgt im Fall $A \cap B = \emptyset$ aus 21.6.4.12, da unsere Fundamentalkozykel nach 21.6.4.10 bereits von der jeweiligen lokalen Kohomologie herkommen. Umgekehrt gilt dann natürlich auch

$$[A]^! \cdot [B]^! \neq 0 \;\Rightarrow\; A \cap B \neq \emptyset$$

In Worten wird also durch das Nichtverschwinden des Schnittprodukts bereits die Existenz von Schnittpunkten erzwungen. Bei dieser Argumentation fällt einem die Notation schon fast auf die Füße. Es bezeichnet darin $A \cap B$ einen Schnitt von Mengen, $\tau_A \cup \tau_B$ jedoch ein cup-Produkt von Kohomologieklassen.

21.6.4.16 (**Beschreibung der lokalen Kohomologie mit Lokalgarben**). Gegeben $A \not\subset X$ eine abgeschlossenene Teilmenge in einem topologischen Raum mit ihrer Einbettungsabbildung $i : A \hookrightarrow X$ erinnern wir aus 21.5.3.8 die Isomorphismen $\mathrm{H}^q_A(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X; i_* i^! \mathbb{Z}_X)$. Wir nennen

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{A\subset X} := i_* i^! \mathbb{Z}_X$$

die **Lokalgarbe von** A **in** X und erhalten Isomorphismen $\mathrm{H}^q_A(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X;\mathcal{L}_A)$. Der Isomorphismus der relativen Verdierdualität 21.4.7.8 liefert für $A \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ X$ und $i : A \hookrightarrow X$ die Einbettung eine Beschreibung der Lokalgarbe als Homgarbe

$$\mathcal{L}_A = i_* i^! \mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} (i_! \mathbb{Z}_A \Rrightarrow \mathbb{Z}_X)$$

Gegeben $u : U \hookrightarrow X$ die Einbettung einer offenen Teilmenge liefert die relative Verdierdualität 21.4.7.8 zusammen mit dem durch die Adjunktion $(u_!, u^*)$ gegebenen Isomorphismus $u^* \xrightarrow{\sim} u^!$ Isomorphismen $u^*\mathcal{L}_{A\subset X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{(A\cap U)\subset U}$.

21.6.4.17 (**Beschreibung des cup-Produkts mit Lokalgarben**). Seien X ein topologischer Raum, $A, B \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ X$ abgeschlossene Teilmengen, i, j deren Einbettungsabbildungen und $k : A \cap B \hookrightarrow X$ die Einbettung ihres Schnitts. Unter diesen Annahmen liefert unser Isomorphismus $k_!\mathbb{Z}_{A\cap B} \xrightarrow{\sim} i_!\mathbb{Z}_A \otimes j_!\mathbb{Z}_B$ aus 21.6.4.12 unter $(\Rrightarrow \mathbb{Z}_X)$ einen Morphismus

$$\mathcal{L}_A \otimes \mathcal{L}_B \to \mathcal{L}_{A\cap B}$$

vom derivierten Tensorprodukt der Lokalgarben in die Lokalgarbe des Schnitts. Wir nennen sie die **Lokalgarbenpaarung**. Das zugehörige cup-Produkt mit Koeffizienten paßt dann offensichtlich in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^p_A(X) \times \mathrm{H}^q_B(X) & \to & \mathrm{H}^{p+q}_{A\cap B}(X) \\ \downarrow \wr & & \wr \downarrow \\ \mathbb{H}^p(X;\mathcal{L}_A) \times \mathbb{H}^q(X;\mathcal{L}_B) & \to & \mathbb{H}^{p+q}(X;\mathcal{L}_{A\cap B}) \end{array}$$

mit den Isomorphismen aus 21.6.4.16 in den Vertikalen.

21.6.4.18 (**Lokalität der Lokalgarbenpaarung**). Seien X ein topologischer Raum und $A, B \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ X$ abgeschlossene Teilmengen. Für $U \subset\!\!\!\!\!\!\circ\ X$ mit Einbettungsabbildung $u : U \hookrightarrow X$ erhalten wir dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} u^*\mathcal{L}_A \otimes u^*\mathcal{L}_B & \to & u^*\mathcal{L}_{A\cap B} \\ \downarrow \wr & & \wr \downarrow \\ \mathcal{L}_{A\cap U} \otimes \mathcal{L}_{B\cap U} & \to & \mathcal{L}_{A\cap B\cap U} \end{array}$$

mit den Vertikalen aus 21.6.4.16 und der zurückgezogenen Lokalgarbenpaarung beziehungsweise der Lokalgarbenpaarung der eingeschränkten Situation in den Horizontalen.

Beispiel 21.6.4.19 (**Lokalgarbe einer Untermannigaltigkeit**). Gegeben $A \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ X$ eine orientierte Mannigfaltigkeit mit einer orientierten abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit der Kodimension p haben wir bereits in 21.6.4.10 einen Isomorphismus $i_*\mathbb{Z}_A[-p] \xrightarrow{\sim} i_* i^! \mathbb{Z}_X[p]$ angegeben, der in unserer neuen Terminologie interpretiert werden kann als eine Beschreibung der Lokalgarbe durch einen Isomorphismus

$$i_*\mathbb{Z}_A[-p] \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{A\subset X}$$

Beispiel 21.6.4.20 (**Multiplizität von Schnitten**). Seien X eine orientierbare n-Mannigfaltigkeit und $A, B \subset X$ abgeschlossene Teilmengen, die ihrerseits orientierbare Mannigfaltigkeiten der Kodimensionen p, q sind. Zusätzlich nehmen wir an, daß auch ihr Schnitt $A \cap B$ eine orientierbare Mannigfaltigkeit der Kodimension $p + q$ in X sein möge. Wählen wir jeweils Orientierungen auf X, A, B und $A \cap B$, so wird unter diesen Wahlen unsere Lokalgarbenpaarung $\mathcal{L}_A \otimes \mathcal{L}_B \to \mathcal{L}_{A\cap B}$ aus 21.6.4.17 für i, j, k die jeweiligen Einbettungen mit den Isomorphismen aus 21.6.4.19 zu einem Morphismus

$$i_*\mathbb{Z}_A[-p] \otimes j_*\mathbb{Z}_B[-q] \to k_*\mathbb{Z}_{A\cap B}[-p-q]$$

Nach Wegkürzen der Graduierungsverschiebungen und Vorschalten des Inversen des offensichtlichen Isomorphismus $i_*\mathbb{Z}_A \otimes j_*\mathbb{Z}_B \xrightarrow{\sim} k_*\mathbb{Z}_{A\cap B}$ erhalten wir einen Morphismus $k_*\mathbb{Z}_{A\cap B} \to k_*\mathbb{Z}_{A\cap B}$ und unter der Adjunktion eine lokal konstante Funktion

$$S = S_{X;A,B} : A \cap B \to \mathbb{Z}$$

Den Wert unserer Funktion an einer Stelle $x \in A \cap B$ nennen wir die **lokale Schnittmultiplizität** und finden damit für das cup-Produkt der Fundamentalkozykel in $\mathrm{H}^{p+q}_{A\cap B}(X)$ alias das Schnittprodukt der Fundamentalzykel unter der zusätzlichen Annahme, daß der Schnitt $A \cap B$ nur endlich viele Zusammenhangskomponenten hat, die Darstellung

$$\tau_A \cup \tau_B = \sum_{Z \in \mathrm{Zus}(A\cap B)} S_{X;A,B}(Z)\tau_Z \quad \text{alias} \quad [A]^! \cdot [B]^! = \sum_{Z \in \mathrm{Zus}(A\cap B)} S_{X;A,B}(Z)[Z]^!$$

als Summe über die Zusammenhangskomponenten Z von $A \cap B$. Hat der Schnitt unendlich viele Zusammenhangskomponenten,so gilt das immer noch, wenn wir die unendliche Summe im Sinne der Trägerzerlegung 19.4.4.16 der lokalen Kohomologie als ein Tupel interpretieren. Ist weiter $U \Subset X$ eine offene Teilmenge, so haben wir nach der Lokalität der Lokalgarbenpaarung 21.6.4.18 zusätzlich

$$S_{U;A\cap U,B\cap U} = S_{X;A,B}|_{A\cap B\cap U}$$

Unsere lokale Schnittmultiplizität an einer Stelle $x \in A \cap B$ ändert sich also nicht, wenn wir X durch eine offene Umgebung $U \Subset X$ von x ersetzen.

Vorschau 21.6.4.21. Jetzt diskutieren wir erst einmal Schnitte von Kurven in der Ebene. Dann zeigen wir in **??** im Fall von „transversalem Schnitt", daß unsere Schnittmultiplizitäten ± 1 sind mit einem durch die Orientierungen beschriebenen Vorzeichen.

Lemma 21.6.4.22. *Gegeben eine abgeschlossene zusammenhängende nichtkompakte Einsmannigfaltigkeit $Z \not\subset \mathbb{R}^2$ besteht ihr Komplement aus zwei Komponenten, deren höhere Garbenkohomologie jeweils verschwindet.*

Erster Beweis. Alexanderdualität 19.5.1.22. □

Zweiter Beweis. Wir schreiben $X := \mathbb{R}^2$ und $U := X \backslash Z$ und notieren i, j die Einbettungen von Z, U. Nach 15.1.8.5 gilt $Z \cong \mathbb{R}$. Das ausgezeichnete Dreieck $i_! i^! \mathbb{Z}_X \to \mathbb{Z}_X \to j_* j^* \mathbb{Z}_X \to [1]$ aus 21.5.3.3 liefert wegen $i^! \mathbb{Z}_X \cong \mathrm{or}_{Z \subset X}[-1] \cong \mathbb{Z}_Z[-1]$ nach 21.9.10.4 eine kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{H}^0(X) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(U) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^0(Z)$$

und wir sehen, daß U genau zwei Zusammenhangskomponenten hat. Die anderen $\mathrm{H}^q(U)$ sind in einer exakten Sequenz zwischen Nullen eingequetscht und müssen folglich verschwinden. □

Proposition 21.6.4.23 (Lokale Schnittmultiplizität von Kurven in der Ebene). *Seien $A, B \subsetneq \mathbb{R}^2$ zwei abgeschlossene nichtkompakte zusammenhängende Einsmannigfaltigkeiten in der Ebene $X := \mathbb{R}^2$, die sich in genau einem Punkt $x \in X$ treffen. Trifft jede Komponente von $X \backslash A$ jede Komponente von $X \backslash B$, so liefert das cup-Produkt der lokalen Kohomologie einen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}^1_A(X) \otimes \mathrm{H}^1_B(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2_{\{x\}}(X)$$

Andernfalls ist diese Abbildung Null. Insbesondere ist unter den gegebenen Voraussetzungen die lokale Schnittmultiplizität unserer beiden ebenen Kurven bei beliebiger Wahl der Orientierungen stets ± 1 im ersten Fall und Null im zweiten Fall.

Beweis. Bezeichne $U := X \backslash A$ das Komplement von A. Nach 21.6.4.22 hat U genau zwei Komponenten U_1, U_2 und deren höhere Garbenkohomologie verschwindet. Unsere allgemeine Erkenntnis 19.4.9.15 liefert eine kurze exakte Sequenz

$$\mathbb{Z}_{U \subset X} \hookrightarrow \mathbb{Z}_X \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_{A \subset X}$$

von abelschen Garben auf X und zeigt, wenn wir dazu die lange exakte Sequenz der Morphismen in die $\mathbb{Z}_X[q]$ bilden, schon einmal $\mathrm{H}^q_A(X) \cong \mathbb{Z}$ für $q = 1$ und Null sonst. In anderen Worten liefert unsere kurze exakte Sequenz einen Quasiisomorphismus $(\mathbb{Z}_{U \subset X} \to \mathbb{Z}_X[0]) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{A \subset X}[0]$, der nach der Beschreibung von $\mathrm{Ext}^q(\mathbb{Z}_{U \subset X}, \mathcal{F})$ aus 19.4.9.32 und dem Vergleich von Morphismen in Hot und Der aus 20.2.7.18 eine Bijektion

$$\mathrm{Hot}_{\mathrm{Ab}_{/X}}\big((\mathbb{Z}_{U \subset X} \to \mathbb{Z}_X[0]), \mathbb{Z}_X[1]\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathrm{Ab}_{/X}}(\mathbb{Z}_{A \subset X}, \mathbb{Z}_X[1])$$

induziert. Das Symbol $[0]$ verwenden wir hier, um bei einem Komplex den Term im Grad Null anzuzeigen. Wir erhalten offensichtlich einen Erzeuger von

$$\mathrm{Hot}_{\mathrm{Ab}_{/X}}\big((\mathbb{Z}_{U \subset X} \to \mathbb{Z}_X[0]), \mathbb{Z}_X[1]\big) = \mathcal{H}^0\big((\mathbb{Z}_{U \subset X} \to \mathbb{Z}_X[0]) \Rrightarrow_{\mathrm{Hot}} \mathbb{Z}_X[1]\big)$$

durch einen Morphismus $\mathbb{Z}_{U\subset X} \to \mathbb{Z}_X$, der unter der offensichtlichen Zerlegung $\mathbb{Z}_{U_1\subset X} \oplus \mathbb{Z}_{U_2\subset X} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{U\subset X}$ zu einem Erzeuger des Raums der Morphismen $\mathbb{Z}_{U_1\subset X} \to \mathbb{Z}_X$ beziehungsweise zum Nullmorphismus $\mathbb{Z}_{U_2\subset X} \to \mathbb{Z}_X$ einschränkt. Ebenso hat auch $V := X\backslash B$ genau zwei Komponenten V_1, V_2. Nach 19.4.10.28 hat weiter das Komplement von $A\cup B$ genau vier Komponenten. Sind alle Schnitte $U_i \cap V_j$ nicht leer, so müssen diese Schnitte genau unsere vier Komponenten sein. Wählt man nun analog einen Repräsentanten in der Homotopiekategorie für einen Erzeuger der lokalen Kohomologie $\mathrm{H}^1_B(X)$ und bildet das Tensorprodukt in der Homotopiekategorie, so kann man wieder in der Homotopiekategorie unschwer prüfen, daß wir einen Repräsentanten eines Erzeugers von $\mathrm{H}^2_{\{x\}}(X)$ erhalten. Andernfalls haben wir nach eventueller Umnummerierung ohne Beschränkung der Allgemeinheit $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ und dann ist das cup-Produkt der entsprechenden Erzeuger in der Homotopiekategorie in der Tat der Nullmorphismus. $\square$

Beispiel 21.6.4.24 (**Schnitte in einem Torus**). Seien $A, B \not\subset T := S^1 \times S^1$ die zwei Kreislinien $S^1 \times \{1\}$ und $\{1\} \times S^1$ im Torus T. Sie schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich dem Punkt $x := (1, 1)$, und ihre Schnittmultiplizität ist dort nach der lokalen Beschreibung 21.6.4.23 offensichtlich ± 1 mit einem von den gewählten Orientierungen abhängigem Vorzeichen. Wir finden so

$$[A]^! \cdot [B]^! = \pm[x]^! \neq 0$$

Das bedeutet unter anderem, daß für beliebige abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten $X, Y \not\subset T$ mit $[X]^! = [A]^!$ und $[Y]^! = [B]^!$ ebenso gilt $[X]^! \cdot [Y]^! \neq 0$ und damit insbesondere $X \cap Y \neq \emptyset$. Wir können also salopp gesprochen durch Verbiegen und Verschieben unserer beiden Kreislinien A und B niemals erreichen, daß diese beiden Untermannigfaltigkeiten zueinander disjunkt werden. Da T kompakt ist, hätten wir hier auch auf die Ausrufezeichen verzichten können.

Beispiel 21.6.4.25 (**Schnitte in der Ebene**). Seien $A, B \not\subset X := \mathbb{R}^2$ die beiden Koordinatenachsen. Sie schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich dem Ursprung $x := (0, 0)$, und ihre Schnittmultiplizität ist dort nach der lokalen Beschreibung 21.6.4.23 offensichtlich ± 1 mit einem von den gewählten Orientierungen abhängigen Vorzeichen. Wir finden so wieder

$$[A]^! \cdot [B]^! = \pm[x]^!$$

Das ist jedoch weniger interessant, da in der lokalendlichen Homologie alle die beteiligten Klassen Null sind. Wir können salopp gesprochen durch Verbiegen und Verschieben von A und B auch leicht erreichen, daß diese beiden Untermannigfaltigkeiten zueinander disjunkt werden, aber das führt aufgrund des Verschwindens all unserer Klassen nicht zum Widerspruch.

Beispiel 21.6.4.26 (**Schnitte in der punktierten Ebene**). Seien $A, B \subsetneq X := \mathbb{R}^2 \backslash 0$ die positive x-Achse und der Graph der Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = (x-1)^2 - 1$. Sie schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich dem Punkt $x := (2, 0)$, und ihre Schnittmultiplizität dort ist nach der lokalen Beschreibung 21.6.4.23 offensichtlich ± 1 mit einem von den gewählten Orientierungen abhängigem Vorzeichen. Wir finden so wieder

$$[A]^! \cdot [B]^! = \pm [x]^!$$

Das ist jedoch weniger interessant, da in diesem Fall die Klasse $[x]^!$ eines jeden Punktes Null ist in der lokalendlichen Homologie. Wir können salopp gesprochen durch Verbiegen und Verschieben von A und B auch leicht erreichen, daß unsere beiden Untermannigfaltigkeiten zueinander disjunkt werden, aber das führt nicht zum Widerspruch.

Beispiel 21.6.4.27 (**Schnitte in der punktierten Ebene, halbkompakte Variante**). Seien $A, B \subsetneq X := \mathbb{R}^2 \backslash 0$ der Einheitskreis und die positive x-Achse. In diesem Fall gilt bereits $[A]^! = 0$ und die Identität

$$[A]^! \cdot [B]^! = \pm [x]^!$$

liefert erst recht keine interessanten Aussagen. Es ist jedoch nicht klar, ob wir durch Verbiegen und Verschieben von A und B erreichen können, daß unsere beiden Untermannigfaltigkeiten zueinander disjunkt werden. In der Tat ist das unmöglich und folgt aus der Variante $[A] \cdot [B]^! = \pm [x] \neq 0$ unserer Formel, die im Fall von kompaktem B in der gewöhnlichen Homologie gilt und deren Diskussion wir uns jetzt zuwenden.

21.6.4.28. Gegeben eine orientierte m-Mannigfaltigkeit X definieren wir wie in 17.7.4.9 angekündigt das **cap-Schnittprodukt** als die von der Modulstruktur $\mathrm{H}^p_! X \times \mathrm{H}^q X \to \mathrm{H}^{p+q}_! X$ nach 21.4.7.15 unter den Poincaré-Isomorphismen und dualisierten Poincaré-Isomorphismen induzierte bilineare Abbildung

$$\mathrm{H}_{m-p} X \times \mathrm{H}^!_{m-q} X \to \mathrm{H}_{m-p-q} X$$

Wir notieren sie auch $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$. Gegeben ein topologischer Raum X und abgeschlossene Teilmengen $A \subsetneq X$ sowie $B \subsetneq X$ mit A kompakt erhalten mit den bekannten Vertikalen in diesem Fall ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^p_A(X) \times \mathrm{H}^q_B(X) & \to & \mathrm{H}^{p+q}_{A \cap B}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^p_!(X) \times \mathrm{H}^q(X) & \to & \mathrm{H}^{p+q}_!(X) \end{array}$$

mit der durch die Struktur der kompakten Kohomologie als Modul über dem Kohomologiering nach 21.4.7.15 gegebenen unteren Horizontale. Bezeichne für A

kompakt nun $\tau_{!A} \in \mathrm{H}^p_!(X)$ das Bild des Fundamentalkozykels $\tau_A \in \mathrm{H}^p_A(X)$. Wir finden dann für A kompakt unter denselben Annahmen wie in 21.6.4.20 und mit denselben lokalen Schnittmultiplizitäten die Identität

$$\tau_{!A} \cup \tau_B = \sum_{Z \in \mathrm{Zus}(A \cap B)} S_{X;A,B}(Z) \tau_{!Z} \quad \text{alias} \quad [A] \cdot [B]^! = \sum_{Z \in \mathrm{Zus}(A \cap B)} S_{X;A,B}(Z)[Z]$$

in der kompakten Kohomologie beziehungsweise in der Homologie von X.

Beispiel 21.6.4.29 (**Schnitte in der punktierten Ebene, halbkompakte Variante**). Seien $A, B \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ X := \mathbb{R}^2 \backslash 0$ der Einheitskreis und die positive x-Achse. Da A kompakt ist, können wir das cap-Schnittprodukt betrachten und erhalten die Identität

$$[A] \cdot [B]^! = \pm [x] \neq 0$$

in der gewöhnlichen Homologie $\mathrm{H}_0(\mathbb{R}^2 \backslash 0)$. Es folgt sowohl $[A] \neq 0$ in $\mathrm{H}_1(\mathbb{R}^2 \backslash 0)$ als auch $[B]^! \neq 0$ in $\mathrm{H}^!_1(\mathbb{R}^2 \backslash 0)$ und weiter, daß wir salopp gesprochen durch Verbiegen und Verschieben von A und B nicht erreichen können, daß unsere beiden Untermannigfaltigkeiten zueinander disjunkt werden.

21.6.4.30 (**Lokale Schnittmultiplizitäten bei transversalem Schnitt**). Seien X eine orientierte n-Mannigfaltigkeit und $A, B \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\ X$ abgeschlossene orientierte Untermannigfaltigkeiten der Kodimensionen p, q, die sich **transversal schneiden** in dem Sinne, daß jeder Punkt $x \in A \cap B$ eine offene Umgebung $U \Subset X$ besitzt mitsamt einem Homöomorphismus $U \xrightarrow{\sim} E$ zu einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum, unter dem $A \cap U$ und $B \cap U$ bijektiv auf Untervektorräume der Kodimensionen p beziehungsweise q abgebildet werden, die zusammen E erzeugen. Wir nennen so einen Homöomorphismus eine **Schnittplättung**. Unter diesen Annahmen ist auch $A \cap B$ eine Mannigfaltigkeit und wir können darauf die **Schnittorientierung** erklären durch die Vorschrift, daß sie unter jeder Schnittplättung der Schnittorientierung entspricht, wie wir sie in 21.6.6.11 im Fall von Untervektorräumen eingeführt haben. Mit dieser Schnittorientierung auf $A \cap B$ gilt dann mit derselben Argumentation in der lokalendlichen Homologie von X die Identität

$$[A]^! \cdot [B]^! = [A \cap B]^! = \sum_{Z \in \mathrm{Zus}(A \cap B)} [Z]^!$$

In Worten ist also im Fall eines transversalen Schnitts das Schnittprodukt der Fundamentalzykel der Fundamentalzykel des Schnitts. Ebenso erhalten wir im Fall von kompaktem A zusätzlich in der gewöhnlichen Homologie die feinere Identität

$$[A] \cdot [B]^! = [A \cap B] = \sum_{Z \in \mathrm{Zus}(A \cap B)} [Z]$$

21.6.4.31. Gegeben eine orientierte n-Mannigfaltigkeit X liefert unser cap-Schnittprodukt gefolgt von der Augmentation eine bilineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_q(X) \times \mathrm{H}^!_{n-q}(X) & \to & \mathbb{Z} \\ (\ \alpha\ ,\ \beta\ ) & \mapsto & \alpha \odot \beta \end{array}$$

Sie heißt die **Schnittpaarung**. Gegeben abgeschlossene orientierte sich transversal schneidende Untermannigfaltigkeiten $A, B \not\subset X$ der Dimensionen $q, n-q$ mit A kompakt liefert 21.9.10.13 insbesondere die Formel

$$[A] \odot [B]^! = \varepsilon([A \cap B])$$

Hier ist $A \cap B$ eine endliche Menge alias kompakte Nullmannigfaltigkeit und die Schnittorientierung darauf ist eine Abbildung $\eta : A \cap B \to \{1, -1\}$ und die Augmentation des zugehörigen Fundamentalzykels ergibt sich zu

$$\varepsilon([A \cap B]) = \sum_{x \in A \cap B} \eta(x)$$

Satz 21.6.4.32 (**Eigenschaften der Schnittpaarung**). *Gegeben eine orientierte n-Mannigfaltigkeit X induziert die Schnittpaarung $\mathrm{H}_q(X) \times \mathrm{H}^!_{n-q}(X) \to \mathbb{Z}$ stets eine Surjektion $\mathrm{H}^!_{n-q}(X) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_q(X), \mathbb{Z})$ und im Fall von freiem $\mathrm{H}_{q-1}(X)$ ist diese Surjektion sogar ein Isomorphismus.*

Beweis. Schalten wir unserer cap-Schnittpaarung im zweiten Eintrag den Inversen des dualisierten Poincaré-Isomorphismus $\mathrm{P}^! : \mathrm{H}^!_{n-q}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X)$ vor, so erhalten wir die Kroneckerpaarung $\mathrm{H}_q(X) \times \mathrm{H}^q(X) \to \mathbb{Z}$. Nach dem universellen Koeffiziententheorem 21.6.3.7 haben wir jedoch eine kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_{q-1}(X), \mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{H}^q(X) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_q(X), \mathbb{Z}) \qquad \square$$

21.6.4.33. Analoges gilt mit Koeffizienten in einem beliebigen noetherschen Kring endlicher homologischer Dimension. Im Fall eines Krings der Charakteristik Zwei brauchen wir noch nicht einmal irgendwelche Orientierbarkeiten vorauszusetzen. Mit Koeffizienten in einem Körper k etwa ist die totale Homologie immer frei und dann induziert unsere Schnittpaarung einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^!_{n-q}(X; k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(\mathrm{H}_q(X; k), k)$$

und im Fall eines Körpers der Charakteristik Zwei brauchen wir noch nicht einmal X orientiert vorauszusetzen.

Beispiel 21.6.4.34 (**Ebene ohne abgeschlossene diskrete Teilmenge**). Im Fall der Zweimannigfaltigkeit $X := \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$ ist die erste Homologie $\mathrm{H}_1(X)$ eine freie

abelsche Gruppe mit kleinen Zykeln um die ganzen Zahlen als Repräsentanten einer Basis, denn schreiben wir unseren Raum als aufsteigende Vereinigung immer größerer offener Teilmengen, so ist die Homologie der Kolimes. Weiter ist $\mathrm{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}$ frei und nach 21.6.4.32 liefert damit die Schnittpaarung einen Isomorphismus $\mathrm{H}_1^!(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_1(X), \mathbb{Z})$. Folglich ist $\mathrm{H}_1^!(X)$ isomorph zu einem Produkt von abzählbar vielen Kopien von $\mathbb{Z}$ und man erhält Repräsentanten für die Elemente der ersten lokalendlichen Homologie zum Beispiel, indem man die Fundamentalzykel von vertikalen Halbgeraden betrachtet, die von Punkten $n \in \mathbb{Z}$ nach oben ins Unendliche laufen, und von ihnen geeignet definierte „unendliche Linearkombinationen" nimmt.

Übungen

Übung 21.6.4.35 (**Funktorialität des cup-Produkts der lokalen Kohomologie**). Für eine beliebige stetige Abbildung $f : X \to Y$ und $C, D \not\subset Y$ mit der Eigenschaft $f^{-1}(C) \subset A$ und $f^{-1}(D) \subset B$ erhalten wir für das cup-Produkt der lokalen Kohomologie 21.6.4.12 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_C^p(Y) \times \mathrm{H}_D^q(Y) & \to & \mathrm{H}_{C\cap D}^{p+q}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}_A^p(X) \times \mathrm{H}_B^q(X) & \to & \mathrm{H}_{A\cap B}^{p+q}(X) \end{array}$$

Übung 21.6.4.36 (**Fundamentalkozykel einer Untervarietät**). Seien X eine n-Mannigfaltigkeit und $A \not\subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge, die eine Filtrierung der Gestalt

$$A = A^{\leq a} \supset A^{\leq a-1} \supset \ldots \supset A^{\leq 0} \supset \emptyset = A^{\leq -1}$$

durch abgeschlossene Teilmengen $(A^{\leq n})_{n\in\mathbb{Z}}$ besitzt derart, daß das Komplement $A^{\leq q} \backslash A^{\leq q-1}$ jeweils eine q-Mannigfaltigkeit ist. Man zeige $\mathcal{H}^p\mathcal{L}_{A^{\leq q}} = 0$ für $p + q < n$ und zeige unter der zusätzlichen Annahme, daß sogar $A^\circ := A \backslash A^{\leq a-2}$ eine a-Mannigfaltigkeit ist, daß der natürliche Morphismus einen Isomorphismus

$$\mathcal{H}^{n-a}\mathcal{L}_A \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{n-a}\mathcal{L}_{A^\circ}$$

liefert. Sind schließlich Orientierungen auf X und A° gewählt, so erhält man weiter wie in 21.9.10.5 ausgezeichnete Isomorphismen $\mathcal{L}_{A^\circ} \xrightarrow{\sim} j_*\mathbb{Z}_{A^\circ}[a-n]$ für $j : A^\circ \hookrightarrow X$ die Einbettung und damit einen ausgezeichneten globalen Schnitt $1 \in \Gamma\mathcal{H}^{n-a}\mathcal{L}_{A^\circ}$ und dann auch in $\Gamma\mathcal{H}^{n-a}\mathcal{L}_A$. Weil wir bereits wissen, daß gilt $\mathcal{H}^q\mathcal{L}_A = 0$ für $q < n - a$, ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $\Gamma\mathcal{H}^{n-a}\mathcal{L}_A \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{n-a}(X; \mathcal{L}_A)$ und wir erhalten ein ausgezeichnetes Element der lokalen Kohomologie, das wir wieder den **Fundamentalkozykel von** A **in** X nennen und

$$\tau_A = \tau_{A\subset X} \in \mathrm{H}_A^{n-a}(X)$$

notieren. Er hängt von den gewählten Orientierungen ab. Man zeigt unschwer, daß er im Fall einer Mannigfaltigkeit A mit dem Fundamentalkozykel aus 21.9.10.5 übereinstimmt und daß für $U \Subset X$ offen und $u : U \hookrightarrow X$ die Einbettung in $\mathrm{H}^{n-a}_{A\cap U}(U)$ gilt $u^*\tau_A = \tau_{A\cap U}$. Ein typisches Beispiel für eine Situation der hier beschriebenen Art ist der Fall einer glatten komplexen algebraischen Varietät V mit einer abgeschlossenen Untervarietät $W \subset V$ und den zugehörigen topologischen Räumen $W(\mathbb{C}) \subset V(\mathbb{C})$ mit der analytischen Topologie als $A \subset X$, vergleiche 19.4.10.25.

Übung 21.6.4.37 (**Berechnung lokaler Schnittmultiplizitäten**). Seien A, B abgeschlossene Teilmengen von $X := \mathbb{R}^n$ und $a, b \in \mathbb{N}$ und $\tau_A \in \mathrm{H}^{n-a}_A(X)$ sowie $\tau_B \in \mathrm{H}^{n-b}_B(X)$ lokale Kohomologieklassen. Wir nehmen an, der Schnitt $A \cap B = \{x\}$ sei ein einziger Punkt, und wollen $\tau_A \cup \tau_B \in \mathrm{H}^n_x(X)$ bestimmen. Gegeben eine kompakte Kugel $K \subset X$ mit $x \in K$ ist der Rückzug ein Isomorphismus $\mathrm{H}^n_x(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_K(X)$. Wir können damit τ_A ersetzen durch sein Bild in $\mathrm{H}^{n-a}_{A\cup K}(X)$ und τ_B durch sein Bild in $\mathrm{H}^{n-b}_{B\cup K}(X)$. Die Homotopieinvarianz der lokalen Kohomologie 19.4.5.16 zeigt nun, daß jede Abbildung $\varphi : (X, K) \to (X, K)$, die als Abbildung von Raumpaaren homotop ist zur Identität im Sinne von 17.2.1.10 und die außerhalb von K die Identität ist, die Klasse $\tau_B \in \mathrm{H}^{n-b}_{B\cup K}(X)$ festhält. Diese Klasse ist damit auch das Bild von $\varphi^*(\tau_B) \in \mathrm{H}^{n-b}_{\varphi^{-1}(B)}(X)$. Bei geschickter Wahl von φ kann nun

$$\tau_A \cup \varphi^*(\tau_B) \in \mathrm{H}^n_K(X)$$

leichter zu berechnen sein. Wenn wir etwa ein φ finden können, für das gilt $A \cap \varphi^{-1}(B) = \emptyset$, so folgern wir sofort $\tau_A \cup \tau_B = \tau_A \cup \varphi^*(\tau_B) = 0$. Im Fall der Fundamentalkozykel von Untervarietäten und ähnlich gelagerten Fällen wie in 21.6.4.36 dahingegen gilt es salopp gesprochen, mit φ „unser B ein bißchen zu verschieben, so daß aus dem einem Schnittpunkt x mehrere Schnittpunkte mit transversalem Schnitt werden, und diese Schnittpunkte müssen wir dann nach 21.6.4.30 nur noch mit geeigneten Vorzeichen zählen“. Im Fall von Untervarietäten einer glatten komplexen Varietät weiß man sogar zusätzlich, daß dann alle diese Vorzeichen $+1$ sein müssen.

Übung 21.6.4.38 (**Zurückholen der lokalen Kohomologie mit sechs Funktoren**). Gegeben $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raums und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und $i : A \hookrightarrow X$ die Einbettung und $c = c_A : A \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung kennen wir aus 21.5.3.8 einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathcal{H}^q c_{A*} i^! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_A(X; \mathcal{F})$$

Gegeben $B \subset Y$ eine weitere abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raums und $j : B \hookrightarrow Y$ die Einbettung $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung mit $f^{-1}(B) \subset A$ und $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus in $\mathrm{Der}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ alias ein

Morphismus $\mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$ in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ konstruieren wir einen Morphismus

$$\phi^{\circledast} : c_{B*}j^!\mathcal{G} \to c_{A*}i^!\mathcal{F}$$

in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ oder ganz pedantisch $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\mathrm{top}})$ unter Betrachtung des Diagramms

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B) \arrow[r, hook, "u"] \arrow[d, "f_B"] & A \arrow[r, hook, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[rr, hook, "j"] & & Y \end{tikzcd}$$

als die Komposition

$$c_{B*}j^!\mathcal{G} \to c_{B*}j^!f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} c_{B*}f_{B*}u^!i^!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} c_{A*}u_*u^!i^!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} c_{A*}u_!u^!i^!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} c_{A*}i^!\mathcal{F}$$

eines von ϕ induzierten Morphismus mit Basiswechsel, der Isotransformation $u_! \xrightarrow{\sim} u_*$ und der Koeinheit der Adjunktion. Man zeige, daß dieser Morphismus $\phi^{\circledast}$ im Fall von gewöhnlichen abelschen Garben $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ unser Zurückholen auf der lokalen Kohomologie aus 19.4.4.7 induziert, in Formeln also die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^q c_{B*}j^!\mathcal{G} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\phi^{\circledast}"] & \mathrm{H}^q_B(Y;\mathcal{G}) \arrow[d] \\ \mathcal{H}^q c_{A*}i^!\mathcal{F} \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{H}^q_A(X;\mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

Man zeige weiter für verknüpfbare Komorphismen $\phi^{\circledast} \circ \psi^{\circledast} = (\psi \circ \phi)^{\circledast}$ und der Vollständigkeit halber auch $\mathrm{id}^{\circledast} = \mathrm{id}$.

Übung 21.6.4.39 (**Vorschub der relativen Homologie mit sechs Funktoren**). Sind in den Notationen der vorhergehenden Übung 21.6.4.38 alle beteiligten topologischen Räume lesb, so konstruiert man in derselben Weise für jeden Morphismus $\varphi : f_!\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ einen Morphismus

$$\varphi_{\circledast} : c_{A!}i^*\mathcal{F} \to c_{B!}j^*\mathcal{G}$$

in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ oder ganz pedantisch $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\mathrm{top}})$ und zeigt $\psi_{\circledast} \circ \varphi_{\circledast} = (\psi \circ \varphi)_{\circledast}$ und der Vollständigkeit halber auch $\mathrm{id}_{\circledast} = \mathrm{id}$. Man beachte, daß ein Morphismus $\varphi : f_!\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ nicht einem eigentlichen Opkomorphismus entspricht.

Beispiel 21.6.4.40. Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten derselben Dimension n mit diskreten Fasern, so ist $f_{(!)}$ nach eigentlichem Basiswechsel ein exakter Funktor und induziert einen Morphismus $f_!\omega_X \to \omega_Y$ oder auch einfacher einen Morphismus $\varphi : f_!\,\mathrm{or}_X \to \mathrm{or}_Y$. Gegeben $A \mathrel{\underline{\subset}} X$ und

$B \mathrel{\substack{\ast\\ \subset}} Y$ mit $f^{-1}(B) \subset A$ entspricht die zugehörige Abbildung $\varphi_{\circledast} : \Gamma_!(A; \mathrm{or}_X) \to \Gamma_!(B; \mathrm{or}_Y)$ unter unserem Isomorphismus 17.4.3.5 dem Vorschub

$$\mathrm{H}_n(X, X \backslash A) \to \mathrm{H}_n(Y, Y \backslash B)$$

Das ist seinerseits ein Spezialfall der Natürlichkeit des Vergleichsisomorphismus der relativen Homologie 21.6.7.29.

21.6.5 Schnittpaarung und Poincarédualität, ERWEITERT

21.6.5.1 (**Starke dualisierte Poincaré-Isomorphismen**). Seien $i : A \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit und G eine abelsche Gruppe und $a : A \to \mathrm{top}$ sowie $c : X \to \mathrm{top}$ die konstanten Abbildungen. Unter diesen Annahmen haben wir in der Garbenkohomologie Isomorphismen

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{H}^!_q(A; G) & = & \mathcal{H}^{-q} a_* a^! G_{\mathrm{top}} & \text{nach Definition 21.6.3.1} \\ & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}^{-q} a_* i^! c^! G_{\mathrm{top}} & \text{mit } c \circ i = a, \\ & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}^{-q} a_* i^! \,\mathrm{or}_X(G)[m] & \text{mit 21.6.1.15,} \\ & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^{m-q}_A(X; \mathrm{or}_X(G)) & \text{mit 21.5.3.8.} \end{array}$$

Ist zusätzlich X orientierbar und ein Isomorphismus $G_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_X(G)$ alias eine Orientierung ausgezeichnet, so können wir das nach 21.6.3.4 verlängern zu einem Isomorphismus, der **starken dualisierten Poincaré-Dualität**

$$\mathrm{H}^!_q(A; G)_{\mathrm{garb}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{m-q}_A(X; G)_{\mathrm{garb}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{m-q}(X, X \backslash A; G)_{\mathrm{sing}}$$

Ist A auch noch kompakt, so haben wir zusätzlich $\mathrm{H}_q(A; G)_{\mathrm{garb}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^!_q(A; G)_{\mathrm{garb}}$. Im Fall $A = X$ erhalten wir die dualisierten Poincaré-Isomorphismen aus 21.9.10.10.

21.6.5.2 (**Starke Poincaré-Isomorphismen**). Seien $i : A \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit und G eine abelsche Gruppe und $a : A \to \mathrm{top}$ sowie $c : X \to \mathrm{top}$ die konstanten Abbildungen. Unter diesen Annahmen haben wir in der Garbenkohomologie natürliche Isomorphismen

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{H}^q_!(A; \mathrm{or}_X(G)) & = & \mathcal{H}^q a_! i^* \,\mathrm{or}_X(G) & \text{nach den Definitionen,} \\ & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}^q a_! i^* c^! G_{\mathrm{top}}[-n] & \text{mit 21.6.1.15,} \\ & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_{n-q}(X, X \backslash A; G)_{\mathrm{sing}} & \text{mit 21.6.3.4.} \end{array}$$

Im Fall $A = X$ erhalten wir unsere Poincaré-Isomorphismen aus 21.9.10.10. Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ erhalten wir die Alexander-Dualität aus 19.5.1.22. Gegeben eine

n-Mannigfaltigkeit X mit einer abgeschlossenen Teilmenge $A \not\subset X$ konstruieren wir in 21.6.7.28 diesmal nur der Einfachkeit der Notation halber ohne Koeffizienten sogar ein kommutatives Diagramm von langen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots \to & \mathrm{H}^q_!(X\backslash A;\mathrm{or}_X) & \to & \mathrm{H}^q_!(X;\mathrm{or}_X) & \to & \mathrm{H}^q_!(A;\mathrm{or}_X) & \to \ldots \\ & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & \\ \ldots \to & \mathrm{H}_{n-q}(X\backslash A) & \to & \mathrm{H}_{n-q}X & \to & \mathrm{H}_{n-q}(X,X\backslash A) & \to \ldots \end{array}$$

mit den gewöhnlichen Poincaré-Isomorphismen in den beiden linken Vertikalen und dem starken Poincaré-Isomorphismus in der rechten Vertikalen. Im Fall $q = 0$ spezialisiert er zu unserem Satz 17.4.3.5 über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten. Ebenso unmittelbar erhalten wir Proposition 17.3.3.9 über das Verschwinden der reduzierten Homologie des Komplements $S^n\backslash A$ eines Hyperkubus A in einer Sphäre. Der Rückzug liefert ja offensichtlich Surjektionen $\mathrm{H}^q_! S^n \twoheadrightarrow \mathrm{H}^q_! A$ für alle q, n und diese sind Isomorphismen im Fall $q \neq n$ und haben im Fall $q = n$ als Kern eine freie abelsche Gruppe vom Rang Eins. Es folgt $\mathrm{H}_q(S^n\backslash A) = 0$ für $q \neq 0$ und $\mathrm{H}_0(S^n\backslash A) \cong \mathbb{Z}$ und folglich $\tilde{\mathrm{H}}_q(S^n\backslash A) = 0$ für alle q.

21.6.6 Wohin damit?

21.6.6.1 (**Trennkategorien von Raumpaaren**). Um unseren Trennfunktor der relativen singulären Kohomologie relativ zu einer offenen Teilmenge

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{sing}} : \mathrm{Top}^{\Subset} \to \mathrm{sgAb}^{\mathrm{opp}}$$

aus 18.4.2.10 in der Garbenkohomologie wiederzufinden, führen wir eine Variante $\mathrm{Top}^{\not\Subset}$ unserer Trennkategorie $\mathrm{Top}^{\Subset}$ aus 18.4.1.16 ein. Objekte sind Paare (X, A) mit $A \not\subset X$. Trennungen $(X, A) \to (Y_1, B_1) \curlywedge \ldots \curlywedge (Y_r, B_r)$ sind Tupel von stetigen Abbildungen $f_i : X \to Y_i$ mit $A \supset f_1^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap f_r^{-1}(B_r)$. Das Bilden des Komplements $(X, U) \mapsto (X, X\backslash U)$ ist dann ein Isomorphismus von Trennkategorien

$$\mathrm{Top}^{\Subset} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}^{\not\Subset}$$

Wir drehen in der Notation das Inklusionszeichen um, weil $\mathrm{Top}^{\not\Subset}$ im Gegensatz zu $\mathrm{Top}^{\Subset}$ keine volle Untertrennkategorie der in 18.4.1.16 erklärten Trennkategorie $\mathrm{Top}^{\subset}$ der Raumpaare ist, sondern vielmehr eine volle Untertrennkategorie ihrer in offensichtlicher Weise erklärten Variante $\mathrm{Top}^{\supset}$.

21.6.6.2 (**Lokale Kohomologie als Hyperkohomologie der Lokalgarbe**). Unsere Beschreibung 19.4.4.5 der lokalen Kohomologie als Erweiterungsgruppe zusammen mit der Beschreibung 21.2.8.18 einer Erweiterungsgruppe als die Hyperkohomologie des entsprechenden Homkomplexes liefern für $A \not\subset X$ abgeschlossen und $i : A \hookrightarrow X$ die Einbettung Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q_A(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Ab}_{/X}}(\mathbb{Z}_{A\subset X}, \mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X; \mathbb{Z}^\vee_{A\subset X})$$

Wir vereinbaren die Notation $\mathcal{L}_{A\subset X} := \mathbb{Z}^\vee_{A\subset X}$, nennen diesen Komplex die **Lokalgarbe von** A **in** X und erhalten Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q_A(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X;\mathcal{L}_{A\subset X})$$

21.6.6.3. Wir erinnern die Garbenoptrennfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top}$ aus 21.1.2.9 und betrachten die dazu oppinverse Trennfaserung nach 21.1.6.4 und notieren sie

$$\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Top}} := (\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}})^{\mathrm{otf}} \to \curlywedge\mathrm{Top}$$

Trennungen $\mathcal{F} \to \mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_r$ in $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Top}}$ über einer Trennung $(f_1,\ldots,f_r) : X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ in $\curlywedge\mathrm{Top}$ sind per definitionem Homomorphismen $\mathcal{F} \to f_1^*\mathcal{G}_1 \otimes \ldots \otimes f_r^*\mathcal{G}_r$ in $\mathrm{Ab}_{/X}$. Wir betrachten nun den Trennfunktor $\mathrm{Top}^{\mathbb{D}} \to \mathrm{Ab}_{/\mathrm{Top}}$ mit $(X,A) \mapsto \mathbb{Z}_X$. Die Bilder der Trennungen in der Basis unter diesem Trennfunktor steigen ab zu Trennungen zwischen den Quotienten

$$\mathbb{Z}_{A\subset X} := i_*\mathbb{Z}_A = i_*i^*\mathbb{Z}_X$$

der Garben $\mathbb{Z}_X$ mit $i : A \hookrightarrow X$ der Einbettung und wir erhalten so einen weiteren Trennfunktor $\mathrm{Top}^{\mathbb{D}} \to \mathrm{Ab}_{/\mathrm{Top}}$ mit $(X,A) \mapsto \mathbb{Z}_{A\subset X}$. Die zugehörigen Morphismen

$$\mathbb{Z}_{A\subset X} \to f_1^*\mathbb{Z}_{B_1\subset Y_1} \otimes \ldots \otimes f_r^*\mathbb{Z}_{B_r\subset Y_r}$$

sind dieselben in $\mathrm{Ab}_{/X}$ und $\mathrm{Der}_{/X}$, da alle beteiligten Garben freie Halme haben, und wir erhalten so einen Trennfunktor $\mathrm{Top}^{\mathbb{D}} \to (\mathrm{Der}_{/\!/\mathrm{Top}})^{\mathrm{otf}}$. Wir erinnern nun unsere Lokalgarben

$$\mathcal{L}_{A\subset X} := (\mathbb{Z}_{A\subset X})^\vee = (\mathbb{Z}_{A\subset X} \Rrightarrow \mathbb{Z}_X) \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$$

aus 22.5.5.10. Dualisieren wir unseren Morphismus von eben und schalten davor die natürlichen Morphismen 18.1.4.21 vom Tensorprodukt der Dualen zum Dualen des Tensorprodukts und die natürlichen Morphismen 21.1.5.13 vom Rückzug des Dualen zum Dualen des Rückzugs, so erhalten wir in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ einen Morphismus

$$f_1^*\mathcal{L}_{B_1\subset Y_1} \otimes \ldots \otimes f_r^*\mathcal{L}_{B_r\subset Y_r} \to \mathcal{L}_{A\subset X}$$

alias eine Trennung $\mathcal{L}_{A\subset X} \to \mathcal{L}_{B_1\subset Y_1} \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{L}_{B_r\subset Y_r}$ in $\mathrm{Der}_{/\!/\mathrm{Top}}$. Wir erhalten so einigermaßen offensichtlich einen Trennfunktor $\mathrm{Top}^{\mathbb{D}} \to \mathrm{Der}_{/\!/\mathrm{Top}}$. Formal und in der angemessenen Allgemeinheit steht das in 21.1.6.9. Durch Nachschalten von $\mathbb{H}$ und unsere Isomorphismen $\mathrm{H}^q_A(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X;\mathcal{L}_{A\subset X})$ nach 22.5.5.10 erhalten wir daraus einen Trennfunktor

$$\mathrm{Top}^{\mathbb{D}} \to \mathrm{sgAb}^{\mathrm{opp}}$$

mit $(X, A) \mapsto \mathrm{H}^*_A(X)$. Wir nennen ihn den **Trennfunktor der lokalen Kohomologie**. Sein Analogon in der singulären Theorie kennen bereits aus 18.4.2.10. Er beinhaltet das **cup-Produkt der lokalen Kohomologie**

$$\cup : \mathrm{H}^*_A(X) \otimes \mathrm{H}^*_B(X) \to \mathrm{H}^*_{A\cap B}(X)$$

und die bereits aus 19.4.4.7 bekannten Rückzüge $\mathrm{H}^* f : \mathrm{H}^*_B(Y) \to \mathrm{H}^*_A(X)$ für $f : X \to Y$ stetig mit $A \supset f^{-1}(B)$ sowie das **externe Produkt der lokalen Kohomologie**

$$\times : \mathrm{H}^p_A(X) \times \mathrm{H}^q_B(Y) \to \mathrm{H}^{p+q}_{A\times B}(X \times Y)$$

Er beinhaltet außerdem verschiedene Verträglichkeiten zwischen diesen Konstruktionen. Quasi per definitionem ist $\mathrm{H}^*_X(X) = \mathrm{H}^*(X)$ die übliche Garbenkohomologie und wir haben $\mathrm{H}^*_\emptyset(X) = 0$. Das zeigt zum Beispiel, daß das cup-Produkt von zwei Klassen in $\mathrm{H}^*(X)$ verschwinden muß, wenn unsere Klassen von lokalen Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^p_A(X)$ und $\mathrm{H}^q_B(X)$ herkommen mit $A \cap B = \emptyset$.

21.6.6.4. Nach 19.4.8.16 haben wir für jeden topologischen Raum X natürliche Isomorphismen $\operatorname{colf}_K \mathrm{H}^q_K(X;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F})$ mit dem Kolimes über alle abgeschlossenen Kompakta $K \Subset X$. Insbesondere macht unser cup-Produkt der lokalen Kohomologie die kompakte Kohomologie von X zu einem Modul über dem Kohomologiering. Wir notieren auch diese Operation $\cup$ und bezeichnen die zugehörige Abbildung $\mathrm{H}^p(X) \times \mathrm{H}^q_!(X) \to \mathrm{H}^{p+q}_!(X)$ als **cup-Produkt**.

21.6.6.5. Im Formalismus der zwei Funktoren liefert für jeden topologischen Raum X und alle $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ der ausgezeichnete Isomorphismus $\mathcal{F} \otimes \mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ Morphismen $\mathrm{Der}_{/X}(\mathbb{Z}_X, \mathbb{Z}_X[q]) \to \mathrm{Der}_{/X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}[q])$ und so eine Operation von H^*X auf $\mathbb{H}^*(X;\mathcal{F})$ und $\mathbb{H}^*_!(X;\mathcal{F})$.

Übungen

Übung 21.6.6.6. Unser Schmelzfunktor der topologischen Orientierungsmenge

$$\mathrm{or}^{\mathrm{top}} : (\Upsilon\mathrm{Modf}_{\mathbb{R}})^\times \to \mathrm{Par}$$

aus 18.4.1.17 vom banalen Schmelzgruppoid der endlichdimensionalen reellen Vektorräume in die Schmelzkategorie der erweiterten Paritäten, der jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V die Parität seiner Dimension erweitert um die Menge der beiden Erzeuger der totalen relativen singulären Homologie $\mathrm{H}(V, V\backslash 0)$ zuordnet, ist isomorph durch Übergang zur jeweiligen Koordinatenfunktion gefolgt von den Isomorphismen $\mathrm{H}^*(V, V\backslash 0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\{0\}}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_!(V)$ aus 19.5.1.20 und 19.4.8.16 zum vielleicht noch natürlicheren Schmelzfunktor, der V die Parität seiner Dimension erweitert um die Menge der beiden Erzeuger von $\mathrm{H}^*_!(V)$ zuordnet. Von nun an betrachten wir diesen Schmelzfunktor als

unsere „Hauptinkarnation“ der **topologischen Orientierungmenge** und nennen die Menge der beiden Erzeuger von $\mathrm{H}^*_!(V)$ im folgenden oft kürzer die **Orientierungsmenge** $\mathrm{or}^{\mathrm{top}}(V)$ eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums V. Wir erklären ein ausgezeichnetes Element

$$\tau \in \mathrm{or}^{\mathrm{top}}(\mathbb{R})$$

alias einen ausgezeichneten Erzeuger $\tau \in \mathrm{H}^1_!(\mathbb{R})$ als dasjenige Element, das unter der Komposition von natürlichen Isomorphismen von Garbenkohomologien $\mathrm{H}^0(\mathbb{R}\backslash 0)/\mathrm{H}^0(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\{0\}}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_!(\mathbb{R})$ herkommt vom Schnitt mit Wert Eins auf $\mathbb{R}_{>0}$ und Wert Null auf $\mathbb{R}_{<0}$ der konstanten Garbe $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}\backslash 0$. Das ist auch genau unser τ^1 aus 19.4.9.19. Wenn ich richtig gerechnet habe, ist das auch das Bild unseres ausgezeichneten Erzeugers $\tau \in \mathrm{H}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash 0)$ aus 18.4.1.17 unter den obigen natürlichen Isomorphismen und dem Anwenden des Vergleichsisomorphismus von der singulären Kohomologie zur Garbenkohomologie.

Übung 21.6.6.7. Gegeben topologische Räume X, Y zusammen mit der Einbettung $i : A \hookrightarrow X$ einer abgeschlossenen Teilmenge liefert jeder Morphismus $\alpha : i_!\mathbb{Z}_A \to \mathbb{Z}_X[p]$ durch Rückzug längs der Projektion einen Morphismus $\alpha_Y : i_!\mathbb{Z}_{A\times Y} \to \mathbb{Z}_{X\times Y}[p]$. Ist $j : B \hookrightarrow Y$ auch eine abgeschlossene Teilmenge, so liefern die Konstruktionen aus 21.6.4.12 angewandt auf α_Y und β_X eine Abbildung

$$\mathrm{H}^p_A(X) \times \mathrm{H}^q_B(Y) \to \mathrm{H}^{p+q}_{A\times B}(X \times Y)$$

Wir nennen sie das **externe Produkt der lokalen Kohomologie** und notieren unsere Abbildung $\times$. Im Fall $A = X$ und $B = Y$ spezialisiert sie zum Kreuzprodukt der Garbenkohomologie **??** und im Fall $X = Y$ erhalten wir durch Nachschalten des Rückzugs auf die Diagonale unser Cup-Produkt der lokalen Kohomologie 21.6.4.12.

Übung 21.6.6.8. Gegeben topologische Räume mit abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subset\!\!\!

Hinweis: Man ziehe sich mit Hilfe von Übung 21.6.6.8 auf den Fall $\dim E = 1$ zurück.

Übung 21.6.6.10. Gegeben endlichdimensionale reelle Vektorräume $A \subset E$ mit jeweils einer topologischen Orientierung erklären wir wie in 18.2.1.22 oder 3.6.5.17 die Quotientenorientierung auf dem Quotienten E/A. Für $p = \operatorname{codim}(A \subset E)$ liefert der zugehörige Erzeuger von $\mathrm{H}^p_!(E/A)$ durch Übergang unter $\mathrm{H}^p_!(E/A) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^p_{\{0\}}(E/A)$ und Rückzug dann einen ausgezeichneten Erzeuger von $\mathrm{H}^p_A(E)$. Wir nennen ihn den **durch die Orientierungen von A und E bestimmten Erzeuger**. Für $A = \mathbb{R}^{n-p} \times 0^p \subset E = \mathbb{R}^n$ mit den Standardorientierungen $\tau^{\times(n-p)}$ beziehungsweise $\tau^{\times n}$ entspricht die Quotientenorientierung unter dem hoffentlich offensichtlichen Isomorphismus $E/A \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^p$ der durch $\tau^{\times p}$ gegebenen Standardorientierung auf $\mathbb{R}^p$ und unser ausgezeichneter Erzeuger von $\mathrm{H}^p_A(E)$ ergibt sich zu $1^{\times(n-p)} \times \tau^{\times p}$ für $1 \in \mathrm{H}^0_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \mathrm{H}^0(\mathbb{R})$ der Standarderzeuger.

Übung 21.6.6.11. Gegeben ein endlichdimensionaler orientierter reeller Vektorraum E und darin ein angeordnetes Paar (A, B) aus zwei orientierten Teilräumen $A, B \subset E$ mit $A + B = E$ erklären wir auf ihrem Schnitt $A \cap B$ die **Schnittorientierung** dadurch, daß wir die Quotientenorientierung aus E/A aus 3.6.5.17 vermittels des Isomorphismus $B/(A \cap B) \xrightarrow{\sim} E/A$ auf den Definitionsbereich dieses Isomorphismus übertragen und dann in Bezug auf die kurze exakte Sequenz

$$A \cap B \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B/(A \cap B)$$

die im Sinne von 3.6.5.17 mit den beiden auf dem zweiten und dritten Raum bereits gegebenen Orientierungen verträgliche Orientierung auf $A \cap B$ wählen. Ist etwa $E = \mathbb{R}^n$ und sind $A = \mathbb{R}^{n-p} \times 0^p$ sowie $B = 0^q \times \mathbb{R}^{n-q}$ jeweils mit den Standardorientierungen versehen, so ist die Schnittorientierung die Standardorientierung auf $0^q \times \mathbb{R}^{n-p-q} \times 0^p$.

Übung 21.6.6.12 (**Schnittorientierung und Geometrie**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum E und Teilräume $A, B \subset E$ der Kodimensionen p, q mit $A + B = E$ und liefern Orientierungen auf A, B und E nach 21.6.6.10 ausgezeichnete Erzeuger von $\mathrm{H}^p_A(E)$ und $\mathrm{H}^q_B(E)$ und somit als deren cup-Produkt einen ausgezeichneten Erzeuger von $\mathrm{H}^{p+q}_{A\cap B}(E)$, der seinerseits zu einer ausgezeichneten Orientierung von $A \cap B$ gehört. Wir behaupten, daß das genau die Schnittorientierung aus 21.6.6.11 ist. Diese Behauptung müssen wir nur in genügend Beispielen prüfen. Ist $E = \mathbb{R}^n$ und sind $A = \mathbb{R}^{n-p} \times 0^p$ sowie $B = 0^q \times \mathbb{R}^{n-q}$ jeweils mit den Standardorientierungen versehen, so werden unsere Erzeuger nach 21.6.6.10 gegeben durch $1^{\times(n-p)} \times \tau^{\times p}$ sowie $(-1)^{q(n-q)}\tau^{\times q} \times 1^{\times(n-q)}$ und wir erhalten nach 21.6.6.8 als Produkt

$$(-1)^{q(n-q)}(-1)^{pq}\ \tau^{\times q} \times 1^{\times(n-p-q)} \times \tau^{\times p}$$

Zur Standardorientierung von $A \cap B = 0^q \times \mathbb{R}^{n-p-q} \times 0^p$ gehört andererseits nach 21.6.6.10 der Erzeuger $(-1)^{q(n-p-q)}\tau^{\times q} \times 1^{\times(n-p-q)} \times \tau^{\times p}$ der lokalen Kohomologie, und der stimmt mit dem eben berechneten Produkt überein. Das aber war gerade zu zeigen.

21.6.7 Vergleich mit der singulären Theorie

21.6.7.1 (**Singuläre Kohomologie als Hyperkohomologie**). Gegeben ein topologischer Raum X besteht sein Kogrenzkomplex $\mathcal{G}_X^*$ aus welken Garben und ist offensichtlich beschränkt gegen die Pfeile. Die offensichtlichen Quasiisomorphismen $\mathrm{S}^*X \overset{\sim}{\to} \mathbb{D}_{\mathrm{Ket}}(\mathrm{S}X) \overset{\sim}{\leftarrow} \mathbb{D}_{\mathrm{Ket}}(\mathrm{G}X)$ liefern mithin Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X)_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X; \mathcal{G}_X^*)$$

21.6.7.2 (**Singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie**). Gegeben ein lokal singulärazyklischer topologischer Raum X induziert die Augmentation einen Quasiisomorphismus $\mathbb{Z}_X \overset{\sim}{\to} \mathcal{G}_X^*$. Die Isomorphismen aus 21.6.7.1 liefern für lokal singulärazyklisches X mithin Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X)_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X; \mathbb{Z}_X)$$

zwischen der singulären Kohomologie und der Garbenkohomologie.

21.6.7.3 (**Relative singuläre Kohomologie als Hyperkohomologie**). Gegeben ein topologischer Raum mit einer offenen Teilmene $U \Subset X$ betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{S}^*X & \overset{\sim}{\to} & \mathbb{D}_{\mathrm{Ket}}(\mathrm{S}X) & \overset{\sim}{\leftarrow} & \mathbb{D}_{\mathrm{Ket}}(\mathrm{G}X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{S}^*U & \overset{\sim}{\to} & \mathbb{D}_{\mathrm{Ket}}(\mathrm{S}U) & \overset{\sim}{\leftarrow} & \mathbb{D}_{\mathrm{Ket}}(\mathrm{G}U) \end{array}$$

mit vertikalen Surjektionen und horizontalen Quasiisomorphismen. Für $C := X \backslash U$ erhalten wir auf den Kernen der Vertikalen eine Sequenz von Quasiisomorphismen

$$\mathrm{S}^*(X, X\backslash C) \overset{\sim}{\to} \mathbb{D}_{\mathrm{Ket}}(\mathrm{S}(X, X\backslash C)) \overset{\sim}{\leftarrow} \Gamma_C \mathcal{G}_X^*$$

Durch Übergang zur Kohomologie erhalten wir, da welke Garben nach 19.4.4.12 entfaltet sind für Γ_C, Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X, X\backslash C)_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_C^q(X; \mathcal{G}_X^*)$$

21.6.7.4 (**Relative singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie**). Gegeben ein lokal singulärazyklischer topologischer Raum X induziert die Augmentation

einen Quasiisomorphismus $\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\smile} \mathcal{G}_X^*$. Die Isomorphismen aus 21.6.7.3 liefern für $C \subset\!\!\!

Satz 21.6.7.8 (Ausschneidung für Grenzketten). *Seien (X, A) ein Raumpaar und $L \subset A$ eine Teilmenge, deren Abschluß im Inneren von A liegt, in Formeln $\bar{L} \subset A^\circ$. So liefert die Einbettung $(X\backslash L, A\backslash L) \hookrightarrow (X, A)$ Isomorphismen auf den Komplexen von relativen Grenzketten*

$$\mathrm{G}(X\backslash L, A\backslash L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}(X, A)$$

21.6.7.9. Ein Vorteil der Grenzketten besteht darin, daß die Ausschneidungsisomorphismen hier bereits auf Kettenniveau existieren und nicht erst in der Homologie. Die Arbeit mit Grenzketten benötigt jedoch mehr Kenntnisse in homologischer Algebra, da ich nicht weiß, ob sie einen Komplex von freien abelschen Gruppen bilden. Ich erwarte eher das Gegenteil.

Beweis. Wie beim Beweis der Ausschneidung 17.2.4.10 betrachten wir die Überdeckung $X = A \cup (X\backslash L)$, geben ihr den Namen $\mathcal{V}$ und bilden ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{S}(A\backslash L) & \hookrightarrow & \mathrm{S}A \oplus \mathrm{S}(X\backslash L) & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}^{\mathcal{V}}X \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{S}(X\backslash L) & \hookrightarrow & \mathrm{S}X \oplus \mathrm{S}(X\backslash L) & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}X \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{S}(X\backslash L, A\backslash L) & \to & \mathrm{S}(X, A) & \to & \mathrm{S}X/\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X
\end{array}$$

Hier ist zu verstehen, daß die beiden oberen horizontalen Inklusionen die „diagonalen“ Einbettungen $z \mapsto (z, z)$ sein sollen, und die folgenden Surjektionen die Differenzen $(x, y) \mapsto x - y$. Nach dem Neunerlemma ist die untere Horizontale dann auch exakt. Jetzt gehen wir zum filtrierenden Kolimes unter den Unterteilungsoperatoren über und müssen nur zeigen, daß dieser Kolimes bei $\mathrm{S}X/\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X$ verschwindet. Das aber haben wir bereits in 19.5.1.10 gezeigt. □

21.6.7.10. Für jeden topologischen Raum X erklären wir in Anlehnung an 17.7.3.9 den Komplex der **lokalendlichen Grenzketten** als den inversen Limes über alle Kompakta $K \subset X$ der Grenzketten relativ zu ihrem Komplement

$$\mathrm{G}^! X := \operatorname*{limf}_K \mathrm{G}(X, X\backslash K)$$

Gegeben ein Hausdorffraum mit einer offenen Teilmenge $U \Subset X$ induzieren die Ausschneidungsisomorphismen $\mathrm{G}(U, U\backslash K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}(X, X\backslash K)$ für Grenzketten im Fall $K \subset U$ kompakt, die wir in 21.6.7.8 hergeleitet hatten, Homomorphismen $\mathrm{G}^! X \to \mathrm{G}^! U$ vom „längeren Limes zum kürzeren Limes“. Wir nennen sie die **Restriktionsabbildungen**.

Definition 21.6.7.11. Unter einer **lokalen Prägarbe** auf einem topologischen Raum X verstehen wir eine Prägarbe von Mengen $\mathcal{C}$ derart, daß für jede Familie $\mathcal{U}$ von offenen Teilmengen von X mit Vereinigung $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ die Restriktionsabbildungen eine Injektion

$$\mathcal{C}(V) \hookrightarrow \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{C}(U)$$

liefern, daß also „Schnitte durch ihre Einschränkungen auf die Mengen einer offenen Überdeckung bereits eindeutig festgelegt werden". Setzen wir $\mathcal{U} = \emptyset$, so erkennen wir insbesondere, daß für jede abelsche lokale Prägarbe gilt $\mathcal{C}(\emptyset) = 0$.

Proposition 21.6.7.12 (**Lokalendliche Grenzketten als Garbe**). *Auf einem lokal kompakten Hausdorffraum X bilden für jedes q die lokalendlichen Grenzketten $U \mapsto \mathrm{G}^!_q(U)$ für $U \Subset X$ mit den in 21.6.7.10 erklärten Restriktionsabbildungen eine Garbe.*

Beweis. Wir beginnen mit endlich vielen offenen Teilmengen $V_1, \ldots, V_r$ eines beliebigen Raums X und bilden die in folgender Darstellung vertikal notierte kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{S}\left(\bigcap V_i\right) & \hookrightarrow & \bigoplus_i \mathrm{S}V_i & \to & \bigoplus_{i<j} \mathrm{S}^{\mathcal{V}}(V_i \cup V_j) & \to \ldots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\mathrm{S}X & \hookrightarrow & \bigoplus_i \mathrm{S}X & \to & \bigoplus_{i<j} \mathrm{S}X & \to \ldots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\mathrm{S}(X, \bigcap V_i) & \hookrightarrow & \bigoplus_i \mathrm{S}(X, V_i) & \to & \bigoplus_{i<j} \mathrm{S}X/\mathrm{S}^{\mathcal{V}}(V_i \cup V_j) & \to \ldots
\end{array}$$

mit der Notation $\mathcal{V}$ für die Überdeckung durch die V_i und $\mathrm{S}^{\mathcal{V}}$ die entsprechenden feinen Ketten. Beide oberen Zeilen sind exakt, also gilt dasselbe auch für die untere Zeile. Gegeben ein offene Überdeckung $\mathcal{V}$ einer Teilmenge $A \subset X$ zeigt nun die kurze exakte Sequenz $\mathrm{S}A/\mathrm{S}^{\mathcal{V}}A \hookrightarrow \mathrm{S}X/\mathrm{S}^{\mathcal{V}}A \twoheadrightarrow \mathrm{S}X/\mathrm{S}A$ mit 19.5.1.10, daß die zweite Abbildung im Kolimes unter iterierter Unterteilung zu einem Isomorphismus $\operatorname{colf} \mathrm{S}X/\mathrm{S}^{\mathcal{V}}A \xrightarrow{\sim} \operatorname{colf} \mathrm{S}X/\mathrm{S}A$ wird. So erhalten wir aus der Exaktheit der unteren Zeile unseres Diagramms im Kolimes unter iterierter Unterteilung die Exaktheit der Sequenz von relativen Grenzketten

$$\mathrm{G}\left(X, \bigcap V_i\right) \hookrightarrow \bigoplus_i \mathrm{G}(X, V_i) \to \bigoplus_{i<j} \mathrm{G}(X, V_i \cup V_j) \to \ldots$$

Sei nun X Hausdorff. Gegeben endlich viele Kompakta $K_1, \ldots, K_r \subset X$ mit Vereinigung K folgt, daß wir mit den natürlichen Abbildungen eine linksexakte Sequenz

$$\mathrm{G}(X, X \backslash K) \hookrightarrow \bigoplus_i \mathrm{G}(X, X \backslash K_i) \to \bigoplus_{i<j} \mathrm{G}(X, X \backslash (K_i \cap K_j))$$

erhalten. Sei nun $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ eine offene Überdeckung. Ist $a \in \mathrm{G}^! X$ von Null verschieden, so gibt es $K \subset X$ kompakt derart, daß das Bild von a in $\mathrm{G}(X, X \backslash K)$ nicht Null ist. Weiter gibt es $U_1, \ldots, U_r \in \mathcal{U}$, die K überdecken, und nach 17.7.2.7 gibt es für X lokal kompakt auch Kompakta $K_i \subset U_i$ mit Vereinigungsmenge K. Nach unserer linksexakten Sequenz kann a auch nicht in allen $\mathrm{G}(U_i, U_i \backslash K_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}(X, X \backslash K_i)$ auf Null abgebildet werden, also erst recht nicht in allen $\mathrm{G}^! U_i$. Das zeigt bereits, daß die Prägarbe der lokalendlichen Grenzketten lokal ist. Nun gilt es noch, eine Familie von zusammenpassenden $a_U \in \mathrm{G}^! U$ für $U \in \mathcal{U}$ zu einem $a \in \mathrm{G}^! X$ zu verkleben. Sie läßt sich aber nach dem Vorhergehenden für jedes Kompaktum $K \subset X$ jeweils auf genau eine Weise zu einem Element von $\mathrm{G}(X, X \backslash K)$ verkleben und diese Elemente bilden dann zusammen die gesuchte Verklebung im inversen Limes. □

21.6.7.13 (**Umindizierung der Grenzkettengarben**). Die Garbe der lokalendlichen Grenzketten vom Grad q auf einem lokal kompakten Hausdorffraum X nenne ich die q**-te Grenzkettengarbe**

$$\mathcal{G}^!_{q,X} : U \mapsto \mathrm{G}^!_q(U)$$

Das Differential geht dabei vom Grad q zum Grad $q-1$ und die Grade werden als untere Indizes notiert. Es ist für das folgende günstiger, die Grade als obere Indizes zu notieren und mit (-1) zu multiplizieren, also $\mathcal{G}^{q,!}_X := \mathcal{G}^!_{-q,X}$ zu setzen. So erhalten wir einen Komplex mit Differentialen in Richtung wachsender oberer Indizes, der aus dem Negativen kommt und im Grad Null endet. Den Komplex dieser Garben nenne ich den **Komplex der Grenzkettengarben** oder kurz den **Grenzkomplex** und notiere ihn

$$\mathcal{G}^!_X$$

Unsere Konstruktionen liefern für jede offene Einbettung $j : U \hookrightarrow X$ einen Isomorphismus $\mathcal{G}^!_U \xrightarrow{\sim} j^{(*)}\mathcal{G}^!_X$.

Lemma 21.6.7.14. *Die Grenzkettengarben lokal kompakter Hausdorffräume sind kompaktweich.*

Beweis. Jeder Schnitt einer abelschen Garbe auf einem relativ Hausdorffschen Kompaktum $K \subset X$ läßt sich auf eine offene Umgebung $U \Subset X$ desselben fortsetzen. Wir finden ein Kompaktum L mit $K \subset L^\circ \subset L \subset U$ und unsere Fortsetzung liefert ein $s \in \mathrm{G}(U, U \backslash L)$, für das wir einen Repräsentanten $\tilde{s} \in \mathrm{G}U$ finden. Dieser hinwiederum liefert uns dann die gewünschte globale Fortsetzung unseres auf K definierten Schnittes. □

21.6.7.15 (**Lokalendliche singuläre Homologie durch Grenzketten**). Ich erinnere an die lokalendliche Homologie aus 17.7.3.2. Gegeben ein abzählbar basierter lokal kompakter Hausdorffraum X können wir in der Menge aller seiner

Kompakta eine konfinale Folge alias ein konfinales abzählbares Teilsystem finden. Nach 17.7.1.52 induzieren dann die offensichtlichen natürlichen Kettenabbildungen $\mathrm{S}^! X \to \mathrm{G}^! X$ auf der Homologie Isomorphismen

$$\mathrm{H}^!_q(X)_{\mathrm{sing}} = \mathcal{H}_q \mathrm{S}^! X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_q \mathrm{G}^! X$$

Um 17.7.1.52 anzuwenden zu dürfen, bemerken wir, daß für Kompakta $K \subset L \subset X$ die natürlichen Abbildungen Surjektionen $\mathrm{S}_q(X, X\backslash L) \twoheadrightarrow \mathrm{S}_q(X, X\backslash K)$ und dann auch Surjektionen $\mathrm{G}_q(X, X\backslash L) \twoheadrightarrow \mathrm{G}_q(X, X\backslash K)$ liefern.

21.6.7.16 (**Offener Rückzug der lokalendlichen singulären Homologie**). Gegeben $j : U \hookrightarrow Y$ eine offene Einbettung abzählbar basierter lokal kompakter Hausdorffräume induzieren die Restriktionsabbildungen 21.6.7.10 für lokalendliche Grenzketten vermittels der in 21.6.7.15 erklärten Isomorphismen Abbildungen, den **offenen Rückzug**

$$\mathrm{H}^!_q(X)_{\mathrm{sing}} \to \mathrm{H}^!_q(U)_{\mathrm{sing}}$$

21.6.7.17 (**Lokalendliche singuläre Homologie als Hyperkohomologie**). Gegeben ein abzählbar basierter lokal kompakter Hausdorffraum X mit $\Gamma : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}$ von endlicher homologischer Dimension konstruieren wir nun einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^!_q(X)_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{-q}(X; \mathcal{G}^!_X)$$

zwischen seiner singulären lokalendlichen Homologie und der Hyperkohomologie des Grenzkomplexes. Wir erinnern dazu den Isomorphismus $\mathrm{H}^!_q(X)_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q}\Gamma(X; \mathcal{G}^!_X)$ aus 21.6.7.15. Da der Grenzkomplex $\mathcal{G}^!_X$ nach 21.6.7.14 aus kompaktweichen und damit nach 21.6.1.3 sogar aus weichen Garben besteht, liefert die Annahme endlicher homologischer Dimension mit 20.3.6.4 einen Isomorphismus $\mathcal{H}^{-q}\Gamma(X; \mathcal{G}^!_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{-q}(X; \mathcal{G}^!_X)$. Der gesuchte Isomorphismus ergibt sich als deren Verknüpfung. Ist zusätzlich $j : U \hookrightarrow X$ eine offene Einbettung mit $j_* : \mathrm{Ab}_{/U} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ von endlicher homologischer Dimension, so kommutiert offensichtlich das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^!_q(X)_{\mathrm{sing}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{H}^{-q}(X; \mathcal{G}^!_X) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^!_q(U)_{\mathrm{sing}} \arrow[r] & \mathbb{H}^{-q}(U; \mathcal{G}^!_U)
\end{tikzcd}$$

mit den von unseren Vergleichsisomorphismen induzierten Horizontalen und dem offenen Rückzug 21.6.7.16 in der linken Vertikale und der vom Isomorphismus $\mathcal{G}^!_U \xrightarrow{\sim} j^* \mathcal{G}^!_X$ aus 21.6.7.13 vermittels der Sequenz von ansonsten offensichtlichen Morphismen in der derivierten Kategorie

$$\mathrm{fin}_{X*}\, \mathcal{G}^!_X \to \mathrm{fin}_{X*}\, j_* j^* \mathcal{G}^!_X \to \mathrm{fin}_{X*}\, j_* \mathcal{G}^!_U \xrightarrow{\sim} \mathrm{fin}_{U*}\, \mathcal{G}^!_U$$

durch Anwenden von $\mathcal{H}^q$ induzierten rechten Vertikalen.

Lemma 21.6.7.18 (**Kompakte Schnitte von Grenzkettengarben**). *Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X liefern die offensichtlichen Abbildungen einen Isomorphismus*

$$\mathrm{G}X \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(X; \mathcal{G}_X^!)$$

zwischen dem Komplex seiner Grenzketten und dem Komplex der Schnitte mit kompaktem Träger seiner Grenzkettengarben.

Beweis. Die Injektivität unserer Abbildung scheint mir offensichtlich. Es bleibt, deren Surjektivität zu zeigen. Ein Schnitt $s \in \Gamma(X; \mathcal{G}_X^!)$ mit Träger in einem Kompaktum $L \subset X$ ist nun per definitionem eine verträgliche Familie von Elementen $s_K \in \mathrm{G}(X, X\backslash K)$ für $K \subset X$ kompakt mit $s_K = 0$ falls $K \cap L = \emptyset$. Für unser L finden wir nun sicher $A, B, C \subset X$ kompakt mit $L \subset A^\circ \subset A \subset B^\circ \subset B \subset C^\circ$ und dann für unser s einen Repräsentanten $\tilde{s}_C \in \mathrm{G}(X)$ von $s_C \in \mathrm{G}(X, X\backslash C)$. Da nun gilt $\tilde{s}_C \mapsto s_R = 0$ für $R := B\backslash A^\circ$, finden wir eine Darstellung $\tilde{s}_C = t + r$ mit $t \in \mathrm{G}(A^\circ)$ und $r \in \mathrm{G}(X\backslash B)$. Es reicht nun zu zeigen, daß gilt $t \mapsto s_K$ für alle $K \subset X$ kompakt. Das ist richtig für $K = K_1 \subset B^\circ$ nach Konstruktion. Es ist auch richtig für $K = K_2$ mit der Eigenschaft $K \cap A = \emptyset$, dann liefern beide Seiten eben Null. Gilt es für Kompakta K_1 und K_2, so folgt es für deren Vereinigung wegen der kurzen exakten Sequenz

$$\mathrm{G}(X, X\backslash(K_1 \cup K_2)) \hookrightarrow \mathrm{G}(X, X\backslash K_1) \oplus \mathrm{G}(X, X\backslash K_2) \twoheadrightarrow \mathrm{G}(X, X\backslash(K_1 \cap K_2))$$

Da sich aber nun jedes Kompaktum $K \subset X$ schreiben läßt als $K_1 \cup K_2$ mit $K_1 \subset B^\circ$ und $K_2 \subset X\backslash A$, folgt die Behauptung. □

21.6.7.19 (**Singuläre Homologie als Hyperkohomologie**). Gegeben ein lesb-Raum X konstruieren wir nun einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}_q(X)_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_!^{-q}(X; \mathcal{G}_X^!)$$

zwischen seiner singulären Homologie und der kompakten Hyperkohomologie seines Grenzkomplexes. Wir finden Isomorphismen

$$\mathrm{G}X \xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Ket}} \Gamma_!(X; \mathcal{G}_X^!) \xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Ket}} \mathrm{fin}_{X,(!)}\, \mathcal{G}_X^! \xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Der}} \mathrm{fin}_{X,!}\, \mathcal{G}_X^!$$

mit Lemma 21.6.7.18 und unseren Erkenntnissen zum unbeschränkten Derivieren linksexakter Funktoren endlicher homologischer Dimension 20.3.6.4 . Wenden wir darauf $\mathcal{H}^{-q}$ an, so ergibt sich der gesuchte Isomorphismus.

21.6.7.20 (**Morphismen aus Schreivorschüben kompaktweicher Garben**). Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ von lokal kompakten Hausdorffräumen

und eine kompaktweiche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ ist auch $f_{(!)}\mathcal{F}$ kompaktweich nach 21.5.2.8 und für $V \Subset Y$ liefert Basiswechsel 21.4.1.16 einen ausgezeichneten Isomorphismus $\Gamma_!(V; f_{(!)}\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(f^{-1}(V); \mathcal{F})$. Ein Morphismus $\varphi : f_{(!)}\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in eine Garbe $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ ist also nach 19.4.8.23 dasselbe wie die Vorgabe einer Familie von Gruppenhomomorphismen

$$\varphi_V : \Gamma_!(f^{-1}(V); \mathcal{F}) \to \Gamma_!(V; \mathcal{G})$$

für $V \Subset Y$, die verträglich sind mit den Ausdehnungen durch Null. Man beachte, daß wir hier nicht unsere eigentlichen Opkomorphismen alias Schreimorphismen über f aus 19.6.4.4 beschreiben, die ja vielmehr Garbenhomomorphismen $\mathcal{G} \to f_{(!)}\mathcal{F}$ entsprechen. Ein Student mag prüfen, daß wir für kompaktweiche Garben auf lokal kompakten Hausdorffräumen die oppinvertierte Kofaserung zur Eigopkofaserung beschrieben haben, die wir im Fall étaler separierter Morphismen bereits in 19.8.4.9 mit der Garbenfaserung identifiziert hatten.

21.6.7.21 (**Grenzkomplexvorschub**). Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ von lokal kompakten Hausdorffräumen erklären wir einen ausgezeichneten Morphismus von Komplexen

$$\mathrm{gkv} = \mathrm{gkv}_f : f_{(!)}\mathcal{G}^!_X \to \mathcal{G}^!_Y$$

durch die Vorschrift, daß er unter der Beschreibung von Morphismen durch kompakte Schnitte aus 21.6.7.20 und der Beschreibung der kompakten Schnitte unserer Grenzkettengarben aus 21.6.7.18 der Gesamtheit der offensichtlichen Abbildungen $\mathrm{G}(f^{-1}(V)) \to \mathrm{G}(V)$ für $V \Subset Y$ entspricht. Wir nennen diesen Morphismus den **Grenzkomplexvorschub**. Sind unsere Räume zusätzlich homologisch kompaktendlich oder ist auch nur $f_{(!)}$ von endlicher homologischer Dimension, so induziert unser Morphismus einen Morphismus

$$\mathrm{gkv} = \mathrm{gkv}_f : f_!\mathcal{G}^!_X \to_{\mathrm{Der}} \mathcal{G}^!_Y$$

Ist f eine offene Einbettung, so prüft man leicht, daß das genau der Morphismus ist, der unter der Adjunktion unserem Isomorphismus $\mathcal{G}^!_X \xrightarrow{\sim} f^{(*)}\mathcal{G}^!_Y$ aus 21.6.7.13 entspricht.

21.6.7.22 (**Natürlichkeit des Homologie-Hyperkohomologie-Vergleichs**). Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ von lokal kompakten homologisch kompaktendlichen Hausdorffräumen erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{G}(X) & \xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Ket}} & \Gamma_!(X; \mathcal{G}^!_X) & \xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Ket}} & \mathrm{fin}_{X,(!)}\,\mathcal{G}^!_X & \xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Der}} & \mathrm{fin}_{X,!}\,\mathcal{G}^!_X \\
 & & & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
\downarrow & & & & \mathrm{fin}_{Y,(!)}\,f_{(!)}\mathcal{G}^!_X & \xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Der}} & \mathrm{fin}_{Y,!}\,f_!\mathcal{G}^!_X \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{G}(Y) & \xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Ket}} & \Gamma_!(Y; \mathcal{G}^!_Y) & \xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Ket}} & \mathrm{fin}_{Y,(!)}\,\mathcal{G}^!_Y & \xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Der}} & \mathrm{fin}_{Y,!}\,\mathcal{G}^!_Y
\end{array}$$

mit von unserem Grenzkomplexvorschub gkv aus 21.6.7.21 induzierten Vertikalen im Quadrat unten rechts und der offensichtlichen Vertikale links. Unter unserem Isomorphismus 21.6.7.19 entspricht also der Vorschub auf der singulären Homologie dem von gkv auf der Hyperkohomologie des Grenzkomplexes induzierten Morphismus und wir erhalten die Kommutativität der Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_q(X)_{\mathrm{sing}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H}_!^{-q}(X;\mathcal{G}_X^!) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}_q(Y)_{\mathrm{sing}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H}_!^{-q}(Y;\mathcal{G}_Y^!) \end{array}$$

mit unseren Vergleichsisomorphismen in den Horizontalen und dem Vorschub auf der Homologie in der linken Vertikalen und der von unserem Grenzkomplexvorschub gkv aus 21.6.7.21 induzierten rechten Vertikale.

21.6.7.23 (**Natürlichkeit des !-Homologie-Hyperkohomologie-Vergleichs**). Gegeben $f : X \to Y$ eine eigentliche lesb-Abbildung von abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffräumen mit $\Gamma : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}$ und $\Gamma : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}$ von endlicher homologischer Dimension kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_q^!(X)_{\mathrm{sing}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H}^{-q}(X;\mathcal{G}_X^!) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}_q^!(Y)_{\mathrm{sing}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H}^{-q}(Y;\mathcal{G}_Y^!) \end{array}$$

mit unseren Vergleichsisomorphismen 21.6.7.17 in den Horizontalen und dem eigentlichen Vorschub der singulären Theorie 17.7.3.10 in der linken Vertikalen und der vom Grenzkomplexvorschub $\mathrm{gkv} : f_!\mathcal{G}_X^! \to \mathcal{G}_Y^!$ vermittels der Identifikation $f_! \xrightarrow{\sim} f_*$ von der Komposition $\mathrm{fin}_{X*}\mathcal{G}_X^! \xrightarrow{\sim} \mathrm{fin}_{Y*} f_*\mathcal{G}_X^! \to \mathrm{fin}_{Y*}\mathcal{G}_Y^!$ induzierten rechten Vertikale. Das folgt ziemlich direkt aus den Definitionen und soll hier nicht weiter ausgearbeitet werden.

21.6.7.24 (**Verdierdual des Grenzkomplexes**). Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X bilden unsere Grenzkettengarben nach 21.6.7.14 einen Komplex $\mathcal{G}_X^!$ kompaktweicher Garben. Ist unser Raum sogar lesb, so liefert 21.5.7.22 einen Isomorphismus zwischen dem Garbenkomplex mit den Schnittkomplexen $\mathbb{D}_{\mathrm{Ket}}\Gamma_!(U;\mathcal{G}_X^!)$ und dem Verdierdual des Grenzkomplexes, nach 21.6.7.18 also einen Isomorphismus

$$d_X : \mathbb{D}_X\mathcal{G}_X^! \xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Der}} \mathcal{G}_X^*$$

Ich behaupte für diese Isomorphismen und jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ von lesb-Räumen die Kommutativität in der derivierten Kategorie des Diagramms

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}_Y\mathcal{G}_Y^! \arrow[rr, "d_Y", "\sim"'] \arrow[d, "\mathbb{D}\,\mathrm{gkv}"'] & & \mathcal{G}_Y^* \arrow[d] \\ \mathbb{D}_Y f_!\mathcal{G}_X^! \arrow[r, "\sim"] & f_*\mathbb{D}_X\mathcal{G}_X^! \arrow[r, "f_*d_X", "\sim"'] & f_*\mathcal{G}_X^* \end{tikzcd}$$

mit den hoffentlich offensichtlichen übrigen Pfeilen und insbesondere der durch Rückzug von Koketten gegebenen rechten Vertikale. Das folgt unmittelbar aus der durch 21.5.7.27 gegebenen Beschreibung des Isomorphismus unten links und den Definitionen. Dualisieren wir unser Diagramm und ergänzen es geeignet, so ergibt sich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_Y^! \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & \mathbb{D}_Y^2\mathcal{G}_Y^! & & \mathbb{D}_Y\mathcal{G}_Y^* \arrow[ll, "\mathbb{D}d_Y", "\sim"'] \\
& \mathbb{D}_Y^2 f_!\mathcal{G}_X^! \arrow[u, "\mathbb{D}^2\,\mathrm{gkv}"] & \mathbb{D}_Y f_*\mathbb{D}_X\mathcal{G}_X^! \arrow[l, "\sim"'] & \mathbb{D}_Y f_*\mathcal{G}_X^* \arrow[l, "\mathbb{D}f_*d_X", "\sim"'] \arrow[u] \\
f_!\mathcal{G}_X^! \arrow[uu, "\mathrm{gkv}"] \arrow[ur, "\mathrm{ev}"] \arrow[rr, "f_!\,\mathrm{ev}"] & & f_!\mathbb{D}_X^2\mathcal{G}_X^! \arrow[u] & f_!\mathbb{D}_X\mathcal{G}_X^* \arrow[l, "f_!\mathbb{D}d_X", "\sim"'] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Sind zusätzlich X und Y lokal singulärazyklisch, so liefern die Augmentationen Isomorphismen $a_X : \mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Der}} \mathcal{G}_X^*$ und $a_Y\mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Der}} \mathcal{G}_Y^*$ und der Morphismus der rechten Vertikale entspricht darunter der Verknüpfung $\mathbb{Z}_Y \to f_*f^*\mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} f_*\mathbb{Z}_X$ der Einheit der Adjunktion mit dem natürlichen Isomorphismus. Mit 21.4.7.14 sehen wir, daß die rechte Vertikale in unserem Diagramm unter unseren Isomorphismus dem Morphismus $f_!\omega_X \to \omega_Y$ entspricht, den wir als die Komposition $f_!\omega_X \xrightarrow{\sim} f_!f^!\omega_Y \to \omega_Y$ erhalten mit der Koeinheit der Adjunktion an zweiter Stelle und dem Bild unter $f_!$ des natürlichen Morphismus $\omega_X = \mathrm{fin}_X^!\,\mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} f^!(\mathrm{fin}_Y^!\,\mathbb{Z}_{\mathrm{top}}) = f^!\omega_Y$ an erster Stelle. Wir erhalten mit unseren Morphismen dann also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_Y^! \arrow[r] & \omega_Y \\
f_!\mathcal{G}_X^! \arrow[u, "\mathrm{gkv}"] \arrow[r] & f_!\omega_X \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

mit $g_Y := (\mathbb{D}_Y(a_Y))^{-1} \circ (\mathbb{D}_Y(d_Y))^{-1} \circ \mathrm{ev} : \mathcal{G}_Y^! \to \omega_Y$ in der oberen Horizontalen und $f_!g_X$ in der unteren Horizontalen.

Proposition 21.6.7.25 (Bidual des Grenzkomplexes). *Gegeben ein lokal polyederähnlicher lesb-Raum X ist der Grenzkomplex $\mathcal{G}_X^!$ verdierselbstdual, die kanonische Abbildung ist also ein Isomorphismus*

$$\mathcal{G}_X^! \xrightarrow{\sim}_{\mathrm{Der}} \mathbb{D}_X\mathbb{D}_X\mathcal{G}_X^!$$

21.6.7.26. Insbesondere ist dann der zum Schluß von 21.6.7.24 betrachtete Morphismus ein Isomorphismus $g_X : \mathcal{G}_X^! \xrightarrow{\sim} \omega_X$ zwischen dem Grenzkomplex und der dualisierenden Garbe.

Beweis. Wir kürzen im folgenden stets $\mathbb{D} = \mathbb{D}_{\mathrm{Ket}}$ ab. Unser Komplex von Grenzkokettengarben hat über $U \Subset X$ die Schnitte $\mathcal{G}_X^*(U) = \mathbb{D}\mathrm{G}U$. Gegeben ein Kompaktum $K \subset U$ liefert die kurze exakte Sequenz der relativen Grenzketten $\mathrm{G}(U\backslash K) \hookrightarrow \mathrm{G}(U) \twoheadrightarrow \mathrm{G}(U, U\backslash K)$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\mathbb{D}\mathrm{G}(U, U\backslash K) \hookrightarrow \mathbb{D}\mathrm{G}(U) \twoheadrightarrow \mathbb{D}\mathrm{G}(U\backslash K)$$

Im Kolimes über alle Kompakta $K \subset U$ ergeben sich daraus Isomorphismen $\mathrm{colf}_K\, \mathbb{D}\mathrm{G}(U, U\backslash K) \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(U; \mathcal{G}_U^*)$ und dann durch Dualisieren

$$\mathbb{D}\Gamma_!(U; \mathcal{G}_X^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{limf}_K\, \mathbb{D}\mathbb{D}\mathrm{G}(U, U\backslash K)$$

In **??** haben wir unter den Bedingungen des Satzes einen ausgezeichneten Isomorphismus der dualisierenden Garbe mit dem durch die Schnittkomplexe auf der rechten Seite gegebenen Garbenkomplex konstruiert. Andererseits gibt es für jede offene Teilmenge $U \Subset X$ einen natürlichen Morphismus

$$\mathcal{G}_X^!(U) = \mathrm{limf}_K\, \mathrm{G}(U, U\backslash K) \to \mathrm{limf}_K\, \mathbb{D}\mathbb{D}\mathrm{G}(U, U\backslash K)$$

Um den Beweis zu beenden müssen wir nur zeigen, daß jeder Punkt eine offene Umgebung U besitzt, für die er ein Quasiisomorphismus ist. Wir zeigen das sogar für jede polyederähnliche offene Teilmenge $U \Subset X$. Dann gibt es ja eine konfinale Folge von Kompakta von $K_n \subset U$ mit $\mathrm{H}_q(U, U\backslash K_n)$ endlich erzeugt für alle q, n. Damit sind aber die natürlichen Abbildungen Quasiisomorphismen $\mathrm{G}(U, U\backslash K_n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}\mathbb{D}\mathrm{G}(U, U\backslash K_n)$ und dann liefern sie nach 17.7.1.52 auch im inversen Limes Quasiisomorphismen. □

21.6.7.27 (**Singuläre Homologien als Garbenkohomologien**). Für jeden lokal polyederähnlichen lokal singulärazyklischen lesb-Raum X liefert unsere Beschreibung 21.6.7.19 der Homologie als kompakte Hyperkohomologie des Grenzkomplexes zusammen mit dem Isomorphismus 21.6.7.26 zwischen dem Grenzkomplex und der dualisierenden Garbe einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}_q(X)_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X)_{\mathrm{garb}}$$

Ist X darüberhinaus abzählbar basiert und $\Gamma : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}$ von endlicher homologischer Dimension, so liefert unsere Beschreibung 21.6.7.17 der Homologie als Hyperkohomologie des Grenzkomplexes analog einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}_q^!(X)_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q^!(X)_{\mathrm{garb}}$$

Aus dem zum Schluß von 21.6.7.24 gefundenen kommutativen Diagramm folgt mit 21.6.7.22 beziehungsweise 21.6.7.23 beziehungsweise 21.6.7.17 schließlich die Verträglichkeit dieser Vergleichsisomorphismen mit dem Vorschub der Homologie, dem eigentlichen Vorschub der lokalendlichen Homologie sowie dem offenen Rückzug der lokalendlichen Homologie.

21.6.7.28 (**Relative singuläre Homologie als Garbenkohomologie**). Seien X ein lokal polyederähnlicher lokal singulärazyklischer lesb-Raum und $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung einer offenen Teilmenge und $i : A \hookrightarrow X$ die Einbettung ihres Komplements. Wir erhalten mit der Einheit und der Koeinheit der Adjunktion nach 19.4.9.15 eine kurze exakte Sequenz

$$j_! j^! \mathcal{G}_X^! \hookrightarrow \mathcal{G}_X^! \twoheadrightarrow i_* i^* \mathcal{G}_X^!$$

von Garbenkomplexen und nach 19.4.8.11 und 19.4.8.13 bestehen sie alle aus kompaktweichen abelschen Garben. Nach 19.4.8.13 bilden dann die kompakten globalen Schnitte eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen und mit 21.6.7.18 erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{G}U & \hookrightarrow & \mathrm{G}X & \twoheadrightarrow & \mathrm{G}(X,U) \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ \Gamma_! \mathcal{G}_U^! & \hookrightarrow & \Gamma_! \mathcal{G}_X^! & \twoheadrightarrow & \Gamma_! i^* \mathcal{G}_X^! \end{array}$$

Die letzte Vertikale liefert zusammen mit dem Isomorphismus vom Grenzkomplex in die dualisierende Garbe 21.6.7.26 einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathbb{H}_!^{-q}(A; \omega_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X, X \backslash A)_{\mathrm{sing}}$$

Der Rest des Diagramms zeigt dann auch noch, daß die lange exakte Homologiesequenz darunter der langen exakten Hyperkohomologiesequenz des ersten ausgezeichneten Dreiecks nach 21.5.3.3 der dualisierenden Garbe ω_X zur gegebenen Zerlegung von X in eine offene und eine abgeschlossene Teilmenge entspricht. Wir haben also mit unseren Vergleichsisomorphismen zur singulären Homologie in den Vertikalen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & \mathbb{H}_!^{-q} j_! j^! \omega_X & \to & \mathbb{H}_!^{-q} \omega_X & \to & \mathbb{H}_!^{-q} i_* i^* \omega_X & \to & \mathbb{H}_!^{-q+1} j_! j^! \omega_X & \to \ldots \\ & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & \\ \ldots \to & \mathrm{H}_q U & \to & \mathrm{H}_q X & \to & \mathrm{H}_q(X,U) & \to & \mathrm{H}_{q-1} U & \to \ldots \end{array}$$

21.6.7.29 (**Natürlichkeit des Vergleichsisomorphismus nach** $\mathrm{H}_q(X,A)$). Wir erinnern 21.6.4.39. Seien $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung von lesb-Räumen sowie $A \mathrel{\complement\!\!\!\triangle} X, B \mathrel{\complement\!\!\!\triangle} Y$ abgeschlossene Teilmengen mit $f^{-1}(B) \subset A$. Gegeben $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ und ein Morphismus $\varphi : f_! \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ hatten wir dort einen ausgezeichneten Morphismus $\varphi_\circledast$ konstruiert, der unter $\mathcal{H}^{-q}$ ausgezeichnete Morphismen

$$\varphi_\circledast : \mathbb{H}_!^{-q}(A; \mathcal{F}) \to \mathbb{H}_!^{-q}(B; \mathcal{G})$$

liefert. Spezialisieren wir ihn zu dem aus dem offensichtlichen Isomorphismus $\omega_X \xrightarrow{\sim} f^! \omega_Y$ hervorgehenden Morphismus $f_! \omega_X \to \omega_Y$, so sollten wir unter den

zusätzlichen Annahmen an X und Y aus 21.6.7.28 mit unseren Vergleichsisomorphismen in den Horizontalen und dem Vorschub auf der singulären Homologie in der rechten Vertikalen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_!^{-q}(A;\omega_X) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_q(X, X\backslash A)_{\mathrm{sing}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}_!^{-q}(B;\omega_Y) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_q(Y, Y\backslash B)_{\mathrm{sing}} \end{array}$$

erhalten. Ich würde mich freuen, wenn ein Student mir das einmal ausarbeiten könnte.

21.7 Äquivariante derivierte Kategorie

21.7.1 Ergänzungen zu äquivarianten Garben

21.7.2 Äquivariante Objekte (VERLEGEN!)

21.7.2.1 (**Kartesischer Schnitt als Schmelzfunktor**). Gegeben eine Trennfaserung $\mathscr{M} \to \mathscr{N}$ ist nach 21.1.2.5 jeder kartesische Lift einer stabil universellen Trennung in $\mathscr{N}$ eine stabil universelle Trennung in $\mathscr{M}$. Insbesondere macht unsere Trennfaserung stabil universelle Trennungen zu stabil universellen Trennungen und hat $\mathscr{N}$ stabil universelle Trennungen, so auch $\mathscr{M}$. Unter dieser Annahme induziert unser Trennfunktor nach 18.1.6.12 folglich einen Trennschmelzfunktor

$$\mathscr{M} \to \mathscr{N}$$

zwischen den jeweiligen Erweiterungen zu Trennschmelzkategorien. Hat darüber hinaus die Basis $\mathscr{N}$ eindeutige Leertrennungen, so macht der kartesische Schnitt $\mathscr{N} \to \mathscr{M}$, $X \mapsto \underline{X}$ aus 21.1.4.4 nach 21.1.2.5 stabil universelle Trennungen zu stabil universellen Trennungen und induziert folglich einen Trennschmelzfunktor

$$\mathscr{N} \to \mathscr{M}$$

Per definitionem ist die Verknüpfung unserer beiden Trennschmelzfunktoren die Identität auf $\mathscr{N}$. Jeder Schmelzfunktor macht nun Monoidobjekte zu Monoidobjekten und insbesondere macht der kartesische Schnitt aus jedem Monoidobjekt G von $\mathscr{N}$ ein Monoidobjekt $\underline{G}$ von $\mathscr{M}$.

Definition 21.7.2.2. Gegeben eine Trennfaserung $\mathscr{M} \to \mathscr{N}$ über einer Trennkategorie mit stabil universellen Trennungen und eindeutigen Leertrennungen und ein Monoidobjekt $G \in \mathscr{N}$ nennt man ein Objekt $\mathcal{F}$ der Schmelzkategorie $\mathscr{M}$ mit $\underline{G}$-Operation ein G**-äquivariantes Objekt von** $\mathscr{M}$.

21.7.2.3. Gehört ein G-äquivariantes Objekt $\mathcal{F}$ zur Faser $\mathscr{M}_X$ über $X \in \mathscr{N}$, so induziert die $\underline{G}$-Operation auf $\mathcal{F}$ eine G-Operation auf X in $\mathscr{N}$. Dies Objekt mit G-Operation in der Basis notieren wir $G\backslash X$. Die G-äquivarianten Objekte von $\mathscr{M}$ über $G\backslash X$ bilden selber in offensichtlicher Weise eine Kategorie

$$\mathscr{M}_{G\backslash X}$$

Beispiel 21.7.2.4. Sei speziell $\mathscr{M} \to \curlywedge\mathscr{T}$ eine Trennfaserung über der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathscr{T}$ einer Kategorie $\mathscr{T}$ mit endlichen Produkten und finalem Objekt pt. Ein Monoidobjekt G von $\mathscr{T}$ ist dann per definitionem dasselbe wie ein Monoidobjekt der zur Trennschmelzkategorie $\curlywedge\mathscr{T}$ gehörigen Schmelzkategorie

und ein G-äquivariantes Objekt von $\mathscr{M}$ ist per definitionem ein Objekt zusammen mit einem Morphismus

$$\alpha : \underline{G} \boxtimes \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

in $\mathscr{M}$ derart, daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\underline{G} \boxtimes \underline{G}) \boxtimes \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \underline{G} \boxtimes \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[d, equal] \\
\underline{G} \boxtimes (\underline{G} \boxtimes \mathcal{F}) \arrow[r] & \underline{G} \boxtimes \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{pt}} \boxtimes \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[dr] & \underline{G} \boxtimes \mathcal{F} \arrow[d] \\
& \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

mit den in offensichtlicher Weise erklärten Morphismen kommutieren. Manchen Lesern mag eine Variante dieser Beschreibung vertrauter vorkommen, bei der man $\mathrm{pr}_1^* \mathcal{F}$ schreibt statt $\underline{G} \boxtimes \mathcal{F}$ und so weiter, für $\mathrm{pr}_1 : G \times X \to X$ und $\mathcal{F} \in \mathscr{M}_{/X}$.

Ergänzung 21.7.2.5. Mit Hilfe unseres natürlichen Isomorphismus $\underline{X} \boxtimes \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_Y^\dagger \mathcal{F}$ aus 21.1.5.22 für $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ können wir unsere Definition 21.7.2.1 äquivarianter Objekte oder vielmehr ihre für banale Trennkategorien ausbuchstabierte Fassung 21.7.2.4 in einer Weise fassen, in der sie für eine gewöhnliche Faserung $\mathscr{M} \to \mathscr{T}$ über einer Kategorie mit endlichen Produkten sinnvoll bleibt. Sei dazu $G\backslash X$ ein Objekt mit der Operation eines Monoids (G, m, e) in der Basis. Ein **G-äquivariantes Objekt über** X ist dann ein Datum $(\mathcal{F}, \alpha)$ bestehend aus einem Objekt $\mathcal{F} \in \mathscr{M}_X$ über X und einem Morphismus $\alpha : \mathrm{pr}^\dagger \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ über der Operation $a : G \times X \to X$ derart, daß die beiden im folgenden erklärten Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{prr}^\dagger \mathcal{F} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & \mathrm{pr}^\dagger \mathcal{F} \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{F} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{prr}^\dagger \mathcal{F} \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{pr}^\dagger \mathcal{F} \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, equal] & \mathrm{pr}^\dagger \mathcal{F} \arrow[d, "\alpha"] \\
& \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

kommutieren. Für das Rechte betrachten wir die Zerlegung $X \to G \times X \to X$ von $\mathrm{id}_X = \mathrm{pr} \circ e$ für e gegeben durch das neutrale Element unseres Monoids G und darüber die Zerlegung der Identität $\mathrm{id}_{\mathcal{F}} = \tau \circ \iota$ mit $\tau : \mathrm{pr}^\dagger \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dem Transportmorphismus. So erhalten wir einen wohlbestimmten Morphismus ι über e und das rechte Diagramm fordert die Identität $\alpha \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$. Wegen $a \circ e = \mathrm{id}_X$ ist das schon mal eine sinnvolle Forderung. Im linken Diagramm bezeichne γ denjenigen Morphismus $\gamma : \mathrm{prr}^\dagger \mathcal{F} \to \mathrm{pr}^\dagger \mathcal{F}$ über dem Morphismus $(\mathrm{id}_G \times a) : G \times G \times X \to G \times X$ in der Basis mit $\tau \circ \gamma = \alpha \circ \tau \circ c$ für die Transportmorphismen $\tau : \mathrm{pr}^\dagger \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ beziehungsweise $\tau : \mathrm{pr}_{23}^\dagger(\mathrm{pr}^\dagger \mathcal{F}) \to \mathrm{pr}^\dagger \mathcal{F}$ für $\mathrm{pr}_{23} : G \times G \times X \to G \times X$ die Projektion auf die beiden hinteren Faktoren und $c : \mathrm{prr}^\dagger \xRightarrow{\sim} \mathrm{pr}_{23}^\dagger \circ \mathrm{pr}^\dagger$ der Identifikation zu $\mathrm{prr} = \mathrm{pr} \circ \mathrm{pr}_{23}$. Weiter bezeichne $\beta : \mathrm{prr}^\dagger \mathcal{F} \to \mathrm{pr}^\dagger \mathcal{F}$ denjenigen Morphismus über dem Morphismus $m \times \mathrm{id}_X$ in der Basis, der

beim Nachschalten des Transportmorphismus τ den Transportmorphismus von $\mathrm{prr}^\dagger\mathcal{F}$ liefert. Die zweite Eigenschaft, die wir fordern, ist dann die Gleichheit $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma$ der mit im vorhergehenden erklärten Morphismen $\mathrm{prr}^\dagger\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ über dem durch zweimaliges Anwenden der Operation gegebenen Morphismus $G \times G \times X \to X$ in der Basis.

Beispiel 21.7.2.6 (**Äquivariante Objekte der Familientrennfaserung**). Im Fall der Familienfaserung $\mathcal{C}_{/\mathrm{Ens}} \to \mathrm{Ens}$ nach 19.6.2.24 zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Objekt $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_{/X}$ eine Familie $(\mathcal{F}_x)_{x\in X}$ von Objekten. Operiert dann ein Monoid G auf X, so besteht eine äquivariante Struktur aus der Vorgabe von Morphismen $s(g,x) : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_{gx}$ mit $s(1,x) = \mathrm{id}$ sowie $s(h,gx)s(g,x) = s(hg,x)$ für alle $g,h \in G$ und $x \in X$.

Beispiel 21.7.2.7. Sie mögen zur Übung zeigen, daß die in Bezug auf die Garbenfaserungen $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ und $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ im Sinne von 21.7.2.5 äquivarianten Objekte über einem topologischen Raum genau unsere äquivarianten Garben aus 19.7.1.1 beziehungsweise unsere äquivarianten abelschen Garben aus 19.7.1.4 sind.

Beispiel 21.7.2.8 (**Äquivariante Mengengarben, Variante**). Seien $G\backslash\!\!\backslash X$ ein topologischer Raum mit der Operation $a : G \times X \to X$ eines topologischen Monoids. Im Fall der Mengengarbenoptrennfaserung $\mathrm{Ens}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ nach **??** besteht eine G-äquivariante Mengengarbe auf X aus dem Datum einer Mengengarbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/\!/X}$ auf X und eines Opkomorphismus $\alpha \in \mathrm{Ens}_{/\!/a}(\underline{G} \boxtimes \mathcal{F}, \mathcal{F})$ mit gewissen Eigenschaften. Sind speziell G und X diskret, so ist solch ein α nach 21.1.6.8 eine Familie von Abbildungen $\alpha(g,x) : \mathcal{F}_{gx} \to \mathcal{F}_x$ und die geforderten Verträglichkeiten bedeuten $\alpha(g,x)\alpha(h,gx) = \alpha(hg,x)$ sowie $\alpha(1,x) = \mathrm{id}$. Das ist also dasselbe wie ein äquivariantes Objekt der Familienfaserung der Kategorie $\mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}}$. Bilden wir die zu $G\backslash\!\!\backslash X$ gehörige **Wirkungskategorie** X_G mit den Punkten $x \in X$ als Objekten und den Mengen

$$X_G(x,y) := \{g \in G \mid gx = y\}$$

als Morphismenmengen, paarweise disjunkt gemacht durch Darankreuzen des Paares (x,y), so haben wir natürliche Isomorphismen von Kategorien $\mathrm{Ens}_{/G\backslash\!\!\backslash X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(X_G, \mathrm{Ens})$ und $\mathrm{Ens}_{/\!/G\backslash\!\!\backslash X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(X_G, \mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}})$ in Verallgemeinerung unserer Erkenntnisse für Mengengarben aus 19.6.2.13.

21.7.2.9. Operiert eine diskrete Gruppe G und nicht nur ein Monoid auf einem diskreten Raum X, so ist die Wirkungskategorie X_G ein Gruppoid und das Invertieren von Morphismen zusammen mit der Identität auf Objekten liefert einen Isomorphismus $X_G \xrightarrow{\sim} (X_G)^{\mathrm{opp}}$. Mit 21.7.2.8 erhalten wir Isomorphismen von

Kategorien

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ens}_{/G\backslash X} & & & & \left(\mathrm{Ens}_{/\!/G\backslash X}\right)^{\mathrm{opp}} \\
\wr\downarrow & & & & \uparrow\wr \\
\mathrm{Cat}(X_G,\mathrm{Ens}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Cat}((X_G)^{\mathrm{opp}},\mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}})^{\mathrm{opp}} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Cat}(X_G,\mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}})^{\mathrm{opp}}
\end{array}$$

21.7.2.10 (**Der Strukturmorphismus jeder Gruppenoperation ist kartesisch**). Gegeben eine Trennfaserung $\mathscr{M} \to \curlywedge\mathscr{T}$ über der banalen Trennkategorie einer Kategorie mit endlichen Produkten und $G\backslash X$ ein Objekt mit Gruppenoperation $a : G \times X \to X$ der Basis und $(\mathcal{F},\alpha) \in \mathscr{M}_{G\backslash X}$ ein G-äquivariantes Objekt über X ist der Morphismus $\alpha \in \mathscr{M}_a(\underline{G} \boxtimes \mathcal{F},\mathcal{F})$ stets kartesisch. Um das zu sehen, betrachten wir in der Basis mit der Notation $\bar{a}(g,x) := g^{-1}x$ oder besser $\bar{a} := a \circ (\mathrm{inv} \times \mathrm{id})$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \times X \arrow[rrr, "(\mathrm{pr}_1,a)"] \arrow[dr, "(\mathrm{inv},\mathrm{id})\times\mathrm{id}"] \arrow[ddd, "\mathrm{id}\times\mathrm{id}"'] & & & G \times X \arrow[dl, "\mathrm{inv}\times\mathrm{id}"'] \arrow[ddd, "(\mathrm{pr}_1,\bar{a})"] \\
& G \times G \times X \arrow[rr, "\mathrm{id}\times a"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{23}"] \arrow[dd, "m\times\mathrm{id}"'] & & G \times X \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[dd, "a"] \\
& & G \times X \arrow[r, "a"] & X \\
& G \times X \arrow[rr, "a"] & & X \\
G \times X \arrow[ur, "1\times\mathrm{id}"] \arrow[rrr, "\mathrm{id}\times\mathrm{id}"] & & & G \times X \arrow[ul, "\mathrm{pr}_2"']
\end{tikzcd}$$

Ziehen wir das kommutative Rechteck in $\mathscr{M}$ über dem inneren Rechteck, das die Assoziativität der Operation zum Ausdruck bringt, zurück auf das äußere Rechteck, so bleibt es kommutativ. Aus offensichtlichen Gründen liefert der Rückzug nach links die Identität auf $\underline{G}\boxtimes\mathcal{F}$. Aufgrund der bei der Definition eines äquivarianten Objekts geforderten Trivialität der Operation der Eins liefert auch der Rückzug nach unten die Identität auf $\underline{G} \boxtimes \mathcal{F}$. Der Rückzug von $\mathrm{id}\boxtimes\alpha : \underline{G}\boxtimes\underline{G}\boxtimes\mathcal{F} \to \underline{G} \boxtimes \mathcal{F}$ nach oben stimmt überein mit dem Rückzug des Strukturmorphismus α von der Mitte nach ganz oben. Dieser Rückzug hat also ein Linksinverses, nämlich den Rückzug des Strukturmorphismus auf die rechte Vertikale. Genauso zeigt man, daß er auch ein Rechtsinverses besitzt und folglich ein Isomorphismus $\underline{G}\boxtimes\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \underline{G}\boxtimes\mathcal{F}$ über $(\mathrm{pr}_2,a) : G\times X \to G\times X$ sein muß. Mithin ist dieser Rückzug kartesisch. Seine Verknüpfung mit der offensichtlichen Trennung $\underline{G}\boxtimes\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ über $\mathrm{pr}_2 : G\times X \to X$ ist dann als Verknüpfung kartesischer Morphismen wieder kartesisch, und diese Verknüpfung ist gerade unser Strukturmorphismus α.

Ergänzung 21.7.2.11. Ich wüßte gerne, ob das Vorhergehende genauso gilt für eine beliebige Trennfaserung $\mathscr{M} \to \mathscr{N}$ in eine Trennkategorie mit stabil universellen Trennungen, wenn wir äquivariante Objekte in Bezug auf Hopfobjekte der Basis betrachten, wie sie in 18.3.3.6 erklärt wurden. Das könnte eine Arbeit für einen Studenten abgeben.

21.7.2.12 (**Trennfaserung der äquivarianten Objekte**). Gegeben eine Kategorie $\mathscr{T}$ mit endlichen Produkten bilden wir die Kategorie $\mathrm{mo}\mathscr{T}$ aller „Objekte mit Operation eines Monoidobjekts". Morphismen $G\backslash X \to H\backslash Y$ sind dabei Paare bestehend aus einem Homomorphismus $G \to H$ von Monoidobjekten und einem gewöhnlichen Morphismus $X \to Y$ derart, daß die offensichtliche Verträglichkeit erfüllt ist. Auch $\mathrm{mo}\mathscr{T}$ hat dann endliche Produkte. Gegeben eine Trennfaserung $\mathscr{M} \to \curlywedge\mathscr{T}$ erhalten wir eine weitere Trennfaserung

$$\mathrm{mof}\mathscr{M} \to \curlywedge\mathrm{mo}\mathscr{T}$$

mit Faser $\mathscr{M}_{G\backslash X}$ über $G\backslash X$ und den hoffentlich offensichtlichen Trennungen. Die Schmelzkategorien der opponierten Fasern notieren wir unseren allgemeinen Konventionen folgend

$$\mathscr{M}_{/G\backslash X}$$

Die Restriktion unserer Trennfaserung auf die banale Trennkategorie der vollen Unterkategorie der Räume mit Gruppenoperation notieren wir

$$\mathrm{gof}\mathscr{M} \to \curlywedge\mathrm{go}\mathscr{T}$$

In diesem Fall werden ja wohl, wenn die Fasern von $\mathscr{M} \to \curlywedge\mathscr{T}$ Multihom haben, auch die Fasern von $\mathrm{gof}\mathscr{M} \to \curlywedge\mathrm{go}\mathscr{T}$ Multihom haben. Das mag einmal ein Student ausarbeiten, gerne auch zusammen mit 21.7.2.11.

21.7.2.13 (**Äquivariante Objekte oppinverser Trennfaserungen**). Gegeben eine Trennfaserung $\mathscr{M} \to \curlywedge\mathscr{T}$ über der banalen Trennkategorie einer Kategorie mit endlichen Produkten und $G\backslash X$ ein Objekt mit Gruppenoperation in der Basis ist nach 21.7.2.10 der Strukturmorphismus kartesisch. Gegeben $\mathcal{F} \in \mathscr{M}_X$ entsprechen die Strukturmorphismen, die $\mathcal{F}$ zu einem äquivarianten Objekt $\mathcal{F} \in \mathscr{M}_X$ machen, also eineindeutig den Strukturmorphismen, die $\mathcal{F}$ zu einem äquivarianten Objekt $\mathcal{F} \in \mathscr{M}_X^{\mathrm{opi}}$ für die oppinvertierte Trennfaserung $\mathscr{M}^{\mathrm{opi}} \to \mathscr{N}$ nach 21.1.6.3 machen. Aus unserer Erkenntnis 21.7.2.10 über die Kartesianität des Strukturmorphismus bei unter Gruppen äquivarianten Objekten folgt, daß wir so einen Isomorphismus

$$(\mathrm{gof}\mathscr{M})^{\mathrm{opi}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{gof}(\mathscr{M}^{\mathrm{opi}})$$

von Trennfaserungen über der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathrm{go}\mathscr{T}$ der Objekte mit Gruppenoperation in der Basis erhalten.

Beispiel 21.7.2.14. Die unter Gruppenoperationen äquivarianten Objekte der Mengengarbentrennfaserung und der Mengengarbenoptrennfaserung bilden zueinander oppinverse Trennfaserungen. Einen Schatten dieser Tatsache haben wir bereits in 21.7.2.9 gesehen, wo wir im diskreten Fall einen Isomorphismus zwischen der Faser der einen und der opponierten Faser der anderen Trennfaserung konstruiert hatten.

21.7.2.15 (**Äquivariante Objekte auf dem Produkt mit einer Gruppe**). Gegeben eine Trennfaserung $\mathscr{M} \to \curlywedge \mathscr{T}$ über der banalen Trennkategorie einer Kategorie mit endlichen Produkten und G ein Gruppenobjekt der Basis erhalten wir eine Äquivalenz

$$\underline{G}\boxtimes : \mathscr{M}_{\mathrm{pt}} \xrightarrow{\approx} \mathscr{M}_{G\backslash G}$$

Genauer behaupten wir, daß wir sogar im Fall eines Monoidobjekts der Basis ein adjungiertes Paar $(\underline{G}\boxtimes, 1^\dagger)$ von Funktoren zwischen den fraglichen Kategorien erhalten, indem wir den offensichtlichen Isomorphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} 1^\dagger(\underline{G}\boxtimes\mathcal{F})$ als Einheit der Adjunktion nehmen und als Koeinheit die Komposition $\underline{G}\boxtimes 1^\dagger\mathcal{E} \to \underline{G}\boxtimes\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ von Morphismen über der Komposition $G \to G \times G \to G$ von $g \mapsto (g, 1)$ gefolgt von der Verknüpfung unseres Monoids. Im Fall eines Gruppenobjekts ist nach 21.7.2.10 der Strukturmorphismus kartesisch und deshalb ist auch unsere Koeinheit kartesisch über der Identität, also ein Isomorphismus. Mithin liefert unser adjungiertes Paar wie behauptet eine Äquivalenz von Kategorien. Dieselben Argumente liefern für jedes Objekt X der Basis eine Äquivalenz von Kategorien

$$\underline{G}\boxtimes : \mathscr{M}_X \xrightarrow{\approx} \mathscr{M}_{G\backslash(G\times X)}$$

Übungen

Übung 21.7.2.16. Gegeben $G\backslash X$ ein topologischer Raum mit einer topologisch freien Operationen einer diskreten Gruppe und k ein Kring und $\chi : G \to k^\times$ ein Gruppenhomomorphismus bezeichne $P := G\backslash X$ den Bahnenraum und $\underline{P}_\chi$ die nach **??** zugehörige lokal konstante Garbe von k-Moduln auf P. Gegeben $G\backslash X$ und $H\backslash Y$ topologische Räume mit topologisch freien Operationen diskreter Gruppen und $R := H\backslash Y$ betrachten wir in der Familienkategorie von $\curlywedge\mathrm{moTop}$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
P \times R & \to & P \curlywedge R \\
\uparrow & & \uparrow \\
(G \times H)\backslash(X \times Y) & \to & (G\backslash X) \curlywedge (H\backslash Y) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(G \times H)\backslash\mathrm{top} & \to & (G\backslash\mathrm{top}) \curlywedge (H\backslash\mathrm{top})
\end{array}$$

Da die Rückzüge längs der oberen Vertikalen nach 19.7.1.10 Äquivalenzen sind, liefert unser Diagramm ausgezeichnete Isomorphismen

$$\underline{P}_\chi \boxtimes \underline{R}_\xi \xrightarrow{\sim} \underline{P \times R}_{\chi\otimes\xi}$$

Übung 21.7.2.17. Ist X topologische Gruppe und $G \subset X$ eine diskrete zentrale Untergruppe, so operiert G nach 15.2.1.25 topologisch frei auf X und ein ähnliches Diagramm wie zuvor liefert für jeden Gruppenhomomorphismus $\chi : G \to k^\times$ einen kartesischen Morphismus $\underline{P \times P}_{\chi\otimes\chi} \to \underline{P}_\chi$ über der Multiplikation der Quotientengruppe $P := G\backslash X$. Zusammen mit dem Isomorphismus aus 21.7.2.16 liefert das einen kartesischen Morphismus

$$\underline{P}_\chi \boxtimes \underline{P}_\chi \to \underline{P}_\chi$$

über der Multiplikation von P. Man zeige, daß er $\underline{P}_\chi$ zu einem Gruppenobjekt in Garben von k-Moduln über topologischen Räumen macht. Objekte mit einer Operation dieses Gruppenobjekts heißen **X-χ-monodrome Garben**.

21.7.2.18. Ich erinnere an die Definitionen und ersten Resultate zu äquivarianten Garben aus 19.7.1.1 folgende. Die im Anschluß bewiesene Aussage hatten wir in 19.7.1.10 nur im Fall der Operation einer diskreten Gruppe diskutiert.

Satz 21.7.2.19 (Quotientenäquivalenz). *Gegeben eine topologische Gruppe G und ein topologisch freier G-Raum X ist der äquivariante Rückzug unter $\phi\backslash f$ für $f : X \twoheadrightarrow G\backslash X$ und $\phi : G \twoheadrightarrow 1$ eine Äquivalenz*

$$\mathrm{Ens}_{/G\backslash X} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{G\backslash X}$$

Beweis. Nach einigen Vorbereitungen zeigen wir eine noch allgemeineren Aussage in 21.7.2.25. □

Lemma 21.7.2.20 (Freie Quotienten äquivarianter Abbildungen). *Seien G eine topologische Gruppe und $X \to Y$ eine stetige G-äquivariante Abbildung von G-Räumen. Ist Y topologisch frei, so ist auch X topologisch frei und die offensichtlichen Abbildungen liefern ein kartesisches Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y \arrow[d] \\ X/G \arrow[r] & Y/G \end{tikzcd}$$

Ergänzung 21.7.2.21. Man zeigt unschwer auch eine noch allgemeinere Version: Ist zusätzlich $H \subset G$ eine Untergruppe, so liefern die offensichtlichen Abbildungen sogar ein kartesisches Diagramm

$$\begin{tikzcd} X/H \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y/H \arrow[d] \\ X/G \arrow[r] & Y/G \end{tikzcd}$$

Dazu geht man wie beim Beweis des Lemmas vor, ergänzt am Schluß das Diagramm entsprechend, und muß einen Homöomorphismus $X/H \xrightarrow{\sim} G/H \times X/G$ nachweisen. Das ist aber klar, da $G \times X/G \twoheadrightarrow G/H \times X/G$ final ist, vergleiche 15.2.2.4. Ich bin ganz verblüfft, daß man hierfür anscheinend noch nicht einmal voraussetzen muß, daß G topologisch frei ist als H-Raum.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $Y = G \times W$ annehmen. Dann entsteht mit dem pull-back ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & G \times X/G \arrow[r] \arrow[d] & G \times W \arrow[d] \\ & X/G \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

Wir betrachten nun die Abbildung $\mu : X \to G$, die durch die Komposition der oberen Horizontale mit der Projektion auf G gegeben wird. Sicher gilt $\mu(gx) = g\mu(x)$. Folglich ist die Abbildung $X \to X$ gegeben durch $x \mapsto \mu(x)^{-1}x$ konstant auf G-Bahnen und faktorisiert demnach über eine stetige Abbildung $\nu : X/G \to X$. Man prüft leicht, daß die stetige Abbildung $G \times X/G \to X$, $(g, \bar{x}) \mapsto g\nu(\bar{x})$ invers ist zur linken oberen Horizontale $X \to G \times X/G$, $x \mapsto (\mu(x), \bar{x})$. □

Korollar 21.7.2.22. *Seien G eine topologische Gruppe und $X \to Y$ eine stetige Abbildung von topologisch freien G-Räumen, die einen Homöomorphismus $X/G \xrightarrow{\sim} Y/G$ induziert. So ist unsere Abbildung bereits selbst ein Homöomorphismus.*

Beweis. Das folgt aus 21.7.2.20 aus der allgemeinen Erkenntnis 16.2.3.4, daß der pull-back eines Isomorphismus stets wieder ein Isomorphismus ist. □

Korollar 21.7.2.23 (Quotienten étaler Abbildungen sind étale). *Ist G eine topologische Gruppe und $X \to Y$ eine étale Abbildung von G-Räumen und Y ein topologisch freier G-Raum, so ist auch $X/G \to Y/G$ étale.*

21.7.2.24. Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ist étale, nicht aber ihr Quotient nach der Operation durch Addition einer Gerade $G \subset \mathbb{R}^2$ mit irrationaler Steigung. Es ist also wesentlich, daß die Operation nicht nur abstrakt frei, sondern sogar topologisch frei ist.

Beweis. Ist Y topologisch frei als G-Raum, so besitzt jeder Punkt von Y/G eine offene Umgebung $W \Subset Y/G$, auf der die Quotientenabbildung gespalten werden kann durch ein stetiges $s : W \to Y$. Wir können also unser kartesisches

Diagramm aus dem Lemma, das wir nun auf der Seite liegend dargestellt haben, ergänzen durch ein kartesisches Quadrat

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[r] \arrow[d] & X/G \arrow[d] \\ W \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y/G \end{tikzcd}$$

mit der Eigenschaft, daß die Kompositionen in den Horizontalen offene Einbettungen sind. Ist insbesondere $X \to Y$ étale, so auch $X/G \to Y/G$. □

Satz 21.7.2.25 (**Verallgemeinerte Quotientenäquivalenz**). *Operiert eine topologische Gruppe G auf einem Raum X und ist $N \subset G$ ein Normalteiler, der sowohl auf G als auch auf X topologisch frei operiert, so induziert das Zurückholen mit der Quotientenabbildung $G\backslash\!\!\!\backslash X \to (N\backslash G)\backslash\!\!\!\backslash(N\backslash X)$ eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{Ens}_{/(N\backslash G)\backslash\!\!\!\backslash(N\backslash X)} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/G\backslash\!\!\!\backslash X}$$

Beweis. Wir beginnen mit dem in 21.7.2.19 beschriebenen Fall $G = N$ und definieren einen Funktor in die Gegenrichtung mithilfe der étalen Räume, indem wir jeder äquivarianten Garbe $\bar{\mathcal{F}} \to X$ die nach 21.7.2.23 étale Abbildung $G\backslash\bar{\mathcal{F}} \to G\backslash X$ zuordnen. Dann zeigen wir, daß er linksadjungiert ist zum Zurückholen. Und schließlich prüfen wir, daß beide Adjunktionsabbildungen stets Isomorphismen sind. Das ist nur lokal zu prüfen, also für $X = G \times Y$, und in diesem Fall ist es leicht zu sehen. Für das simultane Wegteilen ergänzen wir unsere Argumentation in der offensichtlichen Weise. □

Satz 21.7.2.26 (**Induktionsäquivalenz**). *Seien G eine topologische Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe, die topologisch frei auf G operiert, und Y ein H-Raum. So liefert das Zurückholen längs $H\backslash\!\!\!\backslash Y \to G\backslash\!\!\!\backslash(G \times_{/H} Y)$ eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{Ens}_{/G\backslash\!\!\!\backslash(G\times_{/H}Y)} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/H\backslash\!\!\!\backslash Y}$$

21.7.2.27. Ein quasiinverser Funktor kann in der Sprache der étalen Räume explizit beschrieben werden durch die Vorschrift $\bar{\mathcal{F}} \mapsto G \times_{/H} \bar{\mathcal{F}}$.

Beweis. Wir betrachten zusätzlich $(G \times H)\backslash\!\!\!\backslash(G \times Y)$ mit der Operation gegeben durch $(g, h)(x, y) := (gxh^{-1}, hy)$ und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} (G \times H)\backslash\!\!\!\backslash(G \times Y) \arrow[d] \arrow[dr] & H\backslash\!\!\!\backslash Y \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl] \\ H\backslash\!\!\!\backslash Y & G\backslash\!\!\!\backslash(G \times_{/H} Y) \end{tikzcd}$$

mit der oberen Horizontale gegeben durch $h \mapsto (h,h)$ und $y \mapsto (1,y)$. Die Rückzüge in die obere linke Ecke sind verallgemeinerte Quotientenäquivalenzen 21.7.2.25. Es folgt, daß erst der Rückzug längs der oberen Horizontale und dann der Rückzug längs der rechten Vertikale auch Äquivalenzen sind. □

Beispiel 21.7.2.28 (**Äquivariante Garben auf homogenen Räumen**). Im Spezialfall $Y = \mathrm{top}$ erhalten wir aus dem Zusammenspiel der Beschreibung 19.7.1.2 äquivarianter Garben auf einem Punkt und der Induktionsäquivalenz 21.7.2.26 für jede topologisch frei operierende lokal zusammenhängende Untergruppe $H \subset G$ einer topologischen Gruppe G eine Äquivalenz

$$(H/H^\circ)\text{-Ens} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/G\backslash(G/H)}$$

zwischen der Kategorie der Mengen mit einer Operation der Komponentengruppe von H und der Kategorie der G-äquivarianten Garben auf dem homogenen Raum G/H. Insbesondere sind in diesem Fall alle äquivarianten Garben lokal konstant.

Beispiel 21.7.2.29. Die Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen auf der topologischen Gruppe $\mathbb{R}$ nicht mit der Struktur einer $\mathbb{R}$-äquivarianten Garbe in unserem Sinne versehen werden, da sie nicht lokal konstant ist, da aber nach 21.7.2.28 in dieser Situation jede $\mathbb{R}$-äquivariante Garbe lokal konstant ist.

Proposition 21.7.2.30 (**Volltreues Einschränken**). *Ist G eine topologische Gruppe und $\varphi : H \to G$ ein Gruppenhomomorphimus mit $G/\varphi(H)$ zusammenhängend, so ist für jeden G-Raum X die Restriktion ein volltreuer Funktor*

$$\mathrm{Ens}_{/G\backslash X} \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/H\backslash X}$$

Beweis. In der Tat müssen wir nur für jeden H-äquivarianten Garbenhomomorphismus von G-äquivarianten Garben $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ und alle $x \in X$ und $g \in G$ zeigen, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_x & \to & \mathcal{G}_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_{gx} & \to & \mathcal{G}_{gx} \end{array}$$

kommutiert. Es reicht, wenn wir das zeigen für die vermittels $G \to X$, $g \mapsto gx$ auf G zurückgezogenen Garben. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $X = G$ und $x = e$ annehmen. Dann liefert jedoch die Operation von G für alle $y \in \mathcal{F}_e$ eine Fortsetzung zu einem globalen Schnitt von $\mathcal{F}$, dessen Bild offen ist in $\bar{\mathcal{F}}$ als Bild einer étalen Abbildung. Mithin oder auch direkt nach 21.7.2.26 mit $Y = \mathrm{top}$ und $H = 1$ ist $\bar{\mathcal{F}} \to G$ und ebenso auch $\bar{\mathcal{G}} \to G$ eine triviale Überlagerung. Die Mengen der $g \in G$, an denen zwei unter $\varphi(H)$ äquivariante Decktransformationen übereinstimmen beziehungsweise verschieden sind, sind nach dem Satz über die Eindeutigkeit von Lifts bei Überlagerungen 16.3.4.10

offen in G und sind offensichtlich invariant unter $\varphi(H)$. Ist nun $G/\varphi(H)$ zusammenhängend, so ist die einzige Möglichkeit einer derartigen Zerlegung von G in zwei offene Teilmengen die Zerlegung in ganz G und die leere Menge. Das zeigt, daß alle unter $\varphi(H)$ äquivarianten Garbenhomomorphismen zwischen G-äquivarianten Garben auf G bereits G-äquivariant sein müssen. $\square$

21.7.2.31. Ist G eine topologische Gruppe und $f : X \to Y$ ein Morphismus von G-Räumen und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/G\backslash X}$ eine äquivariante Garbe, so erbt der Vorschub $f_*\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ in offensichtlicher Weise eine Wirkung von G als abstrakte Gruppe, die auch mit der Wirkung von G auf Y verträglich ist. Um jedoch zu zeigen, daß G auch mit seiner richtigen Topologie stetig auf dem étalen Raum von $f_*\mathcal{F}$ operiert, brauchen wir stärkere Voraussetzungen.

Beispiel 21.7.2.32 (**Schwierigkeiten mit äquivariantem Vorschub**). Daß es im Allgemeinen nicht ganz einfach sein wird, einen Vorschub für äquivariante Garben zu erklären, zeigt das folgende Beispiel. Auf der topologischen Gruppe $\mathbb{Q}$ betrachte man die konstante Garbe $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}}$. Ihr Vorschub unter der Projektion auf einen Punkt ist die abelsche Gruppe der globalen Schnitte $\Gamma(\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}})$. Dieser Gruppe entspricht jedoch unter der offensichtlichen Operation keine $\mathbb{Q}$-äquivariante Garbe, da die fragliche Operation nicht stetig ist für die diskrete Topologie auf $\Gamma(\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}})$. Ist zum Beispiel $s \in \Gamma(\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}})$ Null auf allen $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 < 2$ und Eins auf allen $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 > 2$, so gibt es keine Umgebung der Null in $\mathbb{Q}$, die diesen Schnitt festhält.

Beispiel 21.7.2.33 (**Alternative Beschreibung äquivarianter Garben**). Seien G eine topologische Gruppe und X ein G-Raum. Bezeichne $m, p : G \times X \to X$ die Operation von G beziehungsweise die Projektion auf X. Für jede äquivariante Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/G\backslash X}$ erklären wir einen Garbenisomorphismus

$$s : p^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} m^*\mathcal{F}$$

Man bezeichne dazu mit $q : G \times X \to G$ die Projektion und betrachte die Abbildung $(q, m) : (g, x) \mapsto (g, gx)$ und beachte zunächst $m = p \circ (q, m)$, so daß es gleichbedeutend gilt, einen Isomorphimus $p^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (q, m)^*(p^*\mathcal{F})$ zu konstruieren. Wir haben nun aber einen natürlichen Isomorphismus $\text{ét}(p^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} G \times \bar{\mathcal{F}}$. Das pull-back-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times \bar{\mathcal{F}} & \to & G \times \bar{\mathcal{F}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times X & \xrightarrow{(q,m)} & G \times X \end{array}$$

mit $(g, f) \mapsto (g, gf)$ in der oberen Horizontalen liefert dann den gesuchten Isomorphismus. Im Halm an der Stelle (g, x) wird unser Isomorphismus s beschrie-

ben durch ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (p^*\mathcal{F})_{(g,x)} & \xrightarrow{s} & (m^*\mathcal{F})_{(g,x)} \\ \downarrow\wr & & \wr\downarrow \\ \mathcal{F}_x & \xrightarrow{g} & \mathcal{F}_{gx} \end{array}$$

mit den offensichtlichen vertikalen Identifikationen. Ist umgekehrt ein Garbenhomomorphismus $s : p^*\mathcal{F} \to m^*\mathcal{F}$ gegeben, so erhalten wir eine stetige Abbildung $G \times \bar{\mathcal{F}} \to \bar{\mathcal{F}}$ aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} G \times \bar{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\sim} & \text{ét}(p^*\mathcal{F}) & \xrightarrow{s} & \text{ét}(m^*\mathcal{F}) & \to & \bar{\mathcal{F}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G \times X & = & G \times X & = & G \times X & \xrightarrow{m} & X \end{array}$$

Hierin können die nicht explizit benannten Abbildungen hoffentlich vom Leser erschlossen werden. Kommt s bereits von einer äquivarianten Struktur auf $\bar{\mathcal{F}}$ her, so erhalten wir mit dieser Konstruktion unsere äquivariante Struktur zurück.

Übungen

Übung 21.7.2.34. Seien G eine zusammenhängende topologische Gruppe und X ein G-Raum. Bezeichne $m, p : G \times X \to X$ die Operation beziehungsweise die Projektion auf X und sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Gibt es einen Garbenhomomorphismus $s : p^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} m^*\mathcal{F}$, der auf $\{e\} \times X$ zur Identität einschränkt, so besitzt $\bar{\mathcal{F}}$ genau eine stetige G-Operation, die $\mathcal{F}$ zu einer G-äquivarianten Garbe macht. Hinweis: Man verwende 21.7.2.33 und ziehe sich auf den Fall $X = G$ zurück.

Übung 21.7.2.35. Es operiere eine topologische Gruppe G auf einem Raum X und es sei $N \subset G$ ein Normalteiler, der auf G topologisch frei operiert. Genau dann ist die Operation von G auf X topologisch frei, wenn die Operationen von N auf X und von G/N auf $N\backslash X$ topologisch frei sind.

21.7.3 Äquivariante derivierte Kategorie

21.7.3.1. Gegeben ein topologischer Raum X bezeichne $\mathrm{Der}(X) := \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ die derivierte Kategorie der abelschen Kategorie aller abelschen Garben auf X.

21.7.3.2. Ich erinnere aus 21.3.1.2 daran, daß eine stetige Abbildung topologischer Räume $f : X \to Y$ **garbenazyklisch** heißt, wenn für jeden Komplex $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ die Einheit der Adjunktion einen Isomorphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f_* f^* \mathcal{F}$$

liefert. Sie heißt **bagazyklisch**, wenn sie unter jedem Basiswechsel eine garbenazyklische Abbildung liefert. Ein topologischer Raum X heißt **bagazyklisch**, wenn die konstante Abbildung $X \to \mathrm{top}$ die entsprechende Eigenschaft hat.

21.7.3.3 (**Produkte mit freien G-Räumen sind frei**). Sei G eine topologische Gruppe und seien P, X zwei G-Räume. Ist P topologisch frei, so ist auch das Produkt $P \times X$ mit der diagonalen G-Operation topologisch frei. In der Tat reicht es aus, das unter der zusätzlichen Annahme $P = G \times W$ zu zeigen, mit der Operation von G nur auf dem ersten Faktor. Dann aber erhalten wir einen Homöomorphismus $G \times W \times X \xrightarrow{\sim} G \times W \times X$ durch die Vorschrift $(g, w, x) \mapsto (g, w, gx)$, und unter diesem Homöomorphismus entspricht die G-Operation nur auf dem ersten Faktor der diagonalen G-Operation auf dem ersten und letzten Faktor.

21.7.3.4. Gegeben ein eine topologische Gruppe G und ein G-Raum X verstehen wir unter einer **Auflösung von** X einen G-äquivarianten Morphismus $p : P \to X$ von einem topologisch freien G-Raum nach X.

21.7.3.5 (**Äquivariante derivierte Kategorie zu einer Auflösung**). Gegeben eine topologische Gruppe G und ein G-Raum X und eine bagazyklische Auflösung $p : P \to X$ erklären wir die **G-äquivariante derivierte Kategorie von X zu P** als die volle Unterkategorie

$$\mathrm{Der}_{G\backslash}(X; P) \subset \mathrm{Der}(G\backslash P)$$

aller Komplexe, deren Rückzug unter $\mathrm{quot} : P \twoheadrightarrow G\backslash P$ isomorph ist zum Rückzug eines Komplexes aus $\mathrm{Der}(X)$ unter $p : P \to X$. In Formeln setzen wir also

$$\mathrm{Der}_{G\backslash}(X; P) := \{\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(G\backslash P) \mid \exists \mathcal{G} \in \mathrm{Der}(X) \text{ mit } p^*\mathcal{G} \cong \mathrm{quot}^* \mathcal{F}\}$$

Vorschau 21.7.3.6. Im folgenden werden wir zeigen, daß $\mathrm{Der}_{G\backslash}(X; P)$ in einem noch zu präzisierenden sehr starken Sinne von der bagazyklischen Auflösung P gar nicht abhängt, so daß wir P ohne Schaden aus der Notation entfernen dürfen. Jetzt aber versuchen wir erst einmal, die Sinnhaftigkeit unserer Definition durch Beispiele zu illustrieren.

Beispiel 21.7.3.7 (**Bezug zur äquivarianten Kohomologie**). Gegeben eine topologische Gruppe G und ein G-Raum X und eine bagazyklische Auflösung $p : P \to X$ gehört für jede abelsche Gruppe M die konstante Garbe auf $G\backslash P$ mit Faser M zu unserer äquivarianten derivierten Kategorie. Wir notieren dies Objekt $M_X = M_{X;P} \in \mathrm{Der}_{G\backslash}(X; P)$. Es ist auch klar, daß $\mathrm{Der}_{G\backslash}(X; P)$ stabil ist unter den homologischen Verschiebungen $[q]$. Wir erhalten nun mit der offensichtlichen Verallemeinerung von 19.7.2.5 auf bagazyklische stetige Abbildungen im letzten Schritt natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{Der}_{G\backslash}(X; P)(M_X, M_X[q]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(G\backslash P; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_G(P; M) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^q_G(X; M)$$

Der Raum der Morphismen von M_X zu $M_X[q]$ in unserer äquivarianten derivierten Kategorie ist mithin natürlich isomorph zur q-ten äquivarianten Kohomologie von X mit Koeffizienten in M.

Beispiel 21.7.3.8 (**Äquivariante derivierte Kategorien zur Gruppe** $\mathbb{Z}$). Im Fall der Gruppe $G = \mathbb{Z}$ können wir $E = \mathbb{R}$ nehmen und erhalten für jeden $\mathbb{Z}$-Raum X die bagazyklische Auflösung $P = \mathbb{R} \times X \to X$. Der Quotient $\mathbb{Z}\backslash P = \mathbb{R} \times_{/\mathbb{Z}} X$ ist dann ein Faserbündel über der Kreislinie $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit Faser X, die „verdrillt ist mit dem durch die Operation von $1 \in \mathbb{Z}$ gegebenen Automorphismus von X". Die äquivariante derivierte Kategorie hinwiederum ist in diesem Fall eine volle Unterkategorie der derivierten Kategorie zur Kategorie aller abelschen Garben auf diesem Faserbündel.

Beispiel 21.7.3.9 (**Äquivariante derivierte Kategorien zur Gruppe** $\mathbb{R}$). Im Fall der Gruppe $G = \mathbb{R}$ können wir auch $E = \mathbb{R}$ nehmen und erhalten für einen $\mathbb{R}$-Raum X die bagazyklische Auflösung $P = \mathbb{R} \times X \to X$. Der Quotient $\mathbb{R}\backslash P = \mathbb{R} \times_{/\mathbb{R}} X$ ist dann eine Faserung über dem Punkt $\mathbb{R}/\mathbb{R}$ mit Faser X und kanonisch isomorph zu X selber. Die äquivariante derivierte Kategorie ist in diesem Fall eine volle Unterkategorie der derivierten Kategorie zur Kategorie aller abelschen Garben auf X. Dasselbe gilt für jede zusammenziehbare topologische Gruppe G.

21.7.3.10 (**Triangulierung der äquivarianten derivierten Kategorien**). Für jeden G-Raum X mit bagazyklischer Auflösung $p : P \to X$ ist äquivariante derivierte Kategorie $\mathrm{Der}_{G\backslash}(X; P)$ eine triangulierte Unterkategorie von $\mathrm{Der}(G\backslash P)$. In der Tat induziert für $\mathcal{G} \in \mathrm{Der}(X)$ die Einheit der Adjunktion einen Isomorphismus

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} p_* p^* \mathcal{G}$$

Die Bedingung, daß es $\mathcal{G}$ gibt mit $\mathrm{quo}^* \mathcal{F} \cong p^* \mathcal{G}$, ist also gleichbedeutend zur Bedingung, daß die Koeinheit der Adjunktion für $\mathrm{quo}^* \mathcal{F}$ einen Isomorphismus $p^* p_* \mathrm{quo}^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{quo}^* \mathcal{F}$ induziert. Man sieht auch leicht, daß die Abschneidefunktoren $\tau^{\leq n}$ und $\tau^{\geq n}$ zu $\mathrm{Der}(G\backslash P)$ aus 20.2.7.4 die äquivariante derivierte Kategorie erhalten.

Proposition 21.7.3.11 (**Äquivariante Garben als gewöhnliche Garben**). *Seien G eine topologische Gruppe und X ein G-Raum und $p : P \to X$ eine Auflösung von X, die basisfest final ist mit zusammenhängenden Fasern. So erhalten wir eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{Ens}_{/G\backslash X} \xrightarrow{\approx} \{\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{G\backslash P} \mid \exists \mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/X} \textit{ mit } p^* \mathcal{G} \cong \mathrm{quo}^* \mathcal{F}\}$$

für $\mathrm{quo} : P \to G\backslash P$ *der Quotient durch die Vorschrift* $\bar{\mathcal{E}} \mapsto G\backslash(P \times_X \bar{\mathcal{E}})$ *auf den étalen Räumen.*

Beweis. Zunächst prüfen wir, daß unser Funktor überhaupt sinnvoll definiert ist. Nach 21.7.2.23 ist mit $P \times_X \bar{\mathcal{E}} \to P$ auch $G\backslash(P \times_X \bar{\mathcal{E}}) \to G\backslash P$ étale. Also ist unser Funktor sinnvoll definiert. Einen quasiinversen Funktor erhält man, indem man bemerkt, daß nach 19.4.3.23 die Einheit der Adjunktion eine Isotransformation $\mathrm{id} \stackrel{\sim}{\Rightarrow} p_* p^*$ ist und wir folglich $\mathcal{G}$ aus $\mathcal{F}$ zurückgewinnen können als $\mathcal{G} = p_* \operatorname{quo}^* \mathcal{F}$. Das zeigt, daß $\bar{\mathcal{G}}$ zumindest genau eine stetige Operation von G^{dis} trägt, die unter Rückzug die Operation von G auf $\overline{\operatorname{quot}^* \mathcal{F}} \cong P \times_X \bar{\mathcal{G}}$ als Garbe auf P wird. Da aber die zurückgeholte Operation stetig ist als Operation von G, muß auch die Operation auf $\bar{\mathcal{G}}$ selbst stetig sein, denn sie paßt in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times (P \times_X \bar{\mathcal{G}}) & \to & P \times_X \bar{\mathcal{G}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times \bar{\mathcal{G}} & \to & \bar{\mathcal{G}} \end{array}$$

und die linke Vertikale ist aufgrund unserer Annahmen an p final. □

21.7.3.12 (**Äquivariante Garben und äquivariante derivierte Kategorie**). Sei G eine topologische Gruppe und X ein G-Raum. Gegeben eine bagazyklische Auflösung $P \to X$, die außerdem basisfest final ist mit zusammenhängenden Fasern, liefern unsere Proposition 21.7.3.11 eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der äquivarianten abelschen Garben auf einem G-Raum X im anschaulichen Sinne 19.7.1.4 und der vollen Unterkategorie aller Komplexe $\mathcal{F} \in \operatorname{Der}_{G\backslash}(X; P)$ der äquivarianten derivierten Kategorie, die exakt sind außerhalb vom Grad Null, alias eine Äquivalenz

$$\operatorname{Ab}_{/G\backslash X} \stackrel{\approx}{\to} \{\mathcal{F} \in \operatorname{Der}_{G\backslash}(X; P) \mid \mathcal{H}^i \mathcal{F} \neq 0 \ \Rightarrow \ i = 0\}$$

Unsere Konstruktion liefert sogar einen triangulierten Funktor $\operatorname{Der}(\operatorname{Ab}_{/G\backslash X}) \to \operatorname{Der}_{G\backslash}(X; P)$. Dieser Funktor ist nur in Ausnahmefällen eine Äquivalenz von Kategorien. Ein solcher Ausnahmefall ist der Fall der trivialen Gruppe $G = 1$. In diesem Fall induziert der Rückzug unter $\mathrm{pr} : P \to X$ offensichtlich eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien

$$\operatorname{Der}(\operatorname{Ab}_{/X}) \stackrel{\approx}{\to} \operatorname{Der}_{1\backslash}(X; P)$$

In 21.7.3.13 zeigen wir, daß es stets bagazyklische Auflösungen gibt, die auch basisfest final sind mit zusammenhängenden Fasern.

21.7.3.13 (**Bagazyklische Auflösung mit der Milnor-Konstruktion**). Die Milnor-Konstruktion 19.7.3.5 liefert zu einer beliebigen topologischen Gruppe G einen topologisch freien zusammenziehbaren G-Raum $\mathrm{E}G$, den abzählbaren Join $\mathrm{E}G = *_{i \in \mathbb{N}} G$ mit seiner Milnor-Topologie. Insbesondere ist $\mathrm{E}G$ nach 21.3.1.4 basisfest azyklisch im Sinne von 21.3.1.2. Man nennt $\mathrm{E}G$ auch den „Totalraum des klassifizierenden Bündels“ aus Gründen, die hier nicht diskutiert werden sollen. Diese

Konstruktion ist sogar funktoriell in dem Sinne, daß jeder stetige Homomorphismus von topologischen Gruppen $\phi : G \to H$ einen Morphismus von Räumen mit Operation $\phi\backslash\mathrm{E}\phi : \mathrm{E}G \to \mathrm{E}H$ induziert. Gegeben ein G-Raum X ist dann die Projektion $\mathrm{E}G \times X \to X$ mit der diagonalen G-Operation vorne offensichtlich eine bagazyklische Auflösung und darüber hinaus basisfest final mit zusammenhängenden Fasern.

Definition 21.7.3.14. Gegeben eine topologische Gruppe G und ein G-Raum X erklären wir die **G-äquivariante derivierte Kategorie von** X mithilfe der Milnor-Konstruktion 19.7.3.5 eines universellen Bündels $\mathrm{E}G$ als die äquivariante derivierte Kategorie zur bagazyklischen Auflösung $\mathrm{pr}_X : \mathrm{E}G \times X \to X$ und setzen also in Formeln

$$\begin{aligned} \mathrm{Der}_{G\backslash}(X) &:= \mathrm{Der}_{G\backslash}(X; \mathrm{E}G \times X) \\ &= \{\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{E}G \times_{/G} X) \mid \exists \mathcal{G} \in \mathrm{Der}(X) \text{ mit } \mathrm{pr}_X^* \mathcal{G} \cong \mathrm{quot}^* \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

Lemma 21.7.3.15 (Freie Quotienten und Rückzug). *Seien G eine topologische Gruppe und $X \to Y$ eine stetige bagazyklische G-äquivariante Abbildung von topologisch freien G-Räumen. So gilt:*

1. *Die induzierte Abbildung $X/G \to Y/G$ ist bagazyklisch;*
2. *Ein Objekt $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(X/G)$ kommt von Y/G her genau dann, wenn sein Rückzug nach X von Y herkommt.*

Beweis. Nach Annahme besitzt jeder Punkt von Y/G eine offene Umgebung $W \Subset Y/G$, auf der die Projektion eine stetige Spaltung $W \hookrightarrow Y$ besitzt. Mit dem entsprechenden Faserprodukt F erhalten wir ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} X/G & X \arrow[l] & F \arrow[l] \\ Y/G \arrow[u] & Y \arrow[l] \arrow[u] & W \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

In diesem Diagramm ist nach 21.7.2.20 auch das linke Quadrat kartesisch. Folglich ist auch das einhüllende Rechteck kartesisch und seine Horizontalen sind offene Einbettungen. Die Eigenschaft bagazyklisch ist nun lokal in der Basis und das zeigt die erste Aussage. Weiter zeigt in der Situation von Teil 2 Rückzug auf die rechte Vertikale, daß unser $\mathcal{F}$ lokal von unten herkommt. Damit aber kommt es nach 21.3.1.7 auch global von unten her. □

Lemma 21.7.3.16 (Unabhängigkeit von der Wahl der Auflösung). *Gegeben eine topologische Gruppe G und ein G-Raum X und ein Morphismus $a : P \to Q$ von bagazyklischen Auflösungen ist der Rückzug auf unseren derivierten Kategorien eine Äquivalenz*

$$\mathrm{Der}_{G\backslash}(X; Q) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}_{G\backslash}(X; P)$$

21.7.3.17. Gegeben eine topologische Gruppe G und ein G-Raum X und eine bagazyklische Auflösung $p : P \to X$ liefern insbesondere die Rückzüge längs der Projektionen Äquivalenzen von Kategorien

$$\mathrm{Der}_{G\backslash}(X) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}_{G\backslash}(X; \mathrm{E}G \times_X P) \xleftarrow{\approx} \mathrm{Der}_{G\backslash}(X; P)$$

Beweis. Gegeben bagazyklische Auflösungen P, Q ist offensichtlich auch ihr Produkt $P \times_X Q$ mit der diagonalen G-Wirkung eine bagazyklische Auflösung. Wir beginnen damit, das Lemma im Fall der Projektion $P \times_X Q \to Q$ zu zeigen. Im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G\backslash(P \times_X Q) \arrow[d] & P \times_X Q \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, equal] \\
G\backslash Q & Q \arrow[l] \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

sind dann die Vertikalen garbenazyklisch. Damit ist der Rückzug längs jeder Vertikale schon mal ein volltreuer Funktor. Es gilt zu zeigen, daß der Rückzug längs der linken Vertikale auch essentiell surjektiv ist auf den entsprechenden Kategorien. Ein Objekt von $\mathrm{Der}_{G\backslash}(X; P \times_X Q)$ ist charakterisiert durch die Eigenschaft, daß sein Rückzug nach $P \times_X Q$ von X herkommt. A forteriori kommt dieser Rückzug dann auch von Q her, und dann zeigt Lemma 21.7.3.15 über freie Quotienten und Rückzug, daß unser Objekt bereits selbst von $\mathrm{Der}_{G\backslash}(X; Q)$ herkommen muß. Damit ist das Lemma für den durch die Projektion gegebenen Morphismus von bagazyklischen Auflösungen $\mathrm{pr}_Q : P \times_X Q \to Q$ gezeigt. Ist $a : P \to Q$ ein beliebiger Morphismus von bagazyklischen Auflösungen, so können wir den Morphismus von bagazyklischen Auflösungen $(\mathrm{id}, a) : P \to P \times_X Q$ betrachten und wegen $\mathrm{pr}_P \circ (\mathrm{id}, a) = \mathrm{id}$ muß dann auch der Rückzug mit (id, a) eine Äquivalenz von Kategorien $\mathrm{Der}_{G\backslash}(X; P \times_X Q) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}_{G\backslash}(X; P)$ sein. Mit $\mathrm{pr}_Q \circ (\mathrm{id}, a) = a$ folgt das Lemma im allgemeinen. □

21.7.3.18 (**Übergang zu Standardauflösungen**). Ist $G\backslash X \to H\backslash Y$ ein Morphismus von Räumen mit Gruppenoperation und $G\backslash P \to H\backslash Q$ ein Lift zu einem Morphismus von bagazyklischen Auflösungen und $G\backslash P' \to H\backslash Q'$ ein weiterer derartiger Lift, so erhalten wir ein Diagramm aus Rückzügen und Isotransformationen

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Der}_{G\backslash}(X; P) \arrow[r, "\approx"] & \mathrm{Der}_{G\backslash}(X; P \times_X P') \arrow[dl, Leftrightarrow, "\sim"'] & \mathrm{Der}_{G\backslash}(X; P') \arrow[l, "\approx"'] \arrow[dl, Leftrightarrow, "\sim"'] \\
\mathrm{Der}_{H\backslash}(Y; Q) \arrow[u] \arrow[r, "\approx"] & \mathrm{Der}_{H\backslash}(Y; Q \times_X Q') \arrow[u] & \mathrm{Der}_{H\backslash}(Y; Q') \arrow[u] \arrow[l, "\approx"']
\end{tikzcd}$$

mit Äquivalenzen in den Horizontalen und Rückzügen in den Vertikalen. So sehen wir zum Beispiel, daß wenn wir einen Lift unseres Morphismus zu einem Morphismus von bagazyklischen Auflösungen so finden können, der Rückzug eine

Äquivalenz $\mathrm{Der}_{H\backslash}(Y;Q) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}_{G\backslash}(X;P)$ induziert, daß er dann für jeden derartigen Lift eine Äquivalenz induziert und damit insbesondere eine Äquivalenz $\mathrm{Der}_{H\backslash}(Y) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}_{G\backslash}(X)$ für die mit den Milnorkonstruktionen erklärten äquivarianten derivierten Kategorien.

21.7.3.19 (**Äquivariante derivierte Kategorien für die triviale Gruppe**). Unsere Äquivalenz zwischen äquivarianten Garben für die triviale Gruppe und gewöhnlichen Garben auf einem Raum X erhalten wir nocheinmal als die Verknüpfung

$$\mathrm{Der}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{1\backslash}(X;X) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}_{1\backslash}(X)$$

mit dem Rückzug unter dem Morphismus $\mathrm{E}1 \times X \to X$ von bagazyklischen Auflösungen als zweitem Funktor und dem offensichtlichen ersten Funktor.

21.7.3.20. Wir definieren die Kategorie Topoga aller Tripel (P,G,X) bestehend aus einem Raum mit Gruppenoperation $G\backslash X$ und einer Auflösung P von X. Morphismen $(P,G,X) \to (Q,H,Y)$ sind Tripel (a,ϕ,f) mit $a : P \to Q$ und $f : X \to Y$ stetig und $\phi : G \to H$ einem stetigen Gruppenhomomorphismus derart, daß $\phi\backslash f$ sowie $\phi\backslash a$ Morphismen von Räumen mit Operation sind. Der Rückzug von Garben liefert dann in offensichtlicher Weise eine Trennfaserung über der banalen Trennkategorie unserer Kategorie Topoga mit der opponierten Kategorie zu $\mathrm{Der}_{G\backslash}(X;P)$ als Faser über (P,G,X). Lassen wir als Schreimorphismen nur Tripel (a,id,f) zu mit f einer les-Abbildung und so, daß der Morphismus a von Auflösungen zusammen mit f ein kartesisches Diagramm liefert, und notieren diese Unterkategorie $\mathrm{Topoga}^{\mathrm{les}}$, so erhalten wir eine verflochtene Trennaustauschsituation

$$(\mathrm{Der}^{-}_{/\!/\,\mathrm{Topoga}} \to \mathrm{Topoga} \supset \mathrm{Topoga}^{\mathrm{les}} \leftarrow \mathrm{Der}^{-!}_{/\!/\,\mathrm{Topoga}^{\mathrm{les}}}, \mathrm{Topoga}^{\mathrm{es}})$$

. Lassen wir als Schreimorphismen nur Tripel (a,id,f) zu mit f einer lesb-Abbildung, die wir $\mathrm{Topoga}^{\mathrm{lesb}}$ notieren, so erhalten wir sogar für die unbeschränkten derivierten Kategorien eine verflochtene Trennaustauschsituation

$$(\mathrm{Der}_{/\!/\,\mathrm{Topoga}} \to \mathrm{Topoga} \supset \mathrm{Topoga}^{\mathrm{lesb}} \leftarrow \mathrm{Der}^{!}_{/\!/\,\mathrm{Topoga}^{\mathrm{lesb}}}, \mathrm{Topoga}^{\mathrm{esb}})$$

21.7.3.21 (**Äquivarianter Drei-Funktor-Formalismus**). Bezeichne nun Topog die Kategorie der topologischen Räume mit Operation einer topologischen Gruppe. Unsere Trennfaserung $\mathrm{Der}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ aus 21.7.3.20 ????????? restringiert zu einer Trennfaserung

$$\mathrm{Der}_{/\!/\,\mathrm{Topog}} \to \mathrm{Topog}$$

mit der opponierten Kategorie zur äquivarianten derivierten Kategorie $\mathrm{Der}_{G\backslash}(X)$ als Faser über $G\backslash X$. Wir können also Objekte der äquivarianten derivierten Kategorien tensorieren und zurückziehen sowohl unter stetigen Abbildungen als auch

unter stetigen Gruppenhomomorphismen, und diese ganzen Konstruktionen sind miteinander verträglich. Den Rückzug unter einem stetigen Gruppenhomomorphismus $\phi : H \to G$ notieren wir

$$\phi^* = \mathrm{res}_G^H : \mathrm{Der}_{G\backslash}(X) \to \mathrm{Der}_{H\backslash}(X)$$

Des weiteren ist für jede unter einer topologischen Gruppe G äquivariante lokal eigentliche separierte Abbildung $f : X \to Y$ auch die induzierte Abbildung $\mathrm{E}G \times_{/G} X \to \mathrm{E}G \times_{/G} Y$ lokal eigentlich separiert und lokal eigentlicher Basiswechsel zeigt, daß der Schreivorschub mit dieser Abbildung einen Funktor

$$f_! : \mathrm{Der}_{G\backslash}(X) \to \mathrm{Der}_{G\backslash}(Y)$$

induziert, wenn f sogar eine lesb-Abbildung ist, und sonst immer noch einen Funktor

$$f_! : \mathrm{Der}^+_{G\backslash}(X) \to \mathrm{Der}^+_{G\backslash}(Y)$$

Insbesondere erhalten wir so für eine beliebige aber feste topologische Gruppe G-äquivariante Analoga $\mathrm{Der}^-_{/\!/ G\backslash \mathrm{Top}}$ und $\mathrm{Der}_{/\!/ G\backslash \mathrm{Top}}$ unserer in **??** und **??** betrachteten verflochtenen Trennaustauschsituationen. Das alles ist jedoch zusätzlich noch verträglich mit dem Rückzug unter stetigen Gruppenhomomorphismen und ist formal eine verflochtene Trennaustauschsituation

$$(\mathrm{Der}^-_{/\!/\,\mathrm{Topog}} \to \mathrm{Topog} \supset \mathrm{Topog}^{\mathrm{les}} \leftarrow \mathrm{Der}^{-!}_{/\!/\,\mathrm{Topog}^{\mathrm{les}}}, \mathrm{Topog}^{\mathrm{es}})$$

mit der Maßgabe, daß wir in $\mathrm{Topog}^{\mathrm{les}}$ nur lokal eigentliche separierte äquivariante Abbildungen zwischen Räumen mit Gruppenoperation zulassen, bei denen der entsprechende Gruppenhomomorphismus ein Isomorphismus ist, und bei $\mathrm{Topog}^{\mathrm{es}}$ nur eigentliche derartige Abbildungen. Ebenso erhalten wir eine verflochtene Trennaustauschsituation

$$(\mathrm{Der}_{/\!/\,\mathrm{Topog}} \to \mathrm{Topog} \supset \mathrm{Topog}^{\mathrm{les}} \leftarrow \mathrm{Der}^{!}_{/\!/\,\mathrm{Topog}^{\mathrm{lesb}}}, \mathrm{Topog}^{\mathrm{esb}})$$

mit unbeschränkten äquivarianten derivierten Kategorien als Fasern, wenn wir in $\mathrm{Topog}^{\mathrm{lesb}}$ nur lesb-Abbildungen zulassen und ebenso bei $\mathrm{Topog}^{\mathrm{esb}}$ nur eigentliche lesb-Abbildungen. Salopp gesprochen kann man also mit $(f^*, \otimes, f_!)$ äquivariant so rechnen, als gebe es die Gruppenoperation gar nicht, und kann dabei die Gruppenoperation zurückziehen unter stetigen Gruppenhomomorphismen $\mathrm{res}_G^H = \phi^*$, ohne daß das die restlichen Formeln beeinflußt.

21.7.3.22. Insbesondere liefert der Rückzug auf die triviale Gruppe gefolgt von einem Quasiinversen der Äquivalenz 21.7.3.12 alias dem Vorschub unter $\mathrm{E}1 \times X \to X$ einen triangulierten Funktor

$$\mathrm{Der}_{G\backslash}(X) \to \mathrm{Der}(X)$$

Wir nennen ihn das **Vergessen der Gruppenoperation**. Die Konstruktion zeigt, daß ein Objekt, daß beim Vergessen der Gruppenoperation zu Null wird, bereits Null gewesen sein muß. Mithin müssen auch Morphismen, die beim Vergessen der Gruppenoperation Isomorphismen werden, bereits Isomorphismen gewesen sein. Das Vergessen der Gruppenoperation ist in offensichtlicher Weise verträglich mit unseren Funktoren $(f^*, \otimes, f_!)$. Formal ist diese Aussage für die Restriktion $\mathrm{Der}_{G\searrow}(X) \to \mathrm{Der}_{1\searrow}(X)$ auf die triviale Gruppe Teil des äquivarianten Drei-Funktor-Formalismus 21.7.3.21 und für die Äquivalenzen $\mathrm{Der}(X) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}_{1\searrow}(X)$ Teil des mit Auflösungen angereicherten äquivarianten Drei-Funktor-Formalismus 21.7.3.20 zusammen mit der Unabhängigkeit 21.7.3.16 von der Auflösung.

21.7.4 Äquivariante Varianten der Adjungierten

21.7.4.1. Um die Existenz der Adjungierten $(f_*, \Rrightarrow, f^!)$ zu $(f^*, \otimes, f_!)$ im äquivarianten Kontext zeigen, benötigen wir zusätzliche Voraussetzungen an unsere Gruppe. Wir werden zeigen, daß es diese Adjungierten im Fall von Liegruppen stets gibt und daß sie in diesen Fällen auch mit dem Zurückziehen der Operation verträglich sind. Die Frage der Existenz von Adjungierten zur Restriktion der Gruppenwirkung diskutieren wir im anschließenden Abschitt.

Lemma 21.7.4.2 (Vertauschen von Rückzug und internem Hom). *Gegeben ein Faserbündel $f : X \to Y$ mit offenlokal bagazyklischer Faser ist für alle $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y})$ der natürliche Morphismus aus 21.1.5.11 ein Isomorphismus*

$$f^*(\mathcal{F} \Rrightarrow \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} (f^*\mathcal{F} \Rrightarrow f^*\mathcal{G})$$

Beweis. Mit unserem Verschwindungskriterium 21.2.3.20 können wir uns darauf beschränken, zu zeigen, daß für $f : X \to Y$ garbenazyklisch der obige Morphismus einen Isomorphismus $f_*f^*(\mathcal{F} \Rrightarrow \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f_*(f^*\mathcal{F} \Rrightarrow f^*\mathcal{G})$ induziert. Da jedoch die Einheit der Adjunktion in diesem Fall eine Isotransformation $\mathrm{id} \xRightarrow{\sim} f_*f^*$ ist, reicht es zu zeigen, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
f_*f^*(\mathcal{F} \Rrightarrow \mathcal{G}) \arrow[r] & f_*(f^*\mathcal{F} \Rrightarrow f^*\mathcal{G}) \\
(\mathcal{F} \Rrightarrow \mathcal{G}) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "\sim"] & (\mathcal{F} \Rrightarrow f_*f^*\mathcal{G}) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert mit der rechten Vertikale aus 21.1.5.9. Um das zu sehen, dürfen wir die Adjunktion anwenden und statt beiden f_* in der oberen Horizontale vor beide Ausdrück der unteren Horizontale ein f^* davorschreiben. Dann steht in der linken Vertikale die Identität und die Kommutativität folgt aus der Definition der beteiligten Morphismen. □

Satz 21.7.4.3 (**Äquivarianter Vorschub und internes Hom**). *Gegeben eine offenlokal zusammenziehbare Gruppe G gilt:*

1. *Für jeden G-Raum X ist $\mathrm{Der}_{G\searrow}(X) \subset \mathrm{Der}(\mathrm{E}G \times_{/G} X)$ stabil unter internem Hom $\Rightarrow$ und insbesondere hat die Schmelzkategorie $\mathrm{Der}_{G\searrow}(X)$ internes Hom;*

2. *Für jede stetige G-äquivariante Abbildung $f : X \to Y$ von G-Räumen bildet der Vorschub $(\mathrm{id} \times_{/G} f)_*$ die Kategorie $\mathrm{Der}_{G\searrow}(X)$ nach $\mathrm{Der}_{G\searrow}(Y)$ ab und liefert mithin einen Rechtsadjungierten f_* von f^*.*

Beweis. Die erste Aussage folgt mit dem Vertauschen von Rückzug und internem Hom 21.7.4.2 aus der Erkenntnis 19.7.3.8, daß mit G auch $\mathrm{E}G$ offenlokal zusammenziehbar ist. Die zweite Aussage folgt genauso mit gefasertem Basiswechsel 21.3.2.2. □

21.7.4.4. Gegeben ein stetiger Homomorphismus von offenlokal zusammenziehbaren Gruppen $G \to H$ liefert die Restriktion $\mathrm{res}^G_H f^* f_* \Rightarrow \mathrm{res}^G_H$ der Koeinheit der Adjunktion zunächst $f^* \mathrm{res}^G_H f_* \Rightarrow \mathrm{res}^G_H$ und dann $\mathrm{res}^G_H f_* \Rightarrow f_* \mathrm{res}^G_H$. Ich behaupte, daß diese letzte Transformation eine Isotransformation

$$\mathrm{res}^G_H f_* \overset{\sim}{\Rightarrow} f_* \mathrm{res}^G_H$$

ist. Da unter Restriktion nur Isomorphismen zu Isomorphismen werden, müssen wir unsere Behauptung nur für die triviale Gruppe $G = 1$ prüfen. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{E}1 \times X & \to & \mathrm{E}H \times X & \to & \mathrm{E}H \times_{/H} X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{E}1 \times Y & \to & \mathrm{E}H \times Y & \to & \mathrm{E}H \times_{/H} Y \end{array}$$

Es gilt zu zeigen, daß für $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}_{\searrow H}(X) \subset \mathrm{Der}(\mathrm{E}H \times_{/H} X)$ der Basiswechsel zur derivierten Garbenopfaserung im einhüllenden Rechteck einen Isomorphismus liefert. Im rechten Teilrechteck gilt das schon mal nach gefasertem Basiswechsel. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{E}1 \times X & \to & \mathrm{E}H \times X & \to & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{E}1 \times Y & \to & \mathrm{E}H \times Y & \to & Y \end{array}$$

liefert der Basiswechsel zur derivierten Garbenopfaserung sowohl im einhüllenden Rechteck als auch im rechten Teilrechteck einen Isomorphismus, wieder nach gefasertem Basiswechsel. Also induziert er im linken Teilrechteck einen Isomorphismus für alle Objekte, die durch Rückzug von X herkommen. Setzen wir diese Erkenntnis oben ein, so folgt die Behauptung.

21.7.4.5. Gegeben ein stetiger Homomorphismus von offenlokal zusammenziehbaren Gruppen $G \to H$ liefert die Komposition

$$(\operatorname{res}_H^G \mathcal{F}) \otimes \operatorname{res}_H^G(\mathcal{F} \Rrightarrow \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{res}_H^G(\mathcal{F} \otimes (\mathcal{F} \Rrightarrow \mathcal{H})) \to \operatorname{res}_H^G \mathcal{H}$$

durch das Herüberschaffen von $\operatorname{res}_H^G \mathcal{F}$ einen natürlichen Morphismus, von dem ich behaupte, daß er ein Isomorphismus

$$\operatorname{res}_H^G(\mathcal{F} \Rrightarrow \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{res}_H^G \mathcal{F}) \Rrightarrow (\operatorname{res}_H^G \mathcal{H})$$

ist. Da unter Restriktion nur Isomorphismen zu Isomorphismen werden, müssen wir unsere Behauptung nur für die triviale Gruppe $G = 1$ prüfen. Das geht analog wie in 21.7.4.4, nur einfacher.

Lemma 21.7.4.6. *Ist E ein offenlokal bagazyklischer Raum und $f : X \to Y$ lesb, so ist die offensichtliche Transformation eine Isotransformation*

$$\operatorname{pr}_X^* f^! \xRightarrow{\sim} (\operatorname{id} \times f)^! \operatorname{pr}_Y^*$$

Beweis. Nach unserem Verschwindungskriterium 21.2.3.23 reicht es zu zeigen, daß für E bagazyklisch unsere Transformation unter pr_{X*} eine Isotransformation wird. Das folgt jedoch unmittelbar aus lokal eigentlichem Basiswechsel. □

Satz 21.7.4.7 (Äquivarianter Eigrückzug). *Gegeben eine Liegruppe G und eine G-äquivariante lesb-Abbildung $f : X \to Y$ von G-Räumen bildet der Eigrückzug $(\operatorname{id} \times_{/G} f)^!$ die Kategorie $\operatorname{Der}_{G\searrow}(Y)$ nach $\operatorname{Der}_{G\searrow}(X)$ ab und liefert mithin einen Rechtsadjungierten $f^!$ von $f_!$.*

Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E}G \times_{/G} X \arrow[d, "\operatorname{id} \times_{/G} f"] & \mathrm{E}G \times X \arrow[l, "\operatorname{quo}_X"'] \arrow[r, "\operatorname{pr}_X"] \arrow[d, "\operatorname{id} \times f"] & X \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{E}G \times_{/G} Y & \mathrm{E}G \times Y \arrow[l, "\operatorname{quo}_Y"'] \arrow[r, "\operatorname{pr}_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

Die horizontalen Abbildungen nach links sind d-mannigfaltig für $d = \dim G$ und jede Wahl einer äquivarianten Orientierung von G liefert eine Trivialisierung ihrer relativen Orientierungsgarbe und damit liefern unsere Erkenntnisse 21.6.2.8 zum mannigfaltigen Rückzug Isotransformationen $\operatorname{quo}_Y^* \xRightarrow{\sim} \operatorname{quo}_Y^![-d]$ und $\operatorname{quo}_X^* \xRightarrow{\sim} \operatorname{quo}_X^![-d]$. So folgt $\operatorname{quo}_X^*(\operatorname{id} \times_{/G} f)^! \mathcal{F} \cong (\operatorname{id} \times f)^! \operatorname{quo}_Y^* \mathcal{F}$ für alle $\mathcal{F} \in \operatorname{Der}(\mathrm{E}G \times_{/G} Y)$ und aus $\operatorname{quo}_Y^* \mathcal{F} \cong \operatorname{pr}_Y^* \mathcal{G}$ folgt mit unserem Lemma 21.7.4.6 unmittelbar

$$\operatorname{quo}_X^*(\operatorname{id} \times_{/G} f)^! \mathcal{F} \cong (\operatorname{id} \times f)^! \operatorname{quo}_Y^* \mathcal{F} \cong (\operatorname{id} \times f)^! \operatorname{pr}_Y^* \mathcal{G} \cong \operatorname{pr}_X^* f^! \mathcal{G} \qquad \square$$

21.7.4.8. Gegeben ein stetiger Homomorphismus $G \to H$ von mannigfaltigen Gruppen liefert die Restriktion der Koeinheit der Adjunktion $\operatorname{res}_H^G f_! f^! \Rightarrow \operatorname{res}_H^G$ zunächst $f_! \operatorname{res}_H^G f^! \Rightarrow \operatorname{res}_H^G$ und dann $\operatorname{res}_H^G f^! \Rightarrow f^! \operatorname{res}_H^G$. Ich behaupte, daß diese letzte Transformation eine Isotransformation

$$\operatorname{res}_H^G f^! \overset{\sim}{\Rightarrow} f^! \operatorname{res}_H^G$$

ist. Da unter Restriktion nur Isomorphismen zu Isomorphismen werden, müssen wir unsere Behauptung nur für die triviale Gruppe $G = 1$ prüfen. Das geht analog wie wir es in 21.7.4.4 im Fall des Vorschubs ausgeführt hatten.

21.7.5 Äquivalenzen mit Gruppenwechsel

Satz 21.7.5.1 (Quotientenäquivalenz). *Operiert eine topologische Gruppe G topologisch frei auf einem topologischen Raum X, so ist der äquivariante Rückzug eine Äquivalenz*

$$\operatorname{Der}_{1\searrow}(G\backslash X) \overset{\approx}{\to} \operatorname{Der}_{G\searrow}(X)$$

Beweis. Aufgrund der Unabhängigkeit 21.7.3.16 von der Wahl der bagazyklischen Auflösung reicht es zu zeigen, daß der äquivariante Rückzug eine Äquivalenz

$$\operatorname{Der}_{1\searrow}(G\backslash X; G\backslash X) \overset{\approx}{\to} \operatorname{Der}_{G\searrow}(X)$$

induziert. Dazu betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E}G \times_{/G} X \arrow[d] & \mathrm{E}G \times X \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, equal] \\
G\backslash X & X \arrow[l] \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

Da G topologisch frei auf X operiert, ist die linke Vertikale ein Faserbündel mit Faser $\mathrm{E}G$ und ist insbesondere garbenazyklisch. Wir müssen also nur zeigen, daß jedes Objekt links oben, dessen Rückzug in die Mitte von unten herkommt, bereits selbst von unten herkommt. Das aber folgt aus unserem Lemma 21.7.3.15 über freie Quotienten und Rückzug. □

Satz 21.7.5.2 (Verfeinerte Quotientenäquivalenz). *Operiert eine topologische Gruppe G auf einem Raum X und ist $H \subset G$ ein Normalteiler, der sowohl auf G als auch auf X topologisch frei operiert, so induziert der Rückzug mit der Quotientenabbildung $G\backslash X \to (H\backslash G)\backslash(H\backslash X)$ eine Äquivalenz*

$$\operatorname{Der}_{(H\backslash G)\searrow}(H\backslash X) \overset{\approx}{\to} \operatorname{Der}_{G\searrow}(X)$$

Beweis. Wir setzen $P := \mathrm{E}G \times X \to X$. Nach 21.7.2.20 erhalten wir ein kartesisches Diagramm

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ H\backslash P \arrow[r] & H\backslash X \end{tikzcd}$$

Hier ist auch die untere Horizontale bagazyklisch, da sie sich lokal in der Basis als Rückzug der oberen Horizontale beschreiben läßt. Es ist leicht zu sehen, daß $H\backslash P$ topologisch frei ist als $(H\backslash G)$-Raum und daß die offensichtliche Abbildung einen Homöomorphismus $c : G\backslash P \xrightarrow{\sim} (H\backslash G)\backslash(H\backslash P)$ induziert. Wir betrachten nun das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ H\backslash P \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "\bar{p}"] & & X \arrow[dl, "\bar{q}"'] \\ G\backslash P & & H\backslash X \end{tikzcd}$$

und behaupten, daß das Zurückholen mit c eine Äquivalenz

$$\mathrm{Der}_{(H\backslash G)\searrow}(H\backslash X; H\backslash P) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}_{G\searrow}(X; P)$$

induziert. In der Tat, gibt es für $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(G\backslash P)$ ein $\mathcal{G} \in \mathrm{Der}(H\backslash X)$ mit $r^*\mathcal{F} \cong \bar{p}^*\mathcal{G}$, so folgt $(r \circ q)^*\mathcal{F} \cong p^*(\bar{q}^*\mathcal{G})$ und folglich $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}_{G\searrow}(X; P)$. Gibt es umgekehrt $\mathcal{G}' \in \mathrm{Der}(X)$ mit $(r \circ q)^*\mathcal{F} \cong p^*\mathcal{G}'$, so gibt es nach Lemma 21.7.3.15 über freie Quotienten und Rückzug ein $\mathcal{G} \in \mathrm{Der}(H\backslash X)$ mit $r^*\mathcal{F} \cong \bar{p}^*\mathcal{G}$. Der Satz folgt mit 21.7.3.18. □

Satz 21.7.5.3 (Induktionsäquivalenz). *Gegeben $H \subset G$ eine Untergruppe, die topologisch frei auf G operiert, und Y ein H-Raum liefert das Zurückholen längs des offensichtlichen Morphismus $H\backslash Y \to G\backslash(G \times_{/H} Y)$ eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{Der}_{G\searrow}(G \times_{/H} Y) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}_{H\searrow}(Y)$$

Beweis. Wir betrachten zusätzlich $(G \times H)\backslash(G \times Y)$ mit der Operation gegeben durch $(g, h)(x, y) := (gxh^{-1}, hy)$ und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} (G \times H)\backslash(G \times Y) \arrow[d] \arrow[dr] & H\backslash Y \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl] \\ H\backslash Y & G\backslash(G \times_{/H} Y) \end{tikzcd}$$

mit der oberen Horizontale gegeben durch $h \mapsto (h,h)$ und $y \mapsto (1,y)$. Die Rückzüge in die obere linke Ecke sind verallgemeinerte Quotientenäquivalenzen. Es folgt, daß erst der Rückzug längs der oberen Horizontale und dann der Rückzug längs der rechten Vertikale auch Äquivalenzen sind. □

21.7.6 Vernachlässigen zusammenziehbarer Anteile

Satz 21.7.6.1 (Operationen zusammenziehbarer Gruppen). *Operiert eine zusammenziehbare topologische Gruppe N auf einem topologischen Raum X, so ist das Vergessen der Gruppenoperation für $m, \mathrm{pr} : N \times X \to X$ die Operation beziehungsweise die Projektion eine Äquivalenz*

$$\mathrm{Der}_{N\backslash}(X) \xrightarrow{\approx} \{\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(X) \mid m^*\mathcal{F} \cong \mathrm{pr}^*\,\mathcal{F}\}$$

Beweis. Per definitionem ist $\mathrm{Der}_{N\backslash}(X; N \times X)$ die Kategorie

$$\{\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(N \times_{/N} X) \mid \exists \mathcal{G} \in \mathrm{Der}(X) \text{ mit } \mathrm{quo}^*\,\mathcal{F} \cong \mathrm{pr}^*\,\mathcal{G}\}$$

Die Multiplikation induziert hier einen Homöomorphismus $\bar{m} : N \times_{/N} X \xrightarrow{\sim} X$ mit $\bar{m} \circ \mathrm{quo} = m$. Jetzt müssen wir nur noch bemerken, daß aus $m^*\mathcal{F} \cong \mathrm{pr}^*\,\mathcal{G}$ mit der Einschränkung unter $X \to N \times X$ mit $x \mapsto (1,x)$ folgt $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$. □

Proposition 21.7.6.2 (Volltreues Einschränken). *Seien G eine topologische Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe, die auf G topologisch frei operiert. Ist G/H bagazyklisch, so ist für jeden G-Raum X die Restriktion ein volltreuer Funktor*

$$\mathrm{Der}_{G\backslash}(X) \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{H\backslash}(X)$$

21.7.6.3. Den Fall $H = 1$ haben wir bereits in 21.7.6.1 behandelt. Ich wundere mich, daß die analoge Aussage in 21.7.2.30 so viel schwächere Voraussetzungen braucht. Ich wüßte zum Beispiel gerne, ob das Einschränken unter surjektiven Gruppenhomomorphismen volltreu ist, etwa für die Identität auf der Kreislinie, einmal mit der diskreten und einmal mit der üblichen Topologie versehen.

Beweis. Die Projektion $\mathrm{E}G \times_{/H} X \to \mathrm{E}G \times_{/G} X$ ist eine Faserung mit Faser G/H und damit nach 21.3.1.5 garbenazyklisch. Das Zurückholen darunter liefert mithin einen volltreuen Funktor $\mathrm{Der}(\mathrm{E}G \times_{/G} X) \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{Der}(\mathrm{E}G \times_{/H} X)$ und a forteriori auch einen volltreuen Funktor

$$\mathrm{Der}_{G\backslash}(X) \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{H\backslash}(X; \mathrm{E}G \times X).$$

Mit dem Übergang zu Standardauflösungen 21.7.3.18 folgt die Behauptung. □

Satz 21.7.6.4 (**Irrelevante Operationen**). *Seien G eine topologische Gruppe und X ein G-Raum und $N \subset G$ ein zusammenziehbarer Normalteiler, der trivial auf X und topologisch frei auf G operiert. So ist der Rückzug eine Äquivalenz*

$$\mathrm{Der}_{(N\backslash G)\searrow}(X) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}_{G\searrow}(X)$$

Beweis. Jede Auflösung $P \to X$ können wir faktorisieren als $P \to N\backslash P \to X$. Die Komposition ist bagazyklisch und die erste Abbildung desgleichen, also ist auch die zweite Abbildung bagazyklisch und somit eine $(N\backslash G)$-Auflösung von X. Wir betrachten nun das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G\backslash P \arrow[d, "\wr"] & P \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
(N\backslash G)\backslash(N\backslash P) & N\backslash P \arrow[l] \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

Da die mittlere Vertikale garbenazyklisch ist, müssen zwei Objekte unten, deren Rückzüge oben isomorph sind, bereits unten isomorph gewesen sein. Der Satz folgt. □

Korollar 21.7.6.5 (**Quotienten nach zusammenziehbaren Gruppen**). *Seien G eine topologische Gruppe und X ein G-Raum und $N \subset G$ ein zusammenziehbarer Normalteiler, der topologisch frei auf X und G operiert. So ist der Rückzug eine Äquivalenz*

$$\mathrm{Der}_{G\searrow}(N\backslash X) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}_{G\searrow}(X)$$

Beweis. Die Verknüpfung von Rückzügen

$$\mathrm{Der}_{(N\backslash G)\searrow}(N\backslash X) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}_{G\searrow}(N\backslash X) \to \mathrm{Der}_{G\searrow}(X)$$

ist unsere verallgemeinerte Quotientenäquivalenz und der Erste unserer Funktoren ist eine Äquivalenz nach 21.7.6.4. Das Korollar folgt. □

21.7.7 Danksagung

21.7.7.1. Eine wesentliche Quelle und Motivation waren für mich die Lecture Notes von Bernstein und Lunts [BL94].

21.8 Schrotthalde

21.9 Wohin? Hier unnötig.

21.9.1 Relativ angereicherte Schmelz- und Trennkategorien

21.9.1.1. Ähnlich wie im Fall angereicherter Schmelzkategorien in 18.2.4.1 folgende besprechen wir zunächst „relative additive Strukturen“ und „relative $(\mathcal{S}, v)$-Strukturen“, bevor wir das allgemeine Konzept einer relativen $\mathcal{S}$-Trennkategorie einführen.

21.9.1.2. Gegeben ein Trennfunktor $p : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ erklären wir eine **relative additive Struktur** als die Vorgabe einer Verknüpfung auf der Menge

$$\mathscr{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_r)$$

der Trennungen über einer festen Trennung $f : p\mathcal{F} \to p\mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge p\mathcal{G}_r$ der Basis für beliebige Objekte $\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_r \in \mathscr{M}$ derart, daß unsere Mengen mit diesen Verknüpfungen abelsche Gruppen werden und unsere Multiverknüpfungen für diese Gruppenstrukturen multiadditiv.

Beispiel 21.9.1.3 (**Relative additive Struktur der Garbenoptrennfaserung**). Bei unserer Garbenoptrennfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top}$ ist für jede feste Trennung der Basis $f = (f_1, \ldots, f_r)$ alias jedes Tupel stetiger Abbildungen $f_i : X \to Y_i$ und abelsche Garben $\mathcal{F}, \mathcal{G}_i$ auf X, Y_i die Menge $\mathrm{Ab}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_r)$ von Multiopkomorphismen eine abelsche Gruppe in offensichtlicher Weise und wir erhalten so eine relative additive Struktur.

Beispiel 21.9.1.4. Eine Trennfaserung $p : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ mit additiven Fasern, deren Trennrückzüge additiv sind in jeder Variablen, besitzt genau eine relative additive Struktur, die die eindeutig bestimmten additiven Strukturen auf den Fasern fortsetzt. Wir erhalten unsere relative additive Struktur der Garbenoptrennfaserung als Spezialfall ein weiteres Mal.

Beispiel 21.9.1.5 (**Relative additive Struktur durch Leerfaktorisierung**). Gegeben eine Trennfaserung über einer banalen Trennkategorie $\mathscr{M} \to \curlywedge\mathscr{T}$ mit Multihom in den opponierten Fasern und eine Faktorisierung $\mathrm{L}^{\mathrm{opp}} = v \circ \mathrm{A}$ des opponierten Leertrennungsfunktors über $v : \mathrm{Ab} \to \mathrm{kEns}$ erhalten wir eine relative additive Struktur auf unserer Trennfaserung, indem wir Additionen auf den Verschmelzungsmengen dadurch festlegen, daß die durch unsere Daten gegebenen Bijektionen $\mathscr{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} v\mathrm{A}(f^*\mathcal{B} \Rrightarrow \mathcal{F})$ Isomorphismen von abelschen Gruppen sein sollen.

21.9.1.6. Gegeben ein Trennfunktor $p : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ und ein treuer Schmelzfunktor $v : \mathcal{S} \to \mathrm{kEns}$ verstehen wir unter einer **relativen $(\mathcal{S}, v)$-Struktur** die Vorgabe einer $(\mathcal{S}, v)$-Struktur auf der Menge

$$\mathscr{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_r)$$

der Trennungen über einer festen Trennung $f : p\mathcal{F} \to p\mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge p\mathcal{G}_r$ der Basis für beliebige Objekte $\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_r \in \mathscr{M}$ derart, daß die Multiverknüpfungen mit den jeweiligen $(\mathcal{S}, v)$-Strukturen verträglich sind.

Beispiel 21.9.1.7. Die relativen additiven Strukturen in Bezug auf einen vorgegebenen Trennfunktor entsprechen in offensichtlicher Weise eineindeutig den relativen (Ab, v)-Strukturen.

21.9.1.8. Gegeben sei eine Trennfaserung $\mathscr{M} \to \curlywedge\mathscr{T}$ mit Adjungierten über einer banalen Trennkategorie mit finalem Objekt pt. Hat die Schmelzkategorie $\mathscr{M}_{/\mathrm{pt}}$ einen treuen Leerverschmelzungsfunktor, so erhalten wir auf unserer Trennfaserung eine relative $(\mathscr{M}_{/\mathrm{pt}}, \mathrm{L})$-Struktur vermittels der Bijektionen

$$\mathscr{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_X(\mathcal{F}, f^\dagger\mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_{/X}(\curlyvee, f^*\mathcal{B} \Rrightarrow \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_{/\mathrm{pt}}(\curlyvee, \mathrm{fin}_{X*}(f^*\mathcal{B} \Rrightarrow \mathcal{F}))$$

Wir nennen sie die **relative Finalstruktur**.

Beispiel 21.9.1.9 (**Relative Finalstruktur der Garbenoptrennfaserung**). Die als relative Finalstruktur nach 21.9.1.8 gegebene relative $(\mathrm{Ab}_{/\mathrm{pt}}, \mathrm{L})$-Struktur auf der Garbenoptrennfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top}$ wird unter der offensichtlichen Schmelzäquivalenz $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{pt}} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ab}$ zu einer (Ab, v)-Struktur, die unter unseren Konstruktionen aus 21.9.1.7 hinwiederum der relativen additiven Struktur aus 21.9.1.3 entspricht.

21.9.1.10. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{S}$ und eine Trennkategorie $\mathscr{N}$ erklären wir eine **$\mathcal{S}$-Trennkategorie $\mathscr{M}$ über $\mathscr{N}$** als ein Datum aus einer Menge $\mathscr{M}$ von Objekten, einer Abbildung $p : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ und für Objekte $\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_r \in \mathscr{M}$ und jede Trennung $f : p\mathcal{F} \to p\mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge p\mathcal{G}_r$ der Basis ein **Trennobjekt**

$$\mathscr{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_r) \in \mathcal{S}$$

sowie Multiverknüpfungen, die Verschmelzungen in $\mathcal{S}$ sind derart, daß das offensichtliche Analogon der Assoziativitätsbedingung aus unserer Definition einer Schmelzkategorie erfüllt ist und daß es für jede Einsfamilie $\mathcal{F}$ eine Leertrennung $\mathrm{id}_{\mathcal{F}} \in \mathcal{S}(\curlyvee, \mathscr{M}_{\mathrm{id}}(\mathcal{F}_*, \mathcal{F}))$ in das Trennobjekt über $\mathrm{id}_{p\mathcal{F}}$ gibt, das die Analoga unserer Forderungen an Identitätsverschmelzungen aus 18.2.4.14 erfüllt. Als wieder andere Sprechweise sagen wir, **$\mathscr{M}$ sei angereichert in $\mathcal{S}$ über** $\mathscr{N}$ und schreiben $\mathscr{M}/\mathcal{S} \to \mathscr{N}$ oder $\mathscr{M}/(\mathcal{S}, \mathscr{N})$.

Beispiele 21.9.1.11. Sei $\mathscr{N}$ eine Trennkategorie. Ein Trennfunktor $\mathscr{M} \to \mathscr{N}$ ist dasselbe wie eine kEns-Trennkategorie $\mathscr{M}$ über $\mathscr{N}$. Eine Ab-Trennkategorie $\mathscr{M}/\mathrm{Ab} \to \mathscr{N}$ ist dasselbe wie ein Trennfunktor $\mathscr{M} \to \mathscr{N}$ mit einer relativen additiven Struktur.

Beispiel 21.9.1.12. Sei $v : \mathcal{S} \to \mathrm{kEns}$ ein treuer Schmelzfunktor. Wir erinnern aus 18.1.6.18 die Schmelzkategorie $\mathrm{kEns}_{(\mathcal{S},v)}$ der Mengen mit $(\mathcal{S}, v)$-Struktur. Ein

Trennfunktor $\mathscr{M} \to \mathscr{N}$ mit relativer $(\mathcal{S}, v)$-Struktur ist eine $\mathrm{kEns}_{(\mathcal{S},v)}$-Trennkategorie $\mathscr{M} / \mathrm{kEns}_{(\mathcal{S},v)} \to \mathscr{N}$ über $\mathscr{N}$. Es ist auch im wesentlichen dasselbe wie eine $\mathcal{S}$-Trennkategorie $\mathscr{M}/\mathcal{S} \to \mathscr{N}$ über $\mathscr{N}$, wie in 21.9.1.15 ausgeführt wird.

21.9.1.13. Gegeben ein Schmelzfunktor $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ und eine Trennkategorie $\mathscr{N}$ und angereicherte Trennfunktoren $\mathscr{L}/\mathcal{S} \to \mathscr{N}$ sowie $\mathscr{M}/\mathcal{T} \to \mathscr{N}$ erklären wir einen **angereicherten Trennfunktor** F **über** φ **relativ zu** $\mathscr{N}$ ein Datum aus einer Abbildung auf den Objekten $F : \mathscr{L} \to \mathscr{M}$ über $\mathscr{N}$ zusammen mit $\mathcal{T}$-Morphismen

$$F : \varphi(\mathscr{L}_f(\mathcal{F}, \mathcal{B})) \to \mathscr{M}_f(F\mathcal{F}, F\mathcal{B})$$

für jede Trennung f der Basis $\mathscr{N}$, die mit Multiverknüpfungen verträglich sind und Identitäten auf Identitäten werfen in der offensichtlichen Weise. Wir notieren so einen relativ angereicherten Trennfunktor F auch ausführlicher F/φ oder $F/(\varphi, \mathscr{N})$. Einigen Spezialfällen geben wir eigene Namen.

1. Relativ angereicherte Trennfunktoren, die die Identität auf den Objektmengen sind, nennen wir **objektfest**;

2. Relativ angereicherte Trennfunktoren, bei denen die induzierten $\mathcal{T}$-Morphismen sämtlich Isomorphismen $F : \varphi(\mathscr{L}_f(\mathcal{F}, \mathcal{B})) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_f(F\mathcal{F}, F\mathcal{B})$ sind, nennen wir φ**-volltreu**;

3. Relativ angereicherte Trennfunktoren von relativen $\mathcal{S}$-Trennkategorien über $\varphi = \mathrm{id} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ nennen wir **relative** $\mathcal{S}$**-Trennfunktoren**.

21.9.1.14 (**Relatives Umstrukturieren**). Gegeben eine relative $\mathcal{S}$-Trennkategorie $\mathscr{M}/(\mathcal{S}, \mathscr{N})$ und ein Schmelzfunktor $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ erklären wir eine $\mathcal{T}$-Trennkategorie $\varphi(\mathscr{M})/(\mathcal{T}, \mathscr{N})$, indem wir φ auf alle Trennobjekte und Multiverknüpfungen von $\mathscr{M}$ anwenden. Wir sagen, $\varphi(\mathscr{M})$ entstehe durch **relatives Umstrukturieren von** $\mathscr{M}$ **mit** φ. Die Identität auf den Objekten zusammen mit den Identitäten auf den Bildern unter φ der Trennungsobjekte ist dann ein objektfester angereicherter Trennfunktor

$$\mathrm{U}/(\varphi, \mathscr{N}) : \mathscr{M}/(\mathcal{S}, \mathscr{N}) \to \varphi(\mathscr{M})/(\mathcal{T}, \mathscr{N})$$

21.9.1.15. Gegeben ein treuer Schmelzfunktor $v : \mathcal{S} \to \mathrm{kEns}$ macht das Umstrukturieren mit der Schmelzäquivalenz $v : \mathcal{S} \xrightarrow{\approx} \mathrm{kEns}_{(\mathcal{S},v)}$ jede relative $\mathcal{S}$-Trennkategorie $\mathscr{M}/(\mathcal{S}, \mathscr{N})$ zu einer Schmelzkategorie $\mathscr{M} \to \mathscr{N}$ mit relativer $(\mathcal{S}, v)$-Struktur. Ist unsere Schmelzäquivalenz ein Isomorphismus $v : \mathcal{S} \xrightarrow{\sim} \mathrm{kEns}_{(\mathcal{S},v)}$, so können wir diese Konstruktion auch rückgängig machen.

21.9.1.16 (**Relative Selbstanreicherung**). Gegeben eine Trennfaserung $\mathscr{M} \to \curlywedge\mathscr{T}$ mit Adjungierten über einer banalen Trennkategorie mit finalem Objekt pt konstruieren wir eine $\mathscr{M}_{/\mathrm{pt}}$-Trennkategorie $\mathscr{M}^{\mathrm{sa}}$ über $\curlywedge\mathscr{T}$ mit Trennobjekten

$$\mathscr{M}^{\mathrm{sa}}_f(\mathcal{F}, \mathcal{B}) := \mathrm{fin}_{X*}(f^*\mathcal{B} \Rrightarrow \mathcal{F})$$

und Multiverknüpfungen, statt derer ich der Einfachkeit halber nur die einfachen Verknüpfungen ausschreibe. Gegeben $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ in der Basis und $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ Objekte der jeweiligen Fasern gilt es, eine Verschmelzung

$$\mathrm{fin}_{Y*}(g^*\mathcal{H} \Rrightarrow \mathcal{G}) \curlyvee \mathrm{fin}_{X*}(f^*\mathcal{G} \Rrightarrow \mathcal{F}) \to \mathrm{fin}_{X*}((gf)^*\mathcal{H} \Rrightarrow \mathcal{F})$$

anzugeben. Dazu bilden wir mit der Einheit der Adjunktion (f^*, f_*) und dem Hereinziehen eines Rückzugs in das interne Hom 21.1.5.11 die Komposition

$$\mathrm{fin}_{Y*}(g^*\mathcal{H} \Rrightarrow \mathcal{G}) \to \mathrm{fin}_{Y*}\, f_* f^*(g^*\mathcal{H} \Rrightarrow \mathcal{G}) \to \mathrm{fin}_{X*}((gf)^*\mathcal{H} \Rrightarrow f^*\mathcal{G})$$

Nach diesem Morphismus im Term ganz links unserer zu erklärenden Verschmelzung verwenden wir den ausgezeichneten Morphismus 21.1.5.17 vom Tensorprodukt von Vorschüben zum Vorschub eines Tensorprodukts und die Komposition von internem Hom in der Schmelzkategorie $\mathscr{M}_{/X}$. Jetzt gilt es, dasselbe für Multiverknüpfungen auszuschreiben und alles so übersichtlich zu strukturieren, daß klar wird, daß wir so in der Tat eine relativ angereicherte $\mathscr{M}_{/\mathrm{pt}}$-Trennkategorie

$$\mathscr{M}^{\mathrm{sa}}/(\mathscr{M}_{/\mathrm{pt}}, \curlywedge\mathscr{T})$$

über $\curlywedge\mathscr{T}$ erhalten. Das möchte ich einem Studenten überlassen. Ebenso möchte ich es einem Studenten überlassen zu zeigen, daß wir einen objektfesten Isomorphismus

$$\mathrm{L}(\mathscr{M}^{\mathrm{sa}}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}$$

der Umstrukturierung der automatischen Selbstanreicherung mit dem Leerverschmelzungsfunktor von $\mathscr{M}_{/\mathrm{pt}}$ zu unserer ursprünglichen Trennfaserung erhalten, indem wir alle die Bijektionen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{L}(\mathscr{M}^{\mathrm{sa}}_f(\mathcal{F}, \mathcal{B})) & = & \mathscr{M}_{/\mathrm{pt}}(\curlyvee, \mathrm{fin}_{X*}(f^*\mathcal{B} \Rrightarrow \mathcal{F})) \\ & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{M}_{/X}(\curlyvee, f^*\mathcal{B} \Rrightarrow \mathcal{F}) \\ & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{M}_{/X}(f^*\mathcal{B}, \mathcal{F}) \\ & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{M}_X(\mathcal{F}, f^\dagger\mathcal{B}) \\ & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \end{array}$$

zusammenfassen. Hier kommt der Isomorphismus der zweiten Zeile von 21.1.5.29 her, wo wir allgemein Bijektionen $\mathscr{M}^{\mathrm{opp}}(\curlyvee, \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_{/\mathrm{pt}}(\curlyvee, \mathrm{fin}_*\,\mathcal{H})$ konstruieren.

Beispiel 21.9.1.17. Gegeben eine Trennfaserung $\mathscr{M} \to \curlywedge\mathscr{T}$ mit Adjungierten über einer banalen Trennkategorie mit finalem Objekt pt derart, daß $\mathscr{M}_{/\mathrm{pt}}$ einen treuen Leerverschmelzungsfunktor hat, liefert der objektfeste Isomorphismus $\mathrm{L}(\mathscr{M}^{\mathrm{sa}}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}$ aus 21.9.1.16 die relative $(\mathscr{M}_{/\mathrm{pt}}, \mathrm{L})$-Struktur auf $\mathscr{M}$ aus 21.9.1.8. Im Fall der Garbenoptrennfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top}$ erhalten wir mit 21.9.1.9 unsere ursprüngliche relative additive Struktur zurück.

21.9.1.18. Die hier für Trennkategorien eingeführten Begriffsbildungen verwenden wir analog auch für Schmelzkatgorien und betrachten sie auch als eingeführt für gewöhnliche Kategorien.

21.9.1.19 (**Lokalisierung relativer additiver Strukturen**). Sei ein Funktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ mit einer relativen additiven Struktur nach 21.9.1.2 gegeben und sei S ein globales Rechtsoresystem in $\mathscr{C}$ über den Identitäten von $\mathscr{B}$. So gibt auf $p_S : S^{-1}\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ genau eine relative additive Struktur, für die $Q : \mathscr{C} \to S^{-1}\mathscr{C}$ ein Ab-Funktor über $\mathscr{B}$ ist im Sinne von 21.9.1.13. In der Tat können wir Rechtsbrüche addieren, indem wir sie auf einen Hauptnenner bringen, und erhalten so aus der vorgegebenen (Ab, v)-Strukturen auf $\mathscr{C}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ über einem Morphismus $f : X \to Y$ der Basis eine wohldefinierte (Ab, v)-Struktur auf $(S^{-1}\mathscr{C})_f(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Daß diese (Ab, v)-Strukturen eine relative additive Struktur bilden und auch die einzige mit den geforderten Eigenschaften, mag der Leser selber prüfen. Dasselbe gilt für Linksoresysteme.

21.9.2 Homotopie für unbequeme Schmelzkategorien*

21.9.2.1. Die in 21.2.7.1 folgende diskutierten Konstruktionen gelingen auch noch in größerer Allgemeinheit, aber es fällt mit schwer, dabei die Vorzeichen im Zaum zu halten. Dieser Abschnitt bleibt deshalb eine Skizze.

21.9.2.2. Gegeben eine Ab-Schmelzkategorie $\mathcal{M}/\mathrm{Ab}$ können wir etwa eine sgAb-Schmelzkategorie

$$\mathrm{sga}\mathcal{M} = \mathrm{sga}\mathcal{M}/\mathrm{sgAb}$$

dadurch erklären, daß die Schreibanordnung für die homogenen Komponenten der Verschmelzungsobjekte Isomorphismen von abelschen Gruppen

$$\mathrm{sga}\mathcal{M}(X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r, Y)^n \xrightarrow{\sim} \prod_{i_1+\ldots+i_r+n=j} \mathcal{M}(X_1^{i_1} \curlyvee \ldots \curlyvee X_r^{i_r}, Y^j)$$

liefert und daß die Multiverknüpfung die offensichtliche ist bis auf Vorzeichen. Ich führe die Vorzeichen nur in einem Beispiel aus. Gegeben Objekte $X_{ij}, Y_j, Z \in \mathrm{sg}\mathcal{M}$ gilt es, eine Verknüpfungsverschmelzung von

$$\mathrm{sga}\mathcal{M}(X_{11} \curlyvee X_{21}, Y_1) \curlyvee \mathrm{sga}\mathcal{M}(X_{12}, Y_2) \curlyvee \mathrm{sga}\mathcal{M}(Y_1 \curlyvee Y_2, Z)$$

nach $\mathrm{sga}\mathcal{M}(X_{11} \curlyvee X_{21} \curlyvee X_{12}, Z)$ anzugeben. Unter Beachtung der Schreibanordnung der drei Faktoren bedeutet das, multiadditive Abbildungen von

$$\mathrm{sga}\mathcal{M}(X_{11} \curlyvee X_{21}, Y_1)^r \times \mathrm{sga}\mathcal{M}(X_{12}, Y_2)^s \times \mathrm{sga}\mathcal{M}(Y_1 \curlyvee Y_2, Z)^t$$

nach $\mathrm{sga}\mathcal{M}(X_{11} \curlyvee X_{21} \curlyvee X_{12}, Z)^{r+s+t}$ anzugeben. Wir haben also gewisse Tupel von Verschmelzungen gegeben und wollen ein Tupel von Verschmelzungen

erhalten, in dem ein Eintrag h zu $\mathcal{M}(X_{11}^i \curlyvee X_{21}^j \curlyvee X_{12}^k, Z^{i+j+k+r+s+t})$ gehört. Zur Verfügung haben wir Verschmelzungen $f_1 \in \mathcal{M}(X_{11}^i \curlyvee X_{21}^j, Y_1^{i+j+r})$ und $f_2 \in \mathcal{M}(X_{12}^k, Y_2^{k+s})$ und $g \in \mathcal{M}(Y_1^{i+j+r} \curlyvee Y_2^{k+s}, Z^{i+j+k+r+s+t})$. Wir werden

$$h = \pm g \circ (f_1 \curlyvee f_2)$$

nehmen wollen und es bleibt nur noch, das richtige Vorzeichen anzugeben. Dazu schreiben wir symbolisch

$$h(x_{11}, x_{21}, x_{12}) = g \circ (f_1 \curlyvee f_2)(x_{11}, x_{21}, x_{12})$$

und da wir „zum Einsetzen x_{11} und x_{21} an f_2 vorbeiziehen müßten", nehmen wir das Vorzeichen $(-1)^{is+js}$. Nun haben wir an verschiedenen Stellen Anordnungen gewählt, um Verschmelzungen supergraduierter Objekte mit gewöhnlichen Verschmelzungen zu identifizieren. Eine andere Wahl dieser Anordnungen ändert diese Identifikationen um Vorzeichen. Um die behauptete sgAb-Anreicherung zu erhalten, gilt es zu prüfen, daß unsere Verknüpfungsverschmelzungen von diesen Wahlen nicht abhängen. Das ist klar, wenn wir in der supergraduierten Version Multihom zur Verfügung haben. Es folgt im allgemeinen, da es ja ausreicht, die fraglichen Vorzeichenverträglichkeiten im Fall der Schmelzkategorie der abelschen Gruppen zu prüfen und da wir in sgAb Multihom zur Verfügung haben.

21.9.2.3 (**Relative Darstellungen als angereicherte Schmelzkategorie**). Gegeben eine Trennschmelzkategorie $\mathcal{S}$ und ein kokommutatives Hopfobjekt $\Omega \in \mathcal{S}$ und eine angereicherte Schmelzkategorie $\mathcal{M}/\mathcal{S}$ können wir die Ω-Moduln in $\mathcal{M}$, wie sie in 18.3.1.24 eingeführt wurden, zu einer Schmelzkategorie

$$(\mathcal{M}/\mathcal{S})_{\Omega\searrow}$$

über der äquivarianten Schmelzkategorie $\mathcal{S}_{\Omega\searrow}$ machen, indem wir die Operation von Ω auf einem Verschmelzungsobjekt $\mathcal{M}(X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r, Y)$ erklären wie folgt: Per definitionem haben wir auf diesem Verschmelzungsobjekt paarweise kommutierende Operationen der $\mathcal{M}(X_\rho)$ von rechts sowie von $\mathcal{M}(Y)$ von links alias eine Linksoperation von

$$\mathcal{M}(X_1)^{\mathrm{opp}} \otimes \ldots \otimes \mathcal{M}(X_r)^{\mathrm{opp}} \otimes \mathcal{M}(Y)$$

Dieser Linksoperation schalten wir die iterierte Komultiplikation $\Omega \to \Omega^{\otimes r+1}$ vor gefolgt vom Tensorprodukt der Monoidhomomorphismen $\mu_\rho \circ S : \Omega \to \mathcal{M}(X_\rho)^{\mathrm{opp}}$ mit S der Antipode von Ω und $\mu : \Omega \to \mathcal{M}(Y)$. Daß die Verknüpfungsverschmelzungen dann in der Tat Ω-äquivariant sind, mag der Leser zur Übung selber prüfen.

21.9.2.4 (**Komplexe in** Ab**-Schmelzkategorien**). Gegeben eine Ab-Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ erklären wir einen **Komplex aus** $\mathcal{M}$ als eine relative Darstellung $X \in \mathrm{sga}\mathcal{M}$ des Hopfbiabmonoids der Differentiale $D \in \mathrm{sgAb}$ aus 18.3.3.9. Diese Komplexe bilden nach unseren allgemeinen Überlegungen zu Darstellungen 21.9.2.3 ihrerseits eine über dgAb angereicherte Schmelzkategorie

$$\mathrm{dg}\mathcal{M} = \mathrm{dg}\mathcal{M}/\mathrm{dgAb} = (\mathrm{sg}\mathcal{M}/\mathrm{sgAb})_{D\searrow}$$

Indem wir sie mit den Schmelzfunktoren $\mathcal{Z}^0, \mathcal{H}^0 : \mathrm{dgAb} \to \mathrm{Ab}$ der Nullzykel beziehungsweise der nullten Homologie umstrukturieren, erhalten wir Ab-Schmelzkategorien, die wir

$$\mathrm{Ket}(\mathcal{M}) = \mathrm{Ket}_{\mathcal{M}} \quad \text{und} \quad \mathrm{Hot}(\mathcal{M}) = \mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}$$

notieren und die wir als die Schmelzkategorien der **Komplexe in** $\mathcal{M}$ beziehungsweise der **Homotopiekomplexe in** $\mathcal{M}$ ansprechen. Insbesondere haben wir also für jeden Komplex X in $\mathrm{dg}\mathcal{M}$ einen Leerverschmelzungskomplex

$$\mathrm{dg}\mathcal{M}(\Upsilon, X) \in \mathrm{dgAb}$$

von abelschen Gruppen und erhalten für Leerverschmelzungen zu Komplexen beziehungsweise Homotopiekomplexen die Beschreibung

$$\mathrm{Ket}_{\mathcal{M}}(\Upsilon, X) = \mathcal{Z}^0\mathrm{dg}\mathcal{M}(\Upsilon, X) \quad \text{und} \quad \mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}(\Upsilon, X) = \mathcal{H}^0\mathrm{dg}\mathcal{M}(\Upsilon, X).$$

Man kann weiter zeigen, daß $\mathrm{Ket}_{\mathcal{M}}$ und $\mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}$ stabil universelle Verschmelzungen besitzen, wenn $\mathcal{M}$ stabil universelle Verschmelzungen besitzt und die zugrundeliegende einfache Kategorie abzählbare Koprodukte und daß der Funktor $\mathrm{Ket}_{\mathcal{M}} \to \mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}$ dann stabil universelle Verschmelzungen erhält. Ebenso kann zeigen, daß $\mathrm{Ket}_{\mathcal{M}}$ und $\mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}$ Multihom besitzen, wenn $\mathcal{M}$ Multihom besitzt und die zugrundeliegende einfache Kategorie abzählbare Produkte hat und daß der Funktor $\mathrm{Ket}_{\mathcal{M}} \to \mathrm{Hot}_{\mathcal{M}}$ dann Multihom erhält. Ich führe das nicht aus.

21.9.3 Versuch

21.9.3.1 (**Relatives Supergraduieren**). Gegeben ein Trennfunktor mit relativer additiver Struktur $\mathscr{M}/\mathrm{Ab} \to \mathscr{N}$ im Sinne von 21.9.1.2 konstruieren wir einen Trennfunktor

$$\mathrm{sg}\mathscr{M}/\mathrm{sgAb} \to \mathscr{N}$$

mit relativer sgAb-Struktur. Als Objekte von $\mathrm{sg}\mathscr{M}$ nehmen wir mit $\mathbb{Z}$ indizierte Familien $X = (X^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ von Objekten $X^i \in \mathscr{M}$. Um die Trennobjekte $\mathrm{sg}\mathscr{M}_f(X, B)$

über einer vorgegebenen Trennung f der Basis $\mathscr{N}$ anzugeben, betrachten wir Vorschriften, die jeder Anordnung ω der Zielfamilie B ein Tupel von Trennungen über f der Komponenten

$$_\omega\varphi_i^{j_1,\ldots,j_r} \in \mathscr{M}_f(X^i, Y_1^{j_1} \curlyvee \ldots \curlyvee Y_r^{j_r})$$

zuordnen und zwar so, daß sich bei einer Änderung der Anordung das Vorzeichen ändert um das Signum der induzierten Permutation der ungeraden j_ρ. Die Menge aller Tupel derartiger Vorschriften mit $j_1 + \ldots + j_r = j$ notieren wir $\mathrm{sg}\mathscr{M}_f(X,B)^{(i,j)}$ und setzen

$$\mathrm{sg}\mathscr{M}_f(X,B)^n := \prod_i \mathrm{sg}\mathscr{M}_f(X,B)^{(i,i+n)}$$

Die $\mathbb{Z}$-graduierte abelsche Gruppe $\mathrm{sg}\mathscr{M}_f(X,B)$ mit diesen homogenen Komponenten nehmen wir als unser Trennobjekt. Die Multiverknüpfung von Trennungen ist in Bezug auf verträgliche Anordnungen die von $\mathscr{M}$ induzierte und man prüft wie im Fall des Twistens 18.2.1.8 oder des Supergraduierens 18.2.1.14, daß das wohldefiniert ist und daß wir so einen Trennfunktor $\mathrm{sg}\mathscr{M}/\mathrm{sgAb} \to \mathscr{N}$ mit relativer sgAb-Struktur erhalten.

21.9.3.2. Gegeben ein Trennfunktor $\mathscr{L}/\mathrm{sgAb} \to \mathscr{N}$ mit relativer sgAb-Struktur verstehen wir unter einem **relativen Shift** eine $\mathbb{Z}$-Operation auf jeder Faser, notiert $X \mapsto X[n]$, zusammen mit Isomorphismen

$$\mathrm{sg}\mathscr{L}_f(X[n],B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sg}\mathscr{L}_f(X,B)[-n]$$

für jede Trennung f der Basis, die ihrerseits verträglich sind mit dem Nachschalten weiterer Trennungen in der hoffentlich offensichtlichen Weise.

21.9.3.3. Gegeben ein Trennfunktor mit relativer additiver Struktur $\mathscr{M}/\mathrm{Ab} \to \mathscr{N}$ im Sinne von 21.9.1.2 ist für seine relative Supergraduierung $\mathrm{sg}\mathscr{M}/\mathrm{sgAb} \to \mathscr{N}$ die Operation der Gruppe $\mathbb{Z}$ auf jeder Faser durch Graduierungsverschiebung ein relativer Shift in offensichtlicher Weise.

21.9.3.4. Wir erinnern das Hopfobjekt der Differentiale D von sgAb. Gegeben ein Trennfunktor $\mathscr{L}/\mathrm{sgAb} \to \mathscr{N}$ mit relativer sgAb-Struktur konstruieren wir einen Trennfunktor

$$(\mathscr{L}/\mathrm{sgAb})_{D\searrow} \to \mathscr{N}$$

mit relativer $\mathrm{sgAb}_{D\searrow}$-Struktur alias dgAb-Struktur, indem wir wie in 21.9.2.3 Objekte von $(\mathscr{L}/\mathrm{sgAb})$ mit D-Operation als neue Objekte nehmen und die Morphismenobjekte mit der induzierten D-Operation versehen. Ein relativer Shift induziert einen relativen Shift auf den Objekten mit D-Operation.

21.9.3.5 (**Relatives differentielles Graduieren**). Gegeben ein Trennfunktor mit relativer additiver Struktur $\mathscr{M}/\mathrm{Ab} \to \mathscr{N}$ im Sinne von 21.9.1.2 konstruieren wir einen Trennfunktor

$$\mathrm{dg}\mathscr{M}/\mathrm{dgAb} \to \mathscr{N}$$

mit relativer dgAb-Struktur, indem wir in Spezialisierung von 21.9.3.4 zu Objekten von $\mathrm{sg}\mathscr{M}/\mathrm{sgAb}$ mit D-Operation übergehen. Objekte von $\mathrm{dg}\mathscr{M}$ sind also Komplexe aus $\mathscr{M}$, Morphismenobjekte über einfachen Morphismen der Basis entsprechende Hom-Komplexe und Trennungsobjekte über allgemeineren Trennungen der Basis gewisse Multihom-Komplexe. Der relative Shift überträgt sich auf differentielle graduierte Objekte.

21.9.3.6 (**Relative Komplexe und Homotopiekomplexe**). Gegeben ein Trennfunktor mit relativer additiver Struktur $\mathscr{M}/\mathrm{Ab} \to \mathscr{N}$ im Sinne von 21.9.1.2 konstruieren wir weitere Trennfunktoren mit relativer additiver Struktur, indem wir mit 21.9.3.5 den Trennfunktor $\mathrm{dg}\mathscr{M}/\mathrm{dgAb} \to \mathscr{N}$ mit relativer dg-Struktur und relativem Shift bilden und ihn mit den Schmelzfunktoren $\mathcal{Z}^0, \mathcal{H}^0 : \mathrm{dgAb} \to \mathrm{Ab}$ der Nullzykel beziehungsweise der nullten Homologie umstrukturieren. Wir notieren die so konstruierten Trennfunktoren

$$\mathrm{Ket}(\mathscr{M})/\mathrm{Ab} \to \mathscr{N} \quad \text{beziehungsweise} \quad \mathrm{Hot}(\mathscr{M})/\mathrm{Ab} \to \mathscr{N}$$

und sprechen vom **Trennfunktor der Komplexe** beziehungsweise **Homotopiekomplexe**. Ihre Fasern über $X \in \mathscr{N}$ sind die Kategorien der Komplexe beziehungsweise Homotopiekomplexe von Objekten der Faser, in Formeln

$$\mathrm{Ket}(\mathscr{M})_X = \mathrm{Ket}(\mathscr{M}_X) \quad \text{beziehungsweise} \quad \mathrm{Hot}(\mathscr{M})_X = \mathrm{Hot}(\mathscr{M}_X).$$

21.9.3.7. Wir erinnern aus 19.2.5.4, daß wir eine abelsche Kategorie erklärt hatten als eine Kategorie mit additiver Struktur, die präabelsch ist und endliche Produkte besitzt. Einen Trennfunktor mit relativer additiver Struktur $\mathscr{M}/\mathrm{Ab} \to \mathscr{N}$, dessen Fasern $\mathscr{M}_X$ über allen Objekten $X \in \mathscr{N}$ abelsch (Sollte noch Verträglichkeiten der Trennungen beachten) sind, nennen wir einen **Trennfunktor mit abelschen Fasern**.

21.9.3.8. Wir erinnern aus 19.6.2.17 die Bifaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$, die wir die Garbenopfaserung genannt hatten und deren Fasern $\mathrm{Ab}_{/\!/X}$ opponiert sind zu den üblichen Kategorien $\mathrm{Ab}_{/X}$ von abelschen Garben auf X. Wir hatten sogar ihre Erweiterung zu einer Trennfaserung in 21.9.1.3 mit einer relativen additiven Struktur versehen. Hier betrachten wir erst einmal nur die zugehörige gewöhnliche Faserung mit ihrer relativen additiven Struktur

$$\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}}\,/\,\mathrm{Ab} \to \mathrm{Top}$$

und konstruieren nach 21.9.3.5 ihre differentiell graduierte Version

$$\mathrm{dg}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}})/\,\mathrm{dgAb} \to \mathrm{Top}$$

Relatives Umstrukturieren 21.9.1.14 mit dem Schmelzfunktor $\mathcal{H} : \mathrm{dgAb} \to \mathrm{sgAb}$ der totalen Homologie macht daraus einen in sgAb relativ angereicherten Funktor

$$\mathcal{H}(\mathrm{dgAb}_{/\!/\,\mathrm{Top}})/\,\mathrm{sgAb} \to \mathrm{Top}$$

Dazu bilden wir Funktoren $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}}) \to \mathrm{Top}$ und $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}}) \to \mathrm{Top}$ mit Fasern $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{/\!/X})$ beziehungsweise $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/X})$. Beide kommen mit einem ausgezeichneten Automorphismus $[1]$ über der Identität in der Basis, der auf den Fasern zu dem durch Verschiebung der Graduierung und Negativieren der Differentiale gegebenen Funktor aus 20.2.3.1 einschränkt.

21.9.3.9. Unter einem **Automorphismus eines Kategorienwinkels** verstehen wir ein Tripel von verträglichen Automorphismen der drei beteiligten Kategorien. Unter einem **Automorphismus eines Winkelfunktors** $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ verstehen wir einen Automorphismus des Kategorienwinkels $\mathscr{C}$ über der Identität auf $\mathscr{B}$. Unter einem **Automorphismus einer präverflochtenen Winkelfaserung** verstehen wir einen Automorphismus des zugrundeliegenden Winkelfunktors, der bijektiv ist auf Verflechtungsquadraten. Die Automorphismen $[1]$ der Homotopiekategorien aus 20.2.1.1 bilden in ihrer Gesamtheit einen Automorphismus der oben besprochenen verflochtenen Winkelfaserungen von Homotopiekomplexen. Sie stabilisieren das System der Quasiisomorphismen und induzieren folglich einen Automorphismus der lokalisierten verflochtenen Winkelfaserung nach 21.5.4.6.

Lemma 21.9.3.10. *Gegeben eine flache abelsche Garbe $\mathcal{F}$ besteht auch ihre Godementauflösung aus flachen abelschen Garben.*

Beweis. Im Fall abelscher Gruppen ist flach äquivalent zu torsionsfrei und diese Eigenschaft ist stabil unter Produkten und filtrierenden Kolimites. Daraus folgt, daß mit einer abelschen Garbe $\mathcal{F}$ auch die Garbe ihrer unstetigen Schnitte $\mathrm{G}\mathcal{F}$ flache Halme hat. Da die von der Einbettung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathrm{G}\mathcal{F}$ auf den Halmen induzierten Einbettungen $\mathcal{F}_x \hookrightarrow (\mathrm{G}\mathcal{F})_x$ sämtlich spalten, hat auch der Kokern flache Halme. Das Lemma folgt induktiv. $\square$

21.9.4 Abstract in English

21.9.4.1. Let $\mathscr{B} \supset \mathscr{B}^{¡} \supset \mathscr{B}^{e}$ be a category with two subcategories containing both all objects. We call it the base.

Example 21.9.4.2. We might think of topological spaces, locally proper separated maps and proper separated maps. Locally proper separated maps are maps which can be written as composition of an open immersion and a proper separated map.

21.9.4.3. Let $\mathscr{C}$ be a set of objects with two structures of a category, whose morphism sets will be called $\mathscr{C}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ and $\mathscr{C}^{¡}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, along with a fibre functor $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ and a cofibre functor $\mathscr{C}^{¡} \to \mathscr{B}^{¡}$ which agree on $\mathscr{B}^{e}$ or, more generally, we are given an isomorphism $i : \mathscr{C}^{¡}|\mathscr{B}^{e} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}|\mathscr{B}^{e}$ as categories over $\mathscr{B}^{e}$ of their restrictions fixing the objects. We call this the fibre and denote $f^{\dagger}$ the pullback of the fibration and $f_{¡}$ the pushforward along the cofibration.

Example 21.9.4.4. One might think of $\mathscr{C}$ as abelian sheaves on topological spaces, $\mathscr{C}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ as comorphisms $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ over a continous map in the base and $\mathscr{C}^{¡}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ as „proper comorphisms of abelian sheaves“, which are to be defined as comorphisms with special properties, so that the composition $f_{!}\mathcal{F} \to f_{*}\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ will be a proper-cocartesian comorphism for any locally proper separated map f.

21.9.4.5. A regulation of the base is a collection of squares in $\mathscr{B}$ with $\mathscr{B}^{¡}$-Morphisms as vertical morphisms, stable under gluing along equal horizontals or equal verticals and containing all commutative squares with the identity as both vertical or both horizontal morphisms.

Example 21.9.4.6. We might think of cartesian squares with locally proper separated vertical morphisms.

21.9.4.7. A weak exchange datum is a collection of diagrams over regulation squares of the base, called exchange squares, with objects of $\mathscr{C}$ in the corners and cartesian $\mathscr{C}$-morphisms in the horizontals and $\mathscr{C}^{¡}$-morphisms in the verticals satisfying the following conditions:

1. Our collection is stable under gluing along equal verticals and along equal horizontals.

2. Our collection contains all commutative diagrams with cartesian horizontals over regulation squares in the base with morphisms from $\mathscr{B}^{e}$ in both horizontals or both verticals.

3. The left vertical in the fibre is uniquely determined and determinable by the regulation diagram in the base and its other morphisms the fibres.

An exchange datum is a weak exchange datum such that this pulled-back left vertical is cocartesian whenever the right vertical was cocartesian.

Example 21.9.4.8. In our example, all commutative diagrams of comorphisms between abelian sheaves with cartesian horizontals and proper comorphisms in the verticals over a regulation square of topological spaces would do. In general, commutativity of diagrams of objects from $\mathscr{C}$ with different sorts of morphisms cannot be asked, since $\mathscr{C}$-morphisms and $\mathscr{C}^{¡}$-morphisms cannot be composed.

Example 21.9.4.9. For the same base with its regulation, we could work with homotopy categories of complexes of abelien sheaves in the fibres. We can also work with commutatively ringed spaces in the base.

21.9.4.10. Base change in this language is obtained from the fact that for every regulated square of the base as drawn on the left

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dotted, "q"] \arrow[d, dashed, "g"'] & X \arrow[d, dashed, "f"] \\ Z \arrow[r, dotted, "p"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} q^\dagger\mathcal{F} \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed] & \mathcal{F} \arrow[d, dashed] \\ g_¡q^\dagger\mathcal{F} \arrow[d] & \\ p^\dagger f_¡\mathcal{F} \arrow[r, dotted] & f_¡\mathcal{F} \end{tikzcd}$$

and any object $\mathcal{F} \in \mathscr{C}_X$ of the fibre and the pullbacks and pushforwards with their transport morphisms there is by assumption a unique morphism $g_¡q^\dagger\mathcal{F} \to p^\dagger f_¡\mathcal{F}$ in the fibre over Z such that the right square with the composition as its left vertical is an exchange square.

21.9.4.11. Now we suppose given a set of morphisms S in $\mathscr{C}$ over identities of the base. Under suitable conditions, formally inverting the morphisms from S again leads to an exchange datum or even makes a weak exchange datum strong. First let us discuss the localization of cofibrations.

21.9.4.12. Let $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ be a cofibre functor. A full subcofibration is a full subcategory $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ such that the objects of $\mathscr{D}$ admit pushforwards with respect to the cofibration $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ which again belong to $\mathscr{D}$.

21.9.4.13. Let $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ be a cofibre functor and S a fibrewise left Ore system in $\mathscr{C}$. A full subcofibration $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ is called a left adaptation for S, if (1) the set T of all S-morphisms in $\mathscr{D}$ is fibrewise an Ore system and (2) pushforward functors $f_\dagger$ for objects of $\mathscr{D}$ can be chosen that stabilize T and (3) for any $C \in \mathscr{C}$ there exists an S-morphism $D \to C$ with $D \in \mathscr{D}$.

Example 21.9.4.14. The base $\mathscr{B}$ might be finite sets, the objects of the fibres $\mathscr{C}$ families of modules over a fixed commutative ring k indexed by finite sets, the morphisms in the fibre of our cofibration families of multilinear maps indexed by points of the set the map in the base goes to, the pushforward constructing an

apropriate family of tensor products. If we go to homotopy complexes bounded from above and want to localize quasiisomorphisms, complexes of flat modules would be a left adaptation.

21.9.4.15. If a left adaptation exists, $S^{-1}\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ is again a cofibre functor. In addition, the obvious functor is an equivalence $T^{-1}\mathscr{D} \xrightarrow{\approx} S^{-1}\mathscr{C}$ and cocartesian morphisms between objects of $\mathscr{D}$ stay cocartesian in $T^{-1}\mathscr{D}$.

Example 21.9.4.16. We might take same as above but sheaves of modules over a fixed topological space instead of just modules over a commutative ring. Then complexes of flat module sheaves still are a left adaptation, so we obtain derived tensor products of bounded complexes of module sheaves with all their compatibilities.

21.9.4.17. Now let $(\mathscr{C} \to \mathscr{B} \supset \mathscr{B}^{¡} \leftarrow \mathscr{C}^{¡}, \mathscr{B}^{\mathrm{e}})$ be as before. Let furthermore S be a fibrewise Ore system in $\mathscr{C}$. By a leftright adaptation we understand a pair $(\mathscr{L}, \mathscr{R})$ consisting of a left adaptation $\mathscr{L}$ for the cofibration $\mathscr{C}^{¡} \to \mathscr{B}^{¡}$ and in the opposed way a right adaptation $\mathscr{R}$ for the fibration $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ such that (1) to every object of $\mathscr{R}$ goes an S-morphism from an object of $\mathscr{R} \cap \mathscr{L}$ and (2) given $q : W \to X$ in the base and $\mathcal{F} \in \mathscr{C}_X$ there exist S-morphisms $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F}_{¡} \to \mathcal{F}_{\dagger¡}$ with $\mathcal{F}_{¡} \in \mathscr{L}_X$ and $q^\dagger \mathcal{F} \leftarrow q^\dagger \mathcal{F}_{¡}$ in S and $\mathcal{F}_{\dagger¡} \in \mathscr{R}_X \cap \mathscr{L}_X$.

Example 21.9.4.18. We let $\mathscr{B}$ be finite families of topological spaces and morphisms families of continous maps over a map of the indexing set in the other direction. To introduce notation, $q = (q_1, q_2) : W \to X_1 \curlywedge X_2$ for $q_i : W \to X_i$ would be such a morphism in the base. We let $\mathscr{B}^{¡}$ be tupels of locally proper separated morphisms, say $f = (f_1 \curlywedge f_2) : X_1 \curlywedge X_2 \to Y_1 \curlywedge Y_2$. We regulate the base by cartesian squares. To introduce an example for fibre categories, we fix a commutative ring k and in the fibres take homotopy complexes of module sheaves, say $\mathcal{F}_1 \curlywedge \mathcal{F}_2$. Morphisms in the fibres are multilinear comorphisms $\mathcal{F}_1 \curlywedge \mathcal{F}_2 \to \mathcal{H}$ consisting of k-bilinear maps $\mathcal{F}_1(U_1) \times \mathcal{F}_2(U_2) \to \mathcal{H}(V)$ whenever $f_i(V) \subset U_i$, compatible with restrictions. Morphisms in $\mathscr{C}^{¡}$ are tupels of proper opcomorphisms of finite cohomological dimension for $f_!$ of sheaves of k-modules. This might be denoted

$$\big(\mathrm{Hot}_{k/\!/\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{lps}} \leftarrow \mathrm{Hot}^{!}_{k/\!/\mathrm{Top}^{\mathrm{lpsf}}}, \mathrm{Top}^{\mathrm{psf}}\big)$$

As a leftright adaptation for S quasiisomorphisms we could take quisflat alias K-flat complexes as right adaptation for the fibration (since now our fibres are opposed to categories of sheaves) and complexes of c-soft sheaves as left adaptation for the cofibration and the needed compatiblities amount to the fact that the mapping cone of a Godement resolution will always be stalkwise split, so the tensor product with any complex of sheaves will be an exact complex.

Example 21.9.4.19. The projection formula is base change over the square

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(\mathrm{id}_X, f)"] \arrow[d, "f"'] & X \curlywedge Y \arrow[d, "f \curlywedge \mathrm{id}_Y"] \\ Y \arrow[r, "(\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_Y)"] & Y \curlywedge Y \end{tikzcd}$$

in the base. There is some additional part of the formalism for this special type of base asking that regulation squares as well as exchange squares should be also stable under „taking tuples". I don't spell this out here and give only an example. Let us extend our diagram to

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(\mathrm{id}_X, f)"] \arrow[d, "f"'] & X \curlywedge Y \arrow[r, "(\mathrm{id}_X, f) \curlywedge \mathrm{id}_Y"] \arrow[d, "f \curlywedge \mathrm{id}_Y"] & X \curlywedge Y \curlywedge Y \arrow[d, "f \curlywedge \mathrm{id}_Y \curlywedge \mathrm{id}_Y"] \\ Y \arrow[r, "(\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_Y)"] & Y \curlywedge Y \arrow[r, "(\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_Y) \curlywedge \mathrm{id}_Y"] & Y \curlywedge Y \curlywedge Y \end{tikzcd}$$

so that on the right we have tupled the square on the left with a square of identities on Y. Another way to obtain the big rectangle is the gluing

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(\mathrm{id}_X, f)"] \arrow[d, "f"'] & X \curlywedge Y \arrow[r, "\mathrm{id}_X \curlywedge (\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_Y)"] \arrow[d, "f \curlywedge \mathrm{id}_Y"] & X \curlywedge Y \curlywedge Y \arrow[d, "f \curlywedge \mathrm{id}_Y \curlywedge \mathrm{id}_Y"] \\ Y \arrow[r, "(\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_Y)"] & Y \curlywedge Y \arrow[r, "\mathrm{id}_Y \curlywedge (\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_Y)"] & Y \curlywedge Y \curlywedge Y \end{tikzcd}$$

Then the fact that gluing two exchange squares over this is again an exchange square leads to an equality of two morphisms

$$f_!(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G} \otimes f^*\mathcal{H}) \to f_!\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{H}$$

coming from applying the projection formula for $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}$ or applying the projection formula first for $\mathcal{G}$ and then for $\mathcal{H}$, along with using associators and the compatibility of pullback with tensor.

21.9.4.20. Let $(\mathscr{C} \to \mathscr{B} \supset \mathscr{B}^{\mathrm{i}} \leftarrow \mathscr{C}^{\mathrm{i}}, \mathscr{B}^{\mathrm{e}})$ be as before and let S be a fibrewise Ore system in $\mathscr{C}$ and suppose there exists a leftright adaptation. Suppose furthermore given a weak exchange datum and for every exchange square

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dotted, "q"] \arrow[d, dashed, "g"'] & X \arrow[d, dashed, "f"] \\ Z \arrow[r, dotted, "p"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed] & \mathcal{F} \arrow[d, dashed] \\ \mathcal{H} \arrow[r, dotted] & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

in $\mathscr{C}$ over the regulated square in the base drawn on the left such that $Q\mathcal{F} \to Q\mathcal{G}$ is proper-cocartesian in the localized cofibration and the horizontals $Q\mathcal{E} \to Q\mathcal{F}$

and $Q\mathcal{H} \to Q\mathcal{G}$ are cartesian in the localized fibration, that for such a square of the waek exchange the left vertical $Q\mathcal{E} \to Q\mathcal{H}$ is also proper-cocartesian in the localized cofibration. Then there is a unique exchange in the localized situation containing all images under the localization functor Q of such weak exchange squares.

Example 21.9.4.21. We can apply this to the homotopy case before and get an exchange for

$$\big(\operatorname{Der}_{k/\!\!/\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{lps}} \leftarrow \operatorname{Der}^{!}_{k/\!\!/\mathrm{Top}^{\mathrm{lpsf}}}, \mathrm{Top}^{\mathrm{psf}}\big)$$

There is also a variant for commutatively ringed spaces. In this case we allow as $\mathscr{B}^{\mathrm{i}}$-morphisms only locally proper separated maps which induce flat ring morphisms on the stalks of the ring sheaves.

21.9.4.22. Then you may ask for adjoints, but there are no additional problems with the coherence of the formalism. I propose another new notation though, namely for internal Hom to use

$$\Rrightarrow$$

21.9.5 Trennrückzug-Schreivorschub für Modulgarben, ALT

Vorschau 21.9.5.1. Wir beginnen mit dem Fall abelscher Garben und erweitern anschließend die Argumentation auf Modulgarben.

21.9.5.2 (**Trennverflechtung für abelsche Garben**). Die zur Garbenoptrennfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!\!/\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top}$ gebildete banale Prätrennaustauschsituation mit Präverflechtung liefert durch Einschränken nach **??** eine Trennaustauschsituation mit Präverflechtung

$$\big(\mathrm{Ab}_{/\!\!/\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{les}} \leftarrow \mathrm{Ab}^{!}_{/\!\!/\mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}, \mathrm{Top}^{\mathrm{es}}\big)$$

Durch Übergang zu den Homotopiekategorien erhalten wir für $\sharp \in \{+, -, \mathrm{b}, \ \}$ eine jede der vier üblichen Beschränkungsbedingungen eine Trennaustauschsituation mit Präverflechtung

$$\Big(\mathrm{Hot}^{\sharp}(\mathrm{Ab}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}) \to \curlywedge\mathrm{Top} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{les}} \leftarrow \mathrm{Hot}^{\sharp}(\mathrm{Ab}^{!}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}), \mathrm{Top}^{\mathrm{es}}\Big)$$

Beispiel 21.9.5.3 (**Trennverflechtung für halbseitig derivierte abelsche Garben**). Die letzte Trennaustauschsituation mit Präverflechtung aus 21.9.5.2 mit $\sharp = -$ läßt sich nach **??** nach Quasiisomorphismen lokalisieren zur verflochtenen Trennaustauschsituation der halbseitig derivierten abelschen Garben

$$\Big(\mathrm{Der}^{-}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{les}} \leftarrow \mathrm{Der}^{!-}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}, \mathrm{Top}^{\mathrm{es}}\Big)$$

In der Tat finden wir eine Rechtslinksanpassung $(\mathscr{R}, \mathscr{L})$ mit $\mathscr{L}$ allen Komplexen aus flachen abelschen Garben und $\mathscr{R}$ allen Komplexen aus schwach kompaktweichen abelschen Garben. Daß das jeweils für sich genommen Anpassungen sind, wissen wir bereits aus 21.9.9.2 und 21.5.2.4. Daß es zu jedem Objekt von $\mathscr{L}$ einen S-Morphismus von einem Objekt von $\mathscr{R} \cap \mathscr{L}$ gibt, zeigt die Godementauflösung $\mathcal{L} \overset{\smile}{\to} \mathrm{G}^{\lhd}\mathcal{L}$, die ja nach 21.9.3.10 aus flachen Garben besteht, wenn $\mathcal{L}$ ein Komplex flacher Garben ist. Genauer gilt es, die Godementauflösung in den opponierten Kategorien als Morphismus in die Gegenrichtung zu betrachten. Die zweite Bedingung an eine Rechtslinksentfaltung **??** schließlich zeigt man wie in 21.5.5.7 ausgeführt wird, nur nimmt man elementarer als $\mathcal{L}$ einen Komplex flacher abelscher Garben zusammen mit einem Quasiisomorphismus von $\mathcal{L}$ nach $\mathcal{F}$. Um **??** anwenden zu können, müssen wir nur noch prüfen, daß alle naiven Verflechtungsquadrate über elementaren kartesischen Trennquadraten der Basis mit les-Vertikalen voll kokartesisch sind. Im Fall von kartesischen Trennquadraten mit Einstrennungen in den Horizontalen haben wir das bereits in **??** geprüft. Im Fall von kartesischen Trennquadraten mit Leertrennungen in den Horizontalen ist es offensichtlich. Im Fall von Projektionsformelquadraten schließlich folgt es unmittelbar aus der Projektionsformel 21.4.3.9.

Beispiel 21.9.5.4 (**Verflechtung für beidseitig derivierte abelsche Garben**). Die letzte Trennaustauschsituation mit Präverflechtung aus 21.9.5.2 mit $\sharp$ der leeren Beschränkungsbedingung läßt sich, wenn wir nur lesb-Abbildungen als les-Morphismen erlauben, wieder nach **??** nach Quasiisomorphismen lokalisieren zur verflochtenen Trennaustauschsituation der beidseitig derivierten abelschen Garben

$$\left(\mathrm{Der}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top} \supset \mathrm{Top}^{\mathrm{lesb}} \leftarrow \mathrm{Der}^{!}_{/\!/\,\mathrm{Top}^{\mathrm{lesb}}}, \mathrm{Top}^{\mathrm{esb}}\right)$$

Die Argumente sind dieselben wie im halbseitig beschränkten Fall 21.9.5.3 mit dem einzigen Unterschied, daß für lesb-Abbildungen f beliebige Komplexe schwach kompaktweicher abelscher Garben $Qf_{(!)}$-entfaltet sind.

21.9.5.5 (**Verflechtung für derivierte Modulgarben, Vorbereitung**). Die Trennfaserung der Modulgarben auf gekringten Räumen $\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Gek}} \to \curlywedge\mathrm{Gek}$ aus 21.1.3.11 liefert nach **??** eine banale Prätrennaustauschsituation

$$(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Gek}} \to \curlywedge\mathrm{Gek} \supset \mathrm{Gek} \leftarrow \mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Gek}}, \mathrm{Gek})$$

mit banaler Präverflechtung. Nach Übung 21.4.4.19 bilden die eigentlichen Opkomorphismen aus Übung 21.1.3.13 darin ein fasertrennrückzugstabiles multiplikatives System $\mathrm{Ab}^{!}_{/\!/\,\mathrm{Gek}}$. Per definitionem sind über jedem auf den zugrundeliegenden topologischen Räumen eigentlichen Morphismus der Basis alle Opkomorphismen von Modulgarben eigentlich. Das multiplikative System der topologisch

eigentlichen Morphismen der Basis notieren wir $\mathrm{Gek}^{\mathrm{e}}$ und erhalten so durch Einschränken **??** eine weitere Prätrennaustauschsituation

$$(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Gek}} \to \curlywedge\mathrm{Gek} \supset \mathrm{Gek} \leftarrow \mathrm{Ab}^{!}_{/\!/\,\mathrm{Gek}}, \mathrm{Gek}^{\mathrm{e}})$$

mit Präverflechtung. Schränken wir weiter ein zu topologisch separierten Abbildungen $\mathrm{Gek}^{\mathrm{s}} \subset \mathrm{Gek}$, so wird $\mathrm{Ab}^{!}_{/\!/\,\mathrm{Gek}^{\mathrm{s}}} \to \mathrm{Gek}^{\mathrm{s}}$ sogar eine Kofaserung mit den topologischen $f_{(!)}$ zusammen mit der entsprechenden Restriktion der Modulstruktur oder vielmehr dem auf den opponierten Kategorien induzierten Funktor als Vorschub und erhalten eine Austauschsituation mit Präverflechtung

$$(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Gek}} \to \curlywedge\mathrm{Gek} \supset \mathrm{Gek}^{\mathrm{s}} \leftarrow \mathrm{Ab}^{!}_{/\!/\,\mathrm{Gek}^{\mathrm{s}}}, \mathrm{Gek}^{\mathrm{es}})$$

Durch Übergang zu den Homotopiekategorien wird daraus eine Trennaustauschsituation mit Präverflechtung

$$\big(\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Gek}}) \to \curlywedge\mathrm{Gek} \supset \mathrm{Gek}^{\mathrm{s}} \leftarrow \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}^{!}_{/\!/\,\mathrm{Gek}^{\mathrm{s}}}), \mathrm{Gek}^{\mathrm{es}}\big)$$

Um durch Lokalisieren nach Quasiisomorphismen eine Verflechtung zu erhalten, schränken wir weiter ein und erlauben als les-Morphismen nur solche Morphismen von gekringten Räumen $(X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$, bei denen $f : X \to Y$ lesb ist und $\mathcal{A}_x$ flach über $\mathcal{B}_{f(x)}$ für alle $x \in X$ und notieren $\mathrm{Gek}^{\mathrm{lesbf}} \supset \mathrm{Gek}^{\mathrm{esbf}}$ das multiplikative System dieser Morphismen beziehungsweise seiner Elemente, die außerdem eigentlich sind. Wir nennen einen Morphismus von gekringten Räumen einen **lesb-Morphismus**, wenn die zugrundeliegende stetige Abbildung lesb ist. Daß diese Systeme trennrückzugstabil sind, mag man etwa mit Hilfe von 21.4.4.12 folgern. So erhalten wir schließlich eine Trennaustauschsituation mit Präverflechtung

$$\big(\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Gek}}) \to \curlywedge\mathrm{Gek} \supset \mathrm{Gek}^{\mathrm{lesbf}} \leftarrow \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}^{!}_{/\!/\,\mathrm{Gek}^{\mathrm{lesbf}}}), \mathrm{Gek}^{\mathrm{esbf}}\big)$$

Ergänzung 21.9.5.6. Wir verzichten mit unserer Definition eines lesb-Morphismus auf die erwartbare größere Allgemeinheit aller les-Abbildungen, bei denen die homologische Dimension des Schreivorschubs nur auf auf Modulgarben statt wie bei uns auf allen abelschen Garben beschränkt ist.

Satz 21.9.5.7 (**Trennverflechtung für beidseitig derivierte Modulgarben**). *Die letzte der in 21.9.5.5 angegebenen Trennaustauschsituationen mit Präverflechtung läßt sich nach Quasiisomorphismen lokalisieren im Sinne von* **??** *zu einer verflochtenen Trennaustauschsituation*

$$\big(\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Gek}}) \to \curlywedge\mathrm{Gek} \supset \mathrm{Gek}^{\mathrm{lesbf}} \leftarrow \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}^{!}_{/\!/\,\mathrm{Gek}^{\mathrm{lesbf}}}), \mathrm{Gek}^{\mathrm{esbf}}\big)$$

21.9.5.8. Einen höheren Zugang zu noch allgemeineren und stärkeren Aussagen in dieser Richtung kann man in der Dissertation von Recktenwald [**?**] finden, die ihrerseits auf dem Formalismus von Hörmann [**?**] aufbaut.

Beweis. Eine Rechtslinksanpassung ist das Paar $(\mathscr{R}, \mathscr{L})$ mit $\mathscr{L}$ allen quisflachen Komplexen von Modulgarben und $\mathscr{R}$ allen Komplexen schwach kompaktweicher Modulgarben, wie aus den in 21.5.5.7 diskutierten Eigenschaften von Godementauflösungen leicht folgt. Nach **??** bleibt damit nur noch zu zeigen, daß alle naiven Verflechtungsquadrate der lokalisierten Trennaustauschsituation über elementaren Trennquadraten der Basis voll kokartesich sind. Im Fall eines kartesischen Trennquadrats mit Leertrennungen in den Horizontalen ist das eh klar. Im Fall kartesischer Trennquadrate mit Einstrennungen in den Horizontalen bemerken wir zunächst, daß jeder Morphismus $(X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ von gekringten Räumen faktorisiert als $(X, \mathcal{A}) \to (X, f^*\mathcal{B}) \to (Y, \mathcal{B})$. Jedes derartige Trennquadrat läßt sich mithin erhalten als Verklebung der vier Trennquadrate

$$\begin{tikzcd}
(W, g^*\mathcal{C} \otimes_{v^*\mathcal{B}} q^*\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & (W, q^*\mathcal{A}) \arrow[r, "q"] \arrow[d] & (X, \mathcal{A}) \arrow[d] \\
(W, g^*\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & (W, v^*\mathcal{B}) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"] & (X, f^*\mathcal{B}) \arrow[d, "f"'] \\
(Z, \mathcal{C}) \arrow[r] & (Z, p^*\mathcal{B}) \arrow[r, "p"] & (Y, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

Hier schreiben wir $v = pg = fq$ und die Sternchen meinen Rückzüge von Kringgarben. Unter unseren Annahmen ist aber nach **??** und **??** die Menge der voll kokartesischen naiven Verflechtungsquadrate stabil unter Verkleben. Es reicht also, für jedes dieser vier kartesischen Quadrate zu prüfen, daß darüber jedes naive Verflechtungsquadrat voll kokartesisch ist. Im Quadrat oben links geht es nur um Beziehungen zwischen Restriktion und Erweiterung von Skalaren, da folgt die Behauptung aus der Voraussetzung der Flachheit der $\mathcal{A}_x$ über $\mathcal{B}_{f(x)}$, die dazu führt, daß jeder quisflache Komplex von $\mathcal{A}$-Modulgarben zu einem quisflachen Komplex von $\mathcal{B}$-Modulgarben restringiert. Im Quadrat oben rechts ist die Aussage auch leicht zu sehen, dort geht es nur um die Verträglichkeit des gewöhnlichen Rückzugs mit einer Restriktion der Skalare. Unten rechts haben wir lokal eigentlichen Basiswechsel wie wir ihn kennen, nur daß zusätzlich noch Kringgarben operieren. Es bleibt zu zeigen, daß auch über dem Trennquadrat unten links jedes naive Verflechtungsquadrat voll kokartesisch ist. Das stellen wir zurück und behandeln zunächst den auch noch ausstehenden Fall der Projektionsformelquadrate zu einem lesbf-Morphismus $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$. Wie zuvor können wir ihn faktorisieren in $(X, \mathcal{A}) \to (X, f^*\mathcal{B}) \to (Y, \mathcal{B})$ und dürfen die beiden Faktoren getrennt betrachten. Im Fall $(X, \mathcal{A}) \to (X, f^*\mathcal{B})$ reicht es zu zeigen, daß für jeden

quisflachen Komplex $\mathcal{G}$ von $f^*\mathcal{B}$-Moduln und jeden Komplex $\mathcal{F}$ von $\mathcal{A}$-Moduln der offensichtliche Morphismus ein Quasiisomorphismus

$$(\operatorname{res}_{\mathcal{A}}^{f^*\mathcal{B}} \mathcal{F}) \otimes_{f^*\mathcal{B}} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \operatorname{res}_{\mathcal{A}}^{f^*\mathcal{B}}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A} \otimes_{f^*\mathcal{B}} \mathcal{G}))$$

ist. Das ist sogar ohne alle Annahmen an $\mathcal{G}$ offensichtlich. Im zweiten Fall erinnern wir, daß wir nach 21.2.5.20 zu jedem Komplex von Modulgarben einen Quasiisomorphismus von einem quisflachen Komplex flacher Modulgarben finden können. Es reicht deshalb zu zeigen, daß für jeden Komplex $\mathcal{F}$ von schwach kompaktweichen $f^*\mathcal{B}$-Moduln und jeden quisflachen Komplex $\mathcal{G}$ von flachen $\mathcal{B}$-Moduln der offensichtliche Morphismus ein Quasiisomorphismus

$$(f_{(!)}\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_{(!)}(\mathcal{F} \otimes_{f^*\mathcal{B}} f^*\mathcal{G})$$

ist und $\mathcal{F} \otimes_{f^*\mathcal{B}} f^*\mathcal{G}$ aus f-kompaktweichen Garben besteht. In der Tat ist dann $\tau \curlywedge \mathrm{id} : \mathcal{F} \curlywedge \mathcal{G} \to f_{(!)}\mathcal{F} \curlywedge \mathcal{G}$ mit dem Transportmorphismus vorne ein Morphismus von unter den jeweiligen Rückzügen entfalteten Objekten, der kokartesisch wird in der Lokalisierung und ein voll kokartesisches naives Verflechtungsquadrat liefert. Unter diesen Annahmen kommt unser Morphismus aber nach der Projektionsformel 21.4.3.9 sogar von einem Isomorphismus von Doppelkomplexen aus f-kompaktweichen Garben her. Schließlich kümmern wir uns noch um das kartesische Trennquadrat mit Einsmorphismen in den Horizontalen in unserem großen Diagramm unten links, dessen Behandlung wir zurückgestellt hatten. Mit einigen Vereinfachungen der Notation hat es die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
(W, g^*\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & (W, g^*\mathcal{B}) \arrow[d, "g"] \\
(Z, \mathcal{C}) \arrow[r] & (Z, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

Sei also $\mathcal{F}$ ein quisflacher Komplex aus kompaktweichen $g^*\mathcal{B}$-Moduln. Das zugehörige naive Verflechtungsquadrat hat dann diesselbe linke Vertikale wie das naive Verflechtungsquadrat zu $\mathcal{F} \curlywedge \mathcal{C}$ über dem Projektionsformelquadrat „mit Raumwechsel ohne Ringwechsel“, von dem wir bereits wissen, daß es voll kokartesisch ist. Das beendet den Beweis. □

21.9.5.9 (**Trennverflechtung für halbseitig derivierte Modulgarben**). Der vorherige Satz gilt analog für halbseitig derivierte Modulgarben. Wir dürfen dann beliebige les-Abbildungen zulassen und müssen uns nicht auf lesb-Abbildungen beschränken, dürfen aber stattdessen nur gekringte Räume $(X, \mathcal{A})$ endlicher Tor-Dimension zulassen.

Ergänzung 21.9.5.10. Will man Schreivorschübe mit nicht notwendig flachen Kringgarbenkomorphismen zulassen, so wird man allgemeiner mit differentiellen graduierten Kringgarben arbeiten müssen.

21.9.5.11. Alternativ ist auch die volle Unterkategorie $(\mathrm{Hflfl}_{/\!/\,\mathrm{Gek}})^{\curlywedge} \subset \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Gek}})^{\curlywedge}$ aller Tupel von quisflachen Komplexen aus flachen Modulgarben eine Rechtsanpassung.

21.9.6 Das muß hinter die Diskussion des Formalismus!

Satz 21.9.6.1 (**Trennverflechtung für beidseitig derivierte Modulgarben**). *Die letzte der in 21.9.5.5 angegebenen Trennaustauschsituationen mit Präverflechtung läßt sich nach Quasiisomorphismen lokalisieren im Sinne von* **??** *zu einer verflochtenen Trennaustauschsituation*

$$\big(\,\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Gek}}) \to \curlywedge\mathrm{Gek} \supset \mathrm{Gek}^{\mathrm{lesbf}} \leftarrow \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}^{!}_{/\!/\,\mathrm{Gek}^{\mathrm{lesbf}}}), \mathrm{Gek}^{\mathrm{esbf}}\,\big)$$

Beweis. Eine Rechtslinksanpassung ist das Paar $(\mathscr{R}, \mathscr{L})$ mit $\mathscr{L}$ allen quisflachen Komplexen von Modulgarben und $\mathscr{R}$ allen Komplexen schwach kompaktweicher Modulgarben, wie aus den in 21.5.5.7 diskutierten Eigenschaften von Godementauflösungen leicht folgt. Nach **??** bleibt damit nur noch zu zeigen, daß alle naiven Verflechtungsquadrate der lokalisierten Trennaustauschsituation über elementaren Trennquadraten der Basis voll kokartesich sind. Im Fall eines kartesischen Trennquadrats mit Leertrennungen in den Horizontalen ist das eh klar. Im Fall kartesischer Trennquadrate mit Einstrennungen in den Horizontalen bemerken wir zunächst, daß jeder Morphismus $(X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ von gekringten Räumen faktorisiert als $(X, \mathcal{A}) \to (X, f^*\mathcal{B}) \to (Y, \mathcal{B})$. Jedes derartige Trennquadrat läßt sich mithin erhalten als Verklebung der vier Trennquadrate

$$\begin{tikzcd}
(W, g^*\mathcal{C} \otimes_{v^*\mathcal{B}} q^*\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & (W, q^*\mathcal{A}) \arrow[r, "q"] \arrow[d] & (X, \mathcal{A}) \arrow[d] \\
(W, g^*\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & (W, v^*\mathcal{B}) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"] & (X, f^*\mathcal{B}) \arrow[d, "f"'] \\
(Z, \mathcal{C}) \arrow[r] & (Z, p^*\mathcal{B}) \arrow[r, "p"] & (Y, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

Hier schreiben wir $v = pg = fq$ und die Sternchen meinen Rückzüge von Kringgarben. Unter unseren Annahmen ist aber nach **??** und **??** die Menge der voll kokartesischen naiven Verflechtungsquadrate stabil unter Verkleben. Es reicht also, für jedes dieser vier kartesischen Quadrate zu prüfen, daß darüber jedes naive Verflechtungsquadrat voll kokartesisch ist. Im Quadrat oben links geht es nur um Beziehungen zwischen Restriktion und Erweiterung von Skalaren, da folgt die Behauptung aus der Voraussetzung der Flachheit der $\mathcal{A}_x$ über $\mathcal{B}_{f(x)}$, die dazu führt, daß jeder quisflache Komplex von $\mathcal{A}$-Modulgarben zu einem quisflachen

Komplex von $\mathcal{B}$-Modulgarben restringiert. Im Quadrat oben rechts ist die Aussage auch leicht zu sehen, dort geht es nur um die Verträglichkeit des gewöhnlichen Rückzugs mit einer Restriktion der Skalare. Unten rechts haben wir lokal eigentlichen Basiswechsel wie wir ihn kennen, nur daß zusätzlich noch Kringgarben operieren. Es bleibt zu zeigen, daß auch über dem Trennquadrat unten links jedes naive Verflechtungsquadrat voll kokartesisch ist. Das stellen wir zurück und behandeln zunächst den auch noch ausstehenden Fall der Projektionsformelquadrate zu einem lesbf-Morphismus $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$. Wie zuvor können wir ihn faktorisieren in $(X, \mathcal{A}) \to (X, f^*\mathcal{B}) \to (Y, \mathcal{B})$ und dürfen die beiden Faktoren getrennt betrachten. Im Fall $(X, \mathcal{A}) \to (X, f^*\mathcal{B})$ reicht es zu zeigen, daß für jeden quisflachen Komplex $\mathcal{G}$ von $f^*\mathcal{B}$-Moduln und jeden Komplex $\mathcal{F}$ von $\mathcal{A}$-Moduln der offensichtliche Morphismus ein Quasiisomorphismus

$$(\operatorname{res}_{\mathcal{A}}^{f^*\mathcal{B}} \mathcal{F}) \otimes_{f^*\mathcal{B}} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \operatorname{res}_{\mathcal{A}}^{f^*\mathcal{B}}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A} \otimes_{f^*\mathcal{B}} \mathcal{G}))$$

ist. Das ist sogar ohne alle Annahmen an $\mathcal{G}$ offensichtlich. Im zweiten Fall erinnern wir, daß wir nach 21.2.5.20 zu jedem Komplex von Modulgarben einen Quasiisomorphismus von einem quisflachen Komplex flacher Modulgarben finden können. Es reicht deshalb zu zeigen, daß für jeden Komplex $\mathcal{F}$ von schwach kompaktweichen $f^*\mathcal{B}$-Moduln und jeden quisflachen Komplex $\mathcal{G}$ von flachen $\mathcal{B}$-Moduln der offensichtliche Morphismus ein Quasiisomorphismus

$$(f_{(!)}\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_{(!)}(\mathcal{F} \otimes_{f^*\mathcal{B}} f^*\mathcal{G})$$

ist und $\mathcal{F} \otimes_{f^*\mathcal{B}} f^*\mathcal{G}$ aus f-kompaktweichen Garben besteht. In der Tat ist dann $\tau \curlywedge \mathrm{id} : \mathcal{F} \curlywedge \mathcal{G} \to f_{(!)}\mathcal{F} \curlywedge \mathcal{G}$ mit dem Transportmorphismus vorne ein Morphismus von unter den jeweiligen Rückzügen entfalteten Objekten, der kokartesisch wird in der Lokalisierung und ein voll kokartesisches naives Verflechtungsquadrat liefert. Unter diesen Annahmen kommt unser Morphismus aber nach der Projektionsformel 21.4.3.9 sogar von einem Isomorphismus von Doppelkomplexen aus f-kompaktweichen Garben her. Schließlich kümmern wir uns noch um das kartesische Trennquadrat mit Einsmorphismen in den Horizontalen in unserem großen Diagramm unten links, dessen Behandlung wir zurückgestellt hatten. Mit einigen Vereinfachungen der Notation hat es die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
(W, g^*\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & (W, g^*\mathcal{B}) \arrow[d, "g"] \\
(Z, \mathcal{C}) \arrow[r] & (Z, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

Sei also $\mathcal{F}$ ein quisflacher Komplex aus kompaktweichen $g^*\mathcal{B}$-Moduln. Das zugehörige naive Verflechtungsquadrat hat dann diesselbe linke Vertikale wie das

naive Verflechtungsquadrat zu $\mathcal{F} \curlywedge \mathcal{C}$ über dem Projektionsformelquadrat „mit Raumwechsel ohne Ringwechsel", von dem wir bereits wissen, daß es voll kokartesisch ist. Das beendet den Beweis. $\square$

21.9.6.2 (**Trennverflechtung für halbseitig derivierte Modulgarben**). Der vorherige Satz gilt analog für halbseitig derivierte Modulgarben. Wir dürfen dann beliebige les-Abbildungen zulassen und müssen uns nicht auf lesb-Abbildungen beschränken, dürfen aber stattdessen nur gekringte Räume $(X, \mathcal{A})$ endlicher Tor-Dimension zulassen.

21.9.7 Trennrückzug eigentlicher Opkomorphismen, ALT

21.9.7.1. Sei $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ eine Faserung und sei in der Basis $\mathscr{B}$ ein multiplikatives System R ausgezeichnet. Unter einem **faserrückzugstabilen multiplikativen System** S **über** R verstehen wir ein multiplikatives System S in $\mathscr{C}$ über R mit der Eigenschaft, daß für jede Hochhebung nach $\mathscr{C}$ eines kartesischen Quadrats in $\mathscr{B}$ mit vertikalen R-Pfeilen zu einem kommutativen Quadrat

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & {} \arrow[d] \\ {} \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

in $\mathscr{C}$ mit den Pfeilen nach rechts kartesisch und dem durchgezogenen Pfeil nach unten einem S-Morphismus auch der induzierte gestrichelte Pfeil nach unten ein S-Morphismus ist.

Beispiel 21.9.7.2 (**Rückzug eigentlicher Opkomorphismen**). In unserer Garbenopfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ aus 19.6.2.17 bilden die eigentlichen Opkomorphismen über stetigen Abbildungen nach Übung 19.6.4.31 ein faserrückzugstabiles multiplikatives System.

Beispiel 21.9.7.3 (**Rückzug eigentlicher Opkomorphismen, Variante**). In unserer Garbenopfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Gek}} \to \mathrm{Gek}$ aus 19.6.2.17 bilden die eigentlichen Opkomorphismen über beliebigen Morphismen nach Übung 21.4.4.19 ein faserrückzugstabiles multiplikatives System.

Beispiel 21.9.7.4 (**Rückzug eigkokartesischer Opkomorphismen**). In der Garbenopfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ aus 19.6.2.12 bilden die eigkokartesischen Opkomorphismen nach lokal eigentlichem Basiswechsel 21.4.1.16 ein faserrückzugstabiles multiplikatives System über dem multiplikativen System des les-Morphismen.

21.9.7.5. Gegeben eine Kategorie $\mathscr{T}$ verstehen wir unter einem **Trennquadrat in** $\mathscr{T}$ ein kommutatives Diagramm der Familienkategorie $\mathscr{T}^{\curlywedge}$ ihrer banalen Trenn-

kategorie $\curlywedge\mathscr{T}$ der Gestalt

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "(q_1,\ldots,q_r)"] \arrow[d, "g"'] & X_1 \curlywedge \ldots \curlywedge X_r \arrow[d, "f_1\curlywedge\ldots\curlywedge f_r"] \\ Z \arrow[r, "(p_1,\ldots,p_r)"] & Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r \end{tikzcd}$$

21.9.7.6 (**Erzeuger für kartesische Trennquadrate**). Sei $\mathscr{T}$ eine Kategorie mit endlichen Faserprodukten. In der Familienkategorie $\mathscr{T}^{\curlywedge}$ ihrer banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathscr{T}$ sei eine Menge von kartesischen Trennquadraten gegeben. Unsere Menge sei stabil unter dem Vertupeln sowie unter dem Verkleben längs gleicher vertikaler oder horizontaler Kanten und enthalte die **elementaren Trennquadrate**, eine neue Bezeichnung, unter der wir zusammenfassen:

1. Alle kartesischen Quadrate mit Einstrennungen oder Leertrennungen in den Horizontalen;

2. Alle **Projektionsformel-Quadrate** alias Quadrate der Gestalt

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(\mathrm{id}_X,f)"] \arrow[d, "f"'] & X \curlywedge Y \arrow[d, "f\curlywedge\mathrm{id}_Y"] \\ Y \arrow[r, "(\mathrm{id}_Y,\mathrm{id}_Y)"] & Y \curlywedge Y \end{tikzcd}$$

So enthält unsere Menge alle kartesischen Trennquadrate der Familienkategorie. Um das einzusehen, betrachten wir für beliebige Morphismen $f : X \to Y$ und $g : Z \to Y$ das aus kartesischen Quadraten mit den offensichtlichen Tupeln einfacher Morphismen in den Vertikalen bestehende Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r] \arrow[d] & X \curlywedge (X \times_Y Z) \arrow[r] \arrow[d] & X \curlywedge Z \arrow[d] \\ X \arrow[r] \arrow[d] & X \curlywedge X \arrow[r] & X \curlywedge Y \arrow[d] \\ Y \arrow[rr] & & Y \curlywedge Y \end{tikzcd}$$

Es zeigt, daß jedes kartesische Trenquadrat mit einer diagonalen Zweitrennung in der unteren Horizontalen zu unserer Menge gehören muß. Jeder Morphismus der Familienkategorie einer banalen Trennkategorie entsteht jedoch nach 18.1.2.22 durch Vertupeln und Verknüpfen aus Leertrennungen, Einstrennungen und Diagonalzweitrennungen. So folgt dann die Behauptung.

21.9.7.7 (**Erzeuger für kartesische Trennquadrate, Variante**). Eine Menge R von Morphismen einer Kategorie $\mathscr{T}$ heiße **rückzugstabil**, wenn das Faserprodukt für alle Winkel mit einem R-Morphismus existiert und in jedem kartesischen Quadrat mit einem R-Morphismus im Ausgangswinkel der gegenüberliegende Morphismus aus dem Faserprodukt auch wieder ein R-Morphismus ist. Gegeben $\mathscr{T} \supset \mathscr{T}^!$ eine Kategorie mit einem rückzugstabilen multiplikativen System von Morphismen gilt das Vorhergehende analog für kartesische Trennquadrate der Familienkategorie $\mathscr{T}^{\curlywedge}$ mit Tupeln von $\mathscr{T}^!$-Morphismen in den Vertikalen der Ausgangswinkel: Jedes derartige kartesische Trennquadrat hat $\mathscr{T}^!$-Morphismen in allen Vertikalen und eine Menge von derartigen Trennquadraten, die stabil ist unter dem Vertupeln und Verkleben und die alle kartesischen Quadrate mit einer Leertrennung oder einer Einstrennung in den Horizontalen enthält und darüber hinaus alle Projektionsformelquadrate zu Morphismen aus R, muß bereits alle kartesischen Trennquadrate mit Tupeln von Morphismen aus R in den Vertikalen des Ausgangswinkels enthalten. Wir nennen in dieser Situation unsere Erzeuger, also alle kartesischen Quadrate mit einer Leertrennung oder einer Einstrennung in den Horizontalen und Vertikalen aus R sowie alle Projektionsformelquadrate zu Morphismen aus R, die **elementaren kartesischen Trennquadrate zu** R.

21.9.7.8. Seien $\mathscr{T}$ eine Kategorie und $\mathscr{T}^!$ darin ein multiplikatives System. Gegeben eine Trennfaserung $\mathscr{G} \to \curlywedge\mathscr{T}$ nennen wir ein multiplikatives System $\mathscr{G}^!$ über $\mathscr{T}^!$ **fasertrennrückzugstabil**, wenn das System $\mathscr{G}^{!\shortparallel}$ aller Tupel von $\mathscr{G}^!$-Morphismen faserrückzugstabil ist über $\mathscr{T}^{!\shortparallel}$ in der Familienkategorie.

Lemma 21.9.7.9 (**Trennrückzug eigentlicher Opkomorphismen**). *In der Garbenoptrennfaserung* $\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top}$ *bilden die eigentlichen Opkomorphismen ein fasertrennrückzugstabiles multiplikatives System über dem multiplikativen System aller stetigen Abbildungen.*

21.9.7.10. Das fasertrennrückzugstabile multiplikative System aller Tupel eigentlicher Opkomorphismen aus dem vorhergehenden Lemma notieren wir $\mathrm{Ab}^!_{/\!/\,\mathrm{Top}}$.

Beweis. Jeder Morphismus der Familienkategorie einer banalen Trennkategorie entsteht nach 18.1.2.22 durch Vertupeln und Verknüpfen aus Leertrennungen, Einstrennungen und Diagonalzweitrennungen. Es reicht also zu zeigen, daß der Rückzug von Tupeln eigentlicher Opkomorphismen mit jedem Morphismus dieser drei Typen wieder ein eigentlicher Opkomorphismus ist. Im Fall einer Leertrennung ist das die einigermaßen banale Erkenntnis, daß für jeden topologischen Raum X der identische Opkomorphismus $\mathbb{Z}_X \to \mathbb{Z}_X$ über $\mathrm{id} : X \to X$ eigentlich ist alias daß die natürliche Einbettung eine Gleichheit $\mathrm{id}_!\,\mathbb{Z}_X = \mathrm{id}_*\,\mathbb{Z}_X$ ist. Im Fall von Einstrennungen ist das unsere Übung 19.6.4.31. Im Fall einer Diagonalzweitrennung betrachten wir in der Familienkategorie der Basis zu $f : X \to Y$ und

$g : Z \to Y$ das aus kartesischen Quadraten bestehende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y Z \arrow[r] \arrow[d] & X \curlywedge (X \times_Y Z) \arrow[r] \arrow[d] & X \curlywedge Z \arrow[d] \\
X \arrow[r] \arrow[d] & X \curlywedge X \arrow[r] & X \curlywedge Y \arrow[d] \\
Y \arrow[rr] & & Y \curlywedge Y
\end{tikzcd}$$

Gegeben je ein eigentlicher Opkomorphismus $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ über f und $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{H}$ über g gilt es zu zeigen, auch der induzierte Opkomorphismus $\mathrm{pr}_X^* \mathcal{F} \otimes \mathrm{pr}_Z^* \mathcal{E} \to \mathcal{G} \otimes \mathcal{H}$ über der linken Vertikale eigentlich ist. Da jeder Opkomorphismus über einer Identität eigentlich ist, reicht es, in jedem der drei kartesischen Quadrate zu zeigen, daß der Rückzug eines eigentlichen Opkomorphismus eigentlich ist. Im Quadrat rechts oben folgt das aus dem bereits behandelten Fall des Rückzugs unter einem einfachen Morphismus der Basis. In den beiden anderen Quadraten geht es jeweils darum zu zeigen, daß der Rückzug unter einer Diagonalzweitrennung eines Zweitupels von eigentlichen Opkomorphismen der Gestalt $\varphi \curlywedge \mathrm{id}$ wieder eigentlich ist. Das hinwiederum läuft auf den Nachweis hinaus, daß für jede abelsche Garbe $\mathcal{C}$ auf Y der Garbenhomomorphismus $\mathcal{G} \otimes \mathcal{C} \to f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{C})$, der für $V \Subset Y$ und $g \in \mathcal{G}(V)$ und $c \in \mathcal{C}(V)$ gegeben wird durch $g \otimes c \mapsto \varphi(g) \otimes c$, über $f_!(\mathcal{G} \otimes f^*\mathcal{C})$ faktorisiert. Da nun der Vorschub von den $\varphi(g) \otimes c$ erzeugt wird, reicht es zu zeigen, daß diese Tensoren zu $f_!(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{C})$ gehören. Es ist aber klar, daß der Träger in $f^{-1}(V)$ unseres Tensors $\varphi(g) \otimes c$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{supp}(\varphi(g))$ ist und folglich, wenn φ eigentlich ist, auch eigentlich nach V abgebildet wird. □

Lemma 21.9.7.11 (**Trennrückzug eigkokartesischer Opkomorphismen**). *In der auf Tupel flacher Garben eingeschränkten Garbenoptrennfaserung*

$$\mathrm{flAb}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top}$$

bilden die eigkokartesischen Opkomorphismen über les-Abbildungen ein fasertrennrückzugstabiles multiplikatives System.

Beweis. Wir argumentieren wie beim Beweis unseres Lemmas zum Trennrückzug eigentlicher Opkomorphismen 21.4.4.9. Es reicht nach 18.1.2.22 zu zeigen, daß der Rückzug von Tupeln eigkokartesischer Opkomorphismen flacher Garben über les-Abbildungen mit jeder Leertrennung, Einstrennung und Diagonalzweitrennung wieder ein eigkokartesischer Opkomorphismus ist. Im Fall einer Leertrennung ist das die einigermaßen banale Erkenntnis, daß für jeden topologischen Raum X der identische Opkomorphismus $\mathbb{Z}_X \to \mathbb{Z}_X$ über der Identität $\mathrm{id} : X \to X$ eigkokartesisch ist. Im Fall einer Einstrennung ist das lokal

eigentlicher Basiswechsel 21.4.1.16. Im Fall einer Diagonalzweitrennung gehen wir vor wie beim Beweis unseres Lemmas zum Trennrückzug eigentlicher Opkomorphismen 21.4.4.9. Mit der Erkenntnis, daß direkte Bilder und eigentliche Vorschübe flacher alias torsionsfreier abelscher Garben wieder flach sind, ziehen wir uns wie bei diesem Beweis darauf zurück, zu zeigen, daß für jede les-Abbildung $f : X \to Y$ und jeden eigkokartesischen Opkomorphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ über f und jede flache abelsche Garbe $\mathcal{C} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ auch der induzierte Opkomorphismus $\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{C} \to \mathcal{G} \otimes \mathcal{C}$ über f eigkokartesisch ist. Das hinwiederum läuft auf den Nachweis hinaus, daß der aus der Eigentlichkeit des Trennrückzugs nach 21.4.4.9 entstehende Garbenhomomorphismus ein Isomorphismus $f_!\mathcal{F}\otimes\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} f_!(\mathcal{F}\otimes f^*\mathcal{C})$ ist, und das schließlich ist genau die Aussage der Projektionsformel 21.4.3.9. $\square$

21.9.7.12 (**Eine flache Modulgarbe mit nicht flachem Schnittemodul**). Gegeben eine flache Modulgarbe auf einem Kompaktum muß die Garbe der globalen Schnitte keineswegs flach sein. So gibt es etwa auf S^1 bis auf Isomorphismus genau eine lokal, aber nicht global triviale Garbe von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-Moduln und deren globale Schnitte sind als Modul isomorph zum Ideal $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Übungen

Übung 21.9.7.13. Die eigentlichen Opkomorphismen von Modulgarben über gekringten Räumen aus 21.1.3.13 bilden ein fasertrennrückzustabiles multiplikatives System über dem System aller Morphismen gekringter Räume. Hinweis: Man mag sich auf den Fall abelscher Garben stützen, den wir bereits in 21.4.4.9 behandelt haben, sowie den Fall des einfachen Rückzugs aus Übung 21.1.3.13.

21.9.8 Weiterer underivierter Schrott

21.9.9 Schrott zu derivierten Schmelzkategorien

21.9.9.1. Wir erinnern aus 21.1.2.10 die Garbenoptrennfaserung $\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top}$ über der banalen Trennkategorie der topologischen Räume. Wir erinnern weiter unsere allgemeinen Erkenntnisse zu Trennfunktoren zu banalen Trennkategorien 21.1.5.2 und insbesondere, wie auf den Fasern in diesem Fall selbst die Struktur einer Trennkategorie induziert wird, die im Fall einer Trennfaserung nach 21.1.5.4 ihrerseits stabil universelle Trennungen besitzt. Indem wir erst zu Komplexen und dann zu Homotopiekomplexen übergehen, erhalten wir in offensichtlicher Weise weitere Trennfaserungen, für die ich die Notationen $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}}) \to \curlywedge\mathrm{Top}$ und $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}}) \to \curlywedge\mathrm{Top}$ verwende. Die Lokalisierung letzterer Trennkategorie nach allen denjenigen Einstrennungen über Identitäten, die Quasiisomorphismen sind, notiere ich $\mathrm{Der}_{/\!/\,\mathrm{Top}} := \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}})_{\shortparallel\mathrm{qis}}$. Wir erhalten so einen

Trennfunktor

$$\mathrm{Der}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top}$$

Satz 21.9.9.2 (**Rückzug und Tensorprodukt**). *1. Der soeben in 21.9.9.1 erklärte Trennfunktor* $\mathrm{Der}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top}$ *ist eine Trennfaserung;*

2. *Jede für* $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}}) \to \curlywedge\mathrm{Top}$ *kartesische Trennung zwischen Komplexen flacher abelscher Garben liefert eine für* $\mathrm{Der}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \curlywedge\mathrm{Top}$ *kartesische Trennung;*

3. *Für jeden topologischen Raum* X *sind die offensichtlichen Funktoren Isomorphismen von Trennkategorien*

$$\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/X})_{\shortparallel\mathrm{qis}} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Der}_{/\!/\,\mathrm{Top}})_X$$

zwischen der Lokalisierung der Faser über X *als Trennkategorie und der Faser über* X *der globalen Lokalisierung mit ihrer offensichtlichen Struktur als Trennkategorie.*

21.9.9.3. Insbesondere werden im vorliegenden Fall die Fasern, für die wir von nun an die abkürzende Notation $\mathrm{Der}_{/\!/X}$ verwenden, selbst zu Trennkategorien und unser Satz liefert ausgezeichnete Isomorphismen

$$(\mathrm{Der}_{/X})^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{/\!/X}$$

der Opponierten unserer Schmelzkategorien der derivierten abelschen Garben auf X aus 21.9.9.19 mit den Fasern unserer Trennfaserung. Wir verwenden hier unser Notationsschema 21.1.5.4 und notieren $f^\dagger$ die Rückzüge unserer Trennfaserung zu einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ und $f^* := (f^\dagger)^{\mathrm{opp}} : \mathrm{Der}_{/Y} \to \mathrm{Der}_{/X}$ die auf den opponierten Fasern induzierten Funktoren. Ebenso halten wir es mit den Vorschüben $f_* = (f_\dagger)^{\mathrm{opp}}$ und haben also Adjunktionen (f^*, f_*).

21.9.9.4 (**Analoge Aussagen für Modulgarben**). Der Satz und sein Beweis gelten analog für Garben von k-Moduln über einem beliebigen Kring k. Man muß nur feiner mit quisflachen Garbenkomplexen nach 21.2.5.20 arbeiten und bemerken, daß deren Rückzüge stets wieder quisflach sind. Das ist jedoch klar, da ein Garbenkomplex genau dann quisflach ist, wenn an jedem Punkt des zugrundeliegenden topologischen Raums der Komplex der Halme quisflach ist. Wir besprechn im nächsten Abschnitt sogar den noch allgemeineren Fall von Modulgarben über Kringgarben.

21.9.9.5 (**Garbenkohomologie als Trennfunktor**). Unser Schmelzfunktor 21.1.5.29 des Vorschubs auf das finale Objekt spezialisiert in dieser Situation zu einem Schmelzfunktor

$$\mathrm{fin}_* : \mathrm{Der}^{\mathrm{opp}}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Der}_{/\mathrm{pt}}$$

Zusammen mit den Isomorphismen $\mathrm{Der}_{/\mathrm{pt}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/\mathrm{pt}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ von Schmelzkategorien aus dem vorhergehenden Satz und den Definitionen erhalten wir einen Schmelzfunktor

$$\mathrm{fin}_* : \mathrm{Der}^{\mathrm{opp}}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$$

Halten wir noch den Schmelzfunktor $\mathcal{H} : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}) \to \mathrm{sgAb}$ der Homologie aus 21.2.8.19 dahinter, so erhalten wir den **Schmelzfunktor** $(X, \mathcal{F}) \mapsto \mathbb{H}^*(X; \mathcal{F})$ **der totalen Hyperkohomologie**, den wir bisher in 21.2.4.7 nur als einfachen Funktor kennengelernt hatten. Halten wir zusätzlich den Opponierten des eindeutigen kartesischen Trennschnitts davor, erhalten wir einen Schmelzfunktor $\curlyvee\mathrm{Top}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{sgAb}$, der jedem Raum X die supergraduierte abelsche Gruppe $\mathrm{H}^*(X; \mathbb{Z})_{\mathrm{garb}}$ zuordnet und jedem Tupel von von X ausgehenden stetigen Abbildungen die multiadditive Abbildung „cup-Produkt des Rückzugs der Kohomologieklassen". Er ist eine garbenkohomologische Variante des entsprechenden Schmelzfunktors $\curlyvee\mathrm{Top}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{sgAb}$ der singulären Kohomologie, den wir in 18.4.2.3 als Trennfunktor $\curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{sgAb}^{\mathrm{opp}}$ besprochen hatten.

Beweis. Wir wenden unsere Korollare 21.2.5.11 und 21.2.5.12 zur Lokalisierung von Kofaserfunktoren durch Linksanpassung oder genauer die daraus durch Übergang zu den opponierten Kategorien entstehenden Aussagen zur Lokalisierung von Faserfunktoren durch Rechtsanpassung an auf den auf den Familienkategorien induzierten Funktor

$$\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}})^{\curlywedge} \to \mathrm{Top}^{\curlywedge}$$

Er ist ein Faserfunktor. Genauer ist für stetige Abbildungen $f_i : X \to Y_i$ und $\mathcal{G}_i \in \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/Y_i})$ die tautologische Trennung

$$f_1^*\mathcal{G}_1 \otimes \ldots \otimes f_n^*\mathcal{G}_n \to \mathcal{G}_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \mathcal{G}_n$$

über $(f_1, \ldots, f_n)$ kartesisch. Wie beim Beweis des Spezialfalls 21.9.9.19, nur jetzt in der opponierten Situation, bilden die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten nach 20.2.5.3 ein faserweises Rechtsoresystem, ja sogar ein faserweises Oresystem. Für dieses faserweise Rechtsoresystem der Quasiisomorphismen ist nun wie beim Beweis des Spezialfalls 21.9.9.19 die Unterkategorie $\mathrm{Hot}(\mathrm{flAb}_{/\!/\,\mathrm{Top}})^{\curlywedge}$ aller Tupel von Homotopiekomplexen flacher abelscher Garben über topologischen Räumen eine Rechtsanpassung, denn Tensorprodukt wie Rückzug machen aus flachen Garben flache Garben, Tensorprodukt wie Rückzug von Quasiisomorphismen zwischen Komplexen flacher abelscher Garben sind wieder Quasiisomorphismen, und nach 20.3.6.8 finden wir für jeden Komplex abelscher Garben einen Quasiisomorphismus von einem Komplex flacher abelscher Garben dorthin, der dann in der opponierten Kategorie entsprechend von dort ausgeht. □

Satz 21.9.9.6 (**Schmelzkategorie der derivierten Modulgarben**). *Gegeben ein topologischer Raum X und ein Kring k gilt:*

1. *Der offensichtliche Funktor ist ein Isomorphismus*

$$(\mathrm{E}\,\mathrm{Hot}(k\text{-}\mathrm{Mod}_{/X}))_{\mathrm{qis}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}(\mathrm{Hot}(k\text{-}\mathrm{Mod}_{/X})_{\shortparallel\mathrm{qis}})$$

   Die so erhaltene Schmelzkategorie notieren wir $\mathrm{Der}_{/(X,k)}$.

2. *Die Schmelzkategorie* $\mathrm{Der}_{/(X,k)}$ *der derivierten k-Modulgarben besitzt stabil universelle Verschmelzungen, wir notieren sie* $\otimes_k^{\mathrm{L}}$*, und jede universelle Verschmelzung in der Homotopiekategorie* $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/(X,k)})$ *zwischen Komplexen von k-Modulgarben, von denen höchstens einer nicht quisflach ist, bleibt darin universell;*

3. *Die übliche Struktur einer triangulierten Kategorie auf unserer Schmelzkategorie* $\mathrm{Der}_{/(X,k)}$ *ist intern;*

4. *Die Schmelzkategorie* $\mathrm{Der}_{/(X,k)}$ *besitzt internes Hom.*

Beweis. Mutatis mutandis derselbe Beweis wie im Fall abelscher Garben. Quisrechtsentfaltungen von k-Modulgarben haben wir in 21.2.3.6 bereitgestellt. □

21.9.9.7. Wie im Fall abelscher Garben 21.9.9.21 konstruieren wir auch für einen beliebigen Kring k und einen beliebigen topologischen Raum X und einen beliebigen Komplex von k-Modulgarben eine ausgezeichnete Bijektion

$$\mathrm{Der}_{/(X,k)}(\Upsilon, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^0(X; \mathcal{F})$$

Definition 21.9.9.8. Sei k ein Ring. Ein Komplex von k-Modulgarben heißt **quisflach**, wenn das Darantensorieren von unserem Komplex aus jedem exakten Komplex von k-Rechtsmodulgarben einen exakten Komplex von abelschen Garben macht. Allgemeiner vereinbaren wir dieselbe Terminologie auch für Garben von Moduln über einer Garbe $\mathcal{A}$ von Ringen. Gegeben ein geringter Raum $(X, \mathcal{A})$ notieren wir

$$\mathrm{HflAb}_{/\!/(X,\mathcal{A})} \subset \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/\!/(X,\mathcal{A})})$$

die volle triangulierte Unterkategorie der quisflachen Komplexe von Modulgarben.

Beispiel 21.9.9.9 (**Schmelzkatgorie derivierter abelscher Garben**). Die abelschen Garben auf einem topologischen Raum X bilden offensichtlich eine bequeme abelsche Schmelzkategorie $\mathrm{Ab}_{/X}$. Sie ist entfaltbar im Sinn von 21.2.8.5. In der Tat besitzt jeder Komplex abelscher Garben eine Quisrechtsentfaltung nach

21.2.3.2 und die Komplexe flacher abelscher Garben bilden eine Quisschmelzanpassung, denn das Tensorprodukt macht aus flachen Garben flache Garben, das Darantensorieren eines Komplexes flacher Garben macht Quasiisomorphismen zu Quasiisomorphismen nach 20.3.8.12 sowie 20.3.8.15 und nach 21.1.1.12 und 20.3.6.7 finden wir für jeden Komplex abelscher Garben einen Quasiisomorphismus von einem Komplex flacher abelscher Garben dorthin. Die allgemeine Theorie aus 21.2.8.7 liefert uns damit die **Schmelzkategorie der derivierten abelschen Garben auf** X, die wir

$$\mathrm{Der}_{/X} := \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$$

notieren, und einen Isomorphismus der zugrundeliegenden einfachen Katgorie mit der gewöhnlichen derivierten Kategorie der abelschen Garben auf X. In $\mathrm{Ab}_{/X}$ hatten wir einen Isomorphismus $\mathrm{L} \overset{\sim}{\Rightarrow} \Gamma$ des Leerverschmelzungsfunktor mit dem Funktor der globalen Schnitte angegeben. Mit 21.2.8.9 liefert er natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{Der}_{/X}(\Upsilon, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^0(X; \mathcal{F})$$

zwischen der abelschen Gruppe der Leerverschmelzungen in einen Garbenkomplex und seiner Hyperkohomologie im Grad Null.

Lemma 21.9.9.10. *Sei wie eben $(F^{p,q})_{q\leq 0}$ eine Cartan-Eilenberg-Untenauflösung durch flache Garben eines Komplexes von k-Modulgarben. Besteht die Godementauflösung jedes $F^{p,q}$ aus flachen Garben, so ist auch das Summentotal des Tripelkoplexes $\mathrm{G}^r(F^{p,q})_{q\leq 0, r\geq 0}$ ein homtopieflacher Komplex aus flachen Garben.*

21.9.9.11. So kriegen wir, tja, was genau? Irgendwie Quasiisomorphismen mit quisflachem Komplex aus schwach kompaktweichen flachen Garben.

Beweis. Sei E ein exakter Komplex von Garben von k-Rechtsmoduln. Wir wissen aus 21.2.5.20, daß $\mathrm{tot}^{\oplus}(E^s \otimes_k F^{p,q})_{q\leq 0}$ exakt ist. Wenn wir zeigen können, daß $\mathrm{tot}^{\oplus}(E^s \otimes_k \mathrm{G}^r(F^{p,q}))_{q\leq 0, r\geq -1}$ exakt ist mit $\mathrm{G}^{-1}(F^{p,q}) := F^{p,q}$, so folgt die Behauptung. Aufgrund der Funktorialität der Godement-Auflösung haben für festes r die Doppelkomplexe $\mathrm{G}^r(F^{p,q})_{q\leq 0}$ maximal spaltende p-Zeilen, folglich ist für festes r, q das Summentotal $\mathrm{tot}^{\oplus}_{p,s}(E^s \otimes_k \mathrm{G}^r(F^{p,q}))$ exakt und dann wegen $q \leq 0$ auch für alle r das Summentotal $\mathrm{tot}^{\oplus}_{p,q,s}(E^s \otimes_k \mathrm{G}^r(F^{p,q}))$. Da aber diese Doppelkomplexe exakte r-Zeilen haben und verschwinden für $r < -1$, haben sie ihrerseits ein exaktes Summentotal. □

21.9.9.12 (**Leerverschmelzungen in Homotopiekategorien**). Gegeben eine bequeme abelsche Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ erhalten wir eine Transformation $\mathrm{L}_{\mathrm{Hot}} \Rightarrow \mathrm{L}_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{H}^0$ von Schmelzfunktoren $\mathrm{Hot}_{\mathcal{M}} \to \mathrm{Ab}$, indem wir den linksexakten Leerverschmelzungsfunktor von $\mathcal{M}$ mit $\mathrm{L} := \mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ abkürzen und $\mathrm{L}_{\mathrm{Hot}} = \mathcal{H}^0 \circ \mathrm{Hot}(\mathrm{L})$

aus 21.2.7.5 erinnern und jedem Komplex (X, d) den durch die rechte Vertikale des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{im}(\mathrm{L}\, d^{-1}) & \hookrightarrow & \ker(\mathrm{L}\, d^0) & \twoheadrightarrow & \mathcal{H}^0 \operatorname{Hot}(\mathrm{L}) \\ \downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow \\ \mathrm{L} \operatorname{im}(d^{-1}) & \hookrightarrow & \mathrm{L} \ker(d^0) & \to & \mathrm{L}\, \mathcal{H}^0 \end{array}$$

induzierten Morphismus zuordnen. Ist zusätzlich der Leerverschmelzungsfunktor von $\mathcal{M}$ exakt, so ist unsere Transformation eine Isotransformation

$$\mathrm{L}_{\mathrm{Hot}} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{L}_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{H}^0$$

21.9.9.13 (**Anreicherung derivierter Schmelzkategorien**). Gegeben eine entfaltbare bequeme abelsche Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ erhalten wir aus $\tau : Q \circ \operatorname{Hot}(\mathrm{L}_{\mathcal{M}}) \Rightarrow \mathrm{R}(\mathrm{L}_{\mathcal{M}}) \circ Q$ nach 20.3.4.1 und $\mathcal{H}^0 \circ \operatorname{Hot}(\mathrm{L}_{\mathcal{M}}) \Rightarrow \mathrm{L}_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{H}^0$ nach 21.9.9.12 Transformationen

$$\mathcal{H}^0 \circ \mathrm{R}(\mathrm{L}_{\mathcal{M}}) \circ Q \;\Leftarrow\; Q \circ \mathcal{H}^0 \circ \operatorname{Hot}(\mathrm{L}_{\mathcal{M}}) \;\Rightarrow\; \mathrm{L}_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{H}^0 \circ Q$$

Ist der Leerverschmelzungsfunktor $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ exakt, so sind sie beide Isotransformationen und induzieren eine Isotransformation $\mathcal{H}^0 \circ \mathrm{R}(\mathrm{L}_{\mathcal{M}}) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{L}_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{H}^0$ von Funktoren auf der derivierten Kategorie, in anderen Worten eine Faktorisierung ihres Leerverschmelzungsfunktors als

$$\mathrm{L}_{\mathrm{Der}} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{L}_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{H}^0$$

für $\mathcal{H}^0 : \mathrm{Der}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$. Nach 21.2.8.7 ist nun $\mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$ eine Schmelzkategorie mit Multihom und nach 18.2.4.23 können wir die Selbstanreicherung $\mathrm{Der}^{\mathrm{sa}}_{\mathcal{M}} / \mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$ bilden und können diese mit jedem Schmelzfunktor $\varphi : \mathrm{Der}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{S}$ zu einer in $\mathcal{S}$ angereicherten Schmelzkategorie umstrukturieren im Sinne von 18.2.4.21. Strukturieren wir zum Beispiel um mit $\mathcal{H}^0 : \mathrm{Der}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$, so erhalten wir eine in $\mathcal{M}$ angereicherte Schmelzkategorie $\mathcal{H}^0(\mathrm{Der}^{\mathrm{sa}}_{\mathcal{M}})/\mathcal{M}$, die wir vereinfacht

$$\mathrm{Der}_{\mathcal{M}} / \mathcal{M}$$

notieren. Strukturieren wir sie weiter um mit dem Leerverschmelzungsfunktor von $\mathcal{M}$ und nehmen an, dieser Leerverschmelzungsfunktor sei exakt, so erhalten wir nach 18.2.4.23 einen objektfesten Isomorphismus von Schmelzkategorien

$$\mathrm{L}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Der}_{\mathcal{M}} / \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$$

Satz 21.9.9.14 (Schmelzkategorie der derivierten abelschen Gruppen). *Für die Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe* $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}) = \mathrm{Hot}$ *aus 18.2.5.3 und ihre Lokalisierung nach Quasiisomorphismen* $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}) := \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab})_{\|\mathrm{qis}}$ *gilt:*

1. *Der offensichtliche Funktor ist ein Isomorphismus*

$$(\mathrm{E}\,\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}))_{\mathrm{qis}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}(\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab})_{\shortparallel\mathrm{qis}})$$

2. *Die Schmelzkategorie* $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ *besitzt stabil universelle Verschmelzungen und jede universelle Verschmelzung in* $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab})$*, bei der höchstens einer der Ausgangskomplexe nicht aus flachen abelschen Gruppen besteht, bleibt universell in* $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$*;*

3. *Die Schmelzkategorie* $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ *besitzt internes Hom und ist* A *ein Komplex aus freien abelschen Gruppen oder* B *ein Komplex aus injektiven abelschen Gruppen, so stimmt das in der derivierten Kategorie gebildete Homobjekt* $A \Rrightarrow B$ *mit dem in der Homotopiekategorie gebildeten Homobjekt überein;*

4. *Die übliche Struktur einer triangulierten Kategorie auf unserer Schmelzkategorie* $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ *ist intern im Sinne von 20.2.3.4.*

21.9.9.15 (**Additive Struktur auf** $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$). Der Schmelzfunktor $\mathcal{H}^0 : \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}) \to \mathrm{Ab}$ macht Quasiisomorphismen zu Isomorphismen und induziert folglich einen Schmelzfunktor $\mathcal{H}^0 : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}) \to \mathrm{Ab}$. Unsere Überlegungen 21.2.6.4 liefern eine Isotransformation $v \circ \mathcal{H}^0 \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{L}$ zum Leerverschmelzungsfunktor von $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$. Sie versieht unsere Schmelzkategorie $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ nach 18.2.4.7 mit einer additiven Struktur, die nach 21.2.6.7 auch die einzig mögliche additive Struktur auf diesr Schmelzkategorie ist.

21.9.9.16 (**Totale Homologie als Schmelzfunktor**). Wir erinnern den Schmelzfunktor der totalen Homologie $\mathcal{H} : \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}) \to \mathrm{sgAb}$ von der Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe in die Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen aus 18.2.5.13. Er faktorisiert offensichtlich über die Lokalisierung nach Quasiisomorphismen und induziert so einen Schmelzfunktor

$$\mathcal{H} : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}) \to \mathrm{sgAb}$$

Beweis. Wir wenden unsere Korollare 21.2.5.11 und 21.2.5.12 zur Lokalisierung durch Linksanpassung an auf den Indexfunktor $p : \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab})^{\curlyvee} \to \mathrm{Ensf}$. Er ist ein Kofaserfunktor, da die fraglichen Homotopiekomplexe nach 18.2.5.3 stabil universelle Verschmelzungen haben. Für diesen Funktor bilden die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten nach 20.2.5.3 ein faserweises Oresystem. Für dieses faserweise Oresystem der Quasiisomorphismen ist nun die Unterkategorie $\mathrm{Hot}(\mathrm{flAb})^{\curlyvee}$ aller Tupel von Homotopiekomplexen flacher abelscher Gruppen eine Linksanpassung, denn die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten bilden darin, immer noch nach 20.2.5.3, weiter ein faserweises Oresystem, das Tensorprodukt macht aus flachen abelschen Gruppen flache abelsche Gruppen, das Tensorprodukt von Quasiisomorphismen zwischen Komplexen flacher

abelscher Gruppen ist nach 20.3.8.17 wieder ein Quasiisomorphismus, und nach 20.3.6.7 finden wir für jeden Komplex abelscher Gruppen einen Quasiisomorphismus von einem Komplex flacher abelscher Gruppen dorthin. Das Tensorprodukt mit einem Komplex flacher abelscher Gruppen macht nach 20.3.8.17 sogar einen beliebigen Quasiisomorphismus in $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab})$ zu einem Quasiisomorphismus. Wir sehen so, daß der Funktor $X\otimes_{\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})}$ des Darantensorierens in der Schmelzkategorie $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ isomorph ist zu unserem derivierten Tensorieren $\mathrm{L}(X\otimes) : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ aus 20.3.8.17, von dem wir bereits aus 20.3.8.22 wissen, daß er einen Rechtsadjungierten besitzt und wie dieser Rechtsadjungierte beschrieben werden kann. □

Satz 21.9.9.17 (Schmelzkategorie der derivierten Kringmoduln). *Gegeben ein Kring k und die Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe $\mathrm{Hot}(\mathrm{Mod}_k)$ von k-Moduln aus 18.2.5.12 und ihre Lokalisierung $\mathrm{Der}(\mathrm{Mod}_k) := \mathrm{Hot}(\mathrm{Mod}_k)_{\shortparallel\mathrm{qis}}$ nach Quasiisomorphismen gilt:*

1. *Der offensichtliche Funktor ist ein Isomorphismus*

$$(\mathrm{E}\,\mathrm{Hot}(\mathrm{Mod}_k))_{\mathrm{qis}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}(\mathrm{Hot}(\mathrm{Mod}_k)_{\shortparallel\mathrm{qis}})$$

2. *Die Schmelzkategorie $\mathrm{Der}(\mathrm{Mod}_k)$ besitzt stabil universelle Verschmelzungen. Des weiteren bleibt jede universelle Verschmelzung in $\mathrm{Hot}(\mathrm{Mod}_k)$, bei der höchstens einer der Ausgangskomplexe nicht quisflach ist, universell in $\mathrm{Der}(\mathrm{Mod}_k)$;*

3. *Die Schmelzkategorie $\mathrm{Der}(\mathrm{Mod}_k)$ besitzt internes Hom und ist X ein quislinksentfalteter oder Y ein quisrechtsentfalteter Komplex, so stimmt das in der derivierten Kategorie gebildete Homobjekt $X\Rightarrow Y$ mit dem in der Homotopiekategorie gebildeten Homobjekt überein;*

4. *Die übliche Struktur einer triangulierten Kategorie auf unserer Schmelzkategorie $\mathrm{Der}(\mathrm{Mod}_k)$ ist intern im Sinne von 20.2.3.4.*

Beweis. Wir wenden unsere Korollare 21.2.5.11 und 21.2.5.12 zur Lokalisierung durch Linksanpassung an auf den Indexfunktor $p : \mathrm{Hot}(\mathrm{Mod}_k)^{\curlyvee} \to \mathrm{Ensf}$. Er ist ein Kofaserfunktor, da die fraglichen Homotopiekomplexe nach 18.2.5.3 stabil universelle Verschmelzungen haben. Für diesen Funktor bilden die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten nach 20.2.5.3 ein faserweises Oresystem. Für dieses faserweise Oresystem der Quasiisomorphismen ist nun die Unterkategorie $\mathrm{hflHot}(\mathrm{Mod}_k)^{\curlyvee}$ aller Tupel von quisflachen Komplexen eine Linksanpassung, denn die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten bilden darin, immer noch nach 20.2.5.3, weiter ein faserweises Oresystem, das Tensorprodukt macht aus quisflachen Komplexen quisflache Komplexe, das Tensorprodukt von

Quasiisomorphismen zwischen quisflachen Komplexen ist nach 20.3.8.17 wieder ein Quasiisomorphismus, und nach 20.3.8.15 und 20.3.8.8 finden wir für jeden Komplex von Moduln einen Quasiisomorphismus von einem quisflachen Komplex dorthin. Wir sehen so, daß der Funktor $X \otimes_{\mathrm{Der}(\mathrm{Mod}_k)}$ des Darantensorierens in der Schmelzkategorie $\mathrm{Der}(\mathrm{Mod}_k)$ isomorph ist zur Variante $\mathrm{L}(X \otimes_k) : \mathrm{Der}(\mathrm{Mod}_k) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Mod}_k)$ unseres derivierten Tensorierens für beliebige Ringe aus 20.3.8.17, von dem wir bereits aus 20.3.8.22 wissen, daß er einen Rechtsadjungierten besitzt und wie dieser Rechtsadjungierte beschrieben werden kann. □

21.9.9.18 (**Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe abelscher Garben**). Wie bereits in 21.2.8.6 erwähnt bilden die abelschen Garben auf einem beliebigen topologischen Raum X eine bequeme abelsche Schmelzkategorie $\mathrm{Ab}_{/X}$. Speziell erhalten wir so für jeden topologischen Raum X die Ab-Schmelzkategorien $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{/X})$ und $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X})$ mit stabil universellen Verschmelzungen und internem Hom und die übliche triangulierte Struktur auf $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X})$ ist intern im Sinne von 20.2.3.4, vergleiche 21.2.7.8. In $\mathrm{Ab}_{/X}$ hatten wir einen Isomorphismus $\mathrm{L} \overset{\sim}{\Rightarrow} \Gamma$ des Leerverschmelzungsfunktor mit dem Funktor der globalen Schnitte erhalten. In $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{/X})$ sind die Leerverschmelzungen in einen Komplex folglich die Nullzykel des Komplexes der globalen Schnitte und in $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X})$ die Elemente der nullten Kohomologie des Komplexes der globalen Schnitte. Das Einsobjekt ist jeweils die konstante Garbe $\mathbb{Z}_X$ im Grad Null, genauer der Komplex $\mathbb{Z}_X[0]$ mit dem globalen Schnitt 1_X beziehungsweise dessen Kohomologieklasse als universeller Leerverschmelzung.

Satz 21.9.9.19 (**Schmelzkategorie derivierter abelscher Garben**). *Für die Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe* $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X})$ *auf einem topologischen Raum* X *und ihre Lokalisierung nach Quasiisomorphismen* $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X}) := \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X})_{\shortparallel\mathrm{qis}}$ *gilt:*

1. *Der offensichtliche Funktor ist ein Isomorphismus*

$$(\mathrm{E}\,\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X}))_{\mathrm{qis}} \overset{\sim}{\to} \mathrm{E}(\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X})_{\shortparallel\mathrm{qis}})$$

2. *Die Schmelzkategorie* $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ *besitzt stabil universelle Verschmelzungen und jede universelle Verschmelzung in* $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X})$ *zwischen Komplexen abelscher Garben, von denen höchstens einer nicht aus flachen Garben besteht, bleibt darin universell;*

3. *Die Schmelzkategorie* $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ *besitzt internes Hom;*

4. *Die übliche Struktur einer triangulierten Kategorie auf unserer Schmelzkategorie* $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ *ist intern.*

21.9.9.20. Wir verwenden für einen topologischen Raum X auch die abkürzende Notation $\mathrm{Der}_{/X} := \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$.

21.9.9.21 (**Leerverschmelzungen als Hyperkohomologie**). Ich konstruiere für jeden topologischen Raum X und jeden Komplex $\mathcal{F}$ von abelschen Garben auf X einen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$\mathrm{Der}_{/X}(\curlyvee, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^0(X; \mathcal{F})$$

Die universelle Leerverschmelzung in den Homotopiekomplex $\mathbb{Z}_X[0]$ bleibt nach Teil 2 universell in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$. Wir erhalten so für jeden Garbenkomplex $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ eine Bijektion $\mathrm{Der}_{/X}(\curlyvee, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{/X}(\mathbb{Z}_X[0], \mathcal{F})$. Da jeder Garbenkomplex quisrechtsentfaltbar ist, erhalten wir mithilfe der Beschreibung 20.3.2.20 von Morphismen in Lokalisierungen als faktorierten Funktoren, der Definition der Homotopiekategorie und unseren Erkenntnissen 20.3.2.21 zur Faktorierung einer Verknüpfung ausgezeichnete Bijektionen

$$\mathrm{Der}_{/X}(\mathbb{Z}_X[0], \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}(\mathrm{Hot}_{/X}(\mathbb{Z}_X[0],\ ))(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}(\mathcal{H}^0\Gamma)(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0(\mathrm{R}\Gamma)(\mathcal{F})$$

Mit unserer Definition $\mathbb{H}^q(X; \mathcal{F}) := \mathcal{H}^q(\mathrm{R}\Gamma)(\mathcal{F})$ der Hyperkohomologie aus 20.3.4.17 liefert das schließlich Bijektionen $\mathrm{Der}_{/X}(\curlyvee, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^0(X; \mathcal{F})$ wie gewünscht.

21.9.10 Reste Schnittpaarung

Übung 21.9.10.1. Auf einem abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffraum X ist jede kompaktweiche Garbe $\mathcal{F}$ globale-Schnitte-entfaltet. Hinweis: Man schreibe unseren Hausdorffraum als aufsteigende Vereinigung einer Folge von Kompakta $X = \bigcup K_n$ und wähle eine welke Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^{\lhd}$. Dann sind die Sequenzen $\Gamma(K_n; \mathcal{F}) \hookrightarrow \Gamma(K_n; \mathcal{I}^{\lhd})$ exakt und im Limes nach dem Mittag-Leffler-Kriterium auch die Sequenzen $\Gamma\mathcal{F} \hookrightarrow \Gamma\mathcal{I}^{\lhd}$.

Übung 21.9.10.2. Gegeben eine abzählbar basierte n-Mannigfaltigkeit X hat der Funktor $\Gamma : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}$ der globalen Schnitte höchstens die homologische Dimension n. Hinweis: Gegeben eine kompaktweiche Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}^{\lhd}$ ist $\mathrm{im}(\mathcal{G}^{n-1} \to \mathcal{G}^n)$ kompaktweich nach 21.5.7.14 und 19.4.10.2. Dann verwende man 21.9.10.1.

21.9.10.3 (**Lokale Kohomologie als Hyperkohomologie von Lokalgarben**). Gegeben $A \subset X$ eine lokal abgeschlossenene Teilmenge in einem topologischen Raum erklären wir ihre **Lokalgarbe** $\mathcal{L}_A \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$ durch die Vorschrift

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{A \subset X} := (i_! \mathbb{Z}_A \Rrightarrow \mathbb{Z}_X)$$

mit der Notation i für die Inklusionsabbildung. Unsere Isomorphismen 18.1.4.2 zwischen Einsverschmelzungen und Leerverschmelzungen in das Homobjekt spezialisieren in diesem Fall zu Isomorphismen

$$\mathrm{Ext}^p(i_!\mathbb{Z}_A, \mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^p(X; \mathcal{L}_A)$$

Der Isomorphismus der relativen Verdierdualität 21.4.7.8 liefert weiter einen Isomorphismus $i_* i^! \mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_A$ und damit Isomorphismen $\mathbb{H}^p(A; i^!\mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^p(X; \mathcal{L}_A)$. Schließlich liefert für $A \not\subset X$ abgeschlossen Übung 21.5.3.8 Isomorphismen zur lokalen Kohomologie $\mathbb{H}^p(A; i^!\mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^p_A(X)$. Insgesamt erhalten wir für $A \not\subset X$ also Isomorphismen

$$\mathrm{Ext}^p(i_!\mathbb{Z}_A, \mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^p(X; \mathcal{L}_A) \xleftarrow{\sim} \mathbb{H}^p(A; i^!\mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^p_A(X)$$

Beispiel 21.9.10.4 (**Lokalgarbe einer Untermannigfaltigkeit**). Ist X eine n-Mannigfaltigkeit, so liefert unser Isomorphismus $\omega_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_X[n]$ aus 21.6.1.15 einen Isomorphismus $(\mathrm{or}_X \Rrightarrow \omega_X)[-n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$. Ist A eine a-Mannigfaltigkeit und $i : A \hookrightarrow X$ eine Einbettung als abgeschlossene Teilmenge $i(A) \not\subset X$, so finden wir mit relativer Verdierdualität 21.4.7.8 Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} i^!\mathbb{Z}_X & \xrightarrow{\sim} & i^!(\mathrm{or}_X \Rrightarrow \omega_X)[-n] \\ & \xrightarrow{\sim} & (i^*\mathrm{or}_X \Rrightarrow i^!\omega_X)[-n] \\ & \xrightarrow{\sim} & (i^*\mathrm{or}_X \Rrightarrow \omega_A)[-n] \\ & \xrightarrow{\sim} & (i^*\mathrm{or}_X \Rrightarrow \mathrm{or}_A)[a-n] \\ & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{or}_{A\subset X}[a-n] \end{array}$$

mit der Notation $\mathrm{or}_{A\subset X} := (i^*\mathrm{or}_X \Rrightarrow \mathrm{or}_A)$ für die **relative Orientierungsgarbe von** A **in** X, einen lokal freien $\mathbb{Z}_A$-Modul vom Rang Eins. Wir erhalten weiter Isomorphismen

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{A\subset X} = i_* i^! \mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} i_* \mathrm{or}_{A\subset X}[a-n]$$

Sind unsere n-Mannigfaltigkeit X und ihre abgeschlossene a-Untermannigfaltigkeit $A \not\subset X$ beide orientierbar, so liefert die Wahl jeweils einer Orientierung einen Isomorphismus

$$\mathcal{L}_A \xrightarrow{\sim} i_*\mathbb{Z}_A[a-n]$$

Beispiel 21.9.10.5 (**Fundamentalkozykel einer Untermannigfaltigkeit**). Seien X eine orientierte n-Mannigfaltigkeit und A eine orientierte a-Mannigfaltigkeit und $i : A \hookrightarrow X$ eine Einbettung als abgeschlossene Teilmenge $i(A) \not\subset X$. Wir bezeichnen mit

$$p := n - a$$

die Kodimension von A in X. So liefert der Isomorphismus $\mathcal{L}_A \xrightarrow{\sim} i_*\mathbb{Z}_A[-p]$ aus 21.9.10.4 durch Übergang zur Hyperkohomologie mit 21.9.10.3 Isomorphismen

$$I_A = I_{A\subset X} = I_{\vec{A}\subset\vec{X}} : \mathrm{H}^q_A(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X;\mathcal{L}_A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{q-p}(A)$$

Das Urbild von $1 \in \mathrm{H}^0(A)$ unter der Verknüpfung dieser Isomorphismen nennen wir den **Fundamentalkozykel von** A **in** X und notieren ihn

$$\tau_A = \tau_{A\subset X} = \tau_{\vec{A}\subset\vec{X}} = I^{-1}_{\vec{A}\subset\vec{X}}(1) \in \mathrm{H}^p_A(X)$$

Der Fundamentalkozykel hängt von der Wahl je einer Orientierung auf X und A ab. Der Fundamentalkozykel von $X \subset X$ in Bezug auf ein- und dieselbe Orientierung ist die Eins $\tau_{X\subset X} = 1 \in \mathrm{H}^0(X)$ des Kohomologierings.

Beispiel 21.9.10.6 (**Erzwungene Schnitte, Variante ohne Orientierung**). Gegeben eine Mannigfaltigkeit X und abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten $A, B \subsetneq X$ gilt

$$\tau_A \cup \tau_B \neq 0 \;\Rightarrow\; A \cap B \neq \emptyset$$

Hier meinen wir mit τ_A, τ_B die Bilder der Fundamentalkozykel mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ im Kohomologiering $\mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

21.9.10.7 (**Poincarédualität als Verdierdualität**). Gegeben eine m-Mannigfaltigkeit X und eine abelsche Gruppe G erinnere ich an den **Poincaré-Isomorphismus**

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_X : \mathrm{H}_q(X;G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{m-q}_!(X;\mathrm{or}_X(G))$$

für die singuläre Homologie aus 17.7.4.3. Im Rahmen der sechs Funktoren erhalten wir ihn, diesmal für die Garbenhomologie und Garbenkohomologie, als den vom Dualisierungsisomorphismus $\mathrm{p}_X : c^! G_{\mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_X(G)[m]$ der Mannigfaltigkeit X aus 21.6.1.15 induzierten Isomorphismus

$$\mathrm{H}_q(X;G) = \mathcal{H}^{-q} c_! c^! G_{\mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q} c_! \,\mathrm{or}_X(G)[m] = \mathrm{H}^{m-q}_!(X;\mathrm{or}_X(G))$$

Genau genommen konstruieren wir den Dualisierungsisomorphismus in 21.6.1.15 nur für $G = \mathbb{Z}$, aber mit 21.6.2.8 erweitert man ihn unmittelbar durch $\otimes_{\mathbb{Z}} G$ auf den allgemeinen Fall.

21.9.10.8 (**Funktorialität der Poincaré-Isomorphismen**). Die Poincaré-Isomorphismen sind funktoriell in dem Sinne, daß für eine stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten $f : X \to Y$ mit $m = \dim X$ und $n = \dim Y$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_q(X;G) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^{m-q}_!(X;\mathrm{or}_X(G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}_q(Y;G) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^{n-q}_!(Y;\mathrm{or}_Y(G)) \end{array}$$

kommutiert mit der rechten Vertikalen, die von dem von $\omega_X(G) \xrightarrow{\sim} f^!\omega_Y(G)$ induzierten Morphismus $f_! \,\mathrm{or}_X(G) \to \mathrm{or}_Y(G)[n-m]$ herkommt.

Korollar 21.9.10.9. *Gegeben eine orientierbare n-Mannigfaltigkeit M ist $\mathrm{H}_{n-1}M$ frei.*

Beweis. GESCHEITERT! Ich will mich auf das universelle Koeffiziententheorem der Kohomologie 17.6.7.2 stützen, also auf die kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_{n-1}M, G) \hookrightarrow \mathrm{H}^n(M; G) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_n M, G)$$

Es reicht zu zeigen, daß darin die rechte Abbildung für jede abelsche Gruppe G ein Isomorphismus ist. Dazu gehen wir von der relativen Verdierdualität aus, die uns für $c : M \to \mathrm{top}$ einen Isomorphismus

$$c_*(\mathbb{Z}_M \Rrightarrow c^! G_{\mathrm{top}}) \xrightarrow{\sim} (c_! \mathbb{Z}_M \Rrightarrow G_{\mathrm{top}})$$

liefert. Wenden wir darauf $\mathcal{H}^0$ an, erhalten wir mithilfe des in 21.6.2.8 konstruierten Isomorphismus $c^! \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \otimes c^* G_{\mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} c^! G_{\mathrm{top}}$ und des durch die Orientierung gegebenen Isomorphismus $c^! \mathbb{Z}_{\mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{\mathrm{M}}[n]$ einen Isomorphismus der linken Seite mit $\mathrm{H}^n(M; G)$. Andererseits erhalten wir einen Isomorphismus der rechten Seite mit $\mathrm{Der}_{/\mathrm{top}}(c_! \mathbb{Z}_M, G_{\mathrm{top}})$ und DA KOMMT NUR NOCHMAL DAS UNIVERSELLE KOEFFIZIENTENTHEOREM RAUS! □

21.9.10.10 (**Dualisierte Poincaré-Isomorphismen**). Ersetzen wir oben $c_!$ durch c_*, so erhalten wir in derselben Weise Isomorphismen

$$\mathrm{P}^! = \mathrm{P}^!_X : \mathrm{H}^!_q(X; G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{m-q}(X; \mathrm{or}_X(G))$$

Wir nennen sie die **dualisierten Poincaré-Isomorphismen**, da sie sich im Fall von Körperkoeffizienten durch Dualisieren aus den gewöhnlichen Poincaré-Isomorphismen erhalten lassen. Sie gelten für allgemeine Mannigfaltigkeiten, wenn wir die lokalendliche Homologie links im garbentheoretischen Sinne verstehen. Andernfalls benötigen wir für den entsprechenden Vergleichssatz und auch für die Beschreibung 17.7.3.28 als dualisierte kompakte Kohomologie die Eigenschaft „abzählbar basiert". Unsere dualisierten Poincaré-Isomorphismen $\mathrm{P}^!$ haben analoge Funktorialitätseigenschaften wie die Poincaré-Isomorphismen, diesmal aber nur für eigentliches $f : X \to Y$. Wir erhalten also in Formeln ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^!_q(X; G) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^{m-q}(X; \mathrm{or}_X(G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^!_q(Y; G) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^{n-q}(Y; \mathrm{or}_Y(G)) \end{array}$$

Im Fall von kompaktem X schließlich haben wir $\mathrm{P}^!_X = \mathrm{P}_X$.

Bemerkung 21.9.10.11 (**Versuch einer Klärung**). Jetzt ist also im Fall einer orientierten Mannigfaltigkeit $[X]$ genau, was nach 1 geht. Wie wird die Eins links abgebildet? Fange mal an mit

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^!_m A & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^0 A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^!_m X & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^p X \end{array}$$

für $m = \dim A$ und p die Kodimension von A in X. Dann $[A] \mapsto 1$ unter der oberen Horizontale definiert $[A]$. Die rechte Vertikale gehört zu $\mathrm{p}_A : \omega_A \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_A[m]$ und $\mathrm{p}_X : \omega_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_X[n]$ zu einem Isomorphismus $i_*\mathbb{Z}_A \to \mathbb{Z}_X[p]$ gegeben durch blah. Eben als

$$\mathrm{H}^0 A = \mathcal{H}^0 a_* \mathbb{Z}_A \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 c_* i_* \mathbb{Z}_A \to \mathcal{H}^0 c_* \mathbb{Z}_X[p] = \mathrm{H}^p X$$

Faktorisiere als $i_!\mathbb{Z}_A = i_! i^! \mathbb{Z}_X[p] \to \mathbb{Z}_X[p]$. Liefert Faktorisierung über lokale Kohomologie $\mathrm{H}^p_A(X)$. Das Bild der 1 notieren wir τ_A. Die Lokalgarbe ist $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{A\subset X} := (i_!\mathbb{Z}_A \Rightarrow \mathbb{Z}_X)$.

21.9.10.12. Gegeben eine orientierte Mannigfaltigkeit X der Dimension n ist unter dem dualisierten Poincaré-Isomorphismus $\mathrm{P}^!_X : \mathrm{H}^!_q X \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{n-q} X$ aus 21.9.10.10 der Erzeuger $1 \in \mathrm{H}^0 X$ das Bild eines eines wohlbestimmten Elements

$$\omega^!_X \in \mathrm{H}^!_n X$$

Dies Element heißt der **Fundamentalzykel von** X. Sie mögen sich zur Übung überlegen, warum dies Element im kompakten beziehungsweise abzählbar basierten Fall unter dem entsprechenden Vergleichsisomorphismus unserem Fundamentalzykel der singulären Theorie aus 17.4.3.2 beziehungsweise 17.7.3.13 entspricht.

21.9.10.13. Gegeben eine orientierte n-Mannigfaltigkeit X mit einer abgeschlossenen orientierten Untermannigfaltigkeit $A \mathrel{\not\subset} X$ der Kodimension p liefert die Funktorialität 21.9.10.10 des dualisierten Poincaré-Isomorphismus $\mathrm{P}^!$, wenn wir mit $\omega^!_A$ das Bild des Fundamentalzykels von A in $\mathrm{H}^!_{n-p}(X)$ notieren, in $\mathrm{H}^p(X)$ die Identität

$$\mathrm{P}^!_X(\omega^!_A) = \tau_{A\subset X}$$

In Worten bildet der dualisierte Poincaré-Isomorphismus von X also den Fundamentalzykel von A auf den Fundamentalkozykel von A in X aus 21.9.10.5 ab. Im Fall, daß A zusätzlich kompakt ist, bezeichnen wir analog mit $\omega_A \in \mathrm{H}_{n-p}(X)$ das Bild des Fundamentalzykels von A in der Homologie von X und erhalten ebenso in $\mathrm{H}^p_!(X)$ die Identität

$$\mathrm{P}_X(\omega_A) = \tau_{!A\subset X}$$

Erklären wir nun die **Schnittprodukte**

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^!_{n-a}(X) \times \mathrm{H}^!_{n-b}(X) & \to & \mathrm{H}^!_{n-a-b}(X) \\ \mathrm{H}^!_{n-a}(X) \times \mathrm{H}_{n-b}(X) & \to & \mathrm{H}_{n-a-b}(X) \\ (\ \alpha\ ,\ \beta\ ) & \mapsto & \alpha \cdot \beta \end{array}$$

mit Hilfe unserer Poincaré-Isomorphismen und des cup-Produkts durch die Vorschriften $\mathrm{P}^!(\alpha \cdot \beta) = \mathrm{P}^!(\alpha) \cup \mathrm{P}^!(\beta)$ beziehungsweise $\mathrm{P}(\alpha \cdot \beta) = \mathrm{P}^!(\alpha) \cup \mathrm{P}(\beta)$, so liefern unsere Erkenntnisse 21.6.4.30 über das cup-Produkt der Fundamentalkozykel zweier orientierter sich transversal schneidender abgeschlossener orientierter Untermannigfaltigkeiten $A, B \mathrel{\not\subset} X$ die Identität

$$z^!_A \cdot z^!_B = z^!_{A \cap B}$$

in der lokalendlichen Homologie und im Fall von kompaktem B etwas feiner die Identität

$$z^!_A \cdot z_B = z_{A \cap B}$$

in der Homologie von X. In Worten ist also bei transversalem Schnitt das Schnittprodukt der Fundamentalzykel der Fundamentalzykel des Schnitts, den wir uns dabei mit der Schnittorientierung aus 21.6.4.30 versehen denken.

21.10 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich vielen, insbesondere Olaf Schnürer und Bernhard Link. Der Inhalt geht im wesentlichen zurück auf Grothendieck, Deligne und Verdier [Gro72]. Sehr nützlich waren mir die Darstellungen von Godement [God64] und Kashiwara-Schapira [KS90] und Skripten von Milicic und Hörmann zu derivierten Kategorien. Die Argumente zu unbeschränkten Auflösungen kommen aus [Spa88, Bek00]. Hilfreich waren auch die Texte des Stacks-Projektes. Bei der Behandlung der Verdier-Dualität halte ich mich eng an [SS15]. Die Vereigentlichung kommt aus der Dissertation von Maximilian Gerhards [Ger18]. Die Formulierung der Verträglichkeiten mit Hilfe von Schmelzkategorien habe ich von Fritz Hörmann [Hoe17] gelernt und für die hier relevanten Anwendungen so dargestellt, daß man dabei ohne Zweikategorien auskommt.

Teil E

Lie-Theorie

Kapitel 22

Mannigfaltigkeiten und Liegruppen

Inhalt

22.1 Matrixliegruppen 3773

22.1.1 Einfache Darstellungen der Drehgruppen 3773

22.1.2 Tangentialraum und Exponentialabbildung 3777

22.1.3 Liealgebren von Matrixliegruppen 3788

22.1.4 Homomorphismen von Matrixliegruppen 3794

22.1.5 Drehgruppe und Spingruppe 3802

22.1.6 Quaternionale Gruppen 3803

22.2 Endlichdimensionale Darstellungen 3807

22.2.1 Darstellungen und ihre Ableitungen 3807

22.2.2 Homomorphismen von Darstellungen 3811

22.2.3 Einfache Darstellungen der Spingruppe 3816

22.2.4 Haarmaß für Matrixliegruppen 3824

22.2.5 Vollständig reduzible Darstellungen 3828

22.2.6 Kugelfunktionen* 3833

22.3 Mannigfaltigkeiten 3840

22.3.1 Geringte Räume 3840

22.3.2 Mannigfaltigkeiten und Eckfaltigkeiten 3845

22.3.3 Tangentialräume 3854

22.3.4 Tangentialbündel 3862

22.3.5 Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten 3868

22.3.6 Flußwege und Flüsse 3871

22.3.7 Lieklammer von Vektorfeldern 3877
22.4 Liegruppen und Liealgebren 3884
22.4.1 Lieklammer und adjungierte Darstellung 3884
22.4.2 Kompakte Liealgebren 3891
22.4.3 Von Liealgebren zu Liegruppen 3893
22.4.4 Quotienten und homogene Räume 3898
22.4.5 Abelsche Liegruppen 3905
22.4.6 Morphismen von Tori 3910
22.5 Struktur kompakter Liegruppen 3913
22.5.1 Maximale Tori in kompakten Liegruppen 3913
22.5.2 Klassifikation im Rang Eins 3917
22.5.3 Weylgruppen kompakter Liegruppen 3922
22.5.4 Gitterspiegelungsgruppen 3924
22.5.5 Struktur der kompakten Liegruppen 3926
22.5.6 Spiegelungen in der Weylgruppe 3934
22.5.7 Klassifikation der kompakten Liegruppen* 3938
22.5.8 Einfache Darstellungen kompakter Liegruppen . . 3945
22.5.9 Differentialformen und Integration 3947
22.5.10 Die Weyl'schen Formeln 3952
22.5.11 Der Hamilton'sche Formalismus* 3960
22.6 Danksagung 3967

22.1 Matrixliegruppen

22.1.1 Einfache Darstellungen der Drehgruppen

22.1.1.1. Zur besseren Motivation der im folgenden entwickelten Theorie bespreche ich zunächst die Klassifikation der endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen der Drehgruppe. Die Beweise der im folgenden aufgestellten Behauptungen werden nach etwas auf sich warten lassen, sie sollen gerade den Aufbau der Theorie in den folgenden Abschnitten motivieren. Ich beginne mit einer Klärung einiger Grundbegriffe der Darstellungstheorie, wie sie in 8.1.1 ausführlicher besprochen werden.

Definition 22.1.1.2. Eine **Darstellung**, englisch und französisch **representation**, einer Gruppe G über einem Körper k ist ein Paar (V, ρ) bestehend aus einem k-Vektorraum V und einem Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

Oft bezeichnen wir eine Darstellung abkürzend mit demselben Symbol wie den zugrundeliegenden Vektorraum. Gegeben eine Darstellung V einer Gruppe G bezeichnet oft ρ_V den zugehörigen Gruppenhomomorphismus $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$.

22.1.1.3 (**Herkunft der Terminologie**). Im Fall $V = k^n$ ist $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(n; k)$ kanonisch isomorph zur Gruppe der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen. Ist der Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{GL}(n; k)$ dann auch noch injektiv, so „stellt ρ die abstrakte Gruppe G dar als eine konkrete Gruppe von Matrizen“. Daher rührt die Bezeichnung als „Darstellung“.

22.1.1.4 (**Darstellungen als Operationen**). Seien G eine Gruppe, k ein Körper und V ein k-Vektorraum. Die Bijektion $\mathrm{Ens}(G, \mathrm{Ens}(V, V)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(G \times V, V)$ des Exponentialgesetzes induziert dann eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Darstellungen} \\ G \to \mathrm{GL}(V) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} G\text{-Operationen } G \times V \to V \\ \text{durch } k\text{-lineare Abbildungen} \end{array} \right\}$$

Unter einer „G-Operation durch k-lineare Abbildungen“ verstehen wir dabei eine G-Operation $G \times V \to V$ auf der Menge V mit der Eigenschaft, daß gilt $g(v + w) = gv + gw$ und $g(\lambda v) = \lambda(gv)$ $\forall g \in G$, $\lambda \in k$ und $v, w \in V$. Gegeben eine Darstellung V schreiben wir im Lichte dieser Erkenntnis statt $(\rho_V(g))(v)$ meist einfach nur gv.

Beispiel 22.1.1.5. Jeder Vektorraum V wird eine Darstellung seiner Automorphismengruppe $G = \mathrm{GL}(V)$ vermittels $\rho = \mathrm{id}$. Diese Darstellung heißt die **Standarddarstellung von** $\mathrm{GL}(V)$.

Beispiel 22.1.1.6. Jeder Vektorraum V wird eine Darstellung jeder beliebigen Gruppe G vermittels der **trivialen Operation** $\rho(g) = \mathrm{id}_V \ \forall g \in G$. Der Körper k mit der trivialen Operation heißt die **Einsdarstellung**.

Beispiel 22.1.1.7 (**Darstellungen auf Funktionenräumen**). Gegeben eine Menge X mit einer Operation einer Gruppe G und ein Körper k wird der Funktionenraum $V := \mathrm{Ens}(X, k)$ eine Darstellung von G vermittels der Vorschrift

$$(gf)(x) := f(g^{-1}x) \quad \forall g \in G,\ x \in X$$

Zum Beispiel operiert die Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ auf der Kugelschale S^2 und der Raum $\mathrm{Ens}(S^2, \mathbb{R})$ aller reellwertigen Funktionen auf der Kugelschale wird so eine reelle Darstellung der Drehgruppe.

Beispiel 22.1.1.8 (**Darstellungen der Gruppe der ganzen Zahlen**). Für jede Gruppe G liefert das Auswerten bei 1 nach 2.2.3.31 eine Bijektion $\mathrm{Grp}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} G$ zwischen der Menge der Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{Z}$ nach G und der Gruppe G selbst. Eine Darstellung (V, ρ) der Gruppe $\mathbb{Z}$ anzugeben bedeutet demnach nichts anderes, als einen Automorphismus $A \in \mathrm{GL}(V)$ des Vektorraums V anzugeben, nämlich den Automorphismus $A = \rho(1)$. Die zugehörige Darstellung wird dann gegeben durch den Gruppenhomomorphismus $\rho_A : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(V)$ mit $n \mapsto A^n$.

Definition 22.1.1.9. Seien V, W Darstellungen einer Gruppe G über einem festen Körper k. Ein **Homomorphismus von Darstellungen** oder **Verflechtungsoperator** oder englisch **intertwining operator** ist eine k-lineare Abbildung $f : V \to W$ derart, daß gilt

$$f(gv) = gf(v) \quad \forall v \in V,\ g \in G$$

Ein **Isomorphismus von Darstellungen** ist ein bijektiver Homomorphismus. Gibt es einen Isomorphismus zwischen zwei Darstellungen V und W, so schreiben wir auch $V \cong W$ und sagen, V und W seien **isomorph**.

Ergänzung 22.1.1.10 (**Darstellungen in der Begriffswelt der Kategorien**). Zusammenfassend haben wir im vorhergehenden für jede Gruppe G und jeden Körper k eine Kategorie $\mathrm{Mod}_{k,G}$ konstruiert, die „Kategorie aller Darstellungen der Gruppe G über dem Körper k“. Im Rahmen der Kategorientheorie können wir diese Kategorie auch beschreiben als die Kategorie

$$\mathrm{Mod}_{k,G} = \mathrm{Cat}([G], \mathrm{Mod}_k)$$

aller Funktoren von der Ein-Objekt-Kategorie $[G]$ aus 4.7.1.6 in die Kategorie Mod_k aller k-Vektorräume im Sinne von 19.5.1.21.

Beispiel 22.1.1.11. Sind (V, A) und (W, B) Vektorräume mit Automorphismus, so ist ein Homomorphismus der zugehörigen Darstellungen (V, ρ_A) und (W, ρ_B) der Gruppe $\mathbb{Z}$ eine lineare Abbildung $f : V \to W$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "A"'] & W \arrow[d, "B"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert. In der Tat folgt aus $fA = Bf$ nämlich $fA^n = B^n f$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Definition 22.1.1.12. Sei G eine Gruppe.

1. Eine Teilmenge $W \subset V$ einer Darstellung V von G heißt eine **Unterdarstellung**, wenn W ein unter G stabiler Untervektorraum ist, in Formeln $g \in G, w \in W \Rightarrow gw \in W$;

2. Eine Darstellung V von G heißt **irreduzibel** oder **einfach**, wenn sie genau zwei Unterdarstellungen hat. Das ist gleichbedeutend dazu, daß V nicht der Nullraum ist und daß 0 und V die einzigen Unterdarstellungen von V sind.

Beispiele 22.1.1.13. Jede eindimensionale Darstellung ist irreduzibel. Unsere Darstellung $\mathrm{Ens}(S^2, \mathbb{R})$ der Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ aus 22.1.1.7 ist nicht irreduzibel, denn die konstanten Funktionen oder auch die stetigen Funktionen bilden jeweils eine echte und von Null verschiedene Unterdarstellung.

Satz 22.1.1.14 (**Einfache Darstellungen der Kreisgruppe**). *Jede einfache endlichdimensionale stetige komplexe Darstellunge der Kreisgruppe S^1 ist für genau ein $n \in \mathbb{Z}$ isomorph zur Darstellung $(\mathbb{C}, \rho_n)$ gegeben durch $\rho_n(z) := z^n \in \mathrm{GL}(1; \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ für alle $z \in S^1$.*

22.1.1.15. Anders gesagt liefert also die Vorschrift $n \mapsto \rho_n$ eine Bijektion

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Einfache stetige endlichdimensionale} \\ \text{komplexe Darstellungen der Kreislinie } S^1, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\}$$

Mit einer **stetigen Darstellung** (V, ρ) ist hier schlicht gemeint, daß ρ stetig sein soll. Im Fall topologischer Vektorräume V unendlicher Dimension muß die Stetigkeit einer Darstellung allerdings sorgfältiger formuliert werden.

22.1.1.16 (**Einfache Darstellungen der ebenen Drehgruppe**). Die einfachen endlichdimensionalen stetigen komplexen Darstellungen der Gruppe $\mathrm{SO}(2)$ der ebenen Drehungen sind damit auch klassifiziert, denn es gibt einen, ja sogar genau zwei stetige Gruppenisomorphismen $\mathrm{SO}(2) \xrightarrow{\sim} S^1$ und deren Umkehrabbildungen sind auch stetig.

Beweis. Sei $\rho : S^1 \to \mathrm{GL}(V)$ eine von Null verschiedene endlichdimensionale komplexe Darstellung. Da die $\rho(g)$ paarweise kommutieren, besitzen sie nach 4.3.2.18 einen simultanen Eigenvektor $v \in V\backslash 0$. Die von diesem Eigenvektor erzeugte Gerade ist dann eine Unterdarstellung. Folglich ist jede einfache endlichdimensionale komplexe Darstellung unserer Gruppe, wie im übrigen jede einfache endlichdimensionale komplexe Darstellung einer beliebigen kommutativen Gruppe, eindimensional. Folglich wird sie gegeben durch einen stetigen Gruppenhomomorphismus $S^1 \to \mathbb{C}^\times$. Sein Bild muß eine kompakte Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$ sein und folglich in S^1 liegen. Die stetigen Gruppenhomomorphismen $S^1 \to S^1$ kennen wir aber bereits aus 13.2.7.13. □

Satz 22.1.1.17 (**Einfache Darstellungen der räumlichen Drehgruppe**). *Die einfachen endlichdimensionalen stetigen komplexen Darstellungen der räumlichen Drehgruppe werden klassifiziert durch ihre Dimension. Genauer liefert die Dimension eine Bijektion mit den ungeraden natürlichen Zahlen*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Einfache endlichdimensionale stetige komplexe} \\ \textit{Darstellungen der räumlichen Drehgruppe } \mathrm{SO}(3), \\ \textit{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \{1, 3, 5, \ldots\}$$

22.1.1.18. Anders gesagt ist also (1) die Dimension jeder einfachen endlichdimensionalen stetigen komplexen Darstellung der räumlichen Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ ungerade, zu jeder ungeraden natürlichen Zahl gibt es umgekert auch (2) eine einfache Darstellung dieser Dimension und je zwei einfache Darstellungen derselben Dimension sind (3) isomorph.

22.1.1.19. Der vorhergehende Satz gilt analog auch für die einfachen stetigen reellen Darstellungen der räumlichen Drehgruppe. Sein Beweis kann erst nach einigen Vorbereitungen in 22.2.3.9 gegeben werden. Er bildet eine wesentliche Motivation für die im folgenden entwickelte Theorie.

Beispiele 22.1.1.20. Die einfache Darstellung der Dimension 1 ist die Einsdarstellung. Die einfache reelle Darstellung der Dimension 3 ist die Standarddarstellung $\mathrm{SO}(3) \hookrightarrow \mathrm{GL}(3;\mathbb{R})$ alias die Einbettung als Untergruppe. Die einfache komplexe Darstellung der Dimension 3 entsteht daraus durch das Nachschalten der offensichtlichen Einbettung $\mathrm{GL}(3;\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(3;\mathbb{C})$. Die einfache reelle Darstellung der Dimension 5 kann man konstruieren als den Raum aller symmetrischen reellen (3×3)-Matrizen mit Spur Null unter der durch die Konjugation gegebenen Operation. Es ist aber nicht ganz so leicht zu sehen, daß diese Darstellung irreduzibel ist.

Ergänzung 22.1.1.21 (**Eindimensionale Darstellungen der Drehgruppe**). Insbesondere beinhaltet der vorhergehende Satz die Behauptung, daß jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\rho : \mathrm{SO}(3) \to \mathbb{C}^\times$ konstant ist. Will man das explizit

einsehen, kann man sich überlegen, daß es für jede Drehung $r \in \mathrm{SO}(3)$ eine weitere Drehung $x \in \mathrm{SO}(3)$ gibt mit $r^{-1} = xrx^{-1}$. In der Tat sagt der Satz vom Fußball 4.1.4.14, daß jede Drehung $r \in \mathrm{SO}(3)$ eine Gerade punktweise festhält, und als x können wir dann eine beliebige Drehung nehmen, die diese Gerade stabilisiert aber nicht punktweise festhält. Es folgt $\rho(r)^{-1} = \rho(r)$ alias $\rho(r) = \pm 1 \ \forall r$. Da aber $\mathrm{SO}(3)$ wegzusammenhängend ist, etwa wieder nach dem Satz vom Fußball, folgt $\rho(r) = 1 \ \forall r$.

Übungen

Übung 22.1.1.22 (**Rückzug von Darstellungen mit inneren Automorphismen**). Gegeben ein Gruppenhomomorphismus $H \to G$ können wir jede Darstellung V von G zurückziehen zu einer Darstellung $\mathrm{res}_G^H V$ von H. Man zeige, daß wir beim Zurückziehen mit einem inneren Automorphismus $G \to G$ eine zur ursprünglichen Darstellung isomorphe Darstellung erhalten.

Übung 22.1.1.23. Gegeben eine Darstellung (V, ρ) einer Gruppe G über einem Körper k erhalten wir eine Darstellung (V^*, ρ^*) auf dem Dualraum durch die Vorschrift $\rho^*(g) = (\rho(g^{-1}))^\top$. Sie heißt die **kontragrediente Darstellung** zur Darstellung (V, ρ). Man zeige, daß eine endlichdimensionale Darstellung einfach ist genau dann, wenn die zugehörige kontragrediente Darstellung einfach ist. Man gebe ein Beispiel für eine eindimensionale Darstellung, die nicht zu ihrer kontragredienten Darstellung isomorph ist.

Übung 22.1.1.24. Man zeige, daß die Quaternionen als reeller Vektorraum eine irreduzible Darstellung der Gruppe $\{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{j}, \pm \mathrm{k}\}$ aus 6.1.4.13 bilden.

Übung 22.1.1.25 (**Einfache reelle Darstellungen der Kreisgruppe**). Jede einfache endlichdimensionale stetige reelle Darstellunge der Kreisgruppe S^1 ist entweder isomorph zur Einsdarstellung $\mathbb{R}$ oder für genau ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ isomorph zur reell zweidimensionalen Darstellung $(\mathbb{C}, \rho_n)$ gegeben durch $\rho_n(z) := z^n \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ für alle $z \in S^1$.

22.1.2 Tangentialraum und Exponentialabbildung

22.1.2.1 (**Erinnerungen an eingebettete Mannigfaltigkeiten**). Ich erinnere daran, daß wir die natürliche Topologie auf einem endlichdimensionalen reellen Raum in 11.2.3.15 erklärt hatten als die metrische Topologie zu einer und jeder Norm. Ich erinnere daran, daß wir in 12.3.2.6 und 22.1.2.8 vereinbart hatten, eine Teilmenge $M \subset X$ eines n-dimensionalen reellen affinen Raums X eine **glatte k-Mannigfaltigkeit** zu nennen, wenn es um jeden Punkt $p \in M$ ein lokales Kordinatensystem (U, g) von X gibt mit

$$M \cap U = \{x \in U \mid g_{k+1}(x) = \ldots = g_n(x) = 0\}$$

Anders gesagt wird also M „lokal durch das Verschwinden der letzten k Koordinaten eines glatten lokalen Koordinatensystems von X beschrieben“. Eine **Karte von** M erklären wir wie in 12.3.4.2 als ein Paar (W, φ) mit $W \Subset \mathbb{R}^k$ und $\varphi : W \hookrightarrow M$ offen, glatt und injektiv derart, daß die Verknüpfung mit der Einbettung $i \circ \varphi : W \hookrightarrow X$ an jeder Stelle injektives Differential hat. Ich erinnere an den Tangentialraum $\mathrm{T}_p M \subset \vec{X}$ an eine eingebettete Mannigfaltigkeit M in einem Punkt $p \in M$ aus 12.3.2.7, den wir definiert hatten als die Menge aller Geschwindigkeitsvektoren bei p von stetig differenzierbaren Wegen durch p in M. Insbesondere haben wir im Fall $M \Subset X$ einer offenen Teilmenge $\mathrm{T}_p M = \vec{X}$ für alle $p \in M$.

22.1.2.2 (**Tangentialräume von Mannigfaltigkeiten in Vektorräumen**). Im Fall einer Untermannigfaltigkeit $M \subset V$ eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums V erinnere ich zusätzlich an unsere kanonische Identifikation

$$\mathrm{trans} : V \xrightarrow{\sim} \vec{V}$$

zwischen dem zugrundeliegenden Vektorraum und dem Richtungsraum des zugehörigen affinen Raums aus 3.3.1.8 durch $\mathrm{trans} : v \mapsto (v+)$, die derart kanonisch ist, daß wir sie in Sprache und Notation oft so behandeln, als seien diese beiden Vektorräume schlicht gleich. Im Fall einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums $M \Subset V$ haben wir in dieser Konvention dann $\mathrm{T}_p M = V$. Im Fall der Zahlengeraden machen wir aber doch gerne den Unterschied und schreiben $\partial = \mathrm{trans}(1) \in \vec{\mathbb{R}}$.

Satz 22.1.2.3 (**Untergruppen als Untermannigfaltigkeiten**). *Jede abgeschlossene Untergruppe der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist eine glatte Untermannigfaltigkeit im Raum aller Endomorphismen unseres Vektorraums.*

22.1.2.4. Bezeichne V unseren endlichdimensionalen reellen Vektorraum. Man beachte, daß wir von unserer Gruppe $G \mathrel{\underline{\triangle}} \mathrm{Aut}\, V$ keineswegs fordern, daß sie abgeschlossen sein soll im endlichdimensionalen Vektorraum $\mathrm{End}\, V$. Ausgeschrieben fordern wir vielmehr nur für jede Folge in G, die bezüglich irgendeiner Norm auf $\mathrm{End}\, V$ gegen einen Punkt von $\mathrm{Aut}\, V$ konvergiert, daß dann auch dieser Punkt bereits in G liegen soll. Eine abgeschlossene Untergruppe der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums nennen wir eine **Matrix-Liegruppe**.

Beispiele 22.1.2.5. Typische Beispiele für Matrixliegruppen sind die allgemeinen linearen Gruppen $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) = \mathrm{Aut}\, \mathbb{R}^n$, $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C}) \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}\, \mathbb{C}^n$ und $\mathrm{GL}(n;\mathbb{H}) \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}\, \mathbb{H}^n$ für den Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Quaternionen aus 3.5.6.4; die Gruppen $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R}) \subset$

$\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ und $\mathrm{SL}(n;\mathbb{C}) \subset \operatorname{Aut}\mathbb{C}^n$ aller reellen beziehungsweise komplexen Matrizen mit Determinante Eins; die Gruppen $\mathrm{O}(n) \subset \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ und $\mathrm{U}(n) \subset \operatorname{Aut}\mathbb{C}^n$ aller orthogonalen beziehungsweise unitären Matrizen und darin die Untergruppen $\mathrm{SO}(n)$ und $\mathrm{SU}(n)$ aller Matrizen mit Determinante Eins; die Gruppen aller invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen, aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen, oder aller reellen oder komplexen Diagonalmatrizen, jeweils zu einer fest vorgegebenen Zahl von Zeilen und Spalten.

Vorschau 22.1.2.6. Eine „Liegruppe“ oder ausführlicher und gleichbedeutend „abstrakten Liegruppe“ erklären wir in 22.3.2.19 ganz allgemein eine „glatte Mannigfaltigkeit“ G mit einer Gruppenstruktur derart, daß die Multiplikation $G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto xy$ und die Inversenbildung $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ beide glatt sind. Die Terminologie erinnert an den Begründer der Theorie, den norwegischen Mathematiker Sophus Lie (1842-1899). Hierbei verstehen wir unter Mannigfaltigkeiten nicht nur eingebettete Mannigfaltigkeiten, sondern allgemeiner abstrakte Mannigfaltigkeiten, wie wir sie in 22.3.2.1 diskutieren. Wir werden dort sehen, wie sich unsere Argumente in diesem Rahmen verallgemeinern lassen. Insbesondere wird es sich erweisen, daß jede Matrixliegruppe mit ihrer „induzierten Struktur als Manigfaltigkeit“ auch eine Liegruppe ist.

22.1.2.7. Wir zeigen obigen Satz 22.1.2.3 zusammen mit einer genaueren Aussage, die wir im folgenden formulieren. Dazu erinnern wir daran, daß wir in **??** für jeden endlichdimensionalen reellen Vektorraum V die Exponentialabbildung

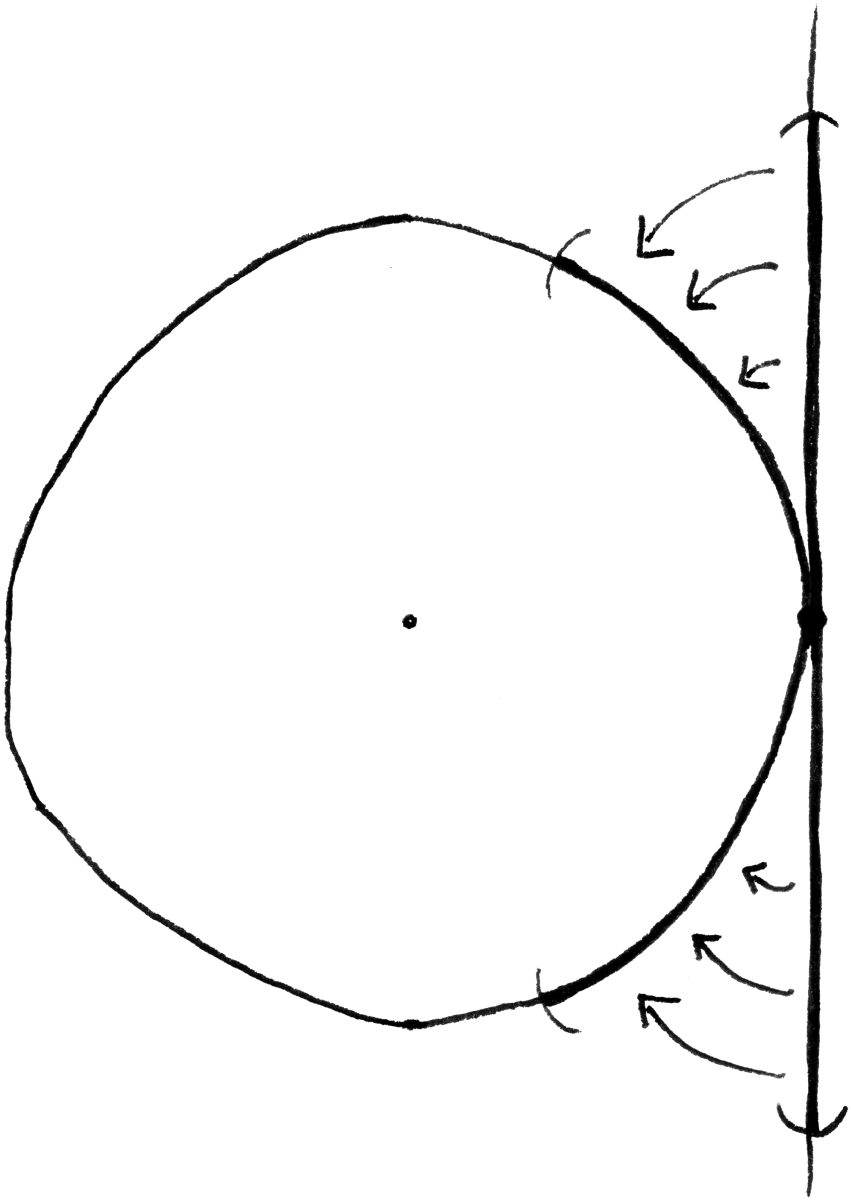
$$\begin{array}{rccc} \exp: & \operatorname{End} V & \to & \operatorname{Aut} V \\ & X & \mapsto & \sum_{\nu \geq 0} X^\nu/\nu! \end{array}$$

eingeführt hatten. Sie ist eine glatte Abbildung nach **??** und ihr Differential am Ursprung ist die Identität nach 12.1.3.26.

Definition 22.1.2.8. Eine Abbildung von einer Untermannigfaltigkeit eines endlichdimensionalen reellen Raums in einen endlichdimensionalen reellen Raum heißt **glatt**, wenn die daraus durch Vorschalten einer beliebigen Karte unserer Untermannigfaltigkeit entstehende Abbildung glatt ist im Sinne von 12.8.5.8.

Definition 22.1.2.9. Eine Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten endlichdimensionaler reeller Räume heißt **glatt**, wenn ihre Verknüpfung mit der Einbettung der zweiten Untermannigfaltigkeit glatt ist im Sinne von 22.1.2.8. Ein **Diffeomorphismus** von glatten Untermannigfaltigkeiten ist eine glatte bijektive Abbildung mit glatter Umkehrabbildung.

22.1.2.10. Den Tangentialraum an eine Matrixliegruppe im neutralen Element nennen wir den **Einstangentialraum**.



Der besseren Anschaulichkeit halber habe ich hier den Einstangentialraum $\mathrm{T}_1 S^1 = \mathrm{i}\mathbb{R}$ an die Kreislinie dargestellt als den „zum Fußpunkt 1 verschobenen“ affinen Raum $1 + \mathrm{T}_1 S^1 \subset \mathbb{C}$. Die kleinen Pfeile deuten die Exponentialabbildung an, genauer die Abbildung $1 + \mathrm{i}a \mapsto \exp \mathrm{i}a$.

Satz 22.1.2.11 (Tangentialraum und Exponentialabbildung). *Gegeben eine Matrixliegruppe $G \mathrel{\not\subset} \mathrm{GL}(V)$ gilt:*

1. *Der Einstangentialraum $\mathrm{T}_e G \subset \mathrm{Richt}(\mathrm{End}\, V)$ unserer Matrixliegruppe entspricht unter $\mathrm{trans} : \mathrm{End}\, V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Richt}(\mathrm{End}\, V)$ der Vereinigung aller Ursprungsgeraden des Endomorphismenraums, die unter der Exponentialabbildung in unserer Matrixliegruppe G landen;*

2. *Die Verknüpfung $\exp \circ \mathrm{trans}^{-1} : \mathrm{T}_e G \to G$ liefert einen Diffeomorphismus im Sinne von 22.1.2.9 zwischen einer offenen Umgebung der Null im Einstangentialraum $\mathrm{T}_e G$ und einer offenen Umgebung des neutralen Elements $e \in G$.*

Beispiel 22.1.2.12. Der Satz gilt a forteriori auch für jeden endlichdimensionalen komplexen oder quaternionalen Vektorraum und kann am Beispiel der Kreisgruppe $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$ besonders gut veranschaulicht werden: In diesem Fall haben wir $\mathrm{T}_1 S^1 = \mathrm{trans}(\mathrm{i}\mathbb{R})$.

Beweis von 22.1.2.3 und 22.1.2.11. Wir zeigen zunächst, daß die Menge

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathrm{End}\, V \mid \exp(\mathbb{R}X) \subset G\}$$

ein Untervektorraum des Endomorphismenraums ist. Nach dem Umkehrsatz der Analysis 12.3.1.2 definiert ja die Exponentialabbildung $\mathrm{End}\, V \to \mathrm{Aut}\, V$ einen Diffeomorphismus zwischen einer offenen Umgebung $A \mathrel{\Subset} \mathrm{End}\, V$ der Null und einer offenen Umgebung $B \mathrel{\Subset} \mathrm{Aut}\, V$ der Identität. Jetzt brauchen wir eine Formel, die ich als eigenständiges Lemma formuliere.

Lemma 22.1.2.13 (Produktformel von Trotter). *Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, so gilt für alle $X, Y \in \mathrm{End}\, V$ die Formel*

$$\exp(X+Y) = \lim_{n\to\infty} \left(\exp\left(\frac{X}{n}\right)\exp\left(\frac{Y}{n}\right)\right)^n$$

Ergänzung 22.1.2.14. Das verallgemeinert sich mit demselben Beweis auf den Fall eines beliebigen Banachraums V, wenn wir statt $\mathrm{End}\, V$ nur den Teilraum der stetigen Endomorphismen $\mathcal{B}(V)$ betrachten und statt $\mathrm{Aut}\, V$ die Gruppe $\mathcal{B}(V)^\times$ der Einheiten dieses Rings.

Beweis. Für kleine $t \in \mathbb{R}$ gilt sicher

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(Z(t))$$

für eine wohldefinierte glatte Kurve $Z : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \operatorname{End} V$. Ein Vergleich der Differentiale zeigt $\dot{Z}(0) = X + Y$ und folglich $Z(t) = t(X+Y) + t\eta(t)$ für η stetig bei Null mit Funktionswert Null. So ergibt sich

$$\begin{aligned}\left(\exp(\tfrac{X}{n})\exp(\tfrac{Y}{n})\right)^n &= \exp\left(Z(\tfrac{1}{n})\right)^n \\ &= \exp\left(nZ(\tfrac{1}{n})\right) \\ &= \exp\left(X + Y + \eta(\tfrac{1}{n})\right)\end{aligned}$$

und das strebt für $n \to \infty$ offensichtlich gegen $\exp(X+Y)$. □

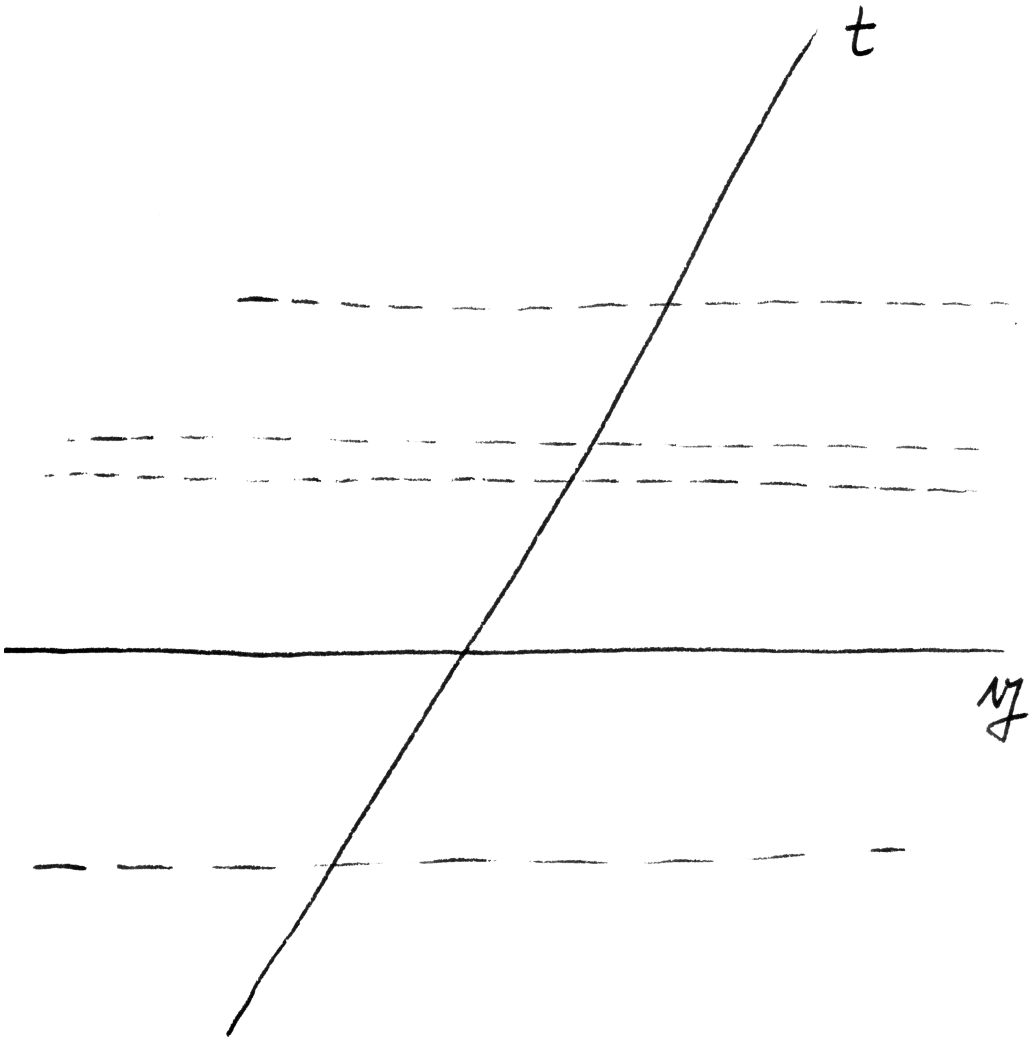
Unsere Menge $\mathfrak{g}$ aller $X \in \operatorname{End} V$ mit $\exp(\mathbb{R}X) \subset G$ vom Beginn des Beweises ist nun sicher für jede Untergruppe G stabil unter der Multiplikation mit reellen Zahlen, und nach der Produktformel von Trotter 22.1.2.13 gilt im Fall einer abgeschlossenen Untergruppe G auch $X, Y \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad (X+Y) \in \mathfrak{g}$. Damit ist die Menge $\mathfrak{g}$ in der Tat ein Untervektorraum von $\operatorname{End} V$. Wir wählen nun zu diesem Untervektorraum ein Komplement $\mathfrak{t}$, also $\operatorname{End} V = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{t}$, und betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rccl}\psi : & \operatorname{End} V & \to & \operatorname{Aut} V \\ & X + Y & \mapsto & (\exp X)(\exp Y)\end{array}$$

für alle $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{t}$. Offensichtlich ist $\psi^{-1}(G)$ stabil unter der Addition von Vektoren aus $\mathfrak{g}$. Weiter hat ψ bijektives Differential bei Null und induziert folglich nach dem Umkehrsatz 12.3.1.2 oder besser seiner glatten Variante **??** einen Diffeomorphismus $\psi : A \xrightarrow{\sim} B$ zwischen geeigneten offenen Umgebungen der Null in $\operatorname{End} V$ beziehungsweise der Identität in $\operatorname{Aut} V$. Wenn wir zeigen können, daß ψ für hinreichend kleine A und B sogar eine Bijektion

$$\psi : A \cap \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} B \cap G$$

induziert, so liefert die Umkehrabbildung von ψ eine Plättung im Sinne von 12.3.2.6 der Gruppe G um das neutrale Element. Die Umkehrabbildung von $(g\cdot) \circ \psi$ liefert dann auch eine Plättung um ein beliebiges Element $g \in G$ und 22.1.2.3 ist bewiesen und 22.1.2.11 folgt aus dem Beweis gleich auch noch mit. Also müssen wir nur noch die behauptete Eigenschaft von ψ zeigen. Da $\psi^{-1}(G)$ stabil ist unter der Addition von Vektoren aus $\mathfrak{g}$, reicht es zu zeigen, daß die Null ein offener Punkt von $\psi^{-1}(G) \cap \mathfrak{t}$ ist, daß es also eine Umgebung der Null in $\mathfrak{t}$ gibt, die $\psi^{-1}(G)$ nur in Null trifft. Nun ist aber $\psi^{-1}(G) \cap \mathfrak{t}$ sicher stabil unter der Multiplikation mit ganzen Zahlen. Wäre außerdem die Null ein Häufungspunkt von $\psi^{-1}(G) \cap \mathfrak{t}$, so fänden wir nach dem anschließenden technischen Lemma 22.1.2.15 ein von Null verschiedenes $X \in \mathfrak{t}$ mit $\mathbb{R}X \subset \psi^{-1}(G) \cap \mathfrak{t}$ im Widerspruch zu unserer Annahme $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g} = 0$. □



Die $\mathfrak{g}$-Linie zusammen mit den parallelen gestrichelten Linien stellen die unter Addition mit Vektoren aus $\mathfrak{g}$ stabile Menge $\psi^{-1}(G)$ dar.

Lemma 22.1.2.15. *Ist eine abgeschlossene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums stabil unter der Multiplikation mit allen ganzen Zahlen und ist der Ursprung ein Häufungspunkt unserer Teilmenge, so enthält unsere Teilmenge eine Gerade durch den Ursprung.*

Beweis. Sei M unser endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $C \subset M$ unsere abgeschlossene Teilmenge. Wir wählen eine Norm $|\ |$ auf M. Nach unseren Annahmen finden wir eine Nullfolge c_n in $C \backslash 0$. Bezeichnet β_n die kleinste ganze Zahl über $1/|c_n|$, so haben wir offensichtlich $\lim_{n\to\infty} |\beta_n c_n| = 1$ und nach Heine-Borel besitzt die Folge $\beta_n c_n$ eine konvergente Teilfolge. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß sie bereits selbst konvergiert, sagen wir gegen ein $d \in C$, in Formeln $\lim_{n\to\infty} \beta_n c_n = d$. Sicher gilt dann $|d| = 1$. Ist weiter $t \in \mathbb{R}$ beliebig, so gibt es wegen $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty$ eine Folge von ganzen Zahlen γ_n mit $\lim_{n\to\infty} \gamma_n/\beta_n = t$ und folglich

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n c_n = (\lim_{n\to\infty} \gamma_n/\beta_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} \beta_n c_n) = td$$

Da C abgeschlossen ist, folgt $\mathbb{R}d \subset C$. □

Beispiel 22.1.2.16 (**Einstangentialraum an** $\mathrm{GL}(n)$ **und** $\mathrm{SL}(n)$). Wir verwenden hier unsere Konvention 22.1.2.2 und identifizieren also stillschweigend jeden Vektorraum mit dem Richtungsraum des zugehörigen affinen Raums. Der Einstangentialraum an $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ ist dann $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$. Der Einstangentialraum an $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$ ist die Menge $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{R})$ aller $(n \times n)$-Matrizen mit Spur Null. In der Tat beachte man die Formel

$$\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$$

Sie ist für komplexe obere Dreiecksmatrizen offensichtlich und folgt für beliebige komplexe Matrizen mit dem Satz über die Trigonalisierbarkeit 3.6.6.11 daraus, daß beide Seiten konstant sind auf Konjugationsklassen, daß also beide Seiten für alle Matrizen A und alle invertierbaren Matrizen B auf A und BAB^{-1} denselben Wert annehmen. Diese Formel zeigt, daß $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{R})$ unter der Exponentialabbildung in $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$ landet, und daraus folgt bereits $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{R}) \subset \mathrm{T}_e\,\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$. Andererseits umfaßt $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$ keine Umgebung der Einheitsmatrix in $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, und daraus folgt $\mathrm{T}_e\,\mathrm{SL}(n;\mathbb{R}) \neq \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$. Beides zusammen zeigt dann die Gleichheit $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{R}) = \mathrm{T}_e\,\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$. Ein besseres Argument liefert später 22.1.4.20.

Beispiel 22.1.2.17 (**Einstangentialraum orthogonaler Gruppen**). Der Einstangentialraum der Gruppe $\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \mid AA^\top = I\}$ ist der Raum der schiefsymmetrischen Matrizen

$$\mathrm{T}_I\,\mathrm{O}(n) = \{X \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R}) \mid X + X^\top = 0\}$$

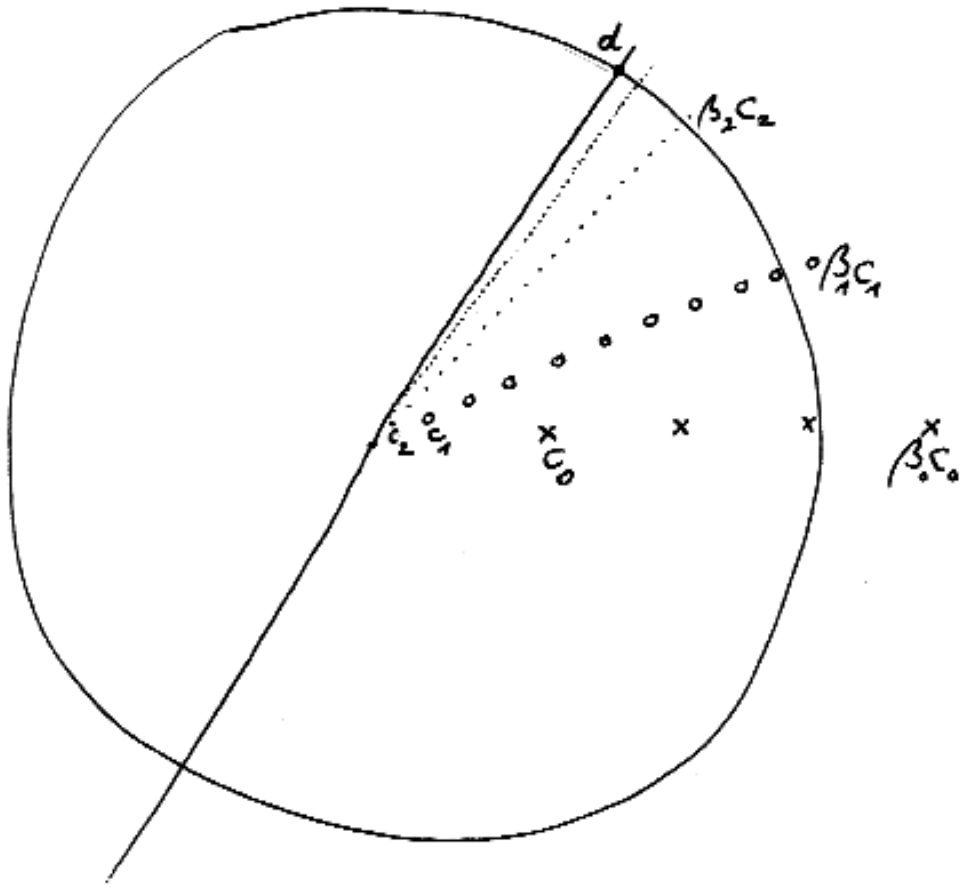


Illustration zum Beweis von 22.1.2.15. Die Kreislinie stellt den Einheitskreis dar, die Kreuzchen, Kringelchen und Punkte die ersten Folgenglieder c_0, c_1, c_2 und ihre Vielfachen.

Um das zu sehen, verwenden wir die exponentielle Beschreibung 22.1.2.11. In der Tat folgt aus $X + X^\top = 0$ sofort $I = \exp(tX + tX^\top) = \exp(tX)\exp(tX^\top) = \exp(tX)\exp(tX)^\top$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und umgekehrt folgt für $X \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ aus $\exp(tX)\exp(tX)^\top = I$ für alle $t \in \mathbb{R}$ durch Bilden der Ableitung nach t bei $t = 0$ auch sofort $X + X^\top = 0$. Die Bestimmung des Tangentialraums liefert für die Dimension der orthogonalen Gruppen die Formel $\dim \mathrm{O}(n) = n(n-1)/2$.

22.1.2.18. Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht leer ist und sich nicht als disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren offenen Teilmengen schreiben läßt. Wir werden diese Eigenschaft in 15.1.3.3 ausführlich diskutieren. Aus 15.1.3.15 wird folgen, daß eine Matrixliegruppe genau dann zusammenhängend ist, wenn sie wegzusammenhängend ist im Sinne unserer Definition 12.7.5.1.

Beispiel 22.1.2.19 (**Komponenten orthogonaler Gruppen**). Die spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{O}(n)$ ist nach 12.7.5.19 zusammenhängend und als Urbild von 1 unter $\det$ auch abgeschlossen. Da ihr Komplement als Urbild von (-1) unter $\det$ ebenfalls abgeschlossenen ist, und da dies Komplement darüber hinaus auch zusammenhängend, ja sogar homöomorph zu $\mathrm{SO}(n)$ ist, erhalten wir damit eine Darstellung von $\mathrm{O}(n)$ als eine disjunkte Vereinigung von zwei offenen zusammenhängenden Teilmengen.

Proposition 22.1.2.20. *Eine zusammenhängende Matrixliegruppe wird von jeder Umgebung ihres neutralen Elements erzeugt.*

Vorschau 22.1.2.21. In 15.2.1.10 zeigen wir dieselbe Aussage allgemeiner für beliebige topologische Gruppen.

Beweis. Die von einer Umgebung U des neutralen Elements erzeugte Untergruppe $H \subset G$ ist offen in unserer Gruppe G, da für jedes $h \in H$ auch seine Umgebung hU in H enthalten ist. Dann sind auch alle Linksnebenklassen Hg unserer Untergruppe offen in G. Als Bahnen der Linksoperation von H auf G sind sie aber paarweise disjunkt, und für G zusammenhängend folgt dann aus 15.1.3.15 bereits, daß es nur eine einzige Linksnebenklasse geben kann, also $H = G$. □

Korollar 22.1.2.22 (Einstangentialraum bestimmt Einskomponente). *Haben zwei zusammenhängende abgeschlossene Untergruppen der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums denselben Einstangentialraum, so stimmen sie überein.*

Beweis. Nach Lemma 22.1.2.20 wird eine zusammenhängende Matrixliegruppe von jeder Umgebung ihres neutralen Elements erzeugt. Wegen 22.1.2.11 umfaßt das Bild der Exponentialabbildung stets eine Umgebung des neutralen Elements, folglich wird eine zusammenhängende Matrixliegruppe stets vom Bild ihres Einstangentialraums unter der Exponentialabbildung erzeugt. □

Beispiel 22.1.2.23 (**Einstangentialraum orthogonaler Gruppen, Variante**). Sind V, W endlichdimensionale reelle Vektorräume und ist $\omega : V \times V \to W$ bilinear und $G \subset \mathrm{GL}(V)$ die Gruppe aller g mit $\omega(gv, gu) = \omega(v, u)$ für alle $v, u \in V$, so besteht $\mathrm{T}_e G \subset \mathrm{End}(V)$ genau aus allen Endomorphismen X mit $\omega(Xv, u) + \omega(v, Xu) = 0$ für alle $v, u \in V$. Das will ich nun einmal beispielhaft ausarbeiten. Gegeben X mit $\omega(\exp(tX)v, \exp(tX)u) = \omega(v, u)$ für alle t, u, v erhalten wir durch Ableiten beider Seiten nach t bei $t = 0$ bereits $\omega(Xv, u) + \omega(v, Xu) = 0$. Hier verwenden wir die Kettenregel für Differentiale 12.1.4.2 und die Formel für das Differential einer bilinearen Abbildung 12.1.6.5. Umgekehrt finden wir $\exp(X \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes X) = \exp(X) \otimes \exp(X)$ mit der Formel 10.7.2.4 und damit folgt leicht die Gegenrichtung.

Übungen

Übung 22.1.2.24 (**Zusammenhangskomponenten von Matrixliegruppen**). Gegeben eine Matrixliegruppe G ist ihre Einskomponente alias Zusammenhangskomponente des neutralen Elements offen und abgeschlossen in G und insbesondere selbst eine Matrixliegruppe derselben Dimension wie G.

Ergänzende Übung 22.1.2.25. Man folgere direkt aus 22.1.2.15, daß jede zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ein Untervektorraum ist. Hinweis: Vollständige Induktion.

Übung 22.1.2.26 (**Einstangentialraum an** $\mathrm{U}(n)$). Der Einstangentialraum der Gruppe $\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{C}) \mid A\bar{A}^\top = I\}$ der unitären Matrizen ist der Raum der schiefhermiteschen Matrizen

$$\mathrm{T}_I \, \mathrm{U}(n) = \{X \in \mathrm{Mat}(n; \mathbb{C}) \mid X + \bar{X}^\top = 0\}$$

Hinweis: Es geht auch noch allgemeiner, vergleiche 22.1.2.23.

Übung 22.1.2.27. Ich erinnere an das Kreuzprodukt auf einem dreidimensionalen orientierten reellen Skalarproduktraum 4.1.9.1. Gegeben ein dreidimensionaler Skalarproduktraum V liefert mit dieser Begriffsbildung die Wahl einer Orientierung einen Vektorraumisomorphismus

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{T}_e \mathrm{O}(V) \\ \vec{v} & \mapsto & (\vec{v}\times) \end{array}$$

Der Automorphismus $\exp(\vec{v}\times)$ bedeutet geometrisch eine Drehung um die Achse $\mathbb{R}\vec{v}$ mit Winkel $\|\vec{v}\|$ im Bogenmaß. Ist genauer $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ eine orientierte Orthonormalbasis von V, so zeige man für die Matrix $\exp(t\vec{v}_1\times)$ in dieser Basis die Formel

$${}_{\mathcal{B}}[\exp(t\vec{v}_1\times)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Übung 22.1.2.28 (**Beispiel für eine bijektive Exponentialabbildung**). Man zeige, daß die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale ein Diffeomorphismus ist. Hinweis: Die Logarithmusreihe liefert eine inverse Abbildung.

Übung 22.1.2.29 (**Beispiel für eine bijektive Exponentialabbildung**). Man zeige, daß die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe aller reellen invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonaleinträgen ein Diffeomorphismus ist. Hinweis: Jordan-Zerlegung und 22.1.2.28 und Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

Übung 22.1.2.30 (**Beispiel für eine surjektive Exponentialabbildung**). Man zeige, daß die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe aller komplexen invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen eine Surjektion ist. Hinweis: Jordanzerlegung und 22.1.2.28. Man folgere, daß die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe aller komplexen invertierbaren Matrizen eine Surjektion ist.

Übung 22.1.2.31 (**Beispiel für eine nicht surjektive Exponentialabbildung**). Ist $x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$ die additive Jordanzerlegung einer Matrix $x \in \operatorname{Mat}(n;\mathbb{R})$ oder $x \in \operatorname{Mat}(n;\mathbb{C})$, so ist $\exp x = (\exp x_{\mathrm{s}})(\exp x_{\mathrm{n}})$ die multiplikative Jordanzerlegung von $\exp x$. Man folgere, daß der (2×2)-Jordanblock zum Eigenwert -1 nicht zum Bild von $\exp : \operatorname{Mat}(2;\mathbb{R}) \to \operatorname{GL}(2;\mathbb{R})$ gehören kann, obwohl er durchaus zur Zusammenhangskomponente der Einheitsmatrix gehört.

Übung 22.1.2.32. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V und ein Vektor $v \in V$ hat die Matrixliegruppe $G := \{g \in \operatorname{Aut} V \mid gv = v\}$ den Einstangentialraum $\mathrm{T}_e G = \{x \in \operatorname{End} V \mid xv = 0\}$. Des weiteren hat die Matrixliegruppe $G := \{g \in \operatorname{Aut} V \mid gv \in \mathbb{R}v\}$ den Einstangentialraum $\mathrm{T}_e G = \{x \in \operatorname{End} V \mid xv \in \mathbb{R}v\}$.

Übung 22.1.2.33. Man zeige, daß das Zentrum der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(n)$ aus der Einheitsmatrix und ihrem Negativen besteht, in Formeln $\mathrm{Z}(\mathrm{O}(n)) = \{\pm\mathrm{I}\}$. Hinweis: Kommutieren mit $\operatorname{diag}(-1, 1 \ldots, 1)$ bedeutet, die Gerade $\mathbb{R}\mathrm{e}_1$ zu stabilisieren. Man zeige, daß für das Zentrum der speziellen orthogonalen Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ gilt $\mathrm{Z}(\mathrm{SO}(n)) = \{\mathrm{I}\}$ für n ungerade, $\mathrm{Z}(\mathrm{SO}(n)) = \{\pm\mathrm{I}\}$ für $n \geq 4$ gerade und $\mathrm{Z}(\mathrm{SO}(2)) = \mathrm{SO}(2)$.

22.1.3 Liealgebren von Matrixliegruppen

22.1.3.1. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Im Lichte von 22.1.2.22 stellt sich die Frage, welche reellen Untervektorräume in $\operatorname{End} V$ die Einstangentialräume abgeschlossener Untergruppen von $\operatorname{Aut} V$ sind. Eine notwendige Bedingung liefert der folgende Satz.

Satz 22.1.3.2 (Stabilität des Einstangentialraums unter dem Kommutator). *Für jede abgeschlossene Untergruppe $G \mathrel{\not\subset} \operatorname{Aut} V$ der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums V ist ihr Einstangentialraum $\mathrm{T}_e G \subset \operatorname{End} V$ stabil unter dem Bilden des Kommutators. Mit X und Y gehört also in Formeln auch $XY - YX$ zu $\mathrm{T}_e G$.*

Beweis. Für jedes $g \in \operatorname{Aut} V$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{int}_g : & \operatorname{End} V & \to & \operatorname{End} V \\ & x & \mapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

Ihr Differential bei der Einheitsmatrix notieren wir Ad_g. Da int_g linear ist, wird Ad_g durch dieselbe Formel gegeben wie int_g. Unter der zusätzlichen Voraussetzung $g \in G$ stabilisiert int_g die Menge G und induziert folglich eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ad}_g : & \mathrm{T}_e G & \to & \mathrm{T}_e G \\ & X & \mapsto & gXg^{-1} \end{array}$$

Insbesondere verläuft für alle $Y \in \mathrm{T}_e G$ die Kurve $t \mapsto \exp(tY) X \exp(-tY)$ ganz in $\mathrm{T}_e G$. Damit liegt auch ihr Geschwindigkeitsvektor bei $t = 0$ in $\mathrm{T}_e G$, und der ist nach der Produktregel gerade der Kommutator $YX - XY$. □

22.1.3.3. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $G \mathrel{\not\subset} \operatorname{Aut} V$ eine Matrixliegruppe. Natürlich ist unsere Abbildung $g \mapsto \mathrm{int}_g$ aus dem vorhergehenden Beweis eine Darstellung $\operatorname{Aut} V \to \mathrm{GL}(\operatorname{End} V)$ und liefert damit auch eine Darstellung $G \to \mathrm{GL}(\operatorname{End} V)$. Unsere Erkenntnisse aus dem Beweis lassen sich dann auch dahingeghend formulieren, daß für diese Darstellung von G der Teilraum $\mathrm{T}_e G \subset \operatorname{End} V$ eine Unterdarstellung ist. Diese Unterdarstellung

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{T}_e G)$$

heißt die **adjungierte Darstellung** unserer Matrixliegruppe G und daher rührt die Notation Ad. Wir werden diese Konstruktion in 22.4.1 in einer größeren Allgemeinheit noch ausführlich besprechen. Der Kommutator wird oft notiert in der Form

$$XY - YX = [X, Y]$$

und heißt auch die **Lie-Klammer**.

22.1.3.4. Einen Vektorraum A über einem Körper k mit einer k-bilinearen Verknüpfung $A \times A \to A$ bezeichnet man ganz allgemein als eine **k-Algebra**, vergleiche 4.7.9.1. Gegeben eine Matrixliegruppe G wird demnach der Einstangentialraum $\mathrm{T}_e G$ mit der Verknüpfung $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ eine $\mathbb{R}$-Algebra. Sie heißt die **Lie-Algebra von** G. Wir notieren sie

$$\operatorname{Lie} G := \mathrm{T}_e G$$

Vorschau 22.1.3.5. Unter einer **partiellen Matrixliegruppe** verstehen wir eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathrm{Aut}(V)$ der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums derart, daß (1) die Identität zu M gehört und daß es (2) eine Umgebung U der Identität gibt mit den Eigenschaften $(U \cap M)(U \cap M) \subset M$ und $(U \cap M)^{-1} \subset M$. Jede offene Umgebung der Identität in einer partiellen Matrixliegruppe ist natürlich auch ihrerseits eine partielle Matrixliegruppe. Wir nennen zwei partielle Matrixliegruppen **äquivalent**, wenn es eine Umgebung der Identität gibt, die mit beiden denselben Schnitt hat. Eine Äquivalenzklasse unter dieser Äquivalenzrelation nennen wir einen **Matrixliegruppenkeim**. Das Bilden des Tangentialraums beim neutralen Element liefert nun eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Matrixliegruppenkeime} \\ \text{in } \mathrm{Aut}(V) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Unterliealgebren} \\ \text{von } \mathrm{End}(V) \end{array} \right\}$$

Die inverse Abbildung ordnet dabei jeder Unterliealgebra $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(V)$ den Matrixliegruppenkeim zu, der durch das Bild hinreichend kleiner offener Umgebungen der Null in $\mathfrak{g}$ unter der Exponentialabbildung repräsentiert wird. Wir zeigen das erst in 22.4.3.5, es folgt aus dem sogenannten „Frobenius-Theorem“ 22.4.3.3.

22.1.3.6. Unter einer **Lie-Algebra** über einem Körper k versteht man eine k-Algebra $\mathfrak{g}$, deren Verknüpfung in diesem Zusammenhang meist $(x, y) \mapsto [x, y]$ notiert wird, derart daß gilt:

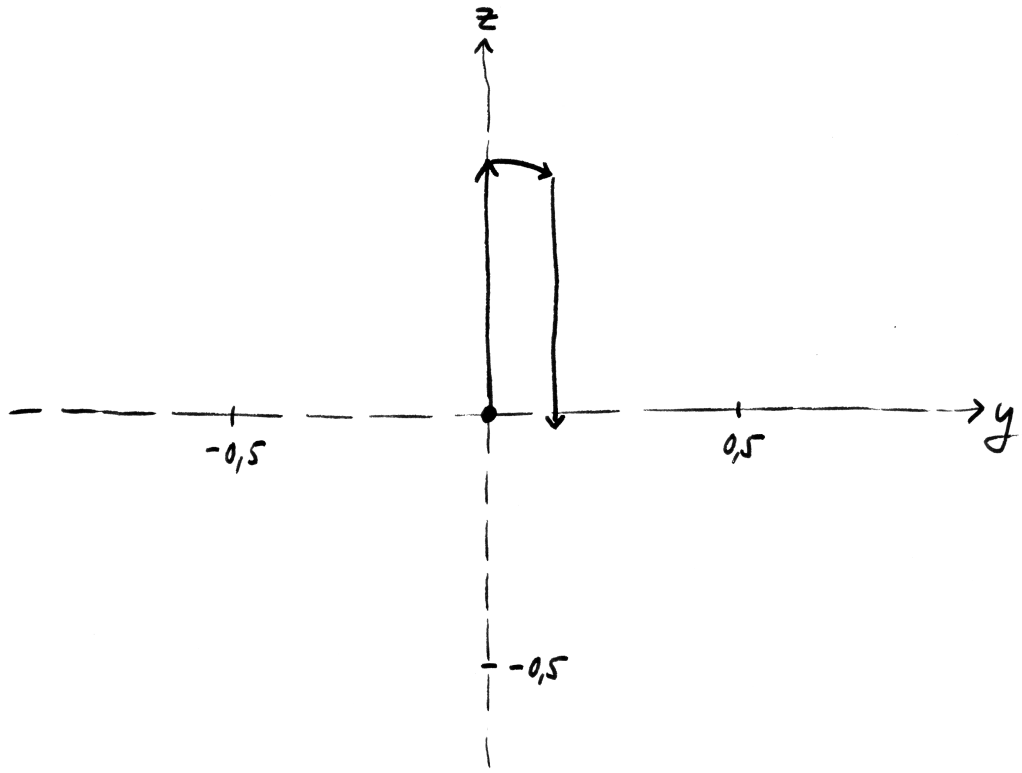
1. $[x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$;
2. $\big[x, [y, z]\big] + \big[z, [x, y]\big] + \big[y, [z, x]\big] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Die zweite Forderung heißt die **Jacobi-Identität**. Daß in unseren Algebren $\mathrm{Lie}\, G = \mathrm{T}_G$ zu Matrixliegruppen diese Formeln gelten, rechnet man mühelos nach. Daß gerade diese Formeln einen mit der Theorie der Liegruppen aufs engste verwobenen Typ von Algebra definieren, erkennt man mit der vorhergehenden Bemerkung in Anbetracht des Satzes von Ado, nach dem sich jede endlichdimensionale komplexe Liealgebra als Unterliealgebra in die Algebra $\mathrm{End}(V)$ der Endomorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraums einbetten läßt. A forteriori gilt das dann auch für jede endlichimensionale reelle Liealgebra.

Beispiel 22.1.3.7 (**Anschauung für die Liealgebra der Drehgruppe**). Man kann die Lieklammer auf der Liealgebra einer Matrixliegruppe auch symmetrischer verstehen mithilfe der Formel

$$[A, B] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \left(\exp(tA) \exp(tB) - \exp(tB) \exp(tA) \right)$$

die man leicht über die Taylorentwicklung nachrechnet. Beachtet man, daß $t \mapsto \exp(tX)$ ein und nach 22.1.4.5 sogar der einzige differenzierbare Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \to G$ mit Geschwindigkeitsvektor X beim neutralen Element



Dieses Bild soll die zur Formel von eben äquivalente Formel

$$[A, B] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \left(\exp(-tA) \exp(-tB) \exp(tA) \exp(tB) - I \right)$$

anschaulich machen im Fall der in 22.1.3.7 behandelten Drehgruppe für $B = E_1$ und $A = E_2$. Die x-Achse kommt darin senkrecht aus dem Papier, und das Bild zeigt, wie ein Punkt auf der x-Achse „in der Höhe 1 oberhalb der Papierebene“ sich bewegt, wenn wir erst ein bißchen um die x-Achse drehen–dabei bleibt er fest–dann dasselbe bißchen um die y-Achse, dann um die x-Achse in der Gegenrichtung und schließlich um die y-Achse in der Gegenrichtung, jeweils um denselben kleinen Winkel, im Bild etwa $1/2$ im Bogenmaß. Machen wir diesen Winkel kleiner, so werden die Effekte des Drehens um die y-Achse in der Aufsicht in etwa linear kleiner, genauer hat der erste vertikale Pfeil die Länge $\sin t$, aber der Effekt des Drehens um die x-Achse wird quadratisch kleiner, genauer hat der krumme eher horizontale Pfeil die Länge $t \sin t$. Ich finde, man sieht ganz gut, daß die Differenz von Ausgangs- und Endpunkt unseres Pfeilweges gegen eine quadratisch kleine Drehung um die z-Achse strebt, wie es auch unsere Formel $[E_1, E_2] = E_3$ vorhersagt.

ist, so kann man diese Formel dahingehend interpretieren, daß die Lieklammer mißt, inwieweit zwei „infinitesimale Elemente“ unserer Gruppe kommutieren. Zum Beispiel ergibt sich die Liealgebra der Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ mit 22.1.2.17 als die Liealgebra $\mathfrak{so}(3;\mathbb{R})$ aller reellen schiefymmetrischen (3×3)-Matrizen. Als Basis mag man die drei Matrizen

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wählen. Deren Kommutatoren werden gegeben durch die leicht zu verifizierenden Formeln $[E_1, E_2] = E_3$, $[E_2, E_3] = E_1$ und $[E_3, E_1] = E_2$. Nun beschreibt

$$\exp(tE_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

eine Drehung um die x-Achse mit Winkel t und $\exp(tE_2), \exp(tE_3)$ bedeuten ähnlich Drehungen um die y-Achse beziehungsweise die z-Achse. Um die Lieklammer anschaulich zu interpetieren gilt es damit einzusehen, daß „ein kleines bißchen Drehen um die x-Achse gefolgt von einem kleinen bißchen Drehen um die y-Achse sich vom Effekt derselben Operationen in der umgekehrten Reihenfolge unterscheidet um ein quadratisch kleines bißchen Drehen um die z-Achse, bis auf einen kubisch kleinen Fehler“. Diese Aussage scheint mir der Anschauung durchaus zugänglich zu sein. Man bemerke auch, daß $\mathrm{e}_i \mapsto E_i$ einen Vektorraumisomorphismus $\psi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{so}(3;\mathbb{R})$ definiert, unter dem das Kreuzprodukt der Lieklammer entspricht. Es ist eine gute Übung zu zeigen, daß mit dieser Notation $\exp(\psi(v))$ die Matrix einer Drehung mit Drehachse $\mathbb{R}v$ und Drehwinkel $\|v\|$ ist.

Definition 22.1.3.8. Eine **Unteralgebra** einer Algebra ist ein unter der Verknüpfung stabiler Untervektorraum. Ein **Algebrenhomomorphismus** ist eine lineare Abbildung, die mit den jeweiligen Verknüpfungen verträglich ist.

22.1.3.9. Gegeben ein Körper k und ein k-Vektorraum V wird $\operatorname{End} V$ eine Liealgebra mit der Verknüpfung $[X, Y] = XY - YX$. Man notiert diese Liealgebra meist $\mathfrak{gl}(V)$. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V ist im allgemeinen keineswegs jede reelle Unterliealgebra $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ der Tangentialraum im neutralen Element einer Matrixliegruppe $G \not\subset \mathrm{GL}(V)$. Das Problem ist, daß die vom Bild der Exponentialabbildung erzeugte Untergruppe keineswegs abgeschlossen zu sein braucht, wie zum Beispiel der Fall $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\operatorname{diag}(\mathrm{i}, \alpha\mathrm{i}) \subset \operatorname{End}\mathbb{C}^2$ für irrationales reelles α zeigt. Es gibt aber auf der fraglichen Untergruppe, auch wenn sie in $\mathrm{GL}(V)$ nicht abgeschlossen ist, stets genau eine Struktur von glatter Mannigfaltigkeit im Sinne von 22.3.2.7 derart, daß die Einbettung differenzierbar

ist und ihr Tangential den Tangentialraum unserer Mannigfaltigkeit mit $\mathfrak{g}$ identifiziert. Mehr dazu lernt man in der Differentialgeometrie.

22.1.3.10 (**Liealgebren von Schnitten**). Aus 22.1.2.11 folgt für abgeschlossene Untergruppen der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums $G, H \mathrel{\not\triangleleft} \operatorname{Aut} V$ die Formel

$$\operatorname{Lie}(G \cap H) = (\operatorname{Lie} G) \cap (\operatorname{Lie} H)$$

Allgemeiner gilt für eine beliegige Familie $(G_i)_{i\in I}$ von abgeschlossenen Untergruppen auch

$$\operatorname{Lie} \bigcap_{i\in I} G_i = \bigcap_{i\in I} \operatorname{Lie} G_i$$

Diese Bemerkung hätte auch schon direkt im Anschluß an 22.1.2.11 stehen können. Ich habe sie nur deshalb hierher verschoben, um sie bereits mit der Bezeichnung $\operatorname{Lie} G$ statt $\mathrm{T}_e G$ formulieren zu können. Mit 22.3.6.23 wird in 22.3.6.23 dasselbe auch für abgeschlossene Untergruppen einer abstrakten Liegruppe folgen.

Übungen

Übung 22.1.3.11. Ist A eine endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Algebra und $G := \operatorname{Alg}_{\mathbb{R}}^{\times}(A) \subset \operatorname{GL}(A)$ ihre Automorphismengruppe, so besteht $\operatorname{Lie} G \subset \operatorname{End}(A)$ genau aus allen **Derivationen von** A, als da heißt, aus allen $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $d : A \to A$ mit der Eigenschaft $d(ab) = (da)b + a(db)$ für alle $a, b \in A$. Wir bezeichnen diesen Raum mit $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(A)$ und haben also in Formeln

$$\operatorname{Lie}(\operatorname{Alg}_{\mathbb{R}}^{\times}(A)) = \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(A)$$

Man zeige auch, daß für eine endlichdimensionale $\mathbb{C}$-Algebra analog gilt

$$\operatorname{Lie}(\operatorname{Alg}_{\mathbb{C}}^{\times}(A)) = \operatorname{Der}_{\mathbb{C}}(A)$$

Übung 22.1.3.12. Ist G eine Matrixliegruppe und $N \mathrel{\not\triangleleft} G$ ein abgeschlossener Normalteiler, so gilt für alle $X \in \operatorname{Lie} G$ und $Y \in \operatorname{Lie} N$ sogar $[X, Y] \in \operatorname{Lie} N$. In der in 24.1.4.3 eingeführten Terminologie ist also die Liealgebra eines Normalteilers stets ein Ideal.

Ergänzende Übung 22.1.3.13. Man zeige, daß jeder echte abgeschlossene Normalteiler der Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ trivial ist. Hinweis: 22.1.3.12 zeigt, daß unser Normalteiler diskret sein muß, und 15.2.1.21 zeigt weiter, daß er im Zentrum von $\mathrm{SO}(3)$ liegen muß.

Übung 22.1.3.14. Man zeige, daß jede abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{O}(3)$ konjugiert ist zu genau einer Untergruppe der folgenden Liste:

1. Ein endliche Untergruppe, wie sie in 4.5.4.25 klassifiziert wurden;
2. Eine der Untergruppen $\mathrm{O}(3)$ und $\mathrm{SO}(3)$;
3. Eine der Gruppen $\{\pm 1\} \times \mathrm{O}(2)$ oder $\{\pm 1\} \times \mathrm{SO}(2)$ von Blockmatrizen.

Übung 22.1.3.15. Für jede Liealgebra L und jedes Element $x \in L$ ist $\operatorname{ad} x$ eine Derivation von L und $\operatorname{ad}(L) \subset \operatorname{Der}_k L$ ist ein Ideal. Genauer gilt sogar $[\delta, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad}(\delta x)\ \forall \delta \in \operatorname{Der}_k L, x \in L$.

22.1.4 Homomorphismen von Matrixliegruppen

Satz 22.1.4.1 (Gruppenwege in $\mathbb{C}^\times$). *Jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ hat die Gestalt $\varphi(t) = \exp(at)$ für genau ein $a \in \mathbb{C}$.*

22.1.4.2. Die stetigen Gruppenwege in der Kreisgruppe haben wir bereits in 10.4.5.8 bestimmt. Die Argumentation hier ist im wesentlichen dieselbe.

Beweis. Die Eindeutigkeit von a folgt aus $\varphi'(0) = a$. Nur die Existenz von a ist also noch zu zeigen. Die offene Halbebene $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ hat die Eigenschaft, daß es für jedes $z \in H$ genau ein $w \in H$ gibt mit $w^2 = z$. Gegeben ein stetiger Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ finden wir nun sicher erst ein $\varepsilon > 0$ mit $\varphi([-\varepsilon, \varepsilon]) \subset H$ und dann ein $b \in U$ mit $\varphi(\varepsilon) = \exp(b)$. Es folgt

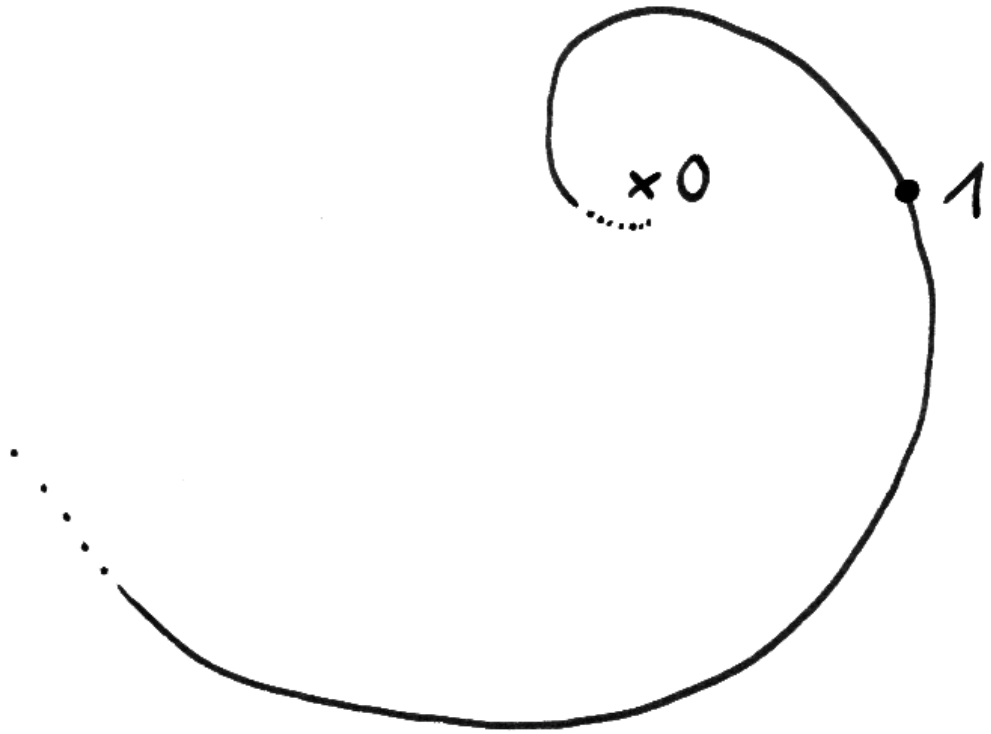
$$\varphi(\varepsilon/2) = \sqrt{\exp(b)} = \exp(b/2)$$

und induktiv $\varphi(\varepsilon/2^n) = \exp(b/2^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dann sogar $\varphi(m\varepsilon/2^n) = \exp(mb/2^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$. Setzen wir $a = b/\varepsilon$, so gilt mithin $\varphi(t) = \exp(at)$ für alle reellen Zahlen t der Gestalt $t = m\varepsilon/2^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$. Da beide Seiten stetig sind, gilt das dann auch für alle $t \in \mathbb{R}$. □

Satz 22.1.4.3 (Gruppenwege in $\mathrm{GL}(V)$). *Ist V ein endlichdimensionaler reeller oder auch komplexer Vektorraum, so ist jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(V)$ von der Gestalt $\varphi(t) = \exp(tA)$ für genau ein $A \in \operatorname{End} V$.*

22.1.4.4. Die stetigen Gruppenhomomorphismen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ haben wir gerade eben bestimmt. Die Argumentation hier ist im wesentlichen dieselbe.

Beweis. Die Eindeutigkeit von A folgt aus $\varphi'(0) = A$. Nur die Existenz von A ist also noch zu zeigen. Nach dem Umkehrsatz 12.3.1.2 gibt es in $\operatorname{End} V$ eine offene Umgebung $U \Subset \operatorname{End} V$ des Ursprungs, die unter $\exp$ homöomorph auf eine offene Teilmenge $W \Subset \mathrm{GL}(V)$ der Identität abgebildet wird. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit U konvex annehmen. Das Bild $H := \exp((1/2)U)$



Das Bild eines stetigen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ hat im allgemeinen die Gestalt einer Spirale. Sie wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit durchlaufen, aber der Radius hängt exponentiell von der Zeit ab.

der entsprechend um den Faktor Zwei geschrumpften Umgebung hat dann offensichtlich die Eigenschaft, daß das Quadrieren $g \mapsto g^2$ einen Diffeomorphismus

$$H \xrightarrow{\sim} W$$

induziert. Da wir U konvex angenommen hatten, gilt außerdem $H \subset W$. Folglich besitzt jedes $z \in H$ genau eine Wurzel in H. Gegeben ein stetiger Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(V)$ finden wir nun sicher ein $\varepsilon > 0$ mit $\varphi([-\varepsilon, \varepsilon]) \subset H$ und ein $X \in (1/2)U$ mit $\varphi(\varepsilon) = \exp(X)$. Es folgt

$$\varphi(\varepsilon/2) = \sqrt{\exp(X)} = \exp(X/2)$$

und induktiv $\varphi(\varepsilon/2^n) = \exp(X/2^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir $A := X/\varepsilon$, so gilt mithin $\varphi(t) = \exp(tA)$ für alle $t = \varepsilon/2^n$. Da beide Seiten Gruppenhomomorphismen sind, gilt es dann auch für alle $t = m\varepsilon/2^n$ mit $m \in \mathbb{Z}$. Da beide Seiten stetig sind, folgt es schließlich für alle $t \in \mathbb{R}$. □

Satz 22.1.4.5 (Gruppenwege in Matrixliegruppen). *Ist G eine Matrixliegruppe, so ist jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to G$ von der Gestalt $\varphi(t) = \exp(tA)$ für genau ein $A \in \operatorname{Lie} G$.*

Beweis. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V und eine abgeschlossene Untergruppe $G \mathrel{\not\triangleleft} \mathrm{GL}(V)$ ist nach 22.1.4.3 jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to G$ jedenfalls schon mal von der Gestalt $t \mapsto \exp(tA)$ für genau ein $A \in \operatorname{End} V$, und nach 22.1.2.11 landet die Abbildung $t \mapsto \exp(tA)$ in der Untergruppe G genau dann, wenn A zum Tangentialraum $\mathrm{T}_e G$ unserer Untergruppe gehört. □

Proposition 22.1.4.6. *1. Gegeben eine glatte Abbildung $f : M \to N$ zwischen glatten Untermannigfaltigkeiten endlichdimensionaler reeller Räume X, Y und ein Punkt $p \in M$ gibt es genau eine lineare Abbildung, genannt die* **Tangentialabbildung** *oder auch das* **Differential**

$$\mathrm{T}_p f : \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_{f(p)} N$$

derart, daß für jede Karte (W, φ) von M mit $W \subset \mathbb{R}^k$ und $w \in W$ mit $p = \varphi(w)$ die Gleichheit $\mathrm{T}_p f \circ \mathrm{d}_w \varphi = \mathrm{d}_w (f \circ \varphi)$ von linearen Abbildungen $\mathbb{R}^k \to \vec{Y}$ gilt;

2. Gegeben zwei differenzierbare Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to L$ von Untermannigfaltigkeiten erfüllen die Differentiale für jeden Punkt $p \in M$ die **Kettenregel**

$$\mathrm{T}_{f(p)} g \circ \mathrm{T}_p f = \mathrm{T}_p (g \circ f)$$

3. *Das Differential der Einbettung $i : M \hookrightarrow N$ einer offenen Teilmenge $M \Subset N$ ist an jeder Stelle die Identität $\mathrm{T}_p j = \mathrm{id} : \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_p N$;*

4. *Gilt speziell für unsere erste Mannigfaltigkeit $M \Subset X$ und bezeichnet $j : N \hookrightarrow Y$ die Inklusion, so haben wir $\mathrm{T}_p f = \mathrm{d}_p(j \circ f) : \vec{X} \to \vec{Y}$.*

22.1.4.7. Sobald der folgende Beweis zu Ende ist, ändern wir unsere Notation und setzen auch im allgemeinen

$$\mathrm{d}_p f := \mathrm{T}_p f$$

Für den Beweis schien es mir jedoch wichtig, zwischen den neu eingeführten Begriffen und dem bereits Bekannten zu unterscheiden.

22.1.4.8. Etwas allgemeiner gilt die Proposition auch analog für Randfaltigkeiten 12.8.6.1 und sogar Eckfaltigkeiten 12.8.7.12, wenn wir den Tangentialraum an einer Stelle als das Bild des Differentials einer und jeder Randkarte beziehungsweise Eckenkarte an besagter Stelle im Sinne von 12.1.3.19 erklären. Wir werden das insbesondere im Fall von Abbildungen mehrpunktiger Intervalle in Mannigfaltigkeiten verwenden.

Beweis. Per definitionem induziert für jede Karte wie in der Proposition ihr Differential einen Isomorphismus $\mathrm{d}_w\varphi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_p M$. Für jede Karte um p finden wir also genau eine Abbildung

$$\mathrm{T}_p^\varphi f : \mathrm{T}_p M \to \vec{Y}$$

mit $\mathrm{T}_p^\varphi f \circ \mathrm{d}_w\varphi = \mathrm{d}_w(f \circ \varphi)$. Um zu zeigen, daß $\mathrm{T}_x^\varphi f$ nicht von der Karte φ abhängt, sei (V, ψ) eine weitere Karte von M und $v \in V$ ein Punkt mit $\psi(v) = p$. Wir dürfen annehmen, daß unsere beiden Karten dasselbe Bild haben, so daß gilt $\psi = \varphi \circ \kappa$ für den Kartenwechsel $\kappa : V \xrightarrow{\sim} W$. Die Kettenregel zeigt dann

$$\mathrm{T}_p^\varphi f \circ \mathrm{d}_v\psi = \mathrm{T}_p^\varphi f \circ \mathrm{d}_w\varphi \circ \mathrm{d}_v\kappa = \mathrm{d}_w(f \circ \varphi) \circ \mathrm{d}_v\kappa = \mathrm{d}_v(f \circ \psi) = \mathrm{T}_p^\psi f \circ \mathrm{d}_v\psi$$

und so $\mathrm{T}_p^\varphi f = \mathrm{T}_p^\psi f$. Nun zeigen wir, daß die so definierte Abbildung $\mathrm{T}_p f$ auch tatsächlich in $\mathrm{T}_{f(p)} N$ landet. Hierzu verwenden wir ein an $N \subset Y$ angepaßtes lokales Koordinatensystem (U, h) von Y um $f(p)$ im Sinne von 12.3.2.6 und dürfen $\varphi(W) \subset U$ annehmen. Die Beschreibung **??** des Tangentialraums als Kern der Differentiale $\mathrm{d}_{f(p)} h_j$ der auf N identisch verschwindenden Koordinaten h_j. Aus $h_j \circ f \circ \varphi = 0$ folgt dann $\mathrm{d}_{f(p)} h_j \circ \mathrm{T}_p f = 0$. Damit landet $\mathrm{T}_p f$ in der Tat in $\mathrm{T}_{f(p)} N$ und der erste Teil ist gezeigt. Wir geben nun die Notationen V, ψ, v wieder frei, um sie neu in anderer Bedeutung verwenden zu können. Um den zweiten Teil zu zeigen, nehmen wir die nicht auf N identisch verschwindenden Koordinaten unsers Systems (U, h). Hat N etwa die Dimension k, so bilden sie zusammen eine glatte Abbildung $\bar{h} := (h_1, \ldots, h_k) : U \to \mathbb{R}^k$, die eine Bijektion $(N \cap U) \xrightarrow{\sim} V \Subset \mathbb{R}^k$

induziert, die ihrerseits die Umkehrabbildung einer Karte $\psi : V \to N$ ist. Wir erklären $v \in V$ durch $\psi(v) = f(p)$ und bezeichnen mit $j : N \cap U \hookrightarrow U$ die Einbettung. Es folgt $gf\varphi = g\psi\bar{h}jf\varphi$ und so finden wir mit der Kettenregel aus der Analysis und unseren Definitionen

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{d}_w(gf\varphi) & = & \mathrm{d}_w(g\psi\bar{h}jf\varphi) & = & \mathrm{d}_v(g\psi) \circ \mathrm{d}_{f(p)}\,\bar{h} \circ \mathrm{d}_w(jf\varphi) \\ \| & & & & \| \\ \mathrm{T}_p(gf) \circ \mathrm{d}_w\,\varphi & & & & \mathrm{T}_{f(p)}g \circ \mathrm{d}_v\,\psi \circ \mathrm{d}_{f(p)}\,\bar{h} \circ \mathrm{T}_p f \circ \mathrm{d}_w\,\varphi \\ & & & & \| \\ & & & & \mathrm{T}_{f(p)}g \circ \mathrm{T}_p f \circ \mathrm{d}_w\,\varphi \end{array}$$

wegen $\bar{h}j\psi = \mathrm{id}_V$ und folglich $\mathrm{d}_{f(p)}\bar{h} : \mathrm{T}_{f(p)}\,N \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^k$ invers zu $\mathrm{d}_v\psi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{f(p)}\,N$ und so Teil 2. Der Beweis von 3 und 4 bleibe dem Leser überlassen. $\square$

Beispiel 22.1.4.9. Für $\gamma : I \to M$ eine Abbildung von einem mehrpunktigen reellen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ in eine Mannigfaltigkeit M wird unsere lineare Abbildung $\mathrm{T}_t\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{T}_{\gamma(t)}M$ oder besser in der bereits angekündigten vereinfachten Notation $\mathrm{d}_t\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{T}_{\gamma(t)}M$ gegeben durch die Multiplikation mit einem wohlbestimmten Vektor aus $\mathrm{T}_{\gamma(t)}M$, den man in Anlehnung an 12.1.3.12 wieder

$$(\mathrm{d}_t\gamma)(\partial) = \gamma'(t)$$

notiert für $\partial = (+1) \in \vec{\mathbb{R}}$ und den **Geschwindigkeitsvektor** nennt.

Satz 22.1.4.10 (Homomorphismen von Matrixliegruppen). *Jeder stetige Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von Matrixliegruppen ist glatt und sein Differential beim neutralen Element $\mathrm{d}_e\varphi$ ist ein Homomorphismus von Liealgebren mit der Eigenschaft* $\exp \circ \mathrm{d}_e\varphi = \varphi \circ \exp$.

22.1.4.11. Etwas ausführlicher geschrieben behauptet die Formel aus dem Satz das Kommutieren des Diagramms

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Lie}\,G \arrow[r, "\mathrm{d}_e\varphi"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathrm{Lie}\,H \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & H \end{tikzcd}$$

Der Satz gilt auch für abstrakte Liegruppen und wird in dieser Allgemeinheit in 22.4.1.5 formuliert. Der Beweis bleibt derselbe.

Beispiel 22.1.4.12. Man erinnere sich an die Erkenntnis aus 12.1.6.14, nach der das Differential an die Determinante bei der Einheitsmatrix die Spur ist. Als Korollar aus unserem Satz erkennen wir damit das Kommutieren des Diagramms

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C}) \arrow[r, "\mathrm{tr}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ \mathrm{GL}(n;\mathbb{C}) \arrow[r, "\det"] & \mathbb{C}^\times \end{tikzcd}$$

Das hatten wir in 22.1.2.16 bereits elementar gezeigt. Umgekehrt kann man aus dem Kommutieren dieses Diagramms auch unschwer folgern, daß das Differential an die Determinante bei der Einheitsmatrix die Spur sein muß.

Beweis. Jeder Gruppenweg in G liefert durch Nachschalten von φ einen Gruppenweg in H. Aus unserer Beschreibung der Gruppenwege 22.1.4.5 folgt, daß es eine Abbildung $\tilde{\varphi} : \operatorname{Lie} G \to \operatorname{Lie} H$ geben muß, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Lie} G \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "\exp"'] & \operatorname{Lie} H \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & H \end{tikzcd}$$

zum Kommutieren bringt und die darüber hinaus mit allen Streckungen vertauscht, in Formeln $\tilde{\varphi}(sX) = s\tilde{\varphi}(X)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und $X \in \operatorname{Lie} G$. Wenden wir φ auf beide Seiten von Trotter's Produktformel 22.1.2.13 an, so folgt weiter $\tilde{\varphi}(X + Y) = \tilde{\varphi}(X) + \tilde{\varphi}(Y)$ und damit die Linearität von $\tilde{\varphi}$. Da im Diagramm beide Vertikalen Diffeomorphismen zwischen einer offenen Umgebung der Null in der jeweiligen Liealgebra und einer offenen Umgebung des neutralen Elements in der jeweiligen Gruppe liefern, können wir folgern, daß φ auf einer offenen Umgebung des neutralen Elements von G glatt ist mit Differential $\mathrm{d}_e\varphi = \tilde{\varphi}$. Wegen $\varphi = (\varphi(g)\cdot) \circ \varphi \circ (g^{-1}\cdot)$ ist dann φ auch für jedes andere Gruppenelement $g \in G$ glatt in einer Umgebung desselben und damit eine glatte Abbildung. Um schließlich zu zeigen, daß $\mathrm{d}_e\varphi$ ein Homomorphismus von Liealgebren ist, gehen wir aus vom kommutativen Diagramm von Mannigfaltigkeiten

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\operatorname{int} x"'] & H \arrow[d, "\operatorname{int} \varphi(x)"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & H \end{tikzcd}$$

Indem man darin zu den Differentialen an den neutralen Elementen übergeht und die Kettenregel 22.1.4.6 beachtet, erhält man das kommutative Diagramm von reellen Vektorräumen

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_e G \arrow[r, "\mathrm{d}_e\varphi"] \arrow[d, "\operatorname{Ad} x"'] & \mathrm{T}_e H \arrow[d, "\operatorname{Ad} \varphi(x)"] \\ \mathrm{T}_e G \arrow[r, "\mathrm{d}_e\varphi"] & \mathrm{T}_e H \end{tikzcd}$$

Gegeben $X, Y \in \operatorname{Lie} G$ mit Bildern $\bar{X}, \bar{Y} \in \operatorname{Lie} H$ erhalten wir nach dem bereits Bewiesenen $\varphi(\exp(tX)) = \exp(t\bar{X})$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$\mathrm{d}_e\varphi : \operatorname{Ad}(\exp(tX))(Y) \mapsto \operatorname{Ad}(\exp(t\bar{X}))(\bar{Y})$$

nach dem vorhergehenden kommutativen Diagramm mit $x = \exp(tX)$, angewandt auf $Y \in \mathrm{T}_e G$. Dann muß aber nach der Kettenregel $\mathrm{d}_e\varphi = \mathrm{d}_0(\mathrm{d}_e\varphi)$ auch den Geschwindigkeitsvektor bei $t = 0$ der Kurve $t \mapsto \mathrm{Ad}(\exp(tX))(Y)$ auf den Geschwindigkeitsvektor bei $t = 0$ der Kurve $t \mapsto \mathrm{Ad}(\exp(t\bar{X}))(\bar{Y})$ abbilden, und nach 22.1.3.2 oder besser seinem Beweis läßt sich diese Erkenntnis in der Tat schreiben als die behauptete Verträglichkeit des Differentials unseres Gruppenhomomorphismus mit der Lieklammer

$$\mathrm{d}_e\varphi : [X, Y] \mapsto [\bar{X}, \bar{Y}] \qquad \square$$

Übungen

Übung 22.1.4.13. Eine Karte einer glatten Untermannigfaltigkeit ohne Rand eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums im Sinne von 12.3.4.2 ist nichts anderes als ein Diffeomorphismus zwischen einer offenen Teilmenge eines $\mathbb{R}^k$ und einer offenen Teilmenge unserer Mannigfaltigkeit.

Übung 22.1.4.14. Gegeben eine Untermannigfaltigkeit $M \subset X$ eines endlichdimensionalen reellen Raums und ein Punkt $p \in M$ und eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt der Wert des Differentials $\mathrm{d}_p f : \mathrm{T}_p M \to \mathbb{R}$ auf einem Tangentialvektor $v \in \mathrm{T}_p M$ auch die **Richtungsableitung von** f **bei** p **in Richtung** v und wird notiert als

$$(\mathrm{d}_p f)(v) = \mathrm{D}_v(f)$$

Das große D steht je nach Geschmack für „directional derivative“ oder „Derivation“.

Übung 22.1.4.15. Man zeige, daß für $n \in \mathbb{Z}$ das Differential beim neutralen Element des Potenzierens auf der Kreislinie $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ die Multiplikation mit n auf dem Tangentialraum ist.

Übung 22.1.4.16. Man konstruiere eine Bijektion $\mathrm{GrpTop}((S^1)^m, (S^1)^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}(n \times m; \mathbb{Z})$ zwischen der Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen $(S^1)^m \to (S^1)^n$ und der Menge aller $(n \times m)$-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen.

Übung 22.1.4.17. Man zeige, daß jeder nicht konstante stetige Gruppenhomomorphismus $\mathrm{SO}(3) \to \mathrm{SO}(3)$ von der Gestalt $(\mathrm{int}\, g)$ ist für genau ein $g \in \mathrm{SO}(3)$. Hinweis: Man erinnere sich, daß die Liealgebra von $\mathrm{SO}(3)$ identifiziert werden kann mit dem $\mathbb{R}^3$ mit Kreuzprodukt, und diskutiere, welche linearen Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit dem Kreuzprodukt verträglich sind.

Übung 22.1.4.18. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum. Ist $M \subset X$ eine glatte Untermannigfaltigkeit, so ist das Tangentialbündel $\mathrm{T}M \subset X \times \vec{X}$ aus 12.6.5.2 nach 12.6.5.3 eine glatte Untermannigfaltigkeit. Man zeige: Für jede

glatte Abbildung $f : M \to N$ in eine weitere glatte eingebettete Mannigfaltigkeit liefern auch die Differentiale $\mathrm{d}_p f : \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_{f(p)} N$ eine glatte Abbildung $\mathrm{d}f : \mathrm{T}M \to \mathrm{T}N$. Hinweis: 12.3.4.1.

Übung 22.1.4.19. Das Differential des Invertierens $\mathrm{inv} : G \to G$ auf einer Matrixliegruppe beim neutralen Element ist die Punktspiegelung am Ursprung auf dem Tangentialraum, in Formeln $\mathrm{d}_e \mathrm{inv} = ((-1)\cdot) : \mathrm{T}_e G \to \mathrm{T}_e G$.

Übung 22.1.4.20 (**Liealgebra eines Kerns**). Gegeben ein glatter Homomorphismus von Matrixliegruppen $\varphi : G \to H$ zeige man mit 22.1.2.11 die Formel $\mathrm{Lie}(\ker \varphi) = \ker(\mathrm{d}_e \varphi)$ und allgemeiner für $K \subset H$ eine abgeschlossene Untergruppe

$$\mathrm{Lie}(\varphi^{-1}(K)) = \{x \in \mathrm{Lie}\, G \mid (\mathrm{d}_e \varphi)(x) \in \mathrm{Lie}\, K\}$$

Daraus folgt im Übrigen mit 12.1.6.14 auch sofort die in 22.1.2.16 bereits elementar gezeigte Beziehung $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})) = \mathfrak{sl}(n;\mathbb{R})$. Mit 22.3.6.23 wird dasselbe auch allgemeiner für abstrakte Liegruppen folgen.

22.1.4.21. Die wichtigsten Methoden zur Berechnung von Liealgebren sind für uns die Verträglichkeit der Liealgebrenbildung mit Schnitten von abgeschlossenen Untergruppen 22.1.3.10, mit dem Bilden des Urbilds einer abgeschlossenen Untergruppe unter einem Homomorphismus 22.1.4.20, sowie die Formel 22.2.1.13 für die Liealgebra der Standgruppe eines Vektors in einer glatten Darstellung und ihrer Projektivisierung.

Übung 22.1.4.22 (**Liealgebra einer Gruppe von Fixpunkten**). Gegeben G eine Matrixliegruppe und $\varphi : G \xrightarrow{\sim} G$ ein glatter Automorphismus von G ist die Liealgebra der Gruppe der Fixpunkte $G^\varphi := \{g \in G \mid \varphi(g) = g\}$ von φ genau die Menge der Fixpunkte des Differentials $\mathrm{d}_e \varphi$ in der Liealgebra, in Formeln

$$\mathrm{Lie}(G^\varphi) = (\mathrm{Lie}\, G)^{\mathrm{d}_e \varphi}$$

Mit 22.3.6.23 wird dasselbe auch allgemeiner für abstrakte Liegruppen folgen, vergleiche etwa 22.3.6.25. Hinweis: Man mag entweder ein direktes Argument geben oder 22.1.4.20 auf $(\mathrm{id}, \varphi) : G \to G \times G$ und die diagonale Untergruppe anwenden.

Übung 22.1.4.23 (**Komplexe Matrizen und Relativitätstheorie**). Man betrachte für $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ die vierdimensionale reelle Darstellung $L := \ker\left(\bigwedge^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2) \twoheadrightarrow \bigwedge^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)\right)$. Man zeige, daß $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ trivial auf $\bigwedge^4_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2)$ operiert, etwa mit 3.6.4.14. Man zeige weiter, daß die durch $\wedge$ und eine geeignete von Null verschiedene reelle Volumenform $\bigwedge^4_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ gegebene symmetrische Bilinearform auf unserem Kern L nichtausgeartet vom Typ $(3,1)$ ist. Man zeige die Existenz einer kurzen exakten Sequenz

$$\{\pm \mathrm{id}\} \hookrightarrow \mathrm{SL}(2;\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3,1)^+$$

Hier bezeichnet $\mathrm{SO}(3,1)^+$ wie in 15.2.2.22 die Einskomponente von $\mathrm{O}(3,1)$.

22.1.5 Drehgruppe und Spingruppe

22.1.5.1. Wir erinnern aus 12.7.5.19 oder 15.2.2.12, daß $\mathrm{SU}(2)$ und $\mathrm{SO}(3)$, ja sogar $\mathrm{SU}(n)$ und $\mathrm{SO}(n)$ zusmmenhängend sind. Man kann das auch leicht „zu Fuß“ einsehen.

Proposition 22.1.5.2 (Drehgruppe und Spingruppe). *Es gibt einen stetigen surjektiven Gruppenhomomorphismus* $\mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$ *mit Kern* $\{\pm\,\mathrm{id}\}$.

Beweis. Sozusagen zu Fuß haben Sie das eventuell bereits in 4.1.11.26 gezeigt. Hier soll nun ein mehr konzeptionelles Argument erklärt werden. Wir betrachten die adjungierte Darstellung 22.1.3.3 der **Spingruppe** $\mathrm{SU}(2)$ auf dem Raum der schiefhermiteschen Matrizen mit Spur Null $\operatorname{Lie}\mathrm{SU}(2)$. Sie ist eine dreidimensionale reelle Unterdarstellung der Darstellung von $\mathrm{SU}(2)$ auf $\mathrm{Mat}(2;\mathbb{C})$ durch Konjugation, und die Elemente dieser Unterdarstellung erzeugen zusammen mit der Einheitsmatrix ganz $\mathrm{Mat}(2;\mathbb{C})$ als komplexen Vektorraum. Der Kern unserer adjungierten Darstellung besteht folglich genau aus den Matrizen aus $\mathrm{SU}(2)$, die mit allen Matrizen von $\mathrm{Mat}(2;\mathbb{C})$ kommutieren, und das ist eben der Schnitt der Menge $\mathbb{C}\mathrm{I}$ aller Vielfachen der Einheitsmatrix mit unserer Gruppe $\mathrm{SU}(2)$ alias die Untergruppe $\{\pm\,\mathrm{id}\}$. Auf dem Raum $\mathfrak{su}(2) := \operatorname{Lie}\mathrm{SU}(2)$ aller schiefhermiteschen Matrizen mit Spur Null definiert aber nun die Vorschrift $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ eine negativ definite symmetrische Bilinearform, wie man leicht nachrechnet, die offensichtlich unter allen Konjugationen mit unitären Matrizen invariant ist. Versehen wir $\mathfrak{su}(2)$ mit dem Negativen dieser Bilinearform als Skalarprodukt, so liefert die adjungierte Darstellung also einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{O}(\mathfrak{su}(2))$$

mit Kern $\{\pm\,\mathrm{id}\}$. Da $\mathrm{SU}(2)$ zusammenhängend ist, muß dieser Gruppenhomomorphismus bereits in $\mathrm{SO}(\mathfrak{su}(2))$ landen, und da der Kern diskret ist, muß unser Gruppenhomomorphismus nach 22.1.4.20 eine injektive Abbildung auf den Lie-Algebren induzieren. Nach Dimensionsvergleich muß diese injektive Abbildung dann sogar ein Isomorphismus sein, so daß nach 22.1.4.10 das Bild von Ad eine Umgebung des neutralen Elements umfaßt. Da aber $\mathrm{SO}(\mathfrak{su}(2))$ nach 4.1.11.24 oder 15.2.2.12 zusammenhängend ist, muß folglich Ad ganz $\mathrm{SO}(\mathfrak{su}(2))$ als Bild haben. □

Übungen

Übung 22.1.5.3. Man zeige, daß jeder nicht konstante stetige Gruppenhomomorphismus $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SU}(2)$ von der Gestalt $(\operatorname{int} g)$ ist für ein $g \in \mathrm{SU}(2)$. Hinweis: 22.1.4.17.

Übung 22.1.5.4. Folgern Sie aus 22.1.5.2, daß jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ konstant oder surjektiv ist, und daß es für je zwei stetige surjektive Gruppenhomomorphismen ϕ, ψ ein $g \in \mathrm{SO}(3)$ gibt mit $\phi = (\operatorname{int} g) \circ \psi$.

22.1.6 Quaternionale Gruppen

22.1.6.1 (**Erinnerungen zu Quaternionen**). Die Behauptungen des vorhergehenden Abschnitts kann man alternativ auch im Bild der Quaternionen verstehen. Wir erinnern an den Schiefkörper der Quaternionen

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\,\mathrm{i} \oplus \mathbb{R}\,\mathrm{j} \oplus \mathbb{R}\,\mathrm{k}$$

aus 3.5.6.4 mit den Rechenregeln $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{i}\,\mathrm{j}\,\mathrm{k} = -1$ und insbesondere an die quaternionale Konjugation

$$\overline{a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}} := a - b\,\mathrm{i} - c\,\mathrm{j} - d\,\mathrm{k}$$

mit der Eigenschaft $\overline{qw} = \bar{w}\bar{q}$. Man setzt $|q| := \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ und $\mathrm{Re}(q) := (q + \bar{q})/2$, also $\mathrm{Re}(a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}) = a$.

22.1.6.2 (**Kugelschalen als Liegruppen**). Alle Kugelschalen $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ sind glatte Mannigfaltigkeiten. Auf S^0, S^1 und S^3 induziert die Multiplikation in $\mathbb{R}$, den komplexen Zahlen $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ beziehungsweise den Quaternionen $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ aus 3.5.6.4 sogar die Struktur einer Liegruppe. Für das Modell des Schiefkörpers der Quaternionen aus dem Beweis von 3.5.6.3 stimmt die Gruppe S^3 der Quaternionen der Länge Eins überein mit der Gruppe $\mathrm{SU}(2)$ und wir erhalten so einen Isomorrphismus

$$\mathrm{SU}(2) \xrightarrow{\sim} S^3$$

Es scheint mir anschaulich klar und ist auch formal nicht schwer nachzurechnen, daß der Tangentialraum beim neutralen Element $\mathrm{T}_1 S^3$ genau der Raum der rein imaginären Quaternionen $Q = \mathbb{R}\,\mathrm{i} \oplus \mathbb{R}\,\mathrm{j} \oplus \mathbb{R}\,\mathrm{k} = \{w \in \mathbb{H} \mid \bar{w} = -w\}$ ist. Die adjungierte Darstellung der S^3 darauf geschieht wie immer durch Konjugation, ein invariantes Skalarprodukt können wir in diesem Fall leicht explizit angeben durch die Vorschrift $\langle v, w\rangle = \mathrm{Re}(\bar{v}w)$, und dafür bilden $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ dann eine Orthonormalbasis.

Definition 22.1.6.3. Wir erinnern den Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Quaternionen mit seinem Antiautomorphismus $q \mapsto \bar{q}$. Gegeben ein $\mathbb{H}$-Rechtsmodul V erklären wir eine **quaternional-hermitesche Form auf** V als eine biadditive Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{H} \\ (v, w) & \mapsto & \langle v, w\rangle \end{array}$$

mit $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$ und $\langle v, w\mu\rangle = \langle v, w\rangle\mu$ für alle $v, w \in V$ und $\mu \in \mathbb{H}$. **quaternionales Skalarprodukt** erklären wir als eine quaternional-hermitesche Form mit $\langle v, v\rangle \leq 0 \Rightarrow v = 0$.

22.1.6.4. Die Abbildung $\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$, $(x, y) \mapsto \sum \bar{x}_i y_i$ ist ein quaternionales Skalarprodukt auf dem $\mathbb{H}$-Rechtsmodul $\mathbb{H}^n$. Die Gruppe der Automorphismen unseres $\mathbb{H}$-Rechtsmoduls, die dieses quaternionale Skalarprodukt invariant lassen, heißt die **kompakte symplektische Gruppe** und wird $\mathrm{Sp}(n)$ notiert. Den Ursprung dieser Terminologie diskutieren wir in 22.1.6.6.

Übungen

Übung 22.1.6.5. Seien $V_{\mathbb{C}}$ ein komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $s = \langle\ ,\ \rangle$ und $V_{\mathbb{R}}$ seine Reellifizierung. Dann ist $\mathrm{Re} \circ s$ ein Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{R}}$ und $\mathrm{Im} \circ s$ eine symplektische Form auf $V_{\mathbb{R}}$ und wir erhalten in $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{R}})$ die drei Untergruppen $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{C}})$, $\mathrm{O}(V_{\mathbb{R}}; \mathrm{Re}\, s)$ und $\mathrm{Sp}(V_{\mathbb{R}}; \mathrm{Im}\, s)$. Man zeige, daß der Schnitt von je Zweien dieser Untergruppen bereits der Schnitt von allen Dreien ist. Insbesondere erhalten wir damit im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{GL}(2n;\mathbb{R}) & \\
\mathrm{GL}(n;\mathbb{C}) \arrow[ur, hook] & \mathrm{O}(2n) \arrow[u, hook] & \mathrm{Sp}(n;\mathbb{R}) \arrow[ul, hook] \\
 & \mathrm{U}(n) \arrow[ul, hook] \arrow[u, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

die Untergruppe ganz unten als Schnitt von je Zwei der Untergruppen in der Mitte.

Übung 22.1.6.6 (**Kompakte symplektische Gruppe und Quaternionen**). Jedes Quaternion $q \in \mathbb{H}$ können wir eindeutig schreiben als $q = x + jy$ mit $x, y \in \mathbb{C}$. Wir setzen $x := \mathrm{Com}(q)$ und $y := \mathrm{Qua}(q)$ und nennen das den **komplexen** und den **quaternionalen Anteil** unseres Quaternions. So vertauschen Com und Qua mit der Rechtsoperation von $\mathbb{C}$. Weiter gilt $\bar{q} = \bar{x} - jy$ und folglich $\mathrm{Com}(\bar{q}) = \overline{\mathrm{Com}(q)}$ sowie $\mathrm{Qua}(\bar{q}) = -\mathrm{Qua}(q)$. Sei nun $V_{\mathbb{H}}$ ein $\mathbb{H}$-Rechtsmodul mit quaternionalem Skalarprodukt $s = \langle\ ,\ \rangle$ und $V_{\mathbb{C}}$ seine Restriktion zu einem komplexen Vektorraum. Dann ist $\mathrm{Com} \circ s$ ein Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{C}}$ und $\mathrm{Quat} \circ s$ eine symplektische Form auf $V_{\mathbb{C}}$ und wir erhalten in $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{C}})$ die drei Untergruppen $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{H}})$, $\mathrm{U}(V_{\mathbb{C}}; \mathrm{Com}\, s)$ und $\mathrm{Sp}(V_{\mathbb{C}}; \mathrm{Qua}\, s)$. Man zeige, daß der Schnitt von je Zweien dieser Untergruppen bereits der Schnitt von allen Dreien ist. Insbesondere erhalten

wir damit im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{GL}(2n;\mathbb{C}) & \\
\mathrm{GL}(n;\mathbb{H}) \arrow[ur, hook] & \mathrm{U}(2n) \arrow[u, hook] & \mathrm{Sp}(n;\mathbb{C}) \arrow[ul, hook] \\
 & \mathrm{Sp}(n) \arrow[ul, hook] \arrow[u, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

die Untergruppe ganz unten als Schnitt von je Zwei der Untergruppen in der Mitte.

22.1.6.7. Seien V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und ω, η symplektische Formen. Stimmen die Automorphismengruppen G unserer beiden Formen überein, so unterscheiden sich unsere Formen höchstens um einen komplexen Skalar. In der Tat ist die Darstellung V der symplektischen Gruppe irreduzibel, und damit ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^{G}(V, V^*)$ höchstens eindimensional.

22.1.6.8. Der Normalisator von $\mathrm{Sp}(n)$ in $\mathrm{U}(2n)$ ist $\mathrm{Sp}(n)(\mathrm{U}(1)\,\mathrm{id})$. In der Tat ist $\mathrm{Sp}(n;\mathbb{C})$ der Zariski-Abschluß von $\mathrm{Sp}(n)$. Aus $g\,\mathrm{Sp}(n)g^{-1} = \mathrm{Sp}(n)$ folgt also $g\,\mathrm{Sp}(n;\mathbb{C})g^{-1} = \mathrm{Sp}(n;\mathbb{C})$. Daraus folgt hinwiederum, daß die symplektische Form ω und die symplektische Form $\omega \circ (g \times g)$ dieselbe Automorphismengruppe haben, nach 22.1.6.7 gilt demnach $\omega \circ (g \times g) = \lambda\omega$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Die Abbildung $g \mapsto \lambda$ ist nun ein Gruppenhomomorphismus von unserem Normalisator nach $\mathbb{C}^\times$ und ihre Restriktion auf den Normalisator in $\mathrm{U}(2n)$ muß folglich in der Kreisgruppe $\mathrm{U}(1)$ landen. Wählen wir schließlich α mit $\alpha^2\lambda = 1$, so folgt $\alpha \in \mathrm{U}(1)$ und $(\alpha\,\mathrm{id})g \in \mathrm{Sp}(n;\mathbb{C})$.

Übung 22.1.6.9. Die Lösungsmenge der Gleichung $X^2 = -1$ in den Quaternionen ist genau die Kugelschale aller Quaternionen vom Betrag Eins mit Realteil Null.

Übung 22.1.6.10. Wir haben in 10.2.4.3 gesehen, daß jeder Automorphismus des Körpers $\mathbb{R}$ die Identität ist, und in 3.2.7.5, daß jeder stetige Automorphismus des Körpers $\mathbb{C}$ die Identität oder die komplexe Konjugation ist. Man zeige nun, daß jeder stetige Automorphismus des Schiefkörpers $\mathbb{H}$ durch die Konjugation mit einem invertierbaren Körperelement gegeben wird und konstruiere eine Identifikation besagter Automorphismengruppe mit der $\mathrm{SO}(3)$.

Übung 22.1.6.11 (**Iwasawa-Zerlegung quaternionaler Matrizen**). Gegeben eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ eines $\mathbb{H}$-Rechtsmoduls von endlichem Rang V finden wir, indem wir das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren verallgemeinern, eindeutig bestimmte $\lambda_{ij} \in \mathbb{H}$ für $i \le j$ mit $\lambda_{ii} > 0$ derart, daß $\vec{w}_1 := \vec{v}_1\lambda_{11}, \vec{w}_2 := \vec{v}_2\lambda_{22} + \vec{v}_1\lambda_{12}, \ldots$ eine Orthonormalbasis von V bilden. Man folgere, daß für $N \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{H})$ die Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit reellen positiven

Diagonaleinträgen die Multiplikation eine Bijektion $\mathrm{Sp}(n) \times N \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(n; \mathbb{H})$ liefert.

Übung 22.1.6.12. Die Operation der Quaternionen der Länge Eins auf dem Quaternionenraum durch Rechts- und Linksmultiplikation liefert eine Surjektion

$$S^3 \times S^3 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(\mathbb{H}) \cong \mathrm{SO}(4)$$

gegeben in Formeln durch $(q, w) \mapsto (x \mapsto (qx\bar{w}))$ mit zweielementigem Kern $\{(1,1), (-1,-1)\}$. Das Skalarprodukt auf $\mathbb{H}$ ist dabei $\langle x, y \rangle := \mathrm{Re}(\bar{x}y)$.

22.2 Endlichdimensionale Darstellungen

22.2.1 Darstellungen und ihre Ableitungen

22.2.1.1. In diesem Abschnitt mag der Leser unter einer Liegruppe je nach Kenntnisstand eine Matrixliegruppe oder auch eine abstrakte Liegruppe verstehen. Unter einer reellen beziehungsweise komplexen **endlichdimensionalen Darstellung einer Liegruppe** G verstehen wir stets eine stetige Darstellung im Sinne von 22.1.1, also ein Paar (V, ρ) bestehend aus einem endlichdimensionalen reellen beziehungsweise komplexen Vektorraum V mit einem stetigen Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$. Statt $\rho(g)(v)$ schreiben wir auch oft abkürzend gv. Wollen wir die bei Liegruppen meist implizit zugrundegelegte Annahme der Stetigkeit besonders betonen, so reden wir auch von **stetigen endlichdimensionalen Darstellungen**.

Beispiel 22.2.1.2. Der $\mathbb{R}^n$ ist in offensichtlicher Weise eine Darstellung der Liegruppe $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$. Dasselbe gilt für die Räume $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^{(m)}$ aller Polynomfumktionen auf $\mathbb{R}^n$, die homogen sind vom Grad m, für die Operation gegeben durch das „Verschieben von Funktionen“, in Formeln $(gf)(p) = f(g^{-1}p)$ für alle $g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Dasselbe gilt mit $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$ und wir erhalten die komplexe Darstellung $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$, bei der ich die Variablen groß geschrieben habe, weil sie hier keine Koordinaten im reellen Sinne mehr sind.

Definition 22.2.1.3. Sei k ein Körper. Eine **Darstellung einer Liealgebra** $\mathfrak{g}$ über k ist ein Paar (V, ρ) bestehend aus einem k-Vektorraum V und einem Homomorphismus von Liealgebren $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Beispiel 22.2.1.4 (**Ableiten einer Liegruppendarstellung**). Ist G eine Liegruppe und $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine stetige Darstellung durch Automorphismen eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums, so wird V nach 22.1.4.10 eine Darstellung der Liealgebra $\mathrm{Lie}\, G$ vermittels des Differentials beim neutralen Element, das wir oft abkürzen zu

$$\mathrm{d}\rho = \mathrm{d}_e\rho : \mathrm{Lie}\, G \to \mathfrak{gl}(V)$$

Diese Darstellung der Liealgebra $\mathrm{Lie}\, G$ heißt die **abgeleitete Darstellung** zur Darstellung unserer Liegruppe G.

Beispiel 22.2.1.5. Die Darstellung $\rho_n : S^1 \to \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto z^n$ der Kreislinie hat das Differential $\mathrm{d}_e\rho_n : \lambda \mapsto n\lambda$ für $\lambda \in \mathrm{T}_1 S^1 = \mathrm{i}\mathbb{R} \subset \mathbb{C} = \mathrm{T}_1\mathbb{C}^\times$.

Definition 22.2.1.6. Sei k ein Körper. Eine **Operation einer Liealgebra** $\mathfrak{g}$ über k auf einem k-Vektorraum V ist eine bilineare Abbildung $\mathfrak{g} \times V \to V$, $(x, v) \mapsto xv$

mit der Eigenschaft

$$x(yv) - y(xv) = [x, y]v \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, v \in V$$

Wir werden in diesem Zusammenhang die Klammern oft weglassen und $x(yv)$ mit xyv abkürzen.

22.2.1.7. Seien k ein Körper, $\mathfrak{g}$ eine k-Liealgebra und V ein k-Vektorraum. So induziert die Identifikation $\mathrm{Ens}(\mathfrak{g} \times V, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(\mathfrak{g}, \mathrm{Ens}(V, V))$ aus dem Exponentialgesetz 2.1.6.5 eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Operationen von } \mathfrak{g} \\ \text{auf dem Vektorraum } V \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Liealgebrenhomomorphismen} \\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) \end{array} \right\}$$

Ein Vektorraum mit der Operation einer Liealgebra ist also im wesentlichen dasselbe wie eine Darstellung besagter Liealgebra.

22.2.1.8 (**Berechnung der abgeleiteten Darstellung**). Gegeben eine stetige endlichdimensionale Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ einer Liegruppe und $x \in \mathrm{Lie}\, G$ und $v \in V$ berechnet man $xv \in V$ zweckmäßig, indem man unserem ρ das Auswerten $a_v : \mathrm{GL}(V) \to V$ nachschaltet. Als Restriktion einer linearen Abbildung $a_v : \mathrm{End}(V) \to V$ ist a_v sein eigenes Differential, in Formeln $\mathrm{d}a_v = a_v$ oder ganz pedantisch $\mathrm{d}a_v \circ \mathrm{trans} = \mathrm{trans} \circ a_v$. So ergibt sich für die Operation eines Elements x der Liealgebra auf einem Vektor v die Formel

$$xv = (\mathrm{d}_e(a_v \circ \rho))(x)$$

für das Bild von x unter dem Differential beim neutralen Element der Abbildung $a_v \circ \rho : G \to V$, also der Abbildung $g \mapsto gv$. Halten wir noch eine Kurve $\mathbb{R} \to G$ mit Geschwindigkeit x bei $t = 0$ davor, zum Beispiel die Kurve $t \mapsto \exp(tx)$, ergibt sich für die Operation eines Elements x der Liealgebra auf einem Vektor v einer Darstellung die Formel

$$xv = \lim_{t \to 0} \frac{(\exp tx)v - v}{t}$$

Beispiel 22.2.1.9 (**Abgeleitete Darstellung auf Funktionenräumen**). Wir berechnen die Ableitung der Darstellung von $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^{(m)}$ aus 22.2.1.2. Gegeben $A \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ und ein Polynom f finden wir für die zugehörige Operation von A auf f gefolgt vom Auswerten an einer Stelle $p \in \mathbb{R}^n$ sofort

$$(Af)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\exp(-tA)p) - f(p)}{t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\exp(-tA)p) = (\mathrm{D}_{-Ap} f)(p)$$

alias die Richtungsableitung von f bei p in der Richtung $-Ap$. Nun kann die Richtungsableitung in Richtung $v = (v_1, \ldots, v_n)$ geschrieben werden als $v_1\partial_1 + \ldots + v_n\partial_n$ und wir haben folglich $(Af)(p) = -\sum_{i,j} a_{ij}x_j(p)(\partial_i f)(p)$ alias

$$Af = -\sum_{i,j} a_{ij}x_j\partial_i f$$

Betrachten wir etwa die eindimensionale Untergruppe aller Vielfachen der Einheitsmatrix, die ja durch Streckungen auf $\mathbb{R}^n$ operiert, so operiert die Einheitsmatrix als Element der Liealgebra durch das radiale Vektorfeld $-\sum_i x_i\partial_i$.

Beispiel 22.2.1.10 (**Abgeleitete Darstellung auf Funktionenräumen, Variante**). Wir berechnen die Ableitung der Darstellung von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]^{(m)}$ aus 22.2.1.2. Gegeben $A \in \mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})$ und ein Polynom f finden wir für die zugehörige Operation von A auf f gefolgt vom Auswerten an einer Stelle $p \in \mathbb{C}^n$ sofort

$$(Af)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\exp(-tA)p) - f(p)}{t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\exp(-tA)p) = (\mathrm{D}_{-Ap}f)(p)$$

alias die Richtungsableitung von f bei p in der Richtung $-Ap$. Ich behaupte nun, daß die Richtungsableitung in Richtung $v = (v_1, \ldots, v_n)$ einer polynomialen Funktion auch in diesem Fall geschrieben werden kann als $v_1\partial_1 + \ldots + v_n\partial_n$ mit diesmal rein formal-algebraisch zu verstehenden partiellen Ableitungen unserer komplexen Polynome. Das ist aber klar für die Variablen X_i, und da beide Ausdrücke die Leibnizregel erfüllen, folgt es für beliebige Polynome. Wir haben folglich wie zuvor $(Af)(p) = -\sum_{i,j} a_{ij}X_j(p)(\partial_i f)(p)$ alias

$$Af = -\sum_{i,j} a_{ij}X_j\partial_i f$$

Beispiel 22.2.1.11. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Die **triviale Operation** $xv = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $v \in V$ macht jeden Vektorraum V zu einer Darstellung von $\mathfrak{g}$. Der Grundkörper k versehen mit der trivialen Operation heißt die **Einsdarstellung**, den Nullvektorraum versehen mit der trivialen Operation die **Nulldarstellung** unserer Liealgebra. Ist V eine endlichdimensionaler reeller Vektorraum und lassen wir eine Liegruppe derart darauf operieren, daß jedes Gruppenelement als die Identität operiert, so erhalten wir als Ableitung die triviale Operation von $\mathrm{Lie}\, G$ auf V.

Beispiel 22.2.1.12. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Für $x \in \mathfrak{g}$ erkläre man $(\mathrm{ad}\, x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ durch die Vorschrift $(\mathrm{ad}\, x) : y \mapsto [x, y]$. Die Jacobi-Identität besagt dann, daß $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ ein Homomorphismus von Liealgebren ist. Er heißt die **adjungierte Darstellung** unserer Liealgebra. Ist nun speziell G eine Matrixliegruppe und Ad :

$G \to \mathrm{GL}(\operatorname{Lie} G)$ ihre adjungierte Darstellung, so ist deren abgeleitete Darstellung der Liealgebra gerade unsere adjungierte Darstellung der Liealgebra $\mathrm{ad} : \operatorname{Lie} G \to \mathrm{GL}(\operatorname{Lie} G)$. In der Tat finden wir mit 22.2.1.8 mühelos

$$((\mathrm{d}_e \operatorname{Ad})(X))(Y) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\exp(tX))Y(\exp(-tX)) = [X, Y] = (\mathrm{ad}(X))(Y)$$

Übungen

Übung 22.2.1.13 (**Liealgebra einer Standgruppe**). Ist $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine stetige endlichdimensionale Darstellung einer Liegruppe und $v \in V$ ein Vektor, so gilt für die Liealgebra der Standgruppe

$$\operatorname{Lie}(G_v) = \{x \in \operatorname{Lie} G \mid xv = 0\}$$

Hinweis: Man mag 22.1.2.32 anwenden.

Übung 22.2.1.14. Sei V ein Vektorraum. Die offensichtliche Operation macht V zu einer Darstellung von $\mathfrak{gl}(V)$, der **Standarddarstellung** von $\mathfrak{gl}(V)$. Im Fall eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums zeige man, daß sie die Ableitung der offensichtlichen Darstellung der Matrixliegruppe $G = \mathrm{GL}(V)$ durch Automorphismen von V ist.

Übung 22.2.1.15. Gegeben zwei Darstellungen (V, ρ) und (W, σ) einer Gruppe G über einem Körper k wird der Raum $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ aller k-linearen Homomorphismen zu einer Darstellung vermittels der Vorschrift, daß für $f : V \to W$ linear und $g \in G$ der Morphismus gf gegeben sein soll durch $gf = \sigma(g) \circ f \circ \rho(g)^{-1}$ alias

$$(gf)(v) = g(f(g^{-1}v)) \quad \forall v \in V$$

Wir nennen diese Operation auf dem Raum aller Homomorphismen die **Operation durch Konjugation**. Man zeige: Gegeben zwei stetige endlichdimensionale Darstellungen V, W einer Liegruppe G ist auch die Operation durch Konjugation von G auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ stetig, und die abgeleitete Operation der Liealgebra wird für $x \in \operatorname{Lie} G$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ dadurch gegeben, daß für alle $v \in V$ gilt

$$(xf)(v) = x(f(v)) - f(xv)$$

Ergänzende Übung 22.2.1.16. Gegeben zwei Darstellungen (V, ρ) und (W, σ) einer Gruppe G über einem Körper k wird der Raum $V \otimes_k W$ zu einer Darstellung vermittels der Vorschrift $g(v \otimes w) := gv \otimes gw$. Wir nennen diese Darstellung die **Tensor-Darstellung**. Man zeige: Gegeben zwei stetige endlichdimensionale Darstellungen V, W einer Liegrupe G ist auch die Tensordarstellung stetig, und die abgeleitete Operation der Liealgebra wird für $x \in \operatorname{Lie} G$ gegeben durch

$$x(v \otimes w) = xv \otimes w + v \otimes xw$$

Ergänzende Übung 22.2.1.17. Gegeben eine Darstellung (V, ρ) einer Gruppe G über einem Körper k werden ihre äußeren Potenzen $\bigwedge^i V$ zu Darstellungen in der offensichtlichen Weise. Gegeben eine stetige endlichdimensionale Darstellungen V einer Liegrupe G sind auch ihre äußeren Potenzen stetig. Man beschreibe die abgeleitete Operation der Liealgebra.

22.2.2 Homomorphismen von Darstellungen

22.2.2.1. Ich erinnere daran, daß wir in 22.1.1.9 einen Homomorphismus von Darstellungen V, W einer Gruppe G über einem Körper k definiert hatten als eine k-lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ mit der Eigenschaft $\varphi(gv) = g\varphi(v)\ \forall v \in V$, $g \in G$. Wir notieren die Menge aller solchen Homomorphismen $\mathrm{Mod}_G(V, W)$ oder, wenn wir den Grundkörper explizit machen wollen, $\mathrm{Mod}_{k,G}(V, W)$. Noch allgemeiner erklären wir für Darstellungen $V_1, \ldots, V_r, W$ mit $r \geq 0$ eine **Verschmelzung** als eine G-äquivariante multilineare Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_r \to W$ und notieren die Menge aller derartigen Verschmelzungen

$$\mathrm{Mod}_{k,G}(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r, W)$$

Im Spezialfall $r = 0$ verstehen wir das leere Produkt als die einpunktige Menge $\{*\}$ mit der trivialen G-Operation und das Auswerten auf deren einzigem Element $*$ ist eine Bijektion $\mathrm{Mod}_{k,G}(\curlyvee, W) \xrightarrow{\sim} W^G$ zwischen der Menge der Leerverschmelzungen nach W und der Menge der G-invarianten Vektoren. Verschmelzungen lassen sich in der offensichtlichen Weise „multiverknüpfen“ und wir erhalten so eine „Schmelzkategorie“ im Sinne von 18.1.1.4, aber so weit will ich hier nicht gehen. Ich will jedoch gegeben k-Vektorräume $V_1, \ldots, V_r, W$ mit $r \geq 0$ für die Menge der multilinearen Abbildungen von nun an auch die Notation $\mathrm{Mod}_k(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r, W)$ verwenden.

Definition 22.2.2.2. Ein **Homomorphismus von Darstellungen** oder auch **Verflechtungsoperator** zwischen zwei Darstellungen V, W einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k ist eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ derart, daß gilt $\varphi(xv) = x\varphi(v)\ \forall v \in V$, $x \in \mathfrak{g}$. Wir notieren die Menge aller solchen Homomorphismen $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ oder auch $\mathrm{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(V, W)$, wenn wir den Grundkörper explizit machen wollen. Allgemeiner erklären wir für Darstellungen $V_1, \ldots, V_r, W$ mit $r \geq 0$ eine **Verschmelzung** als eine multilineare Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_r \to W$ mit

$$\varphi(xv_1, \ldots, v_r) + \ldots + \varphi(v_1, \ldots, xv_r) = x\varphi(v_1, \ldots, v_r)\ \forall v_i \in V_i, x \in \mathfrak{g}$$

und notieren die Menge aller derartigen Verschmelzungen

$$\mathrm{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r, W)$$

Im Spezialfall $r = 0$ verstehen wir die leere Summe als die Null von W und das leere Produkt als die einpunktige Menge $\{*\}$ und das Auswerten auf dem einzigen Element $*$ der einunktigen Menge ist eine Bijektion $\mathrm{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(\curlyvee, W) \xrightarrow{\sim} W^{\mathfrak{g}}$ zwischen der Menge der Leerverschmelzungen nach W und der Menge der Vektoren von W, die von allen Elementen der Liealgebra zu Null gemacht werden. Verschmelzungen lassen sich in der offensichtlichen Weise „multiverknüpfen“ und wir erhalten so eine „Schmelzkategorie“ 18.1.1.4, aber so weit will ich hier nicht gehen.

Satz 22.2.2.3 (**Verschmelzungen unter Liegruppen und Liealgebren**). *Gegeben $r \geq 0$ und endlichdimensionale stetige reelle Darstellungen $V_1, \ldots, V_r, W$ einer Liegruppe G sind alle Verschmelzungen unserer Darstellungen auch Verschmelzungen zwischen den abgeleiteten Darstellungen der Liealgebra $\mathfrak{g}$, in Formeln*

$$\mathrm{Mod}_{\mathbb{R},G}(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r, W) \subset \mathrm{Mod}_{\mathbb{R},\mathfrak{g}}(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r, W)$$

Ist G zusammenhängend, so ist diese Inklusion sogar eine Gleichheit.

Vorschau 22.2.2.4 (**Darstellungen als Schmelzkategorie**). In der in 18.1.3.2 eingeführten Terminologie kann man die vorhergehenden Bemerkungen dahingehend zusammenfassen, daß die endlichdimensionalen stetigen reellen Darstellungen einer Liegruppe eine Schmelzkategorie $\mathrm{Modfd}_{\mathbb{R}}^{G}$ mit universellen Verschmelzungen und Multihom bilden, daß die Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ desgleichen eine Schmelzkategorie $\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}^{\mathfrak{g}}$ mit universellen Verschmelzungen und Multihom bilden, und daß das Ableiten ein mit universellen Verschmelzungen und Multihom verträglicher Schmelzfunktor

$$\mathrm{Modfd}_{\mathbb{R},G} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{R},\mathfrak{g}}$$

ist, der im Fall einer zusammenhängenden Liegruppe sogar ein volltreuer Schmelzfunktor $\mathrm{Modfd}_{\mathbb{R},G} \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_{\mathbb{R},\mathfrak{g}}$ ist.

22.2.2.5 (**Invarianten von Liegruppen und Liealgebren**). Gegeben eine Darstellung V einer Gruppe G verwenden wir wie in 4.5.1.7 die Notation

$$V^G := \{v \in V \mid gv = v \ \forall g \in G\}$$

für die Menge der G-**invarianten Vektoren von** V. Für eine Darstellung V einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ setzen wir

$$V^{\mathfrak{g}} := \{v \in V \mid xv = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

und nennen die Elemente von $V^{\mathfrak{g}}$ die $\mathfrak{g}$-**invarianten Vektoren von** V. Ist G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und V eine stetige Darstellung von G in einem

endlichdimensionalen reellen Vektorraum, so sind nach dem Spezialfall $r = 0$ unseres Satzes alle unter der Gruppe invarianten Vektoren auch invariant unter ihrer Liealgebra, in Formeln $V^G \subset V^{\mathfrak{g}}$, und für zusammenhängendes G gilt sogar

$$V^G = V^{\mathfrak{g}}$$

22.2.2.6. Zwei Darstellungen heißen **isomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Homomorphismus gibt, der ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Die Umkehrabbildung dieses Isomorphismus ist dann notwendig auch ein Homomorphismus von Darstellungen. Spezialisieren wir unseren Satz zum Fall $r = 1$, so sehen wir insbesondere, daß zwei endlichdimensionale stetige reelle Darstellungen einer zusammenhängenden Liegruppe, die isomorphe Darstellungen der Liealgebra liefern, bereits als Darstellungen der Gruppe isomorph gewesen sein müssen.

Beweis. Für alle $x \in \mathfrak{g}$ und jede Verschmelzung φ von G-Darstellungen und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi(\exp(tx)v_1, \ldots, \exp(tx)v_r) = \exp(tx)\varphi(v_1, \ldots, v_r)$$

Die Kettenregel und unsere Regel für das Differential multilinearer Abbildungen liefern dann durch Vergleich der beiden Ausdrücke für die Geschwindigkeit im Ursprung dieses Weges zum Zeitpunkt Null die gewünschte Identität

$$\varphi(xv_1, \ldots, v_r) + \ldots + \varphi(v_1, \ldots, xv_r) = x\varphi(v_1, \ldots, v_r)$$

Andererseits liefert das Vorschalten von x an den verschiedenen Stellen paarweise kommutierende Endomorphismen des Raums $\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r, W)$ aller multilinearen Abbildungen, folglich ist das Exponential ihrer Summe das Produkt ihrer Exponentiale und aus unserer letzten Gleichung folgt umgekehrt

$$\varphi(\exp(x)v_1, \ldots, \exp(x)v_r) = \exp(x)\varphi(v_1, \ldots, v_r)\ \forall x \in \mathfrak{g}$$

Ist zusätzlich G zusammenhängend, so wird G von $\exp \mathfrak{g}$ erzeugt und wir erhalten die behauptete Gleichheit von Räumen von Verschmelzungen. □

Definition 22.2.2.7. Ein Untervektorraum U einer Darstellung V einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt eine **Unterdarstellung**, wenn gilt $xv \in U\ \forall x \in \mathfrak{g},\ v \in U$. Wir sagen in diesem Zusammenhang auch, U sei **stabil unter** $\mathfrak{g}$. Eine von V verschiedene Unterdarstellung $U \subsetneq V$ heißt eine **echte Unterdarstellung** von V.

Beispiele 22.2.2.8. Gegeben eine Darstellung V sind ganz V und der Nullraum Unterdarstellungen. Ist $\varphi : V \to W$ ein Homomorphismus von Darstellungen, so ist das Bild jeder Unterdarstellung von V eine Unterdarstellung von W und das Urbild jeder Unterdarstellung von W eine Unterdarstellung von V. Insbesondere ist $\ker\varphi$ eine Unterdarstellung von V und $\mathrm{im}\varphi$ eine Unterdarstellung von W.

Satz 22.2.2.9 (**Unterdarstellungen zu Liegruppen und Liealgebren**). *Ein Untervektorraum einer stetigen endlichdimensionalen reellen oder komplexen Darstellung einer zusammenhängenden Liegruppe ist stabil unter unserer Liegruppe genau dann, wenn er stabil ist unter ihrer Liealgebra.*

Ergänzung 22.2.2.10. In der Sprache der Kategorientheorie sagt das im Fall reeller Darstellungen, daß für eine zusammenhängende Liegruppe G das essentielle Bild des volltreuen Funktors des Differenzierens $\mathrm{Modfd}_{\mathbb{R}}^{G} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}^{\mathfrak{g}}$ stabil ist unter dem Bilden von Unterdarstellungen.

Beweis. Sei G unsere zusammenhängende Liegruppe, $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$ ihre Liealgebra und V unsere Darstellung. Jeder G-stabile Teilraum ist offensichtlich auch $\mathfrak{g}$-stabil. Jeder unter einem Endomorphismus $x \in \mathrm{End}\, V$ stabilte Teilraum ist auch unter $\exp(x)$ stabil, da er abgeschlossen ist. Jeder $\mathfrak{g}$-stabile Teilraum ist damit auch $(\exp \mathfrak{g})$-stabil wegen der Kommutativität des Diagramms in 22.1.4.10. Damit ist er dann auch G-stabil, denn jede zusammenhängende Liegruppe wird vom Bild ihrer Exponentialabbildung erzeugt nach 22.1.2.20 oder ausführlicher nach dem Beweis von 22.1.2.22. □

Definition 22.2.2.11. Eine Darstellung einer Liealgebra heißt **einfach** oder gleichbedeutend **irreduzibel**, wenn sie nicht Null ist und ihre einzige echte Unterdarstellung die Nulldarstellung ist.

Korollar 22.2.2.12. *Gegeben jede zusammenhängende Liegruppe liefert das Ableiten von Darstellungen eine Einbettung auf Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Einfache endlichdimensionale} \\ \textit{stetige reelle Darstellungen} \\ \textit{unserer Liegruppe} \end{array} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{Einfache Darstellungen} \\ \textit{ihrer Liealgebra} \end{array} \right\}$$

Beweis. Einfache Darstellungen bleiben einfach beim Übergang zur Liealgebra nach 22.2.2.9, nichtisomorphe bleiben nichtisomorph nach 22.2.2.3. □

22.2.2.13. Gegeben ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V gibt es auf der Menge $V \times V$ genau eine Struktur als $\mathbb{C}$-Vektorraum derart, daß die Einbettung in die erste Komponente $\mathrm{can} : V \to V \times V$, $v \mapsto (v, 0)$ reell-linear ist und daß für die Multiplikation mit $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{i}(v, 0) = (0, v)$. Wir bezeichnen diesen $\mathbb{C}$-Vektorraum mit

$$V^{\mathbb{C}}$$

und nennen ihn die **Komplexifizierung** des $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Weiter kürzen wir meist $(v, 0) = v$ ab und können dann jedes Element von $V^{\mathbb{C}}$ eindeutig schreiben in der Form $v + \mathrm{i}\, w$ mit $v, w \in V$. Das Vorschalten unserer Einbettung $\mathrm{can} : V \hookrightarrow V^{\mathbb{C}}$

liefert für jeden $\mathbb{C}$-Vektorraum eine Bijektion $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ und allgemeiner auch auf Räumen multilinearer Abbildungen Bijektionen

$$\operatorname{Mod}_{\mathbb{C}}(V_1^{\mathbb{C}} \curlyvee \ldots \curlyvee V_r^{\mathbb{C}}, W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r, W)$$

Die Abbildung $c : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ gegeben durch $(v + \mathrm{i}\, w) \mapsto (v - \mathrm{i}\, w)$ für beliebige $v, w \in V$ ist schieflinear, als da heißt, sie erfüllt die Regel $c(za) = \bar{z}c(a)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $a \in V^{\mathbb{C}}$, und für jeden c-stabilen komplexen Teilraum $W \subset V^{\mathbb{C}}$ entspricht die reell-lineare Einbettung $W^c \hookrightarrow V^{\mathbb{C}}$ der Fixpunkte von c in W nach $V^{\mathbb{C}}$ unter obiger Bijektion einem Isomorphismus $(W^c)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} W$. Noch allgemeiner liefert sogar für jeden komplexen Vektorraum W mit einer schieflinearen Involution c die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $(W^c)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} W$ von komplexen Vektorräumen.

Ergänzung 22.2.2.14. Eine alternative und besser verallgemeinerbare Konstruktion der Komplexifizierung wird in 4.6.1.42 besprochen. Ist genauer V ein reeller Vektorraum, so ist der mithilfe des Tensorprodukts konstruierte Vektorraum $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ kanonisch isomorph zur hier sozusagen zu Fuß konstruierten Komplexifizierung von V.

22.2.2.15. Für jede reelle Algebra A ist ihre Komplexifizierung $A^{\mathbb{C}}$ mit der induzierten Verknüpfung eine komplexe Algebra und die Komplexifizierung jeder reellen Liealgebra ist offensichtlich eine komplexe Liealgebra. Ist schließlich B eine komplexe Algebra und $A \to B$ ein Morphismus von reellen Algebren, so ist die induzierte komplexlineare Abbildung $A^{\mathbb{C}} \to B$ nach dem Vorhergehenden ein Morphismus von komplexen Algebren.

Korollar 22.2.2.16. *Für jede zusammenhängende Liegruppe liefert das Differenzieren gefolgt von der kanonischen Erweiterung auf die Komplexifizierung der Liealgebra eine Einbettung von Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Einfache endlichdimensionale} \\ \textit{stetige komplexe Darstellungen} \\ \textit{unserer Liegruppe} \end{array} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{Einfache Darstellungen} \\ \textit{ihrer komplexifizierten} \\ \textit{Liealgebra} \end{array} \right\}$$

Beweis. Ist G eine Liegruppe und $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine stetige Darstellung durch Automorphismen eines endlichdimensionalen komplexen Vektorraums, so liefert das Differential beim neutralen Element einen Homomorphismus von reellen Liealgebren $\mathrm{d}\rho : \operatorname{Lie} G \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Vermittels der universellen Eigenschaft der Komplexifizierung können wir diesen Homomorphismus auf genau eine Weise zu einer komplexlinearen Abbildung

$$(\operatorname{Lie} G)^{\mathbb{C}} \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$$

fortsetzen, die dann offensichtlich ein Homomorphismus von komplexen Liealgebren alias eine Darstellung der komplexen Liealgebra $(\operatorname{Lie} G)^{\mathbb{C}}$ sein muß. Das ist die Darstellung von $(\operatorname{Lie} G)^{\mathbb{C}}$, die im Korollar gemeint ist. Natürlich ist ein komplexer Teilraum $W \subset V$ stabil unter $\operatorname{Lie} G$ genau dann, wenn er stabil ist unter $(\operatorname{Lie} G)^{\mathbb{C}}$. Zusammen mit 22.2.2.9 folgt das Korollar. □

Übungen

Übung 22.2.2.17. Sind V, W Darstellungen einer Gruppe über einem Körper k, so sind die Verflechtungsoperatoren genau die Invarianten im Raum aller linearen Abbildungen unter der Operation durch Konjugation, in Formeln gilt also

$$\operatorname{Mod}_{k,G}(V, W) = \operatorname{Hom}_k(V, W)^G$$

Übung 22.2.2.18. Sind V, W Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k, so wird der Homomorphismenraum $\operatorname{Hom}_k(V, W)$ eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ durch die Vorschrift $(xf)(v) = x(f(v)) - f(xv) \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v \in V$ und $f \in \operatorname{Hom}_k(V, W)$, und mit dieser Operation von $\mathfrak{g}$ auf dem Homomorphismenraum gilt

$$\operatorname{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(V, W) = \operatorname{Hom}_k(V, W)^{\mathfrak{g}}$$

Die Sinnhaftigkeit der hier auf $\operatorname{Hom}_k(V, W)$ erklärten $\mathfrak{g}$-Operation wird durch 22.2.1.15 belegt.

Vorschau 22.2.2.19. Diese Übungen erweisen sich beide als Spezialfälle der natürlichen Bijektion $\mathcal{M}(V, W) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\Upsilon, V \Rrightarrow W)$ in einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit internem Hom und, wenn wir statt einer Bijektion sogar einen Vektorraumisomorphismus erhalten wollen, einer k-linearen Schmelzkategorie mit internem Hom.

22.2.3 Einfache Darstellungen der Spingruppe

22.2.3.1. Jetzt können wir auch unser Versprechen einlösen und die Klassifikation 22.1.1.17 der einfachen Darstellungen der Drehgruppe herleiten. Wir beginnen dem einfacheren Fall der Spingruppe $\mathrm{SU}(2)$.

Satz 22.2.3.2 (Einfache Darstellungen der Spingruppe). *Bis auf Isomorphismus gibt es in jeder Dimension genau eine irreduzible stetige komplexe Darstellung der Spingruppe, die Dimension liefert mithin eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Einfache endlichdimensionale komplexe} \\ \textit{Darstellungen der Spingruppe } \mathrm{SU}(2) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \{1, 2, 3, \ldots\}$$

22.2.3.3. Ich meine hier auf der linken Seite genauer Darstellungen bis auf Isomorphismus und habe das nur nicht explizit dazugeschrieben, um die Notation nicht zu überladen. Dieser Satz gilt im Gegensatz zum entsprechenden Satz im Fall der Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ nicht analog für reelle Darstellungen. Zum Beispiel besitzt die Spingruppe keine reelle stetige irreduzible Darstellung der Dimension Zwei, wie Sie in der folgenden Übung 22.2.3.10 zeigen sollen.

Beweis. Natürlich operiert $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ auf der komplexen Ebene $\mathbb{C}^2$. Damit operiert unsere Gruppe auch auf dem Raum $\mathrm{Ens}(\mathbb{C}^2,\mathbb{C})$ aller Abbildungen $P:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$, der so eine unendlichdimensionale komplexe Darstellung wird. In Formeln wird diese Operation gegeben durch die Formel

$$(gP)(v) = P(g^{-1}v) \quad \forall v\in\mathbb{C}^2,\ g\in\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$$

Sie ist äquivalent zur vielleicht anschaulicheren Bedingung $(gP)(gv) = P(v)$. Der Teilraum $\mathrm{L}(m) := \mathbb{C}[X,Y]^m \subset \mathbb{C}[X,Y]$ aller polynomialen Abbildungen, die homogen sind vom Grad m, ist in diesem Abbildungsraum eine Unterdarstellung der Dimension $(m+1)$ mit der Basis $Y^m, XY^{m-1},\ldots,X^m$. Die Operation von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ auf dieser Unterdarstellung ist offensichtlich stetig. Wir wollen nachweisen, sie eine irreduzible Darstellung von $\mathrm{SU}(2)$ ist. Dazu erinnern wir, daß die abgeleitete Operation einer Elements A der Liealgebra nach 22.2.1.10 gegeben wird durch das Anwenden des formal-algebraischen Differentialoperators

$$(-a_{11}X - a_{12}Y)\partial_x + (-a_{21}X - a_{22}Y)\partial_y$$

Diese Formeln liefern also eine Operation der Liealgebra $\mathfrak{gl}(2;\mathbb{C})$ auf dem Polynomring $\mathbb{C}[X,Y]$. Diese Operation ist offensichtlich sogar komplexlinear und macht insbesondere den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}[X,Y]$ zu einer Darstellung der komplexen Liealgebra $\mathfrak{gl}(2;\mathbb{C})$. Wir müssen nach 22.2.2.9 nur nachweisen, daß $\mathrm{L}(m)$ in Bezug auf diese Operation keinen echten unter $\mathfrak{su}(2) = \mathrm{Lie}(\mathrm{SU}(2))$ stabilen komplexen Untervektorraum hat außer dem Nullraum. Gleichbedeutend reicht es zu zeigen, daß $\mathrm{L}(m)$ eine irreduzible Darstellung der komplexen Unterliealgebra $\langle\mathfrak{su}(2)\rangle_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{gl}(2;\mathbb{C})$ ist. Nun erinnern wir

$$\mathfrak{su}(2) = \{A\in\mathrm{Mat}(2;\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} A = 0, \bar{A} = -A^\top\}$$

und beachten $\mathfrak{su}(2)\cap \mathrm{i}\,\mathfrak{su}(2) = 0$ und folgern mit Dimensionsvergleich $\langle\mathfrak{su}(2)\rangle_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$. Wir müssen also zeigen, daß $\mathrm{L}(m)$ eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ ist. Unter unserer Operation wirken, wie oben ausgerechnet, die Elemente

$$h = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad e = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad f = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ wie die Differentialoperatoren $-X\partial_x + Y\partial_y, -Y\partial_x$ und $-X\partial_y$. Insbesondere bilden die Vektoren $Y^m, XY^{m-1}, \ldots, X^m$ eine Basis von $\mathrm{L}(m)$ aus Eigenvektoren von h zu den Eigenwerten $m, m-2, \ldots, -m$ und e und f induzieren Isomorphismen zwischen Eigenräumen zu benachbarten Eigenwerten. Die Darstellung $\mathrm{L}(m)$ von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ ist damit in der Tat irreduzibel, denn jede von Null verschiedene Unterdarstellung muß nach 3.6.6.19 einen Eigenvektor von h enthalten und damit bereits die ganze Darstellung sein. Um zu zeigen, daß unsere Gruppe keine anderen irreduziblen komplexen Darstellungen besitzt, reicht es nach 22.2.2.16, dasselbe für ihre komplexifizierte Liealgebra zu prüfen. Nun ist wegen $\mathfrak{su}(2) \cap \mathrm{i}\,\mathfrak{su}(2) = 0$ der von der Einbettung $\mathfrak{su}(2) \hookrightarrow \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ induzierte Homomorphismus von komplexen Liealgebren sogar ein Isomorphismus $\mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ und wir zeigen gleich anschließend als Satz 22.2.3.5, daß $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ nicht noch weitere irreduzible endlichdimensionale Darstellungen hat. Damit ist dann auch unser Beweis hier zu Ende. □

Ergänzung 22.2.3.4. In der Physik lernt man die hier mit e und f bezeichneten Elemente auch als **Leiteroperatoren** oder **Kletteroperatoren** kennen. Die aus der Physik vertrauten weniger übersichtlichen Formeln werden Sie jedoch erst in 22.2.5.22 sehen, wenn wir ein invariantes Skalarprodukt wählen und zu einer Orthonormalbasis übergehen. In der Physik rechnet man auch oft mit den sogenannten **Pauli-Matrizen**

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ und eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathrm{i}\mathfrak{su}(2)$ bilden.

Satz 22.2.3.5 (Einfache Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$). *1. Zu jeder positiven endlichen Dimension gibt es bis auf Isomorphismus genau eine einfache Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$;*

2. Ist e, h, f eine Basis von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ mit $[h,e] = 2e$ und $[h,f] = -2f$ und $[e,f] = h$, so zerfällt jede einfache Darstellung L der Dimension $m+1$ unter h in eindimensionale Eigenräume

$$L = L_m \oplus L_{m-2} \oplus \ldots \oplus L_{2-m} \oplus L_{-m}$$

zu den ganzzahligen Eigenwerten $m, m-2, \ldots, 2-m, -m$, und aus $L_j \neq 0 \neq L_{j+2}$ folgt $f : L_{j+2} \xrightarrow{\sim} L_j$ sowie $e : L_j \xrightarrow{\sim} L_{j+2}$.

22.2.3.6. Die einfachen Darstellungen der Dimensionen 1, 2 und 3 sind die triviale Darstellung $\mathbb{C}$, die Standarddarstellung $\mathbb{C}^2$ und die „adjungierte Darstellung“, die wir in 22.2.1.12 eingeführt haben. Eine explizite Beschreibung der anderen einfachen Darstellungen wird im Beweis gegeben.

Ergänzung 22.2.3.7. Der Satz gilt mit demselben Beweis allgemeiner über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null und er folgt daraus ohne Schwierigkeiten über jedem Körper der Charakteristik Null. In positiver Charakteristik sind die Verhältnisse jedoch komplizierter.

Beweis. Daß es zu jeder endlichen Dimension eine einfache Darstellung $\mathrm{L}(m)$ mit den versprochenen Eigenschaften gibt, wissen wir bereits aus dem Beweis von 22.2.3.2. Explizit läßt sich eine derartige Darstellung auch mit etwas weniger Vorzeichen angeben. Die Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ hat ja die Basis

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Lie-Klammern zwischen den Elementen dieser Basis sind $[h,e] = 2e$, $[h,f] = -2f$, $[e,f] = h$. Mithilfe der Produktregel für formale partielle Ableitungen prüft man leicht explizit, daß die Abbildung $\rho : \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[X,Y])$ gegeben durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rcl} \rho(e) & = & X\partial_y \\ \rho(f) & = & Y\partial_x \\ \rho(h) & = & X\partial_x - Y\partial_y \end{array}$$

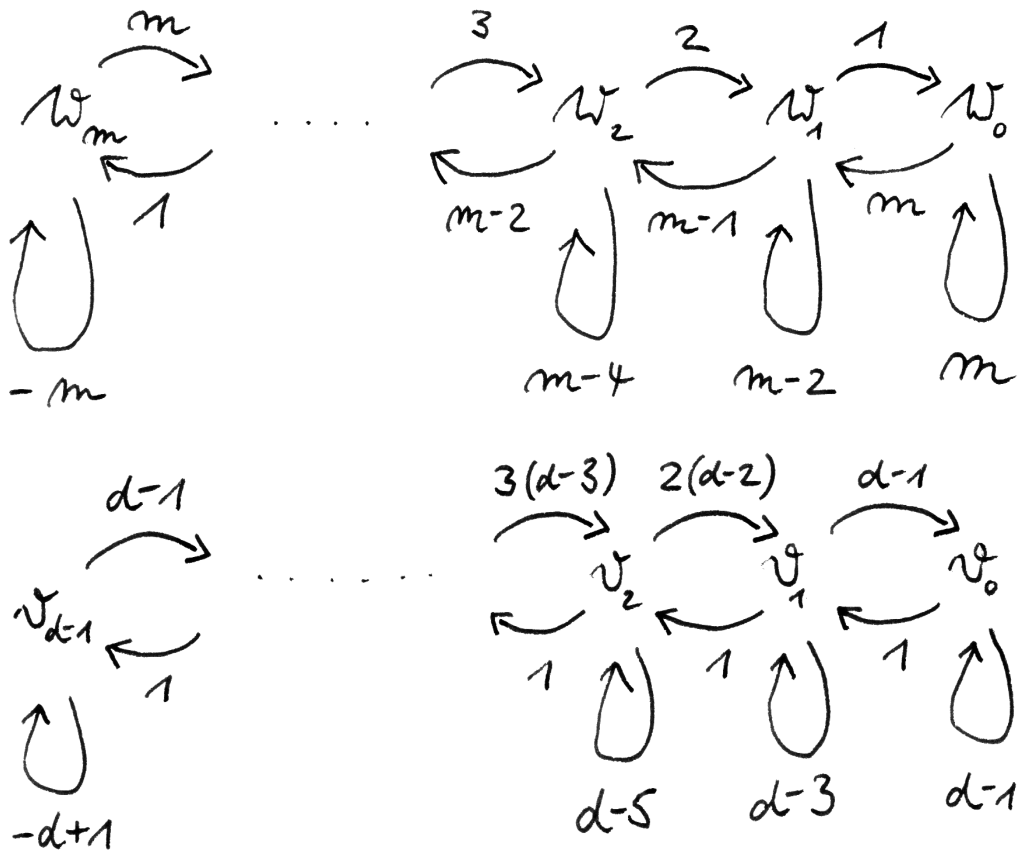
eine Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ ist, daß die homogenen Polynome von festem Totalgrad m eine Unterdarstellung $\mathrm{L}(m) = \mathbb{C}[X,Y]^m$ der Dimension $d = m+1$ mit Basis $w_i = Y^i X^{m-i}$ für $i = 0,\ldots,m$ bilden. In dieser Basis wird die Operation von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ auf $\mathrm{L}(m)$ beschrieben durch die Formeln

$$\begin{array}{rcl} ew_i & = & iw_{i-1} \\ fw_i & = & (m-i)w_{i+1} \\ hw_i & = & (m-2i)w_i \end{array}$$

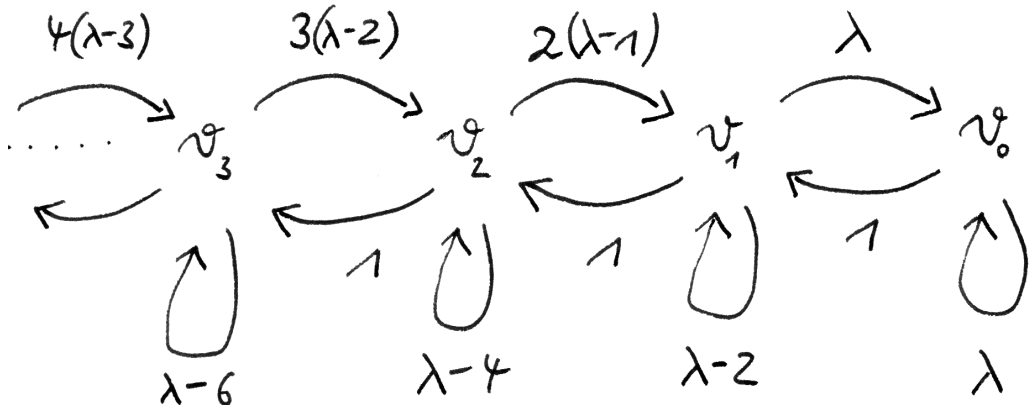
wo wir $w_{-1} = w_{m+1} = 0$ verstehen. Die Darstellungen $\mathrm{L}(m)$ sind einfach, denn jede von Null verschiedene Unterdarstellung $0 \neq U \subset \mathrm{L}(m)$ enthält notwendig einen Eigenvektor zu h, also eines der w_i, und daraus folgt sofort $U = \mathrm{L}(m)$. Damit haben wir nun auch in etwas übersichtlicherer Weise zu jeder endlichen Dimension eine einfache Darstellung gefunden. Wir müssen jedoch noch zeigen, daß je zwei einfache Darstellungen derselben endlichen Dimension isomorph sind. Sei dazu zunächst $\rho : \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ irgendeine Darstellung. Bezeichne $V_\mu = \ker(\rho(h) - \mu)$ den Eigenraum von $\rho(h)$ zum Eigenwert $\mu \in \mathbb{C}$. So gilt

$$eV_\mu \subset V_{\mu+2} \quad \text{und} \quad fV_\mu \subset V_{\mu-2}$$

denn aus $hv = \mu v$ folgt $hev = ehv + [h,e]v = e\mu v + 2ev = (\mu+2)ev$ und der zweite Fall ergibt sich ähnlich aus $[h,f] = -2f$. Ist V endlichdimensional und



Die einfachen endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ in zwei Basen. Die nach rechts weisenden Pfeile stellen jeweils die Operation von e dar, die nach links weisenden Pfeile die Operation von f und die Schlaufen die Operation von h.



Die Operation auf dem von den $v_i = f^i v$ aufgespannten Teilraum, in derselben Weise zu interpretieren wie die obenstehenden Darstellungen.

$V \neq 0$, so gibt es sicher $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $V_\lambda \neq 0$ aber $V_{\lambda+2} = 0$. Für $v \in V_\lambda$ folgt dann $ev = 0$ und $hv = \lambda v$. Wir schreiben $f^i v$ für den Vektor, der aus v durch i-maliges Anwenden von f entsteht. Man prüft per Induktion die Formeln

$$\begin{array}{rcll} hf^i v & = & (\lambda - 2i) f^i v & \text{für alle } i \geq 0, \\ ef^i v & = & i(\lambda - i + 1) f^{i-1} v & \text{für alle } i \geq 1. \end{array}$$

Die erste folgt unmittelbar aus unserer Erkenntnis $fV_\mu \subset V_{\mu-2}$, für die zweite muß etwas mehr gerechnet werden. Insbesondere ist nach diesen Formeln der von den $f^i v$ mit $i \geq 0$ aufgespannte Teilraum eine Unterdarstellung. Ist V zusätzlich einfach und $v \neq 0$, so müssen die $f^i v$ demnach ganz V aufspannen. Gilt $f^i v \neq 0$, so sind v, $fv \ldots, f^i v$ Eigenvektoren von h zu paarweise verschiedenen Eigenwerten und damit linear unabhängig. Da wir V endlichdimensional angenommen hatten, gibt es folglich $d \geq 1$ mit $f^d v = 0$. Wählen wir d kleinstmöglich, so ist v, fv, …, $f^{d-1} v$ eine Basis von V, also $d = \dim V$. Weiter folgt aus $f^d v = 0$ auch $0 = ef^d v = d(\lambda - d + 1) f^{d-1} v$ und mithin $\lambda = d - 1$, da wir ja $d \neq 0$ und $f^{d-1} v \neq 0$ vorausgesetzt hatten. Damit haben wir gezeigt, daß je zwei einfache Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ derselben endlichen Dimension d isomorph sind, da nämlich die Matrizen von $\rho(e)$, $\rho(f)$ und $\rho(h)$ in der Basis v, fv, …, $f^{d-1} v$ nur von d abhängen. □

22.2.3.8. Die expliziten Formeln für die einfachen endlichdimensionalen Darstellungen der $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ gefallen mir noch besser bei Parametrisierung der Basis nach den Eigenwerten von h. Setzen wir genauer $w_i = u_{m-2i}$, so erhalten wir für $\mathrm{L}(m)$ eine Basis bestehend aus $u_m, u_{m-2}, \ldots, u_{-m}$ und die Operation unserer Liealgebra wird gegeben durch die Formeln

$$\begin{array}{rcl} eu_j & = & ((m-j)/2) u_{j+2} \\ fu_j & = & ((m+j)/2) u_{j-2} \\ hu_j & = & j u_j \end{array}$$

Satz 22.2.3.9 (Einfache Darstellungen der räumlichen Drehgruppe). *Die einfachen endlichdimensionalen stetigen komplexen Darstellungen der Drehgruppe werden klassifiziert durch ihre Dimension. Genauer liefert die Dimension eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Einfache endlichdimensionale komplexe} \\ \textit{Darstellungen der Drehgruppe } \mathrm{SO}(3) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \{1, 3, 5, \ldots\}$$

Beweis von 22.2.3.9. Wir erinnern uns an die stetige Surjektion $\mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$ mit Kern $\{+1, -1\}$ aus 22.1.6.2. Das Zurückholen mit dieser Surjektion liefert nach der universellen Eigenschaft surjektiver Gruppenhomomorphismen 4.4.2.1

eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen einfacher Darstellungen der Drehgruppe und denjenigen Isomorphieklassen einfacher Darstellungen der Spingruppe, auf denen das Negative der Einheitsmatrix trivial operiert. Nach 11.3.2.17 alias, in der angemessenen Terminologie gesagt, da nach **??** eine stetige Surjektion von einem Kompaktum auf einen Hausdorffraum stets final ist, liefert diese Bijektion auch eine Bijektion zwischen den entsprechenden Isomorphieklassen einfacher stetiger Darstellungen. Das sind aber nach dem vorhergehenden offensichtlich genau die Darstellungen $\mathrm{L}(m) = \mathbb{C}[X, Y]^m$ für gerades m alias die einfachen stetigen Darstellungen ungerader Dimension der Spingruppe. $\square$

Übungen

Übung 22.2.3.10. Man zeige, daß die Spingruppe keine reelle stetige irreduzible Darstellung der Dimension Zwei besitzt. Hinweis: Man zeige zunächst, daß jede kompakte zusammenhängende Untergruppe von $\mathrm{GL}(\mathbb{R}; n)$ in $\mathrm{SL}(\mathbb{R}; n)$ enthalten sein muß, und argumentiere dann mit der Dimension.

Ergänzende Übung 22.2.3.11. Eine endlichdimensionale Darstellung V von $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ derart, daß weder Null noch Eins Eigenwerte von $h = \mathrm{diag}(1, -1)$ sind, in Formeln $V_0 = V_1 = 0$, kann nur die Nulldarstellung $V = 0$ sein.

Übung 22.2.3.12. Man zeige: Ist $\tilde{e}, \tilde{h}, \tilde{f}$ eine Basis von $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ mit $[\tilde{h}, \tilde{e}] = 2\tilde{e}$ und $[\tilde{h}, \tilde{f}] = -2\tilde{f}$, so gilt $[\tilde{e}, \tilde{f}] = c\tilde{h}$ für einen Skalar $c \neq 0$.

Ergänzende Übung 22.2.3.13. Die Räume $\mathrm{L}_{\mathbb{R}}(m) = \mathbb{R}[X, Y]^m$ aller homogenen Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}^2$ vom Grad m sind unter der von der offensichtlichen Wirkung von $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^2$ induzierten Operation einfache reelle Darstellungen der Gruppe $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ und jede stetige einfache endlichdimensionale Darstellung von $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ ist isomorph zu genau einer dieser Darstellungen. Hinweis: 22.2.3.6.

Ergänzende Übung 22.2.3.14. Gegeben ein beliebiger Körper k und eine Darstellung $\rho : \mathfrak{sl}(2; k) \to \mathfrak{gl}(V)$ der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2; k)$ mit ihrer Standardbasis e, h, f mit Kommutatoren $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$ liefert der in der assoziativen Algebra $\mathrm{End}_k(V)$ zu interpretierende Ausdruck

$$4\rho(f)\rho(e) + \rho(h)(\rho(h) + 2)$$

einen mit der Operation unserer Liealgebra verträglichen Endomorphismus von V. Im Fall der einfachen $(m+1)$-dimensionalen Darstellung $\mathrm{L}(m)$ der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ ist dieser Endomorphismus die Multiplikation mit dem Skalar $m(m+2)$. Hinweis: Tapfer rechnen. Dieser Operator ist im übrigen das einfachste Beispiel eines sogenannten **Casimir-Operators**, vergleiche 24.2.1.17.

Ergänzende Übung 22.2.3.15. Man betrachte die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2; k)$ mit ihrer Standardbasis e, h, f und Kommutatoren $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$.

Man prüfe per Induktion, daß allgemeiner als im Beweis von Satz 22.2.3.5 für jeden Vektor v einer Darstellung besagter Liealgebra mit $ev = 0$ gilt

$$\begin{array}{rcll} hf^i v & = & f^i(h-2i)v & \text{für alle } i \geq 0, \\ ef^i v & = & if^{i-1}(h-i+1)v & \text{für alle } i \geq 1. \end{array}$$

Ergänzende Übung 22.2.3.16. Man zeige, daß jede endlichdimensionale Darstellung V der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen ist. Hinweis: Man zerlege besagte Darstellung zunächst in die Haupträume des in 22.2.3.14 eingeführten Casimiroperators und ziehe sich so auf den Fall zurück, daß die einfachen Subquotienten unserer Darstellung V paarweise isomorph sind, sagen wir zu $\mathrm{L}(m)$. Dann zeige man, daß f^m einen Isomorphismus $\mathrm{Hau}(h;m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hau}(h;-m)$ zwischen den Haupträumen von h zu den entsprechenden Eigenwerten liefert. Schließlich folgere man aus 22.2.3.15 unter Verwendung von $f^{m+1}v = 0$, daß h auf $\mathrm{Hau}(h;m)$ diagonal operiert, und argumentiere von da ausgehend. Man zeige dasselbe Resultat auch im Fall reeller Koeffizienten und, wenn man in Algebra bewandert ist, über einem beliebigen Grundkörper der Charakteristik Null. Eine Verallgemeinerung des Resultats auf allgemeinere, sogenannte „halbeinfache“ Liealgebren wird in 24.2.1.6 gezeigt.

Ergänzende Übung 22.2.3.17. Jede endlichdimensionale Darstellung der Liegruppen $\mathrm{SU}(2)$ und $\mathrm{SO}(3)$ und $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ ist eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen. Hinweis: 22.2.3.16. Im Fall der beiden ersten Gruppen wird 22.2.4.12 einen alternativen Zugang liefern.

Übung 22.2.3.18. Man betrachte die Darstellung von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]^{(d)}$ der homogenen Polynome vom Grad d durch

$$(gP)(x) = P(g^{-1}x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$$

und zeige, daß in der abgeleiteten Darstellung der Liealgebra die Basismatrix E_{ij} mit einer Eins in der i-ten Zeile und j-ten Spalte und Null sonst wie der Differentialoperator $-X_j\partial_i$ operiert. Es scheint mir nun offensichtlich, daß wir mit diesen Operatoren jedes von Null verschiedene homogene Polynom in ein von Null verschiedenes homogenes Monom überführen können, und ein solches Monom in jedes andere vom selben Grad. Man folgere, daß diese Darstellungen sämtlich irreduzibel sind.

Ergänzende Übung 22.2.3.19. Für alle $n \geq 1$ bilden die homogenen Polynome vom Grad d eine irreduzible Darstellung

$$\mathcal{O}^d(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]^{(d)}$$

der Gruppe $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ sowie ihrer Untergruppen $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ und $\mathrm{U}(n)$. Für $n \geq 2$ bleiben sie irreduzibel unter $\mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$ und $\mathrm{SU}(n)$. In der Tat besteht

$\operatorname{Lie} \mathrm{SU}(n)$ aus den Fixpunkten einer schieflinearen Involution auf $\operatorname{Lie} \mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$ und die Einbettung liefert folglich einen Isomorphismus

$$\operatorname{Lie}_{\mathbb{C}} \mathrm{SU}(n) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Lie} \mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$$

Auf diese Weise können wir uns auf $\mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$ und dann sogar $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ zurückziehen. Nun überlegt man sich wie in 22.2.3.18, daß die Standardmatrizen E_{ij} der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})$ als die Differentialoperatoren $-X_j\partial_i$ wirken. Es scheint mir nun offensichtlich, daß wir mit diesen Operatoren jedes von Null verschiedene homogene Polynom in ein von Null verschiedenes homogenes Monom überführen können, und ein solches Monom in jedes andere vom selben Grad.

22.2.4 Haarmaß für Matrixliegruppen

Definition 22.2.4.1. Eine **stetige positive Dichte** auf einer Mannigfaltigkeit ist ein Borelmaß, dessen Restriktion auf jede Karte durch das Produkt des Lebesgue-Maßes mit einer stetigen positiven Funktion dargestellt werden kann.

22.2.4.2. Gegeben ein Diffeomorphismus von Mannigfaltigkeiten $\varphi : M \xrightarrow{\sim} N$ ist das Bildmaß $\varphi_*\mu$ einer stetigen positiven Dichte auf M offensichtlich eine stetige positive Dichte auf N.

Beispiel 22.2.4.3. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum X und eine k-Mannigfaltigkeit $M \subset X$ und eine stetige k-Form $\omega : M \to \mathrm{Alt}^k(\vec{X})$ gibt es genau eine stetige positive Dichte $|\omega|$ auf M mit der Eigenschaft, daß für jede Karte $\varphi : W \to M$ ihre Restriktion auf die Karte gegeben wird durch das Produkt des Lebesgue-Maßes mit der Funktion $|(\varphi^*\omega)(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k)|$ auf W. Man sieht das leicht vermittels unserer Regel für das Verkleben von Maßen 13.1.1.42 und der Transformationsformel 12.4.2.8 und der Formel 12.8.2.16 für den Rückzug von Volumenformen.

Definition 22.2.4.4. Ein **Haar'sches Maß**, genauer ein **linksinvariantes Haar'sches Maß** und kurz ein **Haarmaß** auf einer Matrixliegruppe G ist eine stetige positive Dichte μ auf G im Sinne von 22.2.4.1 mit $\mu(xA) = \mu(A)$ für alle $x \in G$ und alle Borelmengen $A \subset G$.

Vorschau 22.2.4.5. Ganz allgemein definiert man ein Haarmaß auf einer topologischen Gruppe als ein von Null verschiedenes nichtnegatives linksinvariantes „Radonmaß“ und zeigt seine Existenz und Eindeutigkeit bis auf eine multiplikative Konstante für beliebige lokal kompakte Hausdorff'sche topologische Gruppen, vergleiche 15.4.3.2 und 15.4.3.3. In unserem speziellen Fall entsprechen nun nach dem Riesz'schen Darstellungssatz 15.4.2.4 Radonmaße eineindeutig Borelmaßen, weshalb unser Haarmaß hier auch im Sinne der allgemeinen Definition ein Haarmaß ist.

Satz 22.2.4.6 (Existenz und Eindeutigkeit Haar'scher Maße). *Auf jeder Matrixliegruppe gibt es ein Haarmaß im Sinne einer linksinvarianten positiven Dichte, und je zwei derartige Dichten unterscheiden sich höchstens um einen positiven konstanten reellen Faktor.*

22.2.4.7. Die hier behauptete und bewiesene Eindeutigkeitsaussage ist schwächer als in 15.4.3.3, da wir die Eindeutigkeit nur unter stärkeren Annahmen zeigen. Sie werden aber sehen, daß man auch mit dieser schwächeren Aussage schon recht weit kommen kann. Den Fall allgemeiner Liegruppen diskutieren wir in 22.5.9.23.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar, da sich je zwei stetige positive Dichten offensichtlich nur um das Produkt mit einer stetigen positiven Funktion unterscheiden, die im Fall von zwei Haarmaßen ebenfalls linksinvariant und damit konstant sein muß. Um die Existenz zu zeigen, erinnern wir die Einbettung $G \mathrel{\underset{\mathbb{A}}{\subset}} \operatorname{Aut}(V)$ unserer Matrixliegruppe. Sei k die Dimension von G. Sicher gibt es eine alternierende k-Multilinearform $\omega_e \in \operatorname{Alt}^k(\operatorname{End} V)$ mit der Eigenschaft, daß ihre Restriktion $\omega_e \in \operatorname{Alt}^k(\mathrm{T}_e G)$ nicht verschwindet. Wir wählen sie beliebig aber fest und erklären eine k-Form oder genauer ein Feld von k-Formen ω auf $\operatorname{Aut}(V)$ durch die Vorschrift

$$\omega_g = (g^{-1}\cdot)^\top \omega_e$$

in der Notation aus 12.8.1.13. So erhalten wir eine stetige k-Form ω auf $\operatorname{Aut}(V)$ mit der Eigenschaft $(h\cdot)^*\omega = \omega$ alias $(h\cdot) : \omega \rightsquigarrow \omega$ für alle $h \in \operatorname{Aut}(V)$. Das in 22.2.4.3 erklärte zugehörige Maß $|\omega|$ auf der eingebetteten k-Mannigfaltigkeit G ist dann die gesuchte positive stetige linksinvariante Dichte. □

Beispiel 22.2.4.8. Wir erhalten ein Haarmaß auf $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, indem wir das gewöhnliche Lebesgue-Maß von $\operatorname{Mat}(n;\mathbb{R})$ einschränken und mit der Funktion $A \mapsto |\det A|^{-n}$ multiplizieren. Speziell ist $|x|^{-1}\,\mathrm{d}x$ ein Haarmaß auf der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}^\times$.

22.2.4.9. Auf einer kompakten Matrixliegruppe G ist jedes Haarmaß μ auch rechtsinvariant, in Formeln $\mu(Ag) = \mu(A)$ für alle $g \in G$. In der Tat ist für jedes feste $g \in G$ mit μ auch die Vorschrift $A \mapsto \mu(Ag)$ ein linksinvariantes Haarmaß, also gibt es nach 22.2.4.6 eine Konstante c_g mit $\mu(A) = c_g\mu(Ag)$ für alle A. Für kompaktes G gilt aber $0 < \mu(G) < \infty$. Setzen wir also in der vorhergehenden Gleichung $A = G$, so folgt wie gewünscht $c_g = 1$.

Lemma 22.2.4.10. *Auf jeder endlichdimensionalen stetigen reellen oder komplexen Darstellung einer kompakten Matrixliegruppe gibt es ein invariantes Skalarprodukt.*

22.2.4.11. Dieselbe Aussage folgt für jede endlichdimensionale stetige reelle oder komplexe Darstellung einer beliebigen „kompakten topologischen Gruppe“ im Sinne von 15.2.1.4, da deren Bild in der Automorphismengruppe besagter Darstellung ja nach 22.1.2.3 und 15.1.5 eine kompakte Matrixliegruppe sein muß.

Beweis. Bezeichne K unsere kompakte Matrixliegruppe und V unsere Darstellung. Nach 22.2.4.6 gibt es ein Haarmaß μ auf K. Da K kompakt ist, ist nach 13.1.6.15 jede stetige Funktion integrierbar. Ist nun $b : V \times V \to \mathbb{C}$ irgendein Skalarprodukt, so liefert die Formel

$$(v, w) := \int_K b(gv, gw)\ \mu\langle g\rangle$$

ein K-invariantes Skalarprodukt, es gilt also $(gv, gw) = (v, w)\ \forall g \in K$. Damit das richtig ist, muß a priori μ ein rechtsinvariantes Haarmaß sein. Im kompakten Fall wissen wir aber bereits, daß linksinvariante Haarmaße auch rechtsinvariant sind und umgekehrt. □

Satz 22.2.4.12 (Vollständige Reduzibilität). *Jede stetige Darstellung endlicher Dimension einer kompakten Matrixliegruppe ist eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen.*

Ergänzung 22.2.4.13. Für diejenigen Leser, die den Begriff einer topologischen Gruppe kennen, ist die Verallgemeinerung dieses Satzes auf kompakte topologische Gruppen offensichtlich, da deren Bild in der Automorphismengruppe des Darstellungsraums nach 22.1.2.3 bereits eine Matrixliegruppe sein muß. Eine Verallgemeinerung auf unendlichdimensionale Darstellungen wird in **??** diskutiert.

22.2.4.14. Die Frage, inwieweit eine derartige Zerlegung in eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen eindeutig ist, wird im kommenden Abschnitt und dort insbesondere in 22.2.5.7 und 22.2.5.10 diskutiert.

Beweis. Nach dem im folgenden bewiesenen Lemma 22.2.4.10 finden wir auf unserer Darstellung stets ein unter der Gruppenoperation invariantes Skalarprodukt. Nun argumentieren wir durch Induktion über die Dimension unserer Darstellung. Ist sie Null, so ist nichts zu zeigen. Sonst besitzt sie eine einfache Unterdarstellung, und deren orthogonales Komplement ist auch eine Unterdarstellung, auf die wir dann nur noch die Induktionsannahme anzuwenden brauchen. □

22.2.4.15. Unser Satz 22.2.4.12 über die vollständige Reduzibilität gilt sowohl für reelle wie auch für komplexe Darstellungen. Im Fall der einelementigen Gruppe besagt der Satz schlicht, daß sich jeder endlichdimensionale Vektorraum als eine direkte Summe von eindimensionalen Teilräumen schreiben läßt. Ein rein algebraischer Beweis für eine analoge Aussage im Fall von Darstellungen der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ wird in Übung 22.2.3.16 erklärt. Wenn wir diese algebraische

Aussage aus dem vorhergehenden Satz 22.2.4.12 ableiten wollen, muß jedoch der Satz zur Verfügung stehen, nach dem jede endlichdimensionale Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{su}(2)$ zu einer Darstellung der Liegruppe $\mathrm{SU}(2)$ integriert werden kann.

Beispiel 22.2.4.16. Die offensichtliche zweidimensionale Darstellung von

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

auf $\mathbb{R}^2$ läßt sich nicht als direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen schreiben, denn sie hat nur eine einzige eindimensionale Unterdarstellung, die Gerade $\mathbb{R}\,\mathrm{e}_1$. Die Kompaktheit der dargestellten Gruppe ist also für unseren Satz 22.2.4.12 wesentlich.

Übungen

Übung 22.2.4.17. Man gebe auf $\mathbb{C}^\times$ und allgemeiner auf $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ ein Haarmaß an.

Übung 22.2.4.18. Es gibt eine linksinvariante Differentialform ω auf $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, deren Restriktion auf die offene Teilmenge U aller Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ mit Determinante Eins und $x \neq 0$ gegeben wird durch die Formel $\omega|_U = \frac{1}{x} dx \wedge dy \wedge dz$.

Übung 22.2.4.19. Man zeige: $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ ist eine maximale kompakte Untergruppe und gegeben eine beliebige kompakte Untergruppe $K \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ gibt es stets $g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ mit $gKg^{-1} \subset \mathrm{U}(n)$. Man zeige auch die analoge Aussage im Fall $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$. Hinweis: 22.2.4.10. Man zeige auch die analoge Aussage im Fall $\bar{\mathrm{U}}(n) \subset \mathrm{PGL}(n;\mathbb{C})$ mit $\mathrm{PGL}(n;\mathbb{C}) := \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$ und $\bar{\mathrm{U}}(n)$ dem Bild von $\mathrm{U}(n)$ darin. Hier mag die endliche Überlagerung $\mathrm{SL}(n;\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(n;\mathbb{C})$ helfen.

Übung 22.2.4.20. Gegeben eine stetige Darstellung $\rho : S^1 \to \mathrm{GL}(V)$ der Kreislinie S^1 durch Automorphismen eines endlichdimensionalen komplexen Vektorraums V zerfällt unser Raum als eine direkte Summe von Teilräumen

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$$

mit $V_n = \{v \in V \mid \rho(z)v = z^n v \ \forall z \in S^1\}$. Hierbei werden dann natürlich fast alle der V_n nur aus dem Nullvektor bestehen und die direkte Summe ist im Sinne von 4.7.8.1 zu interpretieren. Einen alternativen Zugang, der mit sehr viel weniger Analysis auskommt und stattdessen von der Jordan'schen Normalform ausgeht, wird in 4.3.3.21 skizziert. Eine Verallgemeinerung auf Tori wird in 22.2.5.9 besprochen.

22.2.5 Vollständig reduzible Darstellungen

Lemma 22.2.5.1. *Jeder Verflechtungsoperator zwischen einfachen Darstellungen ist entweder die Nullabbildung oder ein Isomorphismus.*

22.2.5.2. Sind insbesondere $L \not\cong M$ nichtisomorphe einfache Darstellungen einer Gruppe G, so folgt $\mathrm{Hom}_G(L, M) = 0$. Sind L und M dahingegen isomorphe einfache Darstellungen und ist $\varphi : L \xrightarrow{\sim} M$ ein Isomorphismus, so liefert das Nachschalten von φ eine Bijektion $\mathrm{End}_G(L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(L, M)$ und das Vorschalten von φ eine Bijektion $\mathrm{End}_G(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(L, M)$.

Beweis. Für einen Verflechtungsoperator $\varphi : L \to M$ ist das Bild stets eine Unterdarstellung $\mathrm{im}\,\varphi \subset M$. Aus $\varphi \neq 0$ und M einfach folgt also φ surjektiv. Für einen Verflechtungsoperator $\varphi : L \to M$ ist weiter der Kern stets eine Unterdarstellung $\ker \varphi \subset L$. Aus $\varphi \neq 0$ und L einfach folgt also $\ker \varphi = 0$ und damit φ injektiv. Sind also M und L beide einfach und ist φ nicht Null, so ist φ bijektiv. □

Lemma 22.2.5.3 (von Schur). *Die einzigen Verflechtungsoperatoren zwischen einer einfachen komplexen endlichdimensionalen Darstellung und ihr selbst sind die skalaren Vielfachen der Identität.*

Beweis. Jeder Eigenraum eines Endomorphismus einer Darstellung muß eine Unterdarstellung sein. Jeder Eigenraum eines Endomorhismus einer einfachen Darstellung ist also der ganze Raum oder der Nullraum. Da jeder Endomorphismus eines von Null verschiedenen endlichdimensionalen Raums über $\mathbb{C}$ mindestens einen Eigenwert hat, folgt das Lemma. □

22.2.5.4. Für jede komplexe endlichdimensionale einfache Darstellung L einer Gruppe G liefert unser Schur'sches Lemma in Formeln einen Isomorphismus

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{C},G}\, L$$

vermittels $\lambda \mapsto \lambda\,\mathrm{id}_L$. Eine allgemeinere Variante des Schur'schen Lemmas findet man in 8.3.2.6. Es ist hierbei wesentlich, mit komplexen Darstellungen oder allgemeiner Darstellungen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper zu arbeiten: Für die durch die Einbettung $S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ gegebene Darstellung von S^1 auf $\mathbb{C}$ etwa hätten wir $\mathrm{End}_{\mathbb{R},S^1}\mathbb{C} \cong \mathbb{C}$, für die Einsdarstellung dahingegen $\mathrm{End}_{\mathbb{R},S^1}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$.

22.2.5.5. Wie bereits der Fall der trivialen Gruppe zeigt, sind die bei einer Zerlegung einer Darstellung in eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen auftretenden Unterdarstellungen im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt: Ein endlichdimensionaler Vektorraum etwa kann auf viele verschiedene Arten als direkte Summe eindimensionaler Teilräume dargestellt werden. Die folgenden Bemerkungen erläutern, was im Allgemeinen bei der Zerlegung in eine direkte Summe irreduzibler Unterdarstellungen an Eindeutigkeit noch zu retten ist.

Definition 22.2.5.6. Eine Darstellung einer Gruppe heißt **vollständig reduzibel** oder auch **halbeinfach**, wenn sie eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen ist.

22.2.5.7 (**Isotypische Zerlegung**). Ist V eine endlichdimensionale halbeinfache komplexe Darstellung einer Gruppe G und sind $V = L_1 \oplus \ldots \oplus L_m$ und $V = L'_1 \oplus \ldots \oplus L'_{m'}$ zwei Zerlegungen in eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen, so gilt $m = m'$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_m$ mit $L'_i \cong L_{\sigma(i)}$ für alle i. In der Tat läßt sich nach 22.2.5.1 und 22.2.5.3 die Vielfachheit einer einfachen Darstellung L als Unterdarstellung in einer solchen Zerlegung darstellen als die Dimension des Raums von Verflechtungsoperatoren $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C},G}(L, V)$. Weiter gilt für jede einfache Darstellung L von G in unserer Darstellung V die Gleichheit von Untervektorräumen

$$\bigoplus_{L_i \cong L} L_i = \bigoplus_{L'_j \cong L} L'_j$$

In der Tat lassen sich diese Untervektorräume wieder nach 22.2.5.1 beschreiben als das Erzeugnis der Bilder aller Verflechtungsoperatoren $L \to V$ von unserer einfachen Darstellung L zur gegebenen Darstellung. Wir bezeichnen diesen Untervektorraum mit $V_L \subset V$. Er heißt die **isotypische Komponente** in V vom Typ L. Natürlich erhalten wir dann für V die **Zerlegung in isotypische Komponenten**

$$V = \bigoplus_{L \in \operatorname{irr} G} V_L$$

wo sich die Summe über die Menge $\operatorname{irr} G$ aller Isomorphieklassen von einfachen endlichdimensionalen komplexen Darstellungen von G erstreckt. Im Fall einer unitären Darstellung stehen die isotypischen Komponenten paarweise senkrecht aufeinander nach 22.2.5.18.

Ergänzung 22.2.5.8. Analoge Aussagen gelten auch für nicht notwendig endlichdimensionale halbeinfache Darstellungen über beliebigen Körpern, ja sogar für halbeinfache Moduln über beliebigen Ringen, vergleiche 8.2.3.

Beispiel 22.2.5.9 (**Isotypische Zerlegung für Tori**). Dies Beispiel verallgemeinert 22.2.4.20. Ist T eine kompakte abelsche Matrixliegruppe und V eine endlichdimensionale stetige komplexe Darstellung von T, so hat die isotypische Zerlegung die Gestalt

$$V = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(T)} V_\chi$$

wobei χ wie angedeutet über alle Charaktere von T alias alle stetigen Gruppenhomomorphismen $T \to \mathbb{C}^\times$ läuft und V_χ beschrieben werden kann als

$$V_\chi := \{v \in V \mid tv = \chi(t)v \ \forall t \in T\}$$

Insbesondere im Fall eines Torus T heißen die $\chi \in \mathfrak{X}(T)$ mit $V_\chi \neq 0$ die **Gewichte von T in V** und werden nach französisch **poids** auch notiert in der Form

$$\mathrm{P}(V) = \mathrm{P}_T(V) := \{\chi \in \mathfrak{X}(T) \mid V_\chi \neq 0\}$$

Die isotypischen Komponenten V_χ ihrerseits heißen, immer noch im Fall der Darstellungen einer kompakten abelschen Liegruppe, die **Gewichtsräume** unserer Darstellung.

Satz 22.2.5.10 (Kanonische Zerlegung). *Seien K eine kompakte Matrixiegruppe und $\operatorname{irr} K$ ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen komplexer einfacher Darstellungen von K. So liefert für jede komplexe endlichdimensionale Darstellung V von K das Auswerten einen Isomorphismus*

$$\bigoplus_{L \in \operatorname{irr} K} L \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C},K}(L, V) \quad \xrightarrow{\sim} \quad V$$

22.2.5.11. Unter diesem Isomorphismus entspricht $L \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C},K}(L, V)$ gerade der L-isotypischen Komponente V_L von V aus 22.2.5.7.

Beweis. Gilt der Satz für zwei Darstellungen V und W, so offensichtlich auch für ihre Summe $V \oplus W$. Da nach 22.2.4.12 unsere Darstellung in eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen zerfällt, müssen wir ihn damit nur noch für V einfach zeigen. In diesem Fall folgt er aber aus der Schur'schen Lemma 22.2.5.1. □

Satz 22.2.5.12 (Äußere Algebra und orthogonale Gruppe). *Gegeben ein euklidischer Vektorraum V gilt:*

1. *Alle von Null verschiedenen äußeren Potenzen $\bigwedge^i V$ sind irreduzibel als Darstellungen von $\mathrm{O}(V)$, ja sogar ihre Komplexifizierungen $\bigwedge^i V^{\mathbb{C}}$ sind es;*

2. *Im Fall $\dim V \neq 2i$ sind die $\bigwedge^i V^{\mathbb{C}}$ auch irreduzibel als Darstellungen von $\mathrm{SO}(V)$. Im Fall $\dim V = 2i > 0$ dahingegen ist $\bigwedge^i V^{\mathbb{C}}$ eine direkte Summe von zwei irreduziblen Darstellungen von $\mathrm{SO}(V)$.*

Beweis. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis. Schränken wir die Operation der orthogonalen Gruppe ein auf die Untergruppe $\{1, -1\}^{\times n}$ der Vorzeichenwechsel der Basisvektoren, so sind die simultanen Eigenräume in $\bigwedge V^{\mathbb{C}}$ die von den v_I für $I \subset \{1, \ldots, n\}$ erzeugten Geraden. Jede von Null verschiedene Unterdarstellung enthält also einen dieser Vektoren und ist folglich eines der $\bigwedge^i V^{\mathbb{C}}$. Operiert nur $\mathrm{SO}(V)$, so haben wir nur die Gruppe der Wechsel einer geraden Zahl von Vorzeichen zur Verfügung und die simultanen Eigenräume in $\bigwedge V^{\mathbb{C}}$ sind die von den v_I und $v_{\bar{I}}$ für $I \subset \{1, \ldots, n\}$ erzeugten Ebenen. Diese Erkenntnis erledigt bereits den Fall $\dim V \neq 2i$. Im Fall $\dim V = 2i$ schließlich liegen für $|I| = i$ sowohl v_I

als auch $v_{\bar{I}}$ in $\bigwedge^i V^{\mathbb{C}}$ und der Hodgeoperator 22.2.5.13 stabilisiert die von diesen beiden „komplementären“ Dachprodukten aufgespannte Ebene und operiert darauf mit zwei verschiednenen Eigenwerten. Jede irreduzible Unterdarstellung muß folglich mindestens einen Hodge-Eigenraum in mindestens einer dieser Ebenen umfassen und dann sieht man leicht, daß sie bereits mit diesem Hodge-Eigenraum in $\bigwedge^i V^{\mathbb{C}}$ übereinstimmt. $\square$

22.2.5.13 (**Hodgeoperator**). Seien V ein pseudoeuklidischer reeller Vektorraum der Dimension n und $\mathbb{L}$ seine Längengerade und $\mathrm{GO}(V) := \mathbb{R}^\times \mathrm{O}(V)$ die Gruppe seiner linearen Ähnlichkeiten. Die kanonische symmetrische Bilinearform ist eine nichtausgeartete Paarung $V \times V \to \mathbb{L}^{\otimes 2}$ und liefert einen Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} V^* \otimes \mathbb{L}^{\otimes 2}$. Das Dachprodukt liefert nichtausgeartete Paarungen $\bigwedge^i V \times \bigwedge^{n-i} V \to \bigwedge^n V$. In 4.6.4.12 haben wir einen natürlichen Isomorphismus $\bigwedge^n V \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}^{\otimes n}$ angegeben. Zusammen mit der Vertauschung von äußerer Potenz und Dualisieren aus 4.6.5.6 erhalten wir so unter der zusätzlichen Annahme $V \neq 0$ ausgezeichnete Isomorphismen

$$\bigwedge^i V \xrightarrow{\sim} (\bigwedge^{n-i} V)^* \otimes \bigwedge^n V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^{n-i} V \otimes \mathbb{L}^{\otimes(2i-n)} \otimes \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V)$$

oder gleichbedeutend $\bigwedge^p V \otimes \mathbb{L}^{\otimes(-p)} \xrightarrow{\sim} \bigwedge^q V \otimes \mathbb{L}^{\otimes(-q)} \otimes \mathrm{or}_{\mathbb{R}}(V)$ für $p+q=n$. Das sind Isomorphismen von Darstellungen von $\mathrm{GO}(V)$. Halten wir eine Längeneinheit und eine Orientierung fest, so spezialisieren sie zu Isomorphismen $\bigwedge^p V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^q V$ von Darstellungen von $\mathrm{SO}(V)$, immer noch für $p+q=n$. Diese Isomorphismen werden $*$ notiert und heißen der **Hodge-$*$-Operator** oder kurz **Hodgeoperator**.

Übungen

Übung 22.2.5.14. Man verallgemeinere 22.2.5.12 auf den Fall pseudoeuklidischer Vektorräume. Hinweis: 22.2.2.9.

Übung 22.2.5.15. Für je zwei komplexe endlichdimensionale einfache Darstellung L, M einer Gruppe G gilt $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C},G}(L, M) \leq 1$.

Übung 22.2.5.16 (**Eindeutigkeit invarianter Skalarprodukte im Komplexen**). Je zwei invariante Skalarprodukte auf einer irreduziblen endlichdimensionalen komplexen Darstellung einer Gruppe unterscheiden sich höchstens um einen positiven Skalar, ja je zwei invariante Sesquilinearformen auf einer irreduziblen endlichdimensionalen komplexen Darstellung unterscheiden sich höchstens um einen komplexen Skalar. Hinweis: Man beachte für einen komplexen Vektorraum mit der Notation $\mathrm{Ses}(V)$ für die Menge der Sesquilinearformen $s : V \times V \to \mathbb{C}$ die Identifikation

$$\mathrm{Ses}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\overline{V}, V^*)$$

mit $s \mapsto f_s$ und f_s gegeben durch $f_s(\bar{v}) : w \mapsto s(v,w)$ mit $\overline{V}$ dem komplex konjugierten Vektorraum nach 4.1.12.33. Dann wende man 22.2.5.15 an.

Übung 22.2.5.17 (**Eindeutigkeit invarianter Skalarprodukte im Reellen**). Gegeben ein invariantes Skalarprodukt auf einer irreduziblen endlichdimensionalen reellen Darstellung einer Gruppe ist jede weitere invariante symmetrische Bilinearform ein Vielfaches. Hinweis: Hauptachsentransformation **??**.

Übung 22.2.5.18. Unter einer **unitären Darstellung** einer Gruppe versteht man eine Darstellung durch unitäre Automorphismen eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums oder allgemeiner eines Hilbertraums. Man zeige: Sind U, V zwei nichtisomorphe endlichdimensionale einfache Unterdarstellungen einer unitären Darstellung, so stehen U und V aufeinander senkrecht. Hinweis: Orthogonale Projektion 4.1.3.18.

Übung 22.2.5.19. Jede endlichdimensionale komplexe einfache Darstellung der Drehgruppe hat unter der Einschränkung auf die Gruppe der Drehungen um eine feste Achse isotypische Komponenten der Dimension höchstens Eins, und die zu den Komponenten der Dimension Eins gehörigen Parameter bilden in $\mathbb{Z}$ ein Intervall mit Zentrum im Ursprung, in Formeln

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C},S^1}(\chi_n, \mathrm{L}(m)) = \begin{cases} 1 & |n| \le m/2; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Übung 22.2.5.20. Gegeben eine endlichdimensionale unitäre Darstellung V einer Liegruppe G gilt für die abgeleitete Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{g}$ die Identität

$$\langle xv, w\rangle + \langle v, xw\rangle = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{g},\ v, w \in V$$

Ergänzende Übung 22.2.5.21. Man zeige, daß in einer endlichdimensionalen unitären Darstellung einer Liegruppe jedes Element der Liealgebra als diagonalisierbare Matrix mit rein imaginären Eigenwerten operiert. Man folgere, daß jede endlichdimensionale unitäre Darstellung (V, ρ) der Gruppe $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ konstant ist, in Formeln $\rho(g) = \mathrm{id}\ \ \forall g \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$. Hinweis: Jede unitäre endlichdimensionale Darstellung dieser Gruppe entsteht durch Restriktion einer Darstellung von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ und besitzt jedenfalls ein invariantes Skalarprodukt unter der Restriktion auf $\mathrm{SU}(2)$, so daß auch $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ mit rein imaginären Eigenwerten operieren muß.

Ergänzende Übung 22.2.5.22. Wir erinnern an unsere $(m+1)$-dimensionale irreduzible Darstellung $\mathbb{C}[X,Y]^m = L(m)$ der Spingruppe $\mathrm{SU}(2)$ aus dem Beweis von 22.2.3.2 mit ihrer Basis $w_\nu := Y^\nu X^{m-\nu}$ für $0 \le \nu \le m$. Man wähle darauf jeweils ein invariantes Skalarprodukt. Man mag es normalisieren durch die Bedingung $\|w_m\| = 1$, aber auf darauf kommt es im folgenden gar nicht an. In der

Physik verwendet man statt m als Parameter lieber $\frac{m}{2} = j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ und bezeichnet die auf Länge Eins normierten Vektoren w_ν mit

$$|j, j-\nu\rangle := w_\nu / \|w_\nu\|$$

Damit bilden dann die Vektoren $|j,\mu\rangle$ für $\mu = j, j-1, \ldots, -(j-1), -j$ eine Orthonormalbasis von $L(m)$. Schließlich schreibt man $J_+ := e$, $J_- := f$ und $J_z := h/2$. Man prüfe in dieser Notation die Formeln

$$\begin{aligned} J_z\,|j,\mu\rangle &= \mu\,|j,\mu\rangle \\ J_\pm\,|j,\mu\rangle &= \sqrt{j(j+1)-\mu(\mu\pm 1)}\;\;|j,\mu\pm 1\rangle \\ &= \sqrt{(j\pm\mu+1)(j\mp\mu)}\;\;|j,\mu\pm 1\rangle \end{aligned}$$

Hinweis: Beim Rechnen in mathematischer Terminologie mag man davon ausgehen, daß $e - f$ zu $\mathfrak{su}(2;\mathbb{C})$ gehört, so daß nach 22.2.5.20 für jedes invariante Skalarprodukt gelten muß $\langle (e-f)w_\nu, w_{\nu+1}\rangle + \langle w_\nu, (e-f)w_{\nu+1}\rangle = 0$.

22.2.6 Kugelfunktionen*

22.2.6.1 (**Zerlegung von Funktionen auf der Kreislinie**). In der unitären Darstellung der Kreislinie $S^1 \cong \mathrm{SO}(2)$ auf dem Raum $\mathrm{L}^2(S^1)$ der quadratintegrierbaren Funktionen auf der Kreislinie durch Verschieben von Funktionen tritt jede endlichdimensionale einfache Darstellung der Kreislinie genau einmal als Unterdarstellung auf, in Formeln

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C},S^1}\left(\chi_n, \mathrm{L}^2(S^1)\right) = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Des weiteren ist die Summe all dieser endlichdimensionalen Unterdarstellungen ein dichter Teilraum des Hilbertraums $\mathrm{L}^2(S^1)$, in dem sie im übrigen nach 22.2.5.18 paarweise senkrecht stehen. Mit χ_n meinen wir hier den Vektorraum $\mathbb{C}$ mit derjenigen S^1-Operation, unter der z durch Multiplikation mit $\chi_n(z) = z^n$ operiert. Diese ganzen Aussagen sind nur eine Umformulierung von Satz 13.2.6.5, nach dem die Charaktere $\chi_n : S^1 \to \mathbb{C}^\times$ eine Hilbertbasis von $\mathrm{L}^2(S^1)$ bilden. Mit unserer Hilbertsumme aus 13.2.5.11 können wir unsere Erkenntnisse auch umschreiben zu einem Isomorphismus

$$\hat{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}}(\mathbb{C},\chi_n) \;\xrightarrow{\sim}\; \mathrm{L}^2(S^1)$$

von unitären S^1-Darstellungen, der gegeben wird durch das Bilden der Fourierreihe $(a_n) \mapsto \sum_n a_n z^n$.

Satz 22.2.6.2 (Zerlegung von Funktionen auf der Kugelschale). *In der unitären Darstellung durch Verschieben von Funktionen der Drehgruppe* $\mathrm{SO}(3)$ *auf dem Raum* $\mathrm{L}^2(S^2)$ *der quadratintegrierbaren Funktionen auf der Kugelschale tritt jede endlichdimensionale einfache Darstellung der Drehgruppe genau einmal als Unterdarstellung auf, in Formeln*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C},\mathrm{SO}(3)} \left(\mathrm{L}(2l), \mathrm{L}^2(S^2)\right) = 1 \textit{ für } l \in \mathbb{N}.$$

Weiter ist die Summe all dieser Unterdarstellungen ein dichter Teilraum des Hilbertraums $\mathrm{L}^2(S^2)$*, in dem sie nach 22.2.5.18 paarweise aufeinander senkrecht stehen.*

22.2.6.3. Insbesondere erhalten wir eine Hilbertbasis unseres Raums $\mathrm{L}^2(S^2)$, indem wir in jeder unserer einfachen Unterdarstellungen eine Orthonormalbasis wählen und alle diese Basen zusammenfassen. Wieder anders gesagt existiert ein Isomorphismus

$$\hat{\bigoplus_{l\in\mathbb{N}}} \mathrm{L}(2l) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2(S^2)$$

von unitären Darstellungen der Gruppe $\mathrm{SO}(3)$. Wir erklären in 22.2.6.6 folgende, wie man diese Basisvektoren und damit auch diesen Isomorphismus nach Wahl einer festen gerichteten Achse besonders geschickt wählen kann: Die so ausgezeichneten Funktionen heißen dann die **Kugelfunktionen** oder auch **Kugelflächenfunktionen**.

22.2.6.4. Im Anschluß zeigen wir zusätzlich, daß der Raum der unter allen Rotationen um die z-Achse invarianten Funktionen aus der einfachen Unterdarstellung $\mathcal{H}^l \subset \mathrm{L}^2(S^2)$ der Dimension $2l+1$ erzeugt wird vom sogenannten „l-ten Legendre-Polynom“ $P_l(z)$, aufgefaßt als Funktion der z-Koordinate auf der Kugelschale. Die Wahl der Bezeichnung $\mathcal{H}^l$ für unsere einfachen Unterdarstellungen geht auf das Wort „harmonisch“ zurück, das sich die fraglichen Funktionenräume hinwiederum verdienen als Eigenräume des „Laplace-Operators auf der Kugelschale“, aber darauf will ich hier noch nicht eingehen.

Ergänzung 22.2.6.5. Man kann auch für die höherdimensionalen Sphären S^n mit $n \geq 1$ zeigen, daß in $\mathrm{L}^2(S^n)$ die irreduziblen Darstellungen von $\mathrm{SO}(n+1)$ jeweils höchstens einmal vorkommen. Ganz allgemein nennt man einen homogenen Raum „sphärisch“, wenn er die Eigenschaft hat, daß in geeigneten Funktionenräumen keine einfachen Darstellungen mit höheren Multiplizitäten auftreten.

Beweis. Wir betrachten die Räume homogener Polynome in drei Veränderlichen $\mathbb{C}[X,Y,Z]^l$. Eine Polynomfunktion P, die homogen ist vom Grad d, erfüllt die

Gleichung $P(\lambda v) = \lambda^l P(v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Mithin definiert die Einschränkung für alle $d \geq 0$ eine Einbettung

$$\mathbb{C}[X,Y,Z]^l \hookrightarrow \mathcal{C}(S^2)$$

wobei die Polynome von geradem beziehungsweise ungeradem Grad in den Räumen aller unter der Punktspiegelung am Ursprung geraden beziehungsweise ungeraden Funktionen $\mathcal{C}(S^2)^+$ beziehungsweise $\mathcal{C}(S^2)^-$ landen. Bezeichnet $\mathcal{C}^l$ das Bild von $\mathbb{C}[X,Y,Z]^l$ in $\mathcal{C}(S^2)$, so haben wir

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^0 \subset \mathcal{C}^2 \subset \mathcal{C}^4 \subset \ldots \subset \mathcal{C}(S^2)^+ \\ \mathcal{C}^1 \subset \mathcal{C}^3 \subset \mathcal{C}^5 \subset \ldots \subset \mathcal{C}(S^2)^- \end{aligned}$$

da ja ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X,Y,Z]^l$ dieselbe Einschränkung auf die Sphäre hat wie das Polynom $(X^2+Y^2+Z^2)P \in \mathbb{C}[X,Y,Z]^{l+2}$. Die Dimensionen ergeben sich leicht zu

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{C}^l &= \dim \mathbb{C}[X,Y,Z]^l \\ &= \dim \mathbb{C}[X,Y]^{\leq l} \\ &= 1+2+\ldots+l+(l+1) \\ &= (l+1)(l+2)/2 \end{aligned}$$

Nun sind alle $\mathcal{C}^l$ offensichtlich stabil unter der Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ und die konstanten Funktionen $\mathcal{C}^0$ beziehungsweise die linearen Funktionen $\mathcal{C}^1$ bilden irreduzible Darstellungen der Dimensionen Eins beziehungsweise Drei. Wir zeigen als nächstes, daß für $l \geq 2$ das orthogonale Komplement $\mathcal{H}^l$ von $\mathcal{C}^{l-2}$ in $\mathcal{C}^l$ eine irreduzible Darstellung der Dimension $2l+1$ ist. Die Dimension ergibt sich durch direkte Rechnung und besonders anschaulich durch die Betrachtung geeigneter Treppenbilder. Die Irreduzibilität folgern wir induktiv mithilfe unserer Erkenntnisse über die Struktur irreduzibler Darstellungen der Drehgruppe aus 22.2.3.9 und 22.2.5.19. Zunächst beachten wir dazu für $S^1 \subset \mathrm{SO}(3)$ die Gruppe der Drehungen um die z-Achse und χ_n die entsprechende einfache Darstellung von S^1, daß χ_l in $\mathcal{C}^l$ vorkommt, in Formeln

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C},S^1}(\chi_l, \mathcal{C}^l) \neq 0$$

In der Tat ist $(x+\mathrm{i}y)^l$ eine Funktion, die sich entsprechend unter S^1 transformiert. Per Induktion beziehungsweise expliziter Betrachtung im Fall $l = 0,1$ wissen wir nach 22.1.1.14 auch, daß dieses Gewicht von S^1 in $\mathcal{C}^{l-2}$ nicht vorkommt. Folglich muß es in $\mathcal{H}^l$ vorkommen, und aus Dimensionsbetrachtungen folgt dann, daß $\mathcal{H}^l$ irreduzibel ist. Die Dichtheit des Raums der Polynomfunktionen im Raum aller stetigen Funktionen folgt mit Stone-Weierstrass 11.3.2.9, die Dichtheit von $\mathcal{C}(S^2)$ in $\mathrm{L}^2(S^2)$ mit 13.2.6.1. Vereinbaren wir noch die Bezeichnungen $\mathcal{H}^0 = \mathcal{C}^0$ und

$\mathcal{H}^1 = \mathcal{C}^1$, so bildet demnach die Summe aller $\mathcal{H}^l$ einen dichten Teilraum

$$\bigoplus_{l\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^l \subset \mathrm{L}^2(S^2)$$

Bezeichne nun $\mathrm{pr}_l : \mathrm{L}^2(S^2) \twoheadrightarrow \mathcal{H}^l$ die orthogonale Projektion. Sie ist sicher ein Homomorphismus von Darstellungen. Ist $\mathrm{L}(m)$ eine irreduzible endlichdimensionale Darstellung der Drehgruppe und $\varphi : \mathrm{L}(m) \to \mathrm{L}^2(S^2)$ ein Homomorphismus von Darstellungen, so folgt $\mathrm{pr}_l \circ \varphi = 0$ für $m \neq 2l$ nach 22.2.5.3, und gilt auch noch $\mathrm{pr}_l \circ \varphi = 0$ für $m = 2l$, so folgt $\varphi = 0$, weil dann das Bild von φ auf allen Vektoren eines dichten Teilraums senkrecht steht. Mithin liefert für alle $l \in \mathbb{N}$ das Verknüpfen mit pr_l eine Einbettung und dann sogar einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C},\mathrm{SO}(3)}\left(\mathrm{L}(2l), \mathrm{L}^2(S^2)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C},\mathrm{SO}(3)}\left(\mathrm{L}(2l), \mathcal{H}^l\right)$$

und damit folgt unser Satz aus dem Schur'schen Lemma 22.2.5.1. □

22.2.6.6. Nach unseren Erkenntnissen über einfache Darstellungen der Drehgruppe bilden in jedem $\mathcal{H}^l$ die unter allen Drehungen um die z-Achse $S^1 \subset \mathrm{SO}(3)$ invarianten Funktionen einen eindimensionalen Teilraum $(\mathcal{H}^l)^{S^1}$. Um Erzeuger dieser Teilräume zu finden, gehen wir aus von der offensichtlichen Einbettung

$$\mathbb{C}[z] \hookrightarrow \mathcal{C}(S^2)^{S^1}$$

unter der sicher Polynome vom Grad $\leq d$ in $\mathcal{H}^0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}^l$ landen. Unser Skalarprodukt auf $\mathrm{L}^2(S^2)$ schränkt nach 12.4.6.9 ein zu dem Skalarprodukt auf $\mathbb{C}[z]$, das gegeben wird durch die Formel

$$\langle g, f\rangle = 2\pi \int_{-1}^{1} \bar{g}(z) f(z)\,\mathrm{d}z$$

Mithin finden wir Erzeuger von $(\mathcal{H}^l)^{S^1}$, wenn wir auf die durch Potenzen von z gegebene angeordnete Basis $z^0, z^1, z^2, \ldots$ des Polynomrings $\mathbb{C}[z]$ in Bezug auf besagtes Skalarprodukt das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren 4.1.11.6 anwenden. Die so entstehenden Polynome sind bis auf einen konstanten Faktor die sogenannten **Legendre-Polynome** $(P_l)_{l\geq 0}$. Der Faktor wird hierbei üblicherweise so gewählt, daß gilt $P_l(1) = 1$. Mit dieser Normalisierung können besagte Polynome dann auch durch die explizite Formel

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dz^l}(z^2-1)^l$$

beschrieben und durch die Rekursion $(l+1)P_{l+1} = (2l+1)zP_l - P_{l-1}$ berechnet werden. Ihre Quadratnorm ergibt sich aus den Formeln

$$\langle P_k, P_l\rangle = \frac{4\pi}{2l+1}\delta_{k,l}$$

Diese Formeln mag der Leser zur Übung selbst prüfen. Die ersten Legendre-Polynome sind $P_0 = 1$, $P_1 = z$, $P_2 = (3z^2 - 1)/2$. Ausführliche Tafelwerke findet man in Bibliotheken und im Netz.

22.2.6.7. In der Liealgebra der räumlichen Drehgruppe haben wir in 22.1.3.7 eine Basis E_1, E_2, E_3 ausgezeichnet, deren Kommutatoren durch $[E_1, E_2] = E_3$ und die beiden durch zyklische Vertauschung der Indizes entstehenden Formeln gegeben werden. In der komplexifizierten Liealgebra $\mathfrak{so}(3)^{\mathbb{C}}$ liefern dann die Ausdrücke $h = 2\mathrm{i}E_3$, $e = E_2 - \mathrm{i}E_1$ und $f = -E_2 - \mathrm{i}E_1$ eine Basis, in der die Klammern die Form $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$ haben. Nach 22.2.3.18 wirkt E_3 als der Differentialoperator $y\partial_x - x\partial_y$ und annulliert insbesondere alle Polynome, die nur von z abhängen. Wir erhalten also in $\mathrm{L}^2(S^2)$ ein Orthogonalsystem mit dichtem Erzeugnis, wenn wir zu den Legendre-Polynomen P_l noch alle $e^m P_l$ und $f^m P_l$ für $0 < m \le l$ dazunehmen, und normieren wir alle diese Funktionen auf die Länge Eins, indem wir sie durch ihre Norm teilen, so erhalten wir eine Hilbertbasis $\mathrm{L}^2(S^2)$ bestehend aus den sogenannten **Kugelfunktionen**

$$Y_{l,m} := \begin{cases} e^m P_l/\|e^m P_l\| & 0 < m \le l; \\ P_l/\|P_l\| & m = 0; \\ f^{-m} P_l/\|f^{-m} P_l\| & 0 > m \ge -l. \end{cases}$$

Um zu einer expliziteren Beschreibung zu kommen, bemerken wir, daß nach 22.2.3.18 unser e auf komplexwertigen Polynomen wirkt wie der Differentialoperator $z(-\mathrm{i}\partial_y - \partial_x) + (x + \mathrm{i}y)\partial_z$. Dann prüfen wir $(\mathrm{i}\partial_y + \partial_x)(x + \mathrm{i}y) = 0$ und erhalten folglich $e^m P_l = (x + \mathrm{i}y)^m \partial_z^m P_l$. Ähnlich ergibt sich auch die Formel $f^m P_l = (-(x - \mathrm{i}y))^m \partial_z^m P_l$. Nebenbei bemerkt ist $e^m P_l$ komplex konjugiert zu $(-1)^m f^m P_l$ und so finden wir auch eine Hilbertbasis aus reellwertigen Funktionen. In Kugelkoordinaten $(\cos\varphi \sin\vartheta, \sin\varphi \sin\vartheta, \cos\vartheta)$ nach 12.3.2.3 haben wir $x + \mathrm{i}y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \sin\vartheta$. Bis auf einen Normierungsfaktor werden unsere Kugelfunktionen also in Kugelkoordinaten gegeben durch den Ausdruck $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}(\sin^m \vartheta) P_l^{(m)}(\cos\vartheta)$. Um den Normierungsfaktor auch noch zu bestimmen, gehen wir von unserer Formel für die Norm eines Legendre-Polynoms aus, die schon einmal

$$Y_{l,0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\vartheta)$$

liefert. Nun zeigen die Formeln in 22.2.5.22, daß das Anwenden von e auf $\tilde{Y}_{l,m}$ die Norm um den Faktor $\sqrt{(l+m+1)(l-m)}$ ändert, wohingegen das Anwenden von f auf $\tilde{Y}_{l,m}$ die Norm um den Faktor $\sqrt{(l-m+1)(l+m)}$ ändert. Das zeigt induktiv, daß unsere Kugelfunktionen beschrieben werden können durch die Formel

$$Y_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}(\sin^m \vartheta) P_l^{(m)}(\cos\vartheta)$$

Unser Casimir-Operator $4\rho(f)\rho(e) + \rho(h)(\rho(h) + 2)$ aus 22.2.3.14 schreibt sich in unserer alten Basis der Liealgebra $-4(\rho(E_1)^2 + \rho(E_2)^2 + \rho(E_3)^2)$. Eine kurze Rechnung zeigt, daß dieser Ausdruck ohne den Vorfaktor 4 auf Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}^3$ wirkt als der Differentialoperator

$$2(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)$$

Nach unseren Erkenntnissen aus 22.2.3.14 müssen die Kugelfunktionen $Y_{l,m}$, wenn wir sie etwa als homogene Funktionen vom Grad l auf $\mathbb{R}^3$ auffassen, Eigenfunktionen dieses Differentialoperators sein zum Eigenwert $l(l+1)$. Mit etwas Rechnung folgt, daß dieser Differentialoperator der „Laplace-Operator auf der Sphäre“ ist und unsere Kugelfunktionen heißen als Eigenfunktionen dieses „sphärischen Laplace-Operators“ auf Englisch auch **spherical harmonics**.

Übungen

Übung 22.2.6.8. Jede endlichdimensionale Unterdarstellung von $\mathrm{L}^2(S^1)$ ist stetig. Hinweis: Fourierentwicklung.

Die Intervalle zwischen je zwei Zweierpotenzen müssen für ein Haarmaß auf der multiplikativen Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen jeweils dasselbe Maß haben. Man sieht so zumindest qualitativ recht gut, daß die Massebelegung gegen den Ursprung hin immer dichter werden muß.

22.3 Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt geht es um abstrakte, als da heißt nicht notwendig eingebettete differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Ich definiere sie als spezielle geringte Räume. Das hat den Vorteil, daß man mit diesem Formalismus auch ihre algebraischen Verwandten, die algebraischen Varietäten, effizient behandeln kann. Ich denke aber davon abgesehen auch, daß dieser Zugang nicht weniger anschaulich und technisch wenn nicht einfacher, so doch eleganter ist als die übliche Vorgehensweise: In der Tat sind in dieser Sprache Untermannigfaltigkeiten gerade die Teilmengen, die mit der induzierten Struktur eines geringten Raums zu Mannigfaltigkeiten werden, und die finale Struktur eines geringten Raums auf Quotienten liefert unmittelbar die Struktur besagter Quotienten als Mannigfaltigkeit mitsamt der zugehörigen universellen Eigenschaft.

22.3.1 Geringte Räume

Definition 22.3.1.1. Sei k ein Körper. Ein **k-geringter Raum** $X = (X, \mathcal{O})$ ist ein topologischer Raum $X = (X, \mathcal{T})$ mitsamt einer Vorschrift $\mathcal{O}$, die jeder offenen Teilmenge $U \Subset X$ eine k-Teilringalgebra $\mathcal{O}(U) \subset \mathrm{Ens}(U, k)$ in der k-Ringalgebra aller Abbildungen von U nach k zuordnet, deren Elemente wir **strukturierende Funktionen auf** U nennen und von denen wir fordern:

> Ist $\mathcal{U}$ ein System offener Teilmengen von X und $V := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ seine Vereinigung, so ist eine Abbildung $f : V \to k$ strukturierend genau dann, wenn ihre Restriktionen auf alle $U \in \mathcal{U}$ strukturierend sind.

22.3.1.2. Eine Teilringalgebra muß nach unseren Definitionen stets das Einselement der ursprünglichen Ringalgebra enthalten. Unter anderem impliziert unsere Definition damit, daß alle konstanten Funktionen strukturierend sind, daß also für jedes $U \Subset X$ die konstanten Abbildungen von U nach k in $\mathcal{O}(U)$ liegen.

Vorschau 22.3.1.3. Im Zusammenhang mit Schemata und Supermannigfaltigkeiten wird eine noch allgemeinere Definition des Konzepts eines geringten Raums benötigt. Wenn wir betonen wollen, daß wir den hier erklärten einfacheren Begriff meinen, reden wir genauer von einem **durch Funktionen k-geringten Raum**. In der Sprache der Garbentheorie, die ich hier noch vermeiden will, könnte man unser $\mathcal{O}$ als eine „k-Ringalgebren-Untergarbe der k-Ringalgebren-Garbe aller k-wertigen Funktionen auf X“ charakterisieren.

Beispiel 22.3.1.4. Fundamental für uns sind die $\mathbb{R}$-geringten Räume $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^1)$, die entstehen, wenn wir $\mathbb{R}^n$ mit seiner natürlichen Topologie versehen und als strukturierende Funktionen auf einer offenen Teilmenge $U \Subset \mathbb{R}^n$ alle stetig differenzierbaren Funktionen nehmen. Etwas allgemeiner können wir auch die $\mathbb{R}$-geringten

Räume $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^k)$ betrachten, bei denen wir als strukturierende Funktionen auf einer offenen Teilmenge $U \Subset \mathbb{R}^n$ alle k-mal stetig differenzierbaren Funktionen nehmen.

Vorschau 22.3.1.5. Fundamental für die algebraische Geometrie ist ein anderer Fall. Man geht dabei aus von einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ und versieht k^n mit der sogenannten „Zariski-Topologie", deren abgeschlossene Mengen genau alle Schnitte von Nullstellenmengen von Polynomen sind. Als strukturierende Funktionen nimmt man diejenigen Funktionen, die lokal als Quotienten von Polynomen dargestellt werden können. Auch jede abgeschlossene alias algebraische Teilmenge $X \not\subset k^n$ wird dann zu einem k-geringten Raum, indem man sie mit der induzierten Topologie versieht und als strukturierende Funktionen wieder diejenigen Funktionen nimmt, die lokal als Quotienten von Polynomen dargestellt werden können. Unwesentlich allgemeiner wird jede affine k-Varietät ein k-geringter Raum, wenn wir sie mit ihrer Zariski-Topologie versehen und strukturierende Funktionen auf offenen Teilmengen erklären wie in 7.4.4.3.

Definition 22.3.1.6. Seien k-geringte Räume $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ gegeben. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt ein **Morphismus von k-geringten Räumen**, wenn sie stetig ist und wenn das Vorschalten unserer Abbildung strukturierende Funktionen zu strukturierenden Funktionen macht, wenn also in Formeln aus $U \Subset Y$ und $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ folgt $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$. Die Menge aller Morphismen von X nach Y bezeichnen wir mit $\mathrm{Ger}_k(X, Y)$ oder auch kurz $\mathrm{Ger}(X, Y)$. Ein **Isomorphismus von k-geringten Räumen** ist ein bijektiver Morphismus, dessen Umkehrabbildung auch ein Morphismus ist.

Beispiel 22.3.1.7. Morphismen $\mathbb{R}$-geringter Räume von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^1)$ nach $(\mathbb{R}^m, \mathcal{C}^1)$ sind genau die $\mathcal{C}^1$-Abbildungen. In der Tat ist jede $\mathcal{C}^1$-Abbildung offensichtlich ein Morphismus und umgekehrt sind für jeden Morphismus φ die $\varphi_j := x_j \circ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $1 \le j \le m$ notwendig $\mathcal{C}^1$-Funktionen, als da heißt, jeder Morphismus ist auch umgekehrt eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung.

22.3.1.8 (**Schnitt von Strukturen als k-geringter Raum**). Sind auf ein und derselben Menge X mehrere Strukturen als k-geringter Raum gegeben, so bilden wir ihren Schnitt, indem wir diejenigen Mengen offen nennen, die in jeder unserer Strukturen offen sind, und diejenigen Funktion strukturierend, die in jeder unserer Strukturen strukturierend sind. Dieser Schnitt ist dann offensichtlich auch eine Struktur als k-geringter Raum auf X.

22.3.1.9 (**Strukturen als k-geringter Raum als teilgeordnete Menge**). Gegeben zwei Strukturen als k-geringter Raum auf derselben Menge X nennen wir die eine **größergleich** als die andere, wenn ihr Schnitt die andere Struktur ist. Salopp gesprochen sind also größere Strukturen solche „mit mehr offenen Mengen oder mehr strukturierenden Funktionen oder beidem". Auf diese Weise erhalten wir

eine Teilordnung auf der Menge aller Strukturen als k-geringter Raum auf einer vorgegebenen Menge X.

Definition 22.3.1.10. Eine Familie $(\varphi_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ von Morphismen k-geringter Räume heißt **gesamthaft final**, wenn für jeden weiteren k-geringten Raum W und jede Abbildung $\psi : Y \to W$ gilt

$$(\psi\varphi_i \text{ Morphismus } \forall i) \Rightarrow (\psi \text{ Morphismus})$$

Lemma 22.3.1.11. *Gegeben k-geringte Räume $(X_i)_{i \in I}$, eine Menge Y und Abbildungen $\varphi_i : X_i \to Y$ gibt es genau eine Struktur als k-geringter Raum auf Y derart, daß unsere Familie gesamthaft final wird. Sie heißt die* **finale Struktur** *zu unserer Familie.*

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Sind $(\mathcal{T}_1, \mathcal{O}_1)$ und $(\mathcal{S}_2, \mathcal{O}_2)$ zwei derartige Strukturen auf Y, jeweils bestehend aus einer Topologie und einer Vorgabe strukturierender Funktionen, für die unsere Familie gesamthaft final wird, so ist $\mathrm{id} : (Y, \mathcal{T}_i, \mathcal{O}_i) \to (Y, \mathcal{T}_j, \mathcal{O}_j)$ für beliebige $i, j \in \{1, 2\}$ ein Morphisms. Das zeigt die Eindeutigkeit. Nun zeigen wir noch, daß für die größte Struktur auf Y, für die alle die φ_i Morphismen werden, die von einer gesamthaft finalen Struktur geforderte Eigenschaft erfüllt ist. Diese größte Struktur kann ja explizit dadurch beschrieben werden, daß ihre Topologie die Finaltopologie $\mathcal{T} = \{V \subset Y \mid \varphi_i^{-1}(V) \Subset X_i \ \forall i\}$ ist und die strukturierenden Funktionen gegeben werden durch

$$\mathcal{O}(V) = \{f : V \to k \mid f \circ \varphi_i \in \mathcal{O}(\varphi_i^{-1}(V)) \ \forall i\}$$

Damit ist klar, daß diese Struktur die von einer gesamthaft finalen Struktur geforderte Eigenschaft erfüllt. □

22.3.1.12 (**Transitivität gesamthaft finaler Familien**). Seien $e_{ij} : W_{ij} \to X_i$ und $f_i : X_i \to Y$ Familien von k-geringten Räumen und Morphismen. Ist die Familie der $f_i e_{ij}$ gesamthaft final, so auch die Familie der f_i. Ist die Familie der e_{ij} gesamthaft final für alle i und die Familie der f_i gesamthaft final, so ist auch die Familie der $f_i e_{ij}$ gesamthaft final. Das alles folgt unmittelbar aus der Definition.

22.3.1.13. Ein Morphismus $f : X \to Y$ von k-geringten Räumen heißt **final**, wenn Y die finale Struktur in Bezug auf die einelementige Familie f trägt. Zum Beispiel ist die Identität auf einem k-geringten Raum stets final.

22.3.1.14 (**Disjunkte Vereinigung k-geringter Räume**). Gegeben eine Familie k-geringter Räume (X_i) versehen wir ihre disjunkte Vereinigung $\bigsqcup X_i$ mit der finalen Struktur bezüglich der Inklusionen, wenn nichts anderes gesagt wird. Wir erhalten so ein Koprodukt in der Kategorie Ger_k.

Definition 22.3.1.15. Eine Familie $(\varphi_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ von Morphismen k-geringter Räume heißt **gesamthaft initial**, wenn für jeden weiteren k-geringten Raum W und jede Abbildung $\psi : W \to X$ gilt

$$(\varphi_i \psi \text{ Morphismus } \forall i) \Rightarrow (\psi \text{ Morphismus})$$

22.3.1.16. Ganz allgemein nennen wir einen Morphismus $f : X \to Y$ **initial**, wenn er als einelementige Familie gesamthaft initial ist. Zum Beispiel ist die Identität auf einem k-geringten Raum stets initial. Ist $\psi : X \hookrightarrow Y$ ein injektiver Morphismus von k-geringten Räumen und trägt X die initiale Struktur, so nennen wir ψ eine **Einbettung** von k-geringten Räumen.

22.3.1.17 (**Diskussion der Terminologie**). In der algebraischen Geometrie ist für unsere Einbettungen auch die Bezeichnung **Immersion** gebräuchlich. In der Differentialgeometrie versteht man jedoch unter einer Immersion stattdessen meist wie in 22.3.3.14 einen nicht notwendig injektiven Morphismus mit injektivem Differential an jedem Punkt.

22.3.1.18. Besonders oft werden uns **offene Einbettungen** und **abgeschlossene Einbettungen** begegnen, bei denen zusätzlich gefordert wird, daß sie als Abbildungen topologischer Räume offen beziehungsweise abgeschlossen sind, oder gleichbedeutend, daß ihr Bild offen beziehungsweise abgeschlossen ist.

Lemma 22.3.1.19. *Gegeben k-geringte Räume $(Y_i)_{i \in I}$, eine Menge X und Abbildungen $\varphi_i : X \to Y_i$ gibt es genau eine Struktur als k-geringter Raum auf X derart, daß unsere Familie gesamthaft initial wird. Sie heißt die* **initiale Struktur** *zu unserer Familie.*

Beweis. Die Eindeutigkeit zeigt man wie im Fall gesamthaft finaler Strukturen in 22.3.1.11. Für den Nachweis der die Existenz zeigen wir genauer, daß die kleinste Struktur $\mathcal{I}$ eines k-geringten Raums auf X, für die alle unsere φ_i Morphismen werden, die geforderte universelle Eigenschaft hat. Ist in der Tat $\psi : W \to X$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, daß alle $\varphi_i \psi$ Morphismen sind, so muß ja die finale Struktur $\mathcal{T}$ auf X in Bezug auf ψ größergleich unserer kleinsten Struktur $\mathcal{I}$ sein. Das zeigt, daß ψ auch in Bezug auf $\mathcal{I}$ ein Morphismus ist. $\square$

22.3.1.20. Ist $X \subset Y$ eine Teilmenge eines k-geringten Raums, so nennen wir die initiale Struktur zur Inklusion die **induzierte Struktur** eines k-geringten Raums auf X und notieren sie $(X, \mathcal{O}_Y|_X)$. Explizit kann man die induzierte Struktur beschreiben wie folgt: Als Topologie auf X erhält man die von Y induzierte Topologie, und eine Funktion g auf $U \Subset X$ ist strukturierend genau dann, wenn es für alle $x \in U$ eine offene Umgebung $V \Subset Y$ von x in Y gibt und eine Funktion $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ mit $g|_{U \cap V} = f|_{U \cap V}$.

22.3.1.21 (**Transitivität gesamthaft initialer Familien**). Seien $\varphi_i : X \to Y_i$ und $\psi_{ji} : Y_i \to Z_{ji}$ Familien von k-geringten Räumen und Morphismen. Trägt X die initiale Struktur für die φ_i und tragen die Y_i die initialen Strukturen für die ψ_{ji}, so trägt X auch die initiale Struktur für die $\psi_{ji}\varphi_i$. Trägt andererseits X die initiale Struktur für die $\psi_{ji}\varphi_i$, so trägt X auch die initiale Struktur bezüglich der φ_i. All das folgt direkt aus den Definitionen.

22.3.1.22. Bemerkung 22.3.1.21 besagt unter anderem, daß die Verknüpfung von zwei initialen Morphismen stets initial ist, und daß Verknüpfung $\psi\varphi$ von zwei Morphismen nur dann initial sein kann, wenn φ initial ist. Insbesondere ist jeder Morphismus initial, zu dem es einen linksinversen Morphismus gibt. Weiter ist die Verknüpfung von zwei Einbettungen stets wieder eine Einbettung.

Ergänzung 22.3.1.23. Diese Aussagen und ihr Beweis sind ebenso wie die Aussagen zur Transitivität finaler Familien völlig analog zum Beweis der entsprechenden Aussagen 15.1.6.14, 15.1.7.5 im Kontext topologischer Räume. Sie wären noch allgemeiner sinnvoll und richtig für eine beliebige Kategorie mit einem treuen Funktor in die Kategorie der Mengen, ja mit etwas mehr Mühe bei der Formulierung sogar für einen beliebigen treuen Funktor.

Übungen

Übung 22.3.1.24. Für $m \leq n$ ist die Projektion auf die ersten Koordinaten $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ final in Bezug auf die in 22.3.1.4 erklärten $\mathcal{C}^1$-Strukturen $\mathbb{R}$-geringter Räume.

Übung 22.3.1.25. Man folgere aus 22.3.1.12: Die Verknüpfung von zwei finalen Morphismen ist stets final. Ist die Verknüpfung $\varphi \circ \psi$ von zwei Morphismen final, so ist φ final. Insbesondere ist jeder Morphismus final, der ein Rechtsinverses alias einen **Schnitt** besitzt, für den es also einen Morphismus s gibt mit $fs = \mathrm{id}$.

Übung 22.3.1.26 (**Finalität offener Überdeckungen**). Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung eines k-geringten Raums X, so trägt X die finale Struktur in Bezug auf die Einbettungen $U_i \hookrightarrow X$. Eine Abbildung $X \to Y$ in einen weiteren k-geringten Raum ist also genau dann ein Morphismus, wenn ihre Restriktionen auf alle U_i Morphismen sind.

Übung 22.3.1.27 (**Finalität ist lokal in der Basis**). Ist ein Morphismus von k-geringten Räumen $\varphi : X \to Y$ final, so ist auch für jede offene Teilmenge $V \Subset Y$ die induzierte Abbildung $\varphi^{-1}(V) \to V$ final für die induzierten Strukturen. Ist umgekehrt $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von k-geringten Räumen und besitzt Y eine offene Überdeckung $\mathcal{V}$ derart, daß $\varphi : \varphi^{-1}(V) \to V$ für alle $V \in \mathcal{V}$ final ist, so ist unser Morphismus bereits selbst final.

22.3.2 Mannigfaltigkeiten und Eckfaltigkeiten

Definition 22.3.2.1. Sei k ein Kring und $\mathcal{M}$ eine Menge von k-geringten Räumen. Unter einem **geringten Raum mit Modellen** $\mathcal{M}$ verstehen wir einen k-geringten Raum derart, daß jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die als k-geringter Raum isomorph ist zu einer offenen Teilmenge eines unserer Modelle aus $\mathcal{M}$. Eine $\mathcal{M}$**-Mannigfaltigkeit** ist ein geringter Raum mit Modellen $\mathcal{M}$, der zusätzlich Hausdorff ist. Ein **Morphismus von Mannigfaltigkeiten** ist ein Morphismus der zugrundeliegenden k-geringten Räume.

22.3.2.2. Die Forderung „Hausdorff“ schließt Beispiele aus wie die „Zahlengerade mit verdoppeltem Nullpunkt“ aus 15.1.4.8. Sie ist nötig für Satz 15.1.8.2, nach dem jede eindimensionale kompakte zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit isomorph ist zur Kreislinie. Viele grundlegende Teile der Theorie funktionieren aber auch ohne diese Annahme. In diesen Vorlesungen benötgen wir die Hausdorff-Eigenschaft zum ersten Mal beim Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf für Mannigfaltigkeiten 22.3.6.2, nach dem jedes glatte Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit zu jedem Anfangswert einen eindeutig bestimmten größten Flußweg hat. Dieser Satz ist ohne Annahme der Hausdorff-Eigenschaft offensichtlich falsch.

22.3.2.3 (**Diskussion der Terminologie**). Die meisten Autoren fordern von einer Mannigfaltigkeit zusätzlich, daß der zugrundeliegende topologische Raum „parakompakt“ sein soll oder sogar abzählbar basiert im Sinne von 13.1.4.21. Alle diese Bedingungen sind jedoch erst später von Belang, ich fordere sie deshalb lieber im Bedarfsfall jeweils explizit. Ein Beispiel für eine nicht abzählbar basierte Mannigfaltigkeit ist jede überabzählbare Menge mit der diskreten Topologie, auf der alle Funktionen „strukturierend“ sind. Ein Beispiel für eine nicht parakompakte Mannigfaltigkeit findet man etwa in 6.5.4.2.

Beispiele 22.3.2.4. Die folgende Tabelle liefert die gebräuchlichsten Varianten von Mannigfaltigkeiten. Das Symbol $\mathcal{C}^p$ für $p \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\} \sqcup \{\omega\}$ steht im Fall $p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ für die Struktur von $\mathbb{R}$-geringtem Raum, in der genau die p-mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen strukturierend sind. Bei $p = 0$ vereinbaren wir, daß das genau die stetigen Funktionen sein mögen, bei $p = \infty$ die glatten Funktionen und bei $p = \omega$ die analytischen Funktionen. Dahingegen steht $(\mathbb{C}, \mathcal{O}^{\mathrm{an}})$ für den $\mathbb{C}$-geringten Raum, für den genau die holomorphen Funktionen strukturierend sind. Bei $(\mathbb{C}^d, \mathcal{O}^{\mathrm{an}})$ sind allgemeiner die komplex-analytischen Funktionen gemeint.

Modelle $\mathcal{M}$	Übliche Bezeichnung für $\mathcal{M}$-Mannigfaltigkeiten
$(\mathbb{R}^d, \mathcal{C}^0)$	topologische d-Mannigfaltigkeiten
$(\mathbb{R}^d, \mathcal{C}^p)$	d-dimensionale $\mathcal{C}^p$-Mannigfaltigkeiten
$(\mathbb{C}, \mathcal{O}^{\mathrm{an}})$	eindimensionale holomorphe Mannigfaltigkeiten
$(\mathbb{C}^d, \mathcal{O}^{\mathrm{an}})_{d\in\mathbb{N}}$	komplex-analytische Mannigfaltigkeiten
$(\mathbb{R}^d, \mathcal{C}^p)_{d\in\mathbb{N}}$	$\mathcal{C}^p$-Mannigfaltigkeiten variabler Dimension
$(\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^d, \mathcal{C}^p)$	$(d+1)$-dimensionale $\mathcal{C}^p$-Randfaltigkeiten
$((\mathbb{R}_{\leq 0})^d, \mathcal{C}^p)$	d-dimensionale $\mathcal{C}^p$-Eckfaltigkeiten

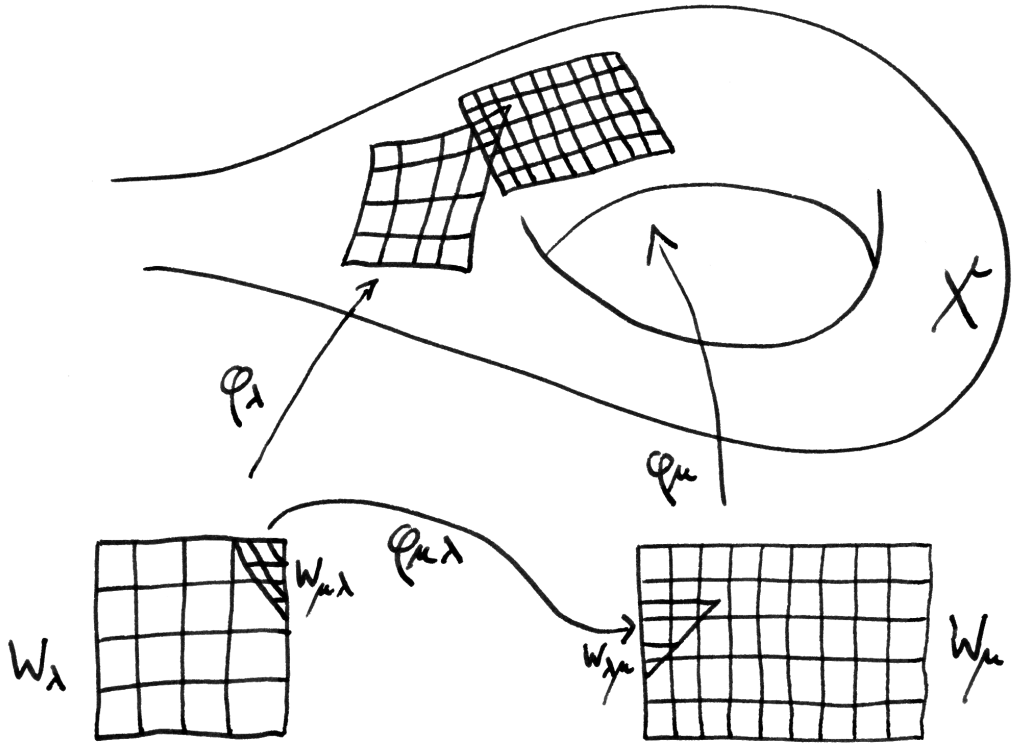
Für Morphismen in den jeweiligen Kategorien schreiben wir auch oft das Symbol für den fraglichen Typ von Funktionen. Eine zusammenhängende eindimensionale holomorphe Mannigfaltigkeit heißt eine **Riemann'sche Fläche**. Für die Menge aller Morphismen von einer Riemann'schen Fläche X in eine Riemann'sche Fläche Y schreiben wir also etwa $\mathcal{O}^{\mathrm{an}}(X, Y)$.

22.3.2.5. Eine offene Einbettung von einer offenen Teilmenge eines Modells in eine derartige Mannigfaltigkeit nennen wir eine **Karte**. Ein **Atlas** einer Mannigfaltigkeit ist eine Familie von Karten, deren Bilder die ganze Mannigfaltigkeit überdecken. Nach 22.3.1.26 trägt eine Mannigfaltigkeit in Bezug auf jeden Atlas die finale Struktur.

Beispiel 22.3.2.6 (**Ursprung der Terminologie**). Die auf den Seiten eines Atlanten aus dem Bücherschrank abgebildeten schmutzigen Karten identifizieren jeweils einen Teil der Erdoberfläche mit einem Teil der entsprechenden Papierebene, die hinwiederum mit etwas gutem Willen als Teilmenge eines $\mathbb{R}^2$ aufgefaßt werden kann. Das motiviert die eben für allgemeine Mannigfaltigkeiten eingeführte Terminologie.

22.3.2.7. Wir konzentrieren uns im folgenden auf den Fall von $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeiten und nennen sie **glatte Mannigfaltigkeiten**. Soweit möglich gebe ich grundlegende Definitionen allgemeiner für glatte Eckfaltigkeiten. Das hat insbesondere den Vorteil, daß alle reellen Intervalle zu einem Teil des allgemeinen Formalismus werden.

Beispiel 22.3.2.8 (**Affine Räume als Mannigfaltigkeiten**). Jeden endlichdimensionalen reellen affinen Raum X können wir mit der Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit versehen, indem wir einen Isomorphismus von reellen affinen Räumen $\varphi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} X$ wählen und die finale Struktur zur offensichtlichen Struktur auf $\mathbb{R}^n$ in Bezug auf diese Bijektion nehmen. Man sieht nun leicht, daß diese Struktur auf X vom gewählten Isomorphismus gar nicht abhängt. Die so auf X erklärte Struktur als glatte Mannigfaltigkeit nennen wir die **natürliche glatte Struktur**.



Eine Mannigfaltigkeit mit zwei Karten und dem zugehörigen Kartenwechsel

Die zugrundeliegende Topologie ist im übrigen unsere natürliche Topologie aus 12.1.2.6.

22.3.2.9. Die $\mathbb{R}$-Kringalgebra der $\mathcal{C}^p$-Funktionen auf einer $\mathcal{C}^p$-Mannigfaltigkeit M notieren wir $\mathcal{C}^p(M)$ oder $\mathcal{C}^p(M,\mathbb{R})$, wenn wir besonders betonen wollen, daß reellwertige Funktionen gemeint sind. Manchmal verwenden wir nämlich die Notation $\mathcal{C}^p(M)$ auch für die komplexwertigen $\mathcal{C}^p$-Funktionen auf M. Das gilt es jeweils aus dem Kontext zu erschließen.

Ergänzung 22.3.2.10. Gegeben $p \geq q$ scheint es mir klar, daß man jede $\mathcal{C}^p$-Mannigfaltigkeit auf genau eine Weise so mit der Struktur einer $\mathcal{C}^q$-Mannigfaltigkeit versehen kann, daß Karten Karten bleiben. Für diejenigen Leser, die mit der Sprache der Kategorien und Funktoren vertraut sind, will ich das auch noch in voller Allgemeinheit formulieren: Gegeben zwei Mengen von Modellen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ und ein Funktor F von der Kategorie aller offenen Teilmengen von Modellen aus $\mathcal{M}$ in die Kategorie der $\mathcal{M}'$-Mannigfaltigkeiten, der auf den zugrundeliegenden Mengen die Identität ist und die Struktur als geringter Raum höchstens vergrößert im Sinne von 22.3.1.9, in Formel $F : (U, \mathcal{O}_U) \mapsto (U, \mathcal{O}'_U)$ und genauer $F : (U, \mathcal{T}_U, \mathcal{O}_U) \mapsto (U, \mathcal{T}'_U, \mathcal{O}'_U)$, weil sich ja auch die Topologie verfeinern darf, erhalten wir ganz allgemein einen Funktor

$$F : \left\{ \begin{array}{c} \text{Geringte Räume} \\ \text{mit Modellen } \mathcal{M} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \text{Geringte Räume} \\ \text{mit Modellen } \mathcal{M}' \end{array} \right\}$$

Er kann dadurch charakterisiert werden, daß er die zugrundeliegende Menge nicht ändert, also $F : (X, \mathcal{T}, \mathcal{O}_X) \mapsto (X, \mathcal{T}', \mathcal{O}'_X)$, und daß für jede Karte $U \to X$ von X die induzierte Abbildung $FU \to FX$ eine offene Einbettung in den neu konstruierten geringten Raum FX ist. Zum Beispiel können wir so jede Riemann'sche Fläche als eine zweidimensionale reelle $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit auffassen und jede separierte glatte komplexe algebraische Varietät als eine komplexanalytische Mannigfaltigkeit.

Lemma 22.3.2.11 (Projektive Räume als Mannigfaltigkeiten). *Die projektiven Räume $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ werden glatte Mannigfaltigkeiten, wenn wir erst $\mathbb{K}^{n+1}$ mit der natürlichen glatten Struktur nach 22.3.2.8 versehen, dann $\mathbb{K}^{n+1} \backslash 0$ mit der induzierten Struktur und schließlich $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ mit der finalen Struktur.*

22.3.2.12. Ich formuliere das auch noch aus. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{P}^n\mathbb{K}$ soll offen sein, wenn ihr Urbild in $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{K}^{n+1} \backslash 0$ unter einem und jedem Isomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{n+1}$ von reellen Vektorräumen einer offenen Teilmenge $\varphi^{-1}(\pi^{-1}(U)) \Subset \mathbb{R}^m$ entspricht. Eine reellwertige Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ soll strukturierend alias glatt sein, wenn $f \circ \pi \circ \varphi : \varphi^{-1}(\pi^{-1}(U)) \to \mathbb{R}$ glatt ist im Sinne der Analysis.

22.3.2.13. Dasselbe gilt für die reell-analytischen und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ auch für die komplex-analytischen Strukturen. Im Fall $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ kann man die Struktur als Riemann'sche Fläche alternativ erklären als die finale Struktur zu den beiden Abbildungen $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto \langle z, 1\rangle$ und $z \mapsto \langle 1, z\rangle$ mit $\langle a, b\rangle = \langle (a, b)\rangle$ dem vom Vektor (a, b) erzeugten Teilraum. Das ist insofern einfacher, als diese Beschreibung ohne den Begriff komplexanalytischer Funktionen in mehreren Veränderlichen auskommt.

Beweis. Wir wissen nach 15.2.3.7 bereits, daß unsere Räume Hausdorff sind. Somit müssen wir nur noch um jeden Punkt eine Karte finden. Sei dazu $v \in \mathbb{K}^{n+1}\backslash 0$ ein Repräsentant unseres Punktes, $H \subset \mathbb{K}^{n+1}$ eine lineare $\mathbb{K}$-Hyperebene mit $v \notin H$ und $U \Subset \mathbb{P}^n\mathbb{K}$ die Menge aller nicht in H enthaltenen Geraden. Im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} w & \in & \mathbb{K}^{n+1}\backslash H & \twoheadrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ (w\mathbb{K}) \cap (v + H) & \in & (v + H) & \to & U \end{array}$$

ist dann die obere Horizontale final nach der Lokalität von Finalität in der Basis 22.3.1.27 und die linke Vertikale glatt, wie man durch explizite Rechnung prüft. Damit ist auch die untere Horizontale final nach 22.3.1.25 und als bijektive finale Abbildung muß sie dann ein Homöomorphismus sein. □

Proposition 22.3.2.14 (über Untermannigfaltigkeiten). *Für eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ oder allgemeiner eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Teilmenge ist eine d-dimensionale $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltigkeit im Sinne der Definition 12.3.2.6, ist also lokal $\mathcal{C}^1$-plättbar;*

2. *Unsere Teilmenge ist mit ihrer von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^1)$ induzierten Struktur eines $\mathbb{R}$-geringten Raums eine d-Mannigfaltigkeit im Sinne der vorstehenden Definition 22.3.2.1.*

22.3.2.15. Analoges gilt mit demselben Beweis auch für $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten mit $0 \le k \le \infty$ sowie für Eckfaltigkeiten.

Beweis. Die einzige Richtung, die einen Beweis verdient, ist 2⇒1. Wir geben dazu unserer Teilmenge den Namen M. Ist M mit seiner induzierten Struktur eine d-Mannigfaltigkeit im Sinne von 22.3.2.1, so gibt es insbesondere für jeden Punkt $p \in M$ einen Isomorphismus von geringten Räumen

$$\varphi : W \to \varphi(W) \Subset M$$

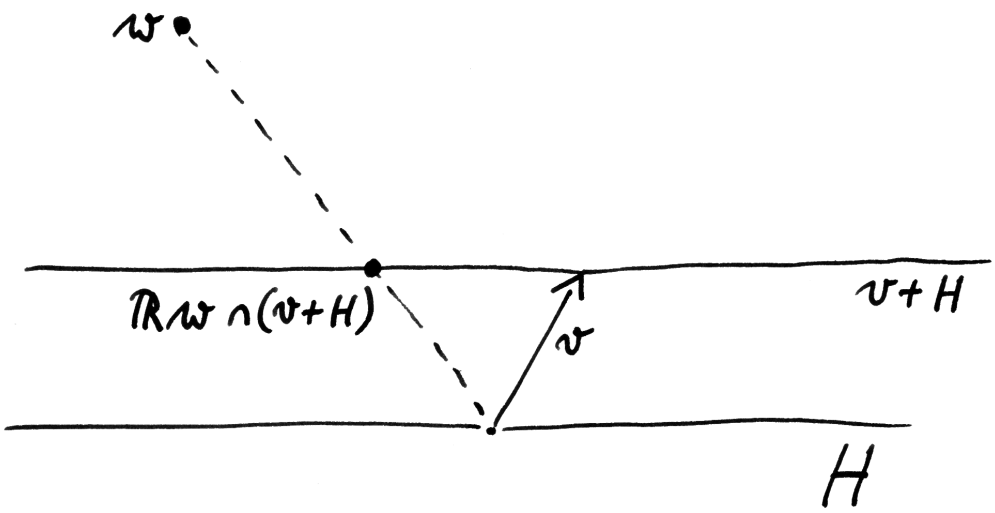


Illustration zum Beweis von 22.3.2.11

mit $p \in \varphi(W)$ und $W \Subset \mathbb{R}^k$. Proposition 12.3.4.1 zeigt dann, daß M eine eingebettete Mannigfaltigkeit ist, wenn wir nur zeigen können, daß φ als Abbildung in den $\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist mit injektivem Differential an jeder Stelle von W. Daß hier φ stetig differenzierbar ist, folgt aus einer offensichtlichen Verallgemeinerung von 22.3.1.7: Auch für $W \Subset \mathbb{R}^d$ sind die Morphismen von $\mathbb{R}$-geringten Räumen $(W, \mathcal{C}^1) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^1)$ genau die stetig differenzierbaren Abbildungen $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$. Daß sein Differential überall injektiv ist, erkennt man, indem man die Koordinatenfunktionen $x_1, \ldots, x_d$ auf W als Funktionen auf $\varphi(W)$ betrachtet. Nach Definition der induzierten Struktur lassen sich alle diese Koordinatenfunktionen stetig differenzierbar auf eine offene Umgebung von p in $\mathbb{R}^n$ ausdehnen. Ist $q \in W$ der Punkt mit $\varphi(q) = p$, so sind die Bilder unter $\mathrm{d}_q\varphi$ der Standardbasis des $\mathbb{R}^d$ gewisse Vektoren in $\mathbb{R}^n$ derart, daß die Richtungsableitungen in Richtung dieser Vektoren unserer Ausdehnungen $f_1, \ldots, f_d$ jeweils Eins sind auf der Ausdehnung der entsprechenden Koordinate und Null auf den Ausdehnungen aller anderen Koordinaten, in Formeln

$$((\mathrm{d}_q\varphi)\partial_i)(f_j) = (\partial_i(f_j \circ \varphi))(q) = (\partial_i(x_j))(q) = \delta_{ij}$$

Das zeigt die Injektivität des Differentials. □

Proposition 22.3.2.16 (Produkt von Mannigfaltigkeiten). *Gegeben glatte Mannigfaltigkeiten M, N kann ihr Produkt*

$$M \times N$$

auf genau eine Weise mit der Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit versehen werden derart, daß eine Abbildung $f : X \to M \times N$ von einer glatten Mannigfaltigkeit in unser Produkt glatt ist genau dann, wenn $\mathrm{pr}_1 \circ f$ und $\mathrm{pr}_2 \circ f$ es sind.

22.3.2.17. Versehen mit dieser Struktur nennen wir $M \times N$ das **Produkt** der glatten Mannigfaltigkeiten M und N. Das ist per definitionem dann auch das Produkt in der Kategorie der Mannigfaltigkeiten im Sinne der Kategorientheorie 4.7.7.1. Der Beweis zeigt im übrigen, daß die Produktmannigfaltigkeit die Produkttopologie trägt. Das Produkt von $\mathbb{R}^m$ mit $\mathbb{R}^n$ ist offensichtlich $\mathbb{R}^{m+n}$ mit seiner üblichen Struktur als glatte Mannigfaltigkeit. Die Proposition gilt analog auch für Mannigfaltigkeiten mit anderen Differenzierbarkeitsannahmen und sogar für solche mit Ecken, nicht aber für „Mannigfaltigkeiten mit Rand“. Betrachten wir speziell für f die Identität auf $M \times N$, so erkennen wir, daß die Projektionen eines Produkts auf seine Faktoren glatt sind.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar. Die Existenz zeigen wir, indem wir $M \times N$ mit der finalen Struktur in Bezug auf alle Abbildungen

$$(\varphi \times \psi) : V \times W \to M \times N$$

versehen, für $\varphi : V \to M$ und $\psi : W \to N$ Karten von M beziehungsweise von N. Ist M eine m-Mannigfaltigkeit und N eine n-Mannigfaltigkeit, so haben wir hier $V \Subset \mathbb{R}^m$ und $W \Subset \mathbb{R}^n$ und denken uns $V \times W \Subset \mathbb{R}^{m+n}$ versehen mit seiner von $(\mathbb{R}^{m+n}, \mathcal{C}^\infty)$ induzierten Struktur eines $\mathbb{R}$-geringten Raums. Aus der Beschreibung 22.3.2.24 einer Mannigfaltigkeit durch einen verträglichen Atlas folgt, daß $M \times N$ mit dieser Struktur eines $\mathbb{R}$-geringten Raums in der Tat eine glatte Mannigfaltigkeit wird, die die gewünschten Eigenschaften hat. □

22.3.2.18. Jedes Produkt von Einbettungen ist wieder eine Einbettung. Sind also in Formeln $X \hookrightarrow M$ und $Y \hookrightarrow N$ Einbettungen von glatten Mannigfaltigkeiten, so ist auch $X \times Y \hookrightarrow M \times N$ ein Einbettung. Das folgert man mühelos aus den universellen Eigenschaften.

Definition 22.3.2.19. Eine **Liegruppe** ist eine Gruppe G mit einer Struktur als glatte Mannigfaltigkeit derart, daß die Multiplikation $G \times G \to G$ und die Inversenbildung $G \to G$ glatt sind.

22.3.2.20 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur wird von einer Liegruppe meist zusätzlich gefordert, daß sie eine abzählbare Basis der Topologie besitzen soll. Wir werden diese Bedingung stets explizit erwähnen, wenn wir sie brauchen, und dann von einer **abzählbar basierten Liegruppe** reden.

Beispiel 22.3.2.21. Die vorhergehende Bemerkung 22.3.2.18 zeigt, daß unsere Matrixliegruppen aus 22.1.2.4 tatsächlich Liegruppen in diesem abstrakten Sinne sind.

Satz* 22.3.2.22 (**Kompakte Liegruppen sind Matrixliegruppen**). *Jede kompakte Liegruppe besitzt eine endlichdimensionale treue Darstellung, ist also isomorph zu einer Matrixliegruppe.*

Beweis. Gegeben zwei verschiedene Elemente unserer Gruppe gibt es nach dem Satz von Peter-Weyl 15.4.7.7 stets eine stetige darstellende Funktion, die an ihnen verschiedene Werte annimmt. Für jedes vom neutralen Element verschiedene Gruppenelement gibt es folglich eine stetige endlichdimensionale Darstellung, auf der besagtes Element nicht als die Identität operiert. Ist nun G unsere kompakte Liegruppe und $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine stetige endlichdimensionale Darstellung, die nicht treu ist, in Formeln $\ker \rho \neq 1$, so finden wir ein Element $x \neq 1$ in $\ker \rho$ und eine stetige endlichdimensionale Darstellung W, auf der x nicht als Identität operiert. Die Summe $V_1 = V \oplus W$ liefert dann eine Darstellung $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ mit $\ker \rho \supsetneq \ker \rho_1$. Besäße G keine treue endlichdimensionale Darstellung, so könnten wir auf diese Weise in G eine unendliche echt absteigende Folge kompakter Untergruppen konstruieren. Das ist jedoch absurd, da in jedem Schritt entweder die Dimension abnehmen muß oder, wenn diese gleich bleibt, die Zahl der Zusammenhangskomponenten. □

Übungen

Ergänzende Übung 22.3.2.23. Gegeben eine kompakte Liegruppe K trifft der Abschluß ihrer derivierten Gruppe (K, K), also der von allen Kommutatoren $(a, b) := aba^{-1}b^{-1}$ mit $a, b \in K$ erzeugten Untergruppe, das Zentrum in einer endlichen Untergruppe, in Formeln

$$|\overline{(K, K)} \cap \mathrm{Z}(K)| < \infty$$

Hinweis: Man findet eine treue endlichdimensionale Darstellung V, darauf ein invariantes Skalarprodukt und eine Zerlegung $V = L \oplus \ldots \oplus M$ in irreduzible Unterdarstellungen. Dann landet das Zentrum in $\mathbb{C}^\times \mathrm{id}_L \times \ldots \times \mathbb{C}^\times \mathrm{id}_M$ und der Abschluß der derivierten Gruppe in $\mathrm{SU}(L) \times \ldots \times \mathrm{SU}(M)$. In 22.5.7.11 werden wir im übrigen sehen, daß die derivierte Gruppe (K, K) bereits selbst abgeschlossen sein muß.

Übung 22.3.2.24 (**Kriterium für Atlanten**). Gegeben Modelle $\mathcal{M}$ und eine Menge X ist eine vorgegebene Familie $(W_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ mit W_λ offen in Modellen aus $\mathcal{M}$ und $\varphi_\lambda : W_\lambda \hookrightarrow X$ jeweils einer Injektion ein Atlas für die Struktur einer $\mathcal{M}$-Mannigfaltigkeit auf X genau dann, wenn (1) die Finaltopologie auf X in Bezug auf die φ_λ Hausdorff ist, wenn (2) für alle $\lambda, \mu \in \Lambda$ die Mengen $W_{\lambda\mu} = \varphi_\lambda^{-1}(\varphi_\mu(W_\mu))$ offen sind in W_λ und wenn (3) die **Kartenwechsel**

$$\varphi_{\mu\lambda} : W_{\lambda\mu} \to W_{\mu\lambda}$$

Morphismen von geringten Räumen sind. Wegen $\varphi_{\lambda\mu} \circ \varphi_{\mu\lambda} = \mathrm{id}$ sind sie dann sogar Isomorphismen.

Ergänzende Übung 22.3.2.25. Man konstruiere einen Diffeomorphismus $\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{P}^3\mathbb{R}$ von glatten Mannigfaltigkeiten. Hinweis: Man betrachte geeignete finale Morphismen von S^3 auf beide Seiten. Hierzu mag die in 22.1.6.2 diskutierte Spingruppe helfen.

Übung 22.3.2.26. Gegeben zwei Liegruppen G, H ist auch ihr Produkt $G \times H$ mit der komponentenweisen Verknüpfung eine Liegruppe.

Übung 22.3.2.27. Die Quotientengruppe $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ wird mit der finalen Struktur zur kanonischen Projektion eine Liegruppe, die isomorph ist zu $(S^1)^n$.

Übung 22.3.2.28. Eine stetige Abbildung $p : X \to Y$ heißt wie in 16.3.1.10 **étale**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \Subset X$ besitzt, die von p homöomorph auf eine offene Teilmenge $p(U) \Subset Y$ abgebildet wird. Sei $X \to Y$ eine étale Abbildung von Hausdorffräumen. Gegeben eine Struktur als $\mathcal{M}$-Mannigfaltigkeit auf Y betrachten wir die kleinste Struktur als geringter Raum auf X, für die p ein Morphismus ist und für die alle offenen Teilmengen von X offen sind. Man zeige, daß solch eine kleinste Struktur in der Tat existiert, daß

sie die Topologie auf X zu einer Struktur als $\mathcal{M}$-Mannigfaltigkeit erweitert, und daß für alle $U \Subset X$, für die p einen Homöomorphismus $p : U \xrightarrow{\sim} p(U)$ induziert, dieser Homöomorphismus auch ein Isomorphismus von Mannigfaltigkeiten ist. Ich nenne diese Struktur die **étale induzierte Struktur**.

Weiterführende Übung 22.3.2.29. Jede zusammenhängende Überlagerung einer Liegruppe wird mit der durch die Wahl eines Urbilds des neutralen Elements gegebenen stetigen Verknüpfung aus **??** und der étale induzierten $\mathcal{C}^\infty$-Struktur im Sinne von 22.3.2.28 selbst eine Liegruppe.

Übung 22.3.2.30. Jede zusammenhängende Liegruppe ist abzählbar basiert. Hinweis: 16.1.2.31.

22.3.3 Tangentialräume

22.3.3.1 (**Keime von Mannigfaltigkeiten**). Seien (M, p) und (N, q) bepunktete Mannigfaltigkeiten. Unter einem **Morphismenkeim** $\varphi : (M, p) \to (N, q)$ verstehen wir eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, φ) mit $p \in U \Subset M$ und $\varphi : (U, p) \to (N, q)$ einem Morphismus bepunkteter Mannigfaltigkeiten mit der Maßgabe, daß (U, φ) und (U', φ') äquivalent sind, wenn sie auf einer Umgebung $U'' \Subset (U \cap U')$ von p übereinstimmen. Es ist klar, wie wir Morphismenkeine zu verknüpfen haben. Wir erhalten so eine Kategorie und vereinbaren dafür die Notation

$$\mathcal{C}^1\text{-}\mathrm{Mgf}^\kappa$$

und nennen sie die Kategorie der **Keime von Mannigfaltigkeiten**, obwohl nur die Morphismen Keime sind und die Objekte ganz gewöhnliche bepunktete Mannigfaltigkeiten.

22.3.3.2 (**Keime affiner Räume**). Seien (X, p) und (Y, q) bepunktete endlichdimensionale reelle affine Räume. Unter einem **Morphismenkeim** $\varphi : (X, p) \to (Y, q)$ verstehen wir eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, φ) mit $p \in U \Subset X$ und $\varphi : (U, p) \to (Y, q)$ einer $\mathcal{C}^1$-Abbildung mit der Maßgabe, daß (U, φ) und (U', φ') äquivalent sind, wenn sie auf einer Umgebung $U'' \Subset (U \cap U')$ von p übereinstimmen. Es ist klar, wie wir Morphismenkeine zu verknüpfen haben. Wir erhalten so die Kategorie der **$\mathcal{C}^1$-Keime von affinen Räumen**

$$\mathcal{C}^1\text{-}\mathrm{Aff}^\kappa$$

22.3.3.3 (**Tangentialraum**). Der offensichtliche Funktor ist eine Äquivalenz von Kategorien

$$j : \mathcal{C}^1\text{-}\mathrm{Aff}^\kappa \xrightarrow{\approx} \mathcal{C}^1\text{-}\mathrm{Mgf}^\kappa$$

Wir erklären nun den **Differential-Funktor** $\mathrm{Diff} : \mathcal{C}^1\text{-}\mathrm{Aff}^\kappa \to \mathbb{R}\text{-}\mathrm{Mod}$ durch die Vorschrift, daß er jedem bepunkteten affinen Raums (X, p) den Richtungsraum

$\vec{X}$ zuordnet und jedem Morphismenkeim $\varphi : (X,p) \to (Y,q)$ das Differential $\mathrm{d}_p\varphi : \vec{X} \to \vec{Y}$ aus der Analysis 12.1.3.1. Ein **Tangentialraumfunktor** ist ein Paar (T,τ) aus einem Funktor

$$T : \mathcal{C}^1\text{-Mgf}^\kappa \to \mathbb{R}\text{-Mod}$$

und einer Isotransformation $\tau : T \circ j \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Diff}$. Da j eine Äquivalenz ist, gibt es Tangentialraumfunktoren und sie sind eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus in der Weise, daß es für jeden weiteren Tangentialraumfunktor (T',τ') genau eine Transformation $\eta : T \Rightarrow T'$ gibt mit $(\eta j) \circ \tau = \tau'$. Der Tangentialraumfunktor verdient deshalb die Ansprache mit bestimmtem Artikel und eine Notation. Man verwendet meist die Notation $(M,p) \mapsto \mathrm{T}_pM$ für seinen Effekt auf Objekten. Den Effekt auf Morphismen notiere ich vorerst $\varphi \mapsto \mathrm{T}_p\varphi$ und erlaube mir die übliche Notation $\mathrm{d}_p\varphi$ erst, wenn wir uns etwas an den neuen Formalismus gewöhnt haben und klar ist, daß das nicht zu Widersprüchen führt. Man nennt

$$\mathrm{T}_pM$$

den **Tangentialraum an** M **bei** p und $\mathrm{T}_p\varphi$ das **Differential von** φ **bei** p. Die Funktorialität $\mathrm{T}_{\varphi(p)}\psi \circ \mathrm{T}_p\varphi = \mathrm{T}_p(\psi \circ \varphi)$ heißt auch in dieser Allgemeinheit die **Kettenregel**. Die Transformation τ wird selten notiert aber oft implizit verwendet.

22.3.3.4 (**Differential und Jacobimatrix**). Gegeben $x \in U \Subset \mathbb{R}^n$ notieren wir $\partial_1, \ldots, \partial_n \in \mathrm{T}_xU$ diejenigen Vektoren des Tangentialraums, die unter τ und trans der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ entsprechen. Sie bilden eine Basis des besagten Tangentialraums. Im Fall $n = 1$ verwenden wir auch die Abkürzung $\partial = \partial_1$ und nennen dies Element den **kanonischen Erzeuger von** $\mathrm{T}_x\mathbb{R}$. Ist $\varphi : U \hookrightarrow M$ eine Karte einer Mannigfaltigkeit mit $\varphi(x) = p$, so notieren wir $\partial_i^\varphi \in \mathrm{T}_pM$ die Bilder unserer ∂_i unter dem Differential $\mathrm{T}_x\varphi$ der Karte. Sie bilden eine Basis des Tangentialraums T_pM. Ist ebenso $\psi : V \hookrightarrow N$ eine Karte und $y \in V$ und $\psi(y) = q$ und $f : M \to N$ ein $\mathcal{C}^1$-Morphismus mit $f(p) = q$, so wird die lineare Abbildung

$$\mathrm{T}_pf : \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_qN$$

in den Basen ∂_i^φ und ∂_j^ψ gegeben durch die Jacobimatrix $[\mathrm{d}_p(\psi^{-1}f\varphi)]$ für die Verknüpfung geeignet eingeschränkter Abbildungen, wie man unmittelbar aus den Definitionen. folgert. In Formeln gilt also

$${}_{(\partial_j^\psi)}[\mathrm{T}_pf]_{(\partial_i^\varphi)} = [\mathrm{d}_p(\psi^{-1}f\varphi)]$$

22.3.3.5 (**Tangentialräume eingebetteter Mannigfaltigkeiten**). Analog wie in 22.3.3.1 erklären wir die Kategorie $\mathrm{Mgf}^{\subset\kappa}$ der **Keime eingebetteter Mannigfaltigkeiten** und erhalten Äquivalenzen

$$\mathcal{C}^1\text{-Aff}^\kappa \overset{\approx}{\to} \mathrm{Mgf}^{\subset\kappa} \overset{\approx}{\to} \mathrm{Mgf}^\kappa$$

Wir notieren sie $j^{\subset}$ und i. Die erste Äquivalenz $j^{\subset}$ ist hier sogar die Einbettung einer vollen Unterkategorie und in 22.1.4.6 hatten wir bereits einen Funktor

$$\mathrm{T}^{\subset} : \mathrm{Mgf}^{\subset\kappa} \to \mathbb{R}\text{-Mod}$$

konstruiert, der auf der vollen Unterkategorie $\mathcal{C}^1$-Aff^{κ} mit dem Differentialfunktor übereinstimmt, $\mathrm{T}^{\subset} \circ j^{\subset} = \mathrm{Diff}$. Aus dem vorhergehenden folgt, daß es genau eine Isotransformation $\eta : \mathrm{T} \circ i \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{T}^{\subset}$ gibt mit $(\eta j^{\subset}) = \tau : \mathrm{T} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Diff}$. In diesem Sinne verallgemeinert unsere neue Konstruktion also unseren Tangentialraum für eingebettete Manigfaltigkeiten aus 22.1.4.6. Speziell erhalten wir für jede bepunktete offene Teilmenge eines affinen Raums $p \in U \Subset X$ einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\eta : \mathrm{T}_p U \xrightarrow{\sim} \vec{X}$$

und für jede bepunktete offene Teilmenge eines Vektorraums $p \in U \Subset V$ durch Nachschalten von trans^{-1} einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathrm{trans}^{-1} \circ \eta : \mathrm{T}_p U \xrightarrow{\sim} V$$

Wir nennen beide **kanonische Isomorphismen**.

22.3.3.6 (**Tangentialraum von Produkten**). Der Tangentialraumfunktor ist verträglich mit endlichen Produkten. Der Beweis kann dem Leser überlassen bleiben. Gegeben $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeiten X, Y und Punkte $x \in X$ sowie $y \in Y$ induzieren mithin die Differentiale der Projektionen einen Vektorraumisomorphismus

$$(\mathrm{T}_{(x,y)}\,\mathrm{pr}_1, \mathrm{T}_{(x,y)}\,\mathrm{pr}_2)^{\top} : \ \mathrm{T}_{(x,y)}(X \times Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_x X \times \mathrm{T}_y Y$$

In der Notation lehne ich mich hier an die in 7.2.1.17 vereinbarten Konventionen an: Vektoren aus direkten Summen werden als Spalten mit Einträgen in den Summanden aufgefaßt und der obere Index $\top$ in obiger Formel transponiert die gegebene Zeilenmatrix von Homomorphismen zu einer Spaltenmatrix. Der behauptete Isomorphismus folgt sofort aus der expliziten Beschreibung der Produktmannigfaltigkeit durch Karten. Die inverse Abbildung kann entsprechend geschrieben werden als $(\mathrm{T}_x(\mathrm{id}_X, y), \mathrm{T}_y(x, \mathrm{id}_Y))$, wobei das erste y beziehungsweise das zweite x jeweils die entsprechende konstante Abbildung meinen. Formal ist weiter der Tangentialraum des einpunktigen Raums der Nullraum, aber das ist auch direkt klar. Aus der Kettenregel folgt, daß jede konstante Abbildung das Differential Null hat.

22.3.3.7 (**Tangentialraum für Eckfaltigkeiten**). In derselben Weise erklären wir auch den Tangentialraumfunktor für Keime von Eckfaltigkeiten

$$\mathrm{T} : \mathcal{C}^1\text{-}\mathrm{Eckf}^{\kappa} \to \mathbb{R}\text{-Mod}$$

und verwenden dafür dieselbe Notation. Die Rolle von $\mathcal{C}^1$ -Aff^κ lassen wir in diesem Fall der Einfachkeit halber von der Kategorie $\mathcal{C}^1$-$(\mathbb{R}^n_{\leq 0})^\kappa$ aller Keime von bepunkteten Kopien irgendwelcher $\mathbb{R}^n_{\leq 0}$ spielen, auf der uns ein offensichtliches Analogon des Differentialfunktors zur Verfügung steht. Auch im Fall von Eckfaltigkeiten ist der Tangentialraumfunktor verträglich mit endlichen Produkten.

22.3.3.8. In der Literatur ist es üblich, die Begrifflichkeit der Kategorientheorie bei der Diskussion des Tangentialraums zu vermeiden und stattdessen explizite Konstruktionen für Tangentialraumfunktoren $\mathcal{C}^1$ -$\mathrm{Mgf}^\kappa \to \mathbb{R}$-$\mathrm{Mod}$ anzugeben. Ich beschreibe nun zwei besonders gängige Konstruktionen dieser Art.

22.3.3.9 (**Tangentialraum durch Wegekeime**). Besonders beliebt ist eine Konstruktion, bei der man eine Variante $\mathrm{T}_p^{\mathrm{geom}} M$ des Tangentialraums erklärt als die Menge aller Äquivalenzklassen von $\mathcal{C}^1$-Wegen $\gamma : (I, 0) \to (M, p)$ mit $I \Subset \mathbb{R}$ einer offenen Umgebung des Ursprungs unter der Äquivalenzrelation, daß $\gamma \sim \kappa$ gleichbedeutend sein soll zu $(\varphi^{-1}\gamma)'(0) = (\varphi^{-1}\kappa)'(0)$ für jede Karte φ um p. Diese Konstruktion funktioniert allerdings nur für Mannigfaltigkeiten und nicht für Eckfaltigkeiten und es ist auch nicht unmittelbar klar, wie die fragliche Menge mit der Struktur eines reellen Vektorraums zu versehen ist. Die Isotransformation τ zu unserem Differentialfunktor auf punktierten affinen Räumen (X, p) wird gegeben durch die Abbildungen $\tau_X : \mathrm{T}_p^{\mathrm{geom}} X \xrightarrow{\sim} \vec{X}$ mit $[\gamma] \mapsto \gamma'(0)$.

22.3.3.10 (**Ableitung eines Weges**). Gegeben $\gamma : I \to M$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung von einem mehrpunktigen reellen Intervall in eine $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeit oder sogar eine $\mathcal{C}^1$-Eckfaltigkeit und $t \in I$ setzen wir

$$\gamma'(t) = (\mathrm{T}_t\gamma)(\partial) \in \mathrm{T}_{\gamma(t)} M$$

Der Leser wird leicht einsehen, daß wir so im Fall von eingebetteten Mannigfaltigkeiten unseren Geschwindigkeitsvektor erhalten, wie er früher als Grenzwert von Differentialquotienten eingeführt wurde.

22.3.3.11 (**Tangentialraum durch Derivationen**). Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein k-geringter Raum und $x \in X$ ein Punkt. Die k-Ringalgebra $\mathcal{O}_{X,x}$ der **Keime strukturierender Funktionen bei** x ist definiert durch die Vorschrift

$$\mathcal{O}_{X,x} := \{(U, f) \mid U \text{ offene Umgebung von } x \text{ und } f \in \mathcal{O}(U) \text{ strukturierend}\} \,/\, \sim$$

mit der Äquivalenzrelation $\sim$ erklärt durch die Vorschrift, daß gilt $(U, f) \sim (V, g)$ genau dann, wenn die Funktionen f und g auf einer hinreichend kleinen in $U \cap V$ enthaltenen Umgebung W von x übereinstimmen. Für jeden Homomorphismus k-geringter Räume $\varphi : X \to Y$ induziert das Zurückholen von Funktionen k-lineare Ringhomomorphismen

$$(\circ\varphi) : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

auf den Funktionskeimen in der Gegenrichtung. Für offene Einbettungen sind diese Homomorphismen offensichtlich Isomorphismen. Jetzt mag man für (M,p) eine reelle bepunkete $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeit $\mathrm{T}_p^{\mathrm{alg}} M \subset \mathcal{O}_{M,p}^*$ erklären als den Raum derjenigen Linearformen auf $\mathcal{O}_{M,p}$, die unter einer und jeder Karte einer Richtungsableitung entsprechen. Im Fall einer glatten, ja einer $\mathcal{C}^2$-Mannigfaltigkeit kann man besagte Linearformen $D : \mathcal{O}_{M,p} \to \mathbb{R}$ auch alternativ dadurch charakterisieren, daß sie die Leibnizregel $D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)$ erfüllen. Die Isotransformation τ zu unserem Differentialfunktor auf punktierten affinen Räumen (X,p) wird gegeben durch Umkehrung der Isomorphismen $\vec{X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_p^{\mathrm{alg}} X$, die jedem Richtungsvektor $\vec{v} \in \vec{X}$ die Richtungsableitung $\mathrm{D}_{\vec{v}}$ bei p zuordnen.

22.3.3.12 (**Richtungsableitung nach Tangentialvektor**). Gegeben (M,p) eine bepunktete $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeit und $v \in \mathrm{T}_p M$ ein Tangentialvektor und $f : M \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion alias reguläre Funktion erklären wir ihre **Richtungsableitung bei** p **in Richtung** v als die reelle Zahl

$$\mathrm{D}_v(f) := ((\mathrm{T}_p f)(v))/\partial$$

Wir wenden also das Differential $\mathrm{T}_p f : \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_{f(p)}\mathbb{R}$ an auf v und erhalten ein Vielfaches des kanonischen Erzeugers $\partial \in \mathrm{T}_{f(p)}\mathbb{R}$ und der Vorfaktor ist unsere Richtungsableitung. Allgemeiner erklären wir die **Richtungsableitung** $\mathrm{D}_v f$ einer $\mathcal{C}^1$-Funktion $f : M \to X$ mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen affinen Raum X durch

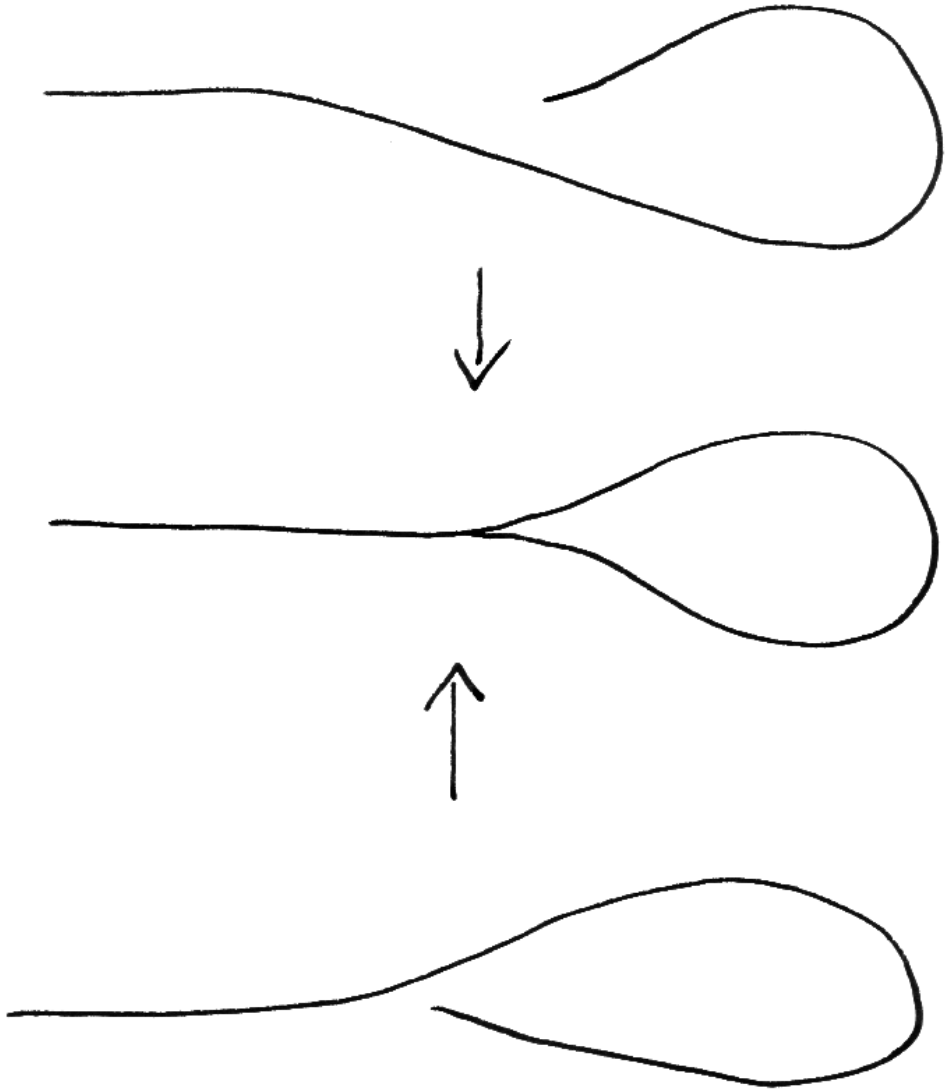
$$\mathrm{D}_v f := \tau_X((\mathrm{T}_p f)(v)) \in \vec{X}$$

Ist $X = W$ bereits selbst ein Vektorraum, so halten wir oft noch implizit trans^{-1} dahinter und haben so $\mathrm{D}_v f \in W$.

22.3.3.13. Im weiteren gebe ich nun die Notation $\mathrm{T}_p\varphi$ wieder auf und verwende stattdessen die übliche Notation $\mathrm{d}_p\varphi$ auch für das Differential einer Abbildung von Mannigfaltigkeiten.

Definition 22.3.3.14. Eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung von $\mathcal{C}^1$- Mannigfaltigkeiten heiße **differentialinjektiv**, wenn ihr Differential an jeder Stelle injektiv ist.

22.3.3.15 (**Diskussion der Terminologie**). In der Differentialgeometrie nennt man eine differentialinjektive Abbildung auch eine **Immersion**. Ich möchte jedoch den Begriff der Immersion wie in der algebraischen Geometrie reservieren für Morphismen in Kategorien mit einem ausgezeichneten Mengenfunktor, die unter besagtem Mengenfunktor zu Injektionen werden. Manche Quellen, zum Beispiel [War83], verwenden den Begriff einer Untermannigfaltigkeit als Synonym für das, was wir eine „differentialinjektive Injektion“ nennen würden. Ich mag



Zwei glatte injektive Immersionen mit demselben Bild, die besagtes Bild in zwei verschiedenen Weisen mit der Struktur einer Untermannigfaltigkeit im Sinne von Warner versehen.

die in [War83] verwendete Terminologie nicht, da in dieser Terminologie ein- und dieselbe Teilmenge einer Mannigfaltigkeit verschiedene Strukturen als Untermannigfaltigkeit tragen kann.

Beispiel 22.3.3.16 (**Differential einer Verknüpfung beim neutralen Element**). Gegeben eine Liegruppe G mit neutralem Element $e \in G$ und Verknüpfung $m : G \times G \to G$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_{(e,e)}(G \times G) \arrow[r, "\mathrm{d}_{(e,e)}m"] \arrow[d, "\mathrm{can}"', "\wr"] & \mathrm{T}_e G \arrow[d, equal] \\ \mathrm{T}_e G \times \mathrm{T}_e G \arrow[r, "+"] & \mathrm{T}_e G \end{tikzcd}$$

Salopp gesprochen ist also „das Differential der Verknüpfung die Summe“. Um das zu sehen muß man nur bemerken, daß $\mathrm{d}_{(e,e)}m$ linear ist und daß die Inverse der Vertikale links $(A, 0)$ abbildet auf $\mathrm{can}^{-1}(A, 0) = (\mathrm{d}_e(\mathrm{id}, e))(A)$. Nun ist die Verknüpfung

$$G \overset{(\mathrm{id},e)}{\to} G \times G \overset{m}{\to} G$$

die Identität. Daraus folgt $(\mathrm{d}_{(e,e)}m)\,\mathrm{can}^{-1}(A, 0) = A$ durch Übergang zu den Differentialen. Ebenso zeigen wir $(\mathrm{d}_{(e,e)}m)\,\mathrm{can}^{-1}(0, B) = B$ und vermittels der Linearität folgt dann wie behauptet

$$(\mathrm{d}_{(e,e)}m)\,\mathrm{can}^{-1}(A, B) = A + B$$

Beispiel 22.3.3.17 (**Differential des Invertierens**). Das Differential beim neutralen Element der Inversenabbildung auf einer Liegruppe ist die Multiplikation mit (-1), in Formeln

$$(\mathrm{d}_e\,\mathrm{inv})(A) = -A$$

In der Tat ist die Verknüpfung $G \xrightarrow{(\mathrm{id},\mathrm{inv})} G \times G \xrightarrow{m} G$ konstant und ihr Differential folglich Null. Andereseits läßt es sich mit der Kettenregel 22.3.3.3 und unter Verwendung des vorhergehenden Beispiels 22.3.3.16 auch darstellen als die Verknüpfung

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_e G \arrow[r, "\mathrm{d}_e(\mathrm{id},\mathrm{inv})"] \arrow[d, equal] & \mathrm{T}_e(G \times G) \arrow[r, "\mathrm{d}_e m"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & \mathrm{T}_e G \arrow[d, equal] \\ \mathrm{T}_e G \arrow[r, "(\mathrm{id},\mathrm{d}_e\mathrm{inv})"] & \mathrm{T}_e G \times \mathrm{T}_e G \arrow[r, "+"] & \mathrm{T}_e G \end{tikzcd}$$

Aus der Tatsache, daß diese Verknüpfung Null ist, folgt sofort unsere Behauptung.

Satz 22.3.3.18 (**Gruppenwege in Liegruppen**). *Stetige Gruppenhomomorphismen $\gamma : \mathbb{R} \to G$ von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in eine Liegruppe*

G sind notwendig glatt, und ordnen wir jedem stetigen Gruppenhomomorphismus $\gamma : \mathbb{R} \to G$ seine Geschwindigkeit $\gamma'(0)$ bei Null zu, so erhalten wir eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} \{\textit{Stetige Gruppenhomomorphismen } \gamma : \mathbb{R} \to G\} & \tilde{\to} & \mathrm{T}_e G \\ \gamma & \mapsto & \gamma'(0) \end{array}$$

22.3.3.19. Der Beweis des Satzes braucht einige Vorbereitungen, genauer wird er sich als Konsequenz der präziseren Aussage 22.3.6.4 ergeben. Zunächst diskutieren wir nun Tangentialbündel und Vektorfelder sowie deren Flüsse auf Mannigfaltigkeiten. Dann konstruieren wir im Satz die Umkehrabbildung, indem wir jeden Tangentialvektor am neutralen Element unserer Liegruppe durch Verschiebung vermittels der Linksmultiplikation mit Gruppenelementen zu einem glatten Vektorfeld auf der ganzen Gruppe ausdehnen und diejenigen Integralkurven dieser Vektorfelder betrachten, die zum Zeitpunkt Null durchs neutrale Element laufen. Wir werden in diesem Zusammenhang auch sehen, daß stetige Gruppenhomomorphismen zwischen Liegruppen immer glatt sind.

Übungen

Übung 22.3.3.20. Man bestimme für $p \in \mathbb{K}^{n+1} \backslash 0$ den Kern des Differentials bei p der kanonischen Projektion auf den projektiven Raum $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$.

Übung 22.3.3.21. Eine stetige Abbildung $p : X \to Y$ heißt eine **Überlagerung**, wenn es für jeden Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung U gibt und eine Zerlegung $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ ihres Urbilds in paarweise disjunkte offene Teilmengen von X derart, daß p für alle i einen Homöomorphismus $p : V_i \tilde{\to} U$ induziert. Man zeige, daß jeder Homomorphismus von Liegruppen mit bijektivem Differential beim neutralen Element eine Überlagerung ist.

Übung 22.3.3.22. Eine glatte Abbildung von glatten Mannigfaltigkeiten heißt eine **Submersion**, wenn ihr Differential an jeder Stelle surjektiv ist. Man zeige, daß jede surjektive Submersion final ist. Man zeige, daß das Produkt von Submersionen eine Submersion ist.

Übung 22.3.3.23 (**Faserprodukt mit Submersion**). Seien X, Y, Z Mannigfaltigkeiten. Sei $f : X \to Y$ eine Submersion und $g : Z \to Y$ eine glatte Abbildung. Man zeige, daß dann $X \times_Y Z := \{(x, z) \in Y \times Z \mid f(x) = g(z)\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $X \times Z$ ist.

Übung 22.3.3.24. Gegeben Abbildungen $f : Z \to X$ und $g : Z \to Y$ von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und $z \in Z$ haben wir

$$\mathrm{can} \circ \mathrm{d}_z(f, g) = (\mathrm{d}_z f, \mathrm{d}_z g) : \mathrm{T}_z Z \to \mathrm{T}_x X \times \mathrm{T}_y Y$$

Übung 22.3.3.25. Sei G eine Liegruppe. Man bestimme das Differential am neutralen Element der Abbildung $G \to G$, $g \mapsto g^n$ für $n \in \mathbb{Z}$.

22.3.4 Tangentialbündel

Lemma 22.3.4.1 (Das Tangentialbündel als Mannigfaltigkeit). *Gegeben eine glatte n-Mannigfaltigkeit X gibt es auf der disjunkten Vereinigung*

$$\mathrm{T}X = \bigsqcup_{x \in X} \mathrm{T}_x X$$

ihrer Tangentialräume genau eine Struktur als glatte $2n$-Mannigfaltigkeit derart, daß wir für jede Karte $\varphi : W \hookrightarrow X$ von X eine Karte von $\mathrm{T}X$ erhalten, indem wir auf $\hat{W} := W \times \mathbb{R}^n \Subset \mathbb{R}^{2n}$ die Abbildung $\hat{\varphi} : \hat{W} \to \mathrm{T}X$ erklären durch die Vorschrift

$$\hat{\varphi} : \ (p, v) \mapsto (\mathrm{d}_p \varphi)(v) \in \mathrm{T}_p X \subset \mathrm{T}X$$

22.3.4.2. Die so definierte glatte Mannigfaltigkeit $\mathrm{T}X$ wird in der Folge sogar mit der noch feineren Struktur eines „glatten Vektorraumbündels auf X“ versehen. Mit dieser Struktur heißt sie dann das **Tangentialbündel** von X. Ist X eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit für $k \geq 1$, so wird $\mathrm{T}X$ in derselben Weise eine $\mathcal{C}^{k-1}$-Mannigfaltigkeit. Analoges gilt für Eckfaltigkeiten.

Beweis. Nach 22.3.2.24 müssen wir nur zeigen, daß (1) die Finaltopologie in Bezug auf alle unsere $\hat{\varphi}$ Hausdorff ist und daß (2) die zugehörigen Kartenwechsel glatt sind. (1) sei dem Leser überlassen, (2) erkennt man wie folgt: Sind $(W_\lambda, \varphi_\lambda)$ und (W_μ, φ_μ) Karten von X, so ist $\hat{\varphi}_\lambda^{-1}(\hat{\varphi}_\mu(\hat{W}_\mu)) = W_{\lambda\mu} \times \mathbb{R}^n$ offen in $\hat{W}_\lambda$ und die zugehörigen Kartenwechsel lassen sich in den Notationen von 22.3.2.24 mithilfe der Kartenwechsel $\varphi_{\mu\lambda}$ von X beschreiben durch die Vorschrift $\hat{\varphi}_{\mu\lambda} : (p, v) \mapsto (\varphi_{\mu\lambda}(p), (\mathrm{d}_p \varphi_{\mu\lambda})(v))$ und sind in der Tat Morphismen von geringten Räumen. □

Definition 22.3.4.3. Sei X eine glatte Eckfaltigkeit.

1. Ein **glattes Präbündel von reellen Vektorräumen** oder kurz ein **Präbündel** $E = (E, p) = (p : E \to X)$ auf X ist ein Datum bestehend aus einer glatten Eckfaltigkeit E, seinem **Totalraum**, einer glatten Abbildung $p : E \to X$, seiner **Fußpunktprojektion**, sowie einer $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf jeder Faser $E_x := p^{-1}(x)$ der Fußpunktprojektion;

2. Ein **Morphismus** von einem Präbündel (E, p) in ein weiteres (F, q) ist eine glatte Abbildung $h : E \to F$ mit $qh = p$ derart, daß für alle $x \in X$ die auf den Fasern der Fußpunktprojektionen induzierte Abbildung $h : E_x \to F_x$ linear ist;

3. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V heißt der Raum $X \times V$ mit seiner offensichtlichen Struktur als Präbündel das **triviale Bündel auf X mit Faser V**;

4. Ein n**-dimensionales reelles Vektorraumbündel auf** X ist ein Präbündel (E, p), bei dem jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \Subset X$ besitzt derart, daß das davon auf U induzierte Präbündel $(p : p^{-1}(U) \to U)$ isomorph ist zum trivialen $\mathbb{R}$-Bündel $U \times \mathbb{R}^n$ auf U. Ein solcher Isomorphismus oder etwas allgemeiner auch ein Isomorphismus mit einem Bündel der Gestalt $U \times V$ für einen beliebigen n-dimensionalen reellen Vektorraum V heißt dann eine **Bündelkarte**.

Eine Abbildung $U \times V \to E$, die in obigem Sinne eine Bündelkarte auf ihr Bild liefert, nennen wir kurzerhand auch eine Bündelkarte. Statt von reellen glatten Vektorraumbündeln reden wir oft kürzer von **Vektorraumbündeln** oder **Vektorbündeln** oder ganz kurz **Bündeln** und machen deren Dimension nicht notwendig explizit.

Beispiel 22.3.4.4 (**Das Tangentialbündel**). Unser Tangentialbündel besitzt offensichtlich genau eine Struktur als glattes Vektorbündel derart, daß wir für jede Karte $\varphi : W \hookrightarrow X$ mit $\hat{\varphi}$ wie in 22.3.4.1 eine Bündelkarte erhalten durch das Bilden der Komposition

$$\varphi(W) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi^{-1} \times \mathrm{id}} W \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\hat{\varphi}} \mathrm{T}X$$

Ergänzung 22.3.4.5 (**Kategorielle Charakterisierung des Tangentialbündels**). Wie für den Tangentialraum gibt es auch für das Tangentialbündel alternative Konstruktionen. Ich will im folgenden analog zu 22.3.3.3 in der Sprache der Kategorientheorie formulieren, worauf es wirklich ankommt. Zunächst einmal definieren wir dazu eine Kategorie

$$\mathrm{Vekb}$$

von „Vektorbündeln auf Mannigfaltigkeiten“. Objekte sind Paare (X, E) mit X einer glatten Mannigfaltigkeit und E einem endlichdimensionalen glatten reellen Vektorbündel auf X, Morphismen $(X, E) \to (Y, F)$ sind Paare $(g, \tilde{g})$ mit $g : X \to Y$ glatt und $\tilde{g} : E \to F$ einer glatten Abbildung, mit $\pi_F \circ \tilde{g} = g \circ \pi_E$, die lineare Abbildungen $\tilde{g} : E_x \to F_{g(x)}$ zwischen den Fasern der Bündelprojektionen induziert. Das Vergessen des Bündels liefert einen Funktor

$$B : \mathrm{Vekb} \to \mathrm{Mgf}$$

in die Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten. Weiter erklären wir die Kategorie $\mathcal{C}^\infty\text{-Aff}^{\circledcirc}$ aller offenen Teilmengen von endlichdimensionalen reellen affinen Räumen mit glatten Abbildungen als Morphismen und erklären den **Differentialfunktor**

$$\mathrm{Diff} : \mathcal{C}^\infty\text{-Aff}^{\circledcirc} \to \mathrm{Vekb}$$

dadurch, daß er jeder offenen Teilmenge $U \Subset X$ das Vektorbündel $U \times \vec{X}$ auf U zuordnet und jeder glatten Abbildung $\varphi : U \to V$ mit $V \Subset Y$ den Morphismus

$$\begin{array}{ccc} U \times \vec{X} & \to & V \times \vec{Y} \\ (x, \vec{v}) & \mapsto & (\varphi(x), \mathrm{d}_x(\vec{v})) \end{array}$$

Unter einem **Tangentialbündelfunktor** verstehen wir nun ein Paar (T, τ) bestehend aus einem Funktor $\mathrm{T} : \mathrm{Mgf} \to \mathrm{Vekb}$ mit $B \circ \mathrm{T} = \mathrm{id}$, der offene Einbettungen zu offenen Einbettungen macht, und einer Isotransformation

$$\tau : \mathrm{T}j \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Diff}$$

zwischen der Restriktion unseres Funktors unter $j : \mathcal{C}^\infty\text{-}\mathrm{Aff}^{\circledcirc} \to \mathrm{Mgf}$ und unserem Differentialfunktor. Solch ein Paar ist wieder im wesentlichen eindeutig bestimmt in derselben Weise, wie wir das für den Tangentialraumfunktor in 22.3.3.3 ausformuliert hatten. Die vorhergehenden Teile dieses Abschnitts haben in diesem Licht betrachtet im wesentlichen den Inhalt, ein mögliches Paar (T, τ) explizit anzugeben.

Definition 22.3.4.6. Gegeben eine Abbildung $p : Y \to X$ von Mengen versteht man unter einem **Schnitt** von p eine Abbildung $s : X \to Y$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_X$. Ein glatter Schnitt eines glatten Vektorbündels $p : E \to X$ ist insbesondere eine glatte Abbildung $s : X \to E$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_X$. Wir notieren die Menge aller derartigen glatten Schnitte

$$\mathcal{C}^\infty_X(X, E)$$

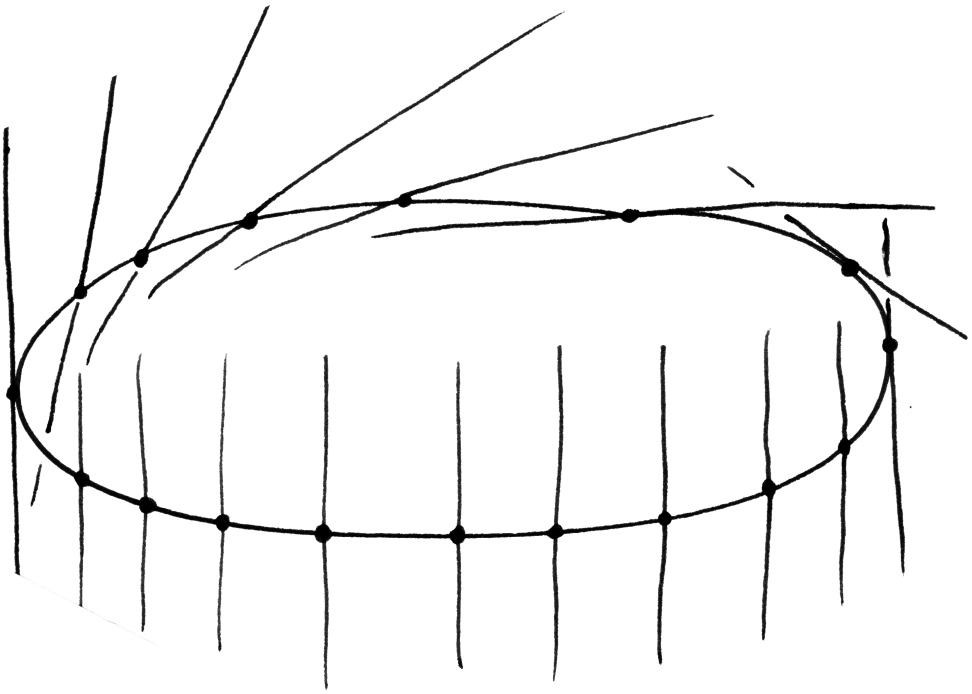
Ein Schnitt des Tangentialbündels einer Mannigfaltigkeit heißt ein **Vektorfeld** auf besagter Mannigfaltigkeit.

Beispiel 22.3.4.7. Gegeben ein glattes Vektorraumbündel $E \to X$ erhalten wir stets eine glatten Schnitt in Gestalt des **Nullschnitts**, der jedem Punkt $x \in X$ die Null $0 \in E_x$ in der Faser über x zuordnet. Mithilfe von 22.3.4.13 identifiziert man die Vektorfelder auf offenen Teilmengen affiner Räume im Sinne von 12.7.1.1 mit den Vektorfeldern im hier erklärten Sinn.

22.3.4.8 (**Nichttriviale Vektorbündel**). Ein Vektorraumbündel muß keineswegs global, als da heißt als Bündel auf ganz X, isomorph sein zu einem trivialen Bündel, es kann vielmehr „verdrillt“ sein: Man stelle sich etwa auf der Kreislinie S^1 das „möbiusbandartige“ Geradenbündel vor, dessen Totalraum man erhält als den Bahnenraum $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ für die Operation von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}^2$ vermittels der Vorschrift

$$n * (x, y) = (x + n, (-1)^n y)$$

Auch Tangentialbündel werden im allgemeinen „verdrillt“ sein. So besagt etwa der Satz von Igel 16.1.4.4, daß es auf der Kugelschale S^2 kein stetiges Vektorfeld



Versuch der graphischen Darstellung eines „möbiusbandartig verdrehten“ Geradenbündels auf der Kreislinie. Das entsprechend „doppelt verdrehte“ Geradenbündel wäre übrigends isomorph zum trivialen Bündel.

ohne Nullstelle gibt. Das scheint mir auch anschaulich zumindest einleuchtend und impliziert insbesondere, daß das Tangentialbündel $\mathrm{T}S^2$ an die Kugelschale nicht isomorph sein kann zum trivialen Bündel $S^2 \times \mathbb{R}^2$. Ist das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit isomorph zum trivialen Bündel der entsprechenden Dimension, gilt also in Formeln $\mathrm{T}X \cong X \times \mathbb{R}^d$ mit $d = \dim X$, so heißt unsere Mannigfaltigkeit **parallelisierbar**.

Satz 22.3.4.9 (**Parallelisierung des Tangentialbündels von Liegruppen**). *Für jede Liegruppe G liefert das Verschieben von Tangentialvektoren am neutralen Element mit Linksmultiplikationen einen Isomorphismus von Vektorraumbündeln*

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathrm{T}_e G & \tilde{\to} & \mathrm{T}G \\ (g\ ,\ B) & \mapsto & (\mathrm{d}_e(g\cdot))(B) \end{array}$$

Analoges gilt für das Verschieben mit Rechtsmultiplikationen.

22.3.4.10. Insbesondere ist also jede Liegruppe parallelisierbar und damit auch die dreidimensionale Sphäre $S^3 \cong \mathrm{SU}(2)$. Außer S^0, S^1, S^3 gibt es nebenbei bemerkt nur noch eine einzige weitere parallelisierbare Sphäre, nämlich die S^7. Deren Parallelisierbakeit hängt eng mit der Existenz der sogenannten „Oktaven“ zusammen, einer reell achtdimensionalen sogenannten „Kompositionsalgebra“, vergleiche 6.3.12.4.

Beweis. Unsere Abbildung aus dem Satz ist glatt als Einschränkung der Verknüpfung $\mathrm{T}G \times \mathrm{T}G \tilde{\to} \mathrm{T}(G \times G) \to \mathrm{T}G$ der kanonischen Identifikation mit dem Differential der Multiplikation unserer Gruppe. In der Tat bildet die erste dieser Abbildungen nach 22.3.3.6 ja $(0, B) \in \mathrm{T}_g G \times \mathrm{T}_e G$ ab auf $\mathrm{d}_e(g, \mathrm{id})(B)$, und unter $\mathrm{d}m$ wird das weiter abbgebildet auf $(\mathrm{d}_{(g,e)} m \circ \mathrm{d}_e(g, \mathrm{id}))(B)$. Wegen $m \circ (g, \mathrm{id}) = (g\cdot)$ ist das aber nichts anderes als $\mathrm{d}_e(g\cdot)(B)$. Bezeichnet $\pi : \mathrm{T}G \to G$ die Fußpunktprojektion unseres Bündels, so erhalten wir ähnlich eine inverse Abbildung, indem wir die Komposition

$$\mathrm{T}G \xrightarrow{(\pi,\mathrm{id})} G \times \mathrm{T}G \hookrightarrow \mathrm{T}G \times \mathrm{T}G \to \mathrm{T}(G \times G) \xrightarrow{\mathrm{d}\varphi} \mathrm{T}G$$

betrachten mit $\varphi : G \times G \to G, (g, h) \mapsto g^{-1}h$. Unter ihr geht nämlich $A \in \mathrm{T}_g G$ auf $(\mathrm{d}_g(g^{-1}\cdot))(A) \in \mathrm{T}_e G$. $\square$

Übungen

Übung 22.3.4.11. Für jede glatte Abbildung $\phi : X \to Y$ von glatten Mannigfaltigkeiten liefern die Differentiale eine glatte Abbildung

$$\mathrm{d}\phi : \mathrm{T}X \to \mathrm{T}Y$$

Ist ϕ eine Einbettung im Sinne von 22.3.1.16, so auch $\mathrm{d}\phi$.

Übung 22.3.4.12 (**Tangentialbündel eines Produkts**). Gegeben glatte Mannigfaltigkeiten X, Y liefern die Differentiale der Projektionen des Produkts $X \times Y$ auf die Faktoren einen Diffeomorphismus $\mathrm{T}(X \times Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}X \times \mathrm{T}Y$.

Übung 22.3.4.13 (**Tangentialbündel eines affinen Raums**). Gegeben E ein endlichdimensionaler reller Raum und $X \Subset E$ eine offene Teilmenge erhalten wir einen Diffeomorphismus

$$\mathrm{can} : X \times \vec{E} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}X$$

durch die Vorschrift, daß jedem Paar (x, v) dasjenige Element von $\mathrm{T}_x X$ zugeordnet wird, das durch die Richtungsableitung bei x in Richtung v gegeben wird, also durch $f \mapsto (\mathrm{D}_v f)(x)$ für alle Funktionskeime $f \in \mathcal{O}_{X,x}$. Ist F ein weiterer endlichdimensionaler reller Raum und $Y \Subset F$ eine offene Teilmenge und $\phi : X \to Y$ glatt, so kommutiert mit den eben erklärten kanonischen Isomorphismen in den Vertikalen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}X \arrow[r, "\mathrm{d}\phi"] \arrow[d] & \mathrm{T}Y \arrow[d] \\ X \times \vec{E} \arrow[r] & Y \times \vec{F} \end{tikzcd}$$

mit der durch $(p, v) \mapsto (\phi(p), (\mathrm{d}_p\phi)(v))$ gegebenen unteren Horizontalen. Dabei verwenden wir sowohl das Differential $\mathrm{d}_p\psi : \vec{E} \to \vec{F}$ im Sinne der Analysis 12.1.3.1 für $\psi : U \to V$ eine Abbildung von offenen Teilmengen reeller Räume $U \Subset E$ und $V \Subset F$, als auch das Differential $\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \to \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$ nach 22.3.3.3.

Übung 22.3.4.14 (**Tangentialbündel eingebetteter Mannigfaltigkeiten**). Ist E ein endlichdimensionaler reeller Raum und $X \subset E$ eine Untermannigfaltigkeit und bezeichnet $\mathrm{T}^{\subset} X \subset X \times \vec{E}$ das Tangentialbündel, wie es speziell für Untermannigfaltigkeiten in 12.6.5.2 erklärt wurde, so liefern unsere Identifikationen $\mathrm{T}^{\subset}_x X \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_x X$ aus **??** auch einen Diffeomorphismus

$$\mathrm{T}^{\subset} X \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}X$$

mit dem hier in voller Allgemeinheit für abstrakte Mannigfaltigkeiten erklärten Tangentialbündel $\mathrm{T}X$.

Übung 22.3.4.15. Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi : U \to \mathrm{End}(V)$ eine glatte Abbildung derart, daß der Rang von $\varphi(x)$ unabhängig ist von $x \in U$. Man zeige, daß $\bigcup_{x \in U} \{x\} \times \ker \varphi(x)$ eine Untermannigfaltigkeit von $U \times V$ ist.

Übung 22.3.4.16. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit und $p : E \to X$ eine Abbildung. Sei weiter eine Familie von Tripeln $(V_\alpha, U_\alpha, \varphi_\alpha)$ gegeben mit V_α einem n-dimensionalen reellen Vektorraum, $U_\alpha \Subset X$ einer offenen

Teilmenge und $\varphi_\alpha : U_\alpha \times V_\alpha \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U_\alpha)$ einer Bijektion, die mit den offensichtlichen Projektionen beider Seiten auf U_α verträglich ist. Nehmen wir zusätzlich an, daß (1) für alle α, β die Verknüpfung

$$\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha : (U_\alpha \cap U_\beta) \times V_\alpha \xrightarrow{\sim} (U_\alpha \cap U_\beta) \times V_\beta$$

ein Isomorphismus von Vektorbündeln ist und daß (2) die U_α unsere Mannigfaltigkeit X überdecken, so gibt es auf (E, p) genau eine Struktur als Vektorbündel, für die alle unsere φ_α Bündelkarten sind.

22.3.5 Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten

22.3.5.1. Ein Vektorfeld A auf einer glatten Mannigfaltigkeit X hatten wir bereits in 22.3.4.6 erklärt als einen Schnitt des Tangentialbündels. In Formeln ist ein Vektorfeld also eine Abbildung $A : X \to \mathrm{T}X$ mit $\pi \circ A = \mathrm{id}_X$ für $\pi : \mathrm{T}X \to X$ die Fußpunktprojektion. Meist betrachten wir **glatte Vektorfelder**, für die also A eine glatte Abbildung ist. Wir schreiben oft A_x für den Wert des Vektorfelds A an der Stelle $x \in X$, so daß stets gilt $A_x \in \mathrm{T}_x X$.

Definition 22.3.5.2. Gegeben ein Vektorfeld A auf einer Mannigfaltigkeit X und eine glatte Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ erklären wir eine weitere Funktion $(Af) : X \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$(Af)(x) := A_x(f_x)$$

Hier meint $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ den Funktionskeim von f an der Stelle $x \in X$. Wir sagen dann, die Funktion Af entstehe durch **Ableiten der Funktion f in Richtung des Vektorfelds** A. Des weiteren können wir auch das Vektorfeld fA bilden, das durch Multiplikation des Vektorfelds A mit der Funktion f entsteht.

Definition 22.3.5.3. Gegeben eine glatte Abbildung $\phi : X \to Y$ von Mannigfaltigkeiten und Vektorfelder A auf X und B auf Y sagen wir, unsere Vektorfelder seien **ϕ-verwandt** und schreiben

$$\phi : A \rightsquigarrow B$$

wenn $(\mathrm{d}_x\phi)(A_x) = B_{\phi(x)}\ \forall x \in X$. Ebenso sagen wir, Funktionen $g : X \to \mathbb{R}$ und $f : Y \to \mathbb{R}$ seien **ϕ-verwandt** und schreiben auch schon mal $\phi : g \rightsquigarrow f$ wenn gilt $g = f \circ \phi$. In diagrammatischer Schreibweise ist die Verwandtschaft $\phi : A \rightsquigarrow B$ von Vektorfeldern gleichbedeutend zur Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "A"'] & Y \arrow[d, "B"] \\ \mathrm{T}X \arrow[r, "\mathrm{d}\phi"] & \mathrm{T}Y \end{tikzcd}$$

22.3.5.4 (**Anwenden verwandter Vektorfelder auf verwandte Funktionen**). Verwandte glatte Funktionen haben in Bezug auf verwandte Vektorfelder verwandte Ableitungen. Ist also in Formeln $\phi : X \to Y$ glatt und gilt $\phi : A \rightsquigarrow B$ für Vektorfelder und $\phi : g \rightsquigarrow f$ für Funktionen, so folgt $\phi : Ag \rightsquigarrow Bf$. Anders formuliert gilt für jede glatte Funktion $f : Y \to \mathbb{R}$ die Identität

$$A(f \circ \phi) = (Bf) \circ \phi$$

Ebenso haben wir unter denselben Vorausetzungen auch die Verwandtschaft von Vektorfeldern $\phi : gA \rightsquigarrow fB$.

22.3.5.5 (**Vektorfelder in Koordinaten**). Will man ein Vektorfeld A auf einer Mannigfaltigkeit X explizit angeben, so wird man einen Atlas wählen und für jede Karte $\varphi_\lambda : W_\lambda \to X$ dasjenige Vektorfeld $\sum_{i=1}^d a_i \partial_i$ auf $W_\lambda \Subset \mathbb{R}^d$ hinschreiben, das φ_λ-verwandt ist zu A. Hier sind die a_i dann Funktionen $a_i : W_\lambda \to \mathbb{R}$. Sind umgekehrt Vektorfelder auf den Definitionsbereichen der Karten eines Atlas gegeben, so kommen sie in dieser Weise von einem Vektorfeld auf unserer Mannigfaltigkeit her genau dann, wenn für je zwei Karten ihre entsprechenden Einschränkungen unter dem Kartenwechsel verwandt sind.

Beispiel 22.3.5.6 (**Vektorfelder auf der Kreislinie**). Die Kreislinie $S^1 = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\|_2 = 1\}$ kann überdeckt werden durch die beiden Karten $\varphi_\pm : \mathbb{R} \to S^1$, deren Inverse man durch stereographische Projektion 10.3.2.29 von den Polen $(0, \pm 1)$ erklärt. Nach 10.5.8.20 werden sie gegeben durch

$$\varphi_\pm(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}, \pm \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$$

Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir die Koordinaten zur Karte φ_+ nun u. Als Kartenwechsel ergibt sich mit direkter Rechnung oder allgemeinen Erkenntnissen zu Möbiustransformationen 5.2.5.10 und 5.2.5.9 das Invertieren

$$\varphi_{+-} : x \mapsto u^{-1}$$

Ein Vektorfeld auf der Kreislinie anzugeben bedeutet damit, Funktionen $a_-(x)$ und $a_+(u)$ auf ganz $\mathbb{R}$ hinzuschreiben, für die gilt $\varphi_{+-} : a_-(x)\partial_x \rightsquigarrow a_+(u)\partial_u$. Erinnern wir 12.7.2.21, so läuft das hinaus auf die Identität

$$a_-(u^{-1})(-u^2)\partial_u = a_+(u)\partial_u$$

alias $a_+(u) = -u^2 a_-(u^{-1})$ für alle $u \in \mathbb{R}\backslash 0$. Ein stetiges Vektorfeld auf der Kreislinie anzugeben meint also, eine stetige Funktion $a_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hinzuschreiben mit der Eigenschaft, daß $-u^2 a_-(u^{-1})$ einen Grenzwert hat für $u \to 0$, daß also vage gesprochen a_- nicht gar zu schlimm wächst für $u \to \infty$.

Beispiel 22.3.5.7 (**Vektorfelder auf der Kugelschale**). Zur Abschreckung hier auch noch das Beispiel der Kugelschale oder Sphäre $S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\|_2 = 1\}$. Sie kann überdeckt werden durch die beiden Karten $\varphi_\pm : \mathbb{R}^2 \to S^2$, deren Inverse man durch stereographische Projektion 10.3.2.29 von den Polen $(0, 0, \pm 1)$ erklärt. Nach 10.5.8.20 werden sie gegeben durch

$$\varphi_\pm(x, y) = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \pm \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

Als Kartenwechsel ergibt sich mit direkter Rechnung oder allgemeinen Erkenntnissen zu Möbiustransformationen 5.2.5.10 und 5.2.5.9 die Inversion am Einheitskreis

$$\varphi_{+-} : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{-1}(x, y)$$

Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir die Koordinaten zur Karte φ_+ nun (u, v). Ein Vektorfeld auf der Sphäre anzugeben bedeutet in diesen Koordinaten also, Funktionen $e(u, v)$, $f(u, v)$ auf $\mathbb{R}^2$ hinzuschreiben, für die gilt φ_{+-} : $a(x, y)\partial_x + b(x, y)\partial_y \rightsquigarrow e(u, v)\partial_u + f(u, v)\partial_v$. Erinnern wir schließlich 12.7.2.21, so läuft das hinaus auf die Identität

$$\begin{aligned} &a(u/(u^2 + v^2), v/(u^2 + v^2))((v^2 - u^2)\partial_u - 2uv\partial_v) \\ &+b(u/(u^2 + v^2), v/(u^2 + v^2))((u^2 - v^2)\partial_v - 2uv\partial_u) = e(u, v)\partial_u + f(u, v)\partial_v \end{aligned}$$

alias mit der Abkürzung $r^2 = u^2 + v^2$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} e(u, v) &= (v^2 - u^2)a(u/r^2, v/r^2) - 2uvb(u/r^2, v/r^2) \\ f(u, v) &= (u^2 - v^2)b(u/r^2, v/r^2) - 2uva(u/r^2, v/r^2) \end{aligned}$$

für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$. Ein stetiges Vektorfeld auf der Sphäre anzugeben meint also, stetige Funktionen $a, b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so hinzuschreiben, daß die rechte Seite der Ausdrücke in den beiden vorhergehenden Gleichungen jeweils einen Grenzwert hat für $(u, v) \to (0, 0)$.

Definition 22.3.5.8. Ein Vektorfeld auf einer Liegruppe heißt **linksinvariant**, wenn es unter allen Linksmultiplikationen zu sich selbst verwandt ist. Analog erklärt man **rechtsinvariante** Vektorfelder. Ist G unsere Liegruppe, so ist also in Formeln ein Vektorfeld $A : G \to \mathrm{T}G$ linksinvariant genau dann, wenn gilt $(g\cdot) : A \rightsquigarrow A$ für alle $g \in G$, und rechtsinvariant genau dann, wenn gilt $(\cdot g) : A \rightsquigarrow A$ für alle $g \in G$.

Beispiel 22.3.5.9. Die linksinvarianten Vektorfelder auf der additiven Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums V sind genau diejenigen Vektorfelder, die wir in unserer ursprünglichen Begrifflichkeit konstant genannt hätten,

die also konstanten Abbildungen $V \to V$ entsprechen. Ein Vektorfeld auf der Liegruppe $\mathbb{C}^\times$ ist linksinvariant genau dann, wenn es anschaulich betrachtet invariant ist unter allen Drehstreckungen der komplexen Zahlenebene. Die linksinvarianten Vektorfelder auf $\mathbb{R}^\times$ sind genau die Vektorfelder $cx\partial_x$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Satz 22.3.5.10 (Invariante Vektorfelder auf Liegruppen). *Alle linksinvarianten Vektorfelder auf einer Liegruppe G sind glatt und das Auswerten beim neutralen Element liefert eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{linksinvariante Vektorfelder} \\ G \to \mathrm{T}G \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_e G$$

Dasselbe gilt analog auch für rechtsinvariante Vektorfelder.

22.3.5.11. Wir vereinbaren die Notation $X \mapsto \grave{X}$ für die Fortsetzung von $X \in \mathrm{T}_e G$ zu einem linksinvarianten Vektorfeld.

Beweis. Wir geben die inverse Abbildung explizit an, indem wir zu $A_e \in \mathrm{T}_e G$ das Vektorfeld $A : G \to \mathrm{T}G$ bilden, das jedem $g \in G$ den Wert des Differentials an die Multiplikation $\mathrm{T}G \times \mathrm{T}G \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}(G \times G) \to \mathrm{T}G$ auf (g, A_e) zuordnet. □

Übungen

Übung 22.3.5.12. Für welche Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ ist $f\partial_x + g\partial_y$ ein linksinvariantes Vektorfeld auf $\mathbb{C}^\times$, wo x den Realteil und y den Imaginärteil einer komplexen Zahl bedeuten mögen?

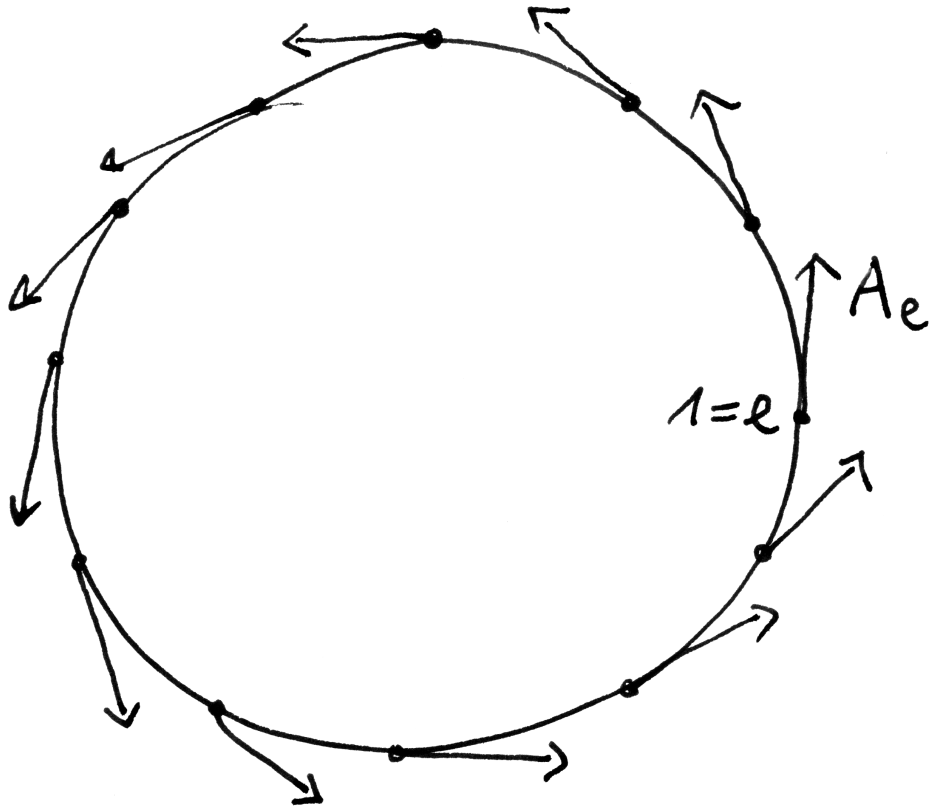
Übung 22.3.5.13. Für welche Funktionen $f(a, b)$ und $g(a, b)$ ist $f\partial_a + g\partial_b$ ein linksinvariantes Vektorfeld auf der Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit zwei Zeilen und Spalten und Determinante Eins, wo a und b die beiden Einträge der ersten Zeile bedeuten mögen?

22.3.6 Flußwege und Flüsse

Definition 22.3.6.1. Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit und $A : X \to \mathrm{T}X$ ein Vektorfeld. Ein **Flußweg** unseres Vektorfelds ist eine differenzierbare Abbildung $\gamma : I \to X$ von einem mehrpunktigen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach X mit

$$\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) \quad \forall t \in I$$

Ein **maximaler Flußweg** ist ein Flußweg, die nicht zu einem auf einem echt größeren reellen Intervall definierten Flußweg erweitert werden kann. Ist $p \in X$ gegeben, so verstehen wir unter einem **Flußweg mit Anfangswert** p oder kurz einem **Flußweg zu** p einen Flußweg (γ, I) mit $0 \in I$ und $\gamma(0) = p$.



Ein linksinvariantes Vektorfeld auf der Kreislinie. Alle Pfeile sind gleich lang gemeint. Da die Kreislinie eine kommutative Liegruppe ist, stimmen hier links- und rechtsinvariante Vektorfelder überein.

Satz 22.3.6.2 (Picard-Lindelöf auf Mannigfaltigkeiten). *Gegeben ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit gibt es zu jedem Anfangswert einen größte Flußweg, und dieser hat als Definitionsbereich ein offenes Intervall. Verläuft unser größter Flußweg in einem Kompaktum, so ist sein Definitionsbereich die ganze Zahlengerade.*

Ergänzung 22.3.6.3. Die weitergehenden Aussagen von 12.5.4.9 übertragen sich entsprechend, aber die Übertragung ihres Beweises benötigt Hilfsmittel, die uns hier noch nicht zur Verfügung stehen.

Beweis. Das folgt ohne Schwierigkeiten in derselben Weise wie bei der Herleitung des Satzes über die globale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen 12.5.4.9 aus der lokalen Existenz und Eindeutigkeit 12.5.4.4, wenn man beachtet, daß jeder Punkt unserer Mannigfaltigkeit ja im Bild einer Karte liegt. Beim Nachweis der Eindeutigkeit eines maximalen Flußwegs mit vorgegebenem Anfangswert benötigen wir im Übrigen zum ersten Mal die Hausdorff-Eigenschaft unserer Mannigfaltigkeiten, und zwar an der Stelle, an der wir bemerken, daß die Menge der Parameter, an denen zwei vorgegebene Flußwege mit demselben Definitionsbereich übereinstimmen, abgeschlossen ist in dem fraglichen Definitionsbereich. □

Satz 22.3.6.4 (Flußwege linksinvarianter Vektorfelder). *Gegeben eine Liegruppe G und darauf ein linksinvariantes Vektorfeld A ist der maximale Flußweg $\gamma = \gamma_A$ unseres Vektorfelds mit Anfangswert $\gamma(0) = e$ für alle Zeiten definiert und kann charakterisiert werden als der eindeutig bestimmte glatte Gruppenhomomorphismus $\gamma : \mathbb{R} \to G$ mit $\dot\gamma(0) = A_e$.*

22.3.6.5. Dieser Satz liefert die in 22.3.3.18 behauptete Klassifikation der glatten Gruppenwege in einer Liegruppe.

Beweis. Mit γ ist auch $t \mapsto g\gamma(t)$ ein Flußweg unseres linksinvarianten Vektorfelds A, für alle $g \in G$. Ebenso sind auch alle „zeitverschobenen“ Flußwege wieder Flußwege, das gilt ja bei jedem zeitunabhängigen Vektorfeld. Wäre nun $\gamma : (a, b) \to G$ der maximale Flußweg mit Anfangswert $\gamma(0) = e$ und wäre etwa $b \neq \infty$, so wäre $t \mapsto \gamma(b/2)\gamma(t - b/2)$ ebenfalls ein Flußweg, der auf $(a + b/2, b + b/2)$ definiert wäre und auf dem gemeinsamen Definitionsbereich mit γ übereinstimmte. Also könnte γ doch nicht maximal gewesen sein, und dieser Widerspruch zeigt, daß die maximalen Flußwege linksinvarianter Vektorfelder für alle Zeiten definiert sein müssen. Dasselbe Argument zeigt dann $\gamma(t) = \gamma(s)\gamma(t-s)$ für alle reellen s, t und damit sind unsere maximalen Flußwege Gruppenhomomorphismen. Umgekehrt gilt für jeden glatten Gruppenhomomorphismus $\gamma : \mathbb{R} \to G$ die Identität $\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$ und damit $\dot\gamma(t) = \mathrm{d}_e(\gamma(t)\cdot)\dot\gamma(0)$,

was ja gerade bedeutet, daß γ ein Flußweg des linksinvarianten Vektorfelds A ist, der den Ursprung mit der Geschwindigkeit $\dot{\gamma}(0) = A_e$ durchläuft. $\square$

Definition 22.3.6.6. Wir definieren für jede Liegruppe G ihre **Exponentialabbildung** $\exp : \mathrm{T}_e G \to G$ durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rccc} \exp : & \mathrm{T}_e G & \to & G \\ & A & \mapsto & \gamma_A(1) \end{array}$$

für $\gamma_A : \mathbb{R} \to G$ den glatten Gruppenweg mit $\dot{\gamma}_A(0) = A$.

22.3.6.7. Das s-fache eines Vektorfelds hat offensichtlich als Flußwege die mit s-facher Geschwindigkeit durchlaufenen Flußwege des ursprünglichen Vektorfelds. In Formeln gilt für alle $s \in \mathbb{R}$ also $\gamma_{sA}(t) = \gamma_A(st)$ und damit $\exp(sA) = \gamma_A(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$, $A \in \mathrm{T}_e G$.

Satz 22.3.6.8 (Eigenschaften der Exponentialabbildung für Liegruppen). *Für jede Liegruppe G ist die Exponentialabbildung $\exp : \mathrm{T}_e G \to G$ glatt und ihr Differential am Ursprung entspricht unter den üblichen Identifikationen der Identität auf $\mathrm{T}_e G$.*

22.3.6.9. Ganz präzise formuliert behauptet also unser Satz, daß die Komposition $\mathrm{T}_e G \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_0(\mathrm{T}_e G) \to \mathrm{T}_e G$ der kanonischen Abbildung aus **??** mit $\mathrm{d}_0(\exp)$ die Identität ist. Der Beweis braucht einige Vorbereitungen und wird im Anschluß an 22.3.6.13 gegeben.

22.3.6.10. Da das Differential der Exponentialabbildung bei Null bijektiv ist, liefert $\exp : \mathrm{T}_e G \to G$ einen Diffeomorphismus zwischen einer offenen Umgebung der Null im Tangentialraum $\mathrm{T}_e G$ und einer offenen Umgebung des neutralen Elements e in unserer Gruppe G.

22.3.6.11. Mit 22.1.4.5 folgt, daß die hier definierte Exponentialabbildung im Fall von Matrixliegruppen unter den entsprechenden Identifikationen mit der Exponentialabbildung für Matrizen zusammenfällt.

Definition 22.3.6.12. Ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit X besitzt nach 22.3.6.2 zu jedem Anfangswert $q \in X$ einen größten Flußweg $\gamma_q : I_q \to X$. Wir erklären seinen **Fluß** als die Abbildung

$$\Phi : (t, q) \mapsto \gamma_q(t)$$

von der Menge $\tilde{X} = \{(t, q) \in \mathbb{R} \times X \mid t \in I_q\}$, dem sogenannten **Definitionsbereich des Flusses**, in unsere Mannigfaltigkeit.

Satz 22.3.6.13 (Flüsse von Vektorfeldern auf Mannigfaltigkeiten). *Gegeben ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit hat sein Fluß einen offenen Definitionsbereich und ist ebenfalls glatt.*

Beweis. Das folgt ohne Schwierigkeiten aus dem in 12.5.6.2 behandelten Fall, daß unsere glatte Mannigfaltigkeit eine offene Teilmenge eines reellen affinen Raums ist. □

Beweis von Satz 22.3.6.8 zu Eigenschaften der Exponentialabbildung. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{R} \times \mathrm{T}_e G \to G$ gegeben durch $(t, A) \mapsto \gamma_A(t)$ und zeigen, daß sie glatt ist. Dazu reicht es sicher zu zeigen, daß die Abbildung $\mathbb{R} \times G \times \mathrm{T}_e G \to G \times \mathrm{T}_e G$ gegeben durch $(t, g, A) \mapsto (g\gamma_A(t), A)$ glatt ist. Diese Abbildung ist jedoch glatt als der Fluß eines glatten Vektorfelds auf $X = G \times \mathrm{T}_e G$, nämlich des Vektorfelds $(g, A) \mapsto (\mathrm{d}_e(g\cdot)A, 0)$, wobei rechts die Null von $\mathrm{T}_A(\mathrm{T}_e G)$ gemeint ist und wir genau genommen eigentlich die Verknüpfung unseres Vektorfelds mit den kanonischen Identifikationen $\mathrm{T}_{(g,A)}X \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_g G \times \mathrm{T}_A(\mathrm{T}_e G)$ beschrieben haben. Damit wissen wir schon mal, daß unsere Exponentialabbildung glatt ist. Ihr Differential beim Ursprung von $\mathrm{T}_e G$ muß bis auf die üblichen Identifikationen die Identität sein, da ja für alle $A \in \mathrm{T}_e G$ der Weg $t \mapsto tA$ in $\mathrm{T}_e G$ mit Geschwindigkeitsvektor A bei $t = 0$ unter $\exp$ zum Weg $t \mapsto \exp(tA) = \gamma_A(t)$ wird, der per definitionem auch den Geschwindigkeitsvektor A bei $t = 0$ hat. □

Satz 22.3.6.14 (Homomorphismen von Liegruppen). *Jeder stetige Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von Liegruppen ist glatt und für sein Differential $\mathrm{d}\varphi$ beim neutralen Element gilt $\exp \circ \mathrm{d}\varphi = \varphi \circ \exp$.*

22.3.6.15. Etwas ausführlicher geschrieben behauptet die Formel aus dem Satz ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_e G \arrow[r, "\mathrm{d}\varphi"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathrm{T}_e H \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & H \end{tikzcd}$$

Beweis. Das wurde im Fall von Matrixliegruppen bereits in 22.1.4.10 gezeigt. Der Beweis im allgemeinen ist derselbe. □

Korollar 22.3.6.16. *Auf einer topologischen Gruppe gibt es höchstens eine Struktur als glatte Mannigfaltigkeit, die sie zu einer Liegruppe macht.*

Beweis. Gegeben zwei derartige Strukturen ist die Identität nach 22.3.6.14 ein Diffeomorphismus zwischen unserer Gruppe mit der einen Struktur und unserer Gruppe mit der anderen Struktur. □

Korollar 22.3.6.17. *Ein stetiger Gruppenhomomorphismus von einer zusammenhängenden Liegruppe in eine weitere Liegruppe wird bereits durch sein Differential beim neutralen Element eindeutig festgelegt.*

Beweis. Nach 22.3.6.14 und 22.3.6.8 wird unser Gruppenhomomorphismus durch sein Differential zumindest in einer Umgebung des neutralen Elements eindeutig festgelegt. Eine zusammenhängende Liegruppe wird aber nach 15.2.1.10 bereits von jeder Umgebung ihres neutralen Elements erzeugt. □

Übungen

Übung 22.3.6.18. Verwandte Vektorfelder haben verwandte Flußwege. Ist genauer $\phi : X \to Y$ eine glatte Abbildung glatter Mannigfaltigkeiten und ist A ein Vektorfeld auf X und B ein dazu unter ϕ verwandtes Vektorfeld auf Y, so ist für jeden Flußweg γ von A auch $\phi \circ \gamma$ ein Flußweg von B.

Übung 22.3.6.19. Man beschreibe die Exponentialabbildung der Liegruppe $(\mathbb{R}, +)$. Man beschreibe die Exponentialabbildung für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum, aufgefaßt als Liegruppe.

Übung 22.3.6.20. In jeder Liegruppe gibt es eine Umgebung des neutralen Elements, die keine Untergruppe außer der einpunktigen Untergruppe umfaßt.

Übung 22.3.6.21. Zwei abgeschlossene zusammenhängende Untergruppen einer Liegruppe, die dieselbe Liealgebra haben, stimmen überein.

Übung 22.3.6.22 (**Fluß eines linksinvarianten Vektorfelds**). Man zeige, daß der Fluß eines linksinvarianten Vektorfelds X auf einer Liegruppe G durch die Formel $X^t g = g \exp(tX_e)$ beschrieben werden kann. Man beschreibe in ähnlicher Weise auch den Fluß eines rechtsinvarianten Vektorfelds.

Übung 22.3.6.23 (**Liealgebren von Schnitten**). Gegeben eine Liegruppe G mit einer abgeschlossenen Untergruppe H gilt $\operatorname{Lie} H = \{X \in \operatorname{Lie} G \mid \exp(\mathbb{R}X) \subset H\}$. Gegeben abgeschlossene Untergruppen einer Liegruppe $H, K \mathrel{\not\triangle} G$ folgere man die Formel

$$\operatorname{Lie}(H \cap K) = (\operatorname{Lie} H) \cap (\operatorname{Lie} K)$$

In derselben Weise folgt sogar für eine beliebige Familie $(G_i)_{i \in I}$ von abgeschlossenen Untergruppen einer Liegruppe

$$\operatorname{Lie} \bigcap_{i \in I} G_i = \bigcap_{i \in I} \operatorname{Lie} G_i$$

Übung 22.3.6.24 (**Liealgebra einer Standgruppe**). Gegeben eine glatte Operation $G \times X \to X$ einer Liegruppe G auf einer Mannigfaltigkeit X und $x \in X$ ein Punkt und G_x seine Standgruppe gilt $\mathrm{T}_e G_x = \ker \mathrm{d}_e(\cdot x)$ für $(\cdot x)$ die Abbildung $G \to X$, $g \mapsto gx$. Hinweis: Man überlege sich, daß gegeben $A \in \mathrm{T}_e G$ die Kurve $t \mapsto \exp(tA)x$ entweder für alle t die Geschwindigkeit Null hat oder für kein t.

Übung 22.3.6.25 (**Liealgebra einer Gruppe von Fixpunkten**). Gegeben G eine Liegruppe und $\varphi : G \xrightarrow{\sim} G$ ein glatter Automorphismus von G ist die Liealgebra der Gruppe der Fixpunkte $G^\varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = g\}$ von φ genau die Menge der Fixpunkte des Differentials $\mathrm{d}_e\varphi$ in der Liealgebra, in Formeln

$$\mathrm{Lie}(G^\varphi) = (\mathrm{Lie}\, G)^{\mathrm{d}_e\varphi}$$

22.3.7 Lieklammer von Vektorfeldern

Lemma 22.3.7.1. *Gegeben differenzierbare Vektorfelder $A, B : U \to \vec{X}$ auf einer offenen Teilmenge $U \Subset X$ eines endlichdimensionalen reellen Raums X gibt es genau ein Vektorfeld $[A, B] : U \to \vec{X}$ mit der Eigenschaft*

$$[A, B]f = A(Bf) - B(Af) \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$$

22.3.7.2. Dieses Feld $[A, B]$ heißt die **Lie-Klammer** oder der **Kommutator** der Felder A und B. Seine anschauliche Bedeutung wird in 22.3.7.8 und 22.3.7.13 diskutiert. Differenzierbarkeit ist im Sinne von 12.1.3.1 gemeint. Der folgende Beweis wird zeigen, daß die fragliche Gleichung sogar für alle $\mathcal{C}^2$-Funktionen f gilt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeineit dürfen wir $X = \mathbb{R}^n$ annehmen. Unsere beiden Felder haben dann die Gestalt

$$\begin{aligned} A &= a_1\partial_1 + \ldots + a_n\partial_n \\ B &= b_1\partial_1 + \ldots + b_n\partial_n \end{aligned}$$

mit $a_i, b_i : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und wir finden

$$\begin{aligned} ABf &= \sum a_i\partial_i \sum b_j\partial_j f = \sum a_i(\partial_i b_j)\partial_j f + a_i b_j \partial_i\partial_j f \\ BAf &= \sum b_j\partial_j \sum a_i\partial_i f = \sum b_j(\partial_j a_i)\partial_i f + b_j a_i \partial_j\partial_i f \end{aligned}$$

und damit schließlich $ABf - BAf = Cf$ für

$$C = \sum_j \left(\sum_i a_i(\partial_i b_j) - b_i(\partial_i a_j) \right) \partial_j$$

Damit haben wir gleichzeitig sogar eine explizite Formel für den Kommutator zweier Vektorfelder auf $U \Subset \mathbb{R}^n$ erhalten. □

Lemma 22.3.7.3. *Gegeben glatte Vektorfelder $A, B : X \to \mathrm{T}X$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit X gibt es genau ein glattes Vektorfeld $[A, B] : X \to \mathrm{T}X$ mit der Eigenschaft*

$$[A, B]f = A(Bf) - B(Af) \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$$

Beweis. Das folgt leicht aus dem in 22.3.7.1 behandelten Fall von Vektorfeldern auf offenen Teilmengen affiner Räume und der in 22.3.5.5 besprochenen Darstellung von Vektorfeldern in Karten. □

Definition 22.3.7.4. Das Feld $[A, B]$ aus Lemma 22.3.7.3 heißt die **Lieklammer** oder der **Kommutator** der Felder A und B. Die anschauliche Bedeutung dieser Konstruktion wird in 22.3.7.8 erklärt.

22.3.7.5. Der reelle Vektorraum aller glatten Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit wird mit der Lieklammer aus der vorhergehenden Definition zu einer Liealgebra im Sinne von 22.1.3.6, genauer zu einer Unter-Liealgebra der Liealgebra aller Endomorphismen des Vektorraums der glatten Funktionen auf unserer Mannigfaltigkeit.

22.3.7.6 (**Spezielle höhere Ableitungen**). Gegeben eine Mannigfaltigkeit X, ein mehrpunktiges Intervall $I \subset \mathbb{R}$, eine $\mathcal{C}^2$-Abbildung $\gamma : I \to X$ und ein Punkt $t \in I$ mit $\gamma'(t) = 0$ und $\gamma(t) = x$ können wir einen Tangentialvektor

$$\gamma''(t) \in \mathrm{T}_x X$$

erklären durch die Vorschrift $f \mapsto (f \circ \gamma)''(t)$ für alle Funktionskeime $f \in \mathcal{O}_{X,x}$. Diese Linearform entspricht in der Tat unter jeder Karte einer Richtungsableitung, wie man aus Satz 12.2.3.6 über das Rechnen mit Approximationen unschwer folgert. Ist zusätzlich $\varphi : X \to Y$ glatt, so gilt offensichtlich

$$\mathrm{d}_x\varphi : \gamma''(t) \mapsto (\varphi \circ \gamma)''(t)$$

Im Fall einer eingebetteten Mannigfaltigkeit $X \subset E$ in einem endlichdimensionalen affinen Raum E entspricht unsere Linearform schlicht der Richtungsableitung in Richtung $\gamma''(t)$ und $\gamma''(t)$ kann berechnet werden als der Grenzwert

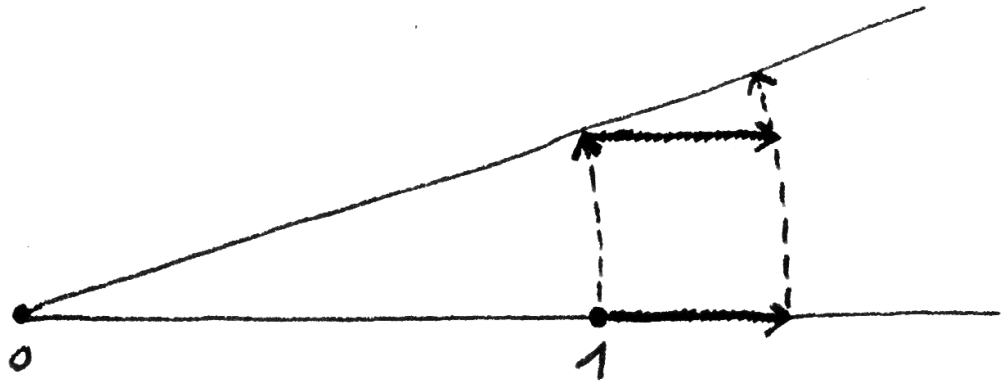
$$\lim_{h \to 0} \frac{2}{h^2} \left(\gamma(t+h) - \gamma(t)\right)$$

Wir erlauben uns diese Notation manchmal auch auf abstrakten Mannigfaltigkeiten, obwohl sie dort eigentlich sinnlos ist, denn die Differenz zweier Punkte kann man in dieser Allgemeinheit partout nicht bilden.

22.3.7.7. Gegeben ein glattes Vektorfeld A auf einer Mannigfaltigkeit M schreiben wir im folgenden

$$A^t q$$

für die Stelle $A^t q \in M$, an der der Punkt q landet, wenn er sich für die Zeitspanne t mit dem Fluß des Vektorfeldes A treiben läßt.



In der Situation und den Notationen von 12.7.2.20 finden wir $[\partial_x, \partial_\vartheta] = [\partial_x, -y\partial_x + x\partial_y] = \partial_y$. Die zugehörigen Flüsse sind Verschiebung in x-Richtung und Rotation um den Ursprung. Setzen wir genauer $A = \partial_x$ und $B = \partial_\vartheta$, gilt $A^t(p_1, p_2) = (p_1 + t, p_2)$ und $B^t(p_1, p_2) = ((\cos t)p_1 - (\sin t)p_2, (\sin t)p_1 + (\cos t)p_2)$. Mit diesen Formeln ist der Kommutator der Flüsse schnell berechnet, und das Ergebnis scheint mir auch der Anschauung gut zugänglich zu sein.

Proposition 22.3.7.8 (**Anschauliche Bedeutung der Lieklammer**). *Gegeben glatte Vektorfelder A, B auf einer Mannigfaltigkeit M kann ihre Lieklammer an jeder Stelle $p \in M$ mithilfe einer höheren Ableitung im Sinne von 22.3.7.6 beschrieben werden durch die Gleichung*

$$[A, B]_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2}(B^{-t}A^{-t}B^tA^tp - p)$$

22.3.7.9. Anschaulich gesprochen mißt die Lieklammer zweier Vektorfelder im Lichte dieser Proposition, inwieweit die zugehörigen Flüsse vertauschen oder lateinisierend „kommutieren“, als da heißt, welchen Unterschied es macht, ob sich ein gegebener Punkt für ein festes kleines Zeitintervall erst mit dem einen und dann mit dem anderen Vektorfeld treiben läßt oder umgekehrt. Ein alternativer Beweis der Proposition unter Verwendung der Lie-Ableitung wird in **??** diskutiert.

Beweis. Wir setzen $\Phi(x, y, z, w) = B^{-x}A^{-y}B^zA^wp$ und betrachten erst mal den Fall einer offenen Teilmenge $M \Subset \mathbb{R}^n$. Die partiellen Ableitungen von Φ am Ursprung ergeben sich dann zu $\Phi_x = -B_p, \Phi_y = -A_p, \Phi_z = B_p, \Phi_w = A_p$. Ich kann nur hoffen, daß die Bedeutung des unteren Index mal als partielle Ableitung und dann wieder als Auswerten eines Vektorfeldes an einer Stelle den Leser nicht allzusehr verwirrt. Jetzt folgt für $\gamma(t) := \Phi(t, t, t, t)$ sofort $\gamma'(0) = 0$. Durch Rechnung in einer Karte um p folgt dasselbe auch für eine beliebige Mannigfaltigkeit. Damit ist insbesondere die höhere Ableitung $\gamma''(0)$ nach 22.3.7.6 auch für eine beliebige Mannigfaltigkeit wohldefiniert. Um sie zu berechnen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit wieder annehmen, daß wir eine offene Teilmenge $M \Subset \mathbb{R}^n$ vor uns haben. Wir können also unsere Erkenntnisse 12.2.3.6 über das Rechnen mit Approximationen verwenden. Für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von Φ am Ursprung erhalten wir wegen $\Phi(x, 0, z, 0) = \Phi(x - z, 0, 0, 0) = \Phi(0, 0, z - x, 0)$ sofort $\Phi_{xx} = -\Phi_{xz} = -\Phi_{zx} = \Phi_{zz}$ und ebenso $\Phi_{yy} = -\Phi_{yw} = -\Phi_{wy} = \Phi_{ww}$. Damit kürzt sich der Einfluß dieser Terme auf $\gamma''(0)$ weg. Weiter haben wir per definitionem $\Phi_z(0, 0, 0, w) = B(A^wp)$, wobei wir den Auswertungspunkt des Vektorfelds B diesmal in Klammern dahinterschreiben, um Subindizes zu vermeiden. Nun ist $w \mapsto A^wp$ ein Weg durch p mit Geschwindigkeit A_p bei $w = 0$. Setzen wir $B = \sum b_i\partial_i$ und $A = \sum a_j\partial_j$ mit glatten reellwertigen Funktionen b_i, a_j, so ergibt sich für $\Phi = (\Phi^1, \ldots, \Phi^n)$ folglich

$$\Phi^i_{xy} = -\Phi^i_{xw} = \Phi^i_{zw} = A_p(b_i) = \sum_j a_j(p) \cdot (\partial_j b_i)(p)$$

und mit einer ähnlichen Rechnung

$$\Phi^i_{yz} = -B_p(a_i) = \sum_j b_j(p) \cdot (\partial_j a_i)(p)$$

Hier muß ich wieder hoffen, daß die inkonsistente Notation $\Phi = (\Phi^1, \ldots, \Phi^n)$ mit oberen Indizes für die Koordinaten den Leser nicht allzusehr verwirrt. Die unteren Indexplätze sind leider bereits für die Notation partieller Ableitungen vergeben. Nach unseren Formeln für das Rechnen mit Approximationen 12.2.3.6 ist also $\gamma''(0)/2$ der Vektor des $\mathbb{R}^n$ mit den Einträgen $A_p(b_i) - B_p(a_i)$, und diese Beschreibung stimmt mit unserer Beschreibung der Lieklammer in Koordinaten aus dem Beweis von 22.3.7.1 überein. □

Proposition 22.3.7.10 (über kommutierende Vektorfelder). *Zwei glatte Vektorfelder A, B auf einer Mannigfaltigkeit kommutieren genau dann, wenn ihre Flüsse lokal kommutieren, wenn es also in Formeln für jeden Punkt $p \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit*

$$A^t B^s p = B^s A^t p \qquad \forall s, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

22.3.7.11. Diese Proposition sagt insbesondere: Wenn die Flüsse zweier glatter Vektorfelder an jeder Stelle „kommutieren bis auf einen Fehler von mindestens dritter Ordnung“ in dem Sinne, daß der Grenzwert in 22.3.7.8 verschwindet, so kommutieren sie bereits ohne jeglichen Fehler.

Beweis. Kommutieren die Flüsse, so auch die Vektorfelder nach 22.3.7.8. Kommutieren umgekehrt die Vektorfelder und hat das erste Feld bei p keine Nullstelle, so wählen wir mit 12.5.6.6 lokale Koordinaten derart, daß das erste Vektorfeld gerade $\frac{\partial}{\partial x_1}$ wird. Dann hat das zweite Vektorfeld die Gestalt

$$a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

wobei $a_2, \ldots, a_n$ konstant sind in x_1. Der Fluß des zweiten Feldes ist also invariant unter Verschiebung in die x_1-Richtung, d.h. unter dem Fluss des ersten Feldes, und die Behauptung folgt. Verschwinden beide Felder bei p, ist die Behauptung eh klar. □

Übungen

Übung 22.3.7.12 (**Verträglichkeit von Verwandtschaft und Lieklammer**). Verwandte Vektorfelder haben verwandte Lieklammern. Sind genauer und in Formeln X und Y Mannigfaltigkeiten und ist $\phi : U \to V$ eine glatte Abbildung und sind A, B glatte Vektorfelder auf U und $\tilde{A}, \tilde{B}$ glatte Vektorfelder auf V, so gilt

$$(\phi : A \rightsquigarrow \tilde{A} \text{ und } \phi : B \rightsquigarrow \tilde{B}) \quad \Rightarrow \quad \phi : [A, B] \rightsquigarrow [\tilde{A}, \tilde{B}]$$

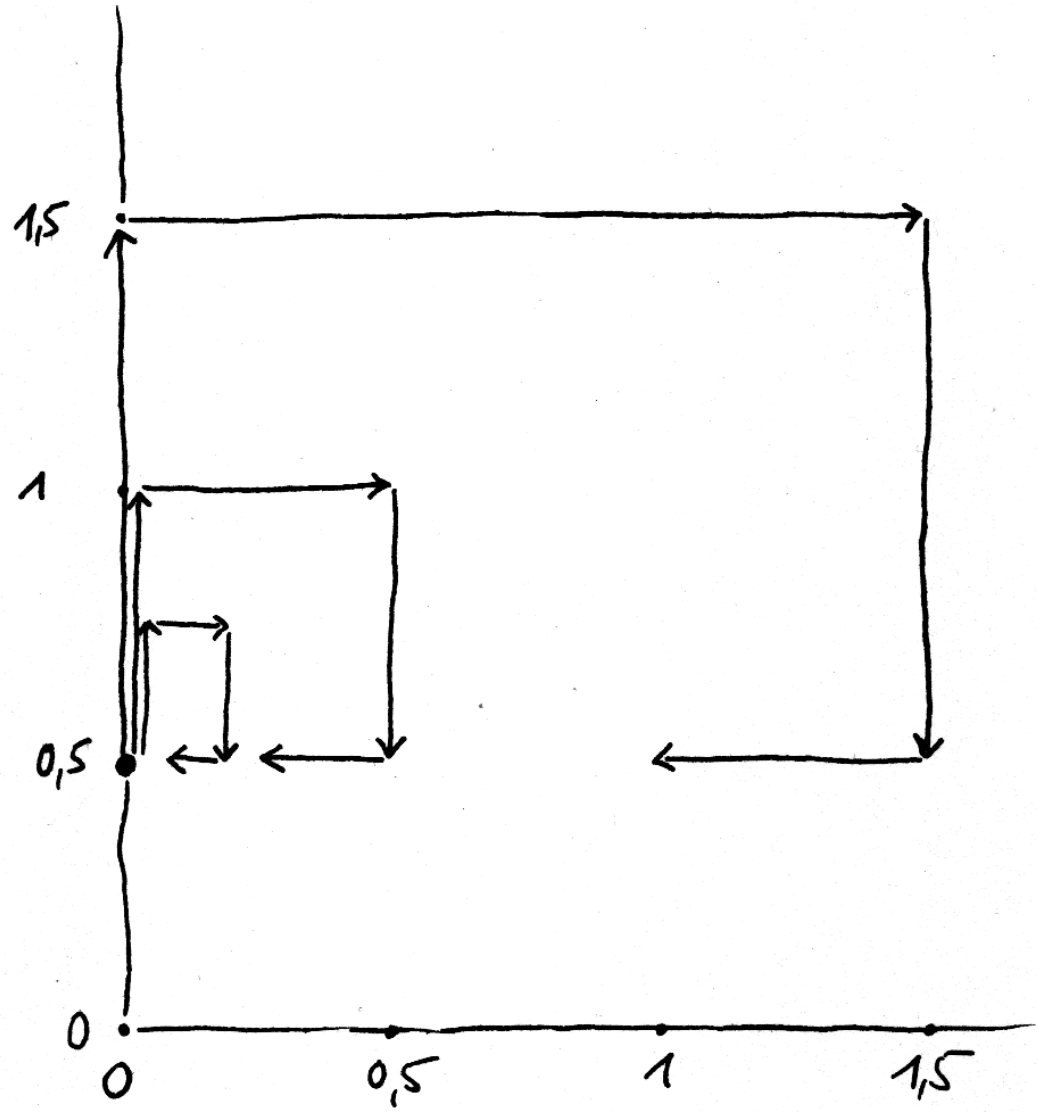


Illustration zur Formel $[\partial_y, y\partial_x] = \partial_x$. Gezeichnet ist das Bild von $(0, 1/2)$ unter den Flüssen dieser Felder für Zeiten $1, 1/2$ und $1/4$, und zwar „erst mit ∂_y, dann mit $y\partial_x$, dann mit $-\partial_y$, dann mit $-y\partial_x$“. Man sieht zumindest qualitativ, wie der Abstand des Endpunkts vom Ausgangspunkt mit der Zeit von zweiter Ordnung klein wird, und daß der Differenzvektor geteilt durch das Quadrat der „Zeit“ gegen den Kommutator alias die Lie-Klammer ∂_x strebt.

Übung 22.3.7.13 (**Lieklammer durch Vergleich von Flüssen**). Sind A, B glatte Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge U eines endlichdimensionalen reellen Raums X, so gelten im Richtungsraum $\vec{X}$ für alle $p \in U$ die Gleichungen

$$[A, B]_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \left(B^t A^t p - A^t B^t p \right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \left(A^{-t} B^t A^t p - B^t p \right)$$

Übung 22.3.7.14. Gegeben glatte paarweise kommutierende Vektorfelder, die an einer gegebenen Stelle linear unabhängig sind, finden wir stets lokale Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ um diese Stelle, in der unsere Vektorfelder die Gestalt $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}$ haben.

22.4 Liegruppen und Liealgebren

22.4.1 Lieklammer und adjungierte Darstellung

22.4.1.1. Die linksinvarianten Vektorfelder auf einer Liegruppe bilden wegen der Verträglichkeit von Lieklammern mit Verwandtschaft 22.3.7.12 einen unter der Lieklammer stabilen Teilraum im Raum aller glatten Vektorfelder. Dasselbe gilt für die rechtsinvarianten Vektorfelder.

Definition 22.4.1.2. Gegeben eine Liegruppe G versehen wir den Tangentialraum im neutralen Element $\mathrm{T}_e G$ mit derjenigen Struktur einer Liealgebra, für die das Fortsetzen zu einem linksinvarianten Vektorfeld ein Liealgebrenhomomorphismus in die Liealgebra der glatten Vektorfelder auf G ist. Den Raum $\mathrm{T}_e G$ mit dieser Struktur einer Liealgebra nennen wir die **Liealgebra der Liegruppe** G und notieren ihn

$$\operatorname{Lie} G$$

22.4.1.3. Daß wir hier die linksinvarianten Vektorfelder bevorzugen, hängt damit zusammen, daß wir auch die allgemeinen linearen Gruppen $\mathrm{GL}(V)$ und die Endomorphismenringe $\operatorname{End} V$ stets in der Weise definieren, daß sie von links auf V operieren. Unsere Konventionen passen dann in der in 22.4.1.4 erklärten Weise so zusammen, daß dem Kommutator von linksinvarianten Vektorfeldern der Kommutator von Endomorphismen entspricht. Die Beziehung zur entsprechenden Konstruktion mit rechtsinvarianten Vektorfeldern klärt 22.4.1.18.

Satz 22.4.1.4 (Die Lieklammer der allgemeinen linearen Gruppe). *Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V ist die durch trans^{-1} gegebene kanonische Identifikation $\mathrm{T}_e \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End} V$ ein Isomorphismus von Liealgebren*

$$\operatorname{Lie}(\mathrm{GL}(V)) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{gl}(V)$$

für die Liealgebrenstruktur „durch den Kommutator der linksinvariant fortgesetzten Vektorfelder“ links und die Liealgebrenstruktur „durch den Kommutator im Matrizenring“ rechts.

Beweis. Für die Einheitsmatrix verwenden wir die beiden Notationen $e = I$ je nachdem, ob wir sie eher als einen Punkt oder eher als eine Matrix auffassen. Für jede von Null verschiedene Linearform $\mu : V \to k$ liefert die sogenannte Matrixkoeffizientenabbildung eine Einbettung $c = c_\mu : V \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathrm{GL}(V), \mathbb{R})$ durch $c_\mu(v) := c_{\mu,v}$ mit $c_{\mu,v}(x) := \mu(xv)$. Die Vorschrift $(v, \mu) \mapsto c_{\mu,v}$ ist dann ein Homomorphismus

$$V \boxtimes V^* \to C^\infty(\mathrm{GL}(V), \mathbb{R})$$

von Darstellungen von $G \times G^{\mathrm{opp}}$ für $G = \mathrm{GL}(V)$. Gegeben $X \in \mathrm{T}_e \mathrm{GL}(V)$ notieren wir $\bar{X} \in \mathfrak{gl}(V)$ sein Urbild unter der kanonischen Identifikation $\mathrm{trans} : \mathfrak{gl}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_e \mathrm{GL}(V)$ und $\grave{X}$ seine linksinvariante Fortsetzung. Gegeben $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{GL}(V), \mathbb{R})$ haben wir einerseits per definitionem

$$X(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(I + t\bar{X})$$

Speziell ergibt sich für unsere Matrixkoeffizienten $X(c_{\mu,v}) = \mu(\bar{X}v)$. Andererseits gilt für die linksreguläre Darstellung alias die Wirkung von G^{opp} die Formel $g^\circ c_{\mu,v} = c_{g^\circ\mu,v}$ und wir folgern

$$(\grave{X}c_{\mu,v})(g) = (g^\circ(\grave{X}c_{\mu,v}))(e) = (\grave{X}(g^\circ c_{\mu,v}))(e) = X(c_{g^\circ\mu,v}) = c_{\mu,\bar{X}v}(g)$$

alias $\grave{X}c_{\mu,v} = c_{\mu,\bar{X}v}$ alias $\grave{X}c(v) = c(\bar{X}v)$ alias $\grave{X}c = c\bar{X}$. Es folgt $[\grave{X}, \grave{Y}]c = c[\bar{X}, \bar{Y}]$ und für das $Z \in \mathrm{T}_e \mathrm{GL}(V)$ mit $\grave{Z} = [\grave{X}, \grave{Y}]$ gilt folglich

$$c\bar{Z} = \grave{Z}c = [\grave{X}, \grave{Y}]c = c[\bar{X}, \bar{Y}]$$

Wegen der Injektivität von c folgt schließlich $\bar{Z} = [\bar{X}, \bar{Y}]$ in $\mathfrak{gl}(V)$. □

Satz 22.4.1.5. *Das Differential beim neutralen Element eines stetigen Homomorphismus von Liegruppen $\varphi : G \to H$ ist ein Homomorphismus von Liealgebren*

$$\mathrm{d}_e\varphi : \mathrm{Lie}\, G \to \mathrm{Lie}\, H$$

22.4.1.6. Wir kürzen diesen Homomorphismus oft zu $\mathrm{d}_e\varphi = \mathrm{d}\varphi$ ab.

Beweis. Der größte Teil dieses Satzes wurde bereits in 22.3.6.14 gezeigt. Offen ist nur noch, daß das fragliche Differential mit dem Kommutator verträglich ist. Man sieht jedoch leicht ein, daß das linksinvariante Vektorfeld zu $A \in \mathrm{T}_e G$ unter φ verwandt ist zum linksinvarianten Vektorfeld zu $(\mathrm{d}_e\varphi)(A) \in \mathrm{T}_e H$ auf H. Die Behauptung folgt nun, da das Bilden des Kommutators nach 22.3.7.12 Verwandtschaft respektiert. □

22.4.1.7. Die Exponentialabbildung einer Lieguppe G schreiben wir von nun an meist $\exp : \mathrm{Lie}\, G \to G$ und unser kommutatives Diagramm aus 22.3.6.15 erhält damit die Gestalt

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Lie}\, G \arrow[r, "\mathrm{d}\varphi"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathrm{Lie}\, H \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & H \end{tikzcd}$$

22.4.1.8. Gegeben ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum V und eine Liegruppe G und ein stetiger Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ notieren wir die Verknüpfung $\mathrm{d}_e\rho : \mathrm{T}_e G \to \mathrm{T}_e \mathrm{GL}(V)$ mit der kanonischen Identifikation $\mathrm{T}_e \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}\, V = \mathfrak{gl}(V)$ auch

$$\mathrm{d}\rho = \mathrm{d}_e\rho : \mathrm{Lie}\, G \to \mathfrak{gl}(V)$$

Nach 22.4.1.5 und 22.4.1.4 ist diese Abbildung auch ein Homomorphismus von Liealgebren. Wir nennen ihn das **Differential der Darstellung** ρ.

22.4.1.9. Gegeben eine Gruppe G definiert jedes Element $x \in G$ einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{int}\, x : & G & \to & G \\ & y & \mapsto & xyx^{-1} \end{array}$$

Er heißt die **Konjugation mit** x oder auch der durch x definierte **innere Automorphismus**, auf Englisch **interior automorphism**, daher die Notation. Mehr dazu findet man in 4.5.3.1. Ist G eine Liegruppe, so ist $\mathrm{int}\, x$ für jedes $x \in G$ eine glatte Abbildung $G \to G$.

Lemma 22.4.1.10 (Adjungierte Darstellung). *Ist G eine Liegruppe und ordnen wir jedem Gruppenelement $x \in G$ das Differential am neutralen Element der Konjugation mit x zu und setzen $\mathrm{Ad}(x) := \mathrm{d}_e(\mathrm{int}\, x) : \mathrm{T}_e G \to \mathrm{T}_e G$, so erhalten wir einen Homomorphismus von Liegruppen*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ad} : & G & \mapsto & \mathrm{Aut}(\mathrm{T}_e G) \\ & x & \mapsto & \mathrm{Ad}\, x \end{array}$$

Ist weiter $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus von Liegruppen, so kommutiert für alle $x \in G$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_e G \arrow[r, "\mathrm{d}_e\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}\, x"'] & \mathrm{T}_e H \arrow[d, "\mathrm{Ad}\, \varphi(x)"] \\ \mathrm{T}_e G \arrow[r, "\mathrm{d}_e\varphi"] & \mathrm{T}_e H \end{tikzcd}$$

Beispiel 22.4.1.11. Für $G = \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ oder allgemeiner $G = \mathrm{Aut}\, V$ mit V einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum ist $\mathrm{int}\, x$ die Einschränkung einer linearen Abbildung auf $\mathrm{Mat}(n; \mathbb{K})$ beziehungsweise $\mathrm{End}\, V$, die durch dieselbe Formel gegeben wird. Das Differential einer linearen Abbildung ist aber an jeder Stelle schlicht die Abbildung selber, unter der kanonischen Identifikation des Tangentialraums mit dem Raum selber, so daß wir erhalten

$$(\mathrm{Ad}\, x)(A) = xAx^{-1}$$

22.4.1.12. Vermittels des Differentials der Konjugation Ad wird nach 22.4.1.10 also der Tangentialraum einer Liegruppe beim neutralen Element eine Darstellung unserer Liegruppe. Diese Darstellung heißt die **adjungierte Darstellung** unserer Liegruppe, und diese Terminologie motiviert auch erst recht eigentlich die Notation Ad.

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir, daß Ad ein Gruppenhomomorphismus ist. Nun gilt aber offensichtlich $\mathrm{int}(xz) = \mathrm{int}(x) \circ \mathrm{int}(z)$ und nach der Kettenregel folgt daraus $\mathrm{d}_e \,\mathrm{int}(xz) = \mathrm{d}_e(\mathrm{int}\, x) \circ \mathrm{d}_e(\mathrm{int}\, z)$ alias in unserer Notation $\mathrm{Ad}(xz) = \mathrm{Ad}(x) \circ \mathrm{Ad}(z)$ für alle $x, z \in G$. Dann zeigen wir, daß Ad eine glatte Abbildung ist. Dazu gehen wir aus von der glatten Abbildung $G \times G \to G, (x, y) \mapsto xyx^{-1}$, die nach 22.3.4.11 eine glatte Abbildung auf den Tangentialbündeln $\mathrm{T}(G \times G) \to \mathrm{T}G$ liefert. Mit einigen kanonischen Identifikationen und Einbettungen liefert das ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \times \mathrm{T}G \arrow[r, hook] & \mathrm{T}G \times \mathrm{T}G \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{T}(G \times G) \arrow[r] & \mathrm{T}G \\
G \times \mathrm{T}_e G \arrow[u, hook] \arrow[rrr] & & & \mathrm{T}_e G \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

dessen untere Zeile $(x, v) \mapsto (\mathrm{Ad}\, x)(v)$ dann auch eine glatte Abbildung sein muß. Das zeigt, daß $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}\, \mathrm{T}_e G$ glatt ist. Das kommutative Diagramm im letzten Teil unseres Lemmas ergibt sich schließlich, indem man im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{int}\, x"'] & H \arrow[d, "\mathrm{int}\, \varphi(x)"] \\
G \arrow[r, "\varphi"] & H
\end{tikzcd}$$

zu den Differentialen an den neutralen Elementen übergeht. □

Definition 22.4.1.13. Das Differential im Sinne von 22.4.1.8 der adjungierten Darstellung $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathrm{T}_e G)$ wird notiert als

$$\mathrm{ad} := \mathrm{d}_e \,\mathrm{Ad} : \mathrm{Lie}\, G \to \mathfrak{gl}(\mathrm{T}_e G)$$

Beispiel 22.4.1.14 (**Adjungierte Darstellung der** $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$). Im Fall der Gruppen $G = \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ oder allgemeiner der Automorphismengruppen $G = \mathrm{Aut}\, V$ endlichdimensionaler reeller Vektorräume haben wir $(\mathrm{ad}\, A)(B) = AB - BA$. In der Tat ist das Auswerten an $B \in \mathrm{End}\, V$ eine lineare Abbildung $\mathrm{aus}_B : \mathrm{End}(\mathrm{End}\, V) \to \mathrm{End}\, V$, es gilt also $\mathrm{d}_e(\mathrm{aus}_B \circ \mathrm{Ad}) = \mathrm{aus}_B \circ \mathrm{ad}$. Nun gilt offensichtlich weiter auch $(\mathrm{aus}_B \circ \mathrm{Ad})(x) = (\mathrm{Ad}\, x)(B) = xBx^{-1}$. Um das Differential dieser Abbildung zu berechnen, schreiben wir sie als Verknüpfung

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Aut}\, V & \to & \mathrm{End}\, V \times \mathrm{End}\, V & \to & \mathrm{End}\, V \\
x & \mapsto & (x, x^{-1}) \quad (y, z) & \mapsto & yBz
\end{array}$$

Hier ist nun das Differential der ersten Abbildung beim neutralen Element nach 22.3.3.17 gegeben durch $A \mapsto (A, -A)$ und das Differential der Zweiten beim Bild des neutralen Elements nach 12.1.6.5 durch $(C, D) \mapsto (CB + BD)$ und das Differential der Verknüpfung ist folglich gegeben durch $A \mapsto AB - BA$. Damit erhalten wir schließlich $(\operatorname{ad} A)(B) = AB - BA = [A, B]$ wie gewünscht.

Proposition 22.4.1.15 (Differential der adjungierten Darstellung). *Gegeben eine Liegruppe G gilt für alle $X, Y \in \operatorname{Lie} G$ die Formel*

$$(\operatorname{ad} X)(Y) = [X, Y]$$

22.4.1.16. Rechts steht hier der Kommutator der beiden Vektorfelder, die durch linksinvariante Fortsetzung zweier Tangentialvektoren am neutralen Element entstehen, oder vielmehr der Wert dieses Kommutatorfeldes am neutralen Element. Links dahingegegen steht salopp gesprochen das Differential der von der Operation durch Konjugation unserer Liegruppe auf sich selbst induzierten Operation auf dem Tangentialraum beim neutralen Element. Wir geben für die Proposition zwei Beweise.

Erster Beweis. Wir verwenden im folgenden meist dieselbe Notation für linksinvariante Vektorfelder und ihre Werte beim neutralen Element, und deuten nur in Ausnahmefällen den Unterschied durch einen Index e an. Der Fluß eines linksinvarianten Feldes X wird nach 22.3.6.22 gegeben durch

$$X^t g = g \exp(tX)$$

für alle $g \in G$ und $t \in \mathbb{R}$. Bezeichne $\log$ die Umkehrung von $\exp$ in einer kleinen Umgebung des neutralen Elements. Da die Lieklammer Verwandschaft respektiert und da das Differential des Logarithmus bis auf kanonische Identifikationen die Identität ist, liefert die Darstellung 22.3.7.13 des Kommutators zweier Vektorfelder die Relation

$$\begin{aligned}
[X, Y]_e &= \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t^2} \left(\log(X^{-t} Y^t X^t e) - \log(Y^t e)\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t^2} \left(\log(\mathrm{e}^{tX}\, \mathrm{e}^{tY}\, \mathrm{e}^{-tX}) - \log(\mathrm{e}^{tY})\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t^2} (\operatorname{Ad}(\mathrm{e}^{tX})(tY) - tY) \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t} (\operatorname{Ad}(\mathrm{e}^{tX})(Y) - Y) \\
&= (\operatorname{ad} X)(Y)
\end{aligned}$$

□

Zweiter Beweis. Dieser Beweis ist zwar etwas länger, dafür aber unabhängig von unseren Erkenntnissen 22.3.7.13 über den Zusammenhang zwischen der Lieklammer von Vektorfeldern und dem Kommutieren der zugehörigen Flüsse. Um Klammern zu sparen, kürzen wir $\operatorname{ad}(X) = \operatorname{ad}_X$ ab. Es reicht, für jede glatte Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ zu zeigen

$$[X, Y] f = (\operatorname{ad}_X Y) f$$

Dazu beachten wir zunächst $\operatorname{ad}_X Y = \partial_t(\operatorname{Ad} \mathrm{e}^{tX})(Y)$, wobei wir hier und im Rest des Beweises alle partiellen Ableitungen als ausgewertet bei Null verstehen. Das Anwenden auf eine glatte Funktion f gefolgt vom Auswerten δ_g an einem Gruppenelement g ist eine Linearform auf dem Raum aller glatten Vektorfelder und damit auch auf dem Raum aller linksinvarianten Vektorfelder, wir haben demnach auch

$$\delta_g(\operatorname{ad}_X Y)f = \partial_t\, \delta_g((\operatorname{Ad} \mathrm{e}^{tX})(Y))f$$

Jetzt beachten wir die Verwandtschaften

$$\begin{array}{lccc} (\operatorname{int} h): & Y & \rightsquigarrow & (\operatorname{Ad} h)(Y) \\ (\operatorname{int} h): & f \circ (\operatorname{int} h) & \rightsquigarrow & f \end{array}$$

woraus sofort folgt $(\operatorname{int} h) : Y(f \circ \operatorname{int} h) \rightsquigarrow ((\operatorname{Ad} h)(Y))(f)$ alias

$$(Y(f \circ \operatorname{int} h)) \circ (\operatorname{int} h)^{-1} \quad = \quad ((\operatorname{Ad} h)(Y))(f)$$

und damit

$$\begin{aligned} \delta_g(\operatorname{ad}_X Y)f &= \partial_t\, \delta_g((\operatorname{Ad} \mathrm{e}^{tX})(Y))f \\ &= \partial_t\, (Y(f \circ \operatorname{int} \mathrm{e}^{tX})(\mathrm{e}^{-tX}\, g\, \mathrm{e}^{tX}) \\ &= \partial_t\partial_s\, (f \circ \operatorname{int} \mathrm{e}^{tX})(\mathrm{e}^{-tX}\, g\, \mathrm{e}^{tX}\, \mathrm{e}^{-sY}) \\ &= \partial_t\partial_s\, f(g\, \mathrm{e}^{tX}\, \mathrm{e}^{sY}\, \mathrm{e}^{-tX}) \\ &= \partial_t\partial_s\, f(g\, \mathrm{e}^{tX}\, \mathrm{e}^{sY}) - \partial_t\partial_s\, f(g\, \mathrm{e}^{sY}\, \mathrm{e}^{tX}) \\ &= (X(Yf))(g) - (Y(Xf))(g) \end{aligned}$$

Dieser Beweis verwendet die Exponentialabbildung nicht wirklich: Statt e^{tX} und e^{sY} könnten wir darin ebenso irgendwelche anderen glatten Wege verwenden, die zum Zeitpunkt $t = 0$ beziehungsweise $s = 0$ mit der Geschwindigkeit X beziehungsweise Y durch das neutrale Element fahren. □

22.4.1.17. Gegeben eine Liegruppe G folgt aus der Beschreibung 22.1.4.20 der Liealgebra des Kerns eines Liegruppenhomomorphismus unmittelbar die Identität $\operatorname{Lie}(\ker \operatorname{Ad}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0\ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$. Dieser Teilraum heißt im übrigen für eine beliebige Liealgebra $\mathfrak{g}$ das **Zentrum** der Liealgebra $\mathfrak{g}$.

Übungen

Ergänzende Übung 22.4.1.18. Sei G eine Liegruppe. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \left\{ \begin{array}{c} \text{glatte Vektorfelder auf } G \end{array} \right\} & \\
\left\{ \begin{array}{c} \text{glatte linksinvariante} \\ \text{Vektorfelder auf } G \end{array} \right\} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \left\{ \begin{array}{c} \text{glatte rechtsinvariante} \\ \text{Vektorfelder auf } G \end{array} \right\} \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & \left\{ \begin{array}{c} \text{Tangentialraum von } G \\ \text{am neutralen Element} \end{array} \right\} &
\end{tikzcd}$$

wo die beiden unteren Pfeile durch das Auswerten am neutralen Element definiert werden. Die obere Hälfte unseres Diagramms besteht aus Lie-Algebren und Lie-Algebren-Homomorphismen. Die beiden unteren Pfeile sind Isomorphismen und versehen den Tangentialraum am neutralen Element $\mathrm{T}_e G$ mit zwei Lie-Algebra-Strukturen. Der Leser möge als Übung zeigen, daß hier die Lieklammer für die eine Struktur auf $\mathrm{T}_e G$ gerade das Negative der Lieklammer für die andere Struktur ist. Hinweis: Man fasse die Inversenabbildung $G \xrightarrow{\sim} G^{\mathrm{opp}}$ auf als Homomorphismus in die Gruppe mit der opponierten Multiplikation.

Übung 22.4.1.19. Das linksinvariante Vektorfeld auf der Gruppe $G = \mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$, dessen Wert beim neutralen Element durch die Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{R})$ gegeben wird, muß sich als Linearkombination der partiellen Ableitungen nach den Matrixeinträgen $\sum f_{ij}\partial_{ij}$ mit gewissen glatten Funktionen f_{ij} als Koeffizienten schreiben lassen. Man berechne diese Funktionen und prüfe explizit, daß die linksinvariante Fortsetzung in diesem Fall ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist, wenn wir $\mathrm{Mat}(2;\mathbb{R})$ mit der durch den üblichen Kommtator gegebenen Struktur einer Liealgebra versehen. Mutige rechnen dasselbe allgemeiner für $G = \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ und auch für rechtsinvariante Felder, beachten dabei jedoch die vorhergehende Übung 22.4.1.18.

Übung 22.4.1.20 (**Derivierte Liegruppen und Liealgebren**). Gegeben eine Gruppe G bezeichne (G,G) die von allen Kommutatoren $aba^{-1}b^{-1}$ erzeugte Untergruppe, die sogenannte **derivierte Gruppe**. Gegeben eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ bezeichne $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ den von allen Kommutatoren $[X,Y]$ erzeugten Untervektorraum. Er ist, wie man leicht einsieht, wieder eine Liealgebra, die sogenannte **derivierte Liealgebra**. Gegeben eine zusammenhängende Liegruppe G mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ zeige man nun, daß aus $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ bereits folgt $(G,G) = G$. Hinweis: Zunächst zeige man, daß die $(\operatorname{Ad} g)(X) - X$ für $g \in G$ und $X \in \mathfrak{g}$ bereits ganz $\mathfrak{g}$ als Vektorraum erzeugen. Dann verwende man den Umkehrsatz um zu zeigen, daß (G,G) eine Umgebung des neutralen Elements umfaßt.

Übung 22.4.1.21 (**Liealgebra einer Gruppe von Fixpunkten, Variante**). Gegeben G eine Liegruppe und $\Phi \subset \mathrm{GrpTop}^\times G$ eine Menge von Automorphismen von G ist die Liealgebra der abgeschlossenen Untergruppe $G^\Phi = \{g \in G \mid \varphi(g) = g \ \forall \varphi \in \Phi\}$ der Fixpunkte von Φ genau die Menge der Fixpunkte in der Liealgebra, in Formeln

$$\mathrm{Lie}(G^\Phi) = (\mathrm{Lie}\, G)^\Phi$$

Hier ist rechts die abgeleitete Operation gemeint, ausgeschrieben hätten wir also $\mathrm{Lie}(G^\Phi) = \{X \in \mathrm{Lie}\, G \mid (\mathrm{d}_e\varphi)(X) = X \ \forall \varphi \in \Phi\}$. Hinweis: Man kombiniere 22.3.6.25 und 22.3.6.23.

Übung 22.4.1.22 (**Liealgebra eines Zentralisators**). Gegeben eine Liegruppe G und ein Element $h \in G$ gilt stets $\mathrm{Lie}\, \mathrm{Z}_G(h) = \{X \in \mathrm{Lie}\, G \mid (\mathrm{Ad}\, h)(X) = X\}$. Gegeben eine Liegruppe G und eine Teilmenge $H \subset G$ gilt stets $\mathrm{Lie}\, Z_G(H) = \{X \in \mathrm{Lie}\, G \mid (\mathrm{Ad}\, h)(X) = X \ \forall h \in H\}$. Hinweis: Man wende 22.3.6.25 an auf $\phi = \mathrm{int}\, h$ beziehungsweise 22.4.1.21 auf $\Phi = \{\mathrm{int}\, h \mid h \in H\}$.

Übung 22.4.1.23. Gegeben eine endlichdimensionale stetige Darstellung $G \to \mathrm{GL}(V)$ einer Liegruppe mit der abgleiteten Darstellung ihrer Liealgebra zeige man die Formel

$$g(X(g^{-1}v)) = ((\mathrm{Ad}\, g)(X))v \quad \forall g \in G,\ X \in \mathrm{Lie}\, G,\ v \in V$$

Übung 22.4.1.24. Man zeige, daß gegeben eine Liegruppe G für jedes Gruppenelement $g \in G$ die Abbildung $\mathrm{Ad}(g)$ ein Liealgebrenhomomorphismus ist.

Übung 22.4.1.25. Gegeben eine zusammenhängende Liegruppe G fällt ihr Zentrum stets zusammen mit dem Kern der adjungierten Darstellung, in Formeln $\mathrm{Z}(G) = \ker(\mathrm{Ad})$.

Übung 22.4.1.26. Man zeige: Gegeben eine Liegruppe G und eine abelsche Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Lie}\, G$ ist $\exp : \mathfrak{h} \to G$ ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe des Vektorraums $\mathfrak{h}$ in unsere Liegruppe G. Hinweis: Kommutierende Vektorfelder haben kommutierende Flüsse.

Übung 22.4.1.27. Auf einer Liegruppe ist die Lieklammer eines linksinvarianten Vektorfeldes mit einem rechtinvarianten Vektorfeld stets das Nullfeld.

22.4.2 Kompakte Liealgebren

Definition 22.4.2.1. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra über einem Körper k. Die **Killingform von** $\mathfrak{g}$ ist die Bilinearform $\kappa = \kappa_\mathfrak{g} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ auf unserer Liealgebra, die gegeben wird durch die Vorschrift

$$\kappa(X, Y) := \mathrm{tr}((\mathrm{ad}\, X)(\mathrm{ad}\, Y))$$

Definition 22.4.2.2. Eine reelle Liealgebra heißt **kompakt**, wenn sie endlichdimensional ist mit negativ definiter Killing-Form.

Proposition 22.4.2.3. *Jede zusammenhängende kompakte Liegruppe mit endlichem Zentrum hat eine kompakte Liealgebra.*

Beweis. Sei K unsere kompakte Liegruppe und $\mathfrak{k} = \operatorname{Lie} K$ ihre Liealgebra. Das Bild der adjungierten Darstellung ist eine kompakte Matrixliegruppe und nach 22.2.4.10 gibt es damit auf $\mathfrak{k}$ ein $(\operatorname{Ad} K)$-invariantes Skalarprodukt. Bezüglich einer Orthonormalbasis werden mithin alle $\operatorname{Ad} g$ für $g \in K$ durch orthogonale Matrizen dargestellt und alle $\operatorname{ad} X$ für $X \in \mathfrak{k}$ dementsprechend durch schiefsymmetrische Matrizen. Alle Eigenwerte dieser $\operatorname{ad} X$ sind insbesondere rein imaginär, und das zeigt

$$\operatorname{tr}((\operatorname{ad} X)(\operatorname{ad} X)) < 0$$

falls $\operatorname{ad} X \neq 0$. Hat unsere Gruppe zusätzlich endliches Zentrum und ist zusammenhängend, so gilt auch $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) = 0$, mithin $(\operatorname{ad} X = 0) \Rightarrow (X = 0)$, und ihre Liealgebra ist in der Tat kompakt. □

Satz 22.4.2.4 (**Kompakte Liegruppen mit trivialem Zentrum**). *Das Bilden der Liealgebra und das Bilden der Einskomponente der Automorphismengruppe liefern zueinander inverse Bijektionen auf Isomorphieklassen*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{zusammenhängende kompakte} \\ \textit{Liegruppen mit trivialem Zentrum} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{kompakte} \\ \textit{Liealgebren} \end{array} \right\} \\ K & \mapsto & \operatorname{Lie} K \\ (\operatorname{Aut} \mathfrak{k})^\circ & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{k} \end{array}$$

Beweis. Es gilt zu zeigen, daß die im Satz gegebene Abbidungsvorschrift in der Gegenrichtung eine Umkehrabbildung liefert. Ist $\mathfrak{k}$ eine kompakte Liealgebra, so ist $A := (\operatorname{Aut} \mathfrak{k})^\circ$ als abgeschlossene Untergruppe der orthogonalen Gruppe zur Killingform eine kompakte Liegruppe und wir erhalten Isomorphismen $\mathfrak{k} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_{\mathbb{R}} \mathfrak{k} \xleftarrow{\sim} \operatorname{Lie} A$ mit 22.4.2.5 und 22.1.2.23 oder 22.1.3.11. Die Komposition dieser Isomorphismen ist sogar ein Isomorphismus von Darstellungen von A, wenn man auf $\mathfrak{k}$ die offensichtliche Darstellung betrachtet und auf $\operatorname{Lie} A$ die adjungierte Darstellung. Damit zeigt 22.4.1.25, daß unser A triviales Zentrum hat und wir haben eine Abbildung $\mathfrak{k} \mapsto K_{\mathfrak{k}} := A = (\operatorname{Aut} \mathfrak{k})^\circ$ in die Gegenrichtung konstruiert und auch schon einen Isomorphismus $\mathfrak{k} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Lie} K_{\mathfrak{k}}$ angegeben. Ist andererseits K eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit trivialem Zentrum, so liefert die adjungierte Darstellung nach 22.4.1.25 eine Injektion $\operatorname{Ad} : K \hookrightarrow (\operatorname{Aut} \mathfrak{k})^\circ$ und damit einen Homöomorphismus auf das Bild dieser Injektion, das eine abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe mit Liealgebra

$\operatorname{ad}\mathfrak{k}$ sein muß. Nach 22.4.2.5 und 22.1.3.11 hat dies Bild damit dieselbe Liealgebra wie $(\operatorname{Aut}\mathfrak{k})^\circ$ und nach 22.1.2.22 ist unsere Injektion damit erst ein Isomorphismus von abstrakten Gruppen, dann aber nach 15.1.5.13 auch ein Isomorphismus von topologischen Gruppen, und dann nach 22.3.6.16 sogar ein Isomorphismus von Liegruppen. □

Lemma 22.4.2.5. *Für jede kompakte Liealgebra* $\mathfrak{k}$ *liefert* ad *einen Isomorphismus von Liealgebren* $\operatorname{ad} : \mathfrak{k} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}\mathfrak{k}$.

22.4.2.6. Dieser Beweis verwendet zwei Aussagen aus der allgemeinen Theorie der Lie-Algebren, die der Leser aber auch ohne alle Theorie leicht prüfen kann: Nach 24.1.7.11 ist die Restriktion der Killingform einer endlichdimensionalen Liealgebra auf ein Ideal die Killingform des besagten Ideals, und nach 24.1.6.10 ist das orthogonale Komplement eines Ideals unter der Killingform stets wieder ein Ideal.

Beweis. In der Tat ist ad im Fall einer kompakten Liealgebra sicher injektiv. Das einzige Problem ist nachzuweisen, daß diese Abbildung surjektiv ist. Da $\mathfrak{k} \cong \operatorname{ad}\mathfrak{k}$ kompakt ist, kann die Restriktion der Killingform κ_D von $D := \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}\mathfrak{k}$ auf $\operatorname{ad}\mathfrak{k}$ nicht entarten. Ist also $I \subset D$ das orthogonale Komplement von $\operatorname{ad}\mathfrak{k}$ unter der Killingform κ_D, so gilt $I \cap \operatorname{ad}\mathfrak{k} = 0$ und folglich $D = I \oplus \operatorname{ad}\mathfrak{k}$ mit Dimensionsbetrachtungen. Da nach 22.1.3.15 beide Ideale sind, folgt $[I, \operatorname{ad}\mathfrak{k}] = 0$, also $[\delta, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad}(\delta x) = 0\ \forall \delta \in I, x \in \mathfrak{k}$, also $\delta x = 0\ \forall \delta \in I, x \in \mathfrak{k}$ und damit $I = 0$ wie gewünscht. □

Übungen

Übung 22.4.2.7. Man zeige: Gegeben eine Liegruppe ist die Killingform auf ihrer Lie-Algebra invariant unter der adjungierten Darstellung.

Übung 22.4.2.8. Man erkläre, wie die adjungierte Darstellung von $\operatorname{SL}(2;\mathbb{R})$ zu einem Isomorphismus $\operatorname{SL}(2;\mathbb{R})/(\pm\operatorname{id}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{SO}(2,1)^+$ führt.

Übung 22.4.2.9. Man zeige: Gegeben eine kompakte Liegruppe K zerfällt ihre Liealgebra $\mathfrak{k}$ in die direkte Summe $\mathfrak{k} = [\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ der derivierten Liealgebra mit dem Zentrum. Hinweis: Unter der adjungierten Darstellung zerfällt $\mathfrak{k}$ nach 22.2.4.12 in eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen.

22.4.3 Von Liealgebren zu Liegruppen

Definition 22.4.3.1. Seien X ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum und $U \Subset X$ eine offene Teilmenge. Eine d**-dimensionale Distribution** D **auf** U ist eine Zuordnung, die jedem Punkt $p \in U$ einen d-dimensionalen Teilraum

$$D(p) \subset \vec{X}$$

zuordnet. Eine derartige Distribution heißt **glatt**, wenn es um jeden Punkt $q \in U$ eine offene Umgebung $V \Subset U$ und glatte Vektorfelder auf V gibt, deren Werte an jedem Punkt $p \in V$ den Raum $D(p)$ aufspannen. Eine glatte Distribution heißt **involutiv**, wenn diejenigen glatten Vektorfelder auf U, die an jeder Stelle p Werte in unserem Teilraum $D(p)$ annehmen, im Raum aller glatten Vektorfelder auf U eine Unter-Liealgebra bilden, wenn also in Formeln für je zwei glatte Vektorfelder $A, B : U \to \vec{X}$ mit $A_p, B_p \in D(p)\ \forall p \in U$ gilt $[A, B]_p \in D(p)\ \forall p \in U$.

22.4.3.2 (**Diskussion der Terminologie**). Die Bezeichnung „Distribution“ wird auch für gewisse verallgemeinerte Funktionen oder genauer verallgemeinerte Maße verwendet. Man lasse sich hierdurch nicht verwirren.

Satz 22.4.3.3 (**von Frobenius**). *Seien X ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum, $U \Subset X$ eine offene Teilmenge und D eine glatte d-dimensionale Distribution auf U. Genau dann ist D involutiv, wenn man für jeden Punkt $q \in U$ eine offene Umgebung $V \Subset U$ und darauf Koordinaten $y_1, \ldots, y_n$ so finden kann, daß für alle $p \in V$ gilt*

$$D(p) = \langle (\partial/\partial y_1)_p, \ldots, (\partial/\partial y_d)_p \rangle_{\mathbb{R}}$$

Beweis. Die einzige Schwierigkeit besteht darin, aus der Involutivität der Distribution die Existenz der fraglichen lokalen Koordinatensysteme zu folgern. Indem wir U notfalls verkleinern, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es glatte Vektorfelder $A^1, \ldots, A^d : U \to \vec{X}$ gibt, deren Werte an jeder Stelle $p \in U$ den Raum $D(p)$ aufspannen. Insbesondere hat dann A^1 keine Nullstelle und wir finden nach Satz 12.5.6.6 über die Normalform eines Vektorfelds ohne Nullstelle, wenn wir U notfalls noch weiter verkleinern, Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ auf U mit $A^1 = \partial/\partial x_1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir weiter annehmen, daß unsere Vektorfelder A^i für $i \geq 2$ keinen $\partial/\partial x_1$-Anteil haben alias in der Gestalt

$$A^i = a^i_2 \partial/\partial x_2 + \ldots + a^i_n \partial/\partial x_n$$

geschrieben werden können mit $a^i_j \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$. Zu den Feldern A^i für $2 \leq i \leq n$ gibt es unter dieser Annahme jeweils genau ein verwandtes Feld B^i auf der Hyperfläche $W := \{p \in U \mid x_1(p) = x_1(q)\}$. Da nach 22.3.7.12 verwandte Felder verwandte Lieklammern haben, erzeugen die B^i eine involutive $(d-1)$-Distribution auf W. Wenn wir W noch etwas verkleinern, so gibt es nach Induktionsannahme auf W Koordinaten $y_2, \ldots, y_n$ mit

$$\langle B^2_p, \ldots, B^d_p \rangle = \langle (\partial/\partial y_2)_p, \ldots, (\partial/\partial y_d)_p \rangle \qquad \forall p \in W$$

Verkleinern wir U hinreichend weiter, so liefert das Vergessen der ersten Koordinate eine glatte Abbildung $\pi : U \to W$, vermittels derer wir die Koordinaten

$y_2, \ldots, y_n$ zu Funktionen auf U zurückziehen können, die dann zusammen mit $y_1 := x_1$ ein Koordinatensystem einer Umgebung von q in U bilden. Das Vektorfeld $A^1 = (\partial/\partial x_1)$ bezüglich $(x_1, \ldots, x_n)$ ist dann auch das Vektorfeld $(\partial/\partial y_1)$ bezüglich $(y_1, \ldots, y_n)$. Es reicht nun zu zeigen, daß auf einer Umgebung von q das Anwenden jedes unserer Felder A^i auf jede der Funktionen y_j mit $d+1 \le j \le n$ die Nullfunktion liefert, denn dann tauchen in der Darstellung

$$A^i = b_1^i(\partial/\partial y_1) + b_2^i(\partial/\partial y_2) + \ldots + b_n^i(\partial/\partial y_n)$$

nur die $\partial/\partial y_j$ für $1 \le j \le d$ mit von Null verschiedenen Koeffizienten auf. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit zeigen wir das nur für $j = n$ und nehmen $d < n$ an. Für $i = 1$ ist die Aussage eh klar, aber dieser Fall kann auch ohne Schaden im folgenden Argument noch mitlaufen. Aus der Involutivität unserer Distribution folgt $[A^1, A^i] = \sum c_k^i A^k$ für geeignete glatte Funktionen c_k^i, und das liefert hinwiederum für die $(A^i(y_n))$ das System von Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial y_1}(A^i(y_n)) = \sum_{k=1}^{d} c_k^i A^k(y_n)$$

Schränken wir diese Identitäten von glatten Funktionen ein auf die Fasern von $\pi : U \to W$, so bedeuten sie homogene lineare Systeme von Differentialgleichungen von Funktionen in y_1. Wählen wir U so klein, daß alle Fasern von π zusammenhängend sind, so gibt es zu jedem Anfangswert nach 12.5.5.1 genau eine Lösung auf jeder Faser. Bei Punkten $p \in W$ ist aber nach Konstruktion der Koordinaten y_i der fragliche Wert $(A^i(y_n))(p) = (B^i(y_n))(p) = 0$, folglich bilden unsere Funktionen $A^i(y_n)$ auf jeder Faser die Null-Lösung und verschwinden also auf ganz U. □

Ergänzung 22.4.3.4. Unter einer **partiellen Unter-Liegruppe** einer Liegruppe verstehen wir wie in 22.1.3.5 eine Untermannigfaltigkeit $M \subset G$ derart, daß (1) die Identität zu M gehört und daß es (2) eine Umgebung U der Identität gibt mit den Eigenschaften $(U \cap M)(U \cap M) \subset M$ und $(U \cap M)^{-1} \subset M$.

Lemma 22.4.3.5 (Unter-Liealgebren und partielle Unter-Liegruppen). *Ist G eine Liegruppe und $\mathfrak{h} \subset \operatorname{Lie} G$ eine Lie-Unteralgebra, so ist für eine hinreichend kleine Umgebung $V \Subset \mathfrak{h}$ des Ursprungs das Bild $M = \exp(V) \subset G$ eine partielle Unter-Liegruppe.*

Beweis. Ist $\mathfrak{h} \subset \mathrm{T}_e G$ ein Untervektorraum, so ist für eine hinreichend kleine Umgebung $V \Subset \mathfrak{h}$ des Ursprungs das Bild $M = \exp(V) \subset G$ nach 22.3.6.8 schon mal eine Untermannigfaltigkeit und die linksinvarianten Vektorfelder auf G zu Elementen von $\mathfrak{h}$ erzeugen eine $(\dim \mathfrak{h})$-dimensionale linksinvariante Distribution

$D_\mathfrak{h}$ auf G. Ist $\mathfrak{h} \subset \mathrm{T}_e G$ eine Lie-Unteralgebra, so erkennt man leicht, daß diese Distribution auch involutiv und rechtsinvariant sein muß. Nun finden wir mithilfe des Frobenius-Theorems 22.4.3.3 eine offene Umgebung $W \Subset G$ des neutralen Elements und darauf ein Koordinatensystem $(x_1, \ldots, x_n) : W \xrightarrow{\sim} (-1,1)^n$ derart, daß das neutrale Element dem Nullvektor entspricht und daß für $d = \dim \mathfrak{h}$ gilt

$$D_\mathfrak{h}(p) = \langle (\partial/\partial x_1)_p, \ldots, (\partial/\partial x_d) \rangle \quad \forall p \in W$$

Ist dann $V \Subset \mathfrak{h}$ eine konvexe Umgebung des neutralen Elements mit der Eigenschaft $\exp(V)\exp(V) \subset W$, so behaupte ich

$$\exp(V)\exp(V) \subset \{p \in W \mid x_{d+1}(p) = \ldots = x_n(p) = 0\}$$

In der Tat, gehen wir für $X, Y \in V$ erst mit dem Weg $t \mapsto \exp(tX)$ vom neutralen Element nach $\exp X$ und dann mit dem Weg $s \mapsto \exp(X)\exp(sY)$ weiter nach $\exp(X)\exp(Y)$, so liegen die Geschwindigkeitsvektoren beider Wege an jeder Stelle in unserer Distribution $D_\mathfrak{h}$, was die Behauptung zeigt. Andererseits gibt es eine offene Umgebung $A \Subset W$ des neutralen Elements mit $\exp(V) \cap A = \{p \in A \mid x_{d+1}(p) = \ldots = x_n(p) = 0\}$. Wählen wir $U \Subset A$ hinreichend klein, so können wir sicher erreichen, daß gilt $(\exp(V) \cap U)(\exp(V) \cap U) \subset A$ und damit nach dem vorhergehenden $(\exp(V) \cap U)(\exp(V) \cap U) \subset \exp(V)$. Man erkennt damit, daß $\exp(V) \subset G$ in der Tat eine partielle Lie-Untergruppe ist. □

Satz 22.4.3.6 (Unter-Liegruppen zu Unter-Liealgebren). *Gegeben eine Liegruppe G und eine Unter-Liealgebra $\mathfrak{h} \subset \operatorname{Lie} G$ gibt es auf der von $(\exp \mathfrak{h})$ erzeugten Untergruppe $H = \langle \exp \mathfrak{h} \rangle \subset G$ genau eine Struktur als Liegruppe derart, daß die Injektion $H \hookrightarrow G$ ein glatter Gruppenhomomorphismus ist und ihr Differential beim neutralen Element einen Isomorphismus von Lie-Algebren $\operatorname{Lie} H \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$ induziert.*

22.4.3.7. Man beachte, daß wir keineswegs fordern, daß H die von G induzierte Topologie trägt. Das typische Gegenbeispiel in eine Gerade, die sich mit dichtem Bild und injektiv um einen zweidimensionalen Torus windet.

Beweis. Wir finden eine offene konvexe Umgebung des Ursprungs $V \Subset \mathfrak{h}$ wie in 22.4.3.5, so daß also $\exp(V)\exp(V)$ in einer Umgebung W des neutralen Elements mit der Distribution $D_\mathfrak{h}$ angepaßten Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n) : W \xrightarrow{\sim} (-1,1)^n$ landet. Dann versehen wir H mit der finalen Struktur eines $\mathbb{R}$-geringten Raums zur Familie der Abbildungen

$$(h\cdot) \circ \exp : V \to H$$

für $h \in H$. Der Rest des Arguments kann dem Leser überlassen bleiben. □

22.4.3.8. Ein topologischer Raum heißt **einfach zusammenhängend**, wenn er nicht leer ist und jede zusammenhängende Überlagerung unseres Raums im Sinne von 22.3.3.21 bereits ein Homöomorphismus ist. In **??** wird gezeigt, daß eine Mannigfaltigkeit genau dann einfach zusammenhängend ist, wenn sie wegweise einfach zusammenhängend ist im Sinne von 12.7.7.6.

Satz 22.4.3.9 (**Integration von Liealgebrenhomomorphismen**). *Sind G, H Liegruppen und ist G einfach zusammenhängend, so liefert das Differenzieren eine Bijektion*

$$\mathrm{GrpTop}(G, H) \quad \tilde{\to} \quad \mathrm{Lalg}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Lie}\, G, \mathrm{Lie}\, H)$$

zwischen der Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen von G nach H und der Menge aller Homomorphismen von reellen Liealgebren von $\mathrm{Lie}\, G$ *nach* $\mathrm{Lie}\, H$.

22.4.3.10. Die inverse Abbildung zur Bijektion in unserem Satz nennt man auch das **Integrieren**. Man würde etwa sagen, daß unter gewissen Umständen ein Homomorphismus von Liealgebren zu einem Homomorphismus von Liegruppen integriert werden kann. Den Spezialfall der Gruppe $G = \mathbb{R}$ haben wir bereits in 22.3.3.18 kennengelernt. Der Fall $G = S^1$, $H = \mathbb{R}$ zeigt, daß die Bedingung G einfach zusammenhängend für die Surjektivität im zweiten Teil unseres Satzes notwendig ist.

22.4.3.11. Der Satz impliziert insbesondere, daß zwei einfach zusammenhängende Liegruppen mit isomorphen Liealgebren bereits isomorph sein müssen: In der Tat läßt sich sogar jeder Isomorphismus ihrer Liealgebren zu einem Isomorphismus der Liegruppen selber integrieren.

Beweis. Daß das Differenzieren im Fall einer zusammenhängenden Liegruppe G stets eine Injektion liefert, haben wir bereits als Korollar 22.3.6.17 gezeigt. Es bleibt, die Surjektivität zu zeigen. Der Graph unseres Liealgebrenhomomorphismus ist offensichtlich eine Unterlieagebra $\mathfrak{l} \subset \mathrm{Lie}\, G \times \mathrm{Lie}\, H$. Nach 22.4.3.6 gilt es auf der Untergruppe $L := \langle \exp \mathfrak{l} \rangle \subset G \times H$ eine Struktur als Liegruppe derart, daß die die Injektion $L \hookrightarrow G \times H$ ein glatter Gruppenhomomorphismus ist und daß ihr Differential am neutralen Element einen Isomorphismus $\mathrm{Lie}\, L \tilde{\to} \mathfrak{l}$ induziert. Die Projektion $L \to G$ ist also auch glatt und ihr Differential am neutralen Element induziert einen Isomorphismus $\mathrm{Lie}\, L \tilde{\to} \mathrm{Lie}\, G$. Damit aber muß $L \to G$ nach 22.3.3.21 eine Überlagerung sein und, wenn G bereits einfach zusammenhängend ist, ein Homöomorphismus von topologischen Räumen und dann auch sofort ein Isomorphismus von Liegruppen. Das Inverse dieses Isomorphismus gefolgt von der Projektion von L auf H ist dann der gesuchte Homomorphismus von Liegruppen $G \to H$ mit vorgegebenem Differential beim neutralen Element. □

Ergänzung 22.4.3.12. Ich sollte diskutieren, unter welchen Umständen sich ein Liealgebrenhomomorphismus von der Liealgebra einer Liegruppe in die glatten

Vektorfelder einer Mannigfaltigkeit zu einer Gruppenoperation integrieren läßt. Das sollte doch wohl möglich sein, wenn alle Integralkurven der Vektorfelder aus dem Bild auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind und außerdem unsere Liegruppe einfach zusammenhängend ist.

Ergänzung 22.4.3.13 (**Liegruppen mit vorgegebener Liealgebra**). Man kann zeigen, daß sogar jede endlichdimensionale reelle Liealgebra zur Liealgebra einer einfach zusammenhängenden Liegruppe isomorph ist, vergleiche etwa [HN91]. Dieser Satz ist für uns jedoch im folgenden nicht relevant. Der Beweis geht aus von Satz **??**, der besagt, daß jede endlichdimensionale reelle Liealgebra zu einer Unteralgebra einer Liealgebra $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$ isomorph ist. Dann nimmt man schlicht die nach 22.4.3.6 zugehörige Untergruppe mit ihrer Struktur einer Liegruppe von ebendort und deren universelle Überlagerung 16.3.6.3 und macht sie mit 22.3.2.29 wieder zu einer Liegruppe.

Ergänzung 22.4.3.14 (**Integration als Linksadjungierter der Differentiation**). Leser, die mit der Begrifflichkeit adjungierter Funktoren vertraut sind, mögen Satz 22.4.3.9 über die Beziehung von Liegruppen zu endlichdimensionalen Liealgebren zusammen mit Bemerkung 22.4.3.13 auffassen als die Beschreibung eines Linksadjungierten desjenigen Funktors, der jeder Liegruppe ihre Liealgebra zuordnet: Dieser Linksadjungierte ordnet jeder endlichdimensionalen Liealgebra $\mathfrak{g}$ die einfach zusammenhängende Liegruppe G mit $\operatorname{Lie} G = \mathfrak{g}$ zu.

22.4.4 Quotienten und homogene Räume

Satz 22.4.4.1. *Jede abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe ist bereits eine Untermannigfaltigkeit und damit selbst eine Liegruppe.*

Beweis. Mutatis mutandis wie im Fall 22.1.2.3 von Matrixliegruppen. □

22.4.4.2. Die Liealgebra einer abgeschlossenen Untergruppe einer Liegruppe $H \mathrel{\mathbb{A}} G$ besteht nach 22.3.6.23 genau aus allen Tangentialvektoren am neutralen Element der ursprünglichen Liegruppe derart, daß der zugehörige Gruppenweg ganz in unserer Untergruppe verläuft. In Formeln gilt also

$$\operatorname{Lie} H = \{X \in \operatorname{Lie} G \mid \exp(\mathbb{R}X) \subset H\}$$

Satz 22.4.4.3 (**Quotientenkonstruktion**). *Seien G eine Liegruppe und $H \mathrel{\mathbb{A}} G$ eine abgeschlossene Untergruppe. So gilt:*

1. *Versehen mit der finalen Struktur eines $\mathbb{R}$-geringten Raums bezüglich der Projektion $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$ ist G/H eine glatte Mannigfaltigkeit;*

2. *Jeder Punkt von G/H besitzt eine offene Umgebung $U \Subset G/H$ derart, daß π über U einen glatten Schnitt besitzt, und für jeden solchen glatten Schnitt $s : U \to G$ ist die Abbildung $U \times H \to G$, $(x, h) \mapsto s(x)h$ eine offene Einbettung von glatten Mannigfaltigkeiten.*

22.4.4.4. Die zweite Eigenschaft des Quotienten besagt insbesondere, daß die Projektion $G \twoheadrightarrow G/H$ eine glatte Submersion im Sinne von 22.3.3.22 sein muß. In der Terminologie der Hauptfaserbündel, die wir in **??** einführen, besagt die zweite Eigenschaft genauer, daß G mit seiner H-Rechtsoperation und der offensichtlichen Projektion auf den Quotienten ein glattes H-Hauptfaserbündel auf G/H ist. Wir erinnern Teil zwei auch in der Sprechweise, die **Quotientenabbildung sei lokal trivial**.

Ergänzung 22.4.4.5 (**Motivation für abstrakte Mannigfaltigkeiten**). In meinen Augen ist eine der wesentlichen Motivationen für die Entwicklung der Begrifflichkeit abstrakter Mannigfaltigkeiten, daß es diese Sprache erlaubt, die Methoden der Analysis auf Quotientenräume der hier betrachteten Art auszudehnen. Stetigkeitsbetrachtungen für Quotienten gelingen bereits mit dem Formalismus der topologischen Räume, Differenzierbarkeitsbetrachtungen aber erst mit dem Formalismus der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. In diesem Sinne beginnt also hier die Belohnung für die Arbeit, die wir seit dem Beginn dieses Abschnitts in die Entwicklung der Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten gesteckt haben. Sie kulminiert im Beweis der Weyl'schen Charakterformel, bei dem Analysis auf Quotientenräumen maßgeblich eingeht.

Beweis. Nach 15.2.2.10 ist der Quotient mit seiner Quotiententopologie schon einmal Hausdorff. Wir wählen nun ein Vektorraumkomplement $V \subset \operatorname{Lie} G$ von $\operatorname{Lie} H$ und betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V \times H & \to & G \\ & (X, h) & \mapsto & (\exp X)h \end{array}$$

Nach Wahl von V ist ihr Differential in $(0, 1)$ bijektiv, folglich gibt es offene Umgebungen $A \Subset V$ von Null und $B \Subset H$ von 1 derart, daß φ eine offene Einbettung von glatten Mannigfaltigkeiten

$$\varphi : A \times B \hookrightarrow G$$

induziert. Ich will nun zeigen, daß A so zu einer offenen Umgebung $D \Subset V$ von Null verkleinert werden kann, daß φ sogar eine Injektion

$$\varphi : D \times H \hookrightarrow G$$

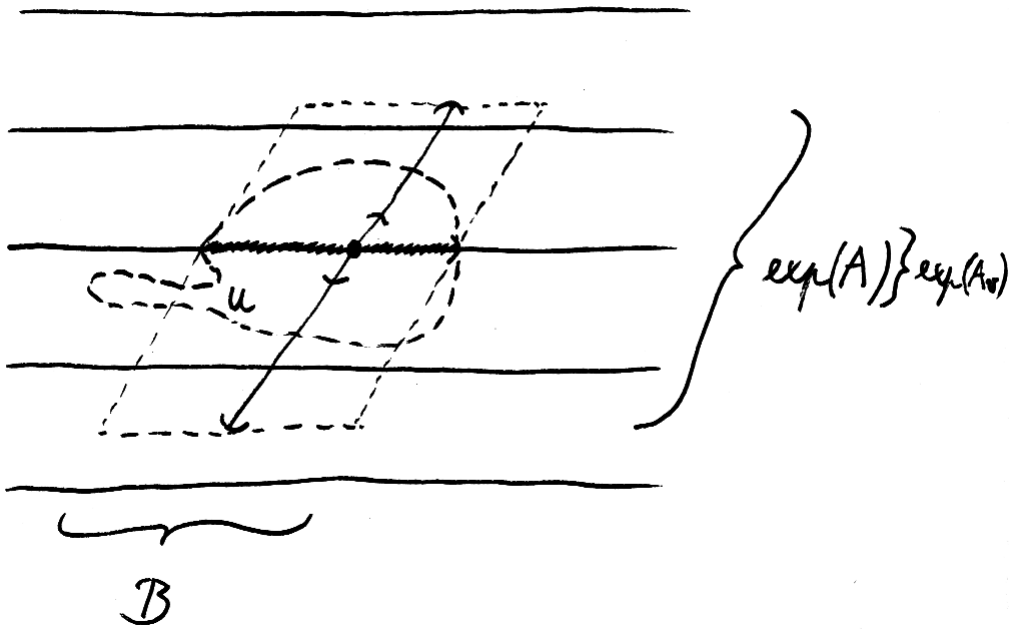


Illustration zum Beweis des Satzes über Quotientenmannigfaltigkeiten. Hier ist etwa $G \cong \mathbb{R}^2$ die Papierebene, das neutrale Element ist als fetter Punkt eingezeichnet, und $H \cong \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ bestünde aus lauter horizontalen Linien.

induziert. Ganz allgemein ist $\varphi(X,h) = \varphi(Y,k)$ gleichbedeutend zur Identität $\exp(Y)^{-1}\exp(X) = kh^{-1}$. Da H eine Mannigfaltigkeit ist für die induzierte Topologie, gibt es $U \Subset G$ mit $U \cap H = B$. Sicher können wir A so verkleinern zu D, daß für $X, Y \in D$ stets gilt $\exp(Y)^{-1}\exp(X) \in U$. Dann folgt aus $\varphi(X,h) = \varphi(Y,k)$ mit $X, Y \in D$ jedoch erst

$$\exp(Y)^{-1}\exp(X) = kh^{-1} \in U \cap H = B$$

und dann $\exp(X) = \exp(Y)kh^{-1}$ und daraus wegen der Injektivität von φ restringiert auf $A \times B$ wieder $(X,1) = (Y, kh^{-1})$ alias $(X,h) = (Y,k)$. Mithin induziert φ für unser so verkleinertes D eine Injektion $\varphi : D \times H \hookrightarrow G$. Mit Rechtsverschiebung durch $h \in H$ erkennen wir, daß ihr Differential an jeder Stelle bijektiv ist. Folglich ist diese Injektion eine offene Einbettung von glatten Mannigfaltigkeiten und liefert wegen 22.3.1.27 auch eine offene Einbettung von $\mathbb{R}$-geringten Räumen $D \hookrightarrow G/H$. Verknüpfen wir diese Einbettung mit den Automorphismen $(g\cdot) : G/H \to G/H$, so erkennen wir, daß G/H in der Tat eine glatte Mannigfaltigkeit ist, und folgern auch die zweite Aussage des Satzes sofort. □

22.4.4.6. Gegeben ein homogener Raum X einer Liegruppe G alias eine transitive G-Menge derart, daß die Standgruppe eines Punktes abgeschlossen ist, gibt es nach unserer Quotientenkonstruktion 22.4.4.3 genau eine Struktur als Mannigfaltigkeit auf X derart, daß für jeden Punkt $x \in X$ das Anwenden $G \to X$, $g \mapsto gx$ eine finale Abbildung ist.

22.4.4.7. Wichtige Mannigfaltigkeiten dieser Bauart sind die reellen und die komplexen **Graßmann-Mannigfaltigkeiten**

$$\mathrm{Gr}(m;V) := \{W \subset V \mid \dim W = m\}$$

für einen endlichdimensionalen reellen oder komplexen Vektorraum V sowie die reellen und die komplexen **Stiefel-Mannigfaltigkeiten** $\mathrm{V}_q(W)$ aller angeordneten Orthonormalsysteme mit q Vektoren in einem vorgegebenen reellen Skalarproduktraum W. Auf allen diesen Mannigfaltigkeiten, sofern sie nicht leer sind, operiert eine kompakte Gruppe transitiv. Mithin sind sie alle auch selbst kompakt.

Proposition 22.4.4.8. *Ist G eine Liegruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, so ist die Operation $G \times G/H \to G/H$ glatt.*

Erster Beweis. Das Produkt von Submersionen ist eine Submersion, das Produkt von Surjektionen ist eine Surjektion, und surjektive Submersionen sind final nach 22.3.3.22. Mithin ist $G \times G \twoheadrightarrow G \times G/H$ final und damit ist die Multiplikation $G \times G/H \to G/H$ glatt. □

Zweiter Beweis. Da Finalität lokal ist in der Basis nach 22.3.1.27, und da die Projektionen eines Produkts von Mannigfaltigkeiten auf seine Faktoren final sind, folgt aus der lokalen Trivialität des Quotientenmorphismus nach 22.4.4.3 unmittelbar, daß auch $G \times G \twoheadrightarrow G \times G/H$ final und damit die Multiplikation $G \times G/H \to G/H$ glatt ist. □

Definition 22.4.4.9. Eine Mannigfaltigkeit X mit einer transitiven Operation einer Liegruppe G derart, daß für jeden Punkt $x \in X$ die Operation einen Diffeomorphismus $G/G_x \xrightarrow{\sim} X$ induziert, heißt auch ein **homogener Raum** für unsere Liegruppe G. Zum Beispiel ist die Kugelschale ein homogener Raum für die Drehgruppe.

Proposition 22.4.4.10. *Eine Mannigfaltigkeit mit einer transitiven Operation einer Liegruppe ist stets ein homogener Raum für besagte Liegruppe.*

22.4.4.11. Beim Beweis dieser Proposition geht wesentlich ein, daß wir bei unserer Definition einer Liegruppe in 22.3.2.19 mit gefordert hatten, daß ihre Topologie abzählbar basiert sein soll.

Beweis. Sei $G \times X \to X$ unser homogener Raum. Gegeben $x \in X$ liefert das Anwenden auf x wegen der universellen Eigenschaft des Quotienten eine glatte bijektive Abbildung $G/G_x \to X$ vom Quotienten nach der Standgruppe von x in unseren homogenen Raum. Nach Übung 22.3.6.24 ist deren Differential injektiv beim Bild des neutralen Elements in G/G_x, und mit Verschieben folgt, daß es überall injektiv sein muß. Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, daß es überall bijektiv sein muß. In allen Anwendungen, die mir einfallen, ist nun die Identität

$$\dim G = \dim X + \dim G_x$$

eh klar und der Rest des Beweises damit überflüssig. Auch diese Identität kann man jedoch aus unseren Annahmen folgern, wenn man sich erinnert, daß wir ja von unseren Liegruppen fordern, daß ihre Topologie abzählbar basiert ist. Gälte nun unsere Identität nicht, so hätten ja die Tangentialräume von G/G_x eine Dimension $k < \dim X := n$ und nach Übergang zu Karten würde folgen, daß es eine offene Teilmenge $W \Subset \mathbb{R}^n$ gäbe und eine abzählbare Familie (U_ν, φ_ν) mit $U_\nu \Subset \mathbb{R}^k$ und $\varphi_\nu : U_\nu \to W$ stetig differenzierbar derart, daß die Bilder $\varphi_\nu(U_\nu)$ bereits ganz W überdecken. Das ist jedoch unmöglich, da diese Bilder nach 13.1.8.5 alle Lebesgue-Nullmengen sind. □

Ergänzung 22.4.4.12. Mit etwas mehr Mühe kann man im vorhergehenden Beweis von 22.4.4.10 die Argumentation mit dem Lebesgue-Integral auch durch eine Argumentation mit dem dem Baire'schen Kategoriensatz 13.4.2.5 ersetzen.

Beispiel 22.4.4.13. Versieht man $\mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie, so erhält man eine „nicht abzählbar basierte nulldimensionale Liegruppe“ $\mathbb{R}_\delta$. Die Identität $\mathbb{R}_\delta \to \mathbb{R}$ ist dann ein bijektiver stetiger Gruppenhomomorphismus, aber kein Isomorphismus von Mannigfaltigkeiten.

Vorschau 22.4.4.14. Die offensichtliche Operation von $\mathrm{SO}(n+1)$ auf der Sphäre S^n ist transitiv für $n \geq 1$ und die Standgruppe des ersten Vektors der Standardbasis ist offensichtlich die Gruppe von Blockmatrizen $\mathrm{diag}(1, \mathrm{SO}(n))$. Wir identifizieren sie kurzerhand mit $\mathrm{SO}(n)$ und erhalten dann nach 22.4.4.10 einen Isomorphismus

$$\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) \xrightarrow{\sim} S^n$$

Die lange exakte Homotopiesequenz **??** dieses Faserbündels liefert uns dann für $n \geq 3$ Isomorphismen $\pi_1(\mathrm{SO}(n)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathrm{SO}(n+1))$. Nach 22.1.6.2 wissen wir bereits, daß $\mathrm{SO}(3)$ durch die Sphäre S^3 zweifach überlagert wird. Da diese Sphäre einfach zusammenhängend ist, folgt mit 16.4.5.11 unmittelbar $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und induktiv $\pi_1(\mathrm{SO}(n)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für $n \geq 3$. Nach 16.5.2.5 besitzt die universelle Überlagerung von $\mathrm{SO}(n)$ zu vorgegebenem Urbild des neutralen Elements genau eine stetige Verknüpfung mit diesem Element als neutralem Element, für die die Überlagerungsabbildung ein Homomorphismus von Magmas ist, und die universelle Überlagerung wird so selbst eine topologische Gruppe. Man sieht leicht, daß diese Struktur zur Struktur einer Liegruppe erweitert werden kann, und daß es nur genau eine derartige Erweiterung gibt, für die die Überlagerungsabbildung glatt ist. Für $n \geq 3$ heißt die universelle Überlagerung von $\mathrm{SO}(n)$ mit dieser Struktur einer Liegruppe die **Spin-Gruppe** $\mathrm{Spin}(n)$. Wir geben eine konkrete Konstruktion dieser Gruppe in 24.4.7.21.

Vorschau 22.4.4.15. Die offensichtliche Operation von $\mathrm{SU}(n+1)$ auf der Sphäre S^{2n+1} ist transitiv für $n \geq 1$ und die Standgruppe des ersten Vektors der Standardbasis ist offensichtlich die Gruppe von Blockmatrizen $\mathrm{diag}(1, \mathrm{SU}(n))$. Wir identifizieren sie kurzerhand mit $\mathrm{SU}(n)$ und erhalten nach 22.4.4.10 einen Isomorphismus

$$\mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n) \xrightarrow{\sim} S^{2n+1}$$

Die lange exakte Homotopiesequenz **??** dieses Faserbündels liefert uns dann für $n \geq 1$ Isomorphismen $\pi_1(\mathrm{SU}(n)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathrm{SU}(n+1))$. Das zeigt induktiv, daß die Gruppen $\mathrm{SU}(n)$ alle einfach zusammenhängend sind. Mit der Iwasawa-Zerlegung 4.1.11.29 folgt, daß auch die Gruppen $\mathrm{SL}(n; \mathbb{C})$ einfach zusammenhängend sind.

22.4.4.16 (**Ebene Geometrien**). Unter einer **ebenen Geometrie** verstehen wir eine zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit E mit einer ausgezeichneten Gruppe von Automorphismen K genannt **Kongruenzen** derart, daß es für je zwei Paare (x, S) und (y, T) bestehend aus einem Punkt und einem Strahl

seines Tangentialraums genau zwei Kongruenzen gibt, die das eine Paar in das andere Paar überführen. Wir zeigen, daß es bis auf Isomorphismus genau drei ebene Geometrien gibt: Die **euklidische Ebene**, die Kugelschale alias **shpärische Geometrie** $S^2 = \mathrm{O}(3)/\mathrm{O}(2)$, und das Hyperboloid alias die **hyperbolische Geometrie** $\mathrm{O}(2,1)^+/\mathrm{O}(2)$. Dazu betrachten wir das Strahlbündel $\mathrm{T}_1 E$ von E alias den Quotient des Komplements des Nullschnitts im Tangentialbündel nach $\mathbb{R}_{>0}$. Offensichtlich ist es eine Mannigfaltigkeit, auf der die Untergruppe $K^+ \subset K$ der orientierungserhaltenden Kongruenzen frei und transitiv operiert. Man kann nun zeigen, daß die so von K^+ geerbte Struktur einer Mannigfaltigkeit unser K^+ zu einer Liegruppe macht. Dann ist also $G := K^+$ eine dreidimensionale zusammenhängende Liegruppe mit $\mathrm{SO}(2)$ als abgeschlossener Unterguppe und wir erhalten $E \cong G/\mathrm{SO}(2)$. Die Liealgebra $\mathfrak{g} := \operatorname{Lie} G$ ist dann eine dreidimensionale reelle Liealgebra mit einer Operation von $S^1 \cong \mathrm{SO}(2)$, die als reelle Darstellung von S^1 isomorph ist zur Summe $\mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$ der Einsdarstellung mit der offensichtlichen Darstellung. Wir finden also eine Basis h, x, y von $\mathfrak{g}$ mit $[h,x] = y$ und $[h,y] = -x$ und dann notwendig $[x,y] = \alpha h$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Durch Umskalieren können wir $\alpha \in \{1, 0, -1\}$ erreichen. Dann erhalten wir $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(2;\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$ beziehungsweise $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}(3;\mathbb{R})$ und landen nach einiger weiterer Argumentation bei unseren drei ebenen Geometrien.

Übungen

Übung 22.4.4.17. Ist G eine Liegruppe und $N \subset G$ ein abgeschlossener Normalteiler, so ist auch G/N eine Liegruppe. Hinweis: Man orientiere sich an 22.4.4.8.

Übung 22.4.4.18. Sind $G \supset H \supset K$ eine Liegruppe mit abgeschlossenen Untergruppen, so ist die offensichtliche Abbildung $G/K \twoheadrightarrow G/H$ eine glatte Submersion. Ist K ein Normalteiler in H, so trägt G/K zusätzlich eine glatte Rechtsoperation von H/K. Später wird klar sein, daß wir so ein (H/K)-Hauptfaserbündel erhalten.

Übung 22.4.4.19. Man zeige für einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V der Dimension n, daß die Dimension der Graßmann'schen seiner m-dimensionalen Teilräume gegeben wird durch die Formel

$$\dim(\mathrm{Gr}(m;V)) = m(n-m)$$

Übung 22.4.4.20. Ist $\varphi : G \to H$ ein stetiger Homomorphismus von Liegruppen mit abgeschlossenem Bild, so induziert φ einen Isomorphismus von Liegruppen $(G/\ker\varphi) \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}\varphi$. Hinweis: 22.4.4.10. Auch hier ist wesentlich, daß G abzählbar basiert ist.

Ergänzende Übung 22.4.4.21. Gegeben $G \supset K$ eine Liegruppe mit einer kompakten Untergruppe zeige man, daß die Abbildung $G \twoheadrightarrow G/K$ eigentlich ist.

Übung 22.4.4.22. Gegeben ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum V und ein Liegruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{PGL}(V)$ erhalten wir durch Bilden des Faserprodukts mit $\mathrm{SL}(V) \to \mathrm{PGL}(V)$ eine Hochhebung zu einem Liegruppenhomomorphismus $\tilde{G} \to \mathrm{SL}(V)$ für eine Überlagerung $\tilde{G} \twoheadrightarrow G$.

22.4.5 Abelsche Liegruppen

Lemma 22.4.5.1 (Charakterisierungen abelscher Liegruppen). *Für eine zusammenhängende Liegruppe sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Liegruppe ist abelsch;*
2. *Ihre Liealgebra ist abelsch;*
3. *Die Exponentialabbildung definiert einen Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der Liealgebra in unsere Liegruppe;*
4. *Die Exponentialabbildung definiert einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der Liealgebra in unsere Liegruppe.*

Beweis. Sei G unsere Liegruppe. Wir erinnern das Korollar 22.3.6.17, wonach ein Homomorphismus von einer zusammenhängenden Liegruppe in eine weitere Liegruppe bereits durch sein Differential beim neutralen Element eindeutig festgelegt wird. Wir beginnen mit $(1) \Leftrightarrow (2)$ und bemerken dazu, daß für jede zusammenhängende Liegruppe gilt

$$\begin{array}{rcll} G \text{ abelsch} & \Leftrightarrow & \operatorname{Int} g = \mathrm{id} : G \to G & \forall \quad g \in G \\ & \Leftrightarrow & \operatorname{Ad} g = \mathrm{id} : \operatorname{Lie} G \to \operatorname{Lie} G & \forall \quad g \in G \\ & \Leftrightarrow & \operatorname{ad} X = 0 : \operatorname{Lie} G \to \operatorname{Lie} G & \forall \quad X \in \operatorname{Lie} G \\ & \Leftrightarrow & [X, Y] = 0 & \forall \quad X, Y \in \operatorname{Lie} G \end{array}$$

Hier haben wir zweimal das Korollar 22.3.6.17 angewendet. Zum Nachweis der Implikation $(1) \Rightarrow (3)$ bemerken wir, daß für abelsches G und $X, Y \in \operatorname{Lie} G$ beliebig ja auch $t \mapsto \exp(tX)\exp(tY)$ ein Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \to G$ ist. Berechnen wir seine Geschwindigkeit bei $t = 0$, so folgt $\exp(tX)\exp(tY) = \exp(t(X+Y))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und damit $\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$. Die Exponentialabbildung ist also ein Gruppenhomomorphismus. Ihr Bild $\exp(\operatorname{Lie} G)$ ist dann eine Untergruppe von G, die offen ist, da sie eine offene Umgebung des neutralen Elements umfaßt. Wegen G zusammenhängend folgt daraus $\exp$ surjektiv, und das zeigt $(3) \Rightarrow (4)$. Schließlich ist $(4) \Rightarrow (1)$ offensichtlich. $\square$

Proposition 22.4.5.2 (Abelsche Liegruppen). *Jede zusammenhängende abelsche Liegruppe ist isomorph zu genau einer Gruppe der Gestalt*

$$S^1 \times \ldots \times S^1 \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$$

Beweis. Sei G unsere Liegruppe. Nach 22.4.4.20 und 22.4.5.1 induziert die Exponentialabbildung einen Diffeomorphismus $\operatorname{Lie} G/\ker(\exp) \xrightarrow{\sim} G$ und der Kern $\ker(\exp) \subset \operatorname{Lie} G$ ist eine diskrete Untergruppe. Nun kann man die Klassifikation 22.4.5.5 diskreter Untergruppen endlichdimensionaler reeller Vektorräume anwenden, die im Anschluß diskutiert wird. □

Ergänzung 22.4.5.3. Wir hätten diesen Satz auch für Matrixliegruppen bereits formulieren und beweisen können. Dennoch sind dieser Satz und sein Beweis in meinen Augen eine gute Illustration für die Kraft unserer neuen abstrakteren Methoden.

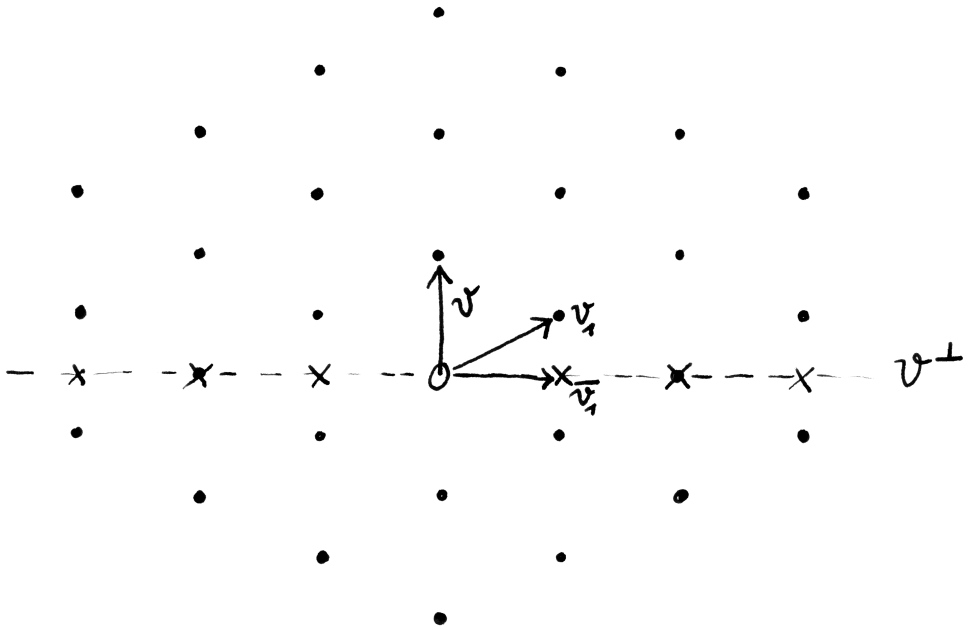
22.4.5.4. Eine Untergruppe einer topologischen Gruppe ist diskret genau dann, wenn es eine Umgebung des neutralen Elements gibt, die unsere Untergruppe nur im neutralen Element trifft. Eine diskrete Untergruppe der additiven Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist abgeschlossen, da für eine beliebig vorgegebene Norm jede Cauchy-Folge in unserer diskreten Untergruppe bis auf endlich viele Glieder konstant sein muß.

Satz 22.4.5.5 (**Diskrete Untergruppen reeller Vektorräume**). *Eine Untergruppe der additiven Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist diskret genau dann, wenn sie als Untergruppe von einer linear unabhängigen Teilmenge unseres Vektorraums erzeugt wird.*

Beweis. Das Gruppenerzeugnis einer linear unabhängigen Teilmenge ist offensichtlich diskret. Um auch die andere Implikation zu zeigen, versehen wir unseren endlichdimensionalen reellen Vektorraum V mit einem Skalarprodukt $(\ ,\ )$ und argumentieren durch Induktion über die Dimension. Nach 15.1.5.6 trifft unsere diskrete Untergruppe $L \subset V$ jedes Kompaktum in einer endlichen Menge. Ist L trivial, so ist der Satz klar. Sonst finden wir in $L\backslash 0$ einen Vektor v kürzester Länge. Wir bezeichnen dann mit $p : V \twoheadrightarrow v^\perp$ die orthogonale Projektion auf das orthogonale Komplement von v und behaupten, daß auch $p(L)$ diskret ist. Sonst finden wir nämlich in $p(L)\backslash 0$ Vektoren beliebig kleiner Länge. Gegeben $a \in p(L)$ hat jedoch sein Urbild in L die Gestalt

$$p^{-1}(a) \cap L = a + cv + \mathbb{Z}v \qquad \text{mit } |c| \le 1/2$$

Insbesondere hat $a + cv$ die quadrierte Länge $\|a + cv\|^2 \le \|a\|^2 + \frac{1}{4}\|v\|^2$, und für $0 < \|a\| < \frac{1}{2}$ erhielten wir Vektoren in $L\backslash 0$, die noch kürzer wären als v. Dieser Widerspruch zeigt, daß $p(L)$ diskret liegen muß. Nach Induktionsannahme finden wir also linear unabhängige $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_r \in v^\perp$, die $p(L)$ erzeugen. Sind dann $v_i \in L$ Urbilder der $\bar{v}_i$, so sind $v, v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig in V und erzeugen L. □



Die fetten Punkte stellen Elemente einer diskreten Untergruppe der Verschiebungsgruppe der Papierebene dar, bezüglich des durch einen Kringel markierten Ursprungs. Die Kreuzchen stellen Elemente der Projektion $p(L)$ unseres Gitters L auf den als gestrichelte Linie eingezeichneten Teilraum $v^\perp$.

Definition 22.4.5.6. Eine topologische Gruppe heißt ein **Torus** oder präziser ein **kompakter Torus** genau dann, wenn sie isomorph ist zu einem Produkt von endlich vielen Kopien der Kreislinie S^1. Die Zahl der benötigten Kopien ist nach 22.3.6.16 wohlbestimmt und heißt der **Rang** unseres Torus.

22.4.5.7. Nach der Klassifikation in 22.4.5.2 zusammenhängender abelscher Liegruppen kann man Tori charakterisieren als abelsche kompakte zusammenhängende Liegruppen.

Definition 22.4.5.8. Eine topologische Gruppe heißt **topologisch zyklisch** genau dann, wenn es ein Element darin gibt, dessen Erzeugnis dicht liegt. Solch ein Element heißt dann ein **topologischer Erzeuger**.

22.4.5.9. Nach 15.2.1.13 ist jede topologisch zyklische topologische Gruppe kommutativ, da sie eben eine dichte kommutative Untergruppe hat.

Proposition 22.4.5.10. *Jeder kompakte Torus ist topologisch zyklisch.*

22.4.5.11. In 22.4.5.13 geben wir sogar die vollständige Klassifikation aller topologisch zyklischen Liegruppen, aber für den weiteren Fortgang der Theorie ist das nicht mehr von Belang.

Beweis. Wir zeigen genauer, daß für $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ gleichbedeutend sind:

(1) $\bar{a} \in \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ ist kein topologischer Erzeuger;

(2) Die Elemente $1, a_1, \ldots, a_k$ sind linear abhängig über $\mathbb{Q}$;

(3) Es gibt einen surjektiven stetigen Homomorphismus von Liegruppen $\varphi : \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k \twoheadrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit $\varphi(\bar{a}) = \bar{0}$.

Hier ist $(3) \Rightarrow (1)$ offensichtlich und $(1) \Rightarrow (3)$ ergibt sich, da der Quotient nach dem Abschluß des Erzeugnisses von $\bar{a}$ ja nach 22.4.5.2 ein nichttrivialer Torus sein muß. Weiter muß jeder Morphismus wie in (3) die Gestalt

$$\overline{(b_1, \ldots, b_k)} \mapsto \overline{n_1 b_1 + \ldots + n_k b_k}$$

haben für geeignete $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$, nicht alle Null wegen der Surjektivität, und $\varphi(\bar{a}) = \bar{0}$ bedeutet dann $n_1 a_1 + \ldots + n_k a_k = n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ und damit (2). Dasselbe Argument zeigt aber auch $(2) \Rightarrow (3)$. Folglich ist in der Tat jeder kompakte Torus topologisch zyklisch. $\square$

Ergänzung 22.4.5.12. Im Verlauf des vorhergehenden Beweises haben wir unter anderem gezeigt, daß für $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ genau dann $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}^k$ in $\mathbb{R}^k$ dicht liegt, wenn $1, a_1, \ldots, a_k$ linear unabhängig sind über $\mathbb{Q}$. Der Beweis dieser Aussage im Rahmen der Lie-Theorie scheint mir besonders transparent.

Lemma 22.4.5.13 (**Topologisch zyklische kompakte Liegruppen**). *Eine kompakte Liegruppe ist topologisch zyklisch genau dann, wenn sie abelsch ist mit zyklischer Komponentengruppe.*

22.4.5.14. Das Lemma wird in 22.5.5.11 noch gebraucht, wo wir zeigen, daß der Zentralisator eines Torus in einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe stets zusammenhängend ist. Stärkere Aussagen, die im folgenden nicht mehr gebraucht werden, faßt dann der anschließende Satz 22.4.5.15 zusammen.

Beweis. Jede topologisch zyklische Gruppe ist abelsch nach 15.2.1.13 und jeder Quotient einer topologisch zyklischen Gruppe ist offensichtlich auch topologisch zyklisch. Es bleibt zu zeigen, daß jede kompakte abelsche Liegruppe mit zyklischer Komponentengruppe topologisch zyklisch ist. Sei dazu G unsere Gruppe und $g \in G$ ein Repräsentant eines Erzeugers der Komponentengruppe G/G°. Diese Komponentengruppe ist endlich, sagen wir von der Ordnung $|G/G^\circ| = m$. Es folgt $g^m \in G^\circ$, und da G° ein Torus ist, finden wir $a \in T$ mit $a^m = g^m$. Indem wir g durch $a^{-1}g$ ersetzen, dürfen wir also $g^m = 1$ annehmen, und dann erhalten wir einen Isomorphismus $G^\circ \times (G/G^\circ) \xrightarrow{\sim} G$ vermittels der Abbildungsvorschrift $(b, \bar{g}^n) \mapsto bg^n$. Ein topologischer Erzeuger dieses Produkts ist aber offensichtlich jedes Paar $(c, \bar{g})$, bei dem wir c so wählen, daß c^m ein topologischer Erzeuger von G° wird. Das schließlich ist nach 22.4.5.10 stets möglich. □

Satz 22.4.5.15 (**Klassifikation topologisch zyklischer Liegruppen**). *Jede topologisch zyklische Liegruppe ist entweder isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder aber isomorph zu $S^1 \times \ldots \times S^1 \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für eine wohlbestimmte Zahl $r \geq 0$ von Kopien von S^1 und ein wohlbestimmtes $m \geq 1$.*

Beweis. Der kompakte Fall wurde bereits im Beweis von Lemma 22.4.5.13 vollständig geklärt. Es bleibt zu zeigen, daß jede nichtkompakte topologisch zyklische Liegruppe isomorph ist zu $\mathbb{Z}$. Nach Übung 22.4.5.20 ist unsere Gruppe ja isomorph zum Produkt ihrer Komponentengruppe mit ihrer Einskomponente. Die Einskomponente muß ein kompakter Torus sein, da unsere Gruppe sonst einen surjektiven Gruppenhomomorphismus auf die nicht topologisch zyklische Gruppe $\mathbb{R}$ hätte. Desgleichen muß die Komponentengruppe zyklisch sein, und im nichtkompakten Fall muß die Komponentengruppe dann natürlich unendlich zyklisch sein. Es ist jedoch leicht zu sehen, daß das Produkt eines nichttrivialen kompakten Torus mit $\mathbb{Z}$ nicht topologisch zyklisch sein kann. □

Übungen

Übung 22.4.5.16. Eine diskrete Untergruppe einer Hausdorffgruppe ist stets abgeschlossen. Hinweis: Sonst gäbe es einen Punkt außerhalb unserer Untergruppe derart, daß jede seiner Umgebungen Punkte aus besagter Untergruppe enthält.

Übung 22.4.5.17. Man bestimme alle stetigen Gruppenhomomorphismen zwischen zwei beliebigen zusammenhängenden abelschen Liegruppen.

Ergänzende Übung 22.4.5.18 (**Untergruppen reeller Vektorräume**). Eine Untergruppe L der additiven Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums V ist abgeschlossen genau dann, wenn es in V eine linear unabhängige Familie von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ gibt und ein k mit $0 \leq k \leq n$ und

$$L = \mathbb{R}v_1 + \ldots + \mathbb{R}v_k + \mathbb{Z}v_{k+1} + \ldots + \mathbb{Z}v_n$$

Hinweis: Eine abgeschlossene Untergruppe ist stets glatt und ihre Einskomponente L° ist abgeschlossen. Da V/L° die Quotiententopologie trägt, ist das Bild von L darin auch abgeschlossen. Man mag auch elementar ohne alle Lietheorie mit 22.1.2.25 und 22.4.5.5 argumentieren.

Ergänzende Übung 22.4.5.19. Die diskreten Untergruppen von $\mathbb{C}^\times$ sind genau die Gruppen, die von einer Einheitswurzel oder einer invertierbaren komplexen Zahl außerhalb des Einheitskreises oder je einem Element dieser beiden Arten erzeugt werden.

Übung 22.4.5.20 (**Struktur abelscher Liegruppen**). Man zeige, daß jede abelsche Liegruppe G isomorph ist zum Produkt ihrer Einskomponente G° mit ihrer Komponentengruppe G/G°, einer diskreten Gruppe. Hinweis: Man beschränke sich der Einfachkeit halber auf den Fall, daß die Komponentengruppe endlich erzeugt ist. Wenn die entsprechenden Vorkenntnisse vorhanden sind, kann man sehr elegant mit 17.6.6.5 und 17.6.5.6 argumentieren: Die exakte Sequenz $G^\circ \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/G^\circ$ muß spalten, da G° divisibel und mithin eine injektive abelsche Gruppe ist.

22.4.6 Morphismen von Tori

22.4.6.1. Die Menge der stetigen Gruppenhomomorphismen von einer topologischen Gruppe G nach S^1 notieren wir

$$\mathfrak{X}(G) := \mathrm{GrpTop}(G, S^1)$$

und versehen sie wie in 13.3.10.21 mit der kompakt-offenen Topologie. Offensichtlich bildet $\mathfrak{X}(G)$ eine Untergruppe der Einheitengruppe des Rings $\mathcal{C}(G)$ mit seiner punktweisen Verknüpfung. Wir notieren jedoch die Verknüpfung in $\mathfrak{X}(G)$ additiv in der Hoffnung, daß das anschaulicher wirkt. Elemente $\lambda \in \mathfrak{X}(G)$ schreiben wir in der Form e^λ, wenn wir sie als komplexwertige Funktionen auffassen und insbesondere, wenn wir sie als komplexwertige Funktionen addieren wollen, so daß also im Ring $\mathcal{C}(G)$ gilt $\mathrm{e}^{\lambda+\mu} = \mathrm{e}^\lambda \mathrm{e}^\mu$. Gegeben ein stetiger Homomorphismus topologischer Gruppen $\varphi : G \to H$ induziert das Vorschalten von φ

in der Gegenrichtung einen stetigen Homomorphismus abelscher topologischer Gruppen

$$(\circ\varphi) : \mathfrak{X}(H) \to \mathfrak{X}(G)$$

22.4.6.2. Ist G eine Liegruppe, so liefert für jeden stetigen Gruppenhomomorphismus $\chi : G \to S^1$, ja sogar für jeden stetigen Gruppenhomomorphismus $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$, das Differential gefolgt von der offensichtlichen Identifikation $\mathrm{T}_1\mathbb{C}^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathrm{d}_e\chi : \operatorname{Lie} G \to \mathbb{C}$. Dann liefert er mit der universellen Eigenschaft der Komplexifizierung auch eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\mathrm{d}_e\chi : \operatorname{Lie}_\mathbb{C} G \to \mathbb{C}$, also ein Element $\mathrm{d}_e\chi \in (\operatorname{Lie}_\mathbb{C} G)^*$ des Dualraums. Nach der Produktregel ist $\chi \mapsto \mathrm{d}_e\chi$ ein Gruppenhomomorphismus $\mathfrak{X}(G) \to (\operatorname{Lie}_\mathbb{C} G)^*$, und man sieht auch leicht, daß er natürlich ist in G, daß also für jeden Homomorphismus von Liegruppen $\varphi : G \to H$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(H) & \to & (\operatorname{Lie}_\mathbb{C} H)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}(G) & \to & (\operatorname{Lie}_\mathbb{C} G)^* \end{array}$$

kommutiert, mit $(\circ\varphi)$ und dem Transponierten des komplexifizierten Differentials $(\mathrm{d}\varphi)^\top$ in den Vertikalen. Ist G zusammenhängend, so liefert die Vorschrift $\chi \mapsto \mathrm{d}_e\chi$ sogar eine Injektion

$$\mathfrak{X}(G) \hookrightarrow (\operatorname{Lie}_\mathbb{C} G)^*$$

Es ist dann üblich, diese Injektion schlicht als Einbettung einer Teilmenge zu denken und zu schreiben und insbesondere $\mathrm{d}_e\chi$ auch schlicht χ zu notieren.

Ergänzung 22.4.6.3. In der Fouriertheorie hatten wir für verschiedene kommutative topologische Gruppen auch die Notation $\operatorname{GrpTop}(G, S^1) = \hat{G}$ eingeführt und diese Menge als die Menge der unitären Charaktere von G bezeichnet. Im nichtkommutativen Fall meint $\hat{G}$ jedoch meist die Menge der Isomorphieklassen irreduzibler unitärer Darstellungen, und im Fall nichtkommutativer Gruppen sind diese keineswegs alle eindimensional.

Lemma 22.4.6.4. *Ist G eine topologische Gruppe und T ein Torus, so induziert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion zwischen den stetigen Gruppenhomomorphismen von $G \to T$ und den Morphismen abelscher Gruppen $\mathfrak{X}(T) \to \mathfrak{X}(G)$ in die Gegenrichtung, in Formeln eine Bijektion*

$$\mathfrak{X} : \operatorname{GrpTop}(G, T) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ab}(\mathfrak{X}(T), \mathfrak{X}(G))$$

Beweis. Gilt die Aussage für zwei Tori T_1 und T_2, so auch für ihr Produkt $T := T_1 \times T_2$. Es reicht also, den Fall $T = S^1$ zu prüfen, und der ist evident. $\square$

Ergänzung 22.4.6.5. Sind G und H abelsche lokal kompakte Hausdorff'sche topologische Gruppen, so erhalten wir in derselben Weise eine Bijektion

$$\mathrm{GrpTop}(G, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GrpTop}(\hat{H}, \hat{G})$$

mit $\hat{G} = \mathfrak{X}(G)$ der „Pontrjagin-dualen" Gruppe.

Übungen

Übung 22.4.6.6 (**Kompakte abelsche Liegruppen**). Der Funktor $\mathfrak{X}$ liefert sogar eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Kompakte abelsche} \\ \text{Liegruppen} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Endlich erzeugte abelsche} \\ \text{diskrete Gruppen} \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}} \\ Z & \mapsto & \mathfrak{X}(Z) \end{array}$$

Um das zu sehen, zeige man die Aussage des Lemmas 22.4.6.4 allgemeiner für H eine nicht notwendig zusammenhängende kompakte abelsche Liegruppe. Hinweis: 22.4.5.20. Des weiteren prüfe man für jede zyklische, ja für jede endliche kommutative Gruppe E, daß es Isomorphismen $E \cong \mathfrak{X}(E)$ gibt. Diese sind jedoch im allgemeinen unkanonisch.

Übung 22.4.6.7. Man zeige, daß eine Sequenz von kompakten abelschen Gruppen $T' \to T \to T''$ exakt ist genau dann, wenn die auf den Charaktergruppen induzierte Sequenz $\mathfrak{X}(T'') \to \mathfrak{X}(T) \to \mathfrak{X}(T')$ exakt ist. Hinweis: 22.4.6.6.

22.5 Struktur kompakter Liegruppen

22.5.1 Maximale Tori in kompakten Liegruppen

Lemma 22.5.1.1. *Seien $K \supset N$ eine kompakte Liegruppe und eine abgeschlossene normale Untergruppe. Sind N und K/N Tori, so ist auch K ein Torus.*

22.5.1.2. Diese Aussage hätten wir auch schon viel früher zeigen können. Ich habe sie hierher gestellt, weil sie erst hier beim Beweis des Satzes 22.5.1.7 über maximale Tori gebraucht werden wird. Eine analoge Aussage gilt im nichtkompakten Fall nicht mehr: Zum Beispiel finden wir in der Gruppe der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen mit drei Zeilen und Spalten einen Normalteiler, der isomorph ist zur Liegruppe $\mathbb{R}$, so daß der Quotient danach isomorph ist zur Liegruppe $\mathbb{R}^2$. Dennoch ist unsere Gruppe von oberen Dreiecksmatrizen nicht kommutativ.

Beweis. Wäre K nicht zusammenhängend, so könnte auch K/N nicht zusammenhängend sein, etwa nach 15.2.2.11. Also ist K zusammenhängend und wir müssen nach 22.4.5.1 und 22.4.5.7 nur zeigen, daß seine Liealgebra abelsch ist. Nach 22.2.4.10 finden wir auf $\operatorname{Lie} K$ ein $(\operatorname{Ad} K)$-invariantes Skalarprodukt. Das liefert eine Zerlegung von $\operatorname{Lie} K$ in ein Produkt von $(\operatorname{Ad} K)$-stabilen und damit auch $\operatorname{ad}(\operatorname{Lie} K)$-stabilen Teilräumen alias Idealen

$$\operatorname{Lie} K = \operatorname{Lie} N \oplus (\operatorname{Lie} N)^\perp$$

Die Projektion definiert nun aber offensichtlich einen Isomorphismus von Liealgebren $(\operatorname{Lie} N)^\perp \xrightarrow{\sim} \operatorname{Lie}(K/N)$, woraus folgt, daß $\operatorname{Lie} K$ abelsch ist. □

Definition 22.5.1.3. Unter einem **Torus in einer topologischen Gruppe** versteht man eine Untergruppe, die mit der induzierten Topologie ein Torus ist, genauer ein kompakter Torus im Sinne von 22.4.5.6. Unter einem **maximalen Torus** versteht man einen Torus, der nicht in einem anderen Torus echt enthalten ist.

Definition 22.5.1.4. Gegeben eine Gruppe G und darin eine Teilmenge $T \subset G$ setzen wir

$$\mathrm{Z}_G(T) := \{g \in G \mid gtg^{-1} = t \quad \forall t \in T\}$$

und nennen diese Untergruppe den **Zentralisator von T in G**.

Lemma 22.5.1.5. *Der Zentralisator eines maximalen Torus T in einer kompakten Liegruppe K hat als Einskomponente genau den besagten Torus selbst, in Formeln*

$$\mathrm{Z}_K(T)^\circ = T$$

Vorschau 22.5.1.6. In 22.5.5.11 zeigen wir, daß in einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe der Zentralisator eines Torus stets zusammenhängend sein muß, so daß für K zusammenhängend sogar gilt $\mathrm{Z}_K(T) = T$. Der Beweis dieses Resultats basiert jedoch auf dem Satz über maximale Tori 22.5.1.7, und unser Lemma hinwiederum wird beim Beweis dieses Satzes gebraucht.

Beweis. Sei K unsere kompakte Liegruppe und $T \subset K$ ein maximaler Torus. In Formeln behauptet die Proposition $\mathrm{Z}_K(T)^\circ = T$. Nach 22.3.6.21 reicht es, $\operatorname{Lie} \mathrm{Z}_K(T) = \operatorname{Lie} T$ zu zeigen. Für jedes $x \in \operatorname{Lie} \mathrm{Z}_K(T)$ ist aber $\mathbb{R} \times T \to K$, $(a,t) \mapsto \exp(ax)t$ ein Gruppenhomomorphismus, und hätten wir $x \notin \operatorname{Lie} T$, so wäre das Bild dieses Gruppenhomomorphismus eine zusammenhängende abelsche Untergruppe von K, die T echt umfaßt. Der Abschluß dieses Bildes wäre dann zusätzlich kompakt und immer noch abelsch und damit nach 22.4.5.2 ein Torus. Dieser Torus müßte T echt umfassen, und dann könnte T nicht maximal gewesen sein. □

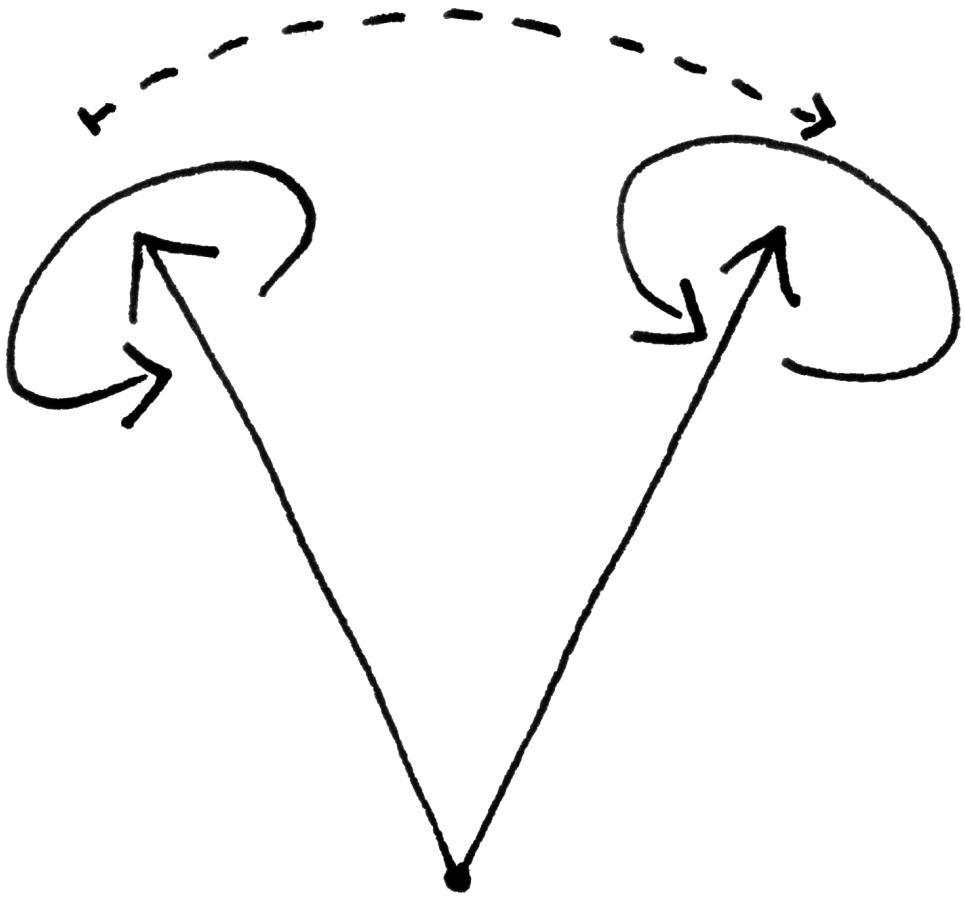
Satz 22.5.1.7 (über maximale Tori). *In einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe gehört jedes Element zu einem maximalen Torus und je zwei maximale Tori sind konjugiert.*

Beispiel 22.5.1.8. In der Gruppe $\mathrm{U}(n)$ bilden die unitären Diagonalmatrizen einen maximalen Torus, und man zeigt leicht direkt, daß in diesem Fall je zwei maximale Tori konjugiert sind: Das Argument geht davon aus, daß eine Menge von paarweise kommutierenden diagonalisierbaren Matrizen stets simultan diagonalisierbar ist nach Übung 4.7.8.10. Wenn wir eine Basis aus simultanen Eigenvektoren wählen, liegt unsere Untergruppe in der Menge der bezüglich dieser Basis diagonalen Matrizen.

Beweis. Sei K unsere zusammenhängende kompakte Liegruppe. Aus Dimensionsgründen gibt es in K einen maximalen Torus T. Wir zeigen im folgenden

$$K = \bigcup_{g \in K} gTg^{-1}$$

Der Satz folgt, denn ist dann $S \subset K$ ein weiterer maximaler Torus, so finden wir nach 22.4.5.10 einen topologischen Erzeuger $s \in S$ und ein $g \in K$ mit $s \in gTg^{-1}$ und damit $S \subset gTg^{-1}$ und so $S = gTg^{-1}$. Es bleibt also wie oben in Formelsprache behauptet zu zeigen, daß die Konjugierten eines festen maximalen Torus bereits die ganze Gruppe überdecken. Das zeigen wir durch vollständige Induktion über die Dimension unserer Gruppe. Der Fall einer nulldimensionalen Gruppe ist klar. Ist ganz allgemein $Z \subset K$ das Zentrum und Z° seine Einskomponente, so ist TZ° nach 22.4.5.7 ein Torus und es folgt $T \supset Z^\circ$. Nach 22.5.1.1 ist dann auch $T/Z^\circ \subset K/Z^\circ$ ein maximaler Torus, und ist Z° nicht trivial, so folgt unsere



Dies Bild soll illustrieren, daß in der Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ aller Drehungen des Raums je zwei maximale Tori konjugiert sind. In der Tat ist in dieser Gruppe jeder maximale Torus eindimensional und besteht aus den Drehungen zu einer festen Drehachse. Je zwei maximale Tori sind dann konjugiert, da eben je zwei Drehachsen ihrerseits durch eine Drehung ineinander überführt werden können, wie im Bild durch den gestrichelten Pfeil angedeutet.

Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung. Wir dürfen also Z° trivial alias Z diskret und damit endlich annehmen und dürfen auch annehmen, daß K positive Dimension hat, also nicht nur aus einem Punkt besteht. Unter diesen Voraussetzungen behaupten wir nun zunächst

$$\bigcup_{g\in K} g(T\backslash Z)g^{-1} = K\backslash Z \qquad (*)$$

Haben wir das gezeigt, so gehen wir auf beiden Seiten zum Abschluß in K über. Der Abschluß der rechten Seite ist sicher K. Der Abschluß von $T\backslash Z$ ist T, da in einer kompakten Gruppe positiver Dimension auch jeder maximale Torus positive Dimension haben muß, was man etwa daran erkennt, daß der Abschluß des Bildes jeder Einparameteruntergruppe ein Torus ist. Der Abschluß der linken Seite umfaßt also $\bigcup_{g\in K} gTg^{-1}$. Er muß aber sogar mit dieser Vereinigung zusammenfallen, da sie abgeschlossen ist als Bild einer stetigen Abbildung $K \times T \to K$ von einem Kompaktum in einen Hausdorffraum. Es reicht also, wenn wir aus der Induktionsvoraussetzung unsere Behauptung $(*)$ folgern unter der zusätzlichen Annahme, daß K endliches Zentrum hat und nicht nur aus einem Punkt besteht. Nach 22.4.5.1 hat dann K mindestens die Dimension zwei und insbesondere ist nach 15.1.4.13 mit K auch $K\backslash Z$ zusammenhängend. Es reicht also, wenn wir zeigen, daß

$$\bigcup_{g\in K} g(T\backslash Z)g^{-1}$$

sowohl offen als auch abgeschlossen ist in $K\backslash Z$. Daß es abgeschlossen ist in $K\backslash Z$ folgt aus der Identität

$$\bigcup_{g\in K} g(T\backslash Z)g^{-1} = \left(\bigcup_{g\in K} gTg^{-1}\right)\backslash Z$$

zusammen mit unserer Erkenntnis von eben, daß die Vereinigung auf der rechten Seite abgeschlossen ist in K. Um zu zeigen, daß es auch offen ist, müssen wir nur für jeden Punkt $t \in T\backslash Z$ nachweisen, daß eine ganze Umgebung von t zu $\bigcup_{g\in K} g(T\backslash Z)g^{-1}$ gehört. Da t nicht im Zentrum von K liegt, dürfen wir auf die Einskomponente seines Zentralisators $H := \mathrm{Z}_K(t)^\circ$ die Induktionsvoraussetzung anwenden und finden erst $H = \bigcup_{g\in H} gTg^{-1}$ und als Folgerung dann auch $H\backslash Z = \bigcup_{g\in H} g(T\backslash Z)g^{-1}$. Nun betrachten wir die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} K \times (H\backslash Z) & \to & K \\ (g\ ,\ h) & \mapsto & ghg^{-1} \end{array}$$

und sind fertig mit dem Umkehrsatz, wenn wir nur zeigen können, daß sie an der Stelle $(1,t)$ surjektives Differential hat. Gleichbedeutend können wir natürlich

zeigen, daß die Abbildung $K \times H \to K$, $(g,h) \mapsto t^{-1}gthg^{-1}$ an der Stelle $(1,1)$ surjektives Differential hat. Nun ist aber dieses Differential gerade die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Lie} K \times \operatorname{Lie} H & \to & \operatorname{Lie} K \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & (\operatorname{Ad} t^{-1})(x) + y - x \end{array}$$

und nach 22.4.1.21 wissen wir um die Gleichung

$$\operatorname{Lie} H = \ker(\operatorname{Ad} t - \operatorname{id}) = \ker(\operatorname{Ad} t^{-1} - \operatorname{id})$$

Andererseits ist $\operatorname{Ad} t$ diagonalisierbar über $\mathbb{C}$ nach 22.2.4.10, es muß ja auch auf der Restriktion der adjungierten Darstellung von K auf T ein T-invariantes Skalarprodukt geben, und bezüglich dieses Skalarprodukts ist $\operatorname{Ad} t$ dann sogar unitär. Ebenso ist auch $(\operatorname{Ad} t)^{-1} - \operatorname{id}$ über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar. Für jeden diagonalisierbaren Endomorphismus f eines endlichdimensionalen reellen oder komplexen Vektorraums V gilt aber $V = \ker f \oplus \operatorname{im} f$. Diese Identität wenden wir an auf die Komplexifizierung $V = \operatorname{Lie}_{\mathbb{C}} K$ der Liealgebra von K mit $f = (\operatorname{Ad} t)^{-1} - \operatorname{id}$ und folgern die Surjektivität unseres Differentials zunächst nach Komplexifizierung, aber damit dann auch schon auf $\operatorname{Lie} K$ selbst. □

Korollar 22.5.1.9. *In einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe ist das Zentrum der Schnitt aller maximalen Tori.*

Beweis. Jedes Element des Zentrums liegt in einem maximalen Torus, also in jedem dazu konjugierten Torus, also in jedem maximalen Torus. Liegt umgekehrt ein Element in jedem maximalen Torus, so kommutiert es mit jedem Element jedes maximalen Torus. □

Übungen

Übung 22.5.1.10. Die maximalen abelschen Unteralgebren der Liealgebra einer kompakten Liegruppe sind genau die Liealgebren der maximalen Tori.

Übung 22.5.1.11. Eine maximale abelsche Unteralgebra einer Liealgebra liefert eine maximale abelsche Unteralgebra unter jeder Erweiterung des Grundkörpers.

22.5.2 Klassifikation im Rang Eins

Satz 22.5.2.1 (Kompakte Liegruppen vom Rang Eins). *Jede zusammenhängende kompakte Liegruppe mit eindimensionalen maximalen Tori ist isomorph zu genau einer der drei Liegruppen* $\mathrm{SO}(3)$, $\mathrm{SU}(2)$ *oder* S^1.

22.5.2.2. Die nach 22.5.1.7 wohldefinierte Dimension eines maximalen Torus in einer kompakten Liegruppe heißt auch der **Rang** unserer kompakten Liegruppe, daher der Name des Satzes. Im folgenden notieren wir für jede Liegruppe G ihre komplexifizierte Liealgebra im Sinne von 22.2.2.13 mit $\operatorname{Lie}_{\mathbb{C}} G$.

Beweis. Sei K unsere Gruppe. Wir nehmen $\dim K > 1$ an und müssen zeigen, daß K isomorph ist zu $\mathrm{SO}(3)$ oder zu $\mathrm{SU}(2)$. Wir zeigen zunächst $\dim K = 3$. Sei dazu $T \subset K$ ein maximaler Torus und $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} K$ die komplexifizierte Liealgebra. Die komplexe Konjugation induziert eine schieflineare Involution $c : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, deren Invarianten in natürlicher Weise mit der ursprünglichen Liealgebra $\mathrm{Lie}\, K$ selbst identifiziert werden können. Jetzt zerlegen wir $\mathfrak{g}$ unter der adjungierten Operation des maximalen Torus wie in 22.2.5.9 in Gewichtsräume

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{X}(T)} \mathfrak{g}_\alpha$$

In Formeln haben wir also $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid (\mathrm{Ad}\, t)(X) = \alpha(t)X \ \forall t \in T\}$. Hier gilt $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, wie der Leser unschwer nachrechnet. Weiter gilt die Formel $c(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$, denn für $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ und alle $t \in T$ haben wir notwendig

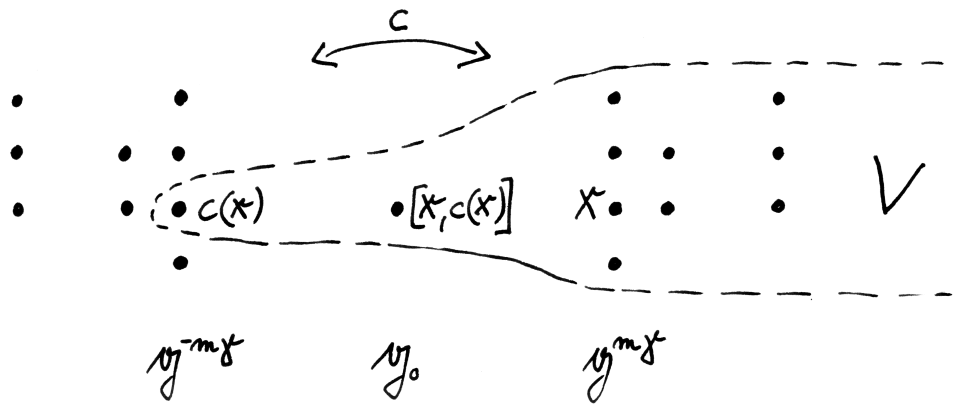
$$\begin{aligned} (\mathrm{Ad}\, t)(c(X)) &= c(\mathrm{Ad}\, t)X \\ &= c(\alpha(t)X) \\ &= \alpha(t)^{-1} c(X) \end{aligned}$$

Hier verwenden wir, daß $\alpha(t)$ stets eine komplexe Zahl auf dem Einheitskreis ist, und für diese fällt das Inverse mit dem komplex Konjugierten zusammen. Da unser maximaler Torus nach 22.5.1.5 zumindest die Einszusammenhangskomponente seines eigenen Zentralisators ist – daß unser maximaler Torus sogar genau sein eigener Zentralisator ist, zeigen wir erst später – folgt mit 22.4.1.22 zunächst $\mathrm{Lie}\, T = \mathrm{Lie}\, \mathrm{Z}_K(T) = \{X \in \mathrm{Lie}\, K \mid (\mathrm{Ad}\, t)(X) = X \ \forall t \in T\}$ und dann auch in der Komplexifizierung $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} T$. Ist die Dimension unserer Gruppe größer als Eins, so gibt es folglich mindestens ein $\alpha \in \mathfrak{X}(T) \backslash 0$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0 \neq \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Jetzt wählen wir einen Erzeuger γ der Charaktergruppe $\mathfrak{X}(T)$ unseres maximalen Torus und $m > 0$ kleinstmöglich mit $\mathfrak{g}_{m\gamma} \neq 0$. Wählen wir dann $X \in \mathfrak{g}_{m\gamma}$ von Null verschieden, so haben wir $[X, c(X)] \neq 0$, da sonst die c-Invarianten in $\mathbb{C}X \oplus \mathbb{C}c(X)$ eine zweidimensionale abelsche Unteralgebra von $\mathrm{Lie}\, K$ bildeten, im Widerspruch zu 22.5.1.10. Also ist $[X, c(X)]$ eine Basis von $\mathfrak{g}_0$. Jetzt betrachten wir in $\mathfrak{g}$ den Untervektorraum

$$V = \mathbb{C}c(X) \oplus \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{g}_{n\gamma}$$

Er ist offensichtlich stabil unter $\mathrm{ad}\, X$ und $\mathrm{ad}\, c(X)$, folglich hat der Kommutator $[\mathrm{ad}\, X, \mathrm{ad}\, c(X)] = \mathrm{ad}[X, c(X)]$ Spur Null auf V, und damit auch $\mathrm{ad}(H)$ für alle $H \in \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} T$. Bezeichnen wir der Einfachheit halber das Differential von γ auch mit $\gamma : \mathrm{Lie}\, T \to \mathbb{C}$, so erhalten wir für alle $H \in \mathrm{Lie}\, T$ nach 22.4.6.2 die Identität

$$0 = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, H : V \to V) = -m\gamma(H) + \sum_{n \geq m} n\gamma(H) \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_{n\gamma})$$



Versuch einer graphischen Darstellung dessen, was wir über $\mathfrak{g} \supset V$ in der Mitte des Beweises von 22.5.2.1 wissen. Die fetten Punkte stellen Basisvektoren von $\mathfrak{g}$ dar, die fetten Punkte in einer Vertikalen Basisvektoren eines Gewichtsraums $\mathfrak{g}_\alpha$.

Daraus folgt sofort $\dim \mathfrak{g}_{m\gamma} = 1$ und $\dim \mathfrak{g}_{n\gamma} = 0$ für $n > m$. Wenden wir dieselbe Überlegung mit $-\gamma$ an statt mit γ, oder beachten wir alternativ unsere Symmetrie c, so erhalten wir $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} = 3$ wie gewünscht. Andererseits wissen wir, daß $\operatorname{Lie} K$ triviales Zentrum hat, da ja nach 22.5.1.10 jede maximale abelsche Unteralgebra von $\operatorname{Lie} K$ eindimensional ist, so daß also die maximalen abelschen Unteralgebren von $\operatorname{Lie} K$ genau die eindimensionalen Teilräume sind. Die adjungierte Darstellung

$$K \to \mathrm{GL}(\operatorname{Lie} K)$$

hat nach 22.4.1.17 also injektives Tangential. Wählen wir mithilfe von 22.2.4.10 ein K-invariantes Skalarprodukt auf $\operatorname{Lie} K$, so hat durch Dimensionsvergleich der induzierte Homomorphismus

$$K \to \mathrm{SO}(\operatorname{Lie} K)$$

bijektives Tangential beim neutralen Element und ist folglich eine stetige Surjektion mit diskretem, also endlichem Kern. Ist diese Surjektion ein Isomorphismus, so gilt $K \cong \mathrm{SO}(3)$ und wir sind fertig. Sonst wenden wir das im Anschluß bewiesene Lemma 22.5.2.3 an und sind auch fertig. □

Lemma 22.5.2.3. *Sei K eine kompakte zusammenhängende Liegruppe. Gibt es einen surjektiven stetigen Homomorphismus mit endlichem Kern $\varphi : K \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$, so gilt $K \cong \mathrm{SU}(2)$ oder $K \cong \mathrm{SO}(3)$.*

22.5.2.4. Ich gebe drei verschiedene Beweise. Der erste baut nur auf in dieser Vorlesung bereits bewiesenen Resultaten auf, die anderen setzen jeweils verschiedene zusätzliche Kenntnisse voraus.

Erster Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Lie} K \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\exp"'] & \operatorname{Lie} \mathrm{SO}(3) \arrow[d, "\exp"] \\ K \arrow[r, two heads, "\varphi"] & \mathrm{SO}(3) \end{tikzcd}$$

Die Exponentialabbildung ist für zusammenhängende kompakte Liegruppen nach 22.5.1.7 stets surjektiv. Aus der expliziten Beschreibung der Exponentialabbildung der Drehgruppe in 22.1.2.27 erkennt man, daß das Urbild $\exp^{-1}(\mathrm{id}) \subset \operatorname{Lie} \mathrm{SO}(3)$ bezüglich eines geeigneten Skalarprodukts eine disjunkte Vereinigung von konzentrischen Kugelschalen $S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \ldots$ der Radien $0, 1, 2, \ldots$ ist, wobei S_0 nur aus dem Ursprung besteht, aber doch noch als „entartete Kugelschale“ durchgehen mag. Unter $\exp : \operatorname{Lie} K \to K$ müssen alle diese Kugelschalen oder genauer deren Urbilder $S_n^{\mathfrak{g}} \subset \operatorname{Lie} K$ jeweils auf einen einzigen Punkt der diskreten Untergruppe $\ker \varphi$ abgebildet werden, und die Vereinigung dieser Bilder ist auch ganz

$\ker\varphi$. Insbesondere geht die Kugelschale $S_1^{\mathfrak{g}}$ mit Radius Eins auf einen einzigen Punkt $z \in K$. Durch diesen Punkt z laufen notwendig alle nichtkonstanten Einparameteruntergruppen γ von K, ja es gibt für jedes derartige nichtkonstante γ sogar ein t mit $\gamma(t) = z = \gamma(-t)$, und das zeigt sofort $z^2 = e$. Induktiv folgt $\exp(S_n^{\mathfrak{g}}) = z^n$. Die einzig möglichen Fälle sind also $|\ker\varphi| = 1$ und $|\ker\varphi| = 2$. Im ersten Fall ist φ ein Isomorphismus. In jedem Fall mag man einen surjektiven stetigen Gruppenhomomorphismus $\phi : \mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$ wählen und die Liegruppe $H = \{(g,s) \in K \times \mathrm{SU}(2) \mid \varphi(g) = \phi(s)\}$ betrachten mitsamt dem offensichtlichen stetigen Gruppenhomomorphismus $H \to \mathrm{SO}(3)$. Die Einskomponente H° von H paßt in ein kommutatives Diagramm von Liegruppen der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
 & H^\circ \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
K \arrow[dr] & & \mathrm{SU}(2) \arrow[dl] \\
 & \mathrm{SO}(3) &
\end{tikzcd}$$

Auf den Liealgebren induzieren alle Morphismen dieses Diagramms Isomorphismen, folglich sind alle Morphismen dieses Diagramms surjektiv. Da aber der Kern der Vertikale $H^\circ \to \mathrm{SO}(3)$ nach unseren bisherigen Erkenntnissen, nun angewandt auf H° statt auf K, auch höchstens zwei Elemente haben kann, müssen im zweiten Fall die oberen schrägen Pfeile beide Isomorphismen sein. Wir folgern $K \cong H^\circ \cong \mathrm{SU}(2)$. □

Zweiter Beweis. Dieser Beweis setzt Kenntnisse in Überlagerungstheorie voraus. Da die Sphäre $\mathrm{SU}(2) \cong S^3$ einfach wegzusammenhängend ist nach 16.1.2.23, und da $K \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$ sicher eine Überlagerung ist, existiert nach 16.3.4.13 ein Lift von $s : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ zu einer stetigen Abbildung $\tilde{s} : \mathrm{SU}(2) \to K$ mit $1 \mapsto 1$. Wir zeigen, daß dieser Lift ein Gruppenhomomorphismus ist. In der Tat sind aber sowohl $m \circ (\tilde{s} \times \tilde{s})$ als auch $\tilde{s} \circ m$ Lifts der Abbildung $s \circ m : \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ mit $(1,1) \mapsto 1$ und stimmen folglich überein. Da der Kern eines und jedes surjektiven Gruppenhomomorphismus $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ aus zwei Elementen besteht, muß in der Sequenz $\mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow K \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$ einer der beiden Pfeile ein Isomorphismus sein. □

Dritter Beweis. Dieser Beweis setzt zusätzliche Kenntnisse über Darstellungstheorie voraus, genauer die Tatsache, daß nach 15.4.7.7 außer dem Neutralen jedes Element einer kompakten topologischen Gruppe auch auf mindestens einer stetigen endlichdimensionalen Darstellung nichttrivial operiert. Ist unsere Surjektion $K \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$ kein Isomorphismus, so hat K nach 15.4.7.7 auch irreduzible

Darstellungen, die nicht von irreduziblen Darstellungen von $\mathrm{SO}(3)$ herkommen. Wegen der Klassifikation der Darstellungen der Liealgebra hat K also eine irreduzible Darstellung gerader Dimension. Darin ist die von $\exp(\mathrm{Lie}\, K)$ erzeugte Untergruppe aber nach 22.1.3.13 isomorph zu $\mathrm{SU}(2)$ und wir erhalten so einen stetigen Gruppenhomomorphismus $K \to \mathrm{SU}(2)$. Dieser muß bijektiv sein, da sonst K nach 15.4.7.7 auch irreduzible Darstellungen besitzen müßte, die nicht von irreduziblen Darstellungen von $\mathrm{SU}(2)$ herkommen. Die einfachen Darstellungen der $\mathrm{SU}(2)$ liefern jedoch bereits alle einfachen endlichdimensionalen Darstellungen seiner komplexifizierten Liealgebra. □

22.5.3 Weylgruppen kompakter Liegruppen

Satz 22.5.3.1 (Starrheit kompakter Tori). *Seien S und T kompakte Tori und sei $\varphi : Z \to \mathrm{GrpTop}(S,T)$ eine durch einen zusammenhängenden topologischen Raum Z parametrisierte Familie stetiger Gruppenhomomorphismen $S \to T$, die stetig vom Parameter $z \in Z$ abhängt in dem Sinne, daß die induzierte Abbildung $Z \times S \to T$ stetig ist. So ist unsere Familie φ konstant.*

22.5.3.2. Der Satz gilt mit demselben Beweis für beliebige kompakte abelsche Liegruppen, aber der Fall von Tori ist für das Weitere besonders wichtig. Eine gewisse Intuition mag 13.2.7.29 geben.

Beweis. Gegeben $z \in Z$ bezeichnen wir den zugehörigen Homomorphismus mit $\varphi_z : S \to T$. Für beliebige $s \in S$, $t \in T$ ist

$$Z_{s,t} := \{z \in Z \mid \varphi_z(s) = t\}$$

abgeschlossen in Z. Für $n \geq 1$ betrachten wir nun in einer beliebigen Gruppe G die Teilmenge $G[n] := \{g \in G \mid g^n = 1\}$ aller Elemente, deren Ordnung n teilt. In unserem Fall sind $S[n]$ und $T[n]$ endlich und jeder Gruppenhomomorphismus schickt sicher $S[n]$ nach $T[n]$. Für $s \in S[n]$ haben wir also eine endliche Zerlegung in abgeschlossene Teilmengen

$$Z = \bigcup_{t \in T[n]} Z_{s,t}$$

Da Z zusammenhängend ist, muß für $s \in S$ von endlicher Ordnung also $\varphi_z(s)$ unabhängig sein von z. Da jedoch die Elemente endlicher Ordnung in unserem Torus S dicht liegen, folgt daraus, daß φ_z unabhängig ist von z. □

Definition 22.5.3.3. Der **Normalisator** einer Untergruppe H in einer Gruppe G ist definiert als die Untergruppe $\mathrm{N}_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ von G.

Proposition 22.5.3.4. *Gegeben $S \subset G$ ein Torus in einer topologischen Gruppe liegt die Einszusammenhangskomponente seines Normalisators bereits in seinem Zentralisator, in Formeln*

$$(\mathrm{N}_G S)^\circ \subset \mathrm{Z}_G S$$

Beweis. Wir wenden Proposition 22.5.3.1 über die Starrheit von Tori an auf die Abbildung $\varphi : (\mathrm{N}_G S)^\circ \to \mathrm{GrpTop}(S, S)$, $g \mapsto \operatorname{int} g$ und folgern $\operatorname{int} g$ konstant, also $\operatorname{int} g = \operatorname{int} e = \mathrm{id}_S$ für alle $g \in (\mathrm{N}_G S)^\circ$. □

Definition 22.5.3.5. Die **Weylgruppe** $W = \mathrm{W}(K, T)$ einer kompakten Liegruppe, genauer eines Paars $K \supset T$ bestehend aus einer kompakten Liegruppe mitsamt einem maximalen Torus, ist der Quotient des Normalisators unseres Torus nach dem Torus selbst, in Formeln

$$W = (\mathrm{N}_K T)/T$$

Beispiel 22.5.3.6. Der Normalisator des maximalen Torus T aller Diagonalmatrizen in der unitären Gruppe $\mathrm{U}(n)$ besteht genau aus allen Matrizen, die die simultanen Eigenräume $\mathbb{C}\,\mathrm{e}_\nu$ unserer Diagonalmatrizen permutieren, als da heißt aus allen unitären Matrizen, die in jeder Zeile und Spalte genau einen von Null verschiedenen Eintrag haben. In diesem Fall bilden die Permutationsmatrizen ein Repräsentantensystem für die Weylgruppe.

Beispiel 22.5.3.7. Im Fall der Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ besteht ein maximaler Torus aus allen Drehungen um eine feste Achse und sein Normalisator aus allen Drehungen, die besagte Achse in sich selber überführen, aber nicht notwendig punktweise festhalten. Die Weylgruppe besteht aus zwei Elementen, und Repräsentanten des nicht neutralen Elements sind alle Drehungen, die besagte Achse „auf den Kopf stellen“.

Korollar 22.5.3.8. *Ist K eine kompakte Liegruppe und $T \subset K$ ein maximaler Torus, so ist die Weylgruppe $W = (\mathrm{N}_K T)/T$ endlich.*

Bweis. Wir haben $(\mathrm{N}_K T)^\circ = (\mathrm{Z}_K T)^\circ = T$ nach 22.5.3.4 und 22.5.1.5, folglich ist $(\mathrm{N}_K T)/T$ diskret als topologischer Raum. Dieser Raum ist jedoch auch kompakt und folglich endlich. □

Übungen

Übung 22.5.3.9. Gegeben eine endlichdimensionale stetige Darstellung V einer Liegruppe G und ein Torus $T \subset G$ induziert die Operation seines Normalisators $\mathrm{N}_G T$ durch Konjugation auf T natürlich eine Operation von $\mathrm{N}_G T$ auf der Charaktergruppe $\mathfrak{X}(T)$. Man zeige für die Gewichtsräume von V unter T aus 22.2.5.9 die Formel

$$nV_\chi = V_{n\chi} \quad \text{für alle } n \in \mathrm{N}_G(T) \text{ und } \chi \in \mathfrak{X}(T).$$

22.5.4 Gitterspiegelungsgruppen

Definition 22.5.4.1. Eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe X nennen wir ein **Gitter**. Unter einer **Gitterspiegelung** oder kurz **Spiegelung** verstehen wir einen Automorphismus eines Gitters $s : X \xrightarrow{\sim} X$ derart, daß sein Quadrat die Identität ist und die Untergruppe der Elemente, die auf ihr Negatives gehen, unendlich zyklisch, in Formeln $s^2 = \mathrm{id}_X$ und $X^{-s} \cong \mathbb{Z}$. Unter einer **Wurzel zu einer Gitterspiegelung** verstehen wir ein Element unseres Gitters $\alpha \in X$ derart, daß sich jeder Punkt unseres Gitters von seinem Spiegelbild um ein ganzzahliges Vielfaches des besagten Elements unterscheidet, in Formeln $s\lambda - \lambda \in \mathbb{Z}\alpha \ \forall \lambda \in X$.

22.5.4.2 (**Gitterspiegelungen, Wurzeln und Kowurzeln**). Ist X ein Gitter und $s : X \to X$ eine Gitterspiegelung und $\alpha \in X$ eine Wurzel zu s, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\alpha^\vee : X \to \mathbb{Z}$, sprich „Alpha Tschek“, mit

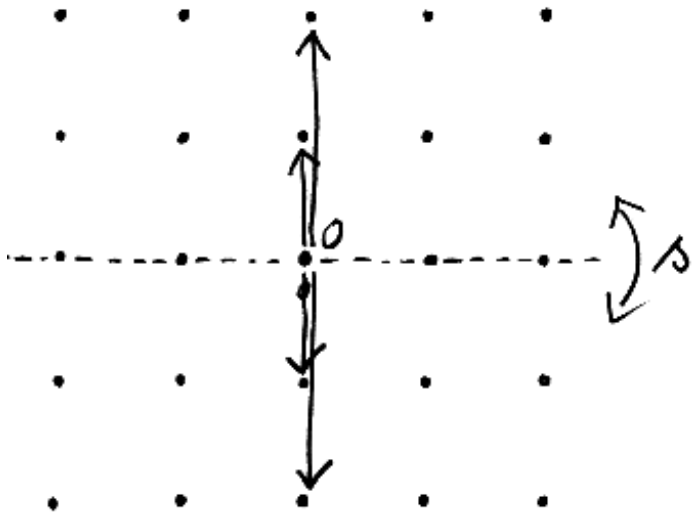
$$s\lambda = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \quad \forall \lambda \in X$$

Hier verwenden wir für das Auswerten von $\chi \in X^* = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{Z})$ auf $\lambda \in X$ die symmetrischere Notation $\chi(\lambda) = \langle \lambda, \chi \rangle$. Unser $\alpha^\vee$ heißt die **Kowurzel** zur Wurzel α der Spiegelung s. Wegen $s\alpha = -\alpha$ gilt stets $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$. Umgekehrt ist auch für jedes Paar $(\alpha, \alpha^\vee)$ mit $\alpha \in X$ und $\alpha^\vee \in X^*$ und $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ die Abbildung $s_{\alpha,\alpha^\vee} : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ eine Gitterspiegelung. Das Negative einer Wurzel zu einer Gitterspiegelung ist stets wieder eine Wurzel zu derselben Gitterspiegelung. Zu jeder Gitterspiegelung s gibt es mindestens zwei und höchstens vier Wurzeln: Genauer sind die beiden Erzeuger der unendlich zyklischen Gruppe X^{-s} aller Vektoren $\lambda \in X$ mit $s\lambda = -\lambda$ stets mögliche Wurzeln, und nehmen die zugehörigen Kowurzeln auf X nur gerade Werte an, so sind die Doppelten besagter Erzeuger auch noch mögliche Wurzeln. Damit sind dann aber auch bereits alle Möglichkeiten ausgeschöpft.

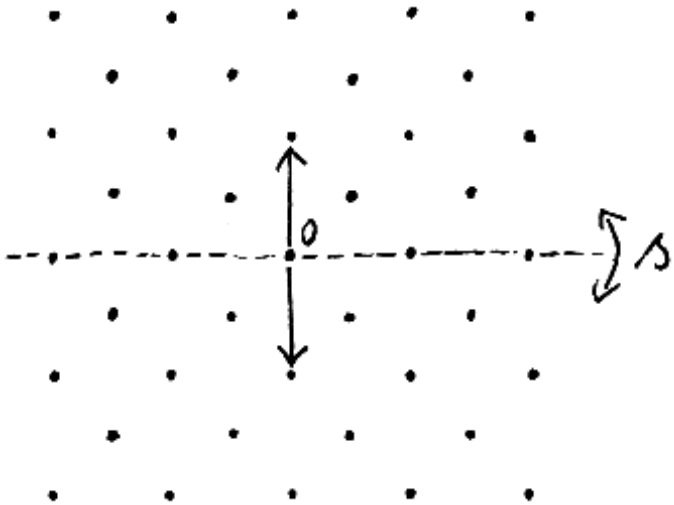
Definition 22.5.4.3. Eine **endliche Gitterspiegelungsgruppe** ist eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Gitters, die von Spiegelungen erzeugt wird. Eine **stabile Wurzelwahl** für eine endliche Gitterspiegelungsgruppe ist eine Teilmenge des zugrundeliegenden Gitters, die (1) stabil ist unter der Spiegelungsgruppe, die (2) aus Wurzeln zu Spiegelungen der Spiegelungsgruppe besteht und die (3) zu jeder Spiegelung der Spiegelungsgruppe genau zwei Wurzeln enthält, von denen die Eine dann natürlich die Negative der Anderen sein muß.

Ergänzung 22.5.4.4. In der Literatur trifft man statt endlichen Gitterspiegelungsgruppen mit stabiler Wurzelwahl meist das äquivalente Konzept eines **Wurzeldatums** an. Darunter versteht man ein Datum

$$(X, R, X^\vee, R^\vee, \phi, \tau)$$



Eine Gitterspiegelung, zu der es vier Wurzeln gibt.



Eine Gitterspiegelung, zu der es nur zwei Wurzeln gibt.

bestehend aus zwei Gittern $X, X^\vee$, einer bilinearen Abbildung $\phi : X \times X^\vee \to \mathbb{Z}$, die das eine Gitter mit dem Dualen des Anderen identifiziert und üblicherweise $(\lambda, \nu) \mapsto \langle \lambda, \nu \rangle$ notiert wird, sowie endlichen Teilmengen $R \subset X$ und $R^\vee \subset X^\vee$ mitsamt einer Bijektion $\tau : R \xrightarrow{\sim} R^\vee$, die üblicherweise $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ notiert wird, so daß gilt $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2 \; \forall \alpha \in R$ und $\beta \in R \Rightarrow \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in R$ und $\beta^\vee \in R^\vee \Rightarrow \beta^\vee - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \alpha^\vee \in R^\vee$ und $\alpha \in R \Rightarrow 2\alpha \notin R$ und $\alpha^\vee \in R^\vee \Rightarrow 2\alpha^\vee \notin R^\vee$. Diese Begrifflichkeit hat den Vorteil, eine zusätzliche Symmetrie sichtbar zu machen in dem Sinne, daß unmittelbar klar wird, was unter dem **dualen Wurzeldatum** zu verstehen ist. Jedes derartige Wurzeldatum liefert eine Gitterspiegelungsgruppe auf dem Gitter X mit Spiegelungen $\lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ und stabiler Wurzelwahl R, und umgekehrt können wir aus den Spiegelungen und Wurzeln R auch unschwer unser Wurzeldatum zurückgewinnen.

Ergänzung 22.5.4.5. Ein minimalistischer Zugang besteht darin, ein Wurzeldatum zu erklären als ein Tripel (X, R, τ) bestehend aus einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppe X, einer Teilmenge $R \subset X$ und einer Injektion $\tau : R \hookrightarrow X^\vee$ in die duale Gruppe derart, daß die offensichtlichen Eigenschaften erfüllt sind.

Übungen

Übung 22.5.4.6. Die Transponierte einer Gitterspiegelung ist stets eine Gitterspiegelung des dualen Gitters und jedes Paar von Wurzel und Kowurzel zu einer Gitterspiegelung ist ein Paar von Kowurzel und Wurzel zu ihrer Transponierten.

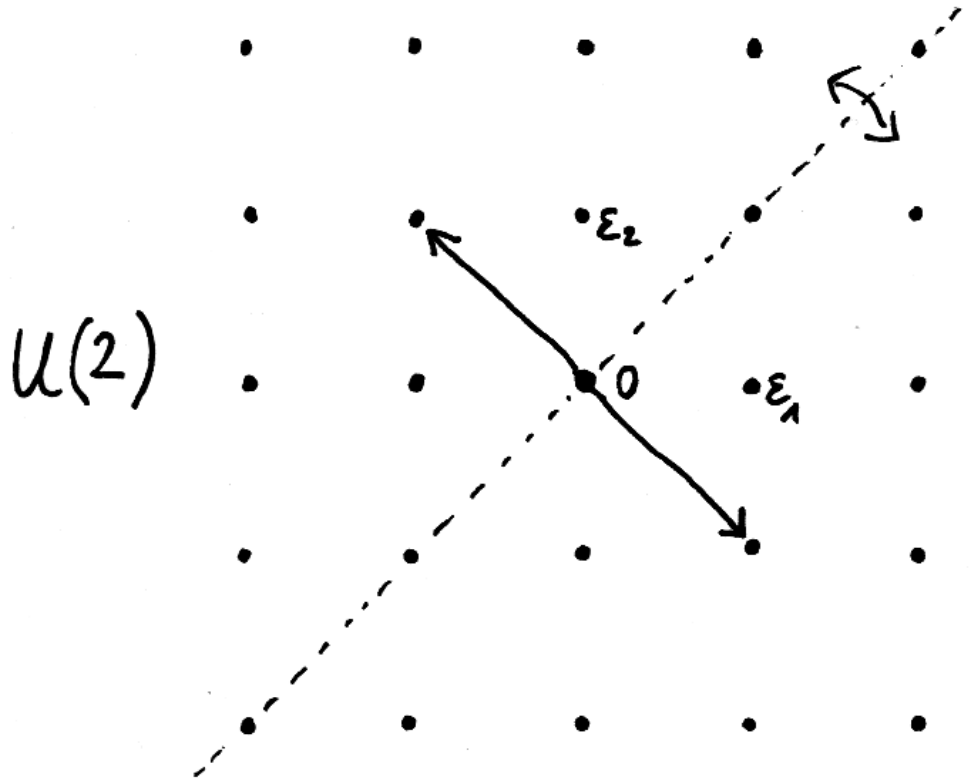
22.5.5 Struktur der kompakten Liegruppen

Definition 22.5.5.1. Gegeben $K \supset T$ eine kompakte Liegruppe mit einem maximalen Torus erklärt man das zugehörige **Wurzelsystem**

$$\mathrm{R}(K, T) \subset \mathfrak{X}(T)$$

als die Menge $\mathrm{R}(K, T) := \mathrm{P}_T(\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} K) \backslash 0$ aller von Null verschiedenen Gewichte der komplexifizierten Liealgebra von K unter der adjungierten Operation von T.

Beispiel 22.5.5.2 (**Wurzelsystem der unitären Gruppen**). Wir besprechen den Fall der unitären Gruppen $K = \mathrm{U}(n)$. Als maximalen Torus T können wir nach 22.5.1.8 etwa die unitären Diagonalmatrizen nehmen. Eine Basis des Charaktergitters $\mathfrak{X}(T)$ über $\mathbb{Z}$ bilden die $\varepsilon_i : T \to S^1$, die jeder unitären diagonalen Matrix ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnen, für $1 \le i \le n$. Die Operation der Weylgruppe auf dem Charaktergitter identifiziert unsere Weylgruppe nach 22.5.3.6 mit der Gruppe aller Permutationen der ε_i und wir erhalten so einen kanonischen Isomorphismus $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n$. Die Einbettung $\mathrm{Lie}\,\mathrm{U}(n) \hookrightarrow \mathrm{Mat}(n; \mathbb{C})$ führt zu einem



Die Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl zu $\mathrm{U}(2)$. In diesem Fall haben wir zwei Wurzeln, die als Pfeile eingezeichnet sind, und die Gitterspiegelungsgruppe besteht aus dem neutralen Element und der anschaulich orthogonalen Spiegelung an der zu den Wurzeln senkrechten Geraden durch den Ursprung.

Isomorphismus $\operatorname{Lie}_{\mathbb{C}} \mathrm{U}(n) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mat}(n;\mathbb{C})$ von Liealgebren, etwa nach 22.2.2.13, da ja $\operatorname{Lie} \mathrm{U}(n)$ die Fixpunktmenge einer schieflinearen Involution auf $\operatorname{Mat}(n;\mathbb{C})$ ist. Als Wurzelsystem ergibt sich so die Menge

$$\mathrm{R}(\mathrm{U}(n), T) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$$

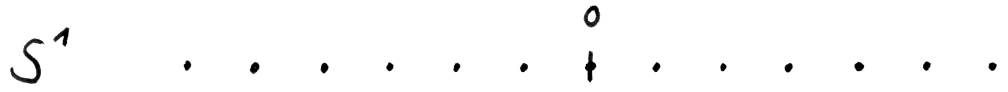
Der zur Wurzel $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ gehörende Wurzelraum $(\operatorname{Lie}_{\mathbb{C}} \mathrm{U}(n))_\alpha$ entspricht unter unserer Identifikation mit den quadratischen Matrizen der Gerade $\mathbb{C}E_{ij}$ aller Matrizen, denen nur in Zeile i und Spalte j ein von Null verschiedener Eintrag erlaubt ist.

Satz 22.5.5.3 (**Klassifikation der zusammenhängenden kompakten Liegruppen**). *Ordnen wir jeder zusammenhängenden kompakten Liegruppe die Charaktergruppe eines maximalen Torus zu mitsamt der Operation der zugehörigen Weylgruppe und dem zugehörigen Wurzelsystem, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

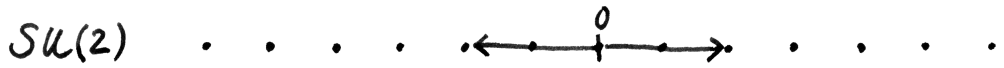
$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Zusammenhängende} \\ \textit{kompakte Liegruppen} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Endliche Gitterspiegelungsgruppen} \\ \textit{mit stabiler Wurzelwahl} \end{array} \right\} \\ K & \mapsto & \mathrm{W}(K,T) \looparrowright \mathfrak{X}(T) \supset \mathrm{R}(K,T) \end{array}$$

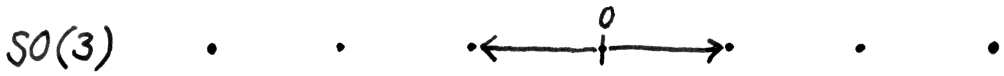
22.5.5.4. Eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem ausgezeichneten maximalen Torus nennen wir eine **torierte** zusammenhängende kompakte Liegruppe. Die zugehörige Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl nennen wir ihr **Gitterdatum**.

22.5.5.5. Da nach 22.5.1.7 je zwei maximale Tori einer kompakten Liegruppe zueinander konjugiert sind, hängt unsere Abbildung nicht von der Wahl eines maximalen Torus ab. Im folgenden zeigen wir zunächst nur, daß die im Satz erklärte Abbildungsvorschrift in der Tat eine Abbildung zwischen den angegebenen Mengen liefert, und auch das steht verstreut an verschiedenen Stellen. Wendet man 22.5.3.9 auf die adjungierte Darstellung an, so folgt schon einmal, daß die Weylgruppe die Wurzeln permutiert. Demnächst zeigen wir als Proposition 22.5.5.14, daß jede Wurzel des Wurzelsystems durch genau eine Spiegelung aus Weylgruppe negativ gemacht wird. Dann zeigen wir in 22.5.6.9, daß die Spiegelungen zu Wurzeln die Weylgruppe erzeugen und daß keine anderen Elemente der Weylgruppe als Gitterspiegelungen auf der Charaktergruppe des maximalen Torus operieren. Alles zusammen zeigt dann, daß die im Satz erklärte Abbildungsvorschrift in der Tat eine Abbildung zwischen den angegebenen Mengen liefert. Daß diese Abbildung tatsächlich eine Bijektion ist, zeigen wir in 22.5.7. Dazu benötigen wir Methoden und Ergebnisse der Überlagerungstheorie und der Theorie halbeinfacher komplexer Liealgebren und ihrer Darstellungen, die über den Rahmen dieser Vorlesung hinausgehen.



Das Gitterdatum zu S^1. In diesem Fall ist die Menge der Wurzeln leer und die Gitterspiegelungsgruppe besteht nur aus dem neutralen Element.





Die Gitterdaten zu $\mathrm{SU}(2)$ und $\mathrm{SO}(3)$. In diesen Fällen haben wir zwei Wurzeln, die als Pfeile eingezeichnet sind, und die Gitterspiegelungsgruppe besteht aus dem neutralen Element und der Punktspiegelung am Ursprung. Das Gitter zu $\mathrm{SU}(2)$ kann man als Quotient des Gitters zu $\mathrm{U}(2)$ verstehen, das Gitter zu $\mathrm{SO}(3)$ als Untergitter des Gitters zu $\mathrm{SU}(2)$.

Beispiel 22.5.5.6 (**Gitterdatum der unitären Gruppen**). Wir setzen die in 22.5.5.2 begonnene Diskussion des Falls $K = \mathrm{U}(n)$ fort. Die Spiegelung zur Wurzel $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ entspricht unter der offensichtlichen Identifikation $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n$ der Transposition (i, j), und in der Tat erzeugen diese Transpositionen die symmetrische Gruppe. Die zugehörige Kowurzel entspricht der Abbildung $S^1 \to T$ gegeben durch

$$z \mapsto \operatorname{diag}(1, \ldots, z, \ldots, z^{-1}, \ldots, 1)$$

mit einem z an der i-ten Stelle, einem z^{-1} an der j-ten Stelle und Einsen sonst. In der Notation $\varepsilon_i^* : z \mapsto \operatorname{diag}(1, \ldots, z, \ldots, 1)$ mit einem z an der i-ten Stelle hat die Kowurzel zur Wurzel $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ also die Gestalt $\alpha^\vee = \varepsilon_i^* - \varepsilon_j^*$.

Proposition 22.5.5.7 (Bilder von Tori). *Gegeben ein Homomorphismus von kompakten Liegruppen sind die maximalen Tori des Bildes die Bilder der maximalen Tori.*

Beweis. Weil wir eh nur am Bild unseres Homomorphismus interessiert sind, dürfen wir ihn auch gleich als surjektiv annehmen. Sei also $\varphi : K \twoheadrightarrow H$ ein surjektiver Homomorphismus von kompakten Liegruppen. Ist $S \subset H$ ein maximaler Torus, so finden wir dazu nach 22.4.5.13 einen topologischen Erzeuger $s \in S$ und finden dazu nach 15.2.2.23 ein Urbild in der Einszusammenhangskomponente $t \in K^\circ$ und darüber nach 22.5.1.7 einen maximalen Torus $T \subset K$ mit $t \in T$. Dann haben wir offensichtlich $\varphi(T) = S$. Da je zwei maximale Tori in K konjugiert sind, ist dann auch umgekehrt das Bild jedes maximalen Torus von K ein maximaler Torus von H. □

Proposition 22.5.5.8 (Homomorphismen und Weylgruppen). *Unter einem surjektiven Homomorphismus mit zentralem Kern von zusammenhängenden kompakten Liegruppen ist das Urbild jedes maximalen Torus ein maximaler Torus und das Urbild seines Normalisators der Normalisator seines Urbilds und wir erhalten so einen Isomorphismus zwischen den zugehörigen Weylgruppen.*

22.5.5.9. In der Situation der Proposition ist auch das Urbild des Zentrums das Zentrum. In der Tat liegt nach der Proposition das Urbild des Zentrums im Zentralisator jedes maximalen Torus, und eine zusammenhängende kompakte Liegruppe wird ja bereits von ihren maximalen Tori überdeckt.

Beweis. Sei $\varphi : K \twoheadrightarrow H$ unser surjektiver Homomorphismus. Da K zusammenhängend ist, liegt nach 22.5.1.9 sein Zentrum in jedem maximalen Torus $T \subset K$. Nach Annahme haben wir dann erst recht $\ker \varphi \subset T$ und folglich $T = \varphi^{-1}(\varphi(T))$. Da wir bereits nach 22.5.5.7 wissen, daß jeder maximale Torus in H das Bild eines maximalen Torus in K ist, folgt die erste Behauptung. Die beiden weiteren Behauptungen folgen nun ohne weitere Schwierigkeiten. Für eine formale Argumentation scheint mir das Neunerlemma 4.4.7.5 besonders übersichtlich. Die benötigten Rechnungen macht 22.5.5.10 explizit. □

22.5.5.10. Gegeben ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ und Teilmengen $A, B \subset H$ gilt $\varphi^{-1}(AB) = \varphi^{-1}(A)\varphi^{-1}(B)$. Gegeben eine Teilmenge $S \subset H$ und ein Element $g \in G$ gilt mit der ad hoc erfundenen der Situation angepaßten nur hier gültigen Notation $\bar{a}$ für das Inverse eines Gruppenelements a des weiteren die Äquivalenz $g\varphi^{-1}(S)\bar{g} \subset \varphi^{-1}(S) \;\Leftrightarrow\; \varphi(g)S\overline{\varphi(g)} \subset S$. Das alles kann der Leser leicht selbst prüfen.

Proposition 22.5.5.11. *In einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe ist der Zentralisator eines Torus stets zusammenhängend.*

22.5.5.12. Diese Proposition dient vorerst nur dazu, im folgenden Beweis die Notation zu vereinfachen und uns zu erlauben, dort stets $\mathrm{Z}_K(S)$ statt $\mathrm{Z}_K(S)^\circ$ zu schreiben. Ihr Korollar 22.5.6.7 wird jedoch zum Abschluß des folgenden Abschnitts noch eine entscheidende Rolle spielen.

Beweis. Seien K unsere Gruppe, $S \subset K$ unser Torus und $x \in \mathrm{Z}_K(S)$ ein Element seines Zentralisators. Sicher ist $B = \overline{\langle x, S\rangle}$ abelsch und kompakt und B/B° ist topologisch erzeugt von $\bar{x}$ und mithin zyklisch. Damit ist aber B topologisch zyklisch nach 22.4.5.13 und liegt folglich in einem maximalen Torus von K. Wir folgern, daß $\mathrm{Z}_K(S)$ die Vereinigung aller der maximalen Tori von K ist, die S umfassen. Nach 15.1.3.17 ist $\mathrm{Z}_K(S)$ dann zusammenhängend als Vereinigung einer Familie zusammenhängender Teilmengen mit nichtleerem Schnitt. □

Korollar 22.5.5.13. *In einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe ist jeder maximale Torus sein eigener Zentralisator.*

Beweis. In jeder kompakten Liegruppe ist jeder maximale Torus die Einzusammenhangskomponente seines Zentralisators nach 22.5.1.5, und ist unsere Liegruppe zusammenhängend, so ist der Zentralisator unseres Torus bereits zusammenhängend nach 22.5.5.11. □

Proposition 22.5.5.14 (Wurzeln und ihre Spiegelungen). *Seien $K \supset T$ eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem maximalem Torus, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(T)$ das Charaktergitter, $R = \mathrm{R}(K,T) \subset \mathfrak{X}$ das Wurzelsystem und $W = \mathrm{W}(K,T)$ die Weylgruppe. So gilt für jede Wurzel $\alpha \in R$:*

1. *Der Wurzelraum $(\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, K)_\alpha$ ist eindimensional und kein positives Vielfaches von α ist auch positives Vielfaches einer anderen Wurzel β, so daß in Formeln für $\beta \in R$ gilt $(\alpha \neq \beta) \Rightarrow (\mathbb{N}\alpha \cap \mathbb{N}\beta = 0)$;*

2. *Es gibt genau ein Element der Weylgruppe $s_\alpha \in W$, das auf $\mathfrak{X}$ als Spiegelung operiert und die Eigenschaft $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ hat;*

3. *Es gibt genau ein $\alpha^\vee : \mathfrak{X} \to \mathbb{Z}$ mit $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle\lambda, \alpha^\vee\rangle\alpha \quad \forall\lambda \in \mathfrak{X}$.*

Beweis. 1. Wir betrachten die Einskomponente des Kerns von $\alpha : T \to S^1$, den Torus $S := (\ker \alpha)^\circ \subset T$, und bilden das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Z}_K(S) \arrow[d, two heads] \\ T/S \arrow[r] & \mathrm{Z}_K(S)/S \end{tikzcd}$$

Ein Beispiel für diese Konstruktion wird in 22.5.5.15 skizziert. Die obere Horizontale ist offensichtlich die Einbettung eines maximalen Torus, und wegen 22.5.5.7 gilt dasselbe für die untere Horizontale. Die obere und damit auch die untere Horizontale ist weiter wegen

$$(\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, K)_\alpha \subset (\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, K)^{\ker \alpha} = \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, \mathrm{Z}_K(\ker \alpha) \subset \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, \mathrm{Z}_K(S)$$

keine Bijektion. Aus Dimensionsgründen haben wir $T/S \cong S^1$. Nach der Klassifikation der Gruppen vom Rang Eins 22.5.2.1 ist folglich $\mathrm{Z}_K(S)/S$ dreidimensional und das Wurzelsystem dieser Gruppe in Bezug auf den Torus T/S enthält $\alpha \in \mathfrak{X}(T/S) \subset \mathfrak{X}(T)$ und es folgt $\mathrm{R}(\mathrm{Z}_K(S)/S, T/S) = \{\alpha, -\alpha\}$. Es folgt $\mathrm{R}(\mathrm{Z}_K(S), T) = \{\alpha, -\alpha\}$. Andererseits kann die komplexifizierte Liealgebra des Zentralisators mithilfe von 22.4.1.22 und 22.2.2.5 auch dargestellt werden als

$$\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, \mathrm{Z}_K(S) = (\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, K)^{\mathrm{Ad}(S)} = (\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, K)^{\mathrm{ad}(\mathrm{Lie}\, S)} = \bigoplus_{\ker \mathrm{d}\beta \supset \ker \mathrm{d}\alpha} (\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, K)_\beta$$

Hier verwenden wir im zweiten Schritt, daß S zusammenhängend ist, und im Dritten die Formel $\mathrm{Lie}\, S = \ker \mathrm{d}\alpha$. Aus dem Vergleich dieser beiden Beschreibungen von $\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, \mathrm{Z}_K(S)$ als Darstellung von T folgt sofort Teil 1. Weiter folgt $\mathrm{Lie}\, \mathrm{Z}_K(\ker \alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}\, \mathrm{Z}_K(S)$, was wir später noch brauchen werden.

2. Nach 22.5.5.11 wissen wir, daß $\mathrm{Z}_K(S)$ zusammenhängend ist. Wenn wir das nicht wüßten, könnten wir im Übrigen den Beweis in derselben Weise führen und müßten nur stets statt $\mathrm{Z}_K(S)$ seine Einskomponente betrachten. Ein mögliches $s \in W$ erhält man, indem man das nichttriviale Element der Weylgruppe von $\mathrm{Z}_K(S)/S$ bezüglich T/S mithilfe von 22.5.5.8 unter unserem Homomorphismus $\mathrm{Z}_K(S) \twoheadrightarrow \mathrm{Z}_K(S)/S$ in die Weylgruppe $\mathrm{W}(\mathrm{Z}_K(S), T)$ von $\mathrm{Z}_K(S)$ bezüglich T zurückholt, die ja offensichtlich als Untergruppe von $\mathrm{W}(K, T)$ aufgefaßt werden kann. Nun haben wir nach 22.4.6.7 eine kurze exakte Sequenz

$$\mathfrak{X}(T/S) \hookrightarrow \mathfrak{X}(T) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(S)$$

Unser s operiert per definitionem vorne durch -1, und da es einen Repräsentanten in $\mathrm{Z}_K(S)$ hat, muß es hinten als die Identität operieren. Sein Quadrat operiert

auf $\mathfrak{X}(T)$ also durch einen Automorphismus, der unipotent ist, also den einzigen Eigenwert Eins hat, und der darüber hinaus endliche Ordnung hat, da die Weylgruppe endlich ist. Damit muß dies Quadrat nach 4.3.3.18 auf $\mathfrak{X}(T)$ die Identität sein. Das zeigt, daß s als Gitterspiegelung auf $\mathfrak{X}(T)$ operiert. Die Eindeutigkeit folgt ähnlich, da das Produkt von zwei möglichen Wahlen $s, t \in W$ durch einen unipotenten Automorphismus von endlicher Ordnung auf $\mathfrak{X}(T)$ operieren muß.

3. Die Surjektion $\alpha : T \twoheadrightarrow S^1$ induziert eine kurze exakte Sequenz $\ker \alpha \hookrightarrow T \twoheadrightarrow S^1$ und damit nach 22.4.6.7 in der Gegenrichtung eine kurze exakte Sequenz $\mathfrak{X}(S^1) \hookrightarrow \mathfrak{X}(T) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(\ker \alpha)$ alias

$$\mathbb{Z}\alpha \hookrightarrow \mathfrak{X}(T) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(\ker \alpha)$$

Die Operation von s induziert natürlich die Multiplikation mit (-1) auf $\mathbb{Z}\alpha$. Sie induziert jedoch zusätzlich die Identität auf $\mathfrak{X}(\ker \alpha)$, da $\mathrm{Z}_K(\ker \alpha)$ nach der Bemerkung zu Schluß des Beweises von Teil 1 dieselbe Liealgebra hat wie die a priori größere Gruppe $\mathrm{Z}_K(S)$ und folglich s in $\mathrm{Z}_K(\ker \alpha) = \mathrm{Z}_K(S)$ repräsentiert wird. Die Abbildung $\mathfrak{X}(T) \to \mathfrak{X}(T)$, $\lambda \mapsto (\lambda - s\lambda)$ faktorisiert somit über $\mathbb{Z}\alpha$ und liefert daher einen Gruppenhomomorphismus $\alpha^\vee : \mathfrak{X}(T) \to \mathbb{Z}$ mit $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ und $\alpha^\vee \circ s = -\alpha^\vee$. Die Abbildung $\lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ ist also auf $\mathbb{Z}\alpha$ die Multiplikation mit (-1) und auf der Fixpunktmenge von s die Identität und muß folglich mit s übereinstimmen. □

22.5.5.15 (**Beispiele zum vorhergehenden Beweis bei unitären Gruppen**). Im Fall $K = \mathrm{U}(n)$ und T den Diagonalmatrizen und $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ wird $S = (\ker \alpha)^\circ = \ker \alpha$ die Gruppe der unitären Diagonalmatrizen, die an der i-ten Stelle denselben Eintrag haben wie an der j-ten Stelle. Der Zentralisator dieser Untergruppe besteht aus allen unitären Matrizen, die höchstens auf der Diagonalen und an den Stellen mit Indizes (i, j) oder (j, i) von Null verschiedene Einträge haben. Man kann damit leicht einen Isomorphismus $\mathrm{SU}(2)/\{\pm \mathrm{id}\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Z}_K(S)/S$ angeben.

Übungen

Übung 22.5.5.16. Man zeichne das Gitterdatum für die kompakten zusammenhängenden Liegruppen $\mathrm{SU}(3)$ und $\mathrm{SO}(4)$.

Übung 22.5.5.17. Ein Element eines maximalen Torus in einer kompakten Liegruppe liegt in keinem anderen maximalen Torus genau dann, wenn es im Kern keiner Wurzel liegt.

Übung 22.5.5.18. Ein Element eines maximalen Torus in einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe liegt im Zentrum genau dann, wenn es im Kern jeder Wurzel liegt.

Übung 22.5.5.19. Gegeben ein Torus T faktorisiert das Ableiten von Charakteren $\mathfrak{X}(T) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Lie}(T), \mathbb{C})$ über $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Lie}(T), \mathrm{i}\mathbb{C})$. Ist T ein maximaler Torus einer kompakten Liegruppe mit endlichem Zentrum, so ist die Killingform nach 22.4.2.3 negativ definit auf $\mathrm{Lie}(T)$ und entspricht so unter dem durch die Killingform gegebenen Isomorphismus einer negativ definiten Bilinearform auf dem Dualraum $\mathrm{Lie}(T)^*$. Auf dem Erzeugnis der Differentiale der Wurzeln $\langle R \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}(T)^*$ ist diese Bilinearform folglich positiv definit.

22.5.6 Spiegelungen in der Weylgruppe

22.5.6.1 (**Bestimmung des Zentrums aus den Gitterdaten**). Seien $K \supset T$ eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem maximalen Torus. Die vorhergehende Übung 22.5.5.18 liefert uns schon mal eine linksexakte Sequenz $\mathrm{Z}(K) \hookrightarrow T \to \prod_{\alpha \in R} S^1$ mit dem Auswerten aller Wurzeln als rechtem Pfeil. Gehen wir zu den Charaktergruppen über, so erhalten wir mit 22.4.6.7 eine exakte Sequenz

$$\langle R \rangle \hookrightarrow \mathfrak{X}(T) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(\mathrm{Z}(K))$$

Genau dann hat also unsere Gruppe K triviales Zentrum, wenn die Wurzeln die Charaktergruppe des maximalen Torus erzeugen, und genau dann ist das Zentrum diskret, wenn das von den Wurzeln erzeugte Gitter endlichen Index in der Charaktergruppe hat.

Ergänzung 22.5.6.2 (**Rang-Eins-Untergruppen zu Wurzeln**). Ist $K \supset T$ eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem maximalem Torus, so gibt es für jede Wurzel $\alpha \in \mathrm{R}(K, T)$ genau eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe K^α vom Rang Eins mit $\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}(K^\alpha) \supset (\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} K)_\alpha$. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Gegeben so ein K^α ist sicher $\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}(K^\alpha)$ stabil unter der komplexen Konjugation und muß folglich mit $(\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} K)_\alpha$ auch $(\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} K)_{-\alpha}$ umfassen und damit die von diesen beiden Wurzelräumen erzeugte Unteralgebra, die wir mit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha$ bezeichnen. Diese Unteralgebra ist nach 22.5.5.14.1 von der Dimension höchstens drei und sie muß surjektiv und folglich vermittels eines Isomorphismus in den Notationen des vorhergehenden Beweises von 22.5.5.14 mit $S = (\ker \alpha)^\circ$ auf $\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} \mathrm{Z}_K(S)/S$ gehen. Unsere Unteralgebra ist offensichtlich auch stabil unter der komplexen Konjugation, folglich schneidet sie $\mathrm{Lie}\, \mathrm{Z}_K(S)$ in einer Unteralgebra $\mathfrak{g}^\alpha$, die unter der Projektion isomorph auf $\mathrm{Lie}\, \mathrm{Z}_K(S)/S$ alias $\mathfrak{su}(2)$ abgebildet wird. Invertieren wir diesen Isomorphismus, so erhalten wir einen Homomorphismus von Liealgebren

$$\mathfrak{su}(2) \hookrightarrow \mathrm{Lie}\, \mathrm{Z}_K(S)$$

mit Bild $\mathfrak{g}^\alpha$, der sich nach 22.4.3.9 integrieren läßt zu einem Homomorphismus von Liegruppen

$$\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{Z}_K(S)$$

Das Bild dieses Homomorphismus ist dann eine Untergruppe K^α mit den gewünschten Eigenschaften. Unser $\alpha^\vee$ entspricht in diesem Bild der von unserem Homomorphismus induzierten Abbildung eines geeigneten maximalen Torus von $\mathrm{SU}(2)$ nach T. In 22.5.7.11 zeigen wir im übrigen, daß K^α genau die derivierte Gruppe von $\mathrm{Z}_K(S)$ ist.

Definition 22.5.6.3. Ein Automorphismus eines Vektorraums über einem Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik heißt eine **Spiegelung**, wenn er eine Hyperebene punktweise festhält und einen Vektor außerhalb dieses **Spiegels** auf sein Negatives wirft.

22.5.6.4. Seien $K \supset T$ eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem maximalen Torus. Die Weylgruppe $\mathrm{W}(K,T)$ operiert auch auf dem reellen Vektorraum $\operatorname{Lie} T$. Die Spiegelung s_α zu einer Wurzel $\alpha \in \mathrm{R}(K,T)$ nach 22.5.5.14 hält darin die Hyperebene $\ker(\mathrm{d}\alpha)$ punktweise fest und operiert folglich auch auf $\operatorname{Lie} T$ als Spiegelung mit dem Spiegel $\ker(\mathrm{d}\alpha)$. Die Zusammenhangskomponenten des Komplements

$$\operatorname{Lie} T \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \ker(\mathrm{d}\alpha)$$

der Vereinigung aller Spiegel zu Spiegelungen s_α heißen **Alkoven**. Die Menge aller Alkoven bezeichnen wir mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\operatorname{Lie} T)$. Sicher permutiert die Weylgruppe W die Spiegel $\ker(\mathrm{d}\alpha) \subset \operatorname{Lie} T$, folglich erhalten wir auch eine Operation der Weylgruppe auf der Menge $\mathcal{A}$ aller Alkoven.

Proposition 22.5.6.5 (Spiegelungen in der Weylgruppe). *Seien $K \supset T$ eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem maximalen Torus. So gilt:*

1. *Die Weylgruppe $W = \mathrm{W}(K,T)$ wird von den Spiegelungen s_α zu Wurzeln $\alpha \in \mathrm{R}(K,T)$ erzeugt;*

2. *Außer den Spiegelungen zu Wurzeln operieren keine weiteren Elemente der Weylgruppe als Spiegelungen auf $\operatorname{Lie} T$;*

3. *Die Weylgruppe operiert frei und transitiv auf der Menge der Alkoven in $\operatorname{Lie} T$. In Formeln liefert also für jeden Alkoven A das Anwenden eine Bijektion $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$, $w \mapsto wA$.*

Ergänzung 22.5.6.6. Teile des anschließenden Beweises werden wir später im Rahmen der allgemeinen Theorie endlicher Spiegelungsgruppen 23.1.6.1 noch besser verstehen können. Insbesondere kann man ganz allgemein zeigen, daß jede endliche von Spiegelungen erzeugte Gruppe von Automorphismen eines endlichen reellen Vektorraums frei und transitiv auf der Menge ihrer Alkoven operiert, ud daß jede Spiegelung einer derartigen Gruppe konjugiert ist zu einer der erzeugenden Spiegelungen.

Beweis. Wir zeigen etwas technischer die beiden folgenden Aussagen:

1. Die Operation der Weylgruppe auf der Menge aller Alkoven ist frei;
2. Die Operation der von allen Spiegelungen s_α an Wurzeln α erzeugten Untergruppe auf der Menge aller Alkoven ist transitiv.

Hier und im folgenden meinen wir mit Alkoven stets die Zusammenhangskomponenten des Komplements der Vereinigung aller Spiegel von Spiegelungen $s_\alpha \in W$ zu Wurzeln $\alpha \in R$. Erst im nachhinein wird klar werden, daß das auch die Vereinigung aller Spiegel zu Spiegelungen aus W ist. Zusammen liefern unsere beiden technischen Aussagen sofort, daß die Weylgruppe frei und transitiv auf der Menge aller Alkoven operiert und von den Spiegelungen an Wurzeln erzeugt wird, also die Aussagen 1 und 3 der Proposition. Um auch die zweite Aussage der Proposition abzuleiten, beachten wir, daß es nach 22.2.4.10 oder einfacher 8.4.1.4 auf $\operatorname{Lie} T$ ein W-invariantes Skalarprodukt gibt, so daß eine Spiegelung aus W durch ihren Spiegel bereits eindeutig festgelegt wird. Hätten wir zusätzlich zu den s_α noch eine weitere Spiegelung s in W, so müßte deren Spiegel ganz offensichtlich und formal nach 6.3.10.1 einen Alkoven A treffen und es folgte $sA = A$ im Widerspruch zur Freiheit der Operation. Es reicht folglich, wenn wir unsere beiden technischen Aussagen zeigen.

Wir beginnen mit der Ersten. Es gilt zu zeigen, daß ein Element der Weylgruppe, das einen Alkoven festhält, bereits die Identität sein muß. Aber bildet ein Element der Weylgruppe einen Alkoven auf sich selber ab, so hat es in diesem Alkoven auch einen Fixpunkt, sagen wir den Schwerpunkt einer Bahn der Untergruppe, die von besagtem Element erzeugt wird. Unser Element der Weylgruppe wird also repräsentiert im Zentralisator eines Elements $X \in \operatorname{Lie} T$, auf dem das Differential keiner Wurzel verschwindet. Für jeden Punkt $X \in \operatorname{Lie} T$, der vom Differential keiner Wurzel annulliert wird, gilt aber $\operatorname{Lie}_{\mathbb{C}} \mathrm{Z}_K(X) = \operatorname{Lie}_{\mathbb{C}} T$ und damit $\operatorname{Lie} \mathrm{Z}_K(X) = \operatorname{Lie} T$. Weil nun nach dem im Anschluß bewiesenen Lemma 22.5.6.7 der Zentralisator eines Elements der Liealgebra stets zusammenhängend ist, folgt $\mathrm{Z}_K(X) = T$ und unser Element der Weylgruppe war die Identität.

Nun zeigen wir die Zweite unserer technischen Aussagen. Bezeichne $W' \subset W$ die von den Wurzelspiegelungen erzeugte Untergruppe. Wir wählen wieder ein W-invariantes Skalarprodukt auf $\operatorname{Lie} T$ und finden wir für beliebige Vektoren $v, w \in \operatorname{Lie} T$ ein $x \in W'$ derart, daß der Abstand $\|v - xw\|$ kleinstmöglich wird. Dann können v und xw durch keinen Spiegel einer Wurzelspiegelung mehr getrennt werden, da ja sonst aus elementargeometrischen Gründen für s_α die Spiegelung an besagtem Spiegel v und $s_\alpha xw$ noch näher aneinander wären. Also liegen v und xw für jeden Spiegel einer Wurzelspiegelung in demselben abgeschlossenen Halbraum und damit im Abschluß desselben Alkoven. $\square$

Lemma 22.5.6.7. *In einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe ist der Zentralisator eines Elements der Liealgebra stets zusammenhängend.*

Beweis. Der Zentralisator eines Elements der Liealgebra fällt zusammen mit dem Zentralisator der Gerade durch besagtes Element, dann auch mit dem Zentralisator ihres Bildes unter der Exponentialabbildung, und dann schließlich auch mit dem Zentralisator des Abschlusses dieses Bildes. Dieser Abschluß aber ist eine zusammenhängende kompakte abelsche Liegruppe, als da heißt ein Torus, und der Zentralisator eines Torus in einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe ist nach 22.5.5.11 auch zusammenhängend. □

22.5.6.8 (**Liealgebra und Charaktergitter**). Gegeben eine abelsche kompakte Liegruppe T liefert das Ableiten eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(T) & \to & \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\operatorname{Lie} T, \mathrm{i}\,\mathbb{R}) \\ \alpha & \mapsto & \mathrm{d}\alpha \end{array}$$

Im Fall eines Torus ist sie sogar injektiv. Hierbei fassen wir den Charakter α als Gruppenhomomorphismus $\alpha : T \to S^1$ auf und S^1 als Untergruppe $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$ mit Liealgebra $\operatorname{Lie} S^1 = \mathrm{i}\,\mathbb{R} \subset \operatorname{Lie} \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}$. Man sieht nun leicht ein, daß diese Einbettung einen Isomorphismus von reellen Vektorräumen

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{X}(T), \mathrm{i}\,\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Lie} T$$

induziert, der auch natürlich ist in T in dem Sinne, daß jeder Homomorphismus in eine weitere abelsche kompakte Liegruppe $\varphi : T \to S$ ein kommutatives Diagramm liefert der Gestalt

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{X}(T), \mathrm{i}\,\mathbb{R}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \operatorname{Lie} T \arrow[d, "\mathrm{d}\varphi"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{X}(S), \mathrm{i}\,\mathbb{R}) \arrow[r, "\sim"] & \operatorname{Lie} S \end{tikzcd}$$

Gegeben $K \supset T$ eine kompakte zusammenhängende Liegruppe mit einem maximalen Torus wirkt also insbesondere ein Element der Weylgruppe $\mathrm{W}(K, T)$ auf $\operatorname{Lie} T$ als Spiegelung genau dann, wenn es auf $\mathfrak{X}(T)$ als Gitterspiegelung wirkt.

22.5.6.9. Außer den Spiegelungen zu Wurzeln operieren keine weiteren Elemente der Weylgruppe einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe als Gitterspiegelungen auf dem Charaktergitter des zugehörigen maximalen Torus. In der Tat müßten diese Elemente 22.5.6.8 als Spiegelungen auf der Liealgebra unseres maximalen Torus wirken, und das tun nach 22.5.6.5 außer den Wurzelspiegelungen keine weiteren Elemente der Weylgruppe.

22.5.7 Klassifikation der kompakten Liegruppen*

22.5.7.1. In diesem Abschnitt brauchen wir Grundkenntnisse über Überlagerungen und die Fundamentalgruppe, wie sie etwa in 16.3.1.1 folgende erklärt werden. Weiter müssen wir die Klassifikation der kompakten Liegruppen mit trivialem Zentrum durch Wurzelsysteme voraussetzen, die wir in 24.3.5.21 im Rahmen der Theorie der halbeinfachen Liealgebren zeigen und gleich in 22.5.7.8 wiederholen. Schließlich müssen wir aus dieser Theorie auch noch wissen, daß jedes ganze Gewicht des Wurzelsystems einer halbeinfachen komplexen Liealgebren als Gewicht einer endlichdimensionalen Darstellung besagter Liealgebra auftritt, was etwa aus der Klassifikation durch das höchste Gewicht 24.4.1.4 unmittelbar folgt.

Lemma 22.5.7.2 (Erweiterung von Gittern zu Vektorräumen). *Sei k ein Körper.*

1. *Gegeben eine abelsche Gruppe X gibt es ein Paar (X_k, can_X) bestehend aus einem k-Vektorraum X_k und einem Gruppenhomomorphismus $\mathrm{can}_X : X \to X_k$ derart, daß für jeden k-Vektorraum W das Vorschalten von can eine Bijektion $\mathrm{Hom}_k(X_k, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}(X, W)$ liefert;*

2. *Unser Paar ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Ist genauer (V, κ) ein weiteres derartiges Paar, so ist der eindeutig bestimmte Vektorraumhomomorphismus $\varphi : X_k \to V$ mit $\varphi \circ \mathrm{can}_X = \kappa$ ein Isomorphismus;*

3. *Für jeden Homomorphismus $\varphi : X \to Y$ von abelschen Gruppen gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi_k : X_k \to Y_k$ mit $\varphi_k \circ \mathrm{can}_X = \mathrm{can}_Y \circ \varphi$.*

22.5.7.3. Man sagt in diesem Zusammenhang, der Vektorraum X_k entstehe aus der abelschen Gruppe X durch **Erweiterung der Skalare**. Da das Paar (X_k, can_X) eindeutig ist bis auf eindeutigen Isomorphismus, erlauben wir uns den bestimmten Artikel. In der Sprache der Kategorientheorie ist $X \mapsto X_k$ der Linksadjungierte des Vergißfunktors von der Kategorie der k-Vektorräume in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Beispiel 22.5.7.4. Für $X = \mathbb{Z}^n$ ist die Erweiterung der Skalare offensichtlich der Vektorraum $X_k = k^n$ zusammen mit dem offensichtlichen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{can}_X : \mathbb{Z}^n \to k^n$. Damit haben wir bereits erkannt, wie für jedes Gitter X eine Erweiterung der Skalare X_k konstruiert werden kann. Mehr brauchen wir im folgenden gar nicht zu wissen.

Beweis. Im allgemeinen erhält man eine Erweiterung der Skalare mithilfe des Tensorprodukts 7.2.8.7 als $X_k := X \otimes_{\mathbb{Z}} k$. Ich gehe nicht näher darauf ein, weil wir die Erweiterung der Skalare hier nur im Fall eines Gitters X brauchen werden. In diesem Fall und allgemeiner für endlich erzeugte abelsche Gruppen X können wir die Erweiterung der Skalare alternativ auch als den Dualraum $X_k = \mathrm{Ab}(X, k)^*$

des Raums der Gruppenhomomorphismen $X \to k$ mit der durch das Auswerten gegebenen Abbildung $X \to X_k$ konstruieren. $\square$

22.5.7.5. Schreiben wir $V_{\mathbb{C}}$, so muß der Leser von nun an aus dem Kontext erschließen, ob die Komplexifizierung eines reellen Vektorraums V oder vielmehr die Erweiterung einer endlich erzeugten abelschen Gruppe V zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum gemeint ist.

Beispiel 22.5.7.6. Mit unseren neuen Notationen liefert etwa das Ableiten wie in 22.5.6.8 für jede kompakte abelsche Liegruppe T einen Isomorphismus von reellen Vektorräumen $\mathfrak{X}(T)_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\operatorname{Lie} T, \mathrm{i}\,\mathbb{R})$ und einen Isomorphismus von komplexen Vektorräumen $\mathfrak{X}(T)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} (\operatorname{Lie}_{\mathbb{C}} T)^*$ der zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum erweiterten Charaktergruppe mit dem Dualraum der komplexifizierten Liealgebra.

22.5.7.7. Gegeben eine endliche Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl $W \looparrowright X \supset R$ wie in 22.5.4.3 ist im von R erzeugten $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\langle R\rangle_{\mathbb{Q}} \subset X_{\mathbb{Q}}$ die Teilmenge R ein abstraktes Wurzelsystem im Sinne von 23.2.1.2. Kommt unsere endliche Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl von einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe K mit maximalem Torus T her, so nennen wir dies abstrakte Wurzelsystem das **Wurzelsystem von** (K, T) und notieren es $\mathrm{R}(K, T)$. Es hängt bis auf Isomorphismus nicht von T ab und heißt je nach Kontext auch das **Wurzelsystem von** K.

22.5.7.8 (**Kompakte Liegruppen mit trivialem Zentrum**). Ordnen wir jeder kompakten Liegruppe ihr Wurzelsystem zu, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{zusammenhängende kompakte} \\ \text{Liegruppen mit trivialem Zentrum} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{abstrakte} \\ \text{Wurzelsysteme} \end{array} \right\}$$

Das wurde bereits in 24.3.5.21 bewiesen. Dem Wurzelsystem A_{n-1} entspricht etwa der Quotient $\mathrm{U}(n)/Z$ der unitären Gruppe $\mathrm{U}(n)$ nach ihrem Zentrum, das im übrigen als $Z = S^1\,\mathrm{id}$ explizit angegeben werden kann. Die Klassifikation abstrakter Wurzelsysteme wird in 23.2.3.9 besprochen. Will man die Aussage noch elementarer formulieren, mag man beachten, daß kompakte Liegruppen nach 22.3.2.22 stets Matrixliegruppen sind und stetige Homomorphismen von Matrixliegruppen nach 22.1.4.10 glatt. Folglich erhalten wir mit obigen Argumenten sogar eine Bijektion auf Isomorphieklassen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{zusammenhängende kompakte} \\ \text{Matrixliegruppen mit trivialem Zentrum} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{abstrakte} \\ \text{Wurzelsysteme} \end{array} \right\}$$

Satz 22.5.7.9 (Überlagerungen kompakter Liegruppen). *1. Gegeben eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit endlichem Zentrum ist auch ihre universelle Überlagerung kompakt;*

2. *Genau dann ist eine zusammenhängende kompakte Liegruppe einfach zusammenhängend, wenn die Kowurzeln eines und jedes maximalen Torus T bereits das volle duale Gitter $\mathfrak{X}(T)^* := \mathrm{Ab}(\mathfrak{X}(T), \mathbb{Z})$ zum Charaktergitter $\mathfrak{X}(T)$ erzeugen.*

Beweis. 1. Seien K eine zusammenhängende Liegruppe und $p : \hat{K} \twoheadrightarrow K$ eine zusammenhängende Überlagerung. Nach 16.5.2.2 kann $\hat{K}$ so mit einer Verknüpfung versehen werden, daß es zu einer topologischen Gruppe wird und $\hat{K} \twoheadrightarrow K$ zu einem Gruppenhomomorphismus. Immer noch nach 16.5.2.2 ist der Kern dieses Gruppenhomomorphismus dann zentral. Mit der im Sinne von 22.3.2.28 étale induzierten Struktur als $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit ist dann nach 22.3.2.29 auch $\hat{K}$ eine Liegruppe. Ist unsere Überlagerung endlich und K kompakt, so ist offensichtlich auch $\hat{K}$ kompakte Liegruppe. Formal zeigen die Resultate 15.2.4.4 und 15.2.4.15 und 15.2.4.16 zu eigentlichen Abbildungen sogar ganz allgemein, daß jede Überlagerung eines Kompaktums mit endlichen Fasern wieder kompakt ist. Nach 22.5.5.8 ist dann für $T \subset K$ ein maximaler Torus auch sein Urbild $\hat{T} \subset \hat{K}$ ein maximaler Torus und wir haben eine kurze exakte Sequenz $\ker p \hookrightarrow \hat{T} \twoheadrightarrow T$ und dual eine kurze exakte Sequenz $\mathfrak{X}(T) \hookrightarrow \mathfrak{X}(\hat{T}) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(\ker p)$. Hat unsere kompakte Liegruppe K zusätzlich endliches Zentrum, so hat nach 22.5.6.1 die von den Wurzeln erzeugte Untergruppe $\langle R \rangle \subset \mathfrak{X}(T)$ endlichen Index. Damit ist notwendig

$$X := \{\lambda \in \mathfrak{X}(T)_{\mathbb{Q}} \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall \alpha \in R\}$$

ein Gitter, das „Gitter der ganzen Gewichte unseres Wurzelsystems“, und $\mathfrak{X}(T)$ hat darin endlichen Index. Nun induziert die Einbettung einen Isomorphismus $\mathfrak{X}(T)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\hat{T})_{\mathbb{Q}}$, und unter dessen Inversem muß auch $\mathfrak{X}(\hat{T})$ im Gitter der ganzen Gewichte X landen. Mit $|\ker p| = |\mathfrak{X}(\ker p)|$ folgern wir für alle zusammenhängenden endlichen Überlagerungen von K dieselbe endliche Schranke $|\ker p| \leq |X/\mathfrak{X}(T)|$ ihrer Blätterzahl. Wenn die universelle Überlagerung

$$\pi : \tilde{K} \twoheadrightarrow K$$

unendliche Fasern hat, kann es aber solch eine universelle Schranke nicht geben. In der Tat ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(K; 1)$ als Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit endlich erzeugt nach 16.1.2.30 und als Fundamentalgruppe einer lokal zusammenziehbaren topologischen Gruppe abelsch nach 16.5.2.2 oder 16.1.2.29, und die Operation der Fundamentalgruppe auf der Faser über dem neutralen Element liefert nach 16.5.2.2 einen Gruppenisomorphismus

$$c : \pi_1(K; 1) \xrightarrow{\sim} \ker \pi$$

Als endlich erzeugte unendliche abelsche Gruppe hätte diese Gruppe Untergruppen Γ von beliebig großem endlichen Index. Dann aber wären die $\tilde{K}/\Gamma \twoheadrightarrow K$ endliche Überlagerungen mit beliebig großer Blätterzahl im Widerspruch zu Existenz

einer universellen Schranke.

2. Erzeugen die Kowurzeln eines maximalen Torus bereits das volle duale Gitter, so gilt in den Notationen aus dem Beweis des ersten Teils $X = \mathfrak{X}(T)$ und unsere Gruppe hat endliches Zentrum nach 22.5.6.1 und besagte universelle Schranke ist Eins. Dann folgt wie im Beweis des ersten Teils, daß jede universelle Überlagerung ein Isomorphismus sein muß. Erzeugen die Kowurzeln eines maximalen Torus nicht das volle duale Gitter, so unterscheiden wir zwei Fälle: Erzeugen unsere Kowurzeln noch nicht einmal eine Untergruppe von endlichem Index, so hat nach 22.5.6.1 das Zentrum von K positive Dimension und damit auch das Zentrum $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ der Liealgebra von K. Die Zerlegung $\mathfrak{k} = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ aus 22.4.2.9 zeigt, daß jede Linearform $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) \to \mathbb{C}$ zu einem Homomorphismus von Liealgebren $\mathfrak{k} \to \mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann. Wäre K einfach zusammenhängend, so müßte also nach 22.4.3.9 das Differenzieren eine Surjektion $\mathfrak{X}(\mathrm{Z}(K)) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{z}(\mathfrak{k}), \mathbb{C})$ liefern. Das aber kann offensichtlich nicht sein, da die rechte Seite nicht endlich erzeugt ist als abelsche Gruppe. Also erzeugen unsere Kowurzeln notwendig eine Untergruppe von endlichem Index, und nach 22.5.6.1 ist das Zentrum von K endlich. Nun ist $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ nach 24.1.7.9 eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit Cartan'scher $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} T$. Sei $R = \mathrm{R}(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem und $X \subset \mathfrak{h}^*$ das Gitter der ganzen Gewichte. Mit 24.4.1.4 finden wir eine endlichdimensionale komplexe Darstellung V der halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, deren Gewichte das Gitter der ganzen Gewichte erzeugen. Ist K einfach zusammenhängend, so muß sich die $\mathfrak{k}$-Operation auf V nach 22.4.3.9 zu einer K-Operation integrieren lassen, und diese zeigt unmittelbar $\mathfrak{X}(T) = X$. □

Korollar 22.5.7.10. *Jede zusammenhängende Liegruppe mit kompakter Liealgebra ist kompakt.*

Beweis. Sei G unsere Liegruppe. Die adjungierte Darstellung $\mathrm{Ad} : G \to (\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g})^\circ$ induziert nach 22.4.2.5 einen Isomorphismus $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}\,\mathfrak{g}$ auf den jeweiligen Liealgebren und muß also nach 22.3.3.21 eine Überlagerung sein. Wir wissen aber schon aus 22.4.2.4, daß $(\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g})^\circ$ für eine kompakte Liealgebra $\mathfrak{g}$ eine kompakte Liegruppe mit trivialem Zentrum ist. Damit folgt das Korollar aus Satz 22.5.7.9, nach dem jede zusammenhängende Überlagerung einer kompakten Liegruppe mit endlichem Zentrum kompakt ist. □

Lemma 22.5.7.11 (Zentrum und derivierte Gruppe kompakter Liegruppen). *Gegeben eine zusammenhängende kompakte Liegruppe K ist die derivierte Gruppe eine abgeschlossene Untergruppe $(K, K) \trianglelefteq K$, deren Schnitt mit dem Zentrum $\mathrm{Z}(K)$ ist endlich, und die Multiplikation ist ein surjektiver Liegruppenhomomorphismus mit endlichem Kern*

$$(K, K) \times \mathrm{Z}(K)^\circ \twoheadrightarrow K$$

Beweis. Gegeben eine kompakte Liegruppe K zerfällt ihre Liealgebra $\mathfrak{k}$ nach 22.4.2.9 als $\mathfrak{k} = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$. Dann ist $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \cong \mathrm{Lie}(K/\mathrm{Z}(K))$ eine kompakte Liealgebra und nach 22.4.3.6 gibt es eine zusammenhängende Liegruppe L und einen Liegruppenhomomorphismus $L \hookrightarrow K$, der einen Isomorphismus $\mathrm{Lie}\, L \xrightarrow{\sim} [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ induziert. Nach 22.5.7.10 ist L kompakt und geht folglich isomorph auf eine abgeschlossene Untergruppe $L \not\trianglelefteq K$, die wir der Einfachkeit halber mit demselben Buchstaben bezeichnen. Die Betrachtung des Differentials zeigt, daß die Multiplikation eine Surjektion

$$L \times \mathrm{Z}(K)^\circ \twoheadrightarrow K$$

mit diskretem und dann sogar endlichem Kern induziert. Es bleibt also nur noch, die Identität $L = (K, K)$ zu zeigen. Aber wir wissen ja aus 22.4.1.20 um die Identität $(L, L) = L$, und daraus folgt die Behauptung mit unserer Surjektion sofort. □

22.5.7.12 (**Kompakte Liegruppen mit fixiertem Zentrumsquotienten**). Gegeben eine zusammenhängende kompakte Liegruppe L mit trivialem Zentrum betrachten wir die Kategorie

$$\mathrm{Lie}_L^{\mathrm{zk}}$$

aller Paare (K, p) bestehend aus einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe K und einem surjektiven Homomorphismus mit zentralem Kern $p : K \twoheadrightarrow L$. Gegeben ein weiteres derartiges Paar (H, q) erklären wir einen Morphismus in $\mathrm{Lie}_L^{\mathrm{zk}}$ als einen Morphismus von Liegruppen $\varphi : H \to K$ mit $p \circ \varphi = q$. Man beachte, daß für jedes unserer Paare (K, p) das Differential der Projektion einen Isomorphismus $\mathrm{d}p : \mathrm{Lie}(K, K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}\, L$ induziert.

22.5.7.13 (**Gitterdaten mit fixiertem Wurzelsystem**). Gegeben ein rationales Wurzelsystem R betrachten wir die Kategorie

$$\mathrm{GittSpieg}^R$$

aller Paare bestehend aus einer Gitterspiegelungsgruppe $(X \hookleftarrow W)$ mit einer Einbettung $c : R \hookrightarrow X$, die sich zu einer $\mathbb{Z}$-linearen Einbettung $c : \langle R \rangle_{\mathbb{Z}} \hookrightarrow X$ fortsetzen läßt und deren Bild $w(R)$ eine stabile Wurzelwahl ist. Für $\alpha \in R$ bezeichnen wir das Element $s_{c(\alpha)} \in W$ dann kurz als s_α. Morphismen von $(c : R \hookrightarrow X \hookleftarrow W)$ nach $(c' : R \hookrightarrow X' \hookleftarrow W')$ erklären wir als Gruppenhomomorphismen $\phi : X \to X'$ mit $c' = \phi \circ c$ und $s_\alpha \circ \phi = \phi \circ s_\alpha$ für alle $\alpha \in R$. Insbesondere müssen Fixvektoren unter W auf Fixvektoren unter W' abgebildet werden.

Proposition 22.5.7.14 (**Zentrale Erweiterungen bei kompakten Liegruppen**). *Gegeben L eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit trivialem Zentrum*

und darin ein maximaler Torus S mit Wurzelsystem $R := \mathrm{R}(L, S)$ erhalten wir eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Lie}_L^{\mathrm{zk}} \xrightarrow{\approx} (\mathrm{GittSpieg}^R)^{\mathrm{opp}}$$

durch die Vorschrift $(K, p) \mapsto (\mathfrak{X}(p^{-1}S) \leftarrow\!\!\!\!\rho\ \mathrm{W}(K, (p^{-1}S)))$ mit der durch $\mathfrak{X}(p)$ induzierten Einbettung $c : R \hookrightarrow \mathfrak{X}(p^{-1}S)$.

22.5.7.15. Diese Proposition zeigt insbesondere unseren Satz 22.5.5.3, nach dem kompakte zusammenhängende Liegruppen durch ihr Gitterdatum klassifiziert werden.

Beweis. Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. Unser Funktor ist sicher treu, denn je zwei Morphismen $\varphi, \psi : H \to K$ in $\mathrm{Lie}_L^{\mathrm{zk}}$, die dieselbe Abbildung auf den Charaktergittern derjenigen maximalen Tori induzieren, die wir als Urbilder von S erhalten, müssen auf diesen maximalen Tori schon mal übereinstimmen. Andererseits müssen sie aber auch dieselbe Abbildung, ja denselben Isomorphismus $\mathrm{Lie}(H, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(K, K)$ induzieren, da die Projektionen q, p Isomorphismen beider Seiten mit $\mathrm{Lie}\, L$ induzieren. Damit aber sind unsere Morphismen φ, ψ notwendig gleich.

2. Im Fall der universellen Überlagerung $H = \tilde{L}$ von L ist unser Funktor sogar volltreu für von $\tilde{L}$ ausgehende Morphismen. In der Tat bestehen dann die fraglichen Morphismenräume alle aus genau einem Morphismus: Auf der Gruppenseite muß jeder Morphismus $\tilde{L} \to K$ über (K, K) faktorisieren, und da $(K, K) \to L$ eine überlagerung ist, gibt es genau einen Morphismus $\tilde{L} \to (K, K)$ über L. Auf der Gitterseite muß unser Morphismus $\mathfrak{X}(p^{-1}S) \to \mathfrak{X}(q^{-1}S)$ alle W-Invarianten auf Null werfen, und der Quotient nach diesen Invarianten besitzt nach jeweils genau einen wurzelverträglichen Morphismus in das größtmögliche Gitter zu unserem Wurzelsystem, als da heißt das duale Gitter zum Erzeugnis der Kowurzeln. Nach 22.5.7.9 ist das auch genau das Charaktergitter unserer universellen Überlagerung.

3. Im Fall des Produkts $H = T \times \tilde{L}$ der universellen Überlagerung mit einem Torus ist unser Funktor auch volltreu für von H ausgehende Morphismen. In der Tat ist ein Morphismus über L dann festgelegt und festlegbar durch den induzierten Morphismus $T \to \mathrm{Z}(K)$ alias die Angabe eines Gruppenhomomorphismus $\mathfrak{X}(p^{-1}S) \to \mathfrak{X}(T)$, unter dem alle Wurzeln nach Null abgebildet werden. Umgekehrt liefert das auch genau alle möglichen Morphismen auf der Gitterseite.

4. Im Fall eines Quotienten $H = (T \times \tilde{L})/\Gamma$ nach einer endlichen zentralen Untergruppe schließlich besteht das Gitterdatum aus dem Teilgitter der auf Γ verschwindenden Charaktere von $T \times \tilde{L}$ und der Morphismenraum auf der Gitterseite

ist die Teilmenge derjenigen Morphismen, die bereits in diesem Teilgitter landen. Sie entsprechen auf der Gruppenseite genau den Homomorphismen, die auf Γ trivial sind. Lemma 22.5.7.11 zeigt, daß das bereits der allgemeine Fall ist. Unser Funktor ist also volltreu.

5. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß er surjektiv ist auf Isomorphieklassen. Gegeben ein Datum $R \subset X \hookleftarrow W$ haben wir sicher eine Zerlegung $X_{\mathbb{Q}} = \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \oplus X_{\mathbb{Q}}^W$. Jetzt betrachten wir die Bilder $\bar{R} \subset \bar{X} \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ von R und X unter der Projektion von $X_{\mathbb{Q}}$ auf den ersten Summanden. Dann ist $\bar{R} \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ ein Wurzelsystem und $\bar{X}$ liegt im Gitter $\bar{P} \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ der ganzen Gewichte des Wurzelsystems $\bar{R} \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$. Bezeichne andererseits $\bar{Y}$ das Bild von X unter der Projektion auf den zweiten Summanden. So erhalten wir eine Einbettung $X \hookrightarrow \bar{X} \oplus \bar{Y}$ als Untergitter von endlichem Index, und das zeigt die Surjektivität unseres Funktors auf Isomorphieklassen. $\square$

Ergänzung 22.5.7.16 (**Wie es besser gemacht werden sollte**). Betrachten wir allgemeiner die Kategorie

$$\mathrm{KonTorLie}$$

Als Objekte nehmen wir alle Paare (K, T) bestehend aus einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe mit einem maximalen Torus. Gegeben ein weiteres Objekt (L, S) nehmen wir als Morphismen $(K, T) \to (L, S)$ alle S-Konjugationsklassen von stetigen Gruppenhomomorphismen (Oder T-Konjugationsklassen? Oder kommt das eh nicht drauf an?), die den ausgezeichneten Torus in den ausgezeichneten Torus abbilden und eine Surjektion $(K, K) \twoheadrightarrow (L, L)$ auf den derivierten Gruppen induzieren. Betrachten wir andererseits die Kategorie

$$\mathrm{GittSpieg}$$

Als Objekte nehmen wir alle Gitterspiegelungsgruppen mit stabiler Wurzelwahl $(W \hookrightarrow X \supset R)$. Als Morphismen nehmen wir alle Homomorphismen abelscher Gruppen $\varphi : X \to X'$ mit $\varphi(R) \subset R'$ und $s_{\varphi(\alpha)} \circ \varphi = \varphi \circ s_\alpha \ \forall \alpha \in R$ und $s_\beta \circ \varphi = \varphi \ \forall \beta \in R' \backslash \varphi(R)$. So erhalten wir mit unseren Konstruktionen einen Funktor und vermutlich sogar eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{KonTorLie} \xrightarrow{\approx} \mathrm{GittSpieg}$$

Das mag einmal ein Student ausarbeiten.

Übungen

Übung 22.5.7.17. Gegeben eine exakte Sequenz $X' \to X \to X''$ von abelschen Gruppen ist auch die durch Erweiterung der Skalare zu $\mathbb{Q}$ entstehende Sequenz $X'_{\mathbb{Q}} \to X_{\mathbb{Q}} \to X''_{\mathbb{Q}}$ exakt. Diese Aussage ist im übrigen ein Spezialfall der „Exaktheit der Lokalisierung“ 7.4.3.11.

22.5.8 Einfache Darstellungen kompakter Liegruppen

Definition 22.5.8.1. Seien (K, T) eine zusammenhängende torierte kompakte Liegruppe und $R \subset \mathfrak{X}(T)$ ihr Wurzelsystem. Eine Teilmenge $R^+ \subset R$ heißt ein **System positiver Wurzeln**, wenn es eine Linearform $\mathfrak{X}(T) \to \mathbb{Z}$ gibt, die auf keiner Wurzel verschwindet und genau auf den Wurzeln aus R^+ positiv ist. Gegeben ein System positiver Wurzeln erklären wir eine Teilordnung $\leq$ auf $\mathfrak{X}(T)$ durch die Vorschrift

$$\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \mu \in \lambda + |R^+\rangle$$

Hier bezeichnet $|R^+\rangle$ das von den positiven Wurzeln erzeugte Monoid, also die Menge aller endlichen Summen von positiven Wurzeln unter Einbeziehung der leeren Summe 0.

Beispiel 22.5.8.2. Im Fall der Gruppe $K = \mathrm{U}(n)$ ist $R^+ := \{\varepsilon_i - \varepsilon_j | i < j\}$ in unserer Notation aus 22.5.5.2 ein System positiver Wurzeln.

Proposition 22.5.8.3. *Seien (K, T) eine zusammenhängende torierte kompakte Liegruppe und $R^+ \subset \mathrm{R}(K, T)$ ein System positiver Wurzeln. So gilt:*

1. *Gegeben eine endlichdimensionale irreduzible komplexe Darstellung L von K gibt es in der Menge $\mathrm{P}_T(L) \subset \mathfrak{X}(T)$ ihrer Gewichte aus 22.2.5.9 ein größtes Element für die Ordnung 22.5.8.1. Es heißt das* **höchste Gewicht** *unserer Darstellung. Der zugehörige Gewichtsraum ist eindimensional.*

2. *Haben zwei irreduzible Darstellungen von K dasselbe höchste Gewicht, so sind sie isomorph.*

Beweis. 1. Sicher gibt es in jeder endlichdimensionalen Darstellung ein maximales Gewicht λ. Sei $v_\lambda \in V_\lambda$ ein Gewichtsvektor von diesem Gewicht. Gegeben $\alpha \in R$ und $x_\alpha \in (\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} K)_\alpha$ gilt für jeden Gewichtsraum $x_\alpha V_\mu \subset V_{\mu+\alpha}$, denn die Operation der komplexifizierten Liealgebra ist stets ein Homomorphismus

$$(\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} K) \otimes_{\mathbb{C}} V \to V$$

von Darstellungen. Es folgt $x_\alpha v_\lambda = 0 \ \forall \alpha \in R^+$. Ich behaupte, daß wir eine K-Unterdarstellung erhalten, wenn wir auf unseren maximalen Gewichtsvektor in irgendeiner Reihenfolge irgendwelche Wurzelvektoren zu negativen Wurzeln anwenden und von den so erhaltenen Vektoren das Vektorraumerzeugnis nehmen. In der Tat ist es sicher stabil unter T und unter dem Anwenden von Wurzelvektoren zu negativen Wurzeln. Wendet man aber einen Wurzelvektor zu einer positiven Wurzel x_α an auf einen Ausdruck $x_{\beta(1)} \dots x_{\beta(n)} v_\lambda$ mit negativen Wurzeln $\beta(i)$, so ergibt sich

$$x_\alpha x_{\beta(1)} x_{\beta(2)} \dots x_{\beta(n)} v_\lambda = x_{\beta(1)} x_\alpha x_{\beta(2)} \dots x_{\beta(n)} v_\lambda + [x_\alpha, x_{\beta(1)}] x_{\beta(2)} \dots x_{\beta(n)} v_\lambda$$

und unabhängig davon, ob $\alpha + \beta(1)$ eine positive Wurzel, eine negative Wurzel oder gar keine Wurzel ist, kommen wir mit einer Induktion ans Ziel. War nun $V = L$ irreduzibel und haben wir $v_\lambda \neq 0$, so muß unsere Unterdarstellung bereits ganz L gewesen sein und Teil 1 folgt.

2. Seien L und L' unsere einfachen Darstellungen und sei λ ihr gemeinsames höchstes Gewicht. Wir wählen von Null verschiedene Vektoren $v_\lambda \in L_\lambda$ und $v'_\lambda \in L'_\lambda$, betrachten in $V := L \oplus L'$ die von (v_λ, v'_λ) erzeugte Unterdarstellung W, und zeigen zunächst, daß auch W einfach ist. Wie wir beim Beweis von Teil 1 gesehen haben, ist der Gewichtsraum W_λ genau die Gerade durch (v_λ, v'_λ). Jede echte Unterdarstellung $U \subsetneq W$ liegt damit notwendig in $\bigoplus_{\mu \neq \lambda} W_\mu$. Damit folgt für jede echte Unterdarstellung $U \subset W$ schon $\mathrm{pr}_1(U) \neq L$, $\mathrm{pr}_2(U) \neq L'$. Da aber L und L' einfach sind, folgt $\mathrm{pr}_1(U) = 0$, $\mathrm{pr}_2(U) = 0$ und damit $U = 0$. Mithin ist W einfach, und die von Null verschiedenen Abbildungen $\mathrm{pr}_1 : W \to L$, $\mathrm{pr}_2 : W \to L'$ müssen Isomorphismen sein, denn bei beiden Abbildungen sind ja Bild und Kern Unterdarstellungen der einfachen Darstellungen W, L, L'. Daraus folgt dann $L \simeq W \simeq L'$ wie gewünscht. $\square$

22.5.8.4. Seien (K, T) eine zusammenhängende torierte kompakte Liegruppe und $R^+ \subset \mathrm{R}(K, T)$ ein System von positiven Wurzeln. So setzen wir

$$\mathfrak{X}(T)^+ := \{\lambda \in \mathfrak{X}(T) \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \ \forall \alpha \in R^+\}$$

und nennen die Elemente dieser Menge die **dominanten Gewichte**. Diese Menge hängt natürlich von der Wahl eines Systems positiver Wurzeln R^+ ab.

Satz 22.5.8.5 (Klassifikation der einfachen Darstellungen). *Gegeben (K, T) eine torierte zusammenhängende kompakte Liegruppe und $R^+ \subset \mathrm{R}(K, T)$ ein System positiver Wurzeln liefert die Vorschrift, die jeder einfachen Darstellung ihr höchstes Gewicht zuordnet, eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Einfache endlichdimensionale} \\ \textit{stetige komplexe} \\ \textit{Darstellungen von } K \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{X}(T)^+ \\ L & \mapsto & (\textit{Das höchste Gewicht von } L) \end{array}$$

22.5.8.6. Man betrachte in der Reellifizierung $\mathfrak{X}(T)_\mathbb{R} = \mathfrak{X}(T) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ unseres Charaktergitters das Komplement der Vereinigung der Fixpunkthyperebenen aller Spiegelungen der Weylgruppe. Seine maximalen konvexen Teilmengen heißen **Alkoven** oder **Weylkammern**. Diese Alkoven entsprechen nach 23.2.2.6 eineindeutig Systemen von positiven Wurzeln unter der Zuordnung, die einem System R^+ die konvexe Menge

$$C(R^+) := \{\lambda \in \mathfrak{X}(T)_\mathbb{R} \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0 \ \forall \alpha \in R^+\}$$

zuordnet. Per definitionem ist dann die Menge der dominanten Gewichte der Schnitt des Charaktergitters mit dem Abschluß der Weylkammer zu R^+, in Formeln

$$\mathfrak{X}(T)^+ = \mathfrak{X}(T) \cap \overline{C(R^+)}$$

Beweis. Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung V von K ist die Menge $\mathrm{P}_T(V)$ ihrer Gewichte offensichtlich stabil unter der Weylgruppe W, genauer gilt $\dot{w}V_\lambda = V_{w\lambda}$ für jeden Repräsentanten $\dot{w} \in \mathrm{N}_K(T)$ eines Elements $w \in W$. Ist nun ein Gewicht $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$ einer Darstellung von K nicht dominant, so existiert $\alpha \in R^+$ mit $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle < 0$ und folglich $s_\alpha(\lambda) > \lambda$ und λ kann kein maximales Gewicht gewesen sein. Das höchste Gewicht einer einfachen Darstellung ist also stets dominant. Damit ist die Abbildung aus unserem Satz schon mal sinnvoll definiert. Nach 22.5.8.3 ist sie schon mal injektiv. Es bleibt zu zeigen, daß sie auch surjektiv ist, daß also zu jedem dominanten Gewicht auch eine einfache Darstellung mit diesem höchsten Gewicht existiert. Das verschieben wir auf Abschnitt 22.5.10. □

22.5.9 Differentialformen und Integration

22.5.9.1. Wir verallgemeinern nun den Formalismus der Differentialformen, wie er in 12.8.2 folgende entwickelt wurde, auf abstrakte Mannigfaltigkeiten. Gleichzeitig besprechen wir auch allgemeinere Felder. Wir verwenden im folgenden die Sprache der Kategorientheorie 4.7.1.1.

22.5.9.2. Sei $A : \mathrm{Modf}_\mathbb{R} \to \mathrm{Modf}_\mathbb{R}^{\mathrm{opp}}$ ein Opfunktor von der Kategorie der endlichdimensionalen reellen Vektorräume in sich selbst. Solch ein Opfunktor A heißt **glatt**, wenn die Abbildungen $A : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(A(W), A(V))$ glatt sind. Ausführlicher reden wir dann von einem **reellen glatten Opfunktor**.

22.5.9.3. Ausformuliert ist solch ein Opfunktor eine Zuordnung, die jedem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V einen endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $A(V)$ zuordnet und jedem Vektorraumhomomorphismus $f : V \to W$ einen Vektorraumhomomorphismus $A(f) : A(W) \xrightarrow{\sim} A(V)$ in die Gegenrichtung derart, daß für jeden endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V gilt $A(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{A(V)}$ und, wann immer f, g verknüpfbare Homomorphismen sind, $A(f \circ g) = A(g) \circ A(f)$.

Beispiele 22.5.9.4. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist die Vorschrift $V \mapsto V^*$, $f \mapsto f^\top$, die jedem endlichdimensionalen Raum seinen Dualraum zuordnet und jedem Isomorphismus die transponierte Abbildung, ein glatter Opfunktor. Allgemeiner ist für $r \geq 0$ die Vorschrift $V \mapsto \mathrm{Alt}^r V$ aus 12.8.1.1 oder auch 4.6.5.3 mit der Vorschrift $f \mapsto f^\top$ auf Morphismen in der Notation 12.8.1.13 ein glatter Opfunktor. Auch die Vorschriften Bil und SBil, die jedem Vektorraum den Raum seiner Bilinearformen beziehungsweise symmetrischen Bilinearformen zuordnen, sind glatte Opfunktoren.

22.5.9.5 (**Anwenden glatter Opfunktoren auf Vektorbündel**). Gegeben eine glatte Mannigfaltigkeit M und ein glatter Opfunktor A und ein glattes Vektorbündel $p : E \to M$ im Sinne von 22.3.4.3.4 gibt es auf der disjunkten Vereinigung

$$A(E) := \bigsqcup_{x \in M} A(E_x)$$

genau eine Struktur als glattes Vektorbündel auf M derart, daß für jede Bündelkarte $f : U \times V \to E$ mit $U \Subset M$ und V ein reeller Vektorraum der entsprechenden Dimension die Abbildung $U \times A(V) \hookrightarrow A(E)$ gegeben durch $(x, v) \mapsto (A(f_x)^{-1})(v)$ eine Bündelkarte von $A(E)$ ist. Hierbei verstehen wir f_x als den Isomorphismus $f_x : V \xrightarrow{\sim} E_x$ gegeben durch $f : (x, v) \mapsto f_x(v)$. Um das einzusehen, muß man nur prüfen, daß die Kartenwechsel der so erklärten Bündelkarten glatt sind, und das folgt unmittelbar aus der Glattheit des Opfunktors A. Offensichtlich ist dies $A : E \mapsto A(E)$ dann ein Opfunktor von der Kategorie der glatten Vektorbündel auf M in sich selbst und für endlichdimensionale Vektorräume V haben wir natürliche Bündelisomorphimen $M \times A(V) \xrightarrow{\sim} A(M \times V)$.

Ergänzung 22.5.9.6. Zum Anwenden auf Vektorbündel wäre es natürlicher gewesen, statt mit „glatten Opfunktoren“ mit „glatten Funktoren von der Isomorphismenkategorie der endlichdimensionalen reellen Vektorräume in sich selber“ zu arbeiten. Der Kontext der Opfunktoren erlaubt jedoch das Zurückziehen der zugehörigen Felder unter beliebigen glatten Abbildungen und ist deshalb der Diskussion von Differentialformen besonders gut angepaßt.

22.5.9.7. Wir können zu jedem glatten Vektorraumbündel E insbesondere durch Anwenden des Dualraumfunktors das **duale Bündel** E^* und allgemeiner die Bündel $\mathrm{Alt}^r(E)$ bilden.

22.5.9.8. Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und A ein glatter Opfunktor. Unter einem A**-Feld auf** M verstehen wir einen Schnitt $\sigma : M \to A(\mathrm{T}M)$ des Bündels $A(\mathrm{T}M)$ und schreiben meist $\sigma(x) = \sigma_x$. Ist unsere Mannigfaltigkeit eine offene Teilmenge $M \Subset X$ eines reellen affinen Raums, so haben wir einen natürlichen Isomorphismus $M \times \vec{X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}M$ von glatten Vektorbündeln und damit auch einen natürlichen Isomorphismus $A(\mathrm{T}M) \xrightarrow{\sim} M \times A(\vec{X})$. Unter diesem Isomorphismus entspricht ein A-Feld σ einer Abbildung

$$\sigma : M \to A(\vec{X})$$

Wenn wir den glatten Opfunktor nicht explizit machen wollen, reden wir von einem **Opfunktorfeld**.

22.5.9.9. Das duale Bündel des Tangentialbündels einer glatten Mannigfaltigkeit M heißt das **Kotangentialbündel** T^*M. Die Schnitte des Kotangentialbündels

heißen **Kovektorfelder**. Auf einer offenen Teilmenge $M \Subset X$ eines reellen affinen Raums X können wir insbesondere ein Kovektorfeld identifizieren mit einer Abbildung $M \to \vec{X}^*$ und unser neuer Begriff erweitert unseren Begriff eines Kovektorfelds aus 12.7.1.5.

22.5.9.10. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Schnitte des Bündels $\mathrm{Alt}^r(\mathrm{T}M)$ zum Opfunktor Alt^r der alternierenden r-Multilinearformen heißen **r-Formen** und, wenn man r im Unbestimmten lassen will, **Differentialformen auf** M. Eine n-Form auf einer n-Mannigfaltigkeit heißt auch eine **Volumenform**. Auf einer offenen Teilmenge $M \Subset X$ eines reellen affinen Raums X können wir insbesondere eine r-Form identifizieren mit einer Abbildung $M \to \mathrm{Alt}^r(\vec{X})$. Unser neuer Begriff erweitert damit unseren Begriff von Differentialform aus **??**. Den Raum der glatten r-Formen auf M notieren wir $\Omega^r(M)$.

22.5.9.11 (**Dachprodukt**). Gegeben Differentialformen ω, η auf einer Mannigfaltigkeit M erklären wir ihr **Dachprodukt** punktweise, in Formeln $(\omega \wedge \eta)_x := \omega_x \wedge \eta_x$ für alle $x \in M$. Man erkennt mühelos, daß das Dachprodukt glatter Formen wieder glatt ist.

22.5.9.12 (**Bezug zu den Differentialformen aus der Analysis**). Eine relative Differentialform im Sinne von 12.8.2 auf einer Untermannigfaltigkeit $M \subset X$ positiver Kodimension alias eine Abbildung $M \to \mathrm{Alt}^r \vec{X}$ ist nicht dasselbe wie eine Differentialform im hier erklärten Sinne: Salopp gesprochen liegt der Unterschied darin, daß unsere r-Formen hier an jeder Stelle $p \in M$ nur je r Tangentialvektoren aus T_pM eine Zahl zuordnen, im Gegensatz zu unseren relativen Differentialformen im Sinne von 12.8.2, die sogar je r beliebigen Vektoren des Richtungsraums $\vec{X}$ des umgebenden affinen Raums X eine Zahl zuordneten. Allerdings liefert jede relative Differentialform auf einer Untermannigfaltigkeit durch Einschränkung auch eine „absolute“ Differentialform auf besagter Untermannigfaltigkeit. Hier ist vielleicht auch der richtige Moment für das Eingeständnis, daß das Konzept einer relativen Differentialform vom höheren Standpunkt aus gesehen ziemlich sinnlos ist und nur als Etappe beim didaktischen Aufbau der Theorie eine gewisse Berechtigung haben mag.

Definition 22.5.9.13 (Verwandtschaft von Opfunktorfeldern). Seien $\phi : M \to N$ eine glatte Abbildung von Mannigfaltigkeiten und A ein glatter Opfunktor. Zwei A-Felder $\sigma : M \to A(\mathrm{T}M)$ und $\tau : N \to A(\mathrm{T}N)$ heißen **verwandt unter** ϕ und wir schreiben $\phi : \sigma \rightsquigarrow \tau$, wenn für alle $x \in M$ in Vektorraum $A(\mathrm{T}_xM)$ gilt

$$\sigma_x = (A(\mathrm{d}_x\phi))(\tau_{\phi(x)})$$

22.5.9.14. Natürlich hat jedes Opfunktorfeld genau einen Rückwärtsverwandten. Ist unsere Abbildung ein Diffeomorphismus, so hat es auch genau einen Vorwärtsverwandten. Verwandtschaft von Opfunktorfeldern ist transitiv im Sinne von 12.7.2.18.

22.5.9.15. Nach 22.5.9.14 liefert jede glatte Abbildung $\phi : M \to N$ von Mannigfaltigkeiten lineare Abbildungen $\phi^* : \Omega^r(N) \to \Omega^r(M)$ in die Gegenrichtung, die man das **Zurückholen von Differentialformen** nennt. Sie verallgemeinern unseren Rückzug von Differentialformen aus 12.8.2.9, erfüllen die bei Verwandtschaftsbeziehungen üblichen Identitäten $\mathrm{id}^*(\omega) = \omega$ und $\phi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \phi)^*$, und sind verträglich mit dem Dachprodukt, in Formeln

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = (\phi^*\omega) \wedge (\phi^*\eta)$$

Um eine Differentialform auf einer Mannigfaltigkeit anzugeben, reicht es aus, einen Atlas zu wählen und den Rückzug unserer Form unter jeder Karte anzugeben. Haben wir umgekehrt Differentialformen auf den Definitionsbereichen aller Karten gegeben und passen diese zusammen unter dem Rückzug längs Kartenwechseln, so kommen sie von einer wohlbestimmten Differentialform auf unserer Mannigfaltigkeit her.

Lemma 22.5.9.16 (**Äußere Ableitung**). *Gegeben eine Mannigfaltigkeit M gibt es genau eine Abbildung*

$$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

mit der Eigenschaft, daß für jede Karte $\varphi : W \to M$ und alle $\omega \in \Omega^k(M)$ gilt $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$ mit unserer äußeren Ableitung aus 12.8.5.4 auf der rechten Seite.

Vorschau 22.5.9.17. Diese Abbildung heißt wieder die **äußere Ableitung**. Eine koordinatenfreie Beschreibung der äußeren Ableitung wird in **??** gegeben.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist offensichtlich, da unsere Mannigfaltigkeit ja durch Bilder von Karten überdeckt wird. Die Existenz folgt aus 12.8.5.11, das uns sagt, daß es nicht darauf ankommt, in welcher Karte wir lokal die äußere Ableitung unserer Differentialform berechnen. □

22.5.9.18 (**Differentiale von Funktionen**). Auch auf Mannigfaltigkeiten sind Nullformen Funktionen und Einsformen Kovektorfelder. Jeder glatten Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ auf einer Mannigfaltigkeit ordnet die äußere Ableitung nach 22.5.9.16 also ein Kovektorfeld df zu. Dieses Kovektorfeld ist dadurch definiert, daß für jede Karte $\varphi : W \to M$ gilt $\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi)$. Es kann aber alternativ auch wie folgt beschrieben werden: Eine differenzierbare Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$ hat ja in jedem Punkt $p \in M$ nach 22.3.3.3 ein Differential $\mathrm{d}_p f : \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_{f(p)}\mathbb{R}$. Mithilfe der natürlichen Identifikation $\mathrm{T}_{f(p)}\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ können wir unser Differential mithin als Linearform auf dem Dualraum $\mathrm{d}_p f \in \mathrm{T}_p^* M$ auffassen und die Zuordnung $M \to \mathrm{T}^* M$, $p \mapsto \mathrm{d}_p f$ als ein Kovektorfeld. Dieses Kovektorfeld notieren

wir auch $\mathrm{d}f$ und überlassen dem Leser den Nachweis, daß es mit unserem vermittels 22.5.9.16 erklärten Kovektorfeld df übereinstimmt. In diesem Fall kommt es also nicht darauf an, ob wir das gerade d oder das kursive d verwenden. Wir nennen dieses Kovektorfeld df das **Differential von** f.

Satz 22.5.9.19 (Rechnen mit der äußeren Ableitung). *Gegeben eine glatte Mannigfaltigkeit M gilt:*

1. *Die äußere Ableitung $d : \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$, $\omega \mapsto d\omega$ ist $\mathbb{R}$-linear für alle $r \in \mathbb{N}$;*
2. *Für Nullformen alias Funktionen f gilt $df = \mathrm{d}f$;*
3. *Für das Differential eines Dach-Produkts glatter Differentialformen gilt die* **Leibniz-Regel**
$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^{|\omega|}\omega \wedge d\eta$$
4. *Gegeben ein glatter Morphismus $\phi : M \to N$ von Mannigfaltigkeiten haben wir die* **Verwandtschaftsverträglichkeit der äußeren Ableitung**
$$d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$$
5. *Für jede Differentialform auf M gilt $d(d\omega) = 0$.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der Definition der äußeren Ableitung in 22.5.9.16 und ihren bereits bewiesenen Analoga 12.8.5.11 im Fall offener Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume. □

22.5.9.20. Die Existenz einer äußeren Ableitung von Differentialformen mit den im Satz formulierten bemerkenswerten Eigenschaften ist eine Besonderheit, die für allgemeinere Felder keine Entsprechung hat. Der Kalkül der Differentialformen wird dadurch ein außerordentlich bequemer und nützlicher Formalismus.

22.5.9.21. Gegeben eine Mannigfaltigkeit M und $k \geq 0$ bezeichne $\mathcal{C}_!\Omega^k(M)$ den reellen Vektorraum aller stetigen k-Formen auf M mit kompaktem Träger. Den Begriff der **Orientierung** einer abstrakten Mannigfaltigkeit definieren wir wie im eingebetteten Fall in 12.8.3.3.

Satz 22.5.9.22 (Integration von Volumenformen). *Für jede orientierte k-Mannigfaltigkeit M gibt es genau eine Linearform $\int : \mathcal{C}_!\Omega^k(M) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß für jede Karte $\varphi : W \to M$ der Orientierung ε und jede kompakt getragene Volumenform $\omega \in \mathcal{C}_!\Omega^k(M)$ mit Träger im Bild dieser Karte $\operatorname{supp}\omega \subset \varphi(W)$ gilt*
$$\int_{\vec{M}} \omega = \varepsilon \int_W (\varphi^*\omega)(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k)$$

Beweis. Das geht genau wie der einfache Teil des Beweises von 12.8.4.3. Man wählt eine Überdeckung des Trägers der Volumenform durch die Bilder endlich vieler orientierter Karten und dazu eine Teilung der Eins genau wie in 12.4.2.14 und schreibt so unsere Volumenform als Summe von Formen, die jeweils nur Träger im Bild einer Karte haben. Damit ist dann die Eindeutigkeit bereits gezeigt. Um die Existenz zu zeigen, muß man nur nachweisen, daß das Ergebnis dieser Konstruktion von allen Wahlen unabhängig ist, und das folgert man aus der Transformationsformel. □

22.5.9.23 (**Invariante Volumenformen auf Liegruppen**). Für jede Liegruppe G und jeden glatten Opfunktor A liefert unser in 22.3.4.9 konstruierter Isomorphismus von Vektorbündeln $G \times \mathrm{T}_e G \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}G$ gegeben durch $(g, B) \mapsto (\mathrm{d}_e(g\cdot))(B)$ einen Isomorphismus

$$A(\mathrm{T}G) \xrightarrow{\sim} G \times A(\mathrm{T}_e G)$$

Es ist leicht zu sehen, daß für $\omega \in A(\mathrm{T}_e G)$ der zugehörige konstante Schnitt $p \mapsto (p, \omega)$ rechts einem A-Feld links entspricht, daß unter allen Linkstranslationen zu sich selbst verwandt ist. Insbesondere finden wir auf jeder Liegruppe eine von Null verschiedene unter allen Linkstranslationen zu sich selbst verwandte stetige Volumenform ω^G. Mit $|\omega^G|$ finden wir dann auch eine unter allen Linkstranslationen zu sich selbst verwandte stetige positive Dichte alias ein Haarmaß oder genauer ein linksinvariantes Haar'sches Borelmaß im Sinne von 15.4.3.13.

Übungen

Übung 22.5.9.24. Seien $H \mathrel{\not\triangleleft} G$ Liegruppen. Jede H-invariante Volumenform auf $\mathrm{T}_{\bar{1}}(G/H)$ läßt sich auf genau eine Weise zu einer G-invarianten Volumenform auf G/H fortsetzen, und diese Fortsetzung ist stetig, ja sogar glatt.

Übung 22.5.9.25. Gegeben eine nirgends verschwindende stetige Volumenform ω auf einer Mannigfaltigkeit X erhalten wir eine Orientierung auf X, indem wir jeder angeordneten Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ eines Tangentialraums $\mathrm{T}_x X$ das Vorzeichen der von Null verschiedenen reellen Zahl $\omega_x(v_1, \ldots, v_n)$ zuordnen. Notieren wir $\vec{X}$ unsere Mannigfaltigkeit mit dieser Orientierung, so gilt für jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit kompaktem Träger $\left(\int_{\vec{X}} f\omega\right) \geq 0$, und gilt zusätzlich $f \neq 0$, so ist unser Integral positiv.

Übung 22.5.9.26. Jede Liegruppe ist orientierbar. Jeder Quotient einer Liegruppe nach einer zusammenhängenden Untergruppe ist orientierbar.

22.5.10 Die Weyl'schen Formeln

Satz 22.5.10.1. *Seien $K \supset T$ eine zusammenhängende kompakte Liegruppe und ein maximaler Torus. Für $t \in T$ bezeichne $\mathrm{Ad}_{K/T}(t)$ die von der adjungierten*

Darstellung auf dem Quotienten $\operatorname{Lie} K / \operatorname{Lie} T$ *induzierte Abbildung. So gilt für alle stetigen Klassenfunktionen* $f : K \to \mathbb{C}$ *die* **Weyl'sche Integrationsformel**

$$\int_K f(g)\ \langle g \rangle_K = \frac{1}{|W|} \int_T j(t) f(t)\ \langle t \rangle_T$$

mit $j(t) := \det(\mathrm{id} - \mathrm{Ad}_{K/T}(t))$ *für* $t \in T$.

22.5.10.2. Hier bezeichnet W die Weylgruppe und $\langle g \rangle_K$ sowie $\langle t \rangle_T$ deuten die Integrationen über die normalisierten Haarmaße unserer kompakten Gruppen an. Der Beweis der Integrationsformel wird erst zu Ende dieses Abschnitts gegeben. Daß eine Formel dieser Art gelten könnte, wirkt zumindest plausibel, wenn man sich daran erinnert, daß jeder maximale Torus jede Konjugationsklasse trifft.

22.5.10.3. Wir schreiben die Gruppenstruktur des Charaktergitters $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(T)$ additiv in der Hoffnung, daß das der Anschauung hilft. Fassen wir Elemente $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$ dahingegen als konkrete Funktionen $T \to \mathbb{C}$ oder auch als Elemente des Gruppenrings $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}(T)]$ auf, so schreiben wir e^λ, so daß also gilt $\mathrm{e}^\lambda \mathrm{e}^\mu = \mathrm{e}^{\lambda+\mu} \neq \mathrm{e}^\lambda + \mathrm{e}^\mu$ für $\lambda, \mu \in \mathfrak{X}(T)$. Unsere Funktion j erhält in diesen Notationen, da ja die Zahl der Wurzeln gerade ist, die Gestalt

$$j = \prod_{\alpha \in R} (1 - \mathrm{e}^\alpha) = \prod_{\alpha \in R} (\mathrm{e}^\alpha - 1)$$

22.5.10.4. Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung V eines Torus T gilt für ihren Charakter in unseren Notationen offensichtlich $\chi_V = \sum_{\nu \in \mathfrak{X}(T)} \dim V_\nu \, \mathrm{e}^\nu$. Insbesondere haben wir $\chi_V \in \mathbb{Z}[\mathfrak{X}(T)] \subset \mathcal{C}(T)$.

22.5.10.5. Seien (K, T) eine torierte zusammenhängende kompakte Liegruppe mit Gitterdatum $W \hookrightarrow \mathfrak{X} \supset R$ und sei $R^+ \subset R$ ein System positiver Wurzeln. Wir wählen nun ein System positiver Wurzeln R^+ im Sinne von 22.5.8.1 und betrachten im **halbierten Gewichtegitter** $\mathfrak{X}/2 := (1/2)\mathfrak{X}(T) \subset \mathfrak{X}(T)_\mathbb{Q}$ die Halbsumme der positiven Wurzeln alias den **Weylvektor**

$$\rho = \rho(R^+) := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$$

Satz 22.5.10.6 (Weyl'sche Charakterformel). *Seien* (K, T) *eine torierte zusammenhängende kompakte Liegruppe,* $W \hookrightarrow \mathfrak{X} \supset R$ *ihr Gitterdatum und* $R^+ \subset R$ *ein System positiver Wurzeln. So gilt für den Charakter einer irreduziblen Darstellung* $L(\lambda)$ *von* K *mit höchstem Gewicht* λ *im Gruppenring* $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}/2]$ *des halbierten Gewichtegitters die Formel*

$$\chi_{L(\lambda)}|_T = \frac{\sum_{w \in W} \det(w)\, \mathrm{e}^{w(\lambda+\rho)}}{\sum_{w \in W} \det(w)\, \mathrm{e}^{w\rho}}$$

22.5.10.7. Der Gruppenring $\mathbb{Z}[\Gamma]$ eines Gitters $\Gamma \cong \mathbb{Z}^n$ ist ein Ring von Laurentpolynomen in endlich vielen Veränderlichen und damit ein Integritätsbereich und sogar ein faktorieller Ring. Unsere Formel ist im Quotientenkörper dieses faktoriellen Rings zu verstehen. Mit $\det w = \pm 1$ ist die Determinante des durch w gegebenen Endomorphismus des Charaktergitters gemeint.

22.5.10.8. Aus der Weyl'schen Charakterformel folgt die **Weyl'sche Dimensionsformel**

$$\dim L(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha \in R^+} \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle}{\prod_{\alpha \in R^+} \langle \rho, \alpha^\vee \rangle}$$

Wir geben den Beweis der Dimensionsformel und weitere kombinatorische Identitäten für Charaktere im Kontext der Darstellungstheorie von Liealgebren in 24.4.6.2 folgende. Es handelt sich im wesentlichen um eine geschickte Auswertung der Weyl'schen Charakterformel am neutralen Element mit Hilfe der Regel von de l'Hospital.

22.5.10.9. Der hier gegebene Beweis der Weyl'schen Charakterformel stützt sich auf die Integrationsformel 22.5.10.1 und die Weyl'sche Nennerformel 22.5.10.10. Sie sagt uns, wie wir im Gruppenring $\mathbb{Z}\left[\mathfrak{X}/2\right]$ des halbierten Wurzelgitters eine Art „Quadratwurzel von j" auch als alternierende Summe schreiben können.

Lemma 22.5.10.10 (Weyl'sche Nennerformel). *Gegeben $W \looparrowright \mathfrak{X} \supset R$ eine Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl und $R^+ \subset R$ ein System positiver Wurzeln mit Halbsumme ρ gelten in $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}/2]$ die Identitäten*

$$\mathrm{e}^\rho \prod_{\alpha \in R^+} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha}) = \prod_{\alpha \in R^+} (\mathrm{e}^{\alpha/2} - \mathrm{e}^{-\alpha/2}) = \sum_{w \in W} \det(w)\, \mathrm{e}^{w\rho}$$

22.5.10.11. Multiplizieren wir die linke Seite dieser Gleichung mit $\mathrm{e}^{-\rho}$, so ergibt sich das Produkt der Terme zu negativen Wurzeln aus unserer Produktdarstellung der Funktion j. Die Funktion j selber ist also das Quadrat der Norm der linken und dann natürlich auch der rechten Seite unserer Gleichung.

Beweis der Nennerformel. Die erste Gleichung ist evident. Zum Beweis der zweiten Gleichung brauchen wir einiges zu Spiegelungsgruppen und Wurzelsystemen. Ich erinnere daran, daß wir in 23.2.2.6 zu einem System von positiven Wurzeln R^+ die Teilmenge $\Pi \subset R^+$ der **einfachen Wurzeln** erklärt hatten als die Menge aller positiven Wurzeln, die sich nicht als Summe über eine Multimenge von zwei oder mehr Elementen des besagten Systems schreiben lassen, also die kleinste Teilmenge $\Pi \subset R^+$ mit $R^+ \subset |\Pi\rangle$. In 23.2.2.6 hatten wir auch gezeigt, daß die Spiegelungen zu einfachen Wurzeln von R^+, auch genannt die **einfachen Spiegelungen**, genau die Spiegelungen an den Wänden des R^+ zugeordneten Alkoven sind. Damit erzeugen sie nach 23.1.6.1 oder auch 23.2.2.12 bereits die Weylgruppe und nach

23.2.2.7 gilt für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$ die Formel $s_\alpha R^+ = (R^+ \backslash \alpha) \cup \{-\alpha\}$ und insbesondere $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ und folglich $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$. Anschaulich bedeutet das, daß ein Alkoven unter der Spiegelung an einer seiner Wände in einen Alkoven übergeht, der vom ursprünglichen Alkoven nur durch diese eine Wand getrennt wird. Damit ist klar, daß in unserer Nennerformel beide Seiten bei Anwendung einer einfachen Spiegelung nur ihr Vorzeichen ändern. Die linke Seite setzt sich nun zusammen aus Summanden e^λ mit $\lambda \in \rho - |R^+\rangle$, wo wir mit $|R^+\rangle$ das Monoid-Erzeugnis meinen. Es reicht also zu zeigen, daß von diesen λ nur ρ selbst im Inneren der dominanten Weylkammer liegt. Für alle von Null verschiedenen $\mu \in |R^+\rangle$ gibt es nun eine einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$, deren Kowurzel darauf positiv ist, denn wo alle einfachen Kowurzeln nichtpositiv sind, ist der Abschluß des Negativen unserer Weylkammer $C(R^+)$. So folgt $\langle \rho - \mu, \alpha^\vee \rangle \leq 0$ und $\rho - \mu$ liegt nicht im Inneren der dominanten Weylkammer. $\square$

Beweis der Charakterformel 22.5.10.6. Wir betrachten die zum Fixpunkt $(-\rho) \in \mathfrak{X}/2$ verschobene sogenannte **dot-Operation** der Weylgruppe auf $\mathfrak{X}/2$, gegeben in Formeln durch $w \cdot \lambda := w(\lambda + \rho) - \rho$. Wegen $\rho - s_\alpha \rho = \alpha$ für jede einfache Wurzel α stabilisiert sie das Untergitter $\mathfrak{X}$. Wir bilden für jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{X}$ im Gruppenring des Gewichtegitters die alternierende Summe

$$A(\lambda) := \sum_{w \in W} \det(w)\, \mathrm{e}^{w \cdot \lambda}$$

Die Weyl'sche Nennerformel 22.5.10.10 besagt

$$A(0) = \prod_{\alpha \in R^+} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha})$$

Die $1 - \mathrm{e}^{-\alpha}$ für $\alpha \in R^+$ sind darin paarweise teilerfremd, wie der Leser selbst prüfen mag. Die Identität

$$(1 - \mathrm{e}^\alpha)(1 + \mathrm{e}^\alpha + \ldots + \mathrm{e}^{n\alpha}) = (1 - \mathrm{e}^{(n+1)\alpha})$$

zeigt dann, daß $A(0)$ bereits im Gruppenring des Charaktergitters $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}]$ jedes $A(\lambda)$ teilt, denn $\mathrm{e}^{w \cdot \lambda} - \mathrm{e}^{s_\alpha w \cdot \lambda}$ ist stets ein Vielfaches von einem Ausdruck der Gestalt $(1 - \mathrm{e}^{(n+1)\alpha})$. Wir können mithin für alle dominanten ganzen Gewichte λ im Gruppenring des Charaktergitters den Quotienten

$$\chi_\lambda = A(\lambda)/A(0) \in \mathbb{Z}[\mathfrak{X}]$$

bilden. Er ist invariant unter der Weylgruppe, denn rechnen wir im vergrößerten Gruppenring $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}/2]$ und erweitern unseren Bruch mit e^ρ, so wechseln Nenner und Zähler unter jeder Spiegelung aus der Weylgruppe nur ihr Vorzeichen und

der Bruch bleibt gleich. Wir interpretieren unseren Quotienten nun als eine unter der Weylgruppe invariante Funktionen auf T und dehnen sie aus zu einer Klassenfunktion χ_λ auf K. So erhalten wir ein Orthonormalsystem von Klassenfunktionen, denn mit der Weyl'schen Integrationsformel 22.5.10.1 und der offensichlichen Formel $\int_T \mathrm{e}^\mu = \delta_{0\mu}$ ergibt sich

$$\int_K \bar{\chi}_\lambda \chi_\nu = \int_T \frac{\overline{A(\lambda)}A(\nu)}{\overline{A(0)}A(0)} \frac{j}{|W|} = \frac{1}{|W|} \int_T \overline{A(\lambda)}A(\nu) = \delta_{\lambda\nu}$$

Andererseits gilt $A(0)\,\mathrm{e}^\mu = \mathrm{e}^\mu + \sum_{\nu<\mu} c_\nu\,\mathrm{e}^\nu$, als da heißt, die Multiplikation mit $A(0)$ ändert nicht die Koeffizienten der „Leitterme". Folglich hat $\chi_\lambda = A(\lambda)/A(0)$ wie $A(\lambda)$ den einzigen Leitterm e^λ alias die Gestalt

$$\chi_\lambda = \mathrm{e}^\lambda + \sum_{\nu<\mu} c_\nu\,\mathrm{e}^\nu$$

Daraus folgern wir nun, daß diese Funktionen χ_λ genau die irreduziblen Charaktere von K sein müssen. In der Tat bilden sie sicher eine $\mathbb{Z}$-Basis des Teilrings $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}]^W$. Ist V eine endlichdimensionale Darstellung von K, so liegt die Restriktion ihres Charakters auf T in diesem Teilring und wir können sie mithin darstellen als eine endliche Linearkombination mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\chi_V = \sum_\nu n_\nu \chi_\nu$$

Ist nun V irreduzibel, so gilt zusätzlich $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$. Daraus folgt sofort $\chi_V = \chi_\lambda$ für ein wohlbestimmtes dominantes ganzes Gewicht λ, das dann natürlich das höchste Gewicht von V sein muß, und wir erhalten für $V = L(\lambda)$ auch gleich die Weyl'sche Charakterformel

$$\chi_{L(\lambda)}|_T = \frac{\sum_{w\in W} \det(w)\,\mathrm{e}^{w\cdot\lambda}}{\sum_{w\in W} \det(w)\,\mathrm{e}^{w\cdot 0}} = \frac{\sum_{w\in W} \det(w)\,\mathrm{e}^{w(\lambda+\rho)}}{\sum_{w\in W} \det(w)\,\mathrm{e}^{w\rho}}$$

Das zeigt ein zweites Mal, daß je zwei einfache Darstellungen mit demselben höchsten Gewicht isomorph sind. Da weiter die Charaktere dicht liegen müssen im Raum der Klassenfunktionen, zeigt es auch, daß es zu jedem dominanten Gewicht eine einfache Darstellung gibt, die dies höchste Gewicht hat. □

Lemma 22.5.10.12 (**Konjugationsklassen in kompakten Liegruppen**). *Gegeben eine zusammenhängende kompakte Liegruppe K und ein maximaler Torus $T \subset K$ induziert die Einbettung unseres Torus einen Homöomorphismus zwischen dem Raum der Bahnen der Weylgruppe auf dem Torus und dem Raum der Konjugationsklassen in unserer Gruppe*

$$T/W \xrightarrow{\sim} K/\operatorname{int}(K)$$

22.5.10.13. Besonders anschaulich scheint mir die Aussage des Lemmas im Fall der Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ und besonders leicht prüft man es im Fall $\mathrm{U}(n)$. Das normierte Haarmaß auf K hat ein Bildmaß auf dem Raum der Konjugationsklassen $K/\operatorname{int}(K)$ und dem entspricht notwendig ein nichtnegatives Borelmaß auf T/W. Man kann sich mit etwas Mühe auch formal klarmachen, daß dieses und überhaupt jedes Borelmaß auf T/W das direkte Bild eines wohldefinierten W-invarianten Borelmaßes auf T sein muß. Die Weyl'sche Integrationsformel 22.5.10.1 gibt das besagte W-invariante Borelmaß auf T explizit an.

Beweis. Die Surjektivität unserer Abbildung folgt aus der Erkenntnis 22.5.1.7, daß jedes Element zu einem maximalen Torus gehört. Um die Injektivität zu zeigen, nehmen wir an, es gebe $t, s \in T$ und $g \in K$ mit $gtg^{-1} = s$. Dann sind T und gTg^{-1} zwei maximale Tori in $\mathrm{Z}_K(s)$, also gibt es wieder nach 22.5.1.7 ein Element $h \in \mathrm{Z}_K(s)$ mit $T = hgTg^{-1}h^{-1}$ und wir haben $y = hg \in \mathrm{N}_K(T)$ gefunden mit $yty^{-1} = s$. Um schließlich zu zeigen, daß unsere Abbildung ein Homöomorphismus ist, müssen wir nach 15.1.5.13 nur nachweisen, daß die Konjugationsklassen in einer kompakten Hausdorffgruppe einen Hausdorffraum bilden. Das folgt jedoch aus 15.2.2.14. □

Beweis der Weyl'schen Integrationsformel. Wir interessieren uns für die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} K/T \times T & \xrightarrow{\varphi} & K \\ (gT\ ,\ t) & \mapsto & gtg^{-1} \end{array}$$

Ihre anschauliche Bedeutung im Fall $K = \mathrm{SO}(3)$ diskutieren wir im Anschluß. Der homogene Raum K/T heißt die **Fahnenmannigfaltigkeit**. Unsere Abbildung ist äquivariant für die K-Operation von links auf dem Definitionsbereich und die K-Operation durch Konjugation auf dem Wertebereich. Unsere Abbildung ist auch äquivariant für die damit kommutierende Operation der Weylgruppe durch $w(gT, t) := (gw^{-1}T, wt)$ auf dem Definitionsbereich und die triviale Operation auf dem Wertebereich. Jetzt betrachten wir

$$T_{\mathrm{reg}} := \{t \in T \mid \alpha(t) \neq 1\ \forall \alpha \in R\} \quad \circledcirc\, T$$

Ihre Elemente heißen die **regulären Elemente** unseres maximalen Torus T. Diese Menge ist offensichtlich W-stabil. Gegeben $t \in T_{\mathrm{reg}}$ erkennt man in der Lie-Algebra, daß T die Einskomponente seines Zentralisators ist, so daß der ganze Zentralisator in $\mathrm{N}_K(T)$ enthalten sein muß. Bezeichnen wir mit $K_{\mathrm{reg}} \subset K$ die Menge aller zu einem Punkt in T_{reg} konjugierten Elemente, also aller Elemente $g \in K$ mit $\mathrm{Z}_K(g)^\circ$ ein maximaler Torus, so sind die Fasern von

$$\varphi_{\mathrm{reg}} : K/T \times T_{\mathrm{reg}} \to K_{\mathrm{reg}}$$

folglich Bahnen unter der Weylgruppe W. Das Komplement von K_{reg} ist die Vereinigung der Bilder $\varphi(K/T \times \ker\alpha)$ für $\alpha \in R$ und damit abgeschlossen und eine Nullmenge für das Haarmaß. Die Menge der regulären Punkte ist folglich eine offene Teilmenge $K_{\text{reg}} \Subset K$. Wir werden bald sehen, daß φ_{reg} an jeder Stelle bijektives Differential hat und daß W frei auf allen seinen Fasern operiert, aber alles der Reihe nach. Jetzt wählen wir erst einmal beliebige nirgends verschwindende glatte Volumenformen $\omega^{K/T}$, ω^T und ω^K auf $K/T, T$ und K. Das geht nach den Übungen 22.5.9.25 und 22.5.9.26. Wir verwenden die Notation $\omega^{K/T} \boxtimes \omega^T := \operatorname{pr}_1^*\omega^{K/T} \wedge \operatorname{pr}_2^*\omega^T$. Sicher gibt es eine glatte Funktion $c : K/T \times T \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi^*\omega^K = c\,\omega^{K/T} \boxtimes \omega^T$$

Nun haben wir ja $\varphi \circ (h\cdot) = (\operatorname{int} h) \circ \varphi$ für alle $h \in K$. Falls ω^K invariant ist unter Links- und Rechtstranslation und $\omega^{K/T}$ invariant unter Linkstranslation, was wir von jetzt an beides annehmen wollen und nach 22.5.9.23 und 22.5.9.24 auch annehmen dürfen, so hängt offensichtlich c nur von der zweiten Koordinate ab und kann geschrieben werden als $c(gT, t) = c(t)$. Jetzt nehmen wir zusätzlich ω^T auch noch invariant unter Linkstranslation an und betrachten für gegebenes $t \in T$ die Verknüpfung

$$\begin{array}{ccccccc}
K/T \times T & \to & K/T \times T & \xrightarrow{\varphi} & K & \to & K \\
(\bar{g}, \tau) & \mapsto & (\bar{g}, t\tau) & \mapsto & gt\tau g^{-1} & \mapsto & t^{-1}gt\tau g^{-1} \\
\mathrm{T}_{\bar{e}}(K/T) \times \mathrm{T}_e T & \to & \mathrm{T}_{\bar{e}}(K/T) \times \mathrm{T}_t T & \to & \mathrm{T}_t K & \to & \mathrm{T}_e K
\end{array}$$

Um $c(t)$ bis auf einen konstanten Faktor zu berechnen, müssen wir nur irgendeinen Vektorraumisomorphismus $\mathrm{T}_e K \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\bar{e}}(K/T) \times \mathrm{T}_e T$ nachschalten und die Determinante der Komposition bestimmen. Das Differential $\mathrm{T}_{\bar{e}}(K/T) \times \mathrm{T}_e T \to \mathrm{T}_e K$ unserer Verknüpfung ist gegeben durch $(\bar{X}, Y) \mapsto \operatorname{Ad}(t^{-1})\bar{X} + Y - \bar{X}$ für $\bar{X} \in \mathrm{T}_{\bar{e}}(K/T)$. Wählen wir irgendein lineares Linksinverses $\mathrm{T}_e K \twoheadrightarrow \mathrm{T}_e T$ zur offensichtlichen Einbettung, so erhalten wir einen für unsere Zwecke besonders praktischen Isomorphismus $\mathrm{T}_e K \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\bar{e}}(K/T) \times \mathrm{T}_e T$. Die Determinante der Verknüpfung ergibt sich aus der allgemeinen Regel für Determinanten von Block-Dreiecksmatrizen zu $\det(\operatorname{Ad}_{K/T}(t^{-1}) - \mathrm{id})$. Für notfalls mit einer multiplikativen Konstante angepaßte Wahlen von ω^K, ω^T und $\omega^{K/T}$ erhalten wir so

$$c(t) = \det(\operatorname{Ad}_{K/T}(t^{-1}) - \mathrm{id})$$

Da $\operatorname{Ad}_{K/T}(t)$ auf dem reellen Vektorraum $\operatorname{Lie} K/\operatorname{Lie} T$ für ein geeignetes Skalarprodukt eine orthogonale Abbildung ist und offensichtlich in der Einskomponente von $\mathrm{O}(\operatorname{Lie} K/\operatorname{Lie} T)$ liegt, hat es die Determinante Eins und wir folgern $c(t) = j(t)$. Insbesondere ist das Differential von φ_{reg} an jeder Stelle ein Isomorphismus ist. Hätte eine Faser von φ_{reg} weniger als $|W|$ Punkte, so folgte das

mit unserer W-Operation auch für alle Fasern in einer offenen Umgebung. Weil aber in jeder nichtleeren offenen Teilmenge von T offensichtlich Punkte liegen, die von keinem Element der Weylgruppe festgehalten werden, kann W auch keine Fixpunkte in T_{reg} haben. In der Sprache der Topologie wäre φ_{reg} ein Beispiel für eine $|W|$-blättrige Überlagerung. Die Wirkung von W erhält des weiteren die Orientierung, denn betrachten wir die adjungierte Operation von $\dot{w} \in \mathrm{N}_K(T)$ auf $\operatorname{Lie} T \hookrightarrow \operatorname{Lie} K \twoheadrightarrow \operatorname{Lie} K/\operatorname{Lie} T$, so muß sie in der Mitte orientierungserhaltend sein als Einschränkung der Wirkung einer zusammenhängenden Gruppe und folglich links und rechts denselben Effekt auf den Orientierungen haben. Wählen wir nun Orientierungen auf K, T und K/T, so erhalten wir für $f : K \to \mathbb{C}$ stetig eine Kette von Gleichheiten „bis auf von f unabhängige multiplikative Konstanten" der Gestalt

$$\int_K f(g) \doteq \int_{\vec{K}} f\omega^K \doteq \int_{\overrightarrow{K/T}\times\vec{T}} \varphi^*(f\omega^K)$$

Der Punkt über den Gleichheitszeichen deutet dabei an, daß unsere Gleichungen nur bis auf von f unabhängige von Null verschiedene multiplikative Konstanten gelten. Für die zweite Gleichung argumentieren wir, daß es ausreicht, Funktionen mit Träger in K_{reg} zu betrachten, und dann sogar Funktionen mit Träger in einer offenen Teilmenge $U \Subset K_{\text{reg}}$ derart, daß $\varphi_{\text{reg}}^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung von $|W|$ offenen Mengen ist, die jeweils diffeomorph und orientierungserhaltend auf U abgebildet werden. Für f eine Klassenfunktion erhalten wir weiter

$$\doteq \int_{\vec{T}} cf\omega^T \doteq \int_T c(t)f(t) \doteq \int_T j(t)f(t)$$

Damit ist bereits gezeigt, daß die Weyl'sche Integrationsformel gilt bis auf eine von der zu integrierenden Funktion f unabhängige multiplikative Konstante C. Um diese Konstante C auch noch zu bestimmen, testen wir auf der konstanten Funktion $f = 1$ und müssen damit nur noch $\int_T j(t) = |W|$ zeigen. Dazu erinnern wir uns daran, daß wir ja bereits im Anschluß an die Weyl'sche Nennerformel in 22.5.10.11 eine Identität diskutiert hatten, die auch $j(t) = A(0)\overline{A(0)}$ geschrieben werden kann. □

22.5.10.14. Als Folgerung des Beweises sehen wir, daß gegeben eine zusammenhängende torierte kompakte Liegruppe (K, T) der Zentralisator von jedem Punkt aus $T_{\text{reg}} := T \setminus \bigcup_{\alpha\in R} \ker \alpha$ gerade T selbst ist.

Beispiel 22.5.10.15. Im Fall $K = \mathrm{SO}(3)$ induziert die Operation auf S^2 einen Isomorphismus $K/T \xrightarrow{\sim} S^2$ und man kann sich die Abbildung $K/T \times T \to K$ gut vorstellen: Gegeben ein Punkt auf der Sphäre und ein Winkel nehmen wir die Achse durch den entsprechenden Punkt und drehen um diese Achse mit dem entsprechenden Winkel. So kriegen wir jede nichttriviale Drehung genau zweimal, die triviale Drehung aber mit jeder Achse.

Beispiel 22.5.10.16. Im Fall $K = \mathrm{SU}(2)$ induziert die Operation auf $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ einen Isomorphismus $K/T \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ und man kann sich die Abbildung $K/T \times T \to K$ noch in etwa vorstellen. In diesem Fall haben wir im quaternionalen Bild $K_{\mathrm{reg}} = K\backslash\{\pm 1\}$ und ebenso $T_{\mathrm{reg}} = T\backslash\{\pm 1\}$ für jeden maximalen Torus. Die Tori sind gerade die Großkreise auf der Einheitssphäre in den Quaternionen, die durch 1 und -1 laufen.

Ergänzung 22.5.10.17. Man kann ganz allgemein zeigen, daß für $\varphi : M \to N$ eine glatte Abbildung zusammenhängender kompakter orientierter Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension stets eine Konstante g existiert mit

$$\int_{\vec{M}} \varphi^* \omega = g \int_{\vec{N}} \omega$$

für alle stetigen Volumenformen ω auf N. Diese Konstante g ist sogar stets eine ganze Zahl und heißt der „Abbildungsgrad von φ“. Wir besprechen ihn in 17.4.3.13 im topologischen Kontext. Die Interpretation über Differentialformen kann man dann mit dem „Satz von de Rham“ 19.5.5.7 und der zugehörigen Funktorialitätsaussage 19.5.4.10 folgern. Man kann aber auch im Rahmen der de-Rham-Kohomologie argumentieren. In unserem Fall hätte $\varphi : K/T \times T \to K$ bei geeigneter Wahl der Orientierungen den Abbildungsgrad $|W|$.

22.5.11 Der Hamilton'sche Formalismus*

22.5.11.1. In diesem Abschnitt wird die Bedeutung des Kotangentialbündels für die klassische Mechanik erklärt. Ich habe diesen Abschnitt nur deshalb hier angefügt, weil wir gerade Kovektorfelder und das Kotangentialbündel kennengelernt haben.

22.5.11.2. Auf dem Kotangentialbündel T^*M einer Mannigfaltigkeit M erklärt man das **kanonische Kovektorfeld** oder auch **Liouville'sche Kovektorfeld** ϑ durch die Vorschrift

$$\vartheta_\xi := \xi \circ \mathrm{d}_\xi \pi$$

für $\xi \in \mathrm{T}^*_x M$ und $\pi : \mathrm{T}^*M \to M$ die Bündelprojektion mit $\pi(\xi) = x$ und $\mathrm{d}_\xi \pi : \mathrm{T}_\xi(\mathrm{T}^*M) \to \mathrm{T}_x M$ deren Differential. Sind $q_1, \ldots, q_n$ lokale Koordinaten auf M, so sind $\mathrm{d}q_1, \ldots, \mathrm{d}q_n$ Schnitte in T^*M, die an jeder Stelle linear unabhängig sind. Wir erhalten also lokale Koordinaten $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ auf T^*M, indem wir die Funktionen $p_i : \mathrm{T}^*M \to \mathbb{R}$ dadurch erklären, daß die Restriktion auf die Fasern $p_i : \mathrm{T}^*_x M \to \mathbb{R}$ an jeder Stelle $x \in M$ die i-te Koordinate bezüglich der durch die $\mathrm{d}_x q_i$ gegebenen Basis von $\mathrm{T}^*_x M$ sein soll. Die p_i heißen die zu unseren Ortskoordinaten q_i gehörigen **Impulskoordinaten**. In diesen Koordinaten hat unser kanonisches Kovektorfeld die Gestalt

$$\vartheta = \sum p_i dq_i$$

Insbesondere ist das kanonische Kovektorfeld stets glatt.

22.5.11.3. Auf dem Kotangentialbündel T^*M einer Mannigfaltigkeit M erklärt man die **kanonische symplektische Form** ω als das Negative der äußeren Ableitung des kanonischen Kovektorfelds

$$\omega := -d\vartheta$$

Gegeben Ortskoordinaten q_i und die zugehörigen Impulskoordinaten p_i hat die kanonische symplektische Form mithin die Gestalt

$$\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$$

Insbesondere zeigt diese Darstellung, daß unsere 2-Form ω an jeder Stelle nichtausgeartet ist, was dann auch recht eigentlich erst die Bezeichnung als symplektische Form rechtfertigt.

Ergänzung 22.5.11.4. Arnold arbeitet stattdessen mit $\omega := d\vartheta = \sum dp_i \wedge dq_i$, aber durch seine auch um ein Vorzeichen abweichende Definition des symplektischen Gradienten kürzt sich dieses Vorzeichen wieder heraus und man erhält dieselben Bewegungsgleichungen.

22.5.11.5. Eine **symplektische Mannigfaltigkeit** ist ein Paar (P, ω) bestehend aus einer Mannigfaltigkeit P und einer geschlossenen Zweiform ω auf P, die an jeder Stelle nicht ausgeartet ist alias eine symplektische Form auf dem Tangentialraum. Geschlossen meint hier die Forderung $d\omega = 0$. Gegeben eine Mannigfaltigkeit M ist ihr Kotangentialbündel $P = \mathrm{T}^*M$ mit seiner kanonischen symplektischen Form nach dem vorhergehenden stets eine symplektische Mannigfaltigkeit.

22.5.11.6. Gegeben eine symplektische Mannigfaltigkeit (P, ω) und eine glatte Funktion $H : P \to \mathbb{R}$ erklärt man ihren **symplektischen Gradienten** als das Vektorfeld

$$\mathrm{grad}_\omega H := \mathrm{can}_\omega^{-1}(\mathrm{d}H)$$

Ausgeschrieben wird diese Vektorfeld dadurch charakterisiert, daß für jeden Punkt $p \in P$ und jeden Tangentialvektor $v \in \mathrm{T}_pP$ gilt

$$\omega_p\big((\mathrm{grad}_\omega H)(p), v\big) = (\mathrm{d}_pH)(v)$$

22.5.11.7 (**Bezug zu Systemen mit Zwangsbedingungen**). Ich will diskutieren, inwiefern man die Lösungen der Bewegungsgleichungen eines Systems von Massepunkten mit Zwangsbedingungen in einem Potentialfeld erhalten kann, indem man auf dem Kotangentialraum des Konfigurationsraums eine ausgezeichnete glatte Funktion, die „Hamilton-Funktion“, betrachtet und die Flußwege von deren symplektischem Gradienten auf den Konfigurationsraum projiziert. Ich erinnere dazu an unsere Beschreibung 12.6.7.11 der Lösungen der Newton'schen

Gleichungen mit Zwangsbedingungen. Seien X ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum und $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf seinem Richtungsraum und $M \subset X$ eine glatte eingebettete Mannigfaltigkeit. In physikalischen Anwendungen war $X = \mathbb{E}^N$ der Raum aller a priori und ohne Zwangsbedingungen denkbaren Ortsbestimmungen für N Massepunkte, $\langle\ ,\ \rangle$ das massebehaftete Skalarprodukt und M der Konfigurationsraum, der die Zwangsbedingungen beinhaltet. Der Diffeomorphismus $\mathrm{T}M \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^*M$, der von der Restriktion des Skalarprodukts auf $\mathrm{T}M$ induziert wird, ist die Komposition in der unteren Horizontale eines kommutativen Diagramms von Mannigfaltigkeiten

$$\begin{tikzcd}
X \times \vec{X} \arrow[r, "\mathrm{id} \times \kappa", "\sim"'] & X \times \vec{X}^* & \\
\mathrm{T}M \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & M \times \vec{X}^* \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] & \mathrm{T}^*M
\end{tikzcd}$$

Die anderen Pfeile dieses Diagramms sind die hoffentlich offensichtlichen Abbildungen. Die kanonischen Kovektorfelder auf $X \times \vec{X}^*$ und T^*M sind offensichtlich verwandt zu demselben Kovektorfeld auf $M \times \vec{X}^*$. Dasselbe folgt für die kanonischen symplektischen Formen. Mithin ist die durch Zurückholen der kanonischen symplektischen Form auf $X \times \vec{X}^*$ erklärte symplektische Form $\bar{\eta}$ auf $\mathrm{T}M$, mit der wir in 12.6.7.11 gearbeitet hatten, unter unserem Diffeomorphismus $\mathrm{T}M \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^*M$ verwandt zur kanonischen symplektischen Form ω auf T^*M. Ist nun $V : X \to \mathbb{R}$ eine Potentialfunktion und $E : \mathrm{T}M \to \mathbb{R}$ die zum Potential V wie in 12.6.7.11 gebildete Gesamtenergie, so heißt die dazu unter unserem Diffeomorphismus verwandte Funktion $H : \mathrm{T}^*M \to \mathbb{R}$ auf dem Kotangentialbündel die **Hamiltonfunktion**. Offensichtlich haben dann auch die jeweiligen symplektischen Gradienten $\operatorname{grad}_{\bar{\eta}} E$ und $\operatorname{grad}_{\omega} H$ verwandte Flußwege. In 12.6.7.11 hatten wir die Lösungen der Bewegungsgleichungen beschrieben als die Fußpunktprojektionen auf M der Flußwege des symplektischen Gradienten $\operatorname{grad}_{\bar{\eta}} E$ der Gesamtenergie $E : \mathrm{T}M \to \mathbb{R}$. Nach dem vorhergehenden können wir sie genausogut beschreiben als die Fußpunktprojektionen auf M der Flußwege des symplektischen Gradienten $\operatorname{grad}_{\omega} H$ der Hamiltonfunktion $H : \mathrm{T}^*M \to \mathbb{R}$ in Bezug auf die kanonische symplektische Form ω auf dem Kotangentialbündel. Das hat den Vorteil, daß die gesamte Komplexität des physikalischen Problems in der Hamiltonfunktion H zusammengefaßt wird, statt sich auf die unktion E der Gesamtenergie und die durch die Massen der beteiligten Massepunkte und die Geometrie des Raums bestimmte symplektische Form $\bar{\eta}$ zu verteilen.

22.5.11.8. Ich will noch erwähnen, daß die Verwendung des Buchstabens H in diesem Zusammenhang zum ersten Mal in der „Mécanique Analytique“ von Lagrange auftaucht, die im Jahre 1811 erschien, und vermutlich den Nachnamen von Christiaan Huygens abkürzt. Jedenfalls hat sie Nichts mit Hamilton zu tun, der im

Jahre 1811 erst sechs Jahre alt wurde. Mehr dazu mag man bei Patrick Iglesias in der Schrift „Symétries et Moment“ nachlesen.

22.5.11.9 (**Die Hamilton'schen Gleichungen**). Die vorhergehenden Überlegungen legen die Frage nahe, wie denn die Integralkurven des symplektischen Gradienten einer glatten Funktion auf einem Kotangentialbündel beschrieben werden können. Seien dazu M eine Mannigfaltigkeit und $U \Subset M$ eine offene Teilmenge. Ist $q_1, \ldots, q_r$ ein Koordinatensystem auf U, so erhalten wir ein Koordinatensystem auf T^*U durch die sogenannten Ortskoordinaten $q_i = \pi \circ q_i$ und die zugehörigen Impulskoordinaten p_i, gegeben in Formeln durch $w = \sum_{i=1}^r p_i(x,w)\,\mathrm{d}_x q_i$ für $x \in U$ und $w \in \mathrm{T}_x^*M$. Die zu diesem Koordinatensystem gehörigen Vektorfelder auf der offenen Teilmenge T^*U des Kotangentialbündels notieren wir $\partial_i^q, \partial_i^p$. Für die kanonische symplektische Form $\omega = -\,\mathrm{d}\vartheta = \sum dq_i \wedge dp_i$ erhalten wir dann die Identität

$$\omega(\partial_i^q, \partial_j^p) = \delta_{ij}$$

Das Differential der Hamiltonfunktion ist $\mathrm{d}H = \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\,\mathrm{d}p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\,\mathrm{d}q_i$ und führt in diesen Koordinaten zum symplektischen Gradienten

$$\operatorname{grad}_\omega H = \sum_{i=1}^r \frac{\partial H}{\partial p_i}\partial_i^q - \frac{\partial H}{\partial q_i}\partial_i^p$$

Die Koordinaten der Integralkurven β unseres symplektischen Gradienten sind folglich genau die Lösungen des Systems von Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q_i(\beta(t))) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\beta(t)) \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i(\beta(t))) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(\beta(t)) \quad \text{für } 1 \le i \le r.$$

Man nennt sie die **Hamilton'schen Bewegungsgleichungen** und schreibt sie meist abkürzend in der Form

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

22.5.11.10 (**Kanonische Koordinaten**). Ist (X, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit, so nennt man ein System von zu Paaren zusammengefaßten lokalen Koordinaten (q_i, p_i) ganz allgemein **kanonisch**, wenn gilt $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$. Die obige Rechnung zeigt, daß gegeben eine glatte Funktion $H : X \to \mathbb{R}$ auf einer beliebigen symplektischen Mannigfaltigkeit die Integralkurven ihres symplektischen Gradienten in jedem System von kanonischen Koordinaten durch die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen beschrieben werden. Im übrigen kann man auch zeigen, daß eine symplektische Mannigfaltigkeit um jeden Punkt ein System von kanonischen Koordinaten besitzt.

22.5.11.11 (**Die Hamilton'schen Gleichungen mit Einheiten**). Ergänzen wir die jeweiligen Einheiten, so liefert das massebehaftete Skalarprodukt einen Diffeomorphismus

$$\mathrm{T}M \otimes \langle\!\langle 1/\mathrm{s} \rangle\!\rangle \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^*M \otimes \langle\!\langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s} \rangle\!\rangle$$

zwischen dem sogenannten **Geschwindigkeitsphasenraum** links und dem sogenannten **Impulsphasenraum** rechts. Die kanonische $\langle\!\langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s} \rangle\!\rangle$-wertige symplektische Form ω rechts ist verwandt zur $\langle\!\langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s} \rangle\!\rangle$-wertigen symplektischen Form $\bar{\eta}$ links, wie wir sie in 12.6.7.11 betrachtet hatten. Die Gesamtenergie $E : \mathrm{T}M \otimes \langle\!\langle 1/\mathrm{s} \rangle\!\rangle \to \langle\!\langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2 \rangle\!\rangle$ auf dem Geschwindigkeitsphasenraum ist verwandt zur Hamiltonfunktion $H : \mathrm{T}^*M \otimes \langle\!\langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s} \rangle\!\rangle \to \langle\!\langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2 \rangle\!\rangle$ auf dem Impulsphasenraum. Ist $U \Subset M$ eine offene Teilmenge und $q_1, \ldots, q_r$ ein Koordinatensystem auf U, möglicherweise mit Werten in eindimensionalen Räumen $L_1, \ldots, L_r$, so erhalten wir ein Koordinatensystem auf $\mathrm{T}^*U \otimes \langle\!\langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s} \rangle\!\rangle$ durch die Funktionen $q_i = \pi \circ q_i$ und die Funktionen p_i mit Werten in $\vec{L}_i^* \otimes \langle\!\langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s} \rangle\!\rangle$ gegeben durch

$$w = \sum_{i=1}^{r} p_i(x, w)\, \mathrm{d}_x q_i \quad \text{für } x \in U \text{ und } w \in \mathrm{T}_x^*M \otimes \langle\!\langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s} \rangle\!\rangle.$$

Die p_i heißen die zu unseren **Ortskoordinaten** q_i gehörigen **Impulskoordinaten**. Wie zuvor landen wir bei den **Hamilton'schen Bewegungsgleichungen**

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \text{und} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Beachten wir die Einheiten, so steht rechts eine Gleichheit in $\vec{L}_i^* \otimes \langle\!\langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2 \rangle\!\rangle$ und links eine Gleichheit in $\vec{L}_i \otimes \langle\!\langle 1/\mathrm{s} \rangle\!\rangle$.

22.5.11.12 (**Bedeutung des Kotangentialbündels**). Rückblickend mag man sich die Frage stellen, ob das mit dem Kotangentialbündel wirklich nötig war und wir nicht unsere kanonischen Koordinaten q_i, p_i einfach auf dem Tangentialbündel hätten einführen können. Das wäre in der Tat durchaus möglich gewesen, und ich vermute fast, daß Hamilton diese Frage als Spitzfindigkeit abgetan hätte. Die Verwendung des Kotangentialbündels hat den Vorteil, daß in diesem Rahmen ein großer Teil unserer Überlegungen sehr elegant in großer Allgemeinheit und unabhängig vom zugrundeliegenden physikalischen System durchgeführt werden kann. Man bezahlt dafür allerdings mit einem gewissen Verlust an Anschaulichkeit.

Beispiel 22.5.11.13 (**Bewegung einer Töpferscheibe**). Wir betrachten eine Töpferscheibe mit Zentrum in $\mathbf{p} \in \mathbb{E}$. Wir denken sie uns zusammengesetzt aus Massepunkten $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N$ der Massen $m_1, \ldots, m_N$. Der Konfigurationsraum M ist eine Kreislinie. Als lokale Koordinate wählen wir den Drehwinkel im Bogenmaß $q_1 = q$, wobei wir den Nullwinkel willkürlich festlegen. Bezeichne ∂^q das

zugehörige Vektorfeld und $\dot{q}$ die zugehörige Koordinate auf $\mathrm{T}M$ gegeben durch $\dot{q} : (q, a\partial^q) \mapsto a$. Unter dem massenbehafteten Skalarprodukt haben wir dann

$$\langle \partial^q, \partial^q \rangle_g = J := \sum \|\mathbf{r}_i - \mathbf{p}\|^2 m_i$$

Dieser Wert $J \in \langle\!\langle \mathrm{g}^2\mathrm{m} \rangle\!\rangle$ heißt das **Trägheitsmoment** unserer Töpferscheibe. Nun finden wir $(q, \partial^q) \mapsto (q, Jdq)$ unter unserem Isomorphismus $\mathrm{T}M \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^*M$. Die Impulskoordinate zu q ist also $q = J\dot{q}$, sie heißt in dieser Situation der **Drehimpuls**. Die Hamiltonfunktion ist $H(q, \dot{q}) = J\dot{q}^2/2$ alias $H(q, p) = p^2/2J$ und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen spezialisieren zu den Gleichungen

$$\dot{q} = p/J \quad \text{und} \quad \dot{p} = 0.$$

Also ist der Drehimpuls p konstant und $\dot{q}$ ist auch konstant und unsere Töpferscheibe dreht sich ohne Einwirkung äußerer Kräfte bis in alle Ewigkeit mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

22.5.11.14. Gegeben eine symplektische Mannigfaltigkeit (P, ω) und eine glatte Funtion $H : P \to \mathbb{R}$ und eine weitere glatte Funktion $f : P \to \mathbb{R}$ erhalten wir für die Änderung von f zum Zeitpunkt $t = t_0$ längs eines Flußwegs α des symplektischen Gradienten $\operatorname{grad}_\omega H$ mit der Notation $x = \alpha(t_0)$ unmittelbar

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=t_0} f(\alpha(t)) &= \langle \mathrm{d}_{\alpha(t_0)} f, \dot{\alpha}(t_0) \rangle \\ &= \langle \mathrm{d}_x f, (\operatorname{grad}_\omega H)(x) \rangle \\ &= \omega_x\big((\operatorname{grad}_\omega f)(x), (\operatorname{grad}_\omega H)(x)\big) := \{f, H\}(x) \end{aligned}$$

mit der durch letztere Gleichung für beliebige glatte Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^\infty(P; \mathbb{R})$ auf einer beliebigen symplektischen Mannigfaltigkeit (P, ω) erklärten **Poisson-Klammer** $\{f, g\} \in \mathcal{C}^\infty(P; \mathbb{R})$. Die Formeln aus 22.5.11.9 zeigen, daß sie in kanonischen Koordinaten gegeben wird durch die Formel

$$\{f, g\} = \sum \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$$

Offensichtlich verschwindet die Poissonklammer einer Funktion mit sich selber. Die Hamiltonfunktion ist folglich eine Invariante der Bewegung. Physikalisch bedeutet das die Energieerhaltung.

22.5.11.15. Sei (P, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit mit einer glatten Hamiltonfunktion H. Ist $x \in P$ ein kritischer Punkt von H, so ist der konstant bei x verweilende Weg ein Flußweg des symplektischen Gradienten von H alias eine Lösung der Bewegungsgleichungen.

Übungen

Übung 22.5.11.16. Fassen wir ein glattes Kovektorfeld α auf einer Mannigfaltigkeit M auf als eine glatte Abbildung $\alpha : M \to \mathrm{T}^*M$ in das Kotangentialbündel und holen das kanonische Kovektorfeld unter dieser Abbildung zurück, so erhalten wir gerade α selber, in Formeln $\alpha^*(\vartheta) = \alpha$ oder in einer anderen Notation $\alpha : \alpha \rightsquigarrow \vartheta$.

22.6 Danksagung

Für Korrekturen und Vereinfachungen danke ich vielen Freiburger Studenten und Mitarbeitern, insbesondere David Stotz, Manuel Bleichner, Maximilian Gerhards, Leonardo Patimo.

Kapitel 23

Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme

Inhalt

23.1 Spiegelungsgruppen 3972

23.1.1 Endliche euklidische Spiegelungsgruppen 3972

23.1.2 Endliche lineare Spiegelungsgruppen 3975

23.1.3 Alkovengeometrie 3979

23.1.4 Facettenabschluß als konvexe Hülle* 3989

23.1.5 Affine Spiegelungsgruppen 3991

23.1.6 Transitivität auf der Menge der Alkoven 3995

23.1.7 Fundamentalbereiche 4001

23.1.8 Alkoven einer endlichen Spiegelungsgruppe 4004

23.1.9 Coxetergraphen und Klassifikation 4008

23.1.10 Ergänzungen zu Skalarprodukten 4014

23.1.11 Positiv definite Coxetergraphen 4017

23.1.12 Struktur affiner Spiegelungsgruppen* 4021

23.2 Wurzelsysteme 4025

23.2.1 Wurzelsysteme und ihre Weylgruppen 4025

23.2.2 Basen von Wurzelsystemen 4035

23.2.3 Klassifikation von Wurzelsystemen 4041

23.2.4 Affine Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme* . . 4047

23.2.5 Höchste Wurzel und fundamentaler Alkoven* . . . 4052

23.3 Coxetergruppen als Spiegelungsgruppen 4064
23.3.1 Spiegelungsgruppen zu Coxetermatrizen 4064
23.3.2 Erzeuger und Relationen für Spiegelungsgruppen . 4074
23.3.3 Bruhat-Teilordnung 4078
23.4 Danksagung 4087

Dieser Abschnitt ist motiviert durch Anwendungen bei der Klassifikation der kompakten zusammenhängenden Liegruppen 22.5.5.3 und, mehr oder weniger gleichbedeutend, der Klassifikation der halbeinfachen komplexen Liealgebren 24.1.1.20. Er scheint mir jedoch auch ohne äußere Motivation ein interessantes Kapitel der Geometrie und Gruppentheorie und gut geeignet für die Behandlung im Rahmen eines Proseminars.

23.1 Spiegelungsgruppen

23.1.1 Endliche euklidische Spiegelungsgruppen

23.1.1.1. Einen euklidischen Vektorraum haben wir in 4.1.5.1 erklärt als einen reellen Vektorraum mit einer ausgezeichneten $\mathbb{R}_{>0}$-Bahn von Skalarprodukten, seiner „euklidischen Struktur“. Einen euklidischen Raum haben wir erklärt als einen reellen affinen Raum mit einer euklidischen Struktur auf seinem Richtungsraum. Einen orthogonalen Automorphismus eines euklidischen Vektorraums haben wir erklärt als einen Vektorraumautomorphismus, der ein und jedes Skalarprodukt der euklidischen Struktur erhält. Einen orthogonalaffinen Automorphismus eines euklidischen Raums haben wir erklärt als eine Affinität, deren linearer Anteil orhogonal ist. Im folgenden verwenden wir dieselben Bezeichnungen etwas allgemeiner auch im Fall eines beliebigen angeordneten Grundkörpers.

23.1.1.2. Uner einer **Hyperebene** in einem affinen Raum verstehen wir wie in 3.3.2.10 einen echten affinen Teilraum, der zusammen mit einem einzigen weiteren Punkt den ganzen Raum affin erzeugt.

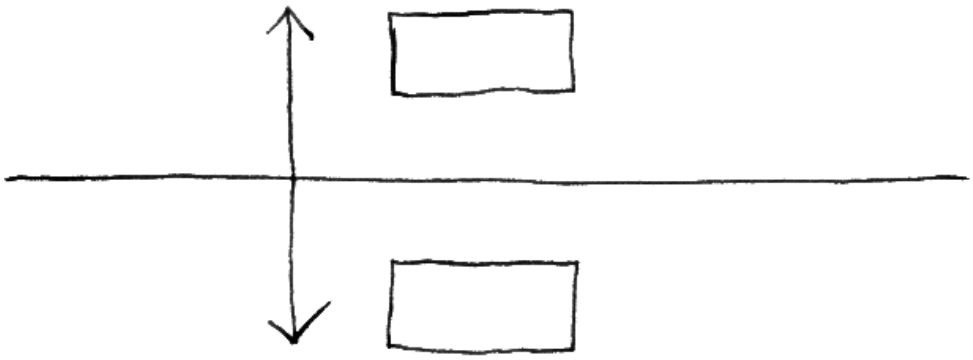
Definition 23.1.1.3. Unter einer **Spiegelung** oder **orthogonalen Spiegelung** verstehen wir einen orthogonalaffinen Automorphismus eines euklidischen Raums, dessen Fixpunktmenge eine Hyperebene ist. Wir nennen die Fixpunktmenge einer Spiegelung ihre **Spiegelhyperebene** oder ihren **Spiegel**.

23.1.1.4 (**Formelhafte Darstellung orthogonaler linearer Spiegelungen**). Seien V ein euklidischer Vektorraum und $(\ ,\ )$ ein Skalarprodukt seiner euklidischen Struktur und $s : V \to V$ eine lineare orthogonale Spiegelung und V^s ihr Spiegel. Gegeben $v \in V \backslash V^s$ ist $v - sv \in V^{-s} = \mathrm{Eig}(s; -1)$ von Null verschieden und wir haben offensichtlich $V = V^s \oplus V^{-s}$ sowie $V^s \perp V^{-s}$. Für jeden Erzeuger α von V^{-s} zeigen wir nun

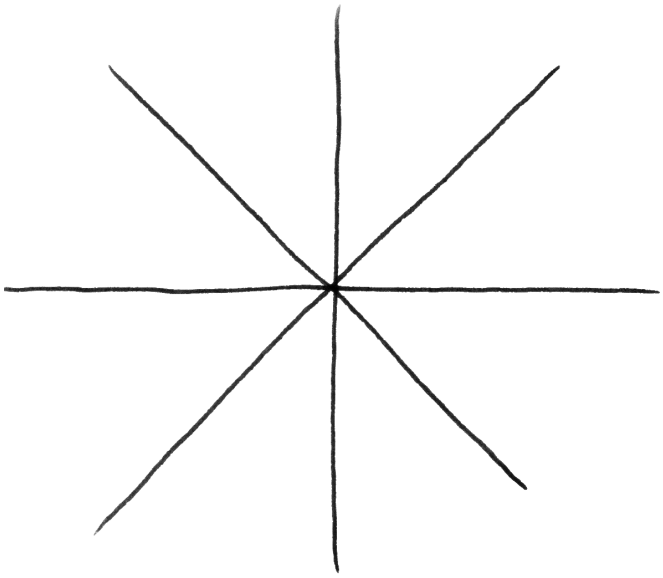
$$s(\lambda) = \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \quad \forall \lambda \in V$$

In der Tat sind beide Seiten linear und nehmen offensichtlich auf $\lambda = \alpha$ und auf jedem $\lambda \in V^s$ denselben Wert an. Eine orthogonale Spiegelung in einem euklidischen Vektorraum wird insbesondere durch ihren Spiegel bereits eindeutig festgelegt. Dasselbe folgt im Affinen.

Definition 23.1.1.5. Unter einer **endlichen euklidischen Spiegelungsgruppe** verstehen wir eine endliche Gruppe von Automorphismen eines euklidischen Raums, die von Spiegelungen erzeugt wird.



Eine orthogonale Spiegelung



Die vier Spiegel der Diedergruppe D_4. Die acht „Kuchenstücke“, jeweils ohne ihren Rand, sind die zugehörigen „Alkoven“ oder „Weylkammern“, und man überlegt sich leicht, daß je zwei Alkoven durch genau ein Element unserer Spiegelungsgruppe ineinander überführt werden.

Beispiel 23.1.1.6. Wir betrachten in der euklidischen Ebene r Geraden durch einen festen Punkt derart, daß je zwei von ihnen durch eine Drehung um einen Winkel der Gestalt $n\pi/r$ mit $n \in \mathbb{Z}$ auseinander hervorgehen. Diese r Geraden sind die Spiegel einer endlichen euklidischen Spiegelungsgruppe, der sogenannten **Diedergruppe** D_r. Sie besteht aus den r Spiegelungen an unseren r Geraden sowie den r Drehungen um die Winkel $2\pi\nu/r$ für $\nu = 0, 1, \ldots, r-1$. Im Fall $r = 4$ ist das die „Bierdeckelgruppe" aller acht Symmetrien eines Bierdeckels. Im allgemeinen wäre es die Gruppe aller $2r$ Symmetrien eines „Bierdeckels mit r Ecken".

Beispiel 23.1.1.7 (**Die symmetrische Gruppe als Spiegelungsgruppe**). Wir betrachten in $\mathbb{R}^n$ für $1 \le i < j \le n$ die Hyperebenen $H_{i,j} := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i = x_j\}$. Die Spiegelung s an der Hyperebene $H_{i,j}$ kann auch beschrieben werden als die Vertauschung der i-ten und der j-ten Koordinate, $s(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = (\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots)$, denn besagte Vertauschung ist orthogonal und $H_{i,j}$ ist die Menge ihrer Fixpunkte. Diese Spiegelungen erzeugen eine endliche Spiegelungsgruppe, die in offensichtlicher Weise isomorph ist zur symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$.

Beispiel 23.1.1.8 (**Die Tetraedergruppe als Spiegelungsgruppe**). Die Spiegelungen an denjenigen Ebenen des Raums, die senkrecht stehen auf den Kantenmitten eines Tetraeders, erzeugen eine endliche euklidische Spiegelungsgruppe, die isomorph ist zur Gruppe aller 24 Permutationen der vier Ecken unseres Tetraeders. Im übrigen kann man dieses Beispiel aus dem vorhergehenden erhalten, indem man als Ecken des Tetraeders die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^4$ nimmt und als „Raum" ihr affines Erzeugnis betrachtet.

Beispiel 23.1.1.9. Die Spiegelungen an den Koordinatenebenen des $\mathbb{R}^n$ erzeugen eine endliche euklidische Spiegelungsgruppe mit 2^n Elementen.

23.1.1.10. Ich erinnere daran, daß nach 3.3.5.2 eine Teilmenge eines Vektorraums oder auch affinen Raums über einem angeordneten Körper **konvex** heißt, wenn sie mit je zwei Punkten auch das ganze dazwischenliegende Geradensegment enthält.

Definition 23.1.1.11. Seien E ein euklidischer Raum und $W \subset \mathrm{O}_{\mathrm{aff}}(E)$ eine endliche euklidische Spiegelungsgruppe. Die maximalen konvexen Teilmengen im Komplement der Vereinigung aller Spiegel

$$E \setminus \bigcup_{\substack{s \in W \text{ ist} \\ \text{Spiegelung}}} E^s$$

heißen die **Weylkammern** oder **Alkoven** unserer Spiegelungsgruppe.

Ergänzung 23.1.1.12. Im Fall $k = \mathbb{R}$ und $\dim_{\mathbb{R}}(E) < \infty$ können wir die Alkoven, wenn wir unseren endlichdimensionalen reellen Raum mit seiner natürlichen Topologie versehen, auch als die Zusammenhangskomponenten von besagtem Komplement beschreiben.

23.1.1.13 (**Operation auf den Alkoven**). Wir wollen als nächstes zeigen, daß jede endliche euklidische Spiegelungsgruppe frei und transitiv auf der Menge ihrer Alkoven operiert. Die Transitivität ist schnell bewiesen: Für beliebige Punkte $v, w \in E$ finden wir sicher ein $x \in W$ derart, daß der Abstand $\|v - xw\|$ kleinstmöglich wird. Dann können v und xw durch keine Spiegel mehr getrennt sein, da für s die Spiegelung an besagtem Spiegel sonst aus elementargeometrischen Gründen v und sxw noch näher aneinander wären. Also liegen v und xw in Bezug auf jeden Spiegel in demselben abgeschlossenen Halbraum und damit im Abschluß desselben Alkoven. Die Freiheit der Operation scheint mir weniger offensichtlich. Um bei ihrem Beweis inhaltsreichere Bilder malen zu können, werden wir sie gleich in der etwas allgemeineren Situation affiner Spiegelungsgruppen zeigen. Wir führen diesen Begriff im übernächsten Abschnitt ein. Zunächst treffen wir jedoch geometrische Vorbereitungen.

Übungen

Übung 23.1.1.14 (**Symmetriegruppe eines Hyperkubus**). Man zeige: Die von allen orthogonalen Spiegelungen in $\mathbb{R}^n$ an den Hyperebenen $x_i = x_j$ für $i \neq j$ und den Hyperebenen $x_i = 0$ erzeugte Gruppe ist eine endliche euklidische Spiegelungsgruppe. Sie ist die Symmetriegruppe des Hyperkubus, in Formeln die Gruppe aller der Automorphismen von $\mathbb{R}^n$, die die Menge

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{r(i)} \mathrm{e}_i \mid r : \{1, \ldots, n\} \to \{0, 1\} \right\}$$

der Ecken des Hyperkubus stabilisiert. Diese Gruppe hat $n!2^n$ Elemente und kann als semidirektes Produkt $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \mathcal{S}_n$ im Sinne von 6.1.2.10 alias als Kranzprodukt $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathcal{S}_n$ im Sinne von 6.1.2.11 realisiert werden.

Übung 23.1.1.15. Ein Schnitt von zwei endlichen euklidischen Spiegelungsgruppen in der Automorphismengruppe ein- und desselben euklidischen Raums muß keineswegs wieder eine endliche euklidische Spiegelungsgruppe sein. Selbst im zweidimensionalen Fall findet man leicht Gegenbeispiele und selbst dann, wenn unsere beiden endlichen euklidischen Spiegelungsgruppen in einer gemeinsamen endlichen euklidischen Spiegelungsgruppe enthalten sind. Aus 23.1.7.5 wird jedoch leicht folgen, daß gegeben endliche euklidische Spiegelungsgruppen $W' \subset W \subset \mathrm{O}_{\mathrm{aff}}(E)$ und $\lambda \in E$ auch $W'_\lambda = W_\lambda \cap W'$ eine endliche euklidische Spiegelungsgruppe ist.

23.1.2 Endliche lineare Spiegelungsgruppen

23.1.2.1. In den Anwendungen trifft man Spiegelungsgruppen oft im Kontext nicht-euklidischer Vektorräume an. Im folgenden bauen wir für diese Situation

einen begrifflichen Rahmen. Weil wir uns damit eh von der Anschauung der euklidischen Ebene entfernen und weil der affine Fall später eh noch ausführlich behandelt wird, beschränken uns dabei auf den Fall von endlicher Spiegelungsgruppen in der Automorphismengruppe von Vektorräumen.

Definition 23.1.2.2. Eine lineare Abbildung von einem Vektorraum in sich selbst heißt eine **Spiegelung** oder noch präziser eine **lineare Spiegelung**, wenn ihr Quadrat die Identität ist und ihre Fixpunktmenge eine Hyperebene und wir uns nicht in Charakteristik Zwei befinden. Wir nennen die Fixpunktmenge einer Spiegelung auch ihre **Spiegelhyperebene** oder abkürzend ihren **Spiegel**.

23.1.2.3 (**Formelhafte Darstellung von linearen Spiegelungen**). Seien k ein Körper einer Charakteristik $\operatorname{char} k \neq 2$ und V ein k-Vektorraum und $s : V \to V$ eine lineare Spiegelung. Ihren Spiegel notieren wir V^s. Wegen unserer Annahme $\operatorname{char} k \neq 2$ hat jedes $v \in V$ die Zerlegung $v = (v + sv)/2 \ + (v - sv)/2$. Wir folgern die Zerlegung $V = V^s \oplus V^{-s}$ von V in Eigenräume von s zu den Eigenwerten ± 1. Insbesondere ist der Eigenraum zum Eigenwert -1 unserer Spiegelung stets eine Gerade, in Formeln $\dim_k V^{-s} = 1$. Ist V ein Vektorraum und V^* sein Dualraum, so schreiben wir für den Wert $f(\lambda)$ von $f \in V^*$ an einer Stelle $\lambda \in V$ im folgenden symmetrischer $\langle f, \lambda \rangle$ oder sogar $\langle \lambda, f \rangle$. Wählen wir nun in V erst einen Eigenvektor α unserer Spiegelung s zum Eigenwert -1 und dann diejenige Linearform $\alpha^\vee \in V^*$ mit $\ker \alpha^\vee = V^s$ und $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$, so gilt

$$s(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

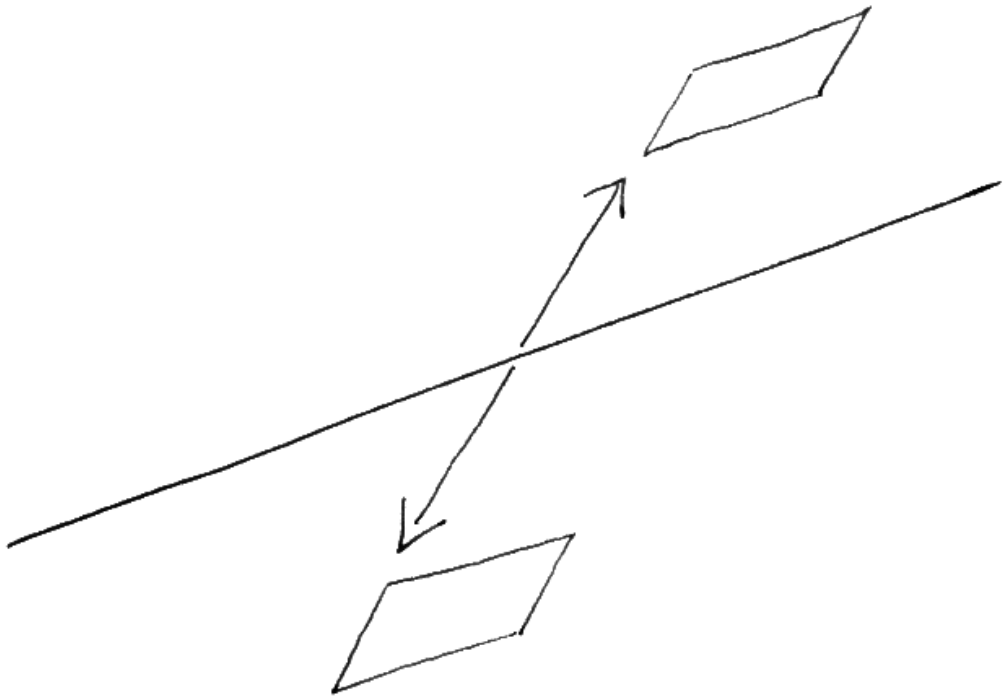
für alle λ in $V = k\alpha \oplus V^s$. Umgekehrt erhalten wir für beliebige $\alpha \in V$, $\alpha^\vee \in V^*$ mit $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ eine Spiegelung $s_{\alpha,\alpha^\vee}$ durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rccl} s_{\alpha,\alpha^\vee} : & V & \to & V \\ & \lambda & \mapsto & \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \end{array}$$

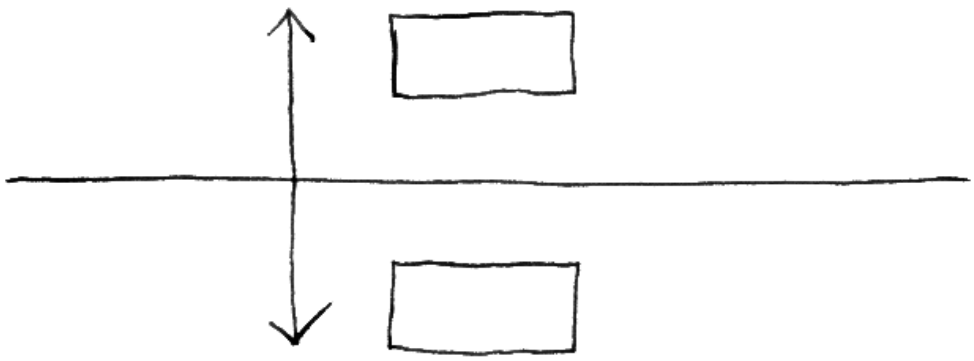
23.1.2.4 (**Orthogonale Spiegelungen**). Ist V ein Vektorraum über einem angeordneten Körper und ist die Spiegelung $s = s_{\alpha,\alpha^\vee} : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ orthogonal bezüglich eines Skalarprodukts $(\ ,\ )$ auf V, also $(s\lambda, s\mu) = (\lambda, \mu) \quad \forall \lambda, \mu \in V$, so gilt offensichtlich $V^s = \alpha^\perp = \{v \in V \mid (v, \alpha) = 0\}$ und wir haben

$$\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \quad \forall \lambda \in V$$

In der Tat nehmen beide Seiten offensichtlich auf $\lambda = \alpha$ und auf jedem $\lambda \in \alpha^\perp$ denselben Wert an. In anderen Worten bildet der zu unserem Skalarprodukt gehörige Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} V^*$, $\lambda \mapsto (\lambda,\ )$ den Vektor $2\alpha/(\alpha, \alpha)$ auf $\alpha^\vee$ ab. Dasselbe gilt allgemeiner, wenn wir über einem beliebigen Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik arbeiten und $(\ ,\ )$ eine unter $s_{\alpha,\alpha^\vee}$ invariante symmetrische Bilinearform ist mit der Eigenschaft $(\alpha, \alpha) \neq 0$.



Eine Spiegelung, die nicht orthogonal wäre für ein übliches Skalarprodukt auf der Papierebene.



Eine Spiegelung, die orthogonal ist für jedes übliche Skalarprodukt auf der Papierebene.

Definition 23.1.2.5. Unter einer **endlichen linearen Spiegelungsgruppe** verstehen wir eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Vektorraums über einem angeordneten Körper, die von Spiegelungen erzeugt wird.

Lemma 23.1.2.6. *Gegeben eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Vektorraums über einem angeordneten Körper gibt es auf unserem Vektorraum stets ein unter dieser Gruppe invariantes Skalarprodukt.*

23.1.2.7. Wir sind also nie wirklich weit von unseren euklidischen Spiegelungsgruppen entfernt. Allerdings wird solch ein invariantes Skalarprodukt im allgemeinen keineswegs eindeutig sein.

Beweis. Sei k unser angeordneter Körper und V unser Vektorraum und G unsere endliche Gruppe von Automorphismen von V. Sei $b : V \times V \to k$ irgendein Skalarprodukt. Wir erhalten ein G-invariantes Skalarprodukt durch die Vorschrift $i(v, w) = \sum_{g \in G} b(gv, gw)$. □

Lemma 23.1.2.8. *Haben zwei Spiegelungen einer endlichen linearen Spiegelungsgruppe denselben Spiegel, so stimmen sie überein.*

Erster Beweis. Sei V ein Vektorraum über einem angeordneten Körper und $W \subset \mathrm{GL}(V)$ unsere endliche lineare Spiegelungsgruppe. Seien $s, t \in W$ zwei Spiegelungen und $H = V^s = V^t$ der gemeinsame Spiegel. Nach 23.1.2.6 gibt es ein W-invariantes Skalarprodukt auf V. Für jedes W-invariante Skalarprodukt auf V gilt dann $V = H \oplus H^\perp$, und sowohl s als auch t operieren als die Identität auf H und als -1 auf $H^\perp$. □

Zweiter Beweis. Sind s, t unsere Spiegelungen, so haben wir $s(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ und $t(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \beta$ mit $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2 = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$. Es folgt mit kurzer Rechnung $t(s(\lambda)) = \lambda + \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle (\beta - \alpha)$ und damit $(ts)^n : \lambda \mapsto \lambda + n \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle (\beta - \alpha)$. Hat der Grundkörper Charakteristik Null, kann also (ts) nur dann von endlicher Ordnung sein, wenn gilt $t = s$. □

Übungen

Übung 23.1.2.9 (**Transponierte einer Spiegelung**). Man zeige, daß die transponierte Abbildung zu einer Spiegelung $s = s_{\alpha,\alpha^\vee} : V \to V$ die Spiegelung $s^\top = s_{\alpha^\vee,\alpha} : V^* \to V^*$ ist, wobei wir in der zweiten Identität unter α das durch Auswerten an α definierte Element des Bidualraums V^{**} verstehen.

23.1.3 Alkovengeometrie

23.1.3.1. Im folgenden arbeiten wir mit affinen Räumen über angeordneten Körpern. Wir setzen nicht voraus, daß unsere affinen Räume von endlicher Dimension sein müssen. In Anwendungen wird das jedoch meist der Fall sein.

Definition 23.1.3.2. Sei E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper. Gegeben $x, y \in E$ setzen wir

$$\begin{array}{rcl} [x,y] & := & \{x + t(y-x) \mid 0 \le t \le 1\} \\ [x,y) & := & \{x + t(y-x) \mid 0 \le t < 1\} \\ (x,y] & := & \{x + t(y-x) \mid 0 < t \le 1\} \\ (x,y) & := & \{x + t(y-x) \mid 0 < t < 1\} \end{array}$$

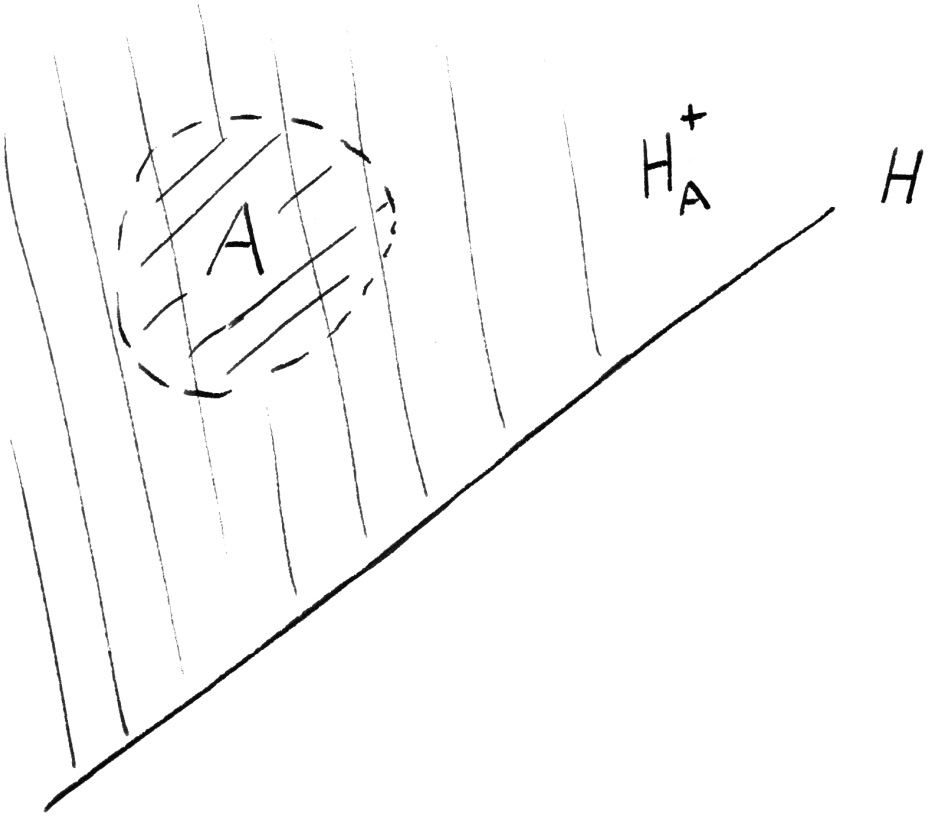
Mengen dieser Gestalt mit $x \neq y$ nennen wir **Geradensegmente**, und zwar **abgeschlossene Geradensegmente**, wenn beide **Endpunkte** x, y dazugehören, und **offene Geradensegmente**, wenn keiner der beiden Endpunkte dazugehört. Im Fall eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums mit seiner natürlichen Topologie sind zwar abgeschlossene Geradensegmente abgeschlossene Teilmengen des ganzen Raums, offene Geradensegmente jedoch nur offene Teilmengen in der von ihnen erzeugten affinen Gerade.

Definition 23.1.3.3. Ein System von Hyperebenen in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper heißt **lokal endlich**, wenn jedes Geradensegment in unserem Raum höchstens endlich viele Hyperebenen unseres Systems trifft.

Lemma 23.1.3.4. *Ein affiner Raum über einem angeordneten Körper kann nicht durch ein lokal endliches System von Hyperebenen überdeckt werden.*

Beweis. In 6.3.10.1 hatten wir bereits gezeigt, daß ein affiner Raum über einem unendlichen Körper nicht von endlich vielen Hyperebenen überdeckt werden kann. Jeder Punkt x unseres affinen Raums hier liegt jedoch auf höchstens endlich vielen Hyperebenen unseres lokal endlichen Systems. Wenn wir nun mithilfe von 6.3.10.1 einen weiteren Punkt y außerhalb dieser endlich vielen Hyperebenen wählen, so ist das Segment $[x, y]$ in keiner unserer Hyperebenen enthalten. Da es unendlich viele Punkte hat, aber nur endlich viele unserer Hyperebenen trifft und zwar in jeweils nur einem Punkt, gibt es auf $[x, y]$ notwendig Punkte, die auf keiner unserer Hyperebenen liegen. □

23.1.3.5. Ich erinnere daran, daß eine Teilmenge eines affinen Raums über einem angeordneten Körper **konvex** heißt, wenn sie mit je zwei Punkten auch das ganze dazwischenliegende Geradensegment enthält. Ich erinnere daran, daß jede Hyperebene in einem affinen Raum die Nullstellenmenge einer affinen Funktion ist.



Der H-Halbraum H_A^+ einer nichtleeren konvexen Teilmenge A, die die Hyperebene H nicht trifft. Per definitionem gehört H selbst nicht zu H_A^+ dazu.

23.1.3.6. Sei E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper. Für jede Hyperebene $H \subset E$ gibt es in $E \backslash H$ genau zwei maximale konvexe Teilmengen, die wir die **Halbräume** zu H oder die H**-Halbräume** nennen. Ist $A \subset E$ eine nichtleere konvexe Teilmenge und gilt $A \cap H = \emptyset$, so liegt A in genau einem Halbraum zu H. Diesen Halbraum bezeichnen wir mit H_A^+ und nennen ihn den H**-Halbraum von** A. Seine Vereinigung mit der Hyperebene selbst notieren wir $\bar{H}_A^+ = H_A^+ \cup H$ und nennen sie den **abgeschlossenen** H**-Halbraum von** A.

Definition 23.1.3.7. Für jede Hyperebene in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper betrachten wir die dreiteilige Partition unseres Raums in die zwei Halbräume und die Hyperebene selbst und nennen sie die zugehörige **Hyperebenenpartition**. Gegeben ein lokal endliches System von Hyperebenen betrachten wir die gröbste Partition unseres affinen Raums, die feiner ist als diese Hyperebenenpartition für jede der Hyperebenen unseres Systems. Die Stücke der so erklärten Partition heißen die **Facetten zu unserem lokal endlichen System von Hyperebenen**. Als Schnitte konvexer Teilmengen sind sie konvex und nach der Definition einer Partition sind sie nie leer.

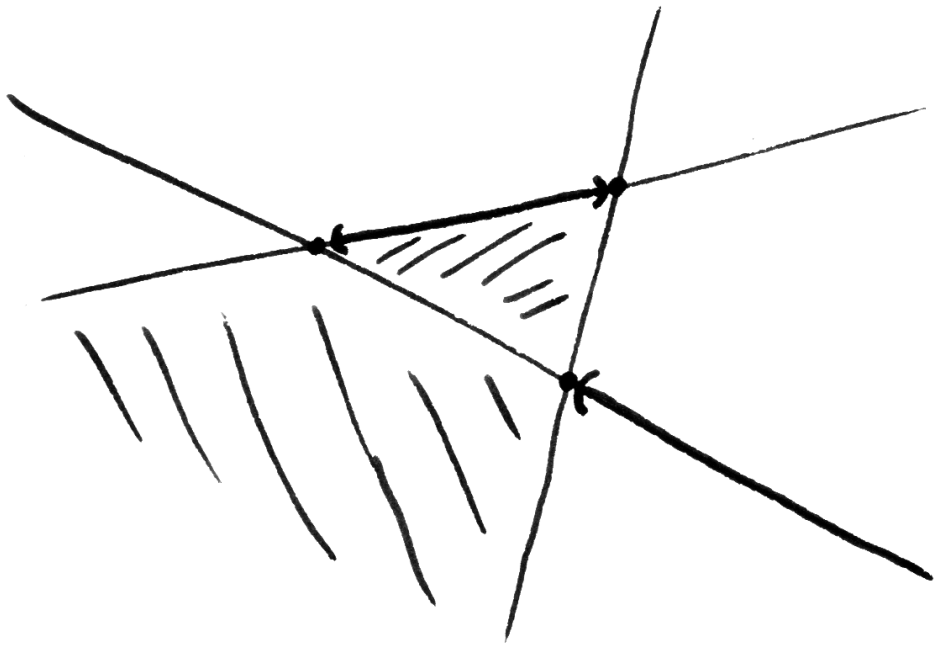
23.1.3.8. Wollen wir das in algebraischer statt in geometrischer Sprechweise formulieren, so müssen wir statt unserem System von Hyperebenen eine Menge Λ von affinen Abbildungen $\lambda : E \to k$ betrachten, die jeweils eine Gleichung für jede unserer Hyperebenen enthält. Für jede Dreiteilung dieses Systems $\Lambda = \Lambda^+ \sqcup \Lambda^0 \sqcup \Lambda^-$ ist dann die Menge

$$\left\{ v \in E \;\middle|\; \begin{array}{ll} \lambda(v) = 0 & \forall \lambda \in \Lambda^0 \\ \lambda(v) > 0 & \forall \lambda \in \Lambda^+ \\ \lambda(v) < 0 & \forall \lambda \in \Lambda^- \end{array} \right\}$$

entweder leer oder eine Facette. Die „lokale Endlichkeit“ unseres Systems von Hyperebenen übersetzt sich in dieser Formulierung in die Bedingung, daß auf jedem Geradensegment höchstens endlich viele $\lambda \in \Lambda$ eine Nullstelle haben dürfen.

Definition 23.1.3.9. Gegeben ein affiner Raum E über einem angeordneten Körper nennen wir eine Teilmenge $A \subset E$ ganz allgemein eine **Facette**, wenn es ein lokal endliches System von Hyperebenen gibt, zu dem unser A eine Facette im Sinne von 23.1.3.7 ist. Wir sagen dann auch, daß besagtes System von Hyperebenen „unsere Facette ausschneidet“.

23.1.3.10. Die mathematische Terminologie ist, was den Begriff einer Facette angeht, uneinheitlich. Vielfach heißt das eine Facette, was bei uns „der Abschluß einer Wandfacette eines Alkoven“ heißt, vergleiche 23.1.3.28.



Die drei dargestellten Geraden liefern eine Partition der Papierebene in 19 Facetten, als da wären 3 einpunktige Facetten, 3 offene Geradensegmente, von denen ich eines versucht habe durch ein Klammerpaar anzudeuten, 6 offene Halbgeraden, von denen ich eine versucht habe durch eine Klammer anzudeuten, und 7 sogenannte Alkoven, von denen ich Zwei schraffiert habe. Der Abschluß des dreieckigen Alkoven in der Mitte ist die abgeschlossene Dreiecksfläche, er ist in unserem Fall die Vereinigung von 7 unserer Facetten, nämlich von den 3 Punkten, den 3 offenen Geradensegmenten und der offenen Dreiecksfläche selber.

23.1.3.11 (**Intrinsische Natur der Definition einer Facette**). Ein- und dieselbe Facette kann im allgemeinen durch verschiedene lokal endliche Systeme von Hyperebenen ausgeschnitten werden. Insbesondere müssen verschiedene Facetten keineswegs disjunkt sein. Eine Grundprinzip des im folgenden gegebenen Zugangs zur Alkovengeometrie ist die Erkenntnis, daß sich gewisse Aspekte der Geometrie unserer Facetten unabhängig von einem sie ausschneidenden System von Hyperebenen formulieren lassen.

Definition 23.1.3.12. Seien E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper und $A \subset E$ eine Facette. Wir erklären den **Abschluß** $\bar{A}$ von A als die Menge aller Punkte $x \in E$ derart, daß für mindestens einen Punkt $y \in A$ die Menge $(x, y]$ ganz in A enthalten ist.

Beispiele 23.1.3.13. Wegen $(x, x] = \{x\}$ liegt jede Facette in ihrem Abschluß. In einem eindimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper sind die Facetten genau die Punkte, die offenen Geradensegmente, die offenen Halbgeraden und der ganze Raum. In $\mathbb{R}$ sind die Facetten genau die nichtleeren offenen Intervalle, aber in $\mathbb{Q}$ ist das so nicht richtig. In einem endlichdimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper ist jeder nichtleere affine Teilraum und insbesondere jede einelementige Teilmenge eine Facette. Im allgemeinen ist jeder Halbraum eine Facette und sein Abschluß als Halbraum im Sinne von 23.1.3.6 fällt mit seinem Abschluß als Facette zusammen.

23.1.3.14 (**Abschluß einer Facette, Hyperebenen-Beschreibung**). Ist E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper und $A \subset E$ eine Facette und $\mathcal{H}$ ein lokal endliches System von Hyperebenen, das sie ausschneidet, so haben wir

$$A = \bigcap_{A \subset H \in \mathcal{H}} H \cap \bigcap_{A \not\subset H \in \mathcal{H}} H_A^+$$

Der Abschluß unserer Facette wird dann gegeben durch die Formel

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subset H \in \mathcal{H}} H \cap \bigcap_{H \in \mathcal{H},\, A \cap H = \emptyset} \bar{H}_A^+$$

Insbesondere gilt für jeden Punkt $y \in A$ offensichtlich $\bar{A} = \{x \in E \mid (x, y] \subset A\}$.

Ergänzung 23.1.3.15 (**Abschluß einer Facette, topologische Beschreibung**). Haben wir $k = \mathbb{R}$ und ist unser affiner Raum endlichdimensional und versehen wir ihn mit seiner natürlichen Topologie, so stimmt der Abschluß einer Facette überein mit ihrem Abschluß im Sinne der Topologie.

23.1.3.16 (**Geradensegmente in Facetten**). Umfaßt eine Facette ein abgeschlossenes Geradensegment, so umfaßt sie auch ein offenes Geradensegment, das seinerseits dieses abgeschlossene Geradensegment umfaßt. Das folgt direkt aus der Definition 23.1.3.9.

23.1.3.17 (**Facetten in abgeschlossenen Halbräumen**). Ist eine Facette in einem abgeschlossenen Halbraum zu einer Hyperebene enthalten, so liegt sie entweder bereits im entsprechenden offenen Halbraum oder aber in der fraglichen Hyperebene. Das folgt direkt aus unseren Erkenntnissen zu Geradensegmenten in Facetten 23.1.3.16 und der Konvexität.

Definition 23.1.3.18. Die bezüglich der Inklusionsrelation maximalen Facetten im Abschluß einer gegebenen Facette heißen ihre **Randfacetten**. Diejenigen Randfacetten, die von der gegebenen Facette verschiedenen sind, nennen wir ihre **echten Randfacetten**.

Beispiel 23.1.3.19. In $\mathbb{R}$ sind die Facetten genau die nichtleeren offenen Intervalle und ihr Abschluß fällt mt dem topologischen Abschluß zusammen. Jede Facette in $\mathbb{R}$ hat also nur einpunktige echte Randfacetten, und zwar höchstens zwei. Letzteres gilt allgemeiner über jedem angeordneten Körper.

Lemma 23.1.3.20 (**Hyperebenenbeschreibung von Randfacetten**). *Wird eine Facette A durch ein lokal endliches System von Hyperebenen $\mathcal{H}$ ausgeschnitten, so schneidet dieses System auch alle ihre Randfacetten aus, und diese sind genau alle nichtleeren Schnitte B der Gestalt*

$$B = \bigcap_{A \subset H \in \mathcal{H}} H \cap \bigcap_{H \in \mathcal{R}} H \cap \bigcap_{A \not\subset H \notin \mathcal{R}} H_A^+$$

für beliebige Teilmengen $\mathcal{R} \subset \{H \in \mathcal{H} \mid A \not\subset H\}$.

Beweis. In der Tat ist jeder solche nichtleere Schnitt offensichtlich eine Facette im Abschluß von A. Ist umgekehrt eine Facette im Abschluß von A gegeben, so liegt sie sicher auf allen Hyperebenen, auf denen A liegt, und nach unseren Erkenntnissen 23.1.3.17 zu Facetten in abgeschlossenen Halbräumen liegt sie in Bezug auf alle Hyperebenen aus einem A ausschneidenden System entweder auf der Hyperebene selbst oder in demselben Halbraum wie A. Folglich liegt jede im Abschluß von A enthaltene Facette in einem unserer Schnitte. □

23.1.3.21 (**Teilordnung auf der Menge der Randfacetten**). Auf der Menge $\mathcal{F}(A)$ aller Randfacetten einer Facette A erhalten wir eine Teilordnung durch die Vorschrift $B \leq C \Leftrightarrow B \subset \bar{C}$ und für jede Facette $C \in \mathcal{F}(A)$ folgt aus der Hyperebenenbeschreibung von Randfacetten 23.1.3.20 unschwer $\mathcal{F}(C) \subset \mathcal{F}(A)$. In Worten ist also jede Randfacette einer Randfacette einer Facette A auch bereits selbst eine Randfacette von A.

23.1.3.22 (**Abschluß als Vereinigung der Randfacetten**). Nach der Hyperebenenbeschreibung von Randfacetten 23.1.3.20 ist der Abschluß einer Facette stets

die disjunkte Vereinigung über alle maximalen in besagtem Abschluß enthaltenen Facetten, in Formeln

$$\bar{A} = \bigsqcup_{B \in \mathcal{F}(A)} B$$

Definition 23.1.3.23. Der von einer Facette erzeugte affine Teilraum heißt der **Träger** unserer Facette. Er kann auch beschrieben werden als der Schnitt aller derjenigen Hyperebenen eines sie ausschneidenden lokal endlichen Systems, die die fragliche Facette enthalten. Eine Facette, deren Träger der ganze Raum ist, heißt ein **Alkoven** oder auch eine **Kammer**.

Ergänzung 23.1.3.24. Unter der **Dimension** einer Facette versteht man die Dimension ihres Trägers. Sie kann bei uns auch durchaus unendlich sein. Unter der **Kodimension** einer Facette versteht man die Kodimension ihres Trägers. Sie ist nach unseren Definitionen stets endlich.

Lemma 23.1.3.25 (Überdeckung durch Alkovenabschlüsse). *Gegeben ein lokal endliches System von Hyperebenen $\mathcal{H}$ in einem affinen Raum E über einem angeordneten Körper überdecken die Abschlüsse der zugehörigen Alkoven ganz E. Bezeichnet $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ die Menge aller Alkoven zu $\mathcal{H}$, so gilt also in Formeln*

$$E = \bigcup_{A \in \mathcal{A}(\mathcal{H})} \bar{A}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit habe E mehr als nur einen Punkt. Für $p \in E$ finden wir nach Lemma 23.1.3.4 eine affine Gerade durch p, die in keiner unserer Hyperebenen $H \in \mathcal{H}$ enthalten ist. Dann gibt es auch einen Punkt q auf unserer Gerade derart, daß das halboffene Geradensegment $(p, q]$ keine unserer Hyperebenen $H \in \mathcal{H}$ trifft. Damit liegt aber per definitionem der Punkt p im Abschluß des Alkoven von q. □

Definition 23.1.3.26. Unter einer **Wand** eines Alkoven verstehen wir eine Hyperebene, die der Träger einer seiner Randfacetten ist.

23.1.3.27. Nach der Hyperebenenbeschreibung von Randfacetten 23.1.3.20 gehört jede Wand eines Alkoven zu jedem lokal endlichen System von Hyperebenen, das besagten Alkoven ausschneidet. Die Menge der Wände eines Alkoven A notieren wir $\mathcal{H}_A$. Eine Randfacette der Kodimension Eins eines Alkoven nennen wir eine **Wandfacette** unseres Alkoven.

23.1.3.28 (**Diskussion der Terminologie**). Mit der hier eingeführten Terminologie halten wir uns an Bourbaki. Für deren Erweiterung in 23.1.3.9 weiß ich nicht, ob sie bereits in der Literatur verwendet wird. Jeder Polyeder im Sinne von 3.3.5.18 ist in unserer Terminologie der Abschluß einer wohlbestimmten Facette,

die man sein „Inneres“ nennen mag. Die Bezeichnung „Facette eines Polyeders“ wird aber oft auch abweichend verwendet für das, was wir in der hier und im folgenden eingeführten Terminologie den „Abschluß einer Wandfacette des Inneren eines Polyeders“ zu nennen hätten.

Lemma 23.1.3.29 (Wände als eindeutige Berührende). *Gegeben ein Alkoven und ein ihn ausschneidendes System von Hyperebenen $\mathcal{H}$ ist eine Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ eine Wand unseres Alkoven genau dann, wenn es auf H einen Punkt aus dem Abschluß unseres Alkoven gibt, der auf keiner anderen Hyperebene aus $\mathcal{H}$ liegt.*

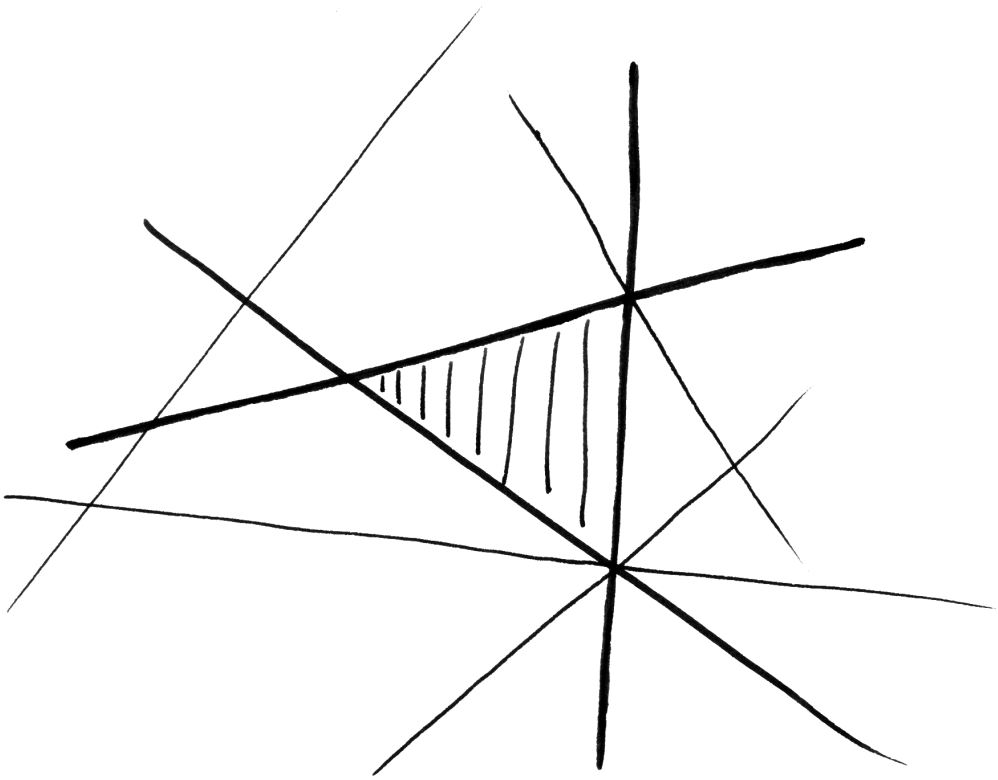
23.1.3.30. Anschaulich gesprochen in also unsere Wand für mindestens einen Punkt aus dem Abschluß unseres Alkoven die einzige Hyperebene, die den Alkoven „in diesem Punkt berührt“.

Beweis. Ist unsere Hyperebene die einzige Hyperebene aus $\mathcal{H}$ durch besagten Punkt, die den Alkoven nicht trifft, so muß besagter Punkt nach unserer Hyperebenenbeschreibung von Randfacetten 23.1.3.20 zu einer Randfacette gehören, die unsere Hyperebene erzeugt. Folglich ist dann unsere Hyperebene eine Wand des besagten Alkoven. Ist umgekehrt unsere Hyperebene eine Wand des besagten Alkoven, so ist sie Träger einer Randfacette, und jeder Punkt dieser Randfacette hat besagte Eigenschaft, wieder nach unserer Hyperebenenbeschreibung von Randfacetten 23.1.3.20. □

Satz 23.1.3.31 (Begrenzung eines Alkoven durch seine Wände). *Jeder Alkoven ist der Schnitt über die ihn umfassenden Halbräume zu seinen Wänden. In Formeln gilt für jeden Alkoven A also*

$$A = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_A} H_A^+$$

Beweis. Es gilt zu zeigen, daß jedes Segment $[x, y]$ mit $x \in A$ und $y \notin A$ mindestens eine Wand von A trifft. Per definitionem gibt es ein lokal endliches System $\mathcal{H}$ von Hyperebenen, das den Alkoven A ausschneidet. Lassen wir aus diesem System eine Hyperebene weg, die keine Wand von A ist, so erhalten wir nach der Beschreibung der Wände als eindeutige Berührende 23.1.3.29 wieder ein lokal endliches System von Hyperebenen, das den Alkoven A ausschneidet. Trifft unser Segment also keine Wand von A, so können wir die endlich vielen Hyperebenen aus $\mathcal{H}$, die es trifft, aus $\mathcal{H}$ herausnehmen und erhalten wieder ein System von Hyperebenen, das den Alkoven A ausschneidet. Daraus folgt jedoch $y \in A$ im Widerspruch zu unserer Annahme. □



Ein System von Hyperebenen, ein zugehöriger Alkoven als schraffierte Dreiecksfläche, und seine drei Wände als fett eingezeichnete affine Geraden.

Lemma 23.1.3.32 (Jede Hyperebene ist Wand eines Alkoven). *Ist $\mathcal{H}$ ein lokal endliches System von Hyperebenen in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper, so ist jede Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ Wand mindestens eines der durch dieses System definierten Alkoven, in Formeln*

$$\mathcal{H} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{H}_A$$

Beweis. Für $H \in \mathcal{H}$ finden wir nach 23.1.3.4 einen Punkt $q \in H$, der auf keiner anderen Hyperebene aus $\mathcal{H}$ liegt. Er liegt nach der Überdeckung durch Alkovenabschlüsse 23.1.3.25 im Abschluß eines Alkoven, und unsere Hyperebene ist dann nach der Beschreibung der Wände als eindeutige Berührende 23.1.3.29 eine Wand dieses Alkoven. □

Ergänzung 23.1.3.33 (**Algebraische Beschreibung der Wände eines Alkoven**). Sei A ein Alkoven zu einem lokal endlichen System von Hyperebenen $\mathcal{H}$. Wählt man für jede Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ eine affine Abbildung $\alpha_H : E \to k$ mit $\alpha_H|_A > 0$, so sind die Wände von A genau diejenigen $H \in \mathcal{H}$ mit $\bar{A} \cap H \neq \emptyset$, für die sich α_H nicht als positive Linearkombination gewisser α_L mit $L \neq H$ schreiben läßt. Daß für jede Wand H von A diese Bedingung erfüllt ist, ist eh klar. Daß nur Wände unsere Bedingung erfüllen, ergibt sich als eine Konsequenz des Hauptsatzes über lineare Ungleichungen 3.3.5.8: Ist nämlich H keine Wand und $x \in \bar{A} \cap H$, so gibt es nach der Beschreibung der Wände als eindeutige Berührende 23.1.3.29 noch mindestens eine weitere Hyperebene aus $\mathcal{H}$ durch x, aber auch höchstens endlich viele derartige Hyperebenen $L, \ldots, M \in \mathcal{H}$. Ließe sich α_H nicht als positive Linearkombination aus ihnen schreiben, so gäbe es nach dem Hauptsatz über lineare Ungleichungen 3.3.5.8 einen Punkt y mit $\alpha_H(y) < 0$ aber $\alpha_L(y) \geq 0, \ldots, \alpha_M(y) \geq 0$. Das Segment $[x, y]$ trifft nun höchstens endlich viele Hyperebenen aus $\mathcal{H}$. Indem wir y notfalls durch einen geeigneten anderen Punkt von $(x, y]$ ersetzen, dürfen wir annehmen, daß $(x, y]$ außer H selbst keine Hyperebene aus $\mathcal{H}$ trifft. Für beliebiges $z \in A$ trifft dann (y, z) die Hyperebene H aber keine andere unserer Hyperebenen aus $\mathcal{H}$. Damit wäre aber H nach der Beschreibung der Wände als eindeutige Berührende 23.1.3.29 doch eine Wand gewesen.

Übungen

Übung 23.1.3.34. Ist der Schnitt zweier Facetten nicht leer, so ist er wieder eine Facette, deren Abschluß als der Schnitt der Abschlüsse der ursprünglichen Facetten beschrieben werden kann.

Übung 23.1.3.35. Trennt eine Hyperebene H zwei Facetten A und B, so gilt stets $\bar{A} \cap \bar{B} \subset H$.

Übung 23.1.3.36. Sei E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper k. Gegeben eine Facette $F \subset E$ und ein Richtungsvektor $\vec{v} \in E \backslash 0$ sind gleichbedeutend:

1. F umfaßt eine Gerade mit Richtungsvektor $\vec{v}$;
2. $F = \lambda \vec{v} + F \quad \forall \lambda \in k$;
3. Es gibt ein F ausschneidendes System von Hyperebenen derart, daß $\vec{v}$ zum Richtungsraum jeder dieser Hyperebenen gehört;
4. Für jede Hyperebene in E, die F nicht trifft, liegt $\vec{v}$ im Richtungsraum besagter Hyperebene.

Übung 23.1.3.37. Gegeben eine Facette A gehören zwei verschiedene Punkte aus ihrem Abschluß $x, y \in \bar{A}$ zu derselben maximalen Facette $B \subset \bar{A}$ genau dann, wenn es ein offenes ganz in $\bar{A}$ enthaltenes Geradensegment gibt, das unsere beiden Punkte enthält.

Übung 23.1.3.38. Gegeben ein lokal endliches System von Hyperebenen in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper sind die zugehörigen Alkoven genau die maximalen konvexen Teilmengen des Komplements der Vereinigung aller Hyperebenen unseres Systems, und jede nichtleere konvexe Teilmenge von $E \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ liegt in genau einem Alkoven.

Übung 23.1.3.39. Gegeben ein beliebiges System von Hyperebenen $\mathcal{H}$ in einem affinen Raum E über einem angeordneten Körper ist das Komplement der Vereinigung aller Hyperebenen unseres Systems $E \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ die disjunkte Vereinigung seiner maximalen konvexen Teilmengen, und jede nichtleere konvexe Teilmenge ist in genau einer dieser maximalen konvexen Teilmengen enthalten.

Übung 23.1.3.40. Ein Alkoven in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper kann nicht durch ein lokal endliches System von Hyperebenen überdeckt werden.

23.1.4 Facettenabschluß als konvexe Hülle*

Satz 23.1.4.1 (Facettenabschluß als Hülle der einpunktigen Randfacetten). *Umfaßt eine Facette in einem endlichdimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper keine Halbgerade, so ist ihr Abschluß die konvexe Hülle der Vereinigung aller einpunktigen Randfacetten besagter Facette.*

Beweis. Umfaßt unsere Facette keine Halbgerade, so kann auch keine ihrer Randfacetten eine Halbgerade umfassen, denn so eine Halbgerade könnten wir parallel in unsere ursprüngliche Facette hineinschieben. Sei nun A unsere Facette. Jeder

Punkt $x \in \bar{A}$ gehört zu genau einer Randfacette $C \in \mathcal{F}(A)$ von A und diese enthält nach unserer Vorüberlegung auch keine Halbgerade. Im Fall $C \neq A$ beendet vollständige Induktion über die Dimension unserer Facette den Beweis. Ist A nur ein Punkt, ist die Behauptung eh klar. Ist schließlich $C = A$ alias $x \in A$ aber $A \neq \{x\}$, so umfaßt A ein ganzes offenes Geradensegment um unseren Punkt. Die zugehörige Gerade schneidet dann $\bar{A}$ in einem Segment $[y, z]$ mit $y, z \notin A$, diese liegen in Randfacetten von A echt kleinerer Dimension, und vollständige Induktion beendet wieder den Beweis. □

Proposition 23.1.4.2 (Facettenabschluß als Hülle der echten Randfacetten). *Sei E ein endlichdimensionaler affiner Raum über einem angeordneten Körper k und sei $F \subset E$ eine Facette der Dimension $\dim F \geq 2$. Umfaßt F keine Gerade, so ist $\bar{F}$ die konvexe Hülle von $\bar{F} \backslash F$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei F ein Alkoven. Wir argumentieren mit Induktion über die Dimension. Im ebenen Fall $\dim F = 2$ gibt es in einem F ausschneidenden System nach 23.1.3.36 zwei Hyperebenen alias Geraden H und G, die nicht parallel sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sind das die beiden Koordinatenachsen in k^2. Es gibt folglich einen Richtungsvektor $\vec{v} \in \vec{E} \backslash 0$ derart, daß für alle $p \in F$ die Gerade $p + k\vec{v}$ die Facette F nur in einem endlichen Segment trifft, in Formeln $p + \lambda\vec{v} \notin F$ für $\lambda \gg 0$ und auch für $\lambda \ll 0$. Also gibt es auch $\mu, \nu > 0$ mit $p + \mu\vec{v}, p - \nu\vec{v} \in \bar{F} \backslash F$ und der ebene Fall ist erledigt. Um im allgemeinen zu sehen, daß jeder Punkt $p \in F$ in besagter konvexer Hülle liegt, müssen wir nur eine Hyperebene durch p legen und die Induktionsannahme auf den Schnitt unserer Facette F mit besagter Hyperebene anwenden. □

Korollar 23.1.4.3 (Facettenabschluß als Hülle kleiner Randfacetten). *Seien E ein endlichdimensionaler affiner Raum über einem angeordneten Körper und $F \subset E$ eine Facette, die keine Gerade umfaßt. So ist $\bar{F}$ die konvexe Hülle der Vereinigung aller Randfacetten der Dimension ≤ 1 von F.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Proposition 23.1.4.2. □

23.1.4.4 (**Konvexe Hüllen als Abschlüsse von Facetten**). In einem endlichdimensionalen Vektorraum über einem angeordneten Körper ist nach dem Hauptsatz über lineare Ungleichungen 3.3.5.8 jeder endlich erzeugte Kegel der Abschluß einer Facette. Ebenso ist in einem endlichdimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper nach dem Hauptsatz über affine Ungleichungen 3.3.5.16 die konvexe Hülle einer endlichen nichtleeren Teilmenge stets der Abschluß einer Facette.

Ergänzung 23.1.4.5. Die **Vermutung von Hirsch** besagt, daß man in einem beschränkten Alkoven aus $\mathbb{R}^d$ mit n Wänden zwischen je zwei seiner Ecken einen Weg aus höchstens $n - d$ seiner Kanten finden sollte. Hier meinen Ecken nulldimensionale und Kanten eindimensionale Randfacetten unseres Alkoven. Einen Übersichtsartikel zu dieser Vermutung findet man etwa in [KS10], in der der Zweitautor als „note added in press" ein Gegenbeispiel ankündigt. Der Abschluß eines beschränkten Alkoven aus $\mathbb{R}^d$ heißt im übrigen auch ein **Polytop**.

Übungen

Übung 23.1.4.6. Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem angeordneten Körper. Sei $A \subset E$ eine Facette und $m = \min\{\dim B \mid B \in \mathcal{F}(A)\}$ die kleinstmögliche Dimension für eine Randfacette von A. So ist A die konvexe Hülle der Vereinigung seiner Randfacetten der Dimension $\leq d + 1$.

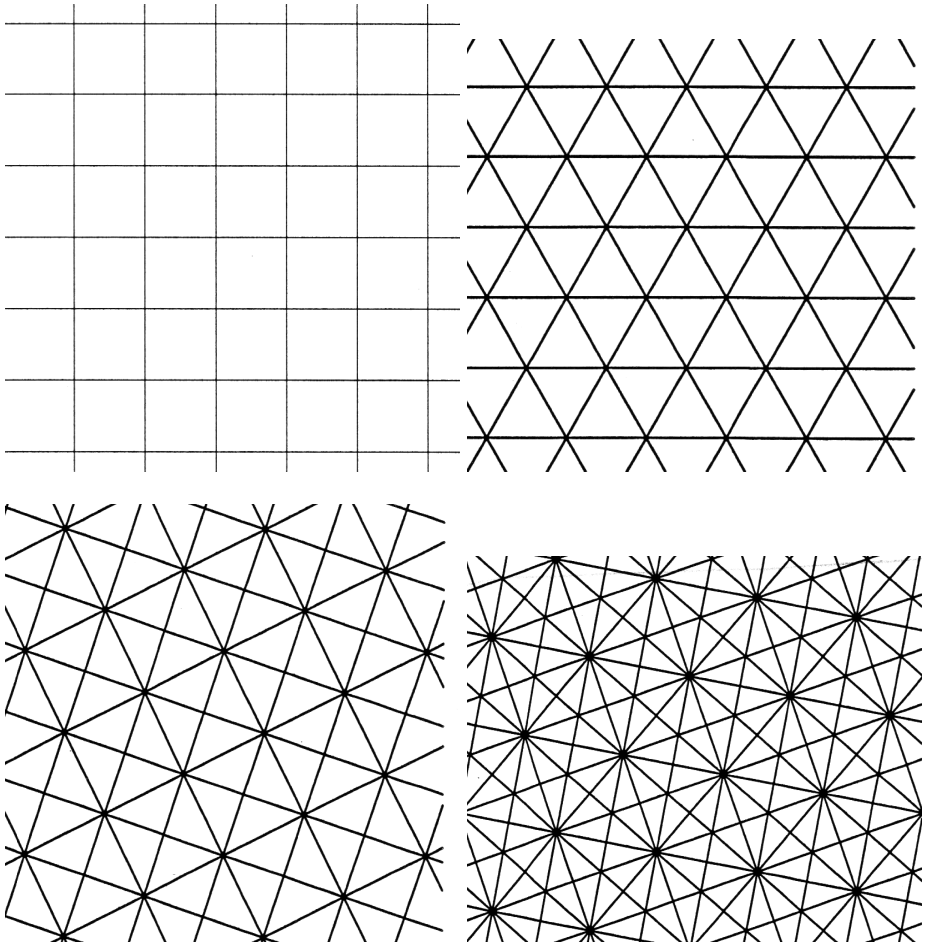
Ergänzende Übung 23.1.4.7. Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem angeordneten Körper. So ist die konvexe Hülle einer endlichen Vereinigung von Facettenabschlüssen wieder ein Facettenabschluß. Ich habe mir die Lösung nicht überlegt und kann auf die Schnelle nicht abschätzen, wie schwer das zu zeigen ist.

Übung 23.1.4.8. Gegeben $\mathcal{H}$ ein lokal endliches System von Hyperebenen in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper und Alkoven A, B bezeichne $d(A, B)$ die Zahl von Hyperebenen aus $\mathcal{H}$, die A und B trennen. Man zeige, daß es stets eine Abbildung $\varphi : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ von der Menge der Alkoven in die zweielementige Menge $\{0, 1\}$ gibt mit $d(A, B) \equiv \varphi(A) - \varphi(B) \pmod 2$ für beliebige Alkoven A, B.

23.1.5 Affine Spiegelungsgruppen

Definition 23.1.5.1. Eine affine Abbildung von einem affinen Raum in sich selbst heißt eine **Spiegelung** oder noch präziser eine **affine Spiegelung**, wenn ihr Quadrat die Identität ist und ihre Fixpunktmenge eine Hyperebene. Wir nennen diese Fixpunktmenge dann den **Spiegel** oder genauer die **Spiegelhyperebene** unserer Spiegelung. Wir werden Spiegelungen nur in affinen Räumen über Körpern einer von Zwei verschiedenen Charakteristik betrachten.

Definition 23.1.5.2. Unter einer **affinen Spiegelungsgruppe** verstehen wir eine Gruppe von Automorphismen eines affinen Raums über einem angeordneten Körper, die (1) von Spiegelungen erzeugt wird, für die (2) die Spiegel ihrer Spiegelungen ein lokal endliches System von Hyperebenen bilden, und so daß (3) die linearen Anteile der Elemente unserer Gruppe eine endliche Gruppe von Automorphismen des Richtungsraums bilden.



Dieses Bild zeigt die Spiegelhyperebenen von vier ebenen affinen reellen Spiegelungsgruppen. Das sind auch bis auf Konjugation mit Automorphismen der affinen Ebene alle Möglichkeiten für ebene affine reelle Spiegelungsgruppen, die „essentiell“ sind in dem Sinne, daß die darin enthaltenen Verschiebungen den Richtungsraum aufspannen. Die Bilder sind so gezeichnet, daß die Spiegelungen an einer Hyperebene in der jeweiligen affinen Spiegelungsgruppe den Spiegelungen auf der Papierebene im Sinne der Schulgeometrie entsprechen.

23.1.5.3. Wenn wir von einer affinen Spiegelungsgruppe (W, E) reden, so ist mit E der zugrundeliegende affine Raum gemeint und mit W die Gruppe selbst. Zwei affine Spiegelungsgruppen (W, E) und (W', E') über demselben Körper heißen **isomorph**, wenn es einen Isomorphismus von affinen Räumen $\varphi : E \xrightarrow{\sim} E'$ gibt mit $W = \varphi^{-1} W' \varphi$.

Vorschau 23.1.5.4. Der Rest dieses Abschnitts kann als eine vollständige Klassifikation der reellen affinen Spiegelungsgruppen in endlichdimensionalen Räumen gelesen werden, wie im folgenden ausgeführt werden soll. Dieses Ziel ist auch der Grund, aus dem wir es bei den Definitionen stets vermeiden, in der euklidischen Situation zu arbeiten. Die endlichen reellen Spiegelungsgruppen werden bereits in 23.1.9.7 im Verbund mit 23.1.9.5 durch ihre „Coxeter-Graphen“ zusammen mit der Dimension des Raums ihrer Fixpunkte klassifiziert. Nach 23.1.12.4 zerfällt jede affine reelle Spiegelungsgruppe in einen endlichen und einen „essentiellen“ Faktor und die Isomorphieklassen dieser Faktoren sind eindeutig bestimmt. Satz 23.2.4.3 gibt dann eine Klassifikation der „essentiellen“ affinen Spiegelungsgruppen durch sogenannte „Wurzelsysteme“, die hinwiederum nach 23.2.2.14 eindeutig in unzerlegbare Wurzelsysteme zerfallen. Die unzerlegbaren Wurzelsysteme schließlich werden in 23.2.3.7 durch ihre „Dynkin-Diagramme“ klassifiziert. Der Fall unendlicher Dimension unterscheidet sich nur um einen trivialen Faktor von dem hier beschriebenen endlichdimensionalen Fall.

Beispiel 23.1.5.5. Betrachten wir in einer reellen affinen Ebene zwei verschiedene aber parallele Geraden und wählen zu jeder dieser Geraden eine Spiegelung, die sie festhält, so erzeugen diese beiden Spiegelungen eine Gruppe von Automorphismen der affinen Ebene. Diese Gruppe ist jedoch nur dann eine affine Spiegelungsgruppe im Sinne unserer Definition 23.1.5.2, wenn die linearen Anteile der beiden erzeugenden Spiegelungen übereinstimmen.

Definition 23.1.5.6. Unter einem **affinen euklidischen Raum** verstehen wir hier und im folgenden einen affinen Raum über einem angeordneten Körper, dessen Raum von Richtungsvektoren mit einer euklidischen Struktur alias einem bis auf einen positiven Faktor wohlbestimmten Skalarprodukt versehen ist. Eine affine Abbildung zwischen affinen euklidischen Räumen heißt **orthogonal**, wenn ihr linearer Anteil orthogonal ist. Eine **Spiegelung** oder präziser eine **affine orthogonale Spiegelung** auf einem affinen euklidischen Raum ist eine orthogonale Abbildung, deren Fixpunktmenge eine Hyperebene ist. Unter einer **affinen euklidischen Spiegelungsgruppe** verstehen wir eine affine Spiegelungsgruppe, die aus orthogonalen Automorphismen eines affinen euklidischen Raums besteht.

Ergänzung 23.1.5.7. Gegeben eine Gruppe von orthogonalen Automorphismen eines endlichdimensionalen euklidischen affinen Raums, die die Bedingungen (1) und (2) aus 23.1.5.2 an eine affine Spiegelungsgruppe erfüllt, ist Bedingung (3)

von ebendort automatisch erfüllt, als da heißt, die Gruppe aller linearen Anteile ist endlich. Um das zu sehen, reicht es zu zeigen, daß die Menge aller Normalenvektoren auf Spiegeln endlich ist. In der Tat operiert nämlich unsere Gruppe linearer Anteile treu auf dieser Menge, da sie ja deren orthogonales Komplement punktweise festhalten muß. Im Reellen können wir nun argumentieren wie folgt: Wäre unsere Menge von Normalenvektoren nicht endlich, so gäbe es wegen der Kompaktheit der Einheitssphäre Spiegel, die beliebig kleine positive Winkel einschließen. Wir zeigen, daß damit auch zwischen den Wänden eines und jedes Alkoven beliebig kleine positive Winkel vorkämen, im Widerspruch zu 23.1.12.8. In der Tat: Für zwei Spiegel, die sich treffen, gibt es nur endlich viele Spiegel, die die Schnittgerade umfassen. Auf dieser Schnittgeraden finden wir Punkte, die in keinem zusätzlichen Spiegel enthalten sind. Solch ein Punkt liegt dann im Abschluß eines Alkoven, und zwei Wände dieses Alkoven, die den besagten Punkt enthalten, schließen dann höchstens denselben Winkel ein wie die beiden Spiegel, von denen wir ausgegangen waren. Sind wir nicht im Reellen, so können wir argumentieren wie folgt: Unterteilen wir die Oberfläche eines Einheitswürfels um den Nullpunkt in noch so kleine Schachfelder, so müßten doch zwei verschiedene Normalengeraden auf Spiegeln durch dasselbe Feld gehen. Der Rest des Arguments bleibt dem Leser überlassen.

Lemma 23.1.5.8. *In einer affinen Spiegelungsgruppe haben verschiedene Spiegelungen auch verschiedene Spiegel.*

Erster Beweis. Wir finden ja nach 23.1.2.6 ein Skalarprodukt auf dem Richtungsraum, das unter den linearen Anteilen der Elemente unserer affinen Spiegelungsgruppe invariant ist. Bezüglich jedes solchen Skalarprodukts muß eine Spiegelung dann die orthogonale Spiegelung zu ihrem Spiegel sein. □

Zweiter Beweis. Gegeben zwei Spiegelungen s, t mit demselben Spiegel hat st mindestens einen Fixpunkt und es reicht mithin zu zeigen, daß der lineare Anteil von st die Identität ist. Man sieht jedoch unmittelbar, daß der lineare Anteil von (st) unipotent ist, und wäre er nicht die Identität, so hätte er folglich unendliche Ordnung. Das steht jedoch im Widerspruch zu unserer letzten Forderung an eine affine Spiegelungsgruppe. □

23.1.5.9 (**Konjugierte einer Spiegelung**). Gegeben eine affine Spiegelungsgruppe (W, E) und eine Spiegelung $s \in W$ mit Spiegel $E^s = H$ schreiben wir die zugehörige Spiegelung auch

$$s = s_H : E \to E$$

Für beliebiges $w \in W$ gilt dann $s_{wH} = w s_H w^{-1}$, denn beide Seiten sind Spiegelungen aus W mit demselben Spiegel.

23.1.5.10. Gegeben ein affiner euklidischer Raum E und eine affine Hyperebene $H \subset E$ schreiben wir die orthogonale Spiegelung an der Hyperebene H, wenn es sie denn gibt, auch $s_H : E \to E$. Für eine beliebige orthogonale Abbildung $w : E \to E$ gilt dann $s_{wH} = ws_Hw^{-1}$, denn beide Seiten sind orthogonale Spiegelungen mit demselben Spiegel.

Ergänzung 23.1.5.11. Es kann nur im Fall unendlicher Dimension Vorsicht passieren, daß das orthogonale Komplement einer linearen Hyperebene nur aus dem Nullvektor besteht und es somit dazu keine orthogonale Spiegelung gibt. Sogar das orthogonale Komplement des Raums aller differenzierbaren Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ im Raum aller stetigen Funktionen bezüglich des üblichen Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int fg$ ist ja schon der Nullraum.

Beispiel 23.1.5.12. Wir betrachten die Menge $\mathcal{H}$ aller derjenigen Geraden in $\mathbb{R}^2$, die parallel sind zu einer der Koordinatenachsen und durch einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten gehen. Offensichtlich ist $\mathcal{H}$ die Menge aller Spiegel einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe und die Alkoven sind gerade die „Felder dieses Rechenpapiers“. Allgemeiner können wir natürlich auch die Menge $\mathcal{H}$ aller derjenigen Hyperebenen in $\mathbb{R}^n$ betrachten, die parallel sind zu einer der Koordinaten-Hyperebenen und die einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten enthalten. Im Fall $n = 1$ sind die Alkoven die offenen Segmente $(i, i+1)$, im Fall $n = 3$ haben sie die Gestalt von Würfeln.

23.1.5.13. Eine endliche Gruppe von Bewegungen eines affinen Raums über einem Körper der Charakteristik Null hat stets einen Fixpunkt, genauer ist der Schwerpunkt jeder Bahn ein Fixpunkt.

Übungen

Übung 23.1.5.14. Jede von Spiegelungen erzeugte Untergruppe einer affinen Spiegelungsgruppe ist auch selbst eine affine Spiegelungsgruppe.

23.1.6 Transitivität auf der Menge der Alkoven

Satz 23.1.6.1 (Geometrie affiner Spiegelungsgruppen). *Sei $\mathcal{H}$ ein lokal endliches System von Hyperebenen in einem euklidischen affinen Raum E endlicher Dimension über einem angeordneten Körper, das unter allen orthogonalen Spiegelungen an seinen Hyperebenen stabil ist. So gilt:*

1. *Unser System $\mathcal{H}$ ist das System aller Spiegel einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe;*
2. *Für jeden festen Alkoven in Bezug auf $\mathcal{H}$ erzeugen die Spiegelungen an seinen Wänden bereits die gesamte Spiegelungsgruppe;*

3. *Ist A ein fester Alkoven und $w = s_1 \dots s_r$ eine kürzestmögliche Darstellung eines Elements w unserer Spiegelungsgruppe als Produkt von Spiegelungen s_i an den Wänden von A, so ist die Länge r dieser Darstellung genau die Zahl der Spiegel $H \in \mathcal{H}$, die wA von A trennen;*

4. *Unsere Spiegelungsgruppe operiert frei und transitiv auf der Menge ihrer Alkoven.*

Beweis. Bezeichne $\mathcal{A}$ die Menge aller Alkoven zu $\mathcal{H}$ und W die von den orthogonalen Spiegelungen s_H mit $H \in \mathcal{H}$ erzeugte Gruppe von affinen Selbstabbildungen von E. Daß $\mathcal{H}$ in der Tat die Menge aller Spiegel zu Spiegelungen aus W ist, wird sich erst am Ende des Beweises herausstellen. Wir wählen einen festen Alkoven $A \in \mathcal{A}$ und bezeichnen mit

$$W' := \langle s_H \mid H \in \mathcal{H}_A \rangle$$

die von den Spiegelungen an seinen Wänden erzeugte Untergruppe $W' \subset W$. Wir zeigen als erstes, daß W' transitiv auf $\mathcal{A}$ operiert. Dazu benutzen wir:

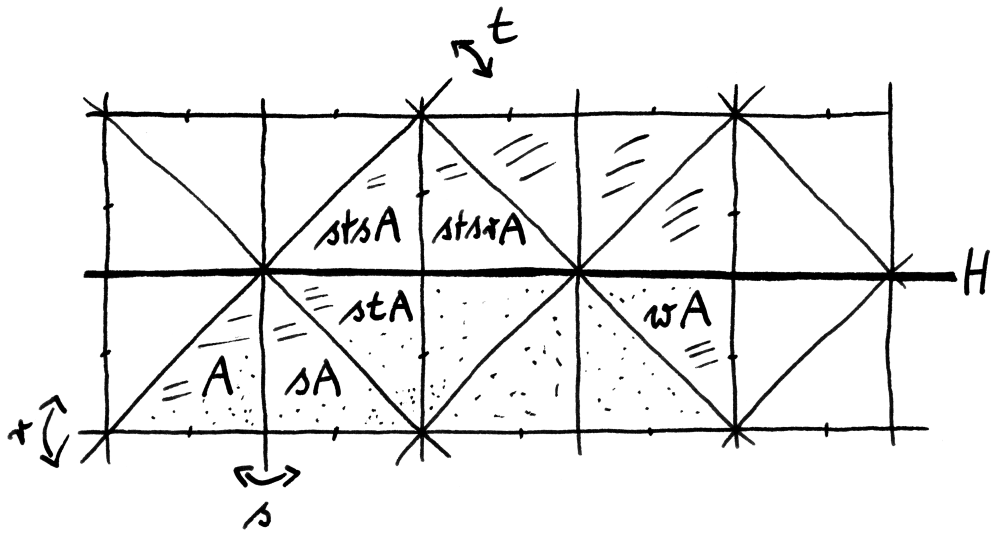
Lemma 23.1.6.2. *Ist $A \in \mathcal{A}$ ein Alkoven und H eine Wand von A, so ist H die einzige Hyperebene, die A von $s_H A$ trennt.*

Beweis des Lemmas. Ist H eine Wand von A, so gibt es nach 23.1.3.29 einen Punkt $p \in \bar{A} \cap H$, der auf keiner anderen Hyperebene liegt, die A vermeidet. Eine Hyperebene, die die zwei Facetten trennt, muß jedoch nach 23.1.3.35 den Schnitt ihrer Abschlüsse umfassen. Jede Hyperebene, die A von $s_H A$ trennt, muß also p enthalten und A vermeiden und fällt folglich mit H zusammen. □

Sei nun $C \in \mathcal{A}$ ein Alkoven. Wir wählen $w \in W'$ derart, daß die Zahl der Hyperebenen $H \in \mathcal{H}$, die A von wC trennen, so klein wie möglich wird. Gälte nicht $A = wC$, so gäbe es nach 23.1.3.31 eine Wand $H \in \mathcal{H}_A$ von A, die A von wC trennt. Dann würden aber $s_H A$ und wC und ebenso A und $s_H wC$ von noch weniger Hyperebenen aus $\mathcal{H}$ getrennt als A und wC, im Widerspruch zur Wahl von w. Es gilt also $A = wC$ und W' operiert transitiv auf $\mathcal{A}$. Nach dieser Vorbemerkung zeigen wir die Behauptungen des Satzes in der Reihenfolge 2–3–4–1.

2. Jede Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ ist nach 23.1.3.32 Wand eines geeigneten Alkoven $C \in \mathcal{A}$, in Formeln $H \in \mathcal{H}_C$. Nach dem Vorhergehenden finden wir $w \in W'$ mit $wC = A$. Offensichtlich gilt weiter $w\mathcal{H}_C = \mathcal{H}_A$ und wir folgern $s_H = w^{-1} s_{wH} w \in W'$ und damit $W = W'$.

3. Sei $w = s_1 \dots s_r$ eine kürzestmögliche Darstellung eines Elements $w \in W$ als Produkt von Spiegelungen an Wänden $H_1, \dots, H_r$ von A. Für zwei Alkoven



Wir hätten hier die Darstellung $w = stsrtsts$ aber nur sechs Hyperebenen trennen A von wA. Die Hyperebene H wird auch von unserer Folge von Alkoven zweimal gekreuzt, und das führt zur kürzeren Darstellung $w = st\hat{s}rtst\hat{s} = strtst$, die nun bereits aus der kleinstmöglichen Zahl von sechs Spiegelungen an Wänden von A besteht, und die ich durch Pünktchen angedeutet habe.

$B, C \in \mathcal{A}$ bezeichne $d(B, C)$ die Zahl der Hyperebenen aus $\mathcal{H}$, die B und C trennen. Es gilt zu zeigen $r = d(A, wA)$. Wir betrachten dazu die Folge von Alkoven $A, s_1A, s_1s_2A, \ldots, wA$ und notieren sie der Einfachkeit halber

$$A_{[i]} := s_1 \ldots s_i A$$

Zwei aufeinanderfolgende Alkoven $A_{[i-1]}$ und $A_{[i]}$ unserer Folge werden nach 23.1.6.2 nur durch die Hyperebene $H_{[i]} := s_1 \ldots s_{i-1} H_i$ getrennt, die dann auch die einzige gemeinsame Wand dieser beiden Alkoven ist. Es folgt schon $r \geq d(A, wA)$. Wäre $r > d(A, wA)$, so müßte unsere Folge von Alkoven eine Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ zweimal kreuzen, wir hätten also $H_{[i]} = H_{[j]}$ mit $r \geq j > i \geq 1$. Daraus folgte aber $H_i = s_i \ldots s_{j-1} H_j$, mithin $s_i = s_i \ldots s_{j-1} s_j s_{j-1} \ldots s_i$ oder $s_{i+1} \ldots s_{j-1} = s_i \ldots s_j$ und unsere Darstellung wäre nicht kürzestmöglich.

4. Wir haben bereits gezeigt, daß W transitiv auf $\mathcal{A}$ operiert. Nach 3 folgt aber aus $wA = A$ schon $w = \mathrm{id}$, also operiert W auch frei.

1. Für eine Spiegelung aus W, deren Spiegel nicht zu $\mathcal{H}$ gehörte, könnte ihr Spiegel nach 23.1.3.4 nicht enthalten sein in der Vereinigung der Hyperebenen aus $\mathcal{H}$ und müßte deshalb einen Alkoven aus $\mathcal{A}$ treffen. Dann müßte unsere Spiegelung diesen Alkoven auf sich selbst abbilden. Nach 4 ist aber die Identität das einzige Element von W, das einen Alkoven festhält. Also besteht $\mathcal{H}$ bereits aus allen Spiegeln zu Spiegelungen von W. □

Korollar 23.1.6.3. *Erzeugt eine Menge von affinen Spiegelungen eine affine Spiegelungsgruppe, so ist jede Spiegelung dieser Spiegelungsgruppe konjugiert zu einer Spiegelung aus besagter Menge.*

Beweis. Sei S unsere Menge von Spiegelungen, W die davon erzeugte affine Spiegelungsgruppe, und $T \subset W$ die Menge aller Konjugierten zu Elementen von S. Wir müssen nur ein unter den linearen Anteilen der Elemente von W invariantes Skalarprodukt auf dem Richtungsraum wählen und 23.1.6.1 auf das System $\mathcal{H}$ der Spiegel zu Spiegelungen aus T anwenden, um zu sehen, daß T bereits die Menge aller Spiegelungen aus der von T erzeugten Untergruppe von W sein muß. □

Definition 23.1.6.4. Seien W eine affine Spiegelungsgruppe, A ein fester Alkoven und $S \subset W$ die Menge aller Spiegelungen an Wänden von A. Eine kürzestmögliche Darstellung von $w \in W$ als Produkt von Elementen von S nennt man **reduzierte Darstellung** von w durch Spiegelungen aus S, und die Länge einer reduzierten Darstellung heißt die **Länge** $l(w) = l_S(w) = l_A(w)$ von w.

23.1.6.5. In diesen Notationen haben wir in 23.1.6.1 also unter anderem gezeigt, daß gilt $l_A(w) = d(A, wA)$. Weiter haben wir beim Beweis von 23.1.6.1 gezeigt,

daß gegeben $s_1, \ldots, s_r \in S$ Spiegelungen an Wänden H_i von A mit Produkt $w = s_1 \ldots s_r$ und L ein Spiegel von W, der A und wA trennt, es notwendig ein i gibt mit $L = s_1 \ldots s_{i-1} H_i$ und folglich $s_L s_1 \ldots s_r = s_1 \ldots \hat{s}_i \ldots s_r$. Ist unsere Darstellung von w reduziert, in Formeln $r = l(w)$, so sind immer nach dem Beweis von 23.1.6.1 die $s_1 \ldots s_{i-1} H_i$ sogar genau die r Spiegel, die A und wA trennen.

23.1.6.6. Nach dem Vorhergehenden ist $d(A, wA)$ genau dann gerade, wenn w ein orientierungserhaltender Automorphismus unseres endlichdimensionalen affinen Raums ist. Insbesondere gilt stets $d(A, s_L B) \neq d(A, B)$, ja beide Seiten können noch nicht einmal dieselbe Parität haben. Statt mit der Orientierung kann man hier auch mit der Schwarz-Weiß-Färbung der Alkoven nach 23.1.4.8 argumentieren.

Proposition* 23.1.6.7. *Seien A, B Alkoven und L ein Spiegel zu einer affinen Spiegelungsgruppe. Genau dann trennt L unsere beiden Alkoven, wenn A und $s_L B$ durch weniger Spiegel getrennt werden als A und B. In Formeln gilt also*

$$(L \text{ trennt } A \text{ und } B) \quad \Leftrightarrow \quad d(A, s_L B) < d(A, B)$$

Beweis. Es reicht $\Rightarrow$ zu zeigen, die andere Implikation folgt dann durch Anwenden der einen Implikation auf $s_L B$ statt auf B, da wir $d(A, s_L B) \neq d(A, B)$ aus 23.1.6.6 wissen. Wir finden nun Spiegelungen $s_1, \ldots, s_r$ an Wänden von A mit $r = d(A, B)$ und $B = s_1 \ldots s_r A$. Da L unsere beiden Alkoven trennt, gibt es nach der vorhergehenden Bemerkung 23.1.6.5 einen Index i mit $s_L s_1 \ldots s_r = s_1 \ldots \hat{s}_i \ldots s_r$. Damit folgt wie gewünscht $d(A, s_L B) < r$. □

Satz* 23.1.6.8 (Austauschlemma). *Seien W eine affine Spiegelungsgruppe, A ein Alkoven, S die Menge der Spiegelungen an Wänden von A und $l = l_A$ die zugehörige Länge. Seien weiter $s_1, \ldots, s_r \in S$. Ist t eine Spiegelung aus W mit $l(ts_1 \ldots s_r) < l(s_1 \ldots s_r)$, so gibt es einen Index $i \in [1, r]$ mit*

$$ts_1 \ldots s_i \ldots s_r = s_1 \ldots \hat{s}_i \ldots s_r$$

Gilt hier $r = l(s_1 \ldots s_r)$, so ist dieser Index i sogar eindeutig bestimmt.

23.1.6.9. Die letzte Gleichung kann auch zu $s_1 \ldots s_i \ldots s_r = ts_1 \ldots \hat{s}_i \ldots s_r$ umgeschrieben werden. Wir können also in Worten eine einfache Spiegelung s_i in der Mitte austauschen gegen die Spiegelung t ganz vorne ohne das Produkt zu ändern, wenn (und im Fall einer reduzierten Darstellung genau dann, wenn) die Multiplikation mit t die Länge verkleinert.

Beweis. Sei $t = s_L$ und $B = s_1 s_2 \ldots s_r A$. Aus der Annahme folgt mit 23.1.6.7, daß der Spiegel L die Alkoven A und $s_1 s_2 \ldots s_r A$ trennt. Daraus folgt dann mit 23.1.6.5 sofort $ts_1 \ldots s_r = s_1 \ldots \hat{s}_i \ldots s_r$. Der Beweis der letzten Aussage bleibe dem Leser zur Übung überlassen. □

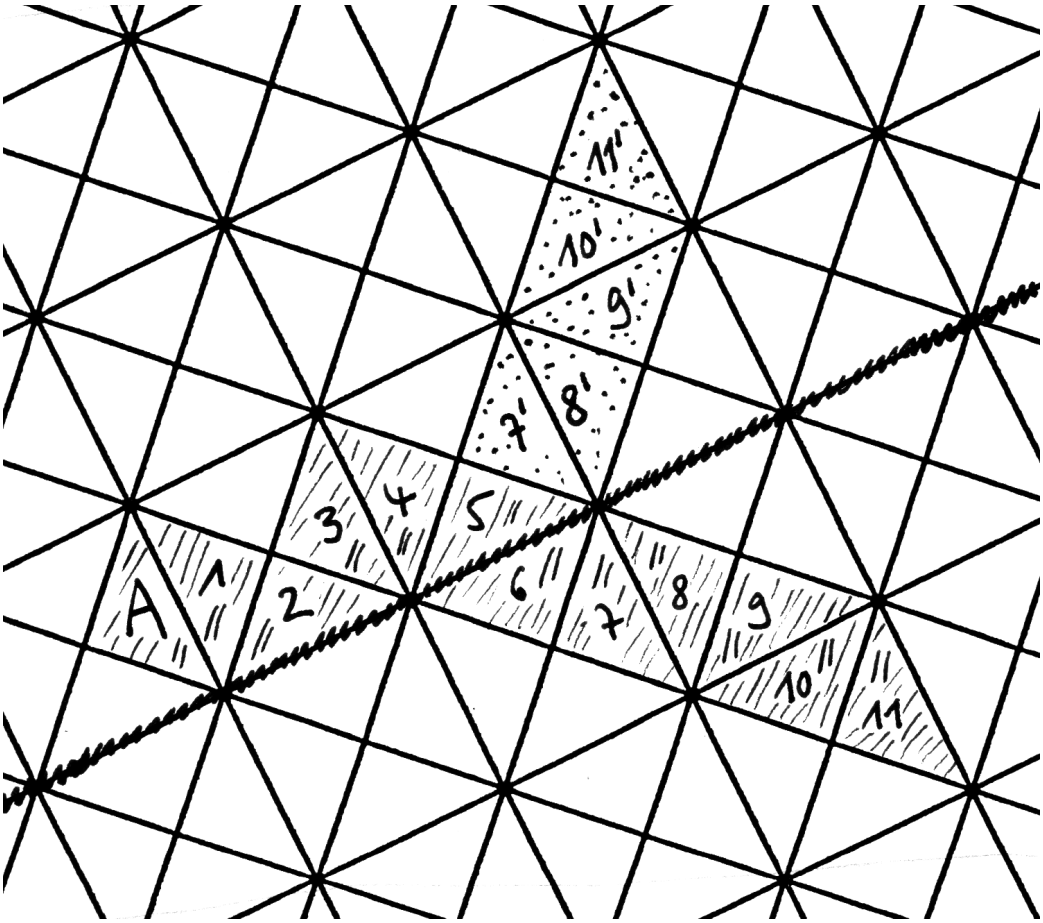


Illustration zum Austauschlemma. Die Spiegelung an der gezackelten Spiegelhyperebene stellt t dar, $s_1 \dots s_i A$ ist der Alkoven mit der Nummer i und $s_1 \dots \hat{s}_6 \dots s_i A$ der Alkoven mit der Nummer i'. Im vorliegenden Fall hätten wir $ts_1 \dots s_{11} = s_1 \dots \hat{s}_6 \dots s_{11}$.

Übungen

Übung 23.1.6.10. Seien W eine endliche Spiegelungsgruppe, A ein fester Alkoven und $l = l_A$ die zugehörige Länge. So gibt es in W genau ein Element w_A maximaler Länge, und diese Länge ist die Zahl der Spiegelungen in W.

Übung 23.1.6.11. Jede nichtreduzierte Darstellung eines Elements einer affinen Spiegelungsgruppe in Bezug auf einen festen Alkoven kann durch Streichen von Faktoren zu einer reduzierten Darstellung desselben Elements gemacht werden.

Übung 23.1.6.12. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $Q \subset V$ ein Gitter alias der $\mathbb{Z}$-Spann einer Basis und $(\ ,\ )$ ein Skalarprodukt auf V mit und $(\ ,\ ) : Q \times Q \to \mathbb{Z}$. Man zeige, daß die orthogonalen Spiegelungen an den orthogonalen Komplementen aller Vektoren $v \in Q$ mit $(v, v) = 2$ die Spiegelungen einer endlichen Spiegelungsgruppe sind.

23.1.7 Fundamentalbereiche

Notation 23.1.7.1. Seien für diesen Abschnitts E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper, $W \subset \operatorname{Aut} E$ eine affine Spiegelungsgruppe, $\mathcal{H}$ die Menge ihrer Spiegel und $\mathcal{A}$ die Menge der zugehörigen Alkoven.

Definition 23.1.7.2. Es operiere eine Gruppe G auf einer Menge X. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt ein **Fundamentalbereich** oder genauer **mengentheoretischer Fundamentalbereich**, wenn Y die Bahn Gp jedes Punktes $p \in X$ in genau einem Punkt trifft, in Formeln $|Gp \cap Y| = 1\ \forall p \in X$.

Vorschau 23.1.7.3. Operiert eine Gruppe G auf einem topologischen Raum X, so mag man unter einem **topologischen Fundamentalbereich** eine abgeschlossene Teilmenge $Y \not\subset X$ verstehen derart, daß die gY° für $g \in G$ paarweise disjunkt sind und daß die gY unser X überdecken. Operiert eine Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit oder allgemeiner Eckfaltigkeit X, so mag man einen topologischen Fundamentalbereich, der mit der von X induzierten Struktur eines $\mathbb{R}$-geringten Raums eine Eckfaltigkeit ist, einen **eckfaltigen Fundamentalbereich** nennen. Im Fall einer affinen Spiegelungsgruppe in einem endlichdimensionalen reellen Raum sind unsere Alkovenabschlüsse auch eckfaltige Fundamentalbereiche.

Satz 23.1.7.4 (Alkovenabschlüsse als Fundamentalbereiche). *Für die natürliche Operation einer affinen Spiegelungsgruppe auf ihrem affinen Raum ist der Abschluß eines jeden Alkoven ein Fundamentalbereich.*

Beweis. Wir beginnen den Beweis des Satzes mit einer Proposition.

Proposition 23.1.7.5 (Standgruppen in affinen Spiegelungsgruppen). *Sei $A \subset E$ ein fester Alkoven und $p \in \bar{A}$ ein Punkt aus dem Abschluß von A. So gilt:*

1. *Die Standgruppe W_p von p wird erzeugt von den Spiegelungen an allen Wänden von A, die p enthalten. In Formeln gilt also*
$$W_p = \langle s_H \mid H \in \mathcal{H}_A,\ p \in H \rangle$$

2. *Die Standgruppe W_p von p operiert frei und transitiv auf der Menge $\mathcal{A}_p$ aller Alkoven, deren Abschluß p enthält. In Formeln liefert also $w \mapsto wA$ eine Bijektion*
$$W_p \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_p := \{B \in \mathcal{A} \mid p \in \bar{B}\}$$

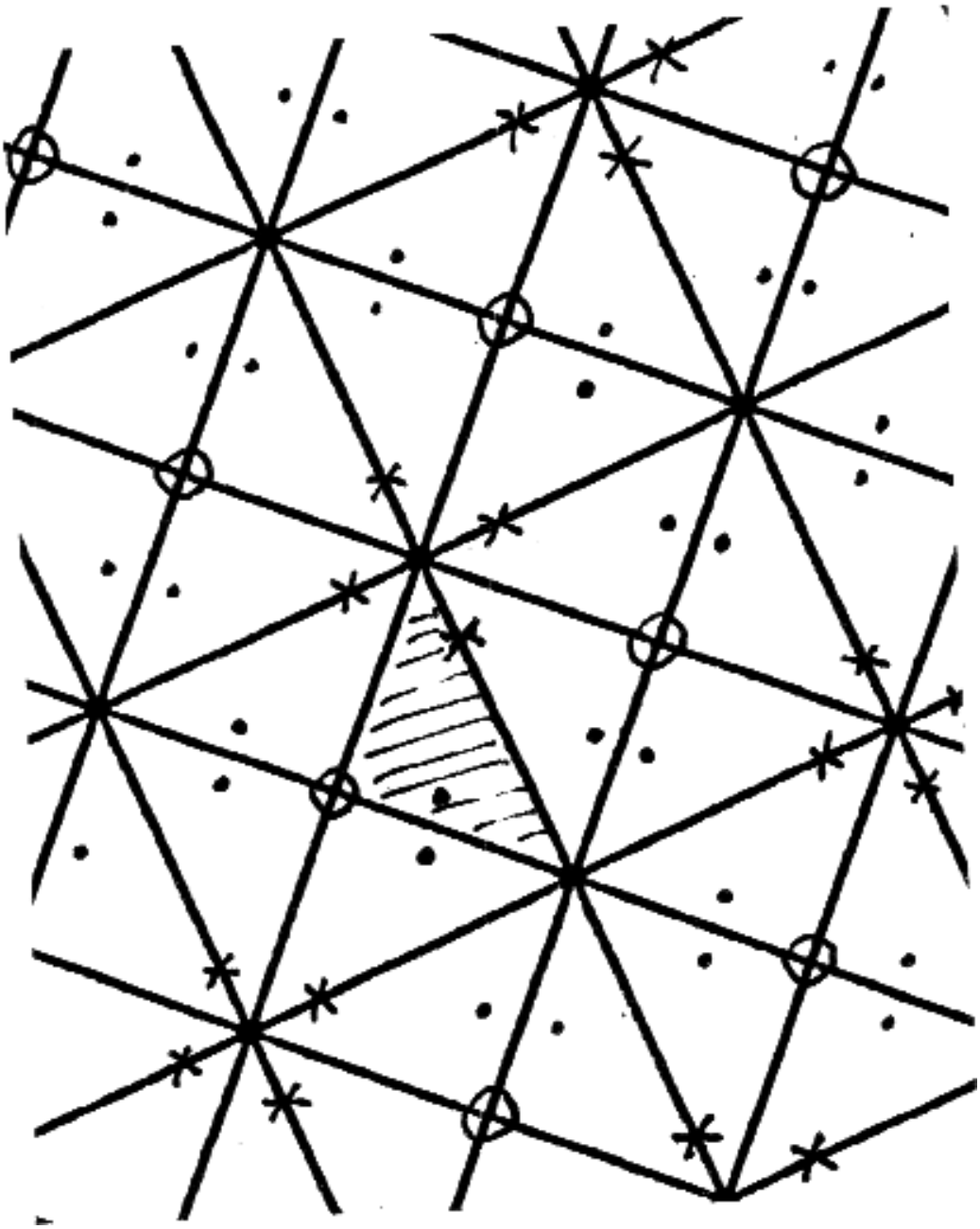
23.1.7.6. Insbesondere wird also bei einer affinen Spiegelungsgruppe auch die Standgruppe jedes Punktes von Spiegelungen erzeugt.

Beweis der Proposition. Wir setzen $W'_p = \langle s_H \mid H \in \mathcal{H}_A,\ p \in H \rangle$ und zeigen zunächst, daß W'_p transitiv auf $\mathcal{A}_p$ operiert, in Formeln $W'_p A = \mathcal{A}_p$. Für $C \in \mathcal{A}_p$ müssen wir dazu $w \in W'_p$ finden derart, daß gilt $C = wA$. Wieder machen wir eine Induktion über die Zahl $d(A, C)$ der Spiegel, die A und C trennen. Ist $A \neq C$, so gibt es nach Satz 23.1.3.31 eine Wand H von A, die A von C trennt. Aus $p \in \bar{A} \cap \bar{C}$ folgt $p \in H$. Jetzt ist wieder $d(A, s_H C) = d(s_H A, C) = d(A, C) - 1$ und mit Induktion finden wir $w \in W'_p$ so daß gilt $wA = s_H C$, also $s_H wA = C$. Es folgt wie behauptet $W'_p A = \mathcal{A}_p$. Nun ist unsere Abbildung $W_p \to \mathcal{A}$, $w \mapsto wA$ injektiv nach Satz 23.1.6.1 und offensichtlich liegt ihr Bild in $\mathcal{A}_p$. Wir haben aber eben bewiesen, daß die Verknüpfung der beiden Injektionen $W'_p \hookrightarrow W_p \hookrightarrow \mathcal{A}_p$ eine Surjektion ist. Also sind diese Injektionen beide Bijektionen und die Proposition folgt. □

Jetzt können wir den Beweis des Satzes zu Ende führen. Sei $A \subset E$ ein Alkoven und $p \in E$ ein Punkt unseres affinen Raums. Es gilt zu zeigen, daß die Bahn Wp von p den Abschluß $\bar{A}$ von A in genau einem Punkt trifft, in Formeln
$$|Wp \cap \bar{A}| = 1$$

Jeder Punkt p liegt nach 23.1.3.25 im Abschluß mindestens eines Alkoven, und nach 23.1.6.1 trifft die Bahn von p den Abschluß $\bar{A}$ jedes Alkoven A, in Formeln $Wp \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Wir müssen nur noch zeigen, daß für $A \in \mathcal{A}$, $p \in \bar{A}$ und $x \in W$ aus $xp \in \bar{A}$ folgt $xp = p$. Sicher folgt schon mal $xp \in \overline{xA}$, also A, $xA \in \mathcal{A}_{xp}$, und nach der vorhergehenden Proposition gilt dann $x \in W_{xp}$, also $xxp = xp$, also $xp = p$. □

23.1.7.7. Gegeben eine affine euklidische Spiegelungsgruppe W auf einem affinen euklidischen Raum E wird für beliebige $v, w \in E$ der Abstand $\|v - zw\|$ minimal genau für die $z \in W$, für die v und zw im Abschluß desselben Alkoven liegen: Werden v und zw nämlich durch eine Wand getrennt, so gilt für die Spiegelung s an dieser Wand notwendig $\|v - zw\| > \|v - szw\|$.



Drei Bahnen unter einer affinen Spiegelungsgruppe. Jede hat, wie Satz 23.1.7.4 ganz allgemein behauptet, genau einen Vertreter in dem schraffiert eingezeichneten Alkoven.

Ergänzung 23.1.7.8. Hier scheint es sinnvoll zu zeigen, daß für die durch A definierte Länge l und S_p die Menge der Spiegelungen an Wänden von A durch den Punkt p und W^p die Menge aller $w \in W$ mit $l(sw) > l(w)$ für alle $s \in S_p$ die Multiplikation eine Bijektion $W_p \times W^p \xrightarrow{\sim} W$ definiert und $l(uv) = l(u) + l(v)$ gilt für $u \in W_p$, $v \in W^p$. Man sollte sogar zeigen, daß wir stets genau einen Doppelnebenklassenrepräsentanten kleinster Länge und bei zwei endlichen „parabolischen“ Untergruppen auch genau einen Doppelnebenklassenrepräsentanten größter Länge haben.

Übungen

Übung 23.1.7.9. Diejenigen Elemente einer affinen Spiegelungsgruppe, die eine vorgegebene Teilmenge des zugrundeliegenden affinen Raums punktweise festhalten, bilden selber eine Spiegelungsgruppe.

23.1.8 Alkoven einer endlichen Spiegelungsgruppe

23.1.8.1. Gegeben zwei von Null verschiedene Vektoren eines euklidischen Vektorraums sagen wir, sie schließen einen **schwach stumpfen Winkel** beziehungsweise einen **schwach spitzen Winkel** ein, wenn ihr Skalarprodukt für jedes Skalarprodukt der euklidischen Struktur nichtpositiv beziehungsweise nichtnegativ ist.

Ergänzung 23.1.8.2. Sind v, w unsere Vektoren, so bedeutet in unserer Terminologie aus 4.1.8.3 schwach stumpfer Winkel gerade $\pi/2 \leq \mathrm{Rad}(\angle(v,w)) \leq \pi$ und schwach spitzer Winkel $0 \leq \mathrm{Rad}(\angle(v,w)) \leq \pi/2$. Die Terminologie „schwach stumpf“ und „schwach spitz“ ist nicht gebräuchlich. Ich habe sie gewählt, um nicht in Widerspruch zur Terminologie aus der Elementargeometrie zu geraten, in der man einen rechten Winkel weder spitz noch stumpf nennen würde. Wenn ich betonen will, daß das Konzept aus der Elementargeometrie gemeint ist, rede ich von **echt stumpfen** beziehungsweise **echt spitzen Winkeln**. Das bedeutet dann in Formeln, daß das Skalarprodukt negativ beziehungsweise positiv ist alias $\pi/2 < \mathrm{Rad}(\angle(v,w)) \leq \pi$ beziehungsweise $0 \leq \mathrm{Rad}(\angle(v,w)) < \pi/2$.

Lemma 23.1.8.3 (Winkel zwischen Wänden eines Alkoven). *Gegeben verschiedene Wände eines Alkoven einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe schließen auf diesen Wänden jeweils senkrecht stehende Vektoren, die in Richtung unseres Alkoven zeigen, stets schwach stumpfe Winkel ein.*

23.1.8.4. Anschaulich gesprochen schließen also je zwei Wände eines Alkoven einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe besagten Alkoven „in einem schwach spitzen Winkel ein“.

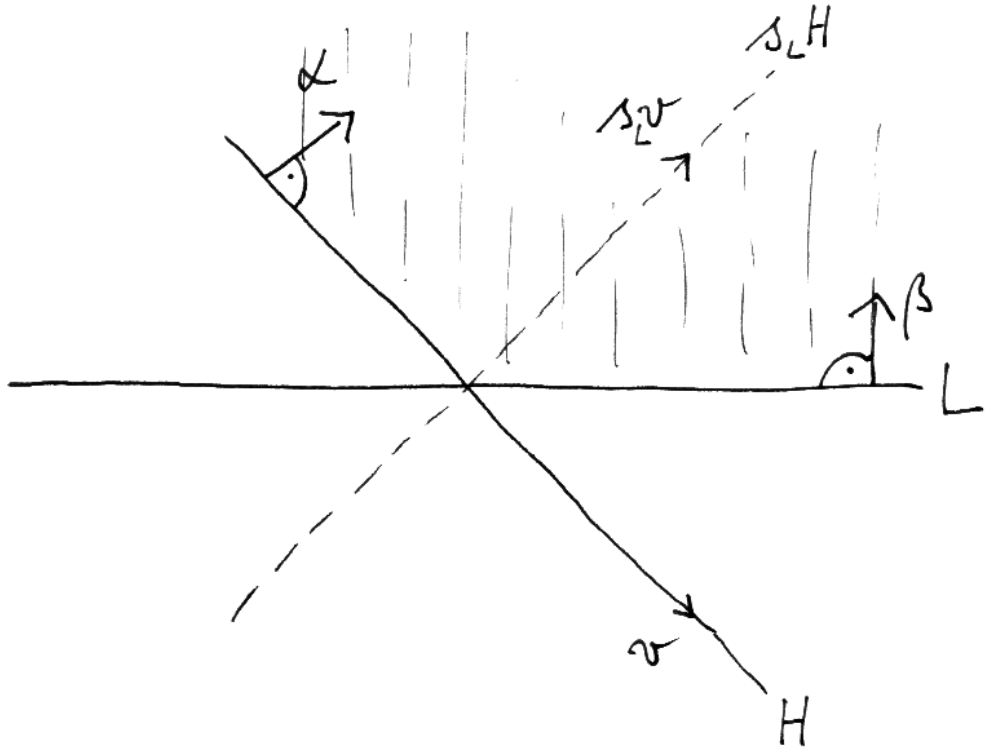


Illustration zum Beweis von Lemma 23.1.8.3. Schraffiert eingezeichnet ein Alkoven mit zwei ihn nicht in einem schwach spitzen Winkel einschließenden Wänden H und L. Gestrichelt eingezeichnet die Gerade $s_L H$, die zeigt, daß es sich nicht um den Alkoven eines Systems von Hyperebenen handeln kann, das aus allen Spiegeln einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe besteht.

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit unsere Spiegelungsgruppe erzeugt von den orthogonalen Spiegelungen an besagten Wänden H und L und seien α und β von Null verschiedene Vektoren, die auf diesen Wänden senkrecht stehen und in Richtung unseres Alkoven zeigen. In Formeln behauptet unser Lemma dann $(\alpha, \beta) \leq 0$. Sind unsere Wände parallel, so ist die Behauptung eh klar. Sonst können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unser affiner euklidischer Raum ein euklidischer Vektorraum ist und beide Spiegelungen linear. Sicher finden wir nun $v \in H$ mit $(\beta, v) < 0$, also $(\beta, s_L v) > 0$. Aus $(\alpha, \beta) > 0$ folgte

$$(\alpha, s_L v) = (s_L \alpha, v) = \left(\alpha - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}\beta, v\right) > 0$$

und damit läge $s_L v$ gleichzeitig auf dem Spiegel $s_L H$ und in unserem Alkoven. Das kann aber nicht sein, also gilt $(\alpha, \beta) \leq 0$. □

23.1.8.5. Dieses Lemma wäre auch ein natürlicher erster Schritt zur Klassifikation derjenigen Spiegelungsgruppen, die von zwei Spiegelungen erzeugt werden.

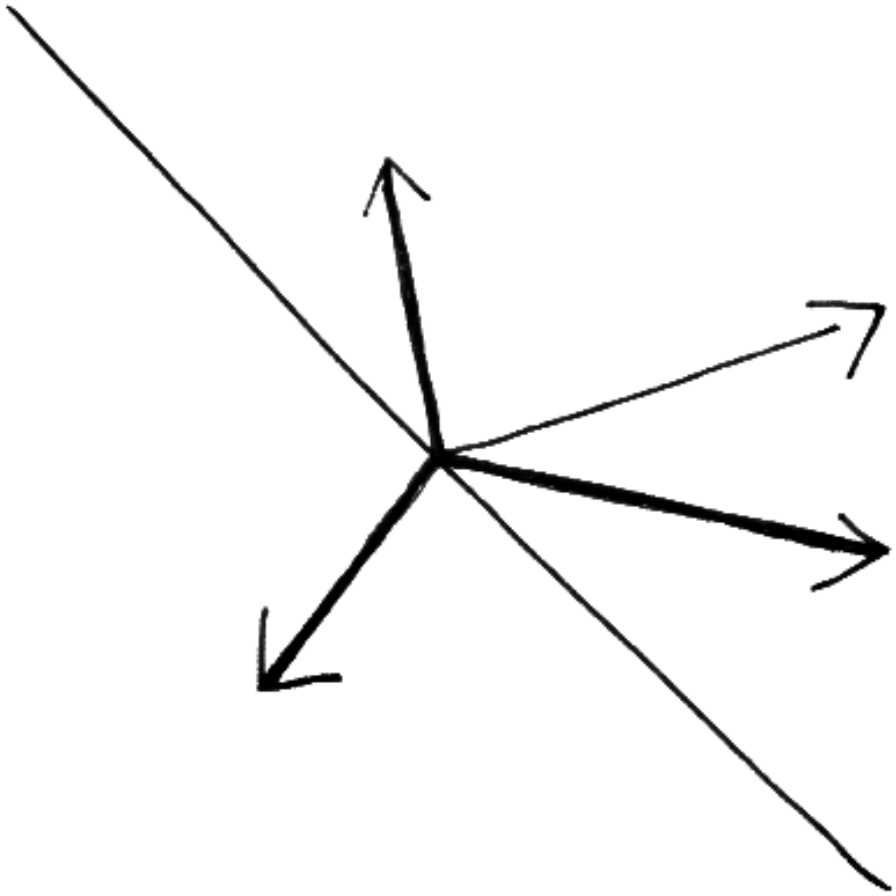
Proposition 23.1.8.6. *Wählen wir für jede Wand eines festen Alkoven einer endlichen linearen Spiegelungsgruppe eine lineare Gleichung, so sind diese Gleichungen linear unabhängig als Elemente des Dualraums.*

Beweis. Wir wählen zunächst einmal ein invariantes Skalarprodukt. Seien nun $H_1, \ldots, H_n$ die Wände unseres Alkoven und seien $\alpha_i \in V$ auf H_i senkrechte Vektoren, die jeweils auf derselben Seite der Hyperebene H_i liegen wie unser Alkoven. Es reicht zu zeigen, daß die α_i linear unabhängig sind. Nach 23.1.8.3 schließen diese Vektoren jedoch paarweise schwach stumpfe Winkel ein, in Formeln $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$ falls $i \neq j$, und wählen wir $\gamma \in A$, so gilt $(\alpha_i, \gamma) > 0$ für alle i. Die lineare Unabhängigkeit der α_i folgt damit aus dem anschließenden Lemma 23.1.8.7. □

Lemma 23.1.8.7 (Lineare Unabhängigkeit bei schwach stumpfen Winkeln). *Liegen Vektoren eines Skalarproduktraums alle in demselben offenen Halbraum zu einer Hyperebene durch den Nullpunkt und schließen sie paarweise schwach stumpfe Winkel ein, so sind sie linear unabhängig.*

23.1.8.8. Schließen insbesondere $(n+1)$ Vektoren eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraums paarweise schwach stumpfe Winkel ein, so können sie nicht alle in demselben offenen Halbraum zu einer Hyperebene durch den Nullpunkt liegen. Eine etwas stärkere Aussage zeigen wir in 23.1.10.1.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir von einer endlichen Familie von Vektoren $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ausgehen. Unsere Forderungen sagen in Formeln, daß es einen Vektor γ gibt mit $(\alpha_i, \gamma) > 0$ für alle i und daß gilt $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$



Liegen Vektoren eines euklidischen Vektorraums alle in demselben offenen Halbraum zu einer Hyperebene durch den Nullpunkt und schließen sie nicht paarweise schwach stumpfe Winkel ein, so brauchen sie keineswegs linear unabhängig zu sein. Schließen Vektoren eines euklidischen Vektorraums paarweise schwach stumpfe Winkel ein, liegen aber nicht alle in demselben offenen Halbraum zu einer Hyperebene durch den Nullpunkt, so brauchen sie ebensowenig linear unabhängig zu sein.

für $i \neq j$. Sei nun $\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i = 0$ eine verschwindende Linearkombination der α_i. Es folgt

$$\sum_{i\in I} c_i\alpha_i = \sum_{i\in J} -c_i\alpha_i$$

mit $I = \{i \mid c_i \geq 0\}$ und $J = \{i \mid c_i < 0\}$. Das Skalarprodukt der linken mit der rechten Seite der Gleichung ist nichtpositiv, da unsere Vektoren paarweise schwach stumpfe Winkel einschließen. Also steht auf beiden Seiten der Gleichung der Nullvektor. Wir bilden nun unabhängig das Skalarprodukt beider Seiten mit γ und folgern, daß alle c_i verschwinden. □

23.1.9 Coxetergraphen und Klassifikation

Definition 23.1.9.1. Seien E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper k und $W \subset \mathrm{Aut}E$ eine affine Spiegelungsgruppe. Seien A ein Alkoven und $S \subset W$ die Menge der Spiegelungen an den Wänden von A. Wir definieren zu diesen Daten eine symmetrische $S \times S$-Matrix $m : S \times S \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, die sogenannte **Coxetermatrix unserer Spiegelungsgruppe**, durch die Vorschrift, daß der Matrixeintrag in Zeile s und Spalte t die Ordnung von st sein soll, in Formeln

$$m_{s,t} = m(s,t) := \mathrm{ord}(st)$$

Ergänzung 23.1.9.2. Auf der Diagonalen unserer Matrix stehen natürlich nur Einsen und außerhalb sind alle Einträge ≥ 2. Unsere Matrix ist unabhängig von der Wahl des Alkoven A. Etwas formaler könnten wir in $\mathcal{A} \times \mathcal{H}$ die Teilmenge $\mathcal{S}$ aller Paare (A, H) betrachten, bei denen der Spiegel H eine Wand des Alkoven A ist, für S den Bahnenraum $S := \mathcal{S}/W$ nehmen, und in offensichtlicher Weise eine Matrix $m : S \times S \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ erklären, die dann in der Tat von keinerlei Wahlen mehr abhängt. Gegeben eine endliche Menge S verstehen wir ganz allgemein unter einer **Coxetermatrix mit durch S indizierten Zeilen und Spalten** eine Abbildung $m : S \times S \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $m(s,t) = m(t,s)\ \forall s,t \in S$ und $m(s,s) = 1\ \forall s \in S$ und $m(s,t) \geq 2$ falls $s \neq t$.

23.1.9.3. Die Coxetermatrizen der affinen Spiegelungsgruppen haben üblicherweise nur sehr wenige von Zwei verschiedene Einträge und fast keine Einträge > 3. Weiter sind die Einträge auf der Diagonalen eh bekannt. Besonders übersichtlich kann man die in diesen Coxetermatrizen enthaltene Information deshalb in der Form des sogenannten **Coxetergraphen** darstellen: Man malt einen dicken Punkt, genannt **Knoten**, für jedes Element von S, sowie einen Strich, genannt **Kante**, zwischen je zwei Knoten $s, t \in S$ mit $m(s,t) \geq 3$, und schreibt an diese Kante zusätzlich noch die Zahl $m(s,t)$ im Fall $m(s,t) > 3$.

Beispiel 23.1.9.4. Die affine Spiegelungsgruppe, deren Alkoven ein Schachbrettmuster bilden, hat den Coxetergraphen

$$\bullet\overset{\infty}{\text{———}}\bullet \qquad \bullet\overset{\infty}{\text{———}}\bullet$$

Nehmen wir für jedes Schachfeld noch seine beiden Diagonalen als Spiegel hinzu, so hat der Coxetergraph dieser größeren Spiegelungsgruppe die Gestalt

$$\bullet\overset{4}{\text{———}}\bullet\overset{4}{\text{———}}\bullet$$

Proposition 23.1.9.5 (Charakterisierung durch Coxetergraphen). *Seien V_1, V_2 reelle euklidische Vektorräume und seien $W_1 \subset \mathrm{GL}(V_1)$, $W_2 \subset \mathrm{GL}(V_2)$ endliche orthogonale Spiegelungsgruppen ohne Fixpunkte außerhalb des Nullpunkts. Genau dann haben W_1 und W_2 denselben Coxetergraphen, wenn es eine lineare Isometrie $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ gibt mit $W_2 = \varphi W_1 \varphi^{-1}$.*

23.1.9.6. Noch präziser formuliert zeigen wir: Ist $A_i \subset V_i$ jeweils ein Alkoven und $S_i \subset W_i$ jeweils die Menge von Spiegelungen an den Wänden des Alkoven A_i und ist eine Bijektion $\xi : S_1 \xrightarrow{\sim} S_2$ gegeben mit $\mathrm{ord}(st) = \mathrm{ord}(\xi(s)\xi(t))$ für alle $s, t \in S_1$, so gibt es eine lineare Isometrie $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ mit $\varphi(A_1) = A_2$ und $\xi(s) = \varphi s \varphi^{-1}$ für alle $s \in S_1$.

Beweis. Wir wählen in $V = V_i$ jeweils einen festen Alkoven $A = A_i$ und betrachten zu jeder Wand von A den Normalenvektor, der in Richtung von A zeigt. Wir erhalten so eine Familie $(\mathrm{e}_s)_{s \in S}$ von Einheitsvektoren in V. Offensichtlich schließen e_s und e_t gerade den Winkel $\pi - \pi/\mathrm{ord}(st)$ ein, folglich haben wir

$$(\mathrm{e}_s, \mathrm{e}_t) = -\cos(\pi/\mathrm{ord}(st))$$

Nach 23.1.8.6 sind unsere e_s linear unabhängig, und da die Spiegelungen an ihren orthogonalen Komplementen nach 23.1.6.1 die fraglichen Gruppen erzeugen und diese fixpunktfrei operieren, besteht der Schnitt der fraglichen orthogonalen Komplemente nur aus dem Nullvektor und unsere e_s bilden sogar eine Basis. Jede Identifikation unserer beiden Coxetergraphen zusammen mit der Wahl eines Alkoven in beiden Räumen liefert folglich eine Isometrie φ zwischen unseren Vektorräumen, unter der die Wände des in V_1 gewählten Alkoven in die Wände des in V_2 gewählten Alkoven übergehen. Da die orthogonalen Spiegelungen an diesen Wänden aber nach 23.1.6.1 bereits die fraglichen Gruppen erzeugen, folgt $W_2 = \varphi W_1 \varphi^{-1}$. □

Satz 23.1.9.7 (Klassifikation der endlichen Spiegelungsgruppen). *Genau dann gehört ein vorgegebener Coxetergraph zu einer endlichen reellen Spiegelungsgruppe, wenn alle seine Zusammenhangskomponenten in der nebenstehenden Liste zu finden sind.*

Beweis. Das folgt sofort aus den beiden anschließenden Propositionen, die wir in diesem und dem darauffolgenden Abschnitt beweisen. □

Ergänzung 23.1.9.8 (**Bezug zur Klassifikation kompakter Liegruppen**). Weylgruppen kompakter Liegruppen operieren nach 22.5.6.4 als endliche reelle Spiegelungsgruppen auf der Liealgebra eines maximalen Torus. Der zugehörige Coxetergraph entsteht nach 23.2.1.21 aus dem Dynkindiagramm, indem man Doppelkanten durch Kanten der Wertigkeit 4 und Dreifachkanten durch Kanten der Wertigkeit 6 ersetzt. Unser Satz 23.1.9.7 zeigt somit unter anderem auch, daß sämtliche Zusammenhangskomponenten des Dynkindiagramms einer kompakten Liegruppe bereits unter den dort aufgelisteten Diagrammen zu finden sein müssen. Daß sich allerdings alle diese Diagramme auch tatsächlich als Dynkindiagramme kompakter Liegruppen realisieren lassen, haben wir damit noch nicht gezeigt, und inwieweit eine kompakte Liegruppe durch ihr Dynkindiagramm charakterisiert wird, werden wir noch ausführlich diskutieren müssen.

23.1.9.9. Gegeben eine Coxetermatrix $(m_{s,t})_{s,t\in S}$ erklären wir ihre **Cosinusmatrix** als die reelle Matrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t\in S}$. Für den Fall $m_{s,t} = \infty$ vereinbaren wir dabei die Interpretation $\pi/\infty = 0$.

Proposition 23.1.9.10 (**Coxetermatrizen endlicher Spiegelungsgruppen**). *Genau dann gehört eine Coxetermatrix $(m_{s,t})_{s,t\in S}$ zu einer endlichen reellen Spiegelungsgruppe, wenn ihre Cosinusmatrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t\in S}$ positiv definit ist.*

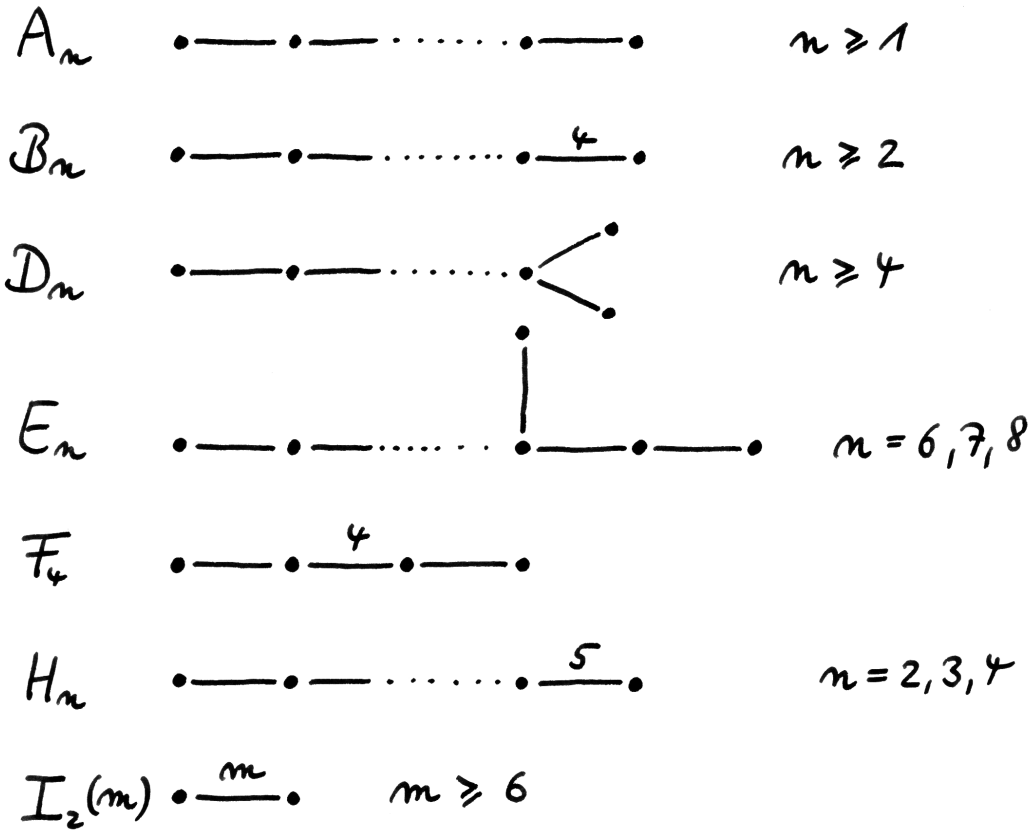
23.1.9.11. Wir verwenden im folgenden eine abkürzende Terminologie und nennen einen Coxetergraphen **positiv definit**, wenn er endlich ist und seine Cosinusmatrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t\in S}$ positiv definit ist. Nach der vorhergehenden Proposition 23.1.9.10 sind das genau die Coxetergraphen zu endlichen Spiegelungsgruppen.

Proposition 23.1.9.12 (**Positiv definite Coxetergraphen**). *Die zusammenhängenden Coxetergraphen, deren Cosinusmatrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t\in S}$ positiv definit ist, sind genau die Graphen der nebenstehenden Liste.*

23.1.9.13. Diese Aussage wird erst später als Proposition 23.1.11.1 bewiesen.

Beweis von 23.1.9.10. Wir zeigen zunächst, daß der Coxetergraph einer endlichen Spiegelungsgruppe stets positiv definit ist. Wir wählen dazu einen Alkoven A und ein invariantes Skalarprodukt $(\ ,\ )$ und betrachten zu jeder Wand von A den Normalenvektor, der in Richtung von A zeigt. Wir erhalten so eine Familie $(\mathrm{e}_s)_{s\in S}$ von Einheitsvektoren. Offensichtlich schließen e_s und e_t gerade den Winkel $\pi - \pi/m_{s,t}$ ein, folglich haben wir

$$(\mathrm{e}_s, \mathrm{e}_t) = -\cos(\pi/m_{s,t})$$



Dieses Bild zeigt alle zusammenhängenden Coxetergraphen, die zu endlichen reellen Spiegelungsgruppen gehören, als da heißt, für die die Matrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t\in S}$ positiv definit ist. Hier meint n jeweils die Zahl der Knoten, und die unteren Schranken an n dienen nur dazu, Verdopplungen zu vermeiden. So wäre etwa $I_2(3) = A_2$, $I_2(4) = B_2$, und $I_2(5) = H_2$. Die Auslassungen im Alphabet rühren daher, daß die in 23.2.3.7 gegebene Klassifikation der Wurzelsysteme alias der einfachen komplexen Liealgebren zuerst gefunden wurde und manche dieser Wurzelsysteme dieselbe endliche Spiegelungsgruppe als Weylgruppe haben. Es ist eine nette Übung, sich zu überlegen, daß H_3 realisiert werden kann als die Gruppe aller 120 nicht notwendig orientierungserhaltenden Isometrien des $\mathbb{R}^3$, die einen Ikosaeder in sich überführen.

Mithin kann ein Coxetergraph nur dann zu einer endlichen reellen Spiegelungsgruppe gehören, wenn seine Cosinusmatrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t\in S}$ positiv definit ist. Wir zeigen nun umgekehrt, daß jeder Coxetergraph mit positiv definiter Cosinusmatrix auch in der Tat zu einer endlichen Spiegelungsgruppe gehört. Über unserer Menge S von Knoten bilden wir dazu den freien Vektorraum $E := \mathbb{R}S$ mit seiner kanonischen Basis $(\mathrm{e}_s)_{s\in S}$ und erklären darauf eine symmetrische Bilinearform $(\ ,\ )$ durch die Vorschrift $(\mathrm{e}_s, \mathrm{e}_t) = -\cos(\pi/m_{s,t})$. Nach Annahme sie positiv definit alias ein Skalarprodukt. Nun betrachten wir die Untergruppe $W \subset \mathrm{GL}(E)$, die erzeugt wird von den orthogonalen Spiegelungen an den auf unseren Basisvektoren senkrechten Hyperebenen $H_s := \mathrm{e}_s^\perp$. Wir bezeichnen diese Spiegelungen kurzerhand mit demselben Buchstaben s wie den entsprechenden Knoten unseres Coxetergraphen und erklären die **Länge** $l(w)$ eines Elements von W als die Länge einer kürzestmöglichen Darstellung von w als Produkt solcher Spiegelungen s. Dann gilt sicher $\det w = (-1)^{l(w)}$ und folglich $l(w) \neq l(ws)$ für jede Spiegelung s. Weiter setzen wir $H_s^+ := \{p \in E \mid (p, \mathrm{e}_s) > 0\}$ und $A^+ := \bigcap_{s\in S} H_s^+$ und behaupten

$$l(ws) > l(w) \ \Leftrightarrow\ wH_s^+ \supset A^+$$

Kennen wir die Implikation $\Rightarrow$, so erhalten wir automatisch $l(ws) < l(w) \Rightarrow wH_s^+ \cap A^+ = \emptyset$ und damit die Äquivalenz. Die Implikation $\Rightarrow$ zeigen wir durch Induktion über $l(w)$ gleichzeitig für alle s. Der Fall $l(w) = 0$ ist offensichtlich. Gilt $l(w) > 0$, so finden wir natürlich $t \in S$ mit $l(wt) < l(w)$ und haben notwendig $t \neq s$. Indem wir so lange s oder t von rechts an w dranmultiplizieren, wie wir die Länge damit kleiner kriegen, finden wir eine Darstellung $w = vu$ mit $u \in \langle s, t\rangle$, $l(vs) > l(v)$, $l(vt) > l(v)$ und $l(w) = l(v) + l(u)$. Mit Induktionsannahme erhalten wir $vH_s^+ \supset A^+$ und $vH_t^+ \supset A^+$ alias $H_s^+ \cap H_t^+ \supset v^{-1}A^+$. Andererseits folgt aus unseren Annahmen auch $l(us) > l(u)$. Falls nun gilt $u \neq w$, so können wir die Induktionsannahme auf u anwenden und erhalten $uH_s^+ \supset A^+$. Wegen $H_s^+ \cap H_t^+ = (H_s \cap H_t) + A^+$ und $(H_s \cap H_t) \subset uH_s$ folgt dann

$$uH_s^+ \supset H_s^+ \cap H_t^+$$

und zusammen in der Tat $uH_s^+ \supset (H_s^+ \cap H_t^+) \supset v^{-1}A^+$ alias $wH_s^+ \supset A^+$. Es bleibt nur noch, den Fall $u = w$ zu behandeln, so daß wir haben $w = tsts\ldots t$ oder $w = sts\ldots t$ mit jeweils $l(w)$ Faktoren und $l(w) < l(ws)$ und folglich $l(w) < \mathrm{ord}(st)$. In dem Fall aber zeigt explizite Inspektion bereits $wH_s^+ \supset (H_s^+ \cap H_t^+) \supset A^+$. Damit ist unsere Behauptung $l(ws) > l(w) \ \Leftrightarrow\ wH_s^+ \supset A^+$ gezeigt. Wir folgern nun die Proposition. Die Ebenen wH_s für $w \in W$ und $s \in S$ bilden ein W-stabiles System von Hyperebenen $\mathcal{H}$ in E, und unsere Behauptung zeigt insbesondere, daß keine dieser Hyperebenen unser A^+ trifft. Insbesondere A^+ eine maximale konvexe Teilmenge im Komplement der Vereinigung aller Hyperebenen aus $\mathcal{H}$. Je zwei verschiedene derartige maximale konvexe Teilmengen

sind disjunkt nach 23.1.3.39 und mit A^+ ist auch wA^+ solch eine maximale konvexe Teilmenge für alle $w \in W$. Schließlich folgt aus $wA^+ = A^+$ mit unserer Behauptung sofort $l(ws) > l(w)$ für alle $s \in S$ alias $w = \mathrm{id}$. Folglich sind die wA^+ mit $w \in W$ paarweise disjunkt. Nun können wir aber in unserem endlichdimensionalen reellen euklidischen Vektorraum E jeder offenen Teilmenge $U \Subset E$ ein Volumen $\operatorname{vol} U \in [0, \infty]$ zuordnen, und jede nichtleere offene Teilmenge hat positives Volumen. Ist $K \subset E$ die offene Einheitskugel, so ist sicher $K \cap A^+$ offen und nicht leer. Insbesondere ist $\operatorname{vol}(K)/\operatorname{vol}(K \cap A^+)$ eine obere Schranke für die Kardinalität von W und wir folgern $|W| < \infty$. Damit ist wiederum $\mathcal{H}$ endlich und wir folgern mit 23.1.6.1, daß A^+ ein Alkoven ist für die endliche Spiegelungsgruppe $W \subset \mathrm{GL}(E)$. Aus den Definitionen folgt dann schließlich, daß der Coxetergraph von W genau der Coxetergraph ist, von dem wir ausgegangen waren. □

Ergänzung 23.1.9.14 (**Allgemeinere angeordnete Grundkörper**). Im vorhergehenden Beweis könnten wir auch über einem beliebigen angeordneten Körper arbeiten, solange wir darüber einen euklidischen Vektorraum der Dimension $|S|$ und ein System von Hyperebenen $(H_s)_{s \in S}$ mit ausgezeichneten Halbräumen H_s^+ finden können derart, daß für $s \neq t$ die orthogonalen Spiegelungen an H_s und H_t jeweils eine Diedergruppe der Ordnung $2m_{s,t}$ erzeugen, für die $H_s^+ \cap H_t^+$ ein Alkoven ist. Ganz am Schluß des Beweises können wir dann natürlich nicht mehr mit dem Volumen argumentieren, aber der Einsatz von Lebesguemaß und Transformationsformel ist an dieser Stelle eh ein Stilbruch und man kann auch einfacher mit der Erkenntnis argumentieren, daß in einem euklidischen Vektorraum über einem angeordneten Körper in einen Ball mit ganzzahligem Radius höchstens endlich viele Bälle vom Radius Eins in paarweise disjunkter Weise hineingepackt werden können.

Ergänzung 23.1.9.15 (**Existenz der Ikosaedergruppe**). Betrachten wir für die dreielementige Menge $S = \{r, s, t\}$ die Coxetermatrix mit $m_{r,s} = 3$, $m_{s,t} = 5$ und $m_{r,t} = 2$, so erhalten wir nach 23.1.9.10 eine endliche orthogonale Spiegelungsgruppe im dreidimensionalen Raum. Die Untergruppe der darin enthaltenen Drehungen enthält Elemente der Ordnungen 5 und 3 und wir folgern damit auf andere Weise die in 4.5.4.2 besprochene Existenz einer endlichen Drehgruppe mit Elementen dieser Ordnungen.

Übungen

Ergänzende Übung 23.1.9.16 (**Die Symmetrien des Ikosaeders**). Wir erhalten eine Surjektion der nichtorientierten Ikosaedergruppe alias Coxetergruppe vom Typ H_3 mit Erzeugern r, s, t und Relationen $r^2 = s^2 = t^2 = (rs)^2 = (st)^3 = (rt)^5 = 1$ auf die alternierende Gruppe $A_5 \subset \mathcal{S}_5$ vermittels der Vorschrift $r \mapsto$

$(13)(24), s \mapsto (12)(34)$ und $t \mapsto (12)(45)$. Diese Surjektion induziert einen Isomorphismus $I \xrightarrow{\sim} A_5$ zwischen der Ikosaedergruppe und der fünften alternierenden Gruppe.

23.1.10 Ergänzungen zu Skalarprodukten

Satz 23.1.10.1 (über Familien von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln). *Sei in einem Skalarproduktraum eine Familie von Vektoren gegeben, von denen je Zwei mit verschiedenem Index nichtpositives Skalarprodukt haben. Es gebe keine Zerlegung unserer Familie in zwei echte Teilfamilien, die zwei zueinander orthogonale Teilräume erzeugen. So gilt:*

1. *Jede echte Teilfamilie unserer Familie von Vektoren ist linear unabhängig;*
2. *Bei jeder nichttrivialen linearen Relation unserer Vektoren sind die Koeffizienten entweder alle positiv oder alle negativ.*

23.1.10.2. Das verallgemeinert Lemma 23.1.8.7 über die lineare Unabhängigkeit von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln, die alle in demselben offenen Halbraum zu einer linearen Hyperebene liegen. Genauer können wir unser Lemma 23.1.8.7 ableiten, indem wir zu unseren Vektoren noch einen von Null verschiedenen Vektor mit hinzunehmen, der auf der fraglichen Hyperebene senkrecht steht und nicht im fraglichen offenen Halbraum liegt. Die Familie mit nur einem Index, die nur aus dem Nullvektor besteht, erfüllt unsere Bedingungen und ist in unserem Satz erlaubt. Familien mit mehr als einem Index, die unsere Bedingungen erfüllen, können jedoch nie den Nullvektor enthalten.

Beweis. Jede lineare Relation $\sum_{i\in I} a_i v_i = 0$ unserer Vektoren können wir umschreiben zu einer Identität der Gestalt

$$\sum_{a_i>0} a_i v_i = \sum_{a_j<0} (-a_j) v_j$$

Da das Skalarprodukt dieses Vektors mit sich selbst nichtpositiv ist, muß es Null sein. Auf beiden Seiten unserer Gleichung steht also der Nullvektor. Nun setzen wir $I_{>0} = \{i \in I \mid a_i > 0\}$. Gibt es $j \in I \backslash I_{>0}$ mit $\langle v_j, v_i\rangle \neq 0$ für ein $i \in I_{>0}$, so folgt aus

$$0 = \left\langle v_j, \sum_{a_i>0} a_i v_i \right\rangle = \sum_{a_i>0} a_i \langle v_j, v_i\rangle$$

sofort ein Widerspruch. Also gilt entweder $I_{>0} = I$ oder $I_{>0} = \emptyset$. Bei jeder nichttrivialen Relation $\sum_{i\in I} a_i v_i = 0$ sind mithin entweder alle a_i positiv oder alle a_i nichtpositiv und dann folgt durch Multiplikation mit (-1), daß sie sogar

alle negativ sein müssen. Insbesondere ist dabei kein Koeffizient Null, und das zeigt die lineare Unabhängigkeit jeder echten Teilfamilie. □

Definition 23.1.10.3. Eine Matrix $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ heißt **unzerlegbar**, wenn gilt $n \geq 1$ und es keine Zerlegung $\{1, \ldots, n\} = I \sqcup J$ gibt mit $I \neq \emptyset \neq J$ und $a_{ij} = a_{ji} = 0 \; \forall i \in I, j \in J$.

Proposition 23.1.10.4 (Definitheitskriterium für Bilinearformen). *Sei V ein Vektorraum über einem angeordneten Körper mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ und seien Erzeuger $v_1, \ldots, v_n$ von V gegeben mit $v_1 + \ldots + v_n = 0$. So gilt:*

1. *Hat die Matrix der $\langle v_i, v_j \rangle$ nichtpositive Einträge außerhalb der Diagonalen, in Formeln $i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle \leq 0$, so ist unsere Bilinearform positiv semidefinit;*

2. *Ist die Matrix der $\langle v_i, v_j \rangle$ zusätzlich unzerlegbar, so ist unsere Bilinearform positiv definit.*

Beweis. Wir finden unter der Annahme der Symmetrie und der Annahme, daß unsere Erzeuger sich zu Null summieren, ohne weitere Schwierigkeiten

$$\begin{aligned} \langle \sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_j v_j \rangle &= \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle + \sum_i \alpha_i^2 \langle v_i, v_i \rangle \\ &= \sum_{i \neq j} (\alpha_i \alpha_j - \alpha_i^2) \langle v_i, v_j \rangle \\ &= -\sum_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \langle v_i, v_j \rangle \end{aligned}$$

Die Proposition folgt unmittelbar. □

Korollar* 23.1.10.5 (Vektoren mit vorgegebenen Skalarprodukten). *Gegeben eine reelle symmetrische unzerlegbare $(n \times n)$-Matrix (a_{ij}) mit nichtpositiven Einträgen außerhalb der Diagonalen gibt es stets einen Skalarproduktraum V und ein Erzeugendensystem aus Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ mit $v_1 + \ldots + v_n = 0$ und mit den Skalarprodukten*

$$\langle v_i, v_j \rangle = a_{ij} \text{ für } i \neq j.$$

Ergänzung 23.1.10.6. Die Aussage und ihr Beweis gelten ebenso über jedem angeordneten Körper. Ist $v_1', \ldots, v_n' \in V'$ eine zweite Lösung, so gibt es im übrigen genau einen orthogonalen Isomorphismus $B : V \xrightarrow{\sim} V'$ mit $Bv_i = v_i'$. Das folgt, da nach dem Satz über Familien von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln 23.1.10.1 in unseren beiden Familien jede echte Teilfamilie linear unabhängig ist.

Beweis. Wir dürfen, indem wir die Diagonaleinträge anpassen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß in unserer Matrix alle Spaltensummen Null sind. Dann liefert unsere Matrix eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ und, da der Vektor $(1, \ldots, 1)$ in deren Radikal liegt, auch eine symmetrische Bilinearform auf $V := \mathbb{R}^n/\mathbb{R}(1, \ldots, 1)$. Bezeichnet $v_i \in V$ das Bild des i-ten Vektors der Standardbasis, so zeigt das Definitheitskriterium 23.1.10.4, daß diese symmetrische Bilinearform auf V ein Skalarprodukt sein muß. □

Korollar 23.1.10.7 (Definitheit durch Ausartung). *Sei A eine reelle symmetrische unzerlegbare $(n \times n)$-Matrix mit nichtpositiven Einträgen außerhalb der Diagonalen. So sind gleichbedeutend:*

1. *Es gibt einen von Null verschiedenen Vektor $x \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ mit $Ax = 0$;*
2. *Der Kern von A wird von einem Vektor $x \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ aufgespannt;*
3. *Die Matrix A ist positiv semidefinit aber ausgeartet;*
4. *Es gibt einen Vektor $x \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ mit $Ax = 0$.*

Für Matrizen A mit diesen äquivalenten Eigenschaften ist weiter jede Untermatrix, die durch das Streichen je einer Zeile und Spalte zum selben Index entsteht, positiv definit. Dasselbe gilt über jedem angeordneten Grundkörper.

Beweis. $(3 \Rightarrow 2)$ Wir fassen A auf als eine Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^n$, bilden ihr Radikal $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ und betrachten den Quotientenraum $V := \mathbb{R}^n/K$ mit dem darauf induzierten Skalarprodukt. Die Bilder $\bar{\mathrm{e}}_i \in V$ der Vektoren der Standardbasis schließen nach Annahme paarweise schwach stumpfe Winkel ein und wir folgern aus dem Satz über Familien von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln 23.1.10.1, daß je $(n-1)$ dieser Vektoren linear unabhängig sein müssen. Es folgt $\dim K = 1$, und ist $\sum x_i \, \mathrm{e}_i$ ein Erzeuger von K, so folgt aus demselben Satz, daß die Koeffizienten x_i entweder alle positiv oder alle negativ sein müssen.

$(2 \Rightarrow 3)$ In $V := \mathbb{R}^n/\mathbb{R}x$ betrachten wir die Vektoren $v_i := x_i \, \mathrm{e}_i + \mathbb{R}x$. Die symmetrische Bilinearform $\langle v, w \rangle = v^\top A w$ auf $\mathbb{R}^n$ induziert dann eine symmetrische Bilinearform auf V, die nach dem Definitheitskriterium 23.1.10.4 positiv definit sein muß.

$(1 \Rightarrow 2)$ Haben wir $a_{ij} \neq 0$, so folgt mit $\sum a_{i\nu} x_\nu = 0$ und allen $x_\nu \geq 0$ bereits $(x_j \neq 0 \Rightarrow x_i \neq 0)$. In der Tat kann im einzig relevanten Fall $i \neq j$ ein negativer Beitrag $a_{ij} x_j$ zur Summe nur durch einen positiven Beitrag $a_{ii} x_i$ ausgeglichen werden.

$(2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1)$ Das ist klar.

Die letzte Aussage schließlich folgt wieder aus Satz 23.1.10.1 über Familien von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln: Lassen wir aus der Familie unserer $\bar{\mathrm{e}}_i \in V$ einen Vektor weg, so wird sie eine Basis, und die entsprechende Streichmatrix ist die Matrix unseres Skalarprodukts auf V, ausgedrückt in dieser Basis. □

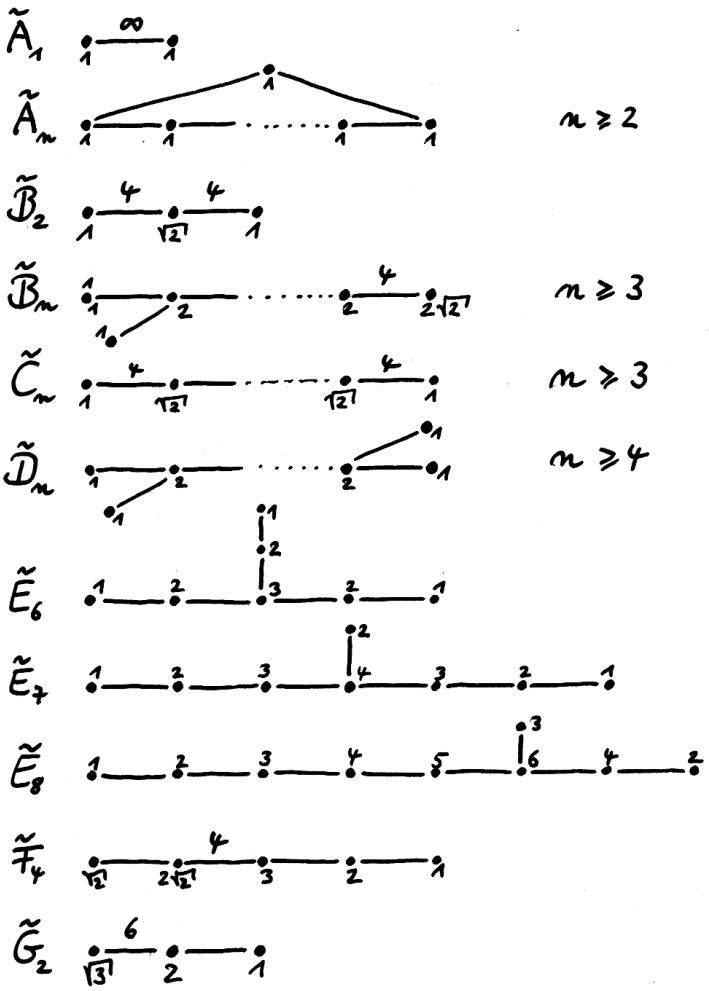
23.1.11 Positiv definite Coxetergraphen

Proposition 23.1.11.1 (Positiv definite Coxetergraphen). *Die zusammenhängenden Coxetergraphen, deren Cosinusmatrix* $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t\in S}$ *positiv definit ist, sind genau die Graphen der Liste nach 23.1.9.7.*

Beweis. Zunächst gilt es zu zeigen, daß alle Coxetergraphen der Liste nach 23.1.9.7 in der Tat positiv definit sind. In den meisten Fällen folgt das aus unseren Erkenntnissen zur Definitheit durch Ausartung 23.1.10.7 und der gleich folgenden Liste: Diese Liste von Coxetergraphen mit Zahlen an ihren Punkten besteht nämlich aus zusammenhängenden Coxetergraphen nebst einem von Null verschiedenen Element des Kerns der zugehörigen Cosinusmatrix, dargestellt durch besagte Zahlen an den Punkten, wie der Leser leicht nachprüfen kann. Wie man auf diese Zahlen kommt, wird in 23.2.5.14 erklärt, man kann sie aber auch einfach vom Himmel fallen lassen. Da unsere Cosinusmatrizen stets nichtpositive Einträge außerhalb der Diagonalen haben und im Fall eines zusammenhängenden Coxetergraphen auch unzerlegbar sind, muß nach unseren Erkenntnissen zur Definitheit durch Ausartung 23.1.10.7 jeder echte Teilgraph eine positiv definite Cosinusmatrix haben. Das erledigt alle Fälle mit Ausnahme der Fälle H_n und $I_2(m)$. Dort hilft das Hauptminoren-Kriterium 4.2.3.25 und Induktion: So sehen wir, daß wir in diesen Fällen nur zu zeigen brauchen, daß die zugehörigen Cosinusmatrizen positive Determinante haben, was wieder leicht nachzurechnen ist. Also sind in der Tat alle Coxetergraphen der Liste nach 23.1.9.7 positiv definit. Anschließend gilt es zu zeigen, daß es keine anderen positiv definiten zusammenhängenden Coxetergraphen gibt. Für die Coxetergraphen in der Liste nach 23.1.11.1 wissen wir bereits nach dem Vorhergehenden, daß die zugehörigen Cosinusmatrizen Determinante Null haben. Für die Coxetergraphen der Liste nach 23.1.11.3 kann der Leser leicht prüfen, daß die zugehörigen Cosinusmatrizen negative Determinante haben. Nun unterbrechen wir den Beweis durch zwei Lemmata.

Lemma 23.1.11.2. *Lassen wir bei einem positiv definiten Coxetergraphen einen Knoten mit allen dahin führenden Kanten weg, so bleibt er positiv definit.*

Beweis. Das ist klar, da die Einschränkung eines Skalarprodukts auf einen Teilraum stets auch ein Skalarprodukt ist. □



Eine Liste zusammenhängender Coxetergraphen mit jeweils einem Vektor im Kern der Cosinusmatrix des entsprechenden Coxetergraphen, dargestellt durch die Zahlen an den Punkten. Das zu prüfen, ist jeweils eine leichte Rechnung: Für den Graphen $\tilde{E}_6$ etwa läuft es hinaus auf die Identität

$$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 3^2 - 3 \cdot (1 \cdot 2) - 3 \cdot (2 \cdot 3) = 0$$

Nach unserem Korollar 23.1.10.7 über Definitheit durch Ausartung erhalten wir stets positiv definite Diagramme, wenn wir in einem Diagramm dieser Liste einen Knoten mit allen zu ihm führenden Kanten streichen.

In **??** wird erklärt, warum das auch genau die Liste aller zusammenhängenden Coxetergraphen zu essentiellen reellen affinen Spiegelungsgruppen im Sinne von 23.1.12.1 ist. Die Notation kommt daher, daß der Graph der „dualen affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems vom Typ Z“ stets $\tilde{Z}$ notiert wird. Der Index ist insbesondere jeweils um eins kleiner als die Knotenzahl.

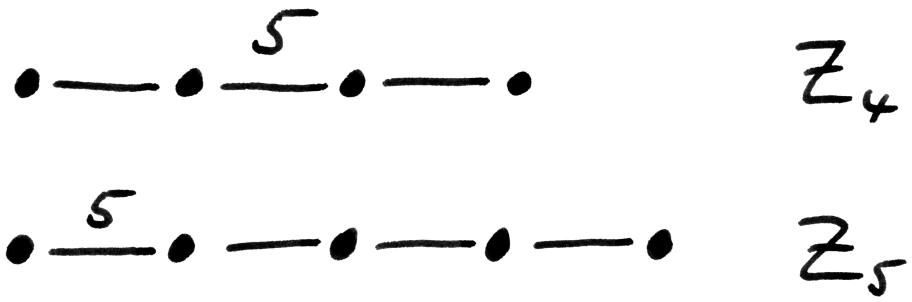
Lemma 23.1.11.3. *Verringern wir bei einem positiv definiten Coxetergraphen den Koeffizienten einer Kante, so bleibt er positiv definit.*

Beweis. Die Cosinusmatrix A der $(-\cos(\pi/m_{s,t})_{s,t}$ hat Einsen auf der Diagonale, aber sonst nur Einträge ≤ 0. Verringern wir den Koeffizienten einer Kante, so erhalten wir eine Matrix A' mit Einträgen $a_{ii} = a'_{ii} = 1$ und $a_{ij} \leq a'_{ij} \leq 0$ falls $i \neq j$. Wäre sie nicht positiv definit, so fänden wir einen Vektor $x \neq 0$ mit $0 \geq x^\top A' \, x$. Ausgeschrieben führt das zu $0 \geq \sum a'_{ij} x_i x_j$. Ersetzen wir die Einträge von x durch ihre Beträge, so gilt das erst recht und wir folgern

$$0 \geq \sum a'_{ij} |x_i||x_j| \geq \sum a_{ij} |x_i||x_j|$$

im Widerspruch zu unserer Annahme, A sei positiv definit. □

Wir erhalten sofort, daß ein positiv definiter Coxetergraph keinen Zykel enthalten darf, weil wir ja sonst von ihm aus durch das Weglassen von Knoten und Verringern von Koeffizienten zu einem Graph der Gestalt $\tilde{A}_n$ mit $n \geq 2$ gelangen könnten, der nun einmal nicht positiv definit ist. Weiter verbieten $\tilde{C}_n$ beziehungsweise $\tilde{B}_2$ den Fall von zwei oder mehr Kanten „höherer Wertigkeit“, womit hier und im Folgenden eine Wertigkeit ≥ 4 gemeint sei. Wir gehen nun erst einmal die Möglichkeiten für zusammenhängende positiv definite Coxetergraphen ohne Verzweigungspunkt durch. Im Fall von einem Knoten ist eh nur A_1 möglich. Im Fall von zwei Knoten verbietet $\tilde{A}_1$ den Koeffizienten ∞ und alle anderen Fälle sind bereits in unserer Liste positiv definiter Graphen zu finden. Weiter sagt uns $\tilde{F}_4$, daß bei fünf oder mehr Knoten eine Kante höherer Wertigkeit nur am Ende vorkommen kann. Wegen Z_5 kommen deshalb als unverzweigte zusammenhängende Graphen mit fünf oder mehr Knoten nur A_n und B_n in Betracht. Im Fall von drei oder vier Knoten kommen bei einer höheren Wertigkeit einer Randkante wegen $\tilde{G}_2$ zusätzlich nur H_3 und H_4 in Betracht, und bei einer höheren Wertigkeit einer Mittelkante wegen Z_4 nur F_4. Damit ist gezeigt, daß wir in unserer Liste der positiv definiten zusammenhängenden Coxetergraphen keine unverzweigten Graphen vergessen haben. Was die verzweigten Graphen angeht, zeigt $\tilde{D}_n$ mit $n \geq 5$, daß ein positiv definiter Coxetergraph höchstens einen Verzweigungspunkt haben kann. Dann zeigt $\tilde{D}_4$, daß er sich daselbst nicht in mehr als drei Äste verzweigen kann. Dann zeigt $\tilde{B}_n$, daß darin überhaupt keine Kante höherer Wertigkeit vorkommen kann. Dann zeigt $\tilde{E}_6$, daß notwendig einer der drei Äste nur aus einer Kante besteht, und $\tilde{E}_7$, daß ein zweiter der drei Äste aus höchstens zwei Kanten besteht, und $\tilde{E}_8$, daß im Fall eines Astes mit einer und eines Astes mit zwei Kanten der dritte Ast höchstens aus vier Kanten bestehen darf. Damit kommen im verzweigten Fall in der Tat nur D_n und E_6, E_7, E_8 in Frage, und wir haben gezeigt, daß wir in unserer Liste der positiv definiten zusammenhängenden Coxetergraphen auch keine verzweigten Graphen vergessen haben. □



Zwei indefinite Graphen, die in der Diskussion auch eine Rolle spielen.

23.1.11.4. Ich finde an diesem Beweis äußerst bemerkenswert, in welchem Maße er durch die Verwendung unmathematischer Sprache an Klarheit gewinnt, ja recht eigentlich erst verständlich wird. Stellen Sie sich bloß einmal vor, die Coxetergraphen wären noch nicht erfunden und Sie sollten denselben Beweis in der äquivalenten und a priori deutlich präziseren Sprache der Coxetermatrizen führen, ja noch schlimmer, verstehen!

Ergänzung 23.1.11.5. Unter einer **komplexen Spiegelung** versteht man einen Automorphismus eines komplexen Vektorraums, dessen Fixpunktmenge eine Hyperebene ist. Eine **komplexe Spiegelungsgruppe** ist eine endliche Untergruppe der Automorphismengruppe eines komplexen Vektorraums, die von komplexen Spiegelungen erzeugt wird. Typische Beispiele sind die Gruppen $G(a,b,n) \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ für $a,b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $b|a$ aller Matrizen mit genau einem von Null verschiedenen Eintrag in jeder Zeile und Spalte und der Eigenschaft, daß alle Einträge a-te Einheitswurzeln sind und ihr Produkt eine b-te Einheitswurzel. In allen diesen Beispielen mit den einzigen Ausnahmen $G(1,1,n)$ für $n \geq 2$ ist $\mathbb{C}^n$ eine irreduzible Darstellung von $G(a,b,n)$, und in besagten Ausnahmefällen ist $\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_1 + \ldots + x_n = 0\}$ eine irreduzible treue Unterdarstellung von $G(1,1,n) \cong \mathcal{S}_n$. Bis auf Isomorphismus und die 34 exzeptionellen komplexen Spiegelungsgruppen $G_4,\ldots,G_{37}$ erhalten wir so alle komplexen Spiegelungsgruppen mit irreduzibler definierender Darstellung.

Ergänzung 23.1.11.6. Natürlich ist es terminologisch unglücklich, daß nun der Begriff einer komplexen Spiegelung auf zwei Arten verstanden werden kann: Einerseits im Sinne von 23.1.11.5, und andererseits im Sinne von 23.1.2.2 für den Spezialfall des Grundkörpers $\mathbb{C}$. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

23.1.12 Struktur affiner Spiegelungsgruppen*

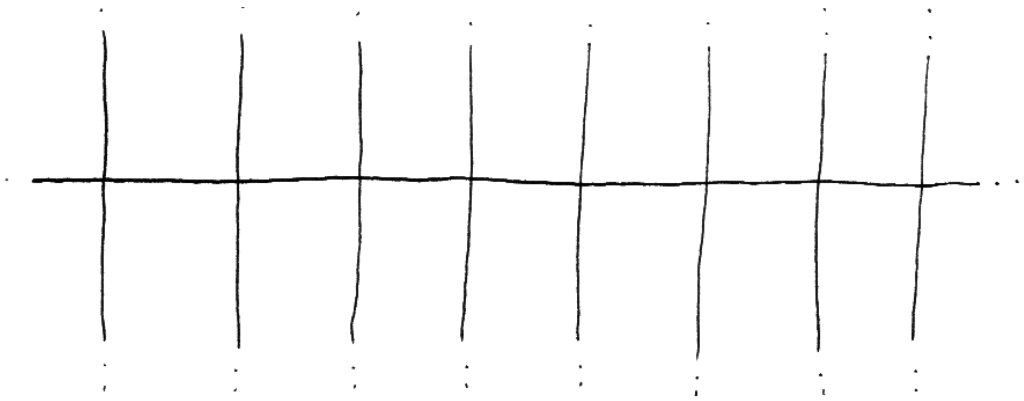
Definition 23.1.12.1. Eine affine Spiegelungsgruppe heißt **essentiell**, wenn ihre Translationen den Raum aller Richtungsvektoren aufspannen.

Definition 23.1.12.2. Zwei affine Spiegelungsgruppen (W,E) und (W',E') heißen **isomorph**, wenn es einen affinen Isomorphismus $\varphi : E \xrightarrow{\sim} E'$ gibt, unter dem sich W und W' entsprechen, in Formeln $W' = \varphi \circ W \circ \varphi^{-1}$.

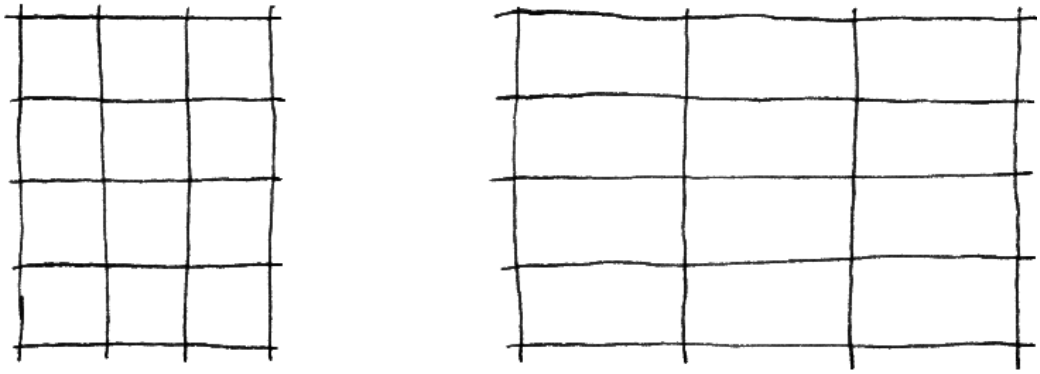
23.1.12.3. Gegeben affine Spiegelungsgruppen (W_1,E_1) und (W_2,E_2) ist auch ihr Produkt $(W_1,E_1) \times (W_2,E_2) := (W_1 \times W_2, E_1 \times E_2)$ eine affine Spiegelungsgruppe in offensichtlicher Weise.

Satz 23.1.12.4 (Abspalten eines maximalen endlichen Faktors). *Jede affine Spiegelungsgruppe (W,E) ist isomorph zu einem Produkt*

$$(W,E) \cong (W_a,E_a) \times (W_f,E_f)$$



Die Spiegel einer nicht essentiellen affinen Spiegelungsgruppe



Die Spiegel von zwei isomorphen affinen Spiegelungsgruppen

einer essentiellen affinen Spiegelungsgruppe (W_a, E_a) *mit einer endlichen Spiegelungsgruppe* (W_f, E_f)*. Darüber hinaus sind die Isomorphieklassen derartiger Faktoren durch* (W, E) *bereits eindeutig bestimmt.*

Vorschau 23.1.12.5. In 23.1.9.7 haben wir bereits die endlichen Spiegelungsgruppen in endlichdimensionalen reellen Vektorräumen klassifiziert. Um eine Klassifikation aller affinen Spiegelungsgruppen in endlichdimensionalen reellen Räumen zu erreichen, dürfen wir uns nach dem Satz also auf die Klassifikation der essentiellen reellen affinen Spiegelungsgruppen beschränken. Diese Klassifikation wird im nächste Abschnitt besprochen. Mehr dazu findet man in seiner Vorrede 23.2.1.1.

Beweis. Wir dürfen nach 23.1.2.6 annehmen, daß unsere affine Spiegelungsgruppe orthogonal ist für ein geeignetes Skalarprodukt. Bezeichnet $T \subset W$ die Untergruppe aller Translationen aus W, so bildet der lineare Anteil jeder Spiegelung das Vektorraumerzeugnis $L := \langle T \rangle$ von T auf sich selbst ab. Folglich liegt der (-1)-Eigenraum jeder linearisierten Spiegelung entweder in L oder in $L^\perp$. Nennen wir W_a das Erzeugnis der ersteren Spiegelungen und W_f das Erzeugnis der letzteren, so liefert die Multiplikation offensichtlich einen Isomorphismus

$$W_a \times W_f \xrightarrow{\sim} W$$

Wählen wir $e \in E$ beliebig und setzen $E_a = e + L$ und $E_f = e + L^\perp$, so operiert W_f als translationsfreie affine Spiegelungsgruppe auf E_f und ist mithin endlich. Der Satz ist bewiesen. □

Lemma 23.1.12.6 (**Mengen von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln**)**.** *In einem endlichdimensionalen Skalarproduktraum ist eine Menge von Vektoren, die paarweise schwach stumpfe Winkel einschließen, stets endlich.*

Beweis. Induktion über die Dimension. Ist unser Raum n-dimensional und v ein von Null verschiedener Vektor unserer Teilmenge, so schließen nach 23.1.8.7 höchstens n unserer Vektoren einen echt stumpfen Winkel mit v ein. Nach der Induktionsvoraussetzung stehen weiter höchstens endlich viele Vektoren unserer Teilmenge auf v senkrecht. □

Ergänzung 23.1.12.7. Aus 23.1.10.1 folgt genauer, daß in einem n-dimensionalen euklidischen Raum eine Menge von Vektoren, die paarweise schwach stumpfe Winkel einschließen, höchstens aus $2n+1$ Vektoren bestehen kann. Diese Schranke wird auch wirklich erreicht, zum Beispiel wenn man die Vektoren einer Orthonormalbasis sowie ihre Negativen betrachtet und dann noch den Nullvektor hinzunimmt.

Lemma 23.1.12.8. *Jeder Alkoven einer affinen Spiegelungsgruppe hat nur endlich viele Wände.*

Beweis. Zunächst einmal finden wir nach 23.1.2.6 ein invariantes Skalarprodukt auf dem Richtungsraum. Gegeben ein Alkoven wählen wir dann zu jeder seiner Wände einen darauf senkrechten Richtungsvektor, der in Richtung des Alkoven zeigt. Nach 23.1.8.3 schließen diese Vektoren paarweise schwach stumpfe Winkel ein. Nach 23.1.12.4 dürfen wir auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der fragliche Raum endlichdimensional ist. Nach 23.1.12.6 bilden unsere Richtungsvektoren folglich eine endliche Menge. □

23.2 Wurzelsysteme

23.2.1 Wurzelsysteme und ihre Weylgruppen

23.2.1.1 (**Vorrede**). Wurzelsysteme spielen in der Lietheorie eine wichtige Rolle. In diesem Skript erkläre ich nur, wie sie zu einer vollständigen Klassifikation der affinen reellen Spiegelungsgruppen führen. Das geschieht in den folgenden Abschnitten und ich will es hier als Vorschau kurz zusammenfassen. In 23.1.9.7 hatten wir bereits die endlichen reellen Spiegelungsgruppen klassifiziert. Nach 23.1.12.4 dürfen wir uns damit auf die Klassifikation der essentiellen affinen reellen Spiegelungsgruppen beschränken. In 23.2.4.3 konstruieren wir über jedem angeordneten Körper eine Bijektion zwischen der Menge aller Isomorphieklassen essentieller affiner Spiegelungsgruppen und der Menge aller Isomorphieklassen von sogenannten „Wurzelsystemen“, wie sie im kommenden Abschnitt eingeführt werden. Nach einigen weiteren Vorarbeiten gelingt dann schließlich in 23.2.3.7 die vollständige Klassifikation der Wurzelsysteme und wird zeigen, daß diese Klassifikation vom Grundkörper im wesentlichen unabhängig ist.

Definition 23.2.1.2. Ein **Wurzelsystem** oder genauer **reduziertes Wurzelsystem** ist ein Paar (R, V) bestehend aus einem Vektorraum V über einem Körper der Charakteristik Null und einer Teilmenge $R \subset V$, deren Elemente wir in diesem Kontext als **Wurzeln** ansprechen, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Unsere Menge R von Wurzeln ist endlich, erzeugt V und enthält nicht den Nullvektor;

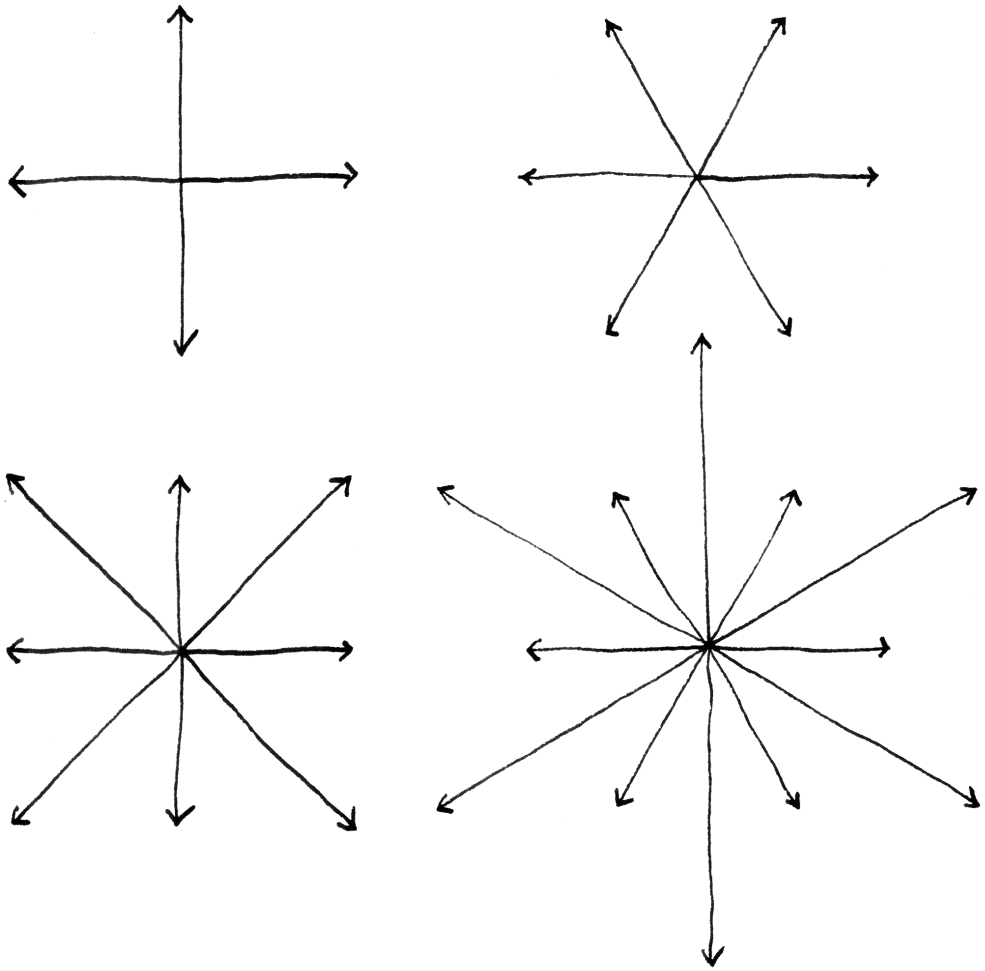
2. Für jede Wurzel $\alpha \in R$ gibt es eine lineare Abbildung $s : V \to V$ mit $s(\alpha) = -\alpha$, $s(R) \subset R$ und $s(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha \ \ \forall \beta \in R$;

3. Außer dem Negativen ist kein Vielfaches einer Wurzel wieder eine Wurzel.

Lassen wir die letzte Bedingung fallen, so sprechen wir von einem **nicht notwendig reduzierten Wurzelsystem**.

Definition 23.2.1.3. Ein **Morphismus von Wurzelsystemen** über ein- und demselben Körper ist eine lineare Abbildung zwischen den jeweiligen Vektorräumen, die jede Wurzel auf eine Wurzel oder auf Null abbildet.

23.2.1.4. Die Dimension des von einem Wurzelsystem aufgespannten Vektorraums heißt der **Rang** des Wurzelsystems. Die leere Menge ist ein Wurzelsystem im Nullvektorraum.



Das Bild zeigt eine Liste von Wurzelsystemen im Raum der Richtungsvektoren der Papierebene derart, daß jedes Wurzelsystem in einem reellen zweidimensionalen Raum zu genau einem der vier Systeme dieser Liste isomorph ist. Die Bilder sind darüber hinaus so gewählt, daß die Spiegelung zu jeder Wurzel in der Sprache der Schulgeometrie gerade die orthogonale Spiegelung an der auf besagter Wurzel senkrechten Geraden durch den Ursprung ist. Wir werden die Vollständigkeit dieser Liste zum Schluß dieses Abschnitts rechtfertigen. Im oben links dargestellten Fall dürften die beiden horizontalen Wurzeln auch eine andere Länge haben als die beiden vertikalen Wurzeln.

23.2.1.5 (**Diskussion der Terminologie**). In der Lie-Theorie konstruiert man zu den verschiedensten Ausgangsdaten von kompakten Liegruppen bis zu halbeinfachen Liealgebren das zugehörige „Wurzelsystem“, das oft ein Wurzelsystem im Sinne der obigen Definition ist. In solchen Zusammenhängen nennen wir ein Wurzelsystem im Sinne der obigen Definition auch ein **abstraktes Wurzelsystem**. Ein Wurzelsystem in einem Vektorraum über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ nennen wir ein **rationales**, **reelles** beziehungsweise **komplexes Wurzelsystem**. Wir werden in 23.2.1.16 zeigen, daß die Erweiterung der Skalare $k \otimes_{\mathbb{Q}}$ eine Äquivalenz von Kategorien induziert zwischen der Kategorie der rationalen Wurzelsysteme und der Kategorie der Wurzelsysteme über einem beliebigen fest vorgegebenen Körper k der Charakteristik Null.

23.2.1.6 (**Diskussion von verwandter Begrifflichkeiten**). Ich habe mich in der vorhergehenden Definition an die Terminologie von Bourbaki [Bou81] gehalten. In anderen Quellen fordert man von einem Wurzelsystem schwächer als in 23.2.1.2 formuliert nicht $s(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha$ und bezeichnet diejenigen Wurzelsysteme, die diese Bedingung doch erfüllen, als **kristallographisch**. Oft bezeichnet man in der Literatur, insbesondere der angelsächsischen, als „Wurzelsysteme“ auch Teilmengen von reellen Skalarprodukträumen, die Teile unserer Bedingungen aus 23.2.1.2 erfüllen und die Eigenschaft haben, daß die orthogonale Spiegelung an der auf einer Wurzel senkrechten Hyperebene stets unser System in sich selber überführt. Wir werden derartige Systeme, jedenfalls wenn sie zusätzlich im eben erwähnten Sinne kristallographisch sind, **euklidische Wurzelsysteme** nennen.

Vorschau 23.2.1.7 (**Beziehung zu Liegruppen**). In 22.5.7.8 konstruieren wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen

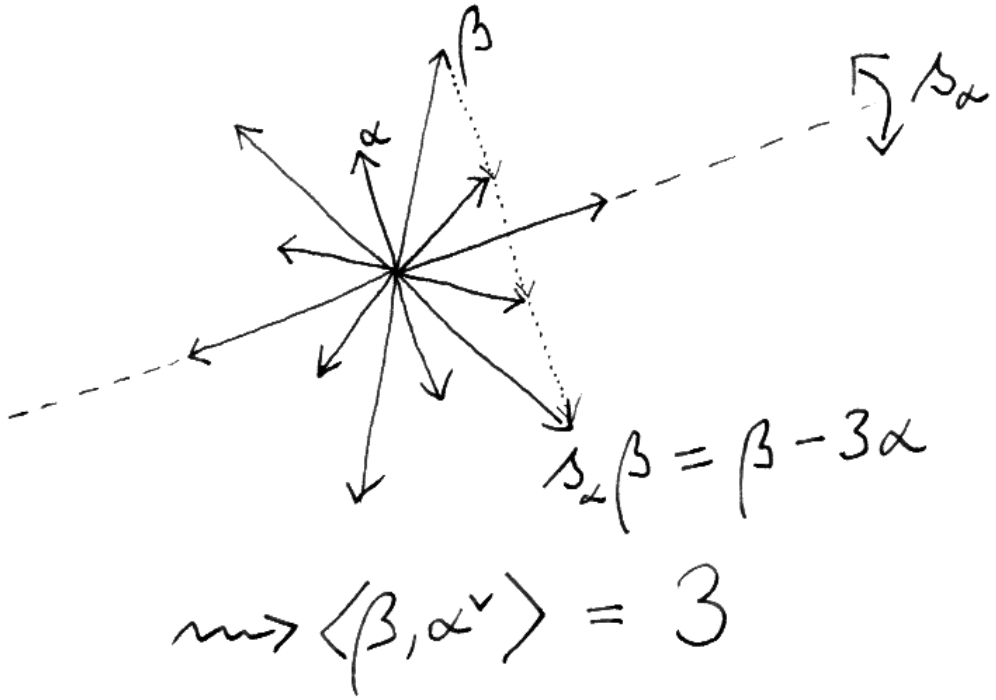
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{zusammenhängende kompakte} \\ \text{Liegruppen mit trivialem Zentrum} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{rationale} \\ \text{Wurzelsysteme} \end{array} \right\}$$

Unter einer kompakten Liegruppe dürfen wir dabei eine mit einer Topologie versehene kompakte Gruppe verstehen, die als abgeschlossene Untergruppe in eine $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ eingebettet werden kann, und unter einem Isomorphismus von kompakten Liegruppen einen Gruppenisomorphismus, der stetig ist mit stetiger Umkehrabbildung.

Vorschau 23.2.1.8 (**Beziehung zu Liealgebren**). In 24.2.3.21 konstruieren wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{halbeinfache komplexe} \\ \text{Liealgebren} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{komplexe} \\ \text{Wurzelsysteme} \end{array} \right\}$$

Die vier sogenannten „klassischen“ Beispiele für Wurzelsysteme werden etwa in 24.2.3.11, 24.2.3.31, 24.2.3.32 und 24.2.3.33 beschrieben. Sehr viel ausführlichere Informationen und übersichtliche Tafeln findet man bei Bourbaki [Bou81].



Beispiel für das Auswerten einer Kowurzel auf einer Wurzel

23.2.1.9 (**Wurzelspiegelungen und Kowurzeln**). Sei $R \subset V$ ein Wurzelsystem. Für die lineare Abbildung s aus dem zweiten Teil der Definition 23.2.1.2 hat $(s-\mathrm{id})$ als Bild die Gerade $\langle\alpha\rangle$. Mithin ist der Kern von $(s-\mathrm{id})$ alias die Fixpunktmenge von s eine Hyperebene. Zusammen mit der Bedingung $s(\alpha) = -\alpha$ zeigt das, daß unser s stets eine Spiegelung im Sinne von 23.1.2.2 sein muß. Weiter ist unser s durch die Wurzel α eindeutig bestimmt, denn wäre t eine zweite Abbildung mit den im zweiten Teil geforderten Eigenschaften, so müßte st sowohl auf $\langle\alpha\rangle$ als auch auf $V/\langle\alpha\rangle$ die Identität induzieren und wäre folglich unipotent. Wäre nun st nicht die Identität, so hätte es nach 4.3.3.18 unendliche Ordnung im Widerspruch zur Tatsache, daß es das endliche Erzeugendensystem R von V stabilisiert. Also ist s durch α eindeutig bestimmt. Wir schreiben von nun an $s = s_\alpha$ und nennen diese lineare Abbildung eine **Wurzelspiegelung** und genauer die **Spiegelung zur Wurzel** α. Dann erklären wir zu jeder Wurzel α die Linearform $\alpha^\vee \in V^*$ durch die Eigenschaft

$$s_\alpha(v) = v - \langle v, \alpha^\vee\rangle\alpha \quad \text{für alle } v \in V.$$

Diese Linearform heißt die **Kowurzel zur Wurzel** α. Das Symbol $\alpha^\vee$ wird „alfa tscheck“ gesprochen. Per definitionem nehmen Kowurzeln auf Wurzeln stets ganzzahlige Werte an, in Formeln $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle \in \mathbb{Z}$ für alle $\alpha, \beta \in R$.

23.2.1.10 (**Rationale Form eines Wurzelsystems**). Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ in einem Vektorraum über einem Körper k der Charakteristik Null setzen wir

$$V_\mathbb{Q} := \langle R\rangle_\mathbb{Q}$$

Offensichtlich ist dann auch $R \subset V_\mathbb{Q}$ ein Wurzelsystem, die Spiegelung $s_\alpha : V \to V$ stabilisiert $V_\mathbb{Q}$ und induziert die Spiegelung $s_\alpha : V_\mathbb{Q} \to V_\mathbb{Q}$ des Wurzelsystems $R \subset V_\mathbb{Q}$ und die Kowurzeln $\alpha^\vee$ von $R \subset V$ nehmen auf $V_\mathbb{Q}$ nur Werte aus $\mathbb{Q}$ an und restringieren so zu den Kowurzeln $\alpha_\mathbb{Q}^\vee \in V_\mathbb{Q}^*$ des Wurzelsystems $R \subset V_\mathbb{Q}$. Wir nennen $R \subset V_\mathbb{Q}$ die **rationale Form** unseres Wurzelsystems $R \subset V$.

Lemma 23.2.1.11. *Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ über einem Körper k spannen die Kowurzeln den Dualraum auf und die rationale Form hat denselben Rang wie das ursprüngliche Wurzelsystem, in Formeln* $\dim_\mathbb{Q} V_\mathbb{Q} = \dim_k V$.

Beweis. Auf $V_\mathbb{Q}$ finden wir mithilfe von 23.1.2.6 ein unter der endlichen Gruppe $\{g \in \mathrm{GL}(V_\mathbb{Q}) \mid g(R) \subset R\}$ invariantes Skalarprodukt $(\ ,\ )$. In Bezug auf so ein Skalarprodukt muß s_α auf $V_\mathbb{Q}$ die orthogonale Spiegelung an der zu α orthogonalen Hyperebene sein und wird damit nach 23.1.1.4 gegeben durch die Abbildungsvorschrift $s_\alpha(v) = v - 2((v,\alpha)/\alpha,\alpha))\alpha$. Das hinwiederum zeigt $\alpha^\vee(v) = (v,\alpha)/(\alpha,\alpha)$ für alle $v \in V_\mathbb{Q}$ und insbesondere $\langle\alpha_\mathbb{Q}^\vee \mid \alpha \in R\rangle = V_\mathbb{Q}^*$. Wählen wir

eine Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von $V_\mathbb{Q}$ aus Wurzeln und eine Basis $\beta^\vee_{1,\mathbb{Q}}, \ldots, \beta^\vee_{n,\mathbb{Q}}$ von $V^*_\mathbb{Q}$ aus restringierten Kowurzeln, so ist folglich die Matrix der

$$\langle \alpha_i, \beta^\vee_{j,\mathbb{Q}} \rangle$$

invertierbar. Das ist aber auch die Matrix der $\langle \alpha_i, \beta^\vee_j \rangle$ und damit sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ beziehungsweise $\beta^\vee_1, \ldots, \beta^\vee_n$ auch k-linear unabhängig in V beziehungsweise V^*. Der offensichtliche Dimensionsvergleich $\dim_\mathbb{Q} V_\mathbb{Q} \geq \dim_k V$ zeigt so, daß jede $\mathbb{Q}$-Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von $V_\mathbb{Q}$ aus Wurzeln auch eine k-Basis von V sein muß. Das hinwiederum zeigt $\dim_\mathbb{Q} V_\mathbb{Q} = \dim_k V$ und $\langle R^\vee \rangle = V^*$. □

23.2.1.12 (**Kowurzeln als Vielfache von Wurzeln**). Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ gibt es Isomorphismen $V \xrightarrow{\sim} V^*$ des zugrundeliegenden Vektorraums mit seinem Dualraum, unter denen alle Wurzeln positiven Vielfachen ihrer Kowurzeln entsprechen. Um das zu sehen, dürfen wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf rationale Wurzelsysteme beschränken. Für diese hatten wir das jedoch bereits beim Beweis von Lemma 23.2.1.11 gesehen.

Definition 23.2.1.13. Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ heißt die von den Wurzelspiegelungen erzeugte Untergruppe $W = \mathrm{W}(R \subset V) \subset \mathrm{GL}(V)$ seine **Weylgruppe**.

23.2.1.14. Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ ist der Nullvektor der einzige Vektor von V, der von der Weylgruppe festgehalten wird. In der Tat erzeugen die Kowurzeln den Dualraum, folglich ist der Schnitt ihrer Kerne Null.

23.2.1.15. Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ liefert Einschränkung von Elementen der Weylgruppe auf den $\mathbb{Q}$-Spann der Wurzeln $V_\mathbb{Q}$ eine natürliche Einbettung $W \subset \operatorname{Aut} V_\mathbb{Q}$. Diese Einbettung identifiziert die Weylgruppe mit der Weylgruppe der rationalen Form $R \subset V_\mathbb{Q}$, einer endlichen Spiegelungsgruppe im Sinne von 23.1.2.5. Die Alkoven in $V_\mathbb{Q}$ heißen in diesem Zusammenhang meist **Weylkammern**.

23.2.1.16 (**Wurzelsysteme über verschiedenen Körpern**). Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ über einem Körper k ist die offensichtliche Abbildung nach 23.2.1.11 ein Isomorphismus $V_\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Q} k \xrightarrow{\sim} V$ und das k-lineare Fortsetzen $\mathbb{Q}$-linearer Abbildungen induziert eine Bijektion auf den Kowurzeln sowie einen Isomorphimus $\mathrm{W}(R \subset V_\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}(R \subset V)$ auf den Weylgruppen. Im weiteren Verlauf werden wir jedem Wurzelsystem $R \subset V$ das „Gitter der ganzen Gewichte“

$$\mathfrak{X}(R \subset V) := \{v \in V \mid \langle v, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in R\}$$

zuordnen und eben gezeigten Verträglichkeiten zeigen, daß dann die Einbettung $V_\mathbb{Q} \hookrightarrow V$ auch eine Bijektion $\mathfrak{X}(R \subset V_\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(R \subset V)$ induziert. Das Gitter der ganzen Gewichte spielt in der Lietheorie eine wichtige Rolle, vergleiche

24.4.1.3. Der Funktor, der jedem Wurzelsystem über einem festen Körper k seine rationale Form zuordnet, ist auch offensichtlich eine Äquivalenz von Kategorien zwischen Wurzelsystemen über k und rationalen Wurzelsystemen. Beim Studium von Wurzelsystemen dürfen wir uns deshalb weitestgehend auf den Fall rationaler Wurzelsysteme beschränken.

Satz 23.2.1.17 (**Duales Wurzelsystem**). *Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ ist die Menge $R^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\}$ aller Kowurzeln ein Wurzelsystem im Dualraum V^* und für die Auswertungsabbildung $V \to (V^*)^*$ gilt $\alpha \mapsto (\alpha^\vee)^\vee$. Ist unser Wurzelsystem reduziert, so ist auch das duale Wurzelsystem reduziert.*

Beweis. Nach 23.2.1.11 ist $R^\vee$ ein endliches Erzeugendensystem von V^*. Haben wir nun irgendeinen Isomorphismus von Vektorräumen $\varphi : V \xrightarrow{\sim} U$ und ist $R \subset V$ ein Wurzelsystem, so ist natürlich auch $\varphi(R) \subset U$ ein Wurzelsystem und gegeben $\beta \in R$ gilt $\varphi(\beta)^\vee = (\varphi^\top)^{-1}(\beta^\vee)$ für $\varphi^\top : U^* \to V^*$ die zu φ transponierte Abbildung. Gegeben $\alpha \in R$ ist schließlich die transponierte Abbildung zur Spiegelung $s_\alpha = s_{\alpha,\alpha^\vee} : V \to V$ nach Übung 23.1.2.9 stets die Spiegelung $s_\alpha^\top = s_{\alpha^\vee,\alpha} : V^* \to V^*$. Für $\varphi = s_\alpha$ erhalten wir insbesondere

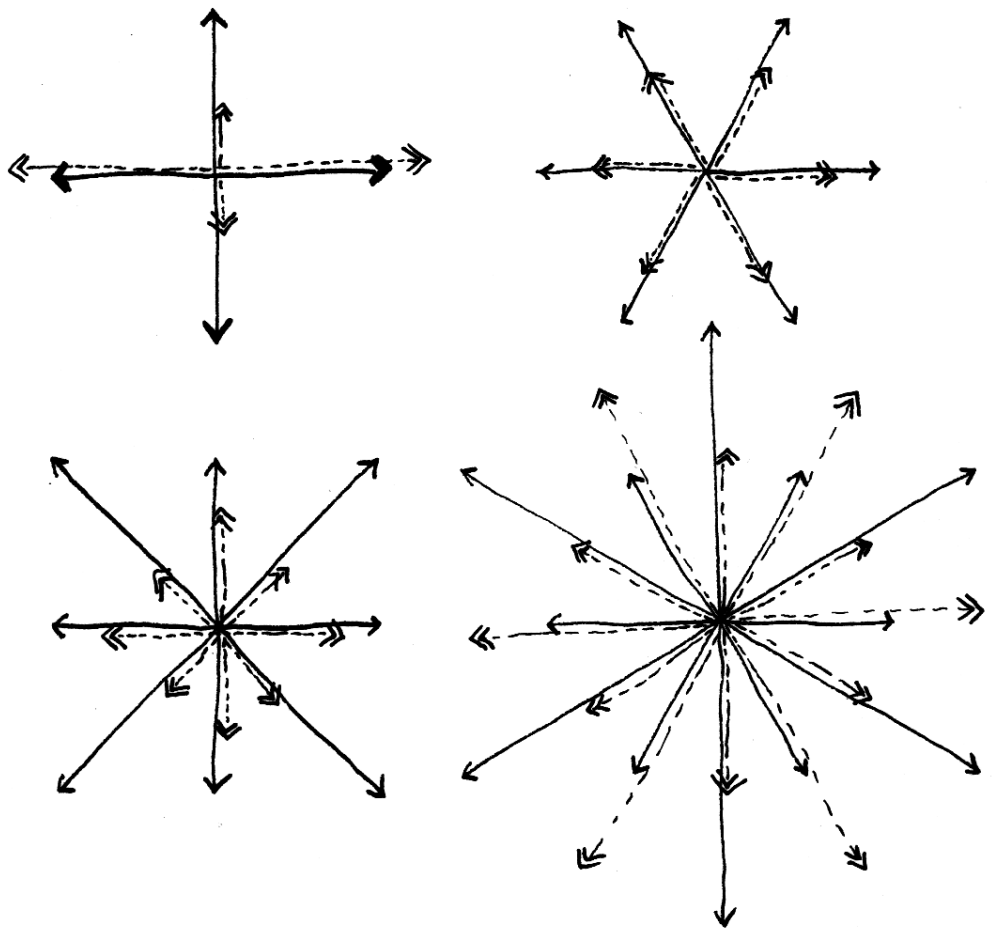
$$(s_\alpha \beta)^\vee = s_\alpha^\top(\beta^\vee) = \beta^\vee - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \alpha^\vee$$

Wir erkennen so, daß $s_\alpha^\top$ die Bedingungen erfüllt, die von einer Spiegelung zu $\alpha^\vee$ als Element des Wurzelsystems in spe $R^\vee$ gefordert werden, und das zeigt auch gleich noch $\alpha \mapsto (\alpha^\vee)^\vee$. Liegen schließlich zwei Wurzeln auf derselben Gerade, so haben sie offensichtlich dieselbe Wurzelspiegelung und damit liegen auch ihre Kowurzeln auf derselben Gerade. Da jede Wurzel mit ihrer Kowurzel zu Zwei paart, folgt die letzte Aussage. □

Beispiel 23.2.1.18 (**Wurzelsysteme vom Typ** A). Die Menge aller Differenzen $R := \{\mathrm{e}_i - \mathrm{e}_j \mid i \neq j\}$ zwischen zwei verschiedenen Vektoren der Standardbasis des $\mathbb{Q}^n$ ist ein Wurzelsystem in $V := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Q}^n \mid a_1 + \ldots + a_n = 0\}$. Wegen $\dim V = n-1$ heißt dies Wurzelsystem A_{n-1}. Wir bezeichnen mit $\varepsilon_i \in V^*$ die durch $\varepsilon_i(a_1, \ldots, a_n) = a_i$ gegebene Linearform. Für $\alpha = \mathrm{e}_i - \mathrm{e}_j$ ist dann die Kowurzel $\alpha^\vee = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ und die Spiegelung s_α vertauscht die i-te mit der j-ten Koordinate. Insbesondere besteht $\mathrm{W}(R) \cong \mathcal{S}_n$ aus den Permutationen der Koordinaten.

Lemma 23.2.1.19. *Jede Spiegelung in der Weylgruppe eines Wurzelsystems ist eine Spiegelung zu einer Wurzel.*

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit R ein Wurzelsystem in einem Vektorraum über $\mathbb{Q}$. Nach 23.1.6.3 ist jede Spiegelung einer endlichen von



In diesem Bild habe ich für verschiedene Wurzelsysteme des Richtungsraums $\vec{P}$ der Papierebene auch noch die Bilder der dualen Wurzeln unter dem durch ein jeweils willkürlich gewähltes weylgruppeninvariantes Skalarprodukt vermittelten Isomorphismus $\vec{P}^* \xrightarrow{\sim} \vec{P}$ eingezeichnet. Wie in 23.2.1.12 diskutiert sind diese Bilder positive Vielfache der entsprechenden Wurzeln. Ich Fall oben links habe ich dabei ein weylgruppeninvariantes Skalarprodukt gewählt, das nicht unter allen anschaulichen Bewegungen der Papierebene invariant ist.

Spiegelungen erzeugten Untergruppe der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem angeordneten Körper bereits konjugiert zu einer der erzeugenden Spiegelungen. Insbesondere ist jede Spiegelung s aus der Weylgruppe schon mal konjugiert zu einer Spiegelung zu einer Wurzel $\beta \in R$. Wir folgern $s = ws_\beta w^{-1} = s_{w\beta} = s_\alpha$ mit $\alpha = w\beta \in R$. □

Lemma 23.2.1.20 (**Paare von Wurzeln**). *Für je zwei nichtproportionale Wurzeln α, β eines Wurzelsystems gilt $0 \le \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle < 4$ und je zwei nichtorthogonale Wurzeln haben das Längenverhältnis*

$$\frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{\langle \alpha, \beta^\vee \rangle}{\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}$$

23.2.1.21. Im Fall eines reellen Wurzelsystems wird genauer der Winkel zwischen je zwei Wurzeln α und β bezüglich jedes weylgruppeninvarianten Skalarprodukts $(\ ,\ )$ auf $\langle R \rangle_{\mathbb{R}}$ gegeben durch $4\cos^2(\angle(\alpha, \beta)) = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Beweis. Beides folgt sofort aus unserer Formel $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$. □

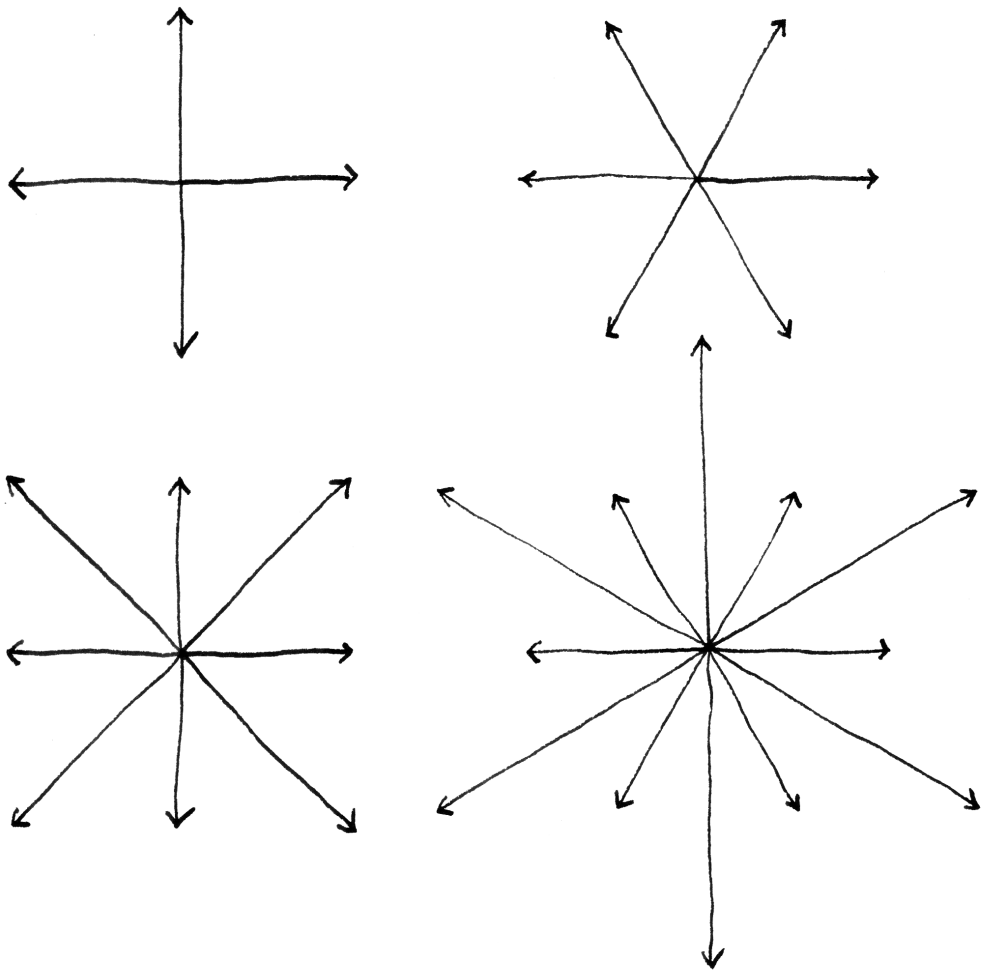
Übungen

Übung 23.2.1.22. Wie in 23.1.6.12 sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $Q \subset V$ ein Gitter alias der $\mathbb{Z}$-Spann einer Basis und $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V mit $\langle\ ,\ \rangle : Q \times Q \to \mathbb{Z}$. Man zeige, daß die Vektoren $v \in Q$ mit $\langle v, v \rangle = 2$ ein Wurzelsystem in dem von ihnen erzeugten Untervektorraum von V bilden.

Übung 23.2.1.23 (**Das Wurzelsystem** E_8). Im Vektorraum $\mathbb{Q}^8$ ist die Menge Q aller Vektoren $a = (a_1, \ldots, a_8) \in \mathbb{Z}^8 \sqcup ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}^8)$ mit Koordinatensumme $a_1 + a_2 + \ldots + a_8 \in 2\mathbb{Z}$ eine Untergruppe, die den Vektorraum $\mathbb{Q}^8$ erzeugt. Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{Q}^8$ induziert eine bilineare Abbildung $Q \times Q \to \mathbb{Z}$. Mit dieser bilinearen Abbildung heißt Q das E_8**-Gitter**. Es gilt $\langle q, q \rangle \in 2\mathbb{Z}$ für alle $q \in Q$ und die 240 Elemente $q \in Q$ mit $\langle q, q \rangle = 2$ bilden ein Wurzelsystem, das unser Gitter Q aufspannt und auch den Namen E_8 trägt. Sein Schnitt mit $\mathbb{Z}^8$ ist auch ein Wurzelsystem, das den Namen D_8 trägt und zur kompakten Liegruppe $\mathrm{SO}(16)$ gehört.

Übung 23.2.1.24. Gegeben ein Wurzelsystem R und darin nichtproportionale Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ gilt $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle > 0 \Rightarrow \beta - \alpha \in R$ und dann natürlich auch $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle < 0 \Rightarrow \beta + \alpha \in R$. Hinweis: Aus $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle > 0$ folgt mit Lemma 23.2.1.20, daß gilt $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 1$ oder $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 1$.

23.2.1.25 (**Wurzelketten**). Gegeben ein Wurzelsystem R und darin nichtproportionale Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ ist $I := \{i \in \mathbb{Z} \mid \beta + i\alpha \in R\}$ ein Intervall in $\mathbb{Z}$.



Dies Bild illustriert alle möglichen Lagen für Paare von Wurzeln in einem Wurzelsystem.

Das erkennt man unschwer durch Inspektion der Fälle vom Rang Zwei. Alternativ kann man durch Widerspruch argumentieren: Wären $s < r$ Zahlen aus I mit Abstand Zwei oder mehr, zwischen denen kein Element von I läge, so folgte aus 23.2.1.24 leicht $\langle \beta + s\alpha, \alpha^\vee \rangle \geq 0$ und $\langle \beta + r\alpha, \alpha^\vee \rangle \leq 0$ und zusammen $\langle (r-s)\alpha, \alpha^\vee \rangle \leq 0$ im Widerspruch zu $r < s$.

23.2.2 Basen von Wurzelsystemen

Definition 23.2.2.1. Eine Teilmenge $\Pi \subset R$ eines Wurzelsystems $R \subset V$ heißt eine **Basis des Wurzelsystems**, wenn sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

1. Π ist eine Basis des zugrundeliegenden Vektorraums V;
2. Schreiben wir eine Wurzel $\beta \in R$ als Linearkombination $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$ der Elemente von Π, so liegen die Koeffizienten n_α entweder alle in $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ oder alle in $\mathbb{Z}_{\leq 0}$.

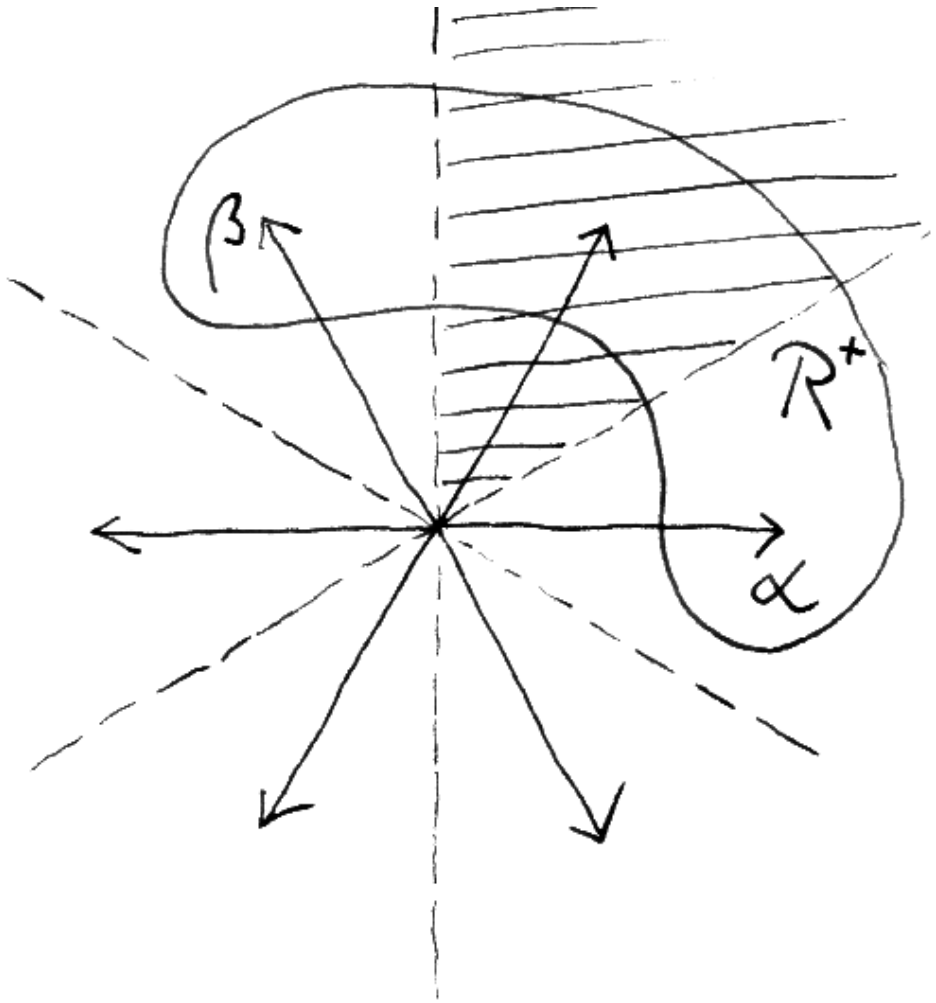
Definition 23.2.2.2. Eine Teilmenge $R^+ \subset R$ eines Wurzelsystems heißt ein **System positiver Wurzeln**, wenn sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

1. Das Wurzelsystem läßt sich schreiben als die disjunkte Vereinigung $R = R^+ \sqcup (-R^+)$, für jede Wurzel $\alpha \in R$ gilt also $\alpha \in R^+ \Leftrightarrow (-\alpha) \notin R^+$;
2. Aus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R^+$ und $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \in R$ folgt $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \in R^+$.

23.2.2.3. Jedes Wurzelsystem R besitzt ein System positiver Wurzeln. In der Tat, wählen wir einen Isomorphismus $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}^n$ von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen, so bilden offensichtlich alle Wurzeln, deren Bild in $\mathbb{Q}^n$ in der lexikographischen Ordnung größer ist als Null, ein System positiver Wurzeln.

23.2.2.4. Gegeben ein Wurzelsystem R gehört jede Wurzel α zu mindestens einer Basis des Wurzelsystems. In der Tat, wählen wir einen Isomorphismus $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}^n$ von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen mit $\alpha \mapsto (0, \ldots, 0, 1)$ und betrachten das positive System alle Wurzeln, deren Bild in $\mathbb{Q}^n$ in der lexikographischen Ordnung größer ist als Null, so gehört α offensichtlich zur zugehörigen Basis.

Beispiel 23.2.2.5 (**Das Wurzelsystem** A_n). Wir erinnern aus 23.2.1.18 das Wurzelsystem $R := \{\mathrm{e}_i - \mathrm{e}_j \mid i \neq j\}$ aller Differenzen zwischen zwei verschiedenen Vektoren der Standardbasis des $\mathbb{Q}^n$ im Vektorraum $V := \{(a_1, \ldots a_n) \in \mathbb{Q}^n \mid a_1 + \ldots + a_n = 0\}$. Ein System positiver Wurzeln wäre $R^+ := \{\mathrm{e}_i - \mathrm{e}_j \mid i < j\}$ und die zugehörige Basis $\Pi(R^+) = \{\mathrm{e}_i - \mathrm{e}_{i+1}\}$.



Ein Wurzelsystem mit einer Weylkammer, dem zugehörigen System positiver Wurzeln, bestehend aus den drei Wurzeln „in der Niere“ und der zugehörigen Basis, bestehend aus den beiden Wurzeln α und β.

Satz 23.2.2.6 (Weylkammern, Basen, Systeme positiver Wurzeln). *Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Bijektionen*

$$\begin{array}{ccc}
\{\textit{Weylkammern in } \langle R\rangle_{\mathbb{Q}}^*\} & \xrightarrow{6} & \{\textit{Weylkammern in } \langle R\rangle_{\mathbb{Q}}\} \\
{\scriptstyle 4^\vee} \uparrow\downarrow {\scriptstyle 3^\vee} & & {\scriptstyle 4} \uparrow\downarrow {\scriptstyle 3} \\
\{\textit{Basen von } R\} & \xrightarrow{5} & \{\textit{Basen von } R^\vee\} \\
{\scriptstyle 2} \uparrow\downarrow {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 2^\vee} \uparrow\downarrow {\scriptstyle 1^\vee} \\
\{\textit{Systeme positiver Wurzeln in } R\} & \xrightarrow{5} & \{\textit{Systeme positiver Wurzeln in } R^\vee\}
\end{array}$$

vermittels der Abbildungen, die wir im folgenden genauer beschreiben:

1. *Jeder Basis $\Pi \subset R$ ordnet man als positives System die Menge $R^+(\Pi)$ aller Wurzeln zu, die sich schreiben lassen als nichtnegative Linearkombination der Basiselemente;*

2. *Jedem System positiver Wurzeln $R^+ \subset R$ ordnet man als Basis $\Pi(R^+)$ die Menge aller derjenigen Elemente des Systems zu, die sich nicht als Summe über eine Multimenge von zwei oder mehr Elementen des besagten Systems schreiben lassen;*

3. *Jeder Weylkammer im rationalen Spann der Wurzeln ordnet man als Basis des dualen Wurzelsystems die Menge derjenigen Kowurzeln zu, die Gleichungen von Wänden unserer Kammer sind und die auf der Kammer positive Werte annehmen;*

4. *Jeder Basis des dualen Wurzelsystems ordnet man als Kammer den Schnitt derjenigen Halbräume zu, auf denen alle Elemente besagter Basis positive Werte annehmen;*

5. *Jeder Menge von Wurzeln ordnen die beiden unteren horizontalen Pfeile die Menge der zugehörigen Kowurzeln zu;*

6. *Jeder Kammer in $\langle R\rangle_{\mathbb{Q}}^*$ ordnet die obere Horizontale ihr Bild unter einem und jedem Isomorphismus $\langle R\rangle_{\mathbb{Q}}^* \xrightarrow{\sim} \langle R\rangle_{\mathbb{Q}}$ zu, der von einem weylgruppeninvarianten Skalarprodukt induziert wird.*

Beweis. Nur bei den Abbildungen 1 und 6 scheint mir a priori klar, daß sie überhaupt im behaupteten Wertebereich landen. Als nächstes überlegen wir uns das für die in 3 gegebene Abbildung und zeigen dabei insbesondere, daß jedes Wurzelsystem überhaupt Basen besitzt. Wir geben unserer Abbildung den Namen Φ, in Formeln gilt für jede Weylkammer $A \subset \langle R\rangle_{\mathbb{Q}}$ also

$$\Phi(A) = \{\alpha^\vee \in R^\vee \mid (\ker \alpha^\vee) \in \mathcal{H}_A,\ \langle A, \alpha^\vee\rangle \subset \mathbb{Q}_{>0}\}$$

Nach 23.1.8.6 ist $\Phi(A)$ eine linear unabhängige Teilmenge von $\langle R\rangle_{\mathbb{Q}}^*$ und dann nach 23.2.1.17.23.2.1.11 auch von V^*. Nach 23.1.6.1 erzeugen weiter die Spiegelungen s_α an den Wänden einer Kammer die gesamte Weylgruppe, nach 23.2.1.14 ist demnach der Schnitt dieser Wände alias der Schnitt der Kerne der zugehörigen Kowurzeln der Nullraum, folglich bilden die fraglichen Kowurzeln sogar eine Basis von V^* und $\Phi(A)$ erfüllt die erste Bedingung an eine Basis eines Wurzelsystems. Stellen wir nun $\beta^\vee \in R^\vee$ dar als Linearkombination

$$\beta^\vee = \sum_{\alpha\in\Phi(A)} n_{\alpha\beta}\alpha^\vee$$

so liegen sicher alle $n_{\alpha\beta}$ in $\mathbb{Q}$ und haben sogar alle dasselbe Vorzeichen, da unsere Kowurzel $\beta^\vee$ auf dem Abschluß der Kammer $\bar{A}$ und insbesondere auf den Vektoren der zu $\Phi(A)$ dualen Basis des Vektorraums $\langle R\rangle_{\mathbb{Q}}$ keine Werte mit verschiedenen Vorzeichen annehmen darf. Es bleibt damit nur noch zu zeigen, daß hier alle $n_{\alpha\beta}$ in $\mathbb{Z}$ liegen. Da aber alle Alkoven in $\langle R\rangle_{\mathbb{Q}}$ konjugiert sind zu A unter W, ist auch jeder Spiegel konjugiert zu einer Wand von A und damit jede Kowurzel zu einer Kowurzel aus $\Phi(A)$, in Formeln $R^\vee = W\Phi(A)$. Die von $\Phi(A)$ in $\langle R^\vee\rangle_{\mathbb{Q}}$ erzeugte Untergruppe $\langle\Phi(A)\rangle_{\mathbb{Z}}$ ist aber offensichtlich stabil unter W und wir folgern $R^\vee \subset \langle\Phi(A)\rangle_{\mathbb{Z}}$. Unser $\Phi(A)$ ist also tatsächlich eine Basis von $R^\vee$. Wir geben nun der Abbildung 4 in die andere Richtung den Namen C, in Formeln gilt für eine Basis $\Pi^\vee$ von $R^\vee$ also

$$C(\Pi^\vee) = \{\lambda \in \langle R\rangle_{\mathbb{Q}} \mid \langle\lambda, \alpha^\vee\rangle > 0 \quad \forall\alpha^\vee \in \Pi^\vee\}$$

Hier ist $C(\Pi^\vee)$ eine Weylkammer als ein Schnitt von Halbräumen zu Spiegeln, der von keinem Spiegel getroffen wird, und das hinwiederum folgt, da $\Pi^\vee$ eine Basis von $R^\vee$ ist. Wir zeigen schließlich, daß unsere beiden Abbildungen C und Φ zueinander invers sind. Für jede Kammer A folgt aus Satz 23.1.3.31 über die Begrenzung eines Alkoven durch sein Wände sofort $C(\Phi(A)) = A$. Ist umgekehrt $\Pi^\vee \subset R^\vee$ eine Basis, so sind die bezüglich $\Pi^\vee$ positiven Kowurzeln genau die Kowurzeln, die auf der Kammer $C(\Pi^\vee)$ positive Werte annehmen, und alle Wurzeln aus $\Phi(C(\Pi^\vee))$ sind insbesondere positive Wurzeln für $\Pi^\vee$. Nun ist aber $\Pi^\vee$ offensichtlich die einzige Basis von $R^\vee$, die aus bezüglich $\Pi^\vee$ positiven Kowurzeln besteht. Also haben wir auch $\Phi(C(\Pi^\vee)) = \Pi^\vee$. Damit ist gezeigt, daß die in 3 und 4 angegebenen Abbildungen in der Tat zueinander inverse Bijektionen liefern. Weiter ist offensichtlich, daß wir eine Basis aus ihrem System von positiven Wurzeln zurückgewinnen können durch die in 2 beschriebene Konstruktion. Es ist also klar, daß 1 und 2 zueinander inverse Isomorphismen sind, sobald wir zeigen, daß 1 surjektiv ist, daß also jedes System positiver Wurzeln von einer Basis herkommt. Um das zu zeigen beachten wir:

Lemma 23.2.2.7. *Ist R ein Wurzelsystem, $\Pi \subset R$ eine Basis von R und $R^+ = R^+(\Pi)$ das zugehörige System positiver Wurzeln, so gilt für alle Wurzeln aus unserer Basis $\alpha \in \Pi$ die Formel*

$$s_\alpha R^+ = (R^+ \backslash \alpha) \cup \{-\alpha\}$$

Beweis. Formal sieht man dies Lemma leicht ein, denn aus der Definition folgt für α eine Wurzel von Π schon $(R^+ + \mathbb{Z}\alpha) \cap R = R^+ \cup \{-\alpha\}$. Anschaulich bedeutet das Lemma, daß das Bild einer Weylkammer unter der Spiegelung an einer ihrer Wände nur durch diesen Spiegel von der ursprünglichen Weylkammer getrennt wird. □

Sei nun P^+ ein System positiver Wurzeln und Π eine Basis von R derart, daß $P^+ \cap R^+(\Pi)$ soviel Elemente hat wie möglich. Wäre $P^+ \neq R^+(\Pi)$, so gäbe es $\alpha \in \Pi$ mit $\alpha \notin P^+$. Aber dann hätte $P^+ \cap R^+(s_\alpha \Pi)$ noch mehr Elemente als $P^+ \cap R^+(\Pi)$, im Widerspruch zur Wahl von Π. Also kommt jedes System positiver Wurzeln in der Tat von einer Basis her und die in 1 und 2 angegebenen Abbildungen liefern zueinander inverse Bijektionen. Wir wählen schließlich ein weylgruppeninvariantes Skalarprodukt auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ und betrachten den zugehörigen Isomorphismus $\mathrm{can} : \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^* \to \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$. Gehört eine Basis Π von R zum Alkoven $A \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$, so gehört offensichtlich $\Pi^\vee$ zum Alkoven $\mathrm{can}(A) \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$. Damit ist der Satz bewiesen bis auf die Kommutativität des Diagramms, deren Nachweis wir dem Leser überlassen. □

23.2.2.8. Unsere in 23.2.2.4 gezeigte Aussage, daß jede Wurzel eines Wurzelsystems zu mindestens einer Basis gehört folgt nun auch mit 23.2.2.6 aus der Erkenntnis 23.1.3.32, daß jeder Spiegel Wand von mindestens einer Weylkammer ist.

Korollar 23.2.2.9.

1. *Gegeben zwei Basen eines Wurzelsystems gibt es genau ein Element der Weylgruppe, das die eine Basis in die andere Basis überführt;*
2. *Gegeben zwei Systeme positiver Wurzeln eines Wurzelsystems gibt es genau ein Element der Weylgruppe, das das eine System in das andere überführt.*

Beweis. Das folgt aus der eineindeutigen Entsprechung zwischen Basen, Systemen positiver Wurzeln und Weylkammern nach 23.2.2.6, da jede endliche Spiegelungsgruppe nach 23.1.6.1 frei und transitiv auf der Menge ihrer Weylkammern operiert. □

Definition 23.2.2.10. Ein Wurzelsystem mit einer ausgezeichneten Basis nennen wir ein **basiertes Wurzelsystem**. In einem basierten Wurzelsystem nennt man

die Elemente der Basis **einfache Wurzeln**, die zugehörigen Kowurzeln **einfache Kowurzeln**, die zugehörigen Spiegelungen **einfache Spiegelungen** und die zugehörige Weylkammer die **dominante Weylkammer**.

Ergänzung 23.2.2.11. Jedes basierte Wurzelsystem besitzt eine kanonische Involution, die gegeben wird durch die Vorschrift $v \mapsto -w_\circ v$ für $w_\circ$ das in Bezug auf die ausgezeichnete Basis längste Element der Weylgruppe nach 23.1.6.10. Diese Involution macht einfache Wurzeln zu einfachen Wurzeln. Wir nennen sie den **prinzipalen Automorphismus** unseres basierten Wurzelsystems.

23.2.2.12. Gegeben ein basiertes Wurzelsystem erzeugen die einfachen Spiegelungen die Weylgruppe, jede Spiegelung ist in der Weylgruppe konjugiert zu einer einfachen Spiegelung, und jede Wurzel ist konjugiert unter der Weylgruppe zu einer einfachen Wurzel. Das alles sind Spezialisierungen von Aussagen aus der allgemeinen Theorie von Spiegelungsgruppen 23.1.6.1: Jede endliche Spiegelungsgruppe wird von den Spiegelungen an einem festen Alkoven erzeugt und jede ihrer Spiegelungen ist konjugiert zu einer Spiegelung an unserem festen Alkoven.

Definition 23.2.2.13. Gegeben $R_1 \subset V_1$ und $R_2 \subset V_2$ Wurzelsysteme über demselben Körper erklären wir ihre **Summe** $R_1 \oplus R_2 \subset V_1 \oplus V_2$ als

$$R_1 \oplus R_2 := (R_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times R_2)$$

Die Summe zweier Wurzelsysteme ist natürlich wieder ein Wurzelsystem. Ein Wurzelsystem heißt **unzerlegbar**, falls es weder leer ist noch isomorph zu einer Summe von zwei nichtleeren Wurzelsystemen.

Proposition 23.2.2.14. *Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ gibt es genau eine Partition $R = R_1 \sqcup \ldots \sqcup R_n$ derart, daß R_i jeweils ein unzerlegbares Wurzelsystem in dem von ihm erzeugten Untervektorraum $V_i \subset V$ ist und daß die Addition einen Isomorphismus $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n \xrightarrow{\sim} V$ liefert mit*

$$R_1 \oplus \ldots \oplus R_n \xrightarrow{\sim} R$$

Beweis. Sei $\simeq$ die kleinste Äquivalenzrelation auf der Menge R mit der Eigenschaft $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \neq 0 \Rightarrow \alpha \simeq \beta$. Unter dieser Äquivalenzrelation zerlegt man nun R in Äquivalenzklassen $R = R_1 \sqcup \ldots \sqcup R_n$. Der Rest des Beweises bleibt dem Leser überlassen. □

Übungen

Übung 23.2.2.15. Ist R^+ ein System positiver Wurzeln eines Wurzelsystems und $l : W \to \mathbb{N}$ die zu den zugehörigen einfachen Spiegelungen gebildete Länge,

so stimmt die Länge eines Elements $w \in W$ überein mit der Zahl der positiven Wurzeln, die es zu negativen Wurzeln macht. In Formeln gilt also $l(w) = |w(R^+)\backslash R^+|$. Hinweis: 23.1.6.1.3.

Übung 23.2.2.16. Sei $\Pi \subset R \subset V$ ein basiertes Wurzelsystem. Bezeichne $\rho \in V$ die Halbsumme der positiven Wurzeln, in Formeln

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$$

Man zeige mit 23.2.2.7 für alle einfachen Wurzeln α die Formel $s_\alpha \rho = \rho - \alpha$ und folgere $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$ für alle einfachen Wurzeln α. Man zeige weiter, daß $x\rho - \rho$ für alle x aus der Weylgruppe im Wurzelgitter liegt, in Formeln gilt also $x\rho - \rho \in \langle R \rangle \; \forall x \in W$.

Übung 23.2.2.17 (**Wurzelsysteme der Typen** B_n, C_n, D_n). Bezeichne $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ die Vektoren der Standardbasis von $\mathbb{Q}^n$, die in anderen Zusammenhängen meist e_i notiert werden. Man zeige:

Typ C_n**:** Die Menge $R := \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}\backslash 0$ ist ein Wurzelsystem in $\mathbb{Q}^n$. Man bestimme eine Basis sowie die Weylgruppe.

Typ D_n**:** Die Menge $R := \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ ist ein Wurzelsystem in $\mathbb{Q}^n$ für $n \geq 2$. Man bestimme eine Basis sowie die Weylgruppe. Man bestimme das längste Element der Weylgruppe und zeige, daß der prinzipale Automorphismus 23.2.2.11 trivial ist für gerades n und nichttrivial für ungerades n. Auflösung in 24.4.2.10.

Typ B_n**:** Die Menge $R := \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ist ein Wurzelsystem in $\mathbb{Q}^n$. Man bestimme eine Basis sowie die Weylgruppe. Auflösung in 24.4.2.11.

Duale Systeme: Man zeige, daß die Wurzelsysteme B_n und C_n zueinander dual sind, wohingegen die Wurzelsysteme A_n und D_n jeweils zu ihren dualen Systemen isomorph sind.

Als Systeme positiver Wurzeln wähle man stets alle Wurzeln, bei denen der erste von Null verschiedene Koeffizient bei der Darstellung durch die angeordnete Basis der ε_i positiv ist. Das Standardskalarprodukt ist in diesen Fällen jeweils invariant unter der Weylgruppe.

23.2.3 Klassifikation von Wurzelsystemen

23.2.3.1. Will man diesen Abschnitt vom vorhergehenden unabhängig machen, so reicht es, eine andere unserer äquivalenten Bedingungen zur Definition der

Basis eines Wurzelsystems zu machen. Genauer heiße dazu im folgenden eine Teilmenge $\Pi \subset R$ eines Wurzelsystems $R \subset V$ in einem Vektorraum über einem angeordneten Körper eine **Basis**, wenn sie linear unabhängig ist und die Menge $\{v \in V \mid \langle v, \alpha^\vee \rangle > 0 \ \forall \alpha \in \Pi\}$ eine Weylkammer von R ist.

Definition 23.2.3.2. Gegeben ein Wurzelsystem R mit Basis Π definiert man seine **Cartan-Matrix** als die $(\Pi \times \Pi)$-Matrix mit ganzzahligen Einträgen alias die Abbildung $(\Pi \times \Pi) \to \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$C(R) = (\langle \alpha, \beta^\vee \rangle)_{\alpha,\beta \in \Pi}$$

Diese Matrix hängt, da nach 23.2.2.8 oder 23.2.3.1, 23.1.1.13 je zwei Basen durch genau ein Element der Weylgruppe ineinander überführt werden, im wesentlichen nicht von der Wahl unserer Basis ab.

Ergänzung 23.2.3.3. Genauer kann man die Menge $\mathcal{B}$ aller Basen des Wurzelsystems R betrachten, dann im Produkt $\mathcal{B} \times R$ die Teilmenge $\mathcal{T}$ aller Paare (Π, α) bestehend aus einer Basis Π und einer Wurzel $\alpha \in \Pi$, und schließlich die Menge

$$\Pi(R) := W \backslash \mathcal{T}$$

der Bahnen der Weylgruppe auf $\mathcal{T}$. Diese Menge $\Pi(R)$ hängt dann von keinerlei Wahlen mehr ab, man mag sie die **universelle Basis** des Wurzelsystems R nennen, und wir können damit die Cartan-Matrix $C(R)$ auffassen als eine von keinerlei Wahlen mehr abhängige $(\Pi(R) \times \Pi(R))$-Matrix.

23.2.3.4. Die Cartan-Matrizen zu Wurzelsystemen haben typischerweise nur sehr wenige von Null verschiedene Einträge. Darüber hinaus stehen auf der Diagonalen nur Zweier, außerhalb der Diagonalen sind alle Einträge nichtpositiv, und es gilt

$$0 \leq \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle < 4$$

sowie $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 0$. Es ist deshalb möglich, die in der Cartan-Matrix eines Wurzelsystems enthaltene Information sehr übersichtlich graphisch darzustellen durch das sogenannte **Dynkin-Diagramm**, das wie folgt gebildet wird: Man malt zunächst für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$ einen dicken Punkt; dann verbindet man je zwei Punkte $\alpha \neq \beta$ durch einen $(\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle)$-fachen Strich beziehungsweise gar nicht, falls gilt $(\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle) = 0$; und schließlich versieht man die 2-fachen und 3-fachen Striche mit einem Pfeil in Richtung der Wurzel α mit $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = -1$, als da heißt in Richtung der kürzeren Wurzel bezüglich eines und damit jedes weylgruppeninvarianten Skalarprodukts.

Lemma 23.2.3.5. *Ein Wurzelsystem über einem gegebenen Körper wird durch sein Dynkindiagramm eindeutig festgelegt bis auf Isomorphismus.*

Beweis. Man kann ein Wurzelsystem bis auf Isomorphismus aus seinem Dynkindiagramm rekonstruieren wie folgt: Man bildet den freien Vektorraum V über den Knoten des Diagramms, nennt die zu den Knoten gehörigen Vektoren „einfache Wurzeln“, erklärt dann zu jeder einfachen Wurzel α eine „einfache Spiegelung“ mithilfe der in unserem Diagramm enthaltenen Information gewisser ganzer Zahlen $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ auf den einfachen Wurzeln durch

$$s_\alpha : \beta \mapsto \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

und durch lineare Fortsetzung auf ganz V, und erhält das Wurzelsystem zurück als die Vereinigung der Bahnen der einfachen Wurzeln unter der von den einfachen Spiegelungen erzeugten „Weylgruppe“. □

Lemma 23.2.3.6. *Ein Wurzelsystem ist unzerlegbar genau dann, wenn sein Dynkindiagramm zusammenhängend ist.*

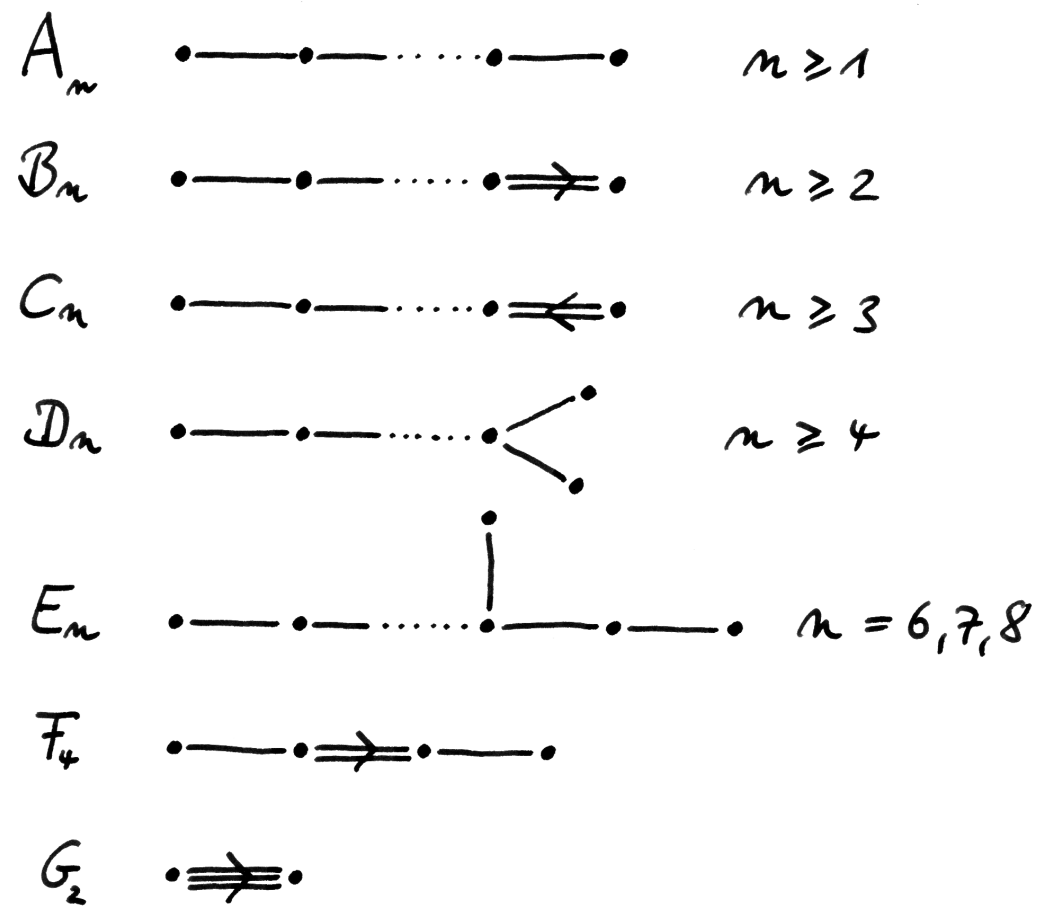
Beweis. Daß jede Zerlegung eines Wurzelsystems eine Zerlegung seines Dynkindiagramms induziert, scheint mir offensichtlich. Zerfällt umgekehrt das Dynkindiagramm eines Wurzelsystems in zwei untereinander unverbundene Teile, so kommutieren alle einfachen Spiegelungen zum einen Teil mit allen einfachen Spiegelungen zum anderen Teil, und wir erhalten erst eine Zerlegung der Weylgruppe in ein Produkt zweier miteinander kommutierender Untergruppen und daraus dann auch eine Zerlegung unseres Wurzelsystems. □

Proposition 23.2.3.7 (**Klassifikation unzerlegbarer Wurzelsysteme**). *Das Bilden des Dynkindiagramms liefert eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Unzerlegbare abstrakte} \\ \textit{Wurzelsysteme,} \\ \textit{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Endliche Diagramme,} \\ \textit{die in nebenstehender Liste} \\ \textit{aufgeführt sind} \end{array} \right\}$$

23.2.3.8. Ich verzichte darauf, genauer zu präzisieren, was unter so einem Diagramm genau zu verstehen sein soll, und wann zwei Diagramme als gleich anzusehen sind.

Beweis. Das Dynkin-Diagramm jedes unzerlegbaren Wurzelsystems muß nach 23.2.3.6 zusammenhängend sein. Weiter muß die Weylgruppe eines Wurzelsystems auf dem $\mathbb{Q}$-Spann der Wurzeln als endliche Spiegelungsgruppe operieren. Damit landet die Abbildung aus unserer Proposition zumindest in zusammenhängenden Diagrammen. Der zu einem Dynkindiagramm gehörige Coxetergraph entsteht nach 23.2.1.20 aus dem Dynkindiagramm, indem man Doppelkanten als Kanten der Wertigkeit 4 interpretiert und Dreifachkanten als Kanten der Wertigkeit 6. Ein kurzer Blick auf die Liste nach 23.1.9.7 zeigt dann, daß nur die



Dieses Bild zeigt alle Dynkindiagramme unzerlegbarer Wurzelsysteme. Die Zahl n meint wie dort jeweils die Zahl der Knoten.

Diagramme unserer nebenstehenden Liste als Dynkin-Diagramme unzerlegbarer Wurzelsysteme in Frage kommen, so daß die Abbildung aus der Propsition wirklich in der angegebenen Menge landet. Ihre Injektivität haben wir bereits als Lemma 23.2.3.5 gezeigt. Es bleibt, ihre Surjektivität nachzuweisen. Das kann man zeigen, indem man das Argument aus dem Beweis von diesem Lemma umkehrt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir als Grundkörper $\mathbb{R}$ annehmen. Gehen wir von einem der Diagramm unserer Liste aus und bilden dazu den zugehörigen Coxetergraphen, so gehört dazu nach der Klassifikation endlicher Spiegelungsgruppen eine endliche Spiegelungsgruppe W mit einem ausgezeichneten Alkoven, dessen Wände in natürlicher Bijektion zu den Knoten unseres Diagramms stehen. Nun wählen wir zu jeder Wand einen von Null verschiedenen Vektor, der darauf senkrecht steht und in Richtung unseres Alkoven zeigt, und können diese Wahlen so treffen, daß die Längenverhältnisse zwischen unseren Vektoren 1 oder $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{3}$ sind je nachdem, wie es unser Dynkindiagramm im Lichte von 23.2.1.20 vorschreibt. Für die Gesamtheit Π dieser Vektoren und jede Spiegelung s an einer der Wände unseres Alkoven gilt dann $s\Pi \subset \langle \Pi \rangle_{\mathbb{Z}}$ und es folgt $W\Pi \subset \langle \Pi \rangle_{\mathbb{Z}}$. Damit ist klar, daß $W\Pi$ alle Eigenschaften eines Wurzelsystems erfüllt mit Ausnahme der Letzten: Unklar bleibt, warum auf jeder Ursprungsgerade nicht mehr als zwei Elemente dieser Vereinigung liegen können sollten. Wegen unserer Ganzheitseigenschaften müßte dann jedoch in dieser Vereinigung ein Vektor und sein Doppeltes liegen. Unter unserem invarianten Skalarprodukt ist aber das Längenverhältnis zwischen zwei Elementen von Π, das man ja am Dynkindiagramm ablesen kann, nie Eins zu Zwei, und dieser Widerspruch beendet den Beweis. □

Korollar 23.2.3.9 (Klassifikation beliebiger Wurzelsysteme). *Das Bilden des Dynkindiagramms liefert eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Abstrakte Wurzelsysteme,} \\ \textit{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Endliche Diagramme, deren} \\ \textit{Zusammenhangskomponenten} \\ \textit{alle in nebenstehender Liste} \\ \textit{aufgeführt sind} \end{array} \right\}$$

Beweis. Das folgt leicht aus dem Vorhergehenden. Ich verzichte darauf, genauer zu präzisieren, was auf der rechten Seite mit einer Zusammenhangskomponente eines Diagramms gemeint sein soll und wann zwei Diagramme als gleich anzusehen sind. □

Proposition 23.2.3.10 (Wurzelwege zu einer positiven Wurzel). *Sei $R \supset R^+ \supset \Pi$ ein Wurzelsystem mit einem System positiver Wurzeln und der zugehörigen Basis. Gegeben eine positive Wurzel $\beta \in R^+$ gibt es eine Folge von einfachen Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit $\beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ derart, daß jede Teilsumme $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i$ auch eine Wurzel ist.*

23.2.3.11. Eine feinere Aussage macht die anschließende Proposition 23.2.3.12. Wir nennen eine Folge von Teilsummen wie in der Proposition, die in jedem Schritt nur um eine einfache Wurzel weitergeht, einen **Wurzelweg** zu unserer positiven Wurzel.

Beweis. Gibt es eine einfache Wurzel $\alpha \neq \beta$ mit $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle > 0$, so ist auch $s_\alpha \beta = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha$ eine positive Wurzel und wir haben gewonnen mit Induktion und unseren Erkenntnissen zu Wurzelketten 23.2.1.25. Ist β einfach, so ist nichts zu zeigen. Ist sonst β nicht einfach und gilt $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \leq 0$ für alle einfachen Wurzeln, so müßten die einfachen Wurzeln zusammen mit β linear unabhängig sein nach unserem Lemma 23.1.8.7 über Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln. Das aber ist unmöglich. □

Proposition* 23.2.3.12 (Wurzelwege zwischen positiven Wurzeln). *Gegeben ein Wurzelsystem mit einem System positiver Wurzeln und der zugehörigen Basis $\Pi \subset R^+ \subset R$ und positive Wurzeln $\alpha, \beta \in R^+$ mit $\beta \in \alpha + |R^+\rangle$ gibt es eine Folge von einfachen Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit $\beta = \alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ derart, daß jede Teilsumme $\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_i$ auch eine Wurzel ist.*

Beweis. In der Tat, seien die s_i die Spiegelungen zu den einfachen Wurzeln α_i, die man benötigt, um $\beta - \alpha$ als Summe einfacher Wurzeln zu schreiben. Sie erzeugen eine Untergruppe der Weylgruppe, und da die Kerne der $\alpha_i^\vee$ bereits Wände zu einer Kammer der ganzen Weylgruppe sind, müssen sie erst recht Wände zu einer Kammer dieser von Spiegelungen erzeugten Untergruppe sein. Gibt es ein s_i mit $s_i\beta \in \beta + \mathbb{Z}_{<0}\alpha_i$, so können wir mit unseren Erkenntnissen 23.2.1.25 zu Wurzelketten und Induktion über n argumentieren. Sonst liegt β im „Abschluß der antidominanten Kammer zu den s_i“, ausgeschrieben also in der Menge $\{\lambda \in \langle R \rangle_\mathbb{Q} \mid \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0\}$. Ähnlich können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch annehmen, daß α im „Abschluß der dominanten Kammer zu den s_i“ liegt. Dann aber müßten beide Wurzeln im Schnitt dieser Kammerabschlüsse liegen, also von allen s_i festgehalten werden, und das kann nur sein, wenn sie gleich sind. □

Übungen

Übung 23.2.3.13. Gegeben ein unzerlegbares Wurzelsystem $R \subset V$ ist V eine irreduzible Darstellung der Weylgruppe, besitzt also außer 0 und V keine unter der Weylgruppe stabilen Teilräume. Hinweis: Gegeben ein invarianter Teilraum gibt es einen invarianten komplementären Teilraum und jede Spiegelung der Weylgruppe hält einen von beiden punktweise fest.

Übung 23.2.3.14 (**Lange und kurze Wurzeln**). Gegeben ein unzerlegbares Wurzelsystem gibt es unter der Weylgruppe höchstens zwei Bahnen von Wurzeln, und

diese sind auch jeweils selbst Wurzelsysteme. Genauer sind in einem unzerlegbaren Wurzelsystem über einem angeordneten Körper je zwei Wurzeln, die unter einem und gleichbedeutend jedem weylgruppeninvarianten Skalarprodukt dieselbe Länge haben, konjugiert unter der Weylgruppe. Des weiteren hängt das Längenverhältnis nicht von der Wahl eines weylgruppeninvarianten Skalarprodukts ab. Hinweis: Man beachte die Irreduzibilität der Standarddarstellung 23.2.3.13 und unsere Erkenntnisse zu nichtorthogonalen Wurzeln gleicher Länge 23.2.1.20.

Übung 23.2.3.15. Ein Wurzelsystem, in dessen Dynkindiagramm keine mehrfachen Striche auftauchen, heißt **einfach geschnürt** oder englisch **simply laced**. Man zeige: Gleichbedeutend ist, daß es ein weylgruppeninvariantes Skalarprodukt gibt, unter dem alle Wurzeln dieselbe Länge haben, und gleichbedeutend ist weiter, daß gilt $|\langle \alpha, \beta^\vee \rangle| \leq 1$ für alle Wurzeln α, β mit $\alpha \neq \pm\beta$.

23.2.4 Affine Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme*

23.2.4.1. Gegeben ein Wurzelsystem in einem Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null nennen wir die von seiner Weylgruppe und den Verschiebungen um Wurzeln erzeugte Gruppe von Affinitäten unseres Vektorraums die **affine Weylgruppe** unseres Wurzelsystems und sprechen von der **endlichen Weylgruppe**, wenn wir besonders betonen wollen, daß nicht diese affine Weylgruppe gemeint ist. Ist $R \subset V$ unser Wurzelsystem, so bezeichnen wir seine affine Weylgruppe mit $\mathcal{W} = \mathcal{W}(R)$. Bezeichnet W die endliche Weylgruppe und $\langle R \rangle \subset V$ das Wurzelgitter, so haben wir demnach eine kurze exakte Sequenz $\langle R \rangle \hookrightarrow \mathcal{W} \twoheadrightarrow W$, wobei die Surjektion jeder affinen Bewegung aus $\mathcal{W}$ ihren linearen Anteil zuordnet.

23.2.4.2 (**Terminologie bei affinen Weylgruppen**). Diese Terminologie weicht von der in der Literatur üblichen Terminologie ab. Bourbaki etwa definiert die affine Weylgruppe eines Wurzelsystems $R \subset V$ als diejenige affine Spiegelungsgruppe $W_{\mathrm{a}}(R) \subset \mathrm{Aff}^\times(V^*)$, die wir die affine Spiegelungsgruppe des dualen Wurzelsystems nennen und $\mathcal{W}(R^\vee)$ notieren. Ich will Bourbaki's Konventionen nicht folgen, weil im folgenden bei der Darstellung einer halbeinfachen Gruppe oder Liealgebra mit Wurzelsystem R die Gruppe $\mathcal{W}(R)$ die größere Rolle spielen wird. Ich nenne $\mathcal{W}(R^\vee)$ die **duale affine Weylgruppe von** R.

Satz 23.2.4.3 (**Affine Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme**). *Das Bilden der affinen Weylgruppe liefert über jedem angeordneten Körper eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

$$\{\textit{Wurzelsysteme}\} \xrightarrow{\sim} \{\textit{essentielle affine Spiegelungsgruppen}\}$$

23.2.4.4. Ich breche den Beweis in eine Reihe von Lemmata auf. Genauer zeigen wir in 23.2.4.5, daß die affine Weylgruppe eines Wurzelsystems in der Tat

eine essentielle affine Spiegelungsgruppe ist, und konstruieren in 23.2.4.9 und seinem Beweis eine inverse Abbildung. Die Wurzelsysteme selbst wurden bereits in 23.2.3.7 klassifiziert.

Lemma 23.2.4.5 (**Affine Weylgruppen als affine Spiegelungsgruppen**). *Die affine Weylgruppe eines Wurzelsystems R über einem angeordneten Körper ist eine affine Spiegelungsgruppe mit den affinen Ebenen $H_{\alpha,n} := \{v \mid \langle v, \alpha^\vee \rangle = n\}$ für $\alpha \in R$ und $n \in \mathbb{Z}$ als Spiegel.*

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{H} := \{H_{\alpha,n} \mid \alpha \in R,\ n \in \mathbb{Z}\}$ von Hyperebenen. Die Spiegelungen $s_{\alpha,n}$ mit Fixpunktmenge $H_{\alpha,n}$ und linearem Anteil s_α stabilisieren $\mathcal{H}$, und da $\mathcal{H}$ auch lokal endlich ist, muß $\mathcal{H}$ nach 23.1.6.1 gerade die Menge aller Spiegel der von den $s_{\alpha,n}$ erzeugten affinen Spiegelungsgruppe $\mathcal{W}'$ sein. Offensichtlich gilt $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$, aber da $s_{\alpha,1}s_{\alpha,0}$ gerade die Verschiebung $\lambda \mapsto \lambda + \alpha$ um die Wurzel $\alpha \in R$ ist, gilt auch umgekehrt $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$ und mithin $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$. □

Definition 23.2.4.6. Gegeben eine affine Spiegelungsgruppe heißt ein Punkt des zugrundeliegenden affinen Raums ein **spezieller Punkt**, wenn es für jeden Spiegel unserer Gruppe einen parallelen Spiegel unserer Gruppe gibt, die durch besagten Punkt geht.

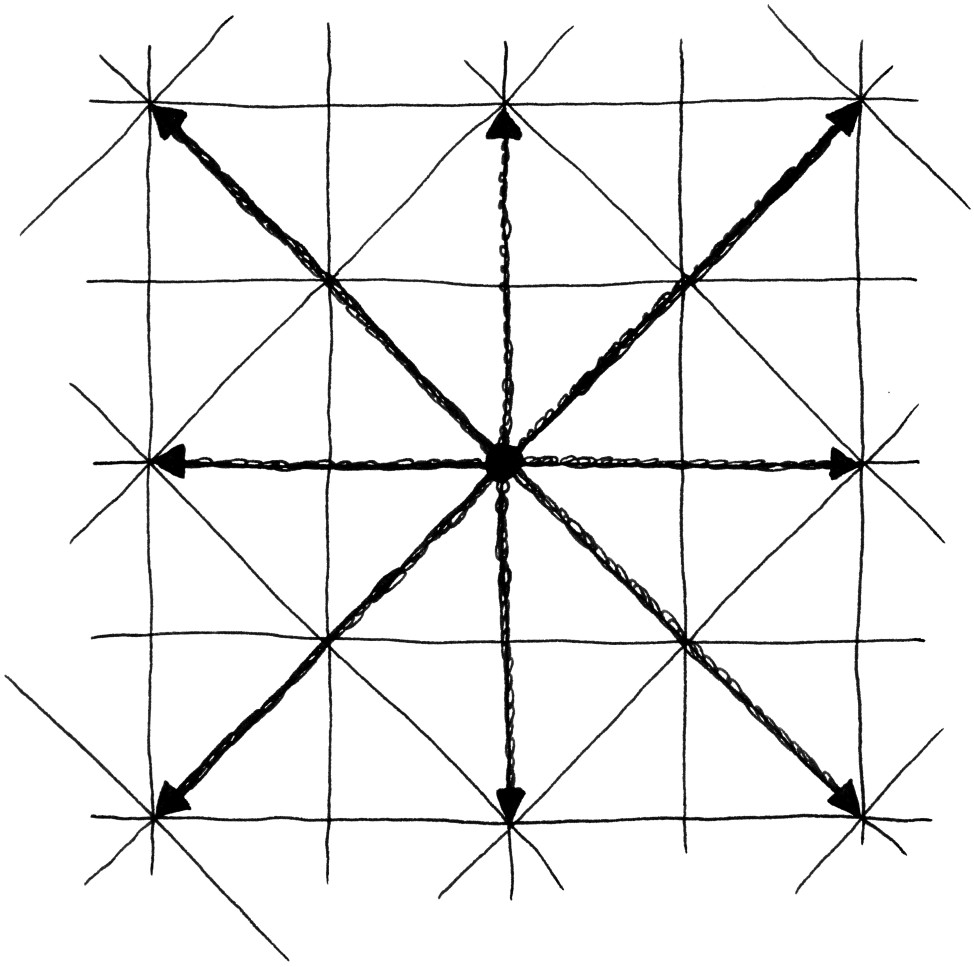
Beispiel 23.2.4.7. Die speziellen Punkte der affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems $R \subset V$ über einem angeordneten Körper sind genau die Punkte, an denen alle Kowurzeln ganzzahlige Werte annehmen. Sie heißen die **ganzen Gewichte** unseres Wurzelsystems. Die Menge aller ganzen Gewichte von R notieren wir

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(R \subset V) := \{v \in V \mid \langle v, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in R\}$$

Lemma 23.2.4.8 (**Existenz spezieller Punkte**). *Für jede affine Spiegelungsgruppe gibt es mindestens einen speziellen Punkt.*

Beweis. Betrachten wir einen Alkoven der Spiegelungsgruppe aller linearen Anteile unserer affinen Spiegelungsgruppe und wählen für jede Wand dieses Alkoven einen darauf senkrechten Vektor, so sind besagte Vektoren linear unabhängig nach 23.1.8.6. Wählen wir zu jeder Spiegelung an einer dieser Wände ein Urbild in der affinen Spiegelungsgruppe, so haben die zugehörigen Spiegel folglich nichtleeren Schnitt. Wir behaupten, daß jeder Punkt aus diesem Schnitt ein spezieller Punkt ist. In der Tat erzeugen ja unsere Urbilder eine Untergruppe unserer affinen Spiegelungsgruppe, die besagten Punkt festhält und die surjektiv auf die Gruppe aller linearen Anteile unserer affinen Gruppe geht. □

Lemma 23.2.4.9 (**Essentielle affine Spiegelungsgruppen**). *Jede essentielle affine Spiegelungsgruppe ist isomorph zur affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems.*



Die acht Vektoren eines Wurzelsystems vom Typ B_2 in der Papierebene und die Spiegel seiner affinen Weylgruppe.

Beweis. Sei (W, E) unsere Spiegelungsgruppe. Wir wählen ein invariantes Skalarprodukt auf dem Richtungsraum. Die Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller ihrer Spiegel, und jede Parallelenklasse von Spiegeln ist offensichtlich von der Gestalt

$$\{H + nv\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

für einen Spiegel H und einen darauf senkrechten Richtungsvektor v. Die Verschiebung um $\alpha = 2v$ gehört notwendig zu W als die Verknüpfung $s_{H+v} \circ s_H$. Bezeichnet nun R die Menge aller so konstruierten Vektoren α und ist $e \in E$ ein spezieller Punkt und W_e seine Standgruppe, so schränkt die Verknüpfung in unserer Gruppe ein zu einer Bijektion

$$W_e \times \langle R\rangle \ \tilde{\to}\ W$$

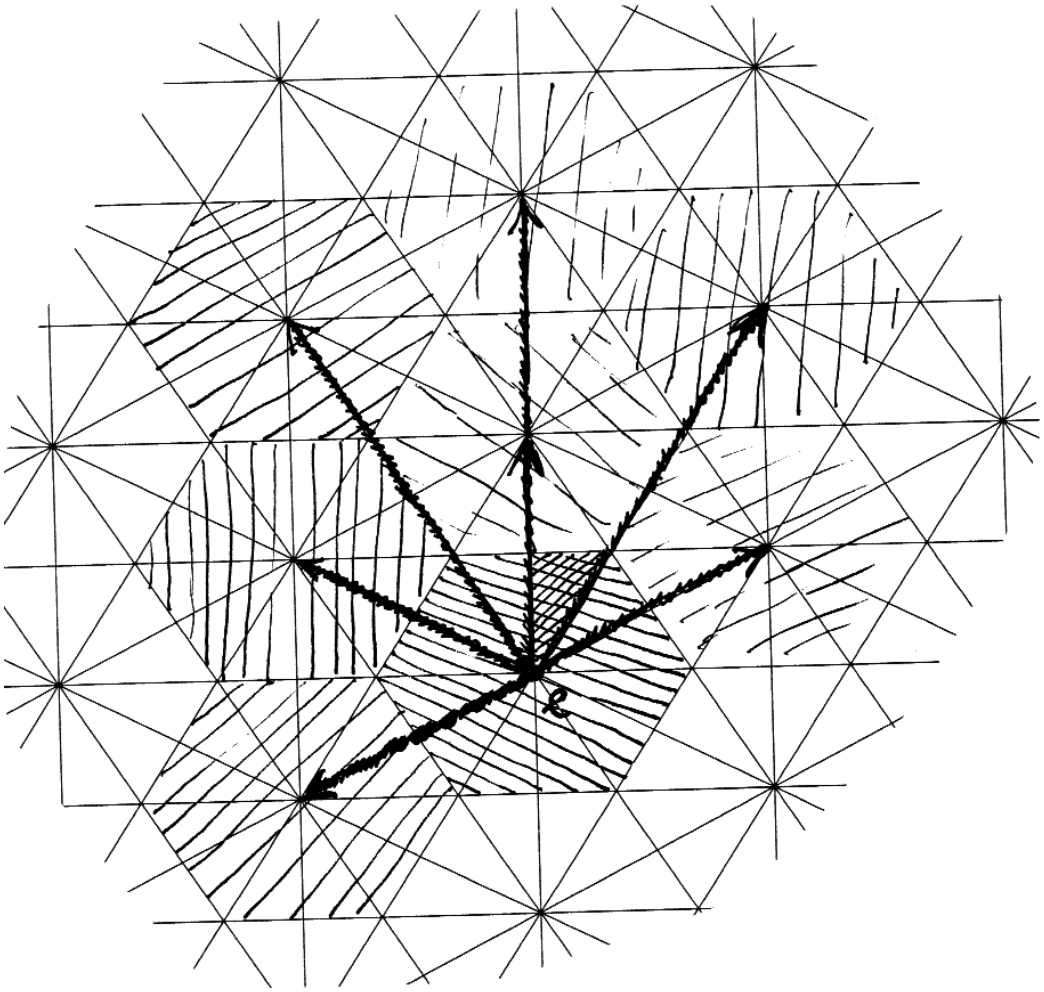
In der Tat liegen nämlich alle Spiegelungen bereits im Bild dieser Abbildung und die Injektivität ist eh klar. Ist W essentiell, so spannt folglich R den Raum der Richtungsvektoren auf. Weiter ist mit e auch $\alpha + e$ ein spezieller Punkt für alle $\alpha \in R$, und das zeigt umgehend, daß R ein Wurzelsystem ist und W seine affine Weylgruppe. □

23.2.4.10 (**Kristallographische endliche Spiegelungsgruppen**). Ist eine endliche lineare reelle Spiegelungsgruppe kristallographisch und ist der Ursprung ihr einziger Fixpunkt, so ist sie die Standgruppe des Ursprungs in einer essentiellen affinen Spiegelungsgruppe. In der Tat besitzt jeder Spiegel dann eine Gleichung, die auf dem Gitter nur ganzzahlige Werte annimmt. Alle Parallelen durch Gitterpunkte zu Spiegeln bilden deshalb ein lokal endliches System von Hyperebenen und nach 23.1.6.1 ist dieses System das Sytem aller Spiegel einer affinen Spiegelungsgruppe, von der man leicht sieht, daß sie essentiell sein muß.

23.2.4.11 (**Klassifikation der affinen reellen Spiegelungsgruppen**). Wir haben damit die affinen reellen Spiegelungsgruppen vollständig klassifiziert: Nach 23.1.12.4 zerfällt jede affine reelle Spiegelungsgruppe in einen endlichen und einen essentiellen Faktor, deren Isomorphieklassen eindeutig bestimmt sind. Nun gibt 23.1.9.7 im Verbund mit 23.1.9.5 eine Klassifikation der endlichen Spiegelungsgruppen durch ihre Coxeter-Graphen zusammen mit der Dimension ihrer Fixpunktmenge, und 23.2.4.3 gibt eine Klassifikation der essentiellen affinen Spiegelungsgruppen durch Wurzelsysteme, die hinwiederum nach 23.2.2.14 eindeutig in unzerlegbare Wurzelsysteme zerfallen. Diese unzerlegbaren Wurzelsysteme schließlich haben wir in 23.2.3.7 durch ihre Dynkin-Diagramme klassifiziert.

Übungen

Übung 23.2.4.12. Gegeben ein Wurzelsystem R mit einem System positiver Wurzeln R^+ gibt es für seine affine Weylgruppe genau einen Alkoven, der in der do-



Eine affine Spiegelungsgruppe, die genau genommen nicht orthogonal ist für die Standardmetrik der Papierebene. Eingezeichnet ein spezieller Punkt e, doppelt schraffiert ein Alkoven mit e im Abschluß. Das Sechseck darum besteht aus zwölf Alkoven, die die Bahn des doppelt schraffierten Alkoven unter der Standgruppe W_e bilden. Durch Verschieben dieses Sechsecks mit den Vektoren des Wurzelgitters erhalten wir „eine überlappungsfreie Überdeckung der Ebene“. Das illustriert unsere Erkenntnis

$$W_e \times \langle R \rangle \ \tilde{\to} \ W$$

aus dem Beweis von Lemma 23.2.4.9.

minanten Kammer enthalten ist und in dessen Abschluß der Ursprung liegt. Er heißt der **fundamentale dominante Alkoven**. Alle Wände der dominanten Weylkammer sind auch Wände des fundamentalen dominanten Alkoven.

23.2.5 Höchste Wurzel und fundamentaler Alkoven*

Lemma 23.2.5.1. *Seien (V, s) ein Skalarproduktraum und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V aus Vektoren, die paarweise schwach stumpfe Winkel einschließen. Sei A der von den v_ν erzeugte Kegel. So gilt*

$$\{w \in V \mid s(v, w) \geq 0 \ \forall v \in A\} \subset A$$

23.2.5.2 (**Geometrie von Wurzeln und Weylkammern**). Gegeben $V \supset R \supset R^+$ ein Vektorraum über einem angeordneten Körper mit einem Wurzelsystem und einem System positiver Wurzeln können wir ein weylgruppeninvariantes Skalarprodukt s wählen und die einfachen Wurzeln $\alpha_\nu \in V$ betrachten sowie die Urbilder $v_\nu := 2\alpha_\nu / s(\alpha_\nu, \alpha_\nu)$ ihrer Kowurzeln unter dem zugehörigen Paarmorphismus $\mathrm{paar}_s : V \xrightarrow{\sim} V^*$. In dieser Situation besagt unser Lemma, daß der von den positiven Wurzeln erzeugte Kegel die dominante Weylkammer umfaßt.

Beweis. Wir erklären $w_\nu \in V$ durch $s(w_\nu, v_\mu) = \delta_{\nu\mu}$ und zeigen $w_\nu \in A \ \forall \nu$. Wir beschränken uns auf $\nu = 1$ und schreiben $w_1 = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ und müssen zeigen $a_\nu \geq 0$ für alle ν. Als Erstes bemerken wir $a_1 = s(w_1, w_1) > 0$. Bringen wir nun alle Summanden mit $a_i \geq 0$ auf die andere Seite, so ergibt sich

$$w_1 - \sum_{a_i \geq 0} a_i v_i = \sum_{a_j < 0} a_j v_j$$

Das Skalarprodukt der rechten Seite mit der linken Seite ist ≤ 0, da wie bereits gezeigt gilt $a_1 \geq 0$. Also sind beide Seiten Null. □

23.2.5.3 (**Alkovenabschlüsse endlicher Spiegelungsgruppen**). Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem angeordneten Körper und eine endliche Spiegelungsgruppe $W \subset \mathrm{GL}(V)$ und ein Alkoven $C \subset V$ hat nach 23.1.7.4 die Bahn Wv jedes Vektors $v \in V$ genau einen Repräsentanten $\hat{v}$ im Abschluß $\bar{C}$ unseres Alkoven. Wählen wir ein W-invariantes Skalarprodukt auf V und Vektoren $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, die senkrecht auf den Wänden $H_1, \ldots, H_r$ von C stehen und jeweils auf derselben Seite von H_i liegen wie C, und bezeichnen mit $K := k_{\geq 0}\alpha_1 + \ldots + k_{\geq 0}\alpha_r$ den von den α_i erzeugten Kegel, so kann $\hat{v}$ charakterisiert werden als das einzige Element der Bahn Wv mit

$$(\hat{v} + K) \cap Wv = \{\hat{v}\}$$

In der Tat ist quasi per definitionem das Skalarprodukt von einem Vektor aus $\bar{C}$ mit einem Vektor aus dem Kegel K nie negativ, so daß die Addition eines von Null verschiedenen Vektors w aus diesem Kegel unser $\hat{v}$ länger machen muß und die Summe $\hat{v} + w$ nicht in derselben Bahn liegen kann wie $\hat{v}$. Liegt andererseits v nicht in $\bar{C}$, so wird es durch einen der Spiegel H_i von C getrennt und dann gilt $s_i v \in v + k_{>0}\alpha_i$ und folglich $v \neq s_i v \in v + K$. so erkennen wir zusätzlich, daß $\hat{v}$ auch charakterisiert werden kann als das einzige Element der Bahn Wv mit

$$(\hat{v} + k_{>0}\alpha_i) \cap Wv = \{\hat{v}\} \quad \forall i$$

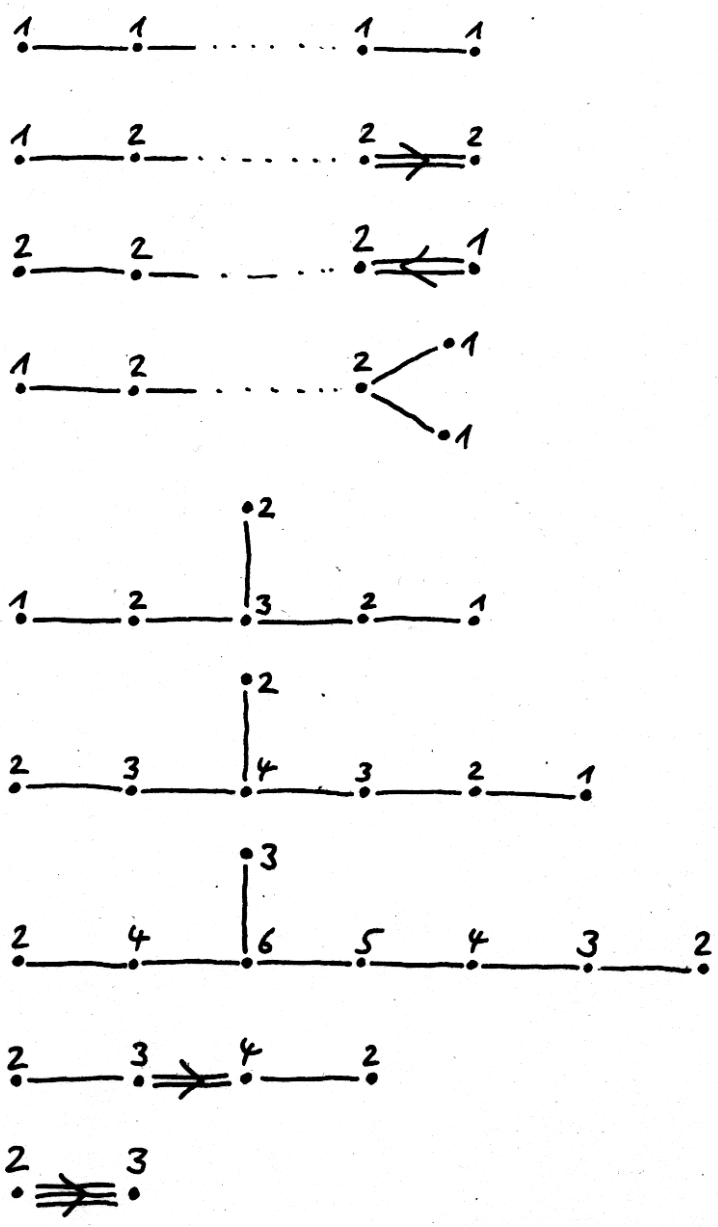
Definition 23.2.5.4. Gegeben $V \supset R \supset \Pi$ ein Vektorraum mit einem basierten Wurzelsystem erklären wir eine Teilordnung $\geq$ auf V durch die Vorschrift $\mu \geq \lambda$ wenn gilt $\mu \in \lambda + |\Pi\rangle$ für $|\Pi\rangle$ das von Π erzeugte Untermonoid von V. Es ist üblich, größte Elemente von Teilmengen von V in Bezug auf diese Ordnung als deren **höchste Elemente** zu bezeichnen.

Proposition 23.2.5.5 (**Höchste Elemente ganzer Weylbahnen**). *Gegeben $R \supset \Pi$ ein unzerlegbares basiertes Wurzelsystem und $W\lambda \subset \mathfrak{X}$ eine ganze Weylgruppenbahn ist ihr Repräsentant $\hat{\lambda} \in W\lambda \cap \bar{C}$ im Abschluß der dominanten Weylkammer stets das höchste Element von $W\lambda$.*

Beweis. Der eindeutig bestimmte Repräsentant $\hat{\lambda} \in W\lambda \cap \bar{C}$ unserer Bahn im Abschluß der dominanten Weylkammer muß nach unseren Erkenntnissen 23.2.5.3 über Alkovenabschlüsse endlicher Spiegelungsgruppen maximal sein in Bezug auf die in 23.2.5.4 erklärte Teilordnung. Für jeden anderen Repräsentanten $\mu \in W\lambda$ gibt es dahingegen einen Spiegel und sogar eine Wand von C, die ihn von C trennt, und damit eine einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$ mit $\langle \mu, \alpha^\vee \rangle < 0$. Dieser Wert ist dann eine ganze Zahl n mit $s_\alpha(\mu) = \mu + n\alpha$ und zeigt, daß μ nicht maximal sein kann in seiner W-Bahn in Bezug auf die in 23.2.5.4 erklärte Teilordnung. □

Proposition 23.2.5.6. *In jedem unzerlegbaren basierten Wurzelsystem $R \supset \Pi$ gibt es eine* **höchste Wurzel**. *Sie ist die einzige positive Wurzel $\gamma \in R^+$ mit $\gamma + \alpha \notin R$ für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$. Gibt es in unserem System Wurzeln verschiedener Länge, so ist die höchste Wurzel eine lange Wurzel.*

23.2.5.7 (**Kowurzel der höchsten Wurzel**). Nach 23.2.5.5 und dem anschließenden Beweis sind im Fall eines unzerlegbaren basierten Wurzelsystems die höchste Wurzel beziehungsweise die höchste Wurzel und die höchste kurze Wurzel die einzigen Wurzeln im Abschluß der dominanten Weylkammer. Mit 23.2.1.12 folgt, daß die Kowurzel der höchsten Wurzel im Fall eines einfach geschnürten Systems die höchste Kowurzel ist und sonst die höchste kurze Kowurzel. Die Kowurzel der höchsten kurzen Wurzel dahingegen ist dann die höchste Kowurzel.



Die Koeffizienten an jedem Knoten in diesem Bild sind die Koeffizienten der entsprechenden einfachen Wurzel bei einer Darstellung der höchsten Wurzel als Linearkombination der einfachen Wurzeln. Es mag eine gute Übung sein, diese Tafel zu überprüfen.

Beweis. In jedem basierten Wurzelsystem besitzt nach 23.2.5.5 jede Weylgruppenbahn von Wurzeln $W\beta \subset R$ ein höchstes Element $\hat{\beta}$. Ist unser Wurzelsystem R unzerlegbar, so gibt es nach 23.2.3.14 in R entweder nur eine Weylgruppenbahn oder Wurzeln von verschiedener Länge und zwei Weylgruppenbahnen, die Bahn der langen Wurzeln und die Bahn der kurzen Wurzeln. Im letzteren Fall gibt es wieder nach 23.2.3.14 in R eine **höchste kurze Wurzel** sowie eine höchste lange Wurzel. Ein kurzer Blick auf die möglichen Lagen von Wurzelpaaren 23.2.1.20 zeigt dann, daß eine kurze Wurzel nie in R maximal sein kann in Bezug auf unsere Teilordnung 23.2.5.4, so daß die höchste lange Wurzel stets auch die höchste Wurzel überhaupt sein muß. Die alternative Charakterisierung der höchsten Wurzel folgt damit unmittelbar aus unseren Erkenntnissen zu Wurzelketten 23.2.1.25. □

23.2.5.8 (**Weiteres zur höchsten kurzen Wurzel**). Sprechen wir im Fall eines einfach geschnürten unzerlegbaren basierten Wurzelsystems von der **höchsten kurzen Wurzel**, so meinen wir schlicht die höchste Wurzel. Diese Konvention erlaubt im folgenden einfachere Formulierungen. Schreiben wir die höchste Wurzel eines unzerlegbaren basierten Wurzelsystems als Summe einfacher Wurzeln, so muß dabei jede einfache Wurzel mit positivem Koeffizienten auftauchen. In der Tat können wir ja nach 23.2.5.6 sogar von jeder positiven Wurzel durch Addition einfacher Wurzeln zur höchsten Wurzel kommen. Schreiben wir die höchste kurze Wurzel eines unzerlegbaren basierten Wurzelsystems als Summe einfacher Wurzeln, so muß immer noch jede einfache Wurzel mit positivem Koeffizienten auftauchen. Das folgt durch Übergang zum dualen System.

Satz 23.2.5.9 (**Wände des fundamentalen dominanten Alkoven**). *Gegeben ein unzerlegbares basiertes Wurzelsystem hat der fundamentale dominante Alkoven seiner affinen Weylgruppe außer den Wänden der dominanten Weylkammer nur noch eine weitere Wand. Sie besteht aus den Punkten, auf denen die höchste Kowurzel den Wert Eins annimmt.*

Beweis. Die Spiegel der affinen Weylgruppe sind ja gerade die Hyperebenen, auf denen eine Kowurzel einen ganzzahligen Wert annimmt. Nehmen an einer Stelle alle einfachen Kowurzeln positive Werte an und die höchste Kowurzel einen Wert kleiner als Eins, so nehmen dort alle Kowurzeln einen Wert zwischen Null und Eins an. Diese Bedingung beschreibt mithin einen Alkoven in der dominanten Weylkammer, und es ist klar, daß der Ursprung in ihrem Abschluß liegt und es sich folglich um den fundamentalen dominanten Alkoven handeln muß. □

23.2.5.10. Die Bilder auf der Liste nach 23.1.11.1 zeigen die Coxetergraphen der affinen Weylgruppen aller unzerlegbaren Wurzelsysteme.

Ergänzung 23.2.5.11. Gegeben eine nichttriviale endliche Spiegelungsgruppe bezeichnet man den Quotienten

$$2(\text{Zahl der Spiegelungen})/(\text{Zahl der Wände eines Alkoven})$$

als die **Coxeterzahl** unserer endlichen Spiegelungsgruppe. Sie ist eine natürliche Zahl, genauer kann sie auch beschrieben als die Ordnung des Produkts aller Spiegelungen an den Wänden eines festen Alkoven: Alle derartigen Produkte, in beliebiger Reihenfolge und für beliebige Alkoven, bilden eine Konjugationsklasse, so daß es hier auf Wahlen nicht ankommt.

Ergänzung 23.2.5.12. Gegeben ein unzerlegbares Wurzelsystem R erklärt man seine **duale Coxeterzahl** als $\langle \rho, \gamma^\vee \rangle + 1$ für ρ die Halbsumme der Wurzeln aus einem System positiver Wurzeln und γ die höchste Wurzel dieses Systems.

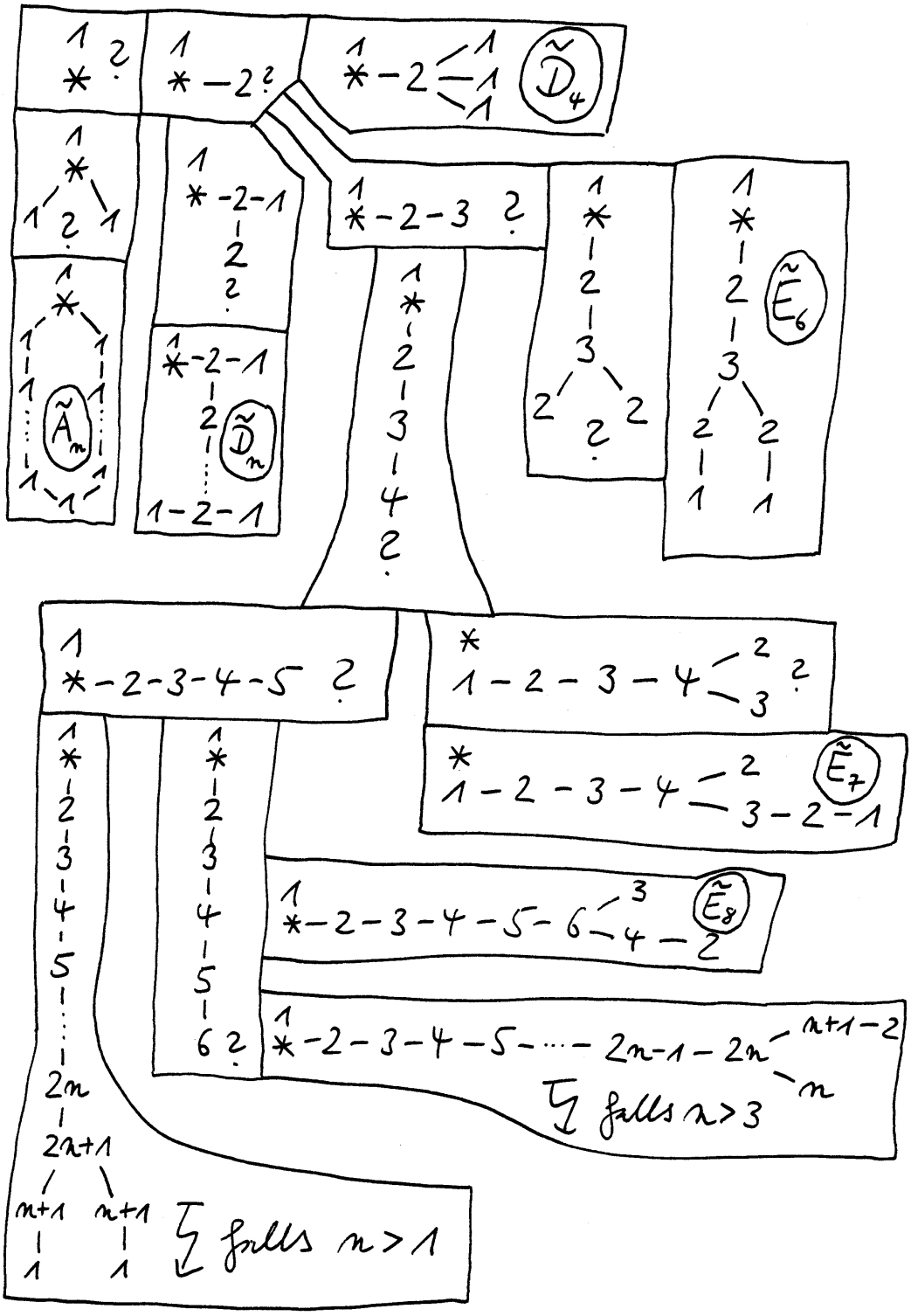
23.2.5.13 (**Klassifikation von Wurzelsystemen nach Vogan**). Sei R ein unzerlegbares Wurzelsystem und $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ eine Basis und $\alpha_0 := -\kappa$ das Negative der höchsten kurzen Wurzel κ. So gilt eine Relation der Gestalt

$$\alpha_0 + n_1\alpha_1 + \ldots + n_r\alpha_r = 0$$

und alle n_i sind darin nach 23.2.5.8 positive natürliche Zahlen $n_i \geq 1$ und es gilt $\langle \alpha_0, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$ für $1 \leq i \leq r$. Sicher gilt für $0 \leq j \leq r$ die Identität

$$\langle \alpha_0, \alpha_j^\vee \rangle + n_1\langle \alpha_1, \alpha_j^\vee \rangle + \ldots + n_r\langle \alpha_r, \alpha_j^\vee \rangle = 0$$

Nun nehmen wir erst einmal zusätzlich an, unser Wurzelsystem sei einfach geschnürt, also $|\langle \alpha, \beta^\vee \rangle| \leq 1$ für alle $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha \neq \pm\beta$, und es habe mehr als zwei Wurzeln, also $\alpha_0 \neq -\alpha_i$ für $1 \leq i \leq r$. Es folgt $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \in \{0, -1\}$ falls $i \neq j$. Malen wir dann das sogenannte „erweiterte Dynkindiagramm“, also je einen fetten Punkt alias Knoten für das Negative der höchsten kurzen Wurzel und jede der einfachen Wurzeln $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ und dazwischen jeweils einen Verbindungsstrich falls $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = -1$, und schreiben den Wert n_i an den Knoten α_i und den Wert 1 an den Knoten α_0, so bedeutet obige Relation in Worten: An jedem Knoten ist die Summe der Werte der Nachbarknoten das Doppelte des Wertes unseres Knotens selber. Malen wir im folgenden der besseren Übersichtlichkeit halber für α_0 einen Stern statt einem fetten Punkt, so können wir leicht sehen, welche Möglichkeiten das läßt. Der geneigte Leser sollte die Argumentation anhand des nebenstehenden Bildes unschwer nachvollziehen können. Als Endresultate bleiben nur die Diagramme $\tilde{A}_n$ für $n \geq 2$ und $\tilde{D}_n$ für $n \geq 4$ sowie $\tilde{E}_n$ für $n = 6, 7, 8$ aus nebenstehendem Diagramm mit jeweils $n + 1$ Knoten und n einfachen Wurzeln. Nun gehen wir noch die Klassifikation der nicht einfach geschnürten unzerlegbaren Systeme an. Wir wissen bereits aus 23.2.3.14, daß es

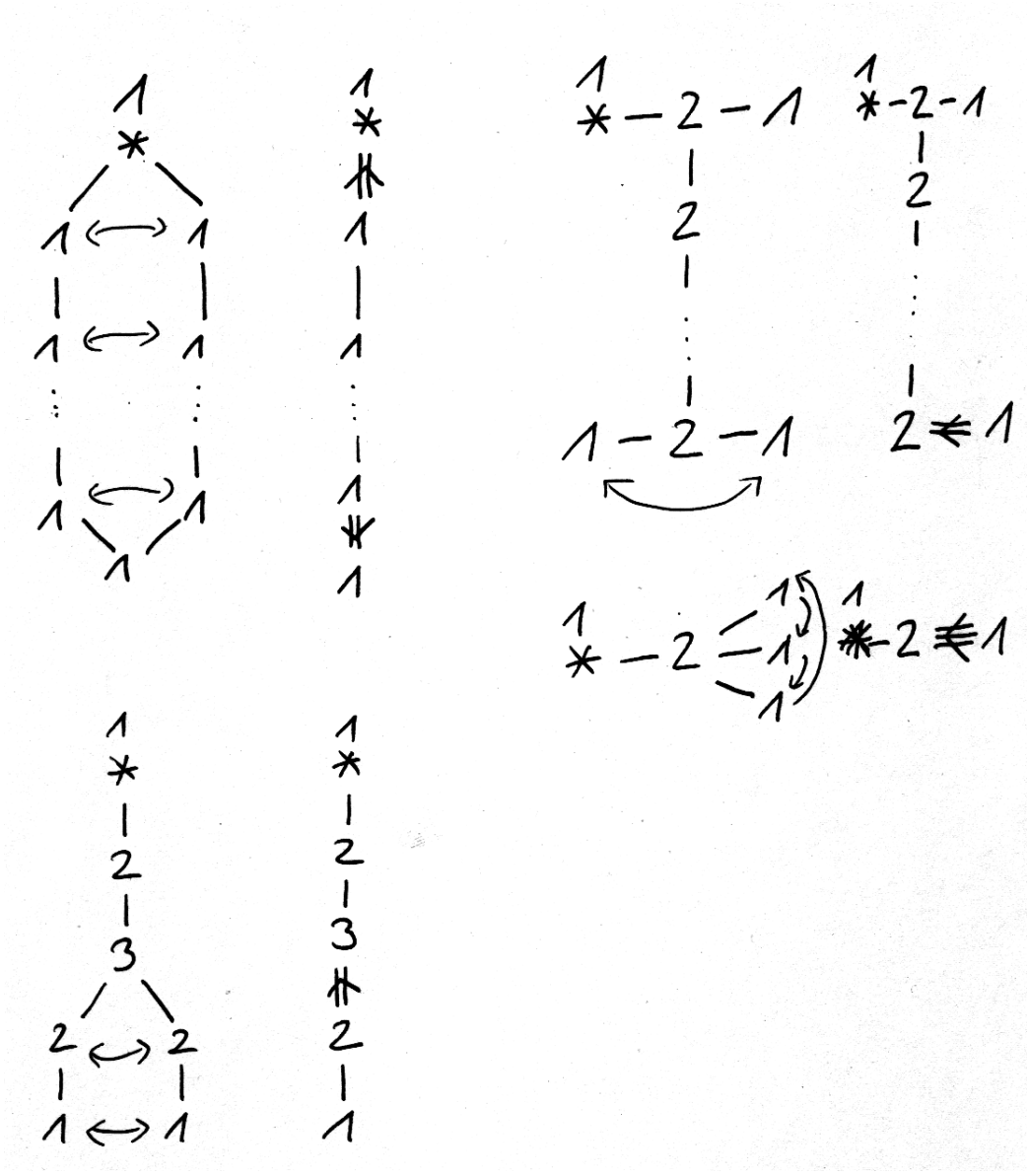

$\tilde{D}_4$
$\tilde{A}_n$
$\tilde{D}_n$
$\tilde{E}_6$
$\tilde{E}_7$
$\tilde{E}_8$
falls $n>3$
falls $n>1$

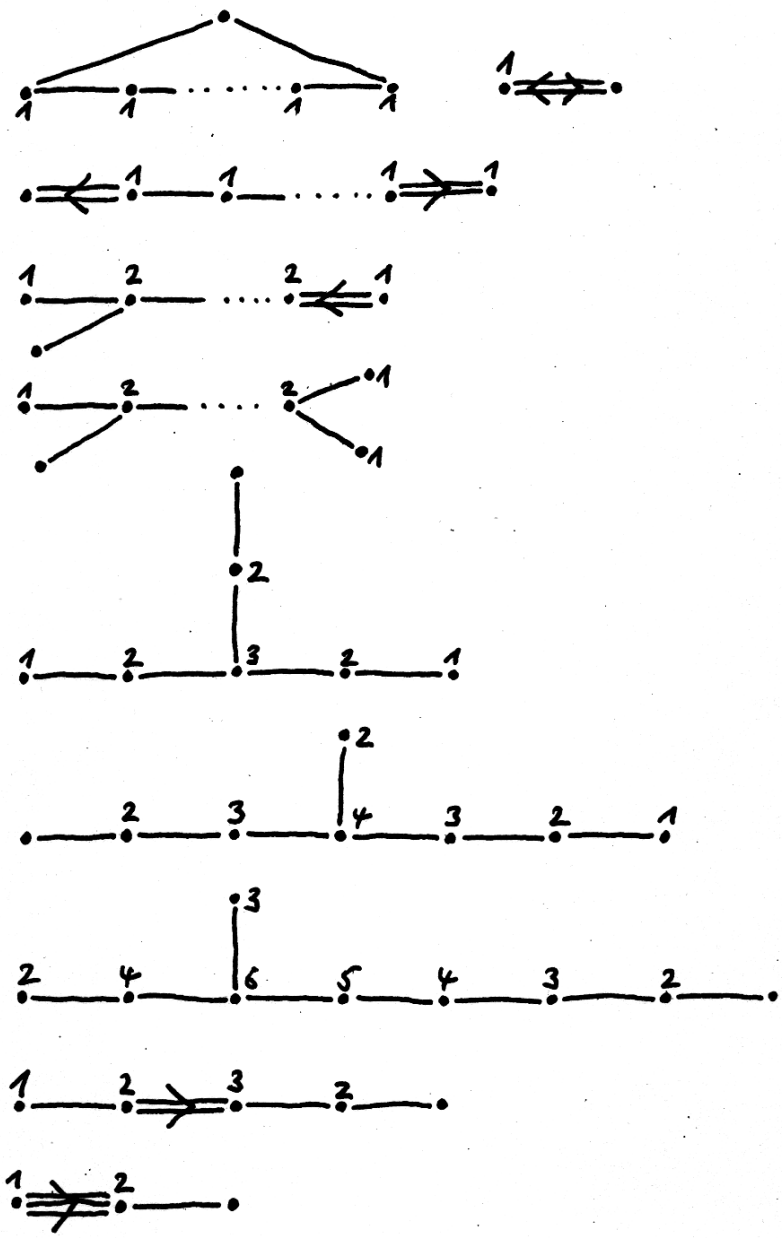
darin genau zwei Wurzellängen gibt. Mithin gibt es außer Kanten höchstens eine Sorte von mehrfachen Pfeilen. Es ist klar, daß wir bei einem einfach geschnürten Diagramm mit einem Automorphismus der Ordnung Zwei oder Drei landen, wenn wir der Teil unseres Diagramms aus langen Wurzeln je nach dem Längenverhältnis der langen und kurzen Wurzeln durch zwei oder drei disjunkte Kopien ersetzen und unsere mehrfachen bepfeilten Kanten von langen zu kurzen Wurzeln durch je eine einfache Kante von jeder der Kopien. So erhalten wir eine eineindeutige Entsprechung zwischen bewerteten erweiterten Dynkindiagrammen mit mehrfachen Pfeilen und einfach geschnürten bewerteten erweiterten Dynkindiagrammen mit einem Automorphismus der Ordnung Zwei oder Drei, bei dem es keine Kanten zwischen verschiedenen Punkten ein- und derselben Bahn gibt und unter dem der ausgezeichnete Punkt fest bleibt. So erhalten wir die zusätzlichen Möglichkeiten, die in nebenstehendem Bild dargestellt sind. Ich habe mir nicht überlegt, ob man beim Nachweis der Existenz von Wurzelsystemen mit diesen erweiterten Dynkindiagrammen noch Teile der Argumentation weiter vereinfachen kann. Die ihrerseits leicht zu zeigende Proposition 23.1.10.4 zeigt sofort, daß unsere erweiterten Dynkindiagramme alle durch Vektoren in Skalarprodukträumen realisiert werden können. Dann muß man nur verwenden, daß das Gruppenerzeugnis der einfachen Wurzeln weylgruppenstabil ist und jeweils nur endlich viele Vektoren gegebener Länge enthält, so daß die Weylgruppe selber endlich sein muß.

23.2.5.14 (**Coxetergrapen affiner Spiegelungsgruppen**). Wir bestimmen nun die Coxetergraphen der affinen Weylgruppen unserer Wurzelsysteme. Es reicht, das für unzerlegbare Wurzelsysteme zu leisten. Der Weg ist durch 23.2.5.9 vorgezeichnet. Gegeben ein unzerlegbares Wurzelsystem R mit Basis $\Pi \subset R$ bestimmen wir zunächst die höchste kurze Wurzel $\kappa \in R$. Dann bilden wir die Matrix der $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ mit $\alpha, \beta \in \Pi \sqcup \{-\kappa\}$ und stellen diese Information wie in 23.2.3.4 in Form eines Diagramms dar, das wir in diesem Fall das **erweiterte Dynkindiagramm** unseres Wurzelsystems nennen. Wir notieren dabei den einzigen zusätzlich möglichen Fall $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = -2 = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ durch einen Doppelstrich mit Pfeilen in beide Richtungen. Außerdem schreiben wir an jeden Knoten $\alpha \in \Pi$ seinen Koeffizienten n_α in der Darstellung

$$\kappa = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$$

unserer Wurzel κ, so daß nur der zusätzliche Knoten keinen Koeffizienten hat. Die so entstehenden erweiterten Dynkindiagramme sind in nebenstehendem Bild aufgelistet. Die Coxeterdiagramme der affinen Weylgruppen liest man daraus ab, indem man wie bei den normalen Dynkindiagrammen vorgeht und zusätzlich etwaige doppelt bepfeilte Doppelkanten in mit ∞ bezeichnete Kanten umwandelt.





Die erweiterten Dynkindiagramme. Die Koeffizienten an jedem Knoten in diesem Bild sind die Koeffizienten der entsprechenden einfachen Wurzel bei einer Darstellung der Wurzel mit der höchsten Kowurzel als Linearkombination der einfachen Wurzeln. Es mag eine gute Übung sein, diese Tafel zu überprüfen. Ich schlage die Notation $\hat{Z}$ für das erweiterte Dynkindiagramm zu einem Dynkindiagramm Z vor, da die Notation $\tilde{Z}$ bereits für das dual erweiterte Diagramm vergeben ist.

Die zugehörigen Cosinusmatrizen haben nach 23.2.1.20 die Einträge

$$\|\alpha\|^{-1}\|\beta\|\langle\alpha,\beta^\vee\rangle/2$$

und entstehen also aus der „erweiterten Cartanmatrix“ der $\langle\alpha,\beta^\vee\rangle$ bis auf den Faktor 2 durch Konjugation mit der Diagonalmatrix der Längen unserer Wurzeln. Natürlich gilt

$$0 = \langle -\kappa,\beta^\vee\rangle + \sum n_\alpha\langle\alpha,\beta^\vee\rangle$$

für alle β und wir erhalten so einen von Null verschiedenen Vektor mit nichtnegativen Einträgen im Kern der „erweiterten Cartanmatrix“ und dann durch Multiplikation mit unserer Diagonalmatrix auch einen von Null verschiedenen Vektor mit nichtnegativen Einträgen im Kern der Cosinusmatrix der affinen Weylgruppe. Das ist genau der Vektor, den wir beim Beweis von 23.1.11.1 haben vom Himmel fallen lassen.

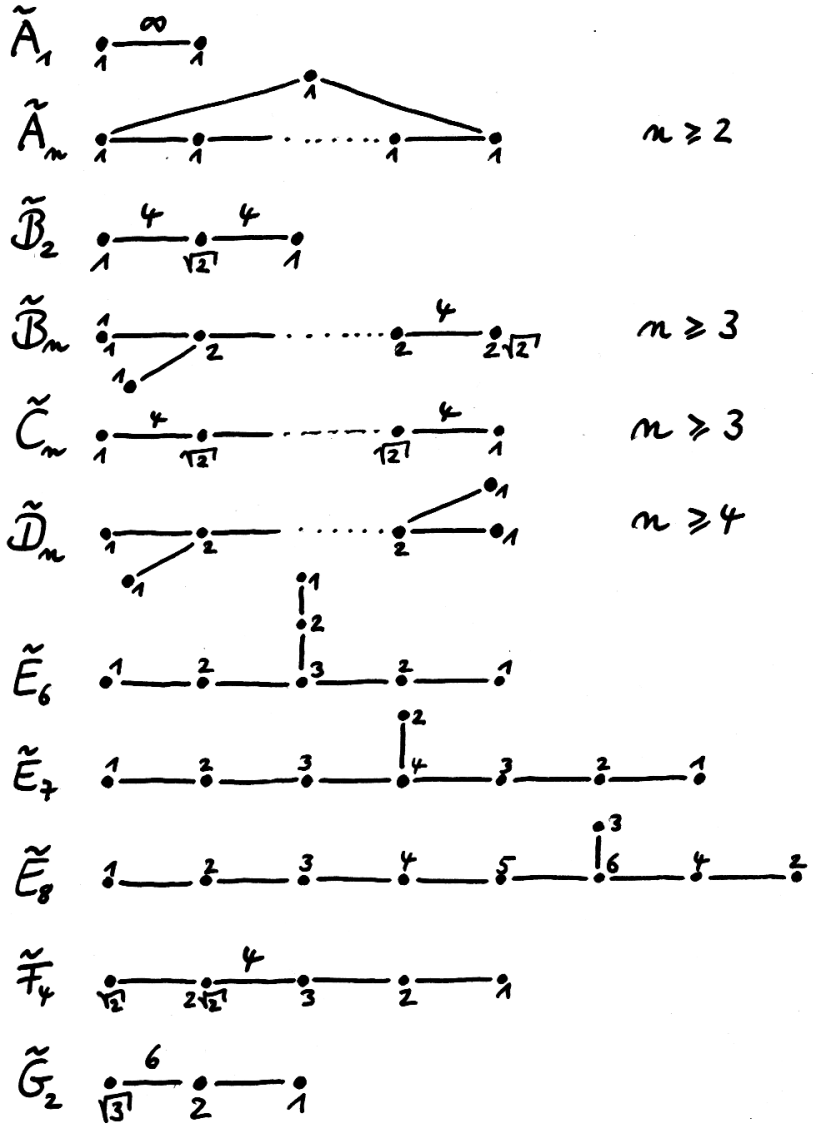
Ergänzung 23.2.5.15 (**Terminologisches zu erweiterten Dynkindiagrammen**). Der **graphe de Dynkin complété** alias das „vervollständigte Dynkindiagramm“ im Sinne von Bourbaki ist zu unserem erweiterten Dynkindiagramm dual in dem Sinne, daß die Konstruktion unseres erweiterten Dynkindiagramms beschrieben werden kann als die Verkettung „drehe alle Pfeile um, bilde dann das vervollständigte Dynkindiagramm und drehe wieder alle Pfeile um“. Man erhält in anderen Worten das vervollständigte Diagramm, indem man dieselbe Konstruktion mit $\Pi \sqcup \{-\gamma\}$ für γ die höchste Wurzel durchführt, die mit $\Pi \sqcup \{-\kappa\}$ für κ die höchste kurze Wurzel unser erweitertes Dynkindiagramm geliefert hat. Ich nenne es das „vervollständigte Dynkindiagramm“ auch das **dual erweiterte Dynkindiagramm**.

23.2.5.16. Ein ganzes Gewicht λ eines Wurzelsystems heißt **minuscul**, wenn gilt $0 \le \langle\lambda,\alpha^\vee\rangle \le 1\ \forall\alpha \in R^+$. Manche Autoren nennen abweichend nur die von Null verschiedenen derartigen Gewichte minuscul. Geometrisch bedeutet unsere Bedingung, daß das Gewicht λ im Abschluß des fundamentalen dominanten Alkoven zur affinen Weylgruppe liegt. Offensichtlich ist jedes minuscule Gewicht λ das kleinste Element seiner Nebenklasse $\lambda + \langle R\rangle$ im Abschluß der dominanten Weylkammer, für die übliche Teilordnung der Gewichte.

23.2.5.17 (**Irreduzible Darstellungen mit minusculem höchsten Gewicht**). Die Vereinigung der Bilder des Abschlusses des fundamentalen dominanten Alkoven unter der Weylgruppe kann aufgrund der Transitivität der Weylgruppe auf den Weylkammern beschrieben werden als

$$W\mathrm{Cl}(A^+) = \{\lambda \mid -1 \le \langle\lambda,\alpha^\vee\rangle \le 1\ \forall\alpha \in R\}$$

Insbesondere ist diese Menge konvex. Das bedeutet, daß für λ minuscul die konvexe Hülle seiner Weylgruppenbahn $W\lambda$ seine Nebenklasse $\lambda+\langle R\rangle$ genau in $W\lambda$



Eine Liste aller zusammenhängenden Coxetergraphen zu essentiellen reellen affinen Spiegelungsgruppen. Die Notation kommt daher, daß der Graph der dualen affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems vom Typ Z stets $\tilde{Z}$ notiert wird. Der Index ist insbesondere jeweils um eins kleiner als die Knotenzahl. Die Zahlen an den Punkten bilden jeweils einen Vektor im Kern der Cosinusmatrix des entsprechenden Coxetergraphen.

schneidet, in Formeln $W\lambda = \operatorname{konv}(W\lambda) \cap (\lambda + \langle R \rangle)$. Insbesondere folgt damit für jede einfache Darstellung mit minusculem höchsten Gewicht λ die Beschreibung

$$\mathrm{P}(\mathrm{L}(\lambda)) = W\lambda$$

der Menge seiner Gewichte. Diese Eigenschaft charakterisiert auch die minusculen Gewichte, denn gibt es eine positive Wurzel $\alpha \in R^+$ mit $r = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 2$, so zeigt die Darstellungstheorie der $\mathfrak{sl}(2)$, daß auch alle $\lambda, \lambda - \alpha, \ldots, \lambda - r\alpha$ Gewichte von $\mathrm{L}(\lambda)$ sein müssen, und von diesen gehören nur λ und $\lambda - r\alpha = s_\alpha \lambda$ zu $W\lambda$.

Ergänzung 23.2.5.18. Eine irreduzible Darstellung einer halbeinfachen Liealgebra heißt **quasiminuscul**, wenn sie nicht minuscul ist, aber alle Gewichte außer dem Nullgewicht eine Bahn unter der Weylgruppe bilden. Offensichtlich ist für jede einfache Liealgebra die einfache Darstellung mit der höchsten kurzen Wurzel als höchstem Gewicht quasiminuscul. Weiter ist das im Fall einer einfachen Liealgebra auch die einzige quasiminuscule Darstellung. In der Tat müs auf dem höchsten Gewicht jede Kowurzel einen Wert in $\{0, 1\}$ annehmen, es sei denn, unser Gewicht ist selbst eine Wurzel und die fragliche Kowurzel seine Kowurzel.

Übungen

Übung 23.2.5.19 (**Höchste Wurzeln und Kowurzeln**). Wir übernehmen die Notationen aus 23.2.2.17. Man zeige:

Typ B_n: Die höchste Wurzel ist $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, die höchste Kowurzel die Kowurzel zur Wurzel ε_1;

Typ D_n: Die höchste Wurzel ist $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$;

Typ C_n: Die höchste Wurzel ist $2\varepsilon_1$, die höchste Kowurzel die Kowurzel zur Wurzel $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

23.3 Coxetergruppen als Spiegelungsgruppen

23.3.1 Spiegelungsgruppen zu Coxetermatrizen

23.3.1.1. Gegeben eine endliche Menge S verstehen wir wie in 23.1.9.2 unter einer **Coxetermatrix mit durch S indizierten Zeilen und Spalten** eine Abbildung $m : S \times S \to \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ mit $m(s,t) = m(t,s)\ \forall s,t \in S$ und $m(s,s) = 1\ \forall s \in S$ und $m(s,t) \geq 2$ falls $s \neq t$.

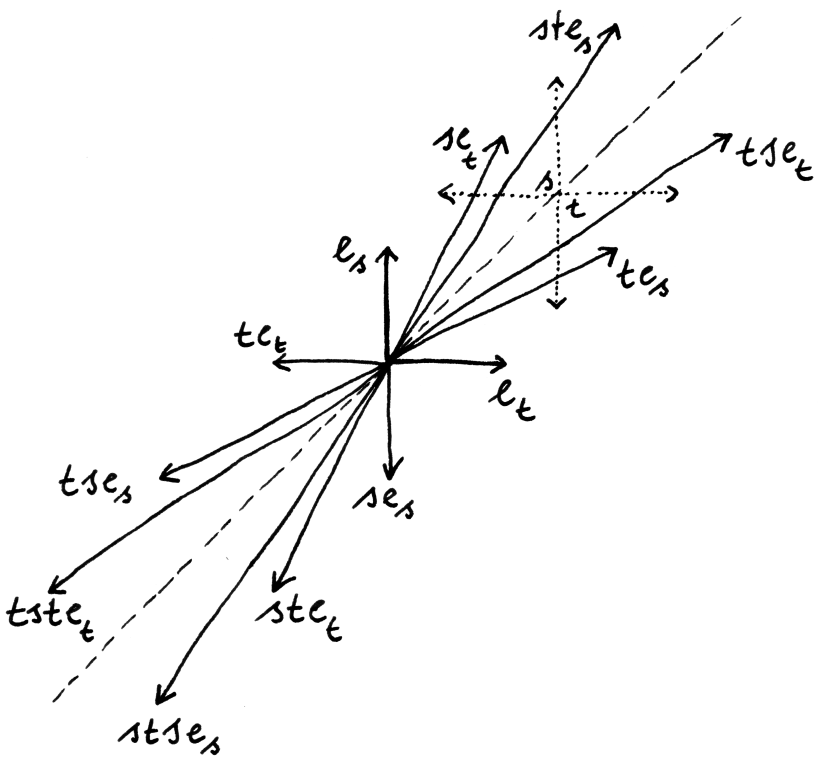
23.3.1.2. Für eine endliche Menge S und eine symmetrische $(S \times S)$-Matrix $m : S \times S \to \{1, 2, \ldots, \infty\}$ bilden wir den freien Vektorraum $V := \mathbb{R}S$ über S mit seiner kanonischen Basis $(\mathrm{e}_s)_{s \in S}$ und erklären darauf eine symmetrische Bilinearform $(\ ,\ )$ durch die Vorschrift $(\mathrm{e}_s, \mathrm{e}_t) := -\cos(\pi/m(s,t))$ mit der Konvention $\pi/\infty = 0$. Die Fundamentalmatrix unserer Bilinearform in Bezug auf die kanonische Basis ist also die Cosinusmatrix zu unserer Coxetermatrix. Wegen $m(s,s) = 1 \neq 2$ können wir weiter in $\mathrm{GL}(V)$ die lineare Abbildung mit Fixpunktmenge $\{v \in V \mid (\mathrm{e}_s, v) = 0\}$ und (-1)-Eigenraum $\mathbb{R}\mathrm{e}_s$ betrachten. Diese lineare Abbildung notieren wir $\hat{s}$ oder s und nennen sie die **einfache Spiegelung zum Index** $s \in S$ oder kürzer die **einfache Spiegelung** $s \in S$. Die von den einfachen Spiegelungen erzeugte Untergruppe

$$W \subset \mathrm{GL}(V)$$

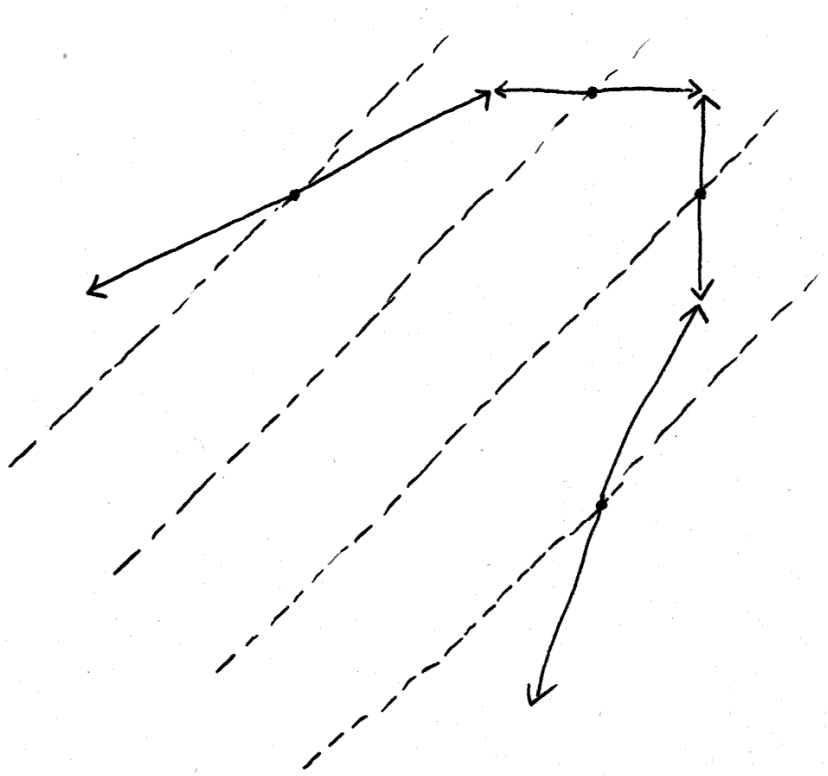
nenne ich die **Spiegelungsgruppe zur Coxetermatrix** m. Die **Länge** $l(w)$ eines Elements von W erklären wir als die Länge einer kürzestmöglichen Darstellung von w als Produkt einfacher Spiegelungen. Dann gilt sicher $\det w = (-1)^{l(w)}$ und folglich $l(w) \neq l(ws)$ für jede einfache Spiegelung s. Eine kürzestmögliche Darstellung eines Elements $w \in W$ als Produkt einfacher Spiegelungen heißt eine **reduzierte Darstellung** von w.

23.3.1.3. Ich schlage für die so entstehende Darstellung unserer Spiegelungsgruppe W die Bezeichnung als **wurzlige Darstellung** vor, da in ihr alle einfachen Spiegelungen verschiedene (-1)-Eigenräume haben und da diese (-1)-Eigenräume im Fall der Weylgruppe eines Wurzelsystems gerade die durch die Wurzeln erzeugten Geraden sind.

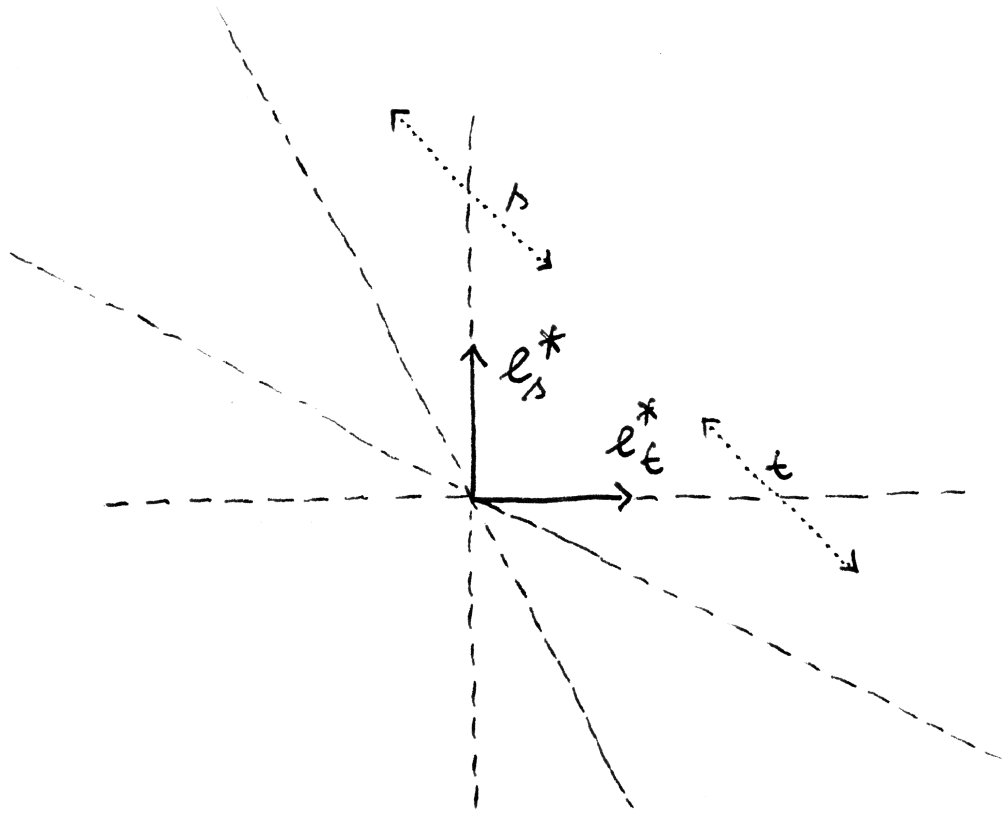
23.3.1.4. Gegeben eine Coxetermatrix betrachten wir zu ihrer Spiegelungsgruppe $W \subset \mathrm{GL}(V)$ auch die kontragrediente Operation von W auf dem Dualraum V^*, für die ich die Bezeichnung als **alkovische Darstellung** vorschlage. In V^* ist die Fixpunktmenge einer erzeugenden Spiegelung s die Hyperebene H_s aller Linearformen, die auf e_s verschwinden, und s vertauscht beide Halbräume zu dieser Hyperebene. Negativ gemacht wird jede lineare Gleichung der Fixpunktmenge von s in der wurzligen Darstellung. Gemeinsame Verallgemeinerungen dieser beiden



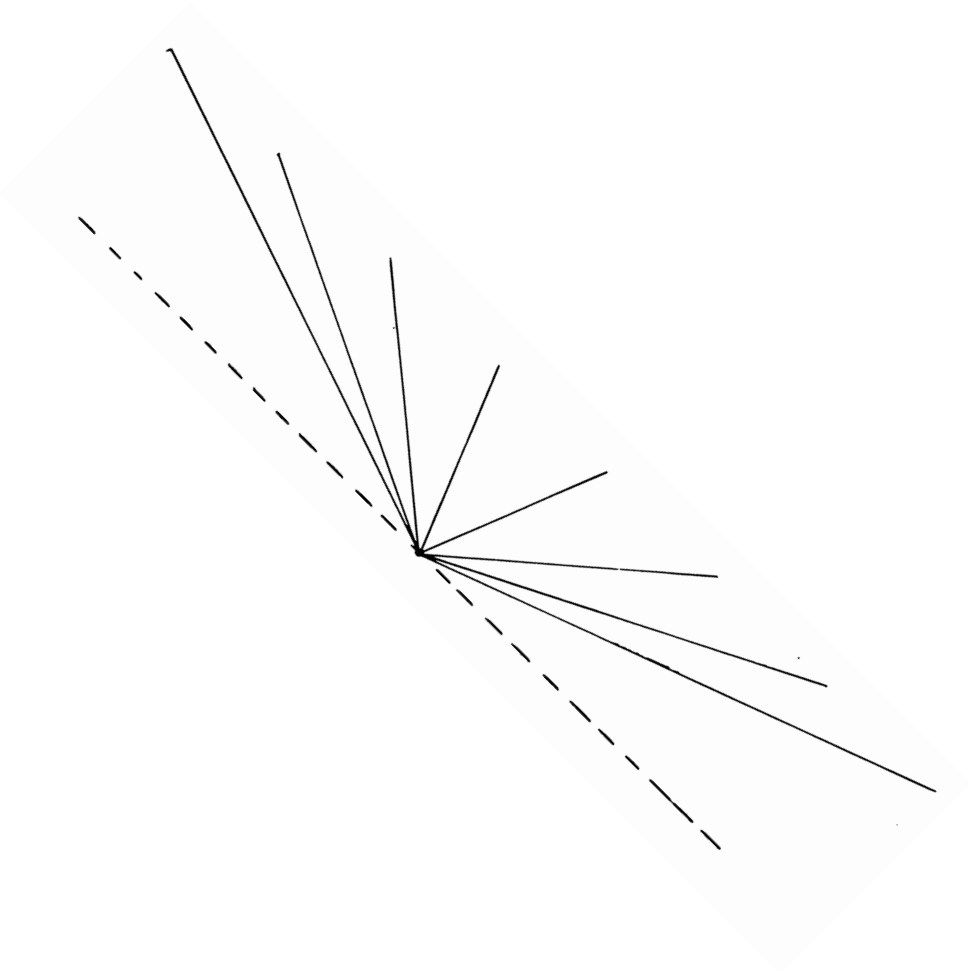
Die wurzlige Darstellung im Fall der unendlichen Diedergruppe. in diesem Fall haben wir $(\mathrm{e}_s, \mathrm{e}_t) = -1$ und folglich $t\,\mathrm{e}_s = \mathrm{e}_s + 2\,\mathrm{e}_t$ und entsprechend $s\,\mathrm{e}_t = \mathrm{e}_t + 2\,\mathrm{e}_s$. Die Fixpunktmengen beider erzeugenden Spiegelungen fallen zusammen und bilden eine Gerade mit Richtungsvektor $\mathrm{e}_t + \mathrm{e}_s$, die ich gestrichelt eingezeichnet habe und die unter allen Elementen von W punktweise fest bleibt. Die Gruppe W besteht aus allen Wörtern in s und t, bei denen sich die Buchstaben abwechseln, und je zwei derartige Wörter liefern auch verschiedene Gruppenelemente.



Die wurzliche Darstellung der Diedergruppe im Sinne von 23.3.2.9 anzureichert. Wir denken uns dazu dort einen zusätzlichen Basisvektor δ, der senkrecht auch der Papierebene kommt, indem wir in der dortigen Notation zum Beispiel $\langle \delta, \mathrm{e}_t^\vee \rangle = \langle \delta, \mathrm{e}_t^\vee \rangle = 1$ setzen. Auf der affinen Ebene $\delta + \mathbb{R}\,\mathrm{e}_s + \mathbb{R}\,\mathrm{e}_t$ operiert unsere Coxetergruppe in der Weise, daß die Spiegel paarweise parallele Geraden sind, ihre Eigenvektoren aber „nach außen zu immer steiler werden“, wie in obigem Bild angedeutet.



Die alkovische Darstellung im Fall der unendlichen Diedergruppe. Eingezeichnet sind die Vektoren der dualen Basis und die Fixpunktmengen der „Spiegelungen“ s, t, sts und tst als gestrichelte Geraden. Die Wirkung von s und t ist durch gepunktelte Doppelpfeile angedeutet, die jeweils Paare von Punkten verbinden, die vertauscht werden. Vereinigen wir den abgeschlossenen positiven Quadranten mit allen seinen Bildern unter der W-Operation, so erhalten wir die offene Halbebene $\{a\,\mathrm{e}_s^* + b\,\mathrm{e}_t^* \mid a + b > 0\}$ vereinigt mit dem Ursprung. Zeichnen wir alle Spiegel ein, so entsteht in dieser offenen Halbebene eine Art „geöffnetes Buch von der Seite betrachtet“, aber natürlich mit unendlich vielen Blättern.



Die alkovische Darstellung zur Coxetermatrix mit zwei Indizes s, t und Einträgen $m(s,t) = \infty$ in einer anderen Basis, in der der fundamentale Alkoven etwas spitzer aussieht und dafür mehr Alkoven einigermaßen übersichtlich eingezeichnet werden können als im vorhergehenden Bild. Die Vereinigung aller Alkoven alias der Titskegel ist eine offene Halbebene vereinigt mit dem Ursprung. Es entsteht so eine Art „geöffnetes Buch mit unendlich vielen Blättern“. Jede Parallele zur gestrichelt eingezeichneten Achse ist stabil unter unserer Spiegelungsgruppe, und mit Ausnahme der gestrichelt eingezeichneten Achse selber operiert unsere Spiegelungsgruppe dort als eine affine Spiegelungsgruppe im Sinne von 23.1.5.2.

Typen von Darstellungen, die insbesondere in der Darstellungstheorie der sogenannten „Kac-Moody-Algebren“ von Bedeutung sind, diskutieren wir in 23.3.2.9.

Beispiel 23.3.1.5. Im Fall $S := \{s, t\}$ zwei erzeugender einfacher Spiegelungen mit $m(s, t) := \infty$ nennen wir die zugehörige Spiegelungsgruppe die **unendliche Diedergruppe**. Ihre alkovische Darstellung heißt das „geöffnete Buch“.

Beispiel 23.3.1.6. Im Fall der affinen Spiegelungsgruppe (W, E) zu einem unzerlegbaren Wurzelsystem ist die alkovische Darstellung der Spiegelungsgruppe zu ihrer Coxetermatrix isomorph zur Linearisierung $V := \mathrm{Lin}(E)$ des affinen Raums E im Sinne von 5.1.4.23 mit der offensichtlichen Fortsetzung der Operation von W durch Affinitäten von E zu einer Operation durch Vektorraumautomorphismen von V.

Beispiel 23.3.1.7. Eine allgemeine affine Spiegelungsgruppe können wir aus der alkovischen Darstellung der Spiegelungsgruppe ihrer Coxetermatrix zurückgewinnen, indem wir darin den affinen Teilraum betrachten, der nur aus Linearformen besteht, die auf dem Radikal unserer Bilinearform $(\ ,\ )$ zu einer geeignet vorgegebenen festen Linearform einschränken. Im Fall einer affinen Spiegelungsgruppe (W, E) zu einem unzerlegbaren Wurzelsystem reicht es zu fordern, daß diese feste Linearform nicht Null sein soll. Im allgemeinen muß das „für jeden unzerlegbaren essentiellen affinen Summanden“ gefordert werden.

Beispiel 23.3.1.8 (**Modulare Gruppe in hyperbolischer Spiegelungsgruppe**). Hat unsere Bilinearform alias Cosinusmatrix im Sinne von 4.2.3.24 den Typ $(n, 1, 0)$, so gilt dasselbe für die auf der alkovischen Darstellung induzierte Bilinearform. Die Vektoren, die darunter mit sich selbst zu (-1) paaren, bilden dann in der in **??** erklärten Weise eine riemannsche Mannigfaltigkeit, den n-dimensionalen hyperbolischen Raum, und unsere Spiegelungen operieren dort als „hyperbolische Spiegelungen“. Im Spezialfall der hyperbolischen Ebene alias oberen Halbebene $\mathbb{H}$ aus 5.2.3.7 operiert die von der „modularen Gruppe“ und der Spiegelung $\tau\gamma$ an der imaginären Achse erzeugt Gruppe $\mathrm{SL}(2; \mathbb{Z})\langle\tau\gamma\rangle$ als hyperbolische Spiegelungsgruppe auf der hyperbolischen Ebene. Der zugehörige Coxetergraph hat drei Punkte in einer Reihe, der erste verbunden mit dem zweiten durch eine ∞-Kante, der zweite mit dem dritten durch eine 3-Kante alias eine Kante ohne Zahl.

Satz 23.3.1.9 (Geometrie der alkovischen Darstellung). *In der alkovischen Darstellung V^* der Spiegelungsgruppe W zu einer Coxetermatrix mit Indexmenge S betrachten wir die Halbräume $H_s^+ := \{p \in V^* \mid \langle p, \mathrm{e}_s\rangle > 0\}$ und den Alkoven $A^+ := \bigcap_{s\in S} H_s^+$. So gilt:*

1. *Die Bilder wA^+ des Alkoven A^+ unter Elementen unserer Spiegelungsgruppe $w \in W$ sind paarweise disjunkt. Wir nennen sie die* **Alkoven** *unserer alkovischen Darstellung;*

2. *Die Vereinigung* $C := \bigcup_{w \in W} w\bar{A}^+$ *der Bilder des Abschlusses von* A^+ *ist eine konvexe und unter der Multiplikation mit nichtnegativen Skalaren stabile Teilmenge von* V^**, der sogenannte* **Tits-Kegel***;*

3. *Die Elemente unserer Spiegelungsgruppe* W*, die auf der alkovischen Darstellung als Spiegelungen operieren, haben paarweise verschiedene Spiegel, und die Menge aller dieser Spiegel ist die Menge von Hyperebenen* $\mathcal{H} := \{wH_s \mid w \in W, s \in S\}$*;*

4. *Die Alkoven* wA^+ *sind die maximalen konvexen Teilmengen des Komplements* $C \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ *der Vereinigung aller Spiegel im Titskegel;*

5. *Für alle einfachen Spiegelungen* $s \in S$ *und alle* $w \in W$ *gilt die Äquivalenz* $l(ws) > l(w) \;\Leftrightarrow\; wH_s^+ \supset A^+$.

Beispiel 23.3.1.10. Im Fall 23.3.1.5 der unendlichen Diedergruppe ist der Titskegel eine offene Halbebene vereinigt mit dem Ursprung. Im Fall 23.3.1.6 der Linearisierung einer affinen Spiegelungsgruppe zu einem unzerlegbaren Wurzelsystem ist der Titskegel ein offener Halbraum vereinigt mit dem Ursprung.

Beweis. 5. Wir argumentieren wie beim Beweis von 23.1.9.10. Kennen wir die Implikation $\Rightarrow$, so erhalten wir automatisch $l(ws) < l(w) \Rightarrow wH_s^+ \cap A^+ = \emptyset$ und damit die Äquivalenz. Die Implikation $\Rightarrow$ zeigen wir durch Induktion über $l(w)$ gleichzeitig für alle s. Der Fall $l(w) = 0$ ist offensichtlich. Gilt $l(w) > 0$, so finden wir natürlich $t \in S$ mit $l(wt) < l(w)$ und haben notwendig $t \neq s$. Indem wir so lange s oder t von rechts an w dranmultiplizieren, wie wir die Länge damit kleiner kriegen, finden wir eine Darstellung $w = vu$ mit $u \in \langle s, t \rangle$, $l(vs) > l(v)$, $l(vt) > l(v)$ und $l(w) = l(v) + l(u)$. Mit Induktionsannahme erhalten wir $vH_s^+ \supset A^+$ und $vH_t^+ \supset A^+$ alias $H_s^+ \cap H_t^+ \supset v^{-1}A^+$. Andererseits folgt aus unseren Annahmen auch $l(us) > l(u)$. Falls nun gilt $u \neq w$, so können wir die Induktionsannahme auf u anwenden und erhalten $uH_s^+ \supset A^+$. Wegen $H_s^+ \cap H_t^+ = (H_s \cap H_t) + A^+$ und $(H_s \cap H_t) \subset uH_s$ folgt dann

$$uH_s^+ \supset H_s^+ \cap H_t^+$$

und zusammen in der Tat $uH_s^+ \supset (H_s^+ \cap H_t^+) \supset v^{-1}A^+$ alias $wH_s^+ \supset A^+$. Es bleibt nur noch, den Fall $u = w$ zu behandeln, so daß wir haben $w = tsts \ldots t$ oder $w = sts \ldots t$ mit jeweils $l(w)$ Faktoren und $l(w) < l(ws)$ und folglich $l(w) < \operatorname{ord}(st)$. In dem Fall aber zeigt explizite Inspektion bereits $wH_s^+ \supset (H_s^+ \cap H_t^+) \supset A^+$. Damit ist unsere Behauptung $l(ws) > l(w) \;\Leftrightarrow\; wH_s^+ \supset A^+$ gezeigt. Anschaulich gesprochen wissen wir per Induktion, daß alle Spiegel xH_r mit $l(x) < l(w)$ und r einer einfachen Spiegelung unser A^+ nicht treffen. Es muß aber im Fall $w \neq 1$ notwendig eine von s verschiedene einfache Spiegelung t

geben mit $wt < w$. Die beiden Spiegelungen s, t erzeugen eine Diedergruppe und die zugehörigen Spiegel schneiden unseren Raum auf in eine Art Kuchenstücke. Per Induktion wissen wir, daß A^+ sogar ganz in so einem mit w verschobenen Kuchenstück liegen muß, und dann liefern die Annahmen und etwas Sorgfalt weiter, daß dieses Kuchenstück selbst hinwiederum in der Halbebene wH_s^+ enthalten sein muß.

1. Die Ebenen wH_s für $w \in W$ und $s \in S$ bilden ein W-stabiles System von Hyperebenen $\mathcal{H}$ in V^*, und Teil 5 zeigt insbesondere, daß keine dieser Hyperebenen unser A^+ trifft. Insbesondere ist A^+ eine maximale konvexe Teilmenge im Komplement der Vereinigung aller Hyperebenen aus $\mathcal{H}$. Je zwei verschiedene derartige maximale konvexe Teilmengen sind disjunkt nach 23.1.3.39 und mit A^+ ist auch wA^+ solch eine maximale konvexe Teilmenge für alle $w \in W$. Schließlich folgt aus $wA^+ = A^+$ mit unserer Behauptung sofort $l(ws) > l(w)$ für alle $s \in S$ alias $w = \mathrm{id}$. Mithin sind die wA^+ mit $w \in W$ paarweise disjunkt.

2. Induktion über die Länge von $w \in W$ zeigt unmittelbar, daß für $p \in A^+$ und $q \in wA^+$ das Segment $[p, q]$ genau $l(w)$ Hyperebenen aus $\mathcal{H}$ trifft und ganz in C verläuft und nur Alkovenabschlüsse $x\bar{A}^+$ mit $l(x) \leq l(w)$ trifft. Wenn wir nun $\bar{p} \in \bar{A}^+$ und $\bar{q} \in w\bar{A}^+$ nehmen, so muß folglich das Segment $[\bar{p}, \bar{q}]$ in der Vereinigung der $x\bar{A}^+$ mit $l(x) \leq l(w)$ enthalten sein.

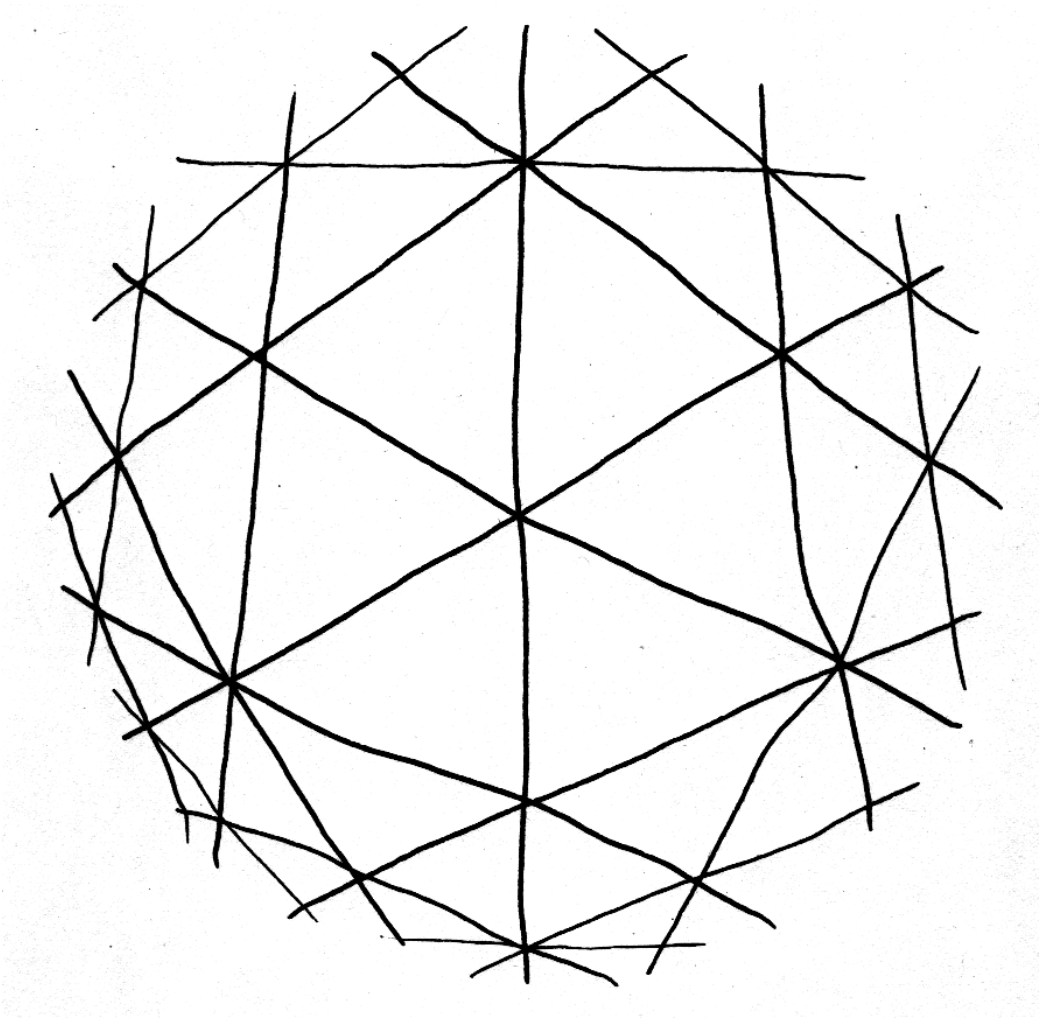
3. Der Titskegel C kann nie ganz in einem abgeschlossenen Halbraum zu einem Spiegel H einer Spiegelung aus W liegen. Dann aber finden wir auch Punkte aus dem Inneren von Alkoven auf beiden Seiten unseres Spiegels H, sagen wir Punkte aus den Alkoven A und B. Wir können sie verbinden durch eine endliche Folge von Alkoven $A = A_0, A_1, \ldots, A_r = B$, die sich jeweils längs einer Wand berühren. Ist H keine dieser Wände, so muß H einen dieser Alkoven treffen, der dann unter der entsprechenden Spiegelung auf sich selber ginge: Widerspruch!

4. Beim Beweis von Teil 1 wurde bereits gezeigt, daß die wA^+ maximale konvexe Teilmengen im Komplement $V^* \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ der Vereinigung aller Spiegel sind. Daß sie genau die maximalen konvexen Teilmengen von $C \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ sind, ist damit auch klar. $\square$

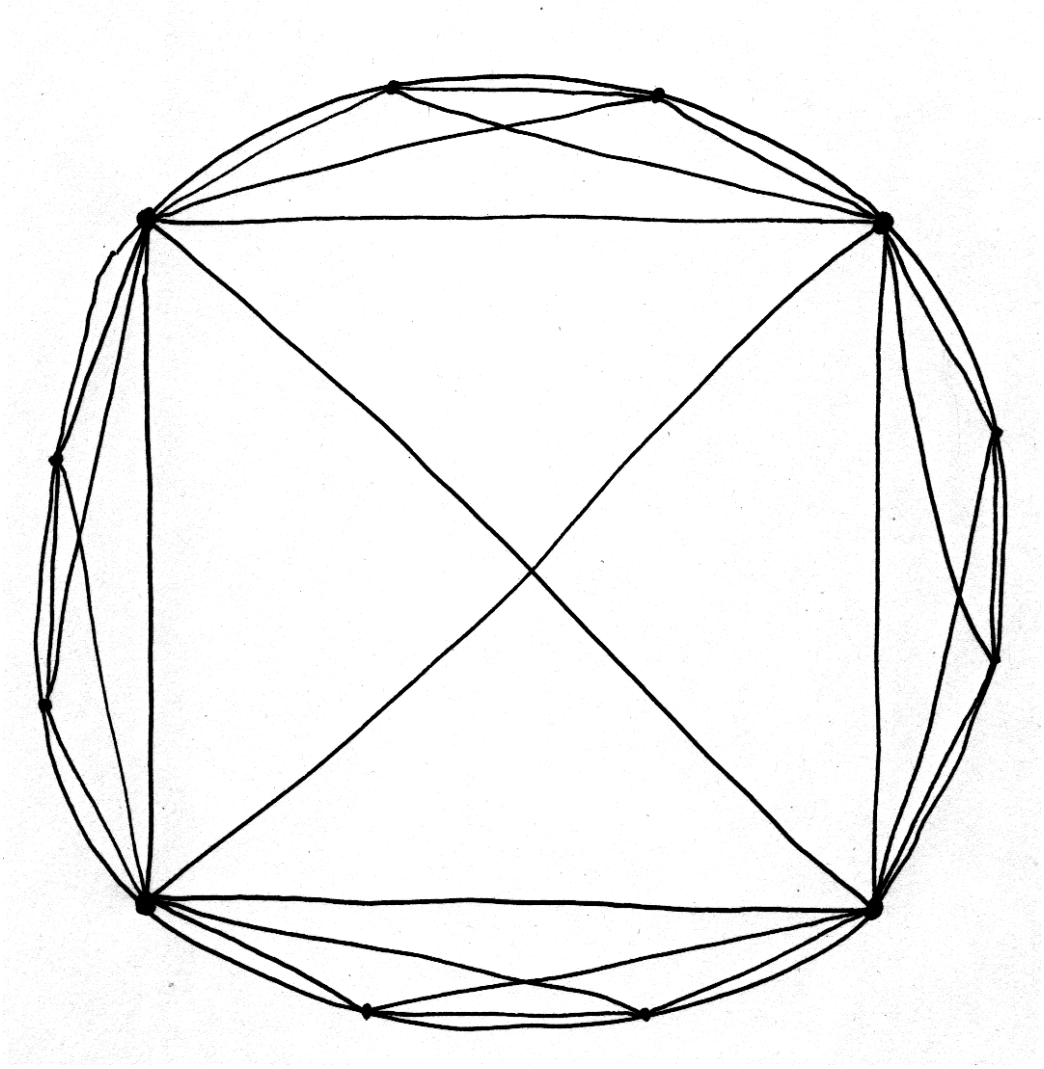
23.3.1.11 (**Trennende Spiegel und Austauschlemma**). Auch für die Spiegelungsgruppe einer beliebigen Coxetermatrix gilt

$$d(A^+, wA^+) = l(w)$$

für $d(A, B)$ die Zahl der Hyperebenen aus $\mathcal{H}$, die gegebene Alkoven A und B trennen, wie wir bereits beim Beweis von Teil 2 aus 23.3.1.9 bemerkt hatten. Auch in dieser Allgemeinheit gilt für Alkoven A, B und einen Spiegel $L \in \mathcal{H}$



Die alkovische Darstellung zur Coxetermatrix mit drei Indizes r, s, t und Einträgen $m(r,s) = m(s,t) = 3$ und $m(r,t) = 4$. Genauer haben wir hier den Schnitt des Titskegels mit einer affinen Ebene H im dreidimensionalen Raum mit der Basis $\mathrm{e}_r^*, \mathrm{e}_s^*, \mathrm{e}_t^*$ eingezeichnet. Die Schnitte der Koordinatenebenen mit unserer affinen Ebene sind die drei Wände eines festen Dreiecks. Die Alkoven schneiden unsere Ebene H in den offenen Dreiecksflächen, von denen es unendlich viele gibt, die ich nicht alle einzeichnen konnte. Der Titskegel selbst schneidet in diesem Fall unsere affine Ebene H in einer offenen Kreisscheibe.



Die alkovische Darstellung zur Coxetermatrix mit drei Indizes r, s, t und Einträgen $m(r,s) = m(s,t) = \infty$ und $m(r,t) = 2$. Genauer haben wir hier den Schnitt des Titskegels mit einer affinen Ebene H im dreidimensionalen Raum mit der Basis $\mathrm{e}_r^*, \mathrm{e}_s^*, \mathrm{e}_t^*$ eingezeichnet. Die Schnitte der Koordinatenebenen mit unserer affinen Ebene sind die drei Wände eines festen Dreiecks. Die Alkoven schneiden unsere Ebene H in den offenen Dreiecksflächen, von denen es unendlich viele gibt, die ich nicht alle einzeichnen konnte. Der Titskegel selbst schneidet in diesem Fall unsere affine Ebene H in einer Kreisscheibe mit zusätzlichen Punkten auf dem Rand. In unserem Fall handelt es sich dabei genau um die Punkte $\exp(2\pi\mathrm{i}(\frac{1}{8} + \frac{1}{4\cdot 3^n})$ mit $n \in \mathbb{N}$. Um jeden dieser Punkte „sieht unser Bild aus wie ein geöffnetes Buch mit unendlich vielen Seiten“.

die Äquivalenz

$$(L \text{ trennt } A \text{ und } B) \quad \Leftrightarrow \quad d(A, s_L B) < d(A, B)$$

mit demselben Beweis wie 23.1.6.7. Auch in dieser Allgemeinheit folgt wie in 23.1.6.8 das **Austauschlemma**: Gegeben $s_1, \ldots, s_r \in S$ und eine Spiegelung $t \in W$ mit $l(ts_1 \ldots s_r) < l(s_1 \ldots s_r)$ gibt es einen Index $i \in [1, r]$ mit

$$ts_1 \ldots s_i \ldots s_r = s_1 \ldots \hat{s}_i \ldots s_r$$

23.3.1.12 (**Fundamentalbereiche und Standgruppen**). Auch für die Spiegelungsgruppe einer beliebigen Coxetermatrix ist die Standgruppe jedes Punktes aus dem Titskegel erzeugt von den Spiegelungen an allen Wänden eines festen Alkoven, der unseren Punkt in seinem Abschluß hat; die fragliche Standgruppe operiert frei und transitiv auf der Menge aller Alkoven, die unseren Punkt in ihrem Abschluß haben; und jeder Alkovenabschluß ein Fundamentalbereich für die Operation unserer Spiegelungsgruppe auf dem Titskegel. Die Beweise sind identisch zu den Beweisen im affinen Fall 23.1.7.4 und 23.1.7.5.

23.3.1.13. Auch für die Spiegelungsgruppe W einer beliebigen Coxetermatrix operieren genau diejenigen Elemente als Spiegelungen in der wurzligen oder gleichbedeutend in der alkovischen Darstellung, die in W konjugiert sind zu einfachen Spiegelungen. Das ist im wesentlichen die Aussage des dritten Teils unseres Satzes 23.3.1.9 über die Geometrie der alkovischen Darstellung.

23.3.2 Erzeuger und Relationen für Spiegelungsgruppen

Definition 23.3.2.1. Ein **Coxetersystem** ist ein Paar (W, S) bestehend aus einer Gruppe W und einer Teilmenge $S \subset W$ von W derart, daß W erzeugt wird von S mit den Relationen $s^2 = e \ \forall s \in S$ und $(st)^{\mathrm{ord}(st)} = e$ für alle $s, t \in S$ mit st von endlicher Ordnung $\mathrm{ord}(st) < \infty$. Die Elemente von S heißen die **einfachen Spiegelungen von** W. Wir erklären die **Länge** $l(w)$ eines Elements von W als die Länge einer kürzestmöglichen Darstellung von w als Produkt einfacher Spiegelungen $s \in S$.

23.3.2.2. Die Relation $(st)^{\mathrm{ord}(st)} = e$ kann unter der Bedingung $s^2 = t^2 = e$ auch geschrieben werden in einer der Formen

$$sts \ldots t = tst \ldots s \quad \text{beziehungsweise} \quad st \ldots s = ts \ldots t$$

für $\mathrm{ord}(st)$ gerade beziehungsweise ungerade, mit jeweils $\mathrm{ord}(st)$ sich abwechselnden Faktoren auf beiden Seiten. Diese Relationen hinwiederum heißen, auch

wenn die Bedingung $s^2 = t^2 = e$ nicht erfüllt ist, die **Zopfrelationen** nach der Darstellung der sogenannten „Zopfgruppe“ durch Erzeuger und Relationen in 16.5.1.4.

Satz 23.3.2.3 (Spiegelungsgruppen und Coxetersysteme). *Ist W die Spiegelungsgruppe zu einer Coxetermatrix $m : S \times S \to \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ und $S \subset W$ die Menge ihrer einfachen Spiegelungen, so ist (W, S) ein Coxetersystem mit den Relationen $\operatorname{ord}(st) = m(s,t)\ \forall s,t \in S$.*

Beweis. Das folgt sofort aus der präziseren Proposition 23.3.2.5, die wir im Anschluß beweisen. □

Korollar 23.3.2.4 (Affine Spiegelungsgruppen und Coxetersysteme). *Ist W eine affine Spiegelungsgruppe und $S \subset W$ die Menge der Spiegelungen an den Wänden eines festen Alkoven, so ist (W, S) ein Coxetersystem.*

Beweis. Das kann man als Korollar des vorhergehenden Satzes zeigen mithilfe von 23.3.1.7. Alternativ kann man auch den Beweis der anschließenden Proposition 23.3.2.5 unschwer auf diesen Fall übertragen. □

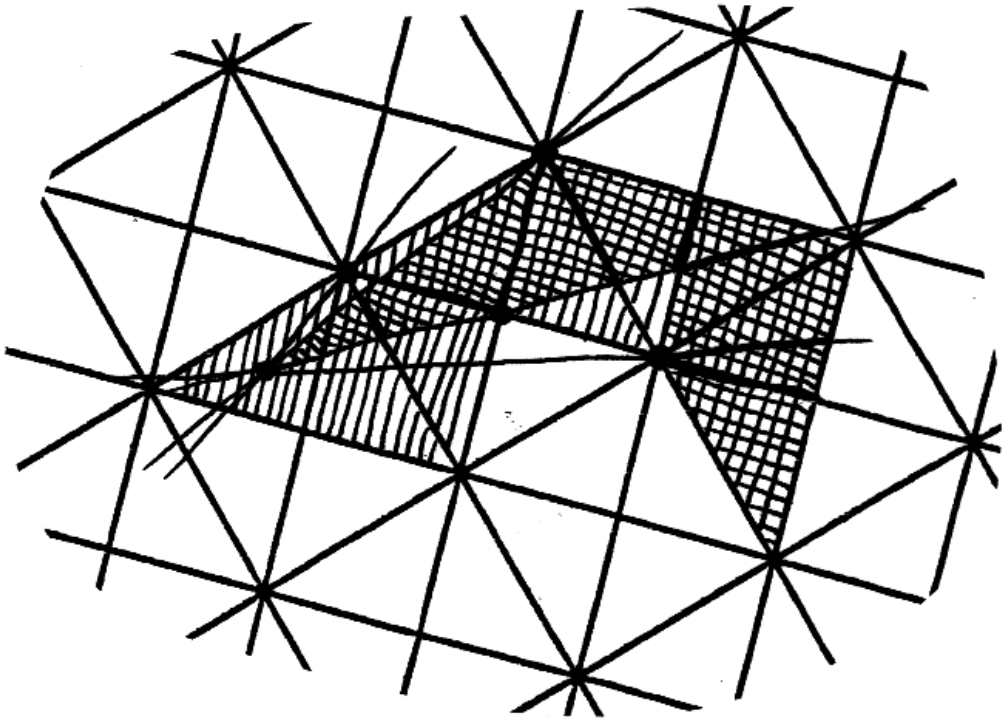
Proposition 23.3.2.5 (Übergang zu reduzierter Darstellung). *Sei W die Spiegelungsgruppe zu einer Coxetermatrix $m : S \times S \to \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ und seien zwei Darstellungen desselben Elements $w \in W$ als Produkt von einfachen Spiegelungen*

$$s_1 s_2 \dots s_n = w = t_1 t_2 \dots t_l$$

gegeben. Ist die zweite Darstellung reduziert, in Formeln $l(w) = l$, so können wir von der ersten Darstellung zur zweiten gelangen in endlich vielen Schritten, von denen jeder einzelne entweder im Anwenden einer Zopfrelation zu unserer Coxetermatrix besteht oder im Weglassen zweier gleicher aufeinanderfolgender Faktoren.

23.3.2.6. Beim ersten unserer Schritte bleibt die Zahl der Faktoren gleich, beim zweiten nimmt sie um Zwei ab. Insbesondere kann man also zwischen je zwei reduzierten Darstellungen ein- und desselben Elements „mit Zopfrelationen hin- und hergehen“.

23.3.2.7 (**Veranschaulichung des folgenden Beweises**). Eine graphische Darstellung gelingt besonders gut im Fall von drei einfachen Spiegelungen und eindimensionalem Radikal unserer Bilinearform, indem wir von der alkovischen Darstellung nur den zweidimensionalen W-stabilen affinen Teilraum derjenigen Linearformen zeichnen, die auf dem Radikal zu einer fest vorgegebenen von Null verschiedenen Linearform einschränken. Auf diesem affinen Teilraum operiert W dann durch Affinitäten und man muß zur Linearisierung übergehen, um in der Situation des anschließenden Beweises zu landen. Dafür kann man aussagekräftige Bilder zeichnen.



Alkoven und Subalkoven bei einem Übergang zu einer reduzierten Darstellung

Beweis. Gegeben $x \in W$ und $p \in A^+$ und $q \in xA^+$ derart, daß das Segment $[p, q]$ keine zwei Spiegel in ein- und demselben Punkt trifft, erhalten wir offensichtlich eine reduzierte Darstellung $\operatorname{red}(p, q)$ von x durch die Vorschrift $x = r_1 r_2 \dots r_{l(x)}$ mit

$$A^+, r_1 A^+, r_1 r_2 A^+, \dots, xA^+$$

der Folge von Alkoven im Titskegel, die unser Segment $[p, q]$ der Reihe nach trifft. Wir sagen dann, $\operatorname{red}(p, q)$ sei **sinnvoll definiert**. So einen Punkt q können wir zu vorgegebenem p stets finden, denn gegeben zwei verschiedene Spiegel, die A^+ von xA^+ trennen, ist ihr Schnitt ein Untervektorraum der Kodimension Zwei und zusammen mit p erzeugt er eine lineare Hyperebene und endlich viele lineare Hyperebenen können nicht ganz xA^+ überdecken. Nun können wir $p \in A^+$ sogar so wählen, daß die von p und einem Schnitt trennender Spiegel erzeugten linearen Hyperebenen für paarweise verschiedene Spiegelschnitte paarweise verschieden sind. In der Tat umfaßt so eine lineare Hyperebene einen anderen Spiegelschnitt nur dann, wenn das Vektorraumerzeugnis unserer beiden Spiegelschnitte Kodimension Eins hat und p enthält und um das zu vermeiden, müssen wir mit p nur endlich viele Hyperebenen vermeiden. Wir nennen ein $p \in A^+$ außerhalb dieser endlich vielen Hyperebenen **gut für** xA^+. Für das weitere wählen wir ein $p \in A^+$, das gut ist für alle $s_1 A^+, s_1 s_2 A^+, \dots, wA^+, t_1 A^+, \dots, t_1 t_2 A^+, \dots, wA^+$. Dann betrachten wir alle Hyperebenen, die Wände von einem dieser Alkoven sind, sowie alle Hyperebenen, die von p und einem Schnitt von zwei verschiedenen Spiegeln erzeugt werden, die A^+ von einer dieser Alkoven trennen. Die Alkoven zum Komplement der Vereinigung all dieser Hyperebenen, die in einer der Alkoven unserer Liste enthalten sind, nennen wir **verfeinerte Alkoven**. Gegeben ein verfeinerter Alkoven B und $q \in B$ ist $\operatorname{red}(p, q)$ sinnvoll definiert und unabhängig von $q \in B$. Wir vereinbaren die Notation $\operatorname{red}(p, B)$ für dieses Wort. Es ist eine reduzierte Darstellung für das $x \in W$ mit $B \subset xA^+$. Nun finden wir sicher eine Folge verfeinerter Alkoven $B_1, \dots, B_m$ mit $B_1 \subset s_1 A^+$ und $B_m \subset wA^+$ derart, daß je zwei benachbarte verallgemeinerte Alkoven genau eine gemeinsame Wand haben und daß es eine monoton wachsende Funktion h gibt mit $B_i \subset s_1 \dots s_{h(i)} A^+$. Dann ist $\operatorname{red}(p, B_i)$ eine reduzierte Darstellung von $s_1 \dots s_{h(i)}$ und $\operatorname{red}(p, B_{i+1})$ unterscheidet sich im Fall $h(i) = h(i+1)$ höchstens um eine Zopfrelation von $\operatorname{red}(p, B_i)$. Im Fall $h(i) < h(i+1)$ schließlich haben wir

$$\begin{array}{lll} \operatorname{red}(p, B_{i+1}) & = \operatorname{red}(p, B_i) s_{h(i+1)} & \text{falls } l(s_1 \dots s_{h(i)}) < l(s_1 \dots s_{h(i+1)}); \\ \operatorname{red}(p, B_{i+1}) s_{h(i+1)} & = \operatorname{red}(p, B_i) & \text{andernfalls.} \end{array}$$

Alle Worte $\operatorname{red}(p, B_i) s_{h(i)+1} \dots s_{n-1} s_n$ sind dann Darstellungen von w, je zwei benachbarte Worte dieser Folge unterscheiden sich höchstens um eine Zopfrelation oder um das Anwenden einer Relation $s^2 = 1$ für eine einfache Spiegelung s und unsere Folge beginnt mit dem Wort $s_1 s_2 \dots s_n$ und endet mit der

reduzierten Darstellung $\mathrm{red}(p, B_m)$ von w. Konstruieren wir in derselben Weise eine Folge verfeinerter Alkoven $C_1, \ldots, C_r$ für $t_1 \ldots t_l$ mit $C_r = B_m$, so sind die entsprechenden Worte der analog gebildeten Folge $\mathrm{red}(p, C_j)t_{k(j)+1} \ldots t_{l-1}t_l$ sämtlich reduzierte Darstellungen von w, je zwei benachbarte Worte dieser Folge unterscheiden sich höchstens um eine Zopfrelation und unsere Folge beginnt mit $t_1 \ldots t_l$ und endet mit derselben reduzierten Darstellung $\mathrm{red}(p, C_r) = \mathrm{red}(p, B_m)$ von w wie die zuvor konstruierte Folge. Das zeigt die Behauptung. □

23.3.2.8 (**Längen in Teilsystemen**). Genau wie für affine Spiegelungsgruppen in 23.1.6.11 folgt für jede nichtreduzierte Darstellung eines Elements der Coxetergruppe eines beliebigen Coxetersystems (W, S) mit dem Austauschlemma 23.3.1.11, daß sie durch Streichen von Faktoren zu einer reduzierten Darstellung desselben Elements gemacht werden kann. Ist insbesondere $S_p \subset S$ eine Teilmenge und $W_p \subset W$ ihr Gruppenerzeugnis und $l_p : W_p \to \mathbb{N}$ die Längenfunktion des Coxetersystems (W_p, S_p), so gilt $l_p(w) = l(w)\ \forall w \in W_p$ und jede reduzierte Darstellung von $w \in W_p$ in Bezug auf (W, S) besteht bereits aus Spiegelungen aus S_p.

Übungen

Übung 23.3.2.9 (**Weitere natürliche Darstellungen von Coxetergruppen**). Gegeben sei eine endliche Menge S und eine Coxetermatrix mit Indexmenge S der Gestalt $(m_{s,t})_{s,t \in S}$ und ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V. Gegeben seien weiter Vektoren $(e_s)_{s \in S}$ in V und Linearformen $(e_s^\vee)_{s \in S}$ auf V derart, daß gilt

$$\langle e_t, e_s^\vee \rangle = -2\cos(\pi/m_{s,t}) \quad \forall s, t \in S$$

So liefert die Vorschrift $\rho(s)(v) := v - \langle v, e_s^\vee \rangle e_s$ eine Darstellung $\rho : W \to \mathrm{GL}(V)$ unserer Coxetergruppe. Sind die $(e_s)_{s \in S}$ eine Basis von V, so ist das unsere wurzlige Darstellung. Sind die $(e_s^\vee)_{s \in S}$ eine Basis des Dualraums V^*, so ist das unsere alkovische Darstellung. Sind die Vektoren $(e_s)_{s \in S}$ linear unabhängig, so erzeugen sie eine zur wurzligen Darstellung isomorphe Unterdarstellung. Sind die Linearformen $(e_s^\vee)_{s \in S}$ linear unabhängig, so ist der Schnitt ihrer Kerne eine Unterdarstellung und der Quotient danach ist isomorph zur alkovischen Darstellung.

23.3.3 Bruhat-Teilordnung

23.3.3.1. Sei (W, S) ein Coxetersystem. Die zu einfachen Spiegelungen konjugierten Elemente von W heißen die **Spiegelungen** von W. Die Menge aller Spiegelungen notieren wir T. Nach 23.3.1.9 sind das genau die Elemente, die in der Spiegelungsgruppe der zugehörigen Coxetermatrix zu Spiegelungen werden.

Definition 23.3.3.2. Sei (W, S) ein Coxetersystem. Die **Bruhat-Teilordnung** ist die kleinste reflexive transitive Relation $\leq$ auf W derart, daß gilt

$$x \leq xt \text{ für alle } x \in W \text{ und alle Spiegelungen } t \in W \text{ mit } l(x) < l(xt).$$

23.3.3.3. Wir fordern, das sei hier nocheinmal besonders betont, in der Definition der Bruhat-Teilordnung 23.3.3.2 nicht $t \in S$. In der Tat würde diese Forderung im allgemeinen zu einer echt stärkeren Teilordnung führen.

23.3.3.4. Sei (W, S) ein Coxetersystem. Offensichtlich gilt $x < y \Rightarrow l(x) < l(y)$. Insbesondere ist $\leq$ tatsächlich eine Teilordnung auf W. Offensichtlich ist das neutrale Element $e \in W$ das kleinste Element. Unschwer erkennt man weiter $x \leq y \Leftrightarrow x^{-1} \leq y^{-1}$. Eine explizitere Beschreibung der Bruhat-Teilordnung gibt uns 23.3.3.6.

23.3.3.5 (**Bruhat-Teilordnung im affinen Fall**). Seien W eine affine Spiegelungsgruppe und A ein ausgezeichneter Alkoven. Nach 23.3.2.4 ist dann für $S = S_A \subset W$ die Menge der Spiegelungen an den Wänden von A das Paar (W, S) ein Coxetersystem. Betrachten wir dann die Bijektion $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$, $w \mapsto wA$, so induziert die durch A gegebene Bruhat-Teilordnung auf W eine Ordnung auf $\mathcal{A}$. Diese Teilordnung ist nach 23.1.6.7 die kleinste reflexive transitive Relation auf $\mathcal{A}$ derart, daß gilt $B \leq s_L B$ wann immer $B \in \mathcal{A}$ ein Alkoven ist und L ein Spiegel, der B nicht von A trennt. Ist insbesondere W endlich und operiert zur Vereinfachung der Notation durch lineare Automorphsmen auf einem Vektorraum über einem angeordneten Körper, so induziert die Multiplikation mit (-1) eine W-äquivariante Bijektion $\mathrm{neg} : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$. Da $-A$ und A durch alle Spiegel getrennt werden, kehrt die davon auf $\mathcal{W}$ induzierte Operation $\mathrm{neg} : W \xrightarrow{\sim} W$ die Bruhatordnung um. Gegeben ein Coxetersystem (W, S) mit $|W| < \infty$ gibt es also genau ein bruhatmaximales Element $w_\circ \in W$ und für beliebige $x, y \in W$ gilt dann

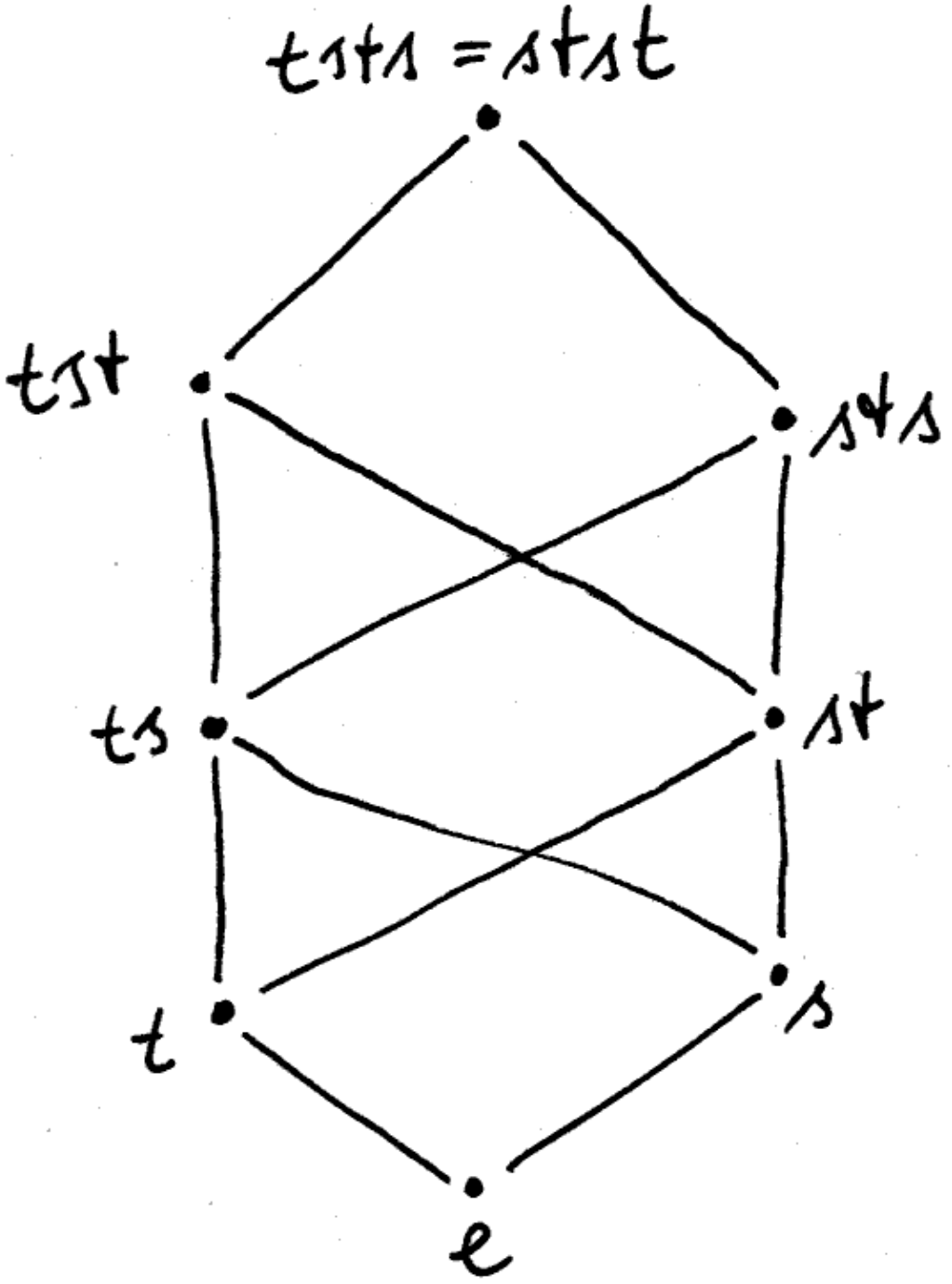
$$x \leq y \;\Leftrightarrow\; xw_\circ \geq yw_\circ$$

Satz 23.3.3.6 (Bruhat-Teilordnung über Teilausdrücke). *Sei (W, S) ein Coxetersystem. Ist $w = s_1 \ldots s_{l(w)}$ eine reduzierte Darstellung von $w \in W$, so gilt*

$$\{x \in W \mid x \leq w\} = \{s_{i_1} \ldots s_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq l(w)\}$$

Insbesondere hängt die rechte Seite nicht von der Wahl der reduzierten Darstellung von w ab.

Beweis. Wir erinnern daran, daß wir W nach 23.3.2.3 stets als Spiegelungsgruppe seiner Coxetermatrix treu darstellen können. Die Inklusion $\subset$ folgt mühelos aus dem Austauschlemma 23.3.1.11. Für die andere Inklusion $\supset$ müssen wir wieder



Die Bruhat-Teilordnung auf einer Diedergruppe

nach dem Austauschlemma 23.3.1.11 nur für reduzierte Teilausdrücke zeigen, daß sie Elemente $\leq w$ liefern. Mit Induktion über die Länge von w brauchen wir sogar nur Teilausdrücke zu untersuchen mit $i_1 = 1$. Dann folgt die Behauptung jedoch mit Induktion aus dem anschließenden Lemma. $\square$

Lemma 23.3.3.7 (Eigenschaft Z von Deodhar). *Sei (W, S) ein Coxetersystem. Gegeben $x, y \in W$ und $s \in S$ eine erzeugende Spiegelung gelten entweder mindestens drei oder keine der vier Ungleichungen*

$$\begin{array}{rr} x \leq y & x \leq sy \\ sx \leq y & sx \leq sy \end{array}$$

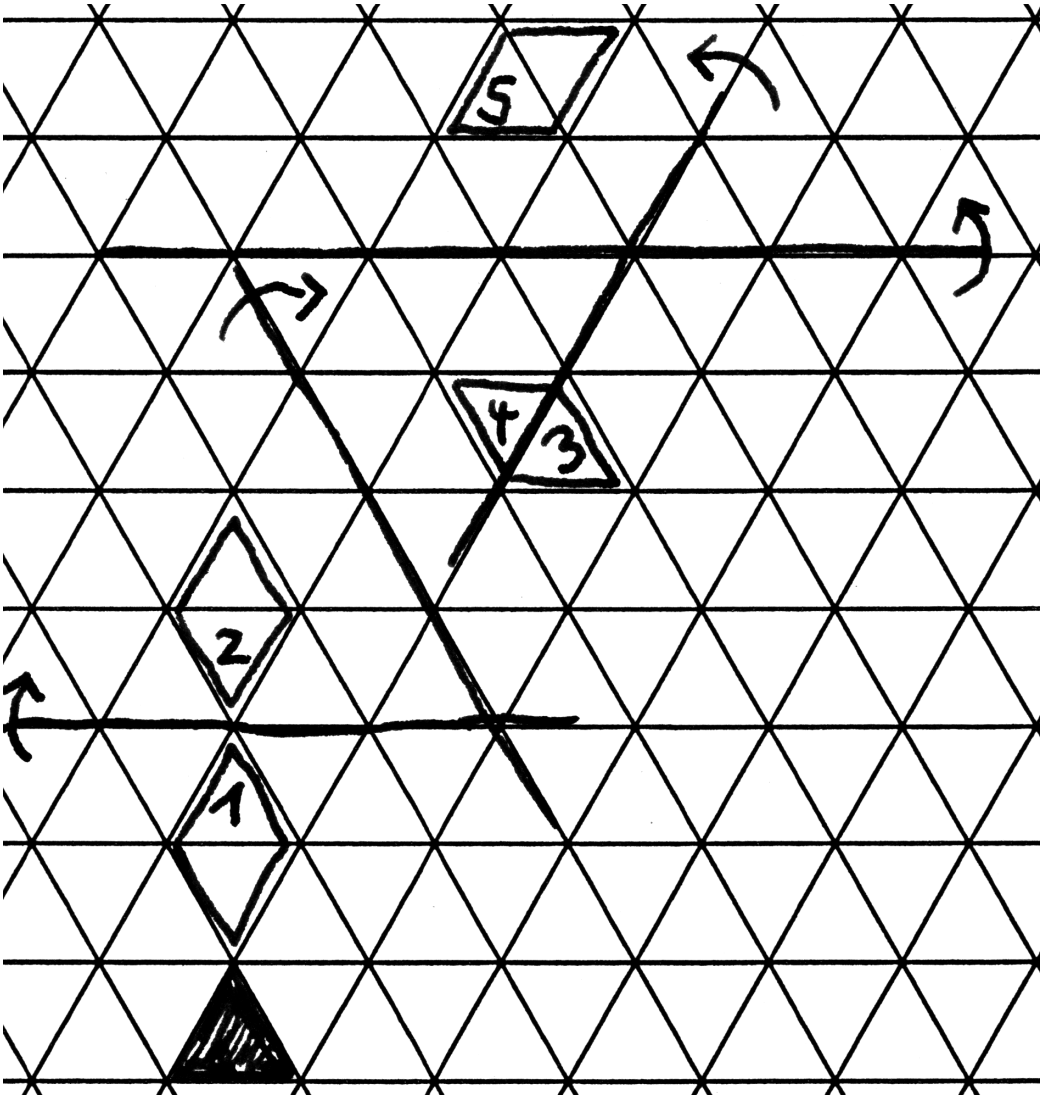
23.3.3.8. Stellen wir Ungleichungen durch Pfeile zum größeren Element dar, so impliziert also unter der Annahme der beiden horizontalen Ungleichungen $y < sy$ und $x < sx$ jede der drei weiteren Ungleichungen im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} y & \rightarrow & sy \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ x & \rightarrow & sx \end{array}$$

die beiden anderen. Wegen dieser graphischen Interpretation, und weil der Schluß von der Diagonale auf die beiden Vertikalen die eigentliche Aussage darstellt, wird die Aussage unseres Lemmas als die „Eigenschaft Z von Deodhar“ zitiert. Man kann diese Eigenschaft ohne Schwierigkeiten aus Satz 23.3.3.6 zur Bruhat-Ordnung durch Teilausdrücke folgern, sie geht jedoch bei uns in den Beweis dieses Satzes bereits ein.

23.3.3.9. Ich gebe noch eine andere Formulierung der Eigenschaft Z, die für induktive Argumente besonders geschickt ist. Seien (W, S) ein Coxetersystem und $x, y \in W$ sowie $s \in S$ gegeben. Wir setzen $\{x_1, x_2\} := \{x, sx\}$ und $\{y_1, y_2\} := \{y, sy\}$. Gibt es in dieser Situation i, j mit $x_i \leq y_j$, so gilt entweder $x_1 \leq y_1$ und $x_2 \leq y_2$ oder $x_1 \leq y_2$ und $x_2 \leq y_1$.

23.3.3.10 (**Anschauliche Bedeutung der Eigenschaft Z**). Sei eine affine Spiegelungsgruppe mit einem ausgezeichneten Alkoven gegeben, der der fundamentale Alkoven heißen möge. Steigt ein Alkoven B durch eine Folge von Spiegelungen zu einem anderen Alkoven C auf in dem Sinne, daß die zugehörigen Elemente der Spiegelungsgruppe dabei immer länger werden, so steigt mit derselben Folge auch das ungeordnete Paar von benachbarten Alkoven $\{B, Bs\}$ zum ungeordneten Paar von benachbarten Alkoven $\{C, Cs\}$ auf. Das tut es sogar mit der Folge von Spiegelungen, die wir erhalten, wenn wir aus unserer ursprünglichen Folge von Spiegelungen alle diejenigen weglassen, die nur die Bilder des Paares (B, Bs) untereinander vertauschen. Mit dieser Folge von Spiegelungen steigt dann entweder B zu C auf und Bs zu Cs oder B zu Cs und Bs zu C. Die „Eigenschaft Z“ formalisiert diese Anschauung.



Graphische Darstellung der Eigenschaft Z von Deodhar im Sinne von 23.3.3.10. Der geschwärzte Alkoven stellt das neutrale Element dar, die nummerierten Alkoven gehen jeweils durch eine verlängernde Spiegelung auseinander hervor. Die „Dominos“ bestehen jeweils aus einem Paar (B, Bs) mit s einer festen einfachen Spiegelung.

Ergänzung 23.3.3.11 (**Bedeutung der Eigenschaft Z für Weylgruppen**). Haben wir die Weylgruppe einer algebraischen Gruppe vor uns, so folgt das Lemma leicht aus der Tatsache, daß der Abschluß der Bahn einer parabolischen Untergruppe auf der Fahnenmannigfaltigkeit eine Vereinigung von Bahnen besagter parabolischer Untergruppe ist.

Beweis. Wenn wir mal von der Formulierung 23.3.3.9 ausgehen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x < y = xt$ annehmen für eine Spiegelung t. Dann sind wir in einem von vier Fällen, die wir jetzt gleich der Reihe nach abhandeln.

$sx < x,\ sy > y:$	Dann gelten sogar alle vier Ungleichungen;
$sx < x,\ sy < y:$	Dann haben wir $l(sx) < l(sy)$ und $sxt = sy$ und damit notwendig $sx < sy$ und a forteriori $sx < y$;
$sx > x,\ sy > y:$	Dann können wir dasselbe Argument anwenden wie beim vorhergehenden Fall;
$sx > x,\ sy < y:$	Dann haben wir $sxt < xt$ und argumentieren so:

Wir sind fertig, wenn wir $sx \leq sy$ alias $l(sx) \leq l(sy)$ zeigen können. Gilt aber sonst $l(sx) > l(sy)$ alias $l(sx) > l(sxt)$ und ist $s_1 \ldots s_r$ eine reduzierte Darstellung von x, so ist $ss_1 \ldots s_r$ eine reduzierte Darstellung von sx und nach dem Austauschlemma 23.3.1.11 können wir in sxt den Faktor t kürzen gegen eine einfache Spiegelung in der reduzierten Darstellung von sx, ohne das Produkt zu ändern. Wegen $x < xt$ muß diese einfache Spiegelung die Erste sein und wir haben $x = sxt = sy$. In diesem Fall gilt zwar nicht $sx \leq sy$, aber eben $x \leq sy$ sowie $sx \leq y$ und das tut es auch. In der Anschauung entspricht dieser Fall im übrigen der Spiegelung eines „Dominos an einem Spiegel, die unser Domino halbiert“. □

Proposition 23.3.3.12 (Obere Schranken endlicher Teilmengen). *Gegeben ein Coxetersystem (W, S) und Elemente $x, y \in W$ gibt es $w \in W$ mit $w \geq x$ und $w \geq y$.*

Beweis. Seien $x = t_1 \ldots t_a$ und $y = s_1 \ldots s_b$ reduzierte Darstellungen. Wir setzen $x = x_0$ und konstruieren induktiv eine Folge $x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_b$ durch die Vorschrift $x_j = x_{j-1}s_j$ falls $x_{j-1} \leq x_{j-1}s_j$ und $x_j = x_{j-1}$ sonst. Wir zeigen induktiv, daß x_j eine reduzierte Darstellung

$$x_j = t_{(j)}s_1 \ldots s_j$$

besitzt mit $t_{(j)}$ einem Teilausdruck von $t_{(j-1)}$ und $t_{(0)}$ der ursprünglichen reduzierten Darstellung von x_0. Für x_0 ist das klar. Für x_1 ist es klar im Fall $x_0 \leq x_0s_1$. Im Fall $x_0 \geq x_0s_1$ sagt uns das Austauschlemma, daß es einen Index i gibt mit

$x_0 s_1 = t_1 \dots \hat{t}_i \dots t_a$ und das ist dann sogar ein reduzierter Teilausdruck mit $x_0 s_1 = t_{(1)}$ und dann ist $x_0 = t_{(1)} s_1$ die gesuchte reduzierte Darstellung. Allgemeiner gehen wir von

$$x_{j-1} = t_{(j-1)} s_1 \dots s_{j-1}$$

aus. Wird das länger unter $(\cdot s_j)$, nehmen wir $t_{(j)} = t_{(j-1)}$. Wird das kürzer unter $(\cdot s_j)$, so können wir eine Spiegelung unseres reduzierten Ausdrucks $x_{j-1} = t_{(j-1)} s_1 \dots s_{j-1}$ finden, deren Weglassen denselben Effekt hat wie $(\cdot s_j)$. Diese kann keine der s-Spiegelungen sein, da wir unsere Darstellung von y reduziert angenommen hatten. Sie muß also eine der t-Spiegelungen sein und unsere Induktion läuft. □

Proposition 23.3.3.13 (Kleinste Nebenklassenrepräsentanten). *Seien (W, S) ein Coxtersystem und $S_p \subset S$ eine Teilmenge und $W_p \subset W$ ihr Gruppenerzeugnis. Ist $x \in W$ minimal in seiner Nebenklasse $W_p x$, so gilt für alle $w \in W_p$ die Formel*

$$l(wx) = l(w) + l(x)$$

23.3.3.14. In einer spezielleren Situation hatten wir das bereits in 25.2.6.12 gezeigt. Daß es im Fall $|W_p| < \infty$ dann auch in jeder Nebenklasse genau ein maximales Element gibt, folgt unmittelbar aus 23.3.3.6.

Beweis. Wir argumentieren mit Induktion über die Länge von w und erinnern aus 23.3.2.8, daß es unerheblich ist, ob wir diese Länge in Bezug auf (W, S) oder in Bezug auf (W_p, S_p) betrachten. Sei nun $w \in W_p$ ein Gegenbeispiel kleinster Länge für die behauptete Identität. Da w nicht trivial sein kann, können wir $w = sv$ schreiben mit $v < w$ und $s \in W_p$. Per Induktionsannahme gilt $l(vx) = l(v) + l(x)$ und nach Annahme gilt $l(svx) = l(wx) < l(vx)$. Wir erhalten nach dem Austauschlemma also svx, indem wir aus einer beliebigen reduzierten Darstellung von vx einen Faktor weglassen. So eine Darstellung erhalten wir nach Induktionsannahme, indem wir eine reduzierte Darstellung von v und eine reduzierte Darstellung von x hintereinanderschreiben. Wird der fragliche Faktor in v weggelassen, so haben wir $sv = w < v$ im Widerspruch zu unseren Annahmen. Wird der fragliche Faktor in x weggelassen, so war x nicht minimal in seiner Nebenklasse im Widerspruch zu unseren Annahmen. □

Proposition 23.3.3.15 (Bruhatordnung und Nebenklassen). *Seien (W, S) ein Coxtersystem und $S_p \subset S$ eine Teilmenge und $W_p \subset W$ ihr Gruppenerzeugnis. Gegeben $x, y \in W$ und $\bar{x}, \bar{y}$ die kleinsten Repräsentanten ihrer W_p-Nebenklassen nach 23.3.3.13 gilt*

$$x \geq y \;\Rightarrow\; \bar{x} \geq \bar{y}$$

und für alle $v, w \in W_p$ haben wir $v\bar{x} \geq w\bar{x} \;\Leftrightarrow\; v \geq w$.

23.3.3.16. In einer spezielleren Situation hatten wir das bereits in 25.2.6.12 gezeigt. Sind $\bar{x}, \bar{y}$ die kleinsten Repräsentanten ihrer W_p-Nebenklassen und gilt $\bar{x} \geq \bar{y}$, so folgt für beliebige $v, w \in W_p$ mit $v \geq w$ aus der Beschreibung 23.3.3.6 der Bruhatteilordnung durch Teilausdrücke auch umgekehrt $v\bar{x} \geq w\bar{y}$. Ist insbesondere W_p endlich und $w_p \in W_p$ das größte Element, so folgt aus $\bar{x} \geq \bar{y}$ auch $w_p\bar{x} \geq w_p\bar{y}$ für die größten Nebenklassenrepräsentanten $w_p\bar{x}$ beziehungsweise $w_p\bar{y}$.

Beweis. Wir schreiben $x = w\bar{x}$ mit $w \in W_p$. Aus $x \geq y$ folgt $x = w\bar{x} \geq \bar{y}$. Wählen wir reduzierte Darstellungen von w und von $\bar{x}$ und schreiben sie hintereinander, so erhalten wir nach 23.3.3.13 eine reduzierte Darstellung von $w\bar{x}$. Davon muß $\bar{y}$ ein Teilausdruck sein. Da aber gilt $s\bar{y} > \bar{y}$ für alle $s \in S_p$, dürfen bei diesem Teilausdruck keine Faktoren von w stehengeblieben sein und es folgt $\bar{x} \geq \bar{y}$. In dieser Situation gilt $v \geq w \;\Rightarrow\; v\bar{x} \geq w\bar{x}$ aufgrund der Erkenntnis $l(v\bar{x}) = l(v) + l(\bar{x})$ nach 23.3.3.13. Wählen wir umgekehrt reduzierte Darstellungen von v und von $\bar{x}$ und betrachten die durch Verkettung daraus entstehende reduzierte Darstellung von $v\bar{x}$ und davon einen Teilausdruck, so wird er entweder zu einer Nebenklasse $W_p\bar{y}$ mit minimalem Repräsenanten $\bar{y} < \bar{x}$ gehören, wenn wir nämlich auch von den Faktoren von $\bar{x}$ welche weglassen, oder aber die Gestalt $w\bar{x}$ haben mit $v \geq w$. Das zeigt die zweite Aussage. □

Proposition 23.3.3.17 (Bruhatordnung und Doppelnebenklassen). *Seien (W, S) ein Coxetersystem und $S_p \subset S \supset S_q$ zwei Teilmengen mit Erzeugnissen W_p und W_q. Betrachten wir zu $x \in W$ das kleinste Element $\bar{x}$ seiner Linksnebenklasse W_px und dann das kleinste Element $\bar{\bar{x}}$ von dessen Rechtsnebenklasse $\bar{x}W_q$, so erhalten wir das kleinste Element $\bar{\bar{x}}$ der Doppelnebenklasse W_pxW_q.*

23.3.3.18. Insbesondere folgt $x \geq y \;\Rightarrow\; \bar{x} \geq \bar{y} \;\Rightarrow\; \bar{\bar{x}} \geq \bar{\bar{y}}$. Gegeben zwei Elemente aus derselben Doppelnebenklasse liegt also auch jedes Element zwischen den beiden in dieser Doppelnebenklasse. Weiter folgt, daß ein Element x, das sowohl minimal in W_px als auch minimal in xW_q ist, bereits minimal in W_pxW_q sein muß.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß $\bar{\bar{x}}$ zumindest das kleinste Element von $W_p\bar{\bar{x}}$ ist. Dazu reicht es, $s\bar{\bar{x}} > \bar{\bar{x}}$ zu zeigen für alle $s \in S_p$. Ist aber $v \in W_q$ gegeben durch $\bar{x} = \bar{\bar{x}}v$, so gilt nach 23.3.3.15 notwendig $l(\bar{x}) = l(\bar{\bar{x}}) + l(v)$ und dann impliziert $s\bar{\bar{x}} < \bar{\bar{x}}$ bereits $s\bar{x} = s\bar{\bar{x}}v < \bar{\bar{x}}v = \bar{x}$ im Widerspruch zu unseren Annahmen. Ein beliebiges Element $y \in W_pxW_q$ schreiben wir nun als $y = w\bar{y}$ mit $w \in W_p$ und finden $u \in W_q$ mit $\bar{\bar{x}}u \in W_p\bar{y}$ alias $\bar{\bar{x}}u = v\bar{y}$ für $v \in W_p$. Es folgt $\bar{\bar{x}} \leq v\bar{y}$ und reduzierte Darstellungen von v und $\bar{y}$ verketten nach 23.3.3.15 zu einer reduzierten Darstellung von $v\bar{y}$. Von dieser muß $\bar{\bar{x}}$ nach 23.3.3.6 ein Teilausdruck sein. Nach unseren Erkenntnissen vom Beginn des Beweises muß dann aber $\bar{\bar{x}}$ sogar ein Teilausdruck von $\bar{y}$ sein und es folgt $\bar{\bar{x}} \leq \bar{y} \leq y$. □

23.3.3.19 (**Struktur der Doppelnebenklassen zu parabolischen Untergruppen**). Ist $x \in W_p x W_q$ das kleinste Element seiner Doppelnebenklasse, so gilt für $t \in S_q$ notwendig $l(xt) = l(x) + 1 = l(xtx^{-1}x)$. Wir folgern $xS_qx^{-1} \cap W_p \subset S_p$. Nennen wir diesen Schnitt $S_{p,x}$, so ist für $w \in W_p$ das Element wx minimal in wxW_q genau dann, wenn w minimal ist in $w\langle S_{p,x}\rangle$. Jedes Element von $W_p x W_q$ besitzt also eine eindeutige Darstellung wxv mit $w \in W_p$ minimal in $w\langle S_{p,x}\rangle$ und $v \in W_q$ beliebig und dann gilt $l(wxv) = l(w) + l(x) + l(v)$. Sind insbesondere W_p und W_q endlich, so besitzt jede Doppelnebenklasse $W_p x W_q$ auch genau ein größtes Element. Diese Aussage scheint auf Masato Kobayashi zurückzugehen. Im Fall von Weylgruppen ist sie ziemlich offensichtlich, da ja jede Doppelnebenklasse unter zwei parabolischen Untergruppen in einer zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper offensichtlich irreduzibel ist. Ich habe gelesen, daß es im Fall der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_5$ Doppelnebenklassen gibt, die als teilgeordnete Menge nicht zu ihrer eigenen opponierten teilgeordneten Menge isomorph sind.

Übungen

Übung 23.3.3.20. Seien (W, S) ein Coxtersystem und $S_p \subset S$ eine Teilmenge und $W_p \subset W$ ihr Gruppenerzeugnis. Gegeben eine Spiegelung $t \in W \backslash W_p$ und $x \in W_p$ gilt $tx > x$. Hinweis: Bruhat-Ordnung über Teilausdrücke 23.3.3.6.

Übung 23.3.3.21. Gegeben $x < y$ in der Bruhatteilordnung gibt es z mit $x < z \leq y$ in der Bruhat-Teilordnung und $l(z) = l(x) + 1$.

Übung 23.3.3.22. Sei (W, S) ein Coxetersystem und $x \in W$ ein Element und $x = s_1 \ldots s_r$ eine reduzierte Darstellung. So liefern die um eins kürzeren Teilausdrücke paarweise verschiedene Elemente von W. Hinweis: Man mag im Alkovenbild argumentieren.

Übung 23.3.3.23. Gegeben $x < y$ in der Bruhatteilordnung mit $l(y) = l(x) + 2$ gibt es genau zwei Elemente z mit $x < z < y$. Hinweis: 23.3.3.22.

23.4 Danksagung

Bei der Vorbereitung besonders hilfreich waren die Bücher von Bourbaki [Bou81] und Humphreys [Hum90]. Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Pavle Pandzic, Giovanni Zaccanelli,. . .

Kapitel 24

Halbeinfache Liealgebren

Inhalt

24.1 Allgemeine Theorie von Liealgebren 4092

24.1.1 Definitionen und Beispiele 4092

24.1.2 Darstellungen von Liealgebren 4098

24.1.3 Verschmelzung von Darstellungen* 4105

24.1.4 Nilpotente und auflösbare Liealgebren 4108

24.1.5 Satz von Lie 4112

24.1.6 Auflösbarkeitskriterium von Cartan 4116

24.1.7 Reduktive und halbeinfache Liealgebren 4118

24.2 Komplexe halbeinfache Liealgebren 4122

24.2.1 Satz von Weyl 4122

24.2.2 Jordanzerlegung in halbeinfachen Liealgebren . . . 4126

24.2.3 Wurzelraumzerlegung 4130

24.2.4 Konjugiertheit von Cartan'schen 4141

24.2.5 Cartan'sche in allgemeinen Liealgebren** 4144

24.2.6 Bezug zu algebraischen Gruppen* 4147

24.2.7 Lemma von Schur für Liealgebren* 4149

24.3 Konstruktion der halbeinfachen Liealgebren 4151

24.3.1 Freie Liealgebren 4151

24.3.2 Die Hausdorff-Formel* 4153

24.3.3 Freie Algebren* 4155

24.3.4 Präsentation halbeinfacher Liealgebren 4157

24.3.5 Reelle halbeinfache Liealgebren* 4164
24.3.6 Nilpotente Liealgebren 4172
24.4 Einfache endlichdimensionale Darstellungen 4174
24.4.1 Klassifikation durch das höchste Gewicht 4174
24.4.2 Dominante Gewichte 4180
24.4.3 Die universelle einhüllende Algebra 4185
24.4.4 Konstruktion von Moduln mit höchstem Gewicht . 4195
24.4.5 Induktion und Koinduktion bei Liealgebren* . . . 4204
24.4.6 Charakterformeln 4206
24.4.7 Cliffordalgebra und Spingruppe 4222

Die ersten beiden Kapitel dieses Textes setzen ausschließlich Kenntnisse der linearen Algebra voraus, wie sie in den Grundvorlesungen [LA1] und [LA2] entwickelt wurden. Zur Motivation der grundlegenden Definitionen und Fragestellungen ist es jedoch wichtig, auch etwas über Lie-Gruppen zu wissen oder zu lernen, wie es etwa in [ML] dargestellt wird.

24.1 Allgemeine Theorie von Liealgebren

24.1.1 Definitionen und Beispiele

24.1.1.1. Im folgenden stelle ich nur die formalen Grundlagen der Theorie zusammen. Für die Motivation verweise ich auf die Vorlesung über Lie-Theorie 22.1.3.

Definition 24.1.1.2. Eine **Lie-Algebra** über einem Körper k ist ein k-Vektorraum $\mathfrak{g}$ mitsamt einer k-bilinearen Abbildung, der **Lie-Klammer**

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ (x, y) & \mapsto & [x, y] \end{array}$$

derart, daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Antisymmetrie: $[x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$;

Jacobi-Identität: $\big[x, [y, z]\big] + \big[z, [x, y]\big] + \big[y, [z, x]\big] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

24.1.1.3. Unsere Bedingung $[x, x] = 0\ \forall x$ impliziert, wie in 3.6.3.2 ausgeführt, bereits die Identität $[x, y] = -[y, x]\ \forall x, y$. Im Fall eines Grundkörpers einer von zwei verschiedenen Charakteristik impliziert umgekehrt $[x, x] = -[x, x]$ auch $[x, x] = 0$.

24.1.1.4. Eine Liealgebra ist ein spezieller Typ von Algebra, benannt nach dem Mathematiker Sophus Lie (1842–1899). Ganz allgemein bezeichnet man wie in 4.7.9.1 einen k-Vektorraum A mit einer bilinearen Verknüpfung $A \times A \to A$ als eine **k-Algebra** und versteht unter einem **Algebrenhomomorphismus** in eine weitere k-Algebra eine k-lineare Abbildung, die mit den jeweiligen Verknüpfungen verträglich ist. Gegeben zwei k-Algebren A, B bezeichnen wir mit $\mathrm{Alg}_k(A, B)$ die Menge der Algebrenhomomorphismen von A nach B. Sind A, B Liealgebren, so schreiben wir stattdessen auch $\mathrm{Lalg}_k(A, B)$. Das hat den Vorteil, uns daran zu erinnern, womit wir es zu tun haben. Andere Typen von Algebren werden für uns auch eine wichtige Rolle spielen. Ist die Verknüpfung einer Algebra assoziativ, so spricht man von einer **assoziativen Algebra**. Gibt es für diese Verknüpfung ein neutrales Element, so spricht man von einer **unitären Algebra** und nennt das fragliche Element das **Eins-Element**. Eine Algebra ist also genau dann assoziativ und unitär, wenn die zugrundeliegende Menge mit der Vektorraum-Addition als Addition und der bilinearen Verknüpfung als Multiplikation ein Ring ist. Ich schlage deshalb vor, derartige Algebren **Ringalgebren** und im Fall, daß sie auch noch kommutativ sind, **Kringalgebren** zu nennen. Unter einem **Homomorphismus von Ringalgebren** verstehen wir dann einen Algebrenhomomorphismus, der auch ein Ringhomomorphismus ist. Wir können diese Abbildungen sowohl charakterisieren als Algebrenhomomorphismen, die das Einselement auf das Einselement werfen, als auch als Ringhomomorphismen, die über dem Grundkörper

linear sind. Wir vereinbaren für die Menge der Ringalgebrenhomomorphismen von einer k-Ringalgebra A in eine k-Ringalgebra B die Notation $\mathrm{Ralg}_k(A, B)$. Wenn man von einem Algebrenhomomorphismus zwischen zwei Ringalgebren spricht, so meint man fast immer einen Ringalgebrenhomomorphismus und hat nur vergessen, das explizit dazuzusagen.

24.1.1.5. Seien $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ zwei Liealgebren. Nach dem Vorhergehenden ist insbesondere ein **Liealgebren-Homomorphismus** $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ist eine lineare Abbildung φ mit

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

Beispiele 24.1.1.6. Der Polynomring $k[X_1, \ldots, X_n]$ ist eine assoziative, kommutative und unitäre k-Algebra, in unserer Terminologie also eine Kringalgebra. Ist V ein k-Vektorraum, so ist sein Endomorphismenring $A = \mathrm{End}\, V$ mit der Verknüpfung $(f, g) \mapsto f \circ g$ eine assoziative unitäre k-Algebra, in unserer Terminologie also eine Ringalgebra. Die quadratischen $(n \times n)$-Matrizen mit der Matrix-Multiplikation bilden für jedes $n \geq 0$ eine k-Ringalgebra $\mathrm{Mat}(n; k)$.

Definition 24.1.1.7. Gegeben Algebren $A_1, \ldots, A_n$ definiert man ihr **Produkt** als die Algebra $A_1 \times \ldots \times A_n$ mit der komponentweisen Verknüpfung. Jedes Produkt von Liealgebren ist wieder eine Liealgebra. Jedes Produkt von Ringalgebren ist wieder eine Ringalgebra.

Beispiele 24.1.1.8 (**Assoziative Algebren als Liealgebren**). Ist A eine assoziative Algebra unter der Verknüpfung $(x, y) \mapsto x \cdot y$, so wird A eine Liealgebra

$$A_{\mathrm{L}}$$

unter der Verknüpfung $(x, y) \mapsto [x, y] := x \cdot y - y \cdot x$, wie man leicht nachrechnet. Man nennt deshalb die Lie-Klammer auch oft den **Kommutator**. Faßt man $\mathrm{End}\, V$ für einen Vektorraum V beziehungsweise $\mathrm{Mat}(n; k)$ in dieser Weise als Liealgebren auf, so bezeichnet man sie meist mit $\mathfrak{gl}(V)$ beziehungsweise $\mathfrak{gl}(n; k)$ für **general linear Lie algebra**.

Definition 24.1.1.9. Eine **Unteralgebra** einer Algebra A ist ein Untervektorraum $U \subset A$ derart, daß gilt $x, y \in U \Rightarrow x \cdot y \in U$ für die Verknüpfung $(x, y) \mapsto x \cdot y$ unserer Algebra.

24.1.1.10. Eine Unteralgebra einer Algebra ist mit der induzierten Verknüpfung selbst eine Algebra. Jeder Schnitt von Unteralgebren ist selbst eine Unteralgebra.

24.1.1.11 (**Unterringalgebren versus Unteralgebren**). Von einer Unterringalgebra einer Ringalgebra fordert man zusätzlich, daß sie die Eins der großen Ringalgebra enthält. Bei einer Ringalgebra ist also im allgemeinen nicht jede Unteralgebra auch eine Unterringalgebra. Zum Beispiel ist $k[X] \subset k[X, Y]$ ist eine Unterringalgebra und $Xk[X] \subset k[X, Y]$ nur eine Unteralgebra.

Beispiel 24.1.1.12. Gegeben eine quadratische Matrix A bezeichne $\operatorname{tr} A \in k$ ihre Spur 3.2.6.16. Man definiert die **spezielle lineare Liealgebra** als

$$\mathfrak{sl}(n;k) := \{A \in \mathfrak{gl}(n;k) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$$

Dieser Raum ist in der Tat eine Unteralgebra, genauer eine Unter-Liealgebra von $\mathfrak{gl}(n;k)$, ja die Formel $\operatorname{tr}[x,y] = \operatorname{tr}(xy - yx) = 0$ gilt sogar für alle $x, y \in \mathfrak{gl}(n;k)$. Natürlich ist unser $\mathfrak{sl}(n;k)$ für $n \geq 2$ keine Unteralgebra der assoziativen Algebra $\operatorname{Mat}(n;k)$.

Beispiel 24.1.1.13. Sind V, W ein Vektorräume und ist $f : V \times V \to W$ eine bilineare Abbildung, so wird

$$\mathfrak{o}(V,f) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(xu,v) + f(u,xv) = 0 \quad \forall u,v \in V\}$$

eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$, wie man leicht nachrechnet.

Beispiel 24.1.1.14. Ist speziell $V = k^{2n}$ und $f : V \times V \to k$ die Bilinearform, die gegeben wird durch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit I der $(n \times n)$-Einheitsmatrix, so bezeichnet man $\mathfrak{o}(V,f)$ mit $\mathfrak{sp}(2n;k)$ und nennt das die **symplektische Liealgebra**. Jede nichtausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum hat in einer geeigneten Basis die obige Matrix, siehe 4.2.5.2.

Beispiel 24.1.1.15. Ist $V = k^n$ und $f : V \times V \to k$ die Bilinearform gegeben durch die Einheitsmatrix, so bezeichnet man $\mathfrak{o}(V,f)$ mit $\mathfrak{so}(n;k)$ und nennt das die **orthogonale Liealgebra**. Diese Liealgebra besteht also genau aus allen schiefsymmetrischen Matrizen. Über $\mathbb{C}$ oder allgemeiner einem algebraisch abgeschlossenen Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik hat jede nichtausgeartete symmetrische Bilinearform in einer geeigneten Basis diese Matrix, siehe 4.2.3.14. Für spätere Rechnungen ist jedoch eine andere Darstellung bequemer, in der die Bilinearform, je nachdem ob n gerade oder ungerade ist, gegeben wird durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 24.1.1.16. Die oberen Dreiecksmatrizen, die echten oberen Dreiecksmatrizen, und die Diagonalmatrizen bilden Unteralgebren von $\mathfrak{gl}(n;k)$.

Beispiel 24.1.1.17. Eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt **abelsch**, wenn all ihre Kommutatoren verschwinden, in Formeln $[x,y] = 0 \quad \forall x,y \in \mathfrak{g}$. Jeder Vektorraum $\mathfrak{g}$ wird so eine Liealgebra. Die Diagonalmatrizen bilden eine abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(n;k)$.

Definition 24.1.1.18. Wir nennen eine Liealgebra **irreduzibel**, wenn sie nicht Null ist und wenn zusätzlich jeder von Null verschiedene Liealgebren-Homomorphismus von besagter Liealgebra in eine weitere Liealgebra injektiv ist. Eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt **einfach**, wenn sie irreduzibel ist, aber nicht abelsch.

24.1.1.19 (**Diskussion der Terminologie**). Eine Liealgebra ist in anderen Worten irreduzibel genau dann, wenn sie keinen „echten Quotienten“ im Sinne von 24.1.4.6 besitzt alias wenn das Nullideal ihr einziges „echtes Ideal“ ist, und jede irreduzible Liealgebra ist entweder einfach oder aber abelsch und eindimensional. Die Terminologie „einfache Liealgebra“ ist allgemein üblich, die Terminologie „irreduzible Liealgebra“ jedoch nicht. Ein wichtiges Ziel der Vorlesung ist die gleich folgende Klassifikation der einfachen endlichdimensionalen komplexen Liealgebren.

Satz 24.1.1.20 (**Killing-Klassifikation**). *Jede einfache endlichdimensionale komplexe Liealgebra ist isomorph zu genau einer der Liealgebren*

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{sl}(n+1;\mathbb{C}) & n \geq 1 \\ \mathfrak{so}(2n+1;\mathbb{C}) & n \geq 2 \\ \mathfrak{sp}(2n;\mathbb{C}) & n \geq 3 \\ \mathfrak{so}(2n;\mathbb{C}) & n \geq 4 \end{array}$$

oder einer der fünf Ausnahmealgebren $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_8$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{g}_2$, *die nicht so leicht explizit anzugeben sind. Umgekehrt sind auch alle hier aufgezählten Liealgebren einfach.*

24.1.1.21. Der Beweis wird in 24.3.4.12 gegeben. Der Satz gilt mit demselben Beweis allgemeiner über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null, wie im übrigen auch alle anderen in dieser Vorlesung für komplexe Liealgebren formulierten Sätze.

24.1.1.22. Es wird erst später klar werden, warum wir die Liealgebren $\mathfrak{so}(n;\mathbb{C})$ in zwei Serien für gerades und ungerades n aufteilen. Die Liealgebren der ersten vier Serien heißen **klassisch**, die anderen fünf die **Ausnahmealgebren**. Die Einschränkungen an n haben als Grund die sogenannten **Ausnahme-Isomorphismen** $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{sp}(2) = \mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{sp}(4) \cong \mathfrak{so}(5)$, $\mathfrak{so}(2) \cong \mathbb{C}$ ist abelsch, $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sl}(2)$ ist auch nicht einfach, und $\mathfrak{so}(6) \cong \mathfrak{sl}(4)$.

Ergänzung 24.1.1.23 (**Beziehung zu kompakten Lie-Gruppen**). Eine endlichdimensionale Liealgebra, die isomorph ist zu einem endlichen Produkt einfacher Liealgebren, heißt „halbeinfach“. Das Bilden der komplexifizierten Liealgebra liefert nun eine Bijektion auf Isomorphieklassen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{zusammenhängende} \\ \text{kompakte Lie-Gruppen} \\ \text{mit trivialem Zentrum} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{halbeinfache} \\ \text{komplexe Liealgebren} \end{array} \right\}$$

$$K \qquad \mapsto \qquad \operatorname{Lie}_{\mathbb{C}} K$$

Diese Aussage ergibt sich aus dem Zusammenspiel von 22.4.2.4, wonach kompakte Liegruppen mit trivialem Zentrum eineindeutig kompakten reellen Liealgebren entsprechen, und 24.3.5.21, wonach die kompakten reellen Liealgebren unter

der durch Komplexifizierung gegebenen Abbildung eineindeutig den halbeinfachen komplexen Liealgebren entsprechen. Insbesondere ist die Killing-Klassifikation ein wesentlicher Schritt zur Klassifikation der zusammenhängenden kompakten Lie-Gruppen. Sie ist im übrigen auch ein wesentlicher Schritt zur Klassifikation der einfachen endlichen Gruppen.

24.1.1.24. Sei ganz allgemein F die Fundamentalmatrix einer Bilinearform f auf k^n, es gelte also $f(x,y) = x^\top F y$ wenn wir Elemente von k^n als Spaltenvektoren auffassen. So liegt $M \in \mathfrak{gl}(n;k)$ in $\mathfrak{so}(k^n, f)$ genau dann, wenn gilt $(Mx)^\top F y = -x^\top F(My)$ für alle x, y in k^n alias $M^\top F = -FM$.

Beispiel 24.1.1.25. Wir bestimmen die Dimension von $\mathfrak{sp}(2n;k)$. Hier nehmen wir $F = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{smallmatrix}\right)$ in 24.1.1.24. Eine Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ liegt folglich in $\mathfrak{sp}(2n;k)$ genau dann, wenn gilt

$$\begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Das können wir umschreiben zur Bedingung

$$\begin{pmatrix} C^\top & -A^\top \\ D^\top & -B^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix}$$

Diese Bedingung hinwiederum ist äquivalent zu den Bedingungen $C^\top = C$, $B^\top = B$ und $-A^\top = D$. Die Dimension der symplektischen Liealgebra ist damit $\dim_k \mathfrak{sp}(2n;k) = n(n+1) + n^2 = 2n^2 + n$.

Ergänzung 24.1.1.26. Der Ausnahmeisomorphismus $\mathfrak{sl}(2) \cong \mathfrak{sp}(2)$ folgt aus der offensichtlichen Relation $\mathfrak{sl}(2) \supset \mathfrak{sp}(2)$ mit Dimensionsargumenten.

Ergänzung 24.1.1.27. Der Ausnahmeisomorphismus $\mathfrak{sl}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ ensteht durch explizite Rechnung in Koordinaten oder konzeptueller, wenn wir die adjungierte Darstellung der $\mathfrak{sl}(2)$ mit ihrer Killingform betrachten.

Ergänzung 24.1.1.28. Einen Isomorphismus $\mathfrak{sl}(4) \cong \mathfrak{so}(6)$ kann man konstruieren wie folgt: Ist V ein vierdimensionaler komplexer Vektorraum, so ist $\bigwedge^2 V$ sechsdimensional und das Dachprodukt gefolgt von einem beliebigen Isomorphismus $\bigwedge^4 V \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ definiert eine symmetrische nichtausgeartete Paarung $\bigwedge^2 V \times \bigwedge^2 V \to \mathbb{C}$. Die Operation von $\mathrm{SL}(V)$ auf $\bigwedge^2 V$ landet nun offensichtlich in den für die so konstruierte Bilinearform orthogonalen Selbstabbildungen von $\bigwedge^2 V$. Das Differential dieses Homomorphismus $\mathrm{SL}(4;\mathbb{C}) \to \mathrm{O}(6;\mathbb{C})$ von Lie-Gruppen ist dann der gesuchte Isomorphismus von Liealgebren.

Ergänzung 24.1.1.29. Um einen Isomorphismus $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sl}(2)$ zu erhalten, betrachtet man in der Situation aus 24.1.1.28 auf unserem vierdimensionalen

komplexen Vektorraum V zusätzlich eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform, deren Stabilisator wir als unser $\mathrm{O}(4;\mathbb{C})$ nehmen. Sie induziert Isomorphismen $V \xrightarrow{\sim} V^*$ und damit $\bigwedge^2 V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^2(V^*)$. Andererseits induziert unsere Paarung von oben zusammen mit der Wahl eines Erzeugers von $\bigwedge^4 V$ auch einen mit der Operation von $\mathrm{SO}(4;\mathbb{C})$ verträglichen Isomorphismus $\bigwedge^2 V \xrightarrow{\sim} (\bigwedge^2 V)^*$. Verwenden wir nun noch die kanonische Identifikation $(\bigwedge^2 V)^* \xrightarrow{\sim} \bigwedge^2(V^*)$ aus 4.6.5.9, so erhalten wir insgesamt einen bis auf einen Skalar eindeutig bestimmten Automorphismus von $\bigwedge^2 V$, der diesen Raum zerlegt in zwei dreidimensionale Teilräume, nämlich seine Eigenräume. Da das alles kanonisch ist, liefert diese Konstruktion einen Homomorphismus $\mathrm{SO}(4;\mathbb{C}) \to \mathrm{O}(3;\mathbb{C}) \times \mathrm{O}(3;\mathbb{C})$, dessen Differential dann mithilfe von 24.1.1.27 der gesuchte Isomorphismus ist. Arbeiten wir über $\mathbb{R}$ und wählen eine Orientierung auf V, so können wir eine Identifikation $\bigwedge^4 V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ auszeichnen durch die Vorschrift, daß sie das geordnete Dachprodukt einer und jeder positiv orientierten Orthonormalbasis auf 1 werfen soll. In diesem Fall sind die fraglichen Eigenwerte ± 1 und unser Automorphismus ist der Hodge-$*$-Operator aus **??**. Zum Beispiel erhält man als Basen der beiden Summanden in $\bigwedge^2 \mathbb{C}^4$ die Ausdrücke $e_1 \wedge e_2 \pm e_3 \wedge e_4$, $e_1 \wedge e_4 \pm e_2 \wedge e_3$ und $e_1 \wedge e_3 \mp e_2 \wedge e_4$ für jeweils die obere beziehungsweise untere Wahl des Vorzeichens für die beiden Summanden. Hier haben wir auf $\mathbb{C}^4$ die Bilinearform zugrundegelegt mit Orthonormalbasis e_1, e_2, e_3, e_4, so daß also die Liealgebra schlicht aus allen schiefsymmetrischen Matrizen besteht, und dann kann man die Stabilität unserer beiden Summanden auch sehr explizit überprüfen.

Ergänzung 24.1.1.30. Um einen Isomorphismus $\mathfrak{sp}(4) \cong \mathfrak{so}(5)$ zu erhalten, betrachtet man in der Situation aus 24.1.1.28 zusätzlich auf V die nichtentartete schiefsymmetrische Bilinearform, deren Stabilisator eben gerade unser $\mathrm{Sp}(4;\mathbb{C})$ ist. Sie induziert eine Surjektion $\bigwedge^2 V \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, deren Kern ein fünfdimensionaler unter $\mathrm{Sp}(4;\mathbb{C})$ stabiler Teilraum ist, auf dem unsere symmetrische Bilinearform nicht ausartet. So erhalten wir einen Homomorphismus $\mathrm{Sp}(4;\mathbb{C}) \to \mathrm{O}(5;\mathbb{C})$, dessen Differential der gesuchte Isomorphismus ist.

Definition 24.1.1.31. Sei k ein Körper. Gegeben eine nicht notwendig assoziative k-Algebra $(A, \cdot)$ heißt eine lineare Abbildung $\delta : A \to A$ eine **Derivation**, wenn sie die **Leibniz-Regel** $\delta(a \cdot b) = (\delta a) \cdot b + a \cdot (\delta b)$ $\forall a, b \in A$ erfüllt. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Der}_k A \subset \mathrm{End}_k A$ den Untervektorraum der Derivationen von A.

Übungen

Übung 24.1.1.32. Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, so erhalten wir einen Homomorphismus von Liealgebren $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ vermittels der Vorschrift $(\mathrm{ad}\, x)(y) := [x, y]$.

Ergänzende Übung 24.1.1.33. Ein Element x einer endlichdimensionalen Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt **regulär**, wenn gilt

$$\dim(\ker \operatorname{ad} x) \leq \dim(\ker \operatorname{ad} y) \quad \forall y \in \mathfrak{g}$$

Man zeige, daß die regulären Elemente einer reellen oder komplexen Liealgebra stets eine offene nichtleere Teilmenge bilden. Leser mit Grundkenntnissen in algebraischer Geometrie mögen auch zeigen, daß sie stets eine Zariski-offene Teilmenge bilden.

Übung 24.1.1.34. Man finde für die Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ eine Basis e, h, f derart, daß gilt $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$ und $[e, f] = h$. Man zeige, daß die Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ einfach ist.

Übung 24.1.1.35. Man zeige, daß die Derivationen einer Algebra A eine Unteralgebra der Liealgebra $\mathfrak{gl}(A)$ der Endomorphismen des k-Vektorraums A bilden.

Übung 24.1.1.36. Seien k ein Körper, $(A, \cdot)$ eine nicht notwendige assoziative k-Algebra, $D : A \to A$ eine Derivation von A, und $A_\lambda := \operatorname{Hau}(D;\lambda)$ der Hauptraum von D zum Eigenwert λ. So gilt $A_\lambda \cdot A_\mu \subset A_{\lambda+\mu}$. Hinweis: Man kann bei 9.3.3.9 spickeln.

Übung 24.1.1.37. Man zeige, daß es bis auf Isomorphismus genau zwei zweidimensionale komplexe Liealgebren gibt.

Übung 24.1.1.38. Gegeben ein Körper k und eine assoziative k-Algebra A mit zugehöriger Liealgebra A_{L} gilt stets $\operatorname{Der}_k(A) \subset \operatorname{Der}_k(A_{\mathrm{L}})$.

24.1.2 Darstellungen von Liealgebren

24.1.2.1. In diesem Abschnitt werden einige grundlegende Begriffsbildungen formal eingeführt, die im Zusammenhang mit Matrixliegruppen in 22.2.1 ausführlicher motiviert werden.

Definition 24.1.2.2. Sei k ein Körper. Eine **Darstellung** einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ über k ist ein Paar (V, ρ) bestehend aus einem k-Vektorraum V und einem Homomorphismus von Liealgebren $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Definition 24.1.2.3. Sei k ein Körper. Eine **Operation einer Liealgebra** $\mathfrak{g}$ über k auf einem k-Vektorraum V ist eine bilineare Abbildung $\mathfrak{g} \times V \to V$, $(x, v) \mapsto xv$ mit der Eigenschaft

$$x(yv) - y(xv) = [x, y]v \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, v \in V$$

Wir werden in diesem Zusammenhang die Klammern oft weglassen und $x(yv)$ mit xyv abkürzen.

24.1.2.4 (**Darstellungen als Operationen**). Sei k ein Körper und $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über k und V ein k-Vektorraum. So induziert die Bijektion $\mathrm{Ens}(\mathfrak{g} \times V, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(\mathfrak{g}, \mathrm{Ens}(V, V))$ aus dem Exponentialgesetz 2.1.6.5 eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Operationen von } \mathfrak{g} \\ \text{auf dem Vektorraum } V \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Liealgebrenhomomorphismen} \\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) \end{array} \right\}$$

Eine Operation ist also im wesentlichen dasselbe wie eine Darstellung. Ich verwende auch gleichbedeutend die Bezeichnung als $\mathfrak{g}$-Modul und verwende die Begriffe Unterdarstellung, Quotient, einfache alias irreduzible Darstellung, halbeinfache Darstellung, isotypische Komponente, Länge und dergleichen, die wir für Moduln über beliebigen Ringen, ja Moduln über beliebigen Mengen in 8.2.2 folgende eingeführt hatten.

Beispiel 24.1.2.5. Sei V ein Vektorraum. Die offensichtliche Operation macht V zu einer Darstellung von $\mathfrak{gl}(V)$, der **Standarddarstellung** von $\mathfrak{gl}(V)$. Im Fall eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist sie im übrigen auch das Differential der offensichtlichen Darstellung der Matrix-Liegruppe $G = \mathrm{GL}(V)$ durch Automorphismen von V.

Beispiel 24.1.2.6. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Die **triviale Operation** $xv = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $v \in V$ macht jeden Vektorraum V zu einer Darstellung von $\mathfrak{g}$. Den Grundkörper k versehen mit der trivialen Operation nennt man die **Einsdarstellung**, den Nullvektorraum versehen mit der trivialen Operation die **Nulldarstellung** unserer Liealgebra.

Definition 24.1.2.7. Für eine Darstellung V einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ setzen wir

$$V^{\mathfrak{g}} := \{v \in V \mid xv = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

und nennen die Elemente von $V^{\mathfrak{g}}$ die $\mathfrak{g}$-**invarianten Vektoren** von V.

Vorschau 24.1.2.8. Gegeben eine stetige endlichdimensionale Darstellung V einer zusammenhängenden Liegruppe G mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ gilt für die Ableitung von V zu einer Darstellung der Liealgebra stets $V^G = V^{\mathfrak{g}}$ für V^G der Raum der Invarianten unter der Gruppenoperation $V^G := \{v \in V \mid gv = v \ \forall g \in G\}$. Daher rührt die Bezeichnung als „Invarianten“ im Fall einer allgemeinen Liealgebrendarstellung.

Definition 24.1.2.9. Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen zwei Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt ein **Homomorphismus von Darstellungen**, wenn gilt $\varphi(xv) = x\varphi(v) \ \forall v \in V$, $x \in \mathfrak{g}$. Wir notieren die Menge aller solchen Homomorphismen $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ oder, wenn wir den Grundkörper explizit machen wollen,

$$\mathrm{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(V, W)$$

Zwei Darstellungen heißen **isomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Homomorphismus gibt, der ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

24.1.2.10. Die Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k bilden damit eine Kategorie. Wir verwenden für diese Kategorie die beiden Notationen

$$\mathfrak{g}\text{-Mod} = \mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}$$

Stärker bilden die Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ sogar eine „Schmelzkategorie“, wie in 24.1.3.3 ausgeführt wird.

Definition 24.1.2.11. Ein Untervektorraum U einer Darstellung V einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt eine **Unterdarstellung**, wenn gilt $xv \in U \ \forall x \in \mathfrak{g}, v \in U$. Wir sagen in diesem Zusammenhang auch, U sei **stabil unter** $\mathfrak{g}$. Eine von ganz V verschiedene Unterdarstellung $U \subsetneq V$ heißt eine **echte Unterdarstellung** von V.

24.1.2.12. Gegeben eine Darstellung V sind natürlich ganz V und der Nullraum Unterdarstellungen. Ist $\varphi : V \to W$ ein Homomorphismus von Darstellungen, so ist das Bild einer Unterdarstellung von V eine Unterdarstellung von W und das Urbild einer Unterdarstellung von W eine Unterdarstellung von V. Insbesondere ist $\ker \varphi$ eine Unterdarstellung von V und $\operatorname{im} \varphi$ eine Unterdarstellung von W.

Definition 24.1.2.13. Eine Darstellung einer Liealgebra heißt **einfach** oder gleichbedeutend **irreduzibel** genau dann, wenn sie nicht Null ist und ihre einzige echte Unterdarstellung die Nulldarstellung ist.

Satz 24.1.2.14 (**Einfache Darstellungen von** $\mathfrak{sl}(2;k)$)**.** *Sei k ein Körper der Charakteristik Null.*

1. *Zu jeder positiven endlichen Dimension gibt es bis auf Isomorphismus genau eine einfache Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;k)$ von besagter Dimension;*

2. *Ist e, h, f eine Basis von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ mit $[h,e] = 2e$ und $[h,f] = -2f$ und $[e,f] = h$, so zerfällt jede einfache Darstellung L der Dimension $m+1$ unter h in eindimensionale Eigenräume*

$$L = L_m \oplus L_{m-2} \oplus \ldots \oplus L_{2-m} \oplus L_{-m}$$

zu den ganzzahligen Eigenwerten $m, m-2, \ldots, 2-m, -m$, und zusätzlich folgt aus $L_j \neq 0 \neq L_{j+2}$ bereits $f : L_{j+2} \xrightarrow{\sim} L_j$ sowie $e : L_j \xrightarrow{\sim} L_{j+2}$.

24.1.2.15. Die einfachen Darstellungen der Dimensionen 1, 2 und 3 sind die triviale Darstellung k, die Standarddarstellung k^2 und die „adjungierte Darstellung“, die wir in 24.1.1.32 eingeführt haben.

Ergänzung 24.1.2.16. In positiver Charakteristik können die einfachen endlichdimensionalen Darstellungen der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;k)$ nicht mehr durch ihre Dimension klassifiziert werden.

Ergänzung 24.1.2.17. In 22.2.3.16 wird ein elementarer Beweis skizziert für die Tatsache, daß jede endlichdimensionale Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen ist. In dieser Vorlesung wird das in größerer Allgemeinheit in 24.2.1.6 gezeigt.

Beweis. Wir behandeln nur den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers k und überlassen die Verallgemeinerung auf beliebige Grundkörper der Charakteristik Null dem Leser. Wir müssen (1) zu jeder endlichen Dimension eine einfache Darstellung konstruieren und (2) zeigen, daß je zwei einfache Darstellungen derselben endlichen Dimension isomorph sind. Wir beginnen mit (2). Die Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;k)$ hat die Basis

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Lie-Klammern zwischen den Elementen dieser Basis sind $[h,e] = 2e$, $[h,f] = -2f$, $[e,f] = h$. Die Elemente e und f heißen manchmal auch **Erzeugungs-** und **Vernichtungsoperatoren** aus physikalischen Gründen, die hier nicht ausgeführt werden sollen. Sei nun $\rho : \mathfrak{sl}(2;k) \to \mathfrak{gl}(V)$ irgendeine Darstellung. Bezeichne $V_\mu = \ker(\rho(h) - \mu)$ den Eigenraum von $\rho(h)$ zum Eigenwert $\mu \in k$. So gilt

$$eV_\mu \subset V_{\mu+2} \quad \text{und} \quad fV_\mu \subset V_{\mu-2},$$

denn aus $hv = \mu v$ folgt $hev = ehv + [h,e]v = e\mu v + 2ev = (\mu+2)ev$ und der zweite Fall folgt ähnlich aus $[h,f] = -2f$. Ist V endlichdimensional und $V \neq 0$, so gibt es sicher $\lambda \in k$ mit $V_\lambda \neq 0$ aber $V_{\lambda+2} = 0$. Für $v \in V_\lambda$ gilt dann $ev = 0$ und $hv = \lambda v$. Man prüft per Induktion, daß folgt

$$\begin{array}{rcll} hf^iv & = & (\lambda - 2i)f^iv & \text{für alle } i \geq 0, \\ ef^iv & = & i(\lambda - i + 1)f^{i-1}v & \text{für alle } i \geq 1. \end{array}$$

Insbesondere ist der von den f^iv mit $i \geq 0$ aufgespannte Teilraum eine Unterdarstellung. Ist V zusätzlich einfach und $v \neq 0$, so müssen die f^iv demnach ganz V aufspannen. Gilt $f^iv \neq 0$, so sind $v, fv, \ldots, f^iv$ Eigenvektoren von h zu paarweise verschiedenen Eigenwerten und damit linear unabhängig. Da wir V endlichdimensional angenommen hatten, gibt es folglich $d \geq 1$ mit $f^dv = 0$. Wählen wir d kleinstmöglich, so ist $v, fv, \ldots, f^{d-1}v$ eine Basis von V, also $d = \dim V$. Weiter folgt aus $f^dv = 0$ auch $0 = ef^dv = d(\lambda - d + 1)f^{d-1}v$ und mithin

$\lambda = d - 1$, da wir ja $d \neq 0$ und $f^{d-1}v \neq 0$ vorausgesetzt hatten. Damit haben wir gezeigt, daß je zwei einfache Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2;k)$ derselben endlichen Dimension d isomorph sind, da nämlich die Matrizen von $\rho(e)$, $\rho(f)$ und $\rho(h)$ in der Basis v, fv, ..., $f^{d-1}v$ nur von d abhängen. Um nun (1) die Existenz einer irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{sl}(2;k)$ in jeder Dimension zu zeigen, brauchen wir nur zu prüfen, daß die im Eindeutigkeitsbeweis hergeleiteten Formeln in der Tat eine Darstellung liefern, daß also für jedes d der Vektorraum mit der Basis $v_0, v_1, \ldots, v_{d-1}$ und der Operation gegeben durch $fv_i = v_{i+1}$ beziehungsweise $fv_{d-1} = 0$, $ev_i = i(d-i)v_{i-1}$ beziehungsweise $ev_0 = 0$ und $hv_i = (d-1-2i)v_i$ eine einfache Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;k)$ ist. Diese Rechnung scheint mir jedoch unerfreulich und wenig nahrhaft. Etwas eleganter prüft man mithilfe der Produktregel für formale partielle Ableitungen leicht, daß die Abbildung $\rho : \mathfrak{sl}(2;k) \to \mathfrak{gl}(k[X,Y])$ gegeben durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \rho(e) &= X\partial_y \\ \rho(f) &= Y\partial_x \\ \rho(h) &= X\partial_x - Y\partial_y \end{aligned}$$

eine Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;k)$ ist. Diese Darstellung ist nicht einfach, die Polynome von festem Totalgrad m bilden vielmehr eine Unterdarstellung $L(m) = k[X,Y]^m$ der Dimension $d = m+1$ mit Basis $w_i = Y^i X^{m-i}$ für $i = 0, \ldots, m$. In dieser Basis wird die Operation von $\mathfrak{sl}(2;k)$ auf $\mathrm{L}(m)$ beschrieben durch die Formeln

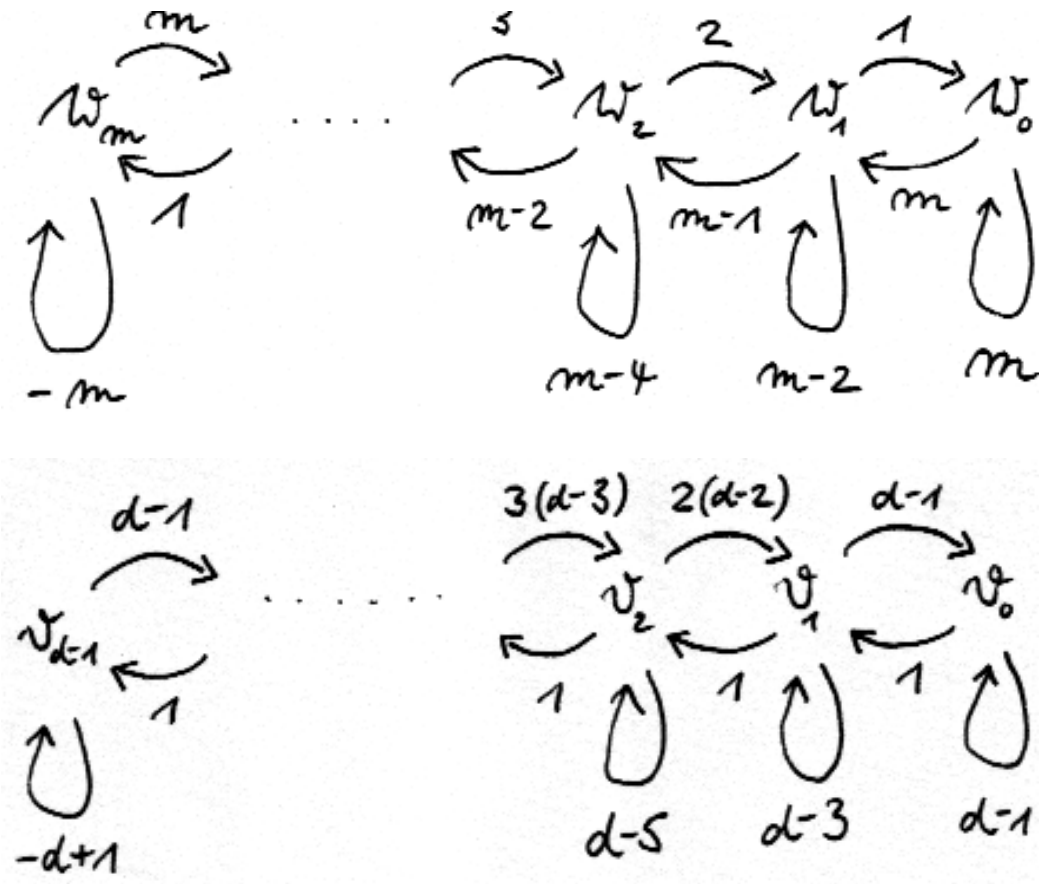
$$\begin{aligned} ew_i &= iw_{i-1} \\ fw_i &= (m-i)w_{i+1} \\ hw_i &= (m-2i)w_i \end{aligned}$$

wo wir $w_{-1} = w_{m+1} = 0$ verstehen. Die Darstellungen $\mathrm{L}(m)$ sind einfach, denn jede von Null verschiedene Unterdarstellung $0 \neq U \subset \mathrm{L}(m)$ enthält notwendig einen Eigenvektor zu h, also eines der w_i, und daraus folgt sofort $U = L(m)$. Damit haben wir nun auch in etwas übersichtlicherer Weise zu jeder endlichen Dimension eine einfache Darstellung gefunden. Die expliziten Formeln gefallen mir noch besser bei Parametrisierung der Basis nach den Eigenwerten von h. Setzen wir genauer $w_i = u_{m-2i}$, so erhalten wir für $\mathrm{L}(m)$ eine Basis bestehend aus $u_m, u_{m-2}, \ldots, u_{-m}$ und die Operation unserer Liealgebra wird gegeben durch die Formeln

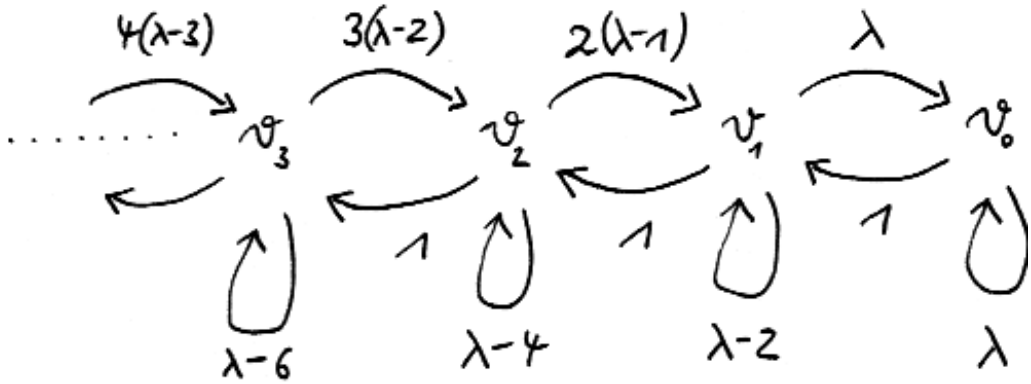
$$\begin{aligned} eu_j &= ((m-j)/2)u_{j+2} \\ fu_j &= ((m+j)/2)u_{j-2} \\ hu_j &= ju_j \end{aligned}$$

Der Satz folgt. □

24.1.2.18 (**Endlichdimensionale Darstellungen von Produkten**). Die einfachen endlichdimensionalen Darstellungen des Produkts zweier Liealgebren über einem



Die einfachen endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2;k)$ in zwei Basen. Die nach rechts weisenden Pfeile stellen jeweils die Operation von e dar, die nach links weisenden Pfeile die Operation von f und die Schlaufen die Operation von h.



Die Operation auf dem von den $v_i = f^i v$ aufgespannten Teilraum, in derselben Weise zu interpretieren wie die obenstehenden Darstellungen.

algebraisch abgeschlossenen Körper sind gerade die Tensorprodukte von einfachen Darstellungen der Faktoren. Man folgert das leicht aus 8.3.4.3, etwa indem man Darstellungen von Liealgebren als spezielle Mengenmoduln auffaßt. So liefern die im vorhergehenden besprochenen Resultate auch eine Klassifikation der endlichdimensionalen Darstellungen der Liealgebren $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})^{\times r}$.

Vorschau 24.1.2.19 (**Beliebige Darstellungen von Produkten**). Für einfache Darstellungen unendlicher Dimension gilt nichts Vergleichbares mehr. So kann man etwa diejenigen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})^{\times 2}$, die von den Casimiroperatoren zu beiden Faktoren annulliert werden, nach dem Lokalisierungssatz mit sogenannten $\mathcal{D}$-Moduln auf $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ identifizieren, und für $i : \Delta \hookrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ die diagonale Einbettung entspricht der $\mathcal{D}$-Modul $i_+\mathcal{O}_\Delta$ einer irreduziblen Darstellung, die sich nicht als ein Tensorprodukt von irreduziblen Darstellungen der beiden Faktoren erhalten läßt. Man könnte das einmal im Rahmen einer Bachelorarbeit ausführen lassen.

Übungen

Übung 24.1.2.20. Ist V eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}(2;k)$, so sind alle Eigenwerte von $h := \operatorname{diag}(1,-1)$ auf V ganze Zahlen, und ist weder Null noch Eins ein Eigenwert von h, so folgt bereits $V = 0$.

Übung 24.1.2.21. Man zeige: Ist $\tilde{e}, \tilde{h}, \tilde{f}$ eine Basis von $\mathfrak{sl}(2;k)$ mit $[\tilde{h},\tilde{e}] = 2\tilde{e}$ und $[\tilde{h},\tilde{f}] = -2\tilde{f}$, so gilt $[\tilde{e},\tilde{f}] = c\tilde{h}$ für einen Skalar $c \neq 0$.

Übung 24.1.2.22 (**Quotientendarstellung**). Gegeben $U \subset V$ eine Darstellung einer Liealgebra mit einer Unterdarstellung gibt es genau eine Operation besagter Liealgebra auf dem Quotienten V/U derart, daß die kanonische Projektion $V \twoheadrightarrow V/U$ ein Homomorphismus von Darstellungen wird.

Übung 24.1.2.23. Sei k ein Körper. Man zeige: Für alle $n \geq 1$ bilden die homogenen Polynome vom Grad d eine Darstellung

$$k[X_1,\ldots,X_n]^{(d)}$$

der Liealgebra $\mathfrak{gl}(n;k)$, wenn man die Standardmatrizen E_{ij} als die Differentialoperatoren $-X_j\partial_i$ wirken läßt, und für $\operatorname{char} k > d$ ist diese Darstellung irreduzibel. Im Fall $k = \mathbb{R}$ ist diese Darstellung im übrigen die Ableitung der offensichtlichen Darstellung von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]^{(d)} \subset \mathrm{Ens}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, wie in 22.2.3.19 ausgeführt wird.

Ergänzende Übung 24.1.2.24. Gegeben eine Darstellung von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$, auf der h diagonalisierbar operiert und e, f lokal nilpotent, liegt jeder Vektor in einer endlichdimensionalen Unterdarstellung. Stimmt das auch ohne die Forderung, daß h diagonalisierbar operiert? Ich habe mir das selbst gar nicht so genau überlegt.

24.1.3 Verschmelzung von Darstellungen*

24.1.3.1. Seien V, W zwei Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$. Durch die Vorschrift $x(v \otimes w) := xv \otimes w + v \otimes xw \; \forall x \in \mathfrak{g}$ wird $V \otimes W$ zu einer Darstellung von $\mathfrak{g}$, der sogenannten **Tensor-Darstellung**. Man prüft das durch stures Nachrechnen.

24.1.3.2. Die Motivation für obige Definition der Tensordarstellung kommt aus der Darstellungstheorie der Liegruppen. In 22.2.1.16 finden wir, daß gegeben zwei endlichdimensionale stetige Darstellungen V, W einer Liegruppe G die abgeleitete Operation zur Tensordarstellung von G auf $V \otimes W$ mit $g(v \otimes w) := gv \otimes gw$ gerade gegeben wird durch die Formel $x(v \otimes w) = xv \otimes w + v \otimes xw$ für alle $x \in \operatorname{Lie} G$, so daß also mit unserer obigen Definition die abgeleitete Darstellung zu einem Tensorprodukt genau das Tensorprodukt der abgeleiteten Darstellungen ist.

24.1.3.3. Im folgenden besprechen die zur Tensordarstellung gehörigen universellen Eigenschaften. Gegeben $r \geq 0$ und Darstellungen $V_1, \ldots, V_r, W$ einer Lielgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k verstehen wir unter einer **Verschmelzung von Darstellungen** eine multilineare Abbildung $f : V_1 \times \ldots \times V_r \to W$ mit

$$f(xv_1, v_2, \ldots, v_r) + \ldots + f(v_1, v_2, \ldots, xv_r) = xf(v_1, v_2, \ldots, v_r) \quad \forall \ldots$$

Im Fall $r = 0$ verstehen wir das speziell als die Forderung $xf(*) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Wir verwenden für die Gesamtheit aller derartigen Abbildungen wie in 4.6.2.2 die beiden Notationen

$$\operatorname{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r, W) = \operatorname{Hom}^{(r)}_{k,\mathfrak{g}}(V_1 \times \ldots \times V_r, W)$$

Unsere Multiverknüpfung multilinearer Abbildungen 4.6.2.3 induziert eine Multiverknüpfung von Verschmelzungen von Darstellungen von $\mathfrak{g}$. Unsere universellen multilinearen Abbildungen

$$\tau : V_1 \times \ldots \times V_r \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$$

aus 4.6.1.1 sind Verschmelzungen für diejenige $\mathfrak{g}$-Operation auf dem Tensorprodukt, die für $x \in \mathfrak{g}$ gegeben wird durch

$$x(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) := xv_1 \otimes \ldots \otimes v_r + \ldots + v_1 \otimes \ldots \otimes xv_r$$

im Fall $r \geq 1$ und durch die Nulloperation auf dem leeren Tensorprodukt k im Fall $r = 0$. Es ist dann klar, daß unsere universellen multilinearen Abbildungen auch universelle Verschmelzungen von Darstellungen sind, daß also das Vorschalten von τ für jede weitere Darstellung V eine Bijektion

$$\operatorname{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_r, W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r, W)$$

liefert. Im Fall $r = 0$ ist die fragliche Bijektion

$$\mathrm{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(k, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(\curlyvee, W)$$

verträglich mit der Bijektion von beiden Seiten nach $V^{\mathfrak{g}}$ vermittels des Auswertens bei $1 \in k$ beziehungsweise am einzigen Element $*$ des leeren Produkts. Sind U, V, W Darstellungen von $\mathfrak{g}$ über k und erklären wir eine Operation von $\mathfrak{g}$ auf $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ durch die Vorschrift $(xf)(v) := x(f(v)) - f(xv)$, so induziert die offensichtliche Bijektion $\mathrm{Mod}_k(U \curlyvee V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_k(U, \mathrm{Hom}_k(V, W))$ eine Bijektion

$$\mathrm{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(U \curlyvee V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(U, \mathrm{Hom}_k(V, W))$$

Vorschau 24.1.3.4 (**Darstellungen als Schmelzkategorie**). In der in 18.1.1 eingeführten Terminologie kann man die vorhergehenden Bemerkungen dahingehend zusammenfassen, daß die Darstellungen einer Liealgebra zusammen mit unseren Verschmelzungen von Darstellungen und deren Multiverknüpfungen eine Schmelzkategorie $\mathrm{Mod}_k^{\mathfrak{g}}$ bilden, die stabil universelle Verschmelzungen hat im Sinne von 18.1.3.2 und die im Sinne von 18.1.4.3 internes Hom hat. Zusammen mit obiger Bijektion ist genauer $\mathrm{Hom}_k(V, W) = (V \Rrightarrow W)$ das interne Hom nach 18.1.4.3 der Schmelzkategorie der Darstellungen von $\mathfrak{g}$. Die definitorische Gleichheit $\mathrm{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(V, W) = \mathrm{Hom}_k(V, W)^{\mathfrak{g}}$ von Homomorphismen von Darstellungen und $\mathfrak{g}$-Invarianten in der Darstellung auf dem Raum aller linearen Abbildungen kann man dann auch verstehen als Spezialfall der natürlichen Bijektion $\mathcal{M}(B, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\curlyvee, B \Rrightarrow Z)$ aus 18.1.4.2 für eine beliebige Schmelzkategorie mit Multihom $\mathcal{M}$.

Übungen

Übung 24.1.3.5. Gegeben eine Darstellung V einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist die Operation $\mathfrak{g} \otimes V \to V$, $x \otimes v \mapsto xv$ ein Homomorphismus von Darstellungen. Weiter ist auch der Liealgebren-Homomorphismus $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k V$ ein Homomorphismus von Darstellungen, für die adjungierte Operation auf $\mathfrak{g}$ und die durch 24.1.3.4 erklärte Operation auf $\mathrm{End}_k V$.

Übung 24.1.3.6. Diejenigen Vektoren einer Darstellung V einer Liealgebra $\mathfrak{a}$, die in einem endlichdimensionalen $\mathfrak{a}$-stabilen Teilraum liegen, heißen auch die $\mathfrak{a}$-**endlichen Vektoren** von V. Man zeige: Ist V eine Darstellung einer endlichdimensionalen Liealgebra $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra, so bilden die $\mathfrak{a}$-endlichen Vektoren von V einen $\mathfrak{g}$-stabilen Teilraum $V_{\mathfrak{a}} \subset V$. Statt $\mathfrak{g}$ endlichdimensional brauchen wir sogar schwächer nur annehmen, daß $\mathfrak{g}$ für die adjungierte Darstellung aus $\mathfrak{a}$-endlichen Vektoren besteht.

Übung 24.1.3.7. Sind U, V, W Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$, so sind die kanonischen Isomorphismen von Vektorräumen

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V, W)) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(U \otimes V, W) \\ U \otimes (V \otimes W) &\xrightarrow{\sim} (U \otimes V) \otimes W \end{aligned}$$

Isomorphismen von Darstellungen. Nimmt man im ersten Isomorphismus auf beiden Seiten die $\mathfrak{g}$-Invarianten, so folgen unmittelbar die „Adjunktionsisomorphismen“ $\operatorname{Mod}_{\mathfrak{g}}(U, \operatorname{Hom}(V, W)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mod}_{\mathfrak{g}}(U \otimes V, W)$. Aus diesen Isomorphismen folgert man die Verträglichkeit der Liealgebrenoperation mit vielen anderen kanonischen Abbildungen. Zum Beispiel sind für U, V, W, X Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ die kanonischen Abbildungen „Verknüpfen von Abbildungen“ und „Tensorieren von Abbildungen“

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(U, V) \otimes \operatorname{Hom}(V, W) &\to \operatorname{Hom}(U, W) \\ \operatorname{Hom}(U, V) \otimes \operatorname{Hom}(W, X) &\to \operatorname{Hom}(U \otimes W, V \otimes X) \end{aligned}$$

stets Homomorphismen von Darstellungen.

Übung 24.1.3.8 (**Clebsch-Gordan**). Man zeige im Fall der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$, daß die Darstellungen $\mathrm{L}(m) \otimes \mathrm{L}(n)$ und $\operatorname{Hom}(\mathrm{L}(m), \mathrm{L}(n))$ isomorph sind zu

$$\mathrm{L}(m+n) \oplus \mathrm{L}(m+n-2) \oplus \ldots \oplus \mathrm{L}(|m-n|)$$

Hinweis: Man betrachte die Dimensionen der h-Eigenräume.

Beispiel 24.1.3.9. Man kann $\mathrm{L}(2)$ erhalten, indem man von der Standarddarstellung $E = \mathbb{R}^3$ der Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ ausgeht und diese ableitet und komplexifiziert zu einer Darstellung $E_{\mathbb{C}}$ der komplexifizierten Liealgebra $\mathfrak{so}(3; \mathbb{C})$, die ja bekanntlich isomorph ist zu $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$. Die vorherige Übung zusammen mit 22.2.2.3 sagt, daß die Räume von $\mathrm{SO}(3)$-Verflechtungsoperatoren $E_{\mathbb{C}} \otimes E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ und $E_{\mathbb{C}} \otimes E_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ jeweils eindimensional sind. Daraus folgt leicht, daß auch die Räume von Verflechtungsoperatoren $E \otimes E \to E$ und $E \otimes E \to \mathbb{R}$ jeweils eindimensional sein müssen. In der Tat wissen wir aus 4.1.9.6 und 4.1.6.9, daß das Kreuzprodukt und das Skalarprodukt Erzeuger der jeweiligen Räume von Verflechtungsoperatoren sind.

Übung 24.1.3.10. Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra und $\Omega \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ ein $\mathfrak{g}$-invarianter Tensor, so definiert Ω für beliebige Darstellungen M, N von $\mathfrak{g}$ einen Endomorphismus $\Omega \in \operatorname{End}_{\mathfrak{g}}(M \otimes N)$.

Ergänzende Übung 24.1.3.11. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Auf $\operatorname{End} V$ haben wir die Spurform $(x, y) \mapsto \operatorname{tr}(xy)$. Der in der vorherigen Übung 24.1.3.10 erklärte Operator $\Omega_V \in \operatorname{End} V \otimes \operatorname{End} V$ liefert als Endomorphismus von $V \otimes V$ gerade die Vertauschung der Tensorfaktoren.

Ergänzende Übung 24.1.3.12. Gegeben eine Darstellung V einer Liealgebra und $r \geq 0$ gibt es genau eine Operation der Liealgebra auf der äußeren Potenz $\bigwedge^r V$ derart, daß die Projektion $V^{\otimes r} \twoheadrightarrow \bigwedge^r V$ ein Homomorphismus von Darstellungen ist. Gegeben eine Darstellung V einer Liealgebra und $r \geq 0$ gibt es genau eine Operation der Liealgebra auf der symmetrischen Potenz $\mathrm{S}^r V$ derart, daß die Projektion $V^{\otimes r} \twoheadrightarrow \mathrm{S}^r V$ ein Homomorphismus von Darstellungen ist.

Übung 24.1.3.13. Gegeben $p, q \in \mathbb{N}$ setze man $\mathfrak{so}(p,q) := \mathfrak{o}(\mathbb{R}^{p+q}, J_{p,q})$ für die durch die Diagonalmatrix mit p Einsen und q Minus-Einsen gegebene Bilinearform $J_{p,q}$. Man konstruiere einen Isomorphismus

$$\mathfrak{so}(3,1) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$$

von reellen Liealgebren. Hinweis: Man suche nicht nach einem Isomorphismus von reellen Vektorräumen $\mathbb{R}^{3+1} \cong \mathbb{C}^2$, der solch einen Isomorphismus von Liealgebren induzieren könnte, denn die Endomorphismenringe dieser Darstellungen sind verschieden. Stattdessen untersuche man die vierdimensionale reelle Darstellung $\ker\left(\bigwedge^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2) \twoheadrightarrow \bigwedge^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)\right)$ von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ und die darauf durch $\wedge$ und eine von Null verschiedene reelle Volumenform gegebene Bilinearform.

24.1.4 Nilpotente und auflösbare Liealgebren

Satz 24.1.4.1 (Liealgebren aus nilpotenten Endomorphismen). *Seien V ein Vektorraum über einem beliebigen Körper k und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Unteralgebra, die aus nilpotenten Endomorphismen von V besteht. So gilt:*

1. *Ist $V \neq 0$, so gibt es in V einen Vektor $v \neq 0$ mit $\mathfrak{g}v = 0$;*
2. *Es gibt in V eine Fahne $0 = V^0 \subset V^1 \subset \ldots \subset V^r = V$ von Unterräumen mit $\mathfrak{g}V^i \subset V^{i-1}$ für $i = 1, \ldots, r$;*
3. *Ist V endlichdimensional, so gibt es in V eine Fahne von Unterräumen $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_d = V$ mit $\dim V_i = i$ und $\mathfrak{g}V_i \subset V_{i-1}$ für $i = 1, \ldots, d$;*
4. *Ist V endlichdimensional, so besitzt V eine Basis, bezüglich derer die Matrizen aller Elemente unserer Liealgebra $\mathfrak{g}$ echte obere Dreiecksmatrizen sind.*

24.1.4.2. Bei [Rad87] findet man ein sehr elegantes Argument für eine allgemeinere Aussage unter der Annahme $\dim V < \infty$. Ich wüßte gerne, inwieweit sie sich auf den hier behandelten Fall verallgemeinern läßt. Das könnte eine nettes Thema für einen Studenten sein.

Beweis. 1. Wir beginnen mit einer Vorbemerkung. Ist $x \in \operatorname{End}(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus von V, so ist auch $\operatorname{ad} x \in \operatorname{End}(\operatorname{End}(V)) = \operatorname{End}(\mathfrak{gl}(V))$ nilpotent. In der Tat ist $(\operatorname{ad} x)^n(y)$ für alle $y \in \mathfrak{gl}(V)$ eine Linearkombination von Ausdrücken der Gestalt $x^i y x^{n-i}$. Aus $x^n = 0$ folgt also $(\operatorname{ad} x)^{2n} = 0$. Wir zeigen nun den ersten Teil durch Induktion über die Dimension von $\mathfrak{g}$. Sei $\dim \mathfrak{g} \geq 1$ und sei $L \subsetneq \mathfrak{g}$ maximal unter allen echten Unteralgebren. Unter der adjungierten Operation von L auf $\mathfrak{g}$ ist $L \subset \mathfrak{g}$ eine Unterdarstellung. Wir bilden die Quotientendarstellung $\mathfrak{g}/L$ und erhalten so einen Liealgebren-Homomorphismus $\overline{\operatorname{ad}} : L \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/L)$. Nach unserer Vorbemerkung besteht $\overline{\operatorname{ad}} L$ aus nilpotenten Endomorphismen von $\mathfrak{g}/L$, es gibt also nach Induktionsannahme ein $\bar{x} \in \mathfrak{g}/L$, $\bar{x} \neq 0$ mit $(\overline{\operatorname{ad}} L)(\bar{x}) = 0$, oder in anderen Worten ein $x \in \mathfrak{g} \backslash L$ mit $[L, x] \subset L$. Das bedeutet hinwiederum, daß $L + kx$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist, die L echt umfaßt. Da L als maximal angenommen war, gilt notwendig $L + kx = \mathfrak{g}$. Nun betrachten wir $W := \{v \in V \mid Lv = 0\}$, benutzen die Induktionsannahme ein zweites Mal und folgern $W \neq 0$. Aus $[L, x] \subset L$ folgt weiter $xW \subset W$, und da x nach Annahme nilpotent ist, gibt es $v \in W$ mit $v \neq 0$ aber $xv = 0$ und damit $\mathfrak{g}v = 0$.

2. Nach dem Beweis des ersten Teils können wir $\mathfrak{g} = L + kx$ schreiben für eine Unterliealgebra $L \subset \mathfrak{g}$ der Kodimension Eins. Mit Induktion über die Dimension von $\mathfrak{g}$ sehen wir, daß die Filtrierung durch die Teilräume $V(L, i)$ aller von Produkten der Länge i aus Elementen von L anullierten Vektoren endlich ist, als da heißt, es gibt s mit $V(L, s) = V$. Andererseits stabilisiert x diese Filtrierung und ist nilpotent. Das zeigt, daß wir unsere Filtrierung verfeinern können zu einer Filtrierung mit der gewünschten Eigenschaft.

3. Sei allgemeiner $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung einer beliebigen Liealgebra durch nilpotente Endomorphismen. Wir zeigen durch Induktion über die Dimension von V, daß es eine Kette $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_d = V$ von Unterräumen gibt mit $\dim V_i = i$ und $\mathfrak{g}V_i \subset V_{i-1}$ für $i = 1, \ldots, d$. Im Fall $V = 0$ ist nichts zu zeigen. Sonst finden wir einen Vektor $v \in V$, $v \neq 0$ mit $\rho(\mathfrak{g})v = 0$. Wir setzen $V_1 = kv$ und betrachten die Quotientendarstellung $V' = V/V_1$ und die kanonische Projektion $\operatorname{can} : V \twoheadrightarrow V/V_1$. Mit Induktion finden wir dort eine Kette $0 = V'_0 \subset V'_1 \subset \ldots \subset V'_{d-1} = V'$ wie gewünscht. Dann setzen wir $V_i = \operatorname{can}^{-1}(V'_{i-1})$ für $i \geq 1$ und $V_0 = 0$ und sind fertig.

4. Das ist nur eine Formulierung von Teil 3 in Koordinaten. □

Definition 24.1.4.3. Seien k ein Körper und A eine k-Algebra unter einer $(x, y) \mapsto x \cdot y$ notierten Verknüpfung. Ein **Ideal von** A ist ein Untervektorraum $I \subset A$ mit $A \cdot I \subset I$ und $I \cdot A \subset I$.

24.1.4.4. Jedes Ideal ist eine Unteralgebra. Null und A sind stets Ideale von A. Die Summe von Idealen ist ein Ideal. Der Schnitt von Idealen ist ein Ideal. Das

von einer Teilmenge $T \subset A$ **erzeugte Ideal** ist definiert als das kleinste Ideal, das T enthält, also als der Schnitt aller Ideale, die T enthalten. Die Ideale in einem Produkt $A_1 \times \ldots \times A_n$ von Algebren sind genau die Produkte $I_1 \times \ldots \times I_n$ von Idealen der Faktoren.

24.1.4.5. Ein Ideal $I \subset A$ einer Ringalgebra mit $I \neq A$ ist keine Unterringalgebra, da in ihm das neutrale Element der Multiplikation, wenn es überhaupt eines geben sollte, jedenfalls nicht dasselbe ist wie in A.

Lemma 24.1.4.6 (**Quotienten von Algebren nach einem Ideal**). *1. Ist $I \subset A$ ein Ideal in einer Algebra, so gibt es auf dem Quotientenvektorraum A/I genau eine bilineare Verknüpfung derart, daß die kanonische Projektion $\mathrm{can} : A \to A/I$ ein Homomorphismus von Algebren ist;*

2. Der Kern eines Algebrenhomomorphismus ist stets ein Ideal;

3. Ist $\varphi : A \to B$ ein Algebrenhomomorphismus und $I \subset A$ ein Ideal mit $\varphi(I) = 0$, so gibt es genau einen Algebrenhomomorphismus $\tilde{\varphi} : A/I \to B$ mit $\tilde{\varphi} \circ \mathrm{can} = \varphi$.

Beweis. Standard. □

24.1.4.7. Die Ideale einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ sind genau die Unterdarstellungen der adjungierten Darstellung. Eine Liealgebra ist also irreduzibel genau dann, wenn ihre adjungierte Darstellung irreduzibel ist. Beim Begriff „einfach“ passen die Definitionen leider nicht so gut zusammen.

24.1.4.8. Der Kern von $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g}\}$ und heißt das **Zentrum** von $\mathfrak{g}$. Natürlich ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$.

Definition 24.1.4.9. Für zwei Untervektorräume U, V einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ bezeichne $[U, V] \subset \mathfrak{g}$ den Untervektorraum, der von allen Kommutatoren $[x, y]$ mit $x \in U$, $y \in V$ aufgespannt wird.

24.1.4.10 (**Diskussion der Terminologie**). Diese Notation verletzt unsere allgemeinen Konventionen 2.2.1.3, nach denen $[U, V]$ eigentlich die Menge aller Kommutatoren $[x, y]$ mit $x \in U$, $y \in V$ bezeichnen müßte. Für diese Menge brauchen wir jedoch in der Lietheorie keine eigene Notation, weshalb wir die allgemein vereinbarte Schreibweise $\langle [U, V] \rangle_k$ zu $[U, V]$ abkürzen.

24.1.4.11. Sind I, J Ideale einer Liealgebra, so ist auch $[I, J]$ ein Ideal, wie man nachrechnet unter Verwendung der Jacobi-Identität. Für jede Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist insbesondere $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ stets ein Ideal. Es heißt die **derivierte Liealgebra** und ist das kleinste Ideal $I \subset \mathfrak{g}$ derart, daß der Quotient $\mathfrak{g}/I$ abelsch ist.

Definition 24.1.4.12. Man erklärt für jede Liealgebra $\mathfrak{g}$ induktiv zwei Folgen von Idealen wie folgt:

1. die **absteigende Zentralreihe** $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ldots, \mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i]$;
2. die **abgeleitete Reihe** $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ldots, \mathfrak{g}^{(i+1)} = [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}]$.

Definition 24.1.4.13. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

1. $\mathfrak{g}$ heißt **nilpotent**, wenn gilt $\mathfrak{g}^i = 0$ für $i \gg 0$;
2. $\mathfrak{g}$ heißt **auflösbar**, wenn gilt $\mathfrak{g}^{(i)} = 0$ für $i \gg 0$.

24.1.4.14. Natürlich gilt $\mathfrak{g}^{(i)} \subset \mathfrak{g}^i$, jede nilpotente Liealgebra ist also auflösbar. Jede Unteralgebra und jeder Quotient einer nilpotenten beziehungsweise auflösbaren Liealgebra ist nilpotent beziehungsweise auflösbar. Ist genauer $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ein Homomorphismus von Liealgebren, so erkennt man induktiv $\varphi(\mathfrak{g}^i) = (\varphi(\mathfrak{g}))^i$ und $\varphi(\mathfrak{g}^{(i)}) = (\varphi(\mathfrak{g}))^{(i)}$ für alle i.

24.1.4.15. Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V ist jede Unteralgebra $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, die aus nilpotenten Endomorphismen von V besteht, bereits nilpotent als Liealgebra, da sie sich nämlich nach 24.1.4.1 identifizieren läßt mit einer Unteralgebra der Liealgebra der echten oberen $(d \times d)$-Dreiecksmatrizen für $d = \dim V$.

24.1.4.16 (**Herkunft der Terminologie**). Der Begriff „auflösbar“ kommt her von einem analogen Begriff für Gruppen, der hinwiederum seinen Ursprung in der Galoistheorie hat, genauer in der Frage nach der Auflösbarkeit von polynomialen Gleichungen durch „Ausdrücke in höheren Wurzeln“.

Definition 24.1.4.17. Ein Element x einer Liealgebra heißt **ad-nilpotent**, wenn $\operatorname{ad} x$ als Endomorphismus unserer Liealgebra nilpotent ist.

Satz 24.1.4.18 (von Engel). *Eine endlichdimensionale Liealgebra ist nilpotent genau dann, wenn jedes ihrer Elemente ad-nilpotent ist.*

Beweis. $\Rightarrow$ bleibt dem Leser überlassen. Wir zeigen $\Leftarrow$. Bezeichne $\mathfrak{g}$ unsere Liealgebra. Bemerkung 24.1.4.15 sagt uns schon mal, daß $\operatorname{ad} \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ eine nilpotente Liealgebra ist. Dann folgern wir $0 = (\operatorname{ad} \mathfrak{g})^i = \operatorname{ad}(\mathfrak{g}^i) \Rightarrow \mathfrak{g}^i \subset \ker(\operatorname{ad}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \Rightarrow \mathfrak{g}^{i+1} = 0$. $\square$

Übungen

Übung 24.1.4.19. Das Urbild eines Ideals unter einem Algebrenhomomorphismus ist wieder ein Ideal. Das Bild eines Ideal unter einem surjektiven Algebrenhomomorphismus ist wieder ein Ideal.

Übung 24.1.4.20. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über einem Körper k. Eine Linearform auf $\mathfrak{g}$, die ein Homomorphismus in die Liealgebra $\mathfrak{gl}(1;k)$ ist, heißt auch ein **Charakter von** $\mathfrak{g}$. Man zeige, daß genau die Linearformen Charaktere sind, die auf der derivierten Liealgebra $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ verschwinden.

Übung 24.1.4.21. Die echten oberen Dreiecksmatrizen bilden eine nilpotente Liealgebra, die oberen Dreiecksmatrizen eine auflösbare Liealgebra.

Übung 24.1.4.22. Seien V eine zweidimensionale Darstellung einer nilpotenten Liealgebra und $U \subset V$ eine eindimensionale Unterdarstellung. Man zeige: Sind U und V/U als Darstellungen nicht isomorph, so ist V isomorph zu $U \oplus V/U$. Hinweis: Man überlege sich, daß eine nilpotente Liealgebra von oberen (2×2)-Dreiecksmatrizen bereits abelsch sein muß.

Übung 24.1.4.23. Sei A eine assoziative Algebra. Man zeige für alle $x, y \in A$ und $n \in \mathbb{N}$ die Formel $(\operatorname{ad} x)^n(y) = \sum_i \binom{n}{i}(-1)^{n-i}x^i y x^{n-i}$.

Übung 24.1.4.24. (1) Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ von Liealgebren ist $\mathfrak{g}$ auflösbar genau dann, wenn $\ker\varphi$ und $\operatorname{im}\varphi$ auflösbar sind. (2) Sind I, J zwei auflösbare Ideale in einer Liealgebra $\mathfrak{g}$, so ist auch ihre Summe $I + J \subset \mathfrak{g}$ ein auflösbares Ideal. Man betrachte dazu zum Beispiel die Surjektion $I + J \twoheadrightarrow (I+J)/J$. (3) Ist $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra, so gibt es in $\mathfrak{g}$ ein größtes auflösbares Ideal, das **Radikal** $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{g}$.

Übung 24.1.4.25. $(\operatorname{char} k = 0)$. Man zeige, daß die Liealgebra $\mathfrak{sl}(n;k)$ einfach ist. Hinweis: Besteht ein Ideal von $\mathfrak{gl}(n;k)$ nicht aus Diagonalmatrizen, so umfaßt es $\mathfrak{sl}(n;k)$. In der Tat muß es sicher ein E_{ij} mit $i \neq j$ enthalten, wie man erkennt durch Anwenden der $\operatorname{ad}(E_{kk})$. Dann enthält es auch $[E_{ij}, E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj}$ und dann alle $E_{ik} = [E_{ii} - E_{jj}, E_{ik}]$ für $k \neq i, j$ sowie alle E_{kj} für $k \neq i, j$. Dann enthält es aber in derselben Weise auch alle E_{kl} für $k \neq l$ und alle $E_{kk} - E_{ll}$. Man zeige, daß die Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;k)$ in Charakteristik 2 dahingegen nicht einfach ist.

Übung 24.1.4.26. Für jede Liealgebra L und jedes Element $x \in L$ ist $\operatorname{ad} x$ eine Derivation von L und die Menge $\operatorname{ad}(L) \subset \operatorname{Der}_k L$ ist ein Lie-Ideal. Genauer gilt sogar $[\delta, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad}(\delta x)\ \forall \delta \in \operatorname{Der}_k L$, $x \in L$.

Übung 24.1.4.27 (**Satz von Jacobson-Engel**). Gegeben eine assoziative Algebra A mit einer endlichdimensionalen Lie-Unteralgebra $\mathfrak{g} \subset A_{\mathrm{L}}$, die aus nilpotenten Elementen von A besteht, gibt es ein r derart, daß in A alle Produkte von r Faktoren aus $\mathfrak{g}$ verschwinden. Hinweis: Man wende den Satz 24.1.4.1 über Liealgebren aus nilpotenten Endomorphismen auf $V = A$ an.

24.1.5 Satz von Lie

Satz 24.1.5.1 (von Lie, abstrakte Form). *Jede einfache endlichdimensionale Darstellung einer komplexen auflösbaren Liealgebra ist eindimensional.*

Satz 24.1.5.2 (von Lie, konkrete Form). *Ist V ein von Null verschiedener endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine auflösbare Unteralgebra, so gibt es einen simultanen Eigenvektor v für alle Endomorphismen aus $\mathfrak{g}$, in Formeln ein $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $\mathfrak{g}v \subset \mathbb{C}v$.*

24.1.5.3. Beide Sätze gelten mit demselben Beweis über jedem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null. In von Null verschiedener Charakteristik sind sie jedoch im allgemeinen falsch. Zum Beispiel ist die Liealgebra $\mathfrak{sl}(2)$ in Charakteristik Zwei auflösbar, ja sogar nilpotent, und dennoch ist ihre Standarddarstellung k^2 einfach. Des weiteren ist die Bedingung endlicher Dimension wichtig: So bilden etwa das Ableiten ∂, der Multiplikationsoperator $(X\cdot)$ und die Identität id eine Basis einer auflösbaren Unter-Liealgebra von $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}[X])$ und der Polynomring $\mathbb{C}[X]$ ist eine einfache Darstellung dieser dreidimensionalen auflösbaren Liealgebra. Für eine endlichdimensionale komplexe abelsche Liealgebra dahingegen ist jede einfache Darstellung bereits endlichdimensional und damit eindimensional: Diese Aussage ist eng verwandt zum Hilbert'schen Nullstellensatz und folgt etwa aus 7.1.6.9.

Beweis. Die beiden Sätze sind sicher äquivalent. Wir zeigen hier die konkrete Form und führen den Beweis durch Induktion über $\dim \mathfrak{g}$. Der Fall $\dim \mathfrak{g} = 0$ ist klar. Gilt $\dim \mathfrak{g} > 0$, so gibt es in $\mathfrak{g}$ ein Ideal $I \subset \mathfrak{g}$ der Kodimension 1: In der Tat ist $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ eine abelsche Liealgebra, jeder Teilraum darin ist also ein Ideal. Aus $\dim \mathfrak{g} > 0$ und $\mathfrak{g}$ auflösbar folgt aber $\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, folglich gibt es in $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ einen Teilraum der Kodimension 1 und das Urbild in $\mathfrak{g}$ eines solchen Teilraums ist dann unser gesuchtes Ideal I. Nach Induktionsnahme finden wir $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $Iv \subset \mathbb{C}v$. Man sieht leicht, daß die Funktion $\lambda : I \to \mathbb{C}$ gegeben durch $xv = \lambda(x)v$ linear sein muß. Wir betrachten den zugehörigen simultanen Eigenraum $V_\lambda = \{w \in V \mid xw = \lambda(x)w \quad \forall x \in I\}$, der v enthält und deshalb von Null verschieden ist. Nach dem anschließenden allgemeinen Lemma 24.1.5.4 gilt $\mathfrak{g}V_\lambda \subset V_\lambda$. Jetzt wählen wir $y \in \mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g} = I + \mathbb{C}y$. Jeder Eigenvektor v von y in V_λ muß dann simultaner Eigenvektor aller Endomorphismen aus $\mathfrak{g}$ sein. $\square$

Lemma 24.1.5.4. *($\mathrm{char}\, k = 0$) Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung V einer k-Liealgebra $\mathfrak{g}$ und $I \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal ist für alle Linearformen $\lambda \in I^*$ der simultane Eigenraum $V_\lambda := \{w \in V \mid xw = \lambda(x)w \ \forall x \in I\}$ eine Unterdarstellung.*

Ergänzung 24.1.5.5. Das gilt mit demselben Beweis auch über einem beliebigen Grundkörper k einer Charakteristik $\mathrm{char}\, k > \dim V$. Ein Gegenbeispiel ist die Standarddarstellung k^2 der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;k)$ in Charakteristik Zwei mit dem Ideal der oberen Dreiecksmatrizen.

Beweis. In Formeln gilt es zu zeigen, daß gilt $xyw = \lambda(x)(yw) \quad \forall x \in I, y \in \mathfrak{g}$, $w \in V_\lambda$. Sicher gilt stets

$$\begin{aligned} xyw &= yxw + [x,y]w \\ &= y(\lambda(x)w) + \lambda([x,y])w \\ &= \lambda(x)(yw) + \lambda([x,y])w \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, wenn wir aus $V_\lambda \neq 0$ folgern können, daß gilt $\lambda([x,y]) = 0 \; \forall x \in I, y \in \mathfrak{g}$. Gegeben $y \in \mathfrak{g}$ und $w \in V_\lambda$ nicht Null sei dazu $n \geq 0$ die größte Zahl derart, daß die Vektoren $w, yw, y^2w, \ldots, y^nw$ linear unabhängig sind. Sei W der von $w, yw, \ldots, y^nw$ aufgespannte Teilraum von V. Sicher ist W stabil unter y. Außerdem ist W auch stabil unter I, genauer zeigt man durch Induktion über i aus $xy^iw = y(xy^{i-1}w) + [x,y]y^{i-1}w$ für $x \in I$, daß alle $W_i = \operatorname{span}(w, yw, \ldots, y^iw)$ unter I stabil sind. Dann folgert man aus derselben Formel mit einer nochmaligen Induktion für $x \in I$ sogar

$$xy^iw \in y^ixw + W_{i-1}$$

Für alle $x \in I$ ist also die Matrix von $x : W \to W$ in der Basis der y^iw eine obere Dreiecksmatrix mit lauter Einträgen $\lambda(x)$ auf der Diagonalen und hat folglich die Spur $\operatorname{tr}(x|_W) = (\dim W)\lambda(x)$. Wenden wir diese Erkenntnis an auf $[x,y]$ und erinnern, daß die Spur des Kommutators von zwei linearen Selbstabbildungen eines endlichdimensionalen Raums wie etwa unseres Raums W stets verschwindet, so folgt $(\dim W)\lambda([x,y]) = \operatorname{tr}([x,y]|_W) = 0$. Da nach unseren Annahmen W nicht der Nullraum ist, folgt $\lambda([x,y]) = 0$ für alle $x \in I$. □

Korollar 24.1.5.6 (Darstellungen auflösbarer Liealgebren). *Sei V eine endlichdimensionale Darstellung einer komplexen auflösbaren Liealgebra $\mathfrak{g}$. So gilt:*

1. *Es gibt in V eine Kette $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_d = V$ von Unterdarstellungen mit $\dim V_i = i$;*

2. *Es gibt eine Basis von V, bezüglich derer die Matrizen von Elementen aus $\mathfrak{g}$ alle obere Dreiecksmatrizen sind.*

Ergänzung 24.1.5.7. Das gilt mit demselben Beweis über jedem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null.

Beweis. Man argumentiert ausgehend vom Satz von Lie 24.1.5.2 analog wie für die Aussagen 2 und 3 von Satz 24.1.4.1 über Liealgebren aus nilpotenten Endomorphismen. □

Korollar 24.1.5.8. *Die derivierte Liealgebra einer endlichdimensionalen auflösbaren komplexen Liealgebra ist nilpotent.*

Ergänzung 24.1.5.9. Das gilt allgemeiner über jedem Grundkörper der Charakteristik Null, von dem man sich durch Erweiterung der Skalare leicht in den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers retten kann, in dem dann wieder der hier gegebene Beweis funktioniert.

Beweis. Sei $\mathfrak{g}$ unsere auflösbare Liealgebra. Nach dem vorhergehenden Korollar besteht bezüglich einer geeigneten Basis von $\mathfrak{g}$ die Unteralgebra $\operatorname{ad}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ aus oberen Dreiecksmatrizen, mithin besteht $[\operatorname{ad}\mathfrak{g}, \operatorname{ad}\mathfrak{g}] = \operatorname{ad}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$ aus echten oberen Dreiecksmatrizen und ist nilpotent. Da der Kern von $\operatorname{ad} : [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ im Zentrum von $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ liegt, ist damit auch $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ selbst nilpotent. □

Übungen

Übung 24.1.5.10 (**Darstellungen von nilpotenten Liealgebren**). Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$. Man zeige: Jede endlichdimensionale Darstellung einer nilpotenten Liealgebra über k zerfällt in eine direkte Summe von Unterdarstellungen, die Haupträume für alle von der Operation herkommenden Endomorphismen sind. Hinweis: Man kombiniere das Korollar 24.1.5.6 zum Satz von Lie und 24.1.4.22, um durch Umarrangieren einer Kompositionsreihe jeden simultanen Hauptraum als Unterdarstellung zu entlarven und zu zeigen, daß deren Dimensionen sich zur Dimension der ganzen Darstellung aufaddieren. Alternative: Man zeige mit Induktion über n, daß jedes Element y mit $(\operatorname{ad} x)^n(y) = 0$ den Nullhauptraum von x, ja jeden Hauptraum von x stabilisiert. Die fraglichen simultanen Eigenwerte sind dann Linearformen auf unserer Liealgebra und heißen die **Gewichte** unserer Darstellung, die zugehörigen simultanen Eigenräume nennen wir die **Gewichtsräume**, und die zugehörigen simultanen Haupträume die **verallgemeinerten Gewichtsräume**.

Ergänzende Übung 24.1.5.11. Eine Darstellung einer Liealgebra heißt **lokal endlich**, wenn jeder Vektor in einer endlichdimensionalen Unterdarstellung liegt. Man zeige, daß auch jede lokal endliche Darstellung einer nilpotenten Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ in die direkte Summe ihrer verallgemeinerten Gewichtsräume zerfällt.

Übung 24.1.5.12. Diese Übung dient nur der Auffrischung Ihrer Kenntnisse in linearer Algebra. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus und seien $\lambda, \mu, \ldots, \nu$ dessen Eigenwerte. Man zeige, daß für jeden Untervektorraum $W \subset V$ mit $f(W) \subset W$ gilt

$$W = (W \cap \operatorname{Hau}(f|V;\lambda)) \oplus (W \cap \operatorname{Hau}(f|V;\mu)) \oplus \ldots \oplus (W \cap \operatorname{Hau}(f|V;\nu))$$

Man formuliere auch die Verallgemeinerung auf den Fall eines lokal endlichen Endomorphismus f eines beliebigen Vektorraums V.

24.1.6 Auflösbarkeitskriterium von Cartan

Satz 24.1.6.1 (Auflösbarkeitskriterium von Cartan). *Seien V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine Unteralgebra. Genau dann ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, wenn gilt $\operatorname{tr}(xy) = 0 \;\; \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], y \in \mathfrak{g}$.*

24.1.6.2. Ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, so liegt es nach Korollar 24.1.5.6 zum Satz von Lie bei geeigneter Basiswahl bereits in den oberen Dreiecksmatrizen. Das zeigt die eine Richtung. Der Beweis der anderen Richtung braucht einige Vorbereitungen und wird erst am Ende dieses Abschnitts direkt vor 24.1.6.7 gegeben.

Ergänzung 24.1.6.3. Das Auflösbarkeitskriterium gilt allgemeiner auch über jedem Grundkörper der Charakteristik Null: Durch Erweiterung der Skalare rettet man sich in den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers der Charakteristik Null, in dem dann wieder der hier gegebene Beweis funktioniert.

Lemma 24.1.6.4. *Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Ist $x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$ die Jordan-Zerlegung von $x \in \operatorname{End} V$, so ist $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad}(x_{\mathrm{s}}) + \operatorname{ad}(x_{\mathrm{n}})$ die Jordan-Zerlegung von $\operatorname{ad} x \in \operatorname{End}(\mathfrak{gl}(V))$. In Formeln gilt also*

$$\operatorname{ad}(x_{\mathrm{s}}) = (\operatorname{ad} x)_{\mathrm{s}} \quad \textit{und} \quad \operatorname{ad}(x_{\mathrm{n}}) = (\operatorname{ad} x)_{\mathrm{n}}$$

Beweis. Sicher gilt $[\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}, \operatorname{ad} x_{\mathrm{n}}] = \operatorname{ad}[x_{\mathrm{s}}, x_{\mathrm{n}}] = 0$. Außerdem ist $\operatorname{ad} x_{\mathrm{n}}$ nilpotent nach dem Beginn des Beweises von 24.1.4.1. Wir müssen damit nur noch zeigen, daß $\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}$ diagonalisierbar ist. Aber identifizieren wir $\operatorname{End} V$ mit einer Algebra von quadratischen Matrizen vermittels einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ aus Eigenvektoren von x_{s}, sagen wir $x_{\mathrm{s}} v_i = \lambda_i v_i$, so werden die Standardmatrizen E_{ij} mit einer Eins in der i-ten Zeile und j-ten Spalte Eigenvektoren zu $\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}$, genauer gilt $(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}})(E_{ij}) = (\lambda_j - \lambda_i) E_{ij}$. Folglich ist mit x_{s} auch $\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}$ diagonalisierbar. $\square$

Lemma 24.1.6.5. *Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Seien zwei Teilräume seines Endomorphismenraums $\operatorname{End} V \supset B \supset A$ gegeben und sei $T := \{x \in \operatorname{End} V \mid (\operatorname{ad} x)(B) \subset A\}$. Erfüllt ein $x \in T$ die Bedingung $\operatorname{tr}(xz) = 0$ für alle $z \in T$, so ist x nilpotent.*

24.1.6.6. Der Beweis des Auflösbarkeitskriteriums beruht auf diesem technischen Lemma. Ich gebe für dies Lemma zwei Beweise. Der erste ist zwar etwas schneller, hinterläßt aber bei mir einen schalen Nachgeschmack, da er nicht für einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k der Charakteristik Null funktioniert. Deshalb die Alternative.

Beweis. Sei $x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$ die Jordan-Zerlegung von x. So ist $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_{\mathrm{s}} + \operatorname{ad} x_{\mathrm{n}}$ die Jordan-Zerlegung von $\operatorname{ad} x$ und aus $(\operatorname{ad} x)(B) \subset A$ folgt mit Übung 4.3.3.13 zum Bild des halbeinfachen Anteils die Inklusion $(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}) B \subset A$. In anderen Worten liegen alle Eigenräume von $(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}) : B \to B$ zu von Null verschiedenen

Eigenwerten bereits in A.

Rest des Beweises im komplexen Fall. Wählen wir in V eine Basis aus Eigenvektoren von x_{s} und definieren $z \in \operatorname{End} V$ durch die Bedingung, daß seine Matrix in dieser Basis komplex konjugiert ist zur Matrix von x_{s}, so haben wir $\operatorname{Eig}(\operatorname{ad} z; \lambda) = \operatorname{Eig}(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}; \bar{\lambda})$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und mithin auch $(\operatorname{ad} z)(B) \subset A$. Aus $\operatorname{tr}(xz) = 0$ folgt dann aber sofort $x_{\mathrm{s}} = 0$. □

Rest des Beweises im Allgemeinen. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von x_{s}, sagen wir $x_{\mathrm{s}} v_i = \lambda_i v_i$ für geeignete $\lambda_i \in k$. Sei $E \subset k$ der von den λ_i aufgespannte $\mathbb{Q}$-Untervektorraum. Es gilt zu zeigen $E = 0$. Sei sonst $f : E \to \mathbb{Q}$ eine nicht-verschwindende $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung. Wir betrachten den Endomorphismus z von V, der definiert wird durch $z v_i = f(\lambda_i) v_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Zunächst zeigen wir $z \in T$. Natürlich haben wir

$$\begin{aligned} (\operatorname{ad} z)(E_{ij}) &= (f(\lambda_i) - f(\lambda_j)) E_{ij} \\ &= f(\lambda_i - \lambda_j) E_{ij} \end{aligned}$$

für alle i und j, also $\operatorname{Eig}(\operatorname{ad} z; \mu) = \bigoplus_{f(\lambda)=\mu} \operatorname{Eig}(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}; \lambda)$ und insbesondere $(\operatorname{ad} z)(B) \subset A$. Nun ist offensichtlich $\operatorname{tr}(xz) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\lambda_i)$. Aus der Annahme $\operatorname{tr}(xz) = 0$ folgt mithin $f(\operatorname{tr}(xz)) = \sum_{i=0}^n f(\lambda_i)^2 = 0$ und damit $f(\lambda_i) = 0 \quad \forall i$ im Widerspruch zu unserer Annahme $f \neq 0$. □

Beweis des Cartan'schen Auflösbarkeitskriteriums. Wir zeigen nun die schwierige Implikation aus dem Cartan'schen Auflösbarkeitskriterium 24.1.6.1. Es reicht zu zeigen, daß $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent ist. Mit 24.1.4.1 reicht es sogar zu zeigen, daß alle Elemente $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent sind als Endomorphismen von V. Nach Lemma 24.1.6.5 müssen wir dazu nur zeigen, daß gilt $\operatorname{tr}(xz) = 0$ für alle $z \in \operatorname{End} V$ mit $[z, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Schreiben wir aber $x = \sum [c_i, d_i]$, so ist

$$\operatorname{tr}(xz) = \sum \operatorname{tr}([c_i, d_i] z) = \sum \operatorname{tr}(c_i [d_i, z]) = 0$$

nach Annahme, da ja gilt $c_i \in \mathfrak{g}$ und $[d_i, z] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ für alle i. Hier haben wir verwendet, daß für drei Endomorphismen x, y, z eines endlichdimensionalen Vektorraums stets gilt $\operatorname{tr}(xyz) = \operatorname{tr}(zxy) = \operatorname{tr}(yzx)$, also $\operatorname{tr}([x, y] z) = \operatorname{tr}(x [y, z])$. □

Definition 24.1.6.7. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra über einem Körper k. Die **Killingform von** $\mathfrak{g}$ ist die Bilinearform $\kappa = \kappa_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ auf unserer Liealgebra, die gegeben wird durch die Vorschrift

$$\kappa(x, y) := \operatorname{tr}((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))$$

24.1.6.8. Die Killingform ist ein Spezialfall unserer Spurform, wie wir sie in 8.3.6.7 für eine beliebige endlichdimensionale Algebra erklärt hatten.

24.1.6.9. Sicher ist κ symmetrisch, $\kappa(x,y) = \kappa(y,x)$. Weiter gilt offensichtlich $\kappa([x,y],z) = \kappa(x,[y,z])\ \forall x,y,z \in \mathfrak{g}$. Letztere Eigenschaft ist so wichtig, daß sie einen eigenen Namen hat.

Definition 24.1.6.10. Eine Bilinearform $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ auf einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt **invariant**, wenn gilt $b([x,y],z) = b(x,[y,z])\ \forall x,y,z \in \mathfrak{g}$.

Ergänzung 24.1.6.11. Man nennt diese Eigenschaft manchmal auch die „Assoziativität“ von b. Sie hat jedoch nur oberflächlich mit Assoziativität im üblichen Sinne zu tun. Vielmehr werden wir später sehen, daß unsere Eigenschaft bedeutet, daß das Element $b \in (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^*$ invariant ist unter der natürlichen Operation der Liealgebra $\mathfrak{g}$ auf diesem Raum.

Korollar 24.1.6.12 (**Auflösbarkeitskriterium**). *Eine endlichdimensionale Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper der Charakteristik Null ist auflösbar genau dann, wenn für die Killing-Form gilt $\mathfrak{g} \perp [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ alias $\kappa(x,[y,z]) = 0\ \forall x,y,z \in \mathfrak{g}$.*

Beweis. Das Cartan-Kriterium 24.1.6.1 zeigt, daß unsere Bedingung gleichbedeutend ist zur Auflösbarkeit von $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$. Die kurze exakte Sequenz $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \operatorname{ad}\mathfrak{g}$ zeigt dann, daß sie auch gleichbedeutend ist zur Auflösbarkeit von $\mathfrak{g}$. □

Übungen

Übung 24.1.6.13. Man zeige: Die Killingform einer endlichdimensionalen nilpotenten Liealgebra ist Null.

24.1.7 Reduktive und halbeinfache Liealgebren

24.1.7.1. Ich erinnere daran, daß nach 24.1.1.18 eine Liealgebra irreduzibel heißt, wenn sie genau zwei Ideale besitzt, nämlich sich selber und Null, und einfach, wenn sie außerdem nicht abelsch ist.

Definition 24.1.7.2. Eine Liealgebra heißt **halbeinfach**, wenn sie isomorph ist zu einem endlichen Produkt von endlichdimensionalen einfachen Liealgebren. Eine Liealgebra heißt **reduktiv**, wenn sie isomorph ist zu einem endlichen Produkt von endlichdimensionalen irreduziblen Liealgebren.

24.1.7.3 (**Diskussion der Terminologie**). In diesem Text wie im überwiegenden Teil der Literatur werden halbeinfache oder reduktive Liealgebren nur über Körpern der Charakteristik Null betrachtet. Wenn Sie diese Bedingung irgendwo vermissen, habe ich vermutlich nur versäumt, sie explizit dazuzuschreiben. Da wir bei einer halbeinfachen Liealgebra zusätzlich fordern, daß sie endlichdimensional sein soll, ist in unserer Terminologie nicht jede einfache Liealgebra halbeinfach. In diesem Licht ist die Terminologie unschön, aber so hat sie sich nun einmal eingebürgert.

Beispiele 24.1.7.4. Die Liealgebra $\mathfrak{g} = 0$ ist halbeinfach. Eine von Null verschiedene abelsche Liealgebra ist jedoch nicht halbeinfach, sondern nur reduktiv. Erste substanzielle Beispiele liefert 24.2.1.15.

Definition 24.1.7.5. Eine Darstellung heißt wie in 8.2.3.1 **halbeinfach**, wenn sie eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen ist, wenn also für besagte Darstellung V in Formeln gilt $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ mit $V_i \subset V$ einfachen Unterdarstellungen. Die Nulldarstellung $V = 0$ ist halbeinfach als die „leere Summe".

Ergänzung 24.1.7.6. Ganz genauso wie in 8.2.3 für Moduln über Ringen zeigt man, daß für eine Darstellung V gleichbedeutend sind: (1) V ist halbeinfach, (2) V ist eine nicht notwendig direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen, und (3) jede Unterdarstellung von V besitzt ein Komplement. Ebenso zeigt man auch, daß jede Unterdarstellung und jeder Quotient einer halbeinfachen Darstellung halbeinfach sind. All das wird der Leser im endlichdimensionalen Fall unschwer als Übung selbst zeigen können. Im allgemeinen Fall benötigt man jedoch zusätzliche Ideen und kommt nicht ohne das Zorn'sche Lemma aus.

Beispiel 24.1.7.7. Die Darstellung $\mathbb{C} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$, $1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ der abelschen Liealgebra $\mathbb{C}$ ist nicht halbeinfach. Ganz allgemein ist für einen k-Vektorraum V und $a \in \operatorname{End}(V)$ die Darstellung $k \to \mathfrak{gl}(V)$, $1 \mapsto a$ der abelschen Liealgebra k halbeinfach genau dann, wenn a diagonalisierbar ist über dem algebraischen Abschluß $\bar{k}$, wenn also a halbeinfach ist im Sinne von 4.3.3.4.

24.1.7.8. Per definitionem ist eine Liealgebra reduktiv genau dann, wenn ihre adjungierte Darstellung halbeinfach ist im Sinne von 24.1.7.5 alias die Summe ihrer einfachen Unterdarstellungen. Insbesondere ist die Liealgebra einer kompakten Liegruppe stets reduktiv nach 22.2.4.12 und 22.2.2.5.

Satz 24.1.7.9 (Charakterisierung halbeinfacher Liealgebren). *Für eine endlichdimensionale Liealgebra über einem Körper der Charakteristik Null sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Liealgebra besitzt kein von Null verschiedenes abelsches Ideal;*
2. *Unsere Liealgebra besitzt kein von Null verschiedenes auflösbares Ideal;*
3. *Unsere Liealgebra ist halbeinfach;*
4. *Unsere Liealgebra ist die direkte Summe ihrer einfachen Ideale;*
5. *Unsere Liealgebra hat eine nicht ausgeartete Killingform.*

24.1.7.10. Gegeben eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ und Unteralgebren $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ sagen wir, die Liealgebra $\mathfrak{g}$ **zerfalle in das Produkt der** $\mathfrak{g}_i$ und schreiben $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \ldots \times \mathfrak{g}_n$,

wenn die durch die Addition gegebene Abbildung von der rechten Seite in die linke Seite ein Isomorphismus von Liealgebren ist. Gleichbedeutend dazu ist, daß alle $\mathfrak{g}_i$ Ideale von $\mathfrak{g}$ sind und unsere Abbildung von der rechten Seite in die linke Seite ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Bezeichnen etwa $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{gl}(n)$ die oberen Dreiecksmatrizen und $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{gl}(n)$ die echten unteren Dreiecksmatrizen, so hätten wir eine Zerlegung $\mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}$ als Vektorräume, aber das wäre keine Zerlegung in ein Produkt von Liealgebren. Wir schicken dem Beweis des Satzes eine Ergänzung zur Killingform voraus.

Lemma 24.1.7.11 (**Restriktion der Killingform auf ein Ideal**). *Die Killingform eines Ideals einer endlichdimensionalen Liealgebra stimmt stets überein mit der Einschränkung der Killingform der ganzen Liealgebra auf besagtes Ideal.*

24.1.7.12. Dasselbe gilt für die Spurform jeder endlichdimensionalen Algebra, vergleiche Übung 8.3.6.18. Der Beweis bleibt derselbe.

Beweis. Ist $\mathfrak{g}$ unsere Liealgebra und $I \subset \mathfrak{g}$ unser Ideal, so behauptet dies Lemma die Formel

$$\kappa_I = \kappa_{\mathfrak{g}}|_I$$

Sind ganz allgemein $I \subset \mathfrak{g}$ Vektorräume und ist $a : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ eine lineare Abbildung mit $a(\mathfrak{g}) \subset I$, so gilt $\operatorname{tr}(a) = \operatorname{tr}(a|_I)$ für $a|_I$ die Einschränkung $a|_I : I \to I$ von a auf I. Das Lemma ergibt sich mit $a = (\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)$ für $x, y \in I$. □

Beweis von 24.1.7.9. 4 ⇒ 3 ⇒ 2 ⇔ 1 bieten keine Schwierigkeiten.

2 ⇒ 5. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Das Radikal der Killingform $\kappa = \kappa_{\mathfrak{g}}$ bezeichnen wir mit

$$\operatorname{rad} \kappa = \{x \in \mathfrak{g} \mid \kappa(x, y) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

Da κ invariant ist, muß $\operatorname{rad} \kappa \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal sein. Offensichtlich verschwindet κ auf $\operatorname{rad} \kappa$. Mit 24.1.7.11 folgt, daß die Killingform von $\operatorname{rad} \kappa$ verschwindet, nach dem Auflösbarkeitskriterium 24.1.6.12 ist damit $\operatorname{rad} \kappa$ auflösbar. Gibt es also kein von Null verschiedenes auflösbares Ideal, so folgt $\operatorname{rad} \kappa = 0$ und die Killingform ist nicht ausgeartet.

5 ⇒ 1. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Gegeben ein abelsches Ideal $I \subset \mathfrak{g}$ gilt $((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))^2 = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $y \in I$. Folglich ist $((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))$ nilpotent, also $\kappa(x, y) = \operatorname{tr}((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $y \in I$. Damit gilt $I \subset \operatorname{rad} \kappa$.

2 ⇒ 4. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra ohne von Null verschiedene auflösbare Ideale. Ist $I \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal, so ist auch $I^\perp = \{y \in \mathfrak{g} \mid \kappa(y, I) = 0\}$ ein Ideal, da die Killingform invariant ist. Auf dem Ideal $I \cap I^\perp$ verschwindet nun

die Killingform, mithin ist dies Ideal nach dem Auflösbarkeitskriterium 24.1.6.12 auflösbar. Aus unserer Annahme folgt so $I \cap I^\perp = 0$ und erst recht $[I, I^\perp] = 0$. Mit Dimensionsbetrachtungen folgt dann sogar $I \oplus I^\perp = \mathfrak{g}$. Jedes Ideal von I beziehungsweise $I^\perp$ ist damit ein Ideal von $\mathfrak{g}$, also besitzen auch I und $I^\perp$ keine von Null verschiedenen auflösbaren Ideale. Mit Induktion sehen wir so, daß sich $\mathfrak{g}$ schreiben läßt als $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \ldots \oplus I_r$, wobei die I_ν einfache Ideale von $\mathfrak{g}$ sind. Ist nun $I \subset \mathfrak{g}$ ein weiteres einfaches Ideal, so folgt $I = [I, \mathfrak{g}] = [I, I_1] \oplus \ldots \oplus [I, I_r]$ und damit $I = [I, I_\nu] = I_\nu$ für ein ν. $\square$

Übungen

Übung 24.1.7.13. Gegeben eine reduktive Liealgebra sind die isotypischen Komponenten im Sinne von 8.2.3.7 ihrer adjungierten Darstellung genau die einfachen Ideale sowie, als isotypische Komponente zur Einsdarstellung, das Zentrum. Jede reduktive Liealgebra zerfällt mithin in die Summe ihrer einfachen Ideale und ihres Zentrums. Des weiteren ist jedes Ideal einer reduktiven Liealgebra die direkte Summe eines Teils der einfachen Ideale mit einem Untervektorraum des Zentrums. Im endlichdimensionalen Fall können diese Aussagen auch ohne Rückgriff auf die allgemeine Theorie leicht bewiesen werden, wie in der folgenden Übung angedeutet wird.

Übung 24.1.7.14. Gegeben paarweise verschiedene einfache Ideale $I_1, \ldots, I_r$ einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ sowie ein abelsches Ideal $A \subset \mathfrak{g}$ zeige man, daß die Addition eine Injektion $I_1 \oplus \ldots \oplus I_r \oplus A \hookrightarrow \mathfrak{g}$ induziert. Des weiteren zeige man unter der zusätzlichen Annahme $I_1 \oplus \ldots \oplus I_r \oplus A \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$, daß jedes Ideal von $\mathfrak{g}$ die Summe eines Teils der I_ν mit einem Untervektorraum von A ist.

Vorschau 24.1.7.15. Eine endlichdimensionale Liealgebra über einem Körper der Charakteristik Null ist reduktiv genau dann, wenn jedes auflösbare Ideal bereits in ihrem Zentrum liegt. Das werden wir in 24.2.1.13 aus dem Satz von Weyl folgern.

Übung 24.1.7.16. Jedes Ideal einer halbeinfachen Liealgebra ist eine Summe von einfachen Idealen. Jeder Quotient einer halbeinfachen Liealgebra ist eine halbeinfache Liealgebra.

Übung 24.1.7.17. Jede halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist ihre eigene derivierte Liealgebra, in Formeln $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Übung 24.1.7.18. Jede reduktive Liealgebra läßt sich auf genau eine Weise zerlegen in das Produkt einer halbeinfachen Liealgebra und einer abelschen Liealgebra, nämlich als $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \times \mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{z}$ dem Zentrum von $\mathfrak{g}$.

24.2 Komplexe halbeinfache Liealgebren

24.2.1 Satz von Weyl

24.2.1.1. Für zwei Darstellungen V, W einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ bezeichnen wir den Raum aller Homomorphismen von Darstellungen mit $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) = \operatorname{Mod}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ und den Raum aller Endomorphismen der Darstellung V mit $\operatorname{End}_{\mathfrak{g}}(V) = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V)$.

Lemma 24.2.1.2 (Lemma von Schur). *Die einzigen Endomorphismen einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung einer komplexen Liealgebra sind die Multiplikationen mit Skalaren. Ist $\mathfrak{g}$ unsere Liealgebra und L unsere einfache endlichdimensionale Darstellung, so gilt demnach in Formeln*

$$\operatorname{End}_{\mathfrak{g}} L = \mathbb{C}\,\mathrm{id}_L$$

Ergänzung 24.2.1.3. Das Lemma gilt mit demselben Beweis über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper.

Beweis. Sei $\varphi \in \operatorname{End} L$ ein Endomorphismus des Vektorraums L. Da eine einfache Darstellung per definitionem nicht Null ist, hat φ mindestens einen Eigenwert λ. Aus $\varphi \in \operatorname{End}_{\mathfrak{g}} L$ folgt zusätzlich, daß der zugehörige Eigenraum L_λ eine Unterdarstellung von L ist. Falls L einfach ist, folgt sofort $L_\lambda = L$ und damit erhalten wir dann wie gewünscht $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}$. □

Ergänzung 24.2.1.4. Die Folgerung des Lemmas gilt auch, wenn wir statt $\dim L < \infty$ voraussetzen, daß L abzählbare Dimension hat. Um das zu sehen beachte man, daß dann $E = \operatorname{End}_{\mathfrak{g}} L$ ein Schiefkörper abzählbarer Dimension über $\mathbb{C}$ ist. Der einzige derartige Schiefkörper ist aber $\mathbb{C}$ selber, denn gäbe es $\varphi \in E \backslash \mathbb{C}$, so könnte φ nicht algebraisch sein über $\mathbb{C}$, also hätten wir eine Einbettung $\mathbb{C}(X) \hookrightarrow E$, $X \mapsto \varphi$ des Körpers der gebrochen rationalen Funktionen über $\mathbb{C}$ nach E. Da aber $\mathbb{C}(X)$ überabzählbare Dimension hat über $\mathbb{C}$, die $(X - \lambda)^{-1}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ sind nämlich linear unabhängig über $\mathbb{C}$, kann das nicht sein. Die Folgerung des Lemmas gilt des weiteren auch, wenn wir unsere Liealgebra endlichdimensional annehmen und mit Koeffizienten in einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper arbeiten, vergleiche 24.2.7.1.

24.2.1.5. Das Lemma gilt nicht, wenn wir $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzen. Ein Gegenbeispiel ist die einfache Darstellung von $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ im reellen Vektorraum $L = \mathbb{C}$, bei der $\lambda \in \mathfrak{g}$ auf L operiert als die Multiplikation mit $\lambda\,\mathrm{i}$. Wir haben nämlich in diesem Fall $\operatorname{End}_{\mathfrak{g}} L = \mathbb{C}\,\mathrm{id} \neq \mathbb{R}\,\mathrm{id}$.

Satz 24.2.1.6 (von Weyl). *Jede endlichdimensionale Darstellung einer komplexen halbeinfachen Liealgebra ist halbeinfach.*

24.2.1.7. Der Beweis braucht einige Vorbereitungen und wird erst zu Ende dieses Abschnitts gegeben. Der Spezialfall $\mathfrak{sl}(2;k)$ wurde bereits in 22.2.3.16 sozusagen „zu Fuß“ behandelt. Wir zeigen die Aussage allgemeiner über jedem Grundkörper der Charakteristik Null, vergleiche 24.2.1.12.

24.2.1.8 (**Verallgemeinerte Casimir-Operatoren**). Seien $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra und $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ eine nichtausgeartete invariante Bilinearform. Für jede Darstellung V von $\mathfrak{g}$ erklären wir dann eine lineare Abbildung

$$C_b = C_b^V : V \to V$$

wie folgt: Wir wählen eine Basis $x_1, \ldots, x_\mathrm{n}$ von $\mathfrak{g}$, bezeichnen mit $x^1, \ldots, x^n$ die bezüglich b duale Basis, charakterisiert durch $b(x_i, x^j) = \delta_{ij}$, und setzen

$$C_b(v) := \sum_{i=1}^{n} x_i x^i v$$

Die Abbildung C_b hängt nicht von der Wahl der Basis unserer Liealgebra $\mathfrak{g}$ ab, aber das wird im Folgenden nicht verwendet und der Beweis dieser Tatsache bleibt dem Leser überlassen.

Lemma 24.2.1.9. *Die Abbildung C_b vertauscht mit der Operation von $\mathfrak{g}$, in Formeln gilt also $C_b \in \operatorname{End}_{\mathfrak{g}} V$.*

Beweis. Das kann man in Koordinaten nachrechnen wie folgt: Entwickeln wir für $y \in \mathfrak{g}$ die Kommutatoren mit Elementen unserer Basen in der Form $[x_i, y] = \sum a_{ij} x_j$ und $[y, x^j] = \sum b_{ji} x^i$, so folgt aus der Invarianz unserer Bilinearform $b([x_i, y], x^j) = b(x_i, [y, x^j])$ sofort $a_{ij} = b_{ji}$ und damit

$$\begin{aligned} yC_b(v) - C_b(yv) &= \sum [y, x_i] x^i v + \sum x_i [y, x^i] v \\ &= \sum -a_{ij} x_j x^i v + \sum b_{ij} x_i x^j v \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Koordinatenfreier Beweis zum Casimir-Operator. Wir können den Casimir-Operator C_b zu einer invarianten nicht ausgearteten Bilinearform b auf unserer Liealgebra auch schreiben als die Verknüpfung von Homomorphismen von Darstellungen

$$V \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* \otimes V \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes V \to V$$

Die einzelnen Abbildungen sind dabei wie folgt erklärt: Die erste Abbildung wird induziert von $k \to \operatorname{End}_k(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*$, $1 \mapsto \mathrm{id} \mapsto \sum x_i \otimes x_i^*$, falls $x_1^*, \ldots, x_n^*$ die duale Basis ist zu einer Basis $x_1, \ldots, x_n$ von $\mathfrak{g}$. Die zweite Abbildung wird induziert von der inversen Abbildung zu $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$, $y \mapsto b(\ , y)$, $x^i \mapsto x_i^*$. Da unsere Bilinearform invariant ist, muß diese Abbildung auch ein Homomorphismus von

Darstellungen sein. Die dritte Abbildung entsteht durch zweimaliges Anwenden der Operation $\mathfrak{g} \otimes V \to V$, $x \otimes v \mapsto xv$. Als Verknüpfung von Homomorphismen von Darstellungen muß dann auch C_b ein Homomorphismus von Darstellungen sein. □

Lemma 24.2.1.10. *1. Gegeben V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Unteralgebra ist $(x, y) \mapsto \operatorname{tr}(xy)$ eine nichtausgeartete invariante symmetrische Bilinearform $b = b_V$ auf $\mathfrak{g}$;*

2. Für die zugehörige Casimir-Abbildung $C = C_b^V$ gilt $\operatorname{tr} C = \dim \mathfrak{g}$.

Beweis. Sicher ist unsere Bilinarform symmetrisch und invariant, insbesondere ist ihr Radikal ein Ideal. Nach dem Cartan-Kriterium 24.1.6.1 oder 24.1.6.3 im Fall eines allgemeinen Grundkörpers der Charakteristik Null ist ihr Radikal sogar ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}$, also Null. Teil 2 folgt sofort aus den Definitionen. □

Lemma 24.2.1.11. *Für jede endlichdimensionale Darstellung V einer komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ gilt $V = V^{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}V$.*

24.2.1.12. Mit $\mathfrak{g}V$ meinen wir hier den von allen Xv mit $X \in \mathfrak{g}$ und $v \in V$ erzeugten Teilraum und $V^{\mathfrak{g}}$ bezeichnet wie immer den Raum der $\mathfrak{g}$-Invarianten. Dies Lemma gilt allgemeiner über jedem Grundkörper der Charakteristik Null: Durch Erweiterung der Skalare rettet man sich in den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers, in dem dann wieder der hier gegebene Beweis funktioniert.

Beweis. Durch Induktion über $\dim V$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V \neq V^{\mathfrak{g}}$. Betrachten wir den zu unserer Darstellung gehörigen Liealgebrenhomomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, so ist also $\rho(\mathfrak{g}) \neq 0$. Wir betrachten nun die zur halbeinfachen Unteralgebra $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ gehörige Abbildung $C : V \to V$ wie in Lemma 24.2.1.10. Natürlich zerfällt V in eine direkte Summe von Haupträumen unter C, und wegen $C \in \operatorname{End}_{\mathfrak{g}} V$ sind alle Haupträume von C Unterdarstellungen. Hätte C mehr als einen Eigenwert auf V, so könnten wir V als direkte Summe von zwei Unterdarstellungen echt kleinerer Dimension schreiben und wären fertig mit Induktion. Wir dürfen also annehmen, daß C nur einen Eigenwert hat. Da gilt $\operatorname{tr}(C) = \dim \rho(\mathfrak{g}) \neq 0$ nach Lemma 24.2.1.10, kann dieser Eigenwert nicht Null sein. Also gilt $V = CV$ und $V^{\mathfrak{g}} = 0$ und a forteriori $V = \mathfrak{g}V = V^{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}V$. □

Beweis des Satzes von Weyl 24.2.1.6. Es gilt zu zeigen, daß jede endlichdimensionale Darstellung V einer halbeinfachen Liealgebra halbeinfach ist. Ist $U \subset V$ eine Unterdarstellung, so liefert die Restriktion von Abbildungen eine Surjektion $\operatorname{Hom}(V, U) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(U, U)$ von Darstellungen. Nach Lemma 24.2.1.11 induziert diese Surjektion eine Surjektion auf den invarianten Vektoren $\operatorname{Hom}(V, U)^{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow$

$\mathrm{Hom}(U,U)^{\mathfrak{g}}$. Für jedes Urbild $f \in \mathrm{Hom}(V,U)^{\mathfrak{g}}$ von $\mathrm{id}_U \in \mathrm{Hom}(U,U)^{\mathfrak{g}}$ gilt dann $V = U \oplus \ker f$. Eine offensichtliche Induktion beendet den Beweis. □

Proposition 24.2.1.13. *Eine endlichdimensionale komplexe Liealgebra ist reduktiv genau dann, wenn jedes auflösbare Ideal bereits in ihrem Zentrum liegt.*

24.2.1.14. Mit Erweiterung des Grundkörpers folgt das für jede endlichdimensionale Liealgebra über einem Körper der Charakteristik Null.

Beweis. Nach 24.1.7.8 ist unsere Liealgebra $\mathfrak{g}$ genau dann reduktiv, wenn ihre adjungierte Darstellung halbeinfach ist. Daraus folgt einerseits, daß jedes Ideal eine Summe von irreduziblen Idealen ist, und andererseits, daß jedes Ideal ein Vektorraumkomplement besitzt, das auch ein Ideal ist. Folglich liegt jedes eindimensionalen Ideal im Zentrum und jedes auflösbare Ideal ist eine Summe von eindimensionalen Idealen und mithin zentral. Liegt umgekehrt jedes auflösbare Ideal im Zentrum, so ist $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ eine halbeinfache Unteralgebra und nach dem Satz von Weyl 24.2.1.6 ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Darstellung von $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$, also ist die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$ halbeinfach, also ist $\mathfrak{g}$ reduktiv. □

Satz 24.2.1.15 (Kriterium für Halbeinfachkeit).

1. *Besitzt eine komplexe Liealgebra eine treue einfache endlichdimensionale Darstellung, so ist unsere Liealgebra reduktiv und ihr Zentrum ist höchstens eindimensional;*
2. *Operiert unsere Liealgebra außerdem auf besagter Darstellung nur durch Endomorphismen der Spur Null, so ist unsere Liealgebra halbeinfach.*

24.2.1.16. Insbesondere ist $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})$ reduktiv und $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$ halbeinfach. Wollen wir nur den zweiten Teil des Satzes zeigen, so können wir im anschließenden Beweis sogar I abelsch annehmen und auf diese Weise ohne den Satz von Lie auskommen. Der Satz gilt mit demselben Beweis über jedem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null.

Beweis. Wir verwenden die Charakterisierung reduktiver Liealgebren aus Übung 24.2.1.13 und müssen also zeigen, daß jedes auflösbare Ideal bereits im Zentrum liegt. Sei dazu $\mathfrak{g}$ unsere Liealgebra und $I \subset \mathfrak{g}$ ein auflösbares Ideal und V unsere einfache treue Darstellung. Nach dem Satz von Lie 24.1.5.2 gibt es $v \in V$, $v \neq 0$ mit $Iv \subset \mathbb{C}v$. Natürlich finden wir $\lambda \in I^*$ mit $Xv = \lambda(X)v \ \forall X \in I$. Nach 24.1.5.4 ist dann V_λ eine Unterdarstellung von V, und da sie nicht null ist, folgt $V = V_\lambda$. Das Bild eines auflösbaren Ideals $I \subset \mathfrak{g}$ unter einer einfachen Darstellung $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ in einem endlichdimensionalen Raum V liegt also stets in der Menge aller Vielfachen der Einheitsmatrix. Ist unsere Darstellung auch noch treu, so folgt $\dim I \leq 1$ und $[I,\mathfrak{g}] = 0$ und im Fall $\mathrm{tr}(\rho(I)|V) = 0$ sogar $I = 0$. □

Übungen

Übung 24.2.1.17. Für V eine Darstellung einer halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ versteht man unter dem **Casimir-Operator** mit einem bestimmten Artikel meist unser $C_\kappa : V \to V$ aus 24.2.1.8 für κ die Killingform. Man zeige als Übung, daß der Casimir-Operator der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ in einer Basis e, h, f wie in 24.1.1.34 gegeben wird durch den Ausdruck $(ef+fe)/4+h^2/8 = fe/2+h(h+2)/8$. Auf der $(n+1)$-dimensionalen einfachen Darstellung operiert er durch den Skalar $n(n+2)/8$, wie man auf den extremen Gewichtsräumen leicht nachrechnet.

Übung 24.2.1.18. Der Casimir-Operator einer endlichdimensionalen halbeinfachen Liealgebra über einem Körper der Charakteristik Null operiert als die Identität auf der adjungierten Darstellung.

24.2.2 Jordanzerlegung in halbeinfachen Liealgebren

24.2.2.1. In diesem Abschnitt wird die Jordanzerlegung in halbeinfachen Liealgebren eingeführt. Gilt es Verwechslungen zu vermeiden, so nennen wir sie die „absolute Jordanzerlegung“ im Gegensatz zur „konkreten Jordanzerlegung“ von Endomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume, wie wir sie in 4.3.3.1 betrachtet hatten. Im folgenden bezeichnet $x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$ stets diese konkrete Jordanzerlegung von $x \in \operatorname{End} V$.

Satz 24.2.2.2 (**Jordanzerlegung in halbeinfachen Liealgebren**). *Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra.*

1. *Jedes $x \in \mathfrak{g}$ besitzt genau eine Zerlegung $x = s + n$ mit $\operatorname{ad}(s)$ diagonalisierbar, $\operatorname{ad}(n)$ nilpotent und $[s, n] = 0$. Diese Zerlegung nennen wir im folgenden die* **absolute Jordanzerlegung von x in $\mathfrak{g}$***;*

2. *Ist $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung und $x = s + n$ die absolute Jordanzerlegung von x in $\mathfrak{g}$, so ist $\rho(x) = \rho(s) + \rho(n)$ die konkrete Jordanzerlegung von $\rho(x)$ in $\operatorname{End} V$. In Formeln gilt mithin $\rho(s) = \rho(x)_{\mathrm{s}}$ und $\rho(n) = \rho(x)_{\mathrm{n}}$;*

3. *Ist $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ in eine weitere halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}'$ und $x = s + n$ die absolute Jordanzerlegung von x in $\mathfrak{g}$, so ist $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ die absolute Jordanzerlegung von $\phi(x)$ in $\mathfrak{g}'$.*

24.2.2.3. Teil 2 des vorhergehenden Satzes besagt, daß die absolute und die konkrete Jordanzerlegung in allen Zweifelsfällen übereinstimmen. Sobald der Satz bewiesen ist, dürfen wir es uns also erlauben, ohne weitere Spezifizierung einfach von der **Jordanzerlegung** zu reden. Im folgenden Beweis sind die Begriffe „halbeinfach“ und „nilpotent“ und „halbeinfacher Anteil“ sowie „nilpotenter Anteil“

stets im konkreten Sinne zu verstehen, also im Sinne von Endomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume. Ihre auf Elemente abstrakter Liealgebren übertragene Bedeutung wird erst im Anschluß eingeführt. Dem eigentlichen Beweis des Satzes schicken wir zwei Lemmata voraus.

Lemma 24.2.2.4. *Jedes halbeinfache Ideal einer endlichdimensionalen komplexen Liealgebra besitzt ein Vektorraumkomplement, das auch ein Ideal ist.*

24.2.2.5. Unter einem halbeinfachen Ideal einer Liealgebra verstehen wir hierbei ein Ideal, das als Liealgebra halbeinfach ist.

Beweis. Sei D unsere Liealgebra und $\mathfrak{g} \subset D$ unser halbeinfaches Ideal. Wir betrachten bezüglich der Killing-Form κ von D das orthogonale Komplement I von $\mathfrak{g}$, also den Kern der Abbildung $D \to \mathfrak{g}^*, x \mapsto \kappa(x, \ )$. So ist $I \subset D$ ein Ideal und die Killing-Form von D verschwindet identisch auf $\mathfrak{g} \cap I$. Da $\mathfrak{g} \cap I$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ ist, muß es nach 24.1.7.16 halbeinfach sein und mit 24.1.7.9 folgt $\mathfrak{g} \cap I = 0$. Dann erhalten wir jedoch mit Dimensionsbetrachtungen sofort $D = \mathfrak{g} \oplus I$. $\square$

Ergänzung 24.2.2.6 (**Derivationen halbeinfacher Liealgebren**). Jede Derivation einer halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ ist eine innere Derivation. In der Tat sieht man leicht, daß für jede Liealgebra $\mathfrak{g}$ das Bild der adjungierten Darstellung ein Ideal $\operatorname{ad} \mathfrak{g} \subset \operatorname{Der}_k \mathfrak{g}$ ist. Nach 24.2.2.4 besitzt unter unseren Annahmen $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ ein Vektorraumkomplement $I \subset \operatorname{Der}_k \mathfrak{g}$, das sogar ein Ideal ist. Es folgt $\operatorname{ad}(d(X)) = [\operatorname{ad} X, d] = 0 \ \forall X \in \mathfrak{g}, d \in I$ und so $d(X) = 0 \ \forall X \in \mathfrak{g}, d \in I$ alias $I = 0$ und

$$\operatorname{ad} \mathfrak{g} = \operatorname{Der}_k \mathfrak{g}$$

Ergänzung 24.2.2.7 (**Derivationen reduktiver Liealgebren**). Jede Derivation einer reduktiven Liealgebra über einem Körper k der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ in ihrer Darstellung $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \times \mathfrak{z}$ nach 24.1.7.18 ist von der Gestalt

$$(\operatorname{ad} X) \times L$$

für $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und $L \in \operatorname{End}_k \mathfrak{z}$ beliebig. In der Tat besitzt wie in 24.2.2.6 das Bild der adjungierten Darstellung $\operatorname{ad} \mathfrak{g} \subset \operatorname{Der}_k \mathfrak{g}$ ein Vektorraumkomplement $I \subset \operatorname{Der}_k \mathfrak{g}$, das sogar ein Ideal ist. Es folgt $\operatorname{ad}(d(X)) = [\operatorname{ad} X, d] = 0 \ \forall X \in \mathfrak{g}, d \in I$ und so $d(X) \in \mathfrak{z} \ \forall X \in \mathfrak{g}, d \in I$ und damit $d([X, Y]) = 0 \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}$.

Ergänzung 24.2.2.8 (**Derivationen von Endomorphismenalgebren**). Gegeben ein Körper k der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ und ein endlichdimensionaler k-Vektorraum V erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathfrak{sl}(V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k(\operatorname{End}_k(V))$$

vermittels der Abbildungsvorschrift $X \mapsto \operatorname{ad}(X)$. In der Tat spezialisiert 24.1.1.38 zur recht banalen Erkenntnis $\operatorname{Der}_k(\operatorname{End}_k(V)) \subset \operatorname{Der}_k(\mathfrak{gl}(V))$ und 24.2.2.7 liefert unter Verwendung der offensichtlichen Zerlegung $\mathfrak{sl}(V) \times k\mathrm{id} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{gl}(V)$ einen Isomorphismus $\operatorname{ad} \times \operatorname{mult} : \mathfrak{sl}(V) \times k \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k(\mathfrak{sl}(V) \times k\mathrm{id})$. Da aber Derivationen der Ringalgebra $\operatorname{End}_k(V)$ auf id verschwinden, folgt die Behauptung. Sie kann auch als infinitesimale Version von 24.4.7.2 verstanden und davon ausgehend bewiesen werden.

Vorschau 24.2.2.9. Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem Körper k sind auch ohne weitere Voraussetzungen alle Derivationen des Endomorphismenrings $\operatorname{End}_k V$ innere Derivationen. Wir geben ein Argument in 19.3.3.8. Man kann die Aussage in vielen Fällen auch als Konsequenz der Beschreibung der Automorphismengruppe des Endomorphismenrings nach 8.3.5.12 verstehen. Diesen Zugang finde ich besonders transparent.

Lemma 24.2.2.10. *Seien V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Unteralgebra. Für die halbeinfachen und nilpotenten Anteile der konkreten Jordanzerlegung $x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$ eines Elements $x \in \mathfrak{g}$ gilt stets $x_{\mathrm{s}}, x_{\mathrm{n}} \in \mathfrak{g}$.*

Beweis. Wir betrachten in $\mathfrak{gl}(V)$ den Teilraum $D := \{y \in \mathfrak{gl}(V) \mid \text{Es gilt } [y, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g} \text{ und für jede } \mathfrak{g}\text{-Unterdarstellung } W \subset V \text{ gilt } yW \subset W \text{ sowie } \operatorname{tr}(y|_W) = 0\}$. Nach Lemma 24.1.6.4 über die Jordanzerlegung von $\operatorname{ad} x$ und der Funktorialität der Jordanzerlegung 4.3.3.8 folgt aus $y \in D$ schon $y_{\mathrm{s}}, y_{\mathrm{n}} \in D$. Es reicht also, $D = \mathfrak{g}$ zu zeigen. Offensichtlich ist D eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Wegen $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und da die Spur eines Kommutators stets verschwindet gilt $\mathfrak{g} \subset D$, und wegen der ersten Bedingung an Elemente von D ist $\mathfrak{g} \subset D$ sogar ein Ideal. Nach 24.2.2.4 finden wir dann ein Ideal $I \subset D$ mit $D = \mathfrak{g} \oplus I$ und insbesondere $[\mathfrak{g}, I] = 0$. Also operiert $y \in I$ auf jeder $\mathfrak{g}$-Unterdarstellung $W \subset V$ durch einen $\mathfrak{g}$-Endomorphismus. Für W einfach ist also $y|_W$ ein Skalar, und mit $\operatorname{tr}(y|_W) = 0$ folgt $y|_W = 0$. Da V nach dem Satz von Weyl 24.2.1.6 direkte Summe einfacher $\mathfrak{g}$-Unterdarstellungen ist, folgt weiter $y = 0$, mithin $I = 0$ und $D = \mathfrak{g}$. □

Beweis von 24.2.2.2. 1. Man betrachte die konkrete Jordanzerlegung $\operatorname{ad} x = (\operatorname{ad} x)_{\mathrm{s}} + (\operatorname{ad} x)_{\mathrm{n}}$ von $\operatorname{ad} x$ in $\operatorname{End} \mathfrak{g}$. Nach Lemma 24.2.2.10 angewandt auf $\operatorname{ad} \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ gibt es $s, n \in \mathfrak{g}$ mit $\operatorname{ad} s = (\operatorname{ad} x)_{\mathrm{s}}$, $\operatorname{ad} n = (\operatorname{ad} x)_{\mathrm{n}}$. Das liefert die Existenz einer absoluten Jordanzerlegung $x = s + n$. Ist andererseits $x = s + n$ eine absolute Jordanzerlegung von x in $\mathfrak{g}$, so ist notwendig $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} s + \operatorname{ad} n$ die konkrete Jordanzerlegung von $\operatorname{ad} x$ in $\operatorname{End}\mathfrak{g}$. Das zeigt die Eindeutigkeit.

2. Sei $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung. Sicher kommutiert

das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x"] & \rho(\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}\, \rho(x)"] & \mathfrak{gl}(V) \arrow[d, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}}\, \rho(x)"] \\
\mathfrak{g} \arrow[r, two heads] & \rho(\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] & \mathfrak{gl}(V)
\end{tikzcd}$$

Nach der Funktorialität der konkreten Jordanzerlegung 4.3.3.7 bleibt dies Diagramm kommutativ, wenn wir von allen Vertikalen den halbeinfachen Anteil nehmen im Sinne der konkreten Jordanzerlegung. Ebenso bleibt es natürlich kommutativ, wenn wir überall statt x unser s aus seiner absoluten Jordanzerlegung $x = s + n$ einsetzen. Die beiden so entstehenden Diagramme haben per definitionem dieselbe linke Vertikale $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x)_{\mathrm{s}} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, s$ und damit auch dieselbe mittlere Vertikale. Das liefert die erste Gleichung einer Gleichungskette

$$\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}\, \rho(s) = (\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}\, \rho(x))_{\mathrm{s}} = \mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(x)_{\mathrm{s}})$$

Um die zweite Gleichung zu zeigen, bemerken wir für die konkrete Jordanzerlegung die Identitäten $\mathrm{ad}(x_{\mathrm{s}}) = (\mathrm{ad}\, x)_{\mathrm{s}}$ und $\mathrm{ad}(x_{\mathrm{n}}) = (\mathrm{ad}\, x)_{\mathrm{n}}$, die für jeden Endomorphismus x eines endlichdimensionalen komplexen Vektorraums aus unseren allgemeinen Überlegungen in 24.1.6.4 folgen. Wenden wir sie auf $\rho(x) \in \mathfrak{gl}(V)$ an und schränken das Resultat auf $\rho(\mathfrak{g})$ ein, ergibt sich die zweite Gleichung. Da schließlich $\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})} : \rho(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathfrak{gl}(\rho(\mathfrak{g}))$ eine Injektion ist, folgt aus unserer Gleichungskette dann wie gewünscht $\rho(s) = \rho(x)_{\mathrm{s}}$.

3. Sei $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ein Homomorphismus von halbeinfachen Liealgebren und sei $x \in \mathfrak{g}$ gegeben mit Jordanzerlegung $x = s + n$. Betrachten wir die adjungierte Darstellung $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}')$ von $\mathfrak{g}'$, so folgt aus 2 angewandt auf $\rho = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} \circ \phi$ schon $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}\, \phi(s)$ halbeinfach sowie $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}\, \phi(n)$ nilpotent. Die anderen Bedingungen $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ und $[\phi(s), \phi(n)] = 0$ für die Jordanzerlegung sind aber offensichtlich ebenfalls erfüllt. □

Definition 24.2.2.11. Ein Element x einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt **ad-halbeinfach** beziehungsweise **ad-nilpotent**, wenn $\mathrm{ad}x \in \mathrm{End}\mathfrak{g}$ halbeinfach beziehungsweise nilpotent ist. Bei halbeinfachen Liealgebren nennen wir diese Elemente auch oft kürzer nur **halbeinfach** beziehungsweise **nilpotent**. Bei der Jordanzerlegung $x = s + n$ in einer halbeinfachen Liealgebra nennt man s den **halbeinfachen Anteil** und n den **nilpotenten Anteil** von x.

24.2.2.12. Wie man schon im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$ sieht, sind „die meisten“ Elemente einer halbeinfachen Liealgebra halbeinfach. Die nilpotenten Elemente ihrerseits bilden eine abgeschlossene Teilmenge hoher Kodimension, den sogenannten **nilpotenten Kegel**. Wir werden die äußerst interessante Geometrie des nilpotenten Kegels später noch ausführlich studieren.

Übungen

Übung 24.2.2.13. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra. Gegeben Elemente $x, y \in \mathfrak{g}$ mit $[x, y] = 0$ gilt $(x + y)_{\mathrm{s}} = x_{\mathrm{s}} + y_{\mathrm{s}}$ und $(x + y)_{\mathrm{n}} = x_{\mathrm{n}} + y_{\mathrm{n}}$.

Übung 24.2.2.14. Man zeige, daß jede halbeinfache komplexe Liealgebra auch reguläre halbeinfache Elemente besitzt. Hinweis: 24.1.1.33. Leser mit Grundkenntnissen in algebraischer Geometrie zeigen das allgemeiner über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null.

24.2.3 Wurzelraumzerlegung

24.2.3.1. Ich erinnere an die simultane Eigenraumzerlegung aus 4.7.8.10. Seien genauer V ein Vektorraum und $T \subset \operatorname{End} V$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum seines Endomorphismenraums, der aus diagonalisierbaren und paarweise kommutierenden Abbildungen besteht. So besitzt V unter T eine **simultane Eigenraumzerlegung**

$$V = \bigoplus_{\lambda \in T^*} V_\lambda$$

in die **simultanen Eigenräume** $V_\lambda := \{v \in V \mid xv = \lambda(x)v \ \forall x \in T\}$. Diese Aussage gilt offensichtlich analog, wenn wir allgemeiner eine lineare Abbildung $T \to \operatorname{End} V$ betrachten, deren Bild die entsprechenden Eigenschaften hat. Die Menge $\mathrm{P}(V) := \{\lambda \in T^* \mid V_\lambda \neq 0\}$ heißt dann die Menge der **Gewichte von** V und V_λ heißt der **Gewichtsraum zu** λ. Die Wahl des Buchstabens P geht auf französisch **poids** zurück.

Beispiel 24.2.3.2. Wir betrachten in der Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n; k)$ die Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ aller Diagonalmatrizen. So ist das Bild von $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{h} \to \operatorname{End} \mathfrak{g}$ ein Untervektorraum von paarweise kommutierenden diagonalisierbaren Endomorphismen von $\mathfrak{g}$ und simultane Diagonalisierbarkeit 24.2.3.1 liefert eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\lambda \quad \text{mit } \mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \lambda(h)x \quad \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

Für $h = \operatorname{diag}(h_1, \ldots, h_n)$ in $\mathfrak{h}$ und E_{ij} die Standardmatrix mit einer 1 in der i-ten Zeile und j-ten Spalte und Nullen sonst haben wir offensichtlich $[h, E_{ij}] = (h_i - h_j)E_{ij}$. Erklären wir also $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ als diejenige Linearform, die einer Diagonalmatrix ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnet, so ergibt sich

$$[h, E_{ij}] = \big((\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h)\big)E_{ij}$$

und damit $\mathrm{P}(\mathfrak{g}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ als Menge von Gewichten. Wir haben also $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ und unter der Annahme $\operatorname{char} k \neq 2$ sind die anderen Gewichtsräume die Geraden kE_{ij} mit $i \neq j$. In Charakteristik Zwei sind dahingegen die anderen Gewichtsräume die zweidimensionalen Unterräume mit Basis E_{ij}, E_{ji} für $i < j$.

Definition 24.2.3.3. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ einer komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt eine **Cartan'sche Unteralgebra**, wenn $\mathfrak{h}$ erstens abelsch ist, zweitens nur aus halbeinfachen Elementen von $\mathfrak{g}$ besteht, und wenn es drittens maximal ist bezüglich Inklusion unter allen Unteralgebren von $\mathfrak{g}$, die die beiden ersten Eigenschaften haben.

Beispiel 24.2.3.4. In der Liealgebra $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$ bilden die Diagonalmatrizen eine Cartan'sche Unteralgebra.

Ergänzung 24.2.3.5. Im Fall einer halbeinfachen komplexen Liealgebra ist eine Cartan'sche Unteralgebra eine „algebraische Version" des Begriffs eines maximalen Torus im Fall einer algebraischen Gruppe, vergleiche 24.2.6.5, oder einer kompakten Liegruppe, vergleiche 22.5.1.10.

Ergänzung 24.2.3.6. Im allgemeinen versteht man unter einer Cartan'schen Unteralgebra einer beliebigen endlichdimensionalen Liealgebra eine nilpotente Unteralgebra, die ihr eigener „Normalisator" ist. Mehr dazu wird in 24.2.5 diskutiert. Insbesondere besprechen wir dort, warum diese Bedingung im halbeinfachen Fall zu der hier gegebenen Definition äquivalent ist.

Ergänzung 24.2.3.7. Eine Liealgebra, die nur aus ad-halbeinfachen Elementen besteht, ist stets abelsch: Sonst gäbe es nämlich x mit $\mathrm{ad}\, x \neq 0$, also gäbe es $y \neq 0$ und $\lambda \neq 0$ mit $(\mathrm{ad}\, x)(y) = \lambda y$, es folgte $(\mathrm{ad}\, y)(x) \neq 0$ aber $(\mathrm{ad}\, y)^2(x) = 0$, und dann könnte y nicht ad-halbeinfach sein. In 24.2.3.3 war mithin die erste Bedingung überflüssig. Ich habe sie nur aus didaktischen Gründen mit dazugenommen.

Definition 24.2.3.8 (Wurzelraumzerlegung). Seien $\mathfrak{g}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche Unteralgebra. Wir benutzen die in unserer Theorie übliche Notation $\lambda(h) = \langle \lambda, h \rangle$ für $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $h \in \mathfrak{h}$. Nach 24.2.3.1 gilt $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\lambda$ mit $\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \langle \lambda, h \rangle x \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$. Wir setzen

$$\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha \neq 0 \text{ und } \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\} = \mathrm{P}(\mathfrak{g}) \backslash 0$$

und haben also eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$$

Die endliche Teilmenge $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ heißt das **Wurzelsystem** von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$, seine Elemente heißen die **Wurzeln**, und die simultanen Eigenräume $\mathfrak{g}_\alpha$ heißen die **Wurzelräume**.

Ergänzung 24.2.3.9. Die Terminologie rührt daher, daß die Eigenwerte eines Endomorphismus die Wurzeln seines charakteristischen Polynoms sind. Auf französisch heißt das Wurzelsystem **système de racines**, daher der Buchstabe R.

24.2.3.10. Insbesondere ist hier $\mathfrak{g}_0$ genau der Zentralisator $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = 0 \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$ unserer Cartan'schen $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$.

Beispiel 24.2.3.11 (**Das Wurzelsystem im Typ** A_n). Ist $\mathfrak{g}$ die Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$ und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ die Unteralgebra aller Diagonalmatrizen mit Spur Null und bezeichnet weiter $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ die Linearform, die einer Diagonalmatrix ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnet, so haben wir $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$ und $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}E_{ij}$ für $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$. Man beachte jedoch, daß die $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ nicht linear unabhängig sind in $\mathfrak{h}^*$, denn die Cartan'sche $\mathfrak{h}$ besteht ja nur aus Diagonalmatrizen mit Spur Null und hat mithin die Dimension $\dim \mathfrak{h} = n - 1$. Die Bezeichnung A_n ist die Standardbezeichnung für dieses „Wurzelsystem" in der „Theorie der Wurzelsysteme".

Satz 24.2.3.12 (über die Wurzelraumzerlegung). *Seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $R := \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ das Wurzelsystem. Gegeben $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ verwenden wir wie zuvor für den zugehörigen Gewichtsraum die Notation $\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \langle \lambda, h \rangle x \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$. So gilt:*

1. *Unsere Cartan'sche ist ihr eigener Zentralisator, in Formeln $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$;*

2. *Alle Wurzelräume sind eindimensional und es gibt sogar für jede Wurzel $\alpha \in R$ einen injektiven Homomorphismus $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathfrak{g}$ von Liealgebren mit*

$$\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{-\alpha} \text{ und } \mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{\sim} [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h};$$

3. *Das Negative einer Wurzel ist stets eine Wurzel, aber kein anderes Vielfaches einer Wurzel ist wieder eine Wurzel. In Formeln gilt für jede Wurzel $\alpha \in R$ demnach $\mathbb{C}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$;*

4. *Für je zwei Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha + \beta \in R$ gilt $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.*

24.2.3.13. Wir zeigen die verschiedenen Teile dieses Satzes der Reihe nach, unterbrochen durch einige Lemmata. Teil 4 wird im Beweis von 24.2.3.19 mit erledigt.

Lemma 24.2.3.14. 1. *Es gilt $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu} \ \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$;*

2. *Für die Killing-Form κ von $\mathfrak{g}$ gilt $\kappa(\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu) = 0$ falls $\lambda \neq -\mu$;*

3. *Die Einschränkung der Killingform κ auf $\mathfrak{g}_0$ ist nicht ausgeartet;*

4. *Für alle Gewichte $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ induziert die Killingform eine nichtausgeartete Paarung $\kappa : \mathfrak{g}_\lambda \times \mathfrak{g}_{-\lambda} \to \mathbb{C}$;*

Beweis. Aus $[h,x] = \lambda(h)x$ und $[h,y] = \mu(h)y$ folgt mit der Jacobi-Identität $[h,[x,y]] = (\lambda(h)+\mu(h))[x,y]$. Das zeigt Teil 1. Aus $x \in \mathfrak{g}_\lambda$, $y \in \mathfrak{g}_\mu$ folgt für jedes $\nu \in \mathfrak{h}^*$ nach dem ersten Teil $((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))(\mathfrak{g}_\nu) \subset \mathfrak{g}_{\nu+\lambda+\mu}$. Falls $\lambda+\mu \neq 0$ ist also $((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))$ nilpotent und es folgt $\operatorname{tr}((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)) = \kappa(x,y) = 0$ und damit Teil 2. Für $z \in \mathfrak{g}_0$ gilt schließlich schon mal $\kappa(z,\mathfrak{g}_\alpha) = 0\ \forall \alpha \in R$ nach Teil 2. Gilt auch noch $\kappa(z,\mathfrak{g}_0) = 0$, so folgt $\kappa(z,\mathfrak{g}) = 0$ und damit $z = 0$, da nach 24.1.7.9 die Killingform einer halbeinfachen Liealgebra nicht ausgeartet ist. Für $z \in \mathfrak{g}_\lambda$ gilt allgemeiner $\kappa(z,\mathfrak{g}_\mu) = 0\ \forall \mu \neq -\lambda$ nach Teil 2. Gilt auch noch $\kappa(z,\mathfrak{g}_{-\lambda}) = 0$, so folgt $\kappa(z,\mathfrak{g}) = 0$ und damit $z = 0$ nach 24.1.7.9. □

Beweis von 24.2.3.12.1. Gegeben $x \in \mathfrak{g}_0$ verschwindet sicher $\operatorname{ad} x$ auf $\mathfrak{h}$. Ist $x = s + n$ seine Jordanzerlegung in $\mathfrak{g}$, so verschinden nach der Funktorialität der Jordanzerlegung 4.3.3.7 auch $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} s = (\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x)_\mathrm{s}$ und $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} n = (\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x)_\mathrm{n}$ auf $\mathfrak{h}$. Folglich enthält $\mathfrak{g}_0$ mit x auch die halbeinfachen und nilpotenten Anteile s und n von x. Aufgrund der Maximalität von $\mathfrak{h}$ und da die Summe zweier kommutierender halbeinfacher Elemente auch selbst wieder halbeinfach ist, liegt der halbeinfache Anteil s jedes Elements x aus dem Zentralisator $\mathfrak{g}_0$ von $\mathfrak{h}$ sogar schon selbst in $\mathfrak{h}$. Damit ist $\mathfrak{g}_0$ nilpotent, denn für jedes $x \in \mathfrak{g}_0$ ist $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} n : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$ nilpotent auf $\mathfrak{g}_0$ und wir können den Satz von Engel 24.1.4.18 auf die Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ anwenden. Mit dem Satz von Lie oder genauer seinem Korollar 24.1.5.6 folgt, daß in einer geeigneten Basis von $\mathfrak{g}$ alle $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x$ für $x \in \mathfrak{g}_0$ durch obere Dreiecksmatrizen gegeben werden. Ist nun $z \in \mathfrak{g}_0$ gegeben mit $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} z$ nilpotent, so muß $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} z$ in dieser Basis sogar eine echte obere Dreiecksmatrix sein. Es folgt $\kappa(z,\mathfrak{g}_0) = 0$ und damit $z = 0$ nach Lemma 24.2.3.14. Also besteht $\mathfrak{g}_0$ aus $\operatorname{ad}_\mathfrak{g}$-halbeinfachen Elementen, und wir wissen ja bereits seit dem Anfang des Beweises, daß alle $\operatorname{ad}_\mathfrak{g}$-halbeinfachen Elemente von $\mathfrak{g}_0$ bereits in $\mathfrak{h}$ liegen. □

Lemma 24.2.3.15. *Für jede Wurzel $\alpha \in R$ gilt $\dim[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1$ und α verschwindet nicht auf der Gerade $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$.*

Beweis. Seien $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ und $h \in \mathfrak{h}$. So gilt

$$\kappa(h,[x,y]) = \kappa([h,x],y) = \alpha(h)\kappa(x,y)$$

oder anders ausgedrückt $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]^\perp \supset \ker\alpha$, wo das orthogonale Komplement bezüglich der Restriktion der Killing-Form auf $\mathfrak{h}$ zu verstehen ist. Da diese Restriktion nach 24.2.3.14 nicht ausgeartet ist, folgt $\dim[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}] \leq 1$. Können wir zusätzlich zeigen, daß es $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ gibt mit $\alpha([x,y]) \neq 0$, so sind wir fertig. Andernfalls aber würden x, y und $[x,y]$ stets eine nilpotente, mithin auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ aufspannen. In einer geeigneten Basis von $\mathfrak{g}$ würden nach dem Satz von Lie 24.1.5.6 also $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x$ und $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} y$ durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt, ja sogar durch echte obere Dreiecksmatrizen, da sie nilpotent

sind. Es folgte $\kappa(x,y) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ im Widerspruch zu 24.2.3.14. $\square$

Definition 24.2.3.16. Seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche. Wir erklären für jede Wurzel $\alpha \in \mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ ein Element

$$\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$$

durch die beiden Bedingungen $\alpha^\vee \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ und $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$.

Vorschau 24.2.3.17. Wir werden bald lernen, daß das Bild von unserem $\alpha^\vee$ unter dem Bidualitätsisomorphismus $\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^{**}$ die Bedingungen erfüllt, die im „abstrakten Wurzelsystem" $\mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ die „Kowurzel zur Wurzel α" charakterisieren.

Beweis von 24.2.3.12.2&3. Aus der Definition folgt sofort $(-\alpha)^\vee = -\alpha^\vee$. Natürlich finden wir stets $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[x,y] = \alpha^\vee$, und dann gilt $[\alpha^\vee, x] = 2x$ und $[\alpha^\vee, y] = -2y$, da ja ganz allgemein gilt $[h,x] = \alpha(h)x = \langle \alpha, h \rangle x$ für alle $h \in \mathfrak{h}$ und ähnlich für y. Somit spannen $x, \alpha^\vee, y$ eine zu $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ isomorphe Unteralgebra $\mathfrak{g}^\alpha$ von $\mathfrak{g}$ auf, ja es gibt einen Isomorphismus von Liealgebren $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^\alpha$ mit

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto x, \quad \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto y \quad \text{und} \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \alpha^\vee.$$

Vermittels $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ wird $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}^\alpha$. Nach der Definition von $\alpha^\vee$ ist $\mathbb{C}\alpha^\vee \oplus \bigoplus_{t \neq 0} \mathfrak{g}_{t\alpha}$ darin eine Unterdarstellung und diese zerfällt nach dem Satz von Weyl 24.2.1.6 in $\mathfrak{g}^\alpha$ und ein Komplement V. Da $\alpha^\vee$ auf $V \subset \bigoplus_{t \neq 0} \mathfrak{g}_{t\alpha}$ durch eine invertierbare Abbildung operiert, da in anderen Worten der Null-Eigenraum von $\alpha^\vee$ in V verschwindet, folgt mit unserem Satz 24.1.2.14 über einfache Darstellungen der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ aus $V \neq 0$ schon, daß der Eins-Eigenraum von $\alpha^\vee$ nicht verschwindet, in Formeln $\mathfrak{g}_{\alpha/2} \neq 0$ alias $\alpha/2 \in R$. Für alle Wurzeln α mit der Eigenschaft $\alpha/2 \notin R$ gelten also 2 und 3, und damit gelten sie notwendig für alle Wurzeln. $\square$

24.2.3.18. Sei V ein Vektorraum über einem Körper k der Charakteristik Null. Eine Teilmenge $R \subset V$ heißt wie in 23.2.1.2 ein **abstraktes reduziertes Wurzelsystem** oder kurz ein **abstraktes Wurzelsystem**, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Menge R ist endlich, erzeugt V und enthält nicht den Nullvektor;
2. Für jede Wurzel $\alpha \in R$ gibt es eine lineare Abbildung $s : V \to V$ mit $s(\alpha) = -\alpha$, $s(R) \subset R$ und $s(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha \ \ \forall \beta \in R$;
3. Außer dem Negativen ist kein Vielfaches einer Wurzel wieder eine Wurzel.

Lassen wir die letzte Bedingung fallen, so sprechen wir von einem **nicht notwendig reduzierten Wurzelsystem**. Die Abbildung s im zweiten Teil ist wohldefiniert, denn ist t eine weitere Möglichkeit, so folgt erst $\operatorname{im}(ts - \mathrm{id}) \subset k\alpha$ und dann $(ts - \mathrm{id})^2 = 0$ und damit ist ts unipotent. Andererseits aber permutiert ts die Wurzeln und hat folglich endliche Ordnung, und beides zusammen zeigt $ts = \mathrm{id}$ und speziell $s^2 = \mathrm{id}$ und dann $s = t$. Wir schreiben dann $s = s_\alpha$ und nennen s_α die **Wurzelspiegelung zu** α. Das Element $\alpha^\vee \in V^*$ mit $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ heißt die **Kowurzel** zu α. Die Fixpunktmenge einer Wurzelspiegelung s_α alias der Kern der zugehörigen Kowurzel heißt der **Spiegel** unserer Wurzelspiegelung. Die von den Wurzelspiegelungen erzeugte Untergruppe $W \subset \mathrm{GL}(V)$ heißt die **Weylgruppe** unseres Wurzelsystems.

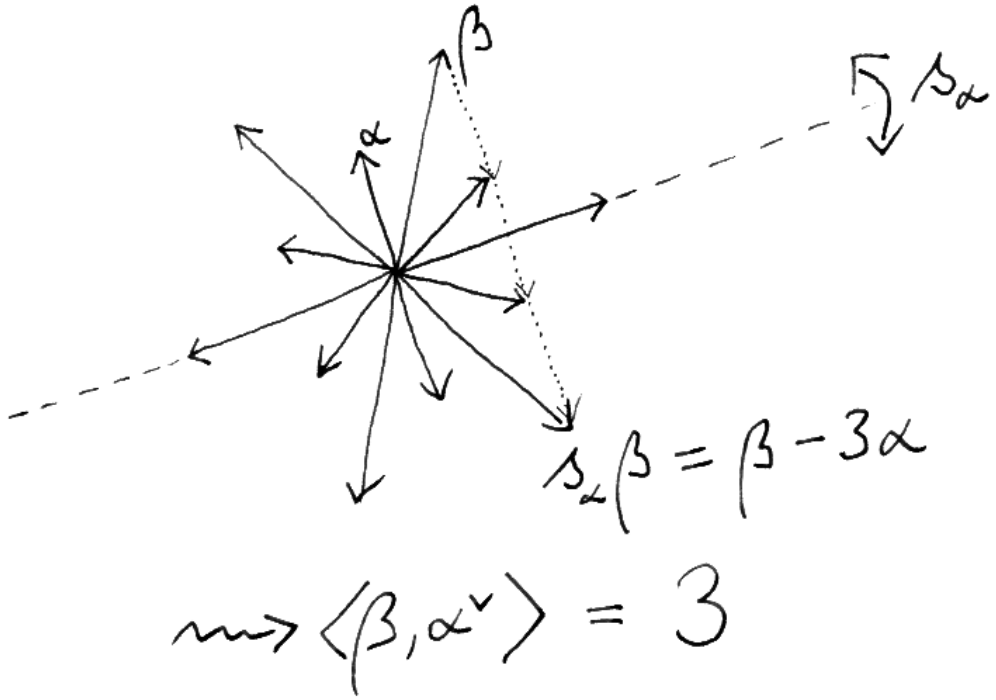
Satz 24.2.3.19 (Wurzelsystem einer halbeinfachen Liealgebra). *Gegeben $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen ist*

$$\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$$

ein reduziertes abstraktes Wurzelsystem im Sinne unserer Definition 24.2.3.18 und für alle Wurzeln α bildet der Bidualitätsisomorphismus $\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^{**}$ unser $\alpha^\vee$ aus 24.2.3.16 auf die Kowurzel zu α im Sinne abstrakter Wurzelsysteme 24.2.3.18 ab.

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir, daß $R := \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ganz $\mathfrak{h}^*$ erzeugt. Dazu reicht es zu zeigen, daß gilt $\bigcap_{\alpha \in R} \ker \alpha = 0$. Sei also $h \in \mathfrak{h}$ gegeben mit $\alpha(h) = 0 \quad \forall \alpha \in R$. So gilt $[h, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$ für alle $\alpha \in R$, und da eh gilt $[h, \mathfrak{h}] = 0$, ergibt sich $h \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ und damit $h = 0$, da das Zentrum einer halbeinfachen Liealgebra Null ist. Nun betrachten wir für jede von einer vorgegebenen Wurzel α linear unabhängige Wurzel $\beta \neq \pm\alpha$ den Teilraum $T := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + i\alpha}$ von $\mathfrak{g}$. Er ist eine $\mathfrak{g}^\alpha$-Unterdarstellung von $\mathfrak{g}$, alle Eigenräume $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ von $\alpha^\vee$ sind höchstens eindimensional nach 24.2.3.12.2, und $\alpha^\vee$ operiert auf $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ durch den Eigenwert $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle + 2i$. Aus der Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) \cong \mathfrak{g}^\alpha$ wissen wir nach 24.1.2.14 aber schon, daß $h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ alias unser $\alpha^\vee$ aus 24.2.3.16 auf einer endlichdimensionalen Darstellung nur ganzzahlige Eigenwerte haben kann und daß mit n auch $-n$ ein Eigenwert sein muß. Insbesondere ist $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ ganzzahlig und der Eigenwert $-\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ kommt auch vor, als da heißt, der Wurzelraum $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ mit $i = -\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ ist nicht Null. Erklären wir also s_α durch $s_\alpha(\lambda) := \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$, so hat s_α alle von einer Wurzelspiegelung geforderten Eigenschaften und wir folgern, daß in der Tat R ein abstraktes Wurzelystem ist und $\alpha^\vee$ unter dem Bidualitätsisomorphismus der Kowurzel zu α entspricht. Daß dies Wurzelsystem reduziert ist, wissen wir bereits aus 24.2.3.12.3. $\square$

Beweis von 24.2.3.12.4. Da alle Eigenräume von $\alpha^\vee$ in unserem T aus dem Beweis von eben eindimensional sind und da die Eigenwerte entweder alle gerade oder alle ungerade sind, muß T sogar eine einfache Darstellung von $\mathfrak{g}^\alpha \cong$



Die Wurzelspiegelung zu einer Wurzel

$\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ sein. Aus unserer expliziten Beschreibung dieser einfachen Darstellungen in 24.1.2.14 folgt dann $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ falls gilt α, β, $\alpha+\beta \in R$ und damit 24.2.3.12.4. □

24.2.3.20. Unter einem **Morphismus von Wurzelsystemen** über einem vorgegebenen Körper versteht man eine lineare Abbildung zwischen den zugehörigen Vektorräumen, unter der jede Wurzel auf eine Wurzel oder auf Null abgebildet wird.

Satz 24.2.3.21 (**Klassifikation der halbeinfachen Liealgebren**). *Ordnen wir jeder komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ den Dualraum einer Cartan'schen $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ mitsamt dem zugehörigen Wurzelsystem $\mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ zu, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Komplexe halbeinfache} \\ \textit{Liealgebren} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Komplexe reduzierte} \\ \textit{Wurzelsysteme} \end{array} \right\} \\ \mathfrak{g} & \mapsto & \mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^* \end{array}$$

24.2.3.22. Der Beweis wird uns eine Weile beschäftigen. Zunächst zeigen wir in 24.2.4.5, daß die Abbildung im Satz insoweit wohldefiniert ist, als je zwei Cartan'sche zu isomorphen Wurzelsystemen führen. Die Injektivität und Surjektivität werden erst in 24.3.4.12 als Korollar von 24.3.4.4 gezeigt werden.

24.2.3.23. Derselbe Satz gilt mit demselben Beweis, wenn wir statt über den komplexen Zahlen über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null arbeiten.

Vorschau 24.2.3.24. In 23.2.1.16 zeigen wir, daß für jeden Körper k der Charakteristik Null die Erweiterung der Skalare $k\otimes_{\mathbb{Q}}$ eine Äquivalenz von Kategorien induziert zwischen der Kategorie de Wurzelsysteme über $\mathbb{Q}$ und der Kategorie de Wurzelsysteme über k.

Übungen

Übung 24.2.3.25. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche. Man zeige: Die Kowurzeln $\alpha^\vee$ spannen $\mathfrak{h}$ auf. Bezeichnet $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ den von den Kowurzeln über $\mathbb{Q}$ aufgespannten Teilraum von $\mathfrak{h}$, so gilt $\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$. Bezeichnet $(\mathfrak{h}^*)_{\mathbb{Q}}$ den von den Wurzeln über $\mathbb{Q}$ aufgespannten Teilraum von $\mathfrak{h}^*$, so gilt $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{h}^*)_{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}^*$ und das Einschränken identifiziert $(\mathfrak{h}^*)_{\mathbb{Q}}$ mit dem Dualraum $(\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}})^*$ von $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$, so daß wir ohne Mehrdeutigkeiten fürchten zu müssen schlicht $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ schreiben dürfen. Hinweis: 24.2.3.28.

Übung 24.2.3.26 (**Rationalität und Positivität der Killingform**). Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche. Bezeichne $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ den von

allen Kowurzeln über $\mathbb{Q}$ aufgespannten Teilraum von $\mathfrak{h}$. Man zeige, daß für $h, t \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ gilt $\kappa(h,t) \in \mathbb{Q}$ und daß κ positiv definit ist auf $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$, also $\kappa(h,h) \leq 0 \Rightarrow h = 0$. Einen alternativen Beweis der Positivität im Fall der komplexifizierten Liealgebra einer kompakten Liegruppe mit der komplexifizierten Liealgebra eines maximalen Torus als Cartan'scher findet man in 22.5.5.19.

Ergänzung 24.2.3.27. Seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ eine Wurzel. Für $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[x_\alpha, y_\alpha] = \alpha^\vee$ folgt aus dem Beginn des Beweises von 24.2.3.15 leicht $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \kappa(\alpha^\vee, \alpha^\vee)/2$. Da hier die rechte Seite positiv und rational ist nach 24.2.3.26, gilt für beliebige $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ immer noch $[x,y] \in \kappa(x,y)\mathbb{Q}_{>0}\alpha^\vee$.

Übung 24.2.3.28. Seien $k \subset K$ Körper. Sei V ein K-Vektorraum, $R \subset V$ ein endliches Erzeugendensystem von V und $L \subset V^*$ ein endliches Erzeugendensystem seines Dualraums. Gilt $\langle \lambda, \alpha \rangle \in k$ für alle $\lambda \in L$ und $\alpha \in R$, so haben wir $\dim_k \langle R \rangle_k = \dim_K V = \dim_k \langle L \rangle_k$ für die Erzeugnisse von R beziehungsweise L über k und die Einschränkung identifiziert $\langle L \rangle_k$ mit dem Dualraum von $\langle R \rangle_k$.

Übung 24.2.3.29. Die bezüglich Inklusion maximalen auflösbaren Unteralgebren einer Liealgebra heißen ihre **Borel'schen Unteralgebren** oder **Borel'schen**. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem. Man zeige, daß wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Systeme } R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \text{ von} \\ \text{positiven Wurzeln} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Borelsche Unteralgebren,} \\ \text{die } \mathfrak{h} \text{ umfassen} \end{array} \right\}$$

erhalten durch die Vorschrift $R^+ \mapsto \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$.

Übung 24.2.3.30 (**Wurzelketten**). Sei $R = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem einer komplexen halbeinfachen Liealgebra. Man zeige: Für Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha \neq \pm\beta$ ist $\{i \in \mathbb{Z} \mid \beta + i\alpha \in R\}$ ein Intervall in $\mathbb{Z}$.

Übung 24.2.3.31 (**Wurzelsystem vom Typ** C_n). Die Liealgebra $\mathfrak{sp}(2n; \mathbb{C})$ besteht nach 24.1.1.25 aus allen Blockmatrizen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit $A^\top = -D$, $B^\top = B$ und $C^\top = C$. Darin bilden die Diagonalmatrixen $\mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_n, -h_1, \ldots, -h_n)$ eine Cartan'sche $\mathfrak{h}$. Bezeichnet $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ die Abbildung, die einer Matrix ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnet, so bilden die ε_i für $1 \leq i \leq n$ eine Basis von $\mathfrak{h}^*$ und wir erhalten als Wurzelsystem

$$R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm 2\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Erzeuger der Wurzelräume sind die Matrizen mit $A = -D^\top = E_{ij}$ für $i \neq j$ und $B = C = 0$, mit $B = E_{ij} + E_{ji}$ und $C = A = D = 0$ sowie analog mit C statt B.

Übung 24.2.3.32 (**Wurzelsystem vom Typ** D_n). Die Liealgebra $\mathfrak{so}(2n;\mathbb{C})$ aus 24.1.1.15 besteht aus allen Blockmatrizen derselben Gestalt wie in der vorhergehenden Übung mit $A^\top = -D$, $B^\top = -B$ und $C^\top = -C$. Darin bilden die Diagonalmatrixen $\operatorname{diag}(h_1,\dots,h_n,-h_1,\dots,-h_n)$ eine Cartan'sche $\mathfrak{h}$. Bezeichnet $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ die Abbildung, die einer Matrix ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnet, so bilden die ε_i für $1 \le i \le n$ eine Basis von $\mathfrak{h}^*$ und wir erhalten als Wurzelsystem

$$R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}$$

Erzeuger der Wurzelräume sind die Matrizen mit $A = -D^\top = E_{ij}$ für $i \neq j$ und $B = C = 0$, mit $B = E_{ij} - E_{ji}$ und $C = A = D = 0$ sowie analog mit C statt B. Man zeige, daß die Weylgruppe aus allen Permutationen der ε_i gefolgt von der Änderung einer geraden Zahl von Vorzeichen besteht. Mehr zu diesem Wurzelsystem wird in 24.4.2.10 und 23.2.2.17 diskutiert.

Übung 24.2.3.33 (**Wurzelsystem vom Typ** B_n). Die Liealgebra $\mathfrak{so}(2n+1;\mathbb{C})$ aus 24.1.1.15 besteht aus allen Blockmatrizen

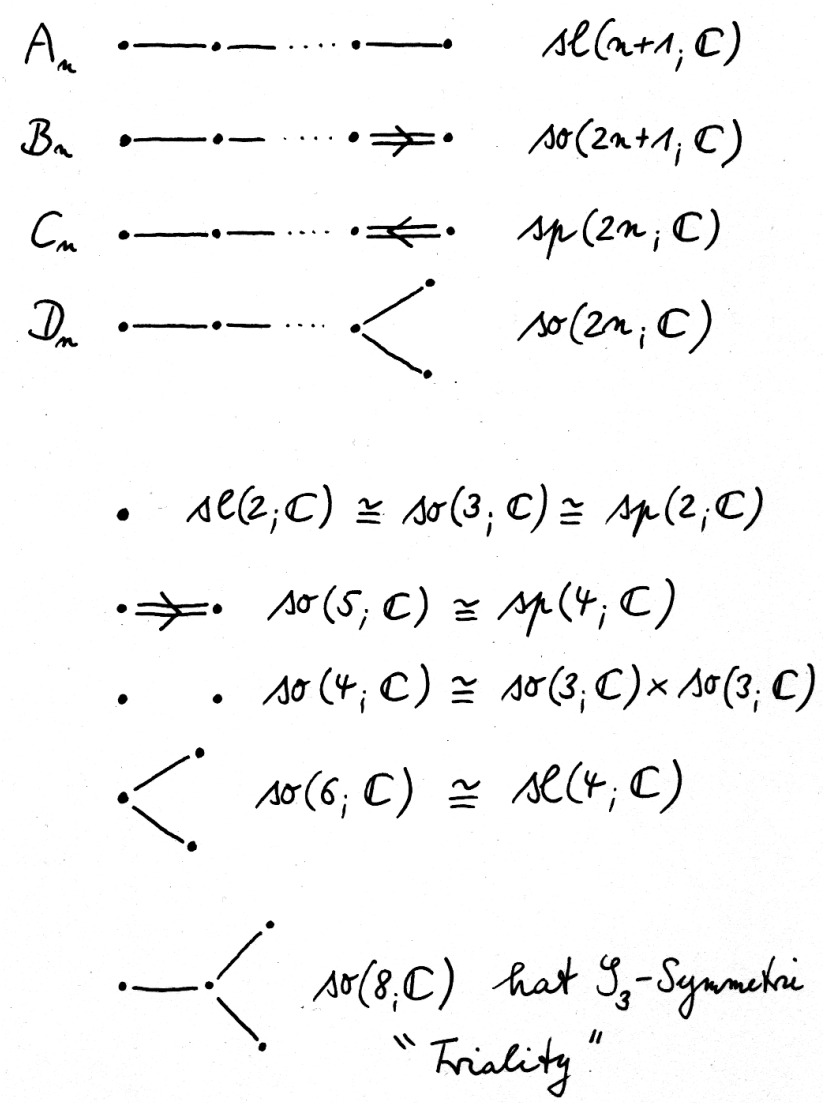
$$\begin{pmatrix} a & u & v \\ w & A & B \\ s & C & D \end{pmatrix}$$

mit $a = 0$, $u^\top = -s$, $v^\top = -w$, $A^\top = -D$, $B^\top = -B$ und $C^\top = -C$. Eine Cartan'sche $\mathfrak{h}$ bilden die Diagonalmatrizen $\operatorname{diag}(0,h_1,\dots,h_n,-h_1,\dots,-h_n)$. Erklären wir Linearformen $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ durch die Vorschrift, daß sie einer Matrix ihren $(i+1)$-ten Diagonaleintrag zuordnen, so bilden die ε_i für $1 \le i \le n$ eine Basis von $\mathfrak{h}^*$ und wir erhalten als Wurzelsystem

$$R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \le i \le n\}$$

Man zeige, daß die Weylgruppe aus allen Permutationen der ε_i gefolgt von einer beliebigen Änderung der Vorzeichen besteht. Mehr zu diesem Wurzelsystem wird in 24.4.2.11 und 23.2.2.17 diskutiert.

Ergänzende Übung 24.2.3.34 (**Unterliealgebren zu Unterwurzelsystemen**). Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $R \subset \mathfrak{h}^*$ das Wurzelsystem und $R' \subset R$ eine Teilmenge, die in ihrem Erzeugnis selbst ein Wurzelsystem ist und die Eigenschaft hat, daß die Summe von zwei Wurzeln aus R', wenn sie denn in R liegt, bereits in R' liegen muß. So ist $\mathfrak{g}' := \sum_{\alpha\in R'}(\mathfrak{g}_\alpha + \mathbb{C}\alpha^\vee)$ eine halbeinfache Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ mit Cartan'scher $\mathfrak{h}' := \sum_{\alpha\in R'}\mathbb{C}\alpha^\vee$ und die Restriktion von Linearformen auf $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ induziert eine Bijektion $R' \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}(\mathfrak{g}',\mathfrak{h}')$. Hinweis: Man zerlege R' mit 23.2.2.14 in unzerlegbare Wurzelsysteme und zeige mithilfe der Existenz höchster Wurzeln 23.2.5.6 und von Wurzelwegen dorthin im Sinne von 23.2.3.10, daß unzerlegbare Wurzelsysteme einfache Liealgebren liefern.



Hier wurde jeder halbeinfachen Liealgebra ein Wurzelsystem zugeordnet, wenn auch die Bijektivität auf Isomorphieklassen dieser Zuordnung 24.2.3.21 noch nicht fertig bewiesen ist. In 23.2.3.7 wird andererseits eine Bijektion auf Isomorphieklassen zwischen Wurzelsystemen und sogenannten Dynkindiagrammen konstruiert. Obiges Bild stellt die Verknüpfung dieser beidem Bijektionen im Spezialfall der klassischen Liealgebren dar und zeigt, wie naheliegend in diesem Rahmen unsere Ausnahme-Isomorphismen sind. Unter „triality“ versteht man eine Operation der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_3$ auf der Liealgebra $\mathfrak{so}(8;\mathbb{C})$. Sie wird erst im Rahmen der Konstruktion der Liealgebra zu einem Wurzelsystem durch Erzeuger und Relationen 24.3.4.4 offensichtlich werden.

24.2.4 Konjugiertheit von Cartan'schen

Definition 24.2.4.1. Ein Endomorphismus δ einer abelschen Gruppe V heißt **lokal nilpotent**, wenn es für jedes $v \in V$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\delta^N v = 0$. Ist V ein Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null, so definieren wir für $\delta : V \to V$ linear lokal nilpotent eine lineare Abbildung $\exp \delta : V \to V$ durch die Exponentialreihe

$$(\exp \delta)(v) := \sum_{n \geq 0} \frac{\delta^n v}{n!} = v + \delta v + \frac{\delta^2 v}{2} + \frac{\delta^3 v}{3!} + \dots$$

Lemma 24.2.4.2 (Exponential lokal nilpotenter Endomorphismen). *Seien Vektorräume V, W über einem Körper der Charakteristik Null gegeben.*

1. *Für $0 \in \operatorname{End} V$ haben wir stets $\exp(0) = \mathrm{id}$. Sind weiter δ und δ' kommutierende lokal nilpotente Endomorphismen von V, so ist auch $\delta + \delta'$ lokal nilpotent und es gilt $\exp(\delta + \delta') = (\exp \delta) \circ (\exp \delta')$. Insbesondere gilt dann $\exp(-\delta) = (\exp \delta)^{-1}$;*

2. *Ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"'] & W \arrow[d, "\delta'"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

   mit lokal nilpotenten Vertikalen bleibt kommutativ, wenn wir auf beide Vertikalen $\exp$ anwenden. Insbesondere haben wir für f invertierbar die Identität $\exp(f \delta f^{-1}) = f(\exp \delta) f^{-1}$;

3. *Ist $\delta : V \to V$ nilpotent, so ist auch die zugehörige transponierte Abbildung $\delta^\top : V^* \to V^*$ nilpotent und es gilt $\exp(\delta^\top) = (\exp \delta)^\top$.*

Beweis. Bleibt dem Leser überlassen. Man benutze für die erste Aussage die Identität $\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$ im Ring der formalen Potenzreihen in zwei Veränderlichen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$. Man beachte auch, daß die letzte Aussage für nur lokal nilpotentes δ nicht mehr gilt. □

Lemma 24.2.4.3 (Exponential lokal nilpotenter Derivationen). *Gegeben ein Körper k der Charakteristik Null, eine k-Algebra A und eine lokal nilpotente Derivation $\delta : A \to A$ von A ist $\exp(\delta)$ ein Algebrenautomorphismus von A.*

24.2.4.4. Gegeben ein ad-nilpotentes Element x einer endlichdimensionalen Liealgebra über einem Körper der Charakteristik Null ist insbesondere $\exp(\operatorname{ad} x)$ stets ein Liealgebren-Automorphismus.

Beweis mit Tensorprodukt. Bezeichne $m : A \otimes A \to A$ die Multiplikation in unserer Algebra. Ist δ eine Derivation, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\delta\otimes\mathrm{id} + \mathrm{id}\otimes\delta"'] & A \arrow[d, "\delta"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"] & A \end{tikzcd}$$

Ist δ lokal nilpotent, so auch $\delta \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \delta$. Unser Diagramm kommutiert dann auch noch, wenn wir $\exp$ auf beide vertikalen Abbildungen anwenden. Da $\delta \otimes \mathrm{id}$ und $\mathrm{id} \otimes \delta$ kommutieren, folgt $\exp(\delta \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \delta) = \exp(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \exp(\mathrm{id} \otimes \delta) = \exp \delta \otimes \exp \delta$. □

Beweis ohne Tensorprodukt. Aus $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ folgt induktiv wie beim Beweis der binomischen Formel erst $\delta^n(ab) = \sum_i \binom{n}{i} \delta^i(a)\delta^{n-i}(b)$ und dann

$$(\exp \delta)(ab) = \sum_{i,j} \frac{\delta^i(a)}{i!} \frac{\delta^j(b)}{j!} = (\exp \delta)(a)\ (\exp \delta)(b) \qquad \square$$

Satz 24.2.4.5 (Konjugiertheit von Cartan'schen). *Gegeben eine halbeinfache komplexe Liealgebra $\mathfrak{g}$ mit zwei Cartan'schen $\mathfrak{h}, \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ gibt es stets einen Automorphismus $\sigma \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ mit $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{k}$.*

Ergänzung 24.2.4.6. Der Beweis zeigt sogar, daß je zwei Cartan'sche konjugiert sind unter der Untergruppe $G \subset \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ in der Automorphismengruppe unserer Liealgebra, die von den $\exp(\operatorname{ad} x)$ mit $x \in \mathfrak{g}$ ad-nilpotent erzeugt wird.

24.2.4.7. Wir geben für diesen Satz zwei Beweise. Der Erste funktioniert über jedem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null, setzt aber Kenntnisse in algebraischer Geometrie voraus. Der Zweite funktioniert funktioniert nur über dem Körper der komplexen Zahlen und ist weniger übersichtlich, benötigt aber weniger Vorkenntnisse. Ein noch allgemeinerer Satz über Cartan'schen in beliebigen endlichdimensionalen Liealgebren wird in 24.2.5.6 bewiesen.

Beweis mit algebraischer Geometrie. Das Komplement der Kerne aller Wurzeln in einer Cartan'schen $\mathfrak{h}$ heißt der „reguläre Anteil" der besagten Cartan'schen und wird notiert als

$$\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}} := \mathfrak{h} \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \ker \alpha$$

Sicher ist $\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$ Zariski-offen in $\mathfrak{h}$. Offensichtlich gilt $\mathfrak{h} = \ker(\operatorname{ad} h : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g})$ für alle $h \in \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}_\alpha \times \ldots \times \mathfrak{g}_\beta \times \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}} & \to & \mathfrak{g} \\ (x, \ldots, y, h) & \mapsto & \exp(\operatorname{ad} x) \ldots \exp(\operatorname{ad} y) h \end{array}$$

mit dem Produkt über alle Wurzeln in einer beliebigen, aber für die Dauer dieses Beweises fest gewählten Reihenfolge hat nun surjektives, ja bijektives Differential an allen Tupeln der Gestalt $(0, \ldots, 0, h)$. Nach dem differentiellen Dominanzkriterium, das wir in 24.2.4.8 in der hier benötigten Form zitieren, umfaßt folglich das Bild unserer Abbildung eine Zariski-offene nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{g}$. Analoges gilt für unsere zweite Cartan'sche $\mathfrak{k}$. Folglich treffen sich die zugehörigen Bilder und wir finden $h \in \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}, k \in \mathfrak{k}_{\mathrm{reg}}$ und $\sigma, \tau \in G$ mit $\sigma(h) = \tau(k)$ alias $\tau^{-1}\sigma : h \mapsto k$. Daraus folgt aber sofort $(\tau^{-1}\sigma)(\mathfrak{h}) = \mathfrak{k}$. □

Beweis im Komplexen ohne algebraische Geometrie. Sei $\mathfrak{g}$ unsere halbeinfache komplexe Liealgebra und

$$r := \min\{\dim_{\mathbb{C}}(\ker(\operatorname{ad} x)) \mid x \in \mathfrak{g}\}$$

Nach Übung 12.7.5.22 zu Nullstellen polynomialer Funktionen und 3.6.4.13 ist $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} := \{x \in \mathfrak{g} \mid \dim_{\mathbb{C}}(\ker(\operatorname{ad} x)) = r\}$ offen und dicht in $\mathfrak{g}$, diesmal für die analytische Topologie. Wie bei unserem ersten Beweis sehen wir, diesmal mit dem Umkehrsatz 12.3.1.2, daß andererseits für jede Cartan'sche $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ die Menge $G\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$ offen ist in $\mathfrak{g}$. Mithin trifft $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ eine Konjugierte jeder Cartan'schen und damit dann auch jede Cartan'sche $\mathfrak{h}$. Es folgt sofort $r = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$. Nun ist das charakteristische Polynom $\chi(\operatorname{ad} x) \in \mathbb{C}[T]$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ durch T^r teilbar. Die Diskriminante D nach 6.2.9.13 des Quotienten $\chi(\operatorname{ad} x)/T^{r-1}$ ist dann eine polynomiale Funktion auf $\mathfrak{g}$, die bei $h \in \mathfrak{h}$ genau dann von Null verschieden ist, wenn die Werte der Wurzeln $\alpha(h)$ für $\alpha \in R$ paarweise verschieden und alle nicht Null sind. Diese Funktion D ist also nicht identisch Null auf $\mathfrak{g}$. Andererseits folgt aus $D(x) \neq 0$ schon $x = x_{\mathrm{s}}$, denn die Eigenräume von x_{s} zu von Null verschiedenen Eigenwerten sind für derartige x eindimensional und aus $x \neq x_{\mathrm{s}}$ folgte $\ker(\operatorname{ad} x) \subsetneq (\ker(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}))$ im Widerspruch zu $\dim(\ker(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}})) = r$. Das Komplement der Nullstellenmenge von D ist demnach die Vereinigung über alle Cartan'schen $\mathfrak{h}$ der Mengen

$$\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pv}} := \{h \in \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}} \mid \text{Die Werte der Wurzeln auf } h \text{ sind paarweise verschieden}\}$$

Derselbe Beweis wie zuvor zeigt nun, daß auch $G\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pv}}$ stets offen ist in $\mathfrak{g}$. Gegeben zwei Cartan'sche $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ mit $G\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pv}} \cap G\mathfrak{k}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pv}} \neq \emptyset$ folgern wir jedoch wie bei unserem ersten Beweis, daß es $\sigma \in G$ gibt mit $\sigma\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$ und daß insbesondere gilt $G\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pv}} = G\mathfrak{k}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pv}}$. Mithin zerfällt $\{x \in \mathfrak{g} \mid D(x) \neq 0\}$ als die disjunkte Vereinigung der offenen Teilmengen $G\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pv}}$, wenn wir $\mathfrak{h}$ über ein Repräsentantensystem für die G-Konjugationsklassen von Cartan'schen laufen lassen Da aber das Komplement der Nullstellenmenge von D nach 12.7.5.22 zusammenhängend ist, kann es nur eine derartige Konjugationsklasse geben. □

24.2.4.8. Sei $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ eine polynomiale Abbildung. Ist das Differential $\mathrm{d}_p \varphi$ an mindestens einer Stelle $p \in \mathbb{C}^n$ surjektiv, so umfaßt das Bild jeder nichtleeren Zariski-offenen Menge in $\mathbb{C}^n$ eine nichtleere Zariski-offene Menge in $\mathbb{C}^m$. Das ist ein Spezialfall des differentiellen Dominanzkriteriums 7.7.4.23 und wird hier nicht bewiesen.

Übungen

Ergänzende Übung 24.2.4.9 (**Reguläre Elemente in Cartan'schen**). Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $R := \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ das Wurzelsystem. Man zeige, daß die Elemente von $\mathfrak{h}$, die im Sinne von 24.1.1.33 regulär sind in $\mathfrak{g}$, genau die Elemente von $\mathfrak{h}$ sind, auf denen keine Wurzel verschwindet. Hinweis: 24.2.2.14. Man zeige weiter, daß die regulären halbeinfachen Elemente eine Zariski-offene Teilmenge von $\mathfrak{g}$ bilden.

24.2.5 Cartan'sche in allgemeinen Liealgebren**

24.2.5.1. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine Liealgebra mit einer Unteralgebra. Der **Normalisator von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$** ist die Unteralgebra

$$\mathrm{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$$

Natürlich ist der Normalisator wieder eine Unteralgebra und per definitionem ist $\mathfrak{h}$ ein Ideal in $\mathrm{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Genauer ist der Normalisator von $\mathfrak{h}$ die größte Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, die $\mathfrak{h}$ als Ideal umfaßt.

Definition 24.2.5.2. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ heißt eine **Cartan'sche**, wenn sie nilpotent und selbstnormalisierend alias ihr eigener Normalisator ist.

Ergänzung 24.2.5.3 (**Cartan'sche und Erweiterungen des Grundkörpers**). Beide Eigenschaften nilpotent und selbstnormalisierend gelten genau dann, wenn sie nach einer beliebigen festen Erweiterung des Grundkörpers gelten. Ist also $k \subset K$ eine Körpererweiterung und $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über k und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ein Untervektorraum, so ist $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche genau dann, wenn $\mathfrak{h} \otimes_k K \subset \mathfrak{g} \otimes_k K$ eine Cartan'sche ist.

24.2.5.4. Sei $\mathfrak{g}$ endlichdimensionale Liealgebra. Wir setzen

$$r = \mathrm{rang}(\mathfrak{g}) := \min\{\dim \ker(\mathrm{ad}\, x) \mid x \in \mathfrak{g}\}$$

und nennen diese Zahl der **Rang** unserer Liealgebra. Die Elemente $x \in \mathfrak{g}$, an denen das Minimum angenommen wird, heißen seit 24.1.1.33 **regulär**. Die regulären Elemente bilden stets eine Zariski-offene Teilmenge $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \Subset \mathfrak{g}$.

24.2.5.5. Sei $\mathfrak{g}$ endlichdimensionale Liealgebra. Wir setzen

$$s = s(\mathfrak{g}) := \min\{\dim \operatorname{Hau}(\operatorname{ad} x; 0) \mid x \in \mathfrak{g}\}$$

Diejenigen Elemente $x \in \mathfrak{g}$, an denen das Minimum angenommen wird, heißen **generisch**. Die generischen Elemente bilden stets eine Zariski-offene Teilmenge $\mathfrak{g}_{\text{gen}} \Subset \mathfrak{g}$. Sie bilden sogar das Komplement der Nullstellenmenge einer von Null verschiedenen polynomialen Funktion, nämlich derjenigen Funktion, die jedem $x \in \mathfrak{g}$ den Koeffizienten von T^s des charakteristischen Polynoms von $\operatorname{ad} x$ zuordnet.

Satz 24.2.5.6 (**Existenz und Eindeutigkeit von Cartan'schen**). *1. Jede endlichdimensionale Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper der Charakteristik Null besitzt Cartan'sche Unteralgebren, und diese sind genau die Haupträume zum Eigenwert Null* $\operatorname{Hau}(\operatorname{ad} x; 0)$ *für generische $x \in \mathfrak{g}$;*

2. In einer endlichdimensionalen Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null sind je zwei Cartan'sche konjugiert unter ihrer Automorphismengruppe, ja unter der von den $\exp(\operatorname{ad} c)$ *für Elemente c mit nilpotentem* $\operatorname{ad} c$ *erzeugten Untergruppe G der Automorphismengruppe.*

Beweis. 1. Wir kürzen $\operatorname{Hau}(\operatorname{ad} x; \lambda) =: \mathfrak{g}^x_\lambda$ ab und zeigen zunächst, daß im Fall eines Grundkörpers k der Charakteristik Null der Hauptraum zum Eigenwert Null $\mathfrak{g}^x_0$ für jedes generische Element x eine Cartan'sche ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir uns auf den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers k zurückziehen. Für alle λ, μ gilt nach 24.1.1.36 sicher $[\mathfrak{g}^x_\lambda, \mathfrak{g}^x_\mu] \subset \mathfrak{g}^x_{\lambda+\mu}$. Also ist unser Hauptraum zum Eigenwert Null eine Unteralgebra. Sein Normalisator muß auch in Haupträume unter $\operatorname{ad} x$ zerfallen und besteht offensichtlich nur aus $\mathfrak{g}^x_0$ selber. Nun zeigen wir, daß $\mathfrak{g}^x_0$ auch noch eine nilpotente Liealgebra ist. Sei nämlich $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}^x_0$ unter allen nilpotenten Unteralgebren, die x enthalten, eine Unteralgebra maximal möglicher Dimension. So verfeinert die simultane Hauptraumzerlegung zu $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}$ aus 24.1.5.10 die Hauptraumzerlegung von $\operatorname{ad} x$. Hätten wir dabei

$$\operatorname{Hau}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}; 0) \subsetneq \mathfrak{g}^x_0$$

und wären $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathfrak{n}^*$ die von Null verschiedenen simultanen Eigenwerte alias Gewichte von $\mathfrak{g}$ unter der adjungierten Operation von $\mathfrak{n}$, so fänden wir $y \in \mathfrak{n}$ mit $\lambda_1(y) \neq 0, \ldots, \lambda_r(y) \neq 0$ und es folgte

$$\dim \operatorname{Hau}(\operatorname{ad} y; 0) < \dim \operatorname{Hau}(\operatorname{ad} x; 0)$$

im Widerspruch zu unserer Annahme x generisch. Mithin operiert $\mathfrak{n}$ durch nilpotente Endomorphismen auf $\mathfrak{g}^x_0/\mathfrak{n}$. Ist dieser Raum nicht Null, so gibt es nach Satz

24.1.4.1 über Liealgebren aus nilpotenten Endomorphismen ein Element $z \in \mathfrak{g}_0^x$ mit $z \notin \mathfrak{n}$ aber $[z, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$. Also ist $\mathfrak{m} := kz + \mathfrak{n}$ eine auflösbare Liealgebra. Seien nun $\mu_0, \ldots, \mu_t \in \mathfrak{m}^*$ die Charaktere der einfachen Subquotienten von $\mathfrak{g}$ als Darstellung der auflösbaren Liealgebra $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}_0^x$. Wir listen sie nicht mit ihrer Vielfachheit, die μ_j seien also paarweise verschieden. Wegen $[z, z] = 0$ kommt der Nullcharakter vor, wir dürfen also $\mu_0 = 0$ annehmen. Sicher gibt es $y \in \mathfrak{m}$ mit $\mu_1(y) \neq 0, \ldots, \mu_t(y) \neq 0$. Wegen $x \in \mathfrak{m}$ hat $\operatorname{ad} y$ dann keinen Eigenwert Null auf $\mathfrak{g}_\lambda^x$ für $\lambda \neq 0$. Hätte es also einen Eigenwert ungleich Null auf $\mathfrak{g}_0^x$, so gälte $\dim \operatorname{Hau}(\operatorname{ad} y; 0) < \dim \operatorname{Hau}(\operatorname{ad} x; 0)$ im Widerspruch zu unserer Annahme x generisch. Mithin ist auch $\mathfrak{m}$ eine nilpotente Liealgebra, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{n}$. Die verbleibende Aussage von Teil 1, daß umgekehrt auch jede Cartan'sche ein Hauptraum der beschriebenen Art ist, wird erst im Anschluß an den Beweis von Teil 2 gezeigt.

2. Sei $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche. Sicher zerfällt $\mathfrak{g}$ unter der adjungierten Operation von $\mathfrak{h}$ in simultane Eigenräume. Seien $\alpha, \ldots, \beta \in \mathfrak{h}^*$ die von Null verschiedenen simultanen Eigenwerte. Wir setzen

$$\mathfrak{h}_{\text{gen}} := \{h \in \mathfrak{h} \mid \alpha(h) \neq 0, \ldots, \beta(h) \neq 0\}$$

Sicher ist das eine Zariski-offene nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{h}$ und für alle $h \in \mathfrak{h}_{\text{gen}}$ gilt $\mathfrak{g}_0^h = \mathfrak{h}$. Jetzt betrachten wir die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}_\alpha \times \ldots \times \mathfrak{g}_\beta \times \mathfrak{h}_{\text{gen}} & \to & \mathfrak{g} \\ (x, \ldots, y, h) & \mapsto & \exp(\operatorname{ad} x) \ldots \exp(\operatorname{ad} y) h \end{array}$$

mit dem Produkt über alle von Null verschiedenen Eigenwerte in einer beliebigen, aber für diesen Beweis fest gewählten Reihenfolge. Sie hat surjektives, ja bijektives Differential an allen Tupeln der Gestalt $(0, \ldots, 0, h)$. Nach dem differentiellen Dominanzkriterium 7.7.4.23 umfaßt folglich das Bild unserer Abbildung eine Zariski-offene nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{g}$. Da die Dimension des $(\operatorname{ad} z)$-Hauptraums zum Eigenwert Null für alle Elemente z dieser Teilmenge dieselbe sein muß, besteht sie notwendig aus generischen Elementen. Insbesondere besteht $\mathfrak{h}_{\text{gen}}$ aus generischen Elementen. Ist $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ eine weitere Cartan'sche, so folgt ebenso, daß $G\mathfrak{k}_{\text{gen}}$ Zariski-offen ist. Folglich haben $G\mathfrak{k}_{\text{gen}}$ und $G\mathfrak{h}_{\text{gen}}$ nichtleeren Schnitt. Mithin gibt es $h \in \mathfrak{h}_{\text{gen}}$ und $\sigma \in G$ mit $gh \in \mathfrak{k}_{\text{gen}}$. Dann folgt aber $\sigma(\operatorname{Hau}(\operatorname{ad} h; 0)) = (\operatorname{Hau}(\operatorname{ad} \sigma(h); 0))$ alias $\sigma\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$.

Nun können wir auch den Beweis von Teil 1 zu Ende bringen: Jede Cartan'sche $\mathfrak{h}$ besitzt nämlich generische Elemente x, wie man durch Übergang zu einem algebraischen Abschluß und Herunterschneiden auf die ursprüngliche Cartan'sche nunmehr leicht einsieht. Dann aber gilt notwendig $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0^x$. $\square$

24.2.6 Bezug zu algebraischen Gruppen*

Satz 24.2.6.1 (Adjungierte Gruppe einer halbeinfachen Liealgebra). *Gegeben eine halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ ist die Einskomponente ihrer Automorphismengruppe*

$$(\operatorname{Alg}_k^\times(\mathfrak{g}))^\circ \subset \operatorname{GL}(\mathfrak{g})$$

die eindeutig bestimmte zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe mit Liealgebra $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$. Sie wird erzeugt von den Automorphismen $\exp(\operatorname{ad} x)$ mit nilpotenten $x \in \mathfrak{g}$.

24.2.6.2. Gegeben eine halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ heißt die Einskomponente $(\operatorname{Alg}_k^\times(\mathfrak{g}))^\circ$ ihrer Automorphismengruppe auch die **adjungierte Gruppe**. Im Allgemeinen definiert man die „adjungierte Gruppe“ einer Liealgebra als die größte zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe $G \subset \operatorname{GL}(\mathfrak{g})$, deren Liealgebra in $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ enthalten ist.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar nach 9.3.7.1, da wir ja in Charakteristik Null sind. Nach Übung 9.3.2.35 besteht die Liealgebra der Automorphismengruppe einer endlichdimensionalen Algebra stets aus Derivationen, und da nach 24.2.2.6 im Falle einer halbeinfachen Liealgebra alle diese Derivationen innere Derivationen sind, gilt weiter $\operatorname{Lie}(\operatorname{Alg}_k^\times(\mathfrak{g})) \subset \operatorname{Der}_k \mathfrak{g} = \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$. Andererseits erzeugen die Automorphismen $\exp(\operatorname{ad} x)$ mit nilpotenten $x \in \mathfrak{g}$ aber nach dem Satz 9.2.2.5 über irreduzibles Erzeugen eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $\operatorname{Alg}_k^\times(\mathfrak{g})$, die nach 24.2.3.15 und 24.2.3.25 bereits die richtige Liealgebra haben muß. □

Beispiel 24.2.6.3. Sei k ein Körper der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$. Gegeben eine Matrix $x \in \mathfrak{gl}(n; k)$ haben wir $\operatorname{ad} x = (x\cdot) - (\cdot x)$, und da die Linksmultiplikation kommutiert mit der Rechtsmultiplikation, folgt für nilpotentes x und beliebiges y sofort

$$(\exp(\operatorname{ad} x))(y) = (\exp x) y (\exp x)^{-1}$$

Man überlegt sich nun ohne große Schwierigkeiten, daß die $\exp x$ für $x \in \mathfrak{sl}(n; k)$ nilpotent die Gruppe $\operatorname{SL}(n; k) \subset \operatorname{GL}(n; k)$ erzeugen, ja diese Gruppe wird sogar schon erzeugt von allen $\exp(aE_{ij})$ mit $a \in k$ und $i \neq j$. Die adjungierte Gruppe der Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n; k)$ ist mithin das Bild des Gruppenhomomorphismus $\operatorname{Ad} : \operatorname{SL}(n; k) \to \operatorname{GL}(\mathfrak{sl}(n; k))$, der einer Matrix $A \in \operatorname{SL}(n; k)$ die Konjugation mit A zuordnet, als da heißt die Abbildung $\operatorname{Ad}(A) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $y \mapsto AyA^{-1}$.

Ergänzung 24.2.6.4 (**Halbeinfachkeit von Gruppen und ihren Liealgebren**). Die adjungierte Gruppe einer halbeinfachen Liealgebra über einem algebraisch

abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ ist halbeinfach im Sinne von 9.4.8.2. In der Tat hätte sie sonst einen nichttrivialen zusammenhängenden abelschen Normalteiler und dessen Liealgebra wäre nach 9.3.3.14 ein nichttriviales abelsches Ideal von $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$. Wir folgern, daß jede affine algebraische Gruppe G mit halbeinfacher Liealgebra $\mathfrak{g}$ bereits selbst halbeinfach sein muß, denn ihre adjungierte Darstellung induziert einen Homomorphismus $\operatorname{Ad} : G \to \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$, dessen Differential beim neutralen Element bijektiv ist.

Ergänzung 24.2.6.5 (**Maximale Tori und Cartan'sche Unteralgebren**). Gegeben eine halbeinfache affine algebraische Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null induziert das Bilden der Liealgebra eine Bijektion

$$\{\text{Maximale Tori in } G\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Cartan'sche in } \operatorname{Lie} G\}$$

In der Tat besteht die Liealgebra eines maximalen Torus sich aus halbeinfachen und paarweise kommutierenden Elementen und ist ihr eigener Zentralisator, also maximal mit diesen Eigenschaften. Unsere Abbildung landet also schon mal, wo sie soll. Da beide Seiten aus einer einzigen G-Bahn bestehen, muß sie surjektiv sein. Da schließlich in Charakteristik Null zusammenhängenden Untergruppen nach 9.3.7.1 bereits durch ihre Liealgebra eindeutig bestimmt werden, folgt auch die Injetivität.

Ergänzung 24.2.6.6. Gegeben $G \supset T$ eine halbeinfache affine algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null mit einem maximalen Torus und $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ ihre Liealgebren induziert die adjungierte Darstellung $\operatorname{Ad} : G \to \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ einen Isomorphismus auf den Weylgruppen $\mathrm{W}(G, T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}(\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$, wie man etwa aus 9.4.11.12 leicht folgert.

Satz 24.2.6.7 (Darstellungen reduktiver Gruppen). $(k = \bar{k})$. *Jede rationale Darstellung einer reduktiven algebraischen Gruppe in Charakteristik Null ist halbeinfach.*

Beweis. Wir beginnen mit dem Fall, daß unsere Gruppe zusammenhängend ist. Dann wird sie erzeugt von ihrem Zentrum, einer diagonalisierbaren Gruppe, und ihrer derivierten Gruppe, einer halbeinfachen Gruppe. Unter dem Zentrum zerfällt unsere Darstellung in simultane Eigenräume, die ihrerseits unter der derivierten Gruppe stabil sind. Es reicht also, den Fall einer halbeinfachen Gruppe zu betrachten. Nun sind aber nach 9.4.6.23 die Unterdarstellungen unter der Gruppe dieselben wie die Unterdarstellungen unter ihrer Liealgebra, diese Liealgebra ist halbeinfach nach 24.2.6.4, und dann sind auch ihre endlichdimensionalen Darstellungen halbeinfach nach dem Satz von Weyl 24.2.1.6. Ist unsere Gruppe G reduktiv aber nicht zusammenhängend, so finden wir zunächst nach dem bereits

behandelten Fall in jeder endlichdimensionalen Darstellung V genau ein unter der Einskomponente $E := G^\circ$ stabiles Komplement des Teilraums V^E der E-Invarianten. Diese Zerlegung ist notwendig G-stabil, und in V^E finden wir nach dem Satz von Maschke 8.4.1.1 angewandt auf die endliche Gruppe G/E auch ein G-stabiles Komplement des Teilraums V^G der G-Invarianten. Nun können wir argumentieren wie bei der Herleitung des Satzes von Weyl in 24.2.1.11. □

Korollar 24.2.6.8 (Peter-Weyl für reduktive Gruppen). $(k = \bar{k})$. *Gegeben eine reduktive algebraische Gruppe G in Charakteristik Null induzieren die Matrixkoeffizientenabbildungen einen Isomorphismus von Darstellungen*

$$\bigoplus_{L \in \mathrm{irr}(G)} L \otimes L^* \quad \tilde{\to} \quad \mathcal{O}(G)$$

von $G \times G^{\mathrm{opp}}$ mit der über alle irreduziblen rationalen Darstellungen von G bis auf Isomorphie zu bildenden direkten Summe.

Beweis. Gegeben ein beliebiges algebraisches Monoid G und rationale Darstellungen V, W von G liefert das Auswerten einen Homomorphismus

$$V \otimes_k \mathrm{Hom}_k(V, W)^G \to W$$

von Darstellungen, wobei auf dem Tensorprodukt die G-Operation gemeint ist, die nur den ersten Faktor bewegt. Ist $V = L$ irreduzibel, so ist dieser Homomorphismus eine Injektion nach dem Schur'schen Lemma und ihr Bild ist genau die L-isotypische Komponente von W. Nehmen wir speziell $W = \mathcal{O}(G)$ mit der G-Operation durch $(gf)(x) := f(xg)$ für $x \in G$, so ist unser Homomorphismus äquivariant für die Rechtsoperation gegeben durch $(fg)(x) := f(gx)$ auf $\mathcal{O}(G)$ und durch die davon abgeleitete Rechtsoperation auf unserem Tensorprodukt, die nur den zweiten Tensor bewegt. Schließlich beachte man, daß das Nachschalten des Auswertens beim neutralen Element einen mit den G-Rechtsoperationen verträglichen Isomorphismus $L^* \tilde{\to} \mathrm{Hom}_k(L, \mathcal{O}(G))^G$ induziert. □

24.2.7 Lemma von Schur für Liealgebren*

Satz 24.2.7.1 (Lemma von Schur). *Der Endomorphismenring einer irreduziblen Darstellung einer endlichdimensionalen Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper besteht nur aus den skalaren Vielfachen der Identität.*

24.2.7.2. Ist unser Körper überabzählbar, insbesondere also im Fall der komplexen Zahlen, kann man das direkt und einfacher aus 8.3.2.6 folgern. Man erhält dann die Aussage sogar noch allgemeiner für Liealgebren abzählbarer Dimension, vergleiche 24.2.1.4. Die hier als Satz 24.2.7.1 formulierte Version wird auch als **Lemma von Quillen** zitiert.

Beweis. Sei $k = \bar{k}$ unser algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathfrak{g}$ unsere Liealgebra und V unsere irreduzible Darstellung. Gegeben ein Endomorphismus unserer Darstellung $a \in \operatorname{End}_k^{\mathfrak{g}} V$ gilt es zu zeigen $a \in k \operatorname{id}_V$. Da wir k algebraisch abgeschlossen angenommen hatten, reicht es zu zeigen, daß a algebraisch ist über k. Nun können wir V nach 24.4.3.7 zu einem Modul über $k[X] \otimes_k \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ machen, indem wir X als a operieren lassen. Gegeben ein von Null verschiedener Vektor $v \in V$ betrachten wir die Filtrierung von V durch die

$$V^{\leq r} := \left(k[X] \otimes_k \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\leq r}\right) v$$

Offensichtlich ist dann der assoziierte graduierte Vektorraum $\operatorname{gr} V$ ein zyklischer graduierter Modul über dem Ring $R := k[X] \otimes_k \mathrm{S}(\mathfrak{g})$, versehen mit der Graduierung, bei der $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ die übliche Graduierung trägt, $k[X]$ aber ganz im Grad Null konzentriert ist. In anderen Worten ist $\operatorname{gr} V$ ein Quotient unseres Rings nach einem geeigneten homogenen Ideal I. Nun wissen wir nach 7.6.6.16, daß der Ring R/I eine endliche Filtrierung durch homogene Ideale besitzt, deren Subquotienten jeweils bis auf Verschieben der Graduierung isomorph sind zu gewissen $R/\mathfrak{p}_i$ für homogene Primideale $\mathfrak{p}_i \subset R$. Gehen wir zu einem geometrischen Bild über, so entsprechen die Primideale $\mathfrak{p}_i \subset R$ irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen

$$Y_i \not\subset \operatorname{Max} R \xrightarrow{\sim} k \times \mathfrak{g}^*$$

Die Projektion jeder dieser irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen auf die erste Koordinate besteht nun entweder nur aus einem Punkt, oder aber sie ist dicht. Ist $f \in k[X]$ ein von Null verschiedenes Polynom, das an allen Stellen verschwindet, an denen eines unserer Y_i in der Faser enthalten ist, so operiert $k[X, f^{-1}]$ torsionsfrei auf allen Lokalisierungen $(R/\mathfrak{p}_i)_f$. Damit sind unsere $(R/\mathfrak{p}_i)_f$ sogar freie $k[X, f^{-1}]$-Moduln, da ihre homogenen Komponenten jeweils endlich erzeugt sind über dem Hauptidealring $k[X, f^{-1}]$. Dann ist auch $(\operatorname{gr} V)_f = (R/I)_f$ ein freier $k[X, f^{-1}]$-Modul und damit schließlich sogar auf V_f. Würde nun f nicht durch Null auf V operieren, so müßte es auf dieser einfachen Darstellung durch einen Automorphismus operieren und wir hätten $V_f = V$ und das wäre ein von Null verschiedener freier Modul über $k[X, f^{-1}]$ im Widerspruch dazu, daß alle Elemente dieses Rings durch Automorphismen auf der einfachen Darstellung V operieren müssen. Folglich operiert f durch Null auf V, als da heißt, es gilt $f(a) = 0$ und a ist algebraisch über k. $\square$

24.3 Konstruktion der halbeinfachen Liealgebren

24.3.1 Freie Liealgebren

24.3.1.1. Wir notieren die Kategorie der Liealgebren über einem Körper k als Lalg_k.

Definition 24.3.1.2. Gegeben eine Menge I und ein Körper k definiert man eine **freie k-Liealgebra über** I als ein Paar (L, can) bestehend aus einer k-Liealgebra L und einer Abbildung $\mathrm{can} : I \to L$ derart, daß für jede k-Liealgebra $\mathfrak{g}$ das Vorschalten von can eine Bijektion

$$\mathrm{Lalg}_k(L, \mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(I, \mathfrak{g})$$

zwischen Homomorphismen von Liealgebren und Abbildungen von Mengen induziert. Diese Bedingung nennt man auch die **universelle Eigenschaft** der freien k-Liealgebra über I.

24.3.1.3 (**Eindeutigkeit freier Liealgebren**). Sind $\mathrm{can} : I \to L$ und $\mathrm{can}' : I \to L'$ zwei freie Liealgebren über derselben Menge I, so gibt es genau einen Liealgebren-Homomorphismus $\varphi : L \to L'$ mit $\varphi \circ \mathrm{can} = \mathrm{can}'$, und der ist ein Isomorphismus, was ich anhand des folgenden Diagramms erklären will.

$$\begin{tikzcd}
 & & I \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
L' \arrow[r, "\psi"'] \arrow[rrr, bend right, "\mathrm{id}=\varphi\psi"'] & L \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[rrr, bend right, "\mathrm{id}=\psi\varphi"'] & & L' \arrow[r, "\psi"] & L
\end{tikzcd}$$

In der Tat gibt es ja nach universellen Eigenschaften von $\mathrm{can}' : I \to L'$ auch genau einen Liealgebren-Homomorphismus $\psi : L' \to L$ mit $\psi \circ \mathrm{can}' = \mathrm{can}$. Weiter gibt es aus demselben Grund auch genau einen Liealgebren-Homomorphismus $\zeta : L \to L$ mit $\zeta \circ \mathrm{can} = \mathrm{can}$. Da sowohl $\zeta = \mathrm{id}$ als auch $\zeta = \psi\varphi$ diese Eigenschaft haben, folgt $\mathrm{id} = \psi\varphi$. Analog folgt auch $\mathrm{id} = \varphi\psi$, so daß φ und ψ zueinander invers sein müssen.

Proposition 24.3.1.4. *Gegeben ein Körper k und eine Menge I existiert stets eine freie k-Liealgebra über I.*

24.3.1.5. Wir notieren im Sinne unserer allgemeinen Konventionen 16.4.8.10 die freie k Liealgebra über einer Menge I als

$$\mathrm{Lalg}_k^{\nwarrow} I$$

24.3.1.6. Wir geben zwei Beweise für diese Aussage. Der Erste geht „über unnötig viele Pässe, aber auf bekannten Wegen“. Besonders unschön an diesem ersten Beweis ist, daß er den Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt benötigt, dessen Beweis ja beim besten Willen kein Selbstläufer war. Der zweite Beweis ist recht direkt, benutzt aber Argumente, die Ihnen weniger vertraut sein mögen und die erst im anschließenden Abschnitt ausgeführt werden.

Erster Beweis. Wir betrachten den „Polynomring über k in durch I indizierten nicht-kommutierenden Variablen X_i für $i \in I$“ wie in 8.3.7.1 oder auch im zweiten Beweis von 24.4.3.19, in unseren verschiedenen Notationen also die k-Ringalgebra

$$k\lfloor' X_i \mid i \in I\rfloor = k\lfloor'_{\mathrm{I}} I\rfloor = \mathrm{Ralg}_k^{\setminus} I = k\langle \mathrm{Mon}^{\setminus} I\rangle$$

Dann betrachten wir darin die von besagten Variablen erzeugte Unter-Liealgebra

$$L \subset (\mathrm{Ralg}_k^{\setminus} I)_{\mathrm{L}}$$

Um zu sehen, daß sie die geforderte universelle Eigenschaft hat, betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ens}(I, \mathfrak{g}) \arrow[r] & \mathrm{Ens}(I, \mathrm{U}(\mathfrak{g})) \\
\mathrm{Lalg}_k(L, \mathfrak{g}) \arrow[u, hook] & \mathrm{Ralg}_k(\mathrm{Ralg}_k^{\setminus} I, \mathrm{U}(\mathfrak{g})) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Es gilt zu zeigen, daß die linke Vertikale ein Isomorphismus ist. Dazu konstruieren wir eine rechtsinverse Abbildung. Sicher induziert für $\varphi : I \to \mathfrak{g}$ der zugehörige Homomorphismus von Ringalgebren $\tilde{\varphi} : \mathrm{Ralg}_k^{\setminus} I \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ einen Homomorphismus von Liealgebren $\hat{\varphi} : L \to \mathfrak{g}$, denn nach Poincaré-Birkhoff-Witt 24.4.3.11 ist die kanonische Abbildung eine Injektion $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Die Zuordnung $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ ist dann offensichtlich die gesuchte Rechtsinverse unserer linken Vertikale. $\square$

Zweiter Beweis. Eine alternative und in meinen Augen natürlichere Konstruktion geht aus von der „freien Algebra $\mathrm{Alg}_k^{\setminus} I$ über der Menge I“, wie sie in 24.3.3.9 konstruiert wird, einer Art „Polynomring über k in nicht-kommutierenden nicht-assoziativen durch $i \in I$ indizierten Variablen ohne Konstanten“. Wir notieren ihre Verknüpfung $(a, b) \mapsto a \cdot b$. Teilen wir das zweiseitige Ideal R heraus, das von allen Elementen $(a \cdot a)$ und $(a \cdot (b \cdot c)) + (b \cdot (c \cdot a)) + (c \cdot (a \cdot b))$ mit $a, b, a \in A$ erzeugt wird, so ergibt sich offensichtlich eine Liealgebra. Daß das die gesuchte

freie Liealgebra über I ist, will ich anhand des folgenden Diagramms erläutern.

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl, "\mathrm{can}"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
\mathrm{Alg}_k^{\setminus} I \arrow[rr, dashed, "\hat{\varphi}"] \arrow[dr] & & \mathfrak{g} \\
 & (\mathrm{Alg}_k^{\setminus} I/R) \arrow[ur, dashed, "\tilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Sei also $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Zunächst läßt sich jede Abbildung $\varphi : I \to \mathfrak{g}$ auf genau eine Weise zu einem Algebrenhomomorphismus $\hat{\varphi} : \mathrm{Alg}_k^{\setminus} I \to \mathfrak{g}$ fortsetzen aufgrund der universellen Eigenschaft der freien Algebra. Für diese Fortsetzung gilt nun $\hat{\varphi}(R) = 0$, da $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra ist. Nach der universellen Eigenschaft des Quotienten faktorisiert sie damit in eindeutiger Weise über den Quotienten nach R und wir erhalten das gesuchte $\tilde{\varphi}$. $\square$

Ergänzung 24.3.1.7. Gegeben eine angeordnete Menge I versteht man unter einem **Lyndon-Wort im Alphabet I der Länge** n ein n-Tupel von Elementen von I derart, daß für jede Trennung unseres Wortes in zwei Teilwörter der erste Teil lexikographisch echt kleiner ist als der zweite Teil. Man kann zeigen, daß die "von hinten beginnend zusammengeklammerten Lyndonwörter" eine Basis der freien Liealgebra über I bilden.

24.3.2 Die Hausdorff-Formel*

24.3.2.1. Seien A eine $\mathbb{Q}$-Ringalgebra und $N_A \subset A$ die Menge ihrer nilpotenten Elemente. So liefern die Exponentialreihe und die Reihe von $\log(1+x)$ zueinander inverse Bijektionen

$$N_A \underset{\log}{\overset{\exp}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\sim}}}} 1 + N_A$$

Ist weiter $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus von $\mathbb{Q}$-Ringalgebren, so kommutieren die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
N_A \arrow[r, "\exp", "\sim"'] \arrow[d, "\varphi"'] & 1 + N_A \arrow[r, "\log", "\sim"'] \arrow[d, "\varphi"] & N_A \arrow[d, "\varphi"] \\
N_B \arrow[r, "\exp", "\sim"'] & 1 + N_B \arrow[r, "\log", "\sim"'] & N_B
\end{tikzcd}$$

Sind schließlich Nilpotente $u, v \in N_A$ gegeben mit $uv = vu$, so gelten die Formeln $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$ und $\log((1+u)(1+v)) = \log(1+u)+\log(1+v)$. All das folgt, indem man Identitäten aus der Analysis in Identitäten für formale Potenzreihen übersetzt, vergleiche 10.6.3.10 und 12.2.3.12.

Definition 24.3.2.2. Sei k ein Körper. Unter einem **Lie-artigen Polynom** in Variablen $X_1, \ldots, X_r$ mit Koeffizienten in k verstehen wir ein Element der in der freien k-Ringalgebra $k\lfloor' X_1, \ldots, X_r\rfloor$ von den Variablen erzeugten Unterliealgebra. Die unfertigen Klammern deuten hier an, daß nicht-kommutierende Variablen gemeint sind.

Ergänzung 24.3.2.3. Sei k ein Körper. Ein Element der freien k-Liealgebra mit Erzeugern $X_1, \ldots, X_r$ nach 24.3.1.2 nennen wir auch ein **Lie-Polynom** in den Variablen $X_1, \ldots, X_r$ mit Koeffizienten in k. Der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt 24.4.3.11 zeigt, daß der offensichtliche Liealgebrenhomomorphismus von der Liealgebra der Lie-Polynome in die Liealgebra der Lie-artigen Polynome ein Isomorphismus ist, vergleiche 24.4.3.41. Dasselbe gilt mit 24.4.3.14 sogar über einem beliebigen Kring k. All das ist für uns in diesem Zusammenhang aber unerheblich.

24.3.2.4. Gegeben ein nichtnegativ graduierter Ring $A = \bigoplus_{i\geq 0} A^i$ denken wir uns im folgenden die Teilmenge $A^{\leq n} \subset A$ stets mit der Ringstruktur versehen, für die die offensichtliche Surjektion $A \twoheadrightarrow A^{\leq n}$ ein Ringhomomorphismus ist. Ist unser graduierter Ring A sogar eine $\mathbb{Q}$-Ringalgebra, so bezeichne $\exp_{\leq n}$ und $\log_{\leq n}$ unsere zueinander inversen Abbildungen $\exp$ und $\log$ aus 24.3.2.1 im Spezialfall der $\mathbb{Q}$-Ringalgebra $A^{\leq n}$.

Satz 24.3.2.5. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist der in der $\mathbb{Q}$-Ringalgebra $\mathbb{Q}\lfloor X, Y\rfloor^{\leq n}$ berechnete Ausdruck $\log_{\leq n}((\exp_{\leq n} X)(\exp_{\leq n} Y)) \in \mathbb{Q}\lfloor X, Y\rfloor^{\leq n}$ als Element von $\mathbb{Q}\lfloor X, Y\rfloor$ aufgefaßt ein Lie-artiges Polynom.*

24.3.2.6. Der homogene Anteil vom Grad n des Lie-artigen Polynoms aus 24.3.2.5 heißt das **n-te Hausdorff-Polynom** h_n. Zur Übung prüfe man die Formeln

$$\begin{array}{rcl} h_1(X,Y) & = & X+Y \\ h_2(X,Y) & = & [X,Y]/2 \\ h_3(X,Y) & = & [[X,Y],Y]/12 + [[Y,X],X]/12 \end{array}$$

Offensichtlich gilt sogar $h_n \in \mathbb{Z}[(n!)^{-1}]\lfloor X, Y\rfloor$. Andererseits ist nach 24.4.3.41 die Einbettung $\mathrm{Lalg}_k^{\setminus} I \to \mathrm{Ralg}_k^{\setminus} I$ für $I = \{X, Y\}$ und $k \subset \mathbb{Q}$ ein Teilring spaltend als Einbettung von k-Moduln, und offensichtlich wird sie unter der Erweiterung der Skalare zu $\mathbb{Q}$ zur entsprechenden Einbettung über $\mathbb{Q}$. Zusammen zeigt das $\mathrm{Lalg}_{\mathbb{Q}}^{\setminus} I \cap \mathrm{Ralg}_k^{\setminus} I = \mathrm{Lalg}_k^{\setminus} I$. Mithin kann h_n auch als Liepolynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}[(n!)^{-1}]$ geschrieben werden.

Beweis. Wir betrachten den Homomorphismus von $\mathbb{Q}$-Ringalgebren

$$\Delta : \mathbb{Q}\lfloor X, Y\rfloor \to \mathbb{Q}\lfloor X, Y\rfloor \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\lfloor X, Y\rfloor$$

mit $X \mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X$ und $Y \mapsto Y \otimes 1 + 1 \otimes Y$. Nach dem Satz von Friedrichs 24.4.3.39 ist $a \in \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor$ genau dann ein Lie-artiges Polynom, wenn gilt $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$. Nun ist Δ homogen vom Grad Null. Für den induzierten Homomorphismus

$$\bar{\Delta} : \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor^{\leq n} \to (\mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor)^{\leq n}$$

ist also auch $a \in \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor^{\leq n}$ genau dann ein Lie-artiges Polynom, wenn gilt $\bar{\Delta}(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$. Es gilt also, für $a := \log_{\leq n}(\exp_{\leq n} X \exp_{\leq n} Y)$ diese Bedingung zu prüfen. Das Queren steht im folgenden für die Restklasse in $(\mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor)^{\leq n}$ eines Elements von $\mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor^{\leq n} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor^{\leq n}$, aber wir schleppen den zusätzlichen Index $\leq n$ bei $\exp$ und $\log$ nicht mit. Jetzt rechnen wir einfach

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} a &= \bar{\Delta} \log(\exp X \exp Y) \\
&= \log(\exp \bar{\Delta}(X) \exp \bar{\Delta}(Y)) \\
&= \log((\overline{\exp X \otimes \exp X})(\overline{\exp Y \otimes \exp Y})) \\
&= \overline{\log(\exp X \exp Y \otimes \exp X \exp Y)} \\
&= \overline{\log((\exp X \exp Y) \otimes 1)} + \overline{\log(1 \otimes (\exp X \exp Y))} \\
&= (\log(\exp X \exp Y)) \otimes 1 + 1 \otimes (\log(\exp X \exp Y)) \\
&= a \otimes 1 + 1 \otimes a
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis fertig. □

24.3.3 Freie Algebren*

24.3.3.1. Ich erinnere daran, daß wir nach 2.2.3.2 unter einem Magma eine Menge mit einer Verknüpfung verstehen, von der weiter keine zusätzlichen Eigenschaften gefordert werden.

Definition 24.3.3.2. Gegeben eine Menge I verstehen wir unter einem **freien Magma über** I ein Paar (M, can) bestehend aus einem Magma M und einer Abbildung $\mathrm{can} : I \to M$ derart, dass für jedes weitere Magma N das Vorschalten von can eine Bijektion

$$\mathrm{Mag}(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(I, N)$$

zwischen Morphismen von Magmas und Abbildungen von Mengen induziert.

Satz 24.3.3.3. *Über jeder Menge I existiert ein freies Magma (M, can).*

24.3.3.4. Mit denselben Argumenten wie in 24.3.1.3 ist eine freies Magma über einer Menge im wesentlichen eindeutig bestimmt, wenn es denn existiert. Wir gönnen ihm deshalb den bestimmten Artikel und sprechen von dem freien Magma über einer gegebenen Menge. Wir notieren Mag die Kategorie der Magmas und folgerichtig $\mathrm{Mag}^{\backprime} I$ das freie Magma über einer Menge I.

24.3.3.5. Das freie Magma über einer Menge mit einm Element hatten wir bereits in 2.2.3.19 ansatzweise diskutiert, mit $\mathbb{M}$ bezeichnet, und in Beziehung zu den sogenannten Catalan-Zahlen gesetzt.

Beweis. Wir betrachten die disjunkte Vereinigung $I \sqcup \{\ \rangle, \langle\ \}$ der Menge I mit der Menge bestehend aus zwei weiteren Symbolen $\langle$ und $\rangle$ und bilden über dieser Vereinigung wie in 16.2.5.2 das freie Monoid

$$\mathrm{Mon}^{\backprime}\big(I \sqcup \{\ \rangle, \langle\ \}\big)$$

alias die Menge aller Wörter einer Länge ≥ 0 in diesen Buchstaben mit dem Hintereinanderschreiben als Verknüpfung. Auf dieser Menge von Wörtern erklären wir eine neue, nun nicht mehr assoziative Verknüpfung durch die Vorschrift

$$(a, b) \mapsto \langle ab \rangle$$

mit der Notation ab für das Hintereinanderschreiben. Schließlich betrachten wir die kleinste unter unserer neuen Verknüpfung abgeschlossene Teilmenge M, die alle nur aus genau einem Buchstaben bestehenden Wörter enthält. Ein Element dieser Teilmenge M wäre etwa das Wort $\langle\langle x\langle yz\rangle\rangle w\rangle$ für beliebige $x, y, z, w \in I$. Als kanonische Abbildung betrachten wir die Abbildung $\mathrm{can} : I \to M$, die jedem Element $x \in I$ das Wort mit dem einzigen Buchstaben x zuordnet. Es ist nun leicht einzusehen, dass $\mathrm{can} : I \to M$ die von einem freien Magma geforderte Eigenschaft besitzt. $\square$

24.3.3.6. Ich erinnere daran, daß wir für einen Körper k unter einer k-Algebra einen k-Vektorraum A mit einer bilinearen Verknüpfung $A \times A \to A$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ verstehen, von der weiter keine zusätzlichen Eigenschaften gefordert werden.

Definition 24.3.3.7. Gegeben eine Menge I und ein Körper k verstehen wir unter einer **freien k-Algebra über** I ein Paar (A, can) bestehend aus einer k-Algebra A und einer Abbildung $\mathrm{can} : I \to A$ derart, daß für jede weitere k-Algebra B das Vorschalten von can eine Bijektion

$$\mathrm{Alg}_k(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(I, B)$$

induziert zwischen Homomorphismen von k-Algebren und Abbildungen von Mengen.

24.3.3.8. Sei k ein Körper. Mit denselben Argumenten wie in 24.3.1.3 ist eine freie k-Algebra über einer Menge im wesentlichen eindeutig bestimmt. Wir gönnen ihr deshalb den bestimmten Artikel und sprechen von der freien k-Algebra über einer gegebenen Menge. Wir notieren Alg_k die Kategorie der k-Algebren und folgerichtig $\mathrm{Alg}_k^{\nwarrow} I$ die freie k-Algebra über einer Menge I.

Satz 24.3.3.9. *Gegeben eine Menge I und ein Körper k existiert stets eine freie k-Algebra A über I.*

24.3.3.10. Wir notieren die Kategorie der Algebren über einem Körper k als Alg_k und notieren dann im Sinne unserer allgemeinen Konventionen 16.4.8.10 die freie k-Algebra über einer Menge I als

$$\mathrm{Alg}_k^{\nwarrow} I$$

24.3.3.11. Salopp gesprochen kann die freie k-Algebra über einer Menge I beschrieben werden als „der Polynomring über k in nicht-kommutierenden nicht-assoziativen durch $i \in I$ indizierten Variablen, ohne Konstanten“. Bei „nicht-assoziativen Variablen“ soll man sich denken, daß hier in Monomen stets „alle Klammern zu setzen sind“. Da aber derartiges Geschwafel nicht als Definition durchgehen kann, erkläre ich die Konstruktion auch noch auf einem etwas formaleren Weg.

Beweis. Wir konstruieren A als den freien k-Vektorraum über dem freien Magma über I, in Formeln

$$A := k\langle \mathrm{Mag}^{\nwarrow} I\rangle = \mathrm{Mod}_k^{\nwarrow}(\mathrm{Mag}^{\nwarrow} I)$$

Die Verknüpfung auf A erklären wir durch bilineare Fortsetzung der Verknüpfung auf dem freien Magma. Der Nachweis, daß die so konstruierte Algebra die geforderte Eigenschaft besitzt, kann dem Leser überlassen bleiben. □

24.3.4 Präsentation halbeinfacher Liealgebren

24.3.4.1. Im folgenden brauchen wir den Begriff der **Basis eines Wurzelsystems**. Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ versteht man darunter eine Teilmenge $\Pi \subset R$, die eine Basis von V ist und die zusätzliche Eigenschaft hat, daß jede Wurzel entweder eine Linearkombination mit nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten oder eine Linearkombination mit nichtpositiven ganzzahligen Koeffizienten von Elementen von Π ist. In 23.2.2.9 zeigen wir, daß jedes Wurzelsystem eine Basis besitzt und daß je zwei Basen durch ein Element der Weylgruppe unseres Wurzelsystems ineinander überführt werden können.

24.3.4.2. Gegeben ein Körper k und eine Menge I und eine Teilmenge $T \subset \mathrm{Lalg}_k^{\setminus} I$ der freien k-Liealgebra über I verstehen wir unter der **Liealgebra mit Erzeugern I und Relationen** T den Quotienten $(\mathrm{Lalg}_k^{\setminus} I)/\langle T\rangle_{\mathrm{L}}$ der freien Liealgebra über k nach dem von T erzeugten Lie-Ideal, für das ich die Notation $\langle T\rangle_{\mathrm{L}}$ vorschlage.

24.3.4.3. Gegeben ein Körper k und eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ und eine Teilmenge $I \subset \mathfrak{g}$ sowie eine Teilmenge $T \subset \mathrm{Lalg}_k^{\setminus} I$ der freien k-Liealgebra über I sagen wir, die **Liealgebra $\mathfrak{g}$ werde präsentiert durch die Erzeuger I mit den Relationen** T, wenn der durch die Einbettung $I \hookrightarrow \mathfrak{g}$ induzierte Homomorphismus $\mathrm{Lalg}_k^{\setminus} I \to \mathfrak{g}$ über den Quotienten nach dem von T erzeugten Ideal $\langle T\rangle_{\mathrm{L}}$ faktorisiert vermittels eines Isomorphismus

$$(\mathrm{Lalg}_k^{\setminus} I)/\langle T\rangle_{\mathrm{L}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$$

Satz 24.3.4.4 (Präsentation durch Erzeugende und Relationen). *1. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen und $\Pi \subset R := \mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ eine Basis des zugehörigen Wurzelsystems. Wählen wir für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$ einen Erzeuger $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ des Wurzelraums, so gibt es Elemente $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[x_\alpha, y_\alpha] = \alpha^\vee$ und diese Elemente mitsamt den $h_\alpha := \alpha^\vee$ erfüllen die Relationen*

$$\begin{aligned}
[x_\alpha, y_\alpha] &= h_\alpha \quad \forall\alpha;\\
[x_\alpha, y_\beta] &= 0 \quad \textit{falls } \alpha \neq \beta;\\
[h_\alpha, h_\beta] &= 0 \quad \forall\alpha,\beta;\\
[h_\alpha, x_\beta] &= \langle\beta,\alpha^\vee\rangle x_\beta \quad \forall\alpha,\beta;\\
[h_\alpha, y_\beta] &= -\langle\beta,\alpha^\vee\rangle y_\beta \quad \forall\alpha,\beta;\\
(\mathrm{ad}\, x_\alpha)^{1-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle}(x_\beta) &= 0 \quad \textit{falls } \alpha \neq \beta;\\
(\mathrm{ad}\, y_\alpha)^{1-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle}(y_\beta) &= 0 \quad \textit{falls } \alpha \neq \beta.
\end{aligned}$$

Genauer wird die Liealgebra $\mathfrak{g}$ sogar präsentiert durch die so gewählten Erzeuger $(x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ mit den angegebenen Relationen.

2. Gegeben $R \supset \Pi$ ein komplexes Wurzelsystem mit einer Basis ist die komplexe Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{R,\Pi}$ erzeugt von den Symbolen $(x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ mit den obigen Relationen eine halbeinfache Liealgebra. Die Bilder der Erzeuger h_α bilden darin die Basis einer Cartan'schen $\mathfrak{h}$ und die Vorschrift $\beta \mapsto (h_\alpha \mapsto \langle\beta,\alpha^\vee\rangle)$ liefert einen Isomorphismus von komplexen Wurzelsystemen $R \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

Vorschau 24.3.4.5. In 23.2.1.16 zeigen wir, daß für jeden Körper k der Charakteristik Null die Erweiterung der Skalare $k\otimes_{\mathbb{Q}}$ eine Äquivalenz von Kategorien induziert zwischen der Kategorie de Wurzelsysteme über $\mathbb{Q}$ und der Kategorie de Wurzelsysteme über k. Salopp gesprochen kommt es also bei Wurzelsystemen nicht auf den Grundkörper an.

24.3.4.6. Zwei einfache Wurzeln $\alpha, \beta \in \Pi$ stehen stets in einem stumpfen Winkel zueinander, die $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ in unserem Satz sind also stets nichtpositive ganze Zahlen. In der Tat wäre sonst $s_\alpha \beta = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha$ eine Wurzel, bei deren Darstellung in besagter Basis positive und negtive Koeffizienten vorkommen, und das stünde im Widerspruch zu unserer Definition einer Basis.

24.3.4.7. Daß wir zu unseren Erzeugern die h_α mit hinzunehmen, hat nur den Grund, daß die Relationen dann übersichtlicher geschrieben werden können. Der Satz geht auf Serre zurück. Die obigen Relationen, insbesondere die letzten beiden, werden oft als **Serre-Relationen** bezeichnet.

24.3.4.8. Der zweite Teil des Satzes gilt mit demselben Beweis allgemeiner für die über einem beliebigen Körper k der Charakteristik Null von besagten Erzeugern und Relationen erzeugte Liealgebra.

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis des ersten Teils. Daß wir zu jedem x_α ein zugehöriges y_α finden können, folgt aus unserer Definition von $\alpha^\vee$ in 24.2.3.16 als spezieller Erzeuger des nach 24.2.3.15 eindimensionalen Raums $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$. Daß für diese Elemente x_α, y_α und $h_\alpha := \alpha^\vee$ alle Relationen aus unserem Satz erfüllt sind, ergibt sich unmittelbar daraus, daß für einfache Wurzeln α, β weder $\alpha - \beta$ noch $s_\alpha(\beta) + \alpha$ Wurzeln sind, wobei letztere Erkenntnis durch Anwenden von s_α aus ersterer Erkenntnis folgt. Mit unserer Notation aus Teil 2 gibt es also schon mal einen Homomorphismus

$$\mathfrak{g}_{R,\Pi} \to \mathfrak{g}$$

Wir müssen nun noch zeigen, daß er ein Isomorphismus ist. Zunächst zeigen wir nur, daß er surjektiv ist, daß also unsere halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ erzeugt wird von den Wurzelräumen zu den einfachen Wurzeln und ihren Negativen. Dazu erinnern wir aus 24.2.3.12.4, daß für je zwei Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha + \beta \in R$ gilt $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Weiter erinnern wir aus 23.2.3.10, daß jede positive Wurzel aus einer einfachen Wurzel erreicht werden kann durch eine Folge von Wurzeln, bei der jedes Glied aus dem Vorhergehenden durch die Addition einer einfachen Wurzel hervorgeht. Zusammen zeigt das, daß unsere Abbildung eine Surjektion $\mathfrak{g}_{R,\Pi} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$ sein muß. Können wir Teil 2 zeigen, so muß diese Surjektion offensichtlich ein Isomorphismus sein. Also machen wir uns nun an den Beweis von Teil 2. Er ist etwas umständlich und wird in mehrere Teilschritte zerlegt.

1. Gegeben eine Halbgruppe Γ versteht man unter einer Γ-Graduierung einer Algebra A eine Zerlegung als direkte Summe $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ derart, daß die Verknüpfung $A_\gamma \times A_\mu$ nach $A_{\gamma+\mu}$ abbildet. Beide Konstruktionen der freien Liealgebra über einer Menge I zeigen, daß diese eine eindeutig bestimmte Graduierung durch die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}\langle I \rangle$ besitzt, für die der Erzeuger x_i jeweils den Grad i hat. Durch Vergröberung dieser Graduierung erhalten wir eine Graduierung der freien Liealgebra in Erzeugern $(x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ nach dem Wurzelgitter $\langle R \rangle$ mit x_α

homogen vom Grad α, y_α homogen vom Grad $-\alpha$ und h_α homogen vom Grad 0.

2. Wir untersuchen nun zunächst die Liealgebra $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_{R,\Pi}$ mit denselben Erzeugern aber nur den ersten fünf Relationen. Alle unsere Relationen sind homogen für unsere $\langle R\rangle$-Graduierung, folglich induziert sie eine $\langle R\rangle$-Graduierung auf dem Quotienten $\tilde{\mathfrak{g}}_{R,\Pi}$.

3. Wir zeigen nun, daß die Bilder $\{\tilde{x}_\alpha, \tilde{h}_\alpha, \tilde{y}_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ unserer Erzeuger in $\tilde{\mathfrak{g}}$ linear unabhängig sind. Dazu betrachten wir die freie k-Ringalgebra T mit Erzeugern $(\hat{y}_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ alias den „nichtkommutativen Polynomring in diesen Variablen". Er besitzt eine natürliche $\langle R\rangle$-Graduierung $T = \bigoplus T_\lambda$ mit $\hat{y}_\alpha$ homogen vom Grad $(-\alpha)$. Nun machen wir T zu einer Darstellung von $\tilde{\mathfrak{g}}$ wie folgt:

$\tilde{h}_\alpha$ operiere auf T_λ durch den Skalar $\langle\lambda, \alpha^\vee\rangle$;

$\tilde{y}_\alpha$ operiere auf T durch Multiplikation von links mit $\hat{y}_\alpha$;

$\tilde{x}_\alpha$ mache die $1 \in T$ zu Null. Seine Operation auf einem beliebigen anderen Monom $\hat{y}_\beta w$ mit einem beliebigen Monom w sei induktiv erklärt durch die Formel $\tilde{x}_\alpha(\hat{y}_\beta w) = \delta_{\alpha\beta}\tilde{h}_\alpha w + \tilde{y}_\beta(\tilde{x}_\alpha w)$. Es ist leicht zu sehen, daß wir so in der Tat eine Darstellung T von $\tilde{\mathfrak{g}}$ erhalten.

Da die $\tilde{h}_\alpha$ durch linear unabhängige Endomorphismen auf T operieren, müssen sie bereits in $\tilde{\mathfrak{g}}$ linear unabhängig gewesen sein. Da die $\tilde{y}_\alpha$ auf T nicht durch Null operieren, müssen sie bereits in $\tilde{\mathfrak{g}}$ von Null verschieden sein. Dasselbe gilt für die $\tilde{x}_\alpha$. Die lineare Unabhängigkeit der Menge $\{\tilde{x}_\alpha, \tilde{h}_\alpha, \tilde{y}_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ folgt dann aus der $\langle R\rangle$-Graduierung.

4. Bezeichnet X, H, Y die von den $\tilde{x}_\alpha$, beziehungsweise den $\tilde{h}_\alpha$, beziehungsweise den $\tilde{y}_\alpha$ in $\tilde{\mathfrak{g}}$ erzeugten Unteralgebren, so gilt

$$\tilde{\mathfrak{g}} = X \oplus H \oplus Y$$

In der Tat ist der Untervektorraum $X + H + Y$ offensichtlich stabil ist unter allen $\operatorname{ad}\tilde{x}_\alpha$, $\operatorname{ad}\tilde{y}_\alpha$ und $\operatorname{ad}\tilde{h}_\alpha$ und ist mithin eine Unteralgebra, die die Erzeuger enthält. Um zu sehen, daß unsere Summe direkt ist, reicht es zu bemerken, daß X nur homogene Komponenten zu Graden aus $|\Pi\rangle\backslash 0$ hat, Y zu Graden aus $|-\Pi\rangle\backslash 0$, und H zum Grad Null. Insbesondere bilden also die $\tilde{h}_\alpha$ für $\alpha \in \Pi$ eine Basis von H.

5. Die Abbildung $\kappa : R \to H^*$ mit $\kappa(\beta)(\tilde{h}_\alpha) := \langle\beta, \alpha^\vee\rangle$ ist eine Injektion und ihr Bild ist ein Wurzelystem $\kappa(R) \subset H^*$, für das die Bilder der $\tilde{h}_\alpha$ unter dem Auswertungsisomorphismus $H \xrightarrow{\sim} H^{**}$ ein System von einfachen Kowurzeln bilden. Weiter besitzt κ genau eine Fortsetzung zu einem Gruppenhomomorphismus $\kappa : \langle R\rangle \to H^*$ und für alle $x \in \tilde{\mathfrak{g}}_\gamma$ mit $\gamma \in \langle R\rangle$ und $h \in H$ gilt die Identität $[h, x] = (\kappa(\gamma)(h))x$. Unsere von der Graduierung durch das abstrakte Wurzelgitter $\langle R\rangle$ gegebenen homogenen Komponenten $\tilde{\mathfrak{g}}_\gamma$ fallen also zusammen mit den

$\kappa(\gamma)$-Gewichtsräumen $\tilde{\mathfrak{g}}_{\kappa(\gamma)}$ für die adjungierte Operation von H auf $\tilde{\mathfrak{g}}$. Wir fassen im folgenden meist die durch κ gegebene Identifikation als Identität auf und notieren sie nicht mehr explizit.

6. Gegeben $\alpha \neq \beta$ setzen wir nun

$$\begin{array}{rcl} \tilde{x}_{\alpha\beta} & := & (\operatorname{ad} \tilde{x}_\alpha)^{1-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle} \tilde{x}_\beta \\ \tilde{y}_{\alpha\beta} & := & (\operatorname{ad} \tilde{y}_\alpha)^{1-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle} \tilde{y}_\beta \end{array}$$

und behaupten in $\tilde{\mathfrak{g}}$ die Identität $[\tilde{x}_\gamma, \tilde{y}_{\alpha\beta}] = 0$ für alle γ. Hier sind verschiedene Fälle getrennt zu betrachten. Im Fall $\gamma \neq \alpha$ vertauscht $(\operatorname{ad} \tilde{x}_\gamma)$ mit $(\operatorname{ad} \tilde{y}_\alpha)$. Ist außerdem $\gamma \neq \beta$, so folgt die Behauptung aus $[\tilde{x}_\gamma, \tilde{y}_\beta] = 0$. Ist $\gamma = \beta$, so rechnen wir

$$[\tilde{x}_\beta, \tilde{x}_{\alpha\beta}] = (\operatorname{ad} \tilde{y}_\alpha)^{1-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle} [\tilde{x}_\beta, \tilde{y}_\beta] = (\operatorname{ad} \tilde{y}_\alpha)^{-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle} (\langle\alpha, \beta^\vee\rangle \tilde{y}_\alpha)$$

und das ist Null im Fall $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle = 0$ und auch Null im Fall $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle \neq 0$, da dann notwendig auch gilt $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle \neq 0$. Ist schließlich $\gamma = \alpha$, so rechnen wir

$$[\tilde{x}_\alpha, \tilde{y}_{\beta\alpha}] = (\operatorname{ad} \tilde{x}_\alpha)(\operatorname{ad} \tilde{y}_\alpha)^{1-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle} (\tilde{y}_\beta)$$

Nun aber gilt $(\operatorname{ad} \tilde{x}_\alpha)(\tilde{y}_\beta) = 0$ und $(\operatorname{ad} \tilde{h}_\alpha)(\tilde{y}_\beta) = -\langle\beta, \alpha^\vee\rangle \tilde{y}_\beta$ und folglich ist die von $\tilde{y}_\beta$ erzeugte Unterdarstellung unter der adjungierten Darstellung von $\langle \tilde{x}_\alpha, \tilde{h}_\alpha, \tilde{y}_\alpha \rangle \cong \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ auf $\tilde{\mathfrak{g}}$ ein höchster Gewichtsmodul mit höchstem Gewichtsvektor $\tilde{y}_\beta$. Damit folgt unsere Behauptung in diesem Fall aus unserer Kenntnis der Struktur dieser Darstellungen der $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$, genauer der Formel $ef^iv = i(\lambda - i + 1)f^{i-1}v$ für einen Vektor v einer Darstellung mit $hv = \lambda v$ und $ev = 0$ aus dem Beweis von 24.1.2.14. Analog folgt $[\tilde{y}_\gamma, \tilde{x}_{\alpha\beta}] = 0$ für alle γ.

7. Sei nun $K \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ das von allen $\tilde{x}_{\alpha\beta}$ und $\tilde{y}_{\alpha\beta}$ erzeugte Ideal, so daß nach unseren Definitionen gilt $\mathfrak{g}_{R,\Pi} = \tilde{\mathfrak{g}}/K$. Wir behaupten zunächst, daß das von den $\tilde{x}_{\alpha\beta}$ in der Unteralgebra X erzeugte Ideal $I \subset X$ bereits ein Ideal von $\tilde{\mathfrak{g}}$ ist. In der Tat ist es stabil unter allen $(\operatorname{ad} \tilde{h}_\gamma)$ und nach dem Vorhergehenden auch unter allen $(\operatorname{ad} \tilde{y}_\gamma)$. Ebenso ist das von allen $\tilde{y}_{\alpha\beta}$ in Y erzeugte Ideal $J \subset Y$ bereits ein Ideal von $\tilde{\mathfrak{g}}$. Daraus folgt unmittelbar $K = I + J$ und $\mathfrak{g} = X/I \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus Y/J$ und $H \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_0$.

8. Es ist nach dem vorhergehenden klar, daß die Familie $\{\bar{x}_\alpha, \bar{h}_\alpha, \bar{y}_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ der Bilder unserer Erzeuger in $\mathfrak{g}$ auch linear unabhängig ist. Ebenso ist klar, daß für jede Unteralgebra $\mathfrak{g}^\alpha := \langle \bar{x}_\alpha, \bar{h}_\alpha, \bar{y}_\alpha \rangle \cong \mathfrak{sl}_2$ jeder unserer Erzeuger $\bar{x}_\beta, \bar{h}_\beta, \bar{y}_\beta$ in einem endlichdimensionalen $(\operatorname{ad} \mathfrak{g}^\alpha)$-stabilen Teilraum von $\mathfrak{g}$ liegt. Für jede Unteralgebra $\mathfrak{g}^\alpha = \langle \bar{x}_\alpha, \bar{h}_\alpha, \bar{y}_\alpha \rangle \cong \mathfrak{sl}_2$ ist also $\mathfrak{g}$ die Vereinigung seiner endlichdimensionalen $(\operatorname{ad} \mathfrak{g}^\alpha)$-stabilen Teilräume, denn gegeben endlichdimensionale $(\operatorname{ad} \mathfrak{g}^\alpha)$-stabile Teilräume V, W ist auch $[V, W]$ nach der Jacobi-Identität ein endlichdimensionaler $(\operatorname{ad} \mathfrak{g}^\alpha)$-stabiler Teilraum.

9. Da $\mathfrak{g}$ die Vereinigung seiner endlichdimensionalen $(\operatorname{ad} \mathfrak{g}^\alpha)$-stabilen Teilräume

ist, muß für alle $\lambda \in \langle R \rangle$ mit $n := \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$ die adjungierte Operation von $\bar{y}_\alpha$ einen Isomorphismus $(\operatorname{ad} \bar{y}_\alpha)^n : \mathfrak{g}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{\lambda - n\alpha}$ liefern. Wegen $\lambda - n\alpha = s_\alpha(\lambda)$ folgt $\dim \mathfrak{g}_\lambda = \dim \mathfrak{g}_{w\lambda}$ für jedes $\lambda \in \langle R \rangle$ und jedes Element $w \in W$ der Weylgruppe unseres Wurzelsystems. Insbesondere folgt $\dim \mathfrak{g}_\gamma = 1$ für alle $\gamma \in R$, da für $\alpha \in \Pi$ ja $\mathfrak{g}_\alpha$ das Erzeugnis von $\bar{x}_\alpha$ sein muß.

10. Nun soll gezeigt werden, daß gilt $\mathfrak{g}_\lambda = 0$ für $\lambda \notin R \sqcup \{0\}$. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle. Sei zunächst $\lambda = n\gamma$ ein Vielfaches einer Wurzel $\gamma \in R$ mit $n \geq 2$. Wäre $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$, so hätten wir auch $\mathfrak{g}_{n\alpha} \neq 0$ für eine einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$. Die Darstellungstheorie von $\mathfrak{g}^\alpha \cong \mathfrak{sl}_2$ liefert dann aber $\dim \mathfrak{g}_\alpha > 1$ im Widerspruch zu dem, was wir bereits wissen. Ist andererseits λ kein ganzzahliges Vielfaches einer Wurzel, so zeigt das folgende Lemma 24.3.4.9, daß notwendig gilt $\mathfrak{g}_\lambda = 0$. Wir haben also

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\gamma \in R} \mathfrak{g}_\gamma$$

und die $\bar{h}_\alpha$ für einfache Wurzeln $\alpha \in \Pi$ bilden eine Basis von $\mathfrak{g}_0$.

11. Nun zeigen wir, daß $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist. Jedes Ideal von $\mathfrak{g}$ ist ja stabil unter $(\operatorname{ad} \mathfrak{g}_0)$, also die direkte Summe seiner homogenen Anteile. Jetzt sagt uns die Darstellungstheorie von $\mathfrak{g}^\alpha \cong \mathfrak{sl}_2$, daß für alle $\alpha \in \Pi$ und $\gamma \in R$ gilt $[\mathfrak{g}_\gamma, \mathfrak{g}_\alpha] = \mathfrak{g}_{\gamma+\alpha}$ falls $\gamma + \alpha \in R$ und $[\mathfrak{g}_\gamma, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathfrak{g}_{\gamma-\alpha}$ falls $\gamma - \alpha \in R$. Umfaßt ein Ideal einen Wurzelraum $\mathfrak{g}_\gamma$ für $\gamma \in R^+$, so umfaßt es mithin nach 23.2.3.10 auch einen Wurzelraum $\mathfrak{g}_\alpha$ für eine einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$. Umfaßt ein Ideal einen Wurzelraum $\mathfrak{g}_\gamma$ für $\gamma \in R^-$, so zeigen wir analog, daß es auch einen Wurzelraum $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ umfaßt für $\alpha \in \Pi$ eine einfache Wurzel. Umfaßte ein Ideal I keinen Wurzelraum, so läge es in $\mathfrak{g}_0$, und wäre es nicht Null, so gäbe es $\alpha \in \Pi$ mit $\alpha(I) \neq 0$ und folglich umfaßte I doch einen Wurzelraum, nämlich $\mathfrak{g}_\alpha = [I, \mathfrak{g}_\alpha]$. Mithin umfaßt jedes Ideal, das nicht Null ist, für mindestens eine einfache Wurzel α entweder $\mathfrak{g}_\alpha$ oder $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Dann aber umfaßt es offensichtlich auch $\mathfrak{g}^\alpha \cong \mathfrak{sl}_2$ und kann nicht abelsch sein. Folglich ist unsere Liealgebra $\mathfrak{g}$ halbeinfach.

12. Es ist nun offensichtlich, daß $\mathfrak{h} := \mathfrak{g}_0$ eine Cartan'sche von $\mathfrak{g}$ ist und daß wir einen Isomorphismus von Wurzelsystemen

$$R \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$$

erhalten durch die Vorschrift $\alpha \mapsto (\bar{h}_\beta \mapsto \langle \alpha, \beta^\vee \rangle)$. □

Lemma 24.3.4.9. *Seien $R \subset V$ ein Wurzelsystem, $R^+ \subset R$ ein System positiver Wurzeln und W die Weylgruppe. Jedes Element des Wurzelgitters $\lambda \in \langle R \rangle$ mit $W\lambda \subset |R^+\rangle \cup |-R^+\rangle$ ist ein ganzzahliges Vielfaches einer Wurzel.*

Beweis. Ist λ kein ganzzahliges Vielfaches einer Wurzel, so gibt es $h \in \langle R \rangle^*_{\mathbb{Q}}$ mit $\langle \lambda, h \rangle = 0$ aber $\langle \alpha, h \rangle \neq 0$ für jede Wurzel $\alpha \in R$. Dann finden wir sicher

$w \in W$ mit $\langle \alpha, wh \rangle > 0$ für alle $\alpha \in R^+$. Aus $\langle w\lambda, wh \rangle = 0$ folgt nun, daß in der Darstellung $w\lambda = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$ von $w\lambda$ als Linearkombination einfacher Wurzeln negative und positive Koeffizienten vorkommen müssen. □

Satz 24.3.4.10 (**Klassifikation der halbeinfachen Liealgebren**). *Ordnen wir jeder komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ den Dualraum einer Cartan'schen $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ zu mitsamt dem zugehörigen Wurzelsystem $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Komplexe} \\ \textit{halbeinfache Liealgebren} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Komplexe reduzierte} \\ \textit{Wurzelsysteme} \end{array} \right\} \\ \mathfrak{g} & \mapsto & \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^* \end{array}$$

Beweis. Dieser Satz folgt unmittelbar aus Satz 24.3.4.4 über die Präsentation halbeinfacher Liealgebren. □

24.3.4.11. Dasselbe folgt mit demselben Beweis über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null. Die Klassifikation der Wurzelsysteme wird in 23.2.3.9 besprochen.

Satz 24.3.4.12 (**Klassifikation der einfachen Liealgebren**). *Ordnen wir jeder komplexen einfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ den Dualraum einer Cartan'schen $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ zu mitsamt dem zugehörigen Wurzelsystem $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Komplexe endlichdimensionale} \\ \textit{einfache Liealgebren} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Komplexe reduzierte} \\ \textit{unzerlegbare Wurzelsysteme} \end{array} \right\} \\ \mathfrak{g} & \mapsto & \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^* \end{array}$$

24.3.4.13. Dasselbe folgt mit demselben Beweis über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null.

24.3.4.14. Die Killing-Klassifikation 24.1.1.20 folgt unmittelbar aus dem Zusammenspiel dieses Satzes mit der Klassifikation unzerlegbarer Wurzelsysteme in 23.2.3.7.

Beweis. Hier muß über 24.3.4.12 hinaus nur noch gezeigt werden, daß eine halbeinfache komplexe Liealgebra genau dann einfach ist, wenn ihr Wurzelsystem unzerlegbar ist. Nun, jede Zerlegung des Wurzelsystems führt offensichtlich zu einer Zerlegung der zugehörigen Liealgebra in eine direkte Summe von Idealen. Umgekehrt führt jede Zerlegung einer halbeinfachen Liealgebra in eine direkte Summe von Idealen offensichtlich zu einer Zerlegung ihres Wurzelsystems. □

Bemerkung 24.3.4.15. Jede einfache endlichdimensionale komplexe Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist auch als reelle Liealgebra einfach. In der Tat, ist $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ein reelles Ideal, so sind $\mathfrak{a} \cap \mathrm{i}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} + \mathrm{i}\mathfrak{a}$ komplexe Ideale, sind also jeweils Null oder ganz $\mathfrak{g}$. Aus $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{g}$ folgt damit sofort $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathrm{i}\mathfrak{a}$. Insbesondere wäre $\mathfrak{a}$ eine einfache reelle Liealgebra. Dann aber müßte $\mathfrak{a}$ trivial operieren auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, Widerspruch.

Übungen

Übung 24.3.4.16 (**Invarianten in einfachen Liealgebren**). Gegeben (R, Π) ein irreduzibles Wurzelsystem mit einer Basis operiert die Gruppe S aller Automorphismen von R, die unsere Basis stabilisieren, offensichtlich auf der einfachen Liealgebra $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{R,\Pi}$. Im folgenden bezeichnen wir einfache Liealgebren durch das Symbol ihres Wurzelsystems. Man zeige $\mathrm{E}_6^{\mathcal{S}_2} \cong \mathrm{F}_4$ und $\mathrm{D}_4^{\mathcal{S}_3} \cong \mathrm{G}_2$ und $\mathrm{D}_n^{\mathcal{S}_2} \cong \mathrm{B}_{n-1}$ für $n \geq 4$ und $\mathrm{A}_{2n-1}^{\mathcal{S}_2} \cong \mathrm{C}_n$ für $n \geq 2$. Hinweis: Seien α, β die beiden Wurzeln nach der Verzweigung am Ende in Typ D_n. So liefert $s_\alpha s_\beta$ eine Spiegelung zu einer einfachen Wurzel in $\mathrm{D}_n^{\mathcal{S}_2}$. Hinweis: Man suche eine Wurzelraumzerlegung für die Invarianten in der Cartan'schen.

Übung 24.3.4.17 (**Deligne's exzeptionelle Serie**). Es gibt Inklusionen von halbeinfachen Liealgebren $\mathrm{A}_1 \subset \mathrm{A}_2 \subset \mathrm{G}_2 \subset \mathrm{D}_4 \subset \mathrm{F}_4 \subset \mathrm{E}_6 \subset \mathrm{E}_7 \subset \mathrm{E}_8$. Man könnte zwischen $\mathrm{G}_2 \subset \mathrm{D}_4$ noch $\mathfrak{so}(7)$ alias B_3 einfügen, vergleiche 24.4.6.41. Der Punkt ist aber, daß es so, wie sie dasteht, viele über unsere ganze Serie homogene Formeln gibt.

24.3.5 Reelle halbeinfache Liealgebren*

Definition 24.3.5.1. Eine **reelle Form eines komplexen Vektorraums** V ist ein reeller Untervektorraum $V_\mathbb{R} \subset V$ derart, daß die Multiplikation einen Isomorphismus $\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} V_\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} V$ liefert. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß $V_\mathbb{R}$ ganz V als $\mathbb{C}$-Vektorraum erzeugt und daß jede über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Teilmenge unseres Untervektorraums $V_\mathbb{R}$ auch über $\mathbb{C}$ linear unabhängig ist in ganz V.

24.3.5.2 (**Reelle Formen und schieflineare Involutionen**). Gegeben ein komplexer Vektorraum V erhalten wir zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{reelle Formen} \\ V_\mathbb{R} \subset V \end{array} \right\} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{schieflineare Involutionen} \\ \theta : V \to V \end{array} \right\}$$

wie folgt: Jeder reellen Form $V_\mathbb{R} \subset V$ ordnen wir diejenige schieflineare Involution zu, die durch die Vorschrift $\theta : a \otimes v \mapsto \bar{a} \otimes v \ \forall a \in \mathbb{C}, v \in V_\mathbb{R}$ gegeben ist. Jeder schieflinearen Involution $\theta : V \to V$ ordnen wir umgekehrt ihre Fixpunktmenge $V_\mathbb{R} := V^\theta$ zu.

Definition 24.3.5.3. Wenn für zwei reelle Formen eines komplexen Vektorraums die zugehörigen schieflinearen Involutionen kommutieren, sagen wir auch kurz, die **Formen kommutieren**.

24.3.5.4 (**Kommutierende reelle Formen und reelle Involutionen**). Gegeben ein komplexer Vektorraum V mit einer reellen Form $V_\mathbb{R} \subset V$ und zugehöriger schieflinearer Involution $\theta : V \to V$ erhalten wir zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}\text{-lineare Involutionen} \\ \sigma : V_\mathbb{R} \to V_\mathbb{R} \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{schieflineare Involutionen} \\ \gamma : V \to V \text{ mit } \theta\gamma = \gamma\theta \end{array} \right\}$$

wie folgt: Jedem σ werde die schieflineare Involution $a \otimes v \mapsto \bar{a} \otimes \sigma(v)$ zugeordnet und jedem γ seine Restriktion auf $V^\theta = V_\mathbb{R}$.

Definition 24.3.5.5. Seien $V \supset V_\mathbb{R}$ ein komplexer Vektorraum mit einer reellen Form. Ein komplexer Untervektorraum $W \subset V$ heiße **definiert über** $\mathbb{R}$, wenn es einen reellen Untervektorraum $W_\mathbb{R} \subset V_\mathbb{R}$ gibt derart, daß die Multiplikation einen Isomorphismus $\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} W_\mathbb{R} \stackrel{\sim}{\to} W$ liefert.

24.3.5.6. Seien $V \supset V_\mathbb{R}$ ein komplexer Vektorraum mit einer reellen Form und sei $\theta : V \to V$ die zugehörige schieflineare Involution. Offensichtlich ist ein komplexer Teilraum $W \subset V$ genau dann definiert über $\mathbb{R}$, wenn er unter θ stabil ist, wenn also in Formeln gilt $\theta(W) \subset W$ oder gleichbedeutend $\theta(W) = W$.

Definition 24.3.5.7. Eine **reelle Form einer $\mathbb{C}$-Algebra** A ist eine reelle Form $A_\mathbb{R} \subset A$ des Vektorraums A, die gleichzeitig eine reelle Unteralgebra von A ist. Gegeben eine $\mathbb{C}$-Algebra A liefern die Bijektionen aus 24.3.5.2 auch zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{reelle Formen} \\ A_\mathbb{R} \subset A \\ \text{der Algebra } A \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{schieflineare Involutionen} \\ \theta : A \to A \\ \text{der Algebra } A \end{array} \right\}$$

Hier fordern wir von Involutionen einer Algebra zusätzlich, daß sie mit der Verknüpfung in unserer Algebra verträglich sein sollen.

Definition 24.3.5.8. Sei $\mathfrak{g}_0$ eine halbeinfache reelle Liealgebra. Eine Cartan'sche $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ heißt eine **spaltende Cartan'sche**, wenn für alle $H \in \mathfrak{h}_0$ die Abbildung $\mathrm{ad}(H) : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$ diagonalisierbar ist. Eine halbeinfache reelle Liealgebra heißt **spaltend**, wenn sie eine spaltende Cartan'sche besitzt.

24.3.5.9. Eine Cartan'sche $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ einer halbeinfachen reellen Liealgebra ist genau dann spaltend, wenn mit den Notationen $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{h}_0$ und $\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{g}_0$ alle Wurzeln des Wurzelsystems $\mathrm{R}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ auf $\mathfrak{h}_0$ reelle Werte annehmen.

24.3.5.10. Eine reelle Liealgebra heißt **kompakt**, wenn sie endlichdimensional ist mit negativ definiter Killing-Form. Die Herkunft dieser Terminologie wird in 22.4.2.4 erklärt: Dort zeigen wir, daß die kompakten Liealgebren genau die Liealgebren kompakter Liegruppen mit endlichem Zentrum sind. Nach 24.1.7.9 ist jede kompakte reelle Liealgebra halbeinfach, denn ihre Killingform ist per definitionem nicht ausgeartet.

Proposition 24.3.5.11 (Spezielle reelle Formen halbeinfacher Liealgebren). *Jede halbeinfache komplexe Liealgebra besitzt eine spaltende reelle Form und eine kompakte reelle Form.*

Beweis. Die Existenz spaltender reeller Formen folgt aus der Beschreibung durch Erzeuger und Relationen 24.3.4.4 und 24.3.4.8. Um die Existenz kompakter reeller Formen zu zeigen, müssen wir mehr arbeiten. Gegeben ein Wurzelsystem mit Basis $R \supset \Pi$ gibt es, wie die Beschreibung durch Erzeuger und Relationen 24.3.4.4 zeigt, genau einen Automorphismus der zugehörigen halbeinfachen komplexen Liealgebra

$$\tau : \mathfrak{g}_{R,\Pi} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{R,\Pi}$$

mit $\tau : h_\alpha \mapsto -h_\alpha$ und $\tau : x_\alpha \mapsto -y_\alpha$ und $\tau : y_\alpha \mapsto -x_\alpha$ in den dortigen Notationen. Er heißt die **Chevalley-Involution** und stabilisiert die reelle Unterliealgebra $\mathfrak{g}_\mathbb{R} \subset \mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{R,\Pi}$, die von den $(x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ erzeugt wird. Die Einbettung dieser reellen Unteralgebra induziert nun offensichtlich einen Isomorphismus von komplexen Liealgebren

$$\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{g}_\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$$

Durch Transport von $\theta : a \otimes v \mapsto \bar{a} \otimes v$ erhalten wir eine schieflineare Involution θ auf $\mathfrak{g}$, die mit unserer Chevalley-Involution τ kommutiert. Per definitionem entspricht θ der reellen Form $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ von $\mathfrak{g}$. Dann aber entspricht $\theta\tau = \tau\theta$ auch einer reellen Form $\mathfrak{g}^{\tau\theta} =: \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$. Wir zeigen nun, daß die Killingform von $\mathfrak{k}$ negativ definit ist. Nach 24.2.3.26 ist sie schon mal negativ definit auf $\mathfrak{h}^{\theta\tau} = \langle \mathrm{i}h_\alpha \mid \alpha \in \Pi\rangle_\mathbb{R}$. Da nach 24.2.3.27 und in der dortigen Notation für alle einfachen Wurzeln $\alpha \in \Pi$ gilt $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) \in \mathbb{Q}_{>0}$ und da eh gilt $\kappa(x_\alpha, x_\alpha) = 0 = \kappa(y_\alpha, y_\alpha)$, ist die Killingform auch für alle einfachen Wurzeln $\alpha \in \Pi$ negativ definit auf $(\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha})^{\theta\tau} = \langle x_\alpha - y_\alpha, \mathrm{i}x_\alpha + \mathrm{i}y_\alpha\rangle_\mathbb{R}$. Kennen wir bereits die Existenz einer Chevalley-Basis 24.3.5.12, so können wir dasselbe Argument ebenso für die Wurzelräume zu nicht notwendig einfachen Wurzeln verwenden und sind fertig. Alternativ können wir auch wie folgt argumentieren: Anhand der Wirkung von $\theta\tau$ auf $\mathfrak{h}$ sieht man leicht, daß $(\mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{g}_{-\gamma})$ für jede Wurzel γ unter $\theta\tau$ stabil ist. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß die Killingform für jede Wurzel $\gamma \in R$ negativ definit ist auf $(\mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{g}_{-\gamma})^{\theta\tau}$. Dazu erinneren wir aus **??** die elementare Identität

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \pi/2 \\ -\pi/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sie impliziert für die adjungierte Darstellung der Liegruppe $\mathrm{SU}(2)$ die Formel

$$\exp\left(\mathrm{ad}\begin{pmatrix} 0 & \pi/2 \\ -\pi/2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Ad}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da es nun einen Homomorphismus von Liealgebren $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C}) \to \mathfrak{g}$ gibt mit $e \mapsto x_\alpha$, $h \mapsto h_\alpha$ und $f \mapsto y_\alpha$, folgern wir für alle einfachen Wurzeln $\alpha \in \Pi$ unmittelbar

$$\exp(\mathrm{ad}(\tfrac{\pi}{2}(x_\alpha - y_\alpha))) : h_\alpha \mapsto -h_\alpha$$

Offensichtlich ist dieser Automorphismus von $\mathfrak{g}$ auch die Identität auf $\ker\alpha \subset \mathfrak{h}$. Mithin stabilisiert unser Automorphismus die Unteralgebra $\mathfrak{h}$ und operiert dort wie die Wurzelspiegelung s_α der Weylgruppe. Das zeigt, daß unser Automorphismus $\mathfrak{g}_\gamma$ in $\mathfrak{g}_{s_\alpha\gamma}$ überführt. Andererseits ist $\frac{\pi}{2}(x_\alpha - y_\alpha)$ invariant unter $\theta\tau$ und unser Automorphismus identifiziert folglich $(\mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{g}_{-\gamma})^{\theta\tau}$ mit $(\mathfrak{g}_{s_\alpha\gamma} \oplus \mathfrak{g}_{-s_\alpha\gamma})^{\theta\tau}$. Da die einfachen Spiegelungen die Weylgruppe erzeugen und da die Weylgruppenbahn jeder Wurzel mindestens eine einfache Wurzel enthält, muß die Killingform damit negativ definit sein auf $(\mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{g}_{-\gamma})^{\theta\tau}$ für jede Wurzel $\gamma \in R$ und die Existenz einer kompakten reellen Form ist gezeigt. □

Ergänzung 24.3.5.12 (**Chevalley-Basis**). Gegeben $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein involutiver Automorphismus mit $\tau(h) = -h$ für alle $h \in \mathfrak{h}$, zum Beispiel unsere Chevalley-Involution aus dem Beweis von 24.3.5.11, prüft man leicht, daß man jeder Wurzel $\gamma \in R$ einen Wurzelvektor $x_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma$ so zuordnen kann, daß für alle Wurzeln gilt $\tau(x_\gamma) = -x_{-\gamma}$ und $[x_\gamma, x_{-\gamma}] = \gamma^\vee$. Weiter prüft man leicht, daß diese Wahl durch τ eindeutig bestimmt wird bis auf Vorzeichen: Genauer gibt es für jede weitere Wahl x'_γ eine Abbildung $s : R \to \{1, -1\}$ mit $x'_\gamma = s(\gamma)x_\gamma$ und $s(\gamma) = s(-\gamma)$ für alle $\gamma \in R$. Wir behaupten nun, daß mit so gewählten Wurzelvektoren für beliebige Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha + \beta \in R$ gilt

$$[x_\alpha, x_\beta] \in \mathbb{Z}x_{\alpha+\beta}$$

Ergänzen wir also unsere Wurzelvektoren durch Kowurzeln zu einer Basis von $\mathfrak{g}$, so sind alle die Koeffizienten ganzzahlig, die wir brauchen, um die Lieklammer zweier Basiselemente als Linearkombination unserer Basiselemente auszudrücken. Um unsere Behauptung zu zeigen, setzen wir $[x_\alpha, x_\beta] = N_{\alpha,\beta}x_{\alpha+\beta}$ für beliebige Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha + \beta \in R$. Die Darstellungstheorie der $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ liefert

$$N_{-\alpha,\alpha+\beta}N_{\alpha,\beta} = (q+1)p$$

für p, q definiert durch die Eigenschaft, daß die α-Wurzelkette durch β genau von $\beta - q\alpha$ bis $\beta + p\alpha$ reicht. Man sieht das besonders gut an der Realisierung der

einfachen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ durch homogene Polynome in zwei Variablen aus dem Beweis des Klassifikationssatzes 24.1.2.14. Bis hierher haben wir nur verwendet, daß $(x_\alpha, \alpha^\vee, x_{-\alpha})$ die Relationen der Standarbasis von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ erfüllen. In unserer Situation gilt nun weiter die höchst absonderliche Formel

$$\frac{\|\alpha+\beta\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{q+1}{p}$$

für ein beliebiges weylgruppeninvariantes Skalarprodukt auf dem $\mathbb{Q}$-Spann des Wurzelgitters. Ich kenne dafür keinen besseren Beweis als das Durchgehen aller Wurzelsysteme vom Rang zwei mit der Formel $\|\gamma\|^2/\|\beta\|^2 = \langle\gamma,\beta^\vee\rangle/\langle\beta,\gamma^\vee\rangle$ aus 23.2.1.20. Mit der Invarianz $\kappa([x_\alpha, x_\beta], x_{-\alpha-\beta}) = -\kappa(x_\beta, [x_\alpha, x_{-\alpha-\beta}])$ der Killingform und der Identität $\kappa(\gamma^\vee,\gamma^\vee) = 1/\|\gamma\|^2$ für ein geeignetes weylgruppeninvariantes Skalarprodukt auf dem $\mathbb{Q}$-Spann des Wurzelgitters ergibt sich weiter sofort

$$\frac{N_{\alpha,\beta}}{\|\alpha+\beta\|^2} = -\frac{N_{\alpha,-\alpha-\beta}}{\|\beta\|^2}$$

Zusammen liefern die drei letzten herausgehobenen Formeln unschwer die Identität $N_{\alpha,-\alpha-\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta} = -p^2$. Wenden wir nun unsere Annahme $\tau(x_\gamma) = -x_{-\gamma}$ an, so folgt leicht $N_{\alpha,-\alpha-\beta} = -N_{-\alpha,\alpha+\beta} = \pm p$ und $N_{\alpha,\beta} = \pm(q+1)$ und das sind ganze Zahlen.

Ergänzung 24.3.5.13 (**Chevalley-Gruppen**). Sei $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und einer Chevalley-Involution τ mit $\tau(h) = -h\ \forall h \in \mathfrak{h}$ und $R = \mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ und $(x_\gamma)_{\gamma\in R}$ Elemente der Wurzelräume mit $\tau(x_\gamma) = -x_{-\gamma}$ und $[x_\gamma, x_{-\gamma}] = \gamma^\vee$. Wir hatten in 24.3.5.12 gesehen, daß es solche x_γ gibt, daß sie bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmt sind, und daß gilt $[x_\alpha, x_\beta] = \pm(q+1)$ für q definiert durch die Eigenschaft, daß in R die α-Kette durch β bei $\beta - q\alpha$ beginnt. Bezeichne

$$\mathfrak{g}_\mathbb{Z} := \langle x_\gamma, \gamma^\vee \mid \gamma \in R\rangle_\mathbb{Z}$$

den durch $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\tau)$ wohlbestimmten $\mathbb{Z}$-Spann der Kowurzeln und der $\pm x_\gamma$. Er ist offensichtlich stabil unter der Lieklammer. Für jeden Kring A setzen wir $\mathfrak{g}_A := A \otimes_\mathbb{Z} \mathfrak{g}_\mathbb{Z}$. Man prüft, daß auch die Automorphismen $\exp(\operatorname{ad} x_\alpha)$ von $\mathfrak{g}_\mathbb{Q}$ die Untergruppe $\mathfrak{g}_\mathbb{Z} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{Q}$ stabilisieren, ja daß für eine zusätzliche Variable t die Automorphismen $\exp(\operatorname{ad} tx_\alpha)$ von $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}[t]}$ die Untergruppe $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}[t]} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}[t]}$ stabilisieren. Der einzige nichttriviale Fall ist der Nachweis von

$$\exp(\operatorname{ad} tx_\alpha)(x_\beta) \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}[t]}$$

im Fall $\alpha \neq \pm\beta$. Beginnt die α-Kette durch β bei $\beta - q\alpha$, so finden wir mit der Konvention $x_\phi = 0$ für $\phi \notin R$ erst $[x_\alpha, x_\beta] = \pm(q+1)x_{\alpha+\beta}$ und dann induktiv

$$(\operatorname{ad} tx_\alpha)^i(x_\beta) = \pm(q+1)(q+2)\ldots(q+i)t^i x_{i\alpha+\beta}$$

und die Behauptung folgt aus der Erkenntnis, daß $(q+1)(q+2)\dots(q+i)/i!$ ein Binomialkoeffizient und folglich eine natürliche Zahl ist. Ist nun K ein Körper, so erhalten wir für jedes $\lambda \in K$ einen Automorphismus von $\mathfrak{g}_K$, indem wir den Isomorphismus $\mathfrak{g}_K \xrightarrow{\sim} K \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}[t]}$ mit $\mathbb{Z}[t] \to K$ gegeben durch $t \mapsto \lambda$ beachten. Die von allen diesen Automorphismen erzeugte Untergruppe von $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}_K$ heißt die **Chevalley-Gruppe zum Wurzelsystem R und Körper K** und wir notieren sie $R(K)$. Ist R ein unzerlegbares Wurzelsystem, so ist $R(K)$ eine einfache Gruppe mit Ausnahme der vier Fälle $\mathrm{A}_1(\mathbb{F}_2), \mathrm{A}_1(\mathbb{F}_3), \mathrm{B}_2(\mathbb{F}_2), \mathrm{G}_2(\mathbb{F}_2)$. Das soll hier allerdings nicht gezeigt werden. Indem wir für K endliche Körper einsetzen, erhalten wir dann eine Vielzahl endlicher einfacher Gruppen.

Definition 24.3.5.14. Eine Involution ϑ einer reellen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ heißt eine **Cartan-Involution**, wenn die Fixpunktmenge der schieflinearen Involution $\vartheta_c := \vartheta \otimes c : \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ eine kompakte Liealgebra ist.

Beispiel 24.3.5.15. Unsere Chevalley-Involution aus dem Beweis der Existenz kompakter reeller Formen 24.3.5.11 ist, wenn wir sie auf die spaltende reelle Form $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ von ebendort einschränken, eine Cartan-Involution der halbeinfachen reellen Liealgebra $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

24.3.5.16 (**Definitheitskriterium für Cartan-Involutionen**). Man überlegt sich leicht, daß eine Involution ϑ einer reellen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ genau dann eine Cartan-Involution ist, wenn die Bilinearform

$$\kappa_\vartheta(x,y) := \kappa(x, \vartheta y)$$

negativ definit ist. In der Tat ist κ_ϑ symmetrisch und ist genau dann negativ definit, wenn die Sesquilinearform $(x,y) \mapsto \kappa(x, \vartheta_c y)$ negativ definit ist auf $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, und das ist genau dann der Fall, wenn die Killingform negativ definit ist auf der Fixpunktmenge von ϑ_c. Wir verwenden hier die Notation κ sowohl für die Killingform der komplexen Liealgebra $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ als auch für die Killingformen ihrer reellen Formen, was aber wegen 4.6.1.43 unproblematisch ist.

Satz 24.3.5.17 (Cartan-Involution und andere Involutionen). *Gegeben eine reelle halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ mit einer Cartan-Involution ϑ und einer weiteren Involution σ gibt es ein Element der Einskomponente der Automorphismengruppe $\varphi \in (\operatorname{Aut} \mathfrak{g}_0)^\circ$ derart, daß $\varphi\vartheta\varphi^{-1}$ mit σ kommutiert.*

Beweis. Man prüft leicht, daß $\sigma\vartheta$ stets selbstadjungiert ist für die Bilinearform κ_ϑ aus 24.3.5.16. Insbesondere ist $\sigma\vartheta$ diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten nach dem Spektralsatz 4.1.12.15. Die zugehörige Eigenraumzerlegung muß eine $\mathbb{R}^\times$-Graduierung der Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ sein. Also ist $\rho := (\sigma\vartheta)^2$ ein diagonalisierbarer Automorphismus von $\mathfrak{g}_0$ mit positiven Eigenwerten. Dasselbe folgt für alle ρ^α mit

$\alpha \in \mathbb{R}$, das ja dieselben Eigenräume hat, wobei sich die Eigenwerte nur um den festen Automorphismus $\lambda \mapsto \lambda^\alpha$ von $\mathbb{R}_{>0}$ unterscheiden. Weiter kommutiert

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}_0 \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[d, "(\sigma\vartheta)^{-1}"'] & \mathfrak{g}_0 \arrow[d, "\sigma\vartheta"] \\ \mathfrak{g}_0 \arrow[r, "\vartheta"] & \mathfrak{g}_0 \end{tikzcd}$$

und insbesondere gilt $\rho\vartheta = \vartheta\rho^{-1}$. Dasselbe folgt wieder für alle ρ^α mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir behaupten nun für $\alpha = 1/4$ die Identität

$$(\rho^\alpha\vartheta\rho^{-\alpha})\sigma = \sigma(\rho^\alpha\vartheta\rho^{-\alpha})$$

In der Tat gelangen wir durch $\rho^\alpha\vartheta = \vartheta\rho^{-\alpha}$ rasch zur äquivalenten Gleichung

$$\rho^{2\alpha}\vartheta\sigma = \sigma\vartheta\rho^{-2\alpha}$$

Da nun $\sigma\vartheta$ mit ρ und dann auch mit allen Potenzen von ρ kommutiert, gelangen wir weiter zur äquivalenten Gleichung $\rho^{4\alpha}\vartheta\sigma = \sigma\vartheta$, die schließlich ihrerseits sofort aus den Definitionen folgt. □

Satz 24.3.5.18 (Cartan-Involutionen, Existenz und Eindeutigkeit). *Jede halbeinfache reelle Liealgebra besitzt eine Cartan-Involution und je zwei Cartan-Involutionen sind zueinander konjugiert unter einem Automorphismus aus der Einskomponente der Automorphismengruppe unserer Liealgebra.*

Beweis. Jede halbeinfache komplexe Liealgebra $\mathfrak{g}$ besitzt nach 24.3.5.11 eine schieflineare Involution $\vartheta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ mit einer kompakten Liealgebra von Fixpunkten $\mathfrak{g}^\vartheta$. Dann ist aber ϑ notwendig eine Cartan-Involution der Reellifizierung $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$ von $\mathfrak{g}$, wie man an der Formel $\kappa_{\mathfrak{g}^\mathbb{R}} = 2\operatorname{Re}\kappa_\mathfrak{g}$ für die Killingform der Reellifizierung erkennt, die ihrerseits aus 3.2.6.17 folgt. Ist σ eine weitere Involution von $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$, so gibt es nach 24.3.5.17 angewandt auf $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$ einen Automorphismus $\varphi \in (\operatorname{Aut}\mathfrak{g}^\mathbb{R})^\circ$ derart, daß $\varphi\vartheta\varphi^{-1}$ mit σ kommutiert. Nun sind $(\operatorname{Aut}\mathfrak{g}^\mathbb{R})^\circ$ und $(\operatorname{Aut}\mathfrak{g})^\circ$ beide die eindeutig bestimmte zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}^\mathbb{R})$ mit Liealgebra $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$, folglich stimmen diese beiden Gruppen überein. Also ist $\varphi\vartheta\varphi^{-1}$ auch eine schieflineare Involution von $\mathfrak{g}$ mit einer kompakten Liealgebra von Fixpunkten. Ist nun speziell $\mathfrak{g}_0$ eine halbeinfache reelle Liealgebra und $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ ihre Komplexifizierung und $\sigma = \mathrm{id} \otimes c$ die zugehörige schieflineare Involution, so muß $\varphi\vartheta\varphi^{-1}$ eine Cartan-Involution auf der reellen Liealgebra $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{g}^\sigma$ induzieren. Das zeigt die Existenz. Gegeben zwei Cartan-Involutionen auf derselben reellen Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ gibt es wieder nach 24.3.5.17 ein Element der Einskomponente der Automorphismengruppe $\varphi \in (\operatorname{Aut}\mathfrak{g}_0)^\circ$ derart, daß $\varphi\vartheta\varphi^{-1}$ mit σ kommutiert. Nach dem anschließenden Lemma 24.3.5.19 sind aber kommutierende Cartan-Involutionen gleich. □

Lemma 24.3.5.19 (**Kommutierende Cartan-Involutionen**). *Zwei miteinander kommutierende Cartan-Involutionen auf ein und derselben halbeinfachen reellen Liealgebra sind gleich.*

Beweis. Seien $\vartheta, \theta : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$ unsere beiden Cartan-Involutionen. Wir betrachten die simultane Eigenraumzerlegung. Wären unsere Involutionen verschieden, so gäbe es $X \in \mathfrak{g}_0$ mit $X \neq 0$ und $\theta X = -\vartheta X$. Es folgte $\kappa(X, \theta X) = -\kappa(X, \vartheta X)$, und hier könnten nicht beide Seiten negativ sein. Widerspruch! □

Korollar 24.3.5.20 (**Konjugiertheit kompakter reeller Formen**). *Je zwei kompakte reelle Formen einer halbeinfachen komplexen Liealgebra sind konjugiert unter der adjungierten Gruppe unserer komplexen Liealgebra.*

Beweis. Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\vartheta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ eine schieflineare Involution mit kompakter Fixpunktliealgebra $\mathfrak{g}^\vartheta$, so ist wie im Beweis von 24.3.5.18 ϑ eine Cartan-Involution der Reellifizierung $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$ von $\mathfrak{g}$. Wieder nach dem Beweis von 24.3.5.18 fällt die Einskomponente der Automorphismengruppe unserer komplexen Liealgebra mit der Einskomponente der Automorphismengruppe ihrer Reellifizierung zusammen, und unter dieser Gruppe sind nach 24.3.5.18 je zwei Cartan-Involution der Reellifizierung und damit auch je zwei kompakte reelle Formen unserer Liealgebra zueinander konjugiert. □

24.3.5.21 (**Kompakte Liegruppen mit trivialem Zentrum**). Zusammenfassend erhalten wir Bijektionen zwischen Isomorphieklassen

$$\begin{tikzcd}
\left\{\begin{array}{c}\text{zusammenhängende kompakte}\\ \text{Liegruppen mit trivialem Zentrum}\end{array}\right\} \arrow[r, "\sim"] & \left\{\begin{array}{c}\text{kompakte}\\ \text{Liealgebren}\end{array}\right\} \arrow[d, "\wr"] \\
\left\{\begin{array}{c}\text{abstrakte}\\ \text{Wurzelsysteme}\end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{c}\text{halbeinfache}\\ \text{komplexe Liealgebren}\end{array}\right\} \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

Hier ist die obere Horizontale das Bilden der Liealgebra 22.4.2.4, die rechte Vertikale die Komplexifizierung, die eine nach 24.3.5.11 surjektive und nach 24.3.5.20 injektive Abbildung zwischen den durch den vertikalen Pfeil verbundenen Mengen liefert, und die untere Horizontale die Teilaussage 24.3.4.10 aus dem Beweis der Killing-Klassifikation. Der Weg von kompakten Liealgebren direkt zu Wurzelsystemen ist sogar noch etwas einfacher, weil in kompakten Liealgebren die Cartan'schen genau die maximalen abelschen Unteralgebren sind. Der Leser mag zur Übung prüfen, daß die Verknüpfung unserer Bijektionen beschrieben werden kann als die Zuordnung, die jeder kompakten Liegruppe K mit trivialem Zentrum das durch Wahl eines maximalem Torus T bestimmte und bis auf Isomorphismus dann doch davon unabhängige Wurzelsystem $\mathrm{R}(K, T) \subset \mathfrak{X}(T) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}$ aus 22.5.5.1 zuordnet, das wir mithilfe des kanonischen Isomorphismus $\mathfrak{X}(T) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Lie}_\mathbb{C} T)^*$

auch als Teilmenge des Dualraums der komplexifizierten Liealgebra des maximalen Torus auffassen können.

Ergänzung 24.3.5.22. Die zusammenhängende kompakte Liegruppe vom Typ G_2 ist die Automorphismengruppe der nicht-assoziativen $\mathbb{R}$-Algebra der sogenannten Oktaven aus 6.3.12.4. Ich habe das allerdings nie selber nachgerechnet.

24.3.6 Nilpotente Liealgebren

Lemma 24.3.6.1. *Gegeben eine Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ einer Liealgebra in die direkte Summe eine Ideals $\mathfrak{a}$ und einer Unteralgebra $\mathfrak{b}$ wird $\mathrm{U}(\mathfrak{a})$ eine Darstellung ρ von $\mathfrak{g}$, indem wir für $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{a}) \subset \mathrm{U}(\mathfrak{b})$ setzen*

$$\begin{array}{rcll} \rho(a)(u) & = & au & \forall a \in \mathfrak{a} \\ \rho(b)(u) & = & bu - ub & \forall b \in \mathfrak{b} \end{array}$$

Beweis. Die Identität $[\rho(a), \rho(b)] = \rho([a, b])$ ist klar für $a, b \in \mathfrak{a}$ und für $a, b \in \mathfrak{b}$. Es bleibt, sie für $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$ zu prüfen, also die Identität

$$a(bu - ub) - (bau - aub) = [a, b]u$$

für alle $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{a})$. Das aber ist offensichtlich. □

Proposition 24.3.6.2. *Jede endlichdimensionale nilpotente Liealgebra ist isomorph zu einer Unteralgebra einer Liealgebra von echten oberen Dreiecksmatrizen.*

Beweis. Ist unsere Liealgebra $\mathfrak{n}$ abelsch, so ist das offensichtlich. Sonst gibt es ein Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{n}$ der Kodimension Eins, das das Zentrum von $\mathfrak{n}$ umfaßt. Mit Induktion finden wir einen endlichdimensionalen Vektorraum V und einen injektiven Liealgebrenhomomorphismus $\rho : \mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, dessen Bild aus nilpotenten Endomorphismen von V besteht. Seien $\rho : \mathrm{U}(\mathfrak{a}) \to \operatorname{End} V$ der induzierte Ringalgebrenhomomorphismus und $I \subset \mathrm{U}(\mathfrak{a})$ sein Kern. Nach 24.1.4.1 operiert jedes Produkt von $\dim V$ Elementen von $\mathfrak{a}$ durch Null auf V, also gilt für das von allen derartigen Produkten erzeugte zweiseitige Ideal J notwendig $J \subset I$. Wählen wir eine Gerade $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{n}$ und machen $\mathrm{U}(\mathfrak{a})$ zu einer Darstellung von $\mathfrak{n}$ wie in 24.3.6.1, so ist das zweiseitige Ideal $J \subset \mathrm{U}(\mathfrak{a})$ eine Unterdarstellung. Auf $\mathrm{U}(\mathfrak{a})/J$ operiert dann $\mathfrak{b}$ durch nilpotente Endomorphismen, da es bereits auf $\mathfrak{a}$ durch nilpotente Endomorphismen operiert, und $\mathfrak{a}$ operiert durch nilpotente Endomorphismen nach Konstruktion von J. Nach Übung 24.3.6.3 operiert dann ganz $\mathfrak{n}$ durch nilpotente Endomorphismen auf $\mathrm{U}(\mathfrak{a})/J$. Andererseits operiert $\mathfrak{a}$ nach Konstruktion treu $\mathrm{U}(\mathfrak{a})/I$ und operiert a forteriori treu auf $\mathrm{U}(\mathfrak{a})/J$ und erst recht operiert das das Zentrum von $\mathfrak{n}$ treu auf $\mathrm{U}(\mathfrak{a})/J$. Die Summe von $\mathrm{U}(\mathfrak{a})/J$ mit der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{n}$ ist mithin eine treue Darstellung von $\mathfrak{n}$ durch nilpotente Endomorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraums. □

Übungen

Übung 24.3.6.3. Sei $\mathfrak{n} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ eine Zerlegung einer Liealgebra in ein Ideal $\mathfrak{a}$ und ein Vektorraumkomplement $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$. Operieren auf einer endlichdimensionalen Darstellung (V, ρ) von $\mathfrak{n}$ sowohl $\mathfrak{a}$ als auch $\mathfrak{b}$ durch nilpotente Endomorphismen, so operiert ganz $\mathfrak{n}$ durch nilpotente Endomorphismen. Hinweis: Man betrachte die zu Null absteigende Filtrierung von V durch die Teilräume

$$\langle \rho(\mathfrak{a})^i V \rangle = \langle \rho(a_1)\rho(a_2)\dots\rho(a_i)v \mid a_\nu \in \mathfrak{a}, v \in V \rangle$$

24.4 Einfache endlichdimensionale Darstellungen

24.4.1 Klassifikation durch das höchste Gewicht

24.4.1.1. Ich erinnere an Terminologie aus 24.2.3.1. Sei $\mathfrak{h}$ eine abelsche Liealgebra. Die Elemente des Dualraums $\mathfrak{h}^*$ heißen **Gewichte**. Für jede Darstellung M von $\mathfrak{h}$ und jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ erklärt man den **Gewichtsraum** M_λ **zum Gewicht** λ als den Untervektorraum

$$M_\lambda := \{v \in M \mid Hv = \lambda(H)v \ \ \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

Gilt $M_\lambda \neq 0$, so heißt λ ein **Gewicht von** M. Die Menge aller Gewichte einer Darstellung M einer abelschen Liealgebra $\mathfrak{h}$ notieren wir

$$\mathrm{P}(M) = \mathrm{P}_\mathfrak{h}(M) := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid M_\lambda \neq 0\}$$

Der Buchstabe P steht für die französische Bezeichnung „poids“.

Beispiel 24.4.1.2. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen Unteralgebra. Fassen wir $\mathfrak{g}$ auf als eine Darstellung von $\mathfrak{h}$ vermittels der adjungierten Operation, so bilden die von Null verschiedenen Gewichte unser Wurzelsystem R aus 24.2.3.8, in Formeln

$$R = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathrm{P}_\mathfrak{h}(\mathfrak{g}) \backslash 0$$

Der zu $\alpha \in \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ gehörige Gewichtsraum ist unser Wurzelraum $\mathfrak{g}_\alpha$. Des weiteren ist die Teilmenge $R \subset \mathfrak{h}^*$ nach 24.2.3.19 ein abstraktes reduziertes Wurzelsystem im Sinne unserer Definition 24.2.3.18 oder besser 23.2.1.2.

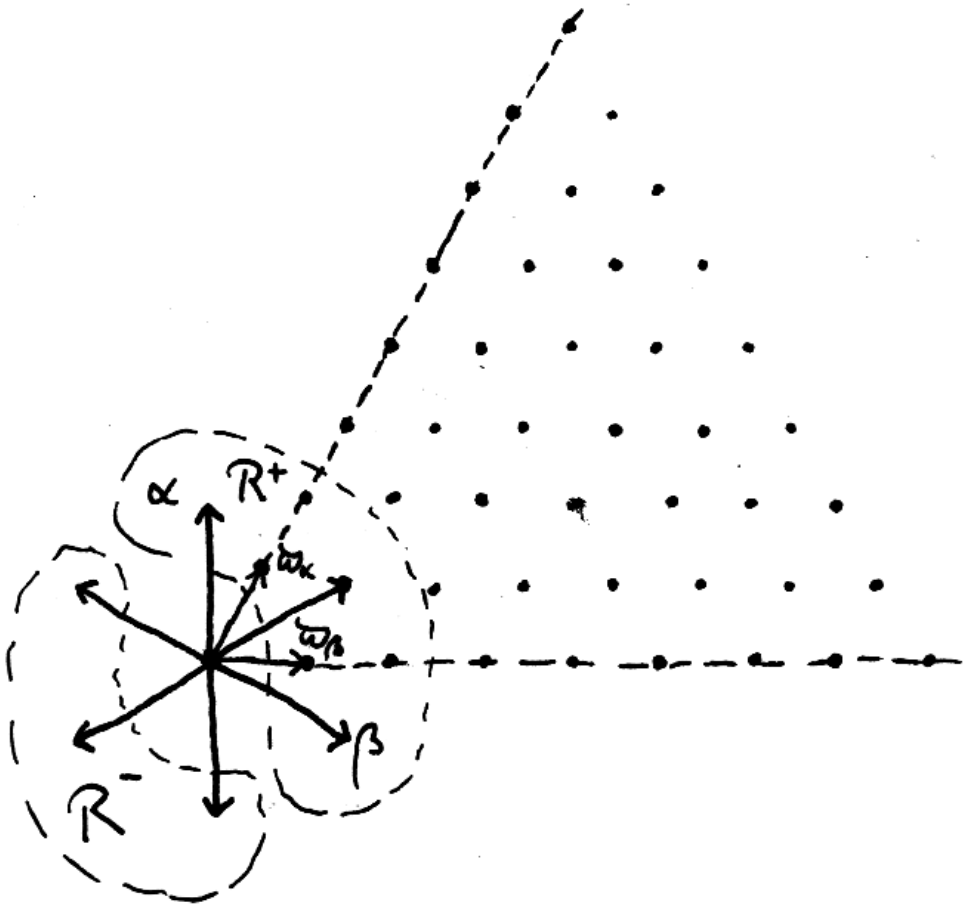
24.4.1.3. Seien $R \subset V$ ein Wurzelsystem und $V_\mathbb{Q} := \langle R \rangle_\mathbb{Q}$ seine rationale Form. Die maximalen konvexen Teilmengen des Komplements $V_\mathbb{Q} \backslash \bigcup_{\alpha \in R} \ker \alpha^\vee$ der Vereinigung der Spiegel der Wurzelspiegelungen nennen wir **Weylkammern** oder ausführlicher **rationale Weylkammern**, wenn V bereits ein Vektorraum über einem angeordneten Körper war und der Begriff „Weylkammer“ auch einen Alkoven der endlichen Spiegelungsgruppe W in V selbst bedeuten könnte. Gegeben eine Weylkammer $C \subset V_\mathbb{Q}$ setzen wir

$$R^+(C) := \{\alpha \in R \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0 \ \ \forall \lambda \in C\}$$

und nennen die Elemente dieser Menge die **positiven Wurzeln zu** C. Weiter setzen wir $\bar{C} := \{\lambda \in V_\mathbb{Q} \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \ \ \forall \alpha \in R^+(C)\}$ und nennen diese Menge den **Abschluß** unserer Weylkammer C. Schließlich setzen wir

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(R \subset V) := \{\lambda \in V \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \ \ \forall \alpha \in R\}$$

und nennen diese Untergruppe von V das **Gitter der ganzen Gewichte** unseres Wurzelsystems und seine Elemente **ganze Gewichte**. Nach 23.2.1.11 erzeugen die Kowurzeln den Dualraum V^*. Es folgt unschwer $\mathfrak{X} \subset V_\mathbb{Q}$, vergleiche 23.2.1.16.



Ein Wurzelsystem R aus sechs Wurzeln mit einer Weylkammer, ihrem System positiver Wurzeln $R^+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$ und den Elementen der Menge $\mathfrak{X} \cap \bar{C}$ als fetten Punkten. Darüber hinaus eingezeichnet sind die zugehörigen einfachen Wurzeln α, β sowie die beiden fundamentalen dominanten Gewichte $\varpi_\alpha, \varpi_\beta$ nach 24.4.2.3.

Satz 24.4.1.4 (Klassifikation durch das höchste Gewicht). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen und $C \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ eine Weylkammer. So erhalten wir eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{irreduzible endlichdimensionale} \\ \textit{Darstellungen von } \mathfrak{g} \textit{ bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X} \cap \bar{C}$$

durch die Vorschrift, daß wir jeder irreduziblen Darstellung L das eindeutig bestimmte Gewicht λ von L zuordnen mit $\lambda + \alpha \notin \mathrm{P}(L)\ \forall \alpha \in R^+(C)$.

24.4.1.5. Wir zeigen in 24.4.1.16, daß jede einfache endlichdimensionale Darstellung genau ein Gewicht mit der behaupteten Eigenschaft hat und daß es in Bezug auf eine geeignete Teilordnung auf $\mathfrak{h}^*$ das größte oder, wie man in diesem Kontext meist sagt, das „höchste" Gewicht unserer Darstellung ist. Wir zeigen in 24.4.1.16 weiter, daß je zwei einfache Darstellungen mit demselben höchsten Gewicht isomorph sind. Wir zeigen zusätzlich in 24.4.1.21, daß das höchste Gewicht einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung stets in $\mathfrak{X} \cap \bar{C}$ liegt. Damit bleibt nur noch zu zeigen, daß die im Satz behauptete Bijektion surjektiv ist. Das benötigt stärkere Hilfsmittel und wird sich im weiteren Verlauf als Konsequenz aus 24.4.4.7 und 24.4.4.10 ergeben.

24.4.1.6. Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ mit einer ausgezeichneten Weylkammer C setzen wir $\mathfrak{X}^+ = \mathfrak{X}^+(C) := \mathfrak{X} \cap \bar{C}$ und nennen die Elemente dieser Menge die **dominanten Gewichte**.

Ergänzung 24.4.1.7. Der vorstehende Satz ist eine algebraisierte Fassung der Klassifikation der einfachen Darstellungen zusammenhängender kompakter Liegruppen, die wir in 22.5.8.5 besprechen. Diese Klassifikation hinwiederum ergibt sich in natürlicher Weise, wenn man weiß, daß die irreduziblen Charaktere einer kompakten topologischen Gruppe eine Hilbertbasis des Raums der quadratintegrierbaren Klassenfunktionen bilden müssen. Das wissen wir im Fall endlicher Gruppen aus 8.4.2.10 und im Allgemeinen aus 15.4.9.15.

Beispiel 24.4.1.8. Im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ mit $R^+ = \{\alpha\}$ ist $m\alpha/2$ das höchste Gewicht der m-dimensionalen einfachen Darstellung $\mathrm{L}(m)$ aus 24.1.2.14 und das Gitter der ganzen Gewichte ist die von $\alpha/2$ erzeugte freie abelsche Gruppe.

Vorschau 24.4.1.9. Ist $\mathfrak{g}$ eine einfache endlichdimensionale Liealgebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln, so besitzt nach 24.4.1.4 insbesondere die adjungierte Darstellung ein höchstes Gewicht $\beta \in R^+$. Es heißt die **höchste Wurzel** und kann beschrieben werden als die einzige Wurzel $\beta \in R^+$ derart, daß für alle $\alpha \in R^+$ die Summe $\alpha + \beta$ keine Wurzel mehr ist. Im Rahmen der abstrakten Theorie der Wurzelsysteme wird sie in 23.2.5.6 diskutiert.

Ergänzung 24.4.1.10. In einem Skript von Henning Haahr Andersen kann man eine Argumentation finden, die von da ausgehend zeigt, daß eine halbeinfache Liealgebra schon durch ihr Wurzelsystem eindeutig bestimmt ist.

Lemma 24.4.1.11 (**Gewichtsverschiebung durch Wurzelräume**). *Seien* $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ *eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen. Gegeben eine Darstellung* M *von* $\mathfrak{g}$ *gilt*

$$\mathfrak{g}_\alpha M_\lambda \subset M_{\lambda+\alpha} \quad \forall \alpha \in \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \lambda \in \mathfrak{h}^*$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der Definition eines Gewichtsraums und der Formel $HXv = [H, X]v + XHv \quad \forall H \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}, v \in M$. □

Lemma 24.4.1.12. *Sei eine Liealgebra* $\mathfrak{a}$ *als Vektorraum die Summe von zwei Unteralgebren* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$. *Seien* V *eine Darstellung von* $\mathfrak{a}$ *und* $U \subset V$ *eine* $\mathfrak{b}$*-Unterdarstellung. So ist die von* U *erzeugte* $\mathfrak{c}$*-Unterdarstellung von* V *sogar eine* $\mathfrak{a}$*-Unterdarstellung.*

Vorschau 24.4.1.13. Im Rahmen unserer Untersuchung der universellen Einhüllenden werden wir dies Lemma nocheinmal vom höheren Standpunkt verstehen und beweisen können, vergleiche 24.4.3.35.

Beweis. Bezeichne W die von U erzeugte $\mathfrak{c}$-Unterdarstellung von V. Wir müssen zeigen, daß gilt $XW \subset W$ für alle $X \in \mathfrak{b}$. Wir betrachten dazu für festes $r \in \mathbb{N}$ den Raum

$$W(r) = \langle Y_1 \dots Y_i v \mid i \leq r,\ Y_\nu \in \mathfrak{c} \rangle$$

Sicher gilt $W = \bigcup W(r)$. Es reicht zu zeigen $XW(r) \subset W(r)$ für alle r und $X \in \mathfrak{b}$. Dazu argumentieren wir mit Induktion über r. Die Induktionsbasis bildet unsere Voraussetzung, daß $W(0) = U$ eine $\mathfrak{b}$-Unterdarstellung ist. Für den Induktionsschritt benutzen wir die Gleichung

$$XY_1 \dots Y_r v = Y_1 X Y_2 \dots Y_r v + [X, Y_1] Y_2 \dots Y_r v$$

Auf den ersten Summanden wenden wir die Induktionsvoraussetzung an. Im zweiten Summanden schreiben wir $[X, Y_1] = \tilde{X} + \tilde{Y}$ mit $\tilde{X} \in \mathfrak{b}$, $\tilde{Y} \in \mathfrak{c}$ und benutzen nochmals die Induktionsvoraussetzung. □

24.4.1.14 (**Konsequenzen aus der Theorie der Wurzelsysteme**). Bei der Entwicklung der Theorie abstrakter Wurzelsysteme 23.2.2.2 haben wir vereinbart, welche Teilmengen eines Wurzelsystems **Systeme positiver Wurzeln** heißen. Nach 23.2.2.6 erhalten wir für jedes Wurzelsystem R eine Bijektion zwischen der Menge aller Systeme positiver Wurzeln und der Menge aller Weylkammern durch die Vorschrift

$$R^+ \mapsto C(R^+) := \{\lambda \in \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0 \ \ \forall \alpha \in R^+\}$$

Darübrhinaus ist diese Bijektion die Umkehrabbildung unserer Abbildung $C \mapsto R^+(C)$ aus 24.4.1.3. Die Weylkammer $C(R^+)$ heißt die **dominante Weylkammer** zu unserem System von positiven Wurzeln R^+. Der Buchstabe C steht für „chambre“.

24.4.1.15. Sei $R \subset V$ ein Wurzelsystem. Für jedes System positiver Wurzeln $R^+ \subset R$ erklären wir eine Teilordnung auf V durch die Vorschrift

$$\lambda \geq \mu \Leftrightarrow \lambda \in \mu + |R^+\rangle$$

Hier bezeichnet $|R^+\rangle$ getreu unserer allgemeinen Konvention 6.3.5.1 das von R^+ in V erzeugte Untermonoid, also die Menge aller endlichen Summen positiver Wurzeln einschließlich der leeren Summe alias der Null.

Proposition 24.4.1.16. *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen und sei $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. Bezeichne $\leq$ die zugehörige Teilordnung auf $\mathfrak{h}^*$. So gilt:*

1. *Ist M eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ und $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ein Gewicht und $v_\lambda \in M_\lambda$ ein Vektor mit $\mathfrak{g}_\alpha v_\lambda = 0 \ \forall \alpha \in R^+$, so gilt für die von v_λ erzeugte $\mathfrak{g}$-Unterdarstellung $N \subset M$ stets $N \subset \bigoplus_{\mu \leq \lambda} M_\mu$ und $N_\lambda = \mathbb{C}v_\lambda$;*

2. *Jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung von $\mathfrak{g}$ hat ein $\leq$-größtes alias in der in diesem Kontext üblichen Sprechweise* **höchstes Gewicht***;*

3. *Haben zwei irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{g}$ dasselbe höchste Gewicht, so sind sie isomorph.*

24.4.1.17. Der hier gegebene Beweis ist noch ziemlich „zu Fuß“. Mithilfe der universellen Einhüllenden geben wir einen besseren Beweis in 24.4.4.7.

24.4.1.18. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen Unteralgebra und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. Es gibt durchaus von Null verschiedene unendlichdimensionale Darstellungen von $\mathfrak{g}$, die überhaupt keine $\mathfrak{h}$-Gewichte haben, in Formeln $M \neq 0$ aber $\mathrm{P}_{\mathfrak{h}}(M) = \emptyset$. Ein erstes Beispiel werden wir in Gestalt der „Einhüllenden Algebra“ kennenlernen. Es gibt auch durchaus irreduzible Darstellungen mit dieser Eigenschaft. Ebenso kann es auch bei irreduziblen Darstellungen vorkommen, daß $\mathrm{P}_{\mathfrak{h}}(M)$ zwar nicht leer ist, aber kein größtes Element hat. Irreduzible endlichdimensionale Darstellungen haben jedoch stets ein höchstes Gewicht werden sogar durch dieses höchste Gewicht klassifiziert.

Beweis. Wir beginnen mit Teil 1 und betrachten die Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}$ mit

$$\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{und} \quad \mathfrak{n} := \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

Offensichtlich sind $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{n}$ Unteralgebren. Die Unteralgebra $\mathfrak{b}$ wird sich später als eine „Borel'sche Unteralgebra“ erweisen und die Unteralgebra $\mathfrak{n}$ ist nilpotent, daher die Bezeichnungen. Unter unseren Annahmen ist $\mathbb{C}v_\lambda$ eine $\mathfrak{b}$-Unterdarstellung.

Nach Lemma 24.4.1.12 ist dann die von v_λ erzeugte $\mathfrak{n}$-Unterdarstellung $N \subset M$ schon eine $\mathfrak{g}$-Unterdarstellung. Teil 1 folgt so aus Lemma 24.4.1.11 zur Gewichtsverschiebung durch Wurzelräume. Insbesondere muß jedes maximale Gewicht einer irreduziblen Darstellung L alias jedes in Bezug auf $\leq$ maximale Element von $\mathrm{P}(L)$ bereits ihr höchstes Gewicht sein. Das zeigt Teil 2. Seien schließlich L und L' irreduzible Darstellungen mit demselben höchsten Gewicht λ. Wir wählen von Null verschiedene Vektoren $v \in L_\lambda$ und $v' \in L'_\lambda$, betrachten in $L \oplus L'$ die von (v, v') erzeugte Unterdarstellung N. Wir zeigen zunächst, daß auch N irreduzibel ist. Nach Teil 1 ist N die direkte Summe seiner Gewichtsräume und der Gewichtsraum N_λ ist die Gerade $N_\lambda = \mathbb{C}(v, v')$. Jede Unterdarstellung von N ist natürlich stabil unter der Cartan'schen und ist damit auch die direkte Summe ihrer Gewichtsräume. Für jede echte Unterdarstellung von $A \subsetneq N$ gilt damit notwendig

$$A \subset \bigoplus_{\mu \neq \lambda} N_\mu$$

Damit folgt $\mathrm{pr}_1(A) \neq L$ und $\mathrm{pr}_2(A) \neq L'$. Da aber L und L' irreduzibel sind, folgt $\mathrm{pr}_1(A) = 0$, $\mathrm{pr}_2(A) = 0$ und damit $A = 0$. Mithin ist N irreduzibel und die von Null verschiedenen Homomorphismen $\mathrm{pr}_1 : N \to L$ und $\mathrm{pr}_2 : N \to L'$ müssen Isomorphismen sein. Daraus folgt schließlich $L \cong N \cong L'$ wie gewünscht. $\square$

24.4.1.19 (**Die Weylgruppe eines Wurzelsystems**). Gegeben $R \subset V$ ein Wurzelsystem in einem Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null im Sinne unserer Definition 24.2.3.18 liefert uns 24.2.3.19 oder alternativ die Theorie abstrakter Wurzelsysteme 23.2.1.13 zu jeder Wurzel α eine Kowurzel $\alpha^\vee \in V^*$ sowie eine Wurzelspiegelung $s_\alpha : V \to V$ gegeben durch $\lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$. Die durch diese Spiegelungen s_α erzeugte Gruppe heißt die **Weylgruppe**

$$W = \mathrm{W}(R) = \mathrm{Weyl}(R) \subset \mathrm{GL}(V)$$

Alle Wurzelspiegelungen stabilisieren nach 24.2.3.19 unser Wurzelsystem R, und da die Wurzeln wieder nach 24.2.3.19 auch V aufspannen, muß die Weylgruppe endlich sein. Sie operiert mithin als endliche Spiegelungsgruppe im Sinne von 23.1.2.5 auf dem $\mathbb{Q}$-Spann $\langle R \rangle_\mathbb{Q}$ der Wurzeln. Die Theorie der Spiegelungsgruppen 23.1.6.1 zeigt, daß die Weylgruppe frei und transitiv auf der Menge der Weylkammern operiert. Offensichtlich stabilisiert die Weylgruppe auch das Gitter $\mathfrak{X}$ der ganzen Gewichte.

Lemma 24.4.1.20 (**Stabilität der Gewichte unter der Weylgruppe**). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen. Ist E eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$, so sind alle Gewichte von E in $\mathfrak{h}^*$ ganz und die Menge der Gewichte ist stabil unter der Weylgruppe $W = W(\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$, in Formeln*

$$\mathrm{P}(E) \subset \mathfrak{X} \quad \textit{und} \quad W\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(E)$$

24.4.1.21. Ist ein Gewicht $\lambda \in \mathrm{P}(E)$ nicht dominant, gibt es also eine positive Wurzel $\alpha \in R^+$ mit $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle < 0$, so liegt auch $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ in $\mathrm{P}(E)$ und erfüllt $s_\alpha(\lambda) > \lambda$. Die maximalen Gewichte einer endlichdimensionalen Darstellung E sind mithin sämtlich dominant. A forteriori gilt das für das höchste Gewicht einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung.

Beweis. Wir erinnern für $\alpha \in R$ die zu $\mathfrak{sl}(2;k)$ isomorphe Unteralgebra $\mathfrak{g}^\alpha := \mathfrak{g}_\alpha \oplus k\alpha^\vee \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ von $\mathfrak{g}$. Die Kowurzel $\alpha^\vee$ hat hierbei nach 24.2.3.12 und 24.2.3.16 die Eigenschaft, daß ein Isomorphismus $\mathfrak{sl}(2;k) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^\alpha$ mit $h \mapsto \alpha^\vee$ existiert für $h := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Aus der in 24.1.2.14 entwickelten Darstellungstheorie der $\mathfrak{sl}(2;k)$ folgt, daß die Eigenwerte von h auf endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2;k)$ stets ganze Zahlen sind. Damit folgt für alle $\lambda \in \mathrm{P}(E)$ sofort $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$. Ist weiter $0 \neq v \in E_\lambda$, $m = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ und $kx_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$, $ky_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha}$, so folgt aus der Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}(2;k)$ auch $y_\alpha^m v \neq 0$ falls $m \geq 0$ beziehungsweise $x_\alpha^{-m} v \neq 0$ falls $m \leq 0$. Insbesondere gilt in jedem Fall $E_{\lambda - m\alpha} \neq 0$ und damit $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \in \mathrm{P}(E)$. □

Übungen

Übung 24.4.1.22. Gegeben eine Darstellung M einer abelschen Liealgebra $\mathfrak{h}$ und ein Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ liefert das Auswerten bei $1 \in k_\lambda$ stets einen Isomorphismus $\mathrm{Mod}_{k,\mathfrak{h}}(k_\lambda, M) \xrightarrow{\sim} M_\lambda$.

24.4.2 Dominante Gewichte

24.4.2.1. Bei der Entwicklung der Theorie abstrakter Wurzelsysteme haben wir in 23.2.2.1 vereinbart, welche Teilmengen eines Wurzelsystems **Basen des Wurzelsystems** heißen. Nach 23.2.2.6 und 23.2.3.10 erhalten wir für jedes Wurzelsystem R eine Bijektion zwischen der Menge aller seiner Systeme positiver Wurzeln und der Menge aller seiner Basen durch die Vorschrift

$$R^+ \mapsto \Pi(R^+) := \{\alpha \in R^+ \mid \alpha \neq \beta + \gamma \ \ \forall \beta, \gamma \in R^+\}$$

Die Elemente von $\Pi(R^+)$ heißen die **einfachen Wurzeln** zu unserem System positiver Wurzeln und die Wurzelspiegelungen s_α zu den einfachen Wurzeln $\alpha \in \Pi(R^+)$ heißen die **einfachen Spiegelungen**. Sie sind anschaulich gesprochen genau die Spiegelungen an den „Wänden“ der dominanten Kammer $C(R^+)$ und erzeugen nach 23.2.2.12 die Weylgruppe. Die anschauliche geometrische Erkenntnis, daß das Bild einer Kammer unter einer Spiegelung an einer ihrer Wände nur durch besagte Wand von ihrem Spiegelbild getrennt wird, übersetzt sich in die Erkenntnis 23.2.2.7, daß für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Pi(R^+)$ gilt

$$s_\alpha(R^+) = (R^+ \backslash \alpha) \cup \{-\alpha\}$$

Im Rahmen der Theorie der Spiegelungsgruppen [SPW] werden diese Anschauungen formalisiert und ausgearbeitet.

Beispiel 24.4.2.2. Wir betrachten das Wurzelsystem $R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$ von $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$ in Bezug auf die Cartan'sche $\mathfrak{h}$ der Diagonalmatrizen mit Spur Null mit der Notation $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ für die Linearform, die jeder Diagonalmatrix der Spur Null ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnet. Darin ist $R^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i < j\}$ ein System positiver Wurzeln und $\Pi(R^+) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \mid 1 \leq i < n\}$ das zugehörige System von einfachen Wurzeln. Die Wurzelspiegelung zu $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ vertauscht ε_i mit ε_j und hält alle anderen ε_k fest. Die Weylgruppe stabilisiert die Menge der ε_i und ihre Operation auf dieser Menge induziert einen Isomorphismus $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n$ der Weylgruppe mit der symmetrischen Gruppe.

24.4.2.3. Ist $R^+ \subset R \subset V$ ein Wurzelsystem mit einem System von positiven Wurzeln und $\Pi = \Pi(R^+) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ die in R^+ enthaltene Basis des Wurzelsystems R, so bilden die Kowurzeln $\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_r^\vee$ eine Basis des Vektorraums V^*. Die Elemente der zur Basis der Kowurzeln dualen Basis von V notiert man

$$\varpi_1, \ldots, \varpi_r$$

mit ϖ dem π der griechischen Schreibschrift. Sie heißen die **fundamentalen dominanten Gewichte** und werden charakterisiert durch $\langle \varpi_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$. Natürlich bilden die fundamentalen dominanten Gewichte $\varpi_1, \ldots, \varpi_r$ eine $\mathbb{Z}$-Basis für das Gitter $\mathfrak{X}$ der ganzen Gewichte und die Menge der dominanten Gewichte hat die alternative Beschreibung

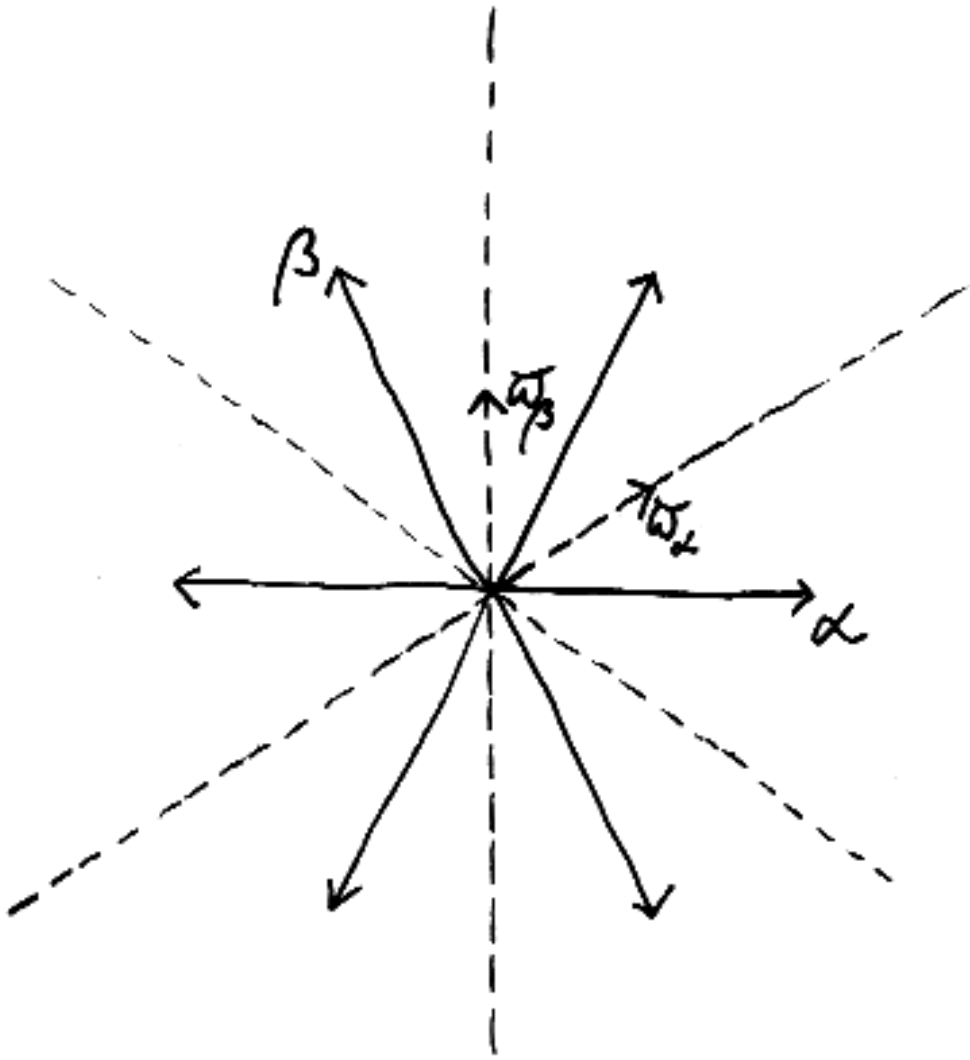
$$\mathfrak{X}^+ = \mathbb{N}\varpi_1 + \ldots + \mathbb{N}\varpi_r$$

Formeln für die Darstellung der fundamentalen dominanten Gewichte durch die einfachen Wurzeln findet man am Ende von [Bou81].

Lemma 24.4.2.4 (Geometrie der Weylkammer). *Gegeben $R^+ \subset R \subset V$ ein abstraktes Wurzelsystem mit einem ausgezeichneten System positiver Wurzeln ist der Abschluß der dominanten Weylkammer enthalten in dem von den positiven Wurzeln erzeugten Kegel $|\mathbb{Q}_{\geq 0} R^+\rangle$.*

24.4.2.5. Hier bezeichnet $\mathbb{Q}_{\geq 0} R^+$ die Menge aller Produkte $a\alpha$ mit $a \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ und einer positiven Wurzel $\alpha \in R^+$. Weiter bezeichnet $|\mathbb{Q}_{\geq 0} R^+\rangle$ 6.3.5.1 das davon in V erzeugte additive Untermonoid.

Beweis. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ die einfachen Wurzeln und $\varpi_1, \ldots, \varpi_r$ die zugehörigen fundamentalen dominanten Gewichte. Wir schreiben $\varpi_1 = a_1\alpha_1 + \ldots + a_r\alpha_r$ mit $a_i \in \mathbb{Q}$ und müssen zeigen $a_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, r$. Wählen wir ein unter der



Eine Basis eines Wurzelsystems vom Typ A_2 mit den zugehörigen fundamentalen dominanten Gewichten.

Weylgruppe invariantes Skalarprodukt $(\ ,\ )$ auf dem rationalen Span $V_{\mathbb{Q}}$ der Wurzeln, so gilt $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 2(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ für $\lambda \in V_{\mathbb{Q}}$ und folglich $0 < (\varpi_1, \varpi_1) = (\varpi_1, a_1\alpha_1) = a_1(\alpha_1, \alpha_1)/2$ und damit erhalten wir bereits $a_1 > 0$. Bringen wir nun alle Summanden mit $a_i \geq 0$ auf die andere Seite, so ergibt sich

$$\varpi_1 - \sum_{a_i \geq 0} a_i \alpha_i = \sum_{a_j < 0} a_j \alpha_j$$

und das Skalarprodukt der rechten Seite mit der linken Seite ist ≤ 0, da rechts das α_1 nicht auftreten kann. Also sind beide Seiten Null. $\square$

24.4.2.6. Gegeben ein Gewicht $\lambda \in \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ ist die Menge der Gewichte $\mu \in |\mathbb{Q}_{\geq 0} R^+ \rangle$ aus dem von den positiven Wurzeln erzeugten Kegel mit $\mu \leq \lambda$ offensichtlich endlich. Nach Lemma 24.4.2.4 gilt dasselbe a forteriori für die Menge der Gewichte aus dem Abschluß der dominanten Weylkammer mit $\mu \leq \lambda$.

24.4.2.7. Zwei fundamentale dominante Gewichte schließen in Bezug auf ein weylgruppeninvariantes Skalarprodukt stets einen schwach spitzen Winkel ein. In den Notationen des vorhergehenden Beweises unseres Lemmas 24.4.2.4 zur Geometrie der Weylkammer gilt nämlich

$$(\varpi_2, \varpi_1) = a_2(\varpi_2, \alpha_2) = a_2(\alpha_2, \alpha_2)/2 \geq 0$$

24.4.2.8 (**Darstellungen mit fundamentalem Höchstgewicht für $\mathfrak{sl}(n+1; \mathbb{C})$**). Zum Beweis der Klassifikation durch das höchste Gewicht 24.4.1.4 fehlt uns nun nur noch der Nachweis der Surjektivität, also der Nachweis, daß es zu jedem dominanten Gewicht auch tatsächlich eine endlichdimensionale einfache Darstellung mit diesem höchsten Gewicht gibt. Dafür ist mir im allgemeinen kein Argument eingefallen, das ohne die universelle Einhüllende auskommt. Im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1; \mathbb{C})$ können wir die Surjektivität jedoch auch hier schon zeigen: Dazu beachte man, daß die Darstellung $\bigwedge^i \mathbb{C}^{n+1}$ gerade das höchste Gewicht $\varpi_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$ hat, mit zugehörigem höchsten Gewichtsvektor $\mathrm{e}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{e}_i$. Hier verstehen wir implizit die übliche Cartan'sche und die übliche Basis des Wurzelsystems gegeben durch die $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$. Zu jedem dominanten Gewicht $\lambda \in \mathfrak{X}^+$ konstruiert man nun eine Darstellung mit höchstem Gewicht λ, indem man geeignete Tensorprodukte der $\bigwedge^i \mathbb{C}^{n+1}$ bildet, und ein geeigneter einfacher Summand des entsprechenden Tensorprodukts muß dann die gesuchte einfache Darstellung mit höchstem Gewicht λ sein.

Übungen

Übung 24.4.2.9. Im Fall des Wurzelsystems G_2 mit einer ausgeeichneten Basis zeige man, daß das Fundamentalgewicht zur kurzen einfachen Wurzel die höchste

kurze Wurzel ist und das Fundamentalgewicht zur langen einfachen Wurzel die höchste Wurzel.

Übung 24.4.2.10 (**Ganze Gewichte für** D_n). Wir erinnern für $n \geq 2$ aus 24.2.3.32 das Wurzelsystem $R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ mit der Bezeichnung D_n von $\mathfrak{so}(2n)$. Wir erinnern, daß die Weylgruppe aus allen Permutationen der ε_i gefolgt von der Änderung einer geraden Zahl von Vorzeichen besteht. Wir erinnern aus Übung 23.2.2.17 seine Basis $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ für $1 \leq i < n$ zusammen mit $\alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$. Man zeige für das Gitter der ganzen Gewichte

$$\mathfrak{X} = \langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle_{\mathbb{Z}} + \mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)/2$$

Man zeige, daß $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$ für $1 \leq i < n-1$ die fundamentalen dominanten Gewichte ϖ_i sind, wohingegen gilt $\varpi_{n-1} = (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)/2$ und $\varpi_n = (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)/2$. Aus 22.2.5.12 folgt, daß für $1 \leq i < n$ die äußeren Potenzen irreduzible Darstellungen sind, und man erkennt unschwer $\bigwedge^i(\mathbb{C}^{2n}) = \mathrm{L}(\varpi_i)$ für $1 \leq i < n-1$ und $\bigwedge^{n-1}(\mathbb{C}^{2n}) = \mathrm{L}(\varpi_{n-1} + \varpi_n)$. Weiter folgt aus 22.2.5.12, daß $\bigwedge^n(\mathbb{C}^{2n})$ eine Summe von zwei irreduziblen Darstellungen ist, und man zeigt unschwer $\bigwedge^n(\mathbb{C}^{2n}) \cong \mathrm{L}(2\varpi_{n-1}) \oplus \mathrm{L}(2\varpi_n)$. Irreduzible Darstellungen zu den höchsten Gewichten ϖ_{n-1} und ϖ_n liefert die sogenannte Clifford-Algebra, vergleiche 24.4.7.17.

Übung 24.4.2.11 (**Ganze Gewichte für** B_n). Wir erinnern aus 24.2.3.33 das Wurzelsystem $R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ mit der Bezeichnung B_n von $\mathfrak{so}(2n+1)$, und daß die Weylgruppe aus allen Permutationen der ε_i gefolgt von einer beliebigen Änderung der Vorzeichen besteht. Wir erinnern aus Übung 23.2.2.17 seine Basis $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ für $1 \leq i < n$ zusammen mit $\alpha_n = \varepsilon_n$. Man zeige für das Gitter der ganzen Gewichte

$$\mathfrak{X} = \langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle_{\mathbb{Z}} + \mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)/2$$

Man zeige, daß die fundamentalen dominanten Gewichte gegeben werden durch $\varpi_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$ für $1 \leq i < n$ und $\varpi_n = (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)/2$. In diesem Fall folgt aus 22.2.5.12, daß alle äußeren Potenzen der Standarddarstellung irreduzibel sind, und man prüft leicht $\bigwedge^i \mathbb{C}^{2n+1} = \mathrm{L}(\varpi_i)$ für $1 \leq i < n$ und $\bigwedge^n \mathbb{C}^{2n+1} = \mathrm{L}(2\varpi_n)$. Eine irreduzible Darstellung zum höchsten Gewicht ϖ_n liefert die sogenannte Clifford-Algebra, vergleiche 24.4.7.17.

Übung 24.4.2.12. Man erinnere die Daten zu $\mathfrak{so}(2n)$ aus 24.4.2.10 und zeige, daß wir, wenn wir von einem der beiden letzten Fundamentalgewichte ϖ_{n-1} oder ϖ_n eine positive Wurzel abziehen, aus der abgeschlossenen dominanten Weylkammer herausfallen. Man folgere, daß alle Gewichte von $\mathrm{L}(\varpi_{n-1})$ und $\mathrm{L}(\varpi_n)$ extreme Gewichte sein müssen, also die Punkte der Weylgruppenbahn des höchsten

Gewichts. Man zeige, daß diese Weylgruppenbahn genau aus den 2^{n-1} Gewichten $(\pm\varepsilon_1 \ldots \pm \varepsilon_n)/2$ besteht, bei denen die Vorzeichen beide mit einer geraden beziehungsweise ungeraden Vielfachheit auftreten.

Übung 24.4.2.13. Man erinnere die Daten zu $\mathfrak{so}(2n+1)$ aus 24.4.2.11 und zeige, daß wir, wenn wir vom letzten Fundamentalgewicht ϖ_n eine positive Wurzel abziehen, aus der abgeschlossenen dominanten Weylkammer herausfallen. Man folgere, daß alle Gewichte von $\mathrm{L}(\varpi_n)$ extreme Gewichte sein müssen, also die Punkte der Weylgruppenbahn des höchsten Gewichts. Man zeige, daß diese Weylgruppenbahn genau aus den 2^n Gewichten $(\pm\varepsilon_1 \ldots \pm \varepsilon_n)/2$ besteht.

24.4.3 Die universelle einhüllende Algebra

24.4.3.1. Ich erinnere an unsere Notation A_{L} aus 24.1.1.8 für die aus einer assoziativen Algebra A mit dem Kommutator als Verknüpfung entstehende Liealgebra.

Definition 24.4.3.2. Seien k ein Körper und $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über k. Eine **universelle einhüllende Algebra von** $\mathfrak{g}$ oder kurz **Einhüllende** ist ein Paar (U, can) bestehend aus einer k-Ringalgebra U und einem Liealgebrenhomomorphismus $\mathrm{can} : \mathfrak{g} \to U_{\mathrm{L}}$ derart, daß für jede k-Ringalgebra A das Vorschalten von can eine Bijektion

$$(\circ\,\mathrm{can}) : \mathrm{Ralg}_k(U, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lalg}_k(\mathfrak{g}, A_{\mathrm{L}})$$

induziert. Gegeben eine k-Ringalgebra A und ein Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \to A_{\mathrm{L}}$ von k-Liealgebren soll es anders ausgedrückt genau einen Homomorphismus von k-Ringalgebren geben $\tilde{\varphi} : U \to A$ mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \mathrm{can}$, als Diagramm geschrieben

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & U \arrow[d, dashed, "\exists!\,\tilde{\varphi}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

24.4.3.3 (**Einhüllende als adjungierter Funktor**). In der Sprache der Kategorientheorie ist das Bilden der universellen Einhüllenden, von der wir bald zeigen werden, daß sie immer existiert, der linksadjungierte Funktor zum Funktor $A \mapsto A_{\mathrm{L}}$ von der Kategorie der k-Ringalgebren in die Kategorie der k-Liealgebren.

Beispiele 24.4.3.4. Ist $\mathfrak{g} = 0$, so ist $U = k$ eine Einhüllende. Ist $\mathfrak{g}$ eine eindimensionale Liealgebra mit Basis $X \in \mathfrak{g}$, so ist der Polynomring in einer Veränderlichen $U = k[X]$ eine Einhüllende, mit can der offensichtlichen Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{can} : & \mathfrak{g} & \to & k[X] \\ & aX & \mapsto & aX \end{array}$$

24.4.3.5 (**Eindeutigkeit der Einhüllenden**). Ist (U_1, can_1) eine zweite Einhüllende von $\mathfrak{g}$, so muß mit den üblichen Argumenten die Abbildung $\tilde{\mathrm{can}}_1 : U \to U_1$ ein Isomorphismus sein. Eine Liealgebra besitzt also bis auf eindeutigen Isomorphismus höchstens eine Einhüllende. Wir werden aus diesem Grund oft den bestimmten Artikel verwenden und von der Einhüllenden reden.

24.4.3.6 (**Erzeugung der Einhüllenden als Ringalgebra**). Eine universelle Einhüllende U einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k wird als k-Ringalgebra stets vom Bild von $\mathfrak{g}$ erzeugt. Von der vom Bild von $\mathfrak{g}$ erzeugten Unterringalgebra $k\lfloor\mathfrak{g}\rfloor \subset U$ sieht man nämlich leicht ein, daß sie auch bereits die von einer Einhüllenden geforderte universelle Eigenschaft hat.

Lemma 24.4.3.7 (**Darstellungen als Moduln**). *Seien V eine abelsche Gruppe, $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über einem Körper k und $\mathrm{can} : \mathfrak{g} \to U$ eine Einhüllende von $\mathfrak{g}$. So gilt:*

1. *Die Einschränkung vermittels can zusammen mit der Einschränkung vermittels der Einbettung $k \hookrightarrow U$, $a \mapsto a1$ liefern eine Bijektion*

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{Strukturen auf } V \textit{ als}\\ \textit{Modul über dem Ring } U\end{array}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{c}\textit{Strukturen auf } V \textit{ als Darstellung}\\ \textit{der } k\textit{-Liealgebra } \mathfrak{g}\end{array}\right\}$$

2. *Diese Konstruktion liefert einen Isomorphismus von Kategorien*

$$U\text{-Mod} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}\text{-Mod}$$

Beweis. Eine Struktur auf V als U-Modul ist ja per definitionem ein Ringhomomorphismus $\varphi : U \to \mathrm{End}\, V$. Die Einschränkung von φ auf $k \subset U$ macht V zu einem k-Vektorraum, und für diese Struktur induziert φ erst einen Homomorphismus von k-Ringalgebren $\varphi : U \to \mathrm{End}_k V$, dann einen Homomorphismus von Liealgebren $\varphi : U_{\mathrm{L}} \to \mathfrak{gl}(V)$, und schließlich einen Homomorphismus von Liealgebren $\varphi \circ \mathrm{can} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Die Einschränkungen liefern also auf V die Struktur einer Darstellung über k. Um zu zeigen, daß diese Zuordnung bijektiv ist, geben wir die inverse Abbildung an. Eine Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{g}$ über k ist ja per definitionem ein Paar (V, ρ) bestehend aus einem k-Vektorraum V und einem Homomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \to (\mathrm{End}_k V)_{\mathrm{L}}$ von Liealgebren über k. Diesen Homomorphismus können wir aber nach der Definition der universellen Einhüllenden auf genau eine Weise erweitern zu einem Homomorphismus von k-Ringalgebren $\tilde{\rho} : U \to \mathrm{End}_k V$, und damit haben wir auf V die gesuchte U-Modulstruktur konstruiert. Wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß diese beiden Konstruktionen zueinander invers sind. □

24.4.3.8. Im folgenden bezeichnen wir für ein Element X einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ sein Bild $\mathrm{can}(X)$ in einer Einhüllenden meist kurz auch mit X.

24.4.3.9. Unter einem **augmentierten Ring** versteht man ganz allgemein einen Ring mitsamt einem ausgezeichneten Ideal, dem **Augmentationsideal**, das manchmal auch nur als einseitiges Ideal angenommen wird. Die Bezeichnung kommt wohl daher, daß hier die Ringstrukur durch ein zusätzliches Datum erweitert wird. Die Abbildung auf den Quotienten nach besagtem Ideal heißt dann die **Augmentation**.

24.4.3.10. Jede Liealgebra $\mathfrak{g}$ besitzt die Einsdarstellung k. Diese führt nach dem Vorhergehenden zu einem Homomorphismus von k-Ringalgebren $\epsilon : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to k$ mit $\epsilon(X) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$. Den Kern von ϵ bezeichnen wir manchmal mit $\ker \epsilon =: \mathrm{U}^+$ und machen so unsere Einhüllende zu einem augmentierten Ring mit Augmentation ϵ.

Satz 24.4.3.11 (**Poincaré-Birkhoff-Witt**). *Jede Liealgebra besitzt eine universelle Einhüllende. Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über einem Körper k und $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ und $\leq$ eine totale Ordnung auf Λ, so bilden die geordneten Monome, d.h. die Monome $X_{\lambda(1)} \dots X_{\lambda(r)}$ mit $\lambda(1) \leq \lambda(2) \dots \leq \lambda(r)$ eine Basis der Einhüllenden $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ über k.*

24.4.3.12. Der erste Aussage wird in einer präzisierten Form als 24.4.3.21 bewiesen, die Zweite im Anschluß daran.

24.4.3.13. Bei der Formulierung haben wir die Konvention benutzt, nach der das „leere“ Monom, als da heißt das Monom mit $r = 0$, die Einheit $1 \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ darstellt. Ist $X_1, \dots, X_d$ eine Basis von $\mathfrak{g}$, so bilden nach unserem Satz insbesondere die Monome $X_1^{n_1} \dots X_d^{n_d}$ mit $n_i \geq 0$ eine Basis von $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Ergänzung 24.4.3.14. Arbeiten wir nicht über einem Körper k, sondern vielmehr über einem Kring, so gilt der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt 24.4.3.11 analog immer noch und mit demselben Beweis. Allerdings kann er nur angewendet werden, wenn unsere Liealgebra auch eine Basis als k-Modul besitzt.

Definition 24.4.3.15. Sei V ein Vektorraum über einem Körper k. Eine **freie Ringalgebra über** V ist ein Paar (T, can) bestehend aus einer k-Ringalgebra V und einer linearen Abbildung $c : V \to T$ derart, daß folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Gegeben eine k-Ringalgebra A und eine lineare Abbildung $\varphi : V \to A$ gibt es genau einen Homomorphismus von k-Ringalgebren $\tilde{\varphi} : T \to A$ mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ c$, im Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "\varphi"'] & U \arrow[d, dashed, "\tilde{\varphi}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

24.4.3.16. Hier noch eine Umformulierung der Definition. Sei V ein Vektorraum über einem Körper k. Eine **freie Ringalgebra über** V ist ein Paar (T, c) bestehend aus einer k-Ringalgebra T und einer linearen Abbildung $c : V \to T$ derart, daß für jede k-Ringalgebra A das Vorschalten von c eine Bijektion

$$\mathrm{Ralg}_k(T, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(V, A)$$

zwischen Homomorphismen von Ringalgebren und Homomorphismen von Vektorräumen induziert.

24.4.3.17. Mit denselben Argumenten wie im Fall der Einhüllenden zeigt man, daß solch eine freie Ringalgebra im wesentlichen eindeutig ist, wenn sie existiert.

Ergänzung 24.4.3.18. In der Sprache der Kategorientheorie ist das Bilden der freien Ringalgebra, von der wir bald zeigen werden, daß sie immer existiert, der linksadjungierte Funktor zum vergeßlichen Funktor von der Kategorie der k-Ringalgebren in die Kategorie der k-Vektorräume.

Lemma 24.4.3.19. *Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k existiert stets eine freie Ringalgebra $\mathrm{T}(V) = \mathrm{T}_k V$ über V.*

24.4.3.20. Ich gebe für diese Behauptung zwei Beweise. Der erste Beweis ist in gewisser Weise sauberer. Er gibt eine explizite Konstruktion, die vom vorgegebenen Vektorraum ausgeht und keine weiteren Wahlen benötigt. Er benötigt jedoch das Tensorprodukt, das erfahrungsgemäß viele Studenten sehr lange als ein sehr abstraktes Konstrukt empfinden. Der zweite Beweis benötigt die Wahl einer Basis, hat aber den Vorteil, eine konkretere Konstruktion zu liefern.

Beweis mit multilinearer Algebra. Ich erinnere an die Konstruktion der Tensoralgebra in 4.7.9.7 und ihre universelle Eigenschaft. Sei V ein Vektorraum über einem Körper k. Die Tensoralgebra über V ist die k-Ringalgebra

$$\mathrm{Ten}(V) = \mathrm{T}(V) = \mathrm{T}_k V = \bigoplus_{r \geq 0} V^{\otimes r} = k \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots$$

mit der k-bilinearen Multiplikation, die eindeutig festgelegt wird durch die Vorschrift $(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) \cdot (w_1 \otimes \dots \otimes w_t) = (v_1 \otimes \dots v_r \otimes w_1 \otimes \dots w_t)$. Die Einbettung „als zweiter Summand“ $c : V \hookrightarrow \mathrm{T}(V)$ hat dann offensichtlich die gesuchte universelle Eigenschaft. □

Beweis mit Polynomen in nichtkommutierenden Variablen. Wir wählen eine Basis $B \subset V$ und das freie Monoid $\mathrm{Mon}^{\nwarrow} B$ über B im Sinne von 16.2.5.2 alias die „Menge aller Wörter endlicher Länge in Buchstaben B, einschließlich des leeren Wortes, mit dem Hintereinanderschreiben von Wörtern als Verknüpfung“. Dann bilden wir den freien k-Vektorraum $T := k\langle \mathrm{Mon}^{\uparrow} B \rangle$ über dieser Menge

oder präziser den Monoidring über diesem Monoid im Sinne von 8.1.2.5 alias den „Polynomring über k in den nichtkommutierenden Variablen B“, vergleiche auch 8.3.7.1. Die offensichtliche Einbettung „als Variablen“ $B \hookrightarrow T$ besitzt genau eine Fortsetzung zu einer linearen Abbildung $c : V \to T$ und ich behaupte, daß wir auf diese Weise auch eine freie Ringalgebra über V erhalten. In der Tat folgt das daraus, daß wir für jede k-Ringalgebra A im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ralg}_k(k\langle \mathrm{Mon}^{\uparrow} B\rangle, A) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_k(V, A) \arrow[d, "\wr"'] \\
\mathrm{Mon}(\mathrm{Mon}^{\uparrow} B, A) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Ens}(B, A)
\end{tikzcd}$$

mit den durch die offensichtlichen Vorschaltungen gegebenen Abbildungen aus den universellen Eigenschaften des freien Monoids und des Monoidrings bereits wissen, daß die untere Horizontale und die linke Vertikale Bijektionen sind. Ebenso wissen wir aus der linearen Algebra, daß die rechte Vertikale eine Bijektion ist. Damit folgt dasselbe für die obere Horizontale, was zu zeigen war. □

Proposition 24.4.3.21. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über einem Körper k. Betrachten wir das Ideal $I = I(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{T}(\mathfrak{g})$, das von allen $(x \otimes y - y \otimes x - [x, y])$ mit $x, y \in \mathfrak{g}$ erzeugt wird, so ist die Ringalgebra $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) := \mathrm{T}(\mathfrak{g})/I$ mit der Abbildung $\mathrm{can} : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ eine Einhüllende von $\mathfrak{g}$.*

Beweis. Für diesen Beweis bezeichne $p : \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ die Projektion und $c : \mathfrak{g} \to \mathrm{T}(\mathfrak{g})$ die kanonische Abbildung, wir haben also $\mathrm{can} = p \circ c$. Sicher ist can ein Homomorphismus von Liealgebren, denn wir haben

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{can}[x, y] & & (\mathrm{can}\, x)(\mathrm{can}\, y) - (\mathrm{can}\, y)(\mathrm{can}\, x) & = & [\mathrm{can}\, x, \mathrm{can}\, y] \\
\| & & \| & & \\
p[x, y] & = & p(x \otimes y - y \otimes x) & &
\end{array}$$

da nach Konstruktion gilt $x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \in I = \ker p$. Nach Konstruktion wird $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ als k-Ringalgebra von $\mathfrak{g}$ erzeugt, eine Abbildung von $\mathfrak{g}$ in eine k-Ringalgebra A läßt sich also auf höchstens eine Weise zu einem Homomorphismus von Ringalgebren $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to A$ fortsetzen. Um die folgende Argumentation übersichtlich zu machen, arbeiten wir mit dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \arrow[dl] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Sei also $\varphi : \mathfrak{g} \to A$ ein Liealgebren-Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ in eine k-Ringalgebra A. Selbst wenn φ nur linear ist, erweitert es auf genau eine Weise zu einem

Homomorphismus von Ringalgebren $\hat{\varphi} : \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$. Ist φ zusätzlich ein Homomorphismus von Liealgebren, so folgt sofort $\hat{\varphi}(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = 0$, also $\hat{\varphi}(I) = 0$. Damit faktorisiert dann $\hat{\varphi}$ wie gewünscht über einen Homomorphismus von k-Ringalgebren $\tilde{\varphi} : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to A$. □

Beweis, daß die geordneten Monome aus 24.4.3.11 die Einhüllende aufspannen. Wir betrachten in $U = \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ den Teilraum U_r, der von allen Monomen der Länge höchstens r aufgespannt wird, also das Bild von $\bigoplus_{0 \le s \le r} \mathfrak{g}^{\otimes s}$ in $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, und zeigen durch Induktion, daß U_r schon von den geordneten Monomen der Länge $\le r$ aufgespannt wird. Denn sei $X_{\lambda(1)} \dots X_{\lambda(r)}$ ein Monom. Wir wissen ja, daß gilt

$$X_{\lambda(i)} X_{\lambda(i+1)} = X_{\lambda(i+1)} X_{\lambda(i)} + [X_{\lambda(i)}, X_{\lambda(i+1)}]$$

Hier können wir den Kommutator entwickeln als (endliche) Linearkombination $\sum a_j X_\kappa$, mithin hängt die Nebenklasse eines Monoms der Länge r in U_r/U_{r-1} nicht von der Reihenfolge der Faktoren ab. Mit Induktion über r sehen wir so, daß U_r von den geordneten Monomen der Länge $\le r$ aufgespannt wird. □

24.4.3.22 (**Poincaré-Birkhoff-Witt für die Liealgebra einer Liegruppe**). Ist $\mathfrak{g}$ die Liealgebra einer Lie-Gruppe, so kann man die lineare Unabhängigkeit über $\mathbb{R}$ der aufsteigenden Monome besonders leicht zeigen: Man wählt dazu in einer offenen Umgebung V des neutralen Elements e von G lokale Koordinaten $x_1, \dots, x_r$, die bei e verschwinden, und so, daß das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x_i}$ am neutralen Element mit X_i übereinstimmt, für $1 \le i \le r$. Durch das Anwenden von linksinvarianten Vektorfeldern auf Funktionen wird $\mathcal{C}^\infty(V)$ ein $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-Modul. Lassen wir die aufsteigenden Monome aus $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ operieren auf Monomen in den lokalen Koordinaten und werten das Resultat am neutralen Element aus, so erhalten wir unter Verwendung der üblichen Multiindex-Schreibweise $(X^\alpha x^\alpha)(e) \neq 0$, aber $(X^\alpha x^\beta)(e) = 0$ falls gilt $\alpha \neq \beta$ und $|\alpha| \le |\beta|$. Daraus folgt dann die lineare Unabhängigkeit der X^α. Im Übrigen kann man die universelle Einhüllende der Liealgebra einer Liegruppe mit dem Raum der Distributionen mit Träger im neutralen Element verstehen, mit der „Konvolution“ als Multiplikation. Dasselbe gilt für die universelle Einhüllende der Liealgebra einer algebraischen Gruppe in Charakteristik Null und algebraische Distributionen im Sinne von 9.3.11.8.

Beweis, daß die geordneten Monome aus 24.4.3.11 linear unabhängig sind. Wir betrachten den Vektorraum S mit einer Basis indiziert durch alle endlichen monoton wachsenden Folgen aus Λ und versuchen, ihn zu einer Darstellung unserer Liealgebra zu machen, und zwar so, als ob er schon die Einhüllende mit einer Poincaré-Birkhoff-Witt-Basis wäre. Sei genauer $S = k[\hat{\chi}]_{\chi \in \Lambda}$ der Polynomring in den Variablen $\hat{\chi}$, die ich deshalb nicht wie zuvor $\hat{X}_\chi$ schreibe, damit nicht alles Wesentliche in Indizes verschwindet, und wo ich deshalb χ statt λ schreibe, damit

der Akzent besser darüberpaßt. Mit demselben Hintergedanken schreiben wir von nun an auch $\acute{\chi} := X_\chi$ für das durch $\chi \in \Lambda$ indizierte Basiselement von $\mathfrak{g}$. Nun behaupten wir:

Lemma 24.4.3.23. *Seien k ein Körper, $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über k, $(\acute{\chi})_{\chi\in\Lambda}$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ und $\leq$ eine Anordnung von Λ. Sei weiter $S = k[\hat{\chi}]_{\chi\in\Lambda}$ der Polynomring in Variablen $\hat{\chi}$ für $\chi \in \Lambda$. So gibt es gibt eine Operation $\mathfrak{g}\times S \to S$ der Liealgebra $\mathfrak{g}$ auf dem Vektorraum S mit der Eigenschaft*

$$\acute{\chi}\hat{\chi}_1\hat{\chi}_2\ldots\hat{\chi}_r = \hat{\chi}\hat{\chi}_1\hat{\chi}_2\ldots\hat{\chi}_r \quad \textit{wann immer gilt } \chi \leq \chi_1 \leq \ldots \leq \chi_r.$$

Im Anschluß beweisen wir sogar noch die präzisere Aussage 24.4.3.25. Um die lineare Unabhängigkeit der geordneten Monome in 24.4.3.11 abzuleiten, betrachten wir S als Modul über $U = \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ wie in 24.4.3.7. Ist $\acute{\chi}_1\ldots\acute{\chi}_r$ ein aufsteigendes Monom in $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, so gilt

$$\acute{\chi}_1\ldots\acute{\chi}_r 1_S = \hat{\chi}_1\ldots\hat{\chi}_r$$

für $1_S \in S$ das neutrale Element. Da nun aber die aufsteigenden Monome linear unabhängig sind in S, müssen sie auch in U linear unabhängig gewesen sein. □

24.4.3.24. Um schließlich Lemma 24.4.3.23 zu beweisen, führen wir zusätzliche Notationen ein. Für einen Multiindex $\sigma = (\chi_1, \ldots, \chi_r) \in \Lambda^r$ bezeichne $\hat{\sigma}$ das Monom $\hat{\sigma} = \hat{\chi}_1\ldots\hat{\chi}_r$. Für $\chi \in \Lambda$ soll $\chi \leq \sigma = (\chi_1, \ldots, \chi_r)$ bedeuten $\chi \leq \chi_i$ für $1 \leq i \leq r$. Wir nennen einen Multiindex **monoton** genau dann, wenn gilt $\chi_1 \leq \ldots \leq \chi_r$. Die Länge r von σ bezeichnen wir mit $|\sigma|$. Nach Konvention gibt es genau einen Multiindex der Länge Null, er ist monoton, größer als jedes $\chi \in \Lambda$, und das zugehörige Monom ist das Eins-Element $1_S \in S$. Die $\hat{\sigma}$ für monotone σ bilden eine Basis von S. Der von den Monomen der Länge r aufgespannte Teilraum heiße S_r, es ist also $S_0 = k$, $S = \bigoplus_{r=0}^{\infty} S_r$, und $S_r S_s \subset S_{r+s} \quad \forall r, s \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $S_{\leq r} := \bigoplus_{0\leq i\leq r} S_i$ und setzen $S_{\leq r} = 0$ für $r < 0$. Mit diesen Notationen zeigen wir sogar eine genauere Aussage.

Lemma 24.4.3.25. *Es gibt genau eine durch $r \in \mathbb{Z}$ indizierte Familie von bilinearen Abbildungen $\varphi_r : \mathfrak{g} \times S_{\leq r} \to S_{\leq r+1}$, $(x, p) \mapsto xp$ derart, daß gilt:*

1. *φ_r setzt φ_{r-1} fort;*
2. *$\acute{\chi}\hat{\sigma} = \hat{\chi}\hat{\sigma}$ für $\chi \in \Lambda,\ \sigma \in \Lambda^r$ mit $\chi \leq \sigma$;*
3. *$\acute{\chi}\hat{\sigma} \in \hat{\chi}\hat{\sigma} + S_{\leq r} \quad \forall \chi \in \Lambda,\ \sigma \in \Lambda^r$;*
4. *$\acute{\chi}(\acute{\nu}p) - \acute{\nu}(\acute{\chi}p) = [\acute{\chi}, \acute{\nu}]p \quad \forall \chi, \nu \in \Lambda,\ p \in S_{\leq r-1}$.*

Beweis. Sicher haben wir solche Abbildungen φ_r für $r < 0$. Es reicht also, wenn wir zeigen: Ist φ_r bereits konstruiert mit den Eigenschaften 1–4, so gibt es genau eine Möglichkeit, φ_r zu einer Abbildung φ_{r+1} mit den Eigenschaften 1–4 auszudehnen. Sei also φ_r gegeben. Es gilt, für alle $\chi \in \Lambda$ und monotones σ der Länge $|\sigma| = r + 1$ das Bild $\varphi_{r+1}(\acute{\chi}, \hat{\sigma}) = \acute{\chi}\hat{\sigma} \in S$ anzugeben. Im Fall $\chi \leq \sigma$ definieren wir $\acute{\chi}\hat{\sigma} = \hat{\chi}\hat{\sigma}$, damit 2 erfüllt ist. Sonst schreiben wir $\sigma = (\nu, \tau)$ mit $\nu \in \Lambda$, $\tau \in \Lambda^r$, und da $\chi \not\leq \sigma$ haben wir $\chi > \nu$. Wenn 1–4 erfüllt sein sollen, so muß gelten

$$\begin{array}{rcll} \acute{\chi}\hat{\sigma} & = & \acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} & \text{da } \nu \leq \tau, \\ & = & \acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\tau} + [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau} & \text{nach 4}, \\ & = & \acute{\nu}\hat{\chi}\hat{\tau} + \acute{\nu}q + [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau} & \text{für } q = \acute{\chi}\hat{\tau} - \hat{\chi}\hat{\tau}, \\ & = & \hat{\nu}\hat{\chi}\hat{\tau} + \acute{\nu}q + [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau} & \text{da } \nu \leq \chi,\ \nu \leq \tau. \end{array}$$

Nach Induktion gilt nun $q \in S_{\leq r}$, also sind rechts unten alle Terme schon induktiv definiert, und wir können und werden unsere Gleichung als eine induktive Definition von $\acute{\chi}\hat{\sigma} = \varphi_{r+1}(\acute{\chi}, \hat{\sigma})$ im Fall $\chi \not\leq \sigma$ auffassen. Die von φ_{r+1} geforderten Eigenschaften sind offensichtlich mit Ausnahme von 4. Nach Induktionsannahme gilt es noch zu zeigen

$$\acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} - \acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\tau} = [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau}$$

für alle $\chi, \nu \in \Lambda$ und $\tau \in \Lambda^r$. Wir geben dieser Aussage den Namen (χ, ν, τ). Offensichtlich gilt (χ, ν, τ) für $\chi = \nu$, nach Definitionen von φ_{r+1} gilt (χ, ν, τ) unter der Voraussetzung $\chi > \nu \leq \tau$, und da die Lieklammer schiefsymmetrisch ist, folgt die Gültigkeit von (χ, ν, τ) auch für den Fall $\nu > \chi \leq \tau$. Es bleibt also nur noch, (χ, ν, τ) zu zeigen im Fall $\chi \not\leq \tau$, $\nu \not\leq \tau$. In diesem Fall schreiben wir $\tau = (\mu, \omega)$ mit $\mu \in \Lambda$, $\omega \in \Lambda^{r-1}$ und haben also $\mu < \chi$, $\mu < \nu$ und $\mu \leq \omega$. Jetzt entwickeln wir

$$\begin{array}{rcl} \acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} & = & \acute{\chi}\acute{\nu}\acute{\mu}\hat{\omega} \\ & = & \acute{\chi}[\acute{\nu}, \acute{\mu}]\hat{\omega} + \acute{\chi}\acute{\mu}\acute{\nu}\hat{\omega} \\ & = & \acute{\chi}[\acute{\nu}, \acute{\mu}]\hat{\omega} + [\acute{\chi}, \acute{\mu}]\acute{\nu}\hat{\omega} + \acute{\mu}\acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\omega} \end{array}$$

Hier folgt die zweite Gleichung per Induktion und die dritte aus schon bekannten Fällen, indem wir schreiben $\acute{\nu}\hat{\omega} = \hat{\nu}\hat{\omega} + q$ mit $q \in S_{\leq r-2}$ und beachten, daß gilt $\mu < \nu$ und $\mu \leq \omega$. Dasselbe gilt, wenn wir χ und ν vertauschen, und indem wir auch noch $\hat{\tau} = \acute{\mu}\hat{\omega}$ entwickeln, erhalten wir die drei Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} \acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} & = & \acute{\chi}[\acute{\nu}, \acute{\mu}]\hat{\omega} + \acute{\mu}\acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\omega} + [\acute{\chi}, \acute{\mu}]\acute{\nu}\hat{\omega} \\ \acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\tau} & = & \acute{\nu}[\acute{\chi}, \acute{\mu}]\hat{\omega} + \acute{\mu}\acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\omega} + [\acute{\nu}, \acute{\mu}]\acute{\chi}\hat{\omega} \\ [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau} & = & [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\acute{\mu}\hat{\omega} \end{array}$$

Unser Ziel ist, noch in unserem speziellen Fall die Formel

$$\acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} - \acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\tau} = [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau}$$

zu zeigen. Aber ziehen wir bei unseren drei Gleichungen von eben die beiden unteren von der oberen ab, so ergibt sich für $\acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} - \acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\tau} - [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau}$ nach kurzer Rechnung mit Hilfe der Jacobi-Identität

$$\begin{aligned}[\acute{\chi}, [\acute{\nu}, \acute{\mu}]]\hat{\omega} + [[\acute{\chi}, \acute{\mu}], \acute{\nu}]\hat{\omega} + \acute{\mu}[\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\omega} - [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\acute{\mu}\hat{\omega} &= \\ = ([[\acute{\chi}, [\acute{\nu}, \acute{\mu}]] + [\acute{\nu}, [\acute{\mu}, \acute{\chi}]] + [\acute{\mu}, [\acute{\chi}, \acute{\nu}]])\hat{\omega} &= 0\end{aligned}$$ □

Definition 24.4.3.26. Die **opponierte Algebra** A^{opp} zu einer k-Algebra A wird erklärt dadurch, daß man auf dem Vektorraum A die opponierte Verknüpfung betrachtet, die gegeben wird durch $a^\circ * b^\circ := (b \cdot a)^\circ$.

24.4.3.27. Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, so ist auch $\mathfrak{g}^{\mathrm{opp}}$ eine Liealgebra und die Multiplikation mit (-1) ist ein Algebrenhomomorphismus $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^{\mathrm{opp}}$.

24.4.3.28. Ist $\mathfrak{g} \to U$ eine Einhüllende, so auch dieselbe Abbildung $\mathfrak{g}^{\mathrm{opp}} \to U^{\mathrm{opp}}$. Insbesondere setzt sich die Multiplikation mit $(-1) : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^{\mathrm{opp}}$ fort zu einem Isomorphismus assoziativer Algebren $S : U \xrightarrow{\sim} U^{\mathrm{opp}}$, den wir den **prinzipalen Antiautomorphismus** von U nennen und $u \mapsto u^t$ notieren. Ist V eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ und $u \in U$, so haben wir für die kontragrediente Darstellung V^* die Formel $(uf)(v) = f(u^t v)$ für alle $f \in V^*$, $v \in V$ und $u \in U$.

24.4.3.29. Im folgenden verwende ich Grundlagen der Theorie der filtrierten und graduierten Ringe, wie sie etwa in 7.7.1 entwickelt werden. Die Tensoralgebra $\mathrm{T}(V)$ über einem Vektorraum V trägt eine offensichtliche Graduierung. Definieren wir wie in 7.3.5.1 die **symmetrische Algebra**

$$\mathrm{Sym}(V) := \mathrm{S}(V) := \mathrm{T}(V)/\langle x \otimes y - y \otimes x\rangle$$

als die Einhüllende der abelschen Liealgebra V, so erbt $\mathrm{S}(V)$ eine Graduierung von $\mathrm{T}(V)$. Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, so erbt $U = \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ zumindest noch die Filtrierung von $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ und wird so eine filtrierte Ringalgebra $0 = U^{\leq -1} \subset U^{\leq 0} \subset U^{\leq 1} \subset U^{\leq 2} \subset \ldots$ mit $U^{\leq 0} = k$, $U^{\leq 1} = k \oplus \mathfrak{g}$.

Satz* 24.4.3.30 (Poincaré-Birkhoff-Witt ohne Koordinaten). *Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Die beiden Surjektionen $\mathrm{T}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathrm{S}(\mathfrak{g})$ und $\mathrm{T}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}\,\mathrm{T}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}\,U(\mathfrak{g})$ haben denselben Kern und definieren folglich einen Isomorphismus von graduierten k-Ringalgebren*

$$\mathrm{gr}\,\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(\mathfrak{g})$$

Beweis. Das mag der Leser zur Übung selbst aus dem Satz von Poincaré, Birkhoff und Witt 24.4.3.11 folgern. □

Korollar 24.4.3.31. *Die Einhüllende einer Liealgebra ist stets ein Integritätsring. Die Einhüllende einer endlichdimensionalen Liealgebra ist stets noethersch.*

Beweis. Das folgt sofort aus den Lemmata 7.7.2.9 und 7.7.2.10, nach denen ein Ring mit einer bei Null beginnenden auschöpfenden Filtrierung ein Integritätsring beziehungsweise noethersch sein muß, wenn das für den assoziierten graduierten Ring gilt. Da nun aber über Körpern Polynomringe Integritätsringe sind und Polynomringe in endlich vielen Variablen noethersch nach dem Hilbert'schen Basissatz, folgt das Korollar. □

Übungen

Übung 24.4.3.32. Sei e, f, h die übliche Basis von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ mit $[h,e] = 2e$, $[h,f] = -2f$, $[e,f] = h$. Man schreibe f^2he in der Einhüllenden von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ als Linearkombination geordneter Monome für die Ordnung e, h, f.

Übung 24.4.3.33. Gegeben eine bilineare Verknüpfung b auf einem Vektorraum $\mathfrak{g}$ über einem Körper k kann man stets in der Tensoralgebra $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ das von allen $x \otimes y - y \otimes x - b(x,y)$ mit $x, y \in \mathfrak{g}$ erzeugte Ideal $I = I(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{T}(\mathfrak{g})$ betrachten und den Quotientenring $U := \mathrm{T}(\mathfrak{g})/I$ bilden. Man zeige, daß die Verknüpfung $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow U$ genau dann injektiv ist, wenn b antisymmetrisch ist und die Jacobi-Identität erfüllt.

Übung 24.4.3.34. Jeder Homomorphismus von Liealgebren läßt sich auf genau eine Weise ausdehnen zu einem Homomorphismus zwischen ihren Einhüllenden.

Übung 24.4.3.35. Ist eine Liealgebra $\mathfrak{a}$ über einem Körper k als k-Vektorraum die Summe von zwei Unteralgebren $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, so induziert die Multiplikation eine Surjektion

$$\mathrm{U}(\mathfrak{c}) \otimes_k \mathrm{U}(\mathfrak{b}) \twoheadrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{a})$$

Man leite aus dieser Erkenntnis einen neuen Beweis von Lemma 24.4.1.12 ab. Diejenigen Leser, die mit allgemeinen Tensorprodukten vertraut sind, mögen gleich zeigen, daß die Multiplikation einen Isomorphismus $\mathrm{U}(\mathfrak{c}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{c}\cap\mathfrak{b})} \mathrm{U}(\mathfrak{b}) \twoheadrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{a})$ induziert, und damit bereits eine Verallgemeinerung der anschließenden Übung.

Übung 24.4.3.36. Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{c}$ eine Zerlegung als k-Vektorraum einer Liealgebra über einem Körper k in die direkte Summe von zwei Unteralgebren, so induziert die Multiplikation einen Isomorphismus von Vektorräumen

$$\mathrm{U}(\mathfrak{c}) \otimes_k \mathrm{U}(\mathfrak{b}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}(\mathfrak{a})$$

Übung 24.4.3.37 (**Casimir-Operator in der Einhüllenden**). Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra und $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ eine nichtausgeartete invariante Bilinearform. Wir wählen eine Basis $x_1, \ldots, x_{\mathrm{n}}$ von $\mathfrak{g}$, bezeichnen mit $x^1, \ldots, x^n$ die bezüglich b duale Basis, charakterisiert durch $b(x_i, x^j) = \delta_{ij}$, und setzen

$$C = C_b := \sum_{i=1}^{n} x_i x^i$$

So hängt $C_b \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ nicht von der Wahl der Basis unserer Liealgebra $\mathfrak{g}$ ab und liegt im Zentrum der Einhüllenden, in Formeln $uC = Cu \; \forall u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Ergänzende Übung 24.4.3.38 (**Die Einhüllende als Hopf-Algebra**). Gegeben eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k mit Einhüllender U läßt sich die Abbildung $\mathfrak{g} \to U \otimes_k U$ gegeben durch $x \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x$ auf genau eine Weise zu einem Homomorphismus von Ringalgebren

$$\Delta : U \to U \otimes_k U$$

fortsetzen, und wir erhalten so eine Hopfalgebra im Sinne von 18.3.3.6 mit dem prinzipalen Antiautomorphismus als Antipode.

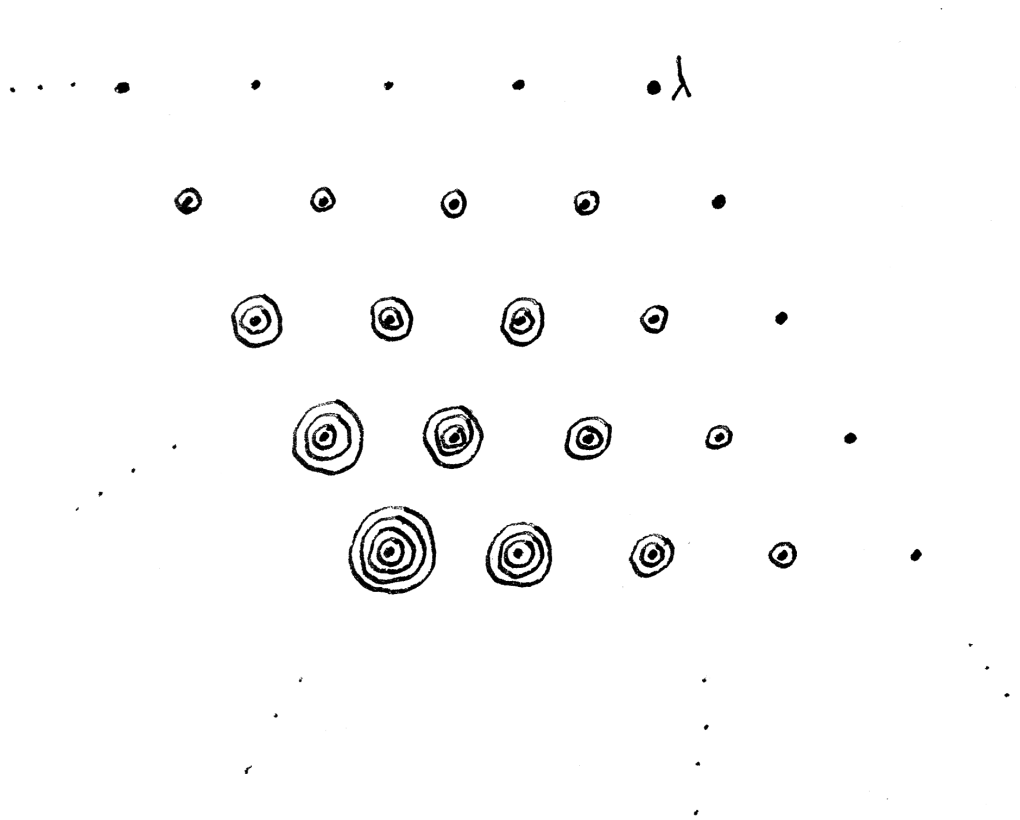
Ergänzende Übung 24.4.3.39 (**Satz von Friedrichs**). Gegeben eine Liealgebra über einem Körper k der Charakteristik Null sind die primitiven Elemente ihrer Einhüllenden, als da heißt die Elemente a mit $\Delta a = a \otimes 1 + 1 \otimes a$, genau die Bilder der Elemente der Liealgebra. Hinweis: Die Komultiplikation ist mit der Filtrierung verträglich und die auf der assoziierten Graduierten induzierte Komultiplikation ist die Komultiplikation der symmetrischen Algebra nach 18.3.3.6. Deren primitive Elemente aber kennen wir aus 9.1.2.12.

Ergänzende Übung 24.4.3.40. Ist V ein Vektorraum über einem Körper einer Charakteristik $p > 0$ und bezeichnet $A^{[p]} \in \operatorname{End} V$ die p-te Potenz eines Endomorphismus $A \in \operatorname{End} V$ und $A^p \in \mathrm{U}(\mathfrak{gl}(V))$ die p-te Potenz von A in $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}(V))$, so gehören die Elemente $A^p - A^{[p]}$ zum Zentrum von $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}(V))$. Hinweis: Man bemerke $A^{(\cdot p)} \cdot X - X \cdot A^{(\cdot p)} = ((A\cdot) - (\cdot A))^p(X)$ für Elemente A, X einer beliebigen assoziativen k-Algebra mit Multiplikation $\cdot$, was hinwiederum aus der binomischen Formel folgt.

Ergänzende Übung 24.4.3.41. Gegeben ein Körper oder allgemeiner ein Kring k und eine Menge I zeige man, daß die kanonische Abbildung $\mathrm{Lalg}_k^{\setminus} I \to \mathrm{Ralg}_k^{\setminus} I$ der freien Liealgebra in die freie Ringalgebra die von einer universellen Einhüllenden geforderte universelle Eigenschaft hat. Insbesondere ist sie als Abbildung von k-Moduln nach dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt 24.4.3.14 eine spaltende Injektion. Hat unser Körper k die Charakteristik Null, so kann insbesondere nach dem Satz von Friedrichs 24.4.3.39 das Bild dieser Abbildung beschrieben werden als die Menge aller $x \in R := \mathrm{Ralg}_k^{\setminus} I$ mit $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ für den Ringalgebrenhomomorphismus $\Delta : R \to R \otimes_k R$ gegeben durch $\Delta(i) = i \otimes 1 + 1 \otimes i$ für alle $i \in I$.

24.4.4 Konstruktion von Moduln mit höchstem Gewicht

24.4.4.1. Bei der Untersuchung der einfachen endlichdimensionalen Darstellungen einer halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ mußten wir die Frage offenlassen, ob jedes



Dieses Bild soll die Struktur des Vermamoduls $\Delta(\lambda)$ für die Liealgebra $\mathfrak{sl}(3)$ mit höchstem Gewicht λ veranschaulichen. Die Papierebene ist dazu in geeigneter Weise mit dem reell-affinen Teilraum $\lambda + \langle R \rangle_{\mathbb{R}}$ im Dualraum der Cartan'schen zu identifizieren. Die fetten Punkte sind dann die Gewichte der von Null verschiedenen Gewichtsräume, n Kringel deuten an, daß der entsprechende Gewichtsraum die Dimension $n + 1$ hat.

dominante Gewicht in der Tat das höchste Gewicht einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung ist. Unter Zuhilfenahme der universellen Einhüllenden können wir diese Frage nun beantworten.

Definition 24.4.4.2. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. Für jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ betrachten wir in $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ das Linksideal I_λ, das erzeugt wird von allen $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ mit $\alpha \in R^+$ und allen $H - \lambda(H)$ mit $H \in \mathfrak{h}$. Der Quotient

$$\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda, R^+) := \mathrm{U}(\mathfrak{g})/I_\lambda$$

nach diesem Linksideal heißt der **Verma-Modul zum höchsten Gewicht** λ. Die Nebenklasse von $1 \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ bezeichnen wir mit $v_\lambda \in \Delta(\lambda)$ und nennen sie den **kanonischen Erzeuger des Vermamoduls** $\Delta(\lambda)$.

Proposition 24.4.4.3 (Struktur von Vermamoduln). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. Für jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ gilt:*

1. *Sind $\alpha, \ldots, \beta \in R^+$ die positiven Wurzeln in einer fest gewählten Reihenfolge und $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ Erzeuger der Wurzelräume der negativen Wurzeln, so bilden die Vektoren $y_\alpha^{m(\alpha)} \ldots y_\beta^{m(\beta)} v_\lambda$ mit $m \in \mathrm{Ens}(R^+, \mathbb{N})$ eine $\mathbb{C}$-Basis des Vermamoduls $\Delta(\lambda)$;*

2. *Der Verma-Modul $\Delta(\lambda)$ besitzt eine Gewichtsraumzerlegung der Gestalt*

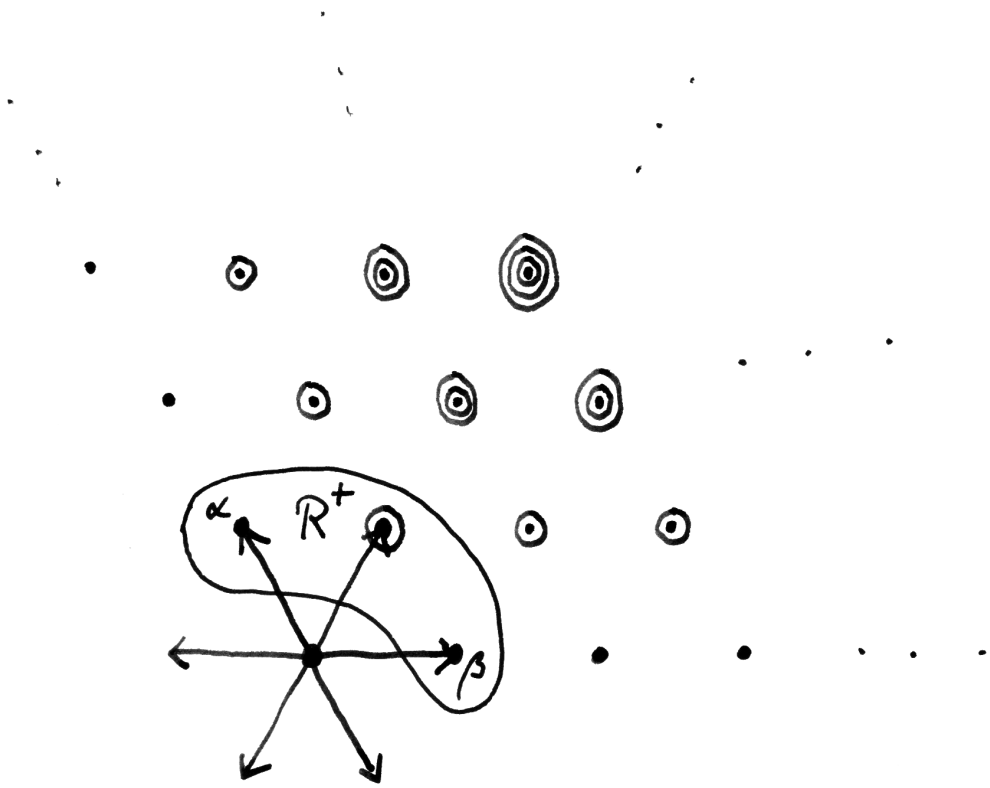
$$\Delta(\lambda) = \bigoplus_{\mu \leq \lambda} \Delta(\lambda)_\mu$$

   und sein höchster Gewichtsraum $\Delta(\lambda)_\lambda$ ist eindimensional mit Basis v_λ;

3. *Bezeichnet $\mathcal{P} : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{N}$ die* **Kostant'sche Partitionsfunktion***, die zählt, auf wieviele verschiedene Weisen sich ein Gewicht zerlegen läßt in eine Summe positiver Wurzeln, so erhalten wir für die Dimensionen der Gewichtsräume unserer Vermamoduln feiner die Formel*

$$\dim_k \Delta(\lambda)_\mu = \mathcal{P}(\lambda - \mu)$$

Ergänzung 24.4.4.4. Betrachten wir in $\mathfrak{g}$ die Unteralgebra $\mathfrak{n} := \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$, so ist $\Delta(\lambda)$ in anderen Worten ein freier $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$-Modul vom Rang Eins mit Basis v_λ. In Formeln ausgedrückt liefert also die Multiplikation eine Bijektion $\mathrm{U}(\mathfrak{n}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\lambda)$, $u \mapsto uv_\lambda$. All das sind Umformulierungen der ersten Aussage der Proposition. In dieser Form aber gelten sie in größerer Allgemeinheit, vergleiche etwa 24.4.5.5.



Dieses Bild zeigt ein Wurzelsystem in der Papierebene, aufgefaßt als Vektorraum mit Ursprung im Ausgangspunkt aller Pfeile. Die drei Wurzeln innerhalb des nierenförmigen Bereichs bilden darin ein System positiver Wurzeln. Die zugehörige Kostant'sche Partitionsfunktion nimmt nur an den fett eingezeichneten Punkten von Null verschiedene Werte an, und zwar den Wert Eins bei einfachen Punkten, den Wert Eins bei einfachen fetten Punkten, den Wert Zwei bei einmal umkringelten fetten Punkten etc. Zum Beispiel hätten wir $\mathcal{P}(2\alpha + 3\beta) = 3$.

24.4.4.5 (**Kostant'sche Partitionsfunktion**). Bei der Definition der Kostant'schen Partitionsfunktion werden Zerlegungen, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, als gleich betrachtet. Im Extremfall $\mu = 0$ vereinbaren wir $\mathcal{P}(0) = 1$, in der Tat läßt sich ja die Null auf genau eine Weise als Summe positiver Wurzeln schreiben, indem wir nämlich die Summe von überhaupt keiner positiven Wurzel nehmen. In Formeln können wir die Kostant'sche Partitionsfunktion schreiben als

$$\mathcal{P}(\lambda) := \operatorname{card}\left\{m \in \operatorname{Ens}(R^+, \mathbb{N}) \mid \lambda = \textstyle\sum_{\alpha \in R^+} m(\alpha)\alpha\right\}$$

Beweis. Wir betrachten den Polynomring $\mathbb{C}[H_1, \ldots, H_r]$ in r Veränderlichen. Gegeben Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k$ sieht man leicht ein, daß die Familie aller Polynome der Gestalt $(H_1 - \lambda_1)^{n(1)} \ldots (H_r - \lambda_r)^{n(r)}$ für Multiindizes $n : \{1, \ldots, r\} \to \mathbb{N}$ eine $\mathbb{C}$-Basis unseres Polynomrings bildet. Bilden speziell $H_1, \ldots, H_r$ eine Basis unserer Cartan'schen $\mathfrak{h}$ und sind $\alpha, \ldots, \beta \in R^+$ unsere positiven Wurzeln in einer fest gewählten Reihenfolge und $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ sowie $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ Basisvektoren, so folgt aus Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt 24.4.3.11 zusammen mit dieser Erkenntnis, daß auch die Produkte

$$y_\alpha^{m(\alpha)} \ldots y_\beta^{m(\beta)} (H_1 - \lambda_1)^{n(1)} \ldots (H_r - \lambda_r)^{n(r)} x_\alpha^{l(\alpha)} \ldots x_\beta^{l(\beta)}$$

für $m, l : R^+ \to \mathbb{N}$ und $n : \{1, \ldots, r\} \to \mathbb{N}$ eine $\mathbb{C}$-Basis der Einhüllenden $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ bilden. Bezeichnet $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ die Unteralgebra $\mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$ aus 24.4.1.16, so gilt Analoges für $\mathrm{U}(\mathfrak{b})$, wenn wir die Faktoren y_α weglassen. Nun haben wir Homomorphismen $\mathfrak{b} \twoheadrightarrow \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ von Liealgebren, wo der Erste die Injektion $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{b}$ spaltet und alle Wurzelvektoren zu Null macht und der Zweite unsere Linearform λ ist. Sie induzieren einen Ringalgebrenhomomorphismus $\mathrm{U}(\mathfrak{b}) \to \mathbb{C}$, dessen Kern genau aus allen nichttrivialen Monomen unserer Basis besteht. Diese bilden folglich ein Ideal in $\mathrm{U}(\mathfrak{b})$. Multiplizieren wir noch beliebige Elemente unserer Basis von $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ davor, so erhalten wir ein Erzeugendensystem über $\mathbb{C}$ eines Linksideals von $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Damit ist offensichtlich, daß unser Linksideal I_λ beschrieben werden kann, indem wir obige Basis der Einhüllenden $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ bilden mit $\lambda_i := \lambda(H_i)$ und dann darin das Erzeugnis der Basisvektoren mit $n \neq 0$ oder $l \neq 0$ betrachten. Folglich bilden die Nebenklassen der $y_\alpha^{m(\alpha)} \ldots y_\beta^{m(\beta)}$ für $m : R^+ \to \mathbb{N}$ eine $\mathbb{C}$-Basis des Vermamoduls $\Delta(\lambda)$. Per definitionem gilt $Hv_\lambda = \lambda(H)v_\lambda$ für alle $H \in \mathfrak{h}$. In anderen Worten ist v_λ ein Gewichtsvektor zum Gewicht λ ist. Daraus folgen die beiden anderen Teile der Proposition unmittelbar. □

Lemma 24.4.4.6 (Universelle Eigenschaft von Verma-Moduln). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. So liefert für jede Darstellung M von $\mathfrak{g}$ und jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ das Auswerten $\varphi \mapsto \varphi(v_\lambda)$ am kanonischen Erzeuger $v_\lambda \in \Delta(\lambda)$ eine Bijektion*

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta(\lambda), M) \xrightarrow{\sim} \{v \in M_\lambda \mid \mathfrak{g}_\alpha v = 0 \ \forall \alpha \in R^+\}$$

Beweis. Wir erinnern, daß für jeden Modul M über einem Ring R das Auswerten beim neutralen Element 1_R eine Bijektion $\mathrm{Hom}_R(R, M) \xrightarrow{\sim} M$ induziert. Die universelle Eigenschaft von Quotienten 7.1.3.10 zeigt dann, daß für jedes Linksideal $I \subset R$ das Auswerten an $1_R + I$ eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_R(R/I, M) \xrightarrow{\sim} \{m \in M \mid Im = 0\}$$

induziert. Da in unserer Situation nach Annahme gilt $I_\lambda v = 0$, folgt die Behauptung. □

Satz 24.4.4.7 (**Klassifikation einfacher Höchstgewichtsmoduln**). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. So gilt:*

1. *Für jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ besitzt der Vermamodul $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda, R^+)$ einen größten echten Untermodul $\mathrm{rad}\,\Delta(\lambda)$;*

2. *Der Quotient $\mathrm{L}(\lambda, R^+) = \mathrm{L}(\lambda) := \Delta(\lambda)/\mathrm{rad}\,\Delta(\lambda)$ ist eine einfache Darstellung und wir erhalten so eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}^* & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Einfache Darstellungen von } \mathfrak{g} \textit{ mit einem} \\ R^+\textit{-höchsten Gewicht, bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \\ \lambda & \mapsto & \mathrm{L}(\lambda) \end{array}$$

3. *Besitzt eine einfache Darstellung ein maximales Gewicht, so ist dies Gewicht bereits ihr höchstes Gewicht.*

24.4.4.8 (**Terminologisches zu Radikalen**). Gegeben ein Modul M über einem Ring R erklärt man ganz allgemein das **Radikal** $\mathrm{rad}\,M$ **von** M als den Schnitt aller Homomorphismen von M zu einfachen R-Moduln. Im Fall des Ringes selbst, betrachtet als R-Linksmodul, ist das genau unser Jacobson-Radikal aus 8.3.6.1. Dahingegen versteht man unter dem Radikal eines Ideals im allgemeinen wie in 7.1.6.14 etwas völlig anderes als sein Radikal als Modul. Wenn es nötig sein sollte, werde ich unterscheiden zwischen dem **Modulradikal** und dem **Potenzradikal** eines Ideals in einem Ring.

Beispiel 24.4.4.9. Im allgemeinen bezeichnet meist ρ die Halbsumme der positiven Wurzeln. Im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ und $R^+ = \{\alpha\}$ setzen wir dieser Konvention vorgreifend bereits hier $\rho := \alpha/2$. Damit ist also unsere einfache Darstellung $\mathrm{L}(m)$ der Dimension $(m + 1)$ aus 24.1.2.14 in unserer Notation hier die einfache Darstellung $\mathrm{L}(m\rho)$ mit höchstem Gewicht $m\rho$.

Beweis. Mit $\Delta(\lambda)$ zerfällt nach 3.6.6.19 jeder $\mathfrak{h}$-Untermodul $N \subset \Delta(\lambda)$ auch in Gewichtsräume $N = \bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} N_\mu$. Ist N ein $\mathfrak{g}$-Untermodul, so folgt aus $N_\lambda \neq 0$ schon $N = \Delta(\lambda)$. Ist N ein echter $\mathfrak{g}$-Untermodul, so gilt mithin $N \subset \bigoplus_{\mu\neq\lambda} \Delta(\lambda)_\mu$. Die Summe von allen echten Untermoduln ist also selbst immer noch ein echter Untermodul. Der Quotient $\mathrm{L}(\lambda) = \Delta(\lambda)/\operatorname{rad}\Delta(\lambda)$ ist natürlich eine einfache Darstellung mit höchstem Gewicht λ. Umgekehrt ist nach der universellen Eigenschaft von Vermamoduln 24.4.4.6 jede einfache Darstellung mit höchstem Gewicht λ ein Quotient von $\Delta(\lambda)$, und der Kern einer solchen Surjektion muß der größte Untermodul von $\Delta(\lambda)$ sein. Damit ist der Satz bewiesen. □

Proposition 24.4.4.10. *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. Für ein Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ sind gleichbedeutend:*

1. *Der einfache Modul $\mathrm{L}(\lambda)$ mit höchstem Gewicht λ ist endlichdimensional, in Formeln $\dim \mathrm{L}(\lambda) < \infty$;*
2. *Das Gewicht λ ist dominant, in Formeln $\lambda \in \mathfrak{X}^+$.*

24.4.4.11. (1) $\Rightarrow$ (2) hatten wir schon als 24.4.1.20 bewiesen. Zum Beweis der anderen Richtung holen wir im Hinblick auf spätere Anwendungen etwas weiter aus. Wir erinnern an die Halbsumme ρ der positiven Wurzeln und die Formel $s_\alpha\rho = \rho - \alpha$ für α eine einfache positive Wurzel, siehe 23.2.2.16.

Definition 24.4.4.12. Bezeichne wie üblich ρ die Halbsumme der positiven Wurzeln. Wir definieren die „zum Fixpunkt $-\rho$ verschobene" Operation von W auf $\mathfrak{h}^*$, die sogenannte **dot-Operation**, durch die Formel

$$x \cdot \lambda := x(\lambda + \rho) - \rho$$

Lemma 24.4.4.13. *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. Für jede einfache Wurzel α und jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ mit $\langle \lambda+\rho, \alpha^\vee\rangle \in \mathbb{N}$ gibt es eine Injektion von $\mathfrak{g}$-Moduln*

$$\Delta(s_\alpha \cdot \lambda) \hookrightarrow \Delta(\lambda)$$

Ergänzung 24.4.4.14. Wir werden später zeigen, daß dieselbe Aussage allgemeiner für jede positive Wurzel $\alpha \in R^+$ gilt.

Beweis. Für eine einfache Wurzel α gilt $\langle \rho, \alpha^\vee\rangle = 1$ nach 23.2.2.16, folglich ist $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee\rangle \in \mathbb{N}$ gleichbedeutend zu $n := \langle \lambda, \alpha^\vee\rangle \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ und wir haben $s_\alpha \cdot \lambda = \lambda - (n+1)\alpha$. Sei nun zunächst $\alpha \in R^+$ beliebig mit $n = \langle \lambda, \alpha^\vee\rangle \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$. Für $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ behaupten wir dann

$$x_\alpha y_\alpha^{n+1} v_\lambda = 0$$

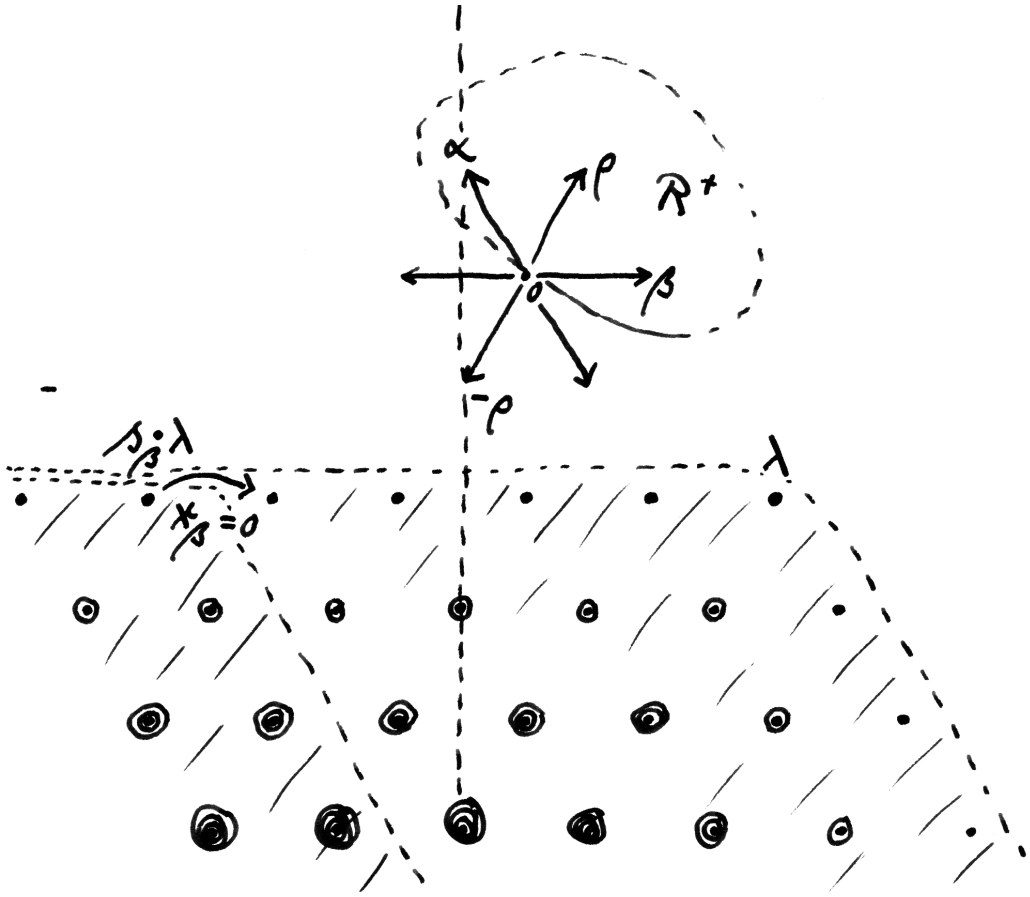


Illustration für Lemma 24.4.4.13. Sie ist nur insofern unzutreffend, als darin β die Rolle der einfachen Wurzel spielt, die im Lemma α heißt. Der Vermamodul mit höchstem Gewicht $s_\beta \cdot \lambda$ umfaßt nur in der obersten Zeile die vollen Gewichtsräumen zu den fetten Punkten im kleinen gestrichelt umrandeten Bereich.

Im Fall $n = -1$ ist das eh klar. Im Fall $n \in \mathbb{N}$ kann man das entweder durch Rechnung prüfen, indem man unter der Zusatzvoraussetzung $[x_\alpha, y_\alpha] = \alpha^\vee$ induktiv für alle $i \geq 1$ die Formel $x_\alpha y_\alpha^i v_\lambda = i(n-i+1)y_\alpha^{i-1}v_\lambda$ herleitet ganz analog dazu, wie wir es aus im Beweis von 24.1.2.14 bereits kennen. Man kann sich aber einfacher auch überlegen, daß die $y_\alpha^i v_\lambda$ eine Basis eines Vermamoduls von $\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus k\alpha^\vee \oplus \mathfrak{g}_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2$ mit höchstem Gewichtsvektor v_λ bilden, und operiert $\alpha^\vee$ alias h auf diesem höchsten Gewichtsvektor durch einen nichtnegativen ganzzahligen Eigenwert, so gibt es auch eine einfache $(n+1)$-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}_2$ mit diesem höchsten Gewicht, die nach 24.4.4.7 notwendig ein Quotient unseres $\mathfrak{sl}_2$-Vermamoduls sein muß. Der Kern der Quotientenabbildung ist offensichtlich gerade das Erzeugnis der $y_\alpha^i v_\lambda$ mit $i > n$, folglich bilden diese einen Untermodul, und damit erkennen wir $x_\alpha y_\alpha^{n+1} v_\lambda = 0$, ohne die Rechnung aus dem Beweis von 24.1.2.14 wiederholen zu müssen. Ist nun zusätzlich α eine einfache Wurzel, so gilt sogar $x_\beta y_\alpha^i v_\lambda = 0$ für alle $\beta \in R^+ \backslash \alpha$ und $i \in \mathbb{N}$, denn $i\alpha - \beta$ ist dann nie eine Summe positiver Wurzeln. Da aber gilt $s_\alpha \cdot \lambda = \lambda - (n+1)\alpha$, folgern wir $0 \neq y_\alpha^{n+1} v_\lambda \in \Delta(\lambda)_{s_\alpha \cdot \lambda}$ und erhalten nach der Definition unserer Verma-Moduln wie im Beweis von 24.4.4.7.3 aus ihrer universellen Eigenschaft als koinduzierte Darstellungen einen von Null verschiedenen Homomorphismus $\Delta(s_\alpha \cdot \lambda) \to \Delta(\lambda)$, der den kanonischen Erzeuger von $\Delta(s_\alpha \cdot \lambda)$ auf $y_\alpha^{n+1} v_\lambda$ abbildet. Da alle Vermamoduln frei sind vom Rang Eins über dem Integritätsring $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$ nach 24.4.3.31, muß dieser Homomorphismus sogar eine Injektion sein. □

Beweis von (2)⇐(1) in 24.4.4.10. Das Lemma zeigt, daß für $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ und $\alpha \in R^+$ einfach mit $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ ganz und nichtnegativ ein höchster Gewichtsvektor von $\mathrm{L}(\lambda)$ stets eine endlichdimensionale $\mathfrak{g}^\alpha$-Unterdarstellung erzeugt. Nun ist in jeder Darstellung V von $\mathfrak{g}$ die Summe W aller endlichdimensionalen $\mathfrak{g}^\alpha$-Unterdarstellungen für beliebiges festes $\alpha \in R$ eine $\mathfrak{g}$-Unterdarstellung von V, wie man zum Beispiel aus Übung 24.1.3.6 folgert. Gilt nun $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$ für jede einfache Wurzel α, so ist also $\mathrm{L}(\lambda)$ für jede einfache Wurzel α die Summe seiner endlichdimensionalen $\mathfrak{g}^\alpha$-Unterdarstellungen. Aus deren expliziter Beschreibung in 24.1.2.14 und 24.4.1.11 folgt dann $s_\alpha \mathrm{P}(\mathrm{L}(\lambda)) = \mathrm{P}(\mathrm{L}(\lambda))$ für jede einfache Spiegelung $s_\alpha \in W$. Dann ist aber notwendig $\mathrm{P}(\mathrm{L}(\lambda))$ stabil unter der Weylgruppe, nach 24.4.2.6 also endlich, und da auch alle Gewichtsräume von $\mathrm{L}(\lambda)$ endlichdimensional sind, folgt $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{L}(\lambda) < \infty$. □

Übungen

Übung 24.4.4.15. Man zeige, daß im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ ein Vermamodul $\Delta(\lambda)$ genau dann einfach ist, wenn er keinen endlichdimensionalen Quotienten hat, wenn also sein höchstes Gewicht auf der positiven Wurzel als Wert keine natürliche Zahl annimmt, in Formeln $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \notin \mathbb{N}$ für α die positive Wurzel.

Übung 24.4.4.16. Gegeben λ dominant ist die Summe über alle einfachen Wurzeln α der Bilder der Inklusionen $\Delta(s_\alpha \cdot \lambda) \hookrightarrow \Delta(\lambda)$ nach 24.4.4.13 der größte echte Untermodul von des Vermamoduls $\Delta(\lambda)$. Hinweis: Man variiere den Beweis der Rückrichtung von 24.4.4.10. Man zeige auch die Variante, nach der für λ dominant die Vektoren $y_\alpha^{\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle+1} v_\lambda$ für $\alpha \in \Pi$ einfache Wurzeln den größten Untermodul des Vermamoduls $\Delta(\lambda)$ erzeugen, ja sogar bereits als $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$-Untermodul erzeugen.

Übung 24.4.4.17. Gibt es in einer einfachen Darstellung einer halbeinfachen Liealgebra einen von Null verschiedenen Vektor, der von allen Wurzelvektoren zu einem System positiver Wurzeln aus dem Wurzelsystem zu einer Cartan'schen anulliert wird, so ist der fragliche Vektor bereits ein höchster Gewichtsvektor unserer Darstellung.

Übung 24.4.4.18. Man zeige: Die Darstellung $\bigwedge^i \mathbb{C}^{n+1}$ von $\mathfrak{sl}(n+1;\mathbb{C})$ ist einfach für $1 \le i \le n+1$ und hat das höchste Gewicht $\varpi_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$.

24.4.5 Induktion und Koinduktion bei Liealgebren*

24.4.5.1. Viele Konstruktionen und Resultate des vorhergehenden Abschnitts sind Spezialfälle sehr allgemeiner Konstruktionen und Prinzipien, die in 7.2.8.1 erläutert werden und eine gewisse Erfahrung im Umgang mit allgemeinen Tensorprodukten und der Sprache der Kategorien voraussetzen. Das soll im folgenden für diejenigen Leser, die mit diesen Konzepten vertraut sind, beleuchtet werden.

Definition 24.4.5.2. Jeder Liealgebren-Homomorphismus $\mathfrak{b} \to \mathfrak{g}$ induziert einen Ringhomomorphismus $\mathrm{U}(\mathfrak{b}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ und unsere Kategorien von Darstellungen identifizieren sich mit den Kategorien aller Moduln über diesen Ringen. Der Restriktionsfunktor

$$\mathrm{res}_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{b}} : \mathfrak{g}\text{-Mod} \to \mathfrak{b}\text{-Mod}$$

hat nach 7.2.8.5 folglich einen Rechtsadjungierten $\mathrm{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}$ und nach 7.2.8.7 einen Linksadjungierten $\mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}$, die **Induktion** und die **Koinduktion** oder **Produktion** von Darstellungen von Liealgebren, die explizit beschrieben werden können durch die Formeln

$$\mathrm{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M := \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}), M) \qquad \mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M := \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} M$$

Bemerkung 24.4.5.3 (**Diskussion der Terminologie**). Beim Studium der Literatur ist Vorsicht geboten: Bei Darstellungen von Lie-Gruppen und algebraischen Gruppen bezeichnet Induktion in der Literatur stets den Rechtsadjungierten der Restriktion wie hier. Bei Darstellungen von Liealgebren jedoch wird in der Literatur als Induktion meist abweichend der Linksadjungierte der Restriktion bezeichnet, den wir hier Produktion genannt haben. Die Idee dazu kommt aus [Vog81],

wo allerdings die Begriffe Induktion und Produktion im Vergleich zu unseren Begriffen hier vertauscht definiert werden.

Ergänzung 24.4.5.4. Bei Darstellungen endlicher Gruppen bezeichnet man als Induzieren zwar meist die Erweiterung der Skalare, also den Linksadjungierten der Restriktion, aber dieser ist glücklicherweise kanonisch isomorph zum Rechtsadjungierten der Restriktion. Der Begriff der „Produktion" ist überhaupt nicht gebräuchlich.

24.4.5.5. Ist $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ sogar eine Unteralgebra, so ist $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ nach Poincaré-Birkhoff-Witt frei als Rechtsmodul und als Linksmodul über $\mathrm{U}(\mathfrak{b})$, so daß die Induktion und Koinduktion nach 7.2.1.4 und 7.2.5.11 beide exakte Funktoren werden. Ist zusätzlich $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra mit $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{g}$ als Vektorräume über unserem Grundkörper k, so liefert nach 24.4.3.36 die Multiplikation einen Isomorphismus $\mathrm{U}(\mathfrak{n}) \otimes_k \mathrm{U}(\mathfrak{b}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ von $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$-$\mathrm{U}(\mathfrak{b})$-Bimoduln und wir erhalten mit 7.2.6.15 einen kanonischen Isomorphismus von $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$-Moduln

$$\mathrm{U}(\mathfrak{n}) \otimes_k M \xrightarrow{\sim} \mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M$$

Ebenso liefert die Multiplikation auch einen Isomorphismus $\mathrm{U}(\mathfrak{b}) \otimes_k \mathrm{U}(\mathfrak{n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ von $\mathrm{U}(\mathfrak{b})$-$\mathrm{U}(\mathfrak{n})$-Bimoduln und wir erhalten einen kanonischen Isomorphismus von $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$-Moduln

$$\mathrm{Hom}_k(\mathrm{U}(\mathfrak{n}), M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M$$

Ergänzung 24.4.5.6. Ist $\mathfrak{b} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$ eine Surjektion und bezeichnet $\mathfrak{c}$ ihren Kern, so ist $\mathrm{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M = M^{\mathfrak{c}}$ der Teilraum der **$\mathfrak{c}$-Invarianten** aus 24.1.2.7 und $\mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M$ heißt der Raum der **$\mathfrak{c}$-Koinvarianten** und wird $\mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M = M_{\mathfrak{c}}$ notiert. Diese beiden Funktoren sind im allgemeinen alles andere als exakt.

24.4.5.7 (**Vermamoduln als koinduzierte Darstellungen**). Seien nun $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche Unteralgebra, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem, $R^+ \subset R$ ein System von positiven Wurzeln, und $\leq$ die zugehörige Teilordnung auf $\mathfrak{h}^*$. Wir betrachten in $\mathfrak{g}$ die Unteralgebra

$$\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

Dehnen wir unser Gewicht λ aus zu einer Linearform auf $\mathfrak{b}$ durch die Vorschrift $\lambda(\mathfrak{g}_\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in R^+$, so erhalten wir offensichtlich einen Charakter $\lambda : \mathfrak{b} \to \mathbb{C}$, d.h. eine eindimensionale Darstellung $\mathbb{C}_\lambda$ der Liealgebra $\mathfrak{b}$. Diese Darstellung können wir auffassen als einen Homomorphismus von Ringalgebren $\tilde{\lambda} : \mathrm{U}(\mathfrak{b}) \to \mathbb{C}$. Bezeichnen wir seinen Kern mit $J_\lambda := \ker \tilde{\lambda}$, so erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$J_\lambda \hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{b}) \twoheadrightarrow \mathbb{C}$$

Per definitionem liegen alle $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ mit $\alpha \in R^+$ und alle $H - \lambda(H)$ mit $H \in \mathfrak{h}$ in J_λ, ja unser Kern ist genau das von diesen Elementen in $\mathrm{U}(\mathfrak{b})$ erzeugte Linksideal, denn modulo diesem Linksideal ist offensichtlich jedes Element von $\mathrm{U}(\mathfrak{b})$ kongruent zu einem Skalar aus $\mathbb{C}$. Wir können unsere kurze exakte Sequenz auch lesen als eine kurze exakte Sequenz $J_\lambda \hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{b}) \twoheadrightarrow \mathbb{C}_\lambda$ von Darstellungen von $\mathfrak{b}$. Anwenden von $\mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})}$ liefert eine rechtsexakte Sequenz

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} J_\lambda \to \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$$

Hier ist die linke Abbildung die Multiplikationsabbildung, ihr Bild also das von J_λ in $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ erzeugte Linksideal I_λ, und wir erhalten so einen Isomorphismus von Darstellungen

$$\Delta(\lambda) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})/I_\lambda \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_\lambda = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$$

mit $v_\lambda \mapsto 1 \otimes 1$. Die universelle Eigenschaft 24.4.4.6 von Verma-Moduln folgt dann aus der universellen Eigenschaft der Koinduktion: Für jede Darstellung L von $\mathfrak{g}$ liefert die Restriktion auf $\mathbb{C}_\lambda$ danach eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta(\lambda), L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(\mathbb{C}_\lambda, L)$$

Falls λ maximal ist unter den Gewichten von L, identifiziert das Auswerten bei 1 hier zusätzlich die rechte Seite mit dem Gewichtsraum L_λ.

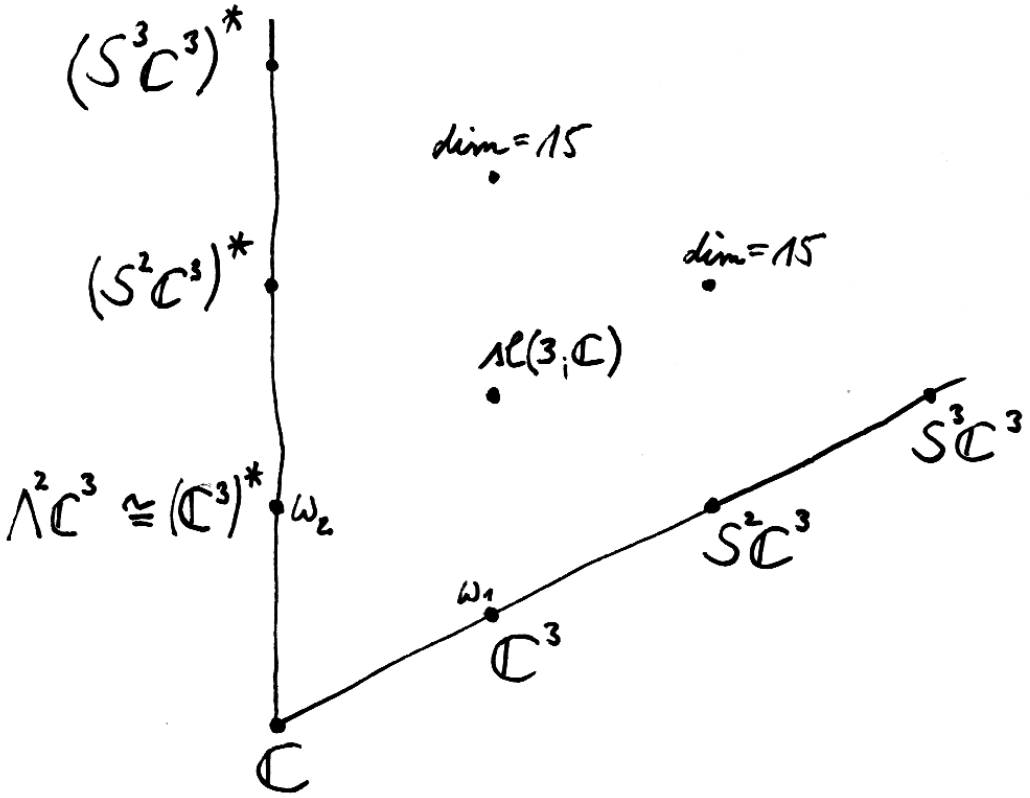
24.4.6 Charakterformeln

Notation 24.4.6.1. Seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche Unteralgebra, $R = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem, $R^+ \subset R$ ein System positiver Wurzeln, $\rho \in \mathfrak{h}^*$ die Halbsumme der positiven Wurzeln, $\mathfrak{X}$ das Gitter der ganzen Gewichte und $\mathfrak{X}^+ \subset \mathfrak{X}$ die Menge der in Bezug auf R^+ dominanten Gewichte.

Satz 24.4.6.2 (Weyl'sche Dimensionsformel). *Für jedes dominante Gewicht $\lambda \in \mathfrak{X}^+$ wird die Dimension der einfachen Darstellung $\mathrm{L}(\lambda)$ mit höchstem Gewicht λ gegeben durch die Formel*

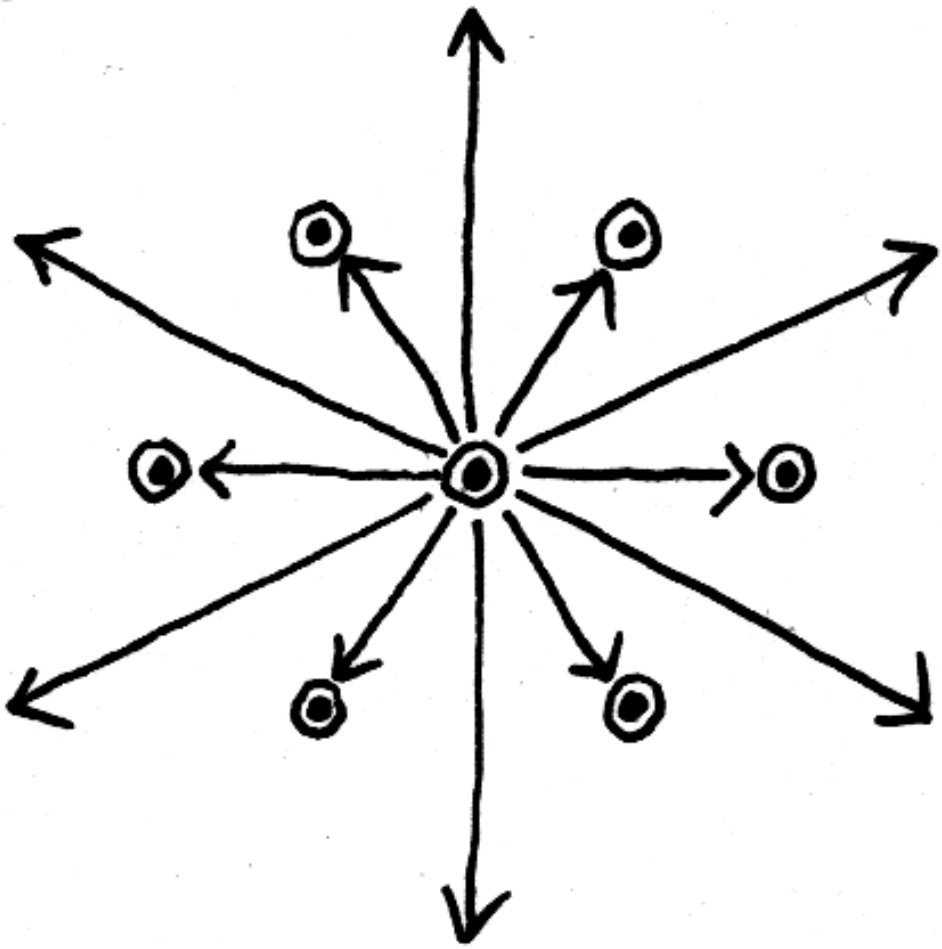
$$\dim \mathrm{L}(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha \in R^+} \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle}{\prod_{\alpha \in R^+} \langle \rho, \alpha^\vee \rangle}$$

24.4.6.3. Der Beweis wird im Anschluß an 24.4.6.30 gegeben. Auf dem Weg dahin werden wir sogar Formeln für die Dimensionen $\dim_k \mathrm{L}(\lambda)_\mu$ aller Gewichtsräume von endlichdimensionalen einfachen Darstellungen angeben. Obiger Formel kann ich mit bloßem Auge noch nicht einmal ansehen, warum sie immer natürliche Zahlen liefern sollte. Im Spezialfall $\lambda = n\rho$ ergibt sich $\dim \mathrm{L}(n\rho) = (n+1)^{|R|/2}$.



Einige dominante Gewichte zur $\mathfrak{sl}(3;\mathbb{C})$ mit den zugehörigen irreduziblen Darstellungen oder zumidest deren Dimensionen. Die Kanten werden in 22.2.3.19 gerechtfertigt. Sind α_1, α_2 die einfachen Wurzeln, so ist die einzige weitere positive Wurzel $\alpha_1 + \alpha_2$ und in diesem Fall gilt auch $(\alpha_1 + \alpha_2)^\vee = \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee$. Sind ϖ_1, ϖ_2 die fundamentalen dominanten Gewichte, so gilt per Definitionem $\langle \varpi_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$ und nach 23.2.2.16 haben wir $\rho = \varpi_1 + \varpi_2$. Der Nenner in der Weyl'schen Dimensionsformel ist also $\langle \varpi_1 + \varpi_2, \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee \rangle = 2$. Setzen wir $\lambda = \lambda_1\varpi_1 + \lambda_2\varpi_2$, so ergibt sich der Zähler zu $(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + 2)$ und wir erhalten

$$\dim \mathrm{L}(\lambda) = (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + 2)/2$$



Die Gewichte der 7-dimensionalen irreduziblen Darstellung von G_2.

24.4.6.4. Wir betrachten den Gruppenring $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ der additiven Gruppe $\mathfrak{h}^*$. Fassen wir $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ als ein Element dieses Gruppenrings auf, so schreiben wir e^λ statt λ, da sonst $\lambda + \mu$ zweideutig wäre. Die e^λ für $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ bilden also eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ und es gilt $\mathrm{e}^\lambda \, \mathrm{e}^\mu = \mathrm{e}^{\lambda+\mu}$.

24.4.6.5. Der Ring $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ ist ein Integritätsring. In der Tat liegen je zwei Elemente stets in einem Teilring der Gestalt $\mathbb{Z}E$ für $E \subset \mathfrak{h}^*$ eine endlich erzeugte Untergruppe, und da E notwendig eine freie abelsche Gruppe ist, muß $\mathbb{Z}E$ isomorph sein zu einem Ring von Laurent-Polynomen in mehreren Veränderlichen.

Definition 24.4.6.6. Für jede endlichdimensionale Darstellung V von $\mathfrak{g}$ definieren wir ihren **Charakter** $\operatorname{ch} V \in \mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ durch die Vorschrift

$$\operatorname{ch} V = \sum_\mu (\dim V_\mu) \, \mathrm{e}^\mu$$

24.4.6.7. Der Charakter einer endlichdimensionalen Darstellung ist stabil unter der Weylgruppe. In der Tat folgt aus der Darstellungstheorie der $\mathfrak{sl}(2;k)$ nach 24.1.2.14, daß geeignete Potenzen von Erzeugern von $\mathfrak{g}_\alpha$ und $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ Isomorphismen zwischen den Gewichtsräumen zu λ und $s_\alpha\lambda$ liefern.

Satz 24.4.6.8 (Weyl'sche Charakterformel). *Für jedes dominante Gewicht $\lambda \in \mathfrak{X}^+$ gilt in $\operatorname{Quot}(\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*)$ für den Charakter der endlichdimensionalen einfachen Darstellung mit höchstem Gewicht λ die Formel*

$$\operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda) = \frac{\sum_{w\in W} (-1)^{l(w)} \, \mathrm{e}^{w(\lambda+\rho)}}{\sum_{w\in W} (-1)^{l(w)} \, \mathrm{e}^{w\rho}}$$

24.4.6.9. Der Beweis wird im Anschluß an den Beweis von 24.4.6.29 gegeben. Die Formel selbst ist insbesondere für theoretische Überlegungen nützlich, für praktische Berechnungen scheint mir 24.4.6.27 sehr viel besser, und es gibt sogar noch bessere Verfahren. Das Vorzeichen $(-1)^{l(w)}$ ist übrigends gerade die Determinante von w. In 22.5.10.6 erklären wir, inwiefern diese Formel die Charaktere der Darstellungen kompakter Liegruppen liefert.

Beispiel 24.4.6.10. Man prüft sofort, daß sich korrekt $\operatorname{ch} \mathrm{L}(0) = \mathrm{e}^0$ ergibt. Im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2;k)$ haben wir $\rho = \alpha/2$ und $\mathfrak{X}^+ = \mathbb{N}\rho$ und es ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$ korrekt

$$\operatorname{ch} \mathrm{L}(n\rho) = \frac{\mathrm{e}^{(n+1)\rho} - \mathrm{e}^{-(n+1)\rho}}{\mathrm{e}^\rho - \mathrm{e}^{-\rho}} = \mathrm{e}^{n\rho} + \mathrm{e}^{(n-2)\rho} + \ldots + \mathrm{e}^{-n\rho}$$

24.4.6.11. Ist $\mathfrak{g}$ einfach und $\beta \in R^+$ die höchste Wurzel, so ist $\mathrm{L}(\beta)$ die adjungierte Darstellung und die Weyl'sche Charakterformel spezialisiert zu einer bemerkenswerten kombinatorischen Identität, die der Leser selbst ausschreiben mag.

24.4.6.12. Wir erweitern nun unseren Charakterring so, daß wir auch mit Charakteren von Verma-Moduln rechnen können.

Definition 24.4.6.13. Ganz allgemein können wir die Menge $\operatorname{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$ aller Abbildungen von $\mathfrak{h}^*$ nach $\mathbb{Z}$ betrachten. Wir schreiben solche Abbildungen $f : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{Z}$ als unendliche formale Ausdrücke $f = \sum f(\lambda)\,\mathrm{e}^\lambda$ und ordnen jeder Darstellung V von $\mathfrak{g}$ oder sogar von $\mathfrak{h}$ mit endlichdimensionalen Gewichtsräumen ihren **Charakter** $\operatorname{ch} V \in \operatorname{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$ zu vermittels der Vorschrift

$$\operatorname{ch} V = \sum (\dim V_\mu)\,\mathrm{e}^\mu$$

24.4.6.14. Offensichtlich bilden die Charaktere aller Vermamoduln eine linear unabhängige Familie in $\operatorname{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$ und dasselbe gilt für die Charaktere aller einfachen höchsten Gewichtsmoduln. Ich wüßte aber nicht, wie man die Multiplikation in $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ sinnvoll auf ganz $\operatorname{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$ ausdehnen könnte. Um dennoch mit Charakteren von Vermamoduln rechnen zu können, arbeiten wir mit einer geeigneten Untergruppe.

Definition 24.4.6.15 (**Erweiterter Charakterring**). Bezeichne

$$\mathbb{Z}^\urcorner\mathfrak{h}^* \subset \operatorname{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$$

die Menge aller Abbildungen von $\mathfrak{h}^*$ nach $\mathbb{Z}$, deren Träger in einer Vereinigung von endlich vielen Mengen der Form $\lambda - |R^+\rangle$ enthalten ist, in anderen Formeln also Mengen der Form $\{\lambda - \sum n_\alpha \alpha \mid n \in \operatorname{Ens}(R^+, \mathbb{N})\}$.

24.4.6.16. Wir fassen $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^* \subset \mathbb{Z}^\urcorner\mathfrak{h}^*$ als die Teilmenge aller Funktionen mit endlichem Träger auf und können die Multiplikation in $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ zu einer assoziativen kommutativen Multiplikation auf $\mathbb{Z}^\urcorner\mathfrak{h}^*$ fortsetzen durch die Vorschrift $(fg)(\nu) = \sum_{\lambda+\mu=\nu} f(\lambda)g(\mu)$. Unsere Trägerbedingung stellt dabei sicher, daß in diesen Summen nur endlich viele Terme nicht verschwinden. Man kann sich überlegen, daß dieser **erweiterte Charakterring** auch ein Integritätsring ist, aber wir werden das nicht benötigen. Als Beispiel für die Nützlichkeit unseres erweiterten Charakterrings zeigen wir gleich ein Lemma.

24.4.6.17. Sind M, N zwei $\mathfrak{h}$-Moduln mit endlichdimensionalen Gewichtsräumen derart, daß beide die Summe ihrer Gewichtsräume sind und daß ihre Charaktere beide zu $\mathbb{Z}^\urcorner\mathfrak{h}^*$ gehören, so gilt $\operatorname{ch}(M \otimes N) = (\operatorname{ch} M)(\operatorname{ch} N)$.

Lemma 24.4.6.18. *Der Charakter eines Vermamoduls wird gegeben durch die Formel* $\operatorname{ch}\Delta(\lambda) = \mathrm{e}^\lambda \prod_{\alpha\in R^+}(1+\mathrm{e}^{-\alpha}+\mathrm{e}^{-2\alpha}+\ldots)$. *Insbesondere gilt in* $\mathbb{Z}^\urcorner\mathfrak{h}^*$ *die Formel*

$$\left(\prod_{\alpha\in R^+}(1-\mathrm{e}^{-\alpha})\right)\operatorname{ch}\Delta(\lambda) = \mathrm{e}^\lambda$$

Beweis. Die zweite Aussage folgt sofort aus der ersten. Die erste Aussage drückt unsere Erkenntnisse über Vermamoduln aus 24.4.4.3 in unserem neuen Formalismus aus, da ja offensichtlich gilt $\prod_{\alpha\in R^+}(1+\mathrm{e}^{-\alpha}+\mathrm{e}^{-2\alpha}+\ldots)=\sum_\mu \mathcal{P}(\mu)\,\mathrm{e}^{-\mu}$. □

24.4.6.19. Wir interessieren uns nun für den Eigenwert des Casimiroperators auf einem Vermamodul. Bezeichne $\bar\kappa : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$ den von der Killingform κ induzierten Isomorphismus, charakterisiert durch $\langle\bar\kappa(h), h'\rangle = \kappa(h,h') \quad \forall h,h' \in \mathfrak{h}$. Bezeichne

$$(\ ,\ )$$

die Bilinarform auf $\mathfrak{h}^*$, die unter dem Isomorphismus $\bar\kappa$ der Killingform auf $\mathfrak{h}$ entspricht. Haben wir $\bar\kappa : h \mapsto \lambda$, so folgt für alle $\mu \in \mathfrak{h}^*$ auch $\mu(h) = (\lambda,\mu)$. Nach 24.2.3.26 ist unsere Bilinearform positiv definit auf dem von den Wurzeln aufgespannten $\mathbb{Q}$-Untervektorraum $\langle R\rangle_{\mathbb{Q}}$. Nach dem anschließenden Lemma ist unsere Bilinearform invariant unter der Weylgruppe.

Lemma 24.4.6.20. *Die Restriktion der Killingform einer komplexen halbeinfachen Liealgebra auf eine Cartan'sche ist invariant unter der Weylgruppe.*

Erster Beweis. Für $x,y \in \mathfrak{h}$ und $w \in W$ rechnen wir

$$\begin{array}{lclcl}
\kappa(x,y) & = & \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) & = & \sum_{\alpha\in R}\langle\alpha,x\rangle\langle\alpha,y\rangle \\
\kappa(wx,wy) & = & \sum_{\alpha\in R}\langle\alpha,wx\rangle\langle\alpha,wy\rangle & = & \sum_{\alpha\in R}\langle w^{-1}\alpha,x\rangle\langle w^{-1}\alpha,y\rangle
\end{array}$$ □

Zweiter Beweis. Natürlich ist die Killingform einer endlichdimensionalen Liealgebra invariant unter jedem Automorphismus τ unserer Liealgebra, in Formeln $\kappa(\tau x,\tau y) = \kappa(x,y)$ für alle x,y. Die Elemente der Weylgruppe operieren aber nach 24.2.6.6 auf der Cartan'schen wie die Elemente des Normalisators unserer Cartan'schen in der adjungierten Gruppe, wenn man denn weiß, was alle diese Begriffe bedeuten. □

Lemma 24.4.6.21. *Jeder Endomorphismus eines Vermamoduls ist die Multiplikation mit einem Skalar.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildungen $k \hookrightarrow \operatorname{End}_{\mathfrak{g}}\Delta(\lambda) \hookrightarrow \operatorname{End}_k(\Delta(\lambda)_\lambda)$. Die Zweite ist injektiv, da $\Delta(\lambda)_\lambda$ nach 24.4.4.3 schon $\Delta(\lambda)$ erzeugt. Die Verknüpfung ist eine Bijektion, da ja nach 24.4.4.3 der höchste Gewichtsraum eines Vemamoduls eindimensional ist. Also sind unsere Abbildungen alle drei Bijektionen. □

Lemma 24.4.6.22 (Eigenwert des Casimir auf Vermamoduln). *Der Casimiroperator $C = C_\kappa$ aus 24.2.1.17 operiert auf dem Verma-Modul $\Delta(\lambda)$ durch den Skalar $c_\lambda = (\lambda+\rho,\lambda+\rho)-(\rho,\rho)$ in den Notationen aus 24.4.6.19.*

24.4.6.23. Dies Lemma gilt unverändert, wenn wir die Killingform ersetzen durch eine beliebige invariante nichtausgeartete symmetrische Bilinearform auf unserer halbeinfachen Liealgebra. Es zeigt im Übrigen in Verbindung mit 24.4.4.13 auch $(\lambda, \lambda) = (w\lambda, w\lambda)$ zumindest für alle ganzen Gewichte λ und alle $w \in W$.

Beweis. Nach 24.4.3.37 können wir den Casimiroperator C als Element des Zentrums der universellen Einhüllenden auffassen. Wir müssen nach 24.4.6.21 nur ausrechnen, durch welchen Skalar er auf dem höchsten Gewichtsraum $\Delta(\lambda)_\lambda$ operiert. Dazu wählen wir für $\alpha \in R^+$ Wurzelvektoren $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = 1$, wählen des weiteren eine Orthonormalbasis $h_1, \ldots, h_n$ von $\mathfrak{h}$ unter der Killing-Form κ und erhalten

$$\begin{array}{rcll} C & = & \sum_{\alpha\in R^+} y_\alpha x_\alpha + x_\alpha y_\alpha & + \sum_{i=1}^n h_i^2 \\ & = & \sum_{\alpha\in R^+} 2y_\alpha x_\alpha + [x_\alpha, y_\alpha] & + \sum_{i=1}^n h_i^2 \end{array}$$

Dieser Ausdruck operiert auf $\Delta(\lambda)_\lambda$ wegen $x_\alpha \Delta(\lambda)_\lambda = 0$ durch den Skalar

$$c_\lambda = \sum_{\alpha\in R^+} \lambda([x_\alpha, y_\alpha]) + \sum_{i=1}^n \lambda(h_i)^2$$

Schreiben wir $\lambda = \bar{\kappa}(h)$, so liest sich unser Skalar als

$$c_\lambda = \sum_{\alpha\in R^+} \kappa(h, [x_\alpha, y_\alpha]) + \sum_{i=1}^n \kappa(h, h_i)^2$$

Wegen $\kappa(h, [x_\alpha, y_\alpha]) = \kappa([h, x_\alpha], y_\alpha) = \alpha(h)\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \alpha(h)$ ergibt sich schließlich für unseren Skalar die Formel

$$\begin{array}{rcl} c_\lambda & = & 2\rho(h) + \kappa(h, h) \\ & = & (2\rho, \lambda) + (\lambda, \lambda) \\ & = & (\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho) \end{array}$$ □

Ergänzung 24.4.6.24 (**Formel von Freudenthal**). Der Beweis von 24.4.6.22 liefert bereits eine Formel zur induktiven Berechnung irreduzibler Charaktere. Ist $L = \mathrm{L}(m\rho)$ die $(m+1)$-dimensionale einfache Darstellung von $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ und ist e, h, f die Standardbasis von $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ wie in 24.1.2.14, so liefern die Formeln aus dem Beweis dort, daß die Operation von fe auf jedem von Null verschiedenen Gewichtsraum $\mathrm{L}(m\rho)_{m\rho - i\alpha}$ geschieht durch den Skalar $(m - i + 1)i$, den wir mit $\mu := m\rho - i\alpha$ auch schreiben können als

$$(m - i + 1)i = \sum_{j\geq 1} (\dim \mathrm{L}(m\rho)_{\mu + j\alpha}) \langle \mu + j\alpha, \alpha^\vee \rangle$$

Die rechte Seite wird nun zusätzlich Null für alle Gewichte μ mit $\mathrm{L}(m\rho)_\mu = 0$ und das zeigt, daß für alle endlichdimensionalen Darstellungen V der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ und alle Gewichte μ gilt

$$\mathrm{tr}(fe|V_\mu) = \sum_{j\geq 1}(\dim V_{\mu+j\alpha})\langle \mu + j\alpha, \alpha^\vee\rangle$$

Gegeben $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[x,y] = \alpha^\vee$ folgt aus der Formel $\kappa(h,[x,y]) = \alpha(h)\kappa(x,y)$ vom Beginn des Beweises von 24.2.3.15 sofort

$$\kappa(\alpha^\vee,\alpha^\vee) = 2\kappa(x,y)$$

Gegeben $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = 1$ folgt umgekehrt dann auch, daß $x_\alpha, \alpha^\vee$ und $(\kappa(\alpha^\vee,\alpha^\vee)/2)y_\alpha$ ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel (e,h,f) bilden. Für $\lambda \in \langle R\rangle_\mathbb{Q}$ kürzen wir nun $\sqrt{(\lambda,\lambda)} = |\lambda|$ ab. Für die Spur des Casimir auf dem Gewichtsraum $\mathrm{L}(\lambda)_\mu$ ergeben sich mit 24.4.6.22 und den Formeln aus dem Beweis dieses Lemmas die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(C|\mathrm{L}(\lambda)_\mu) &= (\dim \mathrm{L}(\lambda)_\mu)\ (|\lambda+\rho|^2 - |\rho|^2)\\
\mathrm{tr}(C|\mathrm{L}(\lambda)_\mu) &= \textstyle\sum_{\alpha\in R^+}(2/\kappa(\alpha^\vee,\alpha^\vee))\sum_{j\geq 1}(\dim \mathrm{L}(\lambda)_{\mu+j\alpha})\ \langle \mu+j\alpha,\alpha^\vee\rangle\\
&\quad + (\dim \mathrm{L}(\lambda)_\mu)\ (|\mu+\rho|^2 - |\rho|^2)
\end{aligned}$$

Aus dem Vergleich dieser beiden Formeln zusammen mit der Erkenntnis $\bar\kappa(\alpha^\vee) = 2\alpha/(\alpha,\alpha)$ ergibt sich dann schließlich **Freudenthal's Formel**

$$(\dim \mathrm{L}(\lambda)_\mu)\ (|\lambda+\rho|^2 - |\mu+\rho|^2) = 2\sum_{\alpha\in R^+}\sum_{j\geq 1}(\dim \mathrm{L}(\lambda)_{\mu+j\alpha})\ (\mu+j\alpha,\alpha)$$

Sie erlaubt es, induktiv die Dimension eines Gewichtsraums in einer einfachen Darstellung aus den Dimensionen der Gewichtsräume zu höheren Gewichten zu berechnen.

Lemma 24.4.6.25 (Kompositionsreihen von Vermamoduln). *Jeder Vermamodul $\Delta(\lambda)$ hat endliche Länge und jeder einfache Subquotient von $\Delta(\lambda)$ ist ein einfacher höchster Gewichtsmodul $\mathrm{L}(\mu)$ mit $\mu \leq \lambda$ und $(\mu+\rho,\mu+\rho) = (\lambda+\rho,\lambda+\rho)$.*

Beweis. Die zweite Aussage folgt aus 24.4.4.7.3 und 24.4.6.22, da der Casimir-Operator auf jedem Subquotienten von $\Delta(\lambda)$ auch durch den Skalar c_λ operieren muß. Wir folgern daraus zunächst einmal, daß es überhaupt nur endlich viele μ gibt, die als höchste Gewichte einfacher Subquotienten unseres Vermamoduls in Frage kommen. Aus $\mu \leq \lambda$ folgt ja unter anderem $\mu = \lambda + \nu$ mit $\nu \in \langle R\rangle$. Nun gibt es aber nur endlich viele Elemente des Wurzelgitters $\nu \in \langle R\rangle$ mit

$(\lambda+\rho,\lambda+\rho) = (\lambda+\nu+\rho,\lambda+\nu+\rho)$. Für $\lambda \in \langle R\rangle_{\mathbb{R}}$ ist das leicht zu sehen, denn unsere Bilinearform $(\ ,\ )$ ist nach 24.2.3.26 positiv definit auf $\langle R\rangle_{\mathbb{R}}$ und jede diskrete kompakte Menge ist endlich. Für λ beliebig mag man bemerken, daß unsere Gleichung gleichbedeutend ist zu $(\nu,\nu)+2(\lambda+\rho,\nu) = 0$ und daß alle Lösungen damit bereits im Teilraum $A := \{\nu \in \langle R\rangle_{\mathbb{Q}} \mid (\lambda,\nu) \in \mathbb{Q}\}$ liegen müssen. Nun finden wir $\lambda' \in \langle R\rangle_{\mathbb{Q}}$ mit $(\lambda',\nu) = (\lambda,\nu)\ \forall \nu \in A$ und indem wir λ durch λ ersetzen, können wir uns auf den bereits behandelten Fall zurückziehen. Das zeigt, daß es überhaupt nur endlich viele μ gibt, die als höchste Gewichte einfacher Subquotienten unseres Vermamoduls in Frage kommen. Weiter hat jeder von Null verschiedene Subquotient S von $\Delta(\lambda)$ selbst einen einfachen Subquotienten, ganz allgemein besitzt ja nach 7.4.7.25 jeder von Null verschiedene Modul über einem Ring einen einfachen Subquotienten. Damit gibt es also für jeden von Null verschiedenen Subquotienten S von $\Delta(\lambda)$ ein Gewicht μ mit $(\mu+\rho,\mu+\rho) = (\lambda+\rho,\lambda+\rho)$ und $S_\mu \neq 0$. Wir können dann die Länge $l(\Delta(\lambda))$ einer in jedem Schritt echt absteigenden Filtrierung der Darstellung $\Delta(\lambda)$ abschätzen durch

$$l(\Delta(\lambda)) \leq \sum \dim_k \Delta(\lambda)_\mu$$

mit der Summe über alle $\mu \leq \lambda$ mit $(\mu+\rho,\mu+\rho) = (\lambda+\rho,\lambda+\rho)$. □

24.4.6.26. Wir erinnern an die „zum Fixpunkt $-\rho$ verschobene“ Operation von W auf $\mathfrak{h}^*$, gegeben durch die Formel $w \cdot \lambda = w(\lambda+\rho)-\rho$.

Satz 24.4.6.27 (Kostant'sche Charakterformel). *Gegeben $\lambda \in \mathfrak{X}^+$ ein dominantes Gewicht ist der Charakter der einfachen Darstellung mit höchstem Gewicht λ die alternierende Summe über die Charaktere der Vermamoduln mit höchstem Gewicht in der Bahn von λ unter der dot-Operation der Weylgruppe, in Formeln*

$$\operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda) = \sum_{w\in W} (-1)^{l(w)} \operatorname{ch} \Delta(w\cdot\lambda)$$

Beispiel 24.4.6.28. Im Fall der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2)$ liefert die Einbettung von Vermamoduln aus 24.4.4.13 offensichtlich für alle $m \in \mathbb{N}$ eine kurze exakte Sequenz $\Delta((-m-2)\rho) \hookrightarrow \Delta(m\rho) \twoheadrightarrow \mathrm{L}(m\rho)$, die die obige Formel direkt liefert.

Beweis. Für $\lambda \in \langle R\rangle_{\mathbb{Q}}$ kürzen wir $\sqrt{(\lambda,\lambda)} = |\lambda|$ ab. Lemma 24.4.6.25 sagt uns, daß wir den Charakter von $\Delta(\lambda)$ schreiben können in der Form

$$\operatorname{ch} \Delta(\lambda) = \sum_{\substack{\mu\leq\lambda \\ |\mu+\rho|=|\lambda+\rho|}} a_\lambda^\mu \operatorname{ch} \mathrm{L}(\mu)$$

für geeignete $a_\lambda^\mu \in \mathbb{N}$ mit $a_\lambda^\lambda = 1$. Da sich eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen stets invertieren läßt, können wir umgekehrt auch den Charakter von $\mathrm{L}(\lambda)$ schreiben in der Form

$$\operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda) = \sum_{\substack{\mu \le \lambda \\ |\mu+\rho| = |\lambda+\rho|}} b_\lambda^\mu \operatorname{ch} \Delta(\mu)$$

für geeignete $b_\lambda^\mu \in \mathbb{Z}$ mit $b_\lambda^\lambda = 1$. Insoweit gilt alles für beliebige $\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$ und wenn wir die Notation $|\mu|$ vermeiden sogar für beliebige $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Ist λ nun dominant, so hat $\mathrm{L}(\lambda)$ endliche Dimension nach 24.4.4.10 und $\operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda)$ ist nach 24.4.1.20 invariant unter der Weylgruppe W. Wir multiplizieren dann beide Seiten unserer Gleichung mit

$$\prod_{\alpha \in R^+} (\mathrm{e}^{\alpha/2} - \mathrm{e}^{-\alpha/2}) = \mathrm{e}^\rho \prod_{\alpha \in R^+} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha})$$

und erhalten mit der Abkürzung $d_\nu = b_\lambda^{\nu-\rho}$ und 24.4.6.18 die Formel

$$\left(\prod_{\alpha \in R^+} \mathrm{e}^{\alpha/2} - \mathrm{e}^{-\alpha/2} \right) \operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda) = \sum_\mu b_\lambda^\mu \, \mathrm{e}^{\mu+\rho} = \sum_\nu d_\nu \, \mathrm{e}^\nu$$

mit der zusätzlichen Information $d_{\lambda+\rho} = 1$ und $d_\nu = 0$ falls $|\nu| \neq |\lambda + \rho|$ oder $\nu \not\le \lambda + \rho$. Nach 23.2.2.7 ändert die linke Seite ihr Vorzeichen, wenn man darauf eine einfache Spiegelung s_β anwendet. Dasselbe muß dann auch für die rechte Seite gelten und wir folgern $d_\nu = (-1)^{l(w)} d_{w\nu}$ für alle $w \in W$. Insbesondere haben wir damit sogar $d_\nu = 0$ falls nicht $|\nu| = |\lambda + \rho|$ und $w\nu \le \lambda + \rho$ für alle $w \in W$. Mit dem anschließenden Lemma 24.4.6.29 folgt $d_\nu = 0$ falls nicht gilt $\nu \in W(\lambda + \rho)$, und mit unserer zusätzlichen Information $d_{\lambda+\rho} = 1$ und Zurückparametrisieren folgt die Kostant'sche Charakterformel. □

Lemma 24.4.6.29. *Sei $\mu \in \mathfrak{X}^+$ ein dominantes Gewicht und $\nu \in \mathfrak{X}$ ein ganzes Gewicht. Aus $|\nu| = |\mu|$ und $w\nu \le \mu$ für alle $w \in W$ folgt $\nu \in W\mu$.*

Beweis. Jedes ganze Gewicht läßt sich mit W nach $\mathfrak{X}^+$ konjugieren, und sein „Betrag" ändert sich nach 24.4.6.23 dabei nicht. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\nu \in \mathfrak{X}^+$ annehmen und müssen nur für $\mu, \nu \in \mathfrak{X}^+$ aus $\nu \le \mu$ und $|\nu| = |\mu|$ folgern $\nu = \mu$. Nun ist ja per definitionem das Skalarprodukt eines Vektors aus der dominanten Weylkammer mit einer positiven Wurzel stets nichtnegativ, als da heißt, unter unseren Voraussetzungen schließen $\mu - \nu$ und ν einen stumpfen Winkel ein. Dann aber muß die Summe mindestens genauso lang sein wie jeder der beiden Summanden, und Gleichheit der Längen ist nur möglich, wenn der entsprechende Summand mit der Summe übereinstimmt. □

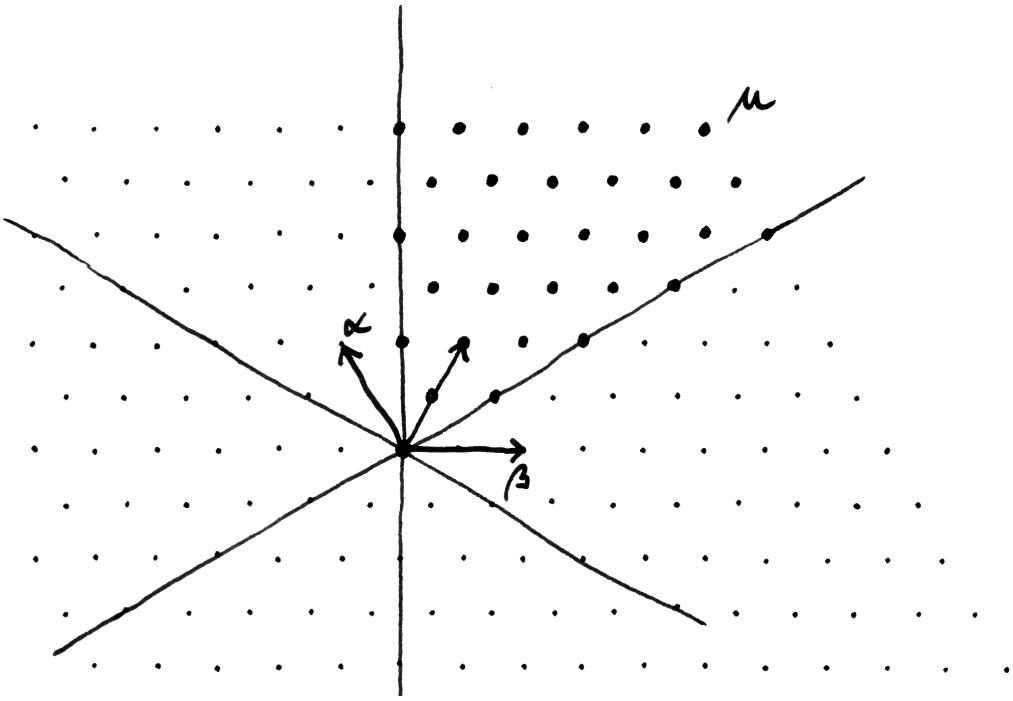


Illustration zu Lemma 24.4.6.29. Fett eingezeichnet sind alle dominanten Gewichte $\nu \in \mathfrak{X}^+$ mit $\nu \leq \mu$. Als magere Punkte eingezeichnet sind die anderen ganzen Gewichte $\nu \in \mathfrak{X}$ mit $\nu \leq \mu$, soweit sie eben ins Bild passen. Die Grenzen des Bereichs, in dem Gewichte $\leq \mu$ zu finden sind, stehen senkrecht auf den Wänden des dominanten Alkoven. Man erkennt, daß alle von μ verschiedenen fetten Punkte näher am Ursprung liegen.

Beweis der Weyl'schen Charakterformel 24.4.6.8. Wir teilen die Formel

$$\left(\prod_{\alpha\in R^+} \mathrm{e}^{\alpha/2} - \mathrm{e}^{-\alpha/2}\right) \operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda) = \sum_{w\in W} (-1)^{l(w)}\, \mathrm{e}^{w(\lambda+\rho)}$$

aus dem Beweis der Kostant'schen Charakterformel 24.4.6.27 durch ihre Spezialisierung an $\lambda = 0$. □

24.4.6.30. Die Spezialisierung obiger Formel bei $\lambda = 0$ ist auch für sich genommen eine bemerkenswerte kombinatorische Identität, die sogenannte **Weyl'sche Nennerformel**

$$\mathrm{e}^{\rho} \prod_{\alpha\in R^+} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha}) = \prod_{\alpha\in R^+} (\mathrm{e}^{\alpha/2} - \mathrm{e}^{-\alpha/2}) = \sum_{w\in W} (-1)^{l(w)}\, \mathrm{e}^{w\rho}$$

Einen direkten Beweis der Weyl'schen Nennerformel geben wir in 22.5.10.10.

Beweis der Weyl'schen Dimensionsformel 24.4.6.2. Es liegt nahe, den Ringhomomorphismus $a : \mathbb{Z}\mathfrak{h}^* \to \mathbb{Z}$ zu betrachten mit $a(\mathrm{e}^{\lambda}) = 1 \quad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$. Wir bezeichnen ihn mit a, da seine Einschränkung auf $\mathbb{Z}\mathfrak{X}$ entspricht unter dem Isomorphismus $\mathbb{C}\mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(T_{\mathbb{C}})$ unseres Gruppenrings mit dem Ring der regulären Funktionen auf einem geeigneten algebraischen Torus $T_{\mathbb{C}}$ dem Auswerten am neutralen Element entspricht. Nun gilt natürlich $\dim \mathrm{L}(\lambda) = a(\operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda))$, nur führt uns die Weyl'sche Charakterformel zunächst auf die wenig hilfreiche Relation $0 \cdot \dim \mathrm{L}(\lambda) = 0$. Um hier weiterzukommen benutzen wir eine abstrakte Version der Regel von de l'Hospital. Dazu bilden wir in unserem Gruppenring $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ den Teilring $\mathbb{Z}\mathfrak{X}$ und betrachten für $\alpha \in R^+$ den Gruppenhomomorphismus $\partial_\alpha : \mathbb{Z}\mathfrak{X} \to \mathbb{Z}\mathfrak{X}$ mit $\partial_\alpha(\mathrm{e}^{\mu}) = \langle \mu, \alpha^\vee \rangle\, \mathrm{e}^{\mu}$. Man prüft mühelos, daß ∂_α eine Derivation ist und daß die ∂_α für verschiedene α kommutieren. Unter unserem Isomorphismus $\mathbb{C}\mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(T_{\mathbb{C}})$ entspricht ∂_α im übrigen dem Anwenden des invarianten Vektorfeldes zu $\alpha^\vee \in \operatorname{Lie} T_{\mathbb{C}}$. Ist $D = \prod_{\alpha\in R^+} \partial_\alpha \in \operatorname{End} \mathbb{Z}\mathfrak{X}$ das Produkt der ∂_α, so gilt offensichtlich $aD\, \mathrm{e}^{\mu} = \prod_{\alpha\in R^+} \langle \mu, \alpha^\vee \rangle$. Mit 23.2.2.7 folgt daraus $aD\, \mathrm{e}^{w\mu} = (-1)^{l(w)} aD\, \mathrm{e}^{\mu}$ zuerst für w eine einfache Spiegelung und dann für beliebige $w \in W$. Unter der Übersetzung in $\mathcal{O}(T_{\mathbb{C}})$ ist diese Formel im übrigen auch ohne weitere Rechnung evident. Betrachten wir nun die aus der Kombination der Weyl'schen Charakterformel und der Weyl'schen Nennerformel entstehende Gleichung

$$\left(\mathrm{e}^{\rho} \prod_{\alpha\in R^+} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha})\right) \operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda) = \sum_{w\in W} (-1)^{l(w)}\, \mathrm{e}^{w(\lambda+\rho)}$$

und wenden auf beide Seiten aD an, so ergibt sich

$$aD\left(\mathrm{e}^{\rho}\prod_{\alpha\in R^+}(1-\mathrm{e}^{-\alpha})\right)a(\operatorname{ch}\mathrm{L}(\lambda)) = |W|\prod_{\alpha\in R^+}\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle$$

denn „kriegt einer der Faktoren $1-\mathrm{e}^{-\alpha}$ keine Derivation ab, so verschwindet er unter a“. Setzen wir hier $a(\operatorname{ch}\mathrm{L}(\lambda)) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{L}(\lambda)$ ein und teilen unsere Gleichung durch ihre Spezialisierung an $\lambda = 0$, so ergibt sich die Weyl'sche Dimensionsformel 24.4.6.2. □

24.4.6.31. Die Gewichte maximaler Länge in einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung nennen wir ihre **extremen Gewichte**. Die extremen Gewichte von $\mathrm{L}(\nu)$ sind nach 24.4.6.29 gerade die Weylgruppenkonjugierten des höchsten Gewichts, als da heißt, die Elemente von $W\nu$.

Satz* 24.4.6.32 (Formel von Klimyk). *Gegeben $\lambda,\mu,\nu\in\mathfrak{X}^+$ dominante Gewichte gelten für die Vielfachheit $[\mathrm{L}(\mu)\otimes\mathrm{L}(\nu):\mathrm{L}(\lambda)]$ von $\mathrm{L}(\lambda)$ als Summand der Tensordarstellung die Formeln*

$$[\mathrm{L}(\mu)\otimes\mathrm{L}(\nu):\mathrm{L}(\lambda)] = \textstyle\sum_{y\in W}(-1)^{l(y)}\dim\mathrm{L}(\mu)_{\lambda-y\cdot\nu} \le \dim\mathrm{L}(\mu)_{\lambda-\nu}$$

24.4.6.33. Ist μ klein im Vergleich zu ν in dem Sinne, daß für alle einfachen Wurzeln α und alle $z\in W$ gilt $\langle\nu+z\mu,\alpha^\vee\rangle\ge -1$, so haben wir in der obigen Formel sogar ganz rechts Gleichheit für alle λ. Auch im allgemeinen zeigt unsere Formel $[\mathrm{L}(\mu)\otimes\mathrm{L}(\nu):\mathrm{L}(\lambda)]\ne 0\Rightarrow|\lambda-\nu|\le|\mu|$ bezüglich jedes unter der Weylgruppe invarianten Skalarprodukts auf $\langle R\rangle_{\mathbb{Q}}$.

Beweis. Ist E irgendeine endlichdimensionale Darstellung und $\mathrm{P}_\mu(E)$ die Multimenge ihrer Gewichte im Sinne von 2.1.6.8, wobei jedes Gewicht mit der Dimension des zugehörigen Gewichtsraums gewichtet wird und der „Multimengenanzeiger“ μ nicht mit dem Gewicht μ zu verwechseln ist, so liefert die Kostant'sche Charakterformel 24.4.6.27

$$\operatorname{ch}(E\otimes\mathrm{L}(\nu)) = \sum_{y\in W,\,\tau\in\mathrm{P}_\mu(E)}(-1)^{l(y)}\operatorname{ch}\Delta(y\cdot\nu+\tau)$$

Um die Vielfachheit von $\mathrm{L}(\lambda)$ in $E\otimes\mathrm{L}(\nu)$ zu bestimmen, müssen wir nur auf der rechten Seite die Summanden $\Delta(\lambda)$ zählen und erhalten die Gleichung aus der Formel von Klimyk in der Gestalt

$$[E\otimes\mathrm{L}(\nu):\mathrm{L}(\lambda)] = \sum_{\substack{y\in W,\tau\in\mathrm{P}_\mu(E)\\ y\cdot\nu+\tau=\lambda}}(-1)^{l(y)} = \sum_{y\in W}(-1)^{l(y)}\dim E_{\lambda-y\cdot\nu}$$

Ebenso finden wir auch $\operatorname{ch}(E\otimes\Delta(\nu)) = \sum_{\tau\in\mathrm{P}_\mu(E)}\operatorname{ch}\Delta(\nu+\tau)$ und damit sofort $[E\otimes\Delta(\nu):\mathrm{L}(\lambda)] = \dim E_{\lambda-\nu}$. Das liefert dann auch die Ungleichung in obigem Satz. □

24.4.6.34. Haben wir nun wieder $E = \mathrm{L}(\mu)$, so können wir die Kostant'sche Charakterformel auch mit der Kostant'schen Partitionsfunktion aus 24.4.4.3 schreiben in der Gestalt

$$\dim \mathrm{L}(\mu)_\eta = \sum_{x \in W} (-1)^{l(x)} \mathcal{P}(x \cdot \mu - \eta)$$

Setzen wir das in die Formel von Klimyk 24.4.6.32 ein, so ergibt sich die **Formel von Steinberg**

$$[\mathrm{L}(\mu) \otimes \mathrm{L}(\nu) : \mathrm{L}(\lambda)] = \sum_{x,y \in W} (-1)^{l(xy)} \mathcal{P}(x \cdot \mu + y \cdot \nu - \lambda)$$

24.4.6.35. Sei $T \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen und $\varepsilon_i : T \to \mathbb{C}^\times$ die Projektion auf den i-ten Diagonaleintrag. Die Charaktergruppe $\mathfrak{X}(T)$ ist die freie abelsche Gruppe über den ε_i und ihr Gruppenring ist der Ring $\mathbb{Z}[X_i, X_i^{-1}]$ der Laurentpolynome in Veränderlichen $X_1, \ldots, X_n$, wo wir $\mathrm{e}^{\varepsilon_i} = X_i$ abgekürzt haben, d.h. X_i ist ε_i aufgefaßt als Element des Gruppenrings. Der Charakter definiert einen Ringisomorphismus

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Grothendieckgruppe der} \\ \text{endlichdimensionalen polynomialen} \\ \text{Darstellungen von } \mathrm{GL}(n; \mathbb{C}) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]^{\mathcal{S}_n}$$

des Darstellungsrings der polynomialen Darstellungen mit dem Ring der symmetrischen Polynome. Die irreduziblen Darstellungen entsprechen hierbei den sogenannten **Schur-Polynomen**. Gegeben natürliche Zahlen $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$ gehört genauer zur irreduziblen Darstellung $\mathrm{L}(\lambda)$ mit höchstem Gewicht $\lambda_1 \varepsilon_1 + \ldots + \lambda_n \varepsilon_n$ das Schurpolynom S_λ mit der kombinatorischen Definition

$$S_\lambda = \det(X_j^{\lambda_i + n - i}) / \det(X_j^{n-i})$$

In der Tat folgt das aus der Weyl'schen Charakterformel und der Erkenntnis, daß wir eine Identität haben der Gestalt

$$X_1^{n-1} X_2^{n-2} \ldots X_{n-2}^2 X_{n-1}^1 X_n^0 = \mathrm{e}^{\rho + \kappa}$$

mit κ einem Gewicht, das invariant ist unter der Weylgruppe. Etwas Vorsicht ist jedoch geboten, denn weder ρ noch κ gehören zu $\mathfrak{X}(T)$.

Proposition* 24.4.6.36 (Konvexität von Gewichtsmengen). *Die Menge der Gewichte einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung einer komplexen reduktiven Liealgebra ist der Schnitt des um das höchste Gewicht verschobenen Wurzelgitters mit der konvexen Hülle der Bahn des höchsten Gewichts unter der Weylgruppe, in Formeln*

$$\mathrm{P}(\mathrm{L}(\lambda)) = \mathrm{Conv}(W\lambda) \ \cap \ (\lambda + \langle R \rangle)$$

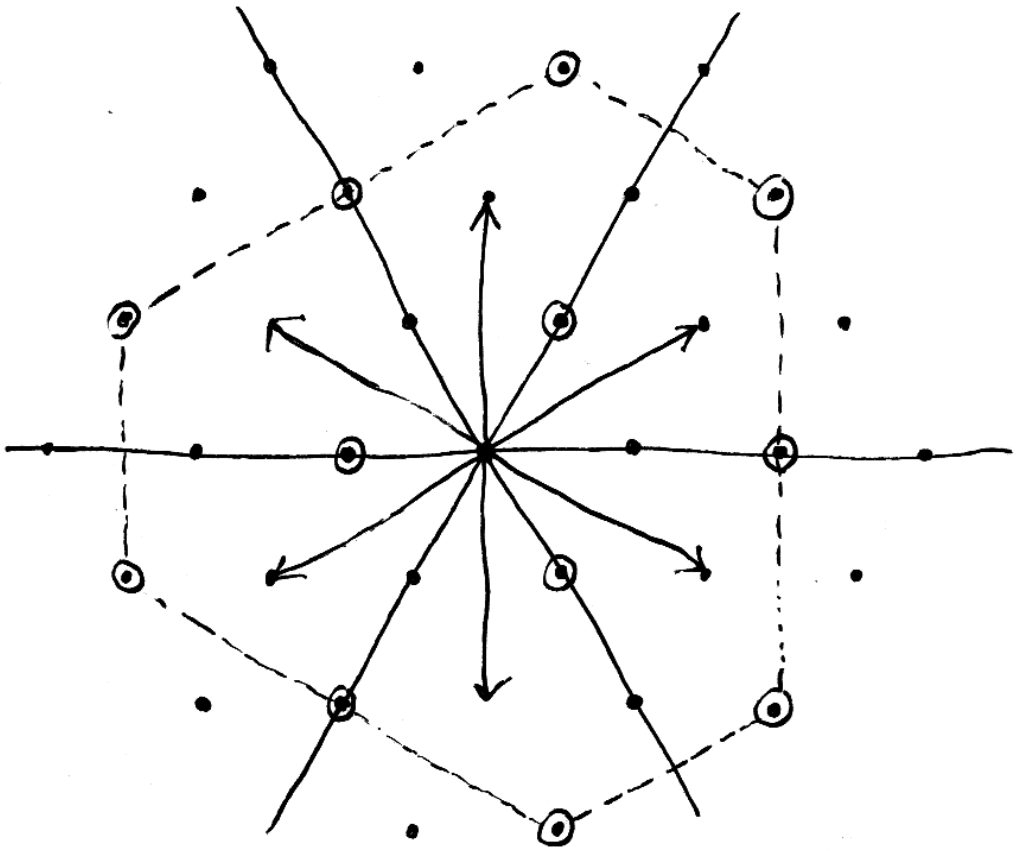


Illustration von Proposition 24.4.6.36 über die Gewichte einer irreduziblen Darstellung. Im Bild stellen die fetten Punkte ganze Gewichte dar und die eingekreisten fetten Punkte die Gewichte einer speziellen irreduziblen Darstellung. Über die Dimension der zugehörigen Gewichtsräume wird hier keine Aussage gemacht, nur daß das eben genau die Gewichte mit von Null verschiedenen Gewichtsräumen in unserer Darstellung sind.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß beide Seiten mit dem Abschluß $\bar{C}^+$ der dominanten Weylkammer denselben Schnitt haben. Aber sei K^- der von den negativen Wurzeln erzeugte Kegel. Man sieht leicht

$$\mathrm{Conv}(W\lambda) \subset \lambda + K^-$$

und wir behaupten zunächst, daß hier beide Seiten denselben Schnitt mit $\bar{C}^+$ haben. Man kann ja wohl zeigen, daß für zwei endlich erzeugte Kegel, die durch eine Hyperebene getrennt werden in dem Sinne, daß sie abgesehen vom Ursprung ganz im einen beziehungsweise im anderen offenen Halbraum liegen, der Schnitt des Einen mit dem verschobenen Anderen die konvexe Hülle der Menge aller einelementigen Schnitte von Facetten unserer beiden Kegel ist. Unser Schnitt $\bar{C}^+ \cap (\lambda + K^-)$ hat nun als extreme Punkte gerade die Punkte, die man erhält, wenn man λ senkrecht bezüglich eines unter der Weylgruppe invarianten Skalarprodukts auf den Träger einer Facette von $\bar{C}^+$ projiziert. Diese Punkte liegen aber auch in $\mathrm{Conv}(W\lambda)$ als die Schwerpunkte der Bahnen $W_F\lambda$ für W_F die Standgruppe der fraglichen Facette. Damit folgt schon mal

$$\mathrm{Conv}(W\lambda) \cap \bar{C}^+ = (\lambda + K^-) \cap \bar{C}^+$$

Schneiden wir aber die rechte Seite mit dem um λ verschobenen Wurzelgitter $\lambda + \langle R \rangle$, so sollte $\mathfrak{sl}_2$-Theorie zeigen, daß wir gerade $\mathrm{P}(\mathrm{L}(\lambda)) \cap \bar{C}^+$ erhalten. $\square$

Ergänzung 24.4.6.37. Jetzt betrachten wir die Menge

$$D := \left\{ \rho - \sum_{\alpha \in R^+} t_\alpha \alpha \;\middle|\; 0 \le t_\alpha \le 1 \right\}$$

Sie kann auch beschrieben werden als die konvexe Hülle $D = \mathrm{Conv}(W\rho)$, denn beide Seiten dieser Gleichung sind invariant unter der Weylgruppe und haben denselben Schnitt mit dem Abschluß der dominanten Weylkammer. Nun zeigen wir für alle Gewichte μ, ν aus dem Abschluß der dominanten Weylkammer die Inklusion

$$\mu + \mathrm{Conv}(W\nu) \subset \mathrm{Conv}(W(\mu + \nu))$$

Um das zu sehen, brauchen wir ja nur $\mu + W\nu \subset \mathrm{Conv}(W(\mu + \nu))$ zu zeigen. Wir behaupten sogar allgemeiner $W\mu + W\nu \subset \mathrm{Conv}(W(\mu + \nu))$. Das hinwiederum scheint mir klar, da man die Punkte aus $W\nu$ beziehungsweise $W\mu$ alle durch geeignete Spiegelfolgen „immer über eine Wand“ kriegen kann und das Ende einer solchen Spiegelfolge für einen Punkt aus $\mu + W\nu$ jeweils in der konvexen Hülle der entsprechenden Spiegelfolge aus $W\mu$ liegen muß. Daraus folgt, wenn wir $\mu = \lambda - m\rho$ und $\nu = m\rho$ nehmen, was mich Steen gefragt hatte: Gegeben λ dominant und m das Minimum der Werte aller positiven Kowurzeln darauf gehören die $\lambda - \sum_{\alpha \in R^+} n_\alpha \alpha$ für $0 \le n_\alpha \le m$ alle zur Menge der Gewichte von $\mathrm{L}(\lambda)$.

Übungen

Übung 24.4.6.38. Man zeige mithilfe einer Streckung der Nennerformel 24.4.6.30 für eine beliebige halbeinfache Liealgebra die Formel

$$\operatorname{ch} \mathrm{L}(n\rho) = \mathrm{e}^{n\rho} \prod_{\alpha \in R^+} (1 + \mathrm{e}^{-\alpha} + \ldots + \mathrm{e}^{-n\alpha})$$

Übung 24.4.6.39. Man folgere aus der Dimensionsformel, daß die symmetrischen Potenzen $\mathrm{S}^r \mathbb{C}^{n+1}$ stets irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{sl}(n+1;\mathbb{C})$ sind. Sie haben im übrigen das höchste Gewicht $r\varpi_1$. Wer Rechenzeit sparen will, sollte sich zumindest den Fall $n = 2$ überlegen. Alternativ und vielleicht einfacher kann man die Irreduzibilität auch wie in 24.1.2.23 begründen.

Übung 24.4.6.40. Ich sollte wohl einmal als Übung die fundamentale Darstellung der Dimension 27 der Liealgebra vom Typ E_6 diskutieren lassen.

Übung 24.4.6.41. Wir erinnern aus 24.4.2.9, daß die fundamentalen Gewichte zu G_2 die höchste Wurzel und die höchste kurze Wurzel sind. Die Darstellung zur höchsten Wurzel ist natürlich die adjungierte Darstellung. Man zeige, daß die Darstellungen zur höchsten kurzen Wurzel eine irreduzible Darstellung L der Dimension 7 ist mit den kurzen Wurzeln sowie der Null als Gewichten und eindimensionalen Gewichtsräumen. Gegeben ein Gewicht λ und eine Wurzel α mit $L_\lambda \neq 0 \neq L_{\lambda+\alpha}$ zeige man $x_\alpha : L_\lambda \xrightarrow{\sim} L_{\lambda+\alpha}$ für jeden von Null verschiedenen Wurzelvektor x_α. Jede von Null verschiedene invariante Bilinearform auf L ist symmetrisch und liefert so eine Einbettung unserer Liealgebra vom Typ G_2 in die $\mathfrak{so}(7)$.

Übung 24.4.6.42. Betrachtet man die Abbildung $\chi : \mathbb{Z}[\mathfrak{X}] \to \mathbb{Z}[\mathfrak{X}]^W$, die jedem e^λ den Ausdruck $\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} \mathrm{e}^{w(\lambda+\rho)}$ zuordnet, so gilt $\chi(BA) = B\chi(A)$ für alle $B \in \mathbb{Z}[\mathfrak{X}]^W$ und $A \in \mathbb{Z}[\mathfrak{X}]$. Das ist recht nahe an der Tensoridentität 25.2.4.1 und der Steinberg'schen Formel, man sieht es auch durch explizite Rechnung.

24.4.7 Cliffordalgebra und Spingruppe

24.4.7.1. Sei $n \geq 3$. Nach 22.4.4.14 gilt dann $|\pi_1(\mathrm{SO}(n))| = 2$. Nach 16.5.2.5 gibt es also ein bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmtes Paar (K, φ) bestehend aus einer einfach zusammenhängenden kompakten Liegruppe K und einem stetigen Gruppenhomomorphismus $\varphi : K \to \mathrm{SO}(n)$ mit zweielementigem Kern. Wir nennen diese einfach zusammenhängende Überlagerung K der speziellen unitären Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ die **n-te Spin-Gruppe** und notieren sie

$$\mathrm{Spin}(n)$$

Im folgenden wollen wir eine alternative Konstruktion dieser Gruppe angeben und gleichzeitig diejenigen ihrer irreduziblen Darstellungen konstruieren, die in der in 24.4.2.10 und 24.4.2.11 besprochenen allgemeinen Theorie zu fundamentalen höchsten Gewichten gehören und sich nicht als äußere Potenzen der Standarddarstellung beschreiben lassen, also in der dortigen Notation die Darstellung zum höchsten Gewicht ϖ_n und im Fall von geradem n zusätzlich die Darstellung zum höchsten Gewicht ϖ_{n-1}. Das Grundprinzip unserer Konstruktionen ist in der folgenden Bemerkung 24.4.7.2 enthalten. Wir werden sie auf den Fall der Cliffordalgebra mit ihrer Operation von $\mathrm{SO}(n)$ anwenden und müssen dafür im weiteren Verlauf erst einmal die Cliffordalgebra selbst besprechen.

24.4.7.2 (**Automorphismen von Endomorphismenringen**). Seien k ein Körper und S ein endlichdimensionaler k-Vektorraum. Nach 8.3.5.12 liefert die Operation durch Konjugation einen Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{PGL}(S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RAlg}_k^\times(\mathrm{End}_k(S))$$

zwischen der projektivisierten linearen Gruppe von S und der Gruppe der Ringalgebrenautomorphismen des Endomorphismenrings von S. Salopp gesprochen liefert also jede Operation einer Gruppe G auf dem Endomorphismenring $\mathrm{End}_k(S)$ eines endlichdimensionalen Vektorraums S durch Ringalgebrenautomorphismen eine „projektive Operation“ derselben Gruppe G auf dem Vektorraum S.

24.4.7.3. Gegeben ein Körper k und ein k-Vektorraum V versteht man unter einer **quadratischen Form auf** V eine Abbildung $q : V \to k$ derart, daß es eine Bilinearform $b : V \times V \to k$ gibt mit $q(v) = b(v, v)$.

Definition 24.4.7.4. Gegeben ein Körper k und ein k-Vektorraum V mit einer quadratischen Form $q : V \to k$ erklärt man die **Clifford-Algebra**

$$\mathrm{Cliff}(V) = \mathrm{Cliff}_q(V)$$

als den Quotienten der Tensoralgebra $\mathrm{T}V$ nach dem Ideal, das von den Relationen $v \otimes v = q(v)$ mit $v \in V$ erzeugt wird. Da dies Ideal homogen ist für die von der offensichtlichen $\mathbb{Z}$-Graduierung abgeleitete $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Graduierung der Tensoralgebra, besitzt die Cliffordalgebra eine natürliche $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Graduierung

$$\mathrm{Cliff}(V) = \mathrm{Cliff}_{\bar{0}}(V) \oplus \mathrm{Cliff}_{\bar{1}}(V)$$

Wir nennen die homogenen Elemente vom Grad $\bar{0}$ **gerade** und die homogenen Elemente vom Grad $\bar{1}$ **ungerade**.

24.4.7.5. Gegeben ein Vektorraum V mit einer Bilinearform b vereinbaren wir die Notation $\mathrm{Cliff}_b(V) := \mathrm{Cliff}_q(V)$ für die Clifford-Algebra zur quadratischen Form $q = q_b$ mit $q(v) = b(v, v)$. In der Literatur findet man auch eine andere Konvention, bei der man stattdessen mit $q(v) = -b(v, v)$ arbeitet.

24.4.7.6 (**Die Cliffordalgebra durch Erzeuger und Relationen**). Gegeben ein Vektorraum V mit einer Bilinearform b und eine Basis $(v_i)_{i\in I}$ von V mag man die Cliffordalgebra $\mathrm{Cliff}_b(V)$ auch beschreiben als die Ringalgebra, die von den Symbolen v_i mit den Relationen $v_i^2 = b(v_i, v_i)$ sowie $v_iv_j + v_jv_i = b(v_i, v_j) + b(v_j, v_i)$ für alle $i, j \in I$ erzeugt wird.

24.4.7.7. Gegeben Vektorräume mit quadratischen Formen (V, q) und (W, p) ist die Abbildung $(v, w) \mapsto q(v) + p(w)$ eine quadratische Form auf $V \oplus W$. Wir notieren sie $q \oplus p$. Die Vorschrift $(v, w) \mapsto v\bar{\otimes}w$ liefert einen Isomorphismus

$$\mathrm{Cliff}_{q\oplus p}(V \oplus W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cliff}_q(V)\bar{\otimes}\,\mathrm{Cliff}_p(W)$$

für $\bar{\otimes}$ das Supertensorprodukt von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierten Algebren aus 18.3.1.32, also das übliche Tensorprodukt von Vektorräumen mit einer um das übliche Vorzeichen abgeänderten Multiplikation.

24.4.7.8 (**Die Cliffordalgebra zur Standardform**). Gegeben ein Körper k heiße die quadratische Form $q : k^n \to k$ gegeben durch $q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ die **Standardform** $q = \mathrm{std}$. Die zugehörige Cliffordalgebra kürzen wir ab mit

$$\mathrm{Cliff}_n := \mathrm{Cliff}_{\mathrm{std}}(k^n)$$

Man prüft explizit $\mathrm{Cliff}_1 \cong k[\tau]$ mit $\tau^2 = 1$ und mit der Graduierung, die τ den Grad Eins gibt. Unter der Annahme $\mathrm{char}(k) \neq 2$ und der Annahme der Existenz einer Wurzel i aus (-1) erhalten wir einen Isomorphismus $\mathrm{Cliff}_2 \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(k^{1|1})$ von Superringalgebren im Sinne von 18.3.1.10 und 18.3.1.33 mit der Notation $k^{a|b}$ für Supervektorräume aus 18.2.1.18 durch $\mathrm{e}_1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathrm{e}_2 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Wegen der Identität $\mathrm{End}(k^{a|b})\bar{\otimes}\,\mathrm{End}(k^{c|d}) \cong \mathrm{End}(k^{ac+bd|ad+bc})$ aus 18.3.1.33 folgt mit 24.4.7.7 induktiv die Beschreibung $\mathrm{Cliff}_{2m} \cong \mathrm{End}(k^{2^{m-1}|2^{m-1}})$ der Cliffordalgebra als Superalgebra und nach Vergessen der Graduierung erhalten wir einen Isomorphismus von Ringalgebren

$$\mathrm{Cliff}_{2m} \cong \mathrm{Mat}(2^m; k)$$

Weiter erhalten wir, immer noch unter der Annahme $\mathrm{char}(k) \neq 2$ und der Annahme der Existenz einer Wurzel i aus (-1), einen Isomorphismen von Superalgebren

$$\mathrm{Cliff}_{2m+1} \cong \mathrm{End}(k^{2^{m-1}|2^{m-1}})\bar{\otimes}k[\tau]$$

für $\tau^2 = 1$. Nun kann jede Superalgebra A als Algebra mit Operation der zweielementigen Gruppe verstanden werden, deren nichttriviales Element durch 1 auf den graden Elementen operiert und durch (-1) auf den ungeraden, und $A\bar{\otimes}k[\tau]$ als der vertwistete Gruppenring, dessen Modulkategorie äquivalent ist zur Kategorie der äquivarianten alias graduierten A-Moduln. Die irreduziblen Cliff_{2m+1}-Moduln entsprechen so den graduiert irreduziblen graduierten Cliff_{2m}-Moduln,

und von denen gibt es offensichtlich genau Zwei, nämlich den Modul $k^{2^{m-1}|2^{m-1}}$ und denselben Modul mit der vertauschten Graduierung. Damit besitzt Cliff_{2m+1} bis auf Isomorphismus genau zwei irreduzible Moduln, die beide die Dimension 2^m haben, und mithilfe eines Dimensionsvergleichs liefert die Operation einen Isomorphismus von k-Ringalgebren

$$\mathrm{Cliff}_{2m+1} \cong \mathrm{Mat}(2^m; k) \times \mathrm{Mat}(2^m; k)$$

Insbesondere ist im Fall $\mathrm{char}(k) = 0$ die Cliffordalgebra zu einer nichtausgearteten Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum stets halbeinfach, da sie nämlich unter einer geeigneten Körpererweiterung halbeinfach wird, vergleiche 8.3.6.13.

24.4.7.9 (**Operation der orthogonalen Gruppe auf der Cliffordalgebra**). Ist V ein Vektorraum über einem Körper k und $q : V \to k$ eine quadratische Form, so operiert die Standgruppe $\mathrm{O}(V, q)$ unserer quadratischen Form offensichtlich durch Ringalgebrenautomorphismen auf der zugehörigen Cliffordalgebra und wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{O}(V, q) \to \mathrm{RAlg}_k^\times(\mathrm{Cliff}_q(V))$$

Genauso offensichtlich läßt sich, wenn wir zur Vereinfachung $\mathrm{char}\, k \neq 2$ annehmen und die eindeutig bestimmte symmetrische Bilinearform b mit $b(v, v) = q(v)$ betrachten, die offensichtliche Operation der Standliealgebra $\mathfrak{o}(V, b)$ unserer Bilinearform zu einer Operation durch Derivationen auf der Cliffordalgebra fortsetzen und wir erhalten einen Liealgebrenhomomorphismus

$$\mathrm{can} : \mathfrak{o}(V, b) \to \mathrm{Der}_k(\mathrm{Cliff}_b(V))$$

24.4.7.10. Gegeben ein Körper k und eine k-Ringalgebra A haben wir stets einen Homomorphismus von Liealgebren

$$\mathrm{ad} : A_{\mathrm{L}} \to \mathrm{Der}_k(A)$$

Sein Kern ist das Zentrum $\mathrm{Z}(A)$ von A. Ist insbesondere $A = \mathrm{End}(S)$ der Endomorphismenring eines endlichdimensionalen k-Vektorraums S, so besteht das Zentrum aus den skalaren Matrizen und unter der Annahme $\mathrm{char}(k) = 0$ erhalten wir eine Injektion

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{sl}(S) \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(\mathrm{End}(S))$$

Ist allgemeiner A eine halbeinfache endlichdimensionale k-Ringalgebra und bezeichnet $A_{\mathrm{L}}^{(1)} \subset A_{\mathrm{L}}$ den von den Kommutatoren erzeugten Untervektorraum, so erhalten wir in derselben Weise eine Injektion

$$\mathrm{ad} : A_{\mathrm{L}}^{(1)} \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(A)$$

In der Tat folgt das leicht für Ringalgebren A, die endliche Produkte von Matrixringen sind. Da beide Seiten verträglich sind mit Körpererweiterungen, folgt es dann mit 8.3.5.6 und 8.3.6.13 sogar für beliebige endlichdimensionale halbeinfache Ringalgebren über einem Körper der Charakteristik Null.

Ergänzung 24.4.7.11 (**Derivationen von Endomorphismenringen**). Das folgende ist eine infinitesimale Version von 24.4.7.2. Seien k ein Körper der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ und S ein endlichdimensionaler k-Vektorraum. Nach 24.2.2.8 liefert die adjungierte Operation einen Isomorphismus von Liealgebren

$$\operatorname{ad} : \mathfrak{sl}(S) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k(\operatorname{End}_k(S))$$

Wir ordnen hier $X \in \operatorname{End}_k(S)_{\mathrm{L}}$ die Derivation $(\operatorname{ad} X) : Y \mapsto XY - YX$ der assoziativen Algebra $\operatorname{End}_k(S)$ zu und schränken diese Abbildung auf die Unterliealgebra der spurfreien Endomorphismen ein. Ist also in anderen Worten A eine k-Ringalgebra, die isomorph ist zum Endomorphismenring eines endlichdimensionalen k-Vektorraums, so liefert die adjungierte Operation einen Isomorphismus von Liealgebren

$$\operatorname{ad} : A_{\mathrm{L}}^{(1)} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k(A)$$

zwischen der derivierten Liealgebra $A_{\mathrm{L}}^{(1)}$ von A_{L} alias dem von den Kommutatoren aufgespannten Teilraum und der Liealgebra der Derivationen von A. In dieser Formulierung gilt es dann offensichtlich auch für Ringalgebren A, die endliche Produkte von Matrixringen sind. Da beide Seiten verträglich sind mit Körpererweiterungen, folgt es dann mit 8.3.5.6 und 8.3.6.13 sogar für beliebige endlichdimensionale halbeinfache Ringalgebren über einem Körper der Charakteristik Null.

24.4.7.12 (**Die Spindarstellung**). Gegeben (V, b) ein endlichdimensionaler Vektorraum mit einer symmetrischen und nichtausgearteten Bilinearform und $q(v) = b(v, v)$ betrachen wir den Isomorphismus $\varphi : V \otimes V \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}(V)$ gegeben durch $(\varphi(v \otimes w))(u) = b(w, u)v$. Außerdem betrachten wir das Aufmultiplizieren $\psi : V \otimes V \to \operatorname{Cliff}_q(V)$ und finden für jeden Tensor $T \in V \otimes V$ und alle $u \in V$ in der Cliffordalgebra mit der Notation $\tau : V \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes V$ für die Vertauschung die Identität

$$\psi(T)u - u\psi(T) = \varphi(T - \tau T)(u)$$

Weiter ist $\varphi(T) \in \mathfrak{o}(V, b)$ alias $b(\varphi(T)x, u) + b(x, \varphi(T)u) = 0$ offensichtlich gleichbedeutend zu $\tau T = -T$. Erklären wir also $\alpha : \mathfrak{o}(V, b) \to \operatorname{Cliff}_q(V)$ durch $\alpha(X) := \psi(\varphi^{-1}(X))$, so gilt in der Cliffordalgebra für alle $u \in V$ die Identität $\alpha(X)u - u\alpha(X) = 2X(u)$ und wir haben

$$\operatorname{ad}(\alpha(X)) = \operatorname{can}(2X) \in \operatorname{Der}(\operatorname{Cliff}_q(V))$$

Andererseits gehört $\psi(T - \tau T)$ offensichtlich stets zur derivierten Liealgebra $\mathrm{Cliff}_q(V)_{\mathrm{L}}^{(1)}$ alias dem von den Kommutatoren aufgespannten Teilraum. Nehmen wir also zusätzlich an, daß wir über einem Körper der Charakteristik $\mathrm{char}(k) = 0$ arbeiten, und setzen $\beta(X) := \alpha(X)/2$, so folgt aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{o}(V,b) \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] \\ \mathrm{Cliff}_q(V)_{\mathrm{L}}^{(1)} \arrow[r, hook] & \mathrm{Der}_k(\mathrm{Cliff}_q(V)) \end{tikzcd}$$

zusammen mit der Erkenntnis 24.4.7.8, daß die Cliffordalgebra halbeinfach ist und folglich die untere Horizontale nach 24.4.7.10 wie im Diagramm bereits angedeutet injektiv sein muß, daß auch β ein Homomorphismus von Liealgebren ist. Jeder Modul über der Cliffordalgebra wird damit eine Darstellung der orthogonalen Liealgebra. Die direkte Summe aller einfachen Moduln bis auf Isomorphismus der Cliffordalgebra heißt die **Spin-Darstellung** der entsprechenden orthogonalen Liealgebra. Im folgenden besprechen wir, welche expliziten Formeln sich hinter dieser allgemeinen Theorie verstecken.

24.4.7.13. Seien k ein Körper und V ein k-Vektorraum. Wir erinnern aus 4.6.5.21 für $\lambda \in V^*$ das partielle Auswerten $i_\lambda : \bigwedge^n V \to \bigwedge^{n-1} V$ und die Identitäten $i_\lambda^2 = 0$ sowie im Ring der Endomorphismen der äußeren Algebra die für uns im folgenden besonders bedeutsame Identität

$$\big((v\wedge) + i_\lambda\big)^2 = (v\wedge) \circ i_\lambda + i_\lambda \circ (v\wedge) = (\lambda(v)\cdot)$$

24.4.7.14 (**Die Spindarstellung zur Evaluationsform**). Seien k ein Körper und P, Q zwei k-Vektorräume. Jede bilineare Abbildung $b : P \times Q \to k$ kann als eine quadratische Form $b : P \oplus Q \to k$ aufgefaßt werden. Wir erhalten in diesem Fall nach 24.4.7.13 sogar einen Algebrenhomomorphismus

$$j : \mathrm{Cliff}_b(P \oplus Q) \to \mathrm{End}_k(\textstyle\bigwedge P)$$

durch $j(p,q) = (p\wedge) + i_{b(\,,q)}$. Ist unsere Paarung eine nichtausgeartete Paarung endlichdimensionaler Vektorräume, so können wir gleich von der Evaluationspaarung ev mit dem Dualraum ausgehen. Auf diese Weise wird $\bigwedge P$ offensichtlich sogar ein einfacher Modul über $\mathrm{Cliff}_{\mathrm{ev}}(P \oplus P^*)$. Dieser Modul bleibt einfach bei jeder Erweiterung der Skalare zu einer Körpererweiterung von k und nach dem Satz von Wedderburn 8.3.3.6 induziert die Operation damit einen surjektiven und dann aus Dimensionsgründen sogar bijektiven Ringalgebrenhomomorphismus

$$\mathrm{Cliff}_{\mathrm{ev}}(P \oplus P^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_k\left(\textstyle\bigwedge P\right)$$

Insbesondere besitzt auch für die Evaluationsform die Cliffordalgebra nur einen einzigen einfachen Modul. Er fällt natürlich mit dem einzigen einfachen Modul aus 24.4.7.8 zusammen, wenn die Evaluationsform isomorph ist zu einer Standardform und die Voraussetzungen aus 24.4.7.8 erfüllt sind.

Satz 24.4.7.15 (Basis der Cliffordalgebra). *Seien k ein Körper und (V, q) ein k-Vektorraum mit einer quadratischen Form und $(v_i)_{i\in I}$ eine k-Basis von V und $\leq$ eine Anordnung von I. So bilden die streng monotonen Monome $v_{i(1)}v_{i(2)}\dots v_{i(r)}$ mit $i(1) < i(2) < \dots < i(r)$ und $r \geq 0$ eine k-Basis der Cliffordalgebra.*

Beweis in speziellen Fällen. Ist unser Raum endlichdimensional und die Charakteristik nicht Zwei, so folgt der Satz unmittelbar aus der vorhergehenden Bemerkung 24.4.7.7, aus Satz 4.2.3.11 über die Existenz einer Orthogonalbasis und aus der Darstellbarkeit quadratischer Formen durch symmetrische Bilinearformen. □

Beweis im Allgemeinen. Gegeben $v, w \in V$ gilt in der Cliffordalgebra die Identität $(v + w)^2 = v^2 + vw + wv + w^2$ und folglich $vw \in k1 - wv$. Das zeigt schon mal, daß unsere streng monotonen Monome ein Erzeugendensystem bilden. Betrachten wir genauer eine Bilinearform $b : V \times V \to k$ mit $b(v, v) = q(v)\ \forall v \in V$, so finden wir in der Cliffordalgebra

$$vw + wv = b(v, w) + b(w, v)$$

Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, konstruieren wir auf $\bigwedge V$ eine Struktur als Modul über der Cliffordalgebra. Dazu betrachten wir für jeden Vektor $v \in V$ die Linearform $b(v, \ )$ und den Endomorphismus

$$J(v) := (v\wedge\ ) + i_{b(v,\ )}$$

der äußeren Algebra und folgern mit unserer Vorüberlegung 24.4.7.13 sofort $J(v)^2 = b(v, v)$. Das zeigt, daß die Vorschrift $v \mapsto J(v)$ zu einem Ringalgebrenhomomorphismus

$$J : \mathrm{Cliff}_q(V) \to \mathrm{End}\,(\textstyle\bigwedge V)$$

ausgedehnt werden kann. So wird $\bigwedge V$ ein $\mathrm{Cliff}_q(V)$-Modul. Lassen wir ein Monom $v_1v_2\dots v_r$ der Cliffordalgebra auf $1 \in \bigwedge V$ operieren, so erhalten wir einen Vektor in $v_1 \wedge \dots \wedge v_r + \bigwedge^{<r} V$. Die lineare Unabhängigkeit unserer streng monotonen Monome folgt damit aus der Tatsache 4.6.5.6, daß die entsprechenden Monome $v_{i(1)} \wedge \dots \wedge v_{i(r)}$ linear unabhängig sind in der äußeren Algebra. Sie bilden nach 4.6.5.6 sogar eine Basis der äußeren Algebra, mithin induziert das Anwenden auf $1 \in \bigwedge V$ eine Bijektion

$$\mathrm{Cliff}_q(V) \xrightarrow{\sim} \textstyle\bigwedge V$$

In anderen Worten ist unser Modul frei vom Rang Eins über der Cliffordalgebra mit Erzeuger $1 \in \bigwedge V$. $\square$

24.4.7.16 (**Gewichte für** D_n). Wir erinnern für $n \geq 2$ aus 24.2.3.32 das Wurzelsystem $R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ mit der Bezeichnung D_n von $\mathfrak{so}(2n)$. Wir erinnern, daß die Weylgruppe aus allen Permutationen der ε_i gefolgt von der Änderung einer geraden Zahl von Vorzeichen besteht. Wir erinnern aus Übung 23.2.2.17 seine Basis $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ für $1 \leq i < n$ zusammen mit $\alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$. Wir erinnern aus Übung 24.4.2.10 die zu dieser Basis gehörigen fundamentalen dominanten Gewichte

$$\begin{array}{lcl} \varpi_i & = & \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i \quad \text{für } 1 \leq i < n-1, \\ \varpi_{n-1} & = & (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)/2, \\ \varpi_n & = & (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)/2. \end{array}$$

Aus 22.2.5.12 folgt, daß für $1 \leq i < n$ die äußeren Potenzen irreduzible Darstellungen sind. Man erkennt unschwer $\bigwedge^i(\mathbb{C}^{2n}) = \mathrm{L}(\varpi_i)$ für $1 \leq i < n-1$ und $\bigwedge^{n-1}(\mathbb{C}^{2n}) = \mathrm{L}(\varpi_{n-1} + \varpi_n)$. Weiter folgt aus 22.2.5.12, daß $\bigwedge^n(\mathbb{C}^{2n})$ eine Summe von zwei irreduziblen Darstellungen ist. Man zeigt auch unschwer $\bigwedge^n(\mathbb{C}^{2n}) \cong \mathrm{L}(2\varpi_{n-1}) \oplus \mathrm{L}(2\varpi_n)$. Irreduzible Darstellungen zu den höchsten Gewichten ϖ_{n-1} und ϖ_n liefert die sogenannte Clifford-Algebra, wie wir im Anschluß besprechen.

24.4.7.17 (**Konstruktion der Spindarstellung im geraden Fall**). Wir betrachten die komplexifizierte Cliffordalgebra Cliff_{2n} des $\mathbb{R}^{2n}$ mit seinem Standardskalarprodukt. Sie trägt eine offensichtliche Operation der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(2n)$. Nach 24.4.7.15 hat diese Cliffordalgebra in unseren Konventionen aus 24.4.2.10 als Gewichte alle Summen über Teilmengen der $2n$-elementigen Menge

$$\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, -\varepsilon_1, \ldots, -\varepsilon_n\}$$

Nun besitzt sie nach 24.4.7.14 bis auf Isomorphismus genau einen einfachen Cliffordmodul S und ist isomorph zur Ringalgebra $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$ der linearen Endomorphismen dieses Moduls. Halten wir einen solchen einfachen Modul S fest, so erhalten wir erst mit 24.4.7.2 einen Liegruppenhomomorphismus $\mathrm{SO}(2n) \to \mathrm{PGL}(S)$ und dann mit 22.4.4.22 für $n \geq 2$, was wir ab jetzt stets annehmen wollen, einen Liegruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Spin}(2n) \to \mathrm{SL}(S)$$

In anderen Worten kann demnach S so zu einer Darstellung der universellen Überlagerung von $\mathrm{SO}(2n)$ gemacht werden, daß die induzierte Operation auf $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$

von der bereits bekannten Operation von $\mathrm{SO}(2n)$ herkommt. Der prinzipale Automorphismus unseres Wurzelsystems operiert auf dem Charaktergitter als die Identität bei geradem n und als die Vertauschung der beiden letzten fundamentalen Gewichte ϖ_{n-1} und ϖ_n bei ungeradem n. Ist

$$b\varpi_{n-1} + c\varpi_n + \sum_{i \le n-2} a_i \varpi_i$$

Höchstgewicht einer irreduziblen Komponente der $\mathfrak{so}(2n)$-Darstellung S, so ist $c\varpi_{n-1} + b\varpi_n + \sum_{i \le n-2} a_i \varpi_i$ Höchstgewicht einer irreduziblen Komponente von S^* und die Summe dieser beiden Höchstgewichte muß ein Gewicht von $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$ sein. Wir folgern, daß alle a_i Null sein müssen, da ε_1 in keinem Gewicht von $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$ mit einem Koeffizienten > 1 auftritt. In derselben Weise folgern wir $b + c \le 1$. Als Höchstgewichte der irreduziblen Komponenten von S kommen also nur ϖ_{n-1}, ϖ_n und 0 in Frage. Es kann aber nicht nur die Null als Höchstgewicht vorkommen. Also ist auch die Null ausgeschlossen, da kein ε_i in einem Gewicht von $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$ mit einem Koeffizienten außerhalb von $\mathbb{Z}$ auftritt, und als Höchstgewichte kommen nur ϖ_{n-1} und ϖ_n in Frage. Beide müssen dann genauer genau einmal vorkommen, sonst würden uns Gewichte von $\mathrm{End}_k(S)$ fehlen oder hätten eine zu hohe Multiplizität. Für die Darstellung S von $\mathrm{Spin}(2n)$ folgern wir einen Isomorphismus

$$S \cong \mathrm{L}(\varpi_n) \oplus \mathrm{L}(\varpi_{n-1})$$

24.4.7.18 (**Konstruktion der Spindarstellung im ungeraden Fall**). Jetzt betrachten wir die komplexifizierte Cliffordalgebra Cliff_{2n+1} des $\mathbb{R}^{2n+1}$ mit seinem Standard-Skalarprodukt. Sie trägt eine offensichtliche Operation von $\mathrm{O}(2n+1)$. Nach 24.4.7.8 besitzt Cliff_{2n+1} bis auf Isomorphismus genau zwei irreduzible Moduln V und W, die beide die Dimension 2^n haben, und die Operation liefert einen Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Ringalgebren

$$\mathrm{Cliff}_{2n+1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \times \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$$

Die beiden Faktoren sind eindeutig bestimmt und unsere Operation der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(2n+1)$ induziert eine Operation von $\mathrm{SO}(2n+1)$ auf jedem von ihnen. Wie zuvor in 24.4.7.17 versehen wir dann V und W mit der Struktur einer Darstellung der Spin-Gruppe $\mathrm{Spin}(2n+1)$. Nun sind die Gewichte der Standarddarstellung der $\mathrm{SO}(2n+1)$ nach 24.2.3.33 in der dortigen Notation die Null und $\pm\varepsilon_i$ für $1 \le i \le n$. Die Cliffordalgebra hat also $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$ als höchstes Gewicht und der zugehörige Gewichtsraum ist zweidimensional. Nach 24.4.2.11 ist das gerade das Doppelte $2\varpi_n$ des Fundamentalgewichts zur kurzen einfachen Wurzel. Sowohl V als auch W müssen also höchstes Gewicht $\varpi_n = (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)/2$ haben. Nun hat $\mathrm{L}(\varpi_n)$ offensichtlich 2^n extreme Gewichte $(\pm\varepsilon_1 \pm \ldots \pm \varepsilon_n)/2$. Ein Vergleich der Dimensionen zeigt, daß das auch schon alle Gewichte von $\mathrm{L}(\varpi_n)$ sein müssen und daß gilt $V \cong W \cong \mathrm{L}(\varpi_n)$ als Darstellungen von $\mathrm{Spin}(2n+1)$.

24.4.7.19. Die Operation der jeweiligen Liealgebren auf den Spindarstellungen kann man nun an den allgemeinen Überlegungen aus 24.4.7.12 ablesen. Jedem Element der Liealgebra ordnet man dabei einen Kommutator in der Cliffordalgebra zu, und die Multiplikation mit diesem Kommutator ist dann die Operation des jeweiligen Elements. Ich schreibe die Formeln nicht weiter aus.

Ergänzung 24.4.7.20. Wir prüfen hier durch explizite Rechnung, daß unsere Abbildung β aus 24.4.7.12 sogar unter der schwächeren Annahme, daß wir über einem Körper einer Charakteristik $\operatorname{char}(k) \neq 2$ arbeiten, ein Homomorphismus von Liealgebren ist. Die von $\operatorname{End} V$ unter φ auf $V \otimes V$ induzierte Lieklammer ist $[w \otimes z, y \otimes x] = w \otimes b(z,y)x - y \otimes b(x,w)z$. Für die antisymmetrischen Ausdrücke finden wir dann wegen $2(w \wedge z) = w \otimes z - z \otimes w$ die Formel

$$\begin{aligned}
4[w \wedge z, y \wedge x] &= [w \otimes z - z \otimes w, y \otimes x - x \otimes y] \\
&= w \otimes b(z,y)x - w \otimes b(z,x)y \\
&\quad -z \otimes b(w,y)x + z \otimes b(w,x)y \\
&\quad -y \otimes b(x,w)z + y \otimes b(x,z)w \\
&\quad +x \otimes b(y,w)z - x \otimes b(y,z)w \\
&= \langle z,y\rangle w \wedge x - \langle z,x\rangle w \wedge y + \langle y,w\rangle x \wedge z - \langle x,w\rangle y \wedge z
\end{aligned}$$

mit $\langle\ ,\ \rangle = 2b$. Andererseits gilt hinwiederum in unserer Cliffordalgebra die Identität $(v+w)^2 = v^2 + vw + wv + w^2$ alias $vw + wv = \langle v,w\rangle$ und wir erhalten durch Umformen in angeordnete Monome für die alphabetische Reihung

$$\begin{aligned}
[wz, yx] &= wzyx - yxwz \\
&= w\langle y,z\rangle x - wyzx - y\langle x,w\rangle z + ywxz \\
&= \langle y,z\rangle wx - wy\langle z,x\rangle + wyxz - \langle x,w\rangle yz + \langle y,w\rangle xz - wyxz \\
&= \langle y,z\rangle wx - \langle z,x\rangle wy + \langle y,x\rangle wz - wxyz \\
&\quad -\langle x,w\rangle yz + \langle y,w\rangle xz - \langle y,x\rangle wvz + wxyz \\
&= \langle y,z\rangle wx - \langle z,x\rangle wy - \langle x,w\rangle yz + \langle y,w\rangle xz
\end{aligned}$$

Dann ist $[wz - zw, yx - xy] = [2wz - \langle w,z\rangle, 2yx - \langle y,x\rangle]$ eben das Vierfache und wir erhalten

$$\begin{aligned}
[wz - zw, yx - xy] &= 2\langle y,z\rangle 2wx - 2\langle z,x\rangle 2wy - 2\langle x,w\rangle 2yz + 2\langle y,w\rangle 2xz \\
&= 2\langle y,z\rangle(wx - xw) - 2\langle z,x\rangle(wy - yw) \\
&\quad -2\langle x,w\rangle(yz - zy) + 2\langle y,w\rangle(xz - zx)
\end{aligned}$$

Es folgt, daß die durch $8(y \wedge x) \mapsto yx - xy$ gegebene Abbildung in der Tat mit der Lieklammer verträglich ist.

24.4.7.21 (**Explizite Konstruktion einer Überlagerung von** $\mathrm{SO}(n)$). Ist V ein reeller Skalarproduktraum, so prüft man leicht für alle $v, w \in V$ mit $\|v\| = 1$ in der Cliffordalgebra die Formel

$$-vwv^{-1} = w - 2\langle v, w\rangle v$$

In Worten stabilisiert also die Konjugation mit v den Teilraum $V \subset \mathrm{Cliff}(V)$ der Cliffordalgebra und ihr Negatives operiert dort als die Spiegelung an der zu v orthogonalen Hyperebene, so daß die Konjugation mit v selbst als eine Art „Spiegelung an der von v erzeugten Gerade“ operiert. Nun setzt sich die Multiplikation mit (-1) auf V offensichtlich fort zu einem wohlbestimmten Automorphismus sgn der Cliffordalgebra, der die Identität ist auf geraden Elementen und (-1) auf ungeraden Elementen. Die Vektoren der Länge Eins von V gehören damit zur Untergruppe $U \subset \mathrm{Cliff}^\times$ derjenigen Einheiten c der Cliffordalgebra mit $\mathrm{sgn}(c)wc^{-1} \in V \ \forall w \in V$ und $w \mapsto \mathrm{sgn}(c)wc^{-1}$ orthogonal. Sind weiter $u, v \in V$ orthogonal von der Länge Eins, so gehören alle $\cos t + (\sin t)uv = ((\cos t)v + (\sin t)u)v$ auch zu dieser Untergruppe U. Unter dem durch $c \mapsto (w \mapsto (\mathrm{sgn}\, c)wc^{-1}))$ gegebenen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : U \to \mathrm{O}(V)$$

wird unser Element operieren durch eine Spiegelung an der von v erzeugten Gerade gefolgt von einer Spiegelung an der von $(\cos t)v + (\sin t)u$ erzeugten Gerade, mithin als eine Drehung um den Winkel $2t$ mit $v \mapsto (\cos 2t)v + (\sin 2t)u$ und $u \mapsto (\cos 2t)u - (\sin 2t)v$ in der Ebene $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ und als Identität auf deren orthogonalem Komplement. Wegen $uv = -vu$ ist andererseits $t \mapsto \cos t + (\sin t)uv$ eine Einparameteruntergruppe von U. Da die orthogonale Gruppe nach 4.1.11.28 durch Spiegelungen an Hyperebenen erzeugt wird, ist unsere Abbildung eine Surjektion $\varphi : U \twoheadrightarrow \mathrm{O}(V)$. Um ihren Kern auszurechnen, bestimmen wir alle $c \in \mathrm{Cliff}$ mit $\mathrm{sgn}(c)v = vc \ \forall v \in V$. Gegeben eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ und c ein streng monotones Monom in den v_i finden wir nach kurzer Rechnung

$$\mathrm{sgn}(c)v_j - v_j c = \begin{cases} 0 & v_j \text{ kommt in unserem Monom nicht vor;} \\ -2v_j c & v_j \text{ kommt in unserem Monom vor.} \end{cases}$$

Weiter ist im zweiten Fall $v_j c$ bis auf Vorzeichen gerade unser um den Faktor v_j erleichtertes Monom. Das zeigt $\ker \varphi = \mathbb{R}^\times$. Nun besitzt unsere Cliffordalgebra offensichtlich auch genau einen Antiautomorphismus α, der auf V die Identität ist, und dieser Antiautomorphismus kommutiert mit dem Automorphismus sgn. Insbesondere können wir in U die Untergruppe

$$\mathrm{Pin}(V) := \{c \in U \mid \alpha(c)c = 1\}$$

betrachten. Sie umfaßt immer noch V und wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$\{\pm 1\} \hookrightarrow \mathrm{Pin}(V) \twoheadrightarrow \mathrm{O}(V)$$

Andererseits liegt nach obiger Rechnung (-1) im Fall $\dim V \geq 2$ in der Einskomponente von $\mathrm{Pin}(V)$. Sie heißt auch die **Spin-Guppe** $\mathrm{Spin}(V)$ und φ induziert eine zusammenhängende zweiblättrige Überlagerung

$$\{\pm 1\} \hookrightarrow \mathrm{Spin}(V) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(V)$$

Übungen

Übung 24.4.7.22 (**Ausreduzieren der äußeren Algebra unter $\mathfrak{so}(2n+1)$**). Bezeichne $S = \mathrm{L}(\varpi_n)$ die Spindarstellung von $\mathfrak{so}(2n+1)$. Man schätze mit der Formel von Klimyk 24.4.6.32 die Multiplizitäten der irreduziblen Summanden in $S \otimes S$ ab und folgere aus $S \otimes S \cong \bigwedge \mathbb{C}^{2n+1}$ ein weiteres Mal die Irreduzibilität der $\bigwedge^i \mathbb{C}^{2n}$.

Übung 24.4.7.23 (**Ausreduzieren der äußeren Algebra unter $\mathfrak{so}(2n)$**). Bezeichne $S = \mathrm{L}(\varpi_{n-1}) \oplus \mathrm{L}(\varpi_n)$ die Spindarstellung von $\mathfrak{so}(2n)$. Man schätze mit der Formel von Klimyk 24.4.6.32 die Multiplizitäten der irreduziblen Summanden in $S \otimes S$ ab und folgere aus $S \otimes S \cong \bigwedge \mathbb{C}^{2n}$ ein weiteres Mal die Irreduzibilität der $\bigwedge^i \mathbb{C}^{2n}$ für $i \neq n$ sowie die Zerlegung $\bigwedge^n \mathbb{C}^{2n} \cong \mathrm{L}(2\varpi_n) \oplus \mathrm{L}(2\varpi_{n-1})$.

Kapitel 25

Kategorie $\mathcal{O}$

Inhalt

25.1 Infinitesimale zentrale Charaktere 4236

25.1.1 Motivation 4236

25.1.2 Das Zentrum der universellen Einhüllenden 4236

25.1.3 Der Chevalley-Isomorphismus 4239

25.1.4 Herleitung des Harish-Chandra-Isomorphismus . . 4242

25.1.5 Zentrale Charaktere 4247

25.1.6 Die ganzzahlige Weylgruppe eines Gewichts 4249

25.2 Multiplizitäten von Vermamoduln 4255

25.2.1 Kategorie $\mathcal{O}$ 4255

25.2.2 Zerlegungen der Kategorie $\mathcal{O}$ 4260

25.2.3 Projektive Objekte von $\mathcal{O}$ 4262

25.2.4 Die Tensoridentität* 4266

25.2.5 Verschiebungsfunktoren 4267

25.2.6 Homomorphismen zwischen Vermamoduln 4272

25.3 Kazhdan-Lusztig-Theorie 4284

25.3.1 Iwahori-Hecke-Algebra 4284

25.3.2 Kanonische Basis der Hecke-Algebra 4289

25.4 Danksagung 4292

25.1 Infinitesimale zentrale Charaktere

25.1.1 Motivation

25.1.1.1 (**Bezug zu Darstellungen von Gruppen**). Die Frage nach den Multiplizitäten $[\Delta(\lambda) : L(\nu)]$ der einfachen Subquotienten in Jordan-Hölder-Reihen von Vermamoduln hat sich als ebenso schwierig wie fruchtbar erwiesen. Sie ist auch für Darstellungen von Gruppen relevant. Zum Beispiel werden wir in **??** zeigen, daß für die Wirkung der topologischen Gruppe $\mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$ auf der komplexen Fahnenmannigfaltigkeit $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ die teilgeordnete Menge der $\mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$-invarianten unter der Norm der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossenen Untervektorräume des Raums $\mathcal{C}(\mathcal{F}) := \mathrm{Top}(\mathcal{F},\mathbb{C})$ der stetigen komplexwertigen Funktionen $\mathcal{F} \to \mathbb{C}$ isomorph ist zur Opponierten der partiell geordneten Menge der Untermoduln des Vermamoduls $\Delta(0)$ der halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$. Allgemeiner werden wir zeigen, daß die anderen Vermamoduln in einer analogen Beziehung zu den Räumen stetiger Schnitte anderer äquivarianter komplexer Geradenbündel auf der Fahnenmannigfaltigkeit stehen. Um ein etwas leicher zu erreichendes motivierendes Ziel vor Augen zu haben, formulieren wir bereits hier ein erstes Hauptresultat.

Satz 25.1.1.2 (**Einfache Vermamoduln**). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen und sei $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ ein System von positiven Wurzeln und . Genau dann ist der Vermamodul $\Delta(\lambda)$ einfach, wenn gilt $\langle \lambda+\rho, \alpha^\vee\rangle \notin \{1,2,\ldots\}\ \forall \alpha \in R^+$ mit ρ der Halbsumme der positiven Wurzeln.*

25.1.1.3. Um das einzusehen, müssen wir zunächst das Zentrum der Einhüllenden Algebra verstehen. Daß unsere Bedingungen hinreichend sind, wird dann zu Ende des Abschnitts in 25.1.6.12 bewiesen. Daß sie auch notwendig sind, wird erst in 25.2.6.2 klar werden.

25.1.2 Das Zentrum der universellen Einhüllenden

Definition 25.1.2.1. Das **Zentrum** $\mathrm{Z}(R)$ eines Rings R ist definiert als der Teilring derjenigen Elemente, die mit allen anderen Elementen unseres Rings kommutieren, in Formeln

$$\mathrm{Z}(R) := \{z \in R \mid zr = rz\ \forall r \in R\}$$

25.1.2.2. Gegeben eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ bezeichne $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) := \mathrm{Z}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}))$ das Zentrum ihrer Einhüllenden $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Im Fall einer halbeinfachen komplexen Liealgebra hatten wir in 24.4.3.37 bereits den Casimiroperator $C \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ kennengelernt. Im folgenden wollen wir uns einen Überblick über das ganze Zentrum verschaffen.

25.1.2.3. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra mit einer Cartan'schen und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. Nach 24.4.6.21 operiert jedes Element des Zentrums $Z := \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ der Einhüllenden auf jedem Vermamodul durch einen Skalar. Wir vereinbaren die Bezeichnung $\langle z, \lambda \rangle$ für den komplexen Skalar, mit dem $z \in Z$ auf dem Verma-Modul $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda, R^+)$ operiert, in Formeln $zv = \langle z, \lambda \rangle v$ für alle $v \in \Delta(\lambda)$. Wir erhalten so einen $\mathbb{C}$-linearen Ringhomomorphismus von Z in den Ring aller $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf dem Dualraum der Cartan'schen

$$\begin{array}{rccc} \xi = \xi_{R^+} : & Z & \to & \mathrm{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{C}) \\ & z & \mapsto & \langle z, \ \rangle \end{array}$$

Satz 25.1.2.4 (Harish-Chandra-Isomorphismus). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra mit einer Cartan'schen und sei $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. So liefert der eben erklärte Homomorphismus ξ einen Isomorphismus zwischen dem Zentrum Z der Einhüllenden von $\mathfrak{g}$ und dem Ring der unter der dot-Operation der Weylgruppe invarianten polynomialen Funktionen auf $\mathfrak{h}^*$, in Formeln*

$$\xi : Z(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^{(W\cdot)}$$

25.1.2.5. Für einen komplexen Vektorraum V bezeichnen wir ganz allgemein mit $\mathcal{O}(V) \subset \mathrm{Ens}(V, \mathbb{C})$ diejenige Unterringalgebra der Algebra aller $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf V, die von den linearen Funktionen erzeugt wird, und nennen ihre Elemente die **polynomialen Funktionen auf** V. Die universelle Eigenschaft der symmetrischen Algebra $\mathrm{S}(V^*)$ liefert einen Homomorphismus $\mathrm{S}(V^*) \to \mathcal{O}(V)$, der in unserem Fall und allgemeiner im Fall eines beliebigen unendlichen Grundkörpers ein Isomorphismus ist.

25.1.2.6. Ist $f : V \to V'$ eine lineare oder affine Abbildung, so liefert das „Vorschalten von f" einen Homomorphismus in die Gegenrichtung $f^\sharp : \mathcal{O}(V') \to \mathcal{O}(V)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$. Operiert insbesondere eine Gruppe G auf V durch lineare oder affine Transformationen, so operiert G auch auf $\mathcal{O}(V)$. Die unter G invarianten polynomialen Funktionen auf V heißen dann die G-**Invarianten** und werden $\mathcal{O}(V)^G$ notiert.

25.1.2.7. Natürlich induziert die Abbildung $(-\rho) : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ einen Isomorphismus zwischen den Invarianten für die dot-Operation der Weylgruppe und den Invarianten für die lineare Opration

$$(-\rho)^\sharp : \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^{(W\cdot)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^W$$

Man zeigt unschwer, daß die Verknüpfung $(-\rho)^\sharp \circ \xi : Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^W$ nicht mehr von der Wahl eines Systems positiver Wurzeln abhängt. Meist nennt man diese Verknüpfung dann den **Harish-Chandra-Isomorphismus**.

25.1.2.8. Ich ziehe eine andere Sichtweise vor. Gegeben eine halbeinfache komplexe Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt die Einskomponente G ihrer Automorphismengruppe die **adjungierte Gruppe** unserer halbeinfachen komplexen Liealgebra. Nun wissen wir aus 24.2.6.1 und 24.2.4.5, daß die adjungierte Gruppe je zwei Cartan'sche ineinander konjugiert, und wir wissen aus 24.2.6.6 oder besser 25.1.3.6, daß sie sogar je zwei Paare $(\mathfrak{h}, R^+)$ bestehend aus einer Cartan'schen und einem System positiver Wurzeln in ihrem Dualraum ineinander konjugiert. So ein Paar $(\mathfrak{h}, R^+)$ wird damit durch unsere halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir nennen es die **absolute Cartan'sche von** $\mathfrak{g}$ und notieren es

$$(\mathfrak{h}_{\mathrm{abs}}, R^+_{\mathrm{abs}})$$

Der Weylvektor ist dann ein wohlbestimmtes Element $\rho_{\mathrm{abs}} \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{abs}}$ und der Harish-Chandra-Homomorphismus ein wohlbestimmter Isomorphismus

$$\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*_{\mathrm{abs}})^{(W\cdot)}$$

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir, daß $\xi(Z)$ wirklich aus polynomialen Funktionen auf $\mathfrak{h}^*$ besteht; danach, daß ξ sogar in den $(W\cdot)$-invarianten polynomialen Funktionen landet; und zum Schluß, daß die damit erst recht eigentlich etablierte Abbildung aus unserem Satz injektiv und surjektiv ist. Bezeichne

$$\pi_\lambda : \Delta(\lambda) \to \Delta(\lambda)_\lambda$$

diejenige Projektion eines Verma-Moduls auf seinen höchsten Gewichtsraum, die alle anderen Gewichtsräume $\Delta(\lambda)_\mu$ annulliert. Wir betrachten die Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, wobei $\mathfrak{n}$ beziehungsweise $\mathfrak{n}^+$ die direkten Summen der Wurzelräume zu den negativen beziehungsweise positiven Wurzeln meint. Der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt liefert dann für die Einhüllende $U := \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ eine Vektorraumzerlegung $U = \mathrm{U}(\mathfrak{h}) \oplus \langle \mathfrak{n}U + U\mathfrak{n}^+ \rangle$ und wir notieren

$$\eta : U \twoheadrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{h}) = \mathrm{S}(\mathfrak{h})$$

die Projektion längs dieser Zerlegung. Diese Projektion ist kein Algebrenhomomorphismus, sondern nur eine lineare Abbildung. Für die Operation auf dem kanonischen Erzeuger $v_\lambda \in \Delta(\lambda)$ eines Verma-Moduls gilt jedoch offensichtlich $\pi_\lambda(uv_\lambda) = \eta(u)v_\lambda$. Für $z \in Z$ ist sogar die Projektion π_λ überflüssig und wir haben

$$zv_\lambda = \eta(z)v_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$$

Nun ist hoffentlich klar, daß für $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{h})$ gilt $uv_\lambda = \delta_\lambda(c(u))v_\lambda$ für c die Komposition $\mathrm{U}(\mathfrak{h}) = \mathrm{S}(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*) \subset \mathrm{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{C})$ und δ_λ das Auswerten bei λ. Wir finden also $\langle z, \lambda \rangle = \delta_\lambda(c(\eta(z)))$ für alle λ alias $\xi(z) = c(\eta(z))$. Also ist $\xi(z)$

schon einmal polynomial für alle $z \in Z$. Als nächstes zeigen wir, daß ξ sogar in den $(W\cdot)$-Invarianten landet. Wir wissen nach 7.1.1.24, daß zwei Polynomfunktionen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null, die auf der von einer Basis erzeugten Untergruppe übereinstimmen, schon gleich sind. Es reicht also für alle $z \in Z$ und $w \in W$ zu zeigen, daß $\xi(z)$ und $\xi(z) \circ (w\cdot)$ auf dem Gitter $\mathfrak{X}$ der ganzen Gewichte dieselben Werte annehmen. Da die einfachen Spiegelungen die Weylgruppe erzeugen, müssen wir nur zeigen, daß gilt

$$\langle z, \lambda \rangle = \langle z, s_\alpha \cdot \lambda \rangle \ \ \forall \alpha \in \Pi, \lambda \in \mathfrak{X}$$

Wir kennen jedoch schon aus 24.4.4.13 für alle $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ mit $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$ eine Einbettung $\Delta(s_\alpha \cdot \lambda) \hookrightarrow \Delta(\lambda)$ oder einfacher einen von Null verschiedenen Homomorphismus. Da das Zentrum der universellen Einhüllenden dann auf diesen beiden Moduln durch denselben Skalar operieren muß, ergibt sich die Behauptung. Wir wissen damit, daß unser ξ tatsächlich in den $(W\cdot)$-invarianten Polynomfunktionen landet. Daß ξ einen Isomorphismus des Zentrums mit diesem Ring induziert, wird erst nach einigen Vorbereitungen in den folgenden Abschnitten im Anschluß an 25.1.4.4 gezeigt werden. □

Ergänzung 25.1.2.9. Unter dem Harish-Chandra-Isomorphismus $Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^W$ entspricht dem durch den prinzipalen Antiautomorphismus gegebenen Automorphismus $z \mapsto z^\top$ von Z die durch die Multiplikation mit $(-1) : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ induzierte Abbildung links. Um das zu sehen geht man aus von der Erkenntnis, daß für dominante Gewichte $\lambda \in X^+$ gilt $L(\lambda)^* \cong L(-w_0\lambda)$, und folgert

$$\langle z^\top, \lambda \rangle = \langle z, -w_0\lambda \rangle = \langle z, w_0 \cdot (-w_0\lambda) \rangle = \langle z, -\lambda - 2\rho \rangle$$

erst für alle $\lambda \in X^+$, und da diese Zariski-dicht liegen dann für alle $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Unter dem nichtnormalisierten Isomorphismus $Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^{(W\cdot)}$ entspricht der prinzipale Antiautomorphismus links also dem Automorphismus rechts, der von der Punktspiegelung $\mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ mit Zentrum $-\rho$ erzeugt wird. Identifiziert man die Punkte aus dem Abschluß der dominanten Weylkammer mit gewissen maximalen Idealen des Zentrums, so ist unser prinzipaler Antiautomorphismus verträglich mit der Involution $\lambda \mapsto -w_\circ\lambda$ dieser Kammer, sowohl im verschobenen als auch im unverschobenen Fall.

25.1.3 Der Chevalley-Isomorphismus

Satz 25.1.3.1 (Chevalley-Isomorphismus). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen und sei $G \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ die adjungierte Gruppe nach 24.2.6.1. So induziert die Restriktion von Funktionen $\mathcal{O}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{h})$*

einen Isomorphismus zwischen den G-Invarianten in $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ und den Weylgruppeninvarianten in $\mathcal{O}(\mathfrak{h})$, in Formeln

$$\mathrm{Res} : \mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h})^W$$

Ergänzung 25.1.3.2. Dieser Isomorphismus ist ein algebraischer Verwandter unseres Homöomorphismus $T/W \xrightarrow{\sim} K/(\operatorname{int} K)$ für eine zusammenhängende torierte kompakte Liegruppe (K, T) aus 22.5.10.12. In der Sprache der geometrischen Invariantentheorie 7.9.6.22 besagt unser Satz, daß die Einbettung $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ einen Isomorphismus $\mathfrak{h}/W \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}/\!\!/G$ zwischen den algebraischen Quotienten induziert, von denen der erste sogar ein geometrischer Quotient ist.

Beispiel 25.1.3.3. Wir besprechen den Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$ und zeigen dazu eine analoge Aussage für $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ mit $\mathfrak{h}$ dem Unterraum der Diagonalmatrizen, die zwar streng genommen nicht durch den vorstehenden Satz abgedeckt wird, deren Beweis mir jedoch besonders instruktiv scheint. Unser Invariantenring $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$ ist in diesem Fall die Menge aller Polynome in den Matrixeinträgen, die konstant sind auf allen Konjugationsklassen. Ist $x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$ die (konkrete) Jordan-Zerlegung von $x \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$, so gehört $x_{\mathrm{s}} + \varepsilon x_{\mathrm{n}}$ für alle $\varepsilon \neq 0$ zur selben Konjugationsklasse wie x. Für $f \in \mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$ ist also $\varepsilon \mapsto f(x_{\mathrm{s}} + \varepsilon x_{\mathrm{n}})$ eine polynomiale Funktion in ε, die konstant ist außerhalb von $\varepsilon = 0$. Es folgt sofort $f(x) = f(x_{\mathrm{s}})$, und da jede halbeinfache Konjugationsklasse die Menge $\mathfrak{h}$ der Diagonalmatrizen trifft, definiert die Restriktion eine Injektion $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{h})$. Nun sind je zwei Diagonalmatrizen konjugiert, deren Einträge sich nur in ihrer Reihenfolge unterscheiden. Folglich landet unsere Injektion in den symmetrischen Polynomen in den Matrixeinträgen, als da heißt in $\mathcal{O}(\mathfrak{h})^W$. Weiter wissen wir aber, daß die symmetrischen Polynome ihrerseits Polynome sind in den elementarsymmetrischen Polynomen, und für diese finden wir als Urbilder in $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$ die Funktionen, die jeder Matrix einen geeigneten Koeffizienten ihres charakteristischen Polynoms zuordnen. Also ist unsere Restriktion für $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ und $\mathfrak{h}$ die Diagonalmatrizen eine Bijektion $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h})^W$. Dasselbe folgt leicht für $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$.

Beispiel 25.1.3.4. Im Fall der Gruppe $G = \mathrm{SO}(2n; \mathbb{C})$ besteht die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ aus allen schiefsymmetrischen Matrizen und eine interessante invariante polynomiale Funktion aus $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$ ist die Pfaff'sche Determinante 4.2.5.8.

25.1.3.5. Der Beweis wird in eine Folge von Teilresultaten aufgebrochen. Lemma 25.1.3.6 zeigt, daß unsere Restriktion die G-Invarianten wirklich in die W-Invarianten abbildet. Bemerkung 25.1.3.7 zeigt, daß die Einschränkung der Restriktionsabbildung auf $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$ injektiv ist. Im Anschluß daran zeigen wir dann noch die Surjektivität, indem wir hinreichend viele G-invariante polynomiale Funktionen auf $\mathfrak{g}$ explizit angeben.

Lemma 25.1.3.6 (Realisierung der Weylgruppe in der adjungierten Gruppe). *Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra. Ist $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche Unteralgebra und*

$w \in W$ ein Element der Weylgruppe, so gibt es ein Element der adjungierten Gruppe $\dot{w} \in G$ mit $\dot{w}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ und

$$\dot{w} = w : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$$

Beweis. Es reicht, ein mögliches $\dot{s}_\alpha$ für jede Wurzel $\alpha \in R$ anzugeben. Dazu wählen wir $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[x_\alpha, y_\alpha] = \alpha^\vee$ und versuchen unser Glück mit

$$\dot{s}_\alpha = \exp(\operatorname{ad} x_\alpha) \exp(\operatorname{ad}(-y_\alpha)) \exp(\operatorname{ad} x_\alpha)$$

Für $h \in \ker \alpha \subset \mathfrak{h}$ gilt offensichtlich $[x_\alpha, h] = 0 = [y_\alpha, h]$, folglich halten $\exp(\operatorname{ad} x_\alpha)$, $\exp(\operatorname{ad} y_\alpha)$ und schließlich auch $\dot{s}_\alpha$ jedes $h \in \ker \alpha$ fest. Dann berechnen wir noch mit Gewalt

$$\begin{aligned}
\dot{s}_\alpha(\alpha^\vee) &= \exp(\operatorname{ad} x_\alpha) \exp(\operatorname{ad}(-y_\alpha))(\alpha^\vee - 2x_\alpha) \\
&= \exp(\operatorname{ad} x_\alpha)(\alpha^\vee - 2x_\alpha - 2y_\alpha - 2\alpha^\vee + 2y_\alpha) \\
&= -\alpha^\vee - 2x_\alpha + 2x_\alpha \\
&= -\alpha^\vee
\end{aligned}$$

und das Lemma ist gezeigt. □

25.1.3.7. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und sei $G \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ die adjungierte Gruppe. So liegt $G\mathfrak{h}$ Zariski-dicht in $\mathfrak{g}$. Das haben wir bereits beim Beweis der Konjugiertheit von Cartan'schen 24.2.4.5 gezeigt. Will man das differentielle Dominanzkriterium 24.2.4.8 hier vermeiden, kann man auch einfacher argumentieren mit der Erkenntnis, daß jede nichtleere in der metrischen Topologie des $\mathbb{C}^n$ offene Teilmenge bereits Zariski-dicht liegt.

Beweis der Surjektivität in 25.1.3.1. Dazu müssen wir genügend G-invariante polynomiale Funktionen auf $\mathfrak{g}$ konstruieren. Ist $\rho : \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$ eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$ und $p \in \mathbb{N}$, so behaupten wir, daß $x \mapsto \operatorname{tr}(\rho(x)^p)$ zu $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$ gehört. In der Tat kommutiert für alle $y \in \mathfrak{g}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \otimes V \arrow[r] \arrow[d, "(\operatorname{ad} y)\otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \rho(y)"'] & V \arrow[d, "\rho(y)"] \\
\mathfrak{g} \otimes V \arrow[r] & V
\end{tikzcd}$$

Wenn man y als nilpotent annimmt und von beiden vertikalen Abbildungen $\exp$ nimmt und das enstehende kommutative Diagramm auf $x \otimes v$ auswertet, folgt

$$\rho\big((\exp(\operatorname{ad} y))(x)\big)\ (\exp \rho(y))\ v = (\exp \rho(y))\ (\rho(x)v)$$

Mit den Abkürzung $g := \exp(\operatorname{ad} y)$ und $b := \exp \rho(y)$ finden wir $\rho(gx)bv = b\rho(x)v$ alias $\rho(gx) = b\rho(x)b^{-1}$ ist konjugiert zu $\rho(x)$ für $g := \exp(\operatorname{ad} y)$ und dann natürlich für alle $g \in G$. Wir erhalten also als invariante Funktionen schon mal die Funktionen $C(V,p) \in \mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$ gegeben durch $C(V,p)(x) = \operatorname{tr}(\rho_V(x)^p)$. Nun beachte man, daß $\mathcal{O}(\mathfrak{h})$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum von allen Potenzen λ^n mit $\lambda \in \mathfrak{X}$ ein ganzes Gewicht erzeugt wird. Betrachten wir also die „Symmetrisierung“

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{sym}: & \mathcal{O}(\mathfrak{h}) & \to & \mathcal{O}(\mathfrak{h})^W \\ & f & \mapsto & \sum_{w\in W} wf \end{array}$$

so erzeugen die $\operatorname{sym}(\lambda^p)$ für $\lambda \in \mathfrak{X}^+$ schon $\mathcal{O}(\mathfrak{h})^W$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum. Es ist aber klar, daß die Restriktionen auf $\mathfrak{h}$ der bereits konstruierten Invarianten die Gestalt

$$C(L(\lambda),p) = \sum_{\mu\in\mathfrak{X}^+,\ \mu\le\lambda} a_\mu \operatorname{sym}(\mu^p)$$

haben mit $a_\lambda \neq 0$, genauer gilt für $h \in \mathfrak{h}$ offensichtlich

$$C(L(\lambda),p)(h) = \sum_{\nu\in\mathfrak{X}} (\dim L(\lambda)_\nu)\nu(h)^p$$

Eine kurze Induktion zeigt dann, daß unsere Restriktion in der Tat eine Surjektion $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{h})^W$ liefert. $\square$

25.1.4 Herleitung des Harish-Chandra-Isomorphismus

25.1.4.1. Ist V ein Vektorraum und $x : V \to V$ eine lineare Abbildung, so gibt es offensichtlich genau eine Fortsetzung $\hat{x} : \mathrm{T}V \to \mathrm{T}V$ von x zu einer Derivation auf der Tensoralgebra, und diese induziert eine Derivation $\hat{x} : \mathrm{S}V \to \mathrm{S}V$ auf der symmetrischen Algebra. Ist V endlichdimensional und der Grundkörper algebraisch abgeschlossen, so haben wir einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{S}V \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(V^*)$, unter dem unser $\hat{x}$ dem Anwenden des durch $y \mapsto (y \circ x)$ auf V^* gegebenen Vektorfelds entspricht.

25.1.4.2. Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra und $x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ eine Derivation, so induziert unsere Derivation $\hat{x} : \mathrm{T}\mathfrak{g} \to \mathrm{T}\mathfrak{g}$ aus 25.1.4.1 eine Derivation $\hat{x} : \mathrm{U}\mathfrak{g} \to \mathrm{U}\mathfrak{g}$ auf der einhüllenden Algebra. Ist speziell $x = \operatorname{ad} y$ für $y \in \mathfrak{g}$, so finden wir

$$\hat{x}(u) = yu - uy$$

In der Tat sind beide Seiten Derivationen von $\mathrm{U}\mathfrak{g}$, die auf allen $u \in \mathfrak{g}$ übereinstimmen. Folglich müssen sie gleich sein.

25.1.4.3. Ist $\mathfrak{g}$ eine komplexe Lie-Algebra und V eine Darstellung von $\mathfrak{g}$, so operiert $\mathfrak{g}$ auf den Tensorpotenzen $V^{\otimes n}$ und auch auf der ganzen Tensoralgebra $\mathrm{T}V$. Diese Operation geschieht offensichtlich durch Derivationen, d.h. wir haben einen Lie-Algebren-Homomorphismus

$$\mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}\, \mathrm{T}V$$

Weiter ist die symmetrische Algebra SV eine Quotientendarstellung von $\mathrm{T}V$ und man sieht ohne Schwierigkeiten, daß wir so auch eine Operation durch Derivationen $\mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}\, \mathrm{S}V$ erhalten.

25.1.4.4. Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe Lie-Algebra. Die adjungierte Darstellung führt nach unseren allgemeinen Überlegungen zu Beginn dieses Abschnitts zu einer $\mathfrak{g}$-Operation durch Derivationen auf der Tensoralgebra und auf der symmetrischen Algebra und auch zu einer $\mathfrak{g}$-Operation durch Derivationen auf der universellen Einhüllenden Algebra

$$\begin{gathered}\mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}\, \mathrm{T}\mathfrak{g} \\ \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}\, \mathrm{S}\mathfrak{g} \\ \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}\, \mathrm{U}\mathfrak{g}\end{gathered}$$

Auf der universellen Einhüllenden $U := \mathrm{U}\mathfrak{g}$ notieren wir $\mathrm{ad}\, x$ die Derivation zu x und prüfen leicht $(\mathrm{ad}\, x)(u) = xu - ux$, da beide Seiten Derivationen der Einhüllenden sind, die auf $u \in \mathfrak{g} \subset U$ denselben Effekt haben. Insbesondere können wir das Zentrum der Einhüllenden auch beschreiben als die $\mathfrak{g}$-Invarianten unter der adjungierten Operation, in Formeln

$$Z = U^{\mathfrak{g}}$$

25.1.4.5. Ist $V = \mathfrak{g}^*$ die koadjungierte Darstellung und ist unsere Lie-Algebra endlichdimensional, so erhalten wir speziell eine Operation durch Derivationen $\mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}\, \mathcal{O}(\mathfrak{g})$. Geometrisch können wir diese Operation verstehen, indem wir ein $x \in \mathfrak{g}$ auffassen als das algebraische Vektorfeld $y \mapsto [x, y]$ auf dem Raum $\mathfrak{g}$. Ist $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra einer Liegruppe G, so wird unsere Operation induziert von der adjungierten Operation von G auf $\mathfrak{g}$, die eine Operation von G auf $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ liefert, die dann differenziert werden kann.

Proposition 25.1.4.6. *Ist $\mathfrak{g}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra und G ihre adjungierte Gruppe, so haben wir $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$.*

Beweis mit Lie-Theorie. Für jedes $r \geq 0$ bilden die polynomialen Funktionen vom Grad $\leq r$ eine stetige Darstellung der adjungierten Gruppe G und die Operation von $\mathfrak{g}$ ist offensichtlich die zugehörige abgeleitete Operation der Liealgebra. Die Proposition folgt damit aus 22.2.2.5. Im Rahmen algebraischer Gruppen kann man auch mit 9.4.6.23 argumentieren. □

Beweis. Wir wählen Bezeichnungen für unsere beiden Operationen und notieren sie

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathfrak{g} & \to & \operatorname{Der}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathfrak{g}) \\ \psi : G & \to & \operatorname{Aut}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Jetzt behaupten wir für $y \in \mathfrak{g}$ nilpotent in $\operatorname{Aut}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathfrak{g})$ die Gleichung

$$\exp \rho(y) = \psi(\exp(\operatorname{ad} y))$$

Da beiden Seiten Automorphismen von $\mathbb{C}$-Ringalgebren sind, reicht es zu zeigen, daß ihre Einschränkungen auf den Raum $\mathfrak{g}^* \subset \mathcal{O}(\mathfrak{g})$ der linearen Funktionen übereinstimmen. Zu zeigen ist also nur

$$\exp(\operatorname{ad}^* y) = (\exp(\operatorname{ad} y)^\top)^{-1}$$

und das folgt sofort aus $\operatorname{ad}^* y = (-\operatorname{ad} y)^\top$. Aus unserer ersten Gleichung erhalten schon einmal $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \subset \mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$. Da andererseits die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von ihren nilpotenten Elementen erzeugt wird, kann man $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ auch beschreiben als die Menge aller $f \in \mathcal{O}(\mathfrak{g})$ mit $\rho(y)f = 0$ für alle nilpotenten $y \in \mathfrak{g}$. Mit dem anschließenden Lemma 25.1.4.7 folgt so umgekehrt auch $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \subset \mathcal{O}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. □

Lemma 25.1.4.7. *Sei $x : V \to V$ ein lokal nilpotenter Endomorphismus eines $\mathbb{Q}$-Vektorraums. Bezeichne $\exp(\mathbb{Q}x) \subset \operatorname{GL}(V)$ die Untergruppe aller $\exp tx$ mit $t \in \mathbb{Q}$. So besteht der Kern von x genau aus den Invarianten von $\exp(\mathbb{Q}x)$, in Formeln*

$$\ker x = V^{\exp \mathbb{Q}x}$$

Beweis. Die Inklusion $\subset$ ist evident. Die andere Inklusion $\supset$ folgt aus der Tatsache, daß auch eine vektorwertige polynomiale Funktion $v_0 + v_1 t + \ldots + v_n t^n$ einer Variablen t aus einem unendlichen Körper nur konstant sein kann, wenn sie keine Terme höherer Ordnung hat, $v_1 = \ldots = v_n = 0$. Betrachten wir nun speziell für $v \in V$ die Abbildung $\mathbb{Q} \to V$, $t \mapsto \exp(tx)v$, so ist unsere Abbildung konstant genau dann, wenn gilt $xv = 0$. □

Herleitung des Harish-Chandra-Isomorphismus. Wir betrachten dazu mit den Notationen aus dem ersten Teil des Beweises von 25.1.2.4 das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{U}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\eta} & \mathrm{S}(\mathfrak{h}) \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{Z}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\xi} & \mathrm{S}(\mathfrak{h})^{(W\cdot)} \end{array}$$

Die Abbildung η in der oberen Zeile ist verträglich mit den Standardfiltrierungen 24.4.3.29 auf den jeweiligen Räumen. Die Abbildung ξ in der unteren Zeile ist folglich verträglich mit den jeweils induzierten Filtrierungen. Induziert $\xi : Z \to$

$S(\mathfrak{h})^{(W\cdot)}$ einen Isomorphismus nach Übergang zu den assoziierten graduierten Räumen, so ist es nach 7.7.1.16 bereits selbst ein Isomorphismus. Machen wir nun diesen Übergang, so erhalten wir das innere Rechteck eines kommutativen Diagramms der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(\mathfrak{g}) \arrow[rrr, "\mathrm{res}"] & & & \mathcal{O}(\mathfrak{h}) \\
& \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \arrow[rr] & & \mathrm{S}(\mathfrak{h}^*) \arrow[ul] \\
& \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \arrow[u] \arrow[rr] & & \mathrm{S}(\mathfrak{h}) \arrow[u] \\
& & \mathrm{gr}\,\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \arrow[ul, "\sim"'] \arrow[r] & \mathrm{gr}\,\mathrm{S}(\mathfrak{h}) \arrow[ur, "\sim"] \\
& & \mathrm{gr}\,\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[dl] & \mathrm{gr}\,\mathrm{S}(\mathfrak{h})^{(W\cdot)} \arrow[u] \arrow[dr, "\sim"] \\
& \mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \arrow[uu, hook] \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathrm{S}(\mathfrak{h})^{W} \arrow[uu, hook] \arrow[d] \\
& \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \arrow[rr] \arrow[dl] & & \mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^{W} \arrow[dr] \\
\mathcal{O}(\mathfrak{g})^{G} \arrow[uuuu, hook] \arrow[rrr, "\sim"] & & & \mathcal{O}(\mathfrak{h})^{W} \arrow[uuuu, hook]
\end{tikzcd}$$

Die Bedeutung der anderen Pfeile wird im folgenden erläutert: Mit den beiden inneren oberen nach außen weisenden Pfeilen sind die Identifikationen $\mathrm{gr}(\mathrm{U}(\mathfrak{g})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(\mathfrak{g})$ und $\mathrm{gr}(\mathrm{S}(\mathfrak{h})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(\mathfrak{h})$ aus dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt 24.4.3.30 gemeint, mit dem inneren nach außen weisenden Pfeil unten rechts die hoffentlich offensichtliche Identifikation $\mathrm{gr}(\mathrm{S}(\mathfrak{h})^{(W\cdot)}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$. Der innere nach außen weisende Pfeil unten links meint die Identifikation $\mathrm{gr}(\mathrm{Z}(\mathfrak{g})) = \mathrm{gr}(\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{gr}\,\mathrm{U}(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ mit dem ersten Pfeil wie im anschließenden Lemma 25.1.4.9. Die obere mittlere Horizontale sei induziert von der Projektion $\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{h}$, die alle Wurzelräume zu Null macht, die mittleren Vertikalen seien die offensichtlichen Inklusionen, und die untere mittlere Horizontale sei definiert durch die Kommutativität der darüberliegenden Zelle unseres Diagramms. Aus der Kommutativität der anderen Zellen, deren Nachweis dem Leser überlassen bleiben kann, folgt dann die Kommutativität des mittleren Rechtecks. Betrachten wir nun die Killingform oder allgemeiner irgendeine nichtausgearteten invariante Bilinearform auf $\mathfrak{g}$

und betrachten die davon induzierten Isomorphismen $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^*$ und $\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^*$, so identifiziert sich das mittlere Rechteck mit dem äußeren Rechteck, worin wir die obere Horizontale als die Restriktion von Funktionen verstehen. In diesem Diagramm ist die untere Horizontale aber ein Isomorphismus, eben der Chevalley-Isomorphismus aus 25.1.3.1. □

Lemma 25.1.4.8 (**Invarianten und assoziierte Graduierte**). *Ist V eine Darstellung einer endlichen Gruppe W über einem Körper k und ist auf V eine Filtrierung durch Unterdarstellungen gegeben und teilt die Charakteristik von k nicht die Gruppenordnung, so liefert die Einbettung einen Isomorphismus zwischen dem assoziierten Graduierten der Invarianten und den Invarianten des assoziierten Graduierten*

$$\operatorname{gr}(V^W) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{gr} V)^W$$

Beweis. Nach dem Satz von Maschke 8.4.1.1 ist unter unseren Annahmen jede Darstellung unserer Gruppe über besagtem Körper halbeinfach als Modul über dem Gruppenring, nach 8.2.3.4 besitzt also jede Unterdarstellung ein Komplement und insbesondere auch die Unterdarstellungen $V^{\leq n-1} \subset V^{\leq n}$. Das Lemma folgt. □

Lemma 25.1.4.9. *Gegeben eine eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper der Charakteristik Null ist die Standardfiltrierung auf $U = \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ stets $(\operatorname{ad}\mathfrak{g})$-stabil und die von der Einbettung $U^{\mathfrak{g}} \subset U$ induzierte Einbettung $\operatorname{gr}(U^{\mathfrak{g}}) \subset \operatorname{gr} U$ induziert einen Isomorphismus*

$$\operatorname{gr}(U^{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{gr} U)^{\mathfrak{g}}$$

Beweis. Ist V ein Vektorraum, so operiert die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ auf $V^{\otimes n}$ durch Vertauschung der Faktoren. Im Fall $\operatorname{char} k = 0$ induziert die Surjektion $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \mathrm{S}^n V$ einen Isomorphismus

$$(V^{\otimes n})^{\mathcal{S}_n} \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}^n V$$

von den „symmetrischen“ Tensoren der Stufe n auf die n-te homogene Komponente der symmetrischen Algebra, vergleiche 7.3.5.4. Wir bezeichnen mit $\mathrm{T}^{\mathcal{S}} V \subset \mathrm{T}V$ die Summe über alle $(V^{\otimes n})^{\mathcal{S}_n}$ und haben damit einen Isomorphismus

$$\mathrm{T}^{\mathcal{S}} V \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}V$$

von Vektorräumen konstruiert, der allerdings mit der Multiplikation im Allgemeinen nicht verträglich sein wird. Ist V eine Darstellung einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so operiert $\mathfrak{g}$ auch durch Derivationen auf $\mathrm{T}V$ und $\mathrm{S}V$, unser $\mathrm{T}^{\mathcal{S}} V$ ist eine Unterdarstellung von $\mathrm{T}V$ und unsere Abbildung $\mathrm{T}^{\mathcal{S}} V \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}V$ ist ein Isomorphismus von Darstellungen. Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $U := \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ ihre Einhüllende, so erhalten wir in derselben Weise einen Isomorphismus von Darstellungen $\mathrm{T}^{\mathcal{S}}\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} U$,

der einen Isomorphismus $\operatorname{gr} \mathrm{T}^{\mathcal{S}}\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr} U$ induziert. Damit paßt der Morphismus aus dem Lemma in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{gr}((\mathrm{T}^{\mathcal{S}}\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}) & \to & (\operatorname{gr}(\mathrm{T}^{\mathcal{S}}\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{gr}(U^{\mathfrak{g}}) & \to & (\operatorname{gr} U)^{\mathfrak{g}} \end{array}$$

Hier sind die Vertikalen und obere Horizontale Isomorphismen, also auch die untere Horizontale. □

Übungen

Übung 25.1.4.10. Das Zentrum von $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}(n;\mathbb{C}))$ ist der Polynomring, der erzeugt wird von den Elementen $c_1, \ldots, c_n$ mit

$$c_i = \sum_{\nu\colon \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \to \{1,\ldots,n\}} E_{\nu(0)\nu(1)} E_{\nu(1)\nu(2)} \ldots E_{\nu(i-1)\nu(i)}$$

Speziell wird $c_1 = E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{nn}$ die Einheitsmatrix in $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})$ und c_2 ist der Casimiroperator zu einer geeigneten Bilinearform auf $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})$.

25.1.5 Zentrale Charaktere

25.1.5.1. Gegeben ein kommutativer Ring A bezeichne $\operatorname{Max} A$ die Menge der maximalen Ideale von A. Ist A eine ringendlicher $\mathbb{C}$-Kring, so liefert die Abbildung $\varphi \mapsto \ker \varphi$ nach der körpertheoretischen Form des Hilbert'schen Nullstellensatzes und genauer 7.1.6.24 eine Bijektion

$$\operatorname{Kring}^{\mathbb{C}}(A, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} A$$

Wir haben also zum Beispiel eine kanonische Bijektion $\operatorname{Max} \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$ und koordinatenfrei für jeden endlichdimensionalen komplexen Vektorraum V eine kanonische Bijektion $\operatorname{Max} \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\sim} V$. Weiter liefert jeder Homomorphismus $f : A \to B$ von $\mathbb{C}$-Kringen in einen weiteren ringendlichen $\mathbb{C}$-Kring B eine Abbildung in der Gegenrichtung

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Max} B & \to & \operatorname{Max} A \\ \chi & \mapsto & f^{-1}(\chi) \end{array}$$

Satz 25.1.5.2 (Maximale Ideale von Invariantenringen). *Sei A ein ringendlicher $\mathbb{C}$-Kring mit einer Operation einer endlichen Gruppe W durch Automorphismen. So induziert die von der Einbettung $A^W \subset A$ induzierte Abbildung $\operatorname{Max} A \to \operatorname{Max}(A^W)$ eine Bijektion*

$$(\operatorname{Max} A)/W \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max}(A^W)$$

und für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A^W)$ *liefert die Einbettung von* $\mathbb{C}$ *einen Isomorphismus* $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} A^W/\mathfrak{m}$.

Ergänzung 25.1.5.3. In 7.5.3.3 zeigen wir dieselbe Aussage über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper und zeigen zusätzlich, daß auch A^W ringendlich ist über dem Grundkörper.

Beweis. Wir beginnen mit der Surjektivität. Sei $\mathfrak{m} \subset A^W$ ein maximales Ideal und $\langle A\mathfrak{m}\rangle$ das von $\mathfrak{m}$ in A erzeugte Ideal. Ich behaupte $\langle A\mathfrak{m}\rangle \neq A$. Es reicht zu zeigen, daß für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{m} \subset A^W$ aus $\langle A\mathfrak{m}\rangle = A$ folgt $\mathfrak{m} = A^W$. Aber $\langle A\mathfrak{m}\rangle = A$ impliziert eine Gleichung

$$a_1 m_1 + \ldots + a_r m_r = 1 \quad \text{mit } a_i \in A,\ m_i \in \mathfrak{m}.$$

Summieren wir alle Transformierten dieser Gleichung unter den verschiedenen $x \in W$ auf, so ergibt sich eine Gleichung der Gestalt

$$b_1 m_1 + \ldots + b_r m_r = |W|$$

mit $b_i \in A^W$ und es folgt $\mathfrak{m} = A^W$. Für $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A^W)$ gibt es also $\tilde{\mathfrak{m}} \in \operatorname{Max} A$ mit $\tilde{\mathfrak{m}} \supset A\mathfrak{m}$, und dann haben wir notwendig $\tilde{\mathfrak{m}} \cap A^W = \mathfrak{m}$. Das zeigt die Surjektivität der Abbildung in unserem Satz und zeigt auch, daß die offensichtliche Abbildung eine Injektion $A^W/\mathfrak{m} \hookrightarrow A/\tilde{\mathfrak{m}}$ ist und mithin die Einbettung von $\mathbb{C}$ in den ersten Ring auch ein Isomorphismus. Es bleibt nur noch die Injektivität der ersten Abbildung im Satz zu zeigen. Sind aber $\lambda, \mu \in \operatorname{Max} A$ gegeben mit $\lambda \notin W\mu$, so gibt es ein $a \in A$, das „verschwindet an der Stelle λ aber bei keinem der $x\mu$“, in Formeln $a \in \lambda$, $a \notin x\mu \quad \forall x \in W$. Bilden wir dann das Produkt aller xa mit $x \in W$, so erhalten wir eine Invariante $f \in A^W$ mit $f \in \lambda$, $f \notin \mu$. Das zeigt die Injektivität. □

Definition 25.1.5.4. Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe Lie-Algebra und $Z := \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ das Zentrum ihrer Einhüllenden. Ein Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Kringen $Z \to \mathbb{C}$ heißt ein **zentraler Charakter** von $\mathfrak{g}$. Ist Z endlich erzeugt als $\mathbb{C}$-Algebra, so können und werden wir die Menge aller zentralen Charaktere identifizieren mit $\operatorname{Max} Z$.

Proposition 25.1.5.5. *Seien* $\mathfrak{g}$ *eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra,* $\mathfrak{h}$ *eine Cartan'sche und* R^+ *ein ausgezeichnetes System positiver Wurzeln. Die von unserem Harish-Chandra-Homomorphismus induzierte Abbildung* $\xi : \mathfrak{h}^* \to \operatorname{Max} Z$, $\lambda \mapsto \operatorname{Ann}_Z \Delta(\lambda)$ *induziert eine Bijektion*

$$\mathfrak{h}^*/(W\cdot) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} Z$$

Bemerkung 25.1.5.6. Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, wann ξ eine Abbildung $Z \to \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)$ meint und wann wie hier die induzierte Abbildung $\mathfrak{h}^* \to \operatorname{Max} Z$.

Beweis. Wir betten unsere Abbildung ein in ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}^*/(W\cdot) & \to & \operatorname{Max} Z \\ \wr\downarrow & & \uparrow\wr \\ (\operatorname{Max}\mathcal{O}(\mathfrak{h}^*))/(W\cdot) & \to & \operatorname{Max}\left(\mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^{(W\cdot)}\right) \end{array}$$

wo die linke Vertikale induziert wird von der kanonischen Identifikation $\mathfrak{h}^* \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max}\mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)$, die rechte Vertikale von $\xi : Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^{(W\cdot)}$ und die untere Horizontale von der Einbettung $\mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^{(W\cdot)} \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)$. Der Leser mag prüfen, daß dies Diagramm kommutiert. Die rechte Vertikale ist bijektiv nach dem Satz von Harish-Chandra. Die untere Horizontale ist bijektiv nach dem vorhergehenden allgemeinen Satz 25.1.5.2. Die Proposition folgt. □

Lemma 25.1.5.7. *Jeder einfache Subquotient eines Vermamoduls $\Delta(\lambda)$ ist isomorph zu einem $L(x \cdot \lambda)$ für $x \in W$.*

Beweis. Das folgt sofort aus Proposition 25.1.5.5, da jeder Subquotient von demselben maximalen Ideal des Zentrums der Einhüllenden annulliert werden muß wie der ganze Vermamodul. □

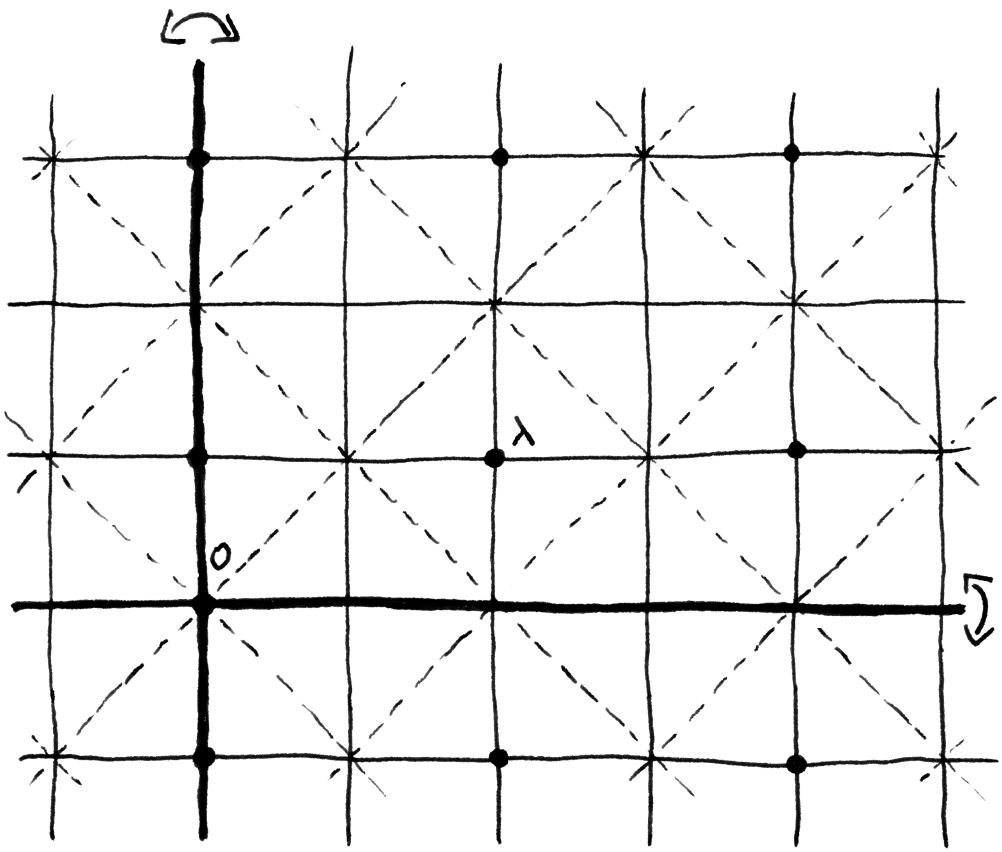
25.1.6 Die ganzzahlige Weylgruppe eines Gewichts

25.1.6.1. Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null, $R \subset V$ ein Wurzelsystem 23.2.1.2 und $\Lambda \in V/\langle R\rangle$ eine Nebenklasse unter dem Wurzelgitter. Wir bezeichnen mit W die Weylgruppe unseres Wurzelsystems und mit $W_\Lambda \subset W$ die Standgruppe der Nebenklasse Λ. Weiter definieren wir das **System der auf Λ ganzzahligen Wurzeln** durch

$$R_\Lambda := \{\alpha \in R \mid \langle \lambda, \alpha^\vee\rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall \lambda \in \Lambda\}$$

Man sieht leicht ein, daß R_Λ ein Wurzelsystem ist in dem von ihm aufgespannten Teilraum von V. Gegeben ein System positiver Wurzeln $R^+ \subset R$ ist sicher auch $R^+ \cap R_\Lambda$ ein System positiver Wurzeln in R_Λ. Die zugehörige Menge von einfachen Wurzeln notieren wir $\Pi_\Lambda \subset R^+ \cap R_\Lambda$. Offensichtlich gilt stets $\Pi \cap R_\Lambda \subset \Pi_\Lambda$.

25.1.6.2. Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null und $R \subset V$ ein Wurzelsystem. Ist $\lambda \in V$ gegeben, so bezeichnen wir mit $\bar\lambda$ seine Nebenklasse modulo dem Wurzelgitter und nennen die Standgruppe $W_{\bar\lambda}$ dieser Nebenklasse die **ganzzahlige Weylgruppe von** λ, nicht zu verwechseln mit der Standgruppe W_λ von λ selbst. Ebenso nennen wir $R_{\bar\lambda}$ das **ganzzahlige Wurzelsystem von** λ. Bei genauerem Hinsehen erkennt man unschwer, daß diese Bildungen sogar nur von der Nebenklasse von λ modulo dem Gitter X der ganzzahligen Gewichte abhängen.



Die Spiegelebenen der affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems, das im Bild neben 23.2.4.5 eingezeichnet war. Hier habe ich ein Gewicht λ eingezeichnet und als fette Punkte den Nullpunkt sowie die Elemente seiner Nebenklasse $\bar{\lambda}$ unter dem Wurzelgitter. Die Spiegelungen an den beiden fett eingezeichneten Linien erzeugen die ganzzahlige Weylgruppe $W_{\bar{\lambda}}$ von λ. Die Spiegelungen an den durchgezogenen Linien erzeugen den Stabilisator in der affinen Weylgruppe seiner Nebenklasse modulo dem Wurzelgitter.

Proposition 25.1.6.3 (**zur ganzzahligen Weylgruppe eines Gewichts**). *Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null, $R \subset V$ ein Wurzelsystem, W die Weylgruppe und $\Lambda \in V/\langle R\rangle$ eine Nebenklasse des Wurzelgitters. So wird die Standgruppe W_Λ von Λ erzeugt von den Spiegelungen an den auf Λ ganzzahligen Wurzeln, in Formeln*

$$W_\Lambda = \langle s_\alpha \mid \alpha \in R_\Lambda\rangle$$

Beweis. Sei $\lambda \in \Lambda$ ein Repräsentant. Das anschließende Lemma 25.1.6.4 zeigt, daß die Standgruppe $\mathcal{W}_\lambda$ von λ in der affinen Weylgruppe $\mathcal{W}$ unseres Wurzelsystems R von Spiegelungen erzeugt wird. Damit wird auch W_Λ von Spiegelungen erzeugt, denn W_Λ ist gerade das Bild von $\mathcal{W}_\lambda$ unter dem Bilden des linearen Anteils $\mathcal{W} \twoheadrightarrow W$. Die Spiegelungen aus W_Λ sind aber per definitionem gerade die Spiegelungen zu Wurzeln aus R_Λ. □

Lemma 25.1.6.4. *Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem angeordneten Körper k und $\mathcal{W} \subset \operatorname{Aff}^\times V$ eine affine Spiegelungsgruppe im Sinne von 23.1.5.2. Ist $K \supset k$ eine Körpererweiterung, so wird auch für jedes $\lambda \in K \otimes_k V$ seine Standgruppe $\mathcal{W}_\lambda \subset \mathcal{W}$ erzeugt von Spiegelungen.*

Beweis. Wir ergänzen $e_0 = 1 \in k$ zu einer k-Basis $(e_i)_{i\in I}$ von K und erhalten eine Zerlegung $K \otimes_k V = \bigoplus(e_i \otimes V)$. Nach geeigneter Umbenennung von I können wir dann λ darstellen in der Form

$$\lambda = \lambda_0 + e_1 \otimes \lambda_1 + \ldots + e_n \otimes \lambda_n$$

mit $\lambda_i \in V$. Bezeichnet $\bar{w} \in \mathrm{GL}(V)$ den linearen Anteil von $w \in \mathcal{W}$, so haben wir offensichtlich

$$w\lambda = w\lambda_0 + e_1 \otimes \bar{w}\lambda_1 + \ldots + e_n \otimes \bar{w}\lambda_n$$

Die Standgruppe von λ können wir demnach so beschreiben: Wir nehmen erst die Standgruppe von λ_0, eine endliche affine Spiegelungsgruppe nach 23.1.7.5. Diese identifizieren mit der endlichen Spiegelungsgruppe ihrer linearen Anteile und nehmen dann darin die Standgruppe von λ_1, darin hinwiederum die Standgruppe von λ_2 etcetera. In jedem Schritt wird aber nach 23.1.7.5 aus einer Spiegelungsgruppe wieder eine Spiegelungsgruppe. □

Definition 25.1.6.5. Seien $V \supset R \supset R^+$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null, ein Wurzelsystem und ein System positiver Wurzeln. Gegeben $\Lambda \in V/\langle R\rangle$ eine Nebenklasse des Wurzelgitters bezeichnen wir die durch $R_\Lambda \cap R^+$ gegebene Länge auf der Standgruppe W_Λ mit $l_\Lambda : W_\Lambda \to \mathbb{N}$ und bezeichnen mit $w_\Lambda \in W_\Lambda$ das bezüglich l_Λ längste Element.

25.1.6.6. Sei ganz allgemein (W, E) eine endliche affine Spiegelungsgruppe und A einer ihrer Alkoven. Wir betrachten im Raum der Richtungsvektoren $\vec{E}$ die Menge A^* aller nichtnegativen Linearkombinationen von Vektoren, die (-1)-Eigenvektoren von Spiegelungen sind und in Richtung von A zeigen. Nun führen wir auf E zwei Teilordnungen ein:

1. $\lambda \leqslant \mu$ möge bedeuten $\mu \in \lambda + A^*$. Wir verwenden das Symbol $\leqslant$, um den Unterschied zur Relation $\leq$ aus 25.1.6.8 anzudeuten;

2. $\lambda \preceq \mu$ möge bedeuten, daß es eine Folge $t_1, t_2, \ldots, t_r$ von Spiegelungen gibt mit $\lambda \leqslant t_1\lambda \leqslant t_2t_1\lambda \leqslant \ \ldots \ \leqslant t_r \ldots t_2t_1\lambda = \mu$.

Offensichtlich ist die zweite Relation stärker als die Erste. Offensichtlich ist weiter in jeder W-Bahn auf E der Repräsentant aus $\bar{A}$ das größte Element für beide Teilordnungen und der Repräsentant aus $w_A\bar{A} = -\bar{A}$ das Kleinste.

Ergänzung 25.1.6.7. Im Übrigen ist für $\lambda \in A$ und $x, y \in W$ auch $x\lambda \preceq y\lambda$ gleichbedeutend dazu, daß gilt $x \geq y$ in der Bruhat-Teilordnung auf W aus 23.3.3.

Definition 25.1.6.8. Seien $V \supset R \supset R^+$ ein Vektorraum mit einem Wurzelsystem und einem ausgezeichneten System positiver Wurzeln. Wir führen zwei Teilordnungen auf V ein:

1. $\lambda \leq \mu$ möge wie in 24.4.1.15 bedeuten $\mu \in \lambda + |R^+\rangle$;

2. $\lambda \uparrow \mu$ möge bedeuten, daß es eine Folge $t_1, t_2, \ldots, t_r$ von Spiegelungen gibt mit $\lambda \leq t_1 \cdot \lambda \leq (t_2t_1) \cdot \lambda \leq \ \ldots \ \leq (t_r \ldots t_1) \cdot \lambda = \mu$.

Beispiel 25.1.6.9. Auch auf der Weylbahn eines ganzen Gewichts ist die zweite Relation im allgemeinen echt stärker. Zum Beispiel mag man das Wurzelsystem $\{\mathrm{e}_i - \mathrm{e}_j \mid i \neq j\}$ in $\{(x_1, \ldots x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + \ldots + x_4 = 0\}$ aus 23.2.1.18 vom Typ A_3 betrachten mit dem üblichen System positiver Wurzeln $R^+ = \{\mathrm{e}_i - \mathrm{e}_j \mid i < j\}$. Für die Gewichte $\lambda = \lambda' - \rho$ und $\mu = \mu' - \rho$ mit $\mu' = 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + \varepsilon_4$ und $\lambda' = \varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4$ in den Notationen 23.2.1.18, also mit $\varepsilon_i(\mathrm{e}_j) = \delta_{ij}$, gilt dann $\mu = \lambda + 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) + 2(\varepsilon_3 - \varepsilon_4)$ und damit $\lambda \leq \mu$ in Bezug auf das duale Wurzelsystem. Wir haben auch $W \cdot \lambda = W \cdot \mu$, aber dennoch gilt nicht $\lambda \uparrow \mu$, wie man unschwer einsieht.

Definition 25.1.6.10. Seien V ein Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null und $R^+ \subset R \subset V$ ein Wurzelsystem im Sinne von 23.2.1.2 mit einem ausgezeichneten System positiver Wurzeln. Dann bilden wir die Halbsumme der positiven Wurzeln $\rho = \rho(R^+)$ und betrachten die Menge

$$V_{\mathrm{dom}} := \left\{\lambda \in V \mid \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \{-1, -2, \ldots\} \ \forall \alpha \in R^+\right\}$$

und nennen ihre Elemente die **ρ-dominanten Vektoren von** V. Sind wir in einer der in der Darstellungstheorie üblichen Situationen, daß unser Vektorraum etwa der Dualraum einer Cartan'schen ist, so daß seine Elemente üblicherweise als Gewichte bezeichnet werden, so sprechen wir entsprechend von **ρ-dominanten Gewichten**. Die dominanten Gewichte in $\mathfrak{h}^*$ erhalten wir mithin aus den ρ-dominanten ganzen Gewichten durch die Addition von ρ.

Korollar 25.1.6.11. *Seien $V \supset R \supset R^+$ ein Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null mit einem Wurzelsystem und einem ausgezeichneten System positiver Wurzeln. So haben wir:*

1. *Für alle $\lambda \in V$ gilt $\bar{\lambda} \cap (W \cdot \lambda) = W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$;*

2. *Für jedes $\lambda \in V$ besitzt seine Bahn unter seiner ganzzahligen Weylgruppe, kurz seine* **ganzzahlige Bahn** *$W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$, ein größtes und ein kleinstes Element bezüglich $\uparrow$ und a forteriori auch bezüglich $\leq$;*

3. *Ein Gewicht $\lambda \in V$ ist ρ-dominant genau dann, wenn es das größte Element seiner ganzzahligen Bahn $W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$ ist. Das kleinste Element besagter Bahn ist dann $w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$.*

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus den Definitionen. Die anderen ergeben sich, wenn wir Bemerkung 25.1.6.6 anwenden auf die dot-Operation der ganzzahligen Weylgruppe $W_{\bar{\lambda}}$ auf dem affinen Raum $\lambda + \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ über dem angeordneten Körper $\mathbb{Q}$. □

Proposition 25.1.6.12 (Einfache Vermamoduln). *Der Vermamodul $\Delta(\lambda)$ einfach, wenn gilt $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \{1, 2, \ldots\}$ $\forall \alpha \in R^+$, wo ρ die Halbsumme der positiven Wurzeln bezeichnet.*

Vorschau 25.1.6.13. Die in dieser Proposition formulierte hinreichende Bedingung für die Einfachkeit eines Vermamoduls aus obigem Satz ist auch notwendig, wie aus unserer Beschreibung aller Homomorphismen zwischen Vermamoduln 25.2.6.2 unmittelbar folgen wird.

Beweis. Wir wissen nach 25.1.5.7, daß nur die einfachen Höchstgewichtsmoduln $L(x \cdot \lambda)$ mit $x \in W$ und $x \cdot \lambda \in \lambda - |R^+\rangle$ als einfache Subquotienten in Frage kommen. Nach 25.1.6.11 gehört x dann zur ganzen Weylgruppe $W_{\bar{\lambda}}$ und ist λ das $\leq$-kleinste Element von $W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$, so muß $\Delta(\lambda)$ einfach sein. Dies $\leq$-kleinste Element ist aber nach 25.1.6.11 auch das $\uparrow$-kleinste und kann deshalb charakterisiert werden durch die Eigenschaft $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \{1, 2, \ldots\}$ für alle $\alpha \in R^+$. □

Beispiel 25.1.6.14. Im Kontext von 25.1.6.5 muß die Bruhat-Teilordnung auf W nicht notwendig die Bruhat-Teilordnung auf W_Λ induzieren. Ist etwa R das Wurzelsystem vom Typ G_2 mit Basis $\{\alpha, \beta\}$ und $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = -3$, und erklären wir λ durch $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 1/2$ und $\langle \lambda, \beta^\vee \rangle = 1$ und Λ als seine Nebenklasse, so ist R_Λ vom Typ $A_1 \times A_1$, aber die Bruhat-Teilordnung auf W induziert eine totale Ordnung auf W_Λ.

25.2 Multiplizitäten von Vermamoduln

Die Kategorie $\mathcal{O}$ wurde eingeführt in einer Arbeit von Bernstein-Gelfand-Gelfand [BGG76] als natürlicher Rahmen für das Studium der Jordan-Hölder-Multiplizitäten von Vermamoduln. Die Bezeichnung geht auf das russische Wort основноы für „grundlegend“ zurück. In obiger Arbeit zeigen die Autoren eine Analogie im Kontext unendlichdimensionalen Darstellungen komplexer halbeinfacher Liealgebren zur sogenannten „Brauer-Nesbitt-Reziprozität“ [**?**] aus der modularen Darstellungstheorie endlicher Gruppen. Für derartige Phänomene hat sich mittlerweile die Bezeichnung „BGG-Reziprozität“ durchgesetzt.

25.2.1 Kategorie $\mathcal{O}$

Definition 25.2.1.1. Gegeben $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und ein System R^+ positiver Wurzeln setzen wir $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$ und definieren die **Kategorie** $\mathcal{O}$ als diejenige volle Unterkategorie in der Kategorie aller Darstellungen der Liealgebra $\mathfrak{g}$, die gegeben wird durch die Bedingungen

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, R^+) := \left\{ M \in \mathfrak{g}\text{-Mod} \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ ist endlich erzeugt über } \mathfrak{g} \\ M \text{ ist lokal endlich über } \mathfrak{b} \\ M \text{ ist halbeinfach über } \mathfrak{h} \end{array} \right\}$$

Die zweite Bedingung meint ausgeschrieben, daß jeder Vektor unserer Darstellung in einem endlichdimensionalen $\mathfrak{b}$-stabilen Teilraum enthalten ist. Die dritte Bedingung bedeutet, daß alle $H \in \mathfrak{h}$ auf unserer Darstellung durch diagonalisierbare Endomorphismen operieren, daß also gilt $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$ mit

$$M_\lambda := \{m \in M \mid Hm = \lambda(H)m \; \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

dem **Gewichtsraum** zum Gewicht λ.

25.2.1.2. Die Terminologie „halbeinfach“ ist an dieser Stelle aus der Theorie der Moduln über Ringen entnommen: Wie in 8.2.3.1 nennen wir auch Darstellungen von Liealgebren „halbeinfach“, wenn sie das Erzeugnis ihrer einfachen Unterdarstellungen sind. Durch 7.1.2.2 ist der Begriff „halbeinfach“ ja sogar für Moduln über beliebigen Mengen erklärt.

Ergänzung 25.2.1.3. Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem, so erhalten wir nach Übung 24.2.3.29 eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Systeme } R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \text{ von} \\ \text{positiven Wurzeln} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Borelsche Unteralgebren,} \\ \text{die } \mathfrak{h} \text{ umfassen} \end{array} \right\}$$

durch die Vorschrift $R^+ \mapsto \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$. Im Rahmen der Theorie der algebraischen Gruppen 9.4.6.28 sieht man ohne große Schwierigkeiten, daß je zwei Borel'sche Unteralgebren einer endlichdimensionalen reduktiven komplexen Liealgebra konjugiert sind unter einem Automorphismus der Liealgebra, so daß insbesondere jede Borel'sche einer halbeinfachen Liealgebra von der oben angegebenen Gestalt ist. Weiter hängt unsere Kategorie $\mathcal{O}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, R^+) \subset \mathfrak{g}\text{-Mod}$ von der Wahl von $\mathfrak{h}$ gar nicht ab, sondern nur von der Borel'schen $\mathfrak{b}$, und wir hätten sie durchaus $\mathcal{O}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$ notieren können: In der Tat kann die dritte Bedingung umformuliert werden zur Forderung, daß für jeden $\mathfrak{b}$-Untermodul $N \subset M$ unserer Darstellung der Quotient $N/[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]N$ ein halbeinfacher $\mathfrak{b}$-Modul ist. Ich schreibe dennoch $\mathcal{O}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, R^+)$, weil sich so die Theorie der Borel'schen Unteralgebren ausklammern läßt.

25.2.1.4. Gegeben $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und sei R^+ ein System positiver Wurzeln. So ist für die zugehörige Borel'sche $\mathfrak{b}$ die Surjektion $\mathfrak{b} \twoheadrightarrow \mathfrak{h}$ mit den Wurzelräumen im Kern ein Homomorphismus von Liealgebren und jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ liefert durch Vorschalten besagter Surjektion einen Charakter $\lambda : \mathfrak{b} \to \mathbb{C}$. Wir erinnern an die Verma-Moduln $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda, \mathfrak{b}) = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda = \mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_\lambda$ aus 24.4.4.2. Eine endliche Filtrierung eines $\mathfrak{g}$-Moduls durch Unterdarstellungen, deren sukzessive Subquotienten sämtlich Vermamoduln zu einer festen Borel'schen sind, nennt man eine **Verma-Fahne**.

Lemma 25.2.1.5 (**Erste Eigenschaften der Kategorie $\mathcal{O}$**). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit Cartan'scher und R^+ ein System positiver Wurzeln mit der zugehörigen Kategorie $\mathcal{O}$. So gilt:*

1. *Alle Vermamoduln $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda, \mathfrak{b})$ liegen in $\mathcal{O}$. Ist allgemeiner V eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{b}$, die halbeinfach ist über $\mathfrak{h}$, so besitzt $\mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} V = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} V$ eine Vermafahne und gehört zu $\mathcal{O}$;*

2. *Alle Subquotienten von Darstellungen aus $\mathcal{O}$ liegen wieder in $\mathcal{O}$, und jedes Objekt von $\mathcal{O}$ ist Quotient eines Objekts von $\mathcal{O}$ mit einer Vermafahne;*

3. *Jede Darstellung aus $\mathcal{O}$ ist ein $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-Modul endlicher Länge;*

4. *Alle Gewichtsräume von Darstellungen aus $\mathcal{O}$ sind endlichdimensional, ja für alle $M \in \mathcal{O}$ und $\nu \in \mathfrak{h}^*$ ist sogar der Raum $\bigoplus_{\mu \geq 0} M_{\nu+\mu}$ endlichdimensional;*

5. *Gehören bei einer kurzen exakten Sequenz von Darstellungen von $\mathfrak{g}$ die Enden zu $\mathcal{O}$ und ist die Mitte halbeinfach unter unserer Cartan'schen $\mathfrak{h}$, so gehört auch die Mitte zu $\mathcal{O}$;*

6. *Die Kategorie der Darstellungen aus $\mathcal{O}$ ist stabil unter dem Tensorieren mit endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{g}$, in Formeln haben wir also* $(\dim E < \infty$ *und* $M \in \mathcal{O}) \Rightarrow E \otimes M \in \mathcal{O}$*;*

7. *Die einfachen Darstellungen aus $\mathcal{O}$ sind genau die einfachen Höchstgewichtsmoduln. Bezeichnet genauer $L(\lambda)$ den nach 24.4.4.7 eindeutig bestimmten einfachen Quotienten von $\Delta(\lambda)$, so haben wir eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}^* & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{irr}\mathcal{O} \\ \lambda & \mapsto & L(\lambda) \end{array}$$

25.2.1.6. Im letzten Punkt bezeichnet $\operatorname{irr}\mathcal{O}$ die Menge der Isomorphieklassen von einfachen Objekten aus $\mathcal{O}$. Dieselbe Notation verwenden wir für beliebige „abelsche Kategorien“.

Beweis. 1. Vermamoduln sind endlich erzeugt, ja sogar zyklisch. Weiter zerfallen sie nach 24.4.4.3 in Gewichtsräume, genauer haben sie die Zerlegung $\Delta(\lambda) = \bigoplus_{\nu \in \lambda - |R^+\rangle} \Delta(\lambda)_\nu$ mit der Notation $|R^+\rangle$ für das von R^+ erzeugte Untermonoid von $\mathfrak{h}^*$. Da alle diese Gewichtsräume wieder nach 24.4.4.3 von endlicher Dimension sind und da gilt

$$\mathrm{U}(\mathfrak{b})\Delta(\lambda)_\nu \subset \bigoplus_{\mu \in |R^+\rangle} \Delta(\lambda)_{\nu+\mu}$$

und da überdies $(\nu + |R^+\rangle) \cap (\lambda - |R^+\rangle)$ stets endlich ist, hat die rechte Seite unserer Inklusion endliche Dimension und unser Vermamodul ist auch lokal endlich über $\mathfrak{b}$. Allgemeiner ist das Produzieren alias Koinduzieren

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} = \operatorname{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} : \mathfrak{b}\text{-Mod} \to \mathfrak{g}\text{-Mod}$$

nach 24.4.5.5 ein exakter Funktor und macht $\mathfrak{h}$-halbeinfache Moduln zu $\mathfrak{h}$-halbeinfachen Moduln. Da $\mathfrak{b}$ auflösbar ist, besitzt V nach dem Satz von Lie oder vielmehr seinem Korollar 24.1.5.6 oder auch einfacheren expliziten Überlegungen in unserer speziellen Situation eine Filtrierung

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_r = V$$

mit eindimensionalen Subquotienten $V_i/V_{i-1} \cong \mathbb{C}_{\lambda_i}$ für geeignete $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$. Wir erhalten so auf $\operatorname{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} V$ eine Filtrierung durch die $\operatorname{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} V_i$ mit Subquotienten $\operatorname{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{\lambda_i} = \Delta(\lambda_i)$. Daß $\operatorname{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} V$ lokal endlich ist über $\mathfrak{b}$, folgert man ganz analog wie bei Vermamoduln.

2. Daß Quotienten von Objekten aus $\mathcal{O}$ wieder in $\mathcal{O}$ liegen ist offensichtlich. Um es für Untermoduln zu erhalten müssen wir nur bemerken, daß jeder Untermodul eines endlich erzeugten $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-Moduls endlich erzeugt ist, da nämlich $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$

noethersch ist nach 24.4.3.31. Um schließlich ein beliebiges Objekt $M \in \mathcal{O}$ als Quotient eines Objekts mit Vermafahne zu schreiben, suchen wir uns einen endlichdimensionalen erzeugenden Teilraum $V \subset M$, den wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathfrak{b}$-stabil annehmen dürfen, und erhalten eine Surjektion $\operatorname{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} V \twoheadrightarrow M$.

3. Das folgt sofort aus Teil 2, da nach 24.4.6.25 jeder Vermamodul endliche Länge hat.

4. Das folgt sofort aus dem bereits bewiesenen Teil 2 des Lemmas.

5. Das einzige Problem ist zu zeigen, daß die Mitte auch lokal endlich ist unter $\mathfrak{b}$. Das folgt jedoch mit Teil 4, wenn wir beachten, daß mit Anfang und Ende unserer Sequenz auch ihre Mitte die in Teil 4 beschriebene Endlichkeitseigenschaft haben muß.

6. Sind Darstellungen E und M lokal endlich über $\mathfrak{b}$ beziehungsweise halbeinfach über $\mathfrak{h}$, so gilt offensichtlich dasselbe für ihr Tensorprodukt. Sind weiter E und M Darstellungen einer Liealgebra und wird M als Darstellung erzeugt von einem Teilraum $V \subset M$, so wird offensichtlich $E \otimes M$ erzeugt von $E \otimes V$. Ist insbesondere M endlich erzeugt und E endlichdimensional, so ist auch $E \otimes M$ endlich erzeugt.

7. Das folgt aus Teil 2. Nach 24.4.6.25 wissen wir nämlich bereits, daß alle Kompositionsfaktoren von Vermamoduln einfache höchste Gewichtsmoduln sind. $\square$

Beispiel 25.2.1.7 (**Die Kategorie $\mathcal{O}$ im Fall $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$**). Wir untersuchen die Kategorie $\mathcal{O}$ im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$. Wir arbeiten mit der üblichen Basis e, h, f wie in 24.1.2.14 und mit $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h$ und $\mathfrak{b} = \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}e$. Da alle h-Eigenräume jedes Objekts $M \in \mathcal{O}$ endlichdimensional sind, operiert der Casimiroperator $C = C_\kappa$ darauf lokal endlich und M zerfällt in die direkte Summe seiner Haupträume $M = \bigoplus_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{Hau}(C|M;a)$. Wir setzen

$$ {}_a\mathcal{O} := \{M \in \mathcal{O} \mid (C-a) \text{ operiert lokal nilpotent auf } M\} $$

Wir wissen nach 24.4.6.22, daß der Casimiroperator auf zwei einfachen Moduln $\mathrm{L}(\lambda)$ und $\mathrm{L}(\mu)$ genau dann durch denselben Skalar a operiert, wenn gilt $\lambda = \mu$ oder $\lambda = s \cdot \mu$ für s das einzige nichttriviale Element der Weylgruppe. Wir unterscheiden drei Fälle.

Singulärer zentraler Charakter. Der Fixpunkt $-\rho$ von $(s\cdot)$ ist das einzige $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ mit $(C-a)\Delta(\lambda) = 0$. In diesem Fall gibt es in ${}_a\mathcal{O}$ nur ein einfaches Objekt $\mathrm{L}(-\rho) = \Delta(-\rho)$ und ein beliebiges Objekt $M \in {}_a\mathcal{O}$ ist isomorph zu einer direkten Summe von Kopien dieses einfachen Objekts und der von der universellen Eigenschaft induzierte Morphismus ist ein Isomorphismus $\operatorname{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(M_{-\rho}) \xrightarrow{\sim} M$;

Regulärer nicht ganzer zentraler Charakter. Es gibt zwei Gewichte $\lambda \neq \mu$ mit $(C-a)\Delta(\lambda) = (C-a)\Delta(\mu) = 0$, aber wir haben $\lambda - \mu \notin \langle R \rangle$. In diesem Fall gibt es in ${}_a\mathcal{O}$ genau zwei einfache Objekte $\mathrm{L}(\lambda) = \Delta(\lambda)$ und $\mathrm{L}(\mu) = \Delta(\mu)$ ein beliebiges Objekt $M \in {}_a\mathcal{O}$ ist isomorph zu einer direkten Summe von Kopien dieser beiden einfachen Objekte, genauer sind die Gewichtsräume M_λ und M_μ stabil unter $\mathfrak{b}$ und die universelle Eigenschaft koinduzierter Darstellungen liefert einen Isomorphismus $\mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(M_\lambda \oplus M_\mu) \xrightarrow{\sim} M$;

Regulärer ganzer zentraler Charakter. Es gibt zwei Gewichte $\lambda \neq \mu$ mit $(C-a)\Delta(\lambda) = (C-a)\Delta(\mu) = 0$ und $\lambda - \mu \in \langle R \rangle$. Dann finden wir $n \in \mathbb{N}$ mit $\{\lambda, \mu\} = \{n\rho, -(n+2)\rho\}$. In diesem Fall gibt es in ${}_a\mathcal{O}$ genau zwei einfache Objekte, die einfache endlichdimensionale Darstellung $\mathrm{L}(n\rho)$ der Dimension $n+1$ und den einfachen Vermamodul $\mathrm{L}(-(n+2)\rho) = \Delta(-(n+2)\rho)$. Wir werden in 25.2.5.12 Äquivalenzen zwischen je zwei dieser Kategorien ${}_a\mathcal{O}$ konstruieren und konzentrieren uns im folgenden auf den Fall $a = 0$. Dann hat ${}_0\mathcal{O}$ als einfache Objekte nur die Einsdarstellung $\mathrm{L}(0) = \mathbb{C}$ und den Vermamodul $\Delta(-2\rho)$ und wir erhalten eine Äquivalenz

$$ {}_0\mathcal{O} \xrightarrow{\approx} \{V \in \mathrm{Car}(q \rightleftarrows p, \mathbb{C}\text{-Modf}) \mid (V_q \to V_p \to V_q) = 0\} $$

mit der besagten Kategorie aller Darstellungen des oben angedeuteten Köchers mit zwei Ecken p, q und zwei Pfeilen, indem wir dem Objekt $M \in {}_0\mathcal{O}$ das Diagramm

$$ M_0 \underset{e}{\overset{f}{\rightleftarrows}} M_{-2\rho} $$

zuordnen. Der quasiinverse Funktor wird dann dadurch gegeben, daß man $M_0 \oplus M_{-2\rho}$ als $\mathfrak{b}$-Modul auffaßt und aus $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} (M_0 \oplus M_{-2\rho})$ den von allen Ausdrücken $f \otimes (v,0) - 1 \otimes (0, fv)$ erzeugten $\mathfrak{g}$-Untermodul herausteilt. Man überzeugt sich im Köcherbild leicht, daß unsere Kategorie bis auf Isomorphismus genau fünf unzerlegbare Objekte besitzt: Die ersten vier mag man schematisch schreiben als $\mathbb{C} \rightleftarrows 0$, $0 \rightleftarrows \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C}$, wo wir in den letzten beiden Fällen nur den von Null verschiedenen Pfeil notiert haben. Das Fünfte dieser unzerlegbaren Objekte ist $\mathbb{C} \leftrightarrows \mathbb{C}^2$ mit in_1 und pr_2 als Morphismen. In ${}_0\mathcal{O}$ entsprechen diese fünf Objekte der Reihe nach den Darstellungen $\mathrm{L}(0)$, $\mathrm{L}(-2\rho) = \Delta(-2\rho)$, $\Delta(0)$, einem noch nicht besprochenen Objekt $\nabla(0)$ und $\mathrm{L}(1) \otimes \Delta(-\rho)$. Ein Möglichkeit, $\nabla(0)$ hier schon zu beschreiben, ist als der Kokern eines und jedes injektiven Morphismus $\Delta(-2\rho) \hookrightarrow \mathrm{L}(1) \otimes \Delta(-\rho)$.

Übungen

Übung 25.2.1.8. Der Raum der Homomorphismen zwischen Darstellungen aus $\mathcal{O}$ ist stets endlichdimensional.

Übung 25.2.1.9 (**Dualität auf $\mathcal{O}$**). Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und R^+ ein System positiver Wurzeln. Man erinnere aus dem Beweis von 24.3.5.11, daß es einen Liealgebrenautomorphismus $\tau : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ gibt mit $\tau^2 = \mathrm{id}$ und $\tau(h) = -h \ \forall h \in \mathfrak{h}$, und daß derartige Liealgebrenautomorphismen **Chevalley-Involutionen** heißen. Man zeige, daß wir für jede Chevalley-Involution zu $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$d = d_\tau : \mathcal{O} \xrightarrow{\approx} \mathcal{O}^{\mathrm{opp}}$$

erhalten durch die Vorschrift $dM := (M^*)^\tau_\mathfrak{h}$ alias den Raum der $\mathfrak{h}$-endlichen Vektoren der kontragredienten Darstellung mit der durch τ getwisteten $\mathfrak{g}$-Operation, in Formeln $xf := -f \circ (\tau x)$. Weiter zeige man, daß die kanonische Abbildung in den Bidualraum für alle $M \in \mathcal{O}$ einen Isomorphismus $M \xrightarrow{\sim} ddM$ induziert. Man zeige, daß der natürliche Homomorphismus $E^* \otimes M^* \to (E \otimes M)^*$ für $M \in \mathcal{O}$ und E eine endlichdimensionale Darstellung einen Isomorphismus $E^{*\tau} \otimes dM \xrightarrow{\sim} d(E \otimes M)$ induziert. Im übrigen ist auch $E^{*\tau}$ isomorph zu E, aber das Auszeichnen eines Isomorphismus bedeutet eine unkanonische Wahl. Man zeige weiter $\dim_\mathbb{C}(dM)_\lambda = \dim_\mathbb{C}(M)_\lambda$ und folgere $d\mathrm{L}(\lambda) \cong \mathrm{L}(\lambda)$.

Ergänzende Übung 25.2.1.10 (**∇-Moduln und ihre universelle Eigenschaft**). Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und R^+ ein System positiver Wurzeln. Gegeben $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ und eine Chevalley-Involution τ setzen wir

$$\nabla(\lambda) = \nabla_\tau(\lambda) := d_\tau \Delta(\lambda)$$

und erklären den kanonischen Erzeuger $v_\lambda^\top \in \nabla(\lambda)_\lambda$ des höchsten Gewichtsraums durch $v_\lambda^\top(v_\lambda) = 1$ für $v_\lambda \in \Delta(\lambda)_\lambda$ den bereits in 24.4.4.2 erklärten kanonischen Erzeuger. Für alle $M \in \mathcal{O}$ folgere man aus 24.4.4.6, daß wir einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_\mathfrak{g}(M, \nabla(\lambda)) \xrightarrow{\sim} M_\lambda^{*\tau} / \textstyle\sum_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} M_{\lambda+\alpha}^{*\tau}$$

erhalten, indem wir jeden Homomorphismus auf den λ-Gewichtsraum einschränken und den durch $v_\lambda^\top$ gegebenen Isomorphismus $\nabla(\lambda)_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ nachschalten. Dadurch ist das Paar $(\nabla(\lambda), v_\lambda^\top)$ eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus und hängt insbesondere nicht von der Wahl der Chevalley-Involution τ ab.

25.2.2 Zerlegungen der Kategorie $\mathcal{O}$

25.2.2.1. Ich erinnere an unsere allgemeine Terminologie 8.7.3.1 zur Blockzerlegung.

Lemma 25.2.2.2 (**Zerlegung nach der Nebenklasse der Gewichte**). *Für $\Lambda \subset \mathfrak{h}^*$ setze man $\mathcal{O}_\Lambda := \{M \in \mathcal{O} \mid M_\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \Lambda\}$. So haben wir die Zerlegung*

$$\mathcal{O} = \bigoplus_{\Lambda \in \mathfrak{h}^*/\langle R \rangle} \mathcal{O}_\Lambda$$

Beweis. Gegeben ein Objekt $M \in \mathcal{O}$ und eine Nebenklasse unter dem Wurzelgitter $\Lambda \in \mathfrak{h}^*/\langle R\rangle$ setzen wir $M_\Lambda = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Natürlich sind die M_Λ Unterdarstellungen von M und es gilt $M = \bigoplus_\Lambda M_\Lambda$. Den Rest des Beweises überlassen wir dem Leser. □

25.2.2.3. Wir erinnern an das Zentrum Z der universellen Einhüllenden Algebra $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, an die Menge $\operatorname{Max} Z$ aller maximalen Ideale von Z und an die Abbildung $\xi : \mathfrak{h}^* \to \operatorname{Max} Z, \lambda \mapsto \operatorname{Ann}_Z \Delta(\lambda)$, deren Fasern nach 25.1.5.5 gerade die Bahnen unter der dot-Operation der Weylgruppe sind.

Lemma 25.2.2.4 (Zerlegung nach zentralem Charakter). *Für $\chi \in \operatorname{Max} Z$ setze man ${}_\chi\mathcal{O} := \{M \in \mathcal{O} \mid \chi^n M = 0$ für $n \gg 0\}$. So haben wir die Zerlegung*

$$\mathcal{O} = \bigoplus_{\chi\in\operatorname{Max} Z} {}_\chi\mathcal{O}$$

Beweis. Nach 25.2.1.5.3 hat jedes $M \in \mathcal{O}$ endliche Länge und alle seine einfachen Subquotienten sind einfache höchste Gewichtsmoduln. Auf diesen operiert jedoch das Zentrum durch Skalare. Damit ergibt sich unser Satz als Spezialfall aus dem Satz über die verallgemeinerte Hauptraumzerlegung von Moduln über kommutativen Ringen 7.4.8.1. □

Satz 25.2.2.5 (Blockzerlegung von $\mathcal{O}$). *Gegeben ein Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ mit Nebenklasse $\bar\lambda = \lambda + \langle R\rangle$ unter dem Wurzelgitter bezeichne $\mathcal{O}_\lambda = {}_{\xi(\lambda)}\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_{\bar\lambda}$ den Schnitt der zugehörigen Unterkategorien aus beiden vorhergehenden Lemmata 25.2.2.2 und 25.2.2.4. So haben wir die Zerlegung*

$$\mathcal{O} = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}} \mathcal{O}_\lambda$$

25.2.2.6. Aus unserer Beschreibung 25.2.6.2 aller Homomorphismen zwischen Vermamoduln wird unmittelbar folgen, daß sich die $\mathcal{O}_\lambda$ nicht mehr weiter in direkte Summen von nichttrivialen Unterkategorien zerlegen lassen. Das rechtfertigt dann auch recht eigentlich erst die Bezeichnung unserer Zerlegung als Blockzerlegung. Den Block $\mathcal{O}_0$, der die Einsdarstellung enthält, bezeichnet man auch als den **Hauptblock von** $\mathcal{O}$.

Beweis. Die einfachen Isomorphieklassen in ${}_{\xi(\lambda)}\mathcal{O}$ werden repräsentiert von den $\mathrm{L}(\mu)$ mit $\mu \in W \cdot \lambda$, der Bahn von λ unter der zum Fixpunkt $-\rho$ verschobenen Operation der Weylgruppe nach **??**, und die einfachen Isomorphieklassen in $\mathcal{O}_{\bar\lambda}$ werden repräsentiert von den $\mathrm{L}(\mu)$ mit $\mu \in \bar\lambda$. Es reicht demnach zu zeigen, daß für alle $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ der Schnitt von $W \cdot \lambda$ und $\bar\lambda$ genau ein ρ-dominantes Gewicht enthält. Dazu dienen die Überlegungen zur Geometrie von Spiegelungsgruppen. Die Aussage selber ergibt sich als Korollar 25.1.6.11. □

Korollar 25.2.2.7. *Seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche, $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln und $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ ein ρ-dominantes Gewicht.*

1. *Die einfachen Objekte von $\mathcal{O}_\lambda$ werden parametrisiert durch die dot-Bahn des Gewichts λ unter seiner ganzzahligen Weylgruppe, genauer haben wir eine Bijektion $W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda \xrightarrow{\sim} \operatorname{irr} \mathcal{O}_\lambda$ durch die Vorschrift $\mu \mapsto \mathrm{L}(\mu)$;*

2. *Der Vermamodul $\Delta(w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda)$ ist einfach.*

Beweis. Die erste Aussage folgt aus der ersten Aussage von 25.1.6.11. Zum Nachweis der Zweiten bemerken wir, daß für $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ ein ρ-dominantes Gewicht und $x \in W_{\bar{\lambda}}$ beliebig nach 25.1.6.11 gilt

$$w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda \leq x \cdot \lambda \leq \lambda$$

Jeder einfache Subquotient von $\Delta(w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda)$ gehört nun aber zu $\mathcal{O}_\lambda$ und ist daher nach unseren Resultaten zur Blockzerlegung 25.2.2.5 ein einfacher höchster Gewichtsmodul der Gestalt $\mathrm{L}(x \cdot \lambda)$ mit $x \in W_{\bar{\lambda}}$. Bei $\Delta(w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda)$ kommt nun als einfacher Untermodul nur $\mathrm{L}(w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda)$ in Frage, als da heißt, jeder einfache Untermodul unseres Vermamoduls ist bereits der Vermamodul selber. □

Übungen

Übung 25.2.2.8. Man zeige, daß für jede Chevalley-Involution die zugehörige Dualität auf $\mathcal{O}$ die Blockzerlegung erhält, in Formeln $M \in \mathcal{O}_\lambda \Rightarrow dM \in \mathcal{O}_\lambda$.

25.2.3 Projektive Objekte von $\mathcal{O}$

25.2.3.1. Wir haben mittlerweile bewiesen, daß „fast alle“ Vermamoduln einfach sind. Unser Leitproblem für die nächsten Abschnitte ist es, die Kompositionsfaktoren der übrigen Vermamoduln zu bestimmen. Dazu wird sich ein vertieftes Verständnis der Projektiven von $\mathcal{O}$ als außerordentlich hilfreich erweisen. Darunter verstehen wir projektive Objekte der abelschen Kategorie $\mathcal{O}$, d.h. Darstellungen $P \in \mathcal{O}$ derart, daß jeder surjektive Homomorphismus $M \twoheadrightarrow N$ zwischen Darstellungen $M, N \in \mathcal{O}$ eine Surjektion $\mathcal{O}(P, M) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(P, N)$ induziert. Hier erinnere ich unsere allgemeine Konvention, nach der wir für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und Objekte $M, N \in \mathcal{C}$ mit $\mathcal{C}(M, N)$ die Menge der Morphismen von M nach N bezeichnen.

Satz 25.2.3.2 (Projektive Vermamoduln). *Seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. So ist für jedes ρ-dominante Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ der Vermamodul $\Delta(\lambda)$ ein projektives Objekt der Kategorie $\mathcal{O}$.*

Vorschau 25.2.3.3. Diese hinreichende Bedingung für die Projektivität eines Vermamoduls aus obigem Satz ist auch notwendig. Wir zeigen das in **??**.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß $\Delta(\lambda)$ projektiv ist in $\mathcal{O}_\lambda$, denn der Projektionsfunktor $\mathrm{pr}_\lambda : \mathcal{O} \to \mathcal{O}_\lambda$ ist exakt und wir haben

$$\mathcal{O}(\Delta(\lambda), M) = \mathcal{O}_\lambda(\Delta(\lambda), \mathrm{pr}_\lambda M)$$

für alle $M \in \mathcal{O}$. Nach unseren Erkenntnissen über die ganzzahlige Weylgruppe aus 25.1.6.11 und über die Irreduziblen in $\mathcal{O}_\lambda$ aus 25.2.2.7 haben wir für $M \in \mathcal{O}_\lambda$ jedoch $M_\nu \neq 0 \Rightarrow \nu \leq \lambda$. Nach 24.4.4.7.24.4.4.6 liefert also für $M \in \mathcal{O}_\lambda$ das Auswerten auf dem kanonischen Erzeuger $v_\lambda \in \Delta(\lambda)$ einen Isomorphismus $\mathcal{O}_\lambda(\Delta(\lambda), M) \xrightarrow{\sim} M_\lambda$. Da jedoch das Bilden des λ-Gewichtsraums ein exakter Funktor ist, folgt aus diesem Isomorphismus die Projektivität von $\Delta(\lambda)$. □

Satz 25.2.3.4. *Es gibt in $\mathcal{O}$ genügend projektive Objekte und jedes projektive Objekt von $\mathcal{O}$ besitzt eine Vermafahne.*

Beweis. Das folgt sofort aus den zwei präziseren Aussagen 25.2.3.5 und 25.2.3.6, die wir gleich im Anschluß beweisen. □

Proposition 25.2.3.5. *Jeder Vermamodul kann eingefügt werden in eine kurze exakte Sequenz $N \hookrightarrow P \twoheadrightarrow \Delta(\lambda)$, bei der P projektiv ist in $\mathcal{O}$ und N eine Vermafahne besitzt, in der nur Subquotienten $\Delta(\mu)$ mit $\mu > \lambda$ vorkommen.*

Beweis. Gegeben $\gamma \in \mathfrak{h}^*$ und M ein $\mathfrak{b}$-Modul betrachten wir in M den Untervektorrraum

$$\tau_{\leq\gamma} M = \bigoplus_{\mu \leq \gamma} M_\mu$$

Sicher ist die Summe aller Gewichtsräume eine Unterdarstellung von M und $\tau_{\leq\gamma} M$ ist hinwiederum ein Quotient dieser Unterdarstellung nach einem $\mathfrak{b}$-stabilen Teilraum und damit auch ein $\mathfrak{b}$-Modul. Wir betrachten nun den Projektionsfunktor $\mathrm{pr}_\lambda : \mathcal{O} \to \mathcal{O}_\lambda$ und bilden für $\nu \in |R^+\rangle$ in $\mathcal{O}$ die Darstellungen

$$P_{\leq\lambda+\nu} = \mathrm{pr}_\lambda \operatorname{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \tau_{\leq\lambda+\nu} \operatorname{prod}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda$$

Zusammen mit den natürlichen Surjektionen bilden sie ein durch die Menge $|R^+\rangle$ indiziertes projektives System, das mit $\Delta(\lambda)$ endet. Wir behaupten, daß $P_{\leq\lambda+\nu}$ für ν hinreichend groß nicht mehr von ν abhängt und daß das dann ein projektives Objekt P der gewünschten Gestalt ist. Genauer stabilisiert unser System bereits, wenn $\lambda + \nu$ größer ist als jedes Gewicht aus $(W \cdot \lambda) \cap (\lambda + \langle R\rangle)$, denn die Kerne der Surjektionen im projektiven System vor Anwenden von pr_λ haben stets Vermafahnen und werden unter dieser Bedingung von pr_λ annulliert. Weiter folgt

unter dieser Bedingung an ν für jedes $N \in \mathcal{O}_\lambda$ aus $N_\mu \neq 0$ schon $\mu \leq \lambda + \nu$. Für beliebiges $M \in \mathcal{O}$ folgern wir damit kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mod}^{\mathfrak{g}}(P_{\leq\lambda+\nu}, M) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}^{\mathfrak{g}}(P_{\leq\lambda+\nu}, \mathrm{pr}_\lambda M) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}^{\mathfrak{b}}(\tau_{\leq\lambda+\nu} \operatorname{prod}^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{h}} \mathbb{C}_\lambda, \mathrm{pr}_\lambda M) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}^{\mathfrak{b}}(\operatorname{prod}^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{h}} \mathbb{C}_\lambda, \mathrm{pr}_\lambda M) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}^{\mathfrak{h}}(\mathbb{C}_\lambda, \mathrm{pr}_\lambda M) \\
&\xrightarrow{\sim} (\mathrm{pr}_\lambda M)_\lambda
\end{aligned}$$

und erkennen so die Projektivität von $P_{\leq\lambda+\nu}$. Die übrigen in der Proposition behaupteten Eigenschaften sind leicht einzusehen. □

Proposition 25.2.3.6. *Seien $M', M'' \in \mathcal{O}$. Genau dann besitzt $M' \oplus M''$ eine Vermafahne, wenn sowohl M' als auch M'' eine Vermafahne besitzen.*

Beweis. Daß eine direkte Summe von zwei Moduln mit Vermafahne auch eine Vermafahne besitzt ist offensichtlich. Um die andere Implikation zu zeigen beginnen wir mit einem Lemma.

Lemma 25.2.3.7. *Besitzt $M \in \mathcal{O}$ eine Vermafahne und ist λ ein maximales Gewicht von M und $v \in M_\lambda$ ein von Null verschiedener Gewichtsvektor, so ist die Abbildung $\Delta(\lambda) \to M$, $v_\lambda \mapsto v$ eine Injektion und $M/\Delta(\lambda)$ besitzt auch eine Vermafahne.*

Beweis des Lemmas. Besitzt M eine Vermafahne, so ist M offensichtlich frei als $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$-Modul. Das zeigt, daß unsere Abbildung $\Delta(\lambda) \to M$ eine Injektion sein muß. Ihr Bild ist offensichtlich $\mathrm{U}(\mathfrak{g})v$. Gegeben eine Vermafahne

$$M = M_n \supset \ldots \supset M_i \supset M_{i-1} \supset M_0 = 0$$

von M sei nun i der Index mit $v \in M_i$ aber $v \notin M_{i-1}$. Da λ ein maximales Gewicht von M war, haben wir notwendig $\mathrm{U}(\mathfrak{g})v \xrightarrow{\sim} M_i/M_{i-1}$ und damit $\mathrm{U}(\mathfrak{g})v \cap M_{i-1} = 0$. Also hat $\overline{M} = M/\mathrm{U}(\mathfrak{g})v$ die Vermafahne

$$\overline{M} = \overline{M}_n \supset \ldots \supset \overline{M}_i = \overline{M}_{i-1} \supset \ldots \supset \overline{M}_0 = 0$$ □

Um nun die Proposition zu zeigen, wählen wir einen von Null verschiedenen Vektor v zu einem maximalen Gewicht aus einem der beiden Summanden, sagen wir aus M'. Dann haben wir offensichtlich $\overline{M' \oplus M''} = \overline{M'} \oplus M''$ und Induktion über die kleinstmögliche Länge einer Vermafahne von M beendet den Beweis der Proposition. □

25.2.3.8. Wir bezeichnen mit $\mathrm{P}(\lambda)$ eine **projektive Decke** von $\mathrm{L}(\lambda)$ in $\mathcal{O}$, als da heißt, ein unzerlegbares projektives Objekt mit Quotient $\mathrm{L}(\lambda)$. Nach 25.2.3.4 existiert stets solch ein Objekt. Nach 8.7.1.27 ist es eindeutig bis auf nichteindeutigen Isomorphismus und wir haben

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{P}(\lambda), \mathrm{L}(\mu)) = \delta_{\lambda\mu}$$

Weiter hat der Kern der offensichtlichen Surjektion $\mathrm{P}(\lambda) \twoheadrightarrow \Delta(\lambda)$ nach 25.2.3.5 und 25.2.3.6 eine Vermafahne, in der nur Subquotienten $\Delta(\mu)$ mit $\mu > \lambda$ auftreten.

Satz 25.2.3.9 (Reziprozitätsformel). *Die Vielfachheit eines Vermamoduls als Subquotient in einer Vermafahne eines unzerlegbaren Projektiven der Kategorie $\mathcal{O}$ stimmt überein mit der Vielfachheit des einfachen Quotienten von besagtem Projektiven als Subquotient einer Kompositionsreihe von besagtem Vermamodul, in Formeln*

$$[\mathrm{P}(\lambda) : \Delta(\mu)]_\Delta = [\Delta(\mu) : \mathrm{L}(\lambda)] \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$$

25.2.3.10. Die Reziprozitätsformel wurde in diesem Kontext zuerst von Bernstein, Gelfand und Gelfand bewiesen und wird deshalb meist **BGG-Reziprozität** genannt. Daß die Subquotienten in einer Vermafahne eines Objekts von Kategorie bis auf Reihenfolge wohldefiniert sind, kann man entweder aus dem gleich folgenden Beweis ableiten oder auch einfacher aus 25.2.5.10.

Beweis. Nach 25.2.3.8 haben wir $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{P}(\lambda), \mathrm{L}(\mu)) = \delta_{\lambda\mu}$ und damit

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathrm{P}(\lambda), M) = [M : \mathrm{L}(\lambda)]$$

für alle Objekte $M \in \mathcal{O}$. Wegen $[\Delta(\mu) : \mathrm{L}(\lambda)] = [\nabla(\mu) : \mathrm{L}(\lambda)]$ reicht es also, für alle λ, μ die Gleichheit $[\mathrm{P}(\lambda) : \Delta(\mu)]_\Delta = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathrm{P}(\lambda), \nabla(\mu))$ zu zeigen, und dafür müssen wir nur für alle projektiven Objekte P von $\mathcal{O}$ und alle Gewichte μ die Gleichheit

$$[P : \Delta(\mu)]_\Delta = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(P, \nabla(\mu))$$

zeigen. Wir zeigen diese Gleichheit allgemeiner für alle Objekte P mit Vermafahne, und zwar durch vollständige Induktion über die Länge einer Vermafahne. Sei dazu $Q \hookrightarrow P \twoheadrightarrow \Delta(\lambda)$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathcal{O}$. Es reicht zu zeigen, daß sie eine kurze exakte Sequenz

$$\mathcal{O}(\Delta(\lambda), \nabla(\mu)) \hookrightarrow \mathcal{O}(P, \nabla(\mu)) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Q, \nabla(\mu))$$

induziert, als da heißt, daß die rechte Abbildung hier wie bereits angedeutet eine Surjektion sein muß. Um das zu sehen, zeigen wir zunächst, daß jede kurze

exakte Sequenz $\nabla(\mu) \hookrightarrow E \twoheadrightarrow \Delta(\lambda)$ in $\mathcal{O}$ spaltet. Gilt hier nicht $\lambda < \mu$, so liefert die universelle Eigenschaft von Vermamoduln unmittelbar eine Spaltung. Gilt dahingegen $\lambda < \mu$, so dualisieren wir und sind auch wieder fertig. Für die mit den langen exakten Ext-Sequenzen vertrauten Leser ist der Beweis damit zu Ende. Die anderen müssen sich noch überlegen, daß wir durch Bilden des Pushout $E := \operatorname{cok}((i, -\varphi)^\top : Q \hookrightarrow (P \oplus \nabla(\mu))$ zur Einbettung $i : Q \hookrightarrow P$ und irgendeinem Morphismus $\varphi : Q \to \nabla(\mu)$ ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} Q & \hookrightarrow & P & \twoheadrightarrow & \Delta(\lambda) \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ \nabla(\mu) & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & \Delta(\lambda) \end{array}$$

erhalten. Da die untere Zeile spaltet, läßt sich unser Morphismus $\varphi : Q \to \nabla(\mu)$ in der Tat zu einem Morphismus $P \to \nabla(\mu)$ ausdehnen. $\square$

Übungen

Übung 25.2.3.11. Ist P ein projektives Objekt von $\mathcal{O}$ und E eine endlichdimensionale Darstellung, so ist auch $E \otimes P$ ein projektives Objekt von $\mathcal{O}$.

25.2.4 Die Tensoridentität*

Proposition 25.2.4.1 (Die Tensoridentität und ihre Verwandten). *Sei $\mathfrak{b} \to \mathfrak{g}$ ein Homomorphismus von Liealgebren über einem Körper k. Gegeben Darstellungen $M \in \mathfrak{b}\text{-Mod}$ und $E \in \mathfrak{g}\text{-Mod}$ haben wir kanonische Isomorphismen von $\mathfrak{g}$-Moduln*

$$\begin{array}{lcr} \operatorname{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(E \otimes_k M) & \xrightarrow{\sim} & E \otimes_k (\operatorname{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M) \\ \operatorname{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \operatorname{Hom}_k(E, M) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Hom}_k(E, \operatorname{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M) \\ \operatorname{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \operatorname{Hom}_k(M, E) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Hom}_k(\operatorname{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M, E) \end{array}$$

Ergänzung 25.2.4.2. Eine Variante dieser Aussagen für Mengen mit Gruppenoperation wird in 16.4.8.26 ausformuliert.

Beweis. Ganz allgemein ist nach 16.4.8.22 der Adjungierte einer Verknüpfung von Funktoren die Verknüpfung der Adjungierten, wenn sie existieren. Diese Erkenntnis gilt es nun anzuwenden auf die kommutativen Diagramme von Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}\text{-Mod} & \xrightarrow{E\otimes} & \mathfrak{g}\text{-Mod} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{b}\text{-Mod} & \xrightarrow{E\otimes} & \mathfrak{b}\text{-Mod} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g}\text{-Mod} & \xrightarrow{\operatorname{Hom}(E,\ )} & \mathfrak{g}\text{-Mod} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{b}\text{-Mod} & \xrightarrow{\operatorname{Hom}(E,\ )} & \mathfrak{b}\text{-Mod} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}\text{-Mod} & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\ ,E)} & \mathfrak{g}\text{-Mod}^{\mathrm{opp}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{b}\text{-Mod} & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\ ,E)} & \mathfrak{b}\text{-Mod}^{\mathrm{opp}} \end{array}$$

mit den Restriktionen als Vertikalen und der Adjunktion $(E\otimes, \mathrm{Hom}(E,\ ))$ beziehungsweise der Tatsache, daß der Rechtsadjungierte der Horizontalen $\mathrm{Hom}(\ ,E)$ im Diagramm ganz rechts wieder $\mathrm{Hom}(\ ,E)$ ist, nur diesmal aufgefaßt als Funktor in der Gegenrichtung. □

25.2.4.3. Nehmen wir im letzten unserer Isomorphismen speziell $E = k$, so ergibt sich ein kanonischer Isomorphismus $(\mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} N)^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(N^*)$.

Übungen

Übung 25.2.4.4. Der erste unserer drei Isomorphismen wird unter der Identifikation $\mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} M$ auf Elementen gegeben durch die Vorschrift $u \otimes (e \otimes m) \mapsto u(e \otimes (1 \otimes m))$.

Übung 25.2.4.5. Gegeben eine weitere Darstellung $F \in \mathfrak{g}\text{-Mod}$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(E \otimes F \otimes M) & \longrightarrow & (E \otimes F) \otimes \mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M \\ \downarrow & & \downarrow \\ E \otimes \mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(F \otimes M) & \longrightarrow & E \otimes (F \otimes \mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M) \end{array}$$

25.2.5 Verschiebungsfunktoren

25.2.5.1. Wir erinnern an die Zerlegung $\mathcal{O} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathrm{dom}}} \mathcal{O}_\lambda$ aus 25.2.2.5, in der λ über alle ρ-dominanten Gewichte läuft. Zu dieser Zerlegung gehören Projektionsfunktoren $\mathrm{pr}_\lambda : \mathcal{O} \to \mathcal{O}_\lambda$ und Einbettungsfunktoren $\mathrm{in}_\lambda : \mathcal{O}_\lambda \hookrightarrow \mathcal{O}$.

Definition 25.2.5.2. Gegeben λ, μ zwei ρ-dominante Gewichte mit ganzer Differenz $\mu - \lambda \in \mathfrak{X}$ betrachten wir eine einfache endlichdimensionale Darstellung E mit extremem Gewicht $\mu - \lambda$ und einem ausgezeichnetem Erzeuger des zugehörigen Gewichtsraums und definieren den **Verschiebungsfunktor von** λ **nach** μ, auf englisch und französisch **translation functor**, als den Funktor

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{T}_\lambda^\mu : & \mathcal{O}_\lambda & \to & \mathcal{O}_\mu \\ & M & \mapsto & \mathrm{pr}_\mu(E \otimes M) \end{array}$$

25.2.5.3. Die Wahl eines ausgezeichneten Erzeugers des zugehörigen Gewichtsraums ist nur eine von vielen Möglichkeiten, unseren Funktor bis auf eindeutigen Isomorphismus festzulegen. Alternativ könnte man auch $E = \mathrm{L}(\nu)$ nehmen für

$\{\nu\} = W(\mu - \lambda) \cap \mathfrak{X}^+$, aber mit dieser Wahl erreicht man bei den nun folgenden Konstruktionen nur schwer denselben Grad von Eindeutigkeit.

Lemma 25.2.5.4 (**Erste Eigenschaften der Verschiebungsfunktoren**). *Seien λ, μ zwei ρ-dominante Gewichte mit ganzer Differenz. So gilt:*

1. *Der Verschiebungsfunktor T_λ^μ ist exakt;*
2. *Es gibt Adjunktionen $(\mathrm{T}_\mu^\lambda, \mathrm{T}_\lambda^\mu)$;*
3. *Die Verschiebungsfunktoren vertauschen mit der Dualität, wir geben im Beweis sogar genauer für jede Chevalley-Involution eine ausgezeichnete Isotransformation $\mathrm{T}_\lambda^\mu \circ d \tilde{\Rightarrow} d \circ \mathrm{T}_\lambda^\mu$ an;*
4. *Unter unseren Verschiebungsfunktoren T_λ^μ werden Projektive zu Projektiven.*

Beweis. 1. Der Verschiebungsfunktor T_λ^μ ist exakt als Komposition der exakten Funktoren $\mathrm{T}_\lambda^\mu = \mathrm{pr}_\mu \circ (E\otimes) \circ \mathrm{in}_\lambda$;

2. Wir haben natürliche Adjunktionen $(\mathrm{in}_\lambda, \mathrm{pr}_\lambda)$, $(E\otimes, E^*\otimes)$ und $(\mathrm{pr}_\mu, \mathrm{in}_\mu)$. Weiter haben wir $\mathrm{T}_\mu^\lambda = \mathrm{pr}_\lambda \circ (E^*\otimes) \circ \mathrm{in}_\mu$, wobei wir in E^* den Gewichtsvektor auszeichnen, der auf dem in E ausgezeichneten Gewichtsvektor den Wert Eins annimmt. So erhalten wir eine Adjunktion von Funktoren $(\mathrm{T}_\lambda^\mu, \mathrm{T}_\mu^\lambda)$;

3. Wir denken uns hier eine Chevalley-Involution τ fest gewählt und verstehen $d = d_\tau$. Wir haben kanonische Isomorphismen $(E \otimes M)^* \tilde{\to} E^* \otimes M^*$ wegen $\dim E < \infty$ und dann auch $d(E \otimes M) \tilde{\to} dE \otimes dM$. Weiter erklären wir kanonische Isomorphismen $dE \tilde{\to} E$ dadurch, daß wir den eben erklärten ausgezeichneten extremen Gewichtsvektor von E^* mit dem ausgezeichneten extremen Gewichtsvektor von E identifizieren. Mit der offensichtlichen Isotransformation $\mathrm{pr}_\mu \circ d \tilde{\Rightarrow} d \circ \mathrm{pr}_\mu$ erhalten wir dann kanonische Isomorphismen

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{T}_\lambda^\mu dM & = & \mathrm{pr}_\mu(E \otimes dM) & \\ & \tilde{\to} & \mathrm{pr}_\mu(dE \otimes dM) & \\ & \tilde{\to} & \mathrm{pr}_\mu\, d(E \otimes M) & \\ & \tilde{\to} & d\,\mathrm{pr}_\mu(E \otimes M) & = \quad d(\mathrm{T}_\lambda^\mu M) \end{array}$$

Das zeigt die Behauptung.

4. Ist in der Tat P projektiv in $\mathcal{O}_\lambda$, so ist $\mathcal{O}_\lambda(P, \ ) \circ \mathrm{T}_\mu^\lambda \cong \mathcal{O}_\mu(\mathrm{T}_\lambda^\mu P, \ )$ exakt als Verknüpfung exakter Funktoren und somit ist $\mathrm{T}_\lambda^\mu P$ projektiv in $\mathcal{O}_\mu$. $\square$

25.2.5.5. Wir bezeichnen von nun an mit W_λ die Standgruppe von λ bezüglich der dot-Operation und $W_{\bar{\lambda}}$ die ganzzahlige Weylgruppe von λ nach 25.1.6.2. Bei der

ganzzahligen Weylgruppe kommt es noch nicht einmal darauf an, ob wir diesen Begriff in Bezug auf die lineare Operation oder in Bezug auf die dot-Operation verstehen.

Proposition 25.2.5.6 (Verschieben von Vermamoduln). *Seien λ, μ zwei ρ-dominante Gewichte mit ganzer Differenz $\lambda - \mu \in \mathfrak{X}$. So besitzt für alle Elemente der ganzzahligen Weygruppe $x \in W_{\bar{\lambda}}$ der verschobene Vermamodul $\mathrm{T}^{\mu}_{\lambda}\Delta(x \cdot \lambda)$ eine Vermafahne, in der jeder Vermamodul $\Delta(xy \cdot \mu)$ mit $y \in W_\lambda/(W_\lambda \cap W_\mu)$ genau einmal als Subquotient auftritt.*

25.2.5.7. Zwei Spezialfälle verdienen besondere Beachtung: Im Fall $W_\lambda \subset W_\mu$ der sogenannten **Verschiebung auf Wände** werden Vermamoduln zu Vermamoduln, genauer gilt $\mathrm{T}^{\mu}_{\lambda}\Delta(x \cdot \lambda) \cong \Delta(x \cdot \mu)$. Im Fall $W_\lambda \supset W_\mu$ der sogenannten **Verschiebung aus Wänden** hat $\mathrm{T}^{\mu}_{\lambda}\Delta(x \cdot \lambda)$ eine Filtrierung mit Subquotienten $\Delta(xy \cdot \mu)$ für $y \in W_\lambda/W_\mu$.

Beweis. Wir haben nach der Definition $\mathrm{T}^{\mu}_{\lambda}\Delta(x \cdot \lambda) = \mathrm{pr}_\mu(E \otimes \Delta(x \cdot \lambda))$ für $E \cong \mathrm{L}(\nu)$ mit $\{\nu\} = W(\mu - \lambda) \cap \mathfrak{X}^+$. Jetzt brauchen wir ein Lemma.

Lemma 25.2.5.8. *Sei E eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$. So hat die Tensordarstellung $E \otimes \Delta(\lambda)$ eine Verma-Fahne mit Subquotienten $\Delta(\lambda+\eta)$, wobei η über die Multimenge $\mathrm{P}_\mu(E)$ der Gewichte von E mit ihren Multiplizitäten läuft.*

Beweis. Die Tensoridentität 25.2.4.1 liefert uns einen kanonischen Isomorphismus $E \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{prod}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{prod}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{b}}(E \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_\lambda)$, und jede Filtrierung des $\mathfrak{b}$-Moduls E mit eindimensionalen Subquotienten induziert eine Δ-Fahne der gewünschten Art auf $E \otimes \Delta(\lambda)$. □

Insbesondere hat in unserem Fall $E \otimes \Delta(x \cdot \lambda)$ eine Vermafahne mit Subquotienten $\Delta(x \cdot \lambda + \eta)$, wo η die Multimenge $\mathrm{P}_\mu(E)$ der Gewichte von E durchläuft. Wir müssen demnach nur für alle $\eta \in \mathrm{P}_\mu(E)$ die drei Implikationen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{pr}_\mu \Delta(x \cdot \lambda + \eta) \neq 0 & \Leftrightarrow & \exists\, y \in W_\lambda \text{ mit } x \cdot \lambda + \eta = xy \cdot \mu \\ & & \Downarrow \\ & & \dim E_\eta = 1 \end{array}$$

zeigen. $\Leftarrow$ und $\Downarrow$ sind evident. Wir zeigen nun $\Rightarrow$. Gegeben eine beliebige affine Spiegelungsgruppe $\mathcal{W}$ auf einem affinen euklidischen Raum E wird für beliebige $v, w \in E$ nach 23.1.7.7 der Abstand $\|v - zw\|$ minimal genau für die $z \in \mathcal{W}$, für die v und zw im Abschluß desselben Alkoven liegen. Lassen wir speziell $\mathcal{W} = W_{\bar{\lambda}} = W_{\bar{\mu}}$ operieren vermittels der dot-Operation als affine Spiegelungsgruppe auf dem affinen euklidischen Raum $E = \lambda + \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ über dem angeordneten Körper $\mathbb{Q}$, so liegen λ und μ im Abschluß desselben Alkoven, da sie beide ρ-dominant sind. Andererseits sind aber die Gewichte maximaler Länge

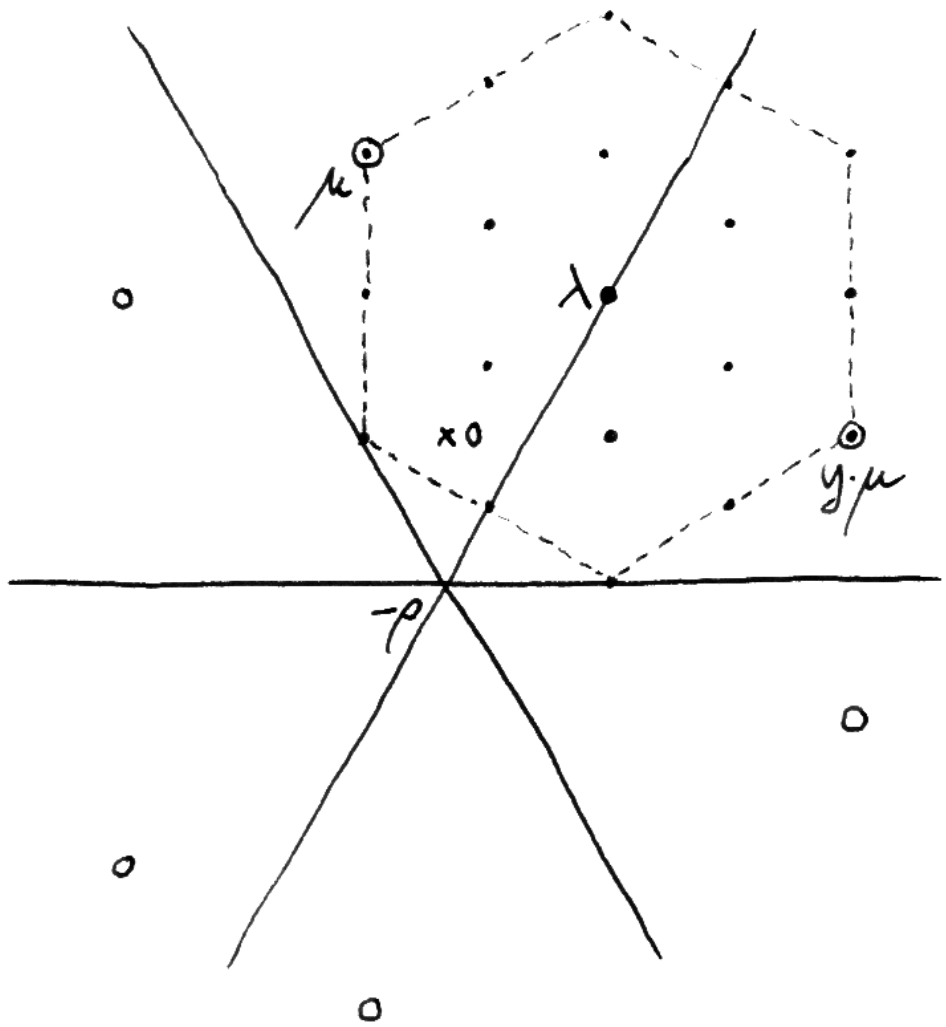


Illustration zur Verschiebung aus der Wand: In diesem Fall ergibt sich eine kurze exakte Sequenz

$$\Delta(\mu) \hookrightarrow \mathrm{T}_\lambda^\mu \Delta(\lambda) \twoheadrightarrow \Delta(y \cdot \mu)$$

von E nach 24.4.6.31 genau die extremen Gewichte, d.h. die Gewichte auf dem Weylgruppenorbit $W(\mu - \lambda)$. Nur dann kann also ein Gewicht $\eta \in \mathrm{P}_\mu(E)$ den Abstand zwischen einem Element aus $W_{\bar\lambda} \cdot \lambda$ und einem Element aus $W_{\bar\lambda} \cdot \mu$ überbrücken, wenn unser Gewicht η extrem ist und die beiden fraglichen Punkte im Abschluß desselben Alkoven liegen. Genau dann liegen nun aber $x \cdot \lambda$ und $xy \cdot \mu$ im Abschluß desselben Alkoven, wenn es ein z aus der Standgruppe von λ gibt mit $y \cdot \mu = z \cdot \mu$, und dann wird ihre Differenz auch in der Tat gerade überbrückt durch ein extremes Gewicht von E, nämlich durch das Gewicht $xz(\mu - \lambda)$. □

25.2.5.9. Ich erinnere an die Grothendieckgruppe einer abelschen Kategorie **??** und an den von einem exakten Funktor induzierten Gruppenhomomorphismus 8.7.4.5.

Proposition 25.2.5.10. *Die einfachen Moduln, die Vermamoduln und die unzerlegbaren Projektiven liefern jeweils eine $\mathbb{Z}$-Basis der Grothendieckgruppe von $\mathcal{O}$.*

Beweis. Es reicht, die analoge Aussage für die Kategorien ${}_\chi\mathcal{O}$ zu zeigen. Die Einfachen bilden für jede längenendliche Kategorie eine Basis der Grothendieck-Gruppe, siehe 8.7.4.3. Die Einfachen von ${}_\chi\mathcal{O}$ sind genau die $\mathrm{L}(\lambda)$ mit λ aus einer geeigneten endlichen Menge S, genauer der Menge $S = \xi^{-1}(\chi)$. Die quadratische Matrix der $[\Delta(\lambda) : \mathrm{L}(\mu)]$ mit $\lambda, \mu \in S$ hat Einsen auf der Diagonalen und obere Dreiecksgestalt bei geeigneter Nummerierung von S. Mithin ist diese Matrix invertierbar und das zeigt, daß auch die $[\Delta(\lambda)]$ mit $\lambda \in S$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $[{}_\chi\mathcal{O}]$ bilden. Für die unzerlegbaren Projektiven argumentiert man genauso, auch die Matrix $[\mathrm{P}(\lambda) : \Delta(\mu)]_\Delta$ mit $\lambda, \mu \in S$ hat nach 25.2.3.8 Einsen auf der Diagonalen und obere Dreiecksgestalt bei geeigneter Nummerierung von S. □

Korollar 25.2.5.11. *Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ zwei ρ-dominante Gewichte mit ganzer Differenz. Gilt $W_\lambda \subset W_\mu$, so induziert $\mathrm{T}^\mu_\lambda \mathrm{T}^\lambda_\mu$ auf der Grothendieckgruppe $[\mathcal{O}_\mu]$ die Multiplikation mit der natürlichen Zahl $|W_\mu / W_\lambda|$. Insbesondere wird unter der Verschiebung T^λ_μ aus der Wand kein von Null verschiedener Modul zu Null.*

Beweis. Die Vermamoduln aus $\mathcal{O}_\mu$ bilden eine Basis der Grothendieckgruppe $[\mathcal{O}_\mu]$. Das Korollar folgt damit aus 25.2.5.6. □

Satz 25.2.5.12. *Gegeben ρ-dominante Gewichte λ, μ mit ganzer Differenz $\lambda - \mu \in \mathfrak{X}$ und mit derselben Standgruppe $W_\lambda = W_\mu$ unter der dot-Operation liefert der Verschiebungsfunktor eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{T}^\mu_\lambda : \mathcal{O}_\lambda \xrightarrow{\approx} \mathcal{O}_\mu$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, die vermittels einer Adjunktion α erklärten Abbildungen Isomorphismen

$$\hat\alpha_M : M \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^\lambda_\mu \mathrm{T}^\mu_\lambda M \quad \text{und} \quad \check\alpha_N : \mathrm{T}^\mu_\lambda \mathrm{T}^\lambda_\mu N \xrightarrow{\sim} N$$

sind für alle $M \in \mathcal{O}_\lambda$, $N \in \mathcal{O}_\mu$. Wir führen das nur für die Erste unserer beiden Abbildungen aus. Per defintionem ist $\hat{\alpha}_M$ das Bild der Identität auf $\mathrm{T}_\lambda^\mu M$ unter dem durch die Adjunktion gegebenen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_\mu(\mathrm{T}_\lambda^\mu M, \mathrm{T}_\lambda^\mu M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_\lambda(M, \mathrm{T}_\mu^\lambda \mathrm{T}_\lambda^\mu M)$$

Aus $\mathrm{T}_\lambda^\mu M \neq 0$ folgt also $\hat{\alpha}_M \neq 0$. Da die Endomorphismen von Vermamoduln genau die skalaren Vielfachen der Identität sind, ist nach 25.2.5.6 mithin $\hat{\alpha}_M$ ein Isomorphismus für jeden Vermamodul $M = \Delta(x \cdot \lambda) \in \mathcal{O}_\lambda$. Dann ist $\hat{\alpha}_M$ auch ein Isomorphismus für jeden Modul M mit Vermafahne, nach dem Fünferlemma und Induktion. Nach 25.2.1.5.2 ist aber jedes Objekt von $\mathcal{O}$ Quotient eines Objekts mit Vermafahne. Damit ist natürlich auch jedes Objekt von $\mathcal{O}_\lambda$ Quotient eines Objekts von $\mathcal{O}_\lambda$ mit Vermafahne. Für beliebiges M folgt dann die Behauptung vermittels einer Zwei-Schritte-Auflösung durch Objekte mit Vermafahne und erneuter Anwendung des Fünferlemmas. □

Korollar 25.2.5.13. *Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ mit $\lambda - \mu \in \mathfrak{X}$ und $W_\lambda = W_\mu$. So gilt für alle $x, y \in W_{\bar{\lambda}} = W_{\bar{\mu}}$ die Identität von Jordan-Hölder-Multiplizitäten*

$$[\Delta(x \cdot \lambda) : \mathrm{L}(y \cdot \lambda)] = [\Delta(x \cdot \mu) : \mathrm{L}(y \cdot \mu)]$$

Beweis. Wir haben eine Äquivalenz von Kategorien, die $\Delta(x \cdot \lambda)$ auf $\Delta(x \cdot \mu)$ abbildet und damit natürlich auch den eindeutigen einfachen Quotienten auf den eindeutigen einfachen Quotienten. □

25.2.6 Homomorphismen zwischen Vermamoduln

25.2.6.1. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra mit einer Cartan'schen und sei R^+ ein System von positiven Wurzeln.

Satz 25.2.6.2 (Homomorphismen zwischen Vermamoduln). *1. Jeder von Null verschiedene Homomorphismus zwischen zwei Vermamoduln ist injektiv;*

2. Jeder Vermamodul hat genau einen einfachen Untermodul, und dieser einfache Untermodul ist auch selbst wieder ein Vermamodul;

3. Der Raum der Homomorphismen zwischen zwei Vermamoduln hat höchstens die Dimension Eins;

4. Bezeichne $\uparrow$ die stärkste reflexive transitive Relation auf $\mathfrak{h}^*$ derart, daß gilt $(s_\alpha \cdot \lambda) \uparrow \lambda$ für alle $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ und $\alpha \in R^+$ mit $(s_\alpha \cdot \lambda) \leq \lambda$ alias $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$. Andererseits stehe $\Delta(\lambda) \subset \Delta(\mu)$ für die Aussage, daß sich $\Delta(\lambda)$ als Untermodul in $\Delta(\mu)$ einbetten läßt. So haben wir

$$\Delta(\lambda) \subset \Delta(\mu) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \uparrow \mu$$

25.2.6.3. Bezeichne $\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{g}$ die Summe der Wurzelräume zu positiven Wurzeln. Unser Satz kann auch aufgefaßt werden als eine Beschreibung des $\mathfrak{h}$-Moduls der $\mathfrak{n}^+$-Invarianten in einem beliebigen Vermamodul.

Beweis. 1. Ist A ein Ring, so ist jeder Homomorphismus des A-Linksmoduls A in sich selber die Multiplikation mit einem Element von A von rechts. Ist A ein Integritätsring, so ist folglich jeder von Null verschiedene Homomorphismus des A-Linksmoduls A in sich selber injektiv. Bezeichne $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ die Summe der Wurzelräume zu nichtpositiven Wurzeln. Wenden wir unsere Erkenntnis an auf die Einhüllende $A = \mathrm{U}(\mathfrak{n})$ und beachten, daß Vermamoduln als Moduln über $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$ isomorph sind zu $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$ selber, so ergibt sich die Behauptung.

2. Jeder Vermamodul ist frei über dem Integritätsring $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$ und damit auch torsionsfrei. Für $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{n}), v \in \Delta(\lambda)$ folgt aus $u \cdot v = 0$ also schon $u = 0$ oder $v = 0$. Ein einfacher Modul $\mathrm{L}(\lambda)$ kann aber nur dann torsionsfrei sein über $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$, wenn er schon selbst ein Vermamodul ist, $\mathrm{L}(\lambda) = \Delta(\lambda)$. Insbesondere ist jeder einfache Untermodul eines Vermamoduls selbst wieder ein Vermamodul. Für eine endlichdimensionale Lie-Algebra $\mathfrak{n}$ kann es nun aber keine Einbettung

$$\mathrm{U}(\mathfrak{n}) \oplus \mathrm{U}(\mathfrak{n}) \hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{n})$$

von $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$-Linksmoduln geben, denn die Bilder von $(1,0)$ und $(0,1)$ unter so einer Einbettung müßten für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ in $\mathrm{U}^{\leq n}(\mathfrak{n})$ liegen und wir hätten damit Einbettungen

$$\mathrm{U}^{\leq i}(\mathfrak{n}) \oplus \mathrm{U}^{\leq i}(\mathfrak{n}) \hookrightarrow \mathrm{U}^{\leq n+i}(\mathfrak{n})$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ im Widerspruch dazu, daß $\dim \mathrm{U}^{\leq i}(\mathfrak{n})$ nach Poincaré-Birkhoff-Witt gegeben wird durch ein Polynom in i, genauer $\dim \mathrm{U}^{\leq i}(\mathfrak{n}) = \binom{i+d}{d}$ für $d = \dim \mathfrak{n}$. Ein Vermamodul kann damit nicht zwei verschiedene einfache Untermoduln besitzen, denn beide müssten Vermamoduln sein und Schnitt Null haben im Widerspruch zu unseren Betrachtungen zu Moduln über $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$.

3. Bezeichne $\operatorname{soc} \Delta(\lambda)$ den einfachen Untermodul von $\Delta(\lambda)$, d.h. seinen Sockel. Da nach Teil 1 jeder von Null verschiedene Homomorphismus von Vermamoduln injektiv ist, verschwindet er auch nicht auf dem Sockel des Ausgangsmoduls. Gegeben Vermamoduln $\Delta(\lambda)$ und $\Delta(\mu)$ folgern wir die dritte Behauptung nun aus den Inklusionen

$$\mathcal{O}(\Delta(\lambda), \Delta(\mu)) \hookrightarrow \mathcal{O}(\operatorname{soc} \Delta(\lambda), \Delta(\mu)) = \mathcal{O}(\operatorname{soc} \Delta(\lambda), \operatorname{soc} \Delta(\mu))$$

4. Der Beweis dieser Aussage kann erst nach einigen Vorbereitungen im Anschluß an 25.2.6.19 gegeben werden. □

Definition 25.2.6.4. Sei $s \in S$ eine einfache Spiegelung. Eine **Verschiebung durch die s-Wand** ist ein Funktor

$$\theta_s : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$$

der Gestalt $\theta_s = \mathrm{T}_\mu^0 \mathrm{T}_0^\mu$ für ein $\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}} \cap \mathfrak{X}$ **auf der s-Wand**, d.h. mit $W_\mu = \langle s \rangle$.

Vorschau 25.2.6.5. Wir werden uns später überlegen, daß so eine Verschiebung durch die Wand bis auf natürliche Äquivalenz nicht von der Wahl der Stelle μ auf der Wand abhängt. Die möglichen μ sind übrigends genau alle ganzzahligen Linearkombinationen von fundamentalen dominanten Gewichten, in denen das fundamentale dominante Gewicht zu unserer einfachen Spiegelung den Koeffizienten -1 hat und alle anderen Koeffizienten nichtnegativ sind.

Lemma 25.2.6.6 (Eigenschaften von Verschiebungen durch Wände). *Sei s eine einfache Spiegelung in Bezug auf unser System von positiven Wurzeln R^+. So gilt:*

1. *Jede Verschiebung θ_s durch die s-Wand ist ein exakter und selbstadjungierter Funktor, der mit jeder Dualität vertauscht;*

2. *Die von unseren Adjunktionen $\alpha : (\mathrm{T}_0^\mu, \mathrm{T}_\mu^0)$ und $\omega : (\mathrm{T}_\mu^0, \mathrm{T}_0^\mu)$ induzierten Transformationen $\hat{\alpha} : \mathrm{id} \to \theta_s$ beziehungsweise $\check{\omega} : \theta_s \to \mathrm{id}$ liefern genau dann von Null verschiedene Abbildungen $M \to \theta_s M$ beziehungsweise $\theta_s M \to M$, wenn gilt $\theta_s M \neq 0$;*

3. *Wir haben $\dim \mathcal{O}(\Delta, \theta_s \Delta) = \dim \mathcal{O}(\theta_s \Delta, \Delta) = 1$ für jeden Vermamodul Δ aus $\mathcal{O}_0$;*

4. *Wir haben $\theta_s \Delta(x \cdot 0) \cong \theta_s \Delta(xs \cdot 0)$ für alle $x \in W$, und nehmen wir zusätzlich $x < xs$ an, so gibt es eine kurze exakte Sequenz*

$$\Delta(x \cdot 0) \hookrightarrow \theta_s \Delta(x \cdot 0) \twoheadrightarrow \Delta(xs \cdot 0)$$

Vorschau 25.2.6.7. Wir werden gleich zeigen können, daß die kurze exakte Sequenz aus 4 nicht spaltet: Sobald wir die Einbettung $\Delta(x \cdot 0) \subset \Delta(xs \cdot 0)$ kennen, liefert die Annahme einer Spaltung nämlich einen Widerspruch zur Aussage von Teil 3.

Beweis. 1. Die entsprechenden Aussagen über Verschiebungsfunktoren aus 25.2.5.4 liefern sofort eine natürliche Äquivalenz $\theta_s \circ d \overset{\sim}{\Rightarrow} d \circ \theta_s$ und die Existenz von Adjunktionen (θ_s, θ_s).

2. Unsere Adjunktionen liefern von Null verschiedene Abbildungen $M \to \theta_s M$

beziehungsweise $\theta_s M \to M$ genau dann, wenn gilt $\mathrm{T}_0^\mu M \neq 0$. In der Tat kommen sie ja her von der Identität auf $\mathrm{T}_0^\mu M$ vermittels der Adjunktionsisomorphismen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(\mathrm{T}_0^\mu M, \mathrm{T}_0^\mu M) & \tilde{\to} & \mathrm{Hom}(M, \mathrm{T}_\mu^0 \mathrm{T}_0^\mu M) \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{T}_0^\mu M, \mathrm{T}_0^\mu M) & \tilde{\to} & \mathrm{Hom}(\mathrm{T}_\mu^0 \mathrm{T}_0^\mu M, M) \end{array}$$

Schließlich liefert jedoch die Verschiebung aus der Wand T_μ^0 eine Injektion auf der Grothendieckgruppe nach 25.2.5.11, und die dort bewiesene Aussage zeigt genauer $\theta_s M \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{T}_0^\mu M \neq 0$.

3. Das folgt mit den Adjunktionen $(\mathrm{T}_0^\mu, \mathrm{T}_\mu^0)$ und $(\mathrm{T}_\mu^0, \mathrm{T}_0^\mu)$ daraus, daß Vermamoduln auf die Wand gerückt Vermamoduln bleiben.

4. Als aus der Wand gerückter Vermamodul hat $\theta_s \Delta(x \cdot 0) = \mathrm{T}_\mu^0 \Delta(x \cdot \mu)$ nach 25.2.5.6 eine Vermafahne mit Subquotienten $\Delta(x \cdot 0)$ und $\Delta(xs \cdot 0)$. Diese Vermafahne läßt sich tatsächlich in der behaupteten Weise anordnen, da sie sonst nach 24.4.4.6 spalten müßte und sich dann eben umsortieren ließe. □

25.2.6.8. Ich erinnere an die Bruhat-Teilordnung 23.3.3.2 auf der Weylgruppe. Sie kann dadurch charakterisiert werden, daß gegeben eine kürzestmögliche Darstellung $w = s_1 \ldots s_r$ eines Elements als Produkt von einfachen Spiegelungen die Menge $\{x \in W \mid x \leq w\}$ mit der Menge aller Produkte von Teilausdrücken $x = s_{i(1)} \ldots s_{i(s)}$ zusammenfällt, für $ss \geq 0$ und $i : \{1, \ldots, s\} \to \{1, \ldots, r\}$ streng monoton wachsend. Daß jedoch diese Menge nicht von der Wahl der kürzestmöglichen Darstellung abhängt und daß wir so in der Tat eine partielle Ordnung erhalten, muß erst einmal bewiesen werden. Aus 23.1.6.11 folgt sogar, daß jedes $x \leq w$ unter den reduzierten Teilausdrücken unserer gegebenen kürzestmöglichen Darstellung zu finden ist.

Proposition 25.2.6.9. *Bezeichne $\leq$ die Bruhat-Teilordnung auf der Weylgruppe. So haben wir für alle $x, y \in W$*

$$\Delta(x \cdot 0) \subset \Delta(y \cdot 0) \Leftrightarrow x \geq y$$

Beweis. Für diesen Beweis kürzen wir $\Delta(x \cdot 0) = \Delta(x)$ ab und haben insbesondere $\Delta(0) = \Delta(e)$ für $e \in W$ das neutrale Element. Wir zeigen zunächst die Implikation $\Leftarrow$ und gehen dazu in mehreren Schritten vor.

1. Nach 24.4.4.13 gilt $\Delta(s) \subset \Delta(e)$ für alle einfachen Spiegelungen $s \in S$.

2. Für $x, y \in W$ und $s \in S$ mit $x < xs$, $y < ys$ gilt

$$\Delta(x) \subset \Delta(y) \quad \Rightarrow \quad \Delta(xs) \subset \Delta(ys)$$

Um das zu sehen, wenden wir auf die linke Inklusion den Funktor θ_s an und erhalten mithilfe von 25.2.6.6 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \Delta(x) & \hookrightarrow & \theta_s\Delta(x) & \twoheadrightarrow & \Delta(xs) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Delta(y) & \hookrightarrow & \theta_s\Delta(y) & \twoheadrightarrow & \Delta(ys) \end{array}$$

Wäre hier die rechts induzierte Vertikale die Nullabbildung, so müßte die mittlere Vertikale über $\Delta(y)$ faktorisieren. Da θ_s exakt ist, ist jedoch die mittlere Vertikale injektiv, und wir erhielten auf diese Weise eine Injektion $\theta_s\Delta(x) \hookrightarrow \Delta(y)$ und damit eine Injektion von $U(\mathfrak{n})$-Linksmoduln $U(\mathfrak{n}) \oplus U(\mathfrak{n}) \hookrightarrow U(\mathfrak{n})$. Die aber kann es nicht geben, wie wir bereits im Beweis von 25.2.6.2 gesehen hatten.

3. Für alle $x \in W$ gilt $\Delta(x) \subset \Delta(e)$. Das folgt aus den ersten beiden Schritten mit Induktion über die Länge von x. Man kann das aber auch zeigen, ohne Punkt 2 zu verwenden, indem man die volle Kraft von 24.4.4.13 ausnutzt, die ja auch $sx > x \;\Rightarrow\; \Delta(sx) \subset \Delta(x)$ liefert für alle einfachen Spiegelungen $s \in S$.

4. Wir zeigen als Zwischenschritt für jeden Vermamodul Δ aus $\mathcal{O}_0$, daß jede Komposition von Abbildungen $\Delta \to \theta_s\Delta \to \Delta$ verschwindet. Nach dem vorhergehenden Punkt, und da diese Morphismenräume eh höchstens eindimensional sind, dürfen wir uns hierbei auf den Fall $\Delta = \Delta(e)$ beschränken. Unsere Adjunktionen zeigen in diesem Fall, daß die Homomorphismenräume von $\Delta(e)$ oder $\Delta(s)$ nach $\theta_s\Delta(e) \cong \theta_s\Delta(s)$ eindimensional sind, und die Homomorphismenräume in der umgekehrten Richtung desgleichen. Die kanonische Abbildung $\theta_s\Delta(e) \to \Delta(e)$ faktorisiert also über die Einbettung $\Delta(s) \subset \Delta(e)$ und die Komposition von kanonischen Abbildungen $\Delta(e) \hookrightarrow \theta_s\Delta(e) \to \Delta(e)$ ist folglich in der Tat Null.

5. Wir zeigen für alle $x \in W$ und $s \in S$, daß gilt

$$xs > x \;\Rightarrow\; \Delta(xs) \subset \Delta(x)$$

Nach dem vorhergehenden Punkt faktorisiert nämlich die von Null verschiedene kanonische Abbildung $\Delta(xs) \to \theta_s\Delta(xs)$ über den Kern der kanonischen Abbildung $\theta_s\Delta(xs) \to \Delta(xs)$, als da heißt über $\Delta(x)$.

6. Ist $x = s_1 s_2 \ldots s_l$ eine reduzierte Darstellung von x und haben wir y mit $y \le x$, so gibt es nach unserer Charakterisierung der Bruhatteilordnung 25.2.6.8 geeignete $t_i \in \{s_i, e\}$ mit $y = t_1 t_2 \ldots t_l$ und sogar so, daß die vom neutralen Element e verschiedenen t_i eine reduzierte Darstellung von y bilden. Mit 2 und 5 folgern wir nun induktiv $\Delta(s_1 s_2 \ldots s_i) \subset \Delta(t_1 t_2 \ldots t_i)$ für alle i.

7. Die andere Implikation $\Delta(x) \subset \Delta(y) \Rightarrow x \ge y$ folgt sofort aus dem anschließenden Lemma. □

Lemma 25.2.6.10. *Seien $x, y \in W$. So gilt $[\Delta(y \cdot 0) : \mathrm{L}(x \cdot 0)] \neq 0 \Leftrightarrow x \ge y$.*

Beweis. Wir kürzen stärker $\Delta(x \cdot 0) = \Delta(x) = \Delta_x$ ab und ähnlich $\mathrm{P}(x \cdot 0) = \mathrm{P}_x$ sowie $\mathrm{L}(x \cdot 0) = \mathrm{L}_x$. Die Implikation $\Leftarrow$ folgt aus der Implikation $\Leftarrow$ in 25.2.6.9 alias der Inklusion $\Delta_x \subset \Delta_y$ für $x \geq y$, die ja bereits bewiesen ist. Es gilt noch $\Rightarrow$ zu zeigen. Gegeben $x \in W$ und $s \in S$ mit $x < xs$ bemerken wir zunächst $[\theta_s \mathrm{L}_{xs} : \mathrm{L}_x] \neq 0$. In der Tat haben wir nämlich

$$\mathcal{O}(\Delta_x, \theta_s \mathrm{L}_{xs}) = \mathcal{O}(\theta_s \Delta_x, \mathrm{L}_{xs}) \supset \mathcal{O}(\Delta_{xs}, \mathrm{L}_{xs}) \neq 0$$

mit dem letzten Teil von 25.2.6.6. Ist also $x = s \ldots t$ eine reduzierte Darstellung von x als Produkt einfacher Spiegelungen, so folgern wir der Reihe nach

$$\begin{aligned}
[\theta_s \ldots \theta_t \mathrm{L}_x : \mathrm{L}_e] \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{O}(\Delta_e, \theta_s \ldots \theta_t \mathrm{L}_x) \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{O}(\theta_t \ldots \theta_s \Delta_e, \mathrm{L}_x) \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad \mathrm{P}_x \text{ ist Summand von } \theta_t \ldots \theta_s \Delta_e \\
&\Rightarrow \quad ([\mathrm{P}_x : \Delta_y] \neq 0 \Rightarrow [\theta_t \ldots \theta_s \Delta_e : \Delta_y] \neq 0) \\
&\Rightarrow \quad ([\mathrm{P}_x : \Delta_y] \neq 0 \Rightarrow y \leq x)
\end{aligned}$$

In der Tat hat ja $\theta_t \ldots \theta_s \Delta_e$ eine Vermafahne mit Subquotienten Δ_z, wo z über die Multimenge aller Teilausdrücke des Worts $s \ldots t$ läuft. Aus $[\mathrm{P}_x : \Delta_y] \neq 0$ folgt also $x \geq y$, und die Reziprozitätsformel 25.2.3.9 liefert die Behauptung. □

25.2.6.11. Damit ist 25.2.6.9 vollständig bewiesen, als da heißt, im Hauptblock $\mathcal{O}_0$ werden die Homomorphismen zwischen Vermamoduln vollständig kontrolliert durch die Bruhat-Teilordnung auf der Weylgruppe. Als nächstes behandeln wir allgemeiner Blöcke mit ganzem Parameter und müssen einige kombinatorische Vorbereitungen treffen.

Lemma 25.2.6.12. *Seien $R \supset R^+$ ein Wurzelsystem mit einem System positiver Wurzeln, (W, S) seine Weylgruppe mit den einfachen Spiegelungen, $S_\iota \subset S$ eine Teilmenge der Menge der einfachen Spiegelungen und $W_\iota \subset W$ das Erzeugnis von S_ι. So haben wir:*

1. *In jeder Nebenklasse aus W/W_ι gibt es genau einen Repräsentanten kleinster Länge und genau einen Repräsentanten größter Länge. Sie sind auch für die Bruhat-Teilordnung die kleinsten beziehungsweise größten Elemente ihrer Nebenklasse.*

2. *Bezeichnet $W^\iota \subset W$ die Menge der kürzesten Repräsentanten, so gilt für alle $x \in W^\iota$ und $y \in W_\iota$ die Formel $l(xy) = l(x) + l(y)$.*

Ergänzung 25.2.6.13. Dasselbe gilt analog für jedes Coxetersystem (W, S), vergleiche 23.3.3.13 und 23.3.3.15.

Beweis. Bezeichne $R_\iota \subset R$ die Menge aller derjenigen Wurzeln, die sich aus den einfachen Wurzeln zu Spiegelungen aus S_ι linear kombinieren lassen. Sicher ist R_ι ein Wurzelsystem in dem von ihm aufgespannten Teilraum. Offensichtlich stabilisiert jedes $s \in S_\iota$ die Menge $R^+ \backslash R_\iota$. Gegeben $w \in W$ ist nun $R_\iota \cap (wR^+)$ ein System positiver Wurzeln in R_ι und es gibt folglich genau ein $v \in W_\iota$ mit $v(R_\iota \cap (wR^+)) = R_\iota \cap R^+$. Da die Länge eines Elements nach 23.2.2.15 genau die Zahl der positiven Wurzeln ist, die von ihm negativ gemacht werden, ist $x = vw$ notwendig das kürzeste Element der Linksnebenklasse $W_\iota w$ und für alle $y \in W_\iota$ gilt $l(yx) = l(y) + l(x)$. Das zeigt die analoge Aussage für Linksnebenklassen. Die im Lemma behauptete Aussage für Rechtsnebenklassen folgt durch Invertieren. □

Proposition 25.2.6.14. *Gegeben $\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}} \cap \mathfrak{X}$ ein ganzes ρ-dominantes Gewicht und $x, y \in W^\mu$ kürzeste Repräsentanten von Nebenklassen aus W/W_μ gilt*

$$\Delta(x \cdot \mu) \subset \Delta(y \cdot \mu) \Leftrightarrow x \geq y$$

Beweis. Um die Implikation $\Leftarrow$ zu zeigen, rückt man die Einbettung $\Delta(x \cdot 0) \subset \Delta(y \cdot 0)$ mit T^μ_0 an die Stelle μ. Um die andere Implikation $\Rightarrow$ zu zeigen, folgern wir aus $\Delta(x \cdot \mu) \subset \Delta(y \cdot \mu)$ der Reihe nach

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Hom}(\mathrm{T}^\mu_0 \Delta(x \cdot 0), \Delta(y \cdot \mu)) \neq 0 & \text{wegen } \mathrm{T}^\mu_0 \Delta(x \cdot 0) \cong \Delta(x \cdot \mu), \\ \mathrm{Hom}(\Delta(x \cdot 0), \mathrm{T}^0_\mu \Delta(y \cdot \mu)) \neq 0 & \text{wegen der Adjunktion } (\mathrm{T}^\mu_0, \mathrm{T}^0_\mu), \text{ und} \\ \mathrm{Hom}(\Delta(x \cdot 0), \Delta(yu \cdot 0)) \neq 0 & \text{für ein } u \in W_\mu \text{ wegen } 25.2.5.6. \end{array}$$

Mit dem Hauptblock-Fall 25.2.6.9 folgt dann $x \geq yu \geq y$. □

25.2.6.15. Gegeben $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ ist $W_{\bar{\lambda}}$ kanonisch isomorph zur Weylgruppe des Wurzelsystems $R_{\bar{\lambda}}$. Das System positiver Wurzeln $R^+ \cap R_{\bar{\lambda}}$ definiert folglich eine Teilordnung auf $W_{\bar{\lambda}}$, die wir „die Bruhatteilordnung auf $W_{\bar{\lambda}}$“ nennen und $\geq_{\bar{\lambda}}$ notieren.

Satz 25.2.6.16. *Gegeben $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ und $x, y \in W_{\bar{\lambda}}$ kürzeste Repräsentanten von Nebenklassen aus $W_{\bar{\lambda}}/W_\lambda$ gilt mit $\geq_{\bar{\lambda}}$ der Bruhat-Teilordnung auf $W_{\bar{\lambda}}$ die Regel*

$$\Delta(x \cdot \lambda) \subset \Delta(y \cdot \lambda) \quad \Leftrightarrow \quad x \geq_{\bar{\lambda}} y$$

Beweis. Ganz genauso wie der Beweis für den bisher behandelten Spezialfall $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}} \cap \mathfrak{X}$ mit zwei Ausnahmen: Erstens sollten wir uns klarmachen, daß es für jede einfache Spiegelung $s \in W_{\bar{\lambda}}$ tatsächlich ein $\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}} \cap (\lambda + \mathfrak{X})$ gibt mit $W_\mu = \langle s \rangle$. Das überlassen wir dem Leser. Zweitens benötigen wir für jede einfache Spiegelung $s \in W_{\bar{\lambda}}$ eine Einbettung $\Delta(s \cdot \lambda) \subset \Delta(\lambda)$. Das leistet die anschließende Proposition 25.2.6.17. □

Proposition 25.2.6.17. *Gegeben $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ beliebig und $s \in W$ eine Spiegelung mit $(s \cdot \lambda) \leq \lambda$ gilt $\Delta(s \cdot \lambda) \subset \Delta(\lambda)$.*

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir das für λ ganz und regulär. In diesem Fall haben wir ja $\lambda = z \cdot \mu$ für eindeutig bestimmte $z \in W$ und $\mu \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ und es gilt, aus $(sz \cdot \mu) \leq (z \cdot \mu)$ zu folgern $sz \geq z$ in der Bruhat-Teilordnung. Nun bedeutet unsere Ungleichung $(sz \cdot \mu) \leq (z \cdot \mu)$ aber geometrisch gerade, daß die Spiegelebene L von s den Alkoven B von $(z \cdot \mu)$ und den Alkoven A von μ nicht trennt. Mit 23.1.6.7 folgt erst $l(sz) > l(z)$ und dann $sz \geq z$ wie gewünscht. Jetzt behandeln wir den allgemeinen Fall. Hier beruht das Argument auf dem folgenden Lemma, das wir im Anschluß beweisen.

Lemma 25.2.6.18. *Für jedes ganze Gewicht $\nu \in \mathfrak{X}$ ist die Menge*

$$\{\tau \in \mathfrak{h}^* \mid \Delta(\tau + \nu) \subset \Delta(\tau)\}$$

abgeschlossen in $\mathfrak{h}^*$ für die Zariski-Topologie.

Daraus folgt dann die Proposition, denn ist sagen wir α die Wurzel zu s und setzen wir $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle = n$, betrachten die Hyperebene H aller $\tau \in \mathfrak{h}^*$ mit $\langle \tau + \rho, \alpha^\vee \rangle = n$ und nehmen $\nu = -n\alpha$, so gilt $(s \cdot \tau) = \tau + \nu$ für alle $\tau \in H$ und nach dem schon Bewiesenen haben wir $\Delta(\tau + \nu) \subset \Delta(\tau)$ für alle regulären $\tau \in \mathfrak{X} \cap H$. Da diese jedoch in H Zariski-dicht liegen, folgt diese Inklusion mit 25.2.6.18 für alle $\tau \in H$ und insbesondere für λ. □

Beweis von Lemma 25.2.6.18. Gegeben Vektorräume V, W endlicher Dimension ist die Menge aller Injektionen sicher Zariski-offen in $\mathrm{Hom}(V, W)$ und die Menge der Nicht-Injektionen folglich Zariski-abgeschlossen. Identifizieren wir alle $\Delta(\lambda)$ mit dem festen Vektorraum $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$ vermittels ihres kanonischen Erzeugers v_λ und ist $\nu \in \mathfrak{X}$ fest gewählt, so wird für $\alpha \in R$ die Operation eines Elements $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ eine von λ abhängige lineare Abbildung

$$\varphi_\alpha(\lambda) : \mathrm{U}(\mathfrak{n})_\nu \to \mathrm{U}(\mathfrak{n})_{\nu+\alpha}$$

Man überzeugt sich ohne Schwierigkeiten, daß wir auf diese Weise eine algebraische Abbildung $\varphi_\alpha : \mathfrak{h}^* \to \mathrm{Hom}(\mathrm{U}(\mathfrak{n})_\nu, \mathrm{U}(\mathfrak{n})_{\nu+\alpha})$ erhalten. Die λ mit $\Delta(\lambda + \nu) \subset \Delta(\lambda)$ können nun beschrieben werden als das Urbild der Nicht-Injektionen unter der algebraischen Abbildung $\mathfrak{h}^* \mapsto \mathrm{Hom}\left(\mathrm{U}(\mathfrak{n})_\nu, \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathrm{U}(\mathfrak{n})_{\nu+\alpha}\right)$, die jedem $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ die Spaltenmatrix der $\varphi_\alpha(\lambda)$ zuordnet. □

25.2.6.19. Wir haben nun Satz 25.2.6.16 vollständig bewiesen und damit die Homomorphismen zwischen Vermamoduln sogar noch expliziter beschrieben als im eingangs formulierten Satz 25.2.6.2. Der Vollständigkeit halber müssen wir jedoch auch noch die dort gegebene Beschreibung ableiten.

Beweis von 25.2.6.2.4. Wir zeigen also noch

$$\Delta(\lambda) \subset \Delta(\mu) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \uparrow \mu$$

Die Implikation $\Leftarrow$ ist schon klar nach 25.2.6.17. Zum Nachweis der anderen Implikation schreiben wir $\lambda = x \cdot \tau$ und $\mu = y \cdot \tau$ mit $\tau \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ und $x, y \in W_{\bar{\tau}}$ und es reicht, aus $x \geq_{\bar{\tau}} y$ zu folgern $(x \cdot \tau) \uparrow (y \cdot \tau)$. Zu zeigen ist also nur, daß für eine Spiegelung $s \in W_{\bar{\tau}}$ mit $l_{\bar{\tau}}(sy) > l_{\bar{\tau}}(y)$ gilt $(sy \cdot \tau) \uparrow (y \cdot \tau)$. Das folgt jedoch aus 23.1.6.7, angewandt auf die affine Spiegelungsgruppe $W_{\bar{\tau}} \subset \mathrm{Aff}(\tau + \langle R_{\bar{\tau}} \rangle_{\mathbb{Q}})$. $\square$

Satz 25.2.6.20. *Es gilt* $[\Delta(\lambda) : \mathrm{L}(\mu)] \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \uparrow \mu$.

Beweis. Die Implikation $\Leftarrow$ folgt sofort aus der eben bewiesenen Inklusion von Vermamoduln $\Delta(\lambda) \subset \Delta(\mu)$. Die andere Implikation zeigt man wie ihren Spezialfall 25.2.6.10. $\square$

Satz 25.2.6.21 (Verschieben einfacher Moduln auf Wände). *Seien gegeben Gewichte* $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ *mit ganzer Differenz und* $W_\lambda \subset W_\mu$. *Sei* $x \in W_{\bar{\lambda}}$ *der größte Repräsentant aus seiner Nebenklasse in* $W_{\bar{\lambda}}/W_\lambda$. *So haben wir*

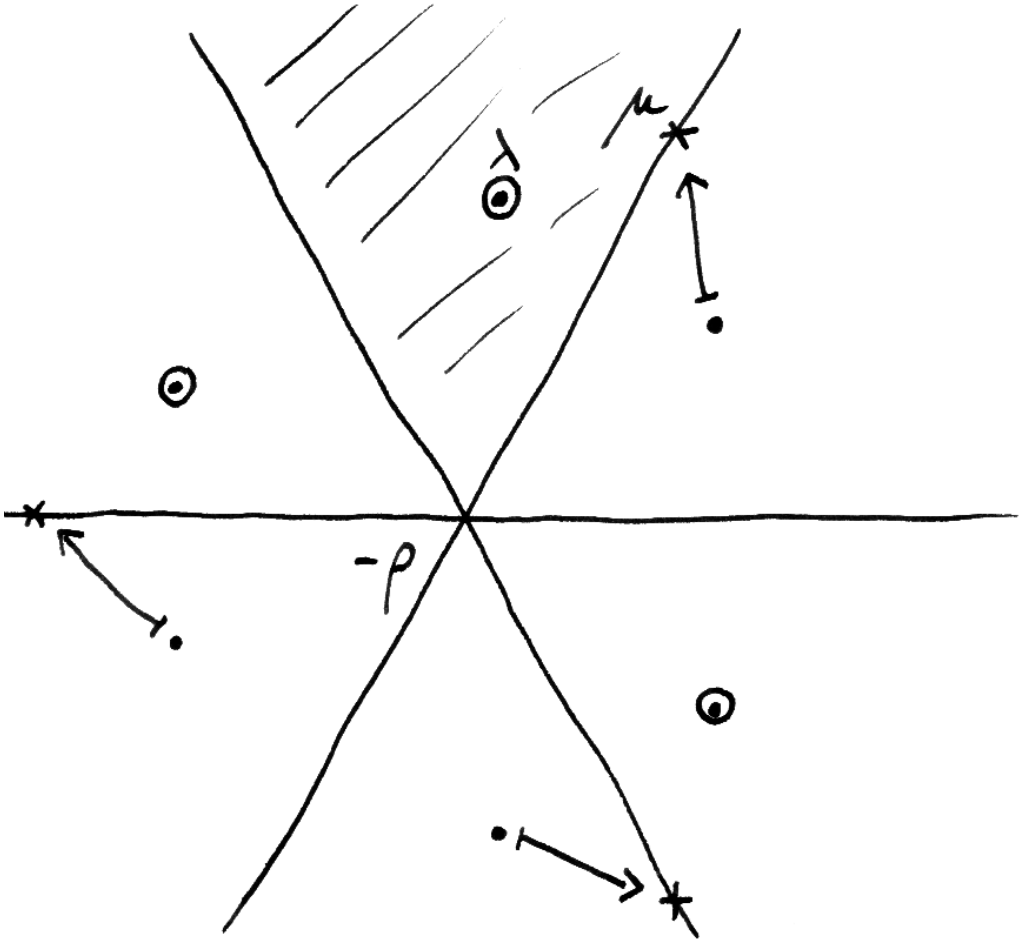
$$\mathrm{T}^\mu_\lambda \mathrm{L}(x \cdot \lambda) \cong \begin{cases} \mathrm{L}(x \cdot \mu) & \textit{falls } x \textit{ auch der größte Repräsentant} \\ & \textit{aus seiner Nebenklasse in } W_{\bar{\mu}}/W_\mu \textit{ ist;} \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

25.2.6.22. Man kann die Bedingung in Satz 25.2.6.21 auch geometrischer fassen wie folgt: Für jede Spiegelung auf einem affinen Raum über einem angeordneten Körper betrachtet man die dreiteilige Partition in die zwei offenen Halbräume und die Spiegelhyperebene. Gegeben eine affine Spiegelungsgruppe betrachtet man die gröbste Partition des affinen Raums, die feiner ist als diese Partition für jede der Spiegelebenen. Die Stücke dieser Partition heißen die **Facetten** unserer affinen Spiegelungsgruppe. Ist unsere Spiegelungsgruppe endlich und zeichnen wir einen Alkoven A als dominant aus, so definieren wir zu einer Facette F ihren **oberen Abschluß** $\hat{F}$ als

$$\hat{F} = \bigcap_{H \supset F} H \cap \bigcap_{H_A^+ \supset F} H_A^+ \cap \bigcap_{H_A^- \supset F} \bar{H}_A^-$$

wo der Schnitt über alle Spiegelhyperebenen H läuft. Dann haben wir für beliebige $x \in W_{\bar{\lambda}}$ in der Situation des Satzes $\mathrm{T}^\mu_\lambda \mathrm{L}(x \cdot \lambda) = \mathrm{L}(x \cdot \mu)$ genau dann, wenn $x \cdot \mu$ im oberen Abschluß der Facette von $x \cdot \lambda$ liegt, für die Operation von $W_{\bar{\lambda}}$ auf $\lambda + \langle R_{\bar{\lambda}} \rangle_{\mathbb{Q}}$. Andernfalls gilt $\mathrm{T}^\mu_\lambda \mathrm{L}(x \cdot \lambda) = 0$.

Beweis. Schiebt man einen einfachen Modul auf Wände, so erhält man einen einfachen Modul oder Null. In der Tat ist jeder einfache Modul das Bild eines Homomorphismus von einem Vermamodul in einen Nablamodul und umgekehrt hat



Die eingekringelten Punkte aus der Bahn von λ unter der dot-Operation der Weylgruppe zeigen die Gewichte $x \cdot \lambda$ mit $\mathrm{T}^{\mu}_{\lambda}\,\mathrm{L}(x \cdot \lambda) = 0$, bei denen eben „von der Seite der positiven Weylkammer her auf die Wand gerückt wird“. Die Pfeile deuten dahingegen an, auf welche Einfachen in der Wand die anderen Einfachen außerhalb der Wand geschoben werden.

jeder von Null verschiedene derartige Homomorphismus einfaches Bild. Folglich kommen für $\mathrm{T}_\lambda^\mu \mathrm{L}(x \cdot \lambda)$ überhaupt nur die Alternativen $\mathrm{L}(x \cdot \mu)$ und 0 in Betracht. Ist x nicht der größte Repräsentant seiner Nebenklasse aus $W_{\bar{\mu}}/W_\mu$, so finden wir in dieser Nebenklasse ein y, das noch größer ist. Da x maximal war in seiner Nebenklasse aus $W_{\bar{\lambda}}/W_\lambda$, folgt $(y \cdot \lambda) \neq (x \cdot \lambda)$ und $\mathrm{L}(x \cdot \lambda)$ ist ein Quotient des Kokerns der Inklusion $\Delta(y \cdot \lambda) \hookrightarrow \Delta(x \cdot \lambda)$. Beim Verschieben auf die Wände wird diese Inklusion jedoch nach 25.2.5.6 eine Inklusion von einem Vermamodul in sich selber, folglich muß ihr Kokern bei diesem Verschieben sterben. Es bleibt damit nur zu zeigen, daß diejenigen einfachen Moduln, denen das vorhergehende Argument eine Überlebenschance einräumt, auch tatsächlich die Verschiebung auf die Wand überleben. Mithilfe der Vermamoduln erkennt man jedoch, daß das Verschieben eine Surjektion $\mathrm{T}_\lambda^\mu : [\mathcal{O}_\lambda] \twoheadrightarrow [\mathcal{O}_\mu]$ auf den Grothendieckgruppen liefert. Das zeigt, daß in der Tat die übrigen Einfachen alle am Leben bleiben müssen. □

Korollar 25.2.6.23. *Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ mit $\lambda - \mu \in \mathfrak{X}$ und $W_\lambda \subset W_\mu$. So gilt für alle $x, y \in W_{\bar{\lambda}} = W_{\bar{\mu}}$ mit y maximal in seiner Nebenklasse yW_μ die Identität von Jordan-Hölder-Multiplizitäten*

$$[\Delta(x \cdot \lambda) : \mathrm{L}(y \cdot \lambda)] = [\Delta(x \cdot \mu) : \mathrm{L}(y \cdot \mu)]$$

Beweis. Der Verschiebungsfunktor T_λ^μ ist ein exakter Funktor, der $\Delta(x \cdot \lambda)$ auf $\Delta(x \cdot \mu)$ abbildet, einfache Objekte auf einfache Objekte oder auf Null, das Objekt $\mathrm{L}(y \cdot \lambda)$ auf $\mathrm{L}(y \cdot \mu)$, und kein nicht zu $\mathrm{L}(y \cdot \lambda)$ isomorphes einfaches Objekt von $\mathcal{O}$ auf $\mathrm{L}(y \cdot \mu)$. □

25.2.6.24. Wir sehen insbesondere, daß wir aus den Multiplizitäten der Vermamoduln im Hauptblock bereits die Multiplizitäten aller Vermamoduln mit ganzem höchsten Gewicht herleiten können.

25.2.6.25 (**Multiplizitäten im subgenerischen Fall**). Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ gegeben derart, daß seine ganzzahlige Weylgruppe genau zwei Elemente hat, sagen wir $W_{\bar{\lambda}} = \{e, s\}$, und die Standgruppe von λ trivial ist, in Formeln $s \cdot \lambda \neq \lambda$. So haben wir nach 25.2.6.2 eine kurze exakte Sequenz

$$\Delta(s \cdot \lambda) \hookrightarrow \Delta(\lambda) \twoheadrightarrow \mathrm{L}(\lambda)$$

Wegen $\Delta(s \cdot \lambda) = \mathrm{L}(s \cdot \lambda)$ nach 25.1.6.12 liefert diese Sequenz bereits alle Multiplizitäten von Vermamoduln im Block $\mathcal{O}_\lambda$.

25.2.6.26 (**Einige weitere Multiplizitäten**). Wir erinnern unsere Notation $\Delta_x = \Delta(x \cdot 0)$ und betrachten den Isomorphismus $\Delta : \mathbb{Z}W \xrightarrow{\sim} [\mathcal{O}_0]$, der gegeben wird durch $x \mapsto [\Delta_x]$ für $x \in W$. Unsere Formeln 25.2.6.6 für die Verschiebung von Vermamoduln durch die Wand zeigen $\theta_s \circ \Delta = \Delta \circ (\cdot(1 + s))$ für jede einfache

Spiegelung $s \in W$. Wir erklären nun $C_x \in \mathbb{Z}W$ durch die Vorschrift $\Delta(C_x) = [\mathrm{P}_x]$ alias

$$C_x := \sum_{y \in W} [\mathrm{P}_x : \Delta_y]_\Delta \, y$$

Aus der Reziprozitätsformel und unseren Erkenntnissen über Homomorphismen von Vermamoduln folgt $[\mathrm{P}_x : \Delta_e]_\Delta \geq 1$ und $[\mathrm{P}_x : \Delta_x]_\Delta = 1$. Wir wissen, daß $\theta_s P_x$ projektiv ist, also $\theta_s P_x \cong \bigoplus_{z \in W} P_z^{\oplus m(z)}$ für geeignete Vielfachheiten $m(z) \geq 0$. Es folgt $C_x(1+s) = \sum_{z \in W} m(z) C_z$ mit $m(z) \geq 0$. Besitzt nun W genau zwei einfache Spiegelungen s und t, so betrachten wir im Gruppenring die Elemente $D_x := \sum_{y \leq x} y$ und finden durch elementare Rechnung

$$D_x(1+s) = \begin{cases} 2D_x & \text{falls } xs < x; \\ D_{xs} + D_{xt} & \text{falls } xs > x \text{ und } x \neq e; \\ D_{xs} & \text{falls } x = e \text{ oder } x = t. \end{cases}$$

Im Fall $sts = tst$ alias $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3; \mathbb{C})$ überzeugt man sich nun leicht, daß wir notwendig $C_x = D_x$ erhalten und damit

$$[\Delta_x : L_y] = \begin{cases} 1 & \text{falls } y \geq x; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In derselben Weise erhält man im Fall einer beliebigen halbeinfachen Liealgebra für ein ρ-dominantes Gewicht λ mit $|W_{\bar{\lambda}}| \leq 6$ und beliebige $\mu, \nu \in W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$ die Multiplizitäten

$$[\Delta(\mu) : L(\nu)] = \begin{cases} 1 & \text{falls } \nu \uparrow \mu; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im allgemeinen liegen die Verhältnisse jedoch nicht so einfach, wie im weiteren ausgeführt werden soll.

25.3 Kazhdan-Lusztig-Theorie

25.3.1 Iwahori-Hecke-Algebra

25.3.1.1. Gegeben $G \supset B$ eine Gruppe mit einer endlichen Untergruppe können wir im Gruppenring $\mathbb{Z}G$ mit der Konvolution $*$ als Multiplikation die additive Untergruppe $\mathcal{H}(G, B)$ der B-Biinvarianten betrachten. Eine $\mathbb{Z}$-Basis dieser Untergruppe bilden die charakteristischen Funktionen der B-Doppelnebenklassen. Die Untergruppe $\mathcal{H}(G, B) \subset \mathbb{Z}G$ ist zwar abgeschlossen unter der Konvolution, besitzt jedoch im allgemeinen in Bezug auf diese Multiplikation kein Einselement. Um das zu korrigieren führen wir auf $\mathcal{H}(G, B)$ eine neue Multiplikation ein durch die Vorschrift

$$f *_B g := \frac{1}{|B|}(f * g)$$

und erhalten so einen Ring mit der charakteristischen Funktion von B als Einselement, die sogenannte **Hecke-Algebra** zu $G \supset B$.

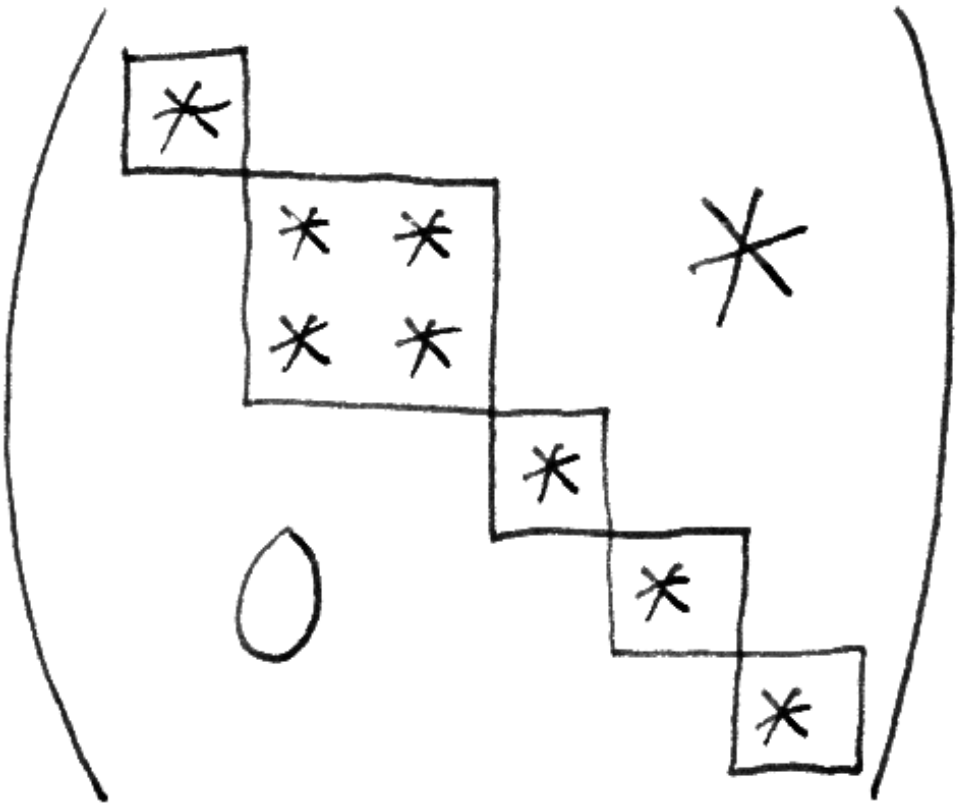
25.3.1.2 (**Ursprung der Terminologie**). In **??** werde ich diskutieren, wie man diese Konstruktion auf den Fall einer beliebigen Untergruppe B verallgemeinern kann, und inwiefern gewisse Erzeuger der Hecke-Algebra zu $\mathrm{GL}(2; \mathbb{R}) \supset \mathrm{GL}(2; \mathbb{Z})$ dann gerade den Operatoren entsprechen, die Hecke in die Theorie der Modulformen eingeführt hat und denen unsere Hecke-Algebra ihren Namen verdankt.

25.3.1.3. Bezeichne $\mathbb{F}_q$ den endlichen Körper mit q Elementen. Wir interessieren uns für den Fall der endlichen Gruppe $G = \mathrm{GL}(n; \mathbb{F}_q)$ mit der Untergruppe B der oberen Dreiecksmatrizen. Nach 4.5.6.1 ist G die disjunkte Vereinigung der B-Doppelnebenklassen zu Permutationsmatrizen, in Formeln

$$\mathrm{GL}(n; \mathbb{F}_q) = \bigsqcup_{w \in \mathcal{S}_n} BwB$$

Die charakteristischen Funktionen T_x der Doppelnebenklassen BxB für $x \in \mathcal{S}_n$ bilden folglich eine $\mathbb{Z}$-Basis der Hecke-Algebra $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G, B)$. Bezeichne $l(x)$ die Zahl der Fehlstände alias die **Länge** der Permutation x in Bezug auf die Menge S der Transpositionen benachbarter Elemente, die genau die einfachen Spiegelungen sind in Bezug auf das durch B gegebene System positiver Wurzeln. Wir behaupten für die Multiplikation $*_B$ in dieser Heckealgebra, die wir von nun an einfach durch Hintereinanderschreiben notieren, die Formeln

$$\begin{aligned} T_x T_y &= T_{xy} && \text{falls } l(x) + l(y) = l(xy); \\ T_s^2 &= qT_e + (q-1)T_s && \text{für } s \text{ von der Länge } l(s) = 1. \end{aligned}$$



Die Untergruppe $B \sqcup BsB$ im Fall der Transposition benachbarter Elemente $s = (2, 3)$ in der $\mathrm{GL}(6)$.

In der Tat kennen wir aus Übung 4.5.2.7 für die Kardinalitäten der Doppelnebenklassen die Formel $|BxB| = q^{l(x)}|B|$. Für x, y mit $l(x) + l(y) = l(xy)$ liefert die Multiplikation $BxB \times_B ByB \to G$ sicher eine Abbildung, deren Bild $BxyB$ umfaßt. Ein Vergleich der Kardinalitäten zeigt dann, daß sie sogar eine Bijektion mit $BxyB$ liefern muß, und das zeigt die erste Formel. Ist $s \in \mathcal{S}_n$ von der Länge $l(s) = 1$, also die Vertauschung zweier benachbarter Elemente von $\{1, \ldots, n\}$, so erkennt man leicht, daß $B \sqcup BsB$ eine Untergruppe ist, nämlich die Untergruppe aller invertierbaren Block-obere-Dreiecksmatrizen mit lauter (1×1)-Blöcken aber einem (2×2)-Block auf der Diagonalen, und daß diese Untergruppe genau $(q+1)|B|$ Elemente hat. Es folgt $(T_s + T_e) * (T_s + T_e) = (q+1)|B|(T_s + T_e)$ und in der Hecke-Algebra mit dem neutralen Element $1 = T_e$ gilt folglich $(T_s + 1)^2 = (q + 1)(T_s + 1)$ alias $T_s^2 = (q - 1)T_s + q$.

Vorschau 25.3.1.4. Haben wir allgemeiner eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe über dem endlichen q-elementigen Körper $\mathbb{F}_q$ mit einer Borel'schen und bezeichnet $G \supset B$ die zugehörigen endlichen Gruppen $\mathbb{F}_q$-wertiger Punkte, so gilt das Vorhergehende entsprechend, sobald wir in unserer Borel'schen eine Cartan'sche wählen und statt mit $\mathcal{S}_n$ allgemeiner mit der zugehörigen Weylgruppe W und der darauf durch die Borel'sche festgelegten Längenfunktion arbeiten. Die Elemente der Länge Eins heißen in dieser Allgemeinheit die „einfachen Spiegelungen".

Lemma 25.3.1.5 (Universelle Strukturkonstanten). *Für die symmetrische Gruppe $W := \mathcal{S}_n$ mit dem System einfacher Spiegelungen $S := \{(i, i+1) \mid 1 \le i < n\}$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome $c_{x,y}^z$ im Polynomring $\mathbb{Z}[q]$ derart, daß bei Einsetzen einer beliebigen echten Primzahlpotenz für q in unserer Hecke-Algebra aus 25.3.1.3 gilt*

$$T_x T_y = \sum_z c_{x,y}^z(q) T_z$$

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar und nur die Existenz ist noch zu zeigen. Ist $y = s$ eine einfache Spiegelung, so haben wir $T_x T_s = T_{xs}$ falls $xs > x$ und $T_x T_s = T_{xs} T_s^2 = qT_{xs} + (q - 1)T_x$ falls $xs < x$ und die Existenz ist auch klar. Im allgemeinen schreibe man $T_y = T_s \ldots T_r$ für $y = s \ldots r$ eine reduzierte Darstellung. □

Satz 25.3.1.6 (Iwahori-Hecke-Algebra für $\mathcal{S}_n$). *Für die symmetrische Gruppe $W := \mathcal{S}_n$ mit dem System einfacher Spiegelungen $S := \{(i, i + 1) \mid 1 \le i < n\}$ gibt es auf dem freien Modul $\bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[q]T_x$ über dem Polynomring $\mathbb{Z}[q]$ zur Basis W genau eine assoziative $\mathbb{Z}[q]$-bilineare Verknüpfung derart, daß gilt*

$$\begin{aligned} T_x T_y &= T_{xy} && \textit{falls } l(x) + l(y) = l(xy); \\ T_s^2 &= qT_e + (q - 1)T_s && \textit{für } s \in S. \end{aligned}$$

Beweis. Die Eindeutigkeit scheint mir offensichtlich. Um die Existenz einer derartigen Verknüpfung zu zeigen, mag man schlicht eine Verknüpfung definieren durch die im vorhergehenden Lemma 25.3.1.5 eingeführten Polynome $c_{x,y}^z$ vermittels der Vorschrift

$$T_x T_y = \sum_z c_{x,y}^z T_z$$

Das einzige Problem ist der Nachweis der Assoziativität der so erklärten Verknüpfung. Unser freier $\mathbb{Z}[q]$-Modul mit Verknüpfung läßt sich jedoch durch Spezialisieren von q zu allen echten Primzahlpotenzen einbetten in das Produkt aller zuvor betrachteten konkreten Hecke-Algebren aus 25.3.1.3. In der Tat ist das Produkt dieser Spezialisierungsabbildungen injektiv, da jedes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat. Da alle konkreten Hecke-Algebren assoziativ sind, muß das auch für unsere Iwahori-Hecke-Algebra gelten. □

Satz 25.3.1.7 (Iwahori-Hecke-Algebra eines Coxetersystems). *Gegeben ein Coxetersystem (W, S) gibt es auf dem freien Modul $\bigoplus_{x\in W} \mathbb{Z}[q]T_x$ über dem Polynomring $\mathbb{Z}[q]$ zur Basis W genau eine assoziative $\mathbb{Z}[q]$-bilineare Verknüpfung derart, daß gilt*

$$\begin{array}{rcll} T_x T_y & = & T_{xy} & \textit{falls } l(x) + l(y) = l(xy); \\ T_s^2 & = & qT_e + (q-1)T_s & \textit{für } s \in S. \end{array}$$

25.3.1.8. Die durch unseren Satz erklärte $\mathbb{Z}[q]$-Ringalgebra heißt die **Hecke-Algebra** oder ausführlicher **Iwahori-Hecke-Algeba** unseres Coxetersystems. Wir verwenden dafür die Notation

$$\mathcal{H}(W, S) = \bigoplus_{x\in W} \mathbb{Z}[q]T_x$$

Beweis. Diese Verallgemeinerung von 25.3.1.6 zeigt man im Fall einer Diedergruppe $S = \{s, t\}$, indem man auf dem freien $\mathbb{Z}[q]$-Modul $\bigoplus_{x\in W} \mathbb{Z}[q]T_x$ Endomorphismen $(T_s\cdot)$ und $(T_t\cdot)$ sowie $(\cdot T_s)$ und $(\cdot T_t)$ erklärt durch

$$(T_s\cdot) : T_x \mapsto \begin{cases} T_{sx} & \text{falls } sx > x; \\ qT_{sx} + (q-1)T_x & \text{falls } sx < x, \end{cases}$$

und analoge Regeln in den drei anderen Fällen. Dann prüft man durch explizite Rechnung, daß $(T_s\cdot)$ und $(T_t\cdot)$ mit $(\cdot T_s)$ und $(\cdot T_t)$ jeweils kommutieren. Die Endomorphismen unseres freien $\mathbb{Z}[q]$-Moduls, die mit $(\cdot T_s)$ und $(\cdot T_t)$ kommutieren, bilden dann offensichtlich eine Ringalgebra mit den behaupteten Eigenschaften. Im allgemeinen betrachtet man die von den in derselben Weise definierten Endomorphismen $(T_s\cdot)$ von $\bigoplus_{x\in W} \mathbb{Z}[q]T_x$ und folgert aus dem bereits behandelten

Diederfall, daß sie die Zopfrelationen erfüllen. Da man nun nach 23.3.2.5 zwischen je zwei reduzierten Darstellungen ein und desselben Elements einer Coxetergruppe mit Zopfrelationen hin- und hergehen kann, folgert man leicht, daß die von diesen Endomorphismen erzeugte Unterringalgebra die behaupteten Eigenschaften besitzt. □

Ergänzung 25.3.1.9. Gegeben ein Coxetersystem (W, S) und ein Kring R und eine Abbildung $S \to R$, $s \mapsto q_s$ mit der Eigenschaft, daß gilt $q_s = q_t$ falls ts ungerade Ordnung hat, gibt es auf dem freien Modul $\bigoplus_{x \in W} RT_x$ über dem Kring R zur Basis W genau eine assoziative R-bilineare Verknüpfung derart, daß gilt

$$\begin{aligned} T_x T_y &= T_{xy} && \text{falls } l(x) + l(y) = l(xy); \\ T_s^2 &= q_s T_e + (q_s - 1) T_s && \text{für } s \in S. \end{aligned}$$

Der Beweis bleibt mutatis mutandis derselbe. Meist wählt man $R = \mathbb{Z}[Q, q]$ und spricht dann von **Hecke-Algebren mit verschiedenen Parametern**.

25.3.1.10 (**Varianten der Hecke-Algebra**). Vielfach betrachtet man statt der im vorhergehenden Satz erklärten Hecke-Algebra

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, S) = \bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[q] T_x$$

Varianten mit nach $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ oder sogar nach $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ erweiterten Skalaren und bezeichnet diese Algebren mit demselben Buchstaben $\mathcal{H}$. Der Ausdruck $q^{1/2}$ meint in diesem Zusammenhang nur ein formales Symbol, dessen Quadrat q sein soll. Wir führen stattdessen ein neues Symbol v ein mit $v^{-2} = q$ und bezeichnen den Ring der Laurentpolynome in v mit $\mathcal{L} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ und arbeiten also in Formeln ausgedrückt meist mit der Algebra

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, S) = \bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[v, v^{-1}] T_x = \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}[q]} \left(\bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[q] T_x \right)$$

Das Tensorieren ist dabei bezüglich der Einbettung $\mathbb{Z}[q] \hookrightarrow \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ mit $q \mapsto v^{-2}$ gemeint und ganz rechts steht unsere Hecke-Algebra aus 25.3.1.7.

25.3.1.11 (**Beschreibung der Hecke-Algebra durch Erzeuger und Relationen**). Die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(W, S)$ zu einem Coxetersystem (W, S) vom Schluß der vorhergehenden Bemerkung 25.3.1.10 kann mit der Abkürzung $q = v^{-2}$ und der Terminologie aus 8.3.7.2 auch beschrieben werden als die $\mathcal{L}$-Ringalgebra mit den Erzeugern $\{T_s\}_{s \in S}$, den quadratischen Relationen $(T_s + 1)(T_s - q) = 0$ sowie den sogenannten Zopf-Relationen $T_s T_t \ldots T_s = T_t T_s \ldots T_t$ beziehungsweise $T_s T_t T_s \ldots T_t = T_t T_s T_t \ldots T_s$ wenn gilt $st \ldots s = ts \ldots t$ beziehungsweise

$sts\ldots t = tst\ldots s$ für $s,t \in S$. Das folgt ohne Schwierigkeiten aus der Erkenntnis 23.3.2.5, daß man zwischen je zwei reduzierten Darstellungen ein und desselben Elements einer Coxetergruppe mit Zopfrelationen hin- und hergehen kann.

25.3.2 Kanonische Basis der Hecke-Algebra

25.3.2.1. Seien (W,S) ein Coxetersystem, $l : W \to \mathbb{N}$ die zugehörige Längenfunktion und $\leq$ die Bruhat-Teilordnung auf W. Insbesondere bedeutet $x < y$ also $x \leq y$, $x \neq y$. Bezeichne $\mathcal{L} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ den Ring der Laurentpolynome über $\mathbb{Z}$ in einer Variablen v. Auf dem freien $\mathcal{L}$-Modul

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(W,S) = \bigoplus_{x \in W} \mathcal{L}T_x$$

über W gibt es nach 25.3.1.11 genau eine Struktur einer assoziativen $\mathcal{L}$-Algebra mit $T_xT_y = T_{xy}$ falls $l(x) + l(y) = l(xy)$ und $T_s^2 = v^{-2}T_e + (v^{-2} - 1)T_s$ für alle $s \in S$. Diese assoziative Algebra $\mathcal{H}$ nennen wir im folgenden die **Hecke-Algebra** von (W,S). Sie ist unitär mit Eins-Element T_e, wir schreiben auch oft $T_e = 1$.

25.3.2.2. Die Hecke-Algebra kann in leichter Abwandlung von 25.3.1.11 auch beschrieben werden als die unitäre assoziative $\mathcal{L}$-Algebra mit den Erzeugern $\{H_s\}_{s \in S}$ für $H_s = vT_s$, den quadratischen Relationen

$$(H_s + v)(H_s - v^{-1}) = 0 \quad \text{alias} \quad H_s^2 = 1 + (v^{-1} - v)H_s$$

sowie den sogenannten Zopf-Relationen $H_sH_t\ldots H_s = H_tH_s\ldots H_t$ beziehungsweise $H_sH_tH_s\ldots H_t = H_tH_sH_t\ldots H_s$ wenn gilt $st\ldots s = ts\ldots t$ beziehungsweise $sts\ldots t = tst\ldots s$ für $s,t \in S$. Alle H_s sind invertierbar, genauer prüft man leicht die Formel

$$H_s^{-1} = H_s + (v - v^{-1})$$

25.3.2.3. Wir arbeiten von nun an mit $H_x = v^{l(x)}T_x$. Sicher gilt auch $H_xH_y = H_{xy}$ falls $l(x) + l(y) = l(xy)$. Mit den H_s sind also auch alle H_x Einheiten in $\mathcal{H}$. Wir können involutive alias selbstinverse Ringautomorphismen $a, b : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definieren durch die Regeln

$$\begin{array}{ll} a(v) = -v, & a(H_y) = (-1)^{l(y)}H_y, \\ b(v) = -v^{-1}, & b(H_x) = H_x. \end{array}$$

Wir können weiter involutive Ringantiautomorphismen $\delta, i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ erklären durch die Regeln

$$\begin{array}{ll} \delta(v) = v^{-1}, & \delta(H_x) = H_x^{-1}, \\ i(v) = v, & i(H_x) = H_{x^{-1}}. \end{array}$$

Diese vier Involutionen kommutieren paarweise und definieren mithin eine Operation von $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ auf $\mathcal{H}$, die für nichtkommutatives W sogar treu ist. Insbesondere ist $d = i\delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein involutiver Automorphismus von $\mathcal{H}$, die sogenannte **Dualität**. Indem man H_x als ein Produkt von H_s mit $s \in S$ schreibt, prüft man leicht

$$d(H_x) \in H_x + \sum_{y<x} \mathcal{L} H_y$$

Die Dualität d spielt in der Theorie der Kazhdan-Lusztig-Polynome eine fundamentale Rolle. Wir schreiben oft $d(H) = \overline{H}$, es gilt also $\overline{v} = v^{-1}$ und $\overline{H}_x = (H_{x^{-1}})^{-1}$. Wir nennen $H \in \mathcal{H}$ **selbstdual**, wenn gilt $\overline{H} = H$.

Satz 25.3.2.4. *Sei (W, S) ein Coxetersystem. Für alle $x \in W$ gibt es genau ein selbstduales $\underline{H}_x \in \mathcal{H}$ mit der Eigenschaft*

$$\underline{H}_x \in H_x + \sum_y v\mathbb{Z}[v] H_y$$

25.3.2.5. In [KL79] wird unser $\underline{H}_x$ mit C'_x bezeichnet. Kazhdan und Lusztig arbeiten mit der Variablen $q = v^{-2}$ und mit der $\mathcal{L}$-Basis der T_x. Wir werden gleich sehen, daß die $\underline{H}_x$ eine $\mathcal{L}$-Basis der Heckealgebra bilden. Sie heißt die **kanonische selbstduale Basis** oder kurz **kanonische Basis**.

25.3.2.6 (**Die Kazhdan-Lusztig-Vermutungen**). Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und R^+ ein System positiver Wurzeln. Ebenfalls in [KL79] wird die Vermutung ausgesprochen, daß unsere Elemente

$$C_x := \sum_{y \in W} [\mathrm{P}_x : \Delta_y]_\Delta \; y = \sum_{y \in W} [\Delta_y : \mathrm{L}_x]_\Delta \; y$$

des Gruppenrings $\mathbb{Z}W$ aus 25.2.6.26, die die Jordan-Hölder-Multiplizitäten der Vermamoduln beschreiben, die Bilder der kanonischen Basis der Heckealgebra unter dem durch $v \mapsto 1$ gegebenen Ringhomomorphismus $\mathcal{H} \to \mathbb{Z}W$ sind, in Formeln $\underline{H}_x \mapsto C_x$ bei $v \mapsto 1$. Das ist mittlerweile bewiesen und ich will im weiteren Verlauf dieser Vorlesungen einen Beweis vorstellen.

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit folgen sofort aus den beiden anschließenden Lemmata 25.3.2.7 und 25.3.2.8. Alternativ kann man das Theorem auch aus der sehr allgemeinen Proposition **??** folgern. □

Lemma 25.3.2.7. *Es gibt für alle $x \in W$ ein selbstduales $\underline{H}_x \in \mathcal{H}$ mit $\underline{H}_x \in H_x + \sum_{y<x} v\mathbb{Z}[v] H_y$.*

Beweis. Wir wissen ja schon, daß gilt $\overline{H_s} = H_s^{-1} = H_s + (v - v^{-1})$ für alle $s \in S$. Insbesondere ist $H_s + v$ selbstdual, und sobald wir die Eindeutigkeit der $\underline{H}_x$ gezeigt haben, können und werden wir $H_s + v$ mit $\underline{H}_s$ abkürzen. Die Rechtsmultiplikation von $(H_s + v)$ auf $\mathcal{H}$ wird beschrieben durch die Formeln

$$H_x(H_s + v) = \begin{cases} H_{xs} + vH_x & \text{falls } xs > x; \\ H_{xs} + v^{-1}H_x & \text{falls } xs < x. \end{cases}$$

Wir zeigen nun das Lemma durch Induktion über die Bruhat-Teilordnung. Sicher können wir die Induktion mit $\underline{H}_e = H_e = 1$ beginnen. Sei nun $x \in W$ gegeben und sei die Existenz von $\underline{H}_y$ bekannt für alle $y < x$. Falls $x \neq e$ finden wir $s \in S$ mit $xs < x$ und nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\underline{H}_{xs}(H_s + v) = H_x + \sum_{y<x} h_y H_y$$

für geeignete $h_y \in \mathbb{Z}[v]$. Wir bilden

$$\underline{H}_x = \underline{H}_{xs}(H_s + v) - \sum_{y<x} h_y(0)\underline{H}_y$$

und unsere Induktion läuft. □

Lemma 25.3.2.8. *Für $H \in \sum_y v\mathbb{Z}[v]H_y$ folgt aus $H = \overline{H}$ schon $H = 0$.*

Beweis. Sicher gilt $H_x \in \underline{H}_x + \sum_{y<x} \mathcal{L}\underline{H}_y$ für $\underline{H}_x$ wie in der schon gezeigten Behauptung 25.3.2.7 und folglich $\overline{H_x} \in H_x + \sum_{y<x} \mathcal{L}H_y$ für alle $x \in W$. Schreiben wir nun $H = \sum h_y H_y$ und wählen z maximal mit $h_z \neq 0$, so folgt aus $H = \overline{H}$ schon $h_z = \overline{h}_z$ im Widerspruch zu $h_z \in v\mathbb{Z}[v]$. Das zeigt die Behauptung und das Lemma ist bewiesen. □

Definition 25.3.2.9. In einer abelschen Gruppe E mit Involution d bezeichne $E^+ \subset E$ die Untergruppe der selbstdualen Elemente $E^+ := \{e \in E \mid de = e\}$.

Proposition 25.3.2.10. *Die selbstdualen Elemente der Hecke-Algebra bilden einen freien Modul $\mathcal{H}^+$ über $\mathcal{L}^+ = \mathbb{Z}[(v + v^{-1})]$ mit Basis $\underline{H}_x$ mit $x \in W$. Als Algebra über $\mathcal{L}^+$ wird $\mathcal{H}^+$ erzeugt von den $\underline{H}_s$ mit $s \in S$.*

Beweis. Offensichtlich bilden die $\underline{H}_x$ eine $\mathcal{L}$-Basis von $\mathcal{H}$, und $\sum h_x \underline{H}_x$ ist selbstdual genau dann, wenn alle h_x es sind. Die induktive Konstruktion der $\underline{H}_x$ zeigt sogar, daß alle $\underline{H}_x$ in der $\mathbb{Z}$-Unteralgebra von $\mathcal{H}$ liegen, die von den $\underline{H}_s$ mit $s \in S$ erzeugt wird. □

25.4 Danksagung

Für Korrekturen und Vereinfachungen danke ich vielen Freiburger Studenten, insbesondere Catharina Stroppel, Olaf Schnürer, Ivan Zaccanelli und auch Christoph Geiss. Eine wesentliche Quelle war für mich der Text [Hum70] von Humphreys und natürlich Bourbaki, insbesondere [Bou81]. Weiter war auch [Kna96] sehr hilfreich sowie ein Skript von Dragan Miličić. Proposition 24.4.6.36 habe ich in [Kac90, 11.3.a] gelernt.

Teil F

Prüfungsfragen

Kapitel 26

Typische Prüfungsfragen

26.1 Lineare Algebra

1. Was ist ein Körper? Wie leitet man die Regel für das Addieren von Brüchen aus den Körperaxiomen ab?

2. Was ist eine Basis eines Vektorraums? Könnte es passieren, daß ich in demselben Vektorraum eine Basis mit 13 Elementen und eine mit 17 Elementen finde? Was ist die Dimension eines Vektorraums? Hat jeder Vektorraum eine Basis? Was ist überhaupt ein Vektorraum? Wie leitet man $0v = 0$ aus den Vektorraumaxiomen ab?

3. Warum ist jedes unverkürzbare Erzeugendensystem eine Basis? Warum ist jede unverlängerbare linear unabhängige Teilmenge eine Basis?

4. Wie versieht man die Menge der Homomorphismen von einem Vektorraum zu einem anderen mit der Struktur eines Vektorraums? Wie berechnet man die Dimension eines derartigen Raums von Homomorphismen?

5. Was ist die Matrix einer ebenen Drehung um $45°$? Was ist ihre Determinante? Ihre Eigenwerte?

6. Geben Sie eine (3×3)-Matrix vom Rang ... ohne Nullen an. Was ist deren Determinante? Was ist die Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems? Was sind die Eigenwerte?

7. Was ist die Determinante einer Matrix? Wie rechnet man sie aus? Warum hat die transponierte Matrix dieselbe Determinante? Warum ist jede Matrix mit von Null verschiedener Determinante invertierbar?

8. Besitzt jede Matrix einen Eigenwert? Ist jede Matrix diagonalisierbar? Beispiel? Gegenbeispiel? Ist jede relle symmetrische Matrix diagonalisierbar? Beweis?

9. Was ist ein Eigenwert einer linearen Abbildung? Welche Eigenwerte hat das Ableiten, aufgefaßt als lineare Abbildung vom Raum der beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen auf der reellen Zahlengeraden $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ in sich selbst? Welche Eigenwerte hat das Ableiten aufgefaßt als lineare Abildung vom Raum der Polynome in sich selbst? Was sind die Eigenräume? Und wenn man Koeffizienten in einem Körper der Charakteristik ... nimmt?

10. Wieviele Untervektorräume hat ein ...-dimensionaler Vektorraum über dem Körper mit ... Elementen?

11. Wieviele angeordnete Basen hat ein . . .-dimensionaler Vektorraum über dem Körper mit . . . Elementen?

12. Nimmt die quadratische Form . . . positive und negative Werte an? Wie findet man so etwas im allgemeinen heraus?

13. Berechnen Sie die inverse Matrix zu . . .

14. Was versteht man unter dem Rang einer Matrix? Warum stimmen Zeilenrang und Spaltenrang stets überein?

15. Wie hängen die Eigenwerte einer invertierbaren Matrix zusammen mit den Eigenwerten ihrer Inversen? Wie hängt die Jordan'sche Normalform einer invertierbaren Matrix zusammen mit der Jordan'schen Normalform ihrer Inversen?

26.2 Algebra

1. Gibt es eine Gruppe mit . . . Elementen? Gibt es eine abelsche Gruppe mit . . . Elementen? Wie konstruiert man überhaupt so eine Restklassengruppe? Was ist das Inverse zu . . . in $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$? Wieviele paarweise nicht isomorphe abelsche Gruppen gibt es mit . . . Elementen? Welche?

2. Wieviele Gruppenhomomorphismen gibt es von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

3. Wieviele Elemente hat $\mathrm{GL}(3; \mathbb{F}_7)$? Wie größ ist die 7-Sylow darin? Können Sie eine 7-Sylow angeben?

4. Hat jedes Polynom eine Nullstelle? Kann man den Grundkörper so vergrößern, daß es eine kriegt? Wie geht das?

5. Gegeben sei das Polynom . . . Was ist die Summe seiner komplexen Nullstellen? Die Summe der Quadrate seiner komplexen Nullstellen?

6. Ist das Polynom . . . irreduzibel? Was ist ein irreduzibles Polynom? Inwieweit ist die Zerlegung eines Polynoms in irreduzible Faktoren eindeutig? Warum? Welche Grade können irreduzible Polynome in $\mathbb{R}[X]$ haben? Zerlegen Sie $X^4 + 2$ in $\mathbb{R}[X]$ in Linearfaktoren.

7. Wieviele Nullstellen kann das Polynom . . . höchstens haben? Warum? Gibt es zu vorgegebenen Nullstellen stets ein Polynom, das genau diese Nullstellen hat? Warum-warum nicht?

8. Gibt es einen Körper mit ... Elementen? Wie zeigt man das? Wann ist $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ ein Körper? Warum ist $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ kein Körper? Wie rechnet man in diesem Ring? Besitzt ... darin ein multiplikatives Inverses? Und zwar welches? Welche abelsche Gruppe erhält man als Einheitengruppe? Welche abelsche Gruppe ist die multiplikative Gruppe des Körpers mit ... Elementen? Welche Kardinalität kann ein endlicher Körper haben? Warum? Sind je zwei Körper mit ... Elementen isomorph? Warum?

9. Was ist die Automorphismengruppe des Körpers mit ... Elementen? Wie zeigt man das?

10. Ist das regelmäßige ...-Eck konstruierbar mit Zirkel und Lineal? Warum oder warum nicht? Welche regelmäßigen n-Ecke sind eigentlich konstruierbar? Warum-warum nicht?

11. Warum hat in einem Körper jedes Element höchstens zwei Quadratwurzeln? Warum in Charakteristik Zwei höchstens eine Quadratwurzel?

12. Kann die reelle Zahl $\sqrt[3]{2}$ Nullstelle eines quadratischen Polynoms mit rationalen Koeffizienten sein?

26.3 Analysis

1. Wie bestimmt man die Ableitung des Arcustangens? Was ist überhaupt die Ableitung? Was bedeutet darin das Symbol $\varinjlim$? Wie entwickelt man arctg in eine Potenzreihe? Warum ist diese Rechnung erlaubt?...

2. Was ist $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\mathrm{e}^x}{\log x+\mathrm{e}^x}$? Was bedeutet $\lim_{x\to\infty} g(x) = b$? Wie ist die Exponentialfunktion definiert? Kennen Sie andere Funktionen, die ihre eigene Ableitung sind? Sind das alle? Warum?

3. Warum ist jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt?

4. Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Kuchenstücks: Stellen Sie es auf die Spitze und integrieren die Höhe y über das entsprechende Gebiet. Wie lautet allgemein die Formel zur Transformation von Mehrfachintegralen auf krummlinige Koordinaten? Was ist die Beziehung zur Substitutionsregel?

5. Finden Sie eine Stammfunktion für den Arcustangens, $\int \arctan$; wie ist überhaupt das Integral definiert? Warum kann es mittels Stammfunktionen berechnet werden?

6. Was bedeutet $\lim_{n\to\infty} a_n = a$? Schreiben Sie es mit den zugehörigen „für alle“ und „es gibt“ einmal auf. Wie folgt $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$?

7. Wie ist die Exponentialfunktion definiert? Warum konvergiert diese Reihe? Wie zeigt man das Quotientenkriterium? Das Majorantenkriterium?

8. (Falls es dran war) Kennen Sie eine Funktion, die ihre eigene dritte Ableitung ist, $f“\,' = f$? Können Sie alle derartigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ angeben? Können Sie alle derartigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ angeben?

9. Wie ist das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ für $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig definiert? Welche Probleme können für f unstetig auftreten? Was bedeutet gleichmäßig stetig?

10. Wie ist der Logarithmus definiert? Warum wird jede positive reelle Zahl als Wert der Exponentialfunktion angenommen? Was ist die Ableitung des Logarithmus? Seine Potenzreihenentwicklung? Das Integral? Die Potenzreihenentwicklung um den Punkt $p = 5$? Der Konvergenzradius daselbst?

11. Was ist das höherdimensionale Analogon der Ableitung? Wie hängt das totale Differential mit den partiellen Ableitungen zusammen? Wie lautet in dieser Allgemeinheit die Kettenregel? Wie zeigt man sie?

12. Was ist das Lebesgue-Maß? Wie ist das Lebesgue-Integral definiert? Was ist seine Beziehung zu absoluter Konvergenz von Reihen?

13. Was ist ein Hilbert-Raum?

14. Was ist die Fourier-Transformation?

26.4 Funktionentheorie

1. Besitzt jede stetige Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion, gibt es also stets $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $F' = f$?

2. Besitzt jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion, gibt es also stets $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $F' = f$?

3. Besitzt jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion?

26.5 Algebraische Geometrie (Staatsexamen)

1. Zwei Polynome in $\mathbb{C}[X, Y]$ haben dieselben Nullstellen. Sind sie dann gleich? Teilt eins das andere? Und wenn eines irreduzibel ist? Und wenn unsere beiden Polynome nur unendlich viele gemeinsame Nullstellen haben (für die letzte Teilfrage brauche Dimensionstheorie).

2. Kann es sein, daß zwei nichtkonstante Polynome $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$ überhaupt keine gemeinsame Nullstelle haben? Und wenn wir zum projektiven Raum übergehen?

3. Warum bilden die Nullstellenmengen endlicher Familien von Polynomen die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\mathbb{C}^n$?

4. Was ist eine reguläre Funktion auf einer affinen Varietät? Sind zwei affine Varietäten bereits isomorph, wenn die $\mathbb{C}$-Kringe ihrer regulären Funktionen isomorph sind? Kann $\mathbb{C}[X]/\langle X^2 \rangle$ der Ring der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät sein? Welche $\mathbb{C}$-Kringe sind Ringe von regulären Funktionen auf affinen Varietäten?

5. Was ist ein maximales Ideal? Warum ist der Quotient nach einem maximalen Ideal stets ein Körper? Was sind die maximalen Ideale von $\mathbb{C}[X, Y]$?

26.6 Algebraische Gruppen

1. Was ist eine (affine) algebraische Gruppe? Warum ist jede affine algebraische Gruppe linear?

2. Was sind die algebraischen Gruppenhomomorphismen $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot)$?

3. Was sind die irreduziblen algebraischen Darstellungen von $(\mathbb{C}^n, +)$?

4. Welche eindimensionalen algebraischen Gruppen gibt es?

5. Was ist eine Borel'sche Untergruppe?

6. Wie konstruiert man Quotientenvarietäten?

7. Was ist eine diagonalisierbare algebraische Gruppe?

8. Ist eine Gruppe, deren Elemente sämtlich halbeinfach sind, diagonalisierbar? Und wenn sie zusammenhängend ist?

9. Was ist die Jordanzerlegung eines Elements von $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, aufgefaßt als algebraische Gruppe über einem Körper der Charakteristik 5?

10. Warum sind je zwei Borel'sche Untergruppen konjugiert?

Literaturverzeichnis

[AAG] *Skriptum Affine Algebraische Gruppen*, Wolfgang Soergel.

[Ais] Aise Johan de Jong, founder and maintainer, *The stacks project*, https://stacks.math.columbia.edu, 2012 –.

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[Art] Emil Artin, *Galois theory*.

[Bae50] Reinhold Baer, *Free mobility and orthogonality*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 439–460.

[BBD82] Alexander A. Beilinson, Joseph N. Bernstein, and Pierre Deligne, *Faisceaux pervers*, Astérisque **100** (1982), 1–172.

[Bek00] Tibor Beke, *Sheafifiable homotopy model categories*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **129** (2000), no. 3, 447–475.

[Bes40] A. S. Besicovitch, *On the linear independence of fractional powers of integers*, J. London Math. Soc. **15** (1940), 3–6.

[BGG76] Joseph N. Bernstein, Israel M. Gelfand, and Sergei I. Gelfand, *Category of* $\mathfrak{g}$*-modules*, Functional Analysis and its Applications **10** (1976), 87–92.

[BL94] Joseph N. Bernstein and Valery Lunts, *Equivariant sheaves and functors*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1578, Springer, 1994.

[BM60] A. Borel and J. C. Moore, *Homology theory for locally compact spaces*, Michigan Math. J. **7** (1960), 137–159.

[Bor84] Armand Borel (ed.), *Intersection cohomology*, Progress in Mathematics, vol. 50, Birkhäuser, 1984.

[Bor91] ———, *Linear algebraic groups (second enlarged edition)*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer, 1991.

[Bor94] Francis Borceux, *Handbook of categorical algebra 1-3*, Encyclopaedia of Mathematics, Cambridge University Press, 1994.

[Bou81] Nicolas Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4–6*, Masson, 1981.

[Bou06] ———, *Algèbre commutative, chapitres 8 et 9*, Masson 1983, réimpression inchangée par Springer, 2006.

[Bou12] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 8. Modules et anneaux semi-simples.*, 2nd revised ed. of the 1958 original ed., Berlin: Springer, 2012 (French).

[Bre97] Glen E. Bredon, *Sheaf theory*, zweite ed., Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1997.

[Brö95] Theodor Bröcker, *Analysis 1 und 2*, Spektrum, 1995.

[Bru01] Jan Hendrik Bruinier, *Primzahlen, Teilersummen und die Riemannsche Vermutung*, Math. Semesterberichte **48** (2001), 79–92.

[Buc55] D.A. Buchsbaum, *Exact categories and duality*, Transactions AMS **80** (1955), 1–34.

[CE56] Henri Cartan and Samuel Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

[Coh95] P. M. Cohn, *Skew fields*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 57, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, Theory of general division rings.

[Con78] John B. Conway, *Functions of one complex variable*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 11, Springer, New York-Berlin, 1978, 1978.

[Cou71] Richard Courant, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, Springer, 1971.

[Del90] P. Deligne, *Catégories tannakiennes*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 111–195.

[Die03] Jean Dieudonné, *Éléments d'analyse*, Jacques Gabay, 2003.

[Dol95] Albrecht Dold, *Lectures on algebraic topology*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the 1972 edition.

[E+92] Ebbinghaus et al., *Zahlen*, Springer, 1992.

[Ebb94] Heinz-Dieter Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*, third ed., Bibliographisches Institut, Mannheim, 1994.

[Eis95] David Eisenbud, *Commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995, With a view toward algebraic geometry.

[FH91] William Fulton and Joe Harris, *Representation theory*, Springer, 1991.

[Fil93] Andreas Filler, *Euklidische und nichteuklidische Geometrie*, B.I. Wissenschaftsverlag, 1993.

[For77] Otto Forster, *Riemannsche Flächen*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Heidelberger Taschenbücher, Band 184.

[For92] Otto Forster, *Analysis 1-3*, Aufbaukurs Mathematik, Vieweg, 1992.

[FR84] D. B. Fuks and V. A. Rokhlin, *Beginner's course in topology*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1984, Geometric chapters, Translated from the Russian by A. Iacob, Springer Series in Soviet Mathematics.

[Fre66] Peter Freyd, *Abelian categories*, Harper & Row, 1966.

[Gab62] Peter Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448.

[Ger18] Maximilian Gerhards, *Funktorialitäten für relative topologische Gruppen*, Dissertation in Freiburg, sollte bald erscheinen auf http://www.freidok.uni-freiburg.de/, 2018.

[GH81] Marvin J. Greenberg and John R. Harper, *Algebraic topology*, Mathematics Lecture Note Series, vol. 58, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1981, A first course.

[God64] Roger Godement, *Théorie des faisceaux*, Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1252, Hermann Paris, 1964.

[Gro57] Alexander Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. J. (2) **9** (1957), 119–221.

[Gro72] Alexander Grothendieck, *SGA 4*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, 270, 305, Springer, 1972.

[Gro86] _____, *Récoltes et Semailles*, Im Netz verfügbar, 1985-1986.

[Hal70] Paul R. Halmos, *Measure theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 18, Springer, 1970.

[Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Hir75] Heisuke Hironaka, *Triangulations of algebraic sets*, Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975, pp. 165–185.

[HN91] Joachim Hilgert and Karl-Hermann Neeb, *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*, Vieweg, 1991.

[Hoe17] Fritz Hoermann, *Fibered multiderivators and (co)homological descent*, Theory Appl. Categ **32** (2017), no. 38, 1258–1362.

[HR63] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross, *Abstract harmonic analysis. Vol. I: Structure of topological groups. Integration theory, group representations*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 115, Academic Press Inc., 1963.

[HS71] Peter J. Hilton and Urs Stammbach, *A course in homological algebra*, Graduate Texts, vol. 4, Springer, 1971.

[Hum70] James E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, GTM, vol. 9, Springer, 1970.

[Hum75] _____, *Linear algebraic groups*, GTM, vol. 21, Springer, 1975.

[Hum90] _____, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, 1990.

[Ive87] Iversen, *Cohomology of sheaves*, Springer, 1987.

[Jam78] G. D. James, *The representation theory of the symmetric groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 682, Springer, 1978.

[Jam95] I. M. James (ed.), *Handbook of algebraic topology*, North-Holland, Amsterdam, 1995.

[JK81] Gordon James and Adalbert Kerber, *The representation theory of the symmetric group*, Encyclopedia, vol. 16, Addison-Wesley, 1981.

[JS06] Jens Carsten Jantzen and Joachim Schwermer, *Algebra*, Springer, 2006.

[Kac90] Victor G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3 ed., Cambridge University Press, 1990.

[Kas95] Christian Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 155, Springer, 1995.

[Kem93] George R. Kempf, *Algebraic varieties*, LMS Lecture Notes, vol. 172, Cambridge University Press, 1993.

[KKK86] Masaki Kashiwara, Takahiro Kawai, and Tatsuo Kimura, *Foundations of algebraic analysis*, Princeton Mathematical Series, vol. 37, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986, Translated from the Japanese by Goro Kato.

[KL79] David Kazhdan and George Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Inventiones **53** (1979), 191–213.

[KM03] O. Khomenko and V. Mazorchuk, *On Archipov's and Enright's functors*, Preprint, 2003.

[Kna96] Anthony W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*, Birkhäuser, 1996.

[Kön97] Königsberger, *Analysis 1 und 2*, Springer, 1997.

[Kow04] Emmanuel Kowalski, *Un cours de théorie analytique des nombres*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 13, Société Mathématique de France, 2004.

[KS90] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren, vol. 292, Springer, 1990.

[KS00] _____, *Categories and sheaves*, Grundlehren, vol. 332, Springer, 2000.

[KS10] E. D. Kim and F. Santos, *An update on the hirsch conjecture*, Jahresbericht der DMV **112** (2010), no. 2, 73–98.

[Kun80] Ernst Kunz, *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie*, Aufbaukurs Mathematik, Vieweg, 1980.

[LA1] *Skriptum Lineare Algebra 1*, Wolfgang Soergel.

[LA2] *Skriptum Lineare Algebra 2*, Wolfgang Soergel.

[Lan68] Serge Lang, *Analysis 1*, Addison-Wesley, 1968.

[Lan74] _____, *Algebra*, Addison-Wesley, 1974.

[Lei04] Tom Leinster, *Higher operads, higher categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 298, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[Lor96] Falko Lorenz, *Einführung in die Algebra I*, Spektrum, 1996.

[LR03] William F. Lawvere and Robert Rosebrugh, *Sets for mathematics*, Cambridge University Press, 2003.

[Lur17] Jacob Lurie, *Higher algebra*, 2017, Available on the web.

[Mac63] Saunders MacLane, *Homology*, Grundlehren, vol. 114, Springer, 1963.

[Mac98] _____, *Categories for the working mathematician*, GTM, vol. 5, Springer, 1998.

[Maz08] Barry Mazur, *Mathematical platonism and its opposites*, Newsletter of the EMS **68** (2008), 19–21.

[ML] *Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen*, Wolfgang Soergel.

[Mor58] Louis Joel Mordell, *On the representation of a number as a sum of three squares*, Revue de mathématiques pures et appliquées (1958).

[Mum95] David Mumford, *Algebraic geometry. I*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Complex projective varieties, Reprint of the 1976 edition.

[MV00] Meyberg and Vachenauer, *Höhere Mathematik 2*, Springer, 2000.

[Nag55] M. Nagata, *The theory of multiplicity in general local rings*, Symp. Tokyo-Nikkosha (1955), 191–226.

[NAS] *Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie*, Wolfgang Soergel.

[Oss09] Erich Ossa, *Topologie*, Vieweg+Teubner, 2009, zweite überarbeitete Auflage.

[Pic49] Günter Pickert, *Elementare Behandlung des Helmholtzschen Raumproblems*, Math. Ann. **120** (1949), 492–501.

[Qui73] Daniel Quillen, *Algebraic K-theory, I: Higher K-theories*, Lecture Notes in Math. 341, Springer, 1973, pp. 85–147.

[Rad87] Heydar Radjavi, *The Engel-Jacobson Theorem revisited*, JOURNAL OF ALGEBRA **111** (1987), 427–430.

[Rom06] Steven Roman, *Field theory*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 158, Springer, New York, 2006.

[Rud73] Walter Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1973.

[Rud76] _____, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[Rud87] _____, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1987.

[Rus05] Lucio Russo, *Die vergessene revolution oder die wiedergeburt des antiken wissens*, Springer, 2005, Übersetzung aus dem Italienischen.

[RV04] Günther Richter and Alexander Vauth, *Fibrewise sobriety.*, Categorical structures and their applications. Proceedings of the North-West European category seminar, Berlin, Germany, March 28–29, 2003, River Edge, NJ: World Scientific, 2004, pp. 265–283.

[Sag00] Bruce E. Sagan, *The symmetric group*, Springer, 2000.

[Sch86] Alexander Schrijver, *Theory of linear and integer programming*, Wiley, 1986.

[SDAT00] S. A. Katre S. D. Adhikari and Dinesh Thakur, *Cyclotomic fields and related topics*, Bhaskaracharya Pratishthana, Pune, 2000.

[Ser70] Jean-Pierre Serre, *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970, Englische Übersetzung: A course in arithmetic, Graduate Texts in Mathematics 7, Springer, New York NY u. a. 1973,.

[Sha13] Igor R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry. 1*, second ed., Springer, Heidelberg, 2013.

[She74] S. Shelah, *Infinite abelian groups*, Israel Journal of Mathematics **18** (1974), 243–256.

[Spa88] N. Spaltenstein, *Resolutions of unbounded complexes*, Compositio Math. **65** (1988), no. 2, 121–154.

[Spr81] Tonny A. Springer, *Linear algebraic groups*, Birkhäuser, 1981.

[Spr98] _____, *Linear algebraic groups*, second ed., Birkhäuser, 1998, Reprint of the second edition as Ebook.

[SPW] *Skriptum Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme*, Wolfgang Soergel.

[SS15] Olaf M. Schnürer and Wolfgang Soergel, *Proper base change for separated locally proper maps*, Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova (2015).

[Ste89] Ian Steward, *Galois theory*, second ed., Chapman and Hall, 1989.

[Suz87] Jiro Suzuki, *On coefficients of cyclotomic polynomials*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 63 **63** (1987), no. 7, 279–280.

[SZ94] Ralph Stöcker and Heiner Zieschang, *Algebraische Topologie*, second ed., Mathematische Leitfäden, B. G. Teubner, Stuttgart, 1994.

[tD91] Tammo tom Dieck, *Topologie*, de Gruyter, 1991.

[TSK] *Skriptum Kategorielle Produktstrukturen*, Wolfgang Soergel.

[TW05] Patrice Tauvel and Rupert W.T.Yu, *Lie algebras and algebraic groups*, Springer, 2005.

[Vic94] James W. Vick, *Homology theory*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 145, Springer-Verlag, New York, 1994, An introduction to algebraic topology.

[Vog81] David A. Vogan, Jr., *Representations of real reductive Lie groups*, Progress in Mathematics, vol. 15, Birkhäuser, 1981.

[War83] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and lie groups*, Springer, 1983.

[Wei74] André Weil, *Basic number theory*, Springer, 1974.

[Wer05] Dirk Werner, *Funktionalanalysis*, 5 ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2005.

[Wey35] Hermann Weyl, *Elementare Theorie der konvexen Polyeder*, Comment. Math. Helv. **7** (1935), 290–306, In den gesammelten Abhandlungen: Band III, S 517–533.

[Zag97] D. Zagier, *Newman's short proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), no. 8, 705– 708.

Index

$(\mathcal{S}, v)$-Struktur
  relative, 3727
$[M]^!$ Fundamentalzykel, 2959
$\mathbb{Z}$-verträglich
  Transformation, 3396
$*$ Konvolution, 2586
$\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Kring}}$ Schmelzkategorie, 3499
$\mathrm{Ab}_{/\mathrm{kkRring}}$ Schmelzkategorie, 3499
$f : X \supset D \to Y$, 1609
f_{i} Schreivorschub, 3272
g_{l} Linkseinsetzung von g, 2028
0 einelementige Gruppe, 120
  Nullvektorraum, 120
0 neutrales Element für $+$, 64, 1574
  0^d Null in $\mathbb{R}^d$, 1903
  0_K Null des Körpers K, 80, 106
  0_M im Fall von $(M, +)$, 64, 1574
  natürliche Zahl, 65, 240, 1574
1 Nachfolger der Null, 242
1 neutrales Element für $\cdot$, 64, 1574
  1_K Eins des Körpers K, 81
  1_M im Fall von $(M, \cdot)$, 64, 1574
  1_R Eins eines Rings, 260
  natürliche Zahl, 65, 246, 1574
$1 = 1_{\mathcal{M}}$ universelle Leerverschmelzung, 3001
1_A Indikatorfunktion von A, 2153
$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \in \mathbb{N}$, 246
$\angle$ Winkel
  von Vektoren, 375
  von Zweistrahl, 373
$\measuredangle$ gerichteter Winkel, 372
$|$ Notation bei Teilmengen, 33, 1557
$|$ ist Teiler von, 265
$\neg$ Verneinung, 66, 1578
$\square$ Beweisende, 8, 1546
$\sharp$ Kardinalität, 32, 1556
$\sqrt{x}$ Wurzel, 1621
$\ulcorner$ kokartesisches Diagramm, 2646
$\lrcorner$ kartesisches Diagramm, 2643
$\exists$ es existiert ein, 56
$\forall$ für alle, 56
$\exists!$ es existiert genau ein, 56
$(_!\ )$ Mengenanzeiger, 786
$n!$ Fakultät, 12, 1549
$['\ ], \langle'\ \rangle, \ldots$ Freiheitsstrichlein, 786
f' Ableitung, 1698
$\emptyset$ leere Menge, 31, 1555
$\in$ Element von, 31, 1555
$\in_{\mathrm{Y}}$ Leerverschmelzung, 2990
$\in_{\mathcal{M}}$ Leerverschmelzung, 2990
$\notin$ nicht Element von, 31, 1555
$/$ Quotient, 263
X/G Bahnenraum, 511
X/Z bei topologischen Räumen, 2821
$X/_l G$ Bahnenraum, 511
$X /\!\!/_{\mathrm{a}} G$ algebraischer Quotient, 1210
$X /\!\!/ G$ algebraischer Quotient, 1210
$X /\!\!/ G$ Bahnschlußraum, 1207
$G \backslash X$ Bahnenraum, 511
$X \backslash Y$ Differenz von Mengen, 37, 1559
$X \backslash p$ Komplement des Punktes p, 1624
$\Leftarrow$ folgt aus, 56
$\Leftrightarrow$ gleichbedeutend, 56
$\Rightarrow$ Transformation, 590, 2709
$\Rightarrow$ impliziert, 56

$\Rrightarrow$ Hom-Komplex
bei Kettenkomplexen, 2784
$\Rrightarrow$ Multihomobjekt, 3004
$\Rrightarrow_X$ internes Hom in Faser, 3508
$\Rrightarrow_{\mathcal{M}}$ Multihomobjekt in $\mathcal{M}$, 3004
$\mathcal{C}^{\setminus}X$ freies Objekt von $\mathcal{C}$ über X, 2734
$\dashrightarrow$ partiell definierte lineare Abbildung, 2335
$\dashrightarrow$ fast überall definierte Abbildung, 2193
$\dashrightarrow$ rationaler Morphismus, 1133
$\hookrightarrow$ Injektion, 47, 1567
$\overset{\cong}{\to}$ Homotopieäquivalenz, 2783
$\rightsquigarrow$ verwandt
Differentialformen, 2072
Funktionen, 2017, 3868
Maße, 2152
Vektorfelder, 2019, 3868
Wege, 2017
Zweitensoren, 2029
$\leftrightarrow$ als oberer Index
Vertauschen von Rechts- und Linksoperation, 2589
$\mapsto$ wird abgebildet auf, 45, 1566
$\to$ Abbildung, 43, 1565
$\to$ Morphismus in Kategorie, 575, 2619
$\to_{\mathrm{Hot}}$ Morphismen in Hot, 2783
$\overset{\sim}{\Rightarrow}$ Isotransformation, 590, 2709
$\overset{\sim}{\to}$ Bijektion, 47, 1567
$\overset{\sim}{\to}$ Isomorphismus
in Kategorie, 578
von Kategorien, 584, 2708
$\overset{\sim}{\to}_{\mathrm{Hot}}$ Isomorphismen in Hot, 2783
$\overset{\approx}{\to}$ Äquivalenz von Kategorien, 584, 2708
$\twoheadrightarrow$ Surjektion, 47, 1567
$\overset{\sim}{\hookrightarrow}$ volltreuer Funktor, 584, 2708
$\overset{\smile}{\to}$ Quasiisomorphismus, 3231
$\to_{\mathrm{Der}}$ Morphismus in Der, 3403
$\overset{\sim}{\to}_{\mathrm{Der}}$ Isomorphismus in Der, 3403
$\langle\ \rangle = \langle\ \rangle_{\oplus}$ additives Erzeugnis, 3134
$\langle\ \rangle_{\mathrm{L}}$ Erzeugnis als Lie-Ideal, 4158
$\langle\ \rangle$ Erzeugnis physikalischer Einheit, 1979
$\langle\!\langle\ \rangle\!\rangle$ Erzeugnis als Normalteiler, 2679
$\{\ \}$ Mengenklammern, 31, 1555
$\{f, g\}$ Poisson-Klammer, 3965
${}_{\mu}\{\ \}$ Multimenge, 54
$|\ |$ Absolutbetrag, 1588
$|\ |$ Kardinalität, 32, 1556
$|\ |$ Polyeder eines Simplizialkomplexes, 2665
$|\alpha|$ Betrag des Winkels α, 373
$|\omega|$ Grad der Form ω, 2066
(A, B) Kommutatorenerzeugnis, 1402
$(\ )$ Erzeugung als Körper, 786
$(\frac{a}{n})$ Jacobi-Symbol, 860
$(\frac{a}{p})$ Legendre-Symbol, 855
$(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$ Kommutator, 1402
$(x|y)$ Notation für Paare, 37, 1560
$K('X)$ Funktionenkörper, 779
$K(X)$ Funktionenkörper, 287
$\mathcal{C}(X) := \mathcal{C}(X, X)$, 577
$k(X)$ *rationale Funktionen auf* X, 1025, 1105
$\binom{n}{k}$ Binomialkoeffizient, 13, 1550
$R(\!(X)\!)$ formale Laurentreihen, 280
$\langle T\rangle$ Ideal-Erzeugnis, 732
$\langle T\rangle$ Untermodul-Erzeugnis, 927
$\langle T\rangle$ Untervektorraum-Erzeugnis, 130
$\langle T\rangle_R$ Untermodul-Erzeugnis, 927
$\langle T\rangle_R$ Unterrechtsmodul-Erzeugnis, 948
$\langle \lambda, v\rangle$ Auswerten einer Linearform, 202
$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\rangle$ Spatprodukt, 384
$\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$ Skalarprodukt, 350
$\langle \vec{v}|\vec{w}\rangle$ Skalarprodukt, 351
$\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$ Punkt des $\mathbb{P}^n K$, 667
$\langle\ \rangle$ Erzeugung als Gruppe oder Modul, 786
$\langle\ \rangle = \langle\ \rangle_{\Delta}$ trianguliertes Erzeugnis, 3398

$\langle\ \rangle = \langle\ \rangle_{\Delta\ominus}$ Verdier-Erzeugnis, 3398
$|\ \rangle$ Erzeugung als Monoid, 786
${}_R\langle T\rangle$ Untermodul-Erzeugnis, 927
${}_R\langle T\rangle_R$ Ideal-Erzeugnis, 733
$R['X_1, \ldots, X_n]$ Polynomring, 736
$R[X]$ Polynomring, 271
$R[X_1, \ldots, X_n]$ Polynomring, 278, 736
$R[a_1, \ldots, a_n]$ Teilring, 735
$[1]$ verschobener Komplex, 2899
$[A]$ charakteristische Funktion, 2153
$[L : K]_{\mathrm{s}}$ Separabilitätsgrad, 815
$[M : L]$ Vielfachheit, 1039, 1242
$[M]$ Einobjektkategorie, 577
$[\ ]$ Erzeugung als Kring, 786
$[\Omega]$ Einpunktköcher, 599
$[\vec{v}, \vec{w}]$ Vektorprodukt, 383
$[f]$ Matrix von f, 165
$k[G]$ Monoidring, 1232
$k[X]$ *Polynomfunktionen auf* X, 975
$k[\![T]\!]$ formale Potenzreihen, 280
$R\lfloor I\rfloor$ freier Ring, 1271
$\lfloor\ \rfloor$ Erzeugung als Ring, 786
X^δ Menge X mit der diskreten Topologie, 3314
$\mathcal{C}^\wedge$ Funktorkategorie, 615, 2732
$\leftrightarrow$ als oberer Index
Vertauschen von Rechts- und Linksoperation, 2589
$\mathcal{M}^{\mathrm{s}}$ Schmelzanteil von $\mathcal{M}$, 3009
$\mathcal{M}^{\mathrm{t}}$ Trennanteil von $\mathcal{M}$, 3009
$\phi^{\circledast}$
Zurückholen von Schnitten, 3680
f' Ableitung, 1698
f^* Eigrückzug
der Homologie, 2777
$X^2 = X \times X$, 37, 1560
$\bar{K}$ algebraischer Abschluß, 821
$\bar{M}$ Abschluß von M, 920, **1807**
$\bar{z}$ komplexe Konjugation, 84, 1584
$\check{X}$ Funktor $\mathcal{C}(X,\ )$, 613
$\dot{\gamma}$ physikalische Geschwindigkeit, 1979
$\hat{\otimes}$ vervollständigtes Tensorprodukt, 2210
$\overline{V}$ konjugierter Vektorraum, 409, 1315
$\overline{v}$ Vektor als Element von $\overline{V}$, 409
$\overrightarrow{AB}$ *Richtungsvektor*, 205
$\tilde{\mathcal{K}}$ Pfadkategorie von $\mathcal{K}$, 3355
S^{-1} Lokalisierung
$S^{-1}M$ eines Moduls, 1011
$S^{-1}R$ eines Integritätsbereichs, 287
$S^{-1}\mathcal{C}$ einer Kategorie, 3356
f^{-1} Kehrwertfunktion, 1619
f^{-1} Umkehrabbildung, 50, 1570
f^{-1} Urbild von Menge, 46
f^{-1} inverser Morphismus, 580, 2623
A^* adjungierter Operator, 2224
b^* Vektoren der dualen Basis, 195
f^* Rückzug
$f^{(*)}$ underivierter, 3444
derivierter, 3444
von Mengengarbe, 3182
f^* transponierte Abbildung, 197
G° Einskomponente, 1399, 2524
M° Inneres von M, 2485
X° Inneres von X, 1933
f° in opponierter Struktur
Menge mit Verknüpfung, 79
opponierter Morphismus, 582, 2640
$A^\dagger$ adjungierter Operator, 2224
$T^\perp$ Orthogonalraum von T, 352, 430
$\mathcal{N}^\perp$ linksentfaltete Objekte, 3402
$\mathcal{N}^\perp$ rechtsentfaltete Objekte, 3402
${}^\perp\mathcal{N}$ linksentfaltete Objekte, 3402
${}^tA$ *transponierte Matrix*, 170
${}^tf$ *transponierte Abbildung*, 197
$\varphi^\sharp$ Komorphismus, 977
$b^{(!)}$ Schnitte mit Träger, 3274
$f^!$ Schreirückzug
auf derivierten Kategorien, 3638
von abelschen Garben, 3274
$f^!$ eigentlicher Rückzug
Schnitte mit Träger, 3638
$A^\top$ transponierte Matrix, 170

$b^\top$ Vektoren der dualen Basis, 195
$f^\top$ transponierte Abbildung, 197
$M^\vee$ duales Objekt
in Schmelzkategorie, 3008
$X^\vee$ Funktor $\mathcal{C}(X,\ )$, 613
$\mathcal{C}^\vee$ Funktorkategorie, 613, 2731
A_{L} Kommutator-Liealgebra, 1422, 4093
$\varphi_{\circledast}$
Ausdehnen durch Null von Schnitten, 3213
k_x Auswertungsmodul, 925
$\underline{X}$ Einsobjekt, 3507
$\underline{X}$ konstantes Objekt, 3505
f_* Vorschub
$f_{(*)}$ underivierter, 3444
derivierter, 3444
singuläre Homologie, 2773
von Filter, 2546
von Garben und Prägarben, 3180
von globalem Schnitt, 3180
$f_\sharp$ Vorschub
von Fundamentalgruppe, 2608
$f^!$ eigentliches Zurückholen
in der singulären Theorie, 2950
$f_!$
eigentlicher Vorschub, 2959
$f_!$ Ausdehnung durch Null
in der singulären Theorie, 2949
$f_!$ Schreivorschub, 3272
$f_!$ eigentlicher Vorschub
Ausdehnung durch Null, 3213
$f_{[!]}$ Linksadjungierter des étalen Rückzugs von Mengengarben, 3268
$f_{¡}$
eigentlicher Vorschub
opponierter, 3272
$=$ Gleichheitszeichen, 32, 1555
$\cong$ homöomorph, 2598
$\dashv$ Adjunktion, 2712, 2734
von Schmelzfunktoren, 3017
$=:$ wird definiert als, 9, 1548
$\|$ gleich oder parallel, 636
$:=$ ist definiert durch, 9, 1548
$\perp$ orthogonal
in Skalarproduktraum, 351
$\simeq$ homotop, 2048, 2366
$*$ Faltung
in Gruppenring, 1232
von Maßen, 2252
$*$ Juxtaposition, 595
$*$ Torsionsprodukt, 2883
$*$ einziges Element von ens, 124
$\circ$ Verknüpfung
Matrixprodukt, 166
von Abbildungen, 46, 1569
von Morphismen, 574, 2619
$\curlyvee$ Trenner
bei Multiabbildungen, 53
bei multilinearen Abbildungen, 307
$\curlyvee\mathcal{C}$ banale Schmelzkategorie, 2994
$\curlywedge\mathcal{C}$ banale Trennkategorie, 2996
$\odot$ Schnittpaarung, 2868, 2972, 3677
$\oplus$ direkte Summe
$\bigoplus$ Summe von Familie, 607
von komplementären Untervektorräumen, 608
von Vektorräumen, 125
$\otimes$ Tensorprodukt, 540
$\bar{\otimes}$ Supertensorprodukt, 3028, 3052
$\otimes_X$ relatives in Trennfaserung, 3507
in Schmelzkategorie, 3000
kategorielles, 973
von Linearformen, 2027
von Mengenmoduln, 965
$\otimes$ *Produkt-σ-Algebra*, 2166
$-$ Differenz von Mengen, 37, 1559
$R\Lambda$ freier R-Modul über Λ, 943
$\mathcal{C}^{\setminus}X$ freies Objekt von $\mathcal{C}$ über X, 2734
n_K ganze Zahl in Körper K, 83
$p - q$ bei affinem Raum, 205
G_X konstante Garbe, 3102
$M_{\mathfrak{p}}$ Lokalisierung bei $\mathfrak{p}$, 1015

M_f Lokalisierung nach f, 1015
$V_{\mathfrak{a}}$ Raum der $\mathfrak{a}$-endlichen Vektoren, 4106
X_f Nichtnullstellen von f, 1103
$\mathcal{F}_Z$ bei Garben, 3275
$\mathcal{F}_x$ Halm
einer Prägarbe, 3115
$\mathcal{F}_{Z\subset X}$ bei Garben, 3275
$\mathcal{C}_S$ Lokalisierung einer Kategorie, 3356
$\mathcal{C}_{\subset X}$ Monos nach X in $\mathcal{C}$, 3128
$\mathcal{F}_{U\subset X}$ Ausdehnung durch Null, 3642
$\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ Rückzug von Kategorie, 3262
P^X Verteilung von X, 2152
$V^{\mathbb{R}}$ Reellifizierung von V, 142
$V^{\gamma r}$ konstantes Wort V, 3000
X^M Fixpunkte von M in X, 505
X^n für n-Tupel in X, 124
$X^{\times n}$ für n-Tupel in X, 124
Y^X
statt $\mathcal{C}(X,Y)$, 2516
statt $\mathrm{Ens}(X,Y)$, 53
$\mathcal{E}^X$ *Ausdehnung durch Null*, 3273
a^k Potenz, 14, 1551
a^x allgemeine Potenz, 1658
$\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ Funktorkategorie, 593, 2710
$\geq, >, \leq, <$ bei Ordnungsrelation, 126, 1586
$\triangleleft$ Normalteiler in, 472
$\prod$ Produkt
in Kategorie, 604
von Mengen, 603
von Vektorräumen, 607
$\prod$ Produkt, 65
von Zahlen, 12, 1549
$\sum$ Summe
von Zahlen, 11, 1548
$\wedge$ Dachprodukt, 565, 2065
$\bigwedge^r$ äußere Potenz, 564
$\bigwedge^{\max}$ maximale Potenz, 567
Vektorprodukt, 383
äußeres Dachprodukt, 2068
$\cap$ Schnitt, 35, 1559
$\bigcap$ von Mengenfamilie, 1791
$\bigcap$ von Mengensystem, 131
$\cap$ cap-Produkt, 2920
$\mathbb{A}$ abgeschlossen in
metrischem Raum, 1803
topologischem Raum, 920, 2483
$\mathbb{O}$ offen in
metrischem Raum, 1804
topologischem Raum, 920, **1791**, **2481**
$\subset$ Teilmenge, 37, 1560
$\uplus$ disjunkte Vereinigung, 606
$\overset{\cdot}{\sqcup}$ Vereigentlichung, 3575
$\dot{\cup}$ disjunkte Vereinigung, 606
$\cup$ Vereinigung, 35, 1559
$\bigcup$ von Mengenfamilie, 1791
$\bigcup$ von Mengensystem, 131
$\cup$ cup-Produkt, 3082
$\sqcup$ Koprodukt, 2641
$\bigsqcup$ von Familie, 2641
disjunkte Vereinigung, 606
$\sqcup$ disjunkte Vereinigung
$\bigsqcup$ von Mengenfamilie, 605
von Teilmengen, 606
$M^\times$ invertierbare Elemente
eines Monoids M, 69
$\mathcal{C}^\times$ Isomorphismen in $\mathcal{C}$, 579
$\mathcal{M}^\times$ Schmelzgruppoid von $\mathcal{M}$, 3009
$\rtimes$ semidirektes Produkt, 710
$\times$
kartesisches Produkt, 37, 1559
Kartesisches Produkt von Abbildungen, 122
Produkt von Kategorien, 583
$\times$ Kreuzprodukt
der Homologie, 2896
der Kohomologie, 2910
$\times$ Produkt
in Kategorie, 604
$\times$ externes Produkt

der lokalen Kohomologie, 3684, 3685
$\times_B$ Faserprodukt
affiner Varietäten, 993
$\times_Y$ Faserprodukt, 2643
$\times_{/H}$ balanciertes Produkt, 2737
$\mathcal{C}^\times$ Isomorphismenkategorie, 579
$\boxtimes$ äußeres Produkt
in Trennfaserung, 3511
von σ-Algebren, 2146
von Differentialformen, 2068
von Funktionen, 552, 2255
von Maßen, 2166
von Moduln, 1258
$+$ Verschieben von Punkt um Richtungsvektor, 204, 1811, 1843
$\dot{+}$ Summe in Charaktergruppen, 1387
$-a$ Negatives von a, 69
$a - b$ bei Gruppe, 70
$(x|y)$ Notation für Paare, 37, 1560
$G(x)|_a^b := G(b) - G(a)$, 1721
$\mu|_A$ Restriktion eines Maßes, 2131
$f|X$ Einschränkung auf X, 47, 1569
$f|_X$ Einschränkung auf X, 47, 1569

$\mathcal{A}(I)$ Primideale über I, 1029
G^{ab} Abelisierung, 2631
Ab
G-Ab für topologisches Monoid G, 3291
Ab abelsche Gruppen
Kategorie, 576
Schmelzkategorie, 3002
$\mathrm{Ab}\,\mathcal{C}$ abelsche Gruppenobjekte von $\mathcal{C}$, 1367
Ab^Γ Schmelzkategorie der Γ-graduierten abelschen Gruppen, 3004
$\mathrm{Ab}^{\mathrm{k}}_{/X}$ konstante belsche Garben, 3122
$\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/X}$ lokal konstante abelsche Garben, 3293
$\mathrm{Ab}_{/G\backslash X}$ äquivariante abelschen Garben auf X, 3291
$\mathrm{Ab}^{\mathrm{k}}_{/G\backslash X}$ konstante äquivariante abelsche Garben, 3293
$\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/G\backslash X}$ lokal konstante äquivariante abelsche Garben, 3293
$\mathrm{Ab}_{/X}$ abelsche Garben auf X, 3113
Ab-Funktor, 3130
Ab-Kategorie, 3130
Abb, 53
Abbildung, 43, 1565
einwertige, 46
identische, 45, 1567
inverse, 50, 1570
konstante, 46
Projektionsabbildung, 121
überall definierte, 2193
Umkehrabbildung, 50, 1570
Abbildungsgrad, 3226
allgemein, 2866
bei Kreislinie, 2633
lokaler, 2866
Abbildungskegel
in triangulierter Kategorie, 3384
simultaner, 2848
von Kettenabbildung, 2914
von stetiger Abbildung, 2842
ABC-Vermutung, 257
Abel'scher Grenzwertsatz, 1761
Abelisierung, 2631
abelsch
Garbe, 3113
Gruppe, 67, 1575
Kategorie, 3131
Körpererweiterung, 862
Liealgebra, 4094
Prägarbe, 3101
Verknüpfung, 61, 1573
abelsche Garben
Schmelzkategorie, 3494
abgeleitete Darstellung

der Liealgebra, 3807
abgeleitete Reihe, 4111
abgeschlossen, 920
Abbildung, 2498
Abbildung topologischer Räume, 2504
algebraisch, 275
Einbettung geringter Räume, 1096, 3843
Halbraum, 3981
in metrischem Raum, 1803
Operator, unbeschränkter, 2337
produktfest, 2535
topologisch, **2483**
universell, 2535
unter Verknüpfung, 61
Ableitung
n-te Ableitung, 1748
allgemeiner Potenzen, 1704
als Funktion, 1702
bei fester Stelle, 1698
Exponentialfunktion, 1703
formale, 805
höhere, koordinatenfrei, 2088
komplexe, 2343
linksseitige, rechtsseitige, 1701
logarithmische, 2353, 2415
Logarithmus, 1704
nach Vektorfeld, 2016
partielle, 1840
partielle, mit Einheiten, 1857
Richtungs-, 1845
vektorwertige, 1763
von Brüchen, reell, 1703
von Umkehrfunktion
reell, 1704
$\mathrm{Abmon}\,\mathcal{C}$ abelsche Monoidobjekte von $\mathcal{C}$, 1367
Abmonoid, 64
in Schmelzkategorie, 3047
Abschluß
algebraischer, von Körper, 821
ganzer, bei Ringen, 1047
in metrischem Raum, 1804
topologischer, 920, **1807**, 2485
von Facette, 3983
Abschneidefunktoren, 3413
absolut konvergente Reihe, 1645
Absolutbetrag, 1588
Absorptionsgesetz, 86
Abspalten von Linearfaktoren, 274
Abständezahl, 529
Abstand, 351, 387
in uniformem Raum, 2556
Abtastsatz, 2251
abzählbar, 1602
abzählbar basiert, 2147
abzählbar unendlich, 1602
Abzählbarkeitsaxiom, zweites, 2148
Abzählbarkeitsaxiom
erstes, 2489
achsenparalleles Rechteck, 2363
Achsenspiegelung, 369
Acht als natürliche Zahl, 246
action, 1367
ad adjungierte Darstellung, 1431, 4097
Differential von Ad, 1432
Ad adjungierte Darstellung
von algebraischer Gruppe, 1431
von Liegruppe, 3886
von Matrixliegruppe, 3789
ad-halbeinfach, 4129
ad-nilpotent, 4111, 4129
Addition
in Ring, 260
natürlicher Zahlen, 243
von Ordinalzahlen, 881
Additionsformeln
für $\sin$ und $\cos$, 1675
additiv
σ-additiv
auf Mengenring, 2132

Struktur auf Schmelzkategorie, 3037
Abbildung, 1343
Funktor, 2874, 3131
Kategorie, 3131
Struktur, 3130
additive Struktur
auf Kategorie, 2874
relative, 3727
adf Morphismen aus Identifikationen und Adjunktionen, 3509
adjungiert
bei Charakterpaarung, 2248
Darstellung, 1431
von Liealgebra, 3809
von Liegruppe, 3887
von Matrixliegruppe, 3789
Funktor, 2734
Gruppe, 4147, 4238
lineare Abbildung, 400
Operator, 2224
partiell definierte Abbildung, 2335
adjunkte Matrix, 313
Adjunktion
einer Nullstelle, 795
opponierte, 2715
partielle, 3435
von Funktoren, 2712
von Schmelzfunktoren, 3017
Adjunktionsdatum, 3063
Adjunktionsformel
für cup und cap, 2921, 3085
ähnlich
Dreiecke, 349
Ähnlichkeit, 348, 363, 443
lineare, 597
Ähnlichkeitsabbildung, 363
lineare, 363, 441
äqui-d-dimensional, 1003
äquidimensional, 1003
äquidistante Unterteilung, 1692
äquivalent
Normen, 1814
Äquivalenz
von Funktoren, 590, 2709
von Kategorien, 584, 2708
von Schmelzkategorien, 3012
Äquivalenzklasse, 249
Äquivalenzrelation
auf einer Menge, 248
erzeugt von Relation, 250
äquivariant, 594
Abbildung, 2688
derivierte Kategorie, 3712, 3715
Garbe, 3290
Kohomologie, 3297
mit Koeffizienten, 3300
Objekt, 3700, 3701
Torsor, 3170
äußere Ableitung, 2086
aif Mannigfaltigkeiten, 3950
äußere Algebra, 611
äußere Potenz, 564
äußeres Maß, 2135
äußeres Normalenfeld, 2097
äußeres Produkt
von σ-Algebren, 2146
von Funktionen, 2255
von Moduln, 1258
Aff Kategorie der affinen Räume, 581
Aff affine Abbildungen, 207
$\mathrm{Aff}^\times$ Affinitäten, 207
affin
k-Kring, 984, 1360
Abbildung, **207**, 1812, 1844
Morphismus, 1194
Raum, **204**, 1810, 1842
Raum, normierter, 1813
Raum, über Vektorraum, **204**, 1812
Teilraum, 209
unabhängig, 2661
als Familie, 219
als Teilmenge, **219**

Varietät, 1094
naive, 981, 1358
Weylgruppe, 4047
Weylgruppe, duale, 4047
Affinität, 207
Affinitätskriterium, 1194
Alembert'sches Prinzip, 1991
Alexander
gehörnte Sphäre, 2599, 2841
Alexander-Dualität, 3235
Alexander-Whitney
Transformation, 2891
Alexander-Whitney-Abbildung, 2905
Alexander-Whitney-Äquivalenz, 2891
Alexander-Whitney-Transformation
in Homotopiekategorien, 3072
Alexandroff'sche Halbgerade, 887
Alexandroff, Satz von, 443
Alexandroff-Topologie, 2484
Alg Algebrenhomomorphismen, 610
Alg Kategorie der Algebren, 576
Algebra, **610**, 1827, **4092**
σ-Algebra, 2124
assoziative $\mathbb{Z}$-Algebra, 260
Erzeuger und Relationen, 1270
über Körper, 3789
über Kring, 934
algebraisch
$k^\times$-Operation, 1201
abgeschlossen, Körper, 275
abhängig, 1067
abhängig, über Ring, 1057
Abschluß, 821
Darstellung, 1374
Gruppe, 1368
Gruppe, affine, 1362
Gruppe, lineare, 1372
in Körpererweiterung, 780
Körpererweiterung, 802
komplexe Zahl, 780
Monoid, affines, 1362
Quotientenvarietät, 1210
reelle Zahl, 1622
Teilmenge von k^n, 917
unabhängig
über Körper, 1067
unabhängig, über Ring, 736, 1057
Vektorfeld, 1423
Algebrenhomomorphismus, 261, **610**, 3792, **4092**
Alkoven
bei kompakten Liegruppen, 1527, 3935
fundamentaler dominanter, 4052
in alkovischer Darstellung, 4069
zu endlicher Spiegelungsgruppe, 3974
zu System von Hyperebenen, 3985
alkovische Darstellung, 4064
allgemeine Gleichung, 835
allgemeine lineare Gruppe, 151, 173
allgemeine Potenzen, 1658
Allgemeines Ausdehnbarkeitskriterium, 800
Alphabet, griechisches, 23
alt Alternator, 2063
Alt alternierende Formen, 563, 2063
$\mathrm{Alt}^n(V)$ alternierende Multilinearformen, 308
$\mathrm{Alt}^n(V,W)$ alternierende multilineare Abbildungen, 308
Alternator, 568, 2086
alternierend
bilineare Abbildung, 306
Matrix, 416
multilineare Abbildung, 307
Tensor, 568
alternierende p-Form, 2063
alternierende Gruppe, 299, 706, 725
alternierende harmonische Reihe, 1645
amalgamiertes Produkt, 2661
Amplitude, 137, 1781

analytisch
auf $\mathbb{R}$, 1752
auf $\mathbb{R}^n$, 2044
banachwertige Funktion, 2303
Aneinanderhängung
von Wegen, 2603
Anfangspunkt, 3355
von Pfeil in Köcher, 598
Anfangspunkt, von Pfeil in Köcher, 1346
Anfangsstück, 879
Anfangswert
von Flußweg, 1945, 1946, 3871
Anfangswertisomorphismus, 1777, 1782, 1968, 1969
bei reeller Schwingungsgleichung, 1778
bei Schwingungsgleichung, 1780
angeordnet
Čech-Komplex, 3108
Ring, 1587
angereichert
relativ, 3728
Ankleben einer Zelle, 2842
Anklebesequenz, 2842
Variante, 2848
Ann Annullator, 948
anneau, 260
Annullator, 948
Anordnung, 126, 1586
einer abelschen Gruppe, 1163
Anreicherungsfunktor, 3041
anschaulich, 117
Anschauungsraum, **1978**
antiausgezeichnet, 3382
Dreieck, 3387
antiholomorph, 2353
antikausal, 440
antikonstant
Multiabbildung, 3025
Antipode, 1369, 3060
Antisymmetrie, 1422, 4092
antisymmetrisch
bilineare Abbildung, 307
Polynom, 768
Relation, 126, 1586
Zweitensor, 2031
Approximation
eines Quotientenfunktors, 3379
partielle, 3380
Approximationspolynom, 1753
Arbeit gegen Kraftfeld, 2041
arccot Arcuscotangens, 1679
archimedisch
angeordnet, 1598
arctan Arcustangens, 1679
Arcuscosinus, 1676
Arcuscotangens, 1679
Arcussinus, 1676
Arcustangens, 1679
Area Cosinus hyperbolicus, 1732
Area Sinus hyperbolicus, 1732
arithmetisches Mittel, 1639
arrow of quiver, 599
Artin's Problem, 950
Artin, Vermutung von, 493
artinsch
Kring, 1042
Modul, 1042, 1244
Objekt, 1336
Arzela-Ascoli, 2575
ass Assoziator, 3001
assoziativ, 61, 1366, 1573
Assoziativgesetz
bei Vektorraum, 116
Assoziativität
bei Gruppenoperation, 504
Assoziativmodul, 924, 3049
$\Omega/\mathcal{S}$-Assoziativmodul, 3050
Assoziativobjekt, 3031
in Schmelzkategorie, 3047
Assoziator, 3001

assoziiert
Garbe, 3317
graduierte Gruppe, 1137
graduierter Ring, 1138
Atlas, 3846
auf der s-Wand, 4274
aufgespannt
Untervektorraum, 130
auflösbar, 4111
Gruppe, 712, 867
Auflösbarkeit von Gleichungen, 868
Auflösbarkeitskriterium von Cartan, 4116
Auflösung
in abelscher Kategorie, 3142
aufsteigende Vereinigung, 149
Augmentation, 2837, 3660, 4187
G-Augmentation, 3150
bei singulären Ketten, 2769
Augmentationsideal, 4187
augmentiert
Komplex, 2836
Linksderivierter, 3150
augmentierten Ring, 4187
Augmentierung
von Simplizialkomplex, 2668
Augpunkt
einer Zentralprojektion, 654
Ausartungsraum, 424
Ausdehnung, 799
Ausdehnung durch Null, 3273
in der singulären Theorie, 2949
Ausgangskategorie, 581, 2622
ausgeartet
Bilinearform, 424
Paarung, 429
ausgezeichnet
Dreieck, 3381, 3385
Ausnahme-Isomorphismus, 4095
Ausnahmealgebra, 4095
Ausschneidung, 2810, 2817
Kohomologie, 2917
Ausschneidung für Grenzketten, 3689
ausschöpfend
Filtrierung, 1135
Austauschlemma, 4074
Auswahlaxiom, 147
Auswahlaxiom, Variante, 147
Auswahlfunktion, 147
auswerten
Kovektorfeld auf Vektorfeld, 2011
Auswerten, 43, 1565
in Schmelzkategorie, 3007
Auswertungsabbildung, 55, 196
Auswertungsmodul, 925, 1416
Automorphismengruppe
eines Vektorraums, 151
Automorphismus
einer Gruppe, 516
eines Körpers, 829
eines Vektorraums, 151
in Kategorie, 579
interner
von Schmelzkategorie, 3393
von affinem Raum, 207
avf Morphismen, die aus Adjunktionen, Verflechtungen und Identifikationen entstehen, 3600
azyklisch
n-rechtsazyklisch, 3159
für Funktor, 3160
für singuläre Homologie, 2894
Garbe für Überdeckung, 3201
Überdeckung für Garbe, 3201
azyklische Modelle, 2894

$\mathcal{B}(V, W)$ beschränkte Operatoren, 1817
$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(V, W)$ beschränkte Operatoren, 1817
$\mathcal{B}_G$ Fahnenmannigfaltigkeit, 1503
$\mathrm{B}(x; A)$ Ball in uniformer Struktur, 2557
$\mathrm{B}(x; \varepsilon)$ Ball in metrischem Raum, 1795

B^*-Algebra, 2553
$\mathrm{B}_q\mathcal{K}$ Simplizialränder, 2758
B_qX singuläre Ränder, 2768
Bachelor, 1215
Baer-Specker-Gruppe, 944
bagazyklisch, 3553, 3712
  schach, 3285
Bahn, 506
  ganzzahlige, 4253
Bahnenmorphismus, 1199
  produktfester, 1200
Bahnenraum, 511, 1199
  als k-geringter Raum, 1195
  topologischer, 2525
Bahnenvarietät, 1199
Bahnformel, 515
Bahnpolordnungsabbildung, 525
Bahnschlußmorphismus, 1207
Bahnschlußraum, 1207
Bahnschlußvarietät, 1208
Baire'scher Kategoriensatz, 2292
balanciert
  bei Moduln, 964
balanciertes Produkt, 516, 2737
  topologisches, 3296
Ball, 1795
  in uniformer Struktur, 2557
$\mathrm{ban}^{\curlyvee}(\mathcal{C})$ banale Schmelzkategorie, 2994
$\mathrm{ban}^{\curlywedge}(\mathcal{C})$ banale Trennkategorie, 2996
Banach'scher Fixpunktsatz, 1884
Banach-Algebra, 2297
Banach-Ringalgebra, 2297
Banach-Steinhaus, 2294
Banach-Tarski-Paradoxon, 2130
Banachringalgebra, 2552
banal
  Schmelzkategorie, 2994
  Trennkategorie, 2996
  Trennschmelzkategorie
    einer additiven Kategorie, 3010
banale Struktur
  einer Schmelzkategorie, 2994
  einer Trennkategorie, 2996
Bar-Komplex
  nicht normalisierter, 3155
baryzentrisch
  Koordinaten, 221
baryzentrische Unterteilung, 2832
Baryzentrum, 218
basiertes Wurzelsystem, 4039
Basis, 133
  als Familie
    von Modul, 943
  als Teilmenge
    von Modul, 943
  angeordnete, 133
    von Modul, 943
  duale, 196
  einer Trennaustauschsituation, 3594
  eines Wurzelsystems, 4035, 4042
  indizierte, 133
  universelle, 4042
  unverträglich orientierte, 316
  verträglich orientierte, 316
  von Faserbündel, 2728
  von Modul, 943
  von Überlagerung, 2683
  von Vektorraum, 133
Basis einer Topologie, 2147, 2501
Basis eines Funktors, 2894
Basisexistenzsatz, 135
basisfest
  garbenazyklisch, 3553
Basismatrix, 174
Basispunkt, 497, 2605, 2622
Basissatz, Hilbert'scher, 930
Basiswechsel
  étaler
    für Mengengarben, 3269
  eigentlicher
    für Mengengarben, 3269
  für Untergruppen, 2647

für Zurückholen mit p, 2643
mengentheoretischer, 2646
Basiswechselmatrix, 182
Basiswechselmorphismus, 3266
Bel, 1662
Benford's Gesetz, 2142
Beppo Levi, 2165
bepunktete Menge, 497
bepunkteter Raum, 2605
Berührungspunkt, 1803, 2486
berandet
Teilmenge, 2094
Bernoulli-Ungleichung, 1590
Bernoulli-Zahlen, 2440
Beschleunigung, 1979
absolute, 1979
vektorielle, 1979
beschränkt
gleichmäßig, 2294
Menge reeller Zahlen, 1636
Operator, 1817
uniform, 2294
beschränkt in Richtung der Differentiale, 2914
Bessel'sche Ungleichung, 356
bestimmte Divergenz, 1630
Betafunktion, Euler'sche, 2447
Betrag, 1588
bei Quaternionen, 294
eines Winkels, 373
Betragsabstand, 1795
Betragswurzel
aus reellem Vektorraum, 363
Betti-Zahl, 2828
Bewegung, 366, 518
Bewegungsgruppe, 518
affine, 365
Bewegungsraum, 366
Bewertung, 755, 1163
diskrete, 1163
von meromorpher Funktion, 2414
bewertungsverträglich, 1177
Bézout
Satz von, 1127
Schranke von, 769
BGG-Reziprozität, 4265
Biabmonoid, 3034
biadditiv, 476, 2234
Abbildung, 2878
Funktor, 963
Bialgebra, 3059
Bidualraum, 200
Bierdeckelgruppe, 519
Bifaserfunktor, 3261
Bifaserung, 3261
biholomorph
Einbettung, 2351
Identifikation, 2448
Bijektion, 47, 1567
bijektiv
Abbildung, 47, 1567
Bikommutator, 1256
Bil Bilinearformen, 414, 2027
$\mathrm{Bil}(V)$ Bilinearformen auf V, 163
Bild, 43, 1565
einer Teilmenge, 45
essentielles, 3185
in abelscher Kategorie, 3126
von σ-Algebra, 2145
von linearer Abbildung, 156
Bildebene
einer Zentralprojektion, 654
Bildfilter, 2546
Bildmaß, 2150, 2240
bilinear
bei Vektorräumen, 163
Bilinearform, 163, 348
nichtausgeartete, 424
Bilinearformen, 414
Bimenge, 2998
Bimodul, 963
in Schmelzkategorie, 3049

Bimonoid, 3058
Bimorphismus, 2234
Binärdarstellung, 247
binärer Logarithmus, 1660
Binet-Cauchy-Identität, 1278
Binom, 1613
Binomialkoeffizienten, 13, 1550
    quantisierte, 762
binomische Formel, 14, 1551
Binomische Reihe, 1750
biquadratisch, 844
birational
    äquivalent, 1156
    Morphismus, 1156
Biringalgebra, 3059
Blätterzahl, 2685
Block
    einer längenendlichen Kategorie, 1342
    eines Rings, 947
    von Kring, 993
Block-Zerlegung
    eines Rings, 947
Bochner, Satz von, 2249
Bockstein-Homomorphismen, 2878, 2913
Bogenlänge, 1763
    parametrisiert nach, 1773
Bogenmaß, 377
Bolzano-Weierstraß, 1637
Boole'sche Algebra, 85
$\mathrm{Borel}(X)$ Borelmengen von X, 2127
Borel'sch
    Meßraum, 2547
Borel'sche Unteralgebra, 4138
Borel-Moore-Homologie
    singuläre, 2953
borelierter Torus, 1504
Borelmaß, 2127, 2559
Borelmenge, 2127
Borelraum, 2547
borelsche σ-Algebra, 2127
Borromäische Ringe, 1894
Borsuk-Ulam, 2637
Bouquet von Kreislinien, 2680
Boxprodukt, 3511
    von Moduln, 1258
braid group, 2739
Brechungsgesetz, 1708
Brennpunkt
    einer Ellipse, 411
Brouwer, Fixpunktsatz
    allgemeiner, 2814
    für die Kreisscheibe, 2613
Bruchzahlen, 32, 1555
Brüche, 3367
Bruhat-Teilordnung, 4079
Bruhat-Zerlegung
    in der $\mathrm{GL}(n; R)$, 536
Bündel, 3099, 3863
    triviales, 3862
Bündelatlas, 2728
Bündelkarte, 2728, 3863
Bündelprojektion, 1992
Butterbrot mit Schinken
    Satz vom, 2637
bw Basiswechselmorphismus, 3266

$c_*(V)$ totale Chern'sche Klasse, 3570
C_n Catalan-Zahl, 63
C_n *zyklische Gruppe*, 477
$\mathbb{C}$ komplexe Zahlen, 186
$\mathcal{C}(X)$ stetige komplexwertige Funktionen auf X, 1832
$\mathcal{C}(X, Y)$ Raum stetiger Abbildungen, 1823, 2277, 2516
$\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ stetige reellwertige Funktionen auf X, 1817
$\mathcal{C}^1$-Abbildung, 1882
$\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, 1882
$\mathcal{C}^\infty$-Abbildung
    zwischen affinen Räumen, 2088

$\mathcal{C}^k$-Abbildung
zwischen affinen Räumen, 2088
$\mathcal{C}_X^\infty(X, E)$ glatte Schnitte von E, 3864
$\mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$ stetige Funktionen mit kompaktem Träger, 1916
$\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ *stetige Funktionen mit kompaktem Träger*, 1916
$\check{\mathrm{C}}^q_<$ angeordnete Čech-Koketten, 3108
$\mathcal{C}^p(M)$ reelle oder komplexe $\mathcal{C}^p$-Funktionen, 3848
$\mathcal{C}^p(M, \mathbb{R})$ reelle $\mathcal{C}^p$-Funktionen, 3848
$\mathrm{C}(W)$ Kegel über projektiver Varietät, 1109
C^*-Algebra, 2553
C^*-Kringalgebra, 2553
C^*-Ringalgebra, 2553
c-mou, 3206
c-soft, 3206
Cantor'sches Diagonalverfahren, 1602
Cantor-Menge, 2142
cap-Produkt, 2920
abstraktes, 3053
in der Homotopiekategorie, 2920
Car, 1346
Car Kategorie der Köcher, 599
$\mathrm{Car}(\mathcal{Q}, \mathcal{C})$, 601
Caratheodory, Satz von
im Affinen, 228
lineare Version, 223
card, 32, 1556
Cardano'sche Formeln, 870
carquois, 599, 1346
Cartan'sche
absolute, 4238
Unteralgebra, 4131
Untergruppe, 1497
Cartan'sche Unteralgebra, 4144
Cartan-Eilenberg-Auflösung
durch Injektive, 3341
Cartan-Eilenberg-Obenauflösung, 3341
Cartan-Eilenberg-Untenauflösung, 3341
Cartan-Involution, 4169
Cartan-Matrix, 4042
Cartan-Zerlegung, 405
Casimir-Operator, 4126
für $\mathfrak{sl}(2)$, 3822
casus irreducibilis, 875
Cat, 2648
$\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, 2710
$\underline{\mathrm{Cat}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, 593
Catalan-Zahl, 63
Catalan-Zahlen
Herleitung der Formel, 1759
Cauchy
Satz von, 514, 716
Cauchy'scher Integralsatz
Umlaufzahlversion, 2792
Cauchy-Abschätzung, 2397
Cauchy-Binet-Formel, 572
Cauchy-Folge, 1637
Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen, 2348
Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung, 354
Cavalieri, 2171
Cayley'sche Zahlen, 828
Cayley-Hamilton, 327
Čech-azyklisch, 3230
Čech-Eins-Kozykel, 3092
Čech-Kohomologie
mit Koeffizienten in Gruppe, 3096
von abelscher Prägarbe, 3103
von Prägarbe von Gruppen, 3109
Čech-Kokette, 3103
Čech-Koketten
angeordnete, 3108
Čech-Komplex
vergarbter, 3200
$\mathrm{ch}\, V$ Charakter
bei Liealgebra, 4209, 4210
char Charakteristik, 269
char charakteristisches Polynom, 324
Charakter, 2590

bei Liealgebra, 4210
Darstellung von Liealgebra, 4209
einer Darstellung, **1283**
einfacher, 1283
multiplikativer komplexer, 2464
unitärer, 2214
von Liealgebra, 4112
von topologischer Gruppe, 2214
Charakter-Projektor-Formel, 1284
Charakterformel, Weyl'sche, 4209
Charakterfunktor, 1387
Charaktergruppe, 2214, 2464
einer algebraischen Gruppe, 1387
Charakteristik, 777
eines Rings, 269
charakteristisch
Homomorphismus, 3299
charakteristische Funktion
einer Menge, 2153
eines Maßes, 2246
charakteristisches Polynom, 322
von Endomorphismus, 324
Charakterpaarung
duale, 2234
von Fouriergruppen, 2234
Charakterraum, 2238
Charakterring
erweiterter, 4210
Charaktertafel, 1288
Chern'sche Klasse, 3570
totale, 3570
Chern'schen Klasse
von komplexer Darstellung, 3301
Chevalley-Involution, 4166
$\chi(X)$ Eulercharakteristik von X, 2828
$\chi(X;k)$ Eulercharakteristik, 2828
χ_A charakteristische Funktion, 2153
χ_A charakteristisches Polynom, 322
χ_V Charakter von V, 1283
χ_f charakteristisches Polynom, 324
Chinesischer Restsatz, 478
abstrakter, 737
Cholesky-Zerlegung, 395
$\mathrm{Cl}_X(M)$ Abschluß von M, 1804, **1807**, 2485
Clebsch-Gordan, 4107
Cliff Cliffordalgebra, 4223
Cliffordalgebra, 4223
clivage, 3324
closure, 2485
codim Kodimension
bei affinen Räumen, 213
eines Untervektorraums, 496
coim
Kobild in Kategorie, 3126
cok Kokern
bei abelschen Gruppen, 498, 2928
in Kategorie, 3126
col Kolimes, 2937
$\mathrm{côl}$ Kolimes in Funktorkategorie, 3422
colf filtrierender Kolimes, 2940
$\mathrm{côl}$ filtrierender Kolimes in Funktorkategorie, 3422
colim Kolimes, 2939
cone
englisch für Kegel, 232
strongly convex, 232
continue, 1609
continuous, 1609
corps, 79
corps gauche, 293
$\cos$ Cosinus
komplexer, 1681
$\cos_{\mathrm{a}}$ analytischer Cosinus, 375
$\cos_{\mathrm{g}}$ geometrischer Cosinus, 375
Cosecans, 1675
Cosecans hyperbolicus, 1734
$\cosh$ Cosinus hyperbolicus, 1732
Cosinus, 374, 1673
analytischer, 375
geometrischer, 375
Cosinus hyperbolicus, 1732

Cosinus-Satz, 381
Cosinusmatrix, 4010
Cosinustransformation, 2232
Cotangens, 1676
Coxetergraph, 4008
Coxetermatrix, 4008
Coxetersystem, 4074
Coxeterzahl, 4056
    duale, 4056
Cramer'sche Regel, 313
cup-Produkt, 2912, 3082
    der lokalen Kohomologie, 3684
    garbentheoretisches, 3406
    Operation auf kompakter Kohomologie, 3684
CW-Komplex, 2512
cyclotomic polynomial, 761

δ in X^δ Menge X mit der diskreten Topologie, 3314
$\delta(A)$ für lokalen noetherschen Kring A, 1145
$\delta \in \mathrm{H}_0(\mathrm{top})$, 2769
$\delta_w \in \mathrm{H}_0 X$, 2769
δ_x Auswerten bei x, 981, 1358
$\mathrm{d}f$ Differential von f, 2014
d Differential
    algebraisches, 1437
$\partial M = \partial_X M$
    topologischer Rand von $M \subset X$, 2485
∂T Rand von T, 1933
$\partial^{(r)}$ dividierte Ableitung, 1474
∂_i Vektorfeld, 2016
∂_x Vektorfeld, 2017
$D(f)$ Definitionsbereich von f, 287
Δ Diagonale, 122
$\Delta(\mathcal{K})$ topologische Realisierung eines Simplizialkomplexes, 2665
$\mathbb{D}$, genauer $\mathbb{D}_{\mathrm{Ket}}$, 3231
$\mathcal{D}G$ derivierte Gruppe, 1479
$\mathrm{D}(f)$ Definitionsbereich von f, 1025
D_v Richtungsableitung
    auf eingebetteter Mannigfaltigkeit, 3800
D_v konstantes Vektorfeld, 2016
$\mathrm{D}_{\vec{v}}$ Richtungsableitung, 1845
déployé, 3428
dérivable, 3430
dAb differentielle abelsche Gruppen, 3009
Dachprodukt, 565, 2065
darstellbarer Funktor, 614, 615, 2731, 2732
darstellende Matrix, 165, 179
    bei Moduln, 949
Darstellung, 3035
    adjungierte, 1431
      von Liealgebra, 3809
    algebraische, 1374
    einer Menge, 1271
    eines Köchers, 599
    einfache, 1228, 3775
    irreduzible, 1228, 3775
    komplex konjugierte, 1316
    kontragradiente, von Gruppe, 1289
    kontragrediente, 1377
    polynomiale, 1374
    unitäre, 3832
      von $\mathbb{R}$, 2284
    unzerlegbare, 1228
    von Gruppe, 1225, 3773
    von Köcher, 1346
    von Köcher mit Relationen, 1349
    von Liealgebra, 3807, 4098
    von Liegruppe, 3807
    von Monoid, 1225
    zyklische, 1229
Darstellung durch Radikale, 866
dcc, 1042, 1244
de Morgan'sche Regeln, 39, 1561, 1799
de-Rham-Kohomologie, 3245

kompakte, 3248
de-Rham-Komplex, 3245
äquivarianter, 3305
Deckbewegung, 2694
Decktransformation, **2694**
Dedekind'scher Schnitt, 1595
Dedekind-Ring, 1169
Definition, 11, 1548
Definitionsbereich, 45, 287, 1566
einer rationalen Funktion, 1025
von rationalem Morphismus, 1133
von rationaler Funktion, 1105
degré, 273
degree, 273
Deli'sches Problem, 792
Deodhar
Eigenschaft Z von, 4081
Der, 3403
$\mathrm{Der}^{(\sharp)}$ für $\sharp \in \{+, -, \mathrm{b}\}$, 3412
$\mathrm{Der}_k(A, M)$ Modul der Derivation, 1413
$\mathrm{Der}_k A := \mathrm{Der}_k(A, A)$, 1413
$\mathrm{Der}_{/X}$, 3761
$\mathrm{Der}_A = \mathrm{Der}(A\text{-Mod})$, 3403
$\mathrm{Der}_{/\!/\,\mathrm{Gek}}$, **3550**
$\mathrm{Der}_{/\!/\,\mathrm{Top}}$, **3753**
$\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$
als Schmelzkategorie, 3760
Derivation, 4097
auf Algebra, 1422
einer $\mathbb{R}$-Algebra, 3793
modulwertige, 1413
deriviert
Gruppe, 713
Liealgebra, 4110
derivierte abelsche Gruppen
als Schmelzkategorie, 3757
derivierte Gruppe, 1402, 1479, 2632
derivierte Kategorie, 3403
derivierte Moduln
als Schmelzkategorie, 3759
derivierter Funktor $\mathrm{R}^q F$, 3439
derivierter Funktor $\mathrm{R}F$, 3438
Derivierter gefaserter Basiswechsel, 3314, 3555
Derivierter gefaserter Basiswechsel in gekringten Räumen, 3560
$\mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$
als Schmelzkategorie, 3545
Desargues-Eigenschaft
affine, 636
descending chain condition, 1042, 1244
det Determinante
einer Matrix, 300
von Endomorphismus, 312
$\det_K$ Determinante
von Endomorphismus, 312
Determinante
einer Matrix, 300
von Endomorphismus, 312
dévissage, 3398
Dezibel, 1662
Dezimaldarstellung, 247
Dezimalsystem, 247
dg-Gruppe, 2774
dg-Ringoid, 3473
dg-Ringoidbimodul, 3479
dg-Ringoidkategorie, 3473
dg-Ringoidmodul, 3474
dg-Ringoidrechtsmodul, 3474
dgHot, 2926
dgMod, 2774
$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ Diagonalmatrix, 175
Diagonale, 122
dicke, 1509
diagonalisierbar
algebraische Gruppe, 1386
Endomorphismus, 326
Matrix, 325
Diagonalmatrix, 175
Diagonaltrennung, 3033
Diagonalzweitrennung, 2998
Diagramm

in Kategorie, 599, 2939
Diagrammjagd, 502
Diagrammschema, 599
dicht
definiert, 2335
Teilmenge, 922, **1828**, **2486**
Dichte
stetige positive, 3824
Dichtesatz
von Jacobson, 1256
Dichtesatz von Jacobson, 1256
dicke Diagonale, 1509
dicke Zelle
in der $\mathrm{GL}(n; K)$, 537
Diedergruppe, 518, 3974
Diffeomorphismus
$\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, 1882
zwischen Untermannigfaltigkeiten, 3779
Differential, 1845, 3009
algebraisches, 1416, 1437
auf Tangentialraum, 3855
bei eingebetteten Mannigfaltigkeiten, 3796
einer Darstellung, 3886
von $\exp$ auf Matrizen, 1871
von bilinearer Abbildung, 1860
von Funktion
als Kovektorfeld, 3951
differential equation
ordinary, 1943
partial, 1943
Differential-Funktor, 3854
Differentiale
Modul der, 1437
relative, 1441
Differentialform, 2068, 3949
erster Ordnung, 2011
relative, 2068
Differentialgleichung
gewöhnliche, 1943
partielle, 1943
differentialinjektiv, 3858
differentiell
abelsche Gruppe, 2774
graduierte abelsche Gruppe, 2774
graduiertes Ringoid, 3473
differentielle abelsche Gruppe, 3328
Differenz
von Mengen, 37, 1559
differenzierbar
auf eingebetteter Mannigfaltigkeit, 1906
beliebig, 2088
in einer Veränderlichen, 1698
mehrere Veränderliche, 1845
reell-komplex, 1740
total, 1845
Vektor, 2289
vektorwertige Funktion, 1763
differenzierbares $\mathbb{K}$-Bündel, 3100
Differenzieren unter dem Integral, 1869
Differenzraum, von affinem Raum, 204
Diffie-Hellman, 268
Diffie-Hellman-Problem, 268
Dilogarithmus, 2402
$\dim$ Dimension eines Vektorraums, 139
$\dim$ Dimension alias Rang eines freien Moduls, 950
Dimension
einer Varietät, 1102
einer Facette, 3985
eines affinen Raums, **204**, 1811, 1843
eines Vektorraums, 139, 883
homologische
einer Kategorie, 3408
eines Rings, 3412
physikalische, 139
von Mannigfaltigkeit, 1892
von Modul, 950

Dimensionsformel
für lineare Abbildungen, 157
Weyl'sche, für Darstellungen, 3954, 4206
Dini, Satz von, 1822, 1916
Dirac'sche δ-Distribution
algebraische, 1475
Dirac-Maß, 2126
durch Trennfunktor, 3019
directional derivative, 1845
direkte Summe, 1227, 1245, 1342
von Moduln, 942
von Vektorräumen, 125, 607
direktes Bild, 3180
von Radonmaßen, 2583
Dirichlet
-Charakter, 2463
Dirichlet-Reihen, 2466
Dirichletcharakter
primitiver, 2466
Dis Diskriminante, 1185
discrete
valuation, 1163
disjunkt, 37, 723, 1560
disjunkte Vereinigung, 605
Disk_n Diskriminante, 813
diskret
Bewertung, 1163
Bewertungsring, 1165
Kategorie, 578
Logarithmus, 268
Meßraum, 2547
Teilmenge von topologischem Raum, 2044, 2493
Topologie, 1799, 2482
Diskretisierung
von Kategorie, 3320
Diskriminante, 767
von Elementen, 1185
Diskriminantenideal, 1185
distingué
triangle, 3385
distinguished
triangle, 3385
distinguished triangle, 3381
Distribution
d-dimensionale, 3893
algebraische, 1474
temperierte, 2246, 2269
Distributivgesetz, 260
bei Körper, 80, 106
bei Ring, 1579
bei Vektorraum, 116
Divergenz, 2102, 2113
dividierte Potenz, 997
dividierte Potenzen, 3056
divisibel
abelsche Gruppe, 2930
Divisionsring, 293
Dodekaeder, 519
dominant
Gewicht, 4176
Morphismus von affinen Varietäten, 992
Morphismus von Varietäten, 1158
ρ-dominant, 4253
Dominanz-Teilordnung, 1303
dominierte Konvergenz, 2163
Doppeldreizykel, 726
Doppelkomplex, 3196
mit antikommutierenden Differentialen, 3196
Doppelkomplex im ersten Quadranten, 3197
Doppelkomplex in der oberen Halbebene, 3197
Doppelkomplex in der rechten Halbebene, 3197
Doppeltransposition, 300, 726
Doppelverhältnis, 672
dot-Operation, 3955, 4201
Drehachse, 365

von linearer Drehung, 365
Drehgruppe, 520
Drehimpuls, 1985, 2001, 3965
Drehsinn
als Funktor, 2633
zu einer Orientierung, 2633
Drehspiegelgruppe, 370
Drehspiegelung, 388
Drehung, **364**
lineare, 364
Drehungsgruppe, 367, 370
Drei als natürliche Zahl, 246
Dreieck, 3381, 3384
ausgezeichnetes, 3381, 3385
in Inzidenzgeometrie, 622
Dreiecksungleichung
bei metrischen Räumen, 1795
für Absolutbetrag eines angeordneten Körpers, 1589
für komplexen Absolutbetrag, 190, 1668
in euklidischem Vektorraum, 354
Dreispiegelungssatz, 390
dual
Basis, 196
Inzidenzstruktur, 677
duale Abbildung, 197
duale Partition, 720
duale Zahlen, 945
duale Zelle, 2974
dualer Kegel, 233
Duales
in Schmelzkategorie, 3008
duales Paar, 1259
dualisierbar, 3008
dualisierendes Objekt, 3601
Dualisierungsisomorphismus, 3653
orientierter, 3666
Dualität
der Heckealgebra, 4290
Dualitätssatz
der linearen Optimierung, 237
Dualraum, 193, 2009
Dualsystem, 247
Durchschnitt
zweier Mengen, 35, 1559
Durchschnittssatz von Krull, 1036
Dynkin-Diagramm, 4042
Dynkindiagramm
dual erweitertes, 4061
erweitertes, 4058

E_8 Wurzelsystem, 4033
E_8-Gitter, 4033
E_∞ bei Spektralsequenz, 3331
E_{ij} Basismatrizen, 174
$\mathbb{E}$ Anschauungsraum, 205, 1978
$\mathrm{E}(X)$ Erwartungswert der Zufallsvariable X, 2161
$\mathrm{E}(\mathcal{M})$ einfache Kategorie
zu Schmelzkategorie $\mathcal{M}$, 2989
Ebene
affine, 204, 209
erweiterte, 678
ebene Quadriken, 1734
echt
Ideal, 747
Teilmenge, 33, 1556
Unterdarstellung, 3813, 4100
Ecke
eines Dreiecks, 379
von Graph, 530
von Köcher, 598, 1346
Ecken, 2663, 3355
Eckenkarte, 2104
Eckenreduktion, 2675
Eckenzahl, 2675
Eckfaltigkeit, 2103
eckig berandet, 2104
edge of quiver, 599
Egalisator, 2939
Ehrenfest

Urnenmodell, 1911
Eig Eigenraum, 321, 449
Eigenfrequenzen, 1999
Eigenraum, 321, 449
von quadratischer Form
auf Skalarproduktraum, 419
Eigenschaft, 2516
Eigenschwingungen, 1784
eigentlich
Gruppenwirkung, 2536
Komorphismus, 3271
Komorphismus von Modulgarben, 3577
lokal, 3573
Morphismus von Varietäten, 1134
stetige Abbildung, 2535
Vorschub, 2959
eigentlich diskontinuierlich, 2691
Eigenvektor, 321
Eigenwert, 321
von quadratischer Form
auf Skalarproduktraum, 419
auf $\mathbb{R}^n$, 400
Eigmorphismus
in Kategorienwinkel, 3589
in Trennaustauschsituation, 3594
Eilenberg-Zilber, 2891
Transformation, 2891
Eilenberg-Zilber, Variante, 3072
Eilenberg-Zilber-Äquivalenz, 2891
Ein-Objekt-Kategorie, 577
Ein-Punkt-Kompaktifizierung, 2500
Einbettung, 588, 2494
k-geringter Räume, 1095, 3843
v-Einbettung, 2494
abgeschlossene, 1361
für naive affine Varietäten, 988
abgeschlossene, geringter Räume, 1096, 3843
einer Teilmenge, 47, 1569
kanonische unitäre, 2287
offene, geringter Räume, 1096, 3843
topologische, 2494, 2501
von Inzidenzgeometrien, 664
Einbettungsdimension, 1144
einfach
algebraische Gruppe, 1513
Charakter, 1283
Darstellung, Gruppe, 1228, 3775
Darstellung, Liealgebra, 3814, 4100
geschnürt, 4047
Gruppe, 706
Körpererweiterung, 782
Liealgebra, 4094
Modul, 1037, 1240
Objekt, 1331
Ring, 1260
wegzusammenhängend, 2051, 2606
zusammenhängend, 3897
einfach zusammenhängend
in Funktionentheorie, 2370
einfache Kategorie
zu Schmelzkategorie, 2989
Einheit
in Schmelzkategorie, 3067
von Ring, 266
Einheitsmatrix, 165
Einheitswurzel
eines Körpers, 489
in $\mathbb{C}$, 760, 1679
Einhüllende, 4185
einhüllende Gruppe, 250
Einparameteruntergruppe, 2214
von topologischer Gruppe, 2523
Einpunktköcher, 599
Einpunktkompaktifizierung, 2500
Einpunktverbindung, 2641
Eins
Einsobjekt von Schmelzkategorie, 3001
in Magma
von Schmelzkategorie, 3047

von Abmonoid, 3031
Eins als natürliche Zahl, 246
Eins in $\mathbb{N}$, 242
Eins-Element, 64, 1574
einer Algebra, 610, 1827, 4092
in Ring, 260
Eins-Form, 2011
Einsbedingung, 3001
Einschluß-Ausschluß-Formel, 262
Einschränkung, 47, 1569
von Garbe, 3119
Einschränkungsabbildung, 3102
Einsdarstellung, 1226, 3774
von Liealgebra, 3809, 4099
einsetzen
Vektorfeld in Kovektorfeld, 2011
Einsetzen, 43, 1565
Einsetzungshomomorphismus, 272, 572
Einsfamilie, 2986, 2988
Einsform, 2011
Einskomponente, 2283
einer algebraischen Gruppe, 1399
einer topologischen Gruppe, 2524
Einsobjekt, 3001
Einstangentialraum, 3779
Einsverschmelzung, 2987
Einszusammenhangskomponente
einer topologischen Gruppe, 2524
Eintrag von Matrix, 112
einwertige Abbildung, 46
Eisensteinkriterium, 761
Element, 31, 1554
primitives, 782
zufälliges, 2145
zyklisches, 1229
Elementabbildung, 54
elementar
kartesisches Trennquadrat, 3750
Elementar-Ereignis, 2126
Elementargebiet, 2405
Elementarmatrix, 175
spezielle, 175
elementarsymmetrische Polynome, 763
Elementarteiler, 485
Elementarteilersatz
graduierte Version, 1115
über dem Grundring $\mathbb{Z}$, 484
über Hauptidealringen, 951
Ellipse, 1734
Brennpunkt, 411
elliptisch
Element von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, 1491
elt Elementabbildung, 54
em_x
Morphismus aus finalem Objekt, 580
Einbettung des Punktes x, 3181
eMorphismus
e-Morphismus, 3589
End
Endomorphismenring
von abelscher Gruppe, 261
$\mathrm{End}(X) = \mathrm{End}_{\mathcal{M}}(X)$ Endomorphismenobjekt, 3052
End_k
Endomorphismenring
von k-Vektorraum, 261
endlich
Köcher, 599
Körpererweiterung, 783
Kringerweiterung, 933
Maß, 2233
Menge, 32, 239, 881, 1556
Morphismus von Varietäten, 1195
präsentiert, Modul, 1017
Torsionsdimension, 3456
endlich erzeugbar, 130
endlich erzeugt
Modul, 927
Vektorraum, 130
endliche Gitterspiegelungsgruppe, 1517, 3924

endliche Körper, 793
endliche Primkörper, 267
endlicher Typ
  Kringerweiterung, 933
Endomorphismen
  in Kategorie, 577
Endomorphismenobjekt, 3052
Endomorphismenring
  von abelscher Gruppe, 261, 923
  von Vektorraum, 261
Endomorphismus, 926
  von abelscher Gruppe, 261
  von Vektorräumen, 151
Endpunkt, 3355
  von Pfeil in Köcher, 599
Endpunkt, von Pfeil in Köcher, 1346
Energie, 2041
  kinetische, 2003
Engel, Satz von, 4111
ens einelementige Menge, 124, 580
$\mathrm{ens}_{/X}$ finale Mengengarbe, 3122
G-Ens Kategorie der G-Mengen, 3290
Ens Kategorie der Mengen, 576, 2620
$\mathrm{Ens}(X, Y)$ Abbildungen $X \to Y$, 53, 2620
$\mathrm{Ens}(X, Y)$ Abbildungsmenge, 112
$\mathrm{Ens}(Z)$ Selbstabbildungen der Menge Z, 60
Ens^* bepunktete Mengen, 576
$\mathrm{Ens}^\times(Z)$ Bijektionen $Z \xrightarrow{\sim} Z$, 69
$\mathrm{Ens}^\times(Z)$ Bijektionen $Z \xrightarrow{\sim} Z$, 2721
$\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}$ beschränkte Abbildungen, 1801
$\mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/X}$ konstante Garben, 3121
$\mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/X}$ lokal konstante Garben, 3293
$\mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/G\backslash X}$ konstante äquivariante Garben, 3293
$\mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/G\backslash X}$ lokal konstante äquivariante Garben, 3293
$\mathrm{Ens}_{/X}$ Garben von Mengen auf X, 3113
ensemble, 53
Ensf Kategorie der endlichen Mengen, 3425
$\mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/X}$ konstante Garben auf X, 3124
entfaltbar
  bequeme abelsche Schmelzkategorie, 3544
épaisse
  souscatégorie, 3397
Epi, 3127
Epimorphismus, 3127
erblich
  abelsche Kategorie, 3408
erblich parakompakt, 3241
erblicher Ring, 2935
Erdbeschleunigung, 1981
Ereignis, 2126
Ereignisse, 438
Ergänzungssatz
  für Jacobi-Symbole, 860
  zum Reziprozitätsgesetz, 858
erlaubt
  Basisquadrat, 3590
Ersetzung, 3467
erste Čech-Kohomologie, 3109
erste Chern'sche Klasse, 3240
Erwartungswert
  einer Zufallsvariable, 2161
erweiterte reelle Zahlen, 1607
Erweiterter Charakterring, 4210
Erweiterung
  höhere, 3145
  von abelschen Gruppen
    abstrakte, 2928
    konkrete, 2927
Erweiterung der Skalare
  bei Moduln, 972
  bei Vektorräumen, 550
erweiterungsisomorph, 2927
Erweiterungskörper, 778
erzeugende Funktion

der Catalan-Zahlen, 1759
der Fibonacci-Folge, 290
Erzeugendensystem, 130
von uniformer Struktur, 2558
von affinem Raum, 210
Erzeuger
infinitesimaler, 2289
Erzeugnis
in Vektorraum, 130
erzeugt
σ-Algebra, 2126
Äquivalenzrelation, 250
affiner Teilraum, 209
Ideal, 4110
Mengenalgebra, 2141
Mengenring, 2141
Teilring, 735
Topologie, 2501
Untergruppe, 252
Untervektorraum, 130
Verdiersystem, 3398
erzeugt, endlich
Vektorraum, 130
Erzeugungsoperator, 4101
essentiell
affine Spiegelungsgruppe, 4021
Bild, 3185
Supremum, 2199
essentiell konstant, 3424
essentiell surjektiv
Funktor, 584
étale
induzierte Struktur, 3854
modulendlich, 1184
Raum, 3114
stetige Abbildung, 2685, 3114, 3853
étale Überlagerung, 1184
Étalisierung, 3121
$\mathrm{éts}$ Étalisierung, 3121
$\mathrm{étTop}_X$ étale Räume über X, 3119, 3121
Euk Kategorie der euklidischen Vektorräume, 581
Euklid
Lemma von, 256
euklidisch, 747
Abbildung, 363
affiner Raum
über angeordnetem Körper, 3993
Ebene, 361
Element, 747
Raum, 361
über angeordnetem Körper, 3972
Ring, 744
Struktur, 361
Vektorraum, 351, 361
Wurzelsystem, 4027
euklidische Struktur
induzierte, 363
Euler, 1645
Euler'sche Gleichung, 1673
Euler'sche Kongruenz, 851
Euler'sche Winkel, 397
Euler'sche Zahl, 1650
Euler'scher Polyedersatz, 2829
Euler, Satz von, 492
Euler-Faktor, 2453
Euler-Formel, 535
Euler-Konstante, 2445
Euler-Lagrange-Gleichungen, 1997
Euler-Mascheroni-Konstante, 2445
Eulercharakteristik
eines Kettenkomplexes, 2829
eines topologischen Raums, 2828
Eulerformel, 534
Eulerklasse, 3564
ev Evaluationspaarung, 550
ev Auswertungsabbildung, 55
ev Evaluation, 200
Evaluationsabbildung, 55, 200
Evaluationspaarung, 550
Evaluieren

in Schmelzkategorie, 3007
ex Expansion der Identität, 551
exakt, 3129
exakt Sequenz
von Köcherdarstellungen, 2941
exakte Sequenz
in präabelscher Kategorie, 3129
von bepunkteten Mengen, 498
$\mathrm{Exp}(t) := \exp(2\pi \mathrm{i} t)$, 2610
Expansion der Identität, 551
explizit
gewöhnliche Differentialgleichung, 1943
Exponent, 489
Exponentialabbildung, 3874
Exponentialfunktion, 1649
Exponentialgesetz
für Mengen, 53
topologisch, 2277
topologisches, 2519
topologisches schwaches, 2517
Ext
in abelscher Kategorie
mit genug Injektiven, 3148
Ext^q Erweiterungen, 3145
$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{A}}(A, B)$ Erweiterungen
ohne genug Injektive, 3405
Ext-Sequenz
im ersten Eintrag, 2933
im zweiten Eintrag, 2928
extension, 2928
externes Produkt
der lokalen Kohomologie, 3684, 3685
Extrema
bei einer Veränderlichen, 1712
in mehreren Veränderlichen, 1876
unter Nebenbedingungen, 1908
extremen Gewichte, 4218

φ, Euler'sche φ-Funktion, 850
$\mathrm{F}(b)$ Fundamentalmatrix, 414
Facette
Teilmenge von affinem Raum, 3981
von Spiegelungsgruppe, 4280
zu System von Hyperebenen, 3981
Fahne, 1461
vollständige, 1461, 1496, 2533
Fahnenmannigfaltigkeit, 1461, 1496, 2533
einer affinen algebraischen Gruppe, 1504
Fahnenvarietät, 1496
faisceau, 3112
faithful, 832
Fakofaserung, 3320
Faktor, 121
Faktoren, 12, 1549
faktoriell, 740
Faktorierter Funktor, 3429
Faktorisierungssatz, 1061
Faktorring, 732
Fakultät, 12, 1549
Faltung, 2274, 2579
Multiplikation eines Monoidrings, 1232
von Maßen, 2252
Familie, 133, 1627
Familienfaserung, 3262
Familienkategorie, 2988
Familientrennfunktor, 3516
Familienwinkelfaserung, 3595
Farkas, Lemma von, 225
Farkas, Satz von, 233
Faser
einer Abbildung, 46
eines Funktors, 3257
von Trennfunktor, 3506
Faserbündel, 2728
faserdual
Kofaserung, 3323
Faserfunktor, 3259

bei Überlagerung, 2721
Faserprodukt
affiner Varietäten, 993
in Kategorie, 2643
von Kategorien, 3519
Faserring, 1056
faserrückzugstabil
über anderem System, 3583, 3748
fasertrennrückzugstabil, 3583, 3750
Faserung
Funktor, 3259
faserweise kompaktweich, 3581
Faserwirkungsvergleich, 2722
fast alle
Menge, 1629
fast überall
auf Maßraum, 2193
Fast-Mannigfaltigkeit, 1934
Fast-Moduln, 3378
fasteuklidisch
Geometrie, 623
Fastfaltigkeit, 1934
Fehlstand, 296
feine Ketten, 2816
feiner
Topologie, 2500
Feit-Thompson
Satz von, 706
Feld, 3948
Fermat'sche Kongruenz, 478
Fermat'sche Zahlen, 851
festgehalten
Teilmenge unter Selbstabbildung, 54
punktweise, 54
Fibonacci-Folge, 16
fibré principal, 3097
fidèle, 832
field, 79
filAb filtrierte abelsche Gruppen, 1136
Filter, 2543
echter, 2543
filterstetig, 2546
filtrierend
Kategorie, 2940
Kolimes, 2940
filtriert
Algebra, 1138
Modul, 1138
Ringalgebra, 1138
Vektorraum, 1138
Filtrierung, 3130
$\mathbb{Z}$-Filtrierung, 1135
angeordnete, 3522
auf abelscher Gruppe, 1135
auf Ring, 1138
ausschöpfende, 1135
endliche, 1135, 1353
finale, 1136
Hausdorff'sche, 1135
initiale, 1136
separierte, 1135
voll endende, 1135
von Null kommende, 1135
fin Morphismus zum finalen Objekt, 580
$\mathrm{fin}(\mathcal{C})$ finales Objekt, 580
final, 589
Morphismus
geringter Räume, 1095, 3842
Objekt, 579
produktfest final, 2525
stetige Abbildung, 2153, 2506
Struktur, 589
finale Struktur, 1094, 3842
Finalstruktur, relative, 3728
Finaltopologie, 2146, 2485, 2506
Fitting-Zerlegung
in abelschen Kategorien, 1334
von Vektorräumen, 452
Fixator, 505, 506
mengenweiser, 506

punktweiser, 506
Fixkörper, 830
Fixpunkt, 154, 1883
von Gruppenwirkung, 505
Fixpunktsatz
simplizialer, 2831
Fixpunktsatz von Brouwer
allgemeiner, 2814
für die Kreisscheibe, 2613
Fixvektor, 154
Flächenwort, 2671
flabby, 3175
flach
abelsche Garbe, 3495
abelsche Gruppe, 962
Kringhomomorphismus, 968
Modul, 962
Modulgarbe, 3537
Morphismus
von affinen Varietäten, 1064
Morphismus von Varietäten, 1407
Fläche, 1894, 1935, 1939
affine, 1003
nichtorientierbare, 2601
orientierbare, 2601
Flächengerade, 560
Flächenintegral, 1927
Flächenmaß, 2183
Flaggenvarietät, 1461, 1496
flasque, 3175
Flechtbasiswechsel, 3591
Fluchtpunkt, 654
Fluß
eines Vektorfelds durch eine Hyperfläche, 2083
von Vektorfeld, 1972
auf Mannigfaltigkeit, 3874
Flußdichte, 2069
Flußweg, 1945, 2005, 2019, 3871
größter, 1945
maximaler, 1945, 3871
Folge, 1627
geometrische, 1643
folgenabgeschlossen, 2488
folgenkompakt, 1820, 1913
force, 1980
Form
1-Form, 2011
allgemein, 195
innere, 901
quadratische, 494
quadratische homogene, 417
von Algebra, 899
von Vektorraum, 896
Formen
kommutierende, 4165
Fortsetzung
lineare, 161
Fototransformation, 656
vervollständigte, 670
Fouriergruppe, 2216
Fourierreihe, 1825
Fouriertransformation
diskrete, 1282
kanonische, 2247
mathematisch standardisierte, 2227
physikalisch standardisierte, 2226
stochastisch standardisierte, 2227
zu Charakterpaarung, 2235
Frac Quotientenkörper, 286
fraction field, 286
Fréchet-differenzierbar, 1845
Fredholm-Operator, 2578
frei
abelsche Garbe, 3125
abelsche Gruppe, 2809
abelsche Prägarbe, 3125
Algebra, 4156
Funktor, 2894
Gruppenwirkung, 506
Modul, 943
Objekt über Menge, 2734

Operation, 2691
Produkt von Gruppen, 2660
Ringalgebra, 4187, 4188
Ringoidmodul, 3472
Untergruppe, 2889
Vektorraum, 161
Wirkung eines Monoids, 506
frei homotop, 2376
frei zyklisch
Modul, 943
freie Liealgebra, 4151
freien Magma über I, 4155
Freiheitsstrichlein, 786
Frequenz, 319
Frequenzmaß, 2287
Fresnel'sches Prinzip, 1708
Freudenthal's Formel, 4213
Frobenius, 829
Satz von, 3894
Frobenius-Algebra, 1236
Frobenius-Homomorphismus, 270
Frobenius-Morphismus
von affiner Varietät, 986
von Varietät, 1104
Frobenius-Reziprozität
allgemeine, 972
bei Gruppen, 1323
Frobenius-spaltend, 1104
Frobenius-Twist
von naiver affiner Varietät, 986
von Varietät, 1104
Frobeniushomomorphismus, 829
Frolik-Tychonoff, 2536
Fubini, 2172
Führer
von Dirichletcharakter, 2466
Fünf als natürliche Zahl, 246
Fünferlemma, 2807
Fundamentalbereich
eckfaltiger, 4001
mengentheoretischer, 4001
topolologischer, 4001
Fundamentalform, erste, 2029
Fundamentalgruppe, 2606
basispunktfreie, 2632
Fundamentalgruppe der Kreislinie, 2609
Fundamentalklasse, 2860
Fundamentalkozykel, 3668, 3763
lokaler, 3669
von Untervarietät, 3678
Fundamentalmatrix, 414
Fundamentalsatz der Algebra, 275, 1686
Fundamentalzykel, 2860, 3668, 3765
in der lokalendliche Homologie, 2959
k-Fundamentalzykel, 2875
Funktion, 1605
ganze, 2389, 2413
gebrochenrationale, 1618
meromorphe, 2409
polynomiale, 975, 4237
rationale, 287, 1618
reguläre
auf affiner Varietät, 981, 1358
auf Varietät, 1100
strukturierende, 981, 1093, 1358, 3840
Umkehrfunktion, 50, 1570
Funktionaldeterminante, 1920
Funktionalgleichung
der ζ-Funktion, 2454
der Gammafunktion, 2444
des Logarithmus, 1658
Funktionalkalkül, 2320
Funktionenkörper, 287
Funktionskeim
längs Y
regulärer, 1024
regulärer, 1023
Funktionskeime, 1022, 3118
reguläre, 1102
Funktor, 581, 2621

additiver, 2874
darstellbarer, 614, 615, 2731, 2732
kodarstellbarer, 615
kontravarianter, 583
laxer 2-Funktor, 3325
linksadjungierter, 2734
partiell definierter, 2734
quasiinverser, 596, 2711
rechtsadjungierter, 2734
Funktorkategorie, 592, 2710
Fußball, Satz vom, 360
Fußpunktprojektion, 3862

$\mathfrak{g}^\alpha$ die $\mathfrak{sl}(2)$ zur Wurzel α, 4134
g Erdbeschleunigung, 1981
Γ Schnitt
der Orientierungsgarbe, 2860
einer Garbe, 3119
Γ-Funktion, 2444
$\Gamma(f)$ Graph von f, 45, 1566
Γ_Z *Schnitte mit Träger in* Z, 3275
$\Gamma_!$ Schnitte mit kompaktem Träger, 3204
der Orientierungsgarbe, 2860
$\Gamma_!(A;\mathcal{F}) := \Gamma_!(A;\mathcal{F}\mid_A)$, 3205
$\Gamma_C\mathcal{F}$ globale Schnitte mit Träger in C, 3188
Γ_c *Schnitte mit kompaktem Träger*, 3205
galois
Überlagerung, 2696
Galoiserweiterung, 830
Galoisgruppe, 829
eines Polynoms, 833
Galoiskorrespondenz, 841
galoislinear
Operation, abstrakte, 896
Operation, stetige, 896
Gammafunktion, 2444
Ganghöhe, 2611
ganz
Element von Kringerweiterung, 933, 1046
Funktion, 2389
Kringerweiterung, 1046
Kringhomomorphismus, 1046
ganz abgeschlossen, 1073
ganz über dem Ideal $\mathfrak{a}$, 1080
ganze Funktion, 2413
ganze Zahlen, 31, 251, 1555
ganzer Abschluß, 1047
Ganzheitsring, 859
ganzwertig
Polynom, 285
Ganzzahlenring, 859
ganzzahlige Weylgruppe von λ, 4249
ganzzahlige Wurzelsystem von λ, 4249
Garbe, 3112
äquivariant zurückgezogene, 3292
der Schnitte mit Träger in Teilmenge, 3275
Garbe der lokalen singulären q-Koketten, 3228
Garbe der Schnitte, 3113
Garbe der unstetigen Schnitte, 3625
garbenazyklisch
basisfest, 3553
schwach, 3313
stetige Abbildung, 3553, 3711
topologischer Raum, 3554
Garbenkohomologie
reduzierte, 3186
Garbenmorphismus
über stetiger Abbildung, 3257
Garbenopfaserung, 3261
derivierte, 3528
Garbenoptrennfaserung, 3498
Garbenschreikofaserung, 3273
garbentheoretischer Kohomologiering, 3406
Garbifizierung, 3119
verallgemeinerte, 3122

Gauß
Glockenkurve, 2180
Integralsatz von, 2102
Gauß'sche Glockenkurve, 2180
Gauß'sche Zahl, 744
Gauß, Lemma von, 756
Gauß-Algorithmus, 110
Gebiet, 2405
gebrochenes Ideal, 1172
Gedämpfte Schwingungen, 1778
Gefaserter Basiswechsel, 3312
gegensinnig
Kongruenz, 340
gehörnte Sphäre, 2599, 2841
Gek gekringte Räume, 3500
$\mathrm{Gek}^{\mathrm{lesbf}}$, 3632
gekreuzte Homomorphismen, 3167
gekringter Raum, 3500
Gelfand-Naimark, 2553
$\mathfrak{g}_{\mathrm{gen}}$, 4145
general linear group, 151, 173
general linear Lie algebra, 1422, 4093
generalisierte Kraft, 1994
generisch
in Liealgebra, 4145
generischer Punkt, 1031
Generisieren, 1025, 3115
geometrische Folge, 1643
Geometrische Invariantentheorie, 1219
Geometrische Reihe, 1642
geometrisches Mittel, 1639
geordnet
induktiv, 144
streng induktiv, 144
Ger_k Morphismen geringter Räume, 3841
gerade
Funktion, 1729
Permutation, 296, 300
Zahl, 264
Gerade
affine, 204, 209
erweiterte, 678
projektive, 658
von Inzidenzgeometrie, 622
Geradengruppe, 2286
Geradensegment, 221, 3979
Gerf_k Kategorie k-geringter Räume, 1094
geringter Raum, 3500
k-geringter Raum
durch Funktionen, 1093, 3840
gesättigt
k-geringter Raum, 1097
multiplikatives System, 3371
offene Überdeckungl, 3096
Produkt, 1129
gesamthaft final
stetige Abbildungen, 2506
gesamthaft initial
stetige Abbildungen, 2501, 2502
Geschlecht, 2601
geschlossen
Differentialform, 2087
Kovektorfeld, 2051
Weg, 2603
geschlossene Fläche, 2599
geschlossene kombinatorische Fläche, 2666
geschlossene Mannigfaltigkeit, 2599
Geschwindigkeit
absolute, 545, 1763, 1979
vektorielle, 207, 1848, 1979
Geschwindigkeitsfeld, 1983
Geschwindigkeitsphasenraum, 1983, 2002, 2007, 3964
unter Zwangsbedingungen, 1994
Geschwindigkeitsvektor, 3798
geshuffelt
partielles Einsetzen, 3055
gestreckter Winkel, 374
getwistete Verdopplung

einer Schmelzkategorie, 3023
Gewicht, 1391, 4130
ρ-dominantes, 4253
Darstellung, 4115
fundamentales dominantes, 4181
Gewicht, höchstes, 4178
Gewichte, 3830, 4174
ganze, 4174
Gewichtsprozent, 120
Gewichtsraum, 1391, 3830, 4174, 4255
verallgemeinerter, 4115
Gilmer
Satz von, 836
GIT-Quotient, 1216
Gitter, 1235, 1515, 3924
$\mathbb{Z}$-Gitter in $\mathbb{Q}$-Vektorraum, 493
Gitterdatum, 3928
Gitterpunktsatz, 2182
Gitterspiegelung, 1515, 3924
gkv Grenzkomplexvorschub, 3694
$\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})\langle\gamma\rangle$, 687
$\mathrm{GL}(V)$ allgemeine lineare Gruppe, 151
$\mathrm{GL}(n;K)$ allgemeine lineare Gruppe, 173
glatt, 1926, 2098
q-Kette, 3250
q-Simplex, 3250
Abbildung
koordinatenfrei, 2088
zwischen Untermannigfaltigkeiten, 3779
Abbildung nach $\mathbb{R}^m$, 2088
algebraische Teilmenge bei Punkt, 1147
Distribution, 3894
Kringhomomorphismus, 1154
Mannigfaltigkeit, 3846
Opfunktor, 3947
Punkt von Varietät, 1150
Varietät, 1151
gleichgradig stetig, 2575
gleichmächtig, 882
gleichmäßig beschränkt, 2294
gleichmäßig stetig
Abbildung uniformer Räume, 2557
bei metrischen Räumen, 1810
reelle Funktion einer Variablen, 1687
gleichmäßige Beschränktheit, Prinzip der, 2294
gleichsinnig
Kongruenz, 340
Gleichungssystem, 108
lineares, 108
Gleitspiegelung, 388
globaler Schnitt
von Garbe, 3119
Glockenkurve, 2180
$\mathrm{GO}(p,q)$, 2528
$\mathrm{GO}_{\mathrm{aff}}(E)$ Ähnlichkeiten, 443
Godement-Auflösung, 3626
Godementmonomorphismus, 3625
Going-down, 1073
Going-up, 1052
Goldbach-Vermutung, 254
goldener Schnitt, 18
Goldie-Rang, 1264
Goldie-Schiefkörper, 1264
Gon als Winkelmaß, 377
Goursat
Satz von, 2389
$\mathrm{gpEns}_{/X} = \mathrm{Ens}_{/X}$ Garben auf X, 3119
$\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}} A$ graduierter Ring
zu Filtrierung durch $\mathfrak{a}^n$, 1139
Gr Graßmann'sche, 1459
grad
Grad
einer projektiven Hyperfläche, 1119
eines Polynoms, 273
Gradient, 1841

$\mathrm{grad}_K(\alpha)$ Grad von α über K, 783
$\mathrm{grad}_\omega f$ symplektischer Gradient, 2002
grad_g Gradient zu Metrik g, 2029
Grad
bei der Winkelmessung, 377
einer Körpererweiterung, 783
einer polynomialen Abbildung, 1874
einer projektiven Hyperfläche, 1119
eines Polynoms, 273
in mehreren Veränderlichen, 769, 1872
von Element in Körpererweiterung, 783
Gradformel, 1180
Gradient, 1841, 2025
symplektischer, 2002
graduiert
abelsche Gruppe, **1111**, 2774
Algebra, 1112
Modul, **1112**
Ring, **1112**
Vektorraum, 1112
Vektorraum, Ω-graduierter, 1391
Graduierung
auf abelscher Gruppe, 1111
auf Ring, 1112
graduierungsverträglich
multilineare Abbildung, 1111
Gram'sche Determinante, 429
Gram'sche Matrix, 429, 1928
Gram-Schmidt, 392
Orthogonalisierungsverfahren, 393
Gramm, 1978
Graph
einer Abbildung, 45, 1566
kombinatorischer, 530
$\mathrm{Graß}$ Graßmann'sche, 1459
Graßmann'sche, 1459
Graßmann-Algebra, 611
Graßmann-Mannigfaltigkeit, 3901
Gravitationsfeld, 1980
Green'sche Formel, 2109
Grenzkette, 3229
Grenzketten
relative, 3688
Grenzketten als welke Čech-azyklische Kogarbe, 3230
Grenzkettengarbe, 3691
Grenzkomplex, 3691
Grenzkomplexvorschub, 3694
Grenzwert
linksseitiger Grenzwert, 1634
rechtsseitiger Grenzwert, 1634
von Folge, 1629
in metrischem Raum, 1801
von Funktion, 1626, 2488
griechisches Alphabet, 23
grober Modulraum, 2734
gröber
Topologie, 2500
größergleich
Struktur als k-geringter Raum, 1094, 3841
Topologie, 2500
größte Fortsetzung
von Prämaß, 2135
größter gemeinsamer Teiler, 255
größtes Element, 128, 143, 1590
Gronwall
Lemma von, 1957
großen Diagonale, 2739
Grothendieckgruppe, 1342
groupe de tresses, 2739
Grp
Gruppenhomomorphismen, 73
Grp Kategorie der Gruppen, 576
$\mathrm{Grp}\,\mathcal{C}$ Gruppenobjekte von $\mathcal{C}$, 1367
$\mathrm{Grp}^{\setminus} X$ freie Gruppe über X, 2654
$\mathrm{Grp}^{\times}(G)$ Automorphismen von G, 516
GrpVar Homomorphismen von affinen algebraischen Gruppen, 1363

Grundkörper, 116, 778
Gruppe, 67, 1575
einfache, 706
einhüllende, 250
Erzeugende und Relationen, 2679
freie, 2654
opponierte, 79
proendliche, 3426
topologische, 2213
Gruppe der Einheiten, 266
Gruppengarbe, 3112
Gruppenhommorphismus, 1577
Gruppenhomomorphismus, 73
Gruppenkohomologie, 3164
als Garbenkohomologie, 3318
nichtabelsche, 3170
Gruppenobjekt, 1367
Gruppenring, 1232
Gruppenschema, 1368
affines, 1368
Gruppentafel, 74, 704
Gruppenweg, 2214
in $\mathbb{C}^\times$, 3794
in $\mathbb{R}$, 1634
in $\mathbb{R}^\times$, 1660
in $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, 3794
in normiertem Vektorraum, 1817
in topologischer Gruppe, 2523
Gruppenwege
in Liegruppe, 3860
Gruppoid, 578, 2621
fundamentales, 2621

$\mathcal{H}$ Homologie
von differentieller abelscher Gruppe, 2775
$\mathcal{H}$, Hecke-Algebra, 4289
$\mathbb{H}$ Hyperkohomologie, 3529
$\mathbb{H}$ obere Halbebene, 690
$\mathbb{H}^q$ Hyperkohomologie, 3443
$\mathbb{H}^q_A$ Hyperkohomologie mit Träger, 3444
$\mathbb{H}^q_!$ kompakte Hyperkohomologie, 3444
$\mathcal{H}_q$ Homologie eines Komplexes, 2775
$\mathcal{H}(W,S)$ Hecke-Algebra des Coxetersystems (W,S), 4287
$\mathrm{H}^1(G;A)$ Gruppenkohomologie nichtabelsche, 3170
$\mathrm{H}^q(G;A)$ Gruppenkohomologie, 3165
$\mathrm{H}^q(Z;\mathcal{F}) := \mathrm{H}^q(Z;\mathcal{F}\mid_Z)$, 3156
$\mathrm{H}^q_{\mathrm{garb}}$ Garbenkohomologie, 3156
$\mathrm{H}^q_!$ kompakte Kohomologie, 3204
$\mathrm{H}_q(G;A)$ Gruppenhomologie, 3165
$\tilde{\mathrm{H}}_q$ reduzierte Homologiegruppen, 2837
$\mathrm{Hess}(f)$ Hesse-Matrix, 1880
$\mathrm{H}^q_C(X;\mathcal{F})$ lokale Kohomologie, 3188
$\mathrm{H}^{\mathrm{sing}}_q$ singuläre Homologie, 2768
$\mathrm{H}^q_!(X;G)_{\mathrm{sing}}$ kompakte Kohomologie, 2949
$\mathrm{H}^q_!(X)$ kompakte Kohomologie, 3205
$\mathrm{H}^q_!(X;M)_{\mathrm{garb}}$ kompakte Kohomologie, 3205
$\mathrm{H}^q_!$ Kohomologie mit kompaktem Träger, 2949
H^q_c kompakte Kohomologie, 2949
H^q_c *Kohomologie mit kompaktem Träger*, 3205
H_q simpliziale Homologie, 2758
$\mathrm{H}_q(X)_{\mathrm{garb}}$ garbentheoretische Homologie, 3657
$\mathrm{H}^!_q(X)_{\mathrm{garb}}$ garbentheoretische lokalendliche Homologie, 3657
H_q singuläre Homologie, 2768
Haar'sches Maß
auf Matrixliegruppe, 3824
Haar-Maß
auf Fouriergruppe, 2216
auf topologischer Gruppe, 2564
Haar'sches Borelmaß, 2569
normiertes, 2564
Haarmaß, 3824
duales, 2266
Häufungspunkt, 1624

von topologischem Raum, 2487
Hakenlänge, 1309
Hakenlängenformel, 1309
Halb
Halbgruppenhomomorphismen, 76
Halbdichte, 2270
Halbebene
bei Inzidenzgeometrie, 626
Halbebenenalkove
bei Inzidenzgeometrie, 626
halbeinfach, 3829
abelsche Kategorie, 3408
algebraische Gruppe, 1508
Anteil
in algebraischer Gruppe, 1380
Automorphismus von algbraischer Gruppe, 1463
Darstellung, 4119
Element von Liealgebra, 4129
Endomorphismus, 455
in abelscher Kategorie, 1336
in algebraischer Gruppe, 1380
Liealgebra, 4118
Modul, 1245
Ring, 1260
halbeinfachen Rang, 1513
halbeinfacher Anteil
eines Endomorphismus, 455
in Liealgebra, 4129
Halbgerade, 338
Halbgruppe, 76
Halbmetrik, 2260
Halbnorm, 1812, 2260
halboffen
in reellem affinen Raum, 1851, 2346
Teilmenge von $\mathbb{R}$, 1698
Halbordnung, 126, 1586
Halbraum, 3981
Halbraumfahne
fastvollständige, 370
vollständige, 370
Halm
geometrischer, 1037
Halm, zu Prägarbe, 3115
Hamilton
Bewegungsgleichung, 3963, 3964
Hamilton'sche Gleichungen, 2001
Hamilton'sche Zahlen, 293
Hamilton-Funktion, 2000
Harish-Chandra-Isomorphismus, 4237
harmonics
spherical, 3838
harmonisch
Funktion auf euklidischer Ebene, 2430
Harmonische Analysis, 2236
harmonische Reihe, 1643
Hau Hauptraum, 449
Hauptachse
von quadratischer Form
auf Skalarproduktraum, 419
von quadratischer Form
auf $\mathbb{R}^n$, 400
Hauptblock
von $\mathcal{O}$, 4261
Hauptfaserbündel, 3097
glattes, 3097
Hauptideal, 733
Hauptidealring, 741
Hauptlemma
der homologischen Algebra
für Moduln, 2892
in abelscher Kategorie, 3143
Hauptminoren-Kriterium, 427
Hauptraum, 449
Hauptsatz
über lineare Ungleichungen, 223
Hauptteil, 2413, 2438
Hauptvektor, 449
Hauptzweig des Logarithmus, 1738
Hausdorff, 2487

lokaler Ring, 1159
Hausdorff'sch
Filtrierung, 1135
Hausdorff, relativ, 2537
Hausdorff-Polynom, 4154
Hausdorffgruppe, 2213, 2522
hdim homologische Dimension, 3408
hebbare Singularität, 2408
Hecke-Algebra, 4284
eines Coxetersystems, 4287
Heine-Borel, 1809
Heisenberg-Gruppe, 1329
Hellinger-Toeplitz, 2291
Helmholtz'sches Raumproblem, 371
Henkelelimination, 2677
Hermite-Lindemann, 1679
hermitesch, 350, 402
quaternional, 1320
Hertz, 319
Hesse-Matrix, 1880
Hexadezimalsystem, 247
$\mathrm{HflAb}_{/\!/(X,\mathcal{A})}$ quisflache Komplexe von Modulgarben, 3755
Hilbert
Basissatz, 930
Hilbert's Satz 90, 898
Hilbert'sche Probleme, 1604
Nummer 1, 1604
Nummer 12, 861
Nummer 14, 1070
Nummer 18, 520
Nummer 8, 1645
Hilbert'scher Nullstellensatz, 917, 939
Hilbert-Dimension, 1122, 1140
Hilbert-Polynom, 1122
Hilbertbasis, 2203
Hilbertpolynom, 1121
Hilbertraum
endlichdimensionaler, 351
Hilbertsumme, 2210
Hinterseite eines Simplex, 2905
Hirsch
Vermutung von, 3991
Hochhebung, 2610, 2692
Hochschild-Kohomologie, 3152
hocol Homotopiekolimes, 3365
Hodge-Filtrierung, 3448
Hodgeoperator, 3831
höchste kurze Wurzel, 4055
einfach geschnürter Fall, 4055
höchste Wurzel, 4053, 4176
höchstes Element, 4053
Höhe
von Primideal, 1081
Hölder-Ungleichung, 2198
holomorph, 1739
banachwertige Funktion, 2302
Funktion, 2343
holomorphe Funktion
mit Singularitäten, 2408
Hom ohne Index, 926
$\mathrm{Hom}^{(2)}$ bilineare Abbildungen, 163
$\mathrm{Hom}^{(n)}$ multilineare Abbildungen, 307
Hom_{-R}, 949
Hom_R, 926
Hom_R Hom-Komplex, 2890
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}$ Hom-Komplex, 2890
$\mathrm{Hom}_{k,G}$ Verflechtungsoperatoren, 3811
$\underline{\mathrm{Hom}}$ *Hom-Garbe*, 3495
$\mathcal{H}\mathrm{om}$ *Hom-Garbe*, 3495
Hom-Funktor, 3006
Hom-Garbe, 3495
Hom-Hom-Adjunktion, 972
Hom-Komplex, 2784
Homobjekt, 3005
homöomorph, 1902, 2484
für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, 2598
Homöomorphismus, 922, 1902, **2484**
für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, 2598
homogen, 1408
Koordinatenring, 1117
Polynom, 765

Untergruppe, 1112
homogen, homogenisieren
lineares Gleichungssystem, 108
homogene Komponente
von Polynom, 765
homogener Raum, 506, 3902
von topologischer Gruppe, 2526
Homogenisierung, 1120
Homologie
einer Gruppe, 3165
eines Kettenkomplexes, 2775
eines Punktes, 2769
konvexer Mengen, 2770
lokale, 2813
mit Koeffizienten, 2874
reduzierte
mit Koeffizienten, 2874
singuläre, 2768
totale, 3046
von $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$, 2877
von differentieller abelscher Gruppe, 2775
zelluläre, 2850
Homologiegruppe
der Sphären, 2811
relative, 2801
simpliziale, 2758
singuläre, 2768
Homologieklasse, 2768
in Kettenkomplex, 2775
Homologiesequenz
abstrakte, 2804
eines ausgezeichneten Dreiecks, 3383
eines Raumpaares, 2806
eines Raumtripels, 2808
homologische Dimension, 3408
eines Rings, 3412
endliche, 3408
homologische Rechtsdimension
endliche, 3161
Homomorphismus
charakteristischer, 3299
über Grundkring, 933
über Grundring, 798
von Körpererweiterungen, 799
von Spektralsequenzen, 3330
von A-Kringen, 933
von K-Kringen, 798
von Abmonoiden, 3030
von Darstellungen, 1227, 3774
von Garben, 3112
von Gruppen, 73
von Koabmonoiden, 3032
von Magmas, 72
von Monoiden, 72
von Monoidobjekten, 3047
von Ringalgebren, 610, 4092
von Sequenzen, 498
von Vektorräumen, 151
Homomorphismus von Darstellungen, 1375
Homothetie, 208, 643
homotop, 2048, 2366, 2617, 2783
bei Doppelkomplexen, 3338
frei homotop, 2789
horizontal, 3338
mit festen Endpunkten, 2366
mit festen Randpunkten, 2048, 2604, 2617
Wege, 2048, 2366
Homotopie
bei Raumpaaren, 2803
horizontale, 3338
Liftung von, 2749
relative, 2617
vertikale, 3338
von Abbildungen, 2617
von Wegen, 2048, 2366
Homotopie-Invarianz
der Homologie, 2777
Homotopieäquivalenz

algebraische, 2783
topologische, 2621
homotopiefrei
dg-Ringoidmodul, 3477
dg-Ringoidrechtsmodul, 3477
Homotopiekategorie
algebraische, 2783
einer , 3143
topologische bepunktete, 2623
Homotopieklasse, 2618
Homotopiekolimes, 3365
Homotopiekomplexe
Schmelzkategorie, 3043
Homotopielift, 3143
Hopf-Algebra
kommutative, 1369
Hopf-Faserung, 2531
Hopf-Invariante, 2915
Hopf-Objekt, 3059
Hopfalgebra, 3060
Hopfbiabmonoid, 3060
Hospital, Regeln von, 1716
Hot
Hot^+, 3404
$\mathrm{Hot}^+, \mathrm{Hot}^-, \mathrm{Hot}^{\mathrm{b}}$, 3412
Hot_R, 2783
$\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$, 3143
Homotopiekategorie, 2783
Hot Homotopiekomplexe, 3043
ht Höhe von Primideal, 1081
hTop Homotopiekategorie
hTop^* topologische bepunktete, 2623
topologische, 2618
Hülle
injektive, 1332, 1336
konvexe, 221
lineare, 130
Hurewicz-Isomorphismus, 2785
Hurwitz-Kriterium, 427
Hyperbel, 1734
hyperbolisch
Element von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, 1491
hyperbolische Ebene, 691, 694
Hyperebene
affine, 211, 921, 3972
erweiterte, 694
lineare, 132
projektive, 664, 1119
Hyperebenenpartition, 3981
Hyperfläche, 1008
in affinem Raum, 1895
projektive, 1119
Hyperfunktion, 3347
Hyperkohomologie, 3443, 3529

i Wurzel aus -1 in $\mathbb{C}$, 186
$i\mathcal{A}$ Injektive von $\mathcal{A}$, 3415
$i\mathcal{A}$ Injektive von $\mathcal{A}$, 3142
$\mathscr{C}|\mathscr{U}$ Rückzug von Kategorie, 3262
$\mathcal{I}(X)$ Verschwindungsideal von X, 918
$\mathrm{I} = \mathrm{I}_n$ Einheitsmatrix, 165
id, 45, 1567
Id Identitätsfunktor, 582
Ideal
echtes, 747
erzeugt von, 732
gebrochenes, 1172
maximales, 748
von Algebra, 4109
von Ring, 731
Idempotent
in Magma, 160
Idempotentes
zentrales primitives, 1264
Identifikation, 3264
identische Transformation, 592, 2710
Identität auf X, 574, 2619
Identität, 45, 1567
Identitätsfunktor, 582
Identitätsverschmelzung, 2989

idf Identifikation, 3264
Igel, Satz vom, 2615
Ikosaeder, 519
Ikosaedergruppe, 519
im
    Bild in Kategorie, 3126
    Bild von Abbildung, 46
    Bild von linearer Abbildung, 156
image, 156
Imaginärkoordinate, 2264
Imaginärteil
    bei komplexen Zahlen, 188, 1663
Immersion, 1096
    in algebraischer Geometrie, 1095, 3843
    in der Differentialgeometrie, 3858
implizit
    gewöhnliche Differentialgleichung, 1943
Impulse
    kanonische, 1999
Impulskoordinaten, 3960, 3964
Impulsphasenraum, 3964
in, Morphismus in Koprodukt, 608, 942
in_i
    Injektionen bei Summen, 153
ind Induktion, 971
$\mathrm{ind}(\mathcal{C})$ Ind-Objekte, 3423
Ind-Objekt, 3423
indefinit, 426, 1879
Index
    einer Untergruppe, 470
    Fredholm-Operator, 2578
    von Bilinearform, 426
Indexfunktor, 2988
Indikatorfunktion, 2153
Indkolimes, 3422
Induktion
    algebraischer Darstellungen, 1395
    bei Liealgebrendarstellungen, 4204
    von Darstellungen, 1323
    von Klassenfunktionen, 1327
    von Moduln, 971
Induktion, vollständige, 8, 1546
    Induktionsannahme, 8, 1546
    Induktionsbasis, 8, 1546
    Induktionsschritt, 8, 1546
    Induktionsvoraussetzung, 8, 1546
Induktionsäquivalenz, 3708, 3723
induziert
    Darstellung, 1323
    Klassenfunktion, 1327
    Maßraum, 2131
    Struktur, 588
    Struktur einer Varietät, 1359
induzierte Metrik, 1795
induzierte Orientierung, 2097
induzierte Struktur
    einer affinen Varietät, 987
    eines geringten Raums, 1096, 3843
induzierte Topologie, 920, **1793**, **2482**
inf, Infimum, 1592
Infimum, 1592
infinitesimaler Erzeuger, 2289
$\mathrm{ini}(\mathcal{C})$ initiales Objekt, 580
initial
    Morphismus, 1095, 3843
    Objekt, 579
    stetige Abbildung, 2501
    Struktur, 588
initiale Struktur, 1096, 3843
initiale Struktur
    gesättigte, 1098
Initialtopologie, 2146, 2502
Injektion, 47, 1567
    kanonische, 153
injektiv
    Abbildung, 47, 1567
    abelsche Gruppe, 2929
    Modul, 2929
    Modul, Existenz, 3145

Objekt, 1331, 3142
injektive Auflösung, 3142
Inklusion, 47, 1569
$\mathrm{Inn}_X(M)$ Inneres von M, 2485
$\mathrm{Inn}_X(T)$ Inneres von T, 1933
innere Derivation, 3153
innere Form, 901
innerer Automorphismus
einer Gruppe, 516, 3886
eines Monoids, 1231
innerer Punkt einer Teilmenge
eines metrischen Raums, 2292
eines topologischen Raums, 2486
Inneres, in topologischem Raum, 1933, 2485
inseparabel
rein, Körpererweiterung, 814
insertion homomorphism, 572
int_x Konjugation mit x, 516
Integral
erstes, einer Differentialgleichung, 1947
nichtnegative meßbare Funktion
über Maßraum, 2154
stetige reelle Funktion
über kompakten Quader, 1865
über kompaktes Intervall, 1690
stetige vektorwertige Funktion
über kompaktes Intervall, 1958, 2354
von vektorwertiger Funktion
über Maßraum, 2191
Integralkurve, 1946
Integrallogarithmus, 1723
Integralsatzes von Cauchy
Umlaufzahlversion, 2792
Integration
partielle, 1727, 2174
Integrationskarte, 1933
Integrationsweg, 2046
Funktionentheorie, 2358
integrierbar, 2160
Riemann-integrierbar, 1698
vektorwertige Funktion, 2191
Integrieren
von Liealgebrenhomomorphismen, 3897
Integritätsbereich, 266, 740
Integritätskring, 266
Integritätsring, 266, 740
interior, 2485
interior automorphism, 3886
interior automorphisms, 516
intern
triangulierte Struktur auf Schmelzkategorie, 3393
intertwining operator, 3774
Intervall, 1607
mehrpunktiges, 1608
Intervallschachtelungsprinzip, 1639
Intervallumgebung, 1608
invariant
Bilinearform, 4118
Vektor unter Gruppe, 3812
Vektor unter Liealgebra, 3812, 4099
Invariante
von Gruppenwirkung, 505
Invarianten, 4237
in abelscher Kategorie, 3288
von Gruppe, 1323, 3164
von Liealgebra, 4205
Invariantenring, 763
Invariantentheorie, 1207
Geometrische, 1219
Invarianz von Gebieten, 2841
invers
in Monoid, 66, 1575
Matrix, 173
Morphismus, 580, 2623
Inverse
Matrix, 173
Inversion, 190, 678, 695, 1667, 1863

invertierbar, 67, 1575
in Ring, 266
Matrix, 173
Invertieren
von Faserung oder Kofaserung, 3322
von Schmelzkategorie, 3010
von Trennkategorie, 3010
invertiert
Schmelzkofaserung, 3515
Trennfaserung, 3515
Involution, 476
auf $\mathbb{C}$-Algebra, 2553
involutiv, 3894
inz, 1235
Inzidenzebene
affine konkrete, 635
über Schiefkörper, 635
Inzidenzgeometrie, 622
angeordnete, 623
Inzidenzstruktur, 675, 918
irk Irreduziblenklassen, 754, 1021
$\mathrm{irr}(k, G)$ irreduzible Darstellungen, 1228
$\mathrm{Irr}(\alpha, K)$ Minimalpolynom, 781
irra einfache Darstellungen höchstens abzählbarer Dimension, 1317
irreduzibel
k-irreduzibel, Polynom, 745
Charakter, kompakte Liegruppe, 2591
Darstellung, Gruppe, 1228, 3775
Darstellung, Liealgebra, 3814, 4100
Element eines Krings, 740
Komponente von topologischen Raum, 999
Liealgebra, 4094
Modul, 1240
Polynom, 745
topologischer Raum, 999
Irreduziblenklasse, 754, 1021
$\mathrm{irrf}_k(A)$ einfache endlichdimensionale Moduln, 1258
Iso
in Kategorie, 578, 2620
Isobimodul von dg-Ringen, 3418
isoliert
Nullstelle, 2399
isolierte Singularität, 2408
isolierter Punkt, 1624
isoliertes lokales Maximum, 1712
isoliertes lokales Minimum, 1712
Isometrie, 386
partielle, 407
Isometriesymmetrien, 533
isometrisch, 386
lineare Abbildung, 432
Isomorphismus, 386
isomorph
affine Spiegelungsgruppen, 4021
Darstellungen, 1227, 3774, 4100
Funktoren, 590, 2709
Graphen, 530
Gruppen, 73, 704
in Kategorie, 578, 2621
Moduln, 926
Vektorräume, 151
Isomorphieklasse, 579
Isomorphiesatz, 474
Noether'scher, 474
Isomorphismenkategorie, 579
Isomorphismus, 73
in Kategorie, 578, 2620
isometrischer, 386
von affinen Räumen, 207
von Darstellungen, 1227, 3774
von Funktoren, 590, 2709
von geringten Räumen, 3841
von Graphen, 530
von Kategorien, 584, 2708
von Körpererweiterungen, 799
von Kongruenzebenen, 347

von Moduln, 926
von Schmelzkategorien, 3012
von Sequenzen, 499
von teilgeordneten Mengen, 879
von Vektorräumen, 151
isotop
Verschlingungen, 1894
Isotransformation, 590, 601, 2709
Isotropiegruppe
für Standgruppe, 505
isotypisch
Anteil, 1246
Komponente von Darstellung, 3829
isotypische Komponente, 1247
isotypischer Anteil, 1327
Iwahori-Hecke-Algebra
eines Coxetersystems, 4287
Iwasawa-Zerlegung
für $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$, 394
für $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, 394
für $\mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$, 397

$\mathrm{J}(R)$ Jacobson-Radikal, 1264
$\mathrm{J}(r)$ nilpotenter Jordan-Block, 459
$\mathrm{J}(r;\lambda)$ Jordan-Block, 460
$\mathrm{Jac}(R)$ Jacobson-Radikal, 1264
Jacobi-Identität, 1422, 3790, 4092
Jacobi-Matrix, 1846
Jacobi-Symbol, 860
Jacobson's Dichtesatz, 1256
Jacobson-Morozov, 466, 1353
Jacobson-Radikal, 941, 1264
Jägerzaunformel, 301
Jensen'sche Ungleichung
diskrete, 1590
kontinuierliche, 2166
Join, 3301
Jordan'sche Normalform, 462, 956
Jordan'scher Kurvensatz, 2841
Jordan-Basis, 462, 467
Jordan-Block, 462
nilpotenter, 459
Jordan-Brouwer
Satz von, 2836, 3224
Jordan-Hölder
für endliche Gruppen, 709
für Gruppen, 710
für Moduln, 1039, 1242
Jordan-Zelegung
in algebraischen Gruppen, 1380
Jordan-Zerlegung
additive, 455
in der Lie-Algebra eines affinen algebraischen Monoids, 1434
multiplikative, 458
Jordanzerlegung
in halbeinfachen Liealgebren, 4126
multiplikative, 1379
Jucys-Murphy-Element, 1312
Juxtaposition, 595

$\bar{\kappa}$ Isomorphismus zu Killingform, 4211
$\kappa = \kappa_{\mathfrak{g}}$ Killing-Form, 3891, **4117**
$\mathrm{k}\mathcal{C}$ kartesische Schmelzkategorie zu $\mathcal{C}$, 2996
K^{α} die Rang-Eins-Untergruppe zur Wurzel α, 3934
$\mathcal{K}_q^{<}$ angeordnete q-Simplizes, 2756
$\mathrm{K}(f)$ Abbildungskegel von f, 2842
k-Skelett, 2826
Kähler-Differentiale, 1437
Kammer, 3985
Kan-Erweiterung, 3463, 3464
kanonisch
Abbildung, **591**, **2710**
Injektion, 153
Isomorphismus, **591**, **2710**
Koordinate, 3963
kanonische Basis
der Heckealgebra, 4290
kanonische Einbettung, 2296
kanonische Norm

auf Banachringalgebra, 2298
kanonischer Erzeuger, 4197
der nullten Homologie des Punktraums, 2769
Garbenkohomologie, 3156
Kante
von Coxetergraph, 4008
von Graph, 530
Kantenabbildung, 2765
Kaplansky
Nullteilervermutung, 1236
Kardinalität, 32, 244, 883, 1556
einer endlichen Menge, 882
einer Multimenge, 54
Kardinalzahl, 883
Karoubi-Eigenschaft, 3134
$\mathrm{kart}(\mathcal{C})$ kartesische Schmelzkategorie zu $\mathcal{C}$, 2996
Karte, 1902, 3846
auf dem Rand induzierte, 2095
Kartenwechsel, 1905, 2094, 3853
kartesisch
Diagramm, 2642
Garbenmorphismus, 3292
Morphismus, 3258
Produkt
endlich vieler Mengen, 121
von beliebig vielen Mengen, 603
von zwei Mengen, 37, 1559
Schmelzkategorie, 2996
stark, Morphismus, 3261
Verschmelzung, 3496
kartesischer Schnitt
einer Trennfaserung, 3505
Kategorie, 574, 2618
$\mathfrak{U}$-Kategorie, 585
$\mathfrak{U}_{\subset}$-$\vec{\mathfrak{V}}_{\in}$-Kategorie, 3356
$\vec{\mathfrak{V}}_{\in}$-Kategorie, 2730
$\mathfrak{U}_{\subset}$-$\vec{\mathfrak{V}}_{\in}$-Kategorie, 2730
diskrete, 578
triangulierte, 3384
Kategorie $\mathcal{O}$, 4255
Kategorienfaserung, 3326
Kategorienkofaserung, 3324
kausal, 440
kdim Krulldimension, 1001
$\mathrm{kdim}_x X$ Krulldimension
lokale, 1001
$\mathrm{Keg}(f)$ Abbildungskegel von f, 2914
$\mathrm{Keg}(f)$ Abbildungskegel von f, 2842
Kegel, 232
dualer, 233
im $\mathbb{R}^3$, 1734
spitzer, 232
über projektiver Varietät, 1109
Kegelschnitt, 1734
Keime strukturierender Funktionen, 3857
kEns kartesische Schmelzkategorie der Mengen, 2992
$\ker$
Kern von Ringhomomorphismus, 731
$\ker$
Kern in Kategorie, 3126
Kern von linearer Abbildung, 157
Kern
in Kategorie, 3126
von Gruppenhomomorphismus, 77
von linearer Abbildung, 157
Ket Kettenkomplexe, 2774
$\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$ Kettenkomplexe, 3143
$\mathrm{Ket}^{\mathrm{dg}}_{\mathcal{P}}$ dg-Kategorie der Komplexe, 3476
Kette
in teilgeordneter Menge, 144
Simplizialkette, 2756
simplizialsinguläre, 2823
ordnungsverträgliche, 2825
singuläre, 2765
Kettenabbildung, 2774
kettenhomotop, 2783
Kettenkomplex, 2774
Kettenlängenring, 1078

Kettenlinie, 1732
Kettenregel
bei Mannigfaltigkeiten
eingebetteten, 3796
höhere, 1757
in einer Veränderlichen
reell, 1702
in mehreren Veränderlichen, 1854
kgV kleinstes gemeinsames Vielfaches, 257
Killing-Klassifikation, 4095
Killingform, 3891, 4117
kinetische Energie, 1984
kkRing, 3499
Klasse
charakteristische, 3299
Klassenfunktion, 1282, 2590
Klassengleichung, 711
Klassifikation, 420
abelsche Gruppen, 483
der endlichen Gruppen, 704
Moduln über Hauptidealringen, 953
Klassifikationsprobleme, 579
klassisch, 4095
Klein'sche Flasche, 2599
Klein'sche Vierergruppe, 74, 704
Klein'sches Modell, 694
kleines o von x^n, 1757
Kleinfamilie, 2986
kleinstes
Element, 128, 1590
kleinstes gemeinsames Vielfaches, 257
Kletteroperatoren, 3818
Klimyk, Formel von, 4218
Klumpentopologie, 1799, 2482
Knoten, 1894
von Coxetergraph, 4008
Ko-Eins, 1369
Ko-Yoneda-Einbettung, 615
Koabmonoid, 3048
Koaugmentation, 3151
koaugmentiert
Rechtsderivierter, 3151
Kobild
in abelscher Kategorie, 3126
kodarstellbarer Funktor, 615
Kodimension
bei affinen Räumen, 213
einer Facette, 3985
einer Untermannigfaltigkeit, 1895, 2743
eines Untervektorraums, 496
Köcher, 598, 1346, 3355
$\mathfrak{U}_{\subset}$-$\vec{\mathfrak{V}}_{\in}$-Köcher, 3356
Darstellung von, 1346
mit Verknüpfung, 599
Koeffizient, 108
von Polynom, 271
Koeffizientenmatrix, 110
erweiterte, 110
Koeinheit, 3049
Koeins
von Komonoid, 3032
koendliche Topologie, 2484
Körper, 79, 106, 1579
vollkommener, 809
körperendlich, 779
Körpererweiterung, 778
abelsche, 862
algebraische, 802
echte, 778
einfache, 782
endliche, 783
im verallgemeinerten Sinne, 799
normale, 802
primitive, 782
quadratische, 784
separable, 808
zyklische, 862
Körperhomomorphismus, 83
Körperisomorphismus, 83
Kof, 3325

Kofaserfunktor, 3260
Kofaserung, 3260
kofiltrierend
  Kategorie, 2940
  Limes, 2940
kofinal
  Objekt, 579
kofinal
  in filtrierender Kategorie, 2942
Kogarbe
  abelsche, 3220
Kogrenzkomplex, 3232
kohomolog, 3095, 3172
  Čech-1-Kozykel, 3109
Kohomologie
  äquivariante, 3297
  einer Gruppe, 3165
  eines Komplexes, 3139
  eines Punktes, 2907
  kompakte, 2949, 3204
  lokale, 3188
  mit Koeffizienten, 2907
  mit kompaktem Träger, 3204
  relative, 2917
  simpliziale, 2918
  singuläre, 3081
    mit kompaktem Träger, 2949
Kohomologiegarbe
  lokale, 3275
Kohomologiegruppen, 2907
Kohomologiering, 2912, 3082
  garbentheoretischer, 3406
Koinduktion
  bei Liealgebrendarstellungen, 4204
  von Darstellungen, 1323
  von Moduln, 972
koinduziert
  G-Menge, 2737
  Struktur, 589
Koinvarianten
  von Gruppe, 1323, 3164
  von Liealgebra, 4205
kokartesisch
  Diagramm, 2645
  Morphismus, 3260
  Verschmelzung, 3496
Kokern
  bei abelschen Gruppen, 498, 2928
  in Kategorie, 3126
  stabiler, 3543
Kokette vom Grad q, 2908
Koketten
  relative, 2917
  singuläre kompakte, 2950
Kolimes, 2937
  filtrierender, 2940
kollinear, 209, 622
Kollineation, 636
Kolmogoroff, Existenzsatz von, 2548
kombinatorische Fläche, 2666
kombinatorische Fläche ohne Rand, 2666
kommutativ
  Diagramm, 501
  Rechteck, 201
  Ring, 260
  Verknüpfung, 61, 1573
  Verknüpfung auf Objekt, 1366
Kommutator, 4093
  als Lieklammer, 1422
  einer Teilmenge, 1256
  in Gruppe, 713, 2632
  von Vektorfeldern
    auf affinen Räumen, 3877
    auf Mannigfaltigkeiten, 3878
kommutieren, 272
  Elemente, 61
Komodul, 3050
  banaler, 3050
Komonoidkomodul, 3050
Komonoidmodul, 3033
Komorphismus, 977

von abelschen Gruppen, 3169
von Prägarben, 3180
kompakt
erzeugt, 2520
Intervall in $\bar{\mathbb{R}}$, 1608
Kohomologie, 3204
konvergent, 2395
Lie-Algebra, 3892
Liealgebra, 4166
metrischer Raum, 1808
Operator, 2573, 2577
relativ, 2497
Schnitt von abelscher Garbe, 3204
Teilmenge von $\bar{\mathbb{R}}^n$, 1685
topologischer Raum, 1820, 1913, 2497
kompakt getragen
Maß, 2251
projektorwertiges Maß, 2314
kompakt-offene Topologie, 2277, 2516
kompaktrelativ homologisch q-endlich, 2961
Kompaktum, 1685, 1808
kompaktweich, 3206
f-kompaktweich, 3581
faserweise, 3581
schwach, 3606
Komplement, 37, 1245, 1559
orthogonales, 353
komplementär, 1245
Untermoduln, 943
Untervektorräume, 158
Komplementmenge, 37, 1559
Komplettierung
von glatter Kurve, 1193
komplex
Maß, 2233
Spiegelung, 4021
Spiegelungsgruppe, 4021
Komplex, 2774
komplex differenzierbar, 2343
komplex konjugiert
Vektorraum, 409
komplexe Exponentialfunktion, 1670
komplexe Konjugation, 84, 1584
komplexe Zahlen, 84, 186, 1584
vergeßliche, 187
komplexer Anteil
von Quaternion, 3804
komplexer Typ, 1314
Komplexifizierung, 551, 3814
Komponente
eines Tupels, 121
irreduzible von topologischen Raum, 999
isotypische von Darstellung, 3829
Wegzusammenhangskomponente, 2045, 2492
Komponentengruppe, 2528
komponentenweise Verknüpfung, 60
Kompositionsalgebra, 828
Kompositionsfaktor
von Gruppe, 709
von Modul, 1039, 1242
Kompositionslänge, 1039, 1241
Kompositionsreihe
einer Gruppe, 709
eines Moduls, 1039, 1241
Kompositum, 865
Komultiplikation, 3049
in Hopf-Algebra, 1369
Konfigurationsraum, 1991, 2007
konfinal
in filtrierender Kategorie, 2942
konfluent, 622
konform
Abbildung, 1863
kongruent
angeordnete Dreiecke, 381
Dreiecke, 339
kongruent modulo, 263
Kongruenz, 338, 623

Kongruenzebene, 338
Kongruenzgruppe
  affine, 338
Konjugation, 516
Konjugation mit x, 3886
Konjugationsklasse, 516
Konjugationsklassen
  von Untergruppen, 2689
konjugiert
  Darstellung
    komplexe, 1316
  Exponenten, 2198
  Untergruppen, 714
  Vektorraum, komplexer, 409, 1315
konjugierte Exponenten, 2199
konjugierte komplexe Zahl, 188, 1666
konkave Funktion, 1713
konservativ
  Funktor, 586
konstant
  Abbildung, 46
  abelsche Garbe, 3122
  Garbe, 3121
  Objekt, 3505
  Polynom, 271
  Weg, 2603
konstante Abbildung, 1567
konstruierbare Zahlen, 787
  aus Teilmenge, 793
Konstruierbarkeit, 787, 792
Konstruierbarkeit regelmäßiger n-Ecke, 850
konstruktibel
  Teilmenge, 1062
Kontinuumshypothese, 1604
kontragredient
  Darstellung von Gruppe, 1231, 3777
kontragrediente Darstellung, 1377
kontrahierend
  Abbildung metrischer Räume, 1883
  algebraische Operation von $k^\times$, 1204
kontravariant, 2009
  Funktor, 583
konv konvexe Hülle, 236
$\mathrm{konv}(T)$ konvexe Hülle von T, 221
konvergent
  reelle Reihe, 1642
Konvergenz
  gleichmäßige
    reeller Funktionen, 1744
    von Abbildungen in metrischen Raum, 1801
  normale, 2395
  punktweise
    reeller Funktionen, 1744
    von Abbildungen in metrischen Raum, 1801
  Spektralsequenz
    graduierte, 3337
    ungraduierte, 3333, 3334
  von Filtern, 2543
  von Folge in metrischem Raum, 1801
  von Folgen
    in $\bar{\mathbb{R}}^d$, 1629
  von reellen Reihen, 1642
Konvergenzdatum
  für Spektralsequenz
    graduierte, 3337
    ungraduierte, 3332, 3334
Konvergenzradius
  im Komplexen, 2394
  im Reellen, 1743
konvex
  Funktion, 1590, 1615, 1713
  in $\mathbb{R}^n$, 1766
  in affinem Raum, 221
  in Inzidenzgeometrie, 626
konvexe Hülle, 221
Konvexkegel, 232

erzeugt von, 233
polyedrischer, 233
Konvolution, 2579
Multiplikation eines Monoidrings, 1232
von Maßen, 2252
Kooperation, 3050
Koordinaten, 195, 1890
affine, 210
lokale, 1904
Koordinatenfunktionen, 195
Koordinatenring
homogener, 1117
Koordinatenschiefkörper, 647
Koordinatensystem
lokales
angepaßt an Mannigfaltigkeit, 1891
affines, 210
lokales, 1889
Koprodukt, 605, 2641
von affinen Varietäten, 993
Korand, 2907
Korandoperator, 2908
Korrespondenz, 126, 1586
Kostant'sche Charakterformel, 4214
Koszul-Komplex, 3150
kovariant, 2011
Kovektor, 193, 1438
Kovektorfeld, 1440, 2009, 3949
algebraisches, 1440
kanonisches, 3960
Liouville'sches, 3960
relatives, **2009**
vektorwertige, 2383
vektorwertiges, 2040
Koverknüpfung
von Komonoid, 3032
Kowinkel, 2646
Kowinkeldiagramm, 2646
Kowurzel, 1515, 1524, 3924, 4029
einfache, 4040
in Wurzelsystem, 4135
Kozykel, 2907
nichtkommutativer erster
Čech, 3109
Gruppenkohomologie, 3171
Kraftfeld, 1980
Kralg
Kategorie der Ringalgebren, 576
Kringalgebrenhomomorphismen, **610**
Kranzprodukt, 710
Kreis
echter, 678
verallgemeinerter, 192, 678
Kreisgruppe, 190, 1667, 2214
Kreiskette, 685
Kreisraum, 2706
Kreisspiegelung, 678
Kreisteilungskörper, 847
Kreisteilungspolynom, 761
Kreuzhaube, 668, 2508, 2678
Kreuzprodukt, 383
der Garbenkohomologie, 3556
der Homologie, 2896
der Kohomologie, 2910
der relativen Homologie, 2900
geometrisches, 562
Kring
k-Kring, **933**
angeordneter, 1587
kommutativer Ring, 260, 917
K-Kring, **798**
Kring Kategorie der Kringe, 576
Kring^A, 933
Kring^K, 798
Kringalgebra, 610, 4092
über Kring, 934
Kringanordnung, 1587
Kringerweiterung, 932
Kringo opponierte Kringe, 3504

Kristall
im Raum, 519
Kristallklasse, 520
kristallographisch, 1231
Wurzelsystem, 4027
Kristallsystem, 520
kritische Stelle, 1877
Kronecker-Konstruktion, 794
Kronecker-Paarung, 2908, 3082
Kronecker-Produkt, 546
Kronecker-Weber, Satz von, 861
Kroneckerdelta, 166
Kroneckerpaarungen
relative, 2919
Krull, Durchschnittssatz, 1036
Krull-Schmidt, 1340
Krull-Topologie, 895
Krulldimension, 1001, 1007
lokale, 1001
Krullkodimension, 1001
Kubik
affine, 921
projektive, 1119
kubisch
Polynom, 273
kubische Gleichung, 870
Künneth-Formel, 2899
mit Körperkoeffizienten, 2898
Künnethformel
der kompakten Kohomologie, 3637
kürzbar, 61, 266
Kürzen, 3367
Kürzen in Ringen, 266
Kugel, 1795
Kugelflächenfunktionen, 3834
Kugelfunktionen, 3834, 3837
Kugelkoordinaten, 1890
Kugelschale, 2598
Kugelvolumen, 1942
Kummer-Erweiterung
durch n-te Wurzeln, 901
Kummergruppe, 902
Kummerpaarung, 902
Kurve
affine, 1003
algebraische, 1102
algebraische Varietät, 1187
ebene projektive, 1109
in reellem Raum, 1894
projektive, 1109, 1187
Kurvenintegral, 1773
kurze exakte Sequenz, 498

λ, λ^n Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$, 2128
λ_p Vorderseite eines Simplex, 2905
$\mathrm{l}(M)$ Länge von M, 1038, 1240
$l(\sigma)$ Länge von Permutation, 296
$l^2(I)$, 2203
A_{L} Kommutator-Liealgebra, 4093
$\mathcal{L}$, Laurentpolynome, 4289
$\mathcal{L}^1(X;\mu)$, 2191
$\mathcal{L}^1_V(X;\mu)$, 2191
$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X;\mu)$, 2160
$\mathbb{L}$ Längengerade, 1978
$\mathrm{L}^2(I)$ quadratintegrierbare Funktionen, 2203
$\mathrm{L}(\gamma)$ Länge eines Weges, 1763
$\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ Leerverschmelzungsfunktor, 3015
$\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathcal{T}}$ Leertrennungsfunktor, 3015
$\mathrm{L}F$ voller Linksfaktorierter, 3433
$\mathrm{L}F = {}_{\mathrm{u}}\mathrm{L}F$ universeller Linksderivierter, 3464
L-Reihe, 2462
Längeneinheit
relativistische, 442
Laplace-Transformierte, 2456
$\mathrm{Länge}(M)$ Länge von M, 1039, 1240
Länge, 364, 442, 1763
eines Moduls, 1038, 1240
eines Weges, 1763
in Spiegelungsgruppe, 3998

von Permutation, 296
längenendlich
abelsche Kategorie, 1335
Längengerade, 364, 442
von euklidischem Raum, 364
Lagrange
Satz von, 470
Lagrange'sche Multiplikatoren, 1908
Lagrangefunktion, 1997
Lalg Kategorie der Liealgebren, 4151
Lalg Liealgebrenhomomorphismen, 4092
lange exakte Sequenz
der Garbenkohomologie, 3159
der Homologie, abstrakte, 2804
der Homologie, kategorielle, 3139
der Kohomologie, 2917
derivierter Funktoren, 3158
Laplace-Transformierte, 2231
Laplaceoperator
im $\mathbb{R}^n$, 2114, 2430
Laspp, 579
Laufindex, 11, 1548
Laurententwicklung
algebraische, 288
Laurentpolynom, 1021
Laurentreihe
formale, 280
lb, 1660
Lebesgue-Mengen, 2144
Lebesgue-meßbar, 2150
Lebesgue-meßbaren, 2144
leer
Familie, 133, 1627
Menge, 31, 1555
leerlinear, 2986
Leertrennungsfunktor, 3015
Leerverschmelzung, 2987
Leerverschmelzungsfunktor, 3015
additiv angereicherter, 3038
angereicherter, 3041
Legendre
Verdopplungsformel, 2448
Legendre-Polynome, 3836
Legendre-Symbol, 855
Leibniz'sches Konvergenzkriterium, 1648
Leibniz-Formel, 301
Leibniz-Regel
bei Definition einer Derivation, 1422
bei Definition einer Derivation, 4097
für Differentialformen, 2089, 3951
für reelle Funktionen, 1702
Leiteroperatoren, 3818
Leitkoeffizient, 273
Lemma, 63
Lemma von Nakayama, 1033
Lemma von Nakayama, Variante, 1034
Leray-Hirsch, 3559
Variante, 3559
les lokal eigentlich separiert, 3574
les-Abbildung, 3574
lesb, 3607
Abbildung, 3607
Morphismus gekringter Räume, 3743
Raum, 3609
lesb-Abbildung, 3610
lesb-Morphismus, 3610
lexikographische Ordnung, 764
lExt
in abelscher Kategorie
mit genug Projektiven, 3148
$\mathrm{lg} = \log_{10}$, 1658
$\mathrm{Li}_n(z)$ n-Logarithmus, 2402
lichtartig, 440
kausal, 440
lichtartige Vektoren, 422
Lichtkegel, 422
$\mathrm{Lie}\, G$ Lie-Algebra der linksinvarianten Vektorfelder, 1424
Lie, Satz von, 4113
Lie-Algebra, 1422, 3790, **4092**
einer Liegruppe, 3884

einer Matrixliegruppe, 3789
Lie-artiges Polynom, 4154
Lie-Klammer
abstrakt, 1422, 4092
bei Matrixliegruppe, 3789
von Vektorfeldern
auf affinen Räumen, 3877
Lie-Polynom, 4154
Liealgebra
derivierte, 4110
durch Erzeuger und Relationen, 4158
eines affinen algebraischen Monoids, 1425
orthogonale, 4094
restringierte, 1468
spezielle lineare, 4094
symplektische, 4094
Liealgebrenzentralisator, 1462
Liegruppe, 1367, **3852**
Matrixliegruppe, 3778
Lieklammer
von Vektorfeldern
auf Mannigfaltigkeiten, 3878
Lift, 2610, 2692, 3143
Liftbarkeitskriterium, 2725
Liften
von Homotopien, 2749
$\lim_{g(x)\to z}$, 2230
$\lim_{n\to\infty}$ Grenzwert von Folge
in $\bar{\mathbb{R}}^d$, 1629
in metrischem Raum, 1801
$\lim_{x\nearrow p}$ linksseitiger Grenzwert, 1634
$\lim_{x\searrow p}$ rechtsseitiger Grenzwert, 1634
$\lim_{x\to p}$ Grenzwert von Abbildung, 2488
von Teilmengen von $\bar{\mathbb{R}}^n$, 1626
$\check{\lim}$ Limes in Funktorkategorie, 3422
$\hat{\lim}$ Kolimes in Funktorkategorie, 3422
$\overrightarrow{\lim}\sup$ limes superior
einer Mengenfolge, 2131
"$\overrightarrow{\lim}$", 3422
"$\overleftarrow{\lim}$", 3422
Limes, 2937
direkter, 2939
in Kategorie, 2937
induktiver, 2939
inverser, 2939
kofiltrierender, 2940
projektiver, 2939
von Folge, 1629
von Funktion, 1626, 2488
limes superior
einer Mengenfolge, 2131
Limeszahl, 881
$\check{\lim}$f kofiltrierender Limes in Funktorkategorie, 3422
limf kofiltrierender Limes, 2940
lin Spann, 130
linear
Abbildung, 151
algebraische Gruppe, 1372
Funktion, 153
Gruppe, 1371
Polynom, 273
linear abhängig
Familie, 133
Teilmenge, 132
linear unabhängig, 943
Familie, 133
Teilmenge, 132, 136
lineare Abbildung
schulische Konvention, 207
lineare algebraische Gruppe, 1357
lineare Anteil, 207, 1812, 1844
lineare Fortsetzung, 2755
lineare Gruppe
allgemeine, 151
spezielle, 358
lineare Hülle, 130
Linearfaktor, 274
Linearfaktoren
Zerlegung in, 275

Linearform, 193
Linearisierung
von affinem Raum, 669
Linearkombination, 130
Links-Ore-System, 3367
linksadjungierter Funktor, 2734
Linksanpassung, 3531
Linksapproximation, 3464
finale, 3464
linksartinsch
Ring, 1043, 1253
Linksauflösung, 3147
Linksderivierten, 3147
Linksderivierter
augmentierter, 3150
universeller, 3464
Linkseinsetzung
einer Bilinearform, 2028
linksentfaltet
$\mathcal{N}$-linksentfaltet, 3402
für Funktor, 3361
für Morphismenmenge, 3362
Linksentfaltung
für Funktor, 3362
linksexakt, 928, 3129
Linksfaktorierter
voller, 3433
zahmer, 3433
Linksideal, 927
linksinvariant
Vektorfeld, 3870
Linksinverses, 203
in Kategorie, 580
linkskürzbar, 61, 266
Linksmodul
in Schmelzkategorie, 3049
Linksnebenklasse, 263, 468
linksnoethersch, 929
Linksoresystem
faserweises, 3518
linksseitig stetig, 2134
linksspaltend
Gruppenhomomorphismus, 475
Morphismus, 580
Linksteiler, 61, 265
Liouville
Kovektorfeld, 3960
Satz von, 2389
Lipschitz-Konstante, 1883
Lipschitz-stetig, 1883
lipschitzstetig
lokal, 1961
partiell, 1963
$\ln$ *logarithmus naturalis*, 1658
Lösungsmenge, 108
Lösungsraum
einer linearen Diferentialgleichung, 1782
einer linearen Differentialgleichung allgemeiner Fall, 1968
einer Schwingungsgleichung, 1778, 1779
lineare Differentialgleichung konstante Koeffizienten, 1777
$\log$ Logarithmus, 1656
logarithme népérien, 1656
logarithmische Ableitung, 2353, 2415
formale, 812
Logarithmus
n-Logarithmus, 2402
binärer, 1660
diskreter, 268
Hauptzweig des komplexen, 1738
komplexer, 2352
natürlicher, 1656
lokal
frei vom Rang Eins
abelsche Garbe, 3495
Homologie, 2813
Modul, 1010
Prägarbe, 3690
Ring, **1035**, **1338**

Ring bei Punkt, 1102
Ringhomomorphismus, 1179
lokal (E), bei topologischem Raum, 2516
lokal abgeschlossen
Teilmenge, 1101
lokal eigentlich, 3573
lokal endlich, 453, 1379
Darstellung, 4115
Mengensystem, 2509
Mengensystem in topologischem Raum, 3241
Simplizialkomplex, 2668, 2952
lokal endliche Homologie
simpliziale , 2955
lokal frei
Modul, 1018
lokal integrierbar, 2244
lokal kompakt, 2516
topologischer Raum, 2188
lokal konstant
Garbe, 3293
lokal nilpotent, 450, 1379, 4141
lokal unipotent, 458, 1379
lokale Beschränktheit, Prinzip der, 2292
lokalendlich
singuläre Kette, 2953
lokalendliche Homologie
singuläre, 2953
lokales Koordinatensystem
von Mannigfaltigkeit, 1903
Lokalgarbe, 3671, 3683, 3761
Lokalgarbenpaarung, 3671
Lokalisierung
einer Kategorie, 3356
Lokalisierungsfunktor, 3357
Lokalisierungssequenz, 3209
Lorentzmetrik, 422
Lot, 629
LR-Zerlegung, 537
LU-Zerlegung, 537
Lusternik-Schnirelmann, 2638
Lyndon-Wort, 4153

m Meter, 1978
${}_{\mu}\{\ \}$ Multimenge, 54
$\mathcal{M}(X)$ rationale Funktionen auf X
affiner Fall, 1025
$\mathcal{M}^{\mathrm{an}}$ meromorphe Funktionen, 2410
$\mathcal{M}(G)$ Schwartzmaße, 2266
$\mathcal{M}(X)$ rationale Funktionen auf X, 1105
$\mathrm{M}(X)$ komplexe Maße auf X, 2233
$\mathrm{M}(X;[0,\infty))$ endliche Maße, 2233
$\mathrm{M}(X;[0,\infty])$ Maße, 2233
$\mathrm{M}(X;\mathbb{R})$ reelle Maße, 2233
$\mathrm{M}^{\mathrm{bor}}$ Borelmaße, 2559
$\mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X)$ Radonmaße auf X, 2583
$\mathrm{M}(f)$ Matrix von f, 165
$\mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X;[0,\infty))$ nichtnegative Radonmaße, 2559
$\mathrm{M}^{\mathrm{rad}}_{!}$ Radonmaße mit kompaktem Träger, 2584
Mackey
Lemma von, 429
Mackey-Formel, 1325
Mächtigkeit, 32, 1556
$\mathrm{Mag}(X,Y)$ Homomorphismen von Magmas, 72
Magma, 72, 1572
in Kategorie, 1366
in Schmelzkategorie, 3047
Magmahommorphismus, 1577
Magmaobjekt
in Schmelzkategorie, 3047
Magmaoid, 599
Majorante, 1646
Majorantenkriterium, 1646
majorisierte Konvergenz, 2163
mannigfaltig
stetige Abbildung, 3655
Mannigfaltigkeit

G-Mannigfaltigkeit, 1367
abstrakte, 3845
berandete Untermannigfaltigkeit von affinem Raum, 2093
eingebettete, 1891
glatte, 3846
topologische, 2496, 2853
Untermannigfaltigkeit von affinem Raum, 1893
Mantelfläche, 1942, 2186
Markov-Kette, 1910
Markov-Ungleichung, 2166
Markovkette, 1910
Maschke, Satz von, 1276
$\mathrm{Maß}_{\mathbb{R}}$ reele Maßräume, 3513
Maß, 2125
äußeres, 2135
endliches, 2233
komplexes, 2233
nichtnegatives, 2125
projektorwertiges, 2313
reelles, 2233
teilraumwertiges, 2313
topologisches, 2127
Masse, 1978, 1981
schwere, 1980
träge, 1980
Maßraum, 2126
Mat Matrixkategorie, 577, 2708
Mat Matrixmultikategorie, 3013
$\mathrm{Mat}(n \times m; Z)$ Matrizenmenge, 112
Matrix, 112
quadratische, 112
Matrixkategorie, 577, 2708
Matrixkoeffizient, 1294, 2571
Matrixkoeffizientenabbildung, 1294
Matrixliegruppe, 3778
partielle, 3790
Matrixliegruppenkeim, 3790
Matrixmultiplikation, 166
$\bigwedge^{\max}$ maximale äußere Potenz, 567
$\max$, 126, 1587
Max Maximalspektrum, 989
$\mathrm{Max}\, A$ Menge der maximalen Ideale von A, 937
maximal
echtes Ideal, 747
Element, 128, 1590
Flußweg, 1945, 3871
Ideal, 748, 937
Torus, 3913
maximaler Torus, 1482
Maximalspektrum, 989
Maximum, 1712
isoliertes lokales, 1877
lokales, 1877
Maximumsnorm, 1813
Maximumsprinzip, 2400
schwache Form, 2392
Mayer-Vietoris-Sequenz
der Garbenkohomologie, 3176
der Homologie, 2819
der Kohomologie, 2918
der kompakten Kohomologie, 2950
für $\mathrm{H}^*_!$, 2950
relative, 2821
relative, der Kohomologie, 2918
mechanisches System, 1991
mehrfache Nullstelle, 805
mehrpunktiges Intervall, 1608
Mellin-Transformation, 2232
Menge, 31, 1554
M-Menge, 504
im Sinne der Logik, 617
leere Menge, 31, 1555
Potenzmenge, 34, 1557
Teilmenge, 33, 1556
Mengel, 617
Mengenabbildung, 54
Mengenalgebra, 2123
erzeugt von Mengensystem, 2141
Mengenanzeiger, 786

Mengenfunktor, 613, 2730
Mengengarbe, 3112
Mengengarbenoptrennfaserung, 3497
Mengengarbentrennfaserung, 3497
Mengenklammern, 31, 1555
Mengenmodul, 923, 1238
Mengenoperade, 2991
Mengenring, 2131
    erzeugt von Mengensystem, 2141
Mengensystem, 2123
meromorph
    Funktion, 2409
$\mathrm{Meß}$ Kategorie der Meßräume, 3020
meßbar
    α-meßbar, Menge, 2137
    μ-meßbar, Funktion, 2150
    Abbildung, 2145
    fast überall definierte Funktion, 2194
    Menge, 2124
Meßmonoid, 2252
Meßraum, 2124
    Borel'scher, 2547
    diskreter, 2547
Meter, 1978
Metrik, 1794
    der gleichmäßigen Konvergenz, 1801
    zu Norm, 1813
metrische Topologie, 1799, 2481
metrischer Raum, 1794
Milnor-Konstruktion, 3301
Milnor-Topologie, 3302
min, 60, 1572
$\min$, 126, 1587
minimal
    Primideal, 1028
minimaler Zerfällungskörper, 797
minimales
    Element, 128, 1590
Minimalpolynom, 747, 781
Minimum, 1712
    isoliertes lokales, 1877
    lokales, 1877
Minkowski
    Gitterpunktsatz, 2182
Minor einer Matrix, 314, 485
minuscul
    Gewicht, 4061
Mittag-Leffler
    Bedingung von, 2946
Mittelwertsatz, 1710
    der Integralrechnung, 1698
    in mehreren Veränderlichen, 1768
    verallgemeinerter, 1718
$\mathrm{MMod}_\Omega = \Omega\text{-}\mathrm{MMod}$ Kategorie der Ω-Mengenmoduln, 925
Mod Schmelzkategorie der Moduln, 3005
Mod_K Vektorräume über K, 576
$\mathrm{Mod}_K(U \curlyvee V, W)$ bilineare Abbildungen, 163
$\mathrm{Mod}_R = R\text{-}\mathrm{Mod}$ Kategorie der R-Moduln, 926
$\mathrm{Mod}_k^{\mathfrak{g}}$ Schmelzkategorie der Darstellungen, 4106
$\mathrm{Mod}_{-R} = \mathrm{Mod}\text{-}R$ Rechtsmoduln, 949
$\mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}\text{-}\mathrm{Mod}$ Darstellungskategorie von Liealgebra, 4100
$\mathrm{Mod}_{k,G}$ Verflechtungsoperatoren, 3811
$\mathrm{Mod}_{k,\mathfrak{g}}$ Verflechtungsoperatoren, 3811
Mod_k^Γ Schmelzkategorie der graduierten Moduln, 3004
$\mathrm{Mod}_{\mathrm{Ring}}$ Kategorie, 3261
Modf_K Vektorräume, endlich erzeugte, 584
Modf_k Vektorräume, endlich erzeugte, 2708
Modul
    Ω-Modul, 3051
    äquivarianter
        für Monoidoperation, 1273

einer Gruppe, 3164
einfacher, 1037, 1240
filtrierter, 1138
frei zyklischer, 943
freier, 943
graduierter, 1112
halbeinfacher, 1245
in Schmelzkategorie, 3049
in Schmelzktegorie, 3031
irreduzibler, 1240
über einem Ring, 923
über Körper, 577
modular
Verband, 159
modulare Funktion, 2569
modulendlich, 783
Kringerweiterung, 933
Morphismus von Varietäten, 1195
modulfrei
Kringerweiterung, 1064
Modulgarbe, 3501
Modulhomomorphismus, 925, 1238
Modulradikal, 940, 4200
Modulraum
grober, 2734
modulspaltend
Kringerweiterung, 1064
Möbiusband, 2507
Möbiusfunktion
allgemeine, 192
der Zahlentheorie, 193
Möbiusgeometrie, 678, 694
Möbiusgruppe, 695
Möbiustranformation
orientierungserhaltende, 689
orientierungsumkehrende, 689
Möbiustransformation, 683, 695
mol, 267
$\mathcal{M}^{\mathrm{mon}}$ Monotonisierung, 2991
p^{mon} Monotonisierung von p, 3014
Mon
Monoidhomomorphismen, 72
Mon Kategorie der Monoide, 576
$\mathrm{Mon}\,\mathcal{C}$ Monoidobjekte von $\mathcal{C}$, 1367
$\mathrm{Mon}^{\setminus}X$ freies Monoid über X, 2653
Monade, 3048
monic polynomial, 273
Mono, 3127
monodrom
Garbe, 3706
Monoid, 64, 1574
additiv notiertes, 64, 1574
freies, 2653
in Schmelzkategorie, 3047
multiplikativ notiertes, 64, 1574
topologische, 2213
Monoidhommorphismus, 1577
Monoidhomomorphismus, 72
in Schmelzkategorie, 3047
Monoidideal, 932
Monoidmodul, 1238, 3031, 3050
in Schmelzkategorie, 3049
Monoidobjekt, 1367
in Schmelzkategorie, 3047
Monoidring, 1232
vertwistet, 1274
Monom, 1613
Monomorphismus, 3127
monoton, 1615, 4191
Schmelzkategorie, 2991
monotone Konvergenz, 2155
Monotonisierung, 2991
von Schmelzfunktor, 3014
$\mathrm{Mon}\setminus\mathrm{Top}$ topologische Räume mit Operation, 3291
MonVar Homomorphismen von affinen algebraischen Monoiden, 1363
$\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ Menge der Morphismen von $\mathcal{C}$, 575
Morita-Äquivalenz
abstrakte, 1344

Erste Beispiele, 951
Spezialfall, 971
verallgemeinerte, 3380
Morphismen über f, 3258
Morphismen über X, 2642
Morphismen unter X, 2643
Morphismenbimodul, 3418
Morphismenfunktor, 3466
Morphismus, 3099, 3862
G-Morphismus, 2688
†-Morphismus, 3589
e-Morphismus, 3589
¡-Morphismus, 3589
dominanter, 1158
in Kategorie, 574, 2619
rationaler, 1133
von affinen Varietäten, 982, 1358
von euklidischen Räumen, 363
von geringten Räumen, 1094, 3500, 3841
von Mannigfaltigkeiten, 3845
von Monoiden, 72
von Raumpaaren, 2801
von Schmelzkategorie, 2989
von teilgeordneten Mengen, 879
Morphismus von Dreiecken, 3384
Morphismus von Prägarben, 3101
mou, 3244
MProj Varietät zu graduiertem k-Kring, 1204
mscat finale monotone Schmelzkategorie, 3051
MSCat Gesamtheit aller monotonen Schmelzkategorien, 3051
$\mathrm{mult}_x(X)$ lokale Multiplizität, 1142
mult Multiplizität, 1123, 1142
mult Vielfachheit einer Nullstelle, 1155
mult^d Multiplizität, 1123
$\mathrm{mult}^d_{\mathfrak{q}}$ Multiplizität, 1142
Mult^k multilineare Abbildungen, 2088
Multi-Hom-Objekt, 3004
Multiabbildung, 122, **2992**
2-Multiabbildung, 53
äquivariante, 3034
multiadditiv
Abbildung, 2878
multiäquivariant, 2997
Schmelzkategorie, 2997
Trennkategorie, 2998
Multihom
angereichertes, 3045
Multiindex, 1872
Multikategorie, 2991
multilinear, 307
Multilinearform, 308
Multimatrix, 417, 3013
Multimenge, 54
Multimodul, 3049
Multimorphismus, 2992
Multinomialkoeffizient, 51, 1571
Multiplikation
in Ring, 260
Multiplikationssatz
der Mengenlehre, 886
multiplikativ
in Kategorie, 3366
multiplikativ abgeschlossen, 1011
multiplikatives System
in Kategorie, 3366
Multiplikativität
des Grades, 785
Multiplizität, 1123
von lokalem Kring, 1142
von Modul, 1142
von Varietät an Punkt, 1142
multiunitärassoziativ, 2987
Multiverknüpfung
im angereicherten Fall, 3039
von multiadditiven Abbildungen, 2881

von multilinearen Abbildungen, 553
von Verschmelzungen, 2986

$\mathbb{N}$ natürliche Zahlen, 31, 1555
$\mathbb{N}_0$, 32, 1555
$\mathrm{N}_G(H)$ Normalisator, 846
népérien, logarithme, 1656
Nabla-Operator, 2108
Nachfolger, 240, 879
Nachschalten von Abbildung, 47, 1569
Nakayama, 1033, 1034
Nakayama, Lemma von
kommutatives, 1033
nichtkommutatives, 1265
natürlich
Topologie, 2481
natürliche Topologie
auf endlichdimensionalem reellen Raum, 1843
auf reellen Raum, 1816
natürliche Zahlen, 31, 239, 240, 1555
Nebenklasse, 468
Nebenklassengruppe, 474
negaiv semidefinit, 1879
negativ, 1587
Vektor, 317
negativ definit, 426, 1879
negativ semidefinit, 426
Negatives, 69, 1576
Neil'sche Parabel, **978**
Nennerformel, Weyl'sche, 4217
Neugrad, 377
Neumann
Lemma, 819
Neun als natürliche Zahl, 246
Neunerlemma, 501, 2808
neutrales Element, 64, 1366, 1573
Newton'schen Bewegungsgleichung, 1980
Newton-Verfahren, 1641
nichtausgeartet
Bilinearform, 424
Paarung, 429
quadratische Form, 418
nichteuklidisch
Geometrie, 691
nichtkürzbar, 61, 266
nichtleere endliche Schnitte, 2500
nichtnegativ, 1587, 2310
Linearform auf $\mathcal{C}_!(X,\mathbb{R})$, 2559
Vektor, 317
nichtoffen
Punkt, 2487
nichtpositiv, 1587
Nikolov, 895
Nilfaser, 1215
Nilfaseralgebra, 1215
Nilkegel, 1215
nilpotent, 4111
Element, 261
Element von Liealgebra, 4129
Endomorphismus, 183
Gruppe, 712
Köcher mit Relationen, 1349
lokal, 450, 4141
nilpotenter Anteil
eines Endomorphismus, 455
in Liealgebra, 4129
nilpotenter Kegel, 4129
nilpotentfrei, 977
Nilpotenzgrad, 1479
Nilradikal, 1028
nodale Kubik, 978
Noether'scher Isomorphiesatz, 474
noethersch
Modul, 929, 1244
Objekt, 1336
Ring, 929
topologischer Raum, 999
noethersche Induktion, 1001
Norm, 336

auf abelscher Gruppe, 1885
auf reellem Vektorraum, 1812
einer Körpererweiterung, 1173
einer komplexen Zahl, 188, 1666
eines Vektors, 344
von multilinearer Abbildung, 1818
normal
Endomorphismus, 453
homogener Raum, 2689
Körpererweiterung, 802
Kring, 1073
normale Hülle, 804
Operator, 2333, 2554
topologischer Raum, 2540
Überlagerung, 2696
Untergruppe, 472
Varietät, 1104
affine, 1079
Vektor, 351
normal konvergent, 2395
normale Hülle, 826
Normalenfeld
orientiertes, 2082
Normalisator
von Liealgebra, 4144
von Untergruppe, 846, **2689**, 3922
Normalteiler, 472
Normalteiler erzeugt von, 2679
Normalverteilung, 2256
normiert
größtgradiger gemeinsamer Teiler, 806
Polynom, 273
Raum, 1813
Vektorraum, 1812
Weg, 2048
Normierung, 2128
Null, 240
null-cone, 1215
Null-Element, 64, 1574
Nulldarstellung, 3809
von Liealgebra, 4099
Nullfaser, 1218
Nullfolge, 1629
nullhomolog, 2785
nullhomotop, 2621
Kettenabbildung, 2783
Komplex, 2783
nullhomotope, 2926
Nullkategorie, 3408
Nullkegel, 441
Nullkomplex, 2774
Nullmenge, 2143
Nullmorphismus, 3126
Nullobjekt, 3126
Nullring, 261
Nullschnitt, 2858
Nullschnitts, 3864
Nullstelle, 273
isolierte, 2399
mehrfache, 805
nichtisolierte, 2399
Nullstellen, 917
Nullstellenmenge, 917
Nullstellenordnung
an glattem Punkt von Kurve, 1168
Nullstellensatz
körpertheoretischer, 934
Nullstellensatz, Hilbert'scher, 917, 939
Nullsystem, 3397
Nullteiler, 266
Nullteilervermutung, 1236
Nullvektor, 117
Nullvektorraum, 120
Nullwinkel, 374
numerisch
Polynom, 285

$\mathfrak{o}(V, f)$ orthogonale Liealgebra, 4094
ω_F Differentialform zu Vektorfeld, 2083
$\otimes$ bei Leerverschmelzungen, 3000

$\otimes$ für Morphismen der Familienkategorie, 3000
$\otimes_X$ Verschmelzung in Faser, 3595
$\Omega^r(M)$ glatte r-Formen auf M, 3949
$\Omega_{A/k}$ Modul der Differentiale, 1437
$\mathcal{O}$ polynomiale Funktionen, 975
$\mathcal{O}|_X$ induzierte Struktur, 1096, 3843
$\mathcal{O}^{\mathrm{an}}$ holomorphe Funktionen, 2402
$\mathcal{O}^{\mathrm{an}}(X,Y)$, 3846
$\mathcal{O}(U)$
  U offen in affiner Varietät X, 1023
$\mathcal{O}^*(W)$ homogener Koordinatenring von W, 1117
$\mathcal{O}_{X,Y}$ reguläre Funktionskeime längs einer Untervarietät, 1024
$\mathcal{O}_{X,x}$ Funktionskeime bei k-geringten Räumen, 1102
$\mathcal{O}_{X,x}$ reguläre Funktionskeime bei affinen Varietäten, 1023
$\mathrm{O}(V)$ orthogonale Automorphismen, 358
$\mathrm{O}(n)$ orthogonale Matrizen, 359
$\mathrm{O}(p,1)^+$, 2528
$\mathrm{O}(p,q)$, 698, 2528
$\mathrm{O}_{\mathrm{aff}}(E)$ orthogonalaffine Gruppe, 443
$\mathrm{O}(V,S)$ orthogonale Gruppe, 362
$\mathrm{O}_{\mathrm{aff}}(E,S)$ Gruppe der orthogonalaffinen Automorphismen, 362
oBdA ohne Beschränkung der Allgemeinheit, 57
oberen Abschluß, 4280
Oberkörper, 778
Obersumme, 1694
Objekt einer Kategorie, 574, 2618
Objekten, 2986
objektfest, 3040, 3729
  Funktor, 3322
Objektkleinfamilie, 2986
Objektmodul
  $\Omega/\mathcal{S}$-Objektmodul, 3051
ODE ordinary differential equation, 1943
oder, 55
offen, 920
  Abbildung, 2296
  Abbildung topologischer Räume, 2504
  in $\mathbb{R}$, 1706
  in $\mathbb{R}^n$, 1766
  in der komplexen Zahlenebene, 1739
  in topologischem Raum, **1791**, **2481**
  Kern, 1933, 2485
  metrisch, 1803
  reelles Intervall, 1608
offene Überdeckung, 1820, 1913, 2484
offenes Bild, Satz von, 2296
offenfinal, 1195
offenlokal, 3312
Oktaeder, 519
Oktaederaxiom, 3385
Oktaven, 828
Oktonionen, 828
Operad
  gefärbtes, 2991
Operade
  Mengenoperade, 2991
  Mengenoperade, monotone, 2991
Operation
  auf Objekt, 3049
  durch Konjugation, 1277
  durch Nachschalten, 1277
  durch stetige Abbildungen, 2525
  durch Vorschalten, 1277
  eines Gruppenobjekts, 1367
  eines Monoidobjekts, 1367
  eines Monoids, 504
  stetige, 2525
  triviale
    von Gruppe, 504

von Grundkörper auf Vektorraum, 116
von Liealgebra, 3807, 4098
von Menge auf Menge, 504
Operation durch Konjugation, 3810
Operator
beschränkter, 1817
stetiger, 1817
unbeschränkter, 2335
Operatornorm, 1816
Operatortopologie
starke, 2284
Opfunktorfeld, 3948
Opkofaserung
der $\mathcal{C}$-Garben, 3260
Opkomorphismus, 3260
F^{opp} für Funktor F, 583
X^{opp} Menge X mit opponierter Verknüpfung, 78
opp opponierte Schmelzkategorie zu einer Trennkategorie, 2996
opp opponierte Trennkategorie zu einer Schmelzkategorie, 2996
oppinvers, 3323
oppinvertiert
Faserfunktor oder Kofaserfunktor, 3322, 3323
Schmelzkategorie, 3011
Trennkategorie, 3011
opponiert
Adjunktion, 2715
Algebra, 4193
Borel'sche, 1536
Gruppe, 79
Kategorie, 582, 2640
Ring, 948
Trennschmelzkategorie, 3010
triangulierte Kategorie, 3391
Verknüpfung, 78, 3052
$\mathrm{or}(V)$ Orientierungsmenge
eines Vektorraums, 316
$\mathrm{or}_M(G)$ Orientierungsgarbe mit Koeffizienten, 2875
$\mathrm{or}^{\mathrm{alg}}$ algebraische Orientierungsmenge, 316
orbit, 506
$\mathrm{ord}\, g$ Ordnung von g, 476
Ord Kategorie der geordneten Mengen, 576
Ordinalzahl, 880
Ordnung, 126, 1586
für Teilordnung, 126, 1586
einer gewöhnlichen Differentialgleichung, 1943
einer Gruppe, 477
einer Nullstelle, 275, 2399
lineare, 126, 1586
partielle, 126, 1586
totale, 126, 1586
von Gruppenelement, 476
ordnungsisomorph, 880
Ordnungsisomorphismus, 879
Ordnungsrelation, 126, 1586
Ordnungstopologie, 2484
Ore-Bedingung, 3367
Ore-System, 3367
Orelokalisierung, 3372
Oresystem
faserweises, 3518
faserweises gesättigtes, 3518
orientierbar, 3221
Mannigfaltigkeit, topologische, 2856
Fastfaltigkeit, 2076
Fläche, 2601
mannigfaltige Abbildung, 3656, 3661
Sphärenbündel, 3562
k-orientierbar, 2875
orientiert
Mannigfaltigkeit, topologische, 2856
Fastfaltigkeit, 2075
Orientierung

allgemeiner Mannigfaltigkeiten, 3951
analytische, 2854
lokale, 2854
tautologische, 2858, 3224
topologische, 3221
von affinem Raum
durch Erzeugendensystem, 321
von Fastfaltigkeit, 2075
von mannigfaltiger Abbildung, 3656, 3661
von Mannigfaltigkeit, 2075
von Sphärenbündel, 3562
von topologischer Mannigfaltigkeit, 2854
von Vektorraum, 315, 2075
zurückgezogene, 3657
k-Orientierung, 2875
Orientierungmenge
topologische, 3685
Orientierungsdarstellung, 2858
Orientierungsgarbe, 2856, 3221
mit Koeffizienten, 2875, 3221
relative, 3349, 3656, 3762
Orientierungsgerade
eines Vektorraums, 559
Orientierungsmenge
algebraische, 316
eines Vektorraums, 316
Orientierungsüberlagerung, 2858, 3223
orientierungsverträglich, 2076
orthogonal, 341, 442
affine Abbildung, 3993
Affinität, 443
Automorphismus, 362
Komplement, 353
lineare Abbildung, 357
Matrix, 359
Teilräume, 353
Vektoren, 351
orthogonalaffine Gruppe, 443
Orthogonalbasis, 423
orthogonale Gruppe, 337, 362
orthogonale Projektion, 353
Orthogonalraum, 352
Orthonormalbasis, 352
Orthonormalsystem, 352, 2203
vollständiges, 2203
$\mathrm{or}^{\mathrm{top}}(V)$ Orientierungsmenge von V, 3685
Ortskoordinaten, 3964
$\Omega(X, x, y)$ Menge von Wegen, 2603

π Kreiszahl, 1621
π_0 Wegzusammenhangskomponenten als Menge, 2605
$\pi_1(X, x, y)$ Homotopieklassen von Wegen, 2605
$\pi_1(X)^{\mathrm{ab}}$ basispunktfreie Fundamentalgruppe, 2632
$\pi_1(X, x)$ Fundamentalgruppe, 2606
π_0 Wegzusammenhangskomponenten als Funktor, 2623
$\pi_1(f) = f_\sharp$, 2608
p_M Dualisierungsisomorphismus, 3653
$\mathbb{P}V$ projektiver Raum zu V, 658
$\mathbb{P}W$ projektiver Raum zu W, 1105
$\mathbb{P}^n K$ projektiver Raum, 661
Π_Λ Basis des Systems der Λ-ganzen Wurzeln, 4249
$\mathcal{P}(X)$ Potenzmenge, 34, 1557
$\mathcal{P}_1(X)$ einelementige Teilmengen von X, 54
P_X Poincaré-Isomorphismus, 3666, 3763
$\mathrm{P}^!_X$ dualisierter Poincaré-Isomorphismus, 3666, 3764
$\prod$ Produkt, 65
von Zahlen, 12, 1549
$\mathrm{P}_\mu(E)$ Multimenge der Gewichte von E, 4218
$\mathrm{P}(V)$ Gewichte von V, 4130
$\mathrm{P}(V)$ Gewichte von V, 3830
p-Gruppe, 711

Paar
angeordnetes, 37, 1560
ungeordnetes, 54
Paarung
bilineare, 429
kanonische, 196
nichtausgeartete, 429
paarweise nicht erweiternd, 3484
$\mathrm{pAb}_{/X}$ abelsche Prägarben auf X, 3101
Pappos-Eigenschaft
affine, 647
Papposebene, 647
Par erweiterte Paritäten, 3025
Parabel, 1734
parabolisch, 1491
Element von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, 1491
parakompakt, 3241
erblich parakompakt, 3241
parallel
affine Teilräume, 211
in Inzidenzebene, 635
in Inzidenzgeometrie, 624
Parallelenaxiom, 624
parallelisierbar, 3866
Parallelogrammregel, 343
Parallelprojektion, 654
Parametersystem von lokalem Ring, 1146
parfait, corps, 809
Paritätssignum, 3022
Partialbruchzerlegung, 288
Partialsumme, 1642
partiell
Ableitung, 1840
Ableitung, mit Einheiten, 1857
Ableitung, virtuelle, 1851
Adjunktion, 3435
definiert, lineare Abbildung, 2335
differenzierbar, 1840
Fahnenmannigfaltigkeit, 1461
Flaggenvarietät, 1461
Integration, 1727, 2174
Matrixliegruppe, 3790
Ordnung, 126, 1586
Unter-Liegruppe, 3895
partiell definiert
Funktor, 2734
Partition
einer Menge, 509
einer Zahl, 719
Partitionsfunktion, Kostant'sche, 4197
Pascal'sches Dreieck, 15, 1552
Pauli-Matrizen, 3818
PDE partial differential equation, 1943
perfect field, 809
Periode, 1825
Permutation, 69
Permutationsdarstellung, 1226
Permutationsmatrix, 178
Peter-Weyl
topologisch, 2580
Pfad
in Köcher, 3355
Pfadkategorie, 3355
Pfaff'sche Determinante, 435
Pfaff'sche Form, 2011
Pfeile, 598, 1346, 3355
beschränkt gegen, 3412
beschränkt mit, 3412
$\mathrm{PGL}(2;k)$, 1460
$\mathrm{PGL}(r;K)$ projektive Gruppe, 670
Phase, 137, 1781
Phasenraum, 1983, 2002, 2006
Geschwindigkeitsphasenraum unter Zwangsbedingungen, 1994
phytagoreische Zahlentripel, 1730
$\mathrm{Pin}(V)$, 4232
Plancherel-Maß, 2266
platonisch
Eckenmenge, 525
Körper, 525
Plücker-Einbettung, 1459

Plücker-Koordinaten, 1465
Plücker-Relationen, 1466
poids, 3830, 4130
Poincaré
obere Halbebene, 693
Poincaré-Dualität
starke dualisierte, 3681
Poincaré-Isomorphismus, 2966
dualisierter, 2971
Poincaré-Lemma, 3246
Poincaré-Vermutung, 2608
Poincaré-Birkhoff-Witt, 4187
Poincaré-Dualität
allgemeine, 2966
für kompakte Mannigfaltigkeiten, 2923
Poisson-Kern, 2435
Poisson-Klammer, 3965
Poisson-Verteilung, 1655
Polarenmenge, 233
Polarisierung, 2118
Polarisierungsidentität, 385
Polarkoordinaten, 1883
Gradient in, 2027
Polarkoordinatenabbildung, 1849
Polarzerlegung, 405
eines Endomorphismus, 407
in Hilbertraum, 2309
Polordnung, 522
in Funktionentheorie, 2408
Polstelle
in Funktionentheorie, 2408
von rationaler Funktion, 287
Polstellenordnung, 287
an glattem Punkt von Kurve, 1168
Polyeder
konvexer, 232
polyederähnlich, 3659
Polylogarithmus, 2402
Polynom, 1872
antisymmetrisches, 768
ganzwertiges, 285
konstantes, 271
numerisches, 285
symmetrisches, 763
trigonometrisches, 1832
Polynomfunktion, 1613
polynomial
Abbildung, 976
Abbildung $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, 1874
Darstellung, 1374
Funktion, 975
polynomiale Funktion, 4237
Polynominterpolation, 738
Polynomring, 271
Polytabloid, 1306
Polytop, 3991
konvexes, 232
Pontrjagin-Dualität
diskret-kompakte, 2581
Pontrjagin-Klasse, 3572
poset, 126, 1586
positiv, 1587
Vektor, 317
positiv definit, 336, 425, 1879
Bilinearform, 348
Coxetergraph, 4010
Endomorphismus, 407
hermitesche Matrix, 405
symmetrische Matrix, 394
positiv semidefinit, 425, 1879
Endomorphismus, 407
hermitesche Matrix, 405
Operator, 2308
symmetrische Matrix, 394
positivlinear, 236
$\mathrm{Pot}(X)$ Potenzmenge, 34, 1557
Potential, 1997
eines Kraftfelds, 2041
im Anschauungsraum, 1984
potentielle Energie, 1984
Potenz

p-Potenz, 483
dividierte, 997
formale, 1468
in Monoid, 246
Primpotenz, 483
Primzahlpotenz, 483
symmetrische, 997, 3003
Potenzmenge, 34, 131, 1557, 2123
Potenzradikal, 940, 4200
Potenzreihe, 1743, 2394
formale, 280
pr Projektion aus Produkt, 604
pr, Projektion aus Produkt, 608, 942
pr_X
Projektion, 45, 1567
pr_i
Projektion, 121
prä-additive Kategorie, 3130
präabelsch, 3128
Prägarbe, 3101
der stetigen G-wertigen Funktionen, 3102
erlaubt das Verkleben von Schnitten, 3254
lokale, 3690
Prägarbe der differenzierbaren G-wertigen Funktionen, 3103
Prägarbe der lokal konstanten G-wertigen Funktionen, 3102
Prägarbe der singulären q-Koketten, 3228
Prägarbe der stetigen komplexwertigen Funktionen, 3102
Prähilbertraum, 351, 2202
Prämaß, 2132
Prävarietät, 1100
Präverflechtung
von Trennaustauschsituation, 3595
prefaisceau, 3101
$\mathrm{pres}_{X\times y}v$ Projektionsrestriktion von v, 1431
presheaf, 3101
prim, 747
Restklasse, 265
Primelement, 747, 1005
Primfaktorzerlegung
Existenz, 254
Primideal
in beliebigem Ring, 1005
in Kring, 1005
minimales, 1028
primitiv
Dirichletcharakter, 2466
Element von Körpererweiterung, 782
in Hopfalgebra, 1371
Körpererweiterung, 782
Polynom, 756
zentrales Idempotentes, 1264
primitive Einheitswurzel, 847
Primitives Ausdehnbarkeitskriterium, 800
primitives Element, 818
Primitivwurzel, 492
Primkörper, 267, 777
Primpotenz, 483
in faktoriellem Ring, 953
Primspektrum, 1005
Primzahl, 253
Primzahlpotenz, 483
echte, 483
Primzahlsatz, 2453
Primzahlzwillinge, 254, 2462
principal bundle, 3097
Prinzip von Cavalieri, 2171
prinzipalen Antiautomorphismus, 4193
prinzipalen Automorphismus, 4040
prinzipaler homogener G-Raum, 506
Prismen-Operator, 2770
$\mathrm{pro}(\mathcal{C})$ Pro-Objekte, 3423
Pro-Objekt, 3423
produit extérieur, 565

Produkt
äußeres
von Moduln, 1258
balanciertes, 516, 2737
gesättigtes, 1129
in derivierter Kategorie, 3462
in Kategorie
von Familie, 603
von zwei Objekten, 602, 2640
von Ordinalzahlen, 881
von affinen Varietäten, 990
von Algebren, 4093
von Gruppen, 71
semidirektes, 710, 1365
von Idealen, 737
von Kategorien, 583, 1342
von Mannigfaltigkeiten, 3851
von Matrizen, 166
von Mengen, 603
von Meßräumen, 2546
von Moduln, 942
von Reihen, 1653, 1655
von Ringen, 736
von Schmelzkategorien, 2996
von Sequenzen, 499
von Vektorräumen, 607
endliches, 125
Produkt-σ-Algebra, 2146
Produktentwicklung, 2442
produktfest
final, 2525
produktfest (E), Morphismus, 1133
Produktion, 972
bei Liealgebrendarstellungen, 4204
Produktmetrik, 1797
Produktmorphismus, 602, 2640
Produktnorm, 1813
Produktorientierung, 320, 2902
Produktregel
für reelle Funktionen, 1702
Produktring, 736
Produktsummentotal, 3451
Produkttopologie, 2147, **2503**
Produkttotal, 3451
eines Tripelkomplexes, 3454
proendliche Gruppe, 3426
Projektion, 664, 3099
bei zwei Mengen, 45, 1567
in Kategorie, 602, 603, 2640
längs Teilraum, 160
projektive, 665
von Hauptfaserbündel, 3097
von kartesischem Produkt, 121
von Torsor, 3097
Projektionsformel, 3599
der singulären Homologie, 2921
flache, 3582
für Modulgarben, 3582
Projektionsformel-Quadrat, 3585, 3749
Projektionszweitrennung, 2998
projektiv
Gruppe, 670
Hyperfläche, 1119
Modul, 2892
Objekt, 1331, 3147
Varietät, 1109
projektive Auflösung, 3147
projektive Decke, 1332
projektive Kurve, 1187
projektive Nullstellenmenge, 1117
projektive Vervollständigung, 661
projektiver Raum
als algebraische Varietät, 1105
als glatte Mannigfaltigkeit, 3848
als Menge, 1105
gewichteter, 1206
topologisch, 2529
Projektivisierung, 658
Projektivität, 670
Projektor, 1283
in kompakter Hausdorffgruppe, 2590
Prolimes, 3422

propre, 2535
pseudoeuklidisch, 442
    orientiert, 442
Pseudofunktor, 3325
Pseudokoordinaten, 1152
Pseudometrik, 2209
pseudometrischer Raum, 2209
$\mathrm{PSL}(2;k)$ als algebraische Gruppe, 1370
$\mathrm{pt} = \mathrm{pt}(\mathcal{C})$ finales Objekt von $\mathcal{C}$, 580
Puiseux
    Satz von, 824
Puiseux-Reihe, 824
pull-back-Diagramm, 2642
Punkt, 31, 1554
    innerer, 2292
    unendlich ferner, 661
    von affinem Raum, **204**
    von Köcher, 598, 1346
Punktgruppe, 520
punktierter Raum, 2605
Punktspiegelung, 208, 386
    räumliche, 390
punktweich, 3177
push-out-Diagramm, 2645
Pythagoras, Satz von, 351
Pythagoreische Zahlen, 899
pythagoreische Zahlentripel, 284
$\mathrm{p}\,\mathbb{Z}\mathcal{F}$ freie abelsche Prägarbe, 3125

$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ Kreisteilungskörper, 847
$\mathbb{Q}$ rationale Zahlen, 31, 1555
qr Ausdehnen von Derivation auf Lokalisierung, 1415
QR-Zerlegung, 394
Quader, 1865
Quaderumgebung
    in $\bar{\mathbb{R}}^n$, 1609
quadratfrei, 921
quadratintegrierbar
    Funktion, 2192
quadratisch
    Körpererweiterung, 784
    Matrix, 112, 173
    Polynom, 273
    Zahlkörper, 1172
quadratische Form, 494
    homogene, 417
        auf $\mathbb{R}^n$, **398**
    inhomogene, 431
    reelle, 1878
quadratischer Rest, 852
Quadrattrivialisierung, 3495
Quadratwurzelabschluß, 877
Quadrik
    affine, 921
    projektive, 1119
Quantor, 56
Quartik
    affine, 921
    projektive, 1119
quasiaffin
    k-Varietät, 1101
Quasibasis, 3418
quasiinverser Funktor, 596, 2711, 2714
Quasiisomorphismus, 2914
    von dg-Ringen, 3418
    von Komplexen, 3231
quasikompakt, 1820, 1913, 2497
quasiminuscul, 4063
quasiprojektiv
    k-Varietät, 1109
quaternional-hermitesche Form, 3803
quaternionaler Anteil, 3804
quaternionaler Typ, 1314
Quaternionen, 293
Quaternionengruppe, 294
Quaternionenring, 294
Quelldichte, 2102
Quersumme, 265
Quillen
    Lemma von, 4149
Quintik

affine, 921
projektive, 1119
quisendentfaltet, 3482
quisflach
in bequemer abelscher Schmelzkategorie, 3544
Komplex von Modulgarben, 3537, 3755
Komplex von Moduln, 3456
Linksauflösung, 3544
quislinksentfaltet, 3404, 3458
quisrechtsentfaltbar, 3432
F-quisrechtsentfaltbar, 3439
in abelscher Kategorie, 3439
quisrechtsentfaltet, 3404
Objekt, 3439
quiver, 599, 1346
Quot Quotientenkörper, 285
Quotient, 263, 589, 732, 1207
von abelscher Kategorie, 3374
von affinem Raum, 497
von Gruppe, 474
Quotientendarstellung, 1376
Quotientenfiltrierung, 1136, 3328
Quotientenfunktor
exakter, 3374
triangulierter, 3399
Quotientenisomorphismus, 3298
Quotientenkategorie, 3375
Quotientenkörper, 285
Quotientenkriterium, 1646
Quotientenmodul, 927
Quotientenmorphismus, 1210
Quotientennorm, 2304
Quotientenorientierung, 320, 3029
Quotientenregel, 1703
Quotientenring, 732
Quotiententopologie, 2507
Quotientenvektorraum, 495

ρ_q Hinterseite eines Simplex, 2905

$\mathbb{R}$ reelle Zahlen, 1598
$\mathrm{R}(K,T)$ Wurzelsystem, 3926
$\mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ Wurzelsystem, 4131
$\mathrm{R}F$ Rechtsfaktorierter, 3427
$\mathrm{R}F$ Rechtsderivierter von F, 3438
$\mathrm{R}F = {}_{\mathrm{u}}\mathrm{R}F$ universeller Rechtsderivierter, 3464
rad
rad Radikal einer algebraischen Gruppe, 1513
Radian, 1675
$\mathrm{rad}_{\mathrm{u}}\, G$ unipotentes Radikal von G, 1513
Rad Radian
für orientierten Winkel, 378
Radian, 377, 378
Radikal
einer algebraischen Gruppe, 1512
einer Bilinearform, 424
einer Liealgebra, 4112
eines Ideals, 940
Jacobson-Radikal, 1264
Modulradikal, 940, 4200
Potenzradikal, 940, 4200
von Modul, 4200
Radikalabschluß
in Körpererweiterung, 877
Radikalerweiterung
eines Körpers, 866
Radikalideal, 940
Radonmaß, 2564
Radonmaß
komplexes, 2583
nichtnegatives, 2559
reelles, 2560
Raleigh-Quotient, 403
Ralg
Kategorie der Ringalgebren, 576
Ringalgebren, 2549
Ringalgebrenhomomorphismen, **610**, 4093

ramification index, 1177
Rand, 1933
in Kettenkomplex, 2775
simplizialer, 2758
singulärer, 2768
topologischer, 2485
von Eckfaltigkeit, 2104
von Randfaltigkeit, 2095
Randfacette, 3984
echte, 3984
Randintegral, 2363
Randkante, 2666
Randkarte, 2094
Randoperator, 2757
der langen exakten Homologie-sequenz, 2804
Randpunkt, 2486
Randweg, 2363
rang Rang einer Liealgebra, 4144
rang Rang einer abelschen Gruppe, 483
Rang
einer abelschen Gruppe, 483
einer algebraischen Gruppe, 1508
einer Bilinearform, 424
einer kompakten Liegruppe, 3917
einer linearen Abbildung, 178
einer Matrix, 177
eines kompakten Torus, 3908
eines Wurzelsystems, 4025
Goldie-Rang, 1264
von freier Gruppe, 2658
von Liealgebra, 4144
von Modul, 950
rank, 177
rational
Darstellung, 1374
Varietät, 1158
rationale Funktion, 287
auf Varietät, 1105
rationale Funktionen
im affinen Fall, 1025
rationale Zahlen, 31, 1555
rationaler Morphismus, 1133
Raum, 31, 1554
affiner, **204**, 1810, 1842
euklidischer
über angeordnetem Körper, 3993
normierter, 1813
reeller, **204**, 1812
uniformer, 2556
Raum-Zeit-Punkte, 438
raumartig
Vektor, 440
Raumpaar, 2800
Raumzeit, 438
Realisierung
eines Diagrammschemas, 599
eines Simplizialkomplexes, 2665
Realisierungsfunktor, 581
Realteil
bei komplexen Zahlen, 188, 1663
bei Quaternionen, 294
Rechteck, 1866, 2363
rechter Winkel, 374
Rechts-Ore-System, 3366
rechtsadjungiert
global, 2734
maximal partiell, 2734
rechtsadjungierter Funktor, 2734
Rechtsanpassung, 3531
Rechtsapproximation, 3463
Rechtsauflösung
in abelscher Kategorie, 3142
rechtsazyklisch
F-rechtsazyklisch, 3159
Objekt, 3439
Rechtsbrüche, 3367
Rechtsderiviert
in mehreren Variablen, 3459
rechtsderivierte Funktoren, 3143
Rechtsderivierter

koaugmentierter, 3151
universeller, 3464
Rechtsdimension
homologische, 3448
eines Funktors, 3161
Rechtseinsetzung
einer Bilinearform, 2028
rechtsendlich
homologisch, 3448
rechtsentfaltbar, 3428
S-rechtsentfaltbar, 3428
rechtsentfaltet, 3427
$\mathcal{N}$-rechtsentfaltet, 3402
für Funktor, 3361
für Morphismenmenge, 3362
Rechtsentfaltung
S-Rechtsentfaltung, 3362
für Funktor, 3362
rechtsexakt, 928, 961, 3129
Rechtsfaktorierter, 3427
Rechtsideal, 948
rechtsinvariant
Vektorfeld, 3870
Rechtsinverses, 147, 203
in Kategorie, 580
rechtskürzbar, 61, 266
Rechtslinksanpassung, 3616
Rechtsmenge, 512
Rechtsmodul, 948
in Schmelzkategorie, 3049
Rechtsnebenklasse, 468
rechtsnoethersch, 929
Rechtsoperation, 512
Rechtsoresystem
faserweises, 3518
globales, 3518
rechtsspaltend
Gruppenhomomorphismus, 475
Modulhomomorphismus, 946
Morphismus, 580
Rechtsteiler, 61, 265
Rechtstorsor, 512
reduktiv
algebraische Gruppe, 1513
Liealgebra, 4118
linear reduktiv, 1208
redundant, 132
reduzibel, 3829
topologischer Raum, 999
reduziert
Garbenkohomologie, 3186
Köcher mit Relationen, 1349
Kring, 977
reduzierte Darstellung, 4064
in Spiegelungsgruppe, 3998
reduzierte Homologiegruppen, 2837
reell
Maß, 2233
Raum, **204**, 1812
Vektorraum, 1812
reell konvergent, 1630
reelle Form
von komplexem Vektorraum, 413, 4164
von komplexer Algebra, 4165
reelle Zahl, 1598
reellen Banachringalgebra, 2297
reeller Typ, 1314
reeller Vektorraum, 22
Reellifizierung, 142
Rees-Ring, 1036
reflexiv
Relation, 126, 1586
$\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$, 4144
Regeln von de l'Hospital, 1716
regulär
G-regulärer Punkt, 1412
Abbildung $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, 1874
Abbildung in Vektorraum, 1395
Borelmaß, 2189
Funktion
auf affiner Varietät, 981, 1358

auf Varietät, 1100
Funktionen, 3500
Funktionskeim, 1023
längs Y, 1024
in Liealgebra, 4098, 4144
lokaler Kring, 1148
Matrix, 173
Parametersystem, 1148
Punkt von Fastfaltigkeit, 2075
Punkt von Varietät, 1150
Überlagerung, 2696
reguläre Funktion
auf offener Teilmenge
einer affinen Varietät, 1023
Regulierung, 3589
kartesisch-tensorielle, 3629
kartesische, 3589
kommutative, 3589
Reihenglieder, 1642
rein inseparabel, 814
Relation
auf einer Menge, 126, 248, 1586
in einem Köcher, 1348
mehrstellige, 126, 1586
zwischen zwei Mengen, 126, 1586
relativ
kompakt, 2497
relativ Hausdorff, 2537
relative q-Ränder, 2801
relative Homologiegruppen, 2801
relative Ketten, 2800
relative Kohomologie, 2917
relative Koketten, 2917
Relativitätstheorie, 438
Repräsentant, 249, 263, 468
Repräsentantensystem, 249, 263
representation, 3773
res Restriktion der Skalare, 924, 971
$\mathrm{Res}_{n,m}$ Resultante, 775
Residuum, 2418
Reskalierung
von Translationen, 1811, 1843
Resonanz, 1787
Resonanzkatastrophe, 1787
Restglied
Integraldarstellung, 1755
Lagrange'sche Form, 1755
Restklasse, 263
prime, 265
Restklassenring, 732
Restriktion
der Skalare, 924, 971
restringiert
Liealgebra, 1468
Resultante, 773
Retraktion, 2613
Reynolds-Operator, 3288
Reziprozitätsgesetz
für Jacobi-Symbole, 860
quadratisches, 855
$\mathrm{R}F$, 3429
RFrei_{-R} freie endlich erzeugte Ringoidmoduln, 3472
rg Rang einer Matrix, 177
$\mathrm{R}\mathcal{H}\mathrm{om}(A, D)$ derivierter Homkomplex, 3547
RHot, 3475
Richt Richtungsraum, 204
Richtungsableitung, 1845
auf eingebetteter Mannigfaltigkeit, 1906
auf eingebetteter Mannigfaltigkeit, 3800
vektorwertig, auf Mgf, 3858
Richtungsanteil, 207
Richtungsraum, **204**, 1811, 1843
eines affinen Teilraums, 209
schmutziger, 117
Richtungsvektor, **204**, 1811, 1843
Riemann
ζ-Funktion, 1645, 2453
Riemann'sche Fläche, 3846

Riemann'sche Vermutung, 1645, 2455
riemannsche Metrik, 2027
Riemann'sche Fläche
von Funktionskeim, 3118
Riemann'sche Zahlenkugel, 667, 695
Riemann-integrierbar, 1698
Riemannsumme
für Funktion auf Mannigfaltigkeit, 1928
für Funktion auf Rechteck, 1866
für Integral einer Volumenform, 2079
für Integral nach Maß, 2165
für reelle Funktion, 1692, 1696
für vektorwertige Funktion, 1958, 2354
für Wegintegrale, 2033
Riesz'scher Darstellungssatz
bei Hilbertraum, 2223
Maßtheorie
auf affinem Raum, 2310
im allgemeinen Fall, 2559
Ring, 260, 730, 1579
einfacher, 1260
lokaler, **1035**, **1338**
opponierter, 948
von endlicher Länge, 1041, 1253
Ring Kategorie der Ringe, 576
Ring Ringhomomorphismen, 261
$\mathrm{Ring}(R, S)$ Ringhomomorphismen, 730
Ring der ganzen Zahlen, 1170
Ringalgebra, **610**, 1827, **4092**
freie, 1269
über Kring, 934, 1093
ringendlich
Kringerweiterung, 933
Ringfiltrierung, 1138
Ringgarbe, 3112
Ringhomomorphismus, 261, 730, 1582
Ringmodul, 923, 1238
Ringoid, 3130, 3471
differentielles graduiertes, 3473
Ringoidbimodul, 3472
Ringoidkategorie, 3471
Ringoidmodul, 3471
Ringoidrechtsmodul, 3471
RMod Ringoidmodul, 3471
$\mathrm{RMod}^{\mathrm{dg}}$ dg-Ringoidmoduln, 3474
Rng Kategorie der nicht unitären Ringe, 576
Robinson-Schensted-Algorithmus, 1310
Rolle, 1708
Rotation, 2054
skalare, 2054
Rotationskörper, 1942, 2186
Rouché, Satz von, 2423
RSA-Verfahren, 481
Rückzüge, 2777
Rückzug, 3263
eigentlicher, 3638
starker, 3264
von Funktionen, 2020
von Funktor, 3262, 3519
von Kovektorfeld, 2020
von Mengengarben, 3182
rückzugstabil, 3584, 3750
Runge-Lenz-Vektor, 1988
Russell'sches Paradoxon, 41, 1563

X^{s} relativ stabile Punkte, 1217
$\mathcal{M}^{\mathrm{s}}$ Schmelzanteil von $\mathcal{M}$, 3009
σ-Algebra
erzeugt von Mengensystem, 2126
σ-endlich, 2141
$\sigma(\mathcal{E})$ von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra, 2126
S^1 Einheitskreis, 190, 1667
S^1 versus $\mathrm{U}(1)$, 190
S^n die n-Sphäre, 1895, 2598
Σ_n *symmetrische Gruppe*, 296
$\oint_c^d$ Wegintegral, 2038
$\mathcal{S}$ Garbe von Schnitten, 3113

$\mathcal{S}_n$ symmetrische Gruppe, 296
$\int$ Integral, 1690
$\mathcal{S}(G)$ Schwartzraum, 2265
$\mathcal{S}(n)$ Standardbasis des K^n, 134
$\sum$ Reihe, 1642
$\sum$ Summe
    von Zahlen, 11, 1548
$\oint$ Wegintegral, 2032
$\mathcal{S}(X)$ Schnitt der Primideale aus X, 1029
$\mathrm{S}(V)$ symmetrische Algebra, 4193
$\mathrm{S}_!^*\mathcal{K}$ kompakte Simplizialkoketten, 2952
S_*X singuläre Ketten, 2775
S_kV symmetrische Algebra, **995**
$\mathrm{S}_q\mathcal{K}$ Simplizialkette, 2756
S_qX singuläre q-Ketten, 2765
σ-Subadditivität, 2135
sAb superisierte abelsche Gruppen, 3027
σ-additiv
    auf Mengenring, 2132
Sättigung, 1098
σ-Algebra, 2124
Sampling Theorem, 2251
Sard
    Satz von, 2180
scat terminale Schmelzkategorie, 3015
SCat Gesamtheit aller Schmelzkategorien, 3013
$\mathrm{SCat}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ Menge von Schmelzfunktoren, 3012
SCat_φ angereicherte Schmelzfunktoren, 3043
$\mathrm{SCat}_\mathcal{S}$ angereicherte Schmelzfunktoren, 3043
Schanuel
    Vermutung, 1071
scheinflach, 1066
Schema, 615
    G-Schema, 1368
schiefadjungiert, 2290
Schiefkörper, 106, 292
    Goldie-Schiefkörper, 1264
schieflinear, 350, 687
Schlangenlemma, 3140
schleifenfüllend, 2051, 2368, 2606
Schleifenraum, 2605
Schmelzäquivalenz, 3012
Schmelzfunktor, 3012
    $\mathcal{S}$-Schmelzfunktor, 3041
    monotoner, 3014
Schmelzgruppoid, 3009
Schmelzkategorie, 2986
    $\mathcal{S}$-Schmelzkategorie, 3039
    abelsche, 3543
    angereicherte, 3040
    mit Vorzeichen, 3023
    monotone, 2991
    multiäquivariante, 2997
    terminale, 3015
    triviale, 2994
Schmelzkern, 3543
Schmelzkofaserung, 3496
    invertierte, 3515
Schmelzlokalisierung, 3539
Schmelzunterkategorie, 2994
schmelzverträglich
    Äquivalenzrelation, 2995
Schmelzvorschub, 3496
Schmiegeparabel, 1753
schmutzig
    für umgangssprachlich, 89
Schnitt, 147
    der Orientierungsgarbe, 2860
    in Vektorraumbündel, 3864
    mit kompaktem Träger, 3204
    stetiger, 2507
    über einer Menge von Garbe, 3118
    von Abbildung, 3864
    von abelscher Prägarbe, 3102
    von Mengenfamilie, 1791
    von Mengensystem, 131

von Morphismus, 580
zweier Mengen, 35, 1559
Schnittmultiplizität, 1125
lokale, 3672
Schnittorientierung, 3676, 3686
Schnittpaarung, 3677
Schnittplättung, 3676
Schnittprodukt, 3667, 3766
cap-Schnittprodukt, 2972, 3675
cup-Schnittprodukt, 2971, 3667
schnittstabil
für zweischnittstabil, 2141
Schnittzahl, 2870, 2974
Schönflies
Satz von, 2599, 2841
Schottky-Gruppe, 2659
Schranke
größte untere, 1592
kleinste obere, 1592
obere, 1592
untere, 1592
Schrankensatz, 1766
Schreikofaserung
der Homotopiekomplexe, 3603
für Modulgarben, 3577
schreikokartesisch, 3272
im Abstrakten, 3594
Schreimonomorphismus, 3599
Schreimorphismus, 3271, 3589, 3594
Schreiobjekt, 3601
Schreirückzug, 3274, 3596, 3638
Schreivorschub, 3272
Schröder-Bernstein, 883
Schur, Lemma von, **1254, 1255**, 3828
bei Liealgebren, 4149
bei Liealgebren, $\dim < \infty$, 4122
Schurpolynom, 4219
schwach
Varietät mit Operation, 1403
schwach homogen, 1408
schwach kompaktweich, 3606
schwach spitzer Winkel, 4004
schwach stumpfer Winkel, 4004
Schwartzmaß, 2266
Schwartzraum, 2229, 2265
Schwarz'sches Lemma, 2400
Schwarz'sches Spiegelungsprinzip, 2392
schwere Masse, 1980
Schwerpunkt, 218
scindage, 3324
Secans, 1675
Secans hyperbolicus, 1734
Sechs als natürliche Zahl, 246
Sechs-Funktor-Formalismus, 3596
Segre-Einbettung, 1131
Seifert-van Kampen, 2648
Seifert-van Kampen für das fundamentale Gruppoid, 2650
Sekante, 1698
Sekunde, 319
Selbstabbildung, 60
selbstadjungiert, 401, 2289
Selbsterweiterungen, 3406
semidirektes Produkt, 710, 1365
semistabil, 1217, 1219
semistabiler Punkt, 1219
σ-endlich, 2134
senkrecht, 341
Geraden, 629
senkrechter Kernkomplex, 3197
separabel
Körpererweiterung, 808
Element von, 808
metrischer Raum, 2148
Polynom, 808
Ringalgebra, 3154
separabel, topologischer Raum, 2148
Separabilitätsgrad, 815
separabler Abschluß
eines Körpers, 821
in Körpererweiterung, 814
Separation der Variablen, 1953

Separator, 1344
separiert
  Filtrierung, 1135
  stetige Abbildung, 2536
  topologischer Raum, 2487
  Varietät, 1131
Sequenz
  kurze exakte, 498, 3129
Serre'sche Unterkategorie, 3374
Serre-Relationen, 4159
Sesquilinearform, 350
  quaternionale, 1320
Sextik
  projektive, 1119
sgnu Paritätssignum, 3022
sheaf, 3112
Shift
  relativer, 3734
Shuffle, 2065
Sieb des Eratosthenes, 253
Sieben als natürliche Zahl, 246
$\mathrm{sign}(a)$ Vorzeichen von a, 315
Signatur, 426
Signum, 300
Signum einer Permutation, 296
Signumsautomorphismus, 3393
Signumseinheit, 3067, 3393
Simplex
  angeordneter kombinatorischer, 2756
  kombinatorischer
    von Simplizialkomplex, 2663
  singulärer, 2765
  voller, 2661
  von Simplizialkomplex, 2663
simplizial
  Abbildung, 2666
  Homologiegruppe, 2758
  Kohomologie, 2918
  Teilordnung, 2668, 2825
simpliziale Approximation, 2834
simpliziale Teilordnung
  natürliche, 2832
Simplizialkette, 2756
  lokalendliche, 2955
Simplizialkokette, 2918
  kompakte, 2952
Simplizialkomplex, 2663
  maximaler, 2663
Simplizialrand, 2758
simplizialsingulär
  Kette, 2823
    ordnungsverträgliche, 2825
simplizialstetig, 2773
Simplizialzykel, 2758
simply laced, 4047
$\sin$ Sinus
  komplexer, 1681
$\sin_{\mathrm{a}}$ analytischer Sinus, 375
$\sin_{\mathrm{g}}$ geometrischer Sinus, 375
singulär
  q-Kette, 2765
  q-Simplex, 2765
  Homologie, 2768
  Kokette mit Koeffizienten, 2908
  kompakte Koketten, 2950
  Punkt
    von algebraischer Varietät, 1150
singulär-azyklisch, 3228
singuläre Kette
  lokalendliche, 2953
singulären Homologie
  mit Koeffizienten, 2768
Singulärwert
  einer Abbildung, 428
  einer Matrix, 428
Singulärwertzerlegung, 428
Singularität
  in Funktionentheorie
    hebbare, 2408
    isolierte, 2408
    wesentliche, 2408
$\sinh$ Sinus hyperbolicus, 1732

Sinus, 374, 1673
analytischer, 375
geometrischer, 375
Sinus hyperbolicus, 1732
Sinus-Satz, 381
Sinuskurve des Topologen, 2494
Sinustransformation, 2232
Skalar, 116
skalare Rotation
eines ebenen Vektorfeldes, 2054
Skalarprodukt, 336, 348
auf komplexem Vektorraum, 350
geometrisches, 560
massebehaftetes, 1990, 1991
quaternionales, 1320, 3804
Skalarproduktnorm, 351, 1763
Skalarproduktraum, 336, 351
affiner, 386
skalarproduktverträglich, 357
Skelett, 2513
Skelett von Simplizialkomplex, 2826
skew field, 293
$\mathrm{SL}(V)$ spezielle lineare Gruppe, 358
$\mathrm{SL}(n; K)$ spezielle lineare Gruppe, 358
Slater-Determinante, 569
Smashprodukt
der Ringtheorie, 1275
Smith-Normalform, 175, 182
Smith-Zerlegung, 490
sMod_k Supervektorräume, 3027
$\mathrm{SO}(V)$ spezielle orthogonale Automorphismen, 358
$\mathrm{SO}(n)$ spezielle orthogonale Matrizen, 359
$\mathrm{SO}(p, 1)^+$, 2528
$\mathrm{SO}(p, q)$, 2528
soc Sockel, 1247
$\mathrm{soc}(M)$ Sockel, 1336
Sockel, 1247, 1336
soft, 3244
soluble, 712
solvable, 712
$\mathrm{Sp}(n)$ kompakte symplektische Gruppe, 3804
spaltend
Cartan'sche, 4165
injektiver Gruppenhomomorphismus, 2808
kurze exakte Sequenz, 499, 946
maximal, Komplex, 3163
reelle Liealgebra, 4165
surjektiver Gruppenhomomorphismus, 2808
spaltende Idempotente, 3134
Spaltenindex, 112
Spaltenkomplex, 3197
Spaltenrang, 177
Spaltung
bei Gruppen, 475
bei abelschen Gruppen, 946
bei Gruppen, 475
eines Kofaserfunktors, 3324
von Modulhomomorphismus, 946
von Morphismus, 580
Spaltungskörper
einer endlichen Gruppe, 1279
span Spann, 130
Spann
in Vektorraum, 130
Spat, 384
Spatprodukt, 384
geometrisches, 559
$\mathrm{Spec}\, R$
als Menge, 1005
Specht-Modul, 1306
Specht-Vektor, 1306
Specm *A Menge der maximalen Ideale von A*, 937
$\mathrm{Spec}_{\max}$ *A Menge der maximalen Ideale von A*, 937
Spek, 2549
Spektralmaß

eines Vektors, 2296
Spektralprojektor
einer unitären Darstellung, 2324
Spektralradius, 2301
endlichdimensionaler Fall, 457
Spektralsequenz, 3328
ausgeartete, 3197, 3332
ausgeartete unbeschränkte, 3452
graduierte, 3335
ungraduierte, 3329
Spektrum, 2554
bei Banachalgebren, 2298
einer $\mathbb{C}$-Ringalgebra, 2549
eines Krings, 1005
speziellen Relativitätstheorie, 440
spezieller Punkt, 4048
Sphäre, 2598
echte, 694
verallgemeinerte, 694
Sphärenbündel, 3562
spherical harmonics, 3838
Spiegel, 1527, 3935, 3972, 3976, 3991
einer Wurzelspiegelung, 4135
Spiegelhyperebene, 3972, 3976, 3991
Spiegelung, 386
affine, 3991
affine orthogonale, 3993
an Kreis, 678
an Sphäre, 694
bei Gitter, 1515, 3924
einfache, 4040
in Coxetersystem, 4074
in Coxetersystem, 4078
komplexe, 4021
lineare, 3976
orthogonale, 365, 395, 3972
reelle lineare, 1527, 3935
Spiegelungsformel
der Γ-Funktion, 2445
Spiegelungsgruppe
affine, 3991
affine euklidische, 3993
endliche lineare, 3978
euklidische endliche, 3972
komplexe, 4021
zu Coxetermatrix, 4064
Spiegelungsprinzip
Funktionentheorie, 2392
$\mathrm{Spin}(V)$, 4233
$\mathrm{Spin}(n)$ Spin-Gruppe, 3903
Spin-Darstellung, 4227
Spin-Gruppe, 3903, 4222
Spin-Guppe, 4233
Spingruppe, 359, 3802
spitz
echt, Winkel, 4004
Spur, 3282
auf freiem Modul, 1183
auf projektivem Modul, 1183
einer Körpererweiterung, 1173
einer Matrix, 183
eines Endomorphismus, 183
endlichen Ranges, 184
in Schmelzkategorie, 3066
Spurabbildung, 836
Spurform, 837, 1184, 1266
bei Körpern, 1175
Spurkriterium, 1267
Spurmorphismus, 3282
Spurtopologie, 920, **1793**, **2482**
X^{ss} semistabile Punkte, 1217
X^{stab} absolut stabile Punkte, 1212
Stab Stabilisator, 1404
stabil
$\mathfrak{a}$-stabil, Filtrierung, 1141
absolut, 1212
absolut, Punkt, 1212
Punkt, 1219
relativ, Punkt, 1217
Teilmenge unter Abbildung, 450
Teilmenge unter Selbstabbildung, 54

unter aufsteigenden Vereinigungen, 149
unter Liealgebra, 3813, 4100
unter Monoid, 506
stabil universell
Verschmelzung
angereichert, 3044
stabil universell, 2999
stabile Wurzelwahl, 1517, 3924
Stabilisator, 505, 506, 1404
stabilisiert, 54
Stammfunktion, 1721, 1961, 2355
Standard-Monome, 1468
Standard-Skalarprodukt, 336, 350
Standardauflösung, 2883
Standardauflösung, 3166
Standardbasis, 134
der Zariskitopologie eines Spektrums, 1032
Standarddarstellung, 1226, 3810, 4099
von $\mathrm{GL}(V)$, 3773
Standarderzeuger
in der Homologietheorie, 2813
von $\mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash 0)$, 2854
Standardform, 4224
standardglatt
Kringhomomorphismus, 1153
Standardgraduierung, 1113
Standardmetrik
auf $\mathbb{R}^n$, 2027
Standardorientierung, 316
der komplexen Zahlenebene, 372
des Standardsimplex, 3251
von pseudoeuklidischer Struktur, 442
Standardorientierung des Nullraums, 316
Standardsimplex, 2765
Standardskalarprodukt
auf komplexem Gruppenring, 1286
Standardtableau, 1299
Standardtransformation, 2852, 3078
or $\Rightarrow$ dreh, 2633
Standgruppe
für Isotropiegruppe, 505
starke Operatortopologie, 2284
starr
in Schmelzkategorie, 3063
Morphismus gekringter Räume, 3560
Starrheitsdatum, 3063
std Standardtransformation, 3078
Steigung, 1698
Steinberg, Formel von, 4219
stereographische Projektion, 698
Stern, offener, 2832
stetig
Abbildung bei Punkt, 2487
bei topologischen Räumen, 2482
für metrische Räume, 1797
für topologische Räume, 920, **1792**
gleichmäßig
bei metrischen Räumen, 1810
bei uniformen Räumen, 2557
reelle Funktion, 1687
linksseitig, 2134
Operation, 2525
stetig differenzierbar
in mehreren Variablen, 1862
Stiefel-Mannigfaltigkeit, 3901
Stiefel-Whitney-Klasse
von reeller Darstellung, 3301
Stieltjes-Maß, 2139
stimmen überein bis zur Ordnung, 1757, 1874
Stokes
Integralsatz von
allgemeiner, 2098
klassischer, 2108
mit Ecken, 2105
Stone
Satz von, 2545

Stone-Raum, 2545
Stone-Weierstraß, 1828
str Superspur, 2831
Strahl, 343
Streckung, 208
Streichmatrix, 312
strikt verträglich mit den Filtrierungen, 3130
Struktur
  $(\mathcal{S}, v)$-Struktur, 586
  k-Struktur
    auf Schmelzkategorie, 3038
  additive
    auf Schmelzkategorie, 3037
  bilineare
    auf reellem Vektorraum, 441
$(\mathcal{S}, w)$-Struktur
  auf Objekt, 3016
Strukturgarbe, 3500
strukturierend
  Funktion, 981, 1093, 1358, 3840
strukturverträglich
  Abbildung, 441
Stufenfunktion, 2153
stumpf
  echt, Winkel, 4004
$\mathrm{SU}(V)$ spezielle unitäre Automorphismen, 358
$\mathrm{SU}(n)$ spezielle unitäre Matrizen, 359
Subbasis, 2501
Submersion
  in der Differentialgeometrie, 3861
Subquotient, 927, 1039, 1241
  einer Kompositionsreihe, 709
Subquotientenfiltrierung, 3328
Substitutionsregel, 1723
Summand
  von Modul, 943
Summanden, 11, 1548
Summe, 942
  topologische, 2507
  von Idealen, 737
  von Untermoduln, 943
  von Untervektorräumen, 608
  von Vektorräumen, 607
  von Wurzelsystemen, 4040
Summenprodukttotal, 3451
Summenregel, 1702, 1860
Summentotal, 3451
  eines Tripelkomplexes, 3454
summierbar
  Familie in normiertem Vektorraum, 1826, 2193
  Familie reeller Zahlen, 1647
$\sup$, Supremum, 1592
superisiert
  abelsche Gruppe, 3027
superkommutativ, 3048
Superspur, 1269, 2831, 3067
Supertensorprodukt, 3028
Supervektorraum, 1269, 3027
supp Träger, 1916
  von Radonmaß, 2584
  von Schnitt
    einer abelschen Garbe, 3187
$\mathrm{supp}(M)$ Träger eines Moduls, 1033
$\mathrm{supp}(m)$ Träger eines Elements eines Moduls, 1033
support, 1916
support, siehe Träger, 3187
Supremum, 1592
Supremumsnorm, 1813
Surjektion, 47, 1567
surjektiv
  Abbildung, 47, 1567
  transfinit surjektives System, 2946
Suspension, 2846
Sylow, 713
Sylowsätze, 714
Sylowuntergruppe, 713
Sylvester
  Trägheitssatz, 426

Sylvesterdeterminante, 776
$\mathrm{Sym}(V)$ symmetrische Algebra, 4193
$\mathrm{Sym}_k V$ symmetrische Algebra, **995**
Symmetrie, 706
    für Relation, 249
Symmetriebewegung, 518
Symmetriegruppe, 506, 706
Symmetrisator, 996
symmetrisch
    Algebra, **995**, 4193
    bilineare Abbildung, 306
    Bilinearform, 348
    Matrix, 394
    Polynom, 763
    Zweitensor, 2031
symmetrische Gruppe, 296
symmetrische Polynome, 764
symmetrische Potenz, 997, 3003
    in Schmelzkategorie, 3003
symmetrischer Tensor, 996
Symmetrisierung, 996
symplektisch
    Gradient, 2002
    Gradienten, 3961
    Mannigfaltigkeit, 3961
    Vektorraumautomorphismus, 435
symplektische Form, 434
    ganzzahlige, 974
    kanonische, 3961
symplektische Gruppe
    kompakte, 3804
symplektischer Vektorraum, 434
Symu symmetrische Multilinearformen, 997
système de racines, 4131
System
    in Kategorie, 2939
    trianguliertes, 3397
System der auf Λ ganzzahligen Wurzeln, 4249
System positiver Wurzeln, 1529, 4035
System von Hyperebenen, 3979
System von Teilmengen, 131, 1791, 2123, 2481
System von Transzendenzerzeugern, 1067

$\mathcal{M}^{\mathrm{t}}$ Trennanteil von $\mathcal{M}$, 3009
$\tau = 2\pi$, 378
$\tau^{\leq n}, \tau^{<n}, \tau^{\geq n}, \tau^{>n}$ Abschneidefunktoren, 3413
$\tau_f = \tau_{f,G} : G_Y \to G_X$, 3180
$\tau_q \in \mathrm{S}_q(\Delta_q)$ tautologischer Simplex, 2781
$\mathbb{T}$ Zeit, 206, **319**, **1978**
$\mathcal{T}(X)$ algebraische Vektorfelder auf X, 1423
$\mathcal{T}_G$ Varietät der borelierten Tori, 1504
$\mathrm{T}(V)$ Tensoralgebra, 4188
$\mathrm{T}M$, *siehe* Tangentialbündel
$\mathrm{T}X$ Tangentialbündel
    von Varietät, 1446
$\mathrm{T}_p^{\subset} M$ Tangentialraum
    im eingebetteten Fall, 1894
$\mathrm{T}_K V$ Tensoralgebra, 612
Tableau, 1299
Tabloide, 1306
Tangens, 1676
Tangens hyperbolicus, 1734
Tangente, 1700, 1753
Tangentialabbildung, 3796
Tangentialbündel, 3862
    im eingebetteten Fall, 1992
    von Varietät, 1447
Tangentialbündelfunktor, 3864
Tangentialkegel, 1891
Tangentialraum, 1892, 3855
    an Varietät, 1416
Tangentialraumfunktor, 3855
Tangentialvektor, 1892
Tannaka-Krein-Dualität, 1396
Tate-Twist von $\mathbb{Z}$, 2416, 2609

Tauber-Bedingung, 1762
tautologischer Simplex, 2781
Taylorentwicklung
in einer Veränderlichen, 1753
in mehreren Veränderlichen, 1871
Taylorreihe
in der Funktionentheorie, 2396
in einer Veränderlichen, 1749, 1751
tcat terminale Trennkategorie, 3016
Teilen in Polynomringen, 274
Teiler, 255, 265
teilerfremd, 807
Elemente eines Krings, 266
ganze Zahlen, 255
Teilfolge, 1631
teilgeordnet
induktiv, 144
streng induktiv, 144
Teilmenge, 33, 1556
echte, 33, 1556
Teilobjekt
v-Teilobjekt, 2494
Teilordnung, 126, 1586
simpliziale, 2825
Teilraum, 128
Teilring, 262, 735
Teilsystem, 1791, 2481
teilt, 255, 265
Teilüberdeckung, 1818, 1913
Teilung der Eins, 1924, 3243
Teilung der Identität, 2313
Teleskopsumme, 1642
temperiert
Distribution, 2246, 2269
$\mathrm{Ten}(V)$ Tensoralgebra, 4188
$\mathrm{Ten}_K V$ Tensoralgebra, 612
Tensor
physikalisch, ko-kontravariant, 556, 557
physikalisch, kontravariant, 554, 556
physikalisch, kovariant, 555
symmetrischer, 996
Zweitensor, 2027
Tensoralgebra, 612, 4188
Tensorfiltrierung, 1136
Tensor-Hom-Adjunktion, 970
Tensoridentität, 4266
für algebraische Darstellungen, 1396
tensorierbar
universell, 3063
Tensorieren
von internen Homomorphismen in Schmelzkatgorie, 3008
Tensorkomplex, 2882
Tensorpotenz
in Schmelzkategorie, 3001
Tensorprodukt
graduierter Moduln, 2926
in Schmelzkategorie, 3000
vervollständigtes, 2210
von Darstellungen, 3810
von Darstellungen von Liealgebra, 4105
von Gruppenhomomorphismen, 2881
von Komplexen, 2882
von linearen Abbildungen, 543
von Linearformen, 2027
von Vektorräumen, 540, 2879
Tensorproduktgarbe, 3494
Tetraeder, 519
Tetraedergruppe, 518
Tietze's Erweiterungslemma, 2540
Titskegel, 4070
Tonelli, Satz von, 2168
top einelementiger Raum, 580
Top topologische Räume, 576
$\mathrm{Top}(X, Y)$ stetige Abbildungen, 2277, 2516
Top^* bepunktete topologische Räume, 576
$\mathrm{Top}^{\subset}$ Raumpaare, 2803

$\mathrm{Top}^{\subset}$ Trennschmelzkategorie der Raumpaare, 3077
Top^{Δ}, 2773
Topaz Kategorie der abzählbar basierten topologischen Räume, 3020
Topog Räume mit Gruppenoperation, 3568, 3717
Topologie, 920, **1791**, **2481**
  als homogener Raum, 2526
  erzeugt von Mengensystem, 2127
  feiner, 2500
  gröber, 2500
  größergleich, 2500
  induzierte, 920, **1793**, **2482**
  natürliche, 1816, 2481
  schwache, auf $\mathrm{U}(\mathcal{H})$, 2524
  starke, auf $\mathrm{U}(\mathcal{H})$, 2524
  uniforme, 2557
Topologie als homogener Raum
  feinste, 2526
topologisch
  Abbildung, 2484
  Erzeuger, 3908
  frei, Operation, 3097
    von diskreter Gruppe, 2691
  Gruppe, 1367, 2522
  Magma, 2522
  Mannigfaltigkeit, 2496, 2853
  Maß, 2127
  meßbar, 2127
  Monoid, 2213, 2522
  Schiefkörper, 2524
  zyklisch
    topologische Gruppe, 3908
topologische Gruppe, 2213
topologische Realisierung
  eines Simplizialkomplexes, 2665
  von simplizialer Abbildung, 2666
topologischer Raum, 920, **1791**, **2481**
$\mathrm{Top}^{\mathrm{s}}$ topologische Räume mit nur separierten Abbildungen, 3273
A_{tor} Torsionsuntergruppe von A, 479
Tor_q, 3149
Torsionsdimension, 3456
Torsionselement
  von Modul, 1021
torsionsfrei
  abelsche Gruppe, 962, 2883
  Gruppe, 479
  Modul, 953, 962
Torsionsgruppe, 3149
Torsionsprodukt, 2883
Torsionssequenz, 2884
Torsionsuntergruppe, 479
Torsor, 509
  auf topologischem Raum, 3097
  Rechtstorsor, 512
  von links, 506
Torus
  algebraische Gruppe, 1386
  Fläche, 2599
  kompakter, 3908
  maximaler, 1482
    in topologischer Gruppe, 3913
tot Totalkomplex, 3196
total beschränkt, 2575
total unzusammenhängend, 2492
Totalgrad, 769, 1872
Totalität
  für Relation, 126, 1586
Totalkomplex, 3196, 3451
Totalraum, 3097, 3099, 3862
  von Überlagerung, 2683
tr Spur
  tr_K bei Grundkörper K, 183
  einer Matrix, 183
  eines Endomorphismus, 183
trace, deutsch Spur, 183
träge Masse, 1980
Träger
  bei Simplizialkomplex, 2831
  einer Facette, 3985

einer Funktion, 1916
eines Elements eines Moduls, 1033
eines Moduls, 1033
von Radonmaß, 2584
von Schnitt
der Orientierungsgarbe, 2860
einer abelschen Garbe, 3187
Trägerzerlegung, 3615
Trägheitsgruppe, 1182
Trägheitsmoment, 1998, 3965
Trägheitssatz
Sylvester'scher, 426
trans, 205, 1811, 1844
Trans Transformationen, 593, 601, 2711
$\mathrm{Trans}^{\mathbb{Z}}$ verträgliche Transformationen, 3397
Transformation
Schmelzfunktoren
monotone, 3014
verträgliche
von $\mathbb{Z}$-Funktoren, 3396
von Funktoren, 590, 2709
von Köchermorphismen, 599
von Schmelzfunktoren, 3013
Transformationsformel
bei kompaktem Träger, 1918
für das Lebesgueintegral, 2178
transitiv
Gruppenwirkung, 506
Relation, 126, 1586
Transitivität
der Induktion, 972
Translation
von affinem Raum, **204**, 1811, 1843
translation functor, 4267
translationsinvariant, 2128
Translationssatz der Galoistheorie
allgemeiner Fall, 894
endlicher Fall, 865
transponiert
Abbildung, 2067
bei Vektorräumen, 197
Matrix, 170
Transport durch Wegeliften, 2719
Transporteur, 1403
Transportmorphismus, 3263
Transposition, 296, 723
transversaler Schnitt, 3676
transzendent
in Körpererweiterung, 780
komplexe Zahl, 780
reelle Zahl, 1622
Transzendenzbasis, 1067
Transzendenzgrad, 1069
Trennaustauschsituation, 3594
verflochtene
mit Adjungierten, 3596
Trennfaserung, 3496
invertierte, 3515
mit Vorschub, 3507
Trennfunktor, 3012
$\mathcal{S}$-Trennfunktor
relativer, 3729
Trennkategorie, 2995
monotone, 2995
multiäquivariante, 2998
terminale, 3016
Trennquadrat
elementares, 3749
elementares kartesisches, 3585
Trennrückzug, 3496
Trennschmelzfakofaserung, 3514
Trennschmelzfunktor, 3014
Trennschmelzkategorie, 3009
Trennschnitt, 3504
kartesischer, 3504
trennt die Punkte, 1827
Trennung, 2995
stabil universelle, 3001
universelle, 3001
treu
bei Schmelzkategorien, 3012

Funktor, 584, 2708
Gruppenwirkung, 832
Modul, 1047
treuflach
Modul, 962
triangle
distingué, 3381, 3385
distinguished, 3381, 3385
trianguliert
Funktor, 3397
Kategorie, 3384
Kategorie, opponierte, 3391
System, 3397
triangulierter Quotient, 3399
Triangulierung, 2668
tribu, 2124
trigonalisierbar, 324
Trigonometrie, 1673
trigonometrisches Polynom, 1832
Tripel, 121
Tripelkomplex, 3454
trivial
Operation
von Gruppe, 504
von Liealgebra, 4099
Operation von Monoid, 1226
Überlagerung, 2683
Trivialisierung
von Überlagerung, 2683, 3092
Tupel
angeordnete, 121
Twist
einer Schmelzkategorie, 3023
Tychonoff, 2544
Typ
von reeller quadratischer Form, 426
Typ einer Darstellung, 1314

$\bigsqcup$ Koprodukt, 605
U Einheiten von Schmelzkategorie, 3030
$\mathrm{U}(V)$ unitäre Automorphismen, 358
$\mathrm{U}(n)$ unitäre Matrizen, 359
$\mathrm{U}(1)$ versus S^1, 190
$\mathrm{U}(f)$ Standardasis der Topologie eines Spektrums, 1032
$\mathfrak{U}$-objektkleine Kategorie, 3423
überabzählbar, 1602
überall definiert
Abbildung, 2193
überauflösbar, 713
Überdeckung, 1818, 1913
einer Teilmenge, 1821, 1915
überdeckungskompakt, 1820, 1913
Übergangsfunktionen
zwischen Trivialisierungen, 3095
Übergangswahrscheinlichkeit, 1910
Überlagerung, **2683**, 3861
triviale, 2683
unverzweigte, 2683
überlagerungstrivial, **2686**
$\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ Mengen $X \in \mathfrak{U}$, 575, 2620
$\mathfrak{U}$-Kategorie, 585
Ultrafilter, 2543
Um für Umlaufzahl, 2416
Umgebung
ε-Umgebung, 1795
eines Punktes von $\bar{\mathbb{R}}^n$, 1610
in metrischem Raum, 1795
in topologischem Raum, 1792, 2486
Umgebungsbasis
in topologischem Raum, 2489
Umgebungsfilter, 2543
umgekehrt
Weg, 2603
Umin, 197
Umindizierung, 2989
Umkehrfunktion, 50, 1570
Umkehrsatz, 1882
Umlaufzahl

eines Weges
auf der Kreislinie, 2609
in der Zahlenebene, 2416, 2626
eines Zykels, 2791
$\mathfrak{U}\mathrm{Mod}_K$, 576
$\mathfrak{U}\mathrm{Mod}_K$ Vektorräume $V \in \mathfrak{U}$, 577
Umordnungssatz, 1646
Umstrukturieren, 3729
von angereicherter Schmelzkategorie, 3041
unbeschränkt
Operator, 2335
unbestimmt divergent, 1630
unendlich
Menge, 239, 881
unendlich fern
Punkt, 661
unendlicher Dezimalausdruck, 1599
Unendlichkeitsaxiom, 239, 881
ungerade
Funktion, 1729
Permutation, 296, 300
Zahl, 264
Unif Kategorie der uniformen Räume, 2559
uniform
beschränkt, 2294
Raum, 2556
Struktur, 2556
Topologie, 2557
Uniformisierende, 1167
unipotent
algebraische Gruppe, 1384
Anteil
in algebraischer Gruppe, 1380
Element
in algebraischer Gruppe, 1380
Endomorphismus, 458
lokal unipotent, 458
Radikal
einer algebraischen Gruppe, 1513
unirational
Varietät, 1158
unitär, 2205
Darstellung, 3832
von $\mathbb{R}$, 2284
lineare Abbildung, 357
Matrix, 359
Raum, 351
unitärassoziativ, 66
Magmaoid, 599
Unitärassoziativität, 504
universell
alternierende Abbildung, 564
multiadditive Abbildung, 2879
multilineare Abbildung, 540
stabil, 2999
Verschmelzung, 2999
im angereicherten Fall, 3044
Universelle Eigenschaft
des Raums der Äquivalenzklassen, 249
universelle einhüllende Algebra, 4185
Universelles Koeffiziententheorem
der Homologie, 2887
der Kohomologie, 2934
Universum, 617
$\mathrm{Unt}(X)$ Unterobjekte von X, 3128
Unter-, 76, 3128
Unter-Liegruppe
partielle, 3895
Unteralgebra, 611, 1827
von allgemeiner Algebra, 3792, 4093
Unterdarstellung, 1374, 3813, 4100
abstrakte, 1228, 3775
unitäre, 2287
Untergruppe, 74, 251
erzeugt von Teilmenge, 252
triviale, 76, 252
Untergruppenfiltrierung, 1136, 3328
Unterintegral, 2155

Unterkategorie, 579
Unterkörper, 777
erzeugt von Teilmenge, 777
Unterkofaserung
volle, 3531
Untermannigfaltigkeit, 3858
Untermengenmodul, 1239
Untermodul, 926
erzeugt von Teilmenge, 927, 948
Untermonoid, 74
Unterobjekt
$(\mathcal{S}, v)$-Unterobjekt, 588
v-Unterobjekt, 2494
kategorisches, 3128
Unterrechtsmodul, 948
Unterringalgebra, 611, 1827
Untersumme, 1694
Unterteilung
von Intervall, 1696
Unterteilungsoperator, 2814
Untervarietät, 1101
Untervektorraum, 128
definiert über, 897, 4165
unverkürzbar
Erzeugendensystem, 135
unverlängerbar
linear unabhängige Teilmenge, 135
unverzweigt, 1179
Körperhomomorphismus, 1177
unzerlegbar
Darstellung, 1228
Matrix, 4015
Objekt, 1331
Wurzelsystem, 4040
Urbild
von σ-Algebra, 2145
von Kategorie, 3262
von Menge, 46
Urebene, 656
Urkilogramm, 1978
Urnenmodell, 1911
Urysohn's Lemma, 2540
$\mathfrak{U}\mathrm{Top}$ topologische Räume $X \in \mathfrak{U}$, 2619

Υ für Verschmelzungen, 2991
Υ leere Objektfamilie
einer Schmelzkategorie, 2990
$\mathrm{V}(E)$ *Nullstellenmenge von* E, 917
valuation, 755
discrete, 1163
van-de-Ven-Diagramm, 37, 1560
Vandermonde-Determinante, 314
Var Morphismen von Varietäten, 982, 1358
Var_k Varietäten über k, 1100
Varaff_k affine k-Varietäten, 982, 1358
Variable
von Polynom, 271
Variablentrennung, 1953
Variation
eines Maßes, 2239
Variation der Konstanten, 1785, 1970
Variationsnorm, 2239
Varietät, 1100
G-Varietät, 1368
affine, 1094
bepunktete, 1417
mit Monoidoperation, 1403
projektive eingebettete, 1109
Vekb Vektorbündel auf Mannigfaltigkeiten, 3863
Vektor
Element eines Vektorraums, 116
zyklischer in Darstellung, 1229
Vektorbündel, 3863
Vektorfeld
auf affinem Raum, 1945
auf eingebetteter Mannigfaltigkeit, 2005
auf Mannigfaltigkeit, 3864
glattes, 3868

relatives, **2009**
Vektorprodukt, 383
Vektorraum, 116
komplex konjugierter, 409
reeller, 1812
Vektorraumbündel, 3863
vektorwertig
Kovektorfeld, 2040, 2383
verallgemeinerte Sphäre, 694
verallgemeinerter Kreis, 678
verallgemeinerter Mittelwertsatz, 1718
Verband, 86
modularer, 159
Verdierdualität
relative, 3600
Verdiersystem, 3397
Vereigentlichung, 3575
Vereinigung, 35, 1559
aufsteigende, 149
von Mengenfamilie, 1791
von Mengensystem, 131
Verfeinerung, 3241
von Wahrscheinlichkeitsraum, 2152
Verflechtung
von Trennaustauschsituation, 3595
Verflechtungsoperator, 2325, 3774, 3811
Verflechtungsquadrat
r-Verflechtungsquadrat, 3595
vergeßliche komplexe Zahlen, 187
Vergiß-Funktor, 583
Vergleichsisomorphismus
der de-Rham-Kohomologie, 3246
Verjüngung von Tensoren, 549
Verkleben von Punkten, 1104
bei affinen Varietäten, 1099
bei naiven affinen Varietäten, 1054
bei Varietäten, 1103
Verklebung
von topologischer Fläche, 2669
Verklebungsbedingung, 3112, 3113
Verklebungsfunktionen, 3092
Verknüpfung
auf einer Menge, 58, 1571
auf Köcher, 599
auf Objekt einer Kategorie, 1366
in monotoner Schmelzkategorie, 3047
induzierte, 77
koinduzierte, 78, 602
komponentenweise, 60
von Abbildungen, 46, 1569
von Abmonoid, 3031
von Morphismen, 574, 2619
von Wegen, 2603
Verknüpfungsorientierung, 3657
Verknüpfungstafel, 59, 1572
verkürzbar
Erzeugendensystem, 135
verlängerbar
linear unabhängige Teilmenge, 135
Verma-Modul, 4197
Vermafahne, 4256
Vernichtungsoperator, 4101
Veronese-Einbettung, 1111
Verschiebung, 630, 641, 4267
auf Wände, 4269
aus Wänden, 4269
durch Wand, 4274
Verschlingung, 1894
Verschlingungszahl, 2841
Verschlüsselung
Diffie-Hellman, 268
RSA-Verfahren, 481
Verschmelzung
$(\mathcal{S}, w)$-Verschmelzung, 3016
r-Verschmelzung, 2987
stabil universelle
angereicherte, 3044
universelle
im angereicherten Fall, 3044
von Darstellungen, 1272, 4105
von Gruppen, 3811

von Liealgebren, 3811
Verschmelzung von Darstellungen, 1375
Verschmelzungen, 2986
Verschmelzungsidentitäten, 2177
Verschmelzungsobjekt, 3039
Verschraubung, 388
Verschwindungsideal, 918
homogenes, 1117
lokales, 1125
Vertauschen
von partiellen Ableitungen, 1868
von partiellen Integrationen, 1867
Vertauschungsisomorphismus, 960
Verteilung
einer Zufallsvariable, 2152
geometrische, 2152
Verteilungsfunktion
eines Wahrscheinlichkeitsmaßes, 2140
von Zufallsvariable, 2152
vertex of quiver, 599
verträglich
Orientierungen, 320
Transformation von $\mathbb{Z}$-Funktoren, 3396
verträglich mit internem Hom
Schmelzfunktor, 3017
verträglich mit Produkten
Funktor, 2641
verträglich mit universellen Verschmelzungen
Schmelzfunktor, 3014
verträgliche Adjunktion, 3397
Vertupeln, 2988
Υ-Vertupeln, 2988
vertwistet
Monoidring, 1274
Vervollständigung
projektive, 661
von glatter Kurve, 1193
von Maßraum, 2144
von metrischem Raum, 2208
von metrischem Raum, eine, 2207
von normiertem Vektorraum, 2209
von pseudometrischem Raum, 2209
verwandt
Differentialformen, 2072
Funktionen, 2017, 3868
Kovektorfelder, 2019
Maße, 2152
Opfunktorfelder, 3949
Radonmaße, 2583
Vektorfelder, 1424, 2019, 3868
Wege, 2017
Zweitensoren, 2029
Verzweigungsgrad, 1177, 1179
vf Verflechtung, 3591
Vieleck, 2669
Vielfachheit
einer Nullstelle, 275
von Schnittpunkt, 1125
Vier als natürliche Zahl, 246
$\mathrm{vol}(v_1|\ldots|v_k)$ 1928
voll
Funktor, 584
Rang, 177
Schmelzunterkategorie, 2994
Simplex, 2669
Unterkategorie, 579
volldicht
Funktor, 3360
vollkommen
Körper, 809
Vollkugel, 2598
vollprim
Ideal, 1005
vollständig
angeordneter Körper, 1639
Boole'sche Algebra, 2546
Filtrierung, 1135
lokaler Ring, 1159
Maßraum, 2143

Varietät, 1488
vollständig reduzibel, 1276
vollständige Induktion, 240
volltreu
φ-volltreu, 3041, 3729
bei Schmelzkategorien, 3012
volltreu, Funktor, 584, 2708
Volumen, 1928
Volumenform, 3949
geometrische, 559
Volumenprozent, 120
Vorderseite eines Simplex, 2905
Vorgänger, 879
Vorschalten von Abbildung, 47, 1569
Vorschieben
eigentliches, 3663
in singulärer Homologie, 2773
Vorschub, 3180, 3264, 3596
eigentlicher, 2959
starker, 3264
zu Trennfaserung, 3507
Vorzeicheninvolution, 3027
vorzeichenverträglich
Schmelzfunktor, 3026
v_p Bewertung, 2414

$\bar{\mathbb{W}}$ Winkelmenge, 372
$\mathbb{W}$ Winkelgruppe, 372
$\mathrm{W}(R)$ Weylgruppe
von abstraktem Wurzelsystem, 4030
$\mathrm{W}(R)$ Weylgruppe von R, 4179
Wahrheitstafel, 60, 1573
Wahrscheinlichkeitsraum, 2126
Wallis'sche Produktformel, 2441
Wand
eines Alkoven, 3985
Wandfacette, 3985
Wedderburn, 1258
wedge-product, 565
Weg, 2032, 2366
geschlossener, 2050, 2368
kompakter, 2032, 2366
konstanter, 2603
normierter, 2032, 2048, 2366
stückweise linearer, 2042
umgekehrter, 2603
zusammenziehbarer, 2050, 2368
Wegealgebra, 1348
Wegeliftungsoperation, 2721
Wegeraum, 2605
wegetrivial, 2687, 2705
Wegintegral, 2032
für Kovektorfeld, 2032
für Vektorfeld, 2035
komplexes, längs beliebigem Weg, 2373
komplexes, längs Integrationsweg, 2358
vektorwertiges, 2040, 2385
wegzusammenhängend
einfach, 2051, 2606
Wegzusammenhang, 2042, 2490
Wegzusammenhangskomponente, 2045, 2492
weich, Garbe, 3244
Weierstraß
Approximationssatz, 1828
welk, 3230
welk, Garbe, 3175
Wert, 43, 1565
Wertebereich, 45, 1566
wesentlich
Epimorphismus, 1332
Monomorphismus, 1332
Singularität, 2408
Weyl
Charakterformel, 3953
Dimensionsformel, 3954, 4206
Integrationsformel, 3953
Satz über Reduzibilität, 4122
$\mathrm{Weyl}(R)$ Weylgruppe von R, 4179
Weylgruppe

affine, 4047
duale affine, 4047
von abstraktem Wurzelsystem, 4030
von algebraischer Gruppe, 1505
von halbeinfacher Liealgebra, 4179
von kompakter Liegruppe, 3923
Weylkammer
dominante, 4040
einer Spiegelungsgruppe, 3974
eines Wurzelsystems, 4030
rationale, 4174
Weylvektor, 3953
Whitehead
Vermutung von, 2933
Whitney
Summenformel, 3570
Wilder, Satz von, 2872
lokale Variante, 2963
Wilson
Satz von, 271
Windungszahl, 2416
Winkel, 371, 372, 375, **378**
echt spitzer, 4004
echt stumpfer, 395, 4004
gerichteter, 372
gestreckter, 374
negativ, 371
positiv, 371
rechter, 374
schwach spitzer, 4004
schwach stumpfer, 4004
spezielles Diagramm, 2643
Winkelalkoven, 629
Winkeldiagramm, 2643
Winkelfeld, 2056
Winkelgeschwindigkeit, 1781
Winkelgruppe
abstrakte, 372
konkrete, 371
Winkelmaß, 377
Winkelmenge
abstrakte, 372
Wirbeldichte, 2054
Wirkung
eines Gruppenobjekts, 1367
eines Monoidobjekts, 1367
eines Monoids, 504
Wirkungskategorie, 3702
Wirtinger-Ableitung, 2386
Witt, Satz von, 432
wohldefiniert, 249
Wohlordnung, 879
Wolkenkratzer, 3103
Würfel, 519
Zeichnung, 395
Würfelgruppe, 518
Würfelverdopplung, 792
Wurzel
n-te Wurzel, 1619
einfache, 4040
kurze, 4047
lange, 4047
provisorische, 1522
von algebraischer Gruppe, 1518, 1522
von Liealgebra, 4131
von Polynom, 273
von Wurzelsystem, 4025
zu Gitterspiegelung, 1515, 3924
Wurzeldatum, 1517, 3924
duales, 1517, 3926
Wurzelgruppe, 1533
Wurzelkriterium, 1661
Wurzelraum, 4131
Wurzelspiegelung, 1524, 4029
Wurzelsystem, 1518, 1522
abstraktes, 4025, 4027, 4134
abstraktes reduziertes, 4025
euklidisches, 4027
komplexes, 4027
nicht notwendig reduziertes, 4025, 4135

rationales, 4027
reelles, 4027
von kompakter Liegruppe, 3926
von Liealgebra, 4131
Wurzelweg, 4046
wurzlige Darstellung, 4064

$\mathfrak{X}(G)$ Charaktere
von abstrakter Gruppe, 2464
von algebraischer Gruppe, 1386

$Y_{l,m}$ Kugelfunktionen, 3837
Yoneda-Einbettung, 613
Yoneda-Produkt, 3405
Young'sche Ungleichung, 1716, 2197
Young-Diagramm, 720, 1298
Young-Symmetrisator, 1301

Z_n *zyklische Gruppe*, 477
$\mathbb{Z}$ ganze Zahlen, 31, **251**, 1555
$\mathbb{Z}(1)$ Tate-Twist von $\mathbb{Z}$, 2416, 2609
$\mathbb{Z}_n$ *zyklische Gruppe*, 477
$\mathbb{Z}_{U\subset X} := i_!\mathbb{Z}_U$, 3639
$\mathbb{Z}_{U\subset X}$, 3176
ζ-Funktion
Riemann'sche, 1645, 2453
$\mathcal{Z}(E)$ Nullstellenmenge von E, 917
$\mathrm{Z}_q X$ singuläre Zykel, 2768
$\mathrm{Z}(G)$ Zentrum der Gruppe G, 710
$\mathrm{Z}_q\mathcal{K}$ Simplizialzykel, 2758
$\mathrm{Z}_G(g)$ Zentralisator von g in G, 711
Z, Eigenschaft von Deodhar, 4081
$\mathbb{Z}$-Form
einer Darstellung, 1231
$\mathbb{Z}$-Funktor, 3396
$\mathbb{Z}$-Kategorie, 3384
$\mathbb{Z}$-Struktur, 3396
Zählerideal, 1026
Zählmaß, 2126
Zahl
ganze, 31, 1555
gerade, 264
Hamilton'sche, 293
komplexe, 186
natürliche, 31, 1555
rationale, 31, 1555
reelle, 1598
ungerade, 264
Zahldarstellungen, 247
Zahlenebene, 188
Zahlenkugel, 667, 695
Zahlkörper, 859, 1170
quadratischer, 1172
Zariski
Hauptsatz
für affine Varietäten, 1409, 1453
Zariskitopologie
auf dem Spektrum eines Rings, 1030
auf affiner Varietät, 987
auf einem k^n, 920
Zehn als natürliche Zahl, 247
Zeilenindex, 112
Zeilenkomplex, 3197
Zeilenrang, 177
Zeilenstufenform, 110
Zeilenvektor, 170
Zeit, 319, 1978
zeitartig
Vektor, 440
Zeiteinheit
nichtrelativistische, 319
relativistische, 442
Zeitpunkt, 206
Zeitspanne, 206, 319
Zelle
von CW-Komplex, 2512
zentraler Charakter, 4248
zentraler Grenzwertsatz, 2256
Zentralfeld, 1985
Zentralisator, 1404, 1462
von Element, 711
von Teilmenge, 3913

Zentralprojektion, 654
Zentralreihe
absteigende, 713
Zentralreihe, absteigende, 4111
Zentrum
einer Gruppe, 710
einer Liealgebra, 3889, 4110
eines Rings, 946, 4236
Zerfällung, 3324
Zerfällungserweiterung
eines Polynoms, 797
Zerfällungskörper
einer Menge von Polynomen, 826
eines Polynoms, 797
Zerleger, in der Maßtheorie, 2137
Zerlegungsgruppe, 1182
Zerschneidung, 2669
Zetafunktion
Riemann'sche, 2453
Zielkategorie, 581, 2622
Zirkulation, 2035
Zopfgruppe, 2739
abstrakte, 2742
Zopfrelation, 2739
Zopfrelationen, 4075
Zorn'sches Lemma, 148
zufälliges Element, 2145
Zufallsvariable, 2145
Zurückholen
der singulären Kohomologie, 3081
Morphismus, 2643
von Differentialformen, 3950
zurückziehbar
stark, 3263
$\mathrm{Zus}(X)$ Menge der Zusammenhangskomponenten von X, 2527
zusammenhängend
Graph, 530
Gruppoid, 2651
topologischer Raum, 2044, 2490, 3786
wegweise, 2042
Zusammenhangskomponente
eines Graphen, 530
eines topologischen Raums, 2492
von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, 2534
zusammenziehbar
geschlossener Weg, 2050, 2368
topologischer Raum, 2621
Weg, 2604
Zustand
bei Markovkette, 1910
Zwei als natürliche Zahl, 246
Zwei-aus-Drei-Eigenschaft, 3371
Zweige des Logarithmus, 2352
zweischnittstabil, 2141
Zweistrahl, 371
angeordneter, 371
Zweiverschmelzung, 2987
zwischenäquivalent, 632
Zwischenrelation, 622
Zwischenwertsatz, 1618
Zykel
in Kettenkomplex, 2775
in Permutationsgruppe, 723
simplizialer, 2758
singulärer, 2768
zykelexakt, 3341
Zykellängenabbildung, 722
Zykelschreibweise, 723
zyklisch
Anordnung, 51
Darstellung, 1229
Element, 1229
Gruppe, 476
Körpererweiterung, 862
Modul, 927
Vektor
eines Endomorphismus, 958
in abstrakter Darstellung, 1229
in unitärer Darstellung, 2287
zyklotomisches Polynom, 761

Zylinder, 3469